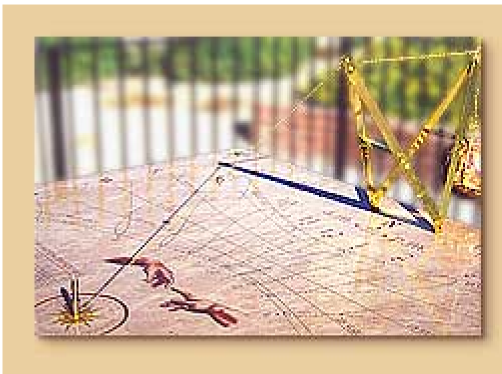
Τ.Ε.Ι ΗΠΕΙΡΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΛΕΓΚΤΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ- ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»

ΓΙΩΤΗ Σ. ΜΑΡΙΑ
Α.Μ. 1314



ΕΠΙΒΛΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤ. : ΦΟΥΤΣΙΤΖΗ ΓΕΩΡΓΙΑ

ΠΡΕΒΕΖΑ 2006

Πρόλογος

Η παρούσα πτυχιακή εργασία ασχολείται με την μελέτη των πραγματικών συναρτήσεων και με παραδείγματα χρήσης τους στην Οικονομία. Έχει σαν στόχο την κατανόηση των βασικών εννοιών, την εφαρμοσμένη έρευνα και την συλλογή των γνώσεων που απαιτούνται για την λύση οικονομικών προβλημάτων και την εφαρμογή τους σε σύγχρονα φαινόμενα της φύσης και της κοινωνίας. Οι συναρτήσεις αποτελούν ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο για όλους τους κλάδους των εφαρμοσμένων επιστημών.

Χωρίζεται σε 5 θεματικές ενότητες (κεφάλαια):

- ❒ **Κεφάλαιο 1:** Σ' αυτό το κεφάλαιο μελετώνται οι συναρτήσεις. Η συνάρτηση είναι μια από τις θεμελιώδεις έννοιες των Μαθηματικών, η οποία είναι το εργαλείο έκφρασης ενός μεγάλου φάσματος φαινομένων της φύσης και της κοινωνίας.
- ❒ **Κεφάλαιο 2:** Στο κεφάλαιο 2 αναφέρονται οικονομικές εφαρμογές που αφορούν κάποια συγκεκριμένα είδη συναρτήσεων.
- ❒ **Κεφάλαιο 3:** Στο κεφάλαιο 3 γίνεται αναφορά στην έννοια του ορίου και της συνέχειας των συναρτήσεων, για την καλύτερη κατανόηση της παραγώγου. Η έννοια της παραγώγου αποτελεί μια από τις τρεις σημαντικότερες συλλήψεις των μαθηματικών της Αναγέννησης. Τονίζεται η χρησιμότητα της παραγώγου στη μελέτη μιας συνάρτησης ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ❒ **Κεφάλαιο 4:** Σ' αυτό το κεφάλαιο παραθέτονται μερικές από τις πιο χαρακτηριστικές οικονομικές εφαρμογές των παραγώγων.
- ❒ **Κεφάλαιο 5:** Στο κεφάλαιο 5 εισάγεται η έννοια της συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Αναφέρεται η μερική παραγώγιση, τα ολικά διαφορικά, η ολική παράγωγος και τα ακρότατα των συναρτήσεων.

Ευχαριστώ την επιβλέπουσα καθηγήτρια κ. Φουτσιτζή Γεωργιά για την πολύτιμη και ουσιαστική βοήθειά της στην πραγματοποίηση της πτυχιακής αυτής εργασίας.

Περιεχόμενα

Πρόλογος .... - 2 -
Περιεχόμενα........ - 4 -
Κεφάλαιο 1ο: Πραγματικές Συναρτήσεις .... - 6 -
1.1. Πραγματικές συναρτήσεις........ - 6 -
1.2.Ορισμοί .... - 7 -
1.3. Γραφική Παράσταση-Γράφημα Συνάρτησης .... - 7 -
1.4. Ισότητα – Περιορισμός – Επέκταση συνάρτησης........ - 9 -
1.5. Πράξεις με συναρτήσεις .... - 10 -
1.6. Βασικές Μορφές Συναρτήσεων........ - 11 -
1.6.1. Πολυωνυμικές Συναρτήσεις........ - 11 -
1.6.2. Ρητές Συναρτήσεις........ - 11 -
1.6.3. Αλγεβρικές Συναρτήσεις .... - 11 -
1.6.4. Υπερβατικές Συναρτήσεις........ - 12 -
1.7. Χαρακτηριστικά μιάς Συνάρτησης........ - 14 -
1.8. Φραγμένη Συνάρτηση........ - 16 -
1.9. Μονοτονία Συναρτήσεων........ - 18 -
1.10. Ακρότατα Συνάρτησης .... - 20 -
1.11. Κυρτά και κοίλα Συνάρτησης – Σημεία καμπής .... - 21 -
1.12. Σύνθεση Συναρτήσεων .... - 22 -
1.13. Αντίστροφη Συναρτηση........ - 23 -
Κεφάλαιο 2ο: Οικονομικές Εφαρμογές-Είδη Συναρτήσεων........ - 24 -
2.1. Γραμμικές Συναρτήσεις .... - 24 -
2.1.1. Εφαρμογή .... - 24 -
2.1.2. Εφαρμογή........ - 26 -
2.1.3. Εφαρμογή........ - 28 -
2.1.4. Εφαρμογή........ - 29 -
2.2. Εκθετικές Συναρτήσεις .... - 29 -
2.2.1 Συναρτήσεις Ανάπτυξης και Παρακμής .... - 30 -
2.2.1.1. Εφαρμογή .... - 31 -
2.2.1.2. Εφαρμογή .... - 32 -
2.2.1.3. Εφαρμογή .... - 32 -
2.2.1.4. Εφαρμογή .... - 33 -
2.3 Λογαριθμικές Συναρτήσεις .... - 33 -
Κεφάλαιο 3ο:Παράγωγος Συνάρτηση........ -34 -
3.1. Όριο συνάρτησης .... - 34 -
3.2. Συνέχεια συνάρτησης .... - 34 -
3.3. Παράγωγος Συνάρτησης σε σημείο (ορισμός – γεωμετρική ερμηνεία)........ - 36 -
3.4. Συνάρτηση Παράγωγος – Τύποι παραγώγισης .... - 38 -
3.5. Παράγωγος ανώτερης τάξης-κανόνας L' HOSPITAL .... - 39 -
3.6. Μελέτη συνάρτησης με τη βοήθεια παραγώγων .... - 41 -
3.6.1. Μονοτονία........ - 41 -
3.6.2. Ακρότατα .... - 41 -
3.6.3. Κυρτά και κοίλα – Σημεία καμπής .... - 42 -
3.6.4. Εύρεση πλαγιάς ασυμπτωτου με παραγώγουσ .... - 43 -
3.6.5. Κατασκευή της γραφικής παράστασης .... - 44 -
3.6.5.1. Παράδειγμα .... - 44 -
3.6.5.2. Παράδειγμα .... - 46 -
Κεφάλαιο 4ο: Οικονομικές Εφαρμογές Παραγώγων .... - 48 -
4.1. Συνάρτηση ζήτησης .... - 48 -
4.1.1. Εφαρμογή........ - 49 -
4.1.2. Εφαρμογή........ - 51 -
4.1.3. Εφαρμογή........ - 51 -

4.2. Συνάρτηση προσφοράς ... - 52 -
4.2.1. Εφαρμογή ... - 53 -
4.2.2. Εφαρμογή ... - 54 -
4.2.3 Εφαρμογή ... - 55 -
4.3. Συνάρτηση Εσόδων ... - 56 -
4.3.1. Εφαρμογή ... - 57 -
4.4. Συνάρτηση κόστους ... - 59 -
4.4.1. Εφαρμογή ... - 60 -
4.4.2. Εφαρμογή ... - 60 -
4.4.3. Εφαρμογή ... - 62 -
4.5. Εξίσωση εσόδων και κόστους ... - 63 -
4.5.1. Εφαρμογή ... - 63 -
4.5.2. Εφαρμογή ... - 65 -
4.5.3. Εφαρμογή ... - 65 -
4.6. Σημείο Φυγής ... - 67 -
4.6.1. Εφαρμογή ... - 67 -
4.7. Συνάρτηση Παραγωγής ... - 68 -
4.7.1. Εφαρμογή ... - 69 -
4.8. Το υπόδειγμα του τέλειου ανταγωνισμού ... - 70 -
4.8.1. Εφαρμογή ... - 71 -
4.8.2. Εφαρμογή ... - 72 -
4.9. Το υπόδειγμα του καθαρού μονοπωλίου ... - 73 -
4.9.1. Εφαρμογή ... - 73 -
Κεφάλαιο 5ο: Συναρτήσεις πολλών Μεταβλητών ... - 75 -
5.1. Ορισμός και έννοιες ... - 75 -
5.2. Μερική Παραγώγιση ... - 77 -
5.2.1. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης ... - 78 -
5.2.2. Παράδειγμα (Η συνάρτηση ζήτησης) ... - 79 -
5.2.3. Εφαρμογή ... - 80 -
5.3. Ολικά Διαφορικά ... - 81 -
5.3.1. Κανόνες για την εύρεση ολικών διαφορικών ... - 83 -
5.3.2. Ολικά διαφορικά ανώτερης τάξης ... - 83 -
5.4. Ολική παράγωγος ... - 85 -
5.4.1. Ολικοί παράγωγοι ανώτερης τάξης ... - 86 -
5.5. Περίπτωση δύο εξαρτημένων μεταβλητών ... - 87 -
5.5.1. Εφαρμογή ... - 88 -
5.6. Ακρότατα συναρτήσεων ... - 88 -
5.6.1. Ακρότατα με τη δεύτερη παράγωγο ... - 89 -
5.6.2. Εφαρμογή ... - 90 -
5.7. Μέγιστα και ελάχιστα συναρτήσεων δύο ή περισσότερων μεταβλητών ... - 91 -
5.8. Μέγιστα και ελάχιστα με περιορισμους-Η μέθοδος του πολλαπλασιαστή Lagrange ... - 93 -
5.9. Βελτιστοιοποίση υπο συνθήκη ... - 94 -
5.9.1. Παράδειγμα ... - 94 -
5.9.2. Παράδειγμα ... - 95 -
5.10. Συνάρτηση μικτού κόστους ... - 96 -
5.10.1. Εφαρμογή ... - 96 -
5.11. Η Συνάρτηση Παραγωγής ... - 97 -
5.11.1. Εφαρμογή ... - 98 -
5.12. Εφαρμογές ... - 100 -
5.12.1. Ανταγωνιστική ισορροπία της επιχείρησης ... - 100 -
5.12.2. Ισορροπία του μονοπωλητή ... - 101 -
5.12.3. Η άσκηση πολιτικής διακριτικών τιμών ... - 102 -
5.12.4. Συνθήκες ισορροπίας ενός παραγωγού ... - 103 -
Βιβλιογραφικές Αναφορές ... - 104 -

Κεφάλαιο 1ο ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

1.1. Πραγματική συνάρτηση.

Γνωρίζουμε ότι μια απεικόνιση f: A→B αντιστοιχίζει σε κάθε ×ЄA ένα μοναδικό yЄB, που συμβολίζεται f(x) και λέγεται εικόνα του X. Η απεικόνιση f λέγεται και **συνάρτηση με πεδίο ορισμού** το A και **τιμές** στο B. Η εικόνα f(x) λέγεται **τιμή** της f στο × και το σύνολο των ζευγών (×,f(x)) λέγεται **γράφημα** της f. Το σύνολο των τιμών της f είναι γενικά ένα υποσύνολο του B που συμβολίζεται f (A).

Οι συναρτήσεις της μορφής f: A→B
με A $\subseteq$ R και B $\subseteq$ R με A ≠ 0, στις οποίες τόσο το πεδίο ορισμού A όσο και το σύνολο τιμών f (A) είναι υποσύνολα του R ονομάζονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής**.

Συνήθως στις συναρτήσεις αυτές δεν ορίζονται ρητά τα σύνολα A και B. Στις περιπτώσεις αυτές θεωρούμε ότι το B = R και ότι το A είναι ένα υποσύνολο του R τέτοιο ώστε για κάθε χЄA μπορεί να οριστεί το f(x).

Συμβατικά η εικόνα f(x) Є B ενός πραγματικού αριθμού ×ЄA δίνεται με τον τύπο Y=f(x) ο οποίος λέγεται **τύπος της συναρτήσεως**.

Η μεταβλητή Y της οποίας η τιμή εξαρτάται από την τιμή της X, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**, ενώ η X λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή.**

Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού**, το σύνολο όλων των τιμών της συνάρτησης ονομάζεται **πεδίο τιμών της συνάρτησης** και συμβολίζονται αντίστοιχα με D (f) ή D (αρχικό της λέξεως Domain) και R (f) ή R (αρχικό της λέξεως Range).

Η σχέση που συνδέει τις δύο μεταβλητές λέγεται **συναρτησιακή σχέση**.

ΜΙα συνάρτηση f: $A \to B$ λέγεται **ορισμένη** σ' ένα διάστημα όταν είναι **ορισμένη** σε κάθε σημείο του διαστήματος.

Μια συνάρτηση είναι **ορισμένη πλήρως** όταν γνωρίζουμε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της. Έτσι η πλέον δόκιμη γραφή μιας συνάρτησης είναι:

$$Y = f(x),\ x \in A$$

Με τον ίδιο τύπο μπορούμε να εκφράσουμε δύο διαφορετικές συναρτήσεις όταν αυτές έχουν διαφορετικό πεδίο ορισμού.

1.2. Ορισμοί

α. Μια συνάρτηση f: $A \to B$ λέγεται συνάρτηση **επί,** όταν $f(A) = B$.

β. Μια συνάρτηση f: $A \to B$ λέγεται **αμφιμονοσήμαντη** ή συνάρτηση «1 - 1 », όταν $\forall\, x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

γ. Μια συνάρτηση f: $A \to B$ λέγεται **ταυτοτική**, όταν $\forall\, x \in A,\ f(x) = x$

δ. Μια συνάρτηση f: $A \to B$ λέγεται **σταθερή**, όταν $\forall\, x \in A,\ f(x) = c$ όπου c σταθερή ποσότητα.

ε. Μια συνάρτηση f: $A \to B$ λέγεται **ακολουθία**, όταν $A = N$ ή $A = N^*$

1.3. Γραφική παράσταση-Γράφημα συνάρτησης

Γράφημα μιας συνάρτησης f: $A \to R$ ονομάζεται το σύνολό των διατεταγμένων ζευγών $G = \{(x,y) \in R \times R : Y = f(x),\ x \in A\}$

Τα στοιχεία του συνόλου G μπορούν να παρασταθούν γεωμετρικά σε ένα επίπεδο εφοδιασμένο με ένα σύστημα αξόνων. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που αντιστοιχούν στα ζεύγη (x,y) του G, αποτελεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

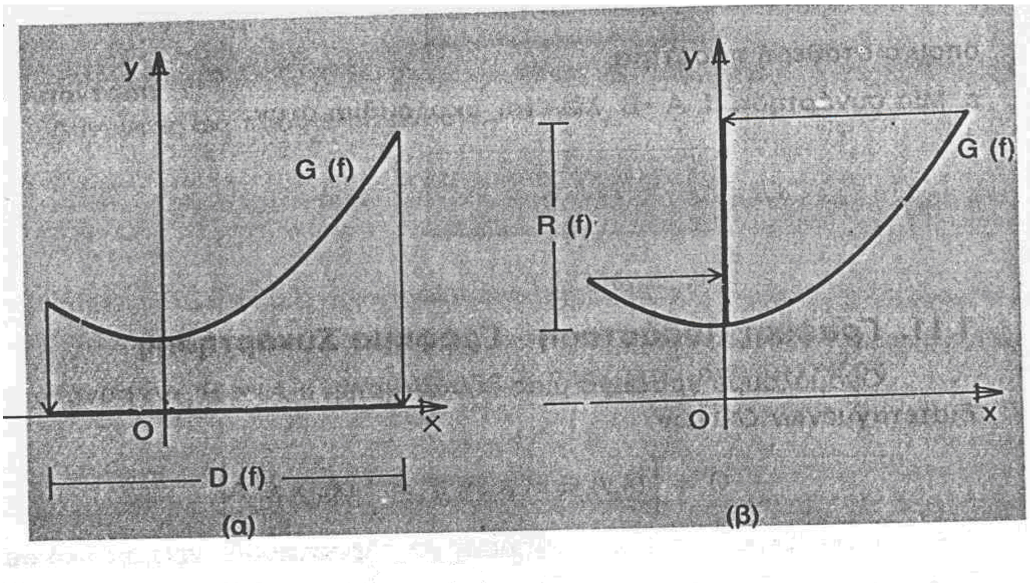
Η εξίσωση y= f(x), της οποίας το σύνολο των λύσεων (×,y) προσδιορίζει τη γραφική παράσταση (c) της f, λέγεται εξίσωση της (c).

Είναι προφανές ότι από το γράφημα μιας συνάρτησης f μπορούμε να ορίσουμε πλήρως τη συνάρτηση. Πράγματι το σύνολο των πρώτων μελών όλων των διατεταγμένων ζευγών (×,y) του γραφήματος G *(f)* είναι το πεδίο ορισμού της f. Ενώ το πεδίο τιμών της f είναι το σύνολο των δευτέρων μελών των στοιχείων του γραφήματος. Έτσι όταν δίνεται το γράφημα G *(f)* της f έχουμε :

D (f) = {χ: (×,y) Є G (f) }

R (f) = { Y: (×,y) Є G (f) }

Όταν το γράφημα της συνάρτησης δίνεται πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο, (επίπεδο εφοδιασμένο με ορθογώνιους άξονες), το σύνολο των προβολών όλων των σημείων του γραφήματος πάνω στον άξονα O× αποτελεί το πεδίο ορισμού της *.f* (σχ. 1.1α), ενώ το σύνολο των προβολών όλων των σημείων του γραφήματος πάνω στον άξονα Oy αποτελεί το πεδίο τιμών της f (σχ.1.1β)



Σχημα 1.1

Το γράφημα της συνάρτησης δεν αποτελεί κατ'ανάγκη συνεχή καμπύλη.

Από τον ορισμό της συνάρτησης f προκύπτει ότι κάθε ευθεία κάθετη στον άξονα Ο× σε ένα σημείο × του πεδίου ορισμού της, συναντά το γράφημα της συνάρτησης σε ένα και μόνο σημείο.

1.4. Ισότητα- Περιορισμός –Επέκταση Συνάρτησης

Αν συμβολίσουμε με F το σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού το A, ορίζονται οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του F:

1. Ισότητα

Δύο συναρτήσεις f, g : A →R, λέγονται ίσες, όταν για κάθε × ∈ A είναι f(x) = g(×).

2. Περιορισμός - Επέκταση .

Αν το A_1 είναι γνήσιο υποσύνολο του Α, τότε η συνάρτηση g: $A_1 \rightarrow R$ με $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A_1$ λέγεται περιορισμός της f από το Α στο A_1.

Η f λέγεται επέκταση της g από το A_1 στο Α. Η συνάρτηση π.χ.

$f(x) = συνx$, $0 \leq x \leq π$ είναι περιορισμός της

$f(x) = συνx$, $-\infty < x < +\infty$

ενώ η τελευταία είναι επέκταση της πρώτης.

Η γραφική παράσταση του περιορισμού μιας συνάρτησης αποτελεί προφανώς τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

1.5. Πράξεις με Συναρτήσεις

Στο σύνολο F των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού το D ορίζονται η αντίθετη συνάρτηση, το άθροισμα συναρτήσεων, το γινόμενο συνάρτησης επί πραγματικό αριθμό, το γινόμενο συναρτήσεων, και το πηλίκο συναρτήσεων.

- Άθροισμα f+g δύο συναρτήσεων $f, g \in F$, είναι η συνάρτηση $(f + g) \in F$ με $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, για κάθε $x \in D$
- Αντίθετη -f της συνάρτησης $f \in F$, είναι η συνάρτηση $(-f) \in F$ με

$(-f)(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in D$

- Γινόμενο λf της συνάρτησης f επί τον πραγματικό αριθμό λ είναι η συνάρτηση $λ f \in F$ με $(λ f)(x) = λ f(x)$, για κάθε $x \in D$
- Γινόμενο f g δύο συναρτήσεων $f, g \in F$ είναι η συνάρτηση $(f g) \in F$ με $(f g)(x) = f(x) g(x)$ για κάθε $x \in D$
- Πηλίκο f/g δύο συναρτήσεων $f, g \in F$ είναι η συνάρτηση $(f/g) \in F$ με $(f/g)(x)=f(x) / g(x)$ για κάθε $x \in D$, $g(x) \neq 0$.

Ορίζεται επίσης ως διαφορά (f-g) Є F δύο συναρτήσεων f, g Є F το άθροισμα f + (-g), με (f-g) × = f(x) - g(×), για κάθε × Є D

Αν τα πεδία ορισμού των f και g είναι αντίστοιχα D (f) και Δ *[γ]*, οι προηγούμενες πράξεις ορίζονται μόνο στην τομή των πεδίων ορισμού των f και g.

1.6. Βασικές Μορφές Συναρτήσεων

1.6.1 Πολυωνυμικές Συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση f: A →R, με τη μορφή ακεραίου πολυωνύμου ως προς × $f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$, × Є A και με πραγματικούς συντελεστές a_0, $a_1, \dots$, a_{v-1}, a_v, όπου $a_v \neq 0$ και ν ακέραιο μη αρνητικό, λέγεται πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού ν.

Ειδικές μορφές πολυωνυμικών συναρτήσεων αποτελούν η **ομοπαραλληλική ή γραμμική συνάρτηση** $f(x)=a x+ \beta$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι **ευθεία** και η **δευτεροβάθμια συνάρτηση** . $f(x)= a x^2 + \beta x + \gamma$, x Є R της οποίας η γραφική παράσταση είναι **παραβολή.**

1.6.2. Ρητές Συναρτήσεις

Ρητή συνάρτηση ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=P(x)/Q(x)$ × Є A όπου P(χ) και Q(χ) είναι ακέραιες πολυωνυμικές συναρτήσεις, με Q (χ) ≠ 0 για κάθε × Є A.

1.6.3. Αλγεβρικές Συναρτήσεις

Αλγεβρική συνάρτηση ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $P(\times)\ y^m+Q(\times)\ y^{m-1}+\dots+U(\times)\ y+V(\times) = 0$ όπου P(×) , Q(×) ,…., U(×) . V(×) συμβολίζουν πολυώνυμα ως προς ×.

Στις συναρτήσεις αυτές ανήκουν οι πολυωνυμικές, οι ρητές και γενικότερα οι συναρτήσεις των οποίων ο τύπος σχηματίζεται με τις τέσσερις γνωστές πράξεις, με υψώσεις σε δυνάμεις και με εξαγωγές ριζών.

Από το πεδίο ορισμού μιας τέτοιας συνάρτησης εξαιρούνται οι τιμές του × που δεν δίνουν έννοια πραγματικού αριθμού ή μηδέν στις υπάρχουσες υπόριζες ποσότητες ή μηδενίζουν υπάρχοντες παρονομαστές.

1.6.4. Υπερβατικές Συναρτήσεις

Κάθε πραγματική συνάρτηση που δεν είναι αλγεβρική ονομάζετει **υπερβατική.** Κατηγορίες υπερβατικών συναρτήσεων αποτελούν οι εκθετι*κές,* λογαριθμικές, κυκλικές (τριγωνομετρικές), αντίστροφες κυκλικές, υπερβολικές, αντίστροφες υπερβολικές κ.ά.

- **Εκθετικές συναρτήσεις**

Ονομάζονται οι συναρτήσεις που έχουν γενικό τύπο $f(x)= \alpha^{\Phi(X)}$,με α > 0 και × Є D (φ). Ειδικότερα με α = e και Φ(×) = × προκύπτουν αντίστοιχα οι μορφές: $f(x)= e^{\Phi(X)}$, $f(x)= e^{x}$

- **Λογαριθμικές συναρτήσεις**

Ονομάζονται οι συναρτήσεις με γενικό τύπο $f(x)= \log_{\alpha} \Phi(\times)$, με α>0, α ≠ 1 και × > 0. Ειδικότερα με α = e και Φ(×)=× προκύπτουν αντίστοιχα οι μορφές: f(x)= lnΦ(×) και f(x)= ln× .

Οι λογάριθμοι με βάση α = e ονομάζονται **φυσικοί ή Νεπέρειοι λογάριθμοι**, ενώ οι λογάριθμοι με βάση α = 10 ονομάζονται **δεκαδικοί.**

- **Κυκλικές (Τριγωνομετρικές) συναρτήσεις** είναι οι συναρτήσεις με τύπο . y = f (ημ×, συν×).

Στοιχειώδεις τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι οι γνωστές: ημ× ή sin×, συν× ή cosx, εφ× ή tanx και τα παράγωγά τους.

- **Αντίστροφες κυκλικές -συναρτήσεις**

Είναι οι αντίστροφες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, όπου αυτές ορίζονται και ειδικότερα οι συναρτήσεις:

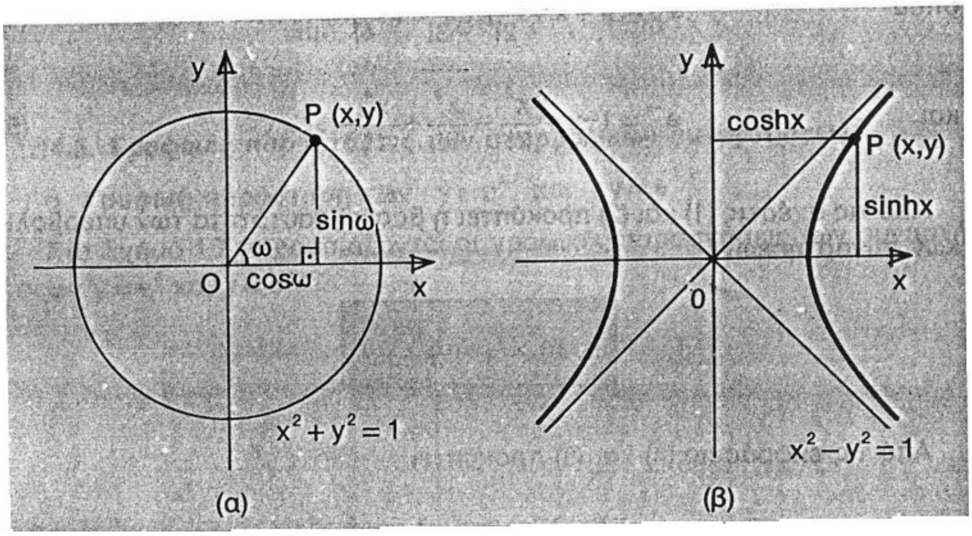
Y = τοξημ× ή Y = arcsin× $-1 \leq x \leq 1$

Y = τοξσυν× ή Y = arccos× $-1 \leq x \leq 1$

Y = τοξεφ× ή Y = arctan× $x \in R$

- **Υπερβολικές συναρτήσεις**

Σε αντίθεση με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, οι οποίες ορίζονται γεωμετρικά με τόξα κύκλου μοναδιαίας ακτίνας $x^2 + y^2 = 1$ (σχ. 1.2α) (από όπου και η ονομασία τους **κυκλικές συναρτήσεις),** οι υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται γεωμετρικά με τόξα μοναδιαίας ισοσκελούς υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$ (σχ. 1.2.β) (απ όπου και η ονομασία τους **υπερβολικές συναρτήσεις**).



