

ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ Κ. ΓΕΓΙΟΥ
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

**ΕΠΙ ΤΗΣ ACCELERATED OVERRELAXATION (AOR)
ΜΕΘΟΔΟΥ ΔΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΙΝ
ΜΕΓΑΛΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ
1979



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000304476

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

"Η Έγκρισις διδακτορικής διατριβής υπό της φυσικομαθηματικής
Σχολής του Πανεπιστημίου 'Ιωαννίνων δέν υποδηλοῦ ἀποδοχήν τῶν γνω-
μῶν τοῦ συγγραφέως".

(N. 5343/1932, ἄρθρ. 202)



Πρός τόν καθηγητήν τῆς Ἑδρας τῆς Ἀριθμητικῆς Ἀναλύσεως τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων κ. Ἀποστ. Χατζηδημόν ἐκφράζω ἰδιαιτέρως εἰλικρινεῖς εὐχαριστίας διὰ τήν ὑπόδειξιν τοῦ θέματος καί τήν συνεχῆ καί πολύτιμον ἐπιστημονικήν καθοδήγησιν καί ἐπίβλεψιν καθ' ὅλην τήν διάρκειαν τῆς ἐκπονήσεως τῆς παρούσης διατριβῆς.

Εὐχαριστῶ ἐπίσης θερμά τόν ἐπιμελητήν τῆς αὐτῆς Ἑδρας Δρα Γ. Ἀβδελά διὰ τήν πολύτιμον συνεργασίαν μετ' αὐτοῦ καί τās χρησίμους ὑποδείξεις καί παρατηρήσεις του. Προσέτι, εὐχαριστῶ τήν παρασκευάστριά τοῦ Ἐργαστηρίου Ἀριθμητικῆς Ἀναλύσεως κ. Λουκρητίαν Παπαγεωργίου - Γέγιου διὰ τήν ταχεῖαν καί ἐπιμελημένην δακτυλογράφησιν τῶν χειρογράφων, καθώς καί ὅλους ὄσους συνέβαλον εἰς τήν καλυτέραν ἐμφάνισιν τοῦ παρόντος.

Τέλος, εὐχαριστῶ τό Πανεπιστήμιον Ἰωαννίνων διὰ τήν πάσης φύσεως βοήθειαν τήν ὅποια μοῦ προσέφερε. -



Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1.	Όρισμοί και θεωρήματα έκ τής θεωρίας πινάκων ...	1
2.	ΓΡΑΜΜΙΚΑΙ STATIONARY ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ	12
2.1.	Είσαγωγή - Όρισμοί	12
2.2.	Γενικά θεωρήματα συγκλίσεως	14
2.3.	Βασικά επαναληπτικά μέθοδοι και θεωρήματα συγκλίσεως αούτων	17
3.	Η ACCELERATED OVERRELAXATION (AOR) ΜΕΘΟΔΟΣ	23
3.1.	Γενικά	23
3.2.	Θεωρήματα συγκλίσεως τής AOR μεθόδου	25
4.	Η ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΗΣ EXTRAPOLATION	35
4.1.	Γενικά	35
4.2.	Θεωρία συγκλίσεως	35
5.	EXTRAPOLATION ΚΑΙ AOR ΜΕΘΟΔΟΣ - ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ	49
5.1.	Γενικά	49
5.2.	Θεωρήματα συγκλίσεως	50
	i) Irreducible και άσθενώς διαγωνίως ύπερτερου- ντες πίνακες	51



ii)	Positive definite πίνακες	52
iii) - iv)	L - και M - πίνακες	53
v)	Stieltjes πίνακες	56
5.3.	Αριθμητικά παραδείγματα	57
6.	Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ACCELERATED OVERRELAXATION (SAOR) ΜΕΘΟΔΟΣ	60
6.1.	Είσαγωγή - Γενικά	60
6.2.	Θεωρία συγκλίσεως της SAOR μεθόδου	62
6.3.	Αριθμητικό παράδειγμα και συμπεράσματα	70
7.	ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	73
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	75

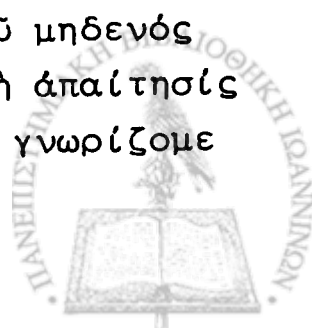


Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Τό πρόβλημα τῆς ἐπιλύσεως ἑνός μεγάλου συστήματος γραμμικῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων συναντᾶται συχνά σέ ἐπιστημονικά προβλήματα διαφόρων κλάδων. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται συστήματα τῶν ὁποίων ὁ πίναξ τῶν συντελεστῶν εἶναι πολύ "ἀραιός" (sparse), δηλαδή, τά περισσότερα ἀπό τά στοιχεία του εἶναι ἴσα μέ μηδέν. Τέτοια συστήματα ἐμφανίζονται συχνά κατά τήν ἀριθμητική λύσι τῶν ἑλλειπτικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων μέ μερικές παραγώγους μέ μεθόδους πεπερασμένων διαφορῶν ἢ πεπερασμένου στοιχείου. Προβλήματα αὐτοῦ τοῦ εἴδους προκύπτουν κατά τήν μελέτη περιοχῶν τῶν συγχρόνων ἐπισημῶν ὅπως: διάχυσις νετρονίων, ροή τῶν ρευστῶν, ἐλαστικότης, ροή θερμότητος στερεᾶς καταστάσεως, ἐκτίμησις - πρόγνωσις τοῦ καιροῦ κ.λ.π.

Ἡ λύσις ἑνός μεγάλου συστήματος μέ ἀραιό πίνακα ἐπιτυγχάνεται συνήθως μέ ἐπαναληπτικές μεθόδους ἀντί τῶν ἀμέσων μεθόδων, ὅπως εἶναι αἱ διάφοροι μέθοδοι ἀπαλοιφῆς Gauss, Jordan, κ.λ.π.

Γενικῶς αἱ ἐπαναληπτικάί μέθοδοι, ἐφαρμοζόμεναι καταλλήλως, προτιμῶνται τῶν ἀμέσων, στίς περιπτώσεις πού ἔχομε μεγάλους ἀραιούς πίνακες. Αὐτό δέ, διότι ἡ ἐπίλυσις τῶν ἀντιστοιχῶν προβλημάτων σ' ἔναν ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή ἀπαιτεῖ τήν ἀπομνημόνευσι μόνον τῶν διαφορῶν τοῦ μηδενός στοιχείων τοῦ πίνακος τῶν συντελεστῶν καί ἔτσι ἡ ἀπαίτησις των σέ μνήμη καθίσταται ἐλάχιστη. Ἐπίσης, ὅταν γνωρίζομε



έκ τῶν προτέρων ὅτι ἡ σύγκλισις εἶναι ταχεῖα γιά τό δεδομένο πρόβλημα. Τονίζεται ἐπί πλέον, ὅτι αἱ ἐπαναληπτικά μέθοδοι εἶναι εὐκολώτεροι εἰς τόν προγραμματισμόν σ' ἕναν ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή.

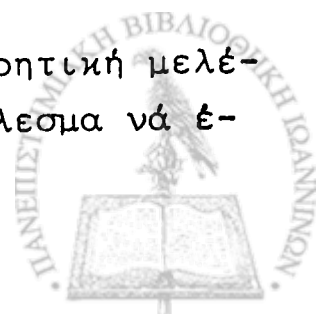
Σκοπός τῆς διατριβῆς αὐτῆς εἶναι νά παρουσιάσει, ἀνάμεσα στήν τόσο ἐκτεταμένη θεωρία τῶν ἐπαναληπτικῶν μεθόδων, μία συστηματική θεώρησι καί μελέτη τῶν δυνατοτήτων πρὸς ὠρισμένες κατευθύνσεις μιᾶς γενικώτερης ἐπαναληπτικῆς μεθόδου (γραμμικῆς stationary πρώτης τάξεως) ἡ ὁποία εἰσήχθη τελευταίως ἀπό τόν Hadjidakis [10], τῆς καλουμένης "Accelerated Overrelaxation" (AOR).

Τά κεφάλαια 1 καί 2 εἶναι προκαταρκτικά. Στό κεφάλαιο 1 ἀναφέρονται αἱ βασικά καί ἀπαραίτητοι γνώσεις ἐκ τῆς θεωρίας πινάκων καί τῆς γραμμικῆς Ἀλγέβρας. Οἱ ὀρισμοί καί τά θεωρήματα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ θά χρησιμοποιηθοῦν στά ἐπόμενα κεφάλαια.

Στό δεύτερο κεφάλαιο γίνεται ἡ παρουσίασις τῶν γραμμικῶν stationary ἐπαναληπτικῶν μεθόδων πρώτης τάξεως καί διατυπώνονται γενικά θεωρήματα συγκλίσεως αὐτῶν. Ἀκολουθῶς ἀναφέρονται αἱ βασικά μέθοδοι ἐξ αὐτῶν καί ἀντίστοιχα θεωρήματα συγκλίσεως των.

Ἡ βασική προσφορά τῆς παρούσης διατριβῆς εὐρίσκεται στά ἐπόμενα τέσσερα κεφάλαια. Συγκεκριμένως, στό κεφάλαιο 3 γίνεται ἡ ἀνάλυσις τῆς νέας μεθόδου (AOR), ὅπως παρουσιάζεται στήν [10], καί μελετῶνται ιδιότητες συγκλίσεως αὐτῆς. Τά θεωρήματα καί αἱ ἀποδείξεις, πού περιέχονται στό κεφάλαιο αὐτό εἶναι συμβολή τοῦ συγγραφέως. Ἀπ' αὐτά δέ τό θεώρημα 3-2.1. καί τό λήμμα 3-2.3. ὑπάρχουν καί στίς κοινές ἐργασίες τῶν G. Avdelas, A. Hadjidakis and A. Yeyios [1] καί A. Hadjidakis and A. Yeyios [12], ἀντιστοίχως.

Στό κεφάλαιο 4 γίνεται μία πρωτότυπος θεωρητική μελέτη τῆς γνωστῆς τεχνικῆς extrapolation, μέ ἀποτέλεσμα νά ἐ-



ξαχθοῦν βασικά συμπεράσματα, τὰ ὅποια ἐφαρμόζονται ἐπὶ τῆς AOR μεθόδου στό ἐπόμενο κεφάλαιο. Ἐκ τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ προκύπτουν σάν πορίσματα τὰ θεωρήματα τῆς κοινῆς ἐργασίας τῶν A. Hadjidimos and A. Yeyios [1], πού ἀναφέρονται στήν extrapolation μέθοδο.

Στό κεφάλαιο 5 γίνεται γενίκευσις τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν ἐργασιῶν [1] καί [1] καί παρουσιάσις νέων θεωρημάτων συγκλίσεως γιά τίς κατηγορίες πινάκων, πού θεωροῦνται, σέ συνδυασμό μέ τό κεφάλαιο 4. Ἐπί πλέον, ἀπό τὰ ἀριθμητικά παραδείγματα, πού παρουσιάζονται, δεικνύεται ἡ ἀνωτερότης τῆς AOR μεθόδου σέ σύγκρισι μέ τήν SOR.

Στό ἕκτο κεφάλαιο γίνεται ἡ μελέτη μιᾶς τροποποιήσεως τῆς AOR μεθόδου τῆς καλουμένης συμμετρικῆς AOR μεθόδου (SAOR). Τά συμπεράσματα πού περιέχονται σ'αὐτό εἶναι νέα καί γενικώτερα ἐκείνων τῆς [2]. Ἐπί πλέον, διά παραδείγματος φαίνεται ἡ ὑπεροχή τῆς SAOR ἐναντι τῆς SSOR.

Τέλος, στό ἕβδομο καί τελευταῖο κεφάλαιο γίνεται μία γενική ἀνασκόπησις τῶν συμπερασμάτων καί ἀποτελεσμάτων τῶν προηγουμένων κεφαλαίων καί δίδονται ὑποδείξεις γιά νέες κατευθύνσεις καί ὁδηγίες γιά τήν περαιτέρω ἐρευνα μέ σκοπό τήν παραπέρα ἀνάπτυξι τῆς σχετικῆς μέ τήν AOR καί τās μεθόδους πού συνδέονται μ'αὐτήν θεωρίας.



ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

<u>Σύμβολον</u>	<u>Έννοια</u>
A^T	Ο ανάστροφος πίναξ του A
A^*	Ο συζυγής (μιγαδικός)
A^H	Ο συζυγής ανάστροφος
A^{-1}	Ο αντίστροφος
$\text{trace } A = \text{tr}(A)$	Τό ίχνος του A
$\det(A)$	Η όρίζουσα του A
I	Ο μοναδιαῖος πίναξ (Ταυτοτικός)
$\rho(A)$	Η φασματική ακτίς του A
$(v, w) = v^H w$	Τό έσωτερικό γινόμενο τῶν διανυσμάτων v, w
$\ v\ = \ v\ _2 = (v, v)^{\frac{1}{2}}$	Η Εὐκλείδεις πορῃ του διανύσματος v
$\ A\ = \ A\ _2$	Η φασματική πορῃ του πίνακος A
$\ A\ _L = \ LAL^{-1}\ $	Η L-πορῃ του A
$R(G)$	(Άσυμμετωπική) Ταχύτης συγκλίσεως
$\text{diag}(A)$	Ο διαγώνιος πίναξ μέ τά ἴδια διαγώνια στοιχεία ὡς ὁ A .
$B = L_{0,1}$	Ο έπαναληπτικός πίναξ τῆς μεθόδου Jacobi (J)
$B_{\omega} = L_{\omega, \omega}$	Ο έπαναληπτικός πίναξ τῆς μεθόδου JOR
$L_{\rho} = L_{\rho, \rho}$	Ο έπαναληπτικός πίναξ τῆς μεθόδου SOR
$L_{\rho, \omega}$	Ο έπαναληπτικός πίναξ τῆς μεθόδου AOR
$J_{\rho, \omega}$	Ο έπαναληπτικός πίναξ τῆς μεθόδου SAOR
$J_{\rho, \rho}$	Ο έπαναληπτικός πίναξ τῆς μεθόδου SSOR



Κεφάλαιον 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στό παρόν κεφάλαιο αναφέρονται χωρίς απόδειξι βασικά συμπεράσματα τῆς γραμμικῆς ἀλγέβρας καί θεωρίας πινάκων τά ὁποῖα θά χρησιμοποιηθοῦν στό ἐπόμενα κεφάλαια. Αἱ ἀποδείξεις αὐτῶν καθώς ἐπίσης καί μία πλήρης μελέτη τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν πινάκων παρουσιάζονται σέ ἀρκετά κλασσικά βιβλία ὅπως π.χ. στό [3],[4],[5],[6],[15].

1.1. Ὅρισμοί καί θεωρήματα ἐκ τῆς θεωρίας πινάκων

Ἐστω $A = (a_{ij})$ ἕνας $n \times n$ μιγαδικός ἐν γένει πίναξ. Ὁ A δηλαδή, εἶναι ἕνας τετραγωνικός πίναξ τάξεως n καί θά συμβολίζεται $A_{n \times n}$ ἢ ἀπλῶς A .

Θά καλοῦμε διάνυσμα-στήλη ἢ ἀπλῶς διάνυσμα ἕναν $n \times 1$ πίνακα.

Μέ $\text{diag}(A)$ ὀρίζομε τόν πίνακα πού προκύπτει ἀπό τόν A θέτοντας ὅλα τά ἐκτός τῆς διαγωνίου στοιχεῖα αὐτοῦ ἴσα μέ μηδέν.

Ἐπίσης θά συμβολίζεται μέ I ὁ μοναδιαῖος ἢ ταυτοτικός πίναξ, μέ A^T ὁ ἀνάστροφος τοῦ A , μέ A^* ὁ συζυγής (μιγαδικός) τοῦ A καί μέ A^H ὁ συζυγής ἀνάστροφος τοῦ A .

Ὅρισμός 1.1.



Ο $A_{n \times n}$ καλεϊται κάτω τριγωνικός (αύστηρως κάτω τριγωνικός) πίναξ εάν $\alpha_{ij} = 0$ για $i < j$ ($i \leq j$).

Εάν $\alpha_{ij} = 0$ για $i > j$ ($i \geq j$), τότε ο A καλεϊται άνω τριγωνικός (αύστηρως άνω τριγωνικός) πίναξ.

Θεώρημα 1.1.

Αν A, B είναι $n \times n$ πίνακες τότε ισχύουν τά εξής:

- i) $(A^H)^H = (A^T)^T = (A^*)^* = A$, $A^H = (A^*)^T = (A^T)^*$
- ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$
- iii) $(AB)^* = A^* B^*$, $(AB)^H = B^H A^H$

Ορισμός 1.2.

Τό ίχνος (trace) ενός πίνακος $A_{n \times n} = (\alpha_{ij})$ ορίζεται ως

$$\text{trace } A = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} .$$

Η ορίζουσα του $A_{n \times n}$ θά συμβολίζεται $\det(A)$. Αν $\det(A) \neq 0$ τότε ο A λέγεται nonsingular ή regular (μή ιδιάζων, ομαλός) και ο αντίστροφός του πίναξ θά είναι ο A^{-1} .

Θεώρημα 1.2.

Αν A, B είναι $n \times n$ πίνακες, τότε

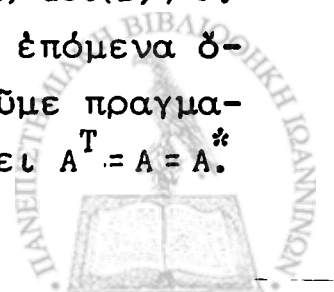
- i) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- ii) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$
- iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $A^{-\nu} = (A^{-1})^{\nu}$,

ν φυσικός αριθμός

- iv) $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$

Στίς ιδιότητες iii) και iv) υποτίθεται ότι $\det(A) \det(B) \neq 0$.

Ο $A_{n \times n}$ καλεϊται συμμετρικός εάν $A^T = A$. Στά επόμενα όταν αναφερόμεθα σέ συμμετρικούς πίνακες θά έννοοϋμε πραγματικούς συμμετρικούς για τούς όπολους δηλαδή ισχύει $A^T = A = A^*$.



• Αν $A = A^H$ τότε ο A καλεϊται Hermitian. Οι πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες είναι και Hermitian.

Όρισμός 1.3.

• Ο πίναξ $P_{n \times n}$ καλεϊται permutation πίναξ αν σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη έχει ακριβώς ένα διάφορο του μηδενός στοιχείο, τό όποιο ίσοϋται μέ τήν μονάδα.

• Ένας permutation πίναξ είναι όρθογώνιος πίναξ (δηλαδή $P^{-1} = P^T$).

• Αν v και w είναι δύο όποιαδήποτε διανύσματα, τότε μέ $(v, w) = v^H w$ όρίζομε τό έσωτερικό γινόμενο αύτϊν και μέ $\|v\|_2 = \|v\| = (v, v)^{\frac{1}{2}} = (v^H v)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^n |v_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ τήν Εύκλειδιο norm ή μήκος του διανύσματος $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$.

Όρισμός 1.4.

• Ο αριθμός λ (πραγματικός ή μιγαδικός) είναι μία ιδιοτιμή του πίνακος A εάν για κάποιο διάνυσμα $v \neq 0$ ισχύει

$$Av = \lambda v.$$

Τό διάνυσμα v καλεϊται τότε ιδιοδιάνυσμα του A , πού άντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Θεώρημα 1.3.

• Ο αριθμός λ είναι μία ιδιοτιμή του A εάν και μόνον εάν $\det(A - \lambda I) = 0$.

Θεώρημα 1.4.

• Αν $\lambda_i, i = 1(1)n$ είναι αι ιδιοτιμαί του $A_{n \times n}$, τότε $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ και $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Όρισμός 1.5.

• Η φασματική άκτις του A όρίζεται ως



$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \det(A - \lambda I) = 0\}$, δηλαδή είναι τό maximum τῶν μέτρων τῶν ιδιοτιμῶν τοῦ A .

Ὁρισμός 1.6.

Δύο $n \times n$ πίνακες A, B εἶναι ὁμοιοὶ ἐάν $B = G^{-1}AG$ γιὰ κά-
ποιο nonsingular πίνακα G .

θεώρημα 1.5.

Ἐάν A καὶ B εἶναι ὁμοιοὶ, τότε ἔχουν τὶς ἴδιες ἰδι-
οτιμές καὶ μάλιστα ἐκάστην μέ τὴν αὐτὴν πολλαπλότητα. Ἐπο-
μένως

$$\det(A) = \det(B) \text{ καὶ } \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B).$$

θεώρημα 1.6.

Ἐάν A, B εἶναι $n \times n$ πίνακες, τότε οἱ AB καὶ BA ἔχουν
τὶς ἴδιες ιδιοτιμές καὶ μάλιστα ἐκάστην μέ τὴν αὐτὴν πολλα-
πλότητα.

Ὁρισμός 1.7.

Ὁ πίναξ $A_{n \times n} = (a_{ij})$ καλεῖται μὴ ἀρνητικὸς $A \geq 0$ ἐάν
 $a_{ij} \geq 0$ γιὰ κάθε $i, j = 1(1)n$.

Ἐάν $a_{ij} > 0$ γιὰ κάθε $i, j = 1(1)n$ τότε ὁ A καλεῖται θε-
τικὸς $A > 0$.

Ἐάν $A \geq 0, B \geq 0$ καὶ $A - B \geq 0$, τότε λέγομε ὅτι $A \geq B$.

Ἐάν $A_{n \times n}$ τότε μέ $|A|$ θά συμβολίζεται ὁ πίναξ τοῦ ὁ-
ποίου τὰ στοιχεῖα εἶναι τὰ μέτρα τῶν ἀντιστοιχῶν στοιχείων
τοῦ A .

θεώρημα 1.7.

Ἐάν $A \geq |B|$, τότε $\rho(A) \geq \rho(B)$.

θεώρημα 1.8.



• Εάν $A \geq 0$, τότε ο A έχει μία ιδιοτιμή ίση με $\rho(A)$ και υπάρχει ένα μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην $\rho(A)$.

Θεώρημα 1.9.

• Εάν A είναι ένας Hermitian πίναξ και εάν λ_M και λ_m είναι η μέγιστη και η ελάχιστη αντιστοίχως ιδιοτιμή του, τότε

$$\lambda_M = \max_{v \neq 0} \frac{v^H A v}{v^H v} = \frac{\bar{v}^H A \bar{v}}{\bar{v}^H \bar{v}} \quad \text{και} \quad \lambda_m = \min_{v \neq 0} \frac{v^H A v}{v^H v} = \frac{v^H A v}{v^H v}$$

όπου \bar{v} και v είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις λ_M και λ_m , αντιστοίχως.

Οι Hermitian πίνακες έχουν πραγματικές ιδιοτιμές.

Θεώρημα 1.10.

• Ο πίναξ A είναι ένας Hermitian πίναξ εάν και μόνον εάν $v^H A v$ είναι πραγματικός αριθμός για όλα τα διανύσματα v .

• Ο ακόλουθος ορισμός είναι ισοδύναμος με εκείνους των [28], [30].

Ορισμός 1.8.

