ΜΙΧΑΛΗ ΤΖΟΥΜΑ

ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ p-ΚΥΚΛΙΚΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα 1994

ΜΙΧΑΛΗ ΤΖΟΥΜΑ

ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

Χαρισμένο στον
καθηγητή Χρήστο Μασσαλά
με εκτίμηση κι αγάπη
Μιχάλης
18/1/'95

ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ p-ΚΥΚΛΙΚΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα 1994

Αφιερώνεται
στη μνήμη των γονειών μου
και
στη γυναίκα μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου στον καθηγητή κ. Α. Χατζηδήμο, τον αν. καθηγητή κ. Σ. Γαλάνη και τον επ. καθηγητή κ. Δ. Νούτσο για την υπόδειξη του θέματος, που προέκυψε από τη συνεργασία τους.

Ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Α. Χατζηδήμο για τις πολύτιμες επιστημονικές συμβουλές και παρατηρήσεις του, καθώς και την ηθική στήριξη που μου προσέφερε σ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης και της συγγραφής της παρούσης διατριβής.

Επίσης ευχαριστώ τον επ. καθηγητή κ. Δ. Νούτσο τόσο για τη συνεχή επιστημονική καθοδήγηση και επίβλεψη, όσο και για την ηθική συμπαράσταση που μου προσέφερε σ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής και ιδιαίτερα για την περίοδο πριν το Μάρτη του 1991, όπου η συνεργασία μας γινόταν κάτω από δύσκολες συνθήκες.

Επιπλέον ευχαριστώ τους αν. καθηγητές κ.κ. Σ. Γαλάνη και Α. Γέγιο για τις συμβουλές και εύστοχες παρατηρήσεις τους τόσο κατά την εκπόνηση, όσο και κατά τη συγγραφή της διατριβής.

Τη γυναίκα μου, φιλόλογο κ. Καίτη Φλούδα-Τζούμα, την ευχαριστώ όχι μόνο για τις γλωσσικές παρατηρήσεις και διορθώσεις κατά την ανάγνωση των χειρογράφων, αλλά και για τη συμπαράσταση που μου παρείχε όλα αυτά τα χρόνια.

Την κ. Αναστασία Μπαλάφα-Παππά την ευχαριστώ για την επιμελημένη δακτυλογράφηση του κειμένου.

Ευχαριστώ το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, το Τμήμα Μαθηματικών και ιδιαίτερα τον Τομέα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής για την κάθε είδους βοήθεια που μου παρείχαν.

Τέλος ευχαριστώ το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ.) για την υποτροφία που μου χορήγησε από 1-3-91 έως 28-3-1994.

Μάης 1994 — Μ. Τζούμας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι διαπιστωμένο ότι για την αριθμητική επίλυση των προβλημάτων των Θετικών Επιστημών, των Οικονομικών Επιστημών και της Τεχνολογίας καταλήγουμε σε γραμμικά συστήματα της μορφής $Ax=b$ τουλάχιστον στο 70% των περιπτώσεων. Σ' αυτά τα συστήματα συνήθως ο πίνακας A είναι αραιός, δηλαδή τα περισσότερα από τα στοιχεία του είναι μηδέν, και τα μη-μηδενικά του στοιχεία κατέχουν συγκεκριμένες θέσεις στον πίνακα (π.χ. τριδιαγώνιοι πίνακες κ.τ.λ.).

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου προβλήματος είναι το πρόβλημα των ελαχίστων τετραγώνων (Least Squares Problem). Σ' αυτό, αφού δεν υπάρχει η λύση του συστήματος

$$Ax = b \qquad (*)$$

με $A\in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m>n$ και $b\in \mathbb{R}^m$, ζητούμε εκείνα τα x, ώστε να ελαχιστοποιείται η ποσότητα $\|Ax - b\|_2$ ([24], [28], [32] και [12]). Αποδεικνύεται ότι, όταν $\text{rank}(A)=n$, το πρόβλημα έχει μοναδική λύση, τη λύση του συστήματος

$$A^TAx = A^Tb \quad , \qquad (1.1)$$

όπου A^T ο ανάστροφος του A.

Αν το διάνυσμα-υπόλοιπο του συστήματος (*) ([1], [24], [28] και [12]) είναι

$$r = b - Ax \ , \tag{1.2}$$

λόγω της (1.1) η (1.2) δίνει

$$A^T r = 0 \ . \tag{1.3}$$

Μεταθέτουμε τις εξισώσεις στο (1.2), εφόσον χρειάζεται και διαχωρίζουμε κατάλληλα τον πίνακα A , ώστε ο πίνακας $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $\det(A_1) \neq 0$. Έτσι έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} .$$

Λόγω των (1.2) και (1.3) μπορούμε να βρούμε τα διανύσματα x και r από τη λύση του παρακάτω συστήματος

$$\begin{aligned} A_1 x + r_1 &= b_1 \\ A_2 x + r_2 &= b_2 \\ A_2^T r_2 + A_1^T r_1 &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Υπό μορφήν πινάκων το σύστημα (1.4) γράφεται

$$\tilde{A} \tilde{x} = \tilde{b} \ , \tag{1.5}$$

όπου

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & I \\ A_2 & I & 0 \\ 0 & A_2^T & A_1^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ r_2 \\ r_1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Ο ομαλός πλέον πίνακας $\tilde{A}$ είναι G.C.O.- (3,1) πίνακας (βλ. Κεφ. 2).

Όταν λύνουμε το σύστημα (1.5) χρησιμοποιώντας μια επαναληπτική μέθοδο ([34], [40]), τίθενται ερωτήματα σύγκλισης και ταχύτητας σύγκλισης. Αν η μέθοδος που θα επιλέξουμε είναι π.χ. SOR ή η SSOR (βλ. Κεφ. 2 και [34], [40]), τα παραπάνω ερωτήματα συγκεκριμενοποιούνται εν γένει στα εξής τρία:

— Ποιο πρέπει να είναι το σ(B) (φάσμα του πίνακα Jacobi) ώστε η μέθοδος να συγκλίνει;

— Για ποιες τιμές του ζεύγους (ρ(B), ω) (ρ(B) είναι η φασματική ακτίνα του πίνακα Jacobi), η μέθοδος συγκλίνει;

— Για ποια τιμή του ω έχουμε την ταχύτερη ασυμπτωτικά σύγκλιση;

Ακόμη ειδικά για το σύστημα (1.5), όπου ο πίνακας $\tilde{A}$ είναι G.C.O.- (3,1) τίθενται ερωτήματα διαχωρισμού του ([24], [28]). Επίσης τέτοια ερωτήματα ([31], [6]) δημιουργούνται και όταν ο πίνακας του συστήματος (1.5) είναι γενικότερα G.C.O.- (p, q) πίνακας.

Για την εύρεση των διανυσμάτων x και r των (1.2) και (1.3) θα μπορούσαμε επίσης να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} A_1^T r_1 + A_2^T r_2 \qquad\quad &= 0 \\ I r_2 + A_2 x &= b_2 \\ I r_1 \qquad\quad + A_1 x &= b_1 \end{aligned} \tag{1.7}$$

ή υπό μορφή πινάκων $\underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$, όπου

$$\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix} A_1^T & A_2^T & 0 \\ 0 & I & A_2 \\ I & 0 & A_1 \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{x}=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ x \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Είναι φανερό τώρα ότι το ερώτημα που τίθεται είναι:

Ποια από τις δυο μορφές του συστήματος, η (1.4) ή η (1.7) είναι προτιμότερη σ' ό,τι αφορά τη σύγκλιση ([16], [17], [19], [20]) καθώς και την ταχύτητα σύγκλισης ([26], [11]), όταν μια παραμετρική επαναληπτική μέθοδος χρησιμοποιείται για την επίλυσή των ;

Η παρούσα διατριβή απαντά σε ερωτήματα, που αφορούν στη σύγκλιση και εύρεση της βέλτιστης παραμέτρου $\hat{\omega}$ των SOR και SSOR μεθόδων για G.C.O.- (p, q) πίνακες και ρίχνει φως σε αρκετές πτυχές του παραπάνω ερωτήματος. Πιο συγκεκριμένα:

Το **2° Κεφάλαιο** αναφέρεται στους p-κυκλικούς πίνακες και στις επαναληπτικές μεθόδους. Δίνει στοιχεία από τα κατευθυνόμενα γραφήματα και δείχνει πώς συνδέονται αυτά με τους παραπάνω πίνακες. Ορισμένα από τα θεωρήματα που δίνονται (π.χ. Θεώρημα 1.9), υπάρχουν σαν ασκήσεις στο [34] . Τέλος γίνεται αναφορά στις block SOR και SSOR μεθόδους και δίνεται η σχέση που συνδέει τις ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα της μιας με τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα της μεθόδου Jacobi.

Στο **3° Κεφάλαιο** δίνεται ο αλγόριθμος των Schur-Cohn, ο οποίος και χρησιμοποιείται για την εύρεση "ακριβών" περιοχών σύγκλισης στο (ρ(B), ω)-επίπεδο της SOR μεθόδου, στην περίπτωση όπου ο πίνακας A είναι G.C.O.-(p, p-1) και το $\sigma(B^p)$ είναι μη-θετικό ή μη-αρνητικό. Επιπλέον χρησιμοποιώντας τον ίδιο αλγόριθμο αποδεικνύεται κάτω από ποιες συνθήκες η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου $\hat{\omega}$ είναι ίση με 1 καθώς και σε ποιο διάστημα $(\omega_1(\varrho(B), \omega_2(\varrho(B))$ βρίσκεται η $\hat{\omega}$, όταν $\hat{\omega} \neq 1$.

Στο 4$^{\text{ο}}$ **Κεφάλαιο** δίνεται η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, στην οποία, όταν βρίσκονται οι ιδιοτιμές του πίνακα Jacobi, η SOR μέθοδος συγκλίνει, για G.C.O.-(p, q) πίνακες. Αυτή βρίσκεται μελετώντας μιγαδικές απεικονίσεις μέσα από υποκυκλοειδείς καμπύλες. Επιπλέον βρίσκονται περιοχές σύγκλισης του $(\varrho(B),\omega)$-επιπέδου για G.C.O.-(p, q) πίνακες, όταν οι ιδιοτιμές του B^p έχουν το ίδιο πρόσημο.

Το 5$^{\text{ο}}$ **Κεφάλαιο** είναι αφιερωμένο στην εύρεση της βέλτιστης παραμέτρου $\hat{\omega}$ της SOR μεθόδου για G.C.O.-(p, p-1) πίνακες. Αποδεικνύεται ότι η παράμετρος $\hat{\omega}$ αντιστοιχεί σε μια μιγαδική ρίζα και όχι σε μια διπλή πραγματική, όταν $\sigma(B^p) \leq 0$, όπως συνέβαινε στους G.C.O.- (p, 1) πίνακες. Επιπλέον δίνονται εκφράσεις για την $\hat{\omega}$ σαν συνάρτηση της φασματικής ακτίνας του πίνακα Jacobi, όταν το $\sigma(B^p)$ είναι μη-θετικό και ο πίνακας είναι G.C.O.-(3, 2) ή (4,3).

Στο 6$^{\text{ο}}$ **Κεφάλαιο** μελετάται η SSOR μέθοδος. Δίνονται ακριβείς περιοχές σύγκλισης για τη μέθοδο, στην περίπτωση όπου ο πίνακας A είναι G.C.O.-(p, 1), p=3 ή 4 και το $\sigma(B^p)$ ομόσημο.

Τέλος στο 7$^{\text{ο}}$ **Κεφάλαιο** δίνονται τα γενικά συμπεράσματα, που προκύπτουν από τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής και δίνονται ενδεικτικά νέες κατευθύνσεις για παραπέρα έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

p-ΚΥΚΛΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

2.1 p-κυκλικοί πίνακες

Για τη λύση του γραμμικού συστήματος

$$Ax = b \ , \tag{2.1}$$

όπου $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με $\det(A) \neq 0$ και x, $b \in \mathbb{C}^n$ έχουν κατά καιρούς προταθεί τόσο άμεσες, όσο και έμμεσες ή επαναληπτικές μέθοδοι.

Η μορφή και οι ιδιότητες του πίνακα A παίζουν πρωταρχικό ρόλο. Η μέχρι σήμερα εμπειρία δείχνει ότι για μεγάλης τάξης και "αραιούς" πίνακες A, που συναντάει κανείς στην πράξη, οι επαναληπτικές μέθοδοι είναι οι πιο κατάλληλες. Η βασική ιδέα, πάνω στην οποία στηρίζεται μια επαναληπτική μέθοδος, περιγράφεται στη συνέχεια. Για το σκοπό αυτό διαχωρίζουμε τον πίνακα A ως ακολούθως:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pp} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Υποθέτουμε ότι A_{ii} , $i = 1(1)p$, $p>1$ είναι τετραγωνικοί ομαλοί (non-singular) πίνακες και γράφουμε τον πίνακα A στην ακόλουθη μορφή

$$A = D - E - F , \tag{2.3}$$

όπου $D = \text{diag}\{A_{11}, A_{22}, ..., A_{pp}\}$ και E και F είναι αυστηρά κάτω και άνω block τριγωνικοί πίνακες αντίστοιχα. Από την (2.1) και την (2.3) μπορεί να κατασκευαστεί η παρακάτω επαναληπτική μέθοδος

$$Dx^{(m+1)} = (E+F)x^{(m)} + b , \quad m = 0, 1, 2, \dots , \tag{2.4}$$

με $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ ένα αυθαίρετο διάνυσμα, ή ισοδύναμα

$$x^{(m+1)} = D^{-1} (E+F)x^{(m)} + D^{-1} b , \quad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.5}$$

Η μέθοδος (2.5) είναι γνώστή ως η block Jacobi επαναληπτική μέθοδος, ενώ ο πίνακας

$$B = L + U , \tag{2.6}$$

όπου $L = D^{-1} E$ και $U = D^{-1} F$, είναι γνωστός ως ο block Jacobi επαναληπτικός πίνακας.

Στα γραμμικά συστήματα της μορφής (2.1), που εμφανίζονται κατά τη διακεκριμενοποίηση για τη λύση των διαφορικών εξισώσεων με αριθμητικές μεθόδους, ο πίνακας A είναι μεγάλης τάξης και αραιός, δηλαδή έχει λίγα μη-μηδενικά στοιχεία σε σχέση με το πλήθος των στοιχείων του πίνακα. Η λύση τέτοιων συστημάτων μπορεί να επιτευχθεί ταχύτερα, όπως αναφέρθηκε και στην αρχή, με επαναληπτικές μεθόδους. Για τη μελέτη τέτοιων συστημάτων και ειδικότερα εκείνων που ο πίνακας A είναι block "κυκλικός", δίνουμε τους επόμενους ορισμούς.

Ορισμός 2.1

Ένας τετραγωνικός πίνακας $P\in\mathbb{R}^{n,n}$, ο οποίος σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη έχει ακριβώς ένα στοιχείο ίσο με το 1 και όλα τ' άλλα στοιχεία μηδέν, καλείται μεταθετικός (permutation) πίνακας.

Εάν έναν οποιονδήποτε πίνακα $A\in\mathbb{C}^{n,m}$ τον πολλαπλασιάσουμε από αριστερά μ' ένα μεταθετικό πίνακα $P\in\mathbb{R}^{n,n}$, τότε μεταθέτονται οι γραμμές του. Συγκεκριμένα, όταν στη θέση (i, j) του πίνακα P υπάρχει η μονάδα, τότε η j γραμμή του πίνακα A γίνεται η i γραμμή του γινομένου. Εάν ο πολλαπλασιασμός γίνει από δεξιά με το μεταθετικό πίνακα $P^{m,m}$, τότε μεταθέτονται οι στήλες του A, με τη διαφορά ότι η i στήλη γίνεται j. Ο πίνακας $\tilde{A} = PAP^T$ προκύπτει από τον A με ταυτόχρονη μετάθεση των γραμμών και των αντίστοιχων στηλών του. Ο παραπάνω μετασχηματισμός λέγεται μεταθετικός και είναι ένας μετασχηματισμός ομοιότητας, αφού $P^T = P^{-1}$.

Ορισμός 2.2

Έστω B ο πίνακας Jacobi της (2.6). Εάν υπάρχει μεταθετικός πίνακας P, έτσι ώστε ο PBP^T να έχει τη μορφή

$$
PBP^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & B_{1p} \\ B_{21} & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & B_{32} & 0 \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & B_{p,p-1} & 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.7)
$$

όπου οι μηδενικοί πίνακες επί της κυρίας διαγωνίου είναι τετραγωνικοί, τότε ο B θα ονομάζεται ασθενώς κυκλικός με δείκτη p (weakly cyclic of index p) [34].

Ο ρ ι σ μ ό ς 2.2

Εάν ο block Jacobi πίνακας B της (2.6), που σχετίζεται με τον πίνακα A της (2.2), είναι ήδη στη μορφή του δεξιού μέλους της (2.7), τότε τον πίνακα A θα τον λέμε p-κυκλικό (p-cyclic) σε σχέση με το διαχωρισμό της (2.2).

2.2 Κατευθυνόμενα γραφήματα και p-κυκλικοί πίνακες

Ο ρ ι σ μ ό ς 2.4

Ένας μιγαδικός n×n πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ θα ονομάζεται αναγώγιμος (reducible), αν υπάρχει μεταθετικός πίνακας P, έτσι ώστε ο πίνακας PAP^T να έχει την ακόλουθη μορφή

$$
\tilde{A} \equiv PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad (2.8)
$$

όπου οι πίνακες A_{11} και A_{22} είναι τετραγωνικοί πίνακες. Διαφορετικά ο πίνακας θα ονομάζεται μη-αναγώγιμος (irreducible). Ένας 1×1 πίνακας θα θεωρείται μη-αναγώγιμος, αν το μοναδικό στοιχείο του είναι διάφορο του μηδενός.

Οι παραπάνω έννοιες είναι εξαιρετικά χρήσιμες για τη λύση των γραμμικών συστημάτων, αφού το γραμμικό σύστημα (2.1) με τον πίνακα A αναγώγιμο γράφεται

$$(PAP^T)Px = Pb$$

ή ισοδύναμα

$$\tilde{A}\,\tilde{x} = \tilde{b} \;,$$

όπου τα διανύσματα $\tilde{x}$ και $\tilde{b}$ είναι κατάλληλα διαχωρισμένα, όπως ο πίνακας $\tilde{A}$. Έτσι αντί του αρχικού συστήματος έχουμε να λύσουμε δύο συστήματα μικρότερης τάξης, τα εξής:

$$\begin{aligned} A_{11}\,x_1 + A_{12}\,x_2 &= b_1 \\ A_{22}\,x_2 &= b_2 \;, \end{aligned}$$

που συνολικά απαιτούν μικρότερο αριθμό πράξεων από ότι το αρχικό σύστημα.

Η γεωμετρική έκφραση μη γεωμετρικών εννοιών είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσα, τόσο από θεωρητική όσο και από πρακτική άποψη. Στη συνέχεια θα δούμε πως μέσα από τα κατευθυνόμενα γραφήματα είναι δυνατός ο έλεγχος τόσο του αναγώγιμου ή μη ενός πίνακα, όσο και της κυκλικότητας ή μη αυτού.

Έστω $A = (a_{ij})$, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, ένας πίνακας και έστω $P_1, P_2, \ldots, P_n$ n διακεκριμένα σημεία (nodes) στο επίπεδο. Για κάθε μη-μηδενικό στοιχείο a_{ij} του πίνακα A ενώνουμε το σημείο P_i με το σημείο P_j μ' ένα βήμα (path) κατευθυνόμενο από το P_i στο P_j. Το εν λόγω βήμα θα συμβολίζεται με P_iP_j . Έτσι κάθε nxn πίνακα A μπορούμε να τον συσχετίσουμε μ' ένα κατευθυνόμενο γράφημα G(A), που θα αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό κατευθυνόμενων βημάτων.

Στο γράφημα $G(\widetilde{A})$ του $\widetilde{A} = PAP^T$, αφού ο P μεταθέτει έστω την j γραμμή και την κάνει i, το σημείο P_i γίνεται P_j και τα βήματα που ξεκινούσαν απ' αυτό, τώρα ξεκινούν από το P_j . Επίσης αφού ο P^T μεταθέτει την i στήλη και την κάνει j, το σημείο P_i γίνεται P_j και τα βήματα που έφθαναν σ' αυτό, τώρα φθάνουν στο P_j . Έτσι, ουσιαστικά το γράφημα $G(\widetilde{A})$ είναι το ίδιο με το G(A) με μόνες αλλαγές τα ονόματα (ουσιαστικά των δεικτών) των σημείων. Για τους δείκτες i των σημείων P_i συμβαίνουν τα εξής: Εάν στη θέση (i,j) του μεταθετικού πίνακα P υπάρχει η μονάδα, τότε ο πολλαπλασιασμός της διατεταγμένης n-άδας (1,2,3,...,n) των δεικτών των σημείων $P_i \mid i = 1(1)n$ με τον παραπάνω πίνακα, μεταθέτει το στοιχείο της i θέσης στη θέση j. Έτσι προκύπτει μια καινούργια διατεταγμένη n-άδα η $(s_1, s_2, ..., s_3)$. Τα $Ps_i \mid i=1(1)n$ είναι τα καινούργια ονόματα των σημείων του γραφήματος και μάλιστα εκείνο το σημείο που πριν ονομαζόταν P_j , τώρα ονομάζεται Ps_j .

Ορισμός 2.5

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα G(A) είναι ισχυρά συνεκτικό (strongly connected), αν για κάθε διατεταγμένο ζεύγος σημείων P_i και P_j υπάρχει ένας κατευθυνόμενος δρόμος, αποτελούμενος από κατευθυνόμενα βήματα $\overrightarrow{P_iP_{\ell_1}}, \overrightarrow{P_{\ell_1}P_{\ell_2}}, ..., \overrightarrow{P_{\ell_r}P_j}$, που ενώνει το σημείο P_i με το σημείο P_j. Ο αριθμός των κατευθυνόμενων βημάτων του παραπάνω δρόμου θα ονομάζεται μήκος του δρόμου.

Εάν το κατευθυνόμενο γράφημα G(A) του πίνακα A δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ζεύγος σημείων (P_i, P_j), που δε συνδέονται μ' έναν κατευθυνόμενο δρόμο, σαν αυτόν που απαιτεί ο Ορισμός 2.5. Στην περίπτωση αυτή σχηματίζουμε το σύνολο S_i με στοιχεία το P_i κι εκείνα τα P_s, που για τα διατεταγμένα ζεύγη (P_i, P_s) υπάρχει κατευθυνόμενος δρόμος που τα συνδέει. Προφανώς το $S_1 \neq \emptyset$. Με τα υπόλοιπα σημεία σχηματίζουμε το σύνολο S_2. Το S_2 περιέχει τουλάχιστον το P_j. Συνεπώς $S_2 \neq \emptyset$.. Τα S_1 και S_2 αποτελούν μια διαμέριση του συνόλου $W = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ και δεν υπάρχει στοιχείο του συνόλου S_1, που να ενώνεται με απ' ευθείας δρόμο με κάποιο στοιχείο του S_2. Έτσι προκύπτει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.6

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, αν και μόνον αν υπάρχει τουλάχιστον μια διαμέριση S_1, S_2 του συνόλου $W = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$, για την οποία δεν υπάρχει στοιχείο του S_1 που να συνδέεται με κάποιο στοιχείο του S_2.

Η σύνδεση των ισχυρά συνεκτικών γραφημάτων με τους μη αναγώγιμους πίνακες φαίνεται στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 2.7

Ένας nxn μιγαδικός πίνακας A είναι μη αναγώγιμος, αν και μόνον αν το κατευθυνόμενο γράφημα του G(A) είναι ισχυρά συνεκτικό.

Απόδειξη

Αν ο A είναι αναγώγιμος, τότε θα υπάρχει ένας μεταθετικός πίνακας P, που θα φέρνει τον πίνακα A στη μορφή (2.8). Αφού $A_{21} = 0$, εύκολα βρίσκουμε τη διαμέριση, που χρειάζεται το προηγούμενο Θεώρημα 2.5. Άρα το G(A) δεν είναι ισχυρά συνεκτικό. Αντιστρόφως, αν το γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, τότε υπάρχει μια διαμέριση $S_1 = \{Ps_1, Ps_2, ..., Ps_r\}$ και $S_2 = \{Ps_{r+1}, Ps_{r+2}, ..., Ps_n\}$ του $W = \{Ps_1, Ps_2, ..., Ps_n\}$, για την οποία δεν υπάρχει στοιχείο στο S_1, που να συνδέεται με κάποιο στοιχείο του S_2. Δημιουργούμε τη διάταξη $(S_{r+1}, S_{r+2}, \ldots, S_n, S_1, S_2, \ldots, S_r)$ και βρίσκουμε τον πίνακα P έτσι ώστε

$$(S_{r+1}, S_{r+2}, \ldots, S_n, S_1, S_2, \ldots, S_r) \cdot P = (1, 2, \ldots, n\text{-}r, n\text{-}r+1, \ldots, n)\,. \qquad (2.9)$$

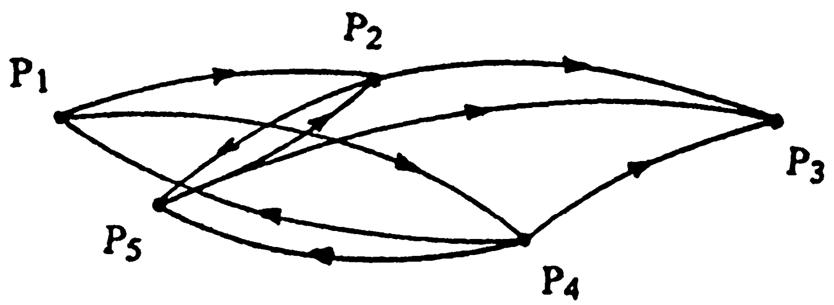
Στο γράφημα $G(\tilde{A})$ του πίνακα $\tilde{A} = PAP^T$ δεν υπάρχει στοιχείο στο $\{P_{n-r+1}, P_{n-r+2}, \ldots, P_n\}$, που να συνδέεται με κάποιο στοιχείο του συνόλου $\{P_1, P_2, \ldots, P_{n-r}\}$. Αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα στοιχεία a_{ij} με $1 \leq j \leq n\text{-}r$ και $n\text{-}r+1 \leq i \leq n$ του πίνακα $\tilde{A}$ είναι μηδέν, και οι A_{11} και A_{22} τετραγωνικοί, οπότε το θεώρημα απεδείχθη. ♦

Το δεύτερο μέρος της προηγούμενης απόδειξης μας δείχνει έναν τρόπο για να φέρουμε έναν αναγώγιμο πίνακα στη μορφή (2.8). Θα περιγράψουμε τα παραπάνω μ' ένα παράδειγμα.

Ας θεωρήσουμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & x \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x & 0 & x \\ 0 & x & x & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.10)$$

όπου x συμβολίζει μη μηδενικό στοιχείο, το γράφημα G(A), δίνεται στο σχήμα 2.1.



Σχ. 2.1

Το γράφημα αυτό δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, αφού δεν υπάρχει δρόμος που να οδηγεί π.χ. από το P_3 στο P_4. Σχηματίζω τα $S_1 = \{P_3, P_2, P_5\}$ και $S_2 = \{P_1, P_4\}$. Μια διατεταγμένη 5-άδα των δεικτών με πρώτα στοιχεία τους δείκτες από το S_2 και μετά από το S_1 είναι η (4,1,3,5,2). Εύκολα βρίσκουμε τον P ώστε να ισχύει

$$(4, 1, 3, 5, 2) \cdot P = (1, 2, 3, 4, 5)\,, \tag{2.11}$$

που είναι ο ακόλουθος

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Πράγματι ο $\tilde{A} = PAP^T$ είναι της μορφής (2.8), συγκεκριμένα

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & x & x & x & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Ένα από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των ασθενώς κυκλικών με δείκτη p πινάκων είναι η κυκλικότητα των ιδιοτιμών των. Δηλαδή, εάν $\mu \in \sigma(B)$, όπου $\sigma(B)$ παριστάνει το φάσμα του πίνακα B, τότε και $\mu \cdot \theta^j \in \sigma(B)$, όπου θ είναι η p- τάξης ρίζα της μονάδας και j ακέραιος.

Θεώρημα 2.8

Εάν B είναι ένας ασθενώς κυκλικός με δείκτη p πίνακας με $p>1$, τότε

$$\Phi(t) = \det(t\,I-B) = t^m \prod_{i=0}^{r} (t^p - \mu_i^p)\ , \tag{2.13}$$

όπου $m\in \mathbb{Z}$ η πολλαπλότητα της μηδενικής ιδιοτιμής μ_i , $i=0(1)r$ οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές και r το ακέραιο πηλίκο του (n-m) με το p (n η τάξη του πίνακα A).

Απόδειξη

Έστω μ_i μια μη-μηδενική ιδοτιμή του πίνακα B και $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, διαχωρισμένο όπως ο πίνακας B, για τον οποίο υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι έχει τη μορφή (2.7). Αφού $A\cdot z = \mu_i z$, θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} A_{1p}\, z_p &= \mu_i\, z_1 \\ A_{2p}\, z_1 &= \mu_i\, z_2 \\ &\ \vdots \\ A_{p,p-1}\, z_{p-1} &= \mu_i\, z_p \end{aligned} \tag{2.14}$$

Έστω $\theta_1 = \exp(2\pi/p)$. Οι $\theta_i = \theta_1^i$, $i = 0(1)p-1$ είναι οι p ρίζες της $x^p = 1$. Για κάθε $m\in\mathbb{Z}$ θέτουμε $\theta_m = \theta_1^m$. Με $m,\ell\in\mathbb{Z}$ η σχέση $\theta_m = \theta_\ell$ ισχύει, αν και μόνο αν $m \equiv \ell \pmod p$. Έτσι θα ισχύουν και οι σχέσεις

$$
\left.
\begin{aligned}
&A_{1p}\, z_p = \theta_i\, \mu_i\, (\theta_{p-1}\, z_1) \\
&A_{21}(\theta_{p-1}\, z_1) = \theta_i\, \mu_i\, (\theta_{p-2i}\, z_2) \\
&\quad \vdots \\
&A_{p,p-1}\, (\theta_{p-(p-1)i}\, z_{p-1}) = \theta_i\, \mu_i\, z_p
\end{aligned}
\right\} , \qquad (2.15)
$$

όπου $1 \leq i \leq p$-1. Συνεπώς $A \cdot z' = \theta_i\, \mu \cdot z'$, όπου $z' = (\theta_{p-1}\, z_1, ..., \theta_{p-(p-1)i}\, z_{p-1}, z_p)$. Έτσι, αν ο πίνακας B έχει τη μηδενική ιδιοτιμή με πολλαπλότητα m, η σχέση (2.13) ισχύει. ♦

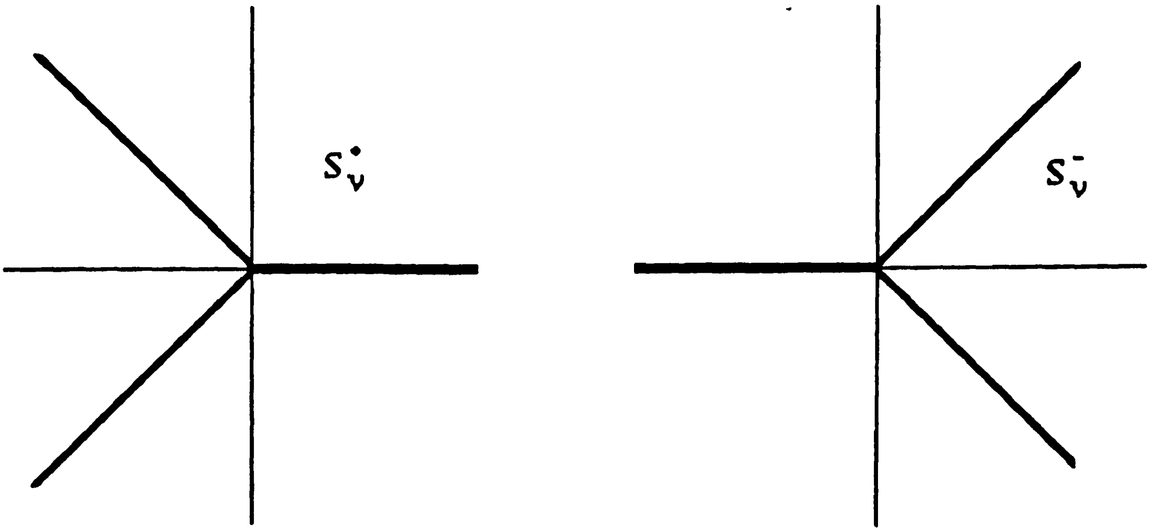
Έστω τώρα

$$S_\nu^+ = \{z \in \mathbb{C} : z = \mu \cdot e^{2k\pi i/p}\,,\;\; 0 \leq \mu \leq \nu\,,\;\; k = 0, 1, ..., p\text{-}1\}$$

και (2.16)

$$S_\nu^- = \{z \in \mathbb{C} : z = \mu \cdot e^{(2k+1)\pi i/p}\,,\;\; 0 \leq \mu \leq \nu\,,\;\; k = 0, 1, ..., p\text{-}1\}\,,$$

όπου ν η φασματική ακτίνα του πίνακα B ($\nu = \varrho(B)$).
Τα δύο παραπάνω σύνολα S_ν^+ και S_ν^- μπορούμε να τα δούμε στο παρακάτω σχήμα 2.2 για p = 3.



Σχ. 2.2

Από το Θεώρημα 2.8 προκύπτει αμέσως το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 2.8

Εάν ο πίνακας Jacobi B είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη p (p>1), τότε οι ιδιοτιμές του B^p είναι μη-αρνητικές (μη-θετικές), αν και μόνον αν οι ιδιοτιμές του B ανήκουν στο σύνολο S_v^+ (S_v^-).

Ορισμός 2.9

Έστω G ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα. Για κάθε σημείο P_i του G θεωρούμε όλους τους κατευθυνόμενους δρόμους που συνδέουν το P_i με τον εαυτό του. Εάν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των μηκών όλων των δρόμων αυτών είναι p>1, τότε το G θα ονομάζεται p-κυκλικό γράφημα.

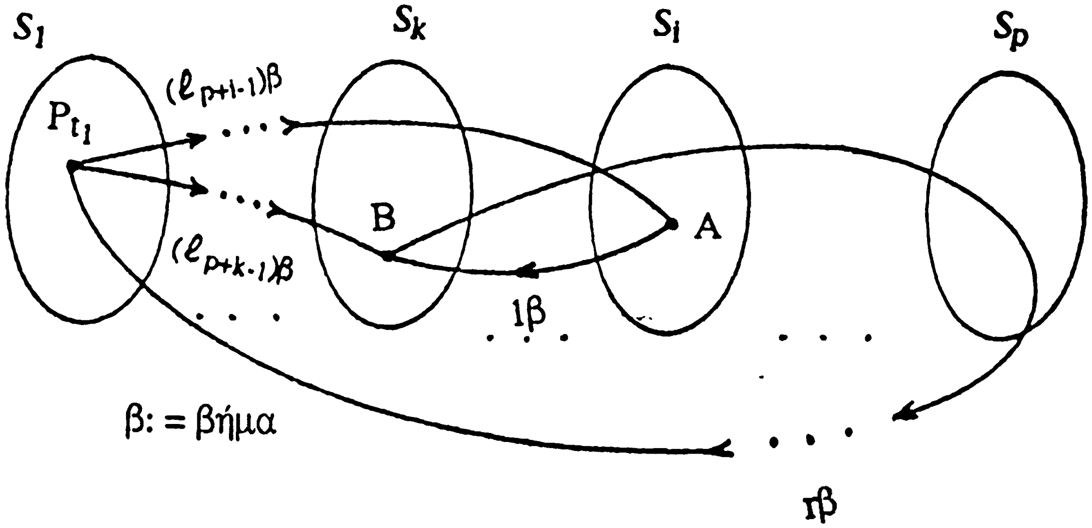
Θεώρημα 2.10

Ένας nxn μιγαδικός πίνακας B είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη p, αν το γράφημά του G(B) είναι ένα p-κυκλικό γράφημα.

Απόδειξη

Έστω p≥3. Θεωρούμε p κλειστές περιοχές του επιπέδου S_1, S_2, ..., S_p, οι οποίες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο μεταξύ τους. Στις περιοχές αυτές γράφουμε τα σημεία P_1, P_2, ..., P_n και τα βήματα που τα συνδέουν, ώστε να ξαναδημιουργήσουμε το γράφημα G(B), ως εξής. Αυθαίρετα εκλέγουμε το P_{i_1} σημείο και το τοποθετούμε στην S_1 περιοχή. Από το P_{i_1}, γράφουμε όλα τα βήματα που ξεκινούν απ' αυτό και τα σημεία που καταλήγουν τα τοποθετούμε στην περιοχή S_2. Από τα σημεία του S_2 γράφουμε όλα τα βήματα που ξεκινούν απ' αυτά και τα καινούργια σημεία, που εμφανίζονται σαν τέλος των βημάτων αυτών, τα τοποθετούμε στο S_3. Γενικά, από τα σημεία του S_i γράφουμε όλα τα βήματα που ξεκινούν απ' αυτά και τα καινούργια σημεία, αν υπάρχουν, που εμφανίζονται σαν τέλος των βημάτων αυτών τα γράφουμε στο S_{i+1}, με την παρατήρηση $S_{p+1} \equiv S_1$. Αφού το γράφημα G(B) είναι ισχυρά συνεκτικό, με την παραπάνω διαδικασία θα γράψουμε όλα τα σημεία $P_i \mid i = 1(1)n$ καθώς και τα βήματα που τα συνδέουν.

Με τον τρόπο που δημιουργήσαμε το G(B), τα βήματα που ξεκινούν από τα σημεία της S_i περιοχής, καταλήγουν μόνο στην S_{i+1} περιοχή. Πράγματι έστω ότι υπάρχει βήμα, που από κάποιο σημείο $A \in S_i$ καταλήγει στο σημείο $B \in S_k$ με $k \neq i+1$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το A είναι το πρώτο τέτοιο σημείο, που συναντάμε κατά την κατασκευή του γραφήματος. Επίσης υποθέτουμε ότι $1 \leq k \leq i \leq p$ και $(k,i) \neq (1,p)$. Η περίπτωση $i+2 \leq k \leq p$ αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο.



Σχ. 2.3

Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3, ένας κλειστός δρόμος $\overrightarrow{BB}$ είναι ο $\overrightarrow{BP_{t_1}B}$, ο οποίος έχει μήκος L ίσο με

$$L(\overrightarrow{BB}) = r + \ell p + k - 1 \ . \tag{2.17}$$

Ένας άλλος κλειστός δρόμος είναι ο $\overrightarrow{BP_{t_1}AB}$ με μήκος

$$L'(\overrightarrow{BB}) = r + \ell p + i - 1 + 1 \ . \qquad (2.18)$$

Όμως ισχύει $r = mp+r'$, $0 \le r \le p-1$. Έτσι από τις (2.17) και (2.18) έχουμε τις

$$\begin{aligned} L(\overrightarrow{BB}) &= Kp + r' + k - 1 \\ L(\overrightarrow{BB}) &= K'p + r' + i \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Αφού το G(B) είναι p-κυκλικοί, οι κλειστοί δρόμοι έχουν μήκος πολλαπλάσιο του p. Έτσι έχουμε $r'+k-1 \equiv r'+i \pmod{p}$ ή ισοδύναμα $k-1 \equiv i \pmod{p}$. Αφού $0 \le k-1 < i \le p$, συμπεραίνουμε ότι $k=1$ και $i=p$, που οδηγεί σε άτοπο. Το $p=2$ μπορούμε να το μελετήσουμε πολύ εύκολα με το προηγούμενο σκεπτικό, αντιμετωπίζοντας μόνο την περίπτωση $k=i$.

Έστω $S_1, S_2, ..., S_p$ τα σύνολα που περιέχουν τα σημεία των συνώνυμων περιοχών. Έστω επίσης $\mathbf{S}_1 = \{t_1, ..., t_{r_2}\}$, $\mathbf{S}_2 = \{t_{r_2+1}, ..., t_{r_3}\}$, ..., $\mathbf{S}_p = \{t_{r_p+1}, ..., t_p\}$ τα αντίστοιχα σύνολα δεικτών των παραπάνω συνόλων. Μια διάταξη όλων αυτών των δεικτών είναι η

$$W = (t_{r_p+1}, ..., t_p, t_{r_{p-1}+1}, t_{r_{p-1}+2}, ..., t_{r_p}, ..., t_1, t_2, ..., t_{r_2}) \ . \qquad (2.20)$$

Αλλάζοντας τα ονόματα των σημείων στα σύνολα $S_1, S_2, ..., S_p$ και στις αντίστοιχες περιοχές, ώστε το σημείο που είχε δείκτη t_{r_p+1} να έχει τώρα το 1, το σημείο που είχε δείκτη τον t_{r_p+2} να έχει τώρα το 2, κ.ο.κ., τελικά εκείνο που είχε δείκτη τον t_{r_2} να έχει τώρα το p, δημιουργούμε μια καινούργια διάταξη δεικτών την $W' = (1, 2, ..., p)$. Έτσι, για το σύνολο S_i έχουμε

$$S_i = \{P_{p-r_{i+1}+1}, P_{p-r_{i+1}+2}, ..., P_{p-r_i}\}\ , \quad i = p(-1)1 \qquad (2.21)$$

με $r_{p+1} = p$ και $r_1 = 0$. Αφού τα σημεία της S_i περιοχής συνδέονται μόνο μ' εκείνα της S_{i+1}, ο πίνακας

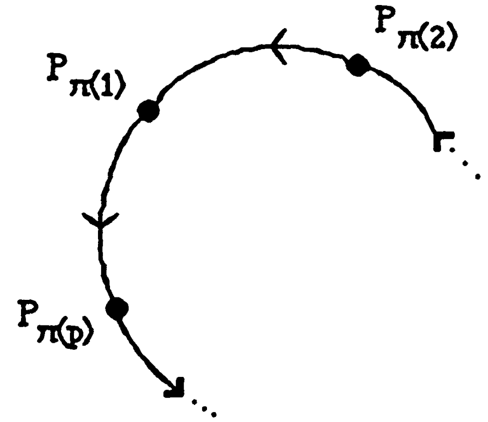
$$\tilde{B} = PBP^T , \tag{2.22}$$

όπου ο πίνακας P είναι ο μεταθετικός πίνακας για τον οποίο ισχύει $W' = W{\cdot}P$, θα έχει τη μορφή (2.7). ♦

Το τελευταίο μέρος της παραπάνω απόδειξης σκιαγραφεί έναν τρόπο για να μπορούμε να φέρουμε ένα ασθενώς κυκλικό με δείκτη p πίνακα στη μορφή (2.7).

Εάν το p' είναι διαιρέτης του p, τότε θεωρώντας p' κυκλικές περιοχές και ακολουθώντας το τελευταίο μέρος της προηγούμενης απόδειξης μπορούμε να φέρουμε ξανά τον πίνακα στη μορφή (2.7). Αυτή τη φορά όμως ο πίνακας θα είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη p'. Γενικά δηλαδή η κυκλικότητα ενός πίνακα δεν είναι μονοσήμαντη. Αν η αλλαγή των ονομάτων των σημείων στην παράπανω απόδειξη γίνει έτσι, ώστε το σημείο που είχε δείκτη $t_{r_{p-q+1}}$ να έχει τώρα το 1, αυτό που είχε δείκτη $t_{r_{p-q+2}}$ να έχει τώρα το 2, κ.ο.κ., και τελικά εκείνο που είχε δείκτη τον $t_{r_{p-q}}$ να έχει τώρα τον p, μπορούμε να βρούμε έναν άλλο μεταθετικό πίνακα P, ο οποίος να μας δίνει πάλι τη μορφή (2.7).

Για τον πίνακα A, που έχει διαχωριστεί όπως στην (2.2), εισάγουμε εδώ το block γράφημα $G_\pi(A)$. Στην προκειμένη περίπτωση θεωρούμε p σημεία $P_{\pi(i)}$, $i = 1(1)p$ κι ενώνουμε τα σημεία $P_{\pi(i)}$ και $P_{\pi(j)}$ μ' ένα κατευθυνόμενο βήμα από το $P_{\pi(i)}$ στο $P_{\pi(j)}$, εφόσον το αντίστοιχο block A_{ij} είναι διάφορο του μηδενικού πίνακα. Για τον πίνακα B της (2.7) το block γράφημα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4, είναι ένα p-κυκλικό γράφημα. Με τον ίδιο τρόπο, όπως στο θεώρημα 2.10, μπορούμε να δείξουμε ότι, αν για έναν πίνακα B το block γράφημά του είναι p-κυκλικό, τότε ο πίνακας B θα είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη p σε σχέση με το διαχωρισμό αυτό.



Σχ. 2.4

Θεώρημα 2.11

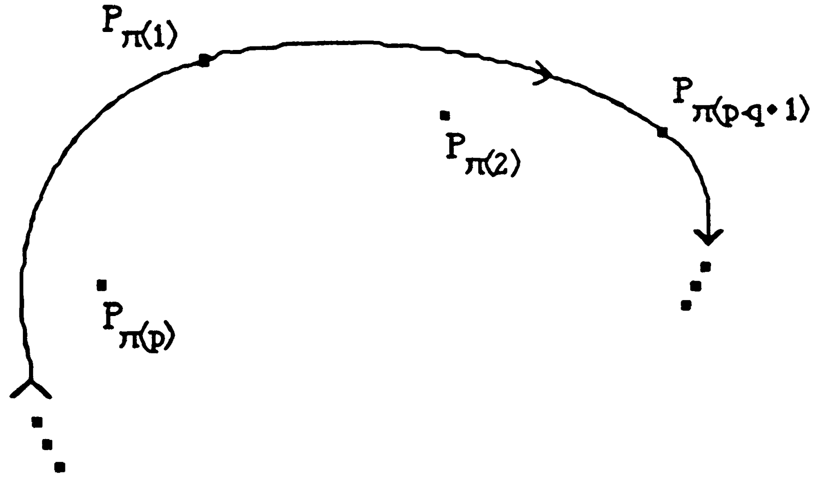
Υποθέτουμε ότι ο πίνακας Jacobi B, που αντιστοιχεί στον πίνακα A της (2.2), είναι της μορφής

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & B_{1,p-q+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & B_{q,p} \\ B_{q+1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & B_{p,p-q} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.24)$$

Τότε ο πίνακας B είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη p, αν και μόνον αν οι αριθμοί p και q ($1 \le q < p$) είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Απόδειξη

Έστω τα σημεία $P_{\pi(i)}$, $i = 1(1)p$, διατεταγμένα κυκλικά όπως στο σχήμα 2.5. Έστω $G_\pi(B)$ το block γράφημα του πίνακα B.



Σχ. 2.5

Σ' αυτό, το τυχαίο σημείο $P_{\pi(r_1)}$ συνδέεται μ' ένα κατευθυνόμενο βήμα, που ξεκινά απ' αυτό με το $P_{\pi(r_2)}$, όπου $r_2 = r_1+(p-q)$ αν $r+(p-q) \le p$ και $r_2 = r_1+(p-q)-p$ αν $r_1+(p-q) > p$, δηλαδή $r_1+(p-q) \equiv r_2 \pmod{p}$.

