



ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ Τ.Ε

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
«ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΙΛΤΡΑΡΙΣΜΑΤΟΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ  
ΒΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ»

ΕΚΠΟΝΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:  
ΤΑΤΙΑΝΑ ΚΑΡΑΛΗ ΑΜ.:10165

ΕΠΙΒΛΕΠΤΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ  
ΤΑΤΣΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΑΡΤΑ 2014

## **ΔΗΛΩΣΗ ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ**

Η παρούσα εργασία αποτελεί προϊόν αποκλειστικά δικής μου προσπάθειας. Όλες οι πηγές που χρησιμοποιήθηκαν περιλαμβάνονται στη βιβλιογραφία και γίνετε ρητή αναφορά σε αυτές μέσα στο κείμενο όπου έχουν χρησιμοποιηθεί.

Όνοματεπώνυμο:

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### I) ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup> ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ορισμός Βιολογικού Σήματος.....	6
1.1.1 Φυσιολογική Προέλευση Βιολογικού Σήματος .....	6
1.1.2 Ταξινόμηση Βιολογικών Σημάτων .....	10
1.2 Ορισμός Φίλτρου .....	11
1.2.1 Εισαγωγή Στα Ηλεκτρονικά Φίλτρα .....	12
1.2.1.1 Χαμηλοπερατό Φίλτρο ή Βαθυπερατό (Low Pass Filter) .....	12
1.2.1.2 Υψηλοπερατό Φίλτρο (High Pass Filter) .....	13
1.2.1.3 Ζωνοπερατό Φίλτρο (Band Pass Filter).....	13
1.2.1.4 Ζωνοφρακτικό Φίλτρο (Band Stop Filter).....	13
1.2.1.5 Φίλτρα BUTTERWORTH.....	15
1.2.1.6 Φίλτρα CHEBYSHEV.....	16
1.2.1.7 Φίλτρα BESSEL.....	16
1.2.1.8 Ελλειπτικά Φίλτρα.....	16
1.3 Μαθηματικές Μέθοδοι.....	17
1.3.1 Μετασχηματισμός Fourier .....	17
1.3.2 Μετασχηματισμός Wavelet .....	18
1.3.3 Μετασχηματισμός Hilbert .....	19
1.3.3.1 Ιδιότητες μετασχηματισμού Hilbert .....	20
1.3.4 Μετασχηματισμός Wigner – Ville.....	21

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup> ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

2.1 Εισαγωγή .....	22
2.2 Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier.....	24
2.3 Τύποι μετασχηματισμού .....	26
2.3.1 Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου .....	27
2.3.2 Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier .....	29
2.3.3 Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier .....	31

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup> ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ WAVELET

3.1 Μετασχηματισμός κυματιδίων .....	34
3.2 Συνεχής μετασχηματισμός κυματιδίου .....	36
3.3 Ορισμός μετασχηματισμού κυματιδίου .....	38
3.4 Εντοπισμός ασυνεχειών .....	39
3.5 Εφαρμογές μετασχηματισμού κυματιδίου .....	41

### II) ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>

4.1 Εισαγωγή .....	42
4.2 Προσομοίωση στο Matlab .....	43
4.3 Συμπεράσματα .....	51

Βιβλιογραφία .....	53
--------------------	----

## ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1 Χαρακτηριστικά των πιο κοινών βιοσημάτων .....	10
Πίνακας 2 τύποι μετασχηματισμού Fourier.....	27

## ΛΙΣΤΑ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1 Ηλεκτρογράφημα καταγεγραμμένο(ECG) από την επιφάνεια της καρδιάς χοίρου κατά τη διάρκεια φυσιολογικού φλεβοκομβικού ρυθμού.....	7
Εικόνα 2 Ηλεκτρογράφημα καταγεγραμμένο από την επιφάνεια της καρδιάς του ίδιου χοίρου κατά τη διάρκεια κοιλιακής μαρμαρυγής .....	7
Εικόνα 3 Κυματομορφή πίεσης αίματος καταγεγραμμένη από το αορτικό τόξο 4 ετών παιδιού (με δειγματοληψία στα 200 samples/sec).....	9
Εικόνα 4 Έξοδος χαμηλοπερατού φίλτρου [4].....	12
Εικόνα 5 Έξοδος υψιπερατού φίλτρου [4].....	13
Εικόνα 6 Έξοδος ζωνοπερατού φίλτρου [4].....	13
Εικόνα 7 Έξοδος ζωνοφρακτικού φίλτρου [4].....	14
Εικόνα 8 Χαρακτηριστικά Μετάδοσης Ιδανικών Φίλτρων [6] .....	14
Εικόνα 9 WT μετασχηματισμός.....	19
Εικόνα 10 Σήμα με μετασχηματισμό Fourier .....	22
Εικόνα 11 Μ/Σ Fourier βασικών συναρτήσεων .....	24
Εικόνα 12 Ιδιότητες DTFT .....	28
Εικόνα 13 βασικές ιδιότητες του DFT.....	31
Εικόνα 14 Μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας και αντίστροφα με χρήση του DFT.....	32
Εικόνα 15 διάγραμμα πεταλούδας.....	33
Εικόνα 16 α) Κυματίδια β) αλλαγή τοποθεσίας γ) αλλαγή κλίμακας .....	35
Εικόνα 17 κυματίδιο, σήμα και μετασχηματισμός .....	36
Εικόνα 18 διάφορα κυματίδια.....	37
Εικόνα 19 Συστολή- διαστολή κυματιδίου .....	38
Εικόνα 20 εντοπισμός ασυνέχειας .....	39
Εικόνα 21 συνάρτηση με συγκεκριμένο $\alpha$ .....	40
Εικόνα 22 μείωση κλίμακας .....	40
Εικόνα 23 Αρχική εικόνα.....	43
Εικόνα 24 Αρχικό σήμα $x_1$ .....	46
Εικόνα 25 φασματικό περιεχόμενο αρχικού $x_1$ .....	46
Εικόνα 26 προσθήκη θορύβου με $\text{randn}()$ στο $x_1$ .....	47
Εικόνα 27 φασματικό περιεχόμενο φιλτραρισμένου $x_1$ .....	47
Εικόνα 28 Αρχικό σήμα $x_2$ .....	48
Εικόνα 29 φασματικό περιεχόμενο αρχικού $x_2$ .....	48
Εικόνα 30 προσθήκη θορύβου με $\text{randn}()$ στο $x_2$ .....	49
Εικόνα 31 φασματικό περιεχόμενο φιλτραρισμένου $x_2$ .....	49
Εικόνα 32 Αρχικό σήμα $x_3$ .....	50
Εικόνα 33 φασματικό περιεχόμενο αρχικού $x_3$ .....	50
Εικόνα 34 προσθήκη θορύβου με $\text{randn}()$ στο $x_3$ .....	51
Εικόνα 35 φασματικό περιεχόμενο φιλτραρισμένου $x_3$ .....	51

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>Ο</sup> ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 Ορισμός Βιολογικού Σήματος

Το βιολογικό σήμα είναι χωρική, χρονική, ή χωροχρονική καταγραφή ενός βιολογικού γεγονότος όπως για παράδειγμα μια παλλόμενη καρδιά ή ένας συσπώμενος μυς. Η ηλεκτρική, χημική, και μηχανική δραστηριότητα που εμφανίζεται κατά τη διάρκεια αυτού του βιολογικού γεγονότος παράγει συχνά σήματα που μπορούν να μετρηθούν και να αναλυθούν. Τα βιολογικά σήματα, επομένως, περιέχουν τις πληροφορίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξηγήσουν τους φυσιολογικούς μηχανισμούς που υποκρύπτονται σε ένα συγκεκριμένο βιολογικό γεγονός ή ένα σύστημα. Τα βιοσήματα μπορούν να αποκτηθούν με ποικίλους τρόπους, π.χ., από το στήθοσκόπιο που χρησιμοποιεί ο γιατρός για να ακούσει τον ήχο της καρδιάς ενός ασθενή. Στις περισσότερες περιπτώσεις, δεν αρκεί απλά η απόκτηση ενός βιολογικού σήματος. Πρέπει να αναλυθούν για να ανακτηθούν πιο σχετικές πληροφορίες απ' αυτά. (10)

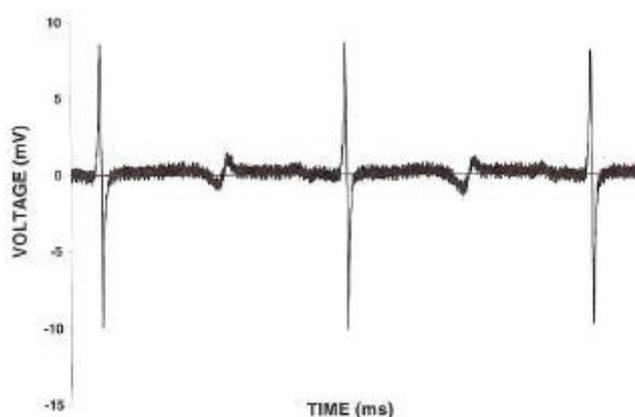
Οι βασικές μέθοδοι ανάλυσης σημάτων, π.χ., ενίσχυσης, φιλτραρίσματος, ψηφιοποίησης, επεξεργασίας, και αποθήκευσης, μπορούν να εφαρμοστούν σε πολλά βιολογικά σήματα. Αυτές οι τεχνικές ολοκληρώνονται γενικά με τη χρησιμοποίηση των ψηφιακών υπολογιστών. Επιπρόσθετα σε αυτές τις γνωστές διαδικασίες, έχουν αναπτυχθεί διαφορετικές ψηφιακές μέθοδοι για την ανάλυση των βιολογικών σημάτων. Σε αυτές περιλαμβάνονται ο υπολογισμός μέσου όρου σημάτων, η ανάλυση κυματιδίων, και οι τεχνικές τεχνητής νοημοσύνης. (10)

### 1.1.1 Φυσιολογική προέλευση των βιολογικών σημάτων

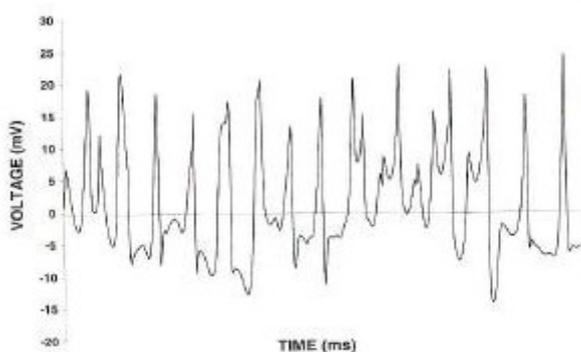
#### Βιοηλεκτρικά σήματα

Τα κύτταρα των νεύρων και των μυών παράγουν βιοηλεκτρικά σήματα που είναι τα αποτελέσματα των ηλεκτροχημικών μεταβολών εντός των κυττάρων και μεταξύ αυτών. Εάν ένα κύτταρο νεύρου ή μυός υποκινείται από ένα ερέθισμα που είναι αρκετά ισχυρό να φθάσει ένα απαραίτητο κατώφλι, το κύτταρο θα παραγάγει ένα δυναμικό δράσης. Η πλήρης δυναμικότητα δράσης, που αντιπροσωπεύει τη ροή των ιόντων στην κυτταρική μεμβράνη, μπορεί να μετρηθεί με τη χρησιμοποίηση των

διακυτταρικών ηλεκτροδίων. Η δυναμικότητα δράσης που παράγεται από ένα διεγερμένο κύτταρο μπορεί να μεταδοθεί από το ένα κύτταρο στα παρακείμενα κύτταρα. Όταν πολλά κύτταρα διεγείρονται, παράγεται ένα ηλεκτρικό πεδίο και διαδίδει το σήμα μέσω του βιολογικού μέσου. Οι αλλαγές στο ενδοκυτταρικό δυναμικό μπορούν να μετρηθούν στην επιφάνεια του οργάνου ή του οργανισμού με τη χρήση ηλεκτροδίων επιφάνειας. Το ηλεκτροκαρδιογράφημα (ECG), το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (EEG), και το ηλεκτρομυογράφημα (EMG) είναι παραδείγματα αυτού του φαινομένου (Εικόνα 1 – Εικόνα 2). (10)



Εικόνα 1 Ηλεκτρογράφημα καταγεγραμμένο(ECG) από την επιφάνεια της καρδιάς χοίρου κατά τη διάρκεια φυσιολογικού φλεβοκομβικού ρυθμού



Εικόνα 2 Ηλεκτρογράφημα καταγεγραμμένο από την επιφάνεια της καρδιάς του ίδιου χοίρου κατά τη διάρκεια κοιλιακής μαρμαρυγής

## Βιομαγνητικά σήματα

Διαφορετικά όργανα, συμπεριλαμβανομένης της καρδιάς, του εγκεφάλου, και των πνευμόνων, παράγουν μαγνητικά πεδία που είναι αδύνατα έναντι άλλων γεγονότων όπως οι ηλεκτρικές μεταβολές που εμφανίζονται σ' αυτά. Βιομαγνητισμός είναι η μέτρηση των μαγνητικών σημάτων που συνδέονται με τη συγκεκριμένη φυσιολογική

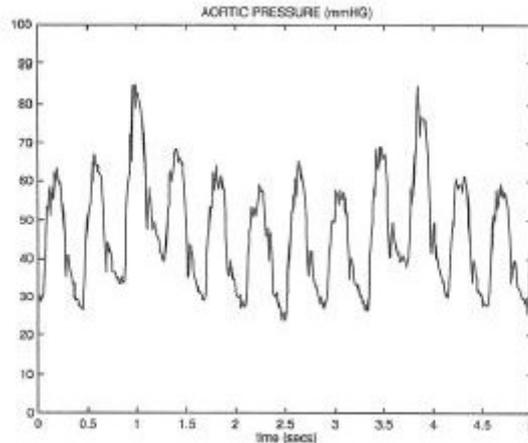
δραστηριότητα. Τα βιομαγνητικά σήματα επομένως μπορούν να παρέχουν πολύτιμες πρόσθετες πληροφορίες που συνήθως δεν περιλαμβάνονται στα βιοηλεκτρικά σήματα. Επιπλέον, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να λάβουν πρόσθετες πληροφορίες για την ενδοκυτταρική δραστηριότητα. (10)

#### Βιοχημικά σήματα

Τα βιοχημικά σήματα περιέχουν πληροφορίες για τα επίπεδα και τις μεταβολές των διαφόρων χημικών ουσιών στο σώμα. Παραδείγματος χάριν, η συγκέντρωση των διαφόρων ιόντων, όπως το ασβέστιο και το κάλιο, στα κύτταρα μπορεί να μετρηθεί και να καταγραφεί, όπως μπορούν και οι αλλαγές στις μερικές πιέσεις του οξυγόνου και του διοξειδίου του άνθρακα στο αναπνευστικό σύστημα ή το αίμα. Όλα αυτά αποτελούν βιοχημικά σήματα. Τα βιοχημικά σήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για ποικίλους λόγους, όπως ο καθορισμός των επιπέδων γλυκόζης. (10)

#### Εμβιομηχανικά σήματα

Οι μηχανικές λειτουργίες των βιολογικών συστημάτων, που περιλαμβάνουν κίνηση, μετατόπιση, ένταση, δύναμη, πίεση, και ροή, παράγουν επίσης βιοσήματα. Η πίεση αίματος, πχ. είναι μια μέτρηση της δύναμης που το αίμα ασκεί στα τοιχώματα των αγγείων. Οι αλλαγές στην πίεση αίματος μπορούν να καταγραφούν σαν μια κυματομορφή (Εικόνα 3). Η ανοδική διαδρομή στην κυματομορφή αντιπροσωπεύει τη συστολή των κοιλιών της καρδιάς όπως το αίμα εξωθείται από την καρδιά στο σώμα και η πίεση αίματος αυξάνει στη συστολική πίεση, τη μέγιστη πίεση αίματος. Το προς τα κάτω κομμάτι της κυματομορφής απεικονίζει την κοιλιακή χαλάρωση καθώς η πίεση αίματος παρουσιάζει πτώση στην ελάχιστη τιμή που καλείται διαστολική πίεση. (10)



Εικόνα 3 Κυματομορφή πίεσης αίματος καταγεγραμμένη από το αορτικό τόξο 4 ετών παιδιού (με δειγματοληψία στα 200 samples/sec)

### Βιοακουστικά σήματα

Τα βιοακουστικά σήματα είναι ένα πρόσθετο υποσύνολο των βιομηχανικών σημάτων που περιλαμβάνουν τη δόνηση (κίνηση). Πολλά βιολογικά γεγονότα παράγουν ακουστικό θόρυβο. Για παράδειγμα, η ροή του αίματος μέσω των βαλβίδων στην καρδιά έχει έναν διακριτικό ήχο. Οι μετρήσεις του βιοακουστικού σήματος μιας καρδιακής βαλβίδας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βοηθήσουν στη διαπίστωση της σωστής ή μη λειτουργίας. Το αναπνευστικό σύστημα, οι αρθρώσεις, και οι μύες παράγουν επίσης βιοακουστικά σήματα που διαδίδονται μέσω του βιολογικού μέσου και μπορούν συχνά να μετρηθούν στην επιφάνεια του δέρματος με τη χρησιμοποίηση των ακουστικών μετατροπέων όπως τα μικρόφωνα. (10)

### Βιοοπτικά σήματα

Τα βιοοπτικά σήματα παράγονται από τις οπτικές ιδιότητες των βιολογικών συστημάτων. Τα βιοοπτικά σήματα μπορούν να εμφανιστούν φυσικά ή, σε μερικές περιπτώσεις, μπορούν να προκληθούν χρησιμοποιώντας μια βιοϊατρική τεχνική. Παραδείγματος χάριν, οι πληροφορίες για την υγεία ενός εμβρύου μπορούν να ληφθούν με τη μέτρηση των χαρακτηριστικών φθορισμού του αμνιακού υγρού. Η εκτίμηση της καρδιακής παροχής μπορεί να γίνει με τη χρησιμοποίηση της μεθόδου διαλύσεων χρωστικών ουσιών που περιλαμβάνει τον έλεγχο της συγκέντρωσης μιας χρωστικής ουσίας όπως επανακυκλοφορεί μέσω της κυκλοφορίας του αίματος. (10)

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται μερικά από τα πιο κοινά βιολογικά σήματα με κάποια από τα χαρακτηριστικά τους.

