ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΧΡΟΝΟΒΑΘΜΙΔΩΝ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΥΤΗΣ ΣΤΗΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΑΣΗΜΙΝΑ ΜΠΟΥΣΜΠΟΥΡΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2008

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την Παρασκευή, 3 Οκτωβρίου 2008, από την Εξεταστική Επιτροπή:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΙΔΑ	ΥΠΟΓΡΑΦΗ
Ιωάννης Πουρναράς (Επιβλέπων Καθηγητής)	Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων	
Χρίστος Φίλος	Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων	
Σωτήριος Ντούγιας	Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων	

Ευχαριστίες

Θεωρώ χρέος μου να εκφράσω τις πιο θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Ιωάννη Πουρναρά για τη συνεχή επίβλεψη και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της μεταπτυχιακής μου διατριβής.

Επιθυμώ ακόμα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες και στα άλλα δύο μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής, τον κ. Χρίστο Φίλο και τον κ. Σωτήριο Ντούγια για τις πολύτιμες παρατηρήσεις τους στην εργασία μου.

Τέλος, ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στη μεταπτυχιακή φοιτήτρια Λαμπρινή Ζούρκα για την ανεκτίμητη βοήθεια και υποστήριξη που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Μέχρι πρόσφατα, η μελέτη φυσικών φαινομένων και επιστημονικών προβλημάτων γινόταν με χρήση μοντέλων όπου οι μεταβλητές είτε ελάμβαναν αποκλειστικά συνεχείς τιμές (συνεχή μοντέλα) είτε ελάμβαναν αποκλειστικά διακριτές τιμές (διακριτά μοντέλα). Η θεωρία των χρονοβαθμίδων είναι μία προσπάθεια ενοποίησης του συνεχούς και του διακριτού λογισμού όπου οι μεταβλητές μπορούν να παίρνουν τιμές από σύνολα που περιέχουν τόσο διαστήματα της πραγματικής ευθείας όσο και διακριτούς πραγματικούς αριθμούς. Το μαθηματικό ενδιαφέρον που εκδηλώνεται προς αυτήν την κατεύθυνση είναι μεγάλο καθώς αποτελεί ένα καινούριο πεδίο έρευνας με πολλές εφαρμογές.

Οι βάσεις της θεωρίας των χρονοβαθμίδων τέθηκαν από τον Hilger στη διδακτορική του διατριβή το 1988 [23], που σκοπό είχε να ενοποιήσει σε μία θεωρία τον απειροστικό και ολοκληρωτικό λογισμό (συνεχής περίπτωση) και τον λογισμό των διαφορών (διακριτή περίπτωση). Προς την κατεύθυνση αυτή, τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει πολλά βήματα ([1], [3], [8], [12]). Οι Bohner και Peterson στο βιβλίο τους [13] προσπάθησαν να συνοψίσουν και να οργανώσουν την θεωρία των χρονοβαθμίδων. Ένα άλλο βιβλίο το οποίο αναφέρεται στην θεωρία των χρονοβαθμίδων αλλά σε γενικούς τοπολογικούς χώρους είναι το βιβλίο των V. Lakshmikantham, S. Sivasundaram και B. Kaymakcalan [31].

Παράλληλα με την ανάπτυξη της θεωρίας των χρονοβαθμίδων εκδηλώθηκε μεγάλο ενδιαφέρον για την μελέτη των δυναμικών εξισώσεων, ειδικές περιπτώσεις των οποίων αποτελούν οι διαφορικές εξισώσεις και οι εξισώσεις διαφορών. Μελετήθηκαν ποικίλες μορφές δυναμικών εξισώσεων και αποδείχθηκε μία πληθώρα συμπερασματων που αφορούν τις λύσεις τους, όπως η ύπαρξη, η ταλάντωση και η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων. Επειδή οι δυναμικές εξισώσεις επιτρέπουν την μελέτη φαινομένων στα οποία ο χρόνος μπορεί να πάρει τιμές σε ένα πιο σύνθετο σύνολο από ότι το σύνολο των ακεραίων ή τα διαστήματα της πραγματικής ευθείας, τα τελευταία χρόνια η θεωρία των χρονοβαθμίδων και ειδικά οι δυναμικές εξισώσεις βρίσκουν εφαρμογή σε επιστήμες όπως τα οικονομικά ([7], [9]) και η μηχανική ([33]).

Η παρούσα διατριβή έχει σκοπό να παρουσιάσει ένα μέρος της θεωρίας των χρονοβαθμίδων δίνοντας έμφαση στην ταλάντωση των δυναμικών εξισώσεων. Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μία εισαγωγή στις βασικές έννοιες της θεωρίας των χρονοβαθμίδων. Δίνεται ο ορισμός της χρονοβαθμίδας και εισάγονται οι έννοιες της παραγώγου (Δ-παράγωγος) και του ολοκληρώματος (Δ-ολοκλήρωμα) σε χρονοβαθμίδες. Ορίζεται η εκθετική συνάρτηση σε μία χρονοβαθμίδα και δίνονται τα αντίστοιχα μερικών από τα βασικά θεωρήματα του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάται η ταλάντωση δυναμικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Το κεφάλαιο αυτό περιέχει ταλαντωτικά κριτήρια για συνήθεις γραμμικές δυναμικές εξισώσεις, δυναμικές εξισώσεις με υστέρηση καθώς και ουδετέρου τύπου δυναμικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Σε ορισμένες περιπτώσεις τα συμπεράσματα αυτά, συγκρίνονται με αντίστοιχα συμπεράσματα για διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών.

Το τρίτο κεφάλαιο πραγματεύεται την ταλάντωση μη γραμμικών δυναμικών εξισώσεων δεύτερης τάξης μίας συγκεκριμένης μορφής. Αποδεικνύονται γενικά ταλαντωτικά κριτήρια από τα οποία προκύπτουν ορισμένα πορίσματα για πιο απλές μορφές της δυναμικής μας εξίσωσης. Τέλος, μελετάται μία ειδική μη γραμμική δυναμική εξίσωση δεύτερης τάξης για την οποία προκύπτει μία πληθώρα συμπερασμάτων.

Κεφάλαιο 1

Βασικός Λογισμός

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι θεμελιώδες έννοιες της θεωρίας των χρονοβαθμίδων. Στην πρώτη ενότητα εισάγονται οι στοιχειώδεις ορισμοί του λογισμού των χρονοβαθμίδων και η αρχή της μαθηματικής επαγωγής. Η δεύτερη και τρίτη ενότητα αναφέρονται στην παραγώγιση και στην ολοκλήρωση σε χρονοβαθμίδες, αντίστοιχα. Επίσης, αποδεικνύονται τα αντίστοιχα γνωστών συμπερασμάτων του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού στην θεωρία των χρονοβαθμίδων. Η τέταρτη ενότητα είναι αφιερωμένη σε μία από τις πιο σημαντικές συναρτήσεις της θεωρίας των χρονοβαθμίδων, την εκθετική συνάρτηση, ενώ στην τελευταία ενότητα παρατίθενται ορισμένα βασικά θεωρήματα του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού σε χρονοβαθμίδες που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια.

1.1 Γενικά

Ορισμός 1.1.1. *Με τον όρο* ***χρονοβαθμίδα*** *(time scale) $\mathbb{T}$, θα εννοούμε ένα μη κενό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Παράδειγμα 1.1.1. Τα δύο θεμελιώδη παραδείγματα χρονοβαθμίδων είναι τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{Z}$. Άλλα παραδείγματα χρονοβαθμίδων είναι τα σύνολα

$$\mathbb{N},\ \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\},\ [0,1],\ \{1,2,3\},\ \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\},\ h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\},$$

καθώς επίσης και το σύνολο του Cantor στο $[0,1]$, ενώ είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι τα σύνολα

$$\mathbb{Q},\ (0,1),\ \emptyset, \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

δεν είναι χρονοβαθμίδες.

Ορισμός 1.1.2. *Έστω ότι $\mathbb{T}$ είναι μία χρονοβαθμίδα. Ορίζουμε την συνάρτηση* ***πρόσθιον άλμα*** *(forward jump operator) $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ με τον τύπο*

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}, \quad t \in \mathbb{T}$$

και την συνάρτηση ***οπίσθιον άλμα*** *(backward jump operator)* $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *με τον τύπο*

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}, \quad t \in \mathbb{T},$$

όπου, κατά σύμβαση, δεχόμαστε ότι $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ *και* $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$.

Παρατηρούμε ότι οι δύο συναρτήσεις σ και ρ είναι καλά ορισμένες και μάλιστα, αν η χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$ είναι άνω φραγμένη με μέγιστο t_M, τότε $\sigma(t_M) = t_M$, ενώ, αν η $\mathbb{T}$ είναι κάτω φραγμένη με ελάχιστο t_m, τότε $\rho(t_m) = t_m$.

Εισάγουμε τώρα μία συνάρτηση που παίζει σημαντικό ρόλο στην θεωρία των χρονοβαθμίδων.

Ορισμός 1.1.3. *Ας είναι* $\mathbb{T}$ *μία χρονοβαθμίδα. Θα λέμε* ***συνάρτηση κόκκωσης*** *(graininess function) την συνάρτηση* $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ *με*

$$\mu(t) := \sigma(t) - t, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Παράδειγμα 1.1.2. (i) Αν $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, τότε, για $t \in \mathbb{R}$, είναι

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t,$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{R} : s < t\} = \sup(-\infty, t) = t,$$

και

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0.$$

Επομένως, για $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, έχουμε ότι $\rho(t) = t = \sigma(t)$ και $\mu(t) = 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Αν $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, τότε, για $t \in \mathbb{Z}$, είναι

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf\{t+1, t+2, \ldots\} = t+1,$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup\{\ldots, t-2, t-1\} = t-1,$$

και

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1, \text{ για όλα τα } t \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως, για $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, έχουμε $\rho(t) < t < \sigma(t)$ και $\mu(t) = 1$, για όλα τα $t \in \mathbb{Z}$.

(iii) Θεωρούμε την χρονοβαθμίδα $\mathbb{T} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}_0\} = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \ldots\}$. Αν $t = \sqrt{\kappa}, \kappa \in \mathbb{N}_0$, τότε

$$\sigma(t) = \sqrt{\kappa+1} = \sqrt{t^2+1}, \quad t \in \mathbb{T},$$

$$\rho(t) = \sqrt{\kappa-1} = \sqrt{t^2-1}, \quad t \in \mathbb{T} - \{0\},$$

με $\rho(0) = 0$, και

$$\mu(t) = \sqrt{\kappa+1} - \sqrt{\kappa} = \sqrt{t^2+1} - t, \quad t \in \mathbb{T}.$$

(iv) Ας είναι $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} = \left\{0, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Επειδή $\inf \mathbb{T} = 0$ και $\sup \mathbb{T} = 1$, είναι $\sigma(1) = 1$ και $\rho(0) = 0$. Για $t = \frac{1}{\kappa}, \kappa \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\sigma(t) = \sigma\left(\frac{1}{\kappa}\right) = \frac{1}{\kappa - 1} = \frac{\frac{1}{\kappa}}{1 - \frac{1}{\kappa}} = \frac{t}{1-t}, \quad t \in \mathbb{T} - \{0,1\},$$

$$\rho(t) = \rho\left(\frac{1}{\kappa}\right) = \frac{1}{\kappa + 1} = \frac{\frac{1}{\kappa}}{1 + \frac{1}{\kappa}} = \frac{t}{1+t}, \quad t \in \mathbb{T} - \{0\},$$

και

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = \frac{t}{1-t} - t = \frac{t^2}{1-t}, \quad t \in \mathbb{T} - \{0,1\},$$

ενώ, για $t = 0$, έχουμε $\sigma(0) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > 0\} = 0$ και $\mu(0) = \sigma(0) - 0 = 0$. Επομένως, για την χρονοβαθμίδα $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$, ισχύουν

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t = 0 \\ \frac{t}{1-t}, & \text{αν } t \in \mathbb{T} - \{0,1\} \\ 1, & \text{αν } t = 1, \end{cases}$$

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t = 0 \\ \frac{t}{1+t}, & \text{αν } t \in \mathbb{T} - \{0\}, \end{cases}$$

και

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t = 0,\ 1 \\ \frac{t^2}{1-t}, & \text{αν } t \in \mathbb{T} - \{0,1\}. \end{cases}$$

Ο επόμενος ορισμός χαρακτηρίζει τα σημεία της χρονοβαθμίδας $\mathbb{T}$, ανάλογα με τις τοπολογικές τους ιδιότητες.

Ορισμός 1.1.4. *Ένα σημείο $t \in \mathbb{T}$ καλείται*

(i) ***δεξιά πυκνό*** *(right dense) (αντίστοιχα,* ***αριστερά πυκνό*** *(left dense)) αν $\sigma(t) = t$ (αντίστοιχα, $\rho(t) = t$),*

(ii) ***δεξιά διασπαρμένο*** *(right scattered) (αντίστοιχα,* ***αριστερά διασπαρμένο*** *(left scattered)) αν $\sigma(t) > t$ (αντίστοιχα, $\rho(t) < t$),*

(iii) ***πυκνό*** *(dense), αν είναι ταυτόχρονα αριστερά και δεξιά πυκνό, δηλαδή αν $\rho(t) = t = \sigma(t)$,*

(iv) ***μεμονωμένο*** *(isolated), αν είναι ταυτόχρονα αριστερά και δεξιά διασπαρμένο, δηλαδή αν $\rho(t) < t < \sigma(t)$.*

Παράδειγμα 1.1.3. (i) Από το Παράδειγμα 1.1.2 διαπιστώνουμε ότι, αν $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, τότε κάθε σημείο της χρονοβαθμίδας $\mathbb{R}$ είναι πυκνό, ενώ αν $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, τότε κάθε σημείο της χρονοβαθμίδας $\mathbb{Z}$ είναι μεμονωμένο. Για την χρονοβαθμίδα $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία της είναι μεμονωμένα, εκτός από το σημείο $t = 0$ που είναι δεξιά πυκνό.

(ii) Ας είναι $\mathbb{T} = [0,1] \cup [2,3]$. Για κάθε $t \in (0,1) \cup (2,3)$, το σημείο t είναι πυκνό ($\sigma(t) = \rho(t) = t$), το σημείο $t = 0 = \inf \mathbb{T}$ είναι δεξιά πυκνό, ενώ το σημείο $t = 3 = \sup \mathbb{T}$ είναι αριστερά πυκνό. Τέλος, το σημείο $t = 1$ είναι αριστερά πυκνό και δεξιά διασπαρμένο ($\sigma(1) = 2$, $\rho(1) = 1$), ενώ το σημείο $t = 2$ είναι δεξιά πυκνό και αριστερά διασπαρμένο ($\sigma(2) = 2$, $\rho(2) = 1$).

Οι έννοιες των διαστημάτων και της περιοχής ενός σημείου ορίζονται κατ' αναλογία με τις αντίστοιχες έννοιες στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.1.5. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $a, b \in \mathbb{T}$ με $a \leq b$. Θα λέμε* ***κλειστό διάστημα*** *του $\mathbb{T}$ (ή, απλώς, κλειστό διάστημα) με άκρα τα a, b και θα συμβολίζουμε με $[a,b]_{\mathbb{T}}$ το υποσύνολο του $\mathbb{T}$*

$$[a,b]_{\mathbb{T}} := [a,b] \cap \mathbb{T} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}.$$

Ανάλογα, ορίζουμε

$$(a,b)_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T} : a < t < b\},$$

$$[a,b)_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T} : a \leq t < b\},$$

$$(a,b]_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T} : a < t \leq b\}.$$

Παράδειγμα 1.1.4. (i) Αν $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ και $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$, τότε $[a,b]_{\mathbb{R}} = [a,b]$.
(ii) Αν $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ και $a, b \in \mathbb{Z}$ με $a < b$, τότε $[a,b]_{\mathbb{Z}} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$, ενώ $(\alpha, \alpha+1)_{\mathbb{Z}} = \emptyset$.
(iii) Αν $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$, τότε $\left[\frac{1}{100}, \frac{1}{10}\right)_{\mathbb{T}} = \left\{\frac{1}{100}, \frac{1}{99}, \ldots, \frac{1}{11}\right\}$.

Ορισμός 1.1.6. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και ε ένας θετικός αριθμός. Έστω $t \in \mathbb{T}$. Καλούμε* ***περιοχή*** *του t με πλάτος ε (ή πιο σύντομα $\varepsilon-$περιοχή του t) και συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_t(\varepsilon)$ ή $\mathcal{N}_t$ το σύνολο $\mathcal{N}_t = (t-\varepsilon, t+\varepsilon)_{\mathbb{T}}$.*

Η τοπολογία μίας χρονοβαθμίδας είναι η τοπολογία που κληρονομείται από την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$ στο κλειστό υποσύνολό του, $\mathbb{T}$. Ως εκ τούτου, δεν θεωρείται απαραίτητο να γίνει περαιτέρω αναφορά σε έννοιες όπως η κλειστότητα, η συμπαγότητα κ.τ.λ., με εξαίρεση τον ορισμό της συνέχειας που παραθέτουμε παρακάτω.

Ορισμός 1.1.7. *Ας είναι* $\mathbb{T}$ *μία χρονοβαθμίδα και* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η συνάρτηση* f *είναι* ***συνεχής*** *στο* $t_0 \in \mathbb{T}$*, αν και μόνον αν*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall s \in \mathcal{N}_\delta(t_0))\, f(s) \in \mathcal{N}_\varepsilon(f(t_0))\,.$$

Είναι φανερό ότι για $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ο Ορισμός 1.1.7 οδηγεί στον συνήθη ορισμό της συνέχειας, ενώ στην περίπτωση που $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Επίσης, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, τότε και η συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής για οποιαδήποτε χρονοβαθμίδα $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.1.5. Ας είναι $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} = \left\{0, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ και ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(t) = t$. Τότε η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο της $\mathbb{T}$.

Στο επόμενο παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση σ δεν είναι γενικά συνεχής.

Παράδειγμα 1.1.6. Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και t ένα σημείο της $\mathbb{T}$, το οποίο είναι αριστερά πυκνό και δεξιά διασπαρμένο, δηλαδή $\rho(t) = t < \sigma(t)$. Επειδή το t είναι αριστερά πυκνό, υπάρχει ακολουθία $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, σημείων της $\mathbb{T}$, η οποία τείνει στο t από αριστερά. Τότε $\lim_{n\to\infty} \sigma(t_n) = t$, δηλαδή $\lim_{s\to t^-} \sigma(s) = t \neq \sigma(t)$. Επομένως η συνάρτηση σ δεν είναι συνεχής στο t.

Η επόμενη πρόταση αποτελεί μία διατύπωση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής σε χρονοβαθμίδες.

Πρόταση 1.1.1. *Ας είναι* $\mathbb{T}$ *μία χρονοβαθμίδα και* $t_0 \in \mathbb{T}$*. Υποθέτουμε ότι*

$$\{S(t) : t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}\}$$

είναι μία οικογένεια προτάσεων που ικανοποιεί τις υποθέσεις:

(i) *Η πρόταση* $S(t_0)$ *είναι αληθής.*

(ii) *Αν* $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *είναι ένα δεξιά διασπαρμένο σημείο της* $\mathbb{T}$ *και η πρόταση* $S(t)$ *είναι αληθής, τότε η πρόταση* $S(\sigma(t))$ *είναι επίσης αληθής.*

(iii) *Αν* $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *είναι ένα δεξιά πυκνό σημείο της* $\mathbb{T}$ *και η πρόταση* $S(t)$ *είναι αληθής, τότε υπάρχει μία περιοχή* U *του* t *τέτοια ώστε η πρόταση* $S(s)$ *να είναι αληθής για όλα τα* $s \in U \cap (t, \infty)_{\mathbb{T}}$.

(iv) *Αν* $t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *είναι ένα αριστερά πυκνό σημείο της* $\mathbb{T}$*, και η πρόταση* $S(s)$ *είναι αληθής για όλα τα* $s \in [t_0, t)_{\mathbb{T}}$*, τότε η πρόταση* $S(t)$ *είναι αληθής.*

Τότε η πρόταση $S(t)$ *είναι αληθής για όλα τα* $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$.

Παρατηρούμε ότι για την περίπτωση που $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ η Πρόταση 1.1.1 είναι η αρχή της απλής πεπερασμένης επαγωγής στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Στην ειδική περίπτωση που $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ προκύπτει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.1.2. *Έστω $t_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι*

$$\{S(t) : t \in [t_0, \infty)\}$$

είναι μία οικογένεια προτάσεων που ικανοποιεί τα παρακάτω:

(i) Η πρόταση $S(t_0)$ είναι αληθής.

(ii) Αν $t \in [t_0, \infty)$ και η πρόταση $S(t)$ είναι αληθής, τότε υπαρχει μία περιοχή U του t τέτοια ώστε η πρόταση $S(s)$ να είναι αληθής για όλα τα $s \in U \cap (t, \infty)$.

(iii) Αν $t \in (t_0, \infty)$ και η πρόταση $S(s)$ είναι αληθής για όλα τα $s \in [t_0, t)$, τότε η πρόταση $S(t)$ είναι αληθής.

Τότε η πρόταση $S(t)$ είναι αληθής για όλα τα $t \in [t_0, \infty)$.

1.2 Παραγώγιση σε Χρονοβαθμίδες

Στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε με την έννοια της παραγώγισης σε χρονοβαθμίδες. Για τον ορισμό της παραγώγου απαιτείται η θεώρηση ενός επιπλέον συνόλου.

Ορισμός 1.2.1. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα. Ορίζουμε το σύνολο $\mathbb{T}^\kappa$ ως εξής:*

$$\mathbb{T}^\kappa := \begin{cases} \mathbb{T} - (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], & \text{αν } \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & \text{αν } \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

Από τον Ορισμό 1.2.1 έπεται ότι, αν η χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$ έχει αριστερά διασπαρμένο μέγιστο m, τότε $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - \{m\}$, ενώ σε όλες τις άλλες περιπτώσεις είναι $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$. Προφανώς το σύνολο $\mathbb{T}^\kappa$ είναι, επίσης, μία χρονοβαθμίδα. Μπορούμε, συνεπώς, να ορίσουμε το σύνολο $(\mathbb{T}^\kappa)^\kappa$ το οποίο θα συμβολίζουμε με $\mathbb{T}^{\kappa^2}$. Θέτουμε δηλαδή

$$\mathbb{T}^{\kappa^2} := (\mathbb{T}^\kappa)^\kappa .$$

Γενικεύοντας τα παραπάνω ορίζουμε, επαγωγικά, το σύνολο

$$\mathbb{T}^{\kappa^n} := \left(\mathbb{T}^{\kappa^{n-1}}\right)^\kappa, \quad n \in \mathbb{N},$$

με $\mathbb{T}^{\kappa^0} = \mathbb{T}$.

Παράδειγμα 1.2.1. (i) Αν $a, b \in \mathbb{Z}$ με $a < b$, τότε, για $\mathbb{T} = [a, b]_{\mathbb{Z}}$, είναι $\mathbb{T}^\kappa = [a, b-1]_{\mathbb{Z}}$, ενώ, για $\mathbb{T} = [a, b]_{\mathbb{R}}$, έχουμε $\mathbb{T}^\kappa = [a, b]_{\mathbb{R}}$.

(ii) Αν $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, τότε εύχολα διαπιστώνουμε ότι $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{R}$ χαι, επαγωγιχά, ότι $\mathbb{T}^{\kappa^n} = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ομοίως, αν $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, τότε είναι $\mathbb{T}^{\kappa^n} = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) Αν $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$, τότε έχουμε ότι

$$\mathbb{T}^\kappa = \left\{0, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}, \ \mathbb{T}^{\kappa^2} = \left\{0, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\}, \text{ χαι, γενιχά, } \mathbb{T}^{\kappa^n} = \left\{0, \ldots, \frac{1}{n+1}\right\},$$

για $n \in \mathbb{N}$.

Είμαστε τώρα σε θέση να διαπιστώσουμε τον ορισμό της Δ- παραγώγου μίας συνάρτησης.

Ορισμός 1.2.2. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι* **Δ-παραγωγίσιμη** *στο $t_0 \in \mathbb{T}^\kappa$ αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός α έτσι ώστε, για κάθε $\varepsilon > 0$, να υπάρχει μία περιοχή $\mathcal{N}_0$ του t_0 τέτοια ώστε*

$$|f(\sigma(t_0)) - f(s) - \alpha\,[\sigma(t_0) - s]| \leq \varepsilon\,|\sigma(t_0) - s| \quad \text{για κάθε} \quad s \in \mathcal{N}_0. \tag{1.1}$$

Ο αριθμός α συμβολίζεται με $f^\Delta(t_0)$ και καλείται **δέλτα παράγωγος** *(Δ-παράγωγος) της f στο t_0. Αν η f είναι Δ-παραγωγίσιμη σε κάθε $t \in \mathbb{T}^\kappa$ τότε λέμε ότι η f είναι Δ-παραγωγίσιμη στο $\mathbb{T}$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $f^\Delta : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ καλείται η Δ-παράγωγος της f στο $\mathbb{T}^\kappa$.*

Παράδειγμα 1.2.2. (i) Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ η σταθερή συνάρτηση $f(t) = c$, $t \in \mathbb{T}$, όπου c είναι μία πραγματική σταθερά. Θα αποδείξουμε ότι $f^\Delta(t) = 0$, $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Πραγματικά, για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0\,[\sigma(t) - s]| = |c - c| \leq \varepsilon\,|\sigma(t) - s| \quad \text{για κάθε} \quad s \in \mathbb{T}.$$

(ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ με $f(t) = t$, $t \in \mathbb{T}$. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι $f^\Delta(t) = 1$, $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Πραγματικά, για οποιονδήποτε θετικό αριθμό ε, έχουμε για $s \in \mathbb{T}$

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1\,[\sigma(t) - s]| = |\sigma(t) - s - [\sigma(t) - s]| = 0 \leq \varepsilon\,|\sigma(t) - s|\,.$$

Στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζονται ορισμένες βασικές ιδιότητες της Δ-παραγώγου.

Θεώρημα 1.2.1. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα, $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $t \in \mathbb{T}^\kappa$.*

(i) Αν η f είναι συνεχής στο t και το t είναι δεξιά διασπαρμένο, τότε η συνάρτηση f είναι Δ-παραγωγίσιμη στο t με

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{1.2}$$

(ii) Αν το σημείο t είναι δεξιά πυκνό, τότε η f είναι Δ-παραγωγίσιμη στο t αν και μόνο αν το όριο

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

υπάρχει ως πεπερασμένος αριθμός. Στην περίπτωση αυτή είναι

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}. \tag{1.3}$$

Απόδειξη. (i) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο t, όπου t είναι ένα δεξιά διασπαρμένο σημείο της $\mathbb{T}$. Παίρνοντας υπόψη την συνέχεια της f στο t, βρίσκουμε

$$\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}.$$

Επομένως, για ένα αυθαίρετο $\varepsilon>0$, υπάρχει μία περιοχή $\mathcal{N}_t$ τέτοια ώστε, για κάθε $s\in\mathcal{N}_t$, να είναι

$$\left|\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}-\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}\right|\le\varepsilon$$

ή

$$\left|[f(\sigma(t))-f(s)]-\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}(\sigma(t)-s)\right|\le\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|,$$

και συνεπώς

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}.$$

(ii) Έστω ότι η f είναι Δ-παραγωγίσιμη στο t, όπου t είναι ένα δεξιά πυκνό σημείο της $\mathbb{T}^{\kappa}$. Από την παραγωγισιμότητα της f στο t, έπεται ότι, για $\varepsilon>0$, υπάρχει περιοχή N_t του t τέτοια ώστε

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)\left[\sigma(t)-s\right]\right|\le\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|,\quad s\in N_t.$$

Επειδή το σημείο t είναι δεξιά πυκνό, είναι $\sigma(t)=t$ και έτσι από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε

$$\left|f(t)-f(s)-f^{\Delta}(t)(t-s)\right|\le\varepsilon\left|t-s\right|,\quad s\in N_t$$

και, στη συνέχεια,

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}-f^{\Delta}(t)\right|\le\varepsilon,\quad s\in N_t-\{t\},$$

από όπου έπεται ότι

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}.$$

Αντίστροφα, έστω ότι $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ είναι ένα δεξιά πυκνό σημείο και $\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=k\in\mathbb{R}$. Τότε, για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$, υπάρχει περιοχή U_t του t με

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}-k\right|\le\varepsilon,\quad s\in U_t-\{t\}$$

ή

$$\left|f(t)-f(s)-k(t-s)\right|\le\varepsilon\left|t-s\right|,\quad s\in U_t-\{t\}.$$

Επειδή το t είναι δεξιά πυκνό σημείο είναι $\sigma(t) = t$ και άρα, για $s \in U_t - \{t\}$, έχουμε

$$\begin{aligned} |f(\sigma(t)) - f(s) - k\,[\sigma(t) - s]| &= |f(t) - f(s) - k(t-s)| \\ &\leq \varepsilon\,|t - s| = \varepsilon\,|\sigma(t) - s|\,. \end{aligned}$$

Επομένως, η f είναι Δ-παραγωγίσιμη στο t και $f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$. □

Παρατήρηση 1.2.1. (i) Αν $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, τότε, επειδή κάθε σημείο t του $\mathbb{R}$ είναι πυκνό, μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Δ-παραγωγίσιμη στο $t \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν το όριο

$$\lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

υπάρχει ως πραγματικός αριθμός. Επομένως, για $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ έχουμε

$$f^{\Delta}(t) = f'(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

(ii) Αν $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, τότε κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ είναι Δ-παραγωγίσιμη στο $t \in \mathbb{Z}$ και μάλιστα

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t),$$

δηλαδή είναι

$$f^{\Delta}(t) = \Delta f(t), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Παράδειγμα 1.2.3. Θεωρούμε την χρονοβαμίδα $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ και την συνάρτηση $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Από το Παράδειγμα 1.1.2 γνωρίζουμε ότι

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t = 0 \\ \frac{t}{1-t}, & \text{αν } t \in \mathbb{T} - \{0,1\} \\ 1, & \text{αν } t = 1, \end{cases} \quad \text{και } \mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t = 0,\ 1 \\ \frac{t^2}{1-t}, & \text{αν } t \in \mathbb{T} - \{0,1\}. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οποιοδήποτε $t \in \mathbb{T}^{\kappa} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ είναι δεξιά διασπαρμένο. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.1(i), για $t \in \mathbb{T}^{\kappa} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma^{\Delta}(t) &= \frac{\sigma(\sigma(t)) - \sigma(t)}{\mu(t)} = \frac{\sigma\left(\frac{t}{1-t}\right) - \frac{t}{1-t}}{\frac{t^2}{1-t}} = \frac{\frac{\frac{t}{1-t}}{1-\frac{t}{1-t}} - \frac{1}{1-t}}{\frac{t^2}{1-t}} = \frac{\frac{t}{1-2t} - \frac{t}{1-t}}{\frac{t^2}{1-t}} \\ &= \frac{3t - t^2 - 1}{t^2(1-2t)}. \end{aligned}$$

Για το δεξιά διασπαρμένο σημείο $t = \frac{1}{2} = \sup \mathbb{T}^{\kappa}$ είναι $\sigma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ και $\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.2.1(i), παίρνουμε

$$\sigma^{\Delta}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sigma\left(\sigma\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \sigma\left(\frac{1}{2}\right)}{\mu\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sigma(1) - 1}{\frac{1}{2}} = 0.$$

Για το δεξιά πυκνό σημείο $t = 0$ είναι $\sigma(0) = 0$. Με χρήση του Θεωρήματος 1.2.1(ii) βρίσκουμε

$$\sigma^{\Delta}(0) = \lim_{s \to 0} \frac{\sigma(0) - \sigma(s)}{0 - s} = \lim_{s \to 0} \frac{\sigma(s)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{\frac{s}{1-s}}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1-s} = 1.$$

Επομένως

$$f^{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{3t - t^2 - 1}{t^2(1-2t)}, & \text{αν } t \in \mathbb{T}^{\kappa} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \\ 1, & \text{αν } t = 0 \\ 0, & \text{αν } t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Θεώρημα 1.2.2. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι Δ–παραγωγίσιμη στο $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Τότε:*

(i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο t.

