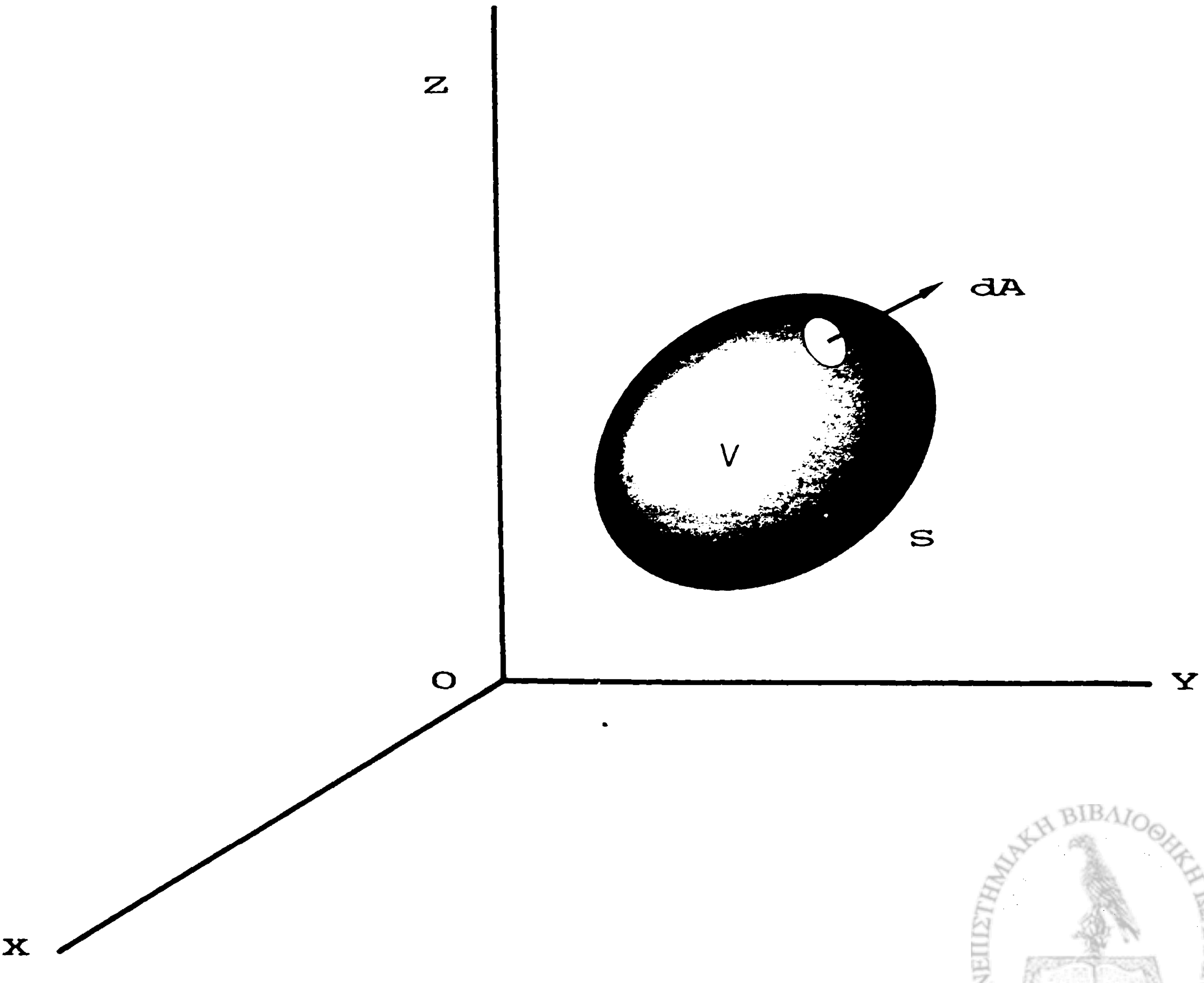
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Α. ΑΣΗΜΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

# Στοιχεία Ανυσματικής Ανάλυσης



Η παρούσα μονογραφία αποσκοπεί στην έκθεση του προπτυχιακού φοιτητή των θετικών επιστημών στις θεμελιώδεις έννοιες της Ανυσματικής Ανάλυσης από την οπτική γωνία του φυσικού. Δεν είναι πρόθεση του συγγραφέα ούτε να συμπληρώσει, ούτε να αντικαταστήσει τα πολλά αξιόλογα συγγράμματα Απειροστικού Λογισμού και Αναλυτικής ή Διαφορικής Γεωμετρίας που στην ελληνική και διεθνή επιστημονική βιβλιογραφία αναπτύσσουν το θέμα με πληρότητα και μαθηματική αυστηρότητα. Ο στόχος εδώ είναι να δοθεί στο φοιτητή των θετικών επιστημών μια φυσική αίσθηση των πράξεων και τελεστών στο χώρο των ανυσμάτων και να αναπτυχθούν τα θεωρητικά "εργαλεία" που θα τον βοηθήσουν στην αντιμετώπιση ρεαλιστικών καταστάσεων και προβλημάτων.

Το βιβλίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα πλαίσια ενός μαθήματος Φυσικής (Ηλεκτρομαγνητισμού, Μηχανικής Ρευστών, Μετεωρολογίας, κλπ.) για μια πρώτη γνωριμία του φοιτητή με τα ανυσματικά πεδία. Με κατάλληλη επιλογή, ο διδάσκων ενός τέτοιου μαθήματος μπορεί να καλύψει τα θέματα που θα φανούν χρήσιμα στην ανάπτυξη του κυρίως μαθήματος σε περίοδο δυό ή τριών εβδομάδων με μεγάλη εξοικονόμιση χρόνου στη συνέχεια. Εξάλλου, ανά πάσα στιγμή, μπορεί να αποτελέσει για το φοιτητή ή το νεαρό επιστήμονα βιβλίο αναφοράς ως προς τους ορισμούς, τις ταυτότητες και τις σημαντικότερες σχέσεις της Ανυσματικής Ανάλυσης.

# Στοιχεία Ανυσματικής Ανάλυσης

*Παναγιώτη Α. Ασημακόπουλου*
*καθηγητού του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων*

# *Στοιχεία Ανυσματικής Ανάλυσης*



Ιωάννινα 1992

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

*Ο μεγάλος μου δάσκαλος Kenneth Ford συνήθιζε να λέει ότι η Φυσική δεν έχει προχωρήσει όσο θα μπορούσε, γιατί οι φυσικοί δεν ξέρουν αρκετά μαθηματικά. Αν και κατά καιρούς έχει αμφισβητηθεί, η άποψη αυτή έχει επικρατήσει τουλάχιστον στην κατάστρωση των εκπαιδευτικών προγραμμάτων, τόσο στο προπτυχιακό, όσο και στο μεταπτυχιακό στάδιο. Ετσι, μετά το πέρας των Πανεπιστημιακών του σπουδών, ο νέος φυσικός έχει παρακολουθήσει σχεδόν ίσο αριθμό μαθημάτων στα Μαθηματικά και στη Φυσική. Το πώς και με ποιά σειρά θα εκτεθεί στα μαθήματα αυτά κατά τη φοίτησή του στο Πανεπιστήμιο, είναι βεβαίως μια άλλη πολυσυζητημένη υπόθεση.*

*Κατά την πλέον απλοϊκή άποψη, τα Μαθηματικά είναι η γλώσσα, το εργαλείο, της Φυσικής και η διδασκαλία τους πρέπει σε μεγάλο βαθμό να προηγηθεί της Φυσικής, όπως, κατά την ίδια άποψη, η Γραμματική και το Συντακτικό πρέπει να προηγηθούν της Λογοτεχνίας. Το σχήμα αυτό εμφανίζει πολλά μειονεκτήματα. Κατ' αρχάς η διδασκαλία μιας ενότητας μαθηματικών με την αυστηρότητα και αφαίρεση που αρμόζει στη μαθηματική επιστήμη είναι εξαιρετικά χρονοβόρα υπόθεση. Μέχρις ότου ο φοιτητής έλθει να εφαρμόσει στην επιστήμη του τα όσα έμαθε στο αφηρημένο μάθημα των μαθηματικών, ενδεχομένως θα τα έχει ξεχάσει. Εξ άλλου η επί μακρό διάστημα προσήλωση του φοιτητή σε καθαρά μαθηματικές έννοιες (θεωρήματα υπάρξεως, κριτήρια συνεχείας και συγκλίσεως σειρών, κλπ.) δεν προσιδιάζει στην ιδιοσυγκρασία του φυσικού ή του μηχανικού. Στις θετικές επιστήμες ο φοιτητής θέλει από νωρίς να ασχοληθεί με τη διερεύνηση των φυσικών φαινομένων και δεν βλέπει, ενδεχομένως λανθασμένα, τη σκοπιμότητα να επιμείνει με σχολαστικότητα σε ένα αφηρημένο, αυστηρά μαθηματικό οικοδόμημα. Ετσι, κατά τη σύγχρονη εκπαιδευτική άποψη, η διδασκαλία των μαθηματικών στις θετικές επιστήμες πρέπει να γίνεται παράλληλα με το καθαυτό αντικείμενο της επιστήμης και μάλιστα σε δύο επίπεδα. Χωρίς αμφιβολία ο φοιτητής, σε κάποιο στάδιο, θα πρέπει να διδαχθεί τα μαθηματικά από την οπτική γωνία του μαθηματικού με αυστηρότητα και πληρότητα. Παράλληλα όμως θα πρέπει να δει τα μαθηματικά σε ένα άλλο επίπεδο, από την οπτική γωνία του φυσικού ή του μηχανικού, που τα χρησιμοποιεί ως εργαλεία. Η διδασκαλία των μαθηματικών στα δύο αυτά επίπεδα μπορεί να γίνεται ταυτόχρονα ή διαδοχικά, χωρίς η συγκεκριμένη διαδοχή να έχει ουσιαστικό αντίκτυπο στο τελικό αποτέλεσμα.*

*Την έκθεση του προπτυχιακού φοιτητή των θετικών επιστημών σε μια ενότητα των μαθηματικών, από την οπτική γωνία του φυσικού, αποσκοπεί να υπηρετήσει η παρούσα μονογραφία. Είναι βέβαιο ότι στην ελληνική και διεθνή επιστημονική βιβλιογραφία, η Ανυσματική Ανάλυση αναπτύσσεται με πληρότητα σε πολλά αξιόλογα συγγράμματα Απειροστικού Λογισμού και Αναλυτικής ή Διαφορικής Γεωμετρίας. Δεν είναι πρόθεσή μου ούτε να συμπληρώσω, ούτε να αντικαταστήσω παρόμοια μαθηματικά συγγράμματα. Οι σελίδες που ακολουθούν γράφηκαν για να αντιμετωπίσουν μια πραγματική ανάγκη που διαπίστωσα, επί σειρά ετών, κατά τη* διδασκαλία του μαθήματος του Ηλεκτρομαγνητισμού στους πρωτοετείς φοιτητές του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Σχεδόν σε κάθε της βήμα, η παρουσίαση των Ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων απαιτεί χειρισμό ανυσματικών μεγεθών και είμαι βέβαιος ότι πολλοί συνάδελφοι θα έχουν γευτεί την αντίδραση του ακροατηρίου που μου επιφυλασσόταν (συχνά στα όρια της ανοιχτής ανταρσίας) κάθε φορά που αποτολμούσα να ψελλίσω τους όρους κλίση, απόκλιση ή στροβιλισμός. Και θα πρέπει να ομολογήσω, δικαίως! Την ώρα που στο μάθημά μου παρουσίαζα την απόδειξη του νόμου του Gauss με χρήση επιφανειακών ολοκληρωμάτων και του θεωρήματος της απόκλισης, στο παράλληλο μάθημα της Ανυσματικής Ανάλυσης οι έννοιες αυτές βρίσκονταν ακόμη στο στάδιο της προσεκτικής διερεύνησης. Ετσι, στην αρχή υπό τη μορφή σύντομων σημειώσεων και μετέπειτα σε μορφή πληρέστερου κειμένου, προσπάθησα να δημιουργήσω ένα βοήθημα πρώτης γνωριμίας του φοιτητή με τις κυριότερες έννοιες και αποτελέσματα στο χώρο των ανυσμάτων. Κάτι σαν τη διδασκαλία χρήσης του ηλεκτρονικού υπολογιστή, με σκοπό την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, χωρίς προηγούμενη γνώση γλώσσας προγραμματισμού.

Στα προηγούμενα πλαίσια, το βιβλίο που ακολουθεί δεν πρέπει να αναμένεται ότι θα επιδείξει ιδιαίτερη προσήλωση στη μαθηματική αυστηρότητα και πληρότητα. Δεν υποκρίνεται ακόμη ότι είναι ένα διδακτικό σύγγραμμα που θα μπορούσε να καλύψει πλήρως τις ανάγκες ενός μαθήματος Ανυσματικής Ανάλυσης, έστω και στο προπτυχιακό επίπεδο. Η παρουσίαση των εννοιών και αποτελεσμάτων έχει γίνει με τη μεγαλύτερη δυνατή οικονομία στην έκφραση, ενώ παραδείγματα έχουν χρησιμοποιηθεί με μεγάλη φειδώ, εκεί που θεωρήθηκαν απολύτως απαραίτητα. Πολλά σημαντικά αποτελέσματα δίνονται στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπό μορφή ασκήσεων. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι είναι μια συνοπτική, πανοραμική, εικόνα των κυριότερων εργαλείων που παρέχει η Ανυσματική Ανάλυση στην καθημερινή πρακτική της "μαχόμενης" Φυσικής. Παρόλα αυτά, αν και συμμερίζομαι την άποψη του Kenneth Ford, με την οποία άνοιξε αυτός ο πρόλογος, πιστεύω ότι το βιβλίο αυτό μπορεί να είναι πολλαπλά χρήσιμο. Κατ' αρχάς μπορεί να χρησιμοποιηθεί, όπως ήδη τονίστηκε, στα πλαίσια ενός μαθήματος Φυσικής (Ηλεκτρομαγνητισμού, Μηχανικής Ρευστών, κλπ.) για μια πρώτη γνωριμία του φοιτητή με τα ανυσματικά πεδία. Πιστεύω ότι, με κατάλληλη επιλογή, ο διδάσκων ενός τέτοιου μαθήματος μπορεί να καλύψει τα θέματα που θα φανούν χρήσιμα στην ανάπτυξη του κυρίως μαθήματος σε περίοδο δυό ή τριών εβδομάδων με μεγάλη εξοικονόμιση χρόνου στη συνέχεια. Εξάλλου, ανά πάσα στιγμή, μπορεί να αποτελέσει για το φοιτητή ή το νεαρό επιστήμονα βιβλίο αναφοράς ως προς τους ορισμούς, τις ταυτότητες και τις σημαντικότερες σχέσεις της Ανυσματικής Ανάλυσης.

Στη διαμόρφωση της ύλης που περιέχεται στις επόμενες σελίδες είχα πολλαπλή βοήθεια. Κατ' αρχάς υπήρξε ανεκτίμητη η αλληλεπίδραση με τους φοιτητές του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων που τα τελευταία χρόνια παρακολουθούν το μάθημά μου. Με το μάτι του νέου επιστήμονα διάβασαν το κείμενο στα διάφορα στάδια της επεξεργασίας του οι μεταπτυχιακοί φοιτητες του Εργαστηρίου Πυρηνικης Φυσικής, κύριοι Δ. Καραμάνης και Κ. Σταμούλης και συνέβαλαν στην ουσιαστική του βελτίωση με χρήσιμες παρατηρήσεις και υποδείξεις. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στο συνάδελφο καθηγητή Νίκο Μπατάκη που από την άποψη του ώριμου θεωρητικού φυσικού έκανε την τελική κριτική του κειμένου.

Το βιβλίο αυτό δεν θα είχε γραφεί αν τα τελευταία χρόνια δεν είχα κλέψει ένα μεγάλο μέρος του χρόνου που δικαιωματικά ανήκει στην οικογένειά μου. Για το λόγο αυτό το αφιερώνω με αγάπη στην κόρη μου Δάφνη.

Π.Α.Α.
Ιωάννινα, Φεβρουάριος 1992

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# ΑΝΥΣΜΑΤΑ

Η έννοια του **ανύσματος** ή **διανύσματος** ανακύπτει στη φυσική με τη διαπίστωση ότι ο προσδιορισμός ορισμένων φυσικών μεγεθών, πέρα από μια αριθμητική τιμή και την αντίστοιχη μονάδα μετρήσεως, απαιτεί δυο επιπλέον στοιχεία: τη *διεύθυνση* και *φορά*. Οικεία φυσικά μεγέθη της κατηγορίας αυτής, στα οποία δίνεται η ονομασία **ανυσματικά** ή **διανυσματικά μεγέθη**, είναι η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η δύναμη. Σε αντιδιαστολή, φυσικά μεγέθη, τα οποία δεν διαθέτουν διεύθυνση και φορά, αναφέρονται ως **βαθμωτά** ή **μονόμετρα μεγέθη**. Στην κατηγορία των βαθμωτών φυσικών μεγεθών ανήκει η θερμοκρασία, η μάζα και το ηλεκτρικό φορτίο.

Η συμπεριφορά των βαθμωτών φυσικών μεγεθών αποδίδεται από την άλγεβρα των πραγματικών αριθμών. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με ένα ευρύτερο μαθηματικό πλαίσιο που αποσκοπεί στην απόδοση της συμπεριφοράς του συνόλου των ανυσματικών και βαθμωτών φυσικών μεγεθών. Στη μαθηματική γλώσσα που θα αναπτύξουμε θα συμβολίσουμε ανύσματα με μαύρους χαρακτήρες ($\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{\Gamma}$, $\boldsymbol{\omega}$) και βαθμωτές ποσότητες με απλούς πλάγιους χαρακτήρες ($A$, $a$, $m$, $\Lambda$, $\lambda$). Θα παραστήσουμε επιπλέον γραφικά ένα άνυσμα με ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (ένα βέλος). Θα σχεδιάσουμε το μήκος του βέλους έτσι ώστε σε κάποια προεπιλεγμένη κλίμακα να αποδίδει την αριθμητική τιμή του αντίστοιχου φυσικού μεγέθους στις μονάδες μετρήσεως που χρησιμοποιούμε. Με την έννοια αυτή θα αναφερθούμε στο μήκος του βέλους με τον όρο **μέτρο** του ανύσματος.

Το μέτρο $a$ ενός ανύσματος $\mathbf{a}$ θα αποδοθεί με το συμβολισμό $|\mathbf{a}|$. Θα ονομάσουμε ένα άνυσμα, για το οποίο $|\mathbf{a}| = 1$, **μοναδιαίο άνυσμα**. Η συνθήκη $|\mathbf{a}| = 0$ ορίζει το **μηδενικό άνυσμα** $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

### 1.1 Ισότητα Ανυσμάτων

Δύο ανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι ίσα αν είναι παράλληλα, έχουν την ίδια φορά και έχουν ίσα μέτρα. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}. \tag{1.1}$$

Από τον ορισμό έπεται ότι αν για δύο ανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, τότε $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

## 1.2 Πολλαπλασιασμός Ανύσματος με Βαθμωτό

Το γινόμενο $x\mathbf{a}$ ενός πραγματικού αριθμού $x$ με ένα άνυσμα **a** ορίζεται ως ένα νέο άνυσμα, παράλληλο προς το **a**, με μέτρο $|x|\,|\mathbf{a}|$. Ετσι, όπως δείχνει το σχήμα 1-1, το άνυσμα 3**a** παριστάνεται γραφικά με ένα βέλος, παράλληλο προς το **a** (με την ίδια διεύθυνση και φορά), αλλά μήκος τριπλάσιο από το μήκος του **a**. Ειδική περίπτωση του πολλαπλασιασμού ανύσματος με βαθμωτό είναι το άνυσμα -**a** (πολλαπλασιασμός με τον αριθμό -1), που θα ονομάσουμε **αντίθετο** του **a**. Παρατηρείται ότι ο πολλαπλασιασμός ανύσματος με βαθμωτό ικανοποιεί την ιδιότητα

$$x(y\mathbf{a}) = y(x\mathbf{a}). \tag{1.2}$$

Ετσι, χωρίς κίνδυνο παρανοήσεως, το γινόμενο της εξ. (1.2) μπορεί να γραφεί ως $xy\mathbf{a}$.

Πολλαπλασιασμός του αριθμού 0 με οποιοδήποτε άνυσμα δίνει το μηδενικό άνυσμα, ήτοι

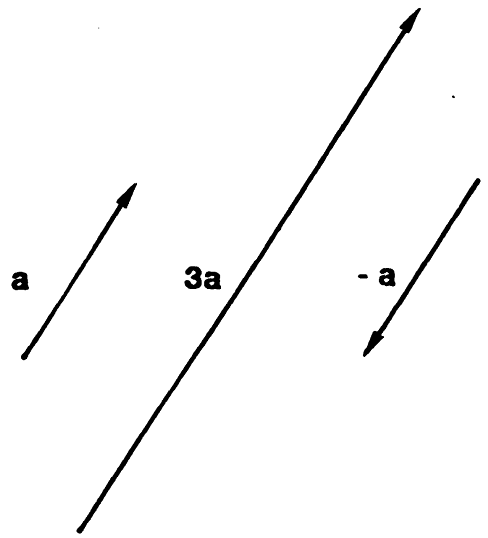
$$0\mathbf{a} = \mathbf{0}. \tag{1.3}$$

Τέλος, από τον ορισμό της ισότητας ανυσμάτων προκύπτει ότι δύο ανύσματα είναι παράλληλα αν, και μόνον αν, το ένα είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου.

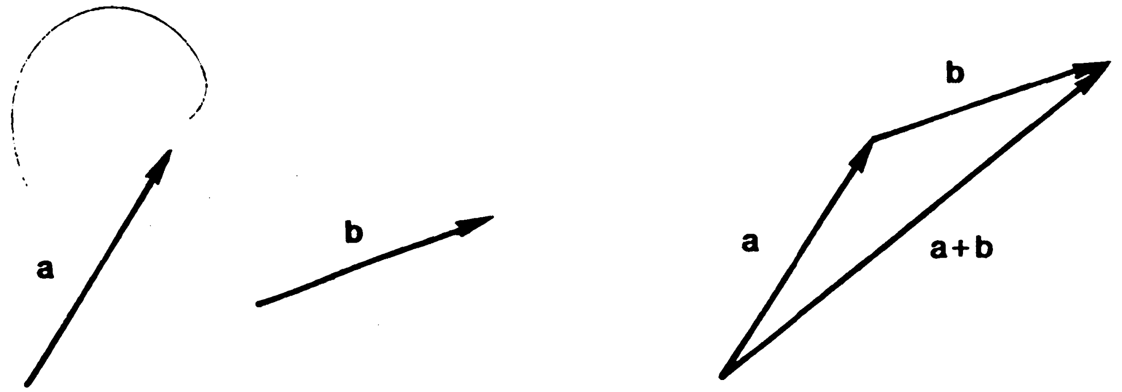
## 1.3 Πρόσθεση Ανυσμάτων

Το άθροισμα δύο ανυσμάτων **a** και **b** ορίζεται σύμφωνα με τη γραφική παράσταση του σχήματος 1-2. Αν τα δύο ανύσματα τοποθετηθούν διαδοχικά, έτσι ώστε το τέλος του πρώτου να συμπίπτει με την αρχή του δευτέρου, τότε το άθροισμα **a** + **b** ορίζεται ως το άνυσμα που εκτείνεται από την αρχή του **a** έως το τέλος του **b**. Από τον ορισμό έπεται αμέσως ότι το μηδενικό άνυσμα είναι το μηδενικό στοιχείο της πρόσθεσης ανυσμάτων, ήτοι

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}. \tag{1.4}$$




Σχήμα 1-1 Πολλαπλάσιο και αντίθετο ενός ανύσματος.




Σχήμα 1-2 Πρόσθεση δυο ανυσμάτων.

Από τον ορισμό της ισότητας ανυσμάτων έπεται επίσης ότι αν **a** = **c** και **b** = **d**, τότε

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{d}. \qquad (1.5)$$

Εφαρμόζοντας ακόμη τον ορισμό του αθροίσματος ανυσμάτων και απλές έννοιες της Ευκλείδιας γεωμετρίας είναι δυνατόν να αποδείξουμε τις ιδιότητες .

*μεταθετική:*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \qquad (1.6)$$

*προσεταιριστική:*

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \qquad (1.7)$$

*επιμεριστική:*

$$x(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = x\mathbf{a} + x\mathbf{b}. \qquad (1.8)$$

Οπως και κατά τον πολλαπλασιασμό ανύσματος με βαθμωτή ποσότητα, η προσεταιριστική ιδιότητα, η οποία αποδεικνύεται στη γραφική παράσταση του σχήματος 1-3, επιτρέπει τη γραφή του αθροίσματος τριών ανυσμάτων στην απλή μορφή **a** + **b** + **c**. Η διαφορά **a** - **b** δύο ανυσμάτων **a** και **b** ορίζεται σύμφωνα με τα προηγούμενα ως το άθροισμα των ανυσμάτων **a** και -**b**. Η διεργασία περιγράφεται στο σχήμα 1-4(α). Ενας εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού της διαφοράς δύο ανυσμάτων δίνεται στο σχήμα 1-4(β): Αν τα δύο ανύσματα **a** και **b** τοποθετηθούν έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή, τότε το άνυσμα με αρχή το τέλος του **b** και τέλος το τέλος του **a** είναι η διαφορά **a** - **b**.

## 1.4 Ανυσμα Θέσης

Το απλούστερο ενδεχομένως παράδειγμα ανύσματος παρέχεται από το άνυσμα

**θέσης**, που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου στο συνήθη τρισδιάστατο χώρο. Στον αναγνώστη θα είναι ασφαλώς γνωστός από την αναλυτική γεωμετρία ο τρόπος περιγραφής της θέσης ενός σημείου στο χώρο με βάση τις τρεις συντεταγμένες του $x,y,z$ σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων OXYZ. Ακολουθώντας την καθιερωμένη πρακτική θα χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά δεξιόστροφα συστήματα συντεταγμένων, δηλαδή συστήματα για τα οποία αν ο άξονας X περιστραφεί προς τον άξονα Y, ένας δεξιόστροφος κοχλίας θα προχωρήσει κατά τη θετική φορά του άξονα Z. Σε ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων OXYZ, το άνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ ενός σημείου $P(x,y,z)$ ορίζεται ως το άνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων O και τέλος το σημείο P. Οπως φαίνεται στο σχήμα 1-5, οι προβολές του ανύσματος $\mathbf{r}$ στους τρεις άξονες X, Y, Z είναι οι αντίστοιχες συντεταγμένες $x,y,z$ του σημείου P.

