

A



361

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΙΑΤΡΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΚΟΣ - ΚΛΙΝΙΚΟΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΙΑΤΡΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΓΛΑΡΟΣ

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΡΟΛΟΥ
ΤΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΠΑΝΑΔΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΟΣΤΩΝ

Βασιλική Α. Παπαθανασοπούλου
Φυσικός Ιατρικής

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2003



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000199867

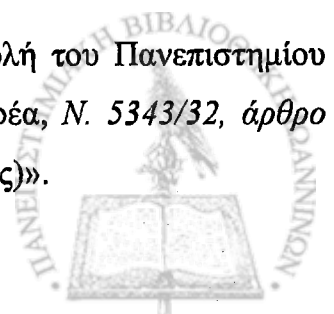


221/2003



(Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page)

«Η έγκριση της διδακτορικής διατριβής από την Ιατρική Σχολή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα, Ν. 5343/32, άρθρο 202, παράγραφος 2, (νομική κατοχύρωση του Ιατρικού Τμήματος)».



ΑΙΤΗΣΗ: 14-10-1995

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΡΙΜΕΛΟΥΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ: 7-5-1996

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Δημήτριος Γλάρος
Καθηγητής Ιατρικής Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΜΕΛΗ

Χρήστος Μασσαλάς
Καθηγητής Επιστήμης των Υλικών, Βιολογικών Εφαρμογών και Τεχνολογίας Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Κωνσταντίνος Ρήγας
Επίκουρος Καθηγητής Ιατρικής Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΟΡΙΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΟΣ: 8-7-1996

ΚΑΤΑΘΕΣΗ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ: 6-5-2003

ΠΡΟΕΔΡΟΣ ΙΑΤΡΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ: Νίκη Αγνάντη, Καθηγήτρια Παθολογικής Ανατομίας Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Δημήτριος Γλάρος
Καθηγητής Ιατρικής Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Χρήστος Μασσαλάς
Καθηγητής Επιστήμης των Υλικών, Βιολογικών Εφαρμογών και Τεχνολογίας Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Κωνσταντίνος Ρήγας
Επίκουρος Καθηγητής Ιατρικής Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Θεόδωρος Ξενάκης
Καθηγητής Ορθοπαιδικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Δημήτριος Φωτιάδης
Αναπληρωτής Καθηγητής Πληροφορικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Αλέξανδρος Μπερής
Καθηγητής Ορθοπαιδικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Νικόλαος Παλληκαράκης
Καθηγητής Ιατρικής Φυσικής Πανεπιστημίου Πατρών

ΒΑΘΜΟΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ: Άριστα



Στους γονείς μου

Στους φίλους μου

Α. Τ. και Ν. Μ.



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Ιατρικής Φυσικής της Ιατρικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων σε συνεργασία με την Μονάδα Ιατρικής Τεχνολογίας και Ευφυών Πληροφοριακών Συστημάτων του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κατά την χρονική περίοδο 1996-2003.

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου για την συνεισφορά τους στην πραγματοποίηση και ολοκλήρωση της προσπάθειας που οδήγησε στην παρουσίαση αυτής της εργασίας, στους παρακάτω:

Τον επιβλέποντα κ. Δημήτριο Γλάρο, Καθηγητή Ιατρικής Φυσικής, για το συνεχές ενδιαφέρον του, την ενθάρρυνση και την ηθική του συμπαράσταση καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Τον κ. Χρήστο Μασσαλά, Καθηγητή του Τμήματος Επιστήμης Υλικών, Βιολογικών Εφαρμογών και Τεχνολογίας. Στον κ. Μασσαλά οφείλω την πρόταση για την εκπόνηση της παρούσας διατριβής, την ιδέα του ερευνητικού χώρου στον οποίο κινείται, το συνεχές ενδιαφέρον και την παρακολούθηση κάθε σταδίου της προσπάθειας, την ουσιαστική βοήθεια σε μαθηματικά θέματα και την ενθάρρυνσή του για την ολοκλήρωση και περάτωση της εργασίας.

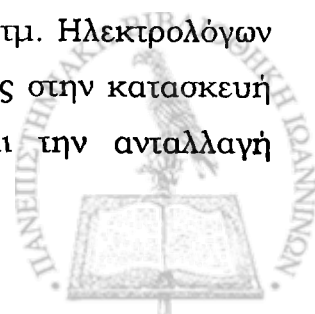
Τον κ. Κωνσταντίνο Ρήγα, Επίκουρο Καθηγητή Ιατρικής Φυσικής, για την ενθάρρυνσή του, τις χρήσιμες συζητήσεις και την προτροπή του για την περάτωση αυτής της εργασίας.

Τον κ. Δημήτριο Φωτιάδη, Αναπληρωτή Καθηγητή της Πληροφορικής για την συνεχή παρακολούθηση και καθοδήγησή του. Η υλικοτεχνική υποδομή, η προτροπή για εκπόνηση εργασιών προς δημοσίευση και συμμετοχή σε συνέδρια, και η οικονομική ενίσχυση κατά ένα μεγάλο διάστημα εκπόνησης της διατριβής οφείλονται στην βοήθεια του κ. Φωτιάδη.

Τον κ. Θεόδωρο Ξενάκη, Καθηγητή Ορθοπαιδικής, γιατί η συνεργασία μαζί του σε πειράματα μηχανικής των οστών διεύρυνε την αντίληψή μου όσον αφορά την πρακτική-εφαρμοσμένη πλευρά της μελέτης των οστών.

Την κ. Γεωργία Φουτσιτζή, Διδάκτορα Μαθηματικών, για την πρόθυμη συνεργασία της σε μαθηματικά θέματα.

Τους κ. Ηρακλή Κούρτη και Λάμπρο Κούρτη, φοιτητές τμ. Ηλεκτρολόγων και Μηχανολόγων Μηχανικών αντίστοιχα, για την βοήθειά τους στην κατασκευή της γεωμετρίας του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων και την ανταλλαγή απόψεων σε τεχνικά θέματα.



Τον κ. Τρύφωνα Παπαγεωργίου, Τεχνικό Υποστήριξης Δικτύου, για την εγκατάσταση και συνεχή αναβάθμιση του προγράμματος Nastran και για την συνεχή του εξυπηρέτηση σε θέματα κωρητικότητας δίσκου.

Τον κ. Τζών Καλεφ-Εζρά, Καθηγητή Ιατρικής Φυσικής και προϊστάμενό μου στο νοσοκομείο για τις διευκολύνσεις και την κατανόησή του.

Όλους τους συναδέλφους και φίλους μου στο Εργαστήριο για τις αδιάκοπες συζητήσεις, την ανταλλαγή απόψεων, την βοήθεια και κυρίως την ενθάρρυνσή τους.

Τέλος ευχαριστώ την οικογένεια και τους στενούς μου φίλους που με ανέκτησαν και με στήριξαν ουσιαστικά στις δύσκολες στιγμές κατά την εκπόνηση της διατριβής.



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Το οστό	5
2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	5
2.2. ΦΥΣΙΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΟΣΤΟΥ	6
2.2.1. Δομή του οστού	6
2.2.2. Ανατομία του οστού	7
2.2.3. Ιστολογία του οστού	9
2.2.3.1. <i>Θεμέλια ουσία, οστεοβλάστες, οστεοκύτταρα και οστεοκλάστες</i>	9
2.2.3.2. <i>Σπογγώδες οστό</i>	11
2.2.3.3. <i>Φλοιώδες οστό</i>	11
2.2.4. Αρχιτεκτονική του οστού	13
2.2.4.1. <i>Αρχιτεκτονική του φλοιώδους οστού – Ο δευτερογενής οστεώνας</i>	13
2.2.4.2. <i>Αρχιτεκτονική του σπογγώδους οστού – Ο νόμος του Wolff</i>	14
2.2.5. Επαναδόμηση, διαμόρφωση και προσαρμογή του οστού	15
2.2.5.1. <i>Οστική επαναδόμηση</i>	15
2.2.5.2. <i>Οστική διαμόρφωση</i>	18
2.2.5.3. <i>Οστική προσαρμογή</i>	19
2.3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΣΤΟΥ	20
2.3.1. Βασικές έννοιες	20
2.3.2. Μηχανικές ιδιότητες του οστού	25
2.3.2.1. <i>Μηχανικές ιδιότητες φλοιώδους οστού</i>	25
2.3.2.1.1. <i>Ελαστικές ιδιότητες φλοιώδους οστού</i>	25
2.3.2.1.2. <i>Πυκνότητα και πορώδες φλοιώδους οστού</i>	29
2.3.2.1.3. <i>Ανισοτροπία και ετερογένεια φλοιώδους οστού</i>	30
2.3.2.1.4. <i>Ιξωδοελαστικές ιδιότητες φλοιώδους οστού</i>	30
2.3.2.2. <i>Μηχανικές ιδιότητες σπογγώδους οστού</i>	31
2.3.2.2.1. <i>Ελαστικές ιδιότητες σπογγώδους οστού</i>	32
2.3.2.2.2. <i>Πυκνότητα σπογγώδους οστού</i>	32
2.3.2.2.3. <i>Μικροδομή σπογγώδους οστού</i>	33
2.3.2.2.4. <i>Ανισοτροπία και ετερογένεια σπογγώδους οστού</i>	33
2.3.2.2.5. <i>Ιξωδοελαστικές ιδιότητες σπογγώδους οστού</i>	34
2.3.3. Υπόθεση συνεχούς μέσου	34
2.3.4. Παράγοντες που επηρεάζουν τις μηχανικές ιδιότητες του οστού	35
2.3.5. Ηλεκτρικές ιδιότητες του οστού	37
2.3.5.1. <i>Πιεζοηλεκτρικά φαινόμενα στα οστά</i>	37
2.3.5.2. <i>Ρευματικά δυναμικά στα οστά</i>	38



2.3.5.2.1.	Δυναμικό ζήτη	39
2.3.5.2.2.	Ρευματικά δυναμικά	39
2.3.6.	Ο ρόλος του ρευστού στην οστική επαναδόμηση	40
2.3.6.1.	Ροή διάμεσου ρευστού στο οστό	40
2.3.6.2.	Ροή διάμεσου ρευστού και σχηματισμός οστού	41
2.3.6.2.1.	Αγγείωση	41
2.3.6.2.2.	Φλεβική υπέρταση	41
2.3.6.2.3.	Μικροβαρύτητα και κατάκλιση	42
2.3.6.2.4.	Μηχανική φόρτιση	42
2.3.6.3.	Διατημητικές τάσεις ρευστού	42
2.3.6.4.	Ροή ρευστού σε κυτταρικές καλλιέργειες	43

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Θεωρίες και μοντέλα οστικής επαναδόμησης 45

3.1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	45
3.2.	ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ ΟΣΤΙΚΗΣ ΕΠΑΝΑΔΟΜΗΣΗΣ	46
3.3.	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΟΣΤΙΚΗΣ ΕΠΑΝΑΔΟΜΗΣΗΣ	47
3.4.	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑΣ	49
3.5.	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΘΕΩΡΙΩΝ-ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΟΣΤΙΚΗΣ ΕΠΑΝΑΔΟΜΗΣΗΣ	50
3.5.1.	Μηχανικά μοντέλα	50
3.5.1.1.	Μοντέλα επαναδόμησης που βασίζονται στην τάση	50
3.5.1.2.	Μοντέλα επαναδόμησης που βασίζονται στην τροπή	52
3.5.1.2.1.	Εσωτερική επαναδόμηση στην προσαρμοστική ελαστικότητα	54
3.5.1.2.2.	Επιφανειακή επαναδόμηση στην προσαρμοστική ελαστικότητα	55
3.5.1.2.3.	Επαναδόμηση οσογγών οστού στην προσαρμοστική ελαστικότητα	57
3.5.1.3.	Μοντέλα επαναδόμησης που βασίζονται στην ενεργειακή πυκνότητα τροπής	58
3.5.1.4.	Μοντέλα επαναδόμησης που βασίζονται στην ουσώρευση καταστροφής λόγω κόπωσης	63
3.5.1.5.	Σύνθετα μοντέλα (που βασίζονται σε συνδυασμό ερεθισμάτων)	65
3.5.2.	Ηλεκτρομηχανικά μοντέλα	71
3.5.2.1.	Πιεζοηλεκτρικά μοντέλα	71
3.5.2.2.	Ηλεκτροκινητικά μοντέλα	72
3.5.2.3.	Μοντέλα ροής ρευστού	74
3.5.3.	Βιολογικά-μηχανικά μοντέλα	76

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Ποροελαστικό μοντέλο εσωτερικής επαναδόμησης 79

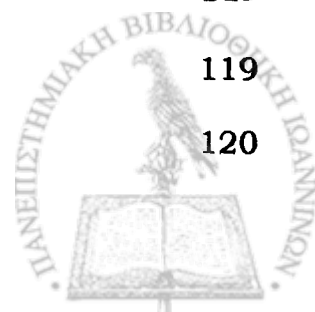
4.1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	79
4.2.	Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΠΟΡΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	80
4.2.1.	Εισαγωγή	80
4.2.2.	Γενικές εξισώσεις για ανισότροπο υλικό	81



4.2.3.	Ισότροπο υλικό	85
4.2.4.	Οι ελαστικοί συντελεστές της θεωρίας ποροελαστικότητας	86
4.2.4.1.	Μέτρηση περιβεβλημένης συμπιεσιότητας	86
4.2.4.2.	Μέτρηση μη περιβεβλημένης συμπιεσιότητας	87
4.3.	Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	90
4.3.1.	Εισαγωγή	90
4.3.2.	Το μοντέλο	90
4.3.3.	Καταστατικές υποθέσεις	92
4.3.4.	Προσαρμοστική ελαστικότητα για μικρές τροπές και ισόθερμες διεργασίες	93
4.3.5.	Προβλήματα συνοριακών συνθηκών-αρχικών τιμών	94
4.3.6.	Προσέγγιση των συντελεστών	95
4.4.	ΕΝΑ ΠΟΡΟΕΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΕΠΑΝΑΔΟΜΗΣΗΣ	96
4.4.1.	Εισαγωγή	96
4.4.2.	Θεωρητική διατύπωση του μοντέλου	96
4.4.2.1.	Θεωρία «προσαρμοστικής ποροελαστικότητας» μικρών τροπών	99
4.4.2.1.1.	Καταστατικές σχέσεις προτεινόμενης θεωρίας	100
4.4.2.1.2.	Εξίσωση ρυθμού επαναδόμησης προτεινόμενης θεωρίας	100
4.4.2.1.3.	Σχέση πορώδους-μεταβολής ποσοστού όγκου	101
4.4.3.	Πρώτο πρόβλημα συνοριακών συνθηκών : το πρόβλημα του κοίλου ποροελαστικού κυλίνδρου	101
4.4.3.1.	Επίλυση του προβλήματος συνοριακών συνθηκών - Μέθοδος λύσης	103
4.4.3.1.1.	Μέθοδος λύσης προβλήματος μη ομογενών συνοριακών συνθηκών	105
4.4.3.1.2.	Επίλυση ισοδύναμου προβλήματος ομογενών συνοριακών συνθηκών	107
4.4.3.2.	Υπολογισμός μετατοπίσεων, τροπών, τάσεων	109
4.4.4.	Δεύτερο πρόβλημα συνοριακών συνθηκών: η εξαναγκασμένη εισαγωγή ενός στερεού ελαστικού κυλίνδρου στον κοίλο ποροελαστικό κύλινδρο	111
4.4.4.1.	Υπολογισμός της πίεσης αλληλεπίδρασης $p(t)$	111
4.4.4.2.	Εξίσωση ρυθμού επαναδόμησης	112
4.4.5.	Μία προσεγγιστική λύση	113
4.4.5.1.	Επιλογή των συντελεστών του ρυθμού επαναδόμησης	113
4.4.5.2.	Επίλυση της εξίσωσης του ρυθμού επαναδόμησης	114
4.4.6.	Αποτελέσματα	115
4.4.7.	Συζήτηση	116

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Ποροελαστικό μοντέλο επιφανειακής επαναδόμησης

		119
5.1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	119
5.2.	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	120



5.3.	ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΝΔΟΠΡΟΘΕΣΗΣ	124
5.4.	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	127
5.5.	ΣΥΖΗΤΗΣΗ	132

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία του ανθρώπινου μηριαίου οστού σε διαφορετικές κινητικές δραστηριότητες **135**

6.1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	135
6.2.	Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	137
6.2.1.	Γενική διαδικασία της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων	137
6.2.2.	Μαθηματική διατύπωση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων	139
6.2.2.1.	<i>Η προσέγγιση μέσω συναρτήσεων βάσης</i>	139
6.2.2.2.	<i>Η προσέγγιση των σταθμισμένων υπολοίπων</i>	140
6.2.2.3.	<i>Η αρχή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων</i>	141
6.2.2.4.	<i>Γραμμικές συναρτήσεις στενής βάσης</i>	142
6.2.2.5.	<i>Γενίκευση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων σε δύο και τρεις διαστάσεις</i>	143
6.3.	ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ MSC/NASTRAN	144
6.3.1.	Διάγραμμα ροής λύσης	144
6.3.2.	Υποθέσεις και περιορισμοί της γραμμικής στατικής ανάλυσης	145
6.3.2.1.	<i>Γραμμικό ελαστικό υλικό</i>	145
6.3.2.2.	<i>Μικρές μετατοπίσεις</i>	145
6.3.2.3.	<i>Αργά εφαρμοζόμενα φορτία</i>	145
6.4.	ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	145
6.4.1.	Γεωμετρία μοντέλου μηριαίου οστού	145
6.4.2.	Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων	147
6.4.3.	Υλικές ιδιότητες	147
6.4.4.	Θεωρητική διατύπωση	148
6.4.5.	Συνοριακές συνθήκες	149
6.4.6.	Υπολογισμοί	151
6.4.7.	Αποτελέσματα	151
6.4.8.	Συζήτηση	152

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Συμπεράσματα **175**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ **181**

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ **191**

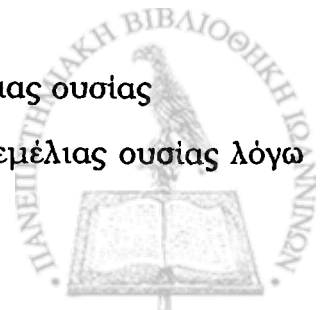
ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΣΤΗΝ ΑΓΓΛΙΚΗ (SUMMARY) **193**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ **195**



ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

f :	πορώδες
T_{ij} :	συνιστώσες τάσης στερεού σε ποροελαστικό μέσο
T :	κάθετη συνιστώσα τάσης ρευστού σε ποροελαστικό μέσο
p :	υδροστατική πίεση ρευστού στους πόρους ποροελαστικού μέσου
u_i :	συνιστώσες μέσης μετατόπισης στερεού σε ποροελαστικό μέσο
U_i :	συνιστώσες μέσης μετατόπισης ρευστού σε ποροελαστικό μέσο
E_{ij} :	συνιστώσες τροπής στερεού σε ποροελαστικό μέσο
ε_{ij} :	συνιστώσες τροπής ρευστού σε ποροελαστικό μέσο
E :	διόγκωση στερεού σε ποροελαστικό μέσο
ε :	διόγκωση ρευστού σε ποροελαστικό μέσο
k_{ij} :	πίνακας συντελεστών στον νόμο του Darcy
C :	σταθερά Darcy για ισότροπο υλικό
κ_m :	συντελεστής διαπερατότητας υλικού
η :	ιξώδες ρευστού
\dot{u}_i :	συνιστώσες μέσης ταχύτητας στερεού σε ποροελαστικό μέσο
\dot{U}_i :	συνιστώσες μέσης ταχύτητας ρευστού σε ποροελαστικό μέσο
$\left. \begin{matrix} A \\ N \\ Q \\ R \end{matrix} \right\}$:	ελαστικοί συντελεστές θεωρίας ποροελαστικότητας
$\left. \begin{matrix} \mu \\ \lambda \end{matrix} \right\}$:	συντελεστές Lamé
κ :	συντελεστής περιβεβλημένης συμπιεστότητας
κ_b :	συντελεστής διαπερατότητας οστού
δ :	συντελεστής μη περιβεβλημένης συμπιεστότητας
γ :	συντελεστής περιεχομένου ρευστού
ξ :	ποσοστό όγκου του υλικού της θεμέλιας ουσίας
ξ_0 :	ποσοστό όγκου αναφοράς του υλικού της θεμέλιας ουσίας
e :	μεταβολή στο ποσοστό όγκου του υλικού της θεμέλιας ουσίας λόγω εσωτερικής επαναδόμησης



- \dot{e} ή $\frac{de}{dt}$: ρυθμός εσωτερικής επαναδόμησης
- $C_{\gamma km}$: πίνακας συντελεστών ρυθμού επαναδόμησης
- $p(t)$: ακτινική πίεση
- $P(t)$: αξονική δύναμη
- $\left. \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ A_4^0 \end{matrix} \right\}$: συντελεστές ρυθμού εσωτερικής επαναδόμησης
- a : ακτίνα ενδόστεου
- b : ακτίνα περιόστεου
- U : συνιστώσα ταχύτητας επιφάνειας επαναδόμησης στην διεύθυνση \vec{n}
- U_e : ταχύτητα επαναδόμησης ενδόστεου στην ακτινική διεύθυνση
- U_p : ταχύτητα επαναδόμησης περιόστεου στην ακτινική διεύθυνση
- $C_{ij}(\vec{n}, S)$: συντελεστές ρυθμού επιφανειακής επαναδόμησης συναρτήσει τροπής
- B_{ij} : συντελεστές ρυθμού επιφανειακής επαναδόμησης συναρτήσει τάσης



ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Πίνακας 2.1:	<i>Ελαστικές σταθερές στο ανθρώπινο μηριαίο οστό και στο οστό της κνήμης</i>	29
Πίνακας 2.2:	<i>Μηχανικές ιδιότητες και πυκνότητες ανθρώπινου οπογγώδους οστίτη ιστού</i>	32
Πίνακας 2.3:	<i>Επίδραση του ρυθμού τροπής στις ελαστικές σταθερές (συμπύεση)</i>	36

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Πίνακας 6.1:	<i>Υλικές ιδιότητες μηριαίου οστού και ευδοπρόθεσης</i>	147
Πίνακας 6.2:	<i>Συνιστώσες δύναμης αντίδρασης στην μηριαία κεφαλή από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης σε εννέα διαφορετικές δραστηριότητες, κατά την χρονική στιγμή της μέγιστης φόρτισης, στο μηριαίο σύστημα συντεταγμένων</i>	149
Πίνακας 6.3:	<i>Εύρος μέγιστης κύριας επιφανειακής τροπής στο ανέπαφο και στο εμφυτευμένο μηριαίο οστό σε εννέα διαφορετικές δραστηριότητες, κατά την χρονική στιγμή της μέγιστης φόρτισης</i>	152



ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Σχήμα 2.1:	<i>Μακροσκοπική δομή ενός μακρού οστού</i>	8
Σχήμα 2.2:	<i>Το περίοστεο και το ενδόστεο</i>	9
Σχήμα 2.3:	<i>Σύσταση οστίτη ιστού</i>	10
Σχήμα 2.4:	<i>Ιστολογική δομή οστίτη ιστού</i>	12
Σχήμα 2.5:	<i>Ευθυγράμμιση των δοκίδων με τις διευθύνσεις των κύριων τάσεων</i>	13
Σχήμα 2.6:	<i>Κυκλοφορική παροχή σε ένα ώριμο οστό</i>	14
Σχήμα 2.7:	<i>Εναποθετική οστική ανάπτυξη</i>	16
Σχήμα 2.8:	<i>Δημιουργία δευτερογενούς οστεάνα</i>	17
Σχήμα 2.9:	<i>Τυπική καμπύλη τάσης-τροπής</i>	21
Σχήμα 2.10:	<i>Ελαστικότητες διαφορετικών υλικών</i>	22
Σχήμα 2.11:	<i>Επίδραση του ρυθμού τροπής στις ελαστικές ιδιότητες ενός ιξωδοελαστικού υλικού</i>	23
Σχήμα 2.12:	<i>Τυπική καμπύλη αποκατάστασης ενός ιξωδοελαστικού υλικού</i>	24
Σχήμα 2.13:	<i>Τυπική καμπύλη ολίσθησης ενός ιξωδοελαστικού υλικού</i>	25
Σχήμα 2.14:	<i>Επίπεδα και διευθύνσεις στο ανθρώπινο σώμα</i>	33
Σχήμα 2.15:	<i>Οστικό δείγμα σε κάμψη</i>	37

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σχήμα 3.1:	<i>Σχηματικό διάγραμμα της οστικής επαναδόμησης</i>	48
Σχήμα 3.2:	<i>Η κυβική σχέση του Kummer μεταξύ επαναδόμησης U και τάσης T</i>	51
Σχήμα 3.3:	<i>Το σχήμα επαναδόμησης που προτάθηκε από τους Huiskes et al. (1987)</i>	60
Σχήμα 3.4:	<i>Το σχήμα επαναδόμησης που προτάθηκε από τους Weinans et al. (1992b)</i>	62

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Σχήμα 4.1:	<i>Σχηματικό διάγραμμα του μοντέλου επαναδόμησης</i>	91
-------------------	--	-----------



Σχήμα 4.2:	<i>Η διάσπαση του προβλήματος της εξαναγκασμένης εισαγωγής ενός ευδομυελικού ήλου μέσα σε ένα ποροελαστικό μοντέλο οστού σε δύο υποπροβλήματα</i>	97
Σχήμα 4.3:	<i>Ο κοίλος ποροελαστικός κύλινδρος υπόκειται σε αξονική φόρτιση $P(t)$ και ακτινική εσωτερική πίεση $p(t)$</i>	102
Σχήμα 4.4:	<i>Η μεταβολή του ρυθμού επαναδόμησης με το πορώδες</i>	116

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σχήμα 5.1:	<i>(a) Κοίλος ισότροπος ποροελαστικός κύλινδρος αρχικής εσωτερικής ακτίνας a_0 και αρχικής εξωτερικής ακτίνας b_0 που υπόκειται σε εσωτερική ακτινική πίεση $p(t)$ (b) Ισότροπος στερεός ελαστικός κύλινδρος ακτίνας $a_0 + \frac{\rho}{2}$ που υπόκειται σε εξωτερική ακτινική πίεση $p(t)$</i>	124
Σχήμα 5.2:	<i>Ο κοίλος ποροελαστικός κύλινδρος υπόκειται σε αξονική φόρτιση $P(t)$ και ακτινική εσωτερική πίεση $p(t)$</i>	125
Σχήμα 5.3:	<i>Μεταβολή της ακτίνας του ενδόστεου με το χρόνο για σταθερή αρχική ακτίνα ενδόστεου και διαφορετικά αρχικά πάχη οστού</i>	129
Σχήμα 5.4:	<i>Μεταβολή της ακτίνας του περιόστεου με το χρόνο για σταθερή αρχική ακτίνα ενδόστεου και διαφορετικά αρχικά πάχη οστού</i>	130
Σχήμα 5.5:	<i>Μεταβολή της ακτίνας του ενδόστεου με το χρόνο για σταθερό αρχικό πάχος οστού και διαφορετικές αρχικές ακτίνες ενδόστεου και περιόστεου</i>	130
Σχήμα 5.6:	<i>Μεταβολή της ακτίνας του περιόστεου με το χρόνο για σταθερό αρχικό πάχος οστού και διαφορετικές αρχικές ακτίνες ενδόστεου και περιόστεου</i>	131
Σχήμα 5.7:	<i>Μεταβολή του πάχους του οστού με το χρόνο για σταθερό αρχικό πάχος και διαφορετικές αρχικές ακτίνες ενδόστεου και περιόστεου</i>	131

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Σχήμα 6.1:	<i>Προσέγγιση δεδομένης συνάρτησης σε μία διάσταση με τμηματικά γραμμικά στοιχεία</i>	143
Σχήμα 6.2:	<i>Γεωμετρικό μοντέλο και μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων (a) του ανέπαφου μηριαίου οστού και (b) του μηριαίου οστού με την ενδοπρόθεση</i>	146
Σχήμα 6.3:	<i>Κατανομή μέγιστων κύριων επιφανειακών τροπών στο μοντέλο του ανέπαφου μηριαίου οστού κατά την χρονική στιγμή της μέγιστης αντίδρασης από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης στην μηριαία κεφαλή</i>	153



Σχήμα 6.4:	<i>Κατανομή μέγιστων κύριων επιφανειακών τροπών στο μοντέλο του εμφυτευμένου μηριαίου οστού κατά την χρονική στιγμή της μέγιστης αντίδρασης από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης στην μηριαία κεφαλή</i>	157
Σχήμα 6.5:	<i>Τιμές μέγιστων και ελάχιστων κύριων τροπών στην μέση πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης</i>	165
Σχήμα 6.6:	<i>Τιμές μέγιστων και ελάχιστων κύριων τροπών στην πλάγια πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης</i>	167
Σχήμα 6.7:	<i>Τιμές μέγιστων και ελάχιστων κύριων τροπών στην πρόσθια πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης</i>	169
Σχήμα 6.8:	<i>Τιμές μέγιστων και ελάχιστων κύριων τροπών στην οπίσθια πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης</i>	171
Σχήμα 6.9:	<i>Τιμές μέγιστων κύριων τροπών κατά την φυσιολογική βάρδια (a) στο μηριαίο οστό με την ενδοπρόθεση (b) στο ανέπαφο μηριαίο οστό</i>	173

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Σχήμα Π1:	<i>Περιγραφή του ανθρώπινου κύκλου βάρδιας</i>	187
Σχήμα Π2:	<i>Συνισταμένη δύναμη αντίδρασης στην άρθρωση του ισχίου συναρτήσει του χρόνου κατά (a) την βάρδια και (b) το τρέξιμο</i>	188



Εισαγωγή

Το οστό είναι ένα ζωντανό όργανο του ανθρώπινου οργανισμού που πέρα από τις δομικές και μεταβολικές λειτουργίες που επιτελεί, έχει την μοναδική ιδιότητα να επαναδομείται από μόνο του χωρίς τον έλεγχο του νευρικού συστήματος. Η επαναδόμηση του οστού (bone remodeling) είναι ένας γενικός όρος που περιγράφει τις διεργασίες με τις οποίες το οστό προσαρμόζει την ιστολογική του δομή σε μεταβολές στις μακροχρόνιες φορτίσεις που δέχεται. Αποτέλεσμα αυτής της προσαρμογής είναι η μεταβολή των υλικών και γεωμετρικών ιδιοτήτων του. Στην πραγματικότητα πρόκειται για μία πολύπλοκη βιοχημική διεργασία σε κυτταρικό επίπεδο, της οποίας ο ακριβής μηχανισμός ρύθμισης είναι άγνωστος και μέσω του οποίου ο οστίτης ιστός αντιλαμβάνεται το μηχανικό περιβάλλον γύρω του και ανάλογα ελέγχει τον σχηματισμό ή την απορρόφηση οστού. Τα “μακροσκοπικά” αποτελέσματα αυτής της διεργασίας γίνονται αντιληπτά ως μεταβολές στις υλικές ιδιότητες ή την γεωμετρία του οστού.

Η αποσαφήνιση του μηχανισμού της λειτουργίας αυτής, αποτέλεσμα της οποίας είναι η διατήρηση της δομικής ακεραιότητας στους ζωντανούς οργανισμούς, έχει αποτελέσει ένα από τα πιο ελκυστικά προβλήματα για τους ερευνητές πολλών κλάδων. Πειραματικές μελέτες σχετικές με το αντικείμενο έχουν διεξαχθεί και αναλυτικές έρευνες έχουν αναφερθεί στις οποίες έχουν κατασκευαστεί μοντέλα για την περιγραφή της διεργασίας επαναδόμησης. Το ενδιαφέρον δεν είναι μόνον θεωρητικό αλλά και πρακτικό, δεδομένου ότι η κατανόηση του μηχανισμού της οστικής επαναδόμησης θα μπορούσε να δώσει απαντήσεις και λύσεις σε προβλήματα που σχετίζονται με την οστεοπόρωση, την σταθερότητα εμφυτευμάτων, την επούλωση καταγμάτων και έναν μεγάλο αριθμό άλλων κλινικών εφαρμογών.

Για να έχουν τα μοντέλα την δυνατότητα να οδηγήσουν σε εφαρμογή θα πρέπει να είναι σε θέση να προσδιορίζουν και να προβλέπουν ποσοτικά και με ακρίβεια την επαναδόμηση. Το κύριο πρόβλημα πολλών από τα μοντέλα που έχουν αναφερθεί στην βιβλιογραφία είναι ότι βασίζονται κυρίως σε μηχανική θεώρηση της διεργασίας οστικής επαναδόμησης αγνοώντας τον πολύπλοκο βιολογικό-βιοχημικό χαρακτήρα της. Αυτό συμβαίνει τόσο γιατί τα “μακροσκοπικά” αποτέλεσμα της επαναδόμησης γίνονται αντιληπτά κυρίως σε επίπεδο μηχανικών ιδιοτήτων όσο και γιατί οι μέθοδοι ανάλυσης που χρησιμοποιούν τα μοντέλα αυτά προέρχονται κυρίως από επιστήμες μηχανικής.

Ως αποτέλεσμα, απουσιάζει πολλές φορές η σύζευξη, ο συνδετικός κρίκος, μεταξύ αποτελέσματος και αιτίου, γεγονός που τους προσδίδει έναν χαρακτήρα αποστασιοποίησης από την διεργασία της επαναδόμησης όπως αυτή συμβαίνει στον ανθρώπινο οργανισμό.

Η παρούσα εργασία στοχεύει στην ανάπτυξη θεωρητικού μοντέλου για την περιγραφή και ποιοτική πρόβλεψη της διεργασίας οστικής επαναδόμησης. Η δημιουργία του μοντέλου προήλθε από τον συνδυασμό δύο γνωστών θεωριών που ανεξάρτητα έχουν χρησιμοποιηθεί για να περιγράψουν διαφορετικά φαινόμενα στο οστό: την θεωρία της προσαρμοστικής ελαστικότητας των Cowin *et al.* (1976) και την θεωρία της ποροελαστικότητας του Biot (1941). Η θεωρία της προσαρμοστικής ελαστικότητας των Cowin *et al.* αποτελεί μία από τις πιο γνωστές θεωρίες οστικής επαναδόμησης, η οποία απετέλεσε την βάση για την δημιουργία πολλών από τα μοντέλα που έχουν αναφερθεί στην βιβλιογραφία. Πρόκειται για μία θεωρία φαινομενολογικού χαρακτήρα, η οποία λαμβάνει έμμεσα υπόψη την διφασική (στερεό + ρευστό) φύση του οστού και χρησιμοποιώντας την μηχανική του συνεχούς μέσου αντιμετωπίζει ουσιαστικά το οστό ως ένα στερεό προσαρμοστικό (adaptive) υλικό. Η θεωρία ποροελαστικότητας του Biot είναι θεωρία που αρχικά αναπτύχθηκε για γεωλογικές εφαρμογές αλλά η οποία στην συνέχεια χρησιμοποιήθηκε από κάποιους ερευνητές για να περιγράψει το οστό ως διφασικό ποροελαστικό υλικό.

Η μελέτη που παρουσιάζεται βασίζεται στην δημιουργία ενός μοντέλου οστικής επαναδόμησης, εσωτερικής και επιφανειακής, στο οποίο το οστό παρουσιάζει προσαρμοστικές ποροελαστικές ιδιότητες. Θεωρείται δηλαδή ότι το οστό αποτελείται τόσο από στερεό όσο και ρευστό τμήμα, τα οποία συνολικά υπακούουν την θεωρία της ποροελαστικότητας. Ταυτόχρονα όμως το οστό ως σύνολο έχει προσαρμοστικό χαρακτήρα αποκρινόμενο στις μηχανικές φορτίσεις που δέχεται. Η προσαρμοστικότητα του οστού θεμελιώνεται με την κατασκευή νέων καταστατικών εξισώσεων τόσο για την εσωτερική όσο και για την επιφανειακή επαναδόμηση, με βάση τις γενικές αρχές της θεωρίας προσαρμοστικής ελαστικότητας των Cowin *et al.* (1976). Με τον νέο φορμαλισμό επιτυγχάνεται η εμφάνιση ξεχωριστών όρων στερεού και ρευστού στις καταστατικές εξισώσεις επαναδόμησης. Η προσαρμοστικότητα επιτυγχάνεται μέσω της μετατροπής στερεού σε ρευστό και αντίστροφα ανάλογα με τις μηχανικές απαιτήσεις. Επίσης, κατασκευάζονται εξισώσεις που προβλέπουν τον ρυθμό εσωτερικής και επιφανειακής επαναδόμησης σε διαφορετικές θέσεις στο μοντέλο. Στο προτεινόμενο μοντέλο, ο ρυθμός επαναδόμησης, εσωτερικής και εξωτερικής, θεωρείται ότι ελέγχεται από την τροπή (strain).



Η κατάλληλη υλική περιγραφή είναι ένα μόνον από τα στοιχεία που καθιστούν ένα μοντέλο οστού περισσότερο ρεαλιστικό σε σχέση με άλλα. Η γεωμετρία είναι επίσης ένας καθοριστικός παράγοντας της συμπεριφοράς του μοντέλου. Η ανάγκη εισαγωγής μίας λιγότερο απλουστευμένης, σε σχέση με την κυλινδρική, γεωμετρίας σε ένα μοντέλο μακρού οστού οδήγησε στην κατασκευή ενός τρισδιάστατου μοντέλου του ανθρώπινου μηριαίου οστού με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Αρχικά κατασκευάστηκε μοντέλο του ανέπαφου μηριαίου οστού και στην συνέχεια ενός με ενδοπρόθεση. Στα μοντέλα εφαρμόστηκαν συνοριακές συνθήκες που προσομοιώνουν τις φορτίσεις εννέα διαφορετικών κινητικών δραστηριοτήτων. Σε πρώτη προσέγγιση, το μοντέλο περιγράφηκε ως γραμμικό ελαστικό ισότροπο στερεό και έγινε μακροσκοπική επίδειξη της κατανομής των κύριων τροπών κατά την χρονική στιγμή της μέγιστης φόρτισης. Η κατανομή αυτή σχετίζεται με την χωρική κατανομή και ένταση της οστικής επαναδόμησης.

Το κεφάλαιο 2 περιλαμβάνει στοιχεία που αφορούν την φυσιολογία και τις ηλεκτρο-μηχανικές ιδιότητες του οστού. Συγκεκριμένα, γίνεται σύντομη αναφορά στην ανατομία και φυσιολογία του οστού με έμφαση στην διεργασία της επαναδόμησης. Στην συνέχεια, το οστό περιγράφεται ως υλικό και γίνεται σύντομη αναφορά στις κύριες μηχανικές και ηλεκτρικές του ιδιότητες. Παρουσιάζεται η υπόθεση της θεωρίας των ρευματικών δυναμικών και της σημασίας του ρόλου του ρευστού στην διεργασία της επαναδόμησης.

Στο κεφάλαιο 3 περιγράφεται αρχικά η φιλοσοφία των θεωριών και των μοντέλων οστικής επαναδόμησης και τα κριτήρια με τα οποία αυτά κατηγοριοποιούνται. Στην συνέχεια γίνεται ανακεφαλαίωση των κύριων κατηγοριών των μοντέλων που έχουν αναφερθεί στην βιβλιογραφία με βάση το ερέθισμα που θεωρείται ότι ενεργοποιεί την διεργασία της επαναδόμησης και ακολουθεί σύντομη περιγραφή των βασικότερων από αυτά.

Στο κεφάλαιο 4 αναπτύσσονται οι βασικές αρχές της θεωρίας προσαρμοστικής ελαστικότητας (Cowin *et al.*, 1976) και της θεωρίας ποροελαστικότητας (Biot, 1941), στοιχεία των οποίων χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του προτεινόμενου μοντέλου επαναδόμησης. Ακολουθεί η θεμελίωση των βασικών εξισώσεων που περιγράφουν την προτεινόμενη θεωρία εσωτερικής επαναδόμησης. Ακολουθεί εφαρμογή της θεωρίας στο πρόβλημα εσωτερικής επαναδόμησης που επάγεται από την εξαναγκασμένη εισαγωγή ενός στερεού κυλινδρικού ήλου σε ένα κοίλο κυλινδρικό ποροελαστικό οστό. Η επίλυση του

μοντέλου οδηγεί σε μία εξίσωση του ρυθμού επαναδόμησης συναρτήσει του πορώδους.

Στο κεφάλαιο 5 η θεωρία εσωτερικής επαναδόμησης που διατυπώθηκε στο κεφάλαιο 4 επεκτείνεται και εφαρμόζεται στο πρόβλημα της επιφανειακής επαναδόμησης που επάγεται στις κυλινδρικές επιφάνειες ενδόστεου και περιόστεου του κοίλου ποροελαστικού οστού από την εξαναγκασμένη εισαγωγή του ενδομυελικού ήλου. Η αριθμητική επίλυση του μοντέλου οδηγεί στην πρόβλεψη της συμπεριφοράς (αύξηση ή ελάττωση) της ακτίνας του ενδόστεου και του περιόστεου ως αποτέλεσμα της επαναδόμησης.

Στο κεφάλαιο 6 μοντελοποιείται ένα ρεαλιστικό, όσον αφορά την γεωμετρία, τρισδιάστατο μοντέλο ανθρώπινου μηριαίου οστού με και χωρίς ενδοπρόθεση με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Χρησιμοποιούνται συνοριακές συνθήκες που έχουν ληφθεί από τον κύκλο φόρτισης εννέα διαφορετικών κινητικών δραστηριοτήτων. Γίνεται ανάλυση τροπών στην επιφάνεια και το εσωτερικό του μοντέλου προσομοιώνοντας τις μακροσκοπικές φορτίσεις ενός πραγματικού οστού *in vivo*.

Στο κεφάλαιο 7 γίνεται σύντομη ανακεφαλαίωση της μελέτης που πραγματοποιήθηκε και συμπερασματικά αναφέρονται τα κύρια πλεονεκτήματα των προτεινόμενων μοντέλων. Προτείνονται τρόποι βελτίωσης των μοντέλων αυτών και παρατίθενται οι απόψεις μου για μελλοντική εργασία με τελικό στόχο την πιθανή χρησιμοποίησή τους σε ορθοπαιδικές εφαρμογές.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

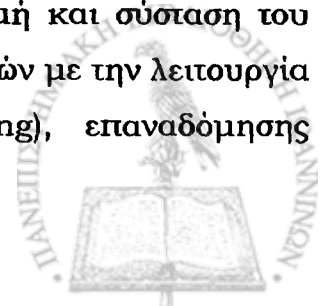
Το οστό

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σύσταση και η δομική ακεραιότητα του ανθρώπινου σκελετού έχουν εξελιχθεί με μοναδικό τρόπο, αντικατοπτρίζοντας την ανάγκη του να εξισορροπήσει τέσσερις βασικές λειτουργίες: την προστασία των εσωτερικών οργάνων, την μηχανική στήριξη και την κίνηση, την ομοιοστάση των αλάτων (ασβέστιο, φωσφόρος) και την αιματοποίηση. Ως σύνθετο υλικό που περιλαμβάνει τόσο την στερεά όσο και την ρευστή φάση, το οστό επιτυγχάνει τις παραπάνω λειτουργίες ενώ ταυτόχρονα επιτελεί μεταβολικές λειτουργίες. Το στερεό συστατικό του οστού αποτελείται από οστικά κύτταρα ενσωματωμένα μέσα σε μία εξωκυττάρια θεμέλια ουσία, η οποία περιλαμβάνει κολλαγόνο και κρυστάλλους υδροξυαπατίτη. Το ρευστό συστατικό περιέχει αίμα και εξωκυττάριο ρευστό. Οι μηχανικές ιδιότητες του οστού εξαρτώνται από τις υλικές ιδιότητες των συστατικών του στοιχείων και τον τρόπο με τον οποίο αυτά τα στοιχεία είναι διευθετημένα. Το οστό έχει την ικανότητα να μεταβάλλει την δομή του ανάλογα με τις μηχανικές και/ή τις φυσιολογικές απαιτήσεις.

Το οστό είναι ένα μη γραμμικό, ιξωδοελαστικό, ανισότροπο, ετερογενές και σύνθετο υλικό και επομένως είναι πολύπλοκο να περιγραφεί μηχανικά. Το γεγονός ότι το οστό έχει την ικανότητα να προσαρμόζεται συνεχώς σε μεταβολικές και περιβαλλοντικές μεταβολές *in vivo* του προσδίδει ακόμη μεγαλύτερη πολυπλοκότητα, περιορίζοντας περαιτέρω την κατανόηση συγκεκριμένων οστικών μηχανισμών. Τα μοντέλα που περιγράφουν την γεωμετρία και τις ετερογενείς ιδιότητες του οστού βασίζονται σε κατάλληλες υλικές και μηχανικές υποθέσεις. Αντικειμενικός στόχος της πλειοψηφίας των μελετών γύρω από το οστό είναι ο προσδιορισμός και η καλύτερη κατανόηση της σχέσης ανάμεσα στην δομή και την μηχανική συμπεριφορά του.

Το κεφάλαιο αυτό αποτελείται από τρία μέρη. Το πρώτο μέρος παρουσιάζει συνοπτικά τις σύγχρονες απόψεις για την δομή και σύσταση του οστού με έμφαση στα μακρά οστά, καθώς και την σχέση αυτών με την λειτουργία του. Εισάγονται οι έννοιες της διαμόρφωσης (modeling), επαναδόμησης (remodeling) και προσαρμογής (adaptation).



Στο δεύτερο μέρος περιγράφονται οι μηχανικές αρχές και η ορολογία που χρησιμοποιούνται στον τομέα της εμβιομηχανικής του οστού και στη μέτρηση των μηχανικών του ιδιοτήτων. Εξετάζονται ξεχωριστά οι μηχανικές ιδιότητες του φλοιώδους και του σπογγώδους οστού και παρατίθενται συνοπτικά οι παράγοντες που επηρεάζουν τις μηχανικές ιδιότητες του οστού.

Στο τρίτο μέρος, περιγράφονται οι ηλεκτρικές ιδιότητες του οστού και ο συσχετισμός αυτών με το ρευστό τμήμα του οστού. Τονίζεται ο ρόλος του ρευστού συστατικού στην διεργασία της επαναδόμησης.

2.2. ΦΥΣΙΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΟΣΤΟΥ

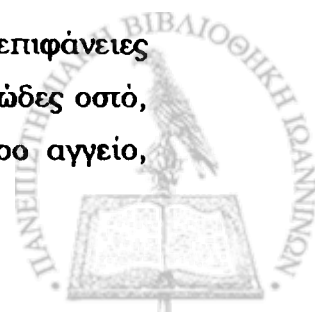
2.2.1. Δομή του οστού

Μακροσκοπικά, υπάρχουν δύο τύποι οστού: το συμπαγές ή φλοιώδες οστό και το σπογγώδες ή δοκιδωτό οστό. Παρόλο που τα χημικά, μοριακά και κυτταρικά συστατικά και των δύο τύπων οστού είναι όμοια, η οργάνωση των συστατικών αυτών αντικατοπτρίζει σημαντικές διαφορές στις μηχανικές και μεταβολικές τους δραστηριότητες (Frost, 1964, Martin και Burr, 1989). Το φλοιώδες οστό είναι ένα πυκνό υλικό που συγκροτεί κυρίως τον κορμό ή την διάφυση ενός μακρού οστού. Το σπογγώδες οστό είναι ένα πορώδες υλικό από το οποίο αποτελούνται τα άκρα ή οι επιφύσεις ενός μακρού οστού και περιβάλλεται από ένα λεπτό κέλυφος φλοιώδους οστού. Η διαφοροποίηση ανάμεσα στους δύο αυτούς δομικούς τύπους οστού περιγράφεται στην παράγραφο 2.2.3.

Μικροσκοπικά, υπάρχουν τρεις τύποι φλοιώδους οστού: το πεπλεγμένο οστό, το πεταλιώδες ή πρωτογενές οστό και το δευτερογενές οστό.

Το πεπλεγμένο οστό χαρακτηρίζεται από τυχαία προσανατολισμένες ίνες κολλαγόνου που σχηματίζουν μία δομικά ανοργάνωτη θεμέλια ουσία. Η κατασκευή των χαλαρά διατεταγμένων ιών κολλαγόνου οδηγεί σε μεγάλο πορώδες και στην εμφάνιση μειωμένης πυκνότητας. Το πεπλεγμένο οστό εμφανίζεται κατά την πορεία ανάπτυξης σε κάταγμα ή κάκωση αφού διαθέτει το πλεονέκτημα να εναποτίθεται και να μεταλλοποιείται πολύ γρήγορα. Ως αποτέλεσμα, όμως, δεν έχει τόσο καλές μηχανικές ιδιότητες συγκρινόμενο με το περισσότερο διατεταγμένο οστό. Το πεπλεγμένο οστό διαθέτει επίσης εξαιρετικά υψηλή πυκνότητα κυττάρων, γεγονός που το καθιστά ικανό να πολλαπλασιάζεται πολύ γρήγορα.

Το πεταλιώδες ή πρωτογενές οστό σχηματίζεται σε υπάρχουσες επιφάνειες οστού ή χόνδρου και είναι διευθετημένο σε φύλλα πεταλιών. Στο φλοιώδες οστό, τα πετάλια είναι τοποθετημένα ομοκεντρικά γύρω από ένα αιμοφόρο αγγείο,



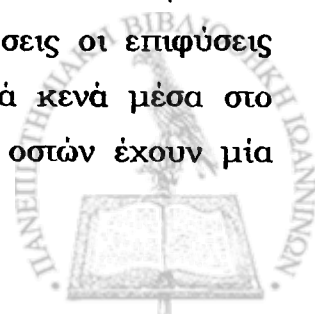
σχηματίζοντας μία χαρακτηριστική υπομονάδα, τον πρωτογενή οστεώνα, η οποία παρουσιάζει άριστες μηχανικές ιδιότητες (Curry, 1982, Enlow, 1962, Frost, 1986, Martin και Burr, 1989).

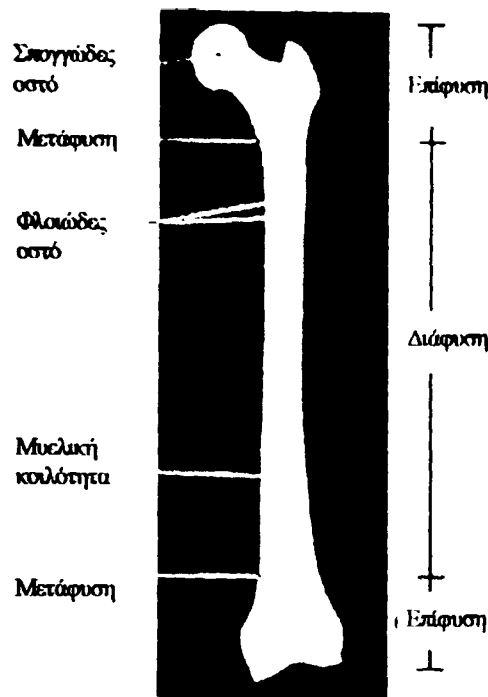
Το δευτερογενές οστό αποτελεί το πρωταρχικό συστατικό του φλοιού στο σκελετό των ενθλικών και περιγράφεται στην παράγραφο 2.2.4.1. Μέσω της διεργασίας επαναδόμησης το πρωτογενές οστό μετατρέπεται σε δευτερογενές οστό (Frost, 1986, Frost, 1964, Martin και Burr, 1989). Έχει προταθεί ότι το κίνητρο για τον σχηματισμό αυτής της οστεωνικής δομής προέρχεται από την ανάγκη παροχής θρεπτικών συστατικών στο διάμεσο οστό (υπολείμματα προϋπαρχόντων οστεώνων) και είναι ένας τρόπος για την αυξημένη αντίσταση του οστού στην διάδοση ρωγμών κατάγματος και στην πιθανή αστοχία κατά την διάρκεια περιοδικών φορτίσεων (Burr *et al.*, 1985, Curry, 1989).

Σε αντίθεση με το φλοιώδες, το σπογγώδες οστό αποτελείται μόνον από διάμεσα πετάλια και η επαναδόμηση συμβαίνει σε επιφάνειες που βρίσκονται μέσα σε διακριτές περιοχές που ονομάζονται πακέτα δοκίδων. Η σύνθετη τρισδιάστατη δομή πλέγματος του σπογγώδους οστού οδηγεί σε μεγάλο λόγο επιφάνειας-όγκου. Αυτή η αυξημένη επιφάνεια του οστίτη ιστού που εκτίθεται σε μυελό, παρέχει μεγαλύτερη δυνατότητα για την ανταλλαγή αλάτων μέσω της διεργασίας επαναδόμησης (Parfitt, 1987). Επιπλέον, η αρχιτεκτονική του σπογγώδους οστού το καθιστά αποτελεσματική δομή απορρόφησης ενέργειας για την εξασθένιση των μεγάλων φορτίων που διαδίδονται μέσω των αρθρώσεων (Carter *et al.*, 1987, Hayes και Snyder, 1981).

2.2.2. Ανατομία του οστού

Κάθε μακρό οστό που βρίσκεται σε ανάπτυξη αποτελείται από τρία κύρια μέρη (Seeley *et al.*, 1992): (i) τον κορμό ή διάφυση, (ii) μία επιφύση σε κάθε άκρο του οστού και (iii) την επιφυσιακή ή αυξητική πλάκα (Σχήμα 2.1). Η επιφυσιακή πλάκα είναι η περιοχή της κύριας οστικής επιμήκυνσης. Όταν σταματάει η ανάπτυξη, η επιφυσιακή πλάκα οστεοποιείται και ονομάζεται επιφυσιακή γραμμή. Η διάφυση αποτελείται από φλοιώδες οστό, το οποίο είναι κυρίως θεμέλια ουσία με λίγα κενά (μικρό πορώδες). Οι επιφύσεις αποτελούνται από σπογγώδες οστό, το οποίο έχει πολλά μικρά κενά ή κοιλότητες μέσα στη θεμέλια ουσία (μεγάλο πορώδες). Η εξωτερική επιφάνεια των επιφύσεων αποτελείται από ένα στρώμα φλοιώδους οστού. Στις αρθρώσεις οι επιφύσεις καλύπτονται από τον αρθρικό χόνδρο. Εκτός από τα μικρά κενά μέσα στο σπογγώδες και το φλοιώδες οστό, οι διαφύσεις των μακρών οστών έχουν μία



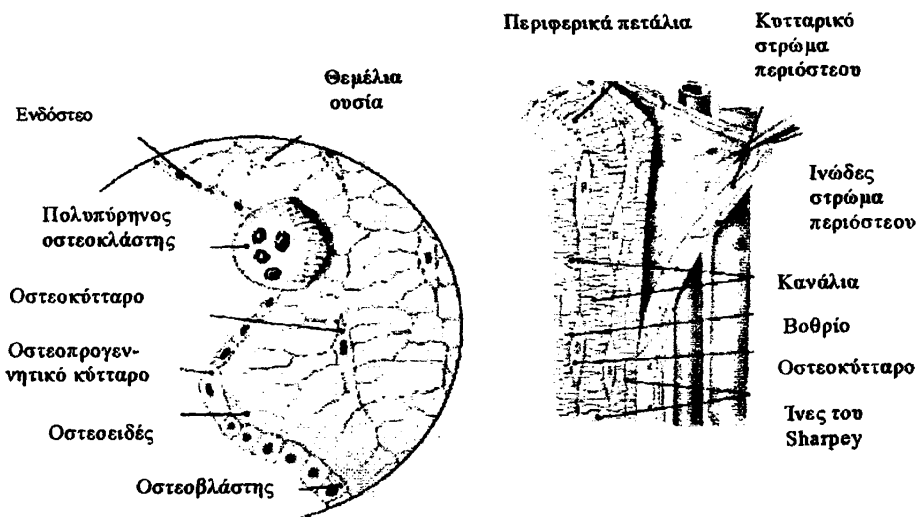


Σχήμα 2.1: Μακροσκοπική δομή ενός μακρού οστού (αναπαραγωγή από Martini, 1998).

μεγάλη μυελική κοιλότητα. Στους ενήλικες η μυελική κοιλότητα των διαφύσεων είναι γεμάτη με ωχρό μυελό, ο οποίος είναι κυρίως λιπώδης ιστός. Τα κενά στις εγγείς επιφύσεις των μεγαλύτερων μακρών οστών των ενηλίκων περιέχουν ερυθρό μυελό, ο οποίος αποτελεί την περιοχή στην οποία λαμβάνει χώρα η αιματοποίηση. Ο ωχρός μυελός σχετίζεται με τα μακρά οστά των άκρων και ο ερυθρός μυελός με τον υπόλοιπο σκελετό. Τα οστά των παιδιών έχουν περισσότερο ερυθρό μυελό από ότι τα οστά των ενηλίκων. Ερυθρός μυελός υπάρχει και στις διαφύσεις των μακρών οστών. Καθώς αυξάνεται η ηλικία του ατόμου ο ερυθρός μυελός στα άκρα αντικαθίσταται από ωχρό μυελό.

Η εξωτερική επιφάνεια του οστού αποτελείται από το περίοστεο, το οποίο συνίσταται από δύο στρώματα (Σχήμα 2.2). Το εξωτερικό ινώδες στρώμα είναι πυκνός, ινώδης, ανώμαλος συνδετικός ιστός από κολλαγόνο ο οποίος περιέχει αιμοφόρα αγγεία και νεύρα. Το εσωτερικό στρώμα αποτελείται κυρίως από ένα μόνο στρώμα οστεοβλαστών με λίγους οστεοκλάστες. Το ενδόστεο είναι μία μεμβράνη η οποία καλύπτει τις εσωτερικές επιφάνειες του οστού (την μυελική κοιλότητα στην διάφυση και τις μικρότερες κοιλότητες του σπογγώδους και του φλοιώδους οστού). Το ενδόστεο αποτελείται κυρίως από ένα μόνον στρώμα οστεοβλαστών με μερικούς οστεοκλάστες.





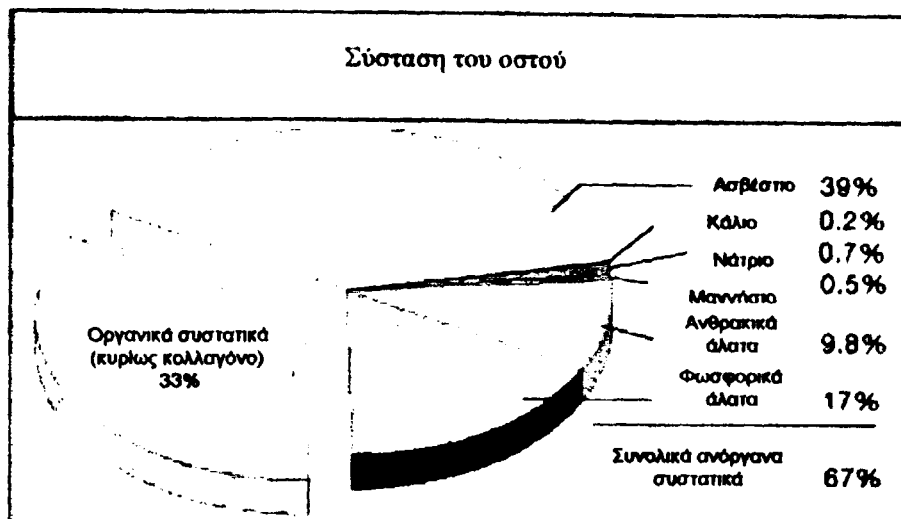
Σχήμα 2.2: Το περίοστεο και το ενδόστεο (αναπαραγωγή από Martini, 1998).

2.2.3. Ιστολογία του οστού

Ενώ ολόκληρος ο οσίτης ιστός γενικά αποτελείται από κύτταρα περιβεβλημένα από μία διαφασική εξωκυττάρια θεμέλια ουσία, η διαφοροποίηση του οσίτη ιστού σε μικροδομικό επίπεδο προέρχεται από διαφορές στην αρχιτεκτονική της εξωκυττάριας θεμέλιας ουσίας. Τρεις κύριες ομάδες κυττάρων αποτελούν τον μεταβολικό εξοπλισμό του οστού: οι οστεοβλάστες, οι οποίοι είναι κύτταρα που σχηματίζουν οστό· τα οστεοκύτταρα, που βρίσκονται παγιδευμένα μέσα στην θεμέλια ουσία και έχουν ως λειτουργία την συντήρηση (maintenance) του οστού και οι οστεοκλάστες που έχουν ως λειτουργία την απορρόφηση οστού.

2.2.3.1. Θεμέλια ουσία, οστεοβλάστες, οστεοκύτταρα και οστεοκλάστες

Η θεμέλια ουσία στα ώριμα οστά αποτελείται κατά 35% από οργανικά και κατά 65% από ανόργανα συστατικά κατά βάρος (Σχήμα 2.3). Το κύριο οργανικό συστατικό είναι το κολλαγόνο και τα κύρια ανόργανα συστατικά είναι τα άλατα ασβεστίου και φωσφόρου. Τα περισσότερα άλατα στο οστό είναι στην μορφή κρυστάλλων φωσφορικού ασβεστίου με την ονομασία υδροξυαπατίτης. Το κολλαγόνο και τα άλατα είναι υπεύθυνα για τα κύρια λειτουργικά χαρακτηριστικά του οστού. Το κολλαγόνο προσδίδει αντοχή ευκαμψίας (ελαστικότητα) ενώ τα συστατικά αλάτων προσδίδουν αντοχή συμπίεσης. Η θεμέλια ουσία παράγεται από τους οστεοβλάστες. Μόλις ένας οστεοβλάστης περιβληθεί από θεμέλια ουσία γίνεται οστεοκύτταρο (Σχήμα 2.2). Η θεμέλια



Σχήμα 2.3: Σύσταση οστίτη ιστού (αναπαραγωγή από Martini, 1998).

ουσία καταστρέφεται από τους οστεοκλάστες, οι οποίοι είναι μεγάλα κύτταρα με πολλούς πυρήνες (Σχήμα 2.2). Οι οστεοκλάστες εκκρίνουν κυτρικά και λακτικά οξέα, τα οποία βοηθούν στην διάλυση των οστικών αλάτων και την κολλαγενάση η οποία διασπά το κολλαγόνο. Οι οστεοκλάστες παίζουν σημαντικό ρόλο στην επαναδόμηση του οστού και την ομοιόσταση των αλάτων.

Οι οστεοβλάστες και οι οστεοκλάστες έχουν διαφορετική προέλευση. Οι οστεοβλάστες προέρχονται από αδέσμευτα κύτταρα που βρίσκονται στο περίοστεο και το ενδόστεο. Τα αδέσμευτα κύτταρα δεν έχουν γίνει ακόμη ένας συγκεκριμένος τύπος κυττάρου αλλά μπορούν να διαφοροποιηθούν σε πιο εξειδικευμένα κύτταρα. Οι οστεοκλάστες προέρχονται από αδέσμευτα κύτταρα που βρίσκονται στον ερυθρό μυελό των οστών.

Η θεμέλια ουσία είναι οργανωμένη σε λεπτά φύλλα ή στρώματα πάχους 3 έως 7×10^{-6} m πάχος που ονομάζονται πετάλια (Σχήμα 2.4). Τα οστεοκύτταρα είναι διευθειημένα κατά στρώματα, που παρεμβάλλονται ανάμεσα σε διαδοχικά πετάλια και καταλαμβάνουν χώρους στην θεμέλια ουσία που ονομάζονται βοθρία (Σχήμα 2.2). Τα οστεοκύτταρα έχουν μακριές, λεπτές, κυτταρικές αποφύσεις οι οποίες φθάνουν έως τις αποφύσεις γειτονικών οστεοκυττάρων. Οι χώροι που καταλαμβάνονται από αυτές τις αποφύσεις και εκτείνονται ανάμεσα στα βοθρία ονομάζονται κανάλια (Σχήμα 2.2). Το οστό διαφέρει από τους τένοντες, τους συνδέσμους και τον χόνδρο στο ότι τα οστικά κύτταρα βρίσκονται σε επαφή το ένα με το άλλο. Αυτό είναι ένα σαφές πλεονέκτημα για την θρέψη του οστού γιατί τα θρεπτικά συστατικά μπορούν να περνούν από κύτταρο σε κύτταρο διά μέσου των καναλιών αντί να διαχέονται μέσα στην θεμέλια ουσία.

Οι δύο κύριοι τύποι οστού, με βάση όχι μόνον την μακροσκοπική, όπως προαναφέρθηκε, αλλά και την ιστολογική τους δομή, είναι το σπογγώδες και το φλοιώδες οστό. Το σπογγώδες οστό αποτελείται από ένα «δαντελωτό» δίκτυο οστικών πλακών, ενώ το φλοιώδες οστό είναι κυρίως συμπαγής θεμέλια ουσία και κύτταρα με λίγα μόνο κενά.

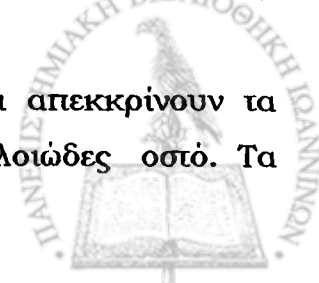
2.2.3.2. Σπογγώδες οστό

Το σπογγώδες οστό αποτελείται από ενδοεπικοινωνούσες ράβδους ή πλάκες οστού που ονομάζονται δοκίδες (Σχήμα 2.4(c)). Οι δοκίδες αποτελούνται από πολλά πετάλια με οστεοκύτταρα τα οποία είναι τοποθετημένα ανάμεσα στα στρώματα πεταλίων. Κάθε οστεοκύτταρο επικοινωνεί με άλλα οστεοκύτταρα μέσω των καναλιών. Οι δοκίδες έχουν ένα στρώμα οστεοβλαστών στις επιφάνειές τους. Συνήθως οι δοκίδες δεν διαπερνώνται από αιμοφόρα αγγεία και επομένως τα οστεοκύτταρα λαμβάνουν τα θρεπτικά συστατικά μέσω των καναλιών τους. Οι δοκίδες είναι προσανατολισμένες κατά μήκος των γραμμών τάσης μέσα σε ένα οστό. Αν η διεύθυνση της τάσης λόγω βάρους μεταβληθεί ελαφρά εξαιτίας, για παράδειγμα, ενός κατάγματος που επουλώνεται μη κανονικά, το πρότυπο των δοκίδων επαναευθυγραμμίζεται με τις νέες γραμμές τάσης (Σχήμα 2.5).

2.2.3.3. Φλοιώδες οστό

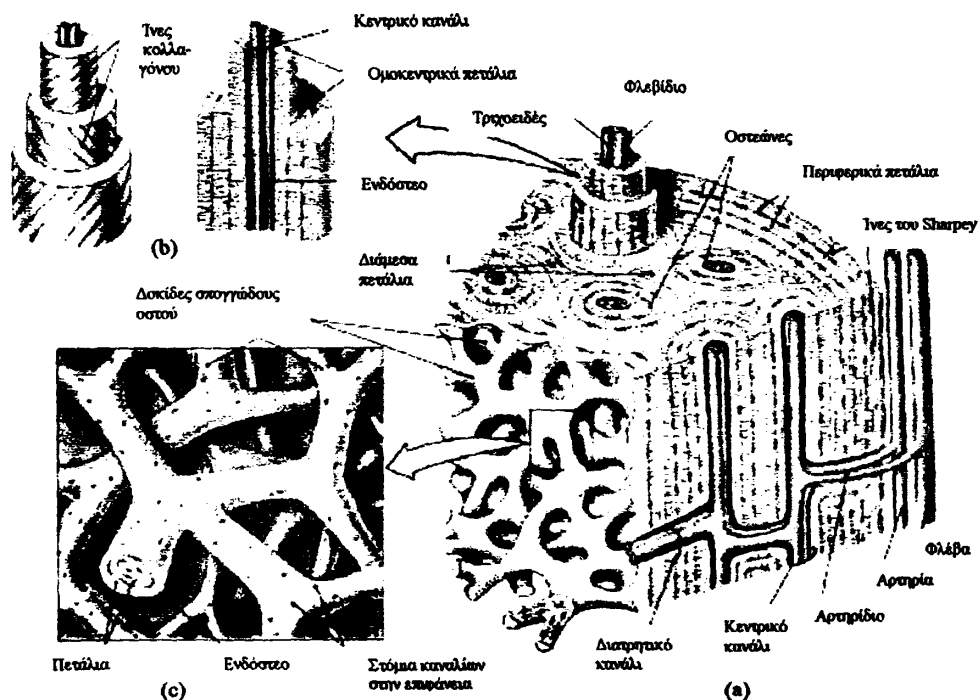
Το φλοιώδες οστό είναι περισσότερο πυκνό (με λιγότερα κενά) από ότι το σπογγώδες οστό. Τα αιμοφόρα αγγεία εισέρχονται στην θεμέλια ουσία του οστού ενώ τα οστεοκύτταρα και τα πετάλια του φλοιώδους οστού προσανατολίζονται κυρίως γύρω από τα αγγεία αυτά. Τα αγγεία που είναι προσανατολισμένα παράλληλα προς τον διαμήκη άξονα του οστού περιέχονται στα Αβερσιανά ή κεντρικά κανάλια (Σχήμα 2.4(a), (b)) και περικλείονται από ομοκεντρικά πετάλια (Σχήμα 2.4(b)). Τα Αβερσιανά κανάλια περιβάλλονται με ενδόστεο και περιλαμβάνουν αιμοφόρα αγγεία, νεύρα και χαλαρό συνδετικό ιστό. Ένα Αβερσιανό σύστημα ή οστεώνας (Σχήμα 2.4(b)) αποτελείται από ένα μόνο Αβερσιανό κανάλι, τα περιεχόμενά του και τα σχετιζόμενα με αυτό ομοκεντρικά πετάλια (4 έως 20) που σχηματίζουν δακτυλίους και οστεοκύτταρα. Τα οστεοκύτταρα βρίσκονται ανάμεσα στους δακτυλίους των πεταλίων και τα κανάλια εξέρχονται ακτινικά από κάθε οστεοκύτταρο διαπερνώντας τα πετάλια και σχηματίζουν μικρά ρήγματα στους δακτυλίους.

Τα οστεοκύτταρα λαμβάνουν θρεπτικά συστατικά και απεκκρίνουν τα άχρηστα υλικά μέσω του συστήματος καναλιών στο φλοιώδες οστό. Τα



αιμοφόρα αγγεία από το περίοστεο ή το ενδόστεο εισέρχονται στο οστό μέσω των καναλιών του Volkmann (Σχήμα 2.4(a)) ή διατηρητικών καναλιών τα οποία είναι προσανατολισμένα κάθετα ως προς τον διαμήκη άξονα του οστού. Τα κανάλια του Volkmann δεν περιβάλλονται από ομοκεντρικά πετάλια αλλά διασχίζουν την πυκνή υφή των ομοκεντρικών Αβερσιανών πεταλιών. Τα Αβερσιανά κανάλια λαμβάνουν αιμοφόρα αγγεία από τα κανάλια του Volkmann. Τα θρεπτικά συστατικά των αιμοφόρων αγγείων εισέρχονται στα Αβερσιανά κανάλια, διέρχονται μέσα από αυτά και μεταφέρονται, μέσω του κυτοπλάσματος των οστεοκυττάρων που βρίσκονται στα κανάλια και τα βοηθία, στα πιο περιφερικά κύτταρα μέσα σε κάθε οστεώνα. Τα άχρηστα υλικά απομακρύνονται κατά την αντίστροφη διεύθυνση.

Οι εξωτερικές επιφάνειες του φλοιώδους οστού καλύπτονται από περιφερικά πετάλια (Σχήμα 2.4(a)), τα οποία είναι επίπεδες πλάκες που εκτείνονται γύρω από το οστό. Σε κάποια οστά, όπως συγκεκριμένα οστά του προσώπου, το στρώμα του φλοιώδους οστού μπορεί να είναι τόσο λεπτό ώστε να μην υπάρχουν οστεώνες και στην περίπτωση αυτή το φλοιώδες οστό αποτελείται μόνον από περιφερικά πετάλια.



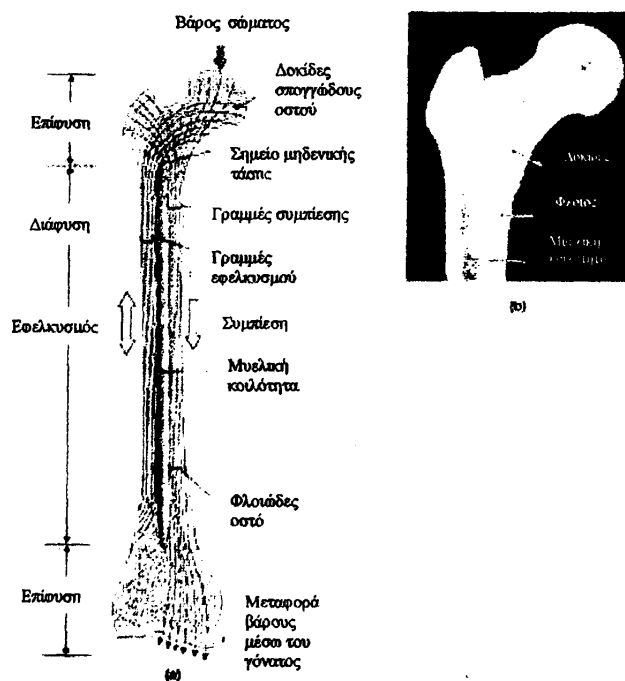
Σχήμα 2.4: Ιστολογική δομή οστίτη ιστού: (a) Οστεώνες, Αβερσιανά κανάλια, κανάλια του Volkmann. (b) Πετάλια. (c) Δοκίδες στο σπογγώδες οστό (αναπαραγωγή από Martini, 1998).

2.2.4. Αρχιτεκτονική του οστού

2.2.4.1. Αρχιτεκτονική του φλοιώδους οστού – Ο δευτερογενής οστεώνας

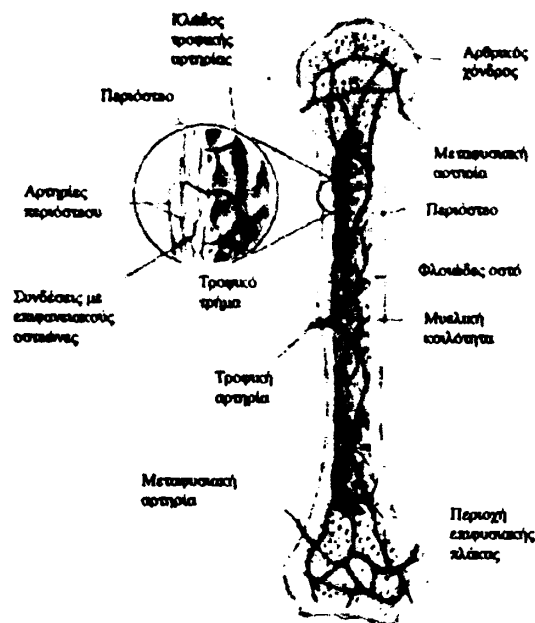
Η πιο σημαντική δομική υπομονάδα μέσα στο φλοιώδες οστό του ανθρώπινου σκελετού είναι ο δευτερογενής οστεώνας (Σχήμα 2.4(a)). Κάθε οστεώνας αντιπροσωπεύει μία σειρά ομοκεντρικών πεταλιών που περιβάλλουν ένα κεντρικό αγγειακό κανάλι (Αβερσιανό κανάλι). Κάθε οστεώνας οριοθετείται από την εξωοστεωνική οστεΐνη θεμέλια ουσία μέσω μιας συνδετικής γραμμής πάχους 1 έως 5×10^{-6} m. Η διάμετρος ενός τυπικού οστεώνα κυμαίνεται από 200 έως 300×10^{-6} m αν και έχει αναφερθεί ότι αυτές οι διαστάσεις ποικίλλουν με την ηλικία (Curry, 1964, Jowsey, 1966).

Οι μεταβολές στις μηχανικές ιδιότητες του φλοιώδους οστού επηρεάζονται σημαντικά από τον αριθμό, τον προσανατολισμό και το μέγεθος των οστεώνων (Black *et al.*, 1974, Cowin, 1981, Carter και Spengler, 1978, Reilly και Burstein, 1974). Επίσης, ο προσανατολισμός των μεμονωμένων πεταλιών που συνιστούν τα ομοκεντρικά περιβλήματα των οστεώνων ποικίλλει, επηρεάζοντας έτσι την μηχανική συμπεριφορά ακόμη και σε αυτό το δομικό επίπεδο (Portigliatti-Barbos *et al.*, 1984).



Σχήμα 2.5: Ευθυγράμμιση των δοκίδων με τις διευθύνσεις των κύριων τάσεων. (αναπαράγωγή από Martini, 1998).





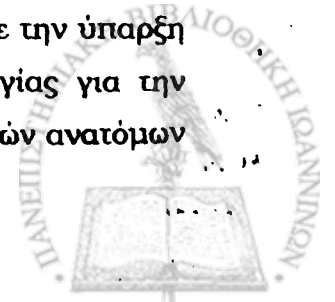
Σχήμα 2.6: Κυκλοφορική παροχή σε ένα ώριμο οστό (αναπαραγωγή από Martini, 1998).

Ως αποτέλεσμα αυτών των αρχιτεκτονικών παραλλαγών, οι οποίες επιτυγχάνονται μέσω της διεργασίας επαναδόμησης, το φλοιώδες οστό μπορεί να βελτιστοποιηθεί δομικά ώστε να ικανοποιεί τις μηχανικές απαιτήσεις σε τοπικό επίπεδο. Στις περισσότερες διαφύσεις μακρών οστών, οι οστεώνες είναι διευθετημένοι κατά μήκος του διαμήκους άξονα του οστού, παρέχοντας έτσι μεγαλύτερη μηχανική σταθερότητα και αντοχή σε καμπτικά, στρεπτικά και θλιπτικά φορτία που προέρχονται από την φυσιολογική λειτουργία.

2.2.4.2. Αρχιτεκτονική του σπογγώδους οστού – Ο νόμος του Wolff

Το σπογγώδες οστό είναι μία υψηλά ανισότροπη δομή που αποτελείται από έναν μεγάλο αριθμό αλληλοσυνδεόμενων ράβδων, πλακών ή δοκών. Το σπογγώδες οστό κυριαρχεί στις μεταφύσεις του σκελετού των άκρων, ενώ στον αξονικό σκελετό αποτελεί το κυρίαρχο συστατικό των σωμάτων των σπονδύλων. Το μεγάλο πορώδες του σπογγώδους οστού (μεγαλύτερο από 30%) συνεισφέρει στον σημαντικά αυξημένο ρυθμό αντικατάστασης (turn-over) οστού σε σχέση με το φλοιώδες οστό. Ως αποτέλεσμα, το σπογγώδες οστό υπόκειται πολύ περισσότερο από ότι το φλοιώδες σε μορφολογικές μεταβολές λόγω ηλικίας, μεταβολικών ασθενειών και άλλων παθολογικών διεργασιών (Mosekilde L. και Mosekilde L., 1990, Pattin *et al.*, 1990).

Ο Galileo ήταν πιθανόν ο πρώτος ερευνητής που παρατήρησε την ύπαρξη σχέσης μεταξύ της αρχιτεκτονικής του σκελετού και της λειτουργίας για την οποία έχει σχεδιαστεί (Galileo, 1638). Οι παρατηρήσεις των Γερμανών ανατόμων



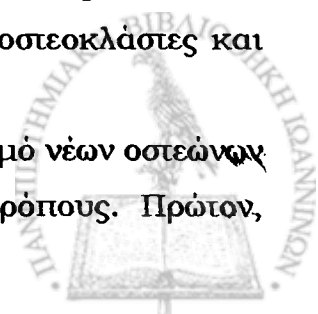
και μηχανικών στα τέλη του 1800, όμως, περιγράφουν μία τυποποιημένη σχέση ανάμεσα στην αρχιτεκτονική του σπογγώδους οστού και την λειτουργική του φόρτιση. Οι ερευνητές αυτοί παρατήρησαν μία σχέση ανάμεσα στα πρότυπα της ευθυγράμμισης των δοκίδων και τις υπολογισμένες διευθύνσεις κύριων τάσεων που προκαλούνται κατά την διάρκεια της φυσιολογικής λειτουργίας στα μακρά οστά. Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως νόμος του Wolff (Culmann, 1866, Roux, 1895, vonMeyer, 1867, Wolff, 1892). Η αρχή του νόμου του Wolff δηλώνει ότι το οστό και συγκεκριμένα το σπογγώδες οστό είναι βέλτιστα σχεδιασμένο. Ενώ η αρχή αυτή είναι γενικά αποδεκτή εδώ και πολλά χρόνια, οι μαθηματικοί νόμοι που συσχετίζουν την αρχιτεκτονική του οστού με συγκεκριμένες μηχανικές τάσεις ή τροπές ή με τον αντικειμενικό στόχο της δομικής του βελτιστοποίησης, παραμένουν άγνωστοι. Ενώ το αρχικό αξίωμα του νόμου του Wolff συσχετίζε τα μακροσκοπικά χαρακτηριστικά με τις συνθήκες τάσης, σήμερα πιστεύεται ότι οι μηχανικές τάσεις επηρεάζουν την προσαρμογή και συντήρηση του οστού σε κυτταρικό επίπεδο και ότι υπάρχουν συγκεκριμένες σχέσεις ανάμεσα στην μηχανική διέγερση και την γενετική έκφραση που επιτυγχάνονται με την μεσολάβηση κυττάρων του συνδετικού ιστού (Binderman *et al.*, 1988, Klein-Nulend *et al.*, 1987, Rodan *et al.*, 1975). Γίνεται επομένως η υπόθεση ότι η μικροαρχιτεκτονική τόσο του φλοιώδους όσο και του σπογγώδους οστού επηρεάζεται σημαντικά από τις μηχανικές τάσεις που σχετίζονται με την φυσιολογική λειτουργία.