(ii) Ισχύει

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t), \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}. \tag{1.4}$$

Απόδειξη. (i) Έστω ότι η f είναι Δ-παραγωγίσιμη στο $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ και ας είναι ε ένας αυθαίρετος θετικός αριθμός. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\varepsilon \in (0,1)$. Θέτουμε

$$\varepsilon^* = \frac{1}{1 + |f^{\Delta}(t)| + 2\mu(t)} \varepsilon.$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο t, υπάρχει μία περιοχή N_t τέτοια ώστε

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right| \le \varepsilon^* \left| \sigma(t) - s \right|, \quad s \in N_t.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ για $s \in U_t = N_t \cap (t - \varepsilon^*, t + \varepsilon^*)$. Πραγματικά, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\varepsilon^* \in (0,1)$, για $s \in U_t$, έχουμε

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\le \left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right| \\ &\quad + \left| f(\sigma(t)) - f(t) - \mu(t) f^{\Delta}(t) \right| + \left| (t - s) f^{\Delta}(t) \right| \\ &\le \varepsilon^* |\sigma(t) - s| + \varepsilon^* |\sigma(t) - t| + |t - s| \left| f^{\Delta}(t) \right| \\ &= \varepsilon^* |\sigma(t) - t + t - s| + \varepsilon^* \mu(t) + |t - s| \left| f^{\Delta}(t) \right| \\ &\le \varepsilon^* \mu(t) + \varepsilon^* |t - s| + \varepsilon^* \mu(t) + \varepsilon^* \left| f^{\Delta}(t) \right| \\ &= \varepsilon^* \left[2\mu(t) + |t - s| + \left| f^{\Delta}(t) \right| \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon^* \left[2\mu(t) + 1 + \left|f^{\Delta}(t)\right|\right] \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

(ii) Αν $\sigma(t) = t$, τότε $\mu(t) = 0$ και η σχέση (1.4) προκύπτει αμέσως.

Αν $\sigma(t) > t$, τότε $\mu(t) > 0$ και το σημείο t είναι δεξιά διασπαρμένο. Με χρήση της (1.2), εύκολα προκύπτει ότι

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t).$$

□

Είναι γνωστό ότι το αντίστροφο του Θεωρήματος 1.2.2 δεν ισχύει για $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ και, συνεπώς, δεν είναι δυνατόν να ισχύει και στην γενικότητά του. Στο παράδειγμα που ακολουθεί η συνάρτηση σ είναι συνεχής σε ένα δεξιά πυκνό σημείο, ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

Παράδειγμα 1.2.4. Ας είναι $\mathbb{T} = \left\{t_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{3^n} : n \in \mathbb{N}_0\right\} \bigcup \left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}$. Είναι

$$\sigma(t_n) = t_{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3^{n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3^n 3^{-1}} = (t_n)^{\frac{1}{3}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

και $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, ενώ $\sigma(0) = 0$ και $\sigma(-\frac{1}{3}) = 0$. Επομένως $\lim_{s\to 0}\sigma(s) = 0$, δηλαδή η συνάρτηση σ είναι συνεχής στο 0. Αλλά

$$\lim_{s\to 0}\frac{\sigma(\sigma(0)) - \sigma(s)}{\sigma(0) - s} = \lim_{s\to 0}\frac{\sigma(s)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{s^{\frac{1}{3}}}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^{\frac{2}{3}}} = \infty.$$

Επομένως, η συνάρτηση σ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Είναι αξιοσημείωτο ότι η παραγωγισιμότητα ή όχι μίας συνάρτησης σε ένα σημείο t μίας χρονοβαθμίδας $\mathbb{T}$ δεν εξαρτάται μόνο από την συνάρτηση αλλά και από την χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$. Ειδικά για την περίπτωση της συνάρτησης σ παρατηρούμε ότι η σ είναι Δ-παραγωγίσιμη στις χρονοβαθμίδες $\mathbb{R}$ και $\mathbb{Z}$. Πράγματι, αν $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, τότε $\sigma(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$ και $\sigma'(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση σ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της χρονοβαθμίδας $\mathbb{R}$. Ομοίως, αν $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, τότε $\sigma(t) = t+1$, $t \in \mathbb{Z}$ και $\Delta\sigma(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t) = 1$, $t \in \mathbb{Z}$, δηλαδή η σ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της χρονοβαθμίδας $\mathbb{Z}$. Ωστόσο, στην περίπτωση που $\mathbb{T} = \left\{t_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{3^n} : n \in \mathbb{N}_0\right\} \bigcup \left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}$, από το Παράδειγμα 1.2.4 έχουμε ότι η συνάρτηση σ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $0 \in \mathbb{T}$.

Θεώρημα 1.2.3. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και f, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις οι οποίες είναι Δ-παραγωγίσιμες στο $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Τότε:*

(i) *Η συνάρτηση $f+g$ είναι Δ-παραγωγίσιμη στο t και*

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

(ii) *Για οποιαδήποτε πραγματική σταθερά α, η συνάρτηση αf είναι Δ- παραγωγίσιμη στο t και*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) *Η συνάρτηση fg είναι Δ-παραγωγίσιμη στο t και*

$$(fg)^{\Delta}(t) \;=\; f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)).$$

(iv) *Αν $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι Δ-παραγωγίσιμη στο t και*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}. \tag{1.5}$$

Απόδειξη. Θα περιοριστούμε στην απόδειξη του συμπεράσματος (iii), καθώς τα υπόλοιπα συμπεράσματα αποδεικνύονται με ανάλογο τρόπο.

(iii) Για $\varepsilon \in (0,1)$, θέτουμε

$$\varepsilon^* = \varepsilon\left[1 + |f(t)| + |g(\sigma(t))| + \left|g^{\Delta}(t)\right|\right]^{-1}.$$

Παρατηρούμε ότι $\varepsilon^* \in (0,1)$. Από την παραγωγισιμότητα των f, g στο t και την συνέχεια της f στο t έπεται ότι υπάρχουν περιοχές $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ και $\mathcal{N}_3$ του t τέτοιες ώστε

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right| \leq \varepsilon^* |\sigma(t)-s| \quad \text{για} \quad s \in \mathcal{N}_1,$$

$$\left|g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right| \leq \varepsilon^* |\sigma(t)-s| \quad \text{για} \quad s \in \mathcal{N}_2,$$

και

$$|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon^* \quad \text{για} \quad s \in \mathcal{N}_3.$$

Θέτουμε $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{N}_3$. Για $s \in \mathcal{N}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left|(fg)(\sigma(t)) - (fg)(s) - \left(f^{\Delta}(t)g(\sigma(t) + f(t)g^{\Delta}(t)\right)(\sigma(t)-s)\right| \\
&\leq \left|\left[f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right] g(\sigma(t)\right| \\
&\quad + \left|\left[g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right] f(t)\right| \\
&\quad + \left|\left[g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right] [f(s) - f(t)]\right| \\
&\quad + \left|(\sigma(t)-s)g^{\Delta}(t)\,[f(s) - f(t)]\right| \\
&\leq \varepsilon^* |\sigma(t)-s|\,|g(\sigma(t)| + \varepsilon^* |\sigma(t)-s|\,|f(t)| \\
&\quad + \varepsilon^*\varepsilon^* |\sigma(t)-s| + \varepsilon^* |\sigma(t)-s|\,\left|g^{\Delta}(t)\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon^* |\sigma(t) - s| \left[|g(\sigma(t)| + |f(t)| + \varepsilon^* + \left|g^{\Delta}(t)\right| \right] \\
&\leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s| \left[|g(\sigma(t)| + |f(t)| + 1 + \left|g^{\Delta}(t)\right| \right],
\end{aligned}
$$

και συνεπώς, για $s \in \mathcal{N}$,

$$\left|(fg)(\sigma(t)) - (fg)(s) - \left(f^{\Delta}(t)g(\sigma(t) + f(t)g^{\Delta}(t)\right)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Από εδώ και στο εξής, αν $\mathbb{T}$ είναι μία χρονοβαθμίδα και $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, τότε, χάριν απλότητας, για την συνάρτηση $f \circ \sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $f^{\sigma} = f \circ \sigma$.

Από το Θεώρημα 1.2.3 έπεται ότι, αν f είναι μία Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση σε μία χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$, τότε η συνάρτηση f^2 είναι Δ-παραγωγίσιμη και μάλιστα

$$\left(f^2\right)^{\Delta} = (f \cdot f)^{\Delta} = f^{\Delta} f + f^{\sigma} f^{\Delta} = (f + f^{\sigma}) f^{\Delta}.$$

Επίσης, η συνάρτηση f^3 είναι Δ-παραγωγίσιμη με

$$
\begin{aligned}
\left(f^3\right)^{\Delta} &= (f \cdot f^2)^{\Delta} = f^{\Delta} f^2 + f^{\sigma}\left(f^2\right)^{\Delta} = f^{\Delta} f^2 + f^{\sigma}(f + f^{\sigma}) f^{\Delta} \\
&= f^{\Delta}\left(f^2 + f^{\sigma} f + (f^{\sigma})^2\right),
\end{aligned}
$$

και, γενικά, είναι

$$(f^n)^{\Delta} = f^{\Delta}\left(f^{n-1} + f^{\sigma} f^{n-2} + \ldots + (f^{\sigma})^{n-1}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Με εφαρμογή της προηγούμενης σχέσης προκύπτει το επόμενο συμπέρασμα.

Θεώρημα 1.2.4. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα, α μία πραγματική σταθερά και $m \in \mathbb{N}$. Τότε:*

(i) Η συνάρτηση $f(t) = (t - \alpha)^m$ είναι Δ-παραγωγίσιμη και

$$[(t - \alpha)^m]^{\Delta} = \sum_{i=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^i (t - \alpha)^{m-1-i}, \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

(ii) Αν $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ με $[\sigma(t) - \alpha](t - \alpha) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $(t - \alpha)^{-m}$ είναι Δ-παραγωγίσιμη και

$$\left[(t - \alpha)^{-m}\right]^{\Delta} = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t) - \alpha)^{m-i}(t - \alpha)^{i+1}}.$$

Απόδειξη. (i) Θα περιοριστούμε στην απόδειξη του (i) για $\alpha = 0$. Για $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{T}^\kappa$, από το Θεώρημα 1.2.3 έχουμε ότι

$$[t^m]^\Delta = \left(t \cdot t^{m-1}\right)^\Delta = t^{m-1} + \sigma(t)\left[t^{m-1}\right]^\Delta = t^{k-1} + \sigma(t) h^\Delta_{k-1}(t).$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία $m-1$ φορές βρίσκουμε

$$f^\Delta(t) = t^{m-1} + \sigma(t) \cdot t^{m-2} + [\sigma(t)]^2 t^{m-3} \ldots + [\sigma(t)]^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} [\sigma(t)]^i \, t^{m-1-i}.$$

(ii) Από το (i) και με χρήση του Θεωρήματος 1.2.3 (iv) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\left[(t-\alpha)^{-m}\right]^\Delta &= \left[\frac{1}{(t-\alpha)^m}\right]^\Delta = -\frac{[(t-\alpha)^m]^\Delta}{(t-\alpha)^m(\sigma(t)-\alpha)^m} \\
&= -\frac{\sum_{i=0}^{m-1}(\sigma(t)-\alpha)^i(t-\alpha)^{m-1-i}}{(t-\alpha)^m(\sigma(t)-\alpha)^m} \\
&= -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t)-\alpha)^{m-i}(t-\alpha)^{i+1}}.
\end{aligned}$$

□

Με εφαρμογή του συμπεράσματος (i) του Θεωρήματος 1.2.4 (iv) βρίσκουμε ότι
(i) για $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, έχουμε $\sigma(t) = t$ και συνεπώς

$$\begin{aligned}
[(t-\alpha)^m]^\Delta &= \sum_{i=0}^{m-1} [\sigma(t)-\alpha]^i \,(t-\alpha)^{m-1-i} = \sum_{i=0}^{m-1} (t-\alpha)^{m-1} = m(t-\alpha)^{m-1} \\
&= [(t-\alpha)^m]'.
\end{aligned}$$

(ii) για $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, έχουμε $\sigma(t) = t+1$ και συνεπώς

$$\begin{aligned}
[(t-\alpha)^m]^\Delta &= \sum_{i=0}^{m-1} [\sigma(t)-\alpha]^i \,(t-\alpha)^{m-1-i} = \sum_{i=0}^{m-1} (t+1-\alpha)^i (t-\alpha)^{m-1-i} \\
&= (t+1-\alpha)^m - (t-\alpha)^m = \Delta\left[(t-\alpha)^m\right].
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.2.5. Για την συνάρτηση $f(t) = t^2$, $t \in \mathbb{T}^\kappa$, με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.2.4, παίρνουμε

$$f^\Delta(t) = \sum_{\nu=0}^{1} [\sigma(t)]^\nu t^{m-1-\nu} = t^{2-1} + \sigma(t) \cdot t^{2-2} = t + \sigma(t).$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι, αν $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, είναι $f^\Delta(t) = 2t = f'(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ενώ, αν $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, είναι $f^\Delta(t) = 2t + 1 = \Delta f(t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Ο επόμενος ορισμός εισάγει τις Δ-παραγώγους δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης.

Ορισμός 1.2.3. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η συνάρτηση, $f^{\Delta} : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ είναι Δ-παραγωγίσιμη στο $\mathbb{T}^{\kappa^2}$, θα λέμε Δ-παράγωγο δεύτερης τάξης της f και θα την συμβολίζουμε με $f^{\Delta\Delta}$, την συνάρτηση $f^{\Delta\Delta} = \left(f^{\Delta}\right)^{\Delta} : \mathbb{T}^{\kappa^2} \to \mathbb{R}$. Με ανάλογο τρόπο, ορίζουμε επαγωγικά την Δ-παράγωγο n-τάξης $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{\kappa^n} \to \mathbb{R}$, θέτουμε, δηλαδή, $f^{\Delta^n} = \left(f^{\Delta^{n-1}}\right)^{\Delta}$*

Για απλοποίηση των συμβολισμών, θέτουμε $\sigma^n(t) = \sigma(\sigma^{n-1}(t))$ και $\rho^n(t) = \rho(\rho^{n-1}(t))$, για $n \in \mathbb{N}$, όπου $\sigma^0(t) = t$ και $\rho^0(t) = t$.

Παράδειγμα 1.2.6. Θεωρούμε την χρονοβαθμίδα $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$, όπου $h > 0$. Έχουμε ότι

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf\{t + nh : n \in \mathbb{N}\} = t + h > t, \quad t \in h\mathbb{Z}$$

και

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \sup\{t - nh : n \in \mathbb{N}\} = t - h < t, \quad t \in h\mathbb{Z}.$$

Επομένως κάθε σημείο $t \in h\mathbb{Z}$ είναι μεμονωμένο. Για την συνάρτηση κόκκωσης μ είναι

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h, \quad t \in h\mathbb{Z}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση κόκκωσης είναι σταθερή συνάρτηση. Επίσης είναι $(h\mathbb{Z})^{\kappa} = h\mathbb{Z}$. Για μία συνάρτηση $f : h\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad t \in h\mathbb{Z}.$$

Για την δεύτερης τάξης Δ- παράγωγο της f στο $t \in h\mathbb{Z}$, είναι

$$\begin{aligned} f^{\Delta\Delta}(t) &= \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} = \frac{f^{\Delta}(t+h) - f^{\Delta}(t)}{h} \\ &= \frac{\frac{f(t+2h)-f(t+h)}{h} - \frac{f(t+h)-f(t)}{h}}{h} \\ &= \frac{f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t)}{h^2} \\ &= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.2.2. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι για τυχούσα χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$, η συνάρτηση $f(t) = t$ είναι δύο φορές Δ-παραγωγίσιμη. Ωστόσο, η συνάρτηση $f(t) = t^2$ δεν είναι κατά ανάγκη δύο φορές Δ-παραγωγίσιμη. Πραγματικά, για την $f(t) = t^2 = t \cdot t$ είναι $f^{\Delta}(t) = t + \sigma(t)$, ενώ έχει αποδειχθεί ότι η συνάρτηση σ δεν είναι πάντα Δ- παραγωγίσιμη. Γενικά, το γινόμενο δύο συναρτήσεων f, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές Δ- παραγωγίσιμη συνάρτηση, αν οι συναρτήσεις f και g είναι δύο φορές Δ-παραγωγίσιμες συναρτήσεις, και, επιπλέον, η συνάρτηση f^σ είναι Δ-παραγωγίσιμη. Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$(fg)^{\Delta^2} = \left(f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta\right)^\Delta = f^{\Delta\Delta} g + f^{\Delta^\sigma} g^\Delta + f^{\sigma^\Delta} g^\Delta + f^{\sigma^\sigma} g^{\Delta\Delta}.$$

Από τον Ορισμό 1.2.2 αλλά και από τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 1.2.1 γίνεται φανερό ότι η Δ-παράγωγος μίας συνάρτησης f είναι μία «δεξιά παράγωγος» της f. Κατ' αναλογία με την Δ-παράγωγο, μπορεί να ορισθεί και η «αριστερή παράγωγος» μίας συνάρτησης, η οποία ονομάζεται ανάδελτα παράγωγος (ή ναμπλα παράγωγος) και συμβολίζεται με ∇. Η σχετική θεωρία έχει αναπτυχθεί στην εργασία [6]. Χάριν πληρότητας, θα δώσουμε εδώ τον ορισμό της ∇-παραγώγου αφού, πρώτα, εισάγουμε ένα κατάλληλο σύνολο και δώσουμε τον ορισμό μίας συνάρτησης αντίστοιχης με την συνάρτηση κόκκωσης.

Ορισμός 1.2.4. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα. Αν η χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$ έχει δεξιά διασπαρμένο ελάχιστο m τότε θέτουμε $\mathbb{T}_\kappa := \mathbb{T} - \{m\}$, ενώ σε όλες τις άλλες περιπτώσεις θέτουμε $\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T}$.*

Ορισμός 1.2.5. *Καλούμε **προς τα πίσω συνάρτηση κόκκωσης** την συνάρτηση $\nu : \mathbb{T}_\kappa \to [0, \infty)$ με*

$$\nu(t) := t - \rho(t).$$

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τον ορισμό της ∇-παραγώγου.

Ορισμός 1.2.6. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **∇-παραγωγίσιμη** στο $t_0 \in \mathbb{T}_\kappa$ αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός α έτσι ώστε, για κάθε $\varepsilon > 0$, να υπάρχει μία περιοχή $\mathcal{N}_0$ του t_0 τέτοια ώστε*

$$|f(\rho(t_0)) - f(s) - \alpha\,(\rho(t_0) - s)| \leq \varepsilon\,|\rho(t_0) - s| \quad \text{για κάθε} \quad s \in \mathcal{N}_0. \tag{1.6}$$

*Ο αριθμός α συμβολίζεται με $f^\nabla(t_0)$ και καλείται **αντιδέλτα παράγωγος** (∇-παράγωγος) της f στο t_0.*

Ο λογισμός της ∇-παραγώγου αναπτύσσεται κατ' αντιστοιχία με αυτόν της Δ-παραγώγου και δεν θα μας απασχολήσει στην παρούσα διατριβή. Μερικά αξιοσημείωτα συμπεράσματα όπου γίνεται χρήση ∇-παραγώγου παρατίθενται στις επόμενες ενότητες.

1.3 Ολοκλήρωση σε Χρονοβαθμίδες

Στην παράγραφο αυτήν αναπτύσσουμε μερικά βασικά στοιχεία της θεωρίας ολοκλήρωσης σε χρονοβαθμίδες. Για τον σκοπό αυτό προτάσσουμε μερικές έννοιες που σχετίζονται με την συνέχεια μίας συνάρτησης σε μία χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$.

Ορισμός 1.3.1. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ καλείται* ***regulated*** *αν*

(i) υπάρχει το όριο από δεξιά, σε κάθε δεξιά πυκνό σημείο της $\mathbb{T}$,

(ii) υπάρχει το όριο από αριστερά, σε κάθε αριστερά πυκνό σημείο της $\mathbb{T}$

και τα όρια αυτά είναι πεπερασμένα.

Για τις regulated συναρτήσεις έχουμε το επόμενο συμπέρασμα.

Θεώρημα 1.3.1. *Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ είναι regulated σε ένα συμπαγές διάστημα $[\alpha, b]_{\mathbb{T}}$, τότε η f είναι φραγμένη στο $[\alpha, b]_{\mathbb{T}}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο $[\alpha, b]_{\mathbb{T}}$. Τότε υπάρχει μία ακολουθία $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[\alpha, b]_{\mathbb{T}}$ τέτοια ώστε $|f(t_n)| > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή το διάστημα $[\alpha, b]_{\mathbb{T}}$ είναι συμπαγές, υπάρχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία $\{t_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ της ακολουθίας $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε κάποιο σημείο $t_0 \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}$. Επομένως το σημείο t_0 δεν είναι μεμονωμένο, δηλαδή το t_0 είναι είτε δεξιά είτε αριστερά πυκνό. Αλλά από τον ορισμό της $\{t_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ έπεται ότι το σύνολο $\{f(t_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Ωστόσο, επειδή $\{t_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στο $\mathbb{T}$ και το σύνολο $\mathbb{T}$ είναι κλειστό, το όριο της ακολουθίας $\{f(t_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι πεπερασμένο, αφού η συνάρτηση f είναι regulated, το οποίο είναι ένα άτοπο. Άρα η υπόθεση ότι η f δεν είναι φραγμένη δεν ευσταθεί και, επομένως, η f είναι αναγκαστικά φραγμένη στο $[\alpha, b]_{\mathbb{T}}$. □

Ορισμός 1.3.2. *Μία συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ λέγεται* ***δεξιά πυκνά συνεχής*** *(δπ-συνεχής) αν*

(i) η f είναι συνεχής σε κάθε δεξιά πυκνό σημείο της $\mathbb{T}$, και

(ii) το όριο από αριστερά της f, σε κάθε αριστερά πυκνό σημείο της $\mathbb{T}$, υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

Θα συμβολίζουμε το σύνολο των δεξιά πυκνών συναρτήσεων με $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T})$.

Σχετικά με τις δπ-συνεχείς συναρτήσεις έχουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.2. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση.*

(i) Αν η f είναι συνεχής, τότε η f είναι δπ-συνεχής.

(ii) Αν η f είναι δπ-συνεχής, τότε η f είναι regulated.

(iii) Η συνάρτηση σ είναι δπ-συνεχής.

(iv) Αν η f είναι regulated ή δπ-συνεχής, τότε και η συνάρτηση f^σ είναι regulated ή δπ-συνεχής, αντίστοιχα.

(v) Αν η f είναι συνεχής και μία συνάρτηση $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι regulated ή δπ-συνεχής, τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι regulated ή δπ-συνεχής, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Τα (i), (ii), (iv) και (v) έπονται άμεσα από τους Ορισμούς 1.3.1, 1.3.2, τον ορισμό του ορίου, τον ορισμό της συνέχειας και τις ιδιότητες αυτών. Θα αποδείξουμε, στη συνέχεια, το (iii), δηλαδή θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\sigma \in C_{rd}$ είναι δπ-συνεχής. Έστω ένα σημείο $t \in \mathbb{T}$. Αν το t είναι δεξιά πυκνό τότε $\sigma(t) = t$, δηλαδή η συνάρτηση σ είναι συνεχής σε κάθε δεξιά πυκνό σημείο. Αν το t είναι αριστερά πυκνό, θεωρούμε μία αύξουσα ακολουθία $\{t_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{T}$, η οποία συγκλίνει στο t από τα αριστερά. Τότε είναι $t_n \leq \sigma(t_n) \leq t$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, συνεπώς, η ακολουθία $\sigma(t_n)$ συγκλίνει στο t από τα αριστερά. Άρα η σ έχει πεπερασμένο αριστερό όριο σε κάθε αριστερά πυκνό σημείο. Επομένως η συνάρτηση σ είναι δπ-συνεχής. □

Παρατήρηση 1.3.1. (i) Ενώ η συνάρτηση σ, όπως προκύπτει από το Θεώρημα 1.3.2 είναι δπ-συνεχής, γενικά, η συνάρτηση ρ δεν είναι δπ-συνεχής. Θεωρούμε την χρονοβαθμίδα $\mathbb{T} = \{1\} \cup [2,3]$ και την ακολουθία $t_n = 2 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ που συγκλίνει στο δεξιά πυκνό σημείο $2 \in \mathbb{T}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $2 \leq \rho(t_n) < t_n$ και συνεπώς η ακολουθία $(\rho(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 2 ενώ $\rho(2) = 1 \neq 2$. Επομένως, η συνάρτηση ρ δεν είναι δπ-συνεχής, ενώ είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η ρ είναι regulated.

(ii) Η συνάρτηση $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ είναι δπ-συνεχής. Πραγματικά, είναι $\mu(t) = \sigma(t) - t$, όπου η σ είναι δπ-συνεχής, και η $f(t) = t$ είναι συνεχής άρα και δπ-συνεχής. Επομένως η συνάρτηση μ είναι δπ-συνεχής

Ορισμός 1.3.3. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα. Μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ καλείται **προ-Δ-παραγωγίσιμη με** D (pre-differentiable with D) στο $\mathbb{T}^\kappa$ αν υπάρχει ένα σύνολο $D \subset \mathbb{T}^\kappa$ τέτοιο ώστε*

(i) το σύνολο $\mathbb{T}^\kappa - D$ είναι αριθμήσιμο και δεν περιέχει δεξιά διασπαρμένα σημεία του $\mathbb{T}$, και

(ii) η συνάρτηση f είναι Δ-παραγωγίσιμη στο D.

Από τον Ορισμό 1.3.3 προκύπτει ότι μία συνάρτηση f είναι προ-Δ-παραγωγίσιμη με D στο $\mathbb{T}^\kappa$, αν είναι συνεχής και Δ-παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της $\mathbb{T}$, εκτός από ένα το πολύ αριθμήσιμο πλήθος δεξιά πυκνών σημείων της $\mathbb{T}$.

