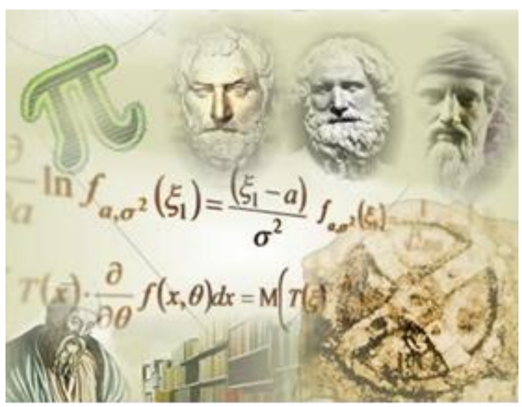
ΤΕΙ ΗΠΕΙΡΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

"Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ ΣΤΗ ΓΕΝΝΗΣΗ ΚΑΙ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"



Καρλοβασίτης Εμμανουήλ Α.Μ.: 12888

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: κ. ΚΥΡΙΤΣΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ, ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΠΡΕΒΕΖΑ 2016

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1.

2.

3.

Ο Προϊστάμενος του Τμήματος

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Επιβλέπων Καθηγητή μου κ. Κυρίτση που μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με το ενδιαφέρον θέμα των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών καθώς και για την άμεση επικοινωνία, την άριστη συνεργασία και καθοδήγησή του.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη στήριξη που μου παρείχε κατά τη διάρκεια συγγραφής της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα μαθηματικά δημιουργήθηκαν προκειμένου να καλύψουν καθημερινές ανάγκες των ανθρώπων. Αυτός ο χαρακτήρας των μαθηματικών που είναι προσανατολισμένος στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός της σοδειάς και το μέγεθος ενός χωραφιού συναντάται στους προελληνικούς πολιτισμούς όπως στους Αιγύπτιους και τους Βαβυλώνιους. Η συστηματοποίηση της μαθηματικής σκέψης, η χρήση της απόδειξης, η επαγωγική μέθοδος, η εις άτοπον απαγωγή καθώς και μέθοδοι βασισμένοι στη λογική εμφανίζονται για πρώτη φορά στην Ελλάδα. Οι Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί διαδραμάτισαν καθοριστικό ρόλο ώστε να εξελιχθούν τα μαθηματικά και να προοδεύσει η επιστήμη. Η γεωμετρία, η άλγεβρα, ο ολοκληρωτικός λογισμός ήταν μερικοί από τους τομείς στους οποίους διέπρεψαν εισάγοντας νέα θεωρήματα και επιλύοντας σύνθετα προβλήματα. Η μαθηματική γνώση της Αρχαίας Ελλάδας βρήκε εφαρμογή στη μηχανική, την τέχνη, την αστρονομία κ.α.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επιστήμη των μαθηματικών έχει διαδραματίσει καθοριστικό ρόλο στην πρόοδο του πολιτισμού, της κοινωνίας και της τεχνολογίας. Παράλληλα οι εκάστοτε κοινωνικές συνθήκες και οι καθημερινές ανάγκες έδωσαν ώθηση στη μαθηματική σκέψη και στην εξέλιξή της από τις απαρχές της ανθρώπινης ιστορίας έως σήμερα. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάδειξη της συμβολής της Αρχαίας Ελλάδας στη γέννηση και εξέλιξη των μαθηματικών.

1.2 ΠΡΟΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Οι αρχαιότερες γραπτές μαρτυρίες μαθηματικών γνώσεων που είναι σήμερα γνωστές ανάγονται στις αρχές της δεύτερης χιλιετίας π.Χ. περίπου και προέρχονται από δύο μεγάλους πολιτισμούς της αρχαίας Ανατολής, της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Στην Αίγυπτο οι μαρτυρίες αυτές έχουν διασωθεί κυρίως σε παπύρους, ενώ στη Μεσοποταμία σε 150 περίπου κείμενα μαθηματικού περιεχομένου, γραμμένα σε σφηνοειδή γραφή πάνω σε πήλινα πινακίδια[1]. Τα μαθηματικά της Μεσοποταμίας είναι δημιούργημα δύο κυρίως αρχαιότατων λαών της Ασίας, των Σουμερίων (3.000 π.Χ.) και των Βαβυλωνίων (2η-1η χιλιετία π.Χ.).

1.3 ΣΟΥΜΕΡΙΟΙ

Οι Σουμέριοι έφτασαν στο νότιο Ιράκ γύρω στο 3500 π.Χ. και έφτιαξαν μια αυτοκρατορία που διήρκησε μέχρι την κατάκτηση της από τους Βαβυλώνιους, περίπου το 2000 π.Χ. Μέχρι το 3000 π.Χ. υπήρχαν περισσότερες από δώδεκα πόλεις στην περιοχή της Σουμερίας, με μεγαλύτερη την πόλη Ουρ. Λίγα είναι γνωστά για τα μαθηματικά των Σουμερίων αλλά από τα πλακίδια που σώζονται είναι φανερό ότι γνώριζαν τις τέσσερις βασικές πράξεις της αριθμητικής: την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Από τα πήλινα πλακίδια που σώζονται διαπιστώνουμε ότι οι Σουμέριοι είχαν ένα πολύπλοκο σύστημα αρίθμησης που είχε ως βάση το εξήντα και το δέκα. Μπορούσαν να δουλεύουν με πολύ μεγάλους και πολύ μικρούς αριθμούς χρησιμοποιώντας τόσο ακέραιους όσο και κλάσματα. Για να χαραχτεί ο αριθμός 1 ο γραφέας πίεζε τη γραφίδα πάνω στον πηλό υπό γωνία **(Εικ. 1.3.1)**. Έτσι σχηματιζόταν ένα ημικύκλιο που έμοιαζε κάπως σαν κεφαλαίο «D» ακουμπισμένο πλάγια. Το σύμβολο για το 1 επαναμβανόταν για να σχηματιστούν οι μεγαλύτεροι αριθμοί. Ο γραφέας διαχώριζε μια συλλογή αριθμητικών ψηφίων που συμβόλιζαν έναν αριθμό από την υπόλοιπη γραφή τοποθετώντας τα μέσα σ' ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Όταν έφταναν στο 10, η γραφίδα πιεζόταν κάθετα μέσα στον πηλό κι έτσι σχηματιζόταν ένας μικρός κύκλος. Το σύστημα όμως των Σουμέριων δεν είχε ως βάση τα δέκα αλλά το εξήντα. Το σημερινό σύστημα αρίθμησης εξαρτάται από τη θέση κάθε ψηφίου στον αριθμό. Το σύστημα των Σουμέριων όμως ήταν ένα μη καθοριζόμενο από τη θέση σύστημα αφού ο γραφέας πρόσθετε τις τιμές των διαφόρων συμβόλων για να φτάσει στο άθροισμα[2].

Από τα αρχαιολογικά ευρήματα διαπιστώνουμε ότι οι Σουμέριοι περίπου το 2400 π.Χ. υπολόγιζαν τη γη σε «σαρ», ζύγιζαν σε τάλαντα «γκουρ» και μετρούσαν υγρά σε «κα». Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι χρησιμοποιούσαν τα κλάσματα ½, 1/3 και 5/6. Αυτή είναι η παλαιότερη αναγνώριση του γεγονότος ότι τα κλάσματα είναι αριθμοί[2].

Εικόνα 1.3.1. *Γραφή των Σουμερίων.*

1.4 ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ

Οι Βαβυλώνιοι δημιούργησαν μία μεγάλη αυτοκρατορία που περιλάμβανε περιοχές του σημερινού Ιράκ, της Ιορδανίας και της Συρίας και διήρκησε περίπου από το 2000 π.Χ. έως το 538 π.Χ. Οι Βαβυλώνιοι όταν κατέκτησαν τους Σουμέριους υιοθέτησαν και τα μαθηματικά τους. Έχουν βρεθεί χιλιάδες βαβυλωνιακές πινακίδες με σφηνοειδή γραφή. Παρόλο που οι Βαβυλώνιοι κράτησαν το βασικό σύστημα αρίθμησης των Σουμερίων που είχε ως βάση το δέκα και το εξήντα, εγκατέλειψαν τα ειδικά σύμβολα για το 60, το 10*60, το 60^2, το $10*60^2$ και το 60^3 και κράτησαν μόνο δύο σύμβολα: το τρίγωνο με την κάθετη ουρά, που ονομαζόταν σφήνα και συμβόλιζε το 1 και το τρίγωνο με τις δύο ουρές στα πλάγια, που ονομαζόταν άγκιστρο και συμβόλιζε το 10 **(Εικ. 1.4.1)**. Εξαιρέσεις αποτελούν τα κλάσματα ένα δεύτερο, ένα τρίτο και δύο τρίτα, που το καθένα είχε το δικό του ιδιαίτερο σύμβολο. Είναι χαρακτηριστικό ότι το Βαβυλωνιακό ήταν ένα καθοριζόμενο από τη θέση αριθμητικό σύστημα, το οποίο μπορούσε να αναπαραστήσει μεγάλους αλλά και μικρούς αριθμούς αλλά και κλάσματα. Είχε ως βάση το 60 και όχι το δέκα όπως υπάρχει στο σημερινό σύστημα αρίθμησης. Είναι χαρακτηριστικό ότι δεν υπήρχε το μηδέν και η υποδιαστολή[2].

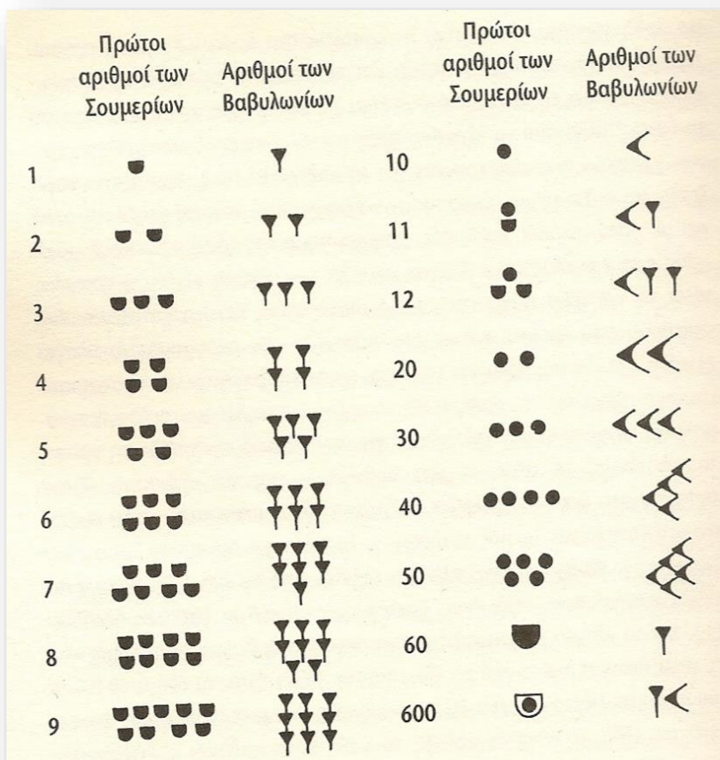
Στην αρχαία Βαβυλώνα, ως αποτέλεσμα της ανάγκης μέτρησης, προέκυψαν τα σύμβολα για το 1/2, το 1/3 και το 2/3 που είναι ταυτόχρονα και σύμβολα δοχείων, δηλαδή συγκεκριμένων μέτρων όγκου. Ο τρόπος που σκέπτονταν οι Βαβυλώνιοι ήταν πρωτίστως αλγεβρικός. Τους άγνωστους αριθμούς τους απεικόνιζαν με γραμμές και επιφάνειες αλλά παρέμεναν πάντα αριθμοί.. Μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν συστήματα εξισώσεων με δύο αγνώστους, ορισμένες δευτεροβάθμιες εξισώσεις και κάποιες κυβικές εξισώσεις με στόχο την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων έστω και προσεγγιστικά. Συγκεκριμένα οι Βαβυλώνιοι προσπαθούσαν να ανάγουν την επίλυση κάθε αλγεβρικής εξίσωσης στις ακόλουθες κανονικές μορφές: $αχ=β$, $χ^2=α$, $χ^2+αχ=β$, $χ^2-αχ=β$, $χ^3=α$, $χ^2(χ-1)=α$ τις οποίες έλυναν με ευχέρεια[3]. Μπορούσαν να λύσουν συστήματα εξισώσεων με δύο αγνώστους και είχαν αποδείξει γεωμετρικά τις ταυτότητες: $(α+β)^2=α^2+2αβ+β^2$, $(α-β)^2=α^2-2αβ+β^2$, $(α+β)(α-β)= α^2-β^2$.

Η ανακάλυψη πήλινων πλακών οδήγησε επίσης στο συμπέρασμα ότι οι Αρχαίοι Βαβυλώνιοι γνώριζαν να υπολογίζουν εμπειρικά και πρακτικά τις αποστάσεις, τα ύψη και μεγέθη από τα όμοια τρίγωνα. Στα προβλήματα αυτά οι λόγοι μήκους, πλάτους και διαγώνιου είναι: 3:4:5, 5:12:13, 8:15:17, 20:21:29. Οι πρακτικές αυτές γνώσεις επηρέασαν την Ελληνική σκέψη και ανέπτυξαν τα μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα μια χιλιετία αργότερα.

Μια πήλινη πλάκα, που βρέθηκε στο Ιράκ και χρονολογείται γύρω στο 2000 π. Χ. αποκαλύπτει διάφορες πτυχές των γνώσεων των Βαβυλωνίων με αντικείμενο τα όμοια τρίγωνα[3]. Το περιεχόμενο της συγκεκριμένης πλάκας παραπέμπει στο ακόλουθο θεώρημα του Ευκλείδη: «Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο φέρουμε την κάθετο από την κορυφή της ορθής γωνίας στην υποτείνουσα, τότε το καθένα από τα τρίγωνα που σχηματίζονται είναι όμοιο προς το αρχικό τρίγωνο, ενώ συγχρόνως τα δυο καινούργια τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους». Από αυτό το παράδειγμα προκύπτει ότι η γνώση της σχέσης $α:β = γ:δ$ είχε καθιερωθεί ως μια πρακτική μέθοδος οικοδόμησης και μέτρησης. Οπως και οι Αιγύπτιοι, χρησιμοποιούν τόσο ακριβείς μεθόδους υπολογισμού, όσο και προσεγγιστικές όπως για παράδειγμα στην εύρεση της επιφάνειας τετραπλεύρου και του όγκου κόλουρης τετραγωνικής πυραμίδας και κόλουρου κώνου. Όμως ο υπολογισμός του αριθμού π ήταν πολύ χονδροειδής. Εκφραζόταν όχι ως συνάρτηση της διαμέτρου, αλλά ως το 1/12 του τετραγώνου της περιφέρειας του κύκλου και δίνει την τιμή 3[1].

Η Γεωμετρία στη Μεσοποταμία έφτασε σε υψηλότερο επίπεδο απ' ότι στην Αίγυπτο. Το πεδίο των γεωμετρικών αντικειμένων που εξετάζονται είναι ευρύτερο από αυτό που απαντάμε στην Αίγυπτο. Περιλαμβάνει επιπλέον ορισμένα κανονικά πολύγωνα, τον κυκλικό τομέα και τον κόλουρο κώνο.

Η συμβολή των Βαβυλωνίων σε σχέση με τους Σουμέριους συνίσταται πιθανότατα στην εξέταση και προβλημάτων που δεν είχαν καθαρά πρακτική, οικονομική ή τεχνική προέλευση, αλλά λαμβάνονται, π.χ. ως αντίστροφα άλλων προβλημάτων. Όμως, παρά την πρόοδο που σημείωσε η Γεωμετρία στη Μεσοποταμία και το πλήθος των μεμονωμένων αποτελεσμάτων, απουσιάζει το στοιχείο της εσωτερικής λογικής συνοχής ανάμεσα στους πολυάριθμους κανόνες και επομένως η έννοια του «συστήματος» γνώσης. Πουθενά δεν απαντάται κάποια απόπειρα να δοθεί «λογική απόδειξη» ενός προβλήματος. Η προσέγγιση της Γεωμετρίας είναι κυρίως αριθμητική και η διαδικασία επίλυσης ανάγεται σε μία διαδοχή εντολών που εκτελούνται για συγκεκριμένες περιπτώσεις. Αυτός ο τρόπος μαθηματικής σκέψης, που είναι προσανατολισμένος στη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος, παρά στο πρόβλημα καθαυτό, χαρακτηρίζει όλες τις προ-Ελληνικές μαθηματικές παραδόσεις της Ανατολής και διατηρείται στη διάρκεια πολλών αιώνων[2].



Εικόνα 1.4.1. *Οι πρώτοι αριθμοί των Σουμερίων και οι αριθμοί των Βαβυλωνίων.*

1.5 ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ

Η πρώτη πηγή κατατεγεγραμένων αιγυπτιακών προβλημάτων είναι ο πάπυρος Rhind **(Εικ. 1.5.1)**. Πρόκειται για ένα αντίγραφο του 1650 π.Χ. ενώ το αυθεντικό χαμένο χειρόγραφο φαίνεται να είχε γραφτεί γύρω στο 2000-1800π.Χ. Ο πάπυρος πήρε το ονομά του από τον Alexander Henry Rhind (1833-1863) που τον αγόρασε το 1858 στο Λούξορ της Αιγύπτου και στη συνέχεια τον κληροδότησε στο Βρετανικό Μουσείο, όπου και φυλλάσεται μέχρι σήμερα. Είναι γραμμένος με στοιχεία μικτά της ιερογλυφικής και της ιερατικής γραφής και πρώτος τον αποκρυπτογράφησε ο A. Eisenlohr το 1868[4]. Ο πάπυρος Rhind περιλαμβάνει 87 περίπου αριθμητικά και γεωμετρικά προβλήματα, τα περισσότερα από τα οποία έχουν να κάνουν με την καθημερινότητα. Τα γεωμετρικά προβλήματα αφορούν τον υπολογισμό του εμβαδού ενός χωραφιού ή τον όγκο μιας αποθήκης σιτηρών. Ενώ τα αριθμητικά προβλήματα αφορούν τον υπολογισμό μισθών, μοίρασμα ψωμιού κλπ., τα οποία ανάγονται σε εξισώσεις πρώτου ϐαθμού ή λύνονται με απλή μέθοδο των τριών. Ωστόσο συναντάμε και προβλήματα τα οποία δεν φαίνεται να είχαν καμία πρακτική σημασία, αλλά είχαν σαν στόχο τη ψυχαγωγία. Άλλα κείμενα που σώζονται είναι τα εξής[5]:

• Ο δερμάτινος κύλινδρος, που γράφτηκε γύρω στο 1650 π.Χ. και περιέχει 26 αθροίσματα μοναδιαίων κλασμάτων και το όνομά του περιγράφει το υλικό με το οποίο είχε κατασκευαστεί. Βρίσκεται και αυτός στο Βρετανικό μουσείο.

• Πάπυρος της Μόσχας, γράφτηκε γύρω στο 1850 π.Χ. Είναι μια συλλογή 25 προβλημάτων και φέρει το όνομα της περιοχής στην οποία βρίσκεται πλέον (ή το όνομα του πρώτου κατόχου της πάπυρος Golenischev).

• Πάρος Lahun, χρονολογείται γύρω στα 1800 π.Χ. και το όνομά του προέρχεται από το σύγχρονο όνομα της περιοχής στην οποία βρέθηκε. Συγκεκριμένα σώζονται μερικά μόνο αποσπάσματα με μαθηματικό περιεχόμενο.

• Πάπυρος του Βερολίνου, φέρει το όνομα της περιοχής στην οποία βρίσκεται σήμερα. Είναι του 1850 π.Χ. περίπου και περιέχει μαθηματικά προβλήματα από την μία του πλευρά, ενώ από την άλλη είναι καταγεγραμμένος ένας κώδικας νόμων της ίδιας περιόδου (Κώδικας της Ερμούπολης).

• Ξύλινη πινακίδα του Akhmim (ή του Καΐρου)

Ο πάπυρος Rhind βρέθηκε τις αρχές του 19ου αιώνα, κατά την διάρκεια παράνομων εκσκαφών στην περιοχή της αρχαία πόλης Θήβες (σημερινό Λούξορ), όπου βρίσκεται ο νεκρικός ναός του

Ραμσή ΙΙ και αποτελεί την πολυτιμότερη πηγή πληροφοριών που έχουμε για τα αιγυπτιακά μαθηματικά.

Εικόνα 1.5.1. *Ο Πάπυρος Rhind.*

Όπως οι Βαβυλώνιοι, έτσι και οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν κλάσματα. Το σύστημά τους ωστόσο ήταν πιο δύσχρηστο. Με εξαίρεση τα κλάσματα 2/4 και 3/4, όλα τα κλάσματά τους ήταν μοναδιαία ή κλάσματα όπου ο αριθμητής ήταν το 1 και ο παρανομαστής οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός. Έτσι όλα τα κλάσματα είχαν τη μορφή 1/ν. Για παράδειγμα το 1/7 θα μπορούσε να γραφτεί ως 1/4=1/28. Παρόλο που ο χειρισμός των κλασμάτων από τους Αιγύπτιους μειονεκτούσε γενικά σε σχέση με το εξηκονταδικό σύστημα των Βαβυλωνίων, είχε το πλεονέκτημα να δείχνει ποιοι αριθμοί ήταν κλάσματα, ενώ το βαβυλωνιακό σύστημα απαιτούσε από τον αναγνώστη να μαντέψει με βάση τα συμφραζόμενα ποιοι αριθμοί ήταν κλάσματα[2]. Έκαναν χρήση των αναλογιών με εμπειρικό τρόπο. Για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων όπως η διανομή τροφής, ο τεμαχισμός εκτάσεων της γης, η ανάμειξη διάφορων συστατικών για την παρασκευή μπίρας ή ψωμιού και η πληρωμή για την απόκτηση αγαθών ή για την παρεχόμενη εργασία σε είδος.

Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν και τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής αλλά οι υπολογισμοί για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ήταν προσθετικοί. Στην άλγεβρα έλυναν γραμμικές εξισώσεις με ένα άγνωστο της μορφής $x+\alpha x=\beta$ και $x+\alpha x+\beta x=\gamma$ και κάποιες απλές δευτεροβάθμιες εξισώσεις με ένα ή δύο αγνώστους. Για την επίλυση πολλών αλγεβρικών προβλημάτων τους κατέφευγαν σε μια μέθοδο που ονομάζεται «λαθεμένη παραδοχή» ή «μέθοδος της εσφαλμένης θέσης» ή κανόνας του λάθους». Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο ο γραφέας μάντευε τη σωστή τιμή του αγνώστου της εξίσωσης, ο οποίος ονομαζόταν κλήρος. Στη συνέχεια αντικαθιστούσε αυτή την τιμή στην εξίσωση για να δει αν ήταν σωστή. Αν δεν ήταν την προσάρμοζε αναλόγως έως ότου πάρει τη σωστή απάντηση[2].

Στη γεωμετρία είχαν κανόνες για τον υπολογισμό των εμβαδών και των όγκων, κάποιοι από τους οποίους ήταν σωστοί ενώ άλλοι προσεγγιστικοί. Γνώριζαν να υπολογίζουν την επιφάνεια ορθογωνίου, τριγώνου και τραπεζίου με ακριβείς κανόνες, αλλά του τετραπλεύρου το υπολόγιζαν με προσεγγιστικό κανόνα ως γινόμενο των ημιαθροισμάτων των αντίθετων πλευρών. Οι Αιγύπτιοι γνώριζαν επίσης κανόνες υπολογισμού των όγκων πολλών στερεών, όπως του κύβου, του παραλληλεπιπέδου, του πρίσματος και του κυλίνδρου αλλά και της κόλουρης πυραμίδας. Γενικά η Γεωμετρία των Αιγυπτίων αφορά στη μέτρηση στοιχειωδών γεωμετρικών σχημάτων και εμφανίζεται με τη μορφή κανόνων αριθμητικής επίλυσης στοιχειωδών γεωμετρικών προβλημάτων πρακτικής κατ' εξοχήν σημασίας. Οι υπολογισμοί όγκων για παράδειγμα, εμφανίζονται σε προβλήματα προσδιορισμού του όγκου του σιταριού σε αποθήκη με δεδομένο σχήμα[1]. Πολλές λύσεις γίνονταν με τη μέθοδο της δοκιμής και του λάθους και με άλλους εμπειρικούς κανόνες

Οι Αιγύπτιοι όπως και οι Βαβυλώνιοι δεν γνώριζαν τους άρρητους αριθμούς (τους αριθμούς δηλαδή που δεν μπορούν να εκφραστούν ως λόγος δύο ακεραίων p/q) και απλώς χρησιμοποιούσαν ακέραιους αριθμούς και κλάσματα για να συμβολίσουν τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών που συναντούσαν στα αλγεβρικά προβλήματα[2]. Ένας από τους υπολογισμούς τους για το π βασιζόταν στον τύπο που χρησιμοποιούσαν για το εμβαδόν του κύκλου, δηλαδή $E=(8d/9)2$, όπου E είναι το εμβαδόν και d η διάμετρος. Με βάση αυτό τον υπολογισμό το π ισούται με 3,1605, δηλαδή υπάρχει ένα σφάλμα υπολογισμού μικρότερο από 1%.

Γενικά οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν τα μαθηματικά ως πρακτικό εργαλείο, είχαν έναν διαισθητικό και εμπειρικό τρόπο σκέψης και δε χρησιμοποιούσαν μαθηματικές αποδείξεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ. & Σίδερης Π., 2000, Ευκλείδεια Γεωμετρία, Α’ & Β’ Λυκείου, Το Βιβλίο του Καθηγητή, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων.

2. Calvin C. Clawson, 2005, Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών, Η εξερεύνηση της εντυπωσιακής ιστορίας των αριθμών, Εκδόσεις Κέδρος.

3. Καλαθά Χ., 2012, Μια Πολυδιάστατη Μελέτη της Μάθησης της Έννοιας της Αναλογίας: Το Φαινόμενο της Ψευδοαναλογίας, Διπλωματική Εργασία.