Σχήμα 1.2

Στην πράξη όμως όπως οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν ορίζονται από τον κύκλο έτσι και οι υπερβολικές συναρτήσεις δεν ορίζονται από την υπερβολή.

- **Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις**

Ονομάζονται οι αντίστροφες των υπερβολικών συναρτήσεων, ως προς τη σύνθεση και είναι οι :

$$\sinh^{-1} x, \cosh^{-1} x, \tanh^{-1} x$$

1.7. Χαρακτηριστικά μιας Συνάρτησης

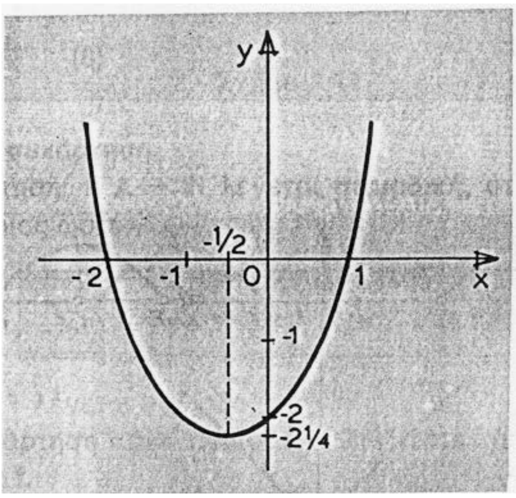
Από τη μελέτη της «συμπεριφοράς» μιας συνάρτησης κατά μήκος του πεδίου ορισμού της, προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα που διευκολύνουν την «κωδικοποίηση» ορισμένων συναρτήσεων, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους και απλοποιούν τη σχεδίαση της γραφικής τους παράστασης.

1. Ρίζες συνάρτησης

Ρίζα μιας πραγματικής συναρτήσεως f: A → R λέγεται κάθε πραγματικός αριθμός ρ ∈ A τέτοιος ώστε **f (ρ) = 0**.

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τέμνει τον X-άξονα σε σημεία των οποίων οι τετμημένες είναι ρίζες της f.

Η συνάρτηση π.χ. $f(x) = x^2 + x - 2$, έχει ρίζες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = -2$. Η γραφική παράστασή της τέμνει τον x-άξονα στα σημεία - 2 και 1.



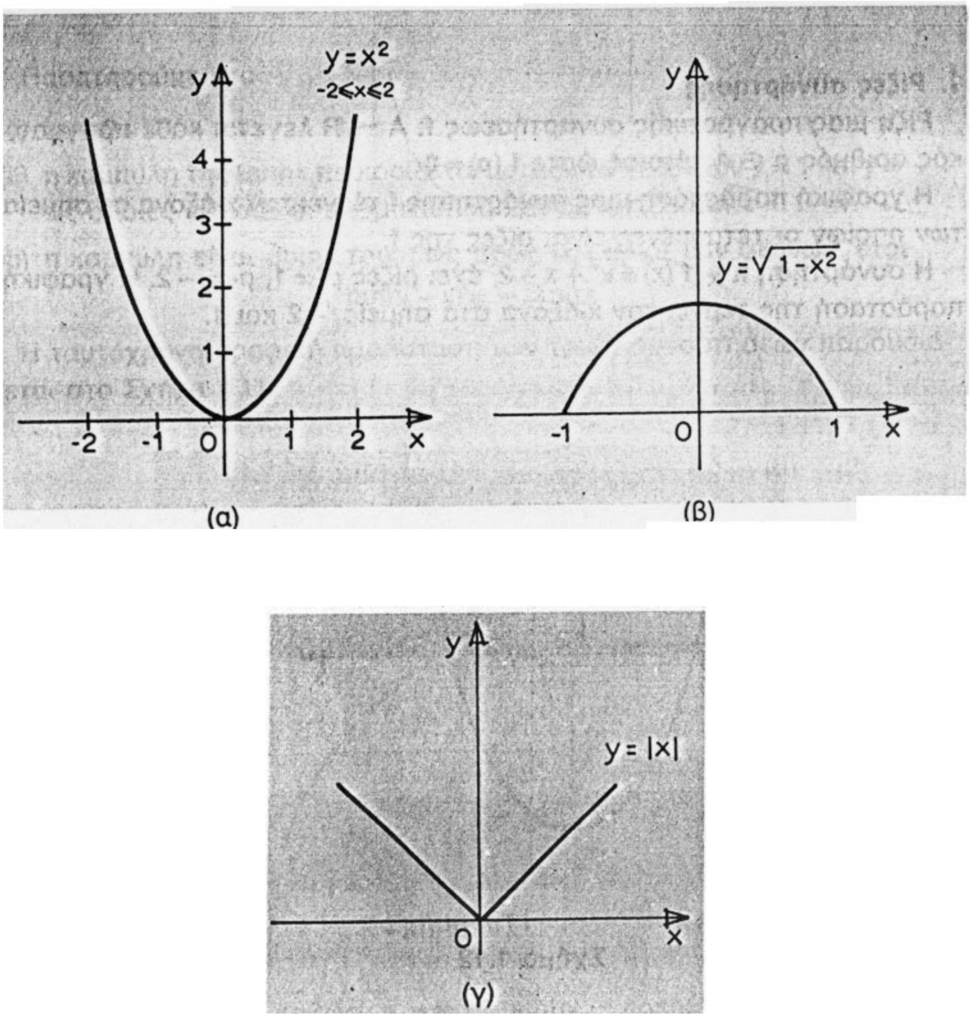
Σχήμα 1.3

2. Άρτια συνάρτηση

Μια συνάρτηση f: A → R λέγεται άρτια, όταν

$$\boxed{\forall\ x \in A,\ -x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)}$$

Οι άρτιες συναρτήσεις, όπως προκύπτει από τον ορισμό; έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς τον Y-άξονα (Σχ. 1.4α,β,γ).



Σχήμα 1.4

3. Περιττή συνάρτηση

Μια συνάρτηση f: A → R λέγεται περιττή, όταν

$$\boxed{\forall\ x \in A,\ -x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)}$$

Οι περιττές συναρτήσεις, όπως προκύπτει από τον ορισμό, έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

4. Περιοδική συνάρτηση

Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει αριθμός $T \in R^*$, τέτοιος ώστε

$$\forall\ x \in A \text{ είναι } x+T \in A \text{ και } f(x+T) = f(x)$$

Ο αριθμός T λέγεται **περίοδος** της f.

Αν μια συνάρτηση f έχει περίοδο $T \in R^*$ τότε και το κ T, $κ \in Z^*$ είναι περίοδος της f.

Σε μια περιοδική συνάρτηση η γραφική της παράσταση παρουσιάζει ένα σχήμα πλάτους ίσου με την περίοδο της που επαναλαμβάνεται διαδοχικά. Αυτό μας επιτρέπει, όταν μελετάμε μια περιοδική συνάρτηση πλάτους T, να περιορίζουμε τη μελέτη σε διάστημα πλάτους T.

1.8. Φραγμένη Συνάρτηση

Ορισμός 1. Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται **φραγμένη άνω,** όταν υπάρχει $\xi_1 \in R$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \leqslant \xi_1 \quad , \quad \forall\ x \in A$$

Ορισμός 2. Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται **φραγμένη κάτω,** όταν υπάρχει $\xi_2 \in R$, τέτοιο ώστε

$$\xi_2 \leqslant f(x) \quad , \quad \forall\ x \in A$$

Ορισμός 3. Μια συνάρτηση f: A → R λέγεται **φραγμένη,** όταν υπάρχουν ξ_1, ξ_2 ∈ R, ($\xi_2 \leq \xi_1$). τέτοια ώστε

$$\boxed{\xi_2 \leqslant f(x) \leqslant \xi_1 \quad , \quad \forall\ x \in A}$$

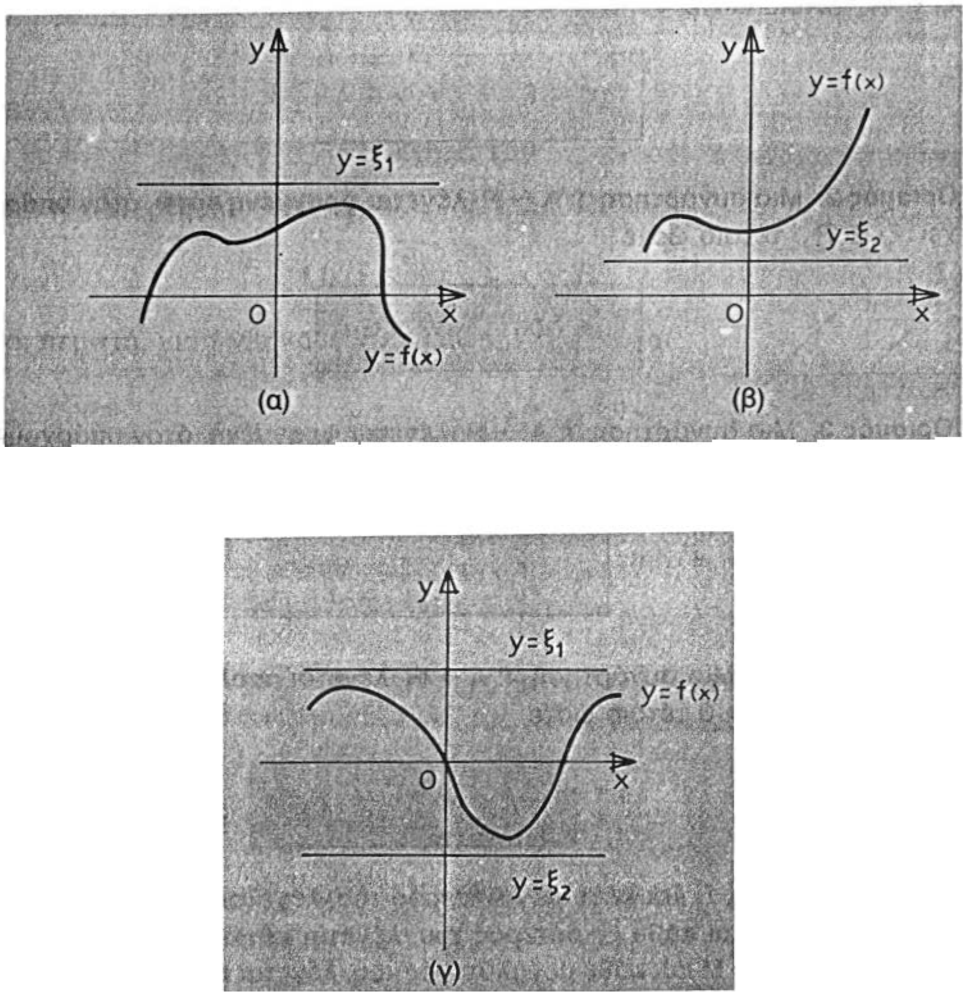
Ορισμός 4. Μια συνάρτηση f: A → R λέγεται **απολύτως φραγμένη,** όταν υπάρχει M > O τέτοιο ώστε

$$\boxed{|f(x)| \leqslant M \quad , \quad \forall\ x \in A}$$

Ο αριθμός ξ_1 και κάθε μεγαλύτερός του, λέγεται **άνω φράγμα** της f. Ο αριθμός ξ_2 και κάθε μικρότερός του, λέγεται **κάτω φράγμα** της f.

Ο αριθμός M και κάθε μεγαλύτερός του, λέγεται **απόλυτο φράγμα** της f. Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει ότι:

- Μια συνάρτηση **φραγμένη** είναι και **απολύτως φραγμένη** και αντιστρόφως.
- Αν μια συνάρτηση έχει άνω φράγμα το ξ_1 κανένα από τα σημεία της γραφικής της παράστασης δεν βρίσκεται πάνω από την ευθεία Y = ξ_2.
- Αν μία συνάρτηση έχει κάτω φράγμα το ξ_2, κανένα από τα σημεία της γραφικής της παράστασης δεν βρίσκεται κάτω από την ευθεία Y = ξ_2. .
- Ομοίως αν μια συνάρτηση είναι φραγμένη ή απολύτως φραγμένη, η γραφική της παράσταση περιορίζεται μεταξύ των ευθειών που ορίζονται από το άνω και κάτω φράγμα (Σχ. 1.5α,β,γ).



Σχήμα 1.5

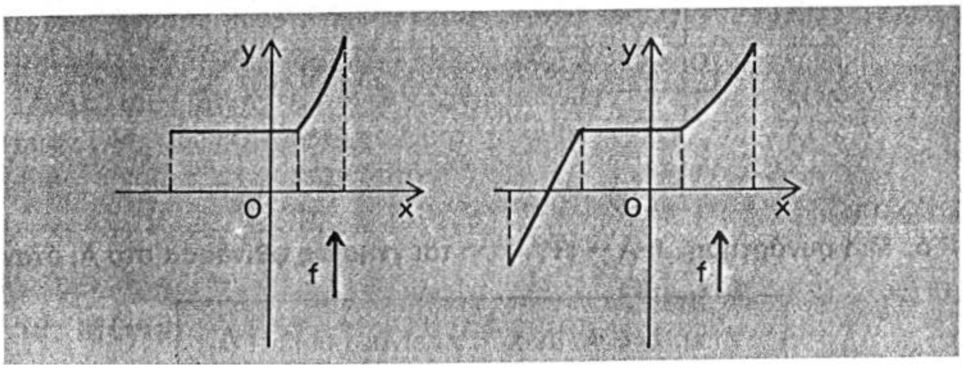
1.9. Μονοτονία Συναρτήσεων

Ορισμοί

α. Μια συνάρτηση f: A → R λέγεται αύξουσα στο A, όταν

$$\boxed{\forall\ x_1, x_2 \in A,\ \text{με}\ x_1 < x_2,\ \text{είναι}\ f(x_1) \leq f(x_2)}$$

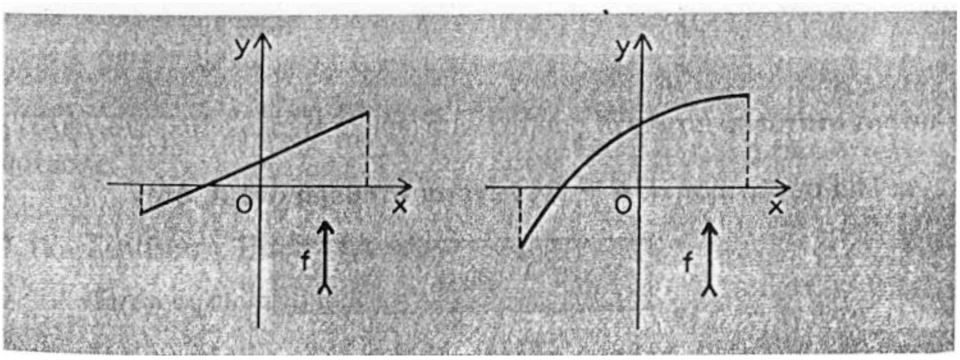
συμβολικά f ↑



β. Μια συνάρτηση f: A → R λέγεται γνησίως αύξουσα στο A, όταν

$\forall\ x_1, x_2 \in A$, με $x_1 < x_2$, είναι $f(x_1) < f(x_2)$

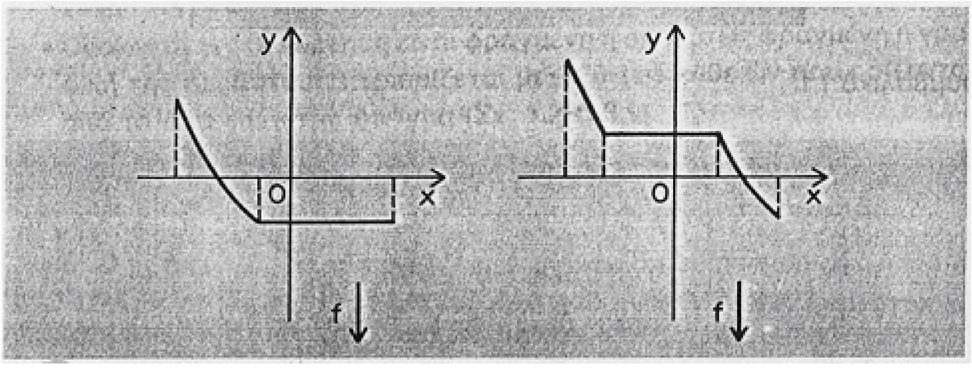
συμβολικά f ↑



γ. Μια συνάρτηση f: A → R λέγεται φθίνουσα στο A, όταν

$\forall\ x_1, x_2 \in A$, με $x_1 < x_2$, είναι $f(x_1) \geqslant f(x_2)$

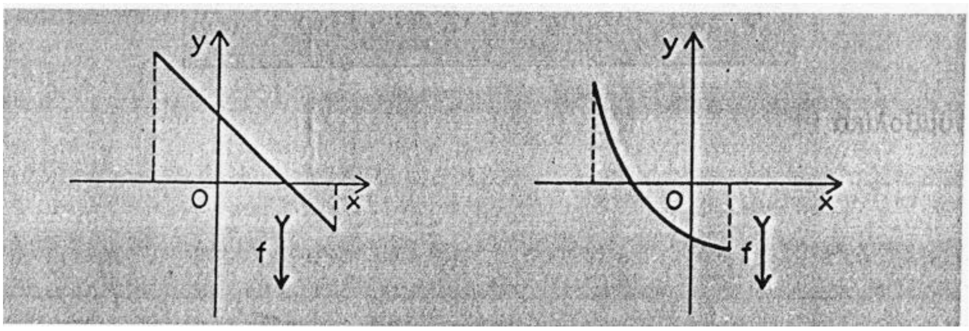
συμβολικά f ↓



δ. Μια συνάρτηση f: A → R λέγεται γνησίως φθίνουσα στο A, όταν

$\forall\ x_1, x_2 \in A$, με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$

συμβολικό f ↓



ε. Μια συνάρτηση f: A → R λέγεται σταθερή στο A, όταν

$\forall\, x \in A$ είναι $f(x) = c$.

1.10. Ακρότατα Συνάρτησης

Η Ψ = f(x) θα λέμε ότι έχει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο $x_o \in D(f)$, αν η τιμή $f(x_o)$ είναι μεγαλύτερη από τις αμέσως προηγούμενες και επόμενες τιμές της.

Αυτό συμβαίνει όταν υπάρχει διάστημα δ = $(\chi_o - \varepsilon, \chi_o + \varepsilon)$ με ε οσοδήποτε μικρό θετικό αριθμό τέτοιο ώστε

$\forall\ \mathbf{x \in \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_o)}$ **(1)**

Θα γράψουμε τότε max f = $f(x_o)$.

Αν αντί της (1) ισχύει η σχέση : $\forall$ **$x \in \delta \Rightarrow f(x) \geq f(X_o)$** (2), τότε η f(x) έχει **τοπικό ελάχιστο** στο χ_o και γράψουμε min f = $f(x_o)$.

Αν η (1) ισχύει $\forall$ x ∈ D(f), τότε έχουμε ολικό μέγιστο στο Xo, ενώ αν η (2) ισχύει $\forall$ χ ∈ D(f) , έχουμε ολικό ελάχιστο στο χ_o.

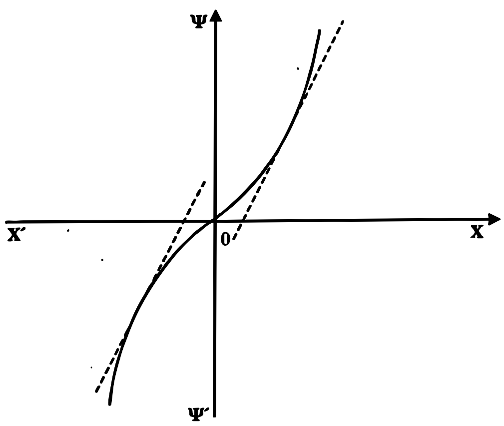
Στα σημεία διαμέσου των οποίων **αλλάζει είδος μονοτονίας**, μια συνάρτηση Ψ = f(x) παρουσιάζει ακρότατα. Έτσι Π.χ. η συνάρτηση $g(x) = x^2 + 1$, στο $x_o = 0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, στο διάστημα (- ∞, 0) είναι γνήσια φθίνουσα, ενώ στο διάστημα (0, +∞) είναι γνήσια αύξουσα.

1.11. Κυρτά Και Κοίλα Συνάρτησης – Σημεία Καμπής

Αν σ' ένα διάστημα Δ, υποσύνολο του D(f) της Ψ = f(x):

i) Υπάρχει η εφαπτομένη της C_f σε όλα τα σημεία (χ,ψ) με χ ∈ Δ και
ii) Το τμήμα της C_f, που αντιστοιχεί στο Δ, βρίσκεται πάνω (κάτω) από την εφαπτομένη της C_f σε κάθε τέτοιο σημείο, τότε η Ψ = f(x) λέγεται κυρτή (κοίλη) στο Δ (σύμφωνα με άλλη ισοδύναμη έκφραση η Ψ = f(x) στρέφει τα κοίλα άνω (κάτω) στο Δ).

Σημείο καμπής της Ψ = f(x) λέγεται κάθε σημείο (αν υπάρχει) στο οποίο η συνάρτηση σταματά να είναι κυρτή και γίνεται κοίλη, ή αντίστροφα.



Σχήμα 1.6

Π.χ στο σχήμα 1.6 είναι σχεδιασμένη κατά προσέγγιση η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$, η οποία είναι κοίλη στο $(-\infty, 0)$, κυρτή στο $(0, +\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_o = 0$.

1.12. Σύνθεση Συναρτήσεων.

Έστω οι συναρτήσεις :

$g : A \to R$, $f : B \to R$

Ονομάζουμε **σύνθεση των συναρτήσεων g**, f και τη συμβολίζουμε με $h = f_0 g$, τη συνάρτηση $h: \Gamma \to R$ με

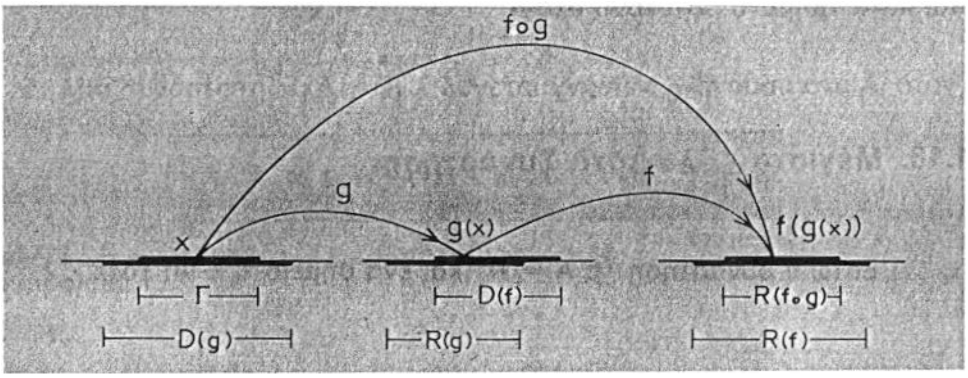
$\Gamma = \{x \in A: h(x) \in D(f) = B\}$

Η σύνθεση $h = f_0 g$ των συναρτήσεων g, f αντιστοιχίζει σε κάθε $x \in \Gamma$ το $\mathbf{h(x) = f(g(x))}$

Έτσι για κάθε $x \in \Gamma$ έχουμε

$$\mathbf{h(x) = (fog)(x) = f(g(x))}$$

Στο σχήμα αποδίδεται η σύνθεση $f_0 g$.



Σχήμα 1.7

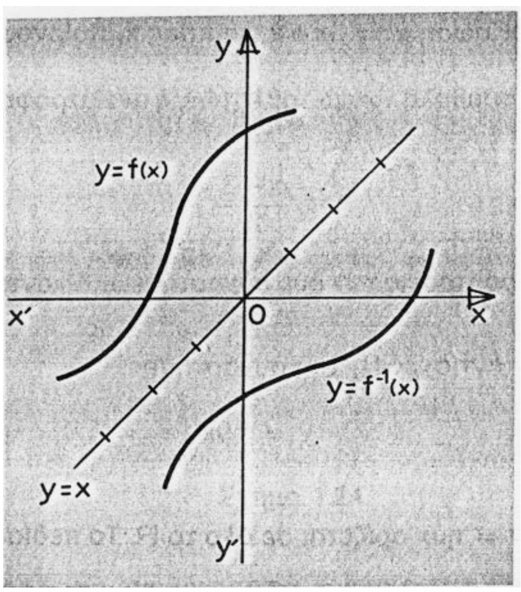
1.13. Αντίστροφη Συνάρτηση

Έστω η συνάρτηση f: A → B με y=f(x). Αν για κάθε y Є B υπάρχει ένα μοναδικό × Є A τέτοιο ώστε f(x)=y, τότε αυτή η αντιστοίχιση ορίζει μια νέα συνάρτηση f^{-1} : B → A με × = f^{-1} *(y)*, η οποία ονομάζεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f.

Η ικανή συνθήκη για την ύπαρξη μιας αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} , είναι η γνήσια μονοτονία της αρχικής συνάρτησης f.

Αν η συνάρτηση f είναι αύξουσα (φθίνουσα), τότε και η αντίστροφη συνάρτηση είναι αύξουσα (φθίνουσα). Η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης × = f^{-1} *(y)* ταυτίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y = f(x), αν η ανεξάρτητη μεταβλητή ορίζεται επί του y-άξονα.

Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή ορίζεται επί του ×-άξονα, δηλαδή αν η αντίστροφη συνάρτηση γραφεί υπό τη μορφή y=g(×), τότε η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης θα είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης y=f(x), ως προς τη διχοτόμο y=× της πρώτης γωνίας των αξόνων (Σχήμα 1.8).



Σχήμα 1.8

Κεφάλαιο 2ο

2.1. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ-ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.1.Γραμμικές Συναρτήσεις

Οι γραμμικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται ευρέως στην επιχειρησιακή ανάλυση.Αυτό το είδος συναρτήσεων χρησιμοποιείται συχνά και ως τρόπος προσέγγισης και απλοποίησης πολύπλοκων προβλημάτων οικονομικής φύσης.

Είναι της μορφής : $f(x)=a_1 x+a_0$ εφόσον $a_1 \neq 0$

2.1.1 Εφαρμογή

Αν η τιμή του ηλεκτρικού ρεύματος είναι 10 €/kw και με κάθε λογαριασμό καταβάλλεται και ένα πάγιο ποσό 200 € να εκφραστούν:

i) Η τιμή του ρεύματος ως συνάρτηση της κατανάλωσης.

ii) Η κατανάλωση ως συνάρτηση της τιμής του ρεύματος.

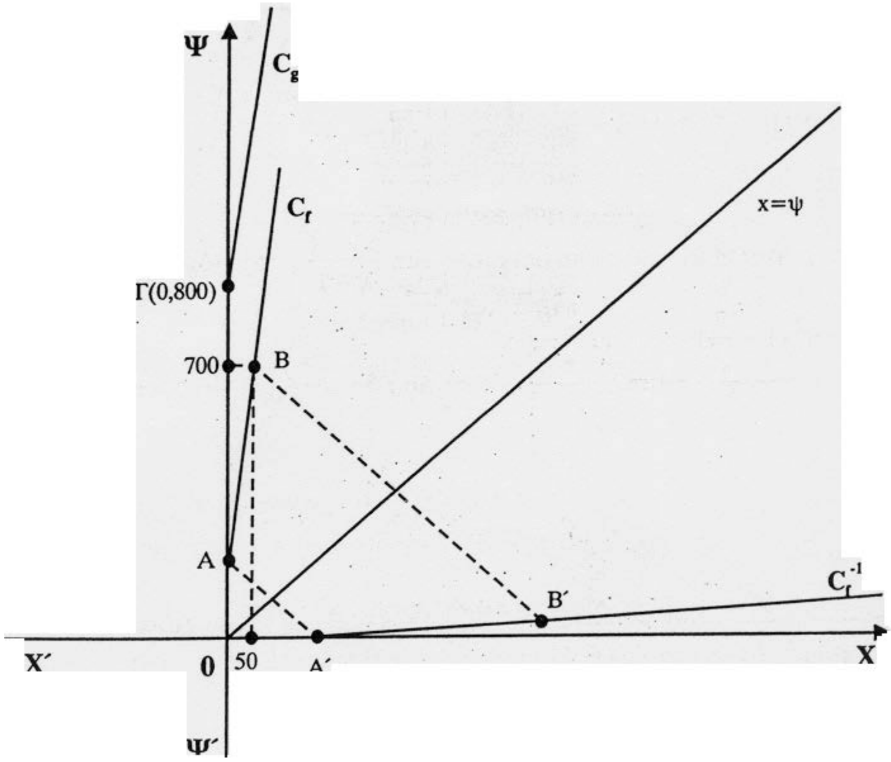
iii) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων των περιπτώσεων (i) και (ii).

iv) Αν αποφασιστεί αύξηση του παγίου ποσού σε κάθε λογαριασμό κατά 500 € τι θα συμβεί με τη γραφική παράσταση της περίπτ.(i);

Λύση:

i) Αν x είναι ο αριθμός των καταναλωθέντων kw, τότε η τιμή του ρεύματος υπολογίζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης

$y = f(x) = 10x + 200$, με $D(f) = [0,+\infty)$ και $R(f) = [200, +\infty)$



Σχήμα 2.1

ii) Λύνοντας τη σχέση $y = 10x + 200$ ως προς x παίρνουμε $x=(y-200)/10$. Θέτοντας $x = y$ προκύπτει $y = (x - 200)/10$.

Κατά συνέπεια η συνάρτηση $y = f^{-1}(x) = (x - 200)/10$ με $D(f^{-1})=[200, +\infty)$ και $R(f) = [0, +\infty)$ αποδίδει την κατανάλωση ως συνάρτηση της τιμής τους ρεύματος. Στο σχήμα 2.1. έχει κατασκευασθεί αρχικά η ημιευθεία C_f και στη συνέχεια η $C^{-1}{}_f$, συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία με εξίσωση $x = y$

iii) Η αύξηση του παγίου ποσού από 200 € σε 800 € στον κάθε λογαριασμό έχει ως συνέπεια η τιμή του ρεύματος να υπολογίζεται πλέον με τη βοήθεια της συνάρτησης $g(x) = 10x + 800$ με $D(g) = [0, +\infty)$ και $R(g) = [800, +\infty)$.

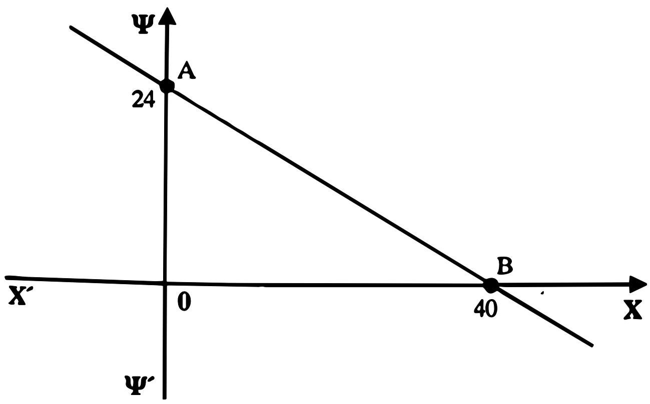
Η C_g είναι μία ημιευθεία παράλληλη προς την C_f (αφού έχουν την ίδια κλίση), με αρχή το σημείο $Γ = (0, 800)$ (δες σχήμα 2.1.).

2.1.2 Εφαρμογή

Μία γραμμή (ευθεία) ίσου κόστους παριστάνει τους διαφορετικούς συνδυασμούς δύο προϊόντων, τα οποία μπορούν να αγοραστούν με ένα προκαθορισμένο ποσό χρημάτων.

Έτσι, αν η μ.μ. του προϊόντος Α στοιχίζει 300 € και του Β 500 € και θέλουμε να δαπανήσουμε συνολικά 12.000 € για την αγορά τους, η προκύπτουσα γραμμή ίσου κόστους έχει εξίσωση $300 \times + 500 \Psi = 12.000$ ή $3\times + 5\psi = 120$, με $x,\psi \geq 0$.

Στο σχήμα 2.2. δίδεται η γραφική παράσταση της ευθείας $3\times + 5\psi = 120$.



Σχήμα 2.2.

Επειδή $\times,\psi \geq 0$, γίνεται φανερό ότι η γραμμή ίσου κόστους είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Είναι ακόμη προφανές ότι, μία αυξομείωση του αρχικά διαθέσιμου ποσού χρημάτων για την αγορά των δύο προϊόντων, προκαλεί μια παράλληλη μετατόπιση της γραμμής ίσου κόστους ως προς την αρχική της θέση.

4.5.3 Εφαρμογή

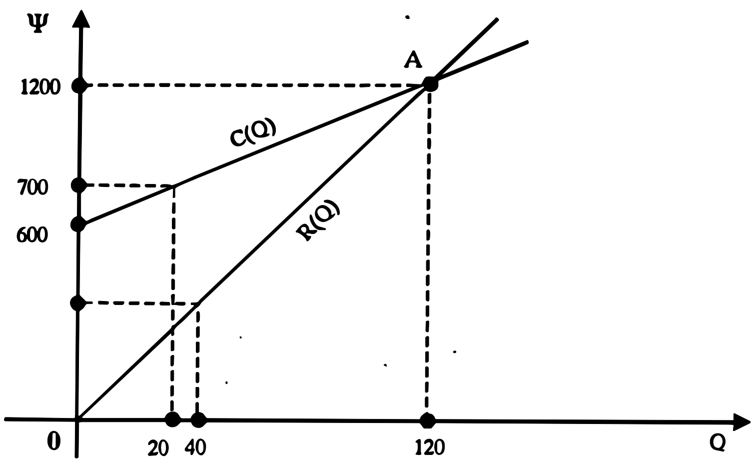
Για την παραγωγή ενός προϊόντος προβλέπεται ένα αρχικό κόστος 600€ και στη συνέχεια τρέχοντα έξοδα 5€ ανά μ.μ. του προϊόντος, η τιμή πώλησης του οποίου είναι 10€ η μ.μ.

α) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων του κόστους παραγωγής και του εσόδου από την πώληση του προϊόντος.
β) Να προσδιοριστεί αλγεβρικά και γραφικά το σημείο εκείνο της ποσότητας Q του προϊόντος, για την οποία τα έξοδα παραγωγής, ισοσκελίζονται με τα έσοδα από την πώληση του προϊόντος **(breakeven point).**

Λύση:

Έστω Q η παραγόμενη ποσότητα του προϊόντος.

α) Η συνάρτηση του κόστους παραγωγής είναι $C(Q) = 600 + 5Q$, ενώ η συνάρτηση των εσόδων από την πώληση είναι $R(Q) = 10Q$, με $Q > 0$. Οι γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων δίδονται στο σχήμα 2.3. (το χρησιμοποιούμενο σύστημα αξόνων δεν είναι ορθοκανονικό).



Σχήμα 4.2

β) Το ζητούμενο σημείο Q_0 προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης $C(Q) = R(Q)$ ή $600+5Q = 10Q$ και είναι $Q_0 = 120$ μ.μ.

Γραφικά στο σχήμα 2.3. το Qo αντιστοιχεί στο σημείο Α(120, 1200) της τομής των ημιευθειών C(Q) και R(Q).

Οι συντεταγμένες του Α αντιστοιχούν στη μοναδική λύση του συστήματος των εξισώσεων ψ=600+5Q και ψ=10Q, με αγνώστους τα ψ και Q.

2.1.3 Εφαρμογή

Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα τιμών:

α) Εκφράστε την αποταμίευση (Α) ως γραμμική συνάρτηση του εισοδήματος Υ.

β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

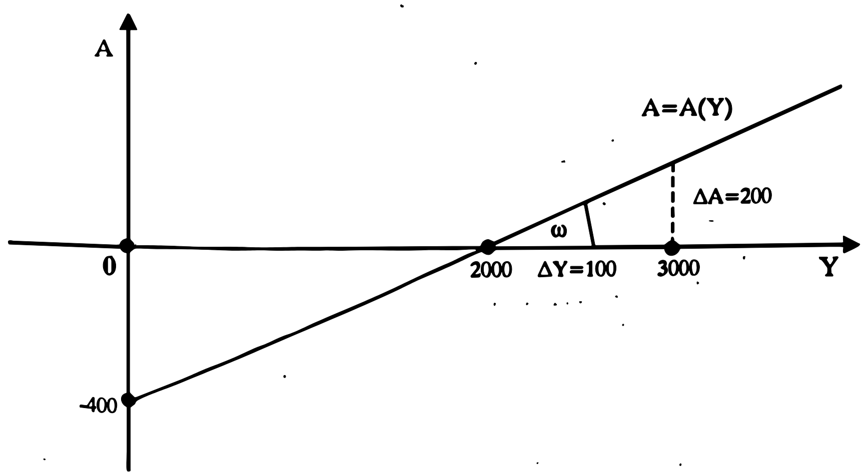
γ) Εξηγήστε την οικονομική σημασία της κλίσης της παραπάνω γραφικής παράστασης.

Υ	0	1000	2000	3000	4000
Α	-400	-200	0	200	400

Λύση: α) Η ζητούμενη συνάρτηση θα είναι της μορφής Α= αΥ+ b. Αντικαθιστώντας στη θέση την Υ και Α τα ζεύγη τιμών (0,-400) και (2000,0) προκύπτει b = -400 και 2000 α + b = 0 ή 2.000 α - 400 = 0 → α = 0,2

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι Α = 0,2 Υ - 400, με Υ ≥0. Κατά συνέπεια πρέπει Υ = 5Α + 2000 ≥0 ή Α ≥ -400.

β)



Σχήμα 2.3

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης δίδεται στο σχήμα 2.3. (μη ορθοκανονικό σύστημα αξόνων).

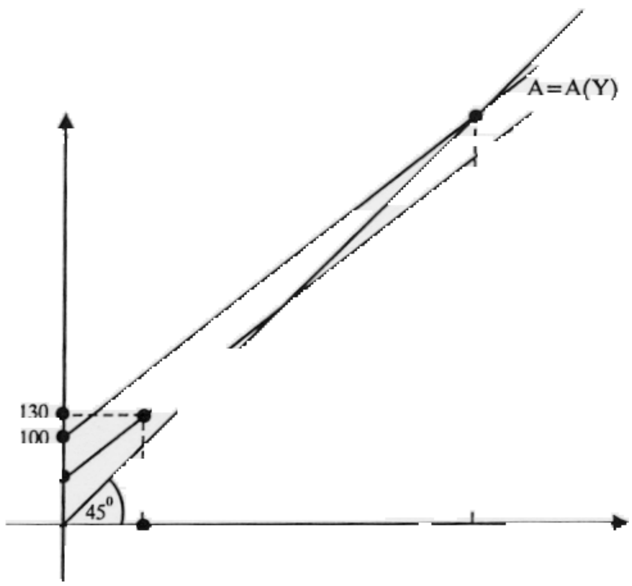
γ) Η κλίση ΔΥ/ΔΑ = εφ ω της ημιευθείας Α = Α(Υ) είναι 0,2 και δίδει το ρυθμό μεταβολής της αποταμίευσης σε σχέση με τη μεταβολή του εισοδήματος. Έτσι αύξηση του εισοδήματος κατά 1000€, έχει ως συνέπεια την αντίστοιχη αύξηση της αποταμίευσης κατά 0,2 * 1000 = 200 € (δες σχήμα 2.3.).

2.1.4. Εφαρμογή

Σε μια οικονομία δύο τομέων η κατανάλωση εκφράζεται από τη σχέση C = C(Y) = 50 + 0,8Y, όπου Y ≥0 είναι το εισόδημα και οι επενδύσεις I = 50 είναι σταθερές.

Το **απαιτούμενο εισόδημα** δίδεται από τη σχέση: A=A(Y) =C+ I = 100 + 0,8 Y.

Το **επίπεδο ισορροπίας** του εισοδήματος Yo προκύπτει όταν το απαιτούμενο εισόδημα A γίνεται ίσο με το διαθέσιμο εισόδημα Y. Από την ισότητα A = Y βρίσκουμε 0,2 Y = 100 και κατά συνέπεια Yo = 500.



Σχήμα 2.4.

Στο σχήμα 2.5. οι γραφικές παραστάσεις των C = C(Y) και A = A(Y) είναι παράλληλες ημιευθείες. Το επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος προκύπτει γραφικά από την τετμημένη της τομής της ημιευθείας A = A(Y) και της διχοτόμου της γωνίας ZÔY , που έχει εξίσωση Y =Z.

2.2 Εκθετικές Συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις στις οποίες μια σταθερά **α** βρίσκεται στη βάση και υψώνεται σε ένα μεταβλητό εκθέτη **x** ονομάζονται εκθετικές και ο γενικός μαθηματικός τύπος που τις εκφράζει είναι ο εξής:

$y=\alpha^{x}$ όπου $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$

2.2.1. Συναρτήσεις Ανάπτυξης και Παρακμής

Στην οικονομία οι συναρτήσεις, που χρησιμοποιούνται σε προβλήματα διακεκριμένης ανάπτυξης, δηλαδή ανάπτυξη που λαμβάνει χώρα κατά τακτά και διακεκριμένα χρονικά διαστήματα (π.χ. έτος, εξάμηνο κ.λ.π.) είναι της μορφής: $\boldsymbol{\psi= b(1+i/v)^{vt}}$ όπου b σταθερά, που εκφράζει την αρχική τιμή της αναπτυσσόμενης ποσότητας, i ο σταθερός ετήσιος ρυθμός συνεχούς ανάπτυξης, ν σταθερός φυσικός αριθμός και t ο αριθμός των χρονικών διαστημάτων.

Όπως θα δούμε, κεφάλαιο Ko ανατοκιζόμενο επί t έτη με ετήσιο τόκο i του 1€ δίδει τελικό κεφάλαιο $y = Ko\ (1 + i)^{t}$.

Αν ο ανατοκισμός γίνεται ανά εξάμηνο, η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφής $y = Ko\ (1 + i/2)^{2t}$

Αν η σχέση αυτή λυθεί ως προς Ko δίδει $Ko = y\ (1 + i/2)^{-2t}$.

Κατά συνέπεια η συνάρτηση $y = Ko\ (1 + i/2)^{-2t}$ προσδιορίζει την τρέχουσα αξία κεφαλαίου το οποίο μετά t έτη, με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και ετήσιο τόκο i του 1€, θα είναι Ko.

Η συνάρτηση αυτή αποτελεί ένα παράδειγμα συνάρτησης **διακεκριμένης παρακμής** , η γενική μορφή της οποίας είναι $y=b(1+ i/v)^{-vt}$

Σε προβλήματα συνεχούς ανάπτυξης, δηλαδή ανάπτυξης που λαμβάνει χώρα συνεχώς και όχι σε διακεκριμένα χρονικά διαστήματα (π.χ. αύξηση πληθυσμού μιας χώρας , αύξηση βάρους νεογέννητων πτηνών σε ένα ορνιθοτροφείο κ.λ.π.), χρησιμοποιούνται συναρτήσεις της μορφής $Ψ = be^{rt}$, όπου r είναι ο σταθερός ετήσιος ρυθμός συνεχής ανάπτυξης.

π.χ. ο πληθυσμός μιας πόλης, που αυξάνεται με συνεχή ετήσιο ρυθμό 3% υπολογίζεται από τη σχέση $ψ=Π_0e^{0,03t}$ που $Π_0$ ο αρχικός της πληθυσμός.

Οι αντίστοιχες συναρτήσεις σε προβλήματα συνεχούς παρακμής είναι της μορφής $y = be^{-rt}$

Η ισότητα $b(1 + i/v)^{vt}= be^{rt}$ (1) οδηγεί στον υπολογισμό του ετήσιου ρυθμού r συνεχούς ανάπτυξης, όταν είναι γνωστός ο ετήσιος ρυθμός i διακεκριμένης ανάπτυξης και αντίστροφα.

Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η μετατροπή μιας συνάρτησης διακεκριμένης ανάπτυξης σε συνάρτηση συνεχούς ανάπτυξης και αντίστροφα.

2.2.1.1 Εφαρμογή

Να υπολογιστεί η τρέχουσα αξία κεφαλαίου, το οποίο ανατοκιζόμενο προς 20% ετησίως με εξαμηνιαίο ανατοκισμό, θα ανέρχεται σε 2 έτη σε 10 εκατ. €.

Λύση:

$Ψ=10(1+0,2/2)^{-2*2}=10(1,1)^{-4}=10/1,4641≈6,830134$

Κατά συνέπεια η τρέχουσα αξία του κεφαλαίου είναι 6.830.134 €.

2.2.1.2 Εφαρμογή

2. Ο πληθυσμός μιας πόλης, που αυξάνονται κάθε έτος το 1/80 του προηγούμενου έτους, υπολογίζεται από τη σχέση $Π=Π_0(1 +1/80)^t$ Να υπολογιστεί ο ετήσιος αριθμός συνεχούς ανάπτυξης του πληθυσμού.

Λύση:

Θα έχουμε $Π_0e^{rt}=Π_0(1 +1/80)^t$ ή $e^{rt}= (1 +1/80)^t$

Κατά συνέπεια $\ln(e^{rt})=\ln(81/80)^t \Leftrightarrow rt=(\ln81-\ln80)t \Leftrightarrow r=\ln81-\ln80=0.01242$.

Κατά συνέπεια ο ετήσιος ρυθμός συνεχούς ανάπτυξης του πληθυσμού περίπου ίσος με 1,24%.

2.2.1.3 Εφαρμογή

Ο πληθυσμός μιας πόλης, που αυξάνεται κάθε έτος το 1/80 του προηγούμενου έτους, υπολογίζεται από τη σχέση

$Π=Π_O(1+1/80)^t$,όπου Πο ο αρχικός πληθυσμός και t ο αριθμός των ετών. Να υπολογιστεί ο ετήσιος αριθμός συνεχούς ανάπτυξης του πληθυσμού.

Λύση:

Θα έχουμε : $Π_0e^{rt}=Π_0(1 +1/80)^t$ ή $e^{rt}= (1 +1/80)^t$

Κατά συνέπεια $\ln(e^{rt})=\ln(81/80)^t \Leftrightarrow rt=(\ln81-\ln80)t \Leftrightarrow r=\ln81-\ln80=0.01242$.

Άρα ο ετήσιος ρυθμός συνεχούς ανάπτυξης του πληθυσμού είναι περίπου ίσος με 1,24%

2.2.1.4 Εφαρμογή

Ο ετήσιος όγκος πωλήσεων μιας εταιρίας μειώνεται με σταθερό ρυθμό. Αν ο όγκος αυτός ανέρχεται μετά από ένα χρόνο σε 6,87 εκατ. ευρώ και μετά από 4 χρόνια σε 4,36 εκατ. ευρώ. Να υπολογιστεί ο ετήσιος ρυθμός και οι συναρτήσεις α)συνεχούς και β)διακεκριμένης παρακμής

Λύση:

α) Ο ετήσιος όγκος πωλήσεων υπολογίζεται από την σχέση $P=P_0e^{-rt}$, όπου P_0 ο αρχικός ετήσιος όγκος πωλήσεων και r ο ρυθμός συνεχούς παρακμής.

Από τα δεδομένα προκύπτουν οι σχέσεις :

$\{6,87= P_0e^{-r}\} \Rightarrow \{\ln(6,87)=\ln P_0^{-r}\}$

$\{4,36= P_0e^{-4r}\} \Rightarrow \{\ln(4,36)=\ln P_0^{-4r}\}$

Προκύπτει ότι:

$\Rightarrow 1,92716= \ln P_0^{-r}$

$\Rightarrow 1,47247= \ln P_0^{-4r}$

Αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε

$0,45469=3r \Leftrightarrow r=0,15156$

Δηλαδή ο ετήσιος ρυθμός συνεχούς παρακμής είναι 15,156%.

Αντικαθιστώντας το r στην πρώτη από τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε $\ln P_0$ = 2,0772, άρα $P_0 \approx 5,982$.

Κατά συνέπεια η συνάρτηση συνεχούς παρακμής είναι:

$P=5,982\ e^{-0,15256t}$

β) Ο ετήσιος όγκος πωλήσεων υπό μορφή διακεκριμένης παρακμής υπολογίζεται από τη σχέση $P=5,982(1+i)^{-t}$ όπου i ο ετήσιος ρυθμός διακεκριμένης παρακμής. Από την ισότητα $(1+i)^{-t} = e^{-0,15156t}$ προκύπτει $-t\ln(1+i) = -0,15156t$ ή $\ln(1+t) = 0,1515$

Άρα $i=0,166$ ή 16,6%

Η συνάρτηση διακεκριμένης παρακμής είναι $P=5,982\cdot 1166^{-t}$

2.3 Λογαριθμικές Συναρτήσεις

Η λογαριθμική συνάρτηση αποτελεί την αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής συνάρτησης. Έτσι ο λογάριθμος του y είναι η δύναμη στην οποία μια βάση α, πρέπει να υψωθεί για να δώσει τον αριθμό × $\times = \alpha^{y}$

Μαθηματικά εκφρασμένο γράφεται ως : $y=\log_{\alpha}\times$, για $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$.

Κεφάλαιο 3ο : ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

3.1. Όριο Συνάρτησης

Ο μαθηματικός λογισμός είναι ένας ιδιαίτερα χρήσιμος κλάδος των μαθηματικών με ευρείες εφαρμογές. Η χαρακτηριστική διαφορά του είναι η έννοια του ορίου.

Ένα σημείο α στον άξονα των πραγματικών αριθμών, ονομάζεται οριακό σημείο ή όριο (limit) ενός συνόλου Χ αν κάθε περιοχή του α περιέχει σημεία τα οποία ανήκουν στο Χ και είναι διάφορα του α (το α μπορεί να είναι και το κατ' εκδοχή σημείο + ∞ ή - ∞).

Ας υποθέσουμε ότι το α είναι το οριακό σημείο του πεδίου ορισμού Χ μιας συνάρτησης f (χ). Ο αριθμός Α ονομάζεται όριο της συνάρτησης f (χ), καθώς χ → α και συμβολίζεται

$$\lim_{\chi \to \alpha} f(\chi) = A$$

αν για κάθε περιοχή V του αριθμού Α, υπάρχει μια περιοχή u του αριθμού α, τέτοια ώστε, για κάθε χ Ε Χ που ανήκει στο u, f (χ) Ε V (ορισμός του ορίου συνάρτησης κατά Cauchy).

3.2 Συνέχεια Συνάρτησης

Μια συνάρτηση f (χ) λέγεται **συνεχής** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με τις εξής τρεις συνθήκες που πρέπει να συναληθεύουν για να είναι η f(x) συνεχής στο $x = x_0$:

1. Η συνάρτηση ορίζεται στο σημείο Χο. Δηλαδή υπάρχει ο αριθμός $f(\chi_0)$.

2. Υπάρχει το όριο limf (x) και είναι πεπερασμένος αριθμός με $\chi \to \chi_0$.

3. Ισχύει η ισότης

$\lim f(x) = f(x_0)$ με $\chi \to \chi_0$.

