ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΕΛΙΔΕΣ

<u>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</u>

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι το σημαντικότερο πρότυπο στο χώρο της Διοικητικής Επιστήμης και ίσως μία από τις σπουδαιότερες επιστημονικές ανακαλύψεις του αιώνα μας στην οικονομική επιστήμη. Είναι ο πιο εφαρμοσμένος κλάδος της επιστήμης των Μαθηματικών με πληθώρα εφαρμογών στην επιστήμη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Συγκεκριμένα ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μία μαθηματική μέθοδος που χρησιμοποιείται από τις επιχειρήσεις για τη λύση προβλημάτων στα οποία προσπαθούμε να βρούμε την άριστη χρήση των περιορισμένων πόρων μίας επιχείρησης με στόχο να επιτύχουμε την μεγιστοποίηση του κέρδους ή την ελαχιστοποίηση του κόστους μέσα στα όρια ορισμένων περιορισμών και δυνατοτήτων της επιχείρησης. Ασχολείται με την επίλυση του γραμμικού προβλήματος. Για το σκοπό αυτό μελετάει τις ιδιότητες του γραμμικού προβλήματος, κατασκευάζει μεθόδους επίλυσης (αλγόριθμους) και εξετάζει τρόπους εφαρμογής των αποτελεσμάτων στη λήψη πολύπλοκων αποφάσεων σε διοικητικό ή οικονομικό επίπεδο με επιστημονικό τρόπο. Τέτοια προβλήματα παρουσιάζονται συχνά όταν πρόκειται να ληφθεί απόφαση οικονομικού προγραμματισμού, δηλαδή απόφαση σχετικά με το επίπεδο στο οποίο θα αναπτυχθούν ορισμένες οικονομικές δραστηριότητες οι οποίες << συναγωνίζονται >> μεταξύ τους για τους ίδιους πόρους. Μερικά παραδείγματα είναι η κατανομή του κρατικού προϋπολογισμού μεταξύ διαφόρων προγραμμάτων, υπουργείων κλπ, η κατανομή των πρώτων υλών, του εργατικού δυναμικού και των μηχανών μίας επιχείρησης για την παραγωγή των προϊόντων της ή την εξυπηρέτηση των πελατών της, η κατανομή ενός κεφαλαίου μεταξύ ανταγωνιζομένων επενδυτικών ευκαιριών.

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός βρίσκει πολλές εφαρμογές στην παραγωγική διαδικασία, όπου αναζητούνται οι ποσότητες των παραγόμενων προϊόντων σε σχέση με τα αποθέματα, τις πρώτες ύλες, το προσωπικό και άλλους παράγοντες με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους. Υπάρχουν πολλά επιμέρους γραμμικά προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπίσει μια επιχείρηση ή ένας οργανισμός. Τα πιο γνωστά από αυτά τα προβλήματα χαρακτηρίζονται ως κλασικά προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού και είναι: το πρόβλημα κατανομής πόρων, της δίαιτας, της μείξης προϊόντων, ενέργειας και προστασίας του περιβάλλοντος , της παραγωγικής διαδικασίας, της διοίκησης προσωπικού, marketing (προώθησης προϊόντων).

Σε κάθε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση η οποία αποτελεί το αντικείμενο της μεγιστοποίησης του κέρδους ή ελαχιστοποίησης του κόστους. Η συνάρτηση αυτή καλείται αντικειμενική συνάρτηση.

Για την αντιμετώπιση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού ακολουθούμε δύο στάδια:

Α) Κατασκευάζουμε το μαθηματικό μοντέλο του Γραμμικού Προγραμματισμού για το συγκεκριμένο πρόβλημα

Β) Λύνουμε το πρόβλημα με μία από τις μεθόδους που είναι ειδικές για την επίλυση του προβλήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ- ΠΟΤΕ ΔΗΜΙΟΥΡΓΗΘΗΚΕ Ο ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ως ορόσημο της ραγδαίας εξέλιξης του γραμμικού προγραμματισμού θεωρείται ο Β' Παγκόσμιος Πόλεμος, όπου για πρώτη φορά εφαρμόσθηκαν μέθοδοι ανεφοδιασμού των συμμαχικών δυνάμεων στην Ευρώπη.

Πολλοί ερευνητές εκείνης της εποχής "διεκδικούν" τον τίτλο του θεμελιωτή της επιστήμης με τις ανακαλύψεις τους σε θεωρητικό κυρίως επίπεδο, αλλά με τεράστιες εφαρμογές σήμερα ειδικότερα με τη χρήση των υπολογιστών όπου κατέστη δυνατή η επίλυση επίπονων σε υπολογισμούς προβλημάτων σε σύντομο χρονικό διάστημα.

Ένας εξαίρετος Σοβιετικός Μαθηματικός ο Kantorovich (1939) δημοσίευσε στη Ρωσία την εργασία του για το πρόβλημα της οργάνωσης και σχεδιασμού της παραγωγής. Αργότερα το πρόβλημα αυτό ονομάσθηκε πρόβλημα μεταφοράς του Hitchock (1941), ενός επίσημου σημαντικού Αμερικάνου μελετητή. Ο Koopmans με τις εργασίες του (1947), (1951) συνέβαλε σημαντικά στην εξέλιξη του γραμμικού προγραμματισμού και μάλιστα σύμφωνα με τον Dantzig (1963) είναι αυτός που πρότεινε το όνομα Γραμμικός Προγραμματισμός για την νέα επιστήμη που άρχισε να ορθοποδεί. Κορυφαία στιγμή αναμφίβολα θεωρείται το 1947, όπου ο G. B. Dantzig ανακάλυψε το γνωστό σήμερα ως Αλγόριθμο Simplex για την επίλυση του γραμμικού προβλήματος.

Η άριστη κατανομή περιορισμένων πόρων υπήρξε ανέκαθεν ένα από τα πλέον σημαντικά προβλήματα που είχαν να αντιμετωπίσουν οι διοικήσεις των επιχειρήσεων. Ωστόσο η πρώτη επιστημονικά τεκμηριωμένη μέθοδος επίλυσης προγραμματισμού εμφανίστηκε μόλις το 1947. Όμως ο γραμμικός προγραμματισμός αναπτύχθηκε ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια του Β’ Παγκοσμίου Πολέμου στην Αμερική. Τότε, στα πλαίσια της αντιμετώπισης προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού της πολεμικής αεροπορίας των ΗΠΑ (π.χ. τη μετακίνηση των στρατευμάτων σε σχέση με τον ανεφοδιασμό τους, το χρόνο εφοδιασμού και την ποσότητα των εφοδίων που θα λάμβαναν από διάφορους σταθμούς ανεφοδιασμού κτλ) , ο Αμερικανός ερευνητής George Danting διαμόρφωσε και έλυσε το πρότυπο Γραμμικού Προγραμματισμού το οποίο αποτελεί τη μαθηματική έκφραση αυτών των προβλημάτων.

Αρχικά, ο γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιήθηκε, όπως είπαμε, στην επίλυση προβλημάτων στρατιωτικού προγραμματισμού. Με την πάροδο όμως του χρόνου, ιδίως μετά το 1951, το πεδίο εφαρμογών του επεκτάθηκε και σε βιομηχανικές και επιχειρηματικές δραστηριότητες. Τα προβλήματα προγραμματισμού στα διυλιστήρια ήταν από τα πρώτα πεδία εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού, όπως και τα προβλήματα που είχαν σχέση με την ανεύρεση πετρελαίου, την παραγωγή του και τη μεταφορά του από τους τόπους παραγωγής στους τόπους επεξεργασίας.

Η δυνατότητα χρησιμοποίησης του Γραμμικού Προγραμματισμού σε επιχειρησιακά προβλήματα φάνηκε επίσης και στα προβλήματα των αγροτικών επιχειρήσεων. Το πρόβλημα διατροφής των ζώων με όσο το δυνατό μικρότερο κόστος και με δεδομένο ελάχιστο περιεχόμενο σε θρεπτικά συστατικά διατυπώθηκε σαν πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού. Μερικά παραδείγματα βιομηχανιών που χρησιμοποιούν σήμερα το Γραμμικό Προγραμματισμό είναι: βιομηχανίες χάλυβα, επεξεργασίας τροφίμων, κατασκευής χαρτιού, τούβλων, ηλεκτρικών κτλ.

Αναφέρουμε παρακάτω μερικά άλλα παραδείγματα προβλημάτων που μπορούν να αντιμετωπιστούν με το Γραμμικό Προγραμματισμό.

Επιλογή θέσης εργοστασίου και αποθηκών, μεταφορά εμπορευμάτων από τους τόπους παραγωγής στα κέντρα κατανάλωσης, προγραμματισμός παραγωγής αποθεμάτων και επενδύσεων, κατανομή προσωπικού σε εργασίες. Άλλες εφαρμογές αναφέρονται στις τηλεπικοινωνίες, το εμπόριο, τις τράπεζες, τις βιομηχανίες επίπλων και σε άλλες πολλές δραστηριότητες των επιχειρήσεων.

Έκτοτε η μελέτη και η εφαρμογή του Γραμμικού Προγραμματισμού γνώρισε εκρηκτική ανάπτυξη σε βαθμό που να θεωρείται σήμερα από πολλούς ειδικούς μεταξύ των πιο σημαντικών επιτευγμάτων που σημειώθηκαν στα μέσα του εικοστού αιώνα. Μέχρι τις μέρες μας αποτελεί το δημοφιλέστερο εργαλείο της Επιχειρησιακής Έρευνας και της Διοικητικής Επιστήμης. Εκτιμάται ότι πλέον του 50% των εφαρμογών των παραπάνω επιστημών σε πραγματικά προβλήματα διοίκησης σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με τον Γραμμικό Προγραμματισμό. Αυτό οφείλεται στη μεγάλη επιτυχία που είχαν οι εφαρμογές του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων την πιο σημαντική λειτουργία της διοίκησης των επιχειρήσεων.

1.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο όρος ***γραμμικός*** χρησιμοποιείται γιατί όλες οι μαθηματικές σχέσεις του προβλήματος είναι γραμμικές. Γραμμική είναι η σχέση κατά την οποία, αν πολλαπλασιάσουμε π.χ. τον αριθμό των υπαλλήλων (ή των μηχανών) μιας επιχείρησης με έναν αριθμό η παραγωγή των αγαθών της επιχείρησης θα πολλαπλασιασθεί με τον αριθμό αυτό. Αν θέλουμε να παραστήσουμε με γεωμετρικό τρόπο τις παραπάνω γραμμικές σχέσεις θα έχουμε την εμφάνιση ευθειών γραμμών.

Ο όρος ***<u>προγραμματισμός</u>*** όπως χρησιμοποιείται στην Επιχειρησιακή Έρευνα δεν πρέπει να συγχέεται με τον προγραμματισμό ηλεκτρονικών υπολογιστών. Στην ποσοτική ανάλυση και στο επιστημονικό management ο όρος προγραμματισμός περιλαμβάνει την ανάπτυξη και την επίλυση μέσω μαθηματικών μοντέλων, διάφορων επιχειρησιακών προβλημάτων. Ο ρόλος του ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι πάντως πολύ σπουδαίος στην επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού αλλά και γενικότερα στην επίλυση προβλημάτων με χρήση των μεθοδολογιών της Επιχειρησιακής Έρευνας. Πολλά από τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που προκύπτουν στην πράξη είναι τόσο πολύπλοκα που η επίλυσή τους είναι δυνατή μόνο μέσω ειδικών προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή.

<u>1.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΟΡΩΝ</u>

Κάθε επιχειρηματική δραστηριότητα, ανεξάρτητα από τον απαιτούμενο όγκο εργασίας ή από τη σπουδαιότητά της, απαιτεί για την υλοποίησή της λίγους ή περισσότερους πόρους. Αυτοί οι πόροι μπορούν να είναι πολλών ειδών ανάλογα με τη φύση και τις ιδιαιτερότητες των δραστηριοτήτων των οποίων την πραγματοποίηση εξυπηρετούν. Πολλές αποφάσεις που λαμβάνονται σε έναν οργανισμό ή σε μία επιχείρηση αφορούν την αποτελεσματική αξιοποίηση και χρήση των πόρων της επιχείρησης. Ως πόροι μιας επιχείρησης εννοούνται ο μηχανικός εξοπλισμός της επιχείρησης, οι εργαζόμενοι, τα επενδεδυμένα κεφάλαια και τα κεφάλαια κίνησης, οι διαθέσιμοι χώροι της επιχείρησης, οι πρώτες ύλες και άλλα. Οι πόροι της επιχείρησης είναι δυνατόν να διατεθούν για την παραγωγή των προϊόντων (όπως οι πρώτες ύλες και ο εξοπλισμός) ή υπηρεσιών (όπως ο χρόνος των εργαζομένων), τη διάθεση και διανομή των προϊόντων, τη διαφήμιση και διάφορες επενδυτικές αποφάσεις της επιχείρησης (π.χ. κεφάλαια).

Οι σύγχρονες εξαιρετικά ανταγωνιστικές συνθήκες, η πολυπλοκότητα που χαρακτηρίζει τις περισσότερες επιχειρηματικές κινήσεις, οι συνεχώς αυξανόμενες ανάγκες και πάνω από όλα η πρόνοια της ίδιας της φύσης έχουν καταστήσει τους κάθε είδους πόρους περιορισμένους. Πριν καν υλοποιηθεί ένα επιχειρησιακό σχέδιο, διαπιστώνεται ότι πολλά από τα μέσα είναι διαθέσιμα σε περιορισμένο βαθμό. Το γεγονός αυτό καθιστά ουσιώδες το πρόβλημα της ορθολογικής διαχείρισής τους, προκειμένου να επιτευχθεί το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.

1.4 ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Οι βασικές προϋποθέσεις που απαιτούνται για να παραστήσουμε ένα πρόβλημα με μαθηματικό μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού είναι οι εξής:

1. Η γραμμικότητα: τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί να είναι γραμμικής μορφής.
2. Η προσθετικότητα: οι ποσότητες ενός μέσου παραγωγής που καταναλώνονται στις επιμέρους δραστηριότητες να μπορούν να προστεθούν.
3. Η διαιρετικότητα: οι μεταβλητές των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού να μπορούν να πάρουν όλες τις τιμές του συνόλου R+0.
4. Η ύπαρξη μίας μόνο αντικειμενικής συνάρτησης για την αξιολόγηση μιας στρατηγικής.

5. Προσδιορισμένοι συντελεστές: όλοι οι συντελεστές ενός μοντέλου Γραμμικού Προγραμματισμού θεωρούνται ως γνωστές σταθερές.

1.5 ΠΩΣ ΔΙΑΤΥΠΩΝΕΤΑΙ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι ένα χρήσιμο βοήθημα για την αντιμετώπιση πολλών περίπλοκων προβλημάτων αποφάσεων. Η <<ποιότητα>> των αποφάσεων αυτών, όμως, εξαρτάται απόλυτα από την ακρίβεια της περιγραφής της κατάστασης που μελετάτε και από την καταλληλότητα των προϋποθέσεων ή απλουστεύσεων που επιβάλλει ο μελετητής, δηλαδή από την ακρίβεια της διατύπωσης του προβλήματος.

Όπως κάθε άλλο μαθηματικό πρότυπο, έτσι και ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μια αφαίρεση μέσα από την οποία εντοπίζονται και απομονώνονται οι παράγοντες εκείνοι που θεωρούνται πιο σημαντικοί και που θα μας βοηθήσουν στην απόκτηση μιας λύσης. Έτσι, η διατύπωση ενός προβλήματος απαιτεί μια πλήρη κατανόηση της πραγματικής κατάστασης που μελετάται, τον εντοπισμό των σημαντικών μεταβλητών και σχέσεων του προβλήματος και την επακριβή μαθηματική τους έκφραση μέσα από την αντικειμενική συνάρτηση σκοπού και τους περιορισμούς.

Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας αυτής συνήθως πρέπει να γίνουν διάφορες απλουστεύσεις ή προσεγγίσεις της πραγματικότητας είτε γιατί η πραγματικότητα δεν είναι απόλυτα κατανοητή ή γνωστή, είτε γιατί η επακριβής μαθηματική τους απεικόνιση περιπλέκει ιδιαίτερα την περιγραφή, και περιορίζει τη δυνατότητα εφικτής λύσης. Οι απλουστεύσεις αυτές επόμενο είναι να απομακρύνουν τη λύση που θα αποκτήσουμε από την πραγματική λύση του προβλήματος. Ο εντοπισμός, λοιπόν, των κατάλληλων προσεγγίσεων για την απόκτηση μιας λύσης, αλλά, και η μετέπειτα εκτίμηση των επιδράσεων αυτών των προσεγγίσεων στα αποτελέσματα είναι ουσιώδους σημασίας στη χρήση του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Η ευρύτητα των εφαρμογών του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι στην κυριολεξία τεράστια. Η διαδικασία αντιμετώπισης προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί να συνοψισθεί στα ακόλουθα βασικά βήματα:

- Διαμόρφωση του προβλήματος.
- Κατάστρωση στη μορφή του πρότυπου μοντέλου.
- Διαδικασία επίλυσης.
- Ερμηνεία και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων.

Η πρώτη, και ίσως και η πιο δύσκολη διαδικασία για την ορθή αντιμετώπιση ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι η διαμόρφωσή του. Αυτή αποτελεί την αρχική ‘ εκ των ων ουκ άνευ’ διαδικασία και περιλαμβάνει μια σειρά από επιμέρους ενέργειες όπως:

1. Η αναγνώριση των βασικών χαρακτηριστικών του συγκεκριμένου προβλήματος και η διαπίστωση (εφόσον βέβαια πληρούνται ορισμένες προϋποθέσεις) ότι είναι δυνατό να αντιμετωπιστεί με εργαλείο το Γραμμικό Πρόβλημα.
2. Η πλήρης και σε βάθος κατανόηση του προβλήματος τόσο όσον αφορά στα υπάρχοντα δεδομένα, όσο και στον τελικό αντικειμενικό στόχο (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση κάποιου συγκεκριμένου κριτηρίου αποτελεσματικότητας).

3. Ο λεπτομερής καθορισμός των μεταβλητών απόφασης.

4. Η πιστή αναπαράσταση της πραγματικής κατάστασης με τη σύνταξη των περιορισμών δομής και της αντικειμενικής συνάρτησης.

Δυστυχώς δεν υπάρχει η παραμικρή τυποποίηση στον τρόπο διαμόρφωσης των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού. Κάθε πρόβλημα παρουσιάζει τις δικές του ιδιαιτερότητες σε σημείο που να καθίσταται σχεδόν μοναδικό και ως εκ τούτου απαιτεί για την επίλυσή του μία ξεχωριστή διαμόρφωση. Εδώ όμως έγκειται το μεγάλο ενδιαφέρον που παρουσιάζει η διαμόρφωση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού όχι μόνο ως το πρώτο και σπουδαιότερο βήμα για την εφαρμογή της μεθοδολογίας επίλυσης, αλλά κυρίως ως μία διαδικασία που βασίζεται αποκλειστικά στη λογική και στην εμπειρία.

Οι γνώσεις που χρησιμεύουν για την εμπεριστατωμένη αντιμετώπιση των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού προέρχονται από όλους σχεδόν τους κλάδους των θετικών επιστημών. Το μεγαλύτερο όμως «όπλο» αποτελεί η εμπειρία στη διαδικασία διαμόρφωσης που μπορεί να αποκτηθεί μόνο με την επίλυση όσο το δυνατόν περισσότερων προβλημάτων.

Το Γραμμικό Πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης (βελτιστοποίησης) μιας γραμμικής συνάρτησης , οι άγνωστες μεταβλητές της οποίας υπόκεινται σε γραμμικούς περιορισμούς.

Η γενική μορφή του Γραμμικού Προβλήματος μπορεί να διατυπωθεί όπως παρακάτω:

$$\text{Min (ή max) } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots. + c_nx_n$$

Με τους περιορισμούς:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots.+ a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots..+ a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\begin{array}{ccccccccc} . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 +\ldots\ldots+ a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0, (j = 1,2,\ldots.., n)$$

όπου: $c_j, a_{ij}, b_i \in R$ ($i = 1,2,\ldots.., m$ και $j = 1,2,\ldots\ldots, n$)

και x_j είναι οι άγνωστες μεταβλητές του προβλήματος που πρέπει να υπολογιστούν ώστε η συνάρτηση z να λάβει την ελάχιστη ή την μέγιστη τιμή της αντίστοιχα και να ικανοποιούνται οι περιορισμοί του προβλήματος.

Οι μεταβλητές x_j ονομάζονται μεταβλητές απόφασης και η μεταβλητή z ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση. Οι περιορισμοί $x_j > 0$ ονομάζονται φυσικοί περιορισμοί ή περιορισμοί μη αρνητικότητας αφού οι μεταβλητές απόφασης εκφράζουν στην πράξη φυσικές ποσότητες. Οι υπόλοιποι περιορισμοί ονομάζονται τεχνολογικοί επειδή προκύπτουν από το ίδιο το πρόβλημα.

Οι πιο γνωστές μορφές του Γραμμικού Προβλήματος είναι:

- Κανονική ή ανισοτική μορφή, όπου όλοι οι τεχνολογικοί περιορισμοί είναι ανισοτικοί, δηλαδή < ή >.
- Τυποποιημένη ή ισοτική μορφή, όπου όλοι οι τεχνολογικοί περιορισμοί είναι ισοτικοί.

1.6 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

- Όλα τα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού αποβλέπουν στη μεγιστοποίηση του κέρδους ή ελαχιστοποίηση του κόστους αντίστοιχα. Το κέρδος ή το κόστος δίνεται από μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών του προβλήματος η οποία αποκαλείται αντικειμενική συνάρτηση.
- Κάθε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού περιλαμβάνει μια σειρά μεταβλητών που αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες που πρέπει να προσδιορισθούν μέσω της επίλυσης του προβλήματος ώστε να επιτευχθεί η μεγιστοποίηση ή η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Σε όλα τα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού υπάρχουν περιορισμοί οι οποίοι περιορίζουν τη δυνατότητα της απεριόριστης αύξησης της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης (δηλαδή του κέρδους). Όταν πρόκειται για

ελαχιστοποίηση του κόστους οι περιορισμοί του προβλήματος περιορίζουν το βαθμό στον οποίο η ελάττωση του κόστους είναι εφικτή.

- Σε όλα τα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις, εκ των οποίων θα επιλεγεί η βέλτιστη. Για παράδειγμα αν μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα θα μπορούσε να αφιερώσει όλο της το δυναμικό στην παραγωγή ενός προϊόντος ή να το μοιράσει μεταξύ δύο προϊόντων ή μεταξύ όλων. Αυτό θα μπορούσε να γίνει με διαφορετικές αναλογίες. Βασικός σκοπός του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι η επιλογή της βέλτιστης λύσης.

Επίσης, για την εφαρμογή της μεθοδολογίας του Γραμμικού Προγραμματισμού απαιτούνται ορισμένες παραδοχές όπως :

- Κατ'αρχήν υποθέτουμε ότι οι συντελεστές των περιορισμών καθώς και οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι σταθεροί και δεν υπόκεινται σε τυχαίες διακυμάνσεις.

- Υποθέτουμε επίσης ότι η παραγωγή είναι συνεχής. Δηλαδή είναι δυνατή η παραγωγή οποιασδήποτε ποσότητας ακέραιας ή κλασματικής.

- Επίσης υποθέτουμε πως οι παραπάνω συντελεστές ισχύουν αναλογικά και όχι αθροιστικά.

Π.χ. αν για την παραγωγή μιας μονάδος απαιτούνται 3 ώρες οι 20 μονάδες απαιτούν 60 ώρες. Επίσης, αν για μια μονάδα προϊόντος απαιτούνται 4 ώρες εργασίας και μια μονάδα ενός άλλου προϊόντος απαιτούνται 3 ώρες, τότε για να παράγουμε μια μονάδα από κάθε προιόν θα χρειασθούμε 7 ώρες.

Δηλαδή, οι περιορισμοί του προβλήματος είναι γραμμικοί.

1.7 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στη συνέχεια δίνονται μερικές πολύ βασικές έννοιες που αφορούν την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων.

1. Εφικτά σημεία ή εφικτές λύσεις ονομάζονται τα σημεία (ή οι λύσεις) που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς του γραμμικού προβλήματος.
2. Εφικτή περιοχή είναι το σύνολο (F) των εφικτών σημείων (ή λύσεων).
3. Βέλτιστο σημείο ή βέλτιστη λύση είναι το εφικτό σημείο (λύση) του γραμμικού προβλήματος (x ε F) για το οποίο ισχύει

$cT\ x \le cT\ y$	για κάθε y ε F	για min γραμμικό πρόβλημα
$cT\ x \ge cT\ y$	για κάθε y ε F	για max γραμμικό πρόβλημα.

4. Βέλτιστη τιμή είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση του γραμμικού προβλήματος.
5. Απεριόριστο είναι ένα εφικτό πρόβλημα για το οποίο υπάρχει ακολουθία χ1ο, χ2ο,… εφικτών σημείων για τα οποία οι αντίστοιχες αντικειμενικές τιμές τείνουν στο $-\infty$ $(+\infty)$ για προβλήματα min (max).

Σύμφωνα με *το Θεμελιώδες Θεώρημα* του Γραμμικού Προγραμματισμού ένα γραμμικό πρόβλημα είναι αδύνατο ή εφικτό. Αν είναι εφικτό τότε είναι βέλτιστο ή απεριόριστο.

Επομένως για κάθε γραμμικό πρόβλημα μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατηγορία του με κριτήριο ‘τη δυνατότητα επίλυσής του’, σε μορφή ψευδοκώδικα, όπως φαίνεται παρακάτω

Αν (F = Ø) τότε

το γραμμικό πρόβλημα είναι αδύνατο

αλλιώς

το γραμμικό πρόβλημα είναι εφικτό

αν (Э βέλτιστη τιμή) τότε

το γραμμικό πρόβλημα είναι βέλτιστο

αλλιώς

το γραμμικό πρόβλημα είναι απεριόριστο

Λύση ενός γραμμικού προβλήματος είναι ο προσδιορισμός της κατηγορίας του, δηλαδή αν είναι αδύνατο, βέλτιστο ή απεριόριστο. Επιπλέον αν είναι βέλτιστο πρέπει να προσδιοριστεί τουλάχιστον ένα βέλτιστο σημείο του. Επομένως ο Γραμμικός Προγραμματισμός κατασκευάζει μεθόδους επίλυσης (αλγόριθμους) που υπολογίζουν τουλάχιστον ένα βέλτιστο σημείο.

1.8 ΜΟΡΦΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Κανονική → Τυποποιημένη μορφή

Ο μετασχηματισμός των τεχνολογικών περιορισμών από ανισότητες σε ισότητες γίνεται με την πρόσθεση ή αφαίρεση μεταβλητών που ονομάζονται χαλαρές μεταβλητές στο αριστερό μέλος των ανισοτήτων. Σε περίπτωση που ένας περιορισμός είναι ανισότητα της μορφής ≤ (μικρότερο ή ίσο), τότε προστίθεται στο αριστερό μέλος του περιορισμού μια μη αρνητική μεταβλητή η οποία ονομάζεται ελλειμματική χαλαρή μεταβλητή. Για παράδειγμα αν δίνεται ο παρακάτω ανισοτικός περιορισμός

$$x1 - 2x2 + x3 + 3x4 \leq 8,$$

τότε μετά την προσθήκη της χαλαρής μεταβλητής $x5 \geq 0$ προκύπτει ο αντίστοιχος ισοτικός περιορισμός

$$x1 - 2x2 + x3 + 3x4 + x5 = 8.$$

Σε περίπτωση που ένας περιορισμός είναι ανισοτικός της μορφής ≥ (μεγαλύτερο ή ίσο), τότε αφαιρείται από το αριστερό μέλος του περιορισμού μια μη αρνητική μεταβλητή η οποία ονομάζεται πλεονασματική χαλαρή μεταβλητή. Για παράδειγμα αν δίνεται ο παρακάτω ανισοτικός περιορισμός

$$2x1 + x2 - x3 + x4 \geq 4,$$

τότε μετά την αφαίρεση της χαλαρής μεταβλητής $x6 \geq 0$ προκύπτει ο αντίστοιχος ισοτικός περιορισμός

$$2x1 + x2 - x3 + 2x4 - x6 = 4.$$

Και τις πλεονάζουσες αλλά και τις ελλειμματικές χαλαρές μεταβλητές θα τις καλούμε από δω και στο εξής χαλαρές μεταβλητές.

- Τυποποιημένη → Κανονική μορφή

Ο μετασχηματισμός των τεχνολογικών περιορισμών από ισότητες σε ανισότητες γίνεται με τη μετατροπή κάθε ισοτικού περιορισμού με δύο ανισοτικούς περιορισμούς, δηλαδή αν δίνεται ο παρακάτω ισοτικός περιορισμός

$$x1 + x2 - x3 + 2x4 - x5 = 4,$$

τότε προκύπτουν οι επόμενοι δύο ανισοτικοί περιορισμοί

$$x1 + x2 - x3 + 2x4 - x5 \geq 4$$
$$x1 + x2 - x3 + 2x4 - x5 \leq 4.$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός όμως έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του πλήθους των περιορισμών του προβλήματος με συνέπεια να προκύπτει ένα σημαντικό υπολογιστικό μειονέκτημα από αυτή την μετατροπή. Γι'αυτό καταφεύγουμε στην εξής λύση. Επειδή $x1 \geq 0$ λύνουμε ένα ισοτικό περιορισμό ως προς x1 και αφαιρούμε τη μεταβλητή x1 από την αντικειμενική συνάρτηση και από όλους τους περιορισμούς του προβλήματος. Η ενέργεια αυτή πραγματοποιείται για κάθε ισοτικό περιορισμό του γραμμικού προβλήματος. Για παράδειγμα ο παρακάτω ισοτικός περιορισμός

$$x1 - x2 + x3 - 2x4 = 5,$$

αν λυθεί ως προς x1 γίνεται

$$x1 = x2 – x3 + 2x4 + 5$$

και επειδή $x1 \geq 0$ έχουμε

$$x2 – x3 + 2x4 \geq -5.$$

Έτσι προκύπτει ένα γραμμικό πρόβλημα με περιορισμούς σε ανισοτική μορφή και με λιγότερες μεταβλητές απόφασης.

Επίσης πρέπει να τονισθεί και είναι γνωστό από τα μαθηματικά ότι οποιοσδήποτε ανισοτικός περιορισμός ≤ ή ≥ μπόρει να μετασχηματιστεί σε ≥ ή ≤ αντίστοιχα αν πολλαπλασιάσουμε με -1 και τα δύο μέλη του περιορισμού.

Συμπερασματικά είναι απαραίτητο να αναφερθεί ότι οι παραπάνω μετασχηματισμοί είναι γνωστοί ως μετασχηματισμοί ισοδυναμίας και ως εκ’ τούτου αν το αρχικό γραμμικό πρόβλημα είναι αδύνατο ή βέλτιστο ή απεριόριστο τότε και το αντίστοιχο γραμμικό πρόβλημα που προκύπτει από το μετασχηματισμό θα είναι αντίστοιχα αδύνατο ή βέλτιστο ή απεριόριστο.