Αν σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ορίσουμε, όπως φαίνεται στο σχήμα 1-5, τρία μοναδιαία ανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$, αντίστοιχα κατά τη θετική φορά των αξόνων X, Y, Z, το άνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ μπορεί να γραφεί ως

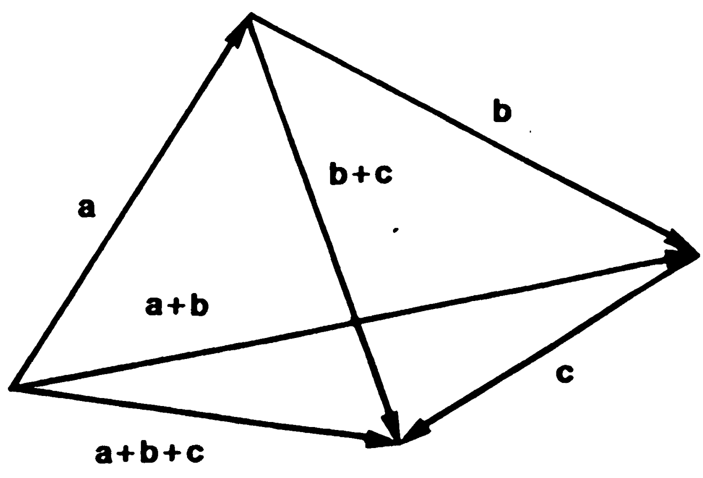
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{1.9}$$

Την απόδοση ενός ανύσματος στη μορφή της εξ. (1.9) θα χρησιμοποιήσουμε συχνά στη συνέχεια. Παρατηρείται ότι το μέτρο του ανύσματος θέσης στην εξ. (1.9) είναι

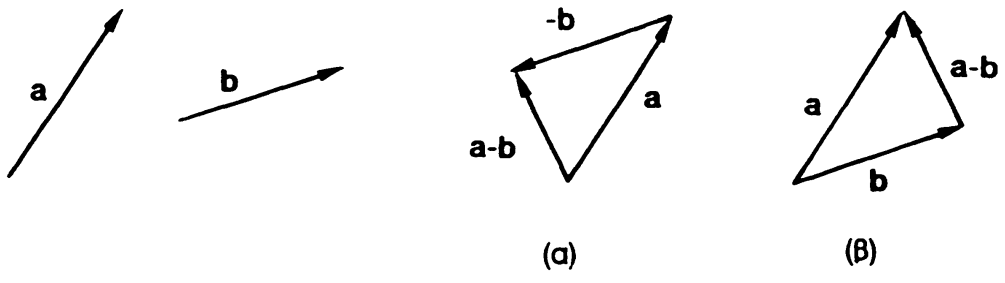
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

## 1.5 Ανυσματικές Συναρτήσεις

Ενα βαθμωτό φυσικό μέγεθος είναι δυνατόν να εμφανίζει διαφορετική αριθμητική τιμή σε διαφορετικά σημεία του χώρου. Είναι ακόμη δυνατόν, σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου, η αριθμητική του τιμή να μεταβάλλεται με το χρόνο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η θερμοκρασία της ατμοσφαίρας, η οποία μπορεί να εξαρτάται από τη γεωγραφική θέση ή τη συγκεκριμένη στιγμή κατά το εικοσιτετράωρο. Στην περίπτωση αυτή το βαθμωτό μέγεθος αποδίδεται από μια συνάρτηση $f(x,y,z,t)$, όπου $x,y,z$ είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου και $t$ ο χρόνος. Σε πλέον συνεπτυγμένο συμβολισμό μπορούμε να αποδόσουμε τη συνάρτηση ενός βαθμωτού φυσικού μεγέθους ως $f(\mathbf{r},t)$,




**Σχήμα 1-3 Πρόσθεση τριών ανυσμάτων.**




Σχήμα 1-4 (α) Αφαίρεση δυο ανυσμάτων **a** και **b** ισοδυναμεί με την πρόσθεση **a** + (-**b**). (β) Αν δυο ανύσματα **a** και **b** τοποθετηθούν έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή, τότε το άνυσμα με αρχή το τέλος του **b** και τέλος το τέλος του **a** είναι η διαφορά **a** - **b**.

όπου **r** είναι το άνυσμα θέσης με συντεταγμένες $x,y,z$. Κατά τον ίδιο τρόπο ένα ανυσματικό φυσικό μέγεθος είναι δυνατόν να εξαρτάται από τη θέση στο χώρο, ενώ, για ένα συγκεκριμένο σημείο, μπορεί να μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου. Για παράδειγμα, η ταχύτητα των μορίων του ατμοσφαιρικού αέρα είναι δυνατόν σε μια καταιγίδα να διαφέρει δραστικά σε διάφορα σημεία της ατμοσφαίρας και να μεταβάλλεται καθώς τα καιρικά φαινόμενα εξελίσσονται σε μια συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή. Στην περίπτωση αυτή, το φυσικό μέγεθος αποδίδεται από μια ανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z,t)$, δηλαδή ένα άνυσμα που εξαρτάται τόσο από τη θέση του σημείου $P(x,y,z)$ στο οποίο αναφέρεται όσο και από το χρόνο $t$. Οπως με τις βαθμωτές συναρτήσεις, θα αποδόσουμε ανυσματικές συναρτήσεις και με το συνεπτυγμένο συμβολισμό $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$.

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων OXYZ η ανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z,t)$ μπορεί να αποδοθεί κατ' αναλογία με την εξ. (1.9) ως

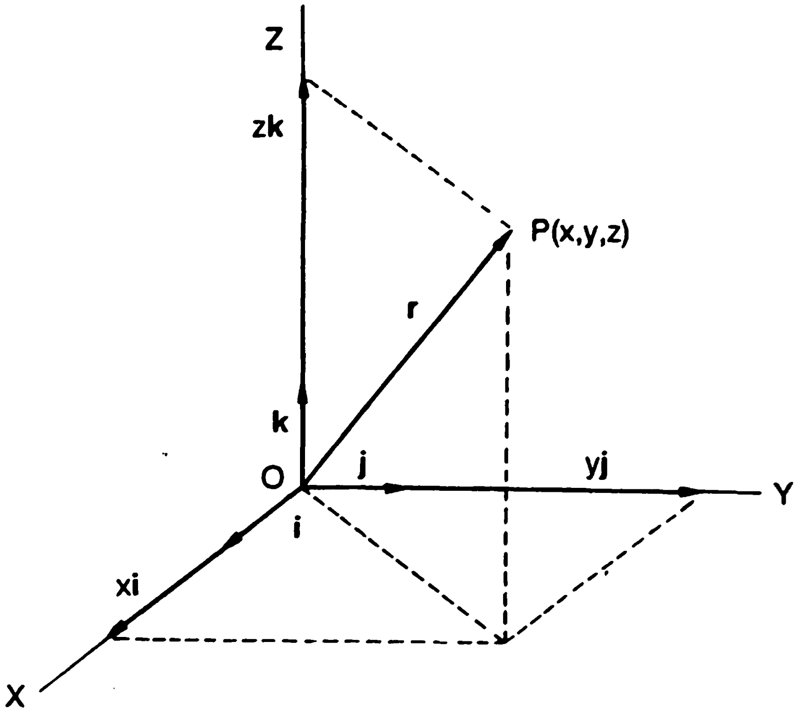
$$\mathbf{F}(x,y,z,t) = F_x(x,y,z,t)\,\mathbf{i} + F_y(x,y,z,t)\,\mathbf{j} + F_z(x,y,z,t)\,\mathbf{k}. \qquad (1.10)$$

Οπως υποδηλώνει ο συμβολισμός, οι τρείς προβολές $F_x$, $F_y$, $F_z$ αντίστοιχα στους τρεις άξονες X,Y,Z, που θα ονομάσουμε **συνιστώσες** του ανύσματος **F**, εξαρτώνται επίσης από τις συντεταγμένες $x,y,z$ και το χρόνο $t$.

Μια απλή περίπτωση ανυσματικής συνάρτησης με ιδιαίτερο ενδιαφέρον δημιουργείται με την εξάρτηση του ανύσματος θέσης $\mathbf{r}(s)$ από κάποια παράμετρο $s$

$$\mathbf{r} = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}. \qquad (1.11)$$

Το σύνολο των σημείων με συντεταγμένες τις συναρτήσεις $x(s),y(s),z(s)$ ορίζουν μια καμπύλη C στον τρισδιάστατο χώρο καθώς η παράμετρος $s$ διατρέχει τους πραγματικούς αριθμούς. Η γεωμετρική ερμηνεία της εξ. (1.11), την οποία θα χρησιμοποιήσουμε επανειλημμένα στη συνέχεια για την απόδοση μιας καμπύλης στο χώρο, αποδίδεται στο σχήμα 1-6.




Σχήμα 1-5 Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Το άνυσμα θέσης $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ του σημείου $P(x,y,z)$ εκτείνεται από την αρχή των συντεταγμένων O έως το σημείο P.

## 1.6 Βαθμωτό ή Εσωτερικό Γινόμενο δύο Ανυσμάτων

Θα ορίσουμε δύο διαφορετικές πράξεις πολλαπλασιασμού μεταξύ ανυσμάτων που οδηγούν αντίστοιχα σε βαθμωτό ή ανυσματικό αποτέλεσμα. Το **βαθμωτό ή εσωτερικό** γινόμενο δύο ανυσμάτων **a** και **b** ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos\theta \tag{1.12}$$

όπου $\theta$ είναι η γωνία την οποία σχηματίζουν τα δύο ανύσματα.

Από τον ορισμό της εξ. (1.12) ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επιβεβαιώσει τις επόμενες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου

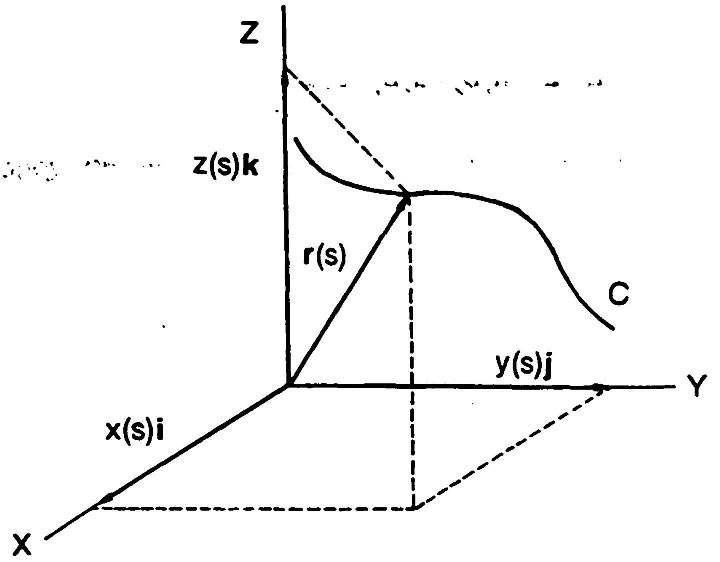
1. Το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τη μεταθετική σχέση

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \tag{1.13}$$

2. Το εσωτερικό γινόμενο ενός ανύσματος **a** με τον εαυτό του ισούται με το τετράγωνο του μέτρου του, ήτοι

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2. \tag{1.14}$$

Για τη βαθμωτή ποσότητα $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ θα χρησιμοποιήσουμε εναλλακτικά το συμβολισμό $\mathbf{a}^2$.




Σχήμα 1-6 Παραμετρική απόδοση μιας καμπύλης C στο χώρο.

3. Από γεωμετρική άποψη, το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ αντιπροσωπεύει το γινόμενο της προβολής του ανύσματος **a** στο άνυσμα **b** επί το μέτρο του ανύσματος **b**. Εναλλακτικά, αντιπροσωπεύει το γινόμενο της προβολής του ανύσματος **b** στο άνυσμα **a** επί το μέτρο του ανύσματος **a**.

4. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άποψη μπορούμε να δείξουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την επιμεριστική ιδιότητα

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}. \tag{1.15}$$

5. Αν τα ανύσματα **a** και **b** είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0. \tag{1.16}$$

Αντίστροφα, η εξ. (1.16) συνεπάγεται είτε ότι τα ανύσματα **a** και **b** είναι κάθετα μεταξύ τους, είτε ότι ένα από τα δύο ανύσματα ισούται με το μηδενικό άνυσμα.

6. Από τις προηγούμενες ιδιότητες εξάγεται ότι τα μοναδιαία ανύσματα **i**, **j**, **k** στο συμβολισμό των εξ. (1.9) και (1.10) ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1 \tag{1.17}$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0. \tag{1.18}$$

7. Η επιμεριστική ιδιότητα της εξ. (1.15) σε συνδιασμό με τις σχέσεις των εξ. (1.17) και (1.18) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο ανυσμάτων

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$$

μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z . \tag{1.19}$$

Η έκφραση του εσωτερικού γινομένου στην εξ. (1.19) θα χρησιμοποιηθεί επανειλημμένα στη συνέχεια.

## 1.7 Ανυσματικό ή Εξωτερικό Γινόμενο δύο Ανυσμάτων

Σε αντίθεση με το εσωτερικό γινόμενο, η δεύτερη πράξη πολλαπλασιασμού μεταξύ ανυσμάτων οδηγεί σε άνυσμα. Θα ορίσουμε το **ανυσματικό** ή **εξωτερικό** γινόμενο δύο μη παράλληλων ανυσμάτων **a** και **b** ως το άνυσμα **c**, το οποίο είναι κάθετο προς το επίπεδο που ορίζουν τα δύο ανύσματα και έχει μέτρο ίσο προς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα **a** και **b**. Ως φορά του ανύσματος **c** θα επιλέξουμε αυτή που προσδιορίζει ο δεξιόστροφος κοχλίας κατά την επιλογή του ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων. Ο ορισμός του εξωτερικού γινομένου δίνεται γραφικά στο σχήμα 1-7. Για την πράξη του εξωτερικού γινομένου θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο × και θα γράψουμε τον ορισμό ως

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab\sin\theta\,\mathbf{e} \tag{1.20}$$

όπου $\theta$ είναι η γωνία μεταξύ των ανυσμάτων **a** και **b**, ενώ **e** είναι το μοναδιαίο άνυσμα κατά την κάθετη δεξιόστροφη φορά.

Από τον ορισμό της εξ. (1.20) είναι δυνατόν να εξάγουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου

1. Καθόσον $\sin\theta = -\sin(-\theta)$ έπεται ότι

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} . \tag{1.21}$$

Ετσι, το εξωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την *αντιμεταθετική ιδιότητα.*

2. Για δύο παράλληλα ανύσματα **a** και **b**, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$. Ιδιαίτερα, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

3. Το εξωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την *επιμεριστική ιδιότητα*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} . \tag{1.22}$$

Η απόδειξη της εξ. (1.22) παραπέμπεται στις Ασκήσεις στο τέλος του Κεφαλαίου.

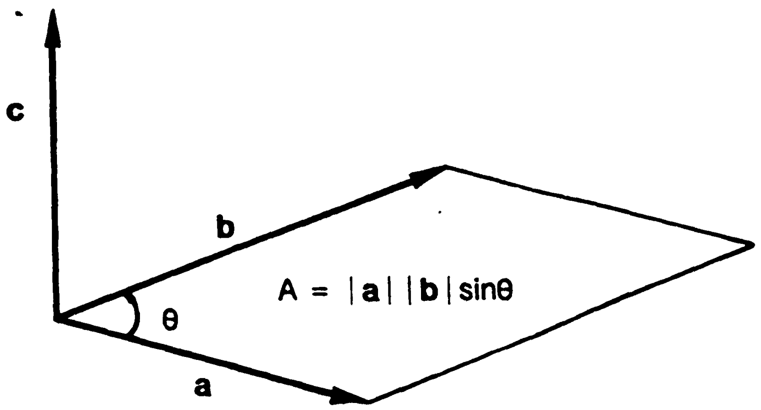
4. Τα μοναδιαία ανύσματα **i**, **j**, **k** στο συμβολισμό των εξ. (1.9) και (1.10) ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \tag{1.23}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} . \tag{1.24}$$

5. Για δύο ανύσματα

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k} \end{aligned} \tag{1.25}$$




Σχήμα 1-7 Το εξωτερικό γινόμενο δυο ανυσμάτων **a** και **b** έχει μέτρο ίσο προς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δυο ανύσματα.

είναι εύκολο να δείξουμε, χρησιμοποιώντας τις εξ. (1.22) - (1.24), ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i}\\ &+ (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j}\\ &+ (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k}\end{aligned} \tag{1.26}$$

Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με το ανάπτυγμα της ορίζουσας

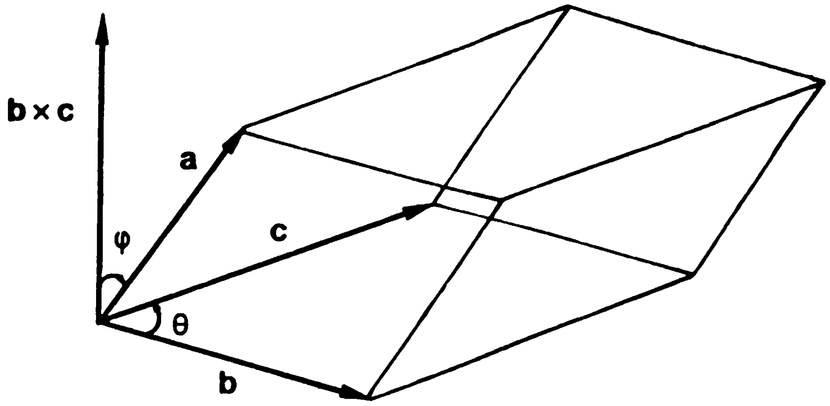
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{1.27}$$

Η τελευταία έκφραση θα αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμη στο μέλλον.

## 1.8 Τριπλά Γινόμενα

Οι δύο πράξεις του πολλαπλασιασμού μεταξύ ανυσμάτων που ορίσαμε είναι δυνατόν να συνδιαστούν κατά δύο τρόπους στη διαμόρφωση ενός τριπλού γινομένου. Ο συνδιασμός $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} < \mathbf{c})$ οδηγεί σε βαθμωτή ποσότητα που, όπως φαίνεται στο σχήμα 1-8, αντιπροσωπεύει τον όγκο ενός παραλληλεπιπέδου με πλευρές **a**, **b** και **c**. Αναλυτικά μπορούμε να γράψουμε, χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους ορισμούς για το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = abc\sin\theta\cos\varphi \tag{1.28}$$




**Σχήμα 1-8** Το τριπλό γινόμενο $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα τρία ανύσματα **a**, **b** και **c**.

όπου οι γωνίες $\theta$ και $\varphi$ σημειώνονται στο σχήμα 1-8. Χρησιμοποιώντας την έκφραση του εξωτερικού γινομένου στην εξ. (1.27) μέσω της ορίζουσας, μπορούμε ακόμη να γράψουμε το τριπλό γινόμενο ως

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= a_x(b_yc_z - b_zc_y) + a_y(b_zc_x - b_xc_z) + a_z(b_xc_y - b_yc_x). \tag{1.29}$$

Η τελευταία έκφραση μπορεί να αναγνωριστεί ως το ανάπτυγμα της ορίζουσας

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{1.30}$$

Από τις ιδιότητες των οριζουσών και τη μορφή της εξ. (1.30) είναι δυνατόν να δείξουμε ότι κυκλική μετάθεση των τριών ανυσμάτων στο τριπλό γινόμενο $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ δίνει το ίδιο αποτέλεσμα, ήτοι

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{1.31}$$

ενώ οποιαδήποτε μη κυκλική μετάθεση δίνει το αντίθετο αποτέλεσμα, ήτοι

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}). \tag{1.32}$$

Παρατηρείται ότι αν τα τρία ανύσματα **a**, **b** και **c** βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, το τριπλό γινόμενο $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ μηδενίζεται. Ειδικότερα το τριπλό γινόμενο $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ μηδενίζεται αν δύο από τα ανύσματα που συμμετέχουν είναι ίσα.

Συνδιασμός τριών ανυσμάτων **a**, **b** και **c** με την πράξη του εξωτερικού γινομένου οδηγεί στο άνυσμα

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \tag{1.33}$$

Καθόσον το άνυσμα **d** είναι κάθετο προς το άνυσμα $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, έπεται ότι βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν τα ανύσματα **b** και **c**, αν βεβαίως τούτα δεν είναι παράλληλα, οπότε και το τριπλό εξωτερικό γινόμενο μηδενίζεται. Το άνυσμα **d** επομένως μπορεί να γραφεί ως ένας γραμμικός συνδιασμός των ανυσμάτων **b** και **c**

$$\mathbf{d} = \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}. \tag{1.34}$$

Οι τιμές των $\lambda$ και $\mu$ στον τελευταίο συνδιασμό είναι δυνατόν να προσδιοριστούν με τη βοήθεια της εξ. (1.26). Πράγματι, το τριπλό γινόμενο $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ μπορεί να γραφεί σε μορφή ορίζουσας ως

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \\
&\times [(b_y c_z - b_z c_y)\mathbf{i} + (b_z c_x - b_x c_z)\mathbf{j} + (b_x c_y - b_y c_x)\mathbf{k}] \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Ο αναγνώστης είναι εύκολο να επαληθεύσει ότι το ανάπτυγμα της ορίζουσας στην εξ. (1.35) δίνει το αποτέλεσμα

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \tag{1.36}$$

έτσι ώστε οι συντελεστές $\lambda$ και $\mu$ στην εξ. (1.34) να αναγνωρίζονται ως

$$\lambda = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad \text{και} \quad \mu = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \tag{1.37}$$

Παρατηρείται ότι μετάθεση των παρενθέσεων στο τριπλό εξωτερικό γινόμενο οδηγεί σε διαφορετικό αποτέλεσμα. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -[(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}] \\
&= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \\
&\neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Με τη βοήθεια της εξ. (1.36) είναι δυνατόν να απλοποιήσουμε περισσότερο περίπλοκα γινόμενα. Για παράδειγμα, το εξωτερικό γινόμενο δύο εξωτερικών γινομένων μπορεί να γραφεί ως

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}]\mathbf{c} - [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}]\mathbf{d}$$

$$[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d})]\mathbf{c} - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]\mathbf{d}. \tag{1.39}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}]$$

$$= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}). \tag{1.40}$$

Μερικές ακόμη ταυτότητες που μπορεί να αποδειχθούν μέσω των εξ. (1.30) και (1.36) παραπέμπονται στις Ασκήσεις που ακολουθούν.

## ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Εξωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Τριπλά γινόμενα

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x)$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Χρήσιμες σχέσεις και ταυτότητες

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}]\mathbf{c} - [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}]\mathbf{d}$$

$$[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d})]\mathbf{c} - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]\mathbf{d}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}]$$

$$= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]\mathbf{b} - [\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]\mathbf{a}$$

$$[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^2 = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$$

$$= a^2b^2c^2 - a^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})^2 - b^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})^2 - c^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \end{vmatrix}$$

$$[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})][\mathbf{d}\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{f})] = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{f} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{f} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{f} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{d}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = [\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})](\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1-1 Αν $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, τί αντιπροσωπεύει το άνυσμα

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

1-2 Αν τα δύο ανύσματα **a** και **b** βρίσκονται πάνω σε δύο διαδοχικές πλευρές ενός παραλληλογράμμου, εκφράστε τις διαγωνίους του παραλληλογράμμου μέσω των **a** και **b**.

1-3 Αν τά ανύσματα **a**, **b**, **c** και **d** συγκροτούν τις τέσσερις διαδοχικές πλευρές ενός τετραπλεύρου, δείξτε ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε το σχήμα να αποτελεί παραλληλόγραμμο είναι $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Δείξτε επιπλέον ότι τότε θα ισχύει και η σχέση $\mathbf{b} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$.

1-4 Τρία ανύσματα **a**, **b** και **c** έχουν κοινή αφετηρία O και καταλήγουν αντίστοιχα στα σημεία A, B και C. Αποδείξτε ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε τα τρία σημεία A, B και C να βρίσκονται σε ευθεία γραμμή δίνεται από τη σχέση $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, όπου $\lambda$ και $\mu$ είναι δύο αριθμοί, τέτοιοι ώστε $\lambda + \mu = 1$.

1-5 Αποδείξτε ότι οι διάμεσοι ενός τριγώνου τέμνονται σε ένα κοινό σημείο, το οποίο χωρίζει κάθε διάμεσο σε ευθύγραμμα τμήματα με λόγο 1:2.

1-6 Αποδείξτε ότι το σημείο τομής των διαγωνίων ενός παραλληλογράμου διχοτομεί τις διαγωνίους.

1-7 Αποδείξτε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν μια κορυφή ενός παραλληλογράμμου με το μέσο των απέναντι πλευρών τριχοτομούν τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου.

1-8 Αποδείξτε ότι οι τρείς διχοτόμοι ενός τριγώνου τέμνονται σε ένα κοινό σημείο.

1-9 Αποδείξτε ότι η διάμεσος της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι κάθετη προς τη βάση.

1-10 Αποδείξτε ότι αν σε ένα τρίγωνο, εγγεγραμμένο σε κύκλο, μια πλευρά ταυτίζεται με τη διάμετρο, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

1-11 Προσδιορίστε το συνημίτονο της γωνίας θ που σχηματίζουν τα ανύσματα $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

1-12 Αποδείξτε ότι αν σε ένα τρίγωνο με πλευρές **a**, **b** και **c** ισχύει η σχέση

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

όπου $\theta$ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι πλευρές **a** και **b**.

1-13 Δείξτε ότι τα ανύσματα $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ σχηματίζουν γωνία 90°.

1-14 Αν το άνυσμα **c** είναι κάθετο προς τα ανύσματα **a** και **b**, δείξτε ότι είναι κάθετο και προς τα ανύσματα $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ και $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

1-15 Αν τα μοναδιαία ανύσματα **a** και **b** βρίσκονται στο επίπεδο X-Y και σχηματίζουν γωνίες $\alpha$ και $\beta$ με τον άξονα X, αποδείξτε ότι

$$\mathbf{a} = \cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = \cos\beta\mathbf{i} + \sin\beta\mathbf{j}$$

και ότι ισχύει η σχέση

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

1-16 Αποδείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του.

1-17 Αποδείξτε ότι το εξωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την επιμεριστική ιδιότητα [εξ. (1.22)].

1-18 Αποδείξτε τη σχέση της εξ. (1.39).

1-19 Αποδείξτε τη σχέση της εξ. (1.40).

1-20 Αποδείξτε ότι

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]\mathbf{b} - [\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]\mathbf{a}.$$

1-21 Αποδείξτε ότι

$$[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^2 = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})]$$

$$= \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})^2 - \mathbf{b}^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})^2 - \mathbf{c}^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \end{vmatrix}.$$

Η τελευταία έκφραση είναι γνωστή και ως *ορίζουσα του Gram*.

1-22 Αποδείξτε ότι

$$[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})][\mathbf{d}\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{f})] = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{f} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{f} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{f} \end{vmatrix}.$$

1-23 Αποδείξτε ότι

$$\mathbf{d}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = [\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})](\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}).$$

1-24 Αποδείξτε ότι από τη σχέση $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$, έπεται ότι

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{c}\times\mathbf{a}.$$

1-25 Αποδείξτε ότι

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0.$$

1-26 Αν τα τέσσερα ανύσματα **a**, **b**, **c** και **d** βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, δείξτε ότι

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = 0.$$

1-27 Αν το επίπεδο που ορίζουν τα ανύσματα **a** και **b** είναι κάθετο προς το επίπεδο που ορίζουν τα ανύσματα **c** και **d**, δείξτε ότι

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = 0.$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Αν οι μεταβλητές μιας βαθμωτής συνάρτησης $f(x,y,z,t)$ μεταβληθούν κατά τις απειροελάχιστες ποσότητες $dx$, $dy$, $dz$ και $dt$, η τιμή της συνάρτησης θα μεταβληθεί κατά την ποσότητα $df$. Το **διαφορικό** $df$ της συνάρτησης μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα των επιμέρους μεταβολών για κάθε μεταβλητή στη μορφή

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt \tag{2.1}$$

όπου

$$\frac{\partial f}{\partial a}$$

είναι η *μερική παράγωγος* της συνάρτησης ως προς τη μεταβλητή $a$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της ως προς $a$, αν όλες οι άλλες μεταβλητές παραμείνουν σταθερές.

Η μερική παράγωγος μιας συνάρτησης $f$ είναι μια νέα συνάρτηση που ορίζεται αν η αρχική συνάρτηση πληροί ορισμένες προϋποθέσεις συνεχείας και φραγμού των τιμών της. Θα θεωρήσουμε ότι στον αναγνώστη είναι οικείες οι έννοιες του διαφορικού και της παραγώγου στο χώρο των βαθμωτών συναρτήσεων, καθώς και οι προϋποθέσεις υπό τις οποίες μια βαθμωτή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη. Τις έννοιες αυτές θα μεταφέρουμε στο χώρο των ανυσματικών συναρτήσεων.