4. Γκρίτζαλη Γ., 2009, Ιστορία των Προβλημάτων στα Μαθηματικά, Μεταπτυχιακή Εργασία.

5. Βαρβέρη Δ., 2009, Ο Κύκλος και η Μέτρησή του, Μια διαδρομή στα Αρχαία Μαθηματικά, Διπλωματική Εργασία.

2.1 ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Το κυριότερο χαρακτηριστικό των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών που τα διαφοροποιεί από τα προελληνικά είναι ότι για πρώτη φορά εισάγεται η έννοια της απόδειξης και της επιστημονικής σκέψης. Οι Έλληνες άρχισαν να αποδεικνύουν κάθε πρόταση εκτός από τα αξιώματα που ήταν ευρέως αποδεκτά. Η ύπαρξη της μαθηματικής απόδειξης δεν συναντάται ούτε στους Αιγύπτιους ούτε στους Βαβυλώνιους. Έτσι τα μαθηματικά μετασχηματίστηκαν σε ένα επαγωγικό και αξιωματικό σύστημα σκέψης. Πιο συγκεκριμένα η επινόηση της απόδειξης αποδίδεται στον Θαλή τον Μιλήσιο, ενός από τους επτά σοφούς της Αρχαίας Ελλάδας κατά το τέλος του έβδομου αιώνα π.Χ. Πάνω σε αυτή τη βάση θεμελιώθηκε η ίδρυση της μαθηματικής επιστήμης και επήλθε η μεγάλη στροφή στην εξέλιξη του ανθρώπινου πνεύματος.

Η έννοια της απόδειξης είναι στενά συνυφασμένα με τον έμμεσο τρόπο σκέψης και της ανάπτυξης της Ρητορικής και της Φιλοσοφίας. Εύλογα διερωτάται κανείς ποιοι ήταν οι παράγοντες εκείνοι που οδήγησαν στην εξέλιξη της ελληνικής σκέψης. Τρεις πολιτισμικές καινοτομίες άλλαξαν τη νοοτροπία και την πνευματική στάση των αρχαίων Ελλήνων και πρώτα αυτών που ζούσαν στο Ανατολικό Αιγαίο, από τον 6ο π.Χ. αιώνα περίπου. Συγκεκριμένα εμφανίστηκε και εδραιώθηκε ένα νέο είδος διακυβέρνησης και εξουσίας, ένας νέος τρόπος εμπορικών συναλλαγών και ένα νέο μέσο επικοινωνίας. Πρόβαλαν, δηλαδή, γύρω στον 6ο αιώνα π.Χ., τρεις νέες θεσμικές και νοητικές καταστάσεις: η δημοκρατία, το νόμισμα και το αλφάβητο[6].

Είναι κοινή αλήθεια ότι ένα από τα κύρια στοιχεία που χαρακτηρίζουν την αρχαία ελληνική κοινωνία, την προ-αλεξανδρινή περίοδο, αποτελεί η δημοκρατία σε μια σειρά από ελληνικές πόλεις. Και όλοι λίγο-πολύ γνωρίζουν ότι η δημοκρατία ως σύστημα διακυβέρνησης, άσκησης εξουσίας και συλλογικής συμπεριφοράς είναι κάτι πολύ διαφορετικό, διαμετρικά αντίθετο, από τα δεσποτικά καθεστώτα των προ-ελληνικών πολιτισμών της Μεσοποταμίας, της Αιγύπτου, της Περσίας, αλλά και αυτών της αρχαϊκής ελληνικής περιόδου. Η ειδοποιός διαφορά τους εκδηλώνεται στον τρόπο άσκησης της εξουσίας[6].

Στο πεδίο των εμπορικών δραστηριοτήτων παρατηρείται ένας σημαντικός νεωτερισμός στο δυτικό τμήμα της Μικράς Ασίας, κατά τον 7ο αιώνα π.Χ. Ήταν η χρήση του νομίσματος ως μέσο συναλλαγών. Αναφορικά με το θέμα ο Αριστοτέλης τόνισε, στα Ηθικά Νικομάχεια, τον διαμεσολαβητικό ρόλο του νομίσματος στην ποσοτική εκτίμηση και σύγκριση ετερογενών προϊόντων και έτσι την ανταλλακτική ισοδυναμία ανόμοιων πραγμάτων. Έχει μάλιστα επισημανθεί ότι το ζήτημα αυτό της ισοδυναμίας ανάγεται στους Πυθαγόρειους, που το αντιμετώπισαν με τη βοήθεια των αναλογιών. Η ανέλιξη των ανταλλακτικών ισοδυναμιών από το εμπειρικό πλαίσιο του εμπορίου σ' ένα ευρύτερο πεδίο θεώρησης, όπως για παράδειγμα στις σχέσεις των μηκών χορδής με τους παραγόμενους μουσικούς ήχους, αντίστοιχα, ή των διαφορετικών πολιτικών δικαιωμάτων και υποχρεώσεων στο δημοκρατικό πολίτευμα, δεν ήταν άσχετη με την ανάπτυξη της ισότητας και των αναλογιών στα Μαθηματικά. Από την άλλη μεριά οι προ-ελληνικοί πολιτισμοί, όπως και στην αρχαϊκή ελληνική περίοδο, έκαναν τις ανταλλαγές άμεσα, δηλ. είδος με είδος. Συγκεκριμένα από πολύ νωρίς στην ιστορία της Μεσοποταμίας χρησιμοποιείται το κυριότερο δημητριακό, το κριθάρι, σαν μέτρο της αξίας και γενικό ανταλλακτικό μέσο. Στην αρχαία Αίγυπτο χρησιμοποιούνται αρχικά ως μονάδες αναφοράς για τη μέτρηση της ανταλλακτικής αξίας διάφορα είδη-αλυσίδες, φυσερά, σανδάλια κ.ο.κ. Αργότερα θα χρησιμοποιηθεί σαν μέτρο της ανταλλακτικής αξίας ένα σταθερό βάρος μετάλλου, χρυσού, ασημιού ή και χαλκού[6].

Η τρίτη αξιοσημείωτη καινοτομία του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού είναι η επαναστατική αλλαγή του τρόπου επικοινωνίας με την εδραίωση της αλφαβητικής κωδικοποίησης του γραπτού λόγου. Το νέο αυτό σύστημα γραφής διεύρυνε αρκετά τις εκφραστικές δυνατότητες μ'επακόλουθο να ανοίξει ένας νέος ορίζοντας αφηρημένης σκέψης. Και αυτό γιατί η αλφαβητική γραφή πρόβαλε μια νέα γλωσσική και γνωστική συμπεριφορά. Η συγκεκριμένη αλλαγή γίνεται φανερή όταν συγκριθούν τα εικονογραφικά, κατά βάση, συστήματα γραφής των προ-ελληνικών πολιτισμών με την αλφαβητική γραφή. Στην προκειμένη περίπτωση μπορεί να διαπιστωθεί ότι στα εικονογραφικά συστήματα τα σημαινόμενα εκφράζονται άμεσα με την οπτική τους αναπαράσταση, ενώ στην αλφαβητική γραφή αυτό γίνεται έμμεσα, γιατί κάθε γραπτή λέξη είναι ένας συνδυασμός συμβόλων που δεν έχουν νόημα από μόνα τους. Να σημειωθεί ότι το ελληνικό αλφάβητο προήλθε από το φοινικικό αλφάβητο και εξελίχθηκε από τον 8ο αιώνα π.Χ. με διάφορες τοπικές ιδιομορφίες. Το 403 π.Χ. έγινε ένα σημαντικό βήμα ομογενοποίησης του, όταν οι Αθηναίοι υιοθέτησαν, με ψήφισμα, το ιωνικό αλφάβητο της Μιλήτου[6].

2.2 ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΠΟΥ ΔΙΑΣΩΘΗΚΑΝ

Το σύνολο των μαθηματικών εργασιών που έχουν διασωθεί είναι 58. Είναι ωστόσο άγνωστος ο αριθμός των μαθηματικών εργασιών που έχουν χαθεί. Υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις ότι σε βιβλιοθήκες διαφόρων αραβικών χωρών βρίσκονται αραβικές μεταφράσεις χαμένων έργων αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών του 8ου-10ου αιώνα. Επίσης είναι πιθανό ότι και στις βιβλιοθήκες του Βατικανό βρίσκονται σχετικές πραγματείες[7].

Οι μαθηματικές εργασίες των Αρχαίων Ελλήνων που έχουν διασωθεί είναι οι εξής[7]:

1. Απολλωνίου:
    i) «Κωνικά» (7 βιβλία)
    ii) «Περί λόγου αποτομής» (2 βιβλία)
    iii) «Κατασκευή δύο μέσων αναλόγων»
    iv) «Σύγκρισις δωδεκαέδρου και εικοσαέδρου»
2. Αριστάρχου:
    i) «Περί μεγεθών και αποστημάτων Ηλίου – Σελήνης» (ένα μέρος)
3. Αρχιμήδους:
    i) «Περί σφαίρας και κυλίνδρου»
    ii) «Κύκλου μέτρησις»
    iii) «Περί κωνοειδών και σφαιρεοειδέων»
    iv) «Περί ελίκων»
    v) «Περί επιπέδων ισορροπιών»
    vi) «Ψαμμίτης»
    vii) «Ορθογωνίου κώνου τομή»
    viii) «Περί των οχουμένων»
    ix) «Στομάχιον»
    x) «Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος»
    xi) «Βιβλίον λημμάτων»
    xii) «Βοεικόν πρόβλημα»
    xiii) «Τετραγωνισμός παραβολής»
    xiv) «Εγγραφή κανονικού επταγώνου εις κύκλον»

xv) «περί των επιψαυόντων κύκλων»

xvi) «Αρχαί γεωμετρίας»

xvii) «Περί οθογωνίων τριγώνων»

xviii) «Περί κύκλων»

xix) «Εύρεσις ύψους και εμβαδού τριγώνου εκ των πλευρών αυτού»

xx) «Περί υου ημικανονικού 14-έδρου»

4. Αυτολύκου του Πιτανέως:

   i) «Πραγματεία περί κινουμένων σφαιρών»

5. Διοκλέους:

   i) «Περί πυρίων»

6. Διοφάντου:

   i) «Αριθμητικά» (10 βιβλία)

7. Δομνίνου του Λαρισαίου:

   i) «Εγχειρίδιον αριθμητικής εισαγωγής»

8. Ευκλείδου:

   i) «Στοιχεία» (13 βιβλία)

   ii) «Δεδομένα»

   iii) «Περί διαιρέσεων» (ένα μέρος)

   iv) «Τα οπτικά και τα κατοπτρικά» (έργο Γεωμετρικής Οπτικής)

9. Ευτοκίου:

   i) «Σχόλια εις έργα Αρχιμήδους και Απολλωνίου»

   ii) «Υπομνήματα»

10. Ήρωνος:

   i) «Όροι των γεωμετρίας ονομάτων»

   ii) «Γεωμετρικά»

   iii) «Μετρικά (βιβλία γ’)

   iv) «Εισαγωγή των στερεομετρουμένων»

11. Θεοδοσίου:

   i) «Σφαιρικά»

12. Θέωνος του Αλεξανδρέως:

   i) «Σχόλια εις την του Πτολεμαίου Μαθηματικήν Σύνταξιν»

13. Θέωνος του Σμυρναίου:

    i) «Των κατά τομαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσις»

14. Ιαμβλίχου:

    i) «Περί της κοινής μαθηματικής επιστήμης»
    ii) «Περί της Νικομάχου αριθμητικής εισαγωγή»
    iii) «Τα θεολογούμενα της αριθμητικής (5 βιβλία)

15. Ιππάρχου:

    i) «Σχόλια εις τα φαινόμενα»

16. Ιωάννου του Φιλοπόνου:

    i) «Εις το δεύτερον της Νιομάχου Αριθμητικής εισαγωγής»

17. Μενελάου:

    i) «Σφαιρικά»

18. Νικομάχου:

    i) «Εισαγωγή εις την αριθμητικήν»

19. Πάππου:

    i) «Μαθηματική συναγωγή» (το μισό 2^{ο} βιβλίο και τα βιβλία 3^{ο}-8^{ο})

20. Πρόκλου:

    i) «Υπόμνημα εις τον πρώτον των Ευλείδου στοιχείων»
    ii) «Περί σφαίρας»
    iii) «Υποτύπωσις των αστρονομικών υποθέσεων»

21. Πτολεμαίου:

    i) «Μαθηματική σύνταξις»

22. Σερήνου:

    i) «Περί κυλίνδρου τομής»
    ii) «Περί κώνου τομής»

23. Υψικλέους:

    i) «Στοιχείων βιβλίο XIV»
    ii) «Στοιχείων βιβλίο XV» (πιθανολογείται ότι είναι έργο είτε του Υψικλέους είτε του Δαμασκίου»

Αξίζει να αναφερθεί ότι τα προαναφερόμενα έργα διασώζονται είτε στα ελληνικά είτε στα αραβικά είτε στα λατινικά. Ανάμεσά τους περιλαμβάνονται και αστρονομικά έργα εφόσον περιέχουν μαθηματικές αποδείξεις και μαθηματικές σχέσεις.

2.3 ΤΑ ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥΣ

Τα Αρχαία Ελληνικά μαθηματικά κατατάσσονται σε χρονικές περιόδους με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά η καθεμία. Έτσι διακρίνουμε τις εξής[7,8]:

Πρώτη περίοδος (η θεμελιωτική). Διαρκεί από τις αρχές του 6^{ου} αιώνα μέχρι το 450 π.Χ. Τότε εμφανίζονται τα 4 μεγάλα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα, δηλαδή ο τετραγωνισμός του κύκλου, η τριχοτόμηση της γωνίας, ο διπλασιασμός του κύβου και η κατασκευή κανονικού πολυγώνου με 7 ή 9 πλευρές. Την ίδια περίοδο εμφανίζονται τα ασύμμετρα μεγέθη, η αφηρημένη έννοια του αριθμού και γίνεται η θεμελίωση της γεωμετρίας μεταξύ άλλων. Χαρακατηριστικοί αντιπρόσωποι αυτής της περιόδου είναι ο Θαλής ο Μιλήσιος και ο Πυθαγόρας ο Σάμιος.

Δεύτερη περίοδος (η ηρωική περίοδος). Είναι η περίοδος της ανάπτυξης και της κρίσης. Διαρκεί από τα μέσα του 5ου π.Χ αιώνα μέχρι το 386 π.Χ οπότε και ιδρύθηκε η Ακαδημία του Πλάτωνος. Κατά την περίοδο αυτή παρουσιάζεται η μέθοδος της εξαντλήσεως του Ευδόξου, οι κωνικές τομές, οι μετασχηματισμοί στα εμδαδά καμπυλόγραμμων σχημάτων, η εξέταση του υπαρκτού και του δυνητικού απείρου, τα συνεχή και ασυνεχή μεγέθη και η κρίση της ασυμετρίας. Την ίδια περίοδο αναπτύσσεται έντονη μαθηματική δραστηριότητα και διάφοροι σοφιστές προσπαθούν να δώσουν λύση στα τρία μεγάλα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα, δηλαδή στον τετραγωνισμό του κύκλου, στην τριχοτόμηση οξείας γωνίας και στον διπλασιασμό του κύβου.

Τρίτη περίοδος (περίοδος σταθεροποιήσεως και υπερνικήσεως της κρίσεως), η περίοδος της μεγάλης ακμής). Χρονολογείται από 386 π.Χ μέχρι το 323 π.Χ που ιδρύθηκε το Βασίλειο της Αλεξάνδρειας. Σε αυτό το χρονικό διάστημα επιλύεται το πρόβλημα της ασυμμετρίας, παρουσιάζονται οι ευφυείς αναλογίες του Ευδόξου και γενικά θεμελιώνονται οι βάσεις που καθορίζουν τη μαθηματική σκέψη τους μετέπειτα αιώνες.

Τέταρτη περίοδος (πρώτη Αλεξανδρινή, περίοδος της ωριμότητας και της ακμής). Διαρκεί από το 323 π.Χ. έως το 30 π.Χ., όταν δηλαδή καταλύθηκε από τους Ρωμαίους το Βασίλειο των Λαγιδών.

Χαρακτηρίζεται χρυσός αιώνας των μαθηματικών. Σημαντικοί αντιπρόσωποι της περιόδου είναι ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος. Η αξιωματική θεμελίωση, η επινόηση νέων μαθηματικών εννοιών, η αυστηρή λογική ανάπτυξη και η συστηματική και οργανωμένη καταγραφή των ευρυμάτων της «Ηρωικής Περιόδου» στη γεωμετρία αποτελούν βασικά χαρακτηριστικά της περιόδου.

Πέμπτη Περίοδος (δεύτερη Αελξανδρινή, περίοδος των Σχολιαστών). Χρονολογείται από από το 30 π.Χ. έως περίπου το 550 μ.Χ. Χαρακτηριστικό αυτής της περιόδου είναι οι απαρχές της άλγεβρας και η εμφάνιση των Σχολιαστών, δηλαδή των Εξηγητών των κειμένων των μεγάλων μαθηματικών συγγραφέων.

Αξίζει να γίνει μία αναφορά στις Σχολές που παρουσίασαν ακμή κατά τους κλασσικούς και αλεξανδρινούς χρόνους και είναι οι εξής: α) Η Ιωνική του Θαλή, β) η Πυθαγόρειος του Κρότωνα, γ) η Ακαδημία του Πλάτωνα, δ) η Ελεύθερη Σχολή των Αθηνών, ε) η Ελεατική του Ζήνωνος, στ) της Κυζίκου, ζ) το Λύκειο του Αριστοτέλους και η) η Αλεξανδρινή.

2.4 ΟΙ ΣΧΟΛΕΣ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

Οι Σχολές που ακμάζουν κατά τους κλασσικούς και αλεξανδρινούς χρόνους και αναπτύσσουν τη μαθηματική σκέψη είναι οι εξής[8]:

α) Η Ιωνική του Θαλή

β) Η Πυθαγόρειος του Κρότωνα

γ) Η Ακαδημία του Πλάτωνος

δ) Η Ελεύθερη Σχολή των Αθηνών, όπου κατατάσσονται οι Μαθηματικοί και Σοφιστές του 5^{ου}-4^{ου} αι. που δεν ανήκουν σε ορισμένη σχολή.

ε) Η Ελεατική του Ζήνωνος

στ) Της Κυζίκου

ζ) Το Λύκειο του Αριστοτέλη

η) Η Αλεξανδρινή

2.5 ΤΑ ΑΛΥΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑΣ

Τα άλυτα προβλήματα της Αρχαιότητας είναι τα εξής[7,8]:

1. Το Δήλιο πρόβλημα

Το Δήλιο πρόβλημα ή ο διπλασιασμός του κύβου απασχόλησε τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες και η αναζήτηση λύσεων, οδήγησε σε μια έντονη ανάπτυξη της Γεωμετρίας.

Το Δήλιο πρόβλημα απόκτησε δημοσιότητα όταν το ανέφερε, σε μια τραγωδία ο βασιλιάς της Κρήτης Μίνωας διαμαρτυρόμενος γιατί το κενοτάφιο, που προοριζόταν για το γιο του Γλαύκο, ήταν πολύ μικρό για βασιλικό μνημείο και απαιτούσε το διπλασιασμό του όγκου του χωρίς να αλλάξει το κυβικό του σχήμα. Πανελλήνια γνωστό όμως έγινε το πρόβλημα αυτό όταν αναφέρθηκε από το μαντείο του Δήλιου Απόλλωνα, όταν δηλαδή ρωτήθηκε το μαντείο, τι πρέπει να κάνουν για να απαλλαγούν από το λοιμό που μάστιζε το νησί Δήλο, απάντησε ότι τούτο θα συμβεί αν διπλασιάσουν τον κυβικό βωμό του Απόλλωνα. Έτσι το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου πέρασε στην ιστορία με το όνομα "Δήλιο πρόβλημα".

Οι λύσεις που δόθηκαν στο πρόβλημα, κατά την ελληνική αρχαιότητα, διασώθηκαν και έφθασαν ως εμάς από τον σχολιαστή των έργων του Αρχιμήδη Ευτόκιο (6 αι. μ.χ). Αυτός σχολιάζοντας ανάλογο πρόβλημα του Αρχιμήδη και τη μέθοδο που αυτός χρησιμοποίησε για να το λύσει, δίνει όλες τις λύσεις παρεμβολής που του ήταν τότε γνωστές από παλαιότερες συγγραφές. Οι λύσεις που δίνει είναι 12 και η αρχαιότερη είναι του Αρχύτα.

Οι κυριότερες από τις γνωστές λύσεις προέρχονται από τον Ιπποκράτη τον Χίο (470-400 π.Χ.), Αρχύτα τον Ταραντίνο (428-365 π.Χ.), Πλάτωνα (427-347 π.Χ.), Μέναιχμο (375- π.Χ.), Αρχιμήδη (287-212 π.Χ. και Ερατοσθένη (276-194 π.Χ.)[7,8].

2. Η Τριχοτόμηση γωνίας

Σήμερα δεν γνωρίζουμε κάτω από ποιες συνθήκες τέθηκε το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας στην ελληνική αρχαιότητα. Ξέρουμε όμως ότι αποτελούσε το ένα από τα τρία μεγάλα προβλήματα μετά το Δήλιο και τον τετραγωνισμό του κύκλου. Ουσιαστικά το πρόβλημα έγκειται στην τριχοτόμηση οξείας γωνίας, διότι αν είναι αμβλεία αφαιρούμε από αυτήν την ορθή που μπορεί να τριχοτομηθεί με χάρακα και διαβήτη. Η τριχοτόμηση όμως μιας οξείας γωνίας είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί μόνο με χάρακα και διαβήτη γιατί η εξίσωση που την εκφράζει είναι τρίτου βαθμού χωρίς να μπορεί να αναχθεί σε δευτέρου.

Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες όταν οι προσπάθειές τους με το χάρακα και το διαβήτη δεν απέδωσαν, στράφηκαν σε άλλες καμπύλες εκτός του κύκλου και σε άλλες μεθόδους. Το πρώτο αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας ήταν ηεπινόηση από τον Ιππία τον Ηλείο της πρώτης καμπύλης στην ελληνική Γεωμετρία, μετά την περιφέρεια, της τετραγωνίζουσας, με τη βοήθεια της οποίας έδωσε και τη πρώτη λύση του προβλήματος.

Οι γνωστότεροι αρχαίοι γεωμέτρες που ασχοληθήκανε με το πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας είναι : Ο Ιππίας ο Ηλείος (περίπου 430 π.Χ.), ο Νικομήδης (περίπου 200 π.Χ.), ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) και ο Πάππος ο Αλεξανδρινός (3ος αι. μ.Χ.)[7,8].

3. Ο Τετραγωνισμός του κύκλου

Η μέτρηση του εμβαδού του περικλειομένου από κάποιο σχήμα, ήταν σε όλους τους λαούς, από την εποχή που ακόμη η γεωμετρία ήταν εμπειρικής μορφής, βασική επιδίωξη όλων των γεωμετρών. Από τη στιγμή που διαλέξανε σαν μονάδα μέτρησης των εμβαδών, το τετράγωνο με πλευρά τη μονάδα μήκους, αυτόματα τέθηκε και το πρόβλημα του τετραγωνισμού των διαφόρων σχημάτων. Αρχικά "τετραγωνίστηκαν" δηλαδή προσδιορίστηκε το εμβαδόν τους, τα ορθογώνια, τα τρίγωνα, τα παραλληλόγραμμα και ορισμένα πολύγωνα. Μετά από αυτό ήταν φυσικό να επιδιωχθεί και ο τετραγωνισμός σχημάτων περικλειομένων από καμπύλες γραμμές και πρώτου από όλα του κύκλου. Ο τετραγωνισμός του κύκλου, το τρίτο από τα μεγάλα προβλήματα της αρχαιότητας, απασχόλησε πολλούς ερευνητές για πολλούς αιώνες και υπήρξε το μεγάλο εμπόδιο πάνω στο οποίο σκόνταψαν μεγάλα ονόματα. Το τετράγωνο έγινε σύμβολο της ικανότητας του ανθρώπου να μετράει , να επιλύει και να διαμερίζει . Ενώ ο κύκλος εκφράζει το άπειρο , το τετράγωνο εκπροσωπεί το πεπερασμένο . Ενώ ο κύκλος , αντανακλά το μυστήριο του φυσικού κόσμου , το τετράγωνο επέτρεψε στον άνθρωπο των πρώιμων πολιτισμών να κατανέμει τη γη για καλλιέργεια και ιδιοκτησία . Η απαίτηση του προβλήματος είναι να κατασκευαστεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοσμένο κύκλο, αν δηλαδή είναι R η ακτίνα του κύκλου και x η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου, πρέπει να αληθεύει η σχέση $x^2 = \pi R^2$ ή $\sqrt{\pi}$, όπου π ο λόγος του μήκους της περιφέρειας προς το μήκος της διαμέτρου του κύκλου. Παρόλο που εμπειρικά είχε διαπιστωθεί ότι ο λόγος π της περιφέρειας προς τη διάμετρο διατηρείται σταθερός, ωστόσο η κατασκευή αυτού του λόγου και όταν ακόμη η Γεωμετρία εφοδιασμένη με την απόδειξη είχε γίνει επιστήμη, στάθηκε αδύνατη. Υπήρξαν κατασκευές του π μεγαλοφυείς κατά τη σύλληψη όχι όμως πραγματοποιημένες σύμφωνα με την απαίτηση του "χάρακα και του διαβήτη" που έθεταν τότε. Παράλληλα έγιναν μεγαλειώδεις προσπάθειες υπολογισμού της τιμής του π, οι οποίες με πρωτεργάτη τον Αρχιμήδη, έδωσαν ένδοξα αποτελέσματα. Ο πρώτος που ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό του κύκλου είναι ο Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος (500-428 π.χ) δάσκαλος και φίλος του Περικλή. Στη συνέχεια ασχολήθηκαν οι Ιπποκράτης ο Χίος (470- 400 π.χ) ο σοφιστής Αντιφών ο Αθηναίος (περί το 430 π.χ) ο επίσης σοφιστής Βρύσων ο Ηρακλειώτης σύγχρονος του Αντιφώντα[7,8].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

6. Καστάνη Ν., 2002, Η Ιδιαιτερότητα της Μαθηματικής Σκέψης στον Αρχαίο Ελληνικό Πολιτισμό, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ.