Στην συνέχεια αναφέρουμε ένα πολύ χρήσιμο συμπέρασμα για προ-Δ-παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε χρονοβαθμίδες. Το συμπέρασμα αυτό έχει επικρατήσει να αναφέρεται ως Θεώρημα Μέσης Τιμής και η απόδειξη του, που είναι μακροσκελής και κάνει χρήση της αρχής της επαγωγής, μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο [13].

Θεώρημα 1.3.3. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και έστω f και g δύο προ-Δ-παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $D \subseteq \mathbb{T}^\kappa$. Αν*

$$\left|f^{\Delta}(t)\right| \leq g^{\Delta}(t), \quad t \in D,$$

τότε

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r) \text{ για } r, s \in \mathbb{T} \text{ με } r \leq s.$$

Με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.3.3 έχουμε το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 1.3.1. *Ας είναι* $\mathbb{T}$ *μία χρονοβαθμίδα και* f, g *δύο προ-*Δ*-παραγωγίσιμες συναρτήσεις με* $D \subseteq \mathbb{T}^{\kappa}$. *Τότε:*

(i) Αν U *είναι ένα συμπαγές διάστημα με άκρα* $r, s \in \mathbb{T}$, *τότε*

$$|f(s) - f(r)| \leq |s - r| \sup_{t \in U^{\kappa} \cap D} \left| f^{\Delta}(t) \right|.$$

(ii) Αν $f^{\Delta}(t) = 0$ *για κάθε* $t \in D$, *τότε η* f *είναι σταθερή συνάρτηση.*

(iii) Αν $f^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t)$ *για κάθε* $t \in D$, *τότε*

$$g(t) = f(t) + C \text{ για κάθε } t \in \mathbb{T},$$

όπου C *είναι μία σταθερά.*

Απόδειξη. (i) Θα ασχοληθούμε μόνον με την περίπτωση $r \leq s$. Η περίπτωση $s < r$ αντιμετωπίζεται με ανάλογο τρόπο. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ με

$$g(t) = \left(\sup_{\tau \in U^{\kappa} \cap D} \left| f^{\Delta}(\tau) \right| \right) (t - r), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Τότε, για $t \in U^{\kappa} \cap D$, έχουμε

$$g^{\Delta}(t) = \sup_{\tau \in U^{\kappa} \cap D} \left| f^{\Delta}(\tau) \right| \geq \left| f^{\Delta}(t) \right|.$$

Από το Θεώρημα 1.3.1, για $r \leq s$, παίρνουμε

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r) = g(s) = \left(\sup_{\tau \in U^{\kappa} \cap D} \left| f^{\Delta}(\tau) \right| \right) (s - r).$$

(ii) Αν $f^{\Delta}(t) = 0$ για κάθε $t \in D$, τότε $\sup_{t \in D} |f^{\Delta}(t)| = 0$. Για δύο τυχόντα σημεία $r, s \in \mathbb{T}$, θεωρούμε το συμπαγές διάστημα U του $\mathbb{T}$ με άκρα τα σημεία r, s. Τότε για δύο οποιοδήποτε σημεία r, s του $\mathbb{T}$ από το (i) συνεπάγεται ότι $|f(s) - f(r)| \leq 0$, και συνεπώς θα είναι $f(s) = f(r)$. Επομένως η f είναι σταθερή συνάρτηση.

(iii) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(t) = f(t) - g(t)$, $t \in D$. Για $t \in D$, είναι

$$h^{\Delta}(t) = (f(t) - g(t))^{\Delta} = f^{\Delta}(t) - g^{\Delta}(t) = 0.$$

Από το (ii) συνεπάγεται ότι η συνάρτηση h είναι σταθερή, δηλαδή υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $h(t) = C$. Επομένως $g(t) = f(t) + C$ για κάθε $t \in D$. □

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί ένα Θεμελιώδες Θεώρημα στην θεωρία ολοκλήρωσης σε χρονοβαθμίδες που αναπτύσουμε εδώ. Για την απόδειξή του παραπέμπουμε στο βιβλίο [13], όπου με χρήση της αρχής της επαγωγής αποδεικνύεται η ύπαρξη προ-Δ-αντιπαραγώγου σε μία πιο γενική μορφή χρονοβαθμίδας από αυτή που θεωρούμε στην παρούσα διατριβή.

Θεώρημα 1.3.4 (Ύπαρξη προ-Δ-αντιπαραγώγου). *Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι regulated, τότε υπάρχει ένα σύνολο $D \subset \mathbb{T}^\kappa$, με $\mathbb{T}^\kappa - D$ το πολύ αριθμήσιμο σύνολο, και μία συνάρτηση $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι προ-Δ-παραγωγίσιμη με D στο $\mathbb{T}^\kappa$ έτσι ώστε*

$$F^\Delta(t) = f(t), \quad t \in D.$$

Κάθε τέτοια συνάρτηση F θα λέγεται ***προ-Δ-αντιπαράγωγος*** *της f.*

Είναι φανερό ότι η έννοια της προ-Δ-αντιπαραγώγου είναι πολύ κοντά στην έννοια της αντιπαραγώγου στον συνήθη ολοκληρωτικό λογισμό στο $\mathbb{R}$. Πραγματικά, για $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι το Θεώρημα 1.3.4 εξασφαλίζει την ύπαρξη αντιπαραγώγου για συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε κλειστό διάστημα. Εντούτοις, η έννοια της προ-Δ-αντιπαραγώγου δεν είναι το ακριβές αντίστοιχο της αντιπαραγώγου στον συνήθη ολοκληρωτικό λογισμό, καθώς είναι δυνατόν η σχέση $F^\Delta(t) = f(t)$, να μην ισχύει για ένα σύνολο σημείων του $\mathbb{T}^\kappa$ που είναι μη πεπερασμένο. Ας σημειωθεί, επίσης, ότι, αν F_1, F_2 είναι δύο προ-Δ-αντιπαράγωγοι της f στο D, τότε $F_1(t) = F_2(t) + C$, $t \in D$.

Ο επόμενος ορισμός αναφέρεται στις έννοιες του αόριστου ολοκληρώματος και του ολοκληρώματος Cauchy σε χρονοβαθμίδες.

Ορισμός 1.3.4. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα, $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία regulated συνάρτηση και $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία προ-Δ-αντιπαράγωγος της f με D στο $\mathbb{T}^\kappa$.*

(i) Ορίζουμε το ***αόριστο Δ-ολοκλήρωμα*** *της f ως εξής*

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C, \quad t \in \mathbb{T},$$

όπου C είναι μία πραγματική σταθερά.

(ii) Για s, $t \in \mathbb{T}$ με $s < t$ ορίζουμε το ***Cauchy Δ-ολοκλήρωμα*** *της f στο $[s,t]_\mathbb{T}$ ως*

$$\int_s^t f(u)\Delta u = F(t) - F(s).$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι από το Πόρισμα 1.3.1 έπεται ότι το αόριστο ολοκλήρωμα της f καθώς και το ολοκλήρωμα Cauchy είναι καλά ορισμένα και ανεξάρτητα από την επιλογή προ-Δ-αντιπαραγώγου της f. Επίσης από τον Ορισμό 1.3.4 έχουμε ότι, αν $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μία Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε $\int_s^t F^\Delta(u)\Delta u = F(t) - F(s)$.

Στην συνέχεια ορίζουμε την Δ-αντιπαράγωγο μίας συνάρτησης f.

Ορισμός 1.3.5. *Μία συνάρτηση $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ θα καλείται* ***Δ-αντιπαράγωγος*** *της $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ αν*

$$F^\Delta(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{T}^\kappa.$$

Από τους Ορισμούς 1.3.3 και 1.3.5 γίνεται φανερό ότι η διαφορά μεταξύ της έννοιας της προ-Δ-αντιπαραγώγου και της έννοιας της Δ-αντιπαραγώγου έγκειται στο ότι μία προ-Δ-αντιπαράγωγος είναι δυνατόν να μην έχει Δ-παράγωγο σε ένα αριθμήσιμο σύνολο δεξιά πυκνών σημείων της $\mathbb{T}^\kappa$, ενώ η Δ-αντιπαράγωγος έχει Δ-παράγωγο σε κάθε σημείο της $\mathbb{T}^\kappa$.

Παράδειγμα 1.3.1. Θεωρούμε την χρονοβαθμίδα $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ και την συνάρτηση $f(t) = \alpha^t, t \in \mathbb{Z}$, όπου α σταθερά με $\alpha \neq 1$. Παρατηρούμε ότι, για $t \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\left(\frac{\alpha^t}{\alpha-1}\right)^\Delta = \Delta\left(\frac{\alpha^t}{\alpha-1}\right) = \frac{\alpha^{t+1}-\alpha^t}{\alpha-1} = \frac{\alpha^t(\alpha-1)}{\alpha-1} = \alpha^t,$$

και συνεπώς.

$$\int \alpha^t \Delta t = \frac{\alpha^t}{\alpha-1} + C, \quad t \in \mathbb{Z},$$

όπου C είναι μία πραγματική σταθερά.

Από το Θεώρημα 1.3.4 έπεται ότι κάθε regulated συνάρτηση έχει προ-Δ-αντιπαράγωγο σε ένα (κατάλληλο) σύνολο $D \subset \mathbb{T}^\kappa$. Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη Δ-αντιπαραγώγου για μία μεγάλη κλάση συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.3.5 (Ύπαρξη Δ-αντιπαραγώγου). *Κάθε δπ-συνεχής συνάρτηση έχει Δ-αντιπαράγωγο. Ειδικά, αν $t_0 \in \mathbb{T}$, τότε η συνάρτηση*

$$F(t) := \int_{t_0}^{t} f(\tau)\Delta\tau, \quad t \in \mathbb{T}$$

είναι μία Δ-αντιπαράγωγος της f.

Απόδειξη. Έστω f μία δπ-συνεχής συνάρτηση, τότε από το Θεώρημα 1.3.2 έπεται ότι η συνάρτηση f είναι regulated. Έτσι, από το Θεώρημα 1.3.4 προκύπτει ότι υπάρχει μία προ-Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση F με D στο $\mathbb{T}^\kappa$, τέτοια ώστε

$$F^\Delta(t) = f(t), \quad t \in D.$$

Θα αποδείξουμε ότι $F^\Delta(t) = f(t)$ για $t \in \mathbb{T}^\kappa - D$. Έστω $t \in \mathbb{T}^\kappa - D$. Τότε το σημείο t είναι δεξιά πυκνό καθώς από τον Ορισμό 1.3.3, το σύνολο $\mathbb{T}^\kappa - D$ δεν περιέχει δεξιά διασπαρμένα σημεία. Επομένως, επειδή η f είναι δπ-συνεχής και το t δεξιά πυκνό, έπεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο t. Άρα, για $\varepsilon > 0$, υπάρχει μία περιοχή U_t του t τέτοια ώστε

$$|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad \text{για} \quad s \in U_t.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ με

$$h(s) := F(t) - f(t)(s - t_0), \quad s \in \mathbb{T}$$

και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση h είναι προ-Δ-παραγωγίσιμη στο D με

$$h^{\Delta}(s) = F^{\Delta}(s) - f(t) = f(s) - f(t), \quad s \in D.$$

Συνεπώς, θα είναι

$$|h^{\Delta}(s)| = |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon \;\; \text{για κάθε } s \in D \cap U_t$$

και άρα

$$\sup_{s \in D \cap U_t} |h^{\Delta}(s)| \leq \varepsilon. \tag{1.7}$$

Από το Πόρισμα 1.3.1, για $s \in U_t \cap D$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} |F(t) - F(s) - f(t)(t-s)| &= |h(t) + f(t)(t - t_0) - [h(s) + f(t)(s - t_0)] \\ &\quad - f(t)(t-s)| \\ &= |h(t) - h(s)| \\ &\leq \left\{ \sup_{s \in D \cap U_t} |h^{\Delta}(s)| \right\} |t - s|. \end{aligned}$$

και άρα, με χρήση της (1.7), βρίσκουμε ότι

$$|F(t) - F(s) - f(t)(t-s)| \leq \varepsilon |t - s|, \quad s \in U_t \cap D.$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $F^{\Delta}(t) = f(t)$ για $t \in \mathbb{T}^{\kappa} - D$. Επομένως $F^{\Delta}(t) = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση F είναι μία Δ-αντιπαράγωγος της δπ-συνεχούς συνάρτησης f. Για $t_0 \in \mathbb{T}$, από τον Ορισμο 1.3.4 το (i) έπεται ότι η συνάρτηση

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s) \Delta s, \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}$$

είναι μία Δ-αντιπαράγωγος της f. □

Είναι προφανές ότι αν F είναι μία Δ-αντιπαράγωγος της f τότε, για a, $b \in \mathbb{T}^{\kappa}$, είναι

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a) = \int_a^b F^{\Delta}(t) \Delta t.$$

Για δπ-συνεχείς συναρτήσεις ισχύει το ακόλουθο χρήσιμο συμπέρασμα.

Θεώρημα 1.3.6. *Αν $\mathbb{T}$ είναι μία χρονοβαθμίδα και $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μία δπ-συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = \mu(t) f(t), \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

Απόδειξη. Υπάρχει μία Δ-αντιπαράγωγος F της f, για την οποία ισχύει $F^{\Delta}(t) = f(t)$, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Με χρήση του συμπεράσματος (ii) του Θεωρήματος 1.2.2, για $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta t &= F(\sigma(t)) - F(t) = F(t) + \mu(t)F^{\Delta}(t) - F(t) \\
&= \mu(t)f(t).
\end{aligned}$$

□

Τα θεωρήματα που ακολουθούν αναφέρονται στις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος σε χρονοβαθμίδες. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι με εφαρμογή των θεωρημάτων αυτών, στην περίπτωση που $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, προκύπτουν τα αντίστοιχα συμπεράσματα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Θεώρημα 1.3.7 (Κανόνες ολοκλήρωσης σε χρονοβαθμίδες). *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα. Για $a, b, c \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{R}$ και $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, ισχύουν*

(i) $\int_a^b (f(t) + g(t))\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,\Delta t + \int_\alpha^b g(t)\,\Delta t$,

(ii) $\int_a^b (kf)(t)\,\Delta t = k\int_a^b f(t)\,\Delta t$,

(iii) $\int_a^b f(t)\,\Delta t = -\int_b^a f(t)\,\Delta t$,

(iv) $\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^c f(t)\,\Delta t + \int_c^b f(t)\,\Delta t$,

(v) $\int_a^a f(t)\,\Delta t = 0$,

(vi) *αν* $|f(t)| \leq g(t)$, $t \in [a, b)$, *τότε*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\,\Delta t,$$

(vii) *αν* $f(t) \geq 0$ *για κάθε* $t \in [a, b]$, *τότε* $\int_a^b f(t)\,\Delta t \geq 0$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ενδεικτικά τις προτάσεις (iii) και (iv) του θεωρήματος. Ομοίως αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες. Επειδή η συνάρτηση f είναι δπ-συνεχής, έχει Δ-αντιπαραγώγους. Έστω F μία Δ-αντιπαράγωγος της f. Για την απόδειξη του (iii) παρατηρούμε ότι η συνάρτηση kF είναι μία Δ-αντιπαράγωγος της συνάρτησης kf. Επομένως

$$\begin{aligned}
\int_a^b (kf)(t)\,\Delta t &= (kF)(b) - (kF)(a) = kF(b) - kF(a) \\
&= k[F(b) - F(a)] = k\int_a^b f(t)\,\Delta t.
\end{aligned}$$

Για την απόδειξη του (iv), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\Delta t &= F(b)-F(a)=F(b)-F(c)-[F(c)-F(a)]\\ &= \int_a^c f(t)\,\Delta t+\int_c^b f(t)\,\Delta t.\end{aligned}$$

□

Το επόμενο συμπέρασμα αναφέρεται στην μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες σε χρονοβαθμίδες.

Θεώρημα 1.3.8. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και f, $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ δύο Δ-παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{T}^\kappa$. Αν $a,b\in\mathbb{T}$, τότε*

(i) $\int_a^b f(\sigma(t))\,g^\Delta(t)\,\Delta t=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)-\int_a^b f^\Delta(t)\,g(t)\,\Delta t.$

(ii) $\int_a^b f(t)\,g^\Delta(t)\,\Delta t=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)-\int_a^b f^\Delta(t)\,g(\sigma(t))\,\Delta t.$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο το (i), καθώς το (ii) αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι Δ-παραγωγίσιμες στο $\mathbb{T}^\kappa$, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.3, η συνάρτηση $fg:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ είναι Δ-παραγωγίσιμη στο $\mathbb{T}^\kappa$ και ισχύει

$$(fg)^\Delta(t)=(f^\sigma g^\Delta+f^\Delta g)(t),\quad t\in\mathbb{T}^\kappa.$$

Επομένως, η συνάρτηση fg είναι Δ-αντιπαράγωγος της συνάρτησης $f^\sigma g^\Delta+f^\Delta g$ στο $\mathbb{T}^\kappa$. Συνεπώς είναι

$$\int_a^b (f^\sigma g^\Delta+f^\Delta g)(t)\Delta t=\int_a^b (fg)^\Delta(t)\Delta t=(fg)(b)-(fg)(a)$$

και

$$\int_a^b f^\sigma(t)g^\Delta(t)\Delta t+\int_\alpha^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t=(fg)(b)-(fg)(a),$$

από όπου παίρνουμε την ζητούμενη σχέση. □

Επειδή για τον ορισμό του Δ-ολοκληρώματος μίας συνάρτησης f απαιτείται η f να είναι απλώς regulated και όχι κατ' ανάγκη δπ-συνεχής, ανάλογα συμπεράσματα με αυτά των Θεωρημάτων 1.3.7 και 1.3.8 ισχύουν και στην περίπτωση που οι συναρτήσεις f, g είναι απλώς regulated.

Το επόμενο συμπέρασμα αναφέρεται σε πιο συγκεκριμένες εκφράσεις του ορισμένου ολοκληρώματος στις δύο πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις διαστημάτων σε μία χρονοβαθμίδα.

Θεώρημα 1.3.9. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα, $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ μία δπ-συνεχής συνάρτηση και $a,b\in\mathbb{T}$.*

(i) Αν $[a,b]_{\mathbb{T}} = [a,b]$, *τότε*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt,$$

όπου $\int_a^b f(t)dt$ *είναι το κατά Riemann ολοκλήρωμα της* f *στο* $[a,b]$.

(ii) Αν το διάστημα $[a,b]$ *αποτελείται μόνο από μεμονωμένα σημεία, τότε*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} \mu(t) f(t), & \text{αν } a<b \\ 0, & \text{αν } a=b \\ -\sum_{t\in[b,a)} \mu(t) f(t), & \text{αν } a>b. \end{cases}$$

Απόδειξη. Το (i) είναι προφανές, οπότε θα αποδείξουμε μόνο το (ii) κάνοντας χρήση των Θεωρημάτων 1.3.6 και 1.3.7. Αν $a < b$, επειδή το διάστημα $[a,b]_{\mathbb{T}}$ περιέχει μόνο μεμονωμένα σημεία, θα είναι της μορφής $[a,b]_{\mathbb{T}} = \{t_0, t_1 \ldots, t_n\}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, όπου

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\Delta t &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\Delta t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t)\Delta t = \sum_{i=0}^{n-1} \mu(t_i) f(t_i) \\ &= \sum_{t\in[a,b)} \mu(t) f(t). \end{aligned}$$

Αν $a > b$, τότε

$$\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t = -\sum_{t\in[b,a)} \mu(t) f(t),$$

ενώ, αν $a = b$, τότε

$$\int_a^a f(t)\Delta t = 0.$$

□

Από το Θεώρημα 1.3.9 προκύπτει ότι, αν $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, με $h > 0$, τότε

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{cases} h\sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh), & \text{αν } a<b \\ 0, & \text{αν } a=b \\ -h\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh), & \text{αν } a>b \end{cases}$$

και, αν $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, τότε

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t), & \text{αν } a<b \\ 0, & \text{αν } a=b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t), & \text{αν } a>b. \end{cases}$$

Τα επόμενα δύο θεωρήματα περιέχονται στο άρθρο [8] και δίνουν ορισμένες επιπλέον ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

Θεώρημα 1.3.10. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και a, $b \in \mathbb{T}$ με $a \leq b$. Αν $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$, τότε*

(i) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^{\rho(b)} f(t)\Delta t + [b - \rho(b)]\, f(\rho(b))$,

(ii) $\int_a^b f(t)\Delta t = [\sigma(a) - a]\, f(\sigma(a)) + \int_{\sigma(a)}^b f(t)\Delta t$.

Θεώρημα 1.3.11. *Ας είναι a, $b \in \mathbb{T}$ με $a \leq b$ και f, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Τότε*

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b |f(t)g(t)|\, \Delta t \leq \left(\max_{a\leq t\leq \rho(b)} |f(t)| \int_a^b |g(t)|\, \Delta t\right).$$

Χάριν πληρότητας, θα κάνουμε μία αναφορά στην έννοια του γενικευμένου ολοκληρώματος σε χρονοβαθμίδες που δεν είναι άνω φραγμένες, δίνοντας τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος σε ένα σύνολο της μορφής $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$. Είναι φανερό ότι, αν η $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μία δπ-συνεχής συνάρτηση σε ένα σύνολο της μορφής $[a, +\infty)_{\mathbb{T}}$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη σε οποιοδήποτε κλειστό υποσύνολο $[a,b]_{\mathbb{T}}$ για κάθε $b \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$, δηλαδή η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο $[a, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Ορισμός 1.3.6. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα με $\sup \mathbb{T} = \infty$ και $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία δπ-συνεχής συνάρτηση στο $[a, \infty)_{\mathbb{T}}$. Ορίζουμε το* ***γενικευμένο Δ-ολοκλήρωμα*** *της f στο $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ ως το όριο του ορισμένου ολοκληρώματος της f στο $[a,b]_{\mathbb{T}}$ για $b \to \infty$, με την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$, θέτουμε δηλαδή*

$$\int_a^\infty f(t)\, \Delta t := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\, \Delta t = l,$$

και λέμε ότι το γενικευμένο Δ-ολοκλήρωμα της f συγκλίνει στο l. Στην περίπτωση που το παραπάνω όριο δεν υπάρχει, λέμε ότι το γενικευμένο Δ-ολοκλήρωμα της f στο $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ αποκλίνει.

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να αναφερθεί ότι η θεωρία των χρονοβαθμίδων έχει γενικευθεί και σε ευρύτερους του $\mathbb{R}$ τοπολογικούς χώρους [31]. Έτσι, τα αντίστοιχα πολλών γνωστών συμπερασμάτων του απειροστικού λογισμού έχει αποδειχθεί ότι ισχύουν σε χρονοβαθμίδες πολύ πιο γενικές από τις χρονοβαθμίδες που εξετάσαμε στην παρούσα διατριβή. Αναφέρουμε δύο θεωρήματα στα οποία οι συναρτήσεις παίρνουν τιμές σε ένα χώρο Banach X. Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στην αλλαγή μεταξύ ορίων και παραγώγισης.

Θεώρημα 1.3.12. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και X ένας χώρος Banach. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $f_n : \mathbb{T} \to X$ είναι προ-Δ-παραγωγίσιμες με $D \subset \mathbb{T}^\kappa$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{T}^\kappa$ υπάρχει μία συμπαγής περιοχή U_t του t τέτοια ώστε η ακολουθία των προ-Δ-παραγώγων $\{f_n^\Delta\}_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει ομοιόμορφα στο $U_t \cap D$. Τότε* *(i)* *η σύγκλιση των* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *σε ένα σημείο* $t \in \mathbb{T}^\kappa$ *συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας αυτής σε κάθε περιοχή* U_t,

(ii) *η* $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ *είναι προ-Δ-παραγωγίσιμη στο* D *και*

$$f^\Delta(t) = \lim_{n\to\infty} f_n^\Delta(t), \quad t \in D.$$

Θεώρημα 1.3.13. *Αν η ακολουθία* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *των regulated συναρτήσεων* $f_n : \mathbb{T} \to X$ *συγκλίνει ομοιόμορφα, στο διάστημα* $[r,s)_\mathbb{T}$ *στην regulated συνάρτηση* f, *τότε η ακολουθία*

$$\left(\int_r^s f_n \Delta t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ συγκλίνει στο } \int_r^s f(t)\Delta t \text{ στο } X.$$

Τέλος, θα πρέπει να επισημανθεί ότι στην παρούσα διατριβή αναπτύχθηκε μία θεωρία ολοκλήρωσης με χρήση της έννοιας της Δ-αντιπαραγώγου. Για μία εισαγωγή σε ολοκλήρωση σε χρονοβαθμίδες με χρήση αθροισμάτων Riemann, παραπέμπουμε στο άρθρο [21].

1.4 Η Εκθετική Συνάρτηση

Η παράγραφος αυτή είναι αφιερωμένη στην εκθετική συνάρτηση σε χρονοβαθμίδες. Αντίθετα με τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης σε μία χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$ απαιτείται η εισαγωγή μίας σειράς από έννοιες οι οποίες δεν είναι αναγκαίες στην περίπτωση του $\mathbb{R}$. Η αρχική εισαγωγή της έννοιας από τον Hilger ([22]) έγινε με χρήση του λεγόμενου κυλινδρικού μετασχηματισμού. Εδώ θα προσεγγίσουμε την εκθετική συνάρτηση από μία διαφορετική κατεύθυνση που είναι ωστόσο ισοδύναμη με την αρχική.

Ο πρώτος ορισμός αφορά ένα κατάλληλο υποσύνολο της χρονοβαθμίδας $\mathbb{T}$ όπου είναι δυνατόν να ορισθεί η εκθετική συνάρτηση.

Ορισμός 1.4.1. *Ας είναι* $\mathbb{T}$ *μία χρονοβαθμίδα και* $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *μία συνάρτηση. Η συνάρτηση* p *θα καλείται* ***regressive*** *αν*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0 \text{ για κάθε } t \in \mathbb{T}^\kappa.$$

Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ *το σύνολο όλων των regressive και δπ-συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στην χρονοβαθμίδα* $\mathbb{T}$.

Ορισμός 1.4.2. *Στο σύνολο* $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ *ορίζουμε τις πράξεις* $\oplus$ *(πρόσθεση) με τον τύπο*

$$p \oplus q = p + q + \mu pq$$

και $\ominus$ *(αφαίρεση) με τον τύπο*

$$p \ominus q = \frac{p-q}{1+\mu q}.$$

Θεώρημα 1.4.1. *Το σύνολο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $\oplus$, $\ominus$, δηλαδή για p, $q \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ είναι $p \oplus q \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $p \ominus q \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$.*

Απόδειξη. Ας είναι p, $q \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ έχουμε, για $t \in \mathbb{T}^\kappa$,

$$\begin{aligned} 1 + \mu(t)\,(p \oplus q)\,(t) &= 1 + \mu(t)\,[p\,(t) + q\,(t) + \mu\,(t)\,p\,(t)\,q\,(t)] \\ &= 1 + \mu(t)p\,(t) + \mu(t)q\,(t) + \mu^2(t)p\,(t)\,q\,(t) \\ &= 1 + \mu(t)p\,(t) + \mu(t)q\,(t)\,[1 + \mu(t)p\,(t)] \\ &= [1 + \mu(t)p\,(t)]\,[1 + \mu(t)q\,(t)] \neq 0 \end{aligned}$$

και επομένως $p \oplus q \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Επίσης, για $t \in \mathbb{T}^\kappa$, είναι

$$\begin{aligned} 1 + \mu(t)\,(p \ominus q)\,(t) &= 1 + \mu(t)\frac{p\,(t) - q\,(t)}{1 + \mu(t)q\,(t)} \\ &= \frac{1 + \mu(t)q\,(t) + \mu(t)p\,(t) - \mu(t)q\,(t))}{1 + \mu(t)q\,(t)} \\ &= \frac{1 + \mu(t)p\,(t)}{1 + \mu(t)q\,(t)} \neq 0 \end{aligned}$$

και συνεπώς $p \ominus q \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$.