## 2.1 Παραγώγιση Ανυσματικών Συναρτήσεων

Αν μια βαθμωτή συνάρτηση $u$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δύο άλλων βαθμωτών συναρτήσεων $f$ και $g$,

$$u = f + g \tag{2.2}$$

έπεται αμέσως από την εξ. (2.1) ότι θα ισχύει και

$$du = df + dg. \tag{2.3}$$

Οπως είδαμε στην Παράγραφο 1.5, μια ανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z,t)$ μπορεί να γραφεί ως το ανυσματικό άθροισμα των συνιστωσών της ως

$$\mathbf{F}(x,y,z,t) = F_x(x,y,z,t)\,\mathbf{i} + F_y(x,y,z,t)\,\mathbf{j} + F_z(x,y,z,t)\,\mathbf{k}. \tag{2.4}$$

Ενόψει επομένως της εξ. (2.3) και αν τα μοναδιαία ανύσματα **i**, **j**, **k** παραμένουν σταθερά, είναι λογικό να επεκτείνουμε την έννοια του διαφορικού στις ανυσματικές συναρτήσεις με τον ορισμό

$$d\mathbf{F} = dF_x\mathbf{i} + dF_y\mathbf{j} + dF_z\mathbf{k}. \tag{2.5}$$

Αναλυτικά, υπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση ως

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} = &\left[\frac{\partial F_x}{\partial x}dx + \frac{\partial F_x}{\partial y}dy + \frac{\partial F_x}{\partial z}dz + \frac{\partial F_x}{\partial t}dt\right]\mathbf{i} \\ &\left[\frac{\partial F_y}{\partial x}dx + \frac{\partial F_y}{\partial y}dy + \frac{\partial F_y}{\partial z}dz + \frac{\partial F_y}{\partial t}dt\right]\mathbf{j} \\ &\left[\frac{\partial F_z}{\partial x}dx + \frac{\partial F_z}{\partial y}dy + \frac{\partial F_z}{\partial z}dz + \frac{\partial F_z}{\partial t}dt\right]\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ενδεχομένως το απλούστερο, αλλά εξαιρετικά σημαντικό, παράδειγμα του προηγούμενου ορισμού αποτελεί το άνυσμα θέσης

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{2.7}$$

για το οποίο μπορούμε να γράψουμε

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}. \tag{2.8}$$

Η **παράγωγος** μιας **ανυσματικής συνάρτησης** **F**, ως προς μια μεταβλητή της συνάρτησης $a = x,y,z,t$, μπορεί να γραφεί τώρα με βάση την εξ. (2.5) ως

$$\frac{d\mathbf{F}}{da} = \frac{dF_x}{da}\mathbf{i} + \frac{dF_y}{da}\mathbf{j} + \frac{dF_z}{da}\mathbf{k}. \tag{2.9}$$

Για παράδειγμα, η παράγωγος του ανύσματος θέσης **r** ως προς το χρόνο t είναι το άνυσμα **v**

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}. \tag{2.10}$$

Ο αναγνώστης θα αναγνωρίσει βεβαίως το τελευταίο άνυσμα ως την ταχύτητα ενός σημείου, του οποίου το άνυσμα θέσης **r** μεταβάλλεται με το χρόνο. Οπως ήδη αναφέρθηκε, σε όλες τις προηγούμενες σχέσεις υπάρχει η παραδοχή ότι τα ανύσματα **i**, **j**, **k** παραμένουν σταθερά. Ειδικότερα στην εξ. (2.10) υπάρχει η παραδοχή ότι το σύστημα OXYZ συντεταγμένων παραμένει σταθερό ως προς το χρόνο.

Η παράγωγος μιας ανυσματικής συνάρτησης είναι γενικά μια νέα ανυσματική συνάρτηση. Οπως και στις βαθμωτές συναρτήσεις μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της παραγώγου και να ορίσουμε τη **δεύτερη παράγωγο** (βλ. Παράγραφο 2.7) μιας ανυσματικής συνάρτησης ως την παράγωγο της (πρώτης) παραγώγου. Επανερχόμενοι στο παράδειγμα του ανύσματος θέσης, μπορούμε να ορίσουμε σε προφανή συμβολισμό την παράγωγο του ανύσματος **v** ως προς το χρόνο

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}. \tag{2.11}$$

Το άνυσμα **a** είναι βεβαίως η επιτάχυνση του σημείου με ταχύτητα **v** στη θέση **r**. Αρκετά ακόμη παραδείγματα παραγώγων φυσικών μεγεθών που οδηγούν σε νέα ανυσματικά φυσικά μεγέθη περιέχονται στις Ασκήσεις στο τέλος του Κεφαλαίου.

Πολλές από τις ιδιότητες των παραγώγων βαθμωτών συναρτήσεων μπορούν να μεταφερθούν ατόφιες στο χώρο των ανυσματικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα είναι γνωστό ότι το γινόμενο δυο βαθμωτών συναρτήσεων $f$ και $g$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d(fg)}{dt} = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt}. \tag{2.12}$$

Χρησιμοποιώντας την εξ. (2.9) ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να βεβαιωθεί ότι τον ίδιο κανόνα ακολουθεί η παραγώγιση συναρτήσεων για όλες τις πράξεις του πολλαπλασιασμού που ορίσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, ήτοι

$$\frac{d(f\mathbf{G})}{dt} = \frac{df}{dt}\mathbf{G} + f\frac{d\mathbf{G}}{dt} \tag{2.13}$$

$$\frac{d(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})}{dt} = \frac{d\mathbf{F}}{dt}\cdot\mathbf{G} + \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{G}}{dt} \tag{2.14}$$

και

$$\frac{d(\mathbf{F}\times\mathbf{G})}{dt} = \frac{d\mathbf{F}}{dt}\times\mathbf{G} + \mathbf{F}\times\frac{d\mathbf{G}}{dt}. \tag{2.15}$$

Παρατηρείται ότι καθόσον το εξωτερικό γινόμενο δεν ικανοποιεί τη μεταθετική ιδιότητα ($\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$), η διατήρηση της σωστής διαδοχής των ανυσμάτων **F** και **G** στην εξ. (2.15) είναι απαραίτητη.

## 2.2 Κλίση Βαθμωτής Συνάρτησης

Το διαφορικό $d\varphi$ μιας βαθμωτής συνάρτησης $\varphi(x,y,z)$, η οποία δεν εξαρτάται από το χρόνο, μπορεί να γραφεί σύμφωνα με την εξ (2.1) ως

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz. \tag{2.16}$$

Το δεξιό μέρος της τελευταίας σχέσης μπορεί αμέσως να αναγνωριστεί ως το εσωτερικό γινόμενο δύο ανυσμάτων: του ανύσματος $d\mathbf{r}$ στην εξ. (2.8) και ενός ανύσματος με συνιστώσες

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Θα συμβολίσουμε το τελυταίο αυτό άνυσμα ως

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k} \tag{2.17}$$

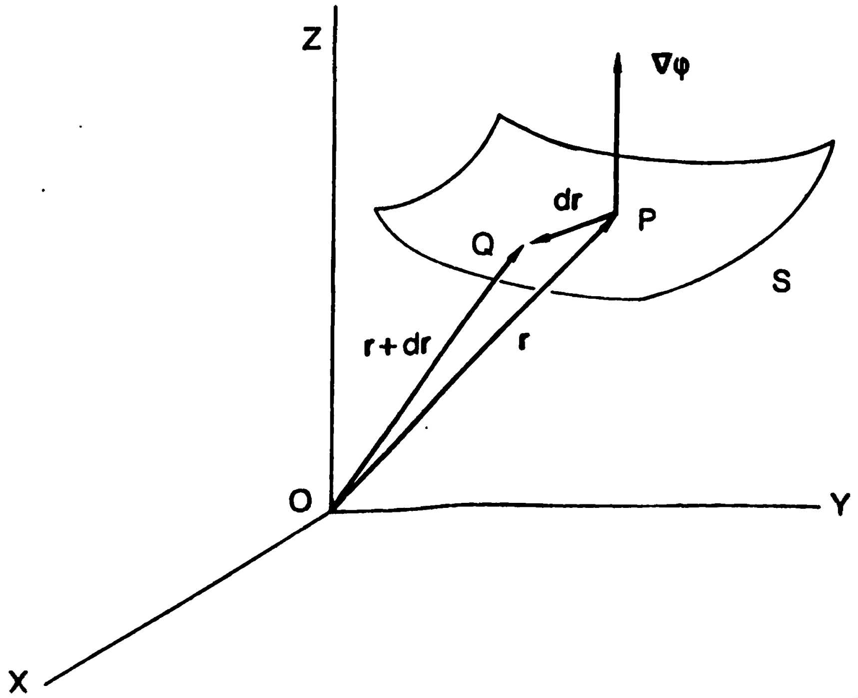
και θα το ονομάσουμε **κλίση** της συνάρτησης $\varphi$. Ο ειδικός χαρακτήρας $\boldsymbol{\nabla}$ που χρησιμοποιήθηκε στο συμβολισμό της κλίσης ονομάζεται *ανάδελτα*. Με τον ορισμό της εξ. (2.17), η εξ. (2.16) μπορεί να γραφεί ως

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r}. \tag{2.18}$$

Η κλίση βαθμωτής συνάρτησης παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλούς κλάδους της Φυσικής. Ο αναγνώστης ενδεχομένως θα γνωρίζει τη σύνδεση μεταξύ ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ και δυναμικού $\varphi$ στην Ηλεκτροστατική

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi. \tag{2.19}$$

Στα πλαίσια του παρόντος βιβλίου θα αρκεστούμε απλώς στη γεωμετρική ερμηνεία του ανύσματος $\nabla\varphi$. Για το σκοπό αυτό θα θεωρήσουμε, όπως στο σχήμα 2-1, μια επιφάνεια S, πάνω στην οποία η τιμή της συνάρτησης $\varphi(x,y,z)$ δεν μεταβάλλεται. Ας θεωρήσουμε ένα σημείο P της επιφάνειας S που καθορίζεται από το άνυσμα θέσης $\mathbf{r}$. Ας θεωρήσουμε ακόμη ένα δεύτερο σημείο Q, γειτονικό προς το P, το οποίο επίσης βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια S και απέχει από το P κατά το άνυσμα $d\mathbf{r}$. Είναι προφανές ότι το άνυσμα θέσης του σημείου Q είναι το άνυσμα $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Καθόσον τα δύο σημεία P και Q ανήκουν στην επιφάνεια S, η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης $\varphi$ μεταξύ των δύο σημείων




**Σχήμα 2-1** Γεωμετρική ερμηνεία της κλίσης βαθμωτής συνάρτησης.

μηδενίζεται, ήτοι

$$d\varphi = 0$$

που από την εξ. (2.18) συνεπάγεται

$$\nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{2.20}$$

Αν η συνάρτηση $\varphi(x,y,z)$ δεν παραμένει σταθερή σε όλο το χώρο, οπότε το άνυσμα $\nabla\varphi$ μηδενίζεται παντού, η εξ. (2.20) δηλώνει ότι τα ανύσματα $\nabla\varphi$ και $d\mathbf{r}$ είναι κάθετα. Επιπλέον, καθόσον το σημείο Q ελήφθη τυχαία, έπεται ότι στο σημείο P το άνυσμα $\nabla\varphi$ είναι κάθετο προς την επιφάνεια S. Με άλλα λόγια, σε ένα σημείο του χώρου P, όπου η συνάρτηση $\varphi$ έχει την τιμή $c$, το άνυσμα $\nabla\varphi$ είναι κάθετο προς την επιφάνεια, η οποία ορίζεται από τη συνθήκη $\varphi(x,y,z) = c$. Για παράδειγμα η σύνδεση της εξ. (2.19) στην Ηλεκτροστατική συνεπάγεται το γνωστό πόρισμα ότι η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετη προς τις ισοδυναμικές επιφάνειες.

Η εξ. (2.18) οδηγεί και σε μια δεύτερη, εξίσου σημαντική, ερμηνεία του ανύσματος $\nabla\varphi$. Οπως είδαμε, η μεταβολή της συνάρτησης $d\varphi$ μηδενίζεται αν το άνυσμα $d\mathbf{r}$ είναι κάθετο προς το άνυσμα $\nabla\varphi$. Αντίθετα, το εσωτερικό γινόμενο της εξ. (2.18) γίνεται μέγιστο αν τα ανύσματα $d\mathbf{r}$ και $\nabla\varphi$ είναι παράλληλα. Συνεπάγεται επομένως ότι *το άνυσμα $\nabla\varphi$ βρίσκεται κατά τη διεύθυνση και φορά της μέγιστης μεταβολής της συνάρτησης $\varphi$.*

## 2.3 Ο Διαφορικός Τελεστής

Η παραγώγιση μιας συνάρτησης, βαθμωτής ή ανυσματικής, ως προς μια μεταβλητή $a$ είναι δυνατόν να θεωρηθεί και από την άποψη της τέλεσης μιας πράξης. Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε ότι το σύμβολο

$$\frac{d}{da}$$

είναι ένας **τελεστής**, ο οποίος όταν δρα πάνω σε μια συνάρτηση την μετατρέπει σε μια νέα συνάρτηση, την παράγωγο της αρχικής συνάρτησης. Συμβολικά μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{d}{da} f(\mathbf{r},t) = \frac{df}{da} \tag{2.21}$$

ή, για μια ανυσματική συνάρτηση,

$$\frac{d}{da} \mathbf{F}(\mathbf{r},t) = \frac{d\mathbf{F}}{da}. \tag{2.22}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, στο χώρο των ανυσματικών συναρτήσεων, μπορούμε να ορίσουμε τον **ανυσματικό διαφορικό τελεστή** $\nabla$ ως

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.23}$$

Σε αναλογία με την εξ. (2.21), μπορούμε να γράψουμε για παράδειγμα την κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης $\varphi$ ως

$$\nabla\varphi = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}. \qquad (2.24)$$

Ο διαφορικός τελεστής της εξ. (2.23) αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμος στην εξαγωγή κανόνων συμπεριφοράς των συναρτήσεων κατά την παραγώγιση. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τους γνωστούς κανόνες που διέπουν τη συμπεριφορά του τελεστή $d/da$, ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επιβεβαιώσει τη δράση του τελεστή $\nabla$ σε ένα γινόμενο βαθμωτών συναρτήσεων είναι

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f. \qquad (2.25)$$

Οπως θα δούμε αργότερα, ο τελεστής $\nabla$ είναι δυνατόν να συνδιαστεί με πράξεις του πολλαπλασιασμού ανυσμάτων και να οδηγήσει σε νέους τελεστές. Στην Παράγραφο 2.5, π.χ. θα μελετήσουμε το **Λαπλασιανό τελεστή** $\nabla \cdot \nabla$, που συνήθως απαντάται με το σύμβολο $\nabla^2$. Προς το παρόν θα εξετάσουμε το βαθμωτό τελεστή $\mathbf{F} \cdot \nabla$, όπου $\mathbf{F}$ είναι μια ανυσματική συνάρτηση, και ο οποίος μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{F} \cdot \nabla = (F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) \cdot \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= F_x\frac{\partial}{\partial x} + F_y\frac{\partial}{\partial y} + F_z\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (2.26)$$

Δράση του τελεστή $\mathbf{F}\cdot\nabla$ σε μια βαθμωτή συνάρτηση $\varphi$ δίνει προφανώς το εσωτερικό γινόμενο του ανύσματος $\mathbf{F}$ και της κλίσης $\nabla\varphi$. Δράση του τελεστή σε μια ανυσματική συνάρτηση $\mathbf{G}$ δίνει το άνυσμα

$$(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} = F_x\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} + F_y\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + F_z\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z}$$

$$= (\mathbf{F} \cdot \nabla G_x)\mathbf{i} + (\mathbf{F} \cdot \nabla G_y)\mathbf{j} + (\mathbf{F} \cdot \nabla G_z)\mathbf{k}. \qquad (2.27)$$

Ιδιαίτερα ο τελεστής $(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{G}$ έχει τη μορφή

$$(d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{G} = dx\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} + dy\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + dz\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z}$$

$$= dG_x\mathbf{i} + dG_y\mathbf{j} + dG_z\mathbf{k} \qquad (2.28)$$

που αμέσως αναγνωρίζεται ως το ολικό διαφορικό $d\mathbf{G}$ της συνάρτησης $\mathbf{G}$. Μπορούμε επομένως να γράψουμε τη σχέση

$$d\mathbf{G} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{G} \qquad (2.29)$$

ή υπό μορφή σχέσης τελεστών ως

$$d = (d\mathbf{r} \cdot \nabla). \qquad (2.30)$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να βεβαιωθεί ότι η ισοδυναμία τελεστών της εξ. (2.30) ισχύει τόσο για δράση σε βαθμωτές όσο και σε ανυσματικές συναρτήσεις.

## 2.4 Ολικές και Επικαμπύλιες Παράγωγοι

Δράση του τελεστή $d$ της εξ. (2.30) σε μια βαθμωτή συνάρτηση $\varphi(\mathbf{r})$ εκφράζει την ολική μεταβολή της συνάρτησης $d\varphi$ για αντίστοιχη μεταβολή $d\mathbf{r}$ του ανύσματος θέσης $\mathbf{r}$. Αν το άνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ διαγράφει μια καμπύλη C στο χώρο $\mathbf{r}(t)$ τότε ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $\varphi(\mathbf{r})$ καθώς το άνυσμα θέσης μεταβάλλεται κατά την παράμετρο $t$, δίνεται από την **ολική παράγωγο**

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\right] \varphi = \frac{dx}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{2.31}$$

Αν η συνάρτηση $\varphi(\mathbf{r})$ εξαρτάται επιπλέον ρητά και από την παράμετρο $t$, η εξ. (2.31) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\right] \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{2.32}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου η παράμετρος $t$ αντιπροσωπεύει την απόσταση $s$ κατά μήκος της καμπύλης C, η παράγωγος $d\mathbf{r}/ds$ αντιπροσωπεύει (βλ. Ασκηση 2-1) το μοναδιαίο άνυσμα

$$\mathbf{e}_C = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{2.33}$$

κατά την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $\mathbf{r}$. Η εξ. (2.31) μπορεί τότε να γραφεί ως

$$\frac{d\varphi}{ds} = (\mathbf{e}_C \cdot \nabla)\varphi = \frac{dx}{ds}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{dy}{ds}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{dz}{ds}\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{2.34}$$

με ανάλογη έκφραση της εξ. (2.32). Θα ονομάσουμε την παράγωγο της εξ. (2.34) **επικαμπύλια παράγωγο** της συνάρτησης $\varphi(\mathbf{r})$ ως προς την καμπύλη C.

Η δράση του τελεστή της εξ. (2.30) μπορεί να επεκταθεί κατά παράλληλο τρόπο σε ανυσματικές συναρτήσεις. Ετσι, θα ορίσουμε την ολική παράγωγο μιας ανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ κατά την καμπύλη $\mathbf{r}(t)$ ως

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}}{dt} &= \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\right] \mathbf{F} \\ &= \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\right] F_x\mathbf{i} + \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\right] F_y\mathbf{j} + \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\right] F_z\mathbf{k} \\ &= \frac{dF_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dF_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{df_z}{dt}\mathbf{k} \end{aligned} \tag{2.35}$$

και την αντίστοιχη επικαμπύλια παράγωγο ως

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = (\mathbf{e}_c \cdot \nabla)\mathbf{F}$$

$$= (\mathbf{e}_c \cdot \nabla)F_x\mathbf{i} + (\mathbf{e}_c \cdot \nabla)F_y\mathbf{j} + (\mathbf{e}_c \cdot \nabla)F_z\mathbf{k}$$

$$= \frac{dF_x}{ds}\mathbf{i} + \frac{dF_y}{ds}\mathbf{j} + \frac{dF_z}{ds}\mathbf{k}. \qquad (2.36)$$

## 2.5 Απόκλιση Ανυσματικής Συνάρτησης

Δράση του ανυσματικού τελεστή $\nabla$ σε μια βαθμωτή συνάρτηση $\varphi$ οδηγεί σε ένα νέο άνυσμα $\nabla\varphi$ που ονομάσαμε κλίση της συνάρτησης $\varphi$. Ποιό είναι όμως το αποτέλεσμα δράσης του τελεστή $\nabla$ σε ανυσματική συνάρτηση; Τυπικά είναι δυνατόν να συνδιάσουμε τη δράση του ανυσματικού τελεστή σε ένα άνυσμα **F** με καθεμιά από τις πράξεις πολλαπλασιασμού ανυσμάτων. Η πράξη του εσωτερικού γινομένου δίνει τη βαθμωτή ποσότητα $\nabla \cdot \mathbf{F}$, ενώ το εξωτερικό γινόμενο το άνυσμα $\nabla \times \mathbf{F}$. Την πρώτη δυνατότητα θα εξετάσουμε αμέσως στη συνέχεια.

Σύμφωνα με τον ορισμό του ανυσματικού τελεστή στην εξ. (2.23), για ένα άνυσμα

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \qquad (2.37)$$

θα γράψουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left[\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot (F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \qquad (2.38)$$

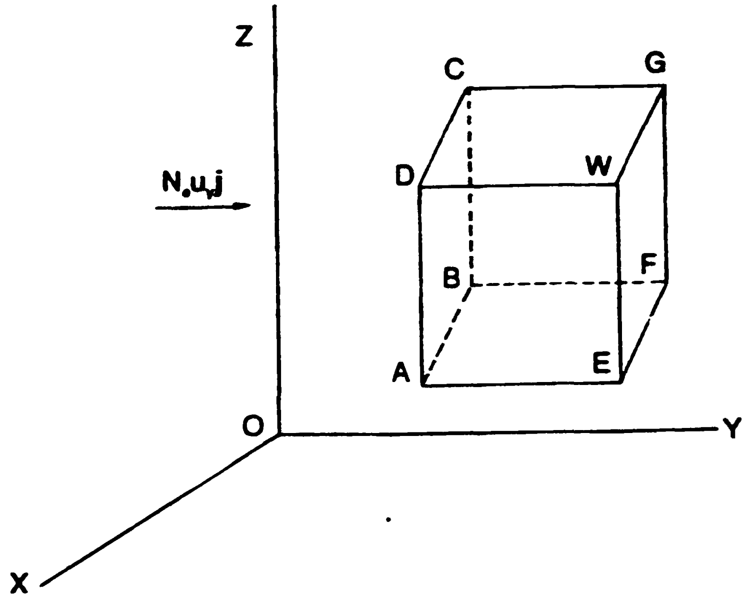
Θα ονομάσουμε τη βαθμωτή συνάρτηση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ που ορίζεται στην εξ. (2.38) **απόκλιση** του ανύσματος **F**.

Αν μη τι άλλο, η απόκλιση ενός ανύσματος ορίζεται πλήρως από την εξ. (2.38) και μπορεί πλέον να χρησιμοποιηθεί σε περεταίρω μαθηματική επεξεργασία. Οπως αποδεικνύεται όμως η ποσότητα $\nabla \cdot \mathbf{F}$ παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλούς κλάδους της Φυσικής. Μια τέτοια διερεύνηση του ρόλου της απόκλισης, που ενδεχομένως θα ενισχύση τη φυσική διαίσθηση του αναγνώστη, θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια. Για το σκοπό αυτό θα δανειστούμε έννοιες από το χώρο του Ηλεκτρισμού.

Η ροή ηλεκτρικού φορτίου μέσα σε ένα αγωγό οφείλεται στην κίνηση ηλεκτρονίων. Ας θεωρήσουμε ότι σε κάποιο σημείο **r** στο εσωτερικό του αγωγού η πυκνότητα των ηλεκτρονίων είναι $N_e(x,y,z)$ (ηλεκτρόνια ανά μονάδα όγκου) και κινούνται με ταχύτητα

$$\mathbf{v} = v_x(x,y,z,t)\,\mathbf{i} + v_y(x,y,z,t)\,\mathbf{j} + v_z(x,y,z,t)\,\mathbf{k}. \qquad (2.39)$$

Γύρω από το σημείο **r** θα θεωρήσουμε επιπλέον το στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο ABCDEFG με διαστάσεις $dx$, $dy$, $dz$, που σημειώνεται στο σχήμα 2-2. Η ροή ηλεκτρικού φορτίου μέσα από το παραλληλεπίπεδο μπορεί να υπολογιστεί αν θεωρήσουμε ξεχωριστά κάθε πλευρά του. Από την πλευρά ABCD, για παράδειγμα, στη μονάδα του χρόνου




Σχήμα 2-2 Ερμηνεία της απόκλισης ανυσματικής συνάρτησης.

διέρχονται $N_e v_y dxdz$ ηλεκτρόνια. Το ολικό ηλεκτρικό φορτίο επομένως που θα εισχωρήσει στο παραλληλεπίδο στη μονάδα του χρόνου, λόγω ροής μέσω της επιφάνειας ABCD, είναι $eN_e v_y dxdz$, όπου $e$ είναι το ηλεκτρικό φορτίο κάθε ηλεκτρονίου. Αν τώρα το ηλεκτρικό φορτίο μέσα στο παραλληλεπίπεδο ABCDEFG μειωθεί για κάποιο λόγο, π.χ. λόγω μείωσης της πυκνότητας $N_e$ ή επιβράδυνσης των ηλεκτρονίων κατά τη διεύθυνση Y, το φορτίο που θα εξέλθει από την πλευρά EFGH στη μονάδα του χρόνου θα είναι

$$\left[eN_e v_y - \frac{\partial(eN_e v_y)}{\partial y} dy\right] dxdz. \tag{2.40}$$

Η απώλεια φορτίου ανά μονάδα χρόνου επομένως στο εσωτερικό του παραλληλεπιπέδου, λόγω ροής προς τη διεύθυνση Y, είναι

$$- \frac{\partial(eN_e v_y)}{\partial y} dxdydz. \tag{2.41}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο η απώλεια φορτίου ανά μονάδα χρόνου στο εσωτερικό του παραλληλεπιπέδου, λόγω ροής κατά τις λοιπές διευθύνσεις X και Z, είναι αντίστοιχα

$$- \frac{\partial(eN_e v_x)}{\partial x} dxdydz.$$

και

$$- \frac{\partial(eN_e v_z)}{\partial z} dxdydz. \tag{2.42}$$

ενώ η ολική απώλεια φορτίου ανά μονάδα χρόνου στο εσωτερικό του παραλληλεπιπέδου μπορεί να γραφεί ως

$$- \left[\frac{\partial(eN_e v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(eN_e v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(eN_e v_z)}{\partial z}\right] dxdydz. \tag{2.43}$$

Η έκφραση που περιέχεται στις παρενθέσεις της εξ. (2.43) μπορεί να αναγνωριστεί ως η απόκλιση του ανύσματος

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= eN_e\mathbf{v} = eN_e(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) \\ &= J_x\mathbf{i} + J_y\mathbf{j} + J_z\mathbf{k} \end{aligned} \tag{2.44}$$

το οποίο στην Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία ονομάζεται *πυκνότητα ρεύματος*. Η ποσότητα επομένως

$$-\left[\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right] = -\nabla\cdot\mathbf{J} \tag{2.45}$$

αντιπροσωπεύει, σύμφωνα με τα προηγούμενα, την απώλεια φορτίου ανά μονάδα χρόνου στο στοιχειώδη όγκο $dV = dxdydz$. Μπορούμε επομένως να γράψουμε την εξίσωση

$$-\nabla\cdot\mathbf{J}dV = \frac{dq}{dt} \tag{2.46}$$

ή, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της *πυκνότητας φορτίου*

$$\rho = \frac{dq}{dV} \tag{2.47}$$

την τελική σχέση

$$\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{2.48}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι γνωστή στην Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία ως *εξίσωση της συνεχείας*.

Σύμφωνα με την εξ. (2.44), η πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ είναι το γινόμενο μιας βαθμωτής συνάρτησης $f(\mathbf{r}) = eN_e(\mathbf{r})$ και μιας ανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Υιοθετόντας την άποψη του τελεστή για το σύμβολο $\nabla$, ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να αποδείξει για μια τέτοια ανυσματική συνάρτηση ότι

$$\nabla\cdot(f\mathbf{v}) = f\nabla\cdot\mathbf{v} + \nabla f\cdot\mathbf{v}. \tag{2.49}$$

Μερικοί ακόμη χρήσιμοι κανόνες για τον προσδιορισμό της απόκλισης συνδιασμών ανυσμάτων και βαθμωτών συναρτήσεων περιέχονται στις Ασκήσεις στο τέλος του Κεφαλαίου. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διπλή δράση του τελεστή $\nabla$ σε μια βαθμωτή συνάρτηση $\varphi$, ήτοι η απόκλιση της κλίσης $\nabla\cdot\nabla\varphi$, που μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\nabla\varphi &= \left[\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot\left[\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Η βαθμωτή ποσότητα $\nabla\cdot\nabla\varphi$ αναφέρεται συνήθως με τον όρο **Λαπλασιανή** και συμβολίζεται ως $\nabla^2\varphi$.