• Ο πίναξ A καλεϊται positive definite εάν

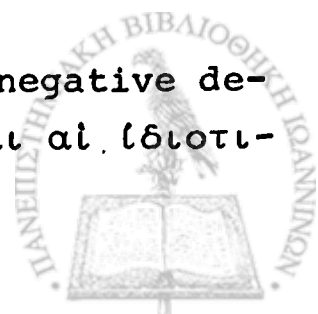
$$v^H A v > 0 \quad \text{για όλα τα } v \neq 0.$$

• Εάν $v^H A v \geq 0$ για όλα τα v , τότε ο A καλεϊται nonnegative definite.

• Από τό θεώρημα 1.10 προκύπτει ότι ένας positive definite πίναξ A είναι Hermitian.

Θεώρημα 1.11.

• Ένας πίναξ A είναι positive definite (nonnegative definite) εάν και μόνον εάν είναι Hermitian και όλαί ιδιοτι-



μαί του είναι θετικά (μή αρνητικά).

Αν A είναι ένας positive definite πίναξ, ή $\det(A)$ και όλα τα διαγώνια στοιχεία του A είναι θετικά.

Θεώρημα 1.12.

Γιά κάθε πίνακα L ο πίναξ LL^H είναι Hermitian και nonnegative definite. Εάν ο L είναι nonsingular, τότε ο LL^H είναι positive definite.

Θεώρημα 1.13.

Εάν A είναι ένας positive definite (nonnegative definite) πίναξ, τότε υπάρχει ένας μοναδικός positive definite (nonnegative definite) πίναξ B τέτοιος ώστε $B^2 = A$. Επί πλέον, εάν ο A είναι πραγματικός, τότε ο B είναι πραγματικός. Ο πίναξ B καλεϊται τετραγωνική ρίζα του A και συμβολίζεται με $A^{\frac{1}{2}}$.

Πόρισμα 1.14.

Εάν A είναι ένας positive definite πίναξ, τότε για κάθε nonsingular πίνακα L ο πίναξ $M = LAL^H$ είναι positive definite.

Γιά ένα πίνακα $A_{n \times n}$ ή φασματική norm αυτού ορίζεται ως

$$\|A\| = \|A\|_2 = (\rho(A^H A))^{\frac{1}{2}}$$

και αν L είναι ένας οποιοσδήποτε nonsingular πίναξ ορίζουμε την "φασματική, L -norm" του A ως ακόλουθως

$$\|A\|_L = \|LAL^{-1}\|_2 = \|LAL^{-1}\|.$$

Θεώρημα 1.15.

Αν A είναι ένας $n \times n$ πίναξ, τότε $A^k \rightarrow 0$ όταν $k \rightarrow \infty$



έάν και μόνον έάν $\rho(A) < 1$.

Θεώρημα 1.16.

Η συνθήκη $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k v = 0$ ισχύει για κάθε διάνυσμα v έάν και μόνον έάν $\rho(A) < 1$.

Όρισμός 1.9.

Ένας πίναξ $A_{n \times n} = (a_{ij})$ καλεΐται irreducible έάν $n=1$ ή έάν $n > 1$ και δοθέντων δύο όποιωνδήποτε μή κενών και ξένων μεταξύ των υποσυνόλων S και T του συνόλου W τών πρώτων n φυσικών αριθμών, τέτοιων ώστε $S \cup T = W$, υπάρχει $i \in S$ και $j \in T$ τέτοια ώστε $a_{ij} \neq 0$.

Ο παραπάνω όρισμός συμφωνεί με εκείνον στό [9] πού δίνεται από τον Geiringer. Ο όρισμός από τον Varga [25] άπαιτεί όταν $n=1$ να είναι $a_{11} \neq 0$.

Οι ακόλουθοι δύο όρισμοί είναι ισοδύναμοι με τον 1.9.

Όρισμός 1.10.

Ο A καλεΐται irreducible έάν και μόνον έάν δέν υπάρχει ένας permutation πίναξ P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ έχει τήν μορφή

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} F & 0 \\ G & H \end{bmatrix} \quad \text{όπου } F \text{ και } H \text{ είναι τετραγωνικοί}$$

πίνακες και 0 μηδενικός πίναξ.

Στήν αντίθετο περίπτωσηι ο A καλεΐται reducible.

Όρισμός 1.11.

Ο πίναξ $A_{n \times n}$ καλεΐται irreducible έάν και μόνον έάν $n=1$ ή, δοθέντων δύο όποιωνδήποτε διακεκριμένων άκεραίων i και j με $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, τότε $a_{ij} \neq 0$ ή υπάρχουν φυσικοί $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq n$ τέτοιοι ώστε $a_{i_1 i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_s j} \neq 0$.



Όρισμός 1.12.

Ένας πίναξ $A_{n \times n} = (a_{ij})$ καλεΐται *αύστηρως διαγωνίως υπερτερών* (Strictly diagonally dominant or with strong diagonal dominance) εάν

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \text{για όλα τα } i=1(1)n.$$

Ο A καλεΐται *άσθενως διαγωνίως υπερτερών* (with weak diagonal dominance or weakly diagonally dominant) εάν

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i=1(1)n \quad \text{καί για ένα τουλάχιστον } i$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

Ο A καλεΐται *διαγωνίως υπερτερών* (diagonally dominant) εάν

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i=1(1)n.$$

Ο A καλεΐται *irreducibly διαγωνίως υπερτερών* (irreducibly diagonally dominant, κατά Varga [25]) αν ο A είναι irreducible και άσθενως διαγωνίως υπερτερών.

Θεώρημα 1.17.

Εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένας irreducible και άσθενως διαγωνίως υπερτερών πίναξ, τότε $\det(A) \neq 0$ και $a_{ii} \neq 0$.

Πόρισμα 1.18.

Εάν ο A είναι αύστηρως διαγωνίως υπερτερών, τότε

$$\det(A) \neq 0, \quad a_{ii} \neq 0.$$



Θεώρημα 1.19.

Εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένας Hermitian πίναξ με $a_{ii} \geq 0$ και άσθενως διαγωνίως υπερτερών, τότε ο A είναι nonnegative definite. Εάν ο A είναι επίσης irreducible ή nonsingular, τότε ο A είναι positive definite.

Πόρισμα 1.19.

Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας Hermitian αύστηρως διαγωνίως υπερτερών πίναξ με $a_{ii} \geq 0$, τότε ο A είναι positive definite.

Ο παρακάτω ορισμός για την κατηγορία των πινάκων που έχουν την "ιδιότητα A" εισηχθη από τον Young [30].

Ορισμός 1.13.

Ενας πίναξ $A_{n \times n} = (a_{ij})$ έχει την "ιδιότητα A" εάν υπάρχουν δύο ξένα μεταξύ των υποσύνολα S_1 και S_2 του συνόλου W των πρώτων n φυσικων αριθμων τέτοια ώστε $S_1 \cup S_2 = W$ και τέτοια ώστε εάν $i \neq j$ και εάν είτε $a_{ij} \neq 0$, είτε $a_{ji} \neq 0$, τότε $i \in S_1$ και $j \in S_2$ ή άλλως $i \in S_2$ και $j \in S_1$.

Ορισμός 1.14.

Ο A έχει την "ιδιότητα A" εάν και μόνον εάν ο A είναι διαγώνιος ή υπάρχει permutation πίναξ P τέτοιος ώστε

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{bmatrix}, \text{ όπου } D_1 \text{ και } D_2 \text{ είναι διαγώνιοι πίνακες.}$$

Ορισμός 1.15.

Ενας πραγματικός πίναξ $A_{n \times n} = (a_{ij})$ καλεϊται L-πίναξ εάν $a_{ii} > 0, i = 1(1)n$ και $a_{ij} \leq 0, i \neq j, i, j = 1(1)n$.

Ορισμός 1.16.

Ενας πραγματικός πίναξ $A_{n \times n} = (a_{ij})$ καλεϊται M-πίναξ



έάν $a_{ij} \leq 0, i \neq j, i, j = 1(1)n, \det(A) \neq 0$ καί $A^{-1} \geq 0$.

Ένας ίσοδύναμος όρισμός μέ τόν 1.16. είναι ό παρακάτω.

Όρισμός 1.17.

Ένας πίναξ $A_{n \times n}$ καλεΐται M-πίναξ (nonsingular M-πίναξ) έάν μπορεί νά έκφρασθῆ μέ τήν μορφή $A = sI - C$, όπου $C \geq 0$ καί $s > \rho(C)$.

Όρισμός 1.18.

Ένας πραγματικός πίναξ $A_{n \times n} = (a_{ij})$ καλεΐται Stieltjes πίναξ έάν ό A είναι positive definite καί $a_{ij} \leq 0, i \neq j, i, j = 1(1)n$.

Ένας Stieltjes πίναξ είναι ένας positive definite L-πίναξ, ένῶ κάθε M-πίναξ είναι καί L-πίναξ.

Θεώρημα 1.20.

Έάν A είναι ένας L-πίναξ, τότε ό A είναι M-πίναξ έάν καί μόνον έάν $\rho(B) < 1$, όπου $B = D^{-1}C$, $D = \text{diag}(A)$, $A = D - C$. Κάθε Stieltjes πίναξ είναι καί M-πίναξ.

Θεώρημα 1.21.

Ένας irreducible καί άσθενῶς διαγωνίως ύπερτερῶν L-πίναξ είναι ένας M-πίναξ.

Θεώρημα 1.22.

Ένας irreducible συμμετρικός καί άσθενῶς διαγωνίως ύπερτερῶν L-πίναξ είναι ένας Stieltjes πίναξ.

Όρισμός 1.19.

Ένας πίναξ A καλεΐται stable έάν τά πραγματικά μέρη όλων τών ιδιοτιμῶν του είναι άρνητικά.

Όρισμός 1.20.



Ένας πίναξ A καλεΐται negative - stable (N-stable) εάν τά πραγματικά μέρη όλων τῶν ιδιοτιμῶν του εἶναι θετικά.

Θεώρημα 1.23.

Ἐάν $A = (a_{ij})$ εἶναι ἕνας $n \times n$ αὐστηρῶς ἢ irreducibly διαγωνίως ὑπερτερῶν πίναξ μέ $a_{ii} > 0$, τότε ὁ A εἶναι N-stable.

Θεώρημα 1.24.

Ἐάν $A = (a_{ij})$ εἶναι ἕνας $n \times n$ διαγωνίως ὑπερτερῶν πίναξ μέ $a_{ii} \geq 0$, τότε αἱ ιδιοτιμαί λ_i τοῦ A ικανοποιοῦν τήν σχέσι $\text{Re} \lambda_i \geq 0$, $i = 1(1)n$. Ἐάν ἐπί πλέον ὁ A εἶναι Hermitian, τότε ὁ A εἶναι nonnegative definite.

Θεώρημα 1.25.

Ἐστω $A = (a_{ij})$ ἕνας πραγματικός πίναξ μέ $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$, $i, j = 1(1)n$. Τότε ὁ A εἶναι ἕνας M-πίναξ εάν καί μόνον εάν ὁ A εἶναι N-stable.

Ὁρισμός 1.21.

Ὁ πίναξ $A_{n \times n}$ καλεΐται consistently ordered εάν γιά κάποιον t ὑπάρχουν, ξένα μεταξύ των, ὑποσύνολα S_1, S_2, \dots, S_t τοῦ συνόλου $W = \{1, 2, \dots, n\}$ τέτοια ὥστε $\bigcup_{k=1}^t S_k = W$ καί τέτοια ὥστε εάν i καί j εἶναι ἀκέραιοι τέτοιοι ὥστε $a_{ij} \neq 0$ ἢ $a_{ji} \neq 0$, τότε $j \in S_{k+1}$ εάν $j > i$ καί $j \in S_{k-1}$ εάν $j < i$, ὅπου S_k εἶναι τό ὑποσύνολο πού περιέχει τόν ἀκέραιο i .

Θεώρημα 1.26.

Ἐάν ὁ πίναξ A εἶναι consistently ordered τότε ἔχει τήν "ιδιότητα A".



Κεφάλαιον 2

ΓΡΑΜΜΙΚΑΙ STATIONARY ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

2.1. Είσαγωγή - Όρισμοί

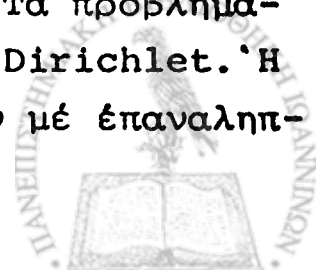
Έστω ότι έχουμε προς επίλυσιν τό γραμμικό σύστημα ϵ -
ξισώσεων

$$Ax = b, \quad (2.1)$$

όπου A είναι ένας $n \times n$ γνωστός πραγματικός πίναξ, b ένα γνωστό πραγματικό διάνυσμα και x τό διάνυσμα - λύσις πού πρόκειται νά προδιορισθῆ. Ὁ πίναξ A θεωρεῖται άραιός και μεγάλης τάξεως, πράγμα τό όποῖο συμβαίνει σε συστήματα πού προέρχονται συνήθως από τήν λύσι με μεθόδους πεπερασμένων διαφορών ἢ πεπερασμένου στοιχείου, έλλειπτικῶν και παραβολικῶν προβλημάτων συνοριακῶν τιμῶν. Σάν παράδειγμα αναφέρομε εκείνα τά προβλήματα πού περιέχουν τήν έλλειπτική διαφορική ϵ -ξίσωσι δευτέρας τάξεως με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C \frac{\partial u}{\partial y} \right) + Fu = G,$$

όπου A, C, F και G είναι συναρτήσεις τῶν x και y τέτοιες ω στε $A > 0$, $C > 0$ και $F \leq 0$ στην περιοχή πού θεωρούμε. Τά προβλήματα αυτά είναι γνωστά ω ς γενικευμένα προβλήματα Dirichlet. Ἡ ϵ -ιδέα τῆς επίλυσεως μεγάλων γραμμικῶν συστημάτων με ϵ -επαναληπ-



τικές μεθόδους είναι βεβαίως όχι νέα, χρονολογούμενη τουλάχιστον από της εποχής του Gauss (1823).

Αργότερα πολλοί έρευνηταί ήσυχολήθησαν συστηματικώς, θεωρητικώς και πρακτικώς με τας επαναληπτικές μεθόδους επίλυσεως των γραμμικών συστημάτων και έτσι έχει αναπτυχθή μία εκτεταμένη θεωρία επ'αυτών. Απ'αυτούς αναφέρονται βασικά οι Richardson [19], Temple [24], Southwell [22], Stein and Rosenberg [23], Geiringer [9], Reich [20], Frankel [8], Forsythe [7], Ostrowski [16] [17], Kahan [14], Varga [26], Wachspress [28] και Young [29] [30].

Για την επίλυσι του συστήματος (2.1), μεταξύ όλων των επαναληπτικών μεθόδων, αι γραμμικαί stationary πρώτης τάξεως παίζουν σημαντικό ρόλο. Μία γενική γραμμική stationary επαναληπτική μέθοδος ορίζεται από τίς σχέσεις (ΐδε π. χ. [7])

$$x^{(0)} = \phi_0(A, b) \quad (2.2)$$

και
$$x^{(m+1)} = \phi(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(m)}, A, b), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου ϕ_0, ϕ είναι γραμμικαί συναρτήσεις ανεξάρτητες του m (έξ αυτού δικαιολογεΐται ο όρος stationary) και η ϕ_0 αθάϊρετος συνάρτησις των A, b , δηλαδή, $x^{(0)}$ είναι ένα αθάϊρετο αρχικό διάνυσμα.

Αν η $\phi = \phi(x^{(m)}, A, b)$, τότε η μέθοδος (2.2) είναι πρώτης τάξεως. Άρα μία γραμμική stationary επαναληπτική μέθοδος πρώτης τάξεως έχει την μορφή

$$x^{(m+1)} = Gx^{(m)} + k, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

για κάποιον πίνακα G και κάποιο διάνυσμα k , πραγματικά, όπου $x^{(0)}$ είναι αθάϊρετος αρχική προσέγγισις της λύσεως x .

Με την μέθοδο (2.3) θά θεωροΐμε συσχετισμένο τό σύστημα

$$(I-G)x = k, \quad (2.4)$$



από τὸ ὁποῖο θὰ λέγομε ὅτι προέρχεται ἡ (2.3).

Στὸ σύστημα (2.1) ὁ πίναξ A , ἐκτός καί ἂν ἐκ τῶν ἰδιοτήτων του, πού θὰ ἔχει συνήθως, προκύπτει, θὰ ὑποτίθεται nonsingular καί ἐπομένως τὸ σύστημα (2.1) ἔχει μία καί μόνο λύσι.

Ὅρισμός 1.1.

Ἡ μέθοδος (2.3) καλεῖται completely consistent (πλήρως συμβιβαστή) μέ τὸ σύστημα (2.1) ἐάν τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ (2.4) ταυτίζεται μέ τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ (2.1).

Θεώρημα 1.1.

Ἰκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἡ μέθοδος (2.3) εἶναι completely consistent μέ τὸ (2.1) εἶναι νά ἰσχύουν τὰ ἑξῆς:

$$k = (I-G)A^{-1}b \quad \text{καί} \quad I-G \quad \text{εἶναι nonsingular πίναξ.}$$

2.2. Γενικά θεωρήματα συγκλίσεως

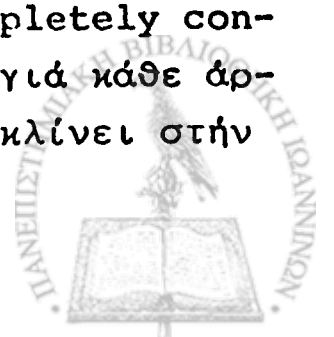
Τὸ παρακάτω θεώρημα σέ ἐλαφρῶς διαφορετικὴ μορφή ἀπεδείχθη ἀπὸ τὸν Geiringer [9].

Θεώρημα 2.1.

Ἡ ἐπαναληπτικὴ μέθοδος (2.3) συγκλίνει, δηλαδή, γιὰ κάθε ἀρχικὸ διάνυσμα $x^{(0)}$ ἢ ἀκολουθία διανυσμάτων $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$, πού ὀρίζεται ἀπὸ τὴν (2.3) συγκλίνει σέ ἓνα ὄριο ἀνεξάρτητο τοῦ $x^{(0)}$, ἐάν καί μόνον ἐάν $\rho(G) < 1$.

Θεώρημα 2.2.

Ἄν ἡ ἐπαναληπτικὴ μέθοδος (2.3) εἶναι completely consistent μέ τὸ σύστημα (2.1) καί συγκλίνει, τότε γιὰ κάθε ἀρχικὸ διάνυσμα $x^{(0)}$ ἢ ἀκολουθία $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$ συγκλίνει στὴν μοναδικὴ λύσι τοῦ (2.1).



Τό ακόλουθο θεώρημα βασίζεται σέ ένα αποτέλεσμα του Wachspress [28].

θεώρημα 2.3.

Εάν A είναι ένας positive definite πίναξ και εάν ή επαναληπτική μέθοδος (2.3) είναι completely consistent μέ τό (2.1), τότε αύτή συγκλίνει εάν ό πίναξ

$$M = Q + Q^T - A \quad (2.5)$$

είναι positive definite, όπου $Q = A(I-G)^{-1}$. Επί πλέον, έχουμε

$$\|G\|_A^{1/2} < 1. \quad (2.6)$$

Αντιστρόφως, εάν ή (2.6) ισχύει, τότε ό M είναι positive definite.

Μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για τήν σύγκλιση τής μεθόδου (2.3) δίδεται από τό παρακάτω θεώρημα τό όποιο αναφέρεται από τόν Householder [13].

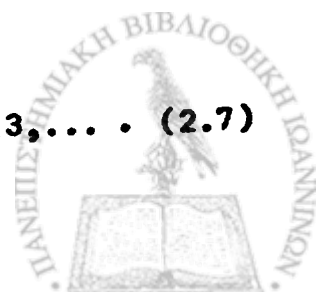
θεώρημα 2.4.

Εστω G ένας πραγματικός πίναξ. Τότε $\rho(G) < 1$ εάν και μόνον εάν ό $I-G$ είναι nonsingular πίναξ και ύπάρχει ένας πραγματικός positive definite πίναξ Q , τέτοιος ώστε ό πίναξ $K = HQ + QH^T$ είναι positive definite, όπου

$$H = (I-G)^{-1}(I+G).$$

Γιά τήν μέθοδο (2.3) όρίζομε τό διάνυσμα σφάλμα ως $\epsilon^{(m)} = x^{(m)} - x$. Εύκόλως αποδεικνύεται ότι $\epsilon^{(m)} = G^m \epsilon^{(0)}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, όπου $\epsilon^{(0)} = x^{(0)} - x$ είναι τό αρχικό διάνυσμα σφάλμα. Επομένως λαμβάνομε

$$\|\epsilon^{(m)}\| = \|G^m \epsilon^{(0)}\| \leq \|G^m\| \|\epsilon^{(0)}\|, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.7)$$



Μέ σκοπό τόν προσδιορισμό τῆς ταχύτητος μέ τήν ὁποία $\| \varepsilon^{(m)} \| \rightarrow 0$ ὅταν $m \rightarrow \infty$ γιά μία συγκλίνουσα μέθοδο (2.3) ἀπό τήν (2.7) ἔχομε

$$\frac{\| \varepsilon^{(m)} \|}{\| \varepsilon^{(0)} \|} \leq \| G^m \| = \sup_{\varepsilon^{(0)} \neq 0} \frac{\| \varepsilon^{(m)} \|}{\| \varepsilon^{(0)} \|} .$$

Ἔτσι ἡ $\| G^m \|$ δίνει ἕνα μέτρο τοῦ ποσοῦ μέ τό ὁποῖο ἡ ποσῆ τοῦ σφάλματος ἐλαττοῦται μετά ἀπό m ἐπαναλήψεις.

Συνήθως αἱ ἐπαναλήψεις σταματοῦν ὅταν ἡ $\| \varepsilon^{(m)} \|$ ἐλαττωθῆ κατά ἕνα κλάσμα ρ τῆς $\| \varepsilon^{(0)} \|$ ($\rho < 1$). Μία τέτοια ἐλάττωσις μπορεῖ νά ἐπιτευχθῆ ἐκλέγοντας τό m ἔτσι ὥστε

$$\| \varepsilon^{(m)} \| \leq \rho \| \varepsilon^{(0)} \| . \quad (2.8)$$

Ἡ (2.8) ἰσχύει ἂν ἐκλεγῆ τό m ἀρκετά μεγάλο ὥστε

$$\| G^m \| \leq \rho . \quad (2.9)$$

Γιά ὅλα τά m , ἐπαρκῶς μεγάλα, γιά τά ὁποῖα $\| G^m \| < 1$ ἡ (2.9) εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν

$$m > \frac{-\log \rho}{-m^{-1} \log \| G^m \|} . \quad (2.10)$$

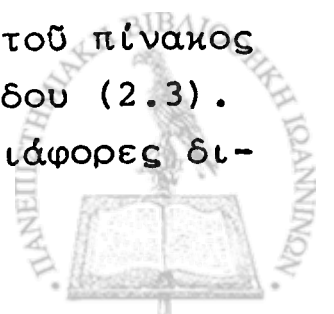
Ἔτσι, ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός ἐπαναλήψεων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ποσότητος $m^{-1} \log \| G^m \|$.

Ὡς ταχύτης συγκλίσεως ἡ ἀσυμπτωτική ταχύτης συγκλίσεως τῆς μεθόδου (2.3) ὀρίζεται ἡ $R(G) = \lim_{m \rightarrow \infty} (-m^{-1} \log \| G^m \|) = -\log \rho(G)$

ἡ ὁποία προφανῶς ἐξαρτᾶται ἀπό τήν φασματική ἀκτῖνα $\rho(G)$.