2.2.5. Επαναδόμηση, διαμόρφωση και προσαρμογή του οστού

2.2.5.1. Οστική (επ)αναδόμηση (*bone remodeling*)

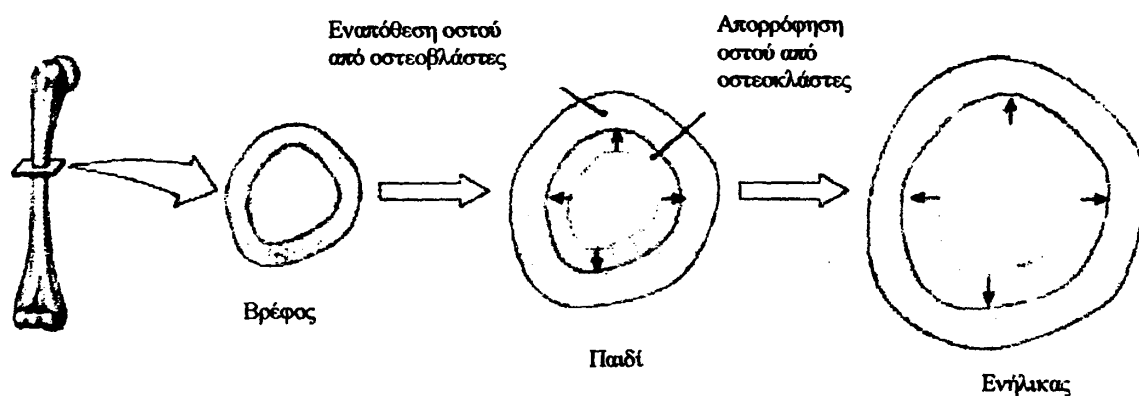
Ως οστική (επ)αναδόμηση ορίζεται η διεργασία κατά την οποία γίνεται απομάκρυνση παλαιού οστού από τους οστεοκλάστες και εναπόθεση νέου οστού από τους οστεοβλάστες (Seeley *et al.*, 1992). Η επαναδόμηση εμπλέκεται στην ανάπτυξη του οστού, τις μεταβολές στο σχήμα του, την προσαρμογή του οστού στις τάσεις, την ανάπλαση του οστού και την ρύθμιση των ιόντων ασβεστίου και φωσφόρου στο σώμα. Για παράδειγμα, καθώς ένα μακρό οστό αυξάνεται σε μήκος και σε διάμετρο, το μέγεθος της μυελικής του κοιλότητας επίσης αυξάνεται (Σχήμα 2.7). Αν δεν συνέβαινε αυτό, το οστό θα αποτελούνταν από σχεδόν συμπαγή θεμέλια ουσία και θα ήταν πολύ βαρύ. Το σχετικό πάχος του οστού διατηρείται από την απομάκρυνση οστού εσωτερικά από τους οστεοκλάστες και την προσθήκη οστού στο εξωτερικό από τους οστεοβλάστες.

Η επαναδόμηση είναι επίσης υπεύθυνη για τον σχηματισμό νέων οστεώνων στο φλοιώδες οστό. Η διεργασία αυτή επιτελείται με δύο τρόπους. Πρώτον,



μερικοί οστεοκλάστες στο περίοστεο απομακρύνουν οστό, δημιουργώντας έτσι μία αύλακα κατά μήκος της επιφάνειας του οστού (Σχήμα 2.8(a)). Τα τριχοειδή αγγεία του περίοστεου που βρίσκονται σε αυτές τις αύλακες αρχίζουν βαθμιαία να περιβάλλονται από νέο οστό που σχηματίζεται από τους οστεοβλάστες του περίοστεου. Στην συνέχεια προστίθενται επιπλέον πετάλια γύρω από το τριχοειδές αγγείο έως ότου δημιουργηθεί ένας οστεώνας. Δεύτερον, μέσα σε ήδη υπάρχοντες οστεώνες, οστεοκλάστες εισέρχονται σε ένα Αβερσιανό κανάλι μέσω των αιμοφόρων αγγείων και αρχίζουν να απομακρύνουν οστό από το κέντρο του οστεώνα, δημιουργώντας ένα διευρυμένο κανάλι μέσα στο οστό (Σχήμα 2.8(b)). Νέα ομοκεντρικά πετάλια σχηματίζονται τότε γύρω από τα αγγεία έως ότου ο νέος οστεώνας γεμίσει την περιοχή που καταλαμβάνεται από τον παλιό οστεώνα. Οι οστεώνες και τα περιφερικά πετάλια συνεχώς απομακρύνονται από τους οστεοκλάστες και νέοι οστεώνες σχηματίζονται από τους οστεοβλάστες. Η διαδικασία αυτή αφήνει τμήματα παλιότερων οστεώνων και περιφερικών πεταλιών που ονομάζονται διάμεσα πετάλια, ανάμεσα στους νεοαναπτυσσόμενους οστεώνες.

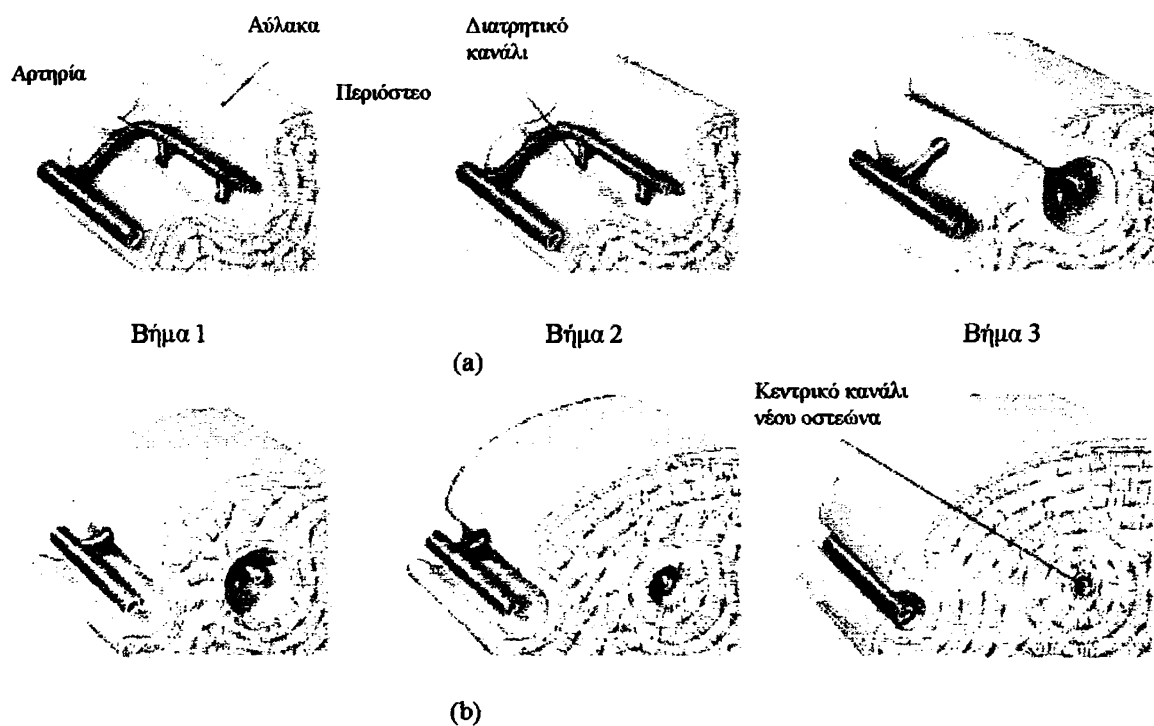
Η επαναδόμηση, ο σχηματισμός επιπλέον οστού, η μεταβολή στην ευθυγράμμιση των δοκίδων ή άλλες μεταβολές μπορεί να τροποποιήσουν την αντοχή του οστού σε σχέση με την τάση που εφαρμόζεται σε αυτό. Οι μηχανικές τάσεις που εφαρμόζονται στο οστό αυξάνουν την δράση των οστεοβλαστών στον οστίτη ιστό. Σε συνθήκες μειωμένης τάσης, όπως κατά την κατάκλιση ή την παράλυση, οι οστεοκλάστες εξακολουθούν να δρουν σχεδόν με τον φυσιολογικό



Σχήμα 2.7: *Εναποθετική οστική ανάπτυξη: Η διάμετρος του οστού αυξάνεται καθώς νέος οστίτης ιστός εναποτίθεται στην εξωτερική επιφάνεια. Ταυτόχρονα, οι οστεοκλάστες απορροφούν οστό στο εσωτερικό, διευρύνοντας την μυελική κοιλότητα (αναπαραγωγή από Martini, 1998).*

τους ρυθμό, ενώ η δράση των οστεοβλαστών μειώνεται, γεγονός που οδηγεί σε ελάττωση της οστικής πυκνότητας. Επιπλέον, η πίεση στα οστά προκαλεί ηλεκτρική μεταβολή (Seeley *et al.*, 1992) η οποία μειώνει την δράση της οστικής απορρόφησης των οστεοκλαστών. Εφαρμογή πίεσης σε ένα σπασμένο οστό μπορεί να επιταχύνει την διαδικασία επούλωσης. Επίσης, παλμοί ηλεκτρικού ρεύματος ή μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο εφαρμοζόμενα σε ένα σπασμένο οστό χρησιμοποιούνται συχνά κλινικά για να επιταχύνουν την επούλωση (Seeley *et al.*, 1992).

Η επαναδόμηση αναφέρεται ότι συμβαίνει σε διακριτές εντοπισμένες περιοχές και η ομάδα κυττάρων που συμμετέχουν σε αυτή την διεργασία έχει ονομαστεί οστική πολυκυτταρική μονάδα (bone multicellular unit, BMU) (Frost, 1986, Martin και Burr, 1989, Parfitt, 1987). Η επαναδόμηση προχωρά μέσω μιας αλληλουχίας ενεργοποίησης, απορρόφησης και σχηματισμού κατά την οποία ανταλλάσσεται ένα "κβάντιο" οστού (bone quantum). Έχει προταθεί ότι η



Σχήμα 2.8: Δημιουργία δευτερογενούς οστεώνα: (α) Βήμα 1: Ο σχηματισμός οστίτη ιστού στην επιφάνεια του οστού δημιουργεί μία αύλακα παράλληλη προς ένα αιμοφόρο αγγείο. Βήμα 2: Διεύρυνση αύλακας και δημιουργία βαθιάς σχισμής. Βήμα 3: Κλείσιμο της αύλακας και παγίδευση αιμοφόρου αγγείου. (β) Η οστική εναπόθεση προχωρά στο εσωτερικό του αγγείου και δημιουργεί έναν τυπικό οστεώνα. Επιπλέον περιφερικά πετάλια εναποτίθενται και το οστό αυξάνεται σε διάμετρο, περικλείοντας και άλλα αιμοφόρα αγγεία (αναπαραγωγή από Martini, 1998).



αντικατάσταση οστού μέσω της διεργασίας επαναδόμησης εμποδίζει την συσσώρευση μικροκαταστροφής (microdamage accumulation) και διατηρεί σχετικά χαμηλή πυκνότητα αλάτων στο οστό (Frost, 1986, Martin και Burr, 1989, Parfitt, 1987). Ο Parfitt (1987) διαφοροποίησε ακόμη περισσότερο την κβαντική θεωρία της οστικής επαναδόμησης ώστε να συμπεριλάβει πέντε βήματα: ηρεμία, ενεργοποίηση, απορρόφηση, αντιστροφή και σχηματισμό. Η ιδέα επέκτασης της θεωρίας επαναδόμησης απορρέει από την ανάγκη να αποσαφηνιστεί η συγκεκριμένη λειτουργία ενός πολύπλοκου συστήματος διεργασιών που ελέγχονται από κύτταρα.

Έχει αναφερθεί από διάφορους ερευνητές ότι οι μηχανικές τάσεις που σχετίζονται με την φυσιολογική λειτουργία του οστού τείνουν να καταστειλλουν τον ρυθμό οστικής επαναδόμησης ώστε γενικά να διατηρείται η έμφυτη μηχανική ακεραιότητα του οστού. Κατά την διάρκεια της συνήθους υποφόρτισης ο ρυθμός και ο αριθμός των σημείων επαναδόμησης αυξάνονται σημαντικά, ενισχύοντας έτσι την πιθανότητα για σημαντική απώλεια οστού (περισσότερη απορρόφηση παρά σχηματισμός) (Frost, 1983, Frost, 1986, Martin και Burr, 1989). Διάφοροι μηχανισμοί ελέγχου της επαναδόμησης έχουν προταθεί οι οποίοι περιλαμβάνουν τα παραγόμενα από τάση δυναμικά (βλ. παράγραφο 2.3.5), την άμεση φυσική διέγερση των σχετιζόμενων κυττάρων, την υδροστατική πίεση μέσα στο υπό φόρτιση εξωκυττάριο ρευστό, την καταστροφή λόγω κόπωσης και μεταβολές στην διάχυση της κυτταρικής μεμβράνης λόγω άμεσων φορτίων ή ροής ρευστού (Burr *et al.* 1985, Martin και Burr, 1989). Είναι αντιληπτό ότι οποιαδήποτε διακοπή στην φυσιολογική διεργασία της αντικατάστασης ή συντήρησης οστού μπορεί να ενεργοποιήσει μία ραγδαία αλληλουχία γεγονότων η οποία θα καταλήξει σε απώλεια της οστικής μάζας και ακεραιότητας.

2.2.5.2. Οστική διαμόρφωση (*bone modeling*)

Η οστική διαμόρφωση, η οποία ορίζεται ως ενεργοποίηση και σχηματισμός χωρίς απορρόφηση, τυπικά εμφανίζεται σε δύο περιπτώσεις: κατά την διάρκεια μίας διεργασίας ανάπτυξης και εξέλιξης και κατά την διάρκεια μίας διεργασίας ανάπλασης ή επούλωσης ενός κατάγματος. Η διαμόρφωση χαρακτηρίζεται από εναπόθεση πεπλεγμένου οστού, το οποίο στην συνέχεια επαναδομείται σε δευτερογενές οστό. Ενώ η διαμόρφωση σπάνια παρατηρείται στον σκελετό των ενηλίκων παρά μόνον κατά την επούλωση κατάγματος, είναι δυνατόν να επαχθεί από τον ερεθισμό του περιόστεου ή από χειρουργική διαδικασία όπως κατά την εισαγωγή ορθοπαιδικού εμφυτεύματος.



2.2.5.3. Οστική προσαρμογή (*bone adaptation*)

Η προσαρμογή του οστού (διαμόρφωση ή επαναδόμηση) επηρεάζεται σημαντικά από τις μηχανικές τάσεις ή τροπές. Πολλές μελέτες έχουν επιχειρήσει να προσδιορίσουν τις μηχανικές συνθήκες που επηρεάζουν την οστική προσαρμογή, χρησιμοποιώντας είτε πειραματικές ή αναλυτικές τεχνικές (Burr *et al.*, 1985, Carter, 1987, Chamay και Tschantz, 1972, Goldstein *et al.*, 1991, Hart *et al.*, 1984a). Τα δεδομένα υποδεικνύουν ότι παράγοντες όπως ο ρυθμός τροπής, το μέτρο της τάσης ή της τροπής και η διεύθυνση της φόρτισης επηρεάζουν την προσαρμογή του οστού, αλλά η σχετική σημασία αυτών των παραγόντων παραμένει άγνωστη. Πρόσθετοι παράγοντες που επηρεάζουν την προσαρμογή του οστού είναι οι αλλαγές στο μεταβολικό ή βιοχημικό περιβάλλον του οστού. Ένας από τους πιο σημαντικούς παράγοντες που επιδρούν στην προσαρμογή του οστού είναι η ηλικία (Burstein *et al.*, 1976, Parfitt, 1984). Η διαδικασία της γήρανσης σχετίζεται με συγκεκριμένες μεταβολές στο μέγεθος, την γεωμετρία και τα μικροδομικά χαρακτηριστικά του οστού. Στο φλοιώδες οστό, η διάμετρος και ο αριθμός των οστεώνων ποικίλλει με την ηλικία ενώ στο σπογγώδες οστό παρατηρείται μία γενικευμένη ελάττωση στην συνεκτικότητα και την συνολική μάζα των δοκίδων με την αύξηση της ηλικίας. Γενικά, όλοι οι άνθρωποι αρχίζουν να χάνουν οστική μάζα μετά τα 35 περίπου, ως αποτέλεσμα φυσιολογικής αδυναμίας να διατηρήσουν οστική ισορροπία. Οι ακριβείς αιτίες της απώλειας οστού που σχετίζεται με την ηλικία είναι άγνωστες αλλά πιθανόν συνδέονται με μεταβολές στην διαθεσιμότητα παραγόντων που σχετίζονται με τις διεργασίες επαναδόμησης ή με συγκεκριμένες μεταβολές στην ικανότητα του κυττάρου να αντιλαμβάνεται τα μηχανικά ερεθίσματα ή να παράγει οστική ιστό. Παρά την τάση για απώλεια οστού κατά την διαδικασία της γήρανσης, οι μηχανισμοί μηχανικής προσαρμογής παραμένουν μερικώς ανέπαφοι. Αυτό προκύπτει από παρατηρήσεις γεωμετρικών μεταβολών στα οστά με την ηλικία όπως αυξήσεις στην διάμετρο της διάφυσης, επέκταση των επιφανειών στις αρθρώσεις και διατήρηση των κάθετων δοκίδων μέσα στα σώματα των σπονδύλων (Arnold, 1973).

Τέλος, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι μία ποικιλία ασθενειών όπως η μετεμμηνοπαυσιακή οστεοπόρωση, η ρευματοειδής αρθρίτιδα και η ασθένεια του Paget έχουν σημαντική επίδραση στην μάζα και την κατανομή του οστού και ενδεχομένως στους προσαρμοστικούς μηχανισμούς του σκελετού. Επιπλέον, τα πρωτόκολλα θεραπείας που περιλαμβάνουν την χρήση κορτικοστεροειδών, χημειοθεραπευτικών και άλλων παραγόντων, επιδρούν σημαντικά στην ποιότητα και το ποσό του οστού των ασθενών που υπόκεινται στην θεραπεία. Ο

προσδιορισμός της μηχανικής ακεραιότητας του οστού επομένως περιλαμβάνει την ανάλυση πολλών παραγόντων και συνθηκών.

2.3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΣΤΟΥ

2.3.1. Βασικές έννοιες

Στην μηχανική του στερεού μέσου, η τάση T ορίζεται ως ο λόγος του μέτρου της δύναμης F που δρα πάνω σε μία επιφάνεια ενός υλικού προς το εμβαδόν A αυτής της επιφάνειας (An *et al.*, 2000)

$$T = \frac{F}{A}. \quad (2.1)$$

Η τάση εκφράζει την εσωτερική αντίσταση του υλικού σώματος στην δύναμη που ασκείται πάνω σε αυτό. Στα οστά, η τάση προέρχεται από τις δυνάμεις ή τους δεσμούς ανάμεσα στα μόρια, ανάμεσα στα ινίδια κολλαγόνου και την συνάφεια ανάμεσα στο κολλαγόνο και τους κρυστάλλους υδροξυαπατίτη (An *et al.* (2000)). Οι αξονικές ή κάθετες τάσεις διακρίνονται σε συμπιεστικές ή εφελκυστικές κατ' αναλογία προς τις δυνάμεις που τις προκαλούν. Η πίεση είναι μία κάθετη τάση που δρα στην επιφάνεια ενός αντικειμένου. Οι διατμητικές τάσεις εμφανίζονται όταν η δύναμη εφαρμόζεται παράλληλα προς την επιφάνεια ενός αντικειμένου, όπως όταν ένα μακρό οστό υπόκειται σε στρεπτικά φορτία.

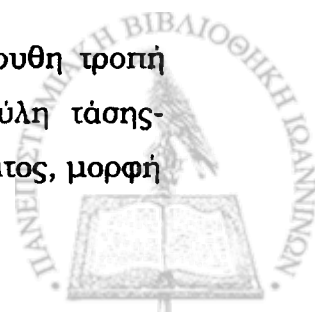
Ως παραμόρφωση ΔL ορίζεται η μεταβολή σε μία διάσταση ενός σώματος, λόγω της δράσης μίας ή περισσότερων δυνάμεων.

Η τροπή (strain) E ορίζεται ως παραμόρφωση ανά μονάδα μήκους (L)

$$E = \frac{\Delta L}{L}, \quad (2.2)$$

και αντιπροσωπεύει την γεωμετρική (σχετική) μεταβολή σε ένα υλικό ως απόκριση στην εφαρμογή κάποιας δύναμης. Είναι γνωστή και ως κανονικοποιημένη μετατόπιση. Η τροπή είναι αδιάστατη ποσότητα. Κατ' αναλογία προς τις δυνάμεις που την προκαλούν, διακρίνεται σε κάθετη τροπή (συμπιεστική ή εφελκυστική) και διατμητική. Ως τελική τροπή E_{ult} και τελική τάση T_{ult} ορίζονται η μέγιστη τροπή και τάση αντίστοιχα που μπορεί να αντέξει ένα υλικό προτού υποστεί κάταγμα.

Η σχέση ανάμεσα στην εφαρμοζόμενη τάση και την επακόλουθη τροπή απεικονίζεται στην καμπύλη τάσης-τροπής (Σχήμα 2.9). Η καμπύλη τάσης-τροπής αποτελεί κανονικοποιημένη, ως προς τις διαστάσεις του δείγματος, μορφή



της καμπύλης φορτίου-μετατόπισης. Μέτρηση της κλίσης της καμπύλης τάσης-τροπής στην ελαστική περιοχή επιτρέπει τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας ή μέτρου του Young.

Όταν ένα δείγμα υλικού υπόκειται σε μία μονοαξονική δύναμη συμπίεσης, η διάστασή του ελαττώνεται κατά την αξονική διεύθυνση (διεύθυνση φόρτισης) και αυξάνεται κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Η σχέση ανάμεσα στις δύο τροπές δίνεται από τον λόγο του Poisson ν ,

$$\nu = \frac{E_t}{E_a}, \quad (2.3)$$

όπου E_t είναι η εγκάρσια τροπή και

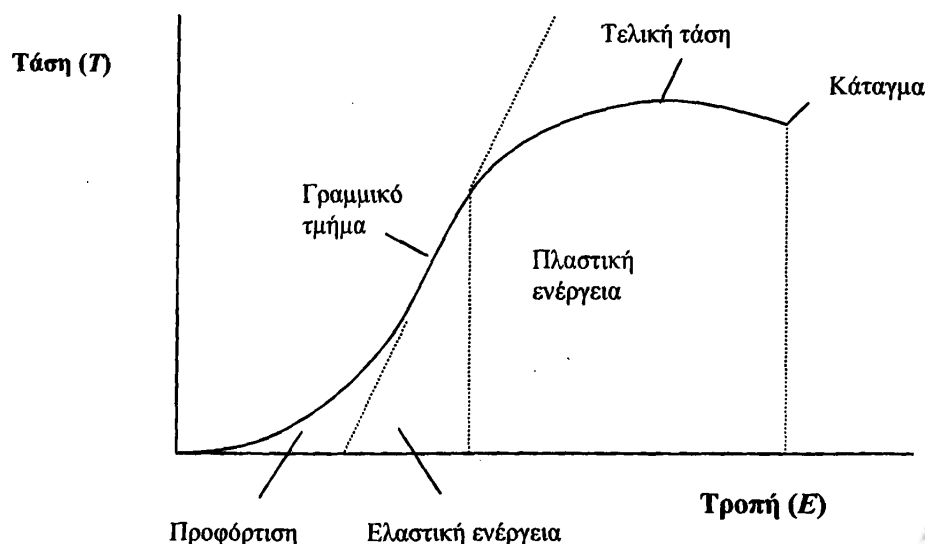
E_a η αξονική τροπή αντίστοιχα.

Ο λόγος του Poisson ισχύει και κατά την αντίθετη φόρτιση, δηλαδή εκείνη του εφελκυσμού.

Η αντοχή ορίζεται ως η εσωτερική αντίσταση ενός υλικού στην παραμόρφωση και τελικά στην αστοχία ή το κάταγμα.

Ελαστικότητα είναι η ικανότητα ενός υλικού να επιστρέφει στο αρχικό του σχήμα όταν η εφαρμοζόμενη τάση απομακρύνεται (An *et al.*, 2000). Η ελαστικότητα εκφράζεται ποσοτικά μέσω της τιμής της ακαμψίας ή του μέτρου ελαστικότητας.

Η ακαμψία S είναι η ικανότητα ενός υλικού να αντιστέκεται στην παραμόρφωσή του όταν ασκείται σε αυτό μία δύναμη. Ορίζεται ως το πηλίκο του μέτρου της δύναμης ως προς την αντίστοιχη παραμόρφωση στην ελαστική περιοχή της καμπύλης φορτίου-μετατόπισης



Σχήμα 2.9: Τυπική καμπύλη τάσης-τροπής (αναπαραγωγή από An *et al.*, 2000).



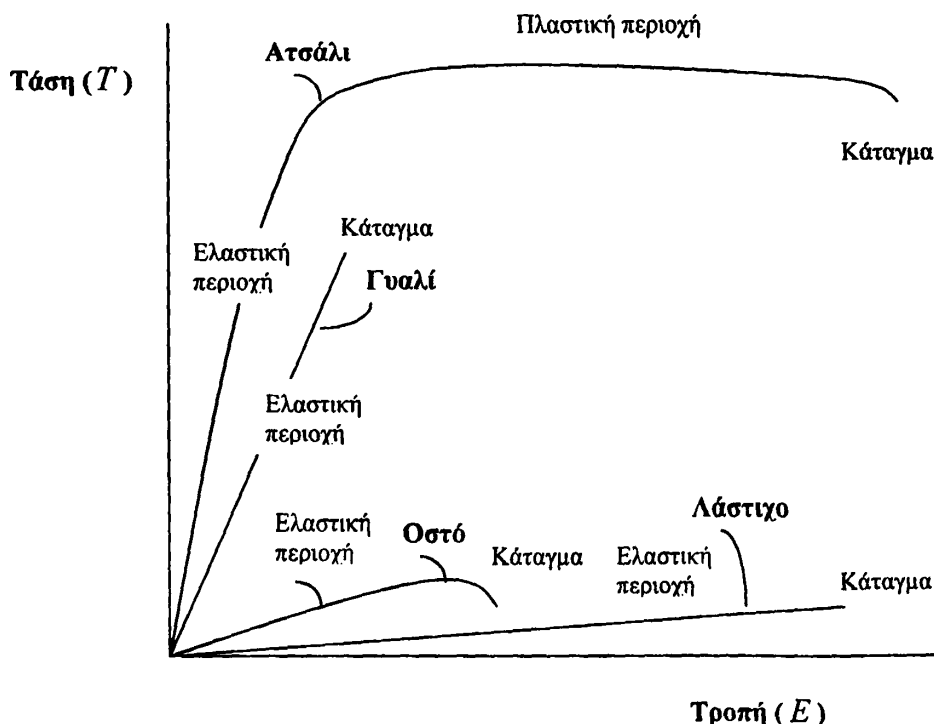
$$S = \frac{F}{d} \quad (2.4)$$

Το μέτρο ελαστικότητας είναι μία τυποποιημένη (standardized) τιμή ακαμψίας και ορίζεται ως ο λόγος της τάσης (T) ως προς την τροπή (E), ή οποιοδήποτε πηλίκο $\Delta T/\Delta E$ στην γραμμική περιοχή της καμπύλης τάσης-τροπής,

$$\mathcal{E} = \frac{T}{E} = \frac{\Delta T}{\Delta E} \quad (2.5)$$

Το μέτρο ελαστικότητας που καθορίζεται σε μία δοκιμασία εφελκυσμού ονομάζεται επίσης μέτρο του Young (Hayes και Βουχsein (1997)). Το μέτρο ελαστικότητας δεν είναι συνάρτηση του μεγέθους και του σχήματος του υπό δοκιμασία υλικού, αλλά ένα μέτρο της ικανότητας του υλικού να διατηρεί το σχήμα του υπό την εφαρμογή εξωτερικών φορτίων και, επομένως, εξαρτάται από το είδος του υλικού (Σχήμα 2.10). Η ιδιότητα της ελαστικότητας είναι ανεξάρτητη του χρόνου και πλήρως αντιστρεπτή.

Τα γραμμικά ελαστικά υλικά υπακούουν τον νόμο του Hooke, ο οποίος προβλέπει ότι η τάση και η τροπή σχετίζονται γραμμικά μεταξύ τους και εκφράζεται μαθηματικά ως



Σχήμα 2.10: Ελαστικότητες διαφορετικών υλικών (αναπαραγωγή από An et al., 2000).



$$T = \mathcal{E} E. \quad (2.6)$$

Οι μηχανικές ιδιότητες των βιολογικών ιστών, όπως το οστό, δεν είναι γραμμικές σε ολόκληρο το φυσιολογικό τους εύρος, γεγονός που οφείλεται στα μη γραμμικά χαρακτηριστικά του ρευστού συστατικού τους.

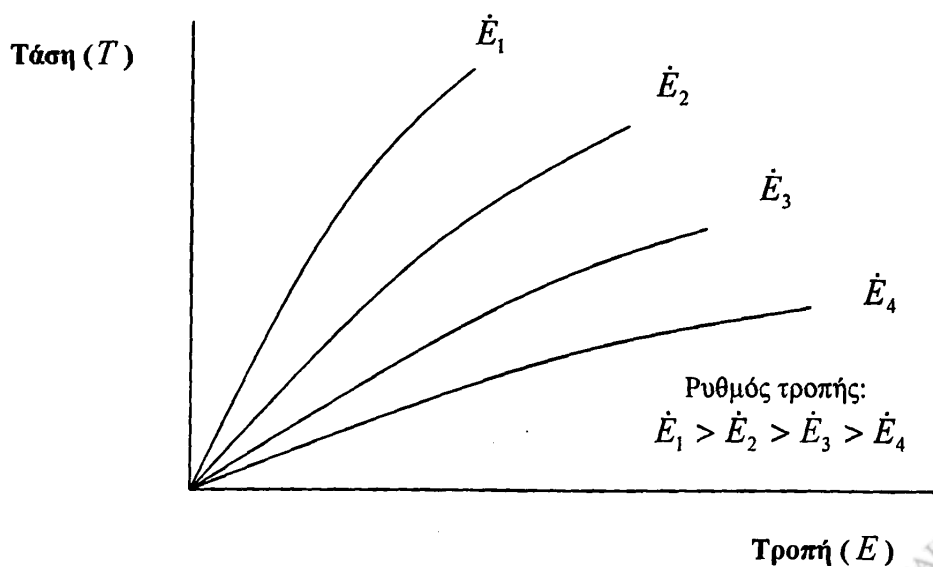
Η συμμόρφωση (compliance) είναι το αντίστροφο της ακαμψίας ή του μέτρου ελαστικότητας και ορίζεται ως ο λόγος της παραμόρφωσης ως προς το φορτίο, ή της τροπής ως προς την τάση (An *et al.*, 1996),

$$S = \frac{E}{T}. \quad (2.7)$$

Σε σχέση με άλλα βιολογικά υλικά, το οστό έχει σχετικά υψηλές τιμές μέτρου ελαστικότητας και χαμηλές τιμές συμμόρφωσης. Το μέτρο ελαστικότητας του φλοιώδους οστού κυμαίνεται μεταξύ 5 και 21 GPa (An *et al.*, 2000).

Η περιοχή κάτω από την καμπύλη τάσης-τροπής αντιπροσωπεύει την ενέργεια που απορροφάται όταν ένα αντικείμενο φορτίζεται μηχανικά. Η ενέργεια αυτή αποθηκεύεται ως ελαστική ενέργεια τροπής και μπορεί να διαχυθεί ως θερμότητα.

Η ιξωδοελαστικότητα περιγράφει τα χρονοεξαρτώμενα χαρακτηριστικά των υλικών. Το οστό είναι ένα ιξωδοελαστικό υλικό, δηλαδή η τάση που αναπτύσσεται μέσα σε αυτό εξαρτάται από τον ρυθμό με τον οποίο το οστικό δείγμα παραμορφώνεται (ρυθμό τροπής). Καθώς αυξάνεται ο ρυθμός τροπής, το υλικό γίνεται περισσότερο άκαμπτο και δυνατό, με μικρότερες παραμορφώσεις (Σχήμα 2.11).



Σχήμα 2.11: Επίδραση του ρυθμού τροπής στις ελαστικές ιδιότητες ενός ιξωδοελαστικού υλικού.



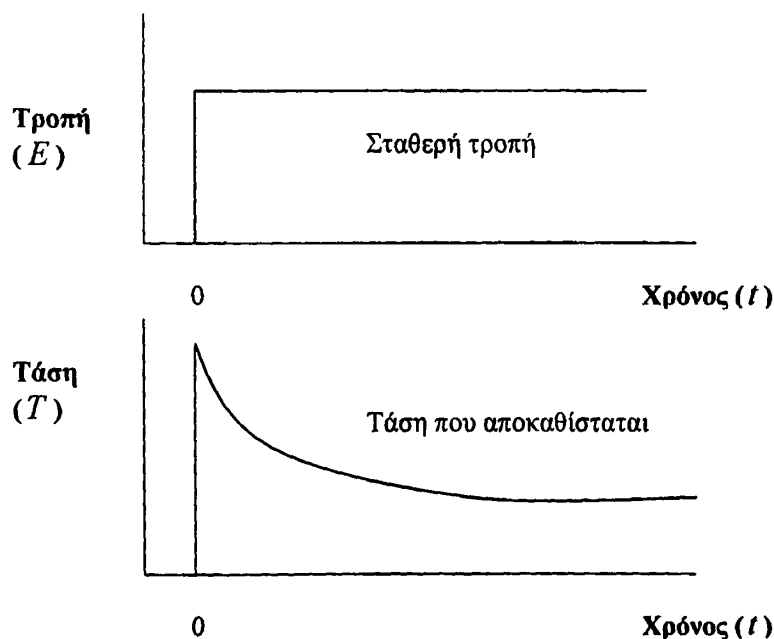
Τα περισσότερα βιολογικά υλικά εμφανίζουν κάποιο βαθμό ιξωδοελαστικότητας. Δύο ιδιότητες της συμπεριφοράς των ιξωδοελαστικών υλικών οι οποίες είναι σημαντικές στην ποσοτικοποίηση των μηχανικών ιδιοτήτων του οστού είναι (i) η αποκατάσταση τάσης (stress relaxation) και (ii) η ολίσθηση (creep).

Αποκατάσταση τάσης είναι η μείωση της τάσης μέσα σε ένα υλικό που υπόκειται σε μία σταθερή τροπή (Σχήμα 2.12).

Ολίσθηση είναι η σταδιακή αύξηση στην τροπή ενός υλικού που υπόκειται σε ένα σταθερό φορτίο. Η καμπύλη ολίσθησης απεικονίζει την τροπή ως προς τον χρόνο υπό σταθερή δύναμη ή τάση (Σχήμα 2.13). Σε ένα γραμμικά ιξωδοελαστικό υλικό, η ενέργεια διαχέεται μέσω πλαστικής ή ιξώδους ροής μέσα στο υλικό. Επομένως, οι καμπύλες φόρτισης και αποφόρτισης δεν ταυτίζονται, αλλά σχηματίζουν έναν κλειστό βρόχο υστέρησης.

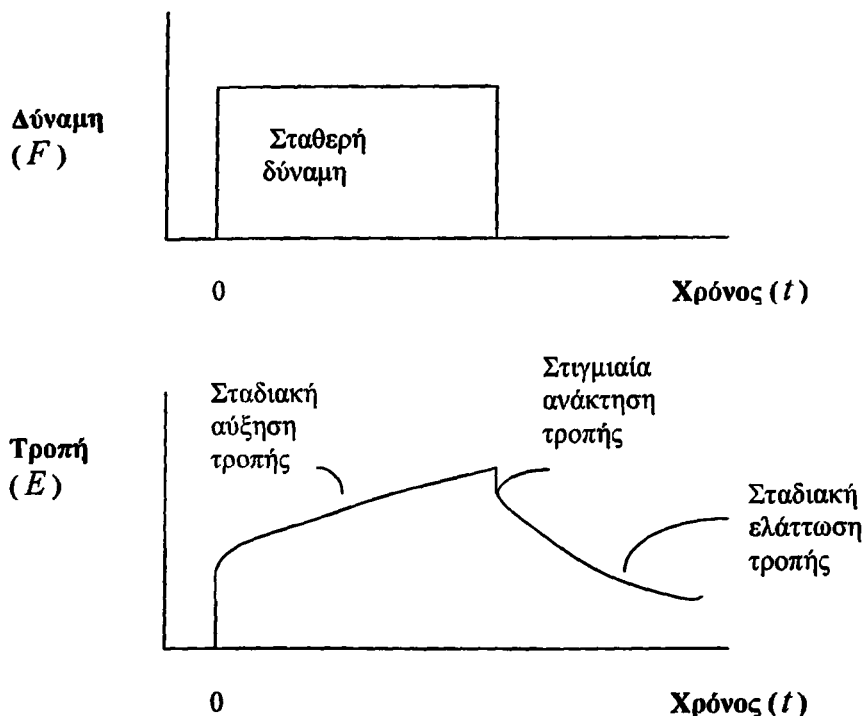
Αστοχία είναι ο εκφυλισμός μίας υλικής ιδιότητας πέρα από ένα καθορισμένο όριο (Black, 1988), ή η απώλεια της συνέχειας (continuity) του υλικού.

Κόπωση είναι η καταστροφή λόγω επαναλαμβανόμενων τάσεων μικρότερων της τελικής τάσης. Η κόπωση είναι μία προοδευτική αργή διεργασία, σε αντίθεση με το οξύ, καταστροφικό γεγονός που προκαλείται όταν υπερβαίνεται η τελική αντοχή ενός υλικού.



Σχήμα 2.12: Τυπική καμπύλη αποκατάστασης ενός ιξωδοελαστικού υλικού.





Σχήμα 2.13: Τυπική καμπύλη ολίσθησης ενός ιξωδοελαστικού υλικού.

2.3.2. Μηχανικές ιδιότητες του οστού

2.3.2.1. Μηχανικές ιδιότητες φλοιώδους οστού

2.3.2.1.1. Ελαστικές ιδιότητες φλοιώδους οστού

Αν και το οστό είναι ιξωδοελαστικό υλικό, σε πρώτη προσέγγιση το φλοιώδες οστό μοντελοποιείται ως ανισότροπο, γραμμικό ελαστικό στερεό (Katz, 1995) με καταστατική εξίσωση τον γενικευμένο Νόμο του Hooke

$$T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}, \quad (2.8)$$

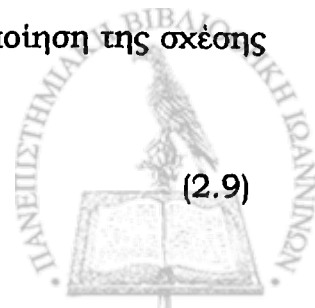
όπου T_{ij} είναι ο τανυστής τάσης δεύτερης τάξης,

E_{kl} είναι ο απειροστός (infinitesimal) τανυστής τροπής δεύτερης τάξης και

C_{ijkl} είναι ο τανυστής ελαστικότητας τέταρτης τάξης.

Η συμμετρία των τανυστών τάσης και τροπής οδηγεί στην απλοποίηση της σχέσης (2.7) σε

$$T_i = C_{ij} E_j, \quad i, j = 1 \text{ έως } 6, \quad (2.9)$$



όπου C_{ij} είναι ο πίνακας των συντελεστών ακαμψίας (ελαστικών σταθερών). Ο αντίστροφος του πίνακα C_{ij} είναι ο πίνακας των συντελεστών συμμόρφωσης, S_{ij} .

Οι πρώτες μελέτες των ελαστικών ιδιοτήτων του οστού αφορούσαν μόνον μετρήσεις του μέτρου του Young όταν το φλοιώδες οστό φορτίζεται αξονικά. Δεν είχε δοθεί μεγάλη προσοχή στον τρόπο με τον οποίο οι οστεώνες ήταν τοποθετημένοι έως ότου ο Rauber (1867) έδειξε ότι οι διαμήκεις και οι εγκάρσιες τομές του φλοιώδους οστού παρουσιάζουν διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας. Αργότερα, οι Dempster και Liddicoat (1952) έδειξαν ότι το φλοιώδες οστό των ενηλικών εμφανίζει τρεις καθορισμένους άξονες προσανατολισμού οι οποίοι σχετίζονται με το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Οι Hirsch και Silva (1967), Pope και Outwater (1974) και Reilly και Burstein (1975) έδειξαν ότι η ελαστική ακαμψία του φλοιώδους οστού σχετίζεται στενά με τις γωνίες στις οποίες κόβεται το δείγμα. Καθώς η γωνία στην οποία αποκόπεται το δείγμα αυξάνεται σε σχέση με τον διαμήκη άξονα της διάφυσης, το υλικό γίνεται λιγότερο άκαμπτο.

Η ανισοτροπία του φλοιώδους οστού έχει περιγραφεί σε δύο συμμετρίες. Οι Lang (1969), Katz και Ukraincik (1971) και Yoon και Katz (1976a,b) θεώρησαν το οστό ως εγκάρσια ισότροπο με τον διαμήκη του άξονα (την διεύθυνση 3) ως τον μοναδικό άξονα συμμετρίας. Οποιαδήποτε μικρή διαφορά στις ελαστικές ιδιότητες ανάμεσα στον ακτινικό (διεύθυνση 1) και τον εγκάρσιο (διεύθυνση 2) άξονα, λόγω της φαινόμενης βαθμίδας πορώδους (apparent porosity gradient) από την επιφάνεια του περιόστεου προς την επιφάνεια του ενδόστεου, θεωρήθηκε ελάττωμα του υλικού που δεν μεταβάλλει την βασική συμμετρία.

Για ένα εγκάρσια ισότροπο υλικό, ο πίνακας ακαμψίας $[C_{ij}]$ δίνεται από την εξίσωση

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

όπου $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$. Από τους 12 μη μηδενικούς συντελεστές, μόνον οι 5 είναι ανεξάρτητοι.



Στην βιβλιογραφία, κάποιοι ερευνητές χρησιμοποιούν το μέτρο του Young, τον λόγο του Poisson και το μέτρο διάτμησης, αντί των συντελεστών C_{ij} , τα οποία είναι γνωστά και ως τεχνικές σταθερές του οστού. Ορίζοντας το αξονικό μέτρο του Young ως \mathcal{E}_L και το σχετιζόμενο με αυτό λόγο του Poisson ως ν_L , το εγκάρσιο (ή ακτινικό) μέτρο του Young ως \mathcal{E}_T και το σχετιζόμενο λόγο Poisson ως ν_T και το μέτρο διάτμησης στο επίπεδο 3-1 (ή 3-2) με G , λαμβάνονται (Berme *et al.*, 1977) οι ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_L &= C_{33} \frac{2C_{13}^2}{C_{11} + C_{12}}, & \nu_L &= \frac{C_{13}}{C_{11} + C_{12}}, \\ \mathcal{E}_T &= \frac{(C_{11} - C_{12}) [C_{33}(C_{11} + C_{12}) - 2C_{13}^2]}{(C_{11}C_{33} - C_{13}^2)}, & \nu_T &= \frac{C_{33}C_{12} - C_{13}^2}{C_{33}C_{11} - C_{13}^2}, \\ G &= \frac{1}{2}C_{44}.\end{aligned}\quad (2.11)$$

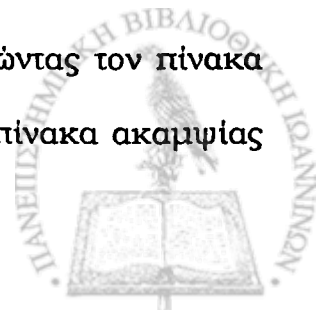
Οι Van Buskirk και Ashman (1981), χρησιμοποίησαν τις μικρές διαφορές στις ελαστικές ιδιότητες ανάμεσα στην ακτινική και την εφαπτομενική διεύθυνση, για να περιγράψουν το οστό ως ορθότροπο υλικό. Στην περίπτωση αυτή, 9 από τις 12 μη μηδενικές ελαστικές σταθερές είναι ανεξάρτητες, δηλαδή,

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Αντίστοιχοι πίνακες μπορούν να γραφούν για τους συντελεστές συμμόρφωσης, S_{ij} , χρησιμοποιώντας την αντίστροφη της σχέσης (2.9),

$$E_i = S_{ij}T_j, \quad i, j = 1 \text{ έως } 6, \quad (2.13)$$

όπου ο S_{ij} -οστός συντελεστής συμμόρφωσης λαμβάνεται διαιρώντας τον πίνακα ακαμψίας $[C_{ij}]$ μείον την i σειρά και j στήλη, με τον πλήρη πίνακα ακαμψίας $[C_{ij}]$.



Η σχέση ανάμεσα στον πίνακα συμμόρφωσης και τις τεχνικές σταθερές όπως το μέτρο του Young (\mathcal{E}_l), το μέτρο διάτμησης (G_l) και τον λόγο Poisson (ν_y), που μετρώνται σε μηχανικές δοκιμασίες όπως μονοαξονική φόρτιση ή καθαρή διάτμηση, εκφράζεται μέσω της εξίσωσης

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{E}_1} & -\nu_{21} & -\nu_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{\mathcal{E}_1} & \frac{1}{\mathcal{E}_2} & -\nu_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{\mathcal{E}_1} & \frac{-\nu_{23}}{\mathcal{E}_2} & \frac{1}{\mathcal{E}_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Για ορθότροπο υλικό, μόνον 9 από τους 12 μη μηδενικούς όρους είναι ανεξάρτητοι, λόγω της συμμετρίας του τανυστή S_{ij}

$$\frac{\nu_{12}}{\mathcal{E}_1} = \frac{\nu_{21}}{\mathcal{E}_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{\mathcal{E}_1} = \frac{\nu_{31}}{\mathcal{E}_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{\mathcal{E}_2} = \frac{\nu_{32}}{\mathcal{E}_3} \quad (2.15)$$

Στην περίπτωση της εγκάρσιας ισοτροπίας, η εξίσωση (2.13) καταλήγει σε 5 μόνον ανεξάρτητους συντελεστές, αφού

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2, \quad \nu_{12} = \nu_{21}, \quad \nu_{31} = \nu_{32} = \nu_{13} = \nu_{23}, \quad (2.16)$$

$$G_{23} = G_{31}, \quad G_{12} = \frac{\mathcal{E}_1}{2(1 + \nu_{12})}$$

Εκτός από τις μηχανικές δοκιμασίες, έχουν χρησιμοποιηθεί τεχνικές διάδοσης κυμάτων υπερήχων, για την μέτρηση των ανισότροπων ελαστικών ιδιοτήτων του οστού (Lang, 1969, Yoon και Katz, 1976a,b, Van Buskirk και Ashman, 1981).

Ο Πίνακας 2.1 περιέχει τις ελαστικές σταθερές στο ανθρώπινο μηριαίο οστό και το οστό της κνήμης.



Πίνακας 2.1: Ελαστικές σταθερές στο ανθρώπινο μηριαίο οστό και στο οστό της κνήμης

Ομάδα	Reilly και Burstein (1975)	Yoon και Katz (1976b)	Knets <i>et al.</i> (1977)	Ashman <i>et al.</i> (1984)
Οστό	Μηριαίο	Μηριαίο	Κνήμη	Μηριαίο
Συμμετρία	Εγκάρσια	Εγκάρσια	Ορθότροπη	Ορθότροπη
Μέθοδος	Μηχανική δοκιμασία	Υπέρηχος	Μηχανική δοκιμασία	Υπέρηχος
E_1 (GPa)	11.5	18.8	6.91	12.0
E_2 (GPa)	11.5	18.8	8.51	13.4
E_3 (GPa)	17.0	27.4	18.4	20.0
G_{12} (GPa)	3.6	7.17	2.41	4.53
G_{13} (GPa)	3.3	8.71	3.56	5.61
G_{23} (GPa)	3.3	8.71	4.91	6.23
ν_{12}	0.58	0.312	0.49	0.376
ν_{13}	0.31	0.193	0.12	0.222
ν_{23}	0.31	0.193	0.14	0.235
ν_{21}	0.58	0.312	0.62	0.422
ν_{31}	0.46	0.281	0.32	0.371
ν_{32}	0.46	0.281	0.31	0.350

2.3.2.1.2. Πυκνότητα και πορώδες φλοιώδους οστού

Η υλική πυκνότητα του φλοιώδους οστού είναι το καθαρό βάρος διαιρεμένο με τον όγκο του δείγματος. Είναι συνάρτηση τόσο του πορώδους όσο και της μεταλλοποίησης των οστικών υλικών. Το φλοιώδες οστό έχει μία μέση φαινόμενη πυκνότητα περίπου 1900 kg/m^3 . Για το φλοιώδες οστό, η φαινόμενη και η υλική πυκνότητα ουσιαστικά ταυτίζονται, καθ' ότι δεν υπάρχει χώρος που να καταλαμβάνεται από μυελό. Η φαινόμενη πυκνότητα του φλοιώδους οστού σχετίζεται άμεσα με τις ελαστικές του ιδιότητες (An *et al.*, 2000).

Το πορώδες (f) ορίζεται ως ο λόγος κενού όγκου ως προς τον συνολικό όγκο, που συνήθως μετριέται σε διδιάστατες ιστολογικές τομές ή με χρήση ακτίνων X. Οι έντονες επιδράσεις του πορώδους του φλοιώδους οστού στις μηχανικές του ιδιότητες έχουν μελετηθεί εκτενώς. Όσο μεγαλύτερο πορώδες παρουσιάζει ένα οστό τόσο μικρότερη μηχανική αντοχή έχει. Στο φλοιώδες οστό, οι μηχανικές ιδιότητες επηρεάζονται από την ύπαρξη των Αβερσιανών καναλιών και τις σχετιζόμενες με αυτά κοιλότητες απορρόφησης και αγγειακά κανάλια. Αναφορές σχετικές με τον συσχετισμό του πορώδους και των μηχανικών ιδιοτήτων δίνονται από τους Schaffler και Burr (1988) και Currey (1988).

2.3.2.1.3. Ανισοτροπία και ετερογένεια φλοιώδους οστού

Ο όρος ανισότροπος σημαίνει μη ομοιόμορφος ή μη ομαλά κατανεμημένος. Η δομική ανισοτροπία καθορίζει την μηχανική ανισοτροπία. Οι μηχανικές ιδιότητες του φλοιώδους οστού εξαρτώνται από την διεύθυνση επιβολής της μεθόδου δοκιμασίας. Το μέτρο ελαστικότητας είναι υψηλότερο κατά την διαμήκη διεύθυνση (0°) (συνήθως η διεύθυνση που φέρει το βάρος), χαμηλότερο κατά την εγκάρσια διεύθυνση (90°) και παίρνει ενδιάμεσες τιμές για γωνίες μεταξύ 0° και 90° (Ashman, 1989, Rho *et al.*, 1998, Hirsch και Silva, 1967, Katz, 1980). Η ανισοτροπία του φλοιώδους οστού αποδίδεται στον διαμήκη προσανατολισμό των ινιδίων κολλαγόνου και των οστεώνων (Martin και Boardman, 1993).

Ο όρος μικροανισοτροπία χρησιμοποιείται για να περιγράψει την μη ομοιόμορφη κατανομή των δομών σε επίπεδο οστεώνων (Turner *et al.*, 1995). Οι διακυμάνσεις στις μηχανικές ιδιότητες των οστεώνων οφείλονται στις διαφορετικές διευθύνσεις των ινών κολλαγόνου και υποδηλώνουν ότι οι οστεώνες είναι προσανατολισμένοι διαφορετικά ο καθένας ώστε να επαυξάνουν τοπικά την ικανότητα του οστού να υποστηρίξει έναν συγκεκριμένο τύπο φόρτισης. Το μέτρο ελαστικότητας των περισσότερων δειγμάτων οστεώνων και φλοιώδους οστού κυμαίνεται μεταξύ 2 και 12 GPa.

Το φλοιώδες οστό είναι μηχανικά ετερογενές. Οι Evans και Lebow (1951) διαπίστωσαν ότι το μεσαίο τριτημόριο της διάφυσης του μηριαίου οστού παρουσιάζει την υψηλότερη τελική αντοχή και μέτρο ελαστικότητας ενώ το χαμηλότερο τριτημόριο έχει την χαμηλότερη μέση αντοχή και μέτρο ελαστικότητας. Το πλάγιο τεταρτημόριο της διάφυσης έχει την υψηλότερη τελική αντοχή εφελκυσμού ενώ το πρόσθιο τεταρτημόριο έχει την χαμηλότερη. Οι μηχανικές ιδιότητες του φλοιώδους οστού είναι περισσότερο ομογενείς κατά μήκος του παρά στην περιφέρειά του.

2.3.2.1.4. Ιξωδοελαστικές ιδιότητες φλοιώδους οστού

Όπως όλοι οι βιολογικοί ιστοί, το οστό είναι ιξωδοελαστικό υλικό. Στα υλικά αυτά, ο Νόμος του Hooke για γραμμικά ελαστικά υλικά αντικαθίσταται από μία καταστατική εξίσωση η οποία εμπεριέχει την χρονική εξάρτηση των υλικών ιδιοτήτων. Η συμπεριφορά ενός γραμμικού ισότροπου ιξωδοελαστικού υλικού περιγράφεται χρησιμοποιώντας ως καταστατική εξίσωση το ολοκλήρωμα υπέρθεσης του Boltzmann (Katz, 1995)



$$T_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijkl}(t-\tau) \frac{dE_{kl}(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (2.17)$$

όπου $T_{ij}(t)$ είναι ο χρονοεξαρτώμενος δεύτερης τάξης τανυστής της τάσης $E_{ij}(t)$ είναι οι χρονοεξαρτώμενος δεύτερης τάξης τανυστής της τροπής, και $C_{ijkl}(t-\tau)$ είναι ο τέταρτης τάξης τανυστής του μέτρου αποκατάστασης (relaxation modulus). Ο τανυστής αυτός έχει 36 ανεξάρτητα στοιχεία για την περίπτωση ανισοτροπίας και 12 μη μηδενικά ανεξάρτητα στοιχεία για την περίπτωση ορθοτροπίας.

Στην περίπτωση ενός ορθότροπου υλικού σε μονοαξονικό εφελκυσμό ή συμπίεση, το χρονοεξαρτώμενο μέτρο του Young δίνεται από τη σχέση (Katz, 1995)

$$\varepsilon_1(t-\tau) = C_{11} + C_{12} \frac{[C_{31} - (C_{21}C_{33}/C_{23})]}{[(C_{22}C_{33}/C_{23}) - C_{32}]} + C_{13} \frac{[C_{21} - (C_{31}C_{22}/C_{32})]}{[(C_{22}C_{33}/C_{32}) - C_{23}]}, \quad (2.18)$$

όπου για απλοποίηση έχει χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός $C_{ij} \equiv C_{ij}(t-\tau)$.

Επομένως, στην περίπτωση του μονοαξονικού εφελκυσμού ή συμπίεσης, υπάρχουν μόνον εννέα ανεξάρτητες συνιστώσες του ορθότροπου τανυστή, ενώ οι τρεις διατμητικές συνιστώσες είναι ίσες με το μηδέν. Παρόλα αυτά, όπως φαίνεται από την σχέση (2.18) το χρονοεξαρτώμενο μέτρο του Young είναι μία πολύπλοκη συνάρτηση.

Οι ιξωδοελαστικές ιδιότητες διαφόρων μακρών οστών έχουν μελετηθεί (Sedlin, 1965, Smith και Keiper, 1965, Laird και Kingsbury, 1973, Lugassy, 1968, Black και Korostoff, 1973). Όμως, καμμία από τις μελέτες δεν έγινε σε αρκετά μεγάλο εύρος συχνοτήτων (ή χρόνου) ώστε να οριστούν πλήρως οι μετρούμενες ιξωδοελαστικές ιδιότητες, όπως η ολίσθηση ή η αποκατάσταση τάσης. Επομένως, δεν είναι δυνατόν να γίνει μαθηματικός μετασχηματισμός της μίας ιδιότητας στην άλλη ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα διαφορετικών πειραμάτων σε διαφορετικά οστά (Lakes και Katz, 1974).

2.3.2.2. Μηχανικές ιδιότητες σπογγώδους οστού

Όπως και το φλοιώδες, το σπογγώδες οστό είναι ένα μη γραμμικό, μη ομογενές, ιξωδοελαστικό, ανισότροπο υλικό που περιγράφεται χρησιμοποιώντας υποθέσεις για ισότροπη, εγκάρσια ισότροπη και ορθότροπη συμπεριφορά. Η τρισδιάστατη δομή του σπογγώδους οστού είναι πολύπλοκη και μεταβάλλεται με την ανατομική θέση πολύ περισσότερο από ότι στο φλοιώδες οστό.

2.3.2.2.1. Ελαστικές ιδιότητες σπογγώδους οστού

Τα μετρούμενα μέτρα ελαστικότητας στο σπογγώδες οστό που αναφέρονται στην βιβλιογραφία παρουσιάζουν μεγάλο εύρος τιμών. Το εύρος αυτό αποδίδεται σε διαφορές στις μεθόδους μέτρησης καθώς και σε σημαντικές διαφορές στην αρχιτεκτονική των δοκίδων που σχετίζονται με την ανατομική θέση, την ηλικία και την διεύθυνση της δοκιμασίας. Η πλειοψηφία των μετρήσεων έχει γίνει σε συμπίεση ενώ λίγες μετρήσεις έχουν γίνει σε εφελκυσμό και διάτμηση. Σύμφωνα με τον Πίνακα 2.2 οι τιμές αντοχής και μέτρου ελαστικότητας στο ανθρώπινο μηριαίο οστό κυμαίνονται μεταξύ 1.5 έως 9.3 MPa και 10 έως 900 MPa, αντίστοιχα, δηλαδή είναι κατά πολύ μικρότερες από εκείνες του φλοιώδους οστού.

2.3.2.2.2. Πυκνότητα σπογγώδους οστού

Υπάρχει συσχετισμός ανάμεσα στις μηχανικές ιδιότητες του σπογγώδους οστού, τόσο την αντοχή όσο και την ακαμψία και την φαινόμενη πυκνότητα και πυκνότητα αλάτων. Η φαινόμενη πυκνότητα του σπογγώδους οστού κυμαίνεται μεταξύ 140 και 1160 kg/m³ (μέσος όρος: 620 kg/m³). Η αντοχή συμπίεσης (σε GPa) του σπογγώδους οστού σχετίζεται με την φαινόμενη πυκνότητά του ρ (σε kg/m³) μέσω της σχέσης (Hayes και Bouxsein, 1997)

$$\text{Αντοχή συμπίεσης} = 60\rho^2. \quad (2.19)$$

Πίνακας 2.2: Μηχανικές ιδιότητες και πυκνότητες ανθρώπινου σπογγώδους οστίτη ιστού.

Αναφορά	Οστό	Τελική Αντοχή (MPa)	Μέτρο ελαστικότητας (MPa)	Φαινόμενη πυκνότητα ($\times 10^3$ kg/m ³)	Πυκνότητα τέφρας ($\times 10^3$ kg/m ³)
Martens (1983)	Μηριαία κεφαλή	9.3 ± 4.5	900 ± 710	—	—
Martens (1983)	Εγγύς μηριαίο	6.6 ± 6.3	616 ± 707	—	—
Kuhn (1989)	Περιφερικό μηριαίο	5.6 ± 3.8	298 ± 224	0.43 ± 0.15	0.26 ± 0.08
Carter (1977)		1.5 – 45	10 – 500	0.24 ± 0.09	—
Odgaard (1989)		5.96	103 – 1058	0.46	—
Linde (1989)	Εγγύς κνήμη	5.3 ± 2.9	445 ± 257	—	—
Keaveny (1997)	Σώμα σπονδύλου	—	165 ± 110	0.14 ± 0.06	—



Το μέτρο συμπίεσης (σε GPa) του σπογγώδους οστού σχετίζεται με την φαινόμενη πυκνότητά του ρ (σε kg/m^3) μέσω της σχέσης (Hayes και Bouxsein, 1997)

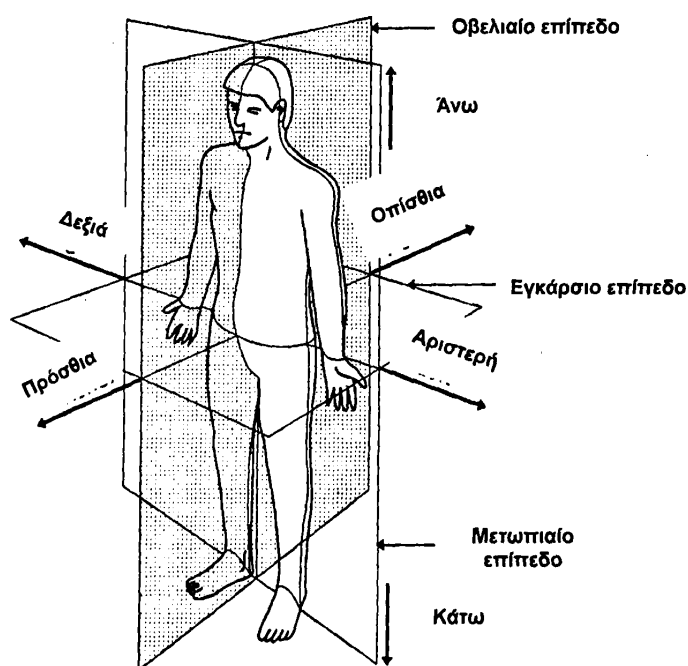
$$\text{Μέτρο συμπίεσης} = 2915\rho^2. \quad (2.20)$$

2.3.2.2.3. Μικροδομή σπογγώδους οστού

Έχουν βρεθεί σημαντικοί συσχετισμοί μεταξύ των μηχανικών και των μορφολογικών παραμέτρων του σπογγώδους οστού. Μετρήσεις παραμέτρων όπως το ποσοστό οστικού όγκου, ο λόγος επιφάνειας προς όγκο, η συνεκτικότητα (connectivity), η ανισοτροπία, το πάχος, ο αριθμός και η απόσταση μεταξύ των δοκίδων (Goldstein *et al.*, 1993), δείχνουν ότι περισσότερο από το 80 % της μεταβλητότητας στην μηχανική συμπεριφορά του φυσιολογικού οστού οφείλεται στην πυκνότητα και τον προσανατολισμό των δοκίδων.

2.3.2.2.4. Ανισοτροπία και ετερογένεια σπογγώδους οστού

Το σπογγώδες οστό είναι ανισότροπο λόγω της μορφολογίας των δοκίδων (Whitehouse, 1974). Πολλοί ερευνητές (Vahey *et al.*, 1987, Galante *et al.*, 1970, Townsend *et al.*, 1975, Ciarelli *et al.*, 1991) έχουν αναφέρει τις ορθογώνιες ή ανισότροπες μηχανικές ιδιότητες του σπογγώδους οστού τόσο των ανθρώπων όσο και των ζώων. Η αντοχή και το μέτρο ελαστικότητας του σπογγώδους οστού εξαρτώνται από την διεύθυνση του φορτίου που εφαρμόζεται, όπως συνήθως



Σχήμα 2.14: Επίπεδα και διευθύνσεις στο ανθρώπινο σώμα (αναπαραγωγή από Whittle, 1997).



μετριέται στην άνω-κάτω, πρόσθια-οπίσθια και μέση-πλάγια διεύθυνση (Σχήμα 2.14). Οι Ciarelli *et al.* (1991) και Galante *et al.* (1970) βρήκαν ότι ο υψηλότερος συνολικός μέσος όρος των μέτρων ελαστικότητας σε ανθρώπινα σπογγώδη οστά συναντάται στην άνω-κάτω διεύθυνση ο οποίος είναι περίπου 2.5 φορές μεγαλύτερος από εκείνον στην πρόσθια-οπίσθια διεύθυνση. Η πρόσθια-οπίσθια διεύθυνση έχει υψηλότερο μέτρο ελαστικότητας από την μέση-πλάγια διεύθυνση.

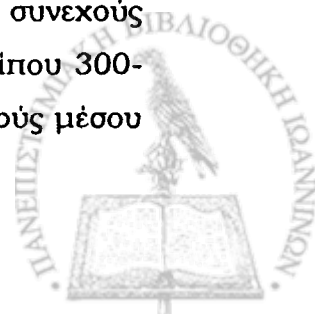
Το σπογγώδες οστό είναι ετερογενές, δηλαδή οι μηχανικές του ιδιότητες διαφέρουν από θέση σε θέση. Σύμφωνα με τον κατάλογο δεδομένων που συνοψίζονται από τον Goldstein (1987), οι μέσες τιμές της αντοχής και του μέτρου ελαστικότητας του ανθρώπινου σπογγώδους οστού που προέρχεται από διαφορετικές θέσεις κυμαίνονται από 6.6 έως 36.2 MPa και από 130 έως 1080 MPa αντίστοιχα. Γραμμικές και εκθετικές συναρτήσεις ερμηνεύουν τη σχέση μεταξύ πυκνότητας και υλικών ιδιοτήτων του σπογγώδους οστού (Goldstein, 1987). Η μηχανική ετερογένεια του σπογγώδους οστού καθορίζεται από την λειτουργική του προσαρμογή.

2.3.2.2.5. Ιξωδοελαστικές ιδιότητες σπογγώδους οστού

Όπως το φλοιώδες έτσι και το σπογγώδες οστό είναι ευαίσθητο στο ρυθμό φόρτισης ή τροπής. Έχει δείξει ότι ο μυελός μέσα στην δομή των δοκίδων παρουσιάζει ακαμψία λόγω ιξώδους μόνον σε πολύ υψηλούς ρυθμούς τροπής (Carter και Hayes, 1977, Goldstein, 1987).

2.3.3. Υπόθεση συνεχούς μέσου

Στις περισσότερες μελέτες της αντοχής και ακαμψίας τόσο του φλοιώδους όσο και του σπογγώδους οστού γίνεται η υπόθεση ότι το οστό μπορεί να μοντελοποιηθεί ως συνεχές μέσο (Martin, 1991). Μία βασική απαίτηση όταν χρησιμοποιείται η υπόθεση του συνεχούς μέσου είναι η ελάχιστη διάσταση του δείγματος να είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την διάσταση των δομικών του υπομονάδων. Οι Harrigan *et al.* (1988) ανέπτυξαν ένα κριτήριο για την εγκυρότητα αυτής της υπόθεσης. Οι περιορισμοί της υπόθεσης του συνεχούς μέσου εμφανίζονται σε δύο περιοχές: κοντά σε βιολογικές ενδοεπιφάνειες και σε περιοχές υψηλών βαθμίδων τάσης, όπως στο υποχόνδριο οστό, την περιοχή μετάβασης μεταξύ φλοιώδους κελύφους και σπογγώδους οστού και σε περιοχές διεπαφής κοντινών αρθρώσεων. Στο σπογγώδες οστό, το μοντέλο του συνεχούς μέσου δεν ισχύει για αποστάσεις μεταξύ τριών και πέντε δοκίδων (περίπου $300-1500 \times 10^{-6}$ m). Στο φλοιώδες οστό, το όριο για την υπόθεση του συνεχούς μέσου είναι μικρότερο λόγω της πυκνής του δομής.



Στα μοντέλα της παρούσας εργασίας γίνεται η υπόθεση του συνεχούς μέσου.

2.3.4. Παράγοντες που επηρεάζουν τις μηχανικές ιδιότητες του οστού

Η προσεκτική μελέτη των ιδιοτήτων τόσο του φλοιώδους όσο και του σπογγώδους οστού αποκαλύπτει σημαντικές διακυμάνσεις σε όλες σχεδόν τις αναφερόμενες ιδιότητες. Υπάρχουν πολλοί παράγοντες που συνεισφέρουν σε αυτό.

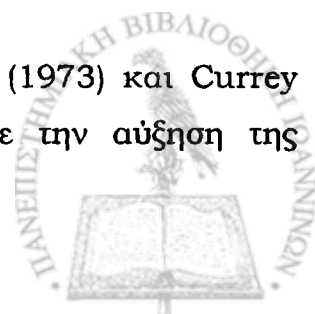
Γενικά, είναι γνωστό ότι οι τεχνικές υπερήχων δίνουν υψηλότερες τιμές για τα μέτρα ελαστικότητας σε σχέση με τις δοκιμασίες απλής συμπίεσης ή εφελκυσμού. Πέρα από τις σημαντικές αποκλίσεις των μετρούμενων ιδιοτήτων σε σχέση με τις μεθόδους δοκιμασίας και τις περιβαλλοντικές συνθήκες, οι πιο σημαντικοί παράγοντες που συνδέονται με τις διαφορές αυτές σχετίζονται με την πυκνότητα και αρχιτεκτονική των υπό δοκιμασία δειγμάτων. Σημαντικές σχέσεις έχουν βρεθεί ανάμεσα στις μηχανικές ιδιότητες του οστού και το οστικό περιεχόμενο αλάτων, την πυκνότητα του βάρους τέφρας ή την φαινόμενη πυκνότητα (Carter και Hayes, 1976, Brown και Ferguson, 1980). Όπως αναφέρεται στην βιβλιογραφία, τόσο εκθετικές όσο και γραμμικές συναρτήσεις έχουν χρησιμοποιηθεί για να περιγράψουν την σχέση μεταξύ των μηχανικών ιδιοτήτων του σπογγώδους οστού και της φαινόμενης πυκνότητάς του (Goldstein, 1987). Τα αποτελέσματα αυτών των *in vitro* μελετών υποδηλώνουν ότι η αρχιτεκτονική είναι εξίσου σημαντική με την οστική πυκνότητα για την ερμηνεία της μηχανικής συμπεριφοράς του σπογγώδους οστού.

Οι μελέτες των Yamada (1973), Mather (1967) και Sedlin και Hirsch (1966) δείχνουν ότι το μέτρο του Young στο φλοιώδες οστό αυξάνει με την ηλικία του ατόμου μέχρι περίπου τα 30 του χρόνια και στην συνέχεια ελαττώνεται. Με βάση τις πειραματικές μετρήσεις, μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά μία γραμμική σχέση ανάμεσα στο μέτρο ελαστικότητας κατά την αξονική διεύθυνση και την ηλικία (A) μετά τα 30,

$$E = (1.78 - 0.6A) \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \quad (2.21)$$

Γενικά, έχει παρατηρηθεί ότι με την ηλικία υπάρχει αύξηση στο περιεχόμενο αλάτων του οστίτη ιστού, ο οποίος αποκτά την μεγαλύτερη αντοχή και ακαμψία κατά την ωριμότητα (Ziourpos *et al.*, 2000).

Οι Ascenzi και Bonucci (1968), Benfield και Clark (1973) και Currey (1975) παρατήρησαν αύξηση στο μέτρο ελαστικότητας με την αύξηση της



μεταλλοποίησης. Ο Currey (1975) πρότεινε την ακόλουθη σχέση για το μέτρο ελαστικότητας,

$$\mathcal{E} = (13.5 + 1.37C + 0.75\dot{S}) \times 10^9 \text{ N/m}^2, \quad (2.22)$$

όπου C είναι το ποσοστιαίο περιεχόμενο τέφρας και \dot{S} είναι ο ρυθμός τροπής (s^{-1}).

Ο Wertheim (1847) ήταν ο πρώτος ερευνητής που ανέπτυξε με λεπτομέρεια την επίδραση της ξήρανσης στο μέτρο ελαστικότητας του ανθρώπινου μηριαίου οστού και βρήκε ότι το μέτρο ελαστικότητας του ξηρού οστού είναι μεγαλύτερο από εκείνο του ζωντανού (υγρού) οστού. Αργότερα, ο Rauber (1867) παρατήρησε ότι τα μέτρα ελαστικότητας ενός διαμήκους δείγματος ανθρώπινου μηριαίου οστού είναι $2.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ (ζωντανό) και $2.5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ (ξηρό), αντίστοιχα. Το ποσοστό υγρασίας του δείγματος έχει σημαντική επίδραση στην ιξωδοελαστικότητα και πλαστικότητα.

Ένας από τους πιο σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν τις ελαστικές ιδιότητες του φλοιώδους οστού είναι ο ρυθμός τροπής ή η ταχύτητα της μηχανικής φόρτισης όταν το υλικό υπόκειται σε δοκιμασία. Οι McElhaney και Byrnes (1965) και McElhaney (1966) διερεύνησαν τις επιδράσεις του ρυθμού τροπής στις ελαστικές ιδιότητες μηριαίων οστών. Γενικά, παρατηρήθηκε ότι όταν αυξάνεται ο ρυθμός τροπής, το μέτρο του Young αυξάνεται ενώ ο λόγος του Poisson μειώνεται (Πίνακας 2.3). Παρόμοια αποτελέσματα βρέθηκαν από τους Bird *et al.* (1968), Benfield και Clark (1973), και Panjabi *et al.* (1973). Οι Black και Korostoff (1973) μελετώντας κυλινδρικά δείγματα κνήμης παρατήρησαν ότι το μέτρο του Young αυξάνεται σχεδόν γραμμικά καθώς αυξάνεται η συχνότητα φόρτισης, μειώνεται απότομα κατά 50% περίπου γύρω στα 200 Hz και στην συνέχεια αυξάνεται με πιο γρήγορο ρυθμό.

Πίνακας 2.3: Επίδραση του ρυθμού τροπής στις ελαστικές σταθερές (συμπύεση) (αναπαραγωγή από Guzelsu και Demiray, 1979).

Υλικό	Ρυθμός τροπής (s^{-1})	Μέτρο του Young (10^{10} N/m^2)	Λόγος του Poisson
Φρέσκο μηριαίο οστό βοοειδών	0.001	1.86	0.30
	0.1	2.42	0.28
	300	3.31	0.26
Ταριχευμένο ανθρώπινο μηριαίο οστό	0.001	1.52	—
	0.1	1.79	—
	300	2.97	—



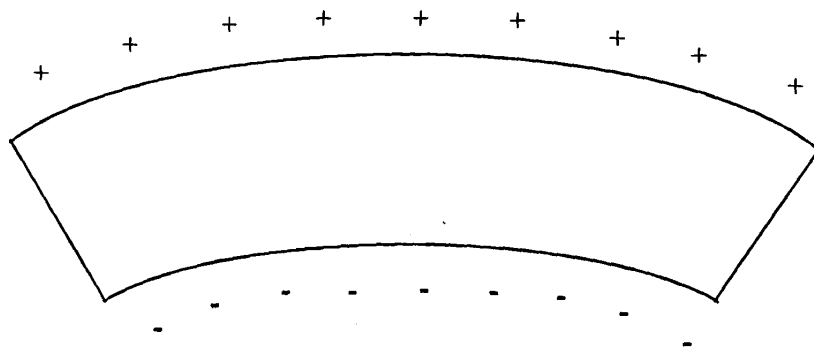
2.3.5. Ηλεκτρικές ιδιότητες του οστού

Το οστό όταν υπόκειται σε μηχανικές τάσεις παράγει ένα ηλεκτρικό δυναμικό. Έχει προταθεί ότι τα παραγόμενα από τάση δυναμικά (stress-generated potentials) παίζουν ρόλο στην οστική ανάπτυξη, επούλωση και επαναδόμηση (Bassett, 1968, Elmessierey, 1981).

2.3.5.1. Πιεζοηλεκτρικά φαινόμενα στα οστά

Οι Yasuda *et al.* (1955) παρατήρησαν για πρώτη φορά τις πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες του οστίτη ιστού. Όμως, η συστηματική μελέτη του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου στα οστά ξεκινά με την εργασία των Fukada *et al.* (1957), στην οποία επιδεικνύεται μία γραμμική σχέση ανάμεσα στην πίεση και την πόλωση. Οι Bassett *et al.* (1962), Cochran *et al.* (1968), Shamos *et al.* (1963), Bassett (1965) και Marino *et al.* (1970) μελέτησαν τις ηλεκτρικές ιδιότητες οστικών δειγμάτων και την σχέση τους με την οστική επαναδόμηση. Εφαρμόζοντας μία καμπυλική ροπή σε ένα δείγμα δοκού με αρθρώσεις οι Bassett *et al.* (1962) παρατήρησαν την δημιουργία ενός αρνητικού ηλεκτρικού δυναμικού στην πλευρά που υφίσταται συμπίεση και ενός θετικού ηλεκτρικού δυναμικού στην πλευρά που υφίσταται εφελκυσμό (Σχήμα 2.15). Υποστήριξαν ότι αυτά τα χρονικά σταθερά δυναμικά οφείλονται σε φορτία πόλωσης που συσσωρεύονται στις αντίστοιχες πλευρές της δοκού. Η θεωρία αυτή τροποποιήθηκε αργότερα για να συμπεριλάβει τις βαθμίδες τάσης (Korostoff, 1979) ή τα χωρικά μεταβαλλόμενα μέτρα πιεζοηλεκτρικότητας (Johnson *et al.*, 1980).

Το πλάτος των παραγόμενων από τάση δυναμικών επηρεάζεται έντονα από τον ρυθμό παραμόρφωσης αφού, λόγω της διαρροής φορτίου, μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο σε πολύ υψηλούς ρυθμούς παραμόρφωσης (Guzelsu και



Σχήμα 2.15: Οστικό δείγμα σε κάμψη. Η πάνω επιφάνεια βρίσκεται σε εφελκυσμό και συγκεντρώνει θετικό ηλεκτρικό δυναμικό ενώ η κάτω επιφάνεια βρίσκεται σε συμπίεση και συγκεντρώνει αρνητικό ηλεκτρικό δυναμικό.



Demiray, 1979). Όπως αναφέρεται από τους Marino *et al.* (1971), το οργανικό τμήμα του οστού (κυρίως κολλαγόνο) είναι υπεύθυνο για αυτές τις ηλεκτρικές δραστηριότητες. Οι Shamos *et al.* (1963) έδειξαν ότι τα επιφανειακά φορτία που αναπτύσσονται στα οστά που υπόκεινται σε τάσεις πιθανόν να ελέγχουν τον σχηματισμό οστού. Το τοπικό ηλεκτρικό πεδίο που προκύπτει από αυτά τα φορτία μπορεί να επηρεάσει τον προσανατολισμό και την εναπόθεση των ιόντων ή των πολωμένων μορίων στα οστά. Ο Bassett (1965) ερμηνεύοντας το αποτέλεσμα των πειραματικών του ευρημάτων τόνισε ότι τα αρνητικά φορτία που συσσωρεύονται στην κοίλη πλευρά ενός οστού σε κάμψη προκαλούν οστική αναγέννηση. Το ηλεκτροθετικό υλικό στην κυρτή πλευρά απομακρύνεται και μεταφέρεται στην ηλεκτραρνητική κοίλη πλευρά ώστε να μειώσει την επίδραση της καμπτικής ροπής.

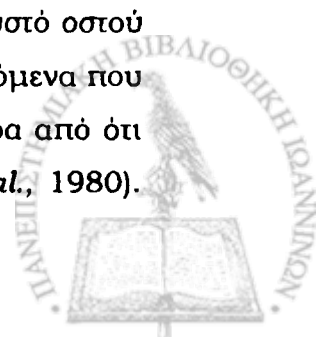
Σε μετέπειτα εργασίες οι Shamos και Lavine (1964, 1965) έδειξαν ότι όταν το δείγμα υπόκειται σε τάση, σε διεύθυνση παράλληλη ή κάθετη στον άξονα του κολλαγόνου, δεν δημιουργείται ηλεκτρική πόλωση. Όταν η τάση εφαρμόζεται σε άλλες διευθύνσεις προκαλείται πόλωση. Αυτό το χαρακτηριστικό του δείγματος σχετίζεται με την υλική του συμμετρία.

2.3.5.2. Ρευματικά δυναμικά στα οστά

Αν και η πιεζοηλεκτρική θεωρία μπορεί να εξηγήσει την προέλευση των παραγόμενων από τάση δυναμικών στο ξηρό οστό, η δυνατότητά της να ερμηνεύσει την προέλευση των παραγόμενων από τάση δυναμικών στο οστό που είναι κεκορεσμένο σε ρευστό, έχει αμφισβητηθεί. Οι μελέτες των Cochran *et al.* (1968) σε υγρά οστά έδειξαν ότι η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στην κοίλη και την κυρτή πλευρά μίας υγρής οστικής δοκού σε κάμψη εξουδετερώνεται από την διαρροή φορτίου που δημιουργείται με την παραμόρφωση. Εάν το φορτίο απομακρυνθεί από το δείγμα μίας δοκού με αρθρώσεις, αναπτύσσεται διαφορά δυναμικού αντίστροφης πολικότητας ανάμεσα στις αντίθετες πλευρές της δοκού στο επίπεδο κάμψης.

Οι Anderson και Eriksson (1968, 1970) πρότειναν ότι δύο ανεξάρτητοι μηχανισμοί, η πιεζοηλεκτρικότητα και τα ρευματικά δυναμικά (βλ. παράγραφο 2.3.5.2.2.), είναι υπεύθυνοι για το φαινόμενο των παραγόμενων από τάση δυναμικών στο οστό που είναι κεκορεσμένο σε ρευστό.

Μετρήσεις των διηλεκτρικών ιδιοτήτων του κεκορεσμένου σε ρευστό οστού (Chakalakal *et al.*, 1980) υποδηλώνουν ότι τα ηλεκτρομηχανικά φαινόμενα που παρατηρούνται στο υγρό οστό είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερα από ότι θα περίμενε κανείς από ένα πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο (Johnson *et al.*, 1980).



Εάν το ηλεκτρομηχανικό φαινόμενο που παρατηρείται στα υγρά οστά δεν είναι πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο, τότε πιθανόν οφείλεται σε ένα ρευματικό δυναμικό.

Τα αποτελέσματα της μελέτης των Gross και Williams (1982) έδειξαν ότι το συνολικό οστό εμφανίζει ένα μη μηδενικό δυναμικό ζήτη (βλ. παράγραφο 2.3.5.2.1.) και ότι υπάρχει κίνηση ρευστού σε τέτοια δείγματα όταν αυτά υπόκεινται σε βαθμίδα πίεσης. Με βάση τα πρώτα αποτελέσματα των Pienkowski και Pollack (1980), οι οποίοι έδειξαν ότι τα παραγόμενα από τάση δυναμικά εξαρτώνται από τις ιδιότητες του ρευστού στο οστό και τα δεδομένα των Gross και Williams (1982), οι οποίοι επίσης έδειξαν παρόμοιες σχέσεις, η υπόθεση των Anderson και Eriksson (1968) ότι δρουν και οι δύο μηχανισμοί στο οστό που είναι γεμάτο με ρευστό, απέκτησε μεγαλύτερη ισχύ.

Το ποιος μηχανισμός είναι κυρίαρχος στην παραγωγή των ηλεκτρικών δυναμικών που παρατηρούνται στο κεκορεσμένο ρευστού οστό παραμένει ανεπιβεβαίωτο. Οι κύριες δυσκολίες στην υπόθεση των ρευματικών δυναμικών είναι ότι πολύ λίγα είναι γνωστά σχετικά με την ροή ρευστού στα οστά που υπόκεινται σε μηχανικές τάσεις και με τις ηλεκτροκινητικές ιδιότητες των τοιχωμάτων των καναλιών μέσω των οποίων ρέει το ρευστό.

2.3.5.2.1. Δυναμικό ζήτη

Όταν ένα ρευστό που περιέχει ιόντα έρθει σε επαφή με ένα στερεό που έχει μία καθαρή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, τα ιόντα αντίθετης πολικότητας έλκονται και προσφύονται στο στερεό. Αυτά τα δεσμευμένα ιόντα σχηματίζουν ένα λεπτό στατικό στρώμα που δημιουργεί ένα ηλεκτρικό δυναμικό το οποίο μεταβάλλεται από την επιφάνεια του στερεού προς το ρευστό. Όταν το ρευστό κινείται σε σχέση με το στερεό, υπάρχει ένα σύνορο που ονομάζεται επίπεδο ολίσθησης το οποίο διαχωρίζει το λεπτό στατικό στρώμα του ρευστού από το υπόλοιπο κινούμενο ρευστό. Το δυναμικό ζήτη ορίζεται ως το ηλεκτρικό δυναμικό στο επίπεδο ολίσθησης σε σχέση με το δυναμικό στο υπόλοιπο ρευστό.