α) Έστω μ.κ.δ. $(p,q) = d \neq 1$. Ξεκινώντας από το τυχαίο σημείο $P_\pi(r_1)$ μετά από $\frac{p}{d}$ βήματα θα φθάσουμε στο σημείο με δείκτη $r + \frac{p}{d}(p-q) = r_1 + \frac{p-q}{d}p \equiv r \pmod{p}$. Δηλαδή ο κλειστός αυτός δρόμος δεν έχει p βήματα. Αυτό σημαίνει ότι το $G_\pi(B)$ δεν είναι p-κυκλικό γράφημα ή ισοδύναμα ότι ο B δεν είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη p.

β) Έστω ότι μ.κ.δ. $(p,q) = 1$. Ξεκινώντας πάλι από το τυχαίο σημείο $P_{\pi(r_1)}$, μετά από p βήματα θα φθάσουμε πάλι στο σημείο $P_{\pi(r_1)}$, περνώντας απ' όλα τ' άλλα σημεία. Δηλαδή το $G_\pi(B)$ θα είναι p-κυκλικό γράφημα και επομένως ο πίνακας B ασθενώς κυκλικός με δείκτη p. Το ότι θα επιστρέψουμε πάλι στο $P_{\pi(r_1)}$ φαίνεται εύκολα, αφού $r_1 + p(p-q) = r_1 + (p-q)p \equiv r_1 \pmod{p}$. Για να δείξουμε ότι θα περάσουμε απ' όλα τ' άλλα σημεία, αρκεί να δείξουμε ότι στη σχέση

$$r_1 + k(p-q) \equiv m \pmod{p}$$

καθώς το k παίρνει όλες τις τιμές από 1 μέχρι p και για το m θα συμβαίνει το ίδιο. Πράγματι αν $1 \le k_2 < k_1 \le p$ και $m_2 = m_1$, από την προηγούμενη σχέση βρίσκουμε $(k_2 - k_1)(p-q) \equiv 0 \pmod p$. Δηλαδή έχουμε ε.κ.π. $(p, p-q) < p(p-q)$, που είναι άτοπο.

2.3 Γενικευμένοι συνεπώς διατεταγμένοι (p, q) πίνακες

Το 1968 οι Verner και Bernal [37] έδωσαν τον επόμενο ορισμό, γενικεύοντας τον ορισμό του Varga [34] για τους συνεπώς διατεταγμένους πίνακες.

Ορισμός 2.12

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ $(a_{ii} \neq 0)$ καλείται γενικευμένος συνεπώς διατεταγμένος (G.C.O.-(q, r)), αν και μόνον αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$B(a) = a^q L + a^{-r} U, \tag{2.25}$$

που προκύπτει από τον πίνακα Jacobi $B = L+U$, που αντιστοιχεί στον A είναι ανεξάρτητες του a, για κάθε $a \neq 0$. (Επίσης τον πίνακα B θα τον λέμε G.C.O.-(q, r)). Στα επόμενα, για ευκολία, έναν p-κυκλικό πίνακα A που είναι και G.C.O.-(q, p-q) πίνακας θα τον καλούμε G.C.O. -(p, q) πίνακα.

Θεώρημα 2.13

Ο πίνακας B της (2.24) με p, q πρώτους μεταξύ τους είναι ένας G.C.O. -(p, q) πίνακας.

Απόδειξη

Αφού μ.κ.δ. $(p,q)=1$, ο B είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη p. Έστω τώρα

$$B(a) \cdot X = \lambda \cdot X \tag{2.26}$$

με $X \neq 0$. Μπορούμε να διαχωρίσουμε το ιδιοδιάνυσμα x σύμφωνα με τον πίνακα B και να πάρουμε το ισοδύναμο σύνολο εξισώσεων προς την (2.26).

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a^{p-q}} B_{j,p-q+j} X_{p-q+j} = \lambda \cdot X_j , && j = 1(1)9 \\ &a^q B_{j,j-q} X_{j-q} = \lambda \cdot X_j , && j = q+1(1)p . \end{aligned} \tag{2.27}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (2.27) με a^{-j} παίρνουμε τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} &B_{j,p-q+j} \left(\frac{1}{a^{p-q+j}} X_{p-q+j} \right) = \lambda \left(\frac{1}{a^j} X_j \right) , && j = 1(1)q \\ &B_{j,j-q} \left(\frac{1}{a^{j-q}} X_{j-q} \right) = \lambda \left(\frac{1}{a^j} X_j \right) , && j = q+1(1)p . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Θέτοντας λοιπόν $\frac{1}{a^\ell} X_\ell = Z_\ell$ έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned} &B_{j,p-q+j} Z_{p-1+j} = \lambda Z_j , && j = 1(1)q \\ &B_{j,j-q} Z_{j-p} = \lambda Z_j , && j = q+1(1)p , \end{aligned} \tag{2.29}$$

Οι σχέσεις (2.29) σημαίνουν ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα B(a) είναι εκείνες του πίνακα B και συνεπώς ανεξάρτητες του a. Επίσης εύκολα μπορεί κανείς να δει τη σχέση που συνδέει τα ιδιοδιανύσματα των δύο πινάκων. ♦

Θεώρημα 2.14

Έστω $A = I-L-U$ ένας G.C.O.-(p, q) πίνακας. Τότε για κάθε τριάδα μιγαδικών σταθερών α, β και γ ισχύει

$$\det(\gamma I - \alpha L - \beta U) = \det\{\gamma I - (\alpha^{p-q}\beta^q)^{1/p}(L+U)\} \ . \tag{2.30}$$

Απόδειξη

Αν λ_i είναι οι ιδιοτιμές του $\alpha L + \beta U$ πίνακα, τότε έχουμε

$$\det(\gamma I - \alpha L - \beta U) = \prod_{i=1}^{n} (\gamma - \lambda_i) \ . \tag{2.31}$$

Επίσης, αν μ_i είναι οι ιδιοτιμές του $(\alpha^{p-q}\beta^q)^{1/p}(L+U)$, τότε ισχύει

$$\det\{\gamma I - (\alpha^{p-q}\beta^q)^{1/p}(L+U)\} = \prod_{i=1}^{n} (\gamma - \mu_i) \ . \tag{2.32}$$

Με την υπόθεση ότι $\alpha\beta \neq 0$ μπορούμε να πάρουμε ότι

$$\alpha L + \beta U = (\alpha^{p-q}\beta^q)^{1/p}(\delta^q L + \delta^{-(p-q)} U) , \tag{2.33}$$

όπου $\delta = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/p}$. Αφού όμως ο $L+U$ είναι G.C.O. - (p, q), οι ιδιοτιμές του $\delta^q L + \delta^{-(p-q)} U$ και του $L+U$ είναι ίδιες. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η σχέση (2.30) ισχύει, αφού τα δεύτερα μέλη των (2.31) και (2.32) είναι ίσα. Στην περίπτωση που $\alpha=0$ ή $\beta=0$ ή $\alpha=\beta=0$, τότε η (2.30) πάλι ισχύει, αφού $\det(\gamma I - \alpha L - \beta U) = \det\{\gamma I - (\alpha^{p-q}\beta^q)^{1/p}(L+U)\} = \gamma^n$.

Το Θεώρημα 2.14 είναι ιδιαίτερα σημαντικό, αφού είναι το εργαλείο που θα μας δώσει συναρτησιακή σχέση μεταξύ των ιδιοτιμών του Jacobi πίνακα B και του επαναληπτικού πίνακα $\mathcal{L}_\omega$ της Successive Overrelaxation (SOR) μεθόδου, που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

2.4 Η block SOR μέθοδος

Έστω πάλι το σύστημα (2.1) με τον πίνακα A διαχωρισμένο, όπως στην (2.2), και με τις ίδιες υποθέσεις. Θεωρούμε τώρα τη διαμέριση

$$A = M - N , \tag{2.34}$$

όπου $M = \frac{1}{\omega}(D-\omega E)$ και $N = \frac{1}{\omega}[\,\omega F + (1-\omega)D]$ με $\omega \neq 0$. Η block SOR μέθοδος είναι η ακόλουθη:

$$x^{(m+1)} = (D - \omega E)^{-1}\,\{\omega F + (1-\omega)D\}\; x^{(m)} + \omega(D-\omega E)^{-1}\, b\, . \tag{2.35}$$

Η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί σαν

$$x^{(m+1)} = (D - \omega E)^{-1}\, DD^{-1}\,\{\omega F + (1-\omega)D\}\; x^{(m)} + \omega(D - \omega E)^{-1}\, DD^{-1}\; b\ ,$$

οπότε

$$x^{(m+1)} = (I - \omega L)^{-1}\,\{\omega U + (1-\omega)I\}\; x^{(m)} + \omega k\ , \tag{2.36}$$

όπου $L = D^{-1}E$, $U = D^{-1}F$ και $k = (I - \omega L)^{-1}D^{-1}b$. Ο επαναληπτικός πίνακας της block SOR μεθόδου είναι ο

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1}\,\{\omega U + (1-\omega)I\}\ . \tag{2.37}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\mathcal{L}_\omega$, είναι προφανώς το

$$\Phi(\lambda) = \det(\mathcal{L}_\omega - \lambda I) \ .$$

Ο πίνακας I-ωL είναι κάτω τριγωνικός και έχει διαγώνια στοιχεία ίσα με τη μονάδα. Έτσι, αφού $\det(I-\omega L) = 1$, θα έχουμε

$$\Phi(\lambda) = \det(I-\omega L) \det\{(I-\omega L)^{-1}[\omega U + (1-\omega)I] - \lambda I\} =$$

$$= \det\{\omega U + \omega\lambda L - (\omega + \lambda - 1)I\} \ . \tag{2.38}$$

Από την (2.38) φαίνεται καθαρά ότι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του πολυωνύμου $\Phi(\lambda)$ είναι $\alpha_n = (-1)^n$ και ο σταθερός όρος $\alpha_o = \Phi(0) = (1-\omega)^n$. Γίνεται λοιπόν φανερό ότι

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (1-\omega)^n \ , \tag{2.39}$$

όπου λ_i οι ιδιοτιμές του $\mathcal{L}_\omega$.

Έτσι λοιπόν, όταν η SOR μέθοδος συγκλίνει, η φασματική ακτίνα του $\mathcal{L}_\omega$ θα είναι μικρότερη από τη μονάδα και συνεπώς θα ισχύει η επόμενη, κλασική πλέον, σχέση ([34], [40])

$$0 < \omega < 2 \ , \tag{2.40}$$

για $\omega \in \mathbb{R}$. Όταν ο πίνακας A είναι G.C.O. - (p, q), τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα Jacobi B της (2.6) και του πίνακα (2.37) της SOR είναι στενά συνδεδεμένες, όπως θα δούμε στο επόμενο θεώρημα.

Θ ε ώ ρ η μ α 2.15
Έστω ο πίνακας A της (2.1) ένας G.C.O. - (p, q) πίνακας μ' όλους τους υποπίνακες $A_{i,i}$ ομαλούς. Εάν για $\omega \neq 0$, το λ είναι μια μη-μηδενική ιδιοτιμή του $\mathcal{L}_\omega$, και το μ ικανοποιεί τη σχέση

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^{p-q}\, \omega^p\, \mu^p \ , \tag{2.41}$$

τότε το μ είναι ιδιοτιμή του πίνακα Jacobi B. Αντιστρόφως εάν το μ είναι ιδιοτιμή του B και το λ ικανοποιεί τη σχέση (2.41), τότε το λ θα είναι ιδιοτιμή του $\mathcal{L}_\omega$.

Α π ό δ ε ι ξ η
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του επαναληπτικού πίνακα $\mathcal{L}_\omega$ είναι εκείνο της σχέσης (2.38). Όμως ισοδύναμα θα μπορούσε να θεωρηθεί και το

$$F(\lambda) = \det\{(\omega + \lambda - 1)I - \omega\lambda L - \omega U\} \ . \tag{2.42}$$

Επειδή ο πίνακας A είναι G.C.O. - (p, q) πίνακας, από το Θεώρημα 2.14 θα ισχύει

$$F(\lambda) = \det\{(\omega + \lambda - 1)I - (\omega^p \lambda^{p-q})^{1/p} (L + U)\} =$$
$$= \det\{(\omega + \lambda - 1)I - \omega\lambda^{\frac{p-q}{p}} B\} \ . \tag{2.43}$$

Αφού ο πίνακας A είναι p-κυκλικός, p-κυκλικός θα είναι και ο $\omega\lambda^{\frac{p-q}{p}} B$. Από το Θεώρημα 2.11 και τη σχέση (2.13) θα ισχύει

$$F(\lambda) = (\omega + \lambda - 1)^m \prod_{i=1}^{r} \{(\omega + \lambda - 1)^p - \lambda^{p-q}\, \omega^p\, \mu_i^p\} \ . \tag{2.44}$$

Εάν υποθέσουμε ότι $\omega \neq 0$, μ ιδιοτιμή του πίνακα του Jacobi B και η (2.41) ισχύει, τότε αμέσως από την (2.44) έχουμε ότι $F(\lambda) = 0$ και το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος ισχύει. Εάν υποθέσουμε ότι $\omega \cdot \mu \neq 0$, λ μη-μηδενική ιδιοτιμή του επαναληπτικού πίνακα της SOR $\mathcal{L}_\omega$ και την (2.44) να ισχύει, τότε λόγω ακριβώς της ισχύος της (2.41) θα έχουμε $\omega+\lambda-1 \neq 0$. Παίρνοντας υπόψη την (2.44) και ότι $\mu \neq 0$, προκύπτει

$$\lambda^{p-q}\, \omega^p \,(\mu^p - \mu_i^p) = 0 \ . \qquad (2.45)$$

Από την προηγούμενη σχέση έχουμε αμέσως, παίρνοντας p- τάξης ρίζα στα δυο μέλη της ισότητας $\mu^p = \mu_i^p$, ότι

$$\mu = \mu_i\, e^{\frac{2k\pi}{p} i} \qquad \text{με} \ \ 0 \leq k < p \ , \qquad (2.46)$$

και από την κυκλικότητα του B έπεται ότι $\mu \in \sigma(B)$. Εάν $\mu=0$ και ισχύει η (2.41), τότε $\lambda+\omega-1 = 0$. Από την (2.43) θα έχουμε

$$\left(-\,\omega\lambda^{\frac{p-q}{p}}\right)^n \det B = F(\lambda) \ . \qquad (2.47)$$

Επειδή το λ είναι ιδιοτιμή του $\mathcal{L}_\omega$, θα έχουμε ότι $F(\lambda) = 0$ · έτσι σε συνδυασμό με την (2.47) θα ισχύει $\det B = 0$, που σημαίνει ότι το $\mu=0$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα Jacobi. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ♦

Σημείωση: όπως απέδειξαν οι Galanis, Hadjidimos και Noutsos [8] με την ίδια ακριβώς σχέση συνδέονται και οι αντίστοιχοι πίνακες.

2.5 Η block SSOR μέθοδος

Έστω πάλι το σύστημα (2.1) με τον πίνακα A διαχωρισμένο, όπως στην (2.2), και με τις ίδιες υποθέσεις. Θεωρούμε επίσης τη διαμέριση

$$A = M - N \ , \tag{2.48}$$

όπου $M = \frac{1}{\omega}(D-\omega F)$ και $N = \frac{1}{\omega}[\omega E + (1-\omega)D]$ με $\omega \neq 0$. Η προς τα πίσω block SOR μέθοδος είναι η ακόλουθη:

$$x^{(m+1)} = (D - \omega F)^{-1} \{\omega E + (1-\omega)D\} \, x^{(m)} + \omega(D-\omega F)^{-1} b \, .$$

Η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί σαν

$$x^{(m+1)} = (I - \omega U)^{-1} \{\omega L + (1-\omega)I\} \, x^{(m)} + \omega(I - \omega U)^{-1} D^{-1} b \ , \tag{2.49}$$

όπου $L = D^{-1} E$, $U = D^{-1} F$. Ο επαναληπτικός πίνακας της προς τα πίσω block SOR μεθόδου είναι ο

$$\mathcal{U}_\omega = (I - \omega U)^{-1} \{\omega L + (1-\omega)I\} \ . \tag{2.50}$$

Έστω το πρώτο βήμα που προκύπτει από την εφαρμογή της SOR μεθόδου:

$$x^{(m+\frac{1}{2})} = \mathcal{L}_\omega \, x^{(m)} + \omega(I - \omega L)^{-1} D^{-1} b \ . \tag{2.51}$$

Έστω επίσης το δεύτερο μισό βήμα

$$x^{(m+1)} = \mathcal{U}_\omega \, x^{(m+\frac{1}{2})} + \omega \, (I - \omega U)^{-1} D^{-1} b \, , \tag{2.52}$$

που προκύπτει από την εφαρμογή της προς τα πίσω SOR μεθόδου στο $x^{(m+\frac{1}{2})}$ της (2.51). Η επανάληψη

$$x^{(m+1)} = \mathcal{U}_\omega \mathcal{L}_\omega \, x^{(m)} + \mathcal{U}_\omega \, \omega(I - \omega L)^{-1} D^{-1} b + \omega(I - \omega U)^{-1} D^{-1} b$$

ή μετά από λίγες πράξεις

$$x^{(m+1)} = \mathbf{S}_\omega x^{(m)} + \omega(2-\omega)\,(I - \omega L)^{-1}\,(I - \omega U)^{-1} D^{-1} b\,, \qquad (2.60)$$

όπου $\mathbf{S}_\omega = \mathcal{U}_\omega \mathcal{L}_\omega$ είναι ο επαναληπτικός πίνακας αυτής, ορίζει τη συμμετρική SOR (SSOR) μέθοδο. Αφού $\det(\mathcal{U}_\omega \mathcal{L}_\omega) = \det(\mathcal{U}_\omega)\det(\mathcal{L}_\omega)$, εύκολα μπορεί να αποδειχθεί, όπως στην παράγραφο 2.4, ότι αναγκαία συνθήκη σύγκλισης είναι αυτή της SOR, ήτοι $0 < \omega < 2$.

Για τους G.C.O.-(p, q) πίνακες οι Varga, Niethammer και Cai [36], απέδειξαν τη συναρτησιακή εξίσωση, που δίνεται στο επόμενο θεώρημα, γενικεύοντας την αντίστοιχη σχέση που υπήρχε για p=2 [5].

Θεώρημα 2.15

Έστω ο πίνακας A της (2.1) ένας G.C.O. - (p,1) πίνακας μ' όλους τους υποπίνακες $A_{i,i}$ ομαλούς. Εάν $\omega \neq 0$, το λ ($\lambda \neq (1-\omega)^2$) μια μη-μηδενική ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbf{S}_\omega$ και το μ ικανοποιεί τη σχέση

$$[\lambda - (1-\omega)^2]^{\,p} = \lambda\,[\lambda + (1-\omega)\,]^{p-2}\,(2-\omega)^2\,\omega^p\,\mu^p \qquad (2.61)$$

τότε το μ είναι ιδιοτιμή του πίνακα B. Αντισρόφως αν το μ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα B και το λ ($\lambda \neq (1-\omega)^2$) ικανοποιεί τη σχεση (2.61), τότε αυτό είναι ιδιοτιμή του $\mathbf{S}_\omega$.

Σημείωση: Οι Galanis, Hadjidimos και Noutsos [8] απέδειξαν ότι η ίδια σχέση διέπει και τους αντίστοιχους πίνακες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΡΙΟΧΩΝ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΜΕ ΤΟΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ ΤΩΝ Schur-Cohn

3.1 Εισαγωγή

Η προσπάθεια για να απαντηθούν τα ερωτήματα που τέθηκαν στο Κεφάλαιο 1, όταν λύνουμε ένα ομαλό γραμμικό σύστημα της μορφής (2.1) με την SOR μέθοδο (2.35) και τον πίνακα Jacobi B να είναι G.C.O.-(p,q) (Ορισμός 2.12), είναι μακρόχρονη και συνεχής. Έτσι λοιπόν αρχικά ο Young [39] και στη συνέχεια οι Kredell [22] και Niethammer [27] έδωσαν απαντήσεις τόσο για περιοχές σύγκλισης, όσο και βέλτιστες τιμές της παραμέτρου ω για p=2 και q=1. Αργότερα οι Niethammer, de Pillis και Varga [28] μελέτησαν την περίπτωση p=3, q=1. Οι Hadjidimos και Varga [13] έδωσαν πρώτοι περιοχές σύγκλισης για p>3 και q=1. Μετά οι Galanis, Hadjidimos και Noutsos [7] και ανεξάρτητα οι Wild και Niethammer [38] μελέτησαν προβλήματα σύγκλισης για q=1, όταν το φάσμα $\sigma(B^p)$ είναι μη-αρνητικό ή μη-θετικό και βέλτιστες τιμές της παραμέτρου ω για την ίδια κατηγορία πινάκων. Βέλτιστη τιμή της παραμέτρου ω έδωσαν οι Nichols και Fox [26] για κάθε p≥3 και q=1, όταν το φάσμα $\sigma(B^p)$ είναι μη-θετικό, και οι Galanis, Hadjidimos, Noutsos και Tzoumas [11] (βλ. Κεφ. 5) για p=3, 4 και q=p-1, όταν το $\sigma(B^p)$ είναι μη-αρνητικό.

Στο παρόν κεφάλαιο χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Schur-Cohn [21] θα δώσουμε περιοχές σύγκλισης για κάθε $p \geq 3$ και $q=p-1$ στις δύο περιπτώσεις που προαναφέρθηκαν ($\sigma(B^p)$ μη-θετικό ή μη-αρνητικό). Επίσης θα δώσουμε περιοχές στο $(\varrho(B), \omega)$-επίπεδο, όπου η βέλτιστη παράμετρος είναι $\omega_{opt}=1$, καθώς και περιοχές του ίδιου επιπέδου στις οποίες βρίσκεται η βέλτιστη παράμετρος, όταν είναι διαφορετική του 1.

3.2 Ο Αλγόριθμος των Schur-Cohn

Πριν δώσουμε τον Αλγόριθμο των Schur-Cohn, θα δώσουμε το επόμενο θεώρημα, γνωστό σαν θεώρημα του Rouché, το οποίο είναι βασικό εργαλείο τόσο για την απόδειξη του αλγορίθμου, όσο και για την απόδειξη μερικών θεωρημάτων που θα ακολουθήσουν. Τόσο το θεώρημα του Rouché, όσο και το υπόλοιπο μέρος της παρούσας παραγράφου είναι παρμένα από το βιβλίο του Henrici, [21].

Θ ε ώ ρ η μ α 3.1 (Θεώρημα του Rouché)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι αναλυτικές σε μια απλά συνεκτική περιοχή R. Αν Γ είναι μια Jordan καμπύλη της R και ισχύει $|f(z)| > |g(z)|$ γιά όλα τα $z \in \Gamma$, τότε οι συναρτήσεις f+g και f έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο εσωτερικό της Γ.

Στη συνέχεια και μέχρι το τέλος του Κεφαλαίου 3 θα χρησιμοποιούμε τον επόμενο γενικευμένο ορισμό του όρου "πολυώνυμο", που αποτελεί επέκταση αυτού που κοινά έχει καθιερωθεί.

Ο ρ ι σ μ ό ς 3.2

Η συνάρτηση που ορίζεται ως

$$P(z) := \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 \qquad (3.1)$$

με α_i, $i=0(1)n$ μιγαδικούς γενικά αριθμούς, καλείται πολυώνυμο βαθμού n, αν τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές α_i, $i=0(1)n$ είναι διαφορετικός από το μηδέν. Διαφορετικά θα είναι η μηδενική συνάρτηση. Όταν $\alpha_n \neq 0$, θα λέμε ότι το P είναι πολυώνυμο ακριβώς βαθμού n.

Με τον "καινούργιο" ορισμό όλες οι προτάσεις που ισχύουν με τον κοινά καθιερωμένο εξακολουθούν να ισχύουν. Η μόνη διαφορά ίσως είναι πως, αν για κάποιο k>o ισχύει $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \ldots = \alpha_{n-k+1} = 0$ και $\alpha_{n-k} \neq 0$, θα λέμε ότι το πολυώνυμο p της (3.1) έχει ρίζα την $z=\infty$ με πολλαπλότητα k. Έτσι το πολυώνυμο P της (3.1) θα έχει ακριβώς n ρίζες, ανεξάρτητα αν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι διαφορετικός από το μηδέν ή όχι.

Ορισμός 3.3

Εάν P είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n, το n βαθμού πολυώνυμο

$$P^*(z) = \bar{\alpha}_0 z^n + \bar{\alpha}_1 z^{n-1} + \ldots + \bar{\alpha}_{n-1} z + \bar{\alpha}_n \qquad (3.2)$$

θα καλείται αντίστροφο πολυώνυμο του P.

Από τον Ορισμό 3.2 προκύπτει αμέσως ότι

$$z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = P^*(z)\,, \qquad (3.3)$$

όταν το $z \neq 0$. Αν επί πλέον $|z|=1$, δηλαδή $z = \frac{1}{\bar{z}}$, τότε $|P^*(z)| = |z|^n \left|\overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right| = |\overline{P(z)}| = |P(z)|$. Γενικότερα ισχύει.

Θεώρημα 3.4

Εάν $P \neq 0$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n>0$, με ρίζες w_i, $i = 1(1)n$, τότε το αντίστροφο πολυώνυμο P^* είναι ένα πολυώνυμο του ίδιου βαθμού με ρίζες $\frac{1}{\overline{w}_i}$, $i = 1(1)n$, όπου εάν $w_i = 0$, τότε $\frac{1}{\overline{w}_i} = \infty$ και εάν $w = \infty$, τότε $\frac{1}{\overline{w}_i} = 0$.

Απόδειξη

Έστω P ένα πολυώνυμο βαθμού n>0 και $w \neq 0$ μια ρίζα του P.

Τότε προφανώς η σχέση $P(w) = 0$ ισοδυναμεί με τη $\overline{P(w)}=0$. Από τη σχέση (3.3) προκύπτει

$$P\left(\frac{1}{\overline{w}}\right) = \left(\frac{1}{\overline{w}}\right)^n \cdot \overline{P\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)}\right)} = \left(\frac{1}{\overline{w}}\right)^n \cdot \overline{P(w)} = 0 . \tag{3.4}$$

Έστω επί πλέον ότι το P έχει m ρίζες ίσες με 0 και k ρίζες ίσες με το ∞. Αφού το μηδέν είναι ρίζα πολλαπλότητας m, το πολυώνυμο γράφεται

$$P(z) = z^m Q(z) \ , \tag{3.5}$$

όπου το Q(z) είναι πολυώνυμο βαθμού n-m με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου α_{n-k}. Θυμίζουμε ότι το υπόψη πολυώνυμο έχει k ρίζες ίσες με το ∞, μεγιστοβάθμιο όρο τον $\alpha_{n-k}\, z^{n-k-m}$ και σταθερό όρο τον $\alpha_m \neq 0$. Έτσι για το αντίστροφο πολυώνυμο θα έχουμε

$$P^*(z) = z^n \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^n Q\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = z^{n-m} \cdot \overline{Q\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = z^k \cdot z^{n-m-k} \cdot \overline{Q\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} . \tag{3.6}$$

Το δεξιό μέλος της (3.6) είναι ίσο με

$$z^k \cdot (\alpha_{n-k} + \ldots + \alpha_m\, z^{n-k-m}) \ . \tag{3.7}$$

Ο πρώτος παράγοντας του γινομένου στην (3.7) δηλώνει ότι το αντίστροφο πολυώνυμο P^* έχει k φορές ρίζα το μηδέν. Επειδή δε ο $\alpha_m \neq 0$ και $\alpha_{m-1} = \alpha_{m-2} = \ldots = \alpha_0 = 0$, το P^* έχει m φορές ρίζα το άπειρο.

Ορισμός 3.5

Έστω P ένα πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$. Το πολυώνυμο T_P βαθμού n-1 που ορίζεται από τη σχέση

$$T_P(z) := \bar{\alpha}_0 P(z) - \alpha_n P^*(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (\bar{\alpha}_0 \alpha_k - \alpha_n \bar{\alpha}_{n-k})\, z^k \tag{3.8}$$

καλείται Schur πολυώνυμο του P και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός καλείται μετασχηματισμός του Schur.

Μπορούμε να ορίσουμε επαναληπτικά τους μετασχηματισμούς $T^2P, T^3P, \ldots, T^nP$ ως

$$T^kP := T(T^{k-1}P), \quad k = 2(1)n,$$

όπου το $T^{k-1}P$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n-k+1. Θέτουμε

$$\gamma_k := T^kP(0) = |\alpha_0^{(k-1)}|^2 - |\alpha_{n-k+1}^{(k-1)}|^2 . \tag{3.9}$$

Ο διαδοχικός υπολογισμός των ποσοτήτων γ_k στην (3.9) είναι γνωστός με την ονομασία αλγόριθμος των Schur-Cohn.

Θεώρημα 3.6

Έστω $P \neq 0$ ένα πολυώνυμο βαθμού n. Όλες οι ρίζες του πολυωνύμου βρίσκονται στο εξωτερικό του μοναδιαίου δίσκου $|z| \leq 1$, αν και μόνον αν

$$\gamma_k > 0, \quad k = 1(1)n . \tag{3.10}$$

Απόδειξη

Έστω ότι το πολυώνυμο P δεν έχει καμιά ρίζα στο εσωτερικό και το σύνορο του μοναδιαίου κύκλου ($|z| \leq 1$). Τότε από τους τύπους του Vietà θα έχουμε

$$\prod_{i=1}^{n} |z_i| > 1 \ , \qquad (3.11)$$

οπότε $|\alpha_o| > |\alpha_n|$ ή ισοδύναμα $\gamma_1 = |\alpha_o|^2 - |\alpha_n|^2 > 0$. Λόγω της προηγούμενης σχέσης και του γεγονότος ότι $|P(z)| = |P^*(z)|$ για $|z| = 1$, θα έχουμε

$$|\bar{\alpha}_o P(z)| > |\alpha_n P^*(z)| \ , \ \text{για } |z| = 1 \ . \qquad (3.12)$$

Όμως από το θεώρημα του Rouché με $f = \bar{\alpha}_o P$ και $g = -\alpha_n P^*$ η συνάρτηση $f+g = \bar{\alpha}_o P - \alpha_n P^*$ και η f έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο εσωτερικό του $|z| \leq 1$. Δηλαδή καμία. Αφού ισχύει η (3.12), ούτε στο σύνορο $|z|=1$ υπάρχει ρίζα. Δηλαδή το T_p έχει όλες τις ρίζες του στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Επαγωγικά προκύπτει ότι για όλα τα $k = 1(1)n$ ισχύει $\gamma_k > 0$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $\gamma_k > 0$, $k=1(1)n$. Αφού $|\bar{\alpha}_o^{(k-1)}| > |\alpha_{n-k}^{(k-1)}|$ και $|T^{k-1}P|=|T^{k-1}P^*|$ για $|z| =1$, προκύπτει ότι $|\bar{\alpha}_o^{(k-1)} T^{k-1}P| > |\alpha_{n-k+1}^{(k-1)} T^{k-1}P|$ για $|z| = 1$. Με εφαρμογή του θεωρήματος του Rouché προκύπτει ότι το πολυώνυμο T^kP έχει τον ίδιο αριθμό ριζών στο μοναδιαίο δίσκο, όπως και το $T^{k-1}P$. Επαγωγικά λοιπόν φθάνουμε στο συμπέρασμα ότι το πολυώνυμο P έχει τον ίδιο αριθμό ριζών στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου με το $T^nP = \gamma_n$. Δηλαδή καμία, αφού $\gamma_n > 0$.

3.3 Περιοχές σύγκλισης με τον αλγόριθμο των Schur-Cohn

Σ' αυτή την παράγραφο έχουμε στόχο να προσδιορίσουμε ακριβείς περιοχές σύγκλισης για την SOR μέθοδο στο (ν, ω)-επίπεδο $(\nu=\varrho(B))$. Θα εξετάσουμε το πρόβλημα με την υπόθεση ότι το φάσμα των ιδιοτιμών της p-οστής δύναμης του πίνακα του Jacobi B είναι i) μη-θετικό (non-positive περίπτωση) και ii) μη-αρνητικό (non-negative περίπτωση).

3.3.1 Μη-θετική περίπτωση

Όταν το $q=p-1$, η θεμελιώδης εξίσωση (2.41) που συνδέει τις ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα Jacobi B και του επαναληπτικού πίνακα $\mathcal{L}_\omega$ της SOR γίνεται

$$(\lambda+\omega-1)^p = \lambda\omega^p \mu^p \, . \tag{3.13}$$

Καταρχήν προσπαθούμε να βρούμε μια περιοχή στο (ν, ω)- επίπεδο, έτσι ώστε όλες οι ρίζες λ_i, της εξίσωσης (3.13) ως προς λ να ανήκουν στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, στην περίπτωση κατά την οποία η ιδιοτιμή $\mu \in \sigma(B)$ αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα. Έτσι η (3.13) ξαναγράφεται ως

$$(\lambda+\omega-1)^p = -\nu^p \omega^p \lambda \, . \tag{3.14}$$

Έστω τώρα ότι $\lambda = |\lambda| e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi < 2\pi$ η μορφή του λ σε πολικές συντεταγμένες. Αν πάρουμε p τάξης ρίζες στα δυο μέλη της (3.14), θα έχουμε

$$|\lambda| e^{i\varphi} + \omega - 1 = \nu\, \omega |\lambda|^{1/p} e^{i\frac{(2k+1)\pi+\varphi}{p}} \, , \quad k = 0(1)p-1 \, . \tag{3.15}$$

Θέτοντας

$$z := |\lambda|^{1/p} e^{i\frac{(2k+1)\pi+\varphi}{p}} \, , \tag{3.16}$$

η (3.15) δίνει $-z^p+\omega-1=\nu\,\omega\,z$ ή ισοδύναμα

$$z^p+\nu\omega z+(1-\omega)=0\ . \qquad (3.17)$$

Η ανωτέρω εξίσωση είναι μια πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές και οι p ρίζες της θα είναι στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου $|z|\le 1$, αν και μόνον αν οι ρίζες του αντίστοιχου αντίστροφου πολυωνύμου

$$P(z):=(1-\omega)z^p+\nu\omega z^{p-1}+1 \qquad (3.18)$$

βρίσκονται στο εξωτερικό του. Μετασχηματίζοντας το πολυώνυμο P με το μετασχηματισμό του Schur της (3.8) παίρνουμε

$$TP(z):=\nu\omega z^{p-1}-(1-\omega)\nu\omega z+\omega(2-\omega)\ . \qquad (3.19)$$

Για ευκολία των πράξεων θέτουμε

$$B_2^{(1)}=\nu\omega,\quad B_1^{(1)}=-(1-\omega)\nu\omega \quad \text{και} \quad B_o^{(1)}=\omega(2-\omega)\ , \qquad (3.19\alpha)$$

οπότε η (3.19) γίνεται

$$TP(z)=B_2^{(1)}z^{p-1}+B_1^{(1)}z+B_o^{(1)}\ . \qquad (3.20)$$

Λ ή μ μ α 3.7

Οι επαναληπτικοί μετασχηματισμοί του Schur του πολυωνύμου P της (3.18) για όλα τα $1\le j\le p$ δίνονται από τον τύπο

$$
T^j P(z) = \begin{cases} B_2^{(j)} z^{p-j} + B_1^{(j)} z + B_o^{(j)} & , j=1(1)p-1 \\ \left[B_o^{(p-1)} \right]^2 - \left[B_1^{(p-1)} + B_2^{(p-1)} \right]^2 & , j=p \end{cases} \quad . \tag{3.21}
$$

Απόδειξη

Επαγωγικά μπορούμε να δούμε την ισχύ του λήμματος για όλα τα $1 \leq j \leq p-1$. Για την περίπτωση $j = p$, αφού λάβουμε υπόψη ότι ο $T^{p-1} P(z)$ είναι πρωτοβάθμιο πολυώνυμο, εύκολα ολοκληρώνουμε την απόδειξη.♦

Οι συντελεστές των πολυωνύμων, που προκύπτουν από τους επαναληπτικούς μετασχηματισμούς του Schur της (3.21), προκύπτουν από τον επόμενο αλγόριθμο, όπως εύκολα φαίνεται από τις πράξεις της απόδειξης του προηγούμενου λήμματος.

$$
\begin{aligned} B_2^{(j+1)} &= - B_2^{(j)} B_1^{(j)} \\ B_1^{(j+1)} &= B_o^{(j)} B_1^{(j)} \\ B_o^{(j+1)} &= [B_o^{(j)}]^2 - [B_o^{(j)}]^2 \end{aligned} \quad , \; j = 1(1)p-2 \tag{3.22}
$$

με αρχικές τιμές εκείνες της (3.19α). Έτσι οι τιμές γ_j του αλγορίθμου των Schur-Cohn δίνονται από τον τύπο

$$
\gamma_j = T^j P(0) = \begin{cases} B_o^{(j)} & , j = 1(1)p-1 \\ \left[B_o^{(p-1)} \right]^2 - \left[B_1^{(p-1)} + B_2^{(p-1)} \right]^2 & , j=p \end{cases} \quad . \tag{3.23}
$$

Από το Θεώρημα 3.6 προκύπτει ότι ο αντικειμενικός σκοπός μας θα πετύχει, αν και μόνον αν οι ποσότητες γ_j, $j = 1(1)p$, είναι θετικές. Έτσι η ακριβής περιοχή του (ν,ω)-επιπέδου, για την οποία όλες οι ρίζες του πολυωνύμου P βρίσκονται στο εξωτερικό του δίσκου $|z| \leq 1$, είναι η

$$\Omega_p := \{(\nu,\omega) \mid \gamma_j > 0,\ j = 1(1)p\} \ . \qquad (3.24)$$

Στα επόμενα δυο λήμματα φαίνεται η σχέση που συνδέει τις τιμές γ_j και τους συντελεστές $B_i^{(j)}$, $i = 0, 1, 2,\ j = 1(1)p\text{-}1$.

Λήμμα 3.8

Αν $\gamma_j > 0$ για όλα τα $j = 1(1)p\text{-}1$ και $\omega<1$, τότε $B_2^{(j)} > 0$ και $B_1^{(j)} < 0$ για όλα τα $j = 1(1)p\text{-}1$. Ενώ αν $\gamma_j>0$ για όλα τα $j = 1(1)p\text{-}1$ και $\omega>1$, τότε $B_2^{(j)} = (-1)^{j-1} |B_2^{(j)}|$ και $B_1^{(j)}>0$ για όλα τα $j = 1(1)p\text{-}1$.

Απόδειξη

Από την (3.19α) φαίνεται ότι εάν $\omega<1$, τότε $B_2^{(1)}>0$ και $B_1^{(1)}<0$, ενώ αν $\omega>1$, τότε $B_2^{(1)}>0$ και $B_1^{(1)}>0$. Επαγωγικά και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της (3.22) εύκολα αποδεικνύουμε την ισχύ του λήμματος και στις δυο περιπτώσεις. ♦

Λήμμα 3.9

Για όλα τα $j = 1(1)p\text{-}1$ είναι $\gamma_j>0$, αν και μόνον αν $B_o^{(j-1)} + B_2^{(j-1)} > 0$ και $B_o^{(j-1)} - B_2^{(j-1)} > 0$, για όλα τα $j = 1(1)p\text{-}1$.

Απόδειξη

Έστω $\gamma_j>0$, για όλα τα $j = 1(1)p\text{-}1$. Τότε έχουμε

$$\gamma_j = \left[B_o^{(j-1)}\right]^2 - \left[B_2^{(j-1)}\right]^2 = \left[B_o^{(j-1)} + B_2^{(j-1)}\right] \cdot \left[B_o^{(j-1)} - B_2^{(j-1)}\right] > 0 \ . \qquad (3.25)$$

Από την (3.23) και την υπόθεση, το $B_o^{(j-1)} = \gamma_{j-1} > 0$. Επί πλέον το $B_2^{(j-1)}$ ή $-B_2^{(j-1)}$ είναι επίσης θετικό. Άρα θετικός θα είναι και ο ένας παράγοντας του γινομένου της (3.25). Όμως τότε θετικός θα είναι και ο άλλος παράγοντας. Το αντίστροφο του λήμματος είναι προφανές. ♦

Ορίζουμε την ποσότητα

$$\tilde{\gamma}_j = \left[B_o^{(j-1)}\right]^2 - \left[B_1^{(j-1)} + B_2^{(j-1)}\right]^2 , \quad j = 2(1)p , \tag{3.26}$$

οπότε είναι φανερό από την (3.23) ότι $\tilde{\gamma}_p = \gamma_p$. Στα επόμενα δύο λήμματα φαίνεται η σχέση που συνδέει τις τιμές γ_j με τις ποσότητες που μόλις ορίσαμε.

Λήμμα 3.10

Εάν $\gamma_j>0$ για όλα τα $j = 1(1)p-1$ και $\omega<1$, τότε $\tilde{\gamma}_j >0$ για όλα τα $j = 2(1)p$.

Απόδειξη

Έστω $\gamma_j>0$ για όλα τα $j = 1(1)p-1$· τότε ισχύουν τα των λημμάτων 3.8 και 3.9. Επίσης από την (3.26), παίρνοντας υπόψη την (3.22), έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{j-1}\cdot\tilde{\gamma}_j &= \left\{\left[B_o^{(j-1)}\right]^2 - \left[B_1^{(j-2)} + B_2^{(j-2)}\right]^2\right\}\left\{\left[B_o^{(j-1)}\right]^2 - \left[B_1^{(j-1)} + B_2^{(j-1)}\right]^2\right\} = \\ &= \left[B_o^{(j-2)} - B_2^{(j-2)} - B_1^{(j-2)}\right]^2\cdot\left[B_o^{(j-2)} + B_2^{(j-2)} + B_1^{(j-2)}\right]^2\cdot \\ &\quad\cdot\left[B_o^{(j-2)} + B_2^{(j-2)} - B_1^{(j-2)}\right]^2\cdot\left[B_o^{(j-2)} - B_2^{(j-2)} - B_1^{(j-2)}\right]^2 .\end{aligned} \tag{3.27}$$

Αφού $B_o^{(j-2)}+B_2^{(j-2)}>0$, $B_o^{(j-2)}-B_2^{(j-2)}>0$ και $-B_1^{(j-2)} > 0$, οι δυο τελευταίοι παράγοντες είναι θετικοί, οπότε

$$\tilde{\gamma}_{j-1}\,\tilde{\gamma}_j > 0 . \tag{3.28}$$

Επαγωγικά λοιπόν μπορούμε να αποδείξουμε ότι, αν $\tilde{\gamma}_j > 0$ για κάποιο j, τότε όλα τα $\tilde{\gamma}_j > 0$ με $j = 3(1)p$. Τέλος από την (3.18) μπορούμε να βρούμε ότι

$$\tilde{\gamma}_2 = \omega^2(2-\omega)^2 - [-(1-\omega)\nu\omega + \nu\omega]^2 = \omega^2(2-\omega-\nu\omega)(2-\omega+\nu\omega) \quad (3.29)$$

Επίσης από την (3.18) μπορούμε να βρούμε

$$\gamma_2 = \omega^2(2-\omega)^2 - \nu^2\omega^2 = \omega^2(2-\omega-\nu)(2-\omega+\nu) \quad (3.30)$$

Αφού $\omega<1$ και $\gamma_2>0$, θα είναι και το $\tilde{\gamma}_2$ θετικό. Επομένως και όλα τα $\tilde{\gamma}_j$, $j=2(1)p$. ♦

Λ ή μ μ α 3.11

Αν $\gamma_j>0$ για όλα τα $j=1(1)p-1$ και $\omega>1$, τότε i) για όλα τα περιττά j έχουμε $\tilde{\gamma}_j>0$. ii) για όλα τα άρτια j έχουμε $\tilde{\gamma}_j>0$ αν και μόνον αν $\tilde{\gamma}_2>0$.

Α π ό δ ε ι ξ η

Από τις (2.26) και (2.22) έχουμε

$$\tilde{\gamma}_j = \left[B_o^{(j-1)}\right]^2 - \left[B_1^{(j-1)} + B_2^{(j-1)}\right]^2 =$$

$$= \left[B_o^{(j-2)} + B_2^{(j-2)}\right]^2 \left[B_o^{(j-2)} + B_2^{(j-2)} - B_1^{(j-2)}\right] \cdot \left[B_o^{(j-2)} + B_2^{(j-2)} + B_1^{(j-2)}\right] . (3.31)$$

Επειδή $B_o^{(j-2)} + B_2^{(j-2)} > 0$ και $B_1^{(j-2)} > 0$ από τα Λήμματα 3.8 και 3.9, το πρόσημο της $\tilde{\gamma}_j$ θα είναι το ίδιο μ' εκείνο της $B_o^{(j-2)} + B_2^{(j-2)} - B_1^{(j-2)}$. Όμως εύκολα βρίσκουμε ότι

$$B_o^{(j-2)} + B_2^{(j-2)} - B_1^{(j-2)} = \left[B_o^{(j-3)} + B_2^{(j-3)}\right] \cdot \left[B_o^{(j-3)} - B_2^{(j-3)} - B_1^{(j-3)}\right] . \qquad (3.32)$$

Γίνεται τώρα φανερό από τις (2.31) και (2.32) ότι το πρόσημο της $\tilde{\gamma}_j$ είναι το ίδιο μ' εκείνο της $B_o^{(j-3)} - B_2^{(j-3)} - B_1^{(j-3)}$. Με πολύ απλές πράξεις μπορούμε να δούμε ότι και το πρόσημο της $\tilde{\gamma}_{j-2}$ είναι ίδιο με το πρόσημο της ίδιας ποσότητας. Έτσι

$$\tilde{\gamma}_j \cdot \tilde{\gamma}_{j-2} > 0 . \qquad (3.33)$$

Αν το j είναι άρτιος αριθμός, με επαγωγή έχουμε ότι όλα τα $\tilde{\gamma}_j$ θα είναι θετικά, αν και μόνον αν $\tilde{\gamma}_j > 0$. Αν το j είναι περιττό, ομοίως με επαγωγή έχουμε ότι όλα τα $\tilde{\gamma}_j > 0$, αν και μόνον αν το $\tilde{\gamma}_3 > 0$. Για το $\tilde{\gamma}_3$ όμως έχουμε

$$\tilde{\gamma}_3 = [B_o^{(2)} + B_2^{(2)} + B_1^{(2)}]\,[B_o^{(2)} - B_2^{(2)} - B_1^{(2)}] . \qquad (3.34)$$

Έχοντας υπόψη ότι $B_o^{(2)} + B_2^{(2)} + B_1^{(2)} > 0$ και τις σχέσεις (3.22) και (3.18), μετά από αλγεβρικές πράξεις παίρνουμε

$$\mathrm{sign}(\tilde{\gamma}_3) = \mathrm{sign}((1+v) \cdot (2-\omega)) . \qquad (3.35)$$

Η τελευταία όμως σχέση μας αποδεικνύει το λήμμα. ♦

Πριν δώσουμε απάντηση στο πρώτο ερώτημα της παραγράφου 3.1, θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι ουσιαστικά ενδιαφερόμαστε να βρούμε εκείνη την περιοχή του (ρ(B), ω)-επιπέδου, για την οποία η SOR μέθοδος συγκλίνει για όλα τα ω και για όλους τους πίνακες Jacobi, που έχουν φασματική ακτίνα $v \leq \rho(B)$. Έτσι ως περιοχή σύγκλισης για την SOR μέθοδο ορίζεται η

$$\Omega_p := \{(\varrho(B),\omega) \mid \gamma_j > 0,\ \ j = 1(1)p,\ \forall\ \ \nu \in [0, \varrho(B)]\}\ .$$

Μετά την προηγηθείσα ανάλυση και την παραπάνω διευκρίνιση, η περιοχή σύγκλισης Ω_p μπορεί, ισοδύναμα, να δοθεί με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.12

Η περιοχή σύγκλισης Ω_p για την SOR μέθοδο, όταν ο B είναι G.C.O.-(p,1) και $\sigma(B^p) \leq 0$, μπορεί ισοδύναμα να δοθεί ως

$$\Omega_p = \begin{cases} \{(\varrho(B),\omega) \mid \gamma_j > 0\ ,\ j=1(1)p-1,\ \forall\ \ \nu \in [0,\varrho(B)]\},\ p \text{ περιττό} \\ \{(\varrho(B),\omega) \mid \gamma_j > 0\ ,\ j=1(1)p-1,\ \forall\ \ \nu \in [0,\varrho(B)] \text{ και} \\ \quad \omega \in (0,1] \cup \{(1, \frac{2}{1+\nu}) \text{ αν και μόνον αν } \nu < 1\}\}\ ,\ p \text{ άρτιο}\ . \end{cases} \tag{3.36}$$

Απόδειξη

Είναι φανερό ότι η περιοχή στην οποία αναφέρεται το θεώρημα είναι εκείνη η οποία προέρχεται από την (3.24). Αφού για κάποιο σταθερό p ισχύει $\gamma_p \equiv \tilde{\gamma}_p$, θα έχουμε

$$\Omega_p = \{(\varrho(B),\omega) \mid \gamma_j > 0,\ j = 1(1)p-1 \text{ και } \tilde{\gamma}_p > 0,\ \ \forall\ \ \nu \in [0,\varrho(B)]\}\ . \tag{3.37}$$

Από τα δύο προηγούμενα λήμματα έχουμε αφενός ότι για p περιττό $\tilde{\gamma}_p > 0$ και αφετέρου ότι για p άρτιο $\tilde{\gamma}_p > 0$, αν και μόνον αν $\tilde{\gamma}_2 > 0$. Το τελευταίο όμως ισχύει πάντα για $\omega \leq 1$, ενώ για $\omega > 1$, αν $\nu < 1$.

