



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ**  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

**Αυτο-Οργανούμενοι Χάρτες Kohonen. Αλγόριθμοι και Εφαρμογές**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Αντώνης Ε. Ματέρης

**Επιβλέπων:** Σταύρος Π. Αδάμ  
Επίκ. Καθηγητής  
Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

‘Αρτα, Οκτώβριος 2021





**UNIVERSITY OF  
IOANNINA**  
DEPARTMENT OF INFORMATICS  
AND TELECOMMUNICATIONS

**Kohonen Self-Organizing Maps. Algorithms and Applications**

Arta, October 2021





ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Αυτο-Οργανούμενοι Χάρτες Kohonen, Αλγόριθμοι και Εφαρμογές

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αντώνης Ε. Ματέρης

**Επιβλέπων:** Σταύρος Π. Αδάμ  
Επίκ. Καθηγητής  
Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 15η Οκτωβρίου 2021.

Σταύρος Αδάμ  
Επίκ. Καθηγητής

Νικόλαος Γιαννακέας  
Επίκ. Καθηγητής

Πέτρος Καρβέλης  
Επίκ. Καθηγητής

΄Αρτα, Οκτώβριος 2021



# Αυτο- Οργανούμενοι Χάρτες Kohonen. Αλγόριθμοι και Εφαρμογές

Ματέρης Αντώνης

Εξάμηνο 14ο, Α.Μ. 1187, e-mail: antwnis21@yahoo.gr

Άρτα, Οκτώβριος 2021

## Περίληψη

Αρχικά, θα γίνει γενική παρουσίαση του αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen, δύο βασικών αλγορίθμων αυτού και κάποιων εφαρμογών του. Στη συνέχεια, εκπαιδεύονται δίκτυα Kohonen με χρήση του λογισμικού SOM toolbox. Με τη βοήθεια του γραφήματος U-matrix, οπτικοποιούνται τα εκπαιδευμένα δίκτυα και ελέγχεται ως προς την ορθότητά η τεχνική εκπαίδευσης που εφαρμόστηκε. Αμέσως μετά, τροποποιείται ο κώδικας του SOM toolbox προκειμένου να προστεθεί σε αυτό η δυνατότητα χρήσης μη ευκλείδειων νορμών κατά την εκπαίδευση των δικτύων. Μετά την επιτυχή τροποποίηση, εκπαιδεύονται ξανά τα ίδια δίκτυα Kohonen με διαφορετική - μη ευκλείδεια - νόρμα κάθε φορά. Τέλος, ερευνώνται και συγκρίνονται μεταξύ τους τα εκπαιδευμένα δίκτυα Kohonen που προέκυψαν από τη χρήση ευκλείδειων και μη ευκλείδειων νορμών. Απώτερος στόχος της έρευνας, είναι να φανεί σε επίπεδο οπτικής παρουσίασης η επίδραση της χρήσης μη ευκλείδειων νορμών (κατά τον υπολογισμό αποστάσεων) στο εκπαιδευμένο δίκτυο Kohonen που προκύπτει.

**Θεματική περιοχή:** Υπολογιστική νοημοσύνη, νευρωνικά δίκτυα.

**Λέξεις κλειδιά:** δίκτυο Kohonen, SOM, νευρωνικά δίκτυα, μη ευκλείδεια νόρμα, SOM toolbox.



# Kohonen Self- Organizing Maps. Algorithms and Applications

Materis Antonios

Semester 14, R.N. 1187, e-mail: antwnis21@yahoo.gr

Arta, October 2021

## Abstract

Initially, there will be a general presentation of the Kohonen self-organizing map, two basic algorithms of it and some of its applications. Next, Kohonen networks are trained using the SOM toolbox software. With the help of the U-matrix graph, the trained networks are visualized and the applied training technique is checked for its correctness. Afterwards, the SOM toolbox code is modified in order to add the option of using non-Euclidean norms during the network training. After that successful modification, the Kohonen networks are once again trained with a different - non-Euclidean - norm each time. Finally, a research on that trained Kohonen networks resulting from the use of Euclidean and non-Euclidean norms is done and they are compared with each other. The ultimate goal of this research is to show at the level of visual presentation the effect of the use of non-Euclidean norms (when calculating distances) on the resulting trained Kohonen network.

**Thematic area:** Computational intelligence, neural networks.

**Key words:** Kohonen network, SOM, neural networks, non-Euclidean norm, SOM toolbox.



## Πρόλογος

Η παρούσα πτυχιακή εργασία εκπονήθηκε κατά το θερινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2020 – 2021. Το γνωστικό αντικείμενο της υπολογιστικής νοημοσύνης αποτέλεσε αντικείμενο διδασκαλίας κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών σπουδών της σχολής και τελικά κέντρισε σε βαθμό τέτοιο το ενδιαφέρον, ώστε να επιλεγεί σαν θεματολογία της εργασίας αυτής. Αντικείμενο λοιπόν της εργασίας, αποτέλεσε το νευρωνικό δίκτυο που ακούει στο όνομα αυτό-οργανούμενος χάρτης Kohonen. Το θεωρητικό κομμάτι αυτού του δικτύου, μαζί και με τον αλγόριθμο εκπαίδευσης του, είναι σχετικά απλά σε σύγκριση με άλλα είδη νευρωνικών δικτύων. Ωστόσο, ο αυτό-οργανούμενος χάρτης Kohonen βρίσκει πολλές εφαρμογές και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

## Ευχαριστίες

Κάθε προσπάθεια που κάνουμε στη ζωή, κρύβει ίσως πίσω της κάποιες προϋποθέσεις. Επίσης, κάθε προσπάθεια, μοιάζει σαν να παίζει το ρόλο του αιτιατού από το πολυσυζητημένο ζευγάρι ‘αίτιο-αιτιατό’. Θα ήθελα να ευχαριστήσω αυτά τα ‘αίτια’ και αυτές τις προϋποθέσεις που με οδήγησαν και μου επέτρεψαν, αντίστοιχα, να πραγματοποιήσω τον κύκλο μου στη σχολή με την εκπόνηση αυτής της πτυχιακής εργασίας. Ευχαριστώ θερμά τον κ. Σταύρο Αδάμ, ο οποίος ήταν και ο επιβλέπων καθηγητής. Τον ευχαριστώ για τον επαγγελματισμό του και ταυτόχρονα τον ανθρωπισμό του στη συνεργασία που είχαμε μέχρι τώρα. Θα ήταν θαυμάσιο αυτή η συνεργασία να συνεχιστεί και μετά την ολοκλήρωση των σπουδών μου. Ευχαριστώ επίσης, τους καθηγητές της σχολής στο σύνολό τους, οι οποίοι υπήρξαν προσιτοί και με ενδιαφέρον απαντούσαν ερωτήσεις όταν οι φοιτητές τους το ζητούσαμε. Και για να κλείσω, θέλω να ευχαριστήσω και εσένα ... πάλλευκο φεγγάρι.

## **ΔΗΛΩΣΗ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΗΣ ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑΣ**

Η παρούσα εργασία αποτελεί προϊόν αποκλειστικά δικής μου προσπάθειας. Όλες οι πηγές που χρησιμοποιήθηκαν περιλαμβάνονται στη βιβλιογραφία και γίνεται ρητή αναφορά σε αυτές μέσα στο κείμενο όπου έχουν χρησιμοποιηθεί.

Ματέρης Αντώνης

“Θα σταθούμε λιγάκι στην κορφή της μαρμάρινης σκάλας του Αϊ-Νικόλα,  
ύστερα εσύ θα κατηφορίσεις κι εγώ θα γυρίσω πίσω έχοντας στ’ αριστερό πλευρό μου  
τη ζέστα απ’ το τυχαίο άγγηγμα του σακακιού σου. . . ”



# Περιεχόμενα

|                                                                                    |           |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Πρόλογος                                                                           | v         |
| <b>1 Εισαγωγή</b>                                                                  | <b>1</b>  |
| 1.1 Σκοπός πτυχιακής εργασίας                                                      | 1         |
| 1.2 Διάρθρωση πτυχιακής εργασίας                                                   | 1         |
| <b>2 Περιγραφή αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen</b>                                 | <b>3</b>  |
| 2.1 Εισαγωγή                                                                       | 3         |
| 2.2 Η ανακάλυψη                                                                    | 3         |
| 2.3 Σκοπός                                                                         | 4         |
| 2.4 Το μοντέλο                                                                     | 4         |
| 2.4.1 Βασικοί ορισμοί - προβληματισμοί                                             | 4         |
| 2.4.2 Συνάρτηση γειτνίασης                                                         | 7         |
| 2.4.3 Βασικός αλγόριθμος - batch αλγόριθμος                                        | 10        |
| <b>3 Μέτρα ποιότητας</b>                                                           | <b>13</b> |
| <b>4 Πεδία εφαρμογών</b>                                                           | <b>15</b> |
| 4.1 Εφαρμογές                                                                      | 15        |
| 4.2 Σχόλια - Παρατηρήσεις                                                          | 27        |
| <b>5 Μελέτη περιπτώσεων με χρήση διαφορετικών μέτρων απόστασης στο SOM toolbox</b> | <b>29</b> |
| 5.1 Distance concentration phenomenon                                              | 29        |
| 5.2 SOM toolbox                                                                    | 29        |
| 5.2.1 Γενικά                                                                       | 29        |
| 5.2.2 Τροποποίηση συναρτήσεων                                                      | 31        |
| 5.3 Μελέτη περίπτωσης Iris dataset                                                 | 33        |
| 5.3.1 SOM χρησιμοποιώντας νόρμα $\ell_2$ (ευκλείδεια απόσταση)                     | 34        |
| 5.3.2 Έλεγχος ορθότητας μεθόδου εκπαίδευσης                                        | 41        |
| 5.3.3 SOM με μη ευκλείδεια μέτρα απόστασης                                         | 46        |
| 5.3.4 Σχόλια – παρατηρήσεις                                                        | 53        |
| 5.4 Μελέτη περίπτωσης COIL-20 dataset                                              | 56        |
| 5.4.1 Σχόλια – παρατηρήσεις                                                        | 57        |
| 5.4.2 Περαιτέρω ανάλυση                                                            | 59        |
| 5.5 Μελέτη περίπτωσης Banknotes dataset                                            | 61        |
| 5.5.1 Σχόλια – παρατηρήσεις                                                        | 61        |
| <b>6 Συμπεράσματα-Παρατηρήσεις</b>                                                 | <b>65</b> |
| <b>Βιβλιογραφία</b>                                                                | <b>67</b> |
| <b>A' Παράρτημα A</b>                                                              | <b>69</b> |
| A'.1 Πίνακες κερδισμένων δεδομένων εισόδου IRIS Data set                           | 69        |
| A'.2 Πίνακες κερδισμένων δεδομένων εισόδου COIL-20 dataset                         | 75        |
| A'.3 Πίνακες κερδισμένων δεδομένων εισόδου Banknotes Data set                      | 81        |



# Κατάλογος Σχημάτων

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1  | Τοπολογία εγκεφάλου . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                           | 3  |
| 2  | Τυπικό δίκτυο Kohonen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                         | 5  |
| 3  | Μονοδιάστατος χώρος εξόδου SOM . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                | 6  |
| 4  | Δισδιάστατος χώρος εξόδου SOM με (α') τετράγωνους και (β') εξάγωνους νευρώνες αντίστοιχα . . . . .                                                                                                                                                                                      | 7  |
| 5  | Περιπτώσεις χαρτών επιπέδου Kohonen. . . . .                                                                                                                                                                                                                                            | 8  |
| 6  | Ακτίνα γειτονιάς 1 και 2 σε διδιάστατο χώρο εξόδου με (α') τετράγωνο και (β') εξάγωνο πλέγμα αντίστοιχα . . . . .                                                                                                                                                                       | 8  |
| 7  | Στάδια μεθόδου ανίχνευσης απάτης χρωστικών χαρτών . . . . .                                                                                                                                                                                                                             | 17 |
| 8  | Επαναληπτική διαδικασία κατασκευής καμπύλης Peano . . . . .                                                                                                                                                                                                                             | 18 |
| 9  | Απεικόνιση εκπαιδευμένων SOM μίας διάστασης . . . . .                                                                                                                                                                                                                                   | 19 |
| 10 | Εκπαιδευμένο μονοδιάστατο SOM απεικονισμένο στο διδιάστατο χώρο εισόδου για ομοιόμορφα κατανεμημένα δεδομένα. Οι μαύρες κουκίδες αντιπροσωπεύουν τις θέσεις των νευρώνων εξόδου. . . . .                                                                                                | 21 |
| 11 | Εκπαιδευμένο μονοδιάστατο SOM απεικονισμένο στο διδιάστατο χώρο εισόδου για μη ομοιόμορφα κατανεμημένα δεδομένα. Οι μαύρες κουκίδες αντιπροσωπεύουν τις θέσεις των νευρώνων εξόδου. . . . .                                                                                             | 22 |
| 12 | Μονοπάτια που προσδιορίστηκαν με βάση 93 καταγεγραμμένα συμβάντα. Στο πάνω αριστερά μονοπάτι χρησιμοποιήθηκαν διπλάσιοι νευρώνες (186) σε σχέση με τα συμβάντα (93), στο πάνω δεξιά χρησιμοποιήθηκαν 93, στο κάτω αριστερά 46 και στο κάτω δεξιά 23. . . . .                            | 23 |
| 13 | Παράδειγμα ενός Word Category Map . . . . .                                                                                                                                                                                                                                             | 25 |
| 14 | Παράδειγμα ενός Document Map . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                  | 26 |
| 15 | Διδιάστατα γραφήματα σημείων του χώρου που απέχουν απόσταση 1 από την αρχή των αξόνων για διάφορες τιμές της παραμέτρου $p$ στη Σχέση (13) (Francois, Wertz & Verleysen, (2007)) . . . . .                                                                                              | 30 |
| 16 | Εντός του μεγαλύτερου εξαγώνου και με κόκκινο χρώμα είναι σημειωμένοι οι άμεσοι γείτονες του νευρώνα 30. Με πράσινο χρώμα είναι σημειωμένοι οι 6 κοντινότεροι νευρώνες από το νευρώνα 30 χρησιμοποιώντας τη νόρμα $\ell_{0.25}$ . Τα δεδομένα εισόδου ανήκουν στο IRIS dataset. . . . . | 32 |
| 17 | Οπτικοποίηση εκπαιδευμένου SOM για το IRIS dataset, χρησιμοποιώντας τις προκαθορισμένες παραμέτρους του SOM toolbox. . . . .                                                                                                                                                            | 35 |
| 18 | Οπτικοποίηση εκπαιδευμένου SOM για το IRIS dataset, χρησιμοποιώντας τις προκαθορισμένες παραμέτρους του SOM toolbox. . . . .                                                                                                                                                            | 37 |
| 19 | Οπτικοποίηση εκπαιδευμένου SOM με κανονικοποιημένο IRIS dataset, χρησιμοποιώντας τις προκαθορισμένες παραμέτρους του SOM toolbox . . . . .                                                                                                                                              | 38 |
| 20 | Οπτικοποίηση εκπαιδευμένου SOM με κανονικοποιημένο IRIS dataset, και διάσταση χάρτη $16 \times 4$ . . . . .                                                                                                                                                                             | 39 |
| 21 | Οπτική σύγκριση των U-matrix . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                  | 40 |
| 22 | Οπτική σύγκριση των $13 \times 13$ ( $7 \times 7$ ) U-matrix για έλεγχο ορθότητας μεθόδου εκπαίδευσης που εφαρμόζεται (στο IRIS dataset) κάνοντας χρήση του SOM toolbox . . . . .                                                                                                       | 42 |
| 23 | Πιθανό bug στη συνάρτηση <code>som_show_add('label', sMap)</code> του SOM toolbox κατά την εμφάνιση ετικετών-labels. . . . .                                                                                                                                                            | 45 |
| 24 | Εκπαιδευμένο SOM με χρήση νόρμας $\ell_2$ στον αλγόριθμο εκπαίδευσης, $Q_e = 0.093$ , $T_e = 0.027$ . . . . .                                                                                                                                                                           | 48 |
| 25 | φιγυρε τιτλε . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 49 |
| 26 | Εκπαιδευμένο SOM με χρήση νόρμας $\ell_\infty$ στον αλγόριθμο εκπαίδευσης, $Q_e = 0.073$ , $T_e = 0.093$ . . . . .                                                                                                                                                                      | 50 |
| 27 | Εκπαιδευμένο SOM με χρήση νόρμας $\ell_{0.5}$ στον αλγόριθμο εκπαίδευσης, $Q_e = 0.401$ , $T_e = 0.213$ . . . . .                                                                                                                                                                       | 51 |
| 28 | Εκπαιδευμένο SOM με χρήση νόρμας $\ell_{0.25}$ στον αλγόριθμο εκπαίδευσης, $Q_e = 5.746$ , $T_e = 0.487$ . . . . .                                                                                                                                                                      | 52 |
| 29 | Εκπαιδευμένο SOM με χρήση νόρμας $\ell_{0.2}$ στον αλγόριθμο εκπαίδευσης, $Q_e = 24.162$ , $T_e = 0.493$ . . . . .                                                                                                                                                                      | 53 |
| 30 | Εκπαιδευμένα δίκτυα Kohonen επάνω στο IRIS dataset με χρήση ευκλείδειας νόρμας και μη ευκλείδειων νορμών αντίστοιχα στον αλγόριθμο εκπαίδευσης. . . . .                                                                                                                                 | 54 |

|    |                                                                                                                                                        |    |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 31 | Εκπαιδευμένα δίκτυα Kohonen στο COIL-20 dataset με χρήση ευκλείδειας νόρμας και μη ευκλείδειων νορμών αντίστοιχα στον αλγόριθμο εκπαίδευσης. . . . .   | 58 |
| 32 | Εκπαιδευμένα δίκτυα Kohonen στο Banknotes dataset με χρήση ευκλείδειας νόρμας και μη ευκλείδειων νορμών αντίστοιχα στον αλγόριθμο εκπαίδευσης. . . . . | 62 |
| 33 | Εκπαιδευμένα δίκτυα Kohonen στο Banknotes dataset με χρήση ευκλείδειας νόρμας και μη ευκλείδειων νορμών αντίστοιχα στον αλγόριθμο εκπαίδευσης. . . . . | 63 |

# 1 Εισαγωγή

## 1.1 Σκοπός πτυχιακής εργασίας

Η παρούσα πτυχιακή εργασία, έχει διττό σκοπό. Η μία πλευρά αυτού του σκοπού είναι η όσο το δυνατόν πληρέστερη κατανόηση του αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen. Πληρέστερη κατανόηση τόσο στο επίπεδο της θεωρίας όσο και στο επίπεδο των εφαρμογών. Θέλοντας κανείς να κατανοήσει τη θεωρία του δικτύου SOM, ουσιαστικά θα πρέπει να επικεντρωθεί στη μελέτη και κατανόηση της λειτουργίας του αλγορίθμου εκπαίδευσης αυτού του δικτύου. Η παρουσίαση και κατανόηση κάποιων εφαρμογών που χρησιμοποιούν αυτό το δίκτυο, θα εμπλουτίσουν ουσιαστικά την ποιότητα της κατανόησης σε αυτό. Θα φωτίσουν νέους δρόμους που ανοίγονται και πιθανόν νέα προβλήματα που παρουσιάζονται.

Η άλλη πλευρά του σκοπού αυτής της εργασίας, είναι η εφαρμογή του αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen σε κάποιο σύνολο δεδομένων (κάνοντας χρήση κάποιου πακέτου λογισμικού). Ακόμη, εφόσον είναι δυνατόν, είναι επιθυμητό να μελετηθεί η συμπεριφορά αυτής της ίδιας εφαρμογής στην περίπτωση που τροποποιηθεί το μέτρο απόστασης που χρησιμοποιείται στον αλγόριθμο εκπαίδευσης.

## 1.2 Διάρθρωση πτυχιακής εργασίας

Η διάρθρωση της πτυχιακής εργασίας, βασίζεται ουσιαστικά στους σκοπούς τους οποίους θέλει να υπηρετήσει.

Αρχικά, στο πρώτο κεφάλαιο, αναφέρονται ο σκοπός της πτυχιακής εργασίας και στη συνέχεια περιγράφεται πολύ σύντομα η διάρθρωση της.

Περνώντας στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζεται συνοπτικά το πως έγινε η εφεύρεση του δικτύου Kohonen. Ποια ήταν ουσιαστικά, η αφορμή της δημιουργίας του. Στο ίδιο κεφάλαιο, περιγράφεται το μοντέλο του δικτύου. Δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί και παρουσιάζεται ο αλγόριθμος εκπαίδευσης του δικτύου, καθώς και μια παραλλαγή αυτού.

Στο τρίτο κεφάλαιο, γίνεται μία σύντομη παρουσίαση δύο μέτρων ποιότητας του αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen.

Στο τέταρτο, γίνεται μία παρουσίαση κάποιων εφαρμογών του αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen. Πρόκειται για 4 πεδία εφαρμογών, τα οποία επιλέχθηκαν λόγω της σημαντικότητάς που παρουσιάζουν. Σε αυτό το κεφάλαιο, γίνονται επίσης κάποιες παρατηρήσεις επί των εφαρμογών που παρουσιάστηκαν.

Το πέμπτο κεφάλαιο, περιέχει την υλοποίηση ενός δικτύου Kohonen, χρησιμοποιώντας ένα ευρέως διαδεδομένο dataset. Για το σκοπό αυτό, γίνεται αρχικά αναφορά στο πακέτο λογισμικού που χρησιμοποιήθηκε (SOM toolbox) και τις τροποποιήσεις που χρειάστηκε να γίνουν σε αυτό. Στη συνέχεια, ακολουθεί η ανάπτυξη της υλοποίησης βήμα-βήμα. Μετά την ολοκλήρωση της εκπαίδευσης του δικτύου Kohonen, ελέγχεται η ορθότητα του εκπαιδευμένου δικτύου συγκρίνοντας το δίκτυο που προέκυψε με ένα δίκτυο αναφοράς από τη βιβλιογραφία. Αφού επιβεβαιωθεί η ορθότητα της εκπαίδευσης του δικτύου, ξεκινά η τροποποίηση του κώδικα του λογισμικού SOM toolbox προκειμένου να μελετηθεί η επίπτωση που θα έχει η χρήση μη ευκλείδειων νορμών στην εκπαίδευση του δικτύου. Ακολουθεί η δημιουργία και άλλων εκπαιδευμένων δικτύων Kohonen με χρήση της ευκλείδειας νόρμας αλλά και μη ευκλείδειων νορμών για άλλα 2 διαφορετικά datasets.

Στο έκτο κεφάλαιο, αναφέρονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την παρούσα πτυχιακή εργασία.



## 2 Περιγραφή αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen

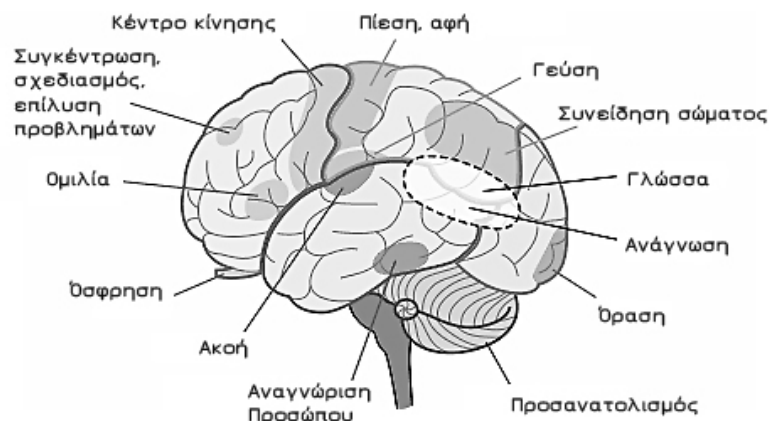
### 2.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την παράγραφο θα γίνει παρουσίαση και χρήση του λεγόμενου αυτο-οργανούμενου χάρτη του Kohonen ή αλλιώς δικτύου Kohonen. Ο όρος αυτο-οργανούμενος χάρτης προήλθε από την αγγλική μετάφραση του όρου Self Organized Map (SOM). Είναι αυτή ακριβώς η συντομογραφία του αγγλικού όρου, SOM, η οποία θα χρησιμοποιηθεί από εδώ και εμπρός για να αναφερόμαστε στην έννοια αυτο-οργανούμενος χάρτης Kohonen. Kohonen, είναι το επώνυμο του Teuvo Kohonen, ενός Φινλανδού ερευνητή που το 1982 δημιούργησε την έννοια του ομώνυμου αυτο-οργανούμενου χάρτη. Θα αναφερόμαστε πολύ σύντομα σε κάποια εισαγωγικά στοιχεία των SOMs, τα οποία είναι απαραίτητα για να κατανοήσουμε το θέμα. Ωστόσο, δε θα επεκταθούμε πολύ, παρά μόνο όσο είναι απαραίτητο για να δώσουμε μια συνολική εικόνα του SOM. Ο αναγνώστης καλό θα είναι να αναζητήσει περισσότερο λεπτομερείς εισαγωγικά στοιχεία στη βιβλιογραφία που προτείνεται. Τέλος, για να παρακολουθήσει κανείς την εργασία αυτή, θα είναι καλό για εκείνον να διαθέτει μια εξοικείωση με την έννοια των τεχνητών νευρωνικών δικτύων, καθώς το SOM είναι ακριβώς αυτό: ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο.

### 2.2 Η ανακάλυψη

Η σύλληψη της ιδέας του αυτο-οργανούμενου χάρτη του Kohonen, έχει σαν αφετηρία τη βιολογία. Άλλωστε και το ίδιο το τεχνητό νευρωνικό δίκτυο σαν ιδέα προήλθε και αυτό με τη σειρά του από το χώρο της βιολογίας. Τεχνητό νευρωνικό δίκτυο λοιπόν και δίκτυο SOM έχουν κοινή αφετηρία. Κοινή αφετηρία μεν, διαφορετική κατηγοριοποίηση δε. Ο Kohonen οδηγήθηκε στην ανακάλυψη του ομώνυμου δικτύου (δίκτυο Kohonen) από μια βιολογική παρατήρηση η οποία και αναφέρεται αμέσως παρακάτω.

Για το λόγο αυτό θα περάσουμε για λίγο στην επιστήμη της βιολογίας-ιατρικής και πιο συγκεκριμένα σε αποτελέσματα της μελέτης του ανθρώπινου εγκεφάλου. Από αυτόν τον επιστημονικό κλάδο γνωρίζουμε πως ο εγκέφαλος τοπολογικά είναι χωρισμένος σε τμήματα. Μια εικόνα αυτής της τοπολογίας του εγκεφάλου είναι και το Σχήμα<sup>1</sup> (1).



Σχήμα 1: Τοπολογία εγκεφάλου

Για μια λίγο περισσότερο λεπτομερή περιγραφή της παραπάνω εικόνας, διαλέγεται για παράδειγμα το τμήμα εκείνο του εγκεφάλου που ασχολείται με την επαφή και πίεση. Αυτό που συμβαίνει σε αυτή τη περίπτωση, είναι πως εάν νιώσουμε πίεση σε κάποιο σημείο, έστω Α, του σώματός μας τότε ενεργοποιείται ένας νευρώνας που τελικά οδηγεί το σήμα αυτού του ερεθίσματος στο εικονιζόμενο τμήμα του εγκεφάλου που διαλέξαμε. Αυτό που είναι αξιοσημείωτο, είναι πως εάν νιώσουμε πίεση σε ένα ακριβώς γειτονικό σημείο, σημείο Β, του σώματός (γειτονικό σε σχέση με το σημείο Α), τότε το σήμα αυτό θα καταλήξει στο ίδιο τμήμα του εγκεφάλου και μάλιστα κοντά στο σημείο που κατέληξε το πρώτο ερέθισμα. Δηλαδή, οι

<sup>1</sup><https://cybernetist.com/2017/01/13/self-organizing-maps-in-go/>

νευρώνες που διεγείρονται από συναφή ή γειτονικά εξωτερικά ερεθίσματα βρίσκονται κοντά ο ένας με τον άλλο σχηματίζοντας δομές, που αποκαλούνται χάρτες (Διαμανταράς, 1982). Ανάλογα με την αίσθηση στην οποία αντιστοιχούν παίρνουν και το αντίστοιχο επίθετο στο όνομά τους.

Ο Τεονο Kohonen, ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε την παραπάνω ιδέα του τρόπου λειτουργίας του εγκεφάλου. Εμπνευσμένος λοιπόν, δημιούργησε ένα νέο είδος τεχνητού νευρωνικού δικτύου, το λεγόμενο δίκτυο Kohonen ή αλλιώς αυτο-οργανούμενο τοπογραφικό χάρτη Kohonen (Self Organizing topographic Map - SOM). Στην ουσία του, το SOM, είναι ένα σύστημα που αυτόματα σχηματίζει ένα μονοδιάστατο ή διδιάστατο χάρτη χαρακτηριστικών με βάση χαρακτηριστικά ενός συνόλου. Εποπτικά, αυτό που συμβαίνει σε αυτούς τους χάρτες του Kohonen, είναι πως κάθε ένα στοιχείο του συνόλου των δεδομένων αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του χάρτη. Ωστόσο, εφόσον ένα στοιχείο του συνόλου δεδομένων είναι 'παρόμοιο' με ένα άλλο στοιχείο του συνόλου αυτού, τότε αυτή η ομοιότητα (ή αλλιώς και γειτνίαση) διατηρείται σαν πληροφορία και στο χάρτη του Kohonen. Δηλαδή, τα δύο μεταξύ τους 'όμοια' στοιχεία του συνόλου αντιστοιχίζονται σε αν όχι το ίδιο σημείο στο χάρτη Kohonen τότε σε γειτονικά σημεία. Με άλλα λόγια, η τοπολογία που πιθανώς υπάρχει σε κάποιο σύνολο μεταφέρεται σαν πληροφορία και στον αυτο-οργανούμενο χάρτη του Kohonen (Kohonen, 1982) (Kohonen, 2001). Το γεγονός πως ο χάρτης είναι το πολύ τρισδιάστατος, κάνει το SOM, να είναι ένα εργαλείο ανεκτίμητης αξίας. Και αυτό, διότι το σύνολο το οποίο χαρτογραφεί το SOM δεν έχει κάποιο περιορισμό σε ό,τι αφορά το πλήθος των χαρακτηριστικών του. Κάνουμε επομένως λόγο για ένα πολυδιάστατο σύνολο. Το ανθρώπινο είδος, δεν έχει τη δυνατότητα να οπτικοποιήσει έναν χώρο μεγαλύτερο από αυτόν των 3 διαστάσεων. Το ότι το SOM είναι ένας χάρτης συνήθως διδιάστατος, δίνει την ευκαιρία να αντιληφθούμε την τοπολογία ενός συνόλου υψηλής διάστασης. Είναι λοιπόν το SOM, ένα εργαλείο μείωσης διάστασης ενός συνόλου δεδομένων προκειμένου να αναπαρασταθούν τα στοιχεία του κατά τρόπο κατανοητό σε εμάς τους ανθρώπους.

Από την παραπάνω σύντομη και χωρίς λεπτομέρειες περιγραφή του SOM, μπορεί κανείς να δει την ομοιότητα του αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen, με τη δομή των χαρτών του ανθρώπινου εγκεφάλου. Για να κατανοηθεί αυτός ο δρόμος που χαράχτηκε από τον Kohonen, ακολουθεί η παρουσίαση του SOM από την τεχνική του σκοπιά και με περισσότερη λεπτομέρεια.

## 2.3 Σκοπός

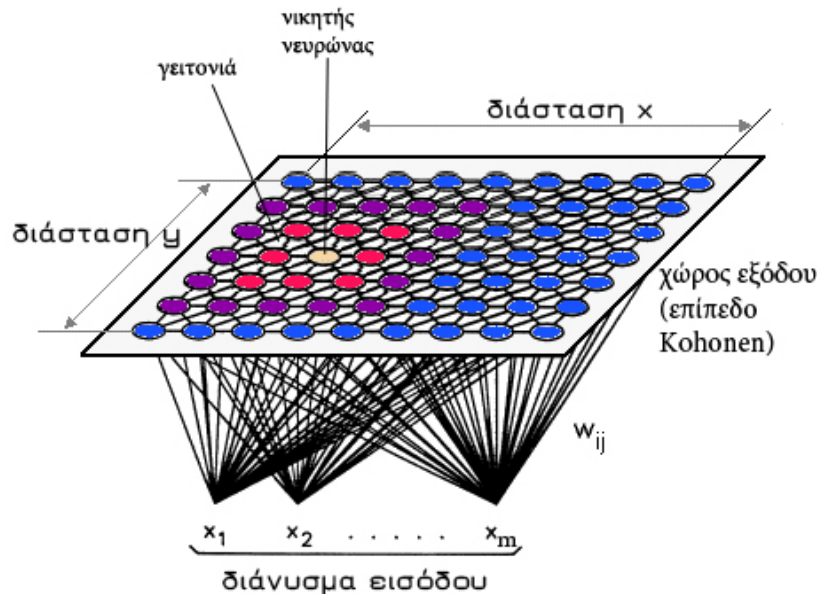
Από τη σύντομη περιγραφή της ανακάλυψης του αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen που έγινε, μπορεί να φανεί και ο σκοπός αυτού του νευρωνικού δικτύου. Αυτό που πραγματοποιεί το δίκτυο, είναι και ο σκοπός του. Έχουμε δεδομένα τα οποία μπορεί να έχουν οποιαδήποτε διάσταση. Επειδή ακριβώς η διάσταση αυτών μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερη από τις 3 οικίες σε εμάς διαστάσεις, είναι πολύ δύσκολο να πάρουμε μια οπτική πληροφορία για τη μεταξύ τους ομοιότητα των δεδομένων. Μας ενδιαφέρει ωστόσο να πάρουμε αυτή την πληροφορία. Και αυτό θα έλεγα πως είναι και ο σκοπός του δικτύου του Kohonen. Θέλουμε να κερδίσουμε γνώση για τα δεδομένα, γνώση που είναι δύσκολο να έρθει με διαφορετικούς – πιο παραδοσιακούς – τρόπους μελέτης δεδομένων, είτε λόγο του μεγάλου όγκου των δεδομένων, είτε λόγο της μεγάλης τους διάστασης, είτε και για τους δύο αυτούς παραπάνω λόγους. Το δίκτυο Kohonen θα δεχτεί τα δεδομένα και διατηρώντας την τοπολογία αυτών μεταξύ τους, θα δώσει μία εικόνα αυτών των δεδομένων σε ένα χάρτη δύο διαστάσεων (και πολύ σπάνια μίας διάστασης ή τριών διαστάσεων). Έτσι, θα μας δώσει τη δυνατότητα να πάρουμε μία εικόνα – πληροφορία – για τα δεδομένα στο διδιάστατο χώρο, που γίνεται εύκολα αντιληπτός στον άνθρωπο. Θα δείξει ποια από αυτά τα δεδομένα είναι όμοια μεταξύ τους και πόσο όμοια. Κάνει δηλαδή, ακριβώς αυτό που είδαμε παραπάνω στην περίπτωση του ανθρώπινου εγκεφάλου. Θέλει να μας δώσει μια εικόνα – πληροφορία – για τα ερεθίσματα μέσω της πληροφορίας του οργανωμένου εγκεφάλου, να μας αποκαλύψει την ομοιότητα των ερεθισμάτων μέσω της ομοιότητας των εικόνων τους στον εγκέφαλο. Σε αυτή την παραλληλία ωστόσο, τα δεδομένα αντιστοιχούν στα ερεθίσματα και ο εκπαιδευμένος χάρτης στον οργανωμένο ανθρώπινο εγκέφαλο. Πρόκειται για το επονομαζόμενο clustering (συσταδοποίηση). Αυτός λοιπόν είναι ο σκοπός, να μας δώσει την πληροφορία της τοπολογίας του χώρου των δεδομένων, μέσω της οργάνωσης του στο εκπαιδευμένο δίκτυο Kohonen.

## 2.4 Το μοντέλο

### 2.4.1 Βασικοί ορισμοί - προβληματισμοί

Σε αυτό το σημείο, θα δούμε το μοντέλο του τυπικού αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen και όσους βασικούς ορισμούς χρειάζονται ώστε να αποκτήσουμε βασική κατανόηση. Ένα SOM, είναι ένα τεχνητό

νευρωνικό δίκτυο δύο επιπέδων. Αποτελείται από το επίπεδο εισόδου και το επίπεδο εξόδου ή αλλιώς επίπεδο Kohonen. Κρυφό επίπεδο δεν υπάρχει. Το Σχήμα<sup>2</sup> (2) δείχνει την εικόνα της δομής του δικτύου Kohonen. Στην περίπτωση αυτής της εικόνας, το επίπεδο Kohonen είναι ένα διδιάστατο πλέγμα νευρώνων, που είναι και το πιο σύνηθες. Μονοδιάστατα (Σχήμα (3)) και τρισδιάστατα επίπεδα Kohonen είναι επίσης πιθανά, ωστόσο, λιγότερο συνηθισμένα. Κάθε νευρώνας εισόδου συνδέεται με όλους τους νευρώνες του δεύτερου επιπέδου.



Σχήμα 2: Τυπικό δίκτυο Kohonen

Κάθε νευρώνας του επιπέδου εισόδου είναι ένα γνώρισμα/μία ιδιότητα/ένα χαρακτηριστικό. Με άλλα λόγια, κάθε νευρώνας του επιπέδου εισόδου αναπαριστά μία μεταβλητή των δεδομένων εισόδου. Κάθε είσοδος αποτελείται από ένα σύνολο  $m$  χαρακτηριστικών-μεταβλητών και αναπαρίσταται μαθηματικά από ένα διάνυσμα διάστασης  $m$ :

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \quad (1)$$

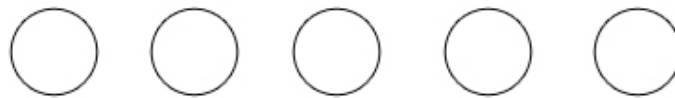
Τώρα, στο επίπεδο εξόδου τοποθετείται ένας αριθμός από  $n$  νευρώνες, οι οποίοι θα αποτελέσουν τους νευρώνες εξόδου. Κάθε νευρώνας εξόδου συνδέεται με κάθε έναν από τους νευρώνες εισόδου. Το γεγονός αυτό συμβολίζεται στο Σχήμα (2) με ευθύγραμμα τμήματα τα οποία ενώνουν τον κάθε νευρώνα εισόδου με κάθε νευρώνα εξόδου. Στη γλώσσα των τεχνητών νευρωνικών δικτύων, κάθε μία από τις παραπάνω συνδέσεις μεταξύ ενός νευρώνα εξόδου  $i$  και ενός νευρώνα εισόδου  $j$  αποτελεί και μία σύναψη. Κάθε σύναψη χαρακτηρίζεται από το αντίστοιχο συναπτικό βάρος  $w_{ij}$ . Δηλαδή, κάθε ένας από τους  $n$  νευρώνες του χώρου εξόδου (ή αλλιώς χάρτη Kohonen ή απλώς χάρτη) χαρακτηρίζεται και από ένα διάνυσμα συναπτικών βαρών διάστασης  $m$  (ίση δηλαδή με τη διάσταση του χώρου εισόδου) :

$$\vec{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{im})^T, i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Είναι τόσο απλό στην περιγραφή του το δίκτυο Kohonen που δε χρειάζονται πολλοί περαιτέρω ορισμοί, ώστε να ολοκληρωθεί η περιγραφή του μοντέλου. Το μόνο που πρέπει να γνωρίζει κανείς ακόμη, είναι η έννοια της ‘γειτονιάς’ του αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen, η οποία θα υπεισέλθει (όπως θα δούμε στην παράγραφο 2.4.3) στον αλγόριθμο με βάση τον οποίο το δίκτυο αυτο-οργανώνεται. Όταν μιλάμε για γειτονιά, αναφερόμαστε στο επίπεδο εξόδου – επίπεδο Kohonen. Τη γειτονιά θα πρέπει να την ορίσουμε στο μοντέλο. Ουσιαστικά, θέλουμε να ορίσουμε ποιοι νευρώνες θεωρούνται γείτονες ενός συγκεκριμένου νευρώνα. Ένας από τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να οριστεί η γειτονιά, είναι το σχήμα το οποίο

<sup>2</sup><https://www.oreilly.com/library/view/neural-networks-with/9781788397872/24ba0001-ddea-493f-96b8-aa9be7c921d3.xhtml>

θα δώσουμε στον κάθε νευρώνα στην αναπαράσταση του στο επίπεδο Kohonen. Συνηθισμένες μορφές αναπαράστασης για ένα νευρώνα εξόδου είναι το τετράγωνο και το εξάγωνο. Έτσι λοιπόν, στο Σχήμα (4α') έχουμε ένα χώρο εξόδου 2 διαστάσεων (επίπεδο Kohonen  $7 \times 9$ ) όπου ο κάθε νευρώνας εξόδου είναι τετράγωνος, και η γειτονιά ενός νευρώνα αποτελείται από τους 4 (τετραγωνικούς) νευρώνες που έχουν κοινή ακμή με το νευρώνα του οποίου τη γειτονιά θέλουμε να προσδιορίσουμε. Στην περίπτωση που ο νευρώνας εξόδου είναι εξάγωνο, τότε όπως βλέπουμε και στο Σχήμα (4β'), η ζητούμενη γειτονιά αποτελείται από τους 6 (εξαγωνικούς) νευρώνες που έχουν κοινή ακμή με τον κεντρικό νευρώνα. Όπως καταλαβαίνουμε, η γειτονιά ενός νευρώνα θα μπορούσε να οριστεί με κάποιον άλλο διαφορετικό τρόπο. Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε μορφή γειτονιάς μπορεί κανείς να φανταστεί. Το πιο απλό και σύνηθες είναι ο νευρώνας του χώρου εξόδου να είναι εξαγωνικός και επομένως να έχει για γείτονες του τους 6 διπλανούς του νευρώνες, ορίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο τη γειτονιά. Όπως αναφέρθηκε, η έννοια της γειτονιάς στο SOM λαμβάνεται υπόψιν κατά την αυτό-οργάνωσή του, δηλαδή συμμετέχει ενεργά στον αλγόριθμο μάθησης του δικτύου. Το πώς συμβαίνει αυτό θα το δούμε στην παράγραφο 2.4.3.

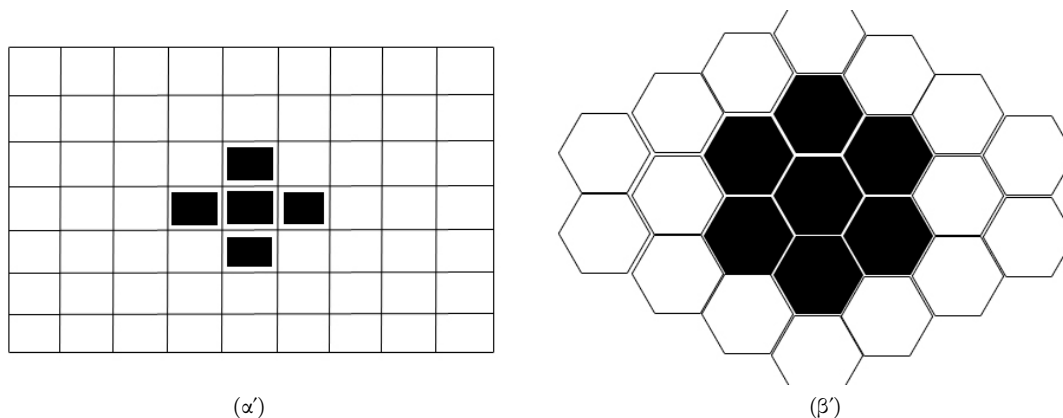


Σχήμα 3: Μονοδιάστατος χώρος εξόδου SOM

Πριν αφήσουμε αυτήν την παράγραφο και τα όσα αναφέραμε σε ό,τι αφορά το μοντέλο του SOM, να αναφέρουμε ότι υπάρχουν κάποια θέματα για τα οποία θα πρέπει να πάρουμε μία απόφαση κατά τη δημιουργία του μοντέλου. Προκύπτουν κάποια ερωτήματα, τα οποία θα αναφερθούν, χωρίς να δωθούν απαντήσεις σε αυτό το σημείο.

- Ένα εύλογο ερώτημα, είναι το πόσες διαστάσεις πρέπει να έχει ο χώρος εξόδου. Έχουμε να επιλέξουμε ανάμεσα σε μία διάσταση, δύο διαστάσεις, τρεις και γενικά  $n$  διαστάσεις. Ποια από όλες να επιλέξουμε; Έχει σημασία αυτή η επιλογή; Αν επιλεγεί μία διάσταση, τότε έχουμε να κάνουμε με μία 'κλωστή', δηλαδή οι νευρώνες του χώρου εξόδου θα είναι στη σειρά, ο ένας μετά τον άλλο στη μία και μοναδική διάσταση που διαθέτει ο χώρος αυτός, όπως φέρεται στο Σχήμα (3). Αν για παράδειγμα επιλέξουμε ένα χώρο εξόδου δύο διαστάσεων, τότε η εικόνα που θα έχει ο χώρος είναι όπως φέρεται στο Σχήμα<sup>3</sup> (4α'), όπου σε αυτή τη περίπτωση κάνουμε λόγο για ένα επίπεδο Kohonen  $9 \times 7$ . Για τον τρισδιάστατο χώρο εξόδου, διατηρούμε ακόμη την ικανότητα να φανταστούμε τη μορφή που θα έχει αυτός ο χώρος, ωστόσο από τις 4 διαστάσεις και έπειτα είναι αδύνατον για τον ανθρώπινο νου να σχηματίσει μια εικόνα.
- Άλλο ερώτημα που τίθεται σε ό,τι αφορά το βασικό μοντέλο του SOM, είναι το πόσους νευρώνες να επιλέξουμε να συνθέσουν το χώρο εξόδου; Σε ό,τι αφορά το χώρο εισόδου, το πλήθος των νευρώνων θα ισούται με το πλήθος των μεταβλητών-γνωρισμάτων των αρχικών δεδομένων, και επομένως δεν τίθεται κάποιο ερώτημα. Όμως, για το χώρο εξόδου πρέπει να παρθεί μια απόφαση, σε ό,τι αφορά το συνολικό αριθμό των νευρώνων που πρέπει να τοποθετηθούν. Εξαρτάται η επιλογή του αριθμού των νευρώνων του χώρου εξόδου, από το πλήθος των δεδομένων εισόδου ή των γνωρισμάτων των δεδομένων του χώρου εισόδου;
- Στη συνέχεια, ένα επόμενο ερώτημα που έρχεται κατά σειρά, είναι σε τί διάταξη να τοποθετηθεί το πλήθος των νευρώνων του χώρου εξόδου; Δηλαδή, εφόσον για παράδειγμα επιλέξουμε ένα διδιάστατο επίπεδο Kohonen με 20 νευρώνες, τότε σε τι διάταξη να τους τοποθετήσουμε; Έχουμε να επιλέξουμε ανάμεσα στις διατάξεις  $1 \times 20$ ,  $20 \times 1$ ,  $2 \times 10$ ,  $10 \times 2$ ,  $4 \times 5$ ,  $5 \times 4$ . Έχει κάποια σημασία ποια θα διαλέξουμε;

<sup>3</sup><https://www.oreilly.com/library/view/neural-networks-with/9781788397872/24ba0001-ddea-493f-96b8-aa9be7c921d3.xhtml>



Σχήμα 4: Δισδιάστατος χώρος εξόδου SOM με (α') τετράγωνους και (β') εξαγώνους νευρώνες αντίστοιχα

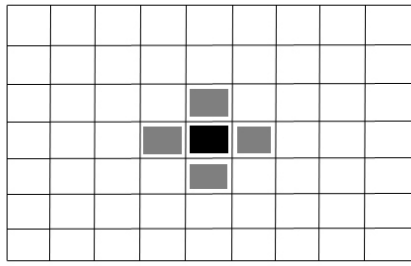
- Τι σχήμα να δώσουμε στο χάρτη; Δηλαδή, ποια επιλογή θα κάνουμε σε ό,τι αφορά τη μορφή της γειτονιάς του κάθε νευρώνα στο χάρτη; (Εξαγώνιο πλέγμα; Τετράγωνο; Κάποιο άλλο;)
- Ποια τιμή να δώσουμε αρχικά στο διάνυσμα  $\vec{w}_i$  (Σχέση (2)). Δηλαδή, με ποιόν τρόπο να αρχικοποιήσουμε το διάνυσμα βαρών των νευρώνων εξόδου;

Σε όλους τους παραπάνω προβληματισμούς σε ό,τι αφορά επιλογές του μοντέλου, πρέπει να προσθέσουμε στον κάθε έναν και το ερώτημα εάν και κατά πόσο επηρεάζει η εκάστοτε επιλογή τα δεδομένα που θα δώσει το μοντέλο του SOM μόλις ολοκληρώσει την αυτό-οργάνωσή του.

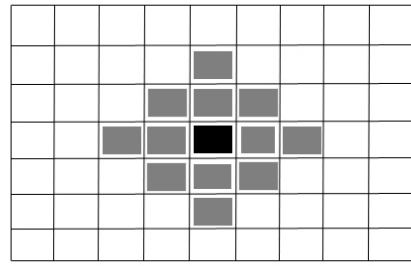
#### 2.4.2 Συνάρτηση γειτνίασης

Η συνάρτηση γειτνίασης είναι μία συνάρτηση, η οποία στην περίπτωση του αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen εξυπηρετεί ένα σκοπό, αυτόν της αυτό-οργάνωσής του. Για ένα SOM οι συναρτήσεις γειτνίασης δεν είναι τίποτα άλλο παρά 'έξυπνα' εργαλεία τα οποία χρησιμοποιούν την πληροφορία της γειτονιάς του χάρτη και με βάση αυτή δίνουν μία τιμή. Στη συνέχεια, η τιμή αυτή χρησιμοποιείται από το χάρτη για να αυτο-οργανωθεί (μέσω του αλγορίθμου μάθησης, όπως θα δούμε στην παράγραφο που ακολουθεί).