## 2.6 Στροβιλισμός Ανυσματικής Συνάρτησης

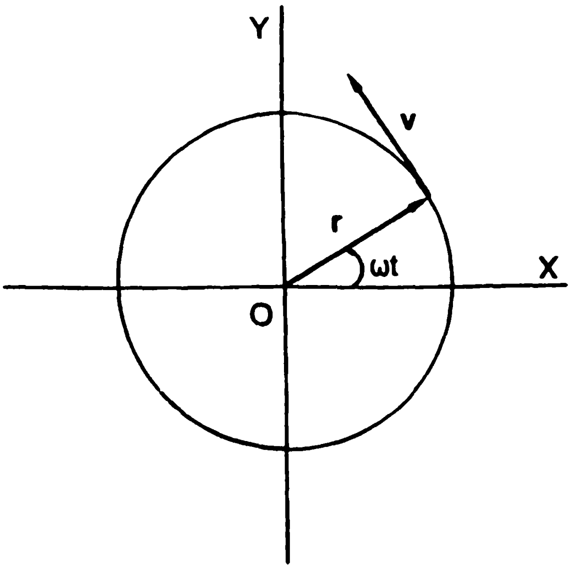
Η δράση του ανυσματικού τελεστή $\nabla$ σε ένα άνυσμα $\mathbf{F}$ μέσω του εξωτερικού γινομένου μπορεί να οριστεί με βάση τις εξ. (1.27) και (2.23) ως

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} . \tag{2.51}$$

Θα ονομάσουμε το άνυσμα που ορίζεται με την εξ. (2.51) **στροβιλισμό** της συνάρτησης $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου έπεται βεβαίως ότι τα ανύσματα $\nabla\times\mathbf{F}$ και $\mathbf{F}$ είναι κάθετα στο σημείο $\mathbf{r}$. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα της εξ. (2.51) μπορούμε ακόμη να γράψουμε αναλυτικά

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} . \tag{2.52}$$

Στις προηγούμενες Παραγράφους αναφερθήκαμε με κάποια λεπτομέρεια στη φυσική σημασία της κλίσης $\nabla\varphi$ και της απόκλισης $\nabla\cdot\mathbf{F}$. Η φυσική σημασία του στροβιλισμού είναι ενδεχομένως λίγο πιο περίπλοκη. Οπως προδίδει η ονομασία, ο στροβιλισμός έχει να κάνει με κάποιου είδους περιστροφική κίνηση. Στην πραγματικότητα, η ορολογία προέρχεται από το χώρο της μηχανικής των ρευστών, απ' όπου θα αντλήσουμε μερικά παραδείγματα. Ας θεωρήσουμε για το σκοπό αυτό την επιφάνεια μιας κατά τα άλλα ήρεμης λίμνης, όπου το νερό βρίσκεται σε περιδύνηση. Για απλούστευση, ας θεωρήσουμε ότι τοπικά η δύνη μπορεί να αποδοθεί όπως στο σχήμα 2-3, όπου ένας μικρός όγκος νερού περιγράφεται από το άνυσμα θέσης




**Σχήμα 2-3** Πεδίο ταχύτητας ρευστού $\mathbf{v} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$.

$$\mathbf{r} = r\cos\omega t\,\mathbf{i} + r\sin\omega t\,\mathbf{j} \tag{2.53}$$

και όπου $r$ είναι η απόσταση από κάποιο σταθερό σημείο O, $t$ ο χρόνος και $\omega$ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του νερού. Η ταχύτητα με την οποία περιστρέφεται ο μικρός όγκος νερού στο σημείο $\mathbf{r}$, δίνεται από την έκφραση

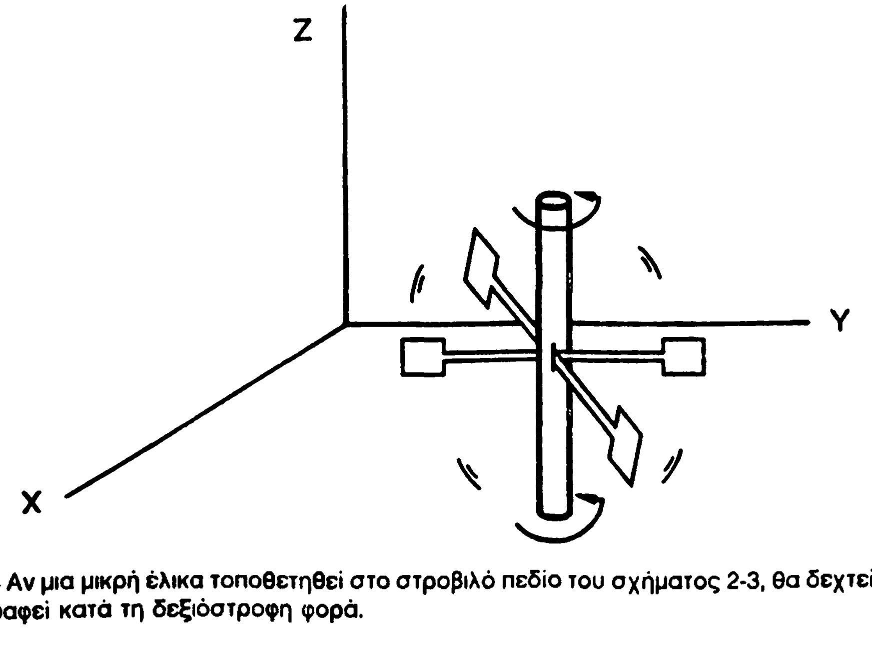
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left[\frac{dx}{dt}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{dy}{dt}\right]\mathbf{j} \\ &= r\omega[-\sin\omega t\mathbf{i} + \cos\omega t\mathbf{j}] = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Στη μηχανική των ρευστών η εξ. (2.54) λέγεται ότι ορίζει το *πεδίο ταχύτητας* του νερού. Με άλλα λόγια προσδιορίζει την ταχύτητα του νερού σε κάθε σημείο $\mathbf{r}$ της επιφανείας του. Οπως θα περίμενε κανείς από την ορολογία, ο στροβιλισμός της ανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{v}$ για ροή της μορφής αυτής είναι διάφορος του μηδενός. Πράγματι, όπως μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από τον ορισμό της εξ. (2.51)

$$\nabla \times \mathbf{v} = 2\omega\mathbf{k}. \tag{2.55}$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα δικαιώνει κατά κάποιο τρόπο την ονομασία του ανύσματος $\nabla \times \mathbf{v}$, μια και οδηγεί στο αποτέλεσμα ότι ο στροβιλισμός του πεδίου ταχύτητας είναι ανάλογος της γωνιακής ταχύτητας $\omega$. Παρατηρείται επιπλέον ότι ο στροβιλισμός της εξ. (2.55) είναι κάθετος προς το επίπεδο XY και κατά τη θετική φορά του άξονα Z. Τούτο, σύμφωνα με τη σύμβαση που έχουμε υιοθετήσει, είναι αποτέλεσμα της φοράς της περιδύνησης του νερού στο σχήμα 2-3. Αντίστροφη περιστροφική κίνηση του νερού θα οδηγούσε σε στροβιλισμό κατά την αρνητική φορά του άξονα Z.

Πειραματικά η ύπαρξη μη μηδενικής τιμής του στροβιλισμού αποδίδεται συνήθως με την συμπεριφορά μιας μικρής έλικας στο πεδίο ροής. Οπως φαίνεται στο σχήμα 2-4, αν μια έλικα τοποθετηθεί σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας του νερού, θα δεχτεί μια ροπή, και θα περιστραφεί κατά τη δεξιόστροφη φορά. Αντίθετα, αν η τιμή του στροβιλισμού της ταχύτητας είναι ιση με το μηδέν, η έλικα θα παραμείνει ακίνητη. Τούτο μπορούμε να αποδόσουμε με ένα δεύτερο παράδειγμα ροής που περιγράφεται από την ταχύτητα




**Σχήμα 2-4** Αν μια μικρή έλικα τοποθετηθεί στο στροβιλό πεδίο του σχήματος 2-3, θα δεχτεί ροπή και θα περιστραφεί κατά τη δεξιόστροφη φορά.

$$\mathbf{v} = v_o e^{-\frac{y^2}{\lambda^2}} \mathbf{j} \tag{2.56}$$

όπου $v_0$ και $\lambda$ είναι σταθερές. Η μορφή ροής νερού στο πεδίο της εξ. (2.56) δίνεται στο σχήμα 2-5, όπου το μήκος των βελών αποδίδει το μέτρο της ταχύτητας **v**. Ο αναγνώστης είναι εύκολο να δείξει ότι για το συγκεκριμένο πεδίο ταχύτητας

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{2.57}$$

Είναι εύκολο ακόμη να δείξει ότι η έλικα του σχήματος 2-4, αν τοποθετηθεί στο πεδίο του σχήματος 2-5, θα δεχτεί μηδενική ροπή και θα παραμείνει ακίνητη.

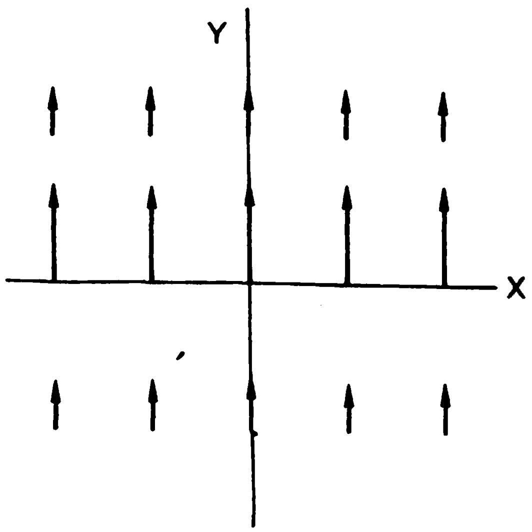
Στη μηχανική των ρευστών, ενα πεδίο ταχύτητας που οδηγεί σε πεπερασμένη τιμή του στροβιλισμού ονομάζεται **στροβιλό**, ενώ αν η τιμή του στροβιλισμού είναι ίση με το μηδέν, ονομάζεται **αστρόβιλο**. Την ορολογία αυτή θα υιοθετήσουμε για κάθε ανυσματική συνάρτηση **F** με αντίστοιχα πεπερασμένη ή μηδενική τιμή του στροβιλισμού της. Το γεγονός ότι μια κίνηση ρευστού δεν είναι απαραίτητο να είναι περιστροφική ώστε να οδηγεί σε στροβιλό πεδίο αποδεικνύεται με το τελευταίο παράδειγμα που θα παραθέσουμε.

Ας θεωρήσουμε ένα πεδίο με συναρτησιακή εξάρτηση της ταχύτητας, παρόμοια προς την εξ. (2.56), της μορφής

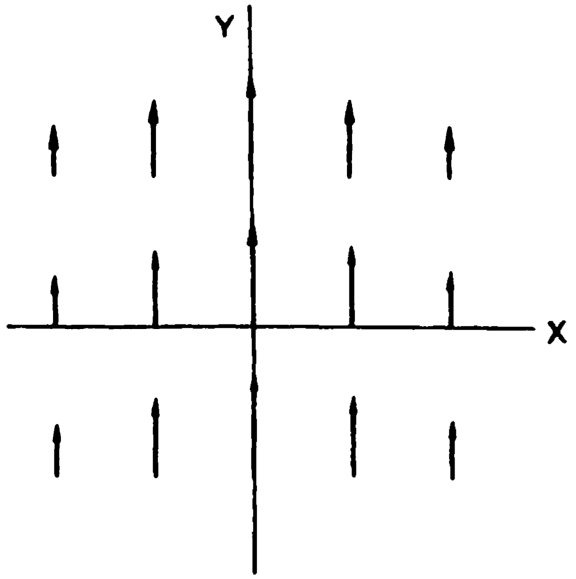
$$\mathbf{v} = v_o e^{-\frac{x^2}{\lambda^2}} \mathbf{j}. \tag{2.58}$$

Οπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η ταχύτητα στο πεδίο αυτό είναι παντού κατά τον άξονα Y, αλλά τώρα διαφέρει ως προς το μέτρο κατά τον άξονα X. Στη σύμβαση του σχήματος 2-5, το νέο πεδίο ταχύτητας αποδίδεται στο σχήμα 2-6. Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να δείξει ότι το πεδίο της εξ. (2.58) είναι στροβιλό, με στροβιλισμό

$$\nabla \times \mathbf{v} = v_o \frac{2x}{\lambda^2} e^{-\frac{x^2}{\lambda^2}} \mathbf{k}. \tag{2.59}$$




Σχήμα 2-5 Πεδίο ταχύτητας ρευστού $\mathbf{v} = v_0 \exp[-y^2/\lambda^2]\mathbf{j}$.




Σχήμα 2-6 Πεδίο ταχύτητας ρευστού $\mathbf{v} = v_0 \exp[-x^2/\lambda^2]\mathbf{j}$.

Μια μικρή έλικα στο πεδίο αυτό θα υποστεί διαφορετική δύναμη στις πτέρυγες κατά τον άξονα X, με αποτέλεσμα να περιστραφεί.

## 2.7 Παράγωγοι Υψηλότερης Τάξης. Το Ανάπτυγμα Taylor

Δράση του τελεστή $d/dt$ σε μια βαθμωτή ή ανυσματική συνάρτηση οδηγεί γενικά σε νέες συναρτήσεις $\varphi'(\mathbf{r})$ ή $\mathbf{F}'(\mathbf{r})$. Αν οι νέες συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες, νέα δράση του τελεστή $d/dt$ οδηγεί στις συναρτήσεις

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt}[\varphi'(\mathbf{r})] = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\varphi}{dt}\right]$$

$$= \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right]\left[\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right]\varphi\right] = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right]^2\varphi \tag{2.60}$$

και

$$\frac{d^2\mathbf{F}}{dt^2} = \frac{d}{dt}[\mathbf{F}'(\mathbf{r})] = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\mathbf{F}}{dt}\right]$$

$$= \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right]\left[\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right]\mathbf{F}\right] = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right]^2\mathbf{F}. \tag{2.61}$$

Γενικεύοντας τις τελευταίες εκφράσεις, θα ορίσουμε την παράγωγο n τάξης μιας βαθμωτής ή ανυσματικής συνάρτησης ως

$$\frac{d^n\varphi}{dt^n} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right]^n\varphi \tag{2.62}$$

και

$$\frac{d^n\mathbf{F}}{dt^n} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right]^n\mathbf{F}. \tag{2.63}$$

με αντίστοιχους ορισμούς για τις επικαμπύλιες παραγώγους

$$\frac{d^n\varphi}{ds^n} = (\mathbf{e}_c \cdot \nabla)^n \varphi \tag{2.64}$$

και

$$\frac{d^n\mathbf{F}}{ds^n} = (\mathbf{e}_c \cdot \nabla)^n \mathbf{F}. \tag{2.65}$$

όπου $\mathbf{e}_C$ είναι το μοναδιαίο άνυσμα κατά την εφαπτομένη μιας καμπύλης C στο σημείο **r**. Στις εξ. (2.62) - (2.65) εξυπακούεται βεβαίως ότι όλες οι παράγωγοι μέχρι την τάξη n-1 είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Οι επικαμπύλιες παράγωγοι της εξ. (2.65) μας επιτρέπουν τώρα να γράψουμε μια σημαντική σχέση, που συχνά χρησιμοποιείται σε προσεγγίσεις μιας ανυσματικής συνάρτησης. Ο αναγνώστης θα γνωρίζει από την ανάλυση των πραγματικών συναρτήσεων το **ανάπτυγμα Taylor** μιας συνάρτησης $f(x)$, κατά το οποίο, για μικρές μεταβολές $\Delta x$, η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= f(x) + (\Delta x) f^{(1)}(x) \\ &+ \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 f^{(2)}(x) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}(\Delta x)^n f^{(n-1)}(x) + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\Delta x)^k f^{(k)}(x) \end{aligned} \tag{2.66}$$

όπου $f^{(k)}(x)$ είναι η παράγωγος k τάξης της συνάρτησης $f(x)$. Με τη βοήθεια των επικαμπύλιων παραγώγων των εξ. (2.64) και (2.65) μπορούμε να μεταφέρουμε το ανάπτυγμα Taylor στο χώρο της ανυσματικής ανάλυσης. Ετσι, για μια κατάλληλα παραγωγίσιμη βαθμωτή συνάρτηση $\varphi(\mathbf{r})$ θα γράψουμε

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) &= \varphi(\mathbf{r}) + (\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)\varphi(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}} + \frac{1}{2!}(\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)^2\varphi(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}} + \ldots \\ &= \varphi(\mathbf{r}) + \Delta r\frac{d}{ds}\varphi(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}} + \frac{1}{2!}(\Delta r)^2\frac{d^2}{ds^2}\varphi(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}} + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\Delta r)^k\frac{d^k}{ds^k}\varphi(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}} \end{aligned} \tag{2.67}$$

όπου ο συμβολισμός υποδηλώνει ότι οι τιμές των παραγώγων λαμβάνονται στο σημείο **r**. Κατά τον ίδιο τρόπο το ανάπτυγμα Taylor μιας κατάλληλα παραγωγίσιμης ανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ μπορεί να γραφεί ως

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) + (\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}} + \frac{1}{2!}(\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)^2\mathbf{F}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}} + \dots \\
&= \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \Delta r\frac{d}{ds}\mathbf{F}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}} + \frac{1}{2!}(\Delta r)^2\frac{d^2}{ds^2}\mathbf{F}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\Delta r)^k\frac{d^k}{ds^k}\mathbf{F}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}}.
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

Θα μας δοθεί η ευκαιρία να χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor ανυσματικών συναρτήσεων στο Κεφάλαιο 4.

## ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Παραγώγιση βαθμωτών και ανυσματικών συναρτήσεων

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{dF_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dF_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dF_z}{dt}\mathbf{k}$$

$$\frac{d(fg)}{dt} = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt}$$

$$\frac{d(f\mathbf{G})}{dt} = \frac{df}{dt}\mathbf{G} + f\frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

$$\frac{d(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})}{dt} = \frac{d\mathbf{F}}{dt}\cdot\mathbf{G} + \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

$$\frac{d(\mathbf{F}\times\mathbf{G})}{dt} = \frac{d\mathbf{F}}{dt}\times\mathbf{G} + \mathbf{F}\times\frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

Ολικό διαφορικό βαθμωτής συνάρτησης

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \nabla\varphi\cdot d\mathbf{r}$$

Κλίση βαθμωτής συνάρτησης

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Διαφορικοί τελεστές

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$d = (d\mathbf{r}\cdot\nabla)$$

Απόκλιση ανυσματικής συνάρτησης

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Λαπλασιανή

$$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Στροβιλισμός ανυσματικής συνάρτησης

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right]\mathbf{i}+\left[\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right]\mathbf{j}+\left[\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right]\mathbf{k}$$

Παράγωγοι τάξης n

$$\frac{d^n\varphi}{dt^n} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right]^n\varphi$$

$$\frac{d^n\mathbf{F}}{dt^n} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right]^n\mathbf{F}$$

Ανάπτυγμα Taylor

$$\varphi(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})+(\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)\varphi(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}}+\frac{1}{2!}(\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)^2\varphi(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}}+\dots$$

$$= \varphi(\mathbf{r})+\Delta r\frac{d}{ds}\varphi(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}}+\frac{1}{2!}(\Delta r)^2\frac{d^2}{ds^2}\varphi(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}}+\dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\Delta r)^k\frac{d^k}{ds^k}\varphi(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + (\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}} + \frac{1}{2!}(\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)^2\mathbf{F}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}} + \ldots$$

$$= \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \Delta r\frac{d}{ds}\mathbf{F}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}} + \frac{1}{2!}(\Delta r)^2\frac{d^2}{ds^2}\mathbf{F}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\Delta r)^k\frac{d^k}{ds^k}\mathbf{F}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}}$$

Χρήσιμες σχέσεις και ταυτότητες

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = \mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{r}}{r}\right] = \frac{1}{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\mathbf{r}$$

$$\nabla^2\left[\frac{1}{r}\right] = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{r} = 0$$

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$$

$$\nabla[(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\cdot(r\times b)] = b\times(r\times a) + a\times(r\times b)$$

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a} = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{a})$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla\cdot(f\mathbf{G}) = f\nabla\cdot\mathbf{G} + \nabla f\cdot\mathbf{G}$$

$$\nabla\times(\varphi\mathbf{F}) = \varphi\nabla\times\mathbf{F} + \nabla\varphi\times\mathbf{F}$$

$$\nabla\times\nabla\varphi = \mathbf{0}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$$

$$\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = \mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G}) + \mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F}) + (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}$$

$$\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} \times (\nabla\times\mathbf{G}) + \mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F})$$

$$\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla\cdot\mathbf{F}) + \mathbf{F}(\nabla\cdot\mathbf{G}) - (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{G} - (\nabla\times\mathbf{G})\cdot\mathbf{F}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$$

$$(\mathbf{G}\cdot\nabla)\varphi\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{G}\cdot\nabla\varphi) + \varphi(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}$$

$$\nabla\times(\varphi\mathbf{F}) = \varphi\nabla\times\mathbf{F} + (\nabla\varphi)\times\mathbf{F}$$

$$(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} = \frac{1}{2}[\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) + \nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) - \mathbf{F}(\nabla\cdot\mathbf{G})$$
$$+\mathbf{G}(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G}) - \mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F})]$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2-1 Θεωρείστε μία καμπύλη C στο χώρο. Εστω P ένα σταθερό σημείο της καμπύλης και $s$ η παράμετρος που μετρά την απόσταση κάθε άλλου σημείου κατά τη διαδρομή της καμπύλης από το σημείο P. Δείξτε ότι αν $\mathbf{r}$ είναι το άνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου της καμπύλης, τότε το άνυσμα

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

είναι μοναδιαίο και κατά την εφαπτομένη της καμπύλης C στο σημείο $\mathbf{r}$.

2-2 Αποδείξτε την εξ. (2.13).

2-3 Αποδείξτε την εξ. (2.14).

2-4 Αποδείξτε την εξ. (2.15).

2-5 Θεωρείστε ότι ένα άνυσμα $\mathbf{a}$ έχει σταθερό μέτρο (αλλά όχι απαραίτητα σταθερή διεύθυνση και φορά). Δείξτε ότι είτε

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0$$

είτε το άνυσμα $d\mathbf{a}/dt$ είναι κάθετο προς το άνυσμα **a**.

2-6 Παραγωγίστε το εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

ως προς το χρόνο t.

2-7 Προσδιορίστε την παράγωγο

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r})].$$

2-8 Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

2-9 Αν το άνυσμα

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

είναι ίσο με το μηδέν, δείξτε ότι το άνυσμα **r** έχει σταθερή διεύθυνση.

2-10 Αν $\mathbf{r} = \mathbf{a}\exp(\omega t) + \mathbf{b}\exp(-\omega t)$, όπου **a** και **b** είναι δύο σταθερά ανύσματα και $\omega$ μία σταθερά, δείξτε ότι το **r** ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \omega^2\mathbf{r} = 0.$$

2-11 Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\mathbf{r}.$$

2-12 Αν $r$ είναι το μέτρο του ανύσματος θέσης **r**, υπολογίστε την κλίση $\nabla r$.

2-13 Αποδείξτε την εξ. (2.25).

2-14 Αν **a** είναι ένα σταθερό άνυσμα και **r** το άνυσμα θέσης, δείξτε ότι $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}$.

2-15 Αν **a** και **b** είναι σταθερά ανύσματα και **r** το άνυσμα θέσης, δείξτε ότι

$$\nabla[(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})] = \mathbf{b} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{b}).$$

2-16 Αν $f(x,y,z)$ και $g(x,y,z)$ είναι δύο βαθμωτές συναρτήσεις, υπολογίστε το άνυσμα

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)$$

2-17 Αν $f(x,y,z,t)$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla f.$$

2-18 Αν $\mathbf{F}(x,y,z,t)$ είναι μια ανυσματική συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right] \mathbf{F}.$$

2-19 Αποδείξτε την εξ. (2.49).

2-20 Αν $\mathbf{r}$ είναι το άνυσμα θέσης, δείξτε ότι $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$.

2-21 Αν $\mathbf{r}$ είναι το άνυσμα θέσης, δείξτε ότι $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$.

2-22 Αν $\varphi$ και $\mathbf{F}$ είναι αντίστοιχα μια βαθμωτή και μια ανυσματική συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = \varphi \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \varphi \times \mathbf{F}.$$

2-23 Δείξτε ότι ο στροβιλισμός της κλίσης μιας βαθμωτής συνάρτησης μηδενίζεται, ήτοι

$$\nabla \times \nabla \varphi = \mathbf{0}.$$

2-24 Δείξτε ότι η απόκλιση του στροβιλισμού μιας ανυσματικής συνάρτησης μηδενίζεται, ήτοι

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

2-25 Αν $\mathbf{r}$ είναι το άνυσμα θέσης, δείξτε ότι για οποιοδήποτε άνυσμα $\mathbf{a}$ ισχύει η σχέση $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{a}$.

2-26 Αν $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ είναι δυο ανυσματικές συναρτήσεις αποδείξτε την ταυτότητα

$$\nabla (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}.$$

2-27 Αν $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ είναι δυο ανυσματικές συναρτήσεις αποδείξτε την ταυτότητα

$$\nabla (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}).$$

2-28 Αν $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ είναι δυο ανυσματικές συναρτήσεις αποδείξτε την ταυτότητα

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}.$$

2-29 Αν $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ είναι δυο ανυσματικές συναρτήσεις αποδείξτε την ταυτότητα

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}.$$

2-30 Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}.$$

2-31 Αν **F** και **G** είναι δυο ανυσματικές συναρτήσεις και $\varphi$ μια βαθμωτή συνάρτηση, δείξτε ότι

$$(\mathbf{G}\cdot\nabla)\varphi\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{G}\cdot\nabla\varphi)+\varphi(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}.$$

2-32 Αν $\varphi$ και **F** είναι αντίστοιχα μια βαθμωτή και μια ανυσματική συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\nabla\times(\varphi\mathbf{F})=\varphi\nabla\times\mathbf{F}+(\nabla\varphi)\times\mathbf{F}.$$

2-33 Αν **F** και **G** είναι δυο ανυσματικές συναρτήσεις, δείξτε ότι

$$(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}=\frac{1}{2}[\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})+\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})-\mathbf{F}(\nabla\cdot\mathbf{G})$$

$$+\mathbf{G}(\nabla\cdot\mathbf{F})-\mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G})-\mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F})].$$

2-34 Αν $r$ είναι το μέτρο του ανύσματος θέσης, δείξτε ότι

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0.$$

2-35 Αν **a** είναι ένα σταθερό άνυσμα και **r** το άνυσμα θέσης, δείξτε ότι

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})=2\mathbf{a}.$$

2-36 Δείξτε ότι

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}=\frac{1}{2}\nabla a^2-\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{a}).$$

2-37 Αν **F** είναι μια ανυσματική συνάρτηση και **e** ένα σταθερό μοναδιαίο άνυσμα, δείξτε ότι

$$\mathbf{e}\cdot[\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{e})-\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{e})]=\nabla\cdot\mathbf{F}.$$

2-38 Αν **r** είναι το άνυσμα θέσης, δείξτε ότι για οποιαδήποτε βαθμωτή συνάρτηση $f(r)$ ισχύει η σχέση

$$\nabla\times[f(r)\mathbf{r}]=\mathbf{0}.$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Στη μέχρι τώρα ανάλυση χρησιμοποιήσαμε αποκλειστικά ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων που γραφικά δίνεται στο σχήμα 3-1. Με βάση τα τρία σταθερά μοναδιαία ανύσματα **i**, **j**, **k** εκφράσαμε το άνυσμα θέσης κάθε σημείου στο χώρο ως

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{3.1}$$

με συντεταγμένες $x,y,z$. Στην ίδια βάση, μια ανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z,t)$ γράφηκε ως

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}. \tag{3.2}$$

Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου το ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δεν είναι το πλέον κατάλληλο ή το πλέον εύχρηστο. Στις περιπτώσεις αυτές καταφεύγουμε σε άλλα συστήματα συντεταγμένων, που συνήθως υπαγορεύει η γεωμετρία του προβλήματος.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα τρία συστήματα συντεταγμένων που χρησιμοποιούνται συχνότερα. Στο τέλος του Κεφαλαίου θα δόσουμε στοιχεία της γενικής θεωρίας συστημάτων συντεταγμένων.