Βασική προσπάθεια γίνεται γιά τήν εὑρεσι μεθόδων μέ ὅσον τό δυνατόν μεγαλύτερα ταχύτητα συγκλίσεως. Πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά ἐλαχιστοποιηθῆ ἡ φασματική ἀκτῖνα $\rho(G)$ τοῦ πίνακος G ὁ ὁποῖος καλεῖται ἐπαναληπτικός πίναξ τῆς μεθόδου (2.3).

Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς συγκλίσεως γίνεται μέ διάφορες δι-



αδικασίες, ώρισμένες τών οποίων θά αναφερθούν στα έπόμενα κεφάλαια κατά τήν μελέτη τής AOR μεθόδου.

2.3. Βασικαί Έπαναληπτικαί Μέθοδοι καί Θεωρήματα Συγκλίσεως Αύτων.

Ο πίναξ A του συστήματος (2.1) μπορεί πάντοτε νά γραφῆ κατά ένα μοναδικό τρόπο ως έξῆς

$$A = D - C_L - C_U \quad (2.11)$$

όπου $D = \text{diag}(A)$ καί C_L καί C_U είναι αύστηρως κάτω τριγωνικός καί αύστηρως άνω τριγωνικός πίναξ, αντίστοίχως.

Στά έπόμενα θά υποθέτομε ότι τά διαγώνια στοιχεῖα του πίνακος A είναι διάφορα από τό μηδέν ($\det(D) \neq 0$), έκτός καί εάν τουτο προκύπτει σαν άποτέλεσμα τών ιδιοτήτων του A. Τότε, από τήν (2.11) έχομε

$$D^{-1}A = I - D^{-1}C_L - D^{-1}C_U = I - L - U \quad (2.12)$$

όπου έχει τεθῆ $L = D^{-1}C_L$ καί $U = D^{-1}C_U$. Οί L καί U είναι αύστηρως κάτω καί άνω τριγωνικοί πίνακες, αντίστοίχως.

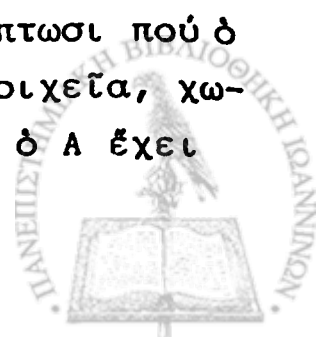
Αν ο A είναι επί πλέον συμμετρικός καί έχει θετικά διαγώνια στοιχεῖα ($a_{ii} > 0$), τότε ορίζομε τόν πίνακα

$$\hat{A} = D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}} = I - \bar{L} - \bar{U} \quad (2.13)$$

όπου $\bar{L} = D^{\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}}$ καί $\bar{U} = D^{\frac{1}{2}} U D^{-\frac{1}{2}}$ καί $\bar{L}^T = \bar{U}$

Αρα ο πίναξ \hat{A} είναι συμμετρικός καί έχει θετικά διαγώνια στοιχεῖα. Επί πλέον ο \hat{A} είναι positive definite εάν καί μόνον εάν ο A είναι positive definite, σύμφωνα με τό πόρισμα 1-1.14.

Από τά παραπάνω προκύπτει ότι, στήν περίπτωση πού ο A είναι συμμετρικός καί έχει θετικά διαγώνια στοιχεῖα, χωρίς βλάβη τής γενικότητας μπορεί νά υποτεθῆ ότι ο A έχει τήν μορφή



$$A = I - L - U \text{ μέ } L = U^T .$$

Πράγματι, όταν θεωρούνται stationary επαναληπτικά μέθοδοι είναι χρήσιμο νά μετατρέψουμε τόν πίνακα τών συντελεστών A του συστήματος (2.1) σέ έναν ό όποϊος έχει διαγώνια στοι-
χεϊα μονάδεξ. Αυτό μπορεί νά επιτευχθῆ χωρίς νά χαθῆ ἡ συμ-
μετρία ἢ ἡ positive definiteness μέ μία διαδικασία "scaling"
ἢ "prescaling". Ἔτσι, αντί του συστήματος (2.1) θεωροῦμε
τό σύστημα $\hat{A}y = c$ μέ $c = D^{-\frac{1}{2}}b$ ὁπότε ἡ λύσις του ἀρχικοῦ $x = D^{-\frac{1}{2}}y$
προκύπτει εύκόλως.

Ἀναφέρομε τώρα τίς πιό γνωστές γραμμικές stationary
επαναληπτικές μεθόδους πρώτης τάξεως πού εἶναι completely
consistent μέ τό σύστημα (2.1) (ἴδε π.χ. [25], [30]).

Ἡ ἀπλουστέρα ἴσως επαναληπτική μέθοδος εἶναι ἡ μέθο-
δος του Jacobi (J) θεωρηθεῖσα ἀρχικῶς ὑπ' αὐτοῦ (1845). Εἰς
τήν βιβλιογραφίαν ἀναφέρεται ἐπίσης αὐτή καί ὡς μέθοδος of
simultaneous displacements ἢ point total-step επαναληπτική
μέθοδος. Αὐτή ὀρίζεται ἀπό τό επαναληπτικό σχῆμα

$$x^{(m+1)} = Bx^{(m)} + k, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

ὅπου

$$B = D^{-1}(C_L + C_U) = L + U = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A$$

σύμφωνα μέ τίς (2.7) καί (2.8), $k = D^{-1}b$ καί $x^{(0)}$ ἀρχική προ-
σέγγισις τῆς λύσεως (αὐθαίρετο διάνυσμα).

Συνήθως σάν $x^{(0)}$ λαμβάνομε τό μηδενικό διάνυσμα ἢ τό $D^{-1}b$.

Ὁ πίναξ B τῆς μεθόδου (2.14) καλεῖται πίναξ Jacobi
πού ἀντιστοιχεῖ στον πίνακα A .

Σχέσι μέ τήν J μέθοδο έχει ἡ simultaneous overrelaxa-
tion μέθοδος (JOR) ἢ ἄλλως extrapolated Jacobi (EJ), ἡ ὁ-
ποία ὀρίζεται ἀπό τό σχῆμα

$$x^{(m+1)} = B_{\omega} x^{(m)} + g, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

ὅπου



$$B_{\omega} = \omega B + (1-\omega)I = I - \omega D^{-1}A \quad (2.16)$$

καί $g = \omega D^{-1}b$. Έδω ω είναι μία πραγματική παράμετρος $\neq 0$ και ανεξάρτητος του m πού έχει σκοπό τήν βελτίωσι τής ταχύτητος συγκλίσεως σέ σχέσι μέ τήν μέθοδο J. Για $\omega = 1$ ή JOR μέθοδος ταυτίζεται μέ τήν μέθοδο J.

Μία άλλη γνωστή μέθοδος είναι ή μέθοδος Gauss-Seidel (GS) ή μέθοδος of successive displacements ή point single-step επαναληπτική μέθοδος οριζομένη ως έξής:

$$x^{(m+1)} = Fx^{(m)} + \ell, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

όπου

$$F = (I-L)^{-1}U \quad \text{καί} \quad \ell = (I-L)^{-1}D^{-1}b. \quad (2.18)$$

Αί μέχρι τώρα αναφερθεΐσαι μέθοδοι στίς περισσότερες περιπτώσεις έχουν πολύ άργή σύγκλιση και έπομένως έν γένει δέν έξυπηρετούν. Μέ μία τροποποίηση τής μεθόδου GS μπορούμε νά βελτιώσομε κατά πολύ στίς περισσότερες περιπτώσεις τήν ταχύτητα συγκλίσεως. Η μέθοδος πού προκύπτει καλεΐται successive overrelaxation μέθοδος (SOR) και είναι πιθανώς ή πιό δημοφιλής από άπόψεως απλότητος και προγραμματισμού για τήν επίλυση του (2.1).

Τό επαναληπτικό σχήμα αύτής είναι

$$x^{(m+1)} = L_r x^{(m)} + z, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.19)$$

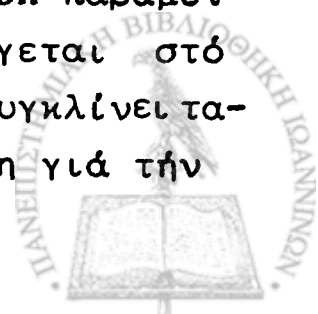
όπου

$$L_r = (I-rL)^{-1}[(1-r)I+rU] = I-r(I-rL)^{-1}D^{-1}A \quad (2.20)$$

καί

$$z = r(I-rL)^{-1}D^{-1}b.$$

Η παράμετρος $r \neq 0$ καλεΐται overrelaxation παράμετρος και είναι ένας πραγματικός αριθμός πού έκλέγεται στό διάστημα $0 < r < 2$ ούτως ώστε ή SOR μέθοδος νά συγκλίνει ταχύτερα. Η optimum τιμή του r (r_{opt}) είναι εκείνη για τήν



ὅποια ἰσχύει $\rho(L_{r_{\text{opt}}}) = \min_r \rho(L_r)$. Δυστυχῶς, ἐκτός καί ἂν ὁ πίναξ A τοῦ συστήματος (2.1) ἀνήκει σέ ὠρισμένες εἰδικές κατηγορίες πινάκων, ὅπως π.χ. στήν κατηγορία τῶν ἐχόντων τήν "ιδιότητα A ", δέν ὑπάρχουν ἀρκετές πληροφορίες γιά τήν εὔρεσι μιᾶς θεωρητικῆς τιμῆς τοῦ r_{opt} οὔτως ὥστε νά ἐπιτευχθῇ ἡ ταχύτερα σύγκλισι καί γι'αὐτό ἡ ἐκλογή καί ἐκτίμησις τοῦ r_{opt} γίνεται ἐμπειρικῶς μέ διαφόρους μεθόδους. Γιά $r=1$ ἡ SOR μέθοδος συμπίπτει μέ τήν μέθοδο GS.

Μία μέθοδος ἀναφερομένη στόν Richardson [19] καί ἡ ὅποια δέν ἀπαιτεῖ νά εἶναι διάφορα τοῦ μηδενός τά διαγώνια στοιχεῖα τοῦ A εἶναι ἡ γενικευμένη stationary μέθοδος τοῦ Richardson (GRF) ὀριζομένη ὡς ἀκολούθως

$$x^{(m+1)} = Rx^{(m)} + u, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

ὅπου

$$R = I + PA$$

μέ P ἕναν ὁποιοδήποτε nonsingular διαγώνιο πίνακα καί $u = -Pb$. Ἐάν $P = -D^{-1}$ ὅπου $D = \text{diag}(A)$ ἔχομε τήν μέθοδο J.

Ἐάν $P = \rho I$ μέ $\rho \neq 0$ προκύπτει ἡ stationary Richardson μέθοδος (RF).

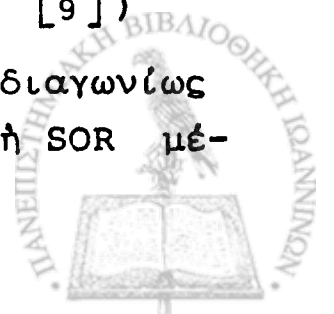
Στή συνέχεια διατυπώνονται ὠρισμένα βασικά θεωρήματα συγκλίσεως τῶν προαναφερθεισῶν μεθόδων. Γιά τίς ἀποδείξεις αὐτῶν [δε π.χ. [30]].

Θεώρημα 3.1. (Kahan [14])

Εἶναι $\rho(L_r) \geq |r-1|$. Ἐπί πλέον, ἂν ἡ SOR μέθοδος συγκλίνει ($\rho(L_r) < 1$), τότε $0 < r < 2$.

Θεώρημα 3.2. (Γενίκευσις ἀποτελεσμάτων τοῦ [9])

Ἐάν A εἶναι ἕνας irreducible καί ἀσθενῶς διαγωνίως ὑπερτερῶν πίναξ, τότε ἡ J μέθοδος συγκλίνει καί ἡ SOR μέ-



θοδος συγκλίνει για κάθε $0 < r \leq 1$.

Τό παρακάτω θεώρημα απέδειχθη από τούς Reich [20] για $r=1$ και Ostrowski [16] γενικά.

Θεώρημα 3.3.

Έστω A ένας συμμετρικός πίναξ με θετικά διαγώνια στοιχεία. Τότε, η SOR μέθοδος συγκλίνει εάν και μόνον εάν ο A είναι positive definite και $0 < r < 2$.

Θεώρημα 3.4.

Έάν A είναι ένας L -πίναξ και εάν $0 < r \leq 1$, τότε

i) $\rho(B) < 1$ εάν και μόνον εάν $\rho(L_r) < 1$.

ii) $\rho(B) < 1$ (και $\rho(L_r) < 1$) εάν και μόνον εάν ο A είναι M -πίναξ.

Έάν $\rho(B) < 1$, τότε $\rho(L_r) \leq 1 - r + r\rho(B)$.

iii) Έάν $\rho(B) \geq 1$, τότε $\rho(L_r) \geq 1$ και $\rho(L_r) \geq 1 - r + r\rho(B) \geq 1$.

Τό θεώρημα αυτό είναι επέκτασις τῶν αποτελεσμάτων του [23], ἴδε επίσης [14].

Θεώρημα 3.5. (Kahan [14])

Έάν A είναι ένας M -πίναξ και εάν $0 < r < \frac{2}{1 + \rho(B)}$, τότε $\rho(L_r) < 1$.

Πόρισμα 3.6.

Έάν A είναι ένας Stieltjes πίναξ, τότε $\rho(B) < 1$.

Θεώρημα 3.7.

Έάν A είναι ένας positive definite πίναξ, τότε

$$\mu_{\max} < 1,$$



όπου μ_{\max} είναι η μεγαλύτερα ιδιοτιμή του πίνακος Jacobi B που αντιστοιχεί στον A.

Θεώρημα 3.8.

Εάν A είναι ένας positive definite πίναξ με ιδιοτιμές λ_i τέτοιες ώστε $\alpha < \lambda_i < \beta$, τότε η RF μέθοδος με $p = -\frac{2}{\alpha + \beta}$ συγκλίνει.

Θεώρημα 3.9.

Εάν A είναι ένας positive definite πίναξ και έχει την "ιδιότητα A", τότε $\rho(B) < 1$.

Θεώρημα 3.10.

Εστω $A = (a_{ij})$ ένας συμμετρικός consistently ordered πίναξ με $a_{ii} > 0$. Τότε $\rho(B) < 1$ εάν και μόνον εάν ο A είναι positive definite.

Πόρισμα 3.11.

Εάν A είναι ένας positive definite consistently ordered πίναξ τότε η μέθοδος J συγκλίνει.

Θεώρημα 3.12.

Εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένας consistently ordered πίναξ, τέτοιος ώστε ο πίναξ Jacobi B έχει πραγματικές ιδιοτιμές, τότε

$$\rho(L_r) < 1 \text{ εάν και μόνον εάν } 0 < r < 2 \text{ και } \rho(B) < 1 .$$



Κεφάλαιον 3

Η ACCELERATED OVERRELAXATION (AOR) ΜΕΘΟΔΟΣ

3.1. Γενικά

Τό 1978 ό Hadjidimos [10] είσήγαγε μία νέα γραμμική stationary έπαναληπτική μέθοδο πρώτης τάξεως για τήν επίλυσι τοϋ συστήματος (2.1). Η νέα μέθοδος καλεΐται Accelerated Overrelaxation (AOR) μέθοδος και είναι μία γενικωτέρα μέθοδος άφοϋ όλαι αι άναφερθεισαι στό προηγούμενο κεφάλαιο, έκτός τής GRF, προκύπτουν ως είδικαι περιπτώσεις τής AOR μεθόδου.

Η AOR μέθοδος έν αντιθέσει πρός τήν JOR και SOR περιέχει δύο παραμέτρους και έπομένως τό πρόβλημα τώρα είναι ή εύρεσι optimum τιμών για τίς δύο παραμέτρους ώστε να έπιτευχθῆ ή ταχύτερα σύγκλισι:

θερώντας πάλι τό σύστημα (2.1) και τίς προυποθέσεις και τούς συμβολισμούς τής παραγράφου 2.3. τό έπαναληπτικό σχήμα τής AOR μεθόδου είναι

$$x^{(m+1)} = (I-rL)^{-1} [(1-\omega)I + (\omega-r)L + \omega U] x^{(m)} + \omega(I-rL)^{-1} D^{-1} b, \quad (3.1)$$

$m = 0, 1, 2, \dots$ όπου r είναι ή acceleration παράμετρος και $\omega (\neq 0)$ ή overrelaxation παράμετρος. Ο έπαναληπτικός πίναξ τής AOR μεθόδου θα συμβολίζεται με $L_{r,\omega}$ και είναι



$$L_{r,\omega} = (I - rL)^{-1} [(1-\omega)I + (\omega-r)L + \omega U] \quad (3.2)$$

Γιά ειδικές τιμές τών παραμέτρων r και ω προκύπτουν αι εξής μέθοδοι:

Γιά $(r,\omega)=(0,1)$ προκύπτει η μέθοδος J και $L_{0,1} \equiv B$.

Γιά $(r,\omega)=(0,\omega)$ προκύπτει η JOR μέθοδος και $L_{0,\omega} \equiv B_\omega$.

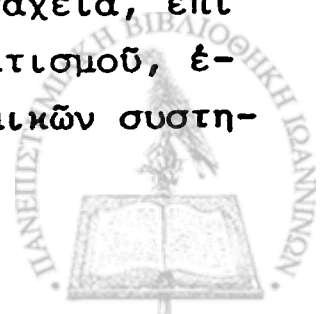
Γιά $(r,\omega)=(r,r)$ προκύπτει η SOR μέθοδος και $L_{r,r} \equiv L_r$.

Προφανώς για $r=\omega=1$ προκύπτει η GS μέθοδος και $L_{1,1} \equiv F$. Επίσης για $(r,\omega)=(1,\omega)$ προκύπτει η extrapolated GS μέθοδος (EGS). Πρέπει επίσης να σημειωθῆ ὅτι η AOR μέθοδος για $r=0$ είναι η extrapolated SOR μέθοδος (ESOR) με overrelaxation παράμετρο r και extrapolation παράμετρο $s = \frac{\omega}{r}$. Μία μελέτη τῆς ἐπιταχυντικῆς τεχνικῆς "extrapolation" γίνεται στό ἐπόμενο κεφάλαιο.

Σέ ὅτι ἀκολουθεῖ θά μελετηθῆ ἡ AOR τόσον ἀνεξαρτήτως ὅσον καί ὑπό τήν ιδιότητα τῆς ESOR μεθόδου.

Ἄρισμένα βασικά συμπεράσματα πού ἀφοροῦν στήν σύγκλιση τῆς AOR μεθόδου παρουσιάζονται στό [10]. Εἰδικά γιά τήν περίπτωσι πού ὁ πίναξ A τοῦ (2.1) εἶναι ἕνας consistently ordered ἢ γενικώτερα ἕνας πίναξ πού ἔχει τήν "ιδιότητα A ", ἐγινε μία ἐκτεταμένη μελέτη στά [2] καί [9]. Ἐτσι εὐρέθησαν στήν περίπτωσι αὐτή optimum τιμές τών παραμέτρων r καί ω καί ἐδείχθη ὅτι ἡ optimum AOR μέθοδος σέ ἀρκετές περιπτώσεις ἔχει μεγαλύτερα ταχύτητα συγκλίσεως ἀπ'ὅτι ἡ optimum SOR μέθοδος, ἐνῶ στίς ὑπόλοιπες περιπτώσεις ἡ optimum AOR μέθοδος ταυτίζεται μέ τήν optimum SOR μέθοδο.

Ἡ παρουσία τών δύο παραμέτρων στήν AOR μέθοδο ἔχει σάν ἀποτέλεσμα νά καθιστᾶ αὐτήν μία ἰσχυρά καί ταχεῖα, ἐπί πλέον δέ καί σχετικῶς ἀπλή ἀπό ἀπόψεως προγραμματισμοῦ, ἐπαναληπτική μέθοδο γιά τήν ἐπίλυσι μεγάλων γραμμικῶν συστημάτων.



Στά [1] και [1] παρουσιάζονται θεωρήματα συγκλίσεως της AOR μεθόδου για ειδικές κατηγορίες πινάκων-συντελεστών του (2.1) και αναφέρονται επίσης βασικά συμπεράσματα της extrapolation τεχνικής σε σχέση με την AOR μέθοδο. Τέλος, παρουσιάζονται ωρισμένα αριθμητικά παραδείγματα από τα όποια φαίνεται ότι η AOR μέθοδος υπερτερεί έναντι των άλλων μεθόδων και ειδικά της SOR.

Στή συνέχεια του κεφαλαίου 3 καθώς και στα κεφάλαια 5 και 6 παρουσιάζονται τα μέχρι τώρα συμπεράσματα σε ωρισμένες κατευθύνσεις από την μελέτη της AOR μεθόδου κατά τρόπον πού να μπορούν να εφαρμοσθούν πρακτικώς με την χρησιμοποίησι ενός Ηλεκτρονικού Υπολογιστού για την επίλυσι μεγάλων γραμμικών συστημάτων.

Πολλά από τα συμπεράσματα και θεωρήματα είναι νέα, άλλα αποτελούν γενίκευσι και επέκτασι αποτελεσμάτων των [1], [1], [1] και ωρισμένα υπάρχουν σ'αυτά. Πρέπει επίσης να σημειωθῆ ὅτι, ἐφ'ὅσον γιά $\omega = r$ ἡ AOR μέθοδος ταυτίζεται με τήν SOR, ὅλα τὰ συμπεράσματα σχεδόν γιά τήν SOR μέθοδο ἀποτελοῦν εἰδική περίπτωσι τῶν ἀποτελεσμάτων καί θεωρημάτων τῆς θεωρίας συγκλίσεως τῆς AOR μεθόδου.

3.2. Θεωρήματα συγκλίσεως τῆς AOR μεθόδου.

Θεώρημα 2.1.

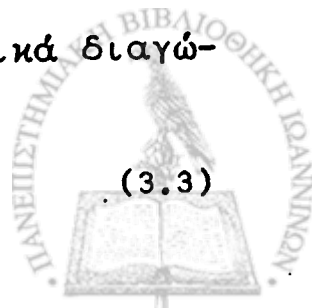
Ἐστω A ἕνας positive definite πίναξ. Τότε ἡ AOR συγκλίνει ($\rho(L_{r,\omega}) < 1$) γιά κάθε $0 < \omega \leq r \leq 2$ καί $\omega \neq 2$.

Ἀπόδειξις

Ἐπειδή ὁ A εἶναι συμμετρικός καί ἔχει θετικά διαγώνια στοιχεῖα δυνάμεθα νά ὑποθέσομε ὅτι

$$A = I - L - U \quad \text{μέ} \quad L = U^T$$

(3.3)



Εάν λ είναι μία ιδιοτιμή του $L_{r,\omega}$, τότε για κάποιο διάνυσμα $v \neq 0$ έχουμε $L_{r,\omega} v = \lambda v$ ή χρησιμοποιώντας την (3.2)

$$(I-rL)^{-1} [(1-\omega)I + (\omega-r)L + \omega U] v = \lambda v \quad \text{ή ακόμη}$$

$$[(1-\omega)I + (\omega-r)L + \omega U] v = \lambda(I-rL)v. \quad (3.4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τά δύο μέλη της (3.4) από αριστερά με v^H έχουμε

$$[(1-\omega)v^H + (\omega-r)v^H L + \omega v^H U] v = \lambda v^H (I-rL)v. \quad (3.5)$$

Υποθέτοντες προς στιγμήν ότι $v^H (I-rL)v \neq 0$ από την (3.5) προκύπτει

$$\lambda = \frac{(1-\omega)v^H v + (\omega-r)v^H L v + \omega v^H U v}{v^H (I-rL)v} =$$

$$= \frac{(1-\omega)v^H v + (\omega-r)v^H L v + \omega v^H U v}{v^H v - r v^H L v}. \quad (3.6)$$

Επειδή $L = U^T$ έπεται $v^H U v = v^H L^T v = (v^T L v^*)^T = v^T L v^* = (v^H L v)^*$.