1.9 ΠΡΩΤΕΥΟΝ ΚΑΙ ΔΥΪΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Όπως είδαμε παραπάνω ένα οποιοδήποτε γραμμικό πρόβλημα μπορούμε να το μετασχηματίσουμε σε κανονική μορφή. Το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα (P) είναι σε κανονική μορφή και θα το ονομάσουμε πρωτεύον (primal)

$$\min z = cT\ x$$

με περιορισμούς $Ax \geq b$ και $x \geq 0$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε σε κανονική μορφή το δυϊκό (dual) του πρωτεύοντος (P) που θα έχει τη μορφή (DP)

$$\max z = b^T w$$

με περιορισμούς $A^T w \leq c$ και $w \geq 0$

όπου w είναι οι μεταβλητές απόφασης του δυϊκού προβλήματος τις οποίες και θα ονομάζουμε δυικές μεταβλητές. Οι δυικές μεταβλητές w και οι δυικές χαλαρές μεταβλητές c του δυϊκού προβλήματος προσφέρουν σημαντικές οικονομικές ερμηνείες για το αρχικό γραμμικό πρόβλημα.

Σύμφωνα με τη δυική θεωρία μπορεί πολύ εύκολα κάποιος να υπολογίσει το δυϊκό ενός γενικού γραμμικού προβλήματος εφαρμόζοντας πολύ απλούς κανόνες μετασχηματισμού, όπως:

- Αν η αντικειμενική συνάρτηση σε ένα πρωτεύον πρόβλημα (P) είναι min ή max τότε το δυϊκό πρόβλημα (DP) θα έχει αντικειμενική συνάρτηση αντίστοιχα min ή max.
- Σε κάθε περιορισμό του πρωτεύοντος (P) αντιστοιχεί μια μεταβλητή του δυϊκού (DP).
- Σε κάθε μεταβλητή του πρωτεύοντος (P) αντιστοιχεί ένας περιορισμός του δυϊκού (DP).

Έτσι στη μεταβλητή x_j του (P) ο περιορισμός του δυϊκού (DP) που αντιστοιχεί έχει τη μορφή (στήλη συντελεστών xj)T w © cj

όπου © αντιστοιχεί σε ένα σύμβολο =, ≥ και ≤. Ο παρακάτω πινάκας παρουσιάζει τους κανόνες σχηματισμού του δυϊκού προβλήματος.

α/α	min		↔	Max	
1	περιορισμ	=	↔	μεταβλητή	ελεύθερη
2	περιορισμ	≥	↔	μεταβλητή	≥ 0
3	περιορισμ	≤	↔	μεταβλητή	≥ 0
4	μεταβλητ	ελεύθερη	↔	περιορισμός	=
5	μεταβλητ	≥ 0	↔	περιορισμός	≤
6	μεταβλητ	≤ 0	↔	περιορισμός	≥

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX –ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επίλυση ενός προβλήματος με μόνο δύο μεταβλητές γίνεται με τη βοήθεια της γραφικής μεθόδου όπου αφού ορίσουμε την περιοχή των εφικτών λύσεων, προσπαθούμε να βρούμε ποιο από τα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων δίνει το μεγαλύτερο κέρδος. Η γραφική προσέγγιση μας δίνει την ευκαιρία να κατανοήσουμε τις βασικές αρχές των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού. Σε πραγματικές όμως εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού ο αριθμός των μεταβλητών είναι πολύ μεγαλύτερος από δύο μεταβλητές και επομένως η γραφική προσέγγιση επίλυσης δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί.

Σε πραγματικές εφαρμογές ο αριθμός των μεταβλητών και των περιορισμών των προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού ανέρχεται σε δεκάδες, εκατοντάδες και μερικές φορές ακόμα και σε χιλιάδες. Χρειαζόμαστε επομένως μια συστηματική μέθοδο επίλυσης των προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού η οποία να είναι δυνατόν να υλοποιηθεί μέσω καταλλήλων προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού οποιουδήποτε μεγέθους. Η συστηματική αυτή μέθοδος ονομάζεται ***μέθοδος Simplex.***

Ποια είναι η προσέγγιση που ακολουθεί η μέθοδος Simplex; Σε βασικές γραμμές είναι ανάλογη με την προσέγγιση που ακολουθούμε στη γραφική μέθοδο όπου εκεί εξετάζουμε όλα τα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων. Η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι δυνατόν να επιτευχθεί μόνο στα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων. Η μέθοδος Simplex εξετάζει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μόνο στα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων, με ένα συστηματικό αλγεβρικό τρόπο.

Η διαδοχική εξέταση των ακραίων σημείων γίνεται με έναν επαναληπτικό τρόπο, δηλαδή, με το να επαναλαμβάνεται το ίδιο σύνολο των διαδικασιών και αλγεβρικών πράξεων σε διαδοχικά βήματα έως ότου επιτύχουμε να εντοπίσουμε τη βέλτιστη λύση. Κάθε βήμα της μεθόδου Simplex αντιστοιχεί στην επιλογή ενός ακραίου σημείου της περιοχής των εφικτών λύσεων. Σε κάθε νέο βήμα το επόμενο ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης να αυξάνεται (ή αντίστοιχα μειώνεται αν η αντικειμενική συνάρτηση αφορά την ελαχιστοποίηση του κόστους) και επομένως σταδιακά πλησιάζουμε προς τη βέλτιστη λύση. Η μέθοδος Simplex εκτός από τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης, δηλαδή τις τιμές των μεταβλητών και το αντίστοιχο βέλτιστο κέρδος ή κόστος, μας παρέχει επίσης πλήθος άλλων πληροφοριών οικονομικής φύσεως τις οποίες δεν είναι δυνατόν να παράγουμε με άλλο τρόπο.

2.2 ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου Simplex – πέρα από το μικρό αριθμό επαναληπτικών βημάτων που απαιτούνται – είναι η δυνατότητα πλήρους τυποποίησής της σε τέτοιο βαθμό, ώστε να καθίσταται εύκολη τόσο η απομνημόνευσή της για την εκτέλεσή της με χαρτί και μολύβι, όσο και η σύνταξη ενός προγράμματος Η/Υ , ο οποίος αποτελεί πλέον το συνηθέστερο μέσο επίλυσης προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού.

Πριν ωστόσο την εκτέλεση αυτής καθαυτής της κυρίως μεθοδολογίας της Simplex είναι απαραίτητη η διεξαγωγή ορισμένων προκαταρκτικών ενεργειών, οι οποίες ουσιαστικά μετατρέπουν τη γραφική μέθοδο σε μια εύχρηστη καθαρά υπολογιστική διαδικασία. Η προπαρασκευαστική αυτή οργάνωση του μαθηματικού προτύπου του Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί να συνοψισθεί στα ακόλουθα στάδια:

1. Μετατροπή της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών δομής και μη αρνητικότητας στη μορφή που υπαγορεύει το μέλλον του Γραμμικού Προγραμματισμού.

2. Αλλαγή της φοράς της ανισότητας όσων περιορισμών δομής απαιτείται, έτσι ώστε τα δεξιά μέλη όλων των περιορισμών να είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

Επομένως αν το δεξιό μέλος ενός περιορισμού είναι αρνητικό χρειάζεται η αλλαγή των πρόσημων και της φοράς της αντίστοιχης ανισότητας (πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με -1)

3. Μετατροπή των περιορισμών δομής που αποτελούν ανισότητες ή ανισοησότητες σε ισοδύναμες ισότητες. Αυτό επιτυγχάνεται με τη προσθήκη (πρόσθεση αν η φορά της ανισότητας είναι $<$ ή $\leq$ ή αφαίρεση αν η φορά είναι της μορφής $>$ ή $\geq$) νέων μη αρνητικών μεταβλητών, οι οποίες λέγονται ψευδομεταβλητές.

Για παράδειγμα στο περιορισμό δομής $3x1 – 5x2 + 2x3 \leq 13$ χρειάζεται η πρόσθεση της ψευδομεταβλητής x4, επομένως αυτός να μετατραπεί στην ισότητα $3x1 – 5x2 + 2x3$

$+ x4 = 13$. Με τον ίδιο τρόπο ο περιορισμός $4x1 + x2 - 7x3 > 8$ αφαιρώντας τη ψευδομεταβλητή $x5$ μετατρέπεται στην ισότητα $4x1 + x2 – 7x3 – x5 = 8$.

Εξυπακούεται ότι και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις οι μεταβλητές $x4$ και $x5$ δεν περιλαμβάνονται στις αρχικές μεταβλητές απόφασης του αντίστοιχου προτύπου.

4. Δημιουργία στο αριστερό τμήμα του πίνακα των περιορισμών δομής ενός μοναδιαίου πίνακα με τη πρόσθεση κατάλληλου αριθμού νέων μη αρνητικών μεταβλητών, οι οποίες ονομάζονται τεχνητές μεταβλητές.

Μοναδιαίος πίνακας είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, του οποίου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ισούνται με τη μονάδα ενώ όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του ισούνται με μηδέν. Για την ορθή εφαρμογή της μεθόδου Simplex απαιτείται η δημιουργία στο αριστερό μέλος του συνόλου των περιορισμών δομής ενός πλήρους μοναδιαίου πίνακα. Οι στήλες του επιτρέπουν να είναι διατεταγμένες σε οποιαδήποτε σειρά μεταξύ τους. Όπως είναι φανερό, υπάρχει πιθανότητα μία ή περισσότερες από τις στήλες του επιθυμητού μοναδιαίου πίνακα να προϋπάρχουν προερχόμενες είτε από τις αρχικές μεταβλητές απόφασης είτε από τις ψευδομεταβλητές που προστέθηκαν στους περιορισμούς στο προηγούμενο στάδιο της οργάνωσης του μαθηματικού προτύπου. Επομένως ο αριθμός των τεχνητών μεταβλητών που πρέπει να προστεθούν ποικίλλει ανάλογα με τη φορά και τη φύση των περιορισμών, πάντως είναι σχεδόν πάντα σημαντικά μικρότερος από το πλήθος των γραμμών του απαιτούμενου μοναδιαίου πίνακα.

Ο τρόπος δημιουργίας του μοναδιαίου πίνακα γίνεται περισσότερο σαφής και κατανοητός από το ακόλουθο παράδειγμα:

$$\max Z = 2x1 – 3x2$$

με τους περιορισμούς δομής $7x1 < 80$ (1)

$2x1-3x2<20$ (2)

$6x1+5x2=45$ (3)

και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας $\chi1,\chi2\geq0$

Στους περιορισμούς (1) και (2) προστίθενται οι ψευδομεταβλητές χ3 και χ4 αντίστοιχα, οπότε το σύστημα των περιορισμών καθίσταται:

$$7x1 + x3 = 80$$

$$2x1 - 3x2 + x4 = 20$$

$$6x1 - 5x2 = 45$$

Για τη δημιουργία του απαραίτητου μοναδιαίου πίνακα απαιτείται η πρόσθεση στον περιορισμό (3) της τεχνητής μεταβλητής χ5. Έτσι η τελική μορφή του προτύπου είναι:

$$\text{Max } Z = 2x1 - 3x2 + 0x3 + 0x4 + 0x5$$

με τους περιορισμούς δομής $7x1+x3 =80$

$2x1-3x2+x4 =20$

$6x1-5x2+x5 =45$

και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας $x1,x2,x3,x4,x5\geq0$

όπου χ1,χ2 οι μεταβλητές απόφασης

χ3,χ4 οι ψευδομεταβλητές και

χ5 η τεχνητή μεταβλητή

Ο μοναδιαίος πίνακας έχει σχηματισθεί στις τρεις τελευταίες στήλες του πίνακα των περιορισμών δομής.

2.3 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

Η μέθοδος Simplex είναι μια κλασική αλγεβρική επαναληπτική διαδικασία, κατά την εφαρμογή της οποίας δεν απαιτούνται από το χρήστη ιδιαίτερες θεωρητικές γνώσεις. Ωστόσο η γνώση των βασικών αρχών από τις οποίες διέπεται είναι απαραίτητη, τόσο σε αυτή καθαυτή την ερμηνεία και κατανόησή της, όσο και στην κριτική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της καθώς και στην κατανόηση της έννοιας και της σημασίας της ανάλυσης ευαισθησίας των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Οι σπουδαιότεροι ορισμοί και αρχές, από τις οποίες διέπεται η μέθοδος Simplex είναι οι ακόλουθοι:

- **Επαυξημένη λύση** είναι μια λύση του προβλήματος με τους περιορισμούς στη μορφή των αρχικών ανισοτήτων, η οποία έχει προσαυξηθεί με τις αντίστοιχες τιμές των ψευδομεταβλητών έτσι ώστε οι περιορισμοί να πάρουν τη μορφή εξισώσεων. Η επαυξημένη λύση περιέχει n + m μεταβλητές.
- **Βασική λύση** είναι μια 'επαυξημένη' ακραία λύση.
- **Βασική δυνατή λύση** είναι μια επαυξημένη ακραία δυνατή λύση.

Κάθε βασική λύση περιέχει συνολικά m + n μεταβλητές. Από αυτές οι n μεταβλητές ονομάζονται μη βασικές μεταβλητές και είναι ίσες με μηδέν. Οι τιμές των υπολοίπων m μεταβλητών, οι οποίες ονομάζονται βασικές μεταβλητές, αποτελούν τη συμβιβαστή λύση του συστήματος των m εξισώσεων του προβλήματος με όλους τους περιορισμούς σε μορφή εξισώσεων, αφού τεθούν οι μη βασικές μεταβλητές ίσες με μηδέν. Αυτή η βασική λύση είναι η επαυξημένη ακραία λύση. Οι n εξισώσεις που την προσδιορίζουν είναι αυτές που καθορίζονται από τις αντίστοιχες μεταβλητές.

- **Βασική δυνατή λύση** είναι μια βασική λύση, η οποία ικανοποιεί το σύστημα των εξισώσεων που σχηματίζουν οι περιορισμοί (όταν αυτοί μετατραπούν σε ισότητες) και ταυτόχρονα όλες της οι m βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές. Μια βασική δυνατή λύση ονομάζεται εκφυλισμένη, όταν έστω και μια από αυτές τις m μεταβλητές είναι ίση με μηδέν.

2.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ SIMPLEX

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Μια επιχείρηση παράγει έπιπλα τραπέζια και καρέκλες.. Για την δημιουργία ενός τραπεζιού χρειάζεται 8 ώρες στο ξυλουργείο και 4 ώρες στο βαφείο ενώ για την παρασκευή μίας καρέκλας απαιτούνται 8 ώρες στο ξυλουργείο και 2 ώρες στο βαφείο. Τα μηνιαία κέρδη της επιχείρησης από τα τραπέζια είναι 14.000 ευρώ ενώ για τις καρέκλες είναι 10.000 ευρώ. Η επιχείρηση μπορεί και διαθέτει 960 ώρες ξυλουργείο και 400 ώρες βαφείου.

ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Έχουμε: X1 = ο αριθμός τραπεζιών που θα παραχθούν

X2 = ο αριθμός καρεκλών που θα παραχθούν

Μεγιστοποίηση συνολικού κέρδους : $14000X1 + 10000X2$

Με περιορισμούς : $8X1 + 8X2 \leq 960$ περιορισμός στο ξυλουργείο

$4X1 + 2X2 \leq 400$ περιορισμός στο βαφείο

$X1, X2 \geq 0$

<u>Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες</u>

Το πρώτο βήμα της μεθόδου Simplex επιβάλει τη μετατροπή όλων των περιορισμών που διατυπώνονται με ανισότητες σε ισότητες. Η μετατροπή αυτή επιτυγχάνεται με τη χρήση μεταβλητών περιθωρίου. Οι μεταβλητές περιθωρίου αντιπροσωπεύουν αχρησιμοποίητους πόρους στη διαδικασία μεγιστοποίησης του κέρδους. Στην περίπτωση του παραδείγματος που εξετάζουμε ορίζουμε δύο μεταβλητές περιθωρίου, μία για κάθε περιορισμό, ως εξής :

S1 = Ώρες ξυλουργείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή τραπεζιών και καρεκλών

S2 = Ώρες βαφείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν.