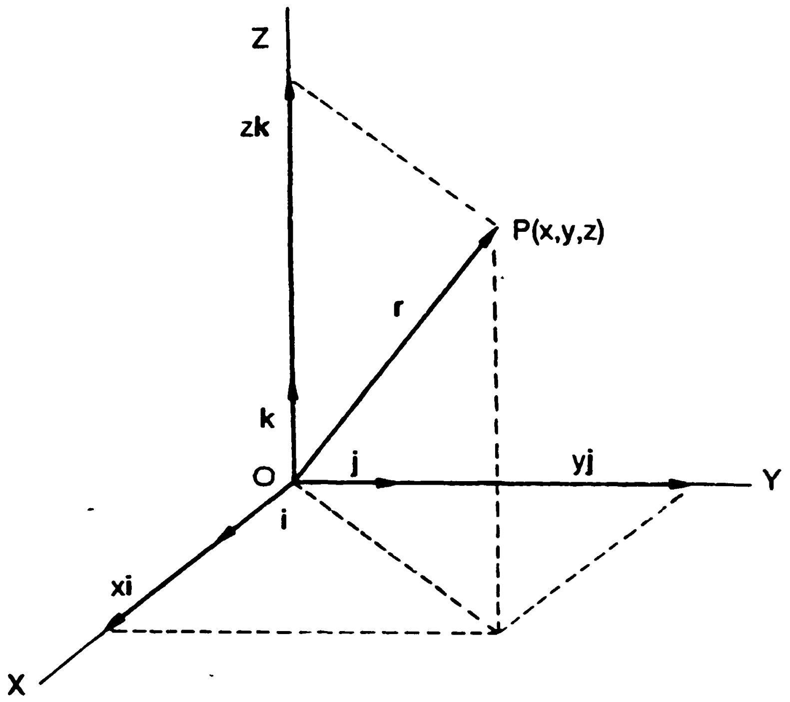
## 3.1 Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων

Το καρτεσιανό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, που περιέχεται στο σχήμα 3-1, χρησιμοποιήθηκε επανειλημμένα στα προηγούμενα Κεφάλαια. Οπως ήδη αναφέρθηκε, στο σύστημα αυτό το άνυσμα θέσης **r** δίνεται από την εξ. (3.1), ενώ κάθε άνυσμα εκφράζεται στη μορφή της εξ. (3.2). Στοιχειώδεις μεταβολές προς τους τρείς άξονες του συστήματος X,Y,Z εκφράζονται από τα διαφορικά $dx$, $dy$ και $dz$. Ετσι, για παράδειγμα, η παράγωγος

$$\frac{df}{dx}$$

εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης $f(x,y,z,t)$ κατά τον άξονα X.

Στοιχειώδης μεταβολή του ανύσματος θέσης **r** κατά ένα τυχαίο δρόμο C δίνεται




Σχήμα 3-1 Καρτεσιανό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

από την εξ. (2.8), με μέτρο $ds$ που προσδιορίζεται από τη σχέση

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3.3}$$

ενώ τα γινόμενα $dxdy$, $dydz$ και $dxdz$ αντιπροσωπεύουν στοιχεία της επιφάνειας στα επίπεδα που είναι κάθετα αντίστοιχα προς τους άξονες Z, X και Y.

Αρκετά συχνά αποδεικνύεται χρήσιμη η έννοια του **προσανατολισμένου στοιχείου επιφανείας**. Με τον όρο αυτό θα εννοήσουμε ένα άνυσμα $d\mathbf{a}$ με μέτρο το εμβαδόν $da$ της επιφανείας και διεύθυνση κάθετη προς την επιφάνεια. Η φορά του ανύσματος $d\mathbf{a}$ θα αποτελέσει αντικείμενο σύμβασης, ανάλογα με το πρόβλημα. Για μια κλειστή επιφάνεια στο χώρο, π.χ. είναι δυνατόν να θεωρήσουμε ως θετική φορά του στοιχείου $d\mathbf{a}$ τη φορά προς τον εξωτερικό χώρο της επιφάνειας. Ενα παράδειγμα προσανατολισμένου στοιχείου επιφανείας στο επίπεδο XZ περιέχεται στο σχήμα 3-2. Η φορά του ανύσματος $d\mathbf{a}$ στην περίπτωση αυτή έχει ληφθεί προς τη θετική φορά του άξονα Y. Ετσι, από τον προηγούμενο ορισμό, μπορούμε να γράψουμε

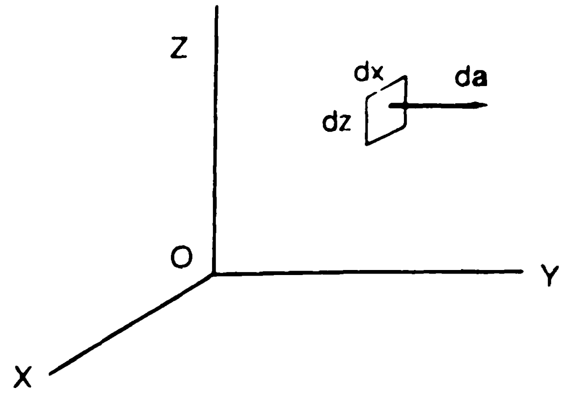
$$d\mathbf{a} = dxdz\,\mathbf{j}. \tag{3.4}$$

Στο σύστημα συντεταγμένων του σχήματος 3-1 ο στοιχειώδης όγκος $dV$ μπορεί να γραφεί ως

$$dV = dxdydz. \tag{3.5}$$

## 3.2 Κυλινδρικό Σύστημα Συντεταγμένων

Η περιγραφή ενός φαινομένου απλοποιείται σημαντικά αν το σύστημα συντεταγμένων επιλεγεί κατάλληλα. Στην κατακόρυφη πτώση, για παράδειγμα, αν




Σχήμα 3-2 Προσανατολισμένο στοιχείο επιφανείας *da* σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

επιλέξουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα Z κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, η κίνηση μεταβάλλεται σε γραμμική και οι συνιστώσες X και Y μπορούν να αγνοηθούν. Κατά τον ίδιο τρόπο ένα φυσικό μέγεθος μπορεί να εξαρτάται μόνο από την απόσταση

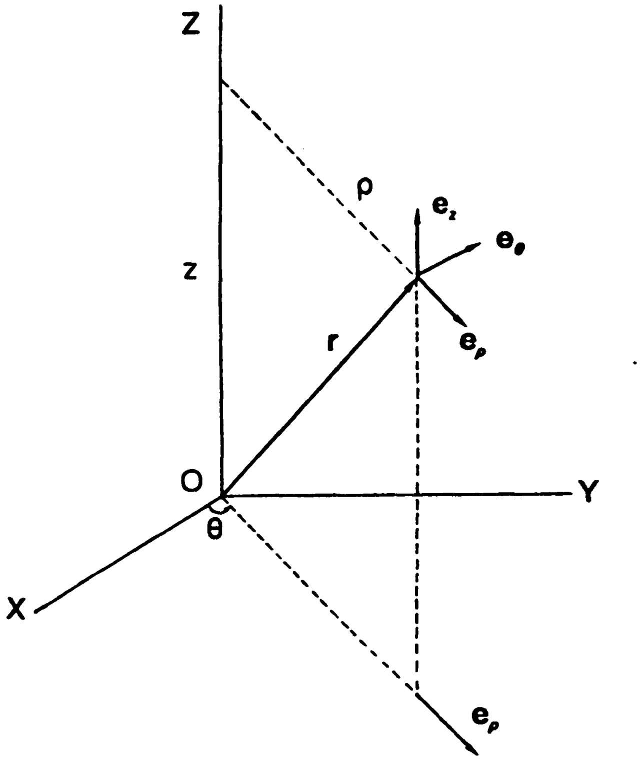
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

από τον άξονα Z και όχι από τη συνιστώσα $z$ ή τη διεύθυνση στο χώρο γύρω από τον άξονα Z. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου φυσικού μεγέθους παρέχεται από το μαγνητικό πεδίο γύρω από ένα ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό μεγάλου μήκους. Στην περίπτωση αυτή η περιγραφή του φαινομένου απλοποιείται σημαντικά άν η θέση κάθε σημείου στο χώρο εκφραστεί μέσω της απόστασης $\rho$ από κάποιο σταθερό άξονα Z, τη συνιστώσα $z$ κατά τον άξονα Z και τη γωνία $\theta$ επίσης γύρω από τον άξονα Z. Οι τρείς μεταβλητές $(\rho,\theta,z)$, προσδιορίζουν μονοσήμαντα κάθε σημείο P στο χώρο και συγκροτούν το **κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων** που περιέχεται στο σχήμα 3-3. Κάθε βαθμωτή συνάρτηση $f(x,y,z)$ με μεταβλητές $x,y,z$, που αναφέρονται στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως $f(\rho.\theta.z)$ με μεταβλητές τις συνιστώσες του συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων.

Οπως φαίνεται στο σχήμα 3-3, σε κάθε σημείο P στο χώρο υπάρχουν τρείς διευθύνσεις προς τις οποίες καθεμιά από τις μεταβλητές $\rho,\theta,z$ μεταβάλλεται ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Ετσι κατά διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα Z μεταβάλλεται μόνο η μεταβλητή $z$, κατά την απόσταση από τον άξονα Z μεταβάλλεται μόνο η μεταβλητή $\rho$, ενώ κατά την εφαπτομένη στην περιφέρεια κύκλου με ακτίνα $\rho$ και κέντρο τον άξονα Z μεταβάλλεται μόνο η γωνία $\theta$. Οι τρείς αυτές, αμοιβαία κάθετες, διευθύνσεις ορίζουν ένα τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων που μπορούμε να συμβολίσουμε ως ΟΡΘΖ. Αν επιπλέον στο τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ορίσουμε κατά τους τρείς άξονες τα μοναδιαία ανύσματα $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$, και $\mathbf{e}_z$ μια ανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(\rho,\theta,z)$ μπορεί να αποδοθεί με βάση τις συνιστώσες της στο σύστημα ΟΡΘΖ ως

$$\mathbf{F} = F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_z \mathbf{e}_z \tag{3.6}$$

όπου $F_\rho$, $F_\theta$, $F_z$ είναι βαθμωτές συναρτήσεις των μεταβλητών $\rho,\theta$ και $z$. Η έκφραση του ανύσματος $\mathbf{F}$ στην εξ. (3.6) είναι χρήσιμη άν οι συναρτήσεις $F_\rho(\rho,\theta,z)$, $F_\theta(\rho,\theta,z)$ και




Σχήμα 3-3 Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

$F_z(\rho,\theta,z)$ είναι μαθηματικά απλούστερες από τις συναρτήσεις $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$ και $F_z(x,y,z)$ στην έκφραση της εξ. (3.2).

Από το σχήμα 3-3 είναι προφανές ότι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο χώρο $\rho,\theta,z$ συνδέονται με τις συντεταγμένες του $x,y,z$ στο αντίστοιχο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Η αντίστροφη σύνδεση δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \\ z &= z. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Στο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων το άνυσμα θέσης **r** μπορεί να γραφεί, όπως φαίνεται από το σχήμα 3-3, ως

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z. \tag{3.9}$$

Στοιχειώδεις μεταβολές της απόστασης κατά τις διευθύνσεις $\mathbf{e}_\rho$ και $\mathbf{e}_z$ δίνονται προφανώς από τα διαφορικά $d\rho$ και $dz$, ενώ κατά τη διεύθυνση $\mathbf{e}_\theta$ η στοιχειώδης απόσταση εκφράζεται από το μήκος τόξου $\rho d\theta$. Ετσι, η στοιχειώδης μεταβολή το ανύσματος θέσης $d\mathbf{r}$ κατά ένα τυχαίο δρόμο C είναι

$$d\mathbf{r} = d\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho d\theta\,\mathbf{e}_\theta + dz\,\mathbf{e}_z \tag{3.10}$$

με μέτρο που, σε αναλογία με την εξ. (3.3), δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2. \tag{3.11}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο αποδίδονται στοιχειώδεις επιφάνειες, κάθετες προς καθεμιά από τις διευθύνσεις $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$, και $\mathbf{e}_z$. Για παράδειγμα, η ποσότητα

$$d\mathbf{a} = \rho d\theta dz\,\mathbf{e}_\rho \tag{3.12}$$

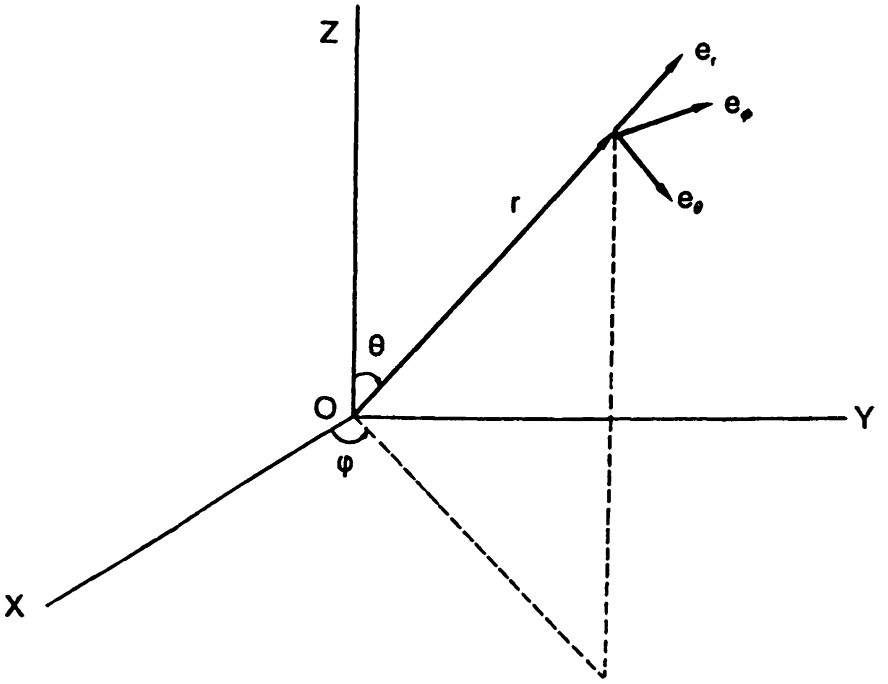
αντιπροσωπεύει προσανατολισμένο στοιχείο επιφανείας κυλίνδρου με άξονα τον άξονα Z και ακτίνα $\rho$. Η φορά του ανύσματος $d\mathbf{a}$ στην εξ. (3.12) είναι κατά το εξωτερικό του κυλίνδρου.

Στο σύστημα συντεταγμένων του σχήματος 3-3 ο στοιχειώδης όγκος $dV$ μπορεί να γραφεί ως

$$dV = \rho d\rho d\theta dz. \tag{3.13}$$

## 3.3 Σφαιρικό Πολικό Σύστημα Συντεταγμένων

Αν ένα φυσικό μέγεθος εξαρτάται μόνο από την απόσταση από ένα συγκεκριμένο σημείο στο χώρο ή από τη διεύθυνση γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο, η περιγραφή του απλουστεύεται σημαντικά με τη χρησιμοποίηση του **πολικού σφαιρικού συστήματος** συντεταγμένων, που αποδίδεται στο σχήμα 3-4. Στο σύστημα αυτό οι τρείς μεταβλητές που προσδιορίζουν πλήρως τη θέση ενός σημείου στο χώρο είναι η (*ακτινική*) απόσταση $r$ από την αρχή των συντεταγμένων O, η *πολική γωνία* $\theta$ κατά ένα




Σχήμα 3-4 Πολικό-σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

κύκλο με κέντρο το O και διάμετρο κατά τον άξονα Z του αντίστοιχου καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και η *αζιμουθική γωνία* $\varphi$, η οποία ορίζεται όπως στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Οι τρείς διευθύνσεις προς τις οποίες οι τρεις συντεταγμένες $r,\theta,\varphi$ μεταβάλλονται ανεξάρτητα και οι οποίες μπορεί να θεωρηθούν ότι ορίζουν ένα τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, αποδίδονται στο σχήμα 3-4 με τα μοναδιαία ανύσματα $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, και $\mathbf{e}_\varphi$. Ετσι, στο πολικό σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, μια βαθμωτή συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως $f(r,\theta,\varphi)$ ενώ μια ανυσματική συνάρτηση ως

$$\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta + F_\varphi\mathbf{e}_\varphi. \tag{3.14}$$

Οπως και προηγουμένως, η έκφραση του ανύσματος $\mathbf{F}$ στην εξ. (3.14) είναι χρήσιμη άν οι συναρτήσεις $F_r(r,\theta,\varphi)$, $F_\theta(r,\theta,\varphi)$ και $F_\varphi(r,\theta,\varphi)$ είναι μαθηματικά απλούστερες από τις συναρτήσεις $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$ και $F_z(x,y,z)$ στην έκφραση της εξ. (3.2).

Με τη βοήθεια του σχήματος 3-4 προσδιορίζεται εύκολα ότι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο χώρο $r,\theta,\varphi$ συνδέονται με τις συντεταγμένες του $x,y,z$ στο αντίστοιχο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Η αντίστροφη σύνδεση δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \cos^{-1}\frac{z}{r} \\ \varphi &= \tan^{-1}\frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Στο πολικό σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων το άνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ έχει την ιδιαίτερα απλή μορφή

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r. \tag{3.17}$$

Στοιχειώδης μεταβολή κατά την ακτινική διεύθυνση $\mathbf{e}_r$ περιγράφεται από το διαφορικό $dr$, ενώ κατά τις διευθύνσεις $\mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_\varphi$, από τα στοιχειώδη μήκη τόξων $rd\theta$ και $r\sin\theta d\varphi$. Ετσι, η στοιχειώδης μεταβολή $d\mathbf{r}$ του ανύσματος θέσης $\mathbf{r}$ κατά ένα τυχαίο δρόμο C μπορεί να γραφεί ως

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\mathbf{e}_\varphi \tag{3.18}$$

με μέτρο $ds$, που δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2. \tag{3.19}$$

Με ανάλογες εκφράσεις αποδίδονται στοιχειώδεις επιφάνειες, κάθετες προς καθεμιά από τις διευθύνσεις $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, και $\mathbf{e}_\varphi$. Ετσι, για παράδειγμα, η ποσότητα

$$d\mathbf{a} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r \tag{3.20}$$

αντιπροσωπεύει προσανατολισμένο στοιχείο επιφανείας σφαίρας με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων O και ακτίνα r. Η φορά του ανύσματος $d\mathbf{a}$ στην εξ. (3.20) είναι κατά το εξωτερικό της σφαιρικής επιφάνειας.

Στο σύστημα συντεταγμένων του σχήματος 3-4 ο στοιχειώδης όγκος $dV$ μπορεί να γραφεί ως

$$dV = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi . \tag{3.21}$$

## 3.4 Ορθογώνια Καμπυλόγραμμα Συστήματα Συντεταγμένων

Τα συστήματα συντεταγμένων που μελετήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους αποτελούν ειδικές περιπτώσεις μιας μεγάλης κατηγορίας συστημάτων για την απόδοση βαθμωτών και ανυσματικών συναρτήσεων. Σε ένα τέτοιο σύστημα κάθε σημείο στο χώρο αποδίδεται από τρείς συντεταγμένες $u_1, u_2, u_3$ που συνδέονται προς τις συντεταγμένες $x,y,z$ του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων με σχέσεις ανάλογες προς τις εξ. (3.8) και (3.16)

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x,y,z) \\ u_2 &= u_2(x,y,z) \\ u_3 &= u_3(x,y,z) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Θα θεωρήσουμε ότι οι *εξισώσεις μετασχηματισμού* στην εξ. (3.22) αποτελούν αντιστοίχηση ένος σημείου προς ένα σημείο και ότι υπάρχουν οι αντίστροφες σχέσεις, ανάλογες προς τις εξ. (3.7) και (3.15). Ετσι, ένα συγκεκριμένο σημείο P με καρτεσιανές συντεταγμένες $x_o, y_o, z_o$ έχει, στο σύστημα που ορίζουν οι εξ. (3.22), συντεταγμένες $u_{10}, u_{20}, u_{30}$, όπου

$$\begin{aligned} u_{10} &= u_1(x_0,y_0,z_0) \\ u_{20} &= u_2(x_0,y_0,z_0) \\ u_{30} &= u_3(x_0,y_0,z_0) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Αντίστροφα, αν για ένα σημείο P είναι γνωστές οι συντεταγμένες του $u_{10}, u_{20}, u_{30}$, οι καρτεσιανές του συντεταγμένες θα προκύψουν από τη λύση των εξισώσεων

$$\begin{aligned} u_1(x,y,z) &= u_{10} \\ u_2(x,y,z) &= u_{20} \\ u_3(x,y,z) &= u_{30} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Είναι αρκετά ενδιαφέρον να εξετάσουμε τις εξ. (3.24) από γεωμετρική άποψη. Καθεμιά από τις σχέσεις αυτές ορίζει μια επιφάνεια, πάνω στην οποία η αντίστοιχη συντεταγμένη παραμένει σταθερή. Για παράδειγμα, στο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων η πρώτη από τις εξ. (3.8) ορίζει επιφάνεια κυλίνδρου γύρω από τον άξονα Z, πάνω στην οποία μεταβάλλονται μόνο οι συντεταγμένες $\theta$ και $z$. Κτά τον ίδιο τρόπο, η δεύτερη από τις εξ.

(3.8) ορίζει ένα επίπεδο που περιέχει τον άξονα Z, πάνω στο οποίο μεταβάλλονται μόνο οι συντεταγμένες $\rho$ και $z$. Η τομή δυο επιφανειών που ορίζονται από τις εξ. (3.24) ορίζει μια καμπύλη, πάνω στην οποία μεταβάλλεται μόνο η υπολοιπόμενη συντεταγμένη. Επανερχόμενοι στο παράδειγμα των κυλινδρικών συντεταγμένων, οι δυο πρώτες από τις εξ. (3.8) ορίζουν μια ευθεία γραμμή παράλληλη προς τον άξονα Z. Ετσι, όπως και στα συστήματα που μελετήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, σε κάθε σημείο στο χώρο είναι δυνατόν να επιλέξουμε τρείς διευθύνσεις προς τις οποίες καθεμιά από τις συντεταγμένες $u_1,u_2,u_3$ μεταβάλλεται ανεξάρτητα. Θα ονομάσουμε ένα σύστημα **ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων** άν οι τρείς αυτές διευθύνσεις είναι κάθετες μεταξύ τους και στη συνέχεια θα εξετάσουμε αποκλειστικά συστήματα συντεταγμένων της κατηγορίας αυτής. Θα ορίσουμε ακόμη προς καθεμιά από τις τρείς διευθύνσεις ανεξάρτητης μεταβολής τα αντίστοιχα μοναδιαία ανύσματα $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Οπως και στα συστήματα συντεταγμένων που μελετήσαμε ως τώρα, σε ένα ορθογώνιο σύστηματα τα τρία μοναδιαία ανύσματα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Σύμφωνα με τη γεωμετρική ερμηνεία που δόσαμε στην κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης στην Παράγραφο 2.2, το άνυσμα $\nabla u_1$ είναι κάθετο προς την επιφάνεια που ορίζεται από την πρώτη των εξ. (3.22). Είναι δηλαδή παράλληλο προς το μοναδιαίο άνυσμα $\mathbf{e}_1$. Μπορούμε επομένως να γράψουμε τη σχέση

$$\mathbf{e}_1 = h_1 \nabla u_1 \tag{3.26}$$

και κατ'αναλογία, προς τις δυο άλλες διευθύνσεις,

$$\mathbf{e}_2 = h_2 \nabla u_2 \tag{3.27}$$

και

$$\mathbf{e}_3 = h_3 \nabla u_3 . \tag{3.28}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη στοιχειώδη μεταβολή $d\mathbf{r}$ του ανύσματος θέσης $\mathbf{r}$ κατά τη διεύθυνση $\mathbf{e}_1$. Το μήκος $ds_1$ του ανύσματος $d\mathbf{r}$ κατά την καμπύλη ανεξάρτητης μεταβολής της συντεταγμένης $u_1$ είναι προφανώς

$$ds_1 = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1 \tag{3.29}$$

που από την εξ. (3.26) συνεπάγεται τη σχέση

$$ds_1 = d\mathbf{r} \cdot h_1 \nabla u_1 \tag{3.30}$$

ή, με τη βοήθεια της εξ. ((2.18),

$$ds_1 = h_1 du_1 . \tag{3.31}$$

*Με άλλα λόγια, ο συντελεστής αναλογίας $h_1$ της εξ. (3.26) είναι ο συντελεστής που συνδέει το διαφορικό $du_1$ με το μήκος τόξου κατά την καμπύλη ανεξάρτητης μεταβολής της συντεταγμένης $u_1$.* Θα ονομάσουμε τους συντελεστές $h_1,h_2,h_3$

**συντελεστές κλίμακας** του αντίστοιχου συστήματος συντεταγμένων. Για παράδειγμα, στο σφαιρικό πολικό σύστημα συντεταγμένων, όπου το στοιχειώδες μήκος τόξου κατά τη διεύθυνση $\mathbf{e}_\phi$ είναι $r\sin\theta d\phi$, ο συντελεστής αναλογίας της εξ. (3.31) έχει την τιμή $r\sin\theta$.