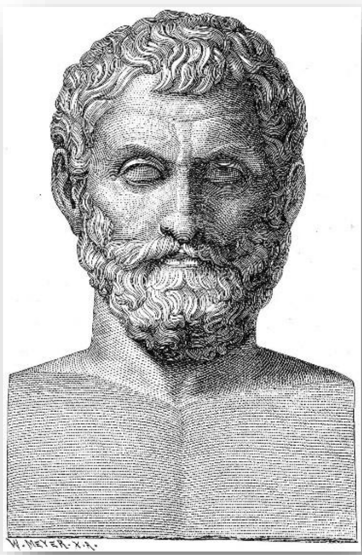
7. Σπανδάγου Ε., 2000, Τα Μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων, Εκδόσεις Αίθρα.

8. Σπανδάγου Β., Σπανδάγου Ρ. & Τραυλού Δ., 2000, Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας, Εκδόσεις Αίθρα.

3. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΙ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΟΙ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Είναι αρκετά μεγάλο το πλήθος των Ελλήνων μαθηματικών της αρχαιότητας που συνεισέφεραν με το έργο τους στην πρόοδο της επιστήμης. Ενδεικτικά αναφέρεται η δράση κάποιων χαρακτηριστικών αντιπροσώπων.

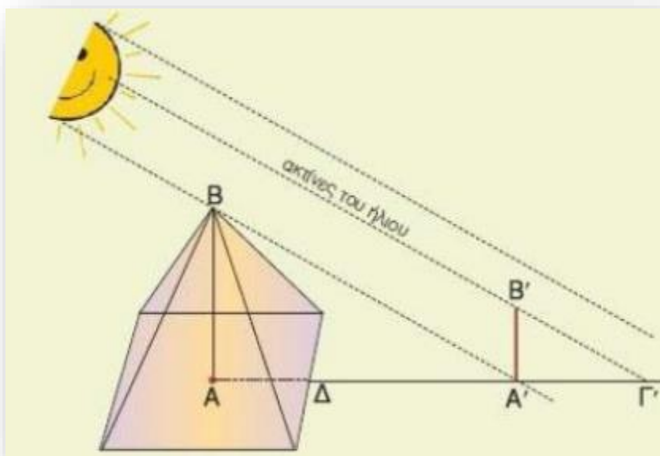
3.1 ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ



Εικόνα 3.1.1. *Θαλής ο Μιλήσιος*

Ο **Θαλής ο Μιλήσιος (Εικ.3.1.1)** (640 π.Χ. - 546 π.Χ.) είναι ο πρώτο άνθρωπος που αναφέρεται με το όνομά του στην ιστορία των μαθηματικών. Διακρίθηκε στα μαθηματικά, την αστρονομία, τη μηχανική, τη φυσική και τη φιλοσοφία. Διέπρεψε στην γεωμετρία και γι' αυτό ονομάζεται και «πατέρας της γεωμετρίας»[8]. Ο Θαλής έθεσε της βάσεις της Θεωρητικής Γεωμετρίας εισάγοντας για πρώτη φορά την αποδεικτική διαδικασία, ενώ μέχρι τότε οι μαθηματικές ανακλύψεις βασιζόταν στη διαίσθηση μόνο.

Πραγματοποίησε πολυάριθμα ταξίδια στην Ασία, την Κρήτη και την Αίγυπτο, όπου, με μοναδικό μέσο το ραβδί του, κατόρθωσε να μετρήσει το ύψος των πυραμίδων, υπολογίζοντας το, με βάση τη σκιά τους **(Εικ. 3.1.2)**, και την ώρα της ημέρας, κατά την οποία έγινε η μέτρηση. Εξάλλου, πραγματοποίησε και λίαν σοβαρές ανακαλύψεις στους κλάδους της φυσικής, της αστρονομίας και της γεωμετρίας, όντας ο πρώτος που επεσήμανε τα φυσικά φαινόμενα του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού[9]. Παράλληλα δε, πρώτος αυτός καθόρισε και την «Αρχή της θεωρητικής αναζήτησης των αιτιών», πάνω στην οποία εδράζεται έκτοτε κάθε διανοητική προσπάθεια στο χώρο της φιλοσοφίας και της επιστήμης. Πέρα από αυτά επινόησε και κατασκεύασε μηχανήματα υπολογισμού των αποστάσεων και διαίρεσε το έτος σε 365 ημέρες και το μήνα σε 30 ημέρες. Εκείνο, πάντως, που προκαλεί ενδιαφέρον είναι η πολυμέρεια των ενδιαφερόντων του και η ικανότητά του για συνθετική θεώρηση των φαινομένων της πραγματικότητας.



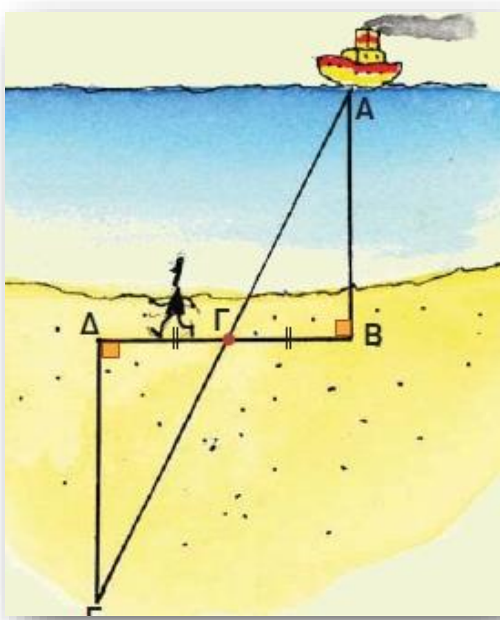
Εικόνα 3.1.2. Υπολογισμός του ύψους πυραμίδας με τη χρήση ραβδιού.

Η παράδοση κατατάσσει τον Θαλή μεταξύ των επτά σοφών της Αρχαιότητας και τον περιγράφει ως άνθρωπο με πλατιές γνώσεις και μεγάλη επινοητικότητα. Το σημαντικότερο είναι, ωστόσο, ότι μέσω της προβληματικής του για την αρχή του κόσμου και την κοσμολογία εν γένει ανήγαγε τα πολλαπλά φαινόμενα του κόσμου σε μία απρόσωπη, μοναδική ή ενιαία αρχή, γεγονός που τον κατατάσσει δίκαια στη χορεία των φιλοσόφων. Ο Θαλής είναι γνωστός και για την επιτυχημένη πρόβλεψη της ηλιακής έκλειψης του 585. Σε όλη την αρχαιότητα θαυμάζονταν ως μεγάλος σοφός, με αποτέλεσμα περί το 582 π.Χ. να χαρακτηριστεί ως ο πρώτος σοφός του Ελληνισμού[9].

Στα Μαθηματικά συνεισέφερε με τις μελέτες του στην Γεωμετρία και την Αστρονομία. Ειδικότερα η προσφορά του κατά τομέα ήταν η εξής[7,8,9]:

- Στην **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ:**

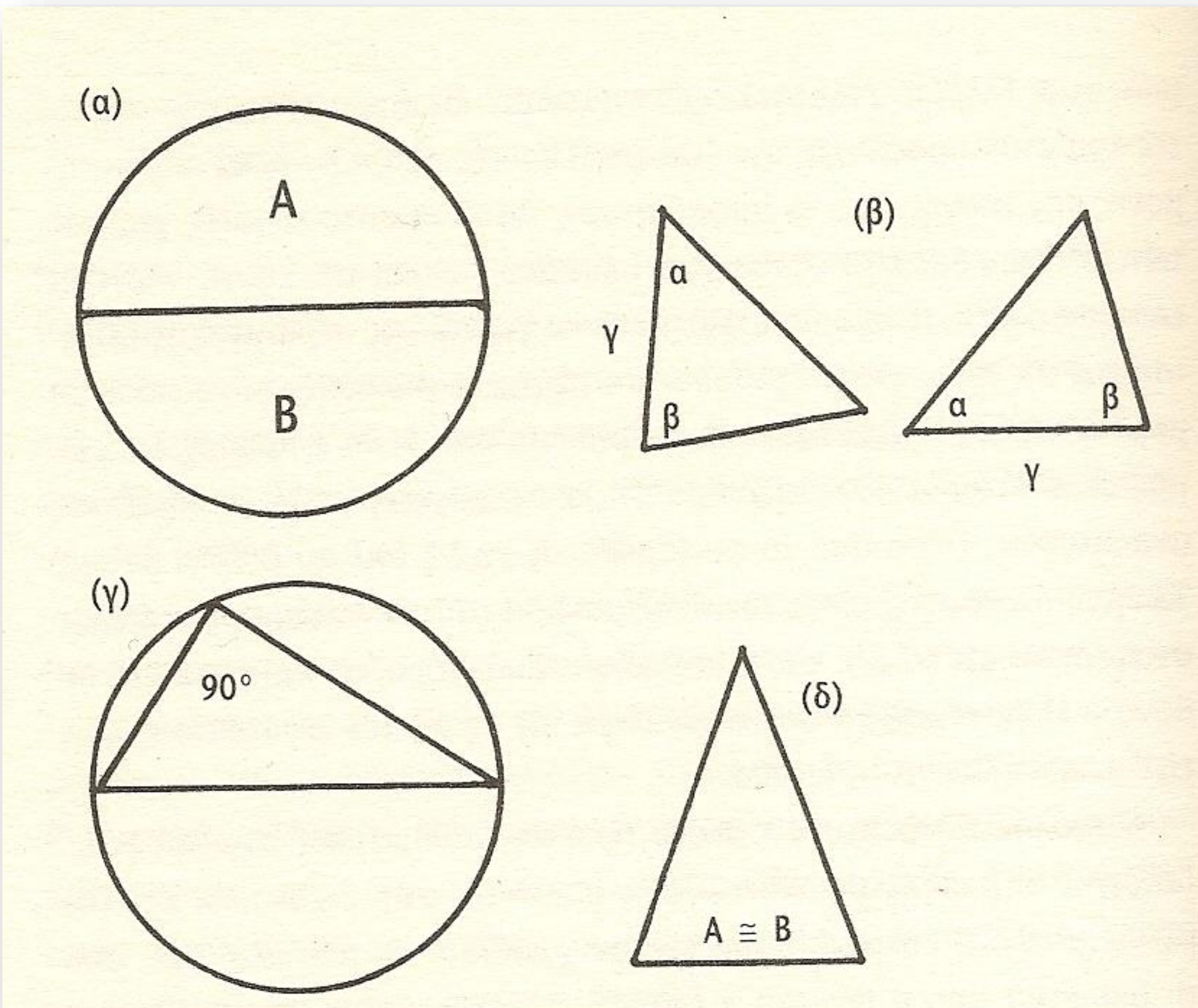
  - Εισήγαγε την έννοια των παραλλήλων ευθειών και των τεμνόμενων ευθειών.
  - Εισήγαγε την έννοια των γωνιών και των εγγεγραμμένων γωνιών.
  - Μελέτησε τους Σκιοθηρικούς γνώμονες και τα τρίγωνά τους με τις σκιές τους.
  - Εισήγαγε για πρώτη φορά στην ιστορία τους την αποδεικτική διαδικασία στα μαθηματικά και συγκεκριμένα την απόδειξη των γεωμετρικών προτάσεων, στηριγμένη σε ορισμούς, αξιώματα και κοινές έννοιες της Λογικής.
  - Ανακάλυψε κριτήρια ισότητας και ομοιότητας τριγώνων.
  - Ανακάλυψε το ομώνυμό του, Θεώρημα του Θαλή
  - Ανακάλυψε το θεώρημα της γωνίας της εγγεγραμμένης στο Ημικύκλιο.
  - Εκτιμάται ότι ανακάλυψε το θεώρημα των τριών γωνιών τριγώνου.
  - Υπολόγισε με τις ιδιότητες των όμοιων τρίγωνα το ύψος των Πυραμίδων (περί το 565 π.Χ.) **(Εικ. 3.1.2)**.
  - Υπολόγισε την απόσταση πλοίου από την ακτή **(Εικ. 3.1.3)** με βάση τις ιδιότητες ομοίων τριγώνων.



Εικόνα 3.1.3. *Υπολογισμός της απόστασης πλοίου από την ακτή με τις ιδιότητες ομοίων τριγώνων*

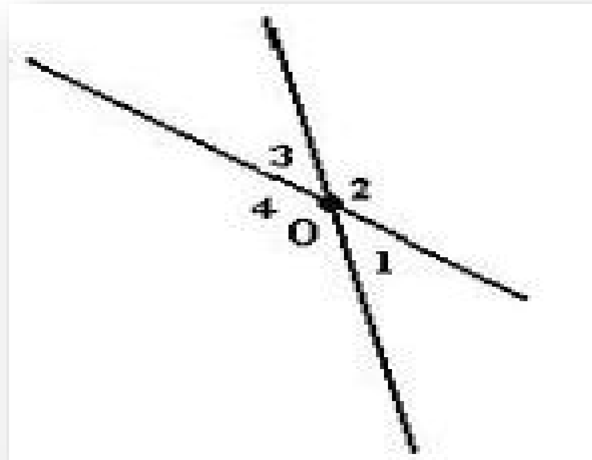
Συγκεκριμένα οι εξής εργασίες στη θεωρητική γεωμετρία σύμφωνα με μαρτυρίες πολλών συγγραφέων, οφείλονται στον Θαλή:

1. Ο κύκλος διχοτομείται από τη διάμετρό του **(Εικ. 3.1.4α)**.
2. Οι παρά τη βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες **(Εικ. 3.1.4δ)**.
3. Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν μια πλευρά του ενός είναι ίση με μια πλευρά του άλλου και οι γωνίες που πρόσκεινται στην πλευρά αυτή είναι ίσες μία προς μία με τις γωνίες που πρόσκεινται στην πλευρά του άλλου **(Εικ. 3.1.4β)**.
4. Κάθε γωνία εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή **(Εικ. 3.1.4γ)**.



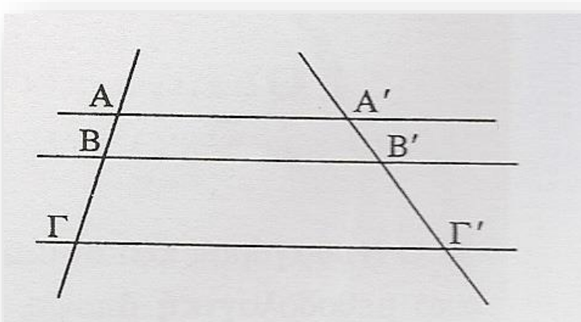
Εικόνα 3.1.4. *Εργασίες του Θαλή στη θεωρητική γεωμετρία.*

5. Οι κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες **(Εικ. 3.1.5)**.
6. Υπολογισμός του ύψους των Πυραμίδων. Κατά τον Πλούταρχο ο Θαλής διατύπωσε πρώτος το θεώρημα ότι αν δυο τρίγωνα είναι όμοια έχουν τις πλευρές τους ανάλογες. Σύμφωνα με τον ίδιο ιστορικό ο Θαλής κατόρθωσε να μετρήσει το ύψος της πυραμίδας του Χέοπος, συγκρίνοντας το μήκος της σκιάς της με το μήκος της σκιάς ράβδου ορισμένου μεγέθους.
7. Κατασκευή σφαίρας. Σύμφωνα με τον Κικέρωνα στον Θαλή αποδίδοταν η κατασκευή σφαίρας.



Εικόνα 3.1.5. *Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες σύμφωνα με τον Θαλή.*

8. Το Θεώρημα του Θαλή: Αν δύο ευθείες τμηθούν από παράλληλες ευθείες, τα μεταξύ των αντιστοίχων παραλλήλων τμήματα είναι ανάλογα. Η σχέση του θεωρήματος είναι μια αναλογία της μορφής: ΑΒ/ΒΓ=Α΄Β΄/Β΄Γ΄ **(Εικ. 3.1.6)**.



Εικόνα 3.1.6. *Το Θεώρημα του Θαλή.*

- Στην **ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ:**

  - Ανακάλυψε (με σκιοθηρικό γνώμονα) την **ανισότητα των εξαμήνων** (θερινού και χειμερινού).
  - Μέτρησε τη **διάρκεια του έτους** (365 ημέρες).
  - Μελέτησε τις **τροπές και τις ισημερίες του Ήλιου** και ανέπτυξε μεθόδους εντοπισμού των αντίστοιχων ημερών μέσα στο έτος.

- Ανέπτυξε μέθοδο υλοποίησης στο έδαφος της ακριβούς **διεύθυνσης Βορράς-Νότος**.
- Εκτιμάται ότι πρόβλεψε μία **έκλειψη Ηλίου** (Μάιος 585 π.Χ.).
- Εγραψε τα βιβλία **"Περί Τροπής και Ισημερίας"** και **"Ναυτική Αστρολογία"**

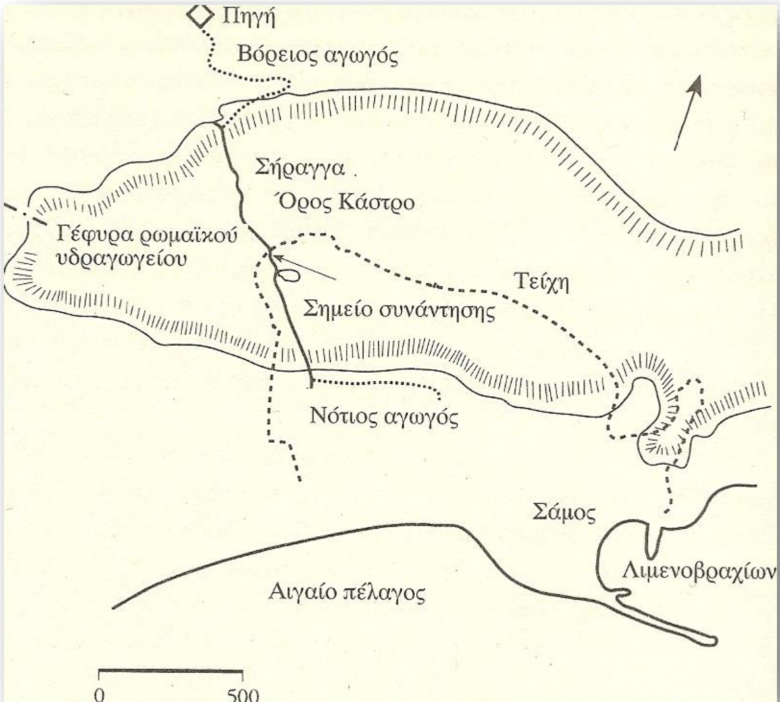
Βασική του αρχή, για την προέλευση του κόσμου, ήταν η παραδοχή ότι τα πάντα προέρχονται από το νερό. Η πρωτοπόρα αυτή άποψη για την ενιαία υλική βάση του Σύμπαντος, τον οδήγησε στην δεύτερη βασική του εκτίμηση ότι η Γη μας είναι επίπεδη και επιπλέει στα νερά του μεγάλου Ωκεανού.

Το σύνολο του έργου του προκάλεσε τον θαυμασμό όλων των Προσωκρατικών Φιλοσόφων, οι οποίοι από τον Θαλή και μετά θεωρούσαν υποχρέωσή τους να καταθέτουν γραπτά τις απόψεις τους, για τα τότε ερωτήματα, σε έργα με τον συνήθη τίτλο "Περί Φύσεως". Έτσι από τον Θαλή και μετά όλοι οι Προσωκρατικοί Φιλόσοφοι χαρακτηρίστηκαν ως "Φυσικοί".

3.2 ΕΥΠΑΛΙΝΟΣ

Ο Ευπαλίνος (6^{ος} π.Χ. αι.) ήταν αρχιτέκτονας, μηχανικός και γεωμέτρης από τα Μέγαρα. Είναι κατασκευαστής του περίφημου «Ευπαλίνειου ορύγματος», μιας σήρραγγας υδραγωγείου στη Σάμο. Το έργο αυτό θεωρείται ένα από τα σπουδαιότερα των αρχαίων Ελλήνων και η πραγματοποίησή του προϋποθέτει ορθή επίλυση πολύπλοκων γεωμετρικών προβλημάτων. Ο ιστορικός Ιερώνυμος (350-260 π.Χ.) αναφέρει ότι οι Σάμιοι τον αποκαλούσαν «Ευπαλίνος ο γεωμέτρης»[8].

Η Ευπαλίνειος Σήραγγα **(Εικ. 3.2.1)** κατασκευάστηκε περίπου το 550-530 π.Χ. και είχε μήκος 1.036 μέτρα. Οι ανασκαφές αποκάλυψαν ότι η σήραγγα κατασκευάστηκε από δύο ομάδες εργατών που άρχισαν να σκάβουν σε δυο αντίθετες πλευρές του βουνού και κατάφεραν να συναντηθούν στη μέση της απόστασης[10].



Εικόνα 3.2.1. *Χάρτης με το Ευπαλίνειο Όρυγμα.*

Οι αρχαιολόγοι στην προσπάθειά τους να καταλάβουν πώς κατασκευάστηκε το συγκεκριμένο έργο επικεντρώνονται σε τρία βασικά προβλήματα[10]: από πού άρχισε η σήραγγα, πώς ξεκίνησαν οι εργασίες στα δυο άκρα από το ίδιο επίπεδο ώστε να συναντηθούν με ακρίβεια και πώς έγινε η συνάντηση των δύο αγωγών στο κέντρο. Πολλοί λόγιοι υποστηρίζουν ότι οι μαθηματικοί γνώριζαν τη λύση του δεύτερου και του τρίτου προβλήματος. Για να αρχίσουν τα δυο άκρα από το ίδιο επίπεδο, οι μηχανικοί χρησιμοποίησαν αριθμητικές πράξεις για να μετρήσουν το ύψος του βουνού στη μια πλαγιά και κατόπιν στην άλλη με οπτικά όργανα και πασσάλους. Για το τρίτο πρόβλημα έχουν προταθεί πολλές διαφορετικές λύσεις, άλλες απλούστερες άλλες πιο πολύπλοκες. Όλες περιέχουν ένα σύστημα τριγωνισμού, που μπορούσε να εφαρμοστεί με τη βοήθεια οργάνων όπως ο γνώμων ή ο χωροβάτης και βασιζόταν σε γεωμετρικές σχέσεις περί των ιδιοτήτων των όμοιων τριγώνων. Αυτό μαρτυρεί ότι ο Ευπαλίνος κατείχε τις απαιτούμενες γνώσεις για να επιτύχει το συγκεκριμένο εγχείρημα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στους της σήραγγας κάτω από το έδαφος βρέθηκαν σειρές αριθμών. Η πληρέστερη σειρά υπάρχει στις δύο άκρες του αγωγού. Αρχίζοντας από τις εισόδους, οι αριθμοί προχωρούν κατά τακτά χρονικά διαστήματα ως εξής: 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 10 20 30

…200, όπου σταματά η νότια σειρά και 10 20 ..300,όπυ σταματά η βόρεια σειρά. Φαίνεται ότι οι εργάτες υπολόγιζαν τις αποστάσεις και κρατούσαν στοιχεία της εργασίας τους με απλή αρίθμηση. Οι αριθμοί στους τοίχους της Ευπαλίνειου Σήραγγας είναι ένα από τα πρώτα παραδείγματα της ονομαζόμενης μιλήσιας ή ιωνικής σημειογραφίας, όπου οι αριθμοί εκφράζονται με γράμματα της αλφαβήτου **(Εικ. 3.2.2)**.

α = 1	ια = 11	κα = 21	τ = 300
		κβ = 22	
β = 2	ιβ = 12	λ = 30	υ = 400
γ = 3	ιγ = 13	μ = 40	φ = 500
δ = 4	ιδ = 14	ν = 50	χ = 600
ε= 5	ιε = 15	ξ = 60	ψ = 700
ς = 6	ις = 16	ο = 70	ω = 800
ζ = 7	ιζ = 17	π = 80	ϡ = 900
η = 8	ιη = 18	ϙ = 90	͵α = 1,000
θ = 9	ιθ = 19	ϱ = 100	͵β = 2,000
ι = 10	κ = 20	σ = 200	͵ι ή M = 10,000

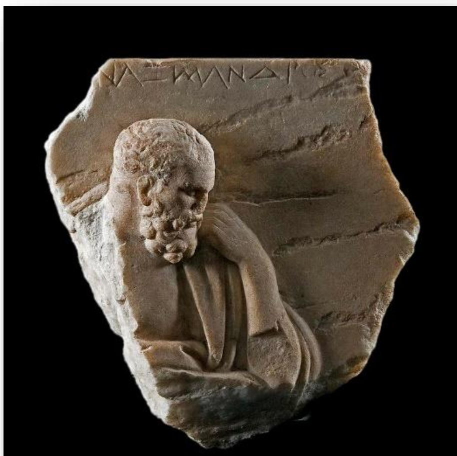
Εικόνα 3.2.2. *Μιλήσια ή Ιωνική Σημειογραφία.*

Η ιωνική σημειογραφία, συνήθως χρησιμοποιούμενη στα μαθηματικά κείμενα περιλαμβανομένων των παπύρων, κέρδισε έδαφος περί τα μέσα του $3^{ου}$ αι. π.Χ. και τελικά αντικατέστησε το προηγούμενο σύστημα, την ονομαζόμενη ακροφωνική ή αττική σημειογραφία **(Εικ. 3.2.3)**, η οποία ήταν σε χρήση από τον $7^{ο}$ αι. π.Χ. και φαίνεται να έχει εξαφανιστεί περί τα τέλη του $1^{ου}$ αι. π.Χ. Τα σημεία προέρχονταν συνήθως από τα αρχικά της ονομασίας κάθε γράμματος του ελληνικού αλφαβήτου: π.χ. 10=Δ και 1000=Χ. Η ακροφωνική σημειογραφία περιλάμβανε σημεία όχι μόνο για τους αριθμούς, αλλά επίσης για χρηματικά ποσά, κυρίως για τον οβολό, μια από τις βασικές νομισματικές μονάδες στην Αττική, καθώς και για ορισμένες υποδιαιρέσεις της όπως για τη δραχμή, αξίας 6 οβολών, και για το τάλαντο, αξίας 6.000 δραχμών. Σε ορισμένες περιπτώσεις ίσχυε το ίδιο για εκτάσεις γης και για τη μέτρηση των σιτηρών. Το ακροφωνικό σύστημα αντιθετα με τη μιλήσια σημειογραφία συναντάται μόνο σε επιγραφές και σε πίνακες υπολογισμών και όχι σε λογοτεχνικά κείμενα[10].