Για παράδειγμα αν παράγουμε 70 τραπέζια και 40 καρέκλες, οι ώρες ξυλουργείου που απαιτούνται είναι 8*70+8*40=880. Σε αυτή τη περίπτωση η τιμή της μεταβλητής S1 είναι 80 ώρες, δηλαδή 960 διαθέσιμες ώρες – 880 που θα χρησιμοποιηθούν. Ο όρος μεταβλητές περιθωρίου έχει την έννοια ότι οι τιμές αυτών των μεταβλητών συμβολίζουν τη διαφορά μεταξύ της αριστερής πλευρά στης ανισότητας (απαιτούμενη ποσότητα) και της αντίστοιχης δεξιάς πλευράς (διαθέσιμη ποσότητα).

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται όλοι οι διαθέσιμοι πόροι ενός περιορισμού τότε η αντίστοιχη μεταβλητή περιθωρίου έχει τη τιμή μηδέν.

Οι περιορισμοί του προβλήματος με την προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου γράφονται ως εξής :

$8X1 + 8\chi2 + S1 = 960$ Περιορισμός στο ξυλουργείο

$4X1 + 2X2 + S2 = 400$ Περιορισμός στο βαφείο ή αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε όλες τις μεταβλητές σε όλους τους περιορισμούς έχουμε :

8X1 + 8X2 + 1S1 + 0S2 = 960 Περιορισμός στο ξυλουργείο

4X1 + 2X2 + 0S1 + 1S2 = 400 Περιορισμός στο βαφείο

Οι μεταβλητές περιθωρίου δεν συνεισφέρουν στο κέρδος της επιχείρησης, επομένως μπορούμε να τις συμπεριλάβουμε στην αντικειμενική συνάρτηση με αντίστοιχους συντελεστές κέρδους μηδέν.

Επομένως, η αντικειμενική συνάρτηση μετά την προσθήκη και των μεταβλητών περιθωρίου γράφεται ως εξής :

Μεγιστοποίηση 14.000 X1 + 10.000 X2 + 0S1 + 1S2

Σημείωση : Οι πραγματικές μεταβλητές X1, X2 αντιπροσωπεύουν ποσότητες παραγωγής των δύο προϊόντων, ενώ οι μεταβλητές περιθωρίου S1, S2 ώρες παραγωγής που δεν απορροφούνται στη παραγωγή των ποσοτήτων X1 και X2.

Αλγεβρικός Προσδιορισμός Λύσεων Γραμμικού Προγραμματισμού

Ας εξετάσουμε τους περιορισμούς του προβλήματος όπως διαμορφώθηκε μετά την προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου. Έχουμε λοιπόν, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με τέσσερις μεταβλητές. Εφ’ όσον ο αριθμός των εξισώσεων είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων, υπάρχουν πολλές λύσεις του συστήματος. Ένας απλός τρόπος εύρεσης λύσεων είναι να θέσουμε 2 από τις μεταβλητές ίσες με μηδέν και να λύσουμε το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει των 2 άλλων μεταβλητών με 2 εξισώσεις για να προσδιορίσουμε τις τιμές τους.

Μια εύκολη λύση είναι να θέσουμε τις μεταβλητές X1=0 και X2=0. Η λύση που προκύπτει σα αυτήν την περίπτωση είναι S1=960 και S2=400. Είναι ευνόητο ότι η λύση αυτή δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστική διότι αντιπροσωπεύει την παραγωγή 0 τεμαχίων από τραπέζια και καρέκλες. Με μηδενική παραγωγή κανένα από τις διαθέσιμες ώρες παραγωγής δεν χρησιμοποιούνται. Γι' αυτό επομένως οι τιμές των μεταβλητών περιθωρίου είναι S1=960 ώρες και S2=400ώρες ίσες δηλαδή με τις αρχικές διαθέσιμες ώρες παραγωγής.

Η μέθοδος Simplex όπως προαναφέρανε είναι μια επαναληπτική μέθοδος η οποία επαναλαμβάνει τα ίδια βήματα έως ότου προσδιορίσουμε τη βέλτιστη λύση. Σε κάθε βήμα της μεθόδου Simplex παίρνουμε μια νέα εφικτή λύση που είναι καλύτερη από την προηγούμενη. Σαν αρχική λύση της μεθόδου Simplex χρησιμοποιούμε την X1=0 και X2=0, S1=960 και S2=400. Η συγκεκριμένη λύση είναι η λύση που μπορούμε να παράγουμε εύκολα για οποιοδήποτε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στην αρχική αυτή λύση είναι προφανώς 0.

<u>Ο αρχικός πίνακας Simplex</u> **ΠΙΝΑΚΑΣ1**

Αν τοποθετήσουμε τους συντελεστές των μεταβλητών των 2 περιορισμών και της αντικειμενικής συνάρτησης σε ένα πίνακα θα έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

Συντ .Κέρδους	Cj→	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
0	S1	8	8	1	0	960

0	S2	4	2	0	1	400
	Zj	0	0	0	0	0
	Cj - Zj	14.000	10.000	0	0	

Ο παραπάνω πίνακας καλείται Πίνακας Simplex.

Κάθε πίνακας Simplex αντιστοιχεί σε μία εφικτή λύση του προβλήματος. Ο αρχικός πίνακας Simplex αντιστοιχεί στη λύση S1=960 και S2=400 και επομένως X1=0 και X2=0.

Όπως παρατηρούμε ο πίνακας Simplex εκτός των συντελεστών μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς του προβλήματος, περιλαμβάνει και κάποιες άλλες πληροφορίες, όπως η στήλη που γράφει “ βασικές μεταβλητές’’ και οι σειρές Zj και Cj-Zj. Οι επιπλέον αυτές πληροφορίες είναι απαραίτητες για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex.

Βασικές μεταβλητές και μη βασικές

Σ’ ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού οι μεταβλητές που έχουν μη μηδενικές τιμές ονομάζονται βασικές μεταβλητές, ενώ οι υπόλοιπες μη βασικές. Ο αριθμός των βασικών μεταβλητών σε κάθε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ίσος με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος.

Η πρώτη στήλη του πίνακα Simplex περιλαμβάνει τους συντελεστές κέρδους που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές. Στη δεύτερη στήλη τοποθετούμε τις βασικές μεταβλητές S1, S2. Οι επόμενες στήλες αποτελούν το κυρίως κομμάτι του πίνακα Simplex και τα στοιχεία του αντιστοιχούν στους συντελεστές των μεταβλητών του προβλήματος, ενώ τα στοιχεία της τελευταίας στήλης αντιστοιχούν στις τιμές των περιορισμών.

Οι τιμές των βασικών μεταβλητών δίνονται στη τελευταία στήλη.

Δηλαδή η τιμή 960 αντιστοιχεί στην S1 και η τιμή 400 στην S2. Οι τιμές των μη βασικών μεταβλητών είναι μηδέν. Δηλαδή X1=0 και X2=0.

Η πρώτη σειρά του πίνακα (Cj) περιλαμβάνει τους συντελεστές κέρδους όλων **των** μεταβλητών.

Οικονομική Ερμηνεία του Πίνακα Simplex –Συντελεστές Ανταλλαγής

Τα στοιχειά κάθε στήλης του πίνακα Simplex είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές των περιορισμών του προβλήματος. Για παράδειγμα η πρώτη στήλη του κυρίως πίνακα (8,4) περιέχει τους συντελεστές του X1 στον πρώτο και δεύτερο περιορισμό αντίστοιχα.

Τα στοιχεία της στήλης X1 καλούνται συντελεστής ανταλλαγής μεταξύ της X1 και των βασικών μεταβλητών του πίνακα, δηλαδή των S1 και των S2 και ερμηνεύονται ως εξής: Για να αυξήσουμε την τιμή της X1 κατά μία μονάδα (για να παράγουμε δηλαδή ένα τραπέζι) απαιτείται να μειώσουμε τις τιμές των S1 και S2 κατά 8 και 4 μονάδες αντίστοιχα (δηλαδή να ελαττώσουμε τις μη διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο και στο βαφείο κατά 8 και 4 αντίστοιχα). Η ερμηνεία αυτή είναι λογική αν σκεφτούμε ότι για την παραγωγή ενός τραπεζιού απαιτούνται 8 ώρες στο ξυλουργείο και 4 ώρες στο βαφείο. Αντίστοιχη ερμηνεία μπορούμε να δώσουμε και για τα στοιχεία της στήλης X2.
Η στήλη της S1 είναι (1,0) ενώ η στήλη της s2 είναι (0,1)

Οι σειρές Cj, Zj, Cj-Zj

Η σειρά Cj περιέχει τους συντελεστές κέρδους της αντικειμενικής συνάρτησης. Τα στοιχεία αυτής της σειράς μπορεί να ερμηνευθούν ως η μικτή αύξηση που προκύπτει στο συνολικό κέρδος αν η τιμή κάθε μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα. Έτσι μία μονάδα της X1 αποφέρει επιπλέον κέρδος 14.000e.

Τα στοιχεία της σειράς Zj δηλώνουν το κατά πόσο θα μειωθεί το συνολικό κέρδος αν η τιμή της κάθε μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα. Πως όμως δικαιολογείται η μείωση του κέρδους; Ας πάρουμε τη μεταβλητή Χ1. Για να αυξηθεί η Χ1 κατά μία μονάδα θα πρέπει να ελαττωθεί η S1 κατά 8 μονάδες και η S2 κατά 4 μονάδες. Γενικώς η μείωση κάποιων άλλων μεταβλητών ώστε να αυξηθεί η Χ1 θα μπορούσε να έχει επιπτώσεις στο συνολικό κέρδος. Αν και οι άλλες μεταβλητές είχαν συνεισφορά στο κέρδος όπως αυτό ορίζεται στην αντικειμενική συνάρτηση, τότε τυχόν μείωση των τιμών τους θα είχε ως αποτέλεσμα και μείωση του κέρδους. Η μείωση των S1 και S2 στην προκειμένη περίπτωση δεν έχουν καμία επίπτωση στο συνολικό κέρδος γιατί οι συντελεστές αυτοί είναι 0.

Η τελευταία γραμμή του πίνακα Cj-Zj είναι η γραμμή που μας δίνει την καθαρή επίπτωση στο συνολικό κέρδος (αύξηση κέρδους – μείωση κέρδους) στην περίπτωση που κάθε μία από τις μη βασικές μεταβλητές του προβλήματος αυξηθεί κατά μία μονάδα.

<u>Κριτήριο Βελτιστοποίησης</u>

Η τελευταία αυτή γραμμή του πίνακα Simplex καθορίζει και κατά πόσο η δεδομένη λύση του πίνακα είναι βέλτιστη ή όχι. Αρνητικές τιμές Cj-Zj δηλώνουν ότι στην περίπτωση που η τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής αυξηθεί, θα υπάρχει μείωση του κέρδους.

Αντίθετα θετικές τιμές Cj-Zj δηλώνουν ότι μπορεί να υπάρξει βελτίωση του κέρδους αν αυξηθεί η τιμή της συγκεκριμένης μεταβλητής με θετικό Cj-Zj.

Αν βέβαια οι τιμές των Cj-Zj είναι αρνητικές ή μηδεν τότε η λύση που έχουμε είναι βέλτιστη.

<u>Επαναληπτική Διαδικασία Simplex</u>

Η μέθοδος Simplex είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος. Βασίζεται δηλαδή σε μία σταθερή επαναλαμβανόμενη διαδικασία με την οποία από ένα δεδομένο πίνακα Simplex με κατάλληλους αριθμητικούς υπολογισμούς προχωρούμε στον επόμενο, ο οποίος αντιστοιχεί σε μία καλύτερη λύση έως ότου προσδιορισθεί η βέλτιστη λύση. Η επαναληπτική αυτή διαδικασία περιλαμβάνει 5 βήματα.

Η βασική φιλοσοφία της μεθόδου Simplex είναι ότι σε κάθε βήμα αντικαθιστούμε μία από τις βασικές μεταβλητές με μία μη βασική μεταβλητή με στόχο να βελτιωθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

.

Βήμα 1

Επιλέγουμε τη μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στις βασικές μεταβλητές. Η επιλογή γίνεται με βάση τη συνεισφορά κάθε μη βασικής μεταβλητής στο συνολικό κέρδος, η οποία φαίνεται στα στοιχεία της σειράς Cj-Zj. Η μεταβλητή με το μεγαλύτερο θετικό Cj-Zj είναι αυτή που «μπαίνει» στη βάση. Αν όλες οι μεταβλητές έχουν τιμές Cj-Zj μικρότερες ή ίσες με μηδέν τότε η λύση που έχουμε είναι βέλτιστη. Τη στήλη που αντιστοιχεί στη μεταβλητή που μπαίνει στη βάση την ονομάζουμε **οδηγό στήλη**.

Βήμα 2

Εφ' όσον μία από τις μη βασικές μεταβλητές «μπαίνει» στη βάση, μία από τις βασικές μεταβλητές θα πρέπει να «φύγει». Βρίσκουμε τη μεταβλητή της βάσης η οποία θα αντικατασταθεί από τη νέα μεταβλητή που επιλέχθηκε στο βήμα 1 ως εξής:
Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της τελευταίας στήλης του πίνακα Simplex με τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία της οδηγού στήλης (σε περίπτωση αρνητικής ή μηδενικής τιμής το αγνοούμε). Το μικρότερο θετικό κλάσμα αντιστοιχεί στη μεταβλητή που θα

αντικατασταθεί. Τη σειρά της μεταβλητής που θα αντικατασταθεί την ονομάζουμε **οδηγό σειρά.** Η τομή της οδηγού σειράς με την οδηγό στήλη μας δίνει το **οδηγό στοιχείο.**

Βήμα 3

Υπολογίζουμε νέες τιμές για τον οδηγό σειρά. Για να βρούμε αυτές τις νέες τιμές της οδηγού σειράς διαιρούμε όλα τα στοιχεία με το οδηγό στοιχείο.

Βήμα 4

Υπολογίζουμε τις νέες τιμές για τις υπόλοιπες σειρές του πίνακα Simplex. Οι νέες τιμές κάθε σειράς εκτός της οδηγού σειράς υπολογίζονται ως εξής:

Νέα σειρά = Προηγούμενη Σειρά – Στοιχείο οδηγού στήλης * Νέα οδηγό σειρά

Βήμα 5

Υπολογίζουμε τις νέες τιμές για τη σειρά Cj-Zj

Ο Δεύτερος Πίνακας Simplex

Αφού αναπτύξαμε τα πέντε βήματα με τα οποία υπολογίζουμε τα στοιχεία του επόμενου πίνακα Simplex κάθε φορά, τώρα θα εφαρμόσουμε την εφαρμογή τους στο συγκεκριμένο μας παράδειγμα. Στόχος είναι να βρούμε μία νέα λύση η οποία θα μας δώσει μεγαλύτερο κέρδος. Το κέρδος με την υπάρχουσα λύση του αρχικού πίνακα Simplex είναι 0. Η αρχική λύση είναι X1 = 0, X2 = 0, S1 = 960, S2 = 400.