Πίνακας 1 Χαρακτηριστικά των πιο κοινών βιοσημάτων

Ταξινόμηση	Τρόπος Λήψης	Εύρος Συχνοτήτων	Δυναμικό Εύρος	Σχόλια
Δυναμικό Δράσης	Μικροηλεκτρόδια	100 Hz - 2kHz	10μV-100mV	Επεμβατική μέτρηση δυναμικού κυτταρικής μεμβράνης
Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (ΗΕΓ)				
Επιφανείας	Ηλεκτρόδια Επιφανείας	0,5 - 100 Hz	2-100μV	
Ρυθμός Δέλτα		0,5 - 4 Hz		Παιδιά, βαθύς ύπνος και παθολογίες
Ρυθμός Θήτα		4 - 8 Hz		Κροταφικές και κεντρικές περιοχές σε κατάσταση ετοιμότητας
Ρυθμός Άλφα		8 - 13 Hz		Ξυπνητός, χαλαρός, κλειστά μάτια
Ρυθμός Βήτα		13 - 22 Hz		
Προκλητά Δυναμικά (ΕΡ)	Ηλεκτρόδια Επιφανείας		0.1-20μV	Απόκριση δυναμικού εγκεφάλου σε ερέθισμα
Οπτικά (VΕΡ)		1 - 300 Hz	1-20μV	Καταγραφές ινιακού λοβού
Ακουστικά (ΑΕΡ)		100 Hz - 3 kHz	0,5-10μV	
Μιας ίνας	Βελονοειδή Ηλεκτρόδια	500 Hz - 10 kHz	1-10mV	
Μιας κινητικής μονάδας	Βελονοειδή Ηλεκτρόδια	5 Hz - 10 kHz	100μV-2mV	Δυναμικά δράσης από μία μυϊκή ίνα
Επιφανειακό	Ηλεκτρόδια Επιφανείας	2 - 500 Hz	50μV-5mV	
Ηλεκτροκαρδιογράφημα (ΗΚΓ)	Ηλεκτρόδια Επιφανείας	0,05 - 100 Hz	1-10mV	
Πίεση αίματος	Μετατροπείς			Συνήθως η μέτρηση γίνεται επεμβατικά

### 1.1.2 Ταξινόμηση Βιολογικών Σημάτων

Για να αναλυθεί ένα φυσικό σήμα πρέπει να στηριχθεί σε ένα μαθηματικό μοντέλο, δηλαδή να περιγραφεί μαθηματικά. Υπάρχουν δυο κατηγορίες σημάτων στα μαθηματικά: τα συνεχή σήματα και τα διακριτά σήματα. Τα συνεχή σήματα περιγράφονται από μία συνεχή συνάρτηση  $s(t)$ , η οποία παρέχει πληροφορία για το σήμα οποιαδήποτε χρονική στιγμή (ή αλλιώς, ένα σήμα είναι συνεχές όταν παριστάνεται ως συνάρτηση μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών. Τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  όσο και η εξαρτημένη  $s$  μεταβάλλονται σ' ένα συνεχές σύνολο τιμών). Σήματα αυτού του τύπου είναι γνωστά ως αναλογικά. (10)

Τα διακριτά σήματα περιγράφονται από μία ακολουθία  $s(n)$ , η οποία παρέχει πληροφορία σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές ή αλλιώς, ένα σήμα είναι διακριτό όταν παριστάνεται από μια ακολουθία μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών. Στην περίπτωση αυτή, τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή όσο και η εξαρτημένη λαμβάνουν μόνο διακριτές τιμές. Σήματα αυτού του τύπου είναι γνωστά ως ψηφιακά. Τα περισσότερα βιολογικά σήματα είναι συνεχή. Επειδή όμως η

σύγχρονη τεχνολογία παρέχει κατάλληλες τεχνικές (μαθηματικές μεθόδους) επεξεργασίας διακριτών σημάτων, γι' αυτό μετατρέπουμε ένα συνεχές σήμα σε διακριτό με τη μέθοδο της δειγματοληψίας. Στη διαδικασία της δειγματοληψίας θα επανέλθουμε στο πειραματικό μέρος της εργασίας καθότι είναι πολύ σημαντική παράμετρος για την σωστή επεξεργασία του σήματος. (1)

Τα πραγματικά σήματα δεν μπορούν να περιγραφούν επακριβώς με μαθηματικό τρόπο. Πάντα εμφανίζεται κάποιος θόρυβος, κάποια μη προβλέψιμη αλλαγή στα χαρακτηριστικά του σήματος που καθιστούν αδύνατη τη μαθηματική περιγραφή τους. Πολύ συχνά όμως προσεγγίζουμε ή μοντελοποιούμε ένα πραγματικό σήμα με τη χρήση μιας μαθηματικής συνάρτησης. Μια σημαντική οικογένεια μαθηματικών σημάτων είναι τα περιοδικά σήματα. Ένα αναλογικό (συνεχές) σήμα λέγεται περιοδικό όταν μπορεί να εκφρασθεί από τη σχέση: (1)

$$s(t) = s(t + nT)$$

όπου  $n$  είναι ένας ακέραιος και  $T$  είναι η περίοδος του σήματος. Το περιοδικό σήμα αποτελείται από μια βασική κυματομορφή με διάρκεια  $T$  δευτερόλεπτα. Αυτή η βασική κυματομορφή επαναλαμβάνεται άπειρες φορές στον άξονα του χρόνου. (1. ελληνική βιβλιογραφία)

## 1.2 Ορισμός Φίλτρου

Τα φίλτρα είναι ηλεκτρονικές διατάξεις οι οποίες αλλάζουν το πλάτος ή/και την φάση των φασματικών συνιστωσών του σήματος εισόδου, χωρίς να μεταβάλλουν την συχνότητά τους ή να προσθέτουν φασματικές συνιστώσες που δεν υπάρχουν στο σήμα εισόδου. Τα φίλτρα χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στα ηλεκτρονικά και τηλεπικοινωνιακά συστήματα για να απορριφθούν τα ανεπιθύμητα σήματα σε κάποια περιοχή συχνοτήτων. Συνήθης στόχος: Να περάσει άθικτο το μέρος του φάσματος που βρίσκεται σε μια ζώνη συχνοτήτων, τη ζώνη διέλευσης του φίλτρου, και να μηδενιστεί το μέρος του φάσματος που βρίσκεται στις υπόλοιπες συχνότητες, τη ζώνη αποκοπής του φίλτρου. (2,4)

Η περιγραφή ενός φίλτρου γίνεται συνήθως στο πεδίο της συχνότητας, όπου περιγράφεται με την απόκριση πλάτους ή με την απόκριση φάσης. Τα αναλογικά δίκτυα των φίλτρων μπορεί να είναι είτε ενεργά είτε παθητικά. Τα παθητικά περιλαμβάνουν πηνία, αντιστάσεις, πυκνωτές ενώ τα ενεργά χρησιμοποιούν τελεστικούς ενισχυτές. Κατά τα τελευταία χρόνια η διαδικασία φιλτραρίσματος

καθώς και άλλες επεξεργασίες σημάτων γίνονται με ψηφιακές μεθόδους. Το ψηφιακό φίλτρο είναι ένας αλγόριθμος με τον οποίο μία σειρά αριθμών στην είσοδο μετασχηματίζεται στην έξοδο σε μια άλλη σειρά αριθμών. Ανάλογα λοιπόν με την λειτουργία τους τα φίλτρα ταξινομούνται στις ακόλουθες κατηγορίες στις οποίες θα αναφερθούμε συνοπτικά παρακάτω: (3)

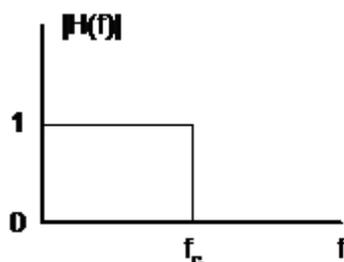
- Βαθυπερατά φίλτρα
- Υψιπερατά φίλτρα
- Ζωνοπερατά φίλτρα
- Ζωνοφρακτικά φίλτρα

Τα ιδανικά φίλτρα ονομάζονται και φίλτρα τοίχου (brickwall filters). Ωστόσο δεν είναι δυνατή η υλοποίηση τέτοιων φίλτρων. Τα πραγματικά φίλτρα προσεγγίζουν τα ιδανικά αυξάνοντας την τάξη του φίλτρου, η οποία καθορίζεται από την τάξη των πολυωνύμων της συνάρτησης μεταφοράς του φίλτρου ή αλλιώς από τον αριθμό των στοιχείων χωρητικότητας και αυτεπαγωγής. (3)

## 1.2.1 Εισαγωγή Στα Ηλεκτρονικά Φίλτρα

### 1.2.1.1 Χαμηλοπερατό Φίλτρο ή Βαθυπερατό (Low Pass Filter)

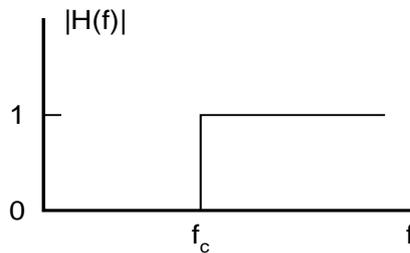
Είναι τα φίλτρα όπου η ζώνη διέλευσης αρχίζει από τη συχνότητα  $f=0$  μέχρι την  $f=f_c$ . Η συχνότητα αυτή ονομάζεται συχνότητα αποκοπής. Χρησιμοποιείται όταν το ανεπιθύμητο σήμα βρίσκεται σε υψηλότερες συχνότητες από το επιθυμητό. (9)



Εικόνα 4 Έξοδος χαμηλοπερατού φίλτρου [4]

### 1.2.1.2 Υψηπερατό Φίλτρο (High Pass Filter)

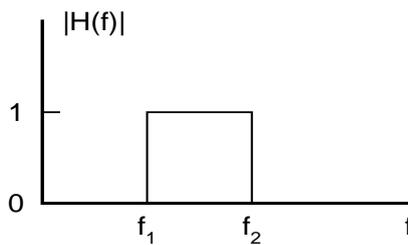
Είναι συμπληρωματικά των βαθυπερατών διότι η ζώνη συχνοτήτων από τη  $f=0$  μέχρι την  $f=f_c$  είναι η ζώνη απαγόρευσης ενώ από την  $f=f_c$  μέχρι το άπειρο είναι η ζώνη διέλευσης. Χρησιμοποιείται όταν το ανεπιθύμητο σήμα βρίσκεται σε χαμηλότερες συχνότητες από το επιθυμητό. (9)



Εικόνα 5 Έξοδος υψηπερατού φίλτρου [4]

### 1.2.1.3 Ζωνοπερατό Φίλτρο (Band Pass Filter)

Επιτρέπουν να περάσουν μόνο συχνότητες μεταξύ  $f_1$  και  $f_2$ . Χρησιμοποιείται όταν το επιθυμητό σήμα βρίσκεται σε μια ζώνη συχνοτήτων και όλες οι άλλες είναι ανεπιθύμητες. (9)

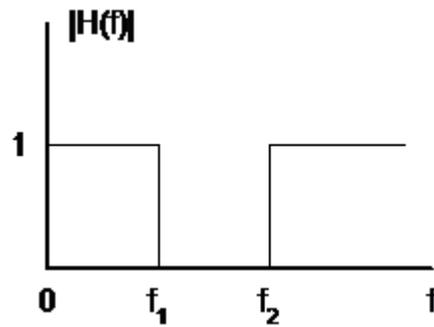


Εικόνα 6 Έξοδος ζωνοπερατού φίλτρου [4]

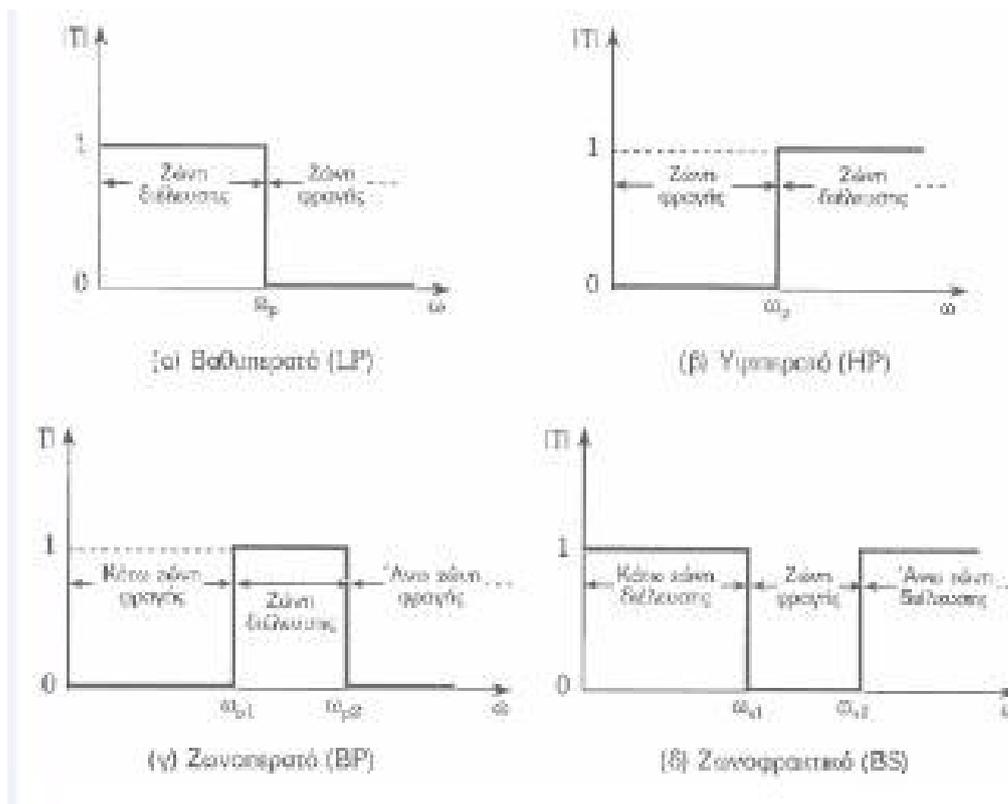
### 1.2.1.4 Ζωνοφρακτικό Φίλτρο (Band Stop Filter)

Οι συχνότητες μεταξύ των συχνοτήτων αποκοπής  $f_{c1}$  και  $f_{c2}$  αποκόπτονται ενώ οι άλλες περνούν. Όταν ένα Ζωνοφρακτικό αποκόπτει μια συχνότητα μόνο τότε το φίλτρο λέγεται φίλτρο σχισμής. Τα χρησιμοποιούμε για να αποκόψουμε

συγκεκριμένες συχνότητες, πχ. την παρεμβολή του δικτύου ηλεκτροδότησης στα 50 MHz. (9)



Εικόνα 7 Έξοδος ζωνοφρακτικού φίλτρου [4]



Εικόνα 8 Χαρακτηριστικά Μετάδοσης Ιδανικών Φίλτρων [6]

- **Ζώνη διέλευσης**: Είναι η ζώνη συχνοτήτων στην οποία οι φασματικές συνιστώσες διέρχονται από το φίλτρο χωρίς κάποια ιδιαίτερη αλλοίωση στο πλάτος. (9)

- **Ζώνη μετάβασης** (από τις συχνότητες  $\omega_p$  έως  $\omega_s$ ), στην οποία δεν έχουμε απότομο μηδενισμό της απόκρισης πλάτους (όπως συμβαίνει στο ιδανικό φίλτρο),

αλλά μια ομαλή μείωσή της (με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη κλίση). Ο λόγος  $\omega s/\omega p$  λέγεται βαθμός επιλεκτικότητας και καθορίζει πόσο απότομη είναι η μετάβαση από τη διέλευση στην φραγή. (9)

- **Ζώνη φραγής ή αποκοπής**, όπου οι φασματικές συνιστώσες του σήματος εισόδου εξασθενούν τόσο πολύ, ώστε στην έξοδο να είναι αμελητέες σε σχέση με αυτές που βρίσκονται στη ζώνη διέλευσης. Σημειώνεται εδώ ότι στη ζώνη φραγής δεν έχουμε στην πράξη μηδενισμό των πλατών (όπως στο ιδανικό φίλτρο), αλλά πολύ μεγάλη μείωσή τους. Επιπλέον, η μείωση αυτή δεν είναι ομοιόμορφη για όλες τις συχνότητες στη ζώνη φραγής, αλλά γενικά παρουσιάζεται μια κυμάτωση, όπως φαίνεται στην εικόνα 8. (9)

- **Κυμάτωση της ζώνης διέλευσης  $A_{max}$** : Όπως φαίνεται και στο σχήμα, στη ζώνη διέλευσης η απόκριση πλάτους δεν είναι σταθερή, αλλά εμφανίζει μια *κυμάτωση*.  $A_{max}$  είναι η από κορυφή σε κορυφή (peak-to-peak) κυμάτωση της απόκρισης πλάτους του φίλτρου. (9)

- **Ελάχιστη εξασθένιση της ζώνης φραγής  $A_{min}$** : Είναι η ελάχιστη μείωση της απόκρισης πλάτους που παρατηρείται στη ζώνη φραγής (ή αποκοπής) σε σχέση με τη μέγιστη απόκριση πλάτους που εμφανίζεται στη ζώνη φραγής. (9)

#### 1.2.1.5 Φίλτρα BUTTERWORTH

Τα φίλτρα Butterworth παράγουν την πιο επίπεδη ζώνη διέλευσης σε βάρος όμως της γρήγορης μετάβασης από τη ζώνη διέλευσης στη ζώνη απόρριψης. Επίσης έχουν φτωχή χαρακτηριστική φάσης. Ωστόσο, επειδή τα φίλτρα αυτά είναι απλά στην υλοποίηση και στην κατανόησή τους, είναι κατάλληλα για εφαρμογές όπως η ακουστική επεξεργασία. Έτσι μπορεί να θεωρηθεί γενικά καλό φίλτρο με επαρκές ποσοστό μείωσης. Η απόκριση πλάτους ενός τέτοιου φίλτρου είναι: (9)

$$H = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$$

Όπου  $n$  ο αριθμός των πόλων (βαθμός του φίλτρου) και  $f_c$  η συχνότητα αποκοπής.

#### 1.2.1.6 Φίλτρα CHEBYSHEV

Τα φίλτρα αυτά επιτρέπουν κάποια διακύμανση στη ζώνη διέλευσης, η οποία τα καθιστά ακατάλληλα για τα ακουστικά συστήματα. Ωστόσο έχουν πολύ καλή απόκριση στη μετάβαση από τη ζώνη διέλευσης στη ζώνη απόρριψης για αυτό είναι καλύτερα για εφαρμογές στις οποίες η ζώνη συχνοτήτων περιλαμβάνει μόνο μία συχνότητα ενδιαφέροντος όπως πχ η παραγωγή ενός κύματος ημιτόνου από ένα τετραγωνικό κύμα φιλτράροντας τις αρμονικές. Ακόμα τα φίλτρα Chebyshev προδιαγράφονται από τον αριθμό των πόλων και τη διακύμανση στη ζώνη διέλευσης. Η απόκριση πλάτους των φίλτρων αυτών είναι η ακόλουθη: (9)

$$H = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cdot C_n \left( \frac{f}{f_c} \right)^{2n}}}$$

Όπου  $C_n$  είναι το πολυώνυμο Chebyshev βαθμού  $n$  και  $\epsilon$  η σταθερά που προσδιορίζει τη διακύμανση στη ζώνη διέλευσης.