θέτουμε $\frac{v^H L v}{v^H v} = z$, (3.7)

τότε είναι

$$z^* = \left(\frac{v^H L v}{v^H v} \right)^* = \frac{(v^H L v)^*}{v^H v} = \frac{v^H U v}{v^H v}. \quad (3.8)$$

Τότε από την (3.6) έχουμε, διαιρώντας αριθμητή και παρόνομαστή με $v^H v$

$$\lambda = \frac{1-\omega + (\omega-r)z + \omega z^*}{1-rz}.$$

Εάν τεθῆ $z = \alpha + \beta i$ τότε $z^* = \alpha - \beta i$ προκύπτει ότι



$$|\lambda| = \left| \frac{(1-r\alpha + 2\omega\alpha - \omega) - r\beta i}{1-rz} \right| .$$

Άρκει έπομένως νά δειχθῆ ὅτι $|\lambda| < 1$ γιά κάθε $0 < \omega \leq r \leq 2$ ($\omega \neq 2$), ἢ ἰσοδυνάμως ὅτι

$$\omega^2(2\alpha-1)^2 + 2\omega(1-r\alpha)(2\alpha-1) < 0 .$$

Άφοῦ $\omega > 0$ ἀρκει νά δειχθῆ ὅτι

$$\omega(2\alpha-1)^2 + 2(1-r\alpha)(2\alpha-1) < 0 . \quad (3.9)$$

Άπό τίς (3.7) καί (3.8) ἔχομε ὅτι

$$z + z^* = 2\alpha = \frac{v^H L v}{v^H v} + \frac{v^H U v}{v^H v} = \frac{v^H (L+U) v}{v^H v} = \frac{v^H (I-A) v}{v^H v} = 1 - \frac{v^H A v}{v^H v} < 1$$

ἀφοῦ ὁ A εἶναι positive definite καί έπομένως $v^H A v > 0$.

Άρα $2\alpha < 1$ ἢ $\alpha < \frac{1}{2}$. Έπομένως ἡ (3.9) εἶναι τώρα ἰσοδύναμος μέ τήν

$$\omega(2\alpha-1) + 2(1-r\alpha) > 0 . \quad (3.10)$$

Ἡ (3.10) παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει γιά $\omega = r$, ἀφοῦ $2-\omega > 0$. Γιά $r=2$ ἡ (3.10) δίδει $(1-2\alpha)(2-\omega) > 0$ πού ἐπίσης ἰσχύει.

Γιά $r \neq \omega, 2$ διακρίνομε τίς ἑξῆς περιπτώσεις.

Άν $\alpha \leq 0$ ἡ (3.10) γίνεται $-2\alpha(r-\omega) + 2-\omega > 0$ πού ἰσχύει διότι $r-\omega > 0$ καί $2-\omega > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Άν } \alpha > 0 \text{ τότε ἔχομε } & -2\alpha(r-\omega) + 2-\omega > -2\alpha(r-\omega) + r-\omega = \\ & = (r-\omega)(1-2\alpha) > 0 . \end{aligned}$$

Έτσι εἶναι $|\lambda| < 1$ καί έπομένως $\rho(L_{r,\omega}) < 1$.

Θά δειχθῆ τώρα ὅτι $v^H (I-rL)v \neq 0$. Πράγματι, ἂν ὑποτεθεῖ ὅτι

$$v^H (I-rL)v = 0, \text{ τότε θά εἶναι } \frac{v^H (I-rL)v}{v^H v} = 0 \text{ ἢ}$$

$$1 - r \frac{v^H L v}{v^H v} = 0 \text{ ἢ } 1 - rz = 0$$



τό όποιο συνεπάγεται ότι $1-r\alpha = 0$ και $r\beta = 0$. Αφοϋ $r \neq 0$, πρέπει $\beta = 0$ και $\alpha = 1/r$. Αλλά $1/r \geq \frac{1}{2}$ και έπομένως $2\alpha \geq 1$ τό όποιο είναι άτοπον διότι $2\alpha < 1$.

Θεώρημα 2.2.

Έστω A ένας συμμετρικός πίναξ με μή μηδενικά διαγώνια στοιχεία.

Τότε, άν ή AOR μέθοδος συγκλίνει ($\rho(L_{r,\omega}) < 1$), ό πίναξ A είναι nonsingular.

Απόδειξις

Από τήν (2.12) έχομε

$$D^{-1}A = I - L - U$$

Από τήν (3.2) προκύπτει επίσης ότι

$$\begin{aligned} I - L_{r,\omega} &= (I - rL)^{-1} \left[I - rL - [(1-\omega)I + (\omega-r)L + \omega U] \right] = \\ &= (I - rL)^{-1} [\omega I - \omega L - \omega U] = \omega (I - rL)^{-1} D^{-1}A. \end{aligned}$$

Επειδή $\rho(L_{r,\omega}) < 1$ ό πίναξ $I - L_{r,\omega}$ είναι nonsingular και έπομένως ό πίναξ $A = \omega^{-1} D (I - rL) (I - L_{r,\omega})$ είναι nonsingular άφοϋ $\det(D) \neq 0$ και $\omega \neq 0$.

Αποδεικνύομε τώρα ένα βασικό λήμμα για τήν AOR μέθοδο.

Λήμμα 2.3.

Έστω A ένας συμμετρικός πίναξ με θετικά διαγώνια στοιχεία.

Τότε ό πίναξ $M = \omega^{-1} [(2-r)D + (r-\omega)A]$ με $\omega \neq 0$ και $D = \text{diag}(A)$, είναι positive definite εάν και μόνον εάν

$$0 < \omega < 2 \quad \text{και} \quad \omega + \frac{2-\omega}{\mu_{\min}} < r < \omega + \frac{2-\omega}{\mu_{\max}}$$



όπου μ_{\min} και μ_{\max} είναι ή μικρότερα και ή μεγαλύτερα από τις ιδιοτιμές του πίνακος Jacobi $B=L+U$, που αντιστοιχεί στον A , αντίστοιχως.

Απόδειξις

Ο πίναξ H είναι positive definite εάν και μόνον εάν ο πίναξ

$$H = D^{-\frac{1}{2}} M (D^{-\frac{1}{2}})^H = D^{-\frac{1}{2}} M D^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2-r}{\omega}\right) I + \left(\frac{r-\omega}{\omega}\right) D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}$$

είναι positive definite σύμφωνα με τό πόρισμα 1-1.14.

Είναι

$$H = \left(\frac{2-r}{\omega}\right) I + \left(\frac{r-\omega}{\omega}\right) \hat{A} = \left(\frac{2-r}{\omega}\right) I + \left(\frac{r-\omega}{\omega}\right) [I - \bar{L} - \bar{U}]$$

σύμφωνα με τήν (2.13) και αν τεθῆ $\bar{L} + \bar{U} = \bar{B} = D^{\frac{1}{2}} B D^{-\frac{1}{2}}$ προκύπτει ότι

$$H = \left(\frac{2-\omega}{\omega}\right) I - \left(\frac{r-\omega}{\omega}\right) \bar{B} .$$

Ο H είναι προφανῶς συμμετρικός.

Αι ιδιοτιμαί του H είναι $\frac{2-\omega}{\omega} - \frac{r-\omega}{\omega} \mu_i$ όπου μ_i είναι αι ιδιοτιμαί του B αφού ο \bar{B} είναι ὁμοιος με τόν B .

Επειδή $\text{tr}(B) = 0$ και μ_i είναι πραγματικά ἔπεται ότι $\mu_{\min} \leq 0$ και $\mu_{\max} \geq 0$. Προφανῶς ὁ H είναι positive definite

εάν και μόνον εάν ισχύει $\frac{1}{\omega} [(2-\omega) + (\omega-r)\mu_i] > 0$ ἢ $\frac{2}{\omega} - 1 + (1 - \frac{r}{\omega})\mu_i > 0$ για ὅλες τις ιδιοτιμές μ_i του B .

Ίσχύει ὅτι

$$\mu_{\min} \leq \mu_i \leq \mu_{\max} \quad (\mu_{\max} \neq \mu_{\min}) .$$

Ἡ περίπτωση $\mu_{\min} = 0 = \mu_{\max}$ θά ἔξετασθῆ χωριστά.

Γιά τήν απόδειξι του λήμματος διακρίνομε τις ἑξῆς περιπτώσεις.



i) $\omega < 0$. Αύτη απορρίπτεται διότι πρέπει να ισχύουν συγχρόνως αι σχέσεις

$$\frac{2}{\omega} - 1 + (1 - \frac{r}{\omega})\mu_{\min} > 0 \text{ και } \frac{2}{\omega} - 1 + (1 - \frac{r}{\omega})\mu_{\max} > 0. \quad (3.11)$$

Από την πρώτη των (3.11) προκύπτει ότι πρέπει να είναι $1 - \frac{r}{\omega} < 0$ ενώ από την δεύτερη $1 - \frac{r}{\omega} > 0$ πράγμα τό όποϊον είναι άτοπον.

ii) $\omega > 0$ και $r < \omega$

Διακρίνομε τίς ακόλουθες δύο ύποπεριπτώσεις.

ii₁) $r \leq 0 < \omega$

Τότε, ό Η είναι positive definite εάν και μόνον εάν ισχύει

$$\frac{2}{\omega} - 1 + (1 - \frac{r}{\omega})\mu_{\min} > 0 \text{ ή } r > \omega(1 + \frac{2-\omega}{\omega\mu_{\min}}).$$

Επειδή $r \leq 0$ πρέπει $1 + \frac{2-\omega}{\omega\mu_{\min}} < 0$ ή $0 < \omega < \frac{2}{1-\mu_{\min}} < 2$.

Αρα τελικά πρέπει να είναι $\omega(1 + \frac{2-\omega}{\omega\mu_{\min}}) < r \leq 0 < \omega < \frac{2}{1-\mu_{\min}} < 2$.

ii₂) $0 < r < \omega$

Τότε ό Η είναι positive definite εάν και μόνον εάν ισχύει πάλι

$$\frac{2}{\omega} - 1 + (1 - \frac{r}{\omega})\mu_{\min} > 0 \text{ ή } r > \omega(1 + \frac{2-\omega}{\omega\mu_{\min}}) \text{ όποτε}$$

άν $1 + \frac{2-\omega}{\omega\mu_{\min}} < 0$ θά έχομε $0 < r < \omega < \frac{2}{1-\mu_{\min}} < 2$

ένώ άν $0 \leq 1 + \frac{2-\omega}{\omega\mu_{\min}} < 1$ δηλαδή $\frac{2}{1-\mu_{\min}} \leq \omega < 2$ θά έχομε



$$0 \leq \omega \left(1 + \frac{2-\omega}{\omega \mu_{\min}}\right) < r < \omega \quad \text{καί} \quad \frac{2}{1-\mu_{\min}} \leq \omega < 2 .$$

iii) $0 < \omega < r$

Τότε ο Η είναι positive definite εάν και μόνον εάν ισχύει

$$\frac{2}{\omega} - 1 + \left(1 - \frac{r}{\omega}\right) \mu_{\max} > 0 \quad \eta \quad r < \omega \left(1 + \frac{2-\omega}{\omega \mu_{\max}}\right) .$$

Επειδή $r > \omega$ πρέπει $1 + \frac{2-\omega}{\omega \mu_{\max}} > 1$ ήτοι $\omega < 2$.

Άρα τελικά στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$0 < \omega < 2 \quad \text{καί} \quad \omega < r < \omega \left(1 + \frac{2-\omega}{\omega \mu_{\max}}\right) .$$

iv) Αν $\omega = r$ τότε προκύπτει άμέσως ότι ο Η είναι positive definite εάν και μόνον εάν $\frac{2}{\omega} - 1 > 0$ ήτοι $0 < \omega < 2$ αφού $\omega > 0$.

Λαμβάνοντας υπόψιν τα συμπεράσματα όλων των ανωτέρω περιπτώσεων προκύπτει ότι ο πίναξ Μ είναι positive definite εάν και μόνον εάν

$$0 < \omega < 2 \quad \text{καί} \quad \omega + \frac{2-\omega}{\mu_{\min}} < r < \omega + \frac{2-\omega}{\mu_{\max}} . \quad (3.12)$$

Παρατηρήσεις

i) Αν $\mu_{\max} = \mu_{\min} = 0$ τότε εύκολως συνάγεται ότι ο Μ είναι positive definite εάν και μόνον εάν $0 < \omega < 2$ και r οποιοδήποτε.

ii) Για $r = 0$ από τις σχέσεις (3.12) λαμβάνομε

$$0 < \omega < \frac{2}{1-\mu_{\min}} \leq 2 \quad \text{δηλαδή τό συμπέρασμα του λήμματος 3.2 σελ.}$$



Πρόβλημα 2. 4.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένα τετραγωνικό πίνακα με $\det(A) \neq 0$.

Από την αντιστροφή του πίνακα A^{-1} έχουμε $A^{-1}A = I$ και $AA^{-1} = I$.
 Παράγοντας τον πρώτο από αυτούς τους πίνακες με A από αριστερά και A^{-1} από δεξιά, έχουμε $A(A^{-1}A) = AI = A$ και $(AA^{-1})A = IA = A$.
 Παράγοντας τον δεύτερο από αυτούς τους πίνακες με A^{-1} από αριστερά και A από δεξιά, έχουμε $A^{-1}(AA^{-1}) = A^{-1}I = A^{-1}$ και $(A^{-1}A)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$.

Αν A είναι αντιστρέψιμος τότε $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ και $\det(A^{-1}A) = \det(I) = 1$.
 Παράγοντας τον πρώτο από αυτούς τους πίνακες με A^{-1} από αριστερά και A από δεξιά, έχουμε $A^{-1}(AA^{-1}) = A^{-1}I = A^{-1}$ και $(A^{-1}A)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$.

Απόδειξη 1.

Από την αντιστροφή του πίνακα A^{-1} έχουμε $A^{-1}A = I$ και $AA^{-1} = I$.

$$I - A^{-1}A = A^{-1}(A - A) = A^{-1} \cdot 0 = 0$$

Επίσης, αν A είναι αντιστρέψιμος τότε $\det(A) \neq 0$ και $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
 Παράγοντας τον πρώτο από αυτούς τους πίνακες με A^{-1} από αριστερά και A από δεξιά, έχουμε $A^{-1}(AA^{-1}) = A^{-1}I = A^{-1}$ και $(A^{-1}A)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$.

$$Q = B(A^{-1}A - I)^{-1} = B(A^{-1}A - I)^{-1} \cdot A^{-1}A = B(A^{-1}A - I)^{-1}A^{-1}A$$

Οπότε, $Q = B(A^{-1}A - I)^{-1}A^{-1}A$.

$$Q^T = (B(A^{-1}A - I)^{-1}A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1}A - I)^{-T}B^T$$

Από την αντιστροφή του πίνακα A^{-1} έχουμε $A^{-1}A = I$ και $AA^{-1} = I$.

$$\begin{aligned} M &= Q + Q^T = B(A^{-1}A - I)^{-1}A^{-1}A + A^T(A^{-1}A - I)^{-T}B^T \\ &= B(A^{-1}A - I)^{-1}A^{-1}A + (A^{-1}A - I)^{-T}B^T \\ &= B(A^{-1}A - I)^{-1}A^{-1}A + (A^{-1}A - I)^{-T}B^T \end{aligned}$$

Από την αντιστροφή του πίνακα A^{-1} έχουμε $A^{-1}A = I$ και $AA^{-1} = I$.

$$(A^{-1}A - I)^T = (A^{-1}A - I)$$

Παράγοντας τον πρώτο από αυτούς τους πίνακες με A^{-1} από αριστερά και A από δεξιά, έχουμε $A^{-1}(AA^{-1}) = A^{-1}I = A^{-1}$ και $(A^{-1}A)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$.

$$\begin{aligned} M &= B(A^{-1}A - I)^{-1}A^{-1}A + (A^{-1}A - I)^{-T}B^T \\ &= B(A^{-1}A - I)^{-1}A^{-1}A + (A^{-1}A - I)^{-1}B^T \end{aligned}$$



Ο πίναξ

$$\begin{aligned} I + L_{r,\omega} &= (I - rL)^{-1} [I - rL + (1 - \omega)I + (\omega - r)L + \omega U] \\ &= (I - rL)^{-1} [(2 - \omega)I + (\omega - 2r)L + \omega U] \end{aligned}$$

Σχηματίζουμε τώρα τον πίνακα

$$\begin{aligned} H &= (I - L_{r,\omega})^{-1} (I + L_{r,\omega}) = \\ &= \omega^{-1} A^{-1} D (I - rL) (I - rL)^{-1} [(2 - \omega)I + (\omega - 2r)L + \omega U] = \\ &= A^{-1} D \left[\left(\frac{2 - \omega}{\omega} \right) I + \left(1 - \frac{2r}{\omega} \right) L + U \right] = 2\omega^{-1} A^{-1} D (I - rL) - I \end{aligned}$$

Λόγω των σχέσεων $D^{-1}A = I - L - U$ και $(DU)^T = U^T D = DL$,

$(DL)^T = DU = L^T D$ και αν ληφθῆ $Q = A^{-1}$, τότε ο πίναξ

$$\begin{aligned} K &= HQ + QH^T = \\ &= HA^{-1} + A^{-1}H^T = A^{-1}D \left[\left(\frac{2 - \omega}{\omega} \right) I + \left(1 - \frac{2r}{\omega} \right) L + U \right] A^{-1} + A^{-1} \left[\left(\frac{2 - \omega}{\omega} \right) I + \left(1 - \frac{2r}{\omega} \right) L^T + U^T \right] D (A^{-1})^T = \\ &= A^{-1} \left[\frac{2(2 - \omega)}{\omega} D + \left(1 - \frac{2r}{\omega} \right) DL + DU + \left(1 - \frac{2r}{\omega} \right) L^T D + U^T D \right] A^{-1} = \\ &= 2\omega^{-1} [(2 - \omega)D + (\omega - r)DL + (\omega - r)DU] A^{-1} = 2\omega^{-1} A^{-1} [(2 - r)D + (r - \omega)A] A^{-1} = 2A^{-1} M (A^{-1})^H. \end{aligned}$$

Άρα αν ο M είναι positive definite, τότε ο K είναι positive definite και επομένως $\rho(L_{r,\omega}) < 1$.



Κεφαλαιον 4

Η ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΗΣ EXTRAPOLATION

4.1. Γενικά

Θεωρούμε πάλι μία completely consistent γραμμική stationary επαναληπτική μέθοδο που ορίζεται από την

$$x^{(m+1)} = Gx^{(m)} + k, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Με σκοπό να επιταχυνθῆ ἡ σύγκλισις τέτοιων μεθόδων χρησιμοποιούνται διάφοροι διαδικασίαι. Μία ἐξ αὐτῶν εἶναι ἡ extrapolation μέθοδος που βασίζεται στήν (4.1). Αὐτή ορίζεται ἀπό τήν

$$x^{(m+1)} = \omega(Gx^{(m)} + k) + (1-\omega)x^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

ὅπου ω εἶναι μία πραγματική παράμετρος $\neq 0$ ἡ ὁποία καλεῖται extrapolation παράμετρος. Γιά $\omega = 1$ ἡ μέθοδος (4.2) ταυτίζεται μέ τήν (4.1). Σάν παράδειγμα ἀναφέρομε ὅτι ἂν ἡ (4.1) εἶναι ἡ μέθοδος Jacobi, τότε ἡ (4.2) εἶναι ἡ JOR μέθοδος.

Ὁ επαναληπτικός πίναξ τῆς (4.2) θά συμβολίζεται μέ G_ω καί εἶναι

$$G_\omega = \omega G + (1-\omega)I \quad (4.3)$$

4.2. Θεωρία συγκλίσεως

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμε ὅτι ἂν



$$\|G\| < 1 \text{ και } 0 < \omega < 1 ,$$

τότε

$$\|G_\omega\| = \|\omega G + (1-\omega)I\| \leq \omega\|G\| + 1-\omega < \omega + 1-\omega = 1 .$$

Άρα $\|G_\omega\| < 1$ και επομένως η extrapolation μέθοδος (4.2) συγκλίνει.

Εάν υποθεθῆ ὅτι

$$\mu_j = \rho e^{i\theta} , \quad j = 1(1)n \quad (4.4)$$

εἶναι αἱ ἰδιοτιμαὶ τοῦ G ὅπου $0 \leq \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 = \rho(G)$, τότε αἱ ἰδιοτιμαὶ τοῦ G_ω εἶναι

$$\lambda_j = \omega\mu_j + 1-\omega , \quad j = 1(1)n . \quad (4.5)$$

Ἔτσι, γιὰ τὴν φασματικὴ ἀκτῖνα τοῦ G_ω ἔχομε:

$$\begin{aligned} \rho(G_\omega) &= \max_j |\omega\mu_j + 1-\omega| \leq \max_j \{|\omega\mu_j| + |1-\omega|\} = |1-\omega| + |\omega| \max_j |\mu_j| = \\ &= |1-\omega| + |\omega| \rho(G) . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ἐξετάζομε τώρα τὴν σύγκλιση τῆς μεθόδου (4.2) σέ σχέσι με τὴν μέθοδο (4.1). Θὰ εὐρεθῆ δηλαδὴ , κάτω ἀπὸ ποιῆς συνθῆκες γιὰ τὸ ω καὶ τίς ἰδιοτιμὲς τοῦ πίνακος G , ἔχομε $\rho(G_\omega) < 1$ καὶ ἐπίσης πότε εἶναι $\rho(G_\omega) < \rho(G) < 1$ ὁπότε ἡ (4.2) θὰ συγκλίνει ταχύτερα.

Διακρίνομε τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις.

i) Ὑποθέτομε ὅτι $\mu_j = 0$ γιὰ ὅλα τὰ j , δηλαδὴ $\rho \equiv 0$. Τότε ἔχομε $\lambda_j = 1-\omega$ καὶ ὡς ἐκ τούτου εἶναι $|\lambda_j| < 1$ ἐάν καὶ μόνον ἐάν $|1-\omega| < 1$ ἢ $0 < \omega < 2$. Στὴν περίπτωσι αὐτὴ ἡ μέθοδος (4.2) συγκλίνει γιὰ κάθε $0 < \omega < 2$. Προφανῶς ἡ optimum τιμὴ τοῦ ω εἶναι $\omega_{opt} = 1$ ἀφοῦ $\rho(G_1) = 0$.

ii) Ὑποθέτομε ὅτι $|\mu_j| = 1$ γιὰ ὅλα τὰ j , δηλαδὴ $\rho \equiv 1$.