□

Θεώρημα 1.4.2. *Το σύνολο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ εφοδιασμένο με την πρόσθεση $\oplus$ είναι Αβελιανή ομάδα.*

Απόδειξη. Το σύνολο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ έχει ουδέτερο στοιχείο την συνάρτηση $\mathbf{0} \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, αφού

$$(\mathbf{0} \oplus p)\,(t) = \mathbf{0} + p(t) + \mathbf{0} \cdot p(t) = p = (p \oplus \mathbf{0})\,(t)\,, \quad t \in \mathbb{T}^\kappa.$$

Επίσης, αν $p \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, τότε το p έχει αντίθετο, την συνάρτηση $\ominus p = \mathbf{0} \ominus p = -\frac{p}{1+\mu p} \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $p \ominus q = p \oplus (\ominus q)$. Πραγματικά,

$$\begin{aligned} p \oplus (\ominus q)\,(t) &= p(t) + \left(-\frac{q(t)}{1 + \mu(t)q(t)}\right) + \mu(t)p(t)\left(-\frac{q(t)}{1 + \mu(t)q(t)}\right) \\ &= \frac{p(t) + \mu(t)p(t)q(t) - q(t) - \mu(t)p(t)q(t)}{1 + \mu(t)p(t)} = \frac{p(t) - q(t)}{1 + \mu(t)q(t)} \\ &= (p \ominus q)(t). \end{aligned}$$

Επομένως, για $t \in \mathbb{T}$, έχουμε

$$(p \oplus (\ominus p))\,(t) \;=\; (p \ominus p)\,(t) = \frac{p\,(t) - p\,(t)}{1 + \mu(t)p\,(t)} = \mathbf{0}.$$

Για κάθε $p, q, r \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, ισχύει, για $t \in \mathbb{T}$,

$$((p \oplus q) \oplus r)\,(t) \;=\; (p \oplus q)\,(t) + r\,(t) + \mu(t)\,(p \oplus q)\,(t)\,r\,(t)$$

$$\begin{aligned}
&= p(t)+q(t)+\mu(t)p(t)q(t)+r(t)\\
&\quad +\mu(t)[p(t)+q(t)+\mu(t)p(t)q(t)]r(t)\\
&= p(t)+q(t)+r(t)+\mu(t)p(t)q(t)\\
&\quad +\mu(t)p(t)r(t)+\mu(t)q(t)r(t)+\mu^2(t)p(t)q(t)r(t)\\
&= p(t)+q(t)+r(t)+\mu(t)q(t)r(t)\\
&\quad +\mu(t)p(t)[q(t)+r(t)+\mu(t)q(t)r(t)]\\
&= p(t)+(q\oplus r)(t)+\mu(t)p(t)(q\oplus r)(t)\\
&= (p\oplus(q\oplus r))(t),
\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η $\oplus$ είναι προσεταιριστική. Τέλος, για $t \in \mathbb{T}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
(p\oplus q)(t) &= p(t)+q(t)+\mu(t)p(t)q(t)\\
&= q(t)+p(t)+\mu(t)q(t)p(t)\\
&= (q\oplus p)(t).
\end{aligned}$$

□

Στην συνέχεια παραθέτουμε τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης κατά Hilger.

Ορισμός 1.4.3. *Ας είναι* $\mathbb{T}$ *μία χρονοβαθμίδα και* h *ένας θετικός αριθμός. Θέτουμε* $\mathbb{C}_h = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h}\}$, $\mathbb{Z}_h = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < z < \frac{\pi}{h}\}$ *και ορίζουμε τον κυλινδρικό μετασχηματισμό* $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ *με*

$$\xi_h(z) = \begin{cases} \frac{1}{h}Log(1+zh), & \text{αν } h>0\\ z, & \text{αν } h=0,\end{cases}$$

όπου $Log(1+zh)$ *είναι η πρωταρχική τιμή του λογαρίθμου του* $1+zh \neq 0$. *Για* $p \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, *ορίζουμε την εκθετική συνάρτηση με*

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(t))\Delta\tau\right) \quad \text{για } s,\ t \in \mathbb{T}.$$

Είναι προφανές ότι ο προηγούμενος ορισμός είναι αρκετά πολύπλοκος και δύσχρηστος, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις όπου $1+zh<0$ με αποτέλεσμα πολλές από τις αποδείξεις βασικών συμπερασμάτων που αφορούν την την εκθετική συνάρτηση να γίνονται ιδιαίτερα απαιτητικές και μακροσχελείς. Για τον λόγο αυτό, στα επόμενα θα περιοριστούμε στις αποδείξεις μερικών βασικών ιδιοτήτων της εκθετικής συνάρτησης μόνο για την περίπτωση των θετικά regressive συναρτήσεων p, που εισάγονται στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.4.4. *Ας είναι* $\mathbb{T}$ *μία χρονοβαθμίδα. Ορίζουμε το σύνολο* $\mathcal{R}^+(\mathbb{T})$ *των* ***θετικά regressive*** *συναρτήσεων, του* $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ *ως εξής*

$$\mathcal{R}^+(\mathbb{T}) = \{p \in \mathcal{R}(\mathbb{T}) : 1+\mu(t)p(t)>0 \text{ για κάθε } t \in T\}.$$

Λήμμα 1.4.1. *Το σύνολο $\mathcal{R}^+(\mathbb{T})$ είναι υποομάδα του $\mathcal{R}(\mathbb{T})$.*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι $0 \in \mathcal{R}^+(\mathbb{T})$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι για p, $q \in \mathcal{R}^+(\mathbb{T})$ είναι $p \oplus (\ominus q) \in \mathcal{R}^+(\mathbb{T})$. Βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 + \mu(t)\,(p \oplus (\ominus q))\,(t) &= 1 + \mu(t)\frac{p(t) - q\,(t)}{1 + \mu(t)q\,(t)} \\ &= \frac{1 + \mu(t)q\,(t) + \mu(t)p\,(t) - \mu(t)q\,(t)}{1 + \mu(t)q\,(t)} \\ &= \frac{1 + \mu(t)p\,(t)}{1 + \mu(t)q\,(t)} > 0, \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει αμέσως το ζητούμενο. □

Στην περίπτωση θετικά regressive συναρτήσεων ο Ορισμός 1.4.3 αναδιατυπώνεται ως ακολούθως.

Ορισμός 1.4.5. *Θεωρούμε μία χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$. Για κάθε $p \in \mathcal{R}^+(\mathbb{T})$ ορίζουμε την **εκθετική συνάρτηση** $e_p(t, s) : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ με*

$$e_p(t, s) := \begin{cases} \exp\left[\int_s^t \frac{1}{\mu(\tau)} log\,(1 + \mu(\tau)p(\tau))\,\Delta\tau\right], & \textit{αν } \mu(\tau) > 0, \quad \tau \in [s, t] \\ \exp\left[\int_s^t p(\tau)d\tau\right], & \textit{αν } \mu(\tau) = 0, \quad \tau \in [s, t]. \end{cases}$$

Παράδειγμα 1.4.1. Για $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, έχουμε $\mu(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$ και από τον Ορισμό 1.4.5 βρίσκουμε, για $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$e_1(t, t_0) = \exp\left[\int_{t_0}^t 1dt\right] = e^{t - t_0}, \quad t \in \mathbb{R}$$

και

$$e_k(t, t_0) = e^{k(t - t_0)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

όπου k μία πραγματική σταθερά, ενώ για $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, είναι $\mu(t) = 1,\ t \in \mathbb{Z}$, και συνεπώς, για $t \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\begin{aligned} e_1(t, t_0) &= \exp\left[\int_{t_0}^t \frac{1}{1} log\,(1 + 1)\,\Delta\tau\right] = \exp\left[\int_{t_0}^t log\,(2)\,\Delta\tau\right] \\ &= \exp\left(log\,(2)\sum_{r=t_0}^{t-1} 1\right) = \exp\left((t - t_0)log 2\right) \\ &= 2^{t - t_0}. \end{aligned}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$e_k(t, t_0) = (k + 1)^{t - t_0}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

όπου $k > -1$. Συνοψίζοντας, έχουμε ότι

$$e_1(t, t_0) := \begin{cases} e^{t-t_0}, & \text{αν } \mathbb{T} = \mathbb{R} \\ 2^{t-t_0}, & \text{αν } \mathbb{T} = \mathbb{Z}, \end{cases}$$

και, γενικότερα, αν k είναι μία πραγματική σταθερά, τότε

$$e_k(t, t_0) := e^{k(t-t_0)}, \quad \text{αν} \quad \mathbb{T} = \mathbb{R}$$

ενώ, αν $k > -1$, τότε

$$(k+1)^{t-t_0}, \quad \text{αν} \quad \mathbb{T} = \mathbb{Z}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η εκθετική συνάρτηση δεν μηδενίζεται πουθενά στις χρονοβαθμίδες $\mathbb{T}$ και $\mathbb{Z}$. Το θεώρημα που ακολουθεί περιλαμβάνει τις βασικές ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης. Για την απόδειξή του γίνεται χρήση του ορισμού 1.4.5.

Θεώρημα 1.4.3. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και συναρτήσεις p, q, $r \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε, για t, s, $t_0 \in \mathbb{T}$, έχουμε*

(i) $(e_p(t,s))^{\Delta} = p(t)\, e_p(t,s)$,

(ii) $e_p(\sigma(t), s) = [1 + \mu(t)p(t)]\, e_p(t,s)$,

(iii) $e_0(t,s) = 1$ *και* $e_p(t,t) = 1$,

(iv) $e_p(t,s)e_p(s,r) = e_p(t,r)$,

(v) $e_p(t,s) = [e_p(s,t)]^{-1}$,

(vi) $[e_p(t,s)]^{-1} = e_{\ominus p}(t,s)$,

(vii) $e_p(t,s)e_q(t,s) = e_{p\oplus q}(t,s)$,

(viii) $\frac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)} = e_{p\ominus q}(t,s)$,

(ix) $\left(\frac{1}{e_p(t,s)}\right)^{\Delta} = -\frac{p(t)}{e_p^{\sigma}(t,s)}$, *όπου* $e_p^{\sigma}(t,s) := e_p(\sigma(t), s)$,

(x) $e_{p\ominus q}^{\Delta}(t, t_0) = (p-q)\frac{e_p(t,t_0)}{e_q^{\sigma}(t,t_0)}$.

Απόδειξη. (i) Θα αποδείξουμε το (i) ανεξάρτητα από το Θεώρημα 1.4.4. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν $\mu(\tau) = 0$, $\tau \in [t,s]$, τότε

$$[e_p(t,s)]^{\Delta} = \frac{d}{dt}\left[exp\left(\int_s^t p(\tau)d\tau\right)\right] = p(t)e_p(t,s).$$

Αν $\mu(\tau) > 0,\ \tau \in [t, s]$, τότε, με χρήση του Θεωρήματος 1.2.1, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
e_p^{\Delta}(t,s) &= \frac{e_p(\sigma(t),s) - e_p(t,s)}{\mu(t)} \\
&= \frac{1}{\mu(t)} \left\{ \exp\left[\int_s^{\sigma(t)} \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau \right] \right. \\
&\qquad \left. - \exp\left[\int_s^{t} \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\mu(t)} \left\{ \exp\left[\int_t^{\sigma(t)} \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau \right] \times \right. \\
&\qquad \times \exp\left[\int_s^{t} \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau \right] \\
&\qquad \left. - \exp\left[\int_s^{t} \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau \right] \right\} \\
&= \frac{\exp\left[\int_t^{\sigma(t)} \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau \right] - 1}{\mu(t)} \times \\
&\qquad \times \exp\left[\int_s^{t} \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau \right] \\
&= \frac{\exp\left(\mu(t) \frac{1}{\mu(t)} Log\,(1+\mu(t)p(t)) \right) - 1}{\mu(t)} \times \\
&\qquad \times \exp\left[\int_s^{t} \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau \right] \\
&= \frac{\exp\left(Log\,(1+\mu(t)p(t))\right) - 1}{\mu(t)} e_p(t,s) = \frac{1+\mu(t)p(t)-1}{\mu(t)} e_p(t,s) \\
&= p\,(t)\, e_p(t,s).
\end{aligned}
$$

(ii) Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 1.2.2 (ii), για $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, βρίσχουμε

$$
\begin{aligned}
e_p(\sigma(t),s) &= e_p(t,s) + \mu(t) e_p^{\Delta}(t,s) \\
&= e_p(t,s) + \mu(t) p\,(t)\, e_p(t,s) \\
&= (1 + \mu(t)p\,(t))\, e_p(t,s).
\end{aligned}
$$

(iii) Για $t,\ s \in \mathbb{T}$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
e_0(t,s) :&= \begin{cases} \exp\left[\int_s^t \frac{1}{\mu(\tau)} Log 1 \Delta\tau \right], & \text{αν } \mu > 0 \\ \exp\left[\int_s^t 0 d\tau \right], & \text{αν } \mu = 0. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \exp\left[\int_s^t 0 \Delta\tau \right], & \text{αν } \mu > 0 \\ \exp\left[\int_s^t 0 d\tau \right], & \text{αν } \mu = 0 \end{cases} = 1
\end{aligned}
$$

και

$$e_p(t,t) := \begin{cases} \exp\left[\int_t^t \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau\right], & \text{αν } \mu > 0 \\ \exp\left[\int_t^t p(t)d\tau\right], & \text{αν } \mu = 0 \end{cases} = \exp 0 = 1.$$

(iv) Αν $\mu > 0$, τότε, για $t,\ s,\ r \in \mathbb{T}^\kappa$, είναι

$$\begin{aligned} e_p(t,s)e_p(s,r) &= \exp\left[\int_s^t \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau\right] \times \\ &\quad \times \exp\left[\int_r^s \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau\right] \\ &= \exp\left[\int_s^t \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_r^s \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau\right] \\ &= \exp\int_r^t \frac{1}{\mu(\tau)} Log\,(1+\mu(\tau)p(t))\,\Delta\tau = e_p(t,r) \end{aligned}$$

και, αν $\mu = 0$, τότε

$$\begin{aligned} e_p(t,s)e_p(s,r) &= \exp\left[\int_s^t p(t)d\tau\right]\exp\left[\int_r^s p(t)d\tau\right] \\ &= \exp\left[\int_s^t p(t)d\tau + \int_r^s p(t)d\tau\right] \\ &= \exp\int_r^t p(t)d\tau \\ &= e_p(t,r). \end{aligned}$$

(v) Από την (iv), για $t,\ s \in \mathbb{T}^\kappa$, έχουμε $e_p(t,s)e_p(s,t) = e_p(t,t) = 1$, και επομένως $e_p(t,s) = (e_p(s,t))^{-1}$.

(vi) Για $t,\ s \in \mathbb{T}^\kappa$, με χρήση του συμπεράσματος (iii) του Θεωρήματος 1.2.3, έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{e_p(t,s)}\right)^\Delta &= -\frac{e_p^\Delta(t,s)}{e_p(t,s)e_p(\sigma(t),s)} = -\frac{p(t)\,e_p(t,s)}{e_p(t,s)e_p(\sigma(t),s)} \\ &= -\frac{p(t)\,e_p(t,s)}{e_p(t,s)\,(1+\mu(t)p(t))\,e_p(t,s)} = -\frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)}\frac{1}{e_p(t,s)}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\left(\frac{1}{e_p(t,s)}\right)^\Delta = \ominus p(t)\,\frac{1}{e_p(t,s)} \qquad \text{για } t,\ s \in \mathbb{T}^\kappa.$$

Από την προηγούμενη σχέση και την παρατήρηση ότι $e^{\Delta}_{\ominus q}(t,s) = \ominus q(t) e_{\ominus q}(t,s)$ για $t,\ s \in \mathbb{T}^{\kappa}$, παίρνουμε

$$\left(\frac{1}{e_p(t,s)}\right)^{\Delta} = \frac{e^{\Delta}_{\ominus q}(t,s)}{e_{\ominus q}(t,s)} \frac{1}{e_p(t,s)}, \quad t,\ s \in \mathbb{T}^{\kappa},$$

από όπου, για $t,\ s \in \mathbb{T}^{\kappa}$, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{e_p(t,s)}\right)^{\Delta} e_{\ominus q}(t,s) - e^{\Delta}_{\ominus q}(t,s) \frac{1}{e_p(t,s)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{e_p(t,s)}\right)^{\Delta} e_{\ominus q}(t,s) - e^{\Delta}_{\ominus q}(t,s)\frac{1}{e_p(t,s)}}{e_{\ominus q}(t,s) e_{\ominus q}(\sigma(t), s)} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{e_p(t,s)}}{e_{\ominus q}(t,s)}\right)^{\Delta} \end{aligned}$$

και άρα

$$c = \frac{\frac{1}{e_p(t,s)}}{e_{\ominus q}(t,s)}, \quad t,\ s \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

Με την παρατήρηση ότι

$$c = \frac{\frac{1}{e_p(s,s)}}{e_{\ominus q}(s,s)} = 1,$$

τελικά βρίσκουμε $[e_p(t,s)]^{-1} = e_{\ominus p}(t,s)$.

(vii) Για $t,\ s \in \mathbb{T}^{\kappa}$, έχουμε

$$\begin{aligned} [e_p(t,s) e_q(t,s)]^{\Delta}(t) &= [e_p(t,s)]^{\Delta} e_q(\sigma(t), s)) + e_p(t,s)\,[e_p(t,s)]^{\Delta} \\ &= p(t) e_p(t,s) e_q(\sigma(t), s)) + e_p(t,s) q(t)\, e_q(t,s) \\ &= p(t) e_p(t,s)\,[1 + \mu(t) q(t)]\, e_q(t,s) + e_p(t,s) q(t)\, e_q(t,s) \\ &= [p(t) + q(t) + \mu(t) p(t) q(t)]\, e_p(t,s) e_q(t,s), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$[e_p(t,s) e_q(t,s)]^{\Delta}(t) = (p \oplus q)(t)\, e_p(t,s) e_q(t,s), \quad \text{για } t,\ s \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

Με χρήση της παρατήρησης ότι $e^{\Delta}_{p\oplus q}(t,s) = (p \oplus q)(t)\, e_{p\oplus q}(t,s)$, από την προηγούμενη σχέση έχουμε

$$(e_p(t,s) e_q(t,s))^{\Delta}(t) = \frac{e^{\Delta}_{p\oplus q}(t,s)}{e_{p\oplus q}(t,s)} e_p(t,s) e_q(t,s),$$

οπότε

$$0 = (e_p(t,s) e_q(t,s))^{\Delta}(t)\, e_{p\oplus q}(t,s) - e^{\Delta}_{p\oplus q}(t,s) e_p(t,s) e_q(t,s)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(e_p(t,s)e_q(t,s))^{\Delta}(t)\, e_{p\oplus q}(t,s) - e_p(t,s)e_q(t,s)e^{\Delta}_{p\oplus q}(t,s)}{e_{p\oplus q}(t,s)e_{p\oplus q}(\sigma(t),s)} \\ &= \left(\frac{e_p(t,s)e_q(t,s)}{e_{p\oplus q}(t,s)}\right)^{\Delta}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{e_p(t,s)e_q(t,s)}{e_{p\oplus q}(t,s)} = c, \quad \text{όπου } c \text{ μία σταθερά.}$$

Αλλά

$$c = \frac{e_p(t,t)e_q(t,t)}{e_{p\oplus q}(t,t)} = 1,$$

οπότε παίρνουμε $e_p(t,s)e_q(t,s) = e_{p\oplus q}(t,s)$.
(viii) Από τις (vi) και (vii) έπεται, για $t,\ s \in \mathbb{T}^{\kappa}$,

$$e_{p\ominus q}(t,s) = e_{p\oplus(\ominus q)}(t,s) = e_p(t,s)e_{\ominus q}(t,s) = \frac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)}.$$

(ix) Για $t,\ s \in \mathbb{T}^{\kappa}$, είναι

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{e_p(t,s)}\right)^{\Delta} &= -\frac{e_p^{\Delta}(t,s)}{e_p(t,s)e_p(\sigma(t),s)} = -\frac{p(t)\,e_p(t,s)}{e_p(t,s)e_p(\sigma(t),s)} \\ &= -\frac{p(t)}{e_p(\sigma(t),s)} = -\frac{p(t)}{e_p^{\sigma}(t,s)}. \end{aligned}$$

(x) Με χρήση του (viii), για $t,\ t_0 \in \mathbb{T}^{\kappa}$, έχουμε

$$e^{\Delta}_{p\ominus q} = [(p\ominus q)(t)]\, e_{p\ominus q}(t,t_0) = \frac{p(t)-q(t)}{1+\mu(t)q(t)}\frac{e_p(t,t_0)}{e_q(t,t_0)} = \frac{[p(t)-q(t)]\, e_p(t,t_0)}{e_q(\sigma(t),t_0)}.$$

□

Από το συμπέρασμα (i) του Θεωρήματος 1.4.3 έπεται ότι η εκθετική συνάρτηση $e_p(t,s)$ αποτελεί μία λύση της δυναμικής εξίσωσης $y^{\Delta}(t) = p(t)y(t),\ t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Γενικότερα, έχει αποδειχθεί ([13]) το επόμενο συμπέρασμα.

Θεώρημα 1.4.4. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία regressive συνάρτηση. Αν $t_0 \in \mathbb{T}$ και $y_0 \in \mathbb{R}$, τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης*

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t)$$

που ικανοποιεί την συνθήκη

$$y(t_0) = y_0$$

είναι η συνάρτηση $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ με

$$y(t) = e_p(t,t_0)y_0,\ t \in \mathbb{T}.$$

Ας σημειωθεί ότι το προηγούμενο συμπέρασμα αποτελεί έναν εναλλακτικό ορισμό της εκθετικής συνάρτησης $e_p(t,s)$.

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στην παραγώγιση της εκθετικής συνάρτησης ως προς την δεύτερη μεταβλητή.

Θεώρημα 1.4.5. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $p \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αν $a, b, c \in \mathbb{T}$, τότε*

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\left[(e_p(c,t))\right] = -p(t)\left[(e_p(c,t))\right]^{\sigma} \quad \text{για} \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}$$

και

$$\int_a^b p(t)\, e_p(c,\sigma(t))\,\Delta t = e_p(c,\alpha) - e_p(c,b).$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας ορισμένες από τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης που αναφέρονται στο Θεώρημα 1.4.3 καθώς και το ότι είναι $e^{\Delta}_{\ominus p}(t,c) = \ominus p(t) e_{\ominus p}(t,c)$, παίρνουμε, για $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$,

$$\begin{aligned} p(t)e_p(c,\sigma(t)) &= p(t)e_{\ominus p}(\sigma(t),c) = p(t)\left[1+\mu(t)(\ominus p)(t)\right]e_{\ominus p}(t,c) \\ &= p(t)\left[1-\frac{\mu(t)p(t)}{1+\mu(t)p(t)}\right]e_{\ominus p}(t,c) = p(t)\frac{1}{1+\mu(t)p(t)}e_{\ominus p}(t,c) \\ &= -(\ominus p)(t)e_{\ominus p}(t,c) = -e^{\Delta}_{\ominus p}(t,c) \end{aligned}$$

και άρα

$$p(t)e_p(c,\sigma(t)) = -\frac{\Delta}{\Delta t}[e_p(c,t)], \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε

$$\int_a^b p(t)\, e_p(c,\sigma(t))\,\Delta t = -\int_a^b \frac{\Delta}{\Delta t}[e_p(c,t)]\Delta t = e_p(c,\alpha) - e_p(c,b).$$

□

Σε αντίθεση με την περίπτωση $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, η εκθετική συνάρτηση είναι δυνατόν να λαμβάνει αρνητικές τιμές. Η αξιοσημείωτη αυτή ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης προκύπτει από το επόμενο θεώρημα για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στο βιβλίο [13].

Θεώρημα 1.4.6. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα, $p \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $s_0 \in \mathbb{T}$. Τότε*

(i) Αν $1+\mu(t)p(t) > 0$ στο $\mathbb{T}^{\kappa}$, τότε $e_p(t,s_0) > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$.

(ii) Αν $1+\mu(t)p(t) < 0$ στο $\mathbb{T}^{\kappa}$, τότε $e_p(t,s_0) = \alpha(t,s_0)(-1)^{n_t}$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$, όπου

$$\alpha(t,s_0) := \exp\left[\int_{s_0}^t \frac{1}{\mu(\tau)}\log|1+\mu(\tau)p(t)|\,\Delta\tau\right]$$

και

$$n_t = \begin{cases} |[s_0,t)|, & \text{αν } t \geq s_0 \\ |[t,s_0)|, & \text{αν } t < s_0. \end{cases}$$

Σημειώνεται ότι με $|M|$ συμβολίζεται ο πληθικός αριθμός του συνόλου M.

Παράδειγμα 1.4.2. Ας είναι $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ και $p(t) = -3$, $t \in \mathbb{Z}$. Είναι $\mu(t) = 1$ και $1 + \mu(t)p(t) = -2 < 0$ και συνεπώς $p(t) \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για $t \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\begin{aligned} e_{-2}(t,0) &= (-1)^{n_t} \exp\left[\int_0^t \frac{1}{1} \log|1 + 1\,(-3)|\,\Delta\tau\right] \\ &= (-1)^{n_t} \exp\left[\int_0^t \log(2)\,\Delta\tau\right] \\ &= (-1)^{n_t}\, 2^t, \end{aligned}$$

όπου

$$n_t = \begin{cases} t, & \text{αν } t \geq 0 \\ -t, & \text{αν } t < 0. \end{cases}$$

Το επόμενο λήμμα αναφέρεται σε μία σημαντική ιδιότητα των χρονοβαθμίδων με τουλάχιστον αριθμήσιμο πλήθος σημείων στα οποία μία συνάρτηση της μορφής $1 + \mu p$ λαμβάνει αρνητικές τιμές, για κάποια δπ-συνεχή και regressive συνάρτηση p.

Λήμμα 1.4.2. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα για την οποία υπάρχει μία δπ-συνεχής και regressive συνάρτηση $p : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: Υπάρχει μία ακολουθία διακεκριμμένων σημείων $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{T}^\kappa$ για την οποία ισχύει*

$$1 + \mu(t_n)p(t_n) < 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Τότε ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} |t_n| = \infty$.

Σχετικά με το πρόσημο της εκθετικής συνάρτησης, έχουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.4.7. *Έστω $t_0 \in \mathbb{T}$ και ας είναι $p : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ μία δπ-συνεχής και regressive συνάρτηση.*

(i) Αν $1 + \mu(t)p(t) > 0$ για όλα τα $t \in \mathbb{T}^\kappa$, τότε η εκθετική συνάρτηση $e_p(t, t_0)$ είναι θετική στο $\mathbb{T}$.

(ii) Αν $1 + \mu(\tau)p(\tau) < 0$ για κάποιο $\tau \in \mathbb{T}^\kappa$, τότε

$$e_p(\tau, t_0)e_p(\sigma(\tau), t_0) < 0.$$

(iii) Αν $1 + \mu(t)p(t) < 0$ για οποιοδήποτε $t \in \mathbb{T}^\kappa$, τότε η εκθετική συνάρτηση $e_p(t, t_0)$ αλλάζει πρόσημο σε κάθε σημείο του $\mathbb{T}$.

(iv) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν σύνολα $A = \{t_i : i \in \mathbb{N}\}$, $B = \{s_i : i \in \mathbb{N}\}$ στο $\mathbb{T}$ με

$$\ldots < s_2 < s_1 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$$

και τέτοια ώστε $1 + \mu(t_n)p(t_n) < 0$, $1 + \mu(s_n)p(s_n) < 0$ και $1 + \mu(t)p(t) > 0$ για $t \in \mathbb{T} - (A \cup B)$.

Αν τα σύνολα A, B αποτελούνται από άπειρα το πλήθος σημεία, τότε θα είναι $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ *και* $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. *Στην περίπτωση αυτή*

$$e_p(t,t_0) > 0 \text{ στο } [\sigma(s_1), t_1].$$

Αν το σύνολο A αποτελείται από άπειρα το πλήθος σημεία, τότε

$$(-1)^i e_p(t,t_0) > 0 \text{ στο } [\sigma(t_i), t_{i+1}], \ i = 1, 2, \ldots.$$

Αν το σύνολο A αποτελείται από N σημεία, τότε

$$(-1)^i e_p(t,t_0) > 0 \text{ στο } [\sigma(t_i), t_{i+1}], \ i = 1, 2, \ldots, N-1$$

και

$$(-1)^N e_p(t,t_0) > 0 \text{ στο } [\sigma(t_N), \infty).$$

Αν $A = \emptyset$ *και* $B \neq \emptyset$, *τότε*

$$e_p(t,t_0) > 0 \text{ στο } [\sigma(s_1), \infty).$$

Αν το σύνολο B αποτελείται από άπειρα το πλήθος σημεία, τότε

$$(-1)^i e_p(t,t_0) > 0 \text{ στο } [\sigma(s_{i+1}), s_i], \ i = 1, 2, \ldots.$$

Αν το σύνολο B αποτελείται από M σημεία, τότε

$$(-1)^i e_p(t,t_0) > 0 \text{ στο } [\sigma(s_{i+1}), s_i], \ i = 1, 2, \ldots, M-1$$

και

$$(-1)^M e_p(t,t_0) > 0 \text{ στο } (-\infty, s_M].$$

Αν $B = \emptyset$ *και* $A \neq \emptyset$, *τότε*

$$e_p(t,t_0) > 0 \text{ στο } (-\infty, t_1].$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του συμπεράσματος (iv) περιέχεται στο άρθρο [5] και παραλείπεται επειδή είναι μακροσκελής.

(i) Υποθέτουμε ότι $1 + \mu(t)p(t) > 0$, $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Παρατηρούμε ότι για $t \in \mathbb{T}^\kappa$ με $\mu(t) > 0$ έχουμε $log(1 + \mu(t)p(t)) \in \mathbb{R}$ ενώ για $t \in \mathbb{T}^\kappa$ με $\mu(t) = 0$, είναι $p(t) \in \mathbb{R}$. Και στις δύο περιπτώσεις από τον Ορισμό 1.4.5 έπεται ότι $e_p(t,t_0) > 0$.

(ii) Αν $1 + \mu(\tau)p(\tau) < 0$ για κάποιο $\tau \in \mathbb{T}^\kappa$, τότε με χρήση του συμπεράσματος (ii) του Θεωρήματος 1.4.3 βρίσκουμε

$$\begin{aligned} e_p(\tau,t_0)e_p(\sigma(\tau),t_0) &= e_p(\tau,t_0)[1+\mu(\tau)p(\tau)]e_p(\tau,t_0) \\ &= (1+\mu(\tau)p(\tau))e_p^2(\tau,t_0) < 0 \end{aligned}$$

(iii) Είναι προφανές από το Θεώρημα 1.4.6.