I = 1	ΔΔΔ = 30	𐅄 = 50	𐅂 = 1 δραχμή	𐅈 = 5 τάλαντα
II = 2	H = 100	𐅅 = 500	I = 1 οβολός	𐅉 = 10 τάλαντα
Γ = 5	X = 1,000	𐅆 = 5,000	C = μισός οβολός	𐅋 = 100 τάλαντα
Δ = 10	M = 10,000	𐅇 = 50,000	T = 1 τάλαντο	𐅍 = 1,000 τάλαντα

Εικόνα 3.2.3*. Ακροφωνική ή Αττική Σημειογραφία.*

3.3 ΑΝΑΞΙΜΑΝΔΡΟΣ



Εικόνα 3.3.1. *Ο Αναξίμανδρος.*

Ο Αναξίμανδρος ο Μιλήσιος **(Εικ. 3.3.1)** (610-547 π.Χ.) γιος του Πραξιάδου θεωρείται μεγάλος φιλόσοφος, μαθηματικός και αστρονόμος. Υπήρξε μαθητής του Θαλή και αρχηγός της Ιωνικής Σχολής.

Εισήγαγε πρώτος τη έννοια του υλικού απείρου. Επίκεντρο της φιλοσοφίας του Αναξίμανδρου είναι το *άπειρον*, ένα άπειρο όμως που πιθανώς προσλαμβάνει δύο ερμηνείες:

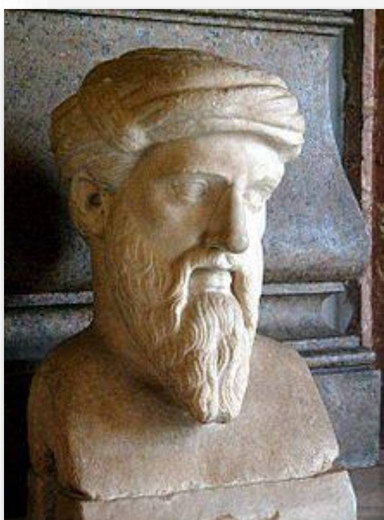
- άπειρον α+πέρας = χωρίς τέλος
- άπειρον α+περάω =αδιαπέραστο

Σε κάθε περίπτωση φαίνεται πως εννοούσε μια πρωταρχική αιτία δίχως όρια στον χώρο. Το άπειρον είναι απεριόριστο στον χώρο και ποιοτικά ακαθόριστο, καθώς δεν προσδιορίζεται μορφικά ως ένα από τα τέσσερα στοιχεία. Στο άπειρο ο Αναξίμανδρος δεν είδε μόνον την πρωταρχική ύλη και την αρχική κατάσταση του κόσμου αλλά και την αιτία της κοσμικής τάξης.

Σε αυτή την πρωταρχική ουσία απέδωσε θεϊκές ιδιότητες, χαρακτηρίζοντας το άπειρο ως *αθάνατον*, *ανώλεθρον* και *θείον*, σύμφωνα με τον Σιμπλίκιο (*Φυσικά* 24,13). Η αδυναμία της ανθρώπινης διάνοιας να καθορίσει το άπειρο ποσοτικά και ποιοτικά το καθιστά απεριόριστη πηγή και κατευθυντήρια δύναμη του κόσμου[11].

Σύμφωνα με το λεξικό Σούδα είναι ο πρώτος συγγραφέας βιβλίου γεωμετρίας. Με βάση τον Στράβωνα, ο Ανξίμανδρος είναι ο πρώτος που χάραξε γεωγραφικό χάρτη. Επίσης θεωρείται από τους ιδρυτές της μαθηματικής αστρονομίας, δεδομένου ότι πρώτος αυτός χρησιμοποίησε μαθηματικούς υπολογισμούς στις αστρονομικές του μελέτες[8].

3.4 ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ Ο ΣΑΜΙΟΣ - ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ



Εικόνα 3.4.1. *Προτομή του Πυθαγόρα του Σάμιου.*

Ο **Πυθαγόρας ο Σάμιος (Εικ. 3.4.1)**, υπήρξε σημαντικός Έλληνας φιλόσοφος, μαθηματικός, γεωμέτρης και θεωρητικός της μουσικής. Είναι ο κατεξοχήν θεμελιωτής των ελληνικών μαθηματικών και δημιούργησε ένα άρτιο σύστημα για την επιστήμη των ουρανίων σωμάτων, που κατοχύρωσε με όλες τις σχετικές αριθμητικές και γεωμετρικές αποδείξεις. Γεννήθηκε στη Σάμο σε χρονολογία που δεν μας είναι γνωστή, αλλά που εικάζεται πως είναι μεταξύ των ετών 580 - 572 π.χ. Πέθανε στο Μεταπόντιον της Ιταλικής Λευκανίας σε μεγάλη ηλικία, περί το 500 - 490 π.χ. Οι Πυθαγόρειοι του 5^{ου} αιώνα π.χ. συγκαταλέγονται στους πιο σημαντικούς επιστήμονες του καιρού τους. Στο Πυθαγόρειο σύστημα οι θρησκευτικοί και φιλοσοφικοί στόχοι είναι αλληλένδετοι. Στον ίδιο τον Πυθαγόρα αποδίδονται οι βασικές ιδέες της «θεωρίας» του «κόσμου» και της «κάθαρσης», ιδέες που συνδέουν τις δύο τάσεις της Πυθαγόρειας σχολής, την επιστημονική και τη θρησκευτική. Μια πολύ σημαντική ανακάλυψη που έκανε ο Πυθαγόρας είναι η αριθμητική ερμηνεία του σύμπαντος. Μετρώντας τα κατάλληλα μήκη της χορδής ενός μονόχορδου, διαπίστωσε πως τα σύμφωνα μουσικά διαστήματα μπορεί να εκφρασθούν σε απλές αριθμητικές αναλογίες των τεσσάρων πρώτων ακεραίων αριθμών. Σ΄ αυτόν αποδίδονται οι αριθμητικοί λόγοι της οκτάβας (2/1, δια πασών), της τέταρτης (4/3, δια τεσσάρων), της πέμπτης (3/2, δια πέντε) και του μείζονος τόνου (9/8 που είναι η διαφορά μεταξύ τέταρτης και πέμπτης). Έτσι ο Πυθαγόρας έκανε λόγο για την «Αρμονία των Σφαιρών»[9].

Στον Κρότωνα ο Πυθαγόρας έτυχε θερμότατης υποδοχής και γρήγορα επιβλήθηκε με το κύρος του , την προσωπικότητά του και την ευρυμάθειά του. Η Πυθαγόρειος Σχολή το Κρότωνος ήταν συγχρόνως και φιλοσοφική αλλά και πολιτικοθρησκευτική οργάνωση. Οι μαθητές της Σχολής γίνονταν δεκτοί κατόπιν δύσκολων δοκιμασιών και μυήσεων. Οι πυθαγόρειοι είχαν ένα οίκημα ομαδικής ακροάσεως, το Ομακοείον και ζούσαν κοινοβιακή ζωή με ένα πολύ αυστηρό κώδικα ηθικής και συμπεριφοράς ο οποίος περιλάμβανε την πίστη για την μετεμψύχωση, την αφοσίωση και τη χορτοφαγία. Από τον ίδιο τον Πυθαγόρα δεν υπάρχουν γραπτά καθώς ο ίδιος το απαγόρευε όμως αργότερα οι πυθαγόρειοι έπαψαν να τηρούν την απαγόρευση αυτή και έτσι έχουμε πολλές αναφορές από αυτούς.

Μια από τις βασικές διδασκαλίες της σχολής του Πυθαγόρα ήταν ότι οι αριθμοί ήταν τα πάντα και ότι τίποτα δεν μπορούσε να νοηθεί χωρίς αυτούς. Ο πιο σημαντικός αριθμός ήταν το 10 ή τετρακτύς, γιατί ήταν το άθροισμα του 1+2+3+4 , δηλαδή του αριθμού των σημείων που χρειάζονται για τη δημιουργία των διαστάσεων του σύμπαντος: το ένα είναι το αδιάστατο σημείο το όποιο γεννά τις άλλες διαστάσεις, δυο σημεία μπορούν να ενωθούν για να δημιουργήσουν μια γραμμή, η όποια έχει μια διάσταση. Τρία σημεία μπορούν να ενωθούν για να δημιουργήσουν ένα δυσδιάστατο τρίγωνο και τέσσερα σημεία μπορούν να ενωθούν και να φτιάξουν το τρισδιάστατο τετράεδρο . Η τετρακτύς έγινε το σύμβολο των πυθαγορείων, οι οποίοι προχώρησαν πολύ περισσότερο από οποιοδήποτε προηγούμενο αριθμητικό μυστικισμό στην μετασκευή ενός σύμπαντος, στο οποίο οι αριθμοί είχαν και φιλοσοφικό και αποκαλυπτικό ρόλο. Ο Αριστοτέλης αποδίδει στους πυθαγορείους την απόδειξη ότι η $\sqrt{2}$ είναι άρρητη .Το πιο εντυπωσιακό στην ελληνική αντιμετώπιση του πυθαγορείου θεωρήματος είναι η μέθοδος απόδειξης που ανακαλύφθηκε από τον ίδιο τον Πυθαγόρα[7,8].

Τα αριθμητικά για τους αρχαίους ήταν αφηρημένες μαθηματικές ιδιότητες των αριθμών και κυρίως των φυσικών αριθμών , δηλαδή των θετικών αριθμών .Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν πολύ φυσικό να αντιστοιχούν ένα σημείο στον αριθμό 1 ,τρία σημεία ή ένα τρίγωνο στον αριθμό 3 κ.α. Αυτό οδηγεί στην θεώρηση ακολουθιών , που οι όροι τους αποτελούνται από σχήματα και αριθμούς. Οι Πυθαγόρειοι μίλησαν επίσης και για Πυθαγόρειες τριάδες δηλαδή αριθμούς που επιβεβαιώνουν πάντα τον κατάλληλο τύπο .Οι τριάδες αυτές είναι άπειρες σύμφωνα με τον τύπο που δίνουν οι Πυθαγόρειοι . Μια πλήρη γενική λύση στο πρόβλημα κατασκευής πυθαγόρειων τριάδων δίνει ο Ευκλείδης στα Στοιχεία . Αφού λύθηκε το πρόβλημα αυτό, πολλά άλλα προβλήματα κίνησαν το ενδιαφέρον των μεταγενέστερων μαθηματικών. Ένας από αυτούς ήταν ο Fermat, ο οποίος θεώρησε τριάδες γενικότερες από τις πυθαγόρειες .

Οι εργασίες του Πυθαγόρα και των μαθητών του

Ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του έθεσαν τα θεμέλια της μαθηματικής επιστήμης. Έδωσαν στην απόδειξη μια αυστηρά λογική διαδικασία και πρώτοι αυτοί χρησιμοποίησαν την εις άτοπο απαγωγή ως αποδεικτική μέθοδο. Ασχολήθηκαν με τη γεωμετρία και με τη θεωρία των αριθμών. Αυτοί πρώτοι διαχώρισαν την εφαρμοσμένη αριθμητική , δηλαδή τη λογιστική από τη θεωρητική αριθμητική. Οι Πυθαγόρειοι προς το τέλος του 6ου αι. π.Χ. διατύπωσαν τη θεωρία ότι όπως η ουσία των μουσικών τόνων εξαρτάται από τους αριθμούς, έτσι και τα υπόλοιπα όντα είναι στην ουσία τους αριθμοί. Στο φιλοσοφικό σύστημα των Πυθαγορείων το πρωταρχικό στοιχείο της δημιουργίας είναι μια πνευματική οντότητα, ο αριθμός, που οι Πυθαγόρειοι τον θεωρούν ως έσχατη ουσία των όντων. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του ονόμαζαν αριθμούς μόνο τους ακέραιους όπως προκύπτει από μαρτυρία του Αριστοξένου. Η διαίρεση των αριθμών σε «άρτιους» και «περιττούς» οφείλεται στους Πυθαγόρειους. Ο περιττός αριθμός ταυτίζεται από τους Πυθαγορείους με το πεπερασμένο ενώ ο άρτιος ταυτίζεται με το άπειρο. Η πυθαγόρεια θεωρία των αριθμών είχε ταξινομήσει τους αριθμούς σε πολλές κατηγορίες ανάλογα με τους ιδιότητές τους ή ανάλογα με τον τρόπο σχηματισμού τους. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους «αρτιοπέριττους», δηλαδή τους άρτιους αριθμούς που διαιρούνται με το δύο και δίνουν πηλίκο περιττό αριθμό (π.χ. το 6 και το 10), τους «περισσάρτιους», δηλαδή τους άρτιους, που αναλύονται σε γινόμενο άρτιου επί περιττό (π.χ. ο 12 καθώς 12 = 3 x 4) και οι «αρτιάκις άρτιοι», δηλαδή άρτιοι που αναλύονται σε γινόμενο δύο άρτιων (π.χ. 32 = 4 x 8). Μια άλλη κατάταξη των αριθμών είναι αυτή που γίνεται με βάση το άθροισμα των διαιρετών τους. Έτσι οι αριθμοί διακρίνονται σε: α) υπερτελείς, β) ελλιπείς, γ) τέλειοι και δ) φίλοι[7,8].

Σύμφωνα με τον Πρόκλο ο Πυθαγόρας διατύπωσε τη θεωρία των αναλογιών. Οι αναλογίες αυτές σε σύγχρονη διατύπωση είναι οι εξής:

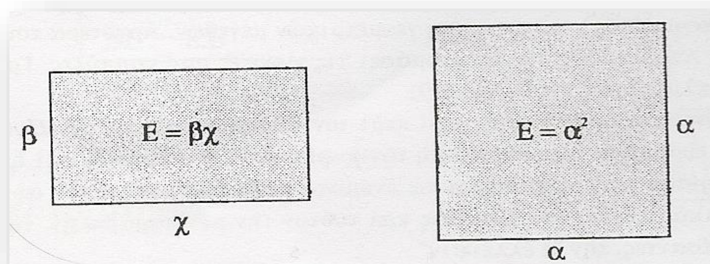
1. Πρώτη ή αριθμητική μεσότητα
2. Δεύτερη ή γεωμετρική μεσότητα
3. Τρίτη ή αρμονική μεσότητα:

Οι γεωμετρικές εργασίες των Πυθαγορείων.

Στους Πυθαγόρειους οφείλεται η διάκριση των γωνιών σε οξείες, ορθές και αμβλείες. Έδωσαν πρώτοι τον ορισμό του σημείου και θεώρησαν το διάστημα ως γεωμετρική έννοια συνεχή, απεριόριστη και ομογενή. Διέκριναν τα τρίγωνα σε ισόπλευρα, ισοσκελή και σκαληνά.

Χαρακτηριστικές γεωμετρικές εργασίες των Πυθαγορείων είναι οι εξής[7,8]:

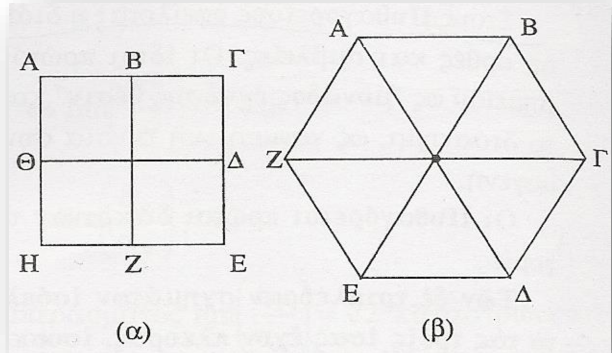
1. Η κατασκευή της τετάρτης αναλόγου έστω χ τριών ευθύγραμμων τμημάτων α,β,γ ώστε να ισχύει α/β=γ/χ.
2. Η κατασκευή ορθογώνιου παραλληλόγραμμου **(Εικ. 3.4.2)**, με δοσμένη πλευρά β, ισοδύναμο με δοσμένο τετράγωνο πλευράς α. Δηλαδή κατασκεύασαν ένα ευθύγραμμο τμήμα χ τέτοιο ώστε: $\alpha^2=\beta\chi$ ή α/χ=β/α.



Εικόνα 3.4.2. *Η κατασκευή ορθογώνιου παραλληλόγραμμου με δοσμένη πλευρά β, ισοδύναμο με δοσμένο τετράγωνο πλευράς α.*

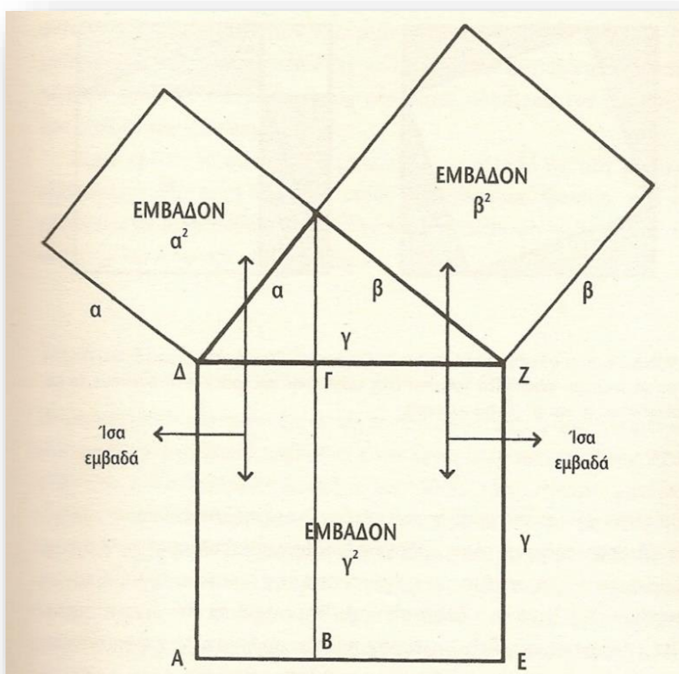
3. Σύμφωνα με τον Πρόκλο, οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι αν δοθεί ένα σημείο του επιπέδου, τότε το μέρος του επιπέδου γύρω από το σημείο αυτό μοιράζεται σε γωνίες των οποίων το άθροισμα είναι ίσο με 4 ορθές. Ο τόπος αυτός καλύπτεται από 4 τετράγωνα **(Εικ. 3.4.3α)** ή από 6 ισόπλευρα τρίγωνα **(Εικ. 3.4.3β)** ή από τρία κανονικά εξάγωνα. Αν

προσπαθήσουμε να καλύψουμε τον τόπο αυτό από άλλα πολύγωνα, το άθροισμα των γωνιών τους θα παρουσιάζει «έλλειψη» ή «υπερβολή» ως προς τις 4 ορθές.



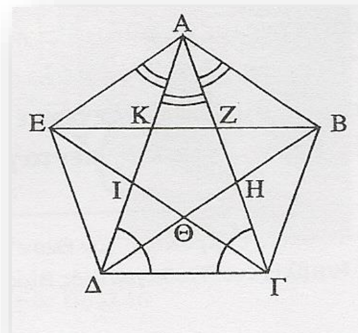
***Εικόνα 3.4.3**. Αν δοθεί ένα σημείο του επιπέδου, τότε το μέρος του επιπέδου γύρω από το σημείο αυτό μοιράζεται σε γωνίες των οποίων το άθροισμα είναι ίσο με 4 ορθές.*

4. Η απόδειξη από τον Πυθαγόρα του Πυθαγόρειου θεωρήματος συνέβαλε σε πολύ μεγάλο βαθμό στην εξέλιξη της γεωμετρίας και στη λύση πολλών γεωμετρικών προβλημάτων. Η διατύπωση του συγκεκριμένου θεωρήματος όπως αναφέρεται από τον Ευκλείδη είναι η εξής: σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο **(Εικ. 3.4.4)**, το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών: $α^2 = β^2 + γ^2$



***Εικόνα 3.4.4.** Το Πυθαγόρειο Θεώρημα.*

5. Η απόδειξη του θεωρήματος ότι το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τριγώνου ισούται με δύο ορθές.
6. Σύμφωνα με την παράδοση, οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν (και κατασκεύαζαν) το κανονικό εξάεδρο (τον κύβο), το κανονικό τετράεδρο (την κανονική τριγωνική πυραμίδα), το κανονικό οκτάεδρο και ίσως το κανονικό εικοσάεδρο και το κανονικό δωδεκάεδρο. Τα σχήματα αυτά συμβόλιζαν αντίστοιχα κατά την Πυθαγόρειο Σχολή αντίστοιχα τη «γη», το «πυρ», τον «αέρα», το «ύδωρ» και το «σύμπαν».
7. Είχαν μελετήσει το κανονικό πεντάγωνο **(Εικ. 3.4.5)**. Το σχήμα που προκύπτει από τις διαγώνιες του κανονικού πενταγώνου και που ονομάζεται «αστεροειδές πεντάγωνο» ή «πεντάγραμμο» ή «πεντάλφα» αποτελούσε για τους Πυθαγορείους, σημείο αναγνωρίσεως και σύμβολο ιερό. Στις πέντε κορυφές αυτού οι Πυθαγόρειοι τοποθετούσαν τα γράμματα της λέξης «υγιεία». Πρώτοι οι Πυθαγόρειοι παρατήρησαν ότι καθένα από τα σημεία τομής των διαγωνίων ενός κανονικού πενταγώνου διαιρεί τις διαγώνιες σε άκρο και μέσο λόγο δηλαδή παρτήρησαν ότι: ΒΕ/ΕΖ = ΕΖ/ΖΒ, ΒΕ/ΚΒ = ΚΒ/ΚΕ κλπ. Ακόμη είχαν αποδείξει ότι σε ένα κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ οι γωνίες ΕÂΔ, ΔÂΓ, ΓÂΒ είναι 2/5 της ορθής ενώ οι γωνίες ΑΔΓ και ΑΓΔ είναι 4/5 της ορθής.

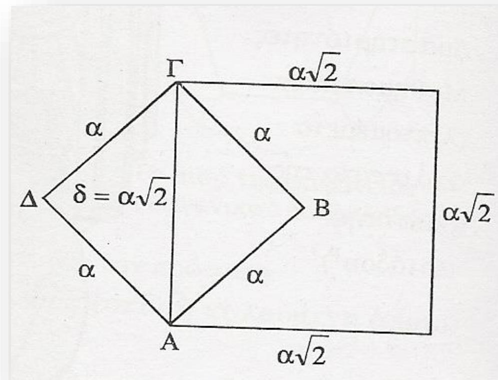


Εικόνα 3.4.5. *Το «πεντάγραμμο» ή «πεντάλφα» που σχηματίζεται από τις διαγώνιες ενός κανονικού πενταγώνου.*

8. Γνώριζαν ότι η πλευρά του κανονικού εξαέδρου είναι ίση με την ακτίνα του περιγεγραμμένου σε αυτό κύκλου.
9. Είχαν μελετήσει το κανονικό δωδεκάεδρο που αποτελείται από 12 κανονικά πεντάγωνα ίσα μεταξύ τους και έχει ίσες τις δίεδρες και τρίεδρες γωνίες. Οι ακμές του δωδεκαέδρου είναι 30 και οι κορυφές 20. Είχαν εγγράψει και σφαίρα στο κανονικό δωδεκάεδρο.
10. Μελέτησαν τον κύκλο και τη σφαίρα τα οποία θεωρούσαν ως τα τελειότερα και ωραιότερα από τα επίπεδα σχήματα και από τα σχήματα του χώρου αντίστοιχα.
11. Κατά τον Πρόκλο, η λύση του προβλήματος της χρυσής τομής, δηλαδή η διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο, αποτελεί ένα εξοχότερα επιτεύγματα του Πυθαγόρειου Πανεπιστημίου. Στον ισχυρισμό αυτό του Πρόκλου συνηγορεί το γεγονός

ότι στους Πυθαγόρειους, αποδίδεται η κατασκευή του κανονικού δωδεκαέδρου που προϋποθέτει τη γνώση της διαίρεσης του ευθύγραμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο.

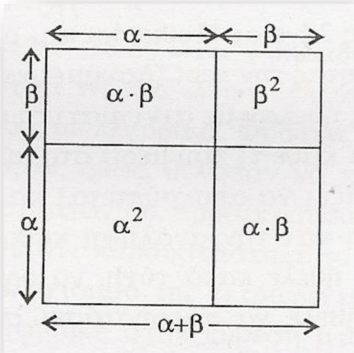
12. Οι Πυθαγόρειοι αντιμετώπισαν το εξής γεωμετρικό πρόβλημα **(Εικ. 3.4.6)**: «Αν δοθεί ένα τετράγωνο πλευράς α, να κατασκευαστεί τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν προς το δοθέν». Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΓ, βρήκαν ότι $ΑΓ^2 = α^2 + α^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2 = 2α^2 \Leftrightarrow δ^2 = 2α^2$, δηλαδή το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά ΑΓ = δ είναι διπλάσιο του εμβαδού του δοσμένου τετραγώνου με πλευρά α.