Σε αναλογία με την εξ. (3.31) μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις

$$ds_2 = h_2 du_2 \tag{3.32}$$

και

$$ds_3 = h_3 du_3. \tag{3.33}$$

Ετσι, η στοιχειώδης μεταβολή $d\mathbf{r}$ του ανύσματος θέσης $\mathbf{r}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= ds_1\mathbf{e}_1 + ds_2\mathbf{e}_2 + ds_3\mathbf{e}_3 \\ &= h_1 du_1\mathbf{e}_1 + h_2 du_2\mathbf{e}_2 + h_3 du_3\mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Με την τελευταία σχέση ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επιβεβαιώσει τις εξ. (3.10) και (3.18). Ανάλογα μπορούν να εκφραστούν στοιχειώδεις προσανατολισμένες επιφάνειες. Για παράδειγμα, το στοιχείο επιφανείας, κάθετο προς την επιφάνεια που ορίζουν οι μεταβλητές $u_1$ και $u_2$ είναι

$$d\mathbf{a} = ds_1 ds_2\mathbf{e}_3 = h_1h_2 du_1 du_2\mathbf{e}_3. \tag{3.35}$$

Σε ένα ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων ο στοιχειώδης όγκος $dV$ δίνεται από την έκφραση

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1h_2h_3 du_1 du_2 du_3. \tag{3.36}$$

## 3.5 Ο Τελεστής $\nabla$ σε Ορθογώνιο Καμπυλόγραμμο Σύστημα Συντεταγμένων

Αν μια βαθμωτή συνάρτηση $f$ είναι γνωστή ως συνάρτηση των μεταβλητών $u_1,u_2,u_3$, τότε και η κλίση της $\nabla f$ μπορεί να γραφεί στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Αν $\nabla$ είναι ο τελεστής της κλίσης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων [βλ. εξ. (2.23)]

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.23}$$

με διαδοχική παραγώγιση μπορούμε να γράψουμε

$$\nabla f(u_1,u_2,u_3) = \frac{\partial f}{\partial u_1}\nabla u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\nabla u_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3}\nabla u_3 \tag{3.37}$$

ή, χρησιμοποιόντας τη σύνδεση των εξ. (3.26) - (3.28)

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3. \tag{3.38}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο είναι δυνατόν να εκφράσουμε την απόκλιση $\nabla\cdot\mathbf{F}$ μιας ανυσματικής συνάρτησης

$$\mathbf{F}(u_1,u_2,u_3) = F_1(u_1,u_2,u_3)\,\mathbf{e}_1 + F_2(u_1,u_2,u_3)\,\mathbf{e}_2 + F_3(u_1,u_2,u_3)\,\mathbf{e}_3. \tag{3.39}$$

Χρησιμοποιόντας τις εξ. (3.25) - (3.28) μπορούμε να γράψουμε την τελυταία ανυσματική συνάρτηση ως

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3\\ &= F_1h_2h_3\nabla u_2 \times \nabla u_3 + F_2h_3h_1\nabla u_3 \times \nabla u_1 + F_3h_1h_2\nabla u_1 \times \nabla u_2.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή της εξ. (2.23) στην τελευταία έκφραση προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{F} &= \nabla(F_1h_2h_3)\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3 + F_1h_2h_3\nabla\cdot(\nabla u_2\times\nabla u_3)\\ &+ \nabla(F_2h_3h_1)\cdot\nabla u_3\times\nabla u_1 + F_2h_3h_1\nabla\cdot(\nabla u_3\times\nabla u_1)\\ &+ \nabla(F_3h_1h_2)\cdot\nabla u_1\times\nabla u_2 + F_3h_1h_2\nabla\cdot(\nabla u_1\times\nabla u_3)\end{aligned} \tag{3.41}$$

Το πρώτο τριπλό γινόμενο στην τελευταία έκφραση μπορεί, με διαδοχική παραγώγιση να γραφεί ως

$$\nabla(F_1h_2h_3)\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3 = \frac{\partial(F_1h_2h_3)}{\partial u_1}\nabla u_1\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3 \tag{3.42}$$

με ανάλογες εκφράσεις για τα δυο άλλα τριπλά γινόμενα της ίδιας μορφής. Οι λοιποί όροι της εξ. (3.41) μηδενίζονται, καθόσον

$$\nabla\cdot(\nabla u_2\times\nabla u_3) = \nabla\cdot(\nabla u_3\times\nabla u_1) = \nabla\cdot(\nabla u_1\times\nabla u_2) = 0. \tag{3.43}$$

Τέλος, το τριπλό γινόμενο στην εξ. (3.42) μπορεί να γραφεί ως

$$\nabla u_1\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\cdot\frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\times\frac{\mathbf{e}_3}{h_3} = \frac{1}{h_1h_2h_3}. \tag{3.44}$$

Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων αυτών η απόκλιση της συνάρτησης F στην εξ. (3.41) μπορεί να γραφεί ως

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3F_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_3h_1F_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1h_2F_3)}{\partial u_3}\right]. \tag{3.45}$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε επιπλέον να προσδιορίσουμε τη μορφή της *Λαπλασιανής συνάρτησης* $\nabla^2 f$ σε ένα γενικό ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Εφαρμόζοντας την έκφραση της εξ. (3.45) στην κλίση της εξ. (3.38) προκύπτει ότι

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right]. \tag{3.46}$$

Τέλος, είναι δυνατόν να εκφράσουμε το στροβιλισμό μιας ανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(u_1,u_2,u_3)$ σε ένα γενικό ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Για το σκοπό αυτό θα γράψουμε το άνυσμα της εξ. (3.40) στη μορφή

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3 \\ &= F_1h_1\nabla u_1 + F_2h_2\nabla u_2 + F_3h_3\nabla u_3 .\end{aligned} \tag{3.47}$$

Λαμβάνοντας τώρα το στροβιλισμό του τελευταίου ανύσματος και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\nabla \times (\nabla u_1) = \nabla \times (\nabla u_2) = \nabla \times (\nabla u_3) = \mathbf{0} \tag{3.48}$$

προκύπτει ότι

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla(F_1h_1) \times \nabla u_1 + \nabla(F_2h_2) \times \nabla u_2 + \nabla(F_3h_3) \times \nabla u_3 . \tag{3.49}$$

Το πρώτο εξωτερικό γινόμενο στην εξ. (3.49) μπορεί να γραφεί αναλυτικά ως

$$\begin{aligned}\nabla(F_1h_1) \times \nabla u_1 &= \frac{\partial(F_1h_1)}{\partial u_1}\nabla u_1 \times \nabla u_1 \\ &+ \frac{\partial(F_1h_1)}{\partial u_2}\nabla u_2 \times \nabla u_1 \\ &+ \frac{\partial(F_1h_1)}{\partial u_3}\nabla u_3 \times \nabla u_1\end{aligned} \tag{3.50}$$

με ανάλογες εκφράσεις για τους επόμενους δυο όρους. Επιπλέον, όροι της μορφής $\nabla u_i \times \nabla u_k$ μπορούν να γραφούν στη βάση των ανυσμάτων $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Για παράδειγμα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\nabla u_2 \times \nabla u_1 = -\frac{1}{h_1h_2}\mathbf{e}_3 \tag{3.51}$$

ενώ, προφανώς,

$$\nabla u_1 \times \nabla u_1 = \mathbf{0} \tag{3.52}$$

με ανάλογες εκφράσεις για τους λοιπούς συνδιασμούς. Με τη βοήθεια των σχέσεων αυτών, η εξ. (3.49) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_3F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2F_3)}{\partial u_3}\right]\mathbf{e}_1 \\ &+ \frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial(h_1F_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(h_3F_3)}{\partial u_1}\right]\mathbf{e}_2 \\ &+ \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(h_2F_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1F_1)}{\partial u_2}\right]\mathbf{e}_3 .\end{aligned} \tag{3.53}$$

Τα γενικά αποτελέσματα των εξ. ((3.38), (3.45), (3.46) και (3.53) μπορούν να εξειδικευθούν στα δυο συνηθέστερα συστήματα συντεταγμένων που μελετήσαμε στις Παραγράφους 3.2 και 3.3. Για λόγους πληρότητας τα αποτελέσματα δίνονται στη συνέχεια.

### ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Οι συντελεστές κλίμακας των εξ. (3.31) - (3.33) έχουν τις τιμές

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1 \tag{3.54}$$

με αποτέλεσμα η δράση του τελεστή $\nabla$ να οδηγεί στις σχέσεις

*Κλίση*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{3.55}$$

*Απόκλιση*

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{3.56}$$

*Στροβιλισμός*

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right]\mathbf{e}_\rho + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right]\mathbf{e}_\theta + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\theta) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial \theta}\right]\mathbf{e}_z \tag{3.57}$$

*Λαπλασιανή*

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{3.58}$$

### ΣΦΑΙΡΙΚΟ ΠΟΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Οι συντελεστές κλίμακας των εξ. (3.31) - (3.33) έχουν τις τιμές

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta \tag{3.59}$$

με αποτέλεσμα η δράση του τελεστή $\nabla$ να οδηγεί στις σχέσεις

*Κλίση*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi \tag{3.60}$$

*Απόκλιση*

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \tag{3.61}$$

*Στροβιλισμός*

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\varphi \sin\theta - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right]\mathbf{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right]\mathbf{e}_\theta$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{e}_\varphi \tag{3.62}$$

*Λαπλασιανή*

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\left[r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{3.63}$$

## ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Εξισώσεις μετασχηματισμού

$$u_1 = u_1(x,y,z)$$

$$u_2 = u_2(x,y,z)$$

$$u_3 = u_3(x,y,z)$$

Μοναδιαία ανύσματα

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

Στοιχειώδης μεταβολή του ανύσματος θέσης

$$d\mathbf{r} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$$

Στοιχειώδης όγκος

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

Κλίση

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$

Απόκλιση

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial (h_2 h_3 F_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 F_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 F_3)}{\partial u_3}\right]$$

Στροβιλισμός

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial (h_3 F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial (h_2 F_3)}{\partial u_3}\right]\mathbf{e}_1$$

$$+ \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial (h_1 F_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial (h_3 F_3)}{\partial u_1}\right]\mathbf{e}_2$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial (h_2 F_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial (h_1 F_1)}{\partial u_2}\right]\mathbf{e}_3$$

Λαπλασιανή

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right]$$

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Εξισώσεις μετασχηματισμού

$$x = \rho\cos\theta$$

$$y = \rho\sin\theta$$

$$z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$z = z$$

Συντελεστές κλίμακας

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1$$

Ανυσμα θέσης

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$$

$$d\mathbf{r} = d\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\, d\theta\,\mathbf{e}_\theta + dz\,\mathbf{e}_z$$

$$d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2$$

Στοιχειώδης όγκος

$$dV = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

Κλίση

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

Απόκλιση

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Στροβιλισμός

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right]\mathbf{e}_\rho + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right]\mathbf{e}_\theta + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\theta) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial \theta}\right]\mathbf{e}_z$$

Λαπλασιανή

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

### ΣΦΑΙΡΙΚΟ ΠΟΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Εξισώσεις μετασχηματισμού

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{r}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Συντελεστές κλίμακας

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta$$

Ανυσμα θέσης

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi$$

$$d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

Στοιχειώδης όγκος

$$dV = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

Κλίση

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

Απόκλιση

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

Στροβιλισμός

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi\sin\theta - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right]\mathbf{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right]\mathbf{e}_\theta$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\varphi$$

Λαπλασιανή

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\left[r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3-1 Δείξτε ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε οι συναρτήσεις $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ να ικανοποιούν μια εξίσωση $f(u,v,w)=0$ είναι

$$\nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w = 0$$

ή σε μορφή ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Η τελευταία ορίζουσα ονομάζεται *Ιακωβιανή* της τριάδας των συναρτήσεων $u,v,w$ και συνήθως συμβολίζεται ως $J(u,v,w)/(x,y,z)$.

3-2 Δείξτε ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε οι εξ. (3.22) να είναι αντιστρεπτές είναι

$$J(u_1,u_2,u_3)/(x,y,z) \neq 0.$$

3-3 Αποδείξτε την εξ. (3.55).

3-4 Αποδείξτε την εξ. (3.56).

3-5 Αποδείξτε την εξ. (3.57).

3-6 Αποδείξτε την εξ. (3.58).

3-7 Αποδείξτε την εξ. (3.60).

3-8 Αποδείξτε την εξ. (3.61).

3-9 Αποδείξτε την εξ. (3.62).

3-10 Αποδείξτε την εξ. (3.63).

3-11 Εκφράστε την εξ. (3.53) υπό μορφή ορίζουσας.

3-12 Δείξτε ότι στο σφαιρικό πολικό σύστημα συντεταγμένων ισχύει η σχέση

$$\nabla \times [(r\nabla\theta)] = \nabla\varphi.$$

3-13 Δείξτε ότι στο σφαιρικό πολικό σύστημα συντεταγμένων ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\mathbf{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta\,\mathbf{e}_r - \cos\varphi\,\mathbf{e}_\theta.$$

3-14 Επιλύστε σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες την εξίσωση $\nabla^2 f = 0$ για μια βαθμωτή συνάρτηση $f(r)$.

3-15 Επιλύστε σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες την εξίσωση $\nabla^2\mathbf{F} = 0$ για μια ακτινική ανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{e}_r$.

3-16 Επιλύστε σε κυλινδρικές συντεταγμένες την εξίσωση $\nabla^2\mathbf{F} = 0$ για μια ανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F} = u(\rho)\mathbf{e}_\rho + v(z)\mathbf{e}_z$.

3-17 Το *σύστημα παραβολικών συντεταγμένων* ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\lambda = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z}$$

$$\mu = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$$

α. Περιγράψτε τις επιφάνειες κατά τις οποίες καθεμιά από τις συντεταγμένες $\lambda,\mu,\varphi$ παραμένει σταθερή.
β. Προσδιορίστε τους συντελεστές κλίμακας $h_1,h_2,h_3$ ως συνάρτηση των συντεταγμένων του καρτεσιανού συστήματος $x,y,z$.
γ. Προσδιορίστε τις αντίστροφες εξισώσεις μετασχηματισμού συντεταγμένων.
δ. Προσδιορίστε τη μορφή της κλίσης $\nabla f$ και της Λαπλασιανής $\nabla^2 f$ μιας βαθμωτής συνάρτησης $f(\lambda,\mu,\varphi)$.
ε. Προσδιορίστε τη μορφή της απόκλισης $\nabla\cdot\mathbf{F}$ και του στροβιλισμού $\nabla\times\mathbf{F}$ μιας ανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(\lambda,\mu,\varphi)$.

3-18 Το σύστημα *εκθετικών συντεταγμένων* ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\xi = \ln(x^2 + y^2) - 2z$$

$$\eta = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left[\frac{y}{x}\right]$$

α. Δείξτε ότι οι προηγούμενες εξισώσεις μετασχηματισμού ορίζουν ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.
β. Περιγράψτε τις επιφάνειες κατά τις οποίες καθεμιά από τις συντεταγμένες $\xi,\eta,\varphi$ παραμένει σταθερή.
γ. Προσδιορίστε τους συντελεστές κλίμακας $h_1,h_2,h_3$ ως συνάρτηση των συντεταγμένων του καρτεσιανού συστήματος $x,y,z$.
γ. Προσδιορίστε τις αντίστροφες εξισώσεις μετασχηματισμού συντεταγμένων.
δ. Προσδιορίστε τη μορφή της κλίσης $\nabla f$ και της Λαπλασιανής $\nabla^2 f$ μιας βαθμωτής συνάρτησης $f(\xi,\eta,\varphi)$.
ε. Προσδιορίστε τη μορφή της απόκλισης $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και του στροβιλισμού $\nabla \times \mathbf{F}$ μιας ανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(\xi,\eta,\varphi)$.

3-19 Το *δισφαιρικό σύστημα συντεταγμένων* ορίζεται από τις εξισώσεις

$$x = \frac{a\sin\theta\cos\varphi}{\cosh\mu - \cos\theta}$$

$$y = \frac{a\sin\theta\sin\varphi}{\cosh\mu - \cos\theta}$$

$$z = \frac{a\sinh\mu}{\cosh\mu - \cos\theta}$$

α. Περιγράψτε τις επιφάνειες κατά τις οποίες καθεμιά από τις συντεταγμένες $\mu,\theta,\varphi$ παραμένει σταθερή.
β. Προσδιορίστε το πεδίο ορισμού των συντεταγμένων $\mu,\theta,\varphi$.
γ. Προσδιορίστε τους συντελεστές κλίμακας $h_1,h_2,h_3$ ως συνάρτηση των συντεταγμένων του καρτεσιανού συστήματος $x,y,z$.
γ. Δείξτε τη σχέση

$$\frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial \theta} = \frac{1}{h_\varphi}$$

Τι συμπεραίνετε από αυτή τη σχέση;
δ. Προσδιορίστε τη μορφή της κλίσης $\nabla f$ και της Λαπλασιανής $\nabla^2 f$ μιας βαθμωτής συνάρτησης $f(\mu,\theta,\varphi)$.
ε. Προσδιορίστε τη μορφή της απόκλισης $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και του στροβιλισμού $\nabla \times \mathbf{F}$ μιας ανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(\mu,\theta,\varphi)$.

3-20 Ενα *σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων* ορίζεται από τις εξισώσεις

$$x = a\cosh\mu\cos\theta\cos\varphi$$

$$y = a\cosh\mu\cos\theta\sin\varphi$$

$$z = a\sinh\mu\sin\theta$$

Στο σύστημα αυτό υπολογίστε τις εκφράσεις $(\mathbf{e}_\theta \cdot \nabla)\mathbf{F}$ και $(\mathbf{e}_\varphi \cdot \nabla)\mathbf{F}$ για μια ανυσματική συνάρτηση **F**.

3-21 Σε ένα ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων $u_1, u_2, u_3$ θεωρείστε το άνυσμα $\mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{e}_1 f)$, όπου $f(u1,u2,u3)$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση. Δείξτε ότι η διεύθυνση του ανύσματος **F** είναι κατά την εφαπτομένη προς την επιφάνεια κατά την οποία η συντεταγμένη $u_1$ παραμένει σταθερή. Ποιά εξίσωση πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $f$ και ποιούς περιορισμούς πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές κλίμακας $h_1, h_2, h_3$ ώστε η συνάρτηση **F** να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = 0$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Η ολοκλήρωση μιας συνάρτησης μπορεί σε γενικές γραμμές να θεωρηθεί ως το αντίστροφο της παραγώγισης. Θα θεωρήσουμε ότι στον αναγνώστη είναι οικείες οι έννοιες του **ορισμένου ολοκληρώματος** ή **ολοκληρώματος Riemann**

$$\int_a^b f \qquad \text{ή} \qquad \int_a^b f(x)dx \tag{4.1}$$

μιας βαθμωτής συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα των πραγματικών αριθμών $[a,b]$, δηλαδή στο διάστημα όπου η μεταβλητή $x$ παίρνει τις τιμές $a \le x \le b$. Θα θεωρήσουμε ακόμη ότι ο αναγνώστης γνωρίζει τις συνθήκες που πρέπει να πληροί η συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$, ώστε να ορίζεται το ολοκλήρωμα, καθώς και τις τεχνικές προσδιορισμού της αριθμητικής τιμής του ολοκληρώματος. Θα ονομάσουμε μια συνάρτηση $f(x)$ που πληροί τους όρους για τον ορισμό της ποσότητας στην εξ. (4.1) **ολοκληρώσιμη στο διάστημα** $[a,b]$.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας πραγματικής συνάρτησης $f(x)$ είναι ένας πραγματικός αριθμός. Είναι όμως δυνατόν, κατά προφανή τρόπο, να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f \qquad \text{ή} \qquad F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{4.2}$$

Η έννοια της πρώτης φράσης της προηγούμενης παραγράφου τώρα εκφράζεται με το **πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού**, σύμφωνα με το οποίο, άν η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα [a,b], και

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{4.3}$$

τότε η συνάρτηση $F(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$. Επιπλέον, άν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0$ του διαστήματος $[a,b]$, τότε η συνάρτηση $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη και

$$f(x_0) = \frac{dF}{dx}(x_0). \tag{4.4}$$

Αμεση απόρροια της εξ. (4.4) είναι η σχέση

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{4.5}$$

που συνήθως αναφέρεται ως **δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού** και αποτελεί ίσως το κυριότερο εργαλείο για την εξεύρεση της αριθμητικής τιμής ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Το ολοκλήρωμα Riemann μπορεί να επεκταθεί σε βαθμωτές συναρτήσεις με περισσότερες από μια μεταβλητή με τη διαδικασία της διαδοχικής ολοκλήρωσης. Για παράδειγμα, αν η συνάρτηση $f(x,y,z)$ εξαρτάται από τις τρεις μεταβλητές $x,y,z$, οι οποίες μεταβάλλονται αντίστοιχα στα διαστήματα $[a,b]$, $[c,d]$ και $[e,g]$, το *τριπλό ολοκλήρωμα* μπορεί να οριστεί ως

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=c}^{y=d}\int_{z=e}^{z=g} f(x,y,z)dxdydz$$

$$\equiv \int_{z=e}^{z=g}\left\{\int_{y=c}^{y=d}\left[\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y,z)dx\right)\right]dy\right\}dz. \tag{4.6}$$

Αν οι μεταβλητές $x,y,z$ αντιπροσωπεύουν συντεταγμένες, η ολοκλήρωση στην εξ. (4.6) μπορεί να θεωρηθεί, από γεωμετρική άποψη, ότι πραγματοποιείται στο εσωτερικό ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις $|b\text{-}a|$, $|d\text{-}c|$ και $|g\text{-}e|$. Μπορούμε κατά προφανή τρόπο να γενικεύσουμε τη γεωμετρική αυτή άποψη και να θεωρήσουμε την ολοκλήρωση της συνάρτησης $f$ στο εσωτερικό ενός όγκου V, ο οποίος περιβάλλεται από μια επιφάνεια S. Στην περίπτωση αυτή η επιφάνεια S ορίζεται από κάποια εξίσωση $w(x,y,z) = 0$ και επομένως τα όρια $[a,b]$, $[c,d]$, $[e,g]$ καθεμιάς από τις συντεταγμένες $x,y,z$ είναι συνάρτηση των λοιπών συντεταγμένων. Σε αναλογία με την εξ. (4.6), μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f$ στον όγκο V, ως

$$\int_V f dv \equiv \int_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$\equiv \int_{z=e}^{z=g}\left\{\int_{y=c(z)}^{y=d(z)}\left[\left(\int_{x=a(y,z)}^{x=b(y,z)} f(x,y,z)dx\right)\right]dy\right\}dz. \tag{4.7}$$

Θα έχουμε την ευκαιρία να εξετάσουμε το ολοκλήρωμα όγκου μιας βαθμωτής συνάρτησης στην Παράγραφο 4.6.

Στη συνέχεια θα επεκτείνουμε την έννοια του ολοκληρώματος Riemann στο χώρο των ανυσματικών συναρτήσεων. Στο τέλος του Κεφαλαίου θα εξετάσουμε τη γενίκευση των θεμελιωδών θεωρημάτων του απειροστικού λογισμού.

## 4.1 Ολοκλήρωση Ανυσματικών Συναρτήσεων

Η ολοκλήρωση κατά Riemann μπορεί να μεταφερθεί εύκολα στο χώρο των ανυσματικών συναρτήσεων. Μια ανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{4.8}$$

μπορεί να ολοκληρωθεί σε ένα όγκο V σύμφωνα με την εξ. (4.7) ως

$$\int_V \mathbf{F}\,dV = \left(\int_V F_x dV\right)\mathbf{i} + \left(\int_V F_y dV\right)\mathbf{j} + \left(\int_V F_z dV\right)\mathbf{k} \tag{4.9}$$

αν και το αποτέλεσμα σπάνια έχει κάποια φυσική σημασία.

Σε αντίθεση με την ολοκλήρωση μιας ανυσματικής συνάρτησης ως προς τις συντεταγμένες, ενδιαφέρον αποκτά σε πολλές περιπτώσεις η ολοκλήρωση ως προς άλλες μεταβλητές από τις οποίες μπορεί να εξαρτάται η συνάρτηση. Αν για παράδειγμα η ανυσματική συνάρτηση F*(x,y,z,α)* εξαρτάται από τη μεταβλητή *α*, μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\mathbf{F}d\alpha=\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}F_x d\alpha\right)\mathbf{i}+\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}F_y d\alpha\right)\mathbf{j}+\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}F_z d\alpha\right)\mathbf{k}. \tag{4.10}$$

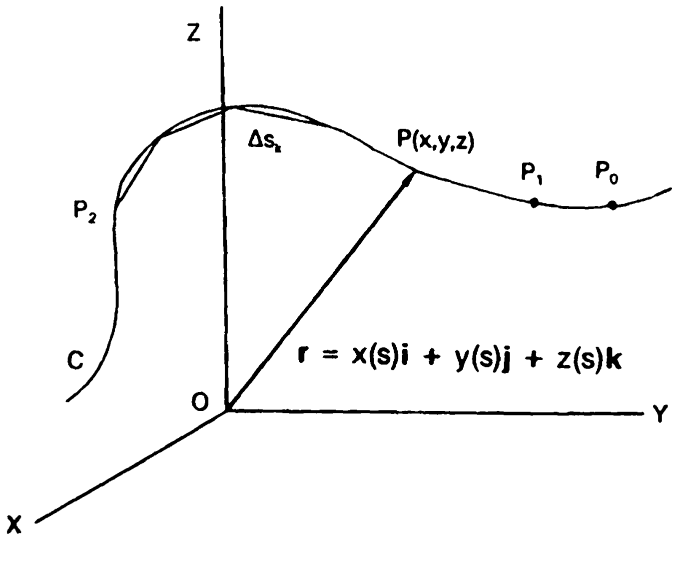
Από φυσικής πλευράς η τελευταία ολοκλήρωση εκφράζει την ολική συνεισφορά, σε ένα σημείο του χώρου με συντεταγμένες *x,y,z*, κάποιου αιτίου που αντιπροσωπεύεται από τη μεταβλητή *α*. Ο αναγνώστης θα συναντήσει, για παράδειγμα, ολοκληρώματα της μορφής της εξ. (4.10) στον ηλεκτρομαγνητισμό κατά την εφαρμογή του νόμου των Biot και Savart για τον υπολογισμό της μαγνητικής επαγωγής **B**. Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή *α* είναι η απόσταση από κάποια κατανομή στο χώρο πυκνότητας ρεύματος **J**(**r**).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη Φυσική αποκτά ο περιορισμός της ολοκλήρωσης μιας συνάρτησης σε μια καμπύλη ή σε μια επιφάνεια στο χώρο. Το θέμα αυτό θα αποτελέσει το αντικείμενο της μελέτης μας στις επόμενες παραγράφους.

## 4.2 Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Βαθμωτών Συναρτήσεων

Ας θεωρήσουμε μια τυχαία καμπύλη C στον τρισδιάστατο χώρο, όπως φαίνεται στο σχήμα 4-1. Ας θεωρήσουμε ακόμη ότι η καμπύλη C είναι *προσανατολισμένη*, δηλαδή ότι έχει επιλεγεί μια φορά κατά τη διαδρομή της καμπύλης ως θετική και η αντίθετη ως αρνητική. Κάθε σημείο P της καμπύλης χαρακτηρίζεται από τις συντεταγμένες του *x,y,z*. Μπορεί ακόμη να χαρακτηριστεί από το μήκος δρόμου *s* που θα καλύψει ένας παρατηρητής άν διανύσει την καμπύλη, κατά τη θετική (ή αρνητική) φορά, από ένα προκαθορισμένο σημείο $P_0$ μέχρι το σημείο P. Με την έννοια αυτή οι συντεταγμένες κάθε σημείου της καμπύλης μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις της παραμέτρου *s*, ήτοι *x(s), y(s), z(s)*. Οι τρεις αυτές συναρτήσεις ορίζουν πλήρως την καμπύλη C.

Ας θεωρήσουμε τώρα, όπως φαίνεται στο σχήμα 4-1, ένα τμήμα Γ της καμπύλης C μεταξύ δυο σημείων της $P_1$ και $P_2$, το οποίο θα χωρίσουμε αυθαίρετα σε N μικρότερα




**Σχήμα 4-1** Δρόμος επικαμπύλιου ολοκληρώματος συνάρτησης.

τμηματα $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_N$. Αν $\Delta s_k$ ειναι το μηκος της χορδης του τμηματος $\Gamma_k$ και $f(x_k,y_k,z_k)$ η τιμη μιας βαθμωτης συναρτησης $f(x,y,z)$ σε καποιο σημειο του τμηματο $\Gamma_k$, θα ορισουμε το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z)$ στο τμήμα Γ της καμπύλης C** ως το όριο

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \Delta s_k \to 0}} \sum_{k=1}^{N} f(x_k,y_k,z_k)\Delta s_k. \tag{4.11}$$

Παρατηρείται ότι ο τελευταίος ορισμός ταυτίζεται με τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann άν η καμπύλη C ταυτιστεί με τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μάλιστα μπορεί να γραφεί ως απλό ορισμένο ολοκλήρωμα αν χρησιμοποιήσουμε την παραμετρική μορφή των συντεταγμένων $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$. Πράγματι, ανατρέχοντας στον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann, μπορούμε να γράψουμε την εξ. (4.11) ως

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \int_{s_1}^{s_2} f[x(s),y(s),z(s)]\,ds. \tag{4.12}$$

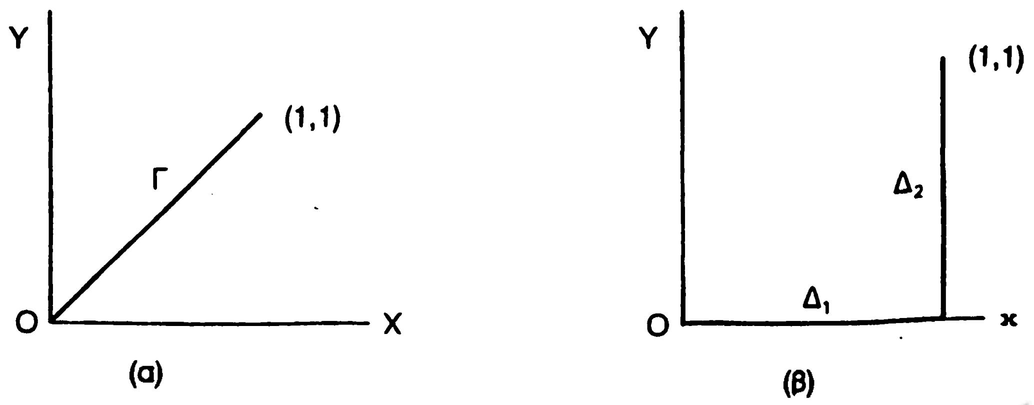
Η ολοκλήρωση της εξ. (4.12) είναι χρήσιμο να αποδοθεί με ένα παράδειγμα. Για το σκοπό αυτό ας θεωρήσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \tag{4.13}$$

στο ευθύγραμμο τμήμα Γ που, όπως φαίνεται στο σχήμα 4-2(α), εκτείνεται από την αρχή των συντεταγμένων Ο έως το σημείο $(x,y) = (1,1)$. Οι συντεταγμένες κάθε σημείου Ρ της καμπύλης Γ είναι δυνατόν να γραφούν ως συνάρτηση της απόστασης $s$ από την αρχή των συντεταγμένων ως

$$x = \frac{s}{\sqrt{2}} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad y = \frac{s}{\sqrt{2}} \tag{4.14}$$

ενώ το ολικό μήκος του ευθύγραμμου τμήματος Γ είναι ίσο με $\sqrt{2}$. Το επικαμπύλιο




Σχήμα 4-2 Δυο εναλλακτικοί δρόμοι για την ολοκλήρωση της συνάρτησης $f(x,y)=x^2+y^2$.