Τότε εἶναι



$$|\lambda_j| = |\omega(\cos\theta + i\sin\theta) + 1 - \omega| = [(\omega\cos\theta + 1 - \omega)^2 + \omega^2\sin^2\theta]^{\frac{1}{2}}$$

και

$$|\lambda_j|^2 = 2\omega(\omega - 1)(1 - \cos\theta) + 1 .$$

Προφανώς, $|\lambda_j| < 1$, εάν και μόνον εάν

$$2\omega(\omega - 1)(1 - \cos\theta) + 1 < 1 \quad \eta \quad 2\omega(\omega - 1)(1 - \cos\theta) < 0 .$$

Αν $\cos\theta \neq 1$, δηλαδή, αν $\mu_j \neq 1$, τότε για κάθε $0 < \omega < 1$ έχουμε $\rho(G_\omega) < 1$. Εάν για κάποιο j είναι $\mu_j = 1$, τότε δεν έχουμε σύγκλιση για οποιαδήποτε τιμή του ω . Στην περίπτωση που είναι $\rho(G_\omega) < 1$ για κάθε $0 < \omega < 1$, αναζητούμε την τιμή του ω η οποία ελαχιστοποιεί την φασματική ακτίνα $\rho(G_\omega)$.

Υποθέτουμε ότι

$$-1 \leq \underline{v}_1 \leq \underline{v} \leq \underline{v}_2 \leq 1, \quad \text{όπου} \quad v = \cos\theta . \quad (4.7)$$

Προφανώς,

$$\max_j |\lambda_j|^2 = 1 - 2\omega(1 - \omega)(1 - v_2)$$

οπότε είναι

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \{ \max_j |\lambda_j| \} &= \min_{\omega} \rho(G_\omega) = \min_{\omega} [1 - 2\omega(1 - \omega)(1 - v_2)]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\min_{\omega} [1 - 2\omega(1 - \omega)(1 - v_2)] \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Εάν τεθῆ

$$f(\omega) = 1 - 2\omega(1 - \omega)(1 - v_2) ,$$

τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = 2(1 - v_2)(2\omega - 1) \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = 4(1 - v_2) > 0 .$$

Έτσι, τό ελάχιστο της $f(\omega)$ δίδεται για $\omega = \frac{1}{2}$ και είναι

$$\min_{\omega} f(\omega) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 + v_2}{2} .$$



Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\min_{\omega} \rho(G_{\omega}) = \rho(G_{\omega_{\text{opt}}}) = \rho(G_{\frac{v_2}{2}}) = \left(\frac{1+v_2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Προφανώς v_2 είναι τό $\max \operatorname{Re} \mu_j$, δηλαδή τό maximum τών πραγματικών μερών τών ιδιοτιμών του G .

Εάν $v_2 = -1$ (τό όποιο ισχύει όταν $\mu_j = -1$ γιά κάθε j), τότε γιά

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \text{ έχουμε } \rho(G_{\omega_{\text{opt}}}) = 0 .$$

iii) Έστω

$$0 < \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 = \rho(G) < 1 .$$

Τότε είναι $|\lambda_j| < 1$ εάν και μόνον εάν

$$\omega^2(\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \theta) + 2\omega(\rho \cos \theta - 1) < 0 . \quad (4.8)$$

Αν υποτεθῆ $\omega < 0$, τότε ἡ (4.8) είναι ισοδύναμος μέ τήν

$$\omega(\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \theta) + 2(\rho \cos \theta - 1) > 0 . \quad (4.9)$$

Αλλά άφοῦ

$$\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \theta \geq \rho^2 + 1 - 2\rho = (1 - \rho)^2 > 0$$

καί

$$1 - \rho \cos \theta \geq 1 - \rho > 0$$

άπό τήν (4.9) προκύπτει ότι ..

$$\omega > \frac{2(1 - \rho \cos \theta)}{\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \theta} > 0$$

τό όποιο είναι άτοπον.

Αν υποτεθῆ $\omega > 0$ τότε ἡ (4.8) ισοδυναμεῖ μέ τήν

$$\omega(\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \theta) + 2(\rho \cos \theta - 1) < 0 \quad (4.10)$$

καί έπομένως



$$0 < \omega < \frac{2(1-\rho \cos \theta)}{\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \theta} = g(\rho, \theta) \quad \text{για κάθε } \mu_j = \rho e^{i\theta}$$

δηλαδή

$$0 < \omega < \min_{\mu_j} g(\rho, \theta)$$

Άρα απέδειχθη τό ἔξῃς θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.

Ἐάν ἡ μέθοδος (4.1) συγκλίνει ($\rho(G) < 1$), τότε ἡ μέθοδος (4.2) συγκλίνει ($\rho(G_\omega) < 1$) ἂν καί μόνον ἂν

$$0 < \omega < \min_{\mu_j} g(\rho, \theta)$$

Θά δειχθῆ τώρα ὅτι

$$\min_{\rho, \theta} g(\rho, \theta) = \frac{2}{1 + \rho(G)}$$

για ὅλα τὰ ρ τέτοια ὥστε $0 < \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 < 1$ καί για ὅλα τὰ θ τέτοια ὥστε $0 \leq \theta < 2\pi$.

Πράγματι εἶναι

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = \frac{\rho^2 \cos \theta - 2\rho + \cos \theta}{(\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \theta)^2} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial g}{\partial (\cos \theta)} = \frac{\rho(1 - \rho^2)}{(\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \theta)^2} > 0$$

ἀπό τίς ὁποῖες προκύπτει ὅτι

$$\min_{\cos \theta} g = g(\rho, \theta = \pi) = \frac{2}{1 + \rho}$$

καί ἐπομένως

$$\min_{\rho, \theta} g(\rho, \theta) = \min_{\rho} \left(\frac{2}{1 + \rho} \right) = \frac{2}{1 + \rho_2} = \frac{2}{1 + \rho(G)}$$

Παρατηροῦμε ὅτι $1 < \frac{2}{1 + \rho(G)} < 2$

Πόρισμα 2.2.



• Αν $\rho(G) < 1$, τότε για κάθε $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(G)}$ είναι $\rho(G_\omega) < 1$.

Απόδειξις

Προκύπτει από το θεώρημα 4-2.1. και εκ του ότι είναι

$$\frac{2}{1+\rho(G)} \leq \min_{\mu_j} g(\rho, \theta) .$$

Πόρισμα 2.3.

• Αν ο πίναξ G έχει μία τουλάχιστον αρνητική ιδιοτιμή μ τέτοια ώστε $|\mu| = \rho(G) < 1$, τότε

$$\rho(G_\omega) < 1 \quad \text{έαν και μόνον έαν} \quad 0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(G)} .$$

Απόδειξις

Προκύπτει από το θεώρημα 4-2.1. αφού στην περίπτωση αυτή είναι

$$\min_{\mu_j} g(\rho, \theta) = g(\rho(G), \pi) = \frac{2}{1+\rho(G)} .$$

Παρατηρήσεις

1. Αν $\rho \leq 1$ τότε $g(\rho, \theta) \geq 1$.
2. Αν θεωρηθῆ ἡ περίπτωση $0 < \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 = \rho(G) \leq 1$ με $\mu_j \neq 1$, τότε είναι $\min_{\mu_j} g(\rho, \theta) = 1$.
3. Αν θεωρηθῆ ἡ περίπτωση $0 \leq \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 = \rho(G) \leq 1$ με $\mu_j \neq 1$ πάλι είναι $\min_{\mu_j} g(\rho, \theta) = 1$.
4. Στην περίπτωση $0 \leq \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 = \rho(G) < 1$, επειδή είναι $g(\rho, \theta) < 2$ αν $\rho^2 > \operatorname{Re} \mu_j$, $g(\rho, \theta) = 2$ αν $\rho^2 = \operatorname{Re} \mu_j$ και $g(\rho, \theta) > 2$ αν $\rho^2 < \operatorname{Re} \mu_j$, συμπεραίνουμε λαμβάνοντας υπ' όψιν και τήν περίπτωση i) ότι



$\rho(G_\omega) < 1$ εάν και μόνον εάν $0 < \omega < \min\{2, \min_j \rho_j(\rho, \theta)\}$.

θεωρώντας τώρα πάλι τήν περίπτωσι iii) θά δειχθῆ ὅτι

$$\frac{2}{1+\rho_2} < \frac{2(1-z_1)}{\rho_2^2+1-2z_1} \leq \min_j \rho_j(\rho, \theta) \quad (4.11)$$

ὅπου $z_1 = \min z$, $z = \operatorname{Re} \mu_j = \rho \cos \theta$.

Απόδειξις

Προφανῶς εἶναι $-1 < z_1 \leq z < 1$ καί $-\rho_2 \leq z_1 \leq \rho_2$ ὁπότε ἔχομε $\rho_2^2 + 1 - 2z_1 \geq \rho_2^2 + 1 - 2\rho_2 = (1 - \rho_2)^2 > 0$.

Γιά νά δειχθῆ ἡ ἐξ ἀριστερῶν ἀνισότης στήν (4.11) ἀρκεῖ νά δειχθῆ ὅτι

$$2(\rho_2^2 + 1 - 2z_1) \leq 2(1 + \rho_2)(1 - z_1) \quad \text{ἢ} \quad (\rho_2 + z_1)(\rho_2 - 1) \leq 0$$

τό ὁποῖο ἰσχύει ἀφοῦ $1 - \rho_2 > 0$ καί $\rho_2 + z_1 \geq 0$.

Γιά τήν ἀπόδειξι τῆς ἐκ δεξιῶν ἀνισότητος στήν (4.11) ἀρκεῖ νά δειχθῆ ὅτι

$$\frac{2(1-z_1)}{\rho_2^2+1-2z_1} \leq \frac{2(1-\rho \cos \theta)}{\rho^2+1-2\rho \cos \theta} \quad \text{γιά κάθε } \mu_j = \rho e^{i\theta}$$

ἢ ἰσοδυνάμως, ἀφοῦ $\rho \cos \theta = z$,

$$\rho^2(1-z_1) - \rho_2^2(1-z) + z_1 - z \leq 0 \quad (4.12)$$

Ἡ (4.12) γράφεται $(1-z)(1-\rho_2^2) \leq (1-z_1)(1-\rho^2)$ καί ἰσχύει διότι

$$0 < 1-z \leq 1-z_1 \quad \text{καί} \quad 0 < 1-\rho_2^2 \leq 1-\rho^2.$$

Ἄρα ἀπεδείχθη τό παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.

Ἐάν $\rho(G) < 1$ καί $z_1 = \min_j \operatorname{Re} \mu_j$, τότε γιά κάθε



$$0 < \omega < \frac{2(1-z_1)}{\rho^2(G)+1-2z_1} \quad \text{είναι} \quad \rho(G_\omega) < 1 .$$

Πόρισμα 2.5.

Εάν ο επαναληπτικός πίναξ G τής μεθόδου (4.1) έχει ιδιοτιμές τέτοιες ώστε $\operatorname{Re} \mu_j \geq 0$ γιά όλα τά j (π.χ. όταν ο πίναξ G πληροῖ τίς προϋποθέσεις του θεωρήματος 1-1.24.), τότε αν $\rho(G) < 1$ καί $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho^2(G)}$ θά είναι $\rho(G_\omega) < 1$.

Απόδειξις

Προκύπτει από τό προηγούμενο θεώρημα άφοῦ τώρα είναι

$$z_1 = \min_j \operatorname{Re} \mu_j = 0 .$$

iv) Έστω $0 \leq \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ μέ $\rho_1 < 1 < \rho_2 = \rho(G)$.

Υποθέτομε επίσης ότι $\mu_j \neq 1$. Θεωροῦμε τίς ιδιοτιμές του G μέ $1 < \rho \leq \rho_2 = \rho(G)$. Τότε είναι $|\lambda_j| < 1$ εάν καί μόνον εάν

$$\omega^2(\rho^2+1-2\rho\cos\theta) + 2\omega(\rho\cos\theta-1) < 0 . \quad (4.13)$$

1. Έστω $\omega < 0$. Τότε επειδή $\rho^2+1-2\rho\cos\theta \geq (1-\rho)^2 > 0$ από

τήν (4.13) έπεται ότι $\omega > \frac{2(1-\rho\cos\theta)}{\rho^2+1-2\rho\cos\theta}$. Για να υπάρχουν αρ-

νητικές τιμές του ω πρέπει $1-\rho\cos\theta < 0$. Δηλαδή, πρέπει τά πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών που θεωρούμε να είναι > 1 . Αυτό σημαίνει πως αν ο G έχει μόνον πραγματικές ιδιοτιμές, εκείνες που έχουν μέτρο > 1 πρέπει να είναι θετικές καί > 1 . Έπειδή για τίς υπόλοιπες ιδιοτιμές μέ $0 \leq \rho_1 \leq \rho \leq 1$ (βδε περιπτώσεις i), ii), iii)) μόνον για θετικά ω υπάρχει σύγκλιση, συμπεραίνομε ότι ή περίπτωση $\omega < 0$ άπορρίπτεται.

2. Έστω $\omega > 0$. Τότε είναι $|\lambda_j| < 1$ εάν καί μόνον εάν

$$\omega < \frac{2(1-\rho\cos\theta)}{\rho^2+1-2\rho\cos\theta} , \quad \text{όπως προκύπτει από τήν (4.13) .}$$



Πρέπει δέ νά εἶναι $1 - \rho \cos \theta > 0$ ἢ $\rho \cos \theta < 1$. Δηλαδή, πρέπει τά πραγματικά μέρη τῶν ιδιοτιμῶν πού θεωροῦμε νά εἶναι < 1 . Αὐτό σημαίνει πὼς στήν περίπτωσι πού ὁ G ἔχει μόνον πραγματικές ιδιοτιμές, ἐκεῖνες πού ἔχουν μέτρο > 1 πρέπει νά εἶναι ἀρνητικές καί < -1 . Θεωρώντας τώρα ὅλες τίς ιδιοτιμές τοῦ G , λαμβάνοντας δέ ὑπ' ὄψιν τίς περιπτώσεις i), ii) καί iii) καθὼς ἐπίσης καί τήν παρατήρησι ὅτι εἶναι

$$\frac{2(1 - \rho \cos \theta)}{\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \theta} \leq 1 \quad \text{γιά} \quad \rho \geq 1 \quad \text{προκύπτει τό ἑξῆς θεώρημα.}$$

Θεώρημα 2.6.

Ἐάν $\rho(G) > 1$, $\mu_j \neq 1$ καί $\operatorname{Re} \mu_j < 1$ γιά $\rho > 1$, τότε $\rho(G_\omega) < 1$ ἔάν καί μόνον ἔάν $0 < \omega < \min_{\mu_j}(\rho, \theta)$.

Πόρισμα 2.7.

Ἐάν $\mu_j \neq 1$, $1 \leq \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 = \rho(G)$ καί $\operatorname{Re} \mu_j < 1$, τότε $\rho(G_\omega) < 1$ ἔάν καί μόνον ἔάν $0 < \omega < \min_{\mu_j}(\rho, \theta)$.

Θεώρημα 2.8.

Ἐάν $\rho(G) > 1$ καί $\operatorname{Re} \mu_j \leq 0$, τότε ἔχομε $\rho(G_\omega) < 1$ γιά κάθε $0 < \omega < \frac{2}{1 + \rho^2(G)}$.

Ἀπόδειξις

Ἡ ἀπόδειξις προκύπτει ἀπό τό θεώρημα 4-2.6. διότι πληροῦνται αἱ προυποθέσεις αὐτοῦ καί ἐπί πλέον ἰσχύει

$$\frac{2}{1 + \rho^2(G)} < \frac{2(1 - \rho \cos \theta)}{\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \theta} \quad \text{γιά κάθε} \quad \mu_j \quad (4.14)$$

Πράγματι, ἀρκεῖ νά δειχθῇ ἡ (4.14) γιά $\rho > 1$ καί



$\rho \cos \theta \leq 0$. 'Αλλά ή (4.14) είναι ισοδύναμος μέ τήν

$$\rho^2 - 1 \leq (1 - \rho \cos \theta)(\rho^2(G) - 1)$$

ή όποία ισχύει διότι είναι $0 < \rho^2 - 1 \leq \rho^2(G) - 1$ και $1 \leq 1 - \rho \cos \theta$ άφοϋ $\rho \cos \theta \leq 0$.

Θεώρημα 2.9.

'Εάν ό G έχει ιδιοτιμές μ_j μέ $1 < \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 = \rho(G)$, τότε ισχύουν τά ακόλουθα .

1."Αν $\operatorname{Re} \mu_j > 1$, τότε $\rho(G_\omega) < 1$ εάν και μόνον εάν

$$\max_{\mu_j} g(\rho, \theta) < \omega < 0 .$$

2."Αν $\operatorname{Re} \mu_j < 1$, τότε $\rho(G_\omega) < 1$ εάν και μόνον εάν

$$0 < \omega < \min_{\mu_j} g(\rho, \theta) .$$

'Απόδειξις

Προκύπτει από τά συμπεράσματα τής περιπτώσεως iv).

Παρατηρήσεις

1. Στο πόρισμα 4-2.5. είναι $\frac{2}{1 + \rho^2(G)} > \frac{2}{1 + \rho(G)}$ άφοϋ

$\rho(G) < 1$ (υποτίθεται ότι $\rho(G) \neq 0$). 'Επομένως ένα μεγαλύτερο άνω φράγμα για τό ω λαμβάνεται άπ' ότι στό πόρισμα 4-2.2.

2. Μία άλλη άπόδειξις του πορίσματος 4-2.2. προκύπτει ως άκολούθως.

'Από τήν (4.6) είναι $\rho(G_\omega) \leq |1 - \omega| + |\omega| \rho(G)$. 'Αρκεί επομένως νά δειχθῆ ότι

$$|1 - \omega| + |\omega| \rho(G) < 1 ,$$



•
δταν $\rho(G) < 1$ καί $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(G)}$.

Διακρίνομε τίς δύο περιπτώσεις $0 < \omega \leq 1$ καί $1 < \omega < \frac{2}{1+\rho(G)}$.

Γιά $0 < \omega \leq 1$ ή (4.15) είναι ίσοδύναμος μέ τήν $1 - \omega + \omega\rho(G) < 1$ ή $-\omega(1 - \rho(G)) < 0$ ή όποία προφανώς ίσχύει .

Γιά $1 < \omega < \frac{2}{1+\rho(G)}$ ή (4.15) ίσοδυναμεί μέ τήν $\omega - 1 + \omega\rho(G) < 1$.

Άλλά είναι $\omega - 1 + \omega\rho(G) = \omega(1 + \rho(G)) - 1 < 2 - 1 = 1$. Άρα ή (4.15) ίσχύει .

3. Έπειδή ό επαναληπτικός πίναξ B τής μεθόδου Jacobi έχει $\text{tr}(B) = 0$, τότε από τό θεώρημα 4-2.9. προκύπτει ότι, άν ό B έχει όλες τίς ιδιοτιμές του πραγματικές μέ μέτρα > 1 , τότε ή JOR μέθοδος δέν συγκλίνει .

Τό παρακάτω θεώρημα προκύπτει σάν εφαρμογή του πορίσματος 4-2.2. καί είναι γενικώτερο του θεωρήματος 1.1. σελ. 107 [30].

θεώρημα 2.10.

Έάν ή μέθοδος J συγκλίνει ($\rho(B) < 1$), τότε ή JOR μέθοδος συγκλίνει ($\rho(B_\omega) < 1$) γιά κάθε $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(B)}$.

θεώρημα 2.11.

Έάν ό G έχει ιδιοτιμές μ_j μέ $\text{Re}\mu_j > 1$ καί $1 < \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 = \rho(G)$ τότε είναι $\rho(G_\omega) < 1$ γιά κάθε $\frac{2}{1-\rho(G)} < \omega < 0$.

Απόδειξις

Προκύπτει από τό θεώρημα 4-2.9. μέ τήν παρατήρησι ότι

είναι $\frac{2(1-\rho\cos\theta)}{\rho^2+1-2\rho\cos\theta} < \frac{2}{1-\rho(G)}$ γιά κάθε μ_j , δηλαδή

$$\max_{\mu_j} \rho(\rho, \theta) < \frac{2}{1-\rho(G)} .$$



θεωρούμε τώρα την περίπτωση που ο πίναξ G έχει ιδιοτιμές μ_j τέτοιες ώστε $0 \neq \rho(G) < 1$ και αναζητούμε τιμές του ω για τις οποίες ισχύει $\rho(G_\omega) \leq \rho(G)$.

Απαιτούμε να ισχύει $|\lambda_j| \leq |\mu_j|$ για κάθε j , όπου λ_j είναι οι ιδιοτιμές του G_ω και δίδονται από την (4.5).

Λόγω της (4.4), προκύπτει ότι είναι $|\lambda_j| \leq |\mu_j|$ εάν και μόνον εάν ισχύει η

$$F(\omega) = \omega^2(\rho^2 + 1 - 2\rho \cos\theta) + 2\omega(\rho \cos\theta - 1) + 1 - \rho^2 \leq 0. \quad (4.16)$$

Επειδή είναι $\rho^2 + 1 - 2\rho \cos\theta \geq (1 - \rho)^2 > 0$ και η διακρίνουσα του τριωνύμου $F(\omega)$ είναι $\Delta = 4\rho^2(\rho - \cos\theta)^2 \geq 0$, έπεται ότι η (4.16) ισχύει εάν και μόνον εάν $\min(\omega_1, \omega_2) \leq \omega \leq \max(\omega_1, \omega_2)$, όπου οι ρίζες ω_1 και ω_2 του τριωνύμου $F(\omega)$ δίδονται από τις

$$\omega_1 = 1 \quad \text{και} \quad \omega_2 = \frac{1 - \rho^2}{\rho^2 + 1 - 2\rho \cos\theta}. \quad (4.17)$$

Παρατηρούμε ότι είναι $\omega_2 > 1$ αν $\rho < \cos\theta$, $\omega_2 < 1$ αν $\rho > \cos\theta$ και επίσης ότι $\rho \geq \cos\theta$ εάν και μόνον εάν $\rho^2 \geq \operatorname{Re}\mu_j$.

Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω απέδειχθη τό εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.12.

Αν ο G έχει ιδιοτιμές μ_j και $0 \neq \rho(G) < 1$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

i) Αν είναι $\rho^2 < \operatorname{Re}\mu_j$ για κάθε j , τότε για κάθε

$$1 \leq \omega \leq \min_j \frac{1 - \rho^2}{\rho^2 + 1 - 2\operatorname{Re}\mu_j} \quad \text{είναι} \quad \rho(G_\omega) \leq \rho(G).$$

ii) Αν είναι $\rho^2 > \operatorname{Re}\mu_j$ για κάθε j , τότε για κάθε

$$\max_j \frac{1 - \rho^2}{\rho^2 + 1 - 2\operatorname{Re}\mu_j} \leq \omega \leq 1 \quad \text{είναι} \quad \rho(G_\omega) \leq \rho(G).$$

Παρατήρησης



Ο περιορισμός $\rho^2 < \operatorname{Re} \mu_j$ συνεπάγεται ότι $\rho < 1$ και άρα $\rho(G) < 1$, ενώ ο $\rho^2 > \operatorname{Re} \mu_j$ όχι.

Αν τεθῆ $\mu_j = x + i\psi$, τότε είναι $x = \operatorname{Re} \mu_j$, $\psi = \operatorname{Im} \mu_j$ και $\rho^2 = x^2 + \psi^2$. Το παρακάτω λήμμα του οποίου η απόδειξις προκύπτει εύκολα μᾶς δίδει διαστήματα για τὰ x και ψ οὕτως ὥστε νά ἰσχύουν αἱ σχέσεις $\rho^2 < x$ ἢ $\rho^2 > x$ και $\rho < 1$.