#### 1.2.1.7 Φίλτρα BESSEL

Σε περιπτώσεις όπου το σχήμα της κυματομορφής είναι υψίστης σημασίας είναι επιθυμητό ένα φίλτρο γραμμικής φάσης. Τα φίλτρα Bessel έχουν μέγιστη επίπεδη καθυστέρηση χρόνου στη ζώνη διέλευσης αντίθετα με τα φίλτρα Butterworth που έχουν μέγιστη επίπεδη απόκριση πλάτους. Ένα φίλτρο Bessel δίνει μία σταθερή καθυστέρηση διάδοσης του φάσματος συχνότητας εισόδου. Επομένως, εφαρμόζοντας ένα τετραγωνικό κύμα αποτελούμενο από μια θεμελιώδη και πολλές αρμονικές, στην είσοδο ενός φίλτρου Bessel παράγεται ένα τετραγωνικό κύμα χωρίς υπερανύψωση, δηλαδή, όλες οι συχνότητες καθυστερούν με την ίδια ποσότητα. Άλλοι τύποι φίλτρων εξαιτίας της καθυστέρησης που εισάγουν σε σχέση με την συχνότητα, καθυστερούν τις αρμονικές από διαφορετικές ποσότητες. Το αποτέλεσμα είναι μια υπερανύψωση της κυματομορφής εξόδου. (9)

#### 1.2.1.8 Ελλειπτικά Φίλτρα

Όταν ο παράγοντας επιλογής φίλτρου είναι το πόσο απότομη είναι η μεταβατική ζώνη, τότε μπορεί αν επιλεγεί ένα ελλειπτικό φίλτρο. Τα φίλτρα αυτού του τύπου είναι παρόμοια στην απόκριση με τα φίλτρα Chebyshev και έχουν ζώνη συχνοτήτων

με κυμάτωση και αυστηρή μείωση εις βάρος της κυμάτωσης στη ζώνη αποκλεισμού συχνοτήτων. Δηλαδή παρουσιάζουν το μειονέκτημα της τεράστιας διακύμανσης τόσο στη ζώνη διέλευσης όσο και στη ζώνη απαγόρευσης. (9)

## 1.3 Μαθηματικές Μέθοδοι

### 1.3.1 Μετασχηματισμός Fourier

Τα σήματα που χαρακτηρίζονται ως σήματα απλής συχνότητας διέρχονται αναλλοίωτα από ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα, Ωστόσο υπάρχουν κάποια μαθηματικά εργαλεία που επιτρέπουν την ανάλυση ενός σήματος σε σήματα απλών συχνοτήτων. Ο Γάλλος φυσικο-μαθηματικός Joseph Fourier υιοθέτησε για πρώτη φορά, την ανάλυση μιας σύνθετης συνάρτησης σε άθροισμα συναρτήσεων απλών συχνοτήτων για να μελετηθούν φαινόμενα διάδοσης της θερμότητας. (1)

Έστω υπάρχει μία συνάρτηση  $x(t)$ , σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε ως μετασχηματισμό Fourier της  $x(t)$  τη μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής  $X(\Omega)$ :

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$

Θα πρέπει να ισχύει φυσικά η προϋπόθεση ότι το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα υπάρχει.

Γενικά ο μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιείται συχνά με σκοπό την μετατροπή οποιασδήποτε κυματομορφής από το πεδίο του χρόνου στην αντίστοιχη μορφή της στο πεδίο της συχνότητας. Επίσης υπάρχει και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ο οποίος εκτελεί την αντίστροφη μετατροπή, δηλαδή από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου. (1)

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

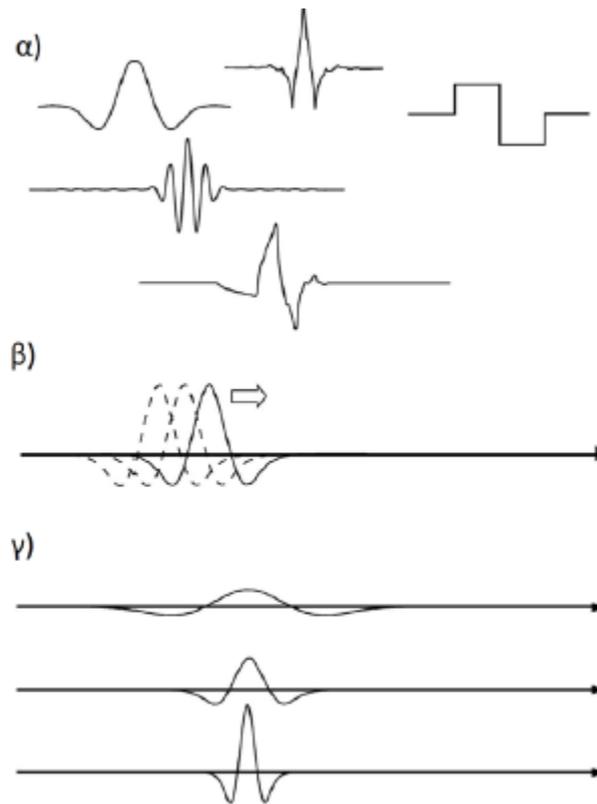
Πιο αναλυτικά στον μετασχηματισμό Fourier και τις ιδιότητες του θα αναφερθούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

### 1.3.2 Μετασχηματισμός Wavelet

Ο μετασχηματισμός κυματιδίου, εν συντομία γράφεται και ως WT που προέρχεται από τον αγγλικό του όρο wavelet transform και είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στην ώστε να αναλυθούν σήματα τα οποία χαρακτηρίζονται ως απεριοδικά, ασυνεχή, με απότομες αλλαγές και θόρυβο. Έχει την ικανότητα να εξετάζει το σήμα ταυτόχρονα στο πεδίο του χρόνου αλλά και στο πεδίο της συχνότητας, σε αντίθεση με το μετασχηματισμό Fourier, επομένως έχουν δημιουργηθεί πολλές εξελιγμένες μέθοδοι οι οποίες βασίζονται στα κυματίδια. Πλέον ο WT έχει εφαρμογές σε πάρα πολλούς τομείς και βοηθάει στην ανάλυση πολλών φυσικών φαινομένων με μεγάλη επιτυχία. (11)

Ορισμένα παραδείγματα εφαρμογής αυτού του μετασχηματισμού αποτελούν η ανάλυση κλιματικών φαινομένων, οικονομικών μεγεθών, καρδιολογικών σημάτων, μηχανικών διατάξεων, η αποθορυβοποίηση σεισμικών και αστρονομικών σημάτων, η συμπίεση βίντεο και πολλά άλλα. Επιπλέον εφαρμόζεται και στην μεταλλουργία για τον έλεγχο των επιφανειών αλλά και στην οικονομία, για την ανίχνευση ιδιοτήτων στις τιμές. Τα κυματίδια έχουν τη δυνατότητα να διακρίνουν εάν το σύντομο σήμα υπάρχει, και σε θετική περίπτωση, μπορούν να το τοποθετήσουν στο χρόνο. (11)

Η ανάλυση του WT μετασχηματισμού, χρησιμοποιεί μικρές κυματοειδείς συναρτήσεις γνωστές ως κυματίδια. Στην εικόνα που φαίνεται παρακάτω φαίνονται μερικά παραδείγματα κάποιων κοινών κυματιδίων που χρησιμοποιούνται στην πράξη. Τα κυματίδια μετασχηματίζουν το υπό ανάλυση σήμα με τέτοιο τρόπο ώστε να παρουσιάζει την πληροφορία με μια πιο χρήσιμη μορφή. Αυτός ο μετασχηματισμός είναι γνωστός ως μετασχηματισμός κυματιδίου (WT). Στην ουσία, ο μετασχηματισμός WT αποτελεί τη συνέλιξη του κυματιδίου με το σήμα. (11)



Εικόνα 9 WT μετασχηματισμός

### 1.3.3 Μετασχηματισμός Hilbert

Ο μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιείται ιδιαίτερα για τον υπολογισμό του περιεχομένου συχνότητας ενός ενεργειακού σήματος, επομένως με αυτό τον τρόπο παρέχει ένα μέσο για την ανάλυση και τον σχεδιασμό φίλτρων επιλογής συχνοτήτων με σκοπό τον διαχωρισμό των σημάτων με βάση το περιεχόμενο της συχνότητάς τους. Υπάρχει άλλη μία μέθοδος για τον διαχωρισμό των σημάτων και η οποία βασίζεται στην επιλεκτικότητα της φάσης και χρησιμοποιεί μετατοπίσεις φάσεων μεταξύ σχετικών σημάτων ώστε να επιτύχει τον επιθυμητό διαχωρισμό. Η πιο απλή μετατόπιση φάσης είναι στις 180 μοίρες που στην ουσία είναι μία αντιστροφή της πολικότητας, στην περίπτωση που έχουμε ημιτονικό σήμα. Θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ιδανικός μετασχηματιστής σε περίπτωση που χρειάζεται να μετατοπιστούν οι γωνίες φάσης όλων των συνιστωσών κατά 180 μοίρες. (3)

Μία άλλη ενδιαφέρουσα μετατόπιση είναι αυτή των 90 μοιρών. Συγκεκριμένα προκύπτει μία συνάρτηση χρόνου, γνωστή και ως μετασχηματισμός Hilbert, όταν οι γωνίες φάσης όλων των συνιστωσών μετατοπίζονται κατά +90 ή -90 μοίρες. Έστω

ένα σήμα  $g(t)$  με μετασχηματισμό Fourier  $G(f)$ . Ο μετασχηματισμός Hilbert του  $g(t)$  συμβολίζεται ως  $\hat{g}(t)$  ορίζεται από την εξής σχέση: (3)

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Ο μετασχηματισμός Hilbert είναι μία γραμμική πράξη. Ορίζεται και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Hilbert από την παρακάτω σχέση:

$$g(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Οι δύο παραπάνω συναρτήσεις αποτελούν ζευγάρι μετασχηματισμού Hilbert.

Ο μετασχηματισμός Hilbert έχει πάρα πολλές και σημαντικές εφαρμογές όπως αυτές που θα αναφέρουμε στη συνέχεια: (3)

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την υλοποίηση της επιλεκτικότητας φάσης, κατά την παραγωγή μίας ειδικής μορφής διαμόρφωσης, η οποία αναφέρεται και ως απλή πλευρική διαμόρφωση.
- Παρέχει τη μαθηματική βάση για την αναπαράσταση ζωνοπερατών σημάτων.

Ο μετασχηματισμός Hilbert μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε σήμα μπορεί να εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός Fourier, δηλαδή εφαρμόζεται τόσο σε ενεργειακά σήματα όσο και σε σήματα ισχύος. (3)

### 1.3.3.1 Ιδιότητες μετασχηματισμού Hilbert

Ο μετασχηματισμός Hilbert έχει κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες κάποιες από τις οποίες θα αναφέρουμε: (3)

- Ένα σήμα  $g(t)$  και ο μετασχηματισμός Hilbert αυτού του σήματος, έχουν την ίδια πυκνότητα φάσματος.
- Ένα σήμα  $g(t)$  και ο μετασχηματισμός Hilbert αυτού, έχουν την ίδια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

- Ένα σήμα  $g(t)$  και ο μετασχηματισμός Hilbert αυτού είναι ορθογώνια.
- Εάν  $\hat{g}(t)$  είναι ο μετασχηματισμός Hilbert του  $g(t)$ , τότε ο μετασχηματισμός Hilbert του  $\hat{g}(t)$  είναι  $-g(t)$ .

### 1.3.4 Μετασχηματισμός Wigner – Ville

Στο μετασχηματισμό Wigner-Ville υπάρχει η δυνατότητα να αναλυθεί το σήμα τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας. Για ένα σήμα  $x(t)$ , η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, η οποία εξαρτάται από το χρόνο, δίνεται από τη σχέση:

(4)

$$R(t, f) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) * x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

Ισχύει ότι ο μετασχηματισμός Wigner – Ville ισούται με τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και συγκεκριμένα από την παρακάτω σχέση:

(4)

$$WV(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, f) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) * x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Σε περίπτωση διακριτών σημάτων  $x[n]$ , ο μετασχηματισμός αυτός παίρνει τη μορφή

$$WV(t, f) = 2 \sum_{-\infty}^{\infty} h_N^2[k] x[n+k] x^*[n-k] e^{-j4\pi fk}$$

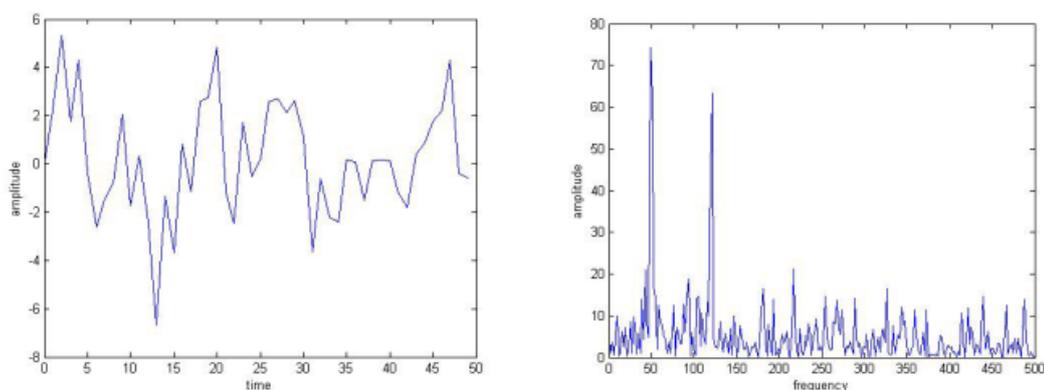
Ο μετασχηματισμός Wigner – Ville παρουσιάζει ένα πολύ σημαντικό μειονέκτημα λόγω της εμφάνισης των ετέρων όρων, οι οποίοι δεν είναι ποτέ μηδενικοί. Έτσι θα πρέπει να λαμβάνονται πάντοτε υπόψη όταν αναλύονται σήματα με πολλές συνιστώσες. (4)

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup> ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

## 2.1 Εισαγωγή

Η ανάλυση Fourier είναι ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία στην ανάλυση των σημάτων τα τελευταία χρόνια εξ' αίτιας της γενικότητας και της απλότητας της. Η βασική ιδέα πίσω από την ανάλυση Fourier είναι η ανάλυση του σήματος και η αναπαράστασή του από μια ατέρμονη σειρά ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης διαφορετικής συχνότητας. Οι συναρτήσεις βάσης που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση Fourier είναι συναρτήσεις ημιτόνων και συνημιτόνων. Οι συντελεστές των συναρτήσεων βάσης αναπαριστούν την συνεισφορά κάθε συνάρτησης ημιτόνου και συνημιτόνου σε κάθε συχνότητα στο εξεταζόμενο σήμα. Οι σειρές Fourier εφαρμόζονται σε περιοδικά σήματα ενώ ο μετασχηματισμός Fourier βρίσκει εφαρμογή είτε σε περιοδικά είτε σε μη περιοδικά σήματα. (6)

Σημαντικό πλεονέκτημα της ανάλυσης Fourier είναι η μετάβαση της ανάλυσης από το πεδίο του χρόνου σε αυτό της συχνότητας. Το σήμα με την τεχνική αυτή εξετάζεται μέσω του συχνοτικού του περιεχομένου αφού μέσω των συντελεστών που προκύπτουν από την ανάλυση γίνεται αντιληπτή η συνεισφορά κάθε συχνότητας. Έτσι έχουμε εξασφαλίσει ένα ανεξάρτητο από το χρόνο τελεστή ο οποίος δίνει απαντήσεις σε πολλά προβλήματα και μπορεί να εφαρμοστεί σε πληθώρα εφαρμογών όπως είναι η ανάλυση στάσιμων κυμάτων. (6)



Εικόνα 10 Σήμα με μετασχηματισμό Fourier

Οι σειρές Fourier και ο μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιούνται γενικά στην ανάλυση γραμμικών συστημάτων, κάτι το οποίο συνεπάγεται πολλοί επιστήμονες να αντιλαμβάνονται τη θεωρία Fourier ως ένα φυσικό φαινόμενο και όχι απλά ως ένα μαθηματικό εργαλείο. Η βασική ιδέα σε αυτό τον μετασχηματισμό είναι ότι τα σήματα θεωρούνται σαν ένα άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ιδιαίτερα χρήσιμος καθώς βοηθά να αναπαρασταθεί το σήμα στο πεδίο της συχνότητας, καθώς στο φάσμα πολλά χαρακτηριστικά του σήματος είναι πιο φανερά σε σχέση με την κυματομορφή του. (3)

Για να είναι δυνατός ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος  $x(t)$  θα πρέπει το σήμα να ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet: (3)

- Η συνάρτηση  $x(t)$  είναι μονοσήμαντη, με ένα πεπερασμένο αριθμό μέγιστων και ελαχίστων και ένα πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών, σε κάθε πεπερασμένο διάστημα χρόνου.
- Η συνάρτηση  $x(t)$  είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier, ένα σήμα παλμού  $x(t)$  πεπερασμένης ενέργειας εκφράζεται σαν συνεχές φάσμα εκθετικών συναρτήσεων με συχνότητες στο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ . Το πλάτος μίας τέτοιας συνιστώσας με συχνότητα  $f$  είναι πολύ μικρό, αλλά είναι ανάλογο του  $X(f)$ , δηλαδή του μετασχηματισμού Fourier του σήματος  $x(t)$ . (3)

Με τον μετασχηματισμό Fourier μπορούμε να αναλύσουμε ένα δοθέν σήμα  $x(t)$  στις μιγαδικές εκθετικές συνιστώσες του που καταλαμβάνουν όλο το διάστημα συχνότητας  $(-\infty, \infty)$ . Συγκεκριμένα ο μετασχηματισμός Fourier  $X(f)$  του σήματος ορίζει την αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας του σήματος καθότι καθορίζει τα σχετικά πλάτη των διαφόρων συνιστωσών της συχνότητας του σήματος. Αντίστοιχα μπορεί να οριστεί το σήμα με την αναπαράστασή του στο πεδίο του χρόνου καθορίζοντας τη συνάρτηση  $x(t)$  σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ . (3)

Σήμα	Μετασχηματισμός
$\delta(n)$	$1, -\infty < \omega < \infty$
$\delta(n - M)$	$e^{-j\omega M}$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
$\alpha^n u(n),  \alpha  < 1$	$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) - \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$u(n) - u(n - M)$	$\frac{\sin(\omega M / 2)}{\sin(\omega / 2)} e^{-j\omega(M-1)/2}$

Εικόνα 11 Μ/Σ Fourier βασικών συναρτήσεων

## 2.2 Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τη σχέση μεταξύ μίας συνάρτησης  $x(t)$  και του μετασχηματισμού αυτής  $X(f)$ . Αυτό μπορεί να συμβεί χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, τις οποίες και περιγράφουμε στη συνέχεια της παρούσας ενότητας. (3)

### 1. Γραμμικότητα

Έστω σήμα  $x_1(t)$  με μετασχηματισμό Fourier  $X_1(f)$  και  $x_2(t)$  με μετασχηματισμό Fourier  $X_2(f)$ . Τότε για όλες τις σταθερές  $a$  και  $b$  ισχύει: (3)

$a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \Leftrightarrow a \cdot X_1(f) + b \cdot X_2(f)$ , αυτή η ιδιότητα προκύπτει από την γραμμικότητα των ολοκληρωμάτων.