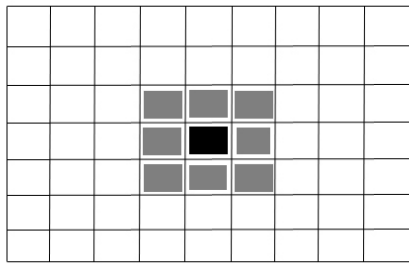
Θα παρουσιαστούν δύο συγκεκριμένες και συνηθισμένες περιπτώσεις συναρτήσεων γειτνίασης. Αυτές είναι η λεγόμενη bubble function και η συνάρτηση Gauss. Θα δούμε κάποιες λεπτομέρειες στην περίπτωση τους, έτσι ώστε να φανερωθεί ο τρόπος με τον οποίο η έννοια της γειτονιάς του χάρτη Kohonen, υπεισέρχεται στη συνάρτηση γειτνίασης και επηρεάζει την τιμή που κάθε φορά εκείνη δίνει. Θεωρούμε πως ο χάρτης του δικτύου θα είναι στις δύο διαστάσεις, πράγμα το οποίο συνήθως συμβαίνει όταν χρησιμοποιούμε ένα SOM. Κάτι επίσης συνηθισμένο, είναι το πλέγμα του χάρτη να είναι εξαγωνικό ή και τετραγωνικό (λιγότερο συνηθισμένο ωστόσο). Σε αυτήν την περίπτωση, η γειτονιά του χάρτη θα μπορούσε να είναι κάποια από αυτές που φαίνονται στο Σχήμα (5). Σε αυτό το σχήμα, βλέπουμε πως διευρύνεται σε κάποιες περιπτώσεις η έννοια της γειτονιάς και γίνεται λόγος για 'ακτίνα γειτονιάς'. Η ακτίνα γειτονιάς καθορίζει ουσιαστικά μέχρι ποιο σημείο – ποιο νευρώνα θα εκτείνεται το μοτίβο της γειτονιάς στο χάρτη.



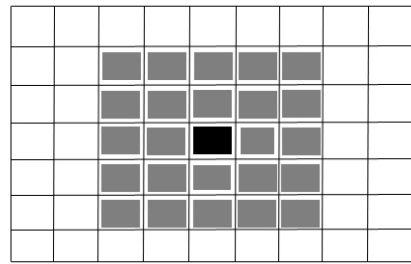
(α') τετράγωνο πλέγμα, ακτίνα γειτονιάς 1



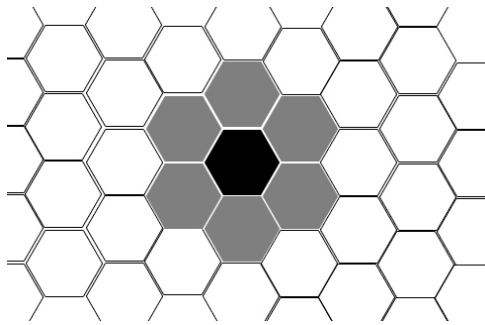
(β') τετράγωνο πλέγμα, ακτίνα γειτονιάς 2



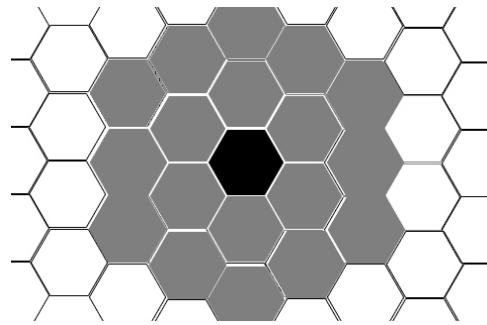
(γ') τετράγωνο πλέγμα, ακτίνα γειτονιάς 1



(δ') τετράγωνο πλέγμα, ακτίνα γειτονιάς 2

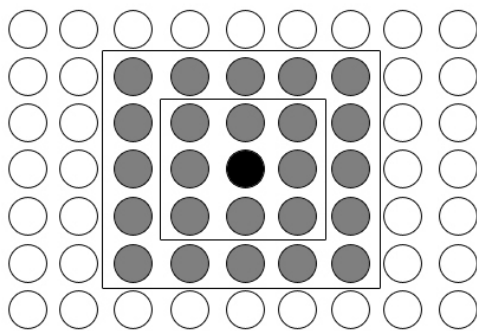


(ε') εξάγωνο πλέγμα, ακτίνα γειτονιάς 1

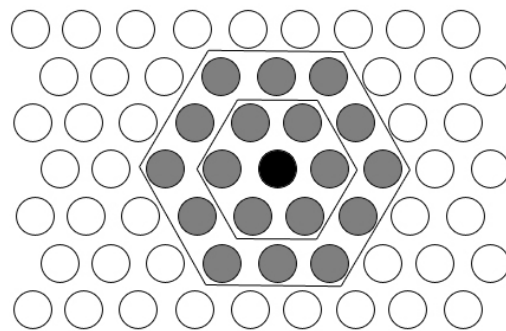


(ς') εξάγωνο πλέγμα, ακτίνα γειτονιάς 2

Σχήμα 5: Περιπτώσεις χαρτών επιπέδου Kohonen.



(α')



(β')

Σχήμα 6: Ακτίνα γειτονιάς 1 και 2 σε διδιάστατο χώρο εξόδου με (α') τετράγωνο και (β') εξάγωνο πλέγμα αντίστοιχα

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθεί για πρώτη φορά ο όρος ‘νικητής νευρώνας’, ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί στην παράγραφο 2.4.3 για την περιγραφή του αλγορίθμου μάθησης του δικτύου SOM. Ουσιαστικά, ο νικητής νευρώνας είναι ένας νευρώνας στο χώρο εξόδου του οποίου το διάνυσμα βαρών απέχει τη μικρότερη απόσταση από ένα συγκεκριμένο διάνυσμα εισόδου, σε σχέση με τους υπόλοιπους νευρώνες του επιπέδου εξόδου. Η συνάρτηση γειτνίασης, είναι γενικά μία μη-αύξουσα συνάρτηση που εξαρτάται από την επανάληψη  $t$  και την απόσταση ενός νευρώνα  $i$  από το νικητή νευρώνα  $c$ . Η bubble function (συνάρτηση φυσαλίδας), είναι η πιο απλή μορφή από τις γνωστότερες συναρτήσεις γειτνίασης που χρησιμοποιούνται. Η συνάρτηση αυτή, επιστρέφει μία σταθερή – μη μηδενική – τιμή για κάθε νευρώνα  $i$  που βρίσκεται μέσα στη γειτονιά του νικητή νευρώνα  $c$  και μηδέν για κάθε άλλο νευρώνα που βρίσκεται εκτός της γειτονιάς του νευρώνα  $c$ . Για παράδειγμα, κοιτάζοντας στο Σχήμα (5) τα υποσχήματα που αυτό περιέχει, ο μαθηματικός ορισμός της bubble function είναι ο ακόλουθος:

Αν  $c$  είναι ο νικητής νευρώνας σε μία επανάληψη  $t$  του αλγορίθμου και  $i$  ένας νευρώνας του χάρτη, τότε η συνάρτηση γειτνίασης  $h_{ci}(t)$  στην επανάληψη  $t$  ορίζεται από τον τύπο

$$h_{ci}(t) = \begin{cases} b(t) & \text{άν } i \in N_c(t) \\ 0 & \text{άν } i \notin N_c(t) \end{cases} \quad (3)$$

όπου  $N_c(t)$  είναι το σύνολο όλων των νευρώνων που είναι γείτονες του νικητή νευρώνα  $c$  κατά την επανάληψη  $t$  και  $b(t)$  είναι μία σταθερά κατά την επανάληψη  $t$ .

Στην περίπτωση που έχουμε στο Σχήμα (5α') και θεωρώντας πως διαδοχικοί νευρώνες στο χάρτη απέχουν απόσταση 1, τότε η Σχέση (3) μπορεί να ξαναγραφεί ισοδύναμα στη Σχέση (4). Είναι όμως βολικό να αλλάξουμε σε αυτήν την περίπτωση ο συμβολισμός, έτσι ώστε να εισέλθουν στην εξίσωση και οι δείκτες των θέσεων των νευρώνων στο πλέγμα του χάρτη Kohonen και οι οποίοι θα χρησιμεύουν για να ορίσουν τη συνθήκη αλλαγής τύπου της εξίσωσης. Αν λοιπόν, έχουμε δύο νευρώνες, τους  $q_{nm}$  και  $q_{ij}$  του Σχήματος (5α'), όπου οι δείκτες  $(n, m)$  και  $(i, j)$  είναι οι δείκτες θέσης των νευρώνων στο διδιάστατο πλέγμα του χάρτη Kohonen, τότε η συνάρτηση γειτνίασης μπορεί να γίνει:

$$h_{(q_{nm}, q_{ij}, t)} = \begin{cases} b(t) & \text{άν } \sqrt{(n-i)^2 + (m-j)^2} \leq 1 \\ 0 & \text{άν } \sqrt{(n-i)^2 + (m-j)^2} > 1 \end{cases} \quad (4)$$

Στην παραπάνω ανισότητα, αξίζει να δοθεί προσοχή στο ότι η τιμή 1 του δεξιού σκέλους προήλθε από τη μορφή της γειτονιάς στη συγκεκριμένη περίπτωση (συγκεκριμένα, η ακτίνα της γειτονιάς είναι ίση με 1). Ανάλογο σκεπτικό μπορεί να εφαρμοστεί και στις υπόλοιπες περιπτώσεις που δείχνει το Σχήμα (5). Δηλαδή, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η μορφή της γειτονιάς ενός νευρώνα μαζί με την ακτίνα αυτής και στη συνέχεια να υπολογιστεί ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται σε ό,τι αφορά τους δείκτες των νευρώνων. Με αυτόν τον τρόπο θα προκύψει η συνθήκη με βάση την οποία αλλάζει τύπο η εξίσωσή. Για παράδειγμα, η συνάρτηση γειτνίασης bubble function για το Σχήμα (5β'), είναι η ακόλουθη:

$$h_{(q_{nm}, q_{ij}, t)} = \begin{cases} b(t) & \text{άν } \sqrt{(n-i)^2 + (m-j)^2} \leq 2 \\ 0 & \text{άν } \sqrt{(n-i)^2 + (m-j)^2} > 2 \end{cases} \quad (5)$$

Δηλαδή, γενικά για χάρτες παρόμοιας μορφολογίας με αυτήν των χαρτών που φαίνονται στο Σχήμα (5α') και στο Σχήμα (5β'), η γενική μορφή της εξίσωσης γειτνίασης μπορεί να γραφεί σε σχέση με την ακτίνα  $r$  της γειτονιάς ως:

$$h_{(q_{nm}, q_{ij}, r, t)} = \begin{cases} b(t) & \text{άν } \sqrt{(n-i)^2 + (m-j)^2} \leq r \\ 0 & \text{άν } \sqrt{(n-i)^2 + (m-j)^2} > r \end{cases} \quad (6)$$

Κοιτάζοντας τώρα το Σχήμα (5γ'), με πολύ απλό συλλογισμό μπορούμε να δούμε πως η συνάρτηση γειτνίασης είναι η:

$$h_{(q_{nm}, q_{ij}, t)} = \begin{cases} b(t) & \text{άν } |n-i| \leq 1 \text{ και } |m-j| \leq 1 \\ 0 & \text{άν } |n-i| > 1 \text{ ή } |m-j| > 1 \end{cases} \quad (7)$$

Σε αντίθεση με τη συνάρτηση φυσαλίδας που σε κάθε επανάληψη είναι σταθερή (ίση με  $b(t)$ ) σε όλη την έκταση της γειτονιάς ενός νευρώνα (του νικητή νευρώνα), η συνάρτηση Gauss σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου είναι φθίνουσα. Στη βιβλιογραφία θα βρούμε την έκφραση της συνάρτησης Gauss σε διάφορες παραλλαγές. Η παραλλαγή που θα χρησιμοποιηθεί εδώ είναι εκείνη της οποίας η έκφρασή είναι λίγο πιο συγκεκριμένη. Δηλαδή, αν  $q_{nm}$  και  $q_{ij}$  δύο νευρώνες του χάρτη Kohonen, όπου οι δείκτες  $(n, m)$  και  $(i, j)$  είναι, όπως και παραπάνω, οι δείκτες θέσης των νευρώνων στο διδιάστατο πλέγμα του χάρτη Kohonen και

αν  $r$  είναι η ακτίνα της γειτονιάς του νευρώνα  $q_{nm}$  (νικητή νευρώνα) κατά την επανάληψη  $t$  του αλγορίθμου, τότε η συνάρτηση γειτνίασης Gauss για το νικητή νευρώνα  $q_{nm}$  είναι:

$$h(q_{nm}, q_{ij}, r, t) = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{(n-i)^2 + (m-j)^2}}{r} \right)^2} \quad (8)$$

Στην παραπάνω Σχέση (8) ο αριθμητής του κλάσματος δεν είναι άλλος από την απόσταση των δύο νευρώνων στο επίπεδο Kohonen, θεωρώντας και πάλι όπως και πριν πως κάθε νευρώνας απέχει από το διπλανό του νευρώνα είτε της ίδιας γραμμής είτε της ίδιας στήλης απόσταση 1. Φαίνεται επομένως, στην εξίσωση αυτή, με ποιόν τρόπο η συνάρτηση γειτνίασης λαμβάνει υπόψιν της τη γειτονιά του χάρτη και συναρτήση αυτής δίνει μία τιμή. Συγκεκριμένα φέρεται πως, όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση των νευρώνων, τόσο μικρότερη θα είναι η τιμή που θα πάρουμε από αυτήν (και αντιστρόφως). Επίσης είναι καθαρό πως όσο ελαττώνεται η ακτίνα της γειτονιάς τόσο ελαττώνεται και η τιμή που δίνει. Μία παρατήρησή μου αξίζει σε αυτό το σημείο να αναφερθεί. Φέρεται λοιπόν πως ναι μεν και οι δύο παραπάνω συναρτήσεις γειτνίασης λαμβάνουν υπόψιν τους την γειτονιά γύρω από έναν νευρώνα ώστε να αποδώσουν τιμή, ωστόσο το κάνουν με αξιοσημείωτα διαφορετικό τρόπο. Στην περίπτωση που η συνάρτηση γειτνίασης είναι η συνάρτηση φυσαλίδας, αν κανείς παρατηρήσει, θα δει πως πρόκειται για μία συνάρτηση που πάντοτε αλλάζει τύπο. Αυτό που κάνει, είναι να αποδίδει πάντοτε την τιμή 0 στην περίπτωση που ένας νευρώνας δεν ανήκει στην γειτονιά του νικητή νευρώνα. Αυτό σημαίνει, ότι αν ένα νευρώνας δεν ανήκει στην γειτονιά του νικητή νευρώνα, τότε το διάνυσμα των βαρών του – δηλαδή η θέση του στο χώρο εισόδου – δεν θα τροποποιηθεί. Δεν θα συμμετέχει δηλαδή στο δεδομένο βήμα  $t$  στην διαδικασία του να ‘μοιάσει’ περισσότερο με το δεδομένο εισόδου. Αντιθέτως, αυτό δεν συμβαίνει στην περίπτωση που έχουμε σαν συνάρτηση γειτνίασης την Γκαουσιανή συνάρτηση. Η Γκαουσιανή συνάρτηση, όπως φαίνεται από τον τύπο της (Σχέση 8), είναι μία συνάρτηση χωρίς ρίζες. Αυτό σημαίνει πως ακόμα και όταν ένα σημείο δεν ανήκει στην γειτονιά του νικητή νευρώνα, η συνάρτηση παρόλα αυτά θα δώσει τιμή διάφορη του μηδενός, οπότε και ο νευρώνας εκείνος θα ενημερώσει τη θέση του στο χώρο εισόδου στο δεδομένο βήμα  $t$ . Λίγο πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να δούμε πως όσο πιο μακριά από το νικητή νευρώνα βρίσκεται ένας νευρώνας του χώρου εξόδου, τόσο πιο μικρή τιμή θα δίνει η Γκαουσιανή. Αυτή η τιμή όμως πάντοτε θα είναι μη μηδενική, επιτρέποντας με αυτό τον τρόπο να ενημερωθεί το διάνυσμα βαρών του δεύτερου νευρώνα, είτε αυτός ανήκει είτε δεν ανήκει στην γειτονιά του νικητή νευρώνα.

### 2.4.3 Βασικός αλγόριθμος - batch αλγόριθμος

Θα περιγράψουμε σε αυτό το σημείο τον αλγόριθμο του αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen. Γνωρίζοντας πλέον το σκοπό του SOM (υποκεφάλαιο 2.3) και τους βασικούς ορισμούς του ίδιου του μοντέλου, ο αλγόριθμος που θα περιγράψουμε έρχεται σαν απόρροια αυτών. Μία αρχική περιγραφή του πώς αυτό-οργανώνεται ο χάρτης ακολουθεί.

Το πρώτο πράγμα μου συμβαίνει, είναι ο προσδιορισμός του αριθμού των νευρώνων εξόδου και αμέσως μετά η αρχικοποίηση του διανύσματος των βαρών για κάθε έναν νευρώνα. Έχουμε πει, πως αν είναι  $m$  η διάσταση του χώρου εισόδου, τότε αφού ο κάθε νευρώνας του χώρου εξόδου  $i$  συνδέεται μέσω μίας σύναψης με κάθε έναν από τους νευρώνες του χώρου εισόδου, τα συνοπτικά βάρη θα είναι  $m$  το πλήθος για τον κάθε νευρώνα εξόδου. Δηλαδή, το διάνυσμα των βαρών  $\vec{w}_i$  θα είναι διάστασης  $m$ . Οπότε, δίνοντας τιμή στο διάνυσμα  $\vec{w}_i$ , αυτό που κάνουμε στην πραγματικότητα είναι να ορίσουμε τις αρχικές θέσεις του κάθε νευρώνα εξόδου στο χώρο εισόδου (διάστασης  $m$ ).

Στη συνέχεια, επιλέγουμε ένα από τα δεδομένα μας. Με αυτόν τον τρόπο, οι  $m$  νευρώνες του χώρου εισόδου αντιστοιχίζονται στο αντίστοιχο χαρακτηριστικό του διανύσματος του δεδομένου που επιλέξαμε. Έτσι λοιπόν οι νευρώνες του χώρου εισόδου αποκτούν μία τιμή.

Για το δεδομένο που επιλέξαμε, οι νευρώνες του επιπέδου εξόδου, θα ανταγωνιστούν μεταξύ τους ώστε να κερδίσει εκείνος ο νευρώνας που βρίσκεται πιο κοντά στο διάνυσμα του δεδομένου εισόδου που επιλέξαμε. Η θέση στο χώρο εισόδου του κάθε νευρώνα του χώρου εξόδου, είπαμε πως δίνεται από το διάνυσμα των βαρών του. Επομένως, μέσω ενός μέτρου απόστασης, υπολογίζεται η απόσταση κάθε νευρώνα του χώρου εξόδου από το δεδομένο του χώρου εισόδου που επιλέξαμε. Ο νευρώνας εξόδου με τη μικρότερη από τις παραπάνω αποστάσεις θα ανακηρυχθεί ως νικητής νευρώνας. Στον αλγόριθμό που παρουσιάζεται, το μέτρο εκείνο με το οποίο θα μετρηθούν οι αποστάσεις είναι η πολύ γνωστή και απλή Ευκλείδεια απόσταση. Το επόμενο βήμα, είναι να συνεργαστούν οι νευρώνες του χώρου εξόδου. Δηλαδή, θα πρέπει να υπολογιστεί και να προσδιοριστεί η γειτονιά του νευρώνα νικητή. Το πιο απλό που μπορεί να γίνει, είναι να οριστεί εξαρχής η γειτονιά για κάθε νευρώνα χωρίς να αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Θα να είναι λοιπόν γνωστή και σταθερή. Στον αλγόριθμό που παρουσιάζεται θεωρούμε πως οι νευρώνες του χώρου εξόδου είναι εξαγωνικοί και επομένως κάθε ένας γειτονεύει με άλλους 6 νευρώνες.

Αμέσως μετά, οι νευρώνες προσαρμόζονται στο δεδομένο εισόδου. Αυτό σημαίνει πως ο νικητής νευρώνας και η γειτονιά του, έρχονται πιο κοντά στο διάνυσμα του δεδομένου εισόδου σε ό,τι αφορά την απόστασή τους. Με αυτόν τον τρόπο ο χάρτης προσπαθεί να ‘μοιάσει’ περισσότερο στα δεδομένα – αυτο-οργάνωνεται. Το πόσο πιο κοντά έρχεται, καθορίζεται από την τιμή μίας παράμετρου (έστω  $\alpha(t)$ ). Η τιμή αυτής της παραμέτρου μπορεί, είτε να παραμένει σταθερή είτε να αλλάζει κατά την εξέλιξη της αυτο-οργάνωσης του χάρτη Kohonen. Το πιο απλό είναι να δώσουμε μία σταθερή τιμή σε αυτήν την παράμετρο (παραμέτρος – ρυθμός μάθησης).

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι ο κλασικός αλγόριθμος, γνωστός και σαν sequential ή online αλγόριθμος. Μετά από την παραπάνω περιγραφή του αλγορίθμου, ακολουθεί η διατύπωσή του σε μια μορφή που ταιριάζει περισσότερο σε έναν αλγόριθμο:

1. Καθόρισε τη διάσταση και το πλήθος των νευρώνων του χώρου εξόδου. Για κάθε νευρώνα  $i, i \in N_{out}$  του χώρου εξόδου ( $N_{out}$ ), αρχικοποίησε το διάνυσμα βαρών του  $\vec{w}_i(0)$ . Όρισε τη συνάρτηση γειτονιάς  $h(t)$  των νευρώνων του χάρτη Kohonen καθώς επίσης και τη συνάρτηση του ρυθμού μάθησης  $\alpha(t)$ . Τέλος όρισε ένα κατώφλι  $T$  το οποίο να ορίζει σε ποια επανάληψη σταματά ο αλγόριθμός και θέσε το μετρητή επανάληψης  $t = 1$ .
2. Από τα δεδομένα εισόδου ( $N_{in}$ ), πάρε ένα συγκεκριμένο δεδομένο  $\vec{x} \in N_{in}$ . Δηλαδή, κάθε νευρώνας του χώρου εισόδου θα πάρει σαν τιμή την τιμή της συνιστώσας του δεδομένου εισόδου στην οποία αντιστοιχεί.
3. Για κάθε νευρώνα  $i, i \in N_{out}$  του επιπέδου εξόδου, υπολόγισε την ευκλείδεια απόσταση του νευρώνα αυτού από το δεδομένο εισόδου που επιλέχθηκε στο βήμα 2.
4. Σύγκρινε όλες τις αποστάσεις του βήματος 3 μεταξύ τους. Η μικρότερη απόσταση, θα καθορίσει και το νικητή νευρώνα (Best Matching Unit - BMU). Δηλαδή, υπολόγισε το

$$c(t) = \arg \min_i ||\vec{x}(t) - \vec{w}_i(t)||$$

5. Ανανέωσε τα βάρη κάθε νευρώνα  $i, i \in N_{out}$  του επιπέδου εξόδου με βάση την εξίσωση:

$$\vec{w}_i(t+1) = \vec{w}_i(t) + \alpha(t)h_{ci}(t)(\vec{x}(t) - \vec{w}_i(t)) \quad (9)$$

όπου  $\alpha(t)$  είναι ο ρυθμός μάθησης στην επανάληψη  $t$  του αλγορίθμου και  $h_{ci}(t)$  είναι η τιμή της συνάρτησης γειτνίασης του νικητή νευρώνα  $c$  για το νευρώνα  $i$ . Η τιμή δηλαδή  $h_{ci}(t)$ , καθορίζει το πόσο συμμετέχει στη μάθηση ο νευρώνας  $i$  του χώρου εξόδου κατά την επανάληψη  $t$  του αλγορίθμου.

6. Θέσε  $t = t + 1$
7. Επέστρεψε στο βήμα 2, εάν κάποιος από τα διανύσματα των βαρών  $\vec{w}_i, i \in N_{out}$  των νευρώνων εξόδου  $N_{out}$  έχει μεταβληθεί πάνω από ένα ποσοστό που έχουμε ορίσει ή ο αριθμός της επανάληψης  $t$  είναι μικρότερος από την τιμή του κατωφλίου  $T$  που έχει οριστεί στο βήμα 1.
8. Τερμάτισε τον αλγόριθμο.

Στην πράξη και σε πραγματικές εφαρμογές, η παράμετρος μάθησης και η γειτονιά του χάρτη μεταβάλλονται σε κάθε επανάληψη  $t$  του παραπάνω αλγορίθμου.

Από την περιγραφή του παραπάνω αλγορίθμου, μπορεί κανείς να παρατηρήσει πως η εκπαίδευση δείχνει να εξαρτάται από τη σειρά των δεδομένων μας. Με το που επιλέγουμε ένα δεδομένο, αμέσως μετά τροποποιούμε τα βάρη του δικτύου. Έτσι, το επόμενο δεδομένο εισόδου θα βρει ένα διαφορετικό χάρτη πλέον να αναζητήσει το BMU του. Εάν ωστόσο πριν από το δεύτερο αυτό δεδομένο είχε έρθει ένα διαφορετικό από το πρώτο δεδομένο εισόδου, τότε εκείνο θα είχε τροποποιήσει με διαφορετικό τρόπο το δίκτυο και οπότε η εξέλιξη της εκπαίδευσης θα ήταν στη συνέχεια διαφορετική. Ένα ακόμη στοιχείο που παρατηρείται, είναι πως οι υπολογισμοί αυτού του αλγορίθμου δείχνουν να είναι αρκετοί. Επομένως στην περίπτωση που τα δεδομένα εισόδου είναι πάρα πολλά, οι υπολογισμοί θα καθυστερούν σημαντικά την εκπαίδευση του δικτύου. Είναι αυτά τα δύο παραπάνω προβλήματα, τα οποία έρχεται να επιλύσει ο λεγόμενος batch algorithm. Υπάρχουν διάφορες παραλλαγές του βασικού αλγορίθμου εκπαίδευσης, με τον batch algorithm να είναι μία από αυτές τις παραλλαγές και ίσως η πιο σημαντική. Η βασική του διαφορά σε σχέση με το βασικό αλγόριθμο, είναι στο πότε αναπροσαρμόζονται τα βάρη των νευρώνων του χάρτη και με ποιόν τρόπο. Αυτό που συμβαίνει σε

αυτήν την περίπτωση, είναι πως πρώτα προσδιορίζονται τα BMUs για ένα πλήθος από τα δεδομένα εισόδου και ύστερα αναπροσαρμόζονται τα βάρη των νευρώνων εξόδου. Συνήθως το μέγεθος αυτού του πλήθους των δεδομένων εισόδου, είναι όλα τα δεδομένα εισόδου που διαθέτουμε ( $N_{in}$ ) και θα θεωρώ από εδώ και πέρα πως επιλέγουμε όλα τα δεδομένα εισόδου. Δηλαδή, αντί:

- να παίρνουμε ένα δεδομένο εισόδου,
- να προσδιορίζουμε το BMU αυτού,
- να αναπροσαρμόζουμε τα βάρη όλου του χάρτη αμέσως μετά τον προσδιορισμό του BMU, με βάση τον τύπο 9
- και μετά να επαναλαμβάνουμε – σειριακά – την παραπάνω διαδικασία με το επόμενο δεδομένο εισόδου,

αυτό που συμβαίνει τώρα, είναι:

- να πάρουμε όλα τα δεδομένα εισόδου,
- να προσδιορίσουμε το BMU όλων των δεδομένων εισόδου,
- και τότε μόνο να ενημερωθούν τα βάρη του χάρτη με βάση τη Σχέση (10)

Στη Σχέση (10), συμβολίζουμε με  $\vec{w}_i$  το διάνυσμα βάρους του νευρώνα εξόδου  $i$ , με  $h_{ci}$  τη συνάρτηση γειτνίασης με νικητή νευρώνα  $c$  τη χρονική στιγμή  $t$  για το νευρώνα εξόδου  $i$ . Ενώ, με  $t_0, t_f$  συμβολίζουμε τη στιγμή 0 που παίρνουμε το πρώτο δεδομένο εισόδου  $\vec{x}_t$  (και προσδιορίζουμε το BMU του) και τη στιγμή  $f$  που παίρνουμε το τελευταίο από τα δεδομένα αντίστοιχα. Συνηθίζουμε να αποκαλούμε με τον όρο 'εποχή', τη διαδικασία αυτή προσδιορισμού των BMU για όλα τα δεδομένα. Έτσι με άλλα λόγια με  $t_0$  συμβολίζουμε την αρχή της εποχής και με  $t_f$  το τέλος της εποχής.

$$\vec{w}_i(t_f) = \frac{\sum_{t=t_0}^{t=t_f} h_{ci}(t) \vec{x}(t)}{\sum_{t=t_0}^{t=t_f} h_{ci}(t)} \quad (10)$$

Παρατηρώντας την παραπάνω εξίσωση, βλέπουμε πως ουσιαστικά πρόκειται για έναν σταθμισμένο μέσο. Συγκεκριμένα, το διάνυσμα βάρους του unit  $i$  είναι ένας σταθμισμένος μέσος όλων των δεδομένων εισόδου (το άθροισμα του αριθμητή αναφέρεται σε μία εποχή – σε όλα τα δεδομένα εισόδου), με συντελεστές βαρύτητας τη συνάρτηση γειτνίασης. Παρατηρούμε επίσης, πως σε σχέση με τη Σχέση (9) του βασικού αλγόριθμου και τη μεταβλητή  $a(t)$ , τώρα δεν υπάρχει κάποιο είδος ρυθμού μάθησης.

Επανερχόμενοι στην λειτουργία του αλγορίθμου αυτού, είπαμε πως η αναπροσαρμογή των βαρών του χάρτη αναβάλλεται έως ότου χρησιμοποιηθούν όλα τα δεδομένα εισόδου. Πετυχαίνει με αυτό τον τρόπο να χρειάζεται πλέον λιγότερους υπολογισμούς για να εκπαιδεύσει το χάρτη, αλλά και να μην εξαρτάται από τη σειρά των δεδομένων εισόδου. Πράγματι, ο υπολογισμός των BMU για κάθε δεδομένο, δεν εξαρτάται πλέον από τη σειρά που θα επιλεγούν τα δεδομένα, μιας και τα βάρη των units παραμένουν αμετάβλητα μέχρι η διαδικασία να ολοκληρωθεί για όλα τα δεδομένα εισόδου. Οπότε, κάθε δεδομένο εισόδου που έχει σειρά, θα βρίσκει τον ίδιο χάρτη μπροστά του για να προσδιορίσει το BMU του, ανεξαρτήτως πιο δεδομένο είχε χρησιμοποιηθεί πριν από αυτό.

Είναι ο batch algorithm που χρησιμοποιείται στο λογισμικό των εφαρμογών του κεφαλαίου 5.

### 3 Μέτρα ποιότητας

Είδαμε μέχρι αυτό το σημείο, τα πιο βασικά στοιχεία που αφορούν τον αυτο-οργανούμενο χάρτη Kohonen, όπως κάποια εισαγωγικά στοιχεία, τους βασικούς ορισμούς, τον αλγόριθμο εκπαίδευσης και τις παραμέτρους του. Φτάνουμε τώρα στο σημείο που υποθέτουμε πως το δίκτυο έχει εκπαιδευτεί. Όπως φάνηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, υπάρχουν αρκετές παράμετροι στον αλγόριθμο εκπαίδευσης που πρέπει να οριστούν. Αυτό σημαίνει πως, δίνοντας διαφορετικές τιμές σε αυτές τις παραμέτρους θα παίρνουμε περισσότερο ή λιγότερο διαφορετικά μεταξύ τους εκπαιδευμένα δίκτυα. Θα θέλαμε λοιπόν, να γνωρίζαμε την ποιότητα αυτών των δικτύων. Για το σκοπό αυτό, δηλαδή για τη μέτρηση της ποιότητας του αλγόριθμου εκπαίδευσης, αλλά και κάποιες φορές για να μπορούμε να συγκρίνουμε το SOM με κάποιους άλλους αλγόριθμους της κατηγορίας του SOM, έχουν προταθεί διάφορα μέτρα ποιότητας. Τα δύο βασικότερα από αυτά είναι το σφάλμα κβαντοποίησης (quantization error) και το τοπογραφικό σφάλμα (topographic error). Θα αναφέρω στη συνέχεια κάποιες πληροφορίες για αυτά, μαζί με τους ορισμούς τους.

**Σφάλμα κβαντοποίησης.** Από την αναζήτηση που έγινε για το συγκεκριμένο μέτρο ποιότητας, φέρεται πως το σφάλμα κβαντοποίησης συνδέεται εννοιολογικά με μία σημαντική εφαρμογή του δικτύου Kohonen. Η συγκεκριμένη εφαρμογή, είναι η λεγόμενη κβαντοποίηση διανύσματος - vector quantization (Cetin & Gerek, 2006). Η κβαντοποίηση διανύσματος είναι μία τεχνική που πηγάζει από το χώρο της επεξεργασίας σήματος. Έχει να κάνει με τη μετατροπή ενός διανύσματος από ένα συνεχή χώρο σε ένα διακριτό χώρο. Λίγο πιο συγκεκριμένα, κατά την κβαντοποίηση διανύσματος έχουμε ένα σύνολο από δεδομένα εισόδου τα οποία προσεγγίζονται από μερικά μόνο βάρη (Sun, 2000). Με άλλα λόγια, έχουμε ένα σύνολο από διανύσματα κάποιας διάστασης  $n$  τα οποία μπορεί να είναι οποιαδήποτε μέσα από ένα συνεχή χώρο ίδιας διάστασης  $n$  και στη συνέχεια θέλουμε κάθε ένα από αυτά τα διανύσματα να αντιστοιχηθούν ταυτόχρονα σε κάποιο διάνυσμα ενός άλλου συνόλου που περιέχει μερικά μόνο (λιγότερα από το πρώτο σύνολο) διακεκριμένα διανύσματα διάστασης  $n$ . Διαβάζοντας κανείς για τη σχέση μεταξύ δικτύου SOM και της τεχνικής vector quantization (Ettaouil et al., 2012), σύντομα θα διαπιστώσει πως, εξ' ορισμού το εκπαιδευμένο δίκτυο αποτελεί τεχνική κβαντοποίησης διανύσματος. Στη συγκεκριμένη τεχνική είναι σημαντικό να μετρηθεί η απόκλιση μεταξύ των διακεκριμένων διανυσμάτων που προσεγγίζουν τα διανύσματα του συνεχούς χώρου και των αντίστοιχων αρχικών αυτών διανυσμάτων του συνεχούς χώρου. Ενδιαφέρει αυτή η μέτρηση, αφού αποτελεί ένα δείκτη του πόση πληροφορία χάνεται από αυτή την αντιστοίχιση. Μιλώντας πλέον στη γλώσσα του δικτύου Kohonen, μετά την εκπαίδευση του δικτύου, κάθε διάνυσμα εισόδου αντιστοιχίζεται σε εκείνον το νευρώνα εξόδου (BMU) που του μοιάζει περισσότερο (που απέχει λιγότερο από αυτόν). Ο μέσος όρος της απόστασης που απέχει κάθε διάνυσμα εισόδου από το νευρώνα εξόδου που έχει αντιστοιχισθεί, ορίζει το σφάλμα κβαντοποίησης. Το σφάλμα κβαντοποίησης είναι μέτρο διακριτικής ικανότητας. Όσο μικρότερη είναι αυτή η απόσταση, τόσο καλύτερος κβαντισμός θα έχει επιτευχθεί. Όπως καταλαβαίνουμε, όσο αυξάνεται ο αριθμός των νευρώνων του χάρτη, τόσο μικραίνει το σφάλμα κβαντοποίησης αφού έχουμε περισσότερους νευρώνες να κατανεμηθούν μεταξύ των δεδομένων εισόδου (Pözlbauer, 2004). Τέλος, από τη μέχρι τώρα περιγραφή αυτού του σφάλματος, παρατηρούμε πως δεν αναφέρθηκε πουθενά η τοπολογία του δικτύου. Και είναι πράγματι έτσι. Το σφάλμα κβαντοποίησης αγνοεί πλήρως την τοπολογία του δικτύου. Μεταφράζοντας την παραπάνω περιγραφή σε μαθηματικούς συμβολισμούς, προκύπτει ο ακόλουθος τύπος για το σφάλμα κβαντοποίησης (quantization error- $Q_e$ ):

$$Q_e = \frac{\sum_{i=1}^n ||\vec{x}_i - \vec{w}_c||}{n} \quad (11)$$

Όπου με  $n$  συμβολίζουμε το πλήθος των διανυσμάτων εισόδου,  $\vec{x}_i$  το διάνυσμα εισόδου  $i$  και με  $\vec{w}_c$  το διάνυσμα βάρους του νικητή νευρώνα  $c$  του εκπαιδευμένου δικτύου Kohonen για το διάνυσμα εισόδου  $i$ .

**Τοπογραφικό σφάλμα.** Στην περίπτωση αυτού του σφάλματος, τα πράγματα είναι πιο ξεκάθαρα. Η ονομασία αυτού του σφάλματος δεν συσχετίζει κάποια εφαρμογή – κάποιο άλλο ζήτημα – που να κάνει την περιγραφή του λίγο πιο σύνθετη. Όπως και το όνομα του περιγράφει, είναι σχετικό με την τοπολογία. Είναι ένα μέτρο διατήρησης της τοπολογίας των αρχικών δεδομένων. Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζεται είναι απλός. Μετά την ολοκλήρωση της εκπαίδευσης, για κάθε ένα από τα διανύσματα εισόδου υπολογίζονται ο νικητής νευρώνας (BMU) και ο δεύτερος νικητής νευρώνας (second-BMU). Δηλαδή, για κάθε διάνυσμα εισόδου, προσδιορίζονται ο νευρώνας που απέχει από αυτό τη μικρότερη απόσταση στο χώρο εισόδου και ο νευρώνας που απέχει τη δεύτερη μικρότερη απόσταση. Στη συνέχεια, για κάθε διάνυσμα εισόδου προσδιορίζονται οι θέσεις αυτών των νευρώνων που βρέθηκαν. Αν αυτοί οι δύο νευρώνες είναι γείτονες στο χάρτη,

τότε λέμε πως η τοπολογία διατηρήθηκε. Αν δεν είναι γείτονες, τότε έχουμε σφάλμα. Ο συνολικός αριθμός αυτών των σφαλμάτων, διαιρεμένος με το πλήθος όλων των διανυσμάτων εισόδου, δίνει το τοπογραφικό σφάλμα (topographic error -  $T_e$ ) (Breard, 2017). Η παραπάνω περιγραφή, μπορεί να αποτυπωθεί στην ακόλουθη μαθηματική σχέση:

$$Q_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t(\vec{x}_i) \quad (12)$$

$$t(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \mu(\vec{x}) \text{ και } \mu'(\vec{x}) \text{ είναι γείτονες.} \\ 1, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Όπου  $n$  είναι ο συνολικός αριθμός των δεδομένων εισόδου,  $\vec{x}_i$  είναι το διάνυσμα εισόδου  $i$  και τα  $\mu(\vec{x})$  και  $\mu'(\vec{x})$  επιστρέφουν το BMU και το second-BMU αντίστοιχα του διανύσματος  $\vec{x}$ .

## 4 Πεδία εφαρμογών

Ας περάσουμε να δούμε κάποιες εφαρμογές του δικτύου Kohonen. Έχει πολύ ενδιαφέρον να δούμε με ποιόν τρόπο κάποιοι ερευνητές-πρωτοπόροι έχουν χρησιμοποιήσει το SOM. Αν κανείς δοκιμάσει να αναζητήσει στο διαδίκτυο εφαρμογές αυτού του είδους δικτύων, θα διαπιστώσει αμέσως, πως πρόκειται για ένα επίκαιρο και ευρέως διαδεδομένο ‘εργαλείο’ που χρησιμοποιείται σε εφαρμογές. Οι εφαρμογές που το χρησιμοποιούν μοιάζει να είναι αμέτρητες. Ο Li (Li, J., 2005) αναφέρει πως, από την εποχή που πρώτο ανακαλύφθηκε το δίκτυο και μέχρι το έτος 2005, περισσότερα από 4000 ερευνητικά άρθρα έχουν δημοσιευθεί επάνω στον αλγόριθμο, στην οπτικοποίηση του δικτύου και επάνω σε εφαρμογές.

### 4.1 Εφαρμογές

#### Health Monitoring

Μία πρώτη εφαρμογή που κεντρίζει το ενδιαφέρον, έρχεται από ένα χώρο που ασχολείται με Anomaly Detection και Health Monitoring και εν προκειμένω σχετίζεται με τα αεροσκάφη. Η συγκεκριμένη δημοσίευση (Bellas et al., 2014) προτείνει μία γενική μέθοδο αναφορικά με το Anomaly Detection και επιλέγει να την εφαρμόσει σε κινητήρες αεροσκαφών (δεδομένα πτήσης). Προτείνει την εκπαίδευση ενός δικτύου Kohonen με δεδομένα από υγιείς κινητήρες αεροσκαφών. Η μέθοδος για την ανίχνευση ανωμαλίας (κινητήρα στη συγκεκριμένη περίπτωση), βασίζεται στην απόσταση νέων δεδομένων πτήσης ενός κινητήρα από τον εκπαιδευμένο χάρτη του δικτύου. Αν αυτή η απόσταση είναι ‘μικρή’, τότε το νέο δεδομένο χαρακτηρίζεται υγιές, ενώ αν είναι ‘μεγάλη’ χαρακτηρίζεται ως μη υγιές. Πιο συγκεκριμένα, επιλέγεται ένα πλήθος από παραμέτρους – μεταβλητές για ένα κινητήρα. Το πια θα είναι αυτές οι παράμετροι, είναι μία σημαντική εργασία την οποία πραγματοποιούν ειδικοί του χώρου. Γίνεται διάκριση μεταξύ δύο ειδών μετρήσεων σε ό,τι αφορά αυτές τις παραμέτρους. Μετρήσεις που έχουν να κάνουν με τον κινητήρα αυτό καθαυτό (ενδογενείς, όπως π.χ. ροή καυσίμου, θερμοκρασία καυσαερίων) και μετρήσεις που έχουν να κάνουν με το περιβάλλον του κινητήρα (εξωγενείς, όπως π.χ. υψόμετρο, ταχύτητα αεροσκάφους). Αυτό που ενδιαφέρει, ωστόσο, είναι οι ενδογενείς παράμετροι. Οι εξωγενείς παράμετροι, υπάρχουν για να δώσουν τη δυνατότητα στους ειδικούς να αφαιρέσουν την επιρροή εξωγενών παραγόντων στις μετρήσεις των ενδογενών παραμέτρων και να ερμηνευτούν σωστά. Στη συνέχεια, εκπαιδεύεται ένα SOM. Ένα δεδομένο εισόδου που θα εκπαιδεύσει αυτό το δίκτυο είναι το διάνυσμα με τις  $n$  στο πλήθος ενδογενείς παραμέτρους ενός κινητήρα αεροσκάφους, αποτελώντας έτσι τον  $n$ -διάστατο χώρο εισόδου του δικτύου. Το σύνολο αυτών των διανυσμάτων (που μπορούν να αφορούν είτε τον ίδιο κινητήρα, είτε διαφορετικούς) είναι τα δεδομένα εισόδου του δικτύου. Με την ολοκλήρωση της εκπαίδευσης, έχουμε ένα εκπαιδευμένο δίκτυο Kohonen με βάση διανύσματα υγιών κινητήρων. Από εκεί και έπειτα, ένα νέο δεδομένο εισόδου προβάλλεται στο χάρτη. Η απόσταση αυτού του δεδομένου από το χάρτη (από το BMU), είναι το στοιχείο που θα αξιολογηθεί, ώστε να χαρακτηριστεί το δεδομένο αυτό υγιές (ομαλό) ή μη υγιές (ανώμαλο). Οι συγγραφείς αυτού του άρθρου, εικάζουν πως νέα υγιή δεδομένα θα είναι όμοια με τα υγιή δεδομένα εκπαίδευσης και δεν αναμένεται να απέχουν πολύ από το εκπαιδευμένο δίκτυο Kohonen, ενώ δεδομένα τα οποία απέχουν πολύ από αυτό αποτελούν ανώμαλα δεδομένα. Για το σκοπό αυτό, ανέπτυξαν μία μέθοδο η οποία προσδιορίζει ένα λεγόμενο ‘διάστημα εμπιστοσύνης’. Αν η απόσταση του νέου δεδομένου εισόδου βρίσκεται εντός αυτού του διαστήματος, τότε το δεδομένο χαρακτηρίζεται ως υγιές (είναι όμοιο με τα υπόλοιπα δεδομένα), εάν είναι εκτός αυτού χαρακτηρίζεται ως μη υγιές (ανίχνευση ανωμαλίας). Η παρουσίαση των λεπτομερειών αυτού του κριτηρίου, αλλά και των υπολοίπων λεπτομερειών της εργασίας, ξεφεύγει από τους σκοπούς της πτυχιακής εργασίας.

#### Fraud detection

Μία επόμενη ενδιαφέρουσα εφαρμογή (Zaslavsky & Strizhak, 2006), έχει να κάνει με την ανίχνευση απάτης στις συναλλαγές μέσω χρεωστικών καρτών. Αυτό είναι ένα επίκαιρο ζήτημα, καθώς η χρήση των χρεωστικών καρτών ως μέσο πληρωμής είναι ευρέως διαδεδομένη και έχει αντικαταστήσει σε μεγάλο βαθμό τις συναλλαγές με χαρτονομίσματα. Η ανάγκη διασφάλισης των συναλλαγών μέσω του πλαστικού χρήματος, είναι πιο μεγάλη από ποτέ. Η δημοσίευση αυτή, έρχεται να προτείνει μία μέθοδο που χρησιμοποιεί το δίκτυο Kohonen για τον εντοπισμό υπόπτων για απάτη συναλλαγών με χρήση πιστωτικής/χρεωστικής κάρτας- δηλαδή, δηλαδή παράνομη χρήση χρεωστικής κάρτας από τρίτους. Η συγκεκριμένη μέθοδος χρησι-

μπορεί τα δεδομένα του ιστορικού των συναλλαγών μιας χρεωστικής κάρτας και με αυτά θα εκπαιδεύσει ένα δίκτυο SOM. Το εκπαιδευμένο αυτό δίκτυο, θα δώσει μία εικόνα στο διδιάστατο χώρο των ομάδων που δημιουργούν τα (πολυδιάστατα) δεδομένα των συναλλαγών εισόδου. Τώρα, εφόσον τα δεδομένα εισόδου είναι όλα νόμιμα, τότε το δίκτυο θα αποκαλύψει την εικόνα των νόμιμων συναλλαγών. Οπότε, αν πάρουμε μία νέα συναλλαγή και την απεικονίσουμε στον εκπαιδευμένο χάρτη, τότε είτε θα ανήκει σε κάποια από τις ομάδες των νόμιμων συναλλαγών που θα έχουν δημιουργηθεί, είτε θα βρίσκεται σε κάποιο άλλο (περιθωριοποιημένο) σημείο του χάρτη οπότε και θα θεωρηθεί ως ύποπτη προς απάτη συναλλαγή. Αν τώρα το σύνολο των δεδομένων που εκπαιδεύσαμε το δίκτυό μας περιέχει και συναλλαγές χαρακτηρισμένες ως ύποπτες προς απάτη, τότε αναμένουμε το εκπαιδευμένο δίκτυο να τις απεικονίσει σε μια ή περισσότερες ξεχωριστές ομάδες ύποπτων συναλλαγών στο χάρτη. Οπότε και πάλι μια νέα συναλλαγή, αφού προβληθεί στο χάρτη θα δείξει αν ανήκει σε κάποια από τις νόμιμες ομάδες, σε κάποια από τις ύποπτες προς απάτη ομάδες, ή αν ανήκει σε κάποιο περιθωριοποιημένο σημείο του χάρτη και θα χαρακτηριστεί αντίστοιχα. Το παραπάνω απλό σκεπτικό, βασίζεται στη λογική υπόθεση πως στο χώρο εισόδου το σύνολο των νόμιμων συναλλαγών και το σύνολο των συναλλαγών που αποτελούν απάτη, αποτελούν δύο αμοιβαίως αποκλειόμενα υποσύνολα. Επομένως, στο εκπαιδευμένο πλέον SOM λόγω και της διατήρησης της τοπολογίας που επιτυγχάνει, αναμένουμε οι νόμιμες συναλλαγές να δημιουργήσουν ξεχωριστές ομάδες στο διδιάστατο χώρο εξόδου από τις ύποπτες προς απάτη συναλλαγές. Η μοντελοποίηση του προβλήματος της δημοσίευσης ακολουθεί.