Λήμμα 2.13.

1. Είναι $\rho^2 = x^2 + \psi^2 < x = \operatorname{Re} \mu_j$ εάν και μόνον εάν

$$|\psi| < \frac{1}{2} \text{ και } \frac{1-k}{2} < x < \frac{1+k}{2}, \text{ ὅπου } k = (1-4\psi^2)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Είναι $\rho^2 = x^2 + \psi^2 > x = \operatorname{Re} \mu_j$ και $x^2 + \psi^2 = \rho^2 < 1$ εάν και μόνον εάν ἰσχύει ἐκάστη τῶν κατωτέρω προτάσεων.

i) $-1 < x < 0$ και $|\psi| < (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

ii) $-1 < \psi \leq -\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{1}{2} \leq \psi < 1$ και $0 < x < (1-\psi^2)^{\frac{1}{2}}$.

iii) $|\psi| < \frac{1}{2}$ και $(1+k)/2 < x < (1-\psi^2)^{\frac{1}{2}}$ ἢ $0 < x < (1-k)/2$,

ὅπου $k = (1-4\psi^2)^{\frac{1}{2}}$.

Σάν ἐφαρμογή στό θεώρημα 4-2.12. ἀναφέρομε τό ἐξῆς παράδειγμα.

Αν

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{13}{72} & -\frac{31}{36} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \text{ μέ ἰδιοτιμές } \mu_j = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3}i,$$

πού πληροῦν τήν σχέσι $\rho^2 < \operatorname{Re} \mu_j$, $j = 1, 2, 3$, τότε ἐπειδή εἶναι

$$\min_j \frac{1-\rho^2}{\rho^2 + 1 - 2\operatorname{Re} \mu_j} = \frac{23}{13}, \text{ προκύπτει ὅτι γιά κάθε}$$



$$\omega \in (1, \frac{23}{13}) \quad \text{έχομε} \quad \rho(G_\omega) < \rho(G).$$

Πρίν κλείσομε τό κεφάλαιο αυτό πρέπει νά σημειωθοῦν καί τά ἑξῆς.

Ὅπως εἶναι γνωστό τό πρόβλημα τῆς εὐρέσεως μιᾶς θεωρητικῆς optimum τιμῆς γιά τό ω , τῆς ω_{opt} , τέτοιας ὥστε

$$\rho(G_{\omega_{opt}}) = \min_{\omega} \rho(G_\omega) \leq \rho(G) \quad \text{καί} \quad \rho(G_{\omega_{opt}}) < 1,$$

δέν ἔχει ἐπιλυθῆ στήν γενική περίπτωσι παρά μόνον σέ μερικές εἰδικές περιπτώσεις. Ἔτσι, εἶναι εὐκολο νά δειχθῆ ὅτι ἂν ὁ πίναξ G ἔχει ἰδιοτιμές μ_j πραγματικές καί τέτοιες ὥστε

$$\mu_m \leq \mu_j \leq \mu_M < 1, \quad (4.18)$$

τότε ἡ φασματική ἀκτίς $\rho(G_\omega)$, τοῦ G_ω , ἐλαχιστοποιεῖται ἐάν

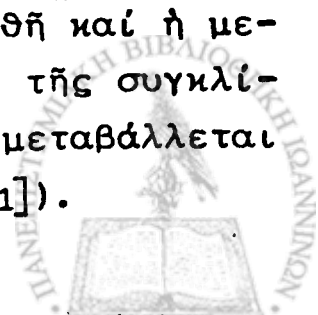
ληφθῆ $\omega = \omega_{opt} = \frac{2}{2 - (\mu_m + \mu_M)} > 0$ διότι ἀπό τήν (4.18) εἶναι $\mu_m + \mu_M < 2$.

Ἐπί πλέον, εἶναι

$$\rho(G_{\omega_{opt}}) = \frac{\mu_M - \mu_m}{2 - (\mu_M + \mu_m)} < 1 \quad \text{ἀφοῦ} \quad \mu_M < 1.$$

Ἔτσι, ἡ optimum extrapolated μέθοδος πάντοτε συγκλίνει σ'αυτή τήν περίπτωσι. Πρέπει νά σημειωθῆ ὅτι ἡ (4.18) ἰσχύει ἂν G εἶναι ὁ πίναξ Jacobi B πού ἀντιστοιχεῖ σέ ἕναν positive definite πίνακα A . Τότε ἡ optimum JOR μέθοδος συγκλίνει. Γιά πρακτικούς σκοπούς καί στίς περιπτώσεις πού δέν εἶναι εἰδικές ὅπως ἡ προηγουμένως ἀναφερθεῖσα, ἡ ἐκλογή τοῦ ω_{opt} γίνεται ὑπολογιστικῶς μέσα ἀπό τό διάστημα γιά τό ὁποῖο εἶναι $\rho(G_\omega) < 1$ οὕτως ὥστε νά ἐλαχιστοποιηθῆ ἡ $\rho(G_\omega)$.

Ἀναφέρομε ἀκόμη ὅτι μπορεῖ νά χρησιμοποιηθῆ καί ἡ μεταβλητή extrapolation μέθοδος γιά τήν ἐπιτάχυνσι τῆς συγκλίσεως τῆς μεθόδου (4.1). Σ'αυτήν ἡ παράμετρος ω μεταβάλλεται ἀπό ἐπανάληψι σέ ἐπανάληψι κυκλικῶς (ἴδε π.χ. [31]).



Κεφαλαίον 5

ΕΧΤΡΑΠΟΛΑΤΙΟΝ ΚΑΙ ΑΟΡ ΜΕΘΟΔΟΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ

5.1. Γενικά

Από την (2.20) έχουμε ότι ο επαναληπτικός πίναξ της SOR μεθόδου είναι

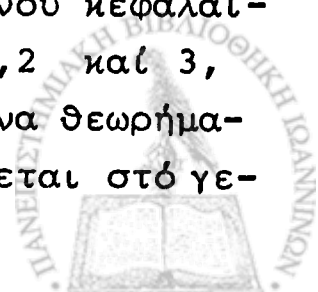
$$L_r = L_{r,r} = (I - rL)^{-1} [(1-r)I + rU] .$$

Εάν σχηματίσουμε την extrapolated SOR μέθοδο με extrapolation παράμετρο $s = \frac{\omega}{r}$, τότε αυτή έχει επαναληπτικό πίνακα

$$\begin{aligned} (1-s)I + sL_{r,r} &= \frac{\omega}{r} L_{r,r} + (1 - \frac{\omega}{r})I = \frac{\omega}{r} (I - rL)^{-1} [(1-r)I + rU] + \\ &+ (1 - \frac{\omega}{r})I = (I - rL)^{-1} \left[\frac{\omega}{r}(1-r)I + \omega U + (I - rL) \left(\frac{r-\omega}{r} \right) \right] = \\ &= (I - rL)^{-1} [(1-\omega)I + (\omega-r)L + \omega U] = L_{r,\omega} \end{aligned}$$

λόγω της (3.2) Άρα η AOR μέθοδος είναι μία extrapolated μέθοδος της SOR μεθόδου για $r \neq 0$, ενώ για $r = 0$ είναι η extrapolated Jacobi μέθοδος (JOR).

Έχοντας υπ' όψιν την ανάλυση του προηγουμένου κεφαλαίου καθώς και βασικά συμπεράσματα των κεφαλαίων 1, 2 και 3, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε στη συνέχεια ώρισμα θεωρήματα συγκλίσεως της AOR μεθόδου όταν αυτή εφαρμόζεται στο γε-



νικό σύστημα (2.1) στο οποίο ο πίναξ A έχει ώρισμένες ιδιότητες. Έτσι, στίς περιπτώσεις πού θά θεωρηθοῦν, ο πίναξ A θά εἶναι

- i) Ένας irreducible καί άσθενώς διαγωνίως ὑπερτερῶν πίναξ.
- ii) Ένας positive definite πίναξ.
- iii) Ένας L -πίναξ.
- iv) Ένας M -πίναξ καί
- v) Ένας Stieltjes πίναξ.

Στά ἐπόμενα θά συμβολίζεται με $L_{0,1}$ ο Jacobi πίναξ B καί με $L_{0,\omega}$ ο πίναξ τῆς JOR, δηλαδή ο B_ω , πού ἀντιστοιχοῦν στόν πίνακα A .

5.2. Θεωρήματα συγκλίσεως

Θέωρημα 2.1.

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας nonsingular πίναξ με $a_{ii} \neq 0$. Έάν ἡ SOR μέθοδος συγκλίνει για κάθε $0 < \underline{\alpha} \leq r \leq \beta < 2$, τότε ἡ AOR μέθοδος συγκλίνει για όλα τά r καί ω τέτοια ὥστε

$$\underline{\alpha} \leq r \leq \beta \text{ καί } 0 < \omega < \frac{2r}{1 + \rho(L_{r,r})} .$$

Έπί πλέον, έχομε

$$\rho(L_{r,\omega}) \leq r^{-1} (|r-\omega| + \omega \rho(L_{r,r})) < 1 .$$

Απόδειξις

Αφοῦ για $\underline{\alpha} \leq r \leq \beta$ εἶναι $\rho(L_{r,r}) < 1$ τότε σύμφωνα με τό πόρισμα 4-2.2. για κάθε $0 < \frac{\omega}{r} < \frac{2}{1 + \rho(L_{r,r})}$ εἶναι $\rho(L_{r,\omega}) < 1$.

Επομένως, αφοῦ $r > 0$ προκύπτει ὅτι ἡ AOR μέθοδος συγκλίνει για κάθε $\underline{\alpha} \leq r \leq \beta$ καί $0 < \omega < \frac{2r}{1 + \rho(L_{r,r})}$.



Από την (4.6) τώρα έχουμε

$$\rho(L_{r,\omega}) \leq \left|1 - \frac{\omega}{r}\right| + \frac{\omega}{r} \rho(L_{r,r}) < 1$$

καθ' όσον η απόδειξις είναι ανάλογος με εκείνη της σχέσεως (4.15).

i) Irreducible και άσθενώς διαγωνίως υπερτεροῦντες πίνακες.

Θεώρημα 2.2.

Έστω A ένας irreducible και άσθενώς διαγωνίως υπερτερῶν πίναξ. Τότε για κάθε

$$0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(L_{0,1})} \quad \text{είναι} \quad \rho(L_{0,\omega}) < 1.$$

Απόδειξις

Σύμφωνα με τό θεώρημα 2-3.2. είναι $\rho(L_{0,1}) < 1$. Από τό θεώρημα τώρα 4-2.10. προκύπτει ότι για κάθε $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(L_{0,1})}$ είναι $\rho(L_{0,\omega}) < 1$. Τό θεώρημα αυτό επέκτεινει τό βασικό αποτέλεσμα του θεωρήματος 2.1(α) σελ. 107 [30].

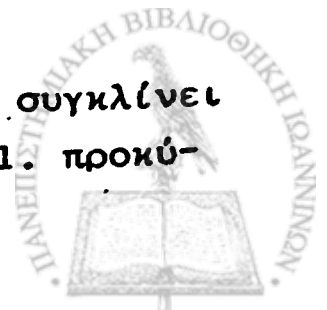
Πόρισμα 2.3.

Έστω A ένας irreducible και άσθενώς διαγωνίως υπερτερῶν πίναξ. Τότε για κάθε

$$0 < r \leq 1 \quad \text{καί} \quad 0 < \omega < \frac{2r}{1+\rho(L_{r,r})} \quad \text{είναι} \quad \rho(L_{r,\omega}) < 1.$$

Απόδειξις

Σύμφωνα με τό θεώρημα 2-3.2. ή SOR μέθοδος συγκλίνει για κάθε $0 < r \leq 1$. Επομένως από τό θεώρημα 5-2.1. προκύ-



πει τό παρόν πόρισμα.

θεώρημα 2.4.

Έστω A ένας irreducible και άσθενώς διαγωνίως υπερτερών πίναξ. Τότε για κάθε $0 \leq r \leq 1$ και $0 < \omega \leq \max(1, \frac{2r}{1+\rho(L_{r,r})})$ έχουμε

$\rho(L_{r,\omega}) < 1$, όπου τό = στό διάστημα του ω ίσχύει όταν

$$\max(1, \frac{2r}{1+\rho(L_{r,r})}) = 1 .$$

Απόδειξις

Τό αποτέλεσμα προκύπτει από τό προηγούμενο πόρισμα και από τό θεώρημα της παραγράφου 3 του [10] τό όποιο λέγει ότι: "Έάν A είναι ένας irreducible και άσθενώς διαγωνίως υπερτερών πίναξ, τότε για κάθε $0 \leq r \leq 1$ και $0 < \omega \leq 1$ έχουμε $\rho(L_{r,\omega}) < 1$ ". Η περίπτωση $r=0$ καλύπτεται από τό θεώρημα 4-2.2. Προφανώς, τό παρόν θεώρημα αποτελεί μία επέκταση εκείνου του [10] εάν και μόνον εάν $\rho(L_{r,r}) < 2r-1$.

ii) Positive definite πίνακες

θεώρημα 2.5.

Αν A είναι ένας positive definite πίναξ, τότε για κάθε

$$0 < r < 2 \quad \text{και} \quad 0 < \omega < \frac{2r}{1+\rho(L_{r,r})} \quad \text{έχομε} \quad \rho(L_{r,\omega}) < 1 .$$

Απόδειξις

Από τό θεώρημα 2-3.3. προκύπτει ότι είναι $\rho(L_{r,r}) < 1$.

για κάθε $0 < r < 2$. Έτσι, ή αλήθεια του θεωρήματος βασίζεται στην ίσχύ του θεωρήματος 5-2.1.



Πρόβλημα 2.62

Εάν \mathcal{A} είναι ένας $n \times n$ πίνακας \rightarrow \mathbb{R} είναι αντιστρέψιμος

και $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

Εάν \mathcal{A} είναι $n \times n$ \rightarrow \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

και $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

Πρόβλημα 2.63

Εάν \mathcal{A} είναι $n \times n$ \rightarrow \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

και $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

Πρόβλημα 2.64

Προσδιορίστε όλους τους $n \times n$ πίνακες $1 \leq n \leq 20$ και τους $n \times n$

πίνακες $1 \leq n \leq 20$ το άκρως κείμενο του πίνακα \mathcal{A} είναι $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

και είναι $n \times n$ πίνακας \mathcal{A} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

και $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

Πρόβλημα 2.65

Εάν \mathcal{A} είναι $n \times n$ \rightarrow \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

και $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

Πρόβλημα 2.66

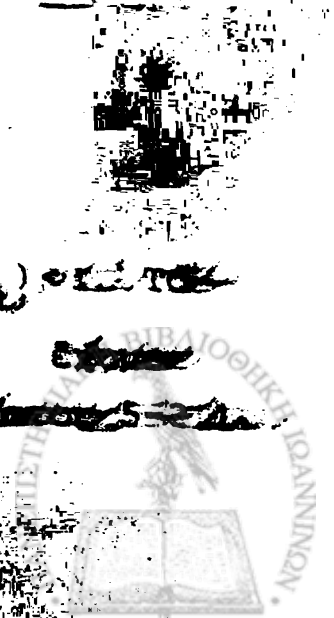
Εάν \mathcal{A} είναι $n \times n$ \rightarrow \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

και $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

και $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

και $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$

και $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ \in $\mathbb{R}^{n \times n}$ $0 < n < \infty$ \mathbb{R} $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$



Επειδή είναι $r < \frac{2r}{1+\rho(L_{r,r})}$ και σε συνδυασμό με το θεώρημα της παραγράφου 4 του [10] το οποίο λέγει ότι: "Αν A είναι ένας L -πίναξ με $\rho(L_{0,1}) < 1$, τότε για κάθε $0 < r \leq \omega \leq 1$ ($\omega \neq 0$) είναι $\rho(L_{r,\omega}) < 1$ ", προκύπτει το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.8.

Αν A είναι ένας M -πίναξ, τότε για κάθε

$$0 \leq r \leq 1 \text{ και } 0 < \omega \leq 1 \text{ έχουμε } \rho(L_{r,\omega}) < 1.$$

Πόρισμα 2.9.

Αν A είναι ένας M -πίναξ, τότε για κάθε $0 \leq r \leq 1$ και

$$0 < \omega \leq \max(1, \frac{2r}{1+\rho(L_{r,r})}) \text{ έχουμε } \rho(L_{r,\omega}) < 1, \text{ όπου } \tau = \text{στό διάστημα}$$

$$\text{μα του } \omega \text{ ισχύει όταν } \max(1, \frac{2r}{1+\rho(L_{r,r})}) = 1.$$

Απόδειξις

Εάν $\max(1, \frac{2r}{1+\rho(L_{r,r})}) = \frac{2r}{1+\rho(L_{r,r})}$, τότε έχουμε το θεώρημα 5-2.7.

Εάν $\max(1, \frac{2r}{1+\rho(L_{r,r})}) = 1$, τότε έχουμε το θεώρημα 5-2.8.

Θεώρημα 2.10.

Αν A είναι ένας M -πίναξ, τότε για κάθε

$$0 < r < \frac{2}{1+\rho(L_{0,1})} \text{ και } 0 < \omega < \frac{2r}{1+\rho(L_{r,r})} \text{ έχουμε } \rho(L_{r,\omega}) < 1.$$

Απόδειξις

Αφού ο A είναι ένας M -πίναξ, τότε σύμφωνα με το θε-



ώρημα 2-3.5. Έχουμε $\rho(L_{r,r}) < 1$ για κάθε $0 < r < \frac{2}{1+\rho(L_{0,1})}$. Τό
θεώρημα τώρα 5-2.1. συμπληρώνει τήν απόδειξι του παρόντος.

Θεώρημα 2.11.

"Εστω A ένας L-πίναξ. "Αν ή AOR μέθοδος συγκλίνει για
κάθε $0 < \omega = r < \frac{2}{1+\rho(L_{0,1})}$, τότε ό A είναι ένας M-πίναξ.

Απόδειξις

"Αρκεί νά δειχθῆ ότι $\rho(L_{0,1}) < 1$. "Εάν υποθέσομε ότι
 $\rho(L_{0,1}) \geq 1$, τότε είναι $\frac{2}{1+\rho(L_{0,1})} \leq 1$ και σύμφωνα μέ τό θεώρη-
μα 2-3.4. Έχομε ότι $\rho(L_{r,r}) \geq 1$ για κάθε $0 < r \leq 1$, τό όποϊον
δέν είναι άληθές. "Ετσι έχομε $\rho(L_{0,1}) < 1$ και ως έκ τούτου
ό A είναι M-πίναξ.

Θεώρημα 2.12.

"Αν A είναι ένας M-πίναξ, τότε για κάθε

$$0 < r < \frac{2}{1+\rho(L_{0,1})} \text{ και } 0 < \omega < \frac{2r}{1+|r-1|+\rho(L_{0,1})} \quad \text{έχομε}$$

$$\rho(L_{r,\omega}) < 1.$$

Απόδειξις

Προκύπτει από τό θεώρημα 5-2.10. Αυτό γιατί σύμφωνα
μέ τό θεώρημα 1(viii) του [26] είναι $\rho(L_{r,r}) \leq r\rho(L_{0,1}) + |r-1|$.
"Αρα είναι

$$2r/(1+|r-1|+\rho(L_{0,1})) \leq 2r/(1+\rho(L_{r,r})).$$

Θεώρημα 2.13.



Εάν A είναι ένας M -πίναξ και $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \omega \leq 1$ ($\omega \neq 0$), τότε είναι $\rho(L_{r_2, \omega}) \leq \rho(L_{r_1, \omega}) < 1$.

Απόδειξις

Σύμφωνα με το θεώρημα 5-2.8. για κάθε $0 \leq r \leq 1$ και $0 < \omega \leq 1$ έχουμε $\rho(L_{r, \omega}) < 1$. Είναι

$$L_{r, \omega} = (I - rL)^{-1} [(1 - \omega)I + (\omega - r)L + \omega U] = Q^{-1}(r)R(\omega, r)$$

όπου

$$Q(r) = I - rL \quad \text{και} \quad R(\omega, r) = (1 - \omega)I + (\omega - r)L + \omega U.$$

Επομένως

$$Q^{-1}(r) = I + rL + r^2L^2 + \dots + r^{n-1}L^{n-1} \geq 0.$$

Επί πλέον είναι $R(\omega, r) \geq 0$ αφού ο A είναι M -πίναξ. Επίσης, αφού $\omega - r$ είναι μία φθίνουσα ως προς r , μη αρνητική συνάρτησις, έπεται ότι εάν $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \omega \leq 1$ ($\omega \neq 0$), τότε θα είναι $R(\omega, r_2) \leq R(\omega, r_1)$. Από το πόρισμα τώρα 5.6. σελ. 125 [30] προκύπτει ότι $\rho(L_{r_2, \omega}) \leq \rho(L_{r_1, \omega}) < 1$.

v) Stieltjes πίνακες

Πόρισμα 2.14.

Εάν A είναι ένας Stieltjes πίναξ, τότε για κάθε

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \rho(L_{0, 1})} \quad \text{έχουμε} \quad \rho(L_{0, \omega}) < 1.$$

Επίσης, για κάθε

$$0 < r < 2 \quad \text{και} \quad 0 < \omega < \frac{2r}{1 + \rho(L_{r, r})} \quad \text{είναι} \quad \rho(L_{r, \omega}) < 1.$$

Απόδειξις



Αφοῦ ὁ A εἶναι ἕνας positive definite L -πίναξ θά εἶναι $L_{0,1} \geq 0$. Ἄρα $\rho(L_{0,1})$ εἶναι μία ἰδιοτιμὴ τοῦ $L_{0,1}$ καὶ σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα 2-3.7. θά εἶναι $\rho(L_{0,1}) < 1$. ("Ἴδε ἐπίσης πόρισμα 2-3.6.). Ἐπομένως ἀφοῦ ὁ A εἶναι M -πίναξ ἀπὸ τὸ θεώρημα 5-2.6. προκύπτει ἡ ἰσχύς τῆς πρώτης προτάσεως. Ἡ δευτέρα πρότασις προκύπτει ἀπὸ τὸ θεώρημα 5-2.5. προφανῶς. Τὸ παρὸν πόρισμα εἶναι γενικώτερο τοῦ πορίσματος 5.3 σελ. 122 [30].

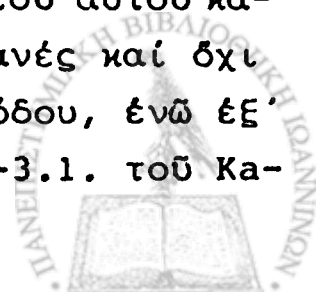
Ἀπὸ τὸ πόρισμα 2-3.11. προκύπτει ἐπίσης τὸ παρακάτω

Πόρισμα 2.15.

Ἐάν A εἶναι ἕνας positive definite consistently ordered πίναξ, τότε γιὰ κάθε $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(L_{0,1})}$ εἶναι $\rho(L_{0,\omega}) < 1$.