□

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι αν μία συνάρτηση $p : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ είναι δπ-συνεχής και regressive, τότε η εκθετική συνάρτηση $e_p(t,t_0)$ λαμβάνει πραγματικές τιμές και δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\mathbb{T}$.

1.5 Ορισμένα Βασικά Θεωρήματα

Η ενότητα αυτή είναι αφιερωμένη σε ορισμένα θεμελιώδη θεωρήματα του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού μίας μεταβλητής της θεωρίας των χρονοβαθμίδων. Μερικά από τα επόμενα συμπεράσματα αποτελούν επεκτάσεις σε αυθαίρετες χρονοβαθμίδες ορισμένων γνωστών συμπερασμάτων του συνεχούς ή/και του διακριτού λογισμού.

Θεώρημα 1.5.1 (Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής). *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $f : [r,s]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, όπου r, $s \in \mathbb{T}$ με $r < s$. Αν*

$$f(r) < 0 < f(s),$$

τότε υπάρχει σημείο $c \in [r,s)$ τέτοιο ώστε

$$f(c)f^{\sigma}(c) \leq 0.$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι, με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.5.1 στην περίπτωση που $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, προκύπτει το γνωστό θεώρημα του Bolzano του απειροστικού λογισμού.

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στην μονοτονία συναρτήσεων σε χρονοβαθμίδες. Ας σημειωθεί ότι οι ορισμοί που χαρακτηρίζουν μία συνάρτηση f ως προς την μονοτονία σε μία χρονοβαθμίδα είναι αντίστοιχοι με τους ορισμούς στο $\mathbb{R}$, και ως εκ τούτου δεν κρίνεται απαραίτητη η διατύπωσή τους.

Θεώρημα 1.5.2. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $f^{\Delta}(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ (αντίστοιχα, $f^{\Delta}(t) \leq 0$, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$), τότε η f είναι αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα) στο $\mathbb{T}$.*

Απόδειξη. Έστω $f^{\Delta} \geq 0$ στο $\mathbb{T}^{\kappa}$ και s, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ με $s \leq t$. Από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος έχουμε

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^{\Delta}(r)\Delta r \geq f(s),$$

από όπου συνεπάγεται ότι η f είναι αύξουσα στο $\mathbb{T}$. □

Στην συνέχεια διατυπώνουμε ένα συμπέρασμα που περιγράφει έναν τύπο υπολογισμού της n-τάξης Δ-παραγώγου ενός γινομένου δύο συναρτήσεων. Για την διατύπωση αυτού του συμπεράσματος, χρειαζόμαστε μερικούς συμβολισμούς.

Ας είναι Λ μία (αυθαίρετη) ακολουθία που απαρτίζεται αποκλειστικά από τα σύμβολα σ και Δ με το σύμβολο σ να εμφανίζεται n φορές και το σύμβολο Δ να εμφανίζεται $n-k$ φορές, όπου $k = \{0,1,\ldots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ας είναι S_k^n το σύνολο όλων των ακολουθιών Λ της μορφής που περιγράψαμε. Αν $\Lambda = a_1,\ldots,a_n$ με $a_i \in \{\Delta,\sigma\}$, θέτουμε $f^{\Lambda} = f^{a_1\ldots a_n} = ((\ldots f^{a_1})^{a_1}\ldots)^{a_n}$.

Θεώρημα 1.5.3. *Αν*

$$f^{\Lambda} \text{ υπάρχει για κάθε } \Lambda \in S_k^m,$$

τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, *ισχύει*

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k}, \tag{1.8}$$

όπου $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *είναι μία* n *φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την σχέση (1.8), χρησιμοποιώντας την αρχή της απλής πεπερασμένης επαγωγής. Αν $n = 1$, τότε, από το συμπέρασμα (iii) του Θεωρήματος 1.2.3, η (1.8) είναι αληθής. Έστω ότι η (1.8) είναι αληθής για κάποιο φυσικό αριθμό m. Θα αποδείξουμε ότι η (1.8) είναι αληθής για $n = m + 1$. Με χρήση της (1.8), για $m = n$, έχουμε

$$\begin{aligned}
(fg)^{\Delta^{m+1}} &= \left[(fg)^{\Delta^m}\right]^{\Delta} = \left[\sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(m)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k} \right]^{\Delta} = \sum_{k=0}^{m} \left[\left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(m)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k} \right]^{\Delta} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left\{ \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(m)}} f^{\Lambda} \right)^{\sigma} g^{\Delta^{k+1}} + \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(m)}} f^{\Lambda} \right)^{\Delta} g^{\Delta^k} \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(m)}} f^{\Lambda} \right)^{\sigma} g^{\Delta^{k+1}} + \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(m)}} f^{\Lambda} \right)^{\Delta} g^{\Delta^k} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \left(\sum_{\Lambda \in S_{k-1}^{(m)}} f^{\Lambda^{\sigma}} \right) g^{\Delta^k} + \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(m)}} f^{\Lambda^{\Delta}} \right) g^{\Delta^k} \\
&= \left(\sum_{\Lambda \in S_m^{(m)}} f^{\Lambda^{\sigma}} \right) g^{\Delta^{m+1}} + \left(\sum_{\Lambda \in S_0^{(m)}} f^{\Lambda^{\Delta}} \right) g \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{\Lambda \in S_{k-1}^{(m)}} f^{\Lambda^{\sigma}} + \sum_{\Lambda \in S_k^{(m)}} f^{\Lambda^{\Delta}} \right) g^{\Delta^k} \\
&= \left(\sum_{\Lambda \in S_{m+1}^{(m+1)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^{m+1}} + \left(\sum_{\Lambda \in S_0^{(m+1)}} f^{\Lambda} \right) g + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(m+1)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^{k+1}}
\end{aligned}$$

και άρα

$$(fg)^{\Delta^{m+1}} = \sum_{k=0}^{m+1} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(m+1)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k}.$$

Επομένως η σχέση (1.8) είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Θα πρέπει εδώ να επισημανθεί ότι, αν $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μία Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση, η σχέση $f^{\Delta^{\sigma}} = f^{\sigma^{\Delta}}$ γενικά δεν ισχύει, ακόμη και στην περίπτωση που υπάρχει η Δ-παράγωγος της f^{σ}. Εντούτοις, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι, στις περιπτώσεις $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ και $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, η σχέση $f^{\Delta^{\sigma}} = f^{\sigma^{\Delta}}$ είναι αληθής, καθώς επίσης ότι, γενικότερα, η σχέση αυτή ισχύει σε χρονοβαθμίδες στις οποίες η συνάρτηση κόκκωσης μ είναι σταθερή.

Παράδειγμα 1.5.1. Αν $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, τότε για κάθε $\Lambda \in S_k^{(n)}$, έχουμε

$$f^{\Lambda} = f^{(n-k)},$$

όπου με $f^{(n)}$ συμβολίζουμε την παράγωγο n τάξης της f, αν υπάρχει. Προφανώς, το σύνολο S_k^n είναι το σύνολο των συνδιασμών n ανά k, και συνεπώς το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $S_k^{(n)}$ είναι

$$|S_k^{(n)}| = \binom{n}{k}.$$

Επομένως, έχουμε

$$\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} = \sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{(n-k)} = f^{(n-k)} \sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} 1 = \binom{n}{k} f^{(n-k)}$$

και έτσι από το Θεώρημα 1.5.3 παίρνουμε

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Στη συνεχή περίπτωση, η παραπάνω σχέση αποτελεί τον γνωστό τύπο του Leibniz.

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι οι κανόνες της αλυσίδας του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, γενικά, δεν ισχύουν, με την μορφή που έχουν στη συνεχή περίπτωση, σε οποιαδήποτε χρονοβαθμίδα. Στην συνέχεια παρατίθενται τρία θεωρήματα που αποτελούν κανόνα αλυσίδας στη θεωρία των χρονοβαθμίδων.

Θεώρημα 1.5.4. *Ας είναι* $\mathbb{T}$ *μία χρονοβαθμίδα,* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *μία συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι* Δ*-παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{T}^\kappa$*, και* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση* $f \circ g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *είναι* Δ*-παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{T}^\kappa$ *και, για* $t \in \mathbb{T}$*, υπάρχει σημείο* c *του πραγματικού διαστήματος* $[t, \sigma(t)]$ *με*

$$(f \circ g)^\Delta (t) = f'(g(c))\, g^\Delta (t). \tag{1.9}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι $t \in \mathbb{T}^\kappa$ είναι σταθερό. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(i) Το t είναι δεξιά διασπαρμένο σημείο του $\mathbb{T}$. Τότε

$$(f \circ g)^\Delta(t) = \frac{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}{\mu(t)}.$$

Αν $g(\sigma(t)) = g(t)$, από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε ότι $(f \circ g)^\Delta(t)$, ενώ είναι και $g^\Delta(t) = 0$, και άρα η σχέση (1.9) είναι αληθής για κάθε $c \in [t, \sigma(t)]$. Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση που $g(\sigma(t)) \neq g(t)$. Τότε από το θεώρημα μέσης τιμής για την συνεχή περίπτωση προκύπτει

$$(f \circ g)^\Delta(t) = \frac{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}{(g(\sigma(t)) - g(t)} \frac{(g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)} = f'(\xi) g^\Delta(t),$$

για κάποιο ξ μεταξύ των $g(t)$ και $g(\sigma(t))$. Επειδή η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, υπάρχει ένα $c \in [t, \sigma(t)]$ τέτοιο ώστε $f(c) = \xi$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

(ii) Το t είναι δεξιά πυκνό σημείο του $\mathbb{T}$. Κάνοντας πάλι χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής, βρίσκουμε, για την παραγωγισίμη συνάρτηση f στο διάστημα με άκρα τα $g(t)$, $g(s)$, ότι

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^\Delta(t) &= \lim_{s \to t} \frac{f(g(t)) - f(g(s))}{t - s} \\
&= \lim_{s \to t} \left(\frac{f(g(t)) - f(g(s))}{g(t) - g(s)} \frac{g(t) - g(s)}{t - s} \right) \\
&= \lim_{s \to t} f'(\xi_s) \lim_{s \to t} \frac{g(t) - g(s)}{t - s} \\
&= \lim_{s \to t} f'(\xi_s) g^\Delta(t),
\end{aligned}$$

όπου ξ_s είναι μεταξύ των $g(s)$ και $g(t)$. Από την συνέχεια της g έπεται ότι $\lim_{s \to t} \xi_s = g(t)$. Επομένως, για $c = t$, η σχέση (1.9) είναι αληθής. □

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται ότι η σύνθεση μίας παραγωγίσιμης συνάρτησης με μία Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι μία Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ύπαρξη ενός ορισμένου ολοκληρώματος στην έκφραση της Δ-παραγώγου της σύνθεσης. Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο [13].

Θεώρημα 1.5.5. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $f \circ g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι Δ-παραγωγίσιμη και ισχύει*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t) g^{\Delta}(t)\right) dh \right\} g^{\Delta}(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

όπου με f' συμβολίζουμε την (συνήθη) παράγωγο της f στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.5.2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(t) = t^2$, $t \in \mathbb{Z}$ και $f(x) = e^x$, $t \in \mathbb{R}$. Είναι $g^{\Delta}(t) = t + \sigma(t) = 2t + 1$, $t \in \mathbb{Z}$, $f'(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ με $f \circ g)(t) = e^{t^2}$, $t \in \mathbb{Z}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.5.5, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^{\Delta}(t) &= \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t) g^{\Delta}(t)\right) dh \right\} g^{\Delta}(t) \\
&= (2t+1) \int_0^1 e^{t^2 + h(2t+1)} dh = (2t+1) e^{t^2} \int_0^1 e^{h(2t+1)} dh \\
&= (2t+1) e^{t^2} \frac{1}{2t+1} \left[e^{h(2t+1)} \right]_{h=0}^{h=1} = e^{t^2}\left(e^{2t+1} - 1\right)
\end{aligned}$$

και συνεπώς,

$$\left(e^{t^2}\right)^{\Delta} = e^{t^2}\left(e^{2t+1} - 1\right), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Αν αντί να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.5.5, υπολογίσουμε άμεσα την παράγωγο της $f \circ g$ παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Πραγματικά, για $t \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\Delta(f(g(t)) = f(g(t+1)) - f(g(t)) = e^{(t+1)^2} - e^{t^2} = e^{t^2}\left(e^{2t+1} - 1\right).$$

Για το επόμενο συμπέρασμα θεωρούμε μία χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$ και μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση $\nu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το σύνολο $\widetilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ να είναι επίσης χρονοβαθμίδα. Συμβολίζουμε με $\widetilde{\sigma}$ και $\widetilde{\Delta}$ την συνάρτηση κόκκωσης και την Δ-παράγωγο, αντίστοιχα, στην χρονοβαθμίδα $\widetilde{\mathbb{T}}$. Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε τον ακόλουθο κανόνα αλυσίδας.

Θεώρημα 1.5.6. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $\nu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση που είναι Δ-παραγωγίσιμη στο $\mathbb{T}^{\kappa}$ και τέτοια ώστε το σύνολο $\widetilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ να είναι χρονοβαθμίδα. Αν $w : \widetilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ είναι μία Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\widetilde{\mathbb{T}}^{\kappa}$, τέτοια ώστε η συνάρτηση $w \circ \nu$ να είναι Δ-παραγωγίσιμη στο $\mathbb{T}^{\kappa}$, τότε*

$$(w \circ \nu)^{\Delta} = (w^{\widetilde{\Delta}} \circ \nu)\nu^{\Delta}.$$

Μία εφαρμογή του Θεωρήματος 1.5.6 είναι το ακόλουθο θεώρημα που μας επιτρέπει να υπολογίζουμε την Δ-παράγωγο αντίστροφης συνάρτησης.

Θεώρημα 1.5.7. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $\nu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση τέτοια ώστε το σύνολο $\widetilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ να είναι μία χρονοβαθμίδα. Τότε, για κάθε $t \in \mathbb{T}^\kappa$ με $\nu^\Delta(t) \neq 0$, ισχύει*

$$\frac{1}{\nu^\Delta(t)} = \left[(\nu^{-1})^{\widetilde{\Delta}} \circ \nu\right](t).$$

Μία άλλη εφαρμογή του Θεωρήματος 1.5.6 είναι το επόμενο θεώρημα αντικατάστασης για ολοκληρώματα.

Θεώρημα 1.5.8. *Έστω $\nu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση και $\widetilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ μία χρονοβαθμίδα. Αν $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μία δπ-συνεχής συνάρτηση και η ν είναι Δ-παραγωγίσιμη, έτσι ώστε η ν^Δ να είναι δπ-συνεχής, τότε, για a, $b \in \mathbb{T}$, έχουμε*

$$\int_a^b f(t)\nu^\Delta(t)\Delta t = \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (f \circ \nu^{-1})(s)\widetilde{\Delta}s.$$

Παράδειγμα 1.5.3. Θεωρούμε την χρονοβαθμίδα $\mathbb{T} := \mathbb{N}_0^{1/2} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}_0\}$. Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.5.8 για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t \left(\sqrt{\tau^2+1}+\tau\right) 3^{\tau^2}\Delta\tau.$$

Έστω $\nu(t) = t^2$, $t \in \mathbb{T}$. Τότε η συνάρτηση $\nu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο $\nu\left(\mathbb{N}_0^{1/2}\right) = \mathbb{N}_0$ είναι χρονοβαθμίδα. Έχουμε ότι

$$\nu^\Delta(t) = (t^2)^\Delta = \sigma(t) + t = \sqrt{t^2+1} + t.$$

Θέτοντας $f(t) := 3^{t^2}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left(\sqrt{\tau^2+1}+\tau\right) 3^{\tau^2}\Delta\tau &= \int_0^t f(\tau)\nu^\Delta(\tau)\Delta\tau = \int_0^{t^2} f(\sqrt{s})\widetilde{\Delta}s \\
&= \int_0^{t^2} 3^s\widetilde{\Delta}s = \left[\frac{1}{2}3^s\right]_{s=0}^{s=t^2} \\
&= \frac{1}{2}(3^{t^2} - 1).
\end{aligned}$$

Στην συνέχεια αναφέρουμε το θεώρημα του Rolle σε χρονοβαθμίδες χρησιμοποιώντας την Δ και ∇ παράγωγο. Η απόδειξη παρουσιάζεται στο άρθρο [39].

Θεώρημα 1.5.9. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$, η οποία είναι Δ και ∇-παραγωγίσιμη στο $[a,b]_{\mathbb{T}^*}$, όπου $\mathbb{T}^* = \mathbb{T}^\kappa \cap \mathbb{T}_\kappa$. Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει ένα $t_0 \in [a,b]_{\mathbb{T}^*}$ τέτοιο ώστε*

$$f^\Delta(t_0)f^\nabla(t_0) < 0.$$

Για την διατύπωση των επόμενων συμπερασμάτων είναι απαραίτητο να εισάγουμε ορισμένους ορισμούς.

Θέτουμε $\overline{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \sup \mathbb{T} \cup \inf \mathbb{T}$. Αν $\infty \in \overline{\mathbb{T}}$, τότε το ∞ καλείται αριστερά πυκνό ενώ αν $-\infty \in \overline{\mathbb{T}}$, τότε το $-\infty$ καλείται δεξιά πυκνό. Για κάθε αριστερά πυκνό σημείο $t_0 \in \mathbb{T}$ και κάθε θετική πραγματική σταθερά ε ορίζουμε το μη κενό σύνολο $L_\varepsilon(t_0) = \{t \in \mathbb{T} : 0 < t - t_0, \varepsilon\}$. Αν $\infty \in \overline{\mathbb{T}}$, για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε το μη κενό σύνολο $L_\varepsilon(\infty) = \{t \in \mathbb{T} : t > \frac{1}{t}\}$. Αναλογα ορίζουμε τα σύνολα $R_\varepsilon(t_0)$, για κάθε δεξιά πυκνό σημείο $t_0 \in \overline{\mathbb{T}}$ και $\varepsilon > 0$. Ας είναι $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Για $t_0 \in \overline{\mathbb{T}}$, θέτουμε

$$\liminf_{t \to t_0^-} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf_{t \in L_\varepsilon(t_0)} f(t).$$

Ανάλογα ορίζονται τα $\liminf_{t \to t_0^+} f(t)$, $\limsup_{t \to t_0^-} f(t)$ και $\limsup_{t \to t_0^+} f(t)$. Είμαστε σε θέση τώρα να διατυπώσουμε τα επόμενα δύο θεωρήματα που αποτελούν διαφορετικές εκδοχές του κανόνα L' Hopital σε χρονοβαθμίδες, οι αποδείξεις των οποίων περιλαμβάνονται στο βιβλίο [13].

Θεώρημα 1.5.10. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και f, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ δύο Δ-παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε*

$$\lim_{t \to t_0^-} f(t) = \lim_{t \to t_0^-} g(t) = 0,$$

όπου $t_0 \in \overline{\mathbb{T}}$ ένα αριστερά πυκνό σημείο. Αν υπάρχει θετική πραγματική σταθερά ε έτσι ώστε

$$g(t) > 0 \quad \text{και} \quad g^\Delta(t) < 0, \quad \text{για κάθε } t \in L_\varepsilon(t_0),$$

τότε

$$\liminf_{t \to t_0^-} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} \leq \liminf_{t \to t_0^-} \frac{f(t)}{g(t)} \leq \limsup_{t \to t_0^-} \frac{f(t)}{g(t)} \leq \limsup_{t \to t_0^-} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)}.$$

Θεώρημα 1.5.11. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και f, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ δύο Δ-παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $\lim_{t \to t_0^-} g(t) = \infty$, όπου $t_0 \in \overline{\mathbb{T}}$ ένα αριστερά πυκνό σημείο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετική πραγματική σταθερά ε τέτοια ώστε*

$$g(t) > 0 \quad \text{και} \quad g^\Delta(t) < 0, \quad \text{για κάθε } t \in L_\varepsilon(t_0).$$

Τότε, αν $\lim_{t \to t_0^-} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} = r \in \overline{\mathbb{T}}$, έχουμε $\lim_{t \to t_0^-} \frac{f(t)}{g(t)} = r$.

Η παρούσα διατριβή μελετά ένα μικρό μέρος της θεωρίας των χρονοβαθμίδων καθώς όπως, έχει ήδη αναφερθεί, η θεωρία αυτή τα τελευταία χρόνια έχει κινήσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών με αποτέλεσμα την συνεχή δημοσίευση άρθρων. Στην συνέχεια θα αναφέρουμε, ενδεικτικά, κάποια άρθρα που αναφέρονται στην βασική θεωρία των χρονοβαθμίδων και τα οποία λόγω όγκου δεν μπορέσαμε να συμπεριλάβουμε στην εργασία αυτή. Ο Pospišil στο άρθρο [35] εισήγαγε το υπερβολικό ημίτονο και το υπερβολικό συνημίτονο σε χρονοβαθμίδες, θεμελιώνοντας ταυτόχρονα τις βασικές τους ιδιότητες. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το άρθρο [2] των Agarwal, Bohner και Peterson το οποίο περιέχει γνωστές ανισότητες που έχουν μεταφερθεί στην θεωρία των χρονοβαθμίδων. Τέλος αξίζει να αναφερθεί ότι σε αντίθεση με την εκθετική συνάρτηση, η λογαριθμική συνάρτηση μελετήθηκε πολύ πρόσφατα (2008) από τον Jackson [24].

Κεφάλαιο 2

Ταλάντωση Δυναμικών Εξισώσεων Πρώτης Τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με την ταλάντωση δυναμικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Στην πρώτη ενότητα εισάγονται οι έννοιες της δυναμικής εξίσωσης πρώτης τάξης και της λύσης της και η έννοια της ταλάντωσης σε χρονοβαθμίδες. Περαιτέρω, γίνεται συσχέτιση με τις αντίστοιχες έννοιες στις περιπτώσεις $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ και $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. Στην δεύτερη ενότητα παρουσιάζονται θεωρήματα ταλάντωσης για την συνήθη γραμμική δυναμική εξίσωση πρώτης τάξης, ενώ στην τρίτη ενότητα περιέχονται θεωρήματα ταλάντωσης για πρώτης τάξης δυναμικές εξισώσεις με υστέρηση. Η τέταρτη ενότητα είναι αφιερωμένη σε κριτήρια ταλάντωσης για πρώτης τάξης δυναμικές εξισώσεις ουδετέρου τύπου.

2.1 Γενικά

Ορισμός 2.1.1. *Ας είναι $f : \mathbb{T}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Μία εξίσωση της μορφής*

$$y^{\Delta} = f\left(t, y, y^{\sigma}\right), \ t \in \mathbb{T}^{\kappa} \tag{2.1}$$

*λέγεται **δυναμική εξίσωση πρώτης τάξης**.*

Αν η συνάρτηση f της εξίσωσης (2.1) είναι γραμμική συνάρτηση ως προς την δεύτερη και τρίτη μεταβλητή της, θα λέμε ότι η εξίσωση (2.1) είναι μία ***γραμμική*** δυναμική εξίσωση πρώτης τάξης.

Για παράδειγμα, οι εξισώσεις της μορφής

$$y^{\Delta} = f_1(t)\, y + f_2(t), \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}$$

ή της μορφής

$$y^{\Delta} = f_1(t)\, y^{\sigma} + f_2(t), \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}$$

με f_1, $f_2 : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, είναι δύο γραμμικές δυναμικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Στην περίπτωση που στην εξίσωση (2.1) επισυνάπτεται και μία συνθήκη της μορφής

$$y(t_0) = y_0, \tag{2.2}$$

όπου $t_0 \in \mathbb{T}$ και y_0 είναι μία πραγματική σταθερά, τότε λέμε ότι η εξίσωση (2.1) μαζί με την αρχική συνθήκη (2.2) αποτελούν το **πρόβλημα αρχικών τιμών** (2.1)-(2.2).

Ορισμός 2.1.2. *Μία συνάρτηση $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την δυναμική εξίσωση (2.1) λέγεται* ***λύση της δυναμικής εξίσωσης (2.1)****. Αν μία λύση της (2.1) ικανοποιεί και την σχέση (2.2), τότε αυτή λέγεται* ***λύση του προβλήματος αρχικών τιμών*** *(2.1)-(2.2).*

Το πρώτο συμπέρασμα της ενότητας αφορά τις λύσεις μίας γραμμικής δυναμικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [13].

Θεώρημα 2.1.1. *Θεωρούμε την δυναμική εξίσωση*

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2.3}$$

όπου $p \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $t_0 \in \mathbb{T}$. Τότε:

(i) Όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1) δίνονται από τον τύπο

$$y(t) = e_p(t, t_0)\, c, \quad t \in \mathbb{T},$$

όπου c είναι μία πραγματική σταθερά.

(ii) Για $y_0 \in \mathbb{R}$, η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (2.1)-(2.2) είναι η

$$y(t) = e_p(t, t_0)\, y_0$$

Προκειμένου να διατυπώσουμε τον ορισμό της ταλάντωσης μίας δυναμικής εξίσωσης είναι απαραίτητο να δώσουμε την έννοια της γενικευμένης ρίζας μίας συνάρτησης f σε μία χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$.

Ορισμός 2.1.3. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει* ***γενικευμένη ρίζα*** *στο σημείο $t_0 \in \mathbb{T}$, αν $f(t_0) = 0$ ή είναι $f(t_0)f(\sigma(t_0)) < 0$ και $\mu(t_0) > 0$. Στην δεύτερη περίπτωση λέμε, επίσης, ότι η f παρουσιάζει γενικευμένη ρίζα στο διάστημα $(t_0, \sigma(t_0))$.*

Είναι φανερό ότι, για $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, η έννοια της γενικευμένης ρίζας μίας συνάρτησης f συμπίπτει με την (συνήθη) έννοια της ρίζας μίας συνάρτησης στο $\mathbb{R}$. Πραγματικά, η συνάρτηση $f(t) = \cos t$, $t \in \mathbb{R}$ έχει γενικευμένη ρίζα σε κάθε σημείο $t_\kappa = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Στην περίπτωση μίας χρονοβαθμίδας $\mathbb{T}$ που περιέχει δεξιά διασπαρμένα σημεία, αν η συνάρτηση f έχει γενικευμένη ρίζα σε ένα δεξιά διασπαρμένο σημείο t_0 της $\mathbb{T}$, τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.3 θα πρέπει είτε να είναι $f(t_0) = 0$ είτε να είναι $f(t_0)f^\sigma(t_0) < 0$. Για παράδειγμα, αν $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, τότε η συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ με $f(t) = (-1)^t 2^t$, $t \in \mathbb{N}$ έχει γενικευμένη ρίζα σε κάθε διάστημα $(t, t+1)$, με $t \in \mathbb{R}$, ενώ $f(t) \neq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{N}$.

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε έναν ορισμό που αναφέρεται στην έννοια της ταλάντωσης σε χρονοβαθμίδες που δεν είναι άνω φραγμένες.

Ορισμός 2.1.4. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα με $\sup\mathbb{T} = \infty$. Θα λέμε ότι μία συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι **ταλαντούμενη** (ή, ισοδύναμα, ταλαντούται) στο διάστημα $[t, \infty)_\mathbb{T}$ αν υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[t, \infty)_\mathbb{T}$ γενικευμένων ριζών της f με $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$.*

Ορισμός 2.1.5. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα με $\sup\mathbb{T} = \infty$. Θα λέμε ότι μία συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι **ισχυρώς ταλαντούμενη** αν υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{T}$ με $t_n < s_n \leq t_{n+1} < s_{n+1}$, $n = 1, \dots$ τέτοιες ώστε*

$$f(t_n)f(s_n) < 0.$$

Είναι φανερό ότι, για $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, ο ορισμός της ταλάντωσης σε χρονοβαθμίδες συμπίπτει με τον ορισμό της ταλάντωσης μίας συνάρτησης σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ή του $\mathbb{N}$, αντίστοιχα, που δεν είναι άνω φραγμένα.

Ορισμός 2.1.6. *Λέμε ότι μία δυναμική εξίσωση **ταλαντούται** αν όλες οι λύσεις της εξίσωσης είναι ταλαντούμενες. Στην περίπτωση που μία δυναμική εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση που δεν ταλαντούται, τότε λέμε ότι η δυναμική εξίσωση είναι **μη ταλαντούμενη**.*

Ας σημειωθεί ότι οι παραπάνω ορισμοί μπορούν εύκολα να επεκταθούν ώστε να συμπεριλάβουν και την έννοια της ταλάντωσης σε κατάλληλα άνω φραγμένα υποσύνολα μίας χρονοβαθμίδας.