Έτσι, αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι μια συνάρτηση **συνεχής** σε ένα σημείο χ_o είναι

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_o)$$

Ισοδύναμα αν η f (χ) είναι **συνεχής** στο X_0, μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_o} x\right)$$

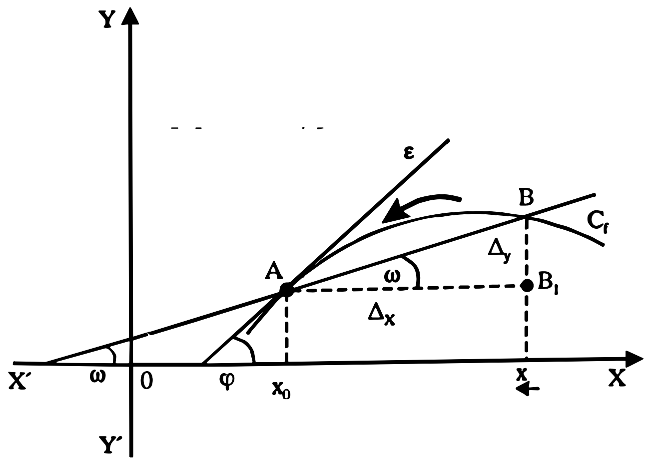
Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός διαστήματος, τότε λέγεται **συνεχής στο διάστημα αυτό.**

3.3 Παράγωγος Συνάρτησης σε Σημείο (Ορισμός - Γεωμετρική ερμηνεία)

Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας συνάρτησης $y = f(x)$ σε ένα σημείο $x_0 \in D(f)$ ορίζεται από τη σχέση:

$f(x_0) = \lim[f(x) - f(xo)]/(x - x_0)$ με $x \to x_0$

όταν βέβαια το όριο αυτό υπάρχει και είναι πεπερασμένος αριθμός.



Σχήμα 3.1

Στο σχήμα 3.1 Α είναι το σημείο με συντεταγμένες $(x_0, f(x_0))$ και $B(x, f(x))$ είναι ένα άλλο τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης C_f της $y = f(x)$.

Ο λόγος $\Delta\psi/\Delta x$ παριστά την κλίση της C_f μεταξύ των Α και Β, είναι δηλαδή $\Delta\psi/\Delta x$ = εφω.

Όμως, όταν $x \to x_0$, τότε και $B \to A$, οπότε η χορδή ΑΒ τείνει να συμπέσει με την εφαπτομένη ε της C_f στο Α.

Κατά συνέπεια $f'(x_0)_{x \to x_0} = \lim \Delta y/\Delta x = \lim_{A \to B}$ εφ ω = εφ φ με $x \to x_0$ και $A \to B$.

Κατά συνέπεια, αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη *στο* x_0, τότε υπάρχει η εφαπτομένη ε της C_fστο $A(x_0, f(x_0))$ και μάλιστα η $f'(x_0)$ ισούται με την κλίση της ε.

Παρατήρηση:

Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι ασυνεχής στο x_0, τότε είτε δεν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ με $x \to 0$, είτε $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ με $X \to 0$.

Από τον ορισμό λοιπόν της παραγώγου προκύπτει ότι **για να είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, πρέπει να είναι συνεχής στο x_0 .** Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

Π.χ. εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση $f(x) = |x| = x$,για $x \geq 0$ και με $-x$,για $x<0$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Ωστόσο lim $(f(x) – f(0))/x$= lim $–x/x$ = -1 για $x \to 0-$, ενώ

lim $(f(x) – f(0))/x$= lim x/x = 1 για $x \to 0+$ και κατά συνέπεια η

$f(x) = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

3.4. Συνάρτηση Παράγωγος – Τύποι Παραγώγισης

Α. Αν Α είναι το σύνολο των σημείων του D(f), στα οποία η συνάρτηση $y = f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη, τότε ορίζεται μία καινούρια συνάρτηση $y = F(x)$ με πεδίο ορισμού το D(f) - A και τύπο $F(x) = f'(x)$.

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται συνάρτηση-παράγωγος της $y = f(x)$ και συμβολίζεται με $y = f'(x)$.

Από τον ορισμό της παραγώγου σε σημείο προκύπτει ότι για κάθε $χ \in D(f) - A$ είναι $f'(x)$ = lim $(f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x$=lim$\Delta f/\Delta x$ για $\Delta x \to 0$, όπου θέσαμε $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$. Γίνεται ακόμη φανερό ότι όταν $\Delta x \to 0$ τότε $\Delta f \to 0$. Έτσι, συμβολίζοντας με dx και df πολύ μικρές (απειροστές) μεταβολές των x και $ψ=f(x)$ αντίστοιχα, μπορούμε να γράψουμε $f'(x) = df/ dx$, για κάθε $x \in D(f) – A$.

Η ποσότητα $df= f'(x)\, dx$, ονομάζεται διαφορικό της συνάρτησης $\Psi = f(x)$.

Για το σύντομο υπολογισμό της παραγώγου χρησιμοποιούνται οι παρακάτω βασικοί τύποι παραγώγισης:

1) $(r)' = 0$ και $(x^r)' = r\, x^{(r-1)}$, για κάθε $r \in IR$.

2) Αν $\Psi = f(x)$ και $\Psi = g(x)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού τότε:

α) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

β) $[f(x) * g(x)]' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ και κατά συνέπεια

$[r\, f(x)]' = r\, f'(x)$, για κάθε $r \in IR$

γ) $[f(x)/g(x)]'$, $[f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)]/[g(x)]^2$, εφόσον $g(x)\neq 0$

3) Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$ και κατά συνέπεια $(e^x)' = e^x$.
4) $(\ln x)' = 1/x$ και κατά συνέπεια $(\log_a x)' = [\ln x/\ln a]' = 1/x\ln a$, $a>0$, $a \neq 1$.

5) $(ημx)' = συνx$, $(συνx)' = -ημx$ και κατά συνέπεια

$(εφx)' = [ημx / συνx]' = 1/συν^2x = 1 + εφ^2x$ και

$(σφx)' = [συνx/ημx]' = -(1 + σφ^2x)$

6) $(τοξημx)' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $(τοξσυνx)' = -1/\sqrt{1-x^2}$

$(τοξ\,εφ\,x)' = 1/(1+x^2)$, $(τοξ\,σφ\,x)' = -1/(1+x^2)$

7) Κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης.

$[(f\circ g)(x)]' = [f(g(x))]' = f_g'(g(x)) * g'(x)$, όπου ο συμβολισμός $f_g'(g(x))$ σημαίνει παράγωγος της $f(g(x))$ ως προς g.

3.5 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ - Κανόνας L' Hospital – Σειρές Taylor

Α. Η **2η παράγωγος** $f''(x)$ (ή $f^{(2)}(x)$) μιας συνάρτησης, εκεί όπου υπάρχει, ορίζεται από τη σχέση $f''(x) = [f'(x)]'$.

Γίνεται αμέσως φανερό ότι $D(f'')$ γνήσιο υποσύνολο του $D(f')$.
Έτσι Π.χ. $(x^3 + 2x)'' = (3x^2 + 2)' = 6x$, $(ημx)'' = (συνx)' = -ημx$ κ.λπ.
Γενικότερα η ν-οστή παράγωγος της $f(x)$ ορίζεται επαγωγικά από τη σχέση $f^{(ν)}(x) = [f^{(ν-1)}(x)]'$, εκεί όπου υπάρχει.

Έτσι Π.χ. $(x^3 + 2x)''' = (6x)' = 6$, $(x^3 + 2x)^{(4)} = 0$,

$(ημx)''' = (-ημx)' = -συνx$ κ.λπ.

Β. Πολλές φορές κατά τον υπολογισμό των ορίων παρουσιάζονται απροσδιόριστες μορφές.

Για την άρση της απροσδιοριστίας 0/0 (αλλά και ∞/∞) χρησιμοποιείται η παρακάτω πρόταση, γνωστή ως κανόνας του L' Hospital.

- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα στο οποίο ανήκει το σημείο $x_0 \in R$, με συνεχείς παραγώγους και $f(x_0) = g(x_0) = 0$, ενώ μια τουλάχιστον από τις $f'(x_0)$ και $g'(x_0)$ είναι διάφορη του μηδενός τότε :

$\lim f(x)/g(x) = \lim f'(x)/g'(x)$ με $x \to x_0$.

- Γενικότερα, αν οι f, g και οι παράγωγοι αυτών μέχρι ν-τάξης μηδενίζονται στο x_0, ενώ μία τουλάχιστον από τις $f^{(\nu+1)}(x_0)$ και $g^{(\nu+1)}(x_0)$ είναι διάφορη του μηδενός τότε: $\lim f(x)/g(x) = \lim f^{(\nu+1)}(x) / g^{(\nu+1)}(x)$ για $x \to x_0$ με την προϋπόθεση ότι οι $f^{(\nu+1)}(x)$ και $g^{(\nu+1)}(x)$ είναι συνεχείς.
- Αν κατά τον υπολογισμό του $\lim f(x)/g(x)$ παρουσιαστεί απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞ , τότε, επειδή, $f(x)/g(x) = (1/g(x))/(1/f(x))$ είναι και πάλι δυνατή η εφαρμογή του κανόνα.
- Τέλος ο κανόνας του L' Hospital γενικεύεται και ισχύει και όταν $x \to \infty$.

Για την άρση των άλλων μορφών απροσδιοριστίας συνήθως αναγόμαστε με κάποια τεχνάσματα στη μορφή 0/0 ή ∞/∞ και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hospital.

Γ. Το παρακάτω γνωστό θεώρημα του διαφορικού λογισμού μας επιτρέπει να αναπτύξουμε μια συνάρτηση σε σειρά δυνάμεων του x.

Έστω μια συνάρτηση $y = f(x)$ συνεχής το διάστημα $[\alpha,\beta]$,που έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης, επίσης συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και x ένα τυχαίο σημείο του (α,β). Τότε, αν $\lim (x-\alpha)^{\nu}/\nu! * f^{\nu}(\alpha + \theta\alpha)=0$

με $\nu \to \infty$, $0 < \theta < 1$, ισχύει $f(x) = \Sigma\ (x-a)^{\nu}/\nu! * f^{\nu}(a)$ (1) με $0 \le \nu < \infty$, όπου $f^{(0)}(a) = f(a)$.

Οι σειρές αυτές είναι γνωστές ως σειρές **Taylor**.

Ειδικά για $a = 0$ η σχέση (1) δίδει: $f(x) = \Sigma\ x^{\nu}/\nu! * f^{\nu}(0)$ (2) με $0 \le \nu < \infty$.

Οι σειρές αυτές είναι γνωστές ως σειρές **Mac-Laurin**. .

3.6. Μελέτη Συνάρτησης με την βοήθεια Παραγώγων

3.6.1. Μονοτονία

Η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι αύξουσα στα διαστήματα εκείνα, για τα οποία ισχύει $f'(x) \geq 0$ (γνήσια αύξουσα, όταν $f'(x) > 0$) και φθίνουσα στα διαστήματα, για τα οποία ισχύει $f'(x) \leq 0$ (γνήσια φθίνουσα, όταν $f'(x) < 0$) .

Π.χ. για την $f(x) = x^2 + 1$, είναι $f'(x) = 2x$ και κατά συνέπεια η συνάρτηση αυτή είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.

3.6.2. Ακρότατα

Τα πιθανά σημεία στα οποία η $y = f(x)$ παρουσιάζει ακρότατα είναι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

Αν x_0 είναι μια τέτοια ρίζα, για να εξετάσουμε αν η $y = f(x)$ παρουσιάζει ακρότατα στο x_0, μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους:

α) Αν η συνάρτηση αλλάζει είδος μονοτονίας αριστερά και δεξιά του x_0, τότε στο x_0 παρουσιάζει ακρότατο. Αν ο τύπος μονοτονίας της παραμένει σταθερός, τότε δεν παρουσιάζει ακρότατο.

Π.χ. για την $f(x) = x^2 + 1$, η εξίσωση $f'(x) = 2x = 0$, έχει σαν μοναδική ρίζα το $x_0=0$.

Επειδή αριστερά του 0 η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα και δεξιά του 0 γνήσια αύξουσα, παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0, fmin = f(0) = 1.

β) Αν $f''(x_0) < 0$, η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο x_0, ενώ αν $f''(x_0) > 0$, η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0.

Αν $f''(x_0) = 0$, βρίσκουμε την μικρότερης τάξης παράγωγο για την οποία είναι $f^{(v)}(x_0) \neq 0$. Τότε, αν $v = 2\kappa + 1$ η συνάρτηση δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.

Αν όμως $v = 2\kappa$ και $f^{(v)}(\chi_0) > 0$, η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο (μέγιστο).

Π.χ. για την $f(x) = x^2 + 1$, είναι $f''(x) = 2 > 0$ και κατά συνέπεια η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο 0.

Επίσης για την $g(x) = x^4/4-x^3/3$, έχουμε $g'(x) = x^3 - x^2 - x^2(x - 1)=0 <=> x = 0$ ή $x = 1$. Ακόμη $g''(x) = 3x^2 - 2x$ με $g''(1) = 1 > 0$, άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο 1, $g^{min} = g(1) = -1/12$.

Αντίθετα $g''(0) = 0$. Όμως $g^{(3)}(x) = 6x - 2$ και $g^{(3)}(0) = -2 \neq 0$. Άρα η συνάρτηση δεν παρουσιάζει άκρα τιμή για $x = 0$.

3.6.3. Κυρτά και κοίλα - Σημεία καμπής

Η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι κυρτή στα διαστήματα όπου $f''(x) > 0$ και κοίλη στα διαστήματα όπου $f''(x) < 0$.

Π.χ. για τη συνάρτηση $y = g(x)$ είναι $g''(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$.

Έτσι, σύμφωνα με το γνωστό από τη στοιχειώδη άλγεβρα θεώρημα για το σημείο του τριωνύμου, είναι $g''(x)<0$ όταν $x \in (0, 2/3)$ και $g''(x)>0$, όταν $x \in (-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty)$.

Έτσι η συνάρτηση $y = g(x)$ είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(2/3, +\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $(0, 2/3)$, ενώ είναι φανερό ότι στα σημεία 0 και 2/3 παρουσιάζει σημεία καμπής.

3.6.4. Εύρεση πλαγίας ασυμπτώτου με παραγώγους

Αν $\lim [f(x) - (\alpha x + \beta)] = 0$ με $\alpha = \lim f(x)/x \neq 0$ με $x \to \infty$ (1), η ευθεία με εξίσωση $\psi=\alpha x + \beta$ είναι μια πλάγια ασύμπτωτη της C_f.

Όπως όμως προκύπτει από την (1), για να είναι $\alpha \neq 0$ θα πρέπει κατά τον υπολογισμό του $\lim f(x)/x$ με $\chi \to \infty$ να παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞. Εφαρμόζοντας λοιπόν τον κανόνα του L' Hospital προκύπτει ότι $\alpha=\lim f'(x)/x' = \lim f'(x)$ με $x \to \infty$.

$\alpha = \lim g'(x)$ (απροσδιοριστία ∞/∞) $= \lim (x^2-2x+7)'/(x^2-2x+1)' = \lim (2x-2)/(2x-2) = 1$ με $x \to \infty$.

Στη συνέχεια συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο για την εύρεση της πλάγιας ασυμπτώτου.

Σημείωση: Αν $f(x)=x+\ln x$ είναι $f'(x) = 1 + 1/x$ και κατά συνέπεια $\lim f'(x) = 1$. Όμως $\lim [f(x) -1] = \lim (\ln x) = \infty$ με $x \to \infty$ και κατά συνέπεια η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη. Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι η (1) από μόνη της δεν είναι ικανή για την ύπαρξη πλαγίας ασυμπτώτου.

3.6.5 Κατασκευή της γραφικής παράστασης

Για το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης y= f(x) με σχετική ακρίβεια ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Εύρεση του D(f) και, αν είναι εύκολο και του R(f).

2. Μελέτη της y = f(x) ως προς τη συνέχεια.

3. Σημεία τομής με τους άξονες (αν μπορούν να προσδιοριστούν αλγεβρικά σχετικά εύκολα).

4. Έλεγχος αν η συνάρτηση είναι άρτια (οπότε η C_f έχει τον ΨΨ' ως άξονα συμμετρίας) ή περιττή (οπότε η C_f έχει την αρχή Ο ως κέντρο συμμετρίας) ή περιοδική

* 5. Μελέτη της y = f(x) ως προς τη μονοτονία.

* 6. Εύρεση άκρων τιμών (αν υπάρχουν).

* 7. Κυρτά, κοίλα και σημεία καμπής (αν υπάρχουν).

* 8. Εύρεση των ασυμπτώτων ευθειών της C_f (αν υπάρχουν).

9. Κατασκευή πίνακα χαρακτηριστικών τιμών της y = f(x) .

10. Σχεδιασμός της C_f.

3.6.5.1. Παράδειγμα

Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 7$.

Λύση:

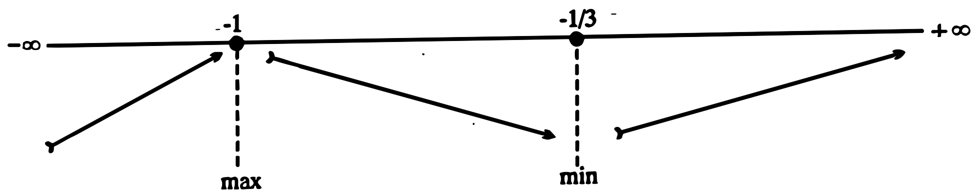
1. Είναι D(f) = IR, ενώ το R(f) δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί αλγεβρικά.

2. Είναι συνεχής στο IR ως πολυωνυμική συνάρτηση.

3. Για $x = 0 \rightarrow y = 7$, ενώ η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν είναι εύκολο να λυθεί.

4. Η συνάρτηση δεν είναι άρτια ούτε περιττή. Επίσης δεν είναι περιοδική, αφού $f(0) = 7 \neq f(x)$ για κάθε θετικό x.

5. $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$. Η $f'(x) = 0$ έχει ρίζες τα -1 και – 1/3 και το τριώνυμο έχει το σημείο του α (α = 3> 0) εκτός των ριζών. Δηλαδή η $\Psi = f(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(-1/3, +\infty)$ και γνήσια φθίνουσα στο $(-1, -1/3)$.



Σχήμα 3.2.

6. Από το σχήμα 3.2. προκύπτει ότι στο -1 η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ($f_{max} = f(-1) = 7$) και στο -1/3 τοπικό ελάχιστο ($f_{min} = f(-1/3) = 6 * 23/27$).

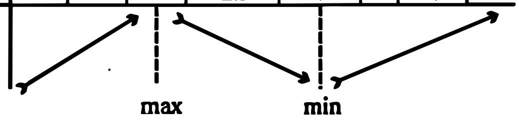
Άλλος τρόπος: $f''(x) = 6x + 4$. Είναι $f''(-1) = -2 < 0$, άρα έχω μέγιστο και $f''(-1/3) = 2 > 0$, άρα έχω ελάχιστο.

7. $f''(x) = 6x + 4 > 0 \rightarrow x > -2/3$. Άρα η συνάρτηση είναι κοίλη στο $(-\infty, -2/3)$ και κυρτή στο $(-2/3, +\infty)$. Το -2/3 είναι σημείο καμπής.

8. Είναι $\lim f(x) = f(x_0) \in R$, για κάθε $x \in$ IR και για $x \rightarrow x_0$, άρα δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Επίσης $\lim f'(x) = \infty$ και κατά συνέπεια δεν υπάρχει ούτε πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη

9. Πίνακας χαρακτηριστικών τιμών

x	-3	-2	-1	-3/2	-1/3	0	-1/2	1
f(x)	-5	5	7	$6_{25/27}$	$6_{23/27}$	7	$8_{1/2}$	11



3.6.5.2 Παράδειγμα

Η ζήτηση Q ενός προϊόντος ως συνάρτηση της τιμής πώλησης P της μονάδας του προϊόντος εκφράζεται από τη σχέση $Q=Q(P)=P^2-4P+3$.

Να κατασκευαστεί η καμπύλη ζήτησης του προϊόντος.

Λύση:

Θα κατασκευάσουμε καταρχήν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $Q(P) = P^2 - 4P + 3$ και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα τμήματά της εκείνα για τα οποία $Q < 0$ ή $P < 0$.

1.$D(Q) = IR$. Από τη σχέση $Q = P^2 - 4P + 3$ προκύπτει P^2-4P+ $+(3-Q)=0$ και για να είναι το P πραγματικός αριθμός θα πρέπει $16 - 4(3 - Q) \geq 0 <=> Q \geq -1$. Άρα $R(Q) = [-1, +\infty)$.

2. Η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το IR.

3. Για το $P = 0$ είναι $Q = 3$, ενώ για $Q = 0$ η εξίσωση $P^2 - 4P + 3=0$ έχει ρίζες τα 1 και 3.

4. Η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή. Επίσης δεν είναι περιοδική. Πράγματι $Q(0) = 3$ και για να είναι $Q(P) = 3$ θα πρέπει $P^2 - 4P = P(P - 4) = 0$, δηλ. $P = 0$ ή $P = 4$. Δηλαδή ο $T = 4$ είναι ο μόνος θετικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $Q(0) = Q(4) = 3$.

Όμως $Q(T + 1) + Q(5) = 8$, ενώ $Q(1) = 0$, δηλαδή $Q(T + 1) \neq Q(1)$.

5. $Q'(P) = 2P - 4 > 0 \rightarrow P > 2$, δηλαδή η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο $(-\infty, 2)$ και αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

6. Για $P = 2$ έχουμε ολικό ελάχιστο, $P(2) = -1$.

7. $Q''(P) = 2 > 0$, άρα η συνάρτηση είναι κυρτή σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της και δεν έχει σημεία καμπής.

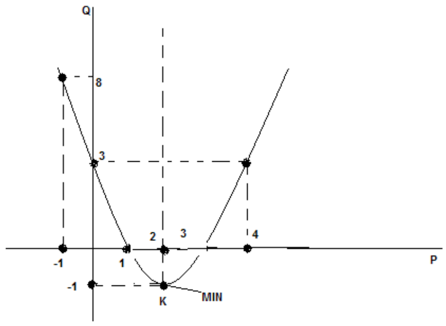
8. lim Q(P) = Q(Po) ε IR, για κάθε Po ε IR. Επίσης lim Q'(P) = lim (2P - 4) = ∞ για Po→ ∞.

Άρα η C_Q δεν έχει ασύμπτωτους.

9. Πίνακας χαρακτηριστικών τιμών

P	-1	0	1	2	3	4
Q	8	3	0	-1	0	3
				min		

10. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι σχεδιασμένη (κατά προσέγγιση) στο σχήμα 4.3.



Σχήμα 3.3

Κεφάλαιο 4ο ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

4.1. Συνάρτηση Ζήτησης

Η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού για μια ορισμένη χρονική περίοδο, εξαρτάται από την τιμή του, αν υποθέσουμε ότι οι άλλοι προσδιοριστικοί παράγοντες (π.χ. οι προτιμήσεις των καταναλωτών, οι τιμές των σχετιζόμενων αγαθών, το εισόδημα κ.λ.π) παραμένουν σταθεροί. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε σε γραμμική μορφή την ακόλουθη συνάρτηση $Q_d = a - B_p$ όπου Q_d είναι η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού, P είναι η τιμή, α είναι μια σταθερά που μπορεί να θεωρηθεί ότι συμπεριλαμβάνει την επίδραση των άλλων παραγόντων που παραμένουν αμετάβλητοι και b είναι η κλίση της συνάρτησης της ζήτησης. Η κλίση είναι αρνητική πράγμα που σημαίνει ότι για κάθε αύξηση (μείωση) της τιμής υπάρχει μείωση (αύξηση) της ζητούμενης ποσότητας. Η σχέση αυτή ονομάζεται νόμος της ζήτησης.

Αν και ο νόμος της ζήτησης δεν αφήνει καμία αμφιβολία όσον αφορά τη σχέση τιμής και ποσότητας, δεν παρέχει επαρκεί γνώση για την ακριβή σχέση μεταξύ τιμής και συνολικών εσόδων. Αν η τιμή του αγαθού αυξηθεί και η ποσότητα που αγοράζεται μειωθεί, το γινόμενο της τιμής επί την ποσότητα (δηλαδή τα συνολικά έσοδα) μπορεί να αυξηθεί, να μειωθεί ή ακόμη να μείνει αμετάβλητο. Η έννοια της ελαστικότητας ζήτησης χρησιμοποιείται για να ερμηνεύσει πως ακριβώς η τιμή ενός αγαθού επηρεάζει τα συνολικά έσοδα των επιχειρήσεων ή ισοδύναμα τις δαπάνες των νοικοκυριών για το αγαθό του οποίου η τιμή έχει μεταβληθεί.

4.1.1 Εφαρμογή

Η ζήτηση Q ενός προϊόντος ως συνάρτηση της τιμής πώλησης P της μονάδας του προϊόντος εκφράζεται από τη σχέση $Q=Q(P)=P^2 -4P+3$. Να κατασκευαστεί η καμπύλη ζήτησης του προϊόντος.

Λύση:

Θα κατασκευάσουμε καταρχήν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $Q(P) = P^2 - 4P + 3$ και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα τμήματά της εκείνα για τα οποία $Q < 0$ ή $P < 0$. Για την κατασκευή της γραφικής παράστασης ακολουθούμε τη διαδικασία, που περιγράψαμε στην 4.4.5.

1.D(Q) = IR. Από τη σχέση $Q = P^2 - 4P + 3$ προκύπτει P^2-4P+ $+(3-Q)=0$ και για να είναι το P πραγματικός αριθμός θα πρέπει $16 - 4\,(3 - Q) \geq 0 <=> Q \geq -1$. Άρα $R(Q) = [-1, +\infty)$.

2. Η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το IR.

3. Για το $P = 0$ είναι $Q = 3$, ενώ για $Q = 0$ η εξίσωση $P^2 - 4P + 3=0$ έχει ρίζες τα 1 και 3.

4. Η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή. Επίσης δεν είναι περιοδική. Πράγματι $Q(0) = 3$ και για να είναι $Q(P) = 3$ θα πρέπει $P^2 - 4P = P(P - 4) = 0$, δηλ. $P = 0$ ή $P = 4$. Δηλαδή ο $T = 4$ είναι ο μόνος θετικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $Q(0) = Q(4) = 3$.

Όμως $Q(T + 1) + Q(5) = 8$, ενώ $Q(1) = 0$, δηλαδή $Q(T + 1) \neq Q(1)$.

5. $Q'(P) = 2P - 4 > 0 \rightarrow P > 2$, δηλαδή η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο $(-\infty, 2)$ και αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

6. Για $P = 2$ έχουμε ολικό ελάχιστο, $P(2) = -1$.

7. $Q''(P) = 2 > 0$, άρα η συνάρτηση είναι κυρτή σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της και δεν έχει σημεία καμπής.