Στο λήμμα που ακολουθεί καθώς και στο επόμενο θεώρημα φαίνεται πως οι προαναφερθείσες περιοχές σύγκλισης μπορούν να διαταχθούν, καθώς το p μεταβάλλεται. Συγκεκριμένα:

Λ ή μ μ α 3.13

Το "δεξί" σύνορο $\partial\Omega_{-p}$ της περιοχής Ω_p, που ορίζεται στην (3.36), δίνεται με την "πλέον αριστερή" των καμπυλών σ_p, όπου

$$\sigma_p=\begin{cases}\{(\nu,\omega)|\gamma_{p-1}=0,\ \omega\in(0,2)\},\ p \text{ περιττός}\\ \{(\nu,\omega)|\gamma_{p-1}=0,\ \omega\in(0,1) \text{για } \nu\geq 1 \text{και} (\gamma_{p-1}=0 \text{ ή } \omega=\frac{2}{1+\nu}) \text{για } \nu\leq 1\},\\ \qquad p \text{ άρτιος}\end{cases} \tag{3.38}$$

Α π ό δ ε ι ξ η

Θα δείξουμε την πρόταση για p περιττό. Όταν το p είναι άρτιο, η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια. Έστω η περιοχή

$$\bar{\Omega}_j = \{(\varrho(B),\omega) \mid \gamma_k\geq 0,\ k=1(1)j-1,\ \ \forall\ \nu\in[0,\varrho(B)],\ \omega\in(0,2)\} \tag{3.39}$$

και Ω_j η παραπάνω περιοχή χωρίς το σύνορο. Έστω επίσης $\bar{\Omega}_p$ η περιοχή της (3.36) μαζί με το σύνορό της. Είναι προφανές ότι από τις προϋποθέσεις που ορίζουν τις περιοχές αυτές, ισχύει

$$\bar{\Omega}_p \subseteq \bar{\Omega}_j\ . \tag{3.40}$$

Από τη σχέση (3.22) όμως έχουμε

$$\gamma_{j-1} = \gamma_{j-2}^2 - [B_2^{(j-1)}]^2\ . \tag{3.41}$$

Αν τώρα ένα σημείο $(\bar{\nu},\bar{\omega})$ ανήκει στην καμπύλη $\gamma_{j-2}=0$, τότε από την (3.41) προκύπτει ότι

$$\gamma_{j-1}(\bar{\nu},\ \bar{\omega}) \leq 0\ . \tag{3.42}$$

Αν $\gamma_{j-1}(\bar{v}, \bar{\omega}) < 0$, τότε το σημείο $(\bar{v}, \bar{\omega})$ δεν ανήκει στην $\bar{\Omega}_j$ και επομένως η $\gamma_{j-2} = 0$ δεν είναι σύνορο της $\bar{\Omega}_j$. Αν $\gamma_{j-1}(\bar{v}, \bar{\omega}) = 0$, τότε η καμπύλη $\gamma_{j-1} = 0$ και $\gamma_{j-2} = 0$ ταυτίζονται. Χρησιμοποιώντας επαγωγή και λαμβάνοντας υπόψη ότι απαιτούμε οι ανισοτικές σχέσεις $\gamma_j > 0$, $j = 1(1)p-1$ να ισχύουν $\forall$ $v \in [0, \varrho(B)]$, προκύπτει ότι το "δεξί" σύνορο της περιοχής Ω_p είναι η "πλέον αριστερή" των καμπυλών σ_p της (3.38).

Θ ε ώ ρ η μ α 3.14

Για τη διάταξη των περιοχών Ω_p, που ορίζονται στην (3.39), ισχύουν τα εξής:

$$\Omega_{p+2} \subset \Omega_p \;, \quad p = 2, 3, 4, \ldots$$

και (3.43)

$$\Omega_{p+1} \subset \Omega_p \;, \quad p = 3, 5, 7, \ldots \;.$$

Α π ό δ ε ι ξ η

Από το Θεώρημα 3.12 είναι φανερό ότι

$$\Omega_{p+2} \subseteq \Omega_p \;, \quad p = 2, 3, 4, \ldots \;.$$

Για να αποδείξουμε την ισχύ της πρώτης από τις (3.43), αρκεί να δείξουμε ότι οι καμπύλες $\gamma_j = 0$ και $\gamma_{j+1} = 0$ για $j = 1(1)p-2$ δεν είναι ταυτοτικά ίδιες (ή ταυτόσημες). Λόγω της (3.41) αυτό είναι ισοδύναμο με $B_2^{(j)} \not\equiv 0$. Εργαζόμενοι επαγωγικά και χρησιμοποιώντας τις (3.22) μπορούμε να πάρουμε

$$B_2^{(j)} = B_o^{(j-2)} \, [B_o^{(j-3)}]^2 \ldots [-B_o^{(1)}]^{j-2} \, [-B_1^{(1)}]^{j-2} \; B_2^{(1)} \;. \qquad (3.44)$$

Αφού $B_o^{(k)} = \gamma_k > 0$, $k=1(1)j-2$, $B_1^{(1)} = (\omega-1)\cdot\nu$ και $B_2^{(1)} = \nu$, έχουμε ότι $B_2^{(1)} = 0$, αν και μόνον αν $\omega=1$ ή $\nu=0$. Συνεπώς, $B_2^{(j)} \not\equiv 0$ και η πρώτη των (3.43) απεδείχθη.

Επίσης από το Θεώρημα 3.12 είναι φανερό ότι

$$\Omega_{p+1} \subseteq \Omega_p \ , \quad p = 3, 5, 7, \ldots \ . \tag{3.45}$$

Η αυστηρή έγκλειση προκύπτει ως συνέπεια του γεγονότος ότι οι καμπύλες $\gamma_{p-1} = 0$ και $\gamma_p = 0$ δεν συμπίπτουν για $\omega \in (0,1)$. Ο τρόπος απόδειξης αυτού του ισχυρισμού είναι ο ίδιος, όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

Από τη μέχρι τώρα ανάλυση γίνεται φανερό ότι η δεξιά συνοριακή καμπύλη $\partial\Omega_p$ μπορεί πάντοτε να εκφράζεται ως μια μονότιμη συνάρτηση του ω, $\nu=\nu_p(\omega)$, $\omega \in (0, 2)$. Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι το εξής· μπορεί επίσης η καμπύλη $\partial\Omega_p$ να εκφρασθεί ως μια μονότιμη συνάρτηση του ν, δηλαδή $\omega=\omega_p(\nu)$, $\nu=\varrho(B)$; Για p=3, 4 και 5 η απάντηση είναι "ναι". Για $p>5$ το ερώτημα παραμένει ανοιχτό, λόγω της πολυπλοκότητας των πράξεων που εισχωρούν.

Στη συνέχεια θα δώσουμε την ακριβή περιοχή σύγκλισης για p=3, 4 και 5 δίνοντας αναλυτικές εκφράσεις για τη δεξιά συνοριακή καμπύλη $\omega=\omega_i(\nu)$, i=3, 4, 5 .

p=3

Από την (3.36) έχουμε ως περιοχή σύγκλισης την

$$\Omega_3 = \{(\varrho(B), \omega) \mid \gamma_j > 0, \ j = 1, 2, \ \forall \ \nu \in [0, \varrho(B)]\} \ . \tag{3.46}$$

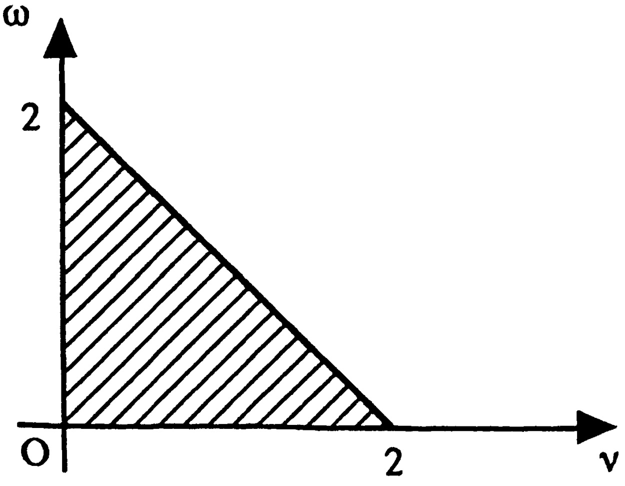
Αφού η $\gamma_2 = 0$ αποτελεί τη δεξιά συνοριακή καμπύλη, έχουμε από τις (3.19α) και (3.22)

$$\gamma_2 = (2 - \omega - \nu)(2 - \omega + \nu) = 0 \ . \qquad (3.47)$$

Ισοδύναμα προκύπτει ότι

$$\omega = \omega_3(\nu) = 2 - \nu \ . \qquad (3.48)$$

Στο σχήμα 3.1 φαίνεται η περιοχή σύγκλισης Ω_3 (γραμμοσκιασμένο)



Σχ. 3.1

p=4

Η περιοχή σύγκλισης είναι

$$\Omega_4 = \Big\{ (\varrho(B), \omega) \mid \gamma_j > 0 \,, \ j=1,2,3, \ \ \forall \ \nu \in [0, \varrho(B)] \ \text{και} \ \omega \in (0,1] \cup \{ (1, \frac{2}{1+\nu}) \,, \ \text{αν και μόνον αν} \ \nu < 1 \} \Big\} \ . \qquad (3.49)$$

Από το Λήμμα 3.13 η δεξιά $\partial\Omega_4$ θα παίρνεται από τη

$$\sigma_4 = \{ (\nu, \omega) \mid \gamma_3 = 0 \ \text{για} \ \nu > 1 \ \text{και} \ (\gamma_3 = 0 \ \text{ή} \ \omega = \frac{2}{1+\nu}) \ \text{για} \ \nu < 1 \} \ . \qquad (3.50)$$

Από τις (3.19α) και (3.22) η $\gamma_3=0$ δίνει

$$[(2-\omega-\nu)(2-\omega+\nu) + (1-\omega)\nu^2][(2-\omega-\nu)(2-\omega+\nu) - (1-\omega)\nu^2] = 0 \ . \qquad (3.51)$$

i) $\omega \leq 1$

Ο πρώτος παράγοντας της (3.51) είναι θετικός. Έτσι έχουμε

$$(2-\omega-\nu)(2-\omega+\nu) - (1-\omega)\nu^2 = 0 \ . \qquad (3.52)$$

Ή ισοδύναμα

$$\omega = \omega_4(\nu) = 2-\nu^2 \ . \qquad (3.53)$$

Αφού $\omega \in (0,1]$ και $\nu>0$, πρέπει $\nu = \varrho(B) < \sqrt{2}$.

ii) $\omega>1$

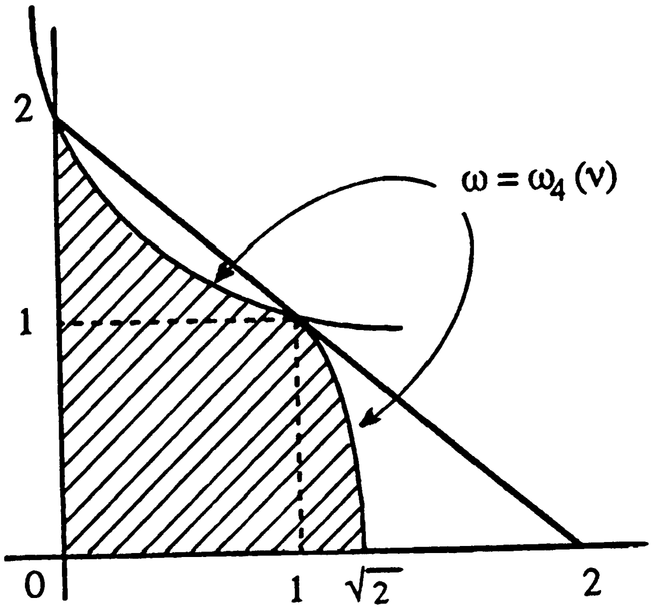
Ο δεύτερος παράγοντας της (3.51) είναι τώρα θετικός. Ο πρώτος παράγοντας μετά από πράξεις καταλήγει στην ισότητα

$$(2-\omega-\nu)(2-\omega+\nu) + (1-\omega)\nu^2 = (2-\omega)^2 - \omega\nu^2 \ . \qquad (3.54)$$

Από την (3.43) έπεται $\Omega_4 \subset \Omega_3$, συνεπώς $\nu < 2-\omega$. Επίσης από την $\omega < \frac{2}{1+\nu}$ έπεται ότι $\nu\omega<2-\omega$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη προκύπτει η ανισότητα $(2-\omega)^2 - \omega\nu^2 > 0$. Άρα το σύνορο για την Ω_4 είναι η $\omega = \omega_4(\nu) = \frac{2}{1+\nu}$. Έτσι το δεξί σύνορο του $\partial\Omega_4$ είναι

$$\omega = \omega_4(\nu) = \begin{cases} 2-\nu^2 \ , & 1 \leq \nu \leq \sqrt{2} \\ \dfrac{2}{1+\nu} \ , & 0<\nu<1 \end{cases} \ . \qquad (3.55)$$

Στο σχήμα 3.2 η περιοχή σύγκλισης είναι η γραμμοσκιασμένη περιοχή.



Σχ. 3.2

p=5

Η περιοχή σύγκλισης είναι

$$\Omega_5 = \{(\varrho(B), \omega) \mid \gamma_j > 0 \ , \ j = 1(1)4, \ \forall \ \nu \in [0, \varrho(B)]\} \ . \qquad (3.56)$$

Από το Λήμμα 3.13 το δεξί σύνορο αυτής είναι

$$\sigma_5 = \{(\nu, \omega) \mid \gamma_4 = 0, \ \omega \in (0,2)\} \ . \qquad (3.57)$$

Από το Λήμμα 3.8, για $\omega \in (0,2)$, έχουμε $B_2^{(3)} > 0$. Έτσι η σχέση $\gamma_4 = 0$ δίνει από την (3.41) ότι

$$\gamma_3 - B_2^{(3)} = 0 \ . \qquad (3.58)$$

Η (3.58), μετά από συνεχείς παραγοντοποιήσεις, λαμβάνοντας υπόψη το θετικό των ποσοτήτων των ω^4, $(2-\omega+\nu)$ και $(2-\omega)$, καταλήγει διαδοχικά στην

$$f(\nu,\omega) := \omega^2 + (\nu^3 + \nu - 4)\omega + 4 - 2\nu - \nu^2 = 0 \ . \qquad (3.59)$$

Για $\nu \in [0, \varrho(B)]$ η δεξιά συνοριακή καμπύλη $\omega=\omega_5(\nu)$ παίρνεται ως η λύση της (3.59). Αυτή όμως είναι δεύτερου βαθμού και έχει δυο λύσεις εν γένει.

Για τα σημεία της καμπύλης σ_3, $\omega = 2-\nu$ ισχύει

$$f(\nu, 2-\nu) = -\nu^2(\nu-1)^2 < 0 \ . \qquad (3.60)$$

Επίσης ισχύει

$$f(\nu, +\infty) = +\infty > 0 \ . \qquad (3.60\alpha)$$

Είναι φανερό λοιπόν ότι η μια ρίζα της (3.59) βρίσκεται "πάνω" από την σ_3 και επομένως απορρίπτεται. Για να είναι δεκτή η άλλη ρίζα της (3.59) πρέπει να ισχύει

$$f(0, \nu) = 4 - 2\nu + \nu^2 > 0 \ . \qquad (3.61)$$

Η τελευταία όμως ισχύει για όλα τα $\nu \in [0, -1+\sqrt{5})$. Έτσι η $\omega_5(\nu)$ υπάρχει και δίνεται από τη μικρότερη ρίζα της (3.59), δηλαδή την

$$\omega = \omega_5(\nu) = \frac{4-\nu-\nu^3 - \sqrt{(4-\nu-\nu^2)^2 - 4(4-2\nu-\nu^2)}}{2} \ , \quad 0 \le \nu < -1+\sqrt{5} \ . \qquad (3.62)$$

Π ρ ό τ α σ η
Η συνάρτηση $\omega = \omega_5(\nu)$ είναι μια αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση.

Απόδειξη

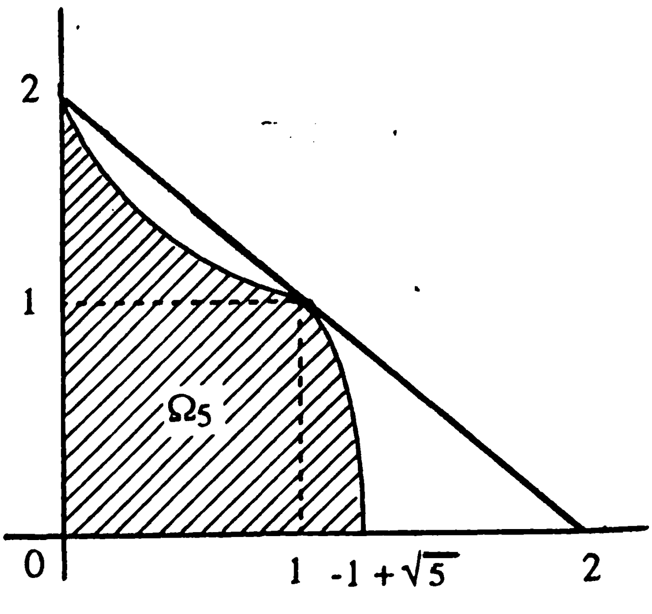
Παραγωγίζοντας την (3.62) έχουμε

$$\operatorname{sign}\left(\frac{d\omega}{dv}\right) = \operatorname{sign}\Big(-[(v^3+v-4)(3v^2+1)+4(v+1)] - $$
$$- (3v^2+1)\sqrt{(v^3+v-4)^2+4(v^2+2v-4)}\ \Big) \ . \qquad (3.63)$$

Τώρα, η $k(v) \equiv (v^3+v-4)(3v^2+1)+4(v+1) = v(v-1)(3v^3+3v^2+7v-5)$ είναι θετική για όλα τα $v \in [0, v_o) \cup (1, -1+\sqrt{5})$, όπου $v_o \approx 0.530$ η μοναδική θετική ρίζα της $3v^3+3v^2+7v-5$. Έτσι, $\frac{d\omega}{dv} < 0$. Για τα $v \in (v_o, 1)$ εξετάζουμε, ισοδύναμα, το

$$\operatorname{sign}\Big(k^2 - (3v^2+1)^2\,[(v^3+v-4)^2+4(v^2+2v-4)]\Big) =$$
$$= \operatorname{sign}(v^2(v-1)^2(-3v^2-18v+5)) \ . \qquad (3.64)$$

Είναι αμέσως φανερό ότι το υπόψη sign είναι -1 (αρνητικό) για όλα τα $v \in (v_1, +\infty)$, όπου $v_1 = \frac{-9+4\sqrt{6}}{3} \approx 0.266$ είναι ρίζα του δευτεροβάθμιου παράγοντα. Επομένως το ίδιο ισχύει και στο διάστημα $(v_o, 1)$.



Σχ. 3.3

Η Ω_5 είναι γραμμοσκιασμένη περιοχή του σχήματος 3.3. Το πρόβλημα που δημιουργεί η πολυπλοκότητα των πράξεων για $p>5$, αμβλύνεται με το επόμενο θεώρημα. Σ' αυτό κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Rouché βρίσκουμε μια υποπεριοχή S όλων των Ω_p, $p\geq 3$, για την οποία η SOR μέθοδος συγκλίνει. Ένα πλήθος αριθμητικών παραδειγμάτων καθώς και η παρατήρηση 2, παρακάτω, οδήγησαν το συγγραφέα στην πεποίθηση ότι η περιοχή S, όπως αυτή θα περιγραφεί στο επόμενο θεώρημα, είναι το όριο των περιοχών Ω_p καθώς το $p\to\infty$. Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν έχει αποδειχθεί και αποτελεί ένα θέμα που παραμένει ανοιχτό.

Θεώρημα 3.15

Έστω ο B ένας G.C.O.-(p, 1) πίνακας και $\sigma(B^p)\leq 0$. Επίσης έστω $S:=\{(\nu,\omega)\mid 0\leq\nu\leq 1 \text{ και } \omega<\frac{2}{1+\nu}\}$. Εάν $(\nu,\omega)\in S$, τότε η SOR μέθοδος συγκλίνει.

Απόδειξη

Θα δείξουμε αρχικά ότι με $(\nu,\omega)\in S$ οι ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης (3.18) βρίσκονται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Αρχικά θεωρούμε ότι $\nu<1$. Έστω οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} h(z)&:=\nu\omega z^{p-1}+1 \\ g(z)&:=(1-\omega)z^p \end{aligned} \tag{3.65}$$

Οι ρίζες της $h(z)=0$ βρίσκονται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Πράγματι, όταν $(\nu,\omega)\in S$, έχουμε

$$\omega<\frac{2}{1+\nu}<\frac{1}{\nu},$$

που συνεπάγεται ότι $\omega\nu<1$. Αφού για τις ρίζες της $h(z)=0$ έχουμε $|z_i| = (\nu\omega)^{-\frac{1}{p-1}}$ και $\omega\nu<1$, προφανώς $|z_i|>1$.

Για όλα τα $|z| = 1$ ισχύει

$$|g(z)| = |1-\omega| < |1-\omega\nu| \leq |1+\omega\nu z^{p-1}| = |h(z)| . \tag{3.66}$$

Η δεξιά ανισότητα ισχύει σαν ισότητα για $\nu=0$, ενώ για $\nu>0$ είναι ισοδύναμη με την $-1\leq \mathrm{Re} z^{p-1}$. Όμως αφού $|z|=1$, αυτή ισχύει. Η αριστερή αυστηρή ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $\omega(1+\nu)<2$, η οποία επίσης ισχύει. Έτσι, από το θεώρημα του Rouché θα έχουμε ότι οι ρίζες του

$$p(z) = g(z) + h(z)$$

θα βρίσκονται όλες στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, όπου βρίσκονται κι αυτές της $h(z) = 0$.

Για $\nu=1$, η (3.18) γίνεται

$$P(z) = (1-\omega)z^p + \omega z^{p-1} + 1 . \tag{3.67}$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό του Schur προκύπτει το πολυώνυμο $TP(z) = \omega z^{p-1} + \omega(1-\omega)z + \omega(2-\omega)$. Οι ρίζες αυτού ταυτίζονται με εκείνες του $\widetilde{TP}(z) = z^{p-1} + (1-\omega)z + (2-\omega)$. Έτσι έχουμε

$$B_2^{(1)} = 1 \qquad B_1^{(1)} = -(1-\omega) \qquad B_o^{(1)} = 2-\omega .$$

Αν υποθέσουμε

$$B_2^{(j)} = 1 \qquad B_1^{(j)} = -(j-\omega) \qquad B_o^{(j)} = j+1-\omega$$

τότε από τις (3.22) παίρνουμε

$$B_2^{(j+1)} = (j-\omega) \quad B_1^{(j+1)} = -(j-\omega)(j+1-\omega) \qquad B_o^{(j+1)} = (j-\omega)(j+2-\omega)\ ,$$

στην οποία απλοποιώντας με το $(j-\omega)>0$ έχουμε

$$B_2^{(j+1)} = 1 \qquad B_1^{(j+1)} = j+1-\omega \qquad B_o^{(j+1)} = j+2-\omega\ .$$

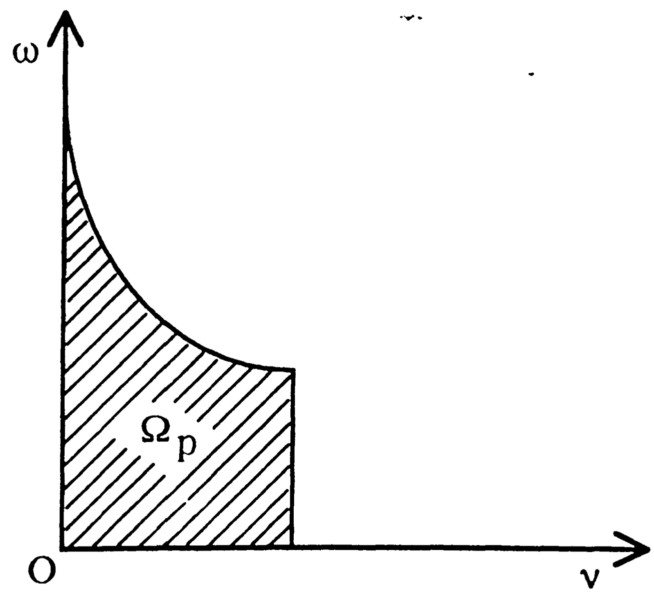
Είναι προφανές λοιπόν ότι

$$\gamma_j = B_o^{(j)} > 0\ , \quad j = 1(1)p-1\ . \tag{3.68}$$

Για j=p έχουμε

$$\gamma_p = \tilde{\gamma}_j = (p-\omega)^2 - (p-2-\omega)^2 > 0\ . \tag{3.69}$$

Έτσι, αφού $\gamma_j>0$, $j = 1(1)p$, από το θεώρημα του Schur, οι ρίζες της (3.67) και επομένως και της (3.18) βρίσκονται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Συνεπώς η περιοχή S, όπως ορίστηκε στο Θεώρημα 3.15, που φαίνεται στο σχήμα 3.4, είναι περιοχή σύγκλισης για την SOR μέθοδο.



Σχ.- 3.4

Π ό ρ ι σ μ α 3.16

Για $\omega \geq 1$ και p άρτιο η συνοριακή καμπύλη της Ω_p ταυτίζεται με εκείνη της S.

Α π ό δ ε ι ξ η

Η απόδειξη είναι φανερή από την (3.38) και το προηγούμενο θεώρημα.

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς

i) Η συνοριακή καμπύλη της περιοχής S, για $\omega \geq 1$, ταυτίζεται με εκείνη της περιοχής σύγκλισης της SOR μεθόδου, της περίπτωσης q=1 ([7], [38], [13]), πράγμα που σημαίνει ότι και οι περιοχές σύγκλισης ταυτίζονται. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για p άρτιο, αφού $\Omega_p \equiv S$, το Ω_p είναι ίδιο με εκείνο της q=1. Όμως για p περιττό οι περιοχές Ω_p, που βρήκαμε, είναι ευρύτερες εκείνων, που γνωρίζαμε με q=1.

ii) Τα σημεία τομής της συνοριακής καμπύλης Ω_p με τον οριζόντιο άξονα ω=0, μπορούμε να τα βρούμε ως εξής: Διαιρούμε τους συντελεστές του πολυωνύμου TP, $B_2^{(1)}$, $B_1^{(1)}$ και $B_o^{(1)}$ με το ω. Στις εκφράσεις που απομένουν θέτουμε ω=0, οπότε αντίστοιχα παίρνουμε $D_2^{(1)} = \nu$, $D_1^{(1)} = -\nu$ και $D_o^{(1)} = 2$. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο (3.22), με τη διαφορά ότι στη θέση του B έχουμε D. Οι τιμές του ν για τις οποίες έχουμε

$$D_o^{(1)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

μας δίνουν τα εν λόγω σημεία.

Στην [13] οι συντελεστές του αντίστοιχου πολυωνύμου TP δίνονται από τις σχέσεις

$$A_2^{(1)} = \omega\nu(1-\omega), \qquad A_1^{(1)} = -\omega\nu, \qquad A_o^{(1)} = \omega(2-\omega) \;.$$

Απλοποιώντας αρχικά τα ω και θέτοντας ω=0 στις σχέσεις που προκύπτουν, βρίσκουμε

$$C_2^{(1)} = \nu \,, \qquad C_1^{(1)} = -\nu \,, \qquad C_o^{(1)} = 2 \,,$$

ακριβώς τα ίδια όπως και τα αντίστοιχα $D_i^{(1)}$, $i = 0, 1, 2$.

Αφού οι αλγόριθμοι που δίνουν τα $A_o^{(j)}$ και $B_o^{(j)}$, $j = 2, 3, \ldots$ ταυτίζονται και τα σημεία τομής της συνοριακής καμπύλης μας Ω_p με τον οριζόντιο άξονα ω=0 θα ταυτίζονται με εκείνα στη [13], επειδή θα προκύπτουν από την ίδια εξίσωση

$$C_o^{(j)} \equiv D_o^{(j)} = 0 \,, \quad j = 1, 2, \ldots \;.$$

Έτσι λοιπόν γενικά το δεξί σύνορο της καμπύλης τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο ($\frac{1}{\cos(\pi/p)}$, 0) , όπως βρέθηκε από τον Noutso [29].

3.3.2 Μη-αρνητική περίπτωση

Σ' αυτήν την περίπτωση, ξεκινώντας πάλι από την (3.13) και εργαζόμενοι όπως στη μη-θετική περίπτωση, με τη μόνη διαφορά ότι τώρα θέτουμε $\mu^p=\nu^p$, όπου ν είναι η φασματική ακτίνα του πίνακα Jacobi, η αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση γίνεται

$$z^p - \nu\omega z + \omega - 1 = 0 \;. \tag{3.70}$$

Αντικειμενικός σκοπός μας είναι πάλι να βρούμε περιοχή του (ν, ω)-επιπέδου, ώστε όλες οι ρίζες της εξίσωσης (3.70) να βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου $|z|\leq 1$. Τούτο θα συμβαίνει, αν ισοδύναμα οι ρίζες του αντίστοιχου αντίστροφου πολυωνύμου

$$P(z):=(1-\omega)z^p+\nu\omega z^{p-1}+1 \tag{3.71}$$

βρίσκονται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Η μελέτη του τελευταίου γίνεται πάλι με το Θεώρημα των Schur-Cohn. Οι αντίστοιχοι συντελεστές της (3.19α) του πολυωνύμου T_p, είναι αυτή τη φορά

$$B_2^{(1)}=-\nu\omega\,,\qquad B_1^{(1)}=\nu\omega(\omega-1)\,,\qquad B_o^{(1)}=\omega(2-\omega)\,, \tag{3.72}$$

ενώ ο αλγόριθμος που δίνει τους συντελεστές των πολυωνύμων $T^{(i+1)}P$ συναρτήσει εκείνων των $T^{(j)}P$, παραμένει ίδιος, δηλαδή ο (3.22). Οι τιμές γ_j του αλγορίθμου των Schur-Cohn, η περιοχή Ω_p, που προσπαθούμε να βρούμε, καθώς και η ποσότητα $\tilde{\gamma}_j$ ορίζονται από τις σχέσεις (3.23), (3.24) και (3.26) αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα δώσουμε τις προτάσεις (λήμματα και θεωρήματα) αυτής της περίπτωσης. Οι αποδείξεις ορισμένων από αυτές δεν θα δοθούν με πολλές λεπτομέρειες. Αυτό θα συμβαίνει σ' εκείνες τις περιπτώσεις, κατά τις οποίες ανάλογο σκεπτικό έχει διατυπωθεί στην παράγραφο 3.3.1 .

Λήμμα 3.17

Αν ισχύει $\gamma_j>0$ για όλα τα $j=1(1)p-1$ και επί πλέον $\omega<1$, τότε $B_2^{(j)}<0$ και $B_1^{(j)}<0$, $j=1(1)p-1$. Ενώ αν $\gamma_j>0$ για όλα τα $j=1(1)p-1$ και $\omega>1$, τότε $B_2^{(j)}=(-1)^j\,|B_2^{(j)}|$ και $B_1^{(j)}>0$, $j=1(1)p-1$.

Απόδειξη

Η απόδειξη γίνεται με τον ίδιο τρόπο, όπως στο λήμμα 3.8, μόνο που τώρα χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.72).

Λήμμα 3.18

Για όλα τα j=1(1)p-1, $\gamma_j>0$ αν και μόνον αν $B_o^{(j-1)} + B_2^{(j-1)} > 0$ και $B_o^{(j-1)} - B_2^{(j-1)} > 0$.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι ανάλογη μ' εκείνη του Λήμματος 3.9 και γι' αυτό παραλείπεται.

Λήμμα 3.19

Αν $\gamma_j>0$ για όλα τα j=1(1)p-1 και $\omega<1$, τότε τα $\tilde{\gamma}_j>0$ για όλα τα j=2(1)p, αν και μόνον αν $\nu<1$.

Απόδειξη

Από τα προηγούμενα λήμματα μ' έναν τρόπο ανάλογο εκείνου της απόδειξης του Λήμματος 3.11 μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\tilde{\gamma}_j>0$, αν και μόνον αν $\tilde{\gamma}_2>0$. Από τις (3.26), (3.72) και μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε στην

$$\tilde{\gamma}_2 = (1-\nu)(1+\nu)\omega^2(2-\omega)^2 . \tag{3.73}$$

Γίνεται πλέον φανερό ότι το πρόσημο του $\tilde{\gamma}_2$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του πρώτου όρου του γινομένου του δεξιού μέλους. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Λήμμα 3.20

Αν $\gamma_j>0$ για όλα τα j=1(1)p-1 και $\omega>1$, τότε για άρτια j έχουμε

$\tilde{\gamma}_j > 0$, ενώ για περιττά j ισχύει $\tilde{\gamma}_j > 0$, αν και μόνον αν $\omega < \frac{2}{1+\nu}$.

Απόδειξη

Με τρόπο ανάλογο εκείνου που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του Λήμματος 3.11 μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\tilde{\gamma}_j > 0$, αν και μόνον αν $\tilde{\gamma}_{j-2} > 0$. Έτσι λοιπόν έχουμε ότι για τα άρτια j, $\tilde{\gamma}_j > 0$, αν και μόνον αν $\tilde{\gamma}_2 > 0$. Από την (3.73) αυτό ισχύει, αν και μόνον αν έχουμε $\nu < 1$. Αυτό όμως συμβαίνει, αφού $\gamma_2 > 0$ είναι ισοδύναμο, μετά από απλές πράξεις, με $\nu < 2 - \omega$. Από την υπόθεση η τελευταία σχέση ισχύει για $\omega > 1$. Για τα περιττά j, $\tilde{\gamma}_j > 0$ αν και μόνον αν $\tilde{\gamma}_3 > 0$. Ακολουθώντας ανάλογη πορεία μ' εκείνη του Λήμματος (3.11) και μετά από αρκετές πράξεις καταλήγουμε στο ότι

$$\operatorname{sign}(\tilde{\gamma}_3) = \operatorname{sign}(2 - \omega - \omega\nu) . \tag{3.74}$$

Η τελευταία όμως σχέση αποδεικνύει το λήμμα.

Θεώρημα 3.21

Η περιοχή S του Θεωρήματος 3.15 είναι επίσης μια περιοχή σύγκλισης γιά την SOR.

Απόδειξη

Η απόδειξη γίνεται ακολουθώντας την πορεία που ακολουθήσαμε στο Θεώρημα 3.15. Η διαφορά εδώ είναι ότι στη θέση των h και g θεωρούμε τώρα τις συναρτήσεις

$$h(z) := -\nu\omega z^{p-1} + 1$$

$$g(z) := (\omega - 1) z^{p} .$$

Θεώρημα 3.22

Η περιοχή σύγκλισης Ω_p για την SOR μέθοδο, όταν το φάσμα $\sigma(B^p)$ είναι μη-αρνητικό, δίνεται ισοδύναμα από τον τύπο

$$\Omega_p = \begin{cases} \{(\varrho(B),\omega) \mid \gamma_j>0,\ j=1(1)p-1,\ \varrho(B)<1,\ \omega<\frac{2}{1+\nu}, \\ \qquad \forall \nu \in [0,\varrho(B)]\},\ p \text{ περιττό} \\ \\ \{(\varrho(B),\omega) \mid \gamma_j>0,\ j=1(1)p-1,\ \varrho(B)<1, \\ \qquad \forall \nu \in [0,\varrho(B)]\},\ p \text{ άρτιο} \end{cases} . \tag{3.75}$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι προφανής, αφού ισχύουν τα Λήμματα 3.19 και 3.20. ♦

Θεώρημα 3.23

Για όλα τα περιττά p η περιοχή S είναι η ακριβής περιοχή σύγκλισης για την SOR μέθοδο.

Απόδειξη

Από το προηγούμενο θεώρημα παρατηρούμε ότι οι καμπύλες $\nu=\frac{2-\omega}{\omega}$, αν $\omega>1$ και $\nu=1$ αν $\omega<1$ είναι κάποιες από τις συνοριακές καμπύλες της Ω_p. Αυτές όμως μαζί με τις $\omega=0$, $\nu=0$ είναι οι ακριβείς συνοριακές καμπύλες της S. Συνεπώς θα έχουμε $\Omega_p \subseteq S$. Όμως αφού η S είναι περιοχή σύγκλισης για την SOR μέθοδο θα ισχύει $S \subseteq \Omega_p$. Άρα $S \equiv \Omega_p$. Το τελευταίο όμως αποδεικνύει το θεώρημα. ♦

Για p περιττό η περιοχή Ω_p δίνεται στο Θεώρημα 3.22. Είναι φανερό ότι ισχύει $\Omega_{p+2} \subseteq \Omega_p$.

Με το σκεπτικό της απόδειξης του Θεωρήματος 3.14 μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα διάταξης, με την έννοια του εγκλεισμού, των περιοχών.

Θ ε ώ ρ η μ α 3.24

Για κάθε άρτιο p ισχύει

$$\Omega_{p+2} \subseteq \Omega_p \,. \qquad (3.76)$$

Επιπλέον η δεξιά συνοριακή καμπύλη της Ω_p είναι η ν=1, αν ω<1 και για ω>1 δίνεται από την $\gamma_{p-1} = 0$. ♦

Ίδιο ερώτημα, όπως και στη μη-θετική περίπτωση, όσον αφορά το κατά πόσο η $\gamma_{p-1} = 0$ μας δίνει μονότιμη συνάρτηση $\omega = \omega_{p-1}(\nu)$ τίθεται κι εδώ. Βέβαια για όλα τα περιττά p η απάντηση είναι δοσμένη, αφού η ακριβής περιοχή σύγκλισης ταυτίζεται με την περιοχή S. Για όλα τα p και για ω<1 επίσης γνωρίζουμε τι συμβαίνει, αφού δεξί φράγμα είναι η ευθεία ν=1. Το ερώτημα παραμένει ανοιχτό για όλα τα άρτια p≥ 6, ενώ για p=4 η μελέτη γίνεται παρακάτω. Πριν όμως προχωρήσουμε στη μελέτη της p=4 πρέπει να παρατηρήσουμε ότι με τον ίδιο τρόπο που αποδείξαμε το Λήμμα 3.13 μπορούμε να αποδείξουμε ότι η δεξιά συνοριακή καμπύλη της περιοχής Ω_p για p άρτιο δίνεται από την "πλέον αριστερή" των καμπυλών

$$\sigma_p = \{(\nu,\omega) \mid \gamma_{p-1} = 0, \omega\in(1,2) \text{ και } \nu=1, \omega\in(0,1]\} \,. \qquad (3.77)$$

p=4

Από την (3.77) έχουμε ότι το δεξί σύνορο της Ω_4 είναι η "πλέον αριστερή" των καμπυλών $\gamma_3=0$ για ω∈(1,2). Από τις (3.22) και (3.72) έχουμε

$$\gamma_3 \doteq [(2-\omega)^2-\nu^2]^2 - [\nu^2(\omega-1)]^2 = 0 \,. \qquad (3.78)$$

Αν θυμηθούμε όμως ότι $\gamma_2>0$ και $\nu\le 1$, εύκολα παίρνουμε ότι

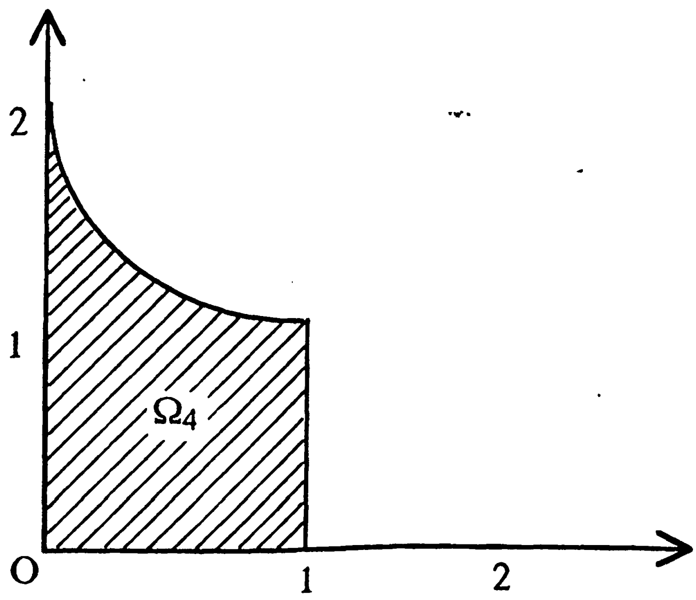
$$\omega = \omega_4(\nu) = \frac{1}{2}(\nu + 4 - \nu\sqrt{\nu^2+8}), \quad 0\le\nu\le 1 . \qquad (3.79)$$

Παραγωγίζοντας την (3.79) βρίσκουμε

$$\frac{d\omega}{d\nu} = 2\nu - \sqrt{\nu^2+8} - \frac{\nu^2}{\sqrt{\nu^2+8}} .$$

Γίνεται αμέσως φανερό ότι η $\omega_4(\nu)$ είναι μια αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση του ν.

Το γραμμοσκιασμένο μέρος του σχήματος 3.5 είναι η περιοχή σύγκλισης Ω_4.



Σχ. 3.5

3.4 Εύρεση περιοχών που περιέχουν βέλτιστες (optimum) τιμές του ω, με τον αλγόριθμο των Schur-Cohn

Στην παρούσα παράγραφο θα προσπαθήσουμε να καθορίσουμε περιοχές του (ν, ω)-επιπέδου, για τις οποίες η βέλτιστη τιμή του ω $(\hat{\omega})$ είναι το 1 καθώς και περιοχές για τις οποίες $\hat{\omega}\neq 1$. Στη δεύτερη περίπτωση θα καθορίσουμε, για το οποιοδήποτε συγκεκριμένο ν, το διάστημα του ω $(\bar{\omega}(\nu), \bar{\bar{\omega}}(\nu))$, στο οποίο θα πρέπει να ανήκει το $\hat{\omega}$. Σ' αυτήν την περίπτωση και για το συγκεκριμένο ν, προκειμένου να κάνουμε χρήση κάποιου $\omega\notin(\bar{\omega}(\nu), \bar{\bar{\omega}}(\nu))$, θα αποδείξουμε ότι είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την τιμή $\omega=1$. Στην προσπάθειά μας αυτή κάνουμε χρήση του αλγορίθμου των Schur-Cohn.

3.4.1 Μη-θετική περίπτωση

Θεωρούμε πάλι την εξίσωση (3.17)

$$z^p + \nu\omega z + (1-\omega) = 0 \ ,$$

όπου το ν είναι η φασματική ακτίνα του πίνακα του Jacobi B, ενώ αν z_i μια ρίζα της πολυωνυμικής αυτής εξίσωσης, τότε z_i^p είναι μια ιδιοτιμή του επαναληπτικού πίνακα της SOR. Για $\omega=1$ η παραπάνω εξίσωση δίνει

$$z^p + \nu z = 0 \ . \tag{3.80}$$

Οι p-1 ρίζες αυτής βρίσκονται στην περιφέρεια ενός κύκλου με ακτίνα $\nu^{\frac{1}{p-1}}$ και μια είναι μηδέν. Εάν μεταβάλλουμε συνεχώς το ω προς μικρότερες ή μεγαλύτερες τιμές του 1 και όλες οι ρίζες της (3.80) μετακινηθούν προς το εσωτερικό του παραπάνω κύκλου $|z| \leq v^{\frac{1}{p-1}}$, τότε η βέλτιστη τιμή του ω θα είναι διαφορετική του 1. Αυτό γιατί τότε θα έχουμε κάποια απ' αυτές τις ρίζες να αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα και η τελευταία θα είναι μικρότερη του $v^{\frac{1}{p-1}}$, που είναι η φασματική ακτίνα του $\mathcal{L}_1$. Αντίθετα αν έστω και μια από τις ρίζες αυτής μετακινηθεί προς το εξωτερικό του κύκλου, τότε η βέλτιστη τιμή του ω θα είναι το 1.