Εικόνα 3.4.6. *Δίνεται τετράγωνο πλευράς α και ζητείται η κατασκευή με διπλάσιο εμβαδόν από το δοθέν.*

Παρόλο που το πρόβλημα λύθηκε γεωμετρικά υπήρξαν μεγάλες δυσκολίες στον αριθμητικό προσδιορισμό της τιμής της διαγωνίου, δηλαδή στον υπολογισμό του $\sqrt{2}$.Τελικά κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το ζητούμενο μέγεθος της διαγωνίου είναι «ασύμμετρο» προς την πλευρά του τετραγώνου, δηλαδή ο λόγος $\frac{δ}{α}$ δεν εκφράζεται με αριθμό ακέραιο ή κλασματικό. Η διαπίστωση αυτή ανέτρεψε την πυθαγόρεια θεωρία των αναλογίων και προκάλεσε μεγάλη κρίση εφόσον το φιλοσοφικό τους σύστημα βασίζονταν στην πεποίθηση ότι το κάθετι στηρίζεται στους ακέραιους αριθμούς και στις αριθμητικές κλασματικές εκφράσεις. Η πυθαγόρεια κοινότητα κατέβαλε μεγάλες προσπάθειες να μείνει κρυφή η ανακάλυψη της «ασυμμετρίας». Γι’ αυτό χρησιμοποίησαν για τους αριθμούς που γέννησε η ασυμμετρία τους όρους «άλογος», δηλαδή χωρίς λογική και «άρρητος», δηλαδή «άγνωστος». Ο λόγος «άλογος» υπογραμμίζει ότι η «ασυμμετρία» είναι αταίριαστη με τη μαθηματική λογική των Πυθαγορείων και ο λόγος «άρρητος» την τάση να μείνει μυστική η ανακάλυψη της ασυμμετρίας.

13. Μετά την ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών έδειξαν εποπτικά **(Εικ. 3.4.7)** την ισότητα $(α+β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$ βάζοντας έτσι τις βάσεις της Γεωμετρικής Άλγεβρας.



Εικόνα 3.4.7. Η εποπτική παρουσίαση της εξίσωσης

$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

3.5 ΘΕΑΝΩ

Η Θεανώ ($6^{ος}$ π.Χ. αι.) από τον Κρότωνα ήταν κόρη του γιατρού Βροντίνου, μαθήτρια και ένθερμη οπαδός του Πυθαγόρα, τον οποίο και παντρεύτηκε. Δίδακε στις Πυθαγόρεις Σχολές της Σάμου και του Κρότωνος.

Η Θεανώ διαδραμάτισε καίριο λόγο στην πυθαγόρεια διδασκαλία και θεωρείται η ψυχή της θεωρίας των αριθμών. Στη ίδια αποδίδεται η πυθαγόρεια άποψη της χρυσής τομής καθώς και διάφορες κοσμολογικές θεωρίες[8].

Μετά τον θάνατο του Πυθαγόρα διέδωσε το φιλοσοφικό και πυθαγόρειο σύστημα στην Ελλάδα και στην Αίγυπτο με τη βοήθεια των θυγατέρων της Δαμούς, Μυίας ή Μυρίας και Αριγνώτης.

3.6 ΦΙΝΤΥΣ

Αναφέρεται και ως Φίλτυς ($6^{ος}$ αι. π.Χ.). Ήταν μαθήτρια του Πυθαγόρα, θυγατέρα του Θέοφρη από τον Κρότωνα και αδελφή του Βυνδάκου. Δίδαξε στη Σχολή του Κρότωνα.

Ο ρωμαίος συγγραφέας Βοήθιος (480-524 μ.Χ.) την αναφέρει ως εμπνεύστρια της ισότητας που συνδέει τις πυθαγόριες τριάδες[8]:

$\alpha^2 + [(\alpha^2-1)/2]^2 = [(\alpha^2+1)/2]^2$, όπου α περιττός φυσικός αριθμός

3.7 ΘΥΜΑΡΙΔΑΣ Ο ΠΑΡΙΟΣ

Ο Θυμαρίδας (6^{ος}-5^{ος} π.Χ. αι.) συγκαταλέγεται μεταξύ των μεγάλων μαθηματικών της Αρχαίας Ελλάδας. Πυθαγόρειος που κατέφυγε μετά την καταστροφή της Πυθαγόρειας Σχολής στην Πάρο. Δημοσίευσε σε συνεργασία με τη Δαμώ την πυθαγόρεια γεωμετρία με τίτλο «Η προς Πυθαγόρου Ιστορία» που θεωρείται ως το πρώτο συστηματικό έργο γεωμετρίας. Ο Θυμαρίδας είναι από τους ελάχιστους Πυθαγορείους, για τη ζωή και το έργο των οποίων σώζονται στοιχεία[7,8].

Ο Ιάμβλιχος αναφέρει στην πραγματεία του «Περί της Νικομάχου αριθμητικής εισαγωγής» τρόπο επίλυσης ορισμένων μορφών γραμμικών συστημάτων, τον οποίο αποδίδει στον Θυμερίδα και τον ονομάζει «Θυμαρίδειον επάνθημα», όπου επάνθημα σημαίνει λουλούδι. Ο Θυμαρίδας είναι ο πρώτος Έλληνας μαθηματικός της αρχαιότητας που παρουσιάζει και επιλύει με αυστηρή μεθοδικότητα συστήματα. Ο Ιάμβλιχος αναφέρει την επόμενη μορφή συστηματος του οποίου τη λύση από τον Θυμαρίδα χαρακτηρίζει «γλαφυρώτατη» [7,8]:

$\chi + \psi = 2(z + \omega)$

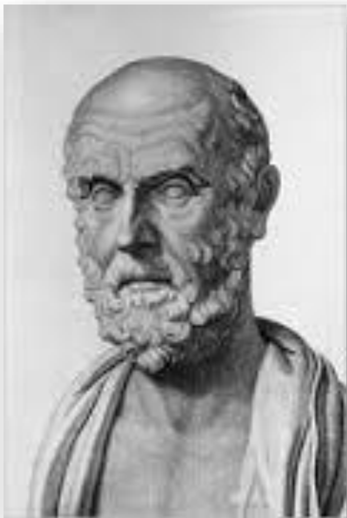
$\chi + z = 3(\psi + \omega)$

$\chi + \omega = 4(\psi + z)$

$\chi + \psi + z + \omega = 5(\psi + z)$

Ο Θυμαρίδας χρησιμοποίησε τη θεωρία των πολυγώνων αριθμών για επίλυση διοφαντικών εξισώσεων. Τα συστήματά του πρωτοδιδάχτηκαν στη Δυτική Ευρώπη το 1550 στο Πανεπιστήμιο του Στρασβούργου από τον C. Dasypodius, στον οποίο οφείλεται και η πρώτη δημοσίευση του Θυμαριδείου επανθήματος στη Δύση.

3.8 ΙΠΠΟΚΡΑΤΗΣ Ο ΧΙΟΣ



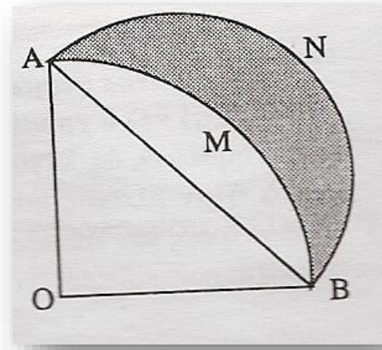
Εικόνα 3.8.1. *Ιπποκρατης ο Χίος.*

Ο Ιπποκράτης ο Χίος **(Εικ. 3.8.1)** έζησε κατά το χρονικό διάστημα 470-400 π.Χ. και θεωρείται από τους τελευταίους οπαδούς του Πυθαγόρα. Διέπρεψε ως μαθηματικός και φιλόσοφος. Ωστόσο έπεσε θύμα απάτης από τους φοροεισπράκτορες στο Βυζάντιο, κάτι που είχε ως αποτέλεσμα να χάσει ολόκληρη την περιουσία που είχε αποκτήσει από το εμπόριο. Γύρω στο 440 π.Χ. ταξίδεψε στην Αθήνα για να διεκδικήσει τη χαμένη του περιουσία. Δεν κατόρθωσε να κερδίσει τους δικαστικούς αγώνες αλλά αφιερώθηκε στη φιλοσοφία, μελέτησε μαθηματικά και ίδρυσε γεωμετρική σχολή[8].

Η συμβολή του Ιπποκράτη του Χίου στη γεωμετρία είναι η εξής[8]:

1. Είναι ο πρώτος που συνέγραψε μια συστηματικά οργανωμένη πραγματεία γεωμετρίας όπου γίνεται χρήση της αναγωγικής μεθόδου και γραμμάτων για την ονομασία σημείων, γραμμών και σχημάτων. Μέρος του έργου αυτού διασώθηκε από τον Σιμπλίκιο.
2. Πολλές προτάσεις του βιβλίου ΙΙΙ του Ευκλείδη αποδίδονται στον Ιπποκράτη. Μεταξύ αυτών είναι και το θεώρημα: «Δύο κύκλοι έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους», το οποίο ο Ιπποκράτης απέδειξε με πρωτοποριακή για την εποχή του μέθοδο και έτσι κέρδισε τη δόξα του πρώτου μαθηματικού που εμπνεύστηκε τις αρχές του απειροστικού λογισμού.

3. Με τον Ιπποκράτη εμφανίστηκαν δύο από τα προβλήματα της Αρχαίας Ελλάδας «ο τετραγωνισμός του κύκλου» και το «δήλιο πρόβλημα». Στην προσπάθειά του να λύσει το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου ο Ιπποκράτης επινόησε τον μηνίσκο **(Εικ. 3.8.2)**. Συγκεκριμένα αν ΑΟΒ είναι ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο και σχεδιάσουμε το τεταρτοκύκλιο ΟΑΜΒ και το ημικύκλιο ΑΝΒ, τότε προκύπτουν δύο κυκλικά τόξα, που ορίζουν το γραμμοσκιασμένο σχήμα και που ονομάζεται μηνίσκος. Απέδειξε ότι το εμβαδόν του μηνίσκου ΑΜΒΝ είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ. Με την απόδειξη αυτή ο Ιπποκράτης διαπίστωσε ότι ο μηνίσκος, ως ισοδύναμος με το τρίγωνο ΑΟΒ, μπορεί να τετραγωνιστεί.



Εικόνα 3.8.2. *Αν ΟΑΒ είναι ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο και γράφουμε το τεταρτοκύκλιο ΟΑΜΒ και το ημικύκλιο ΑΝΒ, τότε προκύπτουν δυο κυκλικά τόξα, που ορίζουν το γραμμοσκιασμένο σχήμα, που ονομάζεται μηνίσκος.*

4. Ασχολήθηκε με το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου. Το συγκεκριμένο πρόβλημα απαιτεί την κατασκευή (με κανόνα και διαβήτη) μιας ακμής x με την ιδιότητα $\chi^3=2\alpha^3$, όπου α η ακμή δοσμένου κύβου. Ο Ιπποκράτης αναγνώρισε ότι για να λυθεί η εξίσωση αυτή, πρέπει να επιτευχθεί η παρεμβολή μεταξύ των γνωστών ευθύγραμμων τμημάτων α και 2α, δύο μέσων αναλόγων χ και ψ, τέτοια ώστε να ισχύει: $\alpha/\chi = \chi/\psi = \psi/2\alpha$. Αν πραγματοποιηθεί αυτό, η ακμή του διπλάσιου κύβου θα είναι η χ. Από αυτή τη σχέση προκύπτει $\chi^2=\alpha\psi$ και $\psi^2=2\alpha\chi$, από τις οποίες προκύπτει: $(\chi^2/\alpha)^2=2\alpha\chi \Rightarrow \chi^4=2\alpha^3\chi \Rightarrow \chi^3=2\alpha^3$

   Οι μαθηματικές του αρχές ήταν Πυθαγόρειες, και είναι πιθανό για τη γεωμετρία εκείνων να είχε πληροφορίες από δημοσιεύσεις του Φιλολάου (440 π.χ.) ή του αρχαιότερου 'Ιππασου (~510 π.χ.). Το σύνολο της μαθηματικής του δράσης του χάρισε τον τίτλο του "Ευφυούς" γεωμέτρη, ο οποίος με το πρωτοπόρο έργο του, ώθησε την ελληνική γεωμετρία σε νέες κατακτήσεις.

3.9 ΑΡΧΥΤΑΣ Ο ΤΑΡΑΝΤΙΝΟΣ

Εικόνα 3.9.1. *Αρχύτας ο Ταραντίνος.*

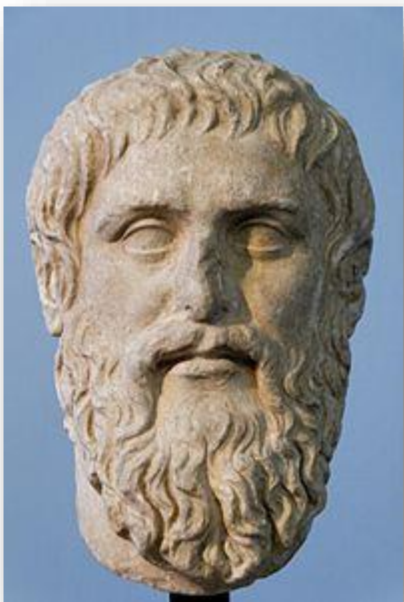
Ο Αρχύτας ο Ταραντίνος **(Εικ. 3.9.1)** (440-360 π.Χ) θεωρείται ο τελευταίος των Πυθαγορείων. Ήταν γιος του Μνησάρχου, μαθητής του Φιλολάου και διοίκησε για πολλά χρόνια τον Τάραντα. Ανάμεσα στους μαθητές του συγκαταλέγονται ο Πλάτωνας και ο Εύδοξος. Έτσι ήταν μεγάλη η επίδρασή του στην ανάπτυξη των μαθηματικών της Ακαδημίας και στη Σχολή της Κυζίκου. Έμεινε στην ιστορία των μαθηματικών από μία πνευματώδη λύση που έδωσε στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, η οποία στηρίζεται στη μέθοδο αναγωγής του Ιπποκράτη του Χίου, με την παρεμβολή δυο μέσων αναλόγων, μεταξύ δυο δοθέντων μηκών.

Ο Αρχύτας είναι ο πρώτος που εφάρμοσε την κίνηση στη λύση γεωμετρικών προβλημάτων. Είχε κατασκευάσει «ευφυέστατες» συσκευές για την χάραξη διαφόρων καμπυλών και είχε βαθιά γνώση της γεωμετρίας του χώρου. Σε αυτόν αποδίδεται ο σχηματισμός του κώνου και του κυλίνδρου, με κίνηση μιας ευθείας και η μελέτη της «σπείρας»[3].

Σε απόσπασμα από το σύγγραμμά του «Διατριβαί», όπως αναφέρεται από τον Στοβαίο, φαίνεται ότι ο Αρχύτας κάνει λόγο για μια γενική αριθμητική την οποία ονομάζει λογιστική. Είναι αξιοσημείωτη η ανακάλυψή του σύμφωνα με την οποία η τετραγωνική ρίζα κάθε μη τετραγώνου αριθμού βρίσκεται με το σχηματισμό άπειρων το πλήθος μουσικών αναλογιών, δηλαδή με το σχηματισμό δύο ακολουθιών, μιας φθίνουσας, που αντιστοιχεί στην ακολουθία των αριθμητικών μέσων, και μιας αύξουσας, που αντιστοιχεί στην ακολουθία των αρμονικών μέσων. Έτσι ο Αρχύτας θεωρούσε τον αριθμό $\sqrt{\alpha}$, όπου α ≠τετραγώνου ακεραίου, ως φράγμα δύο ακολουθιών, μίας αύξουσας και μίας φθίνουσας.

Από τον Βοήθειο διατυπώνεται και το εξής θεώρημα του Αρχύτα «μεταξύ δύο αριθμών με λόγο $\frac{\nu}{\nu+1}$, όπου ν = 1,2,3…, δεν υπάρχει γεωμετρικός μέσος»[7,8].

3.10 ΠΛΑΤΩΝ Ο ΑΘΗΝΑΙΟΣ



Εικόνα 3.10.1. *Πλάτων ο Αθηναίος*

Ο Πλάτων ο Αθηναίος **(Εικ. 3.10.1)** έζησε στο διάστημα (427-347 π.χ.). Ήταν ένας από τους μεγαλύτερους φιλοσόφους της αρχαίας Ελλάδας. Είχε λάβει εξαιρετική μόρφωση και αγωγή. Μυήθηκε στη φιλοσοφία και επηρεάστηκε αποφασιστικά από τις ιδέες του Σωκράτη. Το 387 π.Χ. ίδρυσε την «Ακαδημία» στην Αθήνα, η οποία παρέμεινε για 900 περίπου χρόνια ένα σπουδαίο πνευματικό κέντρο. Από το συνολικό του έργο σώζονται 36 έργα, τα οποία εκτός από την "Απολογία του Σωκράτη" έχουν τη μορφή διαλόγου. Σε όλα εκτός των "Νόμων" τη συζήτηση διευθύνει ο Σωκράτης, ενώ ο τίτλος του καθενός είναι το όνομα του σπουδαιότερου συνομιλητή ή αφηγητή[7,8].

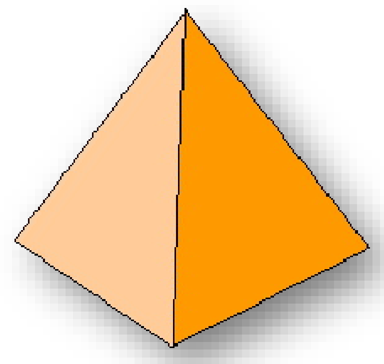
Είναι χαρακτηριστικό ότι ο Πλάτωνας με τις κατευθύνσεις που έδινε στους μαθηματικούς της Ακαδημίας βοήθησε στον καθορισμό το θεωρητικού χαρακτήρα των μαθηματικών. Καθόρισε τους σκοπούς της μαθηματικής έρευνας και σταθεροποίησε τη μέθοδο στα μαθηματικά χρησιμοποιώντας κυρίως την παραγωγική και αναλυτική αποδεικτική διαδικασία. Χάρη στον ενθουσιασμό του για τη γεωμετρία βοήθησε πολύ στην ανάπτυξή της[7,8].

Ο Πλάτωνας διαιρούσε τα μαθηματικά σε4 κλάδους: στην αριθμητική, στη γεωμετρία, στη στερεολογία και στην αστρονομία. Σκοπός των μαθηματικών είναι να οδηγήσουν την ψυχή προς την αλήθεια, να δημιουργήσουν την καλλιέργεια του πνεύματος ώστε να γίνει κατανοητός ο τελικός σκοπός της φιλοσοφίας που είναι η ιδέα του αγαθού. Μερικές από τις εργασίσες του περιλαμβάνουν τα εξής[7,8]:

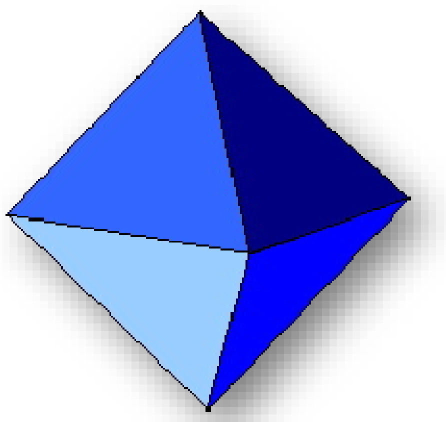
- Στον «Παρμενίδη» χωρίζει του ακέραιους σε κατηγορίες που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό άρτιων και περιττών αριθμών.
- Στον «Θεαίτητο» ο Πλάτωνας διατυπώνει την πρόταση ότι στο σύνολο των ακεραίων οι μισοί είναι αριθμοί άρτιοι και οι μισοί αριθμοί περιττοί.
- Δεν ικανοποιήθηκε από τους ρητούς αριμούς, εφόσον δεν μπορούσε μέσα από αυτούς να εκφράσει τους ασύμμετρους. Έτσι κατασκεύασε ένα ευρύτερο αριθμητικό σύστημα, τους «ιδεατούς αριθμούς». Για τους αριθμούς αυτούς δεν υπάρχουν σαφείς και πλήρεις πληροφορίες. Είναι γνωστό μόνο ότι δίπλα από τον αριθμό «ένα» τοποθετούσε τον ιδεατό αριθμό «Ένα», με την ιδιότητα «διαιρούμενος επ’ άπειρον με το δύο, να μένει «αναλοίωτος». Με τον ίδιο τρόπο όριζε ο Πλάτωνας και τον ιδεατό αριθμό «δύο».
- Ο Ήρων αναφέρει ότι ο Πλάτωνας ασχολήθηκε και με τις Πυθαγόρειες τριάδες, δηλαδή με τις τριάδες αριθμών που επαληθεύουν τη σχέση $x^2 + y^2 = z^2$ του Πυθαγόρειου θεωρήματος και ότι δίνει ως λύση της συγκεκριμένης εξίσωσης τις τριάδες: $(\frac{\alpha}{2})^2 - 1$, α, $(\frac{\alpha}{2})^2 + 1$, αντίστοιχα όταν α είναι άρτιος αριθμός.
- Στα Πλατωνικά έργα «Μένων» και «Παρμενίδης» παρουσιάζονται διάφοροι γεωμετρικοί ορισμοί. Για την ευθεία ο Πλάτων δίνει το εξής ορισμό: «ευθεία είναι η γραμμή που το μέσον της καλύπτει τα άκρα».
- Δεν είναι υπερβολή να ειπωθεί ότι η θεωρία των Συνόλων είναι δημιούργημα του Πλάτωνα.

- Σύμφωνα με τον Ευτόκιο έδωσε λύση στο Δήλιο πρόβλημα, το πρόβλημα διπλασιασμού του κύβου με χρήση «μηχανικής» κατασκευής η οποία χρησιμοποιεί περιστροφή και μετατόπιση και όχι απλά με κανόνα και διαβήτη.
- Έδωσε γενική μορφή στην Αναλυτική μέθοδο και συνέβαλε στην έρευνα των Γεωμετρικών τόπων.
- Είναι ο θεμελιωτής της στερεομετρίας. Ένα θέμα για το οποίο ο Πλάτων δίνει πολύτιμες πληροφορίες έχει σχέση με τα πέντε στερεά σώματα, που ονομάζονται και πλατωνικά στερεά. Στον Τιμαίο που είναι η ιστορία της δημιουργίας του κόσμου εισάγει ένα είδος δημιουργού. Ο δημιουργός πλάθει τον κόσμο χρησιμοποιώντας τις ιδέες ως πρότυπα και δίνει γεωμετρική δομή στον αέρα, στο χώμα, στη φωτιά και στο ύδωρ, που αποτελούν τα τέσσερα παραδοσιακά στοιχεία της αρχαίας ελληνικής φυσικής φιλοσοφίας. Τα βασικά συστατικά της ύλης είναι δυο είδη ορθογωνίων τριγώνων: το ισοσκελές και το σκαληνό. Όλα τα άλλα μπορούν να κατασκευαστούν με τη χρήση αυτών των δύο. Έτσι η φωτιά δημιουργείται από μικροσκοπικές πυραμίδες που προέρχονται από ισόπλευρα τρίγωνα, τα οποία με τη σειρά τους κατασκευάζονται από έξι σκαληνά ορθογώνια τρίγωνα. Ο αέρας προέρχεται από τα οκτάεδρα, το ύδωρ από τα εικοσάεδρα και η γη από κύβους. Τα δωδεκάεδρα χρησιμοποιούνται για να «στολίζουν» το σύμπαν. Το σύμπαν στον Τιμαίο είναι σφαιρικό και η πυραμίδα, ο κύβος, το οκτάεδρο και το δωδεκάεδρο είναι τα μοναδικά πέντε κανονικά στερεά που μπορούν να εγγραφούν μέσα σε μία σφαίρα. Ο Πλάτων δεν περιλαμβάνει κάποια μαθηματική απόδειξη για την ομάδα των πέντε σωμάτων στον Τιμαίο[10]. Συγκερκιμένα σε κάθε ένα από αυτά τα στοιχεία αντιστοιχεί και ένα κανονικό κυρτό πολύεδρο εγγράψιμο σε μια σφαίρα. Όλες οι έδρες των πολυέδρων αυτών είναι κανονικά πολύγωνα, όλες οι ακμές είναι μεταξύ των ίσες και όλες οι γωνίες του στερεές και επίπεδες είναι αντίστοιχα μεταξύ των ίσες. Τέτοια πολύγωνα υπάρχουν μόνο πέντε. Είναι το τετράεδρο, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο, ο κύβος και το δωδεκάεδρο. Σύμφωνα με τον Πλάτωνα η τελειότητα του κόσμου μοιάζει με την απαράμιλλη ομορφιά των κανονικών αυτών πολυέδρων.

Το **τετράεδρο (Εικ. 3.10.2)** συμβολίζει τη φωτιά.Έχει 4 έδρες οι οποίες είναι ισόπλευρα τρίγωνα, 4 κορυφές και 6 ακμές

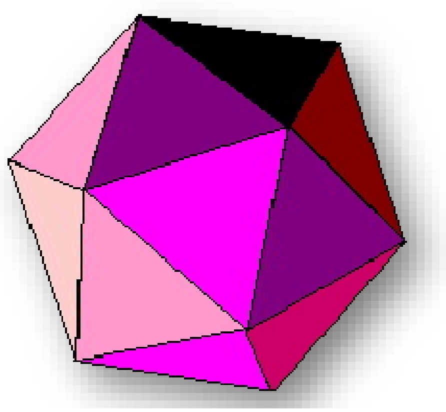


Εικόνα 3.10.2. *Το τετράεδρο.*



Εικόνα 3.10.3. *Το οκτάεδρο.*

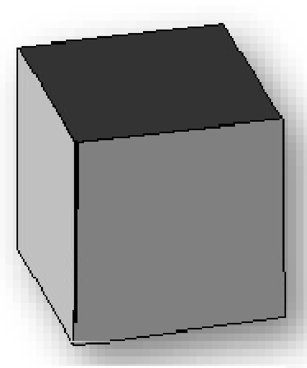
Το **οκτάεδρο (Εικ. 3.10.3)** συμβολίζει τον αέρα.Έχει 8 έδρες οι οποίες είναι ισόπλευρα τρίγωνα , 6 κορυφές και 12 ακμές



Εικόνα 3.10.4. *Το εικοσάεδρο.*

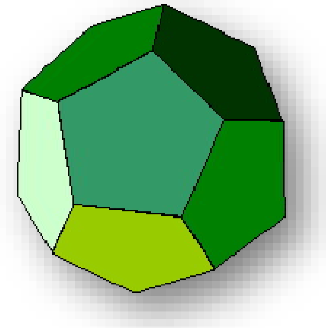
Το **εικοσάεδρο (Εικ. 3.10.4)** συμβολίζει το νερό. Αποτελείται από 20 έδρες οι οποίες είναι ισόπλευρα τρίγωνα, 12 κορυφές και 30 ακμές.