## 2. Αλλαγή κλίμακας χρόνου

Έστω σήμα  $x(t)$  με μετασχηματισμό Fourier  $X(f)$ . Τότε ισχύει:

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

Σε αυτή την ιδιότητα η συνάρτηση  $x(at)$  αποτελεί μία συμπιεσμένη χρονικά μορφή της  $x(t)$ , κατά ένα παράγοντα  $a$ , ενώ αντίθετα η συνάρτηση  $X(f/a)$  παριστάνει την  $X(f)$  εκτεταμένη κατά τον ίδιο παράγοντα  $a$ . Επομένως αυτή η ιδιότητα φανερώνει ότι η συμπίεση μίας συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου συνεπάγεται αντίστοιχη επέκταση του μετασχηματισμού Fourier αυτής στο πεδίο της συχνότητας και αντίστροφα. (3)

## 3. Δυαδικότητα

Έστω σήμα  $x(t)$  με μετασχηματισμό Fourier  $X(f)$ . Τότε ισχύει:

$$X(t) \Leftrightarrow x(-f) \text{ και προέρχεται από τη σχέση ορισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, εάν γραφεί με διαφορετική μορφή. (3)}$$

## 4. Χρονική ολίσθηση

Έστω σήμα  $x(t)$  με μετασχηματισμό Fourier  $X(f)$ . Τότε ισχύει:

$$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(f) \exp(-j2\pi ft_0)$$

Αυτή η ιδιότητα δηλώνει ότι αν μία συνάρτηση  $x(t)$  μετατοπίζεται προς τη θετική διεύθυνση κατά μία ποσότητα  $t_0$ , το αποτέλεσμα αυτό είναι ισοδύναμο με τον πολλαπλασιασμό του μετασχηματισμού της,  $X(f)$ , με τον παράγοντα  $\exp(j2\pi ft_0)$ . Αυτό δηλώνει ότι το πλάτος του  $X(f)$  δεν μεταβάλλεται από τη χρονική ολίσθηση, αλλά η φάση του μεταβάλλεται κατά την ποσότητα  $-2\pi ft_0$ . (3)

## 5. Ολίσθηση συχνότητας

Έστω σήμα  $x(t)$  με μετασχηματισμό Fourier  $X(f)$ . Τότε ισχύει:

$$\exp(j2\pi fct)x(t) \Leftrightarrow X(f - fc)$$

, όπου  $fc$  είναι μία πραγματική σταθερά. Επομένως από αυτή την ιδιότητα προκύπτει ότι από τον πολλαπλασιασμό της  $x(t)$  με τον παράγοντα  $\exp(j2\pi fct)$ , έχουμε ισοδύναμη μετατόπιση του μετασχηματισμού  $X(f)$  προς τη θετική διεύθυνση κατά ένα παράγοντα  $fc$ . Αυτή η

ιδιότητα διαφορετικά ονομάζεται και θεώρημα διαμόρφωσης, επειδή η μετατόπιση των συχνοτήτων ενός σήματος επιτυγχάνεται με χρήση διαμόρφωσης. (3)

### 6. Εμβαδό κάτω από την $x(t)$

Έστω σήμα  $x(t)$  με μετασχηματισμό Fourier  $X(f)$ . Τότε ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0)$$

Το οποίο δείχνει ότι το εμβαδό κάτω από τη συνάρτηση  $x(t)$  είναι ίσο με την τιμή του μετασχηματισμού Fourier  $X(f)$  αυτής για  $f=0$ . (3)

### 7. Εμβαδό κάτω από την $X(f)$

Έστω σήμα  $x(t)$  με μετασχηματισμό Fourier  $X(f)$ . Τότε ισχύει:

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$$

Το οποίο δείχνει ότι η τιμή της συνάρτησης  $x(t)$  για  $t=0$  είναι ίση με το εμβαδό κάτω από το μετασχηματισμού Fourier  $X(f)$  αυτής. (3)

## 2.3 Τύποι μετασχηματισμού

Ένα σήμα μπορεί να είναι είτε συνεχές ή διακριτό, είτε περιοδικό ή μη περιοδικό. Ο συνδυασμός αυτών των περιπτώσεων δημιουργεί τέσσερις κατηγορίες σημάτων, για τις οποίες η εφαρμογή της ανάλυσης Fourier λαμβάνει και αντίστοιχες ονομασίες. Για σήματα που είναι συνεχή και μη περιοδικά η ανάλυση Fourier ονομάζεται Μετασχηματισμός Fourier (Fourier Transform), για σήματα που είναι συνεχή και περιοδικά ονομάζεται Σειρά Fourier (Fourier Series), για σήματα που είναι διακριτά και μη περιοδικά ονομάζεται Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (Discrete Time Fourier Transform) και για σήματα που είναι διακριτά και περιοδικά ονομάζεται Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform). (5)

Πίνακας 2 τύποι μετασχηματισμού Fourier

Τύπος Μετασχηματισμού	Παράδειγμα σήματος
Μετασχηματισμός Fourier (σήματα <b>συνεχή και μη περιοδικά</b> )	
Σειρά Fourier (σήματα <b>συνεχή και περιοδικά</b> )	
Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (σήματα <b>διακριτά και μη περιοδικά</b> )	
Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (σήματα <b>διακριτά και περιοδικά</b> )	

Μέσω αυτού οι περιοδικές συναρτήσεις και ακολουθίες μπορούν και αναλύονται σε αθροίσματα όρων όπου ο καθένας τους εκφράζει μία αρμονική ταλάντωση. Στην περίπτωση που υπάρχει μία περιοδική συνάρτηση, ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να απλοποιηθεί με τον υπολογισμό ενός διακριτού συνόλου σύνθετου πλάτους, που ονομάζεται συντελεστής σειράς Fourier. Επίσης, όταν μια συνάρτηση του πεδίου χρόνου χρησιμοποιηθεί για τη διευκόλυνση της αποθήκευσης ή της επεξεργασίας του υπολογιστή, είναι δυνατό να δημιουργήσει μια έκδοση του αρχικού μετασχηματισμού Fourier σύμφωνα με τον τύπο άθροισης Poisson, που είναι γνωστή ως μετασχηματισμός διακριτού χρόνου Fourier. (5)

### 2.3.1 Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Όταν έχουμε σήματα διακριτού χρόνου  $x(n)$  τότε χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου και έτσι προκύπτει η αναπαράσταση αυτού του σήματος σαν συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών της μορφής  $\exp(-j\omega n)$ , όπου  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα. Αυτός ο μετασχηματισμός ή όπως διαφορετικά λέγεται DTFT εάν υπάρχει είναι και μοναδικός. Η αρχική ακολουθία μπορεί να υπολογιστεί όταν δοθεί ο DTFT χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό διακριτού χρόνου. Από τη σχέση που δίνεται παρακάτω υπολογίζεται ο DTFT μιας ακολουθίας  $x(n)$ : (8)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου δίνεται από τη σχέση:

$$x(n) \equiv F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

Αυτές οι σχέσεις αποτελούν το ζεύγος του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. (8)

Ο DTFT μίας ακολουθίας  $x(n)$  είναι μία συνεχής συνάρτηση του  $\omega$ , μάλιστα είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ . Η περιοδικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι τα μιγαδικά εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου τα οποία διαφέρουν μεταξύ τους στη συχνότητα κατά πολλαπλάσια του  $2\pi$  είναι ταυτόσημα. Αυτός ο μετασχηματισμός προκύπτει ως το άθροισμα άπειρων όρων το οποίο πιθανόν μπορεί για κάποια σήματα να μην υπάρχει. (8)

Ιδιότητα	Μη Περιοδικό Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$\left. \begin{matrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} X_1(e^{j\omega}) \\ X_2(e^{j\omega}) \end{matrix} \right\}$ περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο $2\pi$
Γραμμικότητα	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(e^{j\omega}) + a_2X_2(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 n} x(n)$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Συζυγής ακολουθία	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
Κατοπτρισμός στο χρόνο	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
Επέκταση χρόνου	$x(n/k)$ για $n$ πολλαπλάσιο του $k$	$X(e^{jk\omega})$
Συνέλιξη	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$

Εικόνα 12 Ιδιότητες DTFT

Κάποιες από τις πιο σημαντικές ιδιότητες αυτού του μετασχηματισμού χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου. Μία σημαντική ιδιότητα τους είναι η γραμμικότητα, δηλαδή ότι ο DTFT ενός

γραμμικού συνδυασμού δύο ή περισσότερων σημάτων ισούται με τα γραμμικό συνδυασμό των DTFT του κάθε σήματος. (8)

Άλλη ιδιότητα είναι η ολίσθηση στο χρόνο, η οποία σημαίνει ότι εάν ένα σήμα μετατοπιστεί στο πεδίο του χρόνου κατά  $n$  δείγματα, τότε το φάσμα του μέτρου του δεν μεταβάλλεται. Ωστόσο το φάσμα της φάσης μεταβάλλεται κατά  $-n\omega$ . Επομένως το περιεχόμενο των συχνοτήτων ενός σήματος εξαρτάται μόνο από τη μορφή του και όχι από τη θέση του. Έτσι προκύπτει η ιδιότητα της ολίσθησης στο πεδίο του χρόνου κατά  $n$ , που στην ουσία είναι ο πολλαπλασιασμός του φάσματος επί  $\exp(-j\omega n)$  στο πεδίο της συχνότητας. Άλλη μία σημαντική ιδιότητα είναι η ολίσθηση στη συχνότητα, δηλαδή μετατόπιση του φάσματος  $X(\exp(j\omega))$  κατά  $\omega_0$ , όπου ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό μίας ακολουθίας  $x(n)$  με  $\exp(j\omega_0 n)$ , η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τη σχεδίαση ψηφιακών φίλτρων. (8)

Από τα πιο σημαντικά εργαλεία είναι το θεώρημα της συνέλιξης. Όταν λέμε συνέλιξη δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου εννοούμε το γινόμενο των φασμάτων τους στο πεδίο της συχνότητας, κάτι το οποίο μας βοηθάει σημαντικά να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί ένα γραμμικό σύστημα. Η ιδιότητα της συνέλιξης ισχύει και στον DTFT, δηλαδή η έξοδος ενός συστήματος ισούται με τη γραμμική συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης αυτού. (8)

### 2.3.2 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος διακριτού χρόνου  $x(n)$  είναι η συνεχής συνάρτηση  $X(\exp(j\omega))$ , η οποία όμως δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί με τη χρήση ψηφιακού επεξεργαστή σήματος, ο οποίος μάλιστα είναι συνήθως γενικού σκοπού. Όμως σχετικά πιο εύκολα υπολογίζονται τα δείγματα του φάσματος  $X(\exp(j\omega))$ , εδώ θα αναφερθούμε στον υπολογισμό του φάσματος σε διακριτές συχνότητες καθώς και στις ιδιότητες που ισχύουν. Εδώ θα αναφερθούμε στον διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT). (8)

Έστω ότι έχουμε τον DTFT μίας ακολουθίας  $x(n)$  και επιλέγουμε δείγματα που έχουν ληφθεί σε ισαπέχοντα διαστήματα στη συχνότητα, αυτό που προκύπτει είναι ο DFT. Από αυτόν μπορούμε να δημιουργήσουμε ξανά την αρχική ακολουθία χρησιμοποιώντας τη σχέση: (8)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

Η οποία και αποτελεί τον αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier. Το ζεύγος του DFT δίνεται από τις σχέσεις: (8)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

Όπου οι παράγοντες  $W_N = e^{-j2\pi/N}$  αποτελούν τις μιγαδικές ακολουθίες βάσης στις οποίες στηρίζεται ο DFT και λέγονται παράγοντες στροφής (twiddle factors). Επίσης οι ακολουθίες του ζεύγους του DFT είναι περιοδικές με περίοδο N. (8)

Μία βασική ιδιότητα του DFT είναι η κυκλική ολίσθηση συχνότητας στην οποία ολίσθηση μιας ακολουθίας κατά  $n$  δείγματα συνεπάγεται, τη δημιουργία μίας νέας περιοδικής ακολουθίας. Ένας παραστατικός τρόπος για να κατανοήσει κανείς την κυκλική ολίσθηση είναι να τοποθετήσει τα στοιχεία αυτής στην περιφέρεια ενός κύκλου. Αυτά τα στοιχεία τοποθετούνται σε σημεία που απέχουν εξίσου στην περιφέρεια του κύκλου και έχουν φορά αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Κυκλική ολίσθηση κατά  $n$ , σημαίνει ολίσθηση όλων των στοιχείων κατά  $n$  θέσεις αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα κάτι το οποίο εξαρτάται από το αν το  $n$  είναι θετικό ή αρνητικό. (8)

Ιδιότητα	Ακολουθία μήκους N	DFT N σημείων
	$x_1(n)$	$X_1(k)$
	$x_2(n)$	$X_2(k)$
Γραμμικότητα	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$
Κυκλική μετατόπιση στο χρόνο	$x(\langle n - n_0 \rangle_N)$	$W^{kn_0} X(k)$
Κυκλική μετατόπιση στη συχνότητα	$W^{-k_0n} x(n)$	$X(\langle k - k_0 \rangle_N)$
Συζυγής ακολουθία	$x^*(n)$	$X^*(\langle -k \rangle_N)$
Κατοπτρισμός στο χρόνο	$x(\langle -n \rangle_N)$	$X^*(k)$
Κυκλική συνέλιξη	$x_1(n) \otimes x_2(n)^{[1]}$	$X_1(k)X_2(k)$
Πολλαπλασιασμός	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m)X_2(\langle k - m \rangle_N)$

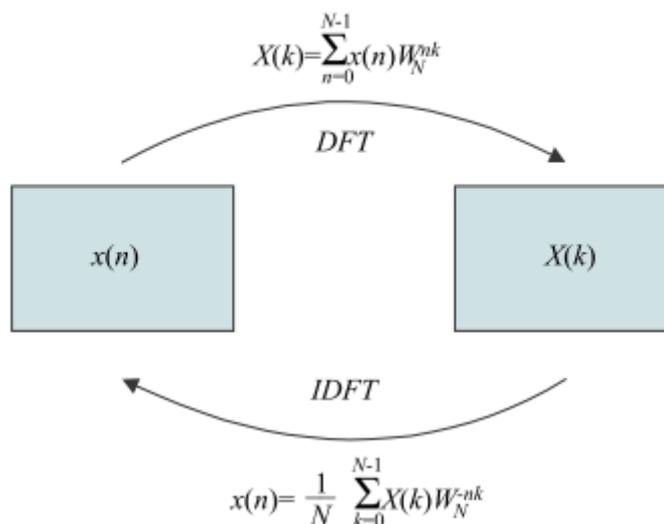
Εικόνα 13 βασικές ιδιότητες του DFT

Άλλη βασική ιδιότητα είναι η κυκλική συνέλιξη δύο ακολουθιών και ορίζεται από τη σχέση: (8)

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(\langle n - m \rangle_N), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

Αυτό που προκύπτει είναι μία νέα ακολουθία με μήκος N, όσο είναι δηλαδή και το μήκος καθεμιάς από τις αρχικές ακολουθίες και όχι όπως θα συνέβαινε σε μία γραμμική συνέλιξη να έχει μήκος 2N-1. Για να υπολογιστεί είναι η εξής διαδικασία: αντιστροφή χρόνου της μίας ακολουθίας, ολίσθηση αυτής της κατοπτρικής ακολουθίας, πολλαπλασιασμός των δύο ακολουθιών σημείο προς σημείο και έπειτα άθροισμα των γινομένων. Η βασική διαφορά μεταξύ κυκλικής και γραμμικής συνέλιξης είναι ότι στην κυκλική ο κατοπτρισμός και η ολίσθηση γίνονται με κυκλικό τρόπο. (8)

Επίσης και ο DFT υποστηρίζει την ιδιότητα της γραμμικότητας και την κυκλική ολίσθηση στον χρόνο καθώς και στη συχνότητας. (8)



Εικόνα 14 Μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας και αντίστροφα με χρήση του DFT

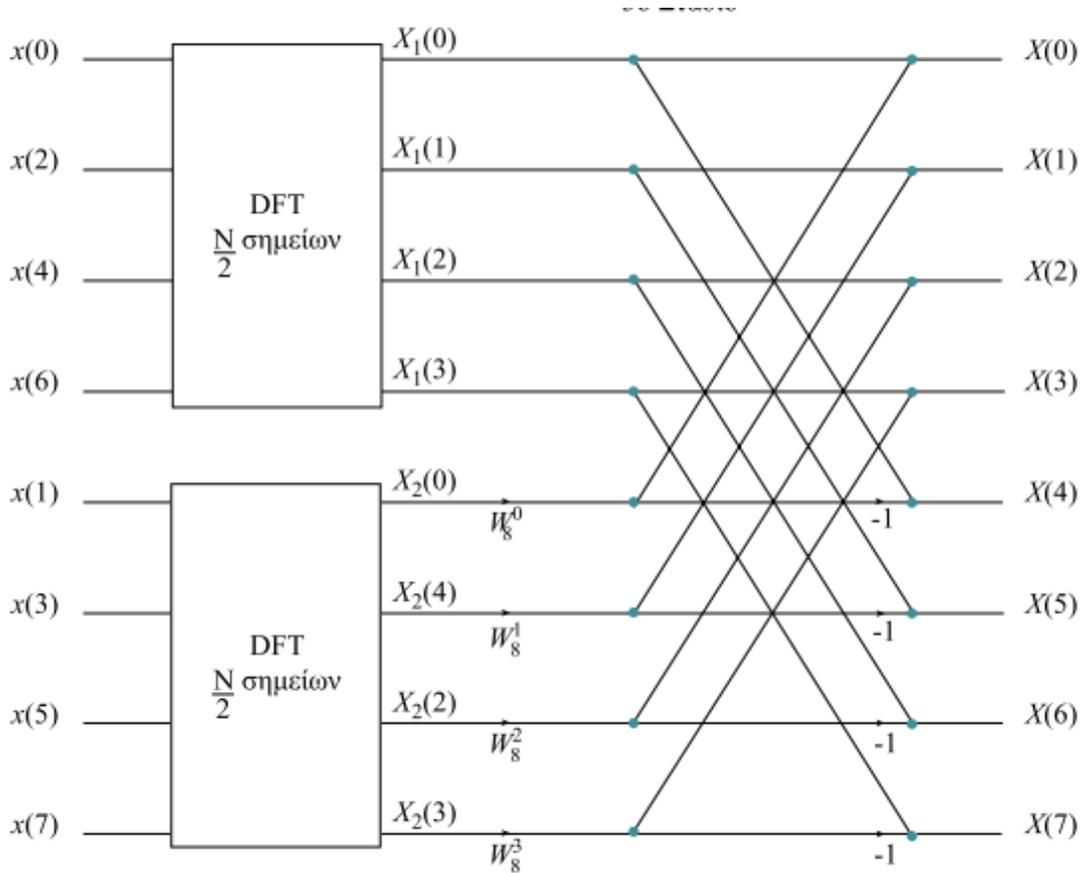
### 2.3.3 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier

Ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier αποτελεί έναν αλγόριθμο ο οποίος βοηθάει να υπολογιστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier. Υπάρχουν πολλοί τέτοιοι αλγόριθμοι οι οποίοι μπορούν να επιτύχουν αυτό το αποτέλεσμα, απλά έχουν διαφορές κυρίως στο πλήθος των πράξεων που χρειάζονται και στο μέγεθος της απαιτούμενης μνήμης. Ωστόσο όλοι αυτοί οι διαφορετικοί αλγόριθμοι απαιτούν  $(N/2)\log_2 N$  μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς με σκοπό τον υπολογισμό ενός DFT N-σημείων. (8)

Αυτοί οι αλγόριθμοι εφαρμόζονται σε σήματα που αποτελούνται από N δείγματα, όπου  $N = 2^m$  δηλαδή πρόκειται για έναν αλγόριθμο βάσης 2. Αρχικά η ακολουθία των N σημείων χωρίζεται σε ακολουθίες μήκους N/2 όπου η μία έχει τους άρτιους δείκτες και η άλλη τους περιττούς δείκτες. Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις: (8)

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{2nk} =
 \end{aligned}$$

Γραφικά αυτός ο αλγόριθμος μπορεί να αναπαρασταθεί από το διάγραμμα της πεταλούδας, όπως ονομάζεται. Στο πάνω άκρο δεξιά γίνεται πρόσθεση των αριθμών που καταλήγουν εκεί και στο κάτω δεξί άκρο γίνεται αφαίρεση των ίδιων αριθμών. (8)



Εικόνα 15 διάγραμμα πεταλούδας

Το βασικό πλεονέκτημα του FFT είναι η μειωμένη υπολογιστική πολυπλοκότητα, δηλαδή ότι μειώνεται αρκετά το πλήθος των πράξεων που απαιτούνται. Γενικά για τον υπολογισμό ενός FFT  $N$  σημείων απαιτούνται  $\mu$  στάδια, σε κάθε στάδιο όμως υλοποιούμε  $N/2$  πεταλούδες δηλαδή συνολικά  $(N/2)\log_2 N$  πεταλούδες. Για να γίνει ο υπολογισμός κάθε πεταλούδας απαιτείται ένας μιγαδικός πολλαπλασιασμός και δύο μιγαδικές προσθέσεις. Επομένως συνολικά χρειάζονται  $(N/2)\log_2 N$  μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και  $(N)\log_2 N$  μιγαδικές προσθέσεις. (8)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup> ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ WAVELET

### 3.1 Μετασχηματισμός κυματιδίων

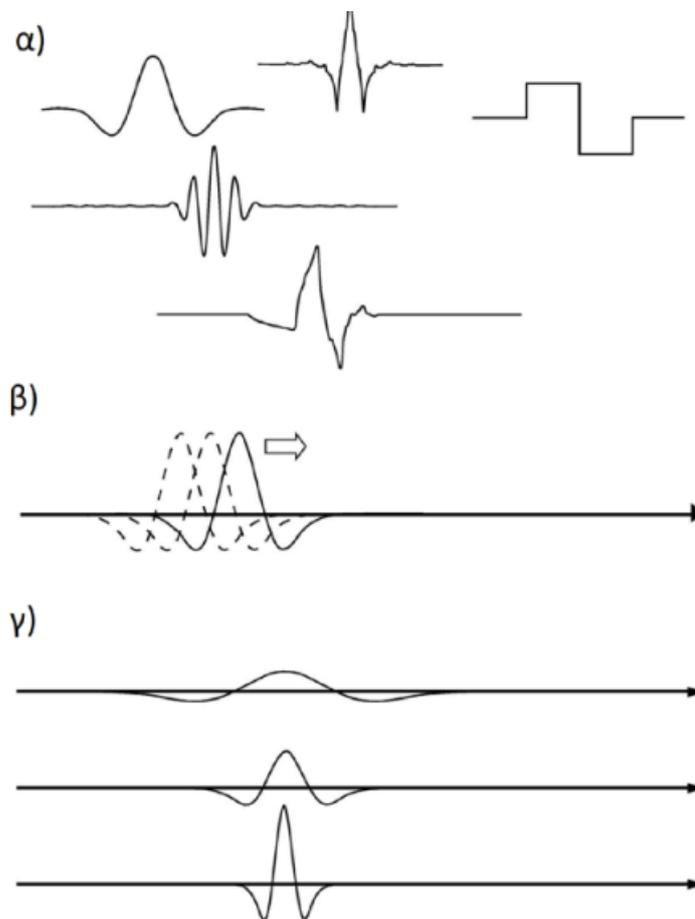
Ο μετασχηματισμός κυματιδίου, γράφεται ως WT από τον αγγλικό του όρο wavelet transform και είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στην ανάλυση σημάτων που χαρακτηρίζονται ως απεριοδικά, ασυνεχή, με απότομες αλλαγές και θόρυβο. Έχει τη δυνατότητα να εξετάζει το σήμα ταυτόχρονα τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας σε αντίθεση με το μετασχηματισμό Fourier, επομένως αυτό είχε ως αποτέλεσμα να δημιουργηθούν πολλές τεχνικές βασισμένες στα κυματίδια. Σήμερα ο WT έχει εφαρμογές σε πάρα πολλούς τομείς και βοηθάει στην ανάλυση πλείστων φυσικών φαινομένων με μεγάλη επιτυχία. Κάποια παραδείγματα αποτελούν η ανάλυση κλιματικών φαινομένων, οικονομικών μεγεθών, καρδιολογικών σημάτων, μηχανικών διατάξεων, η αποθορυβοποίηση σεισμικών και αστρονομικών σημάτων, η συμπίεση βίντεο και πολλά άλλα. Επιπλέον στην μεταλλουργία για τον έλεγχο των επιφανειών, στην οικονομία, για την ανίχνευση ιδιοτήτων στις τιμές. (6)

Τα κυματίδια έχουν τη δυνατότητα να διακρίνουν εάν το σύντομο σήμα υπάρχει, και σε θετική περίπτωση, μπορούν να το τοποθετήσουν στο χρόνο. Πιο συγκεκριμένα η ανάλυση WT χρησιμοποιεί μικρές κυματοειδής συναρτήσεις γνωστές με την ονομασία κυματίδια.. Η εικόνα 16.α δείχνει κάποια παραδείγματα κοινών κυματιδίων τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην πράξη. Αυτά μπορούν και μετασχηματίζουν το σήμα που είναι υπό ανάλυση με τρόπο ώστε να παρουσιάζεται η πληροφορία με την πιο χρήσιμη μορφή της. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή με την ονομασία μετασχηματισμός κυματιδίου (WT). Στην πράξη αποτελεί τη συνέλιξη του κυματιδίου με το σήμα. (6)

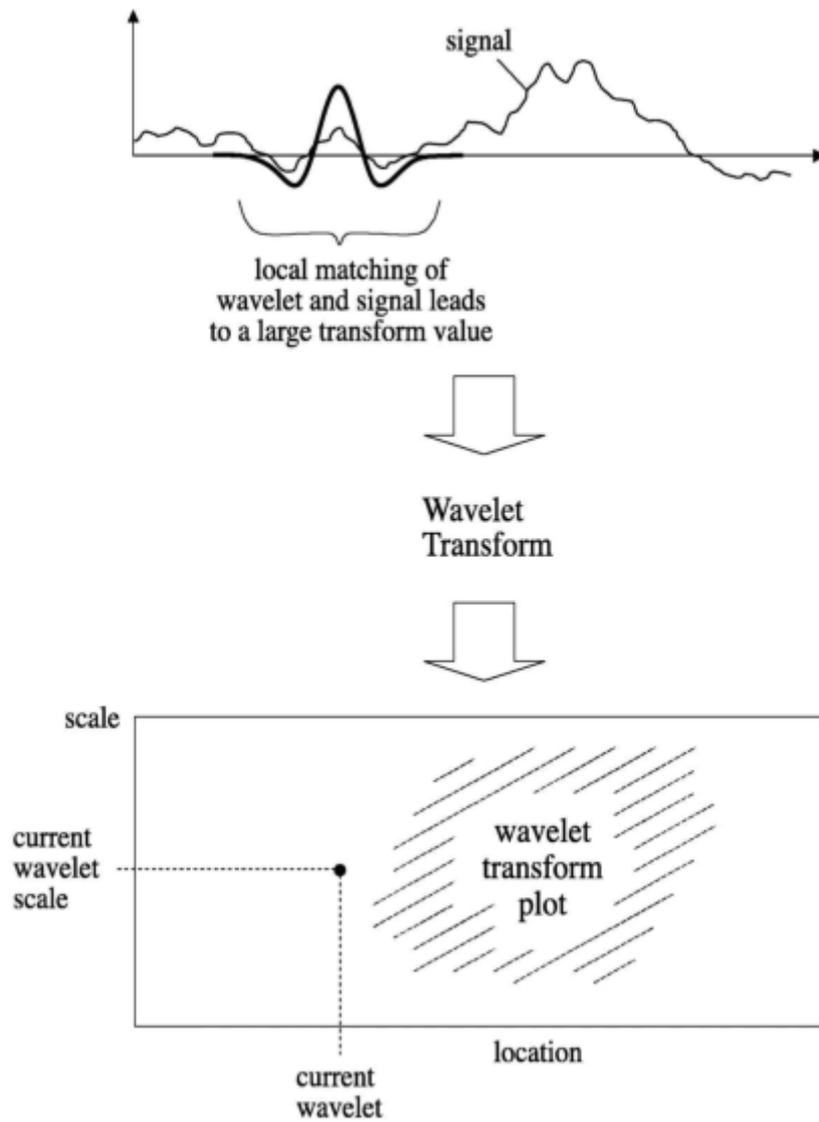
Ένα κυματίδιο μπορεί να μεταλλαχθεί με δύο τρόπους. Πρώτον μπορεί να μεταφερθεί σε διάφορες τοποθεσίες του σήματος και δεύτερον μπορεί να απλωθεί ή να συμπιεστεί. Η εικόνα 17 αποτελεί μια σχηματική αναπαράσταση του WT, ο οποίος βασικά υπολογίζει την τοπική ομοιότητα του κυματιδίου με το σήμα. Αν το κυματίδιο ταιριάζει αρκετά με το σχήμα του σήματος σε συγκεκριμένη κλίμακα και τοποθεσία, τότε λαμβάνεται μια μεγάλη τιμή μετασχηματισμού. Αντίθετα, αν το κυματίδιο και το σήμα δε συσχετίζονται ικανοποιητικά, τότε λαμβάνεται μια χαμηλή τιμή μετασχηματισμού. (6)

Κατόπιν, η τιμή του μετασχηματισμού τοποθετείται σε ένα δυσδιάστατο πεδίο μετασχηματισμού όπως φαίνεται στη δεύτερη απεικόνιση της εικόνας 17 (μαύρη τελεία). Ο μετασχηματισμός υπολογίζεται σε διάφορες τοποθεσίες του σήματος και για διάφορες κλίμακες του κυματιδίου, συμπληρώνοντας έτσι το πεδίο μετασχηματισμού. Αυτό μπορεί να γίνει είτε σε συνέχεια, οπότε έχουμε συνεχή μετασχηματισμό κυματιδίου (CWT), είτε με διακριτά βήματα, οπότε έχουμε διακριτό μετασχηματισμό κυματιδίου (DWT). Σχεδιάζοντας τον WT καθίσταται ικανή η συσχέτιση του κυματιδίου και του σήματος, σε διάφορες κλίμακες και σημεία. (6)

Παρακάτω ο WT καλύπτεται και από μαθηματική σκοπιά. Να τονιστεί ότι αν και το πεδίο των κυματιδίων παρουσιάζεται από την αρχή, δίνεται έμφαση στα σημεία που χρειάζονται για την παρακολούθηση της συγκεκριμένης εργασίας. Έτσι δίνεται βαρύτητα σε θέματα όπως ο CWT και ο εντοπισμός μορφολογίας των σημάτων με WT, ενώ δεν καλύπτονται θέματα όπως ο DWT και ο αντίστροφος μετασχηματισμός κυματιδίου. (6)



Εικόνα 16 α) Κυματίδια β) αλλαγή τοποθεσίας γ) αλλαγή κλίμακας



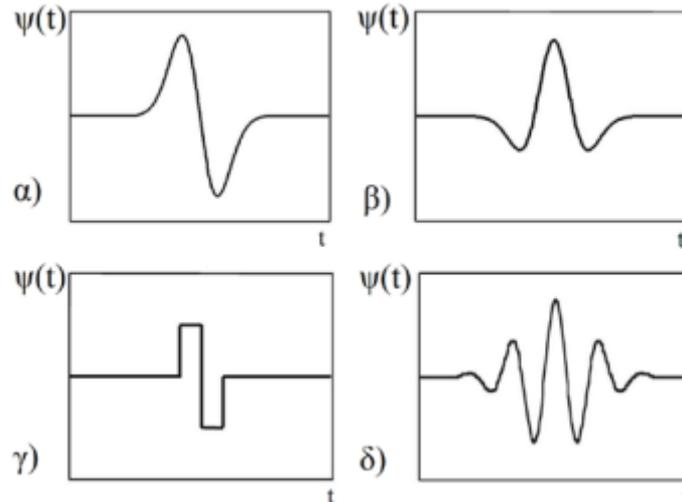
Εικόνα 17 κυματίδιο, σήμα και μετασχηματισμός

### 3.2 Συνεχής μετασχηματισμός κυματιδίου

Ο WT είναι μια μέθοδος με την οποία μετατρέπουμε μια συνάρτηση ή ένα σήμα σε μια άλλη μορφή η οποία είτε κάνει κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του αρχικού σήματος πιο ευδιάκριτα προς μελέτη, είτε επιτρέπουν το αρχικό πακέτο δεδομένων να περιγραφεί πιο αναλυτικά. Για να εκτελεστεί ένας WT χρειάζεται ένα κυματίδιο το οποίο στην ουσία αποτελεί μία συνάρτηση  $\psi(t)$  που ικανοποιεί συγκεκριμένα μαθηματικά κριτήρια. (6)

Πολλές εφαρμογές των κυματιδίων έχουν ως ανεξάρτητη μεταβλητή το χώρο παρά το χρόνο. Στην εικόνα 18 φαίνονται κάποια από τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα κυματίδια. Έχουν τη μορφή μικρών κυμάτων τοποθετημένων στον άξονα του

χρόνου, ενώ στην πράξη υπάρχει ένας τεράστιος αριθμός κυματιδίων που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των δεδομένων. Η καλύτερη επιλογή για μια συγκεκριμένη εφαρμογή εξαρτάται από τη φύση του σήματος και από τι επιδιώκεται από την ανάλυση. (6)



Εικόνα 18 διάφορα κυματίδια

Μια συνάρτηση για να μπορεί να θεωρηθεί κυματίδιο θα πρέπει να ικανοποιεί τα εξής μαθηματικά κριτήρια: (6)

1. Ένα κυματίδιο πρέπει να έχει πεπερασμένη ενέργεια:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < +\infty$$

Όπου E είναι η ενέργεια της συνάρτησης και το σύμβολο  $|\psi(t)|$  αντιπροσωπεύει το πλάτος της  $\psi(t)$ .

2. Αν  $\psi'(f)$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier της  $\psi(t)$ , δηλαδή:

$$\psi'(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-i(2\pi f)t} dt$$

τότε πρέπει να ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$C_g = \int_0^{+\infty} \frac{|\psi'(f)|^2}{f} df < \infty$$

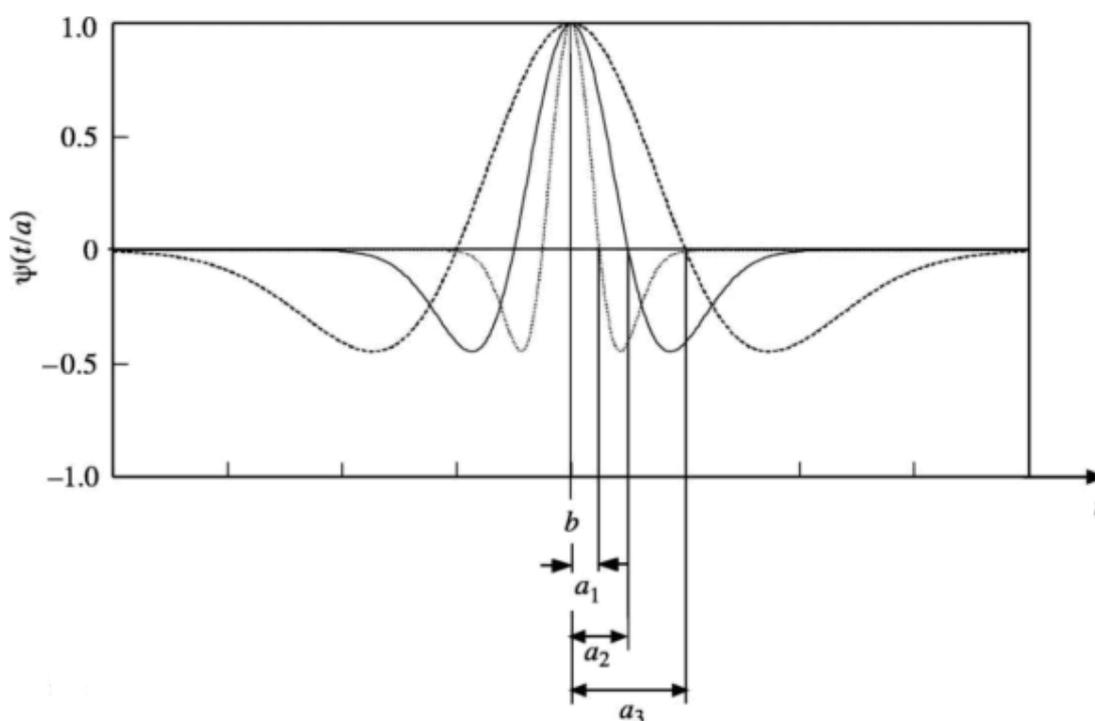
Αυτό σημαίνει ότι το κυματίδιο για μηδενική συχνότητα έχει μηδενική τιμή ( $\psi'(0)=0$ ), ή πιο απλά ότι το κυματίδιο έχει μέση τιμή μηδέν. Η εξίσωση αυτή είναι

γνωστή ως συνθήκη παραδεκτότητας (admissibility condition) και η  $C_g$  ως σταθερά παραδεκτότητας.

3. Ένα επιπλέον κριτήριο πρέπει να ισχύει για τα μιγαδικά κυματίδια. Ο μετασχηματισμός Fourier πρέπει να είναι πραγματικός και να μην έχει αρνητικές συχνότητες.