Εάν θεωρήσουμε το μετασχηματισμό

$$z = v^{\frac{1}{p-1}} \zeta \tag{3.81}$$

οι p-1 ρίζες της (3.80) βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο $|z| \leq 1$ και το πρόβλημα μετασχηματίζεται σ' ένα ισοδύναμο. Η εξίσωση (3.17) με το μετασχηματισμό (3.81) γίνεται

$$P(\zeta) := v^{\frac{p}{p-1}} \zeta^p + \omega v^{\frac{p}{p-1}} \zeta + (1-\omega) = 0 \tag{3.82}$$

και το αντίστοιχο αντίστροφο πολυώνυμο γίνεται

$$P^*(\zeta) := (1-\omega)\zeta^p + \omega v^{\frac{p}{p-1}} \zeta^{p-1} + v^{\frac{p}{p-1}} . \tag{3.83}$$

Έτσι λοιπόν προσπαθούμε να βρούμε πότε οι ρίζες του (3.83) θα βρίσκονται όλες στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Η μελέτη όμως του θέματος αυτού μπορεί να γίνει με τον αλγόριθμο των Schur-Cohn.

Οι αντίστοιχες τιμές των $B_2^{(1)}$, $B_1^{(1)}$και $B_o^{(1)}$ είναι

$$B_2^{(1)} = \omega \nu^{\frac{2p}{p-1}} \ , \ B_1^{(1)} = -(1-\omega)\,\omega\nu^{\frac{p}{p-1}} \ , \ B_o^{(1)} = \nu^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)^2 \ . \qquad (3.84)$$

Οι τιμές των $B_2^{(j)}$, $B_1^{(j)}$ και $B_o^{(j)}$, j=2(1)p-1 δίνονται από τις εκφράσεις των (3.22). Επειδή τα πρόσημα των $B_j^{(1)}$, j=2,1 είναι τα ίδια, όπως εκείνα της (3.19α), η θεωρία που αναπτύχθηκε στις προηγούμενες παραγράφους και έχει σχέση μ' αυτά ισχύει ακριβώς η ίδια.

Αρχίζουμε τη μελέτη μας υποθέτοντας ότι ω>1.

Θεώρημα 3.25

Αν για κάποιο δοσμένο ν το ω≥1, τότε η ελάχιστη φασματική ακτίνα για την SOR μέθοδο προκύπτει για $\hat{\omega}=1$.

Απόδειξη

Για p≥3, μελετώντας το πρόσημο του $B_o^{(1)}$, με την προϋπόθεση ότι $\omega \in (1, 2)$, προκύπτει ότι για $\omega > 1 + \nu^{\frac{p}{p-1}}$ αυτό είναι αρνητικό, πράγμα που σημαίνει ότι η εξίσωσή μας έχει ρίζα εκτός του μοναδιαίου κύκλου και επομένως από τα ω που θεωρήσαμε καλύτερο είναι το ω=1. Εάν $\omega < 1 + \nu^{\frac{p}{p-1}}$, από τις (3.22) και τις (3.84) παίρνουμε

$$\gamma_2 = \{ \nu^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)^2 \}^2 - \omega^2 \nu^{\frac{4p}{p-1}} =$$
$$= (1-\omega) [\nu^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)] [\nu^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)^2 + \omega^2 \nu^{\frac{2p}{p-1}} \} \ . \qquad (3.85)$$

Επειδή $\Omega_p \subset \Omega_3$ και $\omega>1$, έπεται ότι $v<1$. Έτσι η ανίσωση $\omega<1+v^{\frac{p}{p-1}}$ μας δίνει ότι $v^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)^2 + \omega^2 v^{\frac{2p}{p-1}} >0$. Συνεπώς από την (3.85) έχουμε ότι $\gamma_2<0$ και επομένως υπάρχουν ρίζες της εξίσωσής μας, που βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο. Για p=2 έχουμε από τις (3.23) και (3.84) ότι το πρόσημο της ποσότητας $\tilde{\gamma}_2$ είναι ίδιο μ' εκείνο της ποσότητας $(1-\omega)(v^4+\omega v^2+\omega-1)$, το οποίο είναι επίσης αρνητικό και μας οδηγεί στα ίδια συμπεράσματα, όπως προηγουμένως. Αυτό ολοκληρώνει και την απόδειξη του θεωρήματός μας. ♦

Βλέπουμε λοιπόν ότι προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε ένα οποιοδήποτε $\omega\in[1,2)$ είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τη μονάδα. Για να δούμε τι συμβαίνει για $\omega<1$ παραθέτουμε τις επόμενες δυο προτάσεις.

Λήμμα 3.26

Έστω ότι η περιοχή

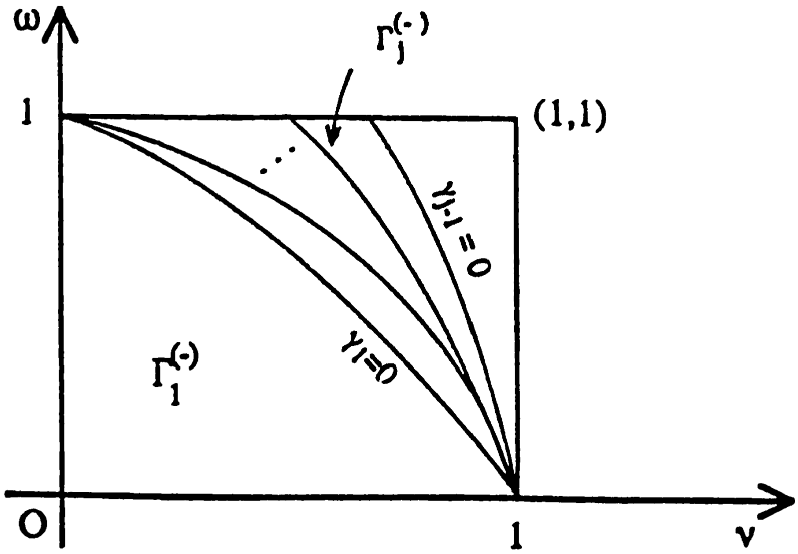
$$\Omega'_p = \{(v,\omega) \;/\; \exists\, \gamma_j<0,\ \ j=1(1)p\} \tag{3.86}$$

ορίζεται για $(v,\omega)\in(0,1)\times(0,1)$ και έστω σ_p το σύνορο της Ω'_p. Αν το $(0,0)\in\sigma_p$, τότε

$$\sigma_p = \{(v,\omega) \,/\, \omega=0,\ \omega=1,\ v=0,\ \gamma_{p-1}=0\}\ . \tag{3.87}$$

Απόδειξη

Από την (3.84) έχουμε ότι $\gamma_1 = v^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)^2$. Στο υπόψη μοναδιαίο τετράγωνο η $\gamma_1=0$ παριστά μια καμπύλη, η οποία το χωρίζει σε δυο μέρη, το $\Gamma_1^{(-)}$ και $\Gamma_1^{(+)}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6. Αποδεικνύουμε τώρα ότι για όλα τα j=1(1)p, εάν απαλείψουμε τον όρο (1- ω), ισχύει $\gamma_j(1, 1)>0$. Πράγματι έχουμε $B_2^{(2)} = -(1-\omega)\omega^2\nu^{\frac{3p}{p-1}}$, $B_1^{(2)} = -(1-\omega)\omega\nu^{\frac{p}{p-1}}(\nu^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)^2)$, και $B_o^{(2)} = (1-\omega)[\nu^{\frac{2p}{p-1}}(1+\omega) - (1-\omega)^2][\nu^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)]$.



Σχ. 3.6

Απαλείφοντας λοιπόν το (1-ω) και θέτοντας ω=ν=1 παίρνουμε $\alpha_2 := B_2^{(2)} = -1$, $\beta_2 := B_1^{(2)} = -1$ και $\gamma_2 := B_o^{(2)} = 2$. Από τους τύπους της (3.22) επίσης προκύπτει ότι $\alpha_3 = -1$, $\beta_2 = -2$, $\gamma_3 = 3$, κ.ο.κ.. Αν $|\alpha_{i-1}| + |\beta_{i-1}| = \gamma_{i-1}$, τότε $\gamma_i = (\gamma_{i-1})^2 - (\alpha_{i-1})^2 = [\,|\alpha_{i-1}| + |\beta_{i-1}|]^2 - |\alpha_{i-1}| = 2|\alpha_{i-1}|\,|\beta_{i-1}| + |\beta_{i-1}|^2 = |\beta_{i-1}|\,|\gamma_{i-1}| + |\alpha_{i-1}|\,|\beta_{i-1}| = |\beta_i| + |\alpha_i| > 0$ πάντα. Αφού $\gamma_j = \gamma_{j-1}^2 - [B_2^{(j-1)}]^2 < 0$, για όλα τα (ν, ω) για τα οποία $\gamma_{j-1}(\nu, \omega) = 0$, και $\gamma_j(1, 1)>0$ θα υπάρχει μια καμπύλη $\gamma_j = 0$, η οποία μαζί με τη $\gamma_{j-1} = 0$ κι ένα τμήμα της $\omega=1$ θα μας δίνει μια περιοχή $\Gamma_j^{(-)}$, για την οποία θα έχουμε τη $\gamma_j<0$. Η ένωση όλων αυτών των περιοχών μας δίνει την Ω'_p, δηλαδή

$$\Omega'_p = \bigcup_{j=1}^{p-1} \Gamma_j^{(-)} . \tag{3.88}$$

Τέλος για $\gamma_p \equiv \tilde{\gamma}_p$ έχουμε, με όμοιο τρόπο όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 3.10, ότι $\tilde{\gamma}_p<0$, αν και μόνον αν $\tilde{\gamma}_2<0$. Όμως $\tilde{\gamma}_2 = B_o^{(1)} + B_2^{(1)} + B_1^{(1)} = \omega\nu^{\frac{p}{p-1}}(\nu^{\frac{p}{p-1}}-1+\omega) = \omega\nu^{\frac{p}{p-1}}\gamma_1$ και άρα ομόσημο του γ_1. ♦

Θεώρημα 3.27

Για $\omega<1$, αν το σημείο $(\nu, \omega)\in \Omega'_p$, τότε η ελάχιστη φασματική ακτίνα της SOR μεθόδου, για κάποιο ν, αντιστοιχεί σε $\hat{\omega}=1$. Αν το σημείο $(\nu, \omega)\in \Omega_p - \Omega'_p$, τότε η ελάχιστη φασματική ακτίνα της μεθόδου αντιστοιχεί σε $\hat{\omega}\neq 1$.

Απόδειξη

Ως γνωστόν για να συγκλίνει η SOR μέθοδος πρέπει το (ν, ω) να ανήκει στην Ω_p. Επομένως η απόδειξη καθίσταται προφανής με βάση το προηγούμενο λήμμα και το Θεώρημα των Schur-Cohn. ♦

Εφαρμόζοντας την παραπάνω θεωρία είναι δυνατόν να κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις για τις παρακάτω ειδικές περιπτώσεις:

i) Για p=2 ο Kredell [22] βρήκε βέλτιστη τιμή του $\hat{\omega}<1$. Η ύπαρξη αυτού του $\hat{\omega}$ φαίνεται αμέσως από τα παραπάνω αναφερθέντα.

ii) Για p=3, 4 και τις υποθέσεις της παραγράφου αυτής οι Galanis, Hadjidimos, Noutsos και Tzoumas [11], βρήκαν για ποιες τιμές του ν έχουμε $\hat{\omega}=1$ και για ποιες τιμές του ν έχουμε $\hat{\omega}\neq 1$. Τα ίδια συμπεράσματα συνάγονται κι εδώ. Επιπλέον αναφέρεται ότι στην [11] έδωσαν την ακριβή τιμή για τη βέλτιστη $\hat{\omega}$ (βλ. Κεφ. 5).

Στη συνέχεια δίνουμε, για την ειδική περίπτωση p=5, το διάστημα στο οποίο, όταν ανήκει το ν, έχουμε $\hat{\omega}=1$. Η εύρεση του $\hat{\omega}$, όταν το ν ανήκει στο υπόλοιπο διάστημα σύγκλισης, παραμένει ένα ανοιχτό πρόβλημα. Τέλος στο σχήμα 3.7 φαίνεται καθαρά η γραμμοσκιασμένη περιοχή, όπου προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε άλλο ω, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί το ω=1. Η ανάλυση που γίνεται εδώ υποστηρίζει και τις περιπτώσεις (i) και (ii). Για το σκοπό αυτό έχουμε ότι από το Λήμμα 5.26, για να βρούμε την Ω'_p, μας χρειάζεται η $\gamma_4 = 0$. Από τους τύπους (3.84) και (3.22) όμως και αφού λάβουμε υπόψη ότι $B_2^{(3)} > 0$ έχουμε

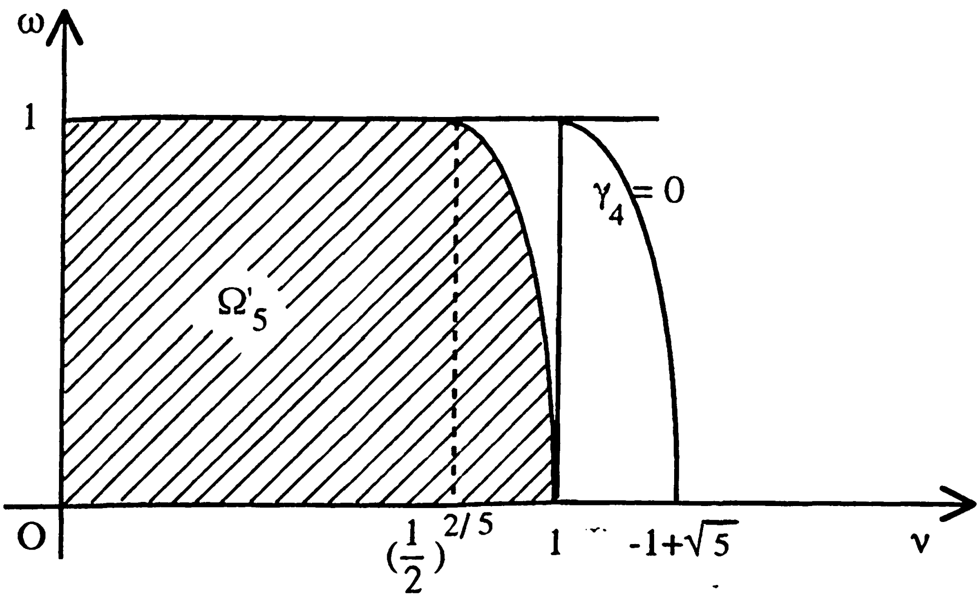
$$\gamma_4 = \left\{ [\nu^{\frac{5}{2}} - (1-\omega)^2]^2 - \omega^2\nu^5 \right\}^2 - (1-\omega)^2\omega^4\nu^{\frac{15}{2}} - $$
$$- (1-\omega)^2\omega^3\nu^5[\nu^{\frac{5}{2}} - (1-\omega)^2] . \quad (3.89)$$

Η παραπάνω καμπύλη διέρχεται από τα σημεία (1, 0) και $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}, 1\right)$. Η περιοχή Ω'_p είναι η γραμμοσκιασμένη περιοχή στο σχήμα 3.7. Εκτελώντας πράξεις στην (3.89) εύκολα καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση

$$\gamma_4 = (1-\omega)^2[\nu^{\frac{5}{2}}(1+\omega)-(1-\omega)^2]\left\{(\nu^{\frac{5}{2}}-1+\omega)^2[\nu^{\frac{5}{2}}(1+\omega)-(1-\omega)^2]-\omega^3\nu^5\right\}$$

ή απαλείφοντας το $(1-\omega)^2$ καταλήγουμε στην

$$\gamma_4^* = [\nu^{\frac{5}{2}}(1+\omega)-(1-\omega)^2]\left\{(\nu^{\frac{5}{2}}-1+\omega)^2[\nu^{\frac{5}{2}}(1+\omega)-(1-\omega)^2]-\omega^3\nu^5\right\}. \quad (3.90)$$



Σχ. 3.7

Για $\nu=(\frac{1}{2})^{\frac{5}{2}}$ η έκφραση (3.90) γίνεται ένα πολυώνυμο του ω

$$Q(\omega) = [\tfrac{1}{2}(1+\omega)-(1-\omega)^2]\left\{(\omega-\tfrac{1}{2})^2[\tfrac{1}{2}(1+\omega)-(1-\omega)^2]-\omega^3(\tfrac{1}{2})^2\right\}. \quad (3.91)$$

Οι ρίζες του πρώτου παράγοντα της (3.91) είναι οι $\omega_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$ ή $\omega_1 \approx 2.28$ και $\omega_2 \approx 0.22$. Ο δεύτερος παράγοντας της ίδιας σχέσης, μετά τις πράξεις, μας δίνει $Q_2(\omega) = \frac{1}{8}(8\omega^4 - 26\omega^3 + 26\omega^2 - 9\omega + 1)$ ή, με το $\omega=1$ να είναι ρίζα αυτού, $Q_2(\omega) = \frac{1}{8}(\omega - 1)(8\omega^3 - 18\omega^2 + 8\omega - 1)$. Αφού η παράγωγος του δεύτερου παράγοντα του $Q_2(\omega)$ είναι πάντα θετικός αριθμός και η τιμή του για $\omega=0$ είναι -1, το $Q_2(\omega)$ δεν έχει ρίζες στο (0,1). Φάνηκε μέχρι εδώ ότι το μόνο σημείο τομής της ευθείας $\nu = (\frac{1}{2})^{\frac{2}{5}}$ και της καμπύλης $\gamma_4 = 0$ είναι εκείνο με συντεταγμένες $((\frac{1}{2})^{\frac{2}{5}}, 0,22)$, το οποίο μάλιστα ανήκει στην περιοχή $\Gamma_1^{(-)}$. Έτσι μπορούμε να ισχυριζόμαστε ότι, αν $\nu < (\frac{1}{2})^{\frac{2}{5}}$, τότε η βέλτιστη τιμή για την SOR μέθοδο θα είναι $\hat{\omega}=1$.

Μπορούμε γενικότερα να παρατηρήσουμε ότι, επειδή για όλα τα $p>5$, η $\gamma_4=0$ που δίνεται από την

$$\left\{ \left[\nu^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)^2\right]^2 - \omega^2 \nu^{\frac{4p}{p-1}} \right\}^2 - (1-\omega)^2 \omega^4 \nu^{\frac{6p}{p-1}} - (1-\omega)^2 \omega^3 \nu^{\frac{4p}{p-1}} \left[\nu^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)^2\right] = 0,$$

περνά από τα σημεία (1, 0) και $((\frac{1}{2})^{\frac{p-1}{2p}}, 1)$ και επιπλέον τέμνει την $\nu = (\frac{1}{2})^{\frac{p-1}{2p}}$ μόνο σ' ένα σημείο που βρίσκεται στην περιοχή $\Gamma_1^{(-)}$. Έτσι για $\nu < (\frac{1}{2})^{\frac{p-1}{2p}}$ η βέλτιστη ω για τη SOR μέθοδο θα είναι $\hat{\omega}=1$.

3.4.2 Μη-αρνητική περίπτωση

Η μελέτη αυτής της περίπτωσης γίνεται με τρόπο όμοιο με αυτόν της προηγούμενης περίπτωσης. Έτσι έχουμε ότι το πολυώνυμο που αντιστοιχεί σ' εκείνο της (3.82) είναι τώρα το

$$P(\zeta) = \nu^{\frac{p}{p-1}} \zeta^p - \omega \nu^{\frac{p}{p-1}} \zeta + \omega - 1 \tag{3.92}$$

με αντίστοιχο αντίστροφο πολυώνυμο το

$$P^*(\zeta) = (\omega-1)\zeta^p - \omega\, \nu^{\frac{p}{p-1}} \zeta^{p-1} + \nu^{\frac{p}{p-1}} \quad . \tag{3.93}$$

Οι τιμές των $B_j^{(1)}$, j=0, 1, 2, ... στην παρούσα περίπτωση είναι

$$B_2^{(1)} = -\omega\, \nu^{\frac{2p}{p-1}} \quad , \quad B_1^{(1)} = (\omega-1)\omega\, \nu^{\frac{p}{p-1}} \quad , \quad B_o^{(1)} = \nu^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)^2 \; . \tag{3.94}$$

Η αναδρομική σχέση που μας δίνει τα και $B_2^{(j)}$, $B_1^{(j)}$ και $B_o^{(j)}$, $j=2(1)p-1$ είναι πάλι εκείνη της (3.22). Αφού τα πρόσημα των $B_2^{(1)}$ και $B_1^{(1)}$ είναι τα ίδια, όπως εκείνα της (3.72) και εκείνο που μας χρειάζεται κι εδώ είναι το θετικό της ποσότητας γ_j , $j=1(1)p$, η θεωρία που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 3.3.2 γενικά ισχύει. Συνέπεια αυτής λοιπόν είναι το επόμενο γενικό θεώρημα.

Θεώρημα 3.28

Για $p \geq 3$, η ελάχιστη φασματική ακτίνα της SOR μεθόδου, για κάποιο $\nu<1$, δίνεται για $\hat{\omega}=1$.

Απόδειξη

Έστω $\omega \geq 1$. Από τις (3.92) με τους τύπους της (3.22) έχουμε ότι

$$\gamma_2 = [\, \nu^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)^2]^2 - \omega^2 \nu^{\frac{4p}{p-1}} =$$
$$= (1-\omega)\,(\nu^{\frac{p}{p-1}} + \omega - 1)\,[\, \nu^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)^2 + \omega^2 \nu^{\frac{2p}{p-1}}]\ . \qquad (3.95)$$

Αν $\gamma_1 = \nu^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)^2 < 0$, από το Θεώρημα των Schur-Cohn και τη θεωρία που αναπτύχθηκε στην αρχή της παραγράφου 3.4 η μικρότερη φασματική ακτίνα για την SOR μέθοδο αντιστοιχεί στο $\omega=1$. Αν $\gamma_1 > 0$, τότε από την (3.93) $\gamma_2 < 0$ και το συμπέρασμα παραμένει το ίδιο.

Έστω $\omega \leq 1$. Αν για κάποιο j, $j=1(1)p-1$, $\gamma_j < 0$ το συμπέρασμα είναι το ίδιο όπως και προηγουμένως. Αν ισχύει όλα τα $\gamma_j > 0$, τότε από την απόδειξη του Λήμματος 3.10 έχουμε ότι το πρόσημο του $\tilde{\gamma}_p$ είναι το ίδιο μ' εκείνο του $\tilde{\gamma}_2$. Όμως γι αυτό έχουμε

$$\tilde{\gamma}_2 = [\, \nu^{\frac{2p}{p-1}} - (1-\omega)^2] - [\, -\omega\, \nu^{\frac{p}{p-1}} + (\omega-1)\omega\nu^{\frac{p}{p-1}}]^2 =$$
$$= (\nu^{\frac{p}{p-1}} + 1 - \omega)^2\,(1-\omega)\,(\, \nu^{\frac{p}{p-1}} - 1)\,(\, \nu^{\frac{p}{p-1}} - 1 + \omega + \omega\nu^{\frac{p}{p-1}})\ . \qquad (3.96)$$

Αφού $\gamma_1 = \nu^{\frac{p}{p-1}} - 1 + \omega > 0$, προκύπτει ότι $\tilde{\gamma}_2 < 0$, το οποίο αποδεικνύει και το θεώρημα. ♦

Το προηγούμενο θεώρημα απεδείχθη μ' άλλο τρόπο από τους Nichols και Fox [26] στη γενικότερη περίπτωση $1 \leq q < p-1$. Για $p=2$, το δεύτερο μέρος του τελευταίου θεωρήματος ισχύει και επομένως για όλα τα $\omega \leq 1$ καλύτερο είναι το $\omega=1$. Για $\omega \geq 1$ η ποσότητα γ_2 δεν υπάρχει, έτσι για $\omega > 1+\nu^2$ έχουμε $\gamma_1 < 0$ και προκειμένου να εκλέξουμε ένα τέτοιο ω, είναι προτιμότερο να εκλέξουμε $\omega=1$. Για $\omega < 1+\nu^2$ έχουμε $\gamma_1 > 0$ καθώς και $\tilde{\gamma}_2 > 0$, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει άλλη βέλτιστη $\hat{\omega} \neq 1$ και μάλιστα $\hat{\omega} \in (1,\ 1+\nu^2)$. Αυτά τα συμπεράσματα δόθηκαν από τον Young [39]. Σημειώνεται ότι στην [26] βρέθηκε επιπλέον η ακριβής τιμή $\hat{\omega}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΥΠΟΚΥΚΛΟΕΙΔΕΙΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΦΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΧΩΝ

4.1 Εισαγωγή

Στα δυο προηγούμενα κεφάλαια δεν ασχοληθήκαμε ειδικά με τις ιδιοτιμές του πίνακα Jacobi B του συστήματος της (2.1). Προκύπτει λοιπόν εύλογα το ερώτημα: "Ποια είναι η ευρύτερη δυνατή περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, η οποία θα περιέχει το $\sigma(B)$, έτσι ώστε η SOR μέθοδος να συγκλίνει;" Προσπάθεια για απάντηση στο ερώτημα αυτό έχει γίνει μόνο για την περίπτωση των G.C.O.-(p,1) πινάκων, αρχικά από το Varga [35] και αμέσως μετά για $p=2$ και $\omega\in\mathbb{C}$ από τον Kredell [15]. Στη συνέχεια ασχολούνται με το θέμα και οι Galanis, Hadjidimos και Noutsos ([7], [9], [10]) και δίνουν μερικώς απάντηση στο παραπάνω ερώτημα. Ανεξάρτητα, και την ίδια εποχή περίπου στα ίδια συμπεράσματα κατέληξαν και οι Wild και Niethammer [38]. Με τη μελέτη του ερωτήματος ασχολούνται στη συνέχεια οι Eierman, Niethammer και Rutan [6], οι Kontovasilis, Plemmons και Stewart [23] και ο Noutsos [29].

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να δώσουμε απάντηση στο παραπάνω ερώτημα, για τη γενική περίπτωση των G.C.O.- (p, q) πινάκων. Στην παράγραφο 4.2 θα δοθούν, για τις περιπτώσεις $q < [\frac{p}{2}]$

και $q > [\frac{p}{2}]$ αφού μ.κ.δ $(p,q)=1$, οι ευρύτατες περιοχές του μιγαδικού επιπέδου, στις οποίες, εάν ανήκει το $\sigma(B)$, τότε η SOR μέθοδος θα συγκλίνει. Στην παράγραφο 4.3 θα μελετηθούν οι περιοχές σύγλισης στο $(\rho(B),\omega)$-επίπεδο, όταν το $\sigma(B)$ είναι μη-θετικό ή μη-αρνητικό. Τέλος στην παράγραφο 4.4 μελετώνται οι ειδικές περιπτώσεις $(p,q)=(5,2)$ και $(5,3)$, αφού οι περιπτώσεις $(3, 2)$, $(4, 3)$ και $(5, 4)$ έχουν μελετηθεί ήδη στο Κεφάλαιο 3 και οι $(3,1)$, $(4,1)$, $(5,1)$ έχουν μελετηθεί από άλλους ερευνητές ([10], [38] και [13]).

Θα παρουσιάσουμε καταρχήν στοιχεία από τη βασική θεωρία των υποκυκλοειδών καμπυλών, που είναι χρήσιμα για την εύρεση των περιοχών σύγκλισης.

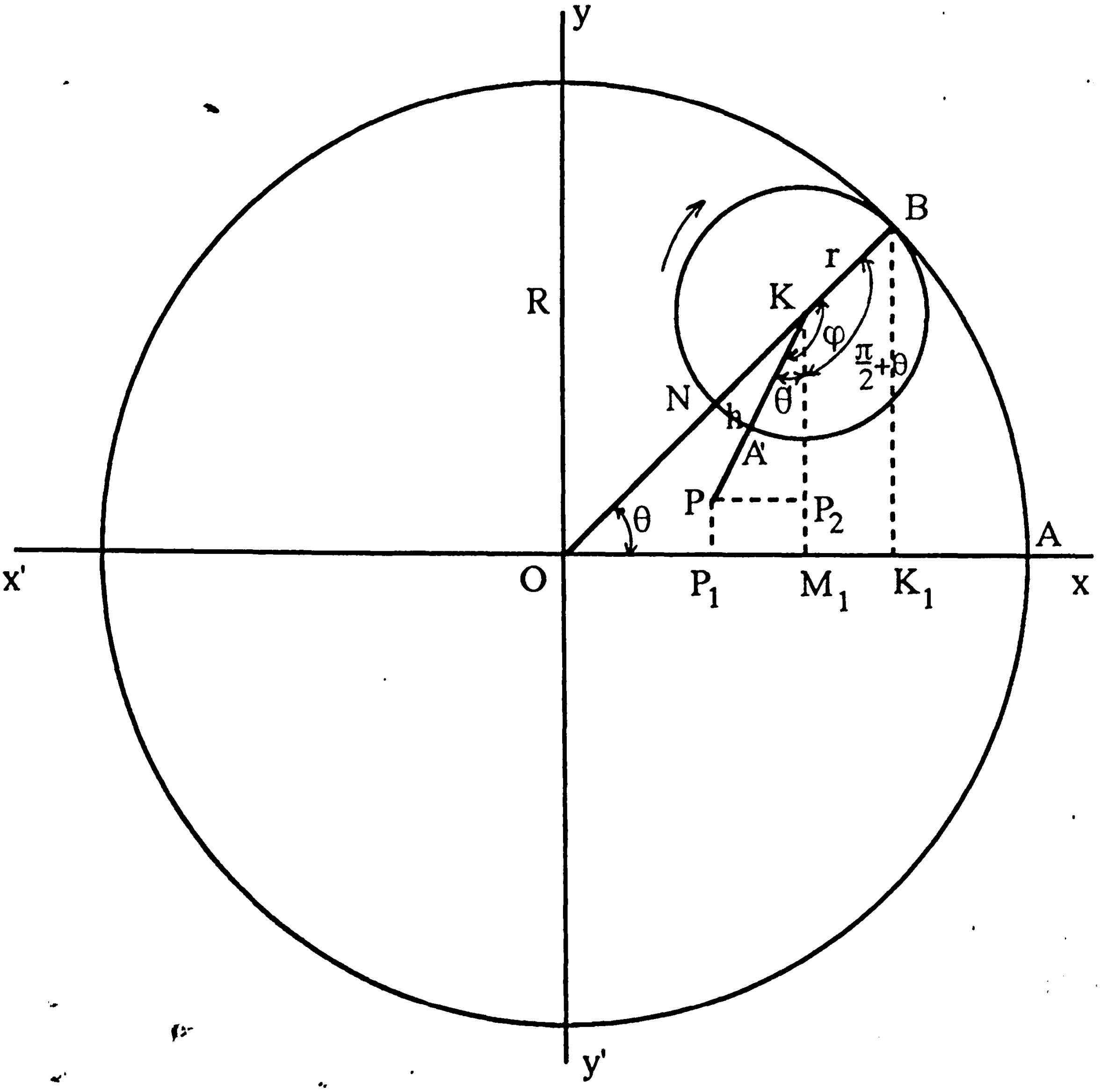
Π ρ ό β λ η μ α

Έστω οι κύκλοι (O, R) και (K, r) με $r < R$. Έστω ακόμη ότι ο κύκλος (K, r) εφάπτεται εσωτερικά στον (O, R) και κυλάει μέσα σ' αυτόν, χωρίς να ολισθαίνει. Έστω τέλος P ένα σημείο του επιπέδου του κύκλου (K, r). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος (γ.τ.) του P, καθώς το επίπεδο του κύκλου (K, r) κυλάει μαζί του.

Λ ύ σ η

Αν L_1 είναι το μήκος του κύκλου (O, R) (μεγάλος κύκλος) και L_2 το μήκος του κύκλου (K, r) (μικρός κύκλος), τότε

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R}{r} \quad .$$



Σχ. 4.1

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

i) Αν $\frac{R}{r} \in \mathbb{Z}$, τότε ο μικρός κύκλος θα κυλήσει $\frac{R}{r}$ φορές μέσα στο μεγάλο και το σημείο P θα γράψει μια κλειστή (με την έννοια ότι θα γυρίσει στην αρχική του θέση) καμπύλη (υποκυκλοειδή).

ii) Αν $\frac{R}{r} \in \mathbb{Q}$ και ειδικά $\frac{R}{r} = \frac{\ell}{k}$, με μ.κ.δ.$(\ell, k)=1$, τότε ο μικρός κύκλος θα κυλήσει ℓ φορές μέσα στο μεγάλο (και θα γυρίσει k φορές μέσα σ' αυτόν). Το σημείο P θα γράψει πάλι μια κλειστή (αστεροειδή) υποκυκλοειδή καμπύλη.

iii) Αν $\frac{R}{r} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, τότε η καμπύλη που γράφει το P δεν είναι κλειστή.

Όπως προκύπτει από το σχήμα 4.1 οι παραμετρικές εξισώσεις της υποκυκλοειδούς είναι

$$\begin{aligned} x &= (R-r)\cos(\theta) + h\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) \\ y &= (R-r)\sin(\theta) - h\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) \end{aligned} , \tag{4.1}$$

όπου h η απόσταση του P από το κέντρο του μικρού κύκλου και θ η πολική γωνία του κέντρου του μικρού κύκλου.

Ανάλογα με τη θέση του P σε σχέση με το μικρό κύκλο διακρίνουμε τριών ειδών καμπύλες:

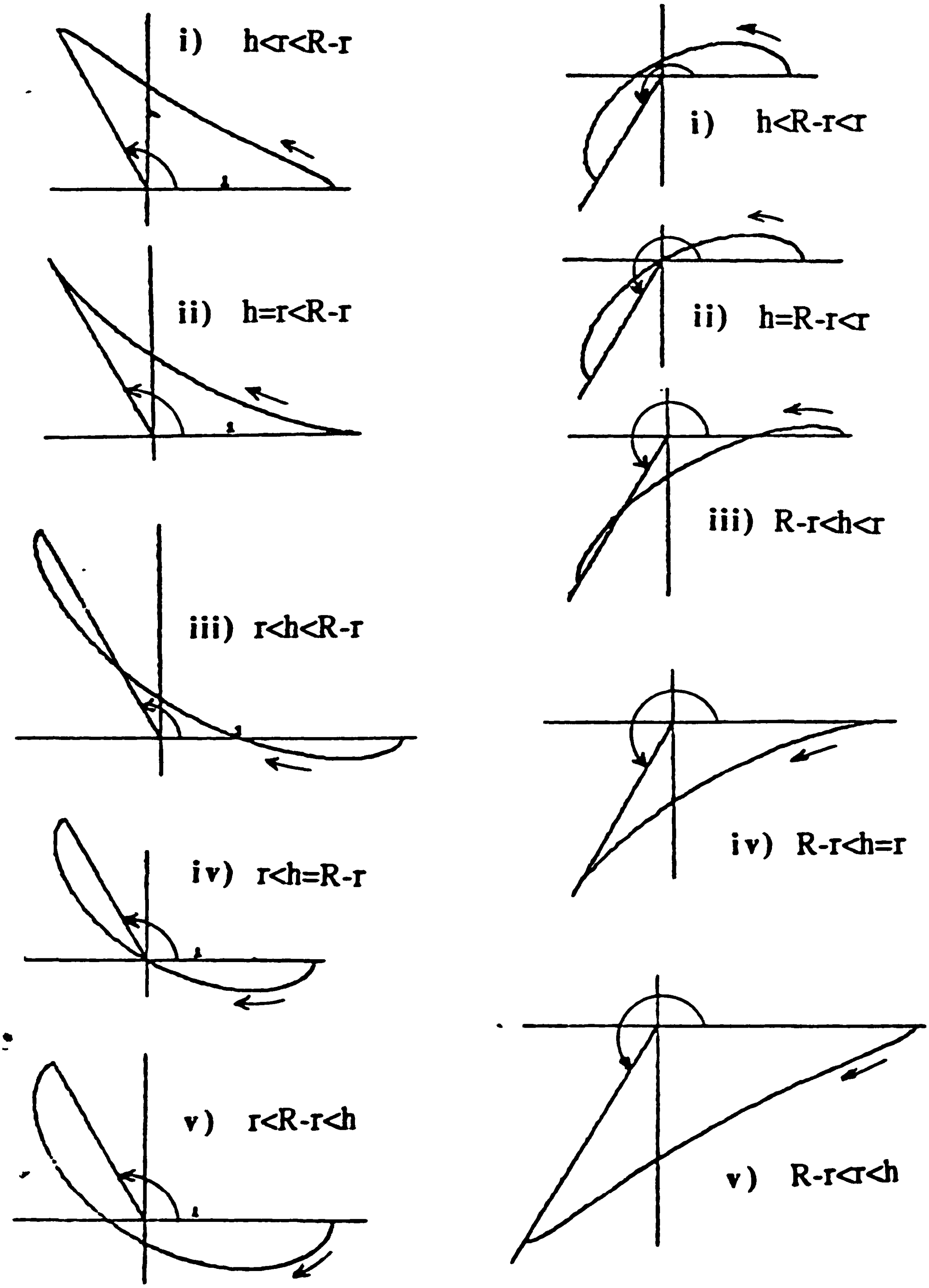
α) "shortened hypocycloids", αν $h < r < R-r$ ή $R-r < r < h$

β) "ordinary or cusped hypocycloids", αν $h = r$

γ) "stretched hypocycloids", αλλιώς.

Για $R = 2r$ η υποκυκλοειδής μας για $h \neq r$ είναι η έλλειψη

$$\frac{x^2}{(r+h)^2} + \frac{y^2}{(r-h)^2} = 1 ,$$


i) h<r<R-r
ii) h=r<R-r
iii) r<h<R-r
iv) r<h=R-r
v) r<R-r<h
i) h<R-r<r
ii) h=R-r<r
iii) R-r<h<r
iv) R-r<h=r
v) R-r<r<h

Πίνακας 1

ενώ για $h = r$, αυτή εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα.

Ανάλογα με το αν έχουμε $R>2r$ (ή $R<2r$), είναι δυνατόν να διακρίνουμε πέντε περιπτώσεις σχετικά με τη θέση του h ως προς τα r και $R-r$. Στον πίνακα 1 φαίνονται αυτές, καθώς ο μικρός κύκλος κυλάει αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, για **i)** $R = 3r$ και **ii)** $R = \frac{3}{2}r$.

4.2 Υποκυκλοειδείς και περιοχές σύγκλισης

Αρχίζουμε τη μελέτη μας από τη σχέση των ιδιοτιμών (2.41), θεωρώντας ότι $\omega \in (1, 2)$. Θέτοντας το μετασχηματισμό,

$$\varphi = \frac{1}{\lambda}$$

και αντικαθιστώντας στη (2.41) παίρνουμε

$$[1-(1-\omega)\varphi]^p = \omega^p \mu^p \varphi^q \ . \tag{4.2}$$

Στόχος μας είναι να βρούμε την περιοχή εκείνη του μιγαδικού επιπέδου, η οποία θα περιέχει τις ιδιοτιμές μ του πίνακα Jacobi B και θα απεικονίζεται στο εξωτερικό του κύκλου $\varphi=\eta e^{i\theta}$, $\eta>0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, ή ισοδύναμα στο εσωτερικό του $\lambda = \frac{1}{\eta} e^{-i\theta}$. Σ' αυτή την περίπτωση η φασματική ακτίνα της SOR μεθόδου θα είναι μικρότερη ή ίση του $\frac{1}{\eta}$ και το ίσον θα ισχύει, αν μια ιδιοτιμή του B βρίσκεται πάνω στο σύνορο.

Ο πίνακας B είναι κυκλικός, που σημαίνει ότι $\mu\theta^j \in \sigma(B)$, με $\theta^p = 1$ και $j \in \mathbb{N}$. Αν πάρουμε p τάξης ρίζες και στα δυο μέλη της (4.2) θα έχουμε

$$1-(1-\omega)\varphi = \omega\, \mu\, \varphi^{q/p} \ . \tag{4.3}$$

Προφανώς η περιοχή μας θα δίνεται από το μετασχηματισμό

$$z := \frac{1-(1-\omega)\varphi}{\omega\varphi^{q/p}} \quad . \tag{4.4}$$

Για να τον μελετήσουμε θέτουμε

$$\zeta := \varphi^{q/p} \quad , \tag{4.5}$$

όπου η (4.4) γίνεται

$$z := z(\zeta) := \frac{1-(1-\omega)\zeta^{p/q}}{\omega\zeta} \quad . \tag{4.6}$$

Ο δίσκος $|\varphi| \leq \eta$, λόγω της (4.5) αντιστοιχεί στον τομέα

$$S_k := \{\varrho^{q/p}\, e^{i\frac{q}{p}(2k\pi+\theta)} : \ \varrho\in[0,\eta],\ \theta\in[0,2\pi)\ \}, \qquad k=0(1)p-1$$

ή ισοδύναμα (4.7)

$$S_k := \{\varrho^{q/p}\, e^{i(\frac{2kq\pi}{p}+\theta)} : \ \varrho\in[0,\eta],\ \theta\in[0,\frac{2q\pi}{p})\ \}, \quad k=0(1)p-1 \ .$$

Για να πετύχουμε το στόχο, τον οποίο θέσαμε παραπάνω, θα πρέπει να μελετήσουμε το μετασχηματισμό (4.6) σε καθένα από τους τομείς (4.7). Όμως αν $\zeta' = \zeta e^{k\frac{2\pi q}{p}i}$, $k=1(1)p-1$, είναι εκείνο το σημείο πουπροκύπτει από στροφή του $\zeta\in S_o$ κατά γωνία $k\frac{2\pi q}{p}$, τότε $z(\zeta') = \dfrac{1-(1-\omega)\zeta^{p/q}e^{2k\pi i}}{\omega\zeta e^{k\frac{2\pi q}{p}i}} = z(\zeta)e^{-k\frac{2\pi q}{p}i}$, δηλαδή η εικόνα του $z(\zeta')$ προκύπτει από στροφή της εικόνας του z(ζ) κατά - $k\frac{2\pi q}{p}$. Έτσι λοιπόν θα πρέπει να μελετήσουμε το μετασχηματισμό του S_o.

Έστω ο συμπαγής τομέας

$$\bar{S}_o := \{ \varrho^{q/p} e^{i\theta} \ : \ \varrho\in[0, \eta],\ \theta\in[0, \frac{2q\pi}{p}) \} \ . \qquad (4.8)$$

Το σύνορο αυτού του συνόλου είναι η κλειστή καμπύλη

$$\partial\bar{S}_o=\{\varrho\colon \varrho\in[0,\ \eta]\}\cup\{\varrho e^{\frac{2\pi q}{p}i} : \varrho\in[0,\eta]\}\cup\{\ \eta^{q/p}\, e^{i\theta} : \theta\in[0, \frac{2q\pi}{p})\}. \quad (4.9)$$

Η εικόνα αυτής της καμπύλης με το μετασχηματισμό (4.6) είναι μια καμπύλη C_o η οποία αποτελείται από τις εικόνες των τριών παραπάνω καμπυλών με τον ίδιο μετασχηματισμό. Αφού το δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα προκύπτει από το πρώτο με στροφή κατά γωνία $\frac{2\pi q}{p}$, θα μελετήσουμε το πρώτο ευθύγραμμο τμήμα και την τρίτη καμπύλη.

Λήμμα 4.1

Η απεικόνιση του ευθύγραμμου τμήματος $\{\varrho\colon \varrho\in[0,\eta]\}$ είναι ένα απείρου μήκους τμήμα του θετικού πραγματικού ημιάξονα. Επιπλέον, αν $\eta\le\hat{\eta} = [\frac{q}{(p-q)(\omega-1)}]$, αυτό απεικονίζεται 1-1 στο τμήμα $[\frac{1-(1-\omega)\eta^{p/q}}{\omega\eta}$, $\infty]$, διαφορετικά απεικονίζεται στο $[\frac{1-(1-\omega)\hat{\eta}^{p/q}}{\omega\hat{\eta}}, \infty]$ και η απεικόνιση δεν είναι 1-1.

Απόδειξη

Θέτοντας ζ=ϱ στην (2.6) έχουμε -

$$z(\varrho) := \frac{1-(1-\omega)\varrho^{p/q}}{\omega\varrho} .$$

Παραγωγίζοντας αυτήν ως προς ϱ παίρνουμε

$$\frac{dz(\varrho)}{d\varrho} = \frac{-\frac{p}{q}(1-\omega)\omega\,\varrho^{p/q} - \omega + (1-\omega)\omega\,\varrho^{p/q}}{\omega^2\varrho^2} = \frac{\varrho^{p/q}\ (1-\omega)\ (1-\frac{p}{q}) - 1}{\omega\,\varrho^2} .$$

Είναι πλέον φανερό από τις προηγούμενες ισότητες ότι $\frac{dz(\varrho)}{d\varrho} \lesseqgtr 0$, αν και μόνον αν ισχύει $\eta \lesseqgtr \hat{\eta} := [\frac{q}{(p-q)(\omega-1)}]^{q/p}$. Έτσι καθώς το ϱ κινείται από το 0 στο η με $\eta \leq \hat{\eta}$, οι εικόνες του κινούνται από το ∞ στο $\frac{1-(1-\omega)\eta^{p/q}}{\omega\eta}$ και η απεικόνιση είναι 1-1. Όταν το $\eta > \hat{\eta}$, οι εικόνες του ϱ κινούνται από το ∞ μέχρι το $\frac{1-(1-\omega)\,\hat{\eta}^{p/q}}{\omega\hat{\eta}}$ για $\varrho \leq \hat{\eta}$ και έπειτα γυρίζουν προς τα πίσω στο $\frac{1-(1-\omega)\eta^{p/q}}{\omega\eta}$ για $\varrho \in (\hat{\eta}, \eta]$. ♦

Για τη μελέτη της τρίτης καμπύλης θεωρούμε το μετασχηματισμό (4.6) και θέτοντας $\zeta = \eta^{q/p} e^{i\theta}$ έχουμε

$$z(\zeta) = x+iy$$

όπου,

$$x = \frac{1}{\omega\eta^{q/p}}\ [\cos\theta - (1-\omega)\eta\cos(\frac{p-q}{q}\theta)]$$

$$, \theta \in [0, \frac{2q\pi}{p}) \quad . (4.10)$$

$$y = -\frac{1}{\omega\eta^{q/p}}\ [\sin\theta + (1-\omega)\eta\sin(\frac{p-q}{q}\theta)]$$

Αφού ισχύει $\omega\in(1,2)$, οι εξισώσεις (4.10) είναι της ίδιας μορφής με τις (4.1) και επομένως είναι παραμετρικές εξισώσεις υποκυκλοειδούς με

$$R-r=\frac{1}{\omega\,\eta^{q/p}}$$

$$h=\frac{\omega-1}{\omega}\,\eta^{(p-q)/p}\ . \tag{4.11}$$

$$\frac{R-r}{r}=\frac{p-q}{q}$$

Η μόνη διαφορά των (4.10) μ' εκείνες της σχέσης (4.1) είναι ότι οι (4.1) περιγράφουν υποκυκλοειδή που διαγράφεται, όταν ο μικρός κύκλος γυρίζει κατά φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, ενώ αυτές, της σχέσης (4.10), περιγράφουν υποκυκλοειδή που διαγράφεται, όταν ο μικρός κύκλος γυρίζει προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Λήμμα 4.2

Η εικόνα του τόξου $\{\eta e^{i\theta}: \theta\in[0, \frac{2q\pi}{p}]\}$ κατά το μετασχηματισμό (4.6) είναι η υποκυκλοειδής καμπύλη (4.10). Η απεικόνιση είναι 1-1 και η καμπύλη έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $\{\rho e^{-i2\pi q/p}: \rho\in O(\mathbb{R})\}$.