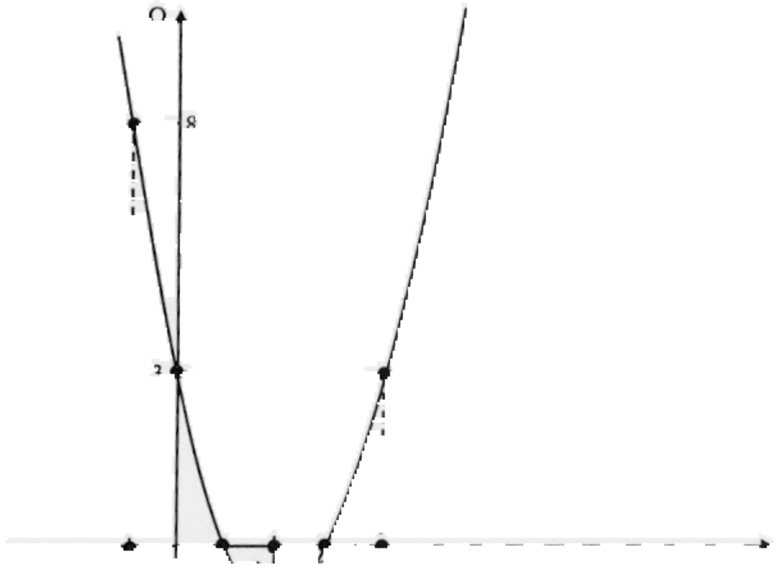
8. lim $Q(P) = Q(Po) \in IR$, για κάθε $Po \in IR$. Επίσης lim $Q'(P) =$ lim $(2P - 4) = \infty$ για $Po \rightarrow \infty$.

Άρα η C_Q δεν έχει ασύμπτωτους.

9. Πίνακας χαρακτηριστικών τιμών

P	-1	0	1	2	3	4
Q	8	3	0	-1	0	3
				min		

10. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι σχεδιασμένη (κατά προσέγγιση) στο σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.1

4.1.2 Εφαρμογή

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης για ένα αγαθό είναι $q=20-4p$:

α)Να βρεθεί η ελαστικότητα ζήτησης

β)Να υπολογιστεί η ελαστικότητα ζήτησης για p=γ

γ)Να δοθεί οικονομική ερμηνεία στην (β)

δ)Για ποια τιμή η ελαστικότητα ζήτησης γίνεται μοναδιαία;

Λύση :

α) Η ελαστικότητα ζήτησης είναι

$$y = -(dq/dp) \cdot (p/q) = -(-4)p/q = 4\, p/(20-4p) = p/(5-p)$$

β) Για p=4 έχουμε $y=[4/(5-4)]=4$

γ) Ελαστικότητα ζήτησης ίση με 4 σημαίνει ότι όταν η τιμή μεταβάλλεται κατά ένα τοις εκατό, η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται κατά 4 τοις εκατό προς την αντίθετη κατεύθυνση. Η ζήτηση του αγαθού με άλλα λόγια είναι ελαστική.

δ) Για $y = 1$ έχουμε $L=p/(5-p) \leftrightarrow p=2{,}5$

4.1.3 Εφαρμογή

Ας υποθέσουμε την ακόλουθη συνάρτηση ζήτησης $q= 27 - P^2$

α) Να βρεθούν οι τιμές για τις οποίες η συνάρτηση ζήτησης είναι ελαστική, ανελαστική και μοναδιαία ελαστική.

β) Χρησιμοποιήστε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) για να περιγράψετε τα συνολικά έσοδα ως συνάρτησης της τιμής .
γ) Να βρεθεί η τιμή που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα.

Λύση :

α) $dq/dp = -2p$ Πολλαπλασιάζουμε επί p / q και έχουμε

$$y = 2p\ (p/q) = 2p^2 / 27 - p^2$$

Αν θέσουμε $y = 1$ έχουμε : $27-p^2=2p^2$
Αν λύσουμε ως προς p τότε $p = \pm 3$ από αυτές τις τιμές μόνο η θετική έχει νόημα οικονομικό. Αρα λοιπόν για την τιμή $p=3$ η συνάρτηση ζήτησης είναι μοναδιαία ελαστική. Επομένως για $p > 3$ η ζήτηση είναι ελαστική και για $p < 3$ είναι ανελαστική.

β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο των συνολικών εσόδων $R = p \cdot q$ και παρουσιάζοντας τα ως συνάρτηση της τιμής έχουμε :

$$R(p)=p(27-p^2)=27p-p^3$$

$$dR/dp=27-3p^2=3(q-p^2)$$

Συνεπώς για $p = 3$ έχουμε $(d R) / (d p) = 0$

$p > 3$ έχουμε $(d R) / (d p) < 0$

$p < 3$ έχουμε $(d R) / (d p) > 0$

γ) Στη τιμή $p = 3$, όπου ο όρος $(d R) / (d p)$ ούτε αυξάνεται ούτε μειώνεται, έχουμε προσεγγίσει ένα ακρότατο, που στην προκειμένη περίπτωση είναι το μέγιστο της συνάρτησης πράγμα που διαπιστώνεται από το αρνητικό πρόσημο της δεύτερης παραγώγου $(d^2 R) / (d p^2) = -6p = -18 < 0$

4.1 Συνάρτηση Προσφοράς

Η συνάρτηση προσφοράς ενός αγαθού ή υπηρεσίας για μια ορισμένη χρονική περίοδο, γράφεται :

$$Q_S = -c + d\,p$$

όπου Q_S είναι η προσφερόμενη ποσότητα του αγαθού, η οποία εξαρτάται από την τιμή του και από μια σειρά άλλους προσδιοριστικούς παράγοντες τους οποίους υποθέτουμε σταθερούς και τους συμβολίζουμε με c. Ο συντελεστής d συμβολίζει τη κλίση της συνάρτησης προσφοράς που είναι θετική, πράγμα που σημαίνει ότι για κάθε αύξηση (μείωση) της τιμής ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας οι παράγωγοι αυξάνουν (μειώνουν) τη προσφερόμενη ποσότητα λέγετε νόμος της προσφοράς .

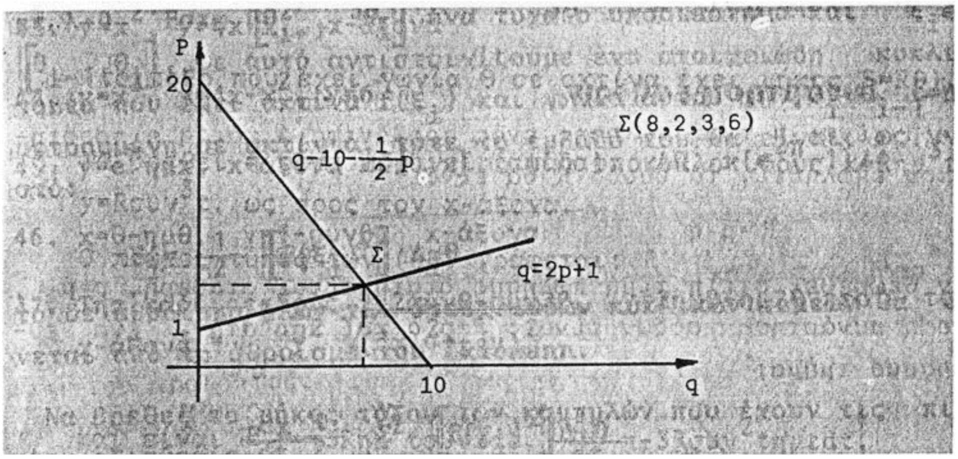
Η ελαστικότητα προσφοράς μετρά τη ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητα που προκαλείται από μια ποσοστιαία μεταβολή της τιμής . Η ελαστικότητα προσφοράς έχει θετική τιμή, που σημαίνει ότι η σχέση ανάμεσα στα συνολικά έσοδα και στη τιμή είναι πάντα ευθέως ανάλογη λόγω της θετικής κλίσης της καμπύλης προσφοράς. Η ελαστικότητα προσφοράς μπορεί να διατυπωθεί ως :

$$e = ((dq) / (dp)) \cdot (p/q)$$

Χρησιμοποιείται από τους οικονομολόγους για να υπολογίσουν την ευαισθησία της προσφερόμενης ποσότητας σε μια καθορισμένη ποσοστιαία μεταβολή της τιμής. Η μέτρηση της ελαστικότητας προσφοράς θεωρείται απαραίτητη, ειδικά σε ορισμένους κλάδους, όπου οι παραγωγικοί συντελεστές μεταφέρονται από την παραγωγή ενός προϊόντος στη παραγωγή ενός άλλου εξαιτίας μιας μεταβολής στη τιμή. Τα πιο συχνά παραδείγματα αναφέρονται στη γεωργία π.χ άνοδος της τιμής του σιταριού σε σχέση με την τιμή του καλαμποκιού οδηγεί σε ιδιαίτερα αυξημένη παραγωγή σιταριού.

4.2.1 Εφαρμογή

Έστω η εξίσωση ζήτησης ενός αγαθού q=10 -1/2p και η εξίσωση προσφοράς q=2P+1. Η εξίσωση ισορροπίας είναι 10-*1/2* P=2P+1 → P= 18/5 =3.6. Η P=3.6 καλείται. τιμή ισορροπίας. Η ποσότητα q=10- 1/2 P=10- ½ * 18/5 =8.2 καλείται ποσότητα ισορροπίας. Το ζεύγος (q,p)=(8,2,3,6) καλείται σημείο ισορροπίας.

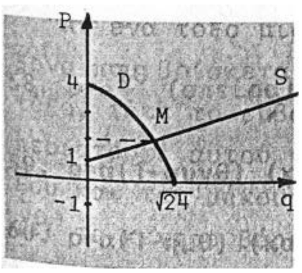


4.2.2 Εφαρμογή

Ποίες από τις πιο κάτω συναρτήσεις $q^2 + p^2 + 2p - 24 = 0$ και $q - 4p + 4 = 0$, όπου P και q η τιμή και η ποσότητα ενός αγαθού, είναι η ζήτηση και ποια η προσφορά του. Να παρασταθούν γραφικά και να βρεθεί το σημείο ισορροπίας του αγαθού.

Θα πρέπει εδώ να πούμε ότι τα P και q είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Από την πρώτη συνάρτηση έχουμε : $q = \sqrt{(24 - 2p - p^2)}$ όπου ασφαλώς $24 - 2p - p^2 \geq 0$ και $q = 4p - 4$. Για $p > 0$ η πρώτη είναι μια φθίνουσα συνάρτηση, ενώ η δεύτερη αύξουσα.

Άρα, η πρώτη συνάρτηση θα πρέπει να είναι μια συνάρτηση ζήτησης και η δεύτερη μια συνάρτηση προσφοράς. Η πρώτη γράφεται: $q^2 + (p + 2p + 1) = 25 \rightarrow q^2 + (p + 1)^2 = 25$. Επομένως θα παριστάνει το τμήμα περιφέρειας κύκλου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο (q,p θετικά).



D = ζήτηση

S = προσφορά

M = σημείο ισορροπίας

Η εξίσωση ισορροπίας είναι:

$4p-4=\sqrt{(24-2p-p^2)} \rightarrow [4(p-1)]^2 = 24-2p-p^2 \rightarrow 17p^2 - 30p - 8 = 0 \rightarrow p=2$

Η p=2 είναι η τιμή ισορροπίας.

Τότε q=4p-4=4

Η q=4 είναι η ποσότητα ισορροπίας. Το σημείο ισορροπίας είναι M(q,p)=M(4,2).

4.2.3 Εφαρμογή

Να βρεθούν οι ελαστικότητες προσφοράς των ακόλουθων συναρτήσεων προσφοράς :

α) $q = 5 + 3p$

β) $q = 3p$

γ) $q = -10 + 4p$

δ) Να γενικεύσετε τα αποτελέσματα

Λύση :

α) $e = (dq/dp) \cdot (p/q) = 3 \cdot p/(5+3p)$

Η καμπύλη προσφοράς είναι ανελαστική για όλες τις τιμές.

β) $e = 3 \cdot p / (3p)) = 1$

Η καμπύλη προσφοράς έχει μοναδιαία ελαστικότητα για όλες τις τιμές.

γ) $e = 4 \cdot p / (-10+4p)$

Η καμπύλη προσφοράς είναι ελαστική για κάθε p > 2,5.

δ) Όταν στη συνάρτηση προσφοράς $q = a + b\,p$, το $a > 0$, η συνάρτηση είναι ανελαστική, αν $a = 0$, η ελαστικότητα είναι ίση με τη μονάδα για κάθε τιμή, και αν τέλος $a < 0$ έχουμε ελαστική συνάρτηση προσφοράς για κάθε τιμή:

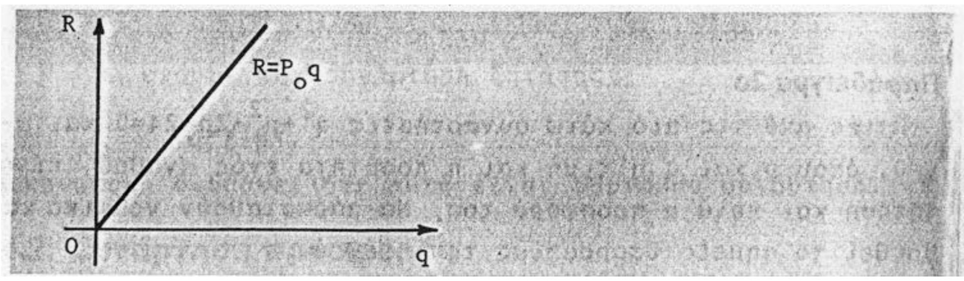
$$p > a / b$$

4.3 Συνάρτηση Εσόδων

Αν p είναι η τιμή πώλησης ενός προϊόντος Α και q η ποσότητα που επωλήθει, τα έσοδα R θα είναι:

$$R=p*q$$

Αν θεωρηθεί ότι η τιμή πώλησης διατηρείται σταθερή, $p=p_0$ τότε η συνάρτηση εσόδων είναι: $R=p_0 * q$ και παριστάνει ένα ευθύγραμμο τμήμα:



Από την συνάρτηση ζήτησης του προϊόντος γνωρίζουμε ότι η τιμή p του προϊόντος είναι συνάρτηση της ζητούμενης ποσότητας, δηλαδή $p=f(q)$.

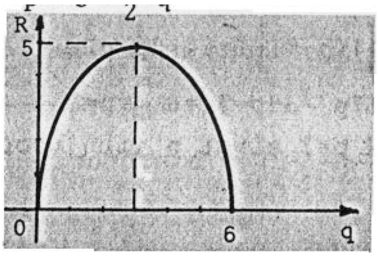
Τότε η συνάρτηση εσόδων γίνεται:

$$R=p * q=f(q) * q=g(q)$$

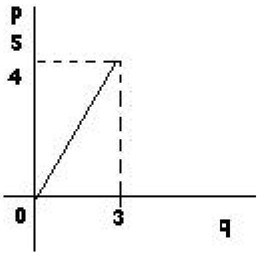
Δηλαδή τα έσοδα είναι συνάρτηση της πωλούμενης ποσότητας

4.3.1 Εφαρμογή

Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης για ένα αγαθό Α είναι:
$q=6-2p$. Τότε $p=3-1/2q$ και $R=pq=(3-1/2q)q=3q-1/2q^2$ → $R=3q - 1/2q^2$



Η γραφική παράσταση δίνεται στο σχήμα με πεδίο ορισμού το [0,6]. Σε περίπτωση που η συνάρτηση εσόδων έχει πεδίο ορισμού το (0,3), τότε η γραφική παράσταση είναι:

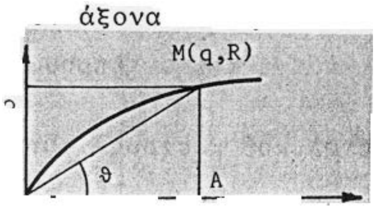


Αν R είναι τα έσοδα, τότε το πηλίκο R/q καλείται μέσο έσοδο. Επειδή $pq=R \Rightarrow P=R/q$, το μέσον έσοδο συμπίπτει με την τιμή p του προϊόντος.

Η παράγωγος των εσόδων R ως προς την ποσότητα q, δηλαδή η dR/dq, καλείται συνάρτηση οριακών εσόδων και παριστάνεται:
$MR= dR / dq$

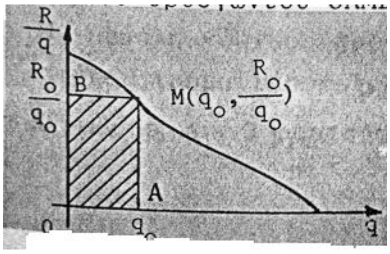
Πρόταση 1:

Αν $M(q_0 ,R_0)$ είναι ένα σημείο της καμπύλης ολικών εσόδων, τότε η αντίστοιχη τιμή των μέσων εσόδων είναι ίση με την τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας θ που σχηματίζει η ευθεία ΟΜ με τον άξονα των q.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο φαίνεται ότι εφθ=ΑΜ/ΟΑ=R/q=p

Πρόταση 2: Αν $M(q_0\ ,\ R_0/q_0)$ είναι ένα σημείο της καμπύλης των μέσων εσόδων, τότε η αντίστοιχη τιμή ολικών εσόδων R, ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΜΒ.



Πρόταση 3 :

Αν $M(q_0,R_0)$ είναι ένα σημείο της καμπύλης ολικών εσόδων τότε η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης των οριακών εσόδων ισούται προς την εφ της γωνίας θ που σχηματίζει η ευθεία που αφάπτεται της καμπύλης στο σημείο $M(q_0\ ,\ R_0\ )$ με τον άξονα των q.

4.4 Συνάρτηση Κόστους

Στη σύγχρονη εποχή οι επιχειρήσεις θεωρούνται ότι παράγουν με στόχο τη μεγιστοποίηση των κερδών τους . Τα κέρδη μιας επιχείρησης υπολογίζονται από τη διαφορά μεταξύ συνολικών εσόδων και συνολικού κόστους.

Η συνάρτηση κόστους προκύπτει από τη συνάρτηση παραγωγής, δηλαδή το συνολικό κόστος εξαρτάται από την παραγόμενη ποσότητα .Υποθέτουμε τη συνάρτηση παραγωγής που χρησιμοποιεί ως μόνη εισροή την εργασία. Επίσης υποθέτουμε ότι η αμοιβή κάθε μονάδας εργασίας (ώρες ή αριθμός εργατών) είναι ίση με ω: Τότε το συνολικό κόστος γράφεται :

$$C = WL + F$$

όπου C = Το συνολικό κόστος
$V = WL$ ή μεταβλητό κόστος
F=σταθερό κόστος

Διαιρώντας τη συνάρτηση συνολικού κόστους με την παραγόμενη ποσότητα παίρνουμε :

$$C/q = (V/q) + (F/q)$$

Δηλαδή το μέσο συνολικό κόστος (C/q) ισούται με το άθροισμα του μέσου μεταβλητού (V/q) και του μέσου σταθερού κόστους (F/q). Παραγωγίζοντας το συνολικό κόστος ως προς το προϊόν παίρνουμε το οριακό κόστος:

$$MC = (dC / dq) = (dC / d L) \cdot (d L/ dq) = (dC / d L) / (dq / d L)$$

Όπου MC το οριακό κόστος.

Αλλά $(dC / d L) = w$ από την υπόθεση που κάναμε ότι το μόνο μεταβλητό κόστος της συνάρτησης είναι η εργασία. Επίσης $(dq / d L)$ είναι η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας (MP). Συνεπώς, το οριακό κόστος , ο μισθός και η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας συνδέονται με τη σχέση : $MC = w / MP$.

4.4.1 Εφαρμογή

Έστω η ακόλουθη συνάρτηση συνολικού κόστους :

$$C = 200 + 60q - 4q^2 + 0{,}1q^3$$

α) Να υπολογιστεί το οριακό και το μέσο κόστος για q = 10

β) Να βρεθεί το μέγεθος παραγωγής που ελαχιστοποιεί το οριακό κόστος.

Λύση :

α) $MC = (TC)' = 60 - 8q + 0{,}3q^2$ για $q = 10$ $MC = 10$

$AC = (200 / q) + 60 - 4q + 0{,}1q^2$ για $q = 10$ $AC = 50$

β) $MC' = -8 + 0{,}6q$ για $MC' = 0$ παίρνουμε $q = 13{,}3$

Για αυτή την τιμή , η συνάρτηση οριακού κόστους ελαχιστοποιείται , επειδή

$$MC'' = 0{,}6 > 0$$

4.4.2 Εφαρμογή

Αν η ζήτηση ενός αγαθού περιγράφεται από τη συνάρτηση $q = 10 - 0{,}5\,p$ και το συνολικό κόστος παραγωγής του από τη συνάρτηση $TC = 0{,}5q + 5q + 100$:

α) Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα .
β) Ν βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος .
γ) Να βρεθεί το μέσο σταθερό κόστος που αντιστοιχεί στο επίπεδο παραγωγής(β)
δ) Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη.

Λύση:

α) Η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης είναι η $p = 20 - 2q$ επομένως για τα συνολικά έσοδα έχουμε :

$$(dR/dq) = (d/dq) \cdot (20q - 2q^2) = 20 - 4q = 0 \ , q = 5$$

Η δεύτερη παράγωγος δίνει :

$$(dR/dq) = (d/dq) \cdot (20-4q) = -4 < 0$$

Αρα οι συνθήκες δευτερης τάξης για μέγιστο ικανοποιούνται .

β) Η συνάρτηση μέσου κόστους είναι :

$$AC = TC/q = 0,5q + 5 (100 / q)$$

Αν θέσουμε τη παράγωγο της ίση με το μηδέν :

$$AC' = 0,5 – 100/q = 0 \qquad q = \pm\sqrt{200}$$

Από τις δυο ρίζες φυσικά δεχόμαστε τη θετική, άρα το μέσο κόστος ελαχιστοποιείται για $q \approx 14$ μονάδες. Εξετάζοντας τις συνθήκες δεύτερης τάξης βρίσκουμε :

$$AC'' = 200q > 0$$

γ) Για την εύρεση του σταθερού κόστους θέτουμε στη συνάρτηση κόστους $q = 0$ και παίρνουμε $F = 100$,άρα το μέσο σταθερό κόστος για $q = 14$ είναι :

$$AFC = F / q = 100 / 14 \approx 7$$

δ) Η συνάρτηση κέρδους είναι :

$$\pi(q)'=(20q-2q^2)-(0,5q^2 + 5q+100)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο δίνουν :

$$\pi(q)'=20-4q – (q+5) =0 \text{ και } q=3$$

και οι συνθήκες δεύτερης τάξης ικανοποιούνται $\pi(q)''=-5<0$

4.4.3 Εφαρμογή

Μια εταιρεία ενοικιάσεως αυτοκινήτων διαθέτει 10 ίδια αυτοκίνητα. Η τιμή αγοράς κάθε αυτοκινήτου είναι 15.000€ και εκτιμάται ότι το μέσο λειτουργικό κόστος , συμπεριλαμβάνοντας και τις αποσβέσεις , ανέρχεται σε 0,50€ ανά χιλιόμετρο.

α) Να γραφεί μια μαθηματική εξίσωση η οποία να περιγράφει το κόστος κτήσης και το λειτουργικό κόστος κάθε αυτοκινήτου.

β) Να αξιολογηθεί το κόστος του κάθε αυτοκινήτου για την εταιρεία, αν καθένα από αυτά τα αυτοκίνητα πραγματοποιεί 40.000 χιλιόμετρα.

γ) Ποιο είναι το συνολικό κόστος των 10 αυτοκινήτων για την επιχείρηση , δεδομένου ότι το κάθε ένα πραγματοποιεί 40.000 χιλιόμετρα.

Λύση :

α) Ας συμβολίσουμε × και y το κόστος κτήσης και το λειτουργικό κόστος και το κόστος των χιλιομέτρων που έχει διανύσει ένα αυτοκίνητο ,αντίστοιχα. Η μαθηματική εξίσωση που περιγράφει το κόστος κτήσης και το λειτουργικό κόστος που αντιστοιχεί σε κάθε ένα από αυτά τα αυτοκίνητα λαμβάνει την μορφή :

$$y = 15.000+0{,}5x$$

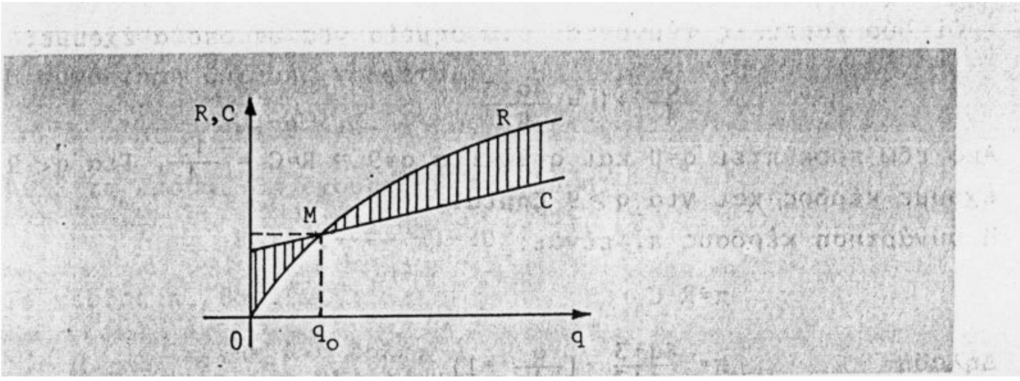
Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι η αρχική δαπάνη για κάθε αυτοκίνητο ανέρχεται σε 15.000€ και το κόστος για κάθε χιλιόμετρο που διανύει κάθε ένα αυτοκίνητο ανέρχεται σε 0,5€. Επομένως το συνολικό κόστος του κάθε αυτοκινήτου μπορεί να εκτιμηθεί λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμό των αριθμό των χιλιομέτρων (x) που έχει διανύσει κάθε αυτοκίνητο.

β) Αν $x=40.000$, τότε $y=15.000+0{,}5 \cdot 40.000=35.000$€

γ) Το συνολικό κόστος κτήσης και λειτουργίας (για 40.000 χιλιόμετρα) των 10 αυτοκινήτων ανέρχεται σε 350.000€

4.5 Εξίσωση εσόδων και κόστους

Θεωρούμε τις συναρτήσεις ολικού κόστους C και τέμνονται έστω στο σημείο Μ.