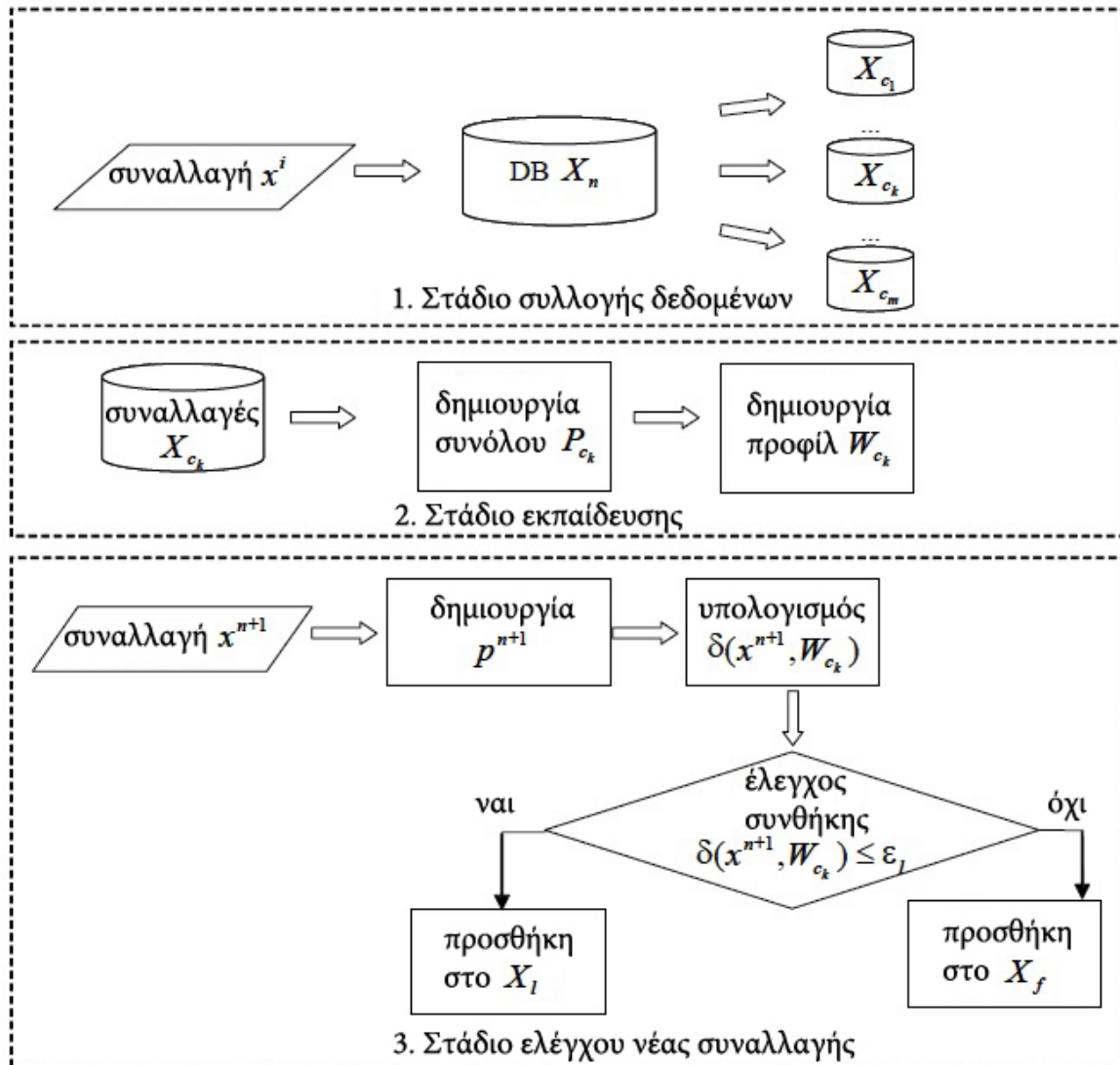
Οι τράπεζες διατηρούν βάσεις δεδομένων για όλες τις κάρτες τις οποίες οι πελάτες τους κατέχουν και χρησιμοποιούν. Για κάθε τέτοια κάρτα, διατηρούν ένα πλήθος από πληροφορίες, όπως τον αριθμό της κάρτας, τον αριθμό του λογαριασμού, το υπόλοιπο του λογαριασμού κ.α. Έτσι λοιπόν, θεωρούμε το σύνολο  $C_n = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k, \dots, \vec{c}_{k_n}\}$  ως το σύνολο των καρτών της βάσης δεδομένων, όπου  $\vec{c}_k = (c_1^k, c_2^k, \dots, c_s^k)$  είναι το διάνυσμα της  $k$  χρεωστικής κάρτας με το πλήθος των πληροφοριών της κάρτας που προανέφερα να αποτελούν τις  $s$  συνιστώσες του. Κάθε τέτοια κάρτα, όταν χρησιμοποιείται και πραγματοποιείται κάποια συναλλαγή στέλνει ένα είδος μηνύματος συναλλαγής σε κάποιο κέντρο συστήματος πληρωμής. Κάθε τέτοιο μήνυμα συναλλαγής έχει συγκεκριμένη μορφή και αποτελείται από κάποια προκαθορισμένα πεδία όπως, αριθμός κάρτας, ποσό συναλλαγής, ώρα και ημερομηνία κ.α. Έτσι το σύνολο  $X_n = (\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^i, \dots, \vec{x}^n)$  αποτελεί το σύνολο των συναλλαγών που έχουν πραγματοποιηθεί μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_n$ , όπου  $\vec{x}^i = (x_1^i, \dots, x_j^i, \dots, x_m^i)$  είναι το διάνυσμα της  $i$  συναλλαγής με συνιστώσες τα προκαθορισμένα πεδία που κάποια από αυτά προανέφερα μόλις. Καθώς τώρα ο χρόνος κυλά πέρα από τη χρονική στιγμή  $t_n$  και μέχρι την χρονική στιγμή  $t_{n+k}$ , συμβαίνουν κάποιες νέες συναλλαγές στο σύστημα πληρωμής. Αυτές τις νέες συναλλαγές με βάση τον παραπάνω συμβολισμό, θα τις συμβολίσουμε με  $\vec{x}^{n+1}, \dots, \vec{x}^{n+k}$ . Στόχος λοιπόν, είναι να χαρακτηρίσουμε με βάση το ιστορικό τους κάθε μία από αυτές τις νέες συναλλαγές είτε ως νόμιμες, είτε ως ύποπτες για απάτη. Αν θεωρήσουμε ότι οι παράμετροι  $c_1^k$  και  $x_1^i$  είναι ο αριθμός κάρτας του διανύσματος της χρεωστικής κάρτας  $\vec{c}^k$  και του διανύσματος συναλλαγής  $\vec{x}^i$ , τότε το σύνολο  $X_{c_k} = \{\vec{x}^i | x_1^i = c_1^k, \vec{x}^i \in X_n\}$  αποτελεί το σύνολο των συναλλαγών της κάρτας  $c_k \in C_n$  μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_n$ .

Έτσι, η λογική παραδοχή της παραπάνω εργασίας, γράφεται τυπικά ως:  $X_n^l \subseteq X_n, X_n^f \subseteq X_n, X_n^l \cap X_n^f = \emptyset, X_n^l \cup X_n^f = X_n$ , όπου  $X_n^l$  και  $X_n^f$  τα σύνολα των νόμιμων και των ύποπτων για απάτη συναλλαγών αντίστοιχα (μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_n$ ). Τότε η μέθοδος της εργασίας αυτής για την αναγνώριση του προτύπου συναλλαγής  $\vec{x}^{n+1}$  (classification), διατυπώνεται από τις παρακάτω δύο υποθέσεις:

Υπόθεση  $H_l$ : Αν η συναλλαγή  $\vec{x}^{n+1} = (x_1^{n+1}, \dots, x_m^{n+1})$  της κάρτας  $c_k$  είναι όμοια με όλες τις προηγούμενες συναλλαγές του συνόλου  $X_{c_k}$ , τότε η συναλλαγή  $\vec{x}^{n+1}$  θα κατηγοριοποιηθεί ως νόμιμη και θα συμπεριληφθεί στο σύνολο  $X_n^l$ , ενώ σε διαφορετική περίπτωση θα συμπεριληφθεί στο  $X_n^f$  σύνολο.

Υπόθεση  $H_f$ : Αν η συναλλαγή  $\vec{x}^{n+1} = (x_1^{n+1}, \dots, x_m^{n+1})$  της κάρτας  $c_k$  είναι όμοια με τις προηγούμενες συναλλαγές που ήταν ύποπτες για απάτη  $X_n^f = \{\vec{x}^i - \text{συναλλαγή ύποπτη για απάτη} | \vec{x}^i \in X_n\}$ , τότε η συναλλαγή  $\vec{x}^{n+1}$  θα κατηγοριοποιηθεί ως ύποπτη προς απάτη και θα συμπεριληφθεί στο σύνολο  $X_n^f$ .

Με βάση τις παραπάνω έννοιες και παραμετροποίηση του προβλήματος, η μέθοδος της εφαρμογής αυτής φαίνεται στο Σχήμα (7).



Σχήμα 7: Στάδια μεθόδου ανίχνευσης απάτης χρεωστικών καρτών

Η εκπαίδευση ενός δικτύου SOM, συμβαίνει στο στάδιο 2 κατά την δημιουργία προφίλ  $W_{c_k}$ , όπου  $W_{c_k}$  είναι ο πίνακας βαρών των νευρώνων του εκπαιδευμένου χάρτη Kohonen. Κάποιες αξιοσημείωτες λεπτομέρειες της υλοποίησης της εφαρμογής, είναι οι ακόλουθες:

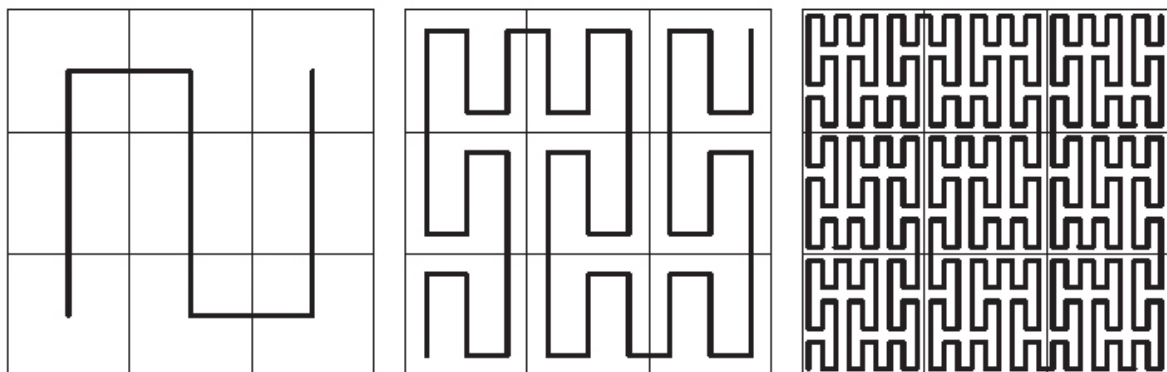
- για την εκπαίδευση του δικτύου εφαρμόζονται μια σειρά από συναρτήσεις στα διανύσματα του συνόλου  $X_{c_k}$  και προκύπτει έτσι το σύνολο  $P_{c_k}$ . Αυτό συμβαίνει ώστε να γίνει μια επεξεργασία των τιμών των διανυσμάτων του  $X_{c_k}$ , όπως για παράδειγμα τη μετατροπή μη αριθμητικών παραμέτρων
- στο στάδιο 3, το  $\delta(\bar{x}^{n+1}, W_{c_k})$ , είναι η απόσταση της νέας συναλλαγής από το εκπαιδευμένο δίκτυο Kohonen. Δηλαδή, είναι η απόστασή του από τον πλησιέστερο νευρώνα εξόδου του εκπαιδευμένου χάρτη. Όσο μικρότερη είναι αυτή η απόσταση, τόσο πιο όμοια είναι η συναλλαγή με τις συναλλαγές του δικτύου, αποτελώντας κατά αυτό τον τρόπο ένα μέτρο ομοιότητας με το εκπαιδευμένο δίκτυο
- το  $\epsilon_l$ , στον έλεγχο συνθήκης του σταδίου 3, είναι μία τιμή κατωφλίου και η οποία είτε επιλέγεται εμπειρικά, είτε από τη μέση τιμή των αποστάσεων των διανυσμάτων που εκπαιδεύσαν το δίκτυο από τον εκπαιδευμένο χάρτη, είτε τέλος από τη μέγιστη απόσταση των διανυσμάτων που εκπαιδεύσαν το δίκτυο από τον εκπαιδευμένο χάρτη

Πρόκειται λοιπόν, για μία εφαρμογή που κινείται στο ίδιο πνεύμα με την εφαρμογή Health Monitoring που παρουσιάστηκε αρχικά. Οπωσδήποτε υπάρχουν διαφορές στη μέθοδο και τις λεπτομέρειες, καθώς πρόκειται για διαφορετικές προσεγγίσεις. Ωστόσο, είναι κοινός τόπος το ότι και οι δύο παραπάνω εφαρμογές αναζητούν το λεγόμενο outlier.

## Προσδιορισμός μονοπατιού

Δύο ενδιαφέρουσες εφαρμογές θα αναφερθούν στο σημείο αυτό. Κοινός τόπος και των δυο είναι το ότι κάνουν χρήση μονοδιάστατου χάρτη Kohonen, με σκοπό τον προσδιορισμό μονοπατιού. Στο μονοδιάστατο χάρτη Kohonen, οι νευρώνες του επιπέδου εξόδου βρίσκονται στη μία διάσταση και όχι στις δύο όπως συμβαίνει τις περισσότερες φορές.

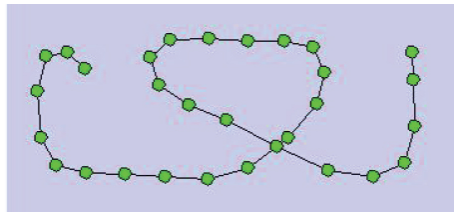
Η πρώτη από αυτές τις εφαρμογές (Lee et al., 2007), έρχεται από τον χώρο της ρομποτικής. Υπάρχει η περίπτωση όπου είναι επιθυμητό να διασχιστεί και εξερευνηθεί μια περιοχή από ένα ρομπότ, χωρίς να αφήσει κάποιο κομμάτι της περιοχής ανεξερεύνητο. Αιτία αυτής της ανάγκης μπορεί να είναι περισσότερες από μία, όπως π.χ. η έρευνα για τη διάσωση αγνοουμένων σε μια περιοχή, ο καθαρισμός μιας περιοχής ή ακόμη και η εξερεύνηση του διαστήματος. Το ζητούμενο είναι να προσδιοριστεί το μονοπάτι εκείνο που πρέπει να ακολουθηθεί, έτσι ώστε η περιοχή να εξερευνηθεί πλήρως και χωρίς κανένα κενό. Για αυτές τις περιπτώσεις, προτείνεται στην εφαρμογή αυτή, η χρήση της λεγόμενης καμπύλης Peano (Rao & Zhang, 2016). Χωρίς να αναφερθούν λεπτομέρειες για την καμπύλη Peano, να πούμε μόνο πως πρόκειται για μια καμπύλη η οποία έχει την ιδιότητα να ‘γεμίζει το χώρο’. Δηλαδή, αν έχουμε για παράδειγμα ένα τετράγωνο, τότε στο όριο της κατασκευής της (Σχήμα (8)), η καμπύλη Peano θα περάσει από όλα τα σημεία του τετραγώνου – με άλλα λόγια ‘γεμίζει το χώρο’.



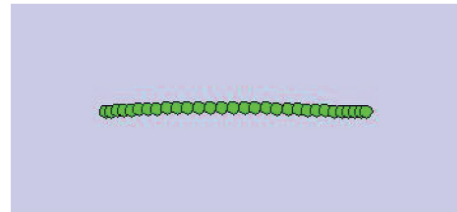
Σχήμα 8: Επαναληπτική διαδικασία κατασκευής καμπύλης Peano

Μπορούμε να πετύχουμε διάφορους βαθμούς κάλυψης της περιοχής μέσω της καμπύλης Peano. Στην περίπτωση που η περιοχή που θέλουμε να εξερευνηθεί είναι μεν ορθογωνική αλλά το σύνορο της είναι περισσότερο σύνθετο από το απλά να είναι μια ευθεία γραμμή, τότε ο αναλυτικός τρόπος δημιουργίας αυτής της καμπύλης δεν είναι χρήσιμος. Ο τρόπος που ξεπερνιέται η παραπάνω δυσκολία σε αυτή την εφαρμογή, είναι με τη χρήση ενός μονοδιάστατου χάρτη Kohonen για την κατασκευή της καμπύλης Peano. Η μέθοδος είναι απλή. Η κύρια απαίτηση είναι να μπορεί κανείς να δημιουργήσει τυχαία σημεία της περιοχής, ώστε να τα χρησιμοποιήσει σαν δείγματα-δεδομένα για την εκπαίδευση του δικτύου. Το εκπαιδευμένο δίκτυο θα δώσει τους νευρώνες εξόδου στη μία διάσταση, με εκπαιδευμένα βάρη στις δύο διαστάσεις (εφόσον η περιοχή που πρέπει να καλυφθεί είναι στις δύο διαστάσεις). Με αυτό τον τρόπο, τα εκπαιδευμένα βάρη του μονοδιάστατου χάρτη θα τείνουν να περάσουν από όλα τα δεδομένα εισόδου και έτσι να δώσουν μία εικόνα όλων των σημείων του χώρου που χρησιμοποιήθηκαν για να εκπαιδεύσουν το δίκτυο. Στην εφαρμογή αυτή επισημαίνεται το πόσο σημαντικές είναι οι τιμές των παραμέτρων  $\sigma(t)$  και  $\varepsilon(t)$  που καθορίζουν το μέγεθος της γειτονιάς και το ρυθμό μάθησης αντίστοιχα. Οι τιμές αυτών των παραμέτρων είναι καθοριστικές για τη δημιουργία βέλτιστης καμπύλης Peano ως μονοπάτι για να ακολουθηθούν τα ρομπότ και ορίζουν και το χρόνο που χρειάζεται ο αλγόριθμος εκπαίδευσης για να συγκλίνει. Τα δύο παραπάνω είναι θέματα που

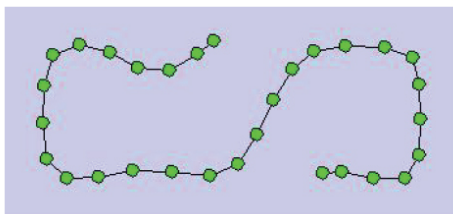
ενδιαφέρουν, καθώς το μονοπάτι που θα προσδιοριστεί είναι επιθυμητό να είναι βέλτιστο (δηλαδή, να είναι ένα μονοπάτι που θα επιτρέψει να εξερευνηθεί μια περιοχή χωρίς κενά και θα είναι σύντομο) και ο χρόνος που θα εκπαιδευτεί το δίκτυο να είναι σύντομος. Ωστόσο, για να προκύψει ένα μονοπάτι Peano θα πρέπει να ρυθμιστούν κατάλληλα οι παράμετροι του αλγόριθμου εκπαίδευσης. Για αυτό το λόγο, οι συγγραφείς αυτής της εφαρμογής, ερευνούν και προτείνουν τελικά βέλτιστες τιμές αυτών των παραμέτρων, όπως και φαίνεται στο Σχήμα (9). Με πράσινο χρώμα παρουσιάζονται οι νευρώνες του επιπέδου εξόδου, η οποίοι είναι



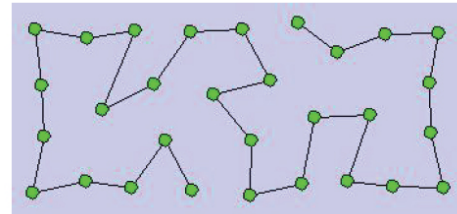
(α') τετράγωνο πλέγμα, ακτίνα γειτονιάς 1



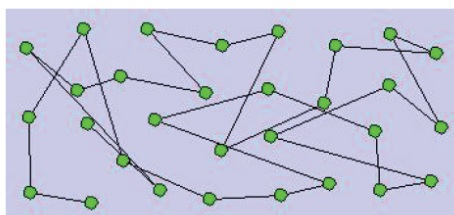
(β')  $\varepsilon_i = 0.05, \varepsilon_f = 0.005, \sigma_i = 8.0, \sigma_f = 1.0$



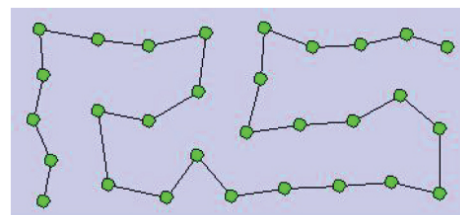
(γ')  $\varepsilon_i = 0.05, \varepsilon_f = 0.005, \sigma_i = 1.0, \sigma_f = 1.0$



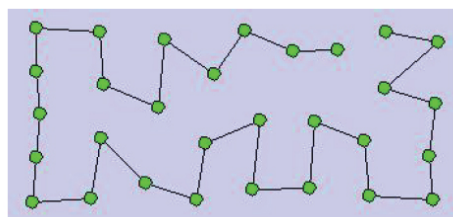
(δ')  $\varepsilon_i = 0.05, \varepsilon_f = 0.005, \sigma_i = 3.5, \sigma_f = 0.01$



(ε')  $\varepsilon_i = 1.0, \varepsilon_f = 1.0, \sigma_i = 3.5, \sigma_f = 0.01$



(ς')  $\varepsilon_i = 1.0, \varepsilon_f = 0.001, \sigma_i = 3.5, \sigma_f = 0.01$



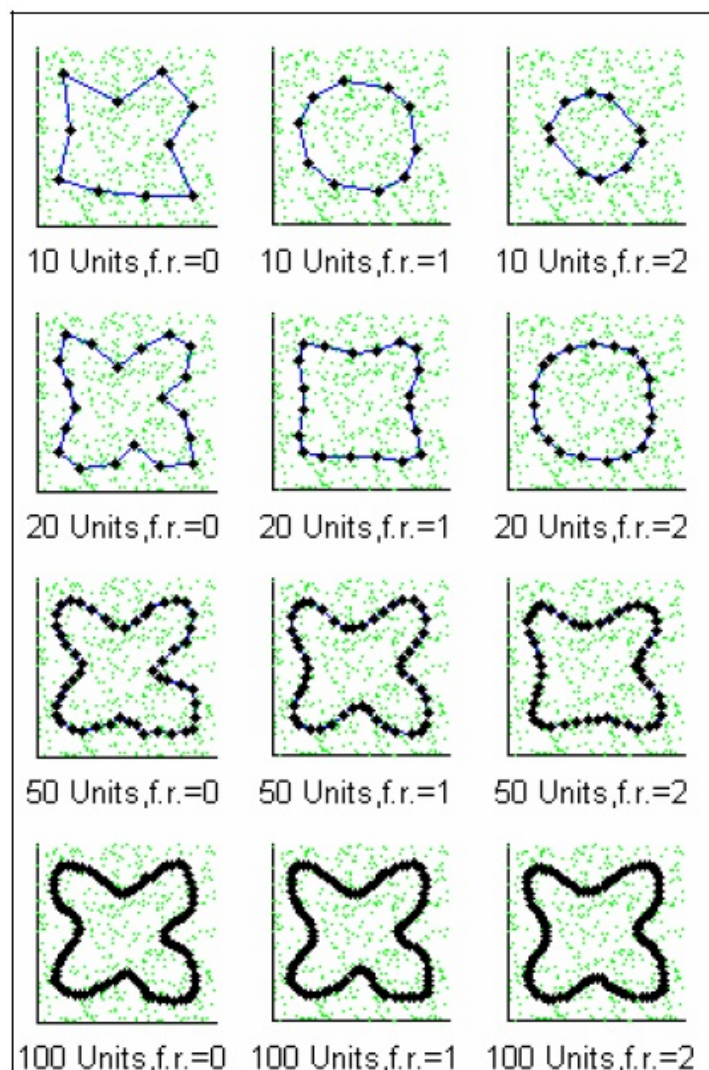
(ζ')  $\varepsilon_i = 0.05, \varepsilon_f = 0.0005, \sigma_i = 3.5, \sigma_f = 0.01$

Σχήμα 9: Απεικόνιση εκπαιδευμένων SOM μίας διάστασης

τοποθετημένοι ο ένας δίπλα στον άλλο σχηματίζοντας μια ευθεία γραμμή (μονοδιάστατος χάρτης Kohonen). Επειδή τα σημεία που θα εκπαιδεύσουν αυτό το δίκτυο είναι σημεία του διδιάστατου χώρου (χώρος εισόδου 2 διαστάσεων), τα προς εκπαίδευση βάρη του δικτύου είναι και αυτά 2 διαστάσεων. Κατά αυτόν τον τρόπο, μόλις ολοκληρωθεί η εκπαίδευση του δικτύου, τα εκπαιδευμένα βάρη των νευρώνων τοποθετούν το κάθε νευρώνα στο διδιάστατο επίπεδο εισόδου. Έτσι λοιπόν, στο Σχήμα (9), οι νευρώνες εξόδου είναι τοποθετημένοι στο διδιάστατο χώρο εισόδου που τα εκπαιδευμένα πλέον βάρη τους τους προστάζουν να βρίσκονται. Η γραμμή με την οποία ενώνονται οι πράσινοι νευρώνες των σχημάτων, φανερώνει τη σειρά των νευρώνων στο μονοδιάστατο χώρο εξόδου του δικτύου SOM. Μας φανερώνει τη γειτονιά τους. Στο Σχήμα (9α'), έχουμε

την περίπτωση, όπου ο αλγόριθμος εκπαίδευσης δεν έχει συγχλίνει μετά το πέρας των 40.000 επαναλήψεων που έχουν οριστεί να τρέξει ο αλγόριθμος. Η καμπύλη Reano δεν έχει προλάβει να σχηματιστεί. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί, εάν το μέγεθος της γειτονιάς ελαττωθεί πολύ γρήγορα κατά την επανάληψη του αλγόριθμου. Στα σχήματα (9β'), (9γ') και (9δ') γίνεται αναζήτηση για τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων  $\sigma_i$  και  $\sigma_f$  διατηρώντας σταθερές τις παραμέτρους  $\varepsilon_i$  και  $\varepsilon_f$ . Ενώ, στα σχήματα (9ε'), (9ϖ') και (9ζ') γίνεται το αντίστροφο, με τις τιμές των παραμέτρων  $\varepsilon_i, \varepsilon_f$  να παίρνουν σταθερά τις τιμές που προσδιορίστηκαν μόλις πριν στο Σχήμα (9δ') και να αναζητώνται βέλτιστες τιμές για τις παραμέτρους  $\sigma_i, \sigma_f$ . Η εφαρμογή αυτή έχει υποθέσει ορθογώνια περιοχή εξερεύνησης, αλλά αναφέρεται πως η περιοχή θα μπορούσε να έχει οποιαδήποτε μορφή. Στο Σχήμα (9ζ') παρουσιάζεται η προτεινόμενη καμπύλη Reano την οποία μπορεί να ακολουθήσει ένα πλήθος από ρομπότ προκειμένου να εξερευνήσει τη συγκεκριμένη περιοχή χωρίς να αφήσει κενά. Τα ρομπότ, δεν έχουν παρά να μοιραστούν σε αυτό το μονοπάτι Reano και να εξερευνήσουν την περιοχή. Οι λεπτομέρειες της εφαρμογής, όπως για παράδειγμα πώς ακριβώς θα πρέπει να σχεδιαστεί η τοποθέτηση των ρομπότ και προς τα ποιες κατευθύνσεις κ.α. δεν ενδιαφέρουν να παρουσιαστούν στην παρούσα πτυχιακή εργασία. Το πολύ ενδιαφέρον κομμάτι που αφορούσε την εφαρμογή του δικτύου Kohonen, παρουσιάστηκε, και η γενική ιδέα της εφαρμογής αυτής έγινε κατανοητή.

Κάτι παρόμοιο αλλά ταυτόχρονα και διαφορετικό με την παραπάνω εφαρμογή, επιδιώκει να κάνει και η δεύτερη εφαρμογή (Lobo, 2005). Στόχος αυτής, είναι ο προσδιορισμός ενός μονοπατιού. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείτε και εδώ ένα SOM μίας διάστασης. Πιο συγκεκριμένα, επιδιώκεται να προσδιοριστεί το μονοπάτι εκείνο που πρέπει να ακολουθήσει το σκάφος της θαλάσσιας περιπόλου μιας χώρας. Σκοπός της περιπόλου, είναι να προστατεύει τα συμφέροντα της αποκλειστικής οικονομικής ζώνης (ΑΟΖ) της χώρας της από τους παράνομους αλιείς, να εποπτεύει το θαλάσσιο περιβάλλον από τυχών απειλές και να διενεργεί αποστολές έρευνας και διάσωσης. Είναι πολύ ενδιαφέρον το πρακτικό αυτό ζήτημα του σχεδιασμού του μονοπατιού-της πορείας-που θα πρέπει να ακολουθήσει η περιπόλος, έτσι ώστε να είναι σε θέση να ανταποκριθεί κατά βέλτιστο τρόπο στους σκοπούς που προαναφέρθηκαν. Λέγοντας βέλτιστο τρόπο, νοείται η δημιουργία εκείνου του μονοπατιού όπου η χρησιμότητα της περιπόλου γίνεται μέγιστη (π.χ. να εντοπίσει κάποιου είδους παράνομη δραστηριότητα και ταυτόχρονα να βρεθεί κοντά σε κάποιο είδος έκτακτης ανάγκης). Αναφέρεται, πως μέχρι πρότινος, ο σχεδιασμός της περιπόλου βασιζόταν στην προσωπική (και υποκειμενική) εμπειρία των αξιωματικών. Δηλαδή, δεν υπήρχε μία μέθοδος που να στηρίζεται σε αντικειμενικά κριτήρια για να καθορίσει το σχεδιασμό της πορείας της περιπόλου. Η πρόταση που κάνει η εφαρμογή είναι απλή και ταυτόχρονα ευφάνταστη. Η προσέγγισή της, είναι να εκπαιδεύσει ένα δίκτυο Kohonen μίας διάστασης. Τα δεδομένα που θα τροφοδοτήσουν την εκπαίδευση του δικτύου είναι το ιστορικό καταγεγραμμένων συμβάντων. Τα συμβάντα αυτά είναι συγκεκριμένα σημεία με γνωστό γεωγραφικό μήκος και πλάτος. Έτσι λοιπόν, έχουμε έναν διδιάστατο χώρο εισόδου, ο οποίος θα εκπαιδεύσει τα (δισδιάστατα) βάρη των νευρώνων του μονοδιάστατου χώρου εξόδου του χάρτη Kohonen. Μετά το τέλος της εκπαίδευσης του δικτύου και αν προβάλλουμε τη μονοδιάστατη γραμμή που ενώνει τους νευρώνες εξόδου του δικτύου στο διδιάστατο χώρο εισόδου (με τη βοήθεια των βαρών των νευρώνων), θα δούμε πως αυτή η γραμμή περνά από εκείνες τις περιοχές του χώρου εισόδου από όπου η πυκνότητα των συμβάντων είναι μεγαλύτερη. Αυτή η γραμμή θα είναι και το ζητούμενο μονοπάτι που θέλαμε να προσδιορίσουμε. Η πυκνότητα των περιοχών προηγούμενως καταγεγραμμένων συμβάντων είναι πολύ πιο σημαντική από την ακριβή θέση αυτών των συμβάντων. Σκοπός των πλεούμενων της περιπόλου, είναι να χρησιμοποιήσουν το ιστορικό που διαθέτουν ώστε να πετύχουν ένα χαλαρό προσδιορισμό της πορείας τους. Δεν είναι σκόπιμο να περάσουν ακριβώς από τα σημεία των καταγεγραμμένων συμβάντων. Η μόνη απαίτηση, είναι να έχουν μία πορεία η οποία θα περνά κοντά από την περιοχή των καταγεγραμμένων συμβάντων, επιτρέποντας τους να βρίσκονται σε βέλτιστες θέσεις, δηλαδή να βρίσκονται σε περιοχές όπου η πιθανότητα νέων συμβάντων θα είναι μεγάλη. Η βασική υπόθεση στην οποία στηρίζεται η συγκεκριμένη εφαρμογή, είναι πως περιοχές όπου η πυκνότητα καταγεγραμμένων συμβάντων είναι μεγάλη λειτουργούν σαν δείκτες πρόβλεψης μελλοντικών συμβάντων. Αναφέρεται επίσης, πως το πλήθος των νευρώνων εξόδου του δικτύου μαζί με το μέγεθος της γειτονιάς του δικτύου κατά την φάση του 'fine-tuning', αποτελούν παράγοντες που καθορίζουν σημαντικά τη μορφή του μονοπατιού που θα δώσει το δίκτυο. Για αυτόν τον λόγο δοκιμάζονται διάφορες τιμές αυτών των παραμέτρων, για τεχνητά κατασκευασμένα δεδομένα εισόδου. Σκοπός αυτών των δοκιμών είναι να φανεί η επίπτωση των μεταβολών αυτών των δύο παραμέτρων στο παραγόμενο μονοπάτι που προκύπτει από το εκπαιδευμένο δίκτυο. Στα σχήματα (10) και (11), με πράσινο χρώμα φαίνονται τα δεδομένα εισόδου και με μαύρο χρώμα η θέση (το διάλυσμα βάρους) των νευρώνων εξόδου στο χώρο εισόδου. Στο Σχήμα (10) τα δεδομένα που δοκιμάζονται είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα. Παρατηρεί τότε κανείς, πως καθώς το πλήθος των νευρώνων του δικτύου αυξάνει, τότε το μονοπάτι που σχηματίζουν οι νευρώνες αποκτά όλο και περισσότερες πτυχώσεις. Με αυτό τον τρόπο το δίκτυο τείνει να καλύψει με μεγαλύτερη λεπτομέρεια το σύνολο των δεδομένων εισόδου, από



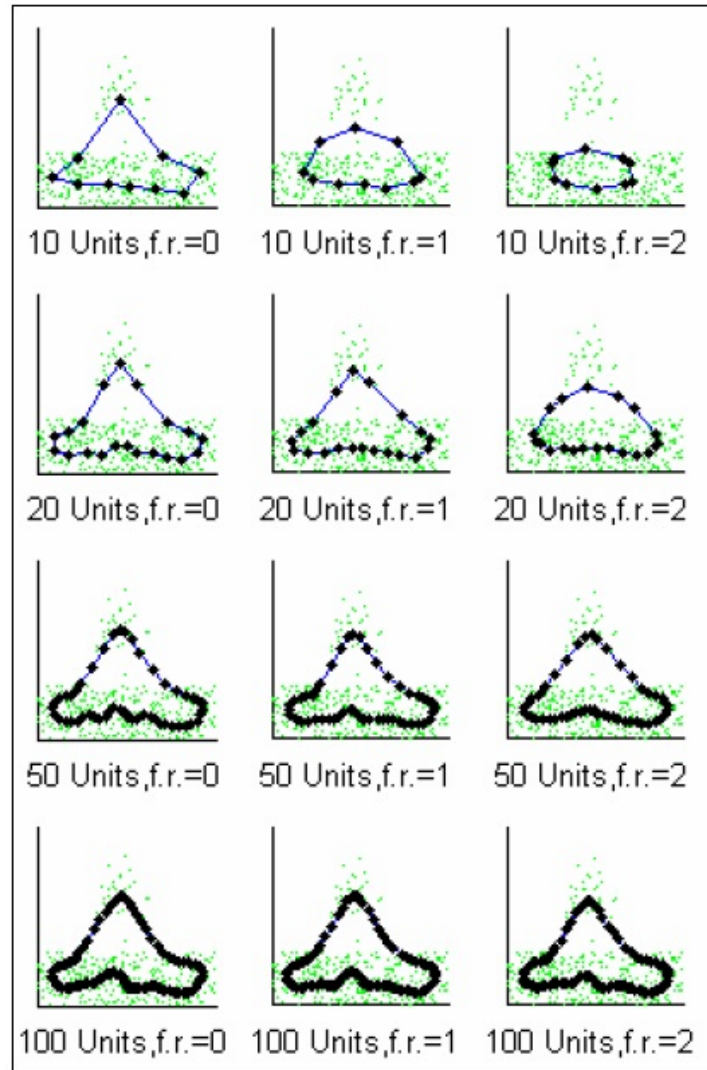
Σχήμα 10: Εκπαιδευμένο μονοδιάστατο SOM απεικονισμένο στο διδιάστατο χώρο εισόδου για ομοιόμορφα κατανεμημένα δεδομένα. Οι μαύρες κουκίδες αντιπροσωπεύουν τις θέσεις των νευρώνων εξόδου.

ότι στην περίπτωση που το πλήθος των νευρώνων είναι μικρότερο. Σε σχέση τώρα με την τελική ακτίνα (στα σχήματα αναφέρεται ως f.r.) της γειτονιάς, παρατηρείται ότι όσο η τιμή της μεγαλώνει, τόσο λιγότερη ακρίβεια ως προς την κατανομή των δεδομένων μας παρέχει το σχηματιζόμενο μονοπάτι των νευρώνων. Το μονοπάτι δηλαδή, δεν καταφέρνει να αποτυπώσει τις λεπτομέρειες των δεδομένων κατά την φάση του 'fine-tuning', αλλά παραμένει ουσιαστικά στη φάση του αρχικού 'ξεδιπλώματος' του δικτύου στο χώρο των δεδομένων. Οι ίδιες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν και στο Σχήμα (11).

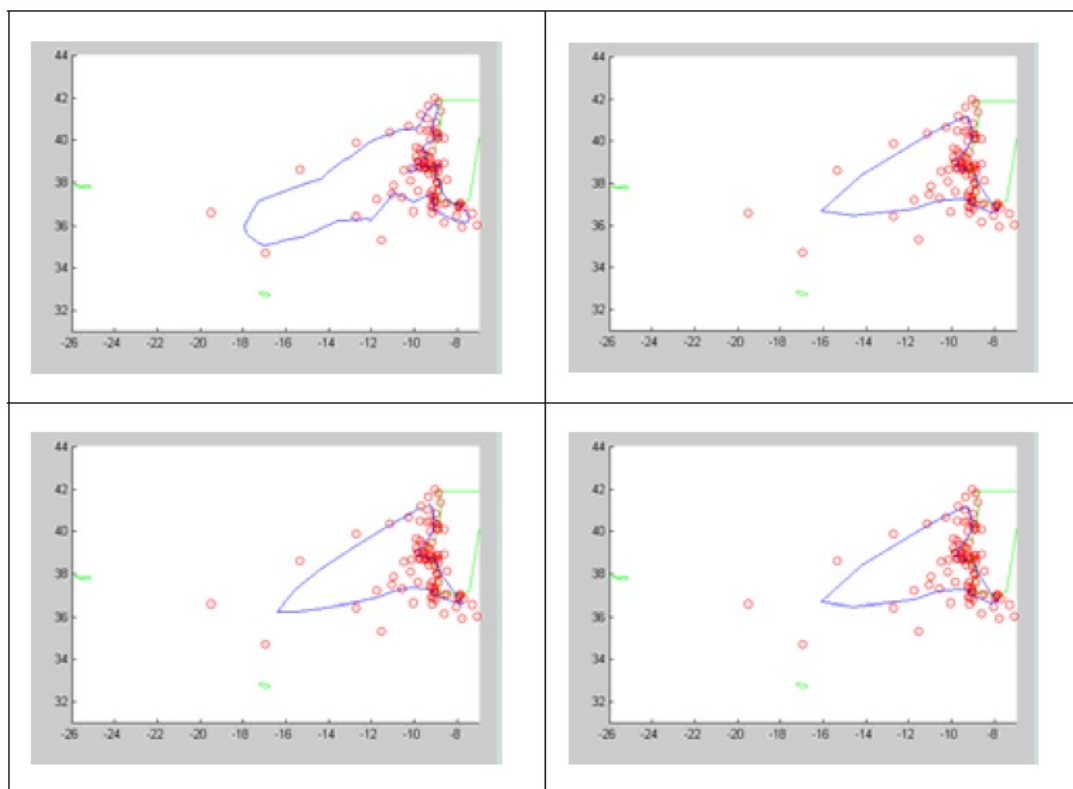
Μετά από αυτές τις διαπιστώσεις-παρατηρήσεις, η εφαρμογή προχωρά στην εκπαίδευση δικτύου με αληθινά δεδομένα εισόδου. Τα πραγματικά αυτά δεδομένα αφορούν συμβάντα της Πορτογαλικής ακτογραμμής και παρουσιάζονται στο Σχήμα (12). Στο παραπάνω λοιπόν σχήμα, παρουσιάζονται τα μονοπάτια που προσδιορίζονται σε κάθε ένα από τα παραπάνω δίκτυα Kohonen.

### WEBSOM - Word Category Map

Η τελευταία εφαρμογή του δικτύου Kohonen που θα αναφερθεί, είναι το λεγόμενο WEBSOM και ασχολείται με αρχεία κειμένων – ασχολείται δηλαδή, με προτάσεις και λέξεις μιας γλώσσας. Μέσα στην εφαρμογή αυτή θα βρούμε τη χρήση μιας επιπλέον εφαρμογής του δικτύου SOM που ακούει στο όνομα Word Category Map.

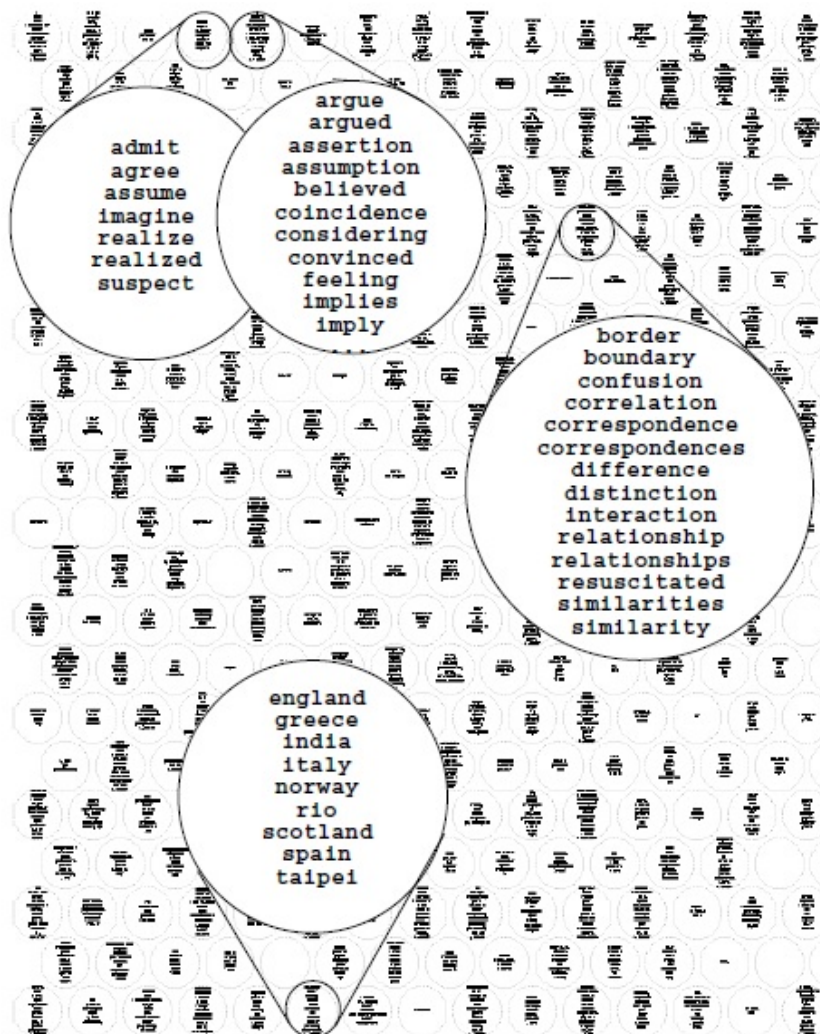


Σχήμα 11: Εκπαιδευμένο μονοδιάστατο SOM απεικονισμένο στο διδιάστατο χώρο εισόδου για μη ομοιόμορφα κατανομημένα δεδομένα. Οι μαύρες κουκίδες αντιπροσωπεύουν τις θέσεις των νευρώνων εξόδου.

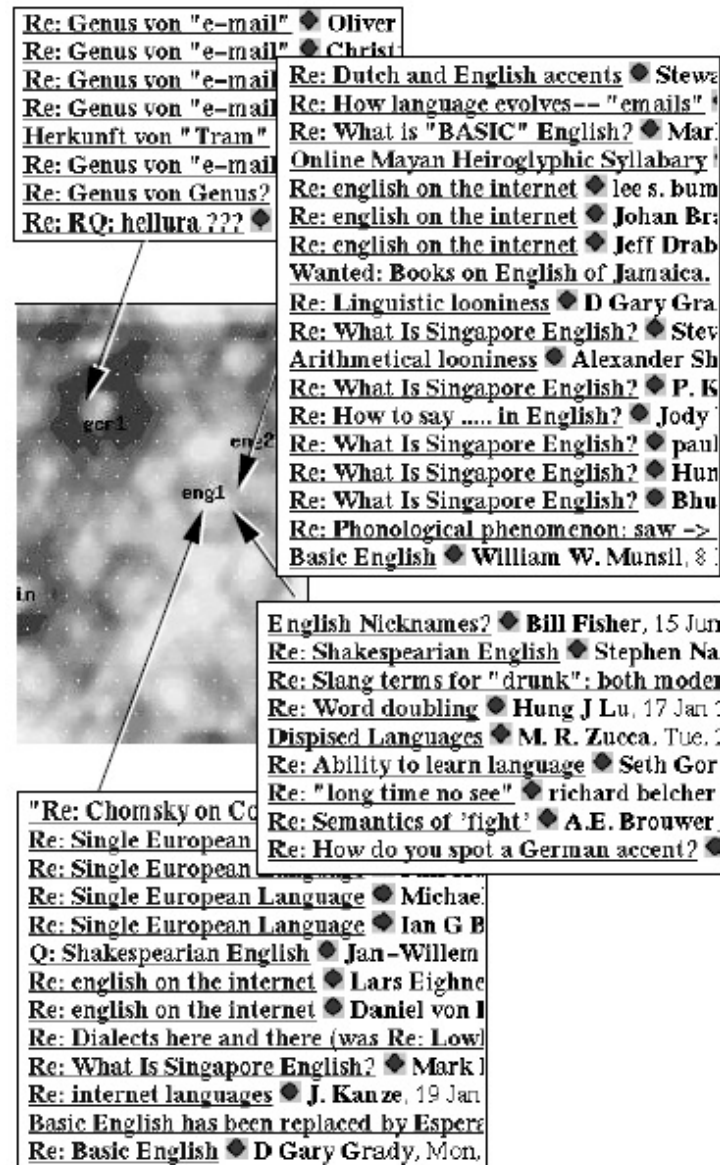


Σχήμα 12: Μονοπάτια που προσδιορίστηκαν με βάση 93 καταγεγραμμένα συμβάντα. Στο πάνω αριστερά μονοπάτι χρησιμοποιήθηκαν διπλάσιοι νευρώνες (186) σε σχέση με τα συμβάντα (93), στο πάνω δεξιά χρησιμοποιήθηκαν 93, στο κάτω αριστερά 46 και στο κάτω δεξιά 23.

Το WEBSOM προτείνει έναν τρόπο κατηγοριοποίησης αρχείων κειμένων, με σκοπό την εύκολη/γρήγορη αναζήτηση αρχείων κειμένων και την πλοήγηση σε αυτά στο διαδίκτυο. Θα σκιαγραφηθεί σύντομα ο τρόπος που υλοποιείται η συγκεκριμένη εφαρμογή, με βάση την περιγραφή της δημοσίευσης (Kaski et al, 1998) για αυτή την εφαρμογή. Κάθε αρχείο κειμένου θα κωδικοποιηθεί με κάποιο τρόπο και το σύνολο των κωδικοποιημένων αυτών αρχείων θα αποτελέσουν την είσοδο για το προς εκπαίδευση δίκτυο Kohonen. Η κωδικοποίηση αυτή θα μπορούσε να αποτελείται από το ιστόγραμμα των λέξεων του αρχείου με βάση όλες τις λέξεις που περιέχονται σε όλα τα αρχεία. Δηλαδή, πρόκειται για ένα διάνυσμα η διάσταση του οποίου είναι ο αριθμός των διακεκριμένων λέξεων όλων των αρχείων. Κάθε αρχείο, απλά και μόνο θα σημειώνει σε κάθε συνιστώσα του διανύσματος τη συχνότητα εμφάνισης αυτής της λέξης-συνιστώσας σε αυτό. Με την υπόθεση ότι ο όγκος των αρχείων κειμένων είναι πάρα πολύ μεγάλος, καταλαβαίνουμε πως ο συνολικός αριθμός λέξεων γίνεται πάρα πολύ μεγάλος. Κατά αυτόν τον τρόπο η διάσταση του διανύσματος των αρχείων γίνεται πάρα πολύ μεγάλη, και αφού αυτά τα διανύσματα αρχείων θα εκπαιδεύσουν ένα SOM δημιουργούν προβλήματα στο χρόνο εκτέλεσης των υπολογισμών του αλγορίθμου εκπαίδευσης. Για το λόγο αυτό, αλλά και για άλλους λόγους που έχουν να κάνουν με την ποιοτικότερη συσχέτιση των αρχείων κειμένων, προτείνεται η χρήση του λεγόμενου Word Category Map. Πρόκειται για μία άλλη χρήση – εφαρμογή – του δικτύου Kohonen. Το Word Category Map δημιουργεί ένα σημασιολογικό χάρτη λέξεων στο εκπαιδευμένο δίκτυο. Αυτό που καταφέρνει δηλαδή, είναι να αντιστοιχίσει σε κάθε νευρώνα εξόδου ένα πλήθος από λέξεις που έχουν όμοια σημασία μεταξύ τους. Δημιουργούνται έτσι ομάδες από σημασιολογικά όμοιες λέξεις. Αν λοιπόν τροφοδοτήσουμε ένα νέο SOM με όλες τις λέξεις των αρχείων (χρησιμοποιώντας κατάλληλη κωδικοποίηση), τότε το εκπαιδευμένο SOM θα δημιουργήσει τις παραπάνω ομάδες λέξεων με όμοια σημασιολογία που προαναφέρθηκε. Αν τώρα χρησιμοποιηθεί το πλήθος αυτών των ομάδων που δημιουργούνται ως συνιστώσες του διανύσματος των αρχείων, αντί του συνολικού αριθμού των διαφορετικών λέξεων όλων των αρχείων, τότε επιτυγχάνεται μία σημαντική μείωση της διάστασης εισόδου του δικτύου και επομένως του χρόνου υπολογισμού κατά την εκπαίδευση του δικτύου. Επιπλέον, επιτυγχάνεται και μία ποιοτικότερη κωδικοποίηση των αρχείων, αφού με αυτό τον τρόπο υπάρχει καλύτερη συσχέτιση μεταξύ των αρχείων. Αρχεία που προηγουμένως δεν είχαν κάποια σχέση μεταξύ τους αν είχαν διαφορετικές λέξεις στο περιεχόμενό τους, τώρα - και στην περίπτωση που κάποιες από αυτές τις λέξεις ανήκουν σε κοινές σημασιολογικά ομάδες του Word Category Map- καταφέρνουν και εμφανίζουν αυτή την συσχέτιση στην κωδικοποίησή τους. Ο τρόπος που επιτυγχάνεται το συγκεκριμένο αποτέλεσμα στο Word Category Map είναι για άλλη μία φορά απλός και ευφάνταστος. Πολύ σύντομα, στην περίπτωση του λεγόμενου Word Category Map, αρχικά κάθε λέξη κωδικοποιείται με τρόπο που δεν υποδηλώνει καμιά συσχέτιση με άλλη λέξη. Στη συνέχεια, για κάθε λέξη (λέξη κλειδί) δημιουργείται ένα διάνυσμα με βάση την προηγούμενη και την επόμενη της λέξη (δηλαδή, με βάση τα συμφραζόμενα). Το διάνυσμα αυτό των τριών λέξεων (κωδικοποίηση προηγούμενης λέξης, κωδικοποίηση λέξης κλειδί, κωδικοποίηση επόμενης λέξης) τροφοδοτεί την εκπαίδευση ενός δικτύου Kohonen. Τέλος, μετά την εκπαίδευση, για κάθε ένα από τα παραπάνω διανύσματα προσδιορίζεται το BMU και αντιστοιχίζεται σε αυτό η λέξη κλειδί του διανύσματος αυτού. Κατά αυτό τον τρόπο σχηματίζονται ομάδες (όμοιων) λέξεων σε κάθε νευρώνα εξόδου, όπως φαίνεται στο Σχήμα (13). Έτσι, κάθε νευρώνας εξόδου μπορεί να θεωρηθεί και ως μια κατηγορία λέξεων (word category). Είναι επίσης αξιοσημείωτο πως, είναι πολύ πιθανό γειτονικοί νευρώνες του Word Category Map να αντιπροσωπεύουν ομάδες λέξεων που έχουν κάποια σχέση (π.χ. συντακτική, σημασιολογική) μεταξύ τους (Honkela et al, 1995). Αυτές λοιπόν οι ομάδες των λέξεων, δίνουν τη δυνατότητα να ελαττωθεί σημαντικά η διάσταση των διανυσμάτων που κωδικοποιούν τα αρχεία. Οπότε, η κωδικοποίηση των αρχείων κειμένου γίνεται με τη βοήθεια της κατηγοριοποίησης των λέξεων που επιτυγχάνεται στο Word Category Map. Πρόκειται για ένα ιστόγραμμα με βάση τις κατηγορίες λέξεων του Word Category Map, όπου πλέον σημασιολογικά όμοιες λέξεις που ανήκουν στην ίδια κατηγορία συνεισφέρουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο στη κωδικοποίηση του αρχείου. Ένα μέρος των κωδικοποιημένων αρχείων κειμένου, τροφοδοτείται στο δίκτυο για να το εκπαιδεύσει. Στη συνέχεια, όλα τα αρχεία κειμένου (ακόμα και αυτά που δεν χρησιμοποιήθηκαν για την εκπαίδευση) τοποθετούνται στον εκπαιδευμένο χάρτη με βάση το BMU για αυτά. Κατά αυτόν τον τρόπο, δημιουργείται ένας 'χάρτης εγγράφων' (Document Map). Στη συγκεκριμένη εφαρμογή του WEBSOM της δημοσίευσης (Kaski et al, 1998), έχει υλοποιηθεί και ένα λογισμικό με τη βοήθεια του οποίου μπορεί κανείς να πλοηγηθεί στο Document Map. Με τη χρήση του λογισμικού αυτού, θα μπορεί κανείς να εμποτεύσει τον (εκπαιδευμένο) χάρτη εγγράφων, να μεγεθύνει κάποιο σημείο που θα τον ενδιαφέρει, να διαλέξει κάποιο έγγραφο μιας ομάδας εγγράφων και να πλοηγηθεί σε γειτονικά – όμοια έγγραφα. Μια εικόνα ενός Document Map φαίνεται στο Σχήμα (14).