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι σημεία του ζ-επιπέδου με αντίθετα ορίσματα έχουν εικόνες στο z-επίπεδο με αντίθετα ορίσματα. Πράγματι, αν $\zeta_1 := \zeta_1(\rho, \theta)$ και $\zeta_2 := \zeta_2(\rho, -\theta)$ δύο τέτοια σημεία, τότε ισχύει

$$\mathrm{tgArg}(\zeta_2)=\frac{y_2}{x_2}=-\frac{y_1}{x_1}=-\mathrm{tgArg}(\zeta_1)\,,$$

όπου x_i, y_i, i=1, 2, δίνονται από τις (4.10).
Έστω τώρα ζ_1 και ζ_2 δύο σημεία του τόξου που θεωρούμε συμμετρικά ως προς τον ημιάξονα $\{\varrho e^{i2\pi q/p} : \varrho \in \mathbb{R}_+\}$. Γι' αυτά έχουμε $\zeta_1=\zeta_1(\eta, \theta)$ και $\zeta_2=\zeta_2(\eta, \frac{2\pi q}{p} - \theta)$, δηλαδή $\text{Arg}(\zeta_1)+\text{Arg}(\zeta_2)=\frac{2\pi q}{p}$. Αν $z_1 := z_1(\zeta_1)$, τότε

$$z_2 := z(\zeta_2) = \frac{1-(1-\omega)\eta^{\frac{p}{q}} e^{i(\frac{2\pi q}{p}-\theta)\frac{p}{q}}}{\omega\eta e^{i(\frac{2\pi q}{p}-\theta)}} = \frac{1-(1-\omega)\eta^{\frac{p}{q}} e^{-i\frac{p}{q}\theta}}{\omega\eta e^{-i\theta}}\, e^{-i\frac{2\pi q}{p}} . \tag{4.12}$$

Από την (4.12), αφού σημεία του ζ-επιπέδου με αντίθετα ορίσματα έχουν εικόνες με αντίθετα ορίσματα, προκύπτει ότι

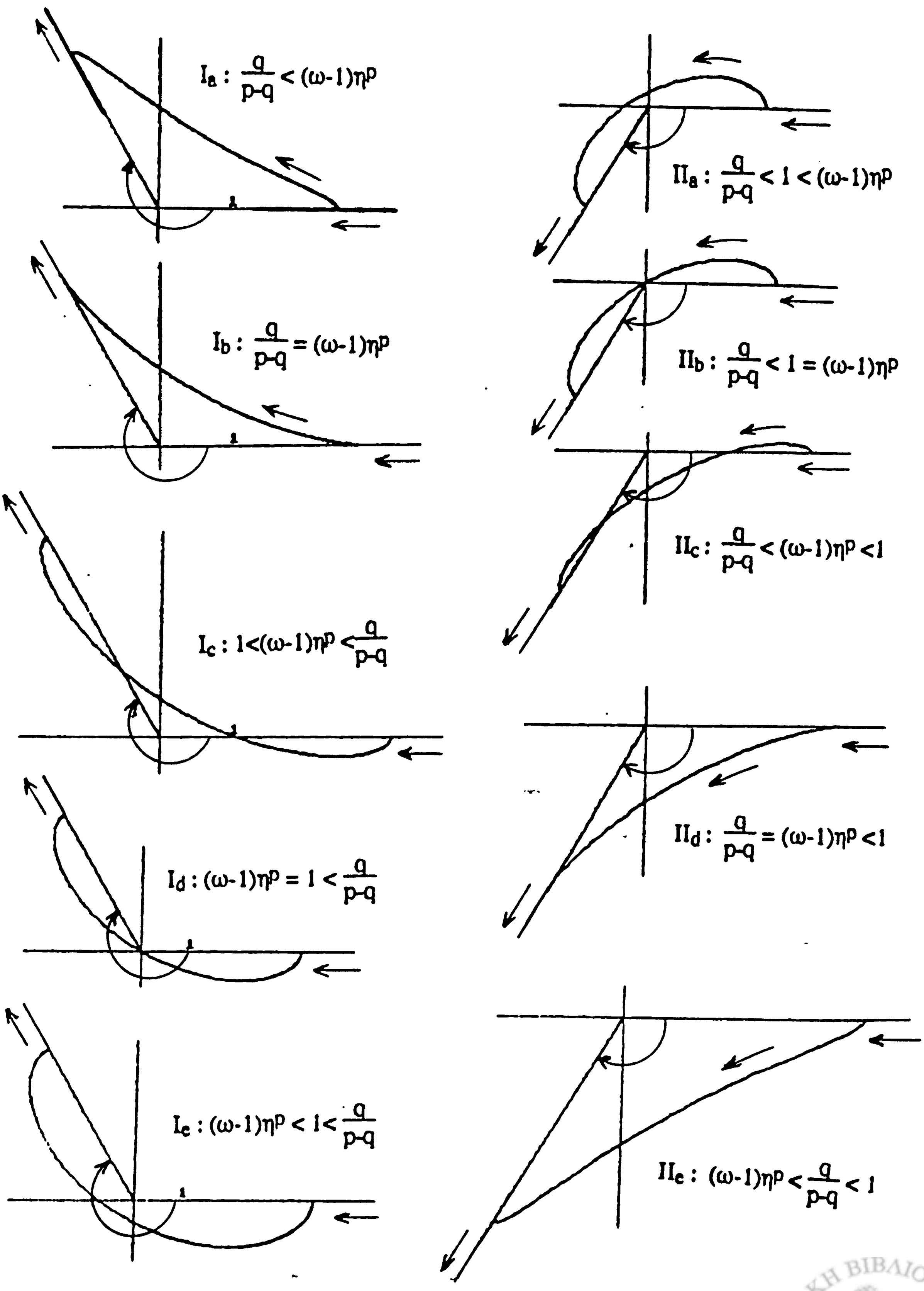
$$\text{Arg}\, z_2 = -\text{Arg}\, z_1 - \frac{2\pi q}{p} \quad \text{ή} \quad \text{Arg}\, z_1 + \text{Arg}\, z_2 = -\frac{2\pi q}{p}$$

δηλαδή, οι εικόνες συμμετρικών σημείων σε σχέση με τον άξονα $\{\varrho e^{i\pi q/p} : \varrho \in \mathbb{R}$, είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $\{\varrho e^{-i2\pi q/p}: \varrho \in \mathbb{R}\}$. Τέλος αποδεικνύουμε το 1-1. Θεωρούμε δύο σημεία $\zeta_1 \neq \zeta_2$ με $\zeta_j = \eta e^{i\theta_j}$, j=1, 2. Έστω ότι αυτά έχουν τις ίδιες εικόνες. Τότε από τη σχέση $z(\zeta_1)=z(\zeta_2)$ συνεπάγονται οι $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$, από δε τις σχέσεις (4.10) έχουμε:

$$\cos\theta_1 - (1-\omega)\,\eta\cos\frac{p-q}{q}\theta_1 = \cos\theta_2 - (1-\omega)\,\eta\cos\frac{p-q}{q}\theta_2$$

$$\sin\theta_1 + (1-\omega)\,\eta\sin\frac{p-q}{q}\theta_1 = \sin\theta_2 + (1-\omega)\,\eta\sin\frac{p-q}{q}\theta_2$$

ή μετά από μερικές πράξεις



$I_a : \frac{q}{p-q} < (\omega-1)\eta^p$
$I_b : \frac{q}{p-q} = (\omega-1)\eta^p$
$I_c : 1<(\omega-1)\eta^p < \frac{q}{p-q}$
$I_d : (\omega-1)\eta^p = 1 < \frac{q}{p-q}$
$I_e : (\omega-1)\eta^p < 1 < \frac{q}{p-q}$
$II_a : \frac{q}{p-q} < 1 < (\omega-1)\eta^p$
$II_b : \frac{q}{p-q} < 1 = (\omega-1)\eta^p$
$II_c : \frac{q}{p-q} < (\omega-1)\eta^p < 1$
$II_d : \frac{q}{p-q} = (\omega-1)\eta^p < 1$
$II_e : (\omega-1)\eta^p < \frac{q}{p-q} < 1$

Πίναχας 2

$$\sin\frac{p}{2q}(\theta_1+\theta_2)=0 \quad \text{ή} \quad \theta_1+\theta_2=\frac{2k\pi q}{p} . \tag{4.13}$$

Επειδή όμως $\theta_1, \theta_2 \in (0, \frac{2q\pi}{p})$, η μοναδική τιμή του k είναι k=1. Έτσι $\theta_1+\theta_2 = \frac{2q\pi}{p}$, το οποίο σημαίνει ότι τα παραπάνω σημεία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $\{\varrho e^{i\frac{2\pi q}{p}} : \varrho \in \mathbb{R})\}$ και οι εικόνες τους δεν ταυτίζονται (άτοπο). Συνεπώς η απεικόνισή μας είναι 1-1. ♦

Στη συνέχεια διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

$$\text{α)} \ \frac{p-q}{q}<1 \quad \text{και} \quad \text{β)} \ \frac{p-q}{q}>1 .$$

Η πρώτη ανισότητα σημαίνει ότι ο αριθμός των μη ταυτοτικά μηδενικών blocks του κάτω τριγωνικού πίνακα L του πίνακα Jacobi είναι λιγότερα από τα μη ταυτοτικά μηδενικά blocks του άνω τριγωνικού πίνακα U. Η δεύτερη ανισότητα σημαίνει ακριβώς το αντίθετο. Οι ανισότητες αυτές με βάση τις (4.11) δίνουν $R<2r$ και $R>2r$ αντίστοιχα. Έχοντας υπόψη τα εκτεθέντα στην παράγραφο 4.1 καθώς και τις σχέσεις (4.10), παίρνουμε τις μορφές των υποκυκλοειδών καμπυλών που φαίνονται στον πίνακα 2.

Μετά τη μέχρι τώρα ανάλυση δίνουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.3

Το σύνολο $S_o' = S_o \setminus \{\varrho : \varrho(0, \eta]\}$ απεικονίζεται με τη (4.6) στο σύνολο $\Omega_o' = z(S_o')$, το οποίο είναι το αριστερό μέρος του μιγαδικού επιπέδου με σύνορο την απεικόνιση της αριστερόστροφης καμπύλης $\partial\bar{S}_o$. Επιπλέον η απεικόνιση αυτή είναι 1-1.

Απόδειξη

Είναι προφανές ότι το σύνολο S_o' είναι ο τομέας (γεωμετρικός) χωρίς το σύνορο των ευθύγραμμων τμημάτων. Εξαιρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα του συνόρου, αφού γνωρίζουμε ότι σ' αυτά η απεικόνιση δεν είναι 1-1 για $\eta>\hat{\eta}$, από το Λήμμα 4.1. Έστω τώρα το σημείο $\zeta_o = \varrho_0 e^{i\theta_o} \in S_o'$. Αυτό ορίζεται μονοσήμαντα από την τομή του ημιάξονα $\{\varrho e^{i\theta_o} : \varrho \geq 0\}$ και του τόξου $\{ \varrho_0 e^{i\theta} : \theta \in (0, \frac{2q\pi}{p}) \}$. Όμως, από το Λήμμα 4.2, η απεικόνιση αυτού του τόξου είναι 1-1. Για την απεικόνιση τώρα του ημιάξονα εργαζόμαστε ως εξής: Έστω ότι αυτή δεν είναι 1-1. Τότε θα υπάρχουν $\zeta_1 = \varrho_1 e^{i\theta_o}$ και $\zeta_2 = \varrho_2 e^{i\theta_o}$ με $\varrho_1 \neq \varrho_2$ που θα έχουν την ίδια εικόνα. Έτσι

$$\frac{1-(1-\omega)\varrho_1^{p/q}\, e^{i\frac{p}{q}\theta_o}}{\varrho_1\, e^{i\theta_o}} = \frac{1-(1-\omega)\,\varrho_2^{p/q}\, e^{i\frac{p}{q}\theta_o}}{\varrho_2}$$

ή (4.14)

$$\varrho_2 - \varrho_1 = -(1-\omega)\,(\varrho_2^{p/q} - \varrho_1^{p/q})\, e^{i\frac{p}{q}\theta_o} .$$

Όμως τώρα είναι προφανές ότι η τελευταία ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν $\varrho_1 = \varrho_2$. Δηλαδή η απεικόνιση είναι 1-1. Συνεπώς, η εικόνα του ζ_0 είναι το μοναδικό σημείο τομής z_0. Αυτό ισχύει για όλα τα σημεία του S_0' και επομένως η απεικόνιση αυτή είναι 1-1. Μετά από αυτό είναι φανερό ότι το $\Omega_0 = z\,(S_0)$ είναι το αριστερό μέρος του μιγαδικού επιπέδου σε σχέση με τη διεύθυνση, που δείχνουν τα βέλη στον πίνακα 2. ♦

Φυσικά, το Θεώρημα 4.3 ισχύει για όλους τους τομείς S_k, k=0 (1) p-1. Έτσι την απεικόνιση $\Omega_k = z(S_k)$, k=0 (1) p-1, μπορούμε να την πάρουμε σαν στροφή της Ω_{k-1} κατά γωνία $-\frac{2q}{p}\pi$ ή της Ω_0 κατά γωνία $-\frac{2kq}{p}\pi$, k=1(1)p-1, δηλαδή

$$\Omega_k = \Omega_{k-1}\, e^{-i\frac{2q}{p}\pi} \quad , \quad k = 1(1)p-1$$

ή

$$\Omega_k = \Omega_0\, e^{-i\frac{2kq}{p}\pi} \quad , \quad k = 1(1)p-1) \ . \tag{4.15}$$

Αφού ο δίσκος $|\zeta| \le \eta^{q/p}$ είναι η ένωση $\bigcup_{i=o}^{n} S_k$, η εικόνα του δίσκου θα είναι

$$z(\bigcup_{k=0}^{p-1} S_k) = \bigcup_{k=0}^{p-1} \Omega_k \ .$$

Έτσι όλα τα σημεία που ανήκουν στο $(\bigcup_{k=0}^{p-1} \Omega_k)^c = \bigcap_{k=0}^{p-1} \Omega_k^c$, θα αντιστοιχούν στο εξωτερικό του προηγούμενου δίσκου.

Θεώρημα 4.4

Έστω ότι ο block πίνακας Jacobi B που αντιστοιχεί στο σύστημα (2.1) είναι G.C.O - (p, q) πίνακας. Τότε για τη φασματική ακτίνα $\varrho(\mathcal{L}_\omega)$ της SOR μεθόδου ισχύει

$$\varrho(\mathcal{L}_\omega) < 1/\eta \ ,$$

αν και μόνον αν

$$\sigma(B) \subseteq \bigcap_{k=0}^{p-1} \Omega_k^c ,$$

όπου σ(B) το φάσμα του B και $\Omega_k = z(S_k)$. Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν τουλάχιστον μια ιδιοτιμή του B ανήκει στο σύνορο αυτής της περιοχής.

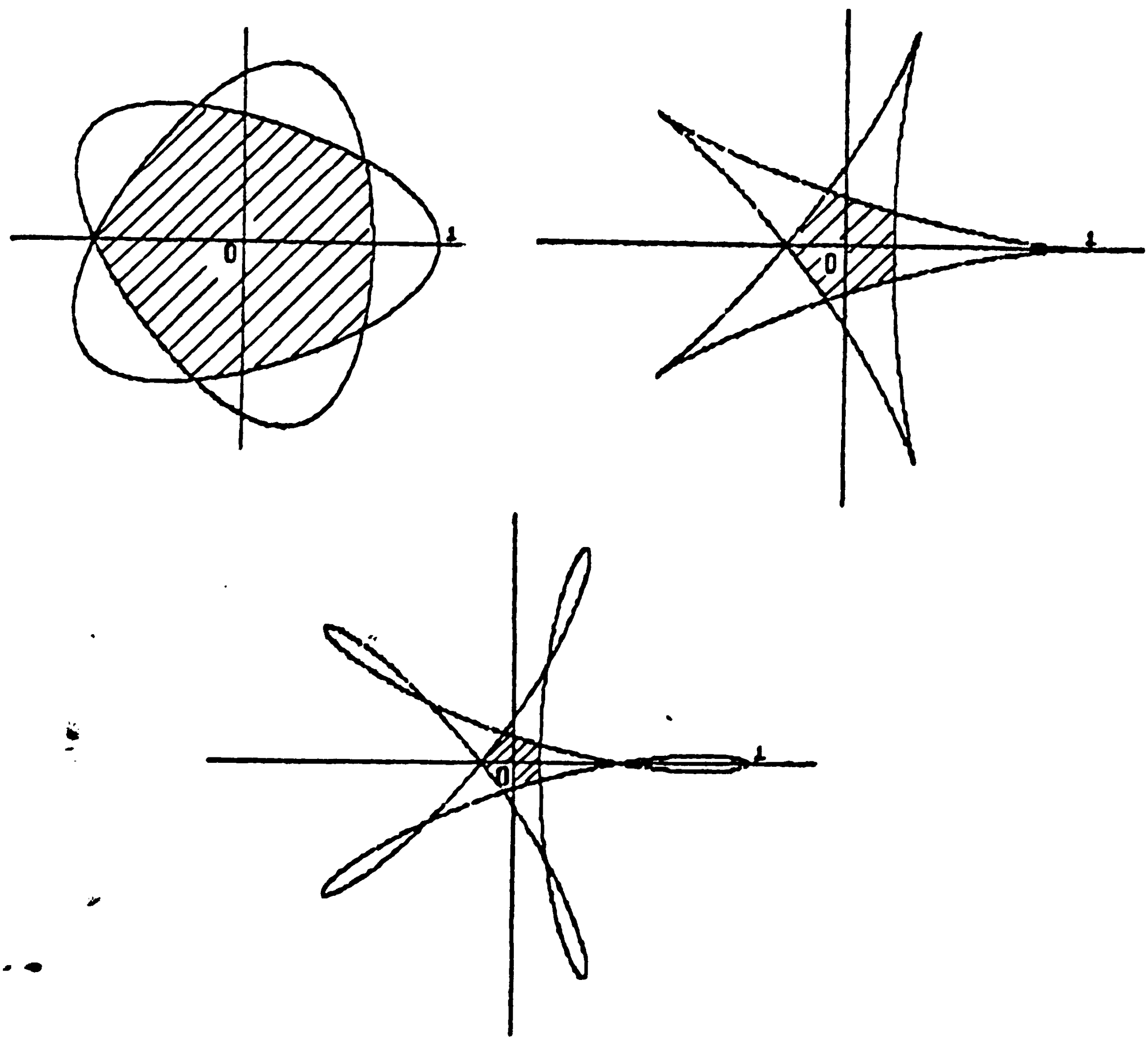
Απόδειξη

Έστω $\sigma(B) \subseteq \bigcap_{k=0}^{p-1} \Omega_k^c$. Τότε αν $\mu \in \sigma(B)$ μια τυχαία ιδιοτιμή του B, με τον αντίστροφο μετασχηματισμό της (4.6), αυτή θα αντιστοιχίζεται στο εξωτερικό του δίσκου $|\zeta| \leq \eta^{q/p}$. Όμως τότε όλα τα σημεία του εξωτερικού αυτού χωρίου με τους αντιστρόφους των (4.5) και (4.1) διαδοχικά αντιστοιχίζονται στο εσωτερικό του κύκλου $|\lambda| \leq 1/\eta$ και το αντίστροφο απεδείχθη. Αν $|\lambda| \leq 1/\eta$ και $\sigma(B) \not\subseteq \bigcap_{k=0}^{p-1} \Omega_k^c$, τότε υπάρχει $\mu \notin \bigcap_{k=0}^{p-1} \Omega_k^c$, δηλαδή υπάρχει $\mu \in \bigcup_{k=0}^{p-1} \Omega_k$. Όμως τότε θα υπάρχει $0 \leq i \leq p-1$ τέτοιο ώστε $\mu \in \Omega_i$. Συνεπώς, με τους αντίστροφους μετασχηματισμούς των (4.6), (4.5) και (4.1) αντίστοιχα, αυτή η περιοχή θα αντιστοιχίζεται στη λ με $|\lambda| > 1/\eta$ που είναι άτοπο και άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε.♦

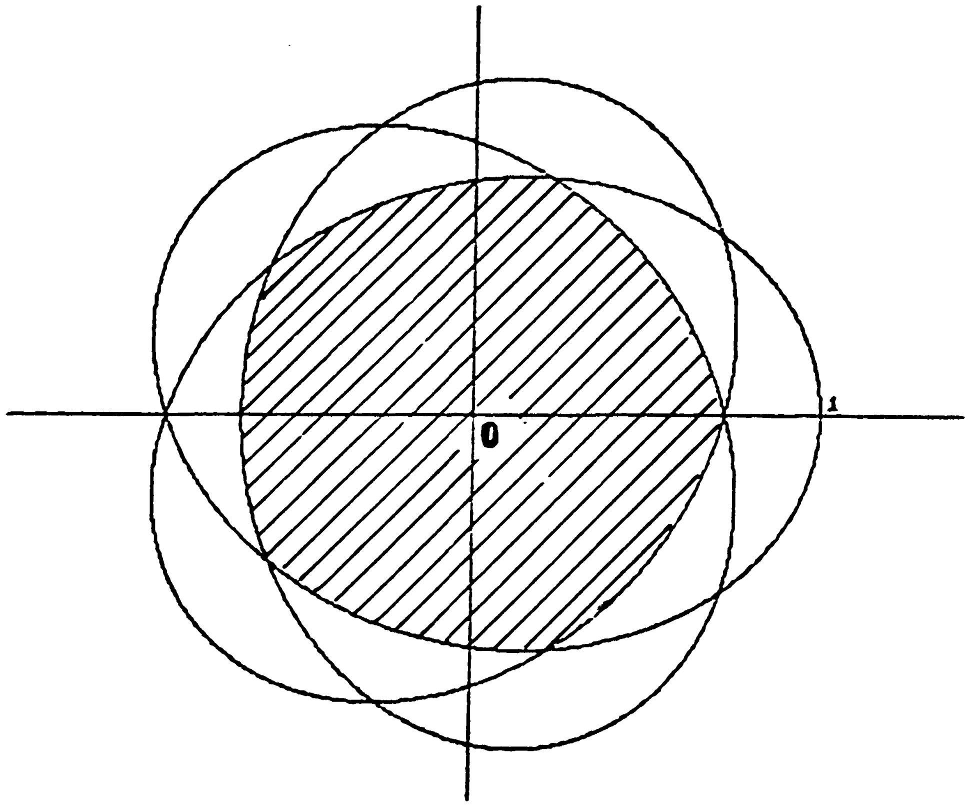
Εκείνο που θα πρέπει εδώ να παρατηρήσουμε είναι ότι η περιοχή σύγκλισης $\bigcap_{k=0}^{p-1} \Omega_k^c$ είναι το κενό σύνολο στις περιπτώσεις I_a, I_b, I_c, I_d, II_a και II_b του πίνακα 2. Έτσι θα πρέπει να μελετάμε μόνον τις άλλες περιπτώσεις ή ισοδύναμα την περίπτωση, όπου

$$\eta < \tilde{\eta} = \sqrt[p]{\frac{1}{\omega - 1}} \, . \tag{4.16}$$

Στα σχήματα 4.2 και 4.3 η γραμμοσκιασμένη περιοχή είναι η ακριβής περιοχή $\bigcap_{k=0}^{p-1} \Omega_k^c$, στην οποία πρέπει να ανήκει το σ(B), ώστε η SOR μέθοδος να συγκλίνει για τις περιπτώσεις (p, q) = (5, 2) και (p, q) = (5, 3) αντίστοιχα.



Σχ. 4.2



Σχ. 4.3

Έστω τώρα ότι $\omega \in (0, 1)$. Από το μετασχηματισμό (4.6) έχουμε

$$z := \frac{1-(1-\omega)\zeta^{p/q}}{\omega\,\zeta} = \frac{1+(1-\omega)\zeta^{p/q}e^{i\pi}}{\omega\,\zeta} = \frac{1+(1-\omega)\eta^{p/q}e^{i\left(\frac{q}{p}\theta+\pi\right)}}{\omega\eta e^{i\theta}} =$$

$$= \frac{1+(1-\omega)\eta^{p/q}\, e^{i\frac{q}{p}\left(\theta+\frac{q\pi}{p}\right)}}{\omega\eta e^{i\left(\theta+\frac{q\pi}{p}\right)}}\, e^{-\frac{q\pi}{p}i}\,. \qquad (4.17)$$

Θέτοντας $\theta_1 := \theta + \frac{q\pi}{p}$ έχουμε

$$z := \frac{1+(1-\omega)\eta^{p/q}e^{i\frac{q}{p}\theta_1}}{\omega\eta e^{i\theta_1}}\, e^{-\frac{q\pi}{p}i}\,. \qquad (4.18)$$

Όμως αυτό σημαίνει ότι η εικόνα του μετασχηματισμού έχει τη μορφή που είχε, όταν το $\omega \in (1, 2)$, αφού στραφεί κατά γωνία $-\frac{q\pi}{p}$. Έτσι ισχύουν συμπεράσματα ανάλογα με αυτά της προηγούμενης περίπτωσης.

4.3 Περιοχές σύγκλισης στο $(\rho(B),\omega)$-επίπεδο

Υποθέτουμε ότι $\sigma(B^p)$ είναι μη-θετικό ή μη-αρνητικό. Γι' αυτές τις περιπτώσεις θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια την περιοχή σύγκλισης της SOR μεθόδου στο $(\rho(B),\omega)$-επίπεδο. Για το σκοπό αυτό δίνουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4.5

Στροφή κατά $\frac{2k\pi}{p}$, $k=0(1)p-1$ στο μιγαδικό επίπεδο της περιοχής σύγκλισης, της SOR μεθόδου του Θεωρήματος 4.4, την αφήνει αμετάβλητη.

Απόδειξη

Έστω $z(\theta)$ ένα σημείο του μετασχηματισμού (4.6). Στροφή αυτού κατά $\frac{2kq\pi}{p}$, $k=0(1)p-1$ μας δίνει το σημείο

$$z(\theta)e^{\frac{2\kappa q\pi}{p}i} = \frac{1-(1-\omega)\,\eta^{\frac{p}{q}}e^{\frac{p}{q}\theta i}}{\omega\,\eta\, e^{i\theta}}\, e^{\frac{2kq\pi}{p}i} = \frac{1-(1-\omega)\,\eta^{\frac{p}{q}}e^{\frac{p}{q}\left(\theta-\frac{2kq\pi}{p}\right)i}}{\omega\,\eta\, e^{i\left(\theta-\frac{2kq}{p}\right)}} \qquad (4.19)$$

δηλαδή πάλι σημείο του ίδιου μετασχηματισμού. Αφού μ.κ.δ.(p,q)=1, τα σημεία που δεν αλλοιώνονται μ' αυτές τις στροφές ειναι p διακεκριμένα μεταξύ τους, πάνω σ' έναν κύκλο και χωρίζουν αυτόν σε p ίσα διαδοχικά τόξα. Έτσι στροφές κατα $\frac{2k\pi}{p}$, k=0(1)p-1 αφήνουν την περιοχή αμετάβλητη. ♦

Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι οι άξονες $\{\pm \varrho e^{i\frac{k\pi}{p}}, \varrho\in[0,\infty)\}$, k=0(1)p-1 είναι άξονες συμμετρίας. Συνεπώς τα σημεία στα οποία το μέτρο r του σημείου z(ζ) γίνεται ελάχιστο (r_{min}) ή μέγιστο (r_{max}) θα βρίσκονται πάνω σ' αυτούς. Από τις παραμετρικές εξισώσεις (4.10) παίρνουμε ότι

$$r=|z(\zeta)|=\frac{1}{\omega\,\eta^{p/q}}\left[1+(1-\omega)^2\eta^2-2(1-\omega)\,\eta\cos\frac{p}{q}\theta\,\right]^{1/2}. \qquad (4.20)$$

Παραγωγίζοντας την (4.20) ως προς θ προκύπτει

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{p(1-\omega)\eta\sin\frac{p}{q}\theta}{q\,\omega\,\eta^{p/q}\left[1+(1-\omega)^2\eta^2-2(1-\omega)\,\eta\cos\frac{p}{q}\theta\right]^{1/2}}. \qquad (4.21)$$

Προφανώς το r(θ) είναι φθίνουσα συνάρτηση για $\theta\in[0,\frac{q\pi}{p}]$ και αύξουσα για $\theta\in[\frac{q\pi}{p},\frac{2q\pi}{p})$. Το r παίρνει την ελάχιστη τιμή του για $\theta=\frac{q\pi}{p}$ και είναι

$$r_{min}=\frac{1}{\omega\,\eta^{p/q}}\left[1+(1-\omega)\eta\right]. \qquad (4.22)$$

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι το r_{min} αντιστοιχεί σε τόξα $\frac{(2k+1)q}{p}\pi$, k=0(1)p-1. Από τη συμμετρία της καμπύλης στα τόξα $\frac{(2k+1)q+1}{p}\pi$, k=0(1)p-1, αντιστοιχούν τα r_{max} . Τα τόξα αυτά ανήκουν στα δυο σύνολα $A_0 = \{\frac{2k}{p}\pi$, k=0(1)p-1$\}$ και $A_1=\{\frac{(2k+1)}{p}\pi$, k=0(1)p-1$\}$ και μάλιστα όταν το r_{min} βρίσκεται σ' ένα απ' αυτά το r_{max} βρίσκεται στο άλλο.

Έστω ω > 1. Για να βρούμε την τιμή του r_{max} μελετάμε τα σημεία τομής της καμπύλης μας με τον οριζόντιο άξονα. Η ελάχιστη τιμή r_{min} βρίσκεται στο θετικό οριζόντιο ημιάξονα αν η διαφορά $0 - \frac{q\pi}{p}$ είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{2\pi}{p}$, ή ισοδύναμα αν ο q είναι άρτιος αριθμός. Διαφορετικά στο θετικό ημιάξονα θα αντιστοιχεί η r_{max}. Ομοίως η r_{min} βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα αν $\pi - \frac{q\pi}{p} = \frac{(p-q)\pi}{p}$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{2\pi}{p}$ ή αν το p-q είναι άρτιος αριθμός. Διαφορετικά στον αρνητικό ημιάξονα θα βρίσκεται το r_{max} . Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν για ω<1. Έτσι διακρίνουμε τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

i) Για p άρτιο και q περιττό και στους δυο πραγματικούς ημιάξονες αντιστοιχεί η r_{max} για ω > 1 και η r_{min} για ω < 1.

ii) Για p περιττό και q άρτιο, το r_{min} αντιστοιχεί στο θετικό ημιάξονα και το r_{max} στον αρνητικό για όλα τα ω.

iii) Για p και q περιττά στο θετικό πραγματικό ημιάξονα αντιστοιχεί το r_{max} και στον αρνητικό το r_{min} για ω > 1 και αντίστροφα για ω < 1.

Για τον υπολογισμό της τιμής r_{max} και εφόσον αυτή αντιστοιχεί στον πραγματικό άξονα εργαζόμαστε ως εξής: Από τις παραμετρικές εξισώσεις (4.10) βρίσκουμε τις ρίζες της

$$\sin\theta + (1-\omega)\,\eta \sin\frac{p-q}{p}\theta = 0 ,\ \theta \in [\,0, 2\pi\,) \tag{4.23}$$

ή ισοδύναμα της

$$U_{q-1}(t) + (1-\omega)\,\eta\, U_{p-q-1}(t) = 0 \tag{4.24}$$

με $t = \cos\frac{\theta}{p}$, και $U_s(t)$ πολυώνυμο Chebyshev δεύτερου είδους βαθμού s [33]. Για κάθε t_i υπολογίζουμε και το αντίστοιχο

$$x_i = \frac{1}{\omega\,\eta^{p/q}}\,[\,T_q(t_i) - (1-\omega)\,\eta\, T_{p-q}(t_i)\,]\ . \tag{4.25}$$

Η r_{max} είναι η ελάχιστη θετική τιμή των x_i αν η r_{max} αντιστοιχεί στο θετικό ημιάξονα ή το μέτρο της μέγιστης αρνητικής αν αυτή αντιστοιχεί στον αρνητικό ημιάξονα. Στην περίπτωση πού η τιμή r_{max} δεν αντιστοιχεί στον πραγματικό ημιάξονα, στρέφουμε το σχήμα κατά γωνία $\frac{q\pi}{p}$ και εργαζόμαστε όπως και προηγούμενα. Αυτή η τιμή μπορεί να δοθεί αριθμητικά στη γενική περίπτωση.

Θεώρημα 4.6

Έστω ότι το $\sigma(B^p)$ είναι μη-αρνητικό και ο πίνακας Jacobi B ανήκει στην κατηγορία των G.C.O.- (p, q) πινάκων. Τοτε η περιοχή σύγκλισης της SOR μεθόδου στο $(\varrho(B), \omega)$-επίπεδο είναι

$$\Omega_1 := \{(\beta,\omega):\ \beta\in[0,1),\ \ 0<\omega<\omega_1(\beta)=\frac{2}{1+\beta}\ \} \tag{4.26}$$

για q άρτιο και

$$\Omega_2 := \{(\beta,\omega):\ \beta\in[0,1),\ \ 0<\omega<\omega_2(\beta)\ \} \tag{4.27}$$

για q περιττό, με ω_2 (β) την καμπύλη $\beta = r_{max}$. Η καμπύλη αυτή είναι το άνω φράγμα του Ω_2 και μπορεί να δοθεί από τις (4.24) και (4.25) αριθμητικά.

Απόδειξη

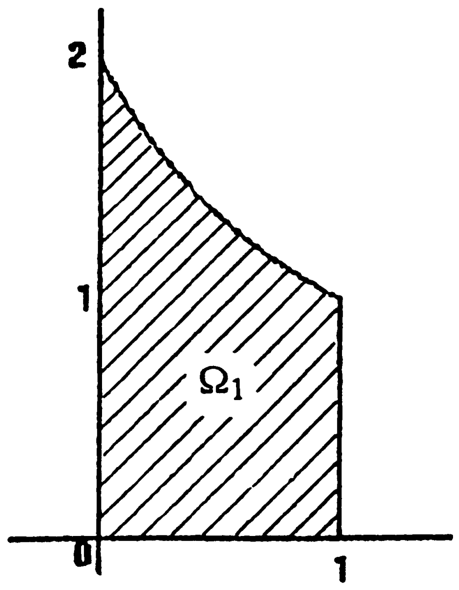
Για q άρτιο έχουμε p περιττό, το οποίο αντιστοιχεί στην περίπτωση (ii). Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε $\varrho(B) = r_{min}$. Για $\omega > 1$ η τιμή του r_{min} αντιστοιχεί στο τόξο $\theta = p\,\frac{q\pi}{p}\,\pi = q\pi$. Από την (4.10) για n=1 παίρνουμε

$$\beta = \frac{2-\omega}{\omega} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{2}{1+\beta} =: \omega_1(\beta)\ . \tag{4.28}$$

Για $\omega < 1$, έχουμε $r_{min} = 1$ (με $\theta = 0$) οπότε

$$\beta = 1\ . \tag{4.29}$$

Από τις δυο προηγούμενες σχέσεις συνεπάγεται ότι η περιοχή σύγκλισης της SOR μεθόδου είναι η Ω_1 της (4.26), η οποία φαίνεται στο σχήμα 4.4. Για q περιττό ισχύουν οι περιπτώσεις (i) και (iii). Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε $\varrho(B) = r_{max}$ για $\omega > 1$. Η τιμή του r_{max} υπολογίζεται όπως προαναφέρθηκε. Για κάθε $\omega\in(0,\ 2)$ παίρνουμε από τις (4.24) και (4.25) ένα μοναδικό β. Όλα τα ζεύγη (β, ω) μας δίνουν το σύνορο $\omega_2(\beta)$. Το σχήμα του Ω_2 μοιάζει μ' εκείνο του Ω_1.



Σχ. 4.4

Θεώρημα 4.7

Έστω ότι το $\sigma(B^p)$ είναι μη-θετικό και ο πίνακας B όπως στο Θεώρημα 4.6. Τότε η περιοχή σύγκλισης της SOR μεθόδου στο $(\varrho(B), \omega)$-επίπεδο είναι:

$$\Omega_3 = \{(\beta,\omega): \ \omega \in (0,2) \ \text{και} \ 0 \leq \beta < \beta_1(\omega)\} \tag{4.30}$$

για q άρτιο και

$$\Omega_4 = \{(\beta,\omega): \ \omega \in (0,2) \ \text{και} \ 0 \leq \beta \leq \beta_2(\omega)\} \tag{4.31}$$

για q περιττό, με $\beta_1(\omega)$ την καμπύλη $\beta = r_{max}$, την οποία μπορούμε να πάρουμε αριθμητικά όπως αναφέραμε στο προηγούμενο θεώρημα. Η καμπύλη $\beta_2(\omega)$ είναι η $\beta = \frac{2-\omega}{\omega}$ για $\omega \in [1,2)$ και $\beta = r_{max}$ για $\omega \in (0,1]$ (παίρνεται όπως και η $\beta_1(\omega)$).

Επιπλέον ισχύει

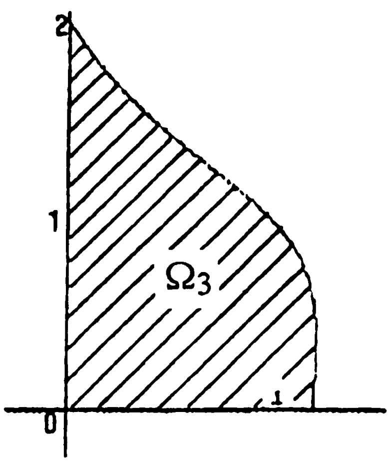
$$\lim_{\omega\to 0^+} \beta_1(\omega) = \lim_{\omega\to 0^+} \beta_2(\omega) = 1/\cos(\pi/p). \qquad (4.32)$$

Απόδειξη

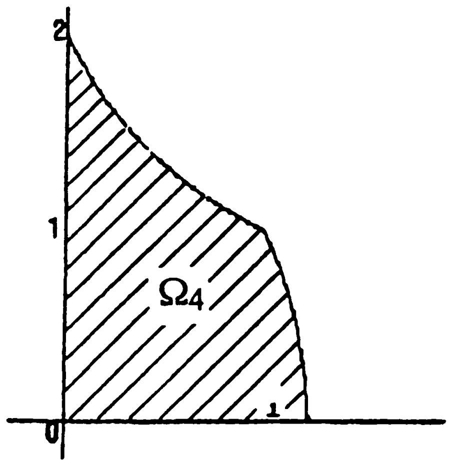
Με παρόμοιο τρόπο όπως και στο προηγούμενο Θεώρημα 4.6, για p άρτιο και για τις δυο περιπτώσεις $\omega>1$ και $\omega<1$ έχουμε $\beta=r_{max}$ και η υπόψη περιοχή είναι η Ω_3. Για p περιττό (περίπτωση (i) και (iii)), αφού πρέπει $\sigma(B^p)$ να είναι μη-θετικό θα πρέπει το β να ισούται με το μικρότερο σε απόλυτη τιμή μέτρο των σημείων τομής της καμπύλης με τον ημιάξονα $\{\rho e^{i\frac{\pi}{p}},\ \rho\ [0,\infty)\}$. Αυτό όμως αντιστοιχεί στο r_{max} όταν το r_{min} ανήκει στον πραγαμτικό θετικό ημιάξονα και αντίστροφα. Έτσι από τις περιπτώσεις (i) και (iii) έχουμε ότι αυτό το σημείο αντιστοιχεί στο r_{min} για $\omega>1$ και στο r_{max} για $\omega<1$. Συνεπώς η καμπύλη $\beta_2(\omega)$ παίρνεται από τη $\beta = \frac{2-\omega}{\omega}$ για $\omega\in[1, 2)$ και από τη $\beta=r_{max}$ για $\omega\in(0, 1]$. Στη δεύτερη περίπτωση αυτή υπολογίζεται αριθμητικά.

Είναι φανερό ότι $\beta_1(2) = \beta_2(2) = 0$ και $\beta_1(1) = \beta_2(1) = 1$. Τα σημεία τομής των καμπυλών $\beta_1(\omega)$ και $\beta_2(\omega)$ με τον άξονα των β (οριζόντιο άξονα) μπορούν να προσδιοριστούν ως εξής. Για $\omega\to 0$, ακολουθώντας την ίδια πορεία που ακολούθησε ο Noutsos στην [29], μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η περιοχή σύγκλισης της SOR μεθόδου είναι ένα κανονικό αστεροειδές p-γωνο. Έτσι το β τείνει στο $1/\cos(\pi/p)$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. ♦

Οι περιοχές Ω_3 και Ω_4 φαίνονται για $(p, q) = (5, 2)$ και $(5, 3)$ στα σχήματα 4.5α και 4.5β αντίστοιχα.



Σχ. 4.5α



Σχ. 4.5β

Παρατήρηση:

Τα δύο τελευταία θεωρήματα συμφωνούν απόλυτα με τα συμπεράσματα για τις περιπτώσεις (p, q) = (p, p-1), που βρέθηκαν στο Κεφάλαιο 3 χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Schur-Cohn.

4.4 Ειδικές περιπτώσεις

Για τις ειδικές περιπτώσεις, όπου (p, q) = (3,2), (4,3) και (5,4), έχουν δοθεί περιοχές σύγκλισης στο (ρ(B), ω)-επίπεδο στο Κεφάλαιο 3, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Schur-Cohn. Επίσης για τις περιπτώσεις (p, q) = (3,1), (4,1) και (5,1) έχουν δοθεί επίσης οι περιοχές σύγκλισης από άλλους ερευνητές, όπως αυτό φαίνεται στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου. Εδώ θα μελετήσουμε τις περιπτώσεις (p, q) = (5,2) και (5,3).

i) (p, q) = (5,2).

Σ' αυτήν την περίπτωση η (4.24) γίνεται

$$U_1(t) + (1 - \omega)\eta U_2(t) = 0 \qquad (4.33)$$

ή ισοδύναμα

$$4(1 - \omega)\eta t^2 + 2t - (1 - \omega)\eta = 0 \ . \qquad (4.34)$$

Οι ρίζες αυτής είναι

$$t_{+,-} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(1 - \omega)^2\eta^2}}{4(1 - \omega)\eta} \ . \qquad (4.35)$$

Από τις (4.25) έχουμε

$$x_{+,-} = \frac{1}{\omega\, \eta^{5/2}} [(T_2(t_{+,-}) - (1 - \omega)\, \eta T_3(t_{+,-})] \qquad (4.36)$$

ή ισοδύναμα

$$x_{+,-} = \frac{1}{\omega\eta^{5/2}} [(2t_{+,-}^2 -1 - (1 - \omega)\, \eta(4t_{+,-}^3 - 3\, t_{+,-}] \ . \qquad (4.37)$$

Αντικαθιστώντας το $t_{+,-}$ από την (4.35) παίρνουμε μετά από λίγες πράξεις:

$$x_{+,-} = \frac{[\, 1 - (1 - \omega)^2\eta^2 \,]\, [1 \pm \sqrt{1 + 4(1 - \omega)^2\eta^2}\,]}{2\omega(1 - \omega)^2\eta^{12/5}} \ . \qquad (4.38)$$

Η μικρότερη σε απόλυτη τιμή από τις x_+ και x_- δίνει το r_{max} . Προφανώς $r_{max} = |x_+|$. Η τιμή του r_{min} δίνεται από την (4.22) και είναι

$$r_{min} = \frac{1+(1 - \omega)\eta}{\omega\eta^{5/2}} \qquad (4.39)$$

Είναι φανερό ότι όλη η θεωρία, που αναπτύχθηκε προηγουμένως, επαληθεύεται. Επιπλέον στην ειδική περίπτωση, που εξετάζουμε, έχουμε αναλυτική έκφραση για το r_{max}.

Εάν $\sigma(B^5)$ είναι μη-αρνητικό, αντικαθιστώντας το $\eta = 1$ παίρνουμε την περιοχή σύγκλισης Ω_1, όπως αυτή δίνεται από το Θεώρημα 4.6.

Εάν $\sigma(B^5)$ είναι μη-θετικό, μπορούμε να πάρουμε την περιοχή σύγκλισης Ω_3 από το Θεώρημα 4.7. Σ' αυτήν την περίπτωση $\beta_1(\omega)$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$\beta = \beta_1(\omega) := |\, r_{max} \,| = \frac{(2 - \omega)(\sqrt{1 + 4(1 - \omega)^2} - 1)}{2(1 - \omega)^2} \tag{4.40}$$

ή ισοδύναμα

$$\beta_1(\omega) = \frac{2(2 - \omega)}{1 + \sqrt{1 + 4(1 - \omega)^2}} \,. \tag{4.41}$$

Παραγωγίζοντας την (4.41) ως προς ω έχουμε

$$\frac{d\beta_1(\omega)}{dt} = \frac{-2\,[1 + \sqrt{1 + 4(1 - \omega)^2} - 4\,(1 - \omega)]}{[1 + \sqrt{1 + 4(1 - \omega)^2}]^2 \sqrt{1 + 4(1 - \omega)^2}} \,. \tag{4.42}$$

Από τη σχέση (4.42) προκύπτει ότι η $\beta_1(\omega)$ για $\omega \in (0, \frac{1}{3})$ είναι μια αυστηρά αύξουσα συνάρτηση του ω, ενώ για $\omega \in (\frac{1}{3}, 1) \cup (1, 2)$ μια φθίνουσα συνάρτηση αυτού, με

$$\max_{\omega} \beta_1(\omega) = \beta_1(\tfrac{1}{3}) = \frac{5}{4} \,.$$

Με ω να τείνει στο μηδέν έχουμε

$$\lim_{\omega\to 0} \beta_1(\omega) = \beta(0) = \sqrt{5} - 1 = \frac{1}{\cos\pi/5} \quad , \qquad (4.43)$$

το οποίο επαληθεύει τη θεωρία μας.

ii) $(p, q) = (5,3)$.