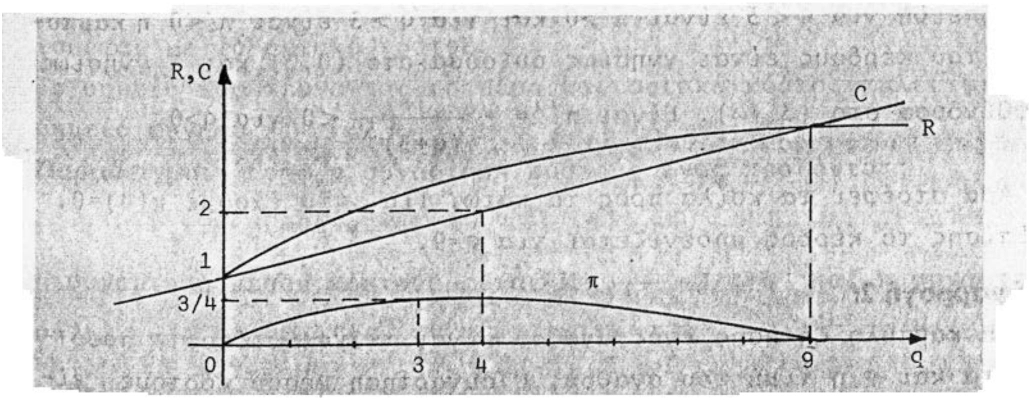


Το σημείο Μ που τέμνονται οι δύο καμπύλες καλείται νεκρό σημείο. Εκεί τα έσοδα ισούνται με το κόστος. Για $0<q<q_0$ έχουμε $R<C$, ενώ για $q>q_0$ έχουμε $R>C$.

Επομένως στο διάστημα $(0,q_0)$ έχουμε ζημία και για τιμές του q μεγαλύτερες του q_0 έχουμε κέρδος.

4.5.1 Εφαρμογή

Η συνάρτηση κόστους μιας επιχειρήσεως είναι $C= q/4+1$, όπου C και q το κόστος και η ποσότητα του προϊόντος. η δε συνάρτηση ολικών εσόδων είναι $R= (4q+3)/(q+3)$, όπου R το έσοδο. Να παρασταθούν γραφικά και μετά να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης κέρδους.



Η καμπύλη κόστους παριστάνει ευθεία. Η καμπύλη εσόδων παριστάνει τμήμα ισοσκελούς υπερβολής με οριζόντια ασύμπτωτη, την R=4. διότι lim (4q+3)/(q+3) =4 με q→∞.

Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία για τα οποία έχουμε: q/4+1= (4q+3)/(q+3).

Από εδώ προκύπτει q=0 και q=9. Για q=9 → R=C = 13/4. Για q< 9 έχουμε κέρδος και για q>9 ζημία. Η συνάρτηση κέρδους π, είναι:

π=R-C

Δηλαδή π= (4q+3)/(q+3) – (q/4+1)

Π=(4q+3)/(q+3)- q/4-1

παραγωγίζοντας έχω

π'= $[(4q+3)'/(q+3)- (4q+3)/(q+3)']/(q+3)^2$ – ¼=$9/(q+3)^2$-1/4

π'=0→$9/(q+3)^2$-1/4=0 → $(q+3)^2$=36→q+3=6→q=3

π''=$-18/(q+3)^3$<0 για q>0. Άρα στο q=3 το κέρδος π έχει μέγιστο, το οποίο είναι π= ¾.

Επειδή για q< 3 είναι π'>0 και για q>3 είναι π'<0 η καμπύλη του κέρδους είναι γνησίως αύξουσα στο (0,3) και γνησίως φθίνουσα στο (3,+∞). Είναι π'' = $-18/(q+3)^3$ <0 για q>0.

Άρα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Για q=0 έχουμε π(0)=0. Επίσης το κέρδος μηδενίζεται για q=9.

4.5.2 Εφαρμογή

Η καμπύλη ζήτησης ενός αγαθού είναι x+2y=40, όπου x ποσότητα και y η τιμή του αγαθού. Η συνάρτηση μέσου κόστους είναι M= 20/x+4. Να βρεθεί η ποσότητα που μεγιστοποιείται το κέρδος.

Έχουμε M= C/x = 20/x +4, όπου C το κόστος. Άρα: C=2O+4x

Αυτή είναι η συνάρτηση κόστους.

Η συνάρτηση ζήτησης γράφεται: y=20- 1/2 x .

Αν R τα έσοδα, θα έχουμε: R=xy. Άρα:

$R=x(20\text{-}1/2\text{-}\ x)=20x\text{-}\ 1/2x^2$.

Το κέρδος π, θα είναι: π= R-C δηλ.: $π=(20x\text{-}1/2+x^2)\text{-}(20+4x)$ ή $π=\text{-}\ 1/2\ x^2+16x\text{-}20$. →π'=-x+16. π'=0 → -x+16=0 →x=16

π''=-1<0. Άρα για x=16 έχουμε μέγιστο κέρδος.

4.5.3 Εφαρμογή

Για την παραγωγή ενός προϊόντος προβλέπεται ένα αρχικό κόστος 600 χ.μ. και στη συνέχεια τρέχοντα έξοδα 5 χ.μ. ανά μ.μ. του προϊόντος, η τιμή πώλησης του οποίου είναι 10 χ.μ. η μ.μ.

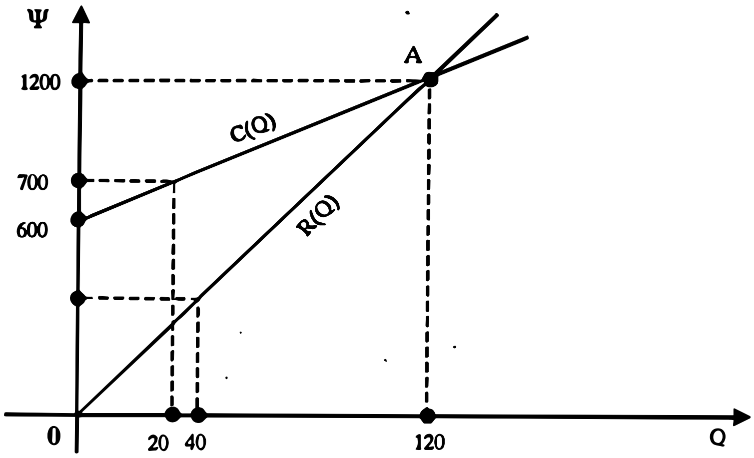
α) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων του κόστους παραγωγής και του εσόδου από την πώληση του προϊόντος.

β) Να προσδιοριστεί αλγεβρικά και γραφικά το σημείο εκείνο της ποσότητας Q του προϊόντος, για την οποία τα έξοδα παραγωγής, ισοσκελίζονται με τα έσοδα από την πώληση του προϊόντος **(breakeven point).**

Λύση:

Έστω Q η παραγόμενη ποσότητα του προϊόντος.

α) Η συνάρτηση του κόστους παραγωγής είναι C(Q) = 600 + 5Q, ενώ η συνάρτηση των εσόδων από την πώληση είναι R(Q) = 10Q, με Q > O. Οι γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων δίδονται στο σχήμα 2.3. (το χρησιμοποιούμενο σύστημα αξόνων δεν είναι ορθοκανονικό).



Σχήμα 2.3.

β) Το ζητούμενο σημείο Q_0 προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης C(Q) = R(Q) ή 600+5Q = 10Q και είναι Q_0 = 120 μ.μ.

Γραφικά στο σχήμα 2.3. το Qo αντιστοιχεί στο σημείο A(120, 1200) της τομής των ημιευθειών C(Q) και R(Q).

Οι συντεταγμένες του A αντιστοιχούν στη μοναδική λύση του συστήματος των εξισώσεων ψ=600+5Q και ψ=10Q, με αγνώστους τα ψ και Q.

4.6. Σημείο φυγής

Έστω η συνάρτηση μέσου κόστους: $M = C/q$.

Η παράγωγος αυτής είναι: $M' = (C'q - C)/2 = 0$. Από εδώ έχουμε:

$C'q - C = 0 \rightarrow C' = C/q \rightarrow MC = M$.

Άρα εκεί που το μέσο κόστος παίρνει την ελάχιστη τιμή του ισούται με το οριακό κόστος.

Το σημείο που τέμνονται το μέσο .1cαι. οριακό κόστος καλείται σημείο φυγής.

4.6.1 Εφαρμογή

Έστω η συνάρτηση κόστους ενός προϊόντος:

$C = 2q - q^2 + q^3$

Η συνάρτηση μέσου κόστους είναι $M = C/q = 2 + q + q^2$ και η συνάρτηση οριακού κόστους είναι: $MC = 2 - 2q + 3q^2 \rightarrow M = MC \rightarrow$

$2 + q + q^2 = 2 - 2q + 3q^2 \rightarrow q = ½$.

Για $q = ½ \rightarrow M = 7/4$. Άρα το σημείο φυγής είναι $M(1/2, 7/4)$.

4.7 Συνάρτηση Παραγωγής

Οι λογάριθμοι έχουν πολλές χρήσιμες εφαρμογές στα οικονομικά. Η ανάγκη για τη χρήση λογάριθμων εμφανίζεται ιδιαίτερα σε μη γραμμικές συναρτήσεις. Οι μη γραμμικές συναρτήσεις μπορούν να μετασχηματιστούν σε γραμμικές με τη βοήθεια των λογαρίθμων. Η συνάρτηση παραγωγής Cobb –Douglas: $Q=AK^{a} L^{b}$ είναι ένα από τα συνηθισμένα παραδείγματα αυτού του λογαριθμικού μετασχηματισμού .Στη συνάρτηση αυτή το Q είναι το παραγόμενο προϊόν που είναι το αποτέλεσμα του συνδυασμού των συντελεστών κεφαλαίου (K) και εργασίας (L), A είναι μια σταθερά που περιλαμβάνει κυρίως την τεχνολογική πρόοδο και, a και b, είναι παράμετροι που δηλώνουν το βαθμό ομοιογένειας της εξίσωσης. Η εξίσωση γράφεται σε λογαριθμική γραμμική μορφή, αν πάρουμε λογάριθμους και από τις δύο πλευρές της X.

Έτσι : $\ln Q=\ln A+a\ln K+b\ln L$

Η γενίκευση της συνάρτησης Cobb-Douglas,που είναι η συνάρτησης των σταθερών ελαστικοτήτων αποκατάστασης γνωστή ως συνάρτηση παραγωγής CES γράφεται:$Q=A[aK^{-e} +(1-a) L^{-e}]^{-1/e}$

Ας πάρουμε λογαρίθμους, καταλήγουμε στη σχέση :

$$\ln Q=\ln A - (1/e) \ln[aK^{-e} +(1-a) L^{-e}]$$

που είναι πλήρως λογαριθμίσιμη, επειδή οι όροι στην αγκύλη δεν μετατρέπονται σε λογάριθμους.

Στη συνάρτηση παραγωγής συνήθως αποδίδονται τα ακόλουθα χαρακτηριστικά :

- Παραγωγή μπορεί να υπάρξει μόνο όταν υπάρχει εισροή εργασίας, δηλαδή το συνολικό προϊόν, TP=0 όταν L=0
- Η πρώτη παράγωγος του συνολικού προϊόντος ως προς την εργασία είναι θετική , $Dtp/Dl \geq 0$, δηλαδή η μεταβολή που προκαλείται στο συνολικό προϊόν από τη μεταβολή της εργασίας ή αλλιώς το οριακό προϊόν της εργασίας, είναι θετική.

- Οι ρυθμοί αύξησης του προϊόντος είναι υψηλοί μέχρι ένα ορισμένο επίπεδο απασχόλησης L. Μετά οι αυξήσεις του προϊόντος μειώνονται σταδιακά. Παρατηρούνται φθίνουσες αποδόσεις του συντελεστή εργασίας. Μαθηματικά μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$f''(L)>0 \text{ για } L<L_1$$
$$f''(L)<0 \text{ για } L>L_1$$

Αν η παραγωγή συνεχίσει μετά το L_2, θα υπάρχει ένα άλλο επίπεδο απασχόλησης L_3, πέραν του οποίου το οριακό προϊόν (MP) γίνεται αρνητικό και το συνολικό προϊόν θα αρχίσει να μειώνεται. Ασφαλώς οι επιχειρηματίες θα θέλουν να προσλάβουν προσωπικό μέχρι που να απασχολήσουν, το πολύ L_3 ,εργαζόμενους. Για απασχόλησης μεγαλύτερη από L_3 παρατηρούμε ότι η παραγωγή μειώνεται αντί να αυξάνεται. Η μαθηματική διατύπωση αυτής της πρότασης είναι :

$$f'(L)<0 \text{ για } L>L_3$$

4.7.1 Εφαρμογή

Η συνάρτηση παραγωγής ενός αγαθού είναι: $Q(K,L)=3K^2+3KL+2L^2$

Να προσδιοριστούν τα μεγέθη του κεφαλαίου και της εργασίας για τα οποία τα οριακά φυσικά προϊόντα του κεφαλαίου και της εργασίας γίνονται ίσα με 20 μ.μ του παραγόμενου προϊόντος.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι το οριακό φυσικό προϊόν του κεφαλαίου συμβολίζεται με $κ=Q_K$ ενώ το οριακό φυσικό προϊόν της εργασίας $ν=Q_L$

$$κ=Q_K=6K+3L \text{ και } ν=Q_L=3K+4L$$

κατά συνέπεια προκύπτει το σύστημα:

{6K+3L}
{3K+4L} ,το οποίο έχει μοναδική λύση K=4/3, L=4

Το K μετριέται σε χρηματικές μονάδες και το L σε μονάδες εργασίας π.χ ώρες, ημέρες, κ.λ.π.

4.8 Το Υπόδειγμα του Τέλειου Ανταγωνισμού

Στη νεοκλασική θεωρία γίνεται συχνά αναφορά σε ένα υπόδειγμα αγοράς που χαρακτηρίζεται από ένα μεγάλο αριθμό μικρών σχετικά με το μέγεθος της αγοράς-παραγώγων που πωλούν ένα ομοειδές προϊόν. Αυτό το είδος της αγοράς κυριαρχείται ακόμη από ένα μεγάλο αριθμό μικρών σχετικά με το μέγεθος της αγοράς αγοραστών. Οι αγοραστές και οι πωλητές έχουν τέλεια πληροφόρηση για τις τιμές και το κόστος κάθε προϊόντος. Ακόμη υπάρχει τέλεια κινητικότητα στους συντελεστές παραγωγής.

Αυτό συνεπάγεται ότι στη περίπτωση που υπάρχουν υπερκανονικά κέρδη σε έναν κλάδο η είσοδος της επιχειρήσεων από άλλους κλάδους οδηγεί σε υπερπροσφορά και κατά συνέπεια σε χαμηλότερη τιμή, που συνεπάγεται την επαναφορά της κατάστασης με κανονικά κέρδη. Αν πάλι υπάρχουν ζημιές σε ένα κλάδο, η έξοδος των επιχειρήσεων από τον κλάδο οδηγεί ελάττωση της προσφοράς συνεπώς σε υψηλότερη τιμή, που αναμένεται να επαναφέρει τη κατάσταση, στην οποία οι επιχειρήσεις πουλούν σε μία τιμή με την οποία εξασφαλίζουν κανονικά κέρδη. Αυτή η τιμή ισούται με το ελάχιστο μέσο κόστος της επιχείρησης. Το κανονικό κέρδος είναι συστατικό στοιχείο του κόστους.

Αυτό το υπόδειγμα χρησιμοποιείται για να περιγράψει και κατά συνέπεια να προβλέψει τη συμπεριφορά των παραγώγων. Το υπόδειγμα λέγεται τέλειος ανταγωνισμός, επειδή πιστεύεται ότι αντιπροσωπεύει το ιδανικό είδος αγοράς.

Τα συμπεράσματα αυτά του υποδείγματος χρησιμοποιούνται για να κρίνουν αν και κατά πόσο ο πραγματικός ανταγωνισμός διαφέρει από τον τέλειο. Αν η απόκλιση είναι σημαντική, τότε σύμφωνα με την καθιερωμένη οικονομική θεωρία υπάρχει αιτιολογία για κρατική παρέμβαση. Το κράτος προσπαθεί να διορθώσει τις ατέλειες της αγοράς και να μετατρέψει την οικονομική ζώνη έτσι που να προσεγγίζει τον τέλειο ανταγωνισμό.

Μια από τις λογικές συνεπαγωγές του τέλειου ανταγωνισμού είναι ότι, οι παραγωγοί και οι καταναλωτές λόγω του μεγάλου αριθμού τους και του μικρού μεγέθους τους, μεμονωμένοι είναι εντελώς αδύναμοι να επηρεάσουν τις τιμές. Η τιμή γι'αυτούς είναι κάτι δεδομένο. Με δεδομένη τη τιμή κάθε παραγωγός αποφασίζει πόση ποσότητα θα παράγει. Το κριτήριο του παραγωγού είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους τους.

Έστω ότι τα συνολικά έσοδα είναι $R=p \cdot q$ και η συνάρτηση κόστους είναι $C = a + f(q)$, οπου το (a) αντιπροσωπεύει το σταθερό κόστος και f(q) το μεταβλητό κόστος τότε η συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης είναι: $\pi = R-C = pq-a-f(q)$ η οποία μεγιστοποιείται, όταν θέσουμε τη πρώτη της παράγωγο ίση με το μηδέν $\pi'=p-f'(q)=0$.

Για $\pi'=0$ παίρνουμε την αναγκαία συνθήκη για μέγιστο, $P=f'(q)=MC$. Με άλλα λόγια το κέρδος της τέλειας ανταγωνιστικής επιχείρησης μεγιστοποιείται, όταν η τιμή πώλησης ισούται με το οριακό κόστος. Η ικανή συνθήκη για τη μεγιστοποίηση του κέρδους απαιτεί αρνητική τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης κέρδους, δηλαδή $\pi''=f''(q)<0$

4.8.1 Εφαρμογή

Έστω η τιμή μιας τέλειας ανταγωνιστικής αγοράς ισούται με 61 ν.μ. και έστω η συνάρτηση συνολικού κόστους μιάς επιχείρησης που λειτουργεί σ' αυτή την αγορά είναι:

$$C(q)=q^3-11q^2+42q+15$$

Να υπολογιστούν:

α) Η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη αυτής της επιχείρησης

β) Το μέγιστο κέρδος

γ) Τα σημεία καμπής της συνάρτησης κέρδους αυτής της επιχείρησης

Λύση:

α) $\pi=pq-C(q)=61q-(q^3-11q^2+42q+15)=-q^3+11q^2+19q-15$

$\pi'=-3q^2+22q-19=0$ και $q=6,33$, $q=1$

οι συνθήκες της δεύτερης τάξης δίνουν:

$\pi''=-6q+22$

για $q=6,33$, λαμβάνουμε $\pi''=-16<0$, άρα τα κέρδη μεγιστοποιούνται ενώ για $q=1$, λαμβάνουμε $\pi''=\pm 16>0$, άρα τα κέρδη ελαχιστοποιούνται

β) $\pi=(6,33)^3+(11)(6,33)^2-(19)(6,33)-15=52,07$ ν.μ.

γ) $\pi''=-6q+22=0$ και $q=3,66$ είναι το σημείο καμπής.
Πράγματι για $q<3,67$ η $\pi''>0$ και η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα της προς τα πανω, ενώ για $q>3,67$ η $\pi''<0$ και η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα της προς τα κάτω.

4.8.2 Εφαρμογή

Έστω μια ανταγωνιστική αγορά με τις ακόλουθες γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς: $q_d=-5+p$.
Υποθέτουμε ότι η κυβέρνηση επιβάλλει φορολογία ύψους t αν μονάδα προσφερόμενου προϊόντος και οι πωλητές συμπεριλαμβάνουν το φόρο αυτό στη συνάρτηση προσφοράς τους. Να υπολογίσετε το ύψος του t που μεγιστοποιεί τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης καθώς και τα αντίστοιχα έσοδα της κυβέρνησης.

Λύση :

Η συνάρτηση προσφοράς γράφεται : $q_s=-5+(p-t)$
την οποία όταν την εξισώσουμε με τη συνάρτηση ζήτησης λαμβάνουμε → $45-4p=-5+(p-t)$
Που λύνει για : $P_e=10+(t/5)$

Η ισότητα ισορροπίας που αντιστοιχεί σ' αυτή τη τιμή είναι:

$$q_e=5-(4t/5)$$

Τα συνολικά φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης θα είναι:

$$T=tq=t(5-4t/5)=5t-(4/5)\cdot t^2$$

Τα οποία μεγιστοποιούνται αν $(dT)/(dt)=5-(8t/5)=0$ και $t=25/8$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης δίνουν:

$$(d^2T)/(dt^2)=-8/5<0$$

Άρα πράγματι για $t=25/8$ μεγιστοποιούνται τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης που είναι :

$$T=tq=5\cdot(25/8)-(4/5)(25/8)^2=125/16$$

4.9 Το Υπόδειγμα του Καθαρού Μονοπωλίου

Μονοπώλιο, όπως η λέξη υποδηλώνει είναι μια μορφή αγοράς όπου μια επιχείρηση πουλά ένα προϊόν για το οποίο δεν υπάρχουν στενά υποκατάστατα. Σε αντίθεση με την επιχείρηση που λειτουργεί στον τέλειο ανταγωνισμό, ο μονοπωλητής κατέχει δύναμη επιβολής δικής του τιμολογιακής πολιτικής. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι ο μονοπωλητής χρεώνει την υψηλότερη δυνατή τιμή. Στη καθιερωμένη μικροοικονομική θεωρία, ο μονοπωλητής συμπεριφέρεται ορθολογικά, και αυτό σημαίνει ότι στόχος του είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους.

4.9.1 Εφαρμογή

Η συνάρτηση ζήτησης ενός μονοπωλητή είναι η $p+2q=45$ και η συνάρτηση κόστους είναι η $TC=2q^2+13q$.
Αν η κυβέρνηση επιβάλλει ένα φόρο t ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος να υπολογίσετε το ύψος του t που μεγιστοποιεί τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης.

Λύση :

Τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης θα είναι: $TR=45q-2q^2$
και η καινούργια συνάρτηση κόστους: $TC=2q^2+13q+tq$

Επομένως, συνάρτηση κέρδους του μονοπωλητή γράφεται

$$\Pi=45q-4q^2-13q-tq$$

Η μεγιστοποίηση των κερδών απαιτεί το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης των κερδών.

Άρα έχουμε : $\pi'=45-8q-13-t=0$ και $q=4-(t/8)$

Στην προκειμένη περίπτωση τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης θα είναι:

$$T=t(4-(t/8))=4t-(1/8)t^2$$

Για να μεγιστοποιήσουμε την ανωτέρω συνάρτηση θέτουμε :

$$T'=4-0{,}25t=0 \quad \text{και} \quad t=16$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης δίνουν : $T''=-0{,}25<0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

5.1. Ορισμός και έννοιες

Η αντιστοιχία μεταξύ δύο μεταβλητών x και y, έτσι ώστε σε κάθε τιμή του x (ανεξάρτητη μεταβλητή) που ανήκει σ' ένα σύνολο x, να αντιστοιχεί μονοσήμαντα μια τιμή του y (εξαρτημένη μεταβλητή) που ανήκει σ' ένα δεύτερο σύνολο Y, καλείται συνάρτηση. Ο συμβολισμός της f συνάρτησης είναι $X \rightarrow Y$ ή $y=f(x)$.

Ο στοιχειώδης λογισμός πραγματεύεται κυρίως συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής. Όμως τόσο στη μελέτη των καθαρών όσο και των εφαρμοσμένων μαθηματικών συναντούμε συναρτήσεις δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Έστω D ένα σύνολο ζευγών πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση (απεικόνιση) f που σε κάθε ζεύγος $(x,y) \in D$ αντιστοιχεί ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός, που συμβολίζεται $f(x,y)$ ονομάζεται **συνάρτηση δυο πραγματικών** (ανεξάρτητων) **μεταβλητών**. Το σύνολο D ονομάζεται όπως συνήθως το **πεδίο ορισμού** της f. Το **πεδίο τιμών** της f αποτελείται από όλους τους πραγματικούς αριθμούς $f(x,y)$, όπου $(x,y) \in D$. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται είναι $z=f(x,y)$.

Στη φυσική, ή καλύτερα εν γένει στην τεχνολογία, υπάρχουν πολλά παραδείγματα όπου εμφανίζονται μεγέθη που εξαρτώνται από κάποια άλλα, ανεξάρτητα μεταξύ τους, μεταβλητά μεγέθη, π.χ. α)στην ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου η ταχύτητα $u=s/t$, εξαρτάται από το διάστημα s και το χρόνο t, όπου το s μπορεί να μεταβάλλεται ανεξάρτητα από το t. Καλούμε λοιπόν αυτή την αντιστοιχία συνάρτηση υ με ανεξάρτητες μεταβλητές τις s,t και συμβολίζουμε με: $(s,t) \rightarrow u$ ή $u=f(s,t)$.

β) Έστω σημείο Μ στο χώρο, δηλ. η θέση του καθορίζεται πλήρως από μια τριάδα διατεταγμένων αριθμών (x,y,z) Η θερμοκρασία Τ από σημείο σε σημείο διαφέρει. Θα έχουμε λοιπόν τη συνάρτηση T=f(x,y,z).

γ) Αν συμβολίσουμε με t το χρόνο, τότε η θερμοκρασία Τ εξαρτάται από το σημείο του χώρου και από το χρόνο t . Έτσι λοιπόν T=f(x,y,z,t).

Γενικεύουμε τα πιο πάνω παραδείγματα και θεωρούμε μια (ν+1)-άδα διατεταγμένων μεταβλητών x_1 , x_2 , ..., x_v,y όπου η κάθε x_i παίρνει τιμές από τα σύνολα x_i,i=1,2,..,ν και η μεταβλητή y από το σύνολο $y \subseteq R$, συμβολίζουμε δε με X το καρτεσιανό γινόμενο $X1xX_2x....xXv \subseteq R^v$.

Τότε: την μονοσήμαντη απεικόνιση του X στο Y, δηλαδή σε κάθε ν-άδα (x_1 , x_2 , ... ,x_v)∈ X ν' αντιστοιχεί μια τιμή y ∈ Y, την καλούμε **συνάρτηση** ν (ανεξαρτήτων) **πραγματικών μεταβλητών** και τη συμβολίζουμε με y=f(x_1 , x_2 , ... ,x_v).

Το σύνολο X καλείται **πεδίο ορισμού** και το Y **πεδίο τιμών** της συνάρτησης. Συνήθως, την συνάρτηση δύο μεταβλητών τη συμβολίζουμε με z=f(x,y) και των τριών μεταβλητών με ω=f(x,y,z).

Αν σε κάθε στοιχείο (x_1 , x_2 , ... ,x_v) του x αντιστοιχεί μια τιμή του Y, τότε η συνάρτηση καλείται **μονοσήμαντη.** Αλλιώς έχουμε την **πολυσήμαντη** συνάρτηση που μπορούμε να τη θεωρήσουμε σαν ένωση μονοσήμαντων συναρτήσεων.