ολοκλήρωμα επομένως της συνάρτησης $f(x,y)$ στην εξ. (4.13) παίρνει τη μορφή

$$\int_{\Gamma}(x^2+y^2)\,ds=\int_0^{\sqrt{2}}\left(\frac{s^2}{2}+\frac{s^2}{2}\right)ds=\frac{2\sqrt{2}}{3}. \qquad (4.15)$$

Η συνάρτηση της εξ. (4.13) μπορεί να ολοκληρωθεί εναλλακτικά κατά μήκος μιας άλλης καμπύλης που συνδέει τα ίδια σημεία (0,0) και (1,1). Ας θεωρήσουμε την καμπύλη Δ που περιέχεται στο σχήμα (4-2(β) και που αρχικά διατρέχει τον άξονα Χ από το σημείο (0,0) έως το σημείο (1,0) και στη συνέχεια οδηγεί παράλληλα προς τον άξονα Υ από το σημείο (1,0) στο σημείο (1,1). Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ολοκληρωμάτων στα δυο ευθύγραμμα τμήματα $\Delta_1$ και $\Delta_2$ που συγκροτούν την καμπύλη Δ ως

$$\int_{\Delta}(x^2+y^2)\,ds=\int_{\Delta_1}(x^2+y^2)\,ds+\int_{\Delta_2}(x^2+y^2)\,ds. \qquad (4.16)$$

Κατά το ευθύγραμμο τμήμα $\Delta_1$ οι συντεταγμένες κάθε σημείου έχουν την τιμή $x=s$, $y=0$, ενώ το ολικό μήκος του είναι ισο με 1. Μπορούμε επομένως να γράψουμε

$$\int_{\Delta_1}(x^2+y^2)\,ds=\int_0^1 s^2ds=\frac{1}{3}. \qquad (4.17)$$

Κατά το ευθύγραμμο τμήμα $\Delta_2$ οι συντεταγμένες των σημείων έχουν την τιμή $x=1$, $y=s$, ενώ το ολικό μήκος του ισούται πάλι με 1. Στην περίπτωση επομένως αυτή το ολοκλήρωμα παίρνει την τιμή

$$\int_{\Delta_2}(x^2+y^2)\,ds=\int_0^1(1+s^2)\,ds=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}. \qquad (4.18)$$

Ετσι, από τα δυο τελευταία αποτελέσματα, μπορούμε να γράψουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εξ. (4.16) ως

$$\int_{\Delta}(x^2+y^2)\,ds=\frac{5}{3}. \qquad (4.19)$$

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων στις εξ. (4.15) και (4.19) οδηγεί σε ένα σημαντικό συμπέρασμα: *το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μια βαθμωτής συνάρτησης, κατά δυο διαφορετικούς δρόμους που συνδέουν τα ίδια σημεία, είναι δυνατόν να οδηγήσει (και συνήθως οδηγεί) σε διαφορετικά αποτελέσματα.*

## 4.3 Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Ανυσματικών Συναρτήσεων

Ας θεωρήσουμε το άνυσμα

$$\mathbf{F}=F_x(x,y,z)\mathbf{i}+F_y(x,y,z)\mathbf{j}+F_z(x,y,z)\mathbf{k} \qquad (4.20)$$

και μια προσανατολισμένη καμπύλη Γ στον τρισδιάστατο χώρο (βλ. σχήμα 4-1). Θα γράψουμε τις συντεταγμένες κάθε σημείου P της καμπύλης στην παραμετρική μορφή $x(s), y(s), z(s)$, όπου $s$ είναι η απόσταση του σημείου P, κατά το δρόμο της καμπύλης, από κάποιο προκαθορισμένο σημείο $P_0$. Το άνυσμα θέσης του σημείου P της καμπύλης δίνεται επομένως από την έκφραση

$$\mathbf{r} = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}. \tag{4.21}$$

Απειροελάχιστη μεταβολή $ds$ του μήκους $s$ γύρω από το σημείο P συνεπάγεται μεταβολή του ανύσματος θέσης

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \tag{4.22}$$

που μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}ds = \frac{dx}{ds}ds\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}ds\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}ds\mathbf{k}. \tag{4.23}$$

Η γεωμετρική σημασία της τελευταίας έκφρασης αναδεικνύεται από το αποτέλεσμα της Ασκησης 2-1, κατά το οποίο το άνυσμα

$$\mathbf{e}_\Gamma = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{4.24}$$

είναι το μοναδιαίο άνυσμα κατά την εφαπτομένη της καμπύλης Γ στο σημείο P.

Το εσωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων στις εξ. (4.20) και (4.22) αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη Φυσική. Ο αναγνώστης θα γνωρίζει χωρίς αμφιβολία ότι αν το άνυσμα $\mathbf{F}$ αντιπροσωπεύει δύναμη, τότε το γινόμενο $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ αντιπροσωπεύει το έργο που απαιτείται για τη στοιχειώδη μετατόπιση $d\mathbf{r}$. Ολοκλήρωση επομένως της βαθμωτής συνάρτησης $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ μεταξύ δυο σημείων $P_1$ και $P_2$ της καμπύλης Γ αντιπροσωπεύει το ολικό έργο που απαιτείται για τη μετακίνηση από το σημείο $P_1$ στο σημείο $P_2$ κατά το δρόμο Γ. Αν $s_1$ και $s_2$ είναι οι τιμές της παραμέτρου $s$ που χαρακτηρίζουν τα σημεία $P_1$ και $P_2$, χρησιμοποιώντας τις εξ. (4.20) και (4.24), μπορούμε να γράψουμε το ολικό έργο ως ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης, που ορίσαμε στην Παράγραφο 4.1,

$$\int_{s_1}^{s_2}\left(\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)ds = \int_{s_1}^{s_2}\left[F_x\frac{dx}{ds} + F_y\frac{dy}{ds} + F_z\frac{dz}{ds}\right]ds. \tag{4.25}$$

Θα ονομάσουμε το ολοκλήρωμα της εξ. (4.25) **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανυσματικής συνάρτησης** και θα το συμβολίσουμε ως

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{4.26}$$

Στην προηγούμενη ανάπτυξη η παράμετρος $s$ ταυτίστηκε με το φυσικό μέγεθος της απόστασης κατά την καμπύλη της ολοκλήρωσης. Τούτο έγινε σκόπιμα ώστε να τονιστεί η γεωμετρική άποψη. Είναι όμως προφανές ότι η απόλυτη αριθμητική τιμή της παραμέτρου $s$ παραμένει αυθαίρετη, καθόσον τούτη εξαρτάται από τη μονάδα που θα επιλεγεί για τη μέτρηση της απόστασης (μέτρο, εκατοστόμετρο, κλπ.). Ετσι οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή $s' = \alpha s$, που ισοδυναμεί απλώς με αλλαγή της μονάδας μέτρησης, μπορεί να προσδιορίσει εξίσου καλά την καμπύλη Γ μέσω της παραμετροποίησης των συντεταγμένων $x(s'), y(s'), z(s')$. Με τη διαπίστωση αυτή θα εγκαταλείψουμε την έννοια της απόστασης και στο μέλλον θα αναφερθούμε απλώς στην παράμετρο $s$, η οποία μέσω των συναρτήσεων $x(s), y(s), z(s)$ ορίζει την καμπύλη Γ.

Είναι χρήσιμο να εξειδικεύσουμε την προηγούμενη ανάλυση με τη βοήθεια δυο παραδειγμάτων. Ας θεωρήσουμε κατ' αρχήν τη δύναμη

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} \tag{4.27}$$

η οποία δρα αποκλειστικά στο επίπεδο XY. Ας θεωρήσουμε επιπλέον την παραβολική καμπύλη $\Gamma_1$ του σχήματος 4-3 που ορίζεται από την εξίσωση

$$y = x^2. \tag{4.28}$$

μεταξύ των σημείων (0,0) και (1,1). Χρησιμοποιώντας ως παράμετρο στην εξ. (4.25) $s=x$, οι παράγωγοι μπορούν να γραφούν ως

$$\frac{dx}{ds} = 1 \qquad \text{και} \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{d(s^2)}{ds} = 2s \tag{4.29}$$

έτσι ώστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\mathbf{F}$ κατά την καμπύλη $\Gamma_1$ να υπολογίζεται ως

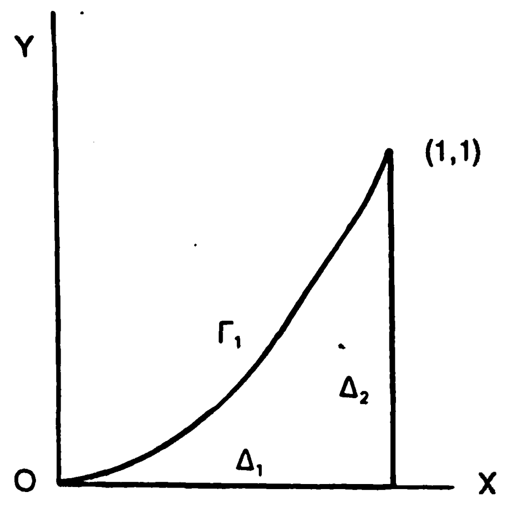
$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [s^2 - s2s]\,ds = -\frac{1}{3}. \tag{4.30}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της ίδιας ανυσματικής συνάρτησης μεταξύ των ίδιων σημείων αλλά κατά τον εναλλακτικό δρόμο που σημειώνεται στο σχήμα 4-3, ήτοι αρχικά κατά τον άξονα X από το σημείο (0,0) έως το σημείο (1,0) και στη συνέχεια κατά το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο (1,0) έως το σημείο (1,1). Σε προφανή συμβολισμό

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(1,0)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{(1,0)}^{(1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{4.31}$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια παραμετροποίηση, ο πρώτος κλάδος του δρόμου $\Gamma_2$ χαρακτηρίζεται από τις σχέσεις $x=s$, $y=0$ με παραγώγους

$$\frac{dx}{ds} = 1 \qquad \text{και} \qquad \frac{dy}{ds} = 0 \tag{4.32}$$




**Σχήμα 4-3** Δυο εναλλακτικοί δρόμοι για την ολοκλήρωση συναρτήσεων.

ενώ η δύναμη **F** έχει συνιστώσες $F_x = 0$, $F_y = -x = -s$. Η εξ. (4.25) επομένως οδηγεί σε μηδενικό αποτέλεσμα για το πρώτο ολοκλήρωμα της εξ. (4.31). Στο δεύτερο κλάδο $x=0$, $y=s$ με

$$\frac{dx}{ds} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{dy}{ds} = 1 \tag{4.33}$$

ενώ η δύναμη **F** έχει συνιστώσες $F_x = s$, $F_y = -1$. Το δεύτερο ολοκλήρωμα της εξ. (4.31) επομένως παίρνει την τιμή

$$\int_0^1 (-1)ds = -1 \tag{4.34}$$

με τελικό αποτέλεσμα

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -1\,. \tag{4.35}$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων στις εξ. (4.30) και (4.35) αναδεικνύει, όπως και στην προηγούμενη Παράγραφο, το γεγονός ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι δυνατόν να οδηγήσει σε διαφορετική αριθμητική τιμή αν η ολοκλήρωση μεταξύ δυο σημείων στο χώρο πραγματοποιηθεί κατά διαφορετικούς δρόμους. Στο επόμενο παράδειγμα θα μελετήσουμε μια συνάρτηση, για την οποία η ολοκλήρωση μεταξύ δυο σημείων οδηγεί πάντα στην ίδια τιμή, ανεξάρτητα από το δρόμο.

Ας θεωρήσουμε την ολοκλήρωση της συνάρτησης

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} \tag{4.36}$$

μεταξύ των σημείων (0,0) και (1,1) κατά τον παραβολικό δρόμο $\Gamma_1$ του σχήματος 4-3. Χρησιμοποιώντας την ίδια παραμετροποίηση με το προηγούμενο παράδειγμα και τις τιμές των παραγώγων στην εξ. (4.29) η εξ. (4.25) οδηγεί στην τιμή

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [s^2 + s^6(2s)]ds = \frac{1}{3}s^2 + \frac{1}{4}s^8\Big|_0^1 = \frac{7}{12}. \tag{4.37}$$

Αν για την ολοκλήρωση επιλέξουμε τώρα τον εναλλακτικό δρόμο $\Delta_1 + \Delta_2$ του σχήματος 4-3, τα δυο ολοκληρώματα της εξ. (4.31), με τις τιμές των παραγώγων στις εξ. (4.32) και (4.33) δίνουν αντίστοιχα

$$\int_{(0,0)}^{(1,0)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3} \tag{4.38}$$

και

$$\int_{(1,0)}^{(1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 s^3 ds = \frac{1}{4} \tag{4.39}$$

με τελικό αποτέλεσμα

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{7}{12} \tag{4.40}$$

το οποίο ταυτίζεται με το αποτέλεσμα της εξ. (4.37). Ο αναγνώστης μπορεί, επιλέγοντας ένα τρίτο εναλλακτικό δρόμο μεταξύ των σημείων (0,0) και (1,1), να ποδείξει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης F στην εξ. (4.36) οδηγεί πάλι στο αριθμητικό αποτέλεσμα 7/12.

## 4.4 Διατηρητικά Πεδία

Με τα παραδείγματα της προηγούμενης Παραγράφου είδαμε ότι υπάρχει μια κατηγορία ανυσματικών συναρτήσεων για τις οποίες το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μεταξύ δυο σημείων στο χώρο είναι ανεξάρτητο από το δρόμο. Στη Φυσική, όταν μια ανυσματική συνάρτηση προσδιορίζει την τιμή ενός φυσικού μεγέθους στο χώρο, λέμε ότι η συνάρτηση αυτή δημιουργεί ένα **πεδίο**. Στον αναγνώστη θα είναι ασφαλώς γνωστά το *πεδίο βαρύτητας* που δημιουργεί η δύναμη της βαρύτητας ή το *μαγνητικό πεδίο* που δημιουργεί η μαγνητική επαγωγή. Πεδία για τα οποία το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της αντίστοιχης ανυσματικής συνάρτησης είναι ανεξάρτητα από το δρόμο ονομάζονται **διατηρητικά** ή **συντηρητικά**. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις συνθήκες που πρέπει να πληροί μια ανυσματική συνάρτηση ώστε να συγκροτεί ένα διατηρητικό πεδίο.

Κατ' αρχήν είναι εύκολο να δείξουμε ότι *αν η ανυσματική συνάρτηση της εξ. (4.25) μπορεί να γραφεί ως η κλίση κάποιας βαθμωτής συναρτησης $\varphi(x,y,z)$, ήτοι*

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi \tag{4.41}$$

*τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα*

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

*μεταξύ δυο σημείων* $P_1$ *και* $P_2$ *είναι ανεξάρτητο από το δρόμο C που θα επιλεγεί για την ολοκλήρωση.* Πράγματι, χρησιμοποιώντας την εξ. (2.18), μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{P_1}^{P_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2}\nabla\varphi\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} d\varphi = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) \tag{4.42}$$

όπου $\varphi(P_1)$ και $\varphi(P_2)$ είναι οι τιμές της συνάρτησης $\varphi(\mathbf{r})$ στα σημεία $P_1$ και $P_2$. Η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος στην εξ. (4.42) εξαρτάται μόνο από τα σημεία $P_1$ και $P_2$ και επομένως είναι ανεξάρτητη από τον μεταξύ τους δρόμο. Κατ' επέκταση, αν μια ανυσματική συνάρτηση μπορεί να γραφεί στη μορφή της εξ. (4.41), το επικαμπύλιο ολοκλήρωμά της σε οποιοδήποτε κλειστό δρόμο C, που θα συμβολίσουμε ως $\oint_C$, μηδενίζεται, ήτοι

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{4.43}$$

Βεβαίως, για να ισχύει η εξ. (4.43) η συνάρτηση $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ θα πρέπει να ορίζεται και να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο που περικλείεται από το δρόμο C (βλ. Ασκηση 4-1).

Είναι ακόμη δυνατόν να αποδείξουμε ότι η εξ. (4.41) αποτελεί και αναγκαία συνθήκη ώστε μια ανυσματική συνάρτηση να είναι διατηρητική. Δηλαδή ότι, *αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *είναι ανεξάρτητο από το δρόμο, τότε υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση* $\varphi(\mathbf{r})$, *μέσω της οποίας η συνάρτηση* F *μπορεί να γραφεί στη μορφή της εξ. (4.41).* Ας θεωρήσουμε για το σκοπό αυτό το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εν λόγω συνάρτησης μεταξύ του σημείου $P_1$ και ενός τυχαίου σημείου $P(x,y,z)$, ορίζοντας τη συνάρτηση [βλ. εξ. (4.25)]

$$\varphi(x,y,z) = \int_{P_1}^{P(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P}\left(\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)ds. \tag{4.44}$$

Αν το σημείο P μετατεθεί στο σημείο P', κατά την απειροελάχιστη ποσότητα $\Delta x$ παράλληλα προς τον άξονα X, η τιμή της συνάρτησης $\varphi(\mathbf{r})$ θα μεταβληθεί κατά

$$\frac{\varphi(x+\Delta x,y,z)-\varphi(x,y,z)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{P(x,y,z)}^{P'(x+\Delta x,y,z)}\left(\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)ds. \tag{4.45}$$

Καθόσον το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο από το δρόμο μεταξύ των σημείων P και P', μπορούμε να επιλέξουμε το μεταξύ τους ευθύγραμμο τμήμα. Τούτο ισοδυναμεί με τη μετατόπιση $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}$. Στο όριο $\Delta x \to 0$ επομένως, η εξ. (4.45) μπορεί να γραφεί ως

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x,y,z)-\varphi(x,y,z)}{\Delta x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}F_x(x,y,z)\,dx}{\Delta x} = F_x(x,y,z). \tag{4.46}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = F_y(x,y,z) \tag{4.47}$$

και

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = F_z(x,y,z) \tag{4.48}$$

με αποτέλεσμα η συνάρτηση F να γράφεται ως

$$\mathbf{F} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\varphi. \tag{4.49}$$

Το αν μια συνάρτηση F είναι διατηρητική μπορεί ακόμη να ελεγχθεί από την τιμή του στροβιλισμού της. Πράγματι, αν μια συνάρτηση είναι διατηρητική και επομένως, σύμφωνα με την εξ. ((4.49), οι συνιστώσες της έχουν τη μορφή

$$F_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad F_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad F_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{4.50}$$

τότε, με μια επιπλέον παραγώγιση ως προς τις συντεταγμένες $x,y,z$, είναι εύκολο να δείξουμε τις σχέσεις

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad (4.51)$$
$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

Από την εξ. (2.52), οι τελευταίες σχέσεις αποτελούν τη συνθήκη για μηδενισμό του στροβιλισμού της συνάρτησης F. Με άλλα λόγια, *αν μια συνάρτηση είναι διατηρητική, τότε ο στροβιλισμός της μηδενίζεται*, ήτοι

$$\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}. \qquad (4.52)$$

Αντίστροφα, ας θεωρήσουμε ότι ισχύει η εξ. (4.52) και ας ορίσουμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} F_x(x',y,z)\,dx'$$
$$+\int_{y_0}^{y} F_y(x_o,y',z)\,dy' + \int_{z_0}^{z} F_z(x_o,y_o,z')\,dz'. \qquad (4.53)$$

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι της συνάρτησης αυτής ως προς τις συντεταγμένες $x,y,z$ έχουν τη μορφή

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = F_x(x,y,z) \qquad (4.54)$$

και

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_x}{\partial y}dx' + F_y(x_o,y,z)$$
$$= \int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_y}{\partial x'}dx' + F_y(x_o,y,z)$$
$$= F_y(x,y,z) - F_y(x_o,y,z) + F_y(x_o,y,z)$$
$$= F_y(x,y,z) \qquad (4.55)$$

όπου στο δεύτερο σκέλος χρησιμοποιήθηκε η εξ. (4.53). Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = F_z(x,y,z) \qquad (4.56)$$

με αποτέλεσμα η συνάρτηση F να γράφεται ως

$$\mathbf{F} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\varphi. \qquad (4.57)$$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι *η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε μια ανυσματική συνάρτηση* **F** *να είναι διατηρητική, εκφράζεται από τη σχέση*

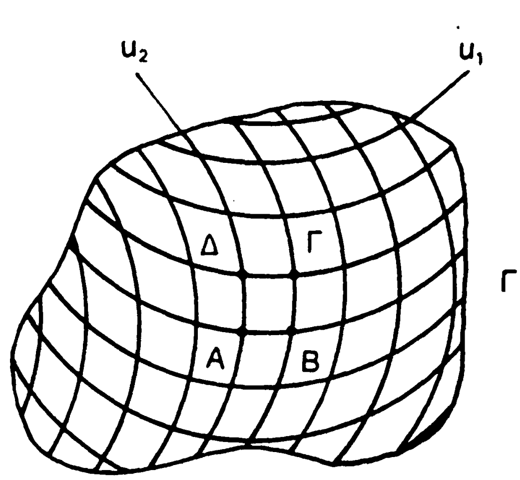
$$\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}. \tag{4.58}$$

## 4.5 Το Θεώρημα του Stokes

Από τη συζήτηση στην προηγούμενη Παράγραφο, ο αναγνώστης ασφαλώς θα διέκρινε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας ανυσματικής συνάρτησης **F** συνδέεται στενά με την τιμή του στροβιλισμού $\nabla\times\mathbf{F}$ της συνάρτησης στο χώρο. Τούτο ενδεχομένως προκύπτει διαισθητικά και από τη συζήτηση σχετικά με τη φυσική σημασία του στροβιλισμού στην Παράγραφο 2.6. Τη σημαντική αυτή σύνδεση αναδεικνύει το **θεώρημα του Stokes** που θα αποδείξουμε στη συνέχεια. Για το σκοπό αυτό θα θεωρήσουμε τον κλειστό δρόμο Γ που διαγράφεται στο σχήμα 4-4 καθώς και μια επιφάνεια S με όρια την καμπύλη Γ. Σημειώνεται ότι τόσο η καμπύλη Γ, όσο και η επιφάνεια S δεν βρίσκονται απαραίτητα σε ένα επίπεδο. Ο αναγνώστης μπορεί να φανταστεί ότι η καμπύλη Γ είναι κατασκευασμένη από λεπτό σύρμα, ενώ η επιφάνεια S δημιουργείται από μια ελαστική μεμβράνη με όρια το Γ. Τόσο το σύρμα όσο και η μεμβράνη μπορούν να διαμορφωθούν αντίστοιχα σε οποιαδήποτε τρισδιάστατη καμπύλη ή επιφάνεια, που θα αποδόσουμε μέσω κάποιας συνάρτησης $\mathbf{r}(u_1,u_2,u_3)$ του ανύσματος θέσης σε ένα γενικευμένο σύστημα συντεταγμένων $u_1,u_2,u_3$. Χωρίς να χάσουμε τίποτε από τη γενικότητα, και για απλούστευση του συμβολισμού που θα ακολουθήσει, μπορούμε επιπλέον να επιλέξουμε το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε η συγκεκριμένη επιφάνεια S να αντιπροσωπεύει επιφάνεια σταθερής τιμής της συντεταγμένης $u_3$.

Ας θεωρήσουμε τώρα, όπως φαίνεται στο σχήμα 4-4, ένα λεπτό διαχωρισμό της επιφάνειας S κατά τους άξονες των συντεταγμένων $u_1$ και $u_2$, ο οποίος ορίζει ένα πλήθος *N* από στοιχειώδεις επιφάνειες $C_k$. Μια τέτοια στοιχειώδης επιφάνεια με περίγραμμα το δρόμο ΑΒΓΔ, σημειώνεται στο σχήμα 4-4. Σε ένα τέτοιο διαχωρισμό, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι το άθροισμα των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων της συνάρτησης **F** γύρω από όλες τις στοιχειώδεις επιφάνειες $C_k$ ισούται με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης στο δρόμο Γ, ήτοι

$$\sum_{k=1}^{N}\oint_{C_k}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\oint_{\Gamma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{4.59}$$




**Σχήμα 4-4** Λεπτός διαχωρισμός κατά τη διεύθυνση των συντεταγμένων $u_1$ και $u_2$ μιας τυχαία επιφάνειας S με όρια τον κλειστό δρόμο Γ.

Τούτο μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια του σχήματος 4-5, που περιέχει δυο γειτονικές στοιχειώδεις επιφάνειες $C_k$ και $C_{k+1}$ του διαχωρισμού στο σχήμα 4-4. Οπως πάντα θα θεωρήσουμε τα κλειστά επικαμπύλια ολοκληρώματα της εξ. (4.59) ως προσανατολισμένα και συγκεκριμένα προς την αντίθετη φορά των δεικτών του ωρολογίου. Είναι φανερό από το σχήμα 4-5 ότι το ανάπτυγμα καθενός από τα ολοκληρώματα της εξ. (4.59) στα περιγράμματα των επιφανειών $C_k$ και $C_{k+1}$ θα περιέχει ολοκλήρωση κατά τον κοινό δρόμο AB, *κατά αντίθετη όμως φορά*. Καθόσον

$$\int_B^A \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{4.60}$$

έπεται ότι ολοκλήρωση στο δρόμο που περικλείει και τις δυο επιφάνειες του σχήματος 4-5 ισούται με το άθροισμα των ολοκληρώσεων στο περίγραμμα καθεμιάς, ήτοι

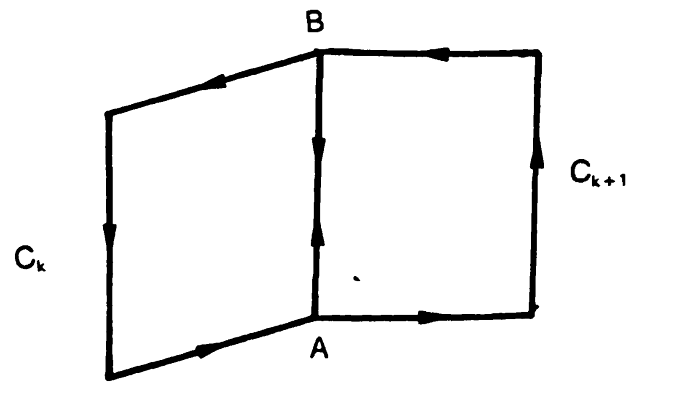
$$\oint_{C_k} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_{k+1}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{(C_k+C_{k+1})} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{4.61}$$

Γενίκευση της τελευταίας σχέσης οδηγεί στην απόδειξη της εξ. (4.59). Θα εννοήσουμε βεβαίως την εξ. (4.59) ως απόλυτα ακριβή στο όριο κατά το οποίο οι στοιχειώδεις επιφάνειες του διαχωρισμού του σχήματος 4-4 τείνουν προς μηδενικό εμβαδόν.