Η εξίσωση (4.24) γίνεται

$$U_2(t) + (1 - \omega)\eta U_1(t) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$4t^2 + 2(1 - \omega)\eta t - 1 = 0 \quad . \qquad (4.44)$$

Η (4.44) έχει ως ρίζες τις

$$t_{+,-} = \frac{-(1 - \omega)\eta \pm \sqrt{1 + 4(1 - \omega)^2\eta^2}}{4} \quad . \qquad (4.45)$$

Η σχέση (4.25) τώρα μετά από απλές πράξεις δίνει

$$x_{+,-} = \frac{[1 - (1 - \omega)^2\eta^2)]\,[(1 - \omega)\eta \mp \sqrt{4 + (1 - \omega)^2\eta^2}]}{2\omega\eta^{3/5}} \quad . \qquad (4.46)$$

Οι τιμές των r_{max} και r_{min} αντίστοιχα είναι

$$r_{max} = \begin{cases} |x_+| \ , & \text{αν } \omega \le 1 \\ |x_-| \ , & \text{αν } \omega \ge 1 \end{cases} \qquad (4.47)$$

$$r_{min} = \frac{1 + (1 - \omega)}{\omega\eta^{5/3}} \quad . \qquad (4.48)$$

Για τη μη-αρνητική περίπτωση, η περιοχή σύγκλισης είναι η Ω_2 του Θεωρήματος 4.6. Η καμπύλη $\omega_2(\beta)$ δίνεται πια με αναλυτικό τύπο και συγκεκριμένα τη συνάρτηση

$$\beta = \beta(\omega) := \frac{1}{2}(2 - \omega)(1 - \omega + \sqrt{4 + (1 - \omega)^2}) \ . \tag{4.49}$$

Για τη μη-θετική περίπτωση η περιοχή σύγκλισης είναι η Ω_4 του Θεωρήματος 4.7. Η καμπύλη $\beta_2(\omega)$ δίνεται κι αυτή αναλυτικά από τη συνάρτηση

$$\beta = \beta_2(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \omega)(\omega - 1 + \sqrt{4 + (1 - \omega)^2}) \ , & \text{αν } \omega \leq 1 \\ \frac{2 - \omega}{\omega} \ , & \text{αν } \omega \geq 1 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$\beta = \beta_2(\omega) := \begin{cases} \frac{2(2 - \omega)}{- \omega + 1 + \sqrt{4 + (1 - \omega)^2}} \ , & \text{αν } \omega \leq 1 \\ \frac{2 - \omega}{\omega} \ , & \text{αν } \omega \geq 1 \end{cases} \ . \tag{4.50}$$

Παραγωγίζοντας την (4.50) ως προς ω για $\omega \in (0,1)$ και $(1,2)$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτή είναι μια αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση του ω, ενώ για $\omega = 1$ δεν υπάρχει η παράγωγος.

Τέλος μπορούμε να βρούμε ότι

$$\lim_{\omega \to 0} \beta_2(\omega) = \beta(0) = \sqrt{5} - 1 = \frac{1}{\cos\pi/5} \ , \tag{4.51}$$

το οποίο πάλι επιβεβαιώνει τη θεωρία μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ (ω_{opt}) ΓΙΑ ΤΗΝ SOR ΜΕΘΟΔΟ

5.1 Εισαγωγή

Στη μελέτη των παραμετρικών επαναληπτικών μεθόδων για τη λύση των γραμμικών συστημάτων, αφού εξασφαλίσουμε τη σύγκλιση της μεθόδου ή αφού βρούμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις έχουμε σύγκλιση, εκείνο που κεντρίζει το ενδιαφέρον μας είναι η εύρεση της βέλτιστης τιμής των παραμέτρων. Με τον όρο "βέλτιστη τιμή" εννοούμε εκείνη την τιμή των παραμέτρων, για τις οποίες η μέθοδος συγκλίνει ασυμπτωτικά ταχύτερα. Μ' άλλα λόγια εκείνες τις τιμές για τις οποίες η ασυμπτωτική ταχύτητα σύγκλισης ($R(M)$), όπου M είναι ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου, γίνεται μέγιστη ή ισοδύναμα η φασματική ακτίνα $\rho(M)$ του επαναληπτικού πίνακα M γίνεται ελάχιστη.

Ειδικά για την SOR μέθοδο, όταν αυτή εφαρμόζεται σε G.C.O.-(p, q) πίνακες και το $\sigma(B^p)$ είναι μη-αρνητικό, ο Young [39] το 1950 στη διδακτορική του διατριβή προσδιόρισε τη βέλτιστη τιμή ω_{opt} της παραμέτρου ω για $(p, q) = (2, 1)$. Αργότερα ο Varga [35] το 1959 προσδιόρισε το ω_{opt} για $(p, q) = (p, 1)$ και $p \geq 3$ για την ίδια κατηγορία πινάκων. Τέλος οι Nichols και Fox [26] το 1969 απέδειξαν ότι $\omega_{opt} = 1$ για τους ίδιους πίνακες, όταν $p \geq 3$ και $q \leq p-2$. Για την περίπτωση όπου το $\sigma(B^p)$ είναι μη-θετικό, πρώτος κάνει λόγο ο Kredel [22] το 1962 και προσδιορίζει το ω_{opt} για p=2. Το 1984 ξεκινώντας με αφορμή την αριθμητική επίλυση μεγάλων γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν από τη θεωρία των ελάχιστων τετραγώνων οι Niethammer, de Pillis και Varga [28], λύνουν το πρόβλημα για (p, q) = (3,1). Τέλος το 1968 γι' αυτή την κατηγορία πινάκων βρίσκουν το ω_{opt} για (p,q) = (p,1) οι Galanis, Hadjidimos και Noutsos [7] και ανεξάρτητα οι Wild και Niethammer [38].

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να δώσουμε απάντηση στο πρόβλημα της εύρεσης του ω_{opt} στην περίπτωση όπου το $\sigma(B^p)$ είναι μη-θετικό, $p \geq 3$ και $q=p-1$, που αποτελεί κατά κάποιο τρόπο, συμπλήρωμα της κλασικής περίπτωσης $q=1$. Στην παράγραφο 5.2 θα αναλυθεί η γενική περίπτωση, όπου θα αποδειχθεί ότι η εντύπωση που επικρατούσε, ότι δηλαδή η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου ω αντιστοιχεί σε μια διπλή ιδιοτιμή $\lambda(\omega_{opt})$ πιθανόν από τα μέχρι τώρα αποτελέσματα, είναι λανθασμένη. Στην παράγραφο 5.3 θα μελετηθούν οι ειδικές περιπτώσεις (p, q) = (3, 2) και (p, q)=(4, 3) και θα δοθεί η ακριβής έκφραση για το ω_{opt} στις περιπτώσεις αυτές.

5.2 Ανάλυση της γενικής περίπτωσης

Αρχίζουμε την ανάλυσή μας από την κλασική σχέση που συνδέει τις ιδιοτιμές του πίνακα Jacobi και του πίνακα της SOR

$$(\lambda+\omega-1)^p = \mu^p \omega^p \lambda^{p-q} .$$

Επειδή $\mu^p \leq 0$, όπου μ μια ιδιοτιμή του πίνακα Jacobi B, θέτουμε $\mu^p = -\nu^p$, $\nu \in (0, \varrho(B))$, και αφού για την περίπτωσή μας $q= p-1$, παίρνουμε

$$(\lambda+\omega-1)^p = - \nu^p \omega^p \lambda . \tag{5.1}$$

Εξάγουμε p τάξης ρίζες και στα δύο μέλη της (5.1) έχουμε λ+ω-1 = ν ω $\lambda^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{2k+1}{p}\pi}$, όπου $\lambda^{\frac{1}{p}}$ είναι p τάξης ρίζα του λ και k ακέραιος. Θέτοντας

$$z := \lambda^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{2k+1}{p}\pi} \tag{5.2}$$

έχουμε την ισοδύναμη εξίσωση

$$g(z, \omega) := z^p + \omega\nu z + 1 - \omega = 0 \ . \tag{5.3}$$

Ας είναι $z_j := z_j(\omega)$, j=1(1)p, οι ρίζες της εξίσωσης (5.3). Αφού θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη φασματική ακτίνα του επαναληπτικού πίνακα της SOR μεθόδου $\rho(\mathcal{L}_\omega)$, ως συνάρτηση του ω∈ (0, 2), και $\lambda = -z^p$, θα προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη max $|z_j|$, ως συνάρτηση του ω με σταθερό αρχικά ν∈(0, ρ(B)]. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη μέγιστη τιμή αυτής για όλα τα ν∈(0, ρ(B)]. Η μελέτη αυτή δίνεται στη συνέχεια διαμέσου μιας σειράς λημμάτων και θεωρημάτων.

Λήμμα 5.1

Για όλα τα p≥3 και τα ω∈(1, 2) η εξίσωση (5.3), έχει τουλάχιστον μια ρίζα με $\mathrm{Re}z_j < 0$ και $\mathrm{Im}z_j \geq 0$.

Απόδειξη

Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) p άρτιο. Από τον κανόνα των προσήμων του Descartes προκύπτει ότι η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια ρίζα θετική. Αφού το p είναι άρτιο (και οι συντελεστές πραγματικοί), η (5.3) θα έχει υποχρεωτικά άλλη μια ρίζα πραγματική, η οποία όμως θα είναι αρνητική. Αυτό αποδεικνύει και το λήμμα.

ii) p περιττό. Πάλι από τον ίδιο κανόνα προκύπτει ότι η (5.3) έχει μια θετική ρίζα. Αν με z_p παραστήσουμε αυτήν, τότε από τους τύπους του Vieta προκύπτει $\sum_{j=1}^{p} z_j = 0$ ή ισοδύναμα $\sum_{j=1}^{p-1} z_j = - z_p < 0$. Το τελευταίο όμως συνεπάγεται

$$\sum_{j=1}^{p-1} \operatorname{Re} z_j = - z_j < 0 , \tag{5.4}$$

το οποίο αποδεικνύει και το λήμμα. ♦

Είναι φανερό ότι για ω=1 και για p≥4 (την περίπτωση p=3 θα εξετάσουμε στην επόμενη παράγραφο), η εξίσωση (5.3) έχει μια τουλάχιστον ρίζα με $\operatorname{Re} z_j < 0$ και $\operatorname{Im} z_j \geq 0$, για την οποία ισχύει $|z_j(1)| = v^{1/(p-1)}$. Γι' αυτή τη ρίζα θα έχουμε $\operatorname{Re} z_j < 0$ και $\operatorname{Im} z_j = 0$ ή $\operatorname{Re} z_j < 0$ και $\operatorname{Im} z_j > 0$. Στην πρώτη περίπτωση αναφερόμαστε στην αρνητική ρίζα της περίπτωσης p άρτιο (p≥4) και στη δεύτερη περίπτωση σε μια από τις ρίζες του δεύτερου τεταρτημόριου του μιγαδικού επιπέδου. Η μελέτη μιας τέτοιας ρίζας γίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.2

Για όλα τα $\omega \in (1, 2)$ η εξίσωση (5.3) έχει πάντα τουλάχιστον μια ρίζα με μέτρο αυστηρά μεγαλύτερο από το $\max_j |z_j(1)| = v^{1/(p-1)}$.

Απόδειξη

Αν θέσουμε $y = z^p$, τότε από την (5.3) παίρνουμε

$$y + \omega v z + 1 - \omega = 0 \ . \tag{5.5}$$

Απ' αυτή γίνεται φανερό ότι, αν Rez ≤ 0, τότε Rey>0, ενώ, αν Imz $\gtreqless 0$, τότε και Imy $\lesseqgtr 0$.

Αφού $y = z^p = -\lambda$, η (5.1) γίνεται

$$(-y+\omega-1)^p = \omega^p \nu^p y \quad . \tag{5.6}$$

Διαφορίζοντας αυτήν ως προς ω παίρνουμε $p \cdot (-y+\omega-1)^{p-1} \cdot (-\frac{dy}{d\omega}+1)$ $= p\nu^p \omega^{p-1} y + \nu^p \omega^p \frac{dy}{d\omega}$. Αν απαλείψουμε το ν από την (5.6) και λύσουμε ως προς $\frac{dy}{d\omega}$, έχουμε από πράξεις ότι

$$\frac{dy}{d\omega} = \frac{py(y+1)}{\omega[(p-1)y+\omega-1]} \quad . \tag{5.7}$$

Από την (5.7), χωρίζοντας σε πραγματικό και φανταστικό μέρος, παίρνουμε

$$\mathrm{Re}\frac{dy}{d\omega} = p\{R(R+1)\cdot[(p-1)R+\omega-1] + [(p-1)(R+1)-(\omega-1)]I^2\}/D \tag{5.8}$$

και

$$\mathrm{Im}\frac{dy}{d\omega} = p[(p-1)R^2 + (2R+1)(\omega-1) + (p-1)I^2]/D \quad , \tag{5.9}$$

όπου έχουμε θέσει

$$R := \mathrm{Re}y, \quad I := \mathrm{Im}y \quad \text{και} \quad D := \omega\{[(p-1)R+(\omega-1)]^2 + (p-1)^2 I^2\} \; . \tag{5.10}$$

Από τις (5.8) και (5.10) φαίνεται αμέσως ότι

$$R\geq 0 \text{ συνεπάγεται } \mathrm{Re}\frac{dy}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\mathrm{Rey} > 0 \quad , \tag{5.11}$$

ενώ από τις (5.9) και (5.10)

$$R \geq 0 \;\; \text{και} \;\; I \gtreqless 0 \quad \text{συνεπάγεται} \quad \mathrm{Im}\,\frac{dy}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\,\mathrm{Im}y \gtreqless 0 \;. \qquad (5.12)$$

Από το αμέσως προηγούμενο λήμμα η εξίσωση (5.3) έχει μια ρίζα με $\mathrm{Re}z_j < 0$ και $\mathrm{Im}z_j \geq 0$. Τότε όμως για την $y_j = z_j^p$ ισχύει $\mathrm{Re}y_j > 0$ και $\mathrm{Im}y_j \leq 0$, το οποίο με τη σειρά του, από τις σχέσεις (5.11) και (5.12), μας δίνει ότι η $\mathrm{Re}y_j$ είναι αύξουσα θετική συνάρτηση του ω και η $\mathrm{Im}y_j$ είναι φθίνουσα αρνητική συνάρτηση του ω. Δηλαδή η συνάρτηση του μέτρου $|y_j|$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς ω. Όμως τότε γνησίως αύξουσα θα είναι και η συνάρτηση του μέτρου $|z_j|$, το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα. ♦

Π ό ρ ι σ μ α 5.3

Η ελάχιστη των φασματικών ακτίνων $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ ($\rho(\mathcal{L}_{\omega_{opt}})$) θα παίρνεται για κάποιο $\omega \in (0, 1]$. ♦

Το συμπέρασμα του προηγούμενου πορίσματος ήταν αναμενόμενο, αφού έτσι συμβαίνει και σε παρόμοιες περιπτώσεις π.χ. για $\sigma(B^p)$ μη-θετικό, με $(p, q) = (p, 1)$ έχει βρεθεί ότι $\omega_{opt} \in \left(\frac{p-2}{p-1}, 1\right)$, ενώ για $\sigma(B^p)$ μη-αρνητικό και $q \leq p-2$ βρέθηκε ότι $\omega_{opt} = 1$. Εκείνο που δεν ήταν αναμενόμενο είναι το συμπέρασμα του επόμενου Θεωρήματος 5.7. Πρώτα όμως θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τρία λήμματα.

Λ ή μ μ α 5.4

Η συνάρτηση

$$f(\omega) = \omega^p \nu^p - p^p (p-1)^{1-p} (1-\omega)^{p-1} \qquad (5.13)$$

έχει μια μοναδική ρίζα $\omega_c \in (0, 1)$ και μάλιστα ισχύει

$$f(\omega) < 0 \ , \ \forall\, \omega \in (0, \omega_c) \quad \text{και} \quad f(\omega) > 0 \ , \ \forall\, \omega \in (\omega_c, 1) \ .$$

Απόδειξη

Παραγωγίζοντας την (5-13) ως προς ω έχουμε

$$\frac{df}{d\omega} = p\omega^{p-1} \nu^p + p^p (p-1)^{2-p} (1-\omega)^{p-2} > 0 \ .$$

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Αφού $f(0) = -p^p(p-1)^{1-p} < 0$ και $f(1) = \nu^p > 0$, τα συμπεράσματα του λήμματος είναι άμεσα.

Λήμμα 5.5

Για όλα τα άρτια p ($p \geq 4$) η πραγματική ρίζα $z = z(\omega_c)$ της (5.3), που αντιστοιχεί στο ω_c, είναι μια διπλή ρίζα και ισχύει

$$z(\omega_c) = -\left(\frac{1-\omega_c}{p-1}\right)^{1/p} \ . \qquad (5.14)$$

Απόδειξη

Αντικαθιστώντας την (5.14) στην (5.3), για p άρτιο παίρνουμε

$$K := \frac{1-\omega_c}{p-1} - \omega_c \nu \left(\frac{1-\omega_c}{p-1}\right)^{1/p} + 1 - \omega_c \ . \qquad (5.15)$$

Αφού το ω_c είναι ρίζα της (5.13), έχουμε

$$\omega_c \nu = p(p-1)^{\frac{1-p}{p}} (1-\omega_c)^{\frac{p-1}{p}} \ . \qquad (5.16)$$

Αντικαθιστώντας το $\omega_c \nu$ από την (5.16) στην (5.15) προκύπτει, μετά από λίγες πράξεις, ότι Κ=0. Παραγωγίζοντας την (5.3) ως προς z με $\omega=\omega_c$ έχουμε

$$\frac{dg}{dz} = pz^{p-1} + \omega_c \nu \ . \tag{5.17}$$

Αντικαθιστώντας το z με $z(\omega_c)$ από την (5.14) και λαμβάνοντας υπόψη την (5.16) παίρνουμε ότι $\left.\frac{dg}{dz}\right|_{z = z(\omega_c)} = 0$, πράγμα που αποδεικνύει το λήμμα. ♦

Λήμμα 5.6

Για όλα τα άρτια $p (p \geq 4)$, η εξίσωση (5.3) για $\omega \in (0, \omega_c)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, ενώ για $\omega \in (\omega_c, 1)$ αυτή έχει δύο ακριβώς πραγματικές αρνητικές και μάλιστα τέτοιες ώστε

$$z_{p-1} < -\left(\frac{1-\omega}{p-1}\right)^{(1/p)} \quad \text{και} \quad z_p > -\left(\frac{1-\omega}{p-1}\right)^{1/p} \ . \tag{5.18}$$

Απόδειξη

Η παράγωγος της $g(z, \omega)$ ως προς z για ένα σταθερό ω έχει ρίζα την $z_o = -\left(\frac{\omega\nu}{p}\right)^{1/(p-1)}$. Στο σημείο αυτό η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο. Το ελάχιστο αυτό είναι $g(z_o, \omega) = \left(\frac{\omega\nu}{p}\right)^{p/(p-1)} - \omega\nu\left(\frac{\omega\nu}{p}\right)^{1/(p-1)} +$ $1 - \omega$. Μετά από αλγεβρικές πράξεις έχουμε $g(z_o, \omega) = (\omega\nu)^{p/(p-1)} p^{-p/(p-1)}$ $(1-p) + 1 - \omega$. Όμως από το Λήμμα 5.4 παίρνουμε ότι $(\omega\nu)^{p/(p-1)} p^{-p/(p-1)}$ $(p-1) < 1 - \omega$ για $\omega \in (0, \omega_c)$. Έτσι $g(z_o, \omega) > 0$ για $\omega \in (0, \omega_c)$, που σημαίνει ότι η $g(z, \omega)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες για $\omega \in (0, \omega_c)$.

Αντίθετα για $\omega \in (\omega_c, 1)$ έχουμε $g(0, \omega) = 1 - \omega > 0$ και $g(-\nu^{1/(p-1)}, \omega) = (1-\omega)(\nu^{p/(p-1)}+1) > 0$, οπότε

$$g\left(-\left(\frac{1-\omega}{p-1}\right)^{1/p}, \omega\right) = (1-\omega)\frac{p}{p-1} - \omega\nu\left(\frac{1-\omega}{p-1}\right)^{1/p} . \qquad (5.19)$$

Από το Λήμμα 5.4 έπεται ότι $g\left(-\left(\frac{1-\omega}{p-1}\right)^{1/p}, \omega\right) < 0$, το οποίο αποδεικνύει το παρόν λήμμα. ♦

Θεώρημα 5.7

Έστω $\omega_{opt} \neq 1$. Τότε $\max_j |z_j(\omega_{opt})|$, όπου z_j είναι ρίζα της (5.3), αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος μιγαδικών ριζών της (5.3) και όχι σε μια απλή (p περιττό) ή διπλή (p άρτιο) πραγματική ρίζα.

Απόδειξη

Από το πόρισμα 5.3 το $\omega=\omega_{opt} \in (0, 1]$. Έτσι λοιπόν διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

i) p περιττό.

Από τον κανόνα του προσήμου του Descartes παρατηρούμε ότι η $g(z, \omega)$ έχει ακριβώς μια πραγματική αρνητική ρίζα. Έστω z_p αυτή η πραγματική αρνητική ρίζα και $(z_1, z_2), (z_3, z_4), \ldots, (z_{p-2}, z_{p-1})$ οι συζυγείς μιγαδικές ρίζες αυτής. Στο σημείο ω=1 συμβαίνει $|z_j| \geq |z_p| = 0$, $j=1(1)p-1$. Λόγω της ως προς ω συνέχειας των ριζών η προηγούμενη ανισότητα θα ισχύει και για $\omega \in (1-\varepsilon, 1)$ για $\varepsilon>0$ και οσοδήποτε μικρά $(\varepsilon \to 0^+)$. Αν υποθέσουμε ότι για κάποιο $\omega\in(0, 1-\varepsilon)$ το θεώρημα δεν ισχύει, τότε θα πρέπει για εκείνο το ω να έχουμε $|z| \geq |z_j|$, $j=1(1)p-1$. Όμως, αφού το p είναι περιττό, θα ισχύει $\prod_{j=1}^{p} z_j = \omega - 1$, το οποίο από την προηγούμενη ανισότητα μας δίνει $|z_p|^p \geq 1-\omega$ ή ισοδύναμα $-z_p^p \geq 1-\omega$ ή ακόμη $z_p^p + 1-\omega \leq 0$. Αφού η z_p πληρεί και την (5.3), τότε λόγω της τελευταίας ανισότητας συνεπάγεται ότι $\omega\nu z_p \geq 0$ ή ισοδύναμα $z_p \geq 0$, το οποίο είναι άτοπο, πράγμα που αποδεικνύει την ισχύ του θεωρήματος.

ii) p άρτιο.

Πάλι από τον κανόνα του προσήμου του Descartes προκύπτει ότι η (5.3) έχει δυο ή καμία πραγματικές αρνητικές ρίζες. Εκείνο που παρατηρούμε τώρα είναι ότι η εξίσωση $g(z, 0) = z^p+1 = 0$ έχει όλες τις ρίζες τις μιγαδικές, ενώ η $g(z, 1) = z^p + \nu z$ έχει πραγματικές ρίζες τις $z_{p-1} = \nu^{1/(p-1)}$ και $z_p = 0$. Από την (5.7) για $\omega\in(\omega, 1)$, παίρνουμε ότι το πρόσημο της $\frac{dy}{d\omega}$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του παρονομαστή.

$$\Pi(y, \omega) = (p-1)y + \omega - 1. \tag{5.20}$$

Από το Λήμμα 5.6 έπεται ότι $y_{p-1} > \frac{1-\omega}{p-1}$ και $y_{p-1} < \frac{1-\omega}{p-1}$. (Υπενθυμίζεται ότι $y = z^p$). Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\frac{dy_{p-1}}{d\omega} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{dy_p}{d\omega} < 0 . \tag{5.21}$$

Από την (5.21) έχουμε αμέσως ότι η y_{p-1} είναι αύξουσα συνάρτηση του $\omega \in (\omega_c, 1)$, ενώ η y_p είναι φθίνουσα. Συνεπώς η ρίζα $z_{p-1} = z_{p-1}(\omega)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του $\omega \in (\omega_c, 1)$ και η $z_p = z_p(\omega)$ αύξουσα. Μετά την παραπάνω ανάλυση μπορούμε να πούμε ότι, καθώς το ω μεταβάλλεται συνεχώς από το 1 προς το ω_c, η μικρότερη αρνητική ρίζα αυξάνει, ενώ η μεγαλύτερη αρνητική μικραίνει, μέχρις ότου για $\omega=\omega_c$, ταυτίζονται και αποτελούν μια διπλή ρίζα. Από εκεί και πέρα καθώς, το ω μεταβάλλεται προς το μηδέν, αυτές οι ρίζες είναι και παραμένουν συζυγείς μιγαδικές.

Αν υποθέσουμε ότι $\omega_{opt} = \omega_c$ και ότι αντιστοιχεί στη διπλή πραγματική ρίζα, τότε θα έχουμε $\prod_{j=1}^{p} z_j(\omega_c) = 1- \omega_c$. Συνεπώς $(z_p(\omega_c))\geq 1- \omega_c$. Αντικαθιστώντας το ω_c από την (5.14) θα έπρεπε $\frac{1-\omega_c}{p-1} \geq 1 - \omega_c$. Αυτό όμως είναι άτοπο και άρα το θεώρημα εδείχθη. ♦

Πρόταση 5.8

Έστω $\omega_{opt} \neq 1$. Για p=5 ή p=6 η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου ω (ω_{opt}) δεν αντιστοιχεί σε διπλή, κατά μέτρο, μιγαδική ρίζα.

Απόδειξη

Θα δείξουμε την πρόταση για p=6, όπου η απόδειξη είναι πιο πολύπλοκη. Για p=5 αποδεικνύεται ανάλογα.

Έστω λοιπόν p=6. Η (5.3) για p=6 γίνεται

$$z^6 + \omega\nu z + 1 - \omega = 0 .$$

Από τους τύπους του Vieta έχουμε

$$\sum_{i=1}^{6} z_i = 0$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{6} z_i z_j = 0 \qquad (5.22)$$

$$\vdots$$

$$\prod_{i=1}^{6} z_i = 1 - \omega$$

Οι ισότητες (5.22) μπορούν να μας δώσουν, αντίστοιχα

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 0$$

$$z_1z_2 + z_3z_4 + z_5z_6 + (z_1+z_2)(z_3+z_4) + (z_3+z_4)(z_5+z_6) + \\ + (z_5+z_6)(z_1+z_2) = 0$$

$$z_1z_2(z_3+z_4+z_5+z_6) + z_3z_4(z_1+z_2+z_5+z_6) + z_5z_6(z_1+z_2+z_3+z_4) + \\ + (z_1+z_3)(z_3+z_4)(z_5+z_6) = 0 \quad (4.23)$$

$$z_1z_2z_3z_4+z_3z_4z_5z_6+z_5z_6z_1z_2+z_1z_2(z_3+z_4)(z_5+z_6)+z_3z_4(z_1+z_2)(z_5+z_6) + \\ +z_5z_6(z_1+z_2)(z_3+z_4) = 0$$

$$z_1z_2z_3z_4(z_5+z_6) +z_1z_2z_5z_6(z_3+z_4) +z_3z_4z_5z_6(z_1+z_2) = - \omega\nu$$

$$z_1z_2z_3z_4z_5z_6 = 1 - \omega .$$

Θεωρούμε ότι τα z_1 ,z_2 και z_3, z_4 αποτελούν δυο ζεύγη συζυγών μιγαδικών ριζών, ενώ το ζεύγος z_5, z_6 είναι ή ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ή ένα ζεύγος πραγματικών ριζών. Υποθέτουμε ότι $|z_1| = |z_3|$ και θέτουμε $\alpha: = z_1+z_2$, $\beta: = z_3+z_4$, $\gamma: = z_5+z_6$, $\delta: = |z_1|^2 = |z_3|^2$ και $\varepsilon: = z_5z_6$. Προφανώς $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ και έχουμε από τις (5.23)

$$
\begin{aligned}
&\alpha+\beta+\gamma = 0\\
&2\delta+\varepsilon+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 0\\
&\delta(\beta+\gamma)+\delta(\alpha+\gamma)+\varepsilon(\alpha+\beta)+\alpha\beta\gamma = 0\\
&\delta^2+2\delta\varepsilon+\delta\beta\gamma+\delta\alpha\gamma+\varepsilon\alpha\beta = 0\\
&\delta^2\gamma+\delta\varepsilon\beta+\delta\varepsilon\alpha = -\,\omega\nu\\
&\delta^2\varepsilon = 1-\omega
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

Από τις (5.24) μετά από αντικαταστάσεις προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && \alpha = -\,(\beta+\gamma)\\
&\text{(ii)} && 2\delta+\varepsilon = \beta^2+\beta\gamma+\gamma^2\\
&\text{(iii)} && \gamma(\delta+2\varepsilon-\gamma^2) = 0\\
&\text{(iv)} && \delta^2-\varepsilon^2+(\varepsilon-\delta)\gamma^2 = 0\\
&\text{(v)} && \delta^2\gamma+\delta\varepsilon\beta+\delta\varepsilon\alpha = -\,\omega\nu\\
&\text{(vi)} && \delta^2\varepsilon = 1-\omega
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Επίσης, από την (iii) των (5.25) προκύπτει $\gamma=0$ ή $\gamma^2 = \delta+2\varepsilon$. Αν $\gamma=0$ από την (iv) έχουμε $\delta=\varepsilon$, το οποίο λόγω της (v) οδηγεί σε άτοπο, αφού $\omega\neq 0$ και $\nu\neq 0$. Αν $\gamma^2 = \delta+2\varepsilon$, τότε η (iv) δίνει $\varepsilon(\varepsilon-\delta) = 0$, το οποίο μας οδηγεί πάλι σε άτοπο, λόγω της (vi) αν $\varepsilon=o$ ή λόγω της (v) αν $\delta=\varepsilon$. ♦

Σημείωση:

Πριν κλείσουμε αυτή την παράγραφο, θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ένα σημείο που σχετίζεται με το ω_{opt}, στην περίπτωση όπου το p είναι άρτιο. Για το σκοπό αυτό έστω ότι $\omega_d \in (0,\ 1)$ είναι η τιμή του ω για την οποία $\max|z_j(\omega)|$ παίρνει την ελαχίστη τιμή για όλες τις μιγαδικές ρίζες. Τότε αν $\omega_d \in (0, \omega_c)$, είναι φανερό ότι $\omega_d = \omega_{opt}$. Διαφορετικά, αν $\omega_d \in (\omega_c, 1)$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν $|z_{p-1}(\omega_d)| \le m_d$, όπου $z_{p-1}(\omega)$ η μεγαλύτερη σε μέτρο πραγματική ρίζα και m_d η ελαχίστη τιμή της $\max|z_j(\omega)|$, τότε $\omega_{opt} = \omega_d$. Αν όμως $|z_{p-1}(\omega_d)| > m_d$, τότε $\omega_{opt} \in (\omega_c, \omega_d)$ και μάλιστα τότε, όταν $|z_{p-1}(\omega_{opt})| = m_d$.

Τέλος να διευκρινίσουμε ότι στην πρόταση 5.8 μελετήσαμε τις περιπτώσεις p=5 και p=6, επειδή στην επόμενη παράγραφο οι περιπτώσεις p=3 και p=4 αναλύονται και μελετούνται πλήρως.

5.3 Εύρεση της βέλτιστης παραμέτρου για p=3, 4

i) p=3

Η εξίσωση (5.3) για p=3 γίνεται

$$z^3 + \omega\nu z + 1 - \omega = 0 \; . \qquad (5.26)$$

Έστω z_1, z_2 και z_3 οι ρίζες αυτής και έστω ότι οι δύο πρώτες είναι μιγαδικές και η τρίτη πραγματική. Από το Θεώρημα 5.7 το ω_{opt} θα προκύπτει από τις μιγαδικές ρίζες. Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$\begin{aligned} &z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ &(z_1 + z_2)z_3 + z_1 z_2 = \omega\nu \qquad . \\ &z_1 z_2 z_3 = \omega - 1 \end{aligned} \qquad (5.27)$$

Απαλείφοντας τα (z_1+z_2) και z_3 από τις (5.27) παίρνουμε

$$r^3 - \omega\nu r^2 - (1-\omega)^2 = 0 \; , \qquad (5.28)$$

όπου θέσαμε $r := r(\omega) = |z_1(\omega)|^2$. Από τον κανόνα των προσήμων του Descartes προκύπτει ότι η (5.28) έχει ακριβώς μια πραγματική θετική ρίζα και δύο μιγαδικές. Η πραγματική θετική ρίζα της (5.28) είναι προφανώς η $|z_1(\omega)|$. Το ω_{opt} θα προκύπτει τότε από την ελαχιστοποίηση αυτής της πραγματικής ρίζας της (5.28), ως προς ω.

Λ ή μ μ α 5.9

Υπάρχει μοναδική τιμή του $\omega(=\omega_m) \in (0,1)$ για την οποία η πραγματική ρίζα της (5.28) παίρνει ελάχιστη τιμή. Επιπλέον

$$\omega_m = \frac{-(4+\nu^3)+4(1+\nu^3)^{1/2}}{\nu^3} \tag{5.29}$$

και

$$\min_{\omega} r = r(\omega_m) = (1-\omega_m^2)^{1/3} . \tag{5.30}$$

Απόδειξη

Παραγωγίζοντας την (5.28) ως προς ω και λύνοντας ως προς $\frac{\partial r}{\partial \omega}$ προκύπτει

$$\frac{\partial r}{\partial \omega} = \frac{\nu r^2 - 2(1-\omega)}{3r^2 - 2\omega\nu r} .$$

Απαλείφοντας το ν, χρησιμοποιώντας την (5.28), παίρνουμε

$$\frac{\partial r}{\partial \omega} = \frac{r[r^3-(1-\omega^2)]}{\omega[r^3+2(1-\omega)^2]} . \tag{5.31}$$

Προφανώς για $\omega \in [1, 2)$ επαληθεύεται το Λήμμα 5.2. Από την (5.28) έχουμε $r(0)=1$ και $r(1)=\nu$. Συνεπώς

$$\frac{\partial r}{\partial \omega}\Big|_{\omega=1} = \frac{v^4}{v^3} = v > 0 \ . \tag{5.32}$$

Ενώ, $\frac{\partial r}{\partial \omega}\Big|_{\omega=0} = \lim\limits_{\omega\to 0} \frac{r[r^3-(1-\omega^2)]}{\omega[r^3+2(1-\omega)^2]}$ ή ισοδύναμα, αν αντικαταστήσουμε το r^3 του αριθμητή με το ίσο του από την (5.28),

$$\frac{\partial r}{\partial \omega}\Big|_{\omega=0} = \frac{v-2}{3} < 0 \ . \tag{5.33}$$

Η ανισότητα στην (5.33) ισχύει, γιατί στο προηγούμενο κεφάλαιο αποδείξαμε ότι, για να συγκλίνει η SOR μέθοδος για p=3, πρέπει $r(B)<2$. Από την (5.32) και (5.33) συνάγεται ότι η $r = r(\omega)$ για τιμές σε μια περιοχή του $\omega=0$ είναι φθίνουσα, ενώ σε αντίστοιχη περιοχή του $\omega=1$ είναι αύξουσα. Συνεπώς η $r(\omega)$ θα έχει τουλάχιστον ένα ελάχιστο. Εξάλλου έχουμε ακρότατη τιμή την $r=(1-\omega^2)^{1/3}$, αφού γι' αυτήν $\frac{\partial r}{\partial \omega} = 0$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην (5.28) προκύπτει

$$h(\omega) := (1+\omega)^2 v^3 - 8(1-\omega) = 0 \ . \tag{5.34}$$

Αφού $h(0)\,h(1) = 4v^3(v^3-8) < 0$ και $\frac{dh}{d\omega} = 2v(1+\omega)+8) > 0$, η $h(\omega) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1) την

$$\omega_m = \frac{-(4+v^3)+4(1+v^3)^{1/2}}{v^3} \ . \tag{5.35}$$

Συνεπώς, αφού η $h(\omega) = 0$ έχει μια και μόνο ρίζα στο (0,1), μοναδικό θα είναι και το ακρότατο της $r = r(\omega)$. Επειδή δε η $r = r(\omega)$ έχει ένα τουλάχιστο ελάχιστο, αυτό θα είναι το ολικό ελάχιστο στο (0,1) και το λήμμα εδείχθη. ♦

Θεώρημα 5.10

Έστω ότι ο πίνακας A του συστήματος της (2.1) είναι ένας G.C.O - (3,2) πίνακας και έστω $\mathcal{L}_\omega$ και B οι επαναληπτικοί πίνακες της SOR και Jacobi μεθόδου αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι $\sigma(B^3)$ μη-θετικό και $\varrho(B)=\beta$. Τότε υπάρχει μια μοναδική τιμή του ω η

$$\omega_{opt} = \frac{-(4+\beta^3)+4(1+\beta^3)^{1/2}}{\beta^3} \tag{5.36}$$

για την οποία ισχύει ότι, για όλα τα $\omega \neq \omega_{opt}$

$$\varrho(\mathcal{L}_\omega) > \min_{\omega} \varrho(\mathcal{L}_\omega) = (1-\omega_{opt}^2) \ . \tag{5.37}$$

Απόδειξη

Για ένα σταθερό $\nu \in (0, \varrho(B)]$ βρήκαμε ότι η ελάχιστη τιμή του r είναι $r = (1-\omega_m^2)^{1/3}$. Προφανώς αναζητούμε το μέγιστο δυνατό αυτής της τιμής ως προς το $\nu \in (0, \varrho(\beta)]$. Αυτό όμως πετυχαίνεται, αν το ω_m γίνει ελάχιστο. Έτσι παραγωγίζοντας την (5.34) ως προς ν έχουμε

$$\frac{d\omega}{d\nu} = -\frac{3\nu^2(1+\omega)^2}{2[\nu^3(1+\omega)+4]} < 0 \ . \tag{5.38}$$

Συνεπώς το ω_m ελαχιστοποιείται για $\nu = \varrho(B)$ και γίνεται ίσο μ' εκείνο της (5.36), η δε $\varrho(\mathcal{L}\omega_{opt})$ ίση μ' εκείνη της (5.37), αφού (υπενθυμίζουμε ότι $\lambda = z^3$) $\varrho(\mathcal{L}\omega_{opt}) = r(\omega_{opt})^3 = (1-\omega_{opt}^2)$. ♦

p=4

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση αυτής της περίπτωσης, θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι (από το Κεφάλαιο 3) για να συγκλίνει η SOR μέθοδος θα πρέπει $\varrho(B)<\sqrt{2}$. Για την απλοποίηση των συμβολισμών θέτουμε $\beta := \varrho(B)$. Αρχίζουμε πάλι τη μελέτη μας από την (5.3), η οποία για $p=4$ δίνει

$$z^4 + \omega v z + 1 - \omega = 0 \ . \qquad (5.39)$$

Έστω ότι $z_j := z_j(\omega)$, $j=1, 2, 3, 4$ είναι οι τέσσερις ρίζες αυτής. Έχουμε αποδείξει στην προηγούμενη παράγραφο ότι η εξίσωση αυτή έχει τουλάχιστο δύο ρίζες μιγαδικές, έστω τις z_1 και z_2. Από τους τύπους του Vieta παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &(z_1+z_2)+(z_3+z_4) = 0 \\ &z_1z_2 + (z_1+z_2)(z_3+z_4) + z_3z_4 = 0 \\ &z_1z_2(z_3+z_4)+z_3z_4(z_1+z_2) = -\omega v \\ &z_1z_2z_3z_4 = 1-\omega \end{aligned} \qquad (5.40)$$

Απαλείφοντας τα (z_1+z_2), (z_3+z_4) και z_3z_4 από τις εξισώσεις (5.40) και θέτοντας $r = z_1z_2 = |z_1(\omega)|^2$, μετά από μερικές πράξεις παίρνουμε

$$[r^2 - (1-\omega)]^2\,[r^2 + (1-\omega)] - \omega^2 r^3 v^2 = 0 \ . \qquad (5.41)$$

Επιπλέον επιβάλλουμε τον περιορισμό

$$r \geq (1-\omega)^{1/2} \qquad (5.42)$$

και τούτο για να εξασφαλίσουμε το γεγονός ότι, όταν όλες οι ρίζες είναι μιγαδικές, το r αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη σε μέτρο.

Πρόταση 5.11

Η εξίσωση (5.41) έχει μοναδική ρίζα r με

$$r \geq (1-\omega)^{1/2} .$$

Απόδειξη

Αναδιατάσσοντας την (5.41) και γράφοντάς την ως πολυώνυμο του r έχουμε

$$P(r) := r^6 - (1-\omega)r^4 - \omega^2 v^2 r^3 - (1-\omega)^2 r^2 + (1-\omega)^3 . \qquad (5.41')$$

Από τον κανόνα του Descartes προκύπτει ότι αυτή έχει δυο ή καμία θετικές ρίζες. Αφού όμως $P(0)>0$, $\lim_{r\to\infty} P(r)>0$ και $P((1-\omega)^{1/2}) = -\omega^2 v^2 (1-\omega)^{3/2} < 0$, η πρόταση ισχύει. ♦

Λήμμα 5.12

Η μοναδική ρίζα της (5.41) $r := r(v)$ για την οποία έχουμε $r > (1-\omega)^{1/2}$, παίρνει τη μέγιστη τιμή ως συνάρτηση του $v \in (0, \beta := \rho(B)]$ για $v=\beta$.

Απόδειξη

Παραγωγίζοντας την (5.41') ως προς v και λύνοντας ως προς $\frac{\partial r}{\partial v}$ έχουμε

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \frac{2\omega^2 v r^3}{6r^5 - 4(1-\omega)r^3 - 3\omega^2 v^2 r^2 - 2(1-\omega)^2 r} .$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με r και απαλείφοντας το $\omega^2 v^2 r^3$ από την (5.41') προκύπτει

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \frac{2\omega^2 v r^4}{[r^2 - (1-\omega)]\,[3r^4 + 2(1-\omega)r^2 + 3(1-\omega)^2]} > 0 , \qquad (5.43)$$

αφού ισχύει $r > (1-\omega)^{1/2}$ και το λήμμα εδείχθη. ♦

Γράφουμε λοιπόν τις (5.41) και (4.41') με ν=β

$$F(r, \omega; \beta) = [(r^2 - (1-\omega)]^2 [r^2 + (1-\omega)] - \omega^2 r^3 \beta^2 = 0 \qquad (5.44)$$

$$F(r, \omega; \beta) = P(r) := r^6 - (1-\omega)r^4 - \omega^2\beta^2 r^3 - (1-\omega)^2 r^2 + (1-\omega)^3 = 0\ . \qquad (5.44')$$

Στο εξής θα ενδιαφερόμαστε για την ελαχιστοποίηση της μεγαλύτερης ρίζας της (5.44) ή (5.45). Αυτό γιατί, εάν αυτή είναι μεγαλύτερη ή ίση από το μέτρο της μέγιστης σε μέτρο πραγματικής, θα δίνει και τη φασματική ακτίνα $\varrho(L_\omega)$. Διαφορίζοντας την (5.44') ως προς ω και λύνοντας ως προς $\frac{dr}{d\omega}$ έχουμε

$$\frac{dr}{d\omega} = -\frac{G(\omega, r; \beta)}{G_o(\omega, r; \beta)}, \qquad (5.45)$$

όπου

$$G(\omega, r; \beta) = r^4 + 2(1-\omega)r^2 - 3(1-\omega)^2 - 2\omega r^3\beta^2 \qquad (5.45\alpha)$$

$$G_o(\omega, r; \beta) = 6r^5 - 4(1-\omega)r^3 - 2(1-\omega)^2 r - 3\omega^2 r^2 \beta^2\ . \qquad (5.45\beta)$$

Απαλείφοντας το β^2 από την (5.44), τελικά παίρνουμε

$$\frac{dr}{d\omega} = \frac{r[2r^4 - \omega r^2 - (1-\omega)(2+\omega)]}{\omega[3r^4 + 2(1-\omega)r^2 + 3(1-\omega)^2]}\ . \qquad (5.46)$$

Από την (5.46) μπορούμε να παρατηρήσουμε, λαμβάνοντας υπόψη ότι $r \geq (1-\omega)^{1/2}$, ότι η $r = r(\omega)$ έχει ακρότατο, αν και μόνον αν

$$r = \left(\frac{\omega + (16 - 8\omega - 7\omega^2)^{1/2}}{4}\right)^{1/2} \qquad (5.47)$$

και επαληθεύει την (5.44).

Αφού $\lim\limits_{\omega \to 1^-} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και για την περίπτωση που $\omega \in (\omega_c, 1)$, η $r = r(\omega)$ αντιστοιχεί στο γινόμενο των μιγαδικών ριζών $(z_1(\omega) \cdot z_2(\omega))$ και όχι σ' εκείνο των πραγματικών ριζών, αφού $z_3(1) \cdot z_4(1) = 0$.

Λήμμα 5.13

Η μέγιστη πραγματική ρίζα (μ.π.ρ.) της (5.44) ή (5.45) έχει:

i) Για $\beta < \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$, κανένα ή άρτιο αριθμό από ακρότατα.

ii) Για $\frac{1}{\sqrt[4]{8}} < \beta < \sqrt{2}$, περιττό αριθμό από ακρότατα.

Απόδειξη

Από την (5.44) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $\lim\limits_{\omega \to 0} r = 1$ και $\lim\limits_{\omega \to 1} r = \beta^{2/3}$. Εύκολα συμπεραίνεται, από την (5.46), ότι

$$\left.\frac{dr}{d\omega}\right|_{\omega=1} = \frac{2\beta^{4/3} - 1}{3\beta^{2/3}},$$

οπότε

$$\left.\frac{dr}{d\omega}\right|_{\omega=1} < 0 \quad \text{αν } \beta < \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \quad \text{και} \quad \left.\frac{dr}{d\omega}\right|_{\omega=1} > 0 \quad \text{αν } \beta > \frac{1}{\sqrt[4]{8}} . \qquad (5.47\alpha)$$

Επίσης

$$\left.\frac{dr}{d\omega}\right|_{\omega=0} = \lim_{\omega \to 0} \frac{dr}{d\omega} = \frac{1}{8} \lim_{\omega \to 0} \frac{2r^4 - (1-\omega)(2+\omega) - \omega r^2}{\omega} =$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ \ell im_{\omega \to 0} \frac{2r^4 - (1-\omega)(2+\omega)}{\omega} - 1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ \ell im_{\omega \to 0} \frac{2r^4 - 2(1-\omega)^2 + 2(1-\omega)^2 - (1-\omega)(2+\omega)}{\omega} - 1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ 2\, \ell im_{\omega \to 0} \frac{r^2 - (1-\omega)}{\omega}\, \ell im_{\omega \to 0} (r^2 + (1-\omega)) - 4 \right\} .$$

Όμως από την (5.44) έχουμε ότι $\left(\frac{r^2 - (1-\omega)}{\omega}\right)^2 = \frac{r^3\beta^2}{r^2 + (1-\omega)}$, οπότε τελικά παίρνουμε

$$\ell im_{\omega \to 0} \frac{dr}{d\omega} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\beta - \sqrt{2}) < 0 \ . \qquad (5.47\beta)$$

Οι (5.47α) και (5.47β) αποδεικνύουν το λήμμα. ♦

Αν αντικαταστήσουμε τώρα στην (5.44) το r από την (5.47), η αντίστοιχη έκφραση μετατρέπεται σε μια συνάρτηση $F(r(\omega),\omega)$ ως προς ω μόνο, της οποίας αναζητούμε τις μη-μηδενικές ρίζες της. Επειδή δε $F(r(0), 0) = 0$, αυτή μπορεί να γραφεί στη μορφή $F(r(\omega),\omega) = \omega^2 h(\omega)$, όπου

$$h(\omega, r(\omega)) := \left[\frac{r^2(\omega) - (1-\omega)}{\omega}\right]^2 [r^2(\omega) + (1-\omega)] - r^2(\omega)\beta^2 \ . \qquad (5.48)$$

Αναζητούμε λοιπόν τις ρίζες της $h(\omega,r)=0$ στο διάστημα (0,1). Αφού $r(\omega) \neq 0$ για όλα τα $\omega \in (0,1)$, οι ρίζες αυτής στο εν λόγω διάστημα θα ταυτίζονται με τις ρίζες της

$$A(\omega, r(\omega)) := \frac{1}{r^3(\omega)} \cdot h(\omega, r(\omega)) = 0 \ . \qquad (5.49)$$

Έχοντας υπόψη μας, από την (5.46), ότι

$$2r^4 = \omega r^2 + (1-\omega)(2+\omega) \tag{5.50}$$

η (5.49) μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις μετασχηματίζεται στην

$$A(\omega, r(\omega)) = \frac{(4-3\omega)r^2 + (1-\omega)(7\omega-4)}{4\omega r} - \beta^2 \,. \tag{5.51}$$

Λήμμα 5.15

Η συνάρτηση $A(\omega, r(\omega))$, με $r(\omega)$ εκείνο της (5.47), είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του ω στο $(0,1)$.