5.2. Μερική Παραγώγιση

Όταν μια συνάρτηση έχει περισσότερες από μια μεταβλητές τότε υπάρχουν δύο ειδών παραγωγίσεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε, την ολική παραγώγιση και την μερική παραγώγιση. Η ολική παραγώγιση επιτρέπει την ταυτόχρονη μεταβολή όλων των μεταβλητών, ενώ η μερική παραγώγιση επιτρέπει την μεταβολή μιας μόνο μεταβλητής κρατώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές

Έστω η συνάρτηση $z=f(x,y)$ της οποίας οι μεταβλητές x και y θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους. Μια τέτοια συνάρτηση μπορεί να περιγράφει π.χ. το παραγόμενο προϊόν μιας επιχείρησης ή μιας οικονομίας. Στη συνάρτηση παραγωγής η εξαρτημένη μεταβλητή z αναφέρεται στο προϊόν που παράγεται από τις εισροές κεφαλαίου (x) και εργασίας (y).

Αν υποθέσουμε ότι οι εισροές συμβάλλουν μεμονωμένα και ανεξάρτητα στη παραγωγή του προϊόντος, τότε γεννάται το ερώτημα της μεταβολής στο παραγόμενο προϊόν από μια μεταβολή στη ποσότητα του κεφαλαίου με δεδομένη την ποσότητα της εργασίας.

Θέτουμε λοιπόν όπου $y=y_0=C$ και γράφουμε:

$$Z=f(x,y_0)=f(x,c)$$

Με άλλα λόγια η παραγόμενη ποσότητα μετατρέπεται ουσιαστικά σε μια συνάρτηση της ποσότητας του κεφαλαίου. Στη περίπτωση συτή, η παράγωγος της z ως προς τη x γράφεται:

$$(\theta z)/(\theta x)=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta z/\Delta x)= \lim_{\Delta x\to 0}[(f(x+\Delta x,y_0)- f(x,y_0))/\Delta x]$$

Εφόσον υπάρχει το όριο.

Ομοίως αν ενδιαφερόμαστε για τη παράγωγο της z ως προς τη y με δεδομένη τη $x=x_0$ έχουμε :

$$(\theta z)/(\theta y)=\lim_{\Delta y\to 0}(\Delta z/\Delta y)= \lim_{\Delta y\to 0}[(f(x_0,y+\Delta y)- f(x_0,y))/\Delta y]$$

Αν έχουμε μια συνάρτηση με n μεταβλητές

$Y=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ τότε οι μερικές παράγωγοι γράφονται ως εξής:

$\theta y/\theta x_1,\theta y/\theta x_2,\ldots\theta y/\theta x_n$ ή $f_1,f_2,\ldots,f_n$

και λέγονται μερικές παράγωγη πρώτης τάξης.

5.2.1 Μερικές Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Οι μερικές παράγωγοι της $z=f(x,y)$ είναι επίσης συναρτήσεις των x και y επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τέσσερις μερικές παραγώγους ως προς το x και y. Έτσι έχουμε τη δεύτερη μερική παράγωγο ως προς το x που λέγεται και άμεση μερική παράγωγος.

$$(\theta^2 f/\theta x^2)=(\theta/\theta x)(\theta f/\theta x)=f_{xx}$$

Και τη δεύτερη άμεση μερική παράγωγος ως προς το y:

$$(\theta^2 f/\theta y^2)=(\theta/\theta y)(\theta f/\theta y)=f_{yy}$$

Επίσης έχουμε δύο μικτές μερικές παραγώγους

$(\theta^2 f/\theta x\theta y)=(\theta/\theta x)(\theta f/\theta y)=f_{yx}$ ή $\theta^2 f/\theta y\theta x)=(\theta/\theta y)(\theta f/\theta x)=f_{xy}$

5.5.2 Παράδειγμα

Η συνάρτηση ζήτησης.

Η ζήτηση ενός αγαθού είναι συνάρτηση της τιμής του, όπως επίσης των σχετιζόμενων αγαθών, του διαθέσιμου εισοδήματος κ.α. Ας ότι η ζήτηση του αγαθού x, (q_x) εξαρτάται από τη τιμή του (px), όπως επίσης και από την τιμή του αγαθού y, (p_y). Αν υπάρχει τέτοια σχέση ανάμεσα στα δύο αγαθά, τότε οι συναρτήσεις ζήτησης των αγαθών x και y εξαρτώνται από τις τιμές των δύο αγαθών.

Άρα έχουμε: $q_x=f(p_x,p_y)$ η ζήτηση για το αγαθό x

$q_y=f(p_x,p_y)$ η ζήτηση για το αγαθό y

Από τις δύο συναρτήσεις ορίζουμε τέσσερις μερικές παραγώγους :

$θq_x/θp_x$=η οριακή ζήτηση για το αγαθό x ως προς την τιμή p_x

$θq_x/θp_y$=η οριακή ζήτηση για το αγαθό x ως προς την τιμή p_y

$θq_y/θp_x$=η οριακή ζήτηση για το αγαθό y ως προς την τιμή p_x

$θq_y/θp_y$=η οριακή ζήτηση για το αγαθό y ως προς την τιμή p_y

Σύμφωνα με τον «νόμο της ζήτησης», γνωρίζουμε ότι με δεδομένη την τιμή του αγαθού y, αν η τιμή του αγαθού x αυξάνεται τότε η ζητούμενη ποσότητα του x μειώνεται.

Επομένως ισχύει $θq_x/θp_x<0$ και $θq_y/θp_y<0$.

Για τις υπόλοιπες μερικές παραγώγους υπάρχουν δύο περιπτώσεις όπου το πρόσημό τους μπορεί να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό.

α)Αν λάβουμε θετικές μερικές παραγώγους , δηλαδή

$\theta q_x/\theta p_y>0$ και $\theta q_y/\theta p_x>0$

τότε λέμε ότι τα δύο αγαθά είναι υποκατάστατα. Στη περίπτωση αυτή μια αύξηση της τιμής του αγαθού y δημιουργεί μια αύξηση της ζήτησης του αγαθού x, υποθέτοντας ότι η τιμή του x δε μεταβάλλεται. Ομοίως μια αύξηση της τιμής του x οδηγεί σε μια αύξηση της ζήτησης του y όταν η τιμή του y είναι δεδομένη.

β) Αν λάβουμε αρνητικές μερικές παραγώγους, δηλαδή

$\theta q_x/\theta p_y<0$ και $\theta q_y/\theta p_x<0$

τότε λέμε ότι τα αγαθά x και y είναι συμπληρωματικά. Στη περίπτωση αυτή μια αύξηση της τιμής του y οδηγεί σε πτώση της ζήτησης του αγαθού x με δεδομένη την τιμή του. Ομοίως μια αύξηση της τιμής του αγαθού x οδηγεί σε μια πτώση της ζήτησης του αγαθού y, εφόσον η τιμή του κρατείται σταθερή.

5.2.3. Εφαρμογή

Ας υποθέσουμε ότι μια επιχείρηση παράγει το αγαθό x και η ακόλουθη, είναι η συνάρτηση ζήτησης της :

$$Qx=f(p_x,p_y,p_w,m)=10p_x^{-2}p_yp_w^{-0,5}m^2$$

Όπου q_x= η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού x

P_x=η τιμή του αγαθού x

P_y=η τιμή του υποκατάστατου αγαθού, y

P_w=η τιμή του συμπληρωματικού αγαθού,w

m=το εισόδημα των καταναλωτών

υπολογίστε την επίδραση της τιμής του αγαθού x στη ζήτηση του.

Λύση :

Η επίδραση της τιμής του αγαθού x στη ζήτηση του,υπολογίζεται με την μερική παράγωγο της ζητούμενης ποσότητας ως προς την τιμή p_x. Με σταθερές τις υπόλοιπες μεταβλητές έχουμε:

$$θq_x/θp_x = -20p_x^{-3}p_y p_w^{-0,5}m^2$$

για την επιρροή της τιμής του υποκατάστατου αγαθού p_y έχουμε:

$$θq_x/θp_y = -10p_x^{-2}p_y p_w^{-0,5}m^2$$

Αν ενδιαφερόμαστε μόνο για την επίδραση της τιμής του συμπληρωματικού αγαθού πάνω στη ζήτηση του αγαθού x ,τότε:

$$θq_x/θp_w = -5p_x^{-2}p_y p_w^{-1,5}m^2$$

Τέλος, η επίδραση του εισοδήματος υπολογίζεται από τη μερική παράγωγο : $θq_x/θp_m = 20p_x^{-2}p_y p_w^{-0,5}m$

5.3 Ολικά Διαφορικά

Το διαφορικό μιας συνάρτησης $y=f(x)$ γράφεται :

$$dy=f'(x)dx$$

Όταν έχουμε συναρτήσεις με δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε το διαφορικό τέτοιων συναρτήσεων καλείται ολικό διαφορικό. Από την πρακτική σκοπιά το ολικό διαφορικό δίνει μια γραμμική προσέγγιση μιας μεταβολής στην εξαρτημένη μεταβολή, που προέρχεται από μια απειροελάχιστα μικρή μεταβολή στις ανεξάρτητες μεταβλητές. Έτσι αν θεωρήσουμε τη $z=f(x,y)$ μια συνάρτηση παραγωγής, τότε μια μικρή μεταβολή στους συντελεστές της παραγωγής x και y οδηγεί σε μια μεταβολή στο παραγόμενο προϊόν z. Αν η x μεταβληθεί κατά Δx τότε οδηγεί σε μεταβολή της z κατά (θz/θx)Δx, ενώ ταυτόχρονα η μεταβολή στον άλλο παραγωγικό συντελεστή οδηγεί σε μια μεταβολή του παραγόμενου προϊόντος κατά (θz/θy)Δy. Έτσι, λοιπόν, η συνολική μεταβολή στο z που προέρχεται από μια μικρή μεταβολή στα x και y είναι:

$$\Delta z = (\theta z/\theta x)\Delta x + (\theta z/\theta y)\Delta y$$

Αν τα Δx και Δy είναι πολύ μικρά, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής :

$$dz = (\theta z/\theta x)dx + (\theta z/\theta y)dy \text{ ή } dz = fxdx + fydy$$

όπου το dz είναι το ολικό διαφορικό και μετρά το αθροισμα των μεταβολών που προέρχονται από μεταβολές στις μεταβλητές x και y. Δηλαδή, μας δίνει προσεγγιστικά τη διαφορά μεταξύ των τιμών της συνάρτησης στα σημεία P(x,y) και P'(x+Δx, y+Δy).

Επομένως, για πολύ μικρές μεταβολές στις ανεξάρτητες μεταβλητές θα ισχύει $dz \approx \Delta z$, όπου dz είναι η προσέγγιση της πραγματικής μεταβολής Δz.

5.3.1 Κανόνες για την Εύρεση Ολικών Διαφορικών

Αν $g=g(x,y)$ και $h=h(x,y)$ δύο συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες:

α) Κανόνας αθροίσματος ή διαφοράς

$$d(g \pm h)=dg \pm dh$$

β) Κανόνας συνάρτησης υψωμένης σε δύναμη

$$d(g^n)=ng^{n-1}\, dg$$

γ) Κανόνας γινομένων

$$d(gh)=hdg+gdh$$

δ) Κανόνας πηλίκου

$$d(g/h)=(hdg-gdh)/h^2$$

Οι κανόνες αυτοί επεκτείνονται στη περίπτωση περισσότερων συναρτήσεων, έτσι αν υποθέσουμε μια τρίτη συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση, την $w=w(x,y)$ τότε ισχύουν οι αντίστοιχοι κανόνες:

α) $d(g \pm h \pm w)=dg \pm dh \pm dw$

β) $d(ghw)hwdg+wgdh+ghdw$

5.3.2 Ολικά Διαφορικά Ανώτερης Τάξης

Τα διαφορικά ανώτερης τάξης μας χρησιμεύουν για την ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση συναρτήσεων. Από διαφορικά δεύτερης τάξης μονομεταβλητών συναρτήσεων π.χ. της $y=f(x)$ είχαμε: $d^2y=f''(x)dx^2$

Ενώ το διαφορικό νιοστής τάξης είναι : $d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$

Έστω η διμεταβλητή συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση $z=f(x,y)$, το διαφορικό πρώτης τάξης μας δίνει τη μεταβολή στη z για δεδομένες τιμές στα dx και dy, που οι μεταβολές αυτές μετρούνται από κάποιο συγκεκριμένο σημείο (x_o,y_o) στο πεδίο τιμών της συνάρτησης z.

Αν υπολογίσουμε το διαφορικό δεύτερης τάξης, βρίσκουμε το διαφορικό της dz, δηλαδή $d(dz)=d^2z$. Άρα παραγωγίζουμε την dz, αλλά για να την παραγωγίσουμε πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε ποιών μεταβλητών συνάρτηση είναι η dz.

Στον τύπο του διαφορικού πρώτης τάξης : $dz=fxdx+fydy$

Τα dx και dy είναι δεδομένες αυθαίρετες μεταβολές των μεταβλητών x και y και στην παραγώσιση πρέπει να θεωρηθούν σταθερές. Επομένως, το dz μεταβάλλεται με τις fx και fy, των οποίων οι μερικές παράγωγοι είναι συναρτήσεις των x και y όπως ακριβώς η συνάρτηση z. Μετά υπολογίζουμε το ρυθμό μεταβολής της fx ως προς x ενώ το y είναι σταθερό, με μια ειδική παράγωγο που τη συμβολίζουμε f_{xx} ή $θ^2z/θx^2$

Έτσι γράφουμε :

$$f_{xx}=(θ/θx)(fx) \quad ή \quad (θz^2)/(θx^2)=(θ/θx)(θz/θx)$$

$$f_{xy}=(θ/θx)(θy/θy)=(θ^2z)/(θxθy)=f_{yx}$$

$$f_{yy}=(θ/θy)(f_y) \quad ή \quad θ^2z/θy^2=(θ/θy)(θz/θy)$$

Για την εύρεση του διαφορικού δεύτερης τάξης :

$$d^2z=d(dz)=((θ(dz))/θx))dx+(θ(dz)/θy))dy$$

Για το πρώτο μέρος του δεξιού σκέλους έχουμε:

$(\theta(dz))/\theta x)dx=\theta/dx(fxdx+fydy)dx=$
$=f_{xx}dx+fxydy)dx=f_{xx}dx^2+f_{xy}dydx$

Ενώ για το δεύτερο μέρος του δεξιού σκέλους έχουμε :

$(\theta(dz)/\theta y))dy=\theta/\theta y(fxdx+fydy)dy$
$=(f_{yx}dx+f_{yy}dy)dy=f_{yx}dxdy+f_{yy}dy^2$

Επειδή dx και dy θεωρούνται σταθερές, τότε
$(\theta/\theta x)(dx)=(\theta/\theta x)(dy)=(\theta/\theta y)(dy)=(\theta/\theta y)(dx)=0$

Αντικαθιστούμε στην αρχική θέση και λαμβάνουμε:
$d^2z=d(dz)=f_{xx}dx^2+f_{xy}dydx+f_{yx}dxdy+f_{yy}dy^2$
Σύμφωνα με το θεώρημα του Young το διαφορικό δεύτερης τάξης γράφεται:
$d^2z=f_{xx}dx^2+2f_{xy}dydx+f_{yy}dy^2$

Το διαφορικό της τρίτης τάξης είναι:
$d^3z=(fxdx+fydy)^3=f_{xxx}dx^3+3f_{xxy}dx^2dy+3f_{xyy}dxdy^2+f_{yyy}dy^3$

Τα ολικά διαφορικά τρίτης ή ανώτερης τάξης έχουν περιορισμένη χρησιμότητα στην οικονομική ανάλυση.

5.4 Ολική παράγωγος

Στα οικονομικά συναντούμε πολύ συχνά συναρτήσεις, στις οποίες οι μεταβλητές x και y είναι εξαρτημένες από μια τρίτη μεταβλητή π.χ. $x=g(t)$, $y=h(t)$.

Έστω η $z=f(x,y)$ παριστάνει μια συνάρτηση παραγωγής, όπου οι συντελεστές παραγωγής εργασία και κεφάλαιομεταβάλλονται στη διάρκεια του χρόνου. Για να βρούμε τη μεταβολή στο παραγόμενο προϊόν διαχρονικά, δηλαδή dz/dt, τότε θα πρέπει να εκτιμήσουμε:

1. Τη μεταβολή στη z που οφείλεται σε μια μικρή μεταβολή του t, η οποία μεταβάλλεται στη z μέσω της x. $(\theta z/\theta x)(dx/dt)$
2. Τη μεταβολή της z που οφείλεται σε μια μικρή μεταβολή του t, η οποία μεταβιβάζεται στη z μέσου της y.

   $(\theta z/\theta y)(dy/dt)$

Επομένως συνολικά θα έχουμε:

$$dz/dt=(\theta z/\theta x)(dx/dt)+ (\theta z/\theta y)(dy/dt)=f_x(dx/dt)+f_y(dy/dt)$$

Η dz/dt λέγεται ολική παράγωγος της z προς την t.

5.4.1 Ολικοί Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Έστω η συνάρτηση $z=f(x,y)$ με $x=g(t)$ και $y=h(t)$, όπου t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή. Για να βρούμε μια έκφραση για την d^2z/dt^2, εφόσον αυτή η δεύτερη παράγωγος είναι σημαντική για την εύρεση ικανών συνθηκών για ακρότατα, αρχίζουμε από την ολική παράγωγο πρώτης τάξης που είναι:

$$dz/dt=f_x(dx/dt)+f_y(dy/dt)$$

Για την εύρεση της δεύτερης παραγώγου ξαναπαραγωγίζουμε, λαμβάνοντας υπόψη ότι μερικές παράγωγοι είναι και αυτές συναρτήσεις των x(t) και y(t), δηλαδή $f_x x(t), y(t)$ και $f_y x(t), y(t)$

Άρα έχουμε

$$d^2z/dt^2=d/dt(dz/dt)=f_x(d/dt)(dx/dt)+(dx/dt)(d/dt)(f_x)$$
$$+f_y(d/dt)(dy/dt)+(dy/dt)(f_y)$$

5.5 Περίπτωση δύο Εξαρτημένων Μεταβλητών

Σε μια συνάρτηση $z=f(x,y)$, υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές x και y ενεργούν ανεξάρτητα και μεμονωμένα πάνω στη z. Όταν αναφερόμαστε σε οικονομικά υποδείγματα φαίνεται να μην ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, διότι υπάρχει κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ των μεταβλητών.

Στη θεωρία συμπεριφοράς του καταναλωτή θεωρούμε συνήθως μια συνάρτηση χρησιμότητας $z=f(x,y)$ όπου z είναι η χρησιμότητα που αποκομίζει ο καταναλωτής από τα αγαθά x και y. Αν με B συμβολίσουμε το εισόδημα του καταναλωτή με Px και Py τις τιμές των αγαθών x και y, τότε καταλήγουμε στη εξίσωση του εισοδηματικού περιορισμού. $B=P_x x+p_y y$

Η σχέση αυτή υποδηλώνει την αλληλεξάρτηση μεταξύ των αγαθών x και y. Στον υπολογισμό του διαφορικού πρέπει να λάβουμε υπόψη την εξάρτηση μεταξύ των δύο μεταβλητών.

Το διαφορικό της πρώτης τάξης είναι:

$$dz=f_x dx+f_y dy$$

Αυτή η εξίσωση ισχύει και στη περίπτωση που τα x και y είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

$$X=B-(p_y x/p_x)$$

Επομένως το dx δεν είναι κάποια αυθαίρετη μεταβολή στο x αλλά τα διαφορικό της x.

Το διαφορικό δεύτερης τάξης είναι:

$$d^2z=f_x d^2x+f_{xx}(dx)^2+f_{yy}dy^2+2f_{xy}dxdy$$

5.5.1 Εφαρμογή

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας $z=xy$ και ο εισοδηματικός περιορισμός $B=p_x x+p_y y$
Να βρεθούν τα διαφορικά πρώτης και δεύτερης τάξης

Λύση :

$dz=ydx+xdy$

$d^2z=yd(dx)+d(y)dx+xd(dy)+d(x)dy$

$=((\theta/\theta x)ydx+(\theta/\theta y)ydy)dx+((\theta/\theta x)xdx+(\theta/\theta y)xdy)dy$

$=dydx+dxdy=2dxdy$

5.6 Ακρότατα Συναρτήσεων

Όταν οι στόχοι της αριστοποίησης περιγράφονται με συναρτήσεις, τότε η εύρεση του μέγιστου ή του ελάχιστου της συνάρτησης ολοκληρώνει τη λύση του προβλήματος. Αν η αριστοποίηση αφορά δύο μόνο εξαρτημένες μεταβλητές μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) εξετάζοντας τη κλίση της συνάρτησης.

Αν η κλίση της εφαπτόμενης σε ένα σημείο είναι θετική, η συνάρτηση ακολουθεί ανοδική πορεία. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής είναι θετική, δηλαδή όσο η ανεξάρτητη μεταβλητή αυξάνεται (μειώνεται) τόσο αυξάνεται(μειώνεται) και η εξαρτημένη μεταβλητή.

Αν η κλίση της εφαπτόμενης σε ένα σημείο είναι αρνητική, η συνάρτηση ακολουθεί καθοδική πορεία. Με άλλα λόγια η σχέση της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής είναι αρνητική, δηλαδή όσο η ανεξάρτητη αυξάνεται (μειώνεται) τόσο η εξαρτημένη μεταβλητή αυξάνεται (μειώνεται).

Εφόσον η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο που η κλίση της εφαπτόμενης δεν είναι ούτε θετική ούτε αρνητική, η παράγωγος της συνάρτησης μηδενίζεται. Συνεπώς βρισκόμαστε σε ένα ακρότατο χωρίς να γνωρίζουμε αν αυτό είναι μέγιστο ή ελάχιστο. Αν για να φτάσουμε σε αυτό το ακρότατο ακολουθούμε ανοδική πορεία (δηλαδή η πρώτη παράγωγος είναι θετική) και αφήνοντας το σημείο ακολουθούμε καθοδική πορεία (δηλαδή έχουμε αρνητική πρώτη παράγωγο) τότε το ακρότατο είναι μέγιστο. Αν ισχύουν τα αντίθετα τότε έχουμε ελάχιστο.

5.6.1 Ακρότατα με την Δεύτερη Παράγωγο

Το κριτήριο της πρώτης παραγώγου πολλές φορές είναι δύσκολο να το χρησιμοποιήσουμε, στη περίπτωση που έχουμε περίπλοκες συναρτήσεις, τις οποίες πρέπει να εκτιμήσουμε για ένα μεγάλο εύρως τιμών. Προβλήματα του είδους αυτού μπορούμε νε τα ξεπεράσουμε χρησιμοποιώντας το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου ή παραγώγων ανώτερης τάξης.

Για το σκοπό αυτό προσφεύγουμε στο θεώρημα του Taylor με υπόλοιπο, που αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος της μέσης τιμής. Τα δύο θεωρήματα γίνονται ταυτόσημα για $n=0$. Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $f(x)$ που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη μέχρι ενός επιθυμητού βαθμού στο σημείο $x=c$. Γράφουμε τον τύπο του Taylor με το υπόλοιπο,

$$F(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\ldots+(f^{(n)}(c)/n!)(x-c)^{n}+(f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!)(x-c)^{(n+1)}$$

Όπου ξ ένας αριθμός μεταξύ του x και c. Ο χαρακτήρας του ακρότατου εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $f(x)-f(c)$

Αν $f(x)-f(c)>0$ τότε έχουμε ελάχιστο ενώ αν $f(x)-f(c)<0$ τότε έχουμε μέγιστο.

Η δεύτερη παράγωγος έχει ένα βασικό μειονέκτημα: προϋποθέτει την ύπαρξη της πρώτης παραγώγου στο σημείο (έστω το c) που παρουσιάζει το ακρότατο. Αν η f(x) δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο c, τότε ο έλεγχος των ακροτάτων της συνάρτησης με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου δεν έχει νόημα. Στη περίπτωση αυτή παίρνουμε τιμές εκατέρωθεν του σημείου c και παραγωγίζοντας τη συνάρτηση αναλόγως με τα πρόσημα των παραγώγων καταλήγουμε στο είδος του ακρότατου.

Αν η δεύτερη παράγωγος είναι σταθερά και θετική, η συνάρτηση έχει μόνο ελάχιστα για κάθε ρίζα της πρώτης παραγώγου, ενώ αν είναι σταθερά και αρνητική, τότε η συνάρτηση έχει μόνο μέγιστα για κάθε ρίζα της πρώτης παραγώγου.

5.6.2 Εφαρμογή

Το κόστος παραγωγής της ποσότητας Q ενός προϊόντος είναι: $C(Q)=2Q^2-36Q+25$ και η τιμή πώλησης της μονάδας του προϊόντος είναι: $P(Q)=½Q-15$.

Να υπολογιστούν οι ποσότητες του προϊόντος για τις οποίες ,

- Το κόστος της παραγωγής γίνεται ελάχιστο.
- Το συνολικό έσοδο από την πώληση του προϊόντος γίνεται ελάχιστο.
- Το κέρδος από την πώληση του προϊόντος είναι μέγιστο.

Λύση:

- $C'(Q)4Q-36=0 \Rightarrow Q=9$

  Επειδή $C''(Q)=4>0$, το κόστος παραγωγής γίνεται ελάχιστο για παραγωγή 9μ.μ του προϊόντος.

- $R(Q)=P(Q)\cdot Q=\frac{1}{2}Q^2-15Q$ ενώ

  $R'(Q)=Q-15=0 \Rightarrow Q=15$

Επειδή $R''(Q)=1>0$,το συνολικό έσοδο από την πώληση του προϊόντος γίνεται ελάχιστο για πώληση 15μ.μ του προϊόντος.

- Το κέρδος από την πώληση του προιόντος είναι:

  $K(Q)=E(Q)-C(Q)=-3/2Q^2+21Q-25$

  $K'(Q)=-3Q+21=0 \Rightarrow Q=7$

Όμως $K''(Q)=-3<0$ και κατά συνέπεια το κέρδος γίνεται μέγιστο από την παραγωγή και πώληση 7μ.μ του προϊόντος.

5.7 Μέγιστα και Ελάχιστα Συναρτήσεων δύο ή Περισσοτέρων Μεταβλητών

α) Ορισμός των μέγιστων και ελάχιστων συναρτήσεων δυο μεταβλητών.