### 3.3 Ορισμός μετασχηματισμού κυματιδίου

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε επιλέξει το κυματίδιο και πρέπει να προχωρήσουμε στην ανάλυση. Αρχικά πρέπει το κυματίδιο να γίνει πιο εύκαμπτο (flexible) από το αρχικά ορισμένο μητρικό. Δύο βασικές μετατροπές είναι δυνατό να μετασχηματίσουν το κυματίδιο σε πιο επιθυμητές μορφές: η διαστολή-συστολή του (dilation) με την παράμετρο  $a$  και η μεταφορά του (translation) κατά μήκος του οριζόντιου άξονα, του χρόνου στη συγκεκριμένη περίπτωση, με την παράμετρο  $b$ . Στην εικόνα που ακολουθεί φαίνεται το κυματίδιο Mexican hat για διάφορες τιμές των δύο αυτών παραμέτρων. (6)



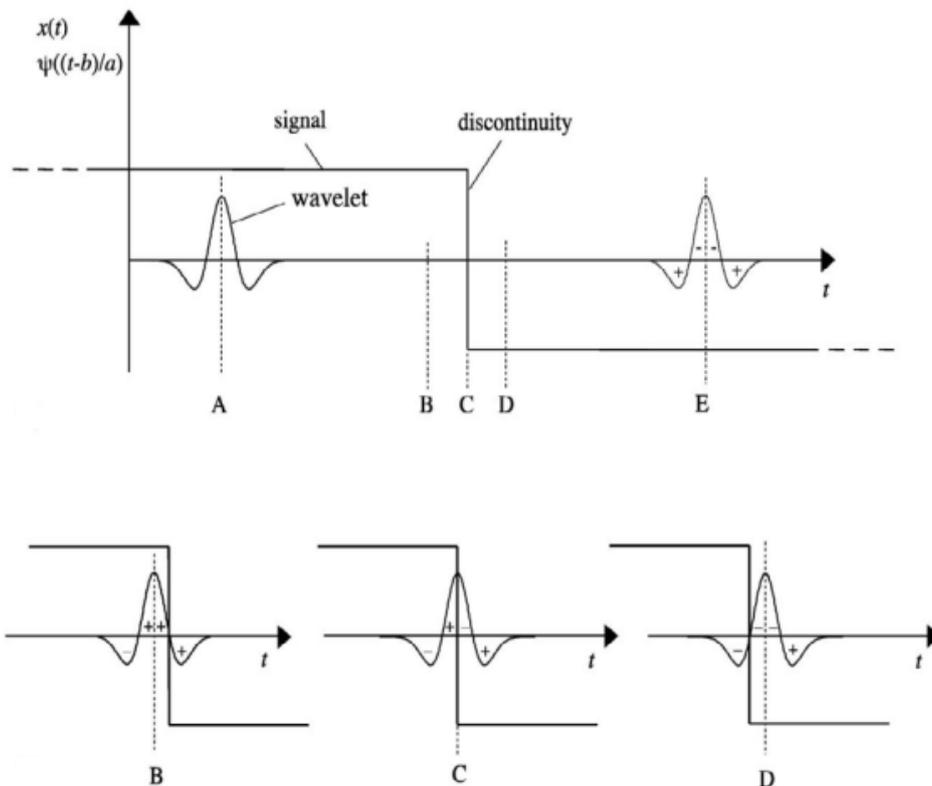
Εικόνα 19 Συστολή- διαστολή κυματιδίου

Όσο το κυματίδιο διαστέλλεται στο χρόνο το φάσμα του περιορίζεται, κάτι το οποίο είναι λογικό αφού η επιμήκυνση των χρονικών περιόδων έχει ως

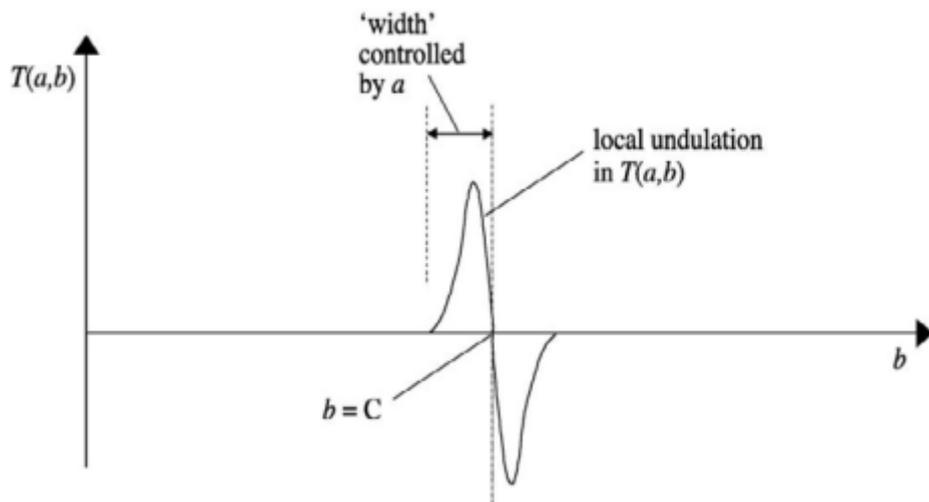
αποτέλεσμα να μειωθούν οι αντίστοιχες συχνότητες. Επομένως η παράμετρος  $a$  είναι αντιστρόφως ανάλογη με όλες τις χαρακτηριστικές συχνότητες του κυματιδίου,  $f_c$ . (6)

### 3.4 Εντοπισμός ασυνεχειών

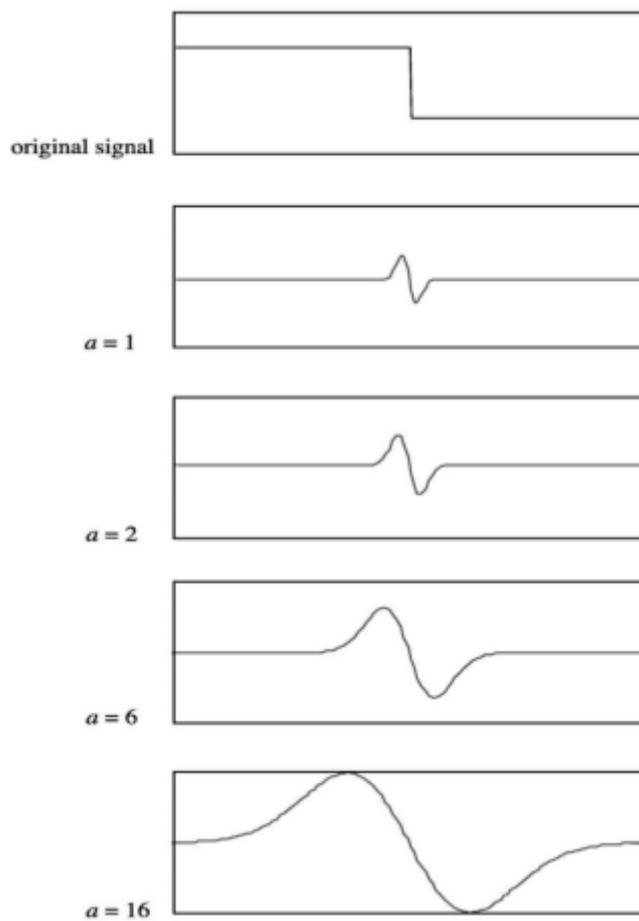
Ο μετασχηματισμός κυματιδίου έχει μία βασική ιδιότητα να εντοπίζει διάφορες ασυνέχεις στο σήμα. Άλλη μια χρήσιμη ιδιότητα του WT είναι η ικανότητα να εντοπίζει ασυνέχειες στο σήμα. Στην εικόνα 20 παρατηρούμε ένα απλό τέτοιο παράδειγμα όπου ένα κυματίδιο με αυθαίρετη κλίμακα  $a$  εντοπίζει την ασυνέχεια κατά μήκος του σήματος. Στην εικόνα 21 παρουσιάζεται το  $T(a,b)$  σε συνάρτηση με την παράμετρο  $b$ , για συγκεκριμένο  $a$ . Από αυτό το σχήμα φαίνεται μια κυμάτωση του  $T(a,b)$  με κέντρο την ασυνέχεια του σήματος, το πλάτος της οποίας είναι ανάλογο του  $a$  κάτι το οποίο γίνεται πιο εμφανές στην εικόνα 22, όπου η κυμάτωση περιορίζεται όσο η κλίμακα μειώνεται έτσι ώστε να εντοπιστεί ακριβώς η τοπολογία της ασυνέχειας.



Εικόνα 20 εντοπισμός ασυνέχειας



Εικόνα 21 συνάρτηση με συγκεκριμένο  $a$



Εικόνα 22 μείωση κλίμακας

### 3.5 Εφαρμογές μετασχηματισμού κυματιδίου

Γενικά οι μετασχηματισμοί κυματιδίου έχουν μια πληθώρα εφαρμογών σε θέματα επεξεργασίας σημάτων. Είκοσι σχεδόν χρόνια μετά την ανακάλυψη των πρώτων σημαντικών wavelets από την Ingrid Daubechies, και παρά τα διάφορα προβλήματα νομικής φύσεως που έχουν προκύψει λόγω ευρεσιτεχνιών στα μαθηματικά, χρησιμοποιούνται συνεχώς σε τομείς όπου συναντάμε μη-εργοδικά, μη-περιοδικά σήματα και οι παραδοσιακοί μετασχηματισμοί Fourier αδυνατούν να δώσουν χρήσιμα αποτελέσματα. (7)

Κυριότερες εφαρμογές έχει στην Ιατρική και τη Μηχανολογία, που χρησιμοποιείται για εντοπισμό απότομων ασυνεχειών που υποδηλώνουν προβληματική λειτουργία και οι οποίες θα χάνονταν μέσα στο θόρυβο αν χρησιμοποιούσαμε τεχνικές Fourier, στην αστρονομία για τον διαχωρισμό σημάτων από το θόρυβο, ακόμα και στα μακρο-οικονομικά για μακροπρόθεσμες προβλέψεις της πορείας των μετοχών. Μια από τις πιο γνωστές εφαρμογές, στις οποίες χρησιμοποιείται το wavelet CDF 9/7 είναι ο αλγόριθμος συμπίεσης εικόνας JPEG2000, ο οποίος δημιουργήθηκε για να αντικαταστήσει τον πολύ γνωστό JPEG. Αν και οι πατέντες λογισμικού έχουν αποτρέψει την ευρείας κλίμακας χρησιμοποίησή του ως τώρα, πετυχαίνει πολύ ανώτερα αποτελέσματα από τον παραδοσιακό JPEG τόσο σε επίπεδο συμπίεσης όσο και επίπεδο ταχύτητας. (7)

Επιπλέον, η φύση των wavelets να μπορούν να δίνουν επιλεκτικά μέχρι ένα επίπεδο λεπτομερειών σε ένα σήμα, έχει βρει εφαρμογή σε περιπτώσεις που έχουμε μεγάλες εικόνες τις οποίες όταν τις βλέπουμε στο σύνολό τους δε χρειαζόμαστε μεγάλη λεπτομέρεια, αλλά όταν εστιάζουμε σε μια συγκεκριμένη περιοχή περιμένουμε να δούμε και λεπτομέρειες. Τέτοιες είναι για παράδειγμα τοπογραφικές εικόνες που χρησιμοποιούνται από συστήματα GIS, για τις οποίες έχει αναπτυχθεί το πρότυπο συμπίεσης με wavelets ECW. (7)

Είναι φανερό ότι λόγω της ωρίμανσης των σχετικών αλγορίθμων αλλά και της επίλυσης των νομικών ζητημάτων στο προσεχές μέλλον, οι εφαρμογές των μετασχηματισμών wavelet θα πολλαπλασιαστούν και ενδεχομένως θα εκτοπίσουν από μερικούς τομείς τους παραδοσιακούς μετασχηματισμούς αναπαράστασης στη συχνότητα. Έτσι, κρίνεται επιτακτική η ανάπτυξη αποδοτικών και εξειδικευμένων αριθμητικών κυκλωμάτων που θα είναι σε θέση να εκτελούν γρήγορα και οικονομικά τους μετασχηματισμούς αυτούς σε ενσωματωμένα

συστήματα, όπως φορητά ιατρικά όργανα, κινητά τηλέφωνα, «mp3» players και ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. (7)

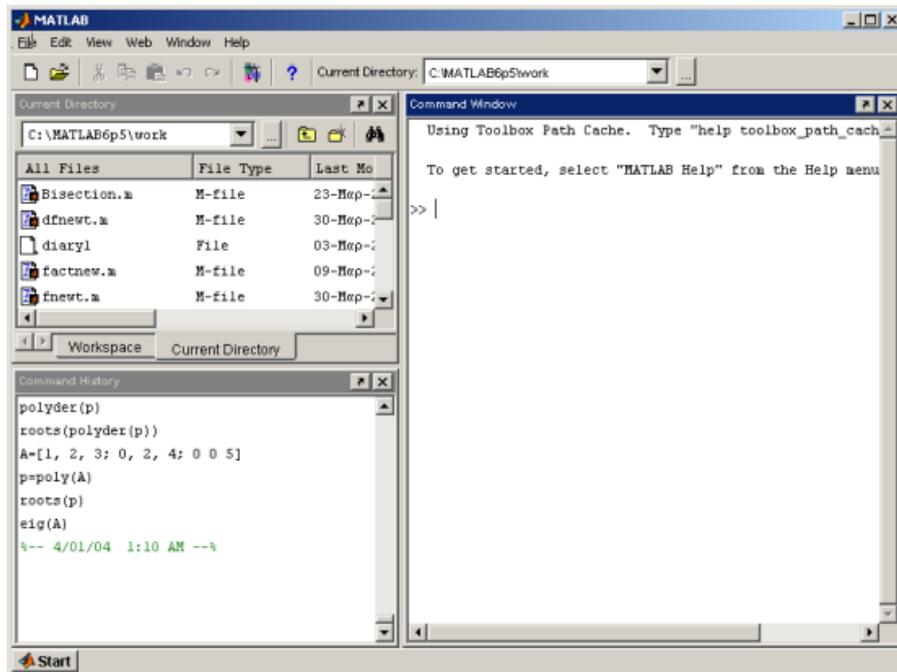
## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup> ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΣΤΟ MATLAB**

### **4.1 Εισαγωγή**

Το λογισμικό MATLAB παίρνει το όνομά του από τις λέξεις Matrix Laboratory και είναι ένα ολοκληρωμένο μαθηματικό πακέτο το οποίο χρησιμοποιείται κυρίως στα πανεπιστήμια και γενικά στα εκπαιδευτικά ιδρύματα αλλά και στις βιομηχανίες. Αποτελεί ένα διαδραστικό πρόγραμμα με σκοπό αριθμητικούς υπολογισμούς, κατασκευή γραφημάτων αλλά επίσης μπορεί να γράψει κανείς σε κώδικα και να προγραμματίσει κάτι το οποίο το μετατρέπει σε ένα πολύ δημοφιλές εργαλείο σε όλους τους κλάδους των θετικών επιστημών. Επίσης περιλαμβάνει αρκετές βιβλιοθήκες που επιτρέπουν την υλοποίηση διαφόρων υπολογισμών. (13)

Όπως φαίνεται και από το όνομά του είναι ειδικά σχεδιασμένο για υπολογισμούς με πίνακες, όπως η επίλυση γραμμικών συστημάτων, η εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων κ.λπ.. Επίσης διαθέτει πολλές επιλογές για γραφικά και προγράμματα τα οποία είναι γραμμένα στη γλώσσα προγραμματισμού που χρησιμοποιεί το ίδιο το πρόγραμμα με σκοπό την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις κ.α.. Επίσης το περιβάλλον του MATLAB δεν υπολογίζει την ακριβή τιμή αλλά προσεγγιστική λύση ενός προβλήματος. (13)

Στην εικόνα 23 φαίνεται το παράθυρο που εμφανίζεται όταν ανοίξουμε το περιβάλλον του MATLAB.



Εικόνα 23 Αρχική εικόνα

Στο μεγάλο παράθυρο εντολών που ονομάζεται Command Window, εισάγουμε τις εντολές όταν θέλουμε να προγραμματίσουμε στην MATLAB. Τα αποτελέσματα τυπώνονται επίσης σε αυτό το παράθυρο. Μπορούμε να γράφουμε μαθηματικές εντολές και να εκχωρούμε το αποτέλεσμα σε μία δική μας μεταβλητή. Κάθε φορά θα πρέπει να αλλάζουμε το όνομα της μεταβλητής που χρησιμοποιούμε διότι κάθε φορά κάθε μεταβλητή κρατά την τιμή που δέχτηκε πιο πρόσφατα. (13)

## 4.2 Προσομοίωση στο Matlab

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε την προσομοίωση που έγινε στο περιβάλλον του Matlab. Δημιουργήσαμε τρία σήματα, ένα με χαμηλή, ένα με μεσαία και ένα με υψηλή συχνότητα. Υπολογίσαμε τον μετασχηματισμό καθενός από αυτά τα τρία σήματα και εμφανίσαμε τη γραφική τους παράσταση στο πεδίο της συχνότητας. Έπειτα προσθέσαμε θόρυβο και στα τρία σήματα κάνοντας χρήση της συνάρτησης `randn()` και χρησιμοποιώντας τυπική απόκλιση σφάλματος της τάξης του 7%. Έπειτα φιλτράραμε τα σήματα με φίλτρα Butterworth και τέλος πήραμε ξανά το μετασχηματισμό Fourier του φιλτραρισμένου σήματος.