Απόδειξη

Παραγωγίζοντας την (5.51) προκύπτει

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{1}{4\omega^2 r^5}\left\{-4r^4 + (3\omega^2-4\omega)r^3\frac{dr}{d\omega} + (-7\omega^2+4)r^2 + \right.$$
$$\left. + 3\omega(7\omega^2-11\omega+4)r\frac{dr}{d\omega}\right\} \,. \tag{5.52}$$

Από την (5.50) εύκολα προκύπτει

$$8r^3\frac{dr}{d\omega} = 2\omega r\frac{dr}{d\omega} + r^2 - (2\omega+1) \,. \tag{5.50'}$$

Από την τελευταία και την (5.50) βρίσκουμε ότι η $\frac{dA}{d\omega}$ είναι ομόσημη της

$$\hat{A} := (-53\omega^2 - 20\omega + 32)r^2 + (84r^2 - 129\omega^2 - 44\omega)2r\frac{dr}{d\omega} +$$
$$+ (-6\omega^3 + 21\omega^2 + 20\omega - 32) \,. \tag{5.53}$$

Από την (5.47) παίρνουμε

$$4r^2 = \omega + \sqrt{16 - 8\omega - 7\omega^2}$$

και

$$8r\frac{2dr}{d\omega} = 1 - \frac{7\omega + 4}{\sqrt{16 - 8\omega - 7\omega^2}} \;.$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες στην (5.54) προκύπτει ότι

$$\operatorname{sign}(\hat{A}) = \operatorname{sign}\{\alpha(\omega) + \beta(\omega)\} \qquad (5.54)$$

όπου

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= (7\omega^3 - 65\omega^2 + 156\omega - 128)\sqrt{16 - 18\omega - 7\omega^2} \\ \beta(\omega) &= -217\omega^4 + 1131\omega^3 - 704\omega^2 - 752\omega + 512 \end{aligned} \;. \qquad (5.54')$$

Είναι προφανές ότι $\operatorname{sign}(\hat{A}) = \operatorname{sign}(\alpha(\omega))$, αν $\alpha^2(\omega) - \beta^2(\omega) > 0$. Μετά από ένα μεγάλο αριθμό πράξεων, όπου για διευκόλυνση μπορεί να χρησιμοποιηθεί η "Mathematica", προκύπτει ότι

$$\alpha^2(\omega) - \beta^2(\omega) = \frac{1}{7}\omega^2(\omega - 1)(7\omega + 8)\cdot(-847\omega^4 + 8993\omega^3 - 31208\omega^2 + $$
$$+ 38928\omega - 15872) \;. \qquad (5.55)$$

Ο τελευταίος παράγοντας στην (5.55) είναι ένα πολυώνυμο τέταρτου βαθμού. Οι τιμές της ακολουθίας του Sturm (βλ. Κεφ. 6) στα σημεία ω=0 και ω=1 με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων, δίνονται στον επόμενο πίνακα.

σημ. / ακολ.	ω= 0	ω = 1
f_0	- 15872	- 6
f_1	38928	103
f_2	- 9960.3125	- 36.5999
f_3	- 80.1522	- 14.1860
f_4	- 1496.7598	- 1496.7598

Έτσι από το Θεώρημα του Sturm προκύπτει ότι το εν λόγω πολυώνυμο δεν αλλάζει πρόσημο και επομένως θα έχει το πρόσημο των τιμών στα άκρα του. Δηλαδή θα είναι αρνητικό. Επειδή δε ω-1<0, το πρόσημο του $\alpha^2(\omega)$- $\beta^2(\omega)$ θα είναι θετικό. Συνεπώς

$$\operatorname{sign}(\hat{A}) = \operatorname{sign}(\alpha(\omega)) = \operatorname{sign}(7\omega^3 - 65\omega^2 + 156\omega - 128) \ . \qquad (5.56)$$

Απ' αυτήν προκύπτει, είτε πάλι με το Θεώρημα του Sturm, όπως προηγουμένως, είτε απλά ελέγχοντας την παράγωγο, ότι $\operatorname{sign}(\hat{A}) < 0$ για $\forall\ \omega \in (0,1)$. Επομένως η $A(\omega, r(\omega))$ είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1). ♦

Λ ή μ μ α 5.16

Για τη συνάρτηση $A(\omega, r(\omega))$ της (5.51) ισχύει

$$\operatorname{sign}(A(0, r(0))) = \operatorname{sign}(2 - \beta^2) > 0 \qquad (5.57\alpha)$$

$$\operatorname{sign}(A(1, r(1))) = \operatorname{sign}\left(\frac{1}{\sqrt{8}} - \beta^2\right) . \qquad (5.57\beta)$$

Α π ό δ ε ι ξ η

Από την (5.47) προκύπτει ότι

$$\lim_{\omega \to 0^+} \frac{r^2 - (1-\omega)}{\omega} = \lim_{\omega \to 0^+} \frac{8(\omega - 1)}{5\omega - 4 - \sqrt{16 - 8\omega - 7\omega^2}} = 1 \ .$$

Η ισχύς του λήμματος φαίνεται αμέσως από την (5.51) και το γεγονός ότι $r(0) = 1$ και $r(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. ♦

Λήμμα 5.17

i) Εάν $\beta^2 < \frac{1}{\sqrt{8}}$, η μέγιστη πραγματική ρίζα της (5.44), $r = r(\omega)$, παίρνει την ελάχιστη τιμή για $\omega=1$ και μάλιστα ισχύει $r(1) = \beta^{2/3}$ ενώ

ii) Εάν $\frac{1}{\sqrt{8}} < \beta^2 < 2$, τότε υπάρχει μοναδικό $\omega_d \in (0,1)$ το οποίο είναι η λύση της (5.44), αν θέσουμε $r=r(\omega)$ από την (5.47), που ελαχιστοποιεί τη μ.π.ρ. Ισχύει μάλιστα ότι

$$\min_{\omega} r(\omega) = \frac{1}{2}\left(\omega_d + \sqrt{16 - 8\omega_d - 7\omega_d^2}\right)^{1/2} . \tag{5.58}$$

Απόδειξη

i) Αφού $\beta^2 < \frac{1}{\sqrt{8}}$, η μ.π.ρ. της (5.44) δε θα έχει ακρότατα ή αν έχει, θα έχει άρτιο αριθμό απ' αυτά (Λήμμα 5.13). Το πρώτο θα συμβαίνει, αν δεν υπάρχει τιμή του ω που να μηδενίζει την παράγωγό της, ή, ισοδύναμα, αν δεν υπάρχει τιμή του $\omega \in (0,1)$ που να είναι ρίζα της $A(\omega, r(\omega))$. Η $A(\omega, r(\omega))$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Αφού δε, από το Λήμμα 5.16 έχουμε $\text{sign}\,(A(0)) = \text{sign}\,(A(1)) > 0$, προκύπτει ότι δεν υπάρχει $\omega \in (0,1)$ που να τη μηδενίζει. Έτσι η μ.π.ρ. της (5.49) σαν συνεχής συνάρτηση του $\omega \in (0,1)$ δε θα έχει ακρότατα και επομένως θα είναι μονότονη και μάλιστα θα είναι φθίνουσα, όπως είναι στις περιοχές του 0 και του 1. Συνεπώς η ελαχίστη τιμή της θα παίρνεται για $\omega=1$.

ii) Αφού $\frac{1}{\sqrt{8}} < \beta^2 < 2$, η μ.π.ρ. της (5.44) θα έχει περιττό αριθμό από ακρότατα (Λήμμα 5.13). Αν έχουμε ένα μόνον ακρότατο, αυτό θα είναι ελάχιστο. Θα έχουμε ένα μόνον ακρότατο, αν και μόνον αν υπάρχει ένα μοναδικό ω_d στο (0, 1) που να μηδενίζει την $A(\omega, r(\omega))$. Αφού, από το Λήμμα 5.15, η A είναι γνησίως φθίνουσα και από το Λήμμα 5.16 έχουμε $H(0) \cdot H(1) <0$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\omega_d \in (0,1)$ που μηδενίζει την $A(\omega, r(\omega))$ και επομένως μοναδικό ελάχιστο για την μ.π.ρ. της (5.44). ♦

Μέχρι τώρα συζητούσαμε για την ελαχιστοποίηση της μ.π.ρ. της (5.44), που ουσιαστικά ήταν το μέγιστο μέτρο των μιγαδικών ριζών της (5.39). Στο επόμενο λήμμα θα συγκρίνουμε το μέτρο των μιγαδικών με το μέτρο της μεγαλύτερης σε μέτρο πραγματικής ρίζας της (5.39). Πρακτικά θέλουμε να καλύψουμε την περίπτωση που το $\omega_d \in (\omega_c, 1)$, όπου ω_c το σημείο που δεν έχουμε πλέον πραγματικές ρίζες για $\omega \in (0, \omega_c)$.

Λήμμα 5.18

Το μέτρο r των μιγαδικών ριζών της (5.39) είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της μεγαλύτερης σε μέτρο πραγματικής ρίζας της ίδιας εξίσωσης.

Απόδειξη

Από τις (5.40) έχουμε

$$z_3+z_4 = -\frac{(r^2+1-\omega)^{1/2}}{r^{1/2}} \quad , \qquad (5.61)$$
$$z_3 \cdot z_4 = \frac{1-\omega}{r}$$

όπου $r = |z_1|^2 = |z_2|^2$, $z_1 = \bar{z}_2 \in \mathbb{C}$ και $z_3, z_4 \in \mathbb{R}$.
Τότε τα z_3 και z_4 είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$Z^2 + \frac{(r^2+1-\omega)}{r^{1/2}} Z + \frac{1-\omega}{r} = 0 \ . \qquad (5.62)$$

Οι ρίζες αυτής δίνονται από τις εκφράσεις

$$z_{3,4} = \frac{1}{2}\ \frac{-(r^2+1-\omega)^{1/2} \pm [r^2-3(1-\omega)]^{1/2}}{r^{1/2}} \quad , \qquad (5.63)$$

όπου βέβαια $r^2 \geq 3(1-\omega)$, αφού $z_3, z_4 \in \mathbb{R}$.
Συγκρίνοντας το r με το $\max\{|z_3|, |z_4|\}$ έχουμε αμέσως ότι

$$r^{1/2} > \frac{(r^2+(1-\omega))^{1/2} + [r^2-3(1-\omega)]^{1/2}}{2r^{1/2}} \ . \quad \blacklozenge$$

Είμαστε πλέον σε θέση, αφού το $\omega_d \in (0, 1)$ ελαχιστοποιεί το $\max_j \{|z_j|\}$, να δώσουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 5.19

Έστω ότι ο πίνακας A του συστήματος (2.1) είναι ένας G.C.O - (4,3) πίνακας και έστω $\mathcal{L}_\omega$ και B οι επαναληπτικοί πίνακες της SOR και Jacobi μεθόδου αντίστοιχα. Έστω επιπλέον ότι $\sigma(B^4)$ μη-θετικό. Τότε:

i) Για $0 < \beta \leq \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

$$\omega_{opt} = 1$$

και για όλα τα $\omega \neq \omega_{opt}$ ισχύει

$$\varrho(\mathcal{L}_\omega) \geq \min_\omega \varrho(\mathcal{L}_\omega) = \beta^{4/3} .$$

ii) Για $\frac{1}{\sqrt[4]{8}} < \beta < \sqrt{2}$, υπάρχει μια μοναδική τιμή ω_{opt} του ω, η μοναδική πραγματική ρίζα της

$$[r^2 - (1-\omega)]^2 \, [r^2 + (1-\omega)] - \omega^2 r^3 \beta^2 = 0$$

με

$$r = \frac{1}{2} \, [\omega + (16 - 8\omega - 7\omega^2)]^{1/2}$$

στο (0, 1), έτσι ώστε για όλα τα $\omega \neq \omega_{opt}$ να ισχύει

$$\varrho(\mathcal{L}_\omega) > \min_\omega \varrho(\mathcal{L}_\omega) = \frac{\omega_{opt} + (16 - 8\omega_{opt} - 7\omega_{opt}^2)^{1/2}}{4} .$$

Απόδειξη

Αυτή γίνεται άμεσα φανερή από τα λήμματα που προηγήθηκαν. Εκείνο που θα επισημάνουμε εδώ είναι ότι ω_{opt} είναι το ω_d των λημμάτων. Επιπλέον θα υπενθυμίσουμε ότι $\lambda_i = z_i^4$ και επομένως $\varrho(\mathcal{L}_\omega) = r^2$. ♦

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ SSOR ΜΕΘΟΔΟ

6.1 Εισαγωγή

Σε προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε την SOR μέθοδο (περιοχές σύγκλισης, βέλτιστη παράμετρος), όταν αυτή εφαρμόζεται στο γραμμικό σύστημα (1.1), όπου ο πίνακας A είναι G.C.O.-(p,q). Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε την SSOR μέθοδο, όταν αυτή εφαρμοστεί στο ίδιο σύστημα και για την ίδια κατηγορία πινάκων A, με q=1.

Υπενθυμίζουμε τη συναρτησιακή σχέση (2.61) των Varga, Niethammer και Cai

$$[\lambda-(1-\omega)^2]^p=\lambda(\lambda+1-\omega)^{p-2}(2-\omega)^2\omega^p\mu^p,\quad \lambda\neq(1-\omega)^2,\qquad (6.1)$$

την οποία ικανοποιούν οι ιδιοτιμές μ του B (επαναληπτικός πίνακας Jacobi) και λ του $\mathcal{S}_\omega$ (επαναληπτικός πίνακας της SSOR μεθόδου). Την παραπάνω σχέση γενίκευσαν το 1985 οι Chong και Cai [4] . Το 1989 βασιζόμενοι στη σχέση (6.1) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Rouché οι Hadjidimos και Neumann (H-N) [16] έδωσαν στο (ν, ω)-επίπεδο, με ν = ρ(B), ικανή περιοχή σύγκλισης για την SSOR μέθοδο. Αργότερα (1990) οι ίδιοι συγγραφείς [17] γενίκευσαν τα προηγούμενα αποτελέσματά τους. Είναι χαρακτηριστικό ότι, καθώς το p→∞, η περιοχή που βρήκαν οι H-N τείνει στην περιοχή, που το 1984 οι

Neumaier και Varga [25] έδωσαν ως ακριβή περιοχή σύγκλισης του (ν, ω)-επιπέδου για Η- πίνακες (όπου όμως $\nu = \rho(|B|)$).

Η μελέτη που θα ακολουθήσει αφορά στην ακριβή περιοχή σύγκλισης, για την SSOR μέθοδο, στο (ν, ω)-επίπεδο (με $\nu=\rho(B^p)$), για τις δύο οικείες πλέον περιπτώσεις, όπου το $\sigma(B^p)$ είναι i) μη-θετικό ($\mu_i^p \leq 0$) και ii) μη-αρνητικό ($\mu_i^p \geq 0$) . Πρέπει να αναφερθεί εδώ ότι, μελετώντας την [16] των Η-Ν, μπορεί κάποιος να βρει την ακριβή περιοχή σύγκλισης, για τη μεν δεύτερη περίπτωση ($\mu_i^p \geq 0$), όταν το $0<\omega<1$, για τη δε πρώτη ($\mu_i^p \leq 0$), όταν το $1<\omega<\hat{\omega}$, όπου

$$\hat{\omega} := \frac{2(-\hat{y}+2)^{1/2}}{(-\hat{y}+2)^{1/2}+(-\hat{y}-2)^{1/2}} \quad \text{και} \quad \hat{y} = -\frac{p+(9p^2-16p)}{2(p-2)} .$$

Για να περιγράψουμε την ακριβή περιοχή σύγκλισης γράφουμε την (6.1), εξαιρώντας τις τετριμμένες περιπτώσεις ως εξής:

$$\mu^p = \frac{[\lambda-(1-\omega)^2]^p}{(2-\omega)^2\omega^p\lambda(\lambda+1-\omega)^{p-2}} . \tag{6.2}$$

Βασική ιδέα είναι η ακόλουθη: Για ένα σταθερό $\omega \in (0, 2)$ και για $\nu=0$ προκύπτει ότι $\lambda=(1-\omega)^2<1$. Προφανώς για $\nu=0+\varepsilon$ με $\varepsilon \to 0^+$ θα προκύπτει $\rho(\mathcal{S}_\omega)<1$ λόγω της συνέχειας των ριζών του πολυωνύμου ως συναρτήσεων των συντελεστών του. Έτσι εμείς αναζητούμε το μικρότερο δυνατό ν, για το οποίο θα ισχύει $\rho(\mathcal{S}_\omega) = 1$. Προφανώς θα έχουμε βρει το υπόψη ν, αν προσδιορίσουμε τα πλησιέστερα στο μηδέν σημεία τομής της καμπύλης (6.2) με $|\lambda|=1$.

Στην παράγραφο 6.2 γίνεται μια γενική προσέγγιση του προβλήματος. Στην παράγραφο 6.3 μελετώνται οι ειδικές περιπτώσεις p=3, 4. Τα αποτελέσματα που βρίσκονται για p=3 συμπίπτουν μ' εκείνα του Cai [2] και Hadjidimos και Neumann [14]. Τέλος στην παράγραφο 6.4 μελετάται η περίπτωση p=5, όπου εκτός των άλλων εργαλείων χρησιμοποιείται και το θεώρημα του Sturm, το οποίο παρατίθεται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη. Προηγουμένως όμως χρειάζεται να ορίσουμε την ακολουθία του Sturm.

Έστω ένα πολυώνυμο P(x) με όλες τις ρίζες του απλές και έστω P' (x) η παράγωγός του. Γράφουμε τον αλγόριθμο του Ευκλείδη ελαφρά τροποποιημένο ως εξής:

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= P(x)\\
f_1(x) &= P'(x)\\
f_0(x) &= q_1(x)f_1(x) - f_2(x)\\
f_1(x) &= q_2(x)f_2(x) - f_3(x)\\
&\ \ \vdots\\
f_{r-1}(x) &= q_r(x)f_r(x) - f_{r+1}(x)\ .
\end{aligned}
$$

Αφού το P(x) έχει όλες τις ρίζες απλές, θα έχουμε ότι μ.κ.δ. (P(x), P'(x)) = 1 και συνεπώς $f_{r+1}(x) \in \mathbb{R} - \{0\}$. Η ακολουθία των πολυωνύμων

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_{r+1}(x) \tag{6.3}$$

καλείται "ακολουθία Sturm του πολυωνύμου P(x)". Για $x=a\in\mathbb{R}$ η ακολουθία πολυωνύμων της (6.3) γίνεται μια αριθμητική ακολουθία.

Με V(a) παριστάνουμε τον αριθμό των αλλαγών του προσήμου αυτής της αριθμητικής ακολουθίας, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη τα τυχόν μηδενικά, που εμφανίζονται.

Θεώρημα του Sturm

Αν $f(a)\neq 0$ και $f(b)\neq 0$, τότε ο αριθμός των ριζών του πολυωνύμου f(x) (το f(x) έχει μόνον απλές ρίζες) που βρίσκονται στο διάστημα $a \le x \le b$ ισούται με $V(a) - V(b)$. ♦

6.2 Γενικά

Παρατηρούμε ότι με $|\lambda|=1$ (ή ισοδύναμα $\lambda=e^{i\theta}$) η σχέση (6.2) γράφεται

$$F(\omega,\theta) = \frac{[e^{i\theta} - (1-\omega)^2]^p}{(2-\omega)^2\omega^p e^{i\theta}[e^{i\theta} + (1-\omega)]^{p-2}} . \tag{6.4}$$

Θέτοντας, για ευκολία των πράξεων,

$$x := x(\omega) := 1-\omega \quad \text{και} \quad y := y(\omega) := x+\frac{1}{x} \tag{6.5}$$

είναι φανερό ότι $x \in (-1, 1) - \{0\}$ και $y \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ · μάλιστα για $\omega \in (0, 1)$, έχουμε $x \in (0, 1)$ και $y \in (2, +\infty)$ ενώ για $\omega \in (1, 2)$, είναι $x \in (-1, 0)$ και $y \in (-\infty, -2)$.

Η συνάρτηση (6.4) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$F(\omega, \theta) = \mathrm{Re}F + i\,\mathrm{Im}F , \tag{6.6}$$

όπου

$$\mathrm{Re}F = \frac{1}{D}\Big\{[(1+x^4)\cos\theta - 2x^2][E^{p-2} - \binom{p-2}{2}E^{p-2}G^2 + \dots] -$$

$$- (1-x^4)\sin\theta[\binom{p-2}{1}E^{p-3}G - \binom{p-2}{3}E^{p-5}G^3 + \dots]\Big\} \tag{6.7}$$

και

$$\mathrm{Im}F = \frac{1}{D}\Big\{(1-x^4)\sin\theta\,[E^{p-2} - \binom{p-2}{2}E^{p-4}G^2 + \dots] +$$

$$+ [(1+x^4)\cos\theta - 2x^2]\Big[\binom{p-2}{1}E^{p-3}G - \binom{p-2}{3}E^{p-5}G^3 + \ldots\Big]\Big\} \qquad (6.7')$$

με

$$\begin{aligned} D &= (1+x)^2(1-x)^p(1+x^2+2x\cos\theta)^{p-2} \\ E &= (1-x^3) + x(1-x)\cos\theta \qquad , \qquad (6.8) \\ G &= x(1+x)\sin\theta \end{aligned}$$

με περιορισμό ότι οι εκθέτες του D είναι μη-αρνητικές ποσότητες.

Για $\theta=0$ ή $\theta=\pi$ θα έχουμε προφανώς $ImF = 0$, αφού $G=0$. Έτσι τα πλησιέστερα στο 0 σημεία δίνονται για $\theta=0$ από

$$ReF(\omega, 0) = 1 > 0 \qquad (6.9)$$

και για $\theta=\pi$ από

$$ReF(\omega, \pi) = -\frac{(1+x^2)^p}{(1+x)^2(1-x)^{2p-2}} = -\frac{y^p}{(y+2)(y-2)^{p-1}} < 0 \ . \qquad (6.10)$$

Το ερώτημα που τίθεται εδώ είναι αν υπάρχει $\theta\in(0, \pi)$, τέτοιο ώστε $ImF(\theta) = 0$. Για να απαντήσουμε σ' αυτό, θα πρέπει να βρούμε τις ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης

$$H(t) := H(\cos\theta) := \frac{ImF}{\sin\theta} = 0 \ , \qquad (6.11)$$

που ανήκουν στο διάστημα $[-1, 1]$. Έστω θ^+ το σύνολο όλων των $\theta\in[0, \pi)$ με

$$ImF(\omega, \theta) = 0 \quad \text{και} \quad ReF(\omega, \theta) \geq 0 \qquad (6.12)$$

και θ^- το σύνολο όλων των $\theta\in[0, \pi)$ με

$$\mathrm{Im}F(\omega,\theta)=0 \quad \text{και} \quad \mathrm{Re}F(\omega,\theta)\leq 0 \ . \tag{6.13}$$

Προφανώς από τις (6.9) και (6.10) έχουμε ότι $0\in\theta^+$ και $\pi\in\theta^-$.
Απάντηση στο ερώτημά μας θα δίνει στη μεν i) μη-αρνητική περίπτωση ο προσδιορισμός του $0\in\theta^+$, έτσι ώστε το

$$\mathrm{Re}F(\omega,\theta) \quad \text{να είναι ελάχιστο} \tag{6.14}$$

στη δε ii) μη-θετική περίπτωση ο προσδιορισμός του $0\in\theta^-$ ώστε το

$$\mathrm{Re}F(\omega,\theta) \quad \text{να είναι μέγιστο} \ . \tag{6.15}$$

6.3 Οι περιπτώσεις p=3 και p=4

6.3.1 Για **p=3** η $F(\omega,\theta)$ έχει τη μορφή:

$$F(\omega,\theta)=\frac{[e^{i\theta}-(1-\omega)^2]^3}{(2-\omega)^2\omega^3\, e^{i\theta}[e^{i\theta}+(1-\omega)]} \ . \tag{6.16}$$

Από τις (6.7), (6.7') και (6.8) προκύπτει ότι

$$\mathrm{Re}F=\frac{1}{D}\left\{[(1+x^4)\cos\theta-2x^2]\,E-(1-x^4)\sin\theta\, G\right\} \tag{6.17}$$

$$\mathrm{Im}F=\frac{1}{D}\left\{(1-x^4)\sin\theta\, E+[(1+x^4)\cos\theta-2x^2]\, G\right\} \tag{6.17'}$$

με

$$\begin{aligned} D&=(1+x)^2(1-x)^3\,(1+x^2+2x\cos\theta)\\ E&=(1-x^3)+x(1-x)\cos\theta \\ G&=x(1+x)\sin\theta \end{aligned} \ . \tag{6.18}$$

Οι παραπάνω εκφράσεις, (6.17), (6.17'), μετά από ένα μεγάλο πλήθος πράξεων γίνονται

$$\mathrm{ReF} = \frac{(1-x)}{D}\left\{x(x^4+x^3+x^2+x+1)\cos\theta + (x^6+x^5+x^4-2x^3+x^2+x+1)\cos\theta - \right.$$
$$\left. - x(x^4+4x^3+4x^2+4x+1)\right\} \qquad (6.19)$$

$$\mathrm{ImF} = \frac{\sin\theta}{D}\left\{2x(1+x^5)\cos\theta + (1-3x^3-3x^4+x^7)\right\} . \qquad (6.19')$$

Παρατηρούμε ότι, για $\omega=1$ η (6.16) γίνεται $F(1,\theta) = e^{i\theta}$, οπότε τα μόνα σημεία τομής αυτής με τους άξονες είναι το 1 και το -1. Θεωρούμε λοιπόν ότι $\omega \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$, οπότε θέτοντας $y = x + \frac{1}{x}$ και κάνοντας τις σχετικές απλοποιήσεις οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\mathrm{ReF} = \frac{1}{D_1}\left\{2(y^2+y-1)\cos^2\theta + (y^3+y^2-2y-4)\cos\theta - (y^2+4y+2)\right\} \qquad (6.20)$$

$$\mathrm{ImF} = \frac{(1+x)\sin\theta}{(1-x)D_1}\left\{2(y^2-y-1)\cos\theta + (y^3-y^2-2y-2)\right\} , \qquad (6.20')$$

όπου

$$D = (y+2)(y-2)(y+2\cos\theta) . \qquad (6.21)$$

Η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (6.11), λαβαίνοντας υπόψη την (6.20'), είναι

$$\cos\theta = -\frac{y^3-y^2-2y-2}{2(y^2-y-1)} . \qquad (6.22)$$

Προφανώς ισχύει ο περιορισμός

$$\left|\frac{y^3 - y^2 - 2y - 2}{2(y^2 - y - 1)}\right| < 1 \quad \text{με} \quad y \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \ , \tag{6.23}$$

ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον

$$2 < y < 3 \ . \tag{6.24}$$

Έχοντας υπόψη τις (6.5) είναι φανερό ότι οι (6.24) ισχύουν, αν και μόνον αν $x>0$ και $x + \frac{1}{x} < 3$ ή ισοδύναμα, αν $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1$. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με το

$$0 < \omega < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} =: \omega^* \ . \tag{6.25}$$

Αφού λοιπόν οι $x(\omega)$, $y(\omega)$ στα πεδία ορισμού τους και η $\cos\theta$ στο $(0, \pi)$ είναι 1-1 και επι συναρτήσεις, συμπεραίνουμε ότι για ένα συγκεκριμένο $\omega \in (0, \omega^*)$ θα έχουμε ένα μοναδικό $\hat{\theta}$, για το οποίο η καμπύλη της (6.16) θα τέμνει τον οριζόντιο άξονα.

Το ερώτημα, που τίθεται τώρα, είναι το κατά πόσο το καινούργιο σημείο τομής της καμπύλης βρίσκεται μεταξύ εκείνων που προκύπτουν, όταν το $\theta=0$ ή $\theta=\pi$. Απάντηση σ' αυτό θα δώσει ο υπολογισμός του ReF από την (6.20) με $\cos\hat{\theta}$ εκείνο της (6.22). Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}F = \frac{1}{D_2}\{ &(y^2+y-1)(y^3-y^2-2y-2)^2 - (y^3+y^2-2y-4)(y^3-y^2-2y-2) \\ &(y^2-y-1) - 2(y^2+4y+2)(y^2-y-1)^2 \} \ , \end{aligned} \tag{6.26}$$

όπου

$$D_2 = D_1 \cdot 2\,(y^2 - y - 1)^2 \ . \tag{6.26'}$$

Η εντός των αγκίστρων παράσταση μετά από τις πράξεις γίνεται $-2y^6-4y^5+8y^4+16y^3$. Έτσι μετά από τις σχετικές παραγοντοποιήσεις παίρνουμε

$$\mathrm{Re}F = \frac{-2y^3(y-2)(y+2)^2}{2(y-2)(y+2)(y+2)(y^2-y-1)} = -\frac{y^3}{y^2-y-1} =: R(y) \ . \tag{6.27}$$

Παραγωγίζοντας την (6.27) προκύπτει ότι

$$\mathrm{sign}\,(R'(y)) = \mathrm{sign}\,\{-(y^2-2y-3)\} \ . \tag{6.28}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\omega\in(0,\omega^*)$, $x\in\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},1\right) \Leftrightarrow y\in(2,3)$. Έτσι η $R'(y)$ είναι θετική για $y\in(2,3)$, πράγμα που σημαίνει ότι η $R(y)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του y. Όμως αφού η $y = x+\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα στο $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},1\right)$, έπεται ότι η $R(y(x))$ είναι συνολικά φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα. Τέλος αφού η $x = 1-\omega$ είναι φθίνουσα συνάρτηση στο $(0,\omega^*)$, η $R(y(x(\omega)))$ θα είναι αύξουσα συνάρτηση του ω σ' αυτό το διάστημα. Για $\omega=\omega^* \Leftrightarrow y=3$ οπότε $\mathrm{Re}z = -\frac{27}{5}$, ενώ όταν το $\omega\to 0$, τότε $y\to 2$ και συνεπώς $\mathrm{Re}z\to -8$. Έτσι προκύπτει το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 6.2

Για την απεικόνιση του (6.16) του μοναδιαίου κύκλου ισχύουν τα εξής:

i) Αν $\omega\in(\omega^*,2)$, τότε αυτή τέμνει τον οριζόντιο άξονα μόνον αν $\theta=0$ ή $\theta=\pi$ και οι τετμημένες των αντίστοιχων σημείων τομής είναι

$$F(\omega,0)=1 \quad \text{και} \quad F(\omega,\pi)=-\frac{[1+(1-\omega)^2]^3}{(2-\omega)^2\omega^4} \quad . \tag{6.29}$$

ii) Αν $\omega\in(0,\omega^*)$, τότε υπάρχει $\hat{\theta}\in\theta^-$, όπου αυτή τέμνει τον οριζόντιο άξονα, που είναι διαφορετικό των θ=0 και θ=π. Η τετμημένη του σημείου αυτού δίνεται από την (6.27).

Απόδειξη

Οι τύποι της (6.29) προκύπτουν εύκολα θέτοντας θ=0 για τον πρώτο και θ=π για το δεύτερο στην (6.16). ♦

Λήμμα 6.3

Η τετμημένη $\mathrm{Re}F(\omega,\hat{\theta})$ του σημείου τομής της $F(\omega,\theta)$ της (6.16), που αντιστοιχεί στο $\hat{\theta}$ του προηγούμενου λήμματος, ανήκει στο διάστημα $(F(\omega,\pi),0)$, για όλα τα $\omega\in(0,\omega^*)$.

Απόδειξη

Το ότι $\mathrm{Re}F(\omega,\hat{\theta})<0$ προκύπτει από την (6.27) αμέσως. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Re}F(\omega,\hat{\theta})>F(\omega,\pi)$. Από την (6.16) προκύπτει ότι

$$|F(\omega,\theta)|^2=\frac{[1-(1-\omega)^2\cos\theta+(1-\omega)^4]^3}{(2-\omega)^4\omega^6[1+2(1-\omega)\cos\theta+(1-\omega)^2]} \quad . \tag{6.30}$$

Αυτή με τους γνωστούς πλέον μετασχηματισμούς γράφεται

$$|F(\omega,\theta)|^2=\frac{(y^2-2-2\cos\theta)^3}{(y+2)^2(y-2)^3(y+2\cos\theta)} \quad . \tag{6.31}$$

Παραγωγίζοντας την (6.31) ως προς θ, μετά από πράξεις προκύπτει

$$\operatorname{sign}\left(\frac{d}{d\theta}|F(y,\theta)|^2\right) = \operatorname{sign}\,(2(y^2-2-2\cos\theta)^2(y^2+3y+4\cos\theta)\sin\theta). \quad (6.32)$$

Αφού το δεύτερο μέλος της (6.32) είναι θετικό για $\theta\in(0,\pi)$ και $y>2$, προκύπτει ότι το $|F(y,\theta)|$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση του θ. Έτσι $|F(y,\pi)| > |F(y,\hat{\theta})|$ και επομένως $\mathrm{Re}F(\omega,\hat{\theta}) > F(\omega,\pi)$, το οποίο ολοκληρώνει και την απόδειξη του λήμματος. ♦

Θεώρημα 6.4

Έστω A ένας ομαλός G.C.O.-(3,1) πίνακας. Έστω ακόμη B και $\mathcal{S}_\omega$ ο block Jacobi και ο block SSOR επαναληπτικός πίνακας που σχετίζονται με τον A. Αν $\varrho(B^3)=\nu$, τότε

i) Αν οι ιδιοτιμές του B^3 είναι όλες μη-αρνητικές, τότε

$$\varrho(\mathcal{S}_\omega) < 1$$

αν και μόνον αν το ζεύγος $(\nu,\omega)\in R_3^+$, όπου R_3^+ είναι το ανοιχτό ορθογώνιο του (ν,ω)-επιπέδου, με κορυφές τα σημεία (0, 0), (0, 1), (1, 2), (0, 2) μαζί με το ευθύγραμμο τμήμα $\{(\nu,\omega): \nu=0 \text{ και } \omega\in(0,2)\}$.

ii) Αν οι ιδιοτιμές του B^3 είναι όλες μη-θετικές, τότε

$$\varrho(\mathcal{S}_\omega) < 1$$

αν και μόνον αν το ζεύγος $(\nu,\omega)\in R_3^-$, όπου R_3^- είναι η περιοχή του (ν,ω)-επιπέδου, που ορίζεται ως

$$R_3^- := \begin{cases} 0<\omega\le\omega^*\ , & 0\le\nu<\dfrac{y^3}{y^2-y-1} \\[2ex] \omega^*<\omega<2\ -, & 0\le\nu<\dfrac{y^3}{(y+2)(y-2)^2} \end{cases}, \qquad (6.32)$$

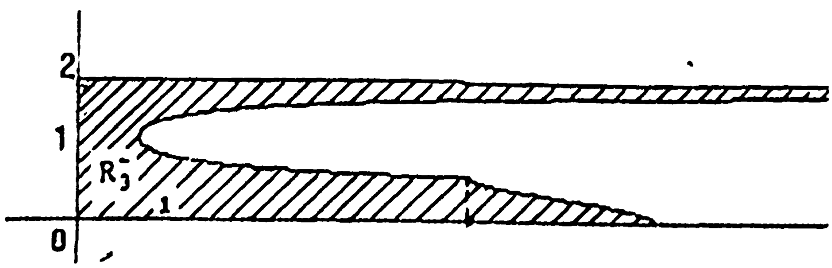
όπου

$$\omega^* = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad y = 1-\omega + \frac{1}{1-\omega} \ . \qquad (6.32')$$

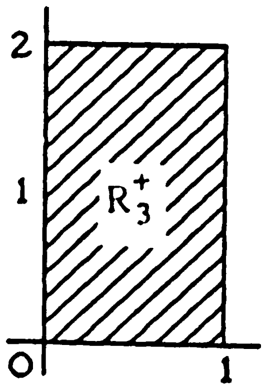
Απόδειξη

Για τη μη-αρνητική περίπτωση είναι προφανές ότι η ακριβής περιοχή σύγκλισης είναι αυτή του θεωρήματος, αφού για όλα τα $\omega \in (0, 2)$ το μόνο σημείο τομής της $F(\omega, \theta)$ και του θετικού οριζόντιου άξονα είναι το σημείο $(1, 0)$. Για τη μη-θετική περίπτωση, αφού για $\omega^* < \omega < 2$, το μόνο σημείο τομής της $F(\omega, \theta)$ και του αρνητικού οριζόντιου άξονα είναι εκείνο που προκύπτει για $\theta=\pi$ με τετμημένη $F(\omega, \pi) = -\frac{y}{(y+2)(y-2)^2}$ και για $0 < \omega \leq \omega^*$ το πλησιέστερο στο σημείο μηδέν είναι εκείνο που προκύπτει για $\theta = \hat{\theta}$ με τετμημένη $F(\omega, \hat{\theta}) = -\frac{y^3}{y^2-y-1}$, η ακριβής περιοχή σύγκλισης θα είναι αυτή της (6.32). ♦

Οι ακριβείς περιοχές σύγκλισης και για τις δύο περιπτώσεις φαίνονται στα παρακάτω γραμμοσκιασμένα τμήματα των σχημάτων 6.1 και 6.2.



Σχ. 6.1



Σχ. 6.2

6.3.2 Για **p=4** η F(ω, θ) έχει τη μορφή

$$F(\omega,\theta) = \frac{[e^{i\theta} - (1-\omega)^2]^4}{(2-\omega)^2\omega^4 e^{i\theta}[e^{i\theta} + (1-\omega)]^2} \quad . \qquad (6.33)$$

Πάλι από τους τύπους (6.7), (6.7) και (6.8) προκύπτει ότι

$$\mathrm{ReF} = \frac{1}{D}\left\{[(1+x^4)\cos\theta - 2x^2](E^2 - G^2) - (1-x^4)\sin\theta\, 2EG\right\} \qquad (6.34)$$

και

$$\mathrm{ImF} = \frac{1}{D}\left\{(1-x^4)\sin\theta\,(E^2 - G^2) + [(1+x^4)\cos\theta - 2x^2](2EG)\right\} \qquad (6.34')$$

με

$$\begin{aligned} D &= (1+x)^2(1-x)^4(1+x^2+2x\cos\theta)^2 \\ E &= (1-x^3) + x(1-x)\cos\theta \qquad\qquad . \qquad (6.35) \\ G &= x(1+x)\sin\theta \end{aligned}$$

Οι εκφράσεις στις (6.34) και (6.34') είναι ισοδύναμες με τις

$$\begin{aligned} \mathrm{ReF} = \frac{1}{D}\Big\{&(4x^2+4x^8)\cos^3\theta + (4x-8x^4-8x^6+4x^9)\cos^2\theta + \\ &+(1-3x^2-8x^3+6x^4+6x^6-8x^7-3x^8+x^{10})\cos\theta + \\ &+(-2x-4x^2+4x^4+12x^5+4x^6-4x^8-2x^9)\Big\} \qquad (6.34\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ImF} = \frac{\sin\theta}{D}\Big\{&(4x^4-4x^8)\cos^2\theta + (4x-8x^4+8x^6-4x^9)\cos\theta + \\ &+(1-x^2-8x^3-6x^4+6x^6-8x^7+x^8-x^{10})\Big\}\ , \qquad (6.34\alpha') \end{aligned}$$

όπου D είναι εκείνο της (6.35).

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $y = x + \frac{1}{x}$ η εξίσωση (6.11) μας δίνει τώρα την ακόλουθη

$$4(y^2 - 1)\cos^2\theta + 4(y^3 - 2y - 2)\cos\theta + y^4 - 4y^2 - 8y - 4 = 0 \ . \tag{6.36}$$

Οι ρίζες της (6.36) είναι

$$\rho_1 := \frac{-y^2 + 2y + 2}{2(y-1)} \ , \qquad \rho_2 := \frac{-y^2 - 2y - 2}{2(y+1)} \ . \tag{6.37}$$

Αφού καμία απ' αυτές δεν ανήκει στο διάστημα $(-1, 1)$ για $y<-2$, συμπεραίνουμε ότι τα μόνα σημεία τομής της καμπύλης μας με τον οριζόντιο άξονα είναι αυτά που παίρνουμε για $\theta=0$ και για $\theta=\pi$ για όλα τα $\omega \in (1, 2)$. Για $y > 2 \Leftrightarrow \omega \in (0, 1)$ η ρίζα ρ_1 βρίσκεται στο διάστημα $(-1, 1)$, αν και μόνον αν $y \in (2, 4)$, το οποίο ισοδυναμεί με

$$0 < \omega < -1 + \sqrt{3} =: \omega^* \ . \tag{6.38}$$

Έτσι η καμπύλη μας έχει κι άλλα σημεία τομής με τον οριζόντιο άξονα, όπως και στην περίπτωση $p=3$, για $\theta=\hat{\theta}$ με $\hat{\theta} = \arccos \rho_1$.

Πάλι τίθεται το ερώτημα ως προς το πού βρίσκεται το σημείο τομής. Ο υπολογισμός του ReF θα δώσει απάντηση στο ερώτημά μας. Για το σκοπό αυτό η (6.34α) γίνεται

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}F = \frac{1}{D_1} \Big\{ & 4(y^3 - 3y)\cos^3\theta + 4(y^4 - 4y^2 - 2y + 2)\cos^2\theta + \\ & + (y^5 - 8y^3 - 8y^2 + 20y + 16)\cos\theta - 2(y^4 + 2y^3 - 4y^2 - 8y - 4) \Big\} \ , \end{aligned} \tag{6.39}$$

όπου

$$D_1 = (y+2)(y-2)^2(y+2\cos\theta)^2 \ . \tag{6.39'}$$

Θέτοντας στις δυο προηγούμενες σχέσεις, στη θέση του $\cos\theta$, το ϱ_1 της (6.37) προκύπτει τελικά

$$\mathrm{Re}F = -\frac{2y^2(y-2)^2(y+2)^3}{2(y-2)^2(y+2)^3(y-1)} = -\frac{y^2}{y-1} =: \mathcal{S}(y)\ . \tag{6.40}$$

Είναι φανερό ότι το ReF στην προκειμένη περίπτωση είναι αρνητικό, δηλαδή η καμπύλη μας τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα. Επιπλέον, το σημείο τομής βρίσκεται μεταξύ του μηδέν και του σημείου, όπου η καμπύλη τέμνει τον άξονα για $\theta=\pi$, όπως αυτό θα φανεί από τα επόμενα λήμματα, τα οποία συνοψίζουν τη μέχρι τώρα ανάλυσή μας.

Λήμμα 6.5

Για την απεικόνιση της (6.33) του μοναδιαίου κύκλου ισχύουν τα εξής:

i) Αν $\omega\in(\omega^*, 2)$, αυτή τέμνει τον οριζόντιο άξονα μόνον αν $\theta=0$ ή $\theta=\pi$ και οι τετμημένες των σημείων τομής είναι

$$F(\omega, 0) = 1 \qquad \text{και} \qquad F(\omega,\pi) = -\frac{[1+(1-\omega)^2]^4}{(2-\omega)^2\omega^6}\ . \tag{6.41}$$

ii) Αν $\omega\in(0, \omega^*)$, τότε υπάρχει $\hat{\theta}\in\theta^-$, όπου αυτή τέμνει τον οριζόντιο άξονα, διαφορετικό από το 0 και π. Η τετμημένη του σημείου αυτού δίνεται από την (6.40).

Απόδειξη

Το μόνο που μένει προς απόδειξη είναι οι τύποι (6.41). Όμως αυτοί προκύπτουν αμέσως από την (6.33) θέτοντας $\theta=0$ και π αντίστοιχα.

Λ ή μ μ α 6.5

Για p=4, το ReF(ω, θ), της (6.33) βρίσκεται στο εσωτερικό του διαστήματος (ReF(ω, π), 0).

Απόδειξη

Θέτοντας $x=1-\omega$ και $y=x+\frac{1}{x}$ στην (6.53) και παραγωγίζοντας ως προς θ το μέτρο της F(ω, θ), προκύπτει ότι το πρόσημο της $\frac{d}{d\theta}|F(\omega,\ \theta)|$ είναι το ίδιο με το πρόσημο της ποσότητας

$$S(y,\theta) = 2\sin\theta(y^2-2-2\cos\theta)\,(y^2+2y-2+2\cos\theta)\ . \qquad (6.42)$$

Όμως η ποσότητα S(y, θ) είναι μια θετική ποσότητα, αφού το $\omega\in(0,\omega^*)$ ισοδυναμεί με $y\in(2,4)$ και $\sin\theta>0$ για $\theta\in(0,\pi)$. Έτσι η συνάρτηση του μέτρου $|F(\omega,\theta)|$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς θ, πράγμα που σημαίνει ότι $ReF(\omega,\pi) = -|F(\omega,\pi)| < -|F(\omega,\hat{\theta})| = Re(\omega,\hat{\theta})$. ♦

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα, που μας δίνει την ακριβή περιοχή σύγκλισης για την SSOR μέθοδο, όταν p=4.

Θ ε ώ ρ η μ α 6.7

Έστω A ένας ομαλός G.C.O.-(4,1) πίνακας. Έστω ακόμη ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 6.4 ισχύουν. Τότε

i) Αν οι ιδιοτιμές του B^4 είναι όλες μη-αρνητικές τότε

$$\varrho(\mathcal{S}_\omega) < 1$$

αν και μόνον αν το ζεύγος $(\nu^4, \omega) \in R_4^+$, όπου R_4^+ είναι το ανοιχτό ορθογώνιο, του (ν^4, ω)-επιπέδου, με κορυφές τα σημεία (0,0), (0,1), (1,2), (2,0) μαζί με το ευθύγραμμο τμήμα $\{(\nu^3, \omega)\colon \nu^3 = 0$ και $\omega \in (0, 2)\}$.

ii) Αν οι ιδιοτιμές του B^4 είναι όλες μη-θετικές,

$$\varrho(\mathcal{S}_\omega) < 1$$

αν και μόνον αν το ζεύγος $(\nu^4, \omega) \in R_4^-$, όπου R_4^- είναι η περιοχή του (ν^4, ω)- επιπέδου, που ορίζεται ως

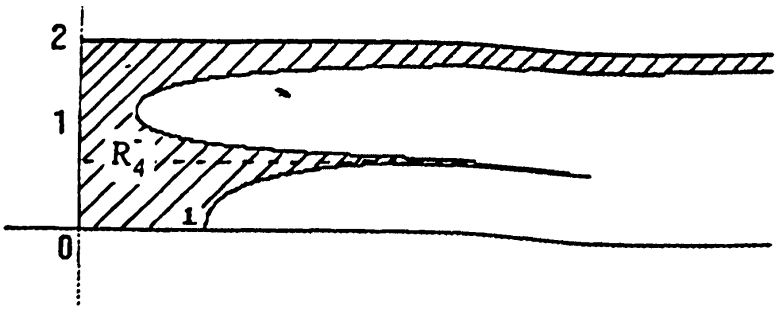
$$R_4^- := \begin{cases} 0 < \omega \leq \omega^* \ , & 0 \leq \nu^3 < \dfrac{y^2}{y+1} \\[2ex] \omega^* < \omega < 2 \ , & 0 \leq \nu^3 < \dfrac{y^4}{(y+2)(y-2)^3} \end{cases} \tag{6.43}$$

όπου $\omega^* = -1+\sqrt{3}$ και $y = 1-\omega+\dfrac{1}{1-\omega}$.