Ο **κύβος (Εικ. 3.10.5)** συμβολίζει τη Γη. Αποτελείται από 6 έδρες οι οποίες είναι τετράγωνα, 8 κορυφές και 12 ακμές.



Εικόνα 3.10.5. *Ο κύβος.*

Το **δωδεκάεδρο (Εικ. 3.10.6)** συμβολίζει το Σύμπαν.Αποτελείται από 12 έδρες οι οποίες είναι κανονικά πεντάγωνα, 20κορυφές και 30 ακμές.



Εικόνα 3.10.6. *Το δωδεκάεδρο.*

Δηλαδή το τετράεδρο, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο κατασκευάζονται από ίσα μεταξύ των ισόπλευρα τρίγωνα, το εξάεδρο δηλαδή ο κύβος κατασκευάζεται από ίσα τετράγωνα και το δωδεκάεδρο κατασκευάζεται από ίσα κανονικά πεντάγωνα.

Τα πέντε αυτά αποκαλούνται σήμερα πλατωνικά στερεά, επειδή ο Πλάτωνας τα χρησιμοποίησε για την συγκρότηση του υλικού σύμπαντος. Ένας σπουδαίος μαθηματικός και συνεργάτης του Πλάτωνα στην Ακαδημία του, ο Θεαίτητος προχώρησε στην κατασκευή αυτών των στερεών και μάλλον είναι αυτός που απέδειξε ότι υπάρχουν ακριβώς πέντε. Την ίδια πρόταση περί μοναδικότητας βρίσκουμε και στον Ευκλείδη.

3.11 ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ Ο ΑΘΗΝΑΙΟΣ

Ο Θεαίτητος ο Αθηναίος (415-369 π.χ.) ήταν μαθητής του Πλάτωνα και αργότερα καθηγητής της Ακαδημίας. Εργάσθηκε κυρίως επάνω σε δύο σπουδαία θέματα. Το ένα αφορούσε τα αδύμμετρα μεγέθη και το άλλο την γεωμετρική κατασκευή των 5 πλατωνικών στερεών, δηλαδή του κανονικού τετραέδρου, του κανονικού εξαέδρου, του κανονικού οχταέδρου και του κανονικού δωδεκαέδρου[7,8]. Άλλες εργασίες του περιλαμβάνουν τα εξής[7,8]:

- Διέκρινε τις τετραγωνικές ρίζες που είναι αριθμοί σύμμετροι (π.χ. $x^2 = 4$) από τις τετραγωνικές ρίζες που είναι αριθμοί ασύμμετροι (π.χ. $\chi^2 = 5$). Ονόμαζε τις πρώτες «μήκη» και τις δεύτερες «δυνάμεις». Ταξινόμησε, όπως και οι Πυθαγόρειοι τους αριθμούς σε τετράγωνους, οι οποίοι παράγονται από τον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με τον εαυτό του (π.χ. $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$) και ετερομήκεις , οι οποίοι παράγονται από τον πολλαπλασιασμό δύο διαφορετικών μεταξύ τους αριθμών (π.χ. $6 = 2 \cdot 3$).

- Συνεχίζοντας τις έρευνες του Θεοδώρου του Κυρηναίου κατόρθωσε να αποδείξει ότι ο αριθμός x για τον οποίο ισχύει $x^2 = α$, όπου α ακέραιος διάφορος τετραγώνου ακεραίου είναι αριθμός ασύμμετρος.
- Τα περί «πυραμίδος και κώνου» του XIII βιβλίου του Ευκλείδη οφείλονται μάλλον στον Θεαίτητο, που ασχολήθηκε ακόμη και με προβλήματα που αναφέρονται στον τετραγωνισμό της παραβολής.

Μετά τον πρόωρο θάνατό του, ο Πλάτωνας του αφιέρωσε τον διάλογο "Θεαίτητος", στον οποίο φαίνεται ο θαυμασμός του ιδίου και της σχολής για το έργο του.

3.12 ΕΥΔΟΞΟΣ Ο ΚΝΙΔΙΟΣ

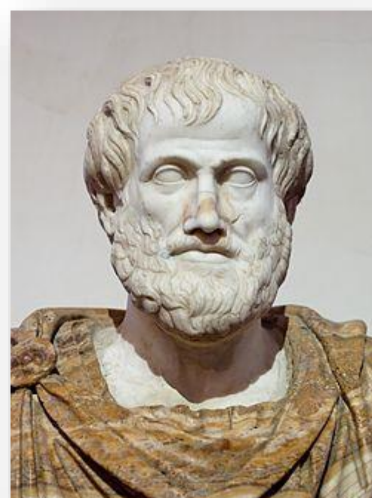
Ο Εύδοξος ο Κνίδιος (408-355 π.Χ.) είναι γνωστός και ως «Μέγας Εύδοξος» ή και «Ένδοξος Εύδοξος». Ο Ερατοσθένης τον αποκαλεί «θεοειδή». Ήταν γιος του Αισχύνου και άνηκε στη Φιλοσοφική Σχολή της Κυζίκου. Παρακολούθησε μαθήματα του Αρχύτα στην Τάραντα και του Φιλιστίωνα στη Σικελία. Μαθήτευσε στην Ακαδημία του Πλάτωνος και δίπλα στους Αιγύπτιους ιερείς. Σύμφωνα με τον Διογένη τον Λαέρτιο ο Εύδοξος σπούδασε μαθηματικά, αστρονομία, μηχανική, μουσική και Ιατρική. Πληροφορίες για το έργο του έχουμε από τον Αρχημήδη, τον Ερατοσθένη, τον Εύδημο, τον Πρόκλο, τον Ευτόκιο και τον Βυζαντινό Ιωάννη τον Φιλόπονο. Στον Εύδοξο απόδίδεται όλη σχεδόν η ύλη του V βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, που περιέχει τη γενική θεωρία των αναλογιών.

Ο Εύδοξος πρόσθεσε τρεις ακόμη αναλογίες στις ήδη γνωστές Πυθαγόρειες και ασχολήθηκε με το πρόβλημα της τομής. Συγκεκριμένα ο Εύδοξος όρισε την τέταρτη (η υπεραντία αρμονική), την πέμπτη (η υπεραντία αριθμητική) και την έκτη (η υπεραντία γεωμετρική) που είναι αντίστοιχα οι αναλογίες: $\frac{\alpha-\mu}{\mu-\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha-\mu}{\mu-\beta} = \frac{\beta}{\mu}$, $\frac{\alpha-\mu}{\mu-\beta} = \frac{\mu}{\alpha}$.

Η κατανίκηση της κρίσης που προκλήθηκε από την εμφάνιση των μη σύμμετρων λόγων, οφείλεται στη θεωρία των λόγων του Ευδόξου. Πριν από τον Εύδοξο η θεωρία των αναλογιών περιοριζόταν σε συμμετρικά γεωμετρικά μεγέθη. Ο Εύδοξος γενίκευσε τη θεωρία αυτή για συμμετρικά και ασύμμετρα μεγέθη. Η επινόηση και η απόδειξη των ιδιοτήτων της διαίρεσης ενός ευθύγραμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο (χρυσή τομή) οφείλεται στον Εύδοξο. Σύμφωνα με τον Αρχημήδη απέδειξε και προτάσεις από τη στερεομετρία που αφορούν σχέσεις όγκων ισοϋψών στερεών, όπως πυραμίδας και κώνου, κώνου και κυλίνδρου και πυραμίδας και πρίσματος. Επιπλέον στον Εύδοξο αποδίδεται η «Ιπποπέδη» καμπύλη, δηλαδή η καμπύλη που προκύπτει από την τομή σφαίρας και κυλίνδρου, καθώς και η απόδειξη του θεωρήματος ότι «Δυο σφαίρες είναι μεταξύ τους ως οι κύβοι των διαμέτρων τους»[7,8].

Γνώστης της σφαιρικής γεωμετρίας ο Εύδοξος κατέκτησε τον τίτλο του πατέρα της ουράνιας μηχανικής. Με το σύστημα των ομόκεντρων σφαιρών που επινόησε, έδωσε την πρώτη συστηματική εξήγηση των κινήσεων του Ήλιου, της Σελήνης και των πλανητών, τονίζοντας για μια ακόμα φορά την εμμονή των αρχαίων Ελλήνων στη σφαιρική τελειότητα. Εισήγαγε επίσης τη γεωμετρία στην επιστήμη της αστρονομίας και τόνισε πρώτος την ανάγκη αλληλεπίδρασης μεταξύ παρατηρήσεων και θεωρίας που χαρακτηρίζει από τότε την ανάπτυξη της αστρονομίας. Χρησιμοποιούσε επιστημονικές μεθόδους για την έρευνα επιστημονικών και αστρονομικών θεμάτων. Γι' αυτό και θεωρείται πατέρας της επιστημονικής αστρονομικής παρατηρησης και της μαθηματικής έρευνας[7,8].

3.13 ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ



Εικόνα 3.13.1. *Ο Αριστοτέλης.*

Ο Αριστοτέλης ο Σταγειρίτης **(Εικ. 3.13.1)** (384-322 π.Χ.) είναι μεγάλος φιλόσοφος και μία από τις ισχυρότερες διάννοιες της Αρχαίας Ελλάδας. Υπήρξε γιος του Νικομάχου και της Φαιστιάδος, μαθητής του Πλάτωνα, δάσκαλους του Μεγάλου Αλεξάνδρου και ιδρυτής του «Λυκείου», δηλαδή της Αριστοτελικής Σχολής. Το «Λύκειο» ονομαζόταν και «Περιπατητική Σχολή» από τον τρόπο που γίνονταν οι συζητήσεις. Εκεί εκτός των άλλων διδάσκονταν και καλλιεργούνταν τα μαθηματικά. Ο Αριστοτέλης, παρόλο που δεν έδειχνε αποκλειστικό ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, έδωσε στη λογική του παραγωγιού συλλογισμού την μορφή που έχει εδώ και 23 αιώνες και συνέβαλε έμμεσα στην πρόοδο των μαθηματικών. Επιπλέον με το να παραστήσει τις έννοιες με γράμματα της αλαφαβήτου, έδωσε ένα παράδειγμα συλλογισμού το οποίο ακολούθησαν οι μεταγενέστεροι και οδήγησε ύστερα από πολλές επεξεργασίες στη σημερινή άλγεβρα. Ήταν ο πρώτος που έκανε τη διάκριση μεταξύ γεωμετρίας και γεωδαισίας και μεταξύ αριθμητικής (θεωρίας των αριθμών) και λογιστικής (πρακτικής αριθμητικής)[7,8].

Το αριστοτελικό έργο αποτελείται από 1000 πραγματείες από τις οποίες διασώθηκαν μόνο 162. Ιδιαίτερα θέση στο έργο του κατέχουν τα «Μετεωρολογικά» καθώς είναι το μοναδικό σύγγραμμα που ασχολείται με ποικίλους τομείς της επιστήμης. Στην πραγματεία του «Φυσικά» παρέχει την ερμηνεία του απείρου και των απειροστών. Διακρίνει το «άπειρον δυνάμει» και το «άπειρον ενεργεία». Για το πρώτο παρουσιάζει ως παράδειγμα το όριο φθίνουσας γεωμετρικής προόδου. Έτσι κατά τον Αριστοτέλη, υποθέτουμε ότι έχουμε μία ράβδο μήκους 1 μονάδας μήκους. Από τη ράβδο παίρνουμε το ½ του μήκους, από το υπόλοιπο παίρνουμε το μισό δηλαδή το ¼ του αρχικού μήκους κ.ο.κ επ’ άπειρον. Σύμφωνα με τον φιλόσοφο η άπειρη λήψη δεν θα βγει από το πεπερασμένο μήκσο της ράβδου, δηλαδή μετά από άπειρες λήψεις θα προκύψει ολόκληρη η ράβδος της μίας μονάδας μήκους. Τις άπειρες αυτές λήψεις τις ονομάζει «άπειρον δυνάμει», διότι το άπειρο αυτό υπάρχεις την πραγματικότητα μέσα σε πεπερασμένο μέγεθος. Όσον αφορά το «άπειρον ενεργεία», ο Αριστοτέλης ισχυρίζεται ότι νοείται αλλά δεν υπάρχει στην πραγματικότητα. Εάν π.χ. αριθμούμε 1,2,3,4,5 κτλ θα μετρούμε επ’ άπειρον χωρίς να συλλαμβάνουμε αυτό το άπειρο. Επομένως δεν υπάρχει άπειρος αριθμός[7,8].

Είναι χαρακτηριστικό ότι ο Αριστοτέλης είχε συλλάβει και είχε διατυπώσει την έννοια του ασύμμετρου αριθμού. Στο έργο «Ηθικά Νικομάχεια» αναφέρεται ότι η αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ δεν ισχύει μόνο για τους ακέραιους αριθμούς αλλά για όλους συμπεριλαμβανομένων και των ασύμμετρων.

Ο Αριστοτέλης θεωρείται ο πατέρας της Λογικής και ο θεμελιωτής της μαθηματικής λογικής. Οι θεμελιώδεις αρχές της Αναλυτικής που διατύπωσε είναι α) η αρχή της ταυτότητας, β) η αρχή της αντιφάσεως, γ) η αρχή του τρίτου ή του μέσου αποκλίσεως και δ) η αρχή του αποχρώντος λόγου.

Είναι αξιοσημείωτο ότι σε πολλά έργα του παρεμβάλλει γεωμετρικές αποδείξεις είτε ως παραδείγματα κανόνων συλλογισμού είτε για να αποδείξει διάφορους ισχυρισμούς του.

Η σημαντική συμβολή του Αριστοτέλη στην εξέλιξη των μαθηματικών έγκειται στο ότι συγκρότησε τη μαθηματική επιστήμη από μεθοδολογική άποψη. Εμβάθυνε όσο κανείς άλλος στα στοιχεία τα οποία χρειάζονται για να γίνει μια μαθηματική απόδειξη. Έσωσε για το σκοπό αυτό τους ορισμούς του αξιώματος, του αιτήματος, του θεωρήματος και του πορίσματος. Διατύπωσε τις επόμενες αποδεικτικές μεθόδους[7,8].

α) την εις άτοπο απαγωγή. Οδηγούμαστε στη σωστή λύση απορρίπτοντας τις παραδοχές που δεν ισχύουν. Έστω ότι για μία πρόταση ισχύει α ή β. Αν δεχτούμε ότι ισχύει το β και στη συνέχεια δείξουμε ότι αυτή η παραδοχή είναι λανθασμένη, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ισχύει το α.

β) την τέλεια επαγωγή ή αναδρομικό συλλογισμό. Εάν αποδείξουμε ότι κάτι ισχύει για ένα αντικείμενο που ανήκει σε μία τάξη, ισχύει και για οποιοδήποτε αντικείμενο που ανήκει στην τάξη αυτή.

γ) την αναλυτική. Θεωρούμε ως αληθή την πρόταση που θέλουμε να δείξουμε. Με μία σειρά συλλογισμών φτάνουμε σε μία αλήθεια γνωστή από άλλα περιστατικά και αναγωγικά συμπεραίνουμε ότι η πρόταση που δεχθήκαμε ως αληθή είναι αληθής.

δ) τη συνθετική. Από τους ορισμούς και τα αξιώματα και από τις απλούστερες προτάσεις που αποδεικνύονται από αυτά οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η πρόταση είναι ορθή.

και ε) την ενορατική. Ο Αριστοτέλης πίστευε ότι ορισμένες γεωμετρικές σχέσεις ανακαλύπτονατι κατόπιν ενεργειών των λυτών με διαίρεση των σχημάτων με γραμμές που δεν υπήρχαν αρχικά στα σχήματα.

3.14 ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Εικόνα 3.14.1. *Ο Ευκλείδης.*

Ο Ευκλείδης **(Εικ. 3.14.1)** ($4^{ος}$ – $3^{ος}$ π.Χ. αι.) ονομάζεται και Ευκλείδης ο Στοιχειωτής. Ο τόπος και ο χρόνος γέννησης και θανάτου του παραμένουν άγνωστα. Σύμφωνα με εξακριβωμένες πληροφορίες έζησε στην Αλεξάνδρεια, ο Πτολεμαίος ο Α' του ανέθεσε τη διεύθυνση της μαθηματικής σχολής του Μουσείου και ήταν εξοικειωμένος με την πλατωνική φιλοσοφία. Κατά μία εκδοχή σπούδασε στην Ακαδημία και υπήρξε μαθητής του Αριστοτέλη. Κατά μία άλλη εκδοχή υπήρξε μαθητής του Πλάτωνα. Συγκαταλέγεται δικαίως μεταξύ των μεγάλων μαθηματικών της Αρχαιότητας με το γεωμετρικό του έργο «Στοιχεία» **(Εικ. 3.14.2)**. Με τον όρο «Στοιχεία» ο Ευκλείδης εξέδωσε καθετί που παρήγαγε η ελληνική επιστήμη στη γεωμετρία και τη θεωρία των αριθμών για πολλούς αιώνες, από τον Θαλή μέχρι και το 300 π.Χ. Πριν από τον Ευκλείδη αντίστοιχο έργο είχαν εκδώσει ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο Λέων και ο Θεύδιος ο Μάγνης. Τα «Στοιχεία» όμως του Ευκλείδη επισκίασαν τις προηγούμενες εκδόσεις. Αποτελούνται από 13 βιβλία και περιέχουν συνολικά 465θεωρήματα και προβλήματα. Τα I, II και IV βιβλία αποδίδονται στους Πυθαγορείους. Το V και μέρος του VI Βιβλίου αποδίδονται στον Εύδοξο. Τα βιβλία X και XIII αποδίδονται στους Πυθαγορείους, στον Θεαίτητο και στον Εύδοξο, στον οποίο αποδίδονται ακόμη τα θεωρήματα 11-15 του XII βιβλίου[7,8].

Στα «Στοιχεία» γίνεται χρήση της αποδεικτικής μεθόδου και από γενικές αρχές καταλήγουν σε ειδικότερες μαθηματικές και γεωμετρικές προτάσεις. Κάθε μερική πρόταση είναι αληθής όταν παράγεται από τις γενικές αρχές προοδευτικά με μία σειρά ενδιαμέσων προτάσεων που έχουν αποδειχθεί. Ολόκληρο το γεωμετρικό σύστημα των «Στοιχείων» στηρίζεται σε θεμελιώδεις αρχές, τις οποίες ο Ευκλείδης διακρίνει σε «όρους» (ορισμούς), σε «αιτήματα» και σε «κοινές έννοιες». Στα «Στοιχεία» περιέχονται 5 αιτήματα και 9 αξιώματα, δηλαδή 14 θεμελιώδεις «προτάσεις», που σήμερα ονομάζονται αξιώματα. Οι μόνες γεωμετρικές κατασκευές που επιτρέπονται είναι αυτές που χρησιμοποιούν κανόνα και διαβήτη[7,8].

Δεν υπάρχει καμία ένδειξη ότι στα «Στοιχεία» δεν περιέχονται και πρωτότυπες εργασίες του Ευκλείδη. Απεναντίας πολλά θεωρήματα έχουν αποδειχθεί για πρώτη φορά από αυτόν. Είναι ευρέως γνωστό το Θεώρημα του Ευκλείδη σύμφωνα με το οποίο « σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η κάθετη πλευρά είναι μέση ανάλογος της υποτείνουσας και της προβολής της επί την υποτείνουσα, δηλαδή $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB}$.

Άλλα μαθηματικά έργα του Ευκλείδη είναι τα «Δεδομένα», το «Περί διαιρέσεων», τα «Ψευδάρια», τα «Πορίσματα» οι «Τόποι προς επιφανεία» και οι «Κωνικαί τομαί». Τα τέσσερα τελευταία δεν σώζονται μέχρι σήμερα. Εκτός από τα μαθηματικά έργα ο Ευκλείδης έγραψε και αστρονομικές, φυσικές, μηχανικές και μουσικές πραγματείες[7,8]

.

Εικόνα 3.14.2. *Έργο του Ευκλείδη.*

3.15 ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

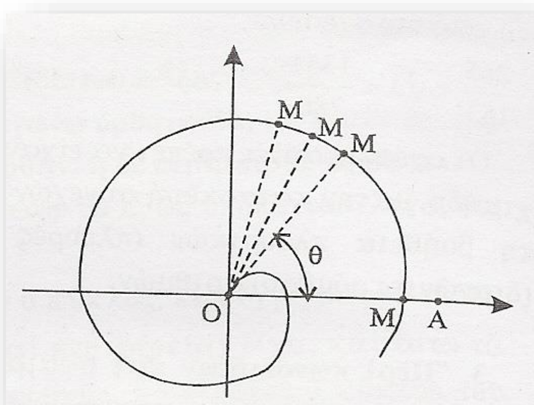
Εικόνα 3.15.1. Ο Αρχιμήδης.

Ο Αρχιμήδης από τις Συρακούσες **(Εικ. 3.15.1)** (287-212 π.χ.) ήταν γιος του μαθηματικού και αστρονόμου Φειδία. Η οικογένεια του ήταν αρκετά ευκατάστατη και συνδεόταν με φιλία και μακρινή συγγένεια με το βασιλικό ζεύγος των Συρακουσών. Οι πληροφορίες για το θάνατό του συγκλίνουν στο ότι φονεύθηκε από έναν ρωμαίο στρατιώτη αμέσως μετά την άλωση των Συρακουσών από τον ρωμαίο ύπατο Μάρκο Κλαύδιο Μάρκελλο, τη στιγμή που μελετούσε ένα γεωμετρικό θέμα. Είναι γνωστές οι ρήσεις του Αρχιμήδη όταν ανακάλυψε τον νόμο των μοχλών, το νόμο της άνωσης και λίγο πριν τη δολοφονία του: «Δος μοι τα πα στω και ταν γαν κινασώ», «εύρηκα, εύρηκα», «μη μου τους κύκλους τάραττε» κλπ. Λέγεται ότι με ένα πλήθος μηχανημάτων δικής του επινόησης όπως καταπέλτες, βαλλίστρες, άρπαγες, κάτοπτρα κ.ά. κατόρθωσε να παρατείνει τη πολιορκία των Συρακουσσών από τους Ρωμαίους επί τρία χρόνια[7,8].

Σώζονται 16 από τα 41 γνωστά έργα του Αρχιμήδη τα οποία είναι υψηλού επιπέδου και απευθύνονται σε ερευνητές. Στις εργασίες του χρησιμοποιεί δύο αποδεικτικές μεθόδους: «τη μέθοδο της εξαντλήσεως» και τη «μηχανική μέθοδο». Η πρώτη μέθοδος συνίσταται στην παρεμβολή του ζητούμενου προς προσδιορισμό στοιχείου μεταξύ δύο σειρών ομοειδών προς το αρχικό στοιχείων που συγκλίνουν προς αυτό από αντίθετες κατευθύνσεις. Η μέθοδος αυτή δεν διαφέρει από την ολοκλήρωση. Η «μηχανική μέθοδος» συνίσταται στον καθορισμό των σχέσεων επιφανειών διαφόρων σχημάτων με παρέμβαση της στατικής. Τη συγκεκριμένη μέθοδο, την οποία χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης στην πραγματεία του «τετραγωνισμός παραβολής», τη θεωρεί μόνο ως όργανο έρευνας και όχι αποδεικτική μέθοδο. Ο Αρχιμήδης συνήθιζε να στέλνει τις μαθηματικές του προτάσεις με ή χωρίς αποδείξεις στους φίλους του στην Αλεξάνδρεια, ιδίως στον Κόνωνα και στον Δοσίθεο και να περιμένει τη γνώμη τους. Συνήθιζε να στέλνει ακόμη και λανθασμένες προτάσεις για να ελέγξει μαθηματικούς της Αλεξάνδρειας.

Η συνεισφορά του στα μαθηματικά είναι πολύ μεγάλη. Μεταξύ άλλων ασχολήθηκε με τη μέτρηση του όγκου του κυλίνδρου και του κόλουρου κώνου, της επιφάνειας και του όγκου της σφαίρας, με μετρήσεις που σχετίζονται με κύκλους, παραβολοειδή, υπερβολοειδή και ελλειψοειδή κλπ Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι στο βιβλίο του «περί σφαίρας και κυλίνδρου» γίνεται η απόδειξη του θεωρήματος «η επιφάνεια κάθε σφαίρας είναι τετραπλάσια του μέγιστου κύκλου της Εσφ=$4\pi r^2$, στο βιβλίο του «περί ελίκων» περιγράφεται η «επίπεδη έλικα» ή «έλικα του Αρχιμήδους» **(Εικ. 3.15.2)** και στο βιβλίο «περί επίπεδων ισορροπιών» περιέχεται η θεωρία των μοχλών.

Πολλοί ιστορικοί των μαθηματικών του 19^{ου} και του 20^{ου} αιώνα μεταξύ των οποίων οι Zeuthen, Heath, Mugler και Bachmakova αναφέρουν ότι ο Αρχιμήδης εφαρμόζει τύπους διαφορίσεως και ολοκληρώσεως σύμφωνα με τη σημερινή ορολογία. Έτσι έθεσε ένα γερό θεμέλιο για την εξέλιξη του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού[7,8].