Ο κώδικας είναι ο εξής:

```
close all;
clear all;
clc
```

```

%enter data
A=2; %πλάτος ημιτόνου
t=[0:pi:1000*pi]; %ορισμός χρονικού πεδίου
f1=50; %χαμηλή συχνότητα
f2=500; %μεσαία συχνότητα
f3=6000; %υψηλή συχνότητα
fs=12500; %συχνότητα δειγματοληψίας

%generate three different signals
x1=A*sin(2*pi*f1.*t); %1° ημίτονο
x2=A*sin(2*pi*f2.*t); %2° ημίτονο
x3=A*sin(2*pi*f3.*t); %3° ημίτονο

% fourier transform of each signal
Ns1=length(x1); %αριθμός δειγμάτων ίσος με το μήκος του σήματος
y1_fft=abs(fft(x1)); %διαδικασία που ακολουθείται στο Matlab για να
y1_fft=y1_fft(1:Ns1/2); %υλοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier
ff1=fs*(0:Ns1/2-1);

Ns2=length(x2); %όμοια με παραπάνω
y2_fft=abs(fft(x2));
y2_fft=y2_fft(1:Ns2/2);
ff2=fs*(0:Ns2/2-1);

Ns3=length(x3); %όμοια με παραπάνω
y3_fft=abs(fft(x3));
y3_fft=y3_fft(1:Ns3/2);
ff3=fs*(0:Ns3/2-1);

% generate signal with noise
sigma=0.07; % standard deviation (τυπική απόκλιση σφάλματος)

noisy1=x1+sigma*randn(size(x1)); %πρόσθεση θορύβου στο αρχικό σήμα
noisy2=x2+sigma*randn(size(x2));
noisy3=x3+sigma*randn(size(x3));

%filtering signal with butterworth filter

[b1,a1]=butter(10,0.4,'low'); %στο σήμα με τη χαμηλή συχνότητα
zf1=filter(b1,a1,noisy1); %χρησιμοποιήσαμε χαμηλοπερατό φίλτρο
Nszf1=length(zf1); %και στη συνέχεια πήραμε το φασματικό
yzf1_fft=abs(fft(zf1)); %περιεχόμενο του φιλτραρισμένου σήματος
yzf1_fft=yzf1_fft(1:Nszf1/2);
ffzf1=fs*(0:Nszf1/2-1);

w=[0.4 0.55]; %δημιουργία ζωνοπερατού φίλτρου
[b2,a2]=butter(10,w);
zf2=filter(b2,a2,noisy2);
Nszf2=length(zf2);
yzf2_fft=abs(fft(zf2));
yzf2_fft=yzf2_fft(1:Nszf2/2);
ffzf2=fs*(0:Nszf2/2-1);

```

```

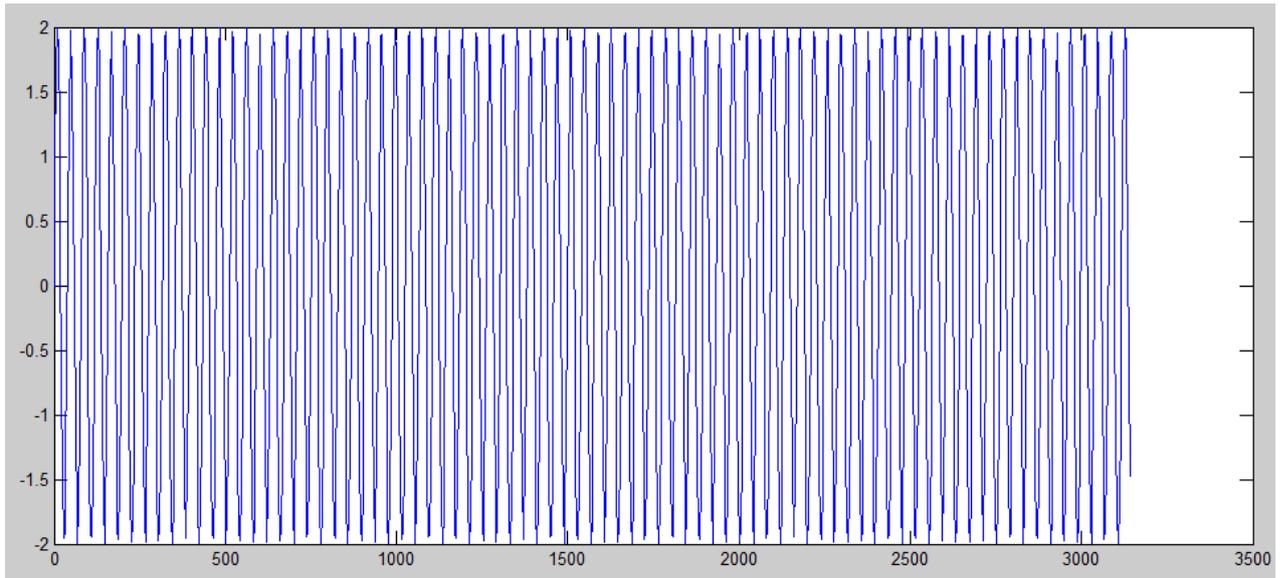
[b3,a3]=butter(10,0.55,'high'); %δημιουργία υπερπαρατονίου φίλτρου
zf3=filter(b3,a3,noisy3);
Nszf3=length(zf3);
yzf3_fft=abs(fft(zf3));
yzf3_fft=yzf3_fft(1:Nszf3/2);
ffzf3=fs*(0:Nszf3/2-1);

%show on screen
%signal with low frequency
figure
subplot(4,1,1);
plot(t,x1) %εμφάνιση αρχικού σήματος
subplot(4,1,2);
plot(t,noisy1) %εμφάνιση σήματος με θόρυβο
axis([0 3600 -2 2])
subplot(4,1,3)
plot(ff1,y1_fft); %εμφάνιση φασματικού περιεχομένου αρχικού σήματος
subplot(4,1,4)
plot(ffzf1,yzf1_fft) %εμφάνιση φασματικού περιεχομένου φιλτραρισμένου
σήματος

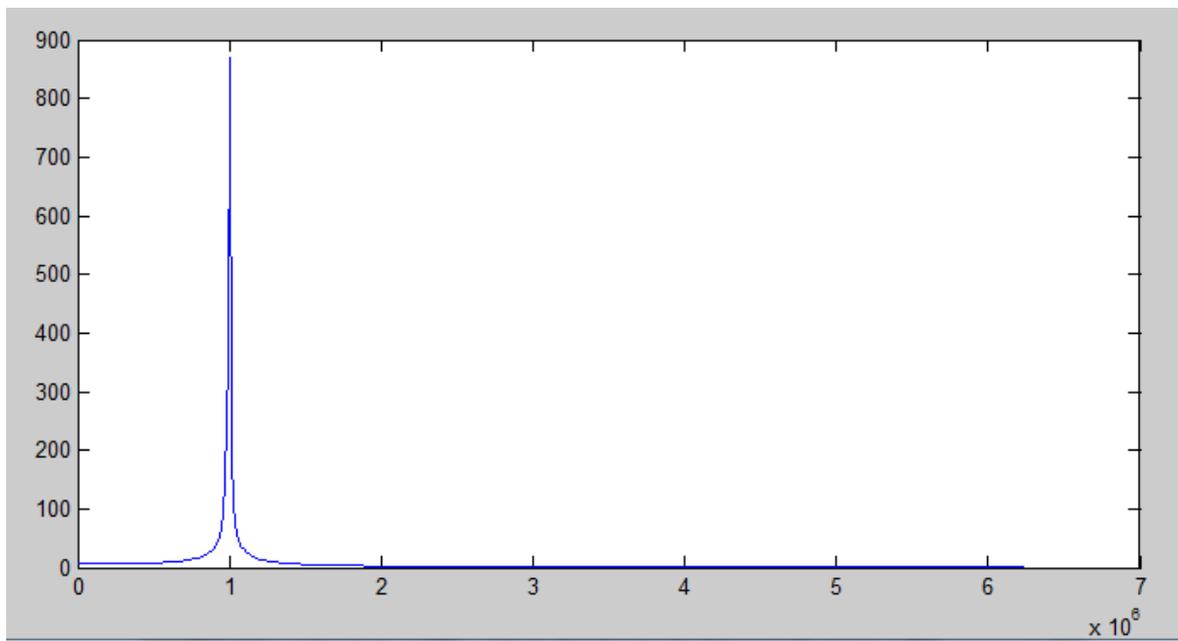
%signal with medium frequency
figure
subplot(4,1,1)
plot(t,x2)
subplot(4,1,2);
plot(t,noisy2)
axis([0 3600 -2 2])
subplot(4,1,3)
plot(ff2,y2_fft);
subplot(4,1,4)
plot(ffzf2,yzf2_fft)

%signal with high frequency
figure
subplot(4,1,1);
plot(t,x3)
subplot(4,1,2);
plot(t,noisy3)
axis([0 3600 -2 2])
subplot(4,1,3)
plot(ff3,y3_fft);
subplot(4,1,4)
plot(ffzf3,yzf3_fft)

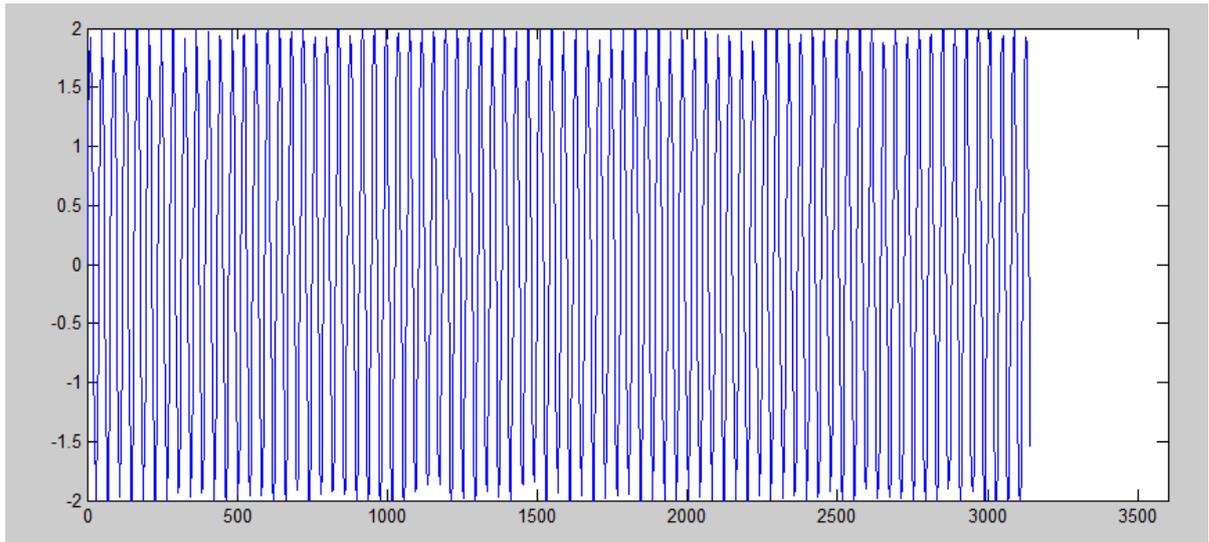
```



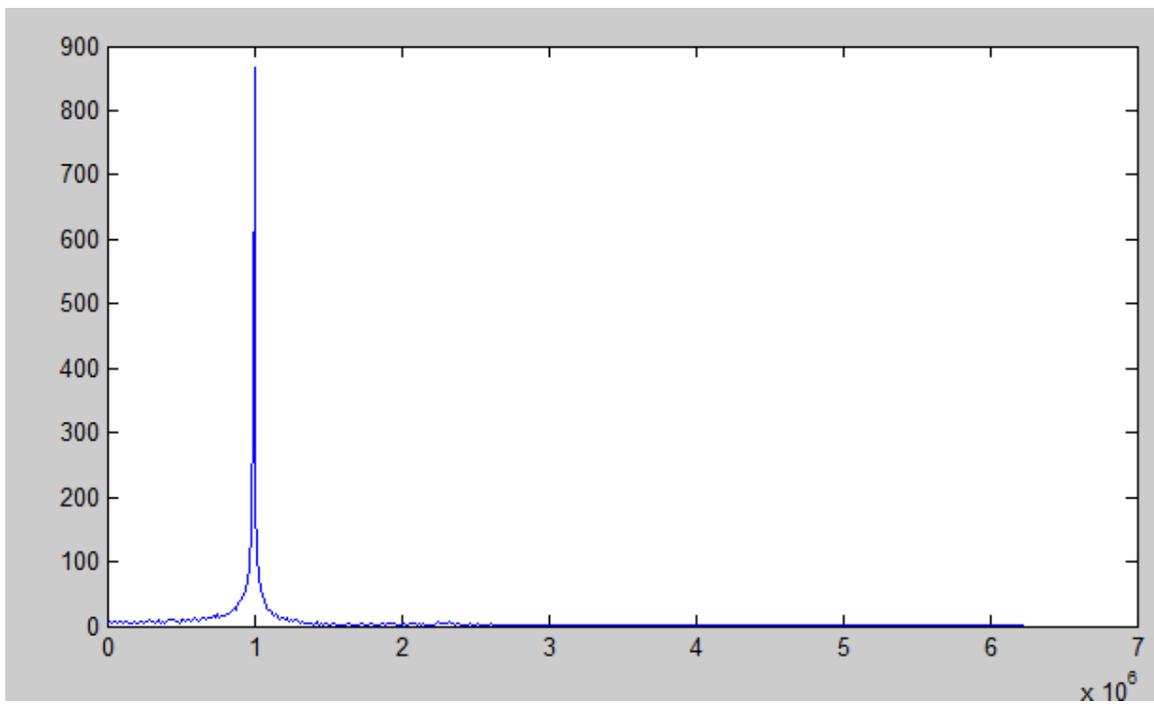
Εικόνα 24 Αρχικό σήμα x1



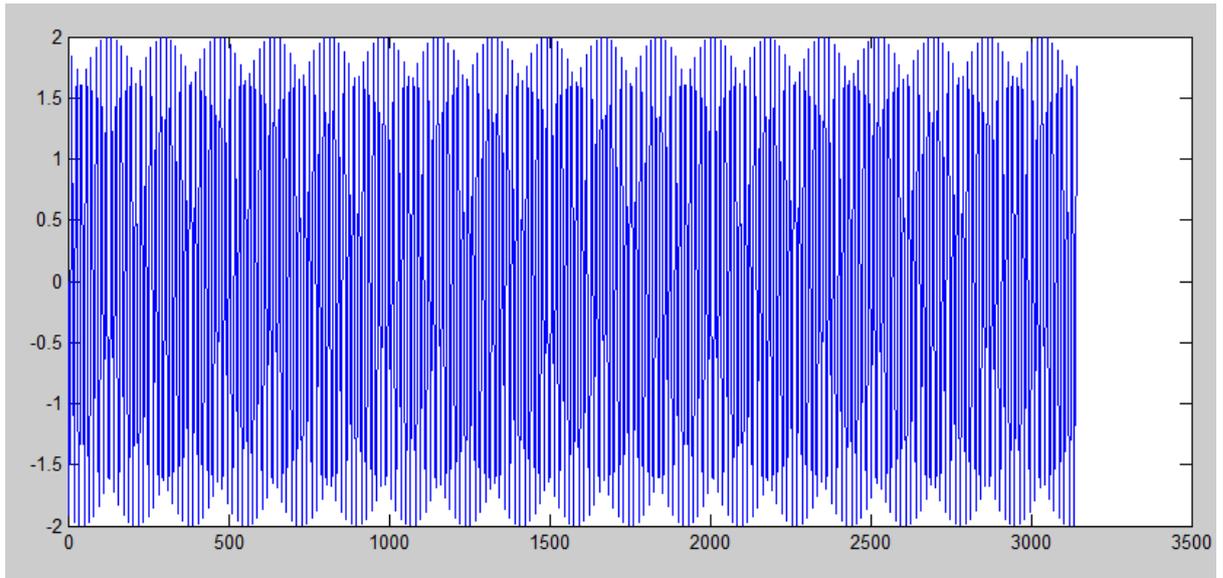
Εικόνα 25 φασματικό περιεχόμενο αρχικού x1



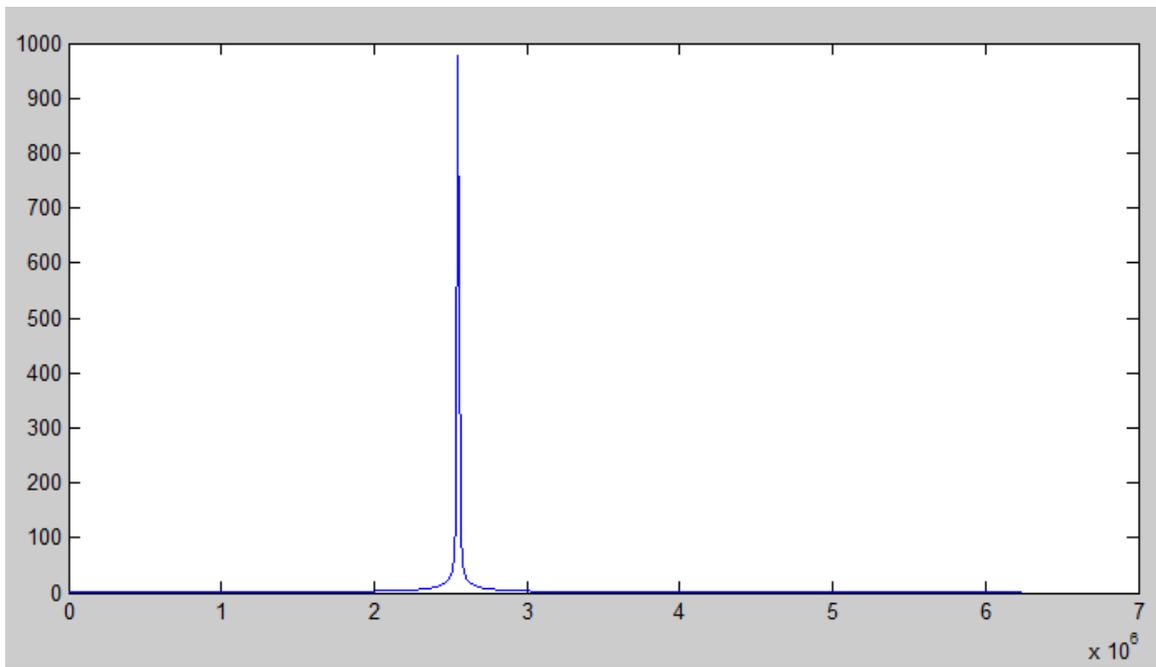
Εικόνα 26 προσθήκη θορύβου με `randn()` στο `x1`



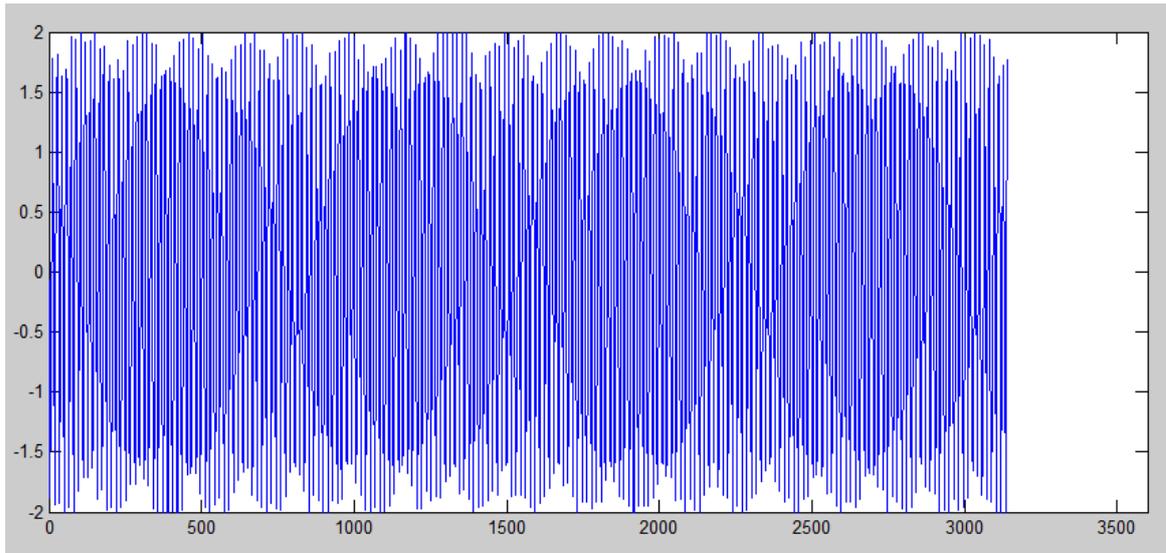
Εικόνα 27 φασματικό περιεχόμενο φιλτραρισμένου `x1`