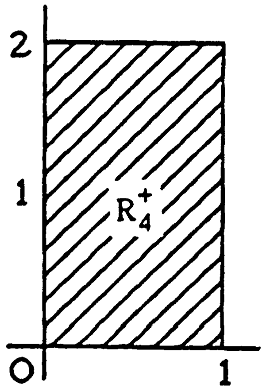
Απόδειξη

Αυτή προκύπτει από τη μέχρι τώρα ανάλυση και είναι παρόμοια με την απόδειξη του θεωρήματος 6.4 . ♦

Οι συνοριακές καμπύλες $\sigma_1(y) = \dfrac{y^2}{y+1}$ και $\sigma_2(y) = \dfrac{y^4}{(y+2)(y-3)^3}$ μπορούν εύκολα να μελετηθούν. Οι ακριβείς περιοχές σύγκλισης για τη μη-θετική και μη-αρνητική περίπτωση φαίνονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα των σχημάτων 6.3 και 6.4 αντίστοιχα.



Σχ. 6.3



Σχ. 6.4

6.4 Η περίπτωση p=5

Στην παρούσα περίπτωση από την (6.11) προκύπτει

$$H(t) = \frac{1}{D}\left\{A_0(y)t^3 + A_1(y)t^2 + A_2(y)t + A_3(y)\right\}, \qquad (6.44)$$

όπου

$$D = (y+2)(y-2)^2(y+2\cos\theta)^3$$

$$A_0(y) = 8(y^3 - y^2 - 2y + 1)$$

$$A_1(y) = 4(3y^4 - 3y^3 - 9y^2 + y + 8) \qquad . \qquad (6.44')$$

$$A_2(y) = 2(3y^5 - 3y^4 - 14y^3 - 4y^2 + 28y + 20)$$

$$A_3(y) = y^6 - y^5 - 8y^4 - 8y^3 + 20y^2 + 36y + 16$$

Αφού $t := \cos\theta$, προφανώς θα έχουμε $t \in [-1, 1]$. Έτσι οι ρίζες της $H(t)$, που θα είναι δεκτές, θα είναι εκείνες οι οποίες βρίσκονται σ' αυτό το διάστημα και θα πληρούν την

$$K_5(t; y) := A_0(y)t^3 + A_1(y)t^2 + A_2(y)t + A_3(y) = 0 \quad . \qquad (6.45)$$

Παρατηρούμε ότι

$$K_5(1;\, y) = (y-2)^2\,(y+2)^3(y+3) \tag{6.46}$$

και

$$K_5(-1;\, y) = y^4(y-2)\,(y-5)\ . \tag{6.47}$$

Αφού, από τις (6.5), το $y \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, συμπεραίνουμε ότι για $y=-3$ το $t=1$ είναι δεκτή ρίζα της (6.45) ενώ για $y=5$ το $t=-1$ είναι επίσης δεκτή ρίζα της ίδιας εξίσωσης. Στη συνέχεια εξετάζουμε, εάν υπάρχουν ρίζες στο επιθυμητό διάστημα $[-1, 1]$, στα τέσσερα υποδιαστήματα, που οι δυο παραπάνω τιμές του y, χωρίζουν το πεδίο ορισμού του. Πριν όμως αρχίσουμε τη μελέτη μας, δίνουμε τον πίνακα 6.1, στον οποίο φαίνεται η αλλαγή του προσήμου τόσο της $K_5(1;\, y)$ όσο και της $K_5(-1;\, y)$.

y	$-\infty$		-3		-2		2		5		$+\infty$
$K_5(-1;\, y)$		+		+				−	○	+	
$K_5(1;\, y)$		+	○	−				+		+	

Πίνακας 6.1

Λήμμα 6.8

Έστω η εξίσωση (6.45)

i) Αν $y \in (-3, 2)$, η εξίσωση αυτή έχει μία και μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

ii) Αν $y \in (-\infty, -3)$, η παραπάνω εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Απόδειξη

Έστω ένα σταθερό $y \in (-\infty, -2)$. Παίρνοντας την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο ως προς t της $K_5(t; y)$ έχουμε αντίστοιχα

$$\frac{d}{dt} K_5(t; y) = 3A_o(y)t^2 + 2A_1(y)t + A_2(y) \tag{6.48}$$

και

$$\frac{d^2}{dt^2} K_5(t; y) = 6A_o(y)t + 2A_1(y) \tag{6.49}$$

με $A_o(y)$, $A_1(y)$, $A_2(y)$ εκείνα της (6.44').

Αφού $A_o(y) = y^3 - y^2 - 2y + 1 = y(y^2 - 2) - y^2 + 1 < 0$, $\forall\ y \in (-\infty, -2)$, συμπεραίνουμε ότι η $\frac{d^2}{dt^2} K_5(t; y)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Από την (6.49) μπορούμε να πάρουμε

$$\frac{d^2}{dt^2} K_5(t; y)\Big|_{t=1} = 8(y+2)(3y^3 - 3y^2 - 9y + 7) \tag{6.50}$$

και

$$\frac{d^2}{dt^2} K_5(t; y)\Big|_{t=-1} = 8(3y^4 - 9y^3 - 3y^2 + 13y + 2)\ . \tag{6.51}$$

Εύκολα προκύπτει, από την (6.50), ότι

$$\frac{d^2}{dt^2} K_5(t; y)\Big|_{t=1} > 0\ . \tag{6.50'}$$

Έστω $P_1(y)$ το εντός της παρένθεσης του δεύτερου μέλους της (6.51) πολυώνυμο. Για το Θεώρημα Sturm έχουμε τον επόμενο πίνακα:

$\ell im_{x \to -\infty} f_i(x)$	$f_i(-2)$
$+\infty$	84
$-\infty$	- 179
$+\infty$	39.06
$-\infty$	- 30.69
6.93	6.93

Είναι φανερό ότι το $P_1(y)$ δεν έχει καμία ρίζα στο διάστημα $(-\infty, -2)$ και επιπλέον είναι θετικό, πράγμα που σημαίνει ότι

$$\frac{d^2}{dt^2} K_5(t; y)\Big|_{t=-1} > 0 \,. \qquad (6.51')$$

Έτσι έχουμε ότι για όλα τα $y \in (-\infty, -2)$ και $t \in (-1, 1)$ ισχύει $\frac{d^2}{dt^2} K_5(t; y) > 0$, συνεπώς η $\frac{d}{dt} K_5(t; y)$ είναι γνησίως αύξουσα. Από την (6.48) μπορούμε να πάρουμε

$$\frac{d}{dt} K_5(t; y)\Big|_{t=1} = 2(y+2)^2(3y^3 - 3y^2 - 14y + 16) \qquad (6.52)$$

και

$$\frac{d}{dt} K_5(t; y)\Big|_{t=-1} = 2y^2(3y^3 - 15y^2 + 10y + 20) \,. \qquad (6.53)$$

Η τελευταία μας δίνει αμέσως ότι

$$\frac{d}{dt} K_5(t; y)\Big|_{t=-1} < 0 \,, \quad \forall \; y < -2 \,. \qquad (6.53')$$

Για το εντός της παρένθεσης πολυώνυμο της (6.52) μπορούμε να σχηματίσουμε τον επόμενο πίνακα:

$\ell im_{x \to -\infty} f_i(x)$	$f_i(-3)$	$f_i(-2)$
$-\infty$	-50	8
$+\infty$	85	34
$-\infty$	-44.44	-34.44
3.89	3.89	3.89

Φαίνεται λοιπόν από το Θεώρημα του Sturm ότι η $\frac{d}{dt}K_5\Big|_{t=1}$ έχει μια ρίζα στο (- 3, - 2), έστω την $y=y_o$ και ισχύει

$$\frac{d}{dt}K_5\Big|_{t=1}<0,\ \forall\ y\in(-\infty, y_o)\ \text{και}\ \frac{d}{dt}K_5\Big|_{t=1}>0,\ \forall\ y\in(y_o, -2). \quad (6.52')$$

Λόγω του μονότονου της $\frac{d}{dt}K_5(t, y)$ και των δύο τελευταίων σχέσεων (6.53') και (6.52') μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής: Αν $y\in(-\infty, -3)$, τότε $\frac{d}{dt}K_5(t, y) < 0$ για όλα τα $t\in(-1, 1)$ και αφού $K_5(1; y)$ και $K_5(-1; y) > 0$ (βλ. πίνακα 6.1), δεν υπάρχει ρίζα σ' αυτό το διάστημα. Αν $y\in(-3, y_o)$, πάλι η $K_5(t, y)$ είναι φθίνουσα για όλα τα $t\in(-1, 1)$, όμως λόγω του ετεροσήμου των $K_5(1; y)$ και $K_5(1; y)$ έχουμε μία και μοναδική ρίζα σ' αυτό το διάστημα. Τέλος αν $y\in(y_o, -2)$, η $K_5(t; y)$ είναι αρχικά φθίνουσα και στη συνέχεια αύξουσα συνάρτηση του t, οπότε και πάλι λόγω του ετεροσήμου αυτής στα άκρα συμπεραίνουμε ότι έχουμε μία και μοναδική ρίζα στο (- 1, 1). ♦

Λήμμα 6.9

Έστω η εξίσωση (6.45).

i) Αν $y\in(5, \infty)$, η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα στο διάστημα αυτό.

ii) Αν $y\in(2, 5)$, η εξίσωση αυτή έχει μία ή τρεις ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

Απόδειξη

Γράφουμε το πολυώνυμο $K_5(t; y)$ της (6.45) με βάση $\{1, (t+1), (t+1)^2, (t+1)^3\}$. Έτσι έχουμε

$$K_5(t; y) = B_0(y)(t+1)^3 + B_1(y)(t+1)^2 + B_2(y)(t+1) + B_3(y) \,, \quad (6.54)$$

όπου

$$\begin{aligned} B_0(y) &= 8(y^3 - y^2 - 2y + 1) \\ B_1(y) &= 4(3y^4 - 9y^3 - 3y^2 + 13y + 2) \\ B_2(y) &= 2y^2(3y^3 - 15y^2 + 10y + 20) \\ B_3(y) &= y^4(y^2 - 7y + 10) \end{aligned} \quad . \quad (6.54')$$

i) Για $y>5$ είναι αμέσως φανερό ότι $B_i(y)>0 \mid i=0(1)3$. Έτσι το πολυώνυμο $K_5(t; y)$ δεν έχει καμία ρίζα ως προς $t+1 \geq 0$ ή $t \geq -1$ και επομένως στο διάστημα $[-1, 1]$.

ii) Για $y\in(2, 5)$ φαίνεται αμέσως ότι $B_0(y) > 0$, ενώ $B_3(y) < 0$. Για τ' άλλα δύο πολυώνυμα μπορούμε να σχηματίσουμε τους δύο παρακάτω πίνακες της ακολουθίας Sturm με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

$B_1(2)$	$B_1(5)$
- 8	742
- 11	808
4.5625	116.5
19.8792	57.8090
6.9259	6.9259

$B_2(2)$	$B_2(5)$
4	70
- 14	85
- 5.5556	24.4444
7.8889	7.8889

Από το θεώρημα του Sturm προκύπτει ότι το $B_1(y)$ έχει μία ρίζα ϱ_1 στο διάστημα (2, 5), την οποία βρίσκουμε αριθμητικά, $\varrho_1 \approx 2.7626$, ενώ το $B_2(y)$ έχει δύο ρίζες ϱ_2 και ϱ_3 στο διάστημα (2,5), τις οποίες υπολογίζουμε κι αυτές αριθμητικά $\varrho_2 \approx 2.3134$ και $\varrho_3 \approx 3.5081$. Έτσι προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολής του προσήμου των συντελεστών του $K_5(t; y)$

	2		P_2		P_1		P_3		5
$B_0(y)$		+		+		+		+	
$B_1(y)$		-		-	0	+		+	
$B_2(y)$		+	0	-		-	0	+	
$B_3(y)$		-		-		-		-	

Από τον πίνακα αυτόν και από τον κανόνα μεταβολής του προσήμου του Descartes συμπεραίνουμε ότι· το πολυώνυμο $K_5(t; y)$ για $y \in (\varrho, 5)$ έχει ακριβώς μια ρίζα ως προς $t+1 (> 0$ ή $t > -1)$, ενώ για $y \in (2, \varrho_2)$ το $K_5(t; y)$ έχει μία ή τρεις ρίζες ως προς $t+1$ (> 0 ή $t > -1$).

Τώρα γράφουμε το πολυώνυμο $K_5(t; y)$ με βάση $\{1, (t-1), (t-1)^2, (t-1)^3\}$, οπότε έχουμε

$$K_5(t; y) = C_0(y)(t-1)^3 + C_1(y)(t-1)^2 + C_2(y)(t-1) + C_3(y) \, , \quad (6.55)$$

όπου

$$
\begin{aligned}
C_0(y) &= 8(y^3 - y^2 - 2y + 1)\\
C_1(y) &= 4(3y^4 + 3y^3 - 15y^2 - 11y + 14)\\
C_2(y) &= 2(y-2)(3y^4 + 15y^3 + 16y^2 - 20y - 32)\\
C_3(y) &= (y-2)^2(y^4 + 9y^3 + 30y^2 + 44y + 24)
\end{aligned}
\quad . \qquad (6.55')
$$

Γίνεται εύκολα φανερό, από τις (6.55'), ότι οι συντελεστές του $K_5(t;\, y)$ είναι θετικοί αριθμοί $\forall\ y \in (2, 5)$. Έτσι πάλι από τον κανόνα του Descartes συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο αυτό δεν έχει ρίζες ως προς $t-1$ (> 0 ή $t>1$) για $y \in (2, 5)$. Συνεπώς οι ρίζες του $K_5(t;\, y)$, μία ή τρεις όπως βρέθηκαν παραπάνω, βρίσκονται στο διάστημα $[-1, 1]$. ♦

Λ ή μ μ α 6.10

Το μέτρο της (6.4), $|F(y, \theta)|$, με $y = 1 - \omega + \dfrac{1}{1-\omega}$, γιά ένα σταθερό y, είναι

i) Αύξουσα συνάρτηση του θ για $y \in (2, 5)$

ii) Φθίνουσα συνάρτηση του θ για $y \in (-3, -2)$ αν $\cos\theta > -\dfrac{3y+5y-6}{4}$ ή αύξουσα συνάρτηση, αν $\cos\theta < -\dfrac{3y+5y-6}{4}$.

Απόδειξη

Από την (6.4) προκύπτει

$$|F(y, \theta)|^2 = \frac{(M^2)^5}{A(m^2)^3}\ , \qquad (6.56)$$

όπου

$$M^2 = |e^{i\theta} - (1-\omega)^2|^2\ ,\ \mu^2 = |e^{i\theta} + (1-\omega)|^2 \ \text{και}\ A = (2-\omega)^4\omega^{10}\ . \qquad (6.57)$$

Παραγωγίζοντας την (6.56) ως προς θ έχουμε

$$\frac{d}{d\theta}|F(y,\theta)|^2 \quad 5(M^2)'\mu^2 - 3M^2(\mu^2)' \ , \qquad (6.58)$$

όπου το σύμβολο "   " σημαίνει ότι οι δύο εκφράσεις εκατέρωθεν αυτού έχουν το ίδιο πρόσημο. Από τις (6.57) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &M^2 = (1-\omega)^2(y^2-2-2\cos\theta)\ , \quad \mu^2 = (1-\omega)(y+2\cos\theta) \\ &(M^2)' = 2(1-\omega)^2\sin\theta \ \ \text{και} \ \ (\mu^2)' = -2(1-\omega)\sin\theta \end{aligned} \ . \qquad (6.59)$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{d}{d\theta}|F(y,\theta)|^2 \quad 2(1-\omega)^3(3y^2+5y-6+4\cos\theta) \ . \qquad (6.60)$$

i) Αν $y\in(2,5)$, τότε $\omega\in(0,1)$ και συνεπώς η $|F(y,\theta)|^2$ είναι αύξουσα επομένως και η $|F(y,\theta)|$.

ii) Αν $y\in(-3,-2)$, τότε $\omega\in(1,2)$ και από την (6.60) προκύπτουν τα συμπεράσματα του λήμματος. ♦

Λήμμα 6.11

Έστω η απεικόνιση (6.4) του μοναδιαίου κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο με p=5 και έστω y εκείνο της (6.5). Τότε

i) Αν $\omega\in\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{2},1\right] \cup \left(1,\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$, η καμπύλη της (6.4) τέμνει τον πραγματικό άξονα μόνον για θ=0 ή θ=π και μάλιστα είναι

$$\mathrm{Re}F(y,0) = 1 \quad \text{και} \quad \mathrm{Re}F(y,\pi) = -\frac{y^5}{(y+2)(y-2)^4} \ . \qquad (6.61)$$

ii) Αν $\omega \in (\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2)$, υπάρχει μοναδικό $\theta = \hat{\theta}$ διαφορετικό του 0 και του π, για το οποίο η καμπύλη της (6.2) τέμνει τον πραγματικό άξονα έτσι ώστε:

$$0 < \mathrm{Re}F(y, \hat{\theta}) =: r(y, \hat{\theta}) < 1 \ . \tag{6.62}$$

ii) Αν $\omega \in (0, \frac{-3+\sqrt{21}}{-2})$, υπάρχει $\theta = \hat{\theta}$ διαφορετικό από το 0 και το π, για το οποίο η καμπύλη της (6.4) τέμνει τον πραγματικό άξονα έτσι ώστε

$$-\frac{y}{(y+2)(y-2)^4} < \mathrm{Re}F(y, \hat{\theta}) =: r(y, \hat{\theta}) < 0 \ . \tag{6.63}$$

Απόδειξη

i) Από τα δύο προηγούμενα λήμματα προκύπτει ότι, όταν $y \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$, η εξίσωση (6.45) δεν έχει καμία ρίζα στο $[-1, 1]$. Έτσι η καμπύλη (6.4) δεν έχει άλλα σημεία τομής με τον οριζόντιο άξονα εκτός εκείνων που προκύπτουν για $\theta=0$ ή $\theta=\pi$, όταν το $\omega \in (0, \frac{-3+\sqrt{21}}{-2}) \cup (\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2)$, αφού αυτό συνδέεται με το y με τη σχέση $y = 1-\omega + \frac{1}{1-\omega}$.

ii) Όταν $\omega \in (\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2)$, τότε $y \in (-3, -2)$. Από το Λήμμα 6.8 υπάρχει μοναδικό $\theta = \hat{\theta}$ διαφορετικό των 0 και π, για το οποίο $\mathrm{Im}F(\omega; \theta)=0$. Έτσι η καμπύλη μας τέμνει τον οριζόντιο άξονα και σε άλλο σημείο εκτός εκείνων με τετμημένη $\mathrm{Re}F(y, 0)=1$ και $\mathrm{Re}F(y, \pi) = -y^5/[(y+2)(y-2)^2]$. Το ότι $\mathrm{Re}F(y, \hat{\theta}) \in (0, 1)$ αποδεικνύεται ως εξής: Παραγωγίζοντας την (6.4) ως προς θ για ένα σταθερό-ω, θέτοντας $\lambda = e^{i\theta}$, προκύπτει:

$$\frac{d}{d\theta}F(\omega,\theta) = \{(\lambda' [\lambda - (1-\omega)^2]^4 [5\lambda(\lambda+1-\omega) - (\lambda-(1-\omega)^2)(\lambda+1-\omega) -$$
$$- 3\lambda(\lambda-(1-\omega)^2)]\} / \{\lambda^6(\lambda+1-\omega)^4\} . \qquad (6.64)$$

Από αυτήν έχουμε ότι

$$\frac{d}{d\theta}\mathrm{Im}F(\omega,\theta)\Big|_{\theta=o} = \mathrm{Im}\frac{d}{d\theta}F(\omega,\theta)\Big|_{\theta=o} \sim$$

$$\sim 5(2-\omega) - [1-(1-\omega)](2-\omega) - 3[1-(1-\omega)^2] = (1-\omega)(2-\omega)(y+3) . \qquad (6.65)$$

Αφού ω(1, 2), από την (6.65), συνεπάγεται ότι

$$\frac{d}{d\theta}\mathrm{Im}F(\omega,\theta)\Big|_{\theta=o} > 0, \quad \text{αν} \quad y < -3 \qquad (6.66)$$

και

$$\frac{d}{d\theta}\mathrm{Im}F(\omega,\theta)\Big|_{\theta=o} < 0, \quad \text{αν} \quad y > -3 \qquad (6.66')$$

Από την (6.66) και το i) του Λήμματος 6.11 προκύπτει ότι ολόκληρη η καμπύλη μας για $\theta \in (0, \pi)$ βρίσκεται στο $\mathrm{Im}z > 0$ ημιεπίπεδο για $y \leq -3$. Για $y \in (-3, -3+\varepsilon)$, λόγω της (6.66') και της συνέχειας, το σημείο τομής αυτής και του πραγματικού άξονα έχει θετική τετμημένη. Η τετμημένη αυτή συνεχίζει να παραμένει θετική για όλα τα $y \in (-3, -2)$, αφού διαφορετικά το σημείο τομής της καμπύλης και του πραγματικού άξονα θα έπρεπε να γίνει το (0, 0) και αυτό είναι άτοπο από το γεγονός ότι $\lambda \neq (1-\omega)^2$.

Από το Λήμμα 6.10 προκύπτει ότι $|F(y, \theta)|$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του θ για όλα τα y $\left(-3, \frac{-5-\sqrt{145}}{6}\right)$, αφού τότε έχουμε $-1 > -\frac{(3y+5y-6)}{4}$. Έτσι το σημείο τομής έχει τετμημένη στο διάστημα (0, 1), αφού η καμπύλη μας ξεκινά από το σημείο (1, 0). Για $y \in (\frac{-5-\sqrt{145}}{6}, -2)$ θα έχουμε κάποιο $\bar{\theta}$ με $\cos\bar{\theta} = -(3y +5y -6)/4$. Προφανώς για $\theta = \bar{\theta}$ το $|F(y, \bar{\theta})|$ γίνεται ελάχιστο. Από την (6.7') έχουμε όμως ότι

$$\mathrm{Im}F(y, \bar{\theta}) = \frac{1}{D}\{(1- x^4)\sin\theta\,[E^3-3EG^2] + [(1+x^4)\cos\theta- 2x^2][3E^2G- G^3] =$$

$$= \frac{(x+1)\sin\theta}{(1- x)(y+2)(y- 2)^2y^3}\{ y(y- 2)(y+1+\cos\bar{\theta})\,[(y- 2)(y+1+\cos\bar{\theta})^2 -$$

$$- 3(y+2)\sin^2\bar{\theta}] + [(y^2- 2)\cos\theta - 2][3(y-2)(y+1+\cos\theta)^2 - (y+2)\sin^2\theta]\} =$$

$$= \frac{(x+1)\sin\bar{\theta}}{(1-x)(y+2)(y-2)^2y^3}(y+2)^3(-27y^6+108y^5-108y^4-135y^3+420y^2-425y+175), \tag{6.67}$$

όπου $x = 1- \omega$ και $y = x + \frac{1}{x}$.

Οι ακολουθίες του Sturm $f_i(-3)$ και $f_i(-2)$, όπου $f_o(y)$ το εντός της τελευταίας παρένθεσης πολυώνυμο στην (6.67), δίνονται στον επόμενο πίνακα με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

$f_i(-3)$	$f_i(-2)$
- 4580	- 3127
88180	13555
- 8087.78	- 2897.44
5153.91	- 3368.67
21018312	13658844
0.41	0.32
- 6572.78	- 6572.78

Γίνεται λοιπόν φανερό από το Θεώρημα του Sturm ότι το πολυώνυμο αυτό (της τελευταίας παρένθεσης της σχέσης (6.67)) δεν έχει ρίζες στο (-3,- 2) και επομένως έχει το πρόσημο των άκρων του, δηλαδή είναι αρνητική ποσότητα. Έτσι λαβαίνοντας υπόψη ότι οι ποσότητες $1+x$, $1-x$, $(y-2)^2$ και $\sin\bar{\theta}$ είναι θετικές, ενώ οι ποσότητες $y+2$, y και $(y+3)^3$ είναι αρνητικές, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\operatorname{Im}F(y,\bar{\theta}) > 0 \ . \tag{6.68}$$

Αφού όμως η καμπύλη μας ξεκινά με $\operatorname{Im}F(y, 0) = 0$, λόγω της (6.66'), συνεχίζει με $\operatorname{Im}F(y, \theta) < 0$ και καταλήγει στο σημείο με το ελάχιστο μέτρο $(\theta = \bar{\theta})$ με $\operatorname{Im}F(y,\bar{\theta}) > 0$, συνεπάγεται ότι αυτή τέμνει τον πραγματικό άξονα σε σημείο με τετμημένη μικρότερη του 1 και έτσι το ii) του λήμματος αποδείχθηκε.

iii) Από την (6.4) προκύπτει ότι

$$\frac{d}{d\theta}\operatorname{Im}F(\omega,\theta)\Big|_{\theta=\pi} = \operatorname{Im}\frac{d}{d\theta}F(\omega,\theta)\Big|_{\theta=\pi} \sim$$

$$-\omega^3-\omega^2+9\omega-6 = (2-\omega)(\omega^2+3\omega-3) \ . \tag{6.68}$$

Για $\omega\in(0, 1)$ ή ισοδύναμα $y\in(2, \infty)$, από την (6.68) προκύπτει ότι

$$\frac{d}{d\theta}\operatorname{Im}F(\omega,\theta)\Big|_{\theta=\pi} > 0 \ , \quad y\in(2,5) \tag{6.69}$$

και

$$\frac{d}{d\theta}\operatorname{Im}F(\omega,\theta)\Big|_{\theta=\pi} < 0 \ , \quad y\in(5,+\infty) \ . \tag{6.69'}$$

Από την (6.69') και το i) του Λήμματος 6.11 συνεπάγεται ότι ολόκληρη η καμπύλη βρίσκεται στο $\operatorname{Im}z > 0$ ημιεπίπεδο για $y \geq 5$. Για $y\in(5-\varepsilon, 5)$, λόγω της (6.69) και της συνέχειας, το σημείο τομής αυτής με τον πραγματικό άξονα έχει αρνητική τετμημένη. Η τετμημένη αυτή συνεχίζει να παραμένει αρνητική για όλα τα $y \in (2,5)$, αφού διαφορετικά το σημείο τομής της καμπύλης και του πραγματικού άξονα θα έπρεπε να γίνει το (0, 0). Αυτό όμως είναι άτοπο από το γεγονός ότι $\lambda \neq (1-\omega)^2$. Από το i) του Λήμματος 6.10 η τετμημένη του σημείου αυτού θα είναι μεγαλύτερη του $F(\omega, \pi)$ και επομένως θα ισχύει η (6.3). ♦

Η μέχρι τώρα ανάλυση μας δίνει το επόμενο θεώρημα, το οποίο περιγράφει την ακριβή περιοχή σύγκλισης της SSOR μεθόδου για p=5.

Θεώρημα 6.12

Έστω Α ένας ομαλός G.C.O.-(5, 1) πίνακας. Έστω ακόμη ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 6.4 ισχύουν. Τότε

i) Αν οι ιδιοτιμές του B^5 είναι όλες μη-αρνητικές, τότε

$$\varrho(\mathcal{S}\omega) < 1$$

αν και μόνον αν το ζεύγος $(\nu^5, \omega) \in R_5^+$, όπου R_5^+ ορίζεται η παρακάτω περιοχή του (ν^5, ω)-επιπέδου.

$$R_5^+ = \begin{cases} 0 < \omega < \omega^{**} & , \ 0 \le \nu^5 < 1 \\ \\ \omega^{**} \le \omega < 2 & , \ 0 \le \nu^5 < r(y, \hat{\theta}) \end{cases} \qquad (6.70)$$

ii) Αν οι ιδιοτιμές του B^5 είναι όλες μη-θετικές, τότε

$$\varrho(\mathcal{S}\omega) < 1$$

αν και μόνον αν το ζεύγος $(\nu^5, \omega) \in R_5^-$, όπου R_5^- ορίζεται στο (ν^5, ω)-επίπεδο ως εξής

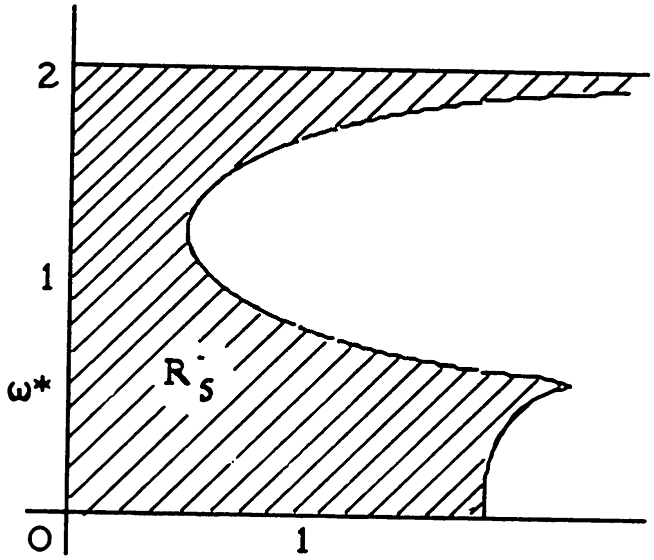
$$R_5^- = \begin{cases} 0 < \omega < \omega^* & , \; 0 \le v^5 < -\tilde{r}(y, \hat{\theta}) \\ \omega^* < \omega < 2 & , \; 0 \le v^5 < \dfrac{y^5}{(y+2)(y-2)^4} \end{cases} \quad , \quad (6.71)$$

όπου $\omega^* = \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$, $\omega^{**} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$, $y = 1-\omega + \dfrac{1}{1-\omega}$, $r(y, \hat{\hat{\theta}})$, εκείνο της (6.62) και $\tilde{r}(y, \hat{\theta}) = \max\limits_{\hat{\theta}} r(y, \hat{\theta})$ με $r(y, \hat{\theta})$ εκείνο της (6.63).

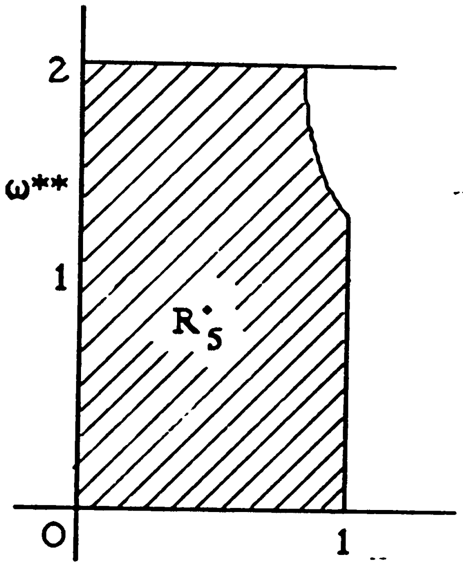
Απόδειξη

Από το Λήμμα 6.11 έχουμε (i) Αν $\omega \in [\frac{-3+\sqrt{21}}{2}, 1] \cup [1, \frac{5-\sqrt{5}}{2}]$, τότε τα πλησιέστερα στο μηδέν σημεία τομής της καμπύλης με τον πραγματικό άξονα είναι αυτά της (6.61). Για $\omega \in (0, \frac{-3+\sqrt{21}}{2})$ ή ισοδύναμα $y \in (2, 5)$, από το Λήμμα 6.9, η καμπύλη έχει ένα ή τρία σημεία τομής με τον οριζόντιο άξονα. Αφού η $|F(y, \theta)|$ είναι αύξουσα ως προς θ, κανένα απ' αυτά τα σημεία δε θα είναι μεταξύ 0 και 1. Από το (iii) του Λήμματος 6.11 τουλάχιστον για ένα από τα τρία σημεία θα ισχύει η (6.63). Τέλος για $\omega \in (\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2)$ από το Λήμμα 6.9 και το (ii) του Λήμματος 6.11 τα πλησιέστερα σημεία τομής στο μηδέν είναι εκείνα με τετμημένες $r(y, \hat{\hat{\theta}})$ και $-y^5/(y+2)(y-2)^4$. Έτσι η ακριβής περιοχή σύγκλισης για την SSOR μέθοδο για τη μη-θετική (μη-αρνητική) περίπτωση είναι η R_5^- (R_5^+) του θεωρήματος. ♦

Οι περιοχές R_5^- και R_5^+ φαίνονται στα σχήματα 6.5 και 6.6 αντίστοιχα.



Σχ. 6.5



Σχ. 6.6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στα προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκαμε εκτενώς με προβλήματα σύγκλισης και εύρεσης βέλτιστης τιμής της παραμέτρου ω της block SOR και της block SSOR μεθόδου. Σ' όλες τις περιπτώσεις που μελετήσαμε ο πίνακας Jacobi B ήταν G.C.O.-(p,q) και το φάσμα του B^p άλλοτε μη-αρνητικό και άλλοτε μη-θετικό (βλ. Κεφ. 3, 5, 6). Ειδικότερα:

Στο **3^o Κεφάλαιο**, ο πίνακας B ήταν G.C.O.-(p, p-1) και το $\sigma(B^p)$ σταθερού προσήμου. Κάτω από τις προϋποθέσεις αυτές βρέθηκαν περιοχές σύγκλισης διαφορετικές από εκείνες, όπου ο πίνακας B ήταν G.C.O.-(p, 1). Μάλιστα οι περιοχές που βρέθηκαν ήταν ευρύτερες, όταν $0<\rho(B)<1$ και $\sigma(B^p)\subset\mathbb{R}_-$ ή $\sigma(B^p)\subset\mathbb{R}_+$ και υστερούσαν, όταν $1<\rho(B)$ και $\sigma(B^p)\subset\mathbb{R}_-$. Επιπλέον στο ίδιο κεφάλαιο καταδείχτηκε ότι ο αλγόριθμος των Schur-Cohn είναι ένα δυναμικό εργαλείο για την εύρεση ακριβών περιοχών σύγκλισης.

Στο **4^o Κεφάλαιο** βρέθηκαν περιοχές του μιγαδικού επιπέδου, στις οποίες πρέπει να ανήκουν οι ιδιοτιμές του πίνακα B για να συγκλίνει η SOR μέθοδος. Μέσα απ' αυτές βρέθηκαν επίσης ακριβείς περιοχές σύγκλισης του $(\rho(B),\omega)$-επιπέδου, για μη-θετικό ή μη-αρνητικό φάσμα του πίνακα B^p.

Στο **5^o Κεφάλαιο** δόθηκαν εκφράσεις για τη βέλτιστη τιμή της παραμέτρου $\hat{\omega}$ στις περιπτώσεις της SOR μεθόδου, όπου ο πίνακας B ήταν G.C.O.-(3,2) ή (4,3) και το φάσμα του B^p ήταν μη-αρνητικό.

Αριθμητικά ευρέθη ότι καλύτερα αποτελέσματα έχουμε, όταν ο πίνακας B είναι G.C.O.-(3,1) ή (4,1) αντίστοιχα. Έτσι ένα καινούργιο ερώτημα τίθεται εδώ: "Είναι η G.C.O.-(p, 1) μορφή του πίνακα εκείνη, που δίνει την ταχύτερη σύγκλιση για την SOR μέθοδο;", όπως π.χ. αυτό συμβαίνει για την Gauss-Seidel μέθοδο (Ασκ. 2, σελ 109, [34]).

Στα τρία παραπάνω κεφάλαια μελετήθηκαν πλήρως οι περιπτώσεις που αναφέραμε. Δημιουργείται όμως το ερώτημα: Για δεδομένο p ποιο είναι το καλύτερο q, που δίνει την ευρύτερη περιοχή σύγκλισης της SOR μεθόδου καθώς και την ταχύτερη σύγκλισή της, για τους G.C.O.-(p, q) πίνακες; Σαν απάντηση προκύπτουν πολλά στοιχεία, ώστε να μπορούμε να ισχυριστούμε ότι έχουμε σοβαρές ενδείξεις ότι το καλύτερο σχήμα είναι το αντιστοιχούν στον πίνακα G.C.O.-(p, 1).

Στο 6ο **Κεφάλαιο** δόθηκαν οι ακριβείς περιοχές σύγκλισης της SSOR μεθόδου για την ίδια κατηγορία πινάκων, πάλι για μη-θετικές ή μη-αρνητικές ιδιοτιμές του πίνακα B^p, στις περιπτώσεις όπου q=1 και p=3,4,5. Θα πρέπει να αναφερθεί εδώ ότι ήδη ο συγγραφέας σε συνεργασία με τους Noutsos και Hadjidimos κατόρθωσαν να γενικεύσουν αυτές για το ίδιο q και κάθε p [19].

Πολύπλευρες, σημαντικές και ενδιαφέρουσες είναι οι κατευθύνσεις, που προσφέρονται για μελλοντική έρευνα. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις παρακάτω:

α) Η μελέτη του p-κυκλικού επαναδιαχωρισμού ([24], [41], [31], [6]) για φανταστικό ή μιγαδικό $\sigma(B^p)$.

β) Η εύρεση της βέλτιστης τιμής της παραμέτρου ω ([10], [38], [11], [22], [26]) της p-κυκλικής SOR μεθόδου για πραγματικό ή, ακόμα γενικότερα, για μιγαδικό $\sigma(B^p)$.

γ) Η μελέτη της p-κυκλικής και της εκτεταμένης SOR μεθόδου, καθώς και της SSOR μεθόδου για συστήματα, που ο πίνακας A είναι μη-ομαλός p-κυκλικός πίνακας ([42], [23]).

δ) Η εύρεση της βέλτιστης τιμής της παραμέτρου ω για την G.C.O.-(p,1) SSOR μέθοδο [19] για p> 2 και για γενικό φάσμα του B^p.

ε) Η μελέτη της χρήσης μεταβλητής παραμέτρου ω τόσο ανά block ([39], [43]) όσο και ανά επανάληψη και

στ) Με την ανάπτυξη των παράλληλων Η/Υ ίσως θα άξιζε να μελετηθεί η p-κυκλική μέθοδος, κάτω από το πρίσμα ενδεχόμενης παραλληλίας της σε διάφορες αρχιτεκτονικές παραλληλίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] BERMANN, A. and PLEMMONS, R.J., *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, Inc., (1979).

[2] CAI, D.-Y. , Private Information.

[3] CHEN, Y.T., *Iterative Methods for Linear Least-Squares Problems*, Ph.D. Dissertation, Dept. of Computer Science Univ. of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, (1975).

[4] CHONG, L. and CAI, D.-Y., *Relationship between Eigenvalues of Jacobi and SSOR Iterative Matrices with p-week Cyclic Matrix*, J. Comput. Math. Coll. Univ., 1 (1985), pp. 79 - 84, (in Chinese).

[5] D' SYLVA, E. and MILES, G.A., *The SSOR Iteration Scheme for Equations with σ_1 - Orderings*", Comput. J., 6 (1963), pp. 271 - 273.

[6] EIERMANN, M., NIETHAMMER, N. and Ruttan, A., *Optimal Successive Overrelaxation Iterative Methods for p-cyclic Matrices*, Numer. Math., 57 (1990), pp. 593 - 606.

[7] GALANIS, S., HADJIDIMOS, A. and NOUTSOS, D., *On the Equivalence of the k-step Iterative Euler Methods and Successive Overrelaxation (SOR) Methods for k-cyclic Matrices*, Math. Comput. Simulation, 30 (1988), pp. 213 - 230.

[8] GALANIS, S., HADJIDIMOS, A. and NOUTSOS, D.,*The Relationship between the Jacobi and the Successive Overrelaxation (SOR)*

Matrices of a k-cyclic Matrix, Computers Math. Applic., 17 (1989), pp. 1351 - 1357.

[9] Galanis, S., Hadjidimos, A. and Noutsos, D., *On Different Classes of Monoparametric Stationary Iterative Methods for the Solution of Linear Systems*, Math. Comput. Simulation, 28 (1986), pp. 115 -128.

[10] Galanis, S., Hadjidimos, A. and Noutsos, D., *On the Convergence of Monoparametric k-step Iterative Euler Methods for the Solution of Linear Systems*, Intern. J. Comput. Math., 26 (1988), pp. 45 - 56.

[11] Galanis, S., Hadjidimos, A., Noutsos, D., and Tzoumas, M., *On the Optimum Factor Associated with p-cyclic Matrices*, Linear Alg. Appl., 162-164 (1992), pp. 433 - 445.

[12] Golub, G.H. and Van Loan, C.F., *Matrix Computation*, The John Hopkins, University Press, (1983).

[13] Hadjidimos, A., Li, X.Z. and Varga, R.S. *Application on the Schur-Cohn Theorem to Precise Convergence Domains for the Cyclic SOR Iterative Method*, Unpublished manuscript, (1985).

[14] Hadjidimos, A. and Neumann, M., Unpublished notes, (1987).

[15] Hadjidimos, A. and Neumann, M., *A Note on the SSOR Convergence Domain Due to Neumaier an Varga*, Linear Algebra Appl., 107 (1988), pp. 207 - 217.

[16] Hadjidimos, A. and Neumann, M., *Precise Domains of Convergance for the Block SSOR Method Associated with p-cyclic Matrices*, BIT, 29 (1989), pp. 311 - 320.

[17] Hadjidimos, A. and Neumann, M., *Convergence Domains of the SSOR Method for a Class of Generalized Consistently Ordered Matrices*, J. Comp. Appl. Math., 33 (1990), pp. 35 - 52.

[18] Hadjidimos, A. and Noutsos, D., *On a Matrix Identity Connecting Iteration Operators Associated with p-cyclic Matrices*, Linear Algebra Appl., 182 (1993), pp. 157 - 178.

[19] Hadjidimos, A., Noutsos, D., and Tzoumas, M., *On the Exact p-cyclic SSOR Convergence Domains*, Linear Algebra Appl., (to appear).

[20] Hadjidimos, A., Noutsos, D., and Tzoumas, M., *On the Convergence Domains of the p-cyclic SOR*, Comp. Science, Dep. Purdue University, West Lafayette, IN 47907, Technical Report CSD - TR - 93 - 023 (1993).

[21] Henrici, P., *Applied and Computational Complex Analysis*, Wiley, New York, (1974).

[22] Kredell, B., *On Complex Successive Overrelaxation*, BIT, 2 (1962), pp. 143 - 152.

[23] Kontovasilis, K., Plemmons, R.J. and Stewart, W.J., *Block Cyclic SOR for Markov Chains with p-cyclic Infintesimal Generator*, Linear Algebra Appl., 154-156 (1991), pp. 145 - 223.

[24] Markham, T.L., Neumann, M., and Plemmons, R.J., *Convergence of a Direct - Iterative Method for Large - Scale - Squares Problems*, Linear Algebra Appl., 69 (1985), pp. 155- 167.

[25] Neumaier, A. and Varga, R.S., *Exact Convergence and Divergence Domains for the Symmetric Successive Overrelaxation (SSOR) Iterative Method Applied to H-Matrices*, Linear Algebra Appl., 58 (1984), pp. 261 - 272.

[26] Nichols, N.K. and Fox, L., *Generalized Consistent Ordering and the Optimum Successive Overrelaxation Factor*, Numer. Math., 13 (1969), pp. 425 - 433.

[27] NIETHAMMER, W., *Underrelaxation bei Linearea Glei Chung System mit Schiefsymetricker Koefficien Matrix*, Ph.D. Thesis, University of Tubingen, Federal Republic of Germany, (1964).

[28] NIETHAMMER, W., de PILLIS, J. and VARGA, R.S., *Convergence of Block Iterative Methods*, Applied to Sparse Least - Sqearg Problem, Linear Algebra Appl., 58 (1984), pp. 327 - 341.

[29] NOUTSOS, D., *Optimal Stretched Parameters for the SOR Iterative Methods*, J. Comp. Appl. Math., 48 (1993), pp. 293- 308.

[30] NOUTSOS, D., *The Operator Relation of the USSOR and the Jacobi Iteration Operators for p-cyclic Matrices*, Dep. of Maths, University of Ioannina, Ioannina, Technical Report N° 234, (1993).

[31] PIERCE, D.J., HADJIDIMOS, A. and PLEMMONS, R.J., *Optimal Relationships for p-cyclic SOR*", Numer. Math., 56 (1990), pp. 635 -643.

[32] PLEMMONS, R.J., *Adjiustments by Least Squares in Geodesy using Block Iterative Methods for Sparse Matrices*, in Proceedings of the Annual U.S. Army Conference on Numerical Analysis and Computer, (1979), pp. 151 - 186.

[33] RIVLIN, T.J., *The Chebyshev Polynomials*, John Wiley and Sons, Inc. (1974).

[34] VARGA, R.S., *Matrix Iterative Analysis*, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1962).

[35] VARGA, R.S., *p- cyclic Matrices: A Generalization of the Young - Frankel Successive Overrelaxation Scheme*, Pacific J. Math., 9 (1959), pp. 617 - 628.

[36] VARGA, R.S., NIETHAMMER, W. and CAI, D.-Y., *p- cyclic Matrices and the Symmetric Successive Overrelaxation Method*, Linear Algebra Appl., 58 (1984), pp. 425 - 439.

[37] Verner, J.H. and Bernal, M.J.M., *On Generalization of the Theory of Consistent Orderings for Successive Overrelaxation Method,* Numer. Math., 12 (1968), pp. 215 - 222.

[38] Wild, P. and Niethammer, W., *Over and Underrelaxation of Linear Systems with Weakly Cyclic Jacobi Matrices of Index p,* Linear Algebra Appl., 91 (1987), pp. 29 - 52.

[39] Young, D.M., *Iterative Methods for Solving Partial Differential Equations for Elliptic Type,* Doctorial Thesis, Harvard Univ., Cambridge, Massachusetts, (1950).

[40] Young, D.M., *Iterative Solution of Large Linear Systems',* Academic Press, New York, NY, (1971).

[41] Galanis, S. and Hadjidimos, A., *Best Cyclic Repartitioning for Optimal Successive Overrelaxation Convergence,* SIAM J. Matrix Anal. Appl., 13 (1992), pp. 102 - 120.

[42] Hadjidimos, A. and Plemmons, R. *A General Theory of Optimal p-cyclic SOR,* Computer Science Department, Purdue Univ., West Lafayette, IN 47907, Technical Report CSD - TR - 92 - 076, CAPO Report CER - 92 - 32, (1992).

[43] Hadjidimos, A. and Noutsos, D., *The Young-Eidson Algorithm: Application and Extensions,* SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11 (1990), pp. 620 - 631.