Ας εξετάσουμε τώρα με μεγαλύτερη λεπτομέρεια το στοιχειώδες επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του σχήματος 4-4

$$\oint_{\text{ΑΒΓΔ}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{4.62}$$

Αν οι συντεταγμένες του σημείου Α είναι$(u_1,u_2)$, οπότε στο σημείο αυτό η συνάρτηση παίρνει την τιμή $F(u_1,u_2)$, και ο διαχωρισμός του σχήματος 4-4 είναι αρκετά λεπτός, μπορούμε να γράψουμε τις συντεταγμένες των σημείων Β, Γ και Δ αντίστοιχα ως $(u_1+\Delta u_1,u_2)$, $(u_1+\Delta u_1,u_2+\Delta u_2)$ και $(u_1,u_2+\Delta u_2)$. Οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $\mathbf{F}$ στα σημεία Β, Γ και Δ μπορούν τώρα να συνδεθούν με την τιμή της στο σημείο Α μέσω του αναπτύγματος Taylor που παραθέσαμε στην Παράγραφο 2.7. Διατηρώντας μόνο τους δυο πρώτους όρους στην εξ. (2.68) μπορούμε για παράδειγμα να γράψουμε την τιμή της συνάρτησης στο σημείο Β ως




**Σχήμα 4-5** Δυο διαδοχικά στοιχεία επιφανείας στο διαχωρισμό του σχήματος 4-4.

$$\mathbf{F}(u_1+\Delta u_1,u_2)=\mathbf{F}(u_1,u_2)+(\Delta\mathbf{r}_{u_1}\cdot\nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r})\Big|_{(u_1,u_2)}$$

$$=\mathbf{F}(u_1,u_2)+\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\Delta u_1\cdot\nabla\right)\mathbf{F}(\mathbf{r})\Bigg|_{(u_1,u_2)} \qquad (4.63)$$

όπου το μοναδιαίο άνυσμα $\mathbf{e}_1$ κατά τη δεύθυνση της συντεταγμένης $u_1$ έχει γραφεί, σύμφωνα με το αποτέλεσμα της Ασκησης 2-1, ως

$$\mathbf{e}_1=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}. \qquad (4.64)$$

Στο όριο επομένως $\Delta u_1\to du_1$ η εξ. (4.63) μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{F}(u_1+\Delta u_1,u_2)=\mathbf{F}(u_1,u_2)+\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}du_1\cdot\nabla\right)\mathbf{F}(\mathbf{r})\Bigg|_{(u_1,u_2)}. \qquad (4.65)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να γράψουμε την τιμή της συνάρτησης $\mathbf{F}$ στο σημείο Γ ως

$$\mathbf{F}(u_1,u_2+\Delta u_2)=\mathbf{F}(u_1,u_2)+\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}du_2\cdot\nabla\right)\mathbf{F}(\mathbf{r})\Bigg|_{(u_1,u_2)}. \qquad (4.66)$$

Ετσι, μπορούμε να γράψουμε την ολοκλήρωση στους τέσσερις κλάδους του δρόμου ΑΒΓΔ ως

$$\int_A^B\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_1du_1=\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}du_1 \qquad (4.67)$$

$$\int_{\mathrm{B}}^{\Gamma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\left[\mathbf{F}+\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\cdot\nabla\right)\mathbf{F}\right]\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}du_2 \qquad (4.68)$$

$$\int_{\Gamma}^{\Delta}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=-\int_{\Delta}^{\Gamma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=-\left[\mathbf{F}+\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\cdot\nabla\right)\mathbf{F}\right]\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}du_1 \qquad (4.69)$$

$$\int_{\Delta}^{\mathrm{A}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=-\int_{\mathrm{A}}^{\Delta}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=-\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}du_2. \qquad (4.70)$$

Συγκεντρώνοντας τα τελευταία αποτελέσματα μπορούμε επομένως να εκφράσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο περίγραμμα της στοιχειώδους επιφανείας ΑΒΓΔ ως

$$\oint_{\mathrm{AB\Gamma\Delta}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\left\{\left[\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\cdot\nabla\right)\mathbf{F}\right]\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}-\left[\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\cdot\nabla\right)\mathbf{F}\right]\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\right\}du_1du_2. \qquad (4.71)$$

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες του Κεφαλαίου 2, ο αναγνώστης τώρα μπορεί να αποδείξει ότι το δεύτερο σκέλος της εξ. (4.71) μπορεί να γραφεί ως

$$\left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\cdot\nabla\right)\mathbf{F}\right]\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}-\left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\cdot\nabla\right)\mathbf{F}\right]\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$$

$$=\left[(\nabla\times\mathbf{F})\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\right]\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}=(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\right). \tag{4.72}$$

Ετσι, μπορούμε να γράψουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εξ. (4.62) στη μορφή

$$\oint_{\text{ΑΒΓΔ}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\,du_1du_2. \tag{4.73}$$

Το άνυσμα

$$d\mathbf{A}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \tag{4.74}$$

έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν της στοιχειώδους επιφανείας ΑΒΓΔ και διεύθυνση κατά την κάθετο προς την επιφάνεια. Θα ονομάσουμε το άνυσμα $d\mathbf{A}$ **προσανατολισμένο στοιχείο επιφανείας** και θα γράψουμε το ολοκλήρωμα της εξ. (4.73) στην τελική μορφή

$$\oint_{\text{ΑΒΓΔ}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A}. \tag{4.75}$$

Στο όριο επομένως όπου ο διαχωρισμός του σχήματος 4-4 γίνεται αρκετά λεπτός, ώστε το εμβαδόν $S_k$ κάθε στοιχειώδους επιφανείας $C_k$ να τείνει προς το μηδεν, το αριστερό μέρος της εξ. (4.59) τείνει προς το όριο

$$\lim_{S_k\to 0}\sum_{k=1}^{N}\oint_{C_k}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A} \tag{4.76}$$

έτσι ώστε η εξ. (4.59) να πάρει τη μορφή

$$\oint_{\Gamma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A}. \tag{4.77}$$

Η εξ. (4.77) αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του θεωρήματος του Stokes, το οποίο συνδέει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας ανυσματικής συνάρτησης **F** σε ένα κλειστό δρόμο Γ προς το ολοκλήρωμα της συνάρτησης πάνω σε μια επιφάνεια S με όρια την καμπύλη Γ. Πολλά παραδείγματα εφαρμογής του θεωρήματος του Stokes παρατίθενται στις Ασκήσεις στο τέλος του κεφαλαίου.

## 4.6 Ροή Πεδίου. Το Θεώρημα της Απόκλισης

Στην εξ. (4.74) ορίσαμε το προσανατολισμένο στοιχείο επιφανείας $d\mathbf{A}$, που αποδίδεται γεωμετρικά στο σχήμα 4-6. Την ολοκλήρωση του εσωτερικού γινομένου του στοιχείου επιφανείας με ένα άνυσμα θεωρήσαμε ακόμη στις εξ. (4.76) και (4.77). **Επιφανειακά ολοκληρώματα** της μορφής αυτής απαντώνται συχνά στη Φυσική και εμφανίζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Συγκεκριμένα, αν μια ανυσματική συνάρτηση ορίζεται σε κάθε σημείο της επιφάνειας S, το ολοκλήρωμα

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \tag{4.78}$$

αναφέρεται ως η **ροή** του ανύσματος **F** στην επιφάνεια S. Ο όρος προέρχεται προφανώς από τη δυναμική των ρευστών όπου, αν **v** είναι το πεδίο ταχύτητας και $\rho$ η πυκνότητα, ολοκλήρωση του ανύσματος $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ σύμφωνα με την εξ. (4.78) δίνει τη *ροή* (μάζα ανά μονάδα χρόνου) του ρευστού μέσα από την επιφάνεια S. Ενα γενικότερο παράδειγμα ροής (του πεδίου πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος **J**) μελετήσαμε με κάποια λεπτομέρεια στην Παράγραφο 2.5.

Η Παράγραφος 2.5 οδήγησε σε ένα ακόμη σημαντικό αποτέλεσμα. Είδαμε εκεί ότι η απώλεια ροής ενός ανύσματος **F** μέσα σε ένα μικρό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο όγκου $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ δίνεται από την ποσότητα $-\nabla \cdot \mathbf{F}\Delta V$. Αυτό είναι το ισοζύγιο της ροής που *εισέρχεται* στο στοιχειώδη όγκο $\Delta V$. Αντίστροφα, η ολική ροή του ανύσματος **F** που *εξέρχεται* από το παραλληλεπίπεδο είναι ίση προς $\nabla \cdot \mathbf{F}\Delta V$. Την πρόταση αυτή μπορούμε να αποδόσουμε μαθηματικά, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της εξ. (4.78), με την έκφραση

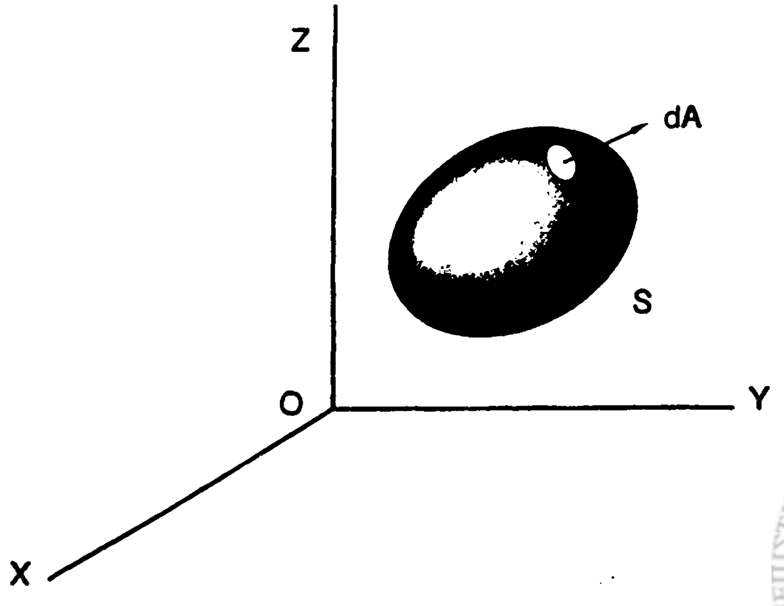
$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{F}\Delta V \tag{4.79}$$

ή, στο όριο όπου ο όγκος $\Delta V$ γίνεται απειροελάχιστος,

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{F}. \tag{4.80}$$

Σημειώνεται ότι σε πολλά συγγράμματα η εξ. (4.80) λαμβάνεται ως ο ορισμός της απόκλισης του ανύσματος **F**.

Ας θεωρήσουμε τώρα, όπως φαίνεται στο σχήμα 4-6, μια κλειστή επιφάνεια S στο χώρο, η οποία περιβάλλει έναν όγκο V. Χρησιμοποιώντας μέθοδο παράλληλη προς αυτή της απόδειξης του θεωρήματος του Stokes, θα χωρίσουμε τον όγκο V σε $N$ στοιχειώδη παραλληλεπίπεδα $C_k$ μέ όγκο $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Θα συμβολίσουμε ακόμη την ολική επιφάνεια των έξι εδρών κάθε παραλληλεπιπέδου $C_k$ ως $S_k$. Σε αναλογία με την εξ. (4.59)




**Σχήμα 4-6** Προσανατολισμένο στοιχείο *d***A** επιφανείας S, η οποία περιβάλλει όγκο V.

δεν είναι δύσκολο και εδώ να δείξουμε ότι το άθροισμα των επιφανειακών ολοκληρωμάτων της συνάρτησης F στην επιφάνεια κάθε στοιχειώδους παραλληλεπιπέδου $C_k$ του διαχωρισμού ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην επιφάνεια S, ήτοι

$$\sum_{k=1}^{N} \oint_{S_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \tag{4.81}$$

Τούτο μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια του σχήματος 4-7, το οποίο περιέχει δυο διαδοχικά στοιχειώδη παραλληλεπίπεδα $C_k$ και $C_{k+1}$ με μια κοινή έδρα. Σύμφωνα με τη σύμβαση που έχουμε υιοθετήσει, το προσανατολισμένο στοιχείο επιφανείας στην κοινή έδρα έχει αντίθετη φορά κατά τον υπολογισμό της ροής στο παραλληλεπίπεδο $C_k$ απ' ότι κατά τον υπολογισμό της ροής στο παραλληλεπίπεδο $C_{k+1}$, με αποτέλεσμα η ροή μέσω της κοινής έδρας των δυο παραλληλεπιπέδων να είναι ίση και αντίθετη και, σε αναλογία με την εξ. (4.61), να ισχύει η σχέση

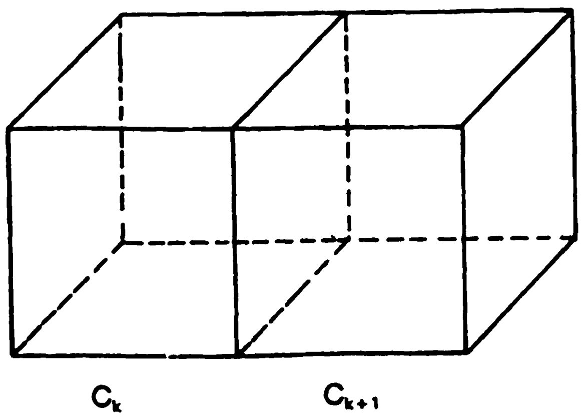
$$\oint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} + \oint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{S_1 + S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \tag{4.82}$$

Γενίκευση της τελευταίας σχέσης οδηγεί στην απόδειξη της εξ. (4.81). Θα εννοήσουμε πάλι την εξ. (4.81) ως απόλυτα ακριβή στο όριο κατά το οποίο ο όγκος των στοιχειωδών παραλληλεπιπέδων του σχήματος 4-7 τείνει προς το μηδέν. Στο όριο αυτό μπορούμε να γράψουμε την εξ. (4.81) ως

$$\begin{aligned} \oint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \oint_{S_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \\ &= \lim_{\Delta V_k \to 0} \sum_{k=1}^{N} \left[ \frac{1}{\Delta V_k} \oint_{S_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \right] \Delta V_k. \end{aligned} \tag{4.83}$$

όπου στο τελευταίο σκέλος η συνάρτηση του αθροίσματος έχει απλώς πολλαπλασιαστεί και διαιρεθεί με το στοιχειώδη όγκο $\Delta V_k$.

Στο όριο που υποδηλώνει η εξ. (4.83) το άθροισμα μεταπίπτει σε ολοκλήρωμα όγκου ενώ, από την εξ. (4.80), η έκφραση που περιέχεται στις αγγύλες αναγνωρίζεται ως




**Σχήμα 4-7** Δυο διαδοχικά στοιχειώδη παραλληλεπίπεδα σε λεπτό διαχωρισμό του όγκου V στο σχήμα 4-6.

η απόκλιση της συνάρτησης F. Η εξ. (4.83) μπορεί επομένως να γραφεί στη μορφή

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}. \qquad (4.84)$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί την έκφραση του **θεωρήματος της απόκλισης** ή **θεωρήματος του Gauss**, κατά το οποίο η απόκλιση μιας συνάρτησης F στο εσωτερικό ενός όγκου V συνδέεται με την ολική ροή στην επιφάνεια S που περιβάλλει τον όγκο V.

Οπως και με την περίπτωση του θεωρήματος του Stokes, πολλά παραδείγματα εφαρμογής του θεωρήματος του Gauss παραπέμπονται στις Ασκήσεις που ακολουθούν.

## ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ολοκλήρωση ανυσματικής συνάρτησης

$$\int_{a_1}^{a_2} \mathbf{F} da = \left(\int_{a_1}^{a_2} F_x da\right)\mathbf{i} + \left(\int_{a_1}^{a_2} F_y da\right)\mathbf{j} + \left(\int_{a_1}^{a_2} F_z da\right)\mathbf{k}.$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \text{κάθε } \Delta s_k \to 0}} \sum_{k=1}^{N} f(x_k,y_k,z_k)\Delta s_k.$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανυσματικής συνάρτησης

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2}\left(\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)ds = \int_{s_1}^{s_2}\left[F_x\frac{dx}{ds} + F_y\frac{dy}{ds} + F_z\frac{dz}{ds}\right]ds$$

Μια ανυσματική συνάρτηση F είναι διατηρητική, αν και μόνον αν υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση φ, τέτοια ώστε

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi$$

Για διατηρητικές συναρτήσεις ισχύει

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \nabla\varphi\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} d\varphi = \varphi(P_2) - \varphi(P_1)$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0.$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Θεώρημα του Stokes

$$\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A}$$

Θεώρημα της Απόκλισης

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4-1 Θεωρείστε την ανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}.$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση $\mathbf{F}$ μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, όπου

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\mathbf{F}$ σε ένα κύκλο με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων. Πώς ερμηνεύετε το αποτέλεσμα;

4-2 Θεωρείστε την ανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F} = 2xye^{z}\mathbf{i} + x^2e^{z}\mathbf{j} + x^2ye^{z}\mathbf{k}.$$

Προσδιορίστε μια συνάρτηση για την οποία ισχύει η σχέση $\mathbf{F} = \nabla\varphi$. Δείξτε με απευθείας υπολογισμό ότι $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

4-3 Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - x\mathbf{j}$$

κατά την καμπύλη $y = x^2$ από την αρχή των συντεταγμένων έως το σημείο με συντεταγμένες $(x,y) = (1,1)$.

4-4 Αποδείξτε ότι

$$\oint_C \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

σε οποιοδήποτε κλειστό δρόμο C.

4-5 Δείξτε ότι ένα πεδίο της μορφής

$$\mathbf{F} = -\alpha\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

όπου $\alpha$ είναι μια σταθερά, είναι διατηρητικό για κάθε δρόμο που δεν περικλείει την αρχή των συντεταγμένων.

4-6 Δείξτε ότι το πεδίο

$$\mathbf{F} = (y+\sin z)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x\cos z\mathbf{k}$$

είναι διατηρητικό. Προσδιορίστε μια συνάρτηση $\varphi$ για την οποία ισχύει η σχέση $\mathbf{F} = \nabla\varphi$.

4-7 Αν **G** είναι ένα σταθερό άνυσμα, δείξτε ότι για κάθε κλειστό δρόμο C

$$\oint_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

και

$$\oint_C \mathbf{G}\times d\mathbf{r} = 0.$$

4-7 Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes δείξτε ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε ένα πεδίο **F** να είναι διατηρητικό, είναι $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

4-8 Αν Γ είναι ένας κλειστός δρόμος, ο οποίος περικλείει την επιφάνεια S και **F** μια ανυσματική συνάρτηση της μορφής

$$\mathbf{F} = f(x,y,z)\mathbf{a}$$

όπου **a** είναι ένα σταθερό άνυσμα, δείξτε ότι ισχύει η σχέση

$$\oint_\Gamma f(x,y,z)d\mathbf{r} = \int_S d\mathbf{A}\times\nabla f.$$

4-9 Αν Γ είναι ένας κλειστός δρόμος, ο οποίος περικλείει την επιφάνεια S και **F** μια ανυσματική συνάρτηση της μορφής

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}\times\mathbf{G}$$

όπου **a** είναι ένα σταθερό άνυσμα, δείξτε ότι

$$\oint_\Gamma d\mathbf{r}\times\mathbf{F} = \int_S (d\mathbf{A}\times\nabla)\times\mathbf{F}.$$

4-10 Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης δείξτε ότι για οποιοδήποτε κλειστό δρόμο Γ

$$\oint_\Gamma d\mathbf{r} = 0.$$

4-11 Για ενα κλειστό δρόμο Γ στο επίπεδο XY, ο οποίος περιβάλλει επιφάνεια με εμβαδόν *A*, δείξτε ότι

$$\left|\oint_\Gamma \mathbf{r}\times d\mathbf{r}\right| = 2A.$$

4-12 Δείξτε ότι για οποιοδήποτε κλειστό δρόμο Γ

$$\oint_\Gamma \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = 0.$$

4-13 Αν Γ είναι ένας κλειστός δρόμος, ο οποίος περικλείει την επιφάνεια S, δείξτε ότι

$$\int_S d\mathbf{A}\times\mathbf{r} = \frac{1}{2}\oint_\Gamma r^2 d\mathbf{r}.$$

4-14 Αν $f(x,y,z)$ και $g(x,y,z)$ είναι δυο ολοκληρώσιμες βαθμωτές συναρτήσεις, δείξτε ότι

$$\oint_{\Gamma} f\nabla g\cdot d\mathbf{r} = -\oint_{\Gamma} g\nabla f\cdot d\mathbf{r}$$

όπου Γ είναι ένας κλειστός δρόμος στο χώρο.

4-15 Αν Γ είναι ένας κλειστός δρόμος, ο οποίος περικλείει την επιφάνεια S και $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ δυο ολοκληρώσιμες βαθμωτές συναρτήσεις, δείξτε ότι

$$\oint_{\Gamma} f\nabla g\cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla f\times\nabla g\cdot d\mathbf{A}.$$

4-16 Αν μια ανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z)$ είναι κάθετη σε κάθε σημείο μιας επιφανείας S, δείξτε ότι το άνυσμα $\nabla\times\mathbf{F}$ είτε είναι μηδενικό, είτε είναι κατά την εφαπτομένη σε κάθε σημείο της επιφανείας S.

4-17 Αν Γ είναι ένας κλειστός δρόμος, ο οποίος περικλείει την επιφάνεια S και $\mathbf{a}$ είναι ένα σταθερό άνυσμα, δείξτε ότι

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{a}\times\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = 2\mathbf{a}\cdot\int_S d\mathbf{A}.$$

4-18 Αν $\mathbf{E}(x,y,z)$ και $\mathbf{B}(x,y,z)$ είναι δυο ανυσματικές συναρτήσεις και για κάθε κλειστό δρόμο Γ, ο οποίος περιβάλλει μια επιφάνεια S, ισχύει η σχέση

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}$$

δείξτε ότι

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

4-19 Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση $\varphi(x,y,z)$

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=\mathbf{0}.$$

4-20 Αν Γ είναι ένας κλειστός δρόμος, ο οποίος περικλείει την επιφάνεια S και $\mathbf{r}$ το άνυσμα θέσης, δείξτε ότι

$$\oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{r}}{r} = \int_S \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)\times d\mathbf{A}.$$

4-21 Αν $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^3$, δείξτε ότι $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Προσδιορίστε τη μορφή μιας συνάρτησης $\varphi$, για την οποία ισχύει η σχέση $\mathbf{F} = \nabla\varphi$.

4-22 Αν $u(x,y,z)$ και $v(x,y,z)$ είναι δυο βαθμωτές συναρτήσεις και S μια κλειστή επιφάνεια που περικλείει τον όγκο V, δείξτε ότι

$$\int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,dV = \oint_S (u\nabla v - v\nabla u)\cdot d\mathbf{A}.$$

Η τελευταία σχέση είναι γνωστή ως **θεώρημα του Green.**

4-23 Αν δυο βαθμωτές συναρτήσεις $u(x,y,z)$ και $v(x,y,z)$ έχουν την ίδια τιμή σε όλη την έκταση μιας κλειστής επιφανείας S, ενώ σε όλο το χώρο που περικλείει η S ικανοποιούν την εξίσωση Laplace, ήτοι

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$$

δείξτε ότι οι δυο συναρτήσεις ταυτίζονται παντού.

4-24 Αν $\mathbf{F}(x,y,z)$ είναι μια ανυσματική συνάρτηση και S μια κλειστή επιφάνεια που περικλείει τον όγκο V, δείξτε ότι

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{F})\, dV = \oint_S d\mathbf{A} \times \mathbf{F}.$$

4-25 Δείξτε ότι για μια κλειστή επιφάνεια S

$$\oint_S d\mathbf{A} = 0.$$

4-26 Αν S είναι η επιφάνεια σφαίρας με μοναδιαία ακτίνα και $\mathbf{F} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$, όπου $a,b,c$ είναι σταθερές, δείξτε ότι

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \frac{4}{3}\pi(a+b+c).$$

4-27 Αν $\mathbf{F}(x,y,z)$ και $\varphi(x,y,z)$ είναι αντίστοιχα μια βαθμωτή και μια ανυσματική συνάρτηση και S μια κλειστή επιφάνεια που περικλείει τον όγκο V, δείξτε ότι

$$\oint_S \varphi \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi\, dV + \int_V \varphi \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

4-28 Αν οι ανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ συνδέονται με τις σχέσεις

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{u}$$

και S μια κλειστή επιφάνεια που περικλείει τον όγκο V, δείξτε ότι

$$\frac{1}{2}\int_V \mathbf{v}^2 dV = \frac{1}{2}\oint_S \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\, dV.$$

4-29 Αν $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ και $w(x,y,z)$ είναι τρείς βαθμωτές συναρτήσεις και S μια κλειστή επιφάνεια που περικλείει τον όγκο V, δείξτε ότι

$$\oint_S uw\nabla v \cdot d\mathbf{A} = \int_V w\nabla u \cdot \nabla v\, d\mathbf{A} + \int_V u\nabla \cdot (w\nabla v)\, dV.$$

4-30 Αν οι συναρτήσεις $\varphi(x,y,z)$ και $\mathbf{v}$ συνδέονται με τις σχέσεις

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

και S μια κλειστή επιφάνεια που περικλείει τον όγκο V, δείξτε ότι

$$\int_V \mathbf{v}^2 dV = \oint_S \varphi \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}.$$

4-31 Αν S μια κλειστή επιφάνεια που περικλείει τον όγκο V, δείξτε ότι το άνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\oint_S r^2 \mathbf{r} \cdot d\mathbf{A} = 5\int_V r^2 dV.$$

4-32 Δείξτε ότι για μια κλειστή επιφάνεια S το άνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\oint_S \mathbf{r} \times d\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

4-33 Αν η ανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}$ είναι παντού κάθετη προς μια επιφάνεια S που περικλείει τον όγκο V, δείξτε ότι

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{F})\, dV = 0.$$

4-34 Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (z^2 - 1)\mathbf{k}$ στην επιφάνεια που περιέχεται μεταξύ των επιπέδων $z = 0$, $z = 1$ και της κυλινδρικής επιφάνειας $x^2 + y^2 = 1$.

4-35 Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\mathbf{F} = (xye^z + \log(z + 1) - \sin x)\mathbf{k}$ στην επιφάνεια που περιέχεται μεταξύ του επιπέδου $z = 0$ και της σφαιρικής επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4-36 Δείξτε ότι η ροή της συνάρτησης

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

σε οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια μηδενίζεται.

4-37 Δείξτε ότι αν δυο ανυσματικές συναρτήσεις είναι αστρόβιλες, τότε και το εξωτερικό τους γινόμενο είναι αστρόβιλη συνάρτηση.

## ΓΕΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


G.A. Korn and T.M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, Second edition, McGraw-Hill, 1961.

H. Lass, *Vector and Tensor Analysis*, McGraw-Hill, 1959.

P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953.

W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1953.

H.M. Schey, *Div, Grad, Curl, and all that*, W.W. Norton & Co., 1973.

# ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Το αλφαβητικό ευρετήριο περιέχει τους κυριώτερους όρους και έννοιες όπου αρχικά ορίζονται και όπου μετέπειτα αναλύονται ή χρησιμοποιούνται σε κάποια έκταση. Τα γράμματα που ακολουθούν ορισμένους αριθμούς σελίδων συμβολίζουν:

ff: και σελίδες που ακολουθούν
α: απαντάται σε άσκηση
σ: απαντάται σε υπότιτλο σχήματος

Γενική Διάθεση
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΦΑΣΜΑ
2ο χιλ. Πεδινή-Αμπελιά
Ιωάννινα 45500
τηλ: (0651) 92172
fax: (0651) 93418
E-mail: pasimak.@cc.uoi.gr

Εκδόσεις ...ημακοπούλου, Ο.Ε.
Τηλ. 01... 2519, 0651-92172

Ο Παναγιώτης Ασημακόπουλος γεννήθηκε στον Πειραιά το 1940. Το 1958 αποφοίτησε από το Εθνικό Εκπαιδευτήριο Αναβρύτων και τον επόμενο χρόνο άρχισε τις Πανεπιστημιακές του σπουδές στο Πανεπιστήμιο Brandeis των ΗΠΑ, απ' όπου το 1961 έλαβε το πτυχίο Bachelor of Science στη Φυσική. Συνέχισε τις μεταπτυχιακές του σπουδές στην Αγγλία και στις ΗΠΑ, απ' όπου έλαβε διαδοχικά τα διπλώματα D.I.C. (Imperial College of Science and Technology) στη Μαθηματική Φυσική, M.S. (Rutgers University) και Ph.D. (Thomas Jefferson University) στην Πυρηνική Φυσική. Από το 1965 έως το 1976 εργάστηκε ως ερευνητής στο Εργαστήριο Επιταχυντών του Κ.Π.Ε. Δημόκριτος. Το 1976 εξελέγη τακτικός καθηγητής της Πυρηνικής Φυσικής στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, όπου υπηρετεί μέχρι σήμερα. Το συγγραφικό του έργο περιλαμβάνει περισσότερα από πενήντα επιστημονικά άρθρα σε διεθνή περιοδικά, τέσσερα πανεπιστημιακά συγγράμματα και ένα μεγάλο αριθμό ανακοινώσεων σε διεθνή επιστημονικά συνέδρια.

---

του ιδίου:

**ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ, Τόμος I και II,**
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 1981, δεύτερη έκδοση, 1987

**ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΗ**
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 1984, δεύτερη έκδοση, 1989

**ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ ΠΥΡΗΝΙΚΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ: ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΣΤΗΝ ΚΛΙΝΙΚΗ ΔΙΑΓΝΩΣΗ,**
σε συνεργασία με την Χ. Ζιούδρου,
Αθήνα, 1989

---