Σχήμα 13: Παράδειγμα ενός Word Category Map



Σχήμα 14: Παράδειγμα ενός Document Map

## 4.2 Σχόλια - Παρατηρήσεις

Πριν περάσουμε στην επόμενη ενότητα της πτυχιακής εργασίας, θα γίνουν κάποια σχόλια σε ό,τι αφορά την ενασχόληση με τις παραπάνω εφαρμογές που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 4.1. Όλες αυτές οι εφαρμογές, αλλά και όσες άλλες εξετάστηκαν και τελικά δεν επελέγησαν να παρουσιαστούν-αναφερθούν στην εργασία, έχουν ένα κοινό σημείο. Το κοινό τους σημείο είναι η μεγάλη σημασία που έχει η μοντελοποίηση των δεδομένων που θα τροφοδοτήσουν το εκάστοτε SOM που θα εκπαιδευτεί. Κατά την άποψή του συγγραφέα, το σημαντικότερο και δυσκολότερο κομμάτι σε κάθε εφαρμογή είναι να φτιαχτεί το μοντέλο που θα δώσει τελικά τα δεδομένα εισόδου για την εκπαίδευση του δικτύου. Το γεγονός αυτό καταδεικνύεται στις δύο πρώτες εφαρμογές (Health Monitoring, Fraud Detection). Ενώ και οι δύο έχουν ως ζητούμενο το να κατηγοριοποιηθεί ένα νέο δεδομένο εισόδου ώστε είτε να χαρακτηριστεί ως 'διαφορετικό' (outlier) από τα δεδομένα που εκπαιδευσαν το δίκτυο είτε ως 'όμοιο' με αυτά, η μοντελοποίηση του καθενός προβλήματος είναι πολύ διαφορετική. Αλλά και η διαδικασία που ακολουθείται στη συνέχεια έχει διαφορές. Εφόσον τώρα ολοκληρωθεί το στάδιο της μοντελοποίησης, τότε η ερμηνεία των αποτελεσμάτων του εκπαιδευμένου δικτύου όσο σύνθετη και να είναι, μάλλον θα είναι τελικά λιγότερο κοπιαστική και δύσκολη από το κομμάτι της μοντελοποίησης. Μία επιπλέον παρατήρηση που και πάλι αφορά αυτό το πρώτο κομμάτι της μοντελοποίησης δεδομένων, είναι πως σε αυτό το στάδιο μπορεί να εμπλακούν πολλοί κλάδοι των επιστημών. Συνήθως χρειάζονται κάποιες ειδικές γνώσεις του επιστημονικού πεδίου της εκάστοτε εφαρμογής ώστε να μοντελοποιηθεί το φαινόμενο της εφαρμογής. Μπορεί ακόμη να χρειάζεται να γίνει χρήση σύνθετων μαθηματικών εργαλείων ώστε το τελικό μοντέλο να είναι έτοιμο να μελετηθεί. Το γεγονός αυτό, δίνει στις εφαρμογές του SOM πολλές φορές διεπιστημονική χροιά.

Ακόμη, από τις επόμενες δύο εφαρμογές, που έχουν να κάνουν με τον προσδιορισμό μονοπατιού, φέρεται ότι το δίκτυο Kohonen είναι κάτι περισσότερο από ένα απλό εργαλείο που απλά χρησιμοποιείται 'τυφλά'. Η παρατήρηση αυτή προκύπτει, από το γεγονός πως σε αυτές τις δύο εφαρμογές πρέπει να δοκιμαστούν - ερευνηθούν - σχολαστικά κάποιες παράμετροι του αλγορίθμου εκπαίδευσης προκειμένου το εκπαιδευμένο δίκτυο να δώσει αποτελέσματα που να ανταποκρίνονται στο σκοπό της χρήσης του. Κατά αυτόν τον τρόπο χρειάζεται η εις βάθος γνώση - κατανόηση - του δικτύου Kohonen προκειμένου να προχωρήσει κανείς σε τέτοιου είδους ρυθμίσεις όταν αυτό καταστεί αναγκαίο.

Τέλος, οι εφαρμογές που παρουσιάστηκαν δεν καλύπτουν όλο το φάσμα των εφαρμογών του SOM. Η επιλογή αυτών των εφαρμογών που αναφέρθηκαν, έγινε με γνώμονα το βαθμό κατανόησης που επετεύχθη ώστε να μπορέσουν να παρουσιαστούν - υποστηριχθούν, το ενδιαφέρον που είχε η θεματολογία τους και η έκτασή τους έτσι ώστε να ταιριάζουν στη δομή της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Κάποιοι ακόμη τομείς με εφαρμογές είναι τα οικονομικά (Deboeck, 2000) και η ιατρική (Zribi et al., 2012).



## 5 Μελέτη περιπτώσεων με χρήση διαφορετικών μέτρων απόστασης στο SOM toolbox

### 5.1 Distance concentration phenomenon

Κατά την προσπάθεια να μελετηθούν datasets υψηλών διαστάσεων, παρουσιάζεται ένα φαινόμενο το οποίο στέκεται εμπόδιο στην προσπάθεια μελέτης αυτών και ακούει στο όνομα ‘Η Κατάρτα της Διαστατικότητας’ (dimensionality curse phenomenon) (Kouiroukidis & Evangelidis, (2011)). Η επίδραση αυτού του φαινομένου έχει μελετηθεί με μεγάλη λεπτομέρεια σε πολλά προβλήματα, όπως, στο πρόβλημα της συσταδοποίησης (clustering) και το πρόβλημα της εύρεσης του πλησιέστερου γείτονα (nearest neighbor search) (Aggarwal, Hinneburg & Keim, (2001)). Η κατάρτα της διαστατικότητας, αναφέρει πως σε χώρους υψηλών διαστάσεων, τα δεδομένα γίνονται αραιά και οι αποστάσεις του κοντινότερου και μακρυνότερου σημείου από κάποιο δοθέν σημείο είναι σχεδόν ίσες. Οι Francois, Wertz και Verleysen (Francois, Wertz & Verleysen, (2007)) αναφέρουν πως συγκεκριμένα η ευκλείδεια απόσταση παρουσιάζει το παραπάνω φαινόμενο που μόλις περιγράφηκε και αναφέρονται σε αυτό ως φαινόμενο συγκέντρωσης της απόστασης (distance concentration phenomenon). Έτσι, η ευκλείδεια απόσταση έχει αμφισβητηθεί στο παρελθόν και σε μια προσπάθεια να καταπολεμηθεί το φαινόμενο της συγκέντρωσης της απόστασης ήρθαν στο προσκήνιο οι κλασματικές νόρμες.

Για να ορίσουμε τις κλασματικές νόρμες είναι καλύτερα να αναφερθούμε πρώτα στις νόρμες Minkowski. Όπως αναφέρουν πάλι οι Francois, Wertz και Verleysen (Francois, Wertz & Verleysen, (2005)), οι νόρμες Minkowski είναι μία οικογένεια νορμών που ορίζονται από μία εκθετική παράμετρο  $1 \leq p \leq \infty$  και που ο γενικός τύπος αυτής της οικογένειας είναι ο παρακάτω:

$$\|\vec{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} \quad (13)$$

όπου  $\vec{x}$  είναι ένα διάνυσμα  $\vec{x} \in R^n$ . Οι κλασματικές νόρμες μοιάζουν με τις νόρμες Minkowski, μόνο που ο εκθέτης  $p$  στη Σχέση (13) θα ανήκει τώρα στο διάστημα  $(0, 1)$ . Οι κλασματικές νόρμες δεν μπορούν να χαρακτηριστούν νόρμες εν γένει, αφού η τριγωνική ανισότητα δεν είναι εξασφαλισμένη σε όλες τις περιπτώσεις. Στο Σχήμα (15), φαίνονται τα σημεία του χώρου τα οποία απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 1 για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $p$  στη Σχέση (13).

Με όλο αυτό το υπόβαθρο, είναι ιδιαίτερος ενδιαφέρον να δώσουμε τη δυνατότητα στο δίκτυο SOM να εκπαιδευτεί κάνοντας χρήση μη ευκλείδειων νορμών. Και ειδικότερα των κλασματικών νορμών. Ακριβώς αυτό θα γίνει στη συνέχεια.

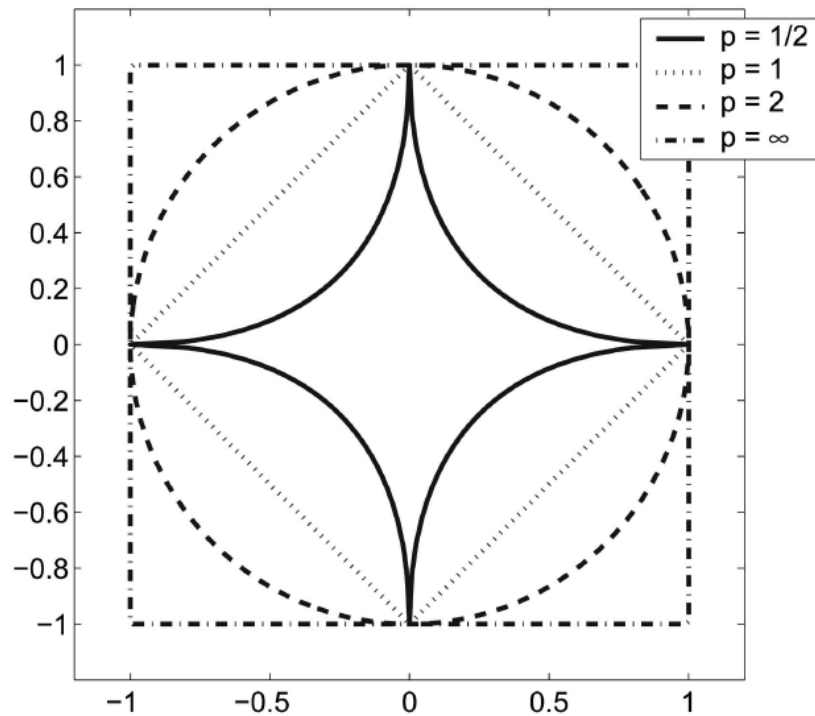
### 5.2 SOM toolbox

#### 5.2.1 Γενικά

Μετά τη γνωριμία με το μοντέλο του αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen που έγινε, θα περάσουμε σε κάποιες εφαρμογές που πραγματοποιήθηκαν στα πλαίσια της πτυχιακής εργασίας. Στην αγορά υπάρχουν πολλά λογισμικά που υλοποιούν τον αλγόριθμο του αυτο-οργανούμενου χάρτη Kohonen και που κάνουν πολύ καλά τη δουλειά τους. Για τις υλοποιήσεις των εφαρμογών που θα πραγματοποιηθούν στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό του SOM Toolbox.

Το SOM Toolbox είναι μία βιβλιοθήκη του Matlab. Είναι, δηλαδή, ένα πακέτο συναρτήσεων που είναι γραμμένο σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab. Δεν αποτελεί τμήμα (μέρος) της επίσημης διανομής του Matlab αλλά προϊόν τρίτων (third party development) και πió συγκεκριμένα δημιουργία (του 1997) των Esa Alhoniemi, Johan Himberg, Juha Parhankangas, Juha Vesanto (συνεργατών του Kohonen). Το ίδιο το λογισμικό Matlab έρχεται μαζί με το neural networks toolbox το οποίο παρέχει και εργαλεία για την υλοποίηση του SOM. Ωστόσο, φέρεται πως ενώ το ίδιο το λογισμικό Matlab είναι ένα εξαιρετικό και με πολλές δυνατότητες εργαλείο για τους επιστήμονες, το neural networks toolbox και η υλοποίηση του SOM που παρείχε υστερούσε. Ήταν μία υλοποίηση που δεν εκμεταλλευόταν τις δυνατότητες του Matlab. Αυτό το κενό κάλυψαν οι εν λόγω ερευνητές/μηχανικοί με τη δημιουργία του λογισμικού SOM Toolbox που διανέμεται με άδεια ελεύθερου λογισμικού. Η επίσημη ιστοσελίδα<sup>4</sup> για να κατεβάσει κανείς το συγκεκριμένο λογισμικό αποδίδεται στο πανεπιστήμιο της Φινλανδίας και μάλιστα στο εργαστήριο στο οποίο ο ίδιος ο Kohonen είναι μέλος. Σε αυτή την ιστοσελίδα, μπορεί να βρει κανείς κείμενα, σε ό,τι αφορά το SOM Toolbox και το SOM, που αποδίδονται στον ίδιο τον Kohonen.

<sup>4</sup><http://www.cis.hut.fi/somtoolbox/>



Σχήμα 15: Διδιάστατα γραφήματα σημείων του χώρου που απέχουν απόσταση 1 από την αρχή των αξόνων για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $p$  στη Σχέση (13) (Francois, Wertz & Verleysen, (2007))

Το ερώτημα πως το SOM Toolbox υλοποιεί τον αλγόριθμο του SOM είναι εύλογο σε αυτό το σημείο. Ποιο συγκεκριμένα, τι αποφάσεις έχουν πάρει οι δημιουργείς του σε έναν αριθμό ζητημάτων, σαν αυτών που έχουν αναφερθεί στην παράγραφο 2.4.1; Ζητήματα που έχουν να κάνουν με επιλογές σε ό,τι αφορά τις παραμέτρους του αλγόριθμου. Παράμετροι όπως, η διάσταση του χώρου εξόδου, ο αριθμός των νευρώνων εξόδου, το σχήμα που θα έχει το πλέγμα του χάρτη, η συνάρτηση γειτνίασης και ο ρυθμός μάθησης. Είναι στο συγκεκριμένο ιστόχωρο που αναφέρθηκε μόλις προηγουμένως, όπου μπορεί κανείς να βρει συνοπτικά τις απαντήσεις σε αυτού του είδους τα ερωτήματα αλλά και σε κάποιες δημοσιεύσεις ((Vesanto, 2000), (Vesanto et al., 2000)) σε ό,τι αφορά το λογισμικό του SOM Toolbox. Κάποιες φορές αυτές οι επιλογές αιτιολογούνται, ενώ κάποιες άλλες πάλι όχι. Το ερώτημα αυτό, έχει να κάνει με τις προκαθορισμένες ρυθμίσεις. Από εκεί και έπειτα, το ίδιο το λογισμικό SOM Toolbox παρέχει και μερικές άλλες επιλογές από τις οποίες μπορούμε να διαλέξουμε και να αλλάξουμε τις προκαθορισμένες αυτές ρυθμίσεις. Ακόμη περισσότερο, καθώς μιλάμε για ένα λογισμικό ανοικτού κώδικα (open source software), θα μπορούσαμε να παρέμβουμε στον ίδιο τον κώδικα και να τροποποιήσουμε κατά το δοκούν τις προκαθορισμένες αυτές τιμές αλλά και τον κώδικα γενικότερα (όπως και έγινε σε κάποιες περιπτώσεις). Κάποιες από τις προκαθορισμένες επιλογές στο SOM Toolbox είναι οι παρακάτω:

- Το πλήθος των νευρώνων του επιπέδου εξόδου είναι  $5 \times \sqrt{n}$ , όπου  $n$  να είναι το πλήθος των δεδομένων εισόδου – παρατηρήσεων που διαθέτουμε.
- Έχουμε εξάγωνο πλέγμα σε ό,τι αφορά την αναπαράσταση των νευρώνων στο επίπεδο Kohonen.
- Χρησιμοποιείται η συνάρτηση Gauss ως συνάρτηση γειτνίασης  $h_{ci} = e^{-\frac{d_{ci}^2}{2r(t)^2}}$ , όπου  $d_{ci}$  είναι η απόσταση μεταξύ των νευρώνων  $c, i$  στο επίπεδο Kohonen και  $r(t)$  είναι η ακτίνα της γειτονιάς στην επανάληψη  $t$  του αλγορίθμου.
- Η παράμετρος της ακτίνα της γειτονιάς καθώς και ο ρυθμός μάθησης του αλγορίθμου είναι και οι δύο φθίνουσες συναρτήσεις σε σχέση με το χρόνο – επανάληψη  $t$ . Σε ό,τι αφορά την ακτίνα, η αρχική της τιμή εξαρτάται από το μέγεθος του χάρτη, ωστόσο η τελική τιμή της είναι πάντοτε 1.

Επίσης, ο αλγόριθμος εκπαίδευσης που επιλέγει να τρέξει το SOM Toolbox σαν προεπιλογή, είναι ο batch training algorithm ή batch algorithm, ο οποίος και συζητήθηκε στην παράγραφο 2.4.3. Ένα από τα πλεονεκτήματα του Matlab είναι αυτό των δυνατοτήτων που έχει σε ό,τι αφορά τα γραφικά του. Ένα από τα πλεονεκτήματα τώρα του ίδιου του αυτο-οργανούμενου χάρτη του Kohonen είναι η δυνατότητα προβολής χώρων που έχουν διάσταση μεγαλύτερη του 3 στη μία, στις δύο ή τρεις διαστάσεις με ταυτόχρονη διατήρηση της τοπολογίας. Η οπτικοποίηση λοιπόν χώρων που δε μπορούμε να αντιληφθούμε λόγω του περιορισμένου των αισθήσεων της ανθρώπινης φύσης, είναι ένα από τα στοιχεία που κάνει το SOM δημοφιλές. Το SOM Toolbox έρχεται λοιπόν, να εκμεταλλευτεί τις δυνατότητες που του παρέχει το ίδιο το Matlab σε ό,τι αφορά τα γραφικά (και όχι μόνο) και παρέχει όλα εκείνα τα απαραίτητα εργαλεία οπτικοποίησης της πληροφορίας που διαθέτει ένα SOM μετά και την ολοκλήρωση της εκπαίδευσής του.

## 5.2.2 Τροποποίηση συναρτήσεων

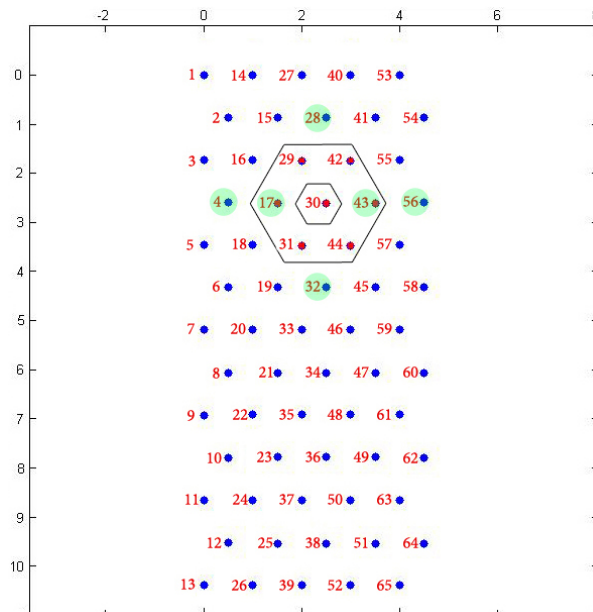
Το περιεχόμενο που παρουσιάζεται εδώ, αφορά στην υλοποίηση της εφαρμογής της παραγράφου 5.3.3. Θα μπορούσε κανείς να επιστρέψει εδώ όταν φτάσει στην παράγραφο 5.3.3. Ωστόσο, το περιεχόμενο που ακολουθεί ταιριάζει να ενταχθεί σε αυτό το υποκεφάλαιο, καθώς αφορά το SOM toolbox.

Προκειμένου να υλοποιηθεί ένα μέρος της εφαρμογής - της έρευνας - χρειάστηκε να τροποποιηθεί σε κάποια σημεία ο κώδικας του SOM toolbox. Σε αυτό το σημείο θα περιγραφούν σύντομα τα κυριότερα σημεία στα οποία τροποποιήθηκε. Αιτία αυτής της τροποποίησης, ήταν η επιθυμία να μπορεί να χρησιμοποιηθεί και κάποια νόρμα διαφορετική της ευκλείδειας ως μέτρο απόστασης μεταξύ των νευρώνων του δικτύου. Το SOM toolbox χρησιμοποιεί την ευκλείδεια απόσταση, χωρίς να δίνει τη δυνατότητα επιλογής μεταξύ κάποιων άλλων μέτρων απόστασης. Τα σημεία στα οποία έγιναν αλλαγές, αναφέρονται αμέσως παρακάτω.

- **som\_make:** Με αυτή τη συνάρτηση δημιουργείται το δίκτυο Kohonen εκ' του μηδενός και παραδίδεται στο τέλος εκπαιδευμένο.
  - **som\_batchtrain:** Η συνάρτηση αυτή πραγματοποιεί την εκπαίδευση του SOM, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο εκπαίδευσης batch training algorithm (που αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.4.3 , εξίσωση 10). Ο batch training algorithm είναι ο προεπιλεγμένος αλγόριθμος εκπαίδευσης που χρησιμοποιείται από το λογισμικό, το οποίο να σημειωθεί πως δίνει και τη δυνατότητα επιλογής μεταξύ κάποιων άλλων αλγορίθμων εκπαίδευσης. Η συνάρτηση som\_batchtrain καλείται λοιπόν στη συνάρτηση som\_make.
    - \* Τροποποιήθηκε ο κώδικας της συνάρτησης αυτής, στα σημεία όπου υπολογίζονται τα BMU κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης του αλγορίθμου. Η συνάρτηση αυτή δεν καλεί κάποια άλλη συνάρτηση για τον υπολογισμό των BMU, παρά υλοποιεί από μόνη της αυτή την εργασία. Αρχικά, προστέθηκε μία μεταβλητή, στα ορίσματα που δέχεται η συνάρτηση, η οποία καθορίζει ποια νόρμα θα χρησιμοποιηθεί. Και στη συνέχεια προστέθηκε ο απαραίτητος κώδικας που πραγματοποιεί τους υπολογισμούς της συνάρτησης, χρησιμοποιώντας την εκάστοτε νόρμα.
  - **som\_quality:** Η συνάρτηση αυτή υπολογίζει το σφάλμα κβαντοποίησης και το τοπογραφικό σφάλμα του εκπαιδευμένου δικτύου Kohonen.
    - \* **som\_bmus:** Η συνάρτηση αυτή καλείται μέσα στο σώμα της som\_quality. Ο ρόλος της είναι να προσδιορίσει ποια είναι τα BMUs κάποιων δεδομένων, καθώς και να υπολογίσει και την απόστασή τους από αυτά. Και εδώ δημιουργήθηκε το απαραίτητο όρισμα εισόδου και τροποποιήθηκαν οι υπολογισμοί των αποστάσεων, έτσι ώστε να χρησιμοποιείται η εκάστοτε νόρμα.
- **som\_autolabel:** Σκοπός της συγκεκριμένης συνάρτησης, είναι να δώσει ετικέτες σε κάθε έναν από τους νευρώνες του εκπαιδευμένου χάρτη. Οι ετικέτες θα δοθούν μέσω της λίστας ορισμάτων της.
  - **som\_bmus:** Η συνάρτηση αυτή καλείται από την som\_autolabel , προκειμένου να βρεθούν τα BMUs των δεδομένων εισόδου και να αποδοθούν σε αυτά ετικέτες βάσει των ετικετών των δεδομένων. Υπολογίζει αποστάσεις μεταξύ νευρώνων και επομένως έπρεπε να τροποποιηθεί. Το είδος της τροποποίησης έχει περιγραφεί παραπάνω.
- **som\_show:** Η λειτουργικότητα της συνάρτησης είναι να παρουσιάσει οπτικά πληροφορίες του δικτύου. Στην εργασία χρησιμοποιήθηκε κατά κόρον η οπτικοποίηση του Umatrix για τα εκπαιδευμένα δίκτυα Kohonen.

- som\_umat: Η συνάρτηση αυτή καλείται στο σώμα της som\_show, στην περίπτωση που επιλέξουμε να υπολογιστεί το γράφημα του Umatrix. Η δημιουργία του γραφήματος αυτού, στηρίζεται στον υπολογισμό αποστάσεων μεταξύ νευρώνων στο χώρο εισόδου. Επομένως, έπρεπε και αυτή η συνάρτηση να τροποποιηθεί. Εφόσον δεν καλεί με τη σειρά της κάποια άλλη συνάρτηση για τον υπολογισμό αποστάσεων, τροποποιήθηκε μόνο η ίδια με τρόπο όμοιο με τις προηγούμενες τροποποιήσεις που έχουν περιγραφεί παραπάνω.

Υπάρχουν κάποιες συναρτήσεις για τις οποίες υπήρξε ιδιαίτερος σκεπτικισμός για το αν θα έπρεπε να τροποποιηθούν ή όχι. Πρόκειται για τις συναρτήσεις som\_unit\_dists και som\_unit\_neighs, από τις οποίες τελικά η πρώτη τροποποιήθηκε και η δεύτερη όχι. Η πρώτη από αυτές, υπολογίζει και επιστρέφει τις αποστάσεις μεταξύ των νευρώνων εξόδου στο επίπεδο του χάρτη. Δρα δηλαδή, στο (διδιάστατο) χώρο εξόδου. Αρχικός αυτή η συνάρτηση δεν είχε τροποποιηθεί, έτσι ώστε να κάνει πάντοτε χρήση της ευκλείδειας νόρμας στον υπολογισμό αυτών των αποστάσεων. Ωστόσο, θεωρήθηκε πως, εφόσον αποφασίζουμε να αλλάξουμε τη μετρική κατά τον υπολογισμό του BMU τότε θα την αλλάξουμε και κατά τον υπολογισμό των αποστάσεων μεταξύ των νευρώνων στο χώρο εισόδου. Η μέθοδος ισχυρίζεται πως όσο μακρύτερα βρίσκεται ένας νευρώνας από το νικητή νευρώνα, τόσο λιγότερο συμμετέχει στο εκάστοτε βήμα στο να μοιάσει στο αντίστοιχο δεδομένο εισόδου του οποίου ο νικητής νευρώνας προσδιορίστηκε. Χρησιμοποιώντας μη ευκλείδειες νόρμες, εμφανίζεται κάποιες φορές η ακόλουθη περίπτωση. Υπάρχουν δύο νευρώνες εξόδου A, B από τους οποίους ο ένας νευρώνας, έστω ο A, είναι άμεσος γείτονας του νικητή νευρώνα C και ο άλλος δεν είναι. Θα περίμενε κανείς, ο νευρώνας A να τροποποιηθεί πιο δραστικά από το B το δικό του βάρος στην προσπάθειά του να μοιάσει στο αντίστοιχο δεδομένο εισόδου. Τεχνικά, το γεγονός αυτό θα υλοποιείτο, με το γεγονός πως η απόστασή του A θα είναι μικρότερη από την απόσταση του B και σε συνδυασμό με τη μορφή του τύπου της συνάρτησης γειτνίασης (συνάρτηση Gauss  $h(q_A, q_C, r, t) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{distance(AC)}{r})^2}$ ). Όταν τροποποιηθεί το μέτρο απόστασης για τον υπολογισμό των αποστάσεων μεταξύ των νευρώνων εξόδου, η παραπάνω αναμενόμενη συμπεριφορά του μοντέλου παύει να συμβαίνει σε όλες τις περιπτώσεις. Δηλαδή, υπάρχουν περιπτώσεις όπου αν και το σημείο B δεν είναι άμεσος γείτονας του νικητή νευρώνα, η απόσταση του από αυτόν είναι μικρότερη από το σημείο A και το οποίο είναι άμεσος γείτονας του νικητή νευρώνα. Κατά αυτό τον τρόπο, το σημείο B θα τείνει να μοιάσει στο εκάστοτε δεδομένο εισόδου με δραστικότερο τρόπο από ότι το σημείο A. Τίθεται λοιπόν το ζήτημα αν κατά αυτό τον τρόπο παρεκκλίνουμε από την αναμενόμενη συμπεριφορά του μοντέλου μάθησης.



Σχήμα 16: Εντός του μεγαλύτερου εξαγώνου και με κόκκινο χρώμα είναι σημειωμένοι οι άμεσοι γείτονες του νευρώνα 30. Με πράσινο χρώμα είναι σημειωμένοι οι 6 κοντινότεροι νευρώνες από το νευρώνα 30 χρησιμοποιώντας τη νόρμα  $\ell_{0.25}$ . Τα δεδομένα εισόδου ανήκουν στο IRIS dataset.

Το συγκεκριμένο ζήτημα που αναφέρθηκε, προκύπτει αν παρατηρήσει κανείς το Σχήμα (16) και τον

πίνακα (1). Σε αυτά, έχουν χρησιμοποιηθεί ως δεδομένα εισόδου το IRIS dataset και έχει εφαρμοστεί η νόρμα  $\ell_{0.25}$  για τον προσδιορισμό των αποστάσεων των νευρώνων στο διδιάστατο χώρο εξόδου. Στο Σχήμα (16) φαίνονται αριθμημένοι οι 65 νευρώνες εξόδου του χάρτη. Εστιάζοντας στο νευρώνα 30, παρατηρούμε πως οι άμεσοι γείτονες του είναι οι νευρώνες 17, 29, 31, 42, 43 και 44. Στον πίνακα (1) διατάσσονται σε αύξουσα σειρά οι 6 μικρότερες αποστάσεις του κόμβου 30 από όλους τους υπόλοιπους κόμβους. Στην πρώτη στήλη φαίνονται οι 6 μικρότερες από αυτές τις αποστάσεις και στη δεύτερη στήλη φαίνεται ο κόμβος στον οποίο αντιστοιχεί η κάθε μια από αυτές τις αποστάσεις. Όπως παρατηρούμε, οι 6 κοντινότεροι νευρώνες (οι 4, 17, 28, 32, 43 και 56) του νευρώνα 30 (πίνακας 1), δεν ταυτίζονται με τους 6 άμεσους γείτονες του νευρώνα 30 (Σχήμα (16)). Αυτό σημαίνει, πως σε περίπτωση που ο νευρώνας 30 θα είναι το BMU για κάποιο δεδομένο εισόδου και κάνοντας χρήση της νόρμα  $\ell_{0.25}$ , τότε για παράδειγμα ο νευρώνας 4 (που δεν είναι άμεσος γείτονας του) θα 'μοιάσει' περισσότερο στο δεδομένο εισόδου από ό,τι θα μοιάσει ο νευρώνας 42 (που είναι άμεσος γείτονας του). Κάνοντας αυτή την παρατήρηση, συνειδητοποιούμε πως, ο αλγόριθμος σε κάποιες περιπτώσεις δε θα εκπαιδεύσει το δίκτυο με τον τρόπο που θεωρητικά περιγράφεται και ταυτοχρόνως γεννάται το ερώτημα αν σε αυτές τις περιπτώσεις παρεκκλίνουμε από το μοντέλο που πρότεινε ο Kohonen.

| Απόσταση | Νευρώνας | Συντεταγμένες    |
|----------|----------|------------------|
| 1.0000   | 17       | (1.5000, 2.5981) |
| 1.0000   | 43       | (3.5000, 2.5981) |
| 1.7321   | 32       | (2.5000, 4.3301) |
| 1.7321   | 28       | (2.5000, 0.8660) |
| 2.0000   | 4        | (0.5000, 2.5981) |
| 2.0000   | 56       | (4.5000, 2.5981) |

Πίνακας 1: 6 μικρότερες αποστάσεις (μετρημένες με νόρμα  $\ell_{0.25}$ ) από το νευρώνα εξόδου 30 (με συντεταγμένες (2.5000 , 2.5981)). Τα δεδομένα εισόδου ανήκουν στο IRIS dataset.

Τέλος, αποφασίστηκε να μην τροποποιηθεί η συνάρτηση `som_unit_neighs`. Αυτή η συνάρτηση, προσδιορίζει ποιοι νευρώνες είναι άμεσοι γείτονες (ακτίνα γειτονιάς 1) καθενός από τους νευρώνες εξόδου. Για το σκοπό αυτό, δεν είναι απαραίτητο να πραγματοποιήσει τους υπολογισμούς των αποστάσεων με την εκάστοτε μη ευκλείδεια νόρμα που θα χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος εκπαίδευσης. Είναι αρκετό, η συνάρτηση αυτή απλώς και μόνο να επιστρέφει αξιόπιστα αποτελέσματα σχετικά με τη γειτονιά του κάθε νευρώνα, το οποίο και πραγματοποιεί εξαιρετικά, κάνοντας χρήση της ευκλείδειας νόρμας. Και επειδή εδώ η ευκλείδεια νόρμα συνεργάζεται άψογα με το υπόλοιπο σώμα της συνάρτησης `som_unit_neighs`, δεν θα αλλάξει.

### 5.3 Μελέτη περίπτωσης Iris dataset

Σε αυτό το σημείο θα ξεκινήσει η διαδικασία της έρευνας. Το κομμάτι εκείνο που θα μελετηθεί, αφορά το μέτρο απόστασης που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος του SOM προκειμένου να βρει το BMU. Ο βασικός αλγόριθμος εκπαίδευσης χρησιμοποιεί την ευκλείδεια απόσταση. Το σχεπτικό, είναι να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος ως έχει (κάνοντας δηλαδή χρήση της ευκλείδειας νόρμας οπουδήποτε χρειάζεται υπολογισμός αποστάσεων μεταξύ νευρώνων) και να εκπαιδευτεί με αυτόν ένα SOM πάνω σε ένα dataset. Στη συνέχεια, θα εντοπιστεί μέσα στον κώδικα το σημείο όπου γίνεται εφαρμογή της ευκλείδειας απόστασης και θα προστεθεί στον κώδικα η επιλογή ο χρήστης να μπορεί να επιλέξει μεταξύ κάποιων άλλων μέτρων απόστασης.

Το dataset που θα χρησιμοποιηθεί σε αυτή τη μελέτη, είναι το πολύ γνωστό στο χώρο IRIS dataset. Η επιλογή αυτή έγινε με κριτήριο το ότι έχει γίνει εκτενής χρήση του συγκεκριμένου dataset, σε ό,τι αφορά τη μέθοδο της συσταδοποίησής του (*clustering*) χρησιμοποιώντας την ευκλείδεια απόσταση σα μέτρο απόστασης στον αλγόριθμο εκπαίδευσης. Φαίνεται πως είναι ένα πολύ καλό πακέτο δεδομένων για την παρουσίαση της μεθόδου της συσταδοποίησης, καθώς η εικόνα που δίνει είναι σαφής και καθαρή. Στο διαδίκτυο υπάρχει πλήθος αναφορών σε αυτό. Από όλα τα παραπάνω, καταλαβαίνει κανείς πως η εικόνα που αναμένεται να πάρουμε (με χρήση της ευκλείδειας απόστασης) κατά τη συσταδοποίησή του είναι προβλέψιμη, αφού έχει ήδη μελετηθεί εκτενώς.

Σαν πρώτο βήμα αυτής της μελέτης είναι να γίνει βέβαιο πως έχει γίνει κατανοητό το λογισμικό του SOM toolbox που θα χρησιμοποιηθεί. Δηλαδή, αρχικός σκοπός είναι να δειχθεί πως μπορεί να εκπαιδευτεί ορθά ένα SOM πάνω στο IRIS dataset και το οποίο θα δώσει πράγματι την εικόνα που αναμένεται, κάνοντας πάντα χρήση του προκαθορισμένου μέτρου απόστασης που διαθέτει το SOM toolbox, την ευκλείδεια απόσταση.

### 5.3.1 SOM χρησιμοποιώντας νόρμα $\ell_2$ (ευκλείδεια απόσταση)

Στην πιο απλή περίπτωση του, μπορούμε να εκπαιδεύσουμε ένα SOM και να οπτικοποιήσουμε κάποια δεδομένα του εκπαιδευμένου δικτύου που μας ενδιαφέρουν, χρησιμοποιώντας τις προκαθορισμένες παραμέτρους που παρέχει το ίδιο το πακέτο του SOM toolbox για τις διάφορες ρυθμίσεις του μοντέλου. Ο χρήστης σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να χρησιμοποιήσει το παρακάτω script, το οποίο και στη συνέχεια θα εξηγηθεί:

```
1 clf reset;
2 figure(gcf)
3 clc
4 colormap(1-gray)
5 sDiris = som_read_data('myIris.data');
6 sMap = som_make(sDiris);
7 som_show(sMap)
```

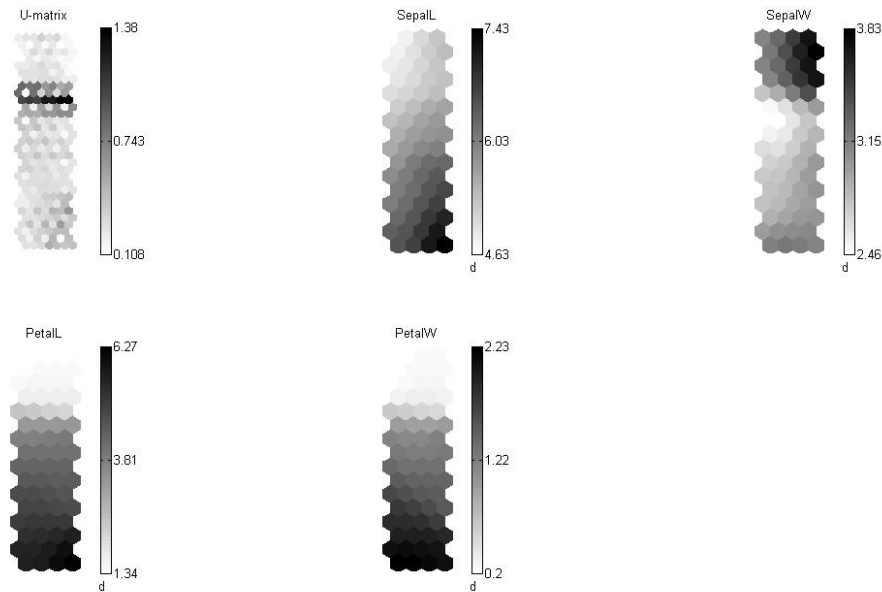
Η εξήγηση του παραπάνω script, σε ό,τι αφορά κώδικα που έχει να κάνει με συναρτήσεις του SOM toolbox, ακολουθεί:

- `som_read_data('myIris.data')`: Η συνάρτηση `som_read_data` διαβάζει το αρχείο `myIris.data` στο οποίο είναι αποθηκευμένα τα δεδομένα του IRIS dataset. Για να μπορέσει να διαβάσει η παραπάνω συνάρτηση όλη την πληροφορία των δεδομένων από το αρχείο, θα πρέπει το αρχείο να είναι σε συγκεκριμένο format - το λεγόμενο SOM.PAK format. Επιστρέφει ένα struct (μία δομή δεδομένων) τύπου `som_data`. Το επιστρεφόμενο struct, περιέχει όχι μόνο τα δεδομένα μας, αλλά και άλλου είδους χρήσιμες πληροφορίες που χρησιμοποιούνται εσωτερικά από άλλες συναρτήσεις.
- `som_make(sDiris)`: Η συνάρτηση `som_make` δημιουργεί, αρχικοποιεί και εκπαιδεύει έναν αυτο-οργανούμενο χάρτη Kohonen με βάση τα δεδομένα που δέχεται σαν όρισμα εισόδου. Δέχεται σαν είσοδο τα δεδομένα του χώρου εισόδου του δικτύου σε μορφή ενός struct (μία δομή δεδομένων) τύπου `som_data`. Οι παράμετροι του μοντέλου που δημιουργεί, είναι οι προκαθορισμένες παράμετροι του λογισμικού με βάση τα δεδομένα που δώθηκαν σαν είσοδο. Επιστρέφει μία δομή δεδομένων (*struct*) τύπου `som_map` που περιέχει τον εκπαιδευμένο χάρτη.
- `som_show(sMap)`: Η συνάρτηση `som_show` δέχεται σαν είσοδο τον εκπαιδευμένο χάρτη του δικτύου σε μορφή ενός struct τύπου `som_map`. Οπτικοποιεί μέρος από τα δεδομένα του εκπαιδευμένου χάρτη με τη μορφή 2 ειδών προκαθορισμένων γραφημάτων, τα οποία φαίνονται στο Σχήμα (17). Συγκεκριμένα, σχεδιάζονται ο πίνακας U-matrix καθώς επίσης και τα λεγόμενα component planes (ένα component plane για κάθε μεταβλητή του χώρου εισόδου). Για το γράφημα του U-matrix, το οποίο και θα μας απασχολήσει στη συνέχεια της εργασίας θα μιλήσουμε σε λίγο. Τώρα σε ό,τι αφορά το component plane, αυτό παρουσιάζει την τιμή μίας μόνο συγκεκριμένης μεταβλητής σε κάθε νευρώνα - μονάδα (unit) - του χάρτη. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο χώρος εισόδου του δικτύου είναι τετραδιάστατος και επομένως προκύπτουν 4 component planes.

Στον εκπαιδευμένο χάρτη που προκύπτει, θα μας απασχολήσει η παρατήρηση του γραφήματος του U-matrix. Για το σκοπό αυτό, στο Σχήμα (18α'), φένεται το προηγούμενο γράφημα του εκπαιδευμένου SOM από λίγο πιο κοντά. Συγκεκριμένα θα ξαναεμφανιστεί το U-matrix του δικτύου δίπλα στο γράφημα του επιπέδου εξόδου του SOM. Το Σχήμα (18α') προέκυψε από την προσθήκη κάποιων παραμέτρων στην κλήση της συνάρτησης `som_show` στο αμέσως πιο πάνω script που παρήγαγε το γράφημα στο Σχήμα (17). Η ζητούμενη κλήση της συνάρτησης `som_show` είναι:

```
som_show(sMap, 'umat', 'all', 'empty', 'neurons of output space')
```

Παρατηρώντας στο Σχήμα (18α') το γράφημα του U-matrix και το πλέγμα των νευρώνων του επιπέδου εξόδου, θα εξηγήσουμε μία απορία που προκύπτει. Αυτό που γνωρίζουμε για τον U-matrix είναι πως μας δείχνει για κάθε νευρώνα του χάρτη τη μέση απόσταση αυτού του νευρώνα από τους γειτονικούς του νευρώνες. Πετυχαίνει λοιπόν αυτόν το σκοπό με τη χρήση χρωμάτων, όπου κάθε απόχρωση αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή απόστασης. Αυτή την αντιστοίχιση, μπορεί κανείς να τη βρει δίπλα ακριβώς από το γράφημα, στη χρωματική μπάρα μαζί με τις ενδείξεις τιμών απόστασης που το κάθε χρώμα αντιπροσωπεύει. Ωστόσο, παρατηρώντας από κοντά το γράφημα του U-matrix φαίνεται καθαρά πως τα εξάγωνα – νευρώνες –



Σχήμα 17: Οπτικοποίηση εκπαιδευμένου SOM για το IRIS dataset, χρησιμοποιώντας τις προκαθορισμένες παραμέτρους του SOM toolbox.

είναι περισσότερα από τους νευρώνες του επιπέδου εξόδου. Στο συγκεκριμένο γράφημα, το γράφημα του U-matrix έχει διάσταση  $31 \times 7$  (217 εξάγωνα), ενώ το επίπεδο εξόδου του χάρτη αποτελείται από 64 νευρώνες σε διάταξη  $16 \times 4$ . Γιατί λοιπόν συμβαίνει αυτό; Η απάντηση βρίσκεται στο ότι ο U-matrix απεικονίζει όχι μόνο τη μέση απόσταση ενός νευρώνα από τους γειτονικούς του, αλλά και την επιμέρους απόσταση του από τον κάθε γείτονά του. Και αυτό το πετυχαίνει με το να εισάγει άλλη μία σειρά νευρώνων μεταξύ δύο σειρών του επιπέδου εξόδου και άλλη μία στήλη μεταξύ δύο στηλών. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν τα επιπλέον εξάγωνα – νευρώνες – του γραφήματος U-matrix και τα οποία αντιπροσωπεύουν την απόσταση (στο χώρο εισόδου) των δύο νευρώνων μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο κάθε επιπλέον εξαγωνικός νευρώνας. Για αυτό το σκοπό έχει φτιαχτεί το Σχήμα (18β') όπου με κόκκινο χρώμα βρίσκονται οι πραγματικοί νευρώνες του χάρτη ( που το χρώμα τους αντιπροσωπεύει τη μέση απόσταση, στο χώρο εισόδου, αυτού του νευρώνα από τους γειτονικούς του νευρώνες) και τα υπόλοιπα εξάγωνα που περισσεύουν είναι αυτά που προστέθηκαν (η απόχρωση του γρι του κάθε επιπλέον εξαγωνικού νευρώνα αντιστοιχεί στην απόσταση στο χώρο εισόδου των δύο νευρώνων που βρίσκονται εκατέρωθέν του). Για τη δημιουργία των κόκκινων αναγνωριστικών των νευρώνων στο Σχήμα (18β'), προστέθηκαν στον παραπάνω κώδικα αμέσως μετά την κλήση της συνάρτησης `som_show`, οι παρακάτω 3 γραμμές κώδικα:

```
h=som_hits(sMap,sDiris);
h=ones(size(h));
som_show_add('hit', h(:), 'markercolor', 'r', 'markersize', 0.2, 'subplot','all')
```

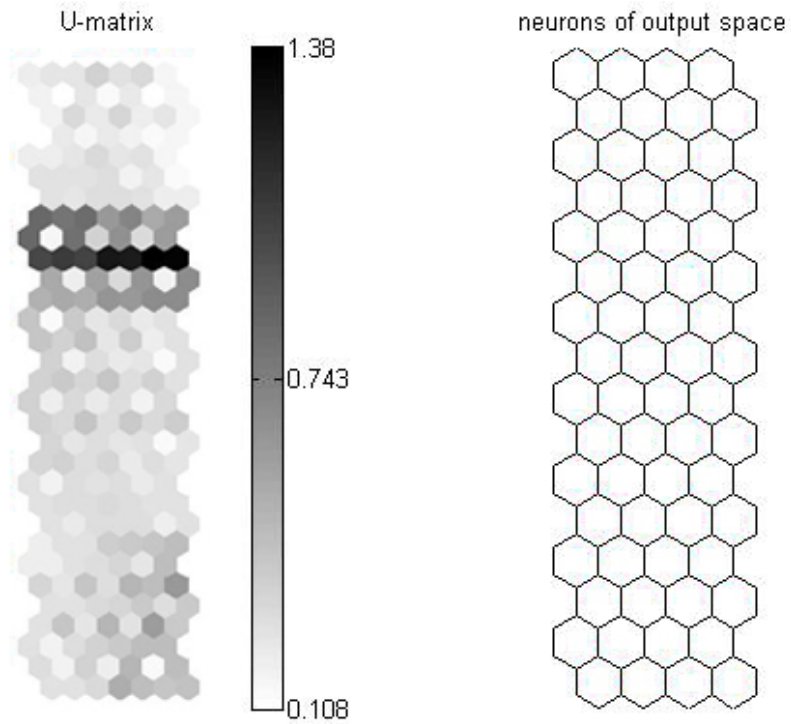
Η συνάρτηση `som_hits` είναι μία συνάρτηση του SOM toolbox που υπολογίζει για κάθε νευρώνα εξόδου, του εκπαιδευμένου δικτύου, πόσα από τα δεδομένα εισόδου μοιάζουν περισσότερο σε αυτόν. Στη συνέχεια η συνάρτηση `som_show_add`, που και αυτή είναι συνάρτηση του SOM toolbox, χρησιμοποιείται για να προσθέσει κάποια επιπλέον στοιχεία στο αρχικό-βασικό γράφημα που έχει παραχθεί με την κλήση της `som_show`. Ενδιαφέρει να παρουσιαστεί στο αρχικό γράφημά για κάθε νευρώνα εξόδου το πλήθος των δεδομένων εισόδου που αυτός 'κερδίζει' (hits). Ουσιαστικά όμως, αφού θέτουμε ρητά ότι κάθε νευρώνας θα έχει ακριβώς ένα δεδομένο στο οποίο "μοιάζει" περισσότερο (`h=ones(size(h));`), επιτυγχάνεται καταρχάς κάθε νευρώνας να έχει κόκκινο στίγμα (αφού έχει τουλάχιστον ένα δεδομένο εισόδου που είναι περισσότερο όμοιο σε αυτόν) και ακόμη όλα τα στίγματα να έχουν το ίδιο μέγεθος (αφού έχει ακριβώς ένα τέτοιο όμοιο δεδομένο που του αντιστοιχίζεται). Και είναι ακριβώς αυτό που επιθυμούμε να κάνουμε, έτσι ώστε να φανερωθεί το που

βρίσκονται όλοι οι νευρώνες εξόδου. Εξασφαλίζεται δηλαδή ότι κάθε νευρώνας θα εμφανιστεί σημαδεμένος με μία κόκκινη βούλα, αφού θα έχει ακριβώς ένα δεδομένο εισόδου το οποίο θα 'μοιάζει' περισσότερο σε αυτόν.