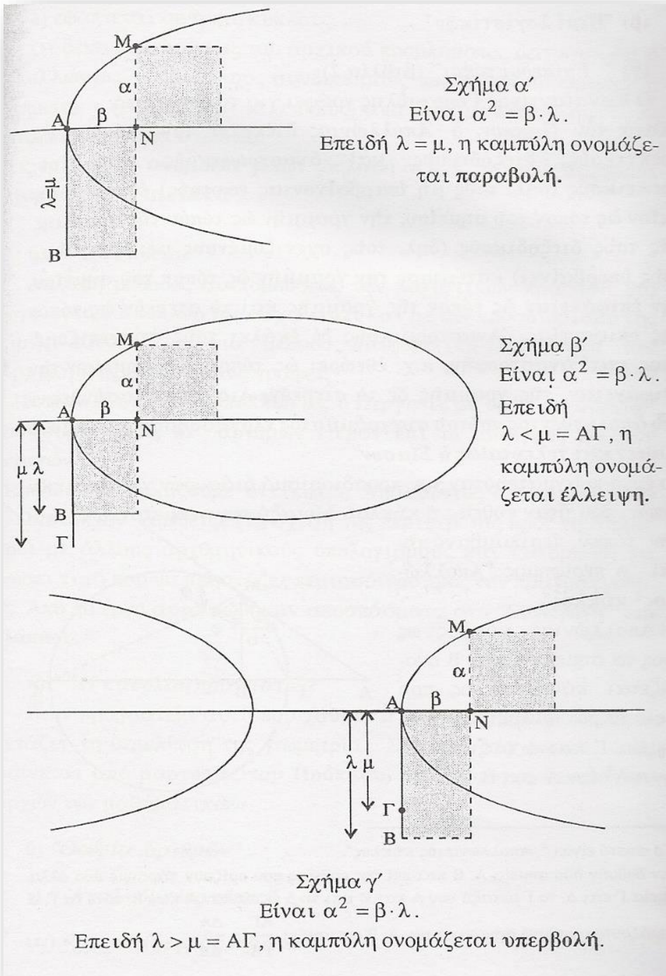
Εικόνα 3.15.2. *Η «επίπεδη έλικα» ή «έλικα του Αρχιμήδους» ή «σπείρα του Αρχιμήδους».*

3.16 ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ Ο ΠΕΡΓΑΙΟΣ

Εικόνα 3.16.1. *Απολλώνιος ο Περγαίος.*

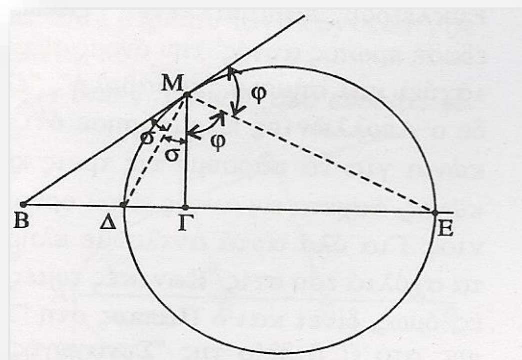
Ο Απολλώνιος ο Περγαίος **(Εικ. 3.16.1)** ($3^{ος}$-$2^{ος}$ π.Χ. αι.) είναι ο τρίτος μεγάλος μαθηματικός της αλεξανδρινής εποχής μετά από τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη. Γεννήθηκε μάλλον το 260 π.Χ. στην Πέργη της Παμφυλίας. Άκμασε κατά τους χρόνους του Πτολεμαίου του Φιλοπάτορος και σπούδασε στην Αλεξάνδρεια κοντά στους διαδόχους του Ευκλείδη. Έγραψε πολυάριθμες πραγματείες στα μαθηματικά, την αστρονομία και τη φυσική. Το μεγαλύτερο μέρος των εργασιών του χάθηκε. Στα έργα που διασώθηκαν **(Εικ. 3.16.5)** συμπεριλαμβάνονται τα εξής: «Λόγου αποτομή», «περί συγκρίσεως του δωδεκαέδρου και εικοσαέδρου», «εύρεσις δύο μέσων αναλόγων» και «κωνικά»[7,8].

Το έργο «κωνικά», του οποίου σώζονται τα 7 βιβλία, θεωρείται το σπουδαιότερο και ευφευέσετρο από τα έργα του Απολλωνίου. Τα βιβλία I, II, III και IV σώθηκαν στην ελληνική. Τα βιβλία V, VI και VII σώθηκαν στην αραβική και μεταφράστηκαν στη λατινική το 1661 στη Φλωρεντία. Σύμφωνα με τον Ευτόκιο και τα σχόλιά του στις «Κωνικές Τομές» του Απολλώνιου, ο τελευταίος φαίνεται ότι εμνεύστηκε από τους όρους του Ευκλείδη «παραβάλλειν», «ελλείπειν» και «υπερβάλλειν» και έδωσε πρώτος αυτός την ονομασία των τριών κωνικών τομών που ισχύει και σήμερα «παραβολή», «έλλειψη» και «υπερβολή». Πρώτος ο Απολλώνιος παρατήρησε ότι δεν χρειάζονται τριών ειδών κώνοι για να πάρουμε τις τρεις κωνικές τομές, αλλά μόνο ένας κώνος, ασχέτως αν αυτός είναι ορθογώνιος, αμβλυγώνιος ή οξυγώνιος[7,8] **(Εικ. 3.16.2)**.

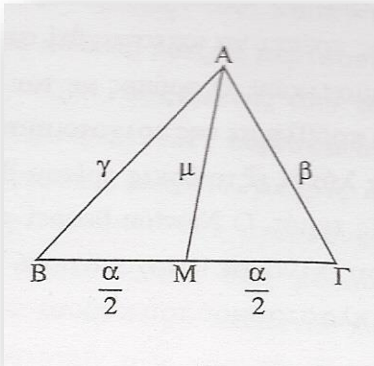


Εικόνα 3.16.2. *Η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή κατά τον Απολλώνιο.*

Είναι γνωστός ο «Απολλώνιος κύκλος» **(Εικ. 3.16.3)**, που είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από δύο σταθερά σημεία Β, Γ έχουν σταθερό, δοσμένο λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα. Ο γεωμετρικός αυτός τόπος είναι κύκλος με διάμετρο ΔΕ, όπου Δ και Ε είναι τα σημεία όπου το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ διαιρείται εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγους $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$ και $\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$.



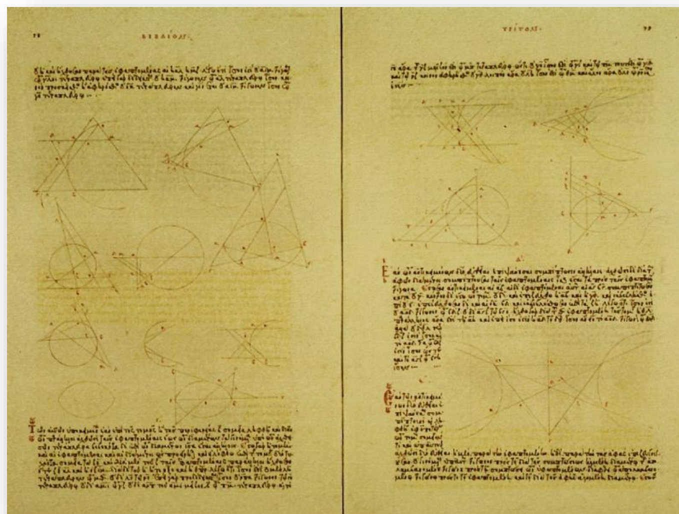
Εικόνα 3.16.3. *Ο «Απολλώνιος κύκλος».*



Εικόνα 3.16.4. *Θεώρημα του Απολλώνιου.*

Γνωστό είναι και το εξής θεώρημα ως θεώρημα του Απολλωνίου: «Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Έστω ΑΜ η διάμεσός του. Τότε ισχύει: $β^2 + γ^2 = 2μ^2 + (α^2/2)$»

Από τις αστρονομικές παρατηρήσεις του Απολλωνίου προκύπτει ότι ο συγκεκριμένος μαθηματικός είχε γνώσεις Επίπεδης Τριγωνομετρίας. Είναι χαρακτηριστικό ότι ο Απολλώνιος συνέταξε πίνακες για τη Σελήνη που απαιτούσαν τη χρήση τριγωνομετρικών σχέσεων και υπολόγισε τις χορδές διαφόρων τόξων[7,8].



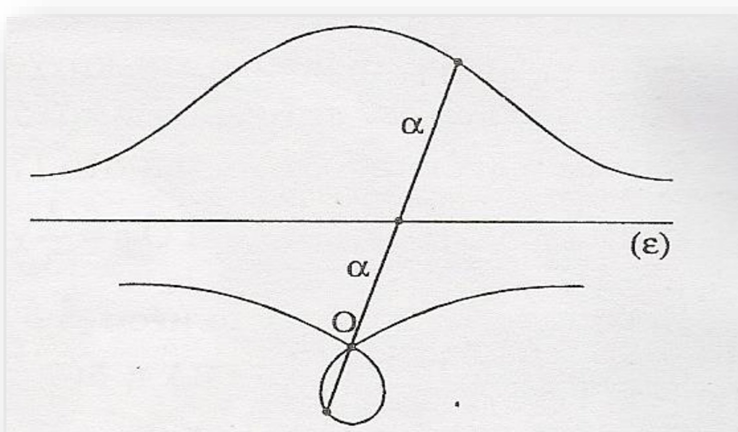
Εικόνα 3.16.5. *Έργο του Απολλωνίου που σώζεται.*

3.17 ΝΙΚΟΜΗΔΗΣ

Ο Νικομήδης (3^{ος}-2^{ος} π.Χ. αι.) είναι σύγχρονος του Απολλωνίου και νεότερος του Ερατοσθένη που έζησε κατά πάσα πιθανότητα στην Αλεξάνδρεια. Όπως αναφέρει ο Πρόκλος, ο Νικομήδης επινόησε μία καμπύλη που ονομάζεται «κογχοειδής» ή «κοχλοειδής» **(Εικ. 3.17.1)**. Με τη βοήθεια της καμπύλης αυτής, έλυσε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου και γενικότερα το πρόβλημα των μέσω αναλόγων, καθώς και το πρόβλημα της τριχοτόμησης τυχαίας γωνίας. Αναφέρεται επίσης από τον ίδιο συγγραφέα ότι βρήκε κι άλλη μια καμπύλη, ανάλογη προς την «τετραγωνίζουσα» του Ιππίου και ότι κατασκεύασε ένα ειδικό όργανο το οποίο, με συνεχή κίνηση χάραζε την κογχοειδή.

Η «κογχοειδής» ορίζεται ως εξής: Θεωρούμε μια σταθερή ευθεία (ε), ένα σταθερό σημείο Ο εκτός της (ε) και ένα σταθερό μήκος α. Ενώνουμε τα σημεία που προκύπτουν έτσι, οπότε προκύπτει η καμπύλη «κογχοειδής» και συγκεκριμένα οι δυο κλάδοι της καμπύλης. Η ευθεία (ε) ονομάζεται «βάση», το σημείο Ο ονομάζεται «πόλος», ενώ το σταθερό μήκος α ονομάζεται «διάστημα». Η κογχοειδής έχει εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες $(\beta+\chi)^2(\alpha2-\chi2) = \chi^2\psi^2$, όπου β είναι η απόσταση του «πόλου» Ο από τη «βάση» (ε).

Ο Νικομήδης ήταν εξαιρετικός ερευνητής μαθηματικός. Ο τρόπος με τον οποίο έλυσε το δήλιο πρόβλημα και το πρόβλημα της τριχοτόμησης οξείας γωνίας δείχνει ότι γνώριζε να λύνει εξισώσεις τρίτου βαθμού, χωρίς να χρησιμοποιεί κωνικές τομές. Ο Newton θεωρεί την «κογχοειδή» ως τον άριστο τρόπο που επινόησε η αρχαιότητα, για να δώσει λύση στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου.



Εικόνα 3.17.1. *Η «κογχοειδής» καμπύλη του Νικομήδη.*

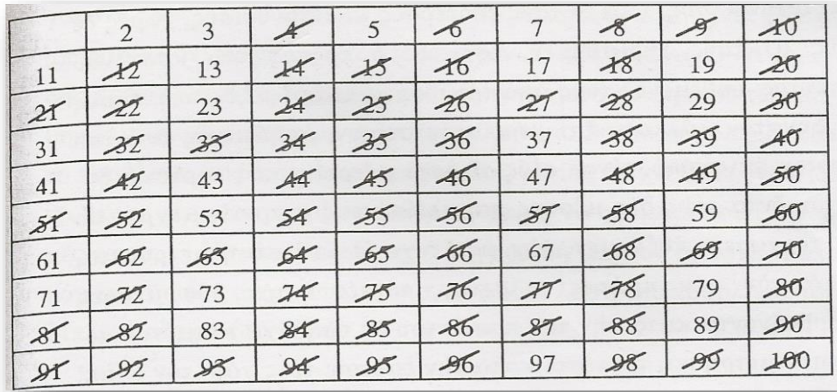
3.18 ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΣ

Εικόνα 3.18.1. *Ο Ερατοσθένης.*

Ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος ή Ερατοσθένης ο Πένταθλος **(Εικ. 3.18.1)** (276-194 π.Χ.) ήταν επιφανής μαθηματικός, αστρονόμος, γεωγράφος, φιλόσοφος, γεωδαίτης, δεινός ρήτορας, φιλόσοφος και ποιητής. Σπούδασε στην Αλεξάνδρεια με δασκάλους τον Λυσανία και τον Καλλίμαχο. Κατόπιν στην Αθήνα παρακολούθησε μαθήματα του Αρίστωνος του Χίου και του Αρκεσιλάου. Όταν επέστρεψε στην Αλεξάνδρεια, ο Πτολεμαίος ο Β’ ο Ευεργέτης του ανέθεσε την επιστασία της ββιλιοθήκης της Αλεξάνδρειας (225 π.Χ.). Ονομάστηκε από τους σύγχρονούς του «Πένταθλος», διότι διακρινόταν σε όλα τα πνευματικά αγωνίσματα.

Από τα μαθηματικά του έργα είναι γνωστή η πραγματεία του με τίτλο «κόσκινο του Ερατοσθένους» **(Εικ. 3.18.2)** που αναφέρεται στον προσδιορισμό των πρώτων αριθμών. Η μέθοδος που περιγράφεται στο κόσκινο χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα. Στη σύγχρονη διατύπωση η μέθοδος αυτή έχει ως εξής:

Γράφουμε σε έναν πίνακα με αύξουσα σειρά τους ακεραίους από 2 μέχρι ν. Αφήνουμε τον πρώτο 2 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του. Ο επόμενος πρώτος στον πίνακα μετά τον 2 είναι ο 3. Αφήνουμε τον 3 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσια του κτλ. Συνεχίζουμε την διαδικασία μέχρι τον πρώτο ρ, με $\rho \leq \sqrt{\nu}$. Οι ακέραιοι που απομένουν, δηλαδή όσοι δεν «έπεσαν» από το «κόσκινο» είναι οι πρώτοι μεταξύ 2 και ν. Όλοι οι άλλοι «έπεσαν», διότι ως σύνθετοι είχαν διαιρέτη καποιον μικρότερο ή ίσο προς $\sqrt{\nu}$ και ως πολλαπλάσιά του διαγράφηκαν. Στον πίνακα που ακολουθεί έχουν προσδιοριστεί οι πρώτοι αριθμοί μεταξύ 1 και 100. Έχουν διαγραφεί τα πολλαπλάσια των πρώτων αριθμών 2, 3, 5 και 7 αφού ο επόμενος πρώτος είναι ο αριθμός 11 και ισχύει $11 > \sqrt{100}$.



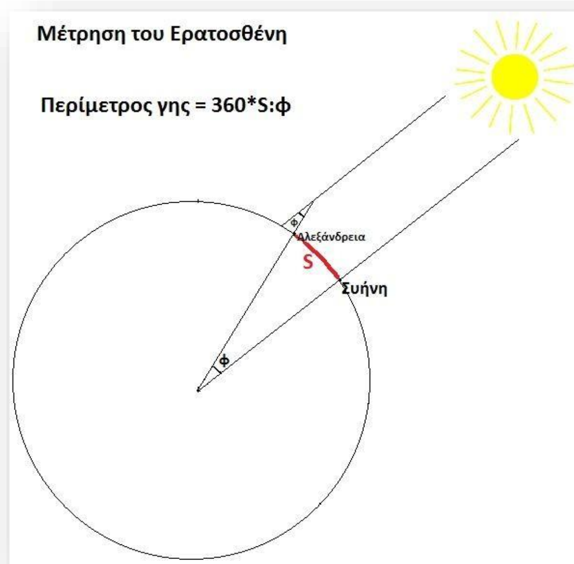
	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Εικόνα 3.18.2*. Το « κόσκινο του Ερατοσθένους».*

Ο Πάππος του αποδίδει μια πραγματεία με τίτλο «Περί μεσοτήτων», με αντικείμενο τις τρεις μεσότητες, την αριθμητική, τη γεωμετρική και την αρμονική.

Ο Ερατοσθένης έλυσε με έναν πολύ πρωτότυπο τρόπο το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, με τη βοήθεια ενός οργάνου δικής του επινόησης και κατασκευής, του «μεσολάβου». Το αντίγραφο αυτού του οργάνου αφιέρωσε σε ναό της Αλεξάνδρειας προς τιμή του Πτολεμαίου του Β'. Με τη βοήθεια του «μεσολάβου», ο Ερατοσθένης πέτυχε την κατασκευή μέσων αναλόγων μεταξύ δύο δεδομένων ευθυγράμμων τμημάτων.

Ένα από τα πιο σημαντικά πειράματα που πραγματοποιήθηκε στην ιστορία της ανθρωπότητας ήταν η μέτρηση της περιφέρειας της γης από τον Ερατοσθένη τον 3 π.χ. αιώνα. Ο Ερατοσθένης πληροφορήθηκε ότι στη Συήνη (σημερινό Ασουάν) ο ήλιος κατά το μεσημέρι του θερινού ηλιοστασίου ρίχνει τις ακτίνες του κάθετα στον ορίζοντα και φωτίζει τον πυθμένα ενός πηγαδιού. Την ίδια στιγμή στην Αλεξάνδρεια οι ακτίνες του ηλίου σχηματίζουν μια γωνία 7ο με την κατακόρυφο του τόπου. Στη συνέχεια μέτρησε την απόσταση Αλεξάνδρειας - Συήνης και υπολόγισε, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί, με αξιοζήλευτη ακρίβεια την περιφέρεια της



Εικόνα 3.18.3*. Η μέτρηση της περιφέρειας της γης από τον Ερατοσθένη.*

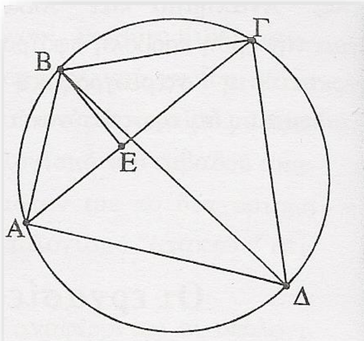
γης. Υπολόγισε την περιφέρεια της Γης σε 252.000 στάδια (πολύ κοντά στον σημερινό υπολογισμό).

3.19 ΚΛΑΥΔΙΟΣ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ

Εικόνα 3.19.1. *Κλαύδιος ο Πτολεμαίος.*

Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος **(Εικ. 3.19.1)** (108-178 π.Χ.) είναι Έλληνας αστρονόμος, φιλόσοφο, μαθηματικός και γεωγράφος. Στο περίφημο έργο του «Μαθηματική σύνταξις», που σώζεται μέχρι σήμερα, περιέχονται και αστρονομικές εργασίες του Ιππάρχου. Το συγκεκριμένο έργο που ονομαζόταν και «Μεγίστη», χρησίμευε ως διδακτικό εγχειρίδιο στο Μουσείο της Αλεξάνδρειας. Διαιρείται σε 13 βιβλία και γράφτηκε περίπου το 142 π.Χ. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το πρώτο βιβλίο καθώς σε αυτό παρουσιάζονται για πρώτη φορά η επίπεδη και σφαιρική τριγωνομετρία και διάφορα προβλήματα της επίπεδης και σφαιρικής γεωμετρίας.

Στον Πτολεμαίο οφείλεται η επινόηση τους συμβόλου για το μηδέν. Στη «Μαθηματική Σύνταξη» υπάρχουν εκφράσεις για το μηδέν όπως για παράδειγμα (0, μζ΄, η΄΄= 0º, 47΄,8΄΄). ;AΤο σύμβολο Ο είναι το αρχικό της λέξης «ουδέν» και σημαίνει, κατά τον Πτολεμαίο, έλλειψη μονάδων οποιασδήποτε τάξης. Ο συγκεκριμένος μαθηματικός χρησιμοποιεί το σύστημα θέσεως γραφής των αριθμών και, όπου λείπει αριθμός, βάζει στη θέση του το μηδέν, ενώ ως αριθμητικά σύμβολα χρησιμοποιεί τα γράμματα της αλφαβήτου.



Εικόνα 3.19.2. *Θεώρημα του Πτολεμαίου.*

Το θεώρημα που ανέπτυξε ο Πτολεμαίος **(Εικ. 3.19.2)** και φέρει το όνομά του είναι το εξής: «Αν ΑΒΓΔ είναι ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο, το άθροισμα των γινομένων των ζευγών των αντικείμενων πλευρών (των απέναντι) του ΑΒ · ΓΔ και ΑΔ ·ΒΓ είναι ίσο με το γινόμενο των διαγωνίων του ΑΓ ·ΒΔ».

Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό ο Πτολεμαίος κατέληξε σε θεμελιώδη εξαγόμενα, τα οποία σήμερα εκφράζονται με τους γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους:

ημ(χ-ψ) = ημχσυνψ – συνχημψ και συν(χ+ψ) = συνχσυνψ – ημχημψ.

Έτσι ο Πτολεμαίος εξάγει τη σχέση $ημ^2χ = \frac{1-συν2χ}{2}$, την οποία εφαρμόζει κατ' επανάληψη, για να υπολογίσει τη σειρά των χορδών που αρχίζει από το τόξο 12^o και φτάνει στο τόξο ¾ της μοίρας. Κατασκεύασε έναν πίνακα χορδών κάνοντας χρήση και του θεωρήματος «αν χ, ψ είναι δύο τόξα μικρότερα του τετάρτου κύκλου και χ>ψ, τότε $\frac{χορδή\ χ}{χορδή\ ψ} < \frac{χ}{ψ}$» .

Άλλα αξιόλογα έργα του Πτολεμαίου **(Εικ. 3.19.3)** είναι το «Ανάλημμα» και «Άπλωσις επιφανείας». Το πρώτο έχει ως θέμα την ορθή προβολή σφαίρας σ'ένα επίπεδο και το άλλο αναφερεται στη στερεογραφική προβολή.

Εικόνα 3.19.3. *Έργο του Πτολεμαίου.*

3.20 ΑΡΙΣΤΑΡΧΟΣ Ο ΣΑΜΙΟΣ

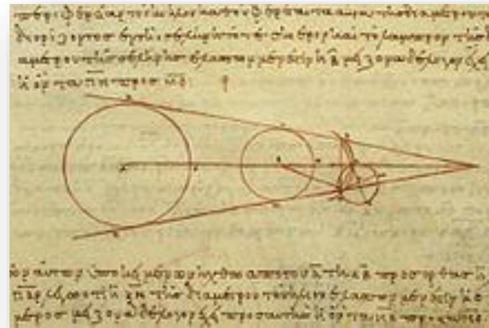
Εικόνα 3.20.1. *Αρίσταρχος ο Σάμιος.*

Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος **(Εικ. 3.20.1)** (320 – 240 π.Χ.) υπήρξε μεγάλος αστρονόμος και μαθηματικός και πατέρας του ηλιοκεντρισμού. Υπήρξε μαθητής του Στράτωνος του Λαμψακηνού στην Αθήνα. Το μαθηματικό του έργο είναι εξίσου σημαντικό με το αστρονομικό.

Σώζεται το έργο του «Περί μεγεθών και αποστημάτων Ηλίου και Σελήνης», το οποίο περιλαμβάνει πλήθος μαθηματικών γνώσεων και χαρακτηρίζεται από λογική συνοχή. Ένα από τα θεωρήματα που συγκαταλέγονται σε αυτό το βιβλίο είναι και το εξής: «δύο ίσες σφαίρες τις περιλαμβάνει ο ίδιος κύλινδρος, ενώ δύο άνισες σφαίρες τις περιλαμβάνει ο ίδιος κώνος, που έχει την κορυφή του προς το μέρος της μικρότερης σφαίρας και η ευθεία που περνά από τα κέντρα των σφαιρών αυτών είναι κάθετη στους κύκλους (των δυο σφαιρών) προς τους οποίους εφάπτεται στις σφαίρες η επιφάνεια του κυλίνδρου ή του κώνου[7,8].

Ο Αρίσταρχος παρατήρησε την κίνηση της Σελήνης διαμέσου της σκιάς της Γης κατά τη διάρκεια μιας έκλειψης Σελήνης. Εκτίμησε ότι η διάμετρος της Γης ήταν 3 φορές μεγαλύτερη από τη διάμετρο της Σελήνης. Χρησιμοποιώντας τον υπολογισμό του Ερατοσθένους ότι η περιφέρεια της Γης ήταν 42.000 χλμ., συμπέρανε ότι η Σελήνη έχει περιφέρεια ίση με 14.000 χλμ. Σήμερα, είναι γνωστό ότι η Σελήνη έχει περιφέρεια περίπου ίση με 10.916 χλμ

Ο Αρίσταρχος παρατήρησε / υποστήριζε ότι ο Ήλιος, η Σελήνη και η Γη σχηματίζουν σχεδόν μια ορθή γωνία τη στιγμή του πρώτου ή του τελευταίου τετάρτου της Σελήνης. Εκτίμησε ότι η γωνία ήταν 87°. Χρησιμοποιώντας σωστά τη Γεωμετρία, αλλά με λανθασμένα στοιχεία παρατήρησης, ο Αρίσταρχος συμπέρανε ότι ο Ήλιος ήταν 20 φορές πιο μακριά από ό,τι η Σελήνη. Στην πραγματικότητα ο Ήλιος είναι περίπου 390 φορές πιο μακριά. Εντόπισε ότι η Σελήνη και ο Ήλιος έχουν σχεδόν το ίδιο φαινόμενο μέγεθος από τη Γη και συμπέρανε ότι οι διάμετροί τους θα είναι ανάλογοι με την απόστασή τους από τη Γη .Έτσι κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο Ήλιος είχε 20 φορές μεγαλύτερη διάμετρο από τη Σελήνη, κάτι που είναι υπολογιστικά λογικό και σωστό, αλλά επίσης λάθος (αφού στηρίζεται σε λάθος δεδομένα). Η εκτίμησή του όμως αυτή υποδεικνύει ότι ο Ήλιος είναι ξεκάθαρα μεγαλύτερος από τη Γη, κάτι που υποστηρίζει το ηλιοκεντρικό μοντέλο[9].