2.2 Ταλάντωση Συνήθων Γραμμικών Δυναμικών Εξισώσεων

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την ταλάντωση συνήθων γραμμικών δυναμικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Ας θεωρήσουμε, πρώτα, την γραμμική δυναμική εξίσωση

$$y^\Delta(t) = p(t)y(t), \quad t \in \mathbb{T}. \tag{2.4}$$

Όπως προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.1, αν $t_0 \in \mathbb{T}$ τότε οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης (2.4) δίνεται από τον τύπο

$$y(t) = e_p(t, t_0)c, \quad t \in \mathbb{T},$$

για μία κατάλληλη πραγματική σταθερά c, ενώ για $y_0 \in \mathbb{R}$ το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.4)-(2.2), έχει μοναδική λύση την

$$y(t) = e_p(t, t_0)\, y_0, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Το πρώτο συμπέρασμα που αφορά την ταλάντωση της εξίσωσης (2.4) προκύπτει άμεσα ως συνέπεια του Θεωρήματος 1.4.7 και παρέχει κριτήρια ταλάντωσης καθώς επίσης και κριτήρια μη ταλάντωσης για την εξίσωση (2.4).

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω ότι η συνάρτηση $p : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ είναι δπ-συνεχής και regressive.*

(i) Αν

$$1 + \mu(t)p(t) > 0 \text{ για κάθε } t \in \mathbb{T}^\kappa,$$

τότε κάθε μη τετριμμένη λύση της (2.4) είναι σταθερού προσήμου στο $\mathbb{T}$. Αν επιπλέον $\sup \mathbb{T} = \infty$ τότε η εξίσωση (2.4) είναι μη ταλαντούμενη στο $\mathbb{T}$.

(ii) Αν

$$1 + \mu(t)p(t) < 0 \text{ για κάθε } t \in \mathbb{T}^\kappa,$$

τότε κάθε μη τετριμμένη λύση της (2.4) αλλάζει πρόσημο σε κάθε σημείο του $\mathbb{T}$. Αν, επιπλέον, $\sup \mathbb{T} = \infty$, τότε η εξίσωση (2.4) είναι ισχυρώς ταλαντούμενη στο $\mathbb{T}$.

(iii) Αν υπάρχει μία γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{T}^\kappa$ τέτοια ώστε

$$1 + \mu(s_i)p(s_i) < 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

τότε η εξίσωση (2.4) είναι ταλαντούμενη στο $\mathbb{T}$.

(iv) Αν υπάρχουν N πεπερασμένα σημεία του $\mathbb{T}^\kappa$ τέτοια ώστε $1 + \mu(t)p(t) < 0$, τότε κάθε μη τετριμμένη λύση της (2.4) αλλάζει πρόσημο ακριβώς N φορές στο $\mathbb{T}$ και η εξίσωση (2.4) είναι μη ταλαντούμενη στο $\mathbb{T}$.

Απόδειξη. Έστω ότι $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μία μη τετριμμένη λύση της (2.4). Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1, θα είναι $y(t) = e_p(t, t_0)y_0$, για μία κατάλληλη πραγματική σταθερά $y_0 \neq 0$ και, συνεπώς, η ταλάντωση της y ταυτίζεται με την ταλάντωση της συνάρτησης $e_p(t, t_0)$. Επομένως τα συμπεράσματα του θεωρήματος προκύπτουν άμεσα από το Θεώρημα 1.4.7. □

Ας θεωρήσουμε τώρα την δυναμική εξίσωση

$$y^\Delta(t) = -p(t)y^\sigma(t), \ t \in \mathbb{T}^\kappa, \tag{2.5}$$

όπου $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μία δπ-συνεχής και regressive συνάρτηση. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι, αν $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, τότε $\sigma(t) = t, \ t \in \mathbb{R}$ και, συνεπώς, η εξίσωση (2.5) συμπίπτει κατ' ουσίαν με την εξίσωση (2.4). Όμως αυτό δεν ισχύει για χρονοβαθμίδες που περιέχουν δεξιά διασπαρμένα σημεία, καθώς η (2.5) εξαρτάται από την συνάρτηση σ και κατά επέκταση από την χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$. Για παράδειγμα, αν $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, η εξίσωση παίρνει την μορφή

$$(1 + p(t))y(t + 1) = y(t), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Το επόμενο λήμμα αναφέρεται στην σχέση των μη τετριμμένων λύσεων της εξίσωσης (2.4) και των μη τετριμμένων λύσεων της εξίσωσης (2.5).

Λήμμα 2.2.1. *Αν $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μία μη τετριμμένη λύση της (2.4) τότε η συνάρτηση $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ με $y(t) = \frac{1}{x(t)}$, $t \in \mathbb{T}$ είναι μία μη τετριμμένη λύση της (2.5).*

Απόδειξη. Ας είναι $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία μη τετριμμένη λύση της (2.4). Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1, η x θα είναι της μορφής $x(t) = e_p(t, t_0)x_0$ με $x_0 \neq 0$. Για $t \in \mathbb{T}$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x(t)}\right)^{\Delta} &= \left(\frac{1}{e_p(t,t_0)x_0}\right)^{\Delta} = -\frac{e_p^{\Delta}(t,t_0)}{e_p(t,t_0)e_p(\sigma(t),t_0)x_0} \\ &= -\frac{p(t)e_p(t,t_0)}{e_p(t,t_0)e_p(\sigma(t),t_0)x_0} = -\frac{p(t)}{e_p(\sigma(t),t_0)x_0} \\ &= -p(t)\left(\frac{1}{x(t)}\right)^{\sigma} \end{aligned}$$

και, άρα η συνάρτηση $y(t) = \dfrac{1}{x(t)}$, $t \in \mathbb{T}$ είναι μία μη τετριμμένη λύση της (2.5). □

Από το Λήμμα 2.2.1 και το Θεώρημα 2.2.1 εύκολα προκύπτει το επόμενο συμπέρασμα που αφορά τον ταλαντωτικό χαρακτήρα των λύσεων της εξίσωσης (2.5).

Πόρισμα 2.2.1. *Έστω $p : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ μία δπ-συνεχής και regressive συνάρτηση. Τότε:*

(i) *Αν*

$$1 + \mu(t)p(t) > 0, \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa},$$

τότε κάθε μη τετριμμένη λύση της (2.5) είναι σταθερού προσήμου στο $\mathbb{T}$. Αν επιπλέον $\sup \mathbb{T} = \infty$, τότε η εξίσωση (2.5) είναι μη ταλαντούμενη στο $\mathbb{T}$.

(ii) *Αν*

$$1 + \mu(t)p(t) < 0, \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa},$$

τότε κάθε μη τετριμμένη λύση της (2.5) αλλάζει πρόσημο σε κάθε σημείο του $\mathbb{T}$. Αν επιπλέον $\sup \mathbb{T} = \infty$, τότε η εξίσωση (2.5) είναι ισχυρώς ταλαντούμενη στο $\mathbb{T}$.

(iii) *Αν υπάρχει μία γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{T}^{\kappa}$ τέτοια ώστε*

$$1 + \mu(s_i)p(s_i) < 0 \; i = 1, 2, \ldots,$$

τότε κάθε μη τετριμμένη λύση της (2.5) αλλάζει άπειρες φορές πρόσημο και η εξίσωση (2.5) είναι ταλαντούμενη στο $\mathbb{T}$.

(iv) *Αν υπάρχουν N πεπερασμένα σημεία του $\mathbb{T}$ τέτοια ώστε $1 + \mu(t)p(t) < 0$, τότε κάθε μη τετριμμένη λύση της (2.5) αλλάζει πρόσημο ακριβώς N φορές στο $\mathbb{T}$ και η εξίσωση (2.5) είναι μη ταλαντούμενη στο $\mathbb{T}$.*

Για το υπόλοιπο της παρούσας ενότητας, θεωρούμε την δυναμική εξίσωση

$$x^{\Delta}(\sigma^n(t)) + p(t)x(t) = 0, \ t \in \mathbb{T}^{\kappa}, \tag{2.6}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, $p : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ είναι μία δπ-συνεχής και regressive συνάρτηση και $\mathbb{T}$ είναι μία χρονοβαθμίδα που *αποτελείται από μεμονωμένα σημεία*. Αναζητούμε λύσεις $x : [t_x, \infty) \to \mathbb{R}$ της δυναμικής εξίσωσης (2.6), που είναι της μορφής $x(t) = e_{\lambda_0}(t, t_0)$, $t \in \mathbb{T}$, όπου $\lambda_0 : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ είναι μία regressive συνάρτηση. Αντικαθιστώντας την συνάρτηση x στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.6) και χρησιμοποιώντας ορισμένες ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης, παίρνουμε, για $t \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}
&x^{\Delta}(\sigma^n(t)) + p(t)x(t) \\
&= \lambda_0(\sigma^n(t))e_{\lambda_0}((\sigma^n(t)), t_0) + p(t)e_{\lambda_0}(t, t_0) \\
&= \lambda_0(\sigma^n(t)) \prod_{i=0}^{n-1} \left[1 + \mu(\sigma^i(t))\lambda_0(\sigma^i(t))\right] e_{\lambda_0}(t, t_0) + p(t)e_{\lambda_0}(t, t_0) \\
&= \left\{ \lambda_0(\sigma^n(t)) \prod_{i=0}^{n-1} \left[1 + \mu(\sigma^i(t))\lambda_0(\sigma^i(t))\right] + p(t) \right\} e_{\lambda_0}(t, t_0),
\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι η εξίσωση (2.6) δέχεται μία λύση της μορφής $e_{\lambda_0}(t, t_0)$, $t \in \mathbb{T}$ με $\lambda_0 : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ regressive αν και μόνο αν η συνάρτηση λ_0 είναι μία λύση της εξίσωσης

$$\lambda_0(\sigma^n(t)) \prod_{i=0}^{n-1} \left[1 + \mu(\sigma^i(t))\lambda_0(\sigma^i(t))\right] + p(t) = 0. \tag{2.7}$$

Η εξίσωση (2.7) καλείται η **χαρακτηριστική εξίσωση** της δυναμικής εξίσωσης (2.6).

Σχετικά με τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2.7) της εξίσωσης (2.6) έχουμε το παρακάτω συμπέρασμα.

Λήμμα 2.2.2. *Αν μία συνάρτηση $\lambda_0 : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ είναι regressive και ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξισωση (2.7), τότε, για $t_0 \in \mathbb{T}$, η συνάρτηση $x(t) = e_{\lambda_0}(t, t_0)$, $t \in \mathbb{T}$ είναι μία λύση της (2.6).*

Είναι φανερό ότι η επίλυση της δυναμικής εξίσωσης (2.6) μέσω της εύρεσης λύσεων της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2.7) παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες που μπορεί να οφείλονται τόσο στην δομή της χρονοβαθμίδας $\mathbb{T}$ όσο και στην μορφή της συνάρτησης p καθώς και σε μεγάλες τιμές του φυσικού n. Παρακάτω δίνουμε ένα παράδειγμα επίλυσης της δυναμικής εξίσωσης (2.6) μέσω εύρεσης λύσης της χαρακτηριστικής εξίσωση (2.7), που αφορά την απλή περίπτωση όπου $n = 1$, $p(t) = p$ και $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ με $h > 0$.

Παράδειγμα 2.2.1. Ας είναι $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, όπου $h > 0$. Θεωρούμε την δυναμική εξίσωση πρώτης τάξης

$$x^{\Delta}(\sigma(t)) + px(t) = 0, \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2.8}$$

όπου p είναι μία πραγματική σταθερά με $p \leq \frac{1}{4h}$. Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2.8) είναι

$$\lambda_0(\sigma(t))\left[1+\mu(t)\lambda_0(t)\right]+p=0, \quad t \in h\mathbb{Z} \tag{2.9}$$

ή

$$\lambda_0(t+h)\lambda_0(t)+\frac{1}{h}\lambda_0(t+h)+\frac{p}{h}=0, \quad t \in h\mathbb{Z}. \tag{2.10}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $\widehat{\lambda}_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ με $\widehat{\lambda}_0(s) = \lambda_0(hs)$, $s \in \mathbb{Z}$. Κάνοντας χρήση της $\widehat{\lambda}_0$ από την (2.10) παίρνουμε την εξίσωση

$$\widehat{\lambda}_0(s+1)\widehat{\lambda}_0(s)+\frac{1}{h}\widehat{\lambda}_0(s+1)+\frac{p}{h}=0, \quad s \in \mathbb{Z},$$

και παρατηρούμε ότι, επειδή η λ_0 είναι regressive, έχουμε $\lambda_0(hs)+\frac{1}{h} \neq 0$, $s \in \mathbb{Z}$, πράγμα που σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός

$$\widehat{\lambda}_0(s)=\frac{\widehat{x}(s+1)}{\widehat{x}(s)}-\frac{1}{h} \tag{2.11}$$

είναι καλά ορισμένος. Με χρήση του μετασχηματισμού αυτού, βρίσκουμε ότι η συνάρτηση $\widehat{x}(s)$ είναι λύση της δεύτερης τάξης γραμμικής εξίσωσης διαφορών

$$\widehat{x}(s+2)-\frac{1}{h}\widehat{x}(s+1)+\frac{p}{h}\widehat{x}(s)=0, \quad s \in \mathbb{Z},$$

για την οποία είναι γνωστό ότι η γενική λύση δίνεται από την σχέση

$$\widehat{x}(s)=a_1\left(\frac{1+\sqrt{1-4hp}}{2h}\right)^s+a_2\left(\frac{1-\sqrt{1-4hp}}{2h}\right)^s,$$

με a_1, a_2 είναι πραγματικές σταθερές. Επομένως, από την (2.11) έχουμε ότι

$$\widehat{\lambda}_0(s)=\frac{a_1\left(\frac{1+\sqrt{1-4hp}}{2h}\right)^{s+1}+a_2\left(\frac{1-\sqrt{1-4hp}}{2h}\right)^{s+1}}{a_1\left(\frac{1+\sqrt{1-4hp}}{2h}\right)^{s}+a_2\left(\frac{1-\sqrt{1-4hp}}{2h}\right)^{s}}-\frac{1}{h}, \quad s \in \mathbb{Z},$$

από όπου για $t = hs$, $s \in \mathbb{Z}$ προκύπτει ότι η γενική λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2.9) δίνεται από τον τύπο

$$\lambda_0(t)=\frac{a_1\frac{1+\sqrt{1-4hp}}{2h}+a_2\left(\frac{1-\sqrt{1-4hp}}{2h}\,\frac{1-\sqrt{1-4hp}-2hp}{2hp}\right)^{\frac{t}{h}}}{a_1+a_2\left(\frac{1-\sqrt{1-4hp}-2hp}{2hp}\right)^{\frac{t}{h}}}-\frac{1}{h}, \quad t \in h\mathbb{T}. \tag{2.12}$$

Είναι γνωστό (βλέπε [5]) ότι, αν $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ και $\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{Z}$ είναι μία regressive συνάρτηση, τότε

$$e_\alpha(t,0)=\prod_{j=0}^{(t/h)-1}\left[1+h\alpha(jh)\right], \quad t \in \mathbb{T}.$$

Επομένως, για όλες τις σταθερές α_1, α_2 για τις οποίες η συνάρτηση λ_0 στην (2.12) είναι regressive, η συνάρτηση

$$e_{\lambda_0}(t,0) = \prod_{j=0}^{(t/h)-1} [1 + h\lambda_0(jh)]$$

είναι μία (εκθετική) λύση της (2.8). Συγκεκριμένα, για $a_1 \neq 0$ και $a_2 = 0$ ή για $a_1 = 0$ και $a_2 \neq 0$, η συνάρτηση λ_0 είναι σταθερή συνάρτηση, άρα regressive, και παίρνουμε, αντίστοιχα, τις εκθετικές λύσεις της (2.8)

$$e_{\lambda_0}(t,0) = \left(\frac{1+\sqrt{1-4hp}}{2}\right)^{\frac{t}{h}}, \quad t \in \mathbb{T}$$

και

$$e_{\lambda_0}(t,0) = \left(\frac{1-\sqrt{1-4hp}}{2}\right)^{\frac{t}{h}}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Αν υπάρχει ένα $t_0 \in \mathbb{T}$ και μία συνάρτηση $\lambda_0 \in \mathcal{R}^+([t_0,\infty)_{\mathbb{T}})$ η οποία ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξίσωση (2.7) στο $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$, τότε, επειδή η συνάρτηση $e_{\lambda_0}(t,t_0)$ είναι θετική στο $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$, έπεται ότι η δυναμική εξίσωση (2.6) είναι μη ταλαντούμενη στο $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$. Σε διαφορετική περίπτωση η εξίσωση (2.6) ταλαντούται στο $[t_0,\infty)$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει ικανές συνθήκες για την ταλάντωση της δυναμικής εξίσωσης (2.6).

Θεώρημα 2.2.2. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα με $\sup \mathbb{T} = \infty$ και $t_0 \in \mathbb{T}$. Αν υπάρχει μία ακολουθία σημείων $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στο $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ με $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ για την οποία ισχύει ότι $p(\rho^{n-i}(t_k)) \geq 0$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, $k = 1,2,\ldots$ και*

$$p(t_k) \geq \frac{2^n}{\mu(\sigma^n(t_k))}, \quad k = 1,2\ldots, \tag{2.13}$$

τότε η εξίσωση (2.6) ταλαντούται.

Απόδειξη. Έστω ότι η εξίσωση (2.6) δεν ταλαντούται στο $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ και μία συνάρτηση $\lambda_0 : [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ με

$$1 + \mu(t)\lambda_0(t) > 0, \quad t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}, \tag{2.14}$$

η οποία ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξίσωση (2.7) για $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$. Από την (2.14) έπεται ότι

$$\lambda_0(t) > -\frac{1}{\mu(t)}, \quad t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$$

και συνεπώς

$$\lambda_0(\sigma^i(t)) > -\frac{1}{\mu(\sigma^i(t))}, \quad t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}, \quad i = 0,1,\ldots.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $t_k > \sigma^{n-1}(t_1)$, $k = 1, 2, \ldots$. Θα αποδείξουμε ότι $\lambda_0(\sigma^i(t_k)) \leq 0$, $k = 1, 2, \ldots;\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Πραγματικά, επειδή λ_0 είναι λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2.7), έχουμε, για $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$\begin{aligned} \lambda_0(\sigma^i(t_k)) &= \lambda_0(\sigma^n(\rho^{n-i}(t_k))) \\ &= \frac{-p(\rho^{n-i}(t_k))}{\prod_{l=0}^{n-1}\left[1 + \mu(\sigma^l(\rho^{n-i}(t_k)))\lambda_0(\sigma^l(\rho^{n-i}(t_k)))\right]} \leq 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$-\frac{1}{\mu(\sigma^i(t_k))} < \lambda_0(\sigma^i(t_k)) \leq 0, \ k = 1, 2, \ldots;\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{2.15}$$

από όπου έπεται ότι, για $k = 1, 2, \ldots;\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, είναι

$$\begin{aligned} 1 + \mu(\sigma^i(t_k))\lambda_0(\sigma^i(t_k)) &\leq 1 + \mu(\sigma^i(t_k))\left|\lambda_0(\sigma^i(t_k))\right| \\ &\leq 1 + \mu(\sigma^i(t_k))\frac{1}{\mu(\sigma^i(t_k))} = 2, \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε

$$1 + \mu(\sigma^i(t_k))\lambda_0(\sigma^i(t_k)) \leq 2, \quad k = 1, 2, \ldots;\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.16}$$

Από την υπόθεση (2.13) έπεται ότι $p(t_k) > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, και συνεπώς από την (2.14) έχουμε ότι

$$\lambda_0(\sigma^n(t_k)) = -\frac{p(t_k)}{\prod_{i=0}^{n-1}\left[1 + \mu(\sigma^i(t_k))\lambda_0(\sigma^i(t_k))\right]} < 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Συνδυάζοντας τις (2.14), (2.15), (2.16) και την προηγούμενη σχέση, βρίσκουμε

$$-\frac{1}{\mu(\sigma^n(t_k))} < -\frac{p(t_k)}{\prod_{i=0}^{n-1}\left[1 + \mu(\sigma^i(t_k))\lambda_0(\sigma^i(t_k))\right]} \leq -\frac{p(t_k)}{2^n}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$-\frac{1}{\mu(\sigma^n(t_k))} < -\frac{p(t_k)}{2^n}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Συνεπώς είναι

$$p(t_k) < \frac{2^n}{\mu(\sigma^n(t_k))}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

το οποίο αντίκειται στην υπόθεση (2.13), και, ως εκ τούτου, η εξίσωση (2.6) ταλαντούται. □

2.3 Ταλάντωση Υστερημένων Δυναμικών Εξισώσεων

Στην παράγραφο αυτή, υποθέτουμε ότι $\mathbb{T}$ είναι μία χρονοβαθμίδα με $\sup \mathbb{T} = \infty$ και μελετούμε την ταλάντωση της δυναμικής εξίσωσης με υστέρηση

$$x^{\Delta}(t) + p(t)x(\tau(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2.17}$$

όπου $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ είναι μία δπ-συνεχής συνάρτηση και η υστέρηση $\tau : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ είναι δπ-συνεχής με $\tau(t) \leq t$, $t \in \mathbb{T}$ και $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$.

Για την εξίσωση (2.17), είναι γνωστά αρκετά ταλαντωτικά κριτήρια στις ειδικές περιπτώσεις που $\mathbb{T} = [t_0, \infty)$ και $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. Θα αναφέρουμε μερικά από τα κριτήρια αυτά και θα τα συσχετίσουμε με τα αντίστοιχα συμπεράσματα για χρονοβαθμίδες.

Για $\mathbb{T} = [t_0, \infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, η (2.17) ανάγεται στην διαφορική εξίσωση με υστέρηση

$$x'(t) + p(t)x(\tau(t)) = 0, \quad t \in [t_0, \infty), \tag{2.18}$$

όπου p είναι μη αρνητική συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[t_0, \infty)$ και τ είναι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $[t_0, \infty)$ με $\tau(t) \leq t$ για κάθε $t \geq t_0$ και $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$.
Οι Ladas, Lakshmikantham και Papadakis [29] απέδειξαν ότι η εξίσωση (2.18) είναι ταλαντούμενη, αν

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds > 1, \tag{2.19}$$

ενώ λίγο αργότερα, αποδείχθηκε (βλέπε Ladas [28], και Koplatatze και Chanturija [27]) ότι η εξίσωση (2.18) είναι ταλαντούμενη, αν

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}. \tag{2.20}$$

Για $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ και $\tau(n) = n - k$, $n \in \mathbb{N}$, όπου k είναι ένας θετικός ακέραιος, η (2.17) παίρνει την μορφή της πρώτης τάξης εξίσωσης διαφορών με υστέρηση

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.21}$$

όπου $(p_n)_{n\geq 0}$ είναι μία ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Οι Erbe και Zhang [19] απέδειξαν ότι η (2.21) ταλαντούται, αν

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n} p(i) > 1. \tag{2.22}$$

ενώ οι Ladas, Philos και Sficas [30] απέδειξαν ότι η εξίσωση (2.21) ταλαντούται, αν

$$\liminf_{n\to\infty} \left[\frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) \right] > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}. \tag{2.23}$$

Σχετικά με την εξίσωση (2.17) έχουμε τα επόμενα δύο λήμματα.

Λήμμα 2.3.1. *Ας είναι* $\mathbb{T}$ *μία χρονοβαθμίδα και* $p : \mathbb{T} \to (0, \infty)$ *μία δπ-συνεχής συνάρτηση. Αν* $p(t)\mu(t) < 1,\ t \in \mathbb{T}$, *τότε*

$$1 - \int_{t_0}^{t} p(s)\Delta(s) \leq e_{-p}(t, t_0), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής σε χρονοβαθμίδες της Πρότασης 1.1.1. Έστω $t_0 \in \mathbb{T}$. Για $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$, θεωρούμε την πρόταση

$$A(t) : 1 - \int_{t_0}^{t} p(s)\Delta(s) \leq e_{-p}(t, t_0).$$

(i) Είναι προφανές ότι η $A(t_0)$ είναι αληθής.

(ii) Έστω ότι t είναι δεξιά διασπαρμένο σημείο και η πρόταση $A(t)$ είναι αληθής. Από το Θεώρημα 1.4.3 έχουμε ότι

$$e_{-p}(\sigma(t), t) = [1 + \mu(t)p(t)]e_{-p}(t, t) = 1 + \mu(t)p(t).$$

Αλλά από το Θεώρημα 1.3.6 είναι $1 - \int_t^{\sigma(t)} p(s)\Delta s = 1 - p(t)\mu(t)$, οπότε

$$1 - \int_{t}^{\sigma(t)} p(s)\Delta s = e_{-p}(\sigma(t), t). \tag{2.24}$$

Επειδή η $A(t)$ είναι αληθής και

$$1 - \int_{t_0}^{\sigma(t)} p(s)\Delta s \leq \left(1 - \int_{t}^{t} p(s)\Delta s\right)\left(1 - \int_{t}^{\sigma(t)} p(s)\Delta s\right),$$

με χρήση της (2.24), παίρνουμε ότι

$$1 - \int_{t_0}^{\sigma(t)} p(s)\Delta s \leq e_{-p}(\sigma(t), t_0)$$

και άρα η $A(\sigma(t))$ είναι αληθής.

(iii) Έστω ότι t είναι δεξιά πυκνό σημείο και η πρόταση $A(t)$ είναι αληθής. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(α) Έστω ότι υπάρχει r τέτοιο ώστε $[t, r]_{\mathbb{T}} = [t, r]$. Για κάθε $s \in [t, r]$, έχουμε

$$1 - \int_{t}^{s} p(s)ds \leq e^{\int_t^s(-p(s))ds} = e_{-p}(s, t).$$

Επειδή η $A(t)$ είναι αληθής, με χρήση της προηγούμενης σχέσης, παίρνουμε, για $s \in [t, r]$,

$$1 - \int_{t_0}^{s} p(s)\Delta s \leq \left(1 - \int_{t_0}^{t} p(s)\Delta s\right)\left(1 - \int_{t}^{s} p(s)\Delta s\right) \leq e_{-p}(s, t_0)$$

και επομένως η πρόταση $A(s)$ είναι αληθής

(β) Έστω ότι υπάρχει διάστημα $[t, t+r)_{\mathbb{T}}$ τέτοιο ώστε $[t, t+r)_{\mathbb{T}} = \{t_n\} \cup \{t\}$, όπου $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στο $\mathbb{T}$ με $t_n > t$ και $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Προφανώς, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει θετικός ακέραιος k έτσι ώστε

$$1 - \int_t^{t_n} p(s)\Delta s \le \varepsilon + e_{-p}(t_n, t), \quad n > k.$$

Από το (ii) έχουμε

$$1 - \int_{t_n}^{t_i} p(s)\Delta s \le e_{-p}(t_i, t_n), \quad i < n,$$

οπότε

$$1 - \int_{t_0}^{t_i} p(s)\Delta s \le (\varepsilon + e_{-p}(t_n, t_0))\, e_{-p}(t_i, t_n)$$

και, επειδή το ε είναι αυθαίρετο, παίρνουμε

$$1 - \int_{t_0}^{t_n} p(s)\Delta s \le e_{-p}(t_n, t_0).$$

Επομένως, η $A(t_n)$ είναι αληθής.

(iv) Έστω ότι t είναι δεξιά πυκνό σημείο. Η απόδειξη είναι παρόμοια με το (iii) και παραλείπεται.

□

Λήμμα 2.3.2. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα, $t_0 \in \mathbb{T}$ και $p : \mathbb{T} \to (0, \infty)$. Αν η συνάρτηση $y : [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{T}$ ικανοποιεί την*

$$y^{\Delta}(t) + p(t)y(t) \le 0, \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}},$$

τότε

$$y(t) \le e_{-p}(t, t_0)y(t_0), \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Με την βοήθεια των παραπάνω λημμάτων οι Zhang και Deng [42] απέδειξαν το παρακάτω θεώρημα που δίνει μία αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη θετικής λύσης της εξίσωσης (2.17).

Για την διατύπωση των συμπερασμάτων σχετικά με την ταλάντωση της εξίσωσης (2.17), θεωρούμε το σύνολο

$$E = \{\lambda > 0 : 1 - \lambda p(t)\mu(t) > 0 \text{ για κάθε } t \ge t_0\}. \tag{2.25}$$

Θεώρημα 2.3.1. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα, $t_0 \in \mathbb{T}$ και $p : \mathbb{T} \to (0, +\infty)$. Αν η (2.17) έχει μία τελικώς θετική λύση, τότε*

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{t>t_0} \sup_{\lambda \in E} \{\lambda e_{-\lambda p}(t, \tau(t))\} \geq 1,$$

όπου E είναι το σύνολο που ορίζεται από την (2.25).

'Μία άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.3.1 είναι το παρακάτω κριτήριο ταλάντωσης.

Πόρισμα 2.3.1. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα, $t_0 \in \mathbb{T}$ και $p : \mathbb{T} \to (0, +\infty)$. Αν ισχύει*

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{t>t_0} \sup_{\lambda \in E} \{\lambda e_{-\lambda p}(t, \tau(t))\} < 1, \tag{2.26}$$

τότε η εξίσωση (2.17) ταλαντούται.

Για $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ και $\tau(n) = n - k$, η εξίσωση (2.17) παίρνει την μορφή της (2.21). Από το Πόρισμα 2.3.1 έπεται ότι όλες οι λύσεις της (2.21) ταλαντούνται αν

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{t>t_0} \sup_{\lambda \in E} \left\{ \lambda \prod_{i=n-k}^{n-1} [1 - \lambda p(i)] \right\} < 1,$$

όπου $E = \{\lambda > 0 : \ 1 - \lambda p(s) > 0, \ s \in \mathbb{N}\}$. Το συμπέρασμα αυτό περιλαμβάνεται στο άρθρο [40].