2.3.5.2.2. Ρευματικά δυναμικά

Τα ρευματικά δυναμικά (streaming potentials) παράγονται όταν ένα ηλεκτρολυτικό ρευστό ρέει πάνω σε μία φορτισμένη επιφάνεια. Το δυναμικό αυτό είναι ανάλογο προς την διηλεκτρική διαπερατότητα του καναλιού, το δυναμικό ζήτη και την πίεση και αντιστρόφως ανάλογο προς την αγωγιμότητα και το ιξώδες του διαλύματος (Hillsley και Frangos, 1994). Όταν ο ρυθμός διάτμησης όμως διατηρείται σταθερός, το ρευματικό δυναμικό είναι ανεξάρτητο του ιξώδους. Η πιο

ενθαρρυντική πλευρά της υπόθεσης του ρευματικού δυναμικού είναι ότι εξηγεί την χωρική κατανομή της οστικής επαναδόμησης που επάγεται από μηχανική φόρτιση. Για παράδειγμα, εάν το οστό υποστεί κάμψη, η ροή ρευστού από την κοίλη προς την κυρτή επιφάνεια επάγει ένα θετικό φορτίο στην κυρτή πλευρά σε σχέση με την κοίλη πλευρά (Σχήμα 2.15). Έχει δειχθεί ότι οι οστεοκλάστες μετακινούνται στο θετικό ηλεκτρόδιο σε ένα ηλεκτρικό πεδίο, και οι οστεοβλάστες στο αρνητικό (Ferrier *et al.*, 1986). Σύμφωνα με την υπόθεση του ρευματικού δυναμικού, το οστό αναμένεται να επαναδομηθεί έτσι ώστε η κυρτή ή θετικά φορτισμένη επιφάνεια να συνιστά περιοχή αυξημένης απορρόφησης ενώ η κοίλη ή αρνητικά φορτισμένη επιφάνεια περιοχή αυξημένου σχηματισμού οστού. Το φαινόμενο αυτό έχει παρατηρηθεί πειραματικά (Brighton *et al.*, 1986). Ρευματικά δυναμικά μπορούν να δημιουργηθούν στα αγγειακά κανάλια και στους εξωαγγειακούς χώρους ρευστού στα οστά, ως αποτέλεσμα της παλμικής ροής αίματος, της μυϊκής δράσης και της φυσιολογικής φόρτισης (Chakkalakal *et al.*, 1981).

2.3.6. Ο ρόλος του ρευστού στην οστική επαναδόμηση

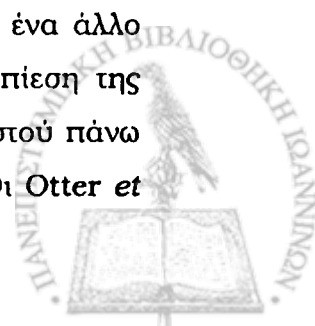
2.3.6.1. Ροή διάμεσου ρευστού στα οστά

Μία σημαντική και ραγδαία ροή ρευστού συμβαίνει μέσω των διάμεσων χώρων του οστού. Πειράματα παρακολούθησης της διαδρομής δεικτών (Seliger, 1967, Dillaman, 1984) έχουν δείξει ότι το διάμεσο ρευστό κινείται από τις επιφάνειες του ενδόστεου προς τις επιφάνειες του περιόστεου στο φλοιώδες οστό.

Η ροή του διάμεσου ρευστού καθορίζεται από διάφορους παράγοντες. Ο πρωταρχικός παράγοντας θεωρείται ότι είναι μία πτώση της υδροστατικής πίεσης κατά πλάτος του φλοιού, η οποία οδηγεί σε μία ακτινική ροή ρευστού προς τα έξω. Οι Otter *et al.* (1990) παρατήρησαν την ύπαρξη ρευματικών δυναμικών στην περιοστική επιφάνεια του οστού ως αποτέλεσμα της ενδομυελικής ροής αίματος μέσω των οστικών αγγείων ή του διάμεσου ρευστού μέσω της θεμέλιας ουσίας.

Μεταβολές στην ροή του διάμεσου ρευστού μπορούν να προκληθούν από την συστολή των μυών κατά την διάρκεια της άθλησης. Οι μύες προσφύονται στο οστό κοντά σε περιοχές όπου οι φλέβες εξέρχονται από το οστό. Η μυϊκή συστολή και χαλάρωση προκαλεί μεταβολές της πίεσης στην μυελική κοιλότητα (Tavassoli και Yoffey, 1983).

Η τάση που επάγεται στο οστό λόγω μηχανικής φόρτισης είναι ένα άλλο φαινόμενο το οποίο μπορεί να επάγει ροή διάμεσου ρευστού. Η συμπίεση της πορώδους δομής του οστού υπερθέτει μία επιπλέον ροή διάμεσου ρευστού πάνω σε εκείνη που προκαλείται από την αγγειακή διατοικωματική πίεση. Οι Otter *et*



al. (1990) βρήκαν ότι απαιτείται τροπή περίπου 75×10^{-6} για να παραχθούν ρευματικά δυναμικά λόγω ροής διάμεσου ρευστού ισοδύναμα προς εκείνα που οφείλονται στην αγγειακή πίεση. Επειδή η τροπή λόγω μηχανικής φόρτισης είναι της τάξης του 10^{-3} (Rubin και Lanyon, 1985), φαίνεται ότι η μηχανική φόρτιση μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά μεγαλύτερη ροή διάμεσου ρευστού. Η ροή διάμεσου ρευστού που επάγεται από την αγγειακή πίεση είναι πολύ σημαντική και για την οστική επαναδόμηση, γιατί είναι συνεχώς παρούσα (Hillsley και Frangos, 1994).

2.3.6.2. Ροή διάμεσου ρευστού και σχηματισμός οστού

Η ροή του διάμεσου ρευστού μέσα στο οστό θεωρείται ότι συμβάλλει στην ανάπτυξη της οστικής αρχιτεκτονικής (Dillaman *et al.*, 1991, Frost, 1988). Υπάρχουν πολλοί παράγοντες που ερμηνεύουν αυτόν τον ρόλο της ροής του ρευστού.

2.3.6.2.1. Αγγείωση

Η σχέση ανάμεσα στην ροή ρευστού και τον σχηματισμό οστού εξηγείται με την αύξηση της αγγείωσης που συμβαίνει ταυτόχρονα με τον οστικό τραυματισμό. Πολλοί ερευνητές (Simmons *et al.*, 1979, Wray *et al.*, 1959) έχουν παρατηρήσει αυξημένη αγγείωση που συνοδεύεται από αντίστοιχη αύξηση των οστεογενών (osteogenic) κυττάρων και της δράσης τους κατά τη διάρκεια της επούλωσης του οστού. Όταν η αύξηση στην αγγείωση εμποδίζεται, η οστική επούλωση μειώνεται δραματικά. Η αυξημένη αγγείωση συνοδεύεται από αυξημένη ροή διάμεσου ρευστού εξαιτίας της διαρρέουσας φύσης των τριχοειδών αγγείων.

Η αγγείωση μπορεί επίσης να μεταβάλλει την οστεοβλαστική λειτουργία μέσω της απελευθέρωσης συγκεκριμένων ουσιών που προέρχονται από το ενδοθήλιο, όπως της ενδοθηλίνης, οι οποίες αυξάνουν τον πολλαπλασιασμό των οστεοβλαστών (Takuwa *et al.*, 1990).

2.3.6.2.2. Φλεβική υπέρταση

Μία άλλη εκδήλωση του συσχετισμού της ροής διάμεσου ρευστού με τον σχηματισμό οστού είναι ο αυξημένος σχηματισμός περιοστικού, φλοιώδους και σπογγώδους οστού που συναντάται σε αυξημένη φλεβική και ενδοοστική πίεση. Οι Kelly *et al.* (1990) έδειξαν ότι αυξημένη φλεβική πίεση οδηγεί σε αύξηση στο εξωκυττάριο ρευστό και στο χώρο που αυτό καταλαμβάνει και αύξηση στον

σχηματισμό περιοστικού οστού σε κνήμες κυνών. Θεώρησαν ότι η αύξηση στο εξωκυττάριο ρευστό και στον χώρο που καταλαμβάνει υποδηλώνει αύξηση στην ροή διάμεσου ρευστού, γεγονός που υποδεικνύει τον ρόλο της ροής διάμεσου ρευστού στην διέγερση του οστικού σχηματισμού.

2.3.6.2.3. Μικροβαρύτητα και κατάκλιση

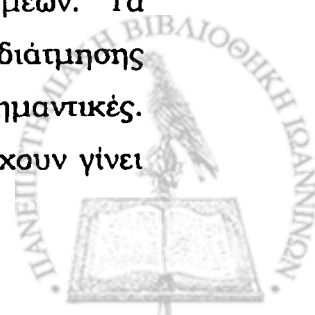
Οι συνθήκες μικροβαρύτητας (ελαττωμένης βαρύτητας) και μακροχρόνιας κατάκλισης οδηγούν στην μείωση της ροής του διάμεσου ρευστού με δύο τρόπους. Πρώτον, λόγω αδράνειας και μειωμένης μηχανικής φόρτισης του σκελετού, δημιουργείται μειωμένη επαγόμενη ροή λόγω φόρτισης. Δεύτερον, δημιουργείται μία κίνηση του εγκεφαλικού ρευστού από τα κάτω άκρα προς το υπόλοιπο σώμα και το κεφάλι (Greenleaf, 1984), η οποία οδηγεί σε μείωση στην ροή διάμεσου ρευστού στα κάτω άκρα και αύξηση στο υπόλοιπο σώμα και το κεφάλι. Η μεταβαλλόμενη αυτή ροή διάμεσου ρευστού πιστεύεται ότι δημιουργεί μεταβολές στην οστική επαναδόμηση (Hillsley και Frangos, 1994).

2.3.6.2.4. Μηχανική φόρτιση

Η μηχανική φόρτιση είναι ένας άλλος μηχανισμός που επηρεάζει την ροή ρευστού στο οστό. Το ότι ο βαθμός οστικής ανάπτυξης είναι ανάλογος προς την μηχανική φόρτιση (νόμος του Wolff) έχει αποδειχθεί πειραματικά (Nillson και Westlin, 1971, Rubin και Lanyon, 1984). Η επαναδόμηση που επάγεται από την μηχανική φόρτιση εξαρτάται από την συχνότητα της φόρτισης (McLeod και Rubin, 1993).

2.3.6.3. Διατμητικές τάσεις ρευστού

Οι διατμητικές τάσεις που δημιουργούνται από την ροή του οστικού ρευστού όταν το οστό υπόκειται σε τάσεις έχουν θεωρηθεί ότι εμπλέκονται στην μεταφορά σήματος που δημιουργείται από την μηχανική φόρτιση στον κυτταρικό πληθυσμό του οστού (Weinbaum *et al.*, 1994, Turner *et al.*, 1994, Cowin *et al.*, 1995). Αν και κάποιες παραμορφώσεις που οφείλονται στην δράση των μυών και σε σύνθετες συνθήκες φόρτισης μπορεί να συντηρούν το οστό σε επίπεδο βάσης, η ροή ρευστού (και επομένως οι διατμητικές τάσεις ρευστού) είναι υπό φυσιολογικές συνθήκες παρούσα στο επίπεδο αυτό και μπορεί να εξηγήσει την διατήρηση του οστού ακόμη και με την απουσία άλλων δυνάμεων. Τα αποτελέσματα των Dillaman *et al.* (1991) υποδηλώνουν ότι οι ρυθμοί διάτμησης και οι τάσεις μέσω των πόρων και των επιφανειών στο οστό είναι σημαντικές. Άμεσες μετρήσεις των διατμητικών τάσεων του ρευστού στα οστά δεν έχουν γίνει



λόγω της αδιαφάνειάς του, της δομής του και του μη ομογενούς πορώδους. Πολλοί ερευνητές όμως έχουν μοντελοποιήσει την ροή ρευστού, που επάγεται από μηχανική παραμόρφωση, μέσα στο οστό (βλ. κεφάλαιο 3).

2.3.6.4. Ροή ρευστού σε κυτταρικές καλλιέργειες

Η ευαισθησία των κυτταρικών πληθυσμών του οστού στις διατμητικές τάσεις ρευστού έχει διαπιστωθεί με πειράματα σε οστικές καλλιέργειες μέσα σε θαλάμους ροής (Reich *et al.*, 1990, Williams *et al.*, 1994, Klein-Nulend *et al.*, 1995).



Θεωρίες και μοντέλα οστικής επαναδόμησης

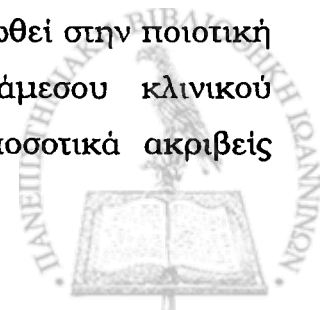
3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το οστό αποκρίνεται με το χρόνο σε μεταβολές στις φορτίσεις που δέχεται. Τόσο η δομή όσο και το σχήμα του προσαρμόζονται στις νέες συνθήκες φόρτισης. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η παρατήρηση του Wolff (1892) ότι οι κύριες διευθύνσεις των δοκίδων στο σπογγώδες τμήμα του εγγύς μηριαίου οστού ευθυγραμμίζονται με τις τροχιές των κύριων τάσεων δηλώνει το οστό είναι ικανό να προσαρμόζει την δομή και αρχιτεκτονική του στα πρότυπα των πραγματικών τάσεων. Με άλλα λόγια, το οστό είναι μία βέλτιστη δομή σε σχέση με τις μηχανικές απαιτήσεις του, μεταφέροντας τα φορτία με το ελάχιστο δυνατό ποσό μάζας.

Ο Roux (1895) περιέγραψε την λειτουργική προσαρμογή (functional adaptation) των οστών και των λοιπών οργάνων γενικότερα, ως «προσαρμογή ενός οργάνου στην λειτουργία του μέσω εξάσκησης αυτής». Το οστό, δηλαδή, είναι ικανό να διατηρεί μία βέλτιστη διάταξη αποκρινόμενο σε ένα εύρος μηχανικών απαιτήσεων, όπως μεταβολές σε φορτίσεις, τραύματα, επεμβάσεις, σταθεροποίηση ενδοπροθέσεων, κλπ.

Τα τελευταία χρόνια, οι Pidaparti και Turner (1997) εξέφρασαν κάποιες αντιρρήσεις στην υπόθεση ότι οι δοκίδες στο εγγύς μηριαίο τέμνονται σε κάθετες γωνίες, βασιζόμενοι σε παρατηρήσεις μη ορθογώνιας ευθυγράμμισης κοντά σε πολλές αρθρώσεις, γεγονός που ερμηνεύθηκε ως αποτέλεσμα μηχανικής φόρτισης σε πολλές διευθύνσεις.

Αν και ο νόμος του Wolff (1892) δηλώνει την προσαρμοστική φύση του οστού, δεν θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί άμεσα για ποσοτικές προβλέψεις της οστικής επαναδόμησης. Διάφοροι ερευνητές έχουν αναπτύξει θεωρίες επαναδόμησης που περιέχουν μαθηματικές περιγραφές για την ποσοτική πρόβλεψη της προσαρμοστικής συμπεριφοράς του οστού. Μέχρι σήμερα, η έρευνα σε αυτήν την περιοχή έχει κατά μεγάλο μέρος επικεντρωθεί στην ποιοτική επαλήθευση μερικών γενικών προτύπων επαναδόμησης άμεσου κλινικού ενδιαφέροντος, αν και υπάρχει δυναμικό για πρόοδο σε ποσοτικά ακριβείς προβλέψεις της επαναδόμησης.



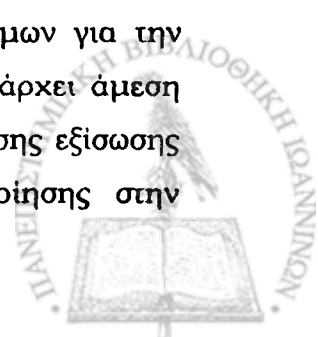
Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μία ανασκόπηση των πιο γνωστών θεωριών και μοντέλων οστικής επαναδόμησης. Αν και τα μοντέλα που έχουν αναφερθεί στην βιβλιογραφία είναι πάρα πολλά, η φιλοσοφία των θεωριών από τις οποίες προκύπτουν στηρίζεται σε κάποιες κοινές βασικές αρχές. Με βάση αυτές τις αρχές, τα μοντέλα που περιγράφονται ταξινομούνται σε κατηγορίες ανάλογα με τις παραμέτρους που χρησιμοποιούνται ως ερέθισμα επαναδόμησης.

3.2. ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ ΟΣΤΙΚΗΣ ΕΠΑΝΑΔΟΜΗΣΗΣ

Οι φυσικές μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στις θεωρίες επαναδόμησης του οστού είναι μέτρα – σε επίπεδο συνεχούς μέσου – της τάσης, της τροπής, των ελαστικών ιδιοτήτων και της πυκνότητας. Οι ιδιότητες σε επίπεδο συνεχούς μέσου οποιουδήποτε υλικού είναι μέσοι όροι των ιδιοτήτων σε πολλές μικροδομικές διαστάσεις, όπως το μέσο μήκος διαδρομής σε ένα αέριο ή η απόσταση των δοκίδων στο σπογγώδες οστό. Δεδομένης αυτής της σχέσης, η σύνδεση μεταξύ μίας θεωρίας επαναδόμησης οστού σε επίπεδο συνεχούς μέσου και των κυτταρικών διεργασιών που επαναδομούν το οστό δεν χαρακτηρίζεται καλά. Προσπάθειες να γίνει μία τέτοια σύνδεση βρίσκονται σε εξέλιξη και βασίζονται στην θεωρία ομογενοποίησης (Hollister *et al.*, 1994) και σε στατιστικές θεωρήσεις (Harrigan *et al.*, 1995). Οι Beaupré *et al.* (1990a) εξηγούν τις συγκεντρώσεις τάσεων μέσα στην μικροδομή του οστού διαιρώντας ένα μέτρο της τάσης με το τετράγωνο της οστικής πυκνότητας για να υπολογίσουν την τάση μέσα στην μικροδομή. Ο συσχετισμός των προβλέψεων της επαναδόμησης του οστού σε επίπεδο συνεχούς μέσου με την μικροδομή του οστού συνεχίζει να αποτελεί πρόβλημα προς λύση για τους ερευνητές του κλάδου.

Οι προβλέψεις για την επαναδόμηση οστού μπορούν να γίνουν είτε μέσω μίας εξίσωσης ρυθμού επαναδόμησης η οποία προβλέπει τοπικές μεταβολές που οφείλονται σε τοπικές μεταβλητές, ή μέσω μίας συνολικής προσέγγισης βελτιστοποίησης, η οποία ελαχιστοποιεί μία συνάρτηση, ενδεικτική της επαναδόμησης, σε σχέση με τις παραμέτρους που περιγράφουν την δομή του οστού. Οι πιο πολλές σύγχρονες προσομοιώσεις της επαναδόμησης οστού χρησιμοποιούν την προσέγγιση της εξίσωσης του ρυθμού επαναδόμησης ενώ κάποιες χρησιμοποιούν την συνολική προσέγγιση.

Ωστόσο, έχει αποδειχθεί ότι για μία περιορισμένη τάξη νόμων για την επαναδόμηση του οστού οι δύο προσεγγίσεις είναι ισοδύναμες. Υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ μίας προσέγγισης βελτιστοποίησης και μίας προσέγγισης εξίσωσης ρυθμού επαναδόμησης. Συγκεκριμένα, η προσέγγιση βελτιστοποίησης στην

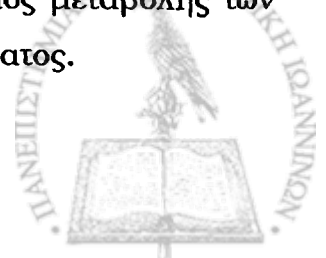


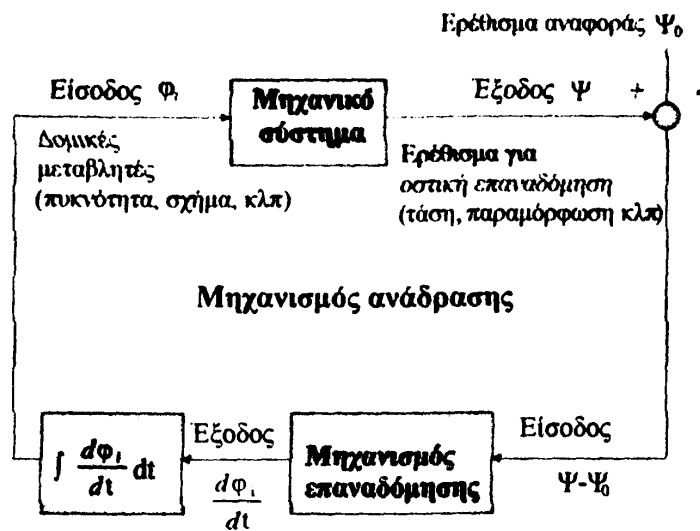
επαναδόμηση του οστού εξαρτάται από την εγκυρότητα της εξίσωσης του ρυθμού επαναδόμησης. Με αυτήν την έννοια, μία προσέγγιση βελτιστοποίησης δεν περιέχει νέα φυσική, αλλά αντιμετωπίζει το πρόβλημα της επαναδόμησης με έναν τρόπο που επιτρέπει μερικές πολύ χρήσιμες απλοποιήσεις. Αυτό διευκολύνει την κατανόηση της σχετικής επίδρασης των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται στις προσομοιώσεις και επιδεικνύει την μοναδικότητα και σταθερότητα της λύσης με μία συνολική έννοια. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά καθιστούν αυτή την προσέγγιση επαναδόμησης ικανή και αρκετά σταθερή για να συγκριθεί με πειραματικά δεδομένα, με την προϋπόθεση ότι οι εξισώσεις του ρυθμού επαναδόμησης που χρησιμοποιούνται αντικατοπτρίζονται στις αριθμητικές προβλέψεις χωρίς ουσιαστικό σφάλμα.

Η προσέγγιση που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία είναι εκείνη της εξίσωσης ρυθμού επαναδόμησης.

3.3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΟΣΤΙΚΗΣ ΕΠΑΝΑΔΟΜΗΣΗΣ

Αρκετές ομάδες μελετητών έχουν προσπαθήσει να ερμηνεύσουν την αντίδραση του οστού σε μηχανικές τάσεις. Οι προσεγγίσεις ταξινομούνται σε κατηγορίες βασιζόμενες στις μηχανικές παραμέτρους που χρησιμοποιούνται ως ερέθισμα επαναδόμησης. Η γενική προσέγγιση που ακολουθείται σε αυτές τις θεωρίες φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Στο διάγραμμα αυτό, οι δυνάμεις σε ένα οστό εισάγονται σε ένα μηχανικό σύστημα, το οποίο είναι ένας αισθητήρας ανάδρασης για τον κανόνα της επαναδόμησης. Το δομικό μοντέλο δέχεται ως εισόδους τις μεταβλητές που περιγράφουν τη δομή (πυκνότητα, σχήμα κλπ) και παράγει ως έξοδο ένα ερέθισμα για την οστική επαναδόμηση. Το ερέθισμα συγκρίνεται με ένα ερέθισμα αναφοράς και το σήμα σφάλματος χρησιμοποιείται ως είσοδος για τον μηχανισμό της επαναδόμησης. Αυτός ο μηχανισμός γενικά παράγει έναν ρυθμό μεταβολής στις δομικές μεταβλητές, ο οποίος ολοκληρώνεται και ενοποιείται για να παράγει τις μεταβλητές που εισάγονται στο δομικό μοντέλο. Το Σχήμα 3.1 μπορεί να περιγράψει τους περισσότερους κανόνες επαναδόμησης που χρησιμοποιούνται. Ο μηχανισμός της επαναδόμησης μπορεί να είναι τόσο απλός όσο ένας αναλογικός έλεγχος ή μπορεί να είναι πολύπλοκος, χρησιμοποιώντας χρονικά ολοκληρώματα, τις υπάρχουσες δομικές μεταβλητές ή άλλα δομικά μέτρα. Πολλοί κανόνες της επαναδόμησης χρησιμοποιούν μία “νεκρή ζώνη” (dead zone) μέσα στο διάγραμμα ελέγχου, στην οποία ο ρυθμός μεταβολής των δομικών μεταβλητών είναι μηδέν για ένα εύρος σήματος σφάλματος.





Σχήμα 3.1: Σχηματικό διάγραμμα της οστικής επαναδόμησης.

Οι σχέσεις που βασίζονται στην τάση και την ενέργεια τροπής και χρησιμοποιούνται σε πολλά από τα μοντέλα ισχύουν αποκλειστικά στην τρέχουσα χρονική στιγμή. Βασίζονται στην υπόθεση ότι ο ρυθμός μεταβολής της οστικής πυκνότητας μεταβάλλεται με την κατάσταση της τάσης μία δεδομένη στιγμή και ότι ο ρυθμός μεταβολής δεν εξαρτάται από το τι έχει συμβεί μέχρι εκείνη τη στιγμή. Βιολογικά δεδομένα δείχνουν ότι οι πληθυσμοί κυττάρων που σχηματίζουν και απορροφούν οστό χρειάζονται κάποιο χρόνο (της τάξης των ημερών) (Frost, 1988) για να αποκριθούν σε μεταβολές τάσης και ότι ο βιολογικός μηχανισμός που εναποθέτει οστό, συνήθως πρέπει να απορροφήσει πρώτα οστό. Έτσι, οι προβλέψεις αυτών των μοντέλων είναι έγκυρες μόνο για αρκετά μακρές χρονικές κλίμακες (της τάξης μηνών) στις οποίες η δυναμική του κυτταρικού μηχανισμού μπορεί να αγνοηθεί.

Οι κανόνες της επαναδόμησης υποθέτουν επίσης ότι ο ρυθμός μεταβολής της τάσης δεν επηρεάζει την απόκριση της επαναδόμησης. Υπάρχουν σαφείς ενδείξεις ότι ο ρυθμός μεταβολής των φορτίων που εφαρμόζονται σε ένα οστό επηρεάζει την απόκριση της επαναδόμησης (Rubin και Lanyon, 1987) και επομένως, η παραπάνω υπόθεση καταρχήν μοιάζει με υπεραπλούστευση. Όμως, οι ρυθμοί της τροπής που κάνουν το οστό να επαναδομείται, αντιστοιχούν σε φυσιολογικά φορτία που εφαρμόζονται με συχνότητα 3 έως 15 Hz ενώ το οστό επαναδομείται σε διάστημα εβδομάδων ή μηνών. Επομένως, οι κανόνες της επαναδόμησης που συχνά χρησιμοποιούνται ερμηνεύουν τα ευαίσθητα στο ρυθμό φαινόμενα, με το να διαχωρίζουν τα χρονικά μοτίβα της φόρτισης σε συνιστώσες διαφορετικών συχνοτήτων και να δίνουν μεγαλύτερο βάρος στις συνιστώσες υψηλής συχνότητας από ότι στις συνιστώσες χαμηλής συχνότητας.



Αυτό εξαρτάται από την δυνατότητα να χρησιμοποιήσει κανείς ένα γραμμικό άθροισμα των τιμών του ερεθίσματος μέσα στον κανόνα της επαναδόμησης, και είναι μία ακόμη υπόθεση που χρειάζεται επαλήθευση.

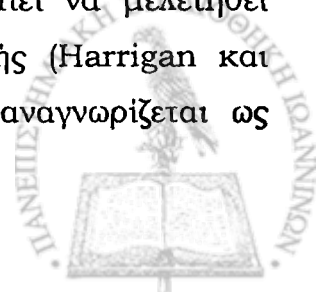
Τα περισσότερα μοντέλα της επαναδόμησης οστού θεωρούν την οστική πυκνότητα και το οστικό σχήμα ως τις μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στα δομικά μοντέλα για το οστό. Όμως, το οστό είναι μία καλά προσανατολισμένη δομή (Harrigan *et al.*, 1981) με ιδιότητες που μπορούν να συσχετιστούν με τον προσανατολισμό της μικροδομής. Ο προσανατολισμός αυτός μπορεί να περιγραφεί με έναν τανυστή δεύτερης τάξης (Harrigan και Mann, 1983). Οι μεταβολές στον οστικό προσανατολισμό με τον χρόνο μπορούν να προσομοιωθούν, δεδομένης μίας σχέσης ανάμεσα στον προσανατολισμό και τις μηχανικές ιδιότητες (Cowin, 1986). Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με μία σχέση για την επαναδόμηση, η οποία προβλέπει μεταβολές του προσανατολισμού και της πυκνότητας με τον χρόνο. Όμως, η σωστή τοποθέτηση μίας τέτοιας θεωρίας επαναδόμησης απαιτεί τον καθορισμό ενός μεγάλου αριθμού εσωτερικών παραμέτρων και τα πειραματικά δεδομένα που υποστηρίζουν μία συγκεκριμένη τιμή για κάθε μία από αυτές τις παραμέτρους είναι λίγα.

Οι θεωρίες της οστικής επαναδόμησης που βασίζονται σε κάποια προσέγγιση βελτιστοποίησης χρησιμοποιούνται σε όλο και περισσότερες εφαρμογές, βασιζόμενες στην διαθεσιμότητα λογισμικού για την διεξαγωγή των υπολογισμών. Τα μοντέλα παράγουν μία δομή που είναι πολύ όμοια με εκείνη που παράγεται από μία εξίσωση ρυθμού επαναδόμησης και συχνά παρουσιάζουν τα ίδια προβλήματα σταθερότητας.

Στην παρούσα εργασία, η θεωρία επαναδόμησης που προτείνεται βασίζεται στην προσέγγιση της εξίσωσης ρυθμού επαναδόμησης. Ως ερέθισμα επαναδόμησης χρησιμοποιείται η τροπή και η σχέση επαναδόμησης δρα στην τρέχουσα χρονική στιγμή.

3.4. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑΣ

Για να αναπτυχθεί μία μηχανική σχέση που προβλέπει την επαναδόμηση του οστού, η συμπεριφορά του μαθηματικού μοντέλου πρέπει να μελετηθεί προσεκτικά. Στην βιβλιογραφία ορθοπαιδικής εμβιομηχανικής (Harrigan και Hamilton, 1992a, Weinans *et al.*, 1992a) η σταθερότητα αναγνωρίζεται ως σημαντικό πρόβλημα.



Αν ένα μαθηματικό μοντέλο δεν συμπεριφέρεται καλά ή είναι πιθανό να έχει προβλήματα μαθηματικής σταθερότητας, τότε η σύγκρισή του με πειραματικά δεδομένα περιπλέκεται, γιατί τα αποτελέσματα του μοντέλου μπορεί να οφείλονται σε αριθμητικό σφάλμα, παρά στις εξισώσεις του μοντέλου. Το πρόβλημα αυτό κάνει πολλές από τις θεωρίες επαναδόμησης πολύ δύσκολο να εφαρμοστούν σε πειραματικά ή κλινικά δεδομένα.

Προβλήματα σταθερότητας παρουσιάζουν όχι μόνον οι θεωρίες της οστικής επαναδόμησης που χρησιμοποιούν την προσέγγιση βελτιστοποίησης αλλά και εκείνες που βασίζονται σε εξίσωση ρυθμού επαναδόμησης. Οι λύσεις για σημεία σταθερής κατάστασης των εξισώσεων του ρυθμού επαναδόμησης είναι τα σημεία όπου μία ενδεικτική συνάρτηση έχει μηδενικό ρυθμό μεταβολής. Αυτά τα σημεία δεν είναι πάντα ελάχιστα ή βέλτιστα σημεία και σε μερικές περιπτώσεις δεν είναι ούτε ελάχιστα ούτε βέλτιστα.

3.5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΘΕΩΡΙΩΝ-ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΟΣΤΙΚΗΣ ΕΠΑΝΑΔΟΜΗΣΗΣ

Ακολουθεί μία σύντομη ανασκόπηση των βασικών θεωριών και αντίστοιχων μοντέλων οστικής επαναδόμησης που αναφέρονται στην βιβλιογραφία, με βάση τις παραμέτρους (μηχανικές, ηλεκτρικές, βιολογικές) που χρησιμοποιήθηκαν ως ερεθίσματα για τον μηχανισμό της επαναδόμησης. Θα επιχειρηθεί να γίνει διάκριση μεταξύ των μοντέλων που αναφέρονται στο φλοιώδες και εκείνων που αναφέρονται στο σπογγώδες οστό, αν και σε ορισμένες περιπτώσεις δεν γίνεται σαφής διαχωρισμός από τους συγγραφείς.

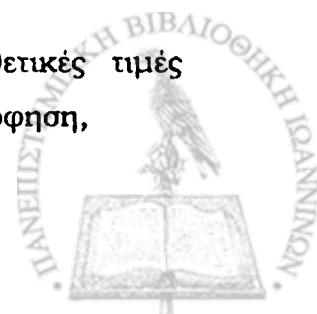
3.5.1. Μηχανικά μοντέλα

3.5.1.1. Μοντέλα επαναδόμησης που βασίζονται στην τάση

Ο Kummer (1972) ανέπτυξε ένα μαθηματικό μοντέλο σε μία προσπάθεια να ποσοτικοποιήσει μερικές από τις κυρίως ποιοτικές παρατηρήσεις για την οστική επαναδόμηση που είχαν γίνει από τον Pauwels (1948a, 1948b, 1950, 1954, 1965). Το αποτέλεσμα ήταν μία κυβική σχέση ανάμεσα στην επαναδόμηση και την τάση, η οποία εκφράζεται από την σχέση

$$U = a[(T_s - T_u)^2(T_i - T_s) - (T_i - T_s)^3] \quad (3.1)$$

όπου U είναι ένα μέτρο της οστικής επαναδόμησης - οι θετικές τιμές υποδηλώνουν εναπόθεση οστού και οι αρνητικές τιμές απορρόφηση,



a είναι ένας παράγοντας αναλογίας, που σχετίζεται με τον ρυθμό επαναδόμησης,

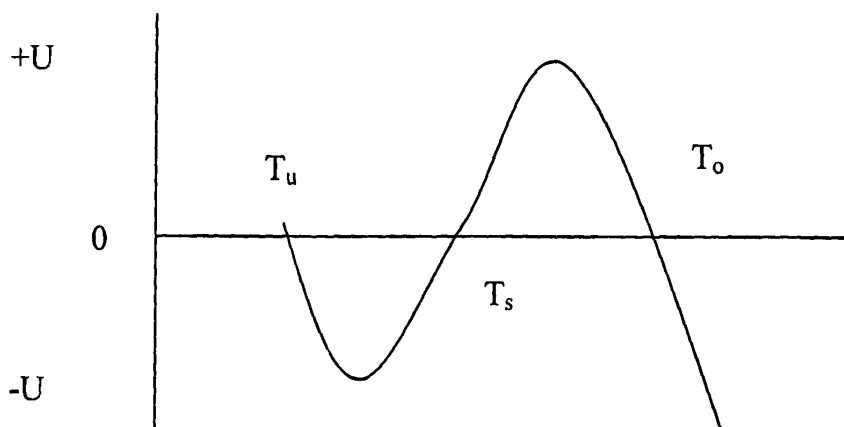
T_i είναι η πραγματική τάση,

T_s είναι η βέλτιστη τάση,

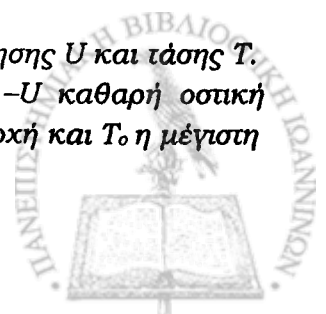
T_u είναι το κατώτερο όριο ανοχής,

T_o είναι το ανώτερο όριο ανοχής.

Η γραφική αναπαράσταση της σχέσης (3.1) φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Η σχέση αυτή έχει σκοπό να ποσοτικοποιήσει τις παρατηρήσεις του Pauwels σχετικά με την προσαρμογή των οσχημάτων της εγκάρσιας διατομής των μακρών οστών καθώς και τον προσανατολισμό της δομής που συνθέτει το σπογγώδες οστό. Ο Kummer (1972) τονίζει ότι η σχέση αυτή θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή ενός υπολογιστικού μοντέλου που προβλέπει την επαναδόμηση. Όμως, κατά τον Cowin (1989), η εξέταση του Σχήματος 3.2 δείχνει ότι, αν και η νέκρωση λόγω πίεσης λαμβάνεται υπόψη από την κυβική σχέση ανάμεσα στην επαναδόμηση και την τάση, η ατροφία λόγω ακρησίας δεν μοντελοποιείται. Ένας επιπλέον περιορισμός είναι ότι πρόκειται για ένα μονοδιάστατο μοντέλο που βασίζεται στο μέτρο της τάσης T χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η τανυστική της φύση, και είναι ασαφές το πως αυτές οι προβλέψεις του μοντέλου θα μπορούσαν να επεκταθούν σε γενικές καταστάσεις πολυαξονικών τάσεων.



Σχήμα 3.2: Η κυβική σχέση του Kummer μεταξύ οστικής επαναδόμησης U και τάσης T . Το $+U$ υποδηλώνει καθαρή οστική εναπόθεση και το $-U$ καθαρή οστική απορρόφηση. T_s είναι η βέλτιστη τάση, T_u η ελάχιστη ανοχή και T_o η μέγιστη ανοχή.



3.5.1.2. Μοντέλα επαναδόμησης που βασίζονται στην τροπή

Οι Cowin και Hegedus (1976) ανέπτυξαν μία θερμομηχανική θεωρία συνεχούς μέσου, γνωστή ως θεωρία της προσαρμοστικής ελαστικότητας (adaptive elasticity theory) για να ερμηνεύσουν την συμπεριφορά της επαναδόμησης του φλοιώδους οστού. Η θεωρία αυτή επιδιώκει να περιγράψει την προσαρμοστική φύση του οστού από μία διάταξη φόρτισης σε μία άλλη. Γίνεται η υπόθεση ότι ο φλοιώδης οστίτης ιστός έχει μία χαρακτηριστική της θέσης κατάσταση τροπής φυσικής (ή ομοιοστατικής) ισορροπίας. Μία μεταβολή στην φόρτιση ή μία ανώμαλη κατάσταση τροπής θα διεγείρει τον οστίτη ιστό να προσαρμόσει την μάζα του κατά τέτοιο τρόπο ώστε να επαναποκτηθεί μία ομοιοστατική κατάσταση τροπής, όσο το δυνατόν πιο κοντινή προς την αρχική. Ο ρυθμός της προσαρμογής σχετίζεται με την διαφορά ανάμεσα στον ομοιοστατικό και τον πραγματικό ρυθμό τροπής.

Στο θεωρητικό μοντέλο των Cowin και Hegedus (1976) το οστό περιγράφεται ως ένα πορώδες μέσο με δύο συστατικά: ένα πορώδες ελαστικό στερεό, το οποίο αντιπροσωπεύει την δομή της θεμέλιας ουσίας του οστού και περιλαμβάνει τα οστικά κύτταρα και ένα έκχυμα, το οποίο αντιπροσωπεύει το εξωκυττάριο ρευστό και το πλάσμα του αίματος τα οποία ρέουν μέσω της θεμέλιας ουσίας. Γίνεται η υπόθεση ότι οι προσαρμοζόμενες στις φορτίσεις ιδιότητες του ζωντανού οστού μπορούν να μοντελοποιηθούν από ένα χημικά αντιδρών πορώδες μέσο στο οποίο ο ρυθμός της αντίδρασης ελέγχεται από την τροπή. Η θεωρία και το μοντέλο των Cowin και Hegedus (1976) περιγράφονται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 4.

Μία συνοδευτική εργασία των Hegedus και Cowin (1976) θέτει περιορισμούς στο μοντέλο συνεχούς μέσου και αναπτύσσει εξισώσεις για την προσαρμοστική ελαστικότητα μικρών τροπών. Όταν οι όροι δεύτερης τάξης στις βαθμίδες μετατόπισης αγνοηθούν, ένας τροποποιημένος νόμος του Hooke παίρνει την μορφή

$$\mathbf{T} = (\delta_0 + e)\mathbf{C}[\mathbf{E}] \quad (3.2)$$

όπου \mathbf{T} είναι ο τανυστής τάσεων,

δ_0 είναι το ποσοστό όγκου του υλικού στην κατάσταση αναφοράς,

e είναι η εσωτερική επαναδόμηση που μετράται ως η μεταβολή στο ποσοστό όγκου του υπάρχοντος υλικού,

\mathbf{C} είναι ο πίνακας των ελαστικών σταθερών και

\mathbf{E} είναι ο τανυστής τροπών.



Η εσωτερική (δομική) και η επιφανειακή (εξωτερική) επαναδόμηση μοντελοποιούνται ξεχωριστά χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις που ακολουθούν.

Στην εσωτερική επαναδόμηση, το μέτρο ελαστικότητας (που σχετίζεται με την πυκνότητα) προσαρμόζεται ως

$$(dE/dt) = A_{ij}(e_{ij} - e_{ij}^0), \quad (3.3)$$

όπου E είναι το τοπικό μέτρο ελαστικότητας,

e_{ij} είναι ο τανυστής της πραγματικής τροπής,

e_{ij}^0 είναι ο τανυστής της τροπής στην κατάσταση αναφοράς και

A_{ij} είναι ο πίνακας των συντελεστών επαναδόμησης.

Μία μορφή για την εξίσωση του ρυθμού εσωτερικής επαναδόμησης λαμβάνεται αγνοώντας όρους δεύτερης τάξης στις βαθμίδες μετατόπισης και γράφεται ως

$$\dot{e} = a(e) + \text{tr}[A(e)E], \quad (3.4)$$

όπου \dot{e} είναι ο ρυθμός επαναδόμησης,

$a(e)$ είναι καταστατικές σταθερές και

A είναι οι συντελεστές του ρυθμού επαναδόμησης.

Οι Cowin και Hegedus (1976) χρησιμοποίησαν μία προσέγγιση της εξίσωσης (3.4) με τετραγωνικούς όρους στο μέτρο της εσωτερικής επαναδόμησης e και γραμμικούς όρους στους συντελεστές ρυθμού επαναδόμησης A , όπως περιγράφεται από την σχέση

$$\dot{e} = c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + \text{tr}A E + \text{etr}A E \quad (3.5)$$

Στην εξωτερική επαναδόμηση, το οστό θεωρήθηκε ότι προσθέτει ή αφαιρεί υλικό στις επιφάνειες του περιόστεου και του ενδόστεου, διεγερμένο από την κατάσταση τροπής σε αυτές τις επιφάνειες, σύμφωνα με την σχέση

$$(dX/dt) = B_{ij}(e_{ij} - e_{ij}^0), \quad (3.6)$$

όπου X είναι μία χαρακτηριστική επιφανειακή συνιστώσα μετατόπισης κάθετη στην επιφάνεια και

B_{ij} είναι ένας πίνακας συντελεστών για την εξωτερική επαναδόμηση.



Οι Hegedus και Cowin (1976) σημειώνουν ότι ο περιορισμός της πιο γενικής θεωρίας της προσαρμοστικής ελαστικότητας σε εκείνη των μικρών τροπών οδηγεί σε δύο σημαντικές προβλέψεις. Η πρώτη είναι ότι η καθαρή στρέψη ενός ορθότροπου ελαστικού υλικού γύρω από έναν από τους άξονες συμμετρίας του δεν θα επηρεάσει τον ρυθμό επαναδόμησης. Η πρόβλεψη αυτή προκύπτει από την υπόθεση ότι ο τανυστής \mathbf{A} δεν έχει μη διαγώνιες συνιστώσες για ορθότροπα, εγκάρσια ισότροπα ή ισότροπα υλικά. Πειραματικά αποτελέσματα σε κνήμες κουνελιών που φορτίζονται σε στρέψη (Moreland, 1980), φαίνεται να υποστηρίζουν τις θεωρητικές προβλέψεις της θεωρίας προσαρμοστικής ελαστικότητας για μικρές τροπές. Η δεύτερη συνέπεια της υπόθεσης μικρών τροπών σε ένα γραμμικό ελαστικό μοντέλο προκύπτει από την αγνόηση όρων δεύτερης τάξης στην τροπή. Συγκεκριμένα, προβλέπει ότι η επαναδόμηση που επάγεται από περιοδικά φορτία επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα με ένα στατικό φορτίο του οποίου το μέτρο είναι ίσο προς εκείνο του μέσου όρου του περιοδικού φορτίου. Αυτή η πρόβλεψη βρίσκεται σε αντίφαση με πειραματικά αποτελέσματα (Chamay και Tschantz, 1972, Churches *et al.*, 1979, Lanyon, 1984, Lanyon και Rubin, 1984, Rubin και Lanyon, 1984, Rubin, 1984), τα οποία δείχνουν ότι η περιοδική φόρτιση είναι ένα πολύ πιο αποτελεσματικό ερέθισμα για την ενεργοποίηση της επαναδόμησης σε σχέση με την στατική φόρτιση.

3.5.1.2.1. Εσωτερική επαναδόμηση στην προσαρμοστική ελαστικότητα

Οι Firoozbakhsh και Cowin (1980) χρησιμοποίησαν την εξίσωση (3.5) για να προβλέψουν τη λύση στο θεωρητικά τοποθετημένο πρόβλημα της διάδοσης μίας υποθετικής αρχικής ανομοιογένειας της οστικής πυκνότητας κατά μήκος της διάφυσης ενός μακρού οστού. Η αρχική ανομοιογένεια έχει την μορφή μίας ημιτονοειδούς κατανομής. Το πρόβλημα του παραδείγματος που χρησιμοποιούν δείχνει ότι η πυκνότητα μπορεί να επιβληθεί να είναι ομοιόμορφη σε επαρκή χρόνο για την διεργασία επαναδόμησης, με την επιλογή κατάλληλων συντελεστών του ρυθμού εσωτερικής επαναδόμησης.

Σε επόμενη εργασία τους, οι Firoozbakhsh και Cowin (1981), ισχυρίζονται ότι μία υψηλότερης τάξης εξίσωση του ρυθμού επαναδόμησης που διατηρεί τετραγωνικούς όρους στην τροπή καταλήγει σε μία εξίσωση η οποία αντιστοιχεί στην κυβική εξίσωση του Kummer (1972) όταν εκφράζεται σε όρους τάσης και επαναδόμησης όπως η εξίσωση (3.4). Αυτή η λιγότερο περιοριστική υπόθεση οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση για την εσωτερική επαναδόμηση

$$\dot{e} = a(e) + \text{tr} \mathbf{A} \mathbf{E} + \text{tr} (\mathbf{E} \mathbf{B} [\mathbf{E}]), \quad (3.7)$$



όπου \mathbf{B} είναι ο πίνακας των υλικών ιδιοτήτων.

Στην περίπτωση αυτή, οι δύο προβλέψεις επαναδόμησης των Hegedus και Cowin (1976) δεν είναι πλέον εφαρμόσιμες. Δηλαδή, η εξίσωση (3.7) θα μπορούσε να δώσει καθαρή επαναδόμηση όταν εφαρμόζεται καθαρή στρέψη στο προσαρμοστικό ελαστικό υλικό, κάτι που εξαρτάται από το μέτρο των σταθερών \mathbf{B} . Επιπλέον, η εξίσωση (3.7) προβλέπει αύξηση της επαναδόμησης που οφείλεται σε περιοδικά φορτία σε σχέση με τους ισοδύναμους χρονικούς μέσους όρους των στατικών φορτίων, κάτι που πάλι εξαρτάται από το μέτρο των σταθερών \mathbf{B} .

Μία κυβική προσέγγιση της εξίσωσης (3.7) δίνεται από την σχέση

$$\dot{e} = c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + c_3 e^3 + \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{E}) + e^2 \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{E}) + \text{tr}(\mathbf{E}\mathbf{B}[\mathbf{E}]) + e \text{tr}(\mathbf{E}\mathbf{B}[\mathbf{E}]). \quad (3.8)$$

Η επίδραση της υλικής απόσβεσης του οστίτη ιστού στην επαναδόμηση ενός αξονικά συμμετρικού δείγματος μακρού οστού που επάγεται από την εξαναγκασμένη εισαγωγή ενός αξονικά προσανατολισμένου ενδομυελικού ήλου έχει μελετηθεί από τους Misra και Samanta (1987). Οι Misra *et al.* (1989) μελέτησαν την επίδραση της μη ισοτροπίας του οστίτη ιστού στην δυναμική της εσωτερικής επαναδόμησης.

3.5.1.2.2. Επιφανειακή επαναδόμηση στην προσαρμοστική ελαστικότητα

Οι Cowin και Van Buskirk (1979) βασιζόμενοι στις αρχές της προσαρμοστικής ελαστικότητας, διατύπωσαν μία θεωρία επιφανειακής επαναδόμησης την οποία εφάρμοσαν στην μελέτη της επαναδόμησης που επάγεται στην επιφάνεια ενός μακρού οστού εξαιτίας της εισαγωγής ενός μυελικού ήλου.

Η εξίσωση που χρησιμοποιήθηκε για την επιφανειακή επαναδόμηση είναι

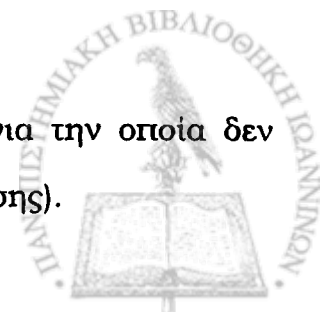
$$U = C_{33} (E_{33} - E_{33}^0), \quad (3.9)$$

όπου U είναι η ταχύτητα της επιφάνειας (σε ένα σημείο Q) που επαναδομείται σε μία διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια αυτή,

C_{33} είναι οι συντελεστές του ρυθμού επιφανειακής επαναδόμησης οι οποίοι εξαρτώνται από το σημείο Q στην επιφάνεια,

E_{33} είναι η αξονική τροπή στο σημείο Q και

E_{33}^0 είναι η αξονική τροπή αναφοράς στο σημείο Q για την οποία δεν συμβαίνει καθαρή επαναδόμηση (ισορροπία επαναδόμησης).



Οι Cowin και Firoozbakhsh (1981) χρησιμοποίησαν την παραπάνω εξίσωση για να προβλέψουν θεωρητικά την επιφανειακή επαναδόμηση που επάγεται από την εφαρμογή ενός ομοιόμορφου φορτίου συμπίεσης σε έναν κοίλο κυκλικό κύλινδρο, που προσομοιώνει την διάφυση ενός μακρού οστού. Δείχθηκε (i) ότι η επιλογή του μέτρου και του προσήμου των σταθερών του ρυθμού επαναδόμησης ρυθμίζει την προβλεπόμενη επιφανειακή επαναδόμηση και (ii) ότι όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί συμμετρικής εναπόθεσης ή απορρόφησης στις επιφάνειες του ενδόστεου και του περιόστεου μπορούν να περιγραφούν από την θεωρία. Αυτό έχει επαληθευτεί από τις πειραματικές παρατηρήσεις των Woo *et al.* (1981), Uthoft *et al.* (1978) και Jaworski *et al.* (1980) οι οποίες δείχνουν ότι υπάρχει ποικιλία δυνατών κινήσεων για τις επιφάνειες του ενδόστεου και του περιόστεου.

Οι Hart *et al.* (1986) καθόρισαν το επαναδομημένο σχήμα για το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Βρήκαν ότι οι επιφάνειες τόσο του ενδόστεου όσο και του περιόστεου κινούνται ως αποτέλεσμα της επαναδόμησης.

Η θεωρία της επιφανειακής επαναδόμησης χρησιμοποιήθηκε (Hart *et al.*, 1984a) σε συνδυασμό με ένα πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων για να ληφθούν τιμές για τις σταθερές του ρυθμού επιφανειακής επαναδόμησης από *in vivo* πειράματα. Μια υπολογιστική μέθοδος η οποία βασίζεται στην θεωρία δοκών (beam theory) χρησιμοποιήθηκε επίσης σε συνδυασμό με την θεωρία επιφανειακής επαναδόμησης για να ληφθούν σταθερές από πολλά πειράματα που περιγράφονται στην βιβλιογραφία (Cowin *et al.*, 1985).

Ο Cowin (1987) επέκτεινε την θεωρία της επιφανειακής επαναδόμησης για να συμπεριλάβει την επίδραση τόσο των διατμητικών όσο και των κάθετων τροπών. Έδειξε ότι η ταχύτητα των επιφανειών που υφίστανται επαναδόμηση εξαρτάται μόνον από το τετράγωνο των διατμητικών τροπών, ενώ μπορεί να έχει τόσο γραμμική όσο και τετραγωνική εξάρτηση από τις κάθετες τροπές. Η θεωρία εφαρμόστηκε στην πρόβλεψη της επιφανειακής επαναδόμησης στην διάφυση ενός μακρού οστού υπό τον συνδυασμό αξονικής και στρεπτικής φόρτισης. Το οστό μοντελοποιήθηκε ως ένας κοίλος κύλινδρος κυκλικής διατομής με λεπτά τοιχώματα. Δείχθηκε ότι η επίδραση της αύξησης της στρεπτικής ροπής είναι ισοδύναμη με εκείνη της μείωσης της αξονικής συμπίεσης, δηλαδή οδηγεί σε αύξηση της μέσης ακτίνας της εγκάρσιας διατομής και μείωση του πάχους του τοιχώματος.



Οι Misra *et al.* (1992) μελέτησαν τις επιδράσεις της ανομοιομορφίας στην εγκάρσια διατομή και της ανισοτροπίας του οστίτη ιστού στην επαναδόμηση των επιφανειών της διάφησης ενός δείγματος μακρού σωληνοειδούς οστού.

3.5.1.2.3. Επαναδόμηση σπογγώδους οστού στην προσαρμοστική ελαστικότητα

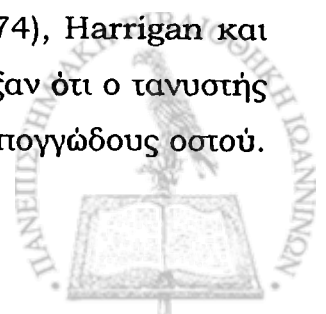
Μία επέκταση των ιδεών της προσαρμοστικής ελαστικότητας οδήγησε στην εφαρμογή της θεωρίας στην επαναδόμηση του σπογγώδους οστού από τον Cowin (1985). Η επαναδόμηση του σπογγώδους οστού χαρακτηρίζεται από μεταβολές στο μέγεθος των ξεχωριστών δοκίδων και στον προσανατολισμό τους.

Για να μπορέσει να μοντελοποιήσει το σπογγώδες οστό ως συνεχές μέσο παρά την διακριτή σπογγώδη δομή, ο Cowin (1985) έδωσε έναν μαθηματικό ορισμό του νόμου του Wolff (1892) για το σπογγώδες οστό συναρτήσει ενός μέτρου ευθυγράμμισης των δοκίδων που ονομάζεται τανυστής υφής.

Ο τανυστής υφής είναι ένας συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης ο οποίος περιγράφει τις μικροδομικές διατάξεις των δοκίδων. Ο τανυστής υφής είναι το αντίστροφο της τετραγωνικής ρίζας του τανυστή \mathbf{M} , όπως έχει προταθεί από τους Harrigan και Mann (1983). Ο τανυστής \mathbf{M} εκφράζει την μικροδομική ανισοτροπία ενός υλικού και είναι συνάρτηση του μέσου μήκους τομής, MMT (mean intercept length, MIL). Το MMT καθορίζεται από μετρήσεις στις επιφάνειες δειγμάτων σπογγώδους οστού και είναι η μέση απόσταση ανάμεσα σε δύο ενδοεπιφάνειες οστού/μυελού μετρούμενη κατά μήκος μίας γραμμής προσανατολισμένης κατά γωνία θ σε σχέση με την οριζόντια διεύθυνση. Υπολογίζεται ως το συνολικό μήκος γραμμής διαιρούμενο με τον αριθμό των τομών. Η γραφική παράσταση του MMT ως προς την θ , σχηματίζει μία έλλειψη η οποία υποδηλώνει ότι το οστό είναι ορθότροπο υλικό.

Οι συνιστώσες του τανυστή ελαστικότητας C_{ijkl} ενός ορθότροπου υλικού υπολογίστηκαν στην εργασία του Cowin (1985) ως συνάρτηση του ποσοστού όγκου και του τανυστή υφής. Κατ'αυτόν τον τρόπο ο καταστατικός πίνακας είναι συνάρτηση τόσο του ποσοστού όγκου όσο και του προσανατολισμού των δοκίδων. Το μοντέλο που προκύπτει είναι επομένως ανισότροπο. Τα μειονεκτήματα της μεθόδου είναι ότι ο τανυστής υφής είναι έγκυρος μόνον για ένα ποσοστό όγκου και οι υπολογισμοί που οδηγούν στον καταστατικό πίνακα είναι μακροσκελείς.

Τα αποτελέσματα από τις εργασίες των Whitehouse (1974), Harrigan και Mann (1983), Cassidy και Davy (1985) και Turner (1987) έδειξαν ότι ο τανυστής υφής είναι ένα καλό μέτρο του δομικού προσανατολισμού του σπογγώδους οστού.



Ο Cowin (1986) έδειξε ότι η ισορροπία επαναδόμησης σε ένα σημείο είναι η κατάσταση όπου οι κύριοι άξονες των τανυστών της τάσης, της τροπής και της υφής συμπίπτουν. Αυτό είναι ισοδύναμο με την απαίτηση ο πολλαπλασιασμός των τανυστών να ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα

$$\mathbf{T}^* \mathbf{H}^* = \mathbf{H}^* \mathbf{T}^* , \mathbf{E}^* \mathbf{H}^* = \mathbf{H}^* \mathbf{E}^* , \quad (3.10)$$

όπου \mathbf{T}^* είναι ο τανυστής τάσης στην ισορροπία επαναδόμησης,

\mathbf{H}^* είναι ο τανυστής υφής στην ισορροπία επαναδόμησης και

\mathbf{E}^* είναι ο τανυστής τροπής στην ισορροπία επαναδόμησης.

Εξαιτίας αναφορών (Ku *et al.*, 1987) για τις ελαστικές ιδιότητες μίας μόνον δοκίδας, οι οποίες κυμαίνονται από 0.5 έως 23 GPa, τα αποτελέσματα του Cowin (1985) τροποποιήθηκαν ώστε να μοντελοποιηθεί αυτή η ευρεία κλίμακα τιμών, εισάγοντας μία εξάρτηση από τον βαθμό μεταλλοποίησης των δοκίδων (Cowin, 1989).

Μία απεικόνιση της κατά βήματα προσαρμογής του σπογγώδους οστού από μία κατάσταση διαταραχής τάσης έως την αποκατάσταση της ισορροπίας επαναδόμησης δίνεται από τον Cowin (1990).

3.5.1.3. Μοντέλα επαναδόμησης που βασίζονται στην ενεργειακή πυκνότητα τροπής

Οι Huiskes *et al.* (1987) χρησιμοποίησαν την ενεργειακή πυκνότητα τροπής (strain energy density) ως ερέθισμα για την προσαρμοστική εξωτερική και εσωτερική επαναδόμηση του οστού σε διαφορετικές λειτουργικές απαιτήσεις. Η ομοιοστατική κατανομή της ενεργειακής πυκνότητας τροπής θεωρήθηκε ως αντικειμενικός στόχος της επαναδόμησης. Ως ενεργειακή πυκνότητα τροπής ορίζεται η ενέργεια τροπής ανά μονάδα όγκου σε οποιαδήποτε περιοχή μέσα σε ένα πεδίο τάσεων και γράφεται ως

$$U = \frac{1}{2} e_{ij} s_{ij} , \quad (3.11)$$

όπου s_{ij} είναι ο τανυστής τοπικής τάσης και

e_{ij} είναι ο τανυστής τροπής.

Η διαφορά ανάμεσα στην πραγματική ενεργειακή πυκνότητα τροπής U και μία χαρακτηριστική της θέσης ενεργειακή πυκνότητα τροπής ομοιοστατικής ισορροπίας U_n θεωρείται ως ερέθισμα για την προσαρμοστική δράση.



Για την εσωτερική επαναδόμηση, η μαθηματική διατύπωση της θεωρίας μπορεί να γραφεί γενικά ως

$$dE/dt = C_e(U - U_n), \quad (3.12)$$

και για την εξωτερική επαναδόμηση ως

$$dX/dt = C_x(U - U_n), \quad (3.13)$$

όπου dE/dt είναι ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας,

dX/dt είναι ο ρυθμός επιφανειακής ανάπτυξης και

C_e και C_x είναι οι συντελεστές του ρυθμού επαναδόμησης.

Οι σταθερές C_e και C_x καθορίζουν τον ρυθμό επαναδόμησης. Επειδή οι τιμές αυτών των σταθερών δεν είναι πλήρως προσδιορισμένες, τους αποδίδονται αυθαίρετες τιμές ώστε τα τελικά αποτελέσματα της διεργασίας της επαναδόμησης να είναι ρεαλιστικά.

Στην περίπτωση της εσωτερικής επαναδόμησης, η εξίσωση του ρυθμού εσωτερικής επαναδόμησης που προσαρμόζει τμηματικά ανά σημείο τα μέτρα ελαστικότητας, περιλαμβάνει μία ζώνη αργής απόκρισης (lazy zone). Η ζώνη αργής απόκρισης εισάγεται από τον Carter (1984) για να περιγράψει μία περιοχή γύρω από το σημείο ομοιοστατικής ισορροπίας, όπου μικρές μεταβολές στα ερεθίσματα δεν προκαλούν αντικατάσταση οστού. Το οστό είναι κάπως αργό στην προσαρμογή του και προσαρμόζει την δομή του μόνον όταν το ερέθισμα ξεπεράσει μία συγκεκριμένη τιμή. Η τμηματικά γραμμική εξίσωση ρυθμού έχει την μορφή

$$\frac{dE}{dt} = \begin{cases} C(U - (1-s)U_n) & \text{αν } U < (1-s)U_n \\ 0 & \text{αν } (1-s)U_n \leq U \leq (1+s)U_n \\ C(U - (1+s)U_n) & \text{αν } (1+s)U_n < U \end{cases}, \quad (3.14)$$

όπου U είναι η ενεργειακή πυκνότητα τροπής σε επίπεδο συνεχούς μέσου,

U_n είναι η ομοιοστατική ενεργειακή πυκνότητα τροπής,

s είναι το μισό πλάτος της ζώνης αργής απόκρισης και

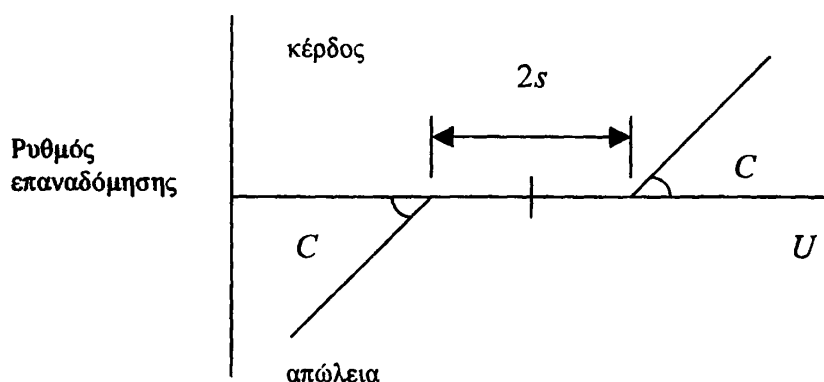
C είναι ο ρυθμός επαναδόμησης.

Η ομοιοστατική ενεργειακή πυκνότητα τροπής U_n ορίζεται ως ο μέσος όρος της ενεργειακής πυκνότητας τροπής πάνω σε όλα τα πεπερασμένα στοιχεία, στην αρχική κατάσταση, με ομοιόμορφη κατανομή μέτρων ελαστικότητας. Η σταθερά C είναι άγνωστη και της αποδίδεται μία αυθαίρετη τιμή. Το μισό πλάτος

της ζώνης αργής απόκρισης τίθεται ίσο με το μηδέν. Σε κάθε χρονικό βήμα τίθεται ένας περιορισμός στην μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας ΔE . Η θεωρία αυτή ενσωματώνει συγκεκριμένα επίπεδα ορίων πριν το οστό ξεκινήσει την επαναδόμηση, λόγω μεταβολών στα επίπεδα της ενεργειακής πυκνότητας τροπής (U) σε σχέση με τα επίπεδα ομοιοστατικής ενέργειας τροπής (U_n). Το Σχήμα 3.3 δείχνει την πορεία της επαναδόμησης στην παρουσία της ζώνης.

Οι Huiskes *et al.* (1987) εφάρμοσαν την προσομοίωση της εσωτερικής επαναδόμησης στο πρόβλημα της πρόβλεψης της κατανομής πυκνοτήτων στο εγγύς μηριαίο οστό (εσωτερική ή δομική επαναδόμηση). Η θεωρία επαναδόμησης χρησιμοποιήθηκε σε συνδυασμό με ένα δισδιάστατο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων. Η φαινόμενη πυκνότητα ρ (kg/m^3) του οστού συσχετίστηκε με το μέτρο του Young E (MPa) μέσω της σχέσης $E = 3.79 \times 10^6 \rho^3$. Το αρχικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων του εγγύς μηριαίου παρουσίαζε ομοιόμορφη κατανομή πυκνότητας και επομένως ομοιόμορφο μέτρο ελαστικότητας. Το μέτρο ελαστικότητας υποβλήθηκε σε ένα άνω όριο $E = 2.5 \times 10^4$ MPa. Η προβλεπόμενη κατανομή πυκνότητας στο εγγύς μηριαίο είναι σε συμφωνία με την *in vivo* κατανομή πυκνότητας στο μηριαίο και με τα αποτελέσματα των Carter *et al.* (1989).

Η παραπάνω διαδικασία επαναδόμησης εφαρμόστηκε επίσης για να διερευνηθεί την σχέση ανάμεσα στο φαινόμενο ασπίδας τάσεων (stress shielding) και την εξωτερική επαναδόμηση γύρω από μία ενδομυελική πρόθεση.



Σχήμα 3.3: Το σχήμα επαναδόμησης που προτάθηκε από τους Huiskes *et al.* (1987). Η δομή οδηγείται σε μία σχεδόν σταθερή κατανομή ενεργειακής πυκνότητας τροπής, ρυθμίζοντας τα μέτρα ελαστικότητας.



Ένα διδιάστατο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιήθηκε για να προσομοιώσει την ενδομυελική σταθεροποίηση (fixation). Οι διεργασίες εσωτερικής και εξωτερικής επαναδόμησης προσομοιώθηκαν ξεχωριστά. Έγινε η υπόθεση ότι μετά την εμφύτευση το οστό τείνει να προσαρμόσει τις τιμές της ενεργειακής πυκνότητας τροπής στις ομοιοστατικές τιμές της U_n προ της εμφύτευσης. Συγκεκριμένα, η ενεργειακή πυκνότητα τροπής στην επιφάνεια του οστού μειώνεται σε σχέση με την φυσιολογική της τιμή U_n , ειδικά στο εγγύς άκρο. Το μοντέλο φτάνει σε μία τελική κατάσταση ομοιοστατικής ενεργειακής πυκνότητας τροπής.

Μία επέκταση της εργασίας των Huijkes *et al.* (1987) δίνεται από τους Weinans *et al.* (1992b) και Weinans *et al.* (1994). Το ερέθισμα επαναδόμησης σε τοπικό επίπεδο (local remodeling signal) είναι η ενεργειακή πυκνότητα τροπής σε επίπεδο ιστού (tissue level strain energy density) $\frac{U_a}{\rho}$, όπου ρ είναι η πυκνότητα. Λαμβάνεται ο μέσος όρος της ενεργειακής πυκνότητας τροπής σε έναν αριθμό συνθηκών φόρτισης και χρησιμοποιούνται οι τρεις περιπτώσεις φόρτισης που έχουν προταθεί από τους Carter *et al.* (1989). Οι φαινόμενες πυκνότητες δρουν ως μεταβλητές και η εξίσωση ρυθμού έχει την μορφή

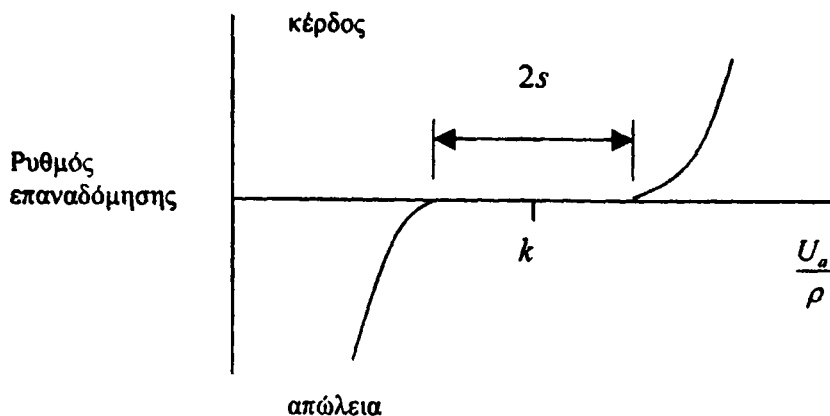
$$\frac{d\rho}{dt} = \begin{cases} A \left\{ \frac{U_a}{\rho} - k(1-s) \right\}^3 & \text{αν } \frac{U_a}{\rho} \leq k(1-s) \\ 0 & \text{αν } k(1-s) < \frac{U_a}{\rho} < k(1+s) \\ A \left\{ \frac{U_a}{\rho} - k(1+s) \right\}^2 & \text{αν } k(1+s) \leq \frac{U_a}{\rho} \end{cases}, \quad (3.15)$$

όπου A είναι μία χρονική σταθερά,

s είναι το μισό πλάτος της ζώνης αργής απόκρισης ενώ το

k ορίζει το σταθερό ερέθισμα αναφοράς.

Το σχήμα επαναδόμησης των Weinans *et al.* (1992b) παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.4. Η τιμή του k επιλέγεται ίση προς $k = 2.5 \text{ Joules/kg}$ ώστε να οδηγεί σε μία ρεαλιστική τελική κατάσταση. Η ζώνη αργής απόκρισης τίθεται στο $\pm 35\%$ του ερεθίσματος αναφοράς. Η τιμή της σταθεράς A δεν δίδεται. Το οστό θεωρείται ισότροπο και χρησιμοποιείται η εκθετική σχέση ανάμεσα στην φαινόμενη πυκνότητα και το μέτρο ελαστικότητας, η οποία προτάθηκε από τους Carter και



Σχήμα 3.4: Το σχήμα επαναδόμησης που προτάθηκε από τους Weinans *et al.* (1992b). Οι πυκνότητες χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές για την ρύθμιση της ενεργειακής πυκνότητας τροπής σε τοπικό επίπεδο.

Hayes (1977). Στην παραπάνω σχέση φαίνεται ότι η απορρόφηση συμβαίνει πιο προοδευτικά σε σχέση με την εναπόθεση. Στην εργασία των Weinans *et al.* (1992a) υπάρχουν ατέλειες τύπου σκακιέρας στην δισδιάστατη ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία του εγγύς μηριαίου. Οι πυκνότητες υπολογίζονται με παρεμβολή (interpolation) πάνω στην περιοχή ώστε να εξαλειφθούν οι παραπάνω ατέλειες και παράγονται τομές σε δύο διαστάσεις οι οποίες προσομοιώνουν το εγγύς μηριαίο.

Οι Harrigan και Hamilton (1992b) υποθέτουν ότι το οστό είναι μία δομή η οποία βελτιστοποιεί την χρήση του δομικού υλικού όσο υπόκειται σε μηχανικές απαιτήσεις. Χρησιμοποιώντας μία ισότροπη εκθετική σχέση ανάμεσα στο μέτρο ελαστικότητας E και την πυκνότητα ϕ

$$E = E_0 \phi^m, \quad (3.16)$$

διατυπώνεται μία εξίσωση ρυθμού επαναδόμησης, με ερέθισμα την ενεργειακή πυκνότητα τροπής σε επίπεδο ιστού, U_i ,

$$U_i = \frac{U}{\phi^n}, \quad (3.17)$$

όπου U είναι η ενεργειακή πυκνότητα τροπής στην κατάσταση αναφοράς (ισορροπία επαναδόμησης).

Η διαδικασία ανανέωσης του κανόνα επαναδόμησης και παραδείγματα δίνονται στην εργασία των Harrigan και Hamilton (1993). Διερευνάται εάν η εξίσωση του ρυθμού επαναδόμησης οδηγεί σε μία βέλτιστη δομή (Harrigan και Hamilton, 1994). Προκύπτει ότι το επίπεδο ισορροπίας δεν είναι μία βέλτιστη

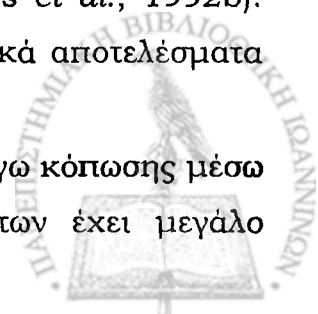
δομή και οι εξισώσεις τροποποιούνται σε μία προσπάθεια να επιτευχθεί η βελτιστοποίηση.

3.5.1.4. Μοντέλα επαναδόμησης που βασίζονται στην συσσώρευση καταστροφής λόγω κόπωσης

Η προσαρμογή του οστού έχει επίσης ερμηνευθεί με βάση την συσσώρευση καταστροφής. Οι Prendergast και Taylor (1994) πρότειναν θεωρία σύμφωνα με την οποία το οστό προσαρμόζεται ρυθμίζοντας την καταστροφή που παράγεται στα μικροδομικά του στοιχεία ώστε να επιτύχει βέλτιστη αντοχή. Το ερέθισμα επαναδόμησης είναι η μεταβολή στην συσσωρευμένη καταστροφή $\frac{d(\Delta\omega)}{dt}$, δηλαδή η διαφορά ανάμεσα στον ρυθμό δημιουργίας καταστροφής $\dot{\omega}$ και τον ρυθμό επιδιόρθωσης καταστροφής $\dot{\omega}_{RE}$. Επομένως, η ισορροπία επαναδόμησης ορίζεται ως η κατάσταση στην οποία ο ρυθμός επιδιόρθωσης συναγωνίζεται τον ρυθμό δημιουργίας καταστροφής. Ο ρυθμός δημιουργίας καταστροφής εξαρτάται από τις συνθήκες φόρτισης, ενώ ο ρυθμός επιδιόρθωσης καθορίζεται από φυσιολογικές παραμέτρους, όπως ο ρυθμός στρατολόγησης κυττάρων και μεταφοράς αλάτων. Η ισορροπία επαναδόμησης δεν είναι σταθερή κατά την χρονική πορεία της επαναδόμησης. Εάν καθεί το επίπεδο ισορροπίας, λαμβάνεται ο μέσος όρος του ερεθίσματος επαναδόμησης μέσα σε κάποιο χρονικό διάστημα ώστε να ληφθεί μία νέα συνθήκη ισορροπίας. Υπολογίζονται κάποιες από τις παραμέτρους επαναδόμησης με βάση κλινικά δεδομένα. Τα ερεθίσματα συσσωρεύονται σε ένα μεγάλο αριθμό κύκλων φόρτισης χωρίς να γίνει ανανέωση των μεταβλητών ενδιάμεσα.

Οι Hazelwood *et al.* (2001) διερεύνησαν την δυναμική συμπεριφορά ενός νέου αλγορίθμου επαναδόμησης, στον οποίο οι βασικές πολυκυτταρικές μονάδες (BPM) ενεργοποιούνται αποκρινόμενες είτε σε ακρησία είτε σε μικροκαταστροφή λόγω υπερβολικής φόρτισης. Ο αλγόριθμος αυτός συγκωνεύει αρχές από μοντέλα τα οποία προσομοιώνουν την διεργασία της επαναδόμησης (Hart και Davy, 1989, Kimmel, 1985, Martin, 1985, Reeve, 1984, Thomsen *et al.*, 1994) με άλλα τα οποία προσομοιώνουν την επίδραση των μηχανικών μεταβλητών στην οστική πυκνότητα (Beaupré *et al.*, 1990a,b, Carter *et al.*, 1989, Hart *et al.*, 1984, Huiskes *et al.*, 1987, Mullender και Huiskes, 1995, Weinans *et al.*, 1992b). Προσπαθεί επομένως να αναπαραγάγει πιο πιστά τα μικροδομικά αποτελέσματα της επαναδόμησης.

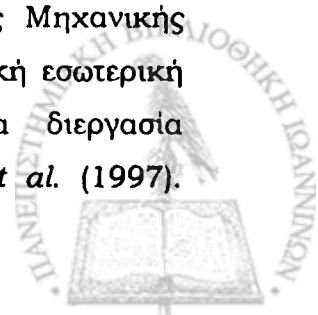
Ο ρόλος που παίζει η απομάκρυνση της καταστροφής λόγω κόπωσης μέσω της διεργασίας επαναδόμησης στην πρόληψη των καταγμάτων έχει μεγάλο



κλινικό ενδιαφέρον. Το μοντέλο των Hazelwood *et al.* (2001) προβλέπει ότι το σύστημα επαναδόμησης είναι ικανό να προσαρμόζει τα υπερφορτία αυξάνοντας τον ρυθμό επαναδόμησης ώστε να αντιμετωπίζει την αυξημένη δημιουργία καταστροφής, αλλά η ικανότητά του αυτή έχει καθορισμένα όρια. Όταν φορτίζεται υπερβολικά, το μοντέλο μπαίνει απότομα σε μία περιοχική επαναδόμησης στην οποία η τροπή, η καταστροφή, η συχνότητα ενεργοποίησης και το πορώδες αυξάνουν ραγδαία. Επιπλέον, αυτή η μετάβαση είναι ευαίσθητη σε μικρές μεταβολές στην φόρτιση ή στις παραμέτρους του μοντέλου. Τα αποτελέσματα αυτά έχουν κάποια αντιστοιχία με πειραματικά αποτελέσματα, υποδηλώνοντας ότι το μοντέλο μπορεί να είναι χρήσιμο (i) όταν εξετάζει κανείς την σημασία των μεταβατικών αποκρίσεων του οστού σε ακρησία και (ii) για την μελέτη του ρόλου που παίζει η απομάκρυνση καταστροφής λόγω κόπωσης στο να αποτρέπει ή να προκαλεί κατάγματα λόγω τάσης.

Οι Martin και Burr (1982) παρουσίασαν μία θεωρία η οποία περιγράφει μηχανισμούς με τους οποίους η επαναλαμβανόμενη τάση δίνει το έναυσμα για την επαναδόμηση στο φλοιώδες οστό. Η θεωρία βασίζεται στην παρατήρηση ότι η δομή πεταλίων στους οστεώνες συλλαμβάνει και παγιδεύει τις μικρορωγμές που δημιουργούνται κατά την περιοδική φόρτιση. Η αποσύνδεση ενός οστεώνα από μία ρωγμή μπορεί να δημιουργήσει μεταβολές στο τοίχωμα του Αβερσιανού καναλιού που γειτονεύει με την ρωγμή, οι οποίες δίνουν το έναυσμα για την δημιουργία ενός νέου δευτερογενούς οστεώνα. Η επισκευή των καταστραμμένων περιοχών από τους δευτερογενείς οστεώνες εμποδίζει την συσσώρευση μικροκαταστροφής λόγω επαναλαμβανόμενης φόρτισης και προστατεύει το φλοιώδες οστό από την αστοχία λόγω κόπωσης.

Οι Doblaré και García (2002) παρουσίασαν ένα μοντέλο οστικής επαναδόμησης το οποίο βασίζεται σε μία συνδυασμένη θεωρία καταστροφής-αποκατάστασης, η οποία θεμελιώνεται με βάση την Μηχανική Καταστροφής του Συνεχούς μέσου (Lemaitre, 1985, Cordebois και Sideroff, 1982). Η προσέγγιση αυτή δεν συνδέεται με προηγούμενες εργασίες διαφόρων ερευνητών (Prendergast και Taylor, 1994), οι οποίοι θεωρούν ότι η καταστροφή με την μορφή μικρορωγμών στο οστό σχετίζεται με την κυτταρική ενεργοποίηση. Αντίθετα, οι συγγραφείς θεωρούν ότι η εξέλιξη των εσωτερικών μεταβλητών της οστικής μικροδομής και η επίπτωσή της στην τροποποίηση των ελαστικών καταστατικών παραμέτρων μπορεί να διατυπωθεί ακολουθώντας τις αρχές της Μηχανικής Καταστροφής του Συνεχούς μέσου, χωρίς αναφορά στην πραγματική εσωτερική καταστροφή. Η οστική απορρόφηση παρουσιάζεται ως μία διεργασία συσσώρευσης καταστροφής, σύμφωνα με τις ιδέες των Jacobs *et al.* (1997).



Όμως, σε αντίθεση με τους παραπάνω συγγραφείς οι οποίοι χρησιμοποιούν την φαινόμενη πυκνότητα και τις συνιστώσες του τανυστή ελαστικότητας ως εσωτερικές μεταβλητές, οι Doblaré και García (2002) χρησιμοποιούν την φαινόμενη πυκνότητα και τον τανυστή υφής, δηλαδή μέτρα που σχετίζονται άμεσα με την εσωτερική μικροδομή.

3.5.1.5. *Σύνθετα μοντέλα (που βασίζονται σε συνδυασμό ερεθισμάτων)*

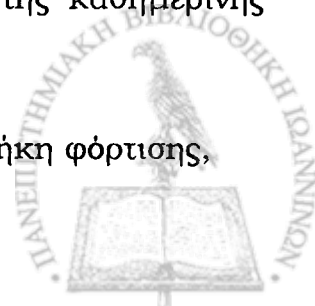
Οι Fyhrie και Carter (1986) πρότειναν μία αρχή βελτιστοποίησης στην οποία η οστική ανισοτροπία (προσανατολισμός δοκίδων) και η φαινόμενη πυκνότητα (εσωτερική επαναδόμηση) ρυθμίστηκαν έτσι ώστε να βελτιστοποιούν μία συνάρτηση βασισμένη σε κριτήρια αντοχής και ακαμψίας. Η αρχή αυτή εφαρμόστηκε χρησιμοποιώντας την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για να προβλέψει την κατανομή της οστικής πυκνότητας στην κεφαλή και τον αυχένα του μηριαίου οστού κατά την φάση μονοποδικής στήριξης της βάδισης. Τα αποτελέσματα έδωσαν μία κατανομή πυκνότητας που συμφωνεί με εκείνη που βρέθηκε στην φυσιολογική μηριαία κεφαλή.