Έστω ότι έχουμε τη συνάρτηση κ=f(x,y). Υποθέτουμε ότι τα (ε) και (κ) είναι μικροί θετική αριθμοί και η κ=f(x,y) είναι συνεχής συνάρτηση. Τότε το μέγιστο της συνάρτησης στο σημείο (x_0,y_0) ορίζουμε ως εξής:

$$f(x_0-\varepsilon,y_0-u)<f(x_0,y_0) \qquad f(x_0,y_0)>f(x_0+\varepsilon,y_0+u)$$

Επίσης το ελάχιστο στο ίδιο σημείο ορίζεται ως εξής :

$$f(x_0-\varepsilon,y_0-u)>f(x_0,y_0) \qquad f(x_0,y_0)<f(x_0+\varepsilon,y_0+u)$$

όπου η f(x0,y0) είναι η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αντίστοιχα.

β) Αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ακραίας τιμής.

Οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ακραίας τιμής της κ=f(x,y) μπορούν να εξηγηθούν ως εξής : Υποθέτουμε ότι έχουμε μια επιφάνεια Α είναι το μέγιστο σημείο. Αν χωρίσουμε την επιφάνεια με δύο επίπεδα που διέρχονται από το Α, κάθε επιφάνεια θα είναι παράλληλη στα επίπεδα u-y και u-x, θα πάρουμε τις δύο εφαπτόμενες t_1 και t_2. Η εφαπτόμενη t_1 προέκυψε όταν η τιμή της y κρατήθηκε σταθερή και η μερική παράγωγος της συνάρτησης ως προς x είναι 0.

Δηλαδή θu/θx=0.

Με όμοιο τρόπο η εφαπτόμενη t_2 προέκυψε όταν x κρατήθηκε σταθερό και θu/θy=0

Επομένως στη παρούσα ανάλυση είναι απαραίτητο οι δύο μερικές παράγωγοι να είναι ίσες με το μηδέν, σαν αναγκαία συνθήκη.

Δηλαδή

θu/θx=0 , θu/θy=0

γ) Ικανές συνθήκες.

Στη περίπτωση της συνάρτησης με μια μεταβλητή το να είναι η πρώτη μερική παράγωγος ίση με το μηδέν, αποτελεί αναγκαία όχι όμως και ικανή συνθήκη για την ύπαρξη ακραίας τιμής. Όταν έχουμε ακραίες τιμές , τότε fx=o και fy=0 αλλά όταν fx=0 και fy=0 το σημείο μπορεί να αποτελεί ή να μην αποτελεί ακραία τιμή και λέγεται πραγματικό σημείο.\

Όταν δίνονται οι αναγκαίες συνθήκες fy=0, θα είναι ικανό για την u=f(x,y), να έχει μέγιστο όταν $θ^2κ/θx^2<0$ $θ^2κ/θy^2<0$

και $(θ^2u/θx^2)\cdot(θ^2u/θy^2)>(θ^2u/θ_xθ_y)^2$

Για την ύπαρξη ελάχιστου, οι ικανές συνθήκες είναι: fx=0 fy=0

$(θ^2u/θx^2)>0$ $θ^2u/θy^2$

$(\theta^2u/\theta x^2)\cdot(\theta^2u/\theta y^2)>(\theta^2u/\theta x\theta y)^2$

Όλα τα παραπάνω είναι οι ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ακραίας τιμής.

Αν $fx=0$, $fy=0$ και $(\theta^2u\theta x^2)\cdot(\theta^2u/\theta y^2)<(\theta^2u/\theta x\theta y)^2$

Έχουμε πραγματικό σημείο.

Όταν $(\theta^2u/\theta x^2)\cdot(\theta^2u/\theta y^2)=(\theta^2u/\theta x\theta y)^2$

Δεν μπορούμε να δώσουμε καμία απάντηση.

Στα οικονομικά οι $fx=0$ και $fy=0$ ονομάζονται συνθήκες πρώτης τάξης και οι συνθήκες που αφορούν τις fxx, fyy, fxy ονομάζονται συνθήκες δεύτερης τάξης. Σε πολλές περιπτώσεις η φύση των προβλημάτων υποδεικνύει αν θα έχουμε μέγιστο ή ελάχιστο και επομένως χρησιμοποιούμε μόνο τη συνθήκη της πρώτης τάξης. Στα οικονομικά όμως η χρησιμοποίηση των συνθηκών δεύτερης τάξης αποκτά ιδιαίτερη σημασία, γιατί βοηθούν στη διατύπωση οικονομικών νόμων.

5.8 Μέγιστα και Ελάχιστα με Περιορισμούς-Η Μέθοδος του Πολλαπλασιαστή του - Lagrange

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση χρησιμότητας και τον εισοδηματικό περιορισμό

$$u=f(x,y)$$

$$P_x x+P_y y=M$$

όπου κ είναι η χρησιμότητα, x,y τα αγαθά , P_x,P_y οι δοσμένες τιμές και M το εισόδημα το οποίο δίνεται. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο καταναλωτής είναι ποια ποσότητα των x και y πρέπει να αγοράσει και σε ποιες αναλογίες ώστε να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητα του. Αφού το εισόδημα είναι δεδομένο, αν ο καταναλωτής αγοράσει περισσότερη ποσότητα από το x αγαθό, πρέπει να αγοράσει μικρότερη ποσότητα από το αγαθό y. Τα περισσότερα από τα οικονομικά προβλήματα αφορούν τα μέγιστα και ελάχιστα είναι τις ίδιας περίπου μορφής με αυτό, όπου υπάρχει ένας περιορισμός πάνω στις μεταβλητές. Συνέπεια αυτού είναι ότι οι μεταβλητές x και y δεν είναι ανεξάρτητες. Δηλαδή αν αγοραστεί ορισμένο ποσό από το αγαθό x, τότε αυτομάτως καθορίζεται και η ποσότητα του αγαθού y που μπορεί να αγοραστεί και το αντίστροφο.

Για την λύση προβλημάτων τέτοιου είδους υπάρχει η μέθοδος του πολλαπλασιαστή του Lagrange. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για αν υπολογίσουμε ακρότατα υπό συνθήκες.

Έστω ότι επιθυμούμε να υπολογίσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης: $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ με τον περιορισμό $h(x_1,x_2,\ldots x_v)=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G=f-\lambda h$, όπου λ μια πραγματική παράμετρος που καλείται πολλαπλασιαστής Lagrange, η οποία θεωρείται ως μια πρόσθετη ανεξάρτητη μεταβλητή.

5.9 Βελτιστοποίηση Υπό Συνθήκη

5.9.1 Παράδειγμα

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $q=1+2x+5y^2$
υπό συνθήκη $x=y$.

Λύση:

Αντικαθιστούμε την συνθήκη στην αντικειμενική συνάρτηση για να απαλείψουμε το x, $q=1+2x+5y$
Η ελαχιστοποίηση δίνει $dq/qy=2+10y=0$, όπου

$y=-1/5$ και ως αποτέλεσμα $x=-1/5$

Για να λύσουμε ένα υπό συνθήκη πρόβλημα βελτιστοποίησης, βελτιστοποιούμε τη νέα συνάρτηση η οποία ονομάζεται Λαγκραρζιανή συνάρτηση και ορίζεται ως $L(x,\lambda)=f(x)+\lambda g(x)$, όπου λ είναι μια σταθερά.

5.9.2 Παράδειγμα

Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης περιγράφει την τεχνολογική σχέση μεταξύ εισροών (πρώτες ύλες, εργασία κ.α) και εκροών στην παραγωγή. Ας υποθέσουμε ότι μια συγκεκριμένη επιχείρηση επιθυμεί να βελτιστοποιήσει τη συνάρτηση παραγωγής μορφής Cobb-Douglas, $Q=10L^{1/2}K^{1/2}$ ως προς το κόστος των εισροών, $4L+10K=100$, όπου L και K είναι οι εισροές εργασίας και κεφαλαίου αντίστοιχα και το Q συμβολίζει την ποσότητα που παράγεται.

Αναδιατάσσοντας τη συνθήκη λαμβάνουμε: $100-4L-10K=0$ και σχηματίζουμε την ακόλουθη Λαγκραντζιανή συνάρτηση.

$$L^*=10L^{1/2}K^{1/2}+\lambda(100-4L-10K)$$

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ως προς τους παράγοντες L,K και λ. τα κριτήρια πρώτης παραγώγου δίνουν:

$\theta L^*/\theta L=5L^{-1/2}K^{1/2}-4\lambda=0$ Επομένως $\lambda=5K^{1/2}/4L^{1/2}$

$\theta L^*/\theta K=5L^{-1/2}K^{1/2}-10\lambda=0$ Επομένως $\lambda=5K^{1/2}/10L^{1/2}$

$\theta L^*/\theta L=100-4L-10K=0$ Επομένως $100-4L-10K=0$

Αυτό αποτελεί ένα σύστημα τριών εξισώσεων με 3 αγνώστους L,K και λ.

Συνεπώς → $5K^{1/2}/4L^{1/2}= 5L^{1/2}/10K^{1/2}$

Επομένως: $50K=20L$ και $L=(5/2)K$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $100-4L-10K=0$

Άρα 100-4L-10K=0 και αντικαθιστώντας όπου L=(5/2)K προκύπτει 10K+10K=100 → K=5

Έτσι ο συνδυασμός K=5 και L=12,5 μεγιστοποιεί την παραγωγή. Επίσης προκύπτει ότι λ=0,79

5.10 Συνάρτηση Μικτού Κόστους

Υποθέτουμε μια επιχείρηση που παράγει τα αγαθά x και y. Το συνολικό κόστος c αυτών των μονάδων είναι συνάρτηση της παραγόμενης ποσότητας των x και y και καλείται συνάρτηση μικτού κόστους.

Αν γράψουμε μια τέτοια συνάρτηση ως: C=f(x,y)

τότε το θc/θx καλείται μερικό οριακό κόστος ως προς το x και συμβολίζει το ρυθμό μεταβολής του c ως προς το x, όταν το y κρατείται σταθερό. Ταυτόχρονα, το θc/θx είναι η μερική οριακή παράγωγος ως προς το y και συμβολίζει το ρυθμό μεταβολής του c ως προς το y όταν το x κρατείται σταθερό.

5.10.1 Εφαρμογή

Ας υποθέσουμε μια επιχείρηση που παράγει τα αγαθά x και y. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση μικτού κόστους αυτών των δύο αγαθών είναι: $c=f(x,y)=6x^2+7xy+10y^2+1000$

Να προσδιοριστεί το οριακό μερικό κόστος παραγωγής του κάθε αγαθού όταν x=100 και y=50. Να ερμηνευθούν τα αποτελέσματα.

Λύση:

θc/θx=12x+7y , θc/θx=20y+7x

Επομένως στο σημείο (100,50) θα έχουμε :

θc/θx(x=100,y=50)=12(100)+7(50)=1.550ν.μ

θc/θx(x=100,y=50)=20(50)+7(100)=1.700ν.μ

Αυτό σημαίνει ότι αυξάνοντας την παραγωγή του αγαθού x από 100 σε 101 μονάδες διατηρώντας την παραγωγή του αγαθού y στις 50 μονάδες αυξάνεται το συνολικό κόστος κατά 1.550 ν.μ.

Όσον αφορά το αγαθό y, αυξάνοντας την παραγωγή του από 50 σε 51 μονάδες, κρατώντας σταθερή την παραγωγή του x στις 100 μονάδες θα οδηγήσει σε αύξηση του κόστους περίπου κατά 1700ν.μ.

5.11 Η Συνάρτηση Παραγωγής

Στη συνηθισμένη μικροοικονομική ανάλυση η παραγωγή ενός προιόντος εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως το κεφάλαιο, η εργασία, το έδαφος κ. α.

Η ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής Q=f(x,L) δίνει τη (μέγιστη συνολική παραγωγή από την απασχόληση δύο μόνο παραγωγικών συντελεστών, του κεφαλαίου και της εργασίας. Η θQ/θK συμβολίζει την οριακή παραγωγικότητα του παραγόμενου προϊόντος Q ως προς το συντελεστή κεφάλαιο, όταν ο συντελεστής εργασία κρατείται σταθερός. Ομοίως, με θQ/θK συμβολίζουμε την οριακή παραγωγικότητα ως προς το συντελεστή εργασία, όταν ο συντελεστής κεφάλαιο κρατείται σταθερός.

Έστω η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas $Q=AK^{a}L$ όπου A>0, 0<a<1 και 0<b<1. Το πρώτο χαρακτηριστικό, που την έκανε τόσο δημοφιλή στις οικονομικές μελέτες είναι ότι οι μερικές παράγωγοι ως προς τους παραγωγικούς συντελεστές K και L είναι θετικές. Τις πρώτες παραγώγους τις λέμε οριακά προϊόντα του κεφαλαίου (MP_L) αντίστοιχα.

Έτσι λοιπόν έχουμε : $MP_K=\theta Q/\theta K=\alpha AK^{\alpha-1}L^b=\alpha(Q/K)>0$

$$MP_L=\theta Q/\theta L=bAK^{\alpha}L^{b-1}=b(Q/L)>0$$

Οι θετικές οριακές παράγωγοι σημαίνουν ότι το παραγόμενο προιόν αυξάνεται (ή μειώνεται), όταν κάποιος από τους παραγωγικούς συντελεστές αυξάνεται (ή μειώνεται).

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της συνάρτησης παραγωγής είναι: «νόμος της φθίνουσα οριακής παραγωγικότητας» των παραγωγικών συντελεστών. Ο νόμος αυτός υποδηλώνει ότι αν η ποσότητα ενός παραγωγικού συντελεστή αυξάνεται, ενώ οι ποσότητες των άλλων συντελεστών παραμένουν σταθερές, τότε το οριακό προϊόν (αυξανόμενου) συντελεστή προοδευτικά μειώνεται.

Σε όρους μερικών παραγώγων αυτό σημαίνει ότι η δεύτερη μερική παράγωγος κάθε παραγωγικού συντελεστή πρέπει να είναι αρνητική.

5.11.1 Εφαρμογή

Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης είναι $Q=F(K,L)=\sqrt{KL}$

α) Να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις οριακής παραγωγικότητας και αν εκτιμηθούν για $K=4$ και $L=100$.

β) Να ερμηνευθούν οικονομικά τα αποτελέσματα.

γ) Να διερευνηθεί αν ισχύει ο νόμος της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας των συντελεστών παραγωγής.

Λύση:

α) $\theta Q/\theta \kappa = ½(LK^{-1/2})L = L/2VLK$ και $\theta Q/\theta L = ½(LK^{-1/2})K = K/2VLK$

Όταν οι μερικές παράγωγοι εκτιμώνται για την περίπτωση που $L=100$ και $K=4$ παίρνουμε :

$\theta Q/\theta \kappa = 100/2V(100)(4) = 100/80 = 1,25$ και $\theta Q/\theta \kappa = 4/2V(100)(4) = 1/20 = 0,05$

β) Αν $K=4$ και $L=100$, και αν το K αυξηθεί στις 5 μονάδες ενώ η εργασία παραμένει σταθερή στις 100 μονάδες, τότε η παραγωγή αυξάνεται περίπου κατά 1,25 μονάδες. Στην περίπτωση που το L αυξάνει σε 101 ενώ το K παραμένει στις 4 η παραγωγή θα αυξάνεται περίπου κατά 0,05 μονάδες.

γ) Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι ψς προς K και L δίνουν:

$$\theta^2 Q/\theta K^2 = -1/4(LK)^{-3/2}L < 0$$
$$\theta Q/\theta L = -1/4(LK)^{-3/2}K < 0$$

Άρα για την συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas διαπιστώνεται η φθίνουσα οριακή παραγωγικότητα των συντελεστών παραγωγής.

5.12 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

5.12.1 Ανταγωνιστική Ισορροπία της Επιχείρησης

Όταν έχουμε πλήρη ανταγωνισμό, η καμπύλη ζήτησης για το προϊόν της επιχείρησης είναι οριζόντια. Έστω ότι η P είναι η τιμή και q το προϊόν. Η τιμή δίνεται υπό συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού. Έστω R το συνολικό έσοδο. Τότε θα έχουμε $R=P\cdot q$

Το οριακό έσοδο της επιχείρηση θα είναι:

$dR/dq=P+qdp/dq$ αλλά εφόσον η P δόθηκε σαν σταθερά, η σχέση γράφεται : $dR/dq=P$

Άρα $MR=P=AR$

Ας υποθέσουμε ότι C είναι το ολικό κόστος. Τότε τα κέρδη π θα είναι : $\pi=R-C$

Για να μεγιστοποιήσουμε τα κέρδη θα πρέπει:

$$d\pi/dq=0 \quad , \quad d^2\pi/dq^2<0$$

Από την αναγκαία συνθήκη για την μεγιστοποίηση των κερδών παίρνουμε:

$$d\pi/dq=dR/dq-dC/dq=0$$

Η σχέση αυτή σημαίνει ότι $MR-MC=0$

Επομένως η αναγκαία συνθήκη για τη μεγιστοποίηση των κερδών είναι $MR=MC$, δηλαδή το οριακό κόστος πρέπει να ισούται με το οριακό έσοδο. Οι ικανές συνθήκες μας δίνουν:

$$d^2\pi/dq^2=d^2R/dq^2-d^2C/dq^2<0$$

δηλαδή $d^2R/dq^2 < d^2C/dq^2$

Αυτό σημαίνει ότι ρυθμός αύξησης του MR πρέπει να είναι μικρότερος του ρυθμού αύξησης του MC, όταν υπάρχει μια μικρή αύξηση του q.

5.12.2 Ισορροπία του Μονοπωλητή

Υποθέτουμε ότι η μονοπωλιακή επιχείρηση έχει καμπύλες ζήτησης και κόστους. Έστω ότι η καμπύλη ζήτησης είναι: $q=400-20p$ και ότι το μέσο κόστος είναι: $AC=5q+q/50$

Τότε το συνολικό κόστος θα είναι: $C=5q+q^2/50$

Και τα κέρδη $π=R-C$

Οι συνθήκες που μεγιστοποιούν τα κέρδη είναι:

$$dπ/dq=dR/dq-dC/dq=MR-MC=0$$

Από το dc/dq παίρνουμε:

$$dc/dq=d/dq(5q+q^2/50)=5+q/25$$

Για την εύρεση του dR/dq, μετασχηματίζουμε τη συνάρτηση ζήτησης ως εξής: $P=20-q/20$

Τότε $R=p\cdot q=20q-q^2/20$

Συνεπώς $dR/dq=20-q/10$ και θα έχουμε :

$$20-q/10=5+q/25 \Rightarrow q\approx 107$$

Βρίσκουμε ότι $P=14,6$ και τα μέγιστα κέρδη θα είναι $π=799$.

Οι ικανές συνθήκες είναι:

$$d^2R/dq^2=d/dq(20-q/10)=-1/10$$

$$d^2C/dq^2=d/dq(5+q/25)=1/25$$

$$d^2π/dq^2=d^2R/dq^2-d^2C/dq^2=-1/10-1/25<0$$

Επομένως ικανοποιούνται οι ικανές συνθήκες.

5.12.3 Η Άσκηση Πολιτικής Διακριτικών Τιμών

Όταν ο μονοπωλητής μπορεί να πουλήσει τα προϊόντα του σε δύο αγορές που είναι οικονομικές απομονωμένες και όταν οι ελαστικότητες ζήτησης σ΄αυτές είναι διαφορετικές, τότε μπορεί να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του χρησιμοποιώντας διαφορετικές τιμές σε κάθε αγορά.

Αν υποθέσουμε ότι πουλάει ποσότητα q_1 στην αγορά Α και ποσότητα q_2 στην αγορά Β. Έστω ότι $R(q_1)$ και $E(q_2)$ είναι τα έσοδα από κάθε αγορά, τα οποία είναι συναρτήσεις των ποσοτήτων που διατίθενται σε κάθε αγορά. Το συνολικό κόστος δίνεται από τη σχέση $C(q_1+q_2)$. Τα κέρδη π είναι: $π=R(q1)+R(q2)-C(q1+q2)$.

Για να μεγιστοποιήσει ο μονοπωλητής τα κέρδη του πρέπει:

$$θπ/θq_1=0, \quad θπ/θq_2=0$$

Ας θέσουμε $q=q1+q2$.

Τότε οι παραπάνω εξισώσεις θα γίνουν:

$$dR/dq1-dC/dq=0 \quad \text{Δηλαδή } MR_1=MC$$

$$dR/dq_2-dC/dq=0 \quad \text{Δηλαδή } MR_2=MC$$

Επομένως, οι συνθήκες για τη μεγιστοποίηση των κερδών είναι

$$MR_1= MR_2=MC$$

Δηλαδή το MR κάθε αγοράς θα πρέπει να ισούται με το MR της άλλης και επίσης να ισούται με το MC του συνολικού προϊόντος.

5.12.4 Συνθήκες Ισορροπίας ενός Παραγωγού

Υποθέτουμε ότι ένας παραγωγός αγοράζει τις εισροές a και b για να παράγει το προϊόν q. Θα παραστήσουμε τη συνάρτηση παραγωγής ως εξής: $q=f(a,b)$

Επίσης υποθέτουμε ότι οι τιμές των εισροών είναι P_a και P_b.
Έστω ότι ο προϋπολογισμός του παραγώγου M.
Τότε θα έχουμε: $P_a{}^a+P_b{}^b=M$
Συνεπώς το πρόβλημα του παραγώγου συνιστάται στη μεγιστοποίηση παραγωγής q κάτω από τον περιορισμό του προϋπολογισμού.

Ας θέσουμε $z=f(a,b)+\lambda(M-P_a{}^a-P_b{}^b)$

$$\theta z/\theta a=f_a-\lambda P_a=0$$
$$\theta z/\theta b=f_b-\lambda P_b=0$$
$$\theta z/\theta \lambda= M-P_a{}^a-P_b{}^b=0$$

Αν βρούμε τα a και b από τις εξισώσεις αυτές, αυτό θα είναι το ποσό της εισροής που θα αγοραζόταν για να παραχθεί το μέγιστο προϊόν q.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

[1] Μιχάλης Γρ. Βόσκογλου (Δρ. Μαθηματικός ΤΕΙ Πάτρας), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, «ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ» - Σ. Παρίκου κ' ΣΙΑ Ε.Ε., Κεφ.1 Συναρτήσεις Μιας Μεταβλητής –Οικονομικές Εφαρμογές ,Κεφ.2 Παράγωγος Συνάρτησης-Οικονομικές Εφαρμογές ,ISBN 960-319-218-X ,2002.

[2] Π.Κικίλια(Μαθηματικός M.Sc.OR Δρ.Επιχειρ.Έρευνας ,καθηγητή Τ.Ε.Ι. Πειραιά) ,Διαφορικός Λογισμός-Ολοκληρωτικός Λογισμός συναρτήσεων μιας μεταβλητής , «ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ» –Σ.Παρίκου ΄κ ΣΙΑ Ο.Ε. ,Κεφ.1 Πραγματικές Συναρτήσεις ,Κεφ.2 Όρια και Συνέχεια Συναρτήσεων, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, Τόμος Β, ISBN 960-405-278-0, 960-450-280-2, 1991.

[3] ΑΡ.Π. ΜΑΚΡΥΓΙΑΝΝΗ-ΕΠ.Β. ΚΑΤΩΠΟΔΗ (Καθηγητών ΤΕΙ Πειραιά), Μαθηματικά Ι, Συναρτήσεις, Διαφορικός Λογισμός - -Ολοκληρωτικός Λογισμός – Σειρές, «ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΩΝ» - Σ. Παρίκου κ' ΣΙΑ Ο.Ε., Έκδοση 4η, Τόμος Β', ISBN 960-405-328-0, 960-405-330-2, 1991.

[4] ΑΘΗΝΑΣ ΚΑΤΑΛΕΙΦΟΥ (Καθηγήτριας ΤΕΙ Αθήνας & ΑΣΕΤΕΜ/ΣΕΛΕΤΕ), Ανώτερα Μαθηματικά, «ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΩΝ» - Σ. Παρίκου κ' ΣΙΑ Ο.Ε., ISBN 960-405-294-2, 1991.

[5] ΓΙΑΝΝΗ ΓΕΩΡΓΟΥΔΗ- ΛΑΖΑΡΟΥ ΒΡΥΖΙΔΗ, Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, Μαθηματικά ΙΙ, «ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΩΝ» - Σ. Παρίκου κ' ΣΙΑ Ο.Ε., ISBN 960-405-349-3, 1992.

[6] Δ. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥΔΗΣ, Ν. ΚΟΥΡΗΣ, Μ. ΛΑΜΠΙΡΗΣ, Δ. ΠΑΛΑΜΟΥΡΔΑΣ, Μαθηματικά ΙΙ, «ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΩΣΤΑΚΗ», ISBN 960-7763-01-7, 1996.

[7] ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΤΣΟΥΛΦΙΔΗΣ , Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης, Μέθοδοι και Υποδείγματα, «Β' ΕΚΔΟΣΗ GUTENBERG», Αθήνα 2002, ISBN 960-01-0723-8

[8] TARO YAMANE-ANDREA KINTH, Μαθηματικά Οικονομικό-Διοικητικών Επιστημών,

«ΕΚΔΟΣΕΙΣ GUTENBERG»,Τόμος Α′, Αθήνα 2002, ISBN 960-01-0479-4

[9] ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ Γ. ΚΑΒΟΥΣΑΝΟΣ (Καθηγητής Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών), Εφαρμογές Μαθηματικού Λογισμού Σε Επιχειρησιακά Και Οικονομικά Προβλήματα,«ΕΚΔΟΣΕΙΣ Γ. ΜΠΕΝΟΥ» Α′ ΕΚΔΟΣΗ Αθήνα 2002, ISBN 260-8249-21-X

[10] ΦΛΥΤΖΑΝΗΣ ΗΛΙΑΣ (Καθηγητής Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών, Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής), Ανώτερα Μαθηματικά «ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ » Αθήνα-Πειραιάς 1993, ISBN 960-7306-36-8

[11] Ν.ΓΑΓΑΛΗ, Μ.ΓΛΑΜΠΕΔΑΚΗ, Β.ΚΩΤΣΑΚΗ, Χ.ΛΕΥΚΑΔΙΤΗ, Φ.ΚΟΜΙΣΟΠΟΥΛΟΥ, Μ.ΤΡΑΧΑΛΙΟΥ (Καθηγητών Τ.Ε.Ι Αθήνας), Μαθηματικός Λογισμός ΙΙ, «ΕΚΔΟΣΕΙΣ Β',ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ» 1997, ISBN 960-319-091-8