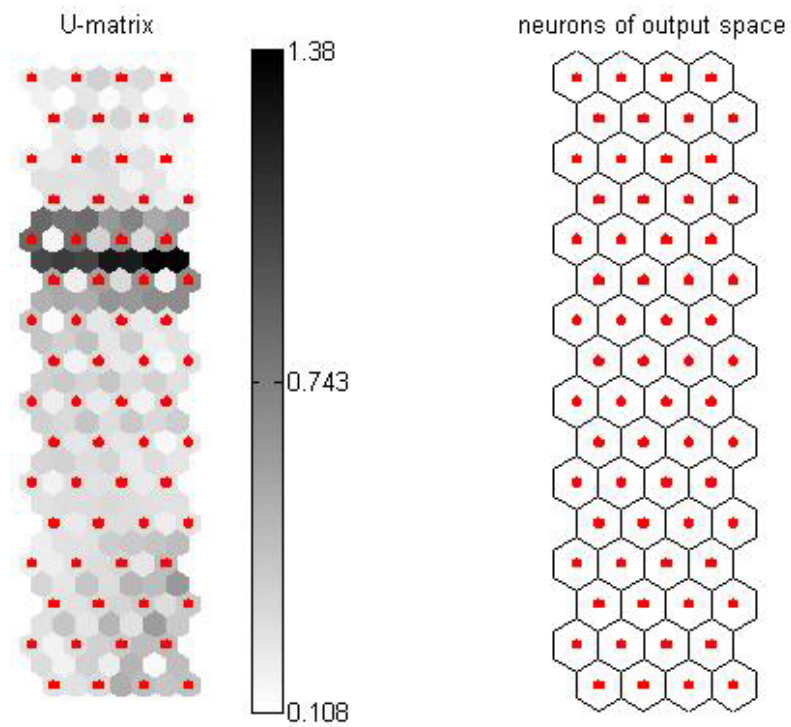
Τις περισσότερες φορές ενδείκνυται να κανονικοποιούμε τα δεδομένα πριν ξεκινήσουμε να εκπαιδεύουμε το δίκτυο. Με αυτό τον τρόπο πετυχαίνουμε να μην αφήσουμε μία μεταβλητή να κυριαρχήσει στον υπολογισμό των αποστάσεων μεταξύ των νευρώνων κατά τη διαδικασία εύρεσης του BMU, στην περίπτωση που αυτή η μεταβλητή παίρνει τιμές πολύ μεγαλύτερες σε σχέση με τις τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών των δεδομένων. Το SOM toolbox παρέχει έναν τέτοιο αυτοματισμό και δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε μεταξύ πέντε μεθόδων κανονικοποίησης (variance normalization, normalization of range of values, logarithmic normalization, logistic or softmax normalization, discrete histogram equalization, continuous histogram equalization). Στο Σχήμα (19) παρουσιάζεται ο U-matrix του δικτύου στην περίπτωση που εφαρμοστεί γραμμική κανονικοποίηση στα δεδομένα. Για να επιτευχθεί αυτό προγραμματιστικά, χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση `som_normalize` του SOM toolbox. Συγκεκριμένα, κλήθηκε η γραμμή κώδικα `sDiris = ... som_normalize(sDiris, 'range');`, αμέσως μετά την κλήση της συνάρτησης `som_read_data` του αρχικού script της παραγράφου 5.3.1. Συγκρίνοντας τα σχήματα των U-matrix (Σχήμα (18α') και Σχήμα (19)) μεταξύ τους, τρία πράγματα παρατηρούμε.

1. Η κλίμακα στην κάθετη μπάρα που υποδεικνύει την τάξη μεγέθους της απόστασης που αντιπροσωπεύει το κάθε χρώμα, είναι διαφορετική. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, αφού μετά την κανονικοποίηση των δεδομένων, αυτά πλέον είναι διαφορετικά από τα αρχικά σε ό,τι αφορά τη θέση τους στο χώρο εισόδου.
2. Τα γραφήματα των U-matrix φαίνεται πως έχουν αντίστοιχους χρωματισμούς στις αντίστοιχες θέσεις. Υπάρχει πολύ μεγάλη ομοιότητα στις δύο περιπτώσεις και κάποιος μπορεί να ισχυριστεί πως είναι ισοδύναμα. Παρά την αλλαγή, δηλαδή, των τιμών των μεταβλητών κάθε δεδομένου εισόδου μέσω της κανονικοποίησης, η μεταξύ τους σχετική απόσταση και θέση έχει διατηρηθεί. Το γεγονός αυτό καθρεφτίζεται από την αντιπαράβολή αυτών των δύο γραφημάτων U-matrix.
3. Είναι φανερό, πως στα δύο σχήματα οι διαστάσεις των U-matrix είναι διαφορετικές. Αυτό αντικατοπτρίζει το γεγονός πως η διάσταση του πλέγματος των νευρώνων είναι διαφορετική και πιθανός και ο συνολικός αριθμός των νευρώνων του χάρτη να είναι διαφορετικός. Για το σκοπό αυτό, στο ίδιο σχήμα έχει απεικονιστεί και το εξαγωνικό πλέγμα των νευρώνων που αντιστοιχεί στην κάθε περίπτωση. Φαίνεται λοιπόν ότι, αρχικά το πλέγμα είναι διάστασης  $16 \times 4$  (64 νευρώνες - units), ενώ μετά την κανονικοποίηση των δεδομένων ο προκαθορισμένος αλγόριθμος του SOM toolbox επιλέγει ένα πλέγμα διάστασης  $13 \times 5$  (65 νευρώνες - units) για το πλέγμα του χάρτη.

Αυτό που ενδιαφέρει σε αυτό το σημείο, είναι να συγκριθεί η εικόνα που δίνουν τα γραφήματα των U-matrix στην περίπτωση των κανονικοποιημένων δεδομένων και των μη κανονικοποιημένων. Όπως προαναφέραμε και στην παρατήρηση 2, τα δύο γραφήματα παρουσιάζουν όμοια εικόνα σε ό,τι αφορά την τοπολογία του συνόλου δεδομένων IRIS dataset. Αυτό προκύπτει εμφανώς από την ομοιότητα των διαβαθμίσεων του γκρι στις αντίστοιχες περιοχές των δύο γραφημάτων. Θα επιθυμούσαμε ωστόσο, τα δύο γραφήματα των U-matrix να είχαν μεταξύ τους την ίδια διάσταση. Αυτό θα καθιστούσε την οπτική σύγκρισή πιο εύκολη. Για το σκοπό αυτό, θα εκπαιδευτεί άλλο ένα δίκτυο Kohonen κανονικοποιώντας τα δεδομένα με τον ίδιο τρόπο όπως και πριν, θέτοντας όμως αυτή τη φορά ρητά τη διάσταση του επιπέδου Kohonen. Το SOM toolbox δίνει αυτή τη δυνατότητα. Η διάσταση που θα επιλεγεί είναι η διάσταση του χάρτη στο Σχήμα (18α'), δηλαδή  $16 \times 4$ . Για την πραγματοποίηση της παραπάνω απαίτησής, η μόνη τροποποίηση στο script που χρειάζεται να γίνει είναι στο σημείο της κλήσης της συνάρτησης `som_make`. Η συγκεκριμένη συνάρτηση θα πρέπει αυτή τη φορά να κληθεί με την προσθήκη ενός ακόμη ζευγαριού ορισμάτων τύπου 'όρισμα' – 'τιμή' ως εξής: `som_make(sDiris, 'msize', [16 4]);`. Μετά την εκπαίδευση του δικτύου, προκύπτει το γράφημα του U-matrix που φαίνεται στο Σχήμα (20).

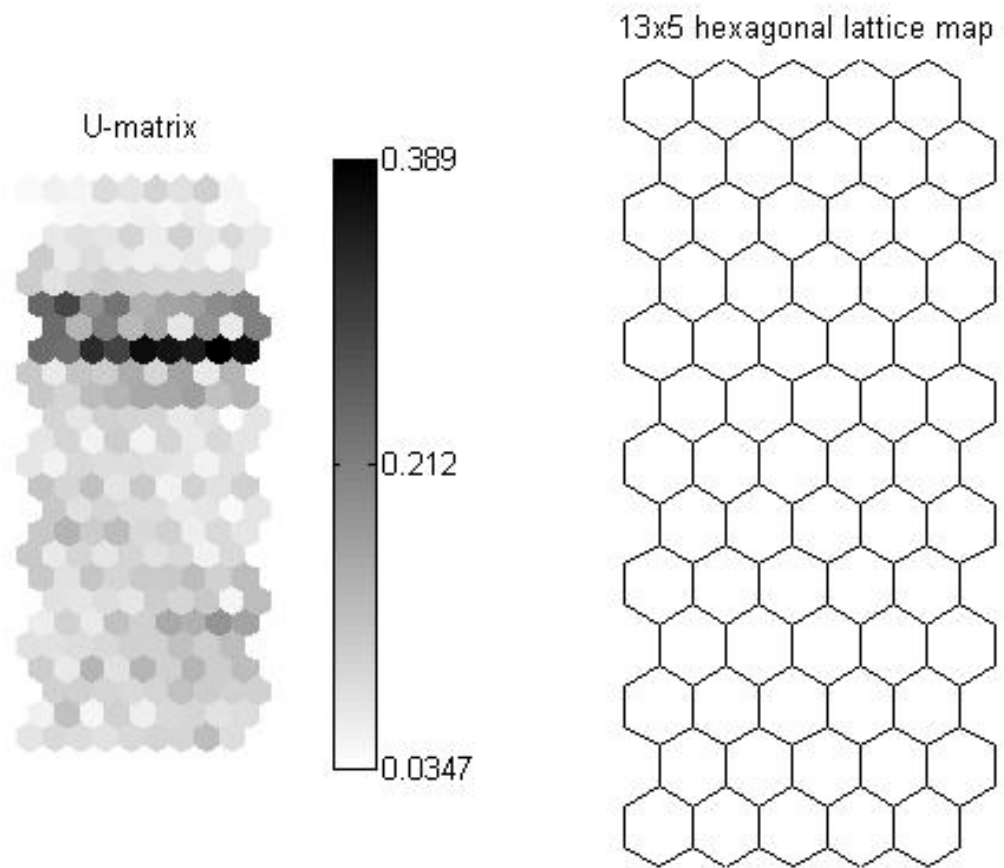


(α') εξαγωνικό πλέγμα  $31 \times 7$  και  $16 \times 4$  αντιστοίχως

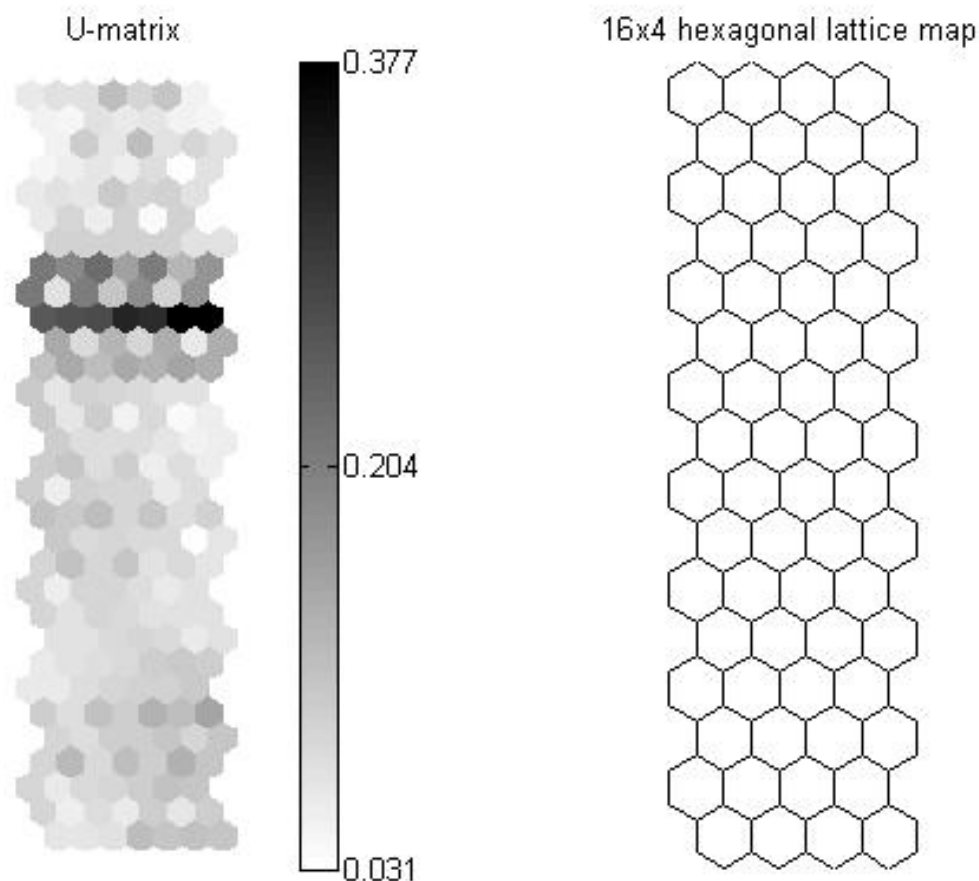


(β') εξαγωνικό πλέγμα  $31 \times 7$  και  $16 \times 4$  αντιστοίχως

Σχήμα 18: Οπτικοποίηση εκπαιδευμένου SOM για το IRIS dataset, χρησιμοποιώντας τις προκαθορισμένες παραμέτρους του SOM toolbox.

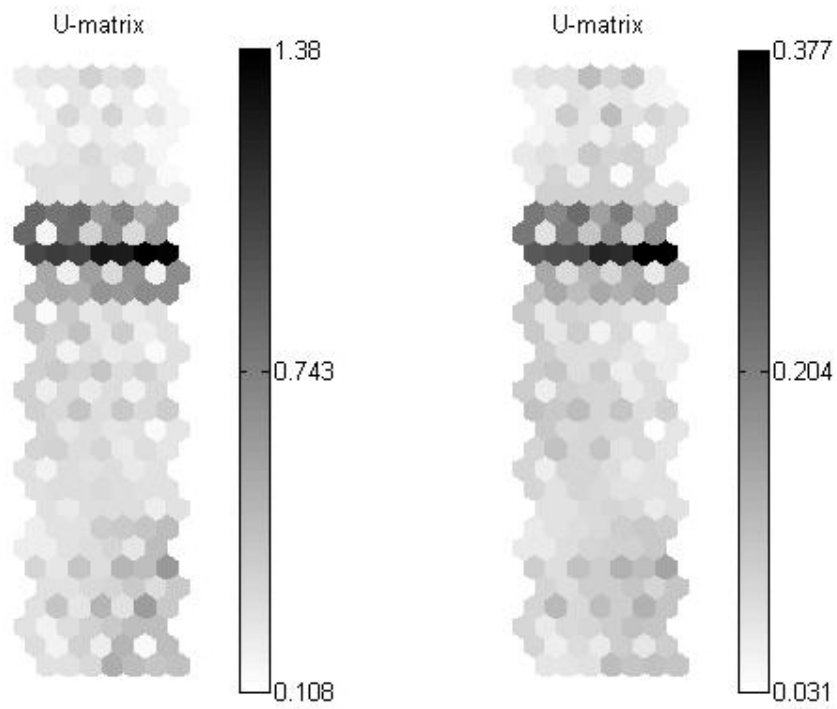


Σχήμα 19: Οπτικοποίηση εκπαιδευμένου SOM με κανονικοποιημένο IRIS dataset, χρησιμοποιώντας τις προκαθορισμένες παραμέτρους του SOM toolbox

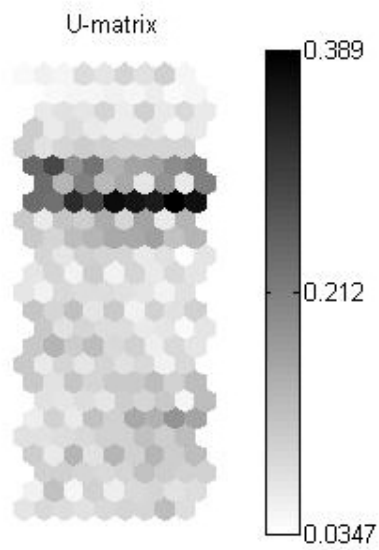


Σχήμα 20: Οπτικοποίηση εκπαιδευμένου SOM με κανονικοποιημένο IRIS dataset, και διάσταση χάρτη  $16 \times 4$

Τα παραπάνω αποτελέσματα των U-matrix φαίνονται συγκεντρωτικά στο Σχήμα (21). Από την οπτική παρατήρησή τους, γίνεται αντιληπτό πως το μοτίβο που σχηματίζεται σε αυτά είναι κοινό. Πρόκειται για την αναπαράσταση στις 2 διαστάσεις της τοπολογίας του τετραδιάστατου χώρου εισόδου του IRIS dataset. Στο συγκεκριμένο dataset λοιπόν, είτε κανονικοποιήσουμε τα δεδομένα, είτε όχι, είτε τοποθετήσουμε τους νευρώνες εξόδου σε διάταξη  $16 \times 4$ , είτε σε διάταξη  $13 \times 5$ , αποκαλύπτεται η ίδια χαρακτηριστική εικόνα όπως παρατηρείται στο Σχήμα (21). Η διαφορά στις αποχρώσεις του γκρι σε αντίστοιχες περιοχές των 3 δικτύων αυτού του σχήματος είναι πολύ μικρή και δεν δημιουργείται κάποια αντίφαση μεταξύ τους. Όχι μόνο αντίφαση δε δημιουργείται, αλλά ενισχύεται η αντίληψή για τη μορφή της τοπολογίας του συγκεκριμένου dataset.



(α')  $31 \times 7$  ( $16 \times 4$ ) μη-κανονικοποιημένα δεδομένα (β')  $31 \times 7$  ( $16 \times 4$ ) (γραμμικά) κανονικοποιημένα δεδομένα



(γ')  $25 \times 9$  ( $13 \times 5$ ) (γραμμικά) κανονικοποιημένα δεδομένα

Σχήμα 21: Οπτική σύγκριση των U-matrix

Παρότι μεγάλη η ομοιότητα ανάμεσα στο Σχήμα (21α') και το Σχήμα (21β') (και του (21γ')), για ποιο λόγο δεν είναι πανομοιότυπα; Η πιθανότερη απάντηση βρίσκεται στο ότι, α) έχουμε να κάνουμε με διαφορετική αρχικοποίηση στο χώρο εισόδου των units σε κάθε εκπαίδευση ενός νέου δικτύου, και β) στην περίπτωση κανονικοποιημένων και μη κανονικοποιημένων δεδομένων οι τιμές αντίστοιχων δεδομένων του IRIS dataset είναι διαφορετικές σε ό,τι αφορά την τιμή τους (ωστόσο διατηρούνται οι μεταξύ τους σχέσεις-αναλογίες, αυτό είναι και το νόημα άλλωστε της διαδικασίας της κανονικοποίησης). Τα παραπάνω δύο γεγονότα έχουν σαν αποτέλεσμα να οδηγηθεί η εκπαίδευση του δικτύου σε ελαφρώς διαφορετικές τελικές καταστάσεις. Το σημαντικό, ωστόσο, είναι ότι όλες οι παραπάνω περιπτώσεις αποκαλύπτουν το ίδιο μοτίβο και αυτό είναι που κρατάμε σαν καρπό της παραπάνω προσπάθειας.

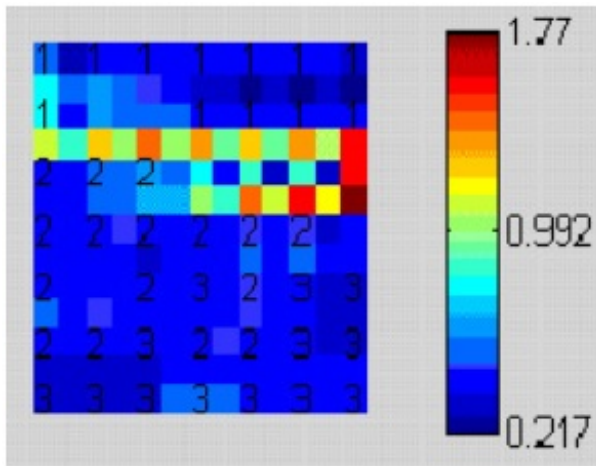
Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα εξάγονται χρησιμοποιώντας το batch algorithm για την εκπαίδευση του δικτύου. Ποια θα είναι τα αντίστοιχα αποτελέσματα εάν χρησιμοποιήσουμε τον κλασικό αλγόριθμο;

### 5.3.2 Έλεγχος ορθότητας μεθόδου εκπαίδευσης

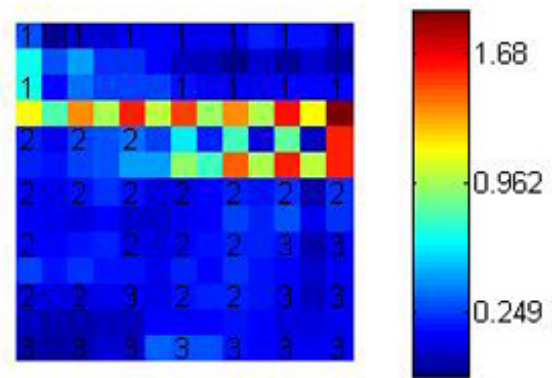
Πριν περάσουμε στο τελευταίο κομμάτι της εργασίας, θα κάνουμε σε αυτό το σημείο ένα σύντομο έλεγχο. Ο έλεγχος αυτός αφορά την ορθότητα των βημάτων που ακολουθούνται για την εκπαίδευση του δικτύου Kohonen με σημείο αναφοράς το IRIS dataset. Έχοντας δει και εξηγήσει το γράφημα του Unified Distance Matrix, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε έτσι ώστε να επιβεβαιώσουμε-ελέγξουμε ότι πράγματι ο κώδικας που χρησιμοποιείτε για την εκπαίδευση του εκάστοτε δικτύου Kohonen είναι ορθός. Σύμφωνα με τη δημοσίευση των Stefanovic & Kurasova (Stefanovic & Kurasova, 2011) στην οποία γίνεται χρήση του SOM toolbox και απεικονίζεται το γράφημα του U-matrix για το IRIS dataset. Το γράφημα αυτό της δημοσίευσης (Σχήμα (22α')), θα είναι το γράφημά αναφοράς με βάση το οποίο θα συγκριθεί το γράφημα του U-matrix που θα παραχθεί στην παρούσα εργασία. Από την παρατήρησή του, είναι ξεκάθαρο πως, έχουμε να κάνουμε με ένα δίκτυο Kohonen στο οποίο το πλέγμα είναι τετραγωνικό και η διάστασή του  $7 \times 7$  (δηλ. συνολικά 49 νευρώνες εξόδου). Για το σκοπό αυτό θα εκπαιδεύσουμε με τη βοήθεια του SOM toolbox ένα δίκτυο Kohonen με τις παραπάνω παραμέτρους (διάστασης  $7 \times 7$ , 49 νευρώνες εξόδου, τετραγωνικό πλέγμα) και θα το συγκρίνουμε με το δίκτυο που έχει προκύψει στη δημοσίευση που προαναφέραμε. Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία του εκπαιδευμένου δικτύου Kohonen με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, φαίνεται αμέσως παρακάτω:

```
1 clear;
2 clf reset;
3 figure(gcf)
4 clc
5 sDiris = som.read.data('myIris.data');
6 sDiris = som.normalize(sDiris, 'var');
7 sMap = som.make(sDiris, 'munits', 49, 'msize', [7 7], 'lattice', 'rect');
8 som.show(sMap, 'umat', 'all')
9 sMap = som.autolabel(sMap, sDiris, 'vote');
10 sMap = my_som_convert_label_to_int(sMap);
11 som.show_add('label', sMap, 'SubPlot', [1])
```

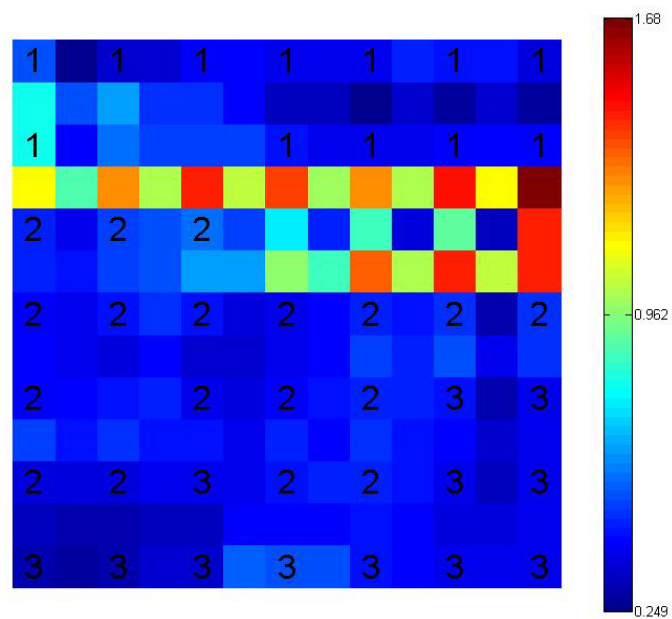
Στο Σχήμα (22) φαίνεται το γράφημα αναφοράς του U-matrix (Σχήμα (22α')) και ο U-matrix που προέκυψε από τη μέθοδο εκπαίδευσης δικτύων που εφαρμόστηκε στην εργασία κάνοντας χρήση του SOM toolbox (Σχήμα (22β') και Σχήμα (22γ')). Διά μέσου της οπτικής παρατήρησης τους, φαίνεται καθαρά πως πρόκειται για το ίδιο μοτίβο που αποκαλύπτεται. Όχι μόνο είναι το μοτίβο ίδιο, αλλά και οι αποχρώσεις των περιοχών του πλέγματος είναι όμοιες. Βλέπουμε λοιπόν, πως σχεδόν σε όλη την έκταση του σχήματος αναφοράς (Σχήμα (22α')) υπάρχει μια ομοιομορφία στις αποστάσεις μεταξύ γειτονικών νευρώνων και οι οποίες αποστάσεις είναι μικρές. Αυτή η ομοιομορφία όμως διαταράσσεται όπως φαίνεται λίγο πάνω από το μέσο του γραφήματος αυτού. Εκεί παρουσιάζεται μία συνεχόμενη περιοχή διαφορετικού χρωματισμού. Ο χρωματισμός αυτός, υποδηλώνει αποστάσεις αρκετά μεγαλύτερες μεταξύ των νευρώνων που βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής της περιοχής. Με αυτό τον τρόπο δημιουργείται ένα 'σύνορο', που υποδηλώνεται από τις αποχρώσεις του τετραγωνικού πλέγματος (αποχρώσεις που αντιστοιχούν σε μεγάλες αποστάσεις μεταξύ γειτονικών νευρώνων) και που χωρίζει τους νευρώνες σε δύο ομάδες νευρώνων. Μία ομάδα είναι αυτή που αποτελείται από τους νευρώνες που βρίσκονται πάνω από τη διαχωριστική αυτή γραμμή και άλλη μία ομάδα αυτή με τους νευρώνες που βρίσκονται από κάτω αυτής. Αυτό ακριβώς το μοτίβο, με τις ίδιες ακριβώς αποχρώσεις, εμφανίζεται και στο γράφημα του U-matrix που κατασκευάστηκε στην εργασία τούτη (Σχήμα (22β') και Σχήμα (22γ')). Αυτό σημαίνει πως, μέχρι τώρα η μέθοδος συμφωνεί με το γράφημα αναφοράς και



(α') Εκπαιδευμένο δίκτυο Kohonen αναφοράς



(β') Εκπαιδευμένο δίκτυο Kohonen προς έλεγχο



(γ') Εκπαιδευμένο δίκτυο Kohonen προς έλεγχο (σε μεγέθυνση)

Σχήμα 22: Οπτική σύγκριση των  $13 \times 13$  ( $7 \times 7$ ) U-matrix για έλεγχο ορθότητας μεθόδου εκπαίδευσης που εφαρμόζεται (στο IRIS dataset) κάνοντας χρήση του SOM toolbox

ενισχύεται έτσι ο ισχυρισμός ότι η μέθοδος που ακολουθείτε στην πτυχιακή είναι ορθή.

Στο γράφημα αναφοράς παρουσιάζεται μια ακόμη πληροφορία. Πρόκειται για τις ετικέτες 1,2,3 που έχουν αντιστοιχηθεί σε κάθε unit. Αυτή η πληροφορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν επιπλέον έλεγχο του αντιστοιχίου αποτελέσματος της πτυχιακής. Μετά την εκπαίδευση του δικτύου, τα δεδομένα του IRIS dataset ένα – ένα αντιστοιχήθηκαν σε εκείνον τον νευρώνα εξόδου από τον οποίο απέχουν λιγότερο. Έτσι σε κάθε νευρώνα εξόδου αντιστοιχούν είτε ένα από τα δεδομένα εισόδου, είτε περισσότερα από ένα, είτε κανένα. Στην περίπτωση που του αντιστοιχεί μόνο ένα δεδομένο, τότε μπορούμε να δώσουμε στο νευρώνα αυτό την ετικέτα αυτού του δεδομένου. Στην περίπτωση που αντιστοιχίζονται περισσότερα του ενός δεδομένα, τότε μπορούμε να δούμε ποια ετικέτα εμφανίζεται περισσότερες φορές (vote) ανάμεσα σε αυτά τα δεδομένα και να δώσουμε αυτή την ετικέτα στο νευρώνα εξόδου. Τέλος, στην περίπτωση που κανένα δεδομένο εισόδου δεν έχει αντιστοιχηθεί σε ένα νευρώνα εξόδου, τότε αυτός δεν θα πάρει καμία ετικέτα. Αυτή η παραπάνω διαδικασία, έχει πραγματοποιηθεί στην περίπτωση του δικτύου Kohonen αναφοράς της δημοσίευσης και παρουσιάζεται με τη μορφή ετικετών 1, 2, 3 σε κάθε νευρώνα του επιπέδου εξόδου (Σχήμα (22α')). Για αυτό το λόγο, η παραπάνω πληροφορία εμφανίστηκε και στην αντίστοιχη υλοποίηση της εργασίας τούτης (εντολές `sMap = my_som_convert_label_to_int(sMap);` και `som_show_add('label', sMap, 'SubPlot', ... [1])`), όπου η πρώτη είναι μία συνάρτηση που δημιουργήθηκε προκειμένου απλά και μόνο να αντιστοιχίσει τις τιμές 1,2 και 3 στις 3 διαφορετικές αλφαριθμητικές ετικέτες που έχουν αντιστοιχηθεί στους νευρώνες του δικτύου μετά το τέλος της εκπαίδευσής του και με την κλήση της συνάρτησης `som_autolabel`). Συγκρίνοντας αυτή την πληροφορία των ετικετών μεταξύ των δύο ζητούμενων U-matrix παρατηρούμε πως οι ετικέτες αντίστοιχων νευρώνων εξόδου είναι όλες ίδιες, εκτός από μία. Στη μία αυτή και μοναδική περίπτωση, το γράφημα αναφοράς έχει αποδώσει την ετικέτα 3 στον νευρώνα, ενώ το αντίστοιχο γράφημα του δικτύου της εργασίας απέδωσε την τιμή 2. Η διαφορά αυτή δεν παίζει κανένα ρόλο, αφού δεν επηρεάζει την ομαδοποίηση των δεδομένων. Παρατηρούμε πως στην ομάδα πάνω από τη διαχωριστική γραμμή έχει αποδοθεί η ετικέτα 1 σε όλους τους νευρώνες, ενώ στην άλλη ομάδα από κάτω έχουν αποδοθεί οι ετικέτες 2 και 3. Δηλαδή οι ετικέτες 2 και 3 κατηγοριοποιούνται στην ίδια ομάδα. Για αυτό το λόγο η παραπάνω διαφορά που ανέφερα δεν είναι ουσιαστική.

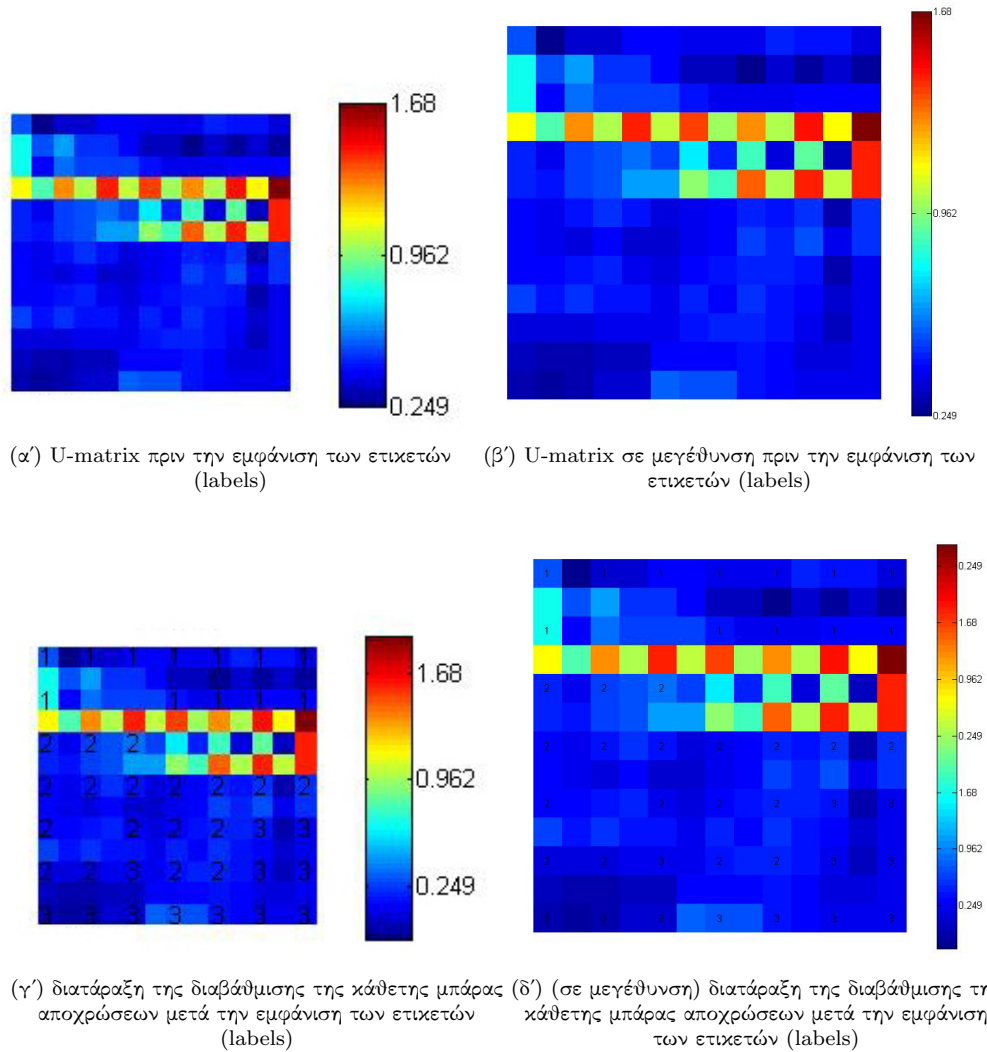
Επίσης παρατηρείται και μια ελάχιστη διαφορά στις 3 αριθμητικές τιμές που αναγράφονται στη χρωματική μπάρα δεξιά των U-matrix και που αντικατοπτρίζουν διαφορές στις αποστάσεις μεταξύ των νευρώνων. Τόσο μικρή είναι αυτή η διαφορά, που μπορεί να δικαιολογηθεί από τις διάφορες τυχαίες επιλογές του αλγορίθμου εκπαίδευσης που εφαρμόζει το SOM toolbox στον αλγόριθμο εκπαίδευσης του δικτύου Kohonen, όπως για παράδειγμα η αρχική θέση στο χώρο εισόδου των νευρώνων του επιπέδου Kohonen. Αυτές οι διάφορες τυχαίες επιλογές του αλγορίθμου εκπαίδευσης μπορούν να εξηγήσουν και τη διαφορετική ετικέτα που δόθηκε στον ένα νευρώνα που ανέφερα παραπάνω.

Είναι τόσο ανεπαίσθητες-ασήμαντες οι παραπάνω δύο διαφορές που εντοπίστηκαν, που ακόμη και το ίδιο το IRIS dataset μπορεί να αποτελεί αίτιο αυτών. Δηλαδή, υπάρχει πάντα η πιθανότητα το IRIS dataset του δικτύου αναφοράς της δημοσίευσης να έχει κάποιες διαφορές σε σχέση με το IRIS dataset που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία τούτη (διαφορετικές πηγές). Μπορεί για παράδειγμα, η ακρίβεια του ενός dataset να είναι τα εκατοστά, ενώ του άλλου τα χιλιοστά. Μπορεί ακόμη να έχει γίνει διαφορετική στρογγυλοποίηση στο τελευταίο σημαντικό ψηφίο αντίστοιχων δεδομένων. Ακόμη-ακόμη και η σειρά αντίστοιχων δεδομένων μπορεί να είναι διαφορετική μέσα στο σύνολο των δεδομένων.

Συνολικά λοιπόν, επιβεβαιώνεται πως ο τρόπος που χρησιμοποιείτε το SOM toolbox για την εκπαίδευση δικτύων Kohonen είναι ορθός. Επομένως, και ύστερα από αυτόν τον αναγκαίο έλεγχο, μπορούμε να περάσουμε με σιγουριά στο επόμενο κομμάτι της εργασίας.

Ένα μόνο γεγονός πρέπει να αναφερθεί σε αυτό το σημείο. Υπάρχει πιθανότητα, κατά τη διαδικασία που ακολουθήθηκε σε αυτήν εδώ την παράγραφο, να εντοπίστηκε ένα μικρό bug σε μια συνάρτηση του SOM toolbox. Πιο συγκεκριμένα, στην προσπάθειά να κατασκευαστεί το γράφημα με τις ετικέτες (labels) που φαίνεται στο Σχήμα (22β'), παρατηρήθηκε πως διαταράσσεται στον U-matrix η βαθμονόμηση της κάθετης μπάρας των χρωματικών αποχρώσεων δεξιά του πλέγματος του δικτύου. Ως γνωστών, οι διάφορες αποχρώσεις αντιστοιχούν και σε αποστάσεις. Η διαταραχή αυτή συμβαίνει αμέσως μετά την κλήση της συνάρτησης `som_show_add('label', sMap, 'SubPlot', [1])` η οποία και εμφανίζει τις ετικέτες στο(-α) γράφημα(-τα) που της δίνεται σαν όρισμα ('SubPlot', [1]). Μέχρι και πριν την κλήση αυτής της συνάρτησης α) η εκπαίδευση του δικτύου έχει ολοκληρωθεί, β) το γράφημα του U-matrix έχει δημιουργηθεί και εμφανιστεί με συγκεκριμένη βαθμονόμηση της μπάρας των χρωματικών αποχρώσεων. Δηλαδή, σε αυτό το σημείο θα μπορούσε να μην γίνει τίποτε περισσότερο, έχοντας σαν αποτέλεσμα την εικόνα του U-matrix του εκπαιδευμένου δικτύου μαζί με την κάθετη μπάρα που μας πληροφορεί για το τι απόσταση αντιστοιχίζεται σε κάθε χρωματικό τόνο όπως και φαίνεται στο Σχήμα (23α') και το Σχήμα (23β'). Ωστόσο, θέλοντας να

εμφανίσουμε και τις ετικέτες στο γράφημα του U-matrix, έγινε η κλήση της συνάρτησης που προανέφερα. Τότε λοιπόν, και ενώ οι ετικέτες (labels) εμφανίζονται με τον επιθυμητό-αναμενόμενο τρόπο, συμβαίνει μια αλλαγή στη βαθμονόμηση της κάθετης μπάρας του U-matrix, όπως φένεται στο Σχήμα (23γ') και το Σχήμα (23δ'). Αυτό σημαίνει πως, χρωματικές αποχρώσεις που αντιστοιχούσαν σε συγκεκριμένες τιμές (αποστάσεις), τώρα πλέον αντιστοιχίζονται σε άλλες/διαφορετικές τιμές (αποστάσεις). Είναι ένα γεγονός μη αναμενόμενο, ένα γεγονός που δεν εξηγείται. Για το λόγο αυτό, πρέπει μάλλον να πρόκειται για ένα bug στον κώδικα. Εν προκρίμενο και για να επιτευχθεί να έχουμε μία αποτίμηση των τιμών αποχρώσεων χωρίς αυτή τη διαταραχή ύστερα από την εμφάνιση των ετικετών, έγινε μία παρέμβαση σε δύο συναρτήσεις του SOM toolbox. Οι συναρτήσεις αυτές είναι οι `som_show` και `som_cplane` (όπως έχει ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 5.2.2). Ουσιαστικά, έγινε μία τροποποίηση στη συνάρτηση `som_cplane`, η οποία καλείται από τη `som_show`. Προκειμένου να μην πειραχθεί η αυθεντική συνάρτηση `som_show`, δημιουργήθηκε ένα αντίγραφο της, η `som_show_antonis`. Αυτό το αντίγραφο, στο μοναδικό σημείο που διαφέρει, είναι στο ότι δεν καλεί την αυθεντική συνάρτηση `som_cplane`, αλλά την τροποποιημένη `som_cplane_antonis`. Η τροποποιημένη συνάρτηση πετυχαίνει να εμφανίσει τις ετικέτες στον U-matrix, ταυτόχρονα με την εμφάνιση του U-matrix και χωρίς τη χρήση της `som_show_add`. Έτσι, αποφύγαμε την προβληματική αυτή μεταβολή-διαταραχή των τιμών που αντιστοιχούν στις χρωματικές αποχρώσεις του U-matrix και πήραμε το γράφημα που φαίνεται στο Σχήμα (22γ').



Σχήμα 23: Πιθανό bug στη συνάρτηση `som_show_add('label', sMap)` του SOM toolbox κατά την εμφάνιση ετικετών-labels.

### 5.3.3 SOM με μη ευκλείδεια μέτρα απόστασης

Προχωρώντας βήμα-βήμα την εργασία, έχουμε φτάσει στο σημείο στο οποίο και ενδιαφέρει να καταλήξουμε. Στις αμέσως παραπάνω παραγράφους, εκπαιδεύτηκαν δίκτυα SOM επάνω στο IRIS dataset, χρησιμοποιώντας την ευκλείδεια νόρμα (νόρμα  $\ell_2$ ) σα μέτρο απόστασης του αλγόριθμου. Θέλουμε τώρα, να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που πήραμε παραπάνω, με τα αποτελέσματα της εκπαίδευσης του δικτύου SOM στην περίπτωση που στον αλγόριθμο εκπαίδευσης χρησιμοποιηθεί σα μέτρο απόστασης μία νόρμα διαφορετική της ευκλείδειας (με σημείο αναφορά το IRIS dataset).

Οι λεγόμενες νόρμες, εν γένει, δεν είναι τίποτα άλλο παρά μαθηματικά εργαλεία - συναρτήσεις. Αυτές οι συναρτήσεις ωστόσο, ικανοποιούνε κάποιες απαιτήσεις και έχουν κάποιες ιδιότητες, οι οποίες δεν είναι του παρόντος να αναφερθούν. Για να υπολογίσουμε αποστάσεις μεταξύ διανυσμάτων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε νόρμα και να πάρουμε μία τιμή της απόστασης. Αναλόγως ποιο μέτρο απόστασης θα χρησιμοποιήσουμε, θα πάρουμε και την αντίστοιχη τιμή. Υπάρχουν 4 πολύ γνωστές - βασικές - νόρμες. Αυτές είναι: α) η νόρμα  $\ell_1$  (συμβολικά  $\| \cdot \|_1$ ) β) η νόρμα  $\ell_2$  (ή ευκλείδεια νόρμα, συμβολικά  $\| \cdot \|_2$ ) γ) η νόρμα  $\ell_\infty$  (συμβολικά  $\| \cdot \|_\infty$ ) και δ) η νόρμα  $\ell_p$  (συμβολικά  $\| \cdot \|_p$ ).

Αν έχουμε ένα διάνυσμα  $\vec{x} \in R^n$ , τότε ο τύπος της κάθε μιας από τις παραπάνω νόρμες φαίνεται αμέσως παρακάτω:

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (14)$$

$$\|\vec{x}\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2} \quad (15)$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_i |x_i| \quad (16)$$

$$\|\vec{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} \quad (17)$$

Οι πρώτες δύο από αυτές, ουσιαστικά προκύπτουν από την τέταρτη όταν θέσουμε  $p = 1$  και  $p = 2$  αντιστοίχως. Ανήκουν δηλαδή, στην οικογένεια νορμών Minkowski ή αλλιώς νόρμα  $\ell_p$  (που έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 5.1). Η τρίτη από αυτές, προκύπτει όταν  $p \rightarrow \infty$ .

Στη συνέχεια, θα επιλέξουμε κάθε μία από τις παραπάνω νόρμες και θα εκπαιδεύσουμε το αντίστοιχο δίκτυο Kohonen χρησιμοποιώντας την κάθε νόρμα ως μέτρο απόστασης στον αλγόριθμο εκπαίδευσης. Στην περίπτωση της νόρμα  $\ell_p$  θα χρησιμοποιήσουμε τις τρεις κλασματικές νόρμες που προκύπτει όταν θέσουμε  $p = 1/2$ ,  $p = 1/4$  και  $p = 1/5$ . Μένει τώρα να εντοπίσουμε σε ποιο ακριβώς σημείο υπολογίζεται η (προκαθορισμένη) ευκλείδεια απόστασή στον κώδικα του SOM toolbox. Έχοντας δει αρκετά αναλυτικά τις πιο σημαντικές συναρτήσεις του, δημιουργείται η εντύπωση πως πρόκειται για ένα πολύ σοβαρό και επαγγελματικό λογισμικό. Η κλήση μίας συνάρτησης, έχει συνήθως σαν αποτέλεσμα την κλήση εσωτερικά άλλων συναρτήσεων και οι οποίες με τη σειρά τους καλούν άλλες κ.ο.κ.. Χρειάζεται λοιπόν προσοχή, μεθοδικότητα και υπομονή στο να εντοπιστεί το ζητούμενο σημείο στον κώδικα. Τα εργαλεία που θα χρειαστεί κανείς για να προχωρήσει σε αυτή την αναζήτηση, είναι: α) καλή γνώση της γλώσσας προγραμματισμού Matlab και β) κατανόηση και χρήση του πολύ καλού μηχανισμού αποσφαλμάτωσης (debugging - χρήση breakpoints) που διαθέτει το Matlab. Σε αυτό το σημείο να τονίσουμε κάτι. Στον αλγόριθμο εκπαίδευσης υπάρχουν δύο βασικά σημεία στα οποία υπολογίζονται αποστάσεις. Το πρώτο σημείο είναι όταν χρειάζεται να υπολογιστούν οι γείτονες ενός νευρώνα εξόδου. Τότε, οι αποστάσεις θα μετρηθούν στο χώρο εξόδου, δηλαδή στο διδιάστατο χάρτη. Το δεύτερο σημείο, είναι όταν ζητείται να βρεθεί το BMU για ένα συγκεκριμένο δεδομένο εισόδου και σε αυτή την περίπτωση η απόσταση θα μετρηθεί στο χώρο εισόδου. Έτσι λοιπόν, είναι λογικό να σκεφτεί κανείς πως, η πληροφορία της νόρμας που θα επιλέξει ο χρήστης, θα πρέπει να περάσει και στα δύο αυτά σημεία υπολογισμού αποστάσεων που μόλις αναφέραμε. Ωστόσο, δείξαμε στην παράγραφο 5.2.2, πως δε θα παρέμβουμε στον τρόπο υπολογισμού των αποστάσεων μεταξύ των νευρώνων εξόδου στο διδιάστατο χώρο.

Ξεκινάμε την αναζήτησή, θέτοντας breakpoint στην κλήση της συνάρτησης som\_make. Στη συνέχεια ακολουθούμε, βήμα-βήμα την εκτέλεση του κώδικα. Αυτή η διαδικασία, ύστερα από αρκετές δοκιμές, οδηγεί σε μονοπάτια εσωτερικών κλήσεων συναρτήσεων έτσι ώστε τελικά να καταλήξουμε στα ζητούμενα σημεία του κώδικα που έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 5.2.2 και να παρέμβουμε σε αυτά. Από τη στιγμή που εντοπίστηκε το ζητούμενο σημείο, σειρά έχει η κατανόηση του κώδικα και η κατάλληλη τροποποίησή του. Όλες οι αλλαγές που πραγματοποιήσαμε στον κώδικα Matlab των εσωτερικών συναρτήσεων παρουσιάζονται

στο παράρτημα της εργασίας. Πρόκειται για μια αρκετά κοπιαστική διαδικασία, που ωστόσο είναι ταυτόχρονα ενδιαφέρουσα και διασκεδαστική. Πρόκειται πραγματικά, για μια ομορφιά κρυμμένη μέσα στον κώδικα, την οποία λίγοι θα ανακαλύψουν. Μετά από κατάλληλες τροποποιήσεις που πραγματοποιήθηκαν στον κώδικα, προστέθηκε η δυνατότητα να μπορεί κανείς να επιλέξει την επιθυμητή νόρμα μέσω της κλήσης της συνάρτησης `som_make`. Για να επιλέξει κάποιος μία συγκεκριμένη νόρμα που θα χρησιμοποιηθεί κατά την εκπαίδευση του δικτύου, δεν έχει παρά να προσθέσει ένα ζευγάρι ‘όρισμα’ – ‘τιμή’ κατά την κλήση της συνάρτησης `som_make_antonis`. Ποιο συγκεκριμένα, για κάθε νόρμα, το ζευγάρι αυτό θα πρέπει να είναι όπως φαίνεται παρακάτω:

- $\ell_1$  - (... , 'dist\_norm', 'L1', ...) ή (... , 'dist\_norm', 'l1', ...)
- $\ell_2$  - (... , 'dist\_norm', 'L2', ...) ή (... , 'dist\_norm', 'l2', ...)
- $\ell_\infty$  - (... , 'dist\_norm', 'L00', ...) ή (... , 'dist\_norm', 'l00', ...)
- $\ell_p$  - π.χ. για  $p = 0.5$  (... , 'dist\_norm', 'L1/2', ...) ή (... , 'dist\_norm', 'l1/2', ...)

Να σχολιάσουμε λίγο την τελευταία περίπτωση. Για τη χρήση της  $\ell_p$ , ουσιαστικά θα πρέπει να ορίσει κανείς την τιμή του  $p$ . Επειδή μπορεί κανείς να δώσει και δεκαδικές τιμές στο  $p$ , το  $p$  ορίζεται πάντοτε σε μορφή κλάσματος. Ακόμα και στην περίπτωση που θα χρησιμοποιηθεί ακέραιος  $p$ , θα πρέπει στην κλήση της συνάρτησης να γραφεί σε κλασματική μορφή. Αν για παράδειγμα θέλουμε  $p = 3$ , τότε στην κλήση της συνάρτησης αυτό θα πρέπει να οριστεί όπως φαίνεται εδώ: `som_make_antonis(... , 'dist_norm', 'L3/1', ...)`.