Αργότερα, οι Carter και Whalen (1987) επέκτειναν την προσέγγιση μίας μόνο φόρτισης για την πρόβλεψη μεταβολών της οστικής πυκνότητας, ώστε να συμπεριληφθεί η ιστορία πολλαπλών φορτίσεων του μηριαίου οστού μέσα σε μία καθορισμένη χρονική περίοδο. Η ιστορία φορτίσεων του οστού κατά την διάρκεια μίας μέσης ημέρας προσδιορίστηκε με βάση τα μέτρα των τάσεων ή την περιοδική ενεργειακή πυκνότητα τροπής (cyclic strain energy density) και τον αριθμό των κύκλων φόρτισης. Η μεταβλητή ελέγχου ανάδρασης που χρησιμοποιήθηκε ήταν η ενεργή τάση που προήλθε από την ενεργειακή πυκνότητα τροπής. Αναπτύχθηκαν σχέσεις μεταξύ της τοπικής φαινόμενης οστικής πυκνότητας και της ιστορίας φορτίσεων, οι οποίες υποθέτουν ότι η οστική μάζα ρυθμίζεται σε σχέση με την αντοχή και την ενέργεια. Οι συγγραφείς υπέθεσαν ότι η τοπική φαινόμενη πυκνότητα του σπογγώδους οστού προσεγγίζεται από τη σχέση

$$\rho K \left[\sum n_i s_i^m \right]^{(1/2m)}, \quad i = 1, c \quad (3.18)$$

όπου c είναι ο αριθμός των διακριτών συνθηκών φόρτισης της καθημερινής ιστορίας φορτίσεων,

i είναι ένας δείκτης που δηλώνει μία συγκεκριμένη συνθήκη φόρτισης,



n είναι ο αριθμός των κύκλων φόρτισης,

s είναι η περιοδική μέγιστη ενεργή τάση,

ρ είναι η φαινόμενη πυκνότητα και

K και m είναι σταθερές.

Η ενεργή τάση (s_{eff}) σχετίζεται με την ενεργειακή πυκνότητα τροπής μέσω της σχέσης

$$s_{eff} = \sqrt{2EU}, \quad (3.19)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του συνεχούς μοντέλου και

U είναι η ενεργειακή πυκνότητα τροπής του συνεχούς μοντέλου.

Η σχέση ανάμεσα στο μέτρο ελαστικότητας και την φαινόμενη πυκνότητα του σπογγώδους οστού δίνεται από την σχέση

$$E(\text{MPa}) = 3.79 \times 10^6 \rho^3 (\text{kg/m}^3). \quad (3.20)$$

Το οστό θεωρείται ότι είναι μία ισότροπη και ομογενής δομή στην οποία η φαινόμενη πυκνότητα και, επομένως, το μέτρο ελαστικότητας μεταβάλλονται καθώς πραγματοποιείται η διεργασία της επαναδόμησης. Οι αρχικές ιδιότητες του οστού που χρησιμοποιήθηκαν ήταν $E = 1000 \text{ MPa}$ και $\nu = 0.2$.

Η ενεργειακή πυκνότητα τροπής και η ενεργή τάση υπολογίστηκαν για κάθε περίπτωση φόρτισης. Εξετάστηκε η επαναδόμηση για μοναδικές και πολλαπλές ιστορίες φορτίσεων και λήφθηκε η κατανομή οστικής πυκνότητας. Τα αποτελέσματα ήταν συγκρίσιμα με εκείνα της πραγματικής αρχιτεκτονικής του μηριαίου οστού.

Οι *Beaupré et al.* (1990a, 1990b) χρησιμοποίησαν το γεγονός ότι οι οστεοβλαστικές και οστεοκλαστικές δραστηριότητες κατά την εσωτερική επαναδόμηση συμβαίνουν στις επιφάνειες των δοκίδων για να διατυπώσουν μία χρονοεξαρτώμενη θεωρία επαναδόμησης. Χρησιμοποιήθηκαν τρεις περιπτώσεις φόρτισης που αντιπροσωπεύουν τις κύριες συνθήκες φόρτισης κατά την διάρκεια μίας ημέρας. Το καθημερινό ερέθισμα τάσης σε επίπεδο ιστού ψ_b ορίζεται ως



$$\psi_b = \left(\sum_{day} n_i \bar{\sigma}_{b_i}^m \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (3.21)$$

όπου n_i είναι ο αριθμός των κύκλων φόρτισης σε μία ημέρα τύπου φόρτισης i ,

$\bar{\sigma}_{b_i}$ είναι μία ενεργή τάση σε επίπεδο οστική ιστού και

m είναι μία εμπειρική σταθερά που περιγράφει την σχετική σημασία του μέτρου της τάσης σε σχέση με τον αριθμό των κύκλων φόρτισης.

Η ενεργή τάση σε επίπεδο ιστού σχετίζεται με την ενεργή τάση σε επίπεδο συνεχούς μέσου

$$\bar{\sigma}_i = \sqrt{2EU}, \quad (3.22)$$

μέσω της σχέσης

$$\bar{\sigma}_{b_i} = \left(\frac{\rho_c}{\rho} \right)^2 \bar{\sigma}_i, \quad (3.23)$$

όπου E είναι το μέσο μέτρο ελαστικότητας του συνεχούς μέσου,

U η ενεργειακή πυκνότητα τροπής σε επίπεδο συνεχούς μέσου,

ρ_c η πυκνότητα του φλοιώδους οστού και

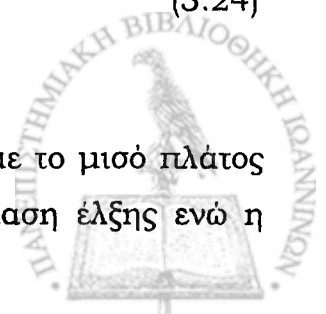
ρ η φαινόμενη πυκνότητα.

Η συνθήκη ισορροπίας ή ομοιόστασης, κατά την οποία ο καθαρός ρυθμός μεταβολής της φαινόμενης οστικής πυκνότητας είναι κοντά στο μηδέν, ορίζεται ως ένα ερέθισμα τάσης κατάστασης έλξης (attractor state stress stimulus) $\psi_{b_{AS}}$.

Η ποσότητα αυτή εξαρτάται από μεταβολικούς και γενετικούς παράγοντες. Το σφάλμα επαναδόμησης $e = \psi_b - \psi_{b_{AS}}$ είναι η διαφορά ανάμεσα στο πραγματικό, σε επίπεδο ιστού, ερέθισμα τάσης και το ερέθισμα τάσης στην κατάσταση έλξης. Το e εκφράζει τον βαθμό στον οποίο το οστό βρίσκεται εκτός ομοιόστασης. Ο ρυθμός επιφανειακής απορρόφησης ή εναπόθεσης \dot{r} ορίζεται ως

$$\dot{r} = \begin{cases} c(\psi_b - \psi_{b_{AS}}) + cw & \text{αν } \psi_b - \psi_{b_{AS}} < -w \\ 0 & \text{αν } -w \leq \psi_b - \psi_{b_{AS}} \leq w \\ c(\psi_b - \psi_{b_{AS}}) - cw & \text{αν } w < \psi_b - \psi_{b_{AS}} \end{cases} \quad (3.24)$$

Η παραπάνω σχέση περιλαμβάνει μία ζώνη αργής απόκρισης με το μισό πλάτος w να ισούται με το 10% του ερεθίσματος τάσης στην κατάσταση έλξης ενώ η



κλίση της τμηματικά γραμμικής συνάρτησης c ισούται με 0.02 (μm/ημέρα)/(MPa/ημέρα). Το ερέθισμα τάσης στην κατάσταση έλξης επιλέγεται ίσο προς 50 MPa/ημέρα και βασίζεται σε πειραματικές και αριθμητικές μελέτες τόσο ανθρώπινων όσο και οστών ζώων. Η τιμή του m τίθεται ίση προς 4, και βασίζεται επίσης σε πειραματικά δεδομένα.

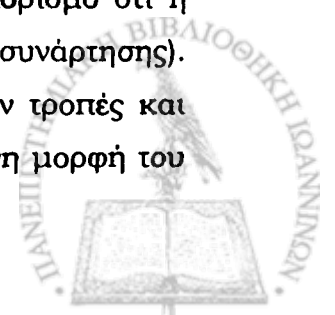
Ο ρυθμός επιφανειακής επαναδόμησης \dot{r} σχετίζεται με τον ρυθμό εσωτερικής επαναδόμησης $\dot{\rho}$ (μεταβολή στην πυκνότητα) μέσω της σχέσης (Martin, 1984)

$$\dot{\rho} = \dot{r} S_v(\rho) \rho_c, \quad (3.25)$$

όπου $S_v(\rho)$ είναι το ειδικό εμβαδό επιφάνειας που ορίζεται ως το εμβαδόν οστικής επιφάνειας ανά μοναδιαίο όγκο ιστού.

Το μοντέλο χρησιμοποιεί την υπόθεση της γραμμικής ελαστικότητας και της ισότροπης υλικής συμμετρίας και την ύπαρξη μίας εκθετικής σχέσης δεύτερης τάξης ανάμεσα στο μέτρο ελαστικότητας E και την φαινόμενη πυκνότητα ρ . Η επαναδόμηση ξεκινά από μία ομοιόμορφη κατανομή πυκνότητας στο $\rho = 1920 \text{ kg/m}^3$. Επομένως, η επαναδόμηση ξεκινά από μία μη-φυσιολογική κατάσταση με φυσιολογικά υπολογισμένες παραμέτρους επαναδόμησης. Τρεις περιπτώσεις φόρτισης εφαρμόζονται σε ένα δισδιάστατο μοντέλο του εγγύς μηριαίου οστού. Δίνονται αποτελέσματα της κατανομής της φαινόμενης οστικής πυκνότητας, επιτυγχάνεται σύγκλιση και δεν αναφέρονται αστάθειες. Το πλεονέκτημα του μοντέλου είναι ότι συσχετίζει την επαναδόμηση στις επιφάνειες των ξεχωριστών δοκίδων με την προσαρμογή του οστού σε επίπεδο συνεχούς μέσου, αλλά το μειονέκτημα είναι ο μεγάλος αριθμός παραμέτρων επαναδόμησης οι οποίες θα πρέπει να υπολογιστούν από πειραματικούς και/ή κλινικούς ελέγχους.

Μία επέκταση της εργασίας των Beaupré *et al.* (1990a, 1990b) για την περίπτωση τοπικής ανισοτροπίας δίδεται από τους Jacobs *et al.* (1997). Χρησιμοποιείται ένας κανόνας επαναδόμησης για τον ρυθμό μεταβολής του τανυστή ακαμψίας για πλήρη ανισοτροπία με 21 ανεξάρτητες παραμέτρους μαζί με τις εξισώσεις ρυθμού πυκνότητας (3.24) και (3.25). Το σχήμα ανανέωσης για τον τανυστή ακαμψίας λαμβάνεται βελτιστοποιώντας έναν ενεργειακό όρο, ο οποίος εκφράζει την ικανότητα απόκρισης του οστού, με τον περιορισμό ότι η ομοιόσταση επιτυγχάνεται στο βέλτιστο σημείο (ακρότατα της συνάρτησης). Θεωρώντας ότι το ερέθισμα χωρίζεται σε όρους που περιλαμβάνουν τροπές και όρους που περιλαμβάνουν πυκνότητα, λαμβάνεται μία συγκεκριμένη μορφή του



τανυστή βέλτιστης ακαμψίας και διατυπώνεται το σχήμα ανανέωσης, το οποίο περιλαμβάνει την χρονική παράγωγο του τανυστή ακαμψίας. Επομένως, οι εξισώσεις του ρυθμού επαναδόμησης για την πυκνότητα και τον τανυστή ακαμψίας είναι ξεχωριστές, και δεν διατυπώνονται με βάση την ίδια αρχή.

Οι Levenston και Carter (1998) πρότειναν μία βασισμένη στην ενέργεια διατύπωση της προσαρμογής του οστού, όπου το ερέθισμα (S) είναι το άθροισμα των συνιστωσών που σχετίζονται με την μη-καταστροφή (S_{ND}) και την καταστροφή (S_D)

$$S = S_{ND}(\varepsilon) + S_D(\varepsilon, \text{επιπεδο καταστροφης}). \quad (3.26)$$

Το ερέθισμα μη καταστροφής αντιπροσωπεύει την σχετιζόμενη με την παραμόρφωση διέγερση των οστικών κυττάρων. Πολλές από τις θεωρίες επαναδόμησης που επάγονται από την παραμόρφωση βασίζονται αποκλειστικά σε τέτοια, σχετιζόμενα με μη-καταστροφή, ερεθίσματα. Όταν δημιουργείται καταστροφή κατά την διάρκεια περιοδικής φόρτισης, ένα τμήμα της ενέργειας που μεταφέρεται κατά την διάρκεια της φόρτισης δεν ανακτάται κατά την διάρκεια της αποφόρτισης. Η ενέργεια αυτή διαχέεται και είναι ένα μέτρο της καταστροφής που δημιουργείται ή επεκτείνεται κατά την διάρκεια του κύκλου φόρτισης. Το ερέθισμα που σχετίζεται με την καταστροφή διατυπώνεται μαθηματικά και είναι ανάλογο προς την διάχυση της ενεργειακής πυκνότητας καταστροφής αθροιζόμενης πάνω σε όλους τους καθημερινούς κύκλους φόρτισης

$$S_D \propto \sum_{k=1}^N H_{D_k}, \quad (3.27)$$

όπου H_{D_k} είναι η πυκνότητα της διαχεόμενης ενέργειας κατά τον κύκλο φόρτισης k και

N είναι ο αριθμός των κύκλων φόρτισης.

Η πυκνότητα της διαχεόμενης ενέργειας H_{D_k} καθορίζεται με βάση πειραματικές μελέτες και προτείνεται η σχέση $H_D = 2.79 \cdot 10^{-17} \hat{\varepsilon}^{5.5}$ για μικρές παραμορφώσεις, όπου $\hat{\varepsilon}$ είναι η τροπή η ισοδύναμη προς την καταστροφή που προκαλείται από τον καθημερινό κύκλο φόρτισης k .

Μία νέα θεωρία επαναδόμησης καταστραμμένου οστού έχει προταθεί από τους Ramtani και Zidi (1999) ακολουθώντας θερμοδυναμική προσέγγιση στην θεωρία του συνεχούς μέσου. Συγκεκριμένα έχει παραχθεί ένας νέος νόμος εσωτερικής επαναδόμησης, ο οποίος υπόκειται σε θερμοδυναμικούς

περιορισμούς (καταστροφή-διάχυση) και στον οποίο ο ρυθμός επαναδόμησης εξαρτάται τόσο από την τροπή όσο και από τον ρυθμό καταστροφής.

Το πρόβλημα της εσωτερικής επαναδόμησης στο εγγύς μηριαίο οστό έχει μελετηθεί από την Bagge (2000). Ένα σχήμα οστικής επαναδόμησης με ανισότροπες υλικές παραμέτρους και χρονοεξαρτώμενη φόρτιση έχει εξαχθεί και εφαρμοστεί σε ένα τρισδιάστατο μοντέλο του εγγύς μηριαίου. Η ιστορία φορτίσεων περιλαμβάνεται στο μοντέλο για να δικαιολογήσει την καθυστέρηση της απόκρισης του οστού στις μεταβολές φορτίου. Η εξίσωση του ρυθμού επαναδόμησης εξάγεται μεγιστοποιώντας την ακαμψία σε κάθε χρονικό βήμα.

Οι Wang και Dumas (2002) προσπαθώντας να συλλάβουν τα απρόβλεπτα χαρακτηριστικά των καθημερινών φυσιολογικών δραστηριοτήτων, τα οποία φαίνεται να σχετίζονται στενά με την οστική επαναδόμηση περιέγραψαν τις συνθήκες φόρτισης ως στοχαστικές διεργασίες. Η θεώρηση επαναδόμησης βασίζεται σε συνδυασμό πραγματικών ερεθισμάτων και ερεθισμάτων συντήρησης (*maintenance stimuli*). Όταν το πραγματικό ερέθισμα τεθεί εκτός κάποιων ορίων επέρχεται συσσώρευση καταστροφής λόγω κόπωσης και ο αλγόριθμος ανανεώνεται. Η ευαισθησία των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης από τις παραμέτρους που υπεισέρχονται στον αλγόριθμο εξετάστηκε εφαρμόζοντας στοχαστικές συνθήκες φόρτισης σε μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων απλοποιημένων δομών σπονδυλικής στήλης. Κατ' αυτόν τον τρόπο, οι περιορισμοί που επάγονται από την απλοποίηση των συνοριακών συνθηκών σε σταθερά ή κυκλικά φορτία μπορεί να αποφευχθεί.

Βασιζόμενοι στο σχήμα επαναδόμησης των Weinans *et al.* (1992a) οι Xinghua *et al.* (2002) εισήγαγαν μία μη γραμμική εξίσωση οστικής επαναδόμησης και έναν μη γραμμικό συντελεστή επαναδόμησης και εξέτασαν την επίδραση της μη γραμμικότητας σε μηχανικό και φυσιολογικό επίπεδο σε δύο μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τεχνικές βελτιστοποίησης, προσομοίωσαν τα εξωτερικά σχήματα και τις κατανομές εσωτερικής πυκνότητας των δύο μοντέλων. Τα αποτελέσματά τους έδειξαν ότι η μη γραμμική εξίσωση οστικής επαναδόμησης μπορεί να ελέγχει την διεργασία επαναδόμησης των οστών σε διαφορετικά στάδια ανάπτυξης ή σε διαφορετικές ανατομικές θέσεις πιο αποτελεσματικά και ρεαλιστικά.



3.5.2. Ηλεκτρομηχανικά μοντέλα

3.5.2.1. Πιεζοηλεκτρικά μοντέλα

Ο Gjelsvik (1973a, 1973b) διερεύνησε τις επιπτώσεις του να οφείλεται η καθαρή οστική επαναδόμηση στο επαγόμενο από την τάση διάνυσμα πόλωσης. Κατά τον Cady (1949), το διάνυσμα πόλωσης P σε μια ηλεκτρικά ελεύθερη κατάσταση σχετίζεται με την τάση T σύμφωνα με την σχέση

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{32} \\ T_{13} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

όπου d_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, 6$ είναι οι πιεζοηλεκτρικοί συντελεστές.

Ο Gjelsvik ανέπτυξε εξισώσεις ρυθμού επαναδόμησης για την ταχύτητα των εξωτερικών οστικών επιφανειών βασιζόμενος στην πιεζοηλεκτρική πόλωση P που αναπτύσσεται όταν το οστό παραμορφώνεται. Το οστό θεωρήθηκε ότι έχει είτε εξαγωνική πολική συμμετρία ή εξαγωνική ολοαξονική συμμετρία. Οι αντίστοιχοι πιεζοηλεκτρικοί πίνακες είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} - d_{14} & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Ο Gjelsvik χρησιμοποίησε τιμές για τις σταθερές που μετρήθηκαν πειραματικά από τους Fukuda και Yasuda (1964). Τα σχετικά μέτρα των σταθερών δείχνουν ότι το κυρίαρχο στοιχείο των πιεζοηλεκτρικών πινάκων είναι ο όρος d_{14} . Ο Gjelsvik επίσης υποθέτει ότι η συνιστώσα P_1 του διανύσματος πόλωσης (κάθετη στην οστική επιφάνεια) είναι η μόνη συνιστώσα που κυριαρχεί στην καθαρή επαναδόμηση. Συνεπώς, η διατμητική συνιστώσα $d_{14}T_{23}$ είναι ο κύριος ρυθμιστής της επαναδόμησης ανεξάρτητα από τον τύπο της συμμετρίας. Επομένως, οι διατμητικές τάσεις που εφαρμόζονται στο οστό ή η μεταβολή στην ευθυγράμμιση μεταξύ των υλικών διευθύνσεων και των διευθύνσεων των κύριων τάσεων θα επάγουν επαναδόμηση.

Η εξίσωση του ρυθμού επαναδόμησης για την μεταβολή της θέσης της οστικής επιφάνειας είναι



$$\begin{aligned} \dot{u} &= aP_1 - \dot{U} \quad \text{για } P_1 \geq 0, \\ \dot{u} &= \beta P_1 - \dot{U} \quad \text{για } P_1 < 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

όπου \dot{u} είναι ο ρυθμός μετατόπισης του οστού προς τα έξω, κάθετα στην επιφάνειά του,

\dot{U} είναι μία διεργασία απορρόφησης η οποία προχωράει με σταθερό ρυθμό, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε δραστηριότητα,

P_1 είναι η συνιστώσα του διανύσματος πόλωσης $d_{14}T_{23}$ και

a, β είναι σταθερές που ικανοποιούν τις συνθήκες $a > \beta > -a$.

Ο Gjelsvik διαπίστωσε ότι οι διατμητικές τάσεις που εφαρμόζονται στο οστό, ή μία μεταβολή στην ευθυγράμμιση ανάμεσα στην υλική διεύθυνση και την διεύθυνση πρωταρχικής τάσης, θα επάγουν επαναδόμηση. Επίσης, χρησιμοποίησε τις εξισώσεις ρυθμού επαναδόμησης για να προβλέψει την επαναδόμηση ενός εξιδανικευμένου, λεπτού κυλινδρικού οστού που υπόκειται σε αξονικές και καμπτικές φορτίσεις. Ο κύριος περιορισμός της εργασίας του Gjelsvik είναι ότι όλα τα συμπεράσματά του βασίζονται στην υπόθεση ότι τα πιεζοηλεκτρικά σήματα είναι οι πρωταρχικοί ρυθμιστές της διεργασίας επαναδόμησης.

3.5.2.2. Ηλεκτροκινητικά μοντέλα

Οι Guzelsu και Saha (1984a, 1984b) ανέπτυξαν ένα μοντέλο της οστικής συμπεριφοράς λαμβάνοντας υπόψη τις πιεζοηλεκτρικές, ηλεκτροκινητικές και διηλεκτρικές ιδιότητες του οστού. Υπέθεσαν ότι οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στο ρευστό και το στερεό τμήμα του οστίτη ιστού είναι σημαντικές για την επαναδόμηση. Ανέπτυξαν κινηματικές εξισώσεις και εξισώσεις ισορροπίας, εξισώσεις ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για τα διηλεκτρικά και ιξωδοελαστικές καταστατικές εξισώσεις. Από την γραμμικοποίηση του προηγούμενου συστήματος εξισώσεων προέκυψε η εξίσωση του ρυθμού επαναδόμησης ως

$$U = \text{tr} \mathbf{C}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^0) + c(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + b(\mathbf{u} - \mathbf{u}^0) + \text{tr}[\mathbf{B}^f(\mathbf{D}^f - \mathbf{D}^0)] + \text{tr}[\mathbf{B}^m(\mathbf{D}^m - \mathbf{D}^0)], \quad (3.31)$$

όπου U είναι η ταχύτητα της επιφάνειας που υφίσταται επαναδόμηση,

\mathbf{E} είναι ο τανυστής τροπής,

$\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι ο τανυστής του ηλεκτρικού πεδίου,

\mathbf{u} είναι η ταχύτητα του ρευστού σε σχέση με την θεμέλια ουσία και

\mathbf{D}^f και \mathbf{D}^m είναι οι τανυστές του ρυθμού παραμόρφωσης.



Οι τιμές E^0 , ϵ^0 , u^0 και D^0 είναι οι τιμές αναφοράς των αντίστοιχων μεγεθών στην κατάσταση που δεν συμβαίνει επαναδόμηση.

Πρόκειται για την εξίσωση του ρυθμού επιφανειακής επαναδόμησης που οφείλεται στην τροπή όπως αναφέρεται από τους Cowin και Van Buskirk (1979) με επιπλέον γραμμικούς όρους που οφείλονται στο ηλεκτρικό πεδίο, την ταχύτητα του ρευστού και τον ρυθμό παραμόρφωσης.

Οι Pollack *et al.* (1984) ανέπτυξαν ένα ανατομικό μοντέλο για τα ρευματικά δυναμικά στους οστεώνες για να περιγράψουν τα ηλεκτρομηχανικά φαινόμενα στο οστό. Το μοντέλο τους λαμβάνει υπόψη την μικροδομή ενός οστεώνα και βασίζεται στις αρχές της ηλεκτροχημείας, ηλεκτροκινητικής, μηχανικής του συνεχούς μέσου και δυναμικής των ρευστών. Υπολογίζονται τα ενδοοστεωνικά δυναμικά και οι χρόνοι χαλάρωσης/απόσβεσής τους και επιδεικνύεται η εξάρτηση των δυναμικών αυτών από το ιξώδες του ρευστού και την αγωγιμότητα.

Οι Petrov *et al.* (1989) πρότειναν ένα μαθηματικό μοντέλο για τα ρευματικά δυναμικά σε έναν οστεώνα, λαμβάνοντας υπόψη τις μικροτάσεις στην γειτονιά ενός Αβερσιανού καναλιού. Με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων διερευνήθηκε το πρόβλημα συνοριακών τιμών για το πλάτος της πίεσης ρευστού σε έναν οστεώνα όταν το οστικό δείγμα υπόκειται σε περιοδική φόρτιση. Στην συνέχεια έγινε αριθμητική ανάλυση του ενδοοστεωνικού δυναμικού και βρέθηκε ότι υπάρχει μία αξιμουθιακή ασυμμετρία η οποία αυξάνει με την διεύρυνση του Αβερσιανού καναλιού. Τα αποτελέσματά τους έχουν επαληθευτεί πειραματικά.

Οι Salzstein *et al.* (1987a) ανέπτυξαν ένα ηλεκτροκινητικό μοντέλο για να περιγράψουν τα ηλεκτρομηχανικά φαινόμενα στο φλοιώδες οστό. Χρησιμοποίησαν τις βασικές αρχές της διαφασικής θεωρίας των πορώδων υλικών και ένα απλό μοντέλο για την διαπερατότητα και την κατανομή φορτίου στο φλοιώδες οστό. Στην συνέχεια (Salzstein *et al.*, 1987b) έγινε πειραματική ανάλυση του μοντέλου και παρουσιάστηκαν αποτελέσματα που αφορούν την μέτρηση σε χαμηλές συχνότητες των δυναμικών χαρακτηριστικών των παραγόμενων από τάση δυναμικών. Ποσοτική ανάλυση αυτών των αποτελεσμάτων υποδηλώνει ότι το μικροπορώδες του οστού, το οποίο αποτελείται από τα κανάλια γύρω από τον υδροξυαπατίτη που καλύπτει την θεμέλια ουσία του κολλαγόνου, είναι το υπεύθυνο επίπεδο πορώδους για τα ηλεκτρομηχανικά φαινόμενα στο κεκορεσμένο ρευστού φλοιώδες οστό. Το μικροπορώδες φαίνεται να είναι η πηγή του ηλεκτροκινητικού φαινομένου, γιατί έχει το μεγαλύτερο εμβαδό επιφάνειας

στο οστό και είναι το επίπεδο που θέτει περιορισμούς στον ρυθμό της επαγόμενης από παραμόρφωση ροής ρευστού σε χαμηλές συχνότητες.

3.5.2.3. Μοντέλα ροής ρευστού

Στην βιβλιογραφία, έχουν καθιερωθεί θεωρητικά μοντέλα τα οποία ενισχύουν την κατανόηση της συμπεριφοράς του ρευστού στα οστά που υφίστανται τάσεις, είτε πρόκειται για ομογενή πορώδη οστικά δείγματα (Salzstein *et al.*, 1987a, Weinbaum *et al.*, 1994, Cowin *et al.*, 1995) είτε για ξεχωριστούς οστεώνες (Piekariski και Munro, 1977, Pollack *et al.*, 1984, Petrov *et al.*, 1989, Kufahl και Saha, 1990, Zeng *et al.*, 1994). Όμως κάποια πειράματα παραμένουν ανεπιβεβαιωτά (Starkebaum *et al.*, 1979, Otter *et al.*, 1992).

Οι Starkebaum *et al.* (1979) μέτρησαν τα παραγόμενα από τροπή δυναμικά ανάμεσα σε γειτονικούς οστεώνες ενός οστικού δείγματος που υπόκειται σε τάση κατά την κάμψη σε τέσσερα σημεία (*four-point bending*). Το πρωτοποριακό αυτό πείραμα οδήγησε στην παρατήρηση ότι οι τοπικές χωρικές βαθμίδες στην ηλεκτρική τάση κοντά στα οστεωνικά κανάλια ήταν 10-30 φορές μεγαλύτερες από τις χωρικές βαθμίδες σε όλο το οστικό δείγμα. Ένα δεύτερο, πιο πρόσφατο παράδοξο είναι η παρατήρηση των Otter *et al.* (1992) ότι ο χρόνος αποδιέγερσης για την πίεση του οστικού ρευστού ή το παραγόμενο από τάση δυναμικό δεν φαίνεται να εξαρτάται από το πάχος του δείγματος του φλοιώδους οστού. Η συμπεριφορά αυτή είναι ασυμβίβαστη με την χωρικά ομογενή θεωρία που αναπτύχθηκε από τους Salzstein *et al.* (1987a), Weinbaum *et al.* (1994) και Cowin *et al.* (1995), όπου ο χαρακτηριστικός χρόνος για την καλάρωση της πίεσης του οστικού ρευστού είναι ανάλογος προς το τετράγωνο του πάχους του οστικού δείγματος και η οστεωνική δομή δεν λαμβάνεται υπόψη. Τα πειράματα των Starkebaum *et al.* (1979) και των Otter *et al.* (1992) προτείνουν ότι η ετερογενής μικροδομή του οστού θα πρέπει να ληφθεί υπόψη στα μοντέλα ροής ρευστού.

Οι Piekariski και Munro (1977) έδειξαν πρώτοι ότι η συμπίεση προκαλεί παλμική ροή του διάμεσου ρευστού στο οστό.

Οι Johnson *et al.* (1982), πρότειναν ένα μοντέλο για την ροή ρευστού στο οστό *in vitro*. Το μοντέλο αυτό προβλέπει μια ραγδαία πτώση (της τάξης του 10^{-3} sec ή και λιγότερο) της ροής ρευστού στα Αβερσιανά κανάλια.

Οι Kufahl και Saha (1990) ανέπτυξαν ένα μαθηματικό μοντέλο για να μελετήσουν την επαγόμενη από τάση ροή ρευστού στο σύστημα καναλιών-



βοθρίων σε έναν οστεώνα, κατά την διάρκεια ενός κύκλου βάρδισης. Βρέθηκε ότι οι διάμετροι καναλιών από $2 \times 10^{-5} \text{ m}$ έως $4 \times 10^{-5} \text{ m}$ οδηγούν σε μεγαλύτερη ταχύτητα ρευστού ανά μοναδιαίο μήκος καναλιού. Για διαμέτρους καναλιών $2 \times 10^{-5} \text{ m}$, η ροή συμπίεσης μπορεί να τροφοδοτήσει από 4 έως 5 ομοκεντρικά στρώματα οστεοκυττάρων σε έναν οστεώνα. Προτείνεται ότι η επαγόμενη από τάση ροή πιθανόν να είναι σημαντική στην οστική επαναδόμηση και ότι η έλλειψη τέτοιας ροής μπορεί να είναι μία από τις αιτίες για την δημιουργία οστεοπόρωσης λόγω ακινησίας.

Οι Weinbaum *et al.* (1994) επέκτειναν το μοντέλο των Kufahl και Saha (1990) θεωρώντας την ροή που προκαλείται από την παραμόρφωση μέσα σε μερικώς γεμισμένα με προτεογλυκάνες κανάλια και προέβλεψαν τις διατμητικές τάσεις στα οστεοκύτταρα. Βρήκαν ότι οι διατμητικές τάσεις ρευστού βρίσκονται στο ίδιο εύρος τιμών με εκείνες που παρατηρούνται φυσιολογικά στα ενδοθηλιακά κύτταρα που καλύπτουν το τοίχωμα των αιμοφόρων αγγείων. Το διεγερμένο οστεοκύτταρο μπορεί τότε να επικοινωνήσει με τα άλλα οστεοκύτταρα και τους οστεοβλάστες μέσω των συμβολών σχισμών (gap junctions). Εάν τα ρευματικά δυναμικά ή οι διατμητικές τάσεις ρευστού είναι το ερέθισμα επαναδόμησης παραμένει ασαφές.

Οι Mak *et al.* (1997) ανέπτυξαν ένα μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων για το φλοιώδες οστό με σκοπό να μελετήσουν παραμετρικά την κίνηση του ρευστού στα κανάλια ροής διαφορετικής ιεραρχίας στο οστό. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιήθηκε για να εξακριβωθεί το πώς η διαπερατότητα των ενδοεπιφανειών και το στερεό περιεχόμενο των καναλιών μπορούν να επηρεάσουν τις ελκτικές δυνάμεις (drag forces) στα κανάλια. Αυτές οι ελκτικές δυνάμεις θα μπορούσαν να προσομοιώσουν άμεσα τις οστεοκυτταρικές αποφύσεις στο σύστημα βοθρίων-καναλιών και να αποσπάσουν βιολογικές αποκρίσεις. Οι συγγραφείς πιστεύουν ότι το μοντέλο θα ήταν χρήσιμο στην διευκόλυνση της κατανόησης του μικρο-εμβιομηχανικού περιβάλλοντος που γίνεται αισθητό από τα οστεοκύτταρα και του μηχανισμού μηχανοδιάδοσης (mechanotransduction) στο οστό.

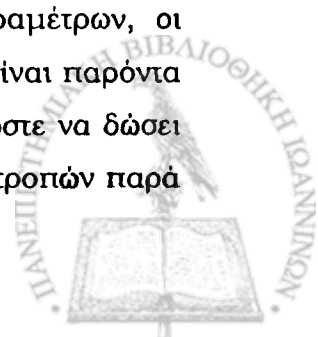
Το μοντέλο των Wang *et al.* (1999) διερευνά την υπόθεση ότι η κύρια αποκατάσταση της περίσσειας πίεσης οστικού ρευστού στο μηχανικά φορτισμένο οστεωνικό οστό συμβαίνει μέσω των οστεωνικών καναλιών και όχι μέσω των επιφανειών του οστικού δείγματος όπως είχε υποτεθεί έως τότε. Ενώ μία τέτοια συμπεριφορά θα προβλεπόταν για τους ξεχωριστούς οστεώνες οι οποίοι έχουν ένα αδιαπέραστο εξωτερικό σύνορο και είναι ασύζευκτοι (Pollack *et al.*, 1984, Petrov

et al., 1989, Kufahl και Saha, 1990, Zeng *et al.*, 1994), οι Wang *et al.* (1999) έδειξαν ότι η ίδια αυτή συμπεριφορά παρατηρείται όταν υπάρχει οστεωνική σύζευξη και ροή οστικού ρευστού μέσω της συνδετικής γραμμής (cement line). Το νέο αυτό μοντέλο εξετάζει τόσο την επίδραση των οστεωνικών καναλιών όσο και την ροή οστικού ρευστού μέσω της συνδετικής γραμμής λόγω της μερικής διείσδυσης των καναλιών σε αυτό το οστεωνικό σύνορο. Το μοντέλο συνδυάζει την μικροδομική ανάλυση του πορώδους βοθρίων-καναλιών που αναπτύσσεται στους Weinbaum *et al.* (1994) και Cowin *et al.* (1995) με ένα χωρικά ετερογενές μοντέλο μεγαλύτερης κλίμακας για την οστεωνική διάταξη.

Ένα αναλυτικό μοντέλο της ροής διάμεσου ρευστού που επάγεται σε επίπεδο οστεοκυτταρικών καναλιών όταν ένα μακρό οστό υπόκειται σε καμπτικά φορτία παρουσιάστηκε από τους Srinivasan και Gross (2000). Η δυναμική κάμψη του φλοιώδους οστού οδηγεί σε ένα μη ομοιόμορφο περιβάλλον διαμήκων κάθετων τροπών, στο οποίο το μέτρο της τροπής μεταβάλλεται τόσο χρονικά όσο και χωρο-χρονικά. Για να ερμηνεύσουν την πολυπλοκότητα που τίθεται από τις δύο αυτές πλευρές του περιβάλλοντος φορτίσεων, η ροή ρευστού των καναλιών χωρίστηκε σε χρονικές και χωρο-χρονικές συνιστώσες. Όσον αφορά την κατανομή γύρω από τον φλοιό, οι χρονικές και χωρο-χρονικές ροές στην ακτινική διεύθυνση ήταν και οι δύο μέγιστες κοντά στα σημεία μέγιστου μέτρου τροπής. Αντίθετα, οι χωρο-χρονικές ροές στην περιφερική διεύθυνση ήταν μέγιστες κοντά στις θέσεις ελάχιστου μέτρου τροπής. Όλες οι συνιστώσες της ροής ρευστού ήταν μέγιστες κατά τον πρώτο κύκλο φόρτισης και έφταναν σε σημαντικά μειωμένα επίπεδα σταθερής κατάστασης κατά τους επόμενους κύκλους φόρτισης. Το μοντέλο αυτό παρέχει μία πρώτη εκτίμηση της ροής ρευστού στα κανάλια, η οποία επάγεται σε ένα πολύπλοκα φορτισμένο μακρό οστό.

3.5.3. Βιολογικά-μηχανικά μοντέλα

Μία συμπληρωματική προσέγγιση στο φαινομενολογικό μοντέλο των Cowin και Hegedus (1976) χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία ενός μοντέλου που βασίζεται στην βιολογία του κυττάρου από τους Hart *et al.* (1984b). Αντί να ακολουθήσει την μηχανική φαινομενολογική προσέγγιση της θεωρίας προσαρμοστικής ελαστικότητας των Cowin και Hegedus (1976) ή το βελτιωμένο μοντέλο των Guzelsu και Saha (1984a, 1984b), το μοντέλο αυτό εκφράζει τις σταθερές του ρυθμού επαναδόμησης συναρτήσει βιολογικών παραμέτρων, οι οποίες περιλαμβάνουν τον αριθμό των διαφορετικών κυττάρων που είναι παρόντα και την μέση δραστηριότητά τους. Η θεωρία αρχικά αναπτύσσεται ώστε να δώσει μία απόκριση επαναδόμησης η οποία βασίζεται σε όλη την ιστορία τροπών παρά



σε κάθε μία ξεχωριστά από τις συνιστώσες της, οι οποίες έχουν θεωρηθεί ως ρυθμιστές της διεργασίας επαναδόμησης. Οι συνιστώσες αυτές είναι ο χρονικός μέσος όρος της τροπής, η μέγιστη τροπή, ο ρυθμός τροπής και η τροπή που απαιτείται για να προκληθεί μικροκαταστροφή και αποτελούν συγκεκριμένα τμήματα της ιστορίας τροπών.

Η βασική υπόθεση του μοντέλου είναι ότι εφόσον το οστό τόσο απορροφάται όσο και σχηματίζεται από κύτταρα που καλύπτουν τις οστικές επιφάνειες, η οστική επαναδόμηση είναι εκδήλωση επιφανειακών κυτταρικών διεργασιών. Επομένως, η διάκριση των Cowin και Van Buskirk (1978,1979) μεταξύ επιφανειακής και εσωτερικής επαναδόμησης μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ενοποιημένο μοντέλο επιφανειακής επαναδόμησης μόνον. Η εσωτερική επαναδόμηση μπορεί να περιγραφεί συναρτήσει της ταχύτητας μιας επιφάνειας μέσα σε μία εσωτερική κοιλότητα όπως έναν οστεώνα, και η εξωτερική επιφανειακή επαναδόμηση αποτελείται επιπλέον από την ταχύτητα επαναδόμησης των επιφανειών του περιόστεου και του ενδόστεου.

Με βάση τις αρχές της γεωμετρικής ανάδρασης όπως περιγράφηκε από τον Martin (1984), η καθαρή επαναδόμηση στην επιφάνεια του οστού είναι το άθροισμα της δραστηριότητας των οστεοβλαστών και οστεοκλαστών ανά μονάδα επιφάνειας. Στο μοντέλο των Hart *et al.* (1984b) όμως, η κυτταρική δραστηριότητα δεν ρυθμίζεται μόνο από το διαθέσιμο εμβαδόν επιφάνειας ανά μοναδιαίο όγκο οστού, αλλά επίσης και από την κυτταρική απόκριση σε ένα προτεινόμενο δυναμικό επαναδόμησης επαγόμενο από τροπή (strain-induced remodeling potential SRP). Επίσης, το μοντέλο αφήνει περιθώρια για ρύθμιση του επαγόμενου δυναμικού από γενετικούς, ορμονικούς και μεταβολικούς παράγοντες, αλλά δεν το αναπτύσσει περαιτέρω.



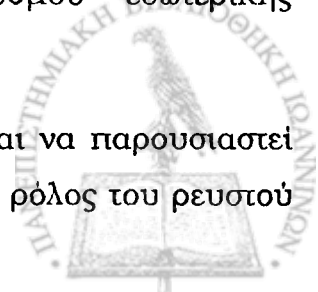
Ποροελαστικό μοντέλο εσωτερικής επαναδόμησης

4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επαναδόμηση των οστών (bone remodeling) είναι ένας γενικός όρος που περιγράφει τις διεργασίες με τις οποίες το οστό προσαρμόζει την ιστολογική του δομή σε μεταβολές στις μακροχρόνιες φορτίσεις που δέχεται. Ακολουθώντας την διάκριση του Frost (1964) μεταξύ επιφανειακής και εσωτερικής επαναδόμησης, η τελευταία αναφέρεται στον μηχανισμό με τον οποίο μεταβάλλεται η συνολική πυκνότητα (bulk density) του οστού. Αυτό συμβαίνει με την απορρόφηση ή την ενίσχυση του ήδη υπάρχοντος οστίτη ιστού μέσα σε σταθερά εξωτερικά χωρικά όρια.

Το πρόβλημα της εσωτερικής επαναδόμησης λόγω της εισαγωγής ενδομυελικού ήλου σε ένα μακρό οστό μελετήθηκε αρχικά από τους Cowin και Van Buskirk (1978) και στην συνέχεια από τους Firoozbakhsh και Cowin (1980, 1981), Misra και Murty (1983), Misra και Samanta (1987) και Misra *et al.* (1989), όπως έχει περιγραφεί στο κεφάλαιο 3. Όλες οι παραπάνω μελέτες βασίζονται στην προσέγγιση για μικρές τροπές (Hegedus και Cowin, 1976) της θεωρίας προσαρμοστικής ελαστικότητας (Cowin και Hegedus, 1976), μίας θερμομηχανικής θεωρίας συνεχούς μέσου. Σύμφωνα με αυτή την περιγραφή το οστό συμπεριφέρεται ως πορώδες ελαστικό στερεό, το οποίο αντιπροσωπεύει την θεμέλια ουσία του οστού μαζί με τα οστικά κύτταρα, με ένα έκχυμα, το οποίο αντιπροσωπεύει το εξωκυττάριο υγρό και το πλάσμα του αίματος που ρέει μέσα στη θεμέλια ουσία. Το έκχυμα λαμβάνεται υπόψη μόνο όσον αφορά την μεταφορά μάζας, ορμής, ενέργειας ή εντροπίας στην θεμέλια ουσία. Οι Hegedus και Cowin (1976) υποθέτουν ότι οι προσαρμοζόμενες στις φορτίσεις ιδιότητες του ζωντανού οστού μπορούν να μοντελοποιηθούν με ένα χημικά αντιδρών πορώδες μέσο στο οποίο ο ρυθμός της αντίδρασης ελέγχεται από την τροπή. Χρησιμοποιώντας έναν τροποποιημένο νόμο του Hooke ο οποίος εμπεριέχει έναν όρο επαναδόμησης προτείνεται μία εξίσωση του ρυθμού εσωτερικής επαναδόμησης.

Αντικειμενικός στόχος της μελέτης που ακολουθεί είναι να παρουσιαστεί ένα νέο θεωρητικό μοντέλο εσωτερικής επαναδόμησης όπου ο ρόλος του ρευστού



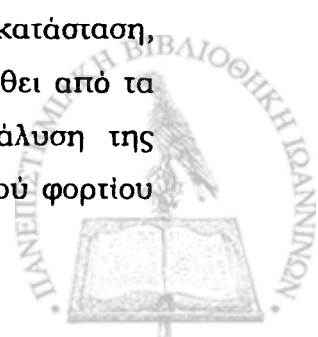
συστατικού του οστού είναι σαφής και να γίνουν προβλέψεις σχετικά με την πορεία της εσωτερικής επαναδόμησης για ένα εύρος τιμών του πορώδους. Στο μοντέλο αυτό προτείνεται μία νέα υλική περιγραφή για το οστό, εκείνη του προσαρμοστικού πορώδους ελαστικού παραμορφώσιμου υλικού. Στους πόρους του υλικού αυτού ρέει ένα ιξώδες συμπιεστό ρευστό, σύμφωνα με την διατύπωση της θεωρίας ποροελαστικότητας του Biot (1941, 1955, 1956). Γίνεται χρήση των βασικών αρχών της θεωρίας προσαρμοστικής ελαστικότητας για μικρές τροπές (Hegedus και Cowin, 1976) με κατάλληλη τροποποίηση ώστε να συμπεριληφθεί το ρευστό συστατικό του οστού σύμφωνα με την νέα υλική περιγραφή. Προτείνεται έτσι μία νέα καταστατική σχέση και μία εξίσωση για τον ρυθμό εσωτερικής επαναδόμησης, οι οποίες εμπεριέχουν όρους στερεού και ρευστού.

Περιγράφονται αρχικά οι βασικές αρχές της θεωρίας της ποροελαστικότητας του Biot και της θεωρίας προσαρμοστικής ελαστικότητας των Cowin και Hegedus. Στην συνέχεια γίνεται η μαθηματική διατύπωση του προτεινόμενου μοντέλου εσωτερικής επαναδόμησης. Ακολουθεί η εφαρμογή του μοντέλου σε ένα πρόβλημα συντοριακών συνθηκών, η επίλυση του μοντέλου και η παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

4.2. Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΠΟΡΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

4.2.1. Εισαγωγή

Η τρισδιάστατη θεωρία της ποροελαστικότητας ή θεωρία σταθεροποίησης (theory of consolidation), όπως ονομάζεται, θεμελιώθηκε από τον Biot (1941). Η αρχή της αποτελεί μαθηματική γενίκευση σε τρεις διαστάσεις για αυθαίρετα μεταβαλλόμενα φορτία με το χρόνο, της μονοδιάστατης θεωρίας του Terzaghi (1925). Ο Terzaghi (1925), ήταν ο πρώτος που πρότεινε έναν απλό μηχανισμό για να εξηγήσει το φαινόμενο της σταδιακής αποκατάστασης του εδάφους μετά από μεταβολές μηχανικού φορτίου. Όπως είναι γνωστό στην μηχανική, το έδαφος υπό την επίδραση φορτίου δεν υφίσταται στιγμιαία εκτροπή (deflection) αλλά αποκαθίσταται σταδιακά με μεταβαλλόμενο ρυθμό. Ο Terzaghi υπέθεσε ότι οι κόκκοι ή τα σωματίδια που αποτελούν το έδαφος συνδέονται μεταξύ τους μέσω συγκεκριμένων μοριακών δυνάμεων και συνιστούν ένα πορώδες υλικό με ελαστικές ιδιότητες. Τα κενά του ελαστικού σκελετού είναι γεμάτα με νερό. Φορτίο που εφαρμόζεται στο σύστημα αυτό παράγει μία σταδιακή αποκατάσταση, ανάλογη προς τον ρυθμό με τον οποίο το νερό εξαναγκάζεται να εξέλθει από τα κενά αυτά. Ο Terzaghi εφάρμοσε τις παραπάνω αρχές στην ανάλυση της αποκατάστασης μίας στήλης εδάφους υπό την επίδραση ενός σταθερού φορτίου



και η θεωρία του αυτή απειτέλεσε την βάση για την δημιουργία της επιστήμης της εδαφομηχανικής.

Η γενική θεωρία της τρισδιάστατης σταθεροποίησης του Biot βασίζεται στις ακόλουθες υποθέσεις:

- (i) ισοτροπία του υλικού,
- (ii) αντιστρεπτότητα των σχέσεων τάσης-τροπής υπό συνθήκες τελικής ισορροπίας,
- (iii) γραμμικότητα των σχέσεων τάσης-τροπής,
- (iv) μικρές τροπές,
- (v) το νερό που περιέχεται στους πόρους είναι γενικά ασυμπίεστο,
- (vi) το νερό μπορεί να περιέχει φυσαλίδες αέρα και
- (vii) το νερό ρέει διαμέσου του πορώδους σκελετού σύμφωνα με τον νόμο του Darcy.

4.2.2. Γενικές εξισώσεις για ανισότροπο υλικό

Εστω ένας ελαστικός σκελετός με μία τυχαία κατανομή αλληλοεπικοινωνούντων πόρων. Το πορώδες ορίζεται από την σχέση

$$f = \frac{V_p}{V_b}, \quad (4.1)$$

όπου V_p είναι ο όγκος των πόρων που περιέχονται σε ένα δείγμα συνολικού όγκου (bulk volume) V_b ^(a). Ο όρος «πορώδες» αναφέρεται στο ενεργό πορώδες, δηλαδή, εκείνο που περικλείει μόνο τους αλληλοεπικοινωνούντες κενούς χώρους σε αντίθεση με εκείνους τους πόρους οι οποίοι είναι απομονωμένοι. Στην συνέχεια, ο όρος «πόρος» θα αναφέρεται στους ενεργούς πόρους ενώ οι απομονωμένοι πόροι θα θεωρούνται ως τμήμα του στερεού. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι μία ιδιότητα του πορώδους f είναι ότι αντιπροσωπεύει επίσης τον λόγο των επιφανειών (Biot, 1955)

$$f = \frac{S_p}{S_b}, \quad (4.2)$$

δηλαδή, το ποσοστό S_p που καταλαμβάνεται από τους πόρους σε οποιαδήποτε

^(a) Ο συνολικός όγκος V_b εκφράζεται ως το άθροισμα του όγκου του στερεού ελαστικού υλικού V_m και του όγκου των πόρων V_p .

εγκάρσια τομή επιφάνειας S_b του συνολικού (bulk) υλικού, με την υπόθεση ότι οι πόροι είναι τυχαία κατανομημένοι ως προς την θέση αλλά όχι απαραίτητα και ως προς την διεύθυνση. Το ότι ισχύει η παραπάνω σχέση μπορεί να επιβεβαιωθεί ολοκληρώνοντας τον λόγο S_p/S_b σε ένα μοναδιαίο μήκος σε διεύθυνση κάθετη στην εγκάρσια τομή επιφάνειας S_b . Η τιμή του ολοκληρώματος αντιπροσωπεύει το ποσοστό f του όγκου που καταλαμβάνεται από τους πόρους. Ο λόγος S_p/S_b είναι ανεξάρτητος της θέσης της εγκάρσιας τομής.

Ο τανυστής τάσεων στο πορώδες υλικό δίνεται από την σχέση

$$\begin{Bmatrix} T_{xx} + T & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} + T & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} + T \end{Bmatrix}, \quad (4.3)$$

έχοντας συμμετρία $T_{ij} = T_{ji}$, όπου $i, j = x, y, z$.

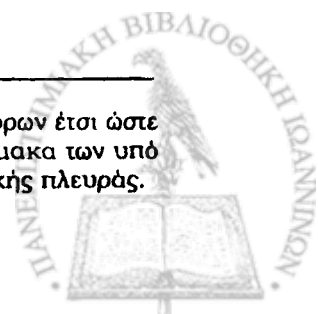
Οι μερικές συνιστώσες αυτού του τανυστή δεν έχουν την συμβατική σημασία. Έστω ένας κύβος του συνολικού υλικού, μοναδιαίου μεγέθους^(b). Το T αντιπροσωπεύει την συνολική κάθετη δύναμη εφελκυσμού που εφαρμόζεται στο ρευστό τμήμα των πλευρών του κύβου. Ορίζοντας ως p την υδροστατική πίεση του ρευστού στους πόρους μπορεί να γραφεί

$$T = -fp. \quad (4.4)$$

Οι υπόλοιπες συνιστώσες T_{xx} , T_{xy} , κλπ., του τανυστή είναι οι δυνάμεις που εφαρμόζονται στο τμήμα των πλευρών του κύβου που καταλαμβάνεται από το στερεό.

Το σύστημα ρευστού και στερεού λαμβάνεται ως ελαστικό σύστημα με ιδιότητες διατήρησης. Ο στερεός σκελετός θεωρείται ότι έχει συμπιεστότητα και ακαμψία σε διατμητικές τάσεις, ενώ το ρευστό μπορεί να είναι συμπιεστό. Η παραμόρφωση ενός μοναδιαίου κύβου θεωρείται πλήρως αντιστρεπτή. Με τον όρο παραμόρφωση εννοείται εκείνη που καθορίζεται από τους δύο τανυστές τροπής στο στερεό και το ρευστό τμήμα αντίστοιχα, οι οποίοι ορίζονται στην συνέχεια.

^(b) Ο μοναδιαίος κύβος θεωρείται αρκετά μεγάλος συγκρινόμενος με το μέγεθος των πόρων έτσι ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ομογενής και ταυτόχρονα αρκετά μικρός σε σχέση με την κλίμακα των υπό μελέτη μακροσκοπικών φαινομένων, έτσι ώστε να θεωρηθεί απειροστός από μαθηματικής πλευράς.



Οι συνιστώσες μέσης μετατόπισης στο στερεό ορίζονται ως u_x, u_y, u_z , και οι αντίστοιχες συνιστώσες στο ρευστό ως U_x, U_y, U_z .

Οι συνιστώσες τροπής για το στερεό και το ρευστό, αντίστοιχα, είναι

$$E_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \frac{1}{2} E_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad \text{κλπ.} \quad (4.5)$$

και

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right), \quad \text{κλπ.}$$

Μέσω μίας γενίκευσης της διαδικασίας που ακολουθείται στην κλασσική θεωρία ελαστικότητας, η ελαστική δυναμική ενέργεια V δίνεται από την έκφραση

$$2V = T_{xx} E_{xx} + T_{yy} E_{yy} + T_{zz} E_{zz} + T_{yz} E_{yz} + T_{zx} E_{zx} + T_{xy} E_{xy} + T\varepsilon, \quad (4.6)$$

με

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.$$

Εάν υποθεθεί ότι οι επτά συνιστώσες της τάσης είναι γραμμικές συναρτήσεις των επτά συνιστωσών της τροπής, η έκφραση $2V$ είναι μία ομογενής δευτεροβάθμια συνάρτηση της τροπής, με είκοσι-οκτώ διακριτούς συντελεστές. Οι συνιστώσες της τάσης δίνονται από τις μερικές παραγώγους του V ως προς τις συνιστώσες της τροπής

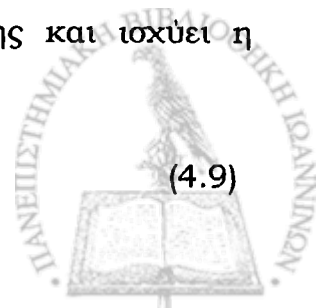
$$\frac{\partial V}{\partial E_{xx}} = T_{xx}, \quad \frac{\partial V}{\partial E_{xy}} = T_{xy}, \quad \text{κλπ.}, \quad \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = T. \quad (4.7)$$

Η σχέση (4.7) γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \\ T_{xy} \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & c_{56} & c_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & c_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ E_{yz} \\ E_{zx} \\ E_{xy} \\ \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Ο πίνακας των συντελεστών είναι τετραγωνικής μορφής και ισχύει η συμμετρική ιδιότητα

$$c_{ij} = c_{ji}. \quad (4.9)$$



Το ολικό πεδίο τάσεων (4.3) του συνολικού υλικού ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(T_{xx} + T) + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0, \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(T_{yy} + T) + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0, \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(T_{zz} + T) + \rho Z &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα μάζας του συνολικού υλικού και

X, Y, Z είναι οι συνιστώσες της δύναμης σώματος (body force) ανά μονάδα μάζας.

Αντικαθιστώντας στην (4.10) τις συνιστώσες τάσης συναρτήσεως των τροπών από την (4.8) λαμβάνονται τρεις εξισώσεις για τις άγνωστες μετατοπίσεις u_x, u_y, u_z του στερεού και U_x, U_y, U_z του ρευστού, αντίστοιχα.

Τρεις επιπλέον εξισώσεις για τις άγνωστες μετατοπίσεις του στερεού και του ρευστού παράγονται εισάγοντας τον νόμο που διέπει την ροή ρευστού σε πορώδες υλικό. Μία γενικευμένη μορφή του νόμου του Darcy για μη ισότροπο υλικό δίνεται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_f X \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho_f Y \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_f Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_x - \dot{u}_x \\ \dot{U}_y - \dot{u}_y \\ \dot{U}_z - \dot{u}_z \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

όπου ρ_f είναι η πυκνότητα μάζας του ρευστού,

k_{ij} είναι ένας πίνακας ο οποίος αποτελεί μία γενίκευση της σταθεράς του Darcy εάν συμπεριληφθεί στον συντελεστή του ιξώδους,

$\dot{U}_x, \dot{U}_y, \dot{U}_z$ είναι οι μέσες ταχύτητες του ρευστού και

$\dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z$ είναι οι μέσες ταχύτητες του στερεού.

Η συμμετρία των συντελεστών

$$k_{ij} = k_{ji}$$

(4.12)



προκύπτει από την ύπαρξη μιας συνάρτησης διάχυσης τέτοιας ώστε ο ρυθμός διάχυσης της ενέργειας στο πορώδες υλικό σε ηρεμία να εκφράζεται από την θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή

$$2D = \sum_{ij} k_{ij} \dot{U}_i \dot{U}_j . \quad (4.13)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (4.11) με το f και λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (4.4) προκύπτει

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} + \rho_1 X \\ \frac{\partial T}{\partial y} + \rho_1 Y \\ \frac{\partial T}{\partial z} + \rho_1 Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_x - \dot{u}_x \\ \dot{U}_y - \dot{u}_y \\ \dot{U}_z - \dot{u}_z \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

όπου $\rho_1 = \rho_f f$ είναι η μάζα του ρευστού ανά μοναδιαίο όγκο του συνολικού υλικού. Οι τρεις εξισώσεις που λαμβάνονται συνδυάζοντας τις (4.10) και (4.8) μαζί με τις τρεις εξισώσεις (4.14) καθορίζουν τις τρεις άγνωστες συνιστώσες μετατόπισης για το ρευστό και το στερεό.

4.2.3. Ισότροπο υλικό

Οι προηγούμενες εξισώσεις ισχύουν για την πιο γενική περίπτωση συμμετρίας. Στην πράξη, τα υλικά θα είναι είτε ισότροπα ή θα παρουσιάζουν έναν μεγάλο βαθμό συμμετρίας η οποία απλοποιεί τις εξισώσεις.

Στην περίπτωση ισοτροπίας η ελαστική δυναμική ενέργεια (4.6) γίνεται (Biot, 1954)

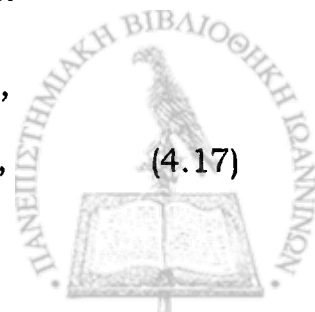
$$\begin{aligned} 2V = & (A + 2N)(E_{xx} + E_{yy} + E_{zz})^2 + N(E_{yz}^2 + E_{zx}^2 + E_{xy}^2 - 4E_{yy}E_{zz} - 4E_{zz}E_{xx} - 4E_{xx}E_{yy}) \\ & + 2Q(E_{xx} + E_{yy} + E_{zz})\varepsilon + R\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Θέτοντας

$$E = E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}, \quad (4.16)$$

οι σχέσεις τάσης-τροπής που προκύπτουν από την (4.7) γράφονται

$$\begin{aligned} T_{xx} &= 2NE_{xx} + AE + Q\varepsilon, & T_{yz} &= NE_{yz}, \\ T_{yy} &= 2NE_{yy} + AE + Q\varepsilon, & T_{zx} &= NE_{zx}, \end{aligned} \quad (4.17)$$



$$T_{zz} = 2NE_{zz} + AE + Q\varepsilon,$$

$$T_{xy} = NE_{xy},$$

$$T = QE + R\varepsilon.$$

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν μόνον τέσσερις ελαστικές σταθερές, οι A, N, Q, R .

Οι εξισώσεις ροής περιέχουν έναν μοναδικό συντελεστή b και γράφονται ως

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} + \rho_1 X &= b(\dot{U}_x - \dot{u}_x), \\ \frac{\partial T}{\partial y} + \rho_1 Y &= b(\dot{U}_y - \dot{u}_y), \\ \frac{\partial T}{\partial z} + \rho_1 Z &= b(\dot{U}_z - \dot{u}_z). \end{aligned} \quad (4.18)$$

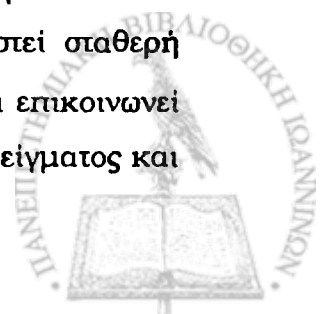
Γίνεται η υπόθεση ότι δεν υπάρχει δύναμη σώματος οπότε τίθεται $X = Y = Z = 0$.

4.2.4. Οι ελαστικοί συντελεστές της θεωρίας ποροελαστικότητας

Οι ελαστικοί συντελεστές A, N, Q και R της θεωρίας ποροελαστικότητας μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει τεσσάρων άμεσα μετρούμενων συντελεστών $\mu, \kappa, \delta, \gamma$ και του συντελεστή πορώδους f (Biot και Willis, 1957). Υπό συγκεκριμένες υποθέσεις, ο συντελεστής γ δεν χρειάζεται να μετρηθεί εάν είναι γνωστή η συμπιεστότητα του ρευστού c και έχουν ήδη μετρηθεί τα δ και f . Ο πιο συνηθισμένος τρόπος μέτρησης είναι ο συνδυασμός μέτρησης του μέτρου διάτμησης μ , της περιβεβλημένης (jacketed) συμπιεστότητας κ και της μη περιβεβλημένης (unjacketed) συμπιεστότητας δ του πορώδους στερεού και ενός μη περιβεβλημένου συντελεστή περιεχομένου ρευστού (fluid content) γ . Το μέτρο διάτμησης μ του συνολικού υλικού είναι ισοδύναμο προς τον ελαστικό συντελεστή N .

4.2.4.1. Μέτρηση περιβεβλημένης συμπιεστότητας

Στην μέτρηση περιβεβλημένης συμπιεστότητας, ένα δείγμα του υλικού περιβάλλεται από ένα λεπτό αδιαπέραστο περίβλημα και στην συνέχεια υπόκειται σε μία εξωτερική πίεση ρευστού p' . Για να εξασφαλιστεί σταθερή εσωτερική πίεση ρευστού, το εσωτερικό του περιβλήματος μπορεί να επικοινωνεί με την ατμόσφαιρα μέσω ενός σωλήνα. Μετράται η διαστολή E του δείγματος και



καθορίζεται ένας συντελεστής περιβεβλημένης συμπίεσιότητας κ μέσω της σχέσης

$$\kappa = -\frac{E}{p'}. \quad (4.19)$$

Κατά την μέτρηση αυτή, όλη η πίεση του ρευστού μεταδίδεται στα στερεά τμήματα των επιφανειών του δείγματος. Επομένως

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = -p'. \quad (4.20)$$

Επιπλέον, η πίεση των πόρων παραμένει ουσιαστικά σταθερή, οπότε

$$T = 0. \quad (4.21)$$

Οι τροπές του στερεού είναι

$$E = -\kappa p', \quad E_{xx} = E_{yy} = E_{zz} = -\frac{\kappa p'}{3}. \quad (4.22)$$

Από τις εξισώσεις (4.17) προκύπτει

$$-p' = -\frac{2}{3}N\kappa p' - A\kappa p' + Q\varepsilon, \quad (4.23)$$

$$0 = -Q\kappa p' + R\varepsilon.$$

Απαλείφοντας τα ε και p , λαμβάνεται η σχέση

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{2}{3}N + A - \frac{Q^2}{R}, \quad (4.24)$$

η οποία δηλώνει ότι η ποσότητα $A - \frac{Q^2}{R}$ είναι ισοδύναμη με τον συντελεστή Lamé λ του πορώδους υλικού υπό συνθήκες σταθερής πίεσης πόρων.

4.2.4.2. Μέτρηση μη περιβεβλημένης συμπίεσιότητας

Στην μέτρηση μη περιβεβλημένης συμπίεσιότητας, ένα δείγμα του υλικού εμβαπτίζεται σε ένα ρευστό στο οποίο εφαρμόζεται μία πίεση p' . Όταν η πίεση του ρευστού έχει εισχωρήσει πλήρως στους πόρους, μετράται η διαστολή του δείγματος και καθορίζεται ένας συντελεστής μη περιβεβλημένης συμπίεσιότητας, μέσω της σχέσης



$$\delta = -\frac{E}{p'}. \quad (4.25)$$

Στην περίπτωση αυτή η πίεση δρα τόσο στο στερεό κλάσμα $(1-f)$ όσο και στο ρευστό κλάσμα f των επιφανειών του δείγματος δίνοντας

$$\begin{aligned} T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} &= -(1-f)p', \\ T &= -fp'. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Οι τροπές δίνονται από τις σχέσεις

$$E_{xx} = E_{yy} = E_{zz} = -\frac{\delta p'}{3}, \quad E = -\delta p'. \quad (4.27)$$

Από τις εξισώσεις (4.17) προκύπτει η σχέση

$$1 - \left(\frac{Q+R}{R}\right)f = \left[\frac{2}{3}N + \left(A - \frac{Q^2}{R}\right)\right]\delta, \quad (4.28)$$

η οποία, μέσω της εξίσωσης (4.24), δίνει

$$\left(\frac{Q+R}{R}\right)f = 1 - \frac{\delta}{\kappa}. \quad (4.29)$$

Για να καθοριστούν οι ιδιότητες του συστήματος, απαιτείται μία επιπλέον μέτρηση η οποία πρέπει να περιλαμβάνει την τροπή του ρευστού. Έστω $f(E-\varepsilon)$ ο όγκος του ρευστού που εισέρχεται στους πόρους ενός μοναδιαίου όγκου πορώδους υλικού, σε μία μέτρηση μη περιβεβλημένης συμπιεστότητας (Biot and Willis, 1957). Ορίζεται έτσι ένας συντελεστής περιεχομένου ρευστού γ μέσω της σχέσης

$$\gamma = \frac{f(E-\varepsilon)}{p'}, \quad (4.30)$$

σε μία μέτρηση μη περιβεβλημένης συμπιεστότητας. Οι τροπές του ρευστού υπολογίζονται από την σχέση (4.30) ως

$$\varepsilon = -\frac{\gamma}{f}p' + E, \quad (4.31)$$



$$\eta \quad \varepsilon = -\frac{\gamma}{f} p' - \delta p'. \quad (4.32)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (4.26b), (4.27b) και (4.32) στην τελευταία των εξισώσεων (4.17) προκύπτει

$$f = Q\delta + R\delta + R\frac{\gamma}{f}. \quad (4.33)$$

Συνοψίζοντας, λαμβάνονται οι σχέσεις

$$N = \mu,$$

$$\frac{2}{3}N + \left(A - \frac{Q^2}{R}\right) = \frac{1}{\kappa},$$

$$\left(\frac{Q+R}{R}\right)f = \left(1 - \frac{\delta}{\kappa}\right), \quad (4.34)$$

$$f = Q\delta + R\delta + R\frac{\gamma}{f}.$$

Οι συντελεστές της θεωρίας ποροελαστικότητας N , A , Q και R υπολογίζονται συναρτήσει των μετρούμενων παραμέτρων μ , κ , δ , γ από τις σχέσεις

$$N = \mu,$$

$$A = \frac{\frac{\gamma}{\kappa} + f^2 + (1-2f)\left(1 - \frac{\delta}{\kappa}\right)}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{\kappa}} - \frac{2}{3}\mu,$$

$$Q = \frac{f\left(1 - f - \frac{\delta}{\kappa}\right)}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{\kappa}}, \quad (4.35)$$

$$R = \frac{f^2}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{\kappa}}.$$



4.3. Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

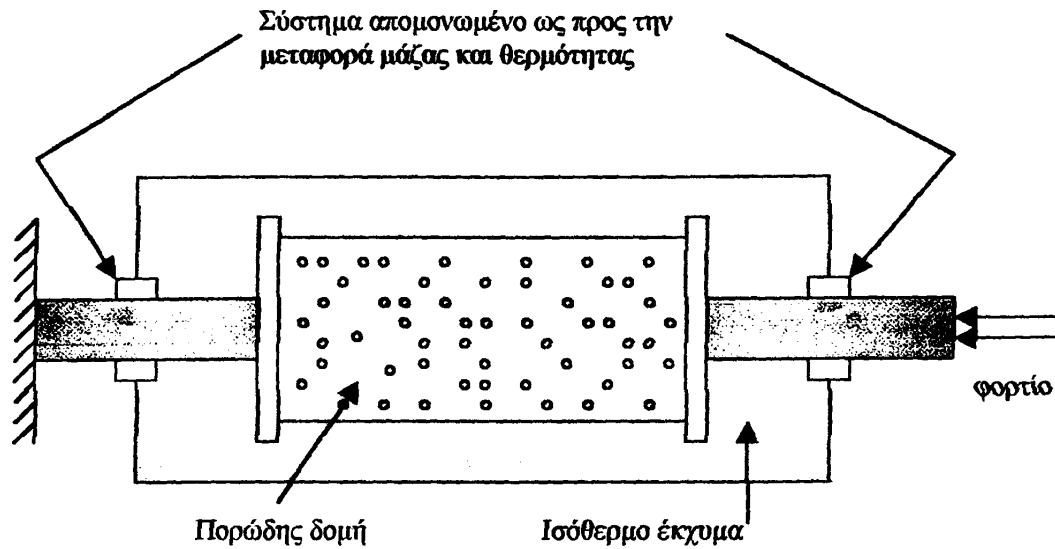
4.3.1. Εισαγωγή

Αντικειμενικός σκοπός της θεωρίας προσαρμοστικής ελαστικότητας (theory of adaptive elasticity) των Cowin και Hegedus (1976) είναι η διατύπωση ενός μοντέλου για την κατανόηση και πρόβλεψη των ιδιοτήτων επαναδόμησης του φυσιολογικού ζωντανού οστού. Στο μοντέλο αυτό, η θεμέλια ουσία θεωρείται πορώδες ελαστικό στερεό το οποίο περιέχει ένα ρευστό έκχυμα στους πόρους του. Οι ιδιότητες προσαρμογής του ζωντανού οστού περιγράφονται από μία ελεγχόμενη από τροπή χημική αντίδραση, η οποία μεταφέρει μάζα, ορμή, εντροπία και ενέργεια προς και από το πορώδες ελαστικό στερεό. Η προσθήκη μάζας στο πορώδες στερεό τροποποιεί το πορώδες του. Το μοντέλο περιγράφεται με διατύπωση εξισώσεων για την ισορροπία μάζας, ορμής και ενέργειας και την ανισότητα εντροπίας. Στην συνέχεια, γίνονται καταστατικές υποθέσεις για τον συσχετισμό του ρυθμού της χημικής αντίδρασης, της τάσης και άλλων παραμέτρων με την τροπή, το πορώδες, την θερμοκρασία και την βαθμίδα πίεσης. Η διατύπωση του μοντέλου επιτρέπει να είναι η τροπή και το πορώδες ανεξάρτητες μεταβλητές, σε οποιοδήποτε σημείο στο υλικό. Οι καταστατικές υποθέσεις περιορίζονται βάσει θερμοδυναμικών αρχών. Οι τελικές καταστατικές εξισώσεις είναι όμοιες με εκείνες που χαρακτηρίζουν την μη γραμμική ελαστικότητα και η θεωρία απλοποιείται όταν η συνάρτηση του ρυθμού αντίδρασης μηδενίζεται. Η γενική θεωρία της προσαρμοστικής ελαστικότητας εξειδικεύεται για ισόθερμες διεργασίες που περιλαμβάνουν απειροστά μικρές τροπές (Hegedus και Cowin, 1976).

4.3.2. Το μοντέλο

Το πορώδες μέσο αποτελείται από δύο συστατικά: ένα πορώδες ελαστικό στερεό που αντιπροσωπεύει την θεμέλια ουσία του οστού μαζί με τα οστικά κύτταρα και ένα έκχυμα το οποίο αντιπροσωπεύει το εξωκυττάριο ρευστό και το πλάσμα του αίματος που ρέουν μέσα στην θεμέλια ουσία. Ένα σχηματικό διάγραμμα του μοντέλου φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Η πορώδης δομή τοποθετείται σε ένα λουτρό του εκχύματος. Το μηχανικό φορτίο εφαρμόζεται άμεσα στην πορώδη δομή μέσω των τοιχωμάτων του λουτρού του εκχύματος. Το σύστημα που αποτελείται από την πορώδη δομή και το λουτρό εκχύματος θεωρείται ότι είναι απομονωμένο ως προς την μεταφορά μάζας, θερμότητας και εντροπίας αλλά ανοικτό σε σχέση με τη μεταφορά ορμής λόγω φόρτισης.





Σχήμα 4.1: Σχηματικό διάγραμμα του μοντέλου επαναδόμησης (αναπαραγωγή από Cowin και Hegedus, 1976).

Το σύστημα που αποτελείται μόνο από την πορώδη δομή χωρίς το εμπεριέχον έκχυμα είναι ανοικτό σε σχέση με τη μεταφορά ορμής, μάζας, ενέργειας και εντροπίας.

Ως σύστημα ελέγχου λαμβάνεται η θεμέλια ουσία αφού οι μηχανικές της ιδιότητες καθορίζουν τις μηχανικές ιδιότητες του οστού. Έτσι, γράφονται οι εξισώσεις ισορροπίας και οι καταστατικές εξισώσεις μόνον για την θεμέλια ουσία. Το έκχυμα λαμβάνεται υπόψη μόνον στο βαθμό που μεταφέρει μάζα, ορμή, ενέργεια ή εντροπία στην θεμέλια ουσία. Ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρονται μάζα, ορμή, ενέργεια και εντροπία εξαρτάται από την τροπή σε τοπικό επίπεδο και τις άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές.

Το μοντέλο περιέχει μία επιπλέον απλοποίηση. Καθώς το πορώδες μεταβάλλεται, το εμβαδόν της ενδοεπιφάνειας ανάμεσα στην πορώδη δομή και το έκχυμα γενικά μεταβάλλεται. Δεν υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ του πορώδους και του εμβαδού της ενδοεπιφάνειας. Στο συγκεκριμένο μοντέλο θεωρούνται μόνο μεταβολές στο πορώδες και όχι στο εμβαδό της ενδοεπιφάνειας. Επίσης θεωρείται ότι οι θερμοδυναμικές ιδιότητες της ενδοεπιφάνειας ταυτίζονται με εκείνες των εσωτερικών σημείων της θεμέλιας ουσίας.

Επιπλέον, γίνονται δύο άλλες υποθέσεις που αφορούν την ισορροπία ορμής της πορώδους δομής. Πρώτον, θεωρείται ότι η δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ της πορώδους δομής και του εκχύματος είναι μικρή συγκρινόμενη με το φορτίο που εφαρμόζεται στην πορώδη δομή. Δεύτερον, μόνον ψευδο-στατικές (quasi-static) διεργασίες λαμβάνονται υπόψη. Αυτό δικαιολογείται αφού ο

χαρακτηριστικός χρόνος της επαναδόμησης είναι πολύ μεγάλος συγκρινόμενος με τον χαρακτηριστικό χρόνο για τα φαινόμενα αδράνειας.

Η συνολική (bulk) πυκνότητα ρ της πορώδους δομής εκφράζεται ως

$$\rho = \gamma_m \nu \quad (4.36)$$

όπου γ_m είναι η πυκνότητα του υλικού που συνιστά την θεμέλια ουσία και ν είναι το ποσοστό όγκου αυτού του υλικού.

Οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα είναι:

- (i) Η ισορροπία μάζας της πορώδους δομής χωρίς το έκχυμα (λαμβάνοντας υπόψη μεταφορά μάζας από και προς την πορώδη δομή).
- (ii) Η ισορροπία ορμής της πορώδους δομής.
- (iii) Η ισορροπία ενέργειας της πορώδους δομής.
- (iv) Η ανισότητα εντροπίας.

4.3.3. Καταστατικές υποθέσεις

Γίνονται καταστατικές υποθέσεις όμοιες με εκείνες που γίνονται για τα ελαστικά στερεά, αλλά με την προσθήκη μίας ανεξάρτητης μεταβλητής, η οποία είναι μέτρο του ποσοστού όγκου της θεμέλιας ουσίας. Έστω ξ το ποσοστό όγκου της θεμέλιας ουσίας σε μία κατάσταση αναφοράς χωρίς τροπή. Γίνεται η υπόθεση ότι η πυκνότητα γ_m του υλικού που συνιστά την θεμέλια ουσία είναι σταθερή. Επομένως, η διατήρηση μάζας δίνει την εξίσωση που διέπει το ξ .

Η πρώτη σημαντική καταστατική υπόθεση είναι ότι, σε σταθερή θερμοκρασία και μηδενικές δυνάμεις σώματος, υπάρχει μία μοναδική κατάσταση αναφοράς μηδενικής τροπής για όλες τις τιμές του ξ . Το ξ μπορεί επομένως να μεταβάλλεται χωρίς αλλαγή στην κατάσταση αναφοράς της τροπής. Το ξ ορίζεται συναρτήσει του ποσοστού όγκου ν που σχετίζεται με την κατάσταση τροπής που χαρακτηρίζεται από το F_{iK} , ως

$$\xi \equiv \nu \det F, \quad (4.37)$$

όπου $\det F$ είναι η ορίζουσα του πίνακα των βαθμίδων παραμόρφωσης F_{iK}

$$F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.38)$$

Η σχέση



$$x_i = \chi_i(X_K, t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.39)$$

δίνει τη θέση x_i του σωματιδίου X_K την χρονική στιγμή t .

Ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα μόνον για σταθερή πυκνότητα γ της θεμέλιας ουσίας. Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση ισορροπίας μάζας, λαμβάνεται μία σχέση ανάμεσα στην πρώτη χρονική παράγωγο του ξ και τον ρυθμό c με τον οποίο προστίθεται ή αφαιρείται μάζα ανά μονάδα όγκου.

Στην συνέχεια, διατυπώνονται καταστατικές σχέσεις για την ειδική ελεύθερη ενέργεια ψ , την εντροπία η , την ροή θερμότητας q , τον τανυστή τάσεων T_{ij} , τον όρο παραγωγής εντροπίας h , και τον ρυθμό c με τον οποίο προστίθεται ή αφαιρείται μάζα ανά μονάδα όγκου (Cowin and Hegedus, 1976). Οι καταστατικές υποθέσεις είναι ότι κάθε μία από τις παραπάνω ποσότητες εξαρτάται από τη θερμοκρασία θ , την βαθμίδα θερμοκρασίας θ_i , το ποσοστό όγκου μηδενικής τροπής ξ και τις βαθμίδες παραμόρφωσης F_{iK} .

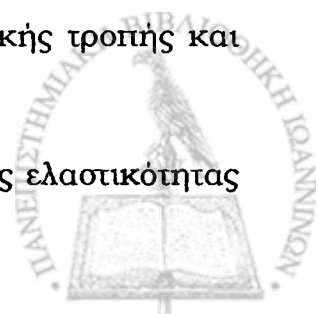
Συνοψίζοντας, οι βασικές εξισώσεις που συνιστούν την θεωρία οστικής επαναδόμησης είναι:

- (i) Η ισορροπία μάζας.
- (ii) Η ισορροπία ορμής.
- (iii) Η ισορροπία ενέργειας.
- (iv) Η ανισότητα εντροπίας.
- (v) Οι καταστατικές σχέσεις για την ροή θερμότητας, τον όρο παραγωγής εντροπίας και τον ρυθμό με τον οποίο προστίθεται ή αφαιρείται μάζα.
- (vi) Οι καταστατικές σχέσεις για την ειδική ελεύθερη ενέργεια, την εντροπία και τον τανυστή τάσεων.

4.3.4. Προσαρμοστική ελαστικότητα για μικρές τροπές και ισόθερμες διεργασίες

Για ισόθερμες διεργασίες, το προηγούμενο σύστημα εξισώσεων απλοποιείται σημαντικά: η ισορροπία μάζας, η ισορροπία ορμής και η καταστατική εξίσωση του τανυστή τάσης εκφράζονται από τις ίδιες εξισώσεις, ενώ η ειδική ελεύθερη ενέργεια και ο ρυθμός με τον οποίο προστίθεται ή αφαιρείται μάζα είναι τώρα συναρτήσεις μόνον του ποσοστού όγκου μηδενικής τροπής και της βαθμίδας παραμόρφωσης.

Στην περίπτωση μικρών τροπών, η θεωρία προσαρμοστικής ελαστικότητας εκφράζεται από τις σχέσεις (Hegedus και Cowin, 1976)



- (1) Την συνθήκη ισορροπίας τάσεων, όπου το v δίδεται για όρους πρώτης τάξης στην τροπή

$$T_{y,j} + \gamma_m v b_i = 0, \quad (4.40)$$

όπου T_{ij} είναι ο τανυστής των τάσεων και b_i η δύναμη σώματος.

- (2) Την καταστατική σχέση για την τάση

$$T_{ij} = (\xi_0 + e) C_{ijkl}(e) E_{kl}, \quad (4.41)$$

όπου $C_{ijkl}(e)$ είναι ο πίνακας των συντελεστών του υλικού που εξαρτάται από το e και E_{kl} είναι ο τανυστής της τροπής. Πρόκειται για μία τροποποιημένη μορφή του νόμου του Hooke ως προς το ότι η αναλογία ανάμεσα στην τάση και την τροπή εξαρτάται από το ποσοστό όγκου του υλικού της θεμέλιας ουσίας. Η παραπάνω σχέση απλοποιείται στον νόμο του Hooke όταν το ξ_0 τεθεί ίσο με την μονάδα και το e ίσο με το μηδέν.

- (3) Την σχέση ρυθμού αντίδρασης-τροπής

$$\dot{e} = a(e) + A_{ij}(e) E_{ij}, \quad (4.42)$$

όπου \dot{e} είναι η πρώτη χρονική παράγωγος του e που εκφράζει τον ρυθμό της επαναδόμησης,

$A_{ij}(e)$ είναι ο συντελεστής ρυθμού αντίδρασης-τροπής και

$a(e)$ είναι μία «σταθερά» του υλικού που εξαρτάται μόνον από το e .

- (4) Τις σχέσεις τροπής-μετατόπισης

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (4.43)$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν ένα σύστημα 16 βαθμωτών εξισώσεων με 16 βαθμωτούς αγνώστους T_{ij} , E_{ij} , u_i και e .

4.3.5. Προβλήματα συνοριακών συνθηκών – αρχικών τιμών

Για τον καθορισμό ενός προβλήματος συνοριακών τιμών μετατόπισης στην απειροστή (μικρές τροπές) θεωρία προσαρμοστικής ελαστικότητας, πρέπει να δίνονται τα ακόλουθα δεδομένα:



- α) η γεωμετρία του σώματος B και οι υλικές του ιδιότητες γ , $a(e)$, $A_{ij}(e)$ και $C_{ijkl}(e)$,
- β) το χρονικό διάστημα $[0, t_0)$ για το οποίο ζητείται η λύση,
- γ) το πεδίο δυνάμεων σώματος b ,
- δ) η συνεχής μετατόπιση επιφάνειας \hat{u} που καθορίζεται στο ∂B για $[0, t_0)$, και
- ε) το συνεχές πεδίο αρχικής μετατόπισης $u_0(x)$ και το συνεχές πεδίο αρχικού σχετικού κλάσματος όγκου $e_0(x)$ για όλα τα $x \in B$.