Βήμα 1: Η επιλογή για το ποια μεταβλητή θα είναι αυτή που θα συμπεριληφθεί στη βάση θα γίνει μεταξύ των Χ1 και Χ2 διότι αυτές είναι οι μη βασικές μεταβλητές. Επιλέγουμε τη μεταβλητή με τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά Cj-Zj. Η μεταβλητή Χ1 έχει τιμή Cj-Zj=14.000 ενώ η Χ2 έχει τιμή 10.000. Επομένως επιλέγουμε την Χ1 γιατί για κάθε μονάδα από την Χ1 που θα παραχθεί το κέρδος θα αυξηθεί κατά 14.000. Αντίθετα η επιλογή της Χ2 θα οδηγούσε σε μικρότερη αύξηση μόνο κατά 10.000 ευρώ ανά μονάδα της Χ2. Επομένως η στήλη της Χ1 είναι η οδηγός στήλη

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Συντ .Κέρδους	Cj→	***14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	Χ1	Χ2	S1	S2	Bi
0	S1	8	8	1	0	960
* 0	S2	**4	2	0	1	400
	Zj	0	0	0	0	****0
	Cj - Zj	14.000	10.000	0	0	

* Η σειρά όλη οριζόντια είναι η οδηγός σειράς

** Το 4 είναι το οδηγό στοιχείο

*** Η σειρά όλη κάθετα είναι η οδηγός στήλης **** Το κέρδος

Βήμα 2: Μετά την επιλογή της Χ1 για να συμπεριληφθεί στη νέα βάση, θα πρέπει να δούμε ποια από τις ήδη μεταβλητές S1 και S2 θα αντικατασταθεί από την Χ1. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης έχουμε:

Για την S1: 960 ώρες ξυλουργείου / 8 ώρες ανά τραπέζι = 120 τραπέζια

Για την S2: 400 ώρες βαφείου / 4 ώρες ανά τραπέζι = 100 τραπέζια

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή S2 που αντιστοιχεί στο μικρότερο κλάσμα θα αντικατασταθεί από την X1.

Οικονομική ερμηνεία της αντικατάστασης των Βασικών Μεταβλητών

Η μεταβλητή X1 επιλέγεται γιατί κάθε αύξηση της X1 κατά μια μονάδα, παραγωγή ενός τραπεζιού, αυξάνει το κέρδος κατά 14.000 ευρώ. Άρα λογικά θα επιθυμούσαμε να αυξήσουμε την τιμή X1 όσο το δυνατόν περισσότερο γίνεται. Επειδή όμως αύξηση της ποσότητας X1 σημαίνει ανάλωση πόρων, είναι λογικό ότι η αύξηση της X1 μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο εφόσον υπάρχουν διαθέσιμοι πόροι.

Για κάθε μονάδα της X1 που παράγουμε πρέπει να μειώσουμε την S1 κατά 8 μονάδες και εφόσον έχουμε μόνο 960 μονάδες διαθέσιμες από την S1 τότε η ανώτερη τιμή για την X1 είναι 960/8=120. Ομοίως για κάθε μονάδα X1 πρέπει να μειώσουμε την S2 κατά 4 μονάδες. Εφόσον έχουμε 400 μονάδες της S2 διαθέσιμες η μεγαλύτερη ποσότητα της X1 που μπορεί να παραχθεί είναι 400/4=100 μονάδες. Αν θέσουμε X1=100 τότε θα χρησιμοποιηθεί όλη η ποσότητα των 400 ωρών της S2 και επομένως η τιμή της S2 θα γίνει 0 και δεν είναι πλέον βασική μεταβλητή.

Βήμα 3: Αφού αποφασίσαμε πλέον ότι η μεταβλητή X1 θα αντικαταστήσει την τιμή S2 θα πρέπει να υπολογίσουμε ξανά τις τιμές για το δεύτερο πίνακα Simplex. Θα αντικαταστήσουμε τον οδηγό σειρά διαιρώντας όλα τα στοιχεία της με το 4 που είναι το οδηγό στοιχείο. Άρα η νέα οδηγός σειρά θα γίνει:

4/4=1 2/4=1/2 0/4=0 1/4=1/4 400/4=100

Επομένως ο δεύτερος πίνακας Simplex θα έχει την εξής μορφή:

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

Συντ. Κέρδους	Cj→	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
0	S1					
14.000	X1	1	1/2	0	1/4	100
	Zj					
	Cj-Zj					

Όπως βλέπουμε η X1 αντικατέστησε την S2 στη βάση. Η τιμή της X1 είναι 100 μονάδες, ενώ ο συντελεστής κέρδους της X1 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών.

Βήμα 4: Απομένει τώρα να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τη σειρά που αντιστοιχεί στην S1 καθώς και τις νέες τιμές στις σειρές Cj-Zj. Για να υπολογίσουμε τη νέα σειρά S1 θα κάνουμε τις εξής πράξεις:

Νέα σειρά = Προηγούμενη Σειρά – Στοιχείο οδηγού στήλης * Νέα οδηγό σειρά

Το στοιχείο της οδηγού στήλης που αντιστοιχεί στη σειρά S1 (πίνακας 2) είναι το 8.

	X1	X2	S1	S2	Bi
Προηγ. Τιμές Si	8	8	1	0	960
Οδ. Στοιχ * νέα οδ.σειρά	-8*1	-8*(1/2)	-8*0	-8*(1/4)	-8*100
Νέες τιμές S1	=0	=4	=1	=-2	=160

Επομένως οι νέες τιμές της οδηγού σειράς θα πολλαπλασιασθούν με 8 και θα αφαιρεθούν από τις νέες τιμές της σειράς S1 και έτσι θα έχουμε:

ΠΙΝΑΚΑΣ 4

Επομένως ο νέος πίνακας Simplex μετά τον υπολογισμό της σειράς S1 θα έχει την εξής μορφή:

ΠΙΝΑΚΑΣ 5

Συντ. Κέρδους	Cj→	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
0	S1	0	4	1	-2	160
14.000	X1	1	1/2	0	1/4	100
	Zj					0
	Cj-Zj					

Ο νέος πίνακας Simplex έχει και αυτός δύο μοναδιαίες στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές S1 (1.0) και X1 (0,1)
Βασικά οι αλγεβρικές πράξεις που εκτελέσαμε για να πάρουμε τις νέες τιμές του πίνακα Simplex είχαν ακριβώς αυτό σαν στόχο. Το να μετατρέψουμε δηλαδή την στήλη που αντιστοιχεί στην νέα βασική μεταβλητή X1 σε μοναδιαία στήλη. Η διαίρεση με το οδηγό στοιχείο έδωσε την τιμή 1 στην θέση της τομής της σειράς X1 με τη στήλη X1. Ο πολλαπλασιασμός των νέων τιμών της οδηγού σειράς με το 8 και η αφαίρεση του γινομένου από τη σειρά S1 είχε σαν αποτέλεσμα να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης X1.

Βήμα 5: Απομένει τώρα να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τις σειρές Zj και Zj-Cj. Η σειρά Zj αντιστοιχεί στη μείωση του κέρδους στην περίπτωση που επιλέξουμε μια από τις μη βασικές μεταβλητές να συμπεριληφθεί στη βάση . Στο σημείο αυτό μπορούμε να εξηγήσουμε καλύτερα την έννοια των τιμών της σειράς Zj. Η νέα λύση που προέκυψε είναι X1=100 τεμάχια τραπεζιών, X2=0 τεμάχια καρεκλών, S1=160 ώρες και S2=0 ώρες. Δηλαδή παράγονται 100 τραπέζια, καθόλου καρέκλες με περίσσευμα 160 ώρες στο ξυλουργείο και 0 ώρες στο βαφείο.
Αν θέλουμε να εξετάσουμε τη περίπτωση παραγωγής και ορισμένης ποσότητας καρεκλών αυτό σημαίνει ότι θέλουμε να αυξήσουμε την τιμή της X2 από 0 που είναι τώρα σε μια θετική ποσότητα, δηλαδή να τη συμπεριλάβουμε στη βάση αντικαθιστώντας κάποια από τις μεταβλητές S1 ή X1.

<u>Συντελεστές Ανταλλαγής</u>

Για να αυξηθεί η τιμή της X2 κατά μία μονάδα απαιτείται να μειώσουμε την S1 κατά 4 και την X1 κατά 1/2 μονάδες. Δηλαδή να παράγουμε ½ λιγότερα τραπέζια (X1) και να μειώσουμε κατά 4 ώρες τις διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο (S1). Η μείωση της X1 κατά ½ θα ελευθερώσει ορισμένες ώρες. Συγκεκριμένα αφού το 1 τραπέζι απαιτεί 8 ώρες ξυλουργείου και 4 ώρες βαφείου η μείωση της παραγωγής τραπεζιών κατά ½ θα έχει ως αποτέλεσμα την απελευθέρωση 4 ωρών ξυλουργείου και 2 ωρών βαφείου. Αν πάρουμε επίσης και 4 ώρες από αυτές που περίσσευαν στο ξυλουργείο θα έχουμε συνολικά 8 ώρες ξυλουργείου και 2 ώρες βαφείου που είναι ακριβώς οι ώρες που χρειάζονται για την παραγωγή 1 καρέκλας.

<u>Οι τιμές Cj-Zj</u>

Από την πλευρά των τιμών τώρα, η παραγωγή 1 καρέκλας θα έχει θετική συνεισφορά 10.000 ευρώ στα κέρδη (σειρά Cj). Παράλληλα όμως θα έχει και αρνητικό αποτέλεσμα γιατί η αύξηση της παραγωγής καρεκλών θα γίνει σε βάρος της παραγωγής των τραπεζιών. Εφόσον θα πρέπει να μειώσουμε την παραγωγή των τραπεζιών κατά ½ θα έχουμε απώλεια κερδών 7.000 ευρώ, αφού το κέρδος για κάθε τραπέζι είναι 14.000 ευρώ. Η τιμή της Zj που αντιστοιχεί στη στήλη X2 είναι 7.000 ευρώ.

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της σειράς Zj πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές ανταλλαγής στη στήλη κάθε μιας μεταβλητής με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών και προσθέτουμε τα γινόμενα ως εξής:

ΠΙΝΑΚΑΣ 6

Συντ. Κέρδους	Cj→	14.000	10.000	0	0	Ποσό-τητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
0	S1	0	4	1	-2	160
14.000	X1	1	1/2	0	1/4	100
	Zj	0*0	0*4	0*1	0*(-2)	

		+14000*1	+14000*1/2	+14000* 0	+14000* 1/4	
		=14.000	=7.000	=0	=3500	
	Cj-Zj	0	3.000	0	-3.500	

Οι τιμές της σειράς Cj-Zj προκύπτουν από την αφαίρεση των τιμών της σειράς Zj από τη σειρά Cj. Η αύξηση της X2 κατά 1 μονάδα (παραγωγή μιας καρέκλας) θα έχει σαν αποτέλεσμα καθαρή αύξηση των κερδών κατά 3.000 ευρώ. Τέλος, ο υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί στη λύση του τρέχοντος πίνακα Simplex(πίνακας 6) υπολογίζεται με την άθροιση των γινομένων της τελευταίας στήλης που δίνει τις τιμές των μεταβλητών με τους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών.

Κέρδος = 160*0 + 100*14.000 = 1.400.000

Μετά την ολοκλήρωση όλων των υπολογισμών ο **Δεύτερος Πίνακας Simplex** έχει ως εξής:

ΠΙΝΑΚΑΣ 7

Συντ. Κέρδους	Cj→	14.000	10.000	0	0	Ποσό-τητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
0	S1	0	4	1	-2	160
14.000	X1	1	1/2	0	1/4	100
	Zj	14.000	7.000	0	3.500	1.400.000
	Cj-Zj	0	3.000	0	-3.500	

Ο Τρίτος Πίνακας Simplex

Εφόσον η σειρά Cj-Zj του δεύτεροι πίνακα Simplex (πίνακας 7) περιλαμβάνει και θετικές τιμές η λύση που μας δίνει ο πίνακας αυτός δεν είναι η βέλτιστη λύση. Επομένως θα πρέπει να επαναλάβουμε τα πέντε βήματα του αλγόριθμου Simplex για να πάρουμε τον τρίτο κατά σειρά πίνακα.

Βήμα 1

Η μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στη βάση είναι η Χ2 γιατί είναι η μόνη με θετική τιμή 3.000 ευρώ στη σειρά Cj-Zj. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε καρέκλα που θα παράγουμε το κέρδος θα αυξηθεί κατά 3.000 ευρώ. Επομένως η στήλη της Χ2 είναι η οδηγός στήλη.

ΠΙΝΑΚΑΣ 8

Συντ .Κέρδους	Cj→	***14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
** 0	S1	0	*4	1	-2	160
14.000	X1	1	1/2	0	1/4	100
	Zj	14000	7000	0	3500	1.400.000
	Cj - Zj	0	3.500	0	-3.500	

* Το 4 είναι το οδηγό στοιχείο

** Ολόκληρη η σειρά οριζόντια είναι η οδηγός σειρά

*** Ολόκληρη η κάθετη σειρά καλείται οδηγός στήλη

<u>Βήμα 2</u>

Μετά την επιλογή της X2 για να συμπεριληφθεί στη βάση θα πρέπει να δούμε ποια από τις ήδη βασικές μεταβλητές S1 και X1 θα αντικατασταθεί. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης ώστε να προσδιορίσουμε τη μέγιστη ποσότητα καρεκλών που μπορεί να παραχθεί, έχουμε:

Για την S1: 160 ώρες ξυλουργείου / 4 ώρες ανά καρέκλα = 40 καρέκλες

Για την X1: 100 τραπέζια / ½ τραπέζια ανά καρέκλα = 200 καρέκλες

Αυτό σημαίνει ότι η S1 θα αντικατασταθεί από την X2.

<u>Βήμα 3</u>

Αφού ορίσαμε ότι η μεταβλητή X2 θα αντικαταστήσει την S1, θα πρέπει να υπολογίσουμε ξανά τις τιμές του τρίτου πίνακα (πίνακας 8). Θα αντικαταστήσουμε τη σειρά οδηγό. Το οδηγό στοιχείο είναι το 4. Διαιρούμε επομένως όλα τα στοιχεία της οδηγού σειράς με το 4. Άρα η νέα οδηγός σειρά είναι:

0/4=0   4/4=1   1/4=1/4   -2/4=-1/2   160/4=40

Επομένως ο νέος πίνακας Simplex θα έχει την εξής μορφή

ΠΙΝΑΚΑΣ 9

Συντ .Κέρδους	Cj→	***14. 000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές	X1	X2	S1	S2	Bi

	Μεταβλητές					
** 0	S1	0	*4	1	-2	160
14.000	X1	1	1/2	0	1/4	100
	Zj					
	Cj-Zj					

Η X2 αντικατέστησε την S1 στη βάση της. Η τιμή της X2 είναι 40 μονάδες, ενώ ο συντελεστής κέρδους της X2 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών.

Βήμα 4

Τώρα μένει να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τη σειρά που αντιστοιχεί στην X1 καθώς και τις νέες τιμές στις σειρές Zj και Cj-Zj. Για να υπολογίσουμε τη νέα σειρά X1 θα κάνουμε τις εξής πράξεις όπως και πριν:

(Προηγούμενες τιμές σειράς X1) – (στοιχείο οδηγού στήλης σειράς X1) * νέες τιμές οδηγού σειράς = Νέες τιμές σειράς X1

Το στοιχείο της οδηγού στήλης που αντιστοιχεί στη σειρά X1 είναι το 1/2. Επομένως οι νέες τιμές της οδηγού σειράς αφού πολλαπλασιασθούν με 1/2 θα αφαιρεθούν από τις τιμές της σειράς X1. Έτσι έχουμε λοιπόν:

ΠΙΝΑΚΑΣ 10

	X1	X2	S1	S2	Bi
Προηγ. Σειρά X1	1	1/2	0	1/4	100
Στοιχ. Οδ. Στηλ. * νέα	-(1/2)*0	-(1/2)*1	-(1/2)*(1/4)	-(1/2)*(1/2)	-(1/2)*40

οδ.σειρά					
Νέα σειρά X1	=1	=0	=-1/8	=1/2	=80

Επομένως ο νέος πίνακας Simplex μετά τον υπολογισμό και της σειράς X1 θα έχει την εξής μορφή:

ΠΙΝΑΚΑΣ 11

Συντ .Κέρδους	Cj→	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
10.000	X2	0	1	1/4	-1/2	40
14.000	X1	1	0	-1/8	1/2	80
	Zj					
	Cj-Zj					

Παρατηρούμε ότι ο νέος πίνακας Simplex έχει δύο μοναδιαίες στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές X2 (η στήλη 1,0) και X1 (η στήλη 0,1).