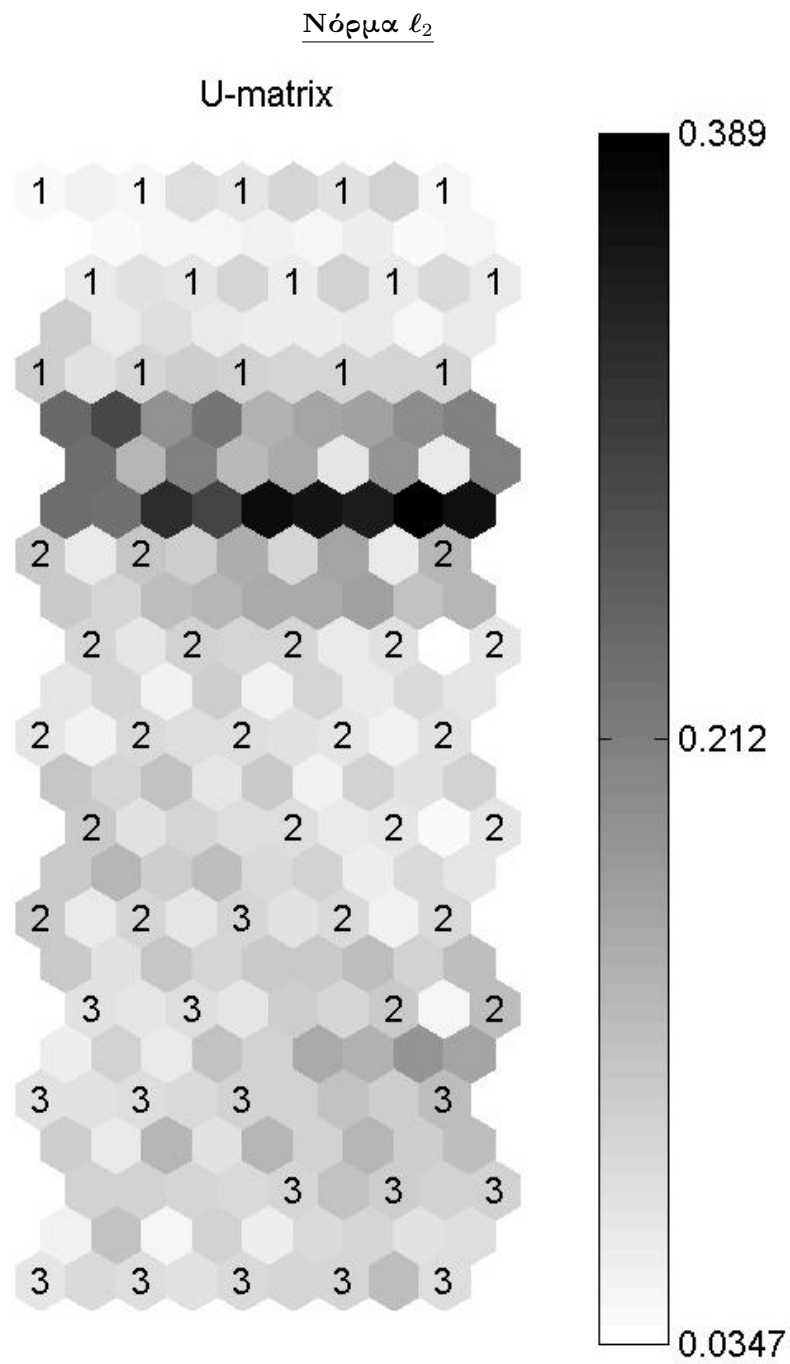
Οπότε, μπορούμε τώρα να εκπαιδεύσουμε ένα πλήθος από δίκτυα Kohonen, χρησιμοποιώντας πάντοτε ως δεδομένα εισόδου το IRIS dataset. Κάθε ένα από αυτά τα δίκτυα θα εκπαιδευτεί χρησιμοποιώντας διαφορετικό μέτρο απόστασης στον αλγόριθμο εκπαίδευσης. Στη συνέχεια, θα προχωρήσουμε στη σύγκριση αυτών των δικτύων μεταξύ τους και θα προσπαθήσουμε να παρατηρήσουμε τις επιπτώσεις και τη συμπεριφορά των διαφορετικών μέτρων απόστασης στα εκπαιδευμένα δίκτυα που δημιουργήθηκαν. Το script που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι το ίδιο σε όλες τις περιπτώσεις και θα διαφοροποιείται μόνο στο ζευγάρι ‘όρισμα’ – ‘τιμή’ κατά την κλήση της συνάρτησης `som_make_antonis`, προκειμένου η ‘τιμή’ να καθορίσει τη νόρμα που θα χρησιμοποιηθεί στον αλγόριθμο. Αμέσως παρακάτω φαίνεται το script:

```

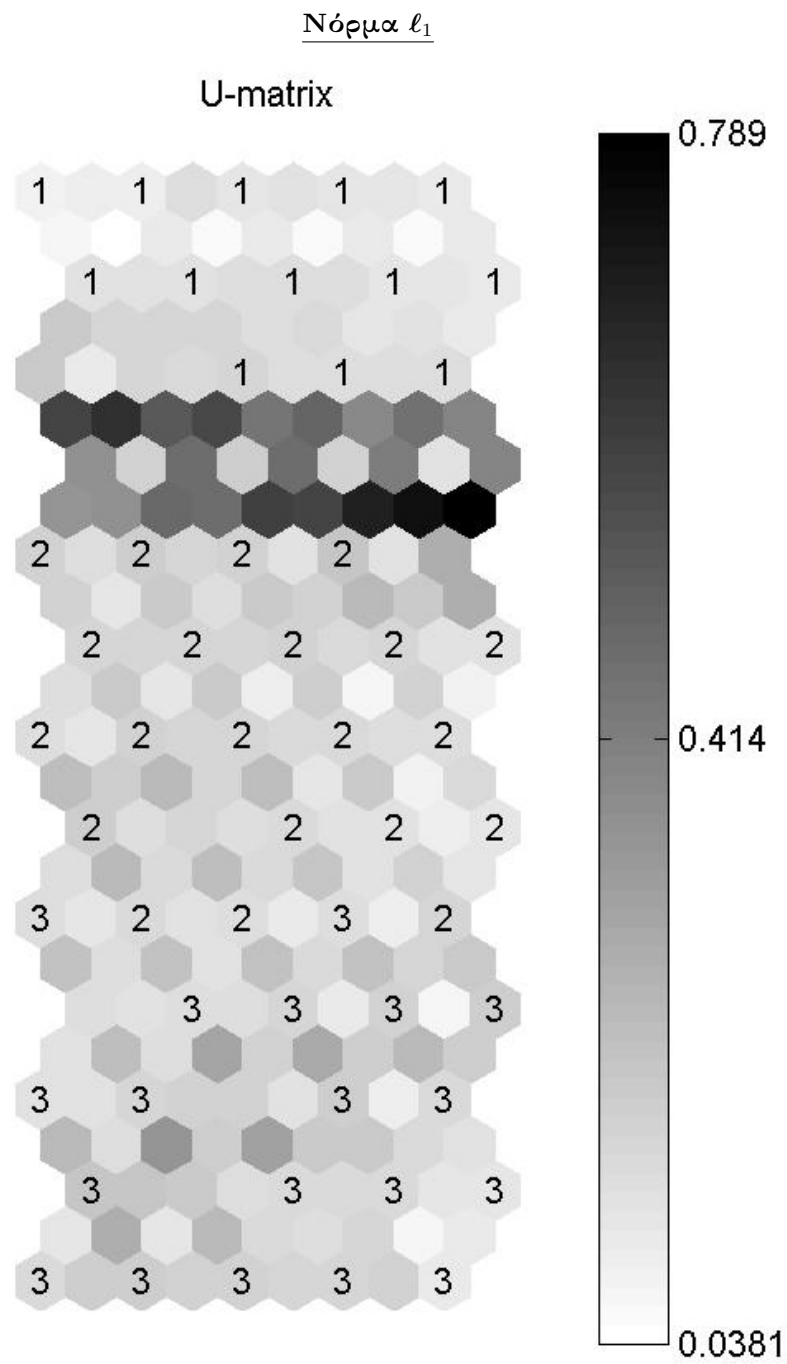
1 clear;
2 clf reset;
3 figure(gcf)
4 clc
5 colormap(1-gray)
6 dist_norm = 'L1';
7 data = 'myIris.data';
8 sDiris = som.read_data(data);
9 sDiris = som.normalize(sDiris, 'range');
10 sMap = som_make_antonis(sDiris, 'dist_norm', dist_norm);
11 sMap = som_autolabel_antonis(sMap,sDiris,'vote', dist_norm);
12 sMap = my_som_convert_label_to_int(sMap);
13 som_show_antonis(sMap, 'umat', 'all', 'dist_norm', dist_norm)

```

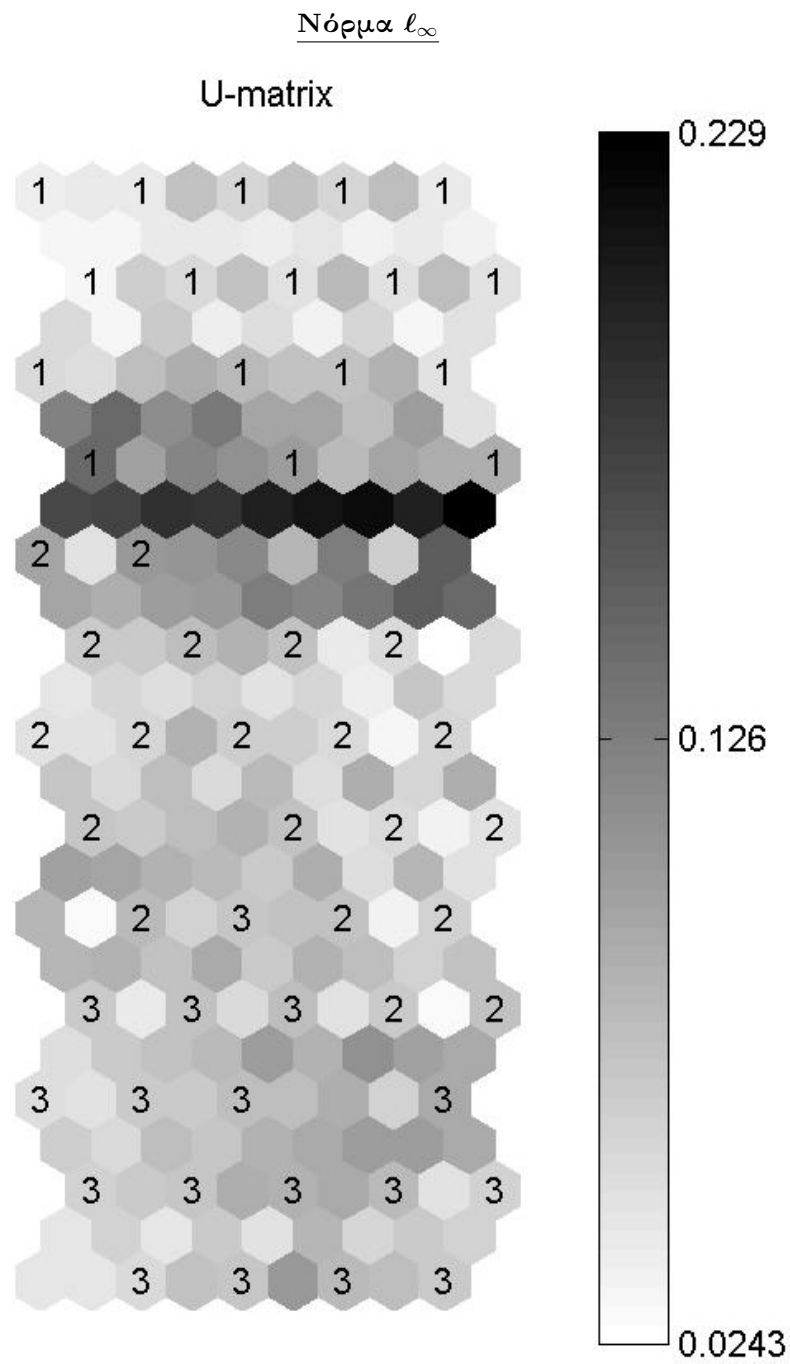
Να επισημάνουμε, πώς στην κάθε εκπαίδευση δικτύου που θα πραγματοποιηθεί στη συνέχεια, οι νευρώνες εξόδου έχουν τις ίδιες αρχικές συντεταγμένες στο χώρο εισόδου. Δηλαδή, έχουμε ίδια αρχικοποίηση των νευρώνων εξόδου. Προγραμματιστικά, αυτό έχει υλοποιηθεί μέσα στο σώμα της συνάρτησης `som_batchtrain`. Εκτελώντας το παραπάνω script, παίρνω το γράφημα U-matrix του εκπαιδευμένου δικτύου Kohonen μαζί με τις ετικέτες και το οποίο προκύπτει από τη χρήση της επιθυμητής νόρμας κάθε φορά. Τα γραφήματα των U-matrix φαίνονται αμέσως παρακάτω στα Σχήματα (24), (25), (26), (27), (28) και (29). Για κάθε εκπαιδευμένο δίκτυο θα υπολογίσουμε το σφάλμα κβαντοποίησης  $Q_e$  και το τοπογραφικό σφάλμα  $T_e$ . Να αναφέρουμε εδώ, πως θα εκτελεστεί αρχικά το παραπάνω script και για την ευκλείδεια νόρμα (Σχήμα (24)), έτσι ώστε να λειτουργήσει το δίκτυο αυτό ως σημείο αναφοράς για τα υπόλοιπα. Ουσιαστικά, το γράφημα αυτό στο Σχήμα (24), είναι το ίδιο με το Σχήμα (19) της παραγράφου 5.3.1. Πρόκειται για το ίδιο δίκτυο, το οποίο στην παράγραφο 5.3.2 βεβαιωθήκαμε πως έχει εκπαιδευτεί σωστά.



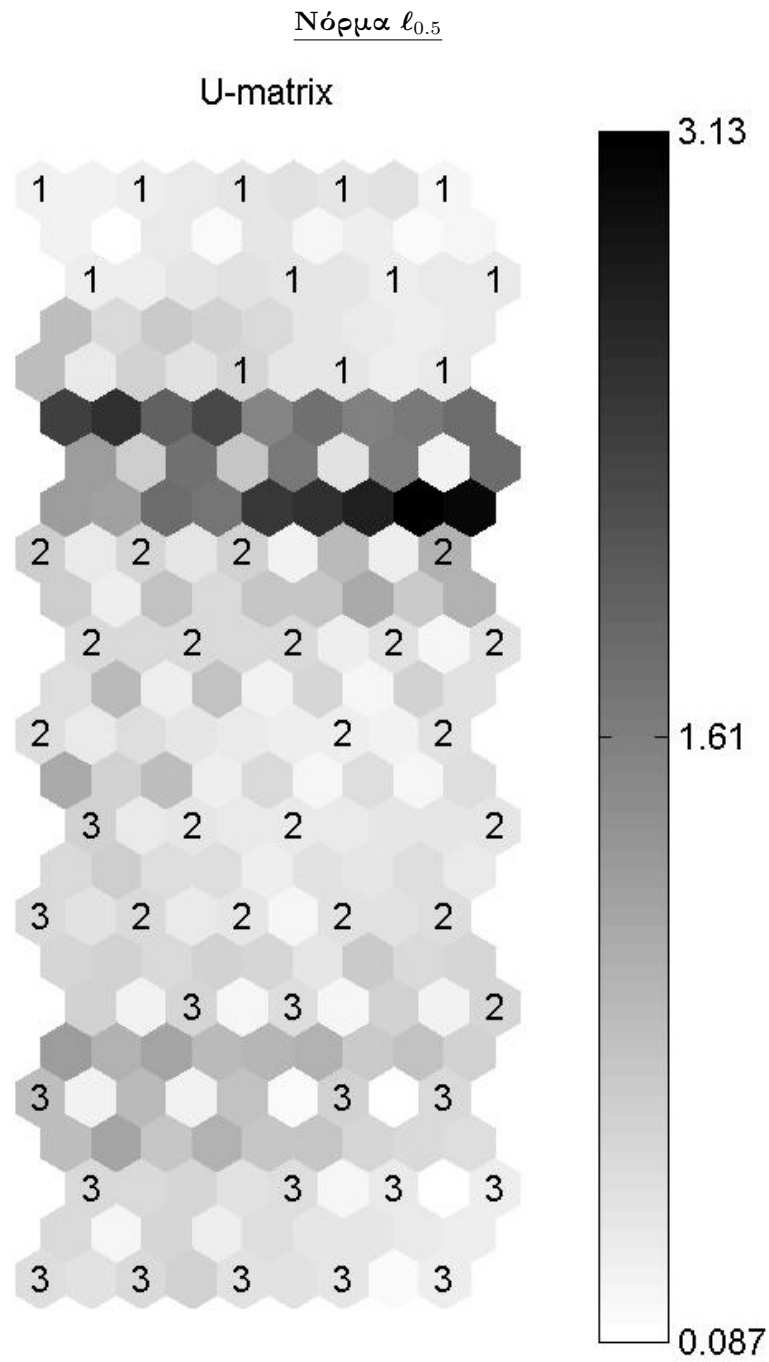
Σχήμα 24: Εκπαιδευμένο SOM με χρήση νόρμας  $\ell_2$  στον αλγόριθμο εκπαίδευσης,  
 $Q_e = 0.093$ ,  $T_e = 0.027$



Σχήμα 25: Εκπαιδευμένο SOM με χρήση νόρμας  $\ell_1$  στον αλγόριθμο εκπαίδευσης,  
 $Q_e = 0.144$ ,  $T_e = 0.040$

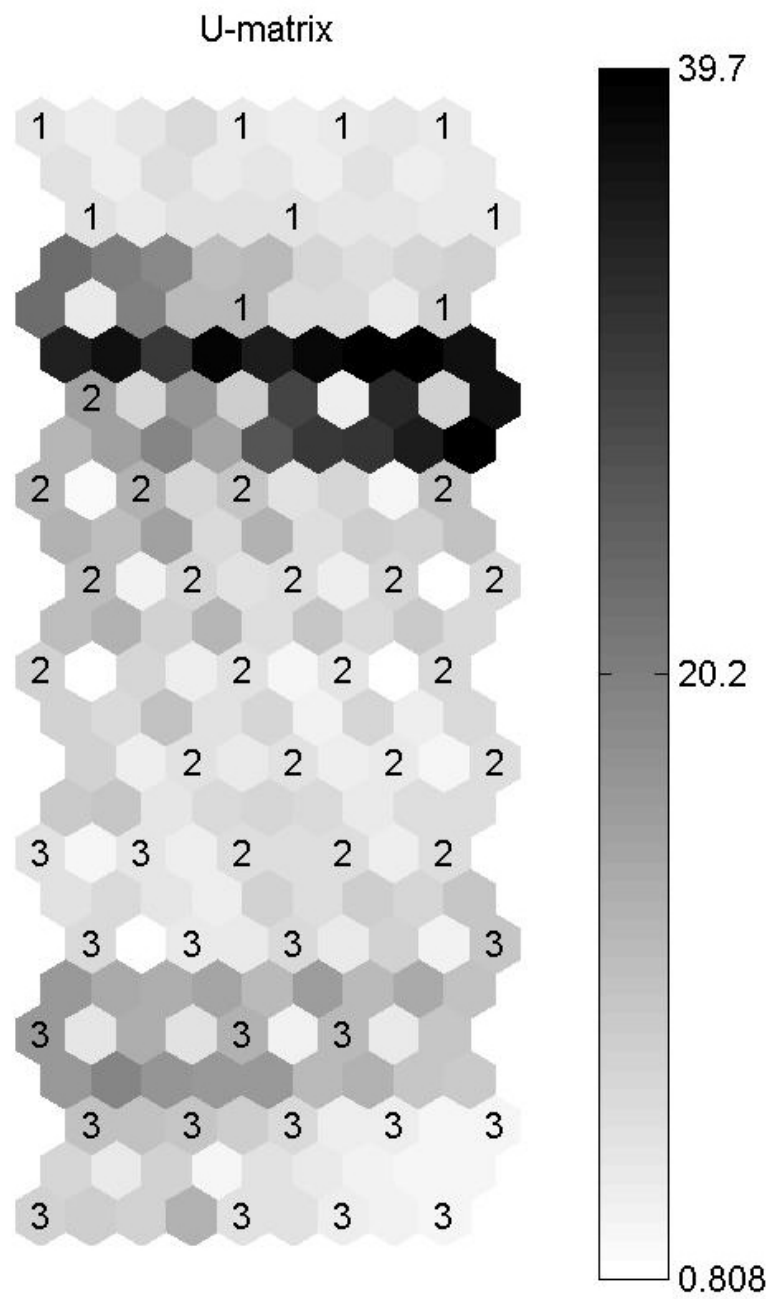


Σχήμα 26: Εκπαιδευμένο SOM με χρήση νόρμας  $\ell_\infty$  στον αλγόριθμο εκπαίδευσης,  
 $Q_e = 0.073$ ,  $T_e = 0.093$

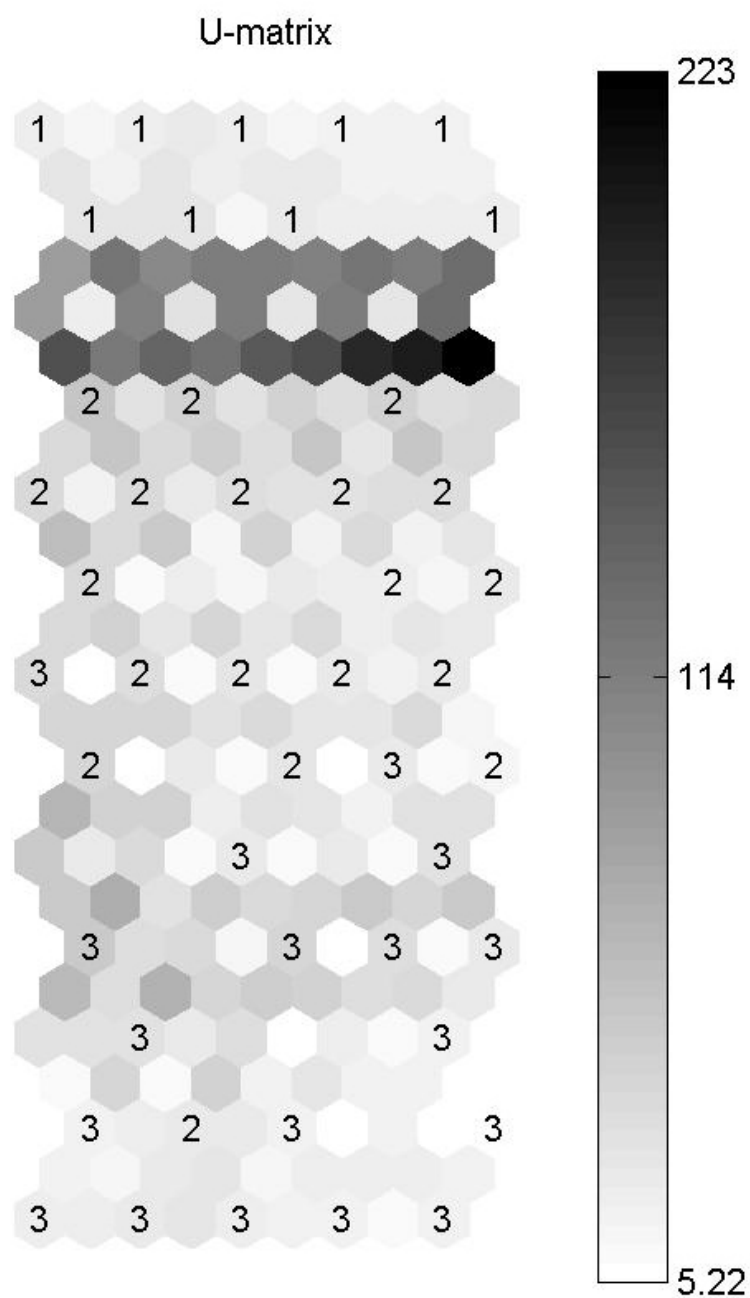


Σχήμα 27: Εκπαιδευμένο SOM με χρήση νόρμας  $\ell_{0.5}$  στον αλγόριθμο εκπαίδευσης,  
 $Q_e = 0.401$ ,  $T_e = 0.213$

Νόρμα  $\ell_{0.25}$



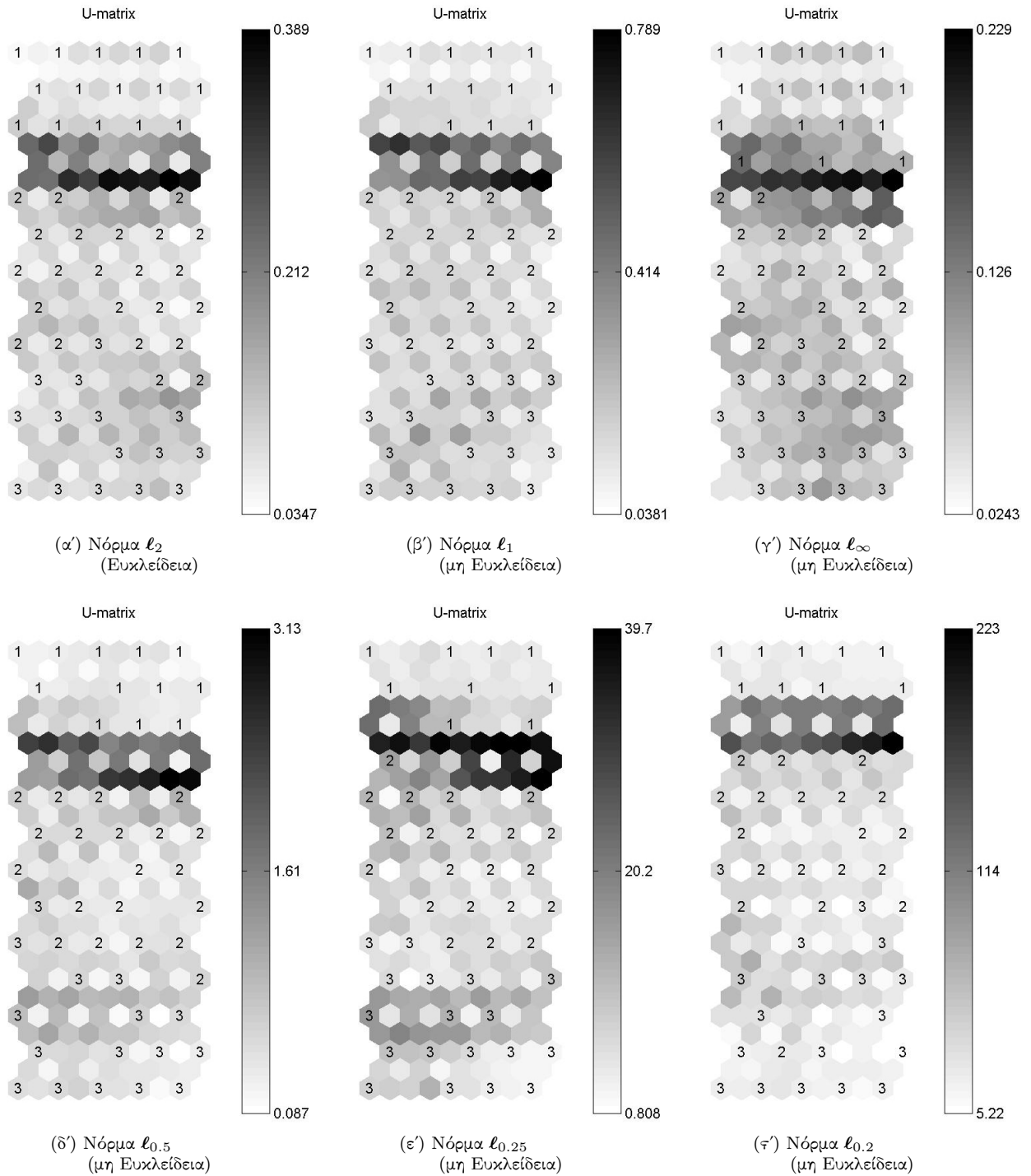
Σχήμα 28: Εκπαιδευμένο SOM με χρήση νόρμας  $\ell_{0.25}$  στον αλγόριθμο εκπαίδευσης,  
 $Q_e = 5.746$ ,  $T_e = 0.487$



Σχήμα 29: Εκπαιδευμένο SOM με χρήση νόρμας  $\ell_{0.2}$  στον αλγόριθμο εκπαίδευσης,  
 $Q_e = 24.162$ ,  $T_e = 0.493$

#### 5.3.4 Σχόλια – παρατηρήσεις

Ας παρατηρήσουμε τα εκπαιδευμένα δίκτυα Kohonen τις παραγράφους 5.3.3 που προέκυψαν με χρήση μη ευκλείδειας απόστασης στον αλγόριθμό εκπαίδευσης. Σαν σημείο αναφοράς θα έχουμε το δίκτυο που προέκυψε με χρήση της ευκλείδειας νόρμας της παραγράφου 5.3.1 (Σχήμα (19)), το οποίο αναπαρήχθει σε ένα πιο κατάλληλο γράφημα στο Σχήμα (24) της παραγράφου 5.3.3. Συγκεντρωτικά, όλα τα παραπάνω γραφήματα φαίνονται στο Σχήμα (30).



Σχήμα 30: Εκπαιδευμένα δίκτυα Kohonen επάνω στο IRIS dataset με χρήση ευκλείδειας νόρμας και μη ευκλείδειων νορμών αντίστοιχα στον αλγόριθμο εκπαίδευσης.

**Σε ό,τι αφορά την συσταδοποίηση, παρατηρούμε πως:** Σε όλες τις περιπτώσεις υπάρχει ένα σύνορο το οποίο περισσότερο ή λιγότερο καταφέρνει και ξεχωρίζει τα δεδομένα της ομάδας 1 από τα δεδομένα των υπόλοιπων ομάδων (ομάδα 2 και 3). Πιο συγκεκριμένα, το σύνορο είναι αρκετά καθαρό για τις νόρμες  $\ell_2$ ,  $\ell_1$ ,  $\ell_\infty$  και  $\ell_{0.5}$ . Στην ευκλείδεια νόρμα, Σχήμα (30α'), το σύνορο αυτό εντοπίζεται λίγο πάνω από τη μέση του δικτύου από μια ευδιάκριτη σκούρα περιοχή η οποία σχηματίζει μια οριζόντια γραμμή. Η πολύ σκούρα απόχρωση υποδηλώνει μεγάλες αποστάσεις μεταξύ των εκατέρωθεν νευρώνων (μεγάλες αποστάσεις

σε σχέση με την ελάχιστη απόσταση μεταξύ γειτονικών νευρώνων που εντοπίστηκε και η οποία αντιστοιχεί στο απόλυτο λευκό). Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση της μη κυρτής νόρμας  $\ell_{0.5}$ , Σχήμα (30δ'), (όπου το σύνορο είναι πιο λεπτό), αλλά και στην περίπτωση της μη ευκλείδειας νόρμας  $\ell_{\infty}$ , Σχήμα (30γ') (όπου το σύνορο έχει μεγαλύτερο εύρος). Στην περίπτωση του δικτύου όπου χρησιμοποιήθηκε η μη ευκλείδεια νόρμα  $\ell_1$ , Σχήμα (30β'), η σκούρα περιοχή που διαχωρίζει το δίκτυο σε δύο ομάδες παρουσιάζει μία κλίση προς τα κάτω και είναι αρκετά ευδιάκριτη (όπως και στις προηγούμενες δύο περιπτώσεις). Τώρα, στην περίπτωση των δικτύων που προέκυψαν με χρήση των μη κυρτών νορμών  $\ell_{0.25}$  και  $\ell_{0.20}$ , να μεν υπάρχει ένα σύνορο στην ίδια περιοχή λίγο πάνω από τη μέση των γραφημάτων, αλλά εμφανίζονται και κάποιες άλλες σκούρες περιοχές που υποδηλώνουν πιθανό διαχωρισμό των νευρώνων που υπάρχουν ανάμεσα στα νέα αυτά σύνορα. Ένα τέτοιο επιπλέον σύνορο φαίνεται στην περιοχή ακριβώς στη μέση στο Σχήμα (30ε') και πιθανώς και κάποια σύνορα ακόμη κάτω από τη μέση, ενώ το ίδιο συμβαίνει και στο Σχήμα (30ζ') στη μέση και δεξιά καθώς και στο κάτω άκρο του ίδιου σχήματος.

**Σε ό,τι αφορά την ομοιογένεια μεταξύ των νευρώνων, παρατηρούμε πως:** Μεγαλύτερη ομοιογένεια παρουσιάζεται στο δίκτυο όπου έγινε χρήση της ευκλείδειας νόρμας  $\ell_2$  και σε αυτό όπου έγινε χρήση της μη ευκλείδειας νόρμας  $\ell_1$ . Για την πρώτη περίπτωση, αυτό προκύπτει από το ότι στο Σχήμα (30α'), οι δύο μεγάλες συστάδες νευρώνων που δημιουργούνται εκατέρωθεν του συνόρου έχουν απόχρωση πολύ κοντά στο λευκό, παρά στο μαύρο. Το γεγονός αυτό, υποδηλώνει πως οι νευρώνες σε αυτές τις περιοχές είναι σχετικά κοντά μεταξύ τους – με άλλα λόγια μοιάζουν – και σαν αποτέλεσμα και τα αντίστοιχα δεδομένα εισόδου που έχουν κερδίσει αυτοί οι νευρώνες είναι κοντά/όμοια (δημιουργώντας κατά αυτό τον τρόπο δύο ομάδες). Το ίδιο συμβαίνει και στο Σχήμα (30β'). Στα επόμενα δύο σχήματα για τις νόρμες  $\ell_{\infty}$  και  $\ell_{0.5}$ , Σχήμα (30γ') και Σχήμα (30δ') αντιστοίχως, υπάρχει μία σκούρα περιοχή (όπως προ είπα) και η οποία ξεχωρίζει (το λεγόμενο σύνορο) και οι εκατέρωθεν του συνόρου περιοχές αρχίζουν να μην είναι τόσο λευκές όσο λευκές ήταν οι περιοχές εκατέρωθεν του συνόρου στα δύο πρώτα σχήματα. Οι σχετικά περισσότερο γκριζες αποχρώσεις, δηλώνουν πως οι γειτονικοί νευρώνες του δικτύου (και αντιστοίχως τα δεδομένα εισόδου που εκπροσωπούντο από αυτούς) είναι αρκετά πιο μακριά μεταξύ τους από το ελάχιστο της απόστασης μεταξύ δύο νευρώνων που εντοπίστηκε, είναι δηλαδή λιγότερο όμοιοι. Αυτοί η ανομοιογένεια κορυφώνεται στην περίπτωση των νορμών  $\ell_{0.25}$  και  $\ell_{0.2}$ , Σχήμα (30ε') και Σχήμα (30ζ') αντιστοίχως. Κορυφώνεται κατά τέτοιο τρόπο, που εκεί που με τις νόρμες  $\ell_2$  και  $\ell_1$  είχαμε μια μοναδική συστάδα λευκής απόχρωσης αποστάσεων κάτω από το σύνορο στο Σχήμα (30α') και Σχήμα (30β') αντιστοίχως, τώρα η περιοχή αυτή παρουσιάζει κάποια νέα σύνορα και μεταξύ αυτών των συνόρων δεν εμφανίζονται ξεκάθαρα πλέον συστάδες (αφού οι αποχρώσεις ξεκινούν από κοντά στο λευκό και απομακρύνονται από αυτό μέχρι και το μέσο της κλίμακας του γκριζου της μπάρας αποστάσεων).

**Σε ό,τι αφορά τη μεγαλύτερη και την ελάχιστη τιμή της απόστασης μεταξύ των νευρώνων, παρατηρούμε πως:** Αν συμβολίσω με  $d_{max}^{\ell_2}$  τη μέγιστη τιμή της απόστασης που παρατηρείται στο δίκτυο που εκπαιδεύτηκε με χρήση της νόρμας  $\ell_2$ , τότε τα αποτελέσματα μας δίνουν τη σχέση

$$d_{max}^{\ell_{\infty}} < d_{max}^{\ell_2} < d_{max}^{\ell_1} < d_{max}^{\ell_{0.5}} < d_{max}^{\ell_{0.25}} < d_{max}^{\ell_{0.2}} \quad (18)$$

Αυτό προκύπτει από τα 6 γραφήματα στο Σχήμα (30). Σε κάθε ένα από αυτά, υπάρχει μία κάθετη μπάρα στα δεξιά. Αυτή η μπάρα ξεκινά από το απόλυτο λευκό και καταλήγει σταδιακά στο απόλυτο μαύρο, περνώντας από όλες τις αποχρώσεις του γκρι. Το απόλυτο μαύρο αντιστοιχεί στην τιμή της μέγιστης απόστασης,  $d_{max}$ , μεταξύ των γειτονικών νευρώνων του εκπαιδευμένου δικτύου και η τιμή αυτή απεικονίζεται στο επάνω άκρο της μπάρας. Με αντίστοιχο τρόπο απεικονίζεται στο κάτω άκρο η τιμή της ελάχιστης απόστασης,  $d_{min}$ , η οποία και αντιστοιχεί στο απόλυτο λευκό. Στο μέσο της μπάρας, όπου και αντιστοιχεί η απόχρωση 50% γκρι, σημειώνεται άλλη μία τιμή η οποία δεν είναι άλλη από τη μέση τιμή της ελάχιστης και της μέγιστης απόστασης. Από το ίδιο σχήμα, Σχήμα (30), προκύπτει και η ακόλουθη σχέση για τα ελάχιστα των αποστάσεων

$$d_{min}^{\ell_{\infty}} < d_{min}^{\ell_2} < d_{min}^{\ell_1} < d_{min}^{\ell_{0.5}} < d_{min}^{\ell_{0.25}} < d_{min}^{\ell_{0.2}} \quad (19)$$

**Παρατηρούμε επίσης πως:** Στην περίπτωση της νόρμας  $\ell_2$ , η περιοχή πάνω από το σύνορο δεν περιέχει κάποιο νευρώνα που να μην έχει κερδίσει κάποιο δεδομένο εισόδου. Αντίθετα, στη νόρμα  $\ell_1$ , κάτω και αριστερά στην περιοχή πάνω από το σύνορο, υπάρχουν δύο νευρώνες που αυτή τη φορά δεν έχουν κερδίσει κάποιο δεδομένο εισόδου. Στην περίπτωση της νόρμας  $\ell_{\infty}$ , στην ίδια αυτή περιοχή (κάτω και αριστερά), ένας νευρώνας δεν έχει κερδίσει κανένα δεδομένο εισόδου. Στην περίπτωση της νόρμας  $\ell_{0.5}$ , η περιοχή αυτή μετατοπίζεται στο κέντρο και χαμηλά (πάνω από το σύνορο), όπου πάλι δύο νευρώνες δεν παίρνουν κανένα δεδομένο εισόδου πάνω τους. Εμφανίζεται όμως και άλλος ένας νευρώνας χωρίς κερδισμένα δεδομένα εισόδου, στη δεξιά επάνω άκρη του αντίστοιχου γραφήματος. Στις νόρμες  $\ell_{0.25}$  και  $\ell_{0.2}$ , υπάρχουν 2 και

3 αντιστοίχως νευρώνες που δεν έχουν κερδίσει κανένα δεδομένο εισόδου και βρίσκονται και αυτοί στις ίδιες περίπου περιοχές με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Σε ό,τι αφορά την περιοχή κάτω από το σύνορο, στην περίπτωση της νόρμα  $\ell_2$  υπάρχουν τρία ζευγάρια διαδοχικών νευρώνων που δεν έχουν κερδίσει κάποιο δεδομένο (χωρίς ωστόσο να δημιουργούν κάποιο σύνορο, αφού οι αποστάσεις μεταξύ γειτονικών νευρώνων παραμένουν μικρές σε αυτές τις περιοχές) και ακόμη άλλος ένας νευρώνας μόνος του. Τα παραπάνω κενά που σχηματίζονται κάτω από το σύνορο, φαίνεται πως δεν υπάρχουν στην περίπτωση της νόρμα  $\ell_1$ , όπου μόνο ένας νευρώνας και μάλιστα σε διαφορετική από πριν θέση έχει μείνει χωρίς κερδισμένο δεδομένο εισόδου. Αντίθετα, στο γράφημα όπου έγινε χρήση της νόρμα  $\ell_\infty$ , έχουμε μία παρόμοια εικόνα με την περίπτωση της νόρμα  $\ell_2$ . Δηλαδή, διαδοχικά κενά επανεμφανίζονται και μάλιστα στις ίδιες περίπου περιοχές. Τέλος στις περιπτώσεις των μη κυρτών νορμών, υπάρχουν επίσης κάποια κενά, χωρίς ωστόσο να εμφανίζουν κάποια συσχέτιση με τις προηγούμενες περιπτώσεις.

**Σε ό,τι αφορά τα δύο μέτρα ποιότητας  $Q_e$  και  $T_e$  (Πίνακας (2)):** Το δίκτυο όπου έγινε χρήση της νόρμα  $\ell_2$  παρουσιάζει το μικρότερο τοπογραφικό σφάλμα  $T_e$ . Το μικρότερο σφάλμα κβαντοποίησης,  $Q_e$ , παρουσιάζει το δίκτυο στο οποίο έγινε χρήση της νόρμα  $\ell_\infty$ . Αν διατάξουμε τις νόρμες με βάση την αύξουσα σειρά του τοπογραφικού σφάλματος, μπορούμε να πούμε πως

- αυτές έχουν μία τάση σχεδόν να διπλασιάζονται από δίκτυο σε δίκτυο (με εξαίρεση ίσως τη μετάβαση από το δίκτυο όπου έγινε χρήση της  $\ell_{0.25}$  σε αυτό όπου έγινε χρήση της νόρμα  $\ell_{0.25}$ ).
- καθώς αυξάνεται το τοπογραφικό σφάλμα, αυξάνεται και το σφάλμα κβαντοποίησης, με μόνη εξαίρεση τη νόρμα  $\ell_\infty$ , η οποία και παρουσιάζει το ελάχιστο  $Q_e$ .

Στην περίπτωση του σφάλματος ποσοτικοποίησης, φαίνεται πως οι μη κυρτές νόρμες δίνουν πολύ μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με τις μη κυρτές νόρμες (με εξαίρεση ίσως τη νόρμα  $\ell_{0.5}$ ).

| Νόρμα         | $Q_e$  | $T_e$ |
|---------------|--------|-------|
| $\ell_2$      | 0.093  | 0.027 |
| $\ell_1$      | 0.144  | 0.040 |
| $\ell_\infty$ | 0.073  | 0.093 |
| $\ell_{0.5}$  | 0.401  | 0.213 |
| $\ell_{0.25}$ | 5.746  | 0.487 |
| $\ell_{0.2}$  | 24.162 | 0.493 |

Πίνακας 2: Σφάλματα εκπαιδευμένων δικτύων Kohonen με χρήση διάφορων μέτρων απόστασης κατά την εκπαίδευση (IRIS dataset). Σφάλμα κβαντοποίησης ( $Q_e$ ), Τοπογραφικό σφάλμα ( $T_e$ )

Τέλος, να αναφέρουμε πως στο παράρτημα Α' και στο υποκεφάλαιο Α'.1 αυτού, υπάρχουν κάποιοι πίνακες οι οποίοι δείχνουν πόσα δεδομένα εισόδου και από πιά κατηγορία κέρδισε ο κάθε νευρώνας εξόδου. Φαίνεται στους πίνακες αυτούς πως, σε κάθε περίπτωση, σε γενικές γραμμές οι νευρώνες εξόδου κέρδισαν δεδομένα μιας κατηγορίας μόνο. Ελάχιστοι νευρώνες εξόδου κέρδισαν δεδομένα και από τις δύο κατηγορίες, ενώ κανένας νευρώνας δεν κέρδισε και από τις τρεις κατηγορίες. Περισσότερες πληροφορίες για το περιεχόμενο αυτών των πινάκων θα αναφέρουμε στο κεφάλαιο 5.4 και συγκεκριμένα στην παράγραφο 5.4.2.

## 5.4 Μελέτη περίπτωσης COIL-20 dataset

Το dataset που θα χρησιμοποιηθεί για να εκπαιδευτούν τα δίκτυα αυτού του υποκεφαλαίου είναι το COIL-20 dataset (Columbia University Image Library). Οι πληροφορίες για το συγκεκριμένο dataset, που θα αναφερθούν αμέσως παρακάτω, πηγάζουν από το διαδίκτυο<sup>5</sup>. Από το διαδίκτυο<sup>6</sup> επίσης, προήλθαν και τα δεδομένα του COIL-20 dataset (που χρησιμοποιήθηκαν για την εκπαίδευση των δικτύων). Πολύ συνοπτικά λοιπόν, το COIL-20 dataset αποτελείται από ασπρόμαυρες φωτογραφίες 20 αντικειμένων. Το κάθε αντικείμενο έχει φωτογραφηθεί σε 72 διαφορετικές γωνίες θέασης και πάντοτε σε μαύρο φόντο. Κάθε φωτογραφία έχει ανάλυση 128x128. Άρα, ο χώρος εισόδου του εκάστοτε δικτύου Kohonen είναι 1440 (το πλήθος δηλαδή όλων των φωτογραφιών 20x72) και η διάστασή του χώρου εισόδου 16384 (όση δηλαδή είναι η διάσταση του διανύσματος της κάθε φωτογραφίας 128x128).

<sup>5</sup><https://paperswithcode.com/dataset/coil-20-1/>

<sup>6</sup><https://www.cs.columbia.edu/CAVE/software/softlib/coil-20.php/>

Η μέθοδος που θα ακολουθηθεί είναι η ίδια με τη μέθοδο που εφαρμόστηκε στην περίπτωση του IRIS dataset. Πρώτα δηλαδή, θα εκπαιδευτεί ένα δίκτυο Kohonen κάνοντας χρήση της ευκλείδειας νόρμας. Από αυτή την εκπαίδευση, θα αποθηκεύσουμε την αρχικοποίηση των νευρώνων του επιπέδου Kohonen στο χώρο εισόδου. Κάθε επόμενη εκπαίδευση που θα πραγματοποιηθεί θα χρησιμοποιήσει αυτή την ίδια (αποθηκευμένη) αρχικοποίηση των νευρώνων του επιπέδου Kohonen. Τελικά, θα εκπαιδευτούν άλλα 5 δίκτυα, ένα για κάθε μία από τις νόρμες  $\ell_1$ ,  $\ell_\infty$ ,  $\ell_{0.5}$ ,  $\ell_{0.25}$  και  $\ell_{0.2}$ .

#### 5.4.1 Σχόλια – παρατηρήσεις

Τα γραφήματα των U-matrix των δικτύων Kohonen που προέκυψαν, φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα (31). Στη συνέχεια ακολουθούν κάποια σχόλια και κάποιες παρατηρήσεις σε ό,τι αφορά αυτό το σχήμα.

**Σε ό,τι αφορά την συσταδοποίηση, παρατηρούμε πως:** Δεν υπάρχει ένα ή περισσότερα ευδιάκριτα σύνορα σε κανένα από τα επιμέρους γραφήματα του Σχήματος (31). Σε όλες τις περιπτώσεις, εμφανίζονται ακανόνιστα σκούρες και λευκές περιοχές νευρώνων. Έτσι, δεν μπορούμε να συμπεραίνουμε εμφανώς πως σχηματίζονται κάποια σύνορα που διαχωρίζουν το δίκτυο σε ομάδες. Θα μπορούσαμε ίσως να πούμε, πως στην περίπτωση της  $\ell_2$  - Σχήμα (31α') και της  $\ell_1$  - Σχήμα (31β') σχηματίζεται μία συστάδα στο αριστερό και πάνω μέρος του γραφήματος, άλλη μία στο αριστερό και κάτω μέρος και πιθανώς άλλη μία μεγαλύτερη στο δεξί τμήμα και οι οποίες χωρίζονται μεταξύ τους από μια μεγάλη σκούρα περιοχή στο υπόλοιπο του σχήματος. Αυτή η υποψία ύπαρξης συστάδων εξασθενεί στην περίπτωση της  $\ell_{0.5}$  - Σχήμα (31δ') όπου παραμένει μόνο μία συστάδα στο κάτω αριστερό τμήμα. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση της  $\ell_\infty$  - Σχήμα (31γ') όπου γίνεται λόγος μάλλον για μία μόνο μεγάλη συστάδα που καταλαμβάνει όλο το δεξί (μέσο-δεξί) και ιδιαίτερα το δεξί κάτω τμήμα. Στην περίπτωση των άλλων δύο μη κυρτών νορμών, παρουσιάζεται μία πολύ διαφορετική εικόνα. Σε αυτές, Σχήμα (31ε') και Σχήμα (31ε''), πιθανός να υπάρχει ένα πιο ευδιάκριτο σύνορο που καλύπτει όλη τη δεξιά και κάτω περιοχή που όμως δεν εμφανίζει να διαχωρίζει μία ή περισσότερες συστάδες. Ωστόσο είναι παρατηρήσιμη η ομοιότητα αυτών των τελευταίων δύο γραφημάτων μεταξύ τους. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις και όπου υπάρχει υποψία σχηματισμού συστάδας, δεν υπάρχει κάποια συνέπεια σε ό,τι αφορά το ποιες κατηγορίες δεδομένων ανήκουν σε αυτές τις συστάδες.