Με τα δεδομένα αυτά, το πρόβλημα συνοριακών τιμών μετατόπισης της ψευδο-στατικής, ισοθερμικής, απειροστής ελαστικότητας είναι ο καθορισμός των πεδίων $u_i(x, t)$, $e(x, t)$, $E_{ij}(x, t)$ και $T_{ij}(x, t)$ που αντιστοιχούν στο b τα οποία ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad e(x, 0) = e_0(x), \quad x \in B, \quad (4.44)$$

τις συνοριακές συνθήκες

$$u(x, t) = \hat{u}(x, t), \quad x \in \partial B \quad (4.45)$$

και τις διαφορικές εξισώσεις της συνθήκης ισορροπίας (4.40), των σχέσεων τροπής-μετατόπισης (4.43), των σχέσεων τάσης-τροπής (4.41) και της σχέσης ρυθμού αντίδρασης-τροπής (4.42).

Με ανάλογο τρόπο καθορίζεται ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών τάσης στην απειροστή θεωρία προσαρμοστικής ελαστικότητας.

4.3.6. Προσέγγιση των συντελεστών

Η απειροστή θεωρία προσαρμοστικής ελαστικότητας περιλαμβάνει τις συναρτήσεις $a(e)$, $A_{ij}(e)$ και $C_{ijkl}(e)$ ή $K_{ijkl}(e)$ που χαρακτηρίζουν τις υλικές ιδιότητες. Διατηρώντας όρους τάξης e , $|E|$, $e|E|$ και e^2 και αγνοώντας όρους τάξης $e^2|E|$, $e|E|^2$ και e^3 , οι υλικές συναρτήσεις προσεγγίζονται από τις σχέσεις

$$a(e) = c_0 + c_1 e + c_2 e^2,$$



$$A_{ij}(e) = A_{ij}^0 + eA_{ij}^1, \quad (4.46)$$

$$C_{ijkl}(e) = \frac{1}{\xi_0 + e} (\xi_0 C_{ijkl}^0 + e C_{ijkl}^1),$$

όπου $c_0, c_1, c_2, A_{ij}^0, A_{ij}^1, C_{ijkl}^0$ και C_{ijkl}^1 είναι σταθερές που αντιπροσωπεύουν τις υλικές ιδιότητες.

4.4. ΕΝΑ ΠΟΡΟΕΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΕΠΑΝΑΔΟΜΗΣΗΣ

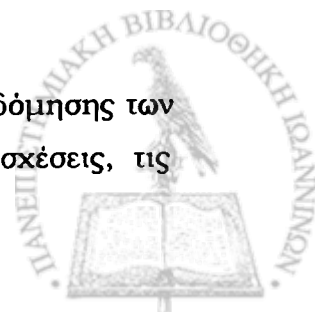
4.4.1. Εισαγωγή

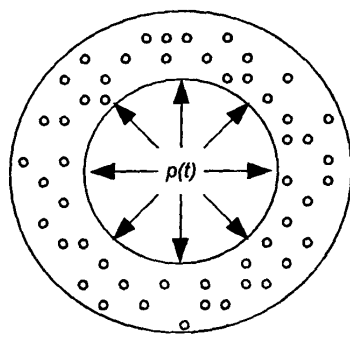
Αρχικά διατυπώνονται οι βασικές εξισώσεις της προτεινόμενης θεωρίας για την εσωτερική επαναδόμηση. Το πρόβλημα της εσωτερικής επαναδόμησης του οστού γύρω από έναν ενδομυελικό ήλο επιλύεται σε δύο βήματα όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Πρώτον, λύνεται το πρόβλημα της επαναδόμησης ενός ισότροπου κοίλου κυλίνδρου κυκλικής διατομής από προσαρμοστικό (adaptive) ποροελαστικό υλικό, ο οποίος υπόκειται σε αξονική φόρτιση και εσωτερική πίεση. Δεύτερον, δίνεται η λύση του προβλήματος ενός ισότροπου συμπαγούς ελαστικού κυλίνδρου ο οποίος υπόκειται σε εξωτερική πίεση, (Cowin και Van Buskirk, 1978). Τα δύο υποπροβλήματα συνδυάζονται ώστε να προκύψει η λύση του προβλήματος εξαναγκασμένης εισαγωγής του ισότροπου συμπαγούς ελαστικού κυλίνδρου μέσα στον κοίλο ισότροπο κύλινδρο από προσαρμοστικό ποροελαστικό υλικό. Έχει χρησιμοποιηθεί η εξάρτηση των ελαστικών συντελεστών της θεωρίας ποροελαστικότητας από το πορώδες (Biot και Willis, 1957).

Οι τιμές των άγνωστων υλικών συναρτήσεων που υπεισέρχονται στο πρόβλημα είναι προσεγγιστικές για μικρές τιμές του πορώδους. Δημιουργείται μία νέα καταστατική εξίσωση που εμπεριέχει την διεργασία της επαναδόμησης. Στην συνέχεια, προτείνεται μία νέα εξίσωση ρυθμού επαναδόμησης ελεγχόμενη από την τροπή στην οποία εμπεριέχονται τόσο το στερεό όσο και το ρευστό συστατικό του οστού. Σύμφωνα με την προτεινόμενη προσέγγιση των υλικών συναρτήσεων από το πορώδες, η αριθμητική λύση της εξίσωσης του ρυθμού επαναδόμησης οδηγεί σε μία σχέση ανάμεσα στον ρυθμό επαναδόμησης και το πορώδες.

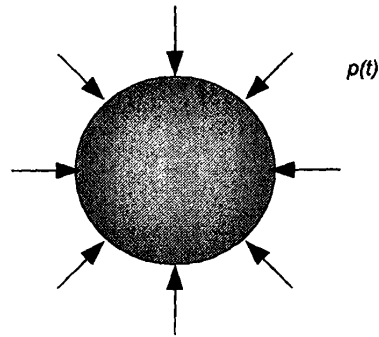
4.4.2. Θεωρητική διατύπωση του μοντέλου

Το βασικό σύστημα εξισώσεων στην θεωρία εσωτερικής επαναδόμησης των Cowin και Van Buskirk (1978), αποτελείται από τις καταστατικές σχέσεις, τις





(a)



(b)

Σχήμα 4.2: Η διάσπαση του προβλήματος της εξαναγκασμένης εισαγωγής ενός ενδομυελικού ήλου μέσα σε ένα ποροελαστικό μοντέλο οστού, σε δύο υποπροβλήματα:

(a) Ο κοίλος ισότροπος ποροελαστικός κύλινδρος υπόκειται σε εσωτερική ακτινική πίεση $p(t)$.

(b) Ο ισότροπος στερεός ελαστικός κύλινδρος υπόκειται σε εξωτερική ακτινική πίεση $p(t)$.

κινηματικές σχέσεις, τις εξισώσεις ισορροπίας τάσεων και την εξίσωση του ρυθμού επαναδόμησης.

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι το οστό είναι ένα προσαρμοστικό ισότροπο πορώδες ελαστικό στερεό το οποίο περιέχει ένα ιζώδες συμπιεστό ρευστό, το προαναφερόμενο σύστημα εξισώσεων διατυπώνεται με βάση την υλική περιγραφή της θεωρίας ποροελαστικότητας (Biot, 1941, 1955) σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Σχέσεις τροπής-μετατόπισης

Οι κινηματικές σχέσεις για το στερεό μέρος σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$E_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad E_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad E_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (4.47)$$

$$E_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \quad E_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad E_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right),$$

όπου u_r, u_θ, u_z είναι οι συνιστώσες μέσης μετατόπισης στις διευθύνσεις r, θ, z ,

και E_{ij} $i, j = r, \theta, z$, είναι οι συνιστώσες τροπής του στερεού.



Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για το ρευστό τμήμα όπου τα U_r , U_θ , U_z και ε_{ij} , $i, j = r, \theta, z$, ορίζουν τις συνιστώσες μέσης μετατόπισης και τις τροπές του ρευστού αντίστοιχα.

Καταστατικές σχέσεις

Οι καταστατικές σχέσεις για ένα ισότροπο ποροελαστικό υλικό σε κυλινδρικές συντεταγμένες δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} T_{rr} &= 2NE_{rr} + AE + Q\varepsilon, & T_{\alpha\alpha} &= NE_{\alpha\alpha}, \\ T_{\theta\theta} &= 2NE_{\theta\theta} + AE + Q\varepsilon, & T_{zr} &= NE_{zr}, \\ T_{zz} &= 2NE_{zz} + AE + Q\varepsilon, & T_{r\theta} &= NE_{r\theta}, \\ T &= QE + R\varepsilon, \end{aligned} \quad (4.48)$$

όπου A , N , R , Q είναι οι ελαστικές σταθερές του υλικού (Biot, 1941, 1955, 1956, Biot και Willis, 1957), ενώ

E και ε είναι οι διογκώσεις (dilatations) του στερεού και του ρευστού αντίστοιχα, που δίνονται από τις σχέσεις

$$E = E_{rr} + E_{\theta\theta} + E_{zz}, \quad (4.49)$$

και

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}. \quad (4.50)$$

Σημειώνεται ότι η εξίσωση (4.50) δεν παρέχει την πραγματική τροπή στο ρευστό αλλά την απόκλιση (divergence) του πεδίου μετατοπίσεων του ρευστού (Biot και Willis, 1957).

Εξισώσεις ισορροπίας

Το πεδίο συνολικών τάσεων του συνολικού υλικού (bulk material), με απουσία δύναμης σώματος, ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(T_{rr} + T) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(T_{\theta\theta} + T) + \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} T_{r\theta} + \frac{\partial T_{\alpha\alpha}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}(T_{zz} + T) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{T_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$



Νόμος Darcy

Ο νόμος του Darcy που διέπει την ροή ρευστού δια μέσου του ισότροπου πορώδους υλικού, με απουσία δύναμης σώματος, δίνεται ως

$$\frac{\partial T}{\partial r} = C \frac{\partial}{\partial r} (U_r - u_r),$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = C \frac{\partial}{\partial r} (U_\theta - u_\theta), \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = C \frac{\partial}{\partial z} (U_z - u_z),$$

όπου C είναι μία σταθερά που εξαρτάται από την διαπερατότητα κ_m και το πορώδες f του μέσου και από το ιξώδες η του ρευστού (Johnson *et al.*, 1982, Nowinski και Davis, 1972),

$$C = \frac{\eta f^2}{\kappa_m}. \quad (4.53)$$

4.4.2.1. Θεωρία «προσαρμοστικής ποροελαστικότητας» μικρών τροπών

Στην θεωρία προσαρμοστικής ελαστικότητας για μικρές τροπές (Hegedus και Cowin, 1976), η σχέση τάσης-τροπής για το οστό, η οποία εμπεριέχει την εσωτερική επαναδόμηση δίνεται ως

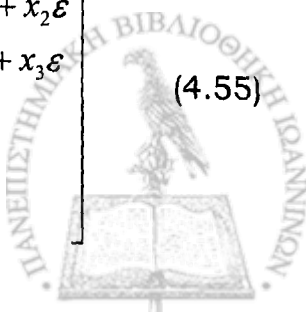
$$T_{ij} = (\xi_0 + e) C_{ijkl}(e) E_{km}, \quad (4.54)$$

όπου e είναι η μεταβολή στο ποσοστό όγκου ξ του υλικού της θεμέλιας ουσίας από την τιμή αναφοράς του ξ_0 ως αποτέλεσμα της εσωτερικής επαναδόμησης $e = \xi - \xi_0$ και

$C_{ijkl}(e)$ είναι ο πίνακας των υλικών «σταθερών» που είναι συνάρτηση του e .

Η εξίσωση (4.48) γράφεται σε μορφή πίνακα ως,

$$\begin{bmatrix} T_{rr} + T \\ T_{\theta\theta} + T \\ T_{zz} + T \\ T_{\theta z} \\ T_{zr} \\ T_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2N + A + Q & A + Q & A + Q & 0 & 0 & 0 \\ A + Q & 2N + A + Q & A + Q & 0 & 0 & 0 \\ A + Q & A + Q & 2N + A + Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{rr} + x_1 \varepsilon \\ E_{\theta\theta} + x_2 \varepsilon \\ E_{zz} + x_3 \varepsilon \\ E_{\theta z} \\ E_{zr} \\ E_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$



έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση,

$$\left. \begin{aligned} (2N + A + Q)x_1 + (A + Q)x_2 + (A + Q)x_3 &= Q + R \\ (A + Q)x_1 + (2N + A + Q)x_2 + (A + Q)x_3 &= Q + R \\ (A + Q)x_1 + (A + Q)x_2 + (2N + A + Q)x_3 &= Q + R \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \frac{-(Q + R)}{2N + 3A + 3Q}, \quad (4.56)$$

όπου τα x_1, x_2, x_3 αντιπροσωπεύουν παραμέτρους που σχετίζονται με το κλάσμα της διόγκωσης ρευστού που συμμετέχει στην τροπή του συνολικού υλικού κατά τις διευθύνσεις r, θ, z αντίστοιχα.

4.4.2.1.1. Καταστατικές σχέσεις προτεινόμενης θεωρίας

Επομένως, οι σχέσεις τάσης-τροπής για το ισότροπο ποροελαστικό οστό μπορούν να γραφούν ως

$$(T_{ij} + \delta_{ij}T) = C_{ijkl} \left(E_{km} - \delta_{km} \frac{Q + R}{2N + 3A + 3Q} \varepsilon \right). \quad (4.57)$$

Για την ενσωμάτωση της προσαρμοστικής φύσης του οστού, γίνεται η υπόθεση ότι οι καταστατικές σχέσεις που περιγράφουν ένα ισότροπο ποροελαστικό προσαρμοστικό οστό μπορούν να γραφούν, σε αναλογία με την εξίσωση (4.54), ως

$$(T_{ij} + \delta_{ij}T) = C_{ijkl} (e) \left(\xi E_{km} - (1 - \xi) \delta_{km} \frac{Q + R}{2N + 3A + 3Q} \varepsilon \right). \quad (4.58)$$

Ο συνολικός όγκος του ποροελαστικού μέσου έχει θεωρηθεί ότι παραμένει σταθερός καθ' όλη την διάρκεια της διεργασίας επαναδόμησης, το οποίο καθορίζεται από την απαίτηση το άθροισμα των συντελεστών ξ και $1 - \xi$ να ισούται με την μονάδα.

4.4.2.1.2. Εξίσωση ρυθμού επαναδόμησης προτεινόμενης θεωρίας

Επιπλέον, γίνεται η υπόθεση ότι η εξίσωση του ρυθμού επαναδόμησης, σε συμφωνία με την διατύπωση που χρησιμοποιείται στην θεωρία προσαρμοστικής ελαστικότητας για μικρές τροπές (Hegedus και Cowin, 1976), για ισότροπο υλικό, δίνεται ως

$$\dot{e} = A_1(e) + A_2(e) \left(E - \frac{3(Q + R)}{2N + 3A + 3Q} \varepsilon \right), \quad (4.59)$$



όπου τα $A_1(e)$ και $A_2(e)$ είναι συντελεστές του υλικού οι οποίοι εξαρτώνται από την μεταβολή στο ποσοστό όγκου e και \dot{e} είναι η πρώτη χρονική παράγωγος του e .

4.4.2.1.3. Σχέση πορώδους-μεταβολής ποσοστού όγκου

Τελικά, εξάγεται μία σχέση ανάμεσα στο πορώδες f όπως αυτό ορίζεται στην εξίσωση (4.1) και την μεταβολή στο ποσοστό όγκου e του υλικού της θεμέλιας ουσίας. Γράφοντας

$$f_0 = 1 - \xi_0, \quad (4.60)$$

όπου f_0 είναι το πορώδες πριν ξεκινήσει η εσωτερική επαναδόμηση,

ξ_0 είναι ένα ποσοστό όγκου αναφοράς της θεμέλιας ουσίας,

και

$$f = 1 - \xi, \quad (4.61)$$

όπου f είναι το πορώδες σε μία χρονική στιγμή t αφού έχει ξεκινήσει η εσωτερική επαναδόμηση και

ξ είναι το ποσοστό όγκου της θεμέλιας ουσίας την χρονική στιγμή t ,

η μεταβολή στο πορώδες που οφείλεται στην διεργασία εσωτερικής επαναδόμησης μπορεί να εκφραστεί ως

$$\Delta f = f - f_0 = \xi_0 - \xi = -e. \quad (4.62)$$

Επομένως, το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφουν την προτεινόμενη θεωρία εσωτερικής επαναδόμησης οστού για ένα ισότροπο πορώδες ελαστικό οστό που περιέχει ιξώδες συμπιεστό ρευστό, αποτελείται από τις εξισώσεις (4.47), (4.48), (4.51), (4.52), (4.58) και (4.59).

4.4.3. **Πρώτο πρόβλημα συνοριακών συνθηκών: Το πρόβλημα του κοίλου ποροελαστικού κυλίνδρου**

Έστω το ποροελαστικό οστό γεωμετρίας κοίλου κυκλικού κυλίνδρου (Σχήμα 4.3) το οποίο υπόκειται σε μία ψευδο-στατική αξονική φόρτιση $-P(t)$ και μία εσωτερική ακτινική πίεση $p(t)$.

Επίπεδο $r\theta$

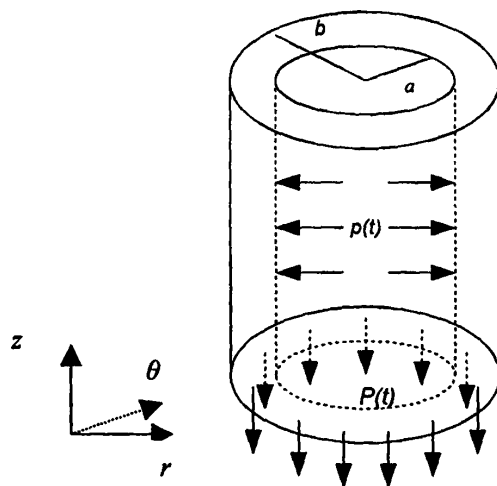
Οι συνοριακές συνθήκες στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου είναι



$$\text{στην } r = a: \quad T_{rr} + T = -p(t), \quad T_{r\theta} = 0, \quad (4.62)$$

$$\text{και στην } r = b: \quad T_{rr} + T = -p_0, \quad T_{r\theta} = 0. \quad (4.63)$$

Τα a και b είναι η εσωτερική και εξωτερική ακτίνα του κυλίνδρου αντίστοιχα και p_0 είναι μία σταθερή πίεση έξω από τον κύλινδρο. Οι συνοριακές συνθήκες (4.62) αντιπροσωπεύουν την ακτινική εσωτερική πίεση που ασκείται στο σύνολο (στερεό και ρευστό τμήμα) της εσωτερικής κυλινδρικής επιφάνειας της μυελικής κοιλότητας λόγω της εξαναγκασμένης εισαγωγής του ενδομυελικού ήλου. Οι συνοριακές συνθήκες (4.63) αναφέρονται στην πίεση που ασκείται από το περιβάλλον γύρω από το οστό στην εξωτερική επιφάνεια του κοίλου κυλίνδρου. Έχει υποθεθεί ότι δεν επιτρέπεται η ροή ρευστού προς και από την θεμέλια ουσία, στα σύνορα $r = a$ και $r = b$ (συνθήκη μη διαρροής), δηλαδή το σύστημα στερεού-ρευστού είναι απομονωμένο σε σχέση με την μεταφορά μάζας ως προς το περιβάλλον. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο έχουν παραληφθεί οι συνοριακές συνθήκες που εκφράζονται από την βαθμίδα της υδροστατικής πίεσης στις επιφάνειες $r = a$ και $r = b$. Για λόγους απλοποίησης, η πίεση έξω από τον κοίλο κύλινδρο έχει θεωρηθεί ως $p_0 = 0$.



Σχήμα 4.3: Ο κοίλος ποροελαστικός κύλινδρος υπόκειται σε αξονική φόρτιση $P(t)$ και ακτινική εσωτερική πίεση $p(t)$.

Άξονας -z

Η συνοριακή συνθήκη σε μία εγκάρσια διατομή S του κοίλου κυλίνδρου γράφεται ως (Hegedus και Cowin, 1976)

$$\int_S (T_{zz} + T) dS = -P(t), \quad (4.64)$$

όπου

$$dS = r dr d\theta \quad (4.65)$$

είναι η μοναδιαία επιφάνεια διατομής του κοίλου κυλίνδρου.

Το σύστημα των εξισώσεων (4.47), (4.48), (4.51), (4.52), (4.58), (4.59) και οι συνοριακές συνθήκες (4.62), (4.63), (4.64) αποτελούν ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα συνοριακών συνθηκών.

4.4.3.1. Επίλυση του προβλήματος συνοριακών συνθηκών - Μέθοδος λύσης

Θεωρείται μία λύση για τις μετατοπίσεις η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω εξισώσεις. Η προτεινόμενη λύση είναι

$$\begin{aligned} u_r &= u_r(r, t), & u_\theta &= 0, & u_z &= -D_1(t)z \\ U_r &= U_r(r, t), & U_\theta &= 0, & U_z &= -D_2(t)z. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Τότε οι κινηματικές σχέσεις (4.47) δίνουν

$$\begin{aligned} E_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & E_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r}, & E_{zz} &= -D_1(t), \\ E_{\theta z} &= E_{zr} = E_{r\theta} = 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για τα $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}$, κλπ.

Οι καταστατικές σχέσεις (4.48) γίνονται

$$\begin{aligned} T_{rr} &= (2N + A) \frac{\partial u_r}{\partial r} + A \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + Q \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right), \\ T_{\theta\theta} &= (2N + A) \frac{u_r}{r} + A \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + Q \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right), \\ T_{zz} &= (2N + A) \frac{\partial u_z}{\partial z} + A \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + Q \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right), \\ T &= Q \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right), \\ T_{\theta z} &= T_{zr} = T_{r\theta} = 0. \end{aligned} \quad (4.68)$$



Οι εξισώσεις ισορροπίας (4.51) δίνουν

$$\frac{\partial}{\partial r}(T_{rr} + T) + \frac{1}{r}T_{rr} - \frac{1}{r}T_{\theta\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(T_{zz} + T) = 0.$$
(4.69)

Ο νόμος του Darcy (4.52) γίνεται

$$\frac{\partial T}{\partial r} = C \frac{\partial}{\partial t}(U_r - u_r),$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = C \frac{\partial}{\partial t}(U_z - u_z).$$
(4.70)

Αντικαθιστώντας τις καταστατικές σχέσεις (4.68) στις σχέσεις ισορροπίας (4.69) και τον νόμο του Darcy (4.70) προκύπτουν δύο συστήματα διαφορικών εξισώσεων

$$(2N + A + Q)Lu_r + (Q + R)LU_r = 0,$$
(4.71)

$$QLu_r + C \frac{\partial}{\partial t}u_r + RL U_r - C \frac{\partial}{\partial t}U_r = 0,$$

όπου $L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}$ είναι ο τελεστής του Laplace, και

$$(2N + A + Q) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (Q + R) \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} = 0,$$
(4.72)

$$Q \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + C \frac{\partial u_z}{\partial z} + R \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} - C \frac{\partial U_z}{\partial t} = 0.$$

Αντικαθιστώντας την προτεινόμενη λύση για τα u_z και U_z στις σχέσεις (4.72), λαμβάνεται μία ταυτότητα και μία σχέση της μορφής

$$Cz \frac{\partial}{\partial t}(D_1(t) - D_2(t)) = 0,$$
(4.73)

από την οποία προκύπτει

$$D_2(t) = D_1(t) + \Theta,$$
(4.74)

όπου Θ είναι μία σταθερά.



Συνοριακές συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες (4.62) έως (4.64) δίνουν

στο $r = a$:

$$(2N + A + Q) \frac{\partial u_r}{\partial r} + (A + Q) \left(\frac{u_r}{r} - D_1(t) \right) + (Q + R) \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} - D_1(t) - \Theta \right) = -p(t), \quad (4.75)$$

στο $r = b$:

$$(2N + A + Q) \frac{\partial u_r}{\partial r} + (A + Q) \left(\frac{u_r}{r} - D_1(t) \right) + (Q + R) \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} - D_1(t) - \Theta \right) = 0, \quad (4.76)$$

και στην S :

$$2\pi(A + Q)(bu_r(b, t) - au_r(a, t)) - \pi(b^2 - a^2)(2N + A + Q)D_1(t) + \\ + 2\pi(Q + R)(bU_r(b, t) - aU_r(a, t)) - \pi(b^2 - a^2)(Q + R)(D_1(t) - \Theta) = -P(t). \quad (4.77)$$

Δηλαδή, το πρόβλημα έχει καταλήξει στο σύστημα εξισώσεων (4.71) με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες τις σχέσεις (4.75), (4.76), (4.77) και στην σχέση (4.74). Η εξίσωση (4.59) προς το παρόν δεν λαμβάνεται υπόψη.

4.4.3.1.1. Μέθοδος λύσης προβλήματος μη ομογενών συνοριακών συνθηκών

Για την επίλυση του προβλήματος μη ομογενών συνοριακών συνθηκών χρησιμοποιείται η ακόλουθη μέθοδος. Γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχει μια συνάρτηση $w = w(r, t)$ τέτοια ώστε

$$Lw(r, t) = 0 \Rightarrow w(r, t) = A_1(t)r + A_2(t)\frac{1}{r}, \quad (4.78)$$

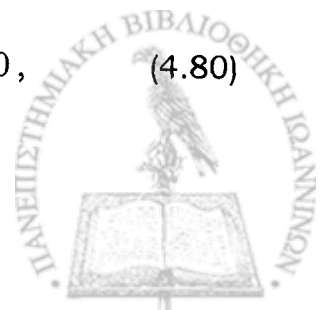
η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις

στο $r = a$:

$$(2N + A + Q) \frac{\partial w}{\partial r} + (A + Q) \left(\frac{w}{r} + D_1(t) \right) + (Q + R) \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} + D_1(t) + \Theta \right) = p(t), \quad (4.79)$$

στο $r = b$:

$$(2N + A + Q) \frac{\partial w}{\partial r} + (A + Q) \left(\frac{w}{r} + D_1(t) \right) + (Q + R) \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} + D_1(t) + \Theta \right) = 0, \quad (4.80)$$



και στην S :

$$2\pi(A+2Q+R)(bw(b,t)-aw(a,t))+\pi(b^2-a^2)(2N+A+2Q+R)D_1(t)+\pi(b^2-a^2)(Q+R)\Theta=P(t), \quad (4.81)$$

ή ισοδύναμα,

στο $r=a$:

$$2(N+A+2Q+R)A_1(t)-2N\frac{1}{a^2}A_2(t)+(A+2Q+R)D_1(t)=p(t)-(Q+R)\Theta, \quad (4.82)$$

στο $r=b$:

$$2(N+A+2Q+R)A_1(t)-2N\frac{1}{b^2}A_2(t)+(A+2Q+R)D_1(t)=-(Q+R)\Theta, \quad (4.83)$$

και στην S :

$$2(A+2Q+R)A_1(t)+(2N+A+2Q+R)D_1(t)=\frac{P(t)}{\pi(b^2-a^2)}-(Q+R)\Theta. \quad (4.84)$$

Τότε οι συναρτήσεις

$$\tilde{u}_r(r,t)=u_r(r,t)+w(r,t), \quad (4.85)$$

$$\tilde{U}_r(r,t)=U_r(r,t)+w(r,t),$$

ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων

$$(2N+A+Q)L\tilde{u}_r+(Q+R)L\tilde{U}_r=0, \quad (4.86)$$

$$QL\tilde{u}_r+C\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}_r+RL\tilde{U}_r-C\frac{\partial}{\partial t}\tilde{U}_r=0,$$

με ομογενείς συνοριακές συνθήκες

στο $r=a$:

$$(2N+A+Q)\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial r}+(A+Q)\frac{\tilde{u}_r}{r}+(Q+R)\left(\frac{\partial\tilde{U}_r}{\partial r}+\frac{\tilde{U}_r}{r}\right)=0, \quad (4.87)$$

στο $r=b$:

$$(2N+A+Q)\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial r}+(A+Q)\frac{\tilde{u}_r}{r}+(Q+R)\left(\frac{\partial\tilde{U}_r}{\partial r}+\frac{\tilde{U}_r}{r}\right)=0, \quad (4.88)$$



και στην S :

$$(A+Q)(b\tilde{u}_r(b,t)-a\tilde{u}_r(a,t))+(Q+R)(b\tilde{U}_r(b,t)-a\tilde{U}_r(a,t))=0. \quad (4.89)$$

4.4.3.1.2. Επίλυση ισοδύναμου προβλήματος ομογενών συνοριακών συνθηκών

Το σύστημα των εξισώσεων (4.86) μπορεί να γραφεί ως

$$D \begin{bmatrix} \tilde{u}_r \\ \tilde{U}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

όπου

$$D = \begin{bmatrix} Q \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + C \frac{\partial}{\partial t} & R \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) - C \frac{\partial}{\partial t} \\ (2N+A+Q) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) & (Q+R) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \end{bmatrix}.$$

Εισάγοντας μία συνάρτηση h τέτοια ώστε $\det(D)h=0$ (Ding *et al.*, 1996, Fotiadis *et al.*, 1999), λαμβάνεται η σχέση

$$\begin{cases} (Q+R) \left[Q \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + C \frac{\partial}{\partial t} \right] \\ - (2N+A+Q) \left[R \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) - C \frac{\partial}{\partial t} \right] \end{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) h = 0. \quad (4.91)$$

Υποθέτοντας ότι $h = h_1 + h_2$, η εξίσωση (4.91) είναι ισοδύναμη με το σύστημα εξισώσεων

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) h_1 = 0, \quad (4.92)$$

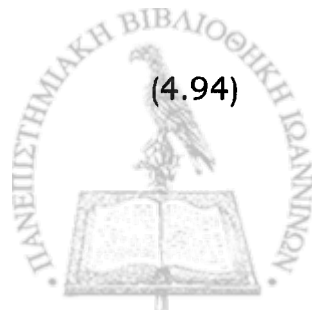
και

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) h_2 + k \frac{\partial}{\partial t} h_2 = 0, \quad (4.93)$$

όπου

$$k = \frac{C(2N+2Q+R+A)}{Q^2 - 2NR - AR}. \quad (4.94)$$

Η λύση της εξίσωσης (4.92) δίνεται ως



$$h_1(r,t) = A_3(t)r + \frac{A_4(t)}{r}. \quad (4.95)$$

Μέθοδος χωρισμού μεταβλητών

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών (Δάσιος και Κυριάκη, 1994), η h_2 μπορεί να γραφεί ως

$$h_2(r,t) = R(r)T(t). \quad (4.96)$$

Τότε, η εξίσωση (4.93) γίνεται

$$\frac{R(r)^{(2)}}{R} + \frac{1}{r} \frac{R(r)}{R} - \frac{1}{r^2} = -k \frac{T(t)^{(1)}}{T} = m^2, \quad (4.97)$$

ή ισοδύναμα,

$$kT^{(1)} + m^2T = 0, \quad (4.98)$$

με λύση

$$T(t) = B_1 e^{-\frac{m^2 t}{k}}, \quad (4.99)$$

και

$$r^2 R(r)^{(2)} + rR(r)^{(1)} - (r^2 m^2 + 1)R(r) = 0, \quad (4.100)$$

με λύση,

$$R(r) = B_2 I_1(mr) + B_3 K_1(mr), \quad (4.101)$$

όπου $I_1(mr)$ και $K_1(mr)$ είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους, αντίστοιχα, πρώτης τάξης (Μασσαλάς, 1985).

Έτσι, η σχέση (4.96) γράφεται

$$h_2(r,t) = (B_6 I_1(mr) + B_7 K_1(mr)) e^{-\frac{m^2 t}{k}}. \quad (4.102)$$

Οι συναρτήσεις \tilde{u}_r και \tilde{U}_r μπορούν να εκφραστούν ως

$$\tilde{u}_r = (Q + R) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) (h_1 + h_2), \quad (4.103)$$

$$\tilde{U}_r = -(2N + A + Q) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) (h_1 + h_2). \quad (4.104)$$



Δεδομένου ότι

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) h_1 = 0, \quad (4.105)$$

και

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) h_2 = -k \frac{\partial}{\partial t} h_2 = -k \frac{\partial}{\partial t} \left[(B_6 I_1(mr) + B_7 K_1(mr)) e^{-\frac{m^2 t}{k}} \right] =$$

$$(B_6 I_1(mr) + B_7 K_1(mr)) m^2 e^{-\frac{m^2 t}{k}}, \quad (4.106)$$

οι εκφράσεις για τα \tilde{u}_r και \tilde{U}_r μπορούν να γραφούν ως

$$\tilde{u}_r = (Q+R)(B_6 I_1(mr) + B_7 K_1(mr)) m^2 e^{-\frac{m^2 t}{k}}, \quad (4.107)$$

$$\tilde{U}_r = -(2N+A+Q)(B_6 I_1(mr) + B_7 K_1(mr)) m^2 e^{-\frac{m^2 t}{k}}.$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις (4.107) στις συνοριακές συνθήκες (4.87) και (4.88), λαμβάνονται οι σχέσεις

$$B_6 I_1(ma) + B_7 K_1(ma) = 0, \quad (4.108)$$

$$B_6 I_1(mb) + B_7 K_1(mb) = 0.$$

Το σύστημα των εξισώσεων (4.108) έχει μη μηδενική λύση μόνο εάν η ορίζουσα του είναι μηδέν, δηλαδή

$$I_1(ma)K_1(mb) - I_1(mb)K_1(ma) = 0, \quad (4.109)$$

και τότε

$$B_6 = -B_7 \frac{K_1(ma)}{I_1(ma)}. \quad (4.110)$$

Η εξίσωση (4.109) πρέπει να λυθεί ως προς m . Εάν η εξίσωση (4.109) ισχύει, η συνοριακή συνθήκη (4.89) ικανοποιείται αυτόματα.

4.4.3.2. Υπολογισμός μετατοπίσεων, τροπών, τάσεων

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.85), οι ακτινικές μετατοπίσεις για το στερεό και το ρευστό μέρος υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$u_r = (Q+R)(B_6 I_1(mr) + B_7 K_1(mr)) m^2 e^{-\frac{m^2 t}{k}} - A_1(t)r - A_2(t)\frac{1}{r},$$



$$U_r = -(2N + A + Q)(B_6 I_1(mr) + B_7 K_1(mr)) m^2 e^{-\frac{m^2 t}{k}} - A_1(t)r - A_2(t)\frac{1}{r}. \quad (4.111)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.111) και τις εκφράσεις για τις αξονικές μετατοπίσεις

$$u_z = -D_1(t)z, \quad (4.112)$$

$$U_z = -D_2(t)z,$$

υπολογίζονται οι συνιστώσες της τάσης από τις εξισώσεις (4.68) ως

$$\begin{aligned} T_{rr} = & -2N(Q + R)m^2 e^{-\frac{m^2 t}{k}} \left(B_6 \frac{1}{r} I_1(mr) + B_7 \frac{1}{r} K_1(mr) \right) \\ & - (Q^2 - 2NR - AR)m^2 e^{-\frac{m^2 t}{k}} (B_6 m I_0(mr) - B_7 m K_0(mr)) \\ & - 2(N + A + Q)A_1(t) + 2NA_2(t)\frac{1}{r^2} - (A + Q)D_1(t) - Q\Theta, \\ T_{zz} = & - (Q^2 + 2QN - AR)m^2 e^{-\frac{m^2 t}{k}} (B_6 m I_0(mr) - B_7 m K_0(mr)) \\ & - 2(A + Q)A_1(t) - (2N + A + Q)D_1(t) - Q\Theta, \end{aligned} \quad (4.113)$$

και

$$\begin{aligned} T = & (Q^2 - 2RN - AR)m^2 e^{-\frac{m^2 t}{k}} (B_6 m I_0(mr) - B_7 m K_0(mr)) \\ & - 2(Q + R)A_1(t) - (Q + R)D_1(t) - R\Theta \end{aligned}$$

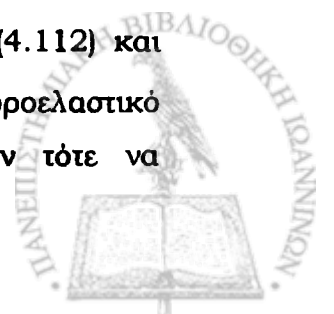
όπου $I_0(mr)$ και $K_0(mr)$ είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους, αντίστοιχα, μηδενικής τάξης.

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων (4.82) έως (4.84) οδηγεί σε εκφράσεις για τους αγνώστους $A_1(t)$, $A_2(t)$, $D_1(t)$ που δίνονται στο Παράρτημα Α.

Θέτοντας

$$\Theta = \frac{3A + 2N + 6Q + 3R}{Q + R} \quad \text{και} \quad B_7 = 1, \quad (4.114)$$

και αντικαθιστώντας τα $A_1(t)$, $A_2(t)$, $D_1(t)$ στις εξισώσεις (4.111), (4.112) και (4.113), υπολογίζονται οι μετατοπίσεις και οι τάσεις στον κοίλο ποροελαστικό κύλινδρο, αντίστοιχα. Οι τροπές για το στερεό μέρος μπορούν τότε να



υπολογιστούν από τις εξισώσεις (4.47) και για το ρευστό μέρος από τις αντίστοιχες σχέσεις για το ρευστό.

4.4.4. Δεύτερο πρόβλημα συνοριακών συνθηκών: Η εξαναγκασμένη εισαγωγή ενός στερεού ελαστικού κυλίνδρου στον κοίλο ποροελαστικό κύλινδρο

Για έναν ισότροπο στερεό ελαστικό κύλινδρο που υπόκειται σε μία εξωτερική πίεση $p(t)$, η μη μηδενική τάση είναι $T_{rr} = -p(t)$. Η μετατόπιση στην ακτινική διεύθυνση δίνεται (Cowin και Van Buskirk, 1978) ως

$$u = \frac{-(2\mu_p + \lambda_p)p(t)r}{2\mu_p(3\lambda_p + 2\mu_p)}, \quad (4.115)$$

όπου λ_p και μ_p είναι οι σταθερές του Lamé για τον ισότροπο στερεό ελαστικό κύλινδρο.

4.4.4.1. Υπολογισμός της πίεσης αλληλεπίδρασης $p(t)$

Υπολογίζεται η πίεση αλληλεπίδρασης $p(t)$ που προκύπτει όταν ένας ισότροπος στερεός κύλινδρος ακτίνας $a_0 + \frac{\rho}{2}$ εισάγεται με εξαναγκασμό σε έναν κοίλο κύλινδρο ακτίνας a_0 από ποροελαστικό προσαρμοστικό υλικό. Έστω a και b η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα, αντίστοιχα, του κοίλου προσαρμοστικού ποροελαστικού κυλίνδρου, την χρονική στιγμή αμέσως μετά την εξαναγκασμένη εισαγωγή του ισότροπου στερεού ελαστικού κυλίνδρου στον κοίλο κύλινδρο. Αν και οι ακτίνες του κοίλου κυλίνδρου στην πραγματικότητα θα μεταβληθούν κατά την διαδικασία της προσαρμογής, η απόκλιση αυτών των ποσοτήτων από τα a και b θεωρείται αμελητέα στην θεωρία των μικρών τροπών.

Κάποια χρονική στιγμή αφότου οι δύο κύλινδροι έχουν εξαναγκαστικά προσαρμοστεί ο ένας μέσα στον άλλον, η πίεση αλληλεπίδρασης είναι $p(t)$. Η ακτινική μετατόπιση του στερεού ελαστικού κυλίνδρου στην επιφάνειά του είναι

$$u_1 = \frac{-(2\mu_p + \lambda_p)p(t)a}{2\mu_p(3\lambda_p + 2\mu_p)}. \quad (4.116)$$

Η ακτινική μετατόπιση του ποροελαστικού κυλίνδρου στην εσωτερική του επιφάνεια είναι



$$u_2 + U_2 = -(2N + A - R)(B_6 I_1(ma) + B_7 K_1(ma)) m^2 e^{\frac{-m^2 t}{k}} - 2A_1(t)a - 2A_2(t)\frac{1}{a}. \quad (4.117)$$

Οι δύο κυλινδρικές επιφάνειες του στερεού ελαστικού και ποροελαστικού κυλίνδρου, αντίστοιχα, έχουν την ίδια ακτίνα a έπειτα από την εισαγωγή του ήλου, δηλαδή,

$$a = a_0 + \frac{\rho}{2} + u_1 = a_0 + u_2 + U_2, \quad (4.118)$$

όπου a_0 είναι η ακτίνα του ποροελαστικού κυλίνδρου πριν την προσαρμογή και

$a_0 + \frac{\rho}{2}$ η ακτίνα του στερεού ελαστικού κυλίνδρου πριν την προσαρμογή.

Από την σχέση (4.118) προκύπτει ότι

$$\rho = 2(u_2 + U_2 - u_1), \quad (4.119)$$

ή

$$\rho = 2(\Lambda_1 P(t) + \Lambda_2 + \Lambda_3 p(t)), \quad (4.120)$$

όπου τα Λ_i , $i=1,2,3$ δίνονται στο Παράρτημα Β.

Λύνοντας την εξίσωση (4.120) ως προς $p(t)$ λαμβάνεται η σχέση,

$$p(t) = \frac{1}{\Lambda_3} \left(\frac{\rho}{2} - \Lambda_1 P(t) - \Lambda_2 \right). \quad (4.121)$$

Όταν η εξίσωση (4.121) αντικατασταθεί στις εξισώσεις (4.111), (4.112), (4.47) και (4.68), τα πεδία μετατοπίσεων, τροπών και τάσεων μπορούν να προσδιοριστούν αντίστοιχα. Τα παραπάνω πεδία είναι συναρτήσεις του πορώδους f ή, ισοδύναμα, της μεταβολής στο ποσοστό όγκου e .

4.4.4.2. Εξίσωση ρυθμού επαναδόμησης

Ο ρυθμός επαναδόμησης σε μία χρονική στιγμή t που δίνεται από την σχέση (4.59) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του πορώδους f , χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία μεταξύ f και e (βλ. εξίσωση 4.62) ως



$$\dot{e} = F_1 e + F_2 e^2 + A_3(f) + A_4(f) \left(E - \frac{3(Q+R)}{2N+3A+3Q} \varepsilon \right), \quad (4.122)$$

ή ισοδύναμα στην

$$\dot{e} = F_1 (f_0 - f) + F_2 (f_0 - f)^2 + A_1(f) + A_2(f) \left(E - \frac{3(Q+R)}{2N+3A+3Q} \varepsilon \right). \quad (4.123)$$

όπου τα F_1 και F_2 είναι σταθερές.

Για να λυθεί η εξίσωση (4.123) σαφείς εκφράσεις για τα $A_3(f)$, $A_4(f)$, $E(f)$, $\varepsilon(f)$, $Q(f)$, $R(f)$ και $A(f)$ πρέπει να εισαχθούν σε αυτή.

4.4.5. Μία προσεγγιστική λύση

Η εξίσωση του ρυθμού επαναδόμησης δίνεται από την σχέση (4.122) ή ισοδύναμα την σχέση (4.123), όπου

$$E = -(Q+R)m^3 e^{-\frac{m^2 t}{k}} \left(\frac{K_1(ma)I_0(mr) - I_1(ma)K_0(mr)}{I_1(ma)} \right) - D_1(t) - 2A_1(t),$$

και

(4.124)

$$\varepsilon = (2N+A+Q)m^3 e^{-\frac{m^2 t}{k}} \left(\frac{K_1(ma)I_0(mr) - I_1(ma)K_0(mr)}{I_1(ma)} \right) - (D_1(t) + \Theta) - 2A_1(t).$$

Η εξάρτηση των Q, A, R από το πορώδες f δίνεται από τους Biot και Willis (1957) από τις σχέσεις (4.35). Στις σχέσεις αυτές, κ είναι ο συντελεστής περιβεβλημένης συμπίεσιότητας, δ ο συντελεστής μη περιβεβλημένης συμπίεσιότητας, γ ο συντελεστής περιεχομένου ρευστού και μ το μέτρο διάτμησης. Στην συνέχεια τίθεται $\mu = \mu_b$, όπου μ_b το μέτρο διάτμησης του οστού.

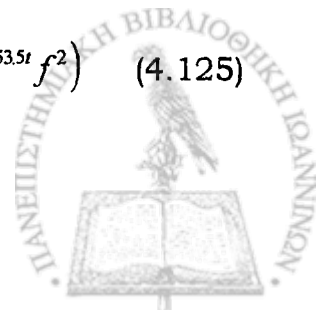
4.4.5.1. Επιλογή των συντελεστών του ρυθμού επαναδόμησης

Η επιλογή των συντελεστών επαναδόμησης γίνεται ως εξής:

- (i) Το $A_3(f)$ υπολογίζεται από την συνθήκη $e = 0$ που συνεπάγεται $\dot{e} = 0$ για $t < 0$, δηλαδή πριν ξεκινήσει η επαναδόμηση, και λαμβάνεται ίσο προς

$$A_3(f) = -A_4(f) \left(\frac{1}{-1561+f} \right) \left(9273 + (5.9 - 204562e^{-853.5t})f + 58.9e^{-853.5t}f^2 \right) \quad (4.125)$$

- (ii) Το $A_4(f)$ επιλέγεται (βλ. σχέση (4.46) ως



$$A_4(f) = A_4^0 + A_4^1 f. \quad (4.126)$$

Τα A_4^0 και A_4^1 καθορίζονται από την απαίτηση να απαλείφεται ο παρονομαστής, που είναι συνάρτηση του πορώδους, στην έκφραση

$$E - \frac{3(Q+R)}{2N+3A+3Q} \varepsilon,$$

για όλα τα t , και αυτό συμβαίνει εάν τεθούν

$$A_4^1 = A_4^0,$$

$$A_4(f) = A_4^0(-1561 + f). \quad (4.127)$$

- (iii) Οι σταθερές F_1, F_2 και A_4^0 είναι φαινομενολογικές και, ελλείψει πειραματικών δεδομένων, λαμβάνουν αυθαίρετες τιμές. Η επιλογή της τάξης μεγέθους των τιμών που τους αποδόθηκαν

$$F_1 = 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

$$F_2 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}, \quad (4.128)$$

$$A_4^0 = 10^{-10} \text{ s}^{-1},$$

έγινε με τέτοιο τρόπο ώστε η έκφραση για τον ρυθμό επαναδόμησης $\dot{\epsilon}$ συναρτήσει του πορώδους f να παρουσιάζει ακρότατο (ελάχιστο) σε περιοχή φυσιολογικού πορώδους.

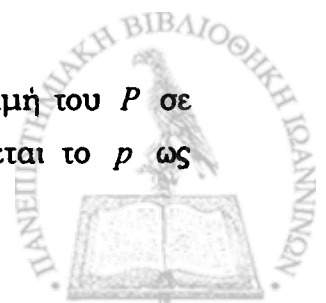
4.4.5.2. Επίλυση της εξίσωσης του ρυθμού επαναδόμησης

Εισάγοντας τις εκφράσεις (4.125) έως (4.128) και (4.35) στις σχέσεις που δίνουν τα $A_1(t), A_2(t), D_1(t), \Theta$ (βλ. Παράρτημα Α) και έπειτα στις εξισώσεις (4.123) και (4.124) λαμβάνεται μία εξίσωση της μορφής

$$\dot{\epsilon} = g(f, m, p(t), P(t)). \quad (4.129)$$

Από την σχέση (4.129) φαίνεται ότι ο ρυθμός επαναδόμησης είναι συνάρτηση των $f, m, p(t)$ και $P(t)$. Η παράμετρος m υπολογίζεται από την εξίσωση (4.109) ενώ η $p(t)$ σχετίζεται με την $P(t)$ μέσω της εξίσωσης (4.121).

Η εξίσωση (4.129) επιλύεται αριθμητικά. Για μία σταθερή τιμή του P σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t της επαναδόμησης, λαμβάνεται το p ως



συνάρτηση του f , μέσω της εξίσωσης (4.121). Τελικά, καταλήγει κανείς σε μία έκφραση του $\dot{\epsilon}$ συναρτήσει του πορώδους f η οποία επιλύεται αριθμητικά.

4.4.6. Αποτελέσματα

Για να επεξηγηθεί η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης του ρυθμού επαναδόμησης παρουσιάζεται ένα αριθμητικό παράδειγμα με επιλεγμένα δεδομένα. Εξετάζεται η περίπτωση ενός ενδομυελικού ήλου από ανοξείδωτο ατσάλι που εισάγεται εξαναγκασμένα σε ένα μηριαίο οστό εσωτερικής ακτίνας $a=0.01\text{ m}$ και εξωτερικής ακτίνας $b=0.015\text{ m}$. Ο λόγος του ρ ως προς a λαμβάνεται ίσος με 0.005. Το m υπολογίζεται από την εξίσωση (4.109) και λαμβάνεται μόνον ο όρος πρώτης τάξης. Οι υλικές ιδιότητες του ήλου είναι $\lambda_p=120\text{ GPa}$ και $\mu_p=80\text{ GPa}$ (Cowin και Van Buskirk, 1978).

Οι υλικές ιδιότητες του οστού προκύπτουν όπως περιγράφεται παρακάτω. Σύμφωνα με τους Biot και Willis (1957), τα A, N, Q, R σχετίζονται με τα μ_b, λ_b, κ και f ως,

$$N = \mu_b, \quad A - \frac{Q^2}{R} = \lambda_b, \quad 2\mu_b + 3\lambda_b = \frac{3}{\kappa}, \quad \frac{Q+R}{R} f = 1 - \frac{\delta}{\kappa}. \quad (4.130)$$

Θέτοντας $\mu_b = 5.5\text{ GPa}$, $\lambda_b = 40\text{ GPa}$ (Cowin και Van Buskirk, 1978, Reilly και Burstein, 1975, Cowin και Van Buskirk, 1986), λαμβάνεται $\kappa = 0.023\text{ (GPa)}^{-1}$. Υποθέτοντας ότι για το οστό είναι $\delta = 0.02\text{ (GPa)}^{-1}$ και $\gamma = 4.68\text{ (GPa)}^{-1}$, οι εξισώσεις (4.35) γράφονται ως

$$Q = 2.14(0.13 - f)f \times 10^8 \text{ Pa},$$

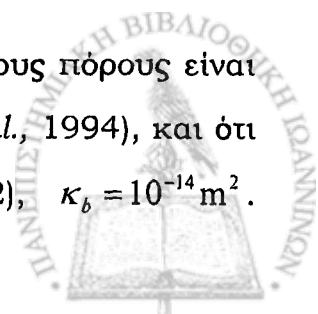
$$R = 2.14 \times 10^8 f^2 \text{ Pa},$$

$$A = (-3.7 \times 10^9 + 2.14 \times 10^8 (203.5 + 0.13(1 - 2f) + f^2)) \text{ Pa}, \quad (4.131)$$

και

$$N = 5.5 \times 10^9 \text{ Pa}.$$

Επιπλέον γίνεται η υπόθεση ότι το ρευστό που καταλαμβάνει τους πόρους είναι νερό, του οποίου το ιξώδες είναι $n = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$ (Weinbaum *et al.*, 1994), και ότι η διαπερατότητα του οστού είναι (Johnson *et al.*, 1982), $\kappa_b = 10^{-14} \text{ m}^2$.



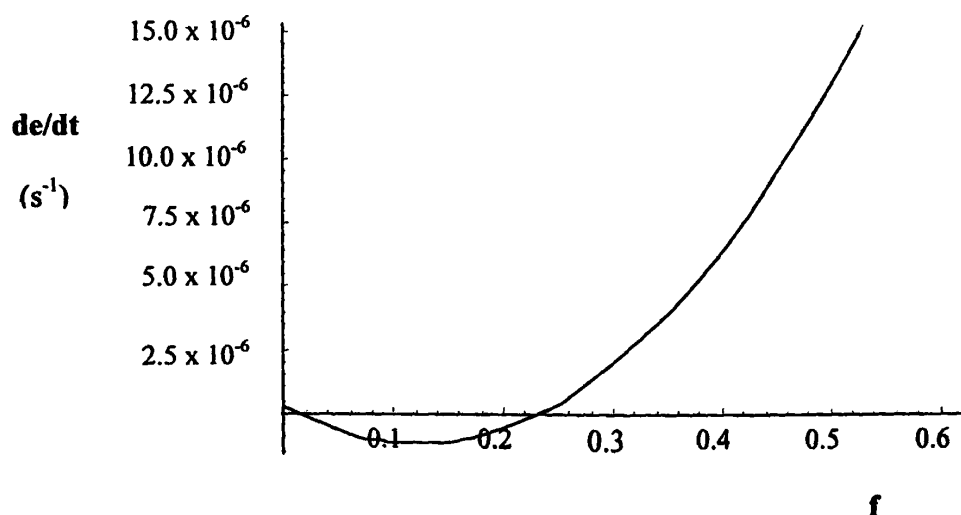
Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.53), (4.94) και (4.131), η παράμετρος k μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του πορώδους f .

Εξετάζεται η περίπτωση όταν ξεκινάει η επαναδόμηση. Την χρονική στιγμή $t=0$, ο μυελικός ήλος εισάγεται εξαναγκασμένα στην μυελική κοιλότητα. Η εσωτερική πίεση $p(t)$ υπολογίζεται από την εξίσωση (4.121), όπου το $P(t)$ θεωρείται σταθερό και ίσο προς 1631 N (Cowin και Van Buskirk, 1978). Έτσι προκύπτει μία έκφραση του \dot{e} συναρτήσει του πορώδους f , η οποία υπολογίζεται αριθμητικά για ένα εύρος τιμών του πορώδους στο $r = 0.0125$ m και αρχικό πορώδες $f_0 = 0.02$.

Το Σχήμα 4.4 δείχνει την μεταβολή του ρυθμού επαναδόμησης με το πορώδες. Φαίνεται ότι καθώς το πορώδες αυξάνεται ο ρυθμός επαναδόμησης αρχικά μειώνεται έως ότου αποκτήσει μία ελάχιστη τιμή και στην συνέχεια αυξάνεται. Το ελάχιστο της συνάρτησης συμβαίνει για πορώδες $f \cong 0.10$. Για μεγαλύτερες τιμές του πορώδους ο ρυθμός επαναδόμησης αρχίζει να αυξάνεται ραγδαία.

4.4.7. Συζήτηση

Παρουσιάστηκε μία θεωρητική ανάλυση της εσωτερικής επαναδόμησης που επάγεται από την εξαναγκασμένη εισαγωγή ενός ενδομυελικού ήλου σε ένα κοίλο κυλινδρικό ποροελαστικό μοντέλο οστού. Στο προτεινόμενο μοντέλο, το οστό συμπεριφέρεται ως ποροελαστικό μέσο, το οποίο αποτελείται από μία στερεά



Σχήμα 4.4: Η μεταβολή του ρυθμού επαναδόμησης με το πορώδες.

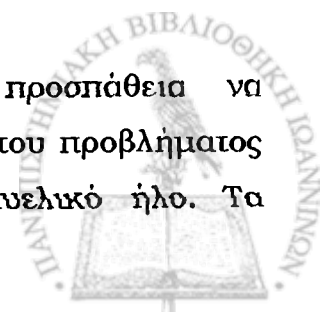


ελαστική θεμέλια ουσία και διάμεσο ρευστό το οποίο ρέει μέσω των αλληλοεπικοινωνούντων πόρων μέσα στην θεμέλια ουσία. Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος βασίζεται στην τρισδιάστατη θεωρία ποροελαστικότητας του Biot (1941, 1955, 1956). Για λόγους μαθηματικής απλοποίησης του προβλήματος, το οστό έχει θεωρηθεί ισότροπο.

Προτείνεται μία νέα καταστατική σχέση για το ποροελαστικό οστό, η οποία ενσωματώνει την διεργασία της εσωτερικής οστικής επαναδόμησης. Η συνεισφορά του ρευστού όρου στην διεργασία της επαναδόμησης υποδηλώνεται με σαφήνεια. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των Biot και Willis (1957) για την εξάρτηση των ελαστικών σταθερών από το πορώδες και μία προσέγγιση για την εξάρτηση των άγνωστων υλικών σταθερών από το πορώδες, προτείνεται μία νέα εξίσωση ρυθμού επαναδόμησης. Ο ρυθμός εσωτερικής επαναδόμησης, ο οποίος ορίζεται ως η χρονική παράγωγος της μεταβολής του ποσοστού όγκου της θεμέλιας ουσίας στο οστό, εκφράζεται συναρτήσει του πορώδους. Οι συντελεστές του ρυθμού επαναδόμησης είναι φαινομενολογικοί και ελλείπει πειραματικών δεδομένων λαμβάνουν αυθαίρετες τιμές. Η επιλογή της τάξης μεγέθους των τιμών που τους αποδόθηκαν έγινε με τέτοιον τρόπο ώστε η έκφραση για τον ρυθμό επαναδόμησης συναρτήσει του πορώδους να παρουσιάζει ακρότατο (ελάχιστο) σε περιοχή φυσιολογικού πορώδους.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι καθώς το πορώδες του οστού αυξάνεται, ο ρυθμός εσωτερικής επαναδόμησης αρχικά μειώνεται και στην συνέχεια αυξάνεται. Θετικός ρυθμός επαναδόμησης υποδηλώνει τάση για εναπόθεση οστίτη ιστού ενώ αρνητικός ρυθμός επαναδόμησης τάση για απορρόφηση. Η πρόβλεψη αυτή του μοντέλου δεν είναι άμεσα συγκρίσιμη με αποτελέσματα άλλων μελετών. Ωστόσο, στο μοντέλο των Cowin και Van Buskirk (1978) όπου έχει μελετηθεί η μεταβολή του ρυθμού επαναδόμησης σε σχέση με την μεταβολή στο e έχει δειχθεί παρόμοια συναρτησιακή συμπεριφορά. Και στα δύο μοντέλα, εκείνο που ουσιαστικά καθορίζει την συμπεριφορά της συνάρτησης είναι η επιλογή του όρου $A_1(e)$. Όμως οι συντελεστές και οι σταθερές του ρυθμού επαναδόμησης είναι φαινομενολογικοί και ελλείπει πειραματικών δεδομένων η επιλογή τους έχει γίνει αυθαίρετα, βασιζόμενη σε εκτιμήσεις της χρονικής πορείας της επαναδόμησης. Η βαθμονόμηση του παρόντος μοντέλου με πειραματικά δεδομένα, όταν αυτά είναι διαθέσιμα, θα οδηγούσε σε πιο ακριβή εκτίμηση της τάξης μεγέθους του ρυθμού επαναδόμησης.

Το προτεινόμενο μοντέλο αποτελεί την πρώτη προσπάθεια να χρησιμοποιηθεί η θεωρία ποροελαστικότητας στην διατύπωση του προβλήματος εσωτερικής επαναδόμησης που επάγεται από έναν ενδομυελικό ήλο. Τα



πλεονεκτήματα της χρησιμοποίησης της διατύπωσης του Biot για την υλική περιγραφή του οστού είναι: (i) ότι παρέχει μία άμεση απεικόνιση της συνεισφοράς του ρευστού όρου, και (ii) η εξάρτηση των ελαστικών σταθερών από το πορώδες είναι γνωστή.

Η προτεινόμενη λύση στο μοντέλο αυτό επιτρέπει μία εκτίμηση του σχετικού ρυθμού επαναδόμησης σε διαφορετικές θέσεις μέσα στο οστό, γεγονός που αποτελεί πλεονέκτημα σε σχέση με προηγούμενα μοντέλα. Γενίκευση του παρόντος μοντέλου, με την επιλογή μίας λιγότερο απλουστευμένης λύσης μετατοπίσεων ή διαφορετικής συμμετρίας θα μπορούσε να οδηγήσει σε πιο ρεαλιστικές εκτιμήσεις της επαναδόμησης. Η εξέταση της επίδρασης των συντελεστών και σταθερών του ρυθμού επαναδόμησης στην εξίσωση του ρυθμού επαναδόμησης θα έδινε πιθανώς μία εναλλακτική προσέγγιση στην πρόβλεψη της επαναδόμησης.



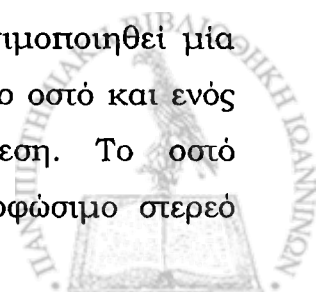
Ποροελαστικό μοντέλο επιφανειακής επαναδόμησης

5.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με την διάκριση του Frost (1964) μεταξύ επιφανειακής και εσωτερικής επαναδόμησης, η επιφανειακή ή εξωτερική επαναδόμηση (surface or external remodeling) είναι η διεργασία η οποία οδηγεί σε μεταβολή του εξωτερικού σχήματος του οστού. Αυτό οφείλεται στην απορρόφηση ή την εναπόθεση οστού στις επιφάνειες του ενδόστεου και του περιόστεου.

Η σχέση ανάμεσα στις μεταβολές του σχήματος ενός μακρού οστού όπως το μηριαίο και τις μηχανικές φορτίσεις που δέχεται λόγω της εξαναγκασμένης εισαγωγής μίας ενδοπρόθεσης στην μυελική του κοιλότητα μελετήθηκε αρχικά από τους Cowin και Van Buskirk (1979) και στην συνέχεια από τους Cowin και Firoozbakhsh (1981), Cowin *et al.* (1981) Misra και Samanta (1987) και Misra *et al.* (1992), όπως έχει ήδη περιγραφεί στο κεφάλαιο 3. Η προσέγγισή τους βασίστηκε στην θεωρία προσαρμοστικής ελαστικότητας σε θερμομηχανικά μέσα, για μικρές παραμορφώσεις (Cowin και Hegedus, 1976, Hegedus και Cowin, 1976). Χρησιμοποιώντας μία απλουστευμένη γεωμετρία του συστήματος οστό-εμφύτευμα και θεωρώντας το οστό ως πορώδες ελαστικό στερεό, προέβλεψαν τις μεταβολές στο εξωτερικό σχήμα του οστικού μοντέλου ως αποτέλεσμα της εισαγωγής της ενδοπρόθεσης. Σύμφωνα με την υπόθεσή τους, ο ρυθμός των χημικών αντιδράσεων που είναι υπεύθυνες για την εναπόθεση ή απορρόφηση οστού στο ενδόστεο και το περιόστεο είναι ανάλογος προς την παραμόρφωση αυτών των επιφανειών.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μία νέα προσέγγιση επιφανειακής επαναδόμησης που επάγεται από μία κυλινδρική ενδοπρόθεση σε ένα οστικό μοντέλο. Στόχος είναι (i) να αναπτυχθεί ένα νέο θεωρητικό μοντέλο επιφανειακής επαναδόμησης οστού όπου η συνεισφορά του ρευστού συστατικού είναι εμφανής και (ii) να γίνουν προβλέψεις σχετικά με την πορεία της επιφανειακής επαναδόμησης, εκφρασμένης ως μεταβολή στις ακτίνες του ενδόστεου και του περιόστεου με τον χρόνο. Στο προτεινόμενο μοντέλο, έχει χρησιμοποιηθεί μία απλή γεωμετρία ενός κοίλου κυλίνδρου κυκλικής διατομής για το οστό και ενός στερεού κυλίνδρου κυκλικής διατομής για την ενδοπρόθεση. Το οστό συμπεριφέρεται ως προσαρμοστικό πορώδες ελαστικό παραμορφώσιμο στερεό



στους πόρους του οποίου ρέει ιζώδες συμπιεστό ρευστό, σύμφωνα με τις βασικές αρχές της θεωρίας ποροελαστικότητας (Biot, 1941, Biot, 1955, Biot, 1956). Η θεωρία προσαρμοστικής ελαστικότητας για μικρές παραμορφώσεις (Hegedus και Cowin, 1976), τροποποιείται κατάλληλα ώστε να συμπεριλάβει το ρευστό τμήμα σύμφωνα με την νέα υλική περιγραφή. Διατυπώνονται οι βασικές εξισώσεις της νέας θεωρίας για επιφανειακή επαναδόμηση. Εξετάζεται η περίπτωση όπου ο κοίλος ποροελαστικός κύλινδρος υπόκειται σε σταθερή αξονική δύναμη και εσωτερική ακτινική πίεση λόγω της εισαγωγής της ενδοπρόθεσης. Οι συντελεστές του υλικού θεωρούνται σταθεροί ενώ οι ακτίνες του κοίλου κυλίνδρου μεταβάλλονται με το χρόνο ως αποτέλεσμα της επαναδόμησης. Το πρόβλημα αρχικών τιμών ενός πλεγμένου συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης επιλύεται αριθμητικά με σκοπό την εκτίμηση της χρονικής εξέλιξης των ακτίνων του ενδόστεου και περιόστεου. Η κίνηση των επιφανειών του ενδόστεου και περιόστεου συναρτήσει του χρόνου επαναδόμησης προβλέπεται για διάφορες τιμές των αρχικών ακτίνων και του αρχικού πάχους του οστού.

5.2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Το βασικό σύστημα εξισώσεων στην θεωρία επιφανειακής επαναδόμησης (Cowin και Van Buskirk, 1979) αποτελείται από τις καταστατικές σχέσεις, τις κινηματικές σχέσεις, τις εξισώσεις ισορροπίας τάσεων, τον νόμο του Darcy και την εξίσωση για την ταχύτητα της επιφάνειας επαναδόμησης. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι το οστό είναι ένα πορώδες ισότροπο στερεό το οποίο περιέχει ένα ιζώδες συμπιεστό ρευστό, το προαναφερόμενο σύστημα εξισώσεων διατυπώνεται χρησιμοποιώντας την υλική περιγραφή της θεωρίας ποροελαστικότητας (Biot, 1941, 1955), σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Ο τανυστής των τάσεων σε ένα πορώδες υλικό είναι

$$\bar{T} = T_{ij} + \delta_{ij}T, \quad (5.1)$$

όπου δ_{ij} είναι το σύμβολο του Kronecker,

T_{ij} είναι ο τανυστής των τάσεων που εφαρμόζονται στο στερεό τμήμα και το T αντιπροσωπεύει την συνολική κάθετη δύναμη που εφαρμόζεται στο ρευστό τμήμα των πλευρικών επιφανειών ενός κύβου του συνολικού υλικού (bulk material) μοναδιαίου μήκους ακμής (βλ. κεφάλαιο 4).



Το πορώδες f ορίζεται από την σχέση (4.1) και αντιπροσωπεύει το κλάσμα του όγκου του πορώδους υλικού που καταλαμβάνεται από τους πόρους. Η σχέση (4.4) συνδέει το T με την υδροστατική πίεση p του ρευστού στους πόρους. Το σύστημα στερεού και ρευστού είναι ένα σύστημα με ιδιότητες διατήρησης. Το στερεό τμήμα θεωρείται ότι έχει συμπιεστότητα και διατμητική ακαμψία ενώ το ρευστό είναι συμπιεστό. Η παραμόρφωση ενός μοναδιαίου κύβου θεωρείται ότι είναι πλήρως αντιστρεπτή. Με τον όρο παραμόρφωση περιγράφεται εκείνη που καθορίζεται από τους τανυστές τροπής στο στερεό και το ρευστό.

Οι κινηματικές σχέσεις για το στερεό μέρος δίνονται από τις εξισώσεις (4.47). Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για το ρευστό τμήμα όπου τα U_r, U_θ, U_z και $\varepsilon_{ij}, i, j = r, \theta, z$, ορίζουν τις συνιστώσες μέσης μετατόπισης και τις παραμορφώσεις του ρευστού αντίστοιχα.

Οι καταστατικές σχέσεις τάσεων-τροπών για ένα ισότροπο ποροελαστικό υλικό, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, δίνονται από την σχέση (4.48). Οι διογκώσεις του στερεού και του ρευστού δίνονται από τις σχέσεις (4.49) και (4.50) αντίστοιχα.

Αντίστροφα, οι ισότροπες καταστατικές σχέσεις τροπών-τάσεων μπορούν να γραφούν ως

$$\begin{aligned} E_{rr} &= \frac{1}{2N} \left\{ (1+q)T_{rr} + q(T_{\theta\theta} + T_{zz}) - \frac{Q}{R}(3q+1)T \right\}, \\ E_{\theta\theta} &= \frac{1}{2N} \left\{ (1+q)T_{\theta\theta} + q(T_{rr} + T_{zz}) - \frac{Q}{R}(3q+1)T \right\}, \\ E_{zz} &= \frac{1}{2N} \left\{ (1+q)T_{zz} + q(T_{rr} + T_{\theta\theta}) - \frac{Q}{R}(3q+1)T \right\}, \\ E_{\theta z} &= \frac{1}{N} T_{\theta z}, \\ E_{zr} &= \frac{1}{N} T_{zr}, \\ E_{r\theta} &= \frac{1}{N} T_{r\theta}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

και οι διογκώσεις στερεού και ρευστού, αντίστοιχα, ως

$$E = E_{rr} + E_{\theta\theta} + E_{zz} = \frac{1}{2N} \left\{ (3q+1)T_{rr} + (3q+1)T_{\theta\theta} + (3q+1)T_{zz} - \frac{3Q}{R}(3q+1)T \right\}, \quad (5.3)$$

και



$$\varepsilon = -Qs(T_{rr} + T_{\theta\theta} + T_{zz}) + \left(\frac{1}{R} + \frac{3Q^2}{R}s \right) T, \quad (5.4)$$

όπου

$$q = \frac{Q^2 - AR}{(2N + 3A)R - 3Q^2} \quad \text{και} \quad s = \frac{1}{(2N + 3A) - 3Q^2} = \frac{q}{Q^2 - AR}. \quad (5.5)$$

Το πεδίο συνολικών τάσεων του συνολικού υλικού, με απουσία δυνάμεων σώματος, ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας (4.51).

Ο νόμος του Darcy που διέπει την ροή ρευστού μέσα σε πορώδες ισότροπο υλικό με απουσία δυνάμεων σώματος, δίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες από την σχέση (4.52).

Οι καταστατικές σχέσεις τάσεων-τροπών μπορούν να γραφούν σε μορφή πίνακα σύμφωνα με τη σχέση (4.55) και οδηγούν στην έκφραση

$$(T_{ij} + \delta_{ij}T) = C_{ijkl} \left(E_{km} - \delta_{km} \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} \varepsilon \right), \quad (5.6)$$

όπου C_{ijkl} είναι ο πίνακας ακαμψίας.

Κατ' αναλογία με την θεωρία επιφανειακής επαναδόμησης των Cowin και Van Buskirk (1979) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.6), η καταστατική σχέση για την ταχύτητα της επιφάνειας επαναδόμησης γράφεται ως

$$U\bar{n} = C_{ij}(\bar{n}, S) \left[E_{ij}(S) - \delta_{ij} \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} \varepsilon(S) - E_{ij}^0(S) - \delta_{ij} \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} \varepsilon^0(S) \right] \bar{n}, \quad (5.7)$$

όπου U είναι η συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας στην διεύθυνση \bar{n} ,

$E_{ij}^0(S) - \delta_{ij} \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} \varepsilon^0(S)$ είναι μία τιμή αναφοράς της παραμόρφωσης

στην οποία δεν συμβαίνει επαναδόμηση και

$C_{ij}(\bar{n}, S)$ είναι οι συντελεστές του ρυθμού επιφανειακής επαναδόμησης οι οποίοι, γενικά, εξαρτώνται από το σημείο S και το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα \bar{n} στην επιφάνεια στο σημείο S .

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, η έκφραση (5.7) γράφεται ως



$$\begin{aligned}
U = & C_{rr} \left(E_{rr} - \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} \varepsilon \right) + C_{\theta\theta} \left(E_{\theta\theta} - \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} \varepsilon \right) \\
& + C_{zz} \left(E_{zz} - \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} \varepsilon \right) + C_{r\theta} E_{r\theta} + C_{rz} E_{rz} + C_{\theta z} E_{\theta z} - C^0,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

όπου

$$\begin{aligned}
C^0 = & C_{rr} \left(E_{rr}^0 - \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} \varepsilon^0 \right) + C_{\theta\theta} \left(E_{\theta\theta}^0 - \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} \varepsilon^0 \right) \\
& + C_{zz} \left(E_{zz}^0 - \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} \varepsilon^0 \right) + C_{r\theta} E_{r\theta}^0 + C_{rz} E_{rz}^0 + C_{\theta z} E_{\theta z}^0 - C^0.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Συναρτήσει της τάσης, η καταστατική εξίσωση για την ταχύτητα της επιφάνειας επαναδόμησης γράφεται ως

$$U = B_{rr} T_{rr} + B_{\theta\theta} T_{\theta\theta} + B_{zz} T_{zz} + B_{r\theta} T_{r\theta} + B_{rz} T_{rz} + B_{\theta z} T_{\theta z} + BT - C^0, \tag{5.10}$$

όπου

$$\begin{aligned}
B_{rr} &= \left[\frac{1}{2N} (1+q) + \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} Qs \right] C_{rr} + \left[\frac{1}{2N} q + \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} Qs \right] (C_{\theta\theta} + C_{zz}), \\
B_{\theta\theta} &= \left[\frac{1}{2N} (1+q) + \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} Qs \right] C_{\theta\theta} + \left[\frac{1}{2N} q + \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} Qs \right] (C_{rr} + C_{zz}), \\
B_{zz} &= \left[\frac{1}{2N} (1+q) + \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} Qs \right] C_{zz} + \left[\frac{1}{2N} q + \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} Qs \right] (C_{rr} + C_{\theta\theta}), \\
B_{r\theta} &= \frac{1}{N} C_{r\theta}, \\
B_{rz} &= \frac{1}{N} C_{rz}, \\
B_{\theta z} &= \frac{1}{N} C_{\theta z},
\end{aligned} \tag{5.11}$$

και

$$B = - \left[\frac{1}{2N} \frac{Q}{R} (3q+1) + \frac{Q+R}{2N+3A+3Q} \left(\frac{1}{R} + \frac{3Q^2}{R} s \right) \right] (C_{rr} + C_{\theta\theta} + C_{zz}). \tag{5.12}$$

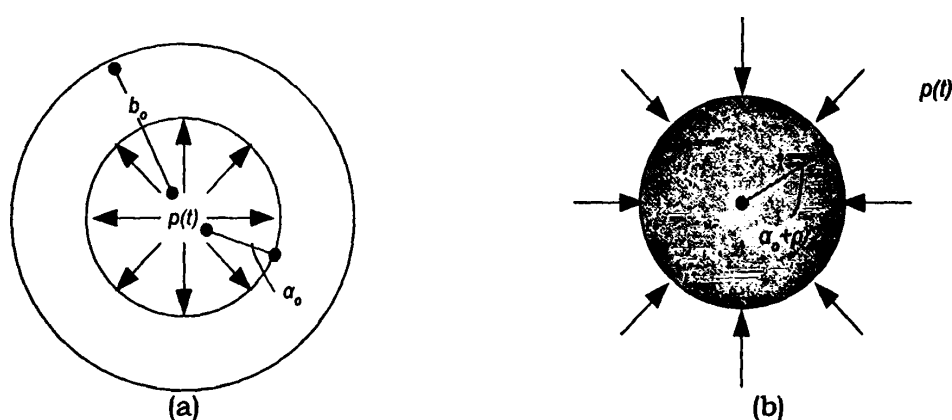


Γίνεται η υπόθεση ότι ο όρος BT συνεισφέρει ισοδύναμα στους όρους $B_{rr}T_{rr}$, $B_{\theta\theta}T_{\theta\theta}$ και $B_{zz}T_{zz}$, έτσι ώστε η καταστατική εξίσωση για την ταχύτητα της επιφάνειας επαναδόμησης να μπορεί να γραφεί συναρτήσει της τάσης ως

$$U = B_{rr}(T_{rr} + T) + B_{\theta\theta}(T_{\theta\theta} + T) + B_{zz}(T_{zz} + T) + B_{r\theta}T_{r\theta} + B_{rz}T_{rz} + B_{\theta z}T_{\theta z} - C^0. \quad (5.13)$$

5.3. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΝΔΟΠΡΟΘΕΣΗΣ

Η νέα θεωρητική προσέγγιση επιφανειακής επαναδόμησης που διατυπώθηκε εφαρμόζεται στην συνέχεια. Συγκεκριμένα, γίνεται πρόβλεψη της κίνησης των επιφανειών του ενδόστεου και του περιόστεου στην περιοχή της διάφυσης ενός μακρού οστού εξαιτίας της εξαναγκασμένης εισαγωγής μίας κυλινδρικής ενδοπρόθεσης στην μυελική του κοιλότητα. Η διάφυση μοντελοποιείται ως κοίλος κύλινδρος κυκλικής διατομής από ισότροπο προσαρμοστικό ποροελαστικό υλικό αρχικών ακτίνων ενδόστεου και περιόστεου a_0 και b_0 , αντίστοιχα (Σχήμα 5.1(a)). Η κυλινδρική ενδοπρόθεση περιγράφεται ως ισότροπο γραμμικό ελαστικό υλικό με συντελεστές Lamé λ και μ και αρχική ακτίνα $a_0 + \frac{\rho}{2}$ (Σχήμα 5.1(b)). Το $\frac{\rho}{2}$ είναι μία απειροστικά μικρή ποσότητα που προστίθεται στο a_0 έτσι ώστε η ενδοπρόθεση να εξαναγκάζεται να εισέλθει στην κοίλο κύλινδρο αρχικής ακτίνας a_0 . Οι εσωτερικές και εξωτερικές ακτίνες του



Σχήμα 5.1:

(a) Κοίλος ισότροπος ποροελαστικός κύλινδρος αρχικής εσωτερικής ακτίνας a_0 και αρχικής εξωτερικής ακτίνας b_0 που υπόκειται σε εσωτερική ακτινική πίεση $p(t)$.

(b) Ισότροπος στερεός ελαστικός κύλινδρος ακτίνας $a_0 + \frac{\rho}{2}$ που υπόκειται σε εξωτερική ακτινική πίεση $p(t)$.

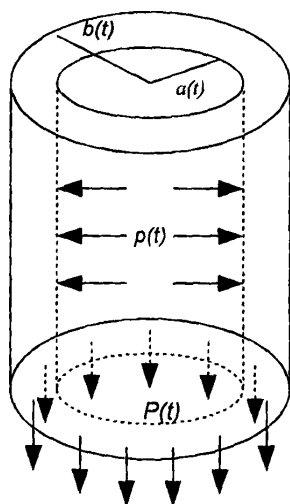


συστήματος οστό-ενδοπρόθεση κατά την χρονική στιγμή t της επαναδόμησης είναι συναρτήσεις του χρόνου και γράφονται ως $a(t)$ και $b(t)$, αντίστοιχα. Αντιστοιχούν στις ακτίνες των κυλινδρικών επιφανειών του ενδόστεου και του περίοστεου, αντίστοιχα, κατά την χρονική στιγμή t .

Εξετάζεται η περίπτωση όπου ο κοίλος κύλινδρος υπόκειται σε μια αξονική δύναμη $P(t)$, η οποία εφαρμόζεται σε μία εγκάρσια διατομή του και μία ακτινική πίεση $p(t)$, η οποία ασκείται στην εσωτερική του επιφάνεια από την εισαγμένη ενδοπρόθεση (Σχήμα 5.2). Σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t , η $P(t)$ μπορεί να ληφθεί ως σταθερά. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα έχει δοθεί στο κεφάλαιο 4. Στην συνέχεια χρησιμοποιείται ο συμβολισμός P για την $P(t)$.

Η μετατόπιση του κοίλου κυλίνδρου στην περιφερική διεύθυνση θεωρείται μηδενική. Οι συνιστώσες του διανύσματος μετατοπίσεων για το στερεό και ρευστό τμήμα στην ακτινική και αξονική διεύθυνση δίνονται από τις σχέσεις (4.111) και (4.112) αντίστοιχα, όπου τα $A_1(t), A_2(t), D_1(t)$ δίνονται στο Παράρτημα Α, τα B_6, B_7 είναι σταθερές που δίνονται από τις σχέσεις (4.110) και (4.114) αντίστοιχα, r είναι η ακτινική απόσταση από τον διαμήκη άξονα του κυλίνδρου και m είναι μία παράμετρος η οποία πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση (4.109). Η παράμετρος k δίνεται από τη σχέση (4.94). Στην υπό εξέταση περίπτωση, οι συντελεστές του υλικού θεωρούνται σταθεροί με τον χρόνο ενώ οι ακτίνες του κοίλου κυλίνδρου μεταβάλλονται με το χρόνο.

Η εξίσωση επαναδόμησης της επιφάνειας (5.13) καθορίζει τις μεταβολές στις ακτίνες a και b με τον χρόνο. Για την επιφάνεια του ενδόστεου, η εξίσωση



Σχήμα 5.2: Ο κοίλος ποροελαστικός κύλινδρος υπόκειται σε αξονική φόρτιση $P(t)$ και ακτινική εσωτερική πίεση $p(t)$.



(5.13) γράφεται ως

$$U_e = B_{r_r}(T_{r_r} + T) + B_{z_z}(T_{z_z} + T) - C_e^0, \quad (5.14)$$

ενώ για την επιφάνεια του περιόστεου γράφεται ως

$$U_p = B_{r_r}(T_{r_r} + T) + B_{z_z}(T_{z_z} + T) - C_p^0. \quad (5.15)$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας που είναι κάθετες στις επιφάνειες του ενδόστεου και του περιόστεου μπορούν να εκφραστούν ως χρονικές παράγωγοι των a και b , αντίστοιχα,

$$U_e = -\frac{da}{dt}, \quad U_p = \frac{db}{dt}. \quad (5.16)$$

Όταν οι εξισώσεις (4.47), (4.48), (4.111), (4.112) και (5.16) αντικατασταθούν στις εξισώσεις (5.14) και (5.15), προκύπτουν δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τα a και b ,

$$\begin{aligned} -\frac{da}{dt} = B_{r_r} & \left(\begin{aligned} & -2N(Q+R)m^2 e^{-\frac{m^2 t}{k}} \left(B_6 \frac{1}{a} I_1(ma) + B_7 \frac{1}{a} K_1(ma) \right) - \\ & -2N(N+A+2Q+R)A_1(t) + 2NA_2(t) \frac{1}{a^2} - \\ & -(A+2Q+R)D_1(t) - (Q+R)\Theta \end{aligned} \right) \\ & + \frac{-B_{z_z} P}{\pi(b^2 - a^2)} - B_{z_z} T_0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{db}{dt} = B_{r_r} & \left(\begin{aligned} & -2N(Q+R)m^2 e^{-\frac{m^2 t}{k}} \left(B_6 \frac{1}{b} I_1(mb) + B_7 \frac{1}{b} K_1(mb) \right) - \\ & -2N(N+A+2Q+R)A_1(t) + 2NA_2(t) \frac{1}{b^2} - \\ & -(A+2Q+R)D_1(t) - (Q+R)\Theta \end{aligned} \right) \\ & + \frac{-B_{z_z} P}{\pi(b^2 - a^2)} - B_{z_z} T_0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

όπου η τάση στην αξονική διεύθυνση του κοίλου ποροελαστικού κυλίνδρου δίνεται από την σχέση (βλ. εξίσωση (4.64))



$$T_{zz} + T = \frac{-P}{\pi(b^2 - a^2)}. \quad (5.19)$$

Για να λυθεί το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων οι τιμές των γνωστών παραμέτρων θα πρέπει να αντικατασταθούν στις εξισώσεις (5.17) και (5.18). Αυτό γίνεται εισάγοντας τα $A_1(t), A_2(t), D_1(t)$, που δίνονται στο Παράρτημα Α, στις εξισώσεις (5.17) και (5.18) και θέτοντας (βλ. εξισώσεις (4.114), (4.110))

$$\Theta = \frac{3A + 2N + 6Q + 3R}{Q + R}, \quad B_7 = 1 \text{ και } B_6 = -B_7 \frac{K_1(ma)}{I_1(ma)}. \quad (5.20)$$

Η εσωτερική πίεση $p(t)$ κατά την χρονική στιγμή t της επαναδόμησης δίνεται από τη σχέση (4.121), όπου τα Λ_1, Λ_2 και Λ_3 δίνονται στο Παράρτημα Β.