Για $\mathbb{T} = [t_0, +\infty)$, η εξίσωση (2.17) ανάγεται στην εξίσωση (2.18). Από το Πόρισμα 2.3.1 προκύπτει ότι όλες οι λύσεις της (2.18) ταλαντούνται αν

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{t>0} \sup_{\lambda \in E} \left\{ \lambda e^{\int_{\tau(t)}^{t} (-\lambda p(s))ds} \right\} < 1,$$

όπου $E = \mathbb{R}^+$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(\lambda) = \lambda e^{-\lambda k}, \ \lambda > 0$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι

$$\sup_{\lambda>0} f(\lambda) = \frac{1}{ek}$$

και, συνεπώς, έχουμε $\sup_{\lambda>0} \lambda e^{-\lambda \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds} = \frac{1}{e \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds}$. Επομένως, για $\mathbb{T} = [t_0, +\infty)$, η συνθήκη (2.26) γίνεται

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{t>0} \sup_{\lambda \in E} \left\{ \lambda e^{\int_{\tau(t)}^{t} [-\lambda p(s)]ds} \right\} = \limsup_{t\to\infty} \left\{ \frac{1}{e \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds} \right\} < 1,$$

οπότε, η διαφορική εξίσωση (2.18) ταλαντούται αν

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}.$$

Συμπεραίνουμε ότι, στην περίπτωση που $\mathbb{T} = [t_0, \infty)$, η συνθήκη (2.26), ανάγεται στην συνθήκη (2.20), δηλαδή λαμβάνουμε το αντίστοιχο ταλαντωτικό κριτήριο που έχει αποδειχτεί στην συνεχή περίπτωση.

Παράδειγμα 2.3.1. Θεωρούμε την χρονοβαθμίδα $\mathbb{T} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$, όπου $h > 0$, και την εξίσωση

$$y^{\Delta}(n) + y(n - kh) = 0, \quad n \in \mathbb{T}. \tag{2.27}$$

Με εφαρμογή του Πορίσματος 2.3.1 βρίσκουμε ότι η (2.27) ταλαντούται αν

$$\sup_{\lambda\in E}\{\lambda(1 - h\lambda)^k\} < 1,$$

όπου $E = \{\lambda : 0 < \lambda < \frac{1}{h}\}$. Μετά από υπολογισμούς, βρίσκουμε ότι η συνθήκη (2.26) γίνεται

$$\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} < h. \tag{2.28}$$

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αν ικανοποιείται η συνθήκη (2.28), τότε η εξίσωση (2.27) ταλαντούται.

Από το Πόρισμα 2.3.1 είναι φανερό ότι αν ισχύει η (2.26), τότε κάθε λύση της εξίσωσης (2.17) έχει μη πεπερασμένο αριθμό γενικευμένων ριζών σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[\tau, \infty)_{\mathbb{T}}$ για $\tau \in \mathbb{T}$. Η κατανομή των γενικευμένων ριζών των λύσεων της (2.17) μελετήθηκε από τους Zhang και Lian [43].

Στην συνέχεια, θα αποδείξουμε ένα κριτήριο μη ταλάντωσης για την εξίσωση (2.17). Για την απόδειξή του θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα το οποίο περιλαμβάνεται στο άρθρο [42].

Λήμμα 2.3.3. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα, $a \in \mathbb{T}$ και $z : [a, \infty)_{\mathbb{T}} \to (0, \infty)$. Αν*

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t < a \\ e_{z(s)-1}(t, a), & \text{αν } t \geq a, \end{cases}$$

τότε $y(t) > 0$ για $t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$.

Θεώρημα 2.3.2. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και E το σύνολο που ορίζεται με την (2.25). Αν υπάρχει $\lambda \in E$ και $a \in (0, \infty)_{\mathbb{T}}$ τέτοια ώστε*

$$\lambda e_{-\lambda p}(t, \tau(t)) \geq 1, \quad t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}, \tag{2.29}$$

τότε η εξίσωση (2.17) έχει μία θετική λύση.

Απόδειξη. Ας είναι $\lambda \in E$ και a τέτοια ώστε να ισχύει η (2.29). Θα κατασκευάσουμε μία θετική λύση της (2.17). Θέτουμε

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t \in (-\infty, a)_{\mathbb{T}} \\ \frac{1}{\lambda e_{-\lambda px}(t,\tau(t))}, & \text{αν } t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι επειδή είναι $0 < x(t) \leq 1,\ t \in \mathbb{T}$ και η p είναι μη αρνητική, θα έχουμε $e_{-\lambda px}(t, \tau(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{T}$, και συνεπώς η συνάρτηση $z : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = 1 - \frac{p(t)}{e_{-\lambda px}(t, \tau(t))} \tag{2.30}$$

είναι καλά ορισμένη στο $\mathbb{T}$. Από τον ορισμό των x και z έπεται ότι $z(t) = 1 - \lambda p(t),\ t \in \mathbb{T}$ και επειδή $\lambda \in E$, από το Λήμμα 2.3.3 έχουμε ότι $z(t) > 0,\ t \in \mathbb{T}$. Ορίζουμε την συνάρτηση $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ με

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t \in (-\infty, a)_{\mathbb{T}} \\ e_{z(s)-1}(t, a), & \text{αν } t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}. \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε ότι y είναι μία θετική λύση της (2.17). Με επαγωγή παίρνουμε ότι $y(t) > 0$ και

$$y(t) = e_{-\lambda px}(t, a).$$

ενώ, από τον ορισμό της y, με παραγώγιση παίρνουμε ότι

$$y^{\Delta}(t) = [z(t) - 1]y(t), \quad t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Με χρήση της (2.30), από την προηγούμενη σχέση βρίσκουμε

$$1 + \frac{y^{\Delta}(t)}{y(t)} = 1 - p(t)\frac{y(\tau(t))}{y(t)}, \quad t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$$

και

$$y^{\Delta}(t) + p(t)y(\tau(t)) = 0, \quad t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$$

που σημαίνει ότι y είναι μία θετική λύση της (2.17). □

Το Θεώρημα 2.3.2 περιλαμβάνεται στο άρθρο [40].

Ας θεωρήσουμε τώρα την μη ομογενή δυναμική εξίσωση με υστέρηση

$$y^{\Delta}(t) + p(t)y(\tau(t)) = q(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2.31}$$

όπου $q : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι δπ-συνεχής συνάρτηση, $\tau : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ και υπάρχει μία συνάρτηση $Q : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ με $Q^{\Delta}(t) = q(t),\ t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.

Θεώρημα 2.3.3. *Υποθέτουμε ότι p, $q : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι δπ-συνεχείς συναρτήσεις, και ότι για την υστέρηση τ είναι $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι*

$$\int_T^\infty p(t)Q_+(\tau(t))\Delta t = +\infty$$

και

$$\int_T^\infty p(t)Q_-(\tau(t)\Delta t = +\infty,$$

όπου

$$Q_+(t) = \max(Q(t), 0), \quad t \in \mathbb{T}^\kappa \quad \textit{και} \quad Q_-(t) = \max(-Q(t), 0), \quad t \in \mathbb{T}^\kappa.$$

Τότε η εξίσωση (2.31) ταλαντούται.

Απόδειξη. Έστω ότι y είναι μία τελικώς θετική λύση της (2.31) και ας είναι $t_0 \in \mathbb{T}$ τέτοιο ώστε $y(t) > 0$ για κάθε $t \in [t_0, \infty)_\mathbb{T}$. Από την εξίσωση (2.31) παίρνουμε ότι

$$[y(t) - Q(t)]^\Delta = -p(t)y(\tau(t))\Delta t, \quad t \in [t_0, \infty)_\mathbb{T}. \tag{2.32}$$

Από την υπόθεση $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ έπεται ότι μπορούμε να βρούμε ένα $t_1 > t_0$ τέτοιο ώστε

$$(y(t) - Q(t))^\Delta < 0 \ \text{ για } \ t \geq t_1.$$

Επομένως η συνάρτηση $y - Q$ είναι φθίνουσα στο $t \in [t_1, \infty)_\mathbb{T}$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$y(t) - Q(t) > 0, \quad t \geq r^*, \ t \in \mathbb{T}. \tag{2.33}$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $t_2 \in \mathbb{T}$ με $t_2 > t_1$ τέτοιο ώστε $y(t_2) - Q(t_2) \leq 0$, τότε από την μονοτονία της $y - Q$ έπεται ότι θα είναι $y(t) - Q(t) \leq 0$ για κάθε $t \in [t_2, \infty)_\mathbb{T}$ και συνεπώς θα ειναι $Q(t) > 0$, $t \in [t_2, \infty)_\mathbb{T}$ και $Q_-(t) = 0$, $t \in [t_2, \infty)_\mathbb{T}$. Επομένως

$$\int_T^\infty p(t)Q_-(\tau(t)\Delta t < \infty,$$

το οποίο αντίκειται στην υπόθεση, και άρα η (2.33) είναι αληθής.

Συνεπώς, το όριο $\lim_{t\to\infty}[y(t) - Q(t)]$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Από την σχέση (2.32), με ολοκλήρωση, παίρνουμε

$$[y(t) - Q(t)] - [y(t_2) - Q(t_2)] = -\int_{t_2}^t p(s)y(\tau(s))\Delta s, \quad t \in [t_2, \infty)_\mathbb{T}$$

από όπου για $t \to \infty$ βρίσκουμε

$$\int_{t_2}^\infty p(t)y(\tau(t))\Delta t < \infty.$$

Με χρήση της (2.33), από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι

$$\int_{T}^{\infty} p(t)Q_{-}(\tau(t))\Delta t < \infty,$$

το οποίο όμως αντίκειται στην υπόθεσή μας. Με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι η (2.31) δεν έχει τελικά αρνητικές λύσεις. Επομένως όλες οι λύσεις της (2.31) είναι ταλαντούμενες. □

Στην συνέχεια εισάγουμε για την υστέρηση τ την επιπλέον συνθήκη ότι η υστέρηση τ είναι αύξουσα και δίνουμε δύο ακόμη κριτήρια ταλάντωσης για την δυναμική εξίσωση (2.17). Για την απόδειξη των κριτηρίων αυτών, χρειαζόμαστε τα δύο επόμενα λήμματα.

Λήμμα 2.3.4. *Αν $f,\ g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ και $\tau : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ είναι δπ-συνεχείς συναρτήσεις, με g φθίνουσα και τ αύξουσα, τότε, για $v, u \in \mathbb{T}$ με $v < u$, είναι*

$$\int_{v}^{\sigma(u)} f(s)\, g(\tau(s))\Delta s \geq g(\tau(u)) \int_{v}^{\sigma(u)} f(s)\, \Delta s.$$

Απόδειξη. Για $v, u \in \mathbb{T}$ με $v < u$, είναι

$$\int_{v}^{\sigma(u)} f(s)\, g(\tau(s))\Delta s = \int_{v}^{u} f(s)\, g(\tau(s))\Delta s + \int_{u}^{\sigma(u)} f(s)\, g(\tau(s))\Delta s,$$

από όπου, με χρήση της μονοτονίας των $\tau,\ g$, βρίσκουμε

$$\int_{v}^{u} f(s)\, g(\tau(s))\Delta s \geq g(\tau(u)) \int_{v}^{u} f(s)\, \Delta s, \quad v, u \in \mathbb{T}, \quad v < u. \tag{2.34}$$

Επιπροσθέτως, επειδή η συνάρτηση $f(g \circ \tau)$ είναι δπ-συνεχής, έχουμε, για $u \in \mathbb{T}$,

$$\int_{u}^{\sigma(u)} f(s)\, g(\tau(s))\Delta s = \mu(u)f(u)g(\tau(u)) = g(\tau(u)) \int_{u}^{\sigma(u)} f(s)\Delta s, \tag{2.35}$$

όπου έγινε χρήση της γνωστής σχέσης $\int_{t}^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = \mu(t)f(t)$. Από τις (2.34) και (2.35) παίρνουμε, για $v, u \in \mathbb{T}$ με $v < u$,

$$\begin{aligned}
\int_{v}^{\sigma(u)} f(s)\, g(\tau(s))\Delta s &= \int_{v}^{u} f(s)\, g(\tau(s))\Delta s + \int_{u}^{\sigma(u)} f(s)\, g(\tau(s))\Delta s \\
&\geq g(\tau(u)) \left(\int_{v}^{u} f(s)\, \Delta s + \int_{u}^{\sigma(u)} f(s)\Delta s \right) \\
&= g(\tau(u)) \int_{v}^{\sigma(u)} f(s)\Delta s,
\end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Παρατηρούμε ότι, για $v = u$, η συνθήκη για την μονοτονία της τ δεν είναι απαραίτητη και από το Λήμμα 2.3.4 έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.3.2. *Αν οι συνατήσεις $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ και $\tau : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ είναι δπ-συνεχείς, τότε*

$$\int_u^{\sigma(u)} f(s)\, g(\tau(s))\Delta s = g(\tau(u)) \int_u^{\sigma(u)} f(s)\Delta s, \quad u \in \mathbb{T}.$$

Λήμμα 2.3.5. *Ας είναι x μία τελικώς θετική λύση της εξίσωσης (2.17). Αν υπάρχει μία θετική σταθερά M τέτοια ώστε*

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)\Delta s > M, \tag{2.36}$$

τότε

$$\frac{x(\tau(t))}{x(t)} \le \frac{4}{M^2} \text{ για όλα τα μεγάλα } t \in \mathbb{T}. \tag{2.37}$$

Απόδειξη. Ας είναι $x : [t_x, \infty) \to \mathbb{R}$ μία τελικώς θετική λύση της εξίσωσης (2.17) και $t_0 \in \mathbb{T}$ τέτοιο ώστε $x(t) > 0,\ t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$. Από την εξίσωση (2.17) έχουμε ότι $x^{\Delta}(t) \le 0$ για $t \in \mathbb{T}$ με $t \ge \tau^{-1}(t_0) = t_1$. Από την υπόθεση (2.36) έπεται ότι μπορούμε να βρούμε ένα $t_2 \in \mathbb{T}$ με $t_2 \ge \tau^{-1}(t_1)$ τέτοιο ώστε

$$\int_{\tau(t)}^{t} p(s)\Delta s \ge M, \quad t \ge t_2. \tag{2.38}$$

Επειδή $\tau^{-1}(t) > t$, από την παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\int_{t}^{\tau^{-1}(t)} p(s)\Delta s, \quad t \ge t_2.$$

Θα αποδείξουμε ότι η σχέση (2.37) ισχύει για όλα τα $t > t_2$. Για $t > t_2$, θεωρούμε την συνάρτηση $G : [t, \tau^{-1}(t)] \to \mathbb{R}$ με

$$G(r) := \int_t^r p(s)\Delta s - \frac{M}{2}, \quad r \in [t, \tau^{-1}(t)]_{\mathbb{T}}.$$

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής και αύξουσα στο διάστημα $[t, \tau^{-1}(t)]_{\mathbb{T}}$ και, επιπλέον, ισχύει

$$G(t) = -\frac{M}{2} \text{ και } G(\tau^{-1}(t)) \ge M - \frac{M}{2} = \frac{M}{2} > 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής για χρονοβαθμίδες, υπάρχει ένα $t^* \in [t, \tau^{-1}(t)]$ τέτοιο ώστε $G(t^*)G(\sigma(t^*)) \le 0$. Επειδή η G είναι αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι $G(t^*) \le 0 \le G(\sigma(t^*))$ και συνεπώς είναι

$$\int_t^{t^*} p(s)\Delta s \le \frac{M}{2}, \quad t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}} \tag{2.39}$$

και

$$\int_{t}^{\sigma(t^*)} p(s)\Delta s > \frac{M}{2}, \quad t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{2.40}$$

Από τις (2.38) και (2.39) παίρνουμε

$$\int_{\tau(t^*)}^{\sigma(t)} p(s)\Delta s \geq \int_{\tau(t^*)}^{t^*} p(s)\Delta s - \int_{t}^{t^*} p(s)\Delta s \geq M - \frac{M}{2}, \quad t \geq t_2.$$

Επειδή η συνάρτηση x είναι φθίνουσα, συνδυάζοντας το Λήμμα 2.3.4 και την προηγούμενη σχέση, προκύπτει ότι

$$\int_{\tau(t^*)}^{\sigma(t)} p(s)x(\tau(s))\Delta s \geq x(\tau(t)) \int_{\tau(t^*)}^{\sigma(t)} p(s)\Delta s \geq x(\tau(t))\frac{M}{2}. \tag{2.41}$$

Επίσης, με χρήση του Λήμματος και της (2.40), βρίσκουμε

$$\int_{t}^{\sigma(t^*)} p(s)x(\tau(s))\Delta s \geq x(\tau(t^*)) \int_{t}^{\sigma(t^*)} p(s)\Delta s \geq x(\tau(t^*))\frac{M}{2}. \tag{2.42}$$

Ολοκληρώνοντας την (2.17) από t εώς $\sigma(t^*)$, με χρήση των (2.41) και (2.42), έχουμε

$$\begin{aligned} x(t) &\geq x(t) - x(\sigma(t^*)) = \int_{t}^{\sigma(t^*)} p(s)x(\tau(s))\Delta s \\ &\geq x(\tau(t^*))\frac{M}{2} \geq \frac{M}{2}\left[x(\tau(t^*)) - x(\sigma(t))\right] \\ &\geq \frac{M}{2}\int_{\tau(t^*)}^{\sigma(t)} p(s)x(\tau(s))\Delta s \\ &\geq \frac{M^2}{4}x(\tau(t)), \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η (2.37) ικανοποιείται, για $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τα δύο κριτήρια ταλάντωσης της (2.17) που προαναφέραμε.

Θεώρημα 2.3.4. *Αν*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{\sigma(t)} p(s)\Delta s > 1, \tag{2.43}$$

τότε η εξίσωση (2.17) ταλαντούται.

Απόδειξη. Έστω ότι $x : [t_x, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι μία μη ταλαντούμενη λύση της δυναμικής εξίσωσης (2.17). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η x είναι τελικώς θετική, δηλαδή ότι υπάρχει $t_0 \in \mathbb{T}$ τέτοιο ώστε $x(t) > 0$, $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$. Επειδή

$\lim_{t\to\infty}\tau(t) = \infty$, υπάρχει $t_1 \geq t_0$ τέτοιο ώστε $x(\tau(t)) > 0$ για κάθε $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.17) από $\tau(t)$ έως $\sigma(t)$, για $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$, παίρνουμε

$$x(\sigma(t)) - x(\tau(t)) + \int_{\tau(t)}^{\sigma(t)} p(s)x(\tau(s))\Delta s = 0, \quad t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{2.44}$$

Από την (2.17) έχουμε $x^{\Delta}(t) = -p(t)x(\tau(t)) < 0$ για κάθε $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση x είναι φθίνουσα στο $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$. Επειδή η x είναι και δπ-συνεχής (Δ- παραγωγίσιμη), με εφαρμογή του Λήμματος 2.3.4, παίρνουμε

$$\int_{\tau(t)}^{\sigma(t)} p(s)x(\tau(s))\Delta s \geq x(\tau(t)) \int_{\tau(t)}^{\sigma(t)} p(s)\Delta s, \quad t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Με χρήση της προηγούμενης ανισότητας, από την (2.44) βρίσκουμε ότι

$$x(\sigma(t)) + x(\tau(t)) \left(\int_{\tau(t)}^{\sigma(t)} p(s)\Delta s - 1 \right) \leq 0, \quad t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}},$$

από όπου με χρήση της (2.43) προκύπτει ότι υπάρχουν αρκούντως μεγάλα $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ με $x(\sigma(t)) < 0$, δηλαδή οδηγούμαστε σε άτοπο. Άρα η εξίσωση (2.17) είναι ταλαντούμενη. □

Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα 2.3.4 αποτελεί γενίκευση των κριτηρίων (2.19) και (2.22) για την συνεχή και διακριτή περίπτωση αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.3.5. *Αν υπάρχει μία θετική σταθερά M τέτοια ώστε*

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)\Delta s > M \tag{2.45}$$

και

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)\Delta s > 1 - \frac{M^2}{4}, \tag{2.46}$$

τότε η εξίσωση (2.17) ταλαντούται.

Απόδειξη. Έστω ότι $x : [t_x,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι μία μη ταλαντούμενη λύση της δυναμικής εξίσωσης (2.17). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η x είναι τελικώς θετική, υπάρχει δηλαδή $t_0 \in \mathbb{T}$ τέτοιο ώστε $x(t) > 0$, $t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$. Επειδή $\lim_{t\to\infty}\tau(t) = \infty$, υπάρχει ένας θετικός αριθμός $t_1 \geq t_0$ τέτοιος ώστε $x(\tau(t)) > 0$ για κάθε $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$. Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.4, ολοκληρώνουμε την σχέση (2.17) από $\tau(t)$ έως t και έχουμε

$$x(t) + x(\tau(t)) \left(\int_{\tau(t)}^{t} p(s)\Delta s - 1 \right) \leq 0, \quad t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}},$$

από όπου βρίσκουμε ότι

$$x(\tau(t))\left(\frac{x(t)}{x(\tau(t))}+\int_{\tau(t)}^{t}p(s)\Delta s-1\right)\leq 0,\quad t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Με χρήση του Λήμματος 2.3.5 από την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$x(\tau(t))\left(\frac{M^2}{4}+\int_{\tau(t)}^{t}p(s)\Delta s-1\right)\leq 0,\quad t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}},$$

το οποίο όμως οδηγεί σε άτοπο, λόγω της συνθήκης (2.46). □

Παράδειγμα 2.3.2. Θεωρούμε την χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}=h\mathbb{N}=\{hn:n\in\mathbb{N}\}$ και την δυναμική εξίσωση με υστέρηση

$$x^{\Delta}(t)+p(t)x(\tau(t))=0,\quad t\in\mathbb{T},\tag{2.47}$$

όπου $p>0$ και $\tau(t)=t-(k-1)h$, για κάθε θετικό ακέραιο $k>1$. Είναι

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{\tau(t)}^{\sigma(t)}p\Delta s=pkh.$$

Επομένως από το Θεώρημα 2.3.5, αν

$$pkh>1,$$

η εξίσωση (2.47) είναι ταλαντούμενη.

Στην συνέχεια, θεωρούμε μία χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$, της οποίας το σύνολο των δεξιά διασπαρμένων και των αριστερά διασπαρμένων στοιχείων είναι πεπερασμένο και υποθέτουμε ότι ισχύει η ανισότητα $1-\mu(t)p(t)>0$, $t\in\mathbb{T}$. Θα δώσουμε δύο θεωρήματα που αφορούν την ταλάντωση της εξίσωσης (2.17), για την απόδειξη των οποίων γίνεται χρήση των επόμενων δύο λημμάτων που παραθέτουμε εδώ χωρίς αποδείξη (βλέπε [44]). Για το υπόλοιπο της παραγράφου, υποθέτουμε ότι

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\tau(t)}^{t}p(s)\Delta s<\infty\tag{2.48}$$

και θέτουμε

$$m=\liminf_{t\to\infty}\int_{\tau(t)}^{t}p(s)\Delta s.$$

Λήμμα 2.3.6. *Υποθέτουμε ότι ισχύει η (2.48) και $m\in\left[0,\frac{1}{e}\right]$. Ας είναι λ_1 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\lambda=e^{m\lambda}$ στο διάστημα $[1,e]$. Αν x μία μη ταλαντούμενη λύση της εξίσωσης (2.17), τότε*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{x(\tau(t))}{x(t)}\geq\lambda_1.$$

Λήμμα 2.3.7. *Υποθέτουμε ότι ισχύει η (2.48) και ότι $m \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$. Αν $x : [t_x, \infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ είναι μία μη ταλαντούμενη λύση της εξίσωσης (2.17), τότε*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{x(\sigma(t))}{x(\tau(t))} \geq \frac{1 - m - \sqrt{1 - 2m - m^2}}{2}.$$

Θεώρημα 2.3.6. *Υποθέτουμε ότι ισχύει η (2.48) και ότι $m \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$. Αν*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{\sigma(t)} p(s)\Delta s > 1, \tag{2.49}$$

τότε η εξίσωση (2.17) ταλαντούται.

Απόδειξη. Ας είναι $x : [t_x, \infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ μία μη ταλαντούμενη λύση της εξίσωσης (2.17). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η x είναι τελικώς θετική, οπότε υπάρχει $t_0 \in \mathbb{T}$ τέτοιο ώστε $x(t) > 0$ για $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$. Επειδή $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$, υπάρχει ένας αριθμός $t_1 \geq t_0$ τέτοιος ώστε $x(\tau(t)) > 0$ για κάθε $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\widehat{x}$, $\widehat{p}$,$\widehat{\tau} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\widehat{x}(t) \;=\; \begin{cases} x(t), & t \in \mathbb{T} \\ x(s) + [x(\sigma(s) - x(s)] \frac{t-s}{\sigma(s)-s}, & s < t < \sigma(s),\ s \in \mathbb{T},\ t \notin \mathbb{T}, \end{cases}$$

$$\widehat{p}(t) \;=\; \begin{cases} p(t), & t \in \mathbb{T} \\ p(s), & s < t < \sigma(s),\ s \in \mathbb{T},\ t \notin \mathbb{T}, \end{cases}$$

$$\widehat{\tau}(t) \;=\; \begin{cases} \tau(t), & t \in \mathbb{T} \\ \tau(s), & s < t < \sigma(s),\ s \in \mathbb{T},\ t \notin \mathbb{T}. \end{cases}$$

Από τον τρόπο ορισμού των $\widehat{x}$, $\widehat{\tau}$, $\widehat{p}$ δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι η $\widehat{x}$ είναι συνεχής, φθίνουσα και τελικώς θετική στο $\mathbb{R}$, η $\widehat{\tau}$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{t\to\infty} \widehat{\tau}(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ και $\widehat{p}(t) \geq 0$, $t \in [t_0, \infty)$. Αποδεικνύεται (βλέπε [44] ότι η συνάρτηση $\widehat{x}$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση με υστέρηση

$$\widehat{x}'_+(t) + \widehat{p}(t)\widehat{x}(\widehat{\tau}(t)) = 0,\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.50}$$

όπου με $\overline{x}'_+(t)$ συμβολίζουμε την δεξιά παράγωγο της $\widehat{x}$ στο t. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση από $\widehat{\tau}(t)$ έως t και κάνοντας χρήση της μονοτονίας της $\widehat{x}$, παίρνουμε, για $t \in [t_1, \infty)$,

$$0 = \widehat{x}(t) - \widehat{x}(\widehat{\tau}(t)) + \int_{\widehat{\tau}(t)}^{t} \widehat{x}(\widehat{\tau}(s))\widehat{p}(s)ds \geq \overline{x}(t) - \widehat{x}(\widehat{\tau}(t)) + \widehat{x}(\widehat{\tau}(t)) \int_{\widehat{\tau}(t)}^{t} \widehat{p}(s)ds,$$

και, συνεπώς,

$$\widehat{x}(t) \leq \widehat{x}(\widehat{\tau}(t)) \left[1 - \int_{\widehat{\tau}(t)}^{t} \widehat{p}(s)ds\right], \quad t \in [t_1, \infty). \tag{2.51}$$

Από την υπόθεση (2.49) έπεται ότι υπάρχει ακολουθία $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ στο $\mathbb{T}$ με $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ τέτοια ώστε

$$\limsup_{t_n\to\infty} \int_{\tau(t_n)}^{\sigma(t_n)} p(s)\Delta s > 1. \tag{2.52}$$

Αν t_n είναι ένα δεξιά πυκνό σημείο του $\mathbb{T}$, τότε, λαμβάνοντας υπόψη την (2.52), από την (2.51) παίρνουμε

$$\begin{aligned} x(t_n) &= \widehat{x}(t_n) \leq \widehat{x}(\widehat{\tau}(t_n)) \left[1 - \int_{\widehat{\tau}(t_n)}^{t_n} \widehat{p}(s)ds\right] \\ &= x(\tau(t_n)) \left[1 - \int_{\tau(t_n)}^{\sigma(t_n)} \widehat{p}(s)ds\right] \leq 0, \end{aligned}$$

το οποίο αντίκειται στην υπόθεση ότι η x είναι τελικώς θετική. Επίσης, αν t_n είναι ένα δεξιά διασπαρμένο σημείο του $\mathbb{T}$, τότε, για $t \in [t_n, \sigma(t_n)]$, έχουμε

$$\widehat{x}(t) \leq \widehat{x}(\widehat{\tau}(t)) \left[1 - \int_{\widehat{\tau}(t)}^{t} \widehat{p}(s)ds\right]. = x(\tau(t_n)) \left[1 - \int_{\tau(t_n)}^{t} \widehat{p}(s)ds\right].$$

Έχοντας υπόψη την (2.52) και το ότι $\widehat{x}(t) \leq x(\tau(t))$, από την προηγούμενη σχέση βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x(\sigma(t_n)) &= \widehat{x}(\sigma(t_n)) \leq x(\tau(t_n)) \left[1 - \int_{\tau(t_n)}^{\sigma(t_n)} \widehat{p}(s)ds\right] \\ &= x(\tau(t_n)) \left[1 - \int_{\tau(t_n)}^{\sigma(t_n)} p(s)ds\right] \leq 0, \end{aligned}$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο. □