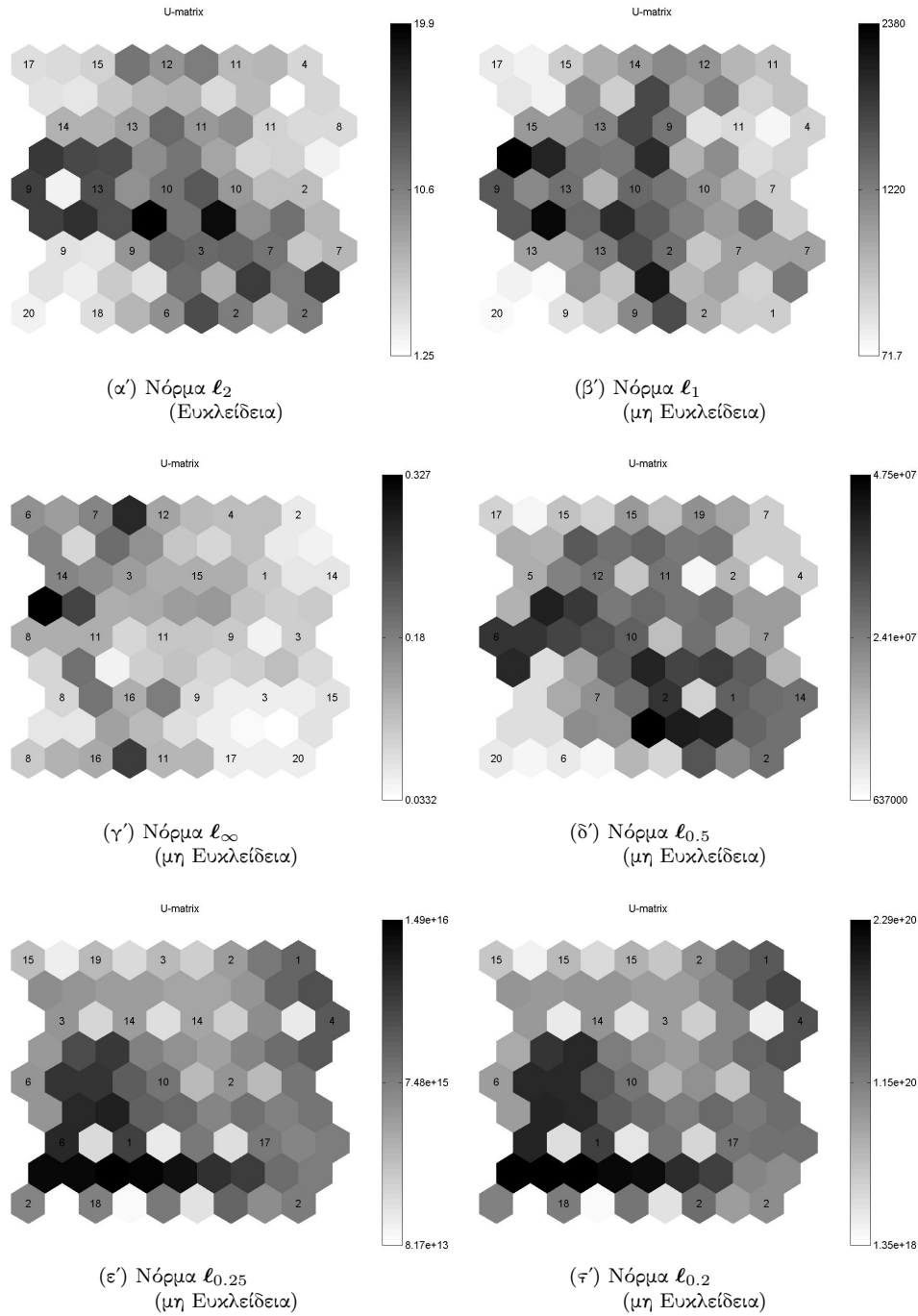
**Σε ό,τι αφορά την ομοιογένεια μεταξύ των νευρώνων, παρατηρούμε πως:** Οποσδήποτε και σε αυτή τη περίπτωση έχουμε διαφορετική εικόνα μεταξύ των γραφημάτων και είναι δύσκολο να υπάρξει κάποια σύγκριση. Μεγαλύτερη ομοιογένεια παρουσιάζεται στο δίκτυο όπου έγινε χρήση της νόρμας  $\ell_\infty$ . Σε αυτή την περίπτωση, αυτό προκύπτει από το ότι στο Σχήμα (31γ'), η μία μεγάλη συστάδα νευρώνων που δημιουργείται στο δεξί (δεξί-μέσο) του γραφήματος έχει απόχρωση πολύ κοντά στο λευκό, όπως και συνολικά το υπόλοιπο του γραφήματος. Αυτό υποδηλώνει πως οι νευρώνες σε αυτές τις περιοχές είναι σχετικώς κοντά μεταξύ τους – δηλαδή, μοιάζουν – και σαν αποτέλεσμα και τα αντίστοιχα δεδομένα εισόδου που έχουν κερδίσει αυτοί οι νευρώνες είναι κοντά/όμοια (δημιουργώντας κατά αυτό τον τρόπο μία ομάδα). Τα δίκτυα όπου έγινε χρήση της νόρμας  $\ell_2$ ,  $\ell_1$  και  $\ell_{0.5}$  παρουσιάζουν παρόμοια ομοιογένεια και μάλλον το Σχήμα (31α') έχει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια από αυτά τα τρία. Τέλος, στις περιπτώσεις των νορμών, δεν μπορεί να γίνει λόγος για βαθμό ομοιογένειας εφόσον ούτε συστάδες δημιουργούνται αλλά και ούτε προκύπτει κάποια αισθητή διαφορά σε ό,τι αφορά την απόχρωση του γκριζου στα δύο αντίστοιχα σχήματα.

**Σε ό,τι αφορά τη μεγαλύτερη και την ελάχιστη τιμή της απόστασης μεταξύ των νευρώνων, παρατηρούμε πως:** Αν συμβολίσω με  $d_{max}^{\ell_2}$  τη μέγιστη τιμή της απόστασης που παρατηρείται στο δίκτυο που εκπαιδεύτηκε με χρήση της νόρμας  $\ell_2$ , τότε τα αποτελέσματα δίνουν τη σχέση

$$d_{max}^{\ell_\infty} < d_{max}^{\ell_2} < d_{max}^{\ell_1} < d_{max}^{\ell_{0.5}} < d_{max}^{\ell_{0.25}} < d_{max}^{\ell_{0.2}} \quad (20)$$

Αυτό προκύπτει από τα 6 γραφήματα στο Σχήμα (31). Σε κάθε ένα από αυτά, υπάρχει μία κάθετη μπάρα στα δεξιά. Αυτή η μπάρα ξεκινά από το απόλυτο λευκό και καταλήγει σταδιακά στο απόλυτο μαύρο, περνώντας από όλες τις αποχρώσεις του γκρι. Το απόλυτο μαύρο αντιστοιχεί στην τιμή της μέγιστης απόστασης,  $d_{max}$ , μεταξύ των γειτονικών νευρώνων του εκπαιδευμένου δικτύου και η τιμή αυτή απεικονίζεται στο επάνω άκρο της μπάρας. Με αντίστοιχο τρόπο απεικονίζεται στο κάτω άκρο η τιμή της ελάχιστης απόστασης,  $d_{min}$ , η οποία και αντιστοιχεί στο απόλυτο λευκό. Στο μέσο της μπάρας, όπου και αντιστοιχεί η απόχρωση 50% γκρι, σημειώνεται άλλη μία τιμή η οποία δεν είναι άλλη από τη μέση τιμή της ελάχιστης και της μέγιστης απόστασης. Από το ίδιο σχήμα, Σχήμα (31), προκύπτει και η ακόλουθη σχέση για τα ελάχιστα των αποστάσεων

$$d_{min}^{\ell_\infty} < d_{min}^{\ell_2} < d_{min}^{\ell_1} < d_{min}^{\ell_{0.5}} < d_{min}^{\ell_{0.25}} < d_{min}^{\ell_{0.2}} \quad (21)$$



Σχήμα 31: Εκπαιδευμένα δίκτυα Kohonen στο COIL-20 dataset με χρήση ευκλείδειας νόρμας και μη ευκλείδειων νορμών αντίστοιχα στον αλγόριθμο εκπαίδευσης.

**Σε ό,τι αφορά τα δύο μέτρα ποιότητας  $Q_e$  και  $T_e$  (Πίνακας (3)):** Το δίκτυο όπου έγινε χρήση της νόρμα  $\ell_2$  παρουσιάζει το μικρότερο τοπογραφικό σφάλμα  $T_e$ . Το μικρότερο σφάλμα χβαντοποίησης,  $Q_e$ , παρουσιάζει το δίκτυο στο οποίο έγινε χρήση της νόρμα  $\ell_\infty$ . Αν διατάξουμε τις νόρμες με βάση την τιμή του τοπογραφικού σφάλματος,

- υπάρχει μία τάση διπλασιασμού του τοπογραφικού σφάλματος για τις πρώτες τρεις νόρμες ( $\ell_2$ ,  $\ell_1$  και  $\ell_\infty$ ).
- καθώς αυξάνεται το τοπογραφικό σφάλμα, αυξάνεται και το σφάλμα χβαντοποίησης, με μόνη εξαίρεση τη νόρμα  $\ell_\infty$ , (η οποία και παρουσιάζει το ελάχιστο  $Q_e$ ) και τη νόρμα  $\ell_{0.5}$ .

Στην περίπτωση του σφάλματος ποσοτικοποίησης, φαίνεται πως οι μη κυρτές νόρμες δίνουν τιμές ασύγκριτα μεγάλες σε σχέση με τις μη κυρτές νόρμες.

| Νόρμα         | $Q_e$                     | $T_e$ |
|---------------|---------------------------|-------|
| $\ell_2$      | 25.922                    | 0.038 |
| $\ell_1$      | 2475.688                  | 0.067 |
| $\ell_\infty$ | 0.723                     | 0.112 |
| $\ell_{0.25}$ | 6537260620822805.000      | 0.144 |
| $\ell_{0.5}$  | 30933088.233              | 0.169 |
| $\ell_{0.2}$  | 102711907426117220000.000 | 0.185 |

Πίνακας 3: Σφάλματα εκπαιδευμένων δικτύων Kohonen με χρήση διάφορων μέτρων απόστασης κατά την εκπαίδευση (COIL-20 dataset). Σφάλμα χβαντοποίησης ( $Q_e$ ), Τοπογραφικό σφάλμα ( $T_e$ )

**Παρατηρούμε επίσης πως:** Οι ετικέτες των κατηγοριών που έχουν πάρει οι νευρώνες εξόδου δίνουν μία εικόνα που δημιουργεί προβληματισμό. Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα (31α'), υπάρχουν τρεις νευρώνες στο κάτω και δεξί μέρος του γραφήματος που έχουν πάρει την ετικέτα 2. Ενώ οι δύο από αυτοί είναι γειτονικοί, ο τρίτος νευρώνας δεν είναι γειτονικός και μάλιστα είναι αρκετά μακριά σε απόσταση από τους άλλους. Θα περίμενε κανείς οι νευρώνες που είναι πιο κοντά σε δεδομένα εισόδου της ίδιας κατηγορίας (την κατηγορία 2 στη συγκεκριμένη περίπτωση) να είναι γειτονικοί μεταξύ τους και μάλιστα με μικρές αποστάσεις ο ένας από τον άλλο (αφού πρόκειται για δεδομένα εισόδου της ίδιας κατηγορίας-όμοια δηλαδή δεδομένα εισόδου). Μια ερμηνεία της παραπάνω παρατήρησης, είναι πως αυτό συμβαίνει επειδή τα δεδομένα εισόδου αυτά κάθε αυτά δεν είναι όμοια. Δηλαδή, η κατηγορία 2 δεν έχει μεγάλη ομοιότητα στα χαρακτηριστικά της. Ωστόσο, αυτή η υπόθεση-ερμηνεία καταρρίπτεται και ενισχύεται ο προβληματισμός, από το γεγονός πως στο Σχήμα (31β') ενώ οι δύο νευρώνες που κατηγοριοποιήθηκαν στην κατηγορία 2 εμφανίζονται και μάλιστα στην ίδια περιοχή με πριν (ελαφρά μετατοπισμένοι προς το μέσο του γραφήματος), ο τρίτος νευρώνας τώρα δεν υπάρχει και έτσι δεν δημιουργεί αμφιβολίες για την ομοιότητα μεταξύ των δεδομένων αυτής της κατηγορίας. Κατά αυτό τον τρόπο αναιρεί την προηγούμενη ερμηνεία, δημιουργώντας μία αντίφαση. Στο Σχήμα (31γ'), οι νευρώνες που κατηγοριοποιήθηκαν ότι είναι πιο κοντά στην κατηγορία 2 είναι πάλι τρεις, αλλά αυτή τη φορά κανένας δεν είναι γειτονικός με τον άλλο και απέχουν μεγάλες αποστάσεις μεταξύ τους. Τέλος, στο Σχήμα (31γ'), υπάρχει ένας μόνο νευρώνας που του έχει αποδοθεί η ετικέτα 2. Αυτός ο νευρώνας εντοπίζεται σε πολύ διαφορετική θέση (πάνω και δεξιά) στο γράφημα από τις προηγούμενες περιπτώσεις που ανέφερα και μάλιστα οι κατηγορίες των γειτονικών νευρώνων είναι διαφορετικές από τις κατηγορίες των γειτονικών νευρώνων των άλλων περιπτώσεων. Παρόμοιες περιπτώσεις βρίσκουμε και για άλλες ετικέτες νευρώνων, πέρα της κατηγορίας 2 που αναφέρθηκε εδώ.

#### 5.4.2 Περαιτέρω ανάλυση

Οι παρατηρήσεις της παραγράφου 5.4.1, οδήγησαν στο να αναλυθεί περισσότερο η περίπτωση των δικτύων που εκπαιδεύτηκαν με βάση το COIL-20 dataset. Το ότι η κάθε νόρμα, δίνει σε γενικές γραμμές μία διαφορετική εικόνα, τόσο σε ό,τι αφορά τις συστάδες και τους γείτονές τους όσο και στη διαφορετική κατηγοριοποίηση των νευρώνων εξόδου, είναι ένα συμπέρασμα που δεν έδωσε η ανάλυση που έγινε στο υποκεφάλαιο 5.3 όπου έγινε χρήση του Iris dataset (και όπου υπήρχε μια μεγαλύτερη συνέπεια μεταξύ των δικτύων που εκπαιδεύτηκαν με χρήση των διάφορων νορμών). Για αυτό το λόγο θα προχωρήσουμε σε μια περαιτέρω ανάλυση. Δύο πράγματα θα βρεθούν στο επίκεντρο αυτής της ανάλυσης. Το πρώτο, έχει να κάνει

με το πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκάστοτε εκπαιδευμένου δικτύου. Το δεύτερο, έχει να κάνει με το να εξεταστεί πως η χρήση διαφορετικής νόρμας μπορεί να οδηγήσει πράγματι σε διαφορετική εικόνα του γραφήματος του U-matrix.

Στο παράρτημα Α' και στο υποκεφάλαιο Α'.2 αυτού, υπάρχουν κάποιοι πίνακες. Ο κάθε πίνακας από αυτούς, περιέχει την πληροφορία του πόσα δεδομένα εισόδου συνολικά κέρδισε ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου που προέκυψε (στήλη 'νευρώνας/δεδομένα') και την πληροφορία του πόσα δεδομένα από την κάθε κατηγορία κέρδισε ο κάθε νευρώνας (στήλη 'κατηγορία/συχνότητα'). Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα αυτών των πινάκων (Πίνακες (5), (13), (12), (14), (15) και (16)) φαίνεται καταρχήν πως η μεγάλη πλειοψηφία των νευρώνων έχουν κερδίσει δεδομένα από διαφορετικές κατηγορίες. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει καταρχήν ότι είτε τα δεδομένα δεν είναι καλά διαχωρίσιμα, είτε το νευρωνικό δίκτυο απέτυχε να διαχωρίσει σε ομάδες τις καλά διαχωρίσιμες κατηγορίες των δεδομένων. Όποια όμως από τις παραπάνω δύο υποθέσεις και να ισχύει, δεν αλλάζει το συμπέρασμα που λέει πως οι νευρώνες εξόδου του δικτύου δημιουργούν διαφορετικές ομάδες ομοίων δεδομένων (με βάση τις κατηγορίες δεδομένων που κερδίζουν) με χρήση διαφορετικών νορμών (οδηγώντας έτσι σε περισσότερο ή λιγότερο διαφορετικές ερμηνείες/συμπεράσματα). Για παράδειγμα, στο Σχήμα (31α') (για τη νόρμα  $l_2$ ), παρατηρούμε πως οι νευρώνες 4, 5, 9 και 10 δημιουργούν μία συστάδα. Στον Πίνακα (11), παρατηρούμε πως αυτοί οι 4 νευρώνες έχουν κερδίσει συνολικά το 100% (72) της κατηγορίας 20, το 94.4% της κατηγορίας 18, 73.6% της κατηγορίας 3, 69.4% της κατηγορίας 6, 69.4% της κατηγορίας 5, 66.7% της κατηγορίας 19 και το 51.4% της κατηγορίας 9. Δηλαδή, οι κατηγορίες 20, 18, 3, 5, 6, 19 δείχνουν να είναι πολύ κοντά/όμοιες μεταξύ τους στην περίπτωση της νόρμα  $l_2$ . Στη συνέχεια, αναζητήθηκε στον Πίνακα (12) (για τη νόρμα  $l_\infty$ ) να βρεθεί σε ποιους νευρώνες αντιστοιχίζονται τα δεδομένα εισόδου για την κατηγορία 20. Είναι οι νευρώνες 20 και 25 που έχουν σε αυτή την περίπτωση κερδίσει το 100% (72) της κατηγορίας 20. Ωστόσο, αυτοί οι νευρώνες ανήκουν σε μια συστάδα 5 νευρώνων (14, 19, 20, 24 και 25) που έχει δημιουργηθεί στο γράφημα του U-matrix στο Σχήμα (31γ'). Έτσι, από τον Πίνακα (12) παρατηρούμε πως οι νευρώνες 14, 19, 20, 24 και 25 έχουν κερδίσει το 100% (72) της κατηγορίας 20, το 65.3% (47) της κατηγορίας 18, το 37.5% (27) της κατηγορίας 3, το 47.2% (34) της κατηγορίας 6, το 63.9% (46) της κατηγορίας 5, το 44.4% (32) της κατηγορίας 19 και το 34.7% (25) της κατηγορίας 9. Υπάρχει δηλαδή, μια σημαντική διαφοροποίηση σε ό,τι αφορά τα δεδομένα των κατηγοριών 18, 3, 6, 5, 19 και 9, όπου πλέον εξασθενεί ο βαθμός ομοιότητας σε αυτή τη συστάδα που δημιουργείται μαζί και με την κατηγορία 20. Επιπροσθέτως, αυτή η συστάδα των 5 νευρώνων (14, 19, 20, 24 και 25) έχει κερδίσει και δεδομένα άλλων κατηγοριών. Συγκεκριμένα, το 95.8% (69) της κατηγορίας 17, το 34.7% (25) της κατηγορίας 15, το 31.9% (23) της κατηγορίας 13, το 18.1% (13) της κατηγορίας 1, το 8.3% (6) της κατηγορίας 14, το 9.7% (7) της κατηγορίας 11, το 8.3% (6) της κατηγορίας 2, και τέλος το 2.8% (2) της κατηγορίας 7. Κατά αυτόν τον τρόπο παίρνουμε μια πληροφορία την οποία στην προηγούμενη περίπτωση δεν είχαμε πάρει, δημιουργώντας έτσι άλλη μία διαφορά. Δουλεύοντας αναλόγως για την περίπτωση της νόρμα  $l_1$ , και με τη βοήθεια του Πίνακα (13) και του Σχήματος (31β'), βλέπουμε πως η συστάδα που δημιουργείται από τους νευρώνες 4, 5, 9 και 10 είναι αυτή που ενδιαφέρει. Οι νευρώνες 4, 5, 9 και 10 έχουν κερδίσει το 100% (72) της κατηγορίας 20, το 94.4% (68) της κατηγορίας 18, το 80.6% (58) της κατηγορίας 3, το 83.3% (60) της κατηγορίας 6, το 70.8% (51) της κατηγορίας 5, το 76.4% (55) της κατηγορίας 19, το 61.1% (44) της κατηγορίας 9. Δηλαδή, στην περίπτωση της  $l_1$  διατηρείται και μάλιστα ενισχύεται η ομοιότητα που υπήρχε μεταξύ των κατηγοριών 20, 18, 3, 5, 6, 19 στην περίπτωση της  $l_2$ . Και εδώ η συστάδα αυτή των 4 νευρώνων (4, 5, 9 και 10) έχει κερδίσει και δεδομένα άλλων κατηγοριών. Συγκεκριμένα, το 22.2% (16) της κατηγορίας 13. Δουλεύοντας αναλόγως για την περίπτωση της νόρμα  $l_{0.5}$ , και με τη βοήθεια του Πίνακα (14) και του Σχήματος (31δ'), βλέπουμε πως η συστάδα που δημιουργείται από τους νευρώνες 5 και 10 είναι αυτή που ενδιαφέρει. Οι δύο αυτοί νευρώνες έχουν κερδίσει το 100% (72) της κατηγορίας 20, το 100% (72) της κατηγορίας 18, το 86.1% (62) της κατηγορίας 3, το 88.9% (64) της κατηγορίας 6, το 76.4% (55) της κατηγορίας 5, το 79.2% (57) της κατηγορίας 19, το 73.6% (53) της κατηγορίας 9. Δηλαδή, στην περίπτωση της  $l_{0.5}$  διατηρείται και μάλιστα ενισχύεται η ομοιότητα που υπήρχε μεταξύ των κατηγοριών 20, 18, 3, 5, 6, 19 στην περίπτωση της νόρμα  $l_2$  αλλά και της  $l_1$ . Και εδώ η συστάδα αυτή των 2 νευρώνων (5 και 10) έχει κερδίσει και δεδομένα άλλων κατηγοριών. Συγκεκριμένα, το 40.3% (29) της κατηγορίας 13. Βλέπουμε ότι στην περίπτωση αυτή, τα δεδομένα εισόδου συγκεντρώνονται ακόμη πιο πολύ σε συγκεκριμένους νευρώνες ή συστάδες νευρώνων. Η ίδια εικόνα με αυτή της περίπτωσης της νόρμα  $l_{0.5}$ , παρουσιάζεται και στις άλλες δύο μη ευκλείδειες νόρμες  $l_{0.25}$  και  $l_{0.2}$ . Στην περίπτωση της νόρμα  $l_{0.25}$  (Πίνακας (15), Σχήμα (31ε')) ο νευρώνας 10 έχει κερδίσει το 100% (72) της κατηγορίας 20, το 100% (72) της κατηγορίας 18, το 88.9% (64) της κατηγορίας 3, το 94.4% (68) της κατηγορίας 6, το 79.2% (57) της κατηγορίας 5, το 84.7% (61) της κατηγορίας 19, το 77.8% (56) της κατηγορίας 9, ενώ τέλος, έχει κερδίσει και το 45.8% (33) της κατηγορίας 13 (καθώς και ένα δεδομένο (1.4%) της κατηγορίας 2 από τον νευρώνα 5 με τον οποίο είναι σχετικά κοντά

και μαζί δημιουργούν μία συστάδα). Στην περίπτωση της νόρμα  $\ell_{0.20}$  (Πίνακας (16), Σχήμα (31ε')) ο νευρώνας 10 έχει κερδίσει το 100% (72) της κατηγορίας 20, το 100% (72) της κατηγορίας 18, το 90.3% (65) της κατηγορίας 3, το 94.4% (68) της κατηγορίας 6, το 80.6% (58) της κατηγορίας 5, το 86.1% (62) της κατηγορίας 19, το 79.2% (57) της κατηγορίας 9, ενώ τέλος, έχει κερδίσει και το 48.6% (35) της κατηγορίας 13. Η αρχική συστάδα που διαλέξαμε να αναλύσουμε στο παράδειγμά (για την περίπτωση της νόρμα  $\ell_2$ ), κατέληξε στο να αναδείξει μία ομοιότητα αλλά και ταυτοχρόνως διαφορά μεταξύ των διαφορετικών νορμών, όπου μάλλον η ομοιότητα μοιάζει να είναι μεγαλύτερη από την διαφορά (ειδικά αν εξαιρέσει κανείς τη νόρμα  $\ell_\infty$ , η οποία έχει κερδίσει και την κατηγορία 17 αλλά και κάποιο μικρό κομμάτι άλλων κατηγοριών). Αν τώρα διαλέξουμε για την περίπτωση της νόρμα  $\ell_{0.2}$  από τον Πίνακα (16) και το Σχήμα (31ε'), τον νευρώνα 7 που έχει κερδίσει όλα τα δεδομένα της κατηγορίας 14, τότε παρατηρούμε πως αυτή η κατηγορία δεν έχει καμία σχέση με άλλες κατηγορίες καθώς είναι ιδιαίτερα απομονωμένος ο νευρώνας αυτός από γειτονικούς του. Η παρατήρηση αυτή εξακολουθεί να ισχύει ελαφρώς εξασθενημένη, στην περίπτωση της νόρμα  $\ell_{0.25}$ . Όμως, παύει να ισχύει στην περίπτωση των υπολοίπων νορμών, αφού στην περίπτωση της νόρμα  $\ell_{0.5}$  αρχίζει να φαίνεται μια ομοιότητα με τις κατηγορίες 17 και 1 (και πιθανώς της 7), στην περίπτωση της νόρμα  $\ell_\infty$  αρχίζει να φαίνεται μια ομοιότητα με τις κατηγορίες 2, 7 και 16, στην περίπτωση της νόρμα  $\ell_1$  με τις κατηγορίες 1,17,15,13 και 12 και τέλος στην περίπτωση της νόρμα  $\ell_2$  η κατηγορία 14 εμφανίζεται να παρουσιάζει ομοιότητες με τις κατηγορίες 17 και 13.

## 5.5 Μελέτη περίπτωσης Banknotes dataset

Το dataset της προηγούμενης υποπαραγράφου (5.4), παρουσίασε μια δυσκολία στην ανάλυσή των αποτελεσμάτων μετά την εκπαίδευση των δικτύων. Επίσης, δεν παρουσίασε αξιοσημείωτες ομοιότητες στην ανάλυσή του, με αυτό του υποκεφαλαίου 5.3. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκε το Banknotes dataset, το οποίο ούτε τόσες πολλές κατηγορίες διαθέτει, ούτε μεγάλη διάσταση έχει. Οι πληροφορίες για το Banknotes dataset που αναφέρονται παρακάτω, πηγάζουν από το διαδίκτυο<sup>7</sup>. Απο εκεί πηγάζουν και τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την εκπαίδευση των δικτύων αυτού του υποκεφαλαίου. Το Banknotes dataset αποτελείται από 1372 τετραδιάστατα διανύσματα. Η κάθε διάσταση είναι και ένα χαρακτηριστικό ενός χαρτονομίσματος. Το κάθε ένα από τα 4 αυτά χαρακτηριστικά προέκυψε από την εφαρμογή ενός εργαλείου επάνω στη φωτογραφία (ασπρόμαυρη) του κάθε χαρτονομίσματος. Το ζητούμενο αυτής της ανάλυσης της φωτογραφίας σε 4 χαρακτηριστικά, είναι να μπορέσει η φωτογραφία να δώσει κάποια (4) ποσοτικά χαρακτηριστικά τα οποία θα μπορέσουν πιθανόν να αποκαλύψουν κάποια πρότυπα που να υποδεικνύουν τότε ένα χαρτονόμισμα είναι πλαστό και τότε όχι (υπάρχουν δηλαδή δύο κατηγορίες). Επομένως, το εκάστοτε δίκτυο Kohonen θα έχει σα χώρο εισόδου, ένα χώρο διάστασης 4 και το πλήθος των δεδομένων του χώρου εισόδου θα είναι 1372. Και εδώ, θα ακολουθήσουμε την ίδια μέθοδο που έχουμε περιγράψει στην αρχή των υποκεφαλαίων 5.4 και 5.3.

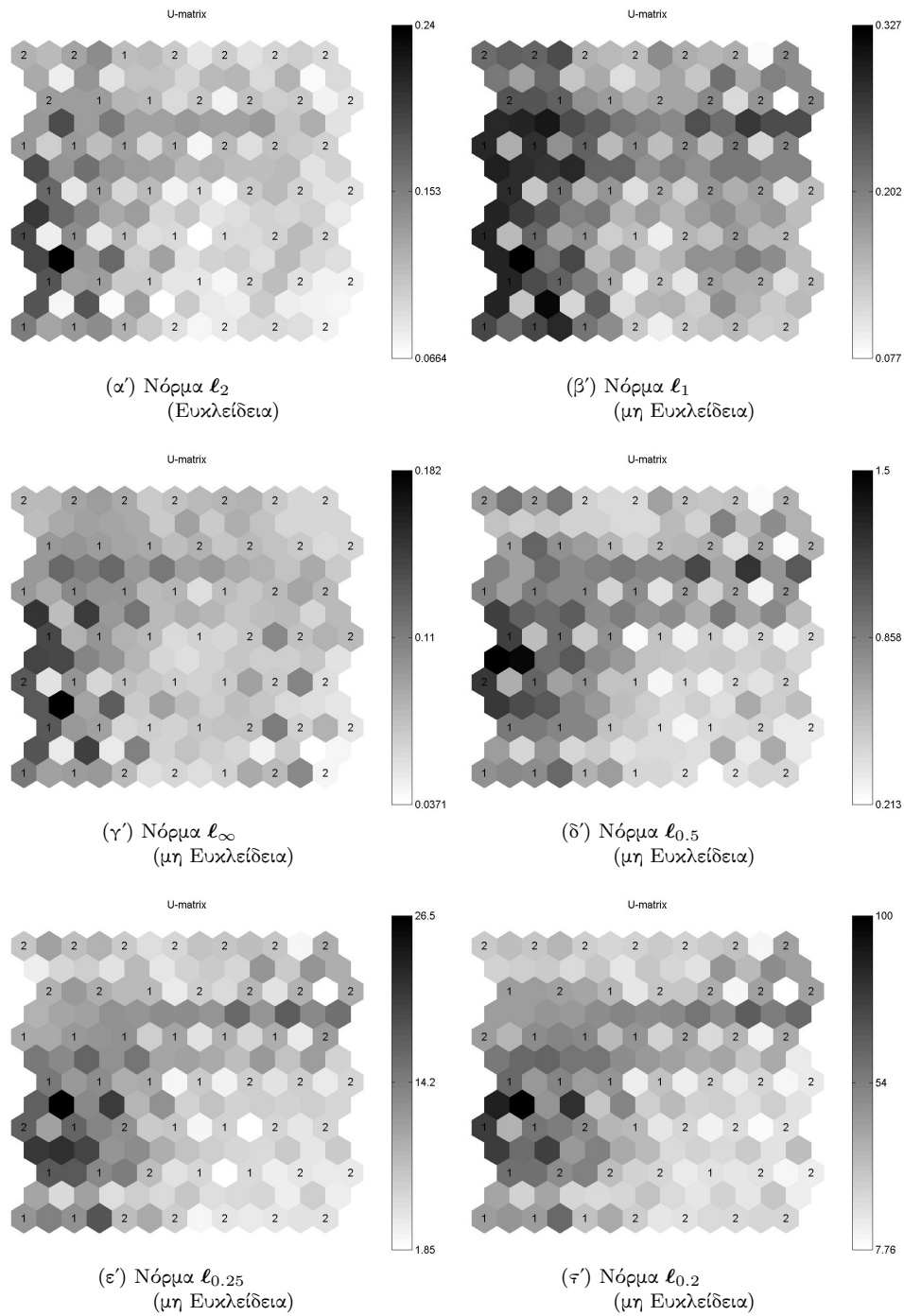
### 5.5.1 Σχόλια – παρατηρήσεις

Στο Σχήμα (32) φαίνονται τα γραφήματα των U-matrix των δικτύων Kohonen που προέκυψαν. Κάποια σχόλια και παρατηρήσεις ακολουθούν.

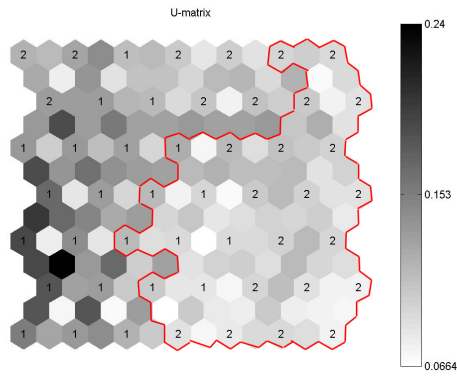
**Σε ό,τι αφορά την συσταδοποίηση, παρατηρούμε πως:** Στα πρώτα τρία σχήματα δεν υπάρχουν κάποια ευδιάκριτα σύνορα. Οι σκούρες περιοχές εμφανίζονται περισσότερο ακανόνιστα, παρά συντεταγμένα έτσι ώστε να κάνουμε λόγο για κάποιο σύνορο. Στην περίπτωση της  $\ell_2$  - Σχήμα (32α') γίνεται λόγος μάλλον για μία συστάδα που καταλαμβάνει σχεδόν όλο το μέσο και δεξί τμήμα του γραφήματος (Σχήμα (33α')). Στην περίπτωση της  $\ell_1$  - Σχήμα (32β') οι αποχρώσεις γίνονται περισσότερο σκούρες συνολικά και μιλάμε ίσως πάλι για μία μόνο συστάδα περίπου στο μέσο του γραφήματος (Σχήμα (33β')). στην περίπτωση της  $\ell_\infty$  - Σχήμα (32γ') οι λευκές αποχρώσεις γίνονται λιγότερο λευκές και οι σκούρες περιοχές γίνονται λιγότερο σκούρες. Κατά αυτό τον τρόπο πιθανός να μην εμφανίζεται και καμία συστάδα ή ίσως μία με όχι και τόσο κοντινές αποστάσεις μεταξύ των νευρώνων της (Σχήμα (33γ')). Στην περίπτωση των τελευταίων τριών σχημάτων (μη ευκλείδειες νόρμες), κάνουν την εμφάνισή τους κάποια ευδιάκριτα σύνορα, όπως φαίνεται στα Σχήματα (32δ')-(33δ'), (32ε')-(33ε'), (32ε')-(33ε').

**Σε ό,τι αφορά την ομοιογένεια μεταξύ των νευρώνων, παρατηρούμε πως:** Μεγαλύτερη ομοιογένεια παρουσιάζεται στο δίκτυο όπου έγινε χρήση της νόρμα  $\ell_2$ , αφού η μοναδική συστάδα νευρώνων που δημιουργείται (Σχήμα (33α')), έχει απόχρωση πολύ κοντά στο λευκό και το υπόλοιπο του

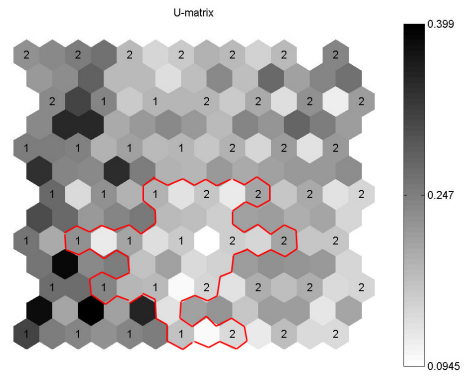
<sup>7</sup><https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/banknote+authentication>



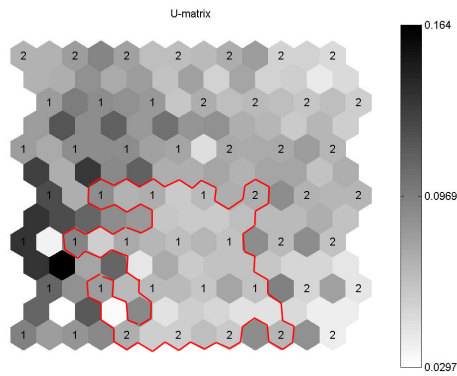
Σχήμα 32: Εκπαιδευμένα δίκτυα Kohonen στο Banknotes dataset με χρήση ευκλείδειας νόρμας και μη ευκλείδειων νορμών αντίστοιχα στον αλγόριθμο εκπαίδευσης.



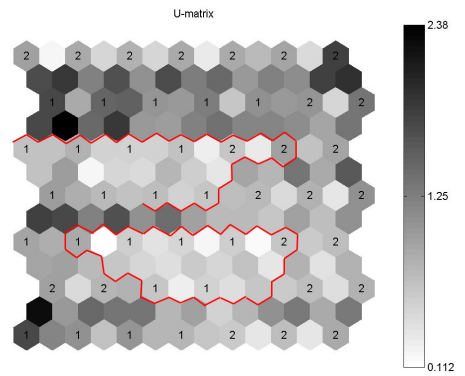
(α') Νόρμα  $\ell_2$   
(Ευκλείδεια)



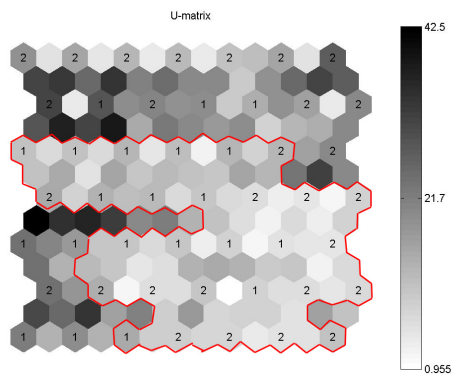
(β') Νόρμα  $\ell_1$   
(μη Ευκλείδεια)



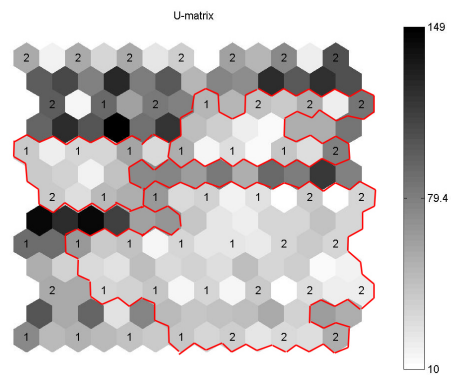
(γ') Νόρμα  $\ell_\infty$   
(μη Ευκλείδεια)



(δ') Νόρμα  $\ell_{0.5}$   
(μη Ευκλείδεια)



(ε') Νόρμα  $\ell_{0.25}$   
(μη Ευκλείδεια)



(ζ') Νόρμα  $\ell_{0.2}$   
(μη Ευκλείδεια)

Σχήμα 33: Εκπαιδευμένα δίκτυα Kohonen στο Banknotes dataset με χρήση ευκλείδειας νόρμας και μη ευκλείδειων νορμών αντίστοιχα στον αλγόριθμο εκπαίδευσης.

γραφήματος παραμένει στην ίδια απόχρωση του γκριζου με τα υπόλοιπα σχήματα. Τα υπόλοιπα δίκτυα παρουσιάζουν παρόμοια εικόνα σε ό,τι αφορά την απόχρωση του γκριζου στις συστάδες που δημιουργούνται σε αυτά. Κατά αυτό τον τρόπο δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε περισσότερο κάποια από αυτά σε ό,τι αφορά την ομοιογένειά μεταξύ των νευρώνων τους.

**Σε ό,τι αφορά τη μεγαλύτερη και την ελάχιστη τιμή της απόστασης μεταξύ των νευρώνων, παρατηρούμε πως:** Θέτοντας το συμβολισμό  $d_{max}^{\ell_x}$  για τη μέγιστη τιμή της απόστασης που παρατηρείται στο δίκτυο που εκπαιδεύτηκε με χρήση της νόρμα  $\ell_x$ , τότε με βάση το Σχήμα (32) (και για το λόγο που εξηγήσαμε σε προηγούμενες παραγράφους) παίρνουμε την ακόλουθη σχέση

$$d_{max}^{\ell_{\infty}} < d_{max}^{\ell_2} < d_{max}^{\ell_1} < d_{max}^{\ell_{0.5}} < d_{max}^{\ell_{0.25}} < d_{max}^{\ell_{0.2}} \quad (22)$$

Απο το ίδιο σχήμα, Σχήμα (32) προκύπτει και η σχέση για τα ελάχιστα των αποστάσεων που ακολουθεί

$$d_{min}^{\ell_{\infty}} < d_{min}^{\ell_2} < d_{min}^{\ell_1} < d_{min}^{\ell_{0.5}} < d_{min}^{\ell_{0.25}} < d_{min}^{\ell_{0.2}} \quad (23)$$

**Σε ό,τι αφορά τα δύο μέτρα ποιότητας  $Q_e$  και  $T_e$  (Πίνακας (4)):** Και σε αυτή τη περίπτωση, το μικρότερο τοπογραφικό σφάλμα  $T_e$  και το μικρότερο σφάλμα κβαντοποίησης,  $Q_e$  παρουσιάζονται στο δίκτυο όπου έγινε χρήση της νόρμα  $\ell_2$  και στο δίκτυο όπου έγινε χρήση της νόρμα  $\ell_{\infty}$  αντιστοίχως. Αν διατάξουμε τις νόρμες με βάση την τιμή του τοπογραφικού σφάλματος,

- η τάση διπλασιασμού του τοπογραφικού σφάλματος που υπήρχε στα προηγούμενα δύο datasets, εδώ χάνεται.
- καθώς αυξάνεται το τοπογραφικό σφάλμα, αυξάνεται και το σφάλμα κβαντοποίησης, με μόνη εξαίρεση τη νόρμα  $\ell_{\infty}$  (η οποία και παρουσιάζει το ελάχιστο  $Q_e$ ) και τη νόρμα  $\ell_{0.25}$ .

| Νόρμα           | $Q_e$  | $T_e$ |
|-----------------|--------|-------|
| $\ell_2$        | 0.134  | 0.015 |
| $\ell_1$        | 0.205  | 0.041 |
| $\ell_{\infty}$ | 0.105  | 0.066 |
| $\ell_{0.5}$    | 0.636  | 0.243 |
| $\ell_{0.2}$    | 33.760 | 0.378 |
| $\ell_{0.25}$   | 8.949  | 0.433 |

Πίνακας 4: Σφάλματα εκπαιδευμένων δικτύων Kohonen με χρήση διάφορων μέτρων απόστασης κατά την εκπαίδευση (Banknotes dataset). Σφάλμα κβαντοποίησης ( $Q_e$ ), Τοπογραφικό σφάλμα ( $T_e$ )

**Παρατηρούμε επίσης πως:** Και σε αυτή τη περίπτωση του Banknotes dataset, δημιουργείται ένας προβληματισμός παρόμοιος με αυτόν του υποκεφαλαίου 5.3. Ωστόσο, είναι λιγότερο έντονος ο προβληματισμός που προκύπτει, το οποίο ίσως έχει να κάνει και με το ότι έχουμε μόνο δύο κατηγορίες στα δεδομένα εισόδου. Πιο συγκεκριμένα, οι ετικέτες που έχουν πάρει οι νευρώνες εξόδου στο Σχήμα (32α'), δεν μεταβάλλονται αξιοσημείωτα στην περίπτωση του Σχήματος (32β') και του Σχήματος (32γ'). Σε αυτά τα τρία σχήματα, η κατηγορία 2 φαίνεται να έχει αντιστοιχηθεί περίπου στους ίδιους πάντα νευρώνες (δημιουργώντας ένα σχηματισμό που θυμίζει το αγγλικό γράμμα C αλλά ανεστραμμένο). Κατά αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να πούμε πως η κατηγορία 2 εμφανίζεται συγκεντρωμένη σε μια περιοχή, ενώ η κατηγορία 1 σε μια διαφορετική περιοχή. Ωστόσο, αυτές οι δύο περιοχές δε χωρίζονται από κάποιο σχηματισμό συνόρου. Στη συνέχεια, κοιτάζοντας τα σχήματα των μη κυρτών νορμών, η παραπάνω παρατήρηση εξασθενεί σημαντικά, δημιουργώντας μια αντίφαση.

Στο παράρτημα Α' (υποκεφάλαιο Α'.3), φαίνεται πόσα δεδομένα και από ποια κατηγορία κέρδισε ο κάθε νευρώνας σε κάθε ένα από τα γραφήματα στο Σχήμα (32). Από αυτούς τους πίνακες του παραρτήματος για το Banknotes dataset, γίνεται αντιληπτό πως οι νευρώνες εξόδου κερδίζουν συχνά δεδομένα και από τις δύο κατηγορίες (όπως και στην περίπτωση του COIL dataset, αλλά σε μικρότερο βαθμό). Αυτό ισχύει για όλες τις νόρμες. Στην περίπτωση των μη κυρτών νορμών, φαίνεται να εντείνεται το φαινόμενο που μόλις ανέφερα. Ακόμη, στις μη κυρτές νόρμες τα δεδομένα εισόδου εμφανίζονται περισσότερο συγκεντρωμένα σε κάποιους νευρώνες, αφήνοντας κάποιους άλλους νευρώνες σχετικά άδειους.

## 6 Συμπεράσματα-Παρατηρήσεις

Από το περιεχόμενο των προηγούμενων παραγράφων αυτής της πτυχιακής εργασίας προκύπτει πως:

- Ο αλγόριθμος εκπαίδευσης ενός δικτύου Kohonen είναι ένας απλός στη σύνθεσή του αλγόριθμος, και το αποτέλεσμα της εκπαίδευσης ενός δικτύου από αυτόν φαίνεται πως εξαρτάται από ένα πλήθος παραμέτρων του αλγορίθμου αλλά και την αρχικοποίηση των βαρών του δικτύου.
- Υπάρχουν πάρα πολλές εργασίες όπου γίνεται εφαρμογή του δικτύου Kohonen και συνηθίζεται σε αυτές η εκπαίδευση ενός δικτύου Kohonen να είναι ένα κομμάτι μόνο της συνολικής μεθόδου. Πριν την εκπαίδευση του δικτύου, συνήθως προηγείται μια περισσότερο ή λιγότερο καινοτόμα μοντελοποίηση των δεδομένων. Αυτή η μοντελοποίηση, μπορεί να είναι ιδιαίτερος σύνθετη.
- Σε κάθε dataset που χρησιμοποιήθηκε, ισχύουν οι ακόλουθες 2 σχέσεις σε ό,τι αφορά τις μέγιστες και τις ελάχιστες αποστάσεις ( $d_{max}$  και  $d_{min}$ ) μεταξύ των κόμβων των εκπαιδευμένων δικτύων Kohonen που προέκυψαν με χρήση της εκάστοτε νόρμα:

$$d_{max}^{\ell_{\infty}} < d_{max}^{\ell_2} < d_{max}^{\ell_1} < d_{max}^{\ell_{0.5}} < d_{max}^{\ell_{0.25}} < d_{max}^{\ell_{0.2}} \quad (24)$$

$$d_{min}^{\ell_{\infty}} < d_{min}^{\ell_2} < d_{min}^{\ell_1} < d_{min}^{\ell_{0.5}} < d_{min}^{\ell_{0.25}} < d_{min}^{\ell_{0.2}} \quad (25)$$

- Σε κάθε dataset που χρησιμοποιήθηκε, το δίκτυο Kohonen που προέκυψε μετά από χρήση της ευκλείδειας νόρμα παρουσίασε το μικρότερο τοπογραφικό σφάλμα ( $T_e$ ) και το δίκτυο όπου έγινε χρήση της νόρμα  $\ell_{\infty}$  παρουσίασε το μικρότερο σφάλμα κβαντοποίησης ( $Q_e$ ).
- Σε κάθε dataset που χρησιμοποιήθηκε, ισχύουν οι ακόλουθες 2 σχέσεις σε ό,τι αφορά το τοπογραφικό σφάλμα ( $T_e$ ) και το σφάλμα κβαντοποίησης ( $Q_e$ ):

$$T_e^{\ell_2} < T_e^{\ell_1} < T_e^{\ell_{\infty}} \quad (26)$$

$$Q_e^{\ell_{\infty}} < Q_e^{\ell_2} < Q_e^{\ell_1} \quad (27)$$

- Η χρήση διαφορετικών νορμών ( $\ell_2$ ,  $\ell_1$ ,  $\ell_{\infty}$ ,  $\ell_{0.5}$ ,  $\ell_{0.25}$ ,  $\ell_{0.2}$ ) δίνει μία (περισσότερο ή λιγότερο) διαφορετική εικόνα των εκπαιδευμένων δικτύων που προκύπτουν σε κάθε ένα από τα 3 datasets που χρησιμοποιήθηκαν.
- Οι διαφορές που προκύπτουν στην εικόνα των εκπαιδευμένων δικτύων με τη χρήση των προαναφερθέντων νορμών, δεν είναι συνεπείς μεταξύ των διαφορετικών datasets που χρησιμοποιήθηκαν. Π.χ. ενώ η χρήση της νόρμα  $\ell_1$  δίνει ένα εκπαιδευμένο δίκτυο το οποίο παρουσιάζει στην περίπτωση του Iris dataset και του COIL dataset τη μεγαλύτερη ομοιότητα με το δίκτυο που προέκυψε με χρήση της ευκλείδειας νόρμα, δεν συμβαίνει το ίδιο στην περίπτωση του Banknotes dataset.
- Σε κάθε dataset που χρησιμοποιήθηκε, οι εικόνες των δικτύων που προέκυψαν μετά από χρήση των μη κυρτών νορμών ( $\ell_{0.5}$ ,  $\ell_{0.25}$ ,  $\ell_{0.2}$ ) μοιάζουν μεταξύ τους και ταυτόχρονα είναι πολύ διαφορετικές σε σχέση με την εικόνα που δίνουν οι άλλες 3 κυρτές νόρμες που χρησιμοποιήθηκαν ( $\ell_2$ ,  $\ell_1$ ,  $\ell_{\infty}$ ).
- Στην περίπτωση των μη κυρτών νορμών, φαίνεται να υπάρχει μία τάση κάποιοι εκπαιδευμένοι νευρώνες εξόδου να κερδίζουν πολλά δεδομένα εισόδου και κάποιοι άλλοι να κερδίζουν σχετικά λιγότερα δεδομένα εισόδου.

Όλα τα ανωτέρω, αποτελούν περισσότερο διαισθητικές παρατηρήσεις, οι οποίες θα πρέπει να μελετηθούν αναλυτικότερα τόσο πειραματικά όσο και θεωρητικά, κάτι που ξεφεύγει από τα όρια μιας πτυχιακής εργασίας και αποτελεί αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.