<u>Βήμα 5</u>

Μένει τώρα να υπολογίσουμε τις τιμές για τις σειρές Zj και Cj-Zj.

Για να βρούμε τις τιμές της σειράς Zj πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές μετατροπής για κάθε μεταβλητή με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών και προσθέτουμε τα γινόμενα ως εξής:

X1 X2 S1 S2

0*10.000	1*10.000	¼*10.000	-1/2*10.000
+ 1*14.000	+ 0*14.000	- 1/8*14.000	+ ½*14.000
= 14.000	= 10.000	= 750	= 2.000

Οι τιμές της σειράς Cj-Zj προκύπτουν από την αφαίρεση της σειράς Zj από τη σειρά Cj. Τέλος ο υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί στη λύση του τρέχοντος πίνακα Simplex υπολογίζεται με την άθροιση των γινόμενων της τελευταίας στήλης που δίνει τις τιμές των μεταβλητών με τους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών.

ΚΕΡΔΟΣ = 40*10.000 + 80*14.000 = 1.520.000

Η τελική μορφή του πίνακα Simplex είναι ως εξής:

Τελικός Πίνακας Simplex

ΠΙΝΑΚΑΣ 12

Συντ. Κερδ.	Cj	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	→	X1	X2	S1	S2	Bi
10.000	X2	0	1	1/4	-1/2	40
14.000	X1	1	0	-1/8	1/2	80
	Zj	14.000	10.000	750	2.000	1.520.000
	Cj-Zj	0	0	-750	-2.000	

Κριτήριο Βελτιστοποίησης

Ο παραπάνω πίνακας (πίνακας 12) είναι ο τελικός πίνακας Simplex για το παράδειγμα που αναλύουμε. Παρατηρούμε ότι η σειρά Cj-Zj δεν περιέχει θετικά στοιχεία, συνεπώς δεν είναι δυνατόν να υπάρξει περαιτέρω αύξηση του κέρδους.

Οι βασικές μεταβλητές είναι οι X1 και X2. Οι τιμές τους δίνονται στις αντίστοιχες θέσεις της τελευταίας στήλης. Οι τιμές των μη βασικών μεταβλητών είναι μηδέν.

Η βέλτιστη λύση είναι:

X1 = 80 τραπέζια   S1 = 0 ώρες διαθέσιμες στο ξυλουργείο

X2 = 40 καρέκλες   S2 = 0 ώρες διαθέσιμες στο βαφείο

Ο συνδυασμός αυτός της παραγωγής δίνει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος το οποίο ανέρχεται σε 1.520.000 ευρώ. Αν δούμε συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα από τους τρεις διαδοχικούς πίνακες Simplex παρατηρούμε τα εξής:

Αρχικός Πίνακας Simplex

Λύση X1 = 0 τραπέζια

X2 = 0 καρέκλες

S1 = 960 διαθέσιμες ώρες ξυλουργείου

S2 = 400 διαθέσιμες ώρες βαφείου

Κέρδος 0

Δεύτερος Πίνακας Simplex

Λύση X1 = 100 τραπέζια

X2 = 0 καρέκλες

S1 = 160 διαθέσιμες ώρες ξυλουργείου

S2 = 0 διαθέσιμες ώρες βαφείου

Κέρδος 1.400.000 ευρώ

Τρίτος Πίνακας Simplex

Λύση X1 = 80 τραπέζια

X2 = 40 καρέκλες

S1 = 0 διαθέσιμες ώρες ξυλουργείου

S2 = 0 διαθέσιμες ώρες βαφείο

Κέρδος 1.520.000 ευρώ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 ΠΩΣ ΝΑ ΟΡΙΣΕΤΕ ΚΑΙ ΝΑ ΕΠΙΛΥΣΕΤΕ ΕΝΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΜΕ ΤΟΝ SOLVER ΤΟΥ EXCEL

1. Μπαίνουμε στο πρόγραμμα του Excel και πηγαίνουμε στη γραμμή εργαλείων, κάνουμε κλικ στην επιλογή «εργαλεία» και ύστερα επιλέγουμε την «επίλυση» (Solver).

2. Εάν η επιλογή «επίλυση» (Solver) δεν είναι διαθέσιμη στην επιλογή «εργαλεία», πρέπει να το εγκαταστήσετε στα πρόσθετα add-in (add-in: Είναι ένα συμπληρωματικό πρόγραμμα που προσθέτει κάποιες επιπλέον δυνατότητες στο Microsoft Office.)

3. Στο **Set Target Cell** (Κελί Στόχος) θέση επιλογής (box), επέλεξε ένα cell reference (cell reference: Οι συντεταγμένες του κελιού στο λογιστικό φύλο (worksheet). Το target cell πρέπει να περιέχει μια σχέση μαθηματική (formula) μεταξύ άλλων κελιών στο λογιστικό φύλο.

4. Έχετε τις εξής επιλογές:

   Α) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του target cell (click **Max**)

   Β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του target cell (click **Min**)

   Γ) Να βρείτε την επιθυμητή τιμή του target cell (click **Value of**) και επιλέξτε την τυπώστε την επιθυμητή τιμή στο box.

5. Στο **By Changing Cells** box, τυπώστε τις θέσεις αναφοράς για κάθε μεταβλητό κελί (adjustable cell). Τα μεταβλητά κελιά πρέπει να σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με το κελί στόχο (target cell). Μπορείτε να ορίσετε (σε αυτό το version) έως 200 μεταβλητά κελιά.

6. Στο **Subject to the Constraints** box, επιλέξτε τους περιορισμούς (constraints). Μπορείτε να εφαρμόσετε περιορισμούς στα μεταβλητά κελιά, όπως και οποιαδήποτε κελιά με παραμέτρους του προβλήματος.

3.2 Με ποιο τρόπο προσθέτουμε επιπλέον περιορισμούς;

1. Στο **Solver Parameters** το κουτάκι διαλόγου, κάτω από το **Subject to the Constraints**, κάνουμε κλικ στο **Add**.

2. Στο **Cell Reference το** κουτάκι διαλόγου, βάλτε το cell reference ή το cell range για το οποίο θέλετε να περιορίσετε την τιμή του περιορισμού.

1. Κάντε click την σχέση (<=, =, >=, **Int**, or **Bin**) την οποία επιθυμείτε μεταξύ των κελιών αναφοράς και του περιορισμού. Εάν κάνετε click **Int**, "integer" (ακέραιος) εμφανίζετε στο **Constraint** κουτάκι διαλόγου. Εάν κάνετε click **Bin**, "binary" (δυαδικός) στο **Constraint** κουτάκι διαλόγου.

4. Στο **Constraint** κουτάκι διαλόγου, τυπώστε το cell reference, ή την formula (μαθηματική σχέση)

5. Κάνετε ένα από τα εξής:

- Για αν αποδεχθείτε τον περιορισμό και να συνεχίστε με τον επόμενο, κάντε click **Add**.
- Για αν αποδεχθείτε τον περιορισμό και να επιστρέψετε στο **Solver Parameters** dialog box, κάντε click **OK**.

Σημειώσεις:

- Μπορείτε να εφαρμόσετε **Int** και **Bin** σχέσεις μόνο σε περιορισμούς με μεταβλητά κελιά.

- Όταν υποθέτετε Γραμμικό Μοντέλο (**Linear Model)** επιλέξτε το κουτάκι επιλογής στο **Solver Options** κουτάκι διαλόγου dialog box is selected, δεν υπάρχει όριο στον αριθμό των περιορισμών. Για μη γραμμικά μοντέλα, κάθε μεταβλητο κελί μπορεί να έχει έως 100 περιορισμών, επιπλέον των ορίων στις ακέραιες τιμές των μεταβλητών.

3.3 Με ποιο τρόπο αλλάζουμε ή διαγράφουμε ένα περιορισμό;

1. Στο **Solver Parameters** κουτάκι επιλογής, κάτω από το **Subject to the Constraints**, κάντε click τον περιορισμό (constraint) το οποίο θέλετε να σβήσετε η να το αλλάξετε.

2. Κάνετε click **Change** και μετά κάντε τις αλλαγές, ή κάνετε click **Delete**.

3. Κάνετε click **Solve** και μετά ένα από τα εξής:

- Για να κρατήσετε τις τιμές των λύσεων που βρήκατε επιλέξτε **Keep Solver Solution** στο **Solver Results** κουτάκι επιλογής.
- Για να επιστρέψετε στα αρχικά δεδομένα, επιλέξτε **Restore Original Values**.

Βοηθητικές Σημειώσεις

Μπορείς να διακόψεις την διαδικασία επίλυσης πατώντας ESC. Το Microsoft Excel ξανα-υπολογίζει το worksheet με τις τελευταίες τιμές που βρέθηκαν στα μεταβλητά κελιά.

3.4 Σχετικά με το παράθυρο διαλόγου «Παράμετροι επίλυσης»

- Ορισμός κελιού προορισμού.

Καθορίζει το κελί προορισμού το οποίο θέλουμε να έχει μια συγκεκριμένη τιμή, να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί. Το κελί αυτό πρέπει να περιέχει έναν τύπο.

- Ίσο προς.

Καθορίζει αν θέλουμε το κελί προορισμού να μεγιστοποιηθεί, να ελαχιστοποιηθεί ή να εξισωθεί προς μία συγκεκριμένη τιμή. Εάν θέλουμε να εξισωθεί προς μία συγκεκριμένη τιμή τότε πληκτρολογούμε την τιμή αυτή στο πλαίσιο.

- Με αλλαγή των κελιών.

Καθορίζει τα κελιά τα οποία μπορούν να μεταβάλλονται όσο ικανοποιούνται οι περιορισμοί του προβλήματος, μέχρι το κελί που ορίζεται στο πλαίσιο Κελί προορισμού να καταλήξει στο στόχο του. Τα ρυθμιζόμενα κελιά πρέπει να σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα προς το κελί προορισμού.

- Υπόθεση.

Προβλέπει όλα τα κελιά τα οποία δεν περιέχουν τύπους και στα οποία αναφέρεται ο τύπος στο κελί που ορίζεται στο πλαίσιο Κελί προορισμού και τοποθετεί τις αναφορές του στο πλαίσιο Με αλλαγή των κελιών.

- Υπόκειται στους περιορισμούς.

Εμφανίζει τους τρέχοντες περιορισμούς του προβλήματος.

- Προσθήκη.

Εμφανίζει το παράθυρο διαλόγου Προσθήκη περιορισμών.

- Αλλαγή.

Εμφανίζει το παράθυρο διαλόγου Αλλαγή περιορισμού.

- Διαγραφή.

Καταργεί τον επιλεγμένο περιορισμό.

- Επίλυση.

Εκκινεί τη διαδικασία επίλυσης για το καθορισμένο πρόβλημα.

- Κλείσιμο.

Κλείνει το παράθυρο διαλόγου χωρίς να επιλύσει το πρόβλημα. Διατηρεί τις αλλαγές που κάναμε χρησιμοποιώντας τα κουμπιά Επιλογές, Προσθήκη, Αλλαγή ή Διαγραφή.

- Επιλογές.

Εμφανίζει το παράθυρο διαλόγου Επιλογές επίλυσης όπου μπορούμε να φορτώσουμε και να αποθηκεύσουμε μοντέλα προβλημάτων καθώς και να ελέγξουμε τις προχωρημένες δυνατότητες της διαδικασίας επίλυσης.

- Επαναφορά όλων.

Καταργεί τις τρέχουσες ρυθμίσεις του προβλήματος και επαναφέρει όλες τις ρυθμίσεις στις αρχικές τους τιμές.

3.5 Σχετικά με το παράθυρο διαλόγου «Επίλυσης»

Μπορούμε να ελέγξουμε τις προχωρημένες δυνατότητες της διαδικασίας επίλυσης, να φορτώσουμε ή να αποθηκεύσουμε ορισμούς προβλημάτων και να ορίσουμε παραμέτρους τόσο για γραμμικά όσο και για μη γραμμικά προβλήματα. Κάθε επιλογή έχει μια προεπιλεγμένη ρύθμιση που είναι κατάλληλη για τα περισσότερα προβλήματα.

- Μέγιστος χρόνος.

Περιορίζει το χρόνο που χρειάζεται η διαδικασία επίλυσης. Μπορούμε να πληκτρολογήσουμε μια τιμή μέχρι το 32.767 αλλά η προεπιλεγμένη τιμή των 1000 είναι αρκετή για τα περισσότερα μικρά προβλήματα.

- Επαναλήψεις.

Περιορίζει το χρόνο που χρειάζεται η διαδικασία επίλυσης, με το περιορισμό του αριθμού των επαναληπτικών υπολογισμών. Μπορούμε να πληκτρολογήσουμε μια τιμή μέχρι το 32.767 αλλά η προεπιλεγμένη τιμή των 1000 είναι αρκετή για τα περισσότερα μικρά προβλήματα.

- Ακρίβεια.

Ελέγχει την ακρίβεια των λύσεων χρησιμοποιώντας τον αριθμό που πληκτρολογείτε για να καθορίσει αν η τιμή ενός κελιού περιορισμού ικανοποιεί τον στόχο ή βρίσκεται κάτω από ένα ανώτερο ή πάνω από ένα κατώτερο όριο. Η ακρίβεια πρέπει να επισημαίνεται με έναν κλασματικό αριθμό μεταξύ 0 και 1. Μεγαλύτερη ακρίβεια αντιστοιχεί σε αριθμό με περισσότερα δεκαδικά ψηφία – για παράδειγμα ο αριθμός 0,000 υποδηλώνει μεγαλύτερη ακρίβεια από τον αριθμό 0,0.

- Ανοχή.

Το ποσοστό κατά το οποίο το κελί περιορισμού μιας λύσης ικανοποιεί τους ακέραιους περιορισμούς μπορεί να διαφέρει από την πραγματική βέλτιστη τιμή και ο στόχος να εξακολουθεί να θεωρείται αποδεκτός. Η επιλογή αυτή ισχύει μόνο σε προβλήματα με ακέραιους περιορισμούς. Μεγαλύτερη ανοχή τείνει να επιταχύνει τη διαδικασία επίλυσης.

- Σύγκλιση.

Όταν η σχετική μεταβολή της τιμής του κελιού προορισμού είναι μικρότερη από τον αριθμό του πλαισίου Σύγκλιση, κατά τις τελευταίες πέντε επαναλήψεις, η Επίλυση σταματά. Η σύγκλιση ισχύει μόνο σε μη γραμμικά προβλήματα και πρέπει να επισημαίνεται με έναν κλασματικό αριθμό μεταξύ 0 και 1. Μικρότερη σύγκλιση αντιστοιχεί σε αριθμό με περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Για παράδειγμα ο αριθμός 0,000 υποδηλώνει μικρότερη σχετική μεταβολή από τον αριθμό 0,0. Όσο μικρότερη είναι η τιμή σύγκλισης τόσο περισσότερο χρόνο χρειάζεται η Επίλυση για να καταλήξει σε λύση.

- Υπόθεση γραμμικού μοντέλου.

Επιλέξτε αυτό το πλαίσιο ελέγχου για να επιταχύνετε τη διαδικασία επίλυσης, όταν όλες οι σχέσεις του μοντέλου είναι γραμμικές και θέλετε να επιλύσετε ένα πρόβλημα γραμμικής βελτιστοποίησης.

- Εμφάνιση αποτελεσμάτων επανάληψης.

Επιλέγουμε αυτό το πλαίσιο ελέγχου ώστε η Επίλυση να σταματά για να εμφανίσει τα αποτελέσματα κάθε επανάληψης.

- Χρήση αυτόματης κλίμακας.

Επιλέγουμε αυτό το πλαίσιο ελέγχου για να χρησιμοποιήσουμε αυτόματη κλίμακα σε περιπτώσεις όπου τα δεδομένα εισόδου και εξόδου έχουν μεγάλες διαφορές μεγέθους. Για παράδειγμα όταν μεγιστοποιείτε το ποσοστό κέρδους με βάση επενδύσεις εκατομμυρίων.