5.4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε ότι ακολουθεί, χρησιμοποιούνται οι εκφράσεις των A, N, Q, R που δίνονται από τους Biot και Willis (1957) (βλ. εξισώσεις (4.35)), για σταθερή τιμή του πορώδους.

Θέτοντας $f = 0.03$ και θεωρώντας ότι $\mu_b = 5.5 \text{ GPa}$ (Reilly και Burstein, 1975, Cowin και Van Buskirk, 1986), $\kappa = 5.5 (\text{GPa})^{-1}$, $\delta = 0.02 (\text{GPa})^{-1}$, και $\gamma = 4.68 (\text{GPa})^{-1}$ λαμβάνεται μία αριθμητική έκφραση για τα N, A, Q και R . Επιπλέον, έχει γίνει η υπόθεση ότι το ρευστό που καταλαμβάνει τους πόρους είναι νερό, του οποίου το ιξώδες είναι $\eta = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$ (Weinbaum *et al.*, 1994) και ότι η διαπερατότητα του οστού είναι $\kappa_b = 10^{-14} \text{ m}^2$ (Johnson *et al.*, 1982). Αυτή η τιμή της διαπερατότητας είναι για την ροή ρευστού στα Αβερσιανά συστήματα. Στην πραγματικότητα, η διαπερατότητα του φλοιώδους οστού μπορεί να διαφέρει έως και δύο τάξεις μεγέθους, ανάλογα με την κατάσταση των πόρων (Johnson *et al.*, 1982). Η τιμή που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία βρίσκεται στο άνω όριο αυτού του εύρους τιμών. Είναι επομένως αντιληπτό ότι ο χρόνος αποκατάστασης του ρευστού για το οστό που είναι κεκορεσμένο σε ρευστό (νερό) θα μπορούσε να είναι πολύ μεγαλύτερος εάν είχε χρησιμοποιηθεί χαμηλότερη τιμή διαπερατότητας. Επίσης, το ρευστό των Αβερσιανών συστημάτων στην πραγματικότητα συνίσταται από πλάσμα αίματος και εξωκυττάριο ρευστό. Τα παραπάνω έχουν μεγαλύτερο ιξώδες από εκείνο του νερού, γεγονός που αυξάνει τον χρόνο αποκατάστασης του ρευστού στους πόρους. Αναμένεται επίσης

ότι ο χρόνος αποκατάστασης της ροής στα συστήματα βοθρίων-καναλιών να είναι κατά πολύ μεγαλύτερος από εκείνον στα Αβερσιανά συστήματα, λόγω του μικρότερου πορώδους (Cowin, 1999).

Οι υλικές ιδιότητες της ενδοπρόθεσης λαμβάνονται ως $\lambda_p = 120 \text{ GPa}$ και $\mu_p = 80 \text{ GPa}$ (Cowin και Van Buskirk, 1978). Η εσωτερική ακτίνα του οστού την χρονική στιγμή $t = 0$, που ξεκινάει η επαναδόμηση λαμβάνεται ως $a_0 = 0.01 \text{ m}$ και η εξωτερική ως $b_0 = 0.015 \text{ m}$. Ο λόγος του ρ ως προς το a_0 λαμβάνεται ίσος με 0.005. Η αξονική δύναμη θεωρείται σταθερή και ίση προς $P = 1631 \text{ N}$ (Cowin και Van Buskirk, 1978). Η εσωτερική πίεση $p(t)$ υπολογίζεται από την σχέση (4.121).

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.109) και τις εκφράσεις για τα B_6 και B_7 , οι εξισώσεις (5.17) και (5.18) απλοποιούνται στις

$$-\frac{da}{dt} = B_{rr} \left(\frac{-2N(N+A+2Q+R)A_1(t) + 2NA_2(t)\frac{1}{a^2}}{-(A+2Q+R)D_1(t) - (Q+R)\Theta} \right) + \frac{-B_{zz}P}{\pi(b^2 - a^2)} - B_{zz}T_0, \quad (5.21)$$

και

$$\frac{db}{dt} = B_{rr_p} \left(\frac{-2N(N+A+2Q+R)A_1(t) + 2NA_2(t)\frac{1}{b^2}}{-(A+2Q+R)D_1(t) - (Q+R)\Theta} \right) + \frac{-B_{z_p}P}{\pi(b^2 - a^2)} - B_{z_p}T_0, \quad (5.22)$$

αντίστοιχα.

Οι συντελεστές του ρυθμού επαναδόμησης B_{rr} , B_{rr_p} , B_{zz} , B_{z_p} υπολογίζονται από τις σχέσεις (5.11) χρησιμοποιώντας τις τιμές των συντελεστών επαναδόμησης C_{ij_p} και C_{ij} , όπου $i, j = r, \theta, z$, που δίνονται από τους Misra et al. (1992), ως

$$\begin{aligned} B_{rr} &= -5.8 \times 10^{-9} \text{ ms}^{-1} \text{ GPa}^{-1}, & B_{zz} &= 2.6 \times 10^{-8} \text{ ms}^{-1} \text{ GPa}^{-1}, \\ B_{rr_p} &= 1.3 \times 10^{-8} \text{ ms}^{-1} \text{ GPa}^{-1}, & B_{z_p} &= -4.8 \times 10^{-9} \text{ ms}^{-1} \text{ GPa}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Οι τιμές των συντελεστών C_e^0 , C_p^0 υπολογίζονται από τις σχέσεις



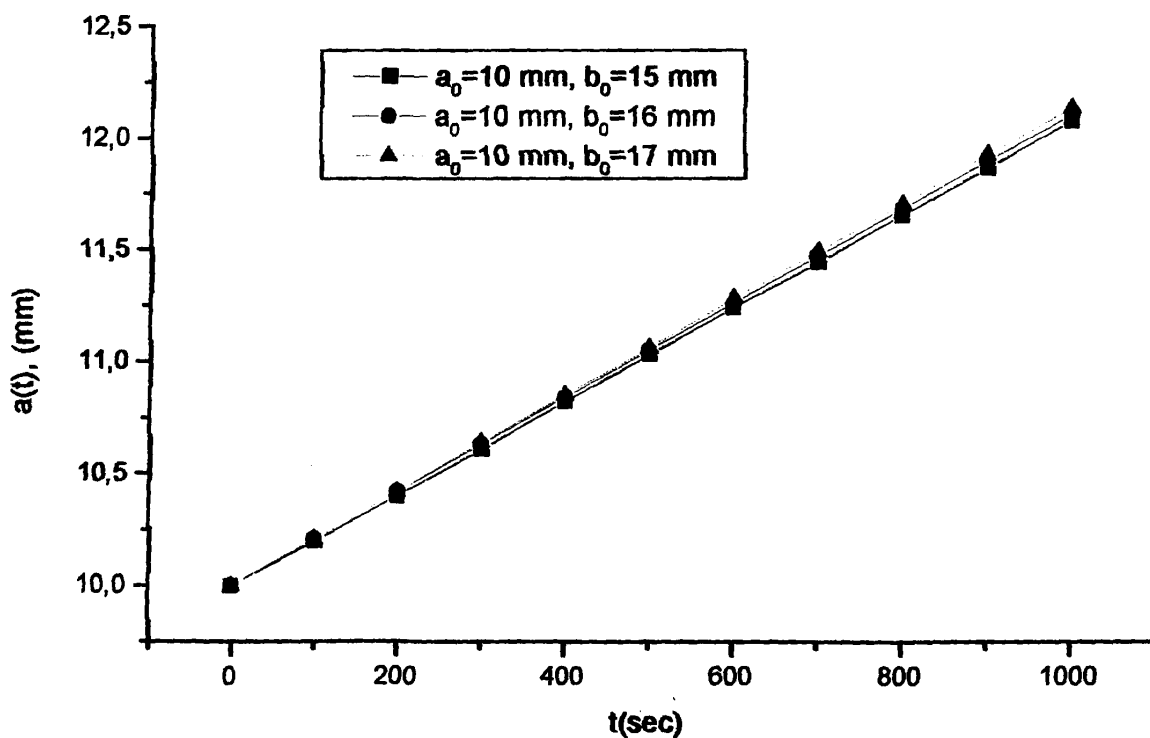
$$C_e^0 = B_{zz_r} T_0, \quad C_p^0 = B_{zz_p} T_0 \quad (5.24)$$

όπου T_0 είναι η αρχική τιμή αναφοράς της τάσης πριν ξεκινήσει η επαναδόμηση, η οποία λαμβάνεται ως $T_0 = -0.5 \text{ MPa}$ (Cowin *et al.*, 1981).

Το σύστημα των εξισώσεων (5.21) και (5.22) με αρχικές συνθήκες $a(t=0) = a_0 = 0.01 \text{ m}$ και $b(t=0) = b_0 = 0.015 \text{ m}$ επιλύεται στην συνέχεια αριθμητικά (Kincaid και Cheney, 1991, Wolfram, 1999).

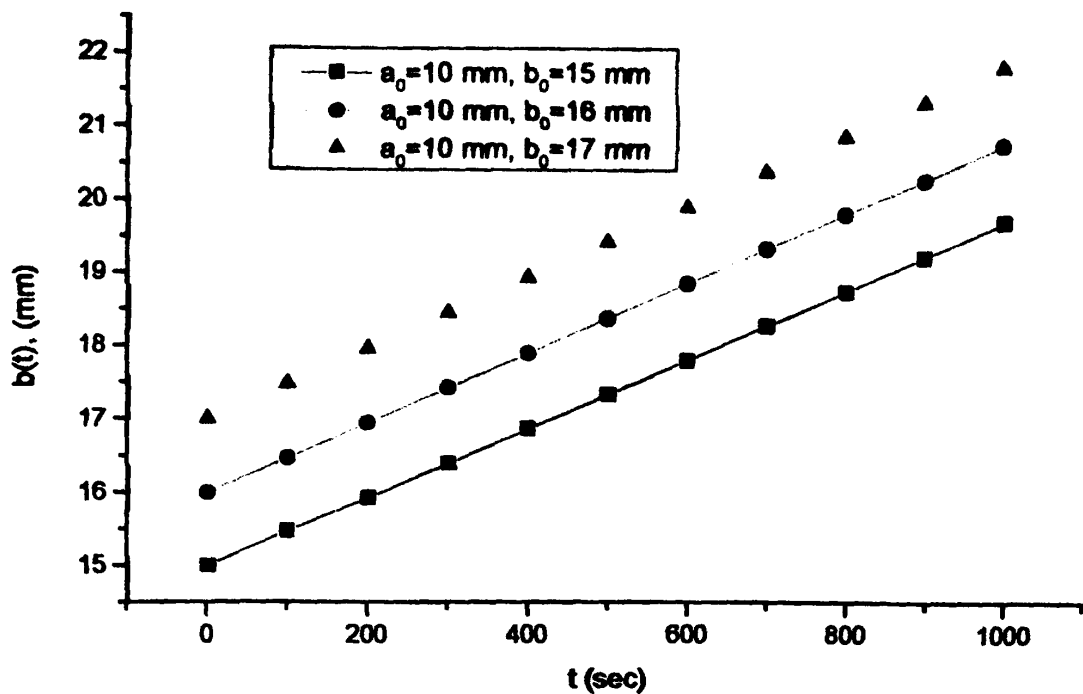
Τα Σχήματα 5.3 και 5.4 δείχνουν την μεταβολή της ακτίνας του ενδόστεου και του περιόστεου με τον χρόνο, αντίστοιχα, για σταθερή αρχική ακτίνα του ενδόστεου και διαφορετική αρχική ακτίνα του περιόστεου. Το πορώδες θεωρείται ότι έχει σταθερή τιμή $f = 0.03$. Είναι φανερό ότι καθώς εξελίσσεται ο χρόνος της επαναδόμησης, η ακτίνα τόσο του ενδόστεου όσο και του περιόστεου αυξάνεται.

Τα Σχήματα 5.5 και 5.6 δείχνουν την μεταβολή της ακτίνας του ενδόστεου και του περιόστεου με τον χρόνο, αντίστοιχα, για σταθερό αρχικό πάχος οστού και διαφορετική αρχική ακτίνα του ενδόστεου και του περιόστεου,



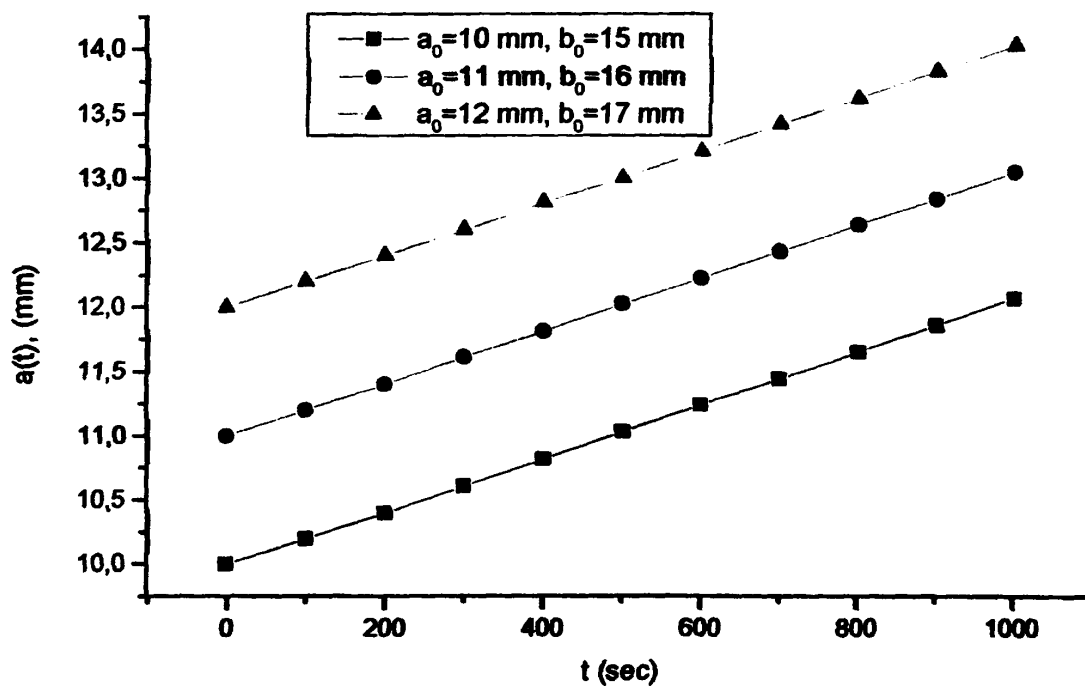
Σχήμα 5.3: Μεταβολή της ακτίνας του ενδόστεου με το χρόνο για σταθερή αρχική ακτίνα ενδόστεου και διαφορετικά αρχικά πάχη οστού.





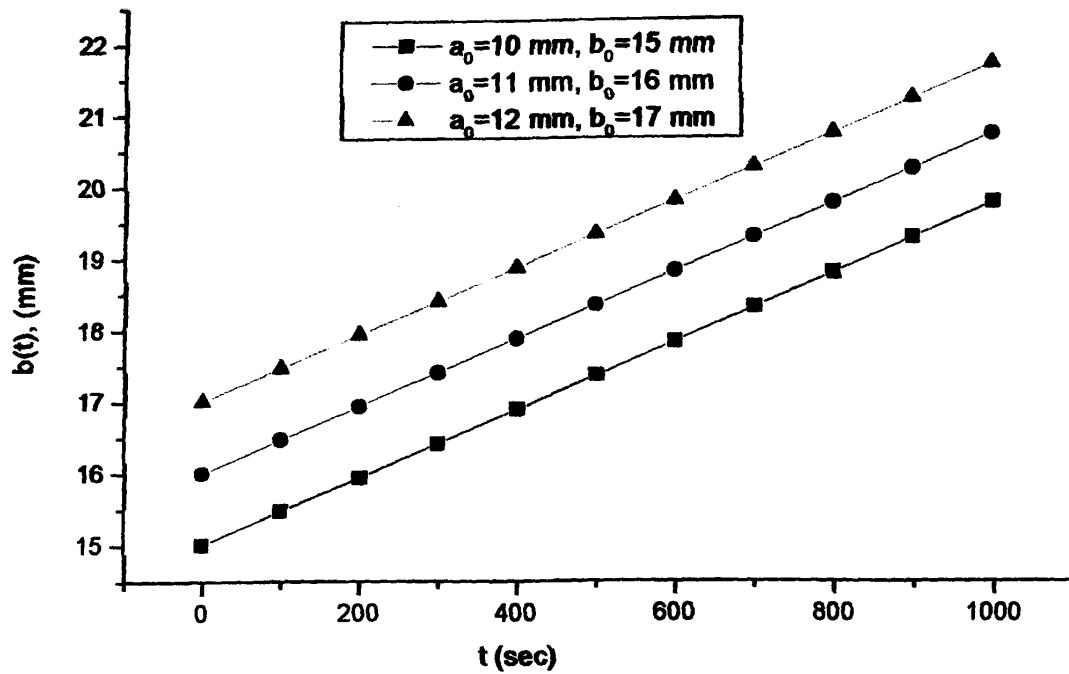
Σχήμα 5.4: Μεταβολή της ακτίνας του περιόστεου με το χρόνο για σταθερή αρχική ακτίνα ενδόστεου και διαφορετικά αρχικά πάχη οστού.

για σταθερό πορώδες $f = 0.03$. Το πάχος του οστού αυξάνεται με τον χρόνο αλλά ο ρυθμός της αύξησης είναι μικρότερος όταν οι αρχικές ακτίνες είναι μεγαλύτερες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.7.

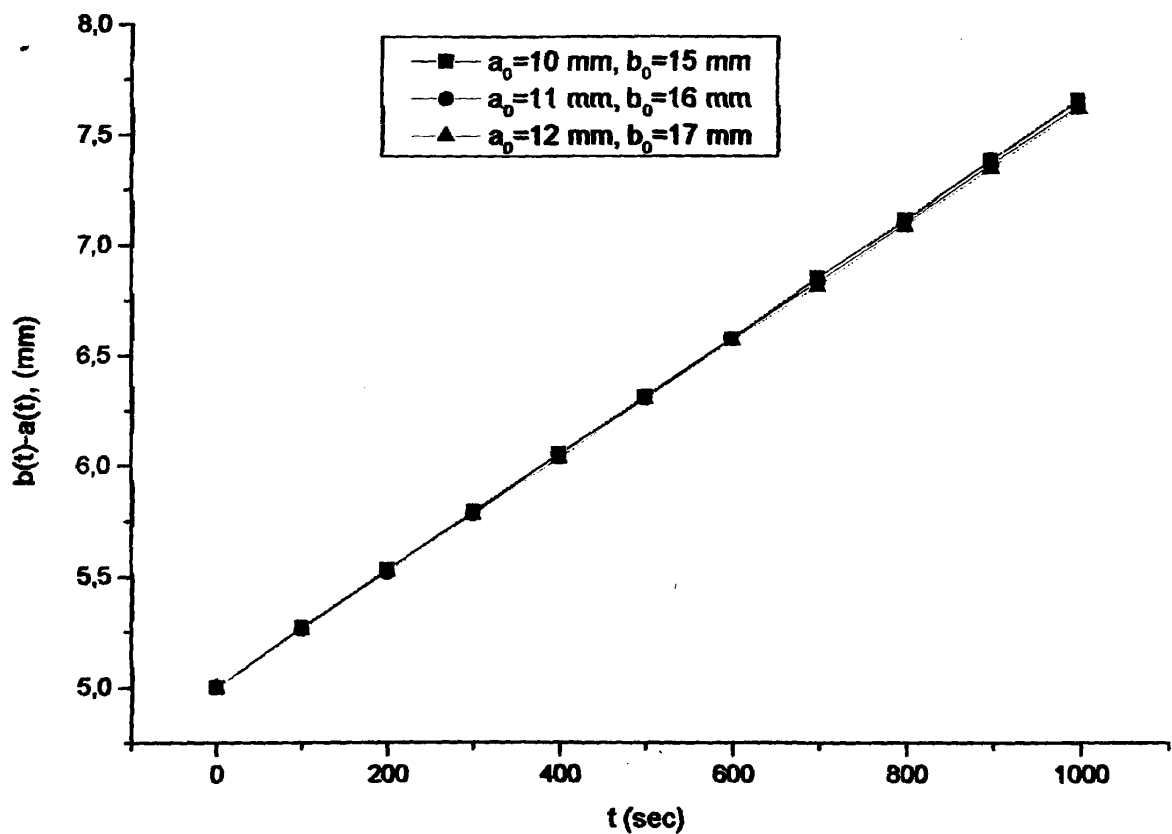


Σχήμα 5.5: Μεταβολή της ακτίνας του ενδόστεου με το χρόνο για σταθερό αρχικό πάχος οστού και διαφορετικές αρχικές ακτίνες ενδόστεου και περιόστεου.





Σχήμα 5.6: Μεταβολή της ακτίνας του περιόστεου με το χρόνο για σταθερό αρχικό πάχος οστού και διαφορετικές αρχικές ακτίνες ενδόστεου και περιόστεου.



Σχήμα 5.7: Μεταβολή του πάχους του οστού με τον χρόνο για σταθερό αρχικό πάχος και διαφορετικές αρχικές ακτίνες ενδόστεου και περιόστεου.



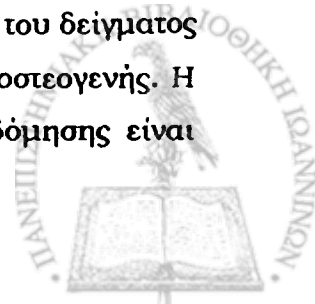
5.5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Παρουσιάστηκε μία θεωρητική προσέγγιση της επιφανειακής επαναδόμησης που επάγεται από την εξαναγκασμένη εισαγωγή ενός ενδομυελικού ήλου σε ένα κοίλο κυλινδρικό μοντέλο μακρού οστού. Μία συνηθισμένη περίπτωση που συμβαίνει αυτό είναι όταν μία ενδοπρόθεση εισάγεται στην μυελική κοιλότητα του μηριαίου οστού. Στο προτεινόμενο μοντέλο, το οστό μοντελοποιείται ως κοίλος προσαρμοστικός ποροελαστικός ισότροπος κύλινδρος, ο οποίος αποτελείται από ελαστική θεμέλια ουσία και διάμεσο ρευστό που ρέει μέσω των ενδοεπικοινωνούντων πόρων της θεμέλιας ουσίας. Η ενδοπρόθεση μοντελοποιείται ως στερεά ελαστική ισότροπη κυλινδρική ράβδος η οποία

εξαναγκάζεται να εισχωρήσει στην κυλινδρική κοιλότητα του οστού. Προτείνεται νέα καταστατική σχέση για το ποροελαστικό οστό, στην οποία ενσωματώνεται η συνεισφορά του ρευστού συστατικού του οστού στην διεργασία της επιφανειακής επαναδόμησης. Χρησιμοποιώντας την έκφραση των Biot και Willis (1957) για τις ελαστικές σταθερές ενός ποροελαστικού μέσου προτείνεται νέα εξίσωση για το ρυθμό επιφανειακής επαναδόμησης. Οι τιμές των επιφανειακών συντελεστών επαναδόμησης B_{ij} που έχουν χρησιμοποιηθεί προήλθαν από τις τιμές των συντελεστών C_{ij} που δίνονται από τους Misra *et al.* (1992). Η επιφανειακή επαναδόμηση του ενδόστεου και του περιόστεου εκφράζεται ως χρονική μεταβολή των ακτίνων των αντίστοιχων κυλινδρικών επιφανειών.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του μοντέλου, η ακτίνα του ενδόστεου αυξάνεται καθώς προχωράει η επαναδόμηση, δηλαδή η απορρόφηση οστίτη ιστού αυξάνεται με τον χρόνο στην επιφάνεια του ενδόστεου του δείγματος. Η ακτίνα του περιόστεου αυξάνεται με τον χρόνο, δηλαδή η εναπόθεση οστίτη ιστού στην επιφάνεια του περιόστεου του οστικού δείγματος αυξάνεται με τον χρόνο. Η παρατήρηση αυτή βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με τον δεύτερο από τους διαφορετικούς τύπους κίνησης της επιφάνειας στην οστική επαναδόμηση που αναφέρονται στην εργασία των Cowin και Firoozbakhsh (1981) και που στην συνέχεια επαληθεύτηκαν πειραματικά από τους Cowin *et al.* (1985). Το ίδιο αποτέλεσμα έχει προβλεφθεί τόσο από άλλα μοντέλα (Misra *et al.*, 1992) όσο και πειραματικές μελέτες (Woo *et al.*, 1981, Uthoft *et al.*, 1978, Jaworski *et al.*, 1980).

Η οστική επαναδόμηση κοντά στην επιφάνεια του ενδόστεου του δείγματος είναι οστεολυτική ενώ εκείνη στην επιφάνεια του περιόστεου είναι οστεογενής. Η κλινική σημασία της σχετιζόμενης με την τροπή οστικής επαναδόμησης είναι



εμφανής στην περίπτωση των χειρουργικών επεμβάσεων για εισαγωγή εμφυτευμάτων/ενδοπροθέσεων. Στις περισσότερες περιπτώσεις, το μοίρασμα ή η ανακατανομή φορτίων ανάμεσα στο εμφύτευμα και το οστό γύρω από αυτό, μειώνει την τροπή στην περιοχή γύρω από το εμφύτευμα. Βασιζόμενοι σε πειραματικές παρατηρήσεις, οι Lanyon *et al.* (1982) έδειξαν ότι η οστεολυτική επαναδόμηση που συχνά συμβαίνει κοντά στο εμφύτευμα μπορεί να θεωρηθεί ως μία τοπική απόκριση σε αυτήν την ελαττωμένη τροπή.

Η εισαγωγή του ενδομυελικού ήλου, επομένως, οδηγεί σε βαθμιαία καλάρωση και πιθανή τελική αστοχία του εμφυτεύματος. Σύμφωνα με τις προβλέψεις του μοντέλου, η εναπόθεση οστού στο περίοστεο είναι εντονότερη από την απορρόφηση οστού στο ενδόστεο, γεγονός που οδηγεί σε καθαρή αύξηση του πάχους του οστού με την επαναδόμηση. Αύξηση του αρχικού πάχους του οστίτη ιστού που βρίσκεται ανάμεσα στις επιφάνειες του ενδόστεου και του περιόστεου, για σταθερή αρχική ακτίνα του ενδόστεου, οδηγεί σε πιο έντονη επαναδόμηση στο ενδόστεο και στο περίοστεο. Στην περίπτωση αυτή το πάχος του οστίτη ιστού μεταξύ ενδόστεου και περιόστεου αυξάνεται με την επαναδόμηση όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό πάχος. Διατήρηση σταθερού αρχικού πάχους οστού και βαθμιαία αύξηση των αρχικών ακτίνων του ενδόστεου και του περιόστεου οδηγεί σε λιγότερο έντονη επαναδόμηση στο ενδόστεο και το περίοστεο. Όμως, ο ρυθμός αύξησης του πάχους οστού με τον χρόνο μειώνεται όσο μεγαλύτερες είναι οι αρχικές ακτίνες ενδόστεου και περιόστεου.

Όπως και στο μοντέλο εσωτερικής επαναδόμησης του κεφαλαίου 4, η επιλογή του ποροελαστικού μέσου για την υλική περιγραφή του οστού παρέχει μία άμεση απεικόνιση της συνεισφοράς του ρευστού συστατικού του οστού στην διεργασία της επαναδόμησης.

Πρέπει να σημειωθεί ότι, σε πρώτη προσέγγιση, η προβλεπόμενη από το μοντέλο μεταβολή των ακτίνων του ενδόστεου και του περιόστεου με τον χρόνο επαναδόμησης είναι ραγδαία σε σχέση με εκείνη που αναμένεται σε ρεαλιστικές συνθήκες. Αυτή όπως και οι υπόλοιπες παρατηρήσεις που έγιναν βασίζονται στην χρησιμοποίηση των συγκεκριμένων τιμών για τους συντελεστές του ρυθμού επαναδόμησης. Οι τιμές αυτές έχουν την δυνατότητα να επηρεάσουν έντονα τα υπολογιστικά αποτελέσματα. Οι Cowin και Firoozbakhsh (1981) έδειξαν ότι για διαφορετικές τιμές της υπερκείμενης τάσης συμπίεσης και των συντελεστών του ρυθμού επιφανειακής επαναδόμησης, όλοι οι τύποι της επιφανειακής κίνησης είναι δυνατοί. Η συγκεκριμένη πρόβλεψη επομένως μπορεί να βελτιωθεί με κατάλληλη επιλογή των συντελεστών του ρυθμού επαναδόμησης. Οι συντελεστές αυτοί είναι φαινομενολογικοί και θα πρέπει να επαληθευτούν πειραματικά.

Επίσης, σε πρώτη προσέγγιση, το μοντέλο παρουσιάζει γραμμική αύξηση των ακτίνων με τον χρόνο. Βελτίωση του μοντέλου θα μπορούσε να μεταβάλλει την σχέση ακτίνων-χρόνου με τέτοιο τρόπο ώστε η συνάρτηση να παρουσιάζει ακρότητα (μέγιστα) τα οποία αντιστοιχούν σε ρεαλιστικά όρια που επαληθεύονται πειραματικά.

Επειδή η φωτογραφία είναι πολύ σκούρα, ο υπόλοιπος κείμενος είναι σχεδόν不可見. Οι λέξεις είναι δύσκολο να διακριθούν, αλλά φαίνεται να αποτελεί συνέχεια του κειμένου στην κορυφή της σελίδας.



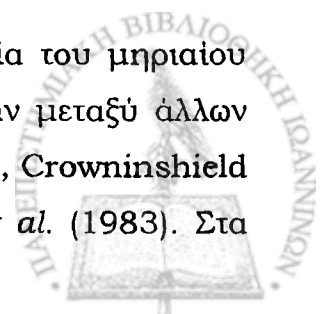
Ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία της συμπεριφοράς του ανθρώπινου μηριαίου οστού σε διαφορετικές κινητικές δραστηριότητες

6.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων εισήχθη στην ορθοπαιδική εμβιομηχανική το 1972 (Huiskes και Chao, 1983) για να υπολογίσει τις μηχανικές τάσεις στα ανθρώπινα οστά. Οι πρώτες εφαρμογές της μεθόδου έγιναν στην ανάλυση τάσεων στο μηριαίο οστό από τους Brekelmans *et al.* (1972) και Rybicki *et al.* (1972), με την χρήση δισδιάστατων στοιχείων ομοιόμορφου ή μεταβλητού πάχους. Τα πρώτα τρισδιάστατα στοιχεία του μηριαίου οστού χρησιμοποιήθηκαν στα μοντέλα του Scholten (1975) και του Olofsson (1976) ακολουθούμενα από τα μοντέλα των Valliappan *et al.* (1977), Harris *et al.* (1978) και Rohlmann *et al.* (1982). Οι παραπάνω μελέτες ήταν μεθοδολογικές, επιδεικνύοντας κυρίως τα προβλήματα που σχετίζονται με τον χειρισμό, την ερμηνεία και την αναπαράσταση των δεδομένων. Κάποια από τα μοντέλα ήταν αρκετά πολύπλοκα και περιελάμβαναν ρεαλιστικές ανομοιογένειες του σπογγώδους οστού βασισμένες σε πειραματικά δεδομένα (Scholten, 1975, Rohlmann *et al.*, 1982).

Από την εποχή εκείνη μέχρι σήμερα, η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων έχει εφαρμοστεί όλο και περισσότερο σε μελέτες που εστιάζονται σε προβλήματα αύξησης και επαναδόμησης των οστών, κατάγματα και σταθεροποίηση τους, αναλύσεις τάσεων σε προσθετικές κατασκευές στα οστά, σχεδιασμό και σταθεροποίηση τεχνητών αρθρώσεων, ολικές αρθροπλαστικές, στο φαινόμενο ασπίδας τάσεων (stress shielding) και σε άλλες ορθοπαιδικές εφαρμογές (Mackerle, 1998). Σκοπός αυτών των μελετών είναι κυρίως ο προσδιορισμός των σχέσεων ανάμεσα στις συναρτήσεις μηχανικού φορτίου και την μορφολογία των ιστών καθώς και η βελτιστοποίηση του σχεδιασμού και των τεχνικών σταθεροποίησης των εμφυτευμάτων.

Τρισδιάστατες αναλύσεις τάσεων με πεπερασμένα στοιχεία του μηριαίου οστού στο οποίο έχει εισαχθεί ενδοπρόθεση πραγματοποιήθηκαν μεταξύ άλλων από τους Rohrle *et al.* (1977), Tarr *et al.* (1980), Huiskes (1980), Crowninshield *et al.* (1980), Prendergast και Taylor (1990) και Rohlmann *et al.* (1983). Στα

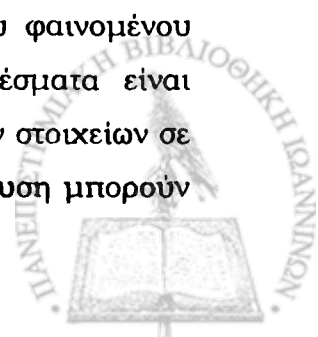


περισσότερα από τα μοντέλα αυτά, η γεωμετρία και η κατανομή των υλικών ιδιοτήτων του μηριαίου είναι αρκετά απλουστευμένα.

Λίγοι συγγραφείς έχουν συσχετίσει θεωρητικά και πειραματικά δεδομένα λεπτομερώς. Οι Huiskes *et al.* (1981), μέσω λεπτομερών πειραματικών και θεωρητικών αναλύσεων σε συμμετρικά οστά, έδειξαν ότι το στέλεχος του μηριαίου οστού μπορεί να μοντελοποιηθεί με αρκετή λεπτομέρεια εάν το φλοιώδες οστό θεωρηθεί εγκάρσια ισότροπο, αν και οι τοπικές ανομοιογένειες προκαλούν ως ένα βαθμό αποκλίσεις στο πείραμα. Η εγκυρότητα ενός μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων μέσω επαλήθευσης με πειραματικές μετρήσεις έχει επίσης διερευνηθεί από τους Rohlmann *et al.* (1983) και Keyak *et al.* (1993).

Η χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων στην παρούσα μελέτη προήλθε από την ανάγκη γενίκευσης του προβλήματος της οστικής επαναδόμησης που μελετήθηκε στα κεφάλαια 4 και 5, σε (i) μία περισσότερο πολύπλοκη και ρεαλιστική γεωμετρία ενός ανθρώπινου μακρού οστού και (ii) συννοριακές συνθήκες που ανταποκρίνονται σε *in vivo* φορτίσεις ενός πραγματικού οστού. Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιήθηκε για την απεικόνιση των μακροσκοπικών κατανομών τροπής στην επιφάνεια και το εσωτερικό ενός τρισδιάστατου μοντέλου του ανθρώπινου μηριαίου οστού με και χωρίς ενδοπρόθεση και τον συσχετισμό τους με την διεργασία της επαναδόμησης, σε εννέα διαφορετικές κινητικές δραστηριότητες. Οι δραστηριότητες αυτές περιλαμβάνουν αργή, φυσιολογική και γρήγορη βάδιση, ανέβασμα και κατέβασμα σκάλας, ανασήκωμα και κάθισμα, στάση σε 2-1-2 πόδια και κάμψη γόνατος. Συγκεκριμένα, έγινε προσπάθεια να απαντηθούν τα ακόλουθα ερωτήματα: (1) Υπάρχει ουσιαστική διαφορά στις κατανομές των κύριων τροπών σε ένα φυσιολογικό μηριαίο οστό κατά την διάρκεια διαφορετικών κινητικών δραστηριοτήτων; (2) Πώς συγκρίνονται αυτές οι κατανομές με τις αντίστοιχες σε ένα μηριαίο οστό στο οποίο έχει εισαχθεί ενδοπρόθεση; (3) Διαφέρουν οι τιμές των κύριων τροπών στην πρόσθια, οπίσθια, μέση και πλάγια πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης; (4) Σε ποια κατάσταση φόρτισης και σε ποια περιοχή είναι το φαινόμενο ασπίδας τάσεων (βλ. Παράρτημα Γ) περισσότερο έντονο;

Η επίλυση των μοντέλων έγινε με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων μέσω του υπολογιστικού προγράμματος MSC/Nastran (1999). Έγινε σύγκριση της κατανομής κύριων τροπών στα δύο μοντέλα και επίδειξη του φαινομένου ασπίδας τάσεων στο μοντέλο με την ενδοπρόθεση. Τα αποτελέσματα είναι ενδεικτικά του γεγονότος ότι τα τρισδιάστατα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων σε συνδυασμό με την κατάλληλη πειραματική βαθμονόμηση/επαλήθευση μπορούν



να χρησιμεύσουν στην καρτογράφηση του μηχανικού περιβάλλοντος στα οστά, με επακόλουθες πρακτικές εφαρμογές.

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται αρχικά οι βασικές αρχές και η μαθηματική διατύπωση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Στην συνέχεια παρουσιάζεται λεπτομερώς (γεωμετρία, υλικές ιδιότητες, συνοριακές συνθήκες) το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων και ακολουθεί η επίλυσή του και η παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

6.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

6.2.1. Γενική διαδικασία της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων είναι μία αριθμητική μέθοδος η οποία αντικαθιστά τις αρχικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα με ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Η ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία προσπαθεί να προσεγγίσει την συμπεριφορά μίας δομής αυθαίρετου σχήματος υπό γενικές συνθήκες φόρτισης και περιορισμών με ένα σύνολο διακριτών πεπερασμένων στοιχείων με κανονικά (ή σχεδόν κανονικά) γεωμετρικά σχήματα και γνωστές λύσεις. Η συμπεριφορά της δομής λαμβάνεται αναλύοντας την συλλογική συμπεριφορά των στοιχείων (Akin, 1986).

Συγκεκριμένα, το σύνορο και το εσωτερικό του συνεχούς μέσου υποδιαιρούνται με την χρήση σημείων, γραμμών ή επιφανειών σε έναν πεπερασμένο αριθμό υποπεριοχών ή πεπερασμένων στοιχείων διακριτού μεγέθους. Ένας διακριτός αριθμός κομβικών σημείων επιβάλλεται με το πλέγμα το οποίο διαιρεί την περιοχή. Τα κομβικά σημεία μπορεί να βρίσκονται οπουδήποτε κατά μήκος των γραμμών του πλέγματος ή μέσα στο πλέγμα, αν και συνήθως βρίσκονται σε αλληλοτεμνόμενες γραμμές ή επιφάνειες του πλέγματος. Τα στοιχεία έχουν συνήθως ευθέα σύνορα και επομένως, αν η πραγματική περιοχή ενδιαφέροντος έχει καμπυλόγραμμα σύνορα, εισάγονται γεωμετρικές προσεγγίσεις.

Στα κομβικά σημεία αποδίδονται ακέραιοι αριθμοί αναγνώρισης της ταυτότητάς τους, οι κομβικοί αριθμοί. Ομοίως, σε κάθε στοιχείο αποδίδεται ένας ακέραιος αριθμός αναγνώρισης. Σε κάθε κόμβο αποδίδεται ένας αριθμός βαθμών ελευθερίας που αποτελούν τις (άγνωστες) κομβικές παράμετρους του προβλήματος.

Ένας τυπικός κόμβος συνήθως συσχετίζεται με περισσότερα από ένα στοιχεία. Ένα τυπικό στοιχείο έχει έναν αριθμό κομβικών σημείων που σχετίζονται με αυτό, τα οποία βρίσκονται πάνω ή μέσα στο σύνορό του. Η

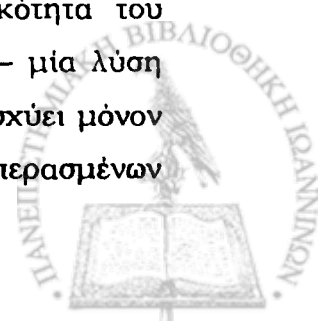
διαδικασία αυτή ορίζει τον συνολικό αριθμό βαθμών ελευθερίας που σχετίζονται με έναν τυπικό κόμβο και ένα τυπικό στοιχείο. Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του συστήματος είναι το γινόμενο του αριθμού των κόμβων με τον αριθμό των παραμέτρων ανά κόμβο. Ομοίως, ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας ανά στοιχείο, ορίζεται από το γινόμενο του αριθμού των κόμβων ανά στοιχείο με τους βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο. Απαιτούνται συγκεκριμένες μαθηματικές πράξεις για τον συσχετισμό των βαθμών ελευθερίας του στοιχείου με τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος.

Ένα βασικό πρόβλημα στην μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων είναι ο καθορισμός του πίνακα ακαμψίας του στοιχείου και του διανύσματος φορτίου αντίστοιχα. Η διαδικασία περιλαμβάνει την εισαγωγή συναρτήσεων παρεμβολής (interpolation functions) στο αρχικό ολοκλήρωμα. Οι παραπάνω πίνακες συνήθως προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση μίας συνάρτησης ή με την μέθοδο των σταθμισμένων υπολοίπων (βλ. παράγραφο 6.2.2.2). Σχεδόν όλοι οι ορισμοί πινάκων στοιχείων περιλαμβάνουν κάποιον τύπο οριζουσών ιδιοτήτων ή συντελεστών. Μόλις έχουν διατυπωθεί οι εξισώσεις στοιχείων, η συνεισφορά κάθε στοιχείου προστίθεται ώστε να σχηματιστούν οι εξισώσεις του συστήματος. Αφού διατυπωθούν οι εξισώσεις του συστήματος, είναι απαραίτητο να εφαρμοστούν οι συνοριακοί περιορισμοί προτού λυθεί το σύστημα ως προς τις άγνωστες κομβικές παραμέτρους. Οι πιο συνηθισμένοι τύποι συνοριακών περιορισμών των κομβικών παραμέτρων είναι

- (i) ο ορισμός ρητών (explicit) τιμών των αγνώστων στο σύνορο, και
- (ii) ο ορισμός εξισώσεων περιορισμών οι οποίες είναι γραμμικοί συνδυασμοί των κομβικών ποσοτήτων.

Όταν όλες οι παραπάνω συνθήκες έχουν ικανοποιηθεί, επιλύονται οι εξισώσεις του συστήματος ως προς τις άγνωστες κομβικές παραμέτρους. Η διαδικασία αυτή μπορεί να μειώσει κατά πολύ (90% ή περισσότερο) τον αριθμό των υπολογισμών που κανονικά θα απαιτούνταν για να επιλυθούν οι αρχικές εξισώσεις.

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων παρέχει απεριόριστη γενικότητα στο πρόβλημα επιτρέποντας την χρήση στοιχείων διαφόρων κανονικών σχημάτων. Τα στοιχεία αυτά μπορούν να συνδυαστούν ώστε να προσεγγίσουν οποιοδήποτε μη ομαλό σύνορο. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούν να εφαρμοστούν φορτία και περιορισμοί (συνοριακές συνθήκες) οποιουδήποτε τύπου. Η γενικότητα του προβλήματος παρέχεται με κόστος την αντίληψη του προβλήματος - μία λύση πεπερασμένων στοιχείων είναι στην ουσία ένα πλήθος αριθμών που ισχύει μόνον για το συγκεκριμένο πρόβλημα που τίθεται από το μοντέλο πεπερασμένων



στοιχείων. Μεταβολή οποιασδήποτε σημαντικής ιδιότητας του μοντέλου γενικά απαιτεί μία πλήρη επανάλυση του προβλήματος.

6.2.2. Μαθηματική διατύπωση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων

6.2.2.1. Η προσέγγιση μέσω συναρτήσεων βάσης

Έστω ότι πρέπει να προσεγγιστεί μία δεδομένη συνάρτηση ϕ σε κάποια περιοχή Ω , η οποία οριοθετείται από μία κλειστή καμπύλη Γ (Zienkiewicz και Morgan, 1983). Εάν (i) μπορεί να βρεθεί μία οποιαδήποτε συνάρτηση ψ η οποία λαμβάνει τις ίδιες τιμές με την ϕ στην Γ , δηλαδή

$$\psi|_{\Gamma} = \phi|_{\Gamma} \quad (6.1)$$

και (ii) εισαχθεί ένα σύνολο ανεξάρτητων συναρτήσεων βάσης $\{N_m; m=1,2,3,\dots\}$ έτσι ώστε $N_m|_{\Gamma} = 0$ για όλα τα m , τότε σε όλα τα σημεία στην Ω η ϕ προσεγγίζεται ως

$$\phi \cong \hat{\phi} = \psi + \sum_{m=1}^M \alpha_m N_m \quad (6.2)$$

όπου $\alpha_m (m=1,2,\dots,M)$ είναι κάποιες παράμετροι οι οποίες υπολογίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να λαμβάνεται καλή ταύτιση μεταξύ των δύο συναρτήσεων.

Ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται η συνάρτηση ψ και το σύνολο των συναρτήσεων δοκιμής αυτομάτως πιστοποιεί ότι η προσέγγιση (6.2) έχει την ιδιότητα

$$\hat{\phi}|_{\Gamma} = \phi|_{\Gamma} \quad (6.3)$$

ανεξάρτητα από τις τιμές των παραμέτρων α_m .

Το σύνολο των συναρτήσεων δοκιμής θα πρέπει να επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται ότι αύξηση στον αριθμό M των συναρτήσεων βάσης οδηγεί σε βελτίωση της προσέγγισης. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως σύγκλιση (convergence) της προσέγγισης.

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι καθορισμού των παραμέτρων α_m που χρησιμοποιούνται στην εξίσωση (6.2). Μία γενική μέθοδος είναι η προσέγγιση των σταθμισμένων υπολοίπων η οποία περιγράφεται στην συνέχεια.



6.2.2.2. Η προσέγγιση των σταθμισμένων υπολοίπων

Το σφάλμα ή υπόλοιπο R_Ω σε μία προσέγγιση ορίζεται ως

$$R_\Omega = \phi - \hat{\phi}. \quad (6.4)$$

και είναι συνάρτηση της θέσης στην Ω .

Στην προσπάθεια να μειωθεί αυτό το υπόλοιπο με κάποιο συνολικό τρόπο σε ολόκληρη την περιοχή Ω , μπορεί να απαιτηθεί να μηδενίζεται ένας κατάλληλος αριθμός ολοκληρωμάτων του σφάλματος πάνω στην Ω , σταθμισμένος με διαφορετικούς τρόπους (Zienkiewicz και Morgan, 1983), δηλαδή

$$\int_{\Omega} W_l (\phi - \hat{\phi}) d\Omega \equiv \int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega = 0; \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (6.5)$$

όπου το $\{W_l; l = 1, 2, 3\}$ είναι ένα σύνολο ανεξάρτητων συναρτήσεων βάρους.

Αντικαθιστώντας την $\hat{\phi}$ στην εξίσωση (6.5) μέσω της σχέσης (6.2), η έκφραση των σταθμισμένων υπολοίπων (6.5) οδηγεί σε ένα σύστημα ταυτόχρονων γραμμικών εξισώσεων για τους άγνωστους συντελεστές a_m , το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad (6.6)$$

όπου

$$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_M), \quad (6.7a)$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l N_m d\Omega, \quad 1 \leq l, m \leq M, \quad (6.7b)$$

$$f_l = \int_{\Omega} W_l (\phi - \psi) d\Omega, \quad 1 \leq l \leq M. \quad (6.7c)$$

Η εξίσωση (6.6) αποτελεί την βασική εξίσωση πίνακα της γραμμικής στατικής ανάλυσης, όπου το \mathbf{K} ονομάζεται πίνακας ακαμψίας στοιχείου, το \mathbf{f} είναι το διάνυσμα της δύναμης (γνωστό) και το \mathbf{a} είναι το διάνυσμα των άγνωστων μετατοπίσεων που προκαλούνται από την \mathbf{f} .

Επομένως, όταν δίνεται η συνάρτηση ϕ που πρέπει να προσεγγιστεί, η σχέση (6.6) μπορεί να επιλυθεί για να ληφθούν οι συντελεστές της προσέγγισης (6.2), αφού πρώτα έχει καθοριστεί η συνάρτηση ψ και έχουν επιλεγεί κατάλληλα σύνολα συναρτήσεων βάσης και βάρους. Στην πράξη χρησιμοποιούνται διάφορα σύνολα συναρτήσεων βάρους $\{W_l; l = 1, 2, \dots\}$ και το καθένα οδηγεί σε μία διαφορετική μέθοδο προσέγγισης σταθμισμένων υπολοίπων.



6.2.2.3. Η αρχή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων

Στις προσεγγιστικές μεθόδους που προαναφέρθηκαν έγινε η υπόθεση ότι οι συναρτήσεις δοκιμής του αναπτύγματος (6.2) ορίστηκαν μέσω μιας έκφρασης η οποία ισχύει σε ολόκληρη την περιοχή Ω και ότι τα ολοκληρώματα των προσεγγιστικών εξισώσεων, όπως η (6.5), υπολογίστηκαν με μία πράξη πάνω στην περιοχή αυτή.

Μία εναλλακτική προσέγγιση είναι να υποδιαιρεθεί η περιοχή Ω σε έναν αριθμό μη επικαλυπτόμενων υποπεριοχών ή στοιχείων Ω^e και στην συνέχεια να κατασκευαστεί η προσέγγιση $\hat{\phi}$ με έναν τμηματικό τρόπο πάνω σε κάθε υποπεριοχή (Zienkiewicz και Morgan, 1983). Οι συναρτήσεις δοκιμής οι οποίες χρησιμοποιούνται στην διαδικασία της προσέγγισης μπορούν επίσης να οριστούν με έναν τμηματικό τρόπο, χρησιμοποιώντας διαφορετικές εκφράσεις στις διάφορες υποπεριοχές Ω^e από τις οποίες αναπτύσσεται η συνολική περιοχή. Στην περίπτωση αυτή, τα ορισμένα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στις προσεγγιστικές εξισώσεις λαμβάνονται αθροίζοντας τις συνεισφορές από κάθε υποπεριοχή ή στοιχείο, ως

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} W_l R_{\Omega} d\Omega, \quad (6.8a)$$

$$\int \bar{W}_l R_{\Gamma} d\Gamma = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma^e} \bar{W}_l R_{\Gamma} d\Gamma, \quad (6.8b)$$

υπό τον όρο ότι $\sum_{e=1}^E \Omega^e = \Omega$, $\sum_{e=1}^E \Gamma^e = \Gamma$.

Το E δηλώνει τον συνολικό αριθμό των υποδιαιρέσεων της περιοχής και το Γ^e δηλώνει το τμήμα του συνόρου της Ω^e , το οποίο βρίσκεται πάνω στην Γ . Επομένως, οι αθροίσεις που εμπεριέχουν το Γ^e λαμβάνονται μόνον πάνω σε εκείνα τα στοιχεία της Ω^e , τα οποία βρίσκονται πολύ κοντά στο σύνορο.

Εάν οι υποπεριοχές είναι σχετικά απλού σχήματος και ο ορισμός των συναρτήσεων βάσης σε αυτές τις υποπεριοχές μπορεί να γίνει με έναν επαναλαμβανόμενο τρόπο, είναι δυνατόν να χειριστεί κανείς με ευκολία τις συναθροιζόμενες (assembled) περιοχές πολύπλοκων σχημάτων. Αυτή είναι η βασική ιδέα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.

Ο τμηματικός ορισμός των συναρτήσεων βάσης σημαίνει ότι υπάρχουν ασυνέχειες στην συνάρτηση προσέγγισης ή τις παραγώγους της. Κάποιος βαθμός ασυνέχειας είναι γενικά αποδεκτός. Συνήθως αποδίδεται στις συναρτήσεις βάσης μία «στενή βάση» ώστε οι τιμές τους να μηδενίζονται παντού εκτός από το

συγκεκριμένο στοιχείο και τις περιοχές που γειτνιάζουν άμεσα με το στοιχείο αυτό.

6.2.2.4. Γραμμικές συναρτήσεις σιενής βάσης

Για να επεξηγηθεί η χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων, θα δειχθεί στην συνέχεια πώς μπορεί να κατασκευαστεί μία προσέγγιση μιας αυθαίρετης συνάρτησης $\phi(x)$ πάνω σε μία μονοδιάστατη περιοχή $\Omega = \{0, L_x\}$ (Zienkiewicz και Morgan, 1983). Η υποδιαίρεση της Ω σε $E (= M_n - 1)$ μη συμπίπτουσες υποπεριοχές, επιτυγχάνεται με την επιλογή ενός κατάλληλου συνόλου σημείων $\{x_l; l = 1, 2, \dots, M_n\}$ στην Ω , με $x_1 = 0$ και $x_{M_n} = L_x$, και ορίζοντας το στοιχείο Ω^e να βρίσκεται στο διάστημα $x_e \leq x \leq x_{e+1}$.

Στο Σχήμα 6.1, φαίνεται μία προσέγγιση η οποία μεταβάλλεται γραμμικά με το x πάνω σε κάθε στοιχείο. Τα σημεία σύνδεσης των στοιχείων είναι οι (αριθμημένοι) κόμβοι και η προσέγγιση επιτυγχάνεται συσχετίζοντας μία τμηματικά γραμμική συνάρτηση συνολικού σχήματος (piecewise linear global shape function) N_i με κάθε κόμβο i . Η συνάρτηση συνολικού σχήματος έχει την ιδιότητα το N_i να είναι μη μηδενικό μόνο στα στοιχεία που σχετίζονται με τον κόμβο i , να είναι $N_i = 1$ στον κόμβο i και $N_i = 0$ σε όλους τους άλλους κόμβους. Οι μόνες συναρτήσεις συνολικού σχήματος που είναι τότε μη μηδενικές πάνω σε οποιοδήποτε στοιχείο είναι εκείνες που σχετίζονται με τους κόμβους εκείνου του συγκεκριμένου στοιχείου. Η συνολική προσέγγιση μπορεί να γραφεί ως

$$\phi \cong \hat{\phi} = \sum_{m=1}^{M_n} \phi_m N_m \text{ στην } \Omega \quad (6.9a)$$

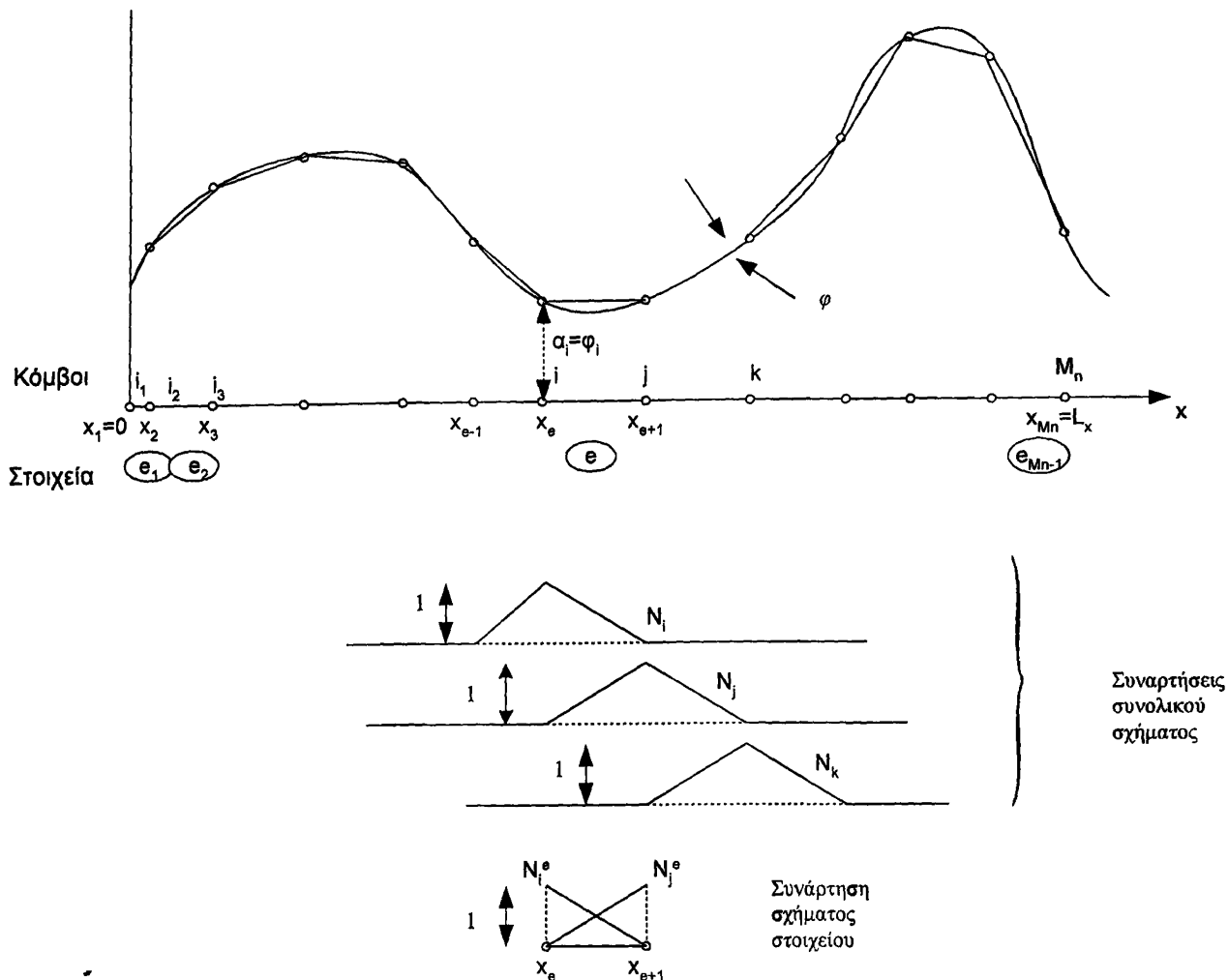
όπου το ϕ_m δηλώνει την τιμή της ϕ στον κόμβο m .

Σε κάθε στοιχείο e , με κόμβους i και j , η προσέγγιση εκφράζεται συναρτήσει δύο συναρτήσεων βάσης γραμμικού στοιχείου N_i^e και N_j^e και των κομβικών τιμών ϕ_i, ϕ_j ως

$$\phi \cong \hat{\phi} = \phi_i N_i^e + \phi_j N_j^e \text{ στο στοιχείο } e. \quad (6.9b)$$

Η γραμμική μεταβολή της προσέγγισης πάνω σε κάθε στοιχείο είναι τότε προφανής καθώς και οι δύο συναρτήσεις βάσης στοιχείου είναι γραμμικές.





Σχήμα 6.1: Προσέγγιση δεδομένης συνάρτησης σε μία διάσταση με τμηματικά γραμμικά στοιχεία (αναπαράγωγή από Zienkiewicz και Morgan, 1983).

6.2.2.5. Γενίκευση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων σε δύο και τρεις διαστάσεις

Η χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων σε μία διάσταση είναι μικρού πρακτικού ενδιαφέροντος, καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις μπορούν να βρεθούν άμεσα ακριβείς λύσεις. Όμως, σε προβλήματα δύο και τριών διαστάσεων η κατάσταση είναι τελείως διαφορετική καθώς η εύρεση ακριβούς λύσης είναι δυνατή μόνον για τις πιο απλές περιοχές και συνοριακές συνθήκες.

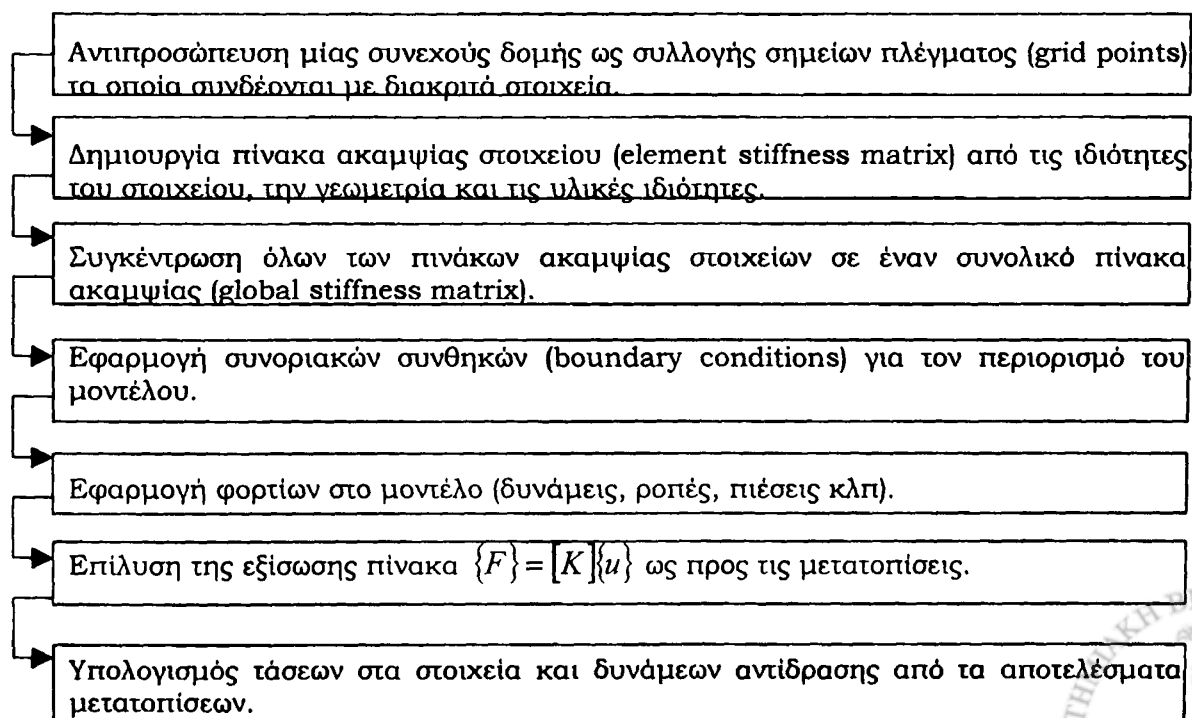
Η επιλογή των συναρτήσεων σχήματος των πεπερασμένων στοιχείων σε περισσότερες από μία διαστάσεις παρουσιάζει κάποιες δυσκολίες. Γενικά, τα προβλήματα στα οποία απαιτείται συνέχεια (continuity) των συναρτήσεων βάσης, μπορούν να αναλυθούν με την χρήση απλών στοιχείων, όπως τριγώνων (triangular) και τετραγώνων (rectangular), σε δύο διαστάσεις, καθώς και την γενίκευση αυτών σε τρεις διαστάσεις (Zienkiewicz και Morgan, 1983).

6.3. ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ MSC/NASTRAN

Το πρόγραμμα ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα μελέτη είναι το MSC/Nastran Version 70.5 για Unix (1999). Πρόκειται για ένα πρόγραμμα γενικής χρήσης που καλύπτει ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων μηχανικής (Miller, 1996). Το Nastran είναι κυρίως γραμμένο σε Fortran και περιέχει πάνω από ένα εκατομμύριο γραμμές κώδικα. Το Nastran αποτελείται από έναν μεγάλο αριθμό δομικών μονάδων (modules). Κάθε module είναι μία συλλογή υπορουτινών σε Fortran οι οποίες σχεδιάστηκαν για να επιτελέσουν μία συγκεκριμένη εργασία όπως επεξεργασία της γεωμετρίας του μοντέλου, συνάθροιση (assembling) πινάκων, εφαρμογή περιορισμών, επίλυση πινάκων, υπολογισμό ποσοτήτων εξόδου, επικοινωνία με την βάση δεδομένων, εκτύπωση της λύσης κλπ. Τα modules ελέγχονται από μία εσωτερική γλώσσα, η οποία ονομάζεται Direct Matrix Abstraction Program (DMAP). Κάθε διαθέσιμος τύπος ανάλυσης στο Nastran ονομάζεται ακολουθία λύσης και είναι μία συλλογή εκατοντάδων ή χιλιάδων εντολών DMAP. Μόλις επιλεγεί μία συγκεκριμένη ακολουθία λύσης, το συγκεκριμένο σύνολο εντολών DMAP στέλνει οδηγίες στα modules τα οποία χρειάζονται για να εκτελέσουν την ζητούμενη επίλυση.

6.3.1. Διάγραμμα ροής λύσης

Ένα διάγραμμα ροής το οποίο συνοψίζει τα βασικά βήματα κατά την (γραμμική στατική) ανάλυση με το MSC/NASTRAN απεικονίζεται παρακάτω (Miller, 1996):



6.3.2. Υποθέσεις και περιορισμοί της γραμμικής στατικής ανάλυσης

Η γραμμική στατική ανάλυση στο MSC/Nastran περιλαμβάνει σημαντικές υποθέσεις και περιορισμούς (Miller, 1996) που συνοψίζονται στην συνέχεια.

6.3.2.1. Γραμμικό ελαστικό υλικό

Το υλικό θεωρείται ομογενές και ισότροπο. Περιορίζεται κανείς σε υλικά στα οποία η τάση είναι ανάλογη προς την τροπή (γραμμική) και σε φορτία τα οποία δεν οδηγούν το υλικό πέρα από το μόνιμο σημείο υποχώρησης (yield point), δηλαδή το υλικό παραμένει ελαστικό. Επιπλέον, γίνεται η υπόθεση ότι χωρίς την εφαρμογή φορτίου η δομή είναι ελεύθερη αρχικών ή υπολειμματικών (residual) τάσεων.

6.3.2.2. Μικρές μετατοπίσεις

Η υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων χρησιμοποιείται στην διατύπωση των κυρίαρχων εξισώσεων για την γραμμική συμπεριφορά δοκών, πλακών, κελυφών και στερεών και στην ανάπτυξη στοιχείων με το MSC/Nastran. Οι υποθέσεις αυτές σημαίνουν πλευρικές αποκλίσεις πλακών σημαντικά μικρότερες από το πάχος της πλάκας και αποκλίσεις δοκών σημαντικά μικρότερες από την μικρότερη διάσταση της διατομής της δοκού. Παραβίαση των περιορισμών της γραμμικής ανάλυσης στις μικρές μετατοπίσεις οδηγεί σε συνολικά ανακριβή αποτελέσματα μετατοπίσεων.

6.3.2.3. Αργά εφαρμοζόμενα φορτία

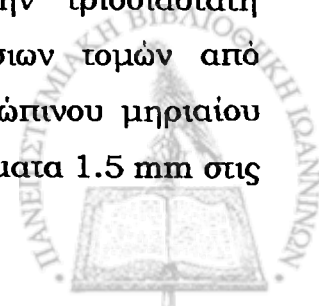
Στην γραμμική στατική ανάλυση, η δομή βρίσκεται σε στατική ισορροπία. Τα φορτία πρέπει να εφαρμόζονται αργά ώστε να μην επάγουν δυναμικά αποτελέσματα.

Οι παραπάνω υποθέσεις της γραμμικής στατικής ανάλυσης εφαρμόστηκαν στην ανάλυση του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων της παρούσας εργασίας.

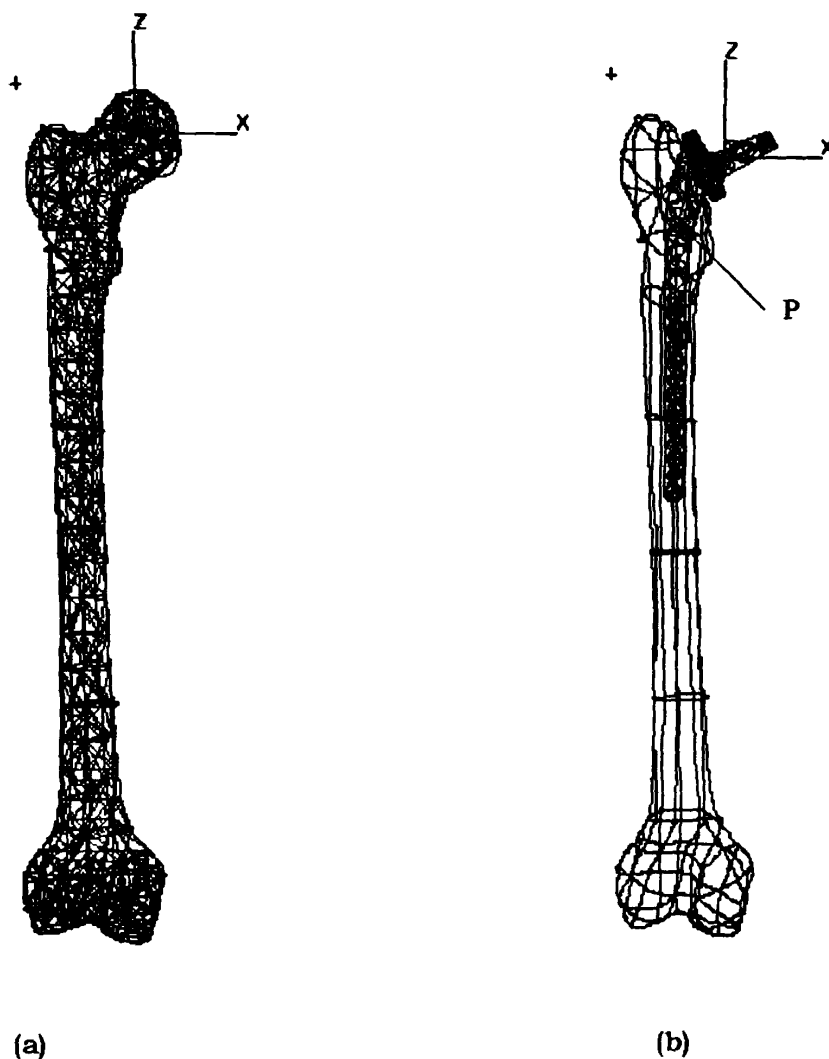
6.4. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

6.4.1. Γεωμετρία μοντέλου μηριαίου οστού

Η γεωμετρία του μηριαίου οστού ελήφθη από την τρισδιάστατη ανακατασκευή των περιγραμμάτων του περιόστεου εγκάρσιων τομών από υπολογιστική τομογραφία (CT), ενός δεξιού πτωματικού ανθρώπινου μηριαίου οστού. Οι τομές ήταν πάχους 1.5 mm και ελήφθησαν σε διαστήματα 1.5 mm στις



επιφύσεις και 2.5 - 4.5 mm στην διάφυση. Το μήκος του μηριαίου οστού ήταν περίπου 380 mm από την μηριαία κεφαλή έως τους μηριαίους κονδύλους στην άρθρωση του γόνατος και η διάμετρος της μηριαίας κεφαλής ήταν περίπου 50 mm (Σχήμα 6.2(a)). Το βάρος του ατόμου στο οποίο ανήκε το μηριαίο οστό ήταν περίπου 75 kg. Στην συνέχεια, η μηριαία κεφαλή απομακρύνθηκε από το παραπάνω μοντέλο και μία ενδοπρόθεση σχεδιασμένη με το πρόγραμμα MSC/Patran (2000) εισήχθη στο μοντέλο του μηριαίου οστού (Σχήμα 6.2(b)) προσομοιώνοντας την εισαγωγή ενδομυελικού ήλου χωρίς τσιμέντο. Το μήκος του στελέχους της ενδοπρόθεσης ήταν περίπου 150 mm. Η ενδοπρόθεση εισήχθη στο τρισδιάστατο μοντέλο του μηριαίου με πλάγια κλίση 9° και πρόσθια κλίση 4° σε ένα δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (Σχήμα 6.2). Η μυελική κοιλότητα παραλήφθηκε τόσο στο ανέπαφο όσο και στο μοντέλο με την ενδοπρόθεση.



Σχήμα 6.2: Γεωμετρικό μοντέλο και μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων (a) του ανέπαφου μηριαίου οστού και (b) του μηριαίου οστού με την ενδοπρόθεση. Το πλέγμα στο μοντέλο με την ενδοπρόθεση έχει ληφθεί αραιό στην συγκεκριμένη απεικόνιση μόνον, ώστε να είναι ορατή η ενδοπρόθεση.



6.4.2. Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων

Ένα τρισδιάστατο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων δημιουργήθηκε χρησιμοποιώντας το interface πρόγραμμα του Nastran, MSC/Patran Version 8.5 για Unix (2000). Κατασκευάστηκε στερεό πλέγμα του ανέπαφου μηριαίου οστού αποτελούμενο από 31313 τετρακομβικά, γραμμικά, τετραεδρικά (tetrahedral) στοιχεία με μήκος στοιχείου 4 mm και 6606 κόμβους. Στο μοντέλο του εμφυτευμένου μηριαίου οστού χρησιμοποιήθηκαν 28516 τετρακομβικά, γραμμικά, τετραεδρικά (tetrahedral) στοιχεία με 6143 κόμβους για το οστό και 2197 τετρακομβικά, γραμμικά, τετραεδρικά (tetrahedral) στοιχεία με 688 κόμβους για την ενδοπρόθεση. Συνολικά δηλαδή χρησιμοποιήθηκαν 30713 τετραεδρικά στοιχεία και 6831 κόμβοι για το σύστημα οστού-ενδοπρόθεσης. Το μήκος στοιχείου στο πλέγμα τόσο της ενδοπρόθεσης όσο και του οστού ήταν 4 mm. Το επίπεδο διακριτοποίησης (discretization) του πλέγματος καθορίστηκε από έναν έλεγχο σύγκλισης (convergence) στο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων. Η επαφή ανάμεσα στο οστό και την ενδοπρόθεση μοντελοποιήθηκε με την χρήση 786 τετρακομβικών, γραμμικών, τριγωνικών στοιχείων με 601 κόμβους και μήκος στοιχείου 4 mm. Η τριβή ανάμεσα στο οστό και την ενδοπρόθεση θεωρήθηκε αμελητέα (fully bonded interface).

6.4.3. Υλικές ιδιότητες

Το μηριαίο οστό μοντελοποιήθηκε ως ένα γραμμικό, ελαστικό, ισότροπο και ομογενές υλικό. Έγινε διάκριση των υλικών ιδιοτήτων μεταξύ δύο κύριων περιοχών: του σπογγώδους οστού στις επιφύσεις και του φλοιώδους οστού στην διάφυση (Πίνακας 6.1). Οι τιμές των αποδιδόμενων ιδιοτήτων φλοιώδους οστού είναι μικρότερες από τις μέσες τιμές τους στο φλοιώδες τμήμα του ανθρώπινου μηριαίου οστού. Αυτό έγινε για να αντισταθμίσει την έλλειψη ύπαρξης μυελικής κοιλότητας και μικρού ποσοστού σπογγώδους οστού στην διάφυση του ανθρώπινου μηριαίου. Το κράμα τιτανίου που χρησιμοποιήθηκε για το υλικό της ενδοπρόθεσης θεωρήθηκε ως γραμμικό ελαστικό, ισότροπο και ομογενές υλικό (Πίνακας 6.1).

Πίνακας 6.1

Υλικές ιδιότητες μηριαίου οστού και ενδοπρόθεσης

Ιδιότητα	Φλοιώδες οστό (An, 2000)	Σπογγώδες οστό (An, 2000)	Κράμα τιτανίου (Walker et al., 1987)
Μέτρο του Young (GPa)	15	0.7	110
Λόγος Poisson	0.33	0.2	0.3

6.4.4. Θεωρητική διατύπωση

Υποθέτοντας ότι το σύστημα είναι κατασκευασμένο από ισότροπο υλικό, η περιγραφή του υπό μελέτη προβλήματος στα πλαίσια της τρισδιάστατης θεωρίας γραμμικής ελαστικότητας δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις (Mase, 1970, Μασσαλάς, 1987, Fung, 1969):

(i) Τις εξισώσεις ισορροπίας

$$T_{j,i,j} + \rho b_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6.10)$$

όπου T_{ji} είναι ο τανυστής των τάσεων,

ρ είναι η πυκνότητα μάζας,

b_i είναι οι δυνάμεις σώματος και

$$(\quad)_{,j} = \frac{\partial(\quad)}{\partial x_j}.$$

Σημειώνεται ότι στην παρούσα ανάλυση οι δυνάμεις σώματος αγνοούνται, δηλαδή $b_i = 0$.

(ii) Τις καταστατικές σχέσεις (Νόμος του Hooke)

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij} (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (6.11)$$

όπου $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ είναι το διάνυσμα μετατόπισης,

λ και μ είναι οι σταθερές Lamé,

δ_{ij} είναι το σύμβολο του Kronecker και

$$\nabla = \frac{\partial(\quad)}{\partial x_j} \vec{n}_j \quad \text{είναι ο τελεστής δέλτα} \quad (\nabla \cdot \nabla = \nabla^2).$$

Εισάγοντας την σχέση (6.11) στην (6.10) λαμβάνονται οι εξισώσεις ισορροπίας σε διανυσματική μορφή ως

$$\mu \nabla^2 \vec{u}(\vec{r}) + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}(\vec{r})) = 0. \quad (6.12)$$

(iii) Τις συνοριακές συνθήκες

Στην εξωτερική επιφάνεια S του συστήματος, η καλή τοποθέτηση του προβλήματος απαιτεί την γνώση του πεδίου των τάσεων ή εναλλακτικά των μετατοπίσεων. Η απαίτηση αυτή περιλαμβάνει του περιορισμούς μετατοπίσεων στο περιφερικό άκρο του μηριαίου



$$u_i^{(k)} = 0, \text{ στο } k\text{-στοιχείο της } S, \quad (6.13)$$

και τους περιορισμούς ελκυσμού (traction) στην μηριαία κεφαλή/στέλεχος ενδοπρόθεσης

$$T_{ij} n_j^{(m)} = \hat{t}_i, \text{ στο } m\text{-στοιχείο της } S, \quad (6.14)$$

όπου $n_j^{(m)}$ είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του m -στοιχείου της S και \hat{t}_i είναι οι επιβαλλόμενοι ελκυσμοί που είναι οι γνωστές συνιστώσες (F_1, F_2, F_3) της δύναμης αντίδρασης από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης που δίνονται στον Πίνακα 6.2.

Σημειώνεται ότι η υπόλοιπη εξωτερική επιφάνεια είναι ελεύθερη τάσεων ($\hat{t}_i = 0$).

Το πρόβλημα που περιγράφεται από την εξίσωση (6.12) και τις συνοριακές συνθήκες (6.13) και (6.14) είναι ένα καλά τοποθετημένο μαθηματικό πρόβλημα.

6.4.5. Συνοριακές συνθήκες

Συγκεκριμένα, διερευνήθηκαν εννέα διαφορετικές κινητικές δραστηριότητες που προκαλούν υψηλές μηχανικές φορτίσεις στην άρθρωση του ισχίου (Πίνακας 6.2) στην περίπτωση τόσο του ανέπαφου μηριαίου οστού όσο και

Πίνακας 6.2

Συνιστώσες δύναμης αντίδρασης στην μηριαία κεφαλή από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης σε εννέα διαφορετικές δραστηριότητες, κατά την χρονική στιγμή της μέγιστης φόρτισης, στο μηριαίο σύστημα συντεταγμένων^a

Δραστηριότητα	Συνιστώσες μέγιστης δύναμης αντίδρασης
Αργή βάδιση	[49, 32, 228]
Φυσιολογική βάδιση	[55, 30, 225]
Γρήγορη βάδιση	[53, 32, 244]
Ανέβασμα σκάλας	[57, 57, 238]
Κατέβασμα σκάλας	[58, 40, 250]
Σήκωμα	[55, 20, 182]
Κάθισμα	[50, 0, 150]
Στάση σε 2-1-2 πόδια	[30, 12, 224]
Κάμψη γόνατος	[45, 5, 140]

^a Οι αριθμοί στις αγκύλες είναι επί τοις εκατό ποσοστά του βάρους του σώματος (%BW)



εκείνου με ενδοπρόθεση. Τα δεδομένα της δύναμης αντίδρασης στην άρθρωση του ισχίου που χρησιμοποιήθηκαν αντιστοιχούν στην χρονική στιγμή μέγιστης δύναμης αντίδρασης στην μηριαία κεφαλή από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης κατά την διάρκεια του κύκλου φόρτισης. Η επιλογή αυτή αντιπροσωπεύει σε μηχανικούς όρους το χειρότερο σενάριο επιβάρυνσης τόσο του ανέπαφου μηριαίου όσο και του συστήματος οστό-ενδοπρόθεση. Τα δεδομένα ελήφθησαν από την βιβλιογραφία (Bergmann *et al.*, 2001) και αποτελούν «τυπικά» αποτελέσματα που υπολογίστηκαν με μία μαθηματική διαδικασία εύρεσης του μέσου όρου από δεδομένα διαφόρων δοκιμών σε ασθενείς με ενδοπροθέσεις.

Το μέτρο και η διεύθυνση των συνιστωσών της δύναμης ορίστηκαν σε σχέση με ένα δεξιόστροφο ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων για το δεξί μηριαίο οστό με αρχή το κέντρο της μηριαίας κεφαλής στο μοντέλο του ανέπαφου μηριαίου (Σχήμα 6.2(a)). Στο μηριαίο σύστημα συντεταγμένων, ο $+x$ -άξονας κατευθυνόταν κεντρικά, ο $+y$ -άξονας προς τα πίσω και ο $+z$ -άξονας προς τα πάνω. Ο z -άξονας είναι παράλληλος προς την μέση γραμμή του μηριαίου οστού και ο x -άξονας παράλληλος προς το οπίσθιο περίγραμμα των μηριαίων κονδύλων στο εγκάρσιο επίπεδο. Η συνισταμένη δύναμη αντίδρασης από την κοτύλη εφαρμόστηκε ως σημειακό διάνυσμα σε έναν κόμβο της επιφάνειας της κεφαλής του ανέπαφου μηριαίου οστού. Η διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης καθορίστηκε από τις τιμές των x , y και z συνιστωσών.