Εικόνα 3.20.2. *Έργο του Αρίσταρχου του Σάμιου.*

3.21 ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ Ο ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΥΣ

Εικόνα 3.21.1. *Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς.*

Ο Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς **(Εικ. 3.21.1)** ήταν μαθηματικός του τρίτου αιώνα (περίπου 210 – 290), ο οποίος έζησε στην Αλεξάνδρεια της ρωμαϊκής Αιγύπτου. Έχει αποκληθεί «Πατέρας της Άλγεβρας». Για πρώτη φορά χρησιμοποίησε συμβολικές συντομογραφίες εγκαταλείποντας τη ρητορική άλγεβρα των νεοπυθαγόρειων και νεοπλατωνικών σχολών, που την χαρακτήριζε η έλλειψη κάθε συμβολισμού. Έγραψε τέσσερις πραγματείες με τίτλους «Αριθμητικών βιβλία ιγ'», «Περί πολυγώνων αριθμών», «Πορίσματα» και «Μοριαστικά». Τα «Αριθμητικά» αποτελούν σταθμό στην εξέλιξη της μαθηματικής διανόησης, γιατί θεωρούνται ως το πρώτο βιβλίο άλγεβρας, εφόσον σ' αυτό γίνεται χρήση συστηματικού συμβολισμού **(Εικ. 3.21.2)** και λύνονται με ειδικές μεθόδους προβλήματα, τα οποία οι προγενέστεροι του Διοφάντου μαθηματικοί θεωρούσαν άλυτα.

Ο Διόφαντος συνεισέφερε πολύ στην ανάπτυξη της αριθμητικής, καθιέρωσε και τυποποίησε έναν τύπο σύντομου μαθηματικού συμβολισμού για τη γραφή προβλημάτων, για πρώτη φορά σε ευρεία κλίμακα άρχισε να χρησιμοποιεί τα κλάσματα ως πραγματικούς αριθμούς και ασχολήθηκε με την επίλυση εξισώσεων με πολλαπλούς αγνώστους όρους. Ωστόσο ακόμα και με τον Διόφαντο ο ελληνικός μαθηματικός συμβολισμός παρέμεινε βασισμένος στον καθημερινό λόγο και δύσχρηστος με τα σημερινά δεδομένα. Από τα αρχικώς δεκατρία βιβλία των Αριθμητικών μόνο έξι έχουν επιβιώσει ως σήμερα. Κατά τον Μεσαίωνα η γνώση των ευρημάτων του Διόφαντου διατηρήθηκε στη Βυζαντινή Αυτοκρατορία και στον αραβικό κόσμο, μέσω μεταφράσεων από τα ελληνικά. Τελικά το 1570 ο Ιταλός μαθηματικός Ραφαήλ Μπομπέλι μετέφρασε στα λατινικά τα Αριθμητικά και χρησιμοποίησε τα προβλήματα που περιείχαν για τα δικά του συγγράμματα. Τον επόμενο αιώνα τα γραπτά του Διόφαντου επηρέασαν τον εξέχοντα μαθηματικό Fermat. Σήμερα «διοφαντικές» καλούνται οι εξισώσεις ακέραιων συντελεστών των οποίων ζητούνται οι ακέραιες λύσεις[7,8,9].

S = χ άγνωστος	$K^{Y}\overline{\alpha} = \chi^3$
$\dot{M}$ = μονάδα ή μονάδες	$\Delta^{Y}\Delta\overline{\alpha} = \chi^4$
↑ = σύμβολο αφαίρεσης	$\Delta^{Y}K\overline{\alpha} = \chi^5$
$\Delta^{Y}\overline{\alpha} = \chi^2$	$K^{Y}K = \chi^6$

Εικόνα 3.21.2. *Τα βασικά σύμβολα που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος.*

3.22 ΗΡΩΝ Ο ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΥΣ

Εικόνα 3.22.1. *Ήρων ο Αλεξανδρεύς.*

Ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς **(Εικ. 3.22.1)** έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου μεταξύ των ετών 90 π.Χ. έως 80 μ.Χ. περίπου. Υπήρξε μαθητής του Κτησιβίου και γι' αυτό είναι γνωστός ως *Ήρων ο Κτησιβίου*. Και οι δύο θεωρούνται πνευματικά παιδιά και συνεχιστές του έργου του Αρχιμήδη.

Ο Ήρων εξέδωσε πολλά έργα που αναφέρονται στη γεωμετρία, την φυσική, την αστρονομία, τη μηχανική και τη γεωδαισία, της οποίας και θεωρείται πατέρας. Σώζονται 11 έργα του από τα οποία τα 4 είναι μαθηματικού περιεχομένου. Είναι ο πρώτος επιστήμονας της Αρχαίας Ελλάδας που κατόρθωσε να συνδυάσει συστηματικά τη θεωρία με την πράξη[7,8].

Υπήρξε διευθυντής της περίφημης Ανώτατης Τεχνικής Σχολής της Αλεξάνδρειας, το πρώτο πολυτεχνείο που είχε ιδρυθεί στο Μουσείο για μηχανικούς. Η διδασκαλία στο Πολυτεχνείο αυτό περιλάμβανε δύο κύκλους μαθημάτων, τα θεωρητικά μαθήματα, δηλαδή το «λογικόν» και τα πρακτικά μαθήματα, δηλαδή «το χειρουργικόν». Το «λογικόν» περιελάμβανε διδασκαλία γεωμετρίας, αριθμητικής, φυσικής, γεωδαισίας και αστρονομίας. Το «χειρουργικόν» στο οποίο γίνονταν δεκτοί οι απόφοιτοι του «λογικού» περιλάμβανε διδασκαλία κατεργασίας μετάλλων, ξύλου, διδασκαλία σχδεδίων, αρχιτεκτονικής κλπ

Ο Ήρων χρησιμοποίησε τα μαθηματικά και τη θεωρητική φυσική στις διάφορες μετρήσεις, στους διάφορους υπολογισμούς και στην κατασκευή οργάνων. Η συμβολή του στη Φυσική η αιολόσφαιρα ή ατμοστρόβιλος, η πρώτη ατμομηχανή στην ιστορία.

Οι μαθηματικές του εργασίες που σώθηκαν είναι οι εξής[7,8]:

α) «Μετρικά» (3 βιβλία) ή «Περί Μέτρων»

β) «Όροι των γεωμετρίας ονομάτων» ή «Όρος των γεωμετρικών ονομάτων».

γ) «Γεωμετρικά»

δ) «Στερεομετρικά» ή «Εισαγωγή των στερεομετρουμένων»

Στο πρώτο βιβλίο «Μετρικών» περιλαμβάνονται 39 προτάσεις στις οποίες εξετάζεται το εμβαδόν ευθύγραμμων ή καμπυλόγραμμων ή μεικτών επιφανειών. Εκτός από το εμβαδόν διαφόρων τριγώνων εξετάζεται και το εμβαδόν τετραγώνου, ρόμβου καθώς και το εμβαδόν κανονικών πολυγώνων. Χαρακτηριστικός είναι ο υπολογισμός του εμβαδού ενός τριγώνου συναρτήσει των πλευρών του που δίνεται από τον σύγχρονο αλγεβρικό τύπο:

$E= \frac{1}{4} \sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)}$, όπου α,β,γ είναι οι πλευρές του τριγώνου.

Στο δεύτερο βιβλίο του «Μετρικών» αναφέρονται οι υπολογισμοί των όγκων διαφόρων στερεών, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται και τα πέντε κανονικά πολύεδρα. Στο τρίτο του βιβλίο περιέχονται 23 προτάσεις στις οποίες μελετώνται οι διαιρέσεις των επιφανειών. Σε πολλά προβλήματα «Μετρικών» γίνεται εξαγωγή τετραγωνικής ή κυβικής ρίζας αριθμών με τον εξής τρόπο: Α είναι ένας μη τετράγωνος αριθμός, θα ισχύει $A = \alpha^2 \pm \beta$.

Δίνεται για $\sqrt{A}$ με πρώτη προσέγγιση η τιμή $\alpha_1 = \frac{1}{2} (\alpha+\frac{A}{\alpha})$ ενώ με μια δεύτερη προσέγγιση η τιμή $\alpha_2 = \frac{1}{2} (\alpha_1+\frac{A}{\alpha 1})$.

Για τον υπολογισμός της $\sqrt[3]{A}$ χρησιμοποιείται σε σύγχρονη διατύπωση ο εξής τύπος:

$\sqrt[3]{A} = \alpha + \{(1+\alpha)(A-\alpha^3) / [(1+\alpha)(A-\alpha^3)+\alpha[(1+\alpha)^3-A]]\}$, όπου $\alpha^3 < A < (1+\alpha)^3$.

Στην αρχή των «Γεωμετρικών» προτάσσεται συμβολισμός διαφόρων εκφράσεων της γεωμετρίας. Ο συμβολισμός αυτός αποτελεί τον πρώτο αλγεβρικό συμβολισμό στην ιστορία των μαθηματικών.

Έτσι 51 αριθμητικές ή γεωμετρικές εκφράσεις που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά εκφράζονται με σύμβολα ή με συντμήσεις. Αυτές είναι «σημείο», «κείται», «γωνία», «ήτις», «δίχα», «εξ ίσου», «μέρος», «εαυτής», «εστίν», «επιφάνεια», «κάθετος», «κύκλος», «εφεξής», «σχήμα», «αμβλεία», «ελάσσον ορθής» κ.ά.

Ο Ήρων πρώτος στην ιστορία των μαθηματικών χρησιμοποιεί τον συμβολισμό «χ» για τον τυχαίο αριθμό. Στα γεωμετρικά περιέχονται και πολλές ονομασίες μέτρων και σταθμών. Παρατηρούμε επίσης εφαρμογή αλγεβρικών τύπων αλγεβρικών τύπων και εξαγωγή τετραγωνικών ριζών που χρησιμοποιούνται σε διάφορα προβλήματα.

Εικόνα 3.22.2. *Η αιολόσφαιρα του Ήρων.*

3.23 ΥΠΑΤΙΑ

Εικόνα 3.23.1. *Η Υπατία.*

Η Υπατία η «Γεωμετρική» **(Εικ. 3.23.1)** (370-415 μ.Χ.) γεννήθηκε στην Αλεξάνδρεια σε μια εποχή που η πνευματική ζωή της πόλης βρίσκονταν σε κατάσταση σύγχισης. Η ρωμαϊκή αυτοκρατορία και μαζί της η ειδωλολατρία έπνεαν τα λοίσθια. Ο χριστιανισμός εξαπλωνόταν με γρήγορο ρυθμό, ενώ το εβραϊκό στοιχείο βρισκόταν σε διαρκή διωγμό. Παράλληλα οι χριστιανοί ζηλωτές έβλεπαν στην επιστημονική έρευνα, στη φιλοσοφία και στα μαθηματικά την αίρεση και την αμαρτία.

Η Υπατία ήταν θυγατέρα του μαθηματικού και αστρονόμου Θέωνα, διευθυντή του Μουσείου της Αλεξάνδρειας και είχε την τύχη να αποκτήσει μία σπάνια μόρφωση. Το 392 μ.Χ. συνέχισε τις σπουδές της στην Αθήνα και στη Ρώμη επί αυτοκράτορα Αρκαδίου. Στην Αθήνα παρακολούθησε μαθήματα στη νεοπλατωνική σχολή του Πλούταρχου του Νεότερου και της κόρης του Ασκληπιγένειας αλλά μαθήτευσε και κοντά στο Πρόκλο και τον Ιεροκλή. Επιστρέφοντας το 400 μ.Χ. στην Αλεξάνδρεια πήρε την έδρα της φιλοσοφίας στο Μουσείο. Κατόρθωνε η διδασκαλία της να είναι ανεξάρτητη από κάθε θρησκεία. Παράλληλα με τα μαθηματικά και την αστρονομία δίδασκε και τις αρχές του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη[7,8].

Το συγγραφικό της έργο ήταν αξιόλογο και αφορούσε τους τομείς των μαθηματικών, της αστρονομίας, της μηχανικής και της φιλοσοφίας .Δυστυχώς τα περισσότερα γραπτά της χάθηκαν μετά την πυρπόληση της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και έχουν σωθεί μόνο αναφορές των έργων της από άλλους συγγραφείς όπως τον Θέωνα, τον Διοφάντη, τον Πτολεμαίο κ.ά

Το μαθηματικό έργο της Υπατίας υπήρξε σημαντικό. Έγραψε σχόλια πάνω στα «Αριθμητικά» του Διοφάντη, ανέπτυξε τις διοφαντικές εξισώσεις, δηλαδή τις πολυωνυμικές εξισώσεις με ν αγνώστους με ακέραιους συντελεστές και ακέραιες λύσεις, και εργάστηκε επάνω στις δευτεροβάθμιες και διτετράγωνες εξισώσεις. Τα σχόλια αυτά που περιλαμβάνουν και πολλές εναλλακτικές λύσεις ενσωματώθηκαν μάλλον στα «Αριθμητικά». Έγραψε μια διατριβή επάνω στα «Κωνικά» του Απολλωνίου του Περγαίου και παρουσίασε τις κωνικές τομές με μια κομψή και εκλαϊκευμένη μορφή. Συνέγραψε με τον πατέρα της μια εργασία επάνω στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Έγραψε ακόμη ένα βιβλίο που αφορούσε την εργασία του Θέωνα στη «Μαθηματική Σύνταξη» του Κλαύδιου Πτολεμαίου. Αξιόλογο ήταν επίσης το έργο της στην αστρονομία, τη μηχανική και την πρακτική τεχνολογία. Κατασκεύασε μία μηχανή για την απόσταξη του νερού, μια συσκευή για τη μέτρηση της στάθμης υγρού, ένα υδρόμετρο με διαβαθμίσεις για τον καθορισμό της πυκνότητας ενός υγρού και ένα είδος θερμομέτρου, το «βαρύλλιο»[7,8].

Πολλοί από τους μαθητές της ανήκαν στους ανώτατους κύκλους της αριστοκρατίας της πόλης και έγιναν σημαντικές προσωπικότητες, όπως ο επίσκοπος Κυρήνης Συνέσιος και ο έπαρχος της Αλεξανδρείας Ορέστης. Η ίδια επηρεάστηκε φιλοσοφικά από τους νεοπλατωνικούς Πλωτίνο και Ιάμβλιχο. Η Υπατία τελικά δολοφονήθηκε, σύμφωνα με το Σωκράτη τον Σχολαστικό, από μερίδα πλήθους φανατικών χριστιανών οι οποίοι πίστευαν ότι ήταν υπαίτια για τη μη συμφιλίωση του επάρχου Ορέστη και του Επισκόπου Αλεξανδρείας Κύριλλου. Για τα κίνητρα της δολοφονίας της, αλλά και την ανάμιξη του Κυρίλλου Αλεξανδρείας έχουν εκφραστεί ποικίλες απόψεις

Η δολοφονία της Υπατίας σηματοδότησε το τέλος της πλατωνικής διδασκαλίας στην Αλεξάνδρεια αλλά και σ’ ολόκληρη τη Ρωμαϊκή Αυτοκρατορία. Μετά από το γεγονός αυτό έκλεισε για πάντα το Μουσείο της Αλεξάνδρειας και οι καθηγητές του πήγαν στην Αθήνα, που αποτέλεσε το τελευταίο καταφύγιο των Ελλήνων φιλοσόφων. Η Υπατία συνδέθηκε με το τέλος της Αρχαίας Επιστήμης καθώς λίγα χρόνια μετά τον θάνατό της ακολούθησε ο Μεσαίωνας με την μετριότατη πολιτιστική και επιστημονική του εξέλιξη[7,8].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

7. Σπανδάγου Ε., 2000,Τα Μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων, Εκδόσεις Αίθρα.

8. Σπανδάγου Β., Σπανδάγου Ρ. & Τραυλού Δ., 2000, Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας, Εκδόσεις Αίθρα.

9. Λούπη Μ. κ.ά., 2011, Ταξίδι στον Κόσμο των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών. Η Συμβολή τους στον Σύγχρονο Κόσμο, Project.

10. Cuomo S., 2001, Αρχαία Μαθηματικά, Εκδόσεις ΕΝΑΛΙΟΣ.

11. http:// el.wikipedia.org

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Τα μαθηματικά έλαβαν την επιστημονική τους μορφή και συστηματοποιήθηκαν για πρώτη φορά στην Αρχαία Ελλάδα. Ενώ στους προελληνικούς πολιτισμούς κάλυπταν καθημερινές πρακτικές ανάγκες και βασίζονταν περισσότερο στη διαίσθηση και σε δοκιμές λύσεων για την εύρεση της σωστής, στην Ελλάδα τέθηκαν οι βάσεις για να λάβουν τη μορφή που έχουν σήμερα και να εξαχθούν αξιώματα και θεωρήματα βασισμένα σε αποδείξεις. Με άλλα λόγια ενώ οι Αιγύπτιοι ήταν ικανοί να υπολογίζουν τον όγκο ενός κυλίνδρου και να βεβαιώνονται ότι το αποτέλεσμα είναι σωστό ή τουλάχιστον κατάλληλο για τους πρακτικούς συνήθως σκοπούς τους, οι Έλληνες βρήκαν τον γενικό τύπο για τον όγκο οποιουδήποτε κυλίνδρου και απέδειξαν ότι ήταν σωστός. Η δημόσια ζωή και οι πολιτικές συνθήκες στην Αθήνα και σε άλλες πόλεις εκείνης της εποχής θεωρούνται βασικός παράγοντας για τη δημιουργία αυτής της διαφοράς[10].

Οι αρχαίοι Έλληνες μαζί με τη θεωρία επινόησαν και την ορολογία της επιστήμης, προσδιόρισαν της βασικές έννοιες, άσκησαν τον κριτικό λόγο, εισήγαγαν την αποδεικτική διαδικασία και οικοδόμησαν τον παραγωγικό συλλογισμό. Πολλές από τις σημαντικές εξελίξεις των μαθηματικών της σύγχρονης εποχής έχουν την προέλευσή της σε εργασίες που έγιναν από της αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς.

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί εισήγαγαν πρώτοι την ιδέα ότι υπάρχει μια φυσική, και όχι υπερφυσική, εξήγηση για κάθε φυσικό γεγονός και, κατά συνέπεια, ο κόσμος είναι κατανοήσιμος από τον ανθρώπινο νου. Η μεγαλύτερη, ωστόσο, συνεισφορά τους στη μαθηματική επιστήμη έγκειται στην προσθήκη της απόδειξης. Εγκαταλείφθηκαν οι εμπειρικές μέθοδοι και εδραιώθηκε η άποψη ότι οι μαθηματικές αλήθειες πρέπει να εξάγονται μέσα από μία παραγωγική συλλογιστική. Ο Θαλής κάνει χρήση της παραγωγικής συλλογιστικής. Η απόδειξη, που έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην πορεία εξέλιξης των Μαθηματικών, ξεκίνησε από τον Θαλή, αναπτύχθηκε από τον Πυθαγόρα και τους Πυθαγορείους, συστηματοποιήθηκε από τον Πλάτωνα και κυρίως από τον Αριστοτέλη και τελειοποιήθηκε από τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη. Στα έργα των αρχαίων Ελλήνων θα βρούμε όλες σχεδόν τις μεθόδους ανάπτυξης που χρησιμοποιούνται σήμερα, όπως για παράδειγμα τη μέθοδο της συνεπαγωγής, τη συνθετική μέθοδο, την αναλυτική μέθοδο, τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής, καθώς και τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής.

Η μεταστροφή που έφερε ο Ευκλείδης στη μαθηματική σκέψη ήταν η μετουσίωση της γεωμετρίας από ένα εργαλείο σε ένα λογικό σύστημα ορισμών και αξιωμάτων, μοντέλο που με κάποιες γενικεύσεις συνεχίζεται να εφαρμόζεται ακόμη και σήμερα. Η σύλληψη της ιδέας της αξιωματικής θεμελίωσης οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες και μάλιστα η αξιωματική θεμελίωση που ανέπτυξαν είναι ίδια με εκείνη που χρησιμοποιείται σήμερα.

Τα μαθηματικά βρίσκονται στη βάση της εξέλιξης της επιστήμης και της τεχνολογίας και σχετίζονται άμεσα με της πτυχές της ανθρώπινης δραστηριότητας. Η Γεωμετρία του Ευκλείδη απετέλεσε το θεμέλιο για την ανάπτυξη της επιστήμης και τεχνικής και σ' αυτή τη Γεωμετρία στηρίζονται οι προϋποθέσεις της κλασικής Φυσικής από την Αναγέννηση και μετά. Επίσης, η αστρονομία ως επιστήμη βρήκε πρόσφορο έδαφος ανάπτυξης στην αρχαία Ελλάδα. Ο Θαλής, ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι είχαν κάνει αρκετές αστρονομικές παρατηρήσεις και μετρήσεις. Ο Αρχιμήδης κατασκεύασε αρκετά αστρονομικά όργανα με τα οποία υπολόγιζε το μέγεθος της Γης, της Σελήνης και του Ήλιου, τις αποστάσεις της Γης από τον Ήλιο και τους πλανήτες ή το μήκος της τροχιάς της Γης.

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί με τα αξιώματα, τα θεωρήματα και της αποδείξεις τους έθεσαν τα θεμέλια της επιστημονικής σκέψης στο σύγχρονο κόσμο και οι μαθηματικές τους επινοήσεις αποτέλεσαν έναν από τους κύριους μοχλούς ανάπτυξης του πολιτισμού. Επομένως, η αρχαία Ελλάδα υπήρξε κοιτίδα όχι μόνο της μαθηματικής σκέψης αλλά και της επιστημονικής σκέψης γενικότερα[12].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

10. Cuomo S., 2001, Αρχαία Μαθηματικά, Εκδόσεις ΕΝΑΛΙΟΣ.

12. Σρίγκα Α., Αγγέλης Γ. κ.ά., 2012, Αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί και η συμβολή τους στην επίλυση σύγχρονων προβλημάτων, Project.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ. & Σίδερης Π., 2000, Ευκλείδεια Γεωμετρία, Α’ & Β’ Λυκείου, Το Βιβλίο του Καθηγητή, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων.

2. Calvin C. Clawson, 2005, Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών, Η εξερεύνηση της εντυπωσιακής ιστορίας των αριθμών, Εκδόσεις Κέδρος.

3. Καλαθά Χ., 2012, Μια Πολυδιάστατη Μελέτη της Μάθησης της Έννοιας της Αναλογίας: Το Φαινόμενο της Ψευδοαναλογίας, Διπλωματική Εργασία.

4. Γκρίτζαλη Γ., 2009, Ιστορία των Προβλημάτων στα Μαθηματικά, Μεταπτυχιακή Εργασία.

5. Βαρβέρη Δ., 2009, Ο Κύκλος και η Μέτρησή του, Μια διαδρομή στα Αρχαία Μαθηματικά, Διπλωματική Εργασία.

6. Καστάνη Ν., 2002, Η Ιδιαιτερότητα της Μαθηματικής Σκέψης στον Αρχαίο Ελληνικό Πολιτισμό, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ.

7. Σπανδάγου Ε., 2000,Τα Μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων, Εκδόσεις Αίθρα.

8. Σπανδάγου Β., Σπανδάγου Ρ. & Τραυλού Δ., 2000, Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας, Εκδόσεις Αίθρα.

9. Λούπη Μ. κ.ά., 2011, Ταξίδι στον Κόσμο των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών. Η Συμβολή τους στον Σύγχρονο Κόσμο, Project.

10. Cuomo S., 2001, Αρχαία Μαθηματικά, Εκδόσεις ΕΝΑΛΙΟΣ.

11. http:// el.wikipedia.org

12. Σρίγκα Α., Αγγέλης Γ. κ.ά., 2012, Αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί και η συμβολή τους στην επίλυση σύγχρονων προβλημάτων, Project.

ΠΗΓΕΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικ. 1.3.1, 1.4.1, 3.1.4, 3.4.4 : Calvin C. Clawson, 2005, Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών, Η εξερεύνηση της εντυπωσιακής ιστορίας των αριθμών, Εκδόσεις Κέδρος.

Εικ. 1.5.1: http://en.wikipedia.org

Εικ. 3.1.1, 3.3.1, 3.4.1, 3.8.1, 3.9.1, 3.10.1, 3.13.1, 3.14.1, 3.14.2, 3.15.1, 3.16.1, 3.16.5, 3.18.1, 3.18.3, 3.19.1, 3.19.3, 3.20.1, 3.20.2, 3.21.1, 3.22.1, 3.22.2: http:// el.wikipedi.org

Εικ. 3.1.2: http://www.slideshare.net/ELENIKAMARIANOU/ss-62713508

Εικ. 3.1.3: http://eisatopon.blogspot.gr/2012/08/blog-post_3475.html

Εικ. 3.1.5, 3.1.6, 3.4.2, 3.4.3, 3.4.5, 3.4.6, 3.4.7, 3.8.2, 3.15.2, 3.16.2, 3.16.3, 3.16.4, 3.17.1, 3.18.2, 3.19.2, 3.21.2 : Σπανδάγου Ε., 2000,Τα Μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων, Εκδόσεις Αίθρα.

Εικ. 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3: Cuomo S., 2001, Αρχαία Μαθηματικά, Εκδόσεις ΕΝΑΛΙΟΣ.

Εικ. 3.10.2, 3.10.3, 3.10.4, 3.10.5, 3.10.6, 3.23.1: Λούπη Μ. κ.ά., 2011, Ταξίδι στον Κόσμο των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών. Η Συμβολή τους στον Σύγχρονο Κόσμο, Project.