- Υπόθεση μη αρνητικού.

Αναγκάζει την Επίλυση να υποθέσει ως κατώτερο όριο το 0 για όλα τα ρυθμιζόμενα κελιά για τα οποία δεν έχετε καθορίσει κατώτερο όριο στο πλαίσιο Περιορισμός του παραθύρου διαλόγου Περιορισμοί.

- Μέθοδος υπολογισμού.

Καθορίζει τη μέθοδο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό βασικών μεταβλητών σε κάθε μονοδιάστατη αναζήτηση.

Tangent: Χρησιμοποιεί γραμμική παρεμβολή εφαπτομενικού διανύσματος.

Quadratic: Χρησιμοποιεί τετραγωνική παρεμβολή η οποία μπορεί να βελτιώσει τα αποτελέσματα σε εξαιρετικά μη γραμμικά προβλήματα.

Παράγωγοι: Καθορίζει τη μέθοδο διαφορικού λογισμού που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων περιορισμού και στόχου.

Forward: Χρησιμοποιείται για τα περισσότερα προβλήματα στα οποία οι τιμές των συναρτήσεων περιορισμού μεταβάλλονται σχετικά αργά.

Central: Χρησιμοποιείται σε προβλήματα στα οποία οι συναρτήσεις περιορισμού μεταβάλλονται γρήγορα, ειδικά κοντά στα όρια. Παρ' ότι η επιλογή αυτή απαιτεί περισσότερους υπολογισμούς μπορεί να είναι χρήσιμη σε περιπτώσεις που η Επίλυση επιστρέφει το μήνυμα ότι δεν μπόρεσε να βελτιώσει τη λύση.

- Αναζήτηση.

Καθορίζει τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείται σε κάθε επανάληψη για τον προσδιορισμό της κατεύθυνσης αναζήτησης.

Newton: Χρησιμοποιεί μια παραλλαγή της μεθόδου Newton η οποία γενικά απαιτεί περισσότερη μνήμη αλλά λιγότερες επαναλήψεις σε σχέση με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων.

Conjugate: Απαιτεί λιγότερη μνήμη από τη μέθοδο Newton αλλά γενικά χρειάζεται περισσότερες επαναλήψεις για να καταλήξει σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο ακρίβειας. Χρησιμοποιούμε αυτή την επιλογή όταν το πρόβλημα είναι μεγάλο και δεν υπάρχει αρκετή διαθέσιμη μνήμη ή όταν ο βηματισμός της επαναληπτικής διαδικασίας αποκαλύπτει ότι η πρόοδος είναι αργή.

- Φόρτωση μοντέλου.

Εμφανίζει το παράθυρο διαλόγου Φόρτωση μοντέλου όπου μπορούμε να καθορίσουμε την αναφορά για το μοντέλο που θέλουμε να φορτώσουμε.

- Αποθήκευση μοντέλου.

Εμφανίζει το παράθυρο διαλόγου Αποθήκευση μοντέλου όπου μπορούμε να καθορίσουμε που θα αποθηκεύσουμε το μοντέλο. Κάνουμε κλικ σε αυτό το κουμπί μόνο όταν θέλουμε να αποθηκεύσουμε περισσότερα από ένα μοντέλα σε ένα φύλλο εργασίας. Το πρώτο μοντέλο αποθηκεύεται αυτόματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Μία επιχείρηση ζαχαροπλαστικής παράγει 2 διαφορετικά είδη από μπισκότα. Για τη δημιουργία του πρώτου είδους μπισκότου χρειάζεται 4 κιλά ζάχαρη, 4 κιλά αλεύρι και 2 κιλά γάλα ενώ για το δεύτερο είδος μπισκότου χρειάζεται 3 κιλά ζάχαρη, 1 κιλό αλεύρι και 4 κιλά γάλα. Το κέρδος ανά πακέτο της επιχείρησης είναι για το πρώτο είδος μπισκότου 48 ευρώ ενώ για το δεύτερο είδος είναι 60 ευρώ. Η επιχείρηση μπορεί να διαθέσει 120 κιλά ζάχαρη, 80 κιλά αλεύρι και 120 κιλά γάλα.

ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Έχουμε ότι $X1$= ο αριθμός των πακέτων που παράγει η επιχείρηση από το πρώτο είδος μπισκότων και

$X2$= ο αριθμός των πακέτων που παράγει η επιχείρηση από το δεύτερο είδος μπισκότων

Μεγιστοποίηση συνολικού κέρδους: $48X1 + 60X2$

Με περιορισμούς: $4X1 + 3X2 \leq 120$ περιορισμός στη ζάχαρη

$4X1 + X2 \leq 80$ περιορισμός στο αλεύρι

$2X1 + 4X2 \leq 120$ περιορισμός στο γάλα

$X1, X2 \geq 0$

<u>Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες</u>

Το πρώτο βήμα της μεθόδου Simplex επιβάλει τη μετατροπή όλων των περιορισμών που διατυπώνονται με ανισότητες σε ισότητες. Η μετατροπή αυτή επιτυγχάνεται με τη χρήση μεταβλητών περιθωρίου. Οι μεταβλητές περιθωρίου αντιπροσωπεύουν αχρησιμοποίητους πόρους στη διαδικασία μεγιστοποίησης του κέρδους. Στην περίπτωση του παραδείγματος που εξετάζουμε ορίζουμε δύο μεταβλητές περιθωρίου, μία για κάθε περιορισμό, ως εξής :

S1 = Ζάχαρη σε κιλά που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή μπισκότων πρώτου και δεύτερου είδους

S2 = Αλεύρι σε κιλά που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή μπισκότων πρώτου και δεύτερου είδους.

S3 = Γάλα σε κιλά που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή μπισκότων πρώτου και δεύτερου είδους

Οι περιορισμοί του προβλήματος με την προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου γράφονται ως εξής:

$4X1 + 3X2 + S1 = 120$ kg περιορισμός στη ζάχαρη

$4X1 + X2 + S2 = 80$ kg περιορισμός στο αλεύρι

$2X1 + 4X2 + S3 = 120$ kg περιορισμός στο γάλα

ή αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε όλες τις μεταβλητές σε όλους τους περιορισμούς έχουμε :

$4X1 + 3X2 + 1S1 + 0S2 + 0S3 = 120$ kg Περιορισμός στη ζάχαρη

4X1 + X2 + 0S1 + 1S2 + 0S3 = 80kg   Περιορισμός στο αλεύρι

2X1 + 4X2 + 0S1 + 0S2 + 1S3 = 120kg   Περιορισμός στο γάλα

Επομένως, η αντικειμενική συνάρτηση μετά την προσθήκη και των μεταβλητών περιθωρίου γράφεται ως εξής :

Μεγιστοποίηση   48X1 + 60X2 + 0S1 + 0S2 + 1S3

<u>Ο αρχικός πίνακας Simplex</u>

Μια εύκολη λύση είναι να θέσουμε τις μεταβλητές X1 και X2 ίσες με 0 έτσι η λύση που προκύπτει σε αυτή τη περίπτωση είναι S1=120 , S2= 80 και S3= 120. Αυτή η λύση δεν είναι και τόσο ελκυστική γιατί αντιπροσωπεύει την παραγωγή 0 πακέτων από τα μπισκότα πρώτου και δεύτερου είδους και με μηδενική παραγωγή κανένα από τα διαθέσιμα κιλά παραγωγής δεν χρησιμοποιούνται.

Αν τοποθετήσουμε τους συντελεστές των μεταβλητών των 3 περιορισμών και της αντικειμενικής συνάρτησης σε ένα πίνακα θα έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

Συντ .Κέρδους	Cj→	48	60	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	S3	Bi
0	S1	4	3	1	0	0	120
0	S2	4	1	0	1	0	80
0	S3	2	4	0	0	1	120
	Zj	0	0	0	0	0	0

	Cj - Zj	48	60	0	0	0	

Ο παραπάνω πίνακας λέγεται πίνακας Simplex. Κάθε πίνακας Simplex αντιστοιχεί σε μια εφικτή λύση του προβλήματος. Ο αρχικός πίνακας Simplex αντιστοιχεί στη λύση S1=120, S2=80 και S3=120 και επομένως X1=0 και X2=0.

Ο Δεύτερος Πίνακας Simplex

Το κέρδος μας μετά τη λύση του αρχικού πίνακα Simplex είναι 0. Στόχος είναι λοιπόν να βρούμε μία νέα λύση η οποία θα μας δώσει μεγαλύτερο κέρδος. Αυτή τη λύση θα τη βρούμε με τη βοήθεια πέντε βημάτων.

Βήμα 1: Πρέπει να επιλέξουμε ποια από τις μεταβλητές X1 και X2 θα είναι αυτή που θα συμπεριληφθεί στη βάση. Επιλέγουμε τη μεταβλητή με τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά Cj – Zj. Η μεταβλητή X2 έχει τη μεγαλύτερη τιμή με 60 ενώ η X1 έχει 48. Άρα επιλέγουμε τη X2 γιατί με κάθε μονάδα X2 που θα παράγουμε θα έχουμε κέρδος 60 ευρώ ενώ αντίθετα με κάθε μονάδα X1 που θα παράγουμε θα έχουμε κέρδος 48 ευρώ. Επομένως η στήλη X2 ονομάζεται οδηγός στήλη.

Βήμα 2: Μετά την επιλογή της X2 για να συμπεριληφθεί στη νέα βάση, θα πρέπει να δούμε ποια από τις ήδη μεταβλητές S1 , S2 και S3 θα αντικατασταθεί από την X2. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης έχουμε:

Για την S1: 120 κιλά ζάχαρη / 3 κιλά ζάχαρη ανά πακέτο μπισκότου B = 40 πακέτα από το είδος δεύτερου μπισκότου.

Για την S2: 80 κιλά αλεύρι / 1 κιλό αλεύρι ανά πακέτο μπισκότου B = 80 πακέτα από το είδος του δεύτερου μπισκότου

Για την S3: 120 κιλά γάλα / 4 κιλά γάλα ανά πακέτο μπισκότου B = 30 πακέτα από το είδος του δεύτερου μπισκότου

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή S3 που αντιστοιχεί στο μικρότερο κλάσμα θα αντικατασταθεί από την X2. Επομένως η σειρά S3 ονομάζεται οδηγός σειρά.

Συντ . Κέρδους	Cj→	48	*60	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	S3	Bi
0	S1	4	3	1	0	0	120
0	S2	4	1	0	1	0	80
**0	S3	2	***4	0	0	1	120
	Zj	0	0	0	0	0	0
	Cj - Zj	48	60	0	0	0	

* Η κάθετη στήλη ονομάζεται οδηγός στήλη

** Η οριζόντια σειρά ονομάζεται οδηγός σειρά

*** Το 4 ονομάζεται οδηγό στοιχείο

<u>Βήμα 3:</u> Αφού αποφασίσαμε πλέον ότι η μεταβλητή X2 θα αντικαταστήσει την τιμή S3 θα πρέπει να υπολογίσουμε ξανά τις τιμές για το δεύτερο πίνακα Simplex. Θα αντικαταστήσουμε τον οδηγό σειρά διαιρώντας όλα τα στοιχεία της με το 4 που είναι το οδηγό στοιχείο. Άρα η νέα οδηγός σειρά θα γίνει:

2/4=0,5 4/4=1 0/4=0 0/4= 0 1/4= 0,25 120/4= 30

Συντ. Κέρδους	Cj→	48	60	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	S3	Bi
0	S1						
0	S2						
60	X2	0,5	1	0	0	0,25	30
	Zj						
	Cj-Zj						

Όπως βλέπουμε η X2 αντικατέστησε την S3 στη βάση. Η τιμή X2 είναι 30 πακέτα ενώ ο συντελεστής κέρδους της X2 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών.

<u>Βήμα 4:</u> Στο τέταρτο βήμα θα πρέπει να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τη σειρά της μεταβλητής S1 και S2. Για να υπολογίσουμε τη νέα σειρά S1 θα κάνουμε τις εξής πράξεις:

Νέα σειρά = Προηγούμενη Σειρά – Στοιχείο οδηγού στήλης * Νέα οδηγό σειρά

Το στοιχείο της οδηγού στήλης που αντιστοιχεί στη σειρά S1 είναι το 3. Επομένως οι

	X1	X2	S1	S2	S3	Bi
Προηγ. Τιμές S1	4	3	1	0	0	120
Οδ. Στοιχ * νέα οδ.σειρά	-3*0,5	-3*1	-3*0	-3*0	-3*0,25	-3*30
Νέες τιμές S1	=2,5	=0	=1	=0	=-0,75	=30

νέες τιμές της οδηγού σειράς θα πολλαπλασιασθούν με 3 και θα αφαιρεθούν από τις νέες τιμές της σειράς S1 και έτσι θα έχουμε:

Για να υπολογίσουμε τη νέα σειρά S2 θα κάνουμε τις εξής πράξεις:

Νέα σειρά = Προηγούμενη Σειρά – Στοιχείο οδηγού στήλης * Νέα οδηγό σειρά

Το στοιχείο της οδηγού στήλης που αντιστοιχεί στη σειρά S2 είναι το 1. Επομένως οι νέες τιμές της οδηγού σειράς θα πολλαπλασιασθούν με 1 και θα αφαιρεθούν από τις νέες τιμές της σειράς S2 και έτσι θα έχουμε:

	X1	X2	S1	S2	S3	Bi
Προηγ. Τιμές S2	4	1	0	1	0	80
Οδ.Στοιχ* νέα οδ.σειρά	-1*0,5	-1*1	-1*0	-1*0	-1*0,25	-1*30
Νέες τιμές S2	=3,5	=0	=0	=1	=-0,25	=50

Επομένως ο νέος πίνακας Simplex μετά τον υπολογισμό της σειράς S1 και S2 θα έχει την εξής μορφή:

Συντ. Κέρδους	Cj→	48	60	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	S3	Bi
0	S1	2,5	0	1	0	-0,75	30
0	S2	3,5	0	0	1	-0,25	50
60	X2	0,5	1	0	0	0,25	30
	Zj						0
	Cj-Zj						

Βήμα 5: Τώρα μένει να υπολογίσουμε τις τιμές Zj και Cj-Zj . Η νέα λύση που προέκυψε είναι : X1 = 0 Πακέτα μπισκότου $1^{ου}$ είδους

X2 = 30 Πακέτα μπισκότου $2^{ου}$ είδους

S1 = 30 Κιλά Ζάχαρη

S2 = 50 Κιλά Αλεύρι

S3 = 0 Κιλά Γάλα

Από την πλευρά των τιμών, η παραγωγή ανά πακέτο μπισκότου πρώτου είδους θα έχει θετική συνεισφορά 48 ευρώ στα κέρδη. Όμως θα έχει και αρνητικό αποτέλεσμα γιατί η αύξηση παραγωγής πακέτων μπισκότου πρώτου είδους θα γίνει σε βάρος της παραγωγής πακέτων μπισκότου δεύτερου είδους. Εφόσον θα πρέπει να μειώσουμε την παραγωγή πακέτων μπισκότου δεύτερου είδους κατά ½ θα έχουμε απώλεια κερδών 30 Ευρώ αφού το κέρδος από την παραγωγή πακέτων μπισκότου δεύτερου είδους είναι 60 Ευρώ. Η τιμή της Zj που αντιστοιχεί στη στήλη X1 είναι 30 Ευρώ.