## Αναφορές

- [1] Διαμανταράς, Κ. (2007). “Τεχνητά νευρωνικά δίκτυα”, Αθήνα, Εκδόσεις κλειδάριθμος.
- [2] Aggarwal, C., Hinneburg, A. & Keim, D. (2001). On the Surprising Behavior of Distance Metrics in High Dimensional Spaces, *Proc. Eighth Int’l Conf. Database Theory, J. Van den Bussche and V. Vianu, eds., pp. 420-434*
- [3] Asan, U., & Ercan, S. (2012). An Introduction to Self-Organizing Maps. Στο C. Kahraman, (Επιμ.) *Computational Intelligence Systems in Industrial Engineering*, 299-319. France, Atlantis Press
- [4] Bauer, H.-U., & Pawelzik, K. (1992). Quantifying the neighborhood preservation of self-organizing feature maps, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 3(4), 570-579.
- [5] Bellas, A., Bouveyron, C., Cottrell, M., & Lacaille, J. (2014). Anomaly detection based on confidence intervals using SOM with an application to Health Monitoring, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 295, 145-155.
- [6] Breard, G. (2017). Evaluating Self-Organizing Map Quality Measures as Convergence Criteria (Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, University of Rhode Island, Rhode Island, Η.Π.Α.). Ανακτήθηκε από το δικτυακό τόπο <https://digitalcommons.uri.edu/theses/1033>
- [7] Cetin, A. & Gerek, O. (2006). Vector Quantization. doi: 10.1002/9780471740360.ebs1254
- [8] Deboeck, G. (2000). Financial Applications of Self-Organizing Maps, *Neural Network World*, 8.
- [9] Ettaouil, M., Lazaar, M. & Ghanou, Y. (2012). Vector Quantization by Improved Kohonen Algorithm, *Journal of computing*, 4(6). Ανακτήθηκε από το δικτυακό τόπο <https://sites.google.com/site/journalofcomputing/>
- [10] François, D., Wertz, V., & Verleysen, V. (2005). Non-Euclidean metrics for similarity search in noisy datasets., *ESANN 2005 Proceedings - 13th European Symposium on Artificial Neural Networks*, 19, 339-344.
- [11] François, D., Wertz, V., & Verleysen, V. (2007). The Concentration of Fractional Distances, *Knowledge and Data Engineering, IEEE Transactions on*, 19, 873-886.
- [12] Goodhill, G., Finch, & S., Sejnowski, T. (1996). Quantifying Neighbourhood Preservation in Topographic Mappings, *Proceedings of the 3rd Joint Symposium Neurol*, 6.
- [13] Honkela, T., Pulkki, V., & Kohonen, T. (1995). Contextual Relations of Words in Grimm Tales, Analyzed by Self-Organizing Map. *Proceedings of the International Conference on Artificial Neural Networks*, 3-5. doi: 10.1109/IJCNN.2010.5596524
- [14] Honkela, T. (1998). Self-Organizing Maps In Natural Language Processing. (Διδακτορική διατριβή, Helsinki University of Technology, Φινλανδία). Ανακτήθηκε από [https://www.researchgate.net/publication/2749269\\_Self-Organizing\\_Maps\\_In\\_Natural\\_Language\\_Processing](https://www.researchgate.net/publication/2749269_Self-Organizing_Maps_In_Natural_Language_Processing)
- [15] Kahraman, C. (2012). “*Computational intelligence systems in industrial engineering: With recent theory and applications*”, Paris, Atlantis press.
- [16] Kaski, S., Honkela, T., Lagus, K., & Kohonen, T. (1998). Self-Organizing Maps of Document Collections: A New Approach to Interactive Exploration, *Proceedings of the Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 238-243.
- [17] Kohonen, T. (2001). “*Self-Organizing Maps*”, 3rd ed, Heidelberg, Springer.
- [18] Kohonen, T. (1982). Analysis of a simple self-organizing process, *Biol. Cybernetics*, 44, 135-140.
- [19] Kouiroukidis, N., & Evangelidis, G. (2011). The Effects of Dimensionality Curse in High Dimensional kNN Search, *Proceedings - 2011 Panhellenic Conference on Informatics*, 10.1109/PCI.2011.45.

- [20] Lee, W.K., Duch, W., & Ng, G.S. (2007). Robot Space Exploration Using Peano Paths Generated by Self-Organizing Maps. doi: 10.1109/ICARCV.2006.345432
- [21] Li, J. (2005). Information Visualization with Self-Organizing Maps. Ανακτήθηκε από το δικτυακό τόπο <http://www14.in.tum.de/konferenzen/Jass05/courses/6/Papers/09.pdf>
- [22] Lobo, V. (2005). One dimensional Self-Organizing Maps to optimize marine patrol activities, *Oceans 2005 - Europe, 1*, 569-572. doi: 10.1109/OCEANSE.2005.1511777
- [23] Matsushita, H., & Nishio, Y. (2010). Batch-Learning Self-Organizing Map with Weighted Connections Avoiding False-Neighbor Effects, *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*. doi: 10.1109/IJCNN.2010.5596524
- [24] Pözlbauer, G. (2004). Survey and comparison of quality measures for self-organizing maps, *Proceedings of the Fifth Workshop on Data Analysis (WDA04)*.
- [25] Rao, H., & Zhang, S. (2016). Space-filling curves of self-similar sets (I): iterated function systems with order structures, *Nonlinearity, 29*, 2112-2132.
- [26] Shchepin, E., & Bauman, K. (2008). Minimal Peano curve, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 263*, 236-256. doi: 10.1134/S0081543808040172
- [27] Stefanovic, P., & Kurasova, O. (2011). Visual analysis of self-organizing maps, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 16(4)*, 488-504.
- [28] Sun, Y. (2000). On quantization error of self-organizing map network, *Neurocomputing, 34*, 169-193. doi: 10.1016/S0925-2312(00)00292-7
- [29] Vesanto, J. (2000). Neural Network Tool for Data Mining: SOM Toolbox, *Proceeding of 3rd Joint Symposium Neurol, 6*.
- [30] Vesanto, J., Himberg, J., Alhoniemi, E., & Parhankangas, J. (2000). SOM toolbox for Matlab 5, *Helsinki University of Technology, 216*.
- [31] Zaslavsky, V., & Strizhak, A. (2006). Credit card fraud detection using self organizing maps, *Information & Security: An International Journal, 18*, 48-63. doi: 10.1109/IJCNN.2010.5596524
- [32] Zribi, M., Feki, R., Abdelkafi, I., & Boujelbene, Y. (2012). The self-organizing maps of Kohonen in the medical classification, *2012 6th International Conference on Sciences of Electronics, Technologies of Information and Telecommunications (SETIT)*, 852-856.

## Α' Παράρτημα Α

### Α'.1 Πίνακες κερδισμένων δεδομένων εισόδου IRIS Data set

| νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα                   | νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα |
|-----------------------|-------------------------------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1/5                   | <i>setosa</i> /5                          | 34/4                  | <i>versicolor</i> /4    |
| 2/7                   | <i>setosa</i> /7                          | 35/1                  | <i>virginica</i> /1     |
| 3/1                   | <i>setosa</i> /1                          | 36/0                  | 0                       |
| 4/0                   | 0                                         | 37/4                  | <i>virginica</i> /4     |
| 5/5                   | <i>versicolor</i> /5                      | 38/3                  | <i>virginica</i> /3     |
| 6/2                   | <i>versicolor</i> /2                      | 39/6                  | <i>virginica</i> /6     |
| 7/4                   | <i>versicolor</i> /3, <i>virginica</i> /1 | 40/3                  | <i>setosa</i> /3        |
| 8/1                   | <i>versicolor</i> /1                      | 41/1                  | <i>setosa</i> /1        |
| 9/4                   | <i>versicolor</i> /2, <i>virginica</i> /2 | 42/4                  | <i>setosa</i> /4        |
| 10/1                  | <i>virginica</i> /1                       | 43/0                  | 0                       |
| 11/7                  | <i>virginica</i> /7                       | 44/0                  | 0                       |
| 12/0                  | 0                                         | 45/3                  | <i>versicolor</i> /3    |
| 13/3                  | <i>virginica</i> /3                       | 46/1                  | <i>versicolor</i> /1    |
| 14/3                  | <i>setosa</i> /3                          | 47/1                  | <i>versicolor</i> /1    |
| 15/2                  | <i>setosa</i> /2                          | 48/1                  | <i>versicolor</i> /1    |
| 16/1                  | <i>setosa</i> /1                          | 49/1                  | <i>versicolor</i> /1    |
| 17/0                  | 0                                         | 50/0                  | 0                       |
| 18/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 51/1                  | <i>virginica</i> /1     |
| 19/3                  | <i>versicolor</i> /3                      | 52/3                  | <i>virginica</i> /3     |
| 20/3                  | <i>versicolor</i> /3                      | 53/4                  | <i>setosa</i> /4        |
| 21/0                  | 0                                         | 54/7                  | <i>setosa</i> /7        |
| 22/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 55/1                  | <i>setosa</i> /1        |
| 23/5                  | <i>virginica</i> /4, <i>versicolor</i> /1 | 56/0                  | 0                       |
| 24/1                  | <i>virginica</i> /1                       | 57/1                  | <i>versicolor</i> /1    |
| 25/0                  | 0                                         | 58/3                  | <i>versicolor</i> /3    |
| 26/3                  | <i>virginica</i> /3                       | 59/1                  | <i>versicolor</i> /1    |
| 27/5                  | <i>setosa</i> /5                          | 60/3                  | <i>versicolor</i> /3    |
| 28/4                  | <i>setosa</i> /4                          | 61/5                  | <i>versicolor</i> /5    |
| 29/2                  | <i>setosa</i> /2                          | 62/2                  | <i>versicolor</i> /2    |
| 30/0                  | 0                                         | 63/2                  | <i>virginica</i> /2     |
| 31/0                  | 0                                         | 64/6                  | <i>virginica</i> /6     |
| 32/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 65/2                  | <i>virginica</i> /2     |
| 33/1                  | <i>versicolor</i> /1                      |                       |                         |

Πίνακας 5: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_2$  (για το IRIS Data set)

| νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα                   | νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα                   |
|-----------------------|-------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------------|
| 1/4                   | <i>setosa</i> /4                          | 34/4                  | <i>versicolor</i> /4                      |
| 2/8                   | <i>setosa</i> /8                          | 35/3                  | <i>versicolor</i> /2, <i>virginica</i> /1 |
| 3/0                   | 0                                         | 36/2                  | <i>versicolor</i> /1, <i>virginica</i> /1 |
| 4/0                   | 0                                         | 37/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 5/3                   | <i>versicolor</i> /3                      | 38/2                  | <i>virginica</i> /2                       |
| 6/3                   | <i>versicolor</i> /3                      | 39/4                  | <i>virginica</i> /4                       |
| 7/2                   | <i>versicolor</i> /2                      | 40/4                  | <i>setosa</i> /4                          |
| 8/1                   | <i>versicolor</i> /1                      | 41/2                  | <i>setosa</i> /2                          |
| 9/2                   | <i>virginica</i> /2                       | 42/1                  | <i>setosa</i> /1                          |
| 10/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 43/4                  | <i>setosa</i> /4                          |
| 11/5                  | <i>virginica</i> /5                       | 44/0                  | 0                                         |
| 12/2                  | <i>virginica</i> /2                       | 45/1                  | <i>versicolor</i> /1                      |
| 13/1                  | <i>virginica</i> /1                       | 46/3                  | <i>versicolor</i> /3                      |
| 14/5                  | <i>setosa</i> /5                          | 47/2                  | <i>versicolor</i> /2                      |
| 15/1                  | <i>setosa</i> /1                          | 48/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 16/0                  | 0                                         | 49/3                  | <i>virginica</i> /3                       |
| 17/0                  | 0                                         | 50/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 18/2                  | <i>versicolor</i> /2                      | 51/4                  | <i>virginica</i> /4                       |
| 19/3                  | <i>versicolor</i> /3                      | 52/3                  | <i>virginica</i> /3                       |
| 20/3                  | <i>versicolor</i> /3                      | 53/5                  | <i>setosa</i> /5                          |
| 21/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 54/3                  | <i>setosa</i> /3                          |
| 22/3                  | <i>versicolor</i> /2, <i>virginica</i> /1 | 55/2                  | <i>setosa</i> /2                          |
| 23/2                  | <i>virginica</i> /2                       | 56/4                  | <i>setosa</i> /4                          |
| 24/2                  | <i>virginica</i> /2                       | 57/0                  | 0                                         |
| 25/2                  | <i>virginica</i> /2                       | 58/0                  | 0                                         |
| 26/4                  | <i>virginica</i> /4                       | 59/2                  | <i>versicolor</i> /2                      |
| 27/1                  | <i>setosa</i> /1                          | 60/4                  | <i>versicolor</i> /4                      |
| 28/3                  | <i>setosa</i> /3                          | 61/3                  | <i>versicolor</i> /3                      |
| 29/3                  | <i>setosa</i> /3                          | 62/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 30/0                  | 0                                         | 63/0                  | 0                                         |
| 31/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 64/5                  | <i>virginica</i> /5                       |
| 32/4                  | <i>versicolor</i> /4                      | 65/2                  | <i>virginica</i> /2                       |
| 33/2                  | <i>versicolor</i> /2                      |                       |                                           |

Πίνακας 6: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_1$  (για το IRIS Data set)

| νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα                   | νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα |
|-----------------------|-------------------------------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1/7                   | <i>setosa</i> /7                          | 34/2                  | <i>versicolor</i> /2    |
| 2/5                   | <i>setosa</i> /5                          | 35/1                  | <i>virginica</i> /1     |
| 3/3                   | <i>setosa</i> /3                          | 36/0                  | 0                       |
| 4/1                   | <i>setosa</i> /1                          | 37/4                  | <i>virginica</i> /4     |
| 5/3                   | <i>versicolor</i> /3                      | 38/2                  | <i>virginica</i> /2     |
| 6/5                   | <i>versicolor</i> /5                      | 39/6                  | <i>virginica</i> /6     |
| 7/4                   | <i>versicolor</i> /4                      | 40/2                  | <i>setosa</i> /2        |
| 8/3                   | <i>versicolor</i> /2, <i>virginica</i> /1 | 41/1                  | <i>setosa</i> /1        |
| 9/2                   | <i>virginica</i> /2                       | 42/2                  | <i>setosa</i> /2        |
| 10/4                  | <i>virginica</i> /4                       | 43/2                  | <i>setosa</i> /2        |
| 11/2                  | <i>virginica</i> /2                       | 44/0                  | 0                       |
| 12/2                  | <i>virginica</i> /2                       | 45/3                  | <i>versicolor</i> /3    |
| 13/2                  | <i>virginica</i> /2                       | 46/2                  | <i>versicolor</i> /2    |
| 14/2                  | <i>setosa</i> /2                          | 47/1                  | <i>versicolor</i> /1    |
| 15/2                  | <i>setosa</i> /2                          | 48/2                  | <i>versicolor</i> /2    |
| 16/0                  | 0                                         | 49/2                  | <i>versicolor</i> /2    |
| 17/0                  | 0                                         | 50/0                  | 0                       |
| 18/0                  | 0                                         | 51/1                  | <i>virginica</i> /1     |
| 19/3                  | <i>versicolor</i> /2, <i>virginica</i> /1 | 52/2                  | <i>virginica</i> /2     |
| 20/2                  | <i>versicolor</i> /2                      | 53/2                  | <i>setosa</i> /2        |
| 21/0                  | 0                                         | 54/7                  | <i>setosa</i> /7        |
| 22/3                  | <i>versicolor</i> /2, <i>virginica</i> /1 | 55/4                  | <i>setosa</i> /4        |
| 23/3                  | <i>virginica</i> /3                       | 56/0                  | 0                       |
| 24/2                  | <i>virginica</i> /2                       | 57/0                  | 0                       |
| 25/1                  | <i>virginica</i> /1                       | 58/1                  | <i>versicolor</i> /1    |
| 26/2                  | <i>virginica</i> /2                       | 59/2                  | <i>versicolor</i> /2    |
| 27/3                  | <i>setosa</i> /3                          | 60/2                  | <i>versicolor</i> /2    |
| 28/5                  | <i>setosa</i> /5                          | 61/5                  | <i>versicolor</i> /5    |
| 29/2                  | <i>setosa</i> /2                          | 62/4                  | <i>versicolor</i> /4    |
| 30/0                  | 0                                         | 63/1                  | <i>virginica</i> /1     |
| 31/0                  | 0                                         | 64/5                  | <i>virginica</i> /5     |
| 32/3                  | <i>versicolor</i> /3                      | 65/5                  | <i>virginica</i> /5     |
| 33/1                  | <i>versicolor</i> /1                      |                       |                         |

Πίνακας 7: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_\infty$  (για το IRIS Data set)

| νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα                   | νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα                   |
|-----------------------|-------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------------|
| 1/5                   | <i>setosa</i> /5                          | 34/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 2/5                   | <i>setosa</i> /5                          | 35/3                  | <i>versicolor</i> /3                      |
| 3/2                   | <i>setosa</i> /2                          | 36/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 4/1                   | <i>setosa</i> /1                          | 37/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 5/0                   | 0                                         | 38/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 6/1                   | <i>versicolor</i> /1                      | 39/5                  | <i>virginica</i> /5                       |
| 7/5                   | <i>versicolor</i> /5                      | 40/2                  | <i>setosa</i> /2                          |
| 8/1                   | <i>versicolor</i> /1                      | 41/2                  | <i>setosa</i> /2                          |
| 9/0                   | 0                                         | 42/3                  | <i>setosa</i> /3                          |
| 10/5                  | <i>virginica</i> /4, <i>versicolor</i> /1 | 43/4                  | <i>setosa</i> /4                          |
| 11/4                  | <i>virginica</i> /3, <i>versicolor</i> /1 | 44/0                  | 0                                         |
| 12/1                  | <i>virginica</i> /1                       | 45/1                  | <i>versicolor</i> /1                      |
| 13/1                  | <i>virginica</i> /1                       | 46/4                  | <i>versicolor</i> /4                      |
| 14/2                  | <i>setosa</i> /2                          | 47/3                  | <i>versicolor</i> /2, <i>virginica</i> /1 |
| 15/3                  | <i>setosa</i> /3                          | 48/2                  | <i>versicolor</i> /2                      |
| 16/6                  | <i>setosa</i> /6                          | 49/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 17/2                  | <i>setosa</i> /2                          | 50/3                  | <i>virginica</i> /2, <i>versicolor</i> /1 |
| 18/0                  | 0                                         | 51/3                  | <i>virginica</i> /3                       |
| 19/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 52/0                  | 0                                         |
| 20/4                  | <i>versicolor</i> /4                      | 53/0                  | 0                                         |
| 21/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 54/3                  | <i>setosa</i> /3                          |
| 22/4                  | <i>versicolor</i> /4                      | 55/2                  | <i>setosa</i> /2                          |
| 23/0                  | 0                                         | 56/2                  | <i>setosa</i> /2                          |
| 24/4                  | <i>virginica</i> /4                       | 57/0                  | 0                                         |
| 25/2                  | <i>virginica</i> /2                       | 58/0                  | 0                                         |
| 26/3                  | <i>virginica</i> /3                       | 59/4                  | <i>versicolor</i> /4                      |
| 27/3                  | <i>setosa</i> /3                          | 60/2                  | <i>virginica</i> /2                       |
| 28/3                  | <i>setosa</i> /3                          | 61/5                  | <i>versicolor</i> /5                      |
| 29/0                  | 0                                         | 62/2                  | <i>virginica</i> /2                       |
| 30/0                  | 0                                         | 63/3                  | <i>virginica</i> /3                       |
| 31/4                  | <i>versicolor</i> /4                      | 64/5                  | <i>virginica</i> /5                       |
| 32/3                  | <i>versicolor</i> /3                      | 65/4                  | <i>virginica</i> /4                       |
| 33/2                  | <i>versicolor</i> /2                      |                       |                                           |

Πίνακας 8: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_{0.5}$  (για το IRIS Data set)

| νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα                   | νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα                   |
|-----------------------|-------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------------|
| 1/1                   | <i>setosa</i> /1                          | 34/4                  | <i>versicolor</i> /4                      |
| 2/9                   | <i>setosa</i> /9                          | 35/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 3/2                   | <i>setosa</i> /2                          | 36/4                  | <i>versicolor</i> /4                      |
| 4/3                   | <i>setosa</i> /3                          | 37/2                  | <i>virginica</i> /2                       |
| 5/0                   | 0                                         | 38/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 6/3                   | <i>versicolor</i> /3                      | 39/3                  | <i>virginica</i> /3                       |
| 7/4                   | <i>versicolor</i> /4                      | 40/2                  | <i>setosa</i> /2                          |
| 8/4                   | <i>versicolor</i> /4                      | 41/5                  | <i>setosa</i> /5                          |
| 9/1                   | <i>versicolor</i> /1                      | 42/1                  | <i>setosa</i> /1                          |
| 10/2                  | <i>versicolor</i> /2                      | 43/0                  | 0                                         |
| 11/4                  | <i>virginica</i> /4                       | 44/1                  | <i>versicolor</i> /1                      |
| 12/0                  | 0                                         | 45/3                  | <i>versicolor</i> /3                      |
| 13/4                  | <i>virginica</i> /4                       | 46/2                  | <i>virginica</i> /2                       |
| 14/4                  | <i>setosa</i> /4                          | 47/0                  | 0                                         |
| 15/3                  | <i>setosa</i> /3                          | 48/5                  | <i>virginica</i> /4, <i>versicolor</i> /1 |
| 16/1                  | <i>setosa</i> /1                          | 49/1                  | <i>versicolor</i> /1                      |
| 17/1                  | <i>setosa</i> /1                          | 50/6                  | <i>virginica</i> /6                       |
| 18/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 51/0                  | 0                                         |
| 19/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 52/6                  | <i>virginica</i> /6                       |
| 20/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 53/1                  | <i>setosa</i> /1                          |
| 21/4                  | <i>versicolor</i> /4                      | 54/5                  | <i>setosa</i> /5                          |
| 22/6                  | <i>virginica</i> /5, <i>versicolor</i> /1 | 55/1                  | <i>setosa</i> /1                          |
| 23/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 56/2                  | <i>setosa</i> /2                          |
| 24/0                  | 0                                         | 57/0                  | 0                                         |
| 25/1                  | <i>virginica</i> /1                       | 58/1                  | <i>versicolor</i> /1                      |
| 26/1                  | <i>virginica</i> /1                       | 59/2                  | <i>virginica</i> /2                       |
| 27/3                  | <i>setosa</i> /3                          | 60/3                  | <i>versicolor</i> /3                      |
| 28/3                  | <i>setosa</i> /3                          | 61/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 29/0                  | 0                                         | 62/4                  | <i>versicolor</i> /4                      |
| 30/3                  | <i>setosa</i> /3                          | 63/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 31/3                  | <i>versicolor</i> /3                      | 64/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 32/0                  | 0                                         | 65/4                  | <i>virginica</i> /4                       |
| 33/3                  | <i>versicolor</i> /2, <i>virginica</i> /1 |                       |                                           |

Πίνακας 9: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_{0.25}$  (για το IRIS Data set)

| νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα                   | νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα                   |
|-----------------------|-------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------------|
| 1/1                   | <i>setosa</i> /1                          | 34/2                  | <i>versicolor</i> /1, <i>virginica</i> /1 |
| 2/3                   | <i>setosa</i> /3                          | 35/2                  | <i>virginica</i> /2                       |
| 3/1                   | <i>setosa</i> /1                          | 36/0                  | 0                                         |
| 4/0                   | 0                                         | 37/7                  | <i>virginica</i> /7                       |
| 5/1                   | <i>versicolor</i> /1                      | 38/0                  | 0                                         |
| 6/2                   | <i>versicolor</i> /2                      | 39/3                  | <i>virginica</i> /3                       |
| 7/8                   | <i>versicolor</i> /8                      | 40/2                  | <i>setosa</i> /2                          |
| 8/1                   | <i>virginica</i> /1                       | 41/0                  | 0                                         |
| 9/4                   | <i>versicolor</i> /4                      | 42/1                  | <i>setosa</i> /1                          |
| 10/2                  | <i>versicolor</i> /1, <i>virginica</i> /1 | 43/1                  | <i>setosa</i> /1                          |
| 11/3                  | <i>virginica</i> /2, <i>versicolor</i> /1 | 44/0                  | 0                                         |
| 12/3                  | <i>virginica</i> /3                       | 45/0                  | 0                                         |
| 13/5                  | <i>virginica</i> /5                       | 46/2                  | <i>versicolor</i> /2                      |
| 14/0                  | 0                                         | 47/2                  | <i>versicolor</i> /1, <i>virginica</i> /1 |
| 15/4                  | <i>setosa</i> /4                          | 48/3                  | <i>virginica</i> /3                       |
| 16/1                  | <i>setosa</i> /1                          | 49/2                  | <i>versicolor</i> /2                      |
| 17/2                  | <i>setosa</i> /2                          | 50/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 18/2                  | <i>versicolor</i> /2                      | 51/3                  | <i>versicolor</i> /2, <i>virginica</i> /1 |
| 19/0                  | 0                                         | 52/5                  | <i>virginica</i> /5                       |
| 20/2                  | <i>versicolor</i> /2                      | 53/3                  | <i>setosa</i> /3                          |
| 21/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 54/7                  | <i>setosa</i> /7                          |
| 22/4                  | <i>versicolor</i> /2, <i>virginica</i> /2 | 55/4                  | <i>setosa</i> /4                          |
| 23/4                  | <i>virginica</i> /4                       | 56/0                  | 0                                         |
| 24/1                  | <i>virginica</i> /1                       | 57/0                  | 0                                         |
| 25/1                  | <i>virginica</i> /1                       | 58/2                  | <i>versicolor</i> /2                      |
| 26/2                  | <i>virginica</i> /2                       | 59/0                  | 0                                         |
| 27/5                  | <i>setosa</i> /5                          | 60/4                  | <i>versicolor</i> /4                      |
| 28/12                 | <i>setosa</i> /12                         | 61/0                  | 0                                         |
| 29/0                  | 0                                         | 62/3                  | <i>versicolor</i> /3                      |
| 30/3                  | <i>setosa</i> /3                          | 63/1                  | <i>virginica</i> /1                       |
| 31/1                  | <i>versicolor</i> /1                      | 64/1                  | <i>versicolor</i> /1                      |
| 32/3                  | <i>versicolor</i> /3                      | 65/3                  | <i>virginica</i> /3                       |
| 33/4                  | <i>versicolor</i> /4                      |                       |                                           |

Πίνακας 10: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_{0.2}$  (για το IRIS Data set)

## Α'.2 Πίνακες κερδισμένων δεδομένων εισόδου COIL-20 dataset

| νευρώνας/δεδομένα | κατηγορία/συχνότητα                        |
|-------------------|--------------------------------------------|
| 1/180             | 17/72, 14/50, 1/45, 19/6, 6/4, 15/3        |
| 2/41              | 14/22, 13/5, 5/3, 9/3, 19/3, 2/2, 3/2, 1/1 |
| 3/31              | 9/16, 13/8, 5/6, 3/1                       |
| 4/42              | 9/18, 20/12, 5/8, 18/4                     |
| 5/250             | 20/48, 3/45, 6/45, 19/44, 5/37, 18/31      |
| 6/72              | 15/69, 9/2, 13/1                           |
| 7/56              | 13/34, 10/12, 9/8, 2/1, 3/1                |
| 8/28              | 13/21, 9/3, 5/2, 2/1, 3/1                  |
| 9/36              | 9/19, 18/11, 5/4, 3/2                      |
| 10/50             | 18/22, 20/12, 3/6, 6/5, 19/4, 5/1          |
| 11/104            | 12/72, 11/27, 13/3, 2/2                    |
| 12/22             | 11/21, 2/1                                 |
| 13/41             | 10/37, 9/3, 2/1                            |
| 14/4              | 3/3, 19/1                                  |
| 15/30             | 6/10, 19/8, 3/6, 18/4, 5/2                 |
| 16/22             | 11/11, 4/9, 2/2                            |
| 17/5              | 11/5                                       |
| 18/23             | 10/23                                      |
| 19/27             | 7/24, 2/3                                  |
| 20/56             | 2/28, 1/8, 6/8, 7/7, 19/3, 3/2             |
| 21/35             | 4/30, 2/5                                  |
| 22/192            | 8/72, 16/72, 4/33, 11/8, 2/7               |
| 23/2              | 2/2                                        |
| 24/32             | 7/26, 1/4, 2/2                             |
| 25/59             | 2/15, 7/15, 1/14, 5/9, 3/3, 19/3           |

Πίνακας 11: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_2$  (για το COIL-20 dataset)

| νευρώνας/δεδομένα | κατηγορία/συχνότητα                                                             |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 1/76              | 6/18, 19/18, 1/16, 3/7, 14/4, 18/4, 2/3, 13/3, 5/2, 9/1                         |
| 2/33              | 14/8, 3/6, 1/4, 18/4, 6/3, 5/2, 13/2, 19/2, 9/1, 11/1                           |
| 3/19              | 8/10, 4/7, 11/2                                                                 |
| 4/16              | 8/13, 10/1, 11/1, 15/1                                                          |
| 5/60              | 8/40, 10/8, 11/7, 2/2, 4/2, 7/1                                                 |
| 6/16              | 7/4, 14/4, 1/2, 3/2, 18/2, 10/1, 19/1                                           |
| 7/5               | 3/2, 18/2, 1/1                                                                  |
| 8/8               | 11/5, 15/2, 7/1                                                                 |
| 9/47              | 16/36, 11/5, 15/3, 18/2, 4/1                                                    |
| 10/52             | 16/36, 8/9, 11/7                                                                |
| 11/164            | 12/66, 10/35, 4/30, 15/20, 13/7, 11/3, 2/1, 7/1, 9/1                            |
| 12/33             | 15/13, 11/6, 13/4, 12/3, 18/3, 7/2, 2/1, 4/1                                    |
| 13/13             | 11/11, 15/1, 18/1                                                               |
| 14/4              | 9/2, 17/1, 18/1                                                                 |
| 15/13             | 11/4, 18/4, 15/2, 17/2, 9/1                                                     |
| 16/77             | 4/23, 13/18, 7/12, 1/8, 10/8, 2/4, 12/3, 18/1                                   |
| 17/20             | 1/8, 11/5, 2/2, 7/2, 13/1, 18/1, 19/1                                           |
| 18/14             | 9/5, 11/4, 1/3, 3/1, 15/1                                                       |
| 19/23             | 3/6, 5/3, 15/3, 19/3, 7/2, 14/2, 18/2, 6/1, 9/1                                 |
| 20/289            | 17/65, 5/41, 6/33, 19/29, 18/27, 9/21, 13/21, 20/21, 3/18, 15/6, 14/4, 2/2, 1/1 |
| 21/226            | 2/46, 7/42, 1/23, 14/21, 9/19, 10/18, 3/13, 5/13, 19/11, 6/8, 4/7, 13/4, 18/1   |
| 22/94             | 14/28, 9/16, 6/9, 13/8, 2/7, 19/6, 7/5, 3/4, 1/3, 5/3, 11/2, 10/1, 4/1, 17/1    |
| 23/30             | 3/9, 5/6, 15/4, 9/3, 1/2, 11/2, 13/2, 14/1, 19/1                                |
| 24/46             | 15/15, 18/13, 11/6, 2/3, 5/2, 13/2, 17/2, 1/1, 3/1, 9/1                         |
| 25/62             | 20/51, 18/4, 3/3, 2/1, 11/1, 15/1, 17/1                                         |

Πίνακας 12: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_\infty$  (για το COIL-20 dataset)

| νευρώνας/δεδομένα | κατηγορία/συχνότητα                               |
|-------------------|---------------------------------------------------|
| 1/154             | 17/72, 1/37, 14/35, 19/6, 6/4                     |
| 2/60              | 15/57, 3/2, 19/1                                  |
| 3/2               | 9/2                                               |
| 4/16              | 13/12, 9/3, 5/1                                   |
| 5/403             | 20/72, 18/68, 6/60, 3/58, 19/55, 5/50, 9/38, 13/2 |
| 6/12              | 15/12                                             |
| 7/48              | 13/43, 10/4, 3/1                                  |
| 8/11              | 13/10, 9/1                                        |
| 9/3               | 13/2, 9/1                                         |
| 10/2              | 9/2                                               |
| 11/23             | 14/13, 3/4, 5/3, 15/3                             |
| 12/9              | 9/4, 13/3, 2/1, 7/1                               |
| 13/38             | 10/36, 2/2                                        |
| 14/28             | 2/12, 1/5, 9/4, 5/3, 19/3, 3/1                    |
| 15/14             | 9/5, 18/4, 3/2, 5/2, 6/1                          |
| 16/91             | 12/72, 14/15, 11/2, 5/1, 9/1                      |
| 17/1              | 11/1                                              |
| 18/16             | 10/10, 9/5, 7/1                                   |
| 19/20             | 7/13, 14/7                                        |
| 20/34             | 2/19, 6/7, 1/6, 19/2                              |
| 21/37             | 11/37                                             |
| 22/312            | 4/72, 8/72, 16/72, 11/32, 2/20, 7/18, 10/17, 1/9  |
| 23/19             | 7/14, 9/3, 2/1, 5/1                               |
| 24/46             | 7/25, 5/8, 10/5, 2/3, 9/3, 14/2                   |
| 25/41             | 1/15, 2/14, 19/5, 3/4, 5/3                        |

Πίνακας 13: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_1$  (για το COIL-20 dataset)

| νευρώνας/δεδομένα | κατηγορία/συχνότητα                                          |
|-------------------|--------------------------------------------------------------|
| 1/97              | 17/72, 14/22, 15/3                                           |
| 2/2               | 5/1, 9/1                                                     |
| 3/2               | 6/2                                                          |
| 4/0               | 0                                                            |
| 5/116             | 20/72, 18/26, 13/7, 9/5, 5/2, 6/2, 3/1, 19/1                 |
| 6/7               | 15/4, 19/3                                                   |
| 7/76              | 12/72, 11/3, 9/1                                             |
| 8/0               | 0                                                            |
| 9/6               | 7/3, 3/1, 5/1, 9/1                                           |
| 10/348            | 6/62, 3/61, 19/56, 5/53, 9/48, 18/46, 13/22                  |
| 11/67             | 15/65, 3/2                                                   |
| 12/50             | 11/24, 10/12, 9/7, 7/6, 2/1                                  |
| 13/41             | 10/41,                                                       |
| 14/25             | 2/25,                                                        |
| 15/0              | 0                                                            |
| 16/10             | 19/4, 3/3, 5/3                                               |
| 17/2              | 2/2                                                          |
| 18/0              | 0                                                            |
| 19/85             | 1/42, 14/33, 6/4, 19/4, 3/1, 5/1                             |
| 20/0              | 0                                                            |
| 21/29             | 7/20, 5/7, 3/2                                               |
| 22/373            | 4/72, 8/72, 16/72, 11/45, 13/42, 2/20, 10/19, 7/19, 9/8, 1/4 |
| 23/41             | 7/23, 1/10, 2/4, 5/3, 19/1                                   |
| 24/21             | 14/17, 5/1, 7/1, 9/1, 13/1                                   |
| 25/42             | 2/20, 1/16, 19/3, 6/2, 3/1                                   |

Πίνακας 14: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_{0.5}$  (για το COIL-20 dataset)

| νευρώνας/δεδομένα | κατηγορία/συχνότητα                                                  |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------|
| 1/72              | 15/72                                                                |
| 2/8               | 3/3, 5/3, 9/1, 19/1                                                  |
| 3/3               | 6/3                                                                  |
| 4/1               | 6/1                                                                  |
| 5/1               | 2/1                                                                  |
| 6/7               | 19/7                                                                 |
| 7/57              | 14/49, 1/8                                                           |
| 8/0               | 0                                                                    |
| 9/21              | 1/13, 14/8                                                           |
| 10/483            | 18/72, 20/72, 6/68, 3/64, 19/61, 5/57, 9/56, 13/33                   |
| 11/10             | 3/5, 5/2, 7/2, 19/1                                                  |
| 12/18             | 14/15, 1/3                                                           |
| 13/31             | 10/30, 2/1                                                           |
| 14/0              | 0                                                                    |
| 15/0              | 0                                                                    |
| 16/14             | 2/10, 5/2, 7/2                                                       |
| 17/0              | 0                                                                    |
| 18/1              | 2/1                                                                  |
| 19/89             | 17/72, 1/16, 19/1                                                    |
| 20/0              | 0                                                                    |
| 21/43             | 1/32, 2/8, 7/3                                                       |
| 22/555            | 4/72, 8/72, 11/72, 12/72, 16/72, 7/65, 10/42, 13/39, 2/26, 9/15, 5/8 |
| 23/0              | 0                                                                    |
| 24/0              | 0                                                                    |
| 25/26             | 2/25, 19/1                                                           |

Πίνακας 15: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_{0.25}$  (για το COIL-20 dataset)

| νευρώνας/δεδομένα | κατηγορία/συχνότητα                                                   |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| 1/45              | 15/44, 17/1                                                           |
| 2/0               | 0                                                                     |
| 3/3               | 6/3                                                                   |
| 4/0               | 0                                                                     |
| 5/0               | 0                                                                     |
| 6/28              | 15/24, 19/3, 3/1                                                      |
| 7/93              | 14/72, 1/19, 3/2                                                      |
| 8/0               | 0                                                                     |
| 9/4               | 1/4                                                                   |
| 10/489            | 18/72, 20/72, 6/68, 3/65, 19/62, 5/58, 9/57, 13/35                    |
| 11/14             | 15/4, 19/4, 3/3, 5/3                                                  |
| 12/1              | 3/1                                                                   |
| 13/33             | 10/30, 2/3                                                            |
| 14/0              | 0                                                                     |
| 15/0              | 0                                                                     |
| 16/3              | 2/1, 5/1, 19/1                                                        |
| 17/0              | 0                                                                     |
| 18/0              | 0                                                                     |
| 19/91             | 17/71, 1/18, 6/1, 19/1                                                |
| 20/4              | 2/4                                                                   |
| 21/52             | 1/31, 2/19, 7/2                                                       |
| 22/558            | 4/72, 8/72, 11/72, 12/72, 16/72, 7/70, 10/42, 13/37, 2/24, 9/15, 5/10 |
| 23/0              | 0                                                                     |
| 24/0              | 0                                                                     |
| 25/22             | 2/21, 19/1                                                            |

Πίνακας 16: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_{0.2}$  (για το COIL-20 dataset)

### Α'.3 Πίνακες κερδισμένων δεδομένων εισόδου Banknotes Data set

| νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα | νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1/69                  | 2/41, 1/28              | 26/15                 | 1/13, 2/2               |
| 2/13                  | 2/9, 1/4                | 27/25                 | 1/15, 2/10              |
| 3/23                  | 1/23                    | 28/40                 | 2/26, 1/14              |
| 4/29                  | 1/28, 2/1               | 29/63                 | 2/63                    |
| 5/6                   | 1/5, 2/1                | 30/23                 | 2/23                    |
| 6/15                  | 1/15                    | 31/39                 | 2/39                    |
| 7/73                  | 1/73                    | 32/26                 | 2/16, 1/10              |
| 8/33                  | 2/24, 1/9               | 33/64                 | 1/43, 2/21              |
| 9/17                  | 1/12, 2/5               | 34/1                  | 2/1                     |
| 10/17                 | 1/13, 2/4               | 35/28                 | 2/25, 1/3               |
| 11/28                 | 1/25, 2/3               | 36/12                 | 2/12                    |
| 12/23                 | 1/23                    | 37/17                 | 2/17                    |
| 13/15                 | 1/14, 2/1               | 38/17                 | 2/16, 1/1               |
| 14/29                 | 1/26, 2/3               | 39/19                 | 2/19                    |
| 15/29                 | 1/17, 2/12              | 40/13                 | 2/12, 1/1               |
| 16/29                 | 1/21, 2/8               | 41/11                 | 2/11                    |
| 17/21                 | 1/20, 2/1               | 42/28                 | 2/28                    |
| 18/9                  | 1/8, 2/1                | 43/38                 | 2/38                    |
| 19/41                 | 1/41                    | 44/32                 | 2/32                    |
| 20/11                 | 1/11                    | 45/20                 | 2/20                    |
| 21/31                 | 1/29, 2/2               | 46/67                 | 2/67                    |
| 22/20                 | 2/13, 1/7               | 47/19                 | 2/19                    |
| 23/29                 | 2/25, 1/4               | 48/46                 | 2/46                    |
| 24/23                 | 1/18, 2/5               | 49/38                 | 2/38                    |
| 25/38                 | 1/36, 2/2               |                       |                         |

Πίνακας 17: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_2$  (για το Banknotes Data set)

| νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα | νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1/72                  | 2/65, 1/7               | 26/15                 | 1/14, 2/1               |
| 2/10                  | 1/9, 2/1                | 27/7                  | 1/4, 2/3                |
| 3/48                  | 1/46, 2/2               | 28/25                 | 2/15, 1/10              |
| 4/20                  | 1/17, 2/3               | 29/50                 | 2/50                    |
| 5/10                  | 1/7, 2/3                | 30/18                 | 2/18                    |
| 6/11                  | 1/11                    | 31/48                 | 2/25, 1/23              |
| 7/82                  | 1/81, 2/1               | 32/10                 | 2/7, 1/3                |
| 8/22                  | 2/16, 1/6               | 33/29                 | 1/18, 2/11              |
| 9/8                   | 1/6, 2/2                | 34/12                 | 1/7, 2/5                |
| 10/21                 | 1/18, 2/3               | 35/54                 | 2/28, 1/26              |
| 11/19                 | 1/16, 2/3               | 36/24                 | 2/24                    |
| 12/15                 | 1/14, 2/1               | 37/13                 | 2/13                    |
| 13/21                 | 1/14, 2/7               | 38/15                 | 2/15                    |
| 14/37                 | 1/37                    | 39/19                 | 2/18, 1/1               |
| 15/24                 | 2/12, 1/12              | 40/20                 | 2/16, 1/4               |
| 16/33                 | 1/24, 2/9               | 41/13                 | 2/13                    |
| 17/15                 | 1/13, 2/2               | 42/16                 | 2/10, 1/6               |
| 18/15                 | 1/14, 2/1               | 43/45                 | 2/45                    |
| 19/35                 | 1/33, 2/2               | 44/34                 | 2/34                    |
| 20/19                 | 1/17, 2/2               | 45/25                 | 2/25                    |
| 21/26                 | 2/17, 1/9               | 46/55                 | 2/55                    |
| 22/62                 | 2/52, 1/10              | 47/7                  | 2/7                     |
| 23/15                 | 2/13, 1/2               | 48/65                 | 2/65                    |
| 24/27                 | 1/23, 2/4               | 49/31                 | 2/31                    |
| 25/55                 | 1/48, 2/7               |                       |                         |

Πίνακας 18: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_\infty$  (για το Banknotes Data set)

| νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα | νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1/51                  | 2/28, 1/23              | 26/86                 | 1/69, 2/17              |
| 2/15                  | 2/10, 1/5               | 27/44                 | 2/28, 1/16              |
| 3/24                  | 1/24                    | 28/20                 | 1/13, 2/7               |
| 4/27                  | 1/27                    | 29/23                 | 2/18, 1/5               |
| 5/10                  | 1/9, 2/1                | 30/20                 | 2/19, 1/1               |
| 6/6                   | 1/5, 2/1                | 31/11                 | 2/11                    |
| 7/68                  | 1/68                    | 32/28                 | 2/22, 1/6               |
| 8/20                  | 2/16, 1/4               | 33/12                 | 2/7, 1/5                |
| 9/6                   | 1/5, 2/1                | 34/17                 | 2/17                    |
| 10/22                 | 1/20, 2/2               | 35/20                 | 2/20                    |
| 11/26                 | 1/21, 2/5               | 36/24                 | 2/24                    |
| 12/54                 | 1/54                    | 37/24                 | 2/24                    |
| 13/8                  | 1/8                     | 38/20                 | 2/20                    |
| 14/34                 | 1/31, 2/3               | 39/29                 | 2/29                    |
| 15/56                 | 2/29, 1/27              | 40/19                 | 2/18, 1/1               |
| 16/32                 | 1/22, 2/10              | 41/6                  | 2/6                     |
| 17/20                 | 1/20                    | 42/36                 | 2/36                    |
| 18/8                  | 1/8                     | 43/46                 | 2/46                    |
| 19/26                 | 1/25, 2/1               | 44/27                 | 2/27                    |
| 20/10                 | 1/10                    | 45/18                 | 2/18                    |
| 21/49                 | 1/38, 2/11              | 46/53                 | 2/53                    |
| 22/13                 | 2/9, 1/4                | 47/32                 | 2/32                    |
| 23/27                 | 2/23, 1/4               | 48/32                 | 2/32                    |
| 24/23                 | 1/19, 2/4               | 49/39                 | 2/39                    |
| 25/51                 | 2/38, 1/13              |                       |                         |

Πίνακας 19: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_1$  (για το Banknotes Data set)

| νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα | νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1/28                  | 2/21, 1/7               | 26/36                 | 1/32, 2/4               |
| 2/35                  | 1/20, 2/15              | 27/50                 | 1/33, 2/17              |
| 3/20                  | 1/14, 2/6               | 28/17                 | 1/11, 2/6               |
| 4/7                   | 1/4, 2/3                | 29/14                 | 2/14                    |
| 5/2                   | 1/2                     | 30/10                 | 1/6, 2/4                |
| 6/20                  | 2/18, 1/2               | 31/17                 | 2/12, 1/5               |
| 7/54                  | 1/54                    | 32/35                 | 2/18, 1/17              |
| 8/34                  | 2/29, 1/5               | 33/95                 | 1/56, 2/39              |
| 9/28                  | 1/18, 2/10              | 34/0                  | 0                       |
| 10/11                 | 1/8, 2/3                | 35/29                 | 2/23, 1/6               |
| 11/38                 | 1/38                    | 36/24                 | 2/24                    |
| 12/77                 | 1/76, 2/1               | 37/10                 | 2/10                    |
| 13/6                  | 2/3, 1/3                | 38/23                 | 2/23                    |
| 14/21                 | 1/16, 2/5               | 39/40                 | 2/39, 1/1               |
| 15/12                 | 2/11, 1/1               | 40/11                 | 2/10, 1/1               |
| 16/9                  | 1/8, 2/1                | 41/9                  | 2/9                     |
| 17/9                  | 1/9                     | 42/14                 | 2/14                    |
| 18/9                  | 1/9                     | 43/64                 | 2/64                    |
| 19/23                 | 1/21, 2/2               | 44/50                 | 2/50                    |
| 20/4                  | 1/3, 2/1                | 45/13                 | 2/12, 1/1               |
| 21/60                 | 1/55, 2/5               | 46/54                 | 2/54                    |
| 22/25                 | 2/25                    | 47/44                 | 2/42, 1/2               |
| 23/48                 | 1/42, 2/6               | 48/43                 | 2/43                    |
| 24/4                  | 1/4                     | 49/66                 | 2/66                    |
| 25/20                 | 1/20                    |                       |                         |

Πίνακας 20: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_{0.5}$  (για το Banknotes Data set)

| νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα | νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1/53                  | 2/42, 1/11              | 26/43                 | 1/34, 2/9               |
| 2/13                  | 2/7, 1/6                | 27/23                 | 2/16, 1/7               |
| 3/30                  | 1/24, 2/6               | 28/72                 | 2/37, 1/35              |
| 4/5                   | 2/5                     | 29/18                 | 2/17, 1/1               |
| 5/5                   | 1/4, 2/1                | 30/19                 | 1/10, 2/9               |
| 6/5                   | 2/4, 1/1                | 31/42                 | 1/33, 2/9               |
| 7/56                  | 1/56                    | 32/88                 | 2/44, 1/44              |
| 8/18                  | 2/18                    | 33/83                 | 1/57, 2/26              |
| 9/52                  | 1/34, 2/18              | 34/20                 | 1/12, 2/8               |
| 10/13                 | 1/12, 2/1               | 35/17                 | 2/15, 1/2               |
| 11/5                  | 1/5                     | 36/27                 | 2/27                    |
| 12/10                 | 1/9, 2/1                | 37/9                  | 2/9                     |
| 13/38                 | 2/23, 1/15              | 38/5                  | 2/5                     |
| 14/45                 | 1/39, 2/6               | 39/15                 | 2/13, 1/2               |
| 15/8                  | 2/8                     | 40/19                 | 1/10, 2/9               |
| 16/8                  | 2/7, 1/1                | 41/38                 | 2/35, 1/3               |
| 17/8                  | 1/8                     | 42/24                 | 2/22, 1/2               |
| 18/38                 | 1/37, 2/1               | 43/65                 | 2/65                    |
| 19/32                 | 1/28, 2/4               | 44/65                 | 2/65                    |
| 20/35                 | 2/24, 1/11              | 45/7                  | 2/6, 1/1                |
| 21/26                 | 1/19, 2/7               | 46/60                 | 2/60                    |
| 22/20                 | 2/18, 1/2               | 47/14                 | 2/11, 1/3               |
| 23/25                 | 1/23, 2/2               | 48/17                 | 2/17                    |
| 24/11                 | 1/6, 2/5                | 49/19                 | 2/19                    |
| 25/4                  | 1/3, 2/1                |                       |                         |

Πίνακας 21: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_{0.25}$  (για το Banknotes Data set)

| νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα | νευρώνας/<br>δεδομένα | κατηγορία/<br>συχνότητα |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1/42                  | 2/37, 1/5               | 26/13                 | 1/11, 2/2               |
| 2/8                   | 2/4, 1/4                | 27/97                 | 1/51, 2/46              |
| 3/22                  | 1/16, 2/6               | 28/51                 | 1/26, 2/25              |
| 4/6                   | 2/6                     | 29/19                 | 2/18, 1/1               |
| 5/0                   | 0                       | 30/11                 | 2/8, 1/3                |
| 6/10                  | 2/7, 1/3                | 31/27                 | 1/22, 2/5               |
| 7/53                  | 1/53                    | 32/163                | 1/99, 2/64              |
| 8/22                  | 2/20, 1/2               | 33/19                 | 1/10, 2/9               |
| 9/51                  | 1/33, 2/18              | 34/36                 | 2/20, 1/16              |
| 10/13                 | 1/11, 2/2               | 35/23                 | 2/20, 1/3               |
| 11/14                 | 1/14                    | 36/31                 | 2/31                    |
| 12/5                  | 1/4, 2/1                | 37/9                  | 2/9                     |
| 13/3                  | 1/3                     | 38/7                  | 1/5, 2/2                |
| 14/37                 | 1/30, 2/7               | 39/40                 | 2/32, 1/8               |
| 15/11                 | 2/11                    | 40/10                 | 2/9, 1/1                |
| 16/7                  | 2/6, 1/1                | 41/12                 | 2/8, 1/4                |
| 17/12                 | 1/11, 2/1               | 42/15                 | 2/15                    |
| 18/23                 | 1/23                    | 43/61                 | 2/61                    |
| 19/19                 | 1/18, 2/1               | 44/64                 | 2/64                    |
| 20/22                 | 1/16, 2/6               | 45/10                 | 2/8, 1/2                |
| 21/39                 | 1/29, 2/10              | 46/46                 | 2/45, 1/1               |
| 22/15                 | 2/12, 1/3               | 47/55                 | 2/50, 1/5               |
| 23/10                 | 1/10                    | 48/19                 | 2/19                    |
| 24/42                 | 1/35, 2/7               | 49/27                 | 2/27                    |
| 25/15                 | 1/14, 2/1               |                       |                         |

Πίνακας 22: Πόσα δεδομένα και από ποιες κατηγορίες έχει κερδίσει ο κάθε νευρώνας του εκπαιδευμένου δικτύου με χρήση της νόρμα  $\ell_{0.2}$  (για το Banknotes Data set)