5.3. Ἀριθμητικὰ Παραδείγματα

Τὰ παραδείγματα, τὰ ὁποῖα θά ἀναφερθοῦν στή συνέχεια, ἐπιβεβαιώνουν ἀσφαλῶς τὴν ἰσχύ τῶν ἀντιστοιχῶν θεωρημάτων, τὰ ὁποῖα παρουσιάσθηκαν προηγουμένως καὶ ἐπὶ πλέον ἀποδεικνύουν τὴν ἀσυμπτωτικὴ ὑπεροχὴ ὡς πρὸς τὴν ταχύτητα συγκλίσεως τῆς AOR μεθόδου ἔναντι τῆς SOR μεθόδου. Γιὰ τὸν σκοπὸ αὐτό, ἐπεξεργασθῆκαμε σὲ ἠλεκτρονικὸ ὑπολογιστὴ ἕναν μεγάλο ἀριθμὸ παραδειγμάτων, καταλλήλων γιὰ τὴν κάθε περίπτωσις καὶ εὐρέθησαν αἱ optimum φασματικαὶ ἀκτῖνες τῶν ἀντιστοιχῶν ἐπαναληπτικῶν πινάκων ὅλων τῶν περιπτώσεων πού θεωρήθηκαν. Αἱ παράμετροι r καὶ ω τῆς AOR μεθόδου ἔλαβον ὅλες τίς τιμές $0(0.01)^2$ καὶ $0.01(0.01)^2$ ἀντιστοιχῶς καὶ ἀνεξαρτήτως ἢ μίᾳ ἀπὸ τὴν ἄλλη. Τὸ ἄνω φράγμα 2 στίς τιμές τῶν παραμέτρων ἐξελέγη ἐπειδὴ ὅλα τὰ θεωρήματα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ καθὼς καὶ ἐκεῖνα τοῦ κεφαλαίου 3 δίδουν μόνον ἰκανές καὶ ὄχι ἀναγκαῖες συνθήκες γιὰ τὴν σύγκλιση τῆς AOR μεθόδου, ἐνῶ ἐξ ἄλλου, ἐπιπροσθέτως πρὸς αὐτό, ἀπὸ τὸ θεώρημα 2-3.1. τοῦ Ka-



han, έχουμε ότι εάν η SOR μέθοδος συγκλίνει, τότε θα είναι $0 < r < 2$.

Χρησιμοποιώντας τον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή UNIVAC 1106 του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης και με ένα μέγιστο επιτρεπτό σχετικό σφάλμα $E = 10^{-4}$ στην εύρεσι των φασματικών ακτίνων καταλήξαμε στα αυτά, σχεδόν πάντοτε, αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν και από τα παρουσιαζόμενα κατωτέρω παραδείγματα στην περίπτωση που ο πίναξ A είναι τάξεως 3.

i) Στην περίπτωση που A είναι ο ακόλουθος irreducible και άσθενως διαγωνίως υπερτερών πίναξ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.25 \\ 0.6 & 1 & 0.2 \\ -0.5 & 0.3 & 1 \end{bmatrix},$$

ή optimum φασματική ακτίνα της AOR μεθόδου εύρεθη ότι είναι $\rho_{\text{opt}}(L_{r,\omega}) = \rho(L_{r_{\text{opt}},\omega_{\text{opt}}}) = \min_{r,\omega} \rho(L_{r,\omega}) \approx 0.272$ για τις τιμές των παραμέτρων $r_{\text{opt}} = 1.26$ και $\omega_{\text{opt}} = 1.18$, ενώ η optimum φασματική ακτίς της SOR μεθόδου δίδεται για $r_{\text{opt}} = 1.24$ και είναι $\rho_{\text{opt}}(L_{r,r}) \approx 0.327$.

ii) Στην περίπτωση που A είναι ο κάτωθι positive definite πίναξ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 & 1 \end{bmatrix},$$

εύρεθησαν $\rho_{\text{opt}}(L_{r,\omega}) \approx 0.196$ για $r_{\text{opt}} = 1.03$ και $\omega_{\text{opt}} = 1.23$, ενώ $\rho_{\text{opt}}(L_{r,r}) \approx 0.282$ για $r_{\text{opt}} = 1.08$.



iii) "Αν A είναι ο ακόλουθος L -πίναξ με $\rho(L_{0,1}) < 1$,

δηλαδή ο M -πίναξ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ (είναι } \rho(L_{0,1}) = 0.5)$$

έχουμε $\rho_{\text{opt}}(L_{r,\omega}) \approx 0.302$ για $r_{\text{opt}} = 1.18$ και $\omega_{\text{opt}} = 0.90$, ενώ $\rho_{\text{opt}}(L_{r,r}) \approx 0.354$ για $r_{\text{opt}} = 1.00$.

"Αρα πάντοτε έχουμε $\rho_{\text{opt}}(L_{r,\omega}) < \rho_{\text{opt}}(L_{r,r})$, πράγμα τό όποιο μās εξασφαλίζει τήν μεγαλύτερα ταχύτητα συγκλίσεως τής AOR μεθόδου έναντι τής SOR μεθόδου. Τό τελευταίο αυτό βασικό συμπέρασμα φανερώνει ότι ή AOR μέθοδος θά πρέπει νά χρησιμοποιειται αντί τής SOR μεθόδου, όπουδήποτε ή τελευταία εφαρμόζεται, πολύ δέ περισσότερο στις περιπτώσεις πού ή SOR μέθοδος με $r \neq 1$ δέν βελτιώνει καθόλου τήν σύγκλιση τής GS μεθόδου, όπως π.χ. συμβαίνει στό παράδειγμα iii) στό όποιο όπως μπορεί νά δειχθῆ και θεωρητικώς, ή optimum SOR δίδεται για $r=1$ (βλ. επίσης [30] κεφ. 12).

Πρέπει επίσης νά σημειωθῆ ότι όλαι αι τροποποιήσεις πού εφαρμόζονται π.χ. επί τής SOR μεθόδου με σκοπό τήν βελτίωση τής συγκλίσεως, μπορούν αναλόγως νά εφαρμοσθοῦν και επί τής AOR μεθόδου. Μία έξ αὐτῶν θά μελετηθῆ στό επόμενο κεφάλαιο. Τά αποτελέσματα πού προκύπτουν είναι άσφαλώς καλύτερα τῶν αντίστοιχων για τήν SOR μέθοδο.



Κεφαλαίον 6

Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ACCELERATED OVERRELAXATION (SAOR) ΜΕΘΟΔΟΣ

6.1. Είσαγωγή - Γενικά

Ἡ συμμετρικὴ AOR μέθοδος (SAOR) μπορεῖ νὰ θεωρηθῆ σάν μία τροποποίησις τῆς AOR μεθόδου, ὅπου κάθε ἐπανάληψις ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μισές ἐπαναλήψεις. Ἡ πρώτη μισὴ ἐπανάληψις εἶναι ἡ ἴδια, ὅπως ἡ AOR μέθοδος, ἐνῶ ἡ δευτέρα μισὴ ἐπανάληψις εἶναι ἡ AOR μέθοδος στὴν ὁποία ἐναλλάξαμε τὴν θέσι τῶν πινάκων L καὶ U .

Ἔτσι προσδιορίζομε τὸ $x^{(m+\frac{1}{2})}$ ἀπὸ τὸ $x^{(m)}$ ἀπὸ τὴν (πρὸς τὰ ἐμπρός) AOR μέθοδο

$$x^{(m+\frac{1}{2})} = L_{r,\omega} x^{(m)} + \omega(I-rL)^{-1}D^{-1}b \quad (6.1)$$

καὶ τὸ $x^{(m+1)}$ ἀπὸ τὸ $x^{(m+\frac{1}{2})}$ ἀπὸ τὴν (πρὸς τὰ πίσω) AOR μέθοδο

$$x^{(m+1)} = U_{r,\omega} x^{(m+\frac{1}{2})} + \omega(I-rU)^{-1}D^{-1}b \quad (6.2)$$

ὅπου

$$L_{r,\omega} = (I-rL)^{-1} [(1-\omega)I + (\omega-r)L + \omega U]$$

$$U_{r,\omega} = (I-rU)^{-1} [(1-\omega)I + (\omega-r)U + \omega L]$$

(6.3)



και $n=0,1,2,\dots$

Από τις (6.1) και (6.2) απαλείφοντας το $x^{(n+1)}$ λαμβάνουμε

$$-x^{(n+1)} = J_{r,n} x^{(n)} - \omega(I-\tau U)^{-1} [(2-\omega)I + (\omega-\tau)(L+U)] (I-\tau L)^{-1} D^{-1} b, \quad (6.4)$$

όπου $J_{r,n} = U_{r,n} L_{r,n}$ είναι ο επαναληπτικός πίνακας της SAOR με-
θόδου. Επειδή είναι $D^{-1}A = I - L - U$ οι σχέσεις (6.3) λαμβάνουν
τις ισοδύναμες εκφράσεις

$$L_{r,n} = I - \omega(I-\tau L)^{-1} D^{-1} A, \quad (6.5)$$

$$U_{r,n} = I - \omega(I-\tau U)^{-1} D^{-1} A.$$

Λόγω των (6.5) έχουμε

$$J_{r,n} = U_{r,n} L_{r,n} = [I - \omega(I-\tau U)^{-1} D^{-1} A] [I - \omega(I-\tau L)^{-1} D^{-1} A] =$$

$$= I - \omega(I-\tau L)^{-1} D^{-1} A - \omega(I-\tau U)^{-1} D^{-1} A + \omega^2 (I-\tau U)^{-1} D^{-1} A (I-\tau L)^{-1} D^{-1} A =$$

$$= I - \omega(I-\tau U)^{-1} [I + (I-\tau U)(I-\tau L)^{-1} \omega D^{-1} A (I-\tau L)^{-1}] D^{-1} A =$$

$$= I - \omega(I-\tau U)^{-1} [(I-\tau L)I + (\omega-\tau)U + \omega I - \omega I] (I-\tau L)^{-1} D^{-1} A =$$

$$= I - \omega(I-\tau U)^{-1} [(2-\omega)I + (\omega-\tau)U] (I-\tau L)^{-1} D^{-1} A = \quad (6.6)$$

$$= I - \omega(D-\tau C_U)^{-1} D [(2-\omega)I + (\omega-\tau)B] (D-\tau C_L)^{-1} A \quad (6.7)$$

λόγω των σχέσεων $B = L+U$ και $C_L = L, C_U = U$.

Από την (6.6) προκύπτει ότι ο πίνακας $I - J_{r,n}$ είναι non-singular εάν οι πίνακες $(2-\omega)I + (\omega-\tau)B$ και A είναι nonsingular. Επί πλέον, αφού $\omega(I-\tau U)^{-1} [(2-\omega)I + (\omega-\tau)U] (I-\tau L)^{-1} D^{-1} b = (I - J_{r,n}) M^{-1} b$, από το θεώρημα 2-1.1. προκύπτει ότι η SAOR με-
θόδος είναι completely consistent.



Στήν παράγραφο 6.2. θα μελετηθοῦν αἱ ιδιότητες συγκλίσεως τῆς SAOR μεθόδου ὑπό τήν προϋπόθεση ὅτι ὁ A εἶναι ἕνας πραγματικός συμμετρικός πίναξ μέ θετικά διαγώνια στοιχεῖα. Θά δειχθῆ ὅτι σύγκλισις ὑπάρχει ἐάν ὁ A εἶναι positive definite καί

$$0 < \omega < 2, \quad \omega + \frac{2-\omega}{\mu_{\min}} < r < \omega + \frac{2-\omega}{\mu_{\max}}, \quad (6.8)$$

ὅπου μ_{\min} εἶναι ἡ ἐλάχιστη καί μ_{\max} ἡ μεγίστη ἰδιοτιμῆ τοῦ Jacobi πίνακος $B=L+U$ πού ἀντιστοιχεῖ στόν A.

6.2. Θεωρία συγκλίσεως τῆς SAOR μεθόδου.

Ἀπό τήν (6.7) εἶναι

$$\begin{aligned} I - J_{r,\omega} &= \omega(D-rC_U)^{-1}D[(2-\omega)I+(\omega-r)B](D-rC_L)^{-1}A = \\ &= \omega(D-rC_U)^{-1}[(2-\omega)D+(\omega-r)DB](D-rC_L)^{-1}A = \\ &= \omega(D-rC_U)^{-1}[(2-r)D+(r-\omega)A](D-rC_L)^{-1}A = \\ &= \omega^2(D-rC_U)^{-1}M(D-rC_L)^{-1}A, \end{aligned} \quad (6.9)$$

ὅπου

$$M = \omega^{-1}[(2-r)D+(r-\omega)A].$$

Θεώρημα 2.1.

Ἐστω A ἕνας πραγματικός συμμετρικός πίναξ μέ θετικά διαγώνια στοιχεῖα. Ἄν αἱ παράμετροι r, ω ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις (6.8), τότε αἱ ἰδιοτιμαί τοῦ πίνακος $J_{r,\omega}$ εἶναι πραγματικά. Ἄν ἐπί πλέον ἰσχύει $\rho(J_{r,\omega}) < 1$, τότε ὁ A εἶναι positive definite πίναξ.



Απόδειξις

Από την (6.9) είναι $J_{r,\omega} = I - \omega^2 (D - rC_U)^{-1} M (D - rC_L)^{-1} A$, όπου $M = \omega^{-1} [(2-r)D + (r-\omega)A]$. Αφού αι παράμετροι r και ω πληροῦν τίς σχέσεις (6.8), σύμφωνα μέ τό λήμμα 3-2.3. ὁ M εἶναι positive definite. Αυτό συνεπάγεται ὅτι ὁ $J_{r,\omega}$ εἶναι ὁμοιος μέ τόν

$$\begin{aligned} J_{r,\omega}^{\otimes} &= I - \omega^2 [M^{-\frac{1}{2}} (D - rC_U)] (D - rC_U)^{-1} M (D - rC_L)^{-1} A [(D - rC_U)^{-1} M^{\frac{1}{2}}] = \\ &= I - \omega^2 M^{\frac{1}{2}} (D - rC_L)^{-1} A (D - rC_U)^{-1} M^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ὁ $J_{r,\omega}^{\otimes}$ ὁμως εἶναι συμμετρικός ἀφοῦ οἱ A καί $M^{\frac{1}{2}}$ εἶναι συμμετρικοί. Ἐπομένως ὁ $J_{r,\omega}$ ἔχει πραγματικές ἰδιοτιμές.

Ἐστω τώρα ὅτι ἰσχύει καί $\rho(J_{r,\omega}) < 1$. θά δειχθῆ ὅτι ὁ A εἶναι positive definite. Πράγματι, ἐάν ὁ A δέν εἶναι positive definite, τότε ὑπάρχει διάνυσμα $u \neq 0$ καί ἰδιοτιμή $\alpha < 0$ τοῦ A ἔτσι ὥστε

$$Au = \alpha u.$$

Ἐάν τεθῆ $k = M^{-\frac{1}{2}} (D - rC_U) u$, τότε ἔχομε

$$\begin{aligned} \frac{k^T J_{r,\omega}^{\otimes} k}{k^T k} &= \frac{k^T k - \omega^2 u^T (D - rC_L) M^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} (D - rC_L)^{-1} A (D - rC_U)^{-1} M^{\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} (D - rC_U) u}{k^T k} = \\ &= \frac{k^T k - \omega^2 u^T A u}{k^T k} = 1 - \omega^2 \alpha \frac{u^T u}{k^T k} > 1. \end{aligned}$$

Ἄρα σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1-1.9. ἔχομε ὅτι $\rho(J_{r,\omega}^{\otimes}) \geq 1$. Αυτό ὁμως εἶναι ἀτοπον διότι, ἀφοῦ ὁ $J_{r,\omega}^{\otimes}$ εἶναι ὁμοιος μέ τόν $J_{r,\omega}$, θά εἶναι $\rho(J_{r,\omega}^{\otimes}) < 1$.

Τό παρόν θεώρημα εἶναι γενικώτερο τοῦ θεωρήματος 2 τοῦ



[12], αφού περιέχει μία άσθενεστέρα υπόθεση για τις ιδιοτιμές του $J_{r,\omega}$.

Θεώρημα 2.2.

Εάν A είναι ένας positive definite πίναξ, τότε

$$(L'_{r,\omega})^T = U'_{r,\omega}$$

και

$$\|L_{r,\omega}\|_{A^{\frac{1}{2}}}^2 = \rho(U_{r,\omega} L_{r,\omega}) = \rho(J_{r,\omega}) = \|J_{r,\omega}\|_{A^{\frac{1}{2}}} = \rho(J'_{r,\omega}),$$

όπου οι $L_{r,\omega}, U_{r,\omega}$ δίδονται από τις σχέσεις (6.3) και

$$J_{r,\omega} = U_{r,\omega} L_{r,\omega}, \quad J'_{r,\omega} = A^{\frac{1}{2}} J_{r,\omega} A^{-\frac{1}{2}}, \quad L'_{r,\omega} = A^{\frac{1}{2}} L_{r,\omega} A^{-\frac{1}{2}},$$

$$U'_{r,\omega} = A^{\frac{1}{2}} U_{r,\omega} A^{-\frac{1}{2}}.$$

Απόδειξις

Από τις σχέσεις (6.5) έχουμε

$$L_{r,\omega} = I - \omega(D - rC_L)^{-1} A, \quad (6.11)$$

$$U_{r,\omega} = I - \omega(D - rC_U)^{-1} A,$$

όπου $C_L = DL, C_U = DU$ και $C_L^T = C_U$. Επομένως είναι

$$L'_{r,\omega} = I - \omega A^{\frac{1}{2}} (D - rC_L)^{-1} A^{\frac{1}{2}}, \quad U'_{r,\omega} = I - \omega A^{\frac{1}{2}} (D - rC_U)^{-1} A^{\frac{1}{2}} \quad (6.12)$$

και $(L'_{r,\omega})^T = (I - \omega A^{\frac{1}{2}} (D - rC_L)^{-1} A^{\frac{1}{2}})^T = I - \omega A^{\frac{1}{2}} (D - rC_U)^{-1} A^{\frac{1}{2}} = U'_{r,\omega}$.

Επίσης είναι

$$J'_{r,\omega} = A^{\frac{1}{2}} J_{r,\omega} A^{-\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}} U_{r,\omega} A^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} L_{r,\omega} A^{-\frac{1}{2}} = U'_{r,\omega} L'_{r,\omega} \quad (6.13)$$



* Αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{aligned} \|L\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega}^2 &= \|L\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega}^2 = \|L\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega}^2 = \|L\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega}^2 = \|L\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega}^2 \\ &= \rho(\mathbb{E}_\rho(J)) = \rho(\mathbb{E}_\rho(L)) = \rho(\mathbb{E}_\rho(J)) = \rho(\mathbb{E}_\rho(J)) \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι οι J και J^* είναι τεταγμένοι.

Τότε ισχύει $J^* = J - \text{επέλεξτε τον τόπο}$.

$$\|J\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega}^2 = \|J^*\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega}^2 = \rho(\mathbb{E}_\rho(J)) = \rho(\mathbb{E}_\rho(J))$$

Αποδεικνύεται ότι οι J και J^* είναι τεταγμένοι.

Τό τεταγμένοι J και J^* είναι τεταγμένοι J και J^* είναι τεταγμένοι.

Άσκηση 32.3.

* Εστέ τριγωνική A και B τεταγμένης μορφής $n \times n$ πινάκες, $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει $\|A - B\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega} < \varepsilon$ και $\|A\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega} < \delta$.
 α) Αποδεικνύεται ότι $\|B\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega} < \varepsilon + \delta$.
 β) Αποδεικνύεται ότι $\|B^{-1}\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega} < \frac{1}{\delta - \varepsilon}$.

Απόδειξη α)

* Εστέ A και B τεταγμένης μορφής $n \times n$ πινάκες, $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει $\|A - B\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega} < \varepsilon$ και $\|A\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega} < \delta$.
 23023031 [31].

Προσδιορίστε ρ αλ τεταγμένου J και J^* .

$$\rho = \kappa = \frac{\|A\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega}}{\|A^{-1}\|_{F, \mathbb{R}^n, \omega}}$$

* Ο ρ είναι τεταγμένος J και J^* είναι τεταγμένοι J και J^* είναι τεταγμένοι.



$$u^H \hat{C} u = u^H A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} u = (A^{\frac{1}{2}} u)^H B (A^{\frac{1}{2}} u) > 0$$

διότι ο B είναι positive definite. Έτσι, ο \hat{C} και επομένως ο C έχει πραγματικές και θετικές ιδιοτιμές.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο A είναι positive definite και ότι ο C έχει πραγματικές θετικές ιδιοτιμές. Θά δειχθῆ ότι ο B είναι positive definite.

Αφοῦ $C = AB$ προκύπτει ότι

$$A^{-\frac{1}{2}} C A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} = E.$$

Ο πίναξ E είναι ὁμοιος με τόν C και συμμετρικός διότι ο $A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}$ είναι συμμετρικός. Άρα ο E είναι positive definite και επομένως και ο B διότι $B = A^{-\frac{1}{2}} E (A^{-\frac{1}{2}})^H$ (σύμφωνα με τό πόρισμα 1-1.14.)

Παρόμοια είναι ἡ απόδειξις στήν περίπτωσι πού ο B είναι positive definite πίναξ.

Αν τώρα είναι $AB = BA$, τότε προφανώς ο C είναι και συμμετρικός και επομένως αφοῦ έχει θετικές ιδιοτιμές θά είναι positive definite σύμφωνα με τό θεώρημα 1-1.11. Αντιστρόφως, αν ο C είναι positive definite, τότε ο AB είναι συμμετρικός και άρα είναι $AB = BA$ αφοῦ A και B είναι συμμετρικοί.

Στή συνέχεια διατυπώνεται και αποδεικνύεται ένα βασικό θεώρημα τό ὁποῖο ἀφορᾶ στήν σύγκλισι τῆς SAOR μεθόδου και είναι γενικώτερο τοῦ θεωρήματος 1 τοῦ [1].

Θεώρημα 2.4.

Έστω A ένας πραγματικός συμμετρικός πίναξ με θετικά διαγώνια στοιχεία. Τότε, αν ισχύουν αι δύο ἐκ τῶν κατωτέρω προτάσεων θά ισχύει και ἡ τρίτη ἐξ αὐτῶν.

- i) Ο A είναι positive definite πίναξ.
- ii) Αἱ παράμετροι r και ω ικανοποιούν τίς σχέσεις (6.8).



iii) Η SAOR μέθοδος συγκλίνει ήτοι $\rho(J_{r,\omega}) < 1$, όπου ο $J_{r,\omega}$ δίδεται από την (6.6) ή την (6.7).