Στο μοντέλο με την ενδοπρόθεση (Σχήμα 6.2(b)), η «κεφαλή» της ενδοπρόθεσης δεν βρισκόταν ακριβώς στην ίδια θέση με την πραγματική κεφαλή του ανέπαφου μηριαίου οστού. Επίσης, η συνισταμένη δύναμη εφαρμόστηκε σε έναν κόμβο στην πάνω επιφάνεια της ενδοπρόθεσης ο οποίος δεν βρίσκεται ακριβώς στην ίδια θέση με τον αντίστοιχο κόμβο στο μοντέλο του ανέπαφου μηριαίου. Τα παραπάνω δημιουργούν διαφορετικό μοχλοβραχίονα της δύναμης αντίδρασης από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης στα δύο μοντέλα. Για να εξαλειφθεί το γεγονός αυτό και να εφαρμοστεί ισοδύναμη φόρτιση και στα δύο μοντέλα, οι τιμές της δύναμης στο μοντέλο με την ενδοπρόθεση διορθώθηκαν ώστε να δημιουργείται η ίδια ροπή και στα δύο μοντέλα. Το σημείο ως προς το οποίο υπολογίστηκαν οι συνιστώσες των ροπών είναι το σημείο P το οποίο βρίσκεται στην τομή των αξόνων του στελέχους και του αυχένα της ενδοπρόθεσης (Σχήμα 6.2(b)).

Το περιφερικό άκρο του μηριαίου, στην θέση της άρθρωσης του γόνατος τέθηκε σε περιορισμό ως προς κίνηση.



6.4.6. Υπολογισμοί

Οι δυνάμεις αντίδρασης από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης εφαρμόστηκαν ψευδο-στατικά κατά τέτοιο τρόπο ώστε να προσομοιώνουν τον κύκλο φόρτισης. Έγιναν εννέα δοκιμές για κάθε ένα από τα δύο μοντέλα, αντίστοιχα, την χρονική στιγμή της μέγιστης δύναμης αντίδρασης. Οι κατανομές των κύριων επιφανειακών τροπιών (principal surface strains) ελήφθησαν και στα δύο μοντέλα για κάθε έναν από τους εννέα τύπους φόρτισης και συγκρίθηκαν. Το ίδιο έγινε για τις τιμές των κύριων τροπιών κατά την αξονική διεύθυνση στην ενδοεπιφάνεια οστού-ενδοπρόθεσης. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων MSC/Nastran 70.5.

6.4.7. Αποτελέσματα

Η κατανομή των κύριων επιφανειακών τροπιών στο μοντέλο του ανέπαφου μηριαίου οστού την χρονική στιγμή της μέγιστης δύναμης αντίδρασης στην μηριαία κεφαλή από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης κατά την διάρκεια των εννέα δραστηριοτήτων του Πίνακα 6.2 φαίνεται στο Σχήμα 6.3. Η αντίστοιχη κατανομή στο μοντέλο του μηριαίου οστού με την ενδοπρόθεση φαίνεται στο Σχήμα 6.4. Το εύρος της μέγιστης κύριας επιφανειακής τροπής και στα δύο μοντέλα έχουν καταχωρηθεί στον Πίνακα 6.3.

Οι μεγαλύτερες μέγιστες κύριες επιφανειακές τροπές και στα δύο μοντέλα συμβαίνουν κατά το ανέβασμα σε σκάλα, ακολουθούμενες από το κατέβασμα σε σκάλα. Οι χαμηλότερες μέγιστες κύριες επιφανειακές τροπές συμβαίνουν κατά την κάμψη του γόνατος στο μοντέλο του ανέπαφου μηριαίου οστού και κατά την στάση σε 2-1-2 πόδια στο μοντέλο με την ενδοπρόθεση. Οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές των κύριων τροπιών στην μέση, πλάγια, πρόσθια και οπίσθια πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης κατά την διάρκεια των εννέα δραστηριοτήτων απεικονίζονται στα Σχήματα 6.5, 6.6, 6.7 και 6.8 αντίστοιχα. Τα σημεία της καταγραφής των τροπιών αντιστοιχούν στις κομβικές θέσεις κατά μήκος μίας γραμμής στην άνω - κάτω διεύθυνση του μηριαίου οστού στις αντίστοιχες επιφάνειες. Μία σύγκριση ανάμεσα στις τιμές των μέγιστων κύριων τροπιών στις κομβικές θέσεις της πρόσθιας πλευράς της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης και σε αντίστοιχα σημεία του μοντέλου του ανέπαφου μηριαίου οστού κατά την χρονική στιγμή της μέγιστης δύναμης αντίδρασης από την κοτύλη κατά την φυσιολογική βάρδιση φαίνεται στο Σχήμα 6.9.



Πίνακας 6.3

Εύρος μέγιστων κύριων επιφανειακών τροπών στα μοντέλα του ανέπαφου και του εμφυτευμένου μηριαίου οστού σε εννέα διαφορετικές δραστηριότητες, κατά την χρονική στιγμή της μέγιστης φόρτισης.

Δραστηριότητα	Ανέπαφο μηριαίο	Εμφυτευμένο μηριαίο
Αργή βάδιση	$4.48 \times 10^{-3} - 6.72 \times 10^{-2}$	$4.13 \times 10^{-4} - 6.19 \times 10^{-3}$
Φυσιολογική βάδιση	$4.26 \times 10^{-3} - 6.39 \times 10^{-2}$	$3.95 \times 10^{-4} - 5.92 \times 10^{-3}$
Γρήγορη βάδιση	$4.49 \times 10^{-3} - 6.73 \times 10^{-2}$	$4.19 \times 10^{-4} - 6.28 \times 10^{-3}$
Ανέβασμα σκάλας	$8.02 \times 10^{-3} - 1.20 \times 10^{-1}$	$6.79 \times 10^{-4} - 1.02 \times 10^{-2}$
Κατέβασμα σκάλας	$5.64 \times 10^{-3} - 8.45 \times 10^{-2}$	$5.05 \times 10^{-4} - 7.58 \times 10^{-3}$
Ανασήκωμα	$3.68 \times 10^{-3} - 5.51 \times 10^{-2}$	$3.37 \times 10^{-4} - 5.06 \times 10^{-3}$
Κάθισμα	$2.99 \times 10^{-3} - 4.18 \times 10^{-2}$	$2.66 \times 10^{-4} - 3.98 \times 10^{-3}$
Στάση σε 2-1-2 πόδια	$1.92 \times 10^{-3} - 2.88 \times 10^{-2}$	$4.05 \times 10^{-4} - 6.07 \times 10^{-3}$
Κάμψη γόνατος	$2.70 \times 10^{-3} - 4.04 \times 10^{-2}$	$2.34 \times 10^{-4} - 3.51 \times 10^{-3}$

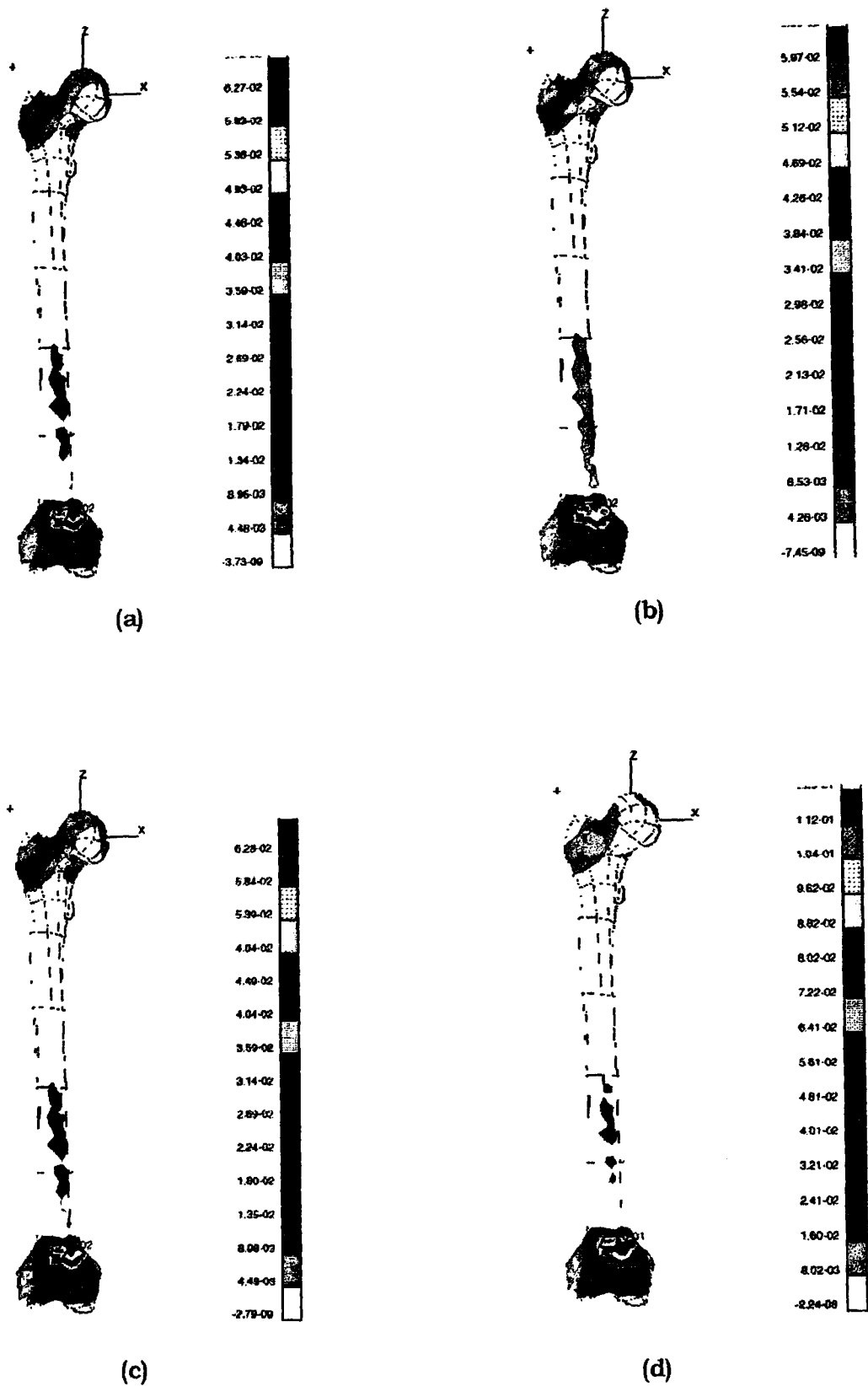
6.4.8. Συζήτηση

Η κατανομή τροπών και τάσεων και η ύπαρξη του φαινομένου ασπίδας τάσεων σε μοντέλα του εμφυτευμένου μηριαίου οστού έχει μελετηθεί από διάφορους ερευνητές (McNamara *et al.*, 1997, Cristofolini *et al.*, 1996, Walker *et al.*, 1987). Οι συνοριακές συνθήκες που επιλέγονται συνήθως περιλαμβάνουν την δύναμη αντίδρασης από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης και μυϊκές δυνάμεις, οι οποίες εφαρμόζονται διανυσματικά ως σημειακές δυνάμεις σε μία μόνον ή σε διάφορες χρονικές στιγμές του κύκλου βάδισης. Η συγκεκριμένη μελέτη εστιάζεται στην σύγκριση των κύριων τροπών μεταξύ ενός μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων ανέπαφου μηριαίου οστού και ενός με ενδοπρόθεση, κατά την χρονική στιγμή της μέγιστης δύναμης αντίδρασης από την κοτύλη, σε εννέα διαφορετικές συνήθεις κινητικές δραστηριότητες. Οι υπολογισμοί επαληθεύουν την παρουσία και συγκρίνουν την ένταση του φαινομένου ασπίδας τάσεων στα διαφορετικά πρότυπα φόρτισης. Η κατανομή των κύριων επιφανειακών τροπών και στα δύο μοντέλα και των τροπών στην ενδοεπιφάνεια οστού-ενδοπρόθεσης περιγράφεται στην συνέχεια.

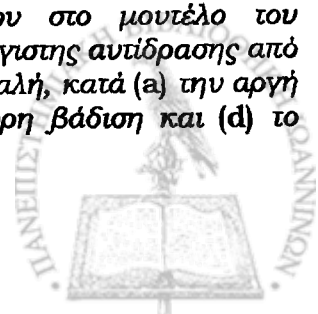
Επιφανειακές τροπές

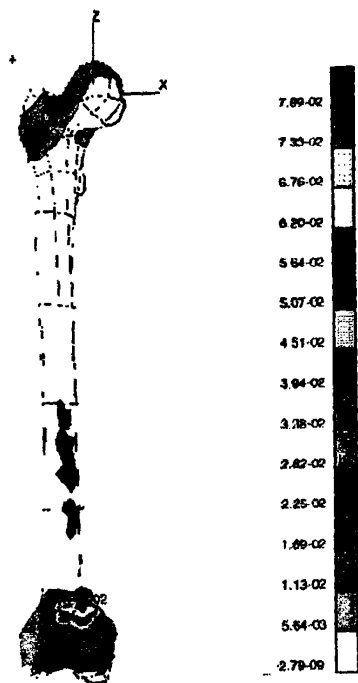
Το μεγαλύτερο εύρος των μέγιστων κύριων επιφανειακών τροπών συμβαίνει κατά το ανέβασμα σκάλας και στα δύο μοντέλα. Οι επιφανειακές τροπές τόσο στο ανέπαφο όσο και στο εμφυτευμένο μοντέλο του μηριαίου οστού διαφέρουν κατά σχεδόν μία τάξη μεγέθους, με τις τροπές στο εμφυτευμένο μηριαίο να είναι χαμηλότερες. Αυτό είναι ενδεικτικό του φαινομένου ασπίδας τάσεων στα οστά με ενδοπρόθεση.



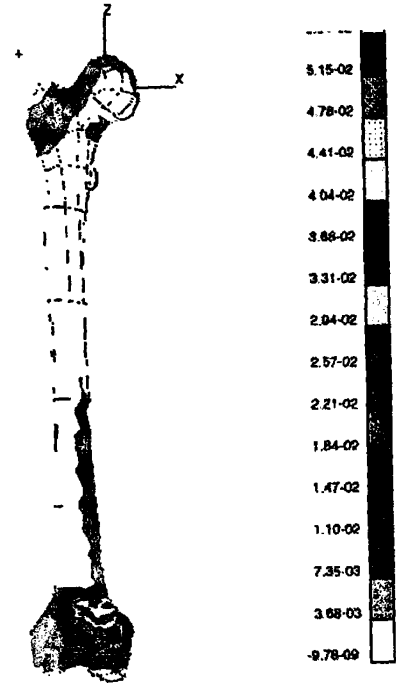


Σχήμα 6.3: Κατανομή μέγιστων κύριων επιφανειακών τροπών στο μοντέλο του ανέπαφου μηριαίου οστού κατά την χρονική στιγμή μέγιστης αντίδρασης από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης στην μηριαία κεφαλή, κατά (a) την αργή βάδιση, (b) την φυσιολογική βάδιση, (c) την γρήγορη βάδιση και (d) το ανέβασμα σκάλας.

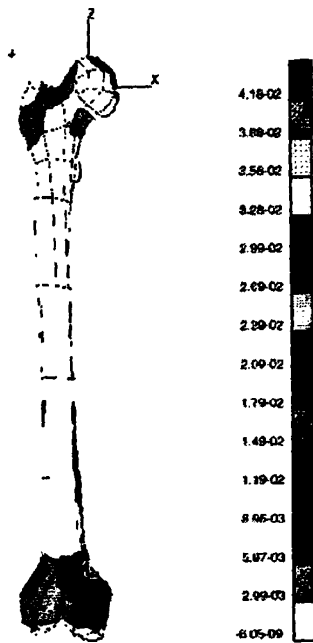




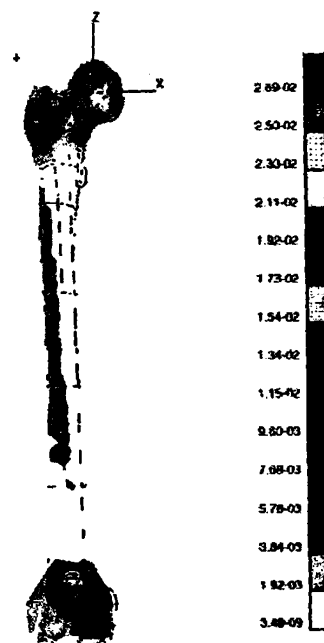
(e)



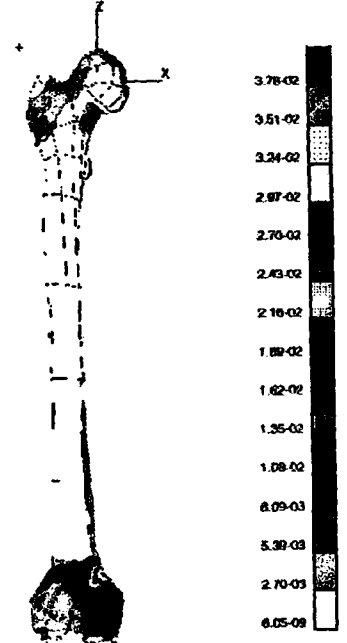
(f)



(g)



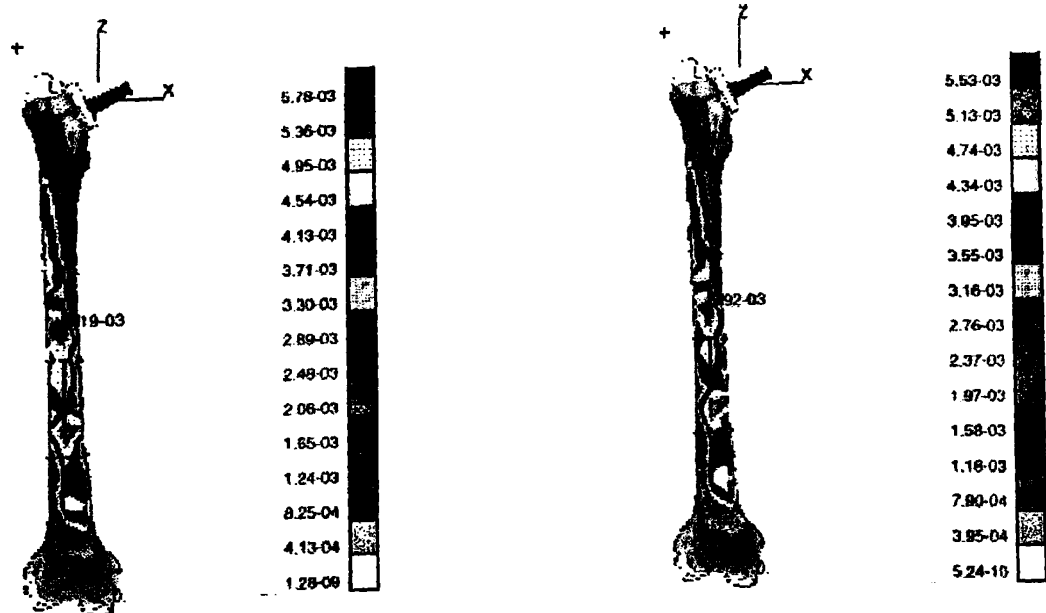
(h)



(i)

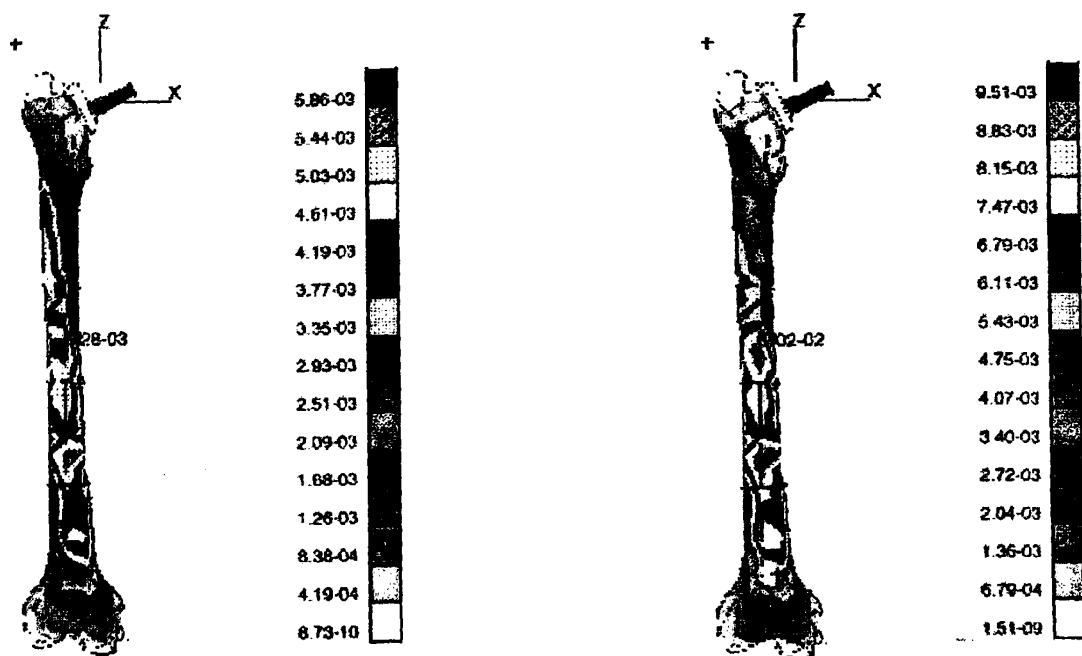
Σχήμα 6.3 (συνέχεια): Κατανομή μέγιστων κύριων επιφανειακών τροπών στο μοντέλο του ανέπαφου μηριαίου οστού κατά την χρονική στιγμή μέγιστης αντίδρασης από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης στην μηριαία κεφαλή, κατά (e) το κατέβασμα σκάλας, (f) το ανασήκωμα, (g) το κάθισμα, (h) την στήριξη σε 2-1-2 πόδια και (i) την κάμψη του γόνατος.





(a)

(b)

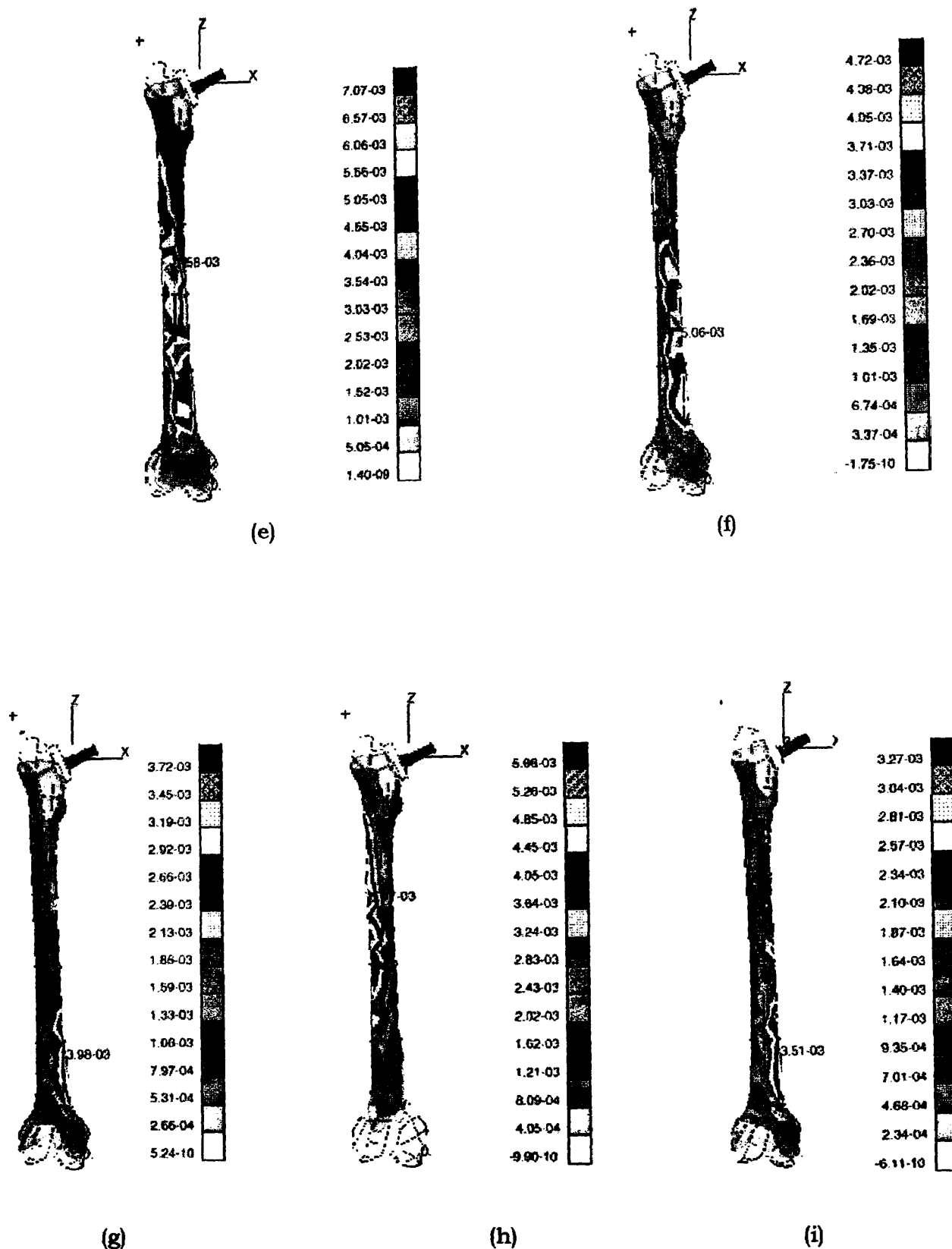


(c)

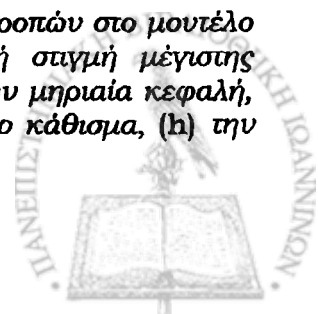
(d)

Σχήμα 6.4: Κατανομή μέγιστων κύριων επιφανειακών τροπών στο μοντέλο του εμφυτευμένου μηριαίου οστού κατά την χρονική στιγμή μέγιστης αντίδρασης από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης στην μηριαία κεφαλή, κατά (a) την αργή βόδιση, (b) την φυσιολογική βόδιση, (c) την γρήγορη βόδιση και (d) το ανέβασμα σκάλας.





Σχήμα 6.4 (συνέχεια): Κατανομή μέγιστων κύριων επιφανειακών τροπών στο μοντέλο του εμφυτευμένου μηριαίου οστού κατά την χρονική στιγμή μέγιστης αντίδρασης από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης στην μηριαία κεφαλή, κατά (e) το κατέβασμα σκάλας, (f) το ανασήκωμα, (g) το κάθισμα, (h) την στήριξη σε 2-1-2 πόδια και (i) την κάμψη του γόνατος.



Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.4, στο μοντέλο του εμφυτευμένου μηριαίου οστού οι μεγαλύτερες κύριες επιφανειακές τροπές συμβαίνουν στην πρόσθια επιφάνεια του μηριαίου κατά τις περιπτώσεις φόρτισης (a), (b), (c), (d) και (e). Στις περιπτώσεις (f), (g) και (i) μετακινούνται προς την μέση επιφάνεια της μέσης-κατώτερης διάφυσης, ενώ στην περίπτωση (h) οι μεγαλύτερες τροπές εμφανίζονται στην πλάγια επιφάνεια της μέσης-ανώτερης διάφυσης.

Αρκετά διαφορετική είναι η κατάσταση στο μοντέλο του ανέπαφου μηριαίου οστού. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.3, οι μεγαλύτερες κύριες επιφανειακές τροπές εμφανίζονται στην πρόσθια επιφάνεια της κατώτερης επίφυσης στις περιπτώσεις (a) έως (f). Στις περιπτώσεις (g) και (i) οι μέγιστες τροπές μετακινούνται στο έσω τμήμα της κατώτερης επίφυσης. Στην περίπτωση (h), η περιοχή ανάμεσα στην μηριαία κεφαλή και τον μείζονα τροχαντήρα υφίσταται τις υψηλότερες τροπές, όπως επίσης και το πρόσθιο τμήμα της κατώτερης επίφυσης.

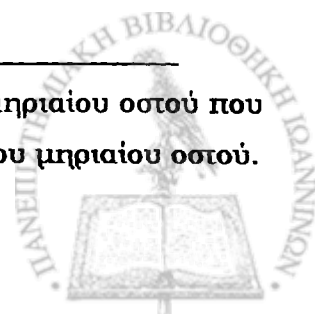
Τροπές στην ενδοεπιφάνεια οστού-ενδοπρόθεσης

Όπως φαίνεται στα Σχήματα 6.5, 6.6, 6.7 και 6.8, οι υψηλότερες μέγιστες τροπές παρατηρούνται στην πρόσθια πλευρά της ενδοεπιφάνειας^(*) οστού-ενδοπρόθεσης, ακολουθούμενες από εκείνες στην πλάγια, οπίσθια και μέση πλευρά.

Μέσες τροπές

Οι υψηλότερες μέγιστες και ελάχιστες κύριες τροπές συμβαίνουν κατά την στήριξη σε 2-1-2 πόδια, ενώ οι χαμηλότερες κατά το κάθισμα και την κάμψη του γόνατος. Με άλλα λόγια, το μεγαλύτερο εύρος τιμών των κύριων τροπών εμφανίζεται κατά την στήριξη σε 2-1-2 πόδια και το χαμηλότερο κατά το κάθισμα και την κάμψη του γόνατος. Δεν υπάρχει μεγάλη διαβάθμιση στις μέσες τροπές κατά την άνω-κάτω (διαμήκη) διεύθυνση. Οι χαμηλότερες ελάχιστες τροπές εμφανίζονται μεταξύ των 105 και 140 mm κατά την άνω-κάτω διεύθυνση, σε όλες τις περιπτώσεις φόρτισης εκτός από τις περιπτώσεις (g) και (i) όπου εμφανίζονται μεταξύ των 75 και 110 mm. Οι απόλυτες τιμές της απόστασης είναι αυθαίρετες και δηλώνουν την σχετική θέση κατά μήκος μίας γραμμής στην άνω-κάτω διεύθυνση του μηριαίου οστού. Το εύρος 40-80 mm αντιστοιχεί στην περιοχή μεγαλύτερης καμπυλότητας του στελέχους.

(*) Ο όρος «ενδοεπιφάνεια» αναφέρεται στην εσωτερική επιφάνεια του μηριαίου οστού που βρίσκεται σε επαφή με την ενδοπρόθεση στο μοντέλο του εμφυτευμένου μηριαίου οστού.



Πλάγιες τροπές

Οι υψηλότερες μέγιστες και ελάχιστες κύριες τροπές συμβαίνουν κατά το ανέβασμα σκάλας. Το μεγαλύτερο εύρος στις τιμές των κύριων τροπών εμφανίζεται στο ανέβασμα σκάλας ακολουθούμενο από το κατέβασμα σκάλας και την γρήγορη βάδιση. Γενικά, υπάρχει μία αύξηση των μέγιστων και ελάττωση των ελάχιστων κύριων τροπών από την ανώτερη επίφυση προς την διάφυση. Αυτό το πρότυπο δεν ακολουθείται στο ανασήκωμα όπου η μέγιστη τροπή παραμένει σχεδόν σταθερή, και στις περιπτώσεις του καθίσματος και της κάμψης του γόνατος όπου η μέγιστη τροπή μειώνεται γύρω στα 42 mm.

Πρόσθιες τροπές

Οι υψηλότερες μέγιστες και ελάχιστες κύριες τροπές συμβαίνουν κατά το ανέβασμα σκάλας. Γενικά, υπάρχει μία αρχική ελάττωση και επακόλουθη αύξηση (στα 55 mm) των μέγιστων κύριων τροπών από την άνω επίφυση προς την διάφυση. Οι ελάχιστες κύριες τροπές είναι αρχικά σχεδόν σταθερές και στα 70 mm περίπου αρχίζουν να αυξάνονται.

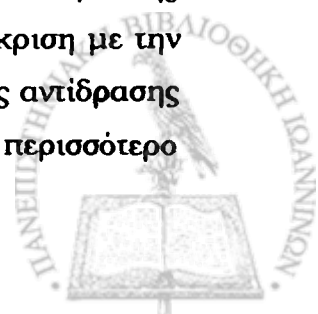
Οπίσθιες τροπές

Οι υψηλότερες μέγιστες και ελάχιστες κύριες τροπές συμβαίνουν κατά το ανέβασμα σκάλας. Στην επίφυση, οι μέγιστες και ελάχιστες κύριες τροπές είναι αρχικά σχεδόν σταθερές και στα 70 mm περίπου αρχίζουν να αυξάνονται.

Πρόσθιες τροπές στο ανέπαφο και στο εμφυτευμένο μηριαίο

Οι τιμές των μέγιστων κύριων τροπών στις κομβικές θέσεις της πρόσθιας πλευράς της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης κατά μήκος του διαμήκους άξονα του μηριαίου είναι χαμηλότερες σε σχέση με εκείνες στο μοντέλο του ανέπαφου μηριαίου οστού στην επίφυση και την άνω διάφυση (έως τα 95 mm περίπου) όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.9. Αυτό είναι σε συμφωνία με το αναμενόμενο πρότυπο που οφείλεται στο φαινόμενο ασπίδας τάσεων.

Τα παραπάνω ευρήματα είναι ποιοτικά και ποσοτικά συγκρίσιμα με εκείνα των Duda *et al.* (1998), McNamara *et al.* (1997), Cristofolini *et al.* (1996) και Walker *et al.* (1987). Η ασπίδα τάσεων φαίνεται να συμβαίνει κατά μήκος ολόκληρης της επιφάνειας του μοντέλου του μηριαίου οστού και είναι περισσότερο εμφανής στην περίπτωση ανεβάσματος σκάλας που αποτελεί και το χειρότερο σενάριο όσον αφορά την φόρτιση. Η προσθιο-πλάγια πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης φορτίζεται περισσότερο σε σύγκριση με την μέση-οπίσθια πλευρά κατά την χρονική στιγμή της μέγιστης δύναμης αντίδρασης από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης. Η ασπίδα τάσεων είναι περισσότερο



έντονη στην ζώνη μετάβασης από την άνω επίφυση στην διάφυση και γίνεται λιγότερο σημαντική κατά μήκος του κατώτερου τμήματος της διάφυσης.

Η παρούσα μελέτη δείχνει ότι η τρισδιάστατη ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στην απεικόνιση του περιβάλλοντος τάσεων-τροπών στο ανθρώπινο μηριαίο οστό κατά την διάρκεια διαφόρων δραστηριοτήτων. Η επιλογή των εννέα κινητικών δραστηριοτήτων καλύπτει ένα ευρύ φάσμα δυνατών καταστάσεων φόρτισης.

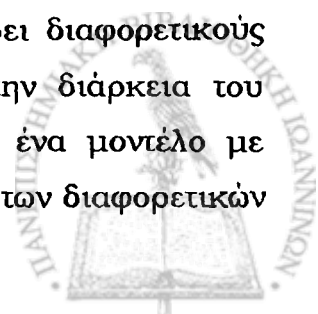
Υπάρχουν ωστόσο κάποιοι περιορισμοί στην προσέγγιση της μοντελοποίησης. Καταρχήν είναι η υπόθεση της ισοτροπίας. Το οστό είναι ένα ανισότροπο υλικό ενώ η παρούσα μελέτη βασίζεται σε υποθέσεις υλικής ισοτροπίας. Δεύτερον, είναι η υπόθεση για την υλική κατανομή του οστού σε συνδυασμό με τις χρησιμοποιούμενες τιμές του μέτρου του Young. Ιδιότητες φλοιώδους οστού έχουν αποδοθεί στο σύνολο της διάφυσης και ιδιότητες σπογγώδους οστού στο σύνολο των διαφύσεων. Η μυελική κοιλότητα έχει παραληφθεί. Αυτό έχει ληφθεί υπόψη στην τιμή του μέτρου του Young για το φλοιώδες οστό όπου έχει εφαρμοστεί μία διαδικασία κανονικοποίησης. Επιπλέον, η υλική μετάβαση από τις επιφύσεις στην διάφυση είναι πιο απότομη από ότι σε ένα αληθινό οστό.

Το επίπεδο διακριτοποίησης πρέπει να ληφθεί υπόψη. Ο περιορισμός σε στοιχεία μήκους 4 mm τέθηκε από περιορισμούς στην υπολογιστική μνήμη κατά την ανάλυση. Μικρότερο μήκος στοιχείων θα βελτιώνει την ακρίβεια του μοντέλου.

Στην παρούσα μελέτη έγινε η υπόθεση ότι το στέλεχος της ενδοπρόθεσης ήταν πλήρως προσκολλημένο στο οστό, γεγονός που θέτει περιορισμούς όσον αφορά την εγκυρότητα της μελέτης για στελέχη πλήρους επικάλυψης (fully coated). Στην περίπτωση των ομαλών (πακτωμένων) στελεχών θα εμφανίζονται μη γραμμικά φαινόμενα με πιθανότητα πολύ μεγαλύτερης ευαισθησίας της ασπίδας τάσεων από τον τύπο του φορτίου.

Η παρούσα ανάλυση φορτίσεων αποτελεί μία απλούστευση της πραγματικής ιστορίας φορτίσεων στην οποία υπόκεινται τα οστά. Οι φυσιολογικές δραστηριότητες περιλαμβάνουν μεταβολές στις επιφάνειες επαφής των αρθρώσεων, στα σχετικά μέτρα δυνάμεων αρθρώσεων και μυών και στις διευθύνσεις φόρτισης μέσα σε έναν κύκλο φόρτισης.

Το μοντέλο μπορεί να γενικευθεί ώστε να συμπεριλάβει διαφορετικούς τύπους φόρτισης και διαφορετικές χρονικές στιγμές κατά την διάρκεια του κύκλου φόρτισης. Θα πρέπει να γίνει περαιτέρω μελέτη σε ένα μοντέλο με περισσότερο ρεαλιστικούς περιορισμούς όπως την ενσωμάτωση των διαφορετικών

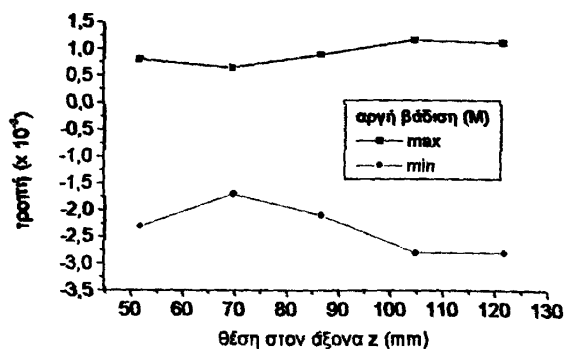


μυϊκών ομάδων που λειτουργούν κατά τις διαφορετικές χρονικές στιγμές του κύκλου βάδισης. Η επαλήθευση ενός τέτοιου μοντέλου με πειραματικά δεδομένα, θα μπορούσε να οδηγήσει στην βελτίωση του σχεδιασμού των ενδομυελικών προθέσεων σε συνδυασμό με την μείωση του φαινομένου ασπίδας τάσεων.

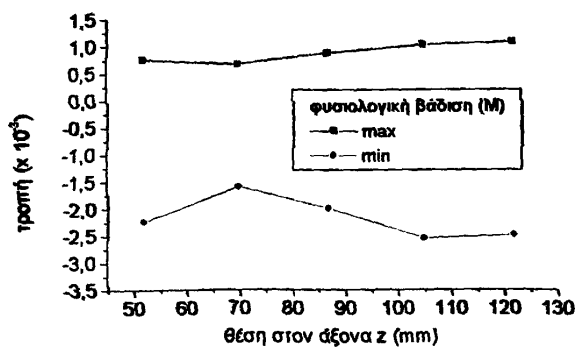
Η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια να ελεγχθεί η ακρίβεια των μετρήσεων που προκύπτουν από την ανάλυση των ηλεκτρομυογραφικών σημάτων. Για να γίνει αυτό, πραγματοποιήθηκε μια σειρά από πειράματα με την χρήση ενός μοντέλου που περιγράφει την ηλεκτρομυογραφική δραστηριότητα των μυών. Το μοντέλο αυτό βασίζεται στην θεωρία της ηλεκτρομυογραφίας και έχει προσαρμοστεί για να λαμβάνει υπόψη τις ιδιότητες των μυών και των ηλεκτροδίων. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων δείχνουν ότι η ανάλυση των ηλεκτρομυογραφικών σημάτων είναι αρκετά ακριβής, εφόσον χρησιμοποιούνται κατάλληλα εργαλεία και μεθόδους. Αυτό σημαίνει ότι η ανάλυση των ηλεκτρομυογραφικών σημάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ασφάλεια για την μελέτη της λειτουργίας των μυών και της βάδισης.

Οι μετρήσεις που προκύπτουν από την ανάλυση των ηλεκτρομυογραφικών σημάτων είναι πολύ σημαντικές για την κατανόηση της λειτουργίας των μυών και της βάδισης. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων δείχνουν ότι η ανάλυση των ηλεκτρομυογραφικών σημάτων είναι αρκετά ακριβής, εφόσον χρησιμοποιούνται κατάλληλα εργαλεία και μεθόδους. Αυτό σημαίνει ότι η ανάλυση των ηλεκτρομυογραφικών σημάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ασφάλεια για την μελέτη της λειτουργίας των μυών και της βάδισης. Η ανάλυση των ηλεκτρομυογραφικών σημάτων είναι μια πολύ σημαντική μέθοδος για την μελέτη της λειτουργίας των μυών και της βάδισης. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων δείχνουν ότι η ανάλυση των ηλεκτρομυογραφικών σημάτων είναι αρκετά ακριβής, εφόσον χρησιμοποιούνται κατάλληλα εργαλεία και μεθόδους. Αυτό σημαίνει ότι η ανάλυση των ηλεκτρομυογραφικών σημάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ασφάλεια για την μελέτη της λειτουργίας των μυών και της βάδισης.

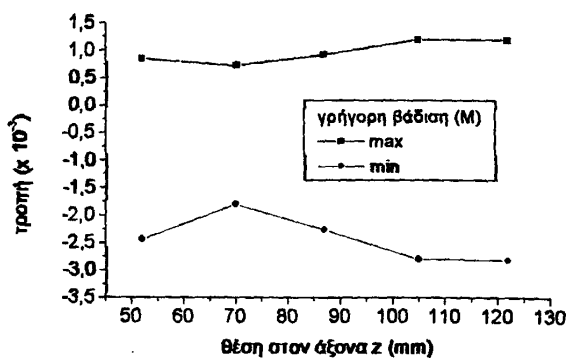




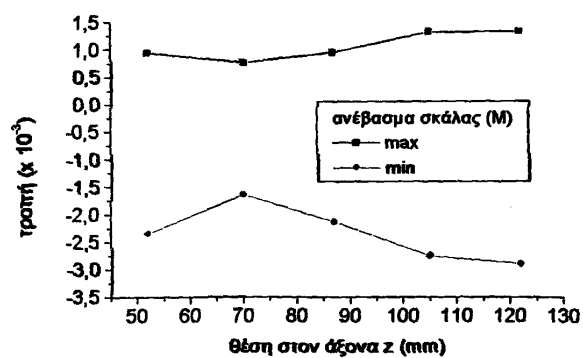
(a)



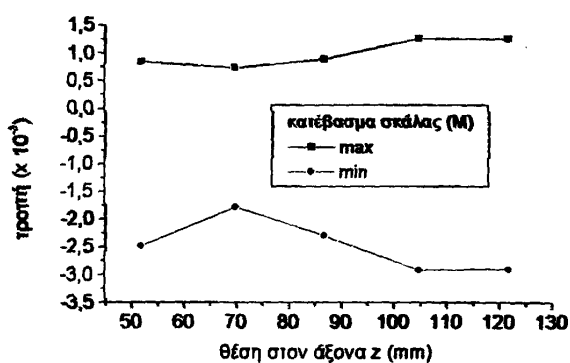
(b)



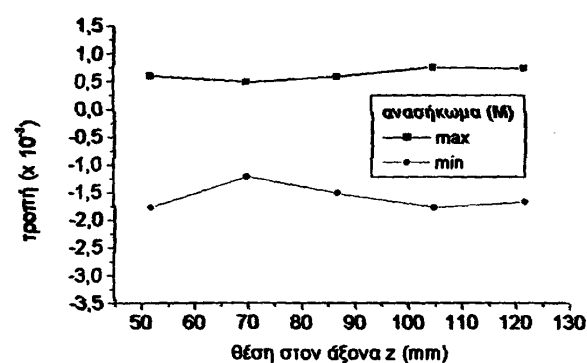
(c)



(d)

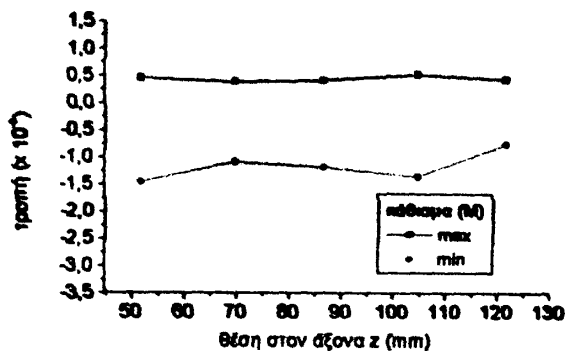


(e)

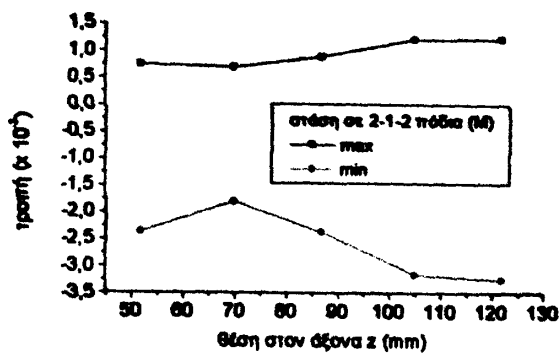


(f)

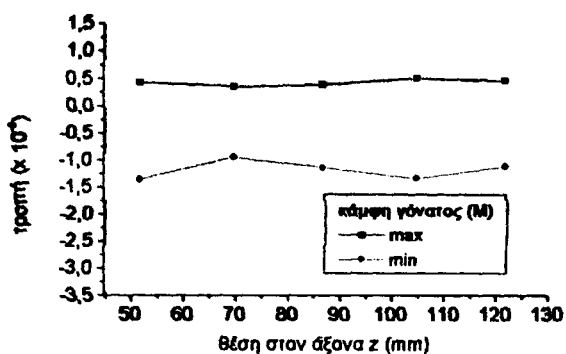
Σχήμα 6.5: Τιμές μέγιστων και ελάχιστων κύριων τροπών στην μέση πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης κατά (a) την αργή βάδιση, (b) την φυσιολογική βάδιση, (c) την γρήγορη βάδιση, (d) το ανέβασμα σκάλας, (e) το κατέβασμα σκάλας και (f) το ανασήκωμα. Ο οριζόντιος άξονας δηλώνει την κομβική θέση κατά μήκος μίας γραμμής στην άνω-κάτω διεύθυνση του μηριαίου οστού. Το εύρος 40-80 mm αντιστοιχεί στην περιοχή μεγαλύτερης καμπυλότητας του στελέχους.



(g)



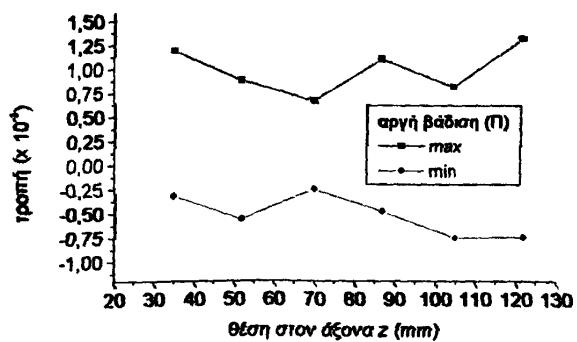
(h)



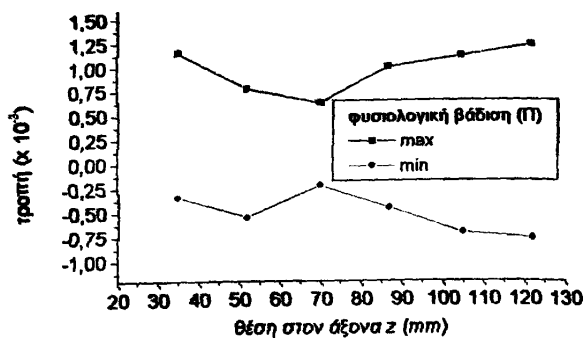
(i)

Σχήμα 6.5

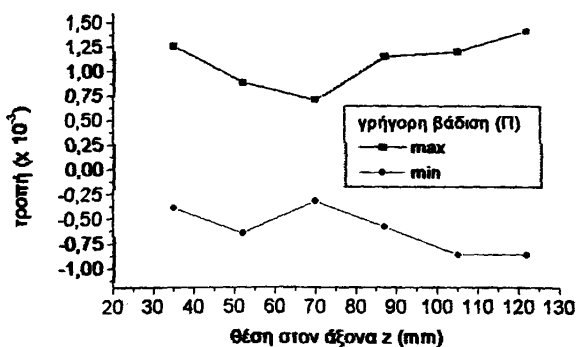
(συνέχεια): Τιμές μέγιστων και ελάχιστων κύριων τροπών στην μέση πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης κατά (g) το κάθισμα, (h) την στήριξη σε 2-1-2 πόδια και (i) την κάμψη γόνατος. Ο οριζόντιος άξονας δηλώνει την κομβική θέση κατά μήκος μίας γραμμής στην άνω-κάτω διεύθυνση του μηριαίου οστού. Το εύρος 40-80 mm αυτιστοιχεί στην περιοχή μεγαλύτερης καμπυλότητας του στελέχους.



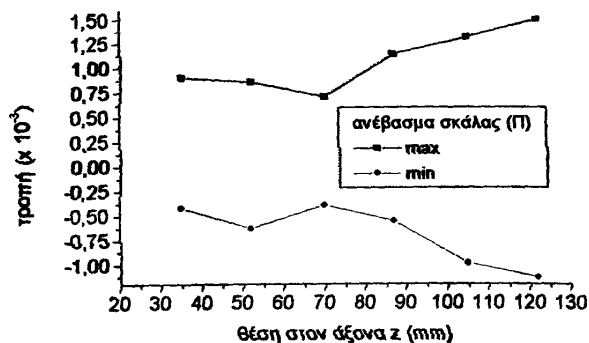
(a)



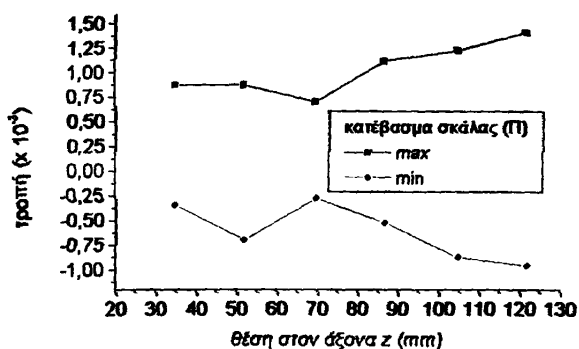
(b)



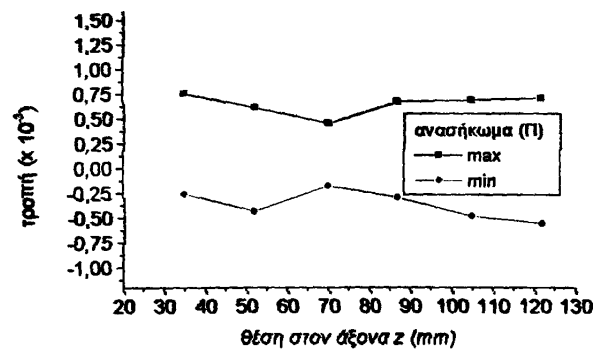
(c)



(d)



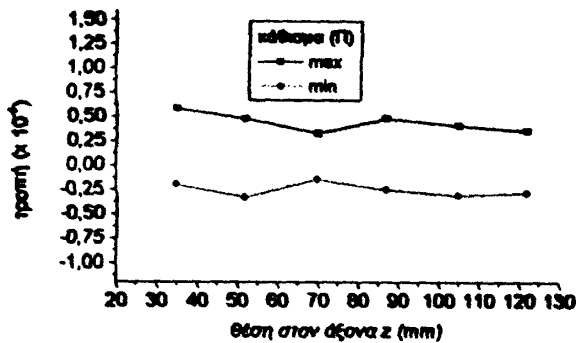
(e)



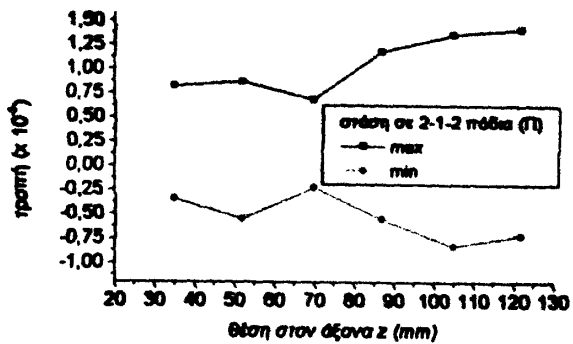
(f)

Σχήμα 6.6: Τιμές μέγιστων και ελάχιστων κύριων τροπών στην πλάγια πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ευδοπρόθεσης κατά (a) την αργή βάδιση, (b) την φυσιολογική βάδιση, (c) την γρήγορη βάδιση, (d) το ανέβασμα σκάλας, (e) το κατέβασμα σκάλας και (f) το ανασήκωμα. Ο οριζόντιος άξονας δηλώνει την κομβική θέση κατά μήκος μίας γραμμής στην άνω-κάτω διεύθυνση του μηριαίου οστού. Το εύρος 40-80 mm αντιστοιχεί στην περιοχή μεγαλύτερης καμπυλότητας του στελέχους.

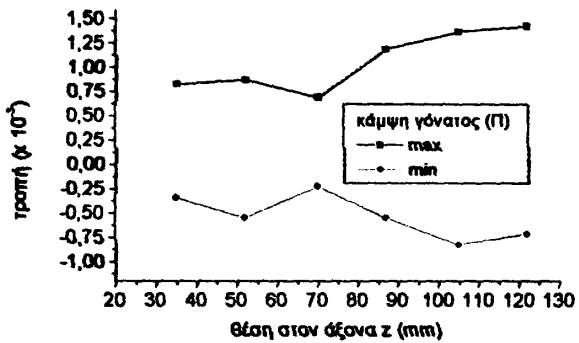




(g)

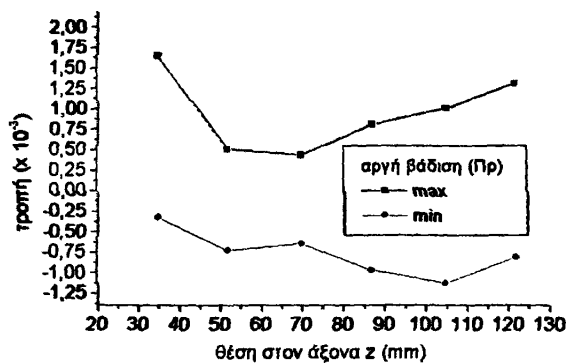


(h)

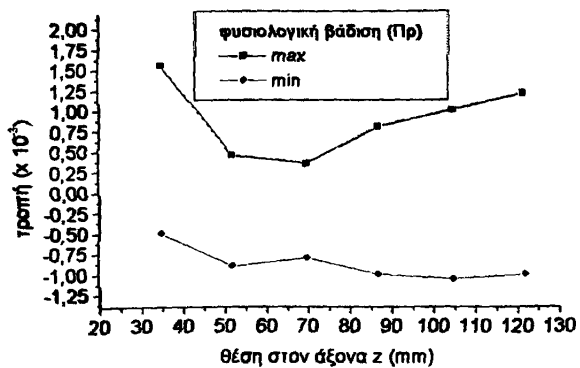


(i)

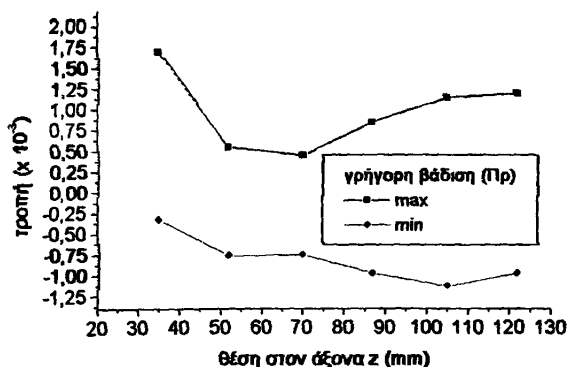
Σχήμα 6.6 (συνέχεια): Τιμές μέγιστων και ελάχιστων κύριων τροπών στην πλάγια πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης κατά (g) το κάθισμα, (h) την στήριξη σε 2-1-2 πόδια και (i) την κάμψη γόνατος. Ο οριζόντιος άξονας δηλώνει την κομβική θέση κατά μήκος μίας γραμμής στην άνω-κάτω διεύθυνση του μηριαίου οστού. Το εύρος 40-80 mm αντιστοιχεί στην περιοχή μεγαλύτερης καμπυλότητας του στελέχους.



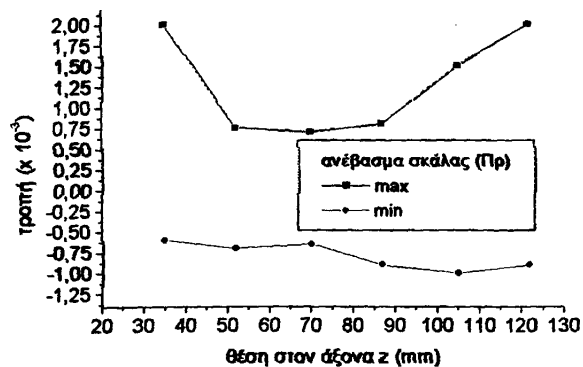
(a)



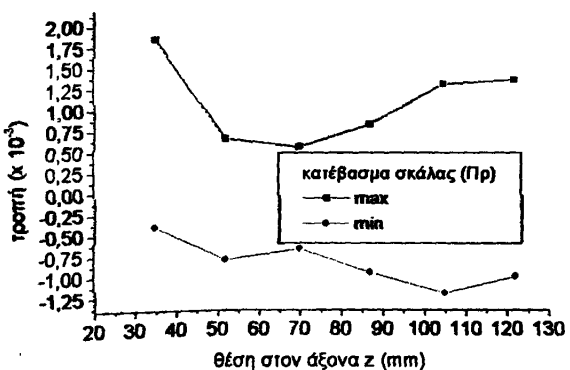
(b)



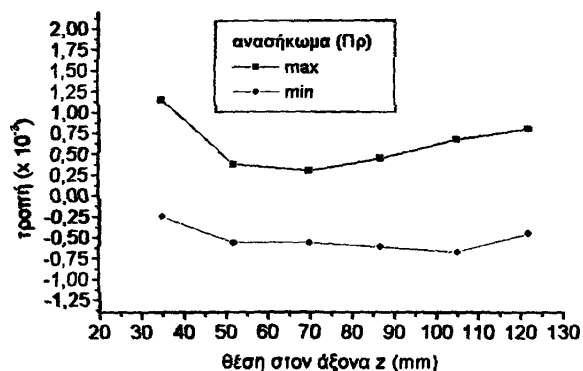
(c)



(d)

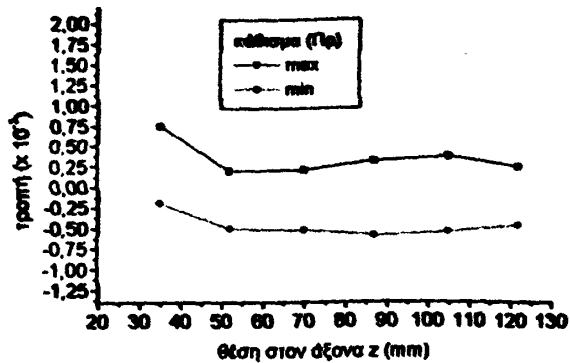


(e)

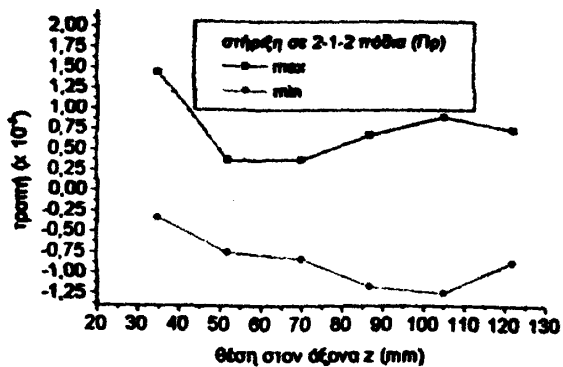


(f)

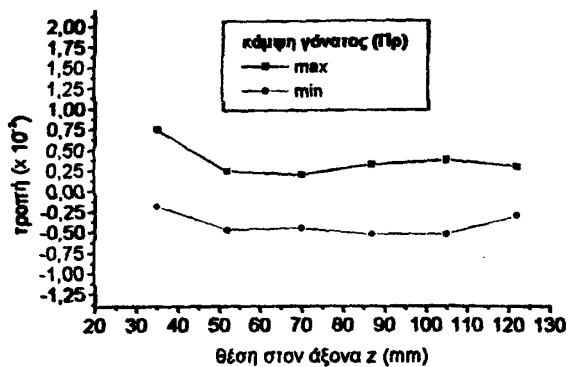
Σχήμα 6.7: Τιμές μέγιστων και ελάχιστων κύριων τροπών στην πρόσθια πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης κατά (a) την αργή βάδιση, (b) την φυσιολογική βάδιση, (c) την γρήγορη βάδιση, (d) το ανέβασμα σκάλας, (e) το κατέβασμα σκάλας και (f) το ανασήκωμα. Ο οριζόντιος άξονας δηλώνει την κομβική θέση κατά μήκος μίας γραμμής στην άνω-κάτω διεύθυνση του μηριαίου οστού. Το εύρος 40-80 mm αντιστοιχεί στην περιοχή μεγαλύτερης καμπυλότητας του στελέχους.



(g)

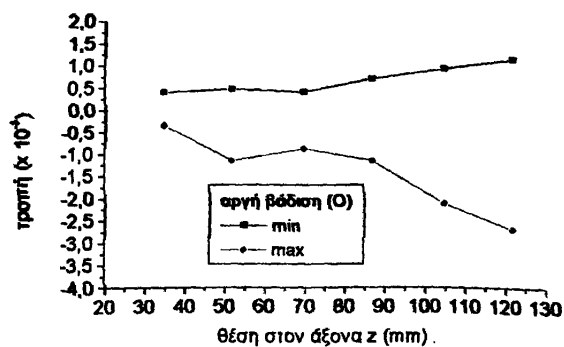


(h)

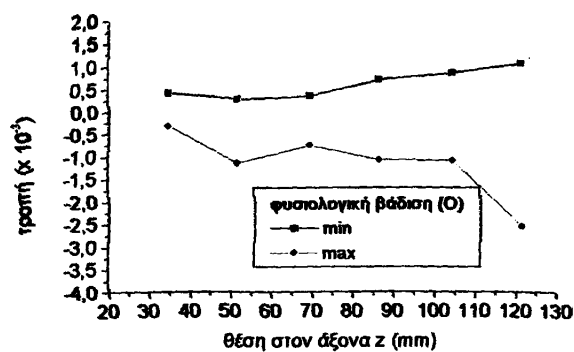


(i)

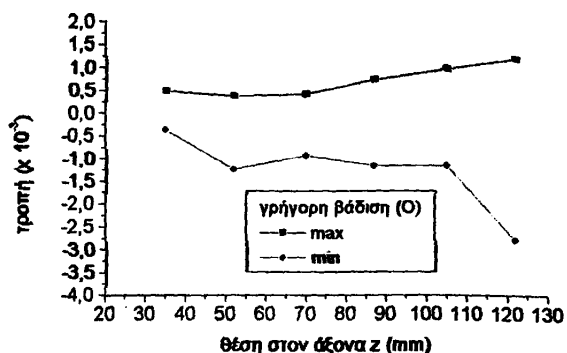
Σχήμα 6.7 (συνέχεια): Τιμές μέγιστων και ελάχιστων κύριων τροπών στην πρόσθια πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης κατά (g) το κάθισμα, (h) την στήριξη σε 2-1-2 πόδια και (i) την κάμψη γόνατος. Ο οριζόντιος άξονας δηλώνει την κομβική θέση κατά μήκος μίας γραμμής στην άνω-κάτω διεύθυνση του μηριαίου οστού. Το εύρος 40-80 mm αντιστοιχεί στην περιοχή μεγαλύτερης καμπυλότητας του στελέκους.



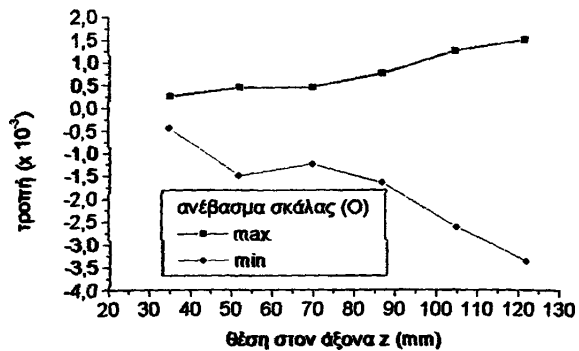
(a)



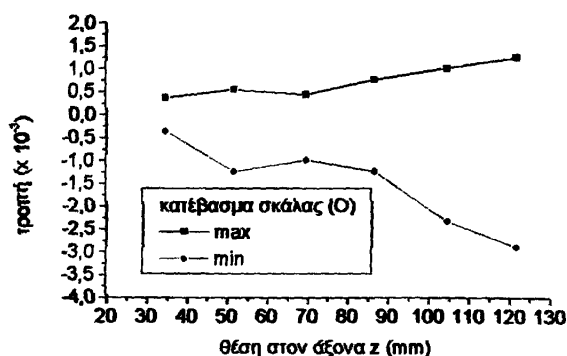
(b)



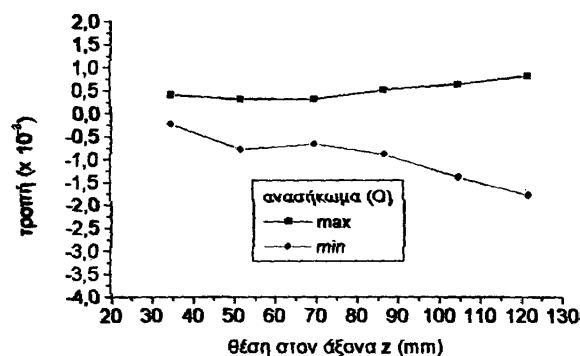
(c)



(d)

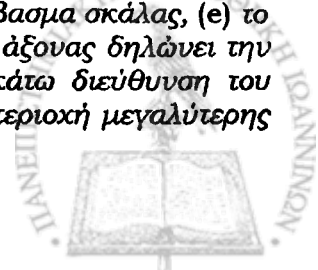


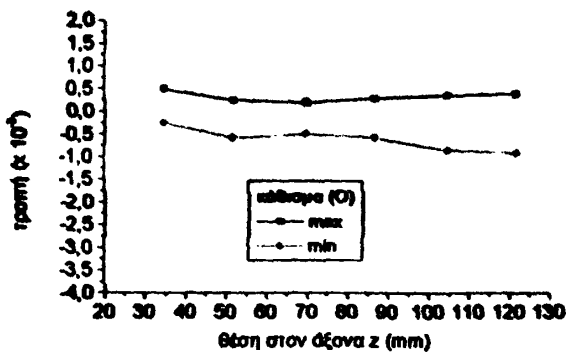
(e)



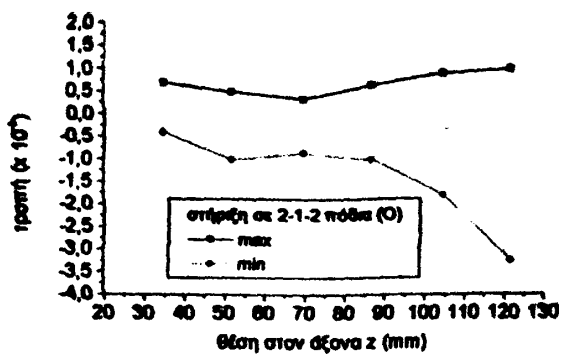
(f)

Σχήμα 6.8: Τιμές μέγιστων και ελάχιστων κύριων τροπών στην οπίσθια πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης κατά (a) την αργή βάδιση, (b) την φυσιολογική βάδιση, (c) την γρήγορη βάδιση, (d) το ανέβασμα σκάλας, (e) το κατέβασμα σκάλας και (f) το ανασήκωμα. Ο οριζόντιος άξονας δηλώνει την κομβική θέση κατά μήκος μιας γραμμής στην άνω-κάτω διεύθυνση του μηριαίου οστού. Το εύρος 40-80 mm αντιστοιχεί στην περιοχή μεγαλύτερης καμπυλότητας του στελέχους.

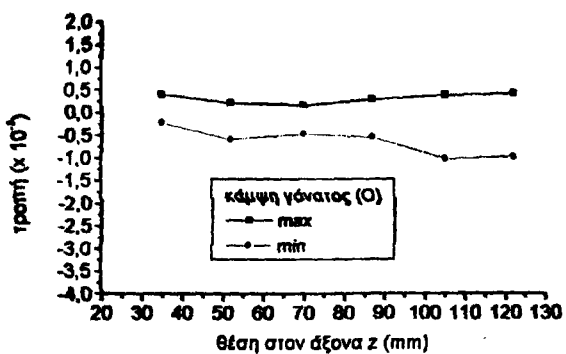




(g)



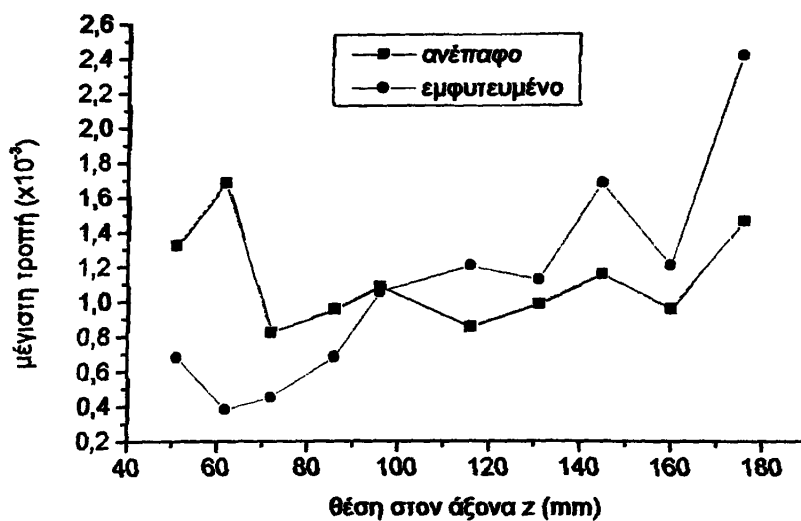
(h)



(i)

Σχήμα 6.8

(συνέχεια): Τιμές μέγιστων και ελάχιστων κύριων τροπών στην οπίσθια πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης κατά (g) το κάθισμα, (h) την στήριξη σε 2-1-2 πόδια και (i) την κάμψη γόνατος. Ο οριζόντιος άξονας δηλώνει την κομβική θέση κατά μήκος μίας γραμμής στην άνω-κάτω διεύθυνση του μηριαίου οστού. Το εύρος 40-80 mm αντιστοιχεί στην περιοχή μεγαλύτερης καμπυλότητας του στελέχους.



Σχήμα 6.9: Τιμές μέγιστων κύριων τροπών κατά την φυσιολογική βάρδιση (α) σε κομβικές θέσεις κατά μήκος μίας γραμμής στην άνω-κάτω διεύθυνση του μηριαίου οστού, στην πρόσθια πλευρά της ενδοεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης και (β) σε κομβικές θέσεις αντίστοιχων κωρικών συντεταγμένων στο ανέπαφο μηριαίο οστό. Το εύρος 40-80 mm αντιστοιχεί στην περιοχή μεγαλύτερης καμπυλότητας του σιελέχους.

Συμπεράσματα

Η εργασία που παρουσιάστηκε προτείνει ένα νέο μοντέλο εσωτερικής και επιφανειακής επαναδόμησης μακρών οστών για την περίπτωση ισοτροπίας και χρονοεξαρτώμενης φόρτισης. Το μοντέλο έχει εφαρμοστεί στην τρισδιάστατη περίπτωση ενός κοίλου κυλίνδρου κυκλικής διατομής, που προσομοιώνει ένα μακρό οστό όπως το ανθρώπινο μηριαίο, μέσα στον οποίο εισέρχεται εξαναγκασμένα ένας στερεός κύλινδρος, ο οποίος προσομοιώνει μία ενδοπρόθεση όπως έναν ενδομυελικό ήλο. Διερευνάται η δυνατότητα επέκτασης του παρόντος μοντέλου σε τρισδιάστατη ρεαλιστική γεωμετρία ανθρώπινου μηριαίου οστού με την χρήση πεπερασμένων στοιχείων και μελετάται η ανάλυση τροπών σε μία σειρά καθημερινών καταστάσεων φόρτισης.

Στο μοντέλο επαναδόμησης που προτείνεται το οστό περιγράφεται ως προσαρμοστικό ποροελαστικό υλικό που υπακούει την τρισδιάστατη θεωρία ποροελαστικότητας του Biot (1941). Σύμφωνα με αυτή την υλική περιγραφή το οστό αποτελείται από μία στερεά ελαστική θεμέλια ουσία και διάμεσο ρευστό που ρέει μέσω των ενδοεπικοινωνούντων πόρων που βρίσκονται μέσα στη θεμέλια ουσία. Το σύνολο στερεού και ρευστού θεωρείται ότι είναι απομονωμένο σύστημα σε σχέση με το περιβάλλον, είναι δυνατόν όμως να συμβαίνουν μετατροπές του στερεού σε ρευστό και αντίστροφα ως αποτέλεσμα της διεργασίας επαναδόμησης. Συνολικά το οστό αντιμετωπίζεται ως συνεχές μέσο με ομογενοποιημένες υλικές ιδιότητες σε μακροσκοπικό επίπεδο παρά τις μικροδομικές μεταβολές που είναι δυνατόν να συμβαίνουν.

Αρχικά, με βάση τις αρχές διατήρησης της θεωρίας προσαρμοστικής ελαστικότητας (Cowin *et al.*, 1976) και την νέα υλική περιγραφή, προτείνεται μία καταστατική σχέση για το ποροελαστικό οστό η οποία ενσωματώνει την διεργασία της εσωτερικής επαναδόμησης. Η καταστατική αυτή σχέση περιλαμβάνει όρους τόσο στερεού όσο και ρευστού υποδηλώνοντας την συνεισφορά του ρευστού συστατικού του οστού στην διεργασία της επαναδόμησης.

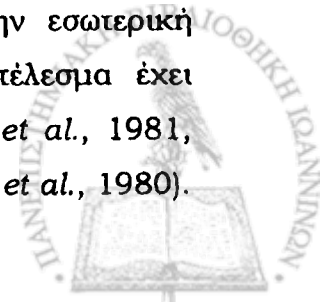
Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των Biot και Willis (1957) για την εξάρτηση των ελαστικών σταθερών από το πορώδες του υλικού και μία προσέγγιση δεύτερης τάξης για την εξάρτηση των άγνωστων υλικών σταθερών από το πορώδες, προτείνεται μία νέα εξίσωση ρυθμού εσωτερικής επαναδόμησης. Στην εξίσωση αυτή το ερέθισμα επαναδόμησης είναι ένας συνδυασμός των τροπών

του σπυριού και του ρευστού συστατικού του οστού. Ο συνδυασμός αυτός προκύπτει από την νέα καταστατική εξίσωση και τις βασικές αρχές της θεωρίας προσαρμοστικής ελαστικότητας. Οι αριθμητικές τιμές των συντελεστών του ρυθμού επαναδόμησης έχουν επιλεγεί αυθαίρετα. Ο ρυθμός εσωτερικής επαναδόμησης, ο οποίος ορίζεται ως η χρονική παράγωγος της μεταβολής του ποσοστού όγκου της θεμέλιας ουσίας στο οστό εξαιτίας της εσωτερικής επαναδόμησης, εκφράζεται ως συνάρτηση του πορώδους. Η εξίσωση του ρυθμού επαναδόμησης επιτρέπει τον προσδιορισμό της πορείας εσωτερικής επαναδόμησης σε διάφορες θέσεις μέσα στο μοντέλο οστού σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Τα αποτελέσματα της επίλυσης του μοντέλου εσωτερικής επαναδόμησης δείχνουν ότι καθώς το πορώδες του οστού αυξάνεται, ο ρυθμός εσωτερικής επαναδόμησης αρχικά μειώνεται και στην συνέχεια αυξάνεται. Η συμπεριφορά αυτή του μοντέλου είναι σε συμφωνία με πειραματικά ευρήματα σχετικά με την πορεία της επαναδόμησης σε ένα εύρος φυσιολογικών τιμών του πορώδους όπως έχει προβλεφθεί και από το μοντέλο των Cowin *et al.* (1981).

Στην συνέχεια, με βάση τις υποθέσεις που έγιναν για την κατασκευή του μοντέλου εσωτερικής επαναδόμησης, την θεωρία των Cowin και Van Buskirk (1979) για την επιφανειακή επαναδόμηση και την έκφραση των Biot και Willis (1957) για τις ελαστικές σταθερές ενός ποροελαστικού μέσου για σταθερή τιμή του πορώδους, προτείνεται μία νέα εξίσωση για το ρυθμό επιφανειακής επαναδόμησης. Οι τιμές των επιφανειακών συντελεστών επαναδόμησης B_{ij} που έχουν χρησιμοποιηθεί προήλθαν από τις τιμές των συντελεστών C_{ij} που δίνονται από τους Misra *et al.* (1992). Η επιφανειακή επαναδόμηση του ενδόστεου και του περιόστεου εκφράζεται ως χρονική μεταβολή των ακτίνων των αντίστοιχων κυλινδρικών επιφανειών. Η εξίσωση του ρυθμού επαναδόμησης επιτρέπει τον προσδιορισμό της πορείας επιφανειακής επαναδόμησης πάνω στις επιφάνειες του περιόστεου και του ενδόστεου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Η επίλυση του μοντέλου υποδεικνύει ότι οι ακτίνες τόσο της εξωτερικής (περιόστεο) όσο και της εσωτερικής (ενδόστεο) κυλινδρικής επιφάνειας αυξάνονται καθώς προχωράει η επαναδόμηση. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ως εναπόθεση οστού στο περιόστεο και απορρόφηση οστού στο ενδόστεο, ως αποτέλεσμα της εσωτερικής ακτινικής πίεσης που ασκείται στην εσωτερική κυλινδρική επιφάνεια από τον ενδομυελικό ήλο. Το ίδιο αποτέλεσμα έχει προβλεφθεί από άλλα μοντέλα και πειραματικές μελέτες (Cowin *et al.*, 1981, Misra *et al.*, 1992, Woo *et al.*, 1981, Uthoft *et al.*, 1978, Jaworski *et al.*, 1980).



Η εισαγωγή του ενδομυελικού ήλου, επομένως, προκαλεί βαθμιαία χαλάρωση με πιθανή τελική αστοχία του εμφυτεύματος. Σύμφωνα με τις προβλέψεις του μοντέλου, η εναπόθεση οστού στο περίοστεο είναι εντονότερη από την απορρόφηση οστού στο ενδόστεο, γεγονός που οδηγεί σε καθαρή αύξηση του πάχους του οστού με την επαναδόμηση. Όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό πάχος του οστού για σταθερή εξωτερική ακτίνα τόσο πιο ραγδαία είναι η επαναδόμηση στο ενδόστεο και το περίοστεο. Στην περίπτωση αυτή, η ποσοστιαία αύξηση του πάχους του οστού είναι μεγαλύτερη. Διατήρηση σταθερού αρχικού πάχους του οστού και βαθμιαία αύξηση της ακτίνας του ενδόστεου και του περιόστεου οδηγεί σε πιο έντονη επαναδόμηση στο περίοστεο από ότι στο ενδόστεο ενώ το καθαρό πάχος οστού συνολικά μειώνεται.

Τόσο το μοντέλο εσωτερικής όσο και εκείνο της επιφανειακής επαναδόμησης αφορούν μία απλουστευμένη κυλινδρική γεωμετρία. Είναι αυτονόητο ότι ένα μοντέλο που θα προσδιορίζει ρεαλιστικά την επαναδόμηση θα πρέπει να αναφέρεται σε γεωμετρία αληθινών οστών. Για τον σκοπό αυτό, κατασκευάστηκε ένα τρισδιάστατο μοντέλο ανθρώπινου μηριαίου οστού με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Το μοντέλο μελετήθηκε ως προς την κατανομή κύριων τροπών στην επιφάνεια και το εσωτερικό του τόσο ανέπαφο όσο και με εισαγωγή σχεδιασμένης ενδοπρόθεσης, σε διαφορετικές συνθήκες φόρτισης.

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν εγκάρσιες τομές από υπολογιστική τομογραφία για την ανακατασκευή τρισδιάστατης γεωμετρίας ανθρώπινου μηριαίου οστού. Στο μοντέλο αυτό το οστό θεωρήθηκε ως γραμμικό ελαστικό στερεό στο οποίο αποδόθηκαν ιδιότητες φλοιώδους και σπογγώδους οστού. Έννεα περιπτώσεις φόρτισης που προσομοιώνουν αντίστοιχες κινητικές δραστηριότητες μοντελοποιήθηκαν και εφαρμόστηκαν στο τρισδιάστατο μοντέλο του ανέπαφου μηριαίου οστού και εκείνου με την ενδοπρόθεση. Τα μέτρα και οι διευθύνσεις των δυνάμεων αντίδρασης της αρθρικής επιφάνειας της κοτύλης στην μηριαία κεφαλή, την χρονική στιγμή της μέγιστης φόρτισης σε διάφορες δραστηριότητες υπολογίστηκαν με βάση δεδομένα που δίνονται στην βιβλιογραφία (Bergmann *et al.*, 2001).

Η ψευδο-στατική ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία οδήγησε στην κατανομή των κύριων τροπών στην επιφάνεια και το εσωτερικό των δύο μοντέλων. Η τάξη μεγέθους των τροπών βρίσκεται σε συμφωνία με ευρήματα άλλων ερευνητών παρόλο που άμεση σύγκριση δεν είναι δυνατή αφού τόσο η γεωμετρία όσο και η διακριτοποίηση των μοντέλων δεν μπορεί να είναι πανομοιότυπη. Το φαινόμενο της ασπίδας τάσεων επιβεβαιώθηκε στο μοντέλο με την ενδοπρόθεση.

Η ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία μίας ρεαλιστικής γεωμετρίας ανθρώπινου οστού παρέχει την δυνατότητα άμεσης σύγκρισης διαφορετικών καταστάσεων φόρτισης, κάτι το οποίο θα ήταν αδύνατον να γίνει με αναλυτικές μεθόδους.