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της σειράς Zj πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές ανταλλαγής στη στήλη κάθε μιας μεταβλητής με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών και προσθέτουμε τα γινόμενα ως εξής:

Συντ. Κέρδους	Cj→	48	60	0	0	0	Ποσό-τητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	S3	Bi
0	S1	2,5	0	1	0	-0,75	30
0	S2	3,5	0	0	1	-0,25	50
60	X2	0,5	1	0	0	0,25	30
	Zj	0*2,5 +60*0,5	0*0 +60*1	0*1 +60*0	0*0 +60*0	0*(-0,25) +60*0,25	0*30 +60*30
		=30	=60	=0	=0	=15	=1800
	Cj-Zj	18	0	0	0	-15	

<u>Ο Τρίτος Πίνακας Simplex</u>

Εφόσον η σειρά Cj-Zj του δεύτεροι πίνακα Simplex περιλαμβάνει και θετικές τιμές η λύση που μας δίνει ο πίνακας αυτός δεν είναι η βέλτιστη λύση. Επομένως θα πρέπει να επαναλάβουμε τα πέντε βήματα του αλγόριθμου Simplex για να πάρουμε τον τρίτο κατά σειρά πίνακα.

<u>Βήμα 1</u>

Η μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στη βάση είναι η X1 γιατί είναι η μόνη με θετική τιμή 18 ευρώ στη σειρά Cj-Zj. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε πακέτο μπισκότου πρώτου είδους θα έχουμε κέρδος 18 ευρώ. Επομένως η στήλη της X1 είναι η οδηγός στήλη.

<u>Βήμα 2:</u> Μετά την επιλογή της X1 για να συμπεριληφθεί στη νέα βάση, θα πρέπει να δούμε ποια από τις ήδη μεταβλητές S1,S2 και X2 θα αντικατασταθεί από την X1. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης έχουμε:

Για την S1: 30 κιλά Ζάχαρη / 2,5 κιλά Ζάχαρη ανά πακέτο μπισκότου Α = 12 πακέτα από το είδος του πρώτου μπισκότου

Για την S2: 50 κιλά αλεύρι / 3,5 κιλά αλεύρι ανά πακέτο μπισκότου Α = 14 πακέτα από το είδος του πρώτου μπισκότου

Για την X2: 30 κιλά γάλα / 0,5 κιλά γάλα ανά πακέτο μπισκότου A = 60 πακέτα από το είδος του πρώτου μπισκότου

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή S1 που αντιστοιχεί στο μικρότερο κλάσμα θα αντικατασταθεί από την X1. Επομένως η σειρά S1 ονομάζεται οδηγός σειρά.

Συντ .Κέρδους	Cj→	*48	60	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	S3	Bi
**0	S1	***2,5	0	1	0	-0,75	30
0	S2	3,5	0	0	1	-0,25	50
60	X2	0,5	1	0	0	0,25	30
	Zj	30	60	0	0	15	1800
	Cj - Zj	18	0	0	0	-0,15	

* Η κάθετη στήλη ονομάζεται οδηγός στήλη

** Η οριζόντια σειρά ονομάζεται οδηγός σειρά

*** Το 2,5 ονομάζεται οδηγό στοιχείο

<u>Βήμα 3:</u> Αφού αποφασίσαμε πλέον ότι η μεταβλητή X1 θα αντικαταστήσει την τιμή S1 θα πρέπει να υπολογίσουμε ξανά τις τιμές για το τρίτου πίνακα Simplex. Θα αντικαταστήσουμε τον οδηγό σειρά διαιρώντας όλα τα στοιχεία της με το 2,5 που είναι το οδηγό στοιχείο. Άρα η νέα οδηγός σειρά θα γίνει:

2,5/2,5=1 0/2,5=0 1/2,5=0,4 0/2,5= 0 -0,75/2,5=-0,3 30/2,5 =12

Συντ. Κέρδους	Cj→	48	60	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	S3	Bi
48	X1	1	0	0,4	0	-0,3	12
	S2						
	X2						
	Zj						
	Cj-Zj						

Όπως βλέπουμε η X1 αντικατέστησε την S1 στη βάση. Η τιμή X1 είναι 12 πακέτα ενώ ο συντελεστής κέρδους της X1 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών.

<u>Βήμα 4:</u> Στο τέταρτο βήμα θα πρέπει να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τη σειρά της μεταβλητής S2 και X2. Για να υπολογίσουμε τη νέα σειρά X2 θα κάνουμε τις εξής πράξεις:

Νέα σειρά = Προηγούμενη Σειρά – Στοιχείο οδηγού στήλης * Νέα οδηγό σειρά

	X1	X2	S1	S2	S3	Bi
Προηγ. Τιμές X2	0,5	1	0	0	-0,75	30
Οδ. Στοιχ * νέα οδ.σειρά	-0,5*1	-0,5*0	-0,5*0,4	-0,5*0	-0,5*(-0,3)	-0,5*12
Νέες τιμές X2	=0	=1	=-0,2	=0	=-0,6	=24

Το στοιχείο της οδηγού στήλης που αντιστοιχεί στη σειρά X2 είναι το 0,5. Επομένως οι νέες τιμές της οδηγού σειράς θα πολλαπλασιασθούν με 0,5 και θα αφαιρεθούν από τις νέες τιμές της σειράς X2 και έτσι θα έχουμε:

Για να υπολογίσουμε τη νέα σειρά S2 θα κάνουμε τις εξής πράξεις:

Νέα σειρά = Προηγούμενη Σειρά – Στοιχείο οδηγού στήλης * Νέα οδηγό σειρά

Το στοιχείο της οδηγού στήλης που αντιστοιχεί στη σειρά S2 είναι το 3,5. Επομένως οι νέες τιμές της οδηγού σειράς θα πολλαπλασιασθούν με 3,5 και θα αφαιρεθούν από τις νέες τιμές της σειράς S2 και έτσι θα έχουμε:

	X1	X2	S1	S2	S3	Bi
Προηγ. Τιμές S2	3,5	0	0	1	-0,75	50
Οδ.Στοιχ* νέα οδ.σειρά	-3,5*1	-3,5*0	-3,5*0,4	-3,5*0	-3,5*(-0,3)	-3,5*12

Νέες τιμές S2	=0	=0	=-1,4	=1	=0,3	=8

Επομένως ο νέος πίνακας Simplex μετά τον υπολογισμό της σειράς X2 και S2 θα έχει την εξής μορφή:

Συντ. Κέρδους	Cj→	48	60	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	S3	Bi
48	X1	1	0	0,4	0	-0,3	12
0	S2	0	0	-1,4	1	0,3	8
60	X2	0	1	-0,2	0	-0,6	24
	Zj						
	Cj-Zj						

Βήμα 5: Τώρα μένει να υπολογίσουμε τις τιμές Zj και Cj-Zj . Η νέα λύση που προέκυψε είναι : X1 = 12 Πακέτα μπισκότου 1^{ου} είδους

X2 = 24 Πακέτα μπισκότου 2^{ου} είδους

S1 = 0 Κιλά Ζάχαρη

S2 = 8 Κιλά Αλεύρι

S3 = 0 Κιλά Γάλα

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της σειράς Zj πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές ανταλλαγής στη στήλη κάθε μιας μεταβλητής με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών και προσθέτουμε τα γινόμενα ως εξής:

Συντ. Κέρδους	Cj→	48	60	0	0	0	Ποσό-τητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	S3	Bi
48	X1	1	0	0,4	0	-0,3	12
0	S2	0	0	-1,4	1	0,3	8
60	X2	0	1	-0,2	0	-0,6	24
	Zj	48*1 +60*0	48*0 +60*1	48*0,4 +60*(-0,2)	48*0 +60*0	48*(-0,3) +60*(-0,6)	48*12 +60*24
		=48	=60	=7,2	=0	=-50,4	=2016
	Cj-Zj	0	0	-7,2	0	50,4	

Αν δούμε συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα από τους τρεις διαδοχικούς πίνακες Simplex παρατηρούμε τα εξής:

Αρχικός Πίνακας Simplex

Λύση X1 = 0 πακέτα μπισκότου πρώτου είδους

X2 = 0 πακέτα μπισκότου δεύτερου είδους

S1 = 120 διαθέσιμα κιλά ζάχαρη

S2 = 80 διαθέσιμα κιλά αλεύρι

S3 = 120 διαθέσιμα κιλά γάλα

Κέρδος 0

Δεύτερος Πίνακας Simplex

Λύση X1 = 0 πακέτα μπισκότου πρώτου είδους

X2 = 30 πακέτα μπισκότου δεύτερου είδους

S1 = 30 διαθέσιμα κιλά ζάχαρη

S2 =50 διαθέσιμα κιλά αλεύρι

S3 = 0 διαθέσιμα κιλά γάλα

Κέρδος 1.800 ευρώ

Τρίτος Πίνακας Simplex

Λύση X1 = 12 πακέτα μπισκότου πρώτου είδους

X2 = 24 πακέτα μπισκότου δεύτερου είδους

S1 = 0 διαθέσιμα κιλά ζάχαρη

S2 = 8 διαθέσιμα κιλά αλεύρι

S3 = 0 διαθέσιμα κιλά γάλα

Κέρδος 2.016 ευρώ

4.2 <u>Επίλυση του προβλήματος με τη βοήθεια του Excel</u>

Μπορούμε πολύ εύκολα και γρήγορα με την βοήθεια του Microsoft Excel να βρούμε μια βέλτιστη λύση στο πρόβλημα μας ακολουθώντας τα εξής βήματα:

1. Ανοίγουμε το Microsoft Excel και στο κελί A1 πληκτρολογούμε μηδέν. Το κελί A1 συμβολίζει το X1 στο πρόβλημά μας που είναι ο αριθμός των πακέτων που θα παραχθούν από το πρώτο είδος μπισκότων.
2. Στη συνέχεια στο κελί A2 πληκτρολογούμε μηδέν. Το κελί A2 συμβολίζει το X2 στο πρόβλημά μας που είναι ο αριθμός των πακέτων που θα παραχθούν από το δεύτερο είδος μπισκότων.
3. Στο κελί B1 πληκτρολογούμε την αντικειμενική συνάρτηση που είναι: =(48*A1+60*A2) και πατάμε το ENTER
4. Στο κελί B2 πληκτρολογούμε τον πρώτο περιορισμό του προβλήματος που είναι: =(4*A1+3*A2) και πατάμε το ENTER
5. Στο κελί B3 πληκτρολογούμε τον δεύτερο περιορισμό του προβλήματος που είναι : =(4*A1+A2) και πατάμε το ENTER
6. Στο κελί B4 πληκτρολογούμε τον τρίτο περιορισμό του προβλήματος που είναι : =(2*A1+4*A2) και πατάμε το ENTER
7. Πηγαίνουμε στη γραμμή εργαλείων, κάνουμε κλικ στην επιλογή <<εργαλεία>> και ύστερα επιλέγουμε την <<επίλυση>> (Solver)
8. Στην επιλογή Set Target Cell (κελί προορισμού) επιλέγουμε το κελί που έχουμε πληκτρολογήσει την αντικειμενική συνάρτηση.
9. Έπειτα επιλέγουμε αν η αντικειμενική συνάρτηση είναι μέγιστη ή ελάχιστη. Στο πρόβλημά μας είναι μέγιστη οπότε κάνουμε κλικ στην επιλογή Max.
10. Στη συνέχεια πατάμε το πλήκτρο <<Guess>>(υπόθεση) και μας βγάζει αυτόματα τα κελιά A1 και A2..

11. Ύστερα προσθέτουμε τους περιορισμούς του προβλήματος ως εξής : Κάνουμε κλικ στο πλήκτρο <<Add>> μας βγαίνει ένας πίνακας που ονομάζεται Add Constaint(προσθήκη περιορισμού) επιλέγουμε το κελί B2 και γράφουμε ότι είναι ≤ 120 που είναι ο περιορισμός στη ζάχαρη και πατάμε Add. Στη συνέχεια επιλέγουμε το κελί B3 και γράφουμε ότι είναι ≤ 80 που είναι ο περιορισμός στο αλεύρι και πατάμε Add. Τέλος επιλέγουμε το κελί B4 και γράφουμε ότι είναι ≤ 120 που είναι ο περιορισμός στο γάλα και πατάμε <<ok>> .
12. Πηγαίνουμε στο κουμπί <<Options>> (επιλογές) και το επιλέγουμε. Μας βγαίνει ένας πίνακας που λέγεται <<Solver options>>(επιλογές επίλυσης) και εκεί κάνουμε κλικ στις επιλογές <<Assume non-negative>>(Υπόθεση μη αρνητικού) και <<Assume Linear Model>> (Υπόθεση γραμμικού μοντέλου)και πατάμε το <<ok>>
13. Τέλος αφού έχουμε συμπληρώσει τον πίνακα με τα απαραίτητα στοιχεία του προβλήματος που απαιτούνται πατάμε την επιλογή <<Solve>>(Επίλυση).

Συμπέρασμα: Το πρόγραμμα Microsoft Excel μας έβγαλε ότι για να έχει το ζαχαροπλαστείο μέγιστο κέρδος 2016 Ευρώ θα πρέπει να παράγει 12 πακέτα μπισκότων από το πρώτο είδος και 24 πακέτα μπισκότων δεύτερου είδους. Και έχει χρησιμοποιήσει όλους τους διαθέσιμους πόρους σε ζάχαρη και γάλα και του έχουν περισσέψει και 8 κιλά αλεύρι.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Με όλα όσα αναφέραμε παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μία μαθηματική μέθοδος που χρησιμοποιείται από τις επιχειρήσεις για τη λύση προβλημάτων στα οποία προσπαθούμε να βρούμε την άριστη χρήση των περιορισμένων πόρων μίας επιχείρησης με στόχο να επιτύχουμε την μεγιστοποίηση του κέρδους ή την ελαχιστοποίηση του κόστους μέσα στα όρια ορισμένων περιορισμών και δυνατοτήτων της επιχείρησης. Η χρήση του είναι πολύ σημαντική από μια επιχείρηση διότι βοηθά την επιχείρηση στην λήψη αποφάσεων πολύ σημαντικών για την σωστή λειτουργία και διαχείριση της επιχείρησης και την επίτευξη των στόχων της με γνώμονα το κέρδος.

Έτσι η μελέτη και η εφαρμογή του Γραμμικού Προγραμματισμού γνώρισε εκρηκτική ανάπτυξη σε βαθμό που να θεωρείται σήμερα από πολλούς ειδικούς μεταξύ των πιο σημαντικών επιτευγμάτων που σημειώθηκαν στα μέσα του εικοστού αιώνα. Μέχρι τις μέρες μας αποτελεί το δημοφιλέστερο εργαλείο της Επιχειρησιακής Έρευνας και της Διοικητικής Επιστήμης. Εκτιμάται ότι πλέον του 50% των εφαρμογών των παραπάνω επιστημών σε πραγματικά προβλήματα διοίκησης σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με τον Γραμμικό Προγραμματισμό. Αυτό οφείλεται στη μεγάλη επιτυχία που είχαν οι εφαρμογές του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων την πιο σημαντική λειτουργία της διοίκησης των επιχειρήσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Επιχειρησιακή Έρευνα: Μη Γραμμικός και Δυναμικός Προγραμματισμός, Δημήτρης Α. Ξηροκώστας, Καθηγητής Ε.Μ. Πολυτεχνείου, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1991
2. Επιχειρησιακή Έρευνα, Π.Κιοχός – Γ.Θάνος – Δ.Σαλαμούρης, Εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα 2002
3. Επιχειρησιακή Έρευνα, Γρηγόρης Πραστάκος, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα – Πειραιάς 1994
4. Επιχειρησιακή Έρευνα, Βασίλης Κώστογλου, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη 2002
5. Επιχειρησιακή Έρευνα, Χαράλαμπος Ε. Μπότσαρης, Εκδόσεις "Έλλην", 1996
6. Επιχειρησιακή Έρευνα, Παντελής Γ. Υψηλάντης, Εκδόσεις "Έλλην", 2η Βελτιωμένη Έκδοση, Αθήνα 1998
7. Τεχνική και Επιχειρησιακή Έρευνα, Κων/νος Σαπουντζής, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Έκδοση Β¨, Πειραιάς 1992
8. Linear Programming and Economic Analysis, Robert Dorfman, Paul A. Samuelson and Robert M. Solow

9. http://users.att.sch.gr/pzafeir/DIAFORA/ETC/gam%20progr–F1–e–s.pdf