Επί πλέον, στην περίπτωση που ισχύουν αι i) και ii) έχουμε

$$\|L_{r,\omega}\|_{A^{\frac{1}{2}}}^2 = \|J_{r,\omega}\|_{A^{\frac{1}{2}}} = \rho(J_{r,\omega}) < 1 .$$

Απόδειξις

Εάν ισχύουν αι i) και iii), τότε η απόδειξις δίδεται από το θεώρημα 6-2.1. Έστω τώρα ότι ισχύουν αι προτάσεις i) και ii). Ορίζομε πάλι τούς πίνακες $J'_{r,\omega}$, $L'_{r,\omega}$ και $U'_{r,\omega}$ όμοιους αντίστοιχως μέ τούς $J_{r,\omega}$, $L_{r,\omega}$ και $U_{r,\omega}$, όπως ακριβώς και στό θεώρημα 6-2.2. στό όποιο έδειχθη ότι

$$(L'_{r,\omega})^T = U'_{r,\omega} \quad \text{και} \quad J'_{r,\omega} = U'_{r,\omega} L'_{r,\omega} .$$

Άρα είναι

$$J'_{r,\omega} = (L'_{r,\omega})^T L'_{r,\omega} .$$

Από αυτό έπεται ότι ό πίναξ $J'_{r,\omega}$ είναι συμμετρικός non-negative definite. Επομένως ό $J'_{r,\omega}$ και ό όμοίός του $J_{r,\omega}$ έχουν ιδιοτιμές πραγματικές μή άρνητικές. Έξ άλλου από τό λήμμα 3-2.2. έχουμε ότι ό πίναξ $M = \omega^{-1} [(2-r)D + (r-\omega)A]$ είναι positive definite. Επειδή είναι

$$J_{r,\omega} = I - \omega^2 (D - rC_U)^{-1} M (D - rC_L)^{-1} A \quad (6.14)$$

έπεται ότι

$$J'_{r,\omega} = I - \omega^2 A^{\frac{1}{2}} (D - rC_U)^{-1} M (D - rC_L)^{-1} A A^{-\frac{1}{2}} = \quad (6.15)$$

$$= I - \omega^2 A^{\frac{1}{2}} (D - rC_U)^{-1} M^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} (D - rC_L)^{-1} A^{\frac{1}{2}} =$$



$$= I - [\omega A^{\frac{1}{2}}(D-rC_U)^{-1}M^{\frac{1}{2}}] [\omega A^{\frac{1}{2}}(D-rC_U)^{-1}M^{\frac{1}{2}}]^T = I-S,$$

όπου ο S είναι positive definite διότι ο πίναξ $\omega A^{\frac{1}{2}}(D-rC_U)^{-1}M^{\frac{1}{2}}$ είναι nonsingular, αφού οι $A^{\frac{1}{2}}, (D-rC_U)^{-1}$ και $M^{\frac{1}{2}}$ είναι nonsingular πίνακες. Άρα ο S έχει πραγματικές και θετικές ιδιοτιμές και ως εκ τούτου ο $J'_{r,\omega}$ έχει ιδιοτιμές μικρότερες από την μονάδα. Τό αυτό ισχύει και για τον $J_{r,\omega}$. Αυτό σημαίνει ότι $\rho(J_{r,\omega}) < 1$ και άρα η πρότασις iii) απέδειχθη. Επί πλέον, λόγω του θεωρήματος 5-2.2. έχουμε

$$\|L_{r,\omega}\|_{A^{\frac{1}{2}}}^2 = \|J_{r,\omega}\|_{A^{\frac{1}{2}}} = \rho(J_{r,\omega}) < 1.$$

Μία άλλη απόδειξις της προτάσεως iii) όταν ισχύουν αι i) και ii) είναι η ακόλουθος.

Από την (6.14) έχουμε

$$\begin{aligned} I - J_{r,\omega} &= \omega^2 (D-rC_U)^{-1} M (D-rC_L)^{-1} A = \\ &= [\omega (D-rC_U)^{-1} M^{\frac{1}{2}}] [\omega (D-rC_U)^{-1} M^{\frac{1}{2}}]^T A, \end{aligned}$$

αφού ο M είναι positive definite. Επειδή οι D και $M^{\frac{1}{2}}$ είναι nonsingular πίνακες έπεται ότι ο πίναξ

$$R = [\omega (D-rC_U)^{-1} M^{\frac{1}{2}}] [\omega (D-rC_U)^{-1} M^{\frac{1}{2}}]^T$$

είναι positive definite.

Άρα είναι $I - J_{r,\omega} = RA$ και βάσει του λήμματος 6-2.3.

προκύπτει ότι ο $I - J_{r,\omega}$ έχει πραγματικές και θετικές ιδιοτιμές. Επομένως είναι $\rho(J_{r,\omega}) < 1$ διότι ο $J_{r,\omega}$ έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές.

Εάν τώρα ισχύουν αι προτάσεις i) και iii) θά δειχθῆ ἡ ii). Πρὸς τοῦτο, σύμφωνα μέ τό λήμμα 3-2.3, ἀρκεί νά δειχθῆ ὅτι ὁ πίναξ M είναι positive definite.



Από την (6.14) έχουμε

$$I - J_{r,\omega} = \omega^2 (D - rC_U)^{-1} M (D - rC_L)^{-1} A \quad (6.16)$$

Επειδή ο $J_{r,\omega}$ είναι όμοιος με τον $J'_{r,\omega}$ θα έχει ιδιοτιμές πραγματικές και μὴ ἀρνητικές. Αφού δέ είναι $\rho(J_{r,\omega}) < 1$ έπεται ότι ο $I - J_{r,\omega}$ έχει ιδιοτιμές πραγματικές και θετικές. Τό αυτό ισχύει και διά τόν όμοιό του πίνακα

$$E = (D - rC_U)(I - J_{r,\omega})(D - rC_U)^{-1}$$

ό όποιος λόγω της (6.16) γράφεται ίσοδύναμα

$$E = \omega M (D - rC_L)^{-1} A (D - rC_U)^{-1} = MF,$$

όπου

$$F = [\omega (D - rC_L)^{-1} A^{\frac{1}{2}}] [\omega (D - rC_U)^{-1} A^{\frac{1}{2}}]^T$$

Ο πίναξ F είναι positive definite διότι οι πίνακες D και $A^{\frac{1}{2}}$ είναι nonsingular. Αφού ο E έχει θετικές ιδιοτιμές και ο F είναι positive definite, από τό λήμμα 6-2.3. προκύπτει ότι και ο M είναι positive definite, αφού είναι συμμετρικός διότι ο A είναι συμμετρικός πίναξ. Άρα απέδειχθη ή ii).

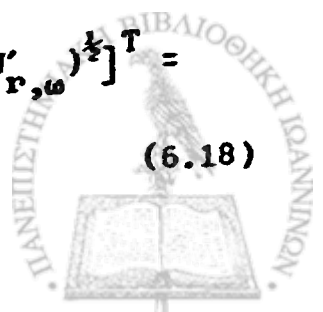
Μία άλλη απόδειξις της προτάσεως ii) προκύπτει ως έξής.

Από την (6.15) έχουμε ότι

$$I - J'_{r,\omega} = \omega^2 A^{\frac{1}{2}} (D - rC_U)^{-1} M (D - rC_L)^{-1} A^{\frac{1}{2}} \quad (6.17)$$

και έπομένως προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} M &= \omega^{-2} (D - rC_U) A^{-\frac{1}{2}} (I - J'_{r,\omega}) A^{-\frac{1}{2}} (D - rC_L) = \\ &= [\omega^{-1} (D - rC_U) A^{-\frac{1}{2}} (I - J'_{r,\omega})^{\frac{1}{2}}] [\omega^{-1} (D - rC_U) A^{-\frac{1}{2}} (I - J'_{r,\omega})^{\frac{1}{2}}]^T = \\ &= GG^T, \end{aligned} \quad (6.18)$$



όπου $G = \omega^{-1}(D - rC_U)A^{-\frac{1}{2}}(I - J'_{r,\omega})^{\frac{1}{2}}$. Αυτό γιατί ο $I - J'_{r,\omega}$ είναι συμμετρικός και positive definite, αφού ο $J'_{r,\omega}$ είναι συμμετρικός και nonnegative definite και ισχύει $\rho(J'_{r,\omega}) = \rho(J'_{r,\omega}) < 1$. Άρα η (6.18) συνεπάγεται ότι ο M είναι positive definite αφού είναι $\det(G) \neq 0$.

6.3. Αριθμητικό παράδειγμα και συμπεράσματα

Σάν εφαρμογή της θεωρίας, πού άνεπτύχθη στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάζομε ένα μόνον παράδειγμα έξ όλων τών έπεξεργασθέντων στους 'Ηλεκτρονικούς 'Υπολογιστές, UNIVAC 1106 του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης και HP-2116B του Πανεπιστημίου 'Ιωαννίνων, αφού τά συμπεράσματα πού προκύπτουν άπ'αυτό είναι σχεδόν γενικά.

Έστω ότι A είναι ο ακόλουθος πραγματικός συμμετρικός, positive definite πίναξ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} .$$

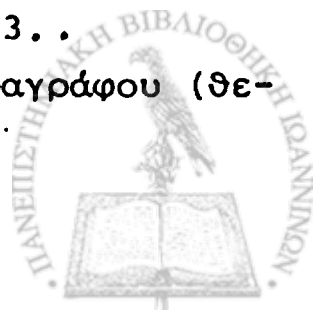
Γιά τόν πίνακα A εύρέθησαν πρώτα αι optimum φασματικά άκτιΰες τών μεθόδων AOR και SOR. Έτσι έχομε

καί , $\rho_{opt}(L_{r,\omega}) \approx 0.250$ γιά $r_{opt} = 1.00$ και $\omega_{opt} = 1.25$

$\rho_{opt}(L_{r,r}) \approx 0.330$ γιά $r_{opt} = 1.08$,

σύμφωνα και μέ τά άναφερθέντα στην παράγραφο 5.3..

Σύμφωνα μέ τήν θεωρία της προηγούμενης παραγράφου (θε-



ώρημα 6-2.4.), αφού ο A είναι positive definite, εάν τὰ r και ω έκλεγοϋν από τὰ διαστήματα τών σχέσεων (6.8), τότε ή SAOR μέθοδος συγκλίνει. Αι ιδιοτιμαί του Jacobi πίνακος $B = L_{0,1}$ που άντιστοιχεϊ στον A είναι $\mu_1 = -1, \mu_2 = \mu_3 = 0.5$. Άρα είναι $\mu_{\min} = -1$ και $\mu_{\max} = 0.5$. Για νά εύρεθῆ ύπολογιστικώς ή optimum SAOR μέθοδος δίδομε στίς παραμέτρους ω και r τίς τιμές $\omega = 0.01(0.01)1.99$ και

$$r = \left[100\left(\omega + \frac{2-\omega}{\mu_{\min}}\right) \right] / 100 + 0.01(0.01) \left[100\left(\omega + \frac{2-\omega}{\mu_{\max}}\right) \right] / 100,$$

όπου μέ $[x]$ συμβολίζομε τό άκέραιο μέρος του πραγματικού αριθμοϋ x . Έτσι εύρέθη ότι είναι

$$\rho_{\text{opt}}(J_{r,\omega}) \approx 0.360 \text{ για } r_{\text{opt}} = 0.01 \text{ και } \omega_{\text{opt}} = 0.80.$$

Έπειδή ή SAOR μέθοδος για $\omega = r$ συμπίπτει μέ τήν γνωστή συμμετρική SSOR μέθοδο (SSOR) και είναι γνωστό (ίδε π.χ. [3] κεφ. 15) ότι ή SSOR μέθοδος, στην περίπτωση που ο A είναι ένας συμμετρικός πίναξ μέ θετικά διαγώνια στοιχεϊα, συγκλίνει εάν και μόνον εάν ο A είναι positive definite και $0 < r < 2$, δίδοντας στίς παραμέτρους τίς τιμές $\omega = r = 0.01(0.01)1.99$ προέκυψε ότι,

$$\rho_{\text{opt}}(J_{r,r}) \approx 0.390 \text{ για } r_{\text{opt}} = 0.87.$$

Άπό τὰ παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι ή optimum SAOR είναι καλύτερη της SSOR μεθόδου ενώ δέν είναι καλύτερη από τήν AOR μέθοδο, όσον άφορᾶ στην ταχύτητα συγκλίσεως τών μεθόδων αύτων. Αυτό είναι κάτι τό όποϊο άναμένετο αφού και ή SSOR μέθοδος μέ τήν optimum τιμή του r είναι συνήθως πιο άργή από τήν SSOR μέθοδο μέ τό optimum r . Άφου όμως ο έπαναληπτικός πίναξ $J_{r,\omega}$ της SAOR, μέ A positive definite, έχει πραγματικές και μή άρνητικές ιδιοτιμές, είναι δυνατόν νά



έπιταχύνουμε τήν σύγκλιση αὐτῆς μέ τήν χρῆσι ἡμιεπαναληπτικῶν μεθόδων, πράγμα τό ὁποῖο δέν εἶναι δυνατόν γιά τήν AOR μέθοδο ἄφου πολλές ἀπό τίς ἰδιοτιμές τοῦ $L_{r,\omega}$ μπορεῖ νά εἶναι μιγαδικές. Ἐπί πλέον, ἂν αἱ παράμετροι r καί ω πληροῦν τās (6.8), τότε αἱ ἰδιοτιμαί τοῦ $J_{r,\omega}$ εἶναι μή ἀρνητικά καί μικρότερα τῆς μονάδος καί ἐπομένως βελτίωσις τῆς συγκλίσεως τῆς SAOR εἶναι δυνατόν νά ἐπιτευχθῆ ἐφαρμόζοντας τήν optimum extrapolated SAOR (ἴδε κεφάλαιο 4). Ἔτσι, ἡ SAOR μέθοδος, ἡ ὁποῖα ἀπαιτεῖ διπλάσιο περίπου ἀριθμό πράξεων γιά κάθε ἐπανάληψη ἀπ' ὅτι ἡ AOR μέθοδος, μπορεῖ τελικά νά ἀποβῆ ταχύτερα τῆς AOR.

Πρέπει νά σημειωθῆ ὅτι ἡ SSOR σάν μία τροποποίησης τῆς SOR ἐθεωρήθη πρῶτα ἀπό τόν Sheldon [21].



Κεφάλαιον 7

ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Στά προηγούμενα κεφάλαια έγινε μία μελέτη σέ ώρισμένες κατευθύνσεις τής νέας μεθόδου AOR γιά τήν επίλυσι μεγάλων γραμμικών συστημάτων. Σκοπός ήταν άφ'ένός νά εύρεθοϋν διαστήματα τών παραμέτρων r καί ω τής μεθόδου στά όποια νά έχομε σύγκλιση άφ'έτέρου δέ έγινε μία σύγκρισις τής AOR μέ τήν πιό γνωστή καί περισσότερο χρησιμοποιουμένη μέθοδο τήν SOR. Τά θεωρήματα τών κεφαλαίων 3 καί 5 έξασφαλίζουν ικανές συνθήκες γιά τήν σύγκλιση τής AOR μεθόδου γιά διάφορες κατηγορίες πινάκων-συντελεστών τοϋ πρόσ επίλυσιν συστήματος. Πρέπει νά σημειωθή ότι έξετάζονται πίνακες πού έχουν ώρισμένες ιδιότητες διότι τέτοιοι προκύπτουν κατά τήν αριθμητική επίλυσι έλλειπτικών διαφορικών έξισώσεων μέ μεθόδους πεπερασμένων διαφορών ή πεπερασμένου στοιχείου (ΐδε π.χ. [32]). 'Η τεχνική τής extrapolation πού άναπτύσσεται στό κεφάλαιο 4 μάς δίδει άρκετά χρήσιμα συμπεράσματα γιά τήν σύγκλιση τής AOR μεθόδου. 'Η σύνδεσις αύτης μέ τήν AOR μέθοδο μπορεϊ νά επεκταθή όπως τονίσθηκε καί γιά μεταβλητή extrapolation παράμετρο μέ σκοπό τήν επιτάχυνση τής συγκλίσεως. Αυτό είναι ένα από τά προβλήματα τής περαιτέρω έρευνας. 'Επίσης ή εύρεσις optimum τιμών γιά τήν extrapolation παράμετρο είναι ένα πρόβλημα πού γενικώς δέν έχει επίλυθη άκόμη. Τά άποτελέσματα τοϋ



κεφαλαίου 5 είναι σημαντικά διότι έδειχθη, πρὸς τὸ παρὸν τουλάχιστον διὰ τῶν ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων, ὅτι καί γιὰ ἄλλες κατηγορίες πινάκων, ἡ AOR μέθοδος ὑπερτερεῖ ἀπὸ τὴν ἀποψη τῆς φασματικῆς ἀκτῖνος (ἢ τῆς ἀσυμπτωτικῆς ταχύτητος συγκλίσεως) τοῦ ἐπαναληπτικοῦ πίνακος ἔναντι τῆς SOR. Ἐπομένως πρέπει νὰ προτιμᾶται στὰ ἀντίστοιχα προβλήματα.

Τέλος στὸ κεφάλαιο 6 ἀπὸ τὴν ἀνάπτυξι τῆς SAOR μεθόδου γίνεται φανερόν ὅτι αὐτὴ ὑπερτερεῖ ἔναντι τῆς ἀντιστοίχου SSOR. Ἐπὶ πλέον, ὅταν ὁ A εἶναι positive definite προέκυψαν ἱκανές καὶ ἀναγκαῖες συνθῆκες γιὰ τὴν σύγκλισι τῆς SAOR μεθόδου.

Θέματα στὰ ὁποῖα θὰ μπορούσε νὰ ἐπεκταθῆ ἡ θεωρία τῆς AOR μεθόδου εἶναι τὰ ἑξῆς:

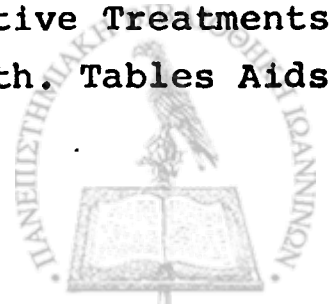
- i) Χρησιμοποίησις μεταβλητῶν παραμέτρων ω καὶ r στὴν AOR καὶ SAOR μέθοδο.
- ii) Χρησιμοποίησις ἡμιεπαναληπτικῶν μεθόδων γιὰ τὴν ἐπιτάχυνσι τῆς συγκλίσεως.
- iii) Εὔρεσις optimum τιμῶν τῶν παραμέτρων ω καὶ r θεωρητικῶς καὶ ἀντιστοίχων optimum μεθόδων γιὰ τίς διαφορες περιπτώσεις, καθὼς ἐπίσης καὶ προσπάθεια γιὰ τὴν εὔρεσι φραγμάτων γιὰ τίς ἰδιοτιμές τῶν ἐπαναληπτικῶν πινάκων.
- iv) Χρησιμοποίησις "block" AOR μεθόδων καθὼς καὶ ἄλλων τροποποιήσεων πού μπορούν νὰ ἐφαρμοσθοῦν. (ἴδε π.χ. [30]).

Ἀπὸ τὰ παραπάνω προκύπτει ὅτι ὑπάρχει ἓνα εὐρὺ πεδίο ἐρεῦνης γιὰ τὸ ἀμεσο μέλλον.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

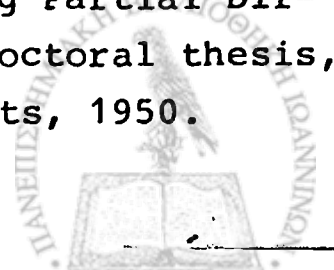
1. G. AVDELAS, A. HADJIDIMOS and A. YEYIOS, Some Theoretical and Computational Results Concerning the Accelerated Overrelaxation (AOR) Method , T.R. No 8, Department of Mathematics, University of Ioannina, Ioannina, Greece, 1978.
2. G. AVDELAS and A. HADJIDIMOS, Optimum Accelerated Overrelaxation Method in a Special Case, T.R. No 9, Department of Mathematics, University of Ioannina, Ioannina, Greece, 1978.
3. G. BIRKOFF and S. MACLANE, A Survey of Modern Algebra, MacMillan, New York, 1953.
4. R. BRONSON, Matrix Methods, Academic Press, New York and London, 1969.
5. L. FOX, An Introduction to Numerical Linear Algebra, Clarendon Press, Oxford, 1964.
6. D.K. FADDEEV and V.N. FADDEEVA, Computational Methods of Linear Algebra, Freeman, San Francisco, California, 1963.
7. G.E. FORSYTHE, Solving Linear Algebraic Equations can be interesting, Bull.Amer. Math. Soc. 59, pp. 299-329, 1953.
8. S.P. FRANKEL, Convergence Rates of Iterative Treatments of Partial Differential Equations, Math. Tables Aids Comput. 4, pp. 65 - 75, 1950.



9. H. GEIRINGER, On the Solution of Systems of Linear Equations by certain Iterative Methods, Reissner Anniversary Volume, Contributions to Applied Mechanics, pp. 365 - 393, Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1949.
10. A. HADJIDIMOS, Accelerated Overrelaxation Method, Math. Comp., 32, pp. 149 - 157, 1978.
11. A. HADJIDIMOS and A. YEYIOS, The Principle of Extrapolation in Connection with the Accelerated Overrelaxation (AOR) Method, T.R. No 16, Department of Mathematics, University of Ioannina, Ioannina, Greece, 1978.
12. A. HADJIDIMOS and A. YEYIOS, Symmetric Accelerated Overrelaxation (SAOR) Method, T.R. No 18, Department of Mathematics, University of Ioannina, Ioannina, Greece, 1978.
13. A.S. HOUSEHOLDER, The Theory of Matrices in Numerical Analysis, Blaisdell, New York, 1964.
14. W. KAHAN, Gauss - Seidel Methods of Solving Large Systems of Linear Equations, doctoral thesis, University of Toronto, Toronto, Canada, 1958.
15. P. LANCASTER, Theory of Matrices, Academic Press, New York and London, 1969.
16. A.M. OSTROWSKI, On the Linear Iteration Procedures for Symmetric Matrices, Rend. Mat. e Appl. 14, pp. 140 - 163, 1954.
17. A.M. OSTROWSKI, Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press, New York, 1960.
18. R.J. PLEMMONS, M - Matrix Characterizations. I - Nonsingular M - matrices, Linear Algebra Appl., 18, pp. 175 - 188, 1977.
19. L.F. RICHARDSON, The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving



- Differential Equations with an Application to the Stresses in a Masonry Dam, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A210, pp. 307 - 357, 1910.
20. E. REICH, On the Convergence of the Classical Iterative Method of Solving Linear Simultaneous Equations, Ann. Math. Statist. 20, pp. 448 - 451, 1949.
 21. J. SHELDON, On the Numerical Solution of Elliptic Difference Equations, Math. Tables Aids Comput. 9, pp. 101 - 112, 1955.
 22. R.V. SOUTHWELL, Relaxation Methods in Theoretical Physics, Oxford Univ. Press, New York, 1946.
 23. P. STEIN and R. ROSENGERG, On the Solution of Linear Simultaneous Equations by Iteration, J. London Math. Soc. 23, pp. 111 - 118, 1948.
 24. G. TEMPLE, The General Theory of Relaxation Methods Applied to Linear Systems, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A169, pp. 476 - 500, 1939.
 25. R.S. VARGA, Matrix Iterative Analysis, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
 26. R.S. VARGA, M - Matrix Theory and Recent Results in Numerical Linear Algebra, Proc. Symp. Sparse Matrix Comp., Argonne National Laboratory, pp. 375 - 387, 1975.
 27. R.S. VARGA, On Recurring Theorems on Diagonal Dominance, Linear Algebra Appl., 13, pp. 1 - 9, 1976.
 28. E.L. WACHSPRESS, Iterative Solution of Elliptic Systems and Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, 1966.
 29. D.M. YOUNG, Iterative Methods for Solving Partial Difference Equations of Elliptic Type, doctoral thesis, Harvard Univ., Cambridge, Massachusetts, 1950.



30. D.M. YOUNG, Iterative Solution of Large Linear Systems, Academic Press, New York, 1971.
31. D.M. YOUNG, On the Accelerated SSOR Method for Solving Large Linear Systems, Advances in Mathematics, 23, pp. 215 - 271, 1977.
32. D.M. YOUNG, Iterative Solution of Linear Systems arising from Finite Element Techniques, in "The Mathematics of Finite Elements and Applications II", pp. 439 - 464, Edited by J.R. Whiteman, Academic Press, 1976.