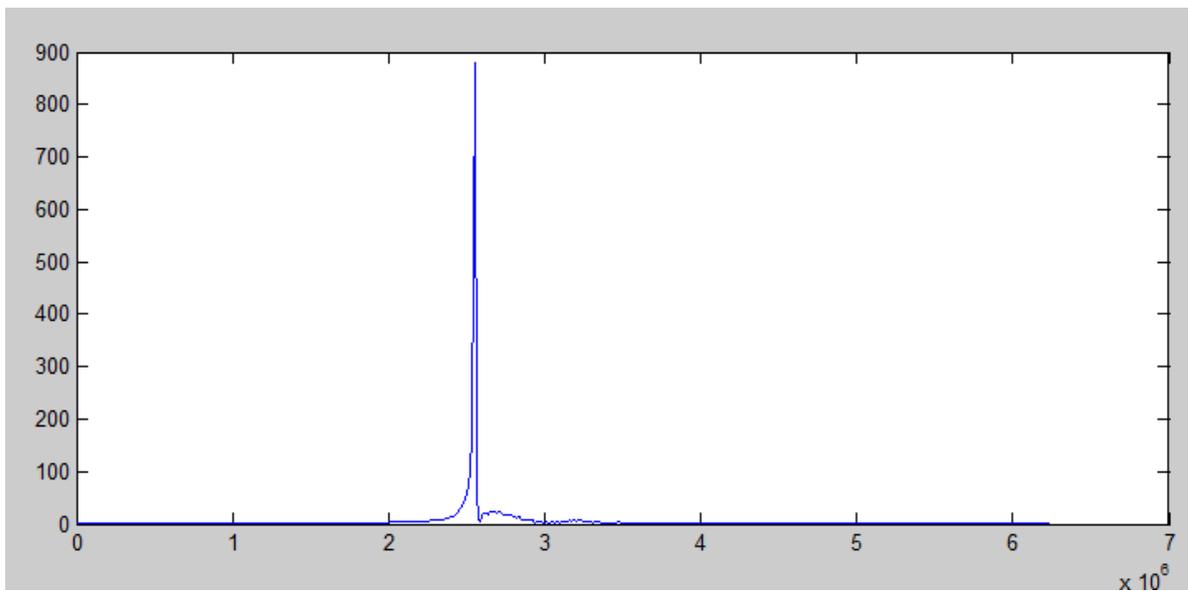
Εικόνα 28 Αρχικό σήμα x2



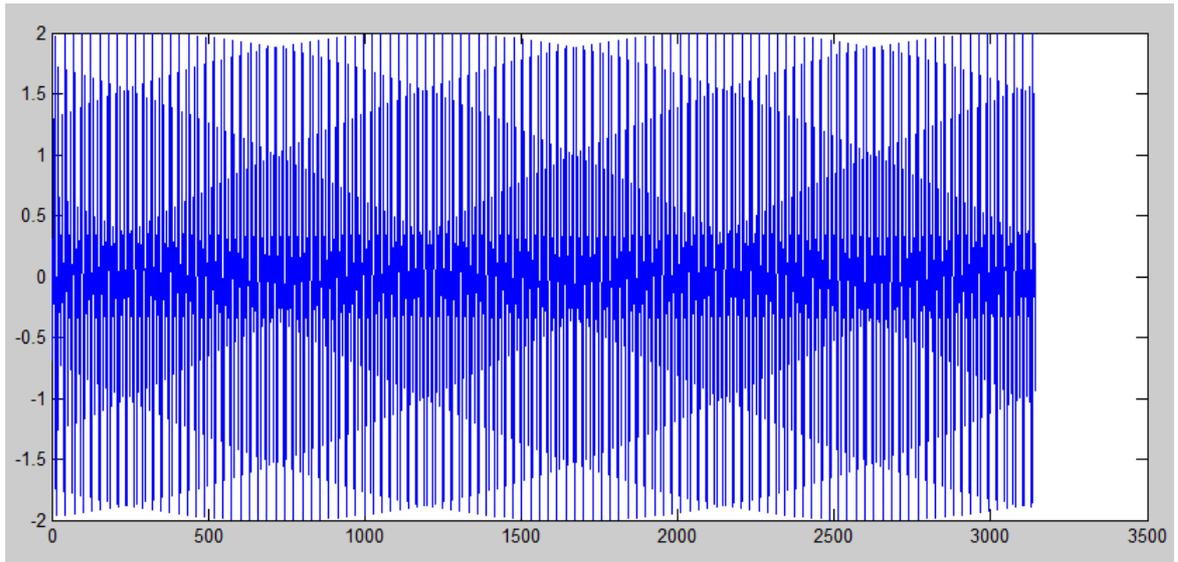
Εικόνα 29 φασματικό περιεχόμενο αρχικού x2



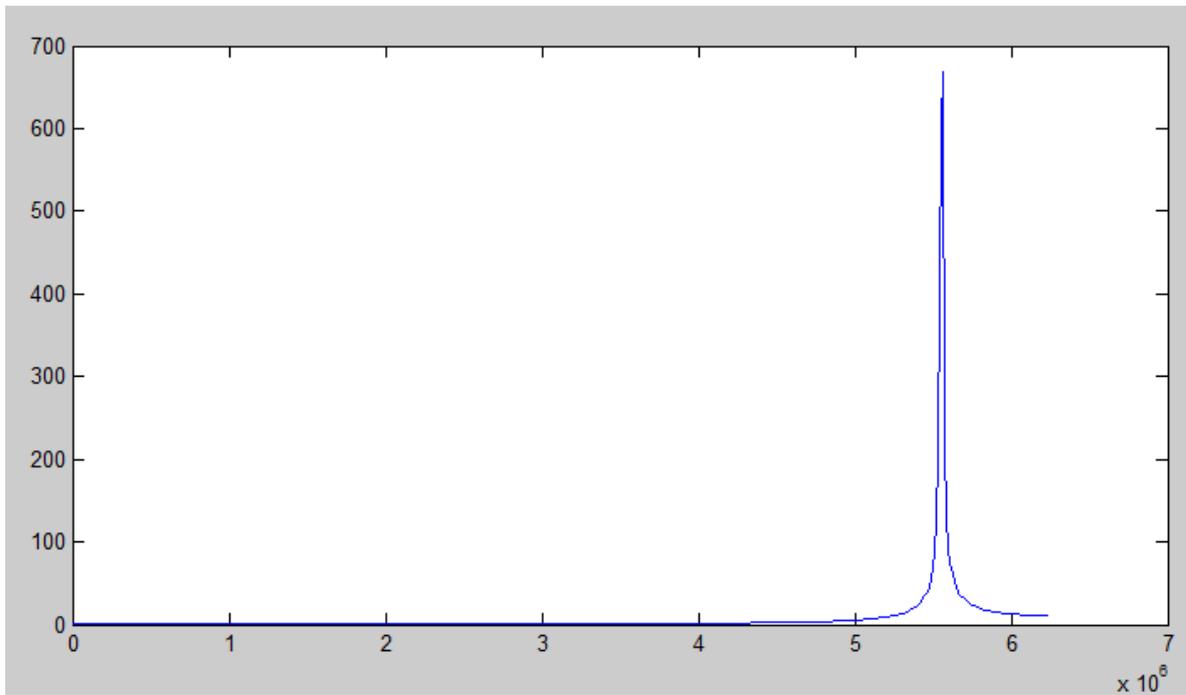
Εικόνα 30 προσθήκη θορύβου με randn() στο x2



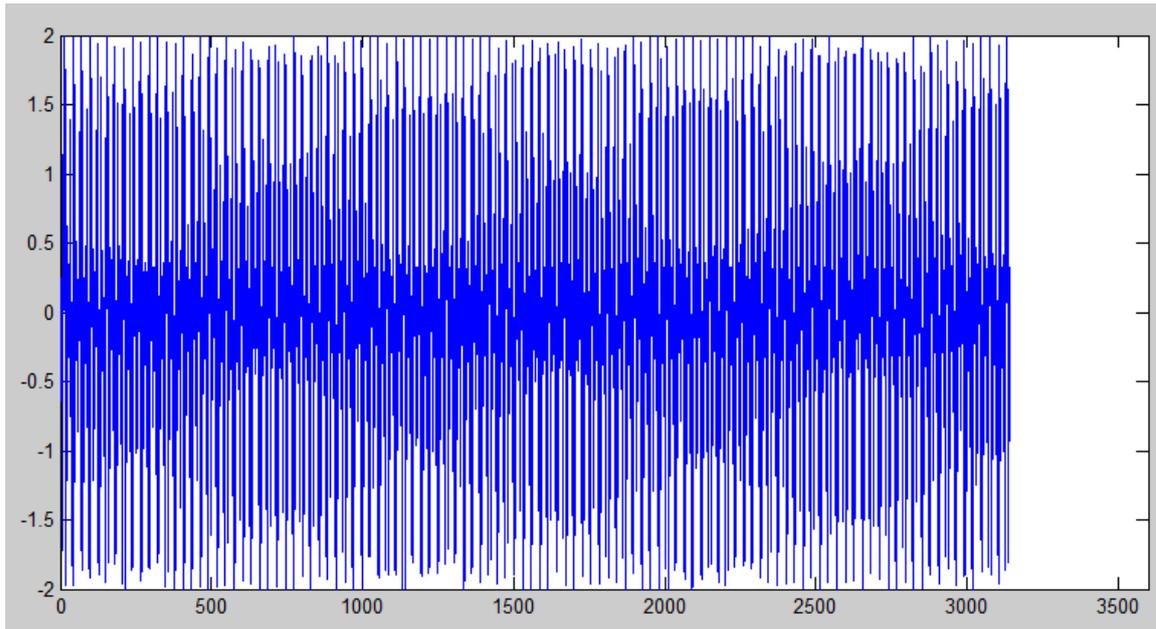
Εικόνα 31 φασματικό περιεχόμενο φιλτραρισμένον x2



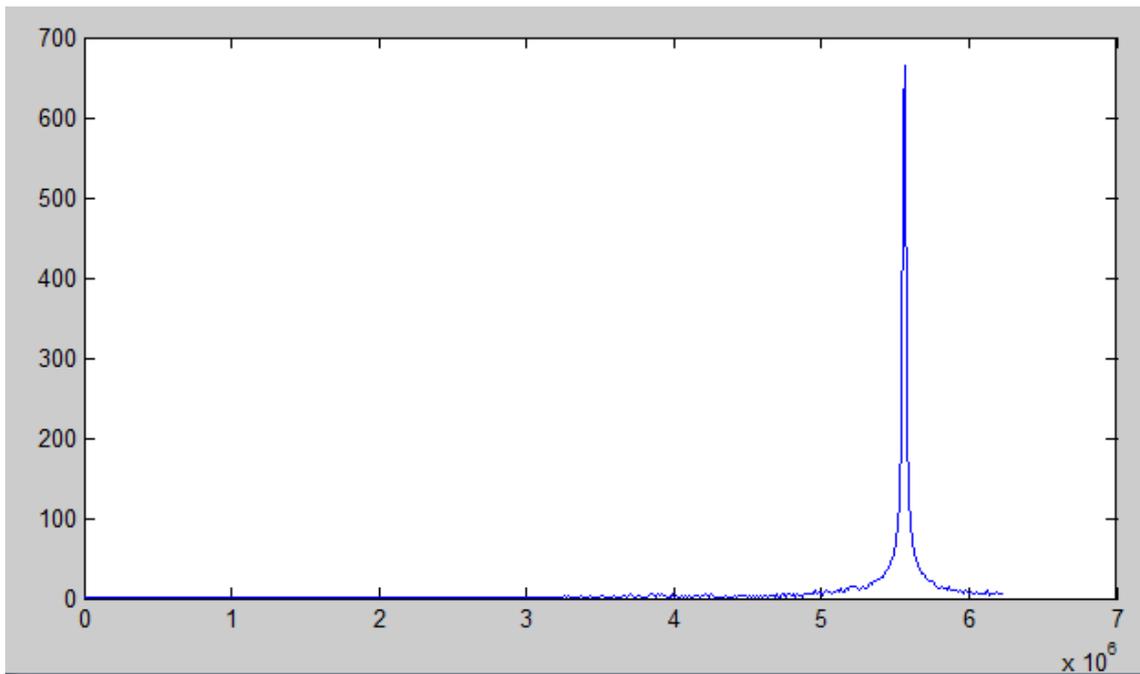
Εικόνα 32 Αρχικό σήμα  $x_3$



Εικόνα 33 φασματικό περιεχόμενο αρχικού  $x_3$



Εικόνα 34 προσθήκη θορύβου με randn() στο x3



Εικόνα 35 φασματικό περιεχόμενο φιλτραρισμένου x3

### 4.3 Συμπεράσματα

Από τις παραπάνω εικόνες προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier λαμβάνουμε πρακτικά τη βασική συχνότητα του σήματος, αυτό σημαίνει ότι αρκεί από ένα κανάλι να διέλθει αυτή η συχνότητα ώστε να είναι δυνατή η αποκωδικοποίηση μίας

πληροφορίας στην οποία έχει χρησιμοποιηθεί ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός.

- Προσθέσαμε θόρυβο με χαμηλή απόκλιση, οπότε το σήμα μας δεν έχει παραμορφωθεί σε μεγάλο βαθμό. Επίσης με την συνάρτηση `randn()` δημιουργούνται ψευδοτυχαίες ακολουθίες.
- Με τη χρήση τους φίλτρου έχουμε πετύχει να αφαιρεθεί σχεδόν τελείως ο θόρυβος και λαμβάνουμε σχεδόν το ίδιο φασματικό περιεχόμενο στο φιλτραρισμένο σήμα. Αυτό είναι σημαντικό καθώς αποδεικνύει ότι ένα σήμα μπορεί να δεχθεί πολλές αλλαγές καθώς μεταδίδεται από τον πομπό στον δέκτη, ωστόσο με τη χρήση κατάλληλων φίλτρων δεν χάνεται καμία πληροφορία.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Θεοδωρίδης Σ, Μπερμπερίδης Κ, Κοφίδης Α. Εισαγωγή στη θεωρία σημάτων και συστημάτων. Εκδόσεις Τυπωθήτω - Γιώργος Δαρδάνος, Αθήνα 2003
2. Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες, Andy Bateman, Εκδόσεις Τζιόλα, 2000
3. Συστήματα επικοινωνίας, Haykin S., Εκδόσεις Παπασωτηρίου. Αθήνα 1995
4. Ανάπτυξη μεθόδων διάγνωσης σφαλμάτων σε ελεγχόμενο κινητήριο σύστημα αποτελούμενο από ηλεκτρονικούς μετατροπείς ισχύος και ασύγχρονη μηχανή. Διδακτορική διατριβή Ηλία Π. Γεωργακοπούλου, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Ηλεκτρολόγων μηχανικών και τεχνολογίας υπολογιστών, Πάτρα 2010
5. Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier, Στρεμπένης Γ., Πτυχιακή εργασία, Τεχνολογικό εκπαιδευτικό ίδρυμα Σερρών, Σχολή τεχνολογικών εφαρμογών, Τμήμα Πληροφορικής και επικοινωνιών
6. Σύγκριση μεθόδων εκτίμησης μεταβαλλόμενης ταχύτητας περιστροφής από μέτρηση κραδασμών, Ροδόπουλος Κ., Διπλωματική εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή μηχανολόγων μηχανικών, ΔΠΜΣ «Συστήματα αυτοματισμού»  
Ανάκτηση από [http://dspace.lib.ntua.gr/bitstream/123456789/3983/3/rodopoulosk\\_instantaneous\\_frequency.pdf](http://dspace.lib.ntua.gr/bitstream/123456789/3983/3/rodopoulosk_instantaneous_frequency.pdf) στις 02/03/2014
7. Υλοποίηση μετασχηματισμών Wavelet σε υλικό, Βλατάκης Χ., Διπλωματική εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή ηλεκτρολόγων μηχανικών και μηχανικών υπολογιστών, Τομέας τεχνολογίας υπολογιστών και πληροφορικής
8. Ψηφιακή επεξεργασία Εικόνων και σημάτων, Σκόδρας Α., Αναστασόπουλος Β., Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα 2003, Ανάκτηση από [http://www.eln.teilam.gr/sites/default/files/Digital\\_signal\\_processing\\_EAP\\_Skodras.pdf](http://www.eln.teilam.gr/sites/default/files/Digital_signal_processing_EAP_Skodras.pdf) στις 10/07/2014
9. Εισαγωγή στα ηλεκτρονικά φίλτρα, Ψυχάλινος Κ., Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Φυσικής, Πάτρα 2005, Ανάκτηση από [http://www.hep.upatras.gr/class/download/ile\\_ana\\_kik/eisagwgh\\_hlektronika\\_filt\\_ra.pdf](http://www.hep.upatras.gr/class/download/ile_ana_kik/eisagwgh_hlektronika_filt_ra.pdf) στις 12/03/2012
10. [http://www.biomed.ntua.gr/Portals/1/presentations/undergraduate/Analys\\_h\\_epexergasia\\_biosignals.pdf](http://www.biomed.ntua.gr/Portals/1/presentations/undergraduate/Analys_h_epexergasia_biosignals.pdf) Ανάκτηση στις 07/03/2012

11. Υλοποίηση πειραματικής διάταξης υπολογισμού του καρδιακού ρυθμού χρησιμοποιώντας τεχνικές ψηφιακής επεξεργασίας εικόνας και βίντεο, Θεοδώρου- Αλεξανδρή Βασιλική, Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα ηλεκτρολόγων μηχανικών και τεχνολογίας υπολογιστών, Εργαστήριο Ενσύρματης τηλεπικοινωνίας, Πάτρα 2011, Ανάκτηση από [http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/4590/1/%CE%94%CE%B9%CF%80%CE%BB%CF%89%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE\\_%CE%91%CE%BB%CE%B5%CE%BE%CE%B1%CE%BD%CE%B4%CF%81%CE%AE\\_%CE%92%CE%B1%CF%83%CE%B9%CE%BB%CE%B9%CE%BA%CE%AE\\_5251.pdf](http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/4590/1/%CE%94%CE%B9%CF%80%CE%BB%CF%89%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE_%CE%91%CE%BB%CE%B5%CE%BE%CE%B1%CE%BD%CE%B4%CF%81%CE%AE_%CE%92%CE%B1%CF%83%CE%B9%CE%BB%CE%B9%CE%BA%CE%AE_5251.pdf) στις 12/03/2012
12. <http://eureka.lib.teithe.gr:8080/bitstream/handle/10184/840/aprousalis.pdf?sequence=1> Ανακτήθηκε στις 12/03/2012
13. Οδηγός MATLAB για αρχάριους, Ξενοφώντος Χ., Πανεπιστήμιο Κύπρου, Ανάκτηση από [http://www2.ucy.ac.cy/~xenophon/pubs/matlab\\_intro.pdf](http://www2.ucy.ac.cy/~xenophon/pubs/matlab_intro.pdf) στις 01/08/2014