Συμπερασματικά, στην παρούσα μελέτη παρουσιάστηκε ένα νέο τρισδιάστατο μοντέλο οστικής επαναδόμησης μακρών οστών το οποίο

- i. χρησιμοποιεί την απλούστευση της κυλινδρικής γεωμετρίας,
- ii. χρησιμοποιεί την απλούστευση της ισοτροπίας,
- iii. δεν κάνει διάκριση ανάμεσα στο φλοιώδες και το σπογγώδες οστό,
- iv. προτείνει την προσαρμοστική ποροελαστική υλική περιγραφή για το οστό,
- v. εμπεριέχει μία νέα καταστατική εξίσωση για το οστό με όρους στερεού και ρευστού,
- vi. εμπεριέχει μία νέα εξίσωση ρυθμού επαναδόμησης βασισμένη σε συνδυασμό των τροπών τόσο του στερεού όσο και του ρευστού συστατικού του οστού,
- vii. προβλέπει την πορεία της εσωτερικής επαναδόμησης σε συνάρτηση με την μεταβολή στο πορώδες του οστού σε διάφορες θέσεις και χρονικές στιγμές,
- viii. προβλέπει την πορεία της επιφανειακής επαναδόμησης στο ενδόστεο και το περιόστεο για σταθερή τιμή του πορώδους σε διάφορες χρονικές στιγμές.

Το μοντέλο

- ix. εισάγει τον ρευστό όρο στην διεργασία της επαναδόμησης,
- x. αποτελεί την πρώτη εφαρμογή της θεωρίας ποροελαστικότητας στο πρόβλημα της επαναδόμησης οστών,
- xi. έχει φαινομενολογικό χαρακτήρα και χρησιμοποιεί τιμές υλικών σταθερών είτε αυθαίρετες είτε παραγόμενες με βάση βιβλιογραφικά δεδομένα.
- xii. Τα αποτελέσματα του μοντέλου είναι σε συμφωνία με εκείνα προηγούμενων μοντέλων και με πειραματικά δεδομένα.

Στην συνέχεια, σε μία πρώτη προσπάθεια μετάβασης σε πιο ρεαλιστικές συνθήκες γεωμετρίας και φόρτισης, παρουσιάστηκε ένα τρισδιάστατο μοντέλο ανθρώπινου μηριαίου οστού με πεπερασμένα στοιχεία το οποίο

- i. χρησιμοποιεί γεωμετρία πραγματικού μηριαίου οστού,
- ii. χρησιμοποιεί την απλούστευση της ισοτροπίας,



- iii. χρησιμοποιεί την γραμμική ελαστική περιγραφή για το οστό με διάκριση ανάμεσα στο φλοιώδες και το σπογγώδες οστό,
- iv. χρησιμοποιεί ρεαλιστικές συνθήκες φόρτισης,
- v. προβλέπει την τάξη μεγέθους στην κατανομή κύριων τροπών στην επιφάνεια και στο εσωτερικό του μοντέλου με και χωρίς ενδοπρόθεση.

Από ότι γνωρίζω, η παρούσα εργασία αποτελεί την πρώτη προσπάθεια να εισαχθεί η θεωρία ποροελαστικότητας στην διατύπωση του προβλήματος επαναδόμησης που επάγεται από την εισαγωγή ενός ενδομυελικού ήλου σε ένα μακρό οστό. Η ενσωμάτωση της ποροελαστικότητας στην νέα καταστατική εξίσωση που περιγράφει το οστό παρέχει μία ρεαλιστικότερη υλική περιγραφή για το οστό. Ταυτόχρονα, η διεργασία της επαναδόμησης συνδέεται με την παρουσία του ρευστού συστατικού στο οστό, κάτι που έχει επαληθευτεί πειραματικά. Παρόλα αυτά το μοντέλο οστικής επαναδόμησης που παρουσιάστηκε δεν παύει να είναι ένα φαινομενολογικό μοντέλο βασισμένο σε υποθέσεις που αποτελούν μία υπεραπλούστευση της πραγματικότητας. Το μοντέλο κάνει κάποιες ποιοτικές προβλέψεις της πορείας της επαναδόμησης, οι οποίες έχουν επαληθευτεί, αλλά γενικά δεν δίνει ποσοτικά έγκυρα αποτελέσματα στην παρούσα του μορφή. Πιθανοί τρόποι με τους οποίους θα μπορούσε να επεκταθεί το προτεινόμενο μοντέλο στο μέλλον περιλαμβάνουν:

- a. Την χρησιμοποίηση μίας πιο ρεαλιστικής συμμετρίας για το οστό όπως εγκάρσιας ισοτροπίας ή ορθοτροπίας, με επακόλουθη περιπλοκή στην μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.
- b. Την επιλογή άλλης τάξης προσέγγισης για την εξάρτηση των άγνωστων υλικών σταθερών από το πορώδες και άλλων αριθμητικών τιμών των συντελεστών του ρυθμού επαναδόμησης με στόχο την ρεαλιστικότερη συμπεριφορά του μοντέλου σε ένα μεγαλύτερο εύρος τιμών του πορώδους (εσωτερική επαναδόμηση) και του χρόνου (επιφανειακή επαναδόμηση).
- c. Την παρουσία ρευστού στην κοιλότητα του κοίλου ποροελαστικού κυλίνδρου το οποίο είναι ελεύθερο να κινείται προς και από τους πόρους της θεμέλιας ουσίας που βρίσκεται σε επαφή με το ρευστό.
- d. Την εφαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου εσωτερικής και εξωτερικής επαναδόμησης σε μία ρεαλιστική γεωμετρία, όπως εκείνη του μηριαίου οστού, με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Μία τέτοια διαδικασία θα απαιτούσε την δημιουργία και συνεργασία κώδικα με ένα πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων όπως το Nastran.
- e. Την γενίκευση του μοντέλου σε δυναμικές συνθήκες φόρτισης.
- f. Την βαθμονόμηση του προτεινόμενου μοντέλου πειραματικά με ταυτόχρονη



επαλήθευση της συμπεριφοράς/εγκυρότητάς του, για κάποιο εύρος τιμών μίας ή περισσότερων παραμέτρων του. Πιστεύω ότι η πιστοποίηση της εγκυρότητας με ταυτόχρονη βελτίωση της συμπεριφοράς του μοντέλου οστικής επαναδόμησης που παρουσιάστηκε θα μπορούσε να έχει πρακτικές εφαρμογές στην χρήση του για την πρόβλεψη της σταθερότητας ενδοπροθέσεων που εισάγονται σε ένα μακρό οστό σε συνδυασμό με την κατάλληλη επιλογή της σχεδίασης και του υλικού τους.

The following text is extremely faint and largely illegible due to low contrast and scan quality. It appears to be a continuation of a technical or scientific discussion, possibly related to bone remodeling models and implant stability. The text is organized into several paragraphs.



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΔΡΑΣΗΣ - ΔΕΛΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ



Παράρτημα Α

$$A_1(t) = \frac{(A+2Q+R)P(t) + a^2\pi(A+2N+2Q+R)p(t) + 2N\pi(b^2 - a^2)(Q+R)\Theta}{2(a^2 - b^2)N\pi(3A+2N+6Q+3R)},$$

$$A_2(t) = -\frac{a^2b^2p(t)}{2(b^2 - a^2)N},$$

$$D_1(t) = \frac{-(A+2Q+R+N)P(t) - a^2\pi(A+2Q+R)p(t) + N\pi(b^2 - a^2)(Q+R)\Theta}{(a^2 - b^2)(3A+2N+6Q+3R)}.$$



Παράρτημα Β

$$\Lambda_1 = \frac{-a(A+2Q+R)}{(a^2 - b^2)N\pi(3A+2N+6Q+3R)},$$

$$\Lambda_2 = \frac{2a(Q+R)\Theta}{(3A+2N+6Q+3R)},$$

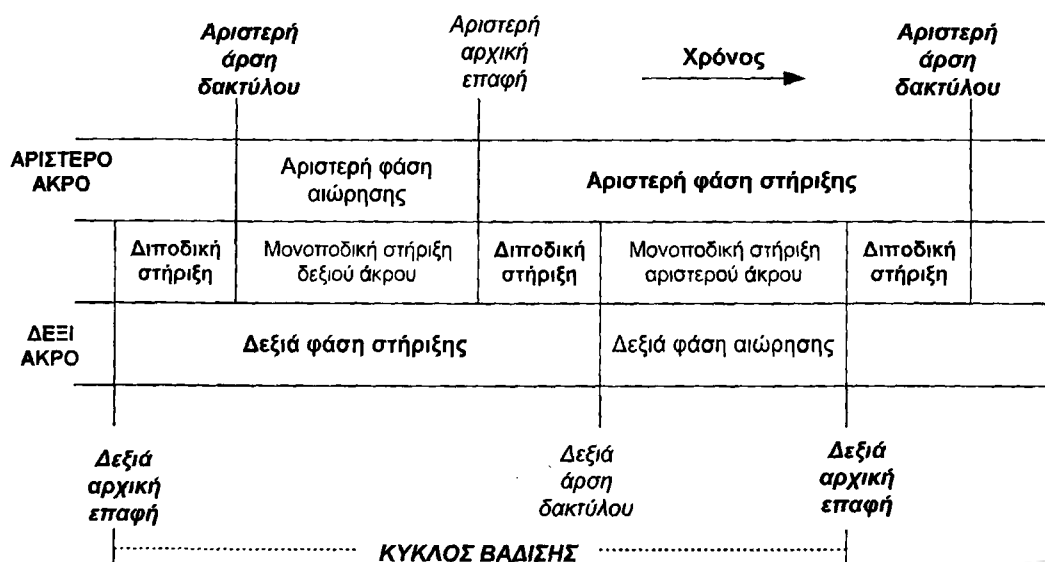
$$\Lambda_3 = \left(\frac{ab^2}{(b^2 - a^2)N} - \frac{a^3(N+A+2Q+R)}{(a^2 - b^2)N(3A+2N+6Q+3R)} + \frac{(\lambda+2\mu)a}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \right).$$



Παράρτημα Γ

Κύκλος βάδισης

Η βάδιση χρησιμοποιεί μία επαναλαμβανόμενη αλληλουχία κίνησης των άκρων με σκοπό την κίνηση του σώματος προς τα εμπρός ενώ ταυτόχρονα διατηρείται σταθερότητα στην στάση. Ο κύκλος βάδισης ορίζεται ως ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων ενός από τα επαναλαμβανόμενα γεγονότα κατά την βάδιση (Ρήγας, 1995, Perry, 1992). Ο κύκλος της βάδισης ξεκινά όταν το ένα πόδι έρχεται σε επαφή με το έδαφος και τελειώνει όταν το ίδιο πόδι αγγίζει το έδαφος ξανά (Σχήμα Π1). Αυτές οι χρονικές στιγμές αναφέρονται ως *αρχική επαφή* ή *επαφή πτέρνας*. Η *φάση στάσης*, η οποία ονομάζεται και *φάση στήριξης* ή *φάση επαφής*, διαρκεί από την αρχική επαφή έως την στιγμή που το μεγάλο δάκτυλο του ποδιού παύει να είναι σε επαφή με το έδαφος (*άρση δακτύλου*) (Ρήγας, 1995). Η στιγμή αυτή σηματοδοτεί την έναρξη της *φάσης αιώρησης* του κύκλου βάδισης, η οποία διαρκεί μέχρι την επόμενη αρχική επαφή του ίδιου μέλους. Σε κάθε κύκλο βάδισης υπάρχουν δύο περίοδοι *διπλής ή διποδικής στήριξης* όταν και τα δύο πόδια βρίσκονται στο έδαφος και δύο περίοδοι *μονής ή μονοποδικής στήριξης*. Η φάση στήριξης συνήθως διαρκεί ένα χρονικό διάστημα ίσο με το 60% περίπου του κύκλου βάδισης, ενώ η φάση αιώρησης ένα χρονικό διάστημα ίσο με το υπόλοιπο 40% περίπου. Στην φάση της διπλής στήριξης αντιστοιχεί χρόνος ίσος με το 10% του κύκλου περίπου. Τα



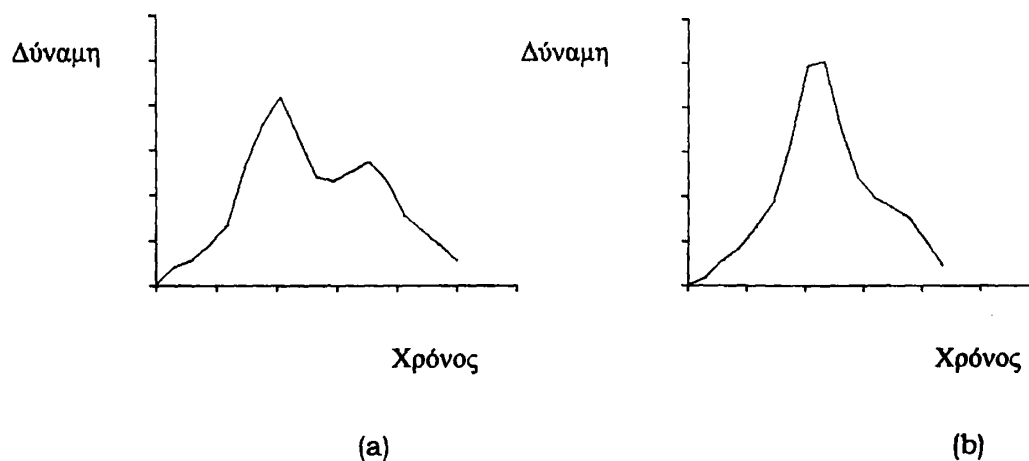
Σχήμα Π1: Περιγραφή του ανθρώπινου κύκλου βάδισης (αναπαραγωγή από Whittle (1997)).



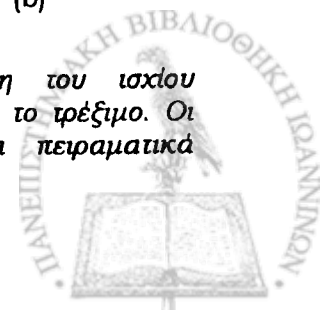
προηγούμενα ποσοστά μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με την ταχύτητα της βάδισης. Η περίοδος του κύκλου βάδισης σε φυσιολογικά άτομα κυμαίνεται από 0.54 έως 1.25 δευτερόλεπτα και εξαρτάται από την ηλικία και το φύλο.

Δυνάμεις στην άρθρωση του ισχίου

Κατά την διάρκεια της βάδισης συμβαίνουν σημαντικές κινήσεις του ισχίου και στα τρία επίπεδα – οβελιαίο, μετωπιαίο και εγκάρσιο. Οι μεγαλύτερες κινήσεις συμβαίνουν στο οβελιαίο επίπεδο (Whittle, 1997). Η κίνηση του ισχίου στο οβελιαίο επίπεδο είναι ουσιαστικά ημιτονοειδής κατά τη βάδιση. Τα φορτία στην άρθρωση του ισχίου κατά την διάρκεια δυναμικών δραστηριοτήτων έχουν μελετηθεί εκτενώς. Το διάνυσμα της δύναμης που δρα στην κεφαλή του μηριαίου εξαρτάται από τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο άκρο και από τις εσωτερικές δυνάμεις που παράγονται κυρίως από την μυϊκή σύσπαση. Οι δυνάμεις στην άρθρωση του ισχίου έχουν υπολογιστεί έμμεσα χρησιμοποιώντας αντίστροφη δυναμική και αναλυτικές μεθόδους ή έχουν μετρηθεί άμεσα χρησιμοποιώντας εμφυτευμένους μετατροπείς. Γενικά, η συνισταμένη δύναμη στην άρθρωση του ισχίου κατά την βάδιση φτάνει μία αρχική κορυφή κατά την πρώιμη φάση στάσης και μία δεύτερη κορυφή κατά την όψιμη φάση στάσης (Σχήμα Π2(a)), όπως περιγράφεται στην αρχική μελέτη του Paul (1976). Το μέτρο της κυμαίνεται από 0.5 έως 4 φορές το βάρος του σώματος ανάλογα με την χρονική στιγμή της περιόδου του κύκλου. Στο τρέξιμο (Σχήμα Π2(b)), μόνον η πρώτη κορυφή είναι εμφανής και το μέτρο της είναι μεγαλύτερο από εκείνο της αντίστοιχης κορυφής κατά την βάδιση.



Σχήμα Π2: Συνισταμένη δύναμη αντίδρασης στην άρθρωση του ισχίου συναρτήσει του χρόνου κατά (a) την βάδιση και (b) το τρέξιμο. Οι γραφικές παραστάσεις βασίζονται σε μετρημένα πειραματικά αποτελέσματα από τους Bergmann et al. (1993).



Φαινόμενο ασπίδας τάσεων (stress shielding)

Στην φυσιολογική κατάσταση φόρτισης ενός ανέπαφου μηριαίου οστού, οι τάσεις κατανέμονται πάνω σε ολόκληρη την διαφορική διατομή του εγγύς μηριαίου. Οι κύριοι τρόποι φόρτισης είναι μέσω καμπτικής και αξονικής συμπίεσης. Μετά από επέμβαση (αρθροπλαστική ισχίου) όμως, η κατάσταση τάσεων είναι σημαντικά διαφορετική, κυρίως λόγω του τρόπου με τον οποίο γίνεται η μεταφορά φορτίου από την ενδοπρόθεση στο μηριαίο. Στην περίπτωση αυτή, το φορτίο μεταφέρεται μερικώς με διατμητικές τάσεις μέσω των ενδοεπιφανειών ενδοπρόθεσης-τσιμέντου-οστού (Huiskes, 1990, Huiskes *et al.*, 1992). Ο διαφορετικός αυτός τρόπος μεταφοράς φορτίου οδηγεί σε αυξημένες τάσεις στην ενδοεπιφάνεια οστού-ενδοπρόθεσης και αποφόρτιση του οστού μακριά από την ενδοπρόθεση. Οι διατμητικές τάσεις στην ενδοεπιφάνεια αυξάνονται περαιτέρω εξαιτίας του πηλίκου ακαμψίας ενδοπρόθεσης-οστού, το οποίο τυπικά είναι της τάξης του 10:1 ή και μεγαλύτερο (Joshi *et al.*, 2000). Επίσης, οι καμπτικές μετατοπίσεις στο οστό που περιβάλλει το στέλεχος της ενδοπρόθεσης μειώνονται λόγω της σχετικά υψηλής καμπτικής ακαμψίας της ενδοπρόθεσης. Η μειωμένη αυτή κάμψη, υποφορτίζει τα εξώτερα στρώματα του μηριαίου οδηγώντας σε μία κατάσταση ασπίδας τάσεων (stress shielding). Η μεταβολή στην κατανομή των τάσεων αυξάνει τις τάσεις σε ορισμένες περιοχές και τις ελατώνει σε άλλες. Εάν αυτές οι μεταβολές γίνουν αρκετά μεγάλες μπορεί να οδηγήσουν σε οστική επαναδόμηση. Η ασπίδα τάσεων έχει συσχετιστεί με την χαλάρωση της ενδοπρόθεσης μακροπρόθεσμα (Lewis *et al.*, 1984) και πιθανώς την τελική αστοχία της.

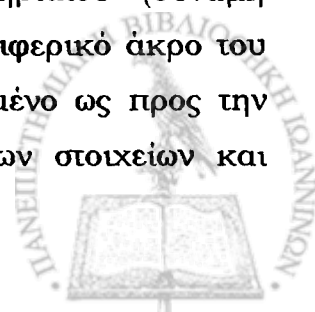
Ο βαθμός της ασπίδας τάσεων εξαρτάται από τις μεταβλητές που σχετίζονται με τον σχεδιασμό του στελέχους της ενδοπρόθεσης (μέγεθος, γεωμετρία, μέτρο ελαστικότητας και περίβλημα (coating)), τις οστικές μεταβλητές (γεωμετρία και κατανομή οστικής πυκνότητας) καθώς και με την τοποθέτηση του στελέχους μέσα στο μηριαίο οστό (Weinans *et al.*, 2000).



ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Στην παρούσα μελέτη προτείνεται μία νέα προσέγγιση στο πρόβλημα της εσωτερικής και της επιφανειακής οστικής επαναδόμησης. Η προτεινόμενη διατύπωση συνδυάζει στοιχεία από την θεωρία ποροελαστικότητας του Biot (1941) και την θεωρία προσαρμοστικής ελαστικότητας των Cowin *et al.* (1976) καταλήγοντας σε μία νέα θεωρητική περιγραφή της επαναδόμησης. Συγκεκριμένα, προτείνεται μία νέα υλική περιγραφή για το οστό, εκείνη του ποροελαστικού προσαρμοστικού υλικού, όπου το στερεό τμήμα αντιπροσωπεύει την θεμέλια ουσία με τα οστικά κύτταρα και το ρευστό τμήμα το εξωκυττάριο ρευστό και το πλάσμα του αίματος. Δημιουργούνται νέες καταστατικές εξισώσεις τάσης-τροπής για την εσωτερική και την επιφανειακή επαναδόμηση αντίστοιχα. Επίσης, δημιουργούνται νέες εξισώσεις ρυθμού εσωτερικής και επιφανειακής επαναδόμησης. Η προτεινόμενη προσέγγιση εφαρμόζεται σε μοντέλο μακρού οστού, όπως του ανθρώπινου μηριαίου. Εξετάζεται η απλοποιημένη γεωμετρία κοίλου προσαρμοστικού ποροελαστικού κυλίνδρου κυκλικής διατομής που προσομοιώνει το οστό, στον οποίο εισάγεται εξαναγκασμένα στερεός ελαστικός κύλινδρος που προσομοιώνει ενδοπρόθεση. Μελετώνται δύο προβλήματα, ένα συνοριακών συνθηκών για την εσωτερική επαναδόμηση και ένα αρχικών τιμών για την επιφανειακή. Τα προβλήματα επιλύονται με χρήση αριθμητικών μεθόδων. Η επίλυση των δύο μοντέλων οδηγεί σε πρόβλεψη του ρυθμού εσωτερικής επαναδόμησης συναρτήσει του πορώδους και του ρυθμού επιφανειακής επαναδόμησης συναρτήσει των αρχικών ακτίνων των κυλινδρικών επιφανειών ενδόστεου και περιόστεου. Στόχος της μελέτης είναι η ανάπτυξη μίας προκαταρκτικής μεθοδολογίας μοντελοποίησης και ποιοτικής πρόβλεψης της οστικής επαναδόμησης, με βάση μία ρεαλιστικότερη - σε σχέση με τις προτεινόμενες στην βιβλιογραφία - υλική περιγραφή του οστού.

Στην συνέχεια, εισάγεται η ρεαλιστική γεωμετρία ενός τρισδιάστατου μοντέλου ανθρώπινου μηριαίου οστού. Στο μοντέλο αυτό το οστό αντιμετωπίζεται ως γραμμικό ελαστικό υλικό. Επιβάλλονται συνοριακές συνθήκες που αντιστοιχούν σε εννέα διαφορετικές κινητικές δραστηριότητες (αργή βάδιση, φυσιολογική βάδιση, γρήγορη βάδιση, ανέβασμα σκάλας, κατέβασμα σκάλας, ανασήκωμα, κάθισμα, στήριξη σε 2-1-2 πόδια και κάμψη γόνατος) κατά την χρονική στιγμή μέγιστης φόρτισης στην κεφαλή του μηριαίου (δύναμη αντίδρασης από την αρθρική επιφάνεια της κοτύλης). Το περιφερικό άκρο του μηριαίου στην άρθρωση του γόνατος είναι πλήρως περιορισμένο ως προς την κίνηση. Το μοντέλο επιλύεται με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων και



προσδιορίζεται η κατανομή των κύριων τροπών στην επιφάνεια και το εσωτερικό του. Αντίστοιχη ανάλυση γίνεται στο μοντέλο του εμφυτευμένου μηριαίου οστού με αφαίρεση της μηριαίας κεφαλής και εισαγωγή σχεδιασμένης ενδοπρόθεσης. Γίνεται σύγκριση των κατανομών κύριων τροπών στα δύο μοντέλα και επίδειξη του φαινομένου ασπίδας τάσεων στο μοντέλο με την ενδοπρόθεση. Στόχος της μελέτης είναι η μακροσκοπική περιγραφή της κατάστασης φόρτισης σε ένα απλοποιημένο μοντέλο μακρού οστού ρεαλιστικής γεωμετρίας και συνοριακών συνθηκών. Η κατανομή της φόρτισης, η οποία μεταβάλλεται δυναμικά με τον χρόνο, σχετίζεται άμεσα με την οστική επαναδόμηση.

Τα μοντέλα που παρουσιάστηκαν αντανακλούν μία αρχική προσπάθεια ποιοτικής περιγραφής ενός πολύπλοκου μηχανο-βιολογικού φαινομένου. Η μελλοντική εργασία θα μπορούσε να επικεντρωθεί στην ενσωμάτωση στα διάφορα στάδια της μοντελοποίησης περισσότερο ρεαλιστικής αναπαράστασης των ιδιοτήτων του οστού (μη γραμμικές σε σχέση με γραμμικές), πιο πολύπλοκων γεωμετρικών σχημάτων του οστού και δυναμικών (σε σχέση με στατικές) κατανομών φορτίου. Υπ' αυτήν την έννοια, θα πρέπει να γίνει ένας λογικός συμβιβασμός μεταξύ της πολλαπλής χρησιμότητας του μοντέλου και της δυνατότητας πειραματικής του βαθμονόμησης/επαλήθευσης.



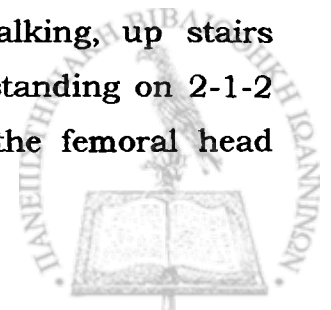
MODELING THE EFFECT OF MECHANICAL LOADING IN BONE REMODELING

Thesis by Vasiliki A. Papathanasopoulou

SUMMARY IN ENGLISH

In the present study a novel approach to internal and surface bone remodeling is proposed. The suggested formulation combines elements of the theory of consolidation by Biot (1941) and the theory of adaptive elasticity by Cowin *et al.* (1976), leading to a new theoretical description of remodeling. Specifically, a new material description for bone is proposed, that of an adaptive poroelastic material. According to this description, the solid part of the bulk material represents the bone matrix with the bone cells, whereas the fluid part describes interstitial fluid and blood plasma. New stress-strain constitutive equations are formulated for internal and surface remodeling, respectively. Also, new equations for the rate of internal and surface remodeling are generated. The suggested approach is applied to a model of a long bone, such as the human femur. A simplified geometry is examined, that of a hollow adaptive poroelastic cylinder of circular cross-section representing the bone, in which a solid elastic cylinder is forced which simulates an endoprosthesis. Two problems are thus considered, a boundary-value one for internal remodeling and an initial-value one for surface remodeling. Both problems are solved by numerical methods. The solution of the two models leads to prediction of the rate of internal remodeling versus porosity, and the rate of surface remodeling versus the initial radii of the cylindrical surfaces representing endosteum and periosteum. The aim of the study is the development of a preliminary methodology of modeling and qualitatively predicting bone remodeling, based on a more realistic - relative to the ones proposed in the literature - material description of bone.

A realistic geometry of a three-dimensional model of a human femoral bone is then introduced. In this model the region is treated as a linear elastic material. Boundary conditions are applied that correspond to nine different routine activities (slow walking, normal walking, fast walking, up stairs walking, down stairs walking, standing up, sitting down, standing on 2-1-2 legs and knee bend) at the instant of peak loading in the femoral head



(reaction force from the hip acetabulum). The distal femur at the knee joint is fully constrained. The model is treated using the finite element method. The distribution of principal strains is calculated on the surface and in the interior of the model. A similar analysis is carried out in the model of an implanted femur in which the femoral head is removed, and a designed endoprosthesis is inserted. A comparison of the distribution of the principal strains in the two models and a demonstration of the stress-shielding effect in the implanted model is made. The study aims in macroscopically describing the loading situation in a simplified model of a long bone, employing realistic geometry and boundary conditions. The load distribution, which varies dynamically with time, is directly related to bone remodeling.

The models presented here reflect a preliminary attempt to make qualitative predictions about a very complicated mechano-biologic phenomenon. Future research could focus on incorporating on the various modeling stages a more realistic representation of the bone properties (linear versus nonlinear), more complex geometrical bone shapes and of dynamic versus static stress distributions. In this regard, a reasonable compromise must be achieved between modeling versatility and experimental calibration/verification possibility.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Akin, J.: *Finite element analysis for undergraduates*, Ch. 1, pp.1-7, Academic Press Inc., London, (1986).
2. An, Y. H.: "Mechanical properties of bone" In: *Mechanical testing of bone and the bone-implant interface*, Yuehuei, A. H. and Draughn, R.A., Eds., CRC Press, pp. 41-63, (2000).
3. An, Y. H., Kang, Q. and Friedman, R. J.: "Mechanical symmetry of rabbit bones studied by bending and indentation testing", *Am. J. Vet. Res.*, 57, 1786, (1996).
4. An, Y. H., Barfield, W. R. and Draughn, R. A.: "Basic concepts of mechanical property measurement and bone biomechanics", in *Mechanical testing of bone and the bone-implant interface*, An, Y. H. and Draughn, R. A., Eds., CRC Press, Boca Raton, FL, (2000).
5. Anderson, J. C. and Eriksson, C.: "Electrical properties of wet collagen", *Nature*, 218, 166-168, (1968).
6. Anderson, J. C. and Eriksson, C.: "Piezoelectric properties of dry and wet bone", *Nature*, 227, 491-492, (1970).
7. Arnold, J. S.: "Amount and quality of trabecular bone in osteoporotic vertebral fractures", *Clin. Endocrinol.*, 2(22), 221-238, (1973).
8. Ascenzi, A. and Bonucci, E., *Anat. Rec.*, 172, 499, (1968) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
9. Ashman, R. B.: "Experimental techniques", in *Bone Mechanics*, Cowin, S. C., Ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 91, (1989).
10. Ashman, R. B., Cowin, S. C., Van Buskirk, W. C. *et al.*: "A continuous wave technique for the measurement of the elastic properties of bone", *J. Biomech.*, 17, 349, (1984).
11. Bagge, M.: "A model of bone adaptation as an optimization process", *J. Biomech.*, 33, 1349-1357, (2000).
12. Bassett, C. A. L.: "Biological significance of piezoelectricity", *Calc. Tiss. Res.*, 1, 252-272, (1968).
13. Bassett, C. A. L.: *Sci. Am.*, 213, 18, (1965) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
14. Bassett, C. A. L. and Becker, K. O.: *Science*, 137, 1063, (1962) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).



15. Beaupré, G. S., Orr, T. E., Carter, D. R.: "An approach for time-dependent bone modeling and remodeling - Theoretical development", *J. Orthopaed. Res.*, 8, 651-661, (1990a).
16. Beaupré, G. S., Orr, T. E., Carter, D. R.: "An approach for time-dependent bone modeling and remodeling - application: A preliminary remodeling simulation", *J. Orthopaed. Res.*, 8, 662-670, (1990b).
17. Benfield, W. and Clark, E. A., *J. Mater. Sci.*, 8, 1590, (1973) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
18. Bergmann, G., Graichen, F. and Rohlmann, A.: "Hip joint loading during walking and running, measured in two patients", *J. Biomech.*, 26, 969-990, (1993).
19. Bergmann, G., Deuretzbacher, G., Heller, M. *et al.*: "Hip contact forces and gait patterns from routine activities", *J. Biomech.*, 34, 859-871, (2001).
20. Berme, N., Mengi, Y. and Inger, E., *J. Biomech.*, 10, 643, (1977) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
21. Binderman, I., Zor, U., Kaye, A. M. *et al.*: "The transduction of mechanical force into biochemical events in bone cells may involve activation of phospholipase A₂", *Calcified Tissue Int.*, 42, 261-266, (1988).
22. Biot, M. A.: "General theory of three-dimensional consolidation", *J. Appl. Phys.*, 12, 155-165, (1941).
23. Biot, M. A.: "Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid", *J. Appl. Phys.* 26, 182-185, (1955).
24. Biot, M. A.: "General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material", *J. Appl. Mech. - T ASME*, 78, 91-96, (1956).
25. Biot, M. A. and Willis, D. G.: "The elastic coefficients of the theory of consolidation", *J. Appl. Mech. - T ASME*, 24, 594-601, (1957).
26. Bird, F., Becker, H., Healer, J. *et al.*, *Aerospace Med.*, 39, 44, (1968) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
27. Black, J.: *Orthopaedic Biomaterials in Research and Practice*, Churchill Livingstone, New York, (1988) (αναφορά των An, Y. H. *et al.* στο *Mechanical testing of bone and the bone-implant interface*, An, Y. H. and Draughn, R. A., Eds., CRC Press, Boca Raton, FL, (2000)).



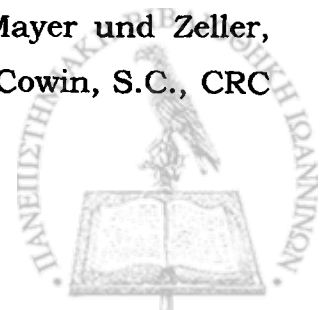
28. Black, J. and Korostoff, E.: "Dynamic mechanical properties of viable human cortical bone", *J. Biomech.*, 6, 435, (1973).
29. Black, J., Mattson, R. and Korostoff, E.: "Haversian osteons: size, distribution, internal structure and orientation", *J. Biomed. Mater. Res.*, 8, 299-319, (1974).
30. Brekelmans, W. A. M., Poort, H. W. and Sloof, T. J. J. H.: "A new method to analyse the mechanical behaviour of skeletal parts", *Acta Orthop. Scand.* 43, 301-317, (1972).
31. Brighton, C. T. and McCluskey, W. P.: "Cellular response and mechanisms of action of electrically induced osteogenesis", *Bone Miner.*, 4, 213-254, (1986).
32. Bronzino, J. D.: *The Biomedical Engineering Handbook*, First Edition, Volume II, CRC Press/IEEE Press, (1995).
33. Brown, T. D. and Ferguson, A. B.: "Mechanical property distribution in the cancellous bone of the human proximal femur", *Acta Orthop. Scand.*, 51, 429-437, (1980).
34. Burr, D. R., Martin, R. B., Schaffler, M. B. and Radin, E. L.: "Bone remodeling in response to in vivo fatigue microdamage", *J. Biomech.*, 18(3), 189-200, (1985).
35. Burstein, A. H., Reilly, D. T. and Martens, M.: "Aging of bone tissue: mechanical properties", *J. Bone Joint Surg. Am.*, 58(A), 82, (1976).
36. Cady, W. G.: "Piezoelectricity", Mc-Graw Hill, New York, (1949) (αναφορά του Cowin, S. C., 1989).
37. Carter, D. R.: "Mechanical loading histories and cortical bone remodeling", *Calcified Tissue Int.*, 36, S19-S24, (1984).
38. Carter, D. R.: "Mechanical loading history and skeletal biology", *J. Biomech.*, 20(11), 1095-1109, (1987).
39. Carter, D. R., Fyhrie, D. P. and Whalen, W. T.: "Trabecular bone density and loading history: regulation of connective tissue biology by mechanical energy", *J. Biomech.*, 20(8), 785-794, (1987).
40. Carter, D. R. and Hayes, W. C.: "Bone compressive strength: the influence of density and strain rate", *Science*, 194, 1174-1176, (1976).
41. Carter, D. R. and Hayes, W. C.: "The compressive behavior of bone as a two-phase porous structure", *J. Bone Joint Surg. Am.*, 59A(7), 954-962, (1977).



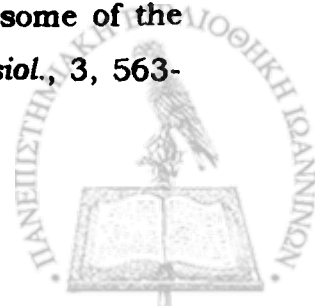
42. Carter, D. R., Orr, T. E. and Fyhrie, D. P.: "Relationship between loading history and femoral cancellous bone architecture", *J. Biomech.*, 22, 231-244, (1989).
43. Carter, D. R. and Spengler, D. M.: "Mechanical properties and composition of cortical bone", *Clin. Orthop. Relat. R.*, 135, 192-217, (1978).
44. Carter, D. R. and Whalen, R. T.: "Trabecular bone density and loading history: Regulation of connective tissue biology by mechanical energy", *J. Biomech.*, 20, 785-794, (1987).
45. Cassidy, J. J. and Davy, D. T.: "Mechanical and architectural properties in bovine cancellous bone", *Trans. 31st Annu. Meet. Orthop. Res. Soc.*, Las Vegas, 354, (1985) (αναφορά του Cowin, S. C., 1989).
46. Chakkalakal, D. A., Johnson, M. W., Harper, R. A. and Katz, J. L.: "Dielectric properties of fluid saturated bone", *IEEE T. Bio-med. Eng.*, 27, 95-100, (1980).
47. Chakkalakal, D. A. and Johnson, M. W.: "Electrical properties of compact bone", *Clin. Orthop. Relat. R.*, 133-145, (1981).
48. Chamay, A. and Tschantz, P.: "Mechanical influences in bone remodeling. Experimental research on Wolff's law", *J. Biomech.*, 5, 173-180, (1972).
49. Churches, A. E., Howlett, C. R., Waldron, K. J. and Ward, G. W.: "The response of living bone to controlled time-varying loading: method and preliminary results", *J. Biomech.*, 12, 35-43, (1979).
50. Ciarelli, M. J., Goldstein, S. A., Kuhn, J. L. *et al.*: "Evaluation of orthogonal mechanical properties and density of human trabecular bone from the major metaphyseal regions with materials testing and computed tomography", *J. Orthopaed. Res.*, 9, 674-682, (1991).
51. Cochran, G. V. B., Pawlik, R. J. and Bassett, C. A. L.: "Electromechanical characteristics of bone under physiologic moisture conditions", *Clin. Orthop. Relat. R.*, 58, 249-270, (1968).
52. Cordebois, J. P. and Sideroff, F.: "Damage induced elastic anisotropy. Mechanical behavior of anisotropic solids", *Proceedings of the EUROMECH Colloque*, 115, 761-774, (1982).
53. Cowin, S. C.: *Mechanical properties of bone*, ASME Press, New York, (1981).



54. Cowin, S. C.: "The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor", *Mech. Mater.*, 4, 137-147, (1985).
55. Cowin, S. C.: Wolff's law of trabecular architecture at remodeling equilibrium", *J. Biomech. Eng.- T ASME*, 108(1), 83-88, (1986).
56. Cowin, S. C.: "Bone remodeling of diaphyseal surfaces by torsional loads: theoretical predictions", *J. Biomech.*, 20, 1111-1120, (1987).
57. Cowin, S. C.: *Bone mechanics*, CRC Press, Boca Raton, Florida, (1989).
58. Cowin, S. C.: "Structural adaptation of bones", *Applied Mechanical Review*, 43, S126-S133, (1990).
59. Cowin, S. C.: "Bone poroelasticity", *J. Biomech.*, 32, 217-238, (1999).
60. Cowin, S.C. and Firoozbakhsh, K.: "Bone remodeling of diaphysial surfaces under constant load: theoretical predictions", *J. Biomech.*, 12, 269, (1981).
61. Cowin, S. C., Hart, R. T., Balsler, J. R. *et al.*: "Functional adaptation in long bones: establishing *in vivo* values for surface remodeling rate coefficients", *J. Biomech.*, 18(9), 665-684, (1985).
62. Cowin, S. C. and Hegedus, D. H.: "Bone remodeling I: Theory of adaptive elasticity", *J. Elasticity*, 6, 313-326, (1976).
63. Cowin, S. C. and Van Buskirk, W. C.: "Internal bone remodeling induced by a medullary pin", *J. Biomech.*, 11, 269-275, (1978).
64. Cowin, S. C. and Van Buskirk, W. C.: "Surface bone remodeling induced by a medullary pin", *J. Biomech.*, 12, 269-276, (1979).
65. Cowin, S. C. and Van Buskirk, W. C.: "Thermodynamic restrictions on the elastic constants of bone", *J. Biomech.*, 19, 85-87, (1986).
66. Cowin, S. C., Weinbaum, S. and Zeng, Yu: "A case for bone canaliculi as the anatomical site of strain generated potentials", *J. Biomech.*, 28(11), 1281-1297, (1995).
67. Cristofolini, L., Cappello, A., McNamara, B. P., *et al.*: "A minimal parametric model of the femur to describe axial elastic strain in response to loads", *Med. Eng. Phys.*, 18, 502-514, (1996).
68. Crowninshield, R. D., Brand, R. A., Johnson, R. C. *et al.*: "An analysis of femoral component stem design in total hip arthroplasty", *J. Bone Joint Surg.*, 62-A, 68-78, (1980).
69. Culmann, C.: *Die Graphische Statik, 1.Auflage*, Mayer und Zeller, Zurich, (1866) (αναφορά στο *Bone Mechanics*, Ed: Cowin, S.C., CRC Press, Boca Raton, Florida, (1989)).



70. Currey, J. D., *J. Biomech.*, 8, 81, (1975) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
71. Currey, J. D.: "The effect of porosity and mineral content on the Young's modulus of elasticity of compact bone", *J. Biomech.*, 21, 131, (1988).
72. Curry, J. D.: "Some effects of aging in human Haversian systems", *J. Anat.*, 98, 69-75, (1964).
73. Curry, J. D.: "Osteons in biomechanics literature", *J. Biomech.*, 15, 717, (1982).
74. Curry, J. D.: "Strain rate dependence of the mechanical properties of reindeer antler and the cumulative damage model of bone fracture", *J. Biomech.*, 22, 469-476, (1989).
75. Δάσιος, Γ. και Κυριάκη, Κ.: *Μερικές διαφορετικές εξισώσεις*, Πανεπιστήμιο Πατρών, (1994).
76. Dempster, W. T. and Liddicoat, R. T., *Am. J. Anat.*, 91, 331 (1952) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
77. Dillaman, R. M.: "Movement of ferritin in the 2-day-old chick femur", *Anat. Rec.*, 209, 445-453, (1984).
78. Dillaman, R. M., Roer, R. D. and Gay, D. M.: "Fluid movement in bone: theoretical and empirical", *J. Biomech.*, 24(suppl. 1), 163-177, (1991).
79. Ding, H., Chenbuo, Liangjian: "General solutions for coupled equations for piezoelectric media", *Int. J. Solids Struct.*, 33(16), 2283-2298, (1996).
80. Doblaré, M. and García, J. M.: "Anisotropic bone remodelling model based on a continuum damage-repair theory", *J. Biomech.*, 35, 1-17, (2002).
81. Duda, G. N., Heller, M., Albinger, J., *et al.*: "Influence of muscle forces on femoral strain distribution", *J. Biomech.*, 31, 841-846, (1998).
82. Elmessierey, M. A.: "Physical basis for piezoelectricity of bone matrix", *IEEE T. Bio-med. Eng.*, 28A, 336-346, (1981).
83. Enlow, D. H.: "Functions of the Haversian system", *Am. J. Anat.*, 110, 269-282, (1962).
84. Evans, F. G. and Lebow, M.: "Regional differences in some of the physical properties of the human femur", *J. Appl. Physiol.*, 3, 563-572, (1951).



85. Ferrier, J., Ross, S. M., Kanehisa, J. and Aubin, J. E.: "Osteoclasts and osteoblasts migrate in opposite directions in response to a constant electrical field", *J. Cell Physiol.*, 129, 283-288, (1986).
86. Firoozbakhsh, K. and Cowin, S. C.: "Devolution of inhomogeneities in bone structure - predictions of adaptive elasticity theory", *J. Biomech. Eng.- T ASME*, 102, 287, (1980).
87. Firoozbakhsh, K. and Cowin, S. C.: "An analytical model of Pauwel's functional adaptation mechanism in bone", *J. Biomech. Eng.- T ASME*, 103, 246-252, (1981).
88. Fotiadis, D. I., Foutsitzi, G. and Massalas, C. V.: "Wave propagation modeling in human long bones", *Acta Mech.*, 137, 1-17, (1999).
89. Frost, H. M.: *The laws of bone structure*, Charles C. Thomas, Springfield, (1964).
90. Frost, H. M.: "A determinant of bone architecture: the minimum effective strain", *Clin. Orthop. Relat. R.*, 175, 286-292, (1983).
91. Frost, H. M.: "Intermediary organization of the skeleton", CRC Press, Boca Raton, FL, (1986).
92. Frost, H. M.: "Vital biomechanics: proposed general concepts for skeletal adaptations to mechanical usage", *Calcified Tissue Int.*, 42, 145-156, (1988).
93. Fukada, E. and Yasuda, I.: "On the piezoelectric effect of bone", *J. Phys. Soc. Jpn*, 12, 1158-1169, (1957).
94. Fukuda, F. and Yasuda, I.: "Piezoelectric effects in collagen", *Jpn. J. Appl. Phys.*, 3, 117, (1964).
95. Fung, Y. C.: *A first course in continuum mechanics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., (1969).
96. Fyhrie, D. P. and Carter, D. R.: "A unifying principle relating stress to trabecular bone morphology", *J. Orthopaed. Res.*, 4, 304-317, (1986).
97. Galante, J., Rostoker, W. and Ray, R. D.: "Physical properties of trabecular bone", *Calc. Tiss. Res.*, 5, 236-246, (1970).
98. Galileo, G.: *Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attentanti alla meccanica ed a muovimenti locali*, University of Wiskonsin Press, (1638) (αναφορά των Martin and Burr, 1989).
99. Gjelsvik, A.: "Bone remodeling and piezoelectricity - I.", *J. Biomech.*, 6, 69, (1973a).



100. Gjelsvik, A.: "Bone remodeling and piezoelectricity - II.", *J. Biomech.*, 6, 187, (1973b).
101. Goldstein, S. A.: "The mechanical properties of trabecular bone: dependence on anatomic location and function", *J. Biomech.*, 20(11/12), 1055-1061, (1987).
102. Goldstein, S. A., Goulet, R., and McCubbrey, D.: "Measurement and significance of three-dimensional architecture to the mechanical integrity of trabecular bone", *Calcified Tissue Int.*, 53, S127, (1993).
103. Goldstein, S. A., Matthews, L. S., Kuhn, J. L. *et al.*: "Trabecular bone remodeling: an experimental model", *J. Biomech.*, 24(Suppl. 1), 135-150, (1991).
104. Greenleaf, J. E.: "Physiological responses to prolonged bed rest and fluid immersion in humans", *J. Appl. Physiol.*, 57, 619-633, (1984).
105. Gross, D. and Williams, W. S.: "Streaming potential and the electromechanical response of physiologically moist bone", *J. Biomech.*, 15, 277-295, (1982).
106. Guzelsu, N. and Demiray, H.: "Electromechanical properties and related models of bone tissues", *Int. J. Eng. Sci.*, 17, 813-851, (1979).
107. Guzelsu, N. and Saha, S.: "Electro-mechanical behavior of wet bone - part I: theory", *J. Biomech. Eng.- T ASME*, 106, 249, (1984a).
108. Guzelsu, N. and Saha, S.: "Electro-mechanical behavior of wet bone - part II: wave propagation", *J. Biomech. Eng.- T ASME*, 106, 262, (1984b).
109. Harrigan, T. P., Carter, D. R., Mann, R. W. and Harris, W. H.: "The influence of apparent density and trabecular orientation on the elastic modulus of cancellous bone", *Tran. Orthopaedic Research Society*, 6, 277, (1981).
110. Harrigan, T. P. and Hamilton, J. J.: "An analytical and numerical study of the stability of bone remodeling theories: Dependence on microstructural stimulus", *J. Biomech.*, 25(5), 477-488, (1992a).
111. Harrigan, T. P. and Hamilton, J. J.: "Optimality conditions for finite element simulation of adaptive bone remodeling", *Int. J. Solids Struct.*, 29, 2897-2906, (1992b).
112. Harrigan, T. P. and Hamilton, J. J.: "Finite element simulation of adaptive bone remodeling: A stability criterion and a time stepping method", *Int. J. Numer. Methods in Engineering*, 36, 837-854, (1993).



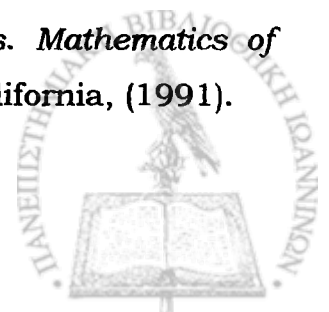
113. Harrigan, T. P. and Hamilton, J. J.: "Bone remodeling and structural optimization", *J. Biomech.*, 27, 323-328, (1994).
114. Harrigan, T. P., Jasty, M., Mann, R. W. *et al.*: "Limitations of the continuum assumption in cancellous bone", *J. Biomech.*, 21(4), 269-275, (1988).
115. Harrigan, T. and Mann, R. W.: "Characterization of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor", *J. Mater. Sci.*, 19, 761-767, (1983).
116. Harrigan, T. P., Odgaard, A., Reuben, J. D.: "Comparison between a two-state Markov model and intercept measurements shows small-scale structural order", *ASME Summer Bioengineering Conference, Beaver Creek, Colorado*, (1995).
117. Harris, L. J., Chao, R., Bloch, R. *et al.*: "A three-dimensional finite element analysis of the proximal third of the femur", *Proceedings of 24th Annual Meeting of Orthopaedic Research Society*, p. 16. ORS. Chicago, (1978) (αναφορά των Huiskes and Chao, 1983).
118. Hart, R. T., Davy, D. T. and Heiple, K. G.: "A computational method for stress analysis of adaptive elastic materials with a view towards applications in strain-induced bone remodeling", *J. Biomech. Eng.-T ASME*, 106, 342-350, (1984a).
119. Hart, R. T., Davy, D. T. and Heiple, K. G.: "Mathematical modeling and numerical solutions for functionally dependent bone remodeling", *Calcified Tissue Int.*, 36, S104, (1984b).
120. Hart, R. T., Davy, D. T. and Heiple, K. G.: "A computational method for stress analysis of adaptive elastic materials with a view toward applications in strain-induced bone remodeling", *J. Biomech. Eng.-T ASME*, 108, 83, (1986).
121. Hart, R. T. and Davy, D. T.: "Theories of bone modeling and remodeling", In: Cowin, S. C. (Ed.), *Bone Mechanics. CRC Press, Boca Raton, FL*, 253-277, (1989).
122. Hayes, W.C. and Bouxsein, M. L.: "Biomechanics of cortical and trabecular bone: implications for assessment of fracture risk" in *Basic Orthopaedic Biomechanics*, Mow, V. C. and Hayes, W. C., Eds., Lippincott-Raven, Philadelphia, Chapter 3, (1997) (αναφορά του An, Y. H., (2000).



123. Hayes, W. C. and Snyder, B.: "Toward a quantitative formulation of Wolff's law in trabecular bone in mechanical properties of bone", *Am. Soc. Mech. Eng.*, 45, 43-68, (1981).
124. Hazelwood, S. J., Martin, R. B., Rashid, M. M., and Rodrigo, J.J.: "A mechanistic model for internal remodeling exhibits different dynamic responses in disuse and overload", *J. Biomech.*, 34, 299-308, (2001).
125. Hegedus, D. H. and Cowin, S. C.: "Bone remodeling II: Small strain adaptive elasticity", *J. Elasticity*, 6, 337-352, (1976).
126. Hillsley, M. V. and Frangos, J. A.: "Review: Bone tissue engineering: The role of interstitial fluid flow", *Biotechnol. Bioeng.*, 43, 573-581, (1994).
127. Hirsch, C. and Silva, O. D.: "The effect of orientation on some mechanical properties of femoral cortical specimens", *Acta Orthop. Scand.*, 38, 45, (1967).
128. Hollister, S. J., Brennan, J. M., Kikuchi, N.: "A homogenization sampling procedure for calculating trabecular bone effective stiffness and tissue level stress", *J. Biomech.*, 27(4), 433-444, (1994).
129. Hung, C. T., Pollack, S. R., Reilly, T. M. *et al.*: "Real-time calcium response of cultured bone cells to fluid flow", *Clin. Orthop. Relat. R.*, 313, 256-269, (1995).
130. Huiskes, R.: "Some fundamental aspects of human joint replacement", *Acta Orthop. Scand.*, Suppl., 185, 109-199, (1980).
131. Huiskes, R.: "The various stress patterns of press-fit, ingrown and cemented femoral stems", *Clin. Orthop.*, 261, 27-38, (1990).
132. Huiskes, R. and Chao, E. Y. S.: "A survey of finite element analysis in orthopedic biomechanics: the first decade", *J. Biomech.*, 16(6), 385-409, (1983).
133. Huiskes, R. *et al.*: "A detailed comparison of experimental and theoretical stress analyses of a human femur", *Mechanical Properties of Bone* (edited by Cowin, S.) AMD-Vol. 45, pp. 211-234, American Society of Mechanical Engineers, New York, (1981) (αναφορά των Huiskes and Chao, 1983).
134. Huiskes, R., Weinans, H., Grootenboer, H. J. *et al.*: "Adaptive bone-remodeling theory applied to prosthetic-design analysis", *J. Biomech.*, 20, 1135-1150, (1987).
135. Huiskes, R., Weinans, H., Van Rietbergen, B.: "The relationship between stress shielding and bone resorption around total hip stems



- and the effects of flexible materials", *Clin. Orthop.*, 272, 124-134, (1992).
136. Jacobs, C. R., Simo, J. C., Beaupré, G. S. and Carter, D. R.: "Adaptive bone remodeling incorporating simultaneous density and anisotropy considerations", *J. Biomech.*, 30, 603-613, (1997).
 137. Jaworski, F. G., Liskova-kiar, M. and Uthoft, H. K.: "Effect of long term immobilisation on the pattern of bone loss in older dogs", *J. Bone Joint Surg.*, 62-B, 104-110, (1980).
 138. Johnson, M. W., Chakkalakal, D. A., Harper, R. A. *et al.*: "Fluid flow in bone *in vitro*", *J. Biomech.*, 15(11), 881-885, (1982).
 139. Johnson, M. W., Williams, W. S. and Gross, D.: "Ceramic models for piezoelectricity in dry bone", *J. Biomech.*, 13, 565-573, (1980).
 140. Joshi, M. G., Advani, S. G., Miller, F. *et al.*: "Analysis of a femoral hip prosthesis designed to reduce stress shielding", *J. Biomech.*, 33, 1655-1662, (2000).
 141. Jowsey, J.: "Studies of Haversian systems in man and some animals", *J. Anat.*, 100, 857-864, (1966).
 142. Katz, J. L. and Ukraincik K.: "On the anisotropic elastic properties of hydroxyapatite", *J. Biomech.*, 4, 221, (1971).
 143. Katz, J. L.: "Anisotropy of Young's modulus of bone", *Nature*, 283, 106, (1980).
 144. Katz, J. L.: "Mechanics of hard tissue", in *The Biomedical Engineering Handbook*, First Edition, Volume II, Bronzino, J. D., Ed., CRC Press/IEEE Press, (1995).
 145. Keaveny, T. M., Pinilla, T. P., Crawford, R. P. *et al.*: "Systematic and random errors in compression testing of trabecular bone", *J. Orthop. Res.*, 15, 101, (1997).
 146. Kelly, P. J. and Bronk, J. T.: "Venous pressure and bone formation", *Microvasc. Res.*, 39, 364-375, (1990).
 147. Keyak, J. H. *et al.*: "Validation of an automated method of three-dimensional finite element modelling of bone", *J. Biomed. Eng.*, 15, 505-509, (1993).
 148. Kimmel, D. B.: "A computer simulation of the mature skeleton", *Bone*, 6, 369-372, (1985).
 149. Kincaid, D. and Cheney, W.: *Numerical analysis. Mathematics of scientific computing*, Wadsworth, Inc., Belmont, California, (1991).



150. Klein-Nulend, J, Veldhuijzen, J. P., deLong, M. and Burger, E. H.: "Increased bone formation and decreased bone resorption in fetal mouse calvaria as a result of intermittent compressive force *in vitro*", *Bone Miner.*, 2, 441-448, (1987).
151. Klein-Nulend, J., van der Plas, A., Semeins, C. M. *et al.*: "Sensitivity of osteocytes to biomechanical stress *in vitro*", *Faseb J.*, 9, 441-445, (1995).
152. Knets, I. and Malmeisters, A.: "Deformability and strength of human compact bone tissue", *Mechanics of Biological Solids: Proc. Euromech Colloquium 68*, 133, Brankov, G., Ed., Bulgarian Academy of Sciences, Sofia (1977).
153. Korostoff, E.: "A linear piezoelectric model for characterizing stress generated potentials in bone", *J. Biomech.*, 12, 335-347, (1979).
154. Ku, J. L., Goldstein, S. A., Choi, K. W. *et al.*: "The mechanical properties of single trabeculae", *Proc. 33rd Annu. Meet. Orthop. Res. Soc.*, 48, (1987) (αναφορά του Cowin, S. C., 1989).
155. Kufahl, R. H. and Saha, S.: "A theoretical model for stress-generated fluid flow in the canaliculi-lacunae network in bone tissue", *J. Biomech.*, 23(2), 171-180, (1990).
156. Kuhn, J. L., Goldstein, S. A., Ciarelli, M. J. *et al.*: "The limitations of canine trabecular bone as a model for human: a biomechanical study", *J. Biomech.*, 22, 95, (1989).
157. Kummer, B. K. F.: "Biomechanics of bone: Mechanical properties, functional structure, functional adaptation", *Biomechanics: Its foundations and objectives*, Fung, Y. C., Perrone, N., and Anliker, M., Eds., Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, N. J., 237, (1972) (αναφορά του Cowin, S. C., 1989).
158. Laird, G. W. and Kingsbury, H. B.: "Complex viscoelastic moduli of bovine bone", *J. Biomech.*, 6, 59, (1973).
159. Lakes, R. S. and Katz, J. L.: "Interrelationships among the viscoelastic function for anisotropic solids: Application to calcified tissues and related systems", *J. Biomech.*, 7, 259, (1974).
160. Lang, S. B.: "Elastic coefficients of animal bone", *Science*, 165, 287, (1969).
161. Lanyon, L. E.: "Functional strain as a determinant for bone remodeling", *Calcified Tissue Int.*, 36, S56, (1984).



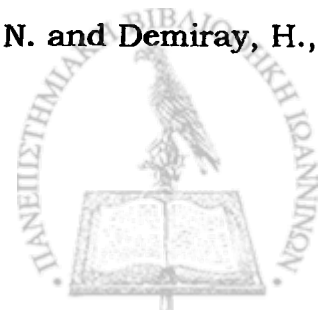
162. Lanyon, L. E. and Rubin, C. T.: "Static vs. dynamic loads as an influence on bone remodeling", *J. Biomech.*, 17, 897, (1984).
163. Lemaitre, J.: "A continuous damage mechanics model for ductile fracture", *J. Eng. Mater. - T ASME*, 107, 83-89, (1985).
164. Levenston, M. E. and Carter, D. R.: "An energy dissipation-based model for damage stimulated bone adaptation", *J. Biomech.*, 31, 579-586, (1998).
165. Lewis, J. L., Askew, M. J., Wixson, R. L. *et al.*: "The influence of prosthetic stem stiffness and of a calcar collar on stresses in the proximal end of the femur with a cemented femoral component", *J. Bone Joint Surg.*, 66-A (2), 280-286, (1984).
166. Linde, F., Hvid, I. and Pongsoipetch, B.: "Energy absorptive properties of human trabecular bone specimens during axial compression", *J. Orthop. Res.*, 7, 432, (1989).
167. Lugassy, A. A.: *Mechanical and viscoelastic properties of bone and dentin in compression*, Thesis, Metallurgy and Materials Science, University of Pennsylvania, (1968).
168. Mackerle, J.: "A finite element bibliography for biomechanics (1987-1997)", *Appl. Mech. Rev.*, 51 (10), 587-634, (1998).
169. Mak, A. F. T., Huang, D. T., Zhang, J. D. and Tong, P.: "Deformation-induced hierarchical flows and drag forces in bone canaliculi and matrix microporosity", *J. Biomech.*, 30(1), 11-18, (1997).
170. Marino, A. A. and Becker, R. O.: *Nature*, 228, 473, (1970) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
171. Marino, A. A., Becker, R. O. and Soderholm, S. C.: "Origin of the piezoelectric effect in bone", *Calc. Tiss., Res.*, 8, 177, (1971).
172. Martens, M., Van Audekerche, R., Delpont, P. *et al.*: "The mechanical characteristics of cancellous bone at the upper femoral region", *J. Biomech.*, 16, 971, (1983).
173. Martin, R. B.: "Porosity and specific surface of bone", *Crit. Rev. Biomed. Eng.*, 10(3), 179-222, (1984).
174. Martin, R. B.: "The usefulness of mathematical models for bone remodeling", *Yearb. Phys. Anthropol.*, 28, 227-236, (1985).
175. Martin, R. B.: "Determinants of the mechanical properties of bones", *J. Biomech.*, 24, 79, (1991).



176. Martin, R. B. and Boardman, D. L.: "The effects of collagen fiber orientation, porosity, density, and mineralization on bovine cortical bone bending properties", *J. Biomech.*, 26, 1047, (1993).
177. Martin, R. B. and Burr, D. B.: "A hypothetical mechanism for the stimulation of osteonal remodelling by fatigue damage", *J. Biomech.*, 15(3), 137-139, (1982).
178. Martin, R. B. and Burr, D. B.: *Structure function and adaptation of compact bone*, Raven Press, New York, (1989).
179. Martini, F. H.: *Fundamentals of Anatomy & Physiology, Interactive Edition*, Prentice Hall Inc., Fourth Edition, Upper Saddle River, New Jersey 07458, (1998).
180. Mase, G. E.: *Theory and problems of Continuum Mechanics*, Schaum's outline series, McGraw-Hill, Inc., (1970).
181. Μασσαλάς, Χ.: *Μαθήματα Μαθηματικής Θεωρίας της Ελαστικότητας*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, (1987).
182. Μασσαλάς, Χ.: *Ειδικές συναρτήσεις της Κλασσικής ανάλυσης*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, (1985).
183. Mather, B. S.: "The symmetry of the mechanical properties of the human femur", *J. Surg. Res.*, 7, 222, (1967).
184. McElhaney, J. H., *J. Appl. Physiol.*, 21, 1231, (1966) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
185. McElhaney, J. H. and Byras, E., *ASME 65 WA/HUF-9*, (1965) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
186. McLeod, K. J. and Rubin, C. T.: "Strain oscillations in functionally loaded bone: a species independent determinant of skeletal morphology", *J. Exp. Biol.* (1993).
187. McNamara, B. P., Cristofolini, L., Toni, A., *et al.*: "Relationship between bone-prosthesis bonding and load transfer in total hip reconstruction", *J. Biomech.*, 30, 621-630, (1997).
188. Miller, M. P.: *Getting started with MSC/NASTRAN, User's guide*, Second Edition, The Macneal-Schwendler Corporation, (1996).
189. Misra, J. C., Bera, S. and Samanta, S.: "Influence of non-isotropy of osseous tissues and cross-sectional non-uniformity of a long bone on the internal remodelling dynamics of osseous tissues", *Math. Comput. Model.*, 12(6), 611-624, (1989).
190. Misra, J. C., Bera, G. C., Misra, S. C. *et al.*: "Remodelling of diaphyseal surfaces of a long bone induced due to force fitting of a



- medullary pin: an analytical study", *Comput. Math Appl.*, 24, 3-15, (1992).
191. Misra, J. C. and Murty, V. V. T. M.: "A mechanical model for studying the physiological process of internal bone remodelling", *Bull. Tech. Univ. Istanbul*, 36, 67-80, (1983).
 192. Misra, J. C. and Samanta, S.: "Effect of material damping on bone remodelling", *J. Biomech.* 20, 241-249, (1987).
 193. Moreland, M. S.: "Morphological effects of torsion applied to growing bone", *J. Bone Joint Surg.*, 62-B, 230, (1980).
 194. Mosekilde, L. and Mosekilde, L.: "Sex differences in age-related changes in vertebral body size, density and biomechanical competence in normal individual", *Bone*, 11, 67-73, (1990).
 195. MSC/Nastran, Version 70.5 for Unix, McNeal Schwendler Corporation, Los Angeles, USA, (1999).
 196. MSC/Patran, Version 8.5 for Unix, McNeal Schwendler Corporation, Los Angeles, USA, (2000).
 197. Mullender, M. G. and Huiskes, R.: "Proposal for the regulatory mechanism of Wolff's law", *J. Orthopaed. Res.*, 13, 503-512, (1995).
 198. Nillson, B. E. and Westlin, N. E.: "Bone density in athletes", *Clin. Orthop. Rel. R.*, 77, 179-182, (1971).
 199. Odgaard, A., Hvid, I. and Linde, F.: "Compressive axial strain distributions in cancellous bone specimens", *J. Biomech.*, 22, 829, (1989).
 200. Olofsson, H.: "Three dimensional FEM calculation of elastic stress field in human femur", Dissertation, Institute of Technology, University of Uppsala, Sweden, (1976) (αναφορά των Huiskes and Chao, 1983).
 201. Otter, M. W., Palmieri, V. R. and Cochran, G. V. B.: "Transcortical streaming potentials are generated by circulatory pressure gradients in living canine tibia", *J. Orthopaed. Res.*, 8, 119-126, (1990).
 202. Otter, M. W., Palmieri, V. R., Wu, D. D. *et al.*: "A comparative analysis of streaming potentials *in vivo* and *in vitro*", *J. Orthopaed. Res.*, 10, 710-719, (1992).
 203. Panjabi, M. M., White, A. A. and Southwick, W. O., *J. Bone Joint Surg.*, 55-A, 322, (1973) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).



204. Parfitt, A.M.: "Age-related structural changes in trabecular and cortical bone: cellular mechanisms and biomechanical consequences", *Calcified Tissue Int.*, 36, L5123-5128, (1984).
205. Parfitt, A. M.: "Trabecular bone architecture in the pathogenesis and prevention of fracture", *Am. J. Med.*, 82(SIB), 68-72, (1987).
206. Pattin, C. A., Carter, D. R. and Caler, W. E.: "Cortical bone modulus reduction in tensile and compressive fatigue", *Trans. ORS*, 15, 50, (1990).
207. Paul, J. P.: "Forces transmitted by joints in the human body", *Proc. Inst. Mech. Engng*, 181, 8-15, (1967).
208. Pauwels, F.: "Bedeutung und kausale erklärung der spongiosaarchitektur in neuer auffassung", *Arzt. Wschr.*, 3, 379, (1948a) (αναφορά του Cowin, S. C., 1989).
209. Pauwels, F.: "Die bedeutung der bauprinzipien des Stutz- und bewegungsapparates für die beanspruchung der rohrenknochen. I. Beitrag zur funktionellen anatomie und kausalen morphologie des stutzapparates", *Z. Anat.*, 144, 129, (1948b) (αναφορά του Cowin, S. C., 1989).
210. Pauwels, F.: "Die bedeutung der muskelkraäfte für die regelung der beanspruchung des rohrenknochens während der bewegung der glieder. Dritter beitrag zur funktionellen anatomie und kausalen morphologie des stutzapparates", *Z. Anat.*, 115, 327, (1950) (αναφορά του Cowin, S. C., 1989).
211. Pauwels, F.: "Über die verteilung der spongiosadichte im coxalen femurende und ihre bedeutung für die lehre vom funktionellen bau des knochens. Siebenter beitrag zur funktionellen anatomie und kausalen morphologie des stutzapparates", *Morph. Jahrb.*, 95, 35, (1954) (αναφορά του Cowin, S. C., 1989).
212. Pauwels, F.: "Directives nouvelles pour le traitement chirurgical de la coxarthrose", *Rev. Chirurgie Orthop.*, 45, 681, (1965) (αναφορά του Cowin, S. C., 1989).
213. Perry, J.: *Gait analysis. Normal and Pathologic Function*, Ch. 6, pp. 111-129, Slack Inc., (1992).
214. Petrov, N., Pollack, S. and Blagoeva, R.: "A discrete model for streaming potentials in a single osteon", *J. Biomech.*, 22(6/7), 517-521, (1989).

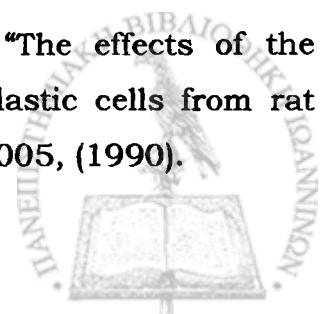


215. Pidaparti, R. M. V. and Turner, C. H.: "Cancellous bone architecture: Advantages of nonorthogonal trabecular alignment under multidirectional joint loading", *J. Biomech.*, 30, 979-983, (1997).
216. Piekarski, K. and Munro, M.: "Transport mechanism operating between blood supply and osteocytes in long bones", *Nature*, 269(5632), 80-82, (1977).
217. Pienkowski, D. and Pollack, S. R.: "Effect of fluid exchange on stress generated potentials in bone", *Transactions of the 26th Annual Meeting of the Orthopaedic Research Society*, 5, 294, (1980).
218. Pollack, S. R., Petrov, N. Salzstein, R. *et al.*: "An anatomical model for streaming potentials in osteons", *J. Biomech.*, 17(8), 627-636, (1984).
219. Pope, M. H. and Outwater, J. O., *J. Biomech.*, 7, 61, (1974) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
220. Portigliatti-Barbos, M., Bianco, P. and Ascenzi, A.: "Collagen orientation in compact bone II. Distribution of lamellae in the whole of the human femoral shaft with reference to its mechanical properties", *Metab. Bone Dis. Relat.*, 5, 309-315, (1984).
221. Prendergast, P. J. and Taylor, D.: "Stress analysis of the proximo-medial femur after total hip replacement", *J. Biomed. Eng.*, 12, 379-382, (1990).
222. Prendergast, P. J. and Taylor, D.: "Prediction of bone adaptation using damage accumulation", *J. Biomech.* 27, 1067-1076, (1994).
223. Ramtani, S. and Zidi, M.: "Damaged-bone remodeling theory: Thermodynamical approach", *Mech. Res. Commun.*, 26(6), 701-708, (1999).
224. Rauber, A. A., *Elasticitat und festigkeit der knochen*, Engelmann, Leipzig (1867) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
225. Reeve, J.: "A stochastic analysis of iliac trabecular bone dynamics", *Clin. Orthop. Relat. R.*, 213, 264-278, (1984).
226. Reich, K. M., Gay, C. V. and Frangos, J. A.: "Fluid shear stress as a mediator of osteoblast cyclic adenosine monophosphate production", *J. Cell Physiol.*, 143, 100-104, (1990).
227. Reilly, D. T. and Burstein, A. H.: "Review article: the mechanical properties of cortical bone", *J. Bone Joint Surg.*, 56A(5), 1001-1022, (1974).
228. Reilly, D. T. and Burstein, A. H.: "The elastic and ultimate properties of compact bone tissue", *J. Biomech.*, 8, 395-405, (1975).

229. Rho, J. Y., Kuhn-Spearing, L. and Zioupos, P.: "Mechanical properties and the hierarchical structure of bone", *Med. Eng. Phys.*, 20, 92, (1998).
230. Πήγας, Κ.: *Μηχανική*, Έκδοση Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Ιωάννινα, (1995).
231. Rodan, G. A., Thomas, M. and Alan, H.: "A quantitative method for the application of compressive forces to bone in tissue culture", *Calc. Tiss. Res.*, 18, 125-131, (1975).
232. Rohlmann, A., Bergmann, G. and Koelbel, R.: "The relevance of stress computation in the femur with and without endoprostheses", *Finite Elements in Biomechanics* (Edited by Gallagher, R. H., Simon, B. R., Johnson, P. C. and Gross, J. F.), pp. 361-377, JohnWiley, New York, (1982) (αναφορά των Huiskes and Chao, 1983).
233. Rohlmann, A., Mössner, U. and Bergmann, G.: "Finite-element-analysis and experimental investigation in a femur with hip endoprosthesis", *J. Biomech.*, 16(9), 727-742, (1983).
234. Rohrle, H., Scholten, R., Sollbach, W., *et al.*: "Der Kraftfluss bei Huftendoprothesen", *Arch. Orthop. Unfallchir*, 89, 49-60, (1977) (αναφορά των Huiskes and Chao, 1983).
235. Roux, W.: *Gesammelte Abhandlungen über Entwicklungsmechanik der Organismen*, Wilhelm Engelmann, Leipzig, (1895) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
236. Rubin, C. T. and Lanyon, L. E.: "Regulation of bone formation by applied dynamic loads", *J. Bone Joint Surg.*, 66A, 397-402, (1984).
237. Rubin, C. T. and Lanyon, L. E.: "Regulation of bone mass by mechanical strain magnitude", *Calcified Tissue Int.*, 37, 411-417, (1985).
238. Rubin, C. T.: "Skeletal strain and the functional significance of bone architecture", *Calcified Tissue Int.*, 36, S11, (1984).
239. Rubin, C. T. and Lanyon, L.E.: "Osteoregulatory nature of mechanical stimuli: Function as a determinant for adaptive remodeling in bone", *J. Orthopaed. Res.*, 5(2), 300-310, (1987).
240. Rybicki, E. F., Simonen, F. A. and Weis, E. B.: "On the mathematical analysis of stress in the human femur", *J. Biomech.*, 5, 203-215, (1972).
241. Salzstein, R. A., Pollack, S. R. Mak, A. F. T. and Petrov, N.: "Electromechanical potentials in cortical bone - I. A continuum approach", *J. Biomech.*, 20(3), 261-270, (1987a).



242. Salzstein, R. A. and Pollack, S. R.: "Electromechanical potentials in cortical bone - II. Experimental analysis", *J. Biomech.*, 20(3), 271-280, (1987b).
243. Scholten, R.: "Ueber die Berechnung der mechanischen Beanspruchung in Knochenstrukturen mittels fuer den Flugzeugbau entwickelter Rechenverfahren", *Med.Orthop. Technik*, 6, 130-138, (1975) (αναφορά των Huiskes and Chao, 1983).
244. Sedlin, E. D.: "A rheological model for cortical bone" in *A study of the physical properties of human femoral samples*, *Acta Orthop. Scand.*, Supplementum 83, (1965).
245. Sedlin, E. D. and Hirsch, C.: "Factors affecting the determination of the physical properties of femoral cortical bone", *Acta Orthop. Scand.*, 37, 29-48, (1966).
246. Seeley, R. R., Stephens, T. D. and Tate, P.: *Anatomy and Physiology*, Mosby-Year-Book, Inc., St. Louis, Missouri, (1992).
247. Seliger, W. G.: "Tissue fluid movement in compact bone", *Anat. Rec.*, 166, 247-256, (1967).
248. Shaffler, M. B. and Burr, D. B.: "Stiffness of compact bone: effects of porosity and density", *J. Biomech.*, 21, 13, (1988).
249. Shamos, M. H. and Lavine, L. S.: *Clin. Orthop. Relat. R.*, 35, 177, (1964) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
250. Shamos, M. H. and Lavine, L. S.: *Clin. Orthop. Relat. R.*, 43, 254, (1965) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
251. Shamos, M. H., Lavine, L. S. and Shamos, M. I.: *Nature*, 197, 81, (1963) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
252. Simmons, K. J. and Kunin, A. S.: "Skeletal research - An experimental approach", Academic, New York, (1979).
253. Smith, R. and Keiper, D.: "Dynamic measurement of viscoelastic properties of bone", *Am. J. Med. Electron*, 4, 156, (1965).
254. Srinivasan, S. and Gross, T. S.: "Canalicular fluid flow induced by bending of a long bone", *Med. Eng. Phys.*, 22, 127-133, (2000).
255. Starkebaum, W. S., Pollack, S. R. and Korostoff, E.: "Microelectrode studies of stress generated potentials in four point bending of bone", *J. Biomed. Mater. Res.*, 13, 729-751, (1979).
256. Takuwa, Y., Masaki, T. and Yamashita, K.: "The effects of the endothelin family peptides on cultured osteoblastic cells from rat calvariae", *Biochem. Bioph. Res. Co.*, 170, 998-1005, (1990).



257. Tarr, R., Lewis, J., Ghassemi, F., *et al.*: "Anatomic three-dimensional finite element model of the proximal femur with total hip prosthesis", *International Conference Proceedings, Finite Elements in Biomechanics*, (Edited by Simon, B. R.), Vol. 2, pp. 511-525, The University of Arizona, Tuscon, (1980) (αναφορά των Huiskes and Chao, 1983).
258. Tavassoli, M. and Yoffey, J. M.: "Bone marrow structure and function", Liss, New York, (1983).
259. Terzaghi, K.: *Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage* Leipzig F. Deuticke, (1925) (αναφορά του Biot, 1941).
260. Thomsen, J. S., Mosekilde, Li., Boyce, W. and Mosekilde, E.: "Stochastic simulation of vertebral trabecular bone remodeling", *Bone*, 15, 655-666, (1994).
261. Townsend, P. R., Raux, P., Rose, R. M. *et al.*: "The distribution and anisotropy of the stiffness of cancellous bone in the human patella", *J. Biomech.*, 8, 363, (1975).
262. Turner, C. H.: "On the relationship between the elastic properties of cancellous bone and its structure", Ph.D. dissertation, Tulane University, New Orleans, (1987) (αναφορά του Cowin, S. C., 1989).
263. Turner, C. H., Chandran, A. and Pidaparti, R. M.: "The anisotropy of osteonal bone and its ultrastructural implications", *Bone*, 17, 85, (1995).
264. Turner, C. H., Forwood, M. R. and Otter, M. W.: "Mechanotransduction in bone: Do bone cells act as sensors of fluid flow?", *Faseb J.*, 8, 875-878, (1994).
265. Uthoft, H. K. and Jaworski, Z. F. G.: "Bone loss in response to long term immobilisation", *J. Bone Joint Surg.*, 60-B, 420-429, (1978).
266. Vahey, J. W., Lewis, J. L. and Vanderby, R. Jr.: "Elastic moduli, yield stress and ultimate stress of cancellous bone in the canine proximal femur", *J. Biomech.*, 20, 29, (1987).
267. Valliappan, S., Svensson, N. L. and Wood, R. D.: "Three dimensional stress analysis of the human femur", *Comput. Biol. Med.*, 7, 253-264, (1977).
268. Van Buskirk, W. C. and Ashman, R. B.: "The elastic moduli of bone". In SC Cowin (ed), *Mechanical properties of bone AMD*, 45, pp131-143, New York, American Society of Mechanical Engineers, (1981).
269. vonMeyer, G. H.: "Die Architektur der Spongiosa", *Arch. Anat. Physiol. Wissenhaftliche Med.* (Reichert und Dubois-Reymonds

- Archiv), 34, 615-628, (1867) (αναφορά στο *Bone Mechanics*, Ed: Cowin, S.C., CRC Press, Boca Raton, Florida, (1989)).
270. Walker, P. S., Schneeweist, D., Murphy, S. *et al.*: "Strains and micromotions of press-fit femoral stem prostheses", *J. Biomech.*, 20, 693-702, (1987).
271. Wang, X. and Dumas, G. A.: "Simulation of bone adaptive remodeling using a stochastic process as loading history", *J. Biomech.*, 35, 375-380, (2002).
272. Wang, L., Fritton, S. P., Cowin, S. C. and Weinbaum, S.: "Fluid pressure relaxation depends upon osteonal microstructure: Modeling an oscillatory bending experiment", *J. Biomech.*, 32, 663-672, (1999).
273. Weinans, H., Huiskes, R. and Grootenboer, H. J.: "The behavior of adaptive bone-remodeling simulation models", *J. Biomech.*, 25, 1425-1441, (1992a).
274. Weinans, H., Huiskes, R. and Grootenboer, H. J.: "Effects of material properties of femoral hip components on bone remodeling", *J. Orthopaed. Res.*, 10, 845-853, (1992b).
275. Weinans, H., Huiskes, R. and Grootenboer, H. J.: "Effects of fit and bonding characteristics of femoral stems on adaptive bone remodeling", *J. Biomech. Eng.-T ASME*, 116, 393-400, (1994).
276. Weinans, H., Sumner, D. R., Igloria, R. *et al.*: "Sensitivity of periprosthetic stress-shielding to load and the bone density-modulus relationship in subject-specific finite element models", *J. Biomech.*, 33, 809-817, (2000).
277. Weinbaum S., Cowin, S. C. and Zeng, Yu: "A model for the excitation of osteocytes by mechanical loading-induced bone fluid shear stresses", *J. Biomech.*, 27(3), 339-360, (1994).
278. Wertheim, M. G., *Ann. Chim. Phys.* 21, 385, (1847) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
279. Whitehouse, W. J.: "The quantitative morphology of anisotropic trabecular bone", *J. Microsc.-Oxford*, 101, 153-168, (1974).
280. Whittle, M. W.: *Gait analysis. An introduction*, Ch. 2, pp. 53-107, Butterworth-Heinemann, Second Edition, (1997).
281. Williams, J. L., Iannotti, J. P., Ham, A. *et al.*: "Effects of fluid shear stress on bone cells", *Biorheology*, 31, 163-170, (1994).
282. Wolff, J.: *Das Gesetz der Transformation der Knochen*, A. Hirschwald, Berlin, (1892) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).

283. Wolfram, S.: *The Mathematica Book*, Fourth Edition, Wolfram Media/Cambridge University Press, (1999).
284. Woo, S. L. Y., Kuri, S. C., Dillon, W. A. *et al.*: "The effect of prolonged physical training on the properties of long bone - a study of Wolff's law", *J. Bone Joint Surg.*, 63-A, 780-787, (1981).
285. Wray, J. B. and Lynch, C. J.: "The vascular response to fracture of the tibia in the rat", *J. Bone Joint Surg.*, 41, 1143-1148, (1959).
286. Xinghua, Z., He, G., Dong, Z. *et al.*: "A study of the effect of nonlinearities in the equation of bone remodeling", *J. Biomech.*, 35, 951-960, (2002).
287. Yamada, H., *Strength of materials* (Edited by F. G. Evans). Krieger, Huntington, New York (1973) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
288. Yasuda, I., Noguchi, K. and Sata, T.: *Proc. J. Bone and Joint Surg.*, 37-A, 12929, (1955) (αναφορά των Guzelsu, N. and Demiray, H., 1979).
289. Yoon, S. H. and Katz, J. L.: "Ultrasonic wave propagation in human cortical bone: I. Theoretical considerations of hexagonal symmetry", *J. Biomech.*, 9, 407, (1976a).
290. Yoon, S. H. and Katz, J. L.: "Ultrasonic wave propagation in human cortical bone: II. Measurements of elastic properties and microhardness", *J. Biomech.*, 9, 459, (1976b).
291. Zeng, Yu, Cowin, S. C. and Weinbaum, S.: "A fiber matrix model for fluid flow and streaming potentials in the canaliculi of an osteon", *Ann. Biomed. Eng.*, 22, 280-292, (1994).
292. Zienkiewicz, O. C. and Morgan, K.: *Finite elements and approximation*, Ch. 2&3, pp. 32-160, John Wiley & Sons, Inc., (1983).
293. Zioupos, P., Smith, C. W. and An, Y. H.: "Factors affecting mechanical properties of bone" In: *Mechanical testing of bone and the bone-implant interface*, An, Y. H. and Draughn, R. A., Eds., CRC Press, Boca Raton, FL, (2000).