Θεώρημα 2.3.7. *Υποθέτουμε ότι ισχύει η (2.48) και ότι* $m \in [0, \frac{1}{e}]$. *Ας είναι* λ_1 *η μοναδική ρίζα της εξίσωσης* $\lambda = e^{m\lambda}$ *στο διάστημα* $[1, e]$. *Αν*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{\sigma(t)} p(s)\Delta s > \frac{1}{\lambda_1}(1 + ln\lambda_1) - \frac{1 - m - \sqrt{1 - 2m - m^2}}{2}, \tag{2.53}$$

τότε η εξίσωση (2.17) ταλαντούται.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι, αν $m = 0$, τότε είναι $\lambda_1 = 1$ και η (2.53) ανάγεται στην (2.49), και το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 2.3.6. Αν $m \in (0, \frac{1}{e}]$, υποθέτουμε ότι η εξίσωση (2.17) δεν ταλαντούται. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας είναι

x μία τελικώς θετική λύση της εξίσωσης (2.17). Τότε υπάρχει $t_0 \in \mathbb{T}$ τέτοιο ώστε $x(t) > 0$, για $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ και, επειδή $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$, υπάρχει ένας θετικός αριθμός $t_1 \geq t_0$ τέτοιος ώστε $x(\tau(t)) > 0$ για κάθε $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$. Θέτουμε $b := \frac{1-m-\sqrt{1-2m-m^2}}{2}$. Από τα Λήμματα 2.3.6 και 2.3.7 έχουμε ότι

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{x(\tau(t))}{x(t)} \geq \lambda_1 \quad \text{και} \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{x(\sigma(t))}{x(\tau(t))} \geq b$$

και συνεπώς, για $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < \min\{\lambda_1, b\}$, μπορούμε να βρούμε $t_2 \in [t_1, \infty)$ τέτοιο ώστε να είναι

$$\frac{x(\tau(t))}{x(t)} > \lambda_1 - \varepsilon \quad \text{και} \quad \frac{x(\sigma(t))}{x(\tau(t))} > b - \varepsilon, \quad t \in [t_2, \infty).$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\widehat{x}$, $\widehat{p}$, $\widehat{\tau} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπως στο Θεώρημα 2.3.6 και παρατηρούμε ότι από τον τρόπο ορισμού τους έχουμε

$$\frac{\widehat{x}(\widehat{\tau}(t))}{\widehat{x}(t)} > \lambda_1 - \varepsilon \quad \text{και} \quad \frac{\widehat{x}(\sigma(t))}{\widehat{x}(\widehat{\tau}(t))} > b - \varepsilon, \quad t \in [t_2, \infty).$$

Επομένως, για $t \in \mathbb{T}$ με $t > t_2$, υπάρχει $\widehat{t} \in \mathbb{R}$ με $\widehat{t} \in (\widehat{\tau}(t), t)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\widehat{x}(\widehat{\tau}(t))}{\widehat{x}(\widehat{t})} > \lambda_1 - \varepsilon.$$

Με ολοκλήρωση της εξίσωσης (2.50) στο $[\widehat{t}, \sigma(t)]$ και κάνοντας χρήση της μονοτονίας της $\widehat{x}$ (φθίνουσα) και το ότι η $\widehat{p}$ είναι μη αρνητική, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \widehat{x}(\sigma(t)) - \widehat{x}(\widehat{t}) + \int_{\widehat{t}}^{\sigma(t)} \widehat{x}(\widehat{\tau}(s))\widehat{p}(s)ds \\ &= \widehat{x}(\sigma(t)) - \widehat{x}(\widehat{t}) + \int_{\widehat{t}}^{t} \widehat{x}(\widehat{\tau}(s))\widehat{p}(s)ds + \int_{t}^{\sigma(t)} \widehat{x}(\widehat{\tau}(s))\widehat{p}(s)ds \\ &\geq \widehat{x}(\sigma(t)) - \widehat{x}(\widehat{t}) + \widehat{x}(\widehat{\tau}(t)) \int_{\widehat{t}}^{\sigma(t)} \widehat{p}(s)ds, \end{aligned}$$

οπότε

$$\int_{\widehat{t}}^{\sigma(t)} \widehat{p}(s)ds \leq \frac{\widehat{x}(\widehat{t})}{\widehat{x}(\widehat{\tau}(t))} - \frac{\widehat{x}(\sigma(t))}{\widehat{x}(\widehat{\tau}(t))} < \frac{1}{\lambda_1 - \varepsilon} - (b - \varepsilon). \tag{2.54}$$

Διαιρώντας την εξίσωση (2.50) με την $\widehat{x}(\widehat{t})$ και ολοκληρώνοντας από $\tau(t)$ έως $\widehat{t}$, παίρνουμε

$$\int_{\tau(t)}^{\widehat{t}} \frac{\widehat{x}'_+(s)}{\widehat{x}(s)} ds = -\int_{\tau(t)}^{\widehat{t}} \widehat{p}(s) \frac{\widehat{x}(\widehat{\tau}(s))}{\widehat{x}(s)} ds \leq -(\lambda_1 - \varepsilon) \int_{\widehat{t}}^{\sigma(t)} \widehat{p}(s)ds,$$

από όπου έχουμε

$$\int_{\widehat{t}}^{\sigma(t)} \widehat{p}(s)ds \leq -\frac{1}{\lambda_1 - \varepsilon}\int_{\tau(t)}^{\widehat{t}} \frac{\widehat{x}'_+(s)}{\widehat{x}(s)}ds = \frac{\ln(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1 - \varepsilon}. \tag{2.55}$$

Από τις (2.54) και (2.55) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\int_{\tau(t)}^{\sigma(t)} p(s)\Delta s &= \int_{\tau(t)}^{\sigma(t)} \widehat{p}(s)ds = \int_{\tau(t)}^{\widehat{t}} \widehat{p}(s)ds + \int_{\widehat{t}}^{\sigma(t)} \widehat{p}(s)ds \\ &< \frac{1+\ln(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1 - \varepsilon} - (b - \varepsilon).\end{aligned}$$

Από την προηγούμενη ανισότητα για $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{\sigma(t)} p(s)\Delta s \leq \frac{1}{\lambda_1}(1 + \ln\lambda_1) - \frac{1 - m - \sqrt{1 - 2m - m^2}}{2},$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση (2.53). □

Αν $\mathbb{T} = [t_0, \infty)$ η εξίσωση (2.17) ανάγεται στην διαφορική εξίσωση (2.18) και από το Θεώρημα 2.3.7 προκύπτει το επόμενο κριτήριο ταλάντωσης για την (2.18), το οποιο αποτελεί ένα βασικό θεώρημα στο άρθρο [25].

Πόρισμα 2.3.3. *Υποθέτουμε ότι* $m = \liminf_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$ *και ότι* λ *είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης* $\lambda = e^{m\lambda}$ *στο* $[1, e]$. *Αν*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds > \frac{1+\ln\lambda}{\lambda} - \frac{1 - m - \sqrt{1 - 2m - m^2}}{2},$$

τότε η εξίσωση (2.18) ταλαντούται.

Αν $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ και $\tau(n) = n - k$, $n \in \mathbb{N}$, όπου k θετικός ακέραιος, η εξίσωση (2.17) ανάγεται στην εξίσωση (2.21) και από το Θεώρημα 2.3.7 παίρνουμε το επόμενο ταλαντωτικό κριτήριο για την (2.21), το οποίο αποτελεί γενίκευση ενός θεωρήματος στο άρθρο [45].

Πόρισμα 2.3.4. *Υποθέτουμε ότι* $m = \liminf_{n\to\infty} \sum_{n-k}^{n-1} p(s) \leq \frac{1}{e}$ *και έστω* λ *η μοναδική ρίζα της εξίσωσης* $\lambda = e^{m\lambda}$ *στο* $[1, e]$. *Αν*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{s=\tau(n)}^{n} p(s) > \frac{1+\ln\lambda}{\lambda} - \frac{1 - m - \sqrt{1 - 2m - m^2}}{2},$$

τότε η εξίσωση (2.21) ταλαντούται.

2.4 Ταλάντωση Δυναμικών Εξισώσεων Ουδετέρου Τύπου

Η παράγραφος αυτή είναι αφιερωμένη στην ταλάντωση των λύσεων της δυναμικής εξίσωσης ουδετέρου τύπου

$$[x(t) - P(t)x(g(t)]^{\Delta} + Q(t)x(h(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2.56}$$

όπου $\mathbb{T}$ είναι μία χρονοβαθμίδα με $\sup \mathbb{T} = \infty$, P, $Q : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ είναι δπ-συνεχείς συναρτήσεις, με Q όχι εκ ταυτότητας μηδέν σε κανένα διάστημα της μορφής $[a, \infty)_{\mathbf{T}}$, και $g, h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ είναι δπ-συνεχείς συναρτήσεις, με $g(t) < t$, $t \in \mathbb{T}$ και $h(t)$, $g(t) \to \infty$ για $t \to \infty$. Επιπλέον, σε όλη την παρούσα παράγραφο υποθέτουμε ότι:

(H) Υπάρχουν ακολουθίες $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ στο $\mathbb{T}$ τέτοιες ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty, \quad \alpha_{n+1} < b_{n+1}, \quad n \geq 1, \text{ και } g : [\alpha_{n+1}, b_{n+1}] \to [\alpha_n, b_n],$$

και, επιπλέον, υπάρχει μία ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ στο $\mathbb{T}$ για την οποία ισχύει

$$\alpha_n < c_n < b_n \quad \text{και} \quad g(c_{n+1}) = c_n \text{ για κάθε } n \geq 1, \tag{2.57}$$

και

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{i} \frac{1}{P(c_j)} \right] = \infty. \tag{2.58}$$

Για την απόδειξη των συμπερασμάτων που αφορούν την ταλάντωση της εξίσωσης (2.56) κάνουμε χρήση του συμπεράσματος που διατυπώνεται στο επόμενο λήμμα. Το λήμμα αυτό μπορεί να συσχετιστεί με ένα παρόμοιο αποτέλεσμα που αναφέρεται σε ουδετέρου τύπου διαφορικές εξισώσεις με υστέρηση στο $\mathbb{R}$ (βλέπε [38]).

Λήμμα 2.4.1. *Ας είναι $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ακολουθίες που πληρούν την (H). Αν x είναι μία τελικώς θετική λύση της δυναμικής εξίσωσης (2.56), τότε για την συνάρτηση $y(t) := x(t) - P(t)x(g(t))$, $t \in \mathbb{T}$ ισχύει*

$$y^{\Delta}(t) \leq 0 \text{ και } y(t) > 0 \text{ για όλα τα μεγάλα } t$$

Απόδειξη. Ας είναι x μία τελικώς θετική λύση της εξίσωσης (2.56). Με χρήση της υπόθεσης $h(t) \to \infty$ για $t \to \infty$ και της υπόθεσης ότι η x είναι τελικώς θετική, έπεται ότι υπάρχουν t_0, $t_1 \in \mathbb{T}$ με $t_0 < t_1$ και τέτοια ώστε $x(t) > 0$ για $t \geq t_0$ και $h(t) \geq t_0$ για $t \geq t_1$. Τότε $y^{\Delta}(t) \leq 0$ στο $[t_1, \infty)_{\mathbf{T}}$, και άρα η y είναι φθίνουσα στο $[t_1, \infty)_{\mathbf{T}}$. Απομένει να αποδειχθεί ότι η y είναι τελικώς θετική. Θέτουμε $l = \inf\{y(t) : t \geq t_1\}$. Ας υποθέσουμε ότι $l < 0$, τότε υπάρχει ένα $t_2 \in \mathbb{T}$ με $t_2 \geq t_1$ και $\alpha < 0$, τέτοια ώστε $y(t) < \alpha$ για $t \in [t_2, \infty)_{\mathbf{T}}$. Επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο k_0 τέτοιο ώστε $c_{k_0} > t_2$

και θέτουμε $s_0 = c_{k_0}$ και $s_k = c_{k_0+k}$, $k \in \mathbb{N}$. Από την μονοτονία της y έπεται ότι $y(s_{k+1}) < \alpha$, $k \in \mathbb{N}$ και συνεπώς, είναι

$$x(s_{k+1}) < P(s_{k+1})x(s_k) + \alpha, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

και

$$\frac{x(s_{k+1})}{\prod_{i=1}^{k} P(s_{i+1})} < \frac{x(s_k)}{\prod_{i=1}^{k-1} P(s_{i+1})} + \frac{\alpha}{\prod_{i=1}^{k} P(s_{i+1})}, \quad k \in \mathbb{N},$$

από όπου, επαγωγικά, βρίσκουμε

$$x(s_n) < \left[\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{P(s_j)}\right) + x(s_0)\right]\prod_{i=1}^{n} P(s_i), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2.58) και το ότι $\alpha < 0$, από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x(s_n) < 0$ για $n \geq n_0$, το οποίο αντίκειται στην υπόθεση ότι η x είναι τελικώς θετική. Συνεπώς, θα είναι $l \geq 0$, και επειδή η y είναι φθίνουσα και η Q όχι ταυτοτικά μηδέν, συμπεραίνουμε ότι η y είναι τελικώς θετική. □

Για διευκόλυνσή μας στην διατύπωση των επόμενων συμπερασμάτων, υιοθετούμε τον συμβολισμό που εισάγεται από τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.4.1. *Ας είναι $\mathbb{T}$ μία χρονοβαθμίδα και $g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ μία συνάρτηση με $g(t) < t$. Για $t, c \in \mathbb{T}$ με $t > c$ και $t \neq \inf \mathbb{T}$ ορίζουμε τον θετικό ακέραιο*

$$n_g(t; c) := \begin{cases} \max\left\{k \in \mathbb{Z}^+ : g^k(t) \geq c\right\}, & \text{αν } g(t) \geq c \\ 0, & \text{αν } g(t) < c, \end{cases}$$

όπου θέτουμε $g^k = g \circ g^{k-1}$, $k \geq 2$, με $g^1 = g$.

Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι ο $n_g(t; c)$ είναι καλά ορισμένος. Στα επόμενα, για απλούστευση των συμβολισμών, θα γράφουμε $n(t; c)$ αντί του $n_g(t; c)$.

Θεώρημα 2.4.1. *Ας είναι $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες που πληρούν την (H). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι είναι $h(I) \subseteq I$, όπου $I = \cup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i, b_i]$. Αν*

$$\liminf_{t\to\infty} \prod_{i=1}^{n(t;b_1)} P(g^i(t)) > 0 \tag{2.59}$$

και

$$\int_I Q(s)P(h(s))\Delta s = \infty, \tag{2.60}$$

τότε η δυναμική εξίσωση (2.56) ταλαντούται.

Απόδειξη. Έστω ότι $x : [t_x, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι μία μη ταλαντούμενη λύση της εξίσωσης (2.56). Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $t_0 \in \mathbb{T}$ τέτοιο ώστε $x(t) > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$ με $t \geq t_0$. Από το Λήμμα 2.4.1 συνεπάγεται ότι για την συνάρτηση $y : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ με $y(t) := x(t) - P(t)x(g(t))$, $t \in \mathbb{T}^\kappa$ είναι $y(t) > 0$ τελικώς, και συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη και το ότι $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$, υπάρχει $t_1 \in \mathbb{T}$ με $t_1 > t_0$ τέτοιο ώστε $g(t) > t_0$, $g(h(t)) > t_0$. Επομένως, θα είναι

$$x(t) > P(t)x(g(t)), \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbf{T}}.$$

Επιλέγουμε ένα $\alpha_j \in \mathbb{T}$ με $\alpha_j \geq t_1$ και ορίζουμε $m := \min\{x(t) : \alpha_j \leqslant b_j\}$. Για $t \in [\alpha_{j+1}, b_{j+1}]_{\mathbf{T}}$ είναι $g(t) \in [\alpha_j, b_j]_{\mathbf{T}}$ και συνεπώς, θα είναι

$$x(t) > P(t)x(g(t)) \geqslant P(t)m, \quad t \in [\alpha_{j+1}, b_{j+1}]_{\mathbf{T}}.$$

Για $t \in [\alpha_{j+2}, b_{j+2}]_{\mathbf{T}}$, είναι $g(t) \in [\alpha_{j+1}, b_{j+1}]_{\mathbf{T}}$ και $g(g(t)) \in [\alpha_j, b_j]_{\mathbf{T}}$ και συνεπώς

$$x(t) \geq P(t)x(g(t)) \geqslant P(t)P(g(t)x(g^2(t)) \geqslant P(t)P(g(t))m, \quad t \in [\alpha_{j+2}, b_{j+2}]_{\mathbf{T}}.$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία βρίσκουμε

$$x(t) \geq m \prod_{i=0}^{n} x(g^i(t)), \ k \geq 0, \quad t \in [\alpha_{j+k}, b_{j+k}]_{\mathbf{T}}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

όπου αποδεχόμαστε την σύμβαση ότι $\prod_{i=0}^{0} = 1$. Από την (2.59) έπεται ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός μ και ένα σημείο $t_2 \geqslant t_1$ τέτοια ώστε

$$x(t) \geqslant m\mu > 0 \ \text{ για κάθε } t \in [t_2, \infty)_{\mathbf{T}},$$

και συνεπώς, για $t \in [t_2, \infty)_{\mathbf{T}}$, έχουμε

$$y^\Delta(t) = -Q(t)x(h(t)) \leq -Q(t)P(h(t))x(g(h(t)))$$

δηλαδή

$$y^\Delta(t) \leq -Q(t)P(h(t))m\mu, \quad t \in [t_2, \infty)_{\mathbf{T}},$$

από όπου με ολοκλήρωση στο $[t_2, t]_{\mathbf{T}}$ για $t > t_2$ έχουμε

$$y(t) - y(t_2) \leq -m\mu \int_{t_2}^{t} Q(s)P(h(s))\Delta s, \quad t \in [t_2, \infty)_{\mathbf{T}}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2.58), από την ανισότητα προκύπτει ότι, για $t \to \infty$, η y παίρνει αρνητικές τιμές, το οποίο είναι άτοπο. □

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος 2.4.1 είναι αληθές και στην περίπτωση που η συνθήκη (2.60) αντικατασταθεί με μία ελαφρώς ασθενέστερη.

Θεώρημα 2.4.2. *Ας είναι $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες που πληρούν την (Η). Υποθέτουμε ότι η συνθήκη (2.59) πληρούται, $h(I) \subseteq I$ και ότι υπάρχει ένας ακέραιος k τέτοιος ώστε*

$$\int_I Q(s) \prod_{i=0}^{k-1} P(g^i(h(s)))\Delta s = \infty. \tag{2.61}$$

Τότε η δυναμική εξίσωση (2.56) ταλαντούται.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (2.56) έχει μία τελικώς θετική λύση x και εργαζόμαστε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.1. Θεωρούμε ένα $j \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$x(t)) \geq P(t)x(g(t)), \quad t \in [a_j, b_j]_{\mathbb{T}},$$

και κάνοντας χρήση των επιχειρημάτων που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.1, παίρνουμε

$$x(t) \geq \prod_{i=0}^{k-1} P(g^i(t))x(g^{i+1}(t)), \quad t \in [a_{j+k}, b_{j+k}]_{\mathbb{T}}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

από όπου προκύπτει

$$y^{\Delta}(t) \leq -Q(t)x(h(t)) \leq -Q(t)\left(\prod_{i=0}^{k-1} P(g^i(h(t)))\right) m\mu.$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι ο συνδυασμός της προηγούμενης ανισότητας με την (2.61) οδηγεί σε άτοπο. □

Αν η συνθήκη (2.59) αντικατασταθεί από την συνθήκη ότι η συνάρτηση g είναι αύξουσα από το Θεώρημα 2.4.2 εύκολα προκύπτει το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 2.4.1. *Ας είναι $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες που πληρούν την (Η). Υποθέτουμε ότι $h(I) \subseteq I$ και ότι υπάρχει ένας ακέραιος k τέτοιος ώστε να ισχύει η συνθήκη (2.61). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση g αύξουσα. Αν υπάρχει μία θετική σταθερά σ έτσι ώστε*

$$\liminf_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} P(g^{-i}(s)) > \sigma \text{ για κάθε } s \in [\alpha_1, b_1]_{\mathbb{T}}, \tag{2.62}$$

τότε η δυναμική εξίσωση (2.56) ταλαντούται.

Παράδειγμα 2.4.1. Έστω $\mathbb{T} = [t_0, \infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση ουδετέρου τύπου με υστέρηση

$$\left[x(t) - e^{sint}x\left(t - \frac{\pi}{j}\right)\right]' + \frac{1}{t}x\left(\frac{t}{2}\right) = 0, \quad t \geq t_0, \tag{2.63}$$

όπου $j \geq 2$ είναι ένας θετικός ακέραιος. Η συνάρτηση $g(t) = t - \frac{\pi}{j}$, $t \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και είναι $g^{-i}(t) = t + i\frac{\pi}{j}$. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν $2j$ διακριτοί παράγοντες στο γινόμενο $\prod_{i=0}^{n} P(g^{-i}(s)) = \prod_{i=0}^{n} e^{\sin\left(s+i\frac{\pi}{j}\right)} = e^{\sum_{i=1}^{n}\sin\left(s+i\frac{\pi}{j}\right)}$, $n \leq 2j$. Επειδή $\sum_{i=0}^{2j-1} sin\left(s + i\frac{\pi}{j}\right) = 0$, $s \in \mathbb{R}$, θα είναι

$$\prod_{i=0}^{2j-1} e^{\sin(t_0+i\pi/j)} = 1$$

δηλαδή η συνθήκη (2.60) πληρούται. Επιπλέον, το γινόμενο $\prod_{i=0}^{n} P(g^{-i}(s))$ μπορεί να πάρει $2j$ (το πολύ) διακριτές, θετικές τιμές και μάλιστα είναι

$$\prod_{i=0}^{n} P(g^{-i}(s)) > \frac{1}{e^j}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

που σημαίνει ότι η η συνθήκη (2.62) ικανοποιείται. Τέλος, επειδή $|\sin(h(t))| \leq 1$, $t \in [t_0, \infty)$, η συνθήκη (2.58) πληρούται. Από το Πόρισμα 2.4.1, έπεται ότι η εξίσωση (2.63) ταλαντούται.

Στο επόμενο θεώρημα εξετάζεται η ταλάντωση της δυναμικής εξίσωσης (2.56), όταν η συνάρτηση P ταλαντούται γύρω απο ένα σημείο α.

Θεώρημα 2.4.3. *Ας είναι $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες που πληρούν την (H). Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ακολουθίες $(\widehat{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\widehat{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\alpha_n \leq \widehat{\alpha}_n < \widehat{b}_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε*

$$g : [\widehat{\alpha}_{n+1}, \widehat{b}_{n+1}] \to [\widehat{\alpha}_n, \widehat{b}_n]$$

και ότι υπάρχει θετικός αριθμός α με

$$P(t) \geq \alpha \text{ στο } \widehat{E} := \bigcup_{n=1}^{\infty} [\widehat{\alpha}_n, \widehat{b}_n],$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία διαστημάτων $[u_n, v_n]$, με $u_n < v_n < u_{n+1}$ $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$, τέτοια ώστε

$$h(u_n) < h(v_n), \; h([u_n, v_n]) \subseteq [\widehat{\alpha}_n, \widehat{b}_n].$$

- *Για $\alpha \geq 1$, υποθέτουμε ότι υπάρχει $\beta > 0$ και μία αύξουσα, συνεχής συνάρτηση $H : [\alpha, \infty) \to (0, \infty)$, για την οποία*

  $$H(g(t)) + \beta \geq H(t) \text{ για όλα τα μεγάλα } t.$$

  Αν

  $$\int_J Q(t) exp\left[H(h(t))\frac{\ln \alpha}{\beta}\right] \Delta t = \infty$$

  όπου $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} [u_n, v_n]$, τότε η εξίσωση (2.56) ταλαντούται.

- *Για $0 < \alpha < 1$ υποθέτουμε ότι υπάρχει $\gamma > 0$ και μία αύξουσα, συνεχής συνάρτηση $G : [c, \infty) \to (0, \infty)$ για την οποία*

$$G(g(t)) + \gamma \le G(t) \quad \text{για όλα τα μεγάλα} \quad t.$$

Αν

$$\int_J Q(t) exp\left[G(h(t))\frac{\ln \alpha}{\gamma}\right] \Delta t = \infty,$$

τότε η δυναμική εξίσωση (2.56) ταλαντούται.

Απόδειξη. Θα σκιαγραφήσουμε τα βασικά βήματα της απόδειξης μόνο για την περίπτωση που $\alpha > 1$, καθώς η περίπτωση $0 < \alpha < 1$ είναι παρόμοια. Έστω ότι η εξίσωση (2.56) έχει μία θετική λύση x. Τότε, από το Λήμμα 2.4.1, υπάρχει ένα $t_0 > \alpha$ τέτοιο ώστε $x(g(t)) > 0$ και

$$y(t) = x(t) - P(t)x(g(t)) > 0, \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο N τέτοιο ώστε $\widehat{\alpha}_N \ge t_0$. Τότε, στο $\widehat{E}_N = \cup_{n=N}^{\infty}[\widehat{\alpha}_n, \widehat{b}_n]$, έχουμε ότι $x(t) \le P(t)x(g(t))$. Θέτουμε $M := \min\{x(t) : t \in [\widehat{\alpha}_N, \widehat{b}_N]$ και $M_1 := M\exp[-H(\widehat{b}_n))(\ln\alpha)/\beta] > 0$. Με χρήση της μονοτονίας της H, βρίσκουμε

$$x(t) \ge M \ge M_1 \exp[H(t)(\ln\alpha)/\beta], \quad t \in [\widehat{\alpha}_N, \widehat{b}_N]. \tag{2.64}$$

Για $t \in [\widehat{\alpha}_{N+1}\widehat{b}_{N+1}]$, είναι

$$\begin{aligned} x(t) &\ge P(t)x(g(t)) \\ &\ge \alpha M_1 \exp[H(g(t))(\ln\alpha)/\beta] \\ &= M_1 \exp[\ln\alpha + H(g(t))(\ln\alpha)/\beta] \\ &= M_1 \exp[\beta + H(g(t))(\ln\alpha)/\beta] \\ &\ge M_1 \exp[H(t)(\ln\alpha)/\beta], \end{aligned}$$

δηλαδή η (2.64) ισχύει στο $t \in [\widehat{\alpha}_{N+1}\widehat{b}_{N+1}]$. Εργαζόμενοι επαγωγικά, βρίσκουμε

$$x(t) \ge M_1 \exp[H(t)(\ln\alpha)/\beta], \quad t \in \widehat{E}_N.$$

Με χρήση της υπόθεσης $h([u_n, v_n]) \subset [\widehat{\alpha}_n, \widehat{b}_n]$, $n \ge 1$, για $y(t) = x(t) - P(t)x(g(t))$, $t \in \mathbb{T}$, έχουμε

$$\begin{aligned} y(v_k) - y(u_N) &= -\int_{u_N}^{v_k} Q(s)x(h(s))\Delta s \\ &\le -\sum_{j=N}^{k}\int_{u_i}^{v_i} Q(s)x(h(s))\Delta s \end{aligned}$$

$$\leq \; -\sum_{j=N}^{k}\int_{u_i}^{v_i} Q(s)M_1\exp[H(h(s))(\ln\alpha)/\beta]\Delta s$$

και παρατηρούμε ότι, από την υπόθεσή μας, έπεται ότι το δεύτερο μέρος της παραπάνω ανισότητας τείνει στο $-\infty$, όταν $k\to\infty$, που αντίχειται στο συμπέρασμα του Λήμματος 2.4.1, ότι η y είναι τελικώς θετική.

□

Σημειώνουμε ότι συμπεράσματα παρόμοια με αυτά της παρούσης παραγράφου μπορούν να αποδειχθούν και για την $n-$τάξης δυναμική εξίσωση ουδετέρου τύπου

$$(x(t)-P(t)x(g(t))^{\Delta^n}+Q(t)x(h(t))=0.$$

Κεφάλαιο 3

Ταλάντωση Δυναμικών Εξισώσεων Δεύτερης Τάξης

3.1 Γενικά

Στο παρόν κεφάλαιο ασχολούμαστε με την ταλάντωση της μη γραμμικής δυναμικής εξίσωσης

$$\left(p(t)x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} + q(t)(f \circ x^{\sigma})(t) = 0, \quad t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}} \tag{3.1}$$

καθώς και της δυναμικής εξίσωσης

$$\left(p(t)x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} + q(t)x^{\sigma}(t) = 0, \quad t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.2}$$

Η ταλάντωση της εξίσωσης (3.2) έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον αρκετών ερευνητών με αποτέλεσμα την δημοσίευση ενός σημαντικού αριθμού ερευνητικών εργασιών κατά την τελευταία δεκαετία. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα συμπεράσματα των Erbe και Peterson οι οποίοι μελέτησαν στο άρθρο τους [18] την σχέση μεταξύ της ταλάντωσης της μη γραμμικής (3.1) με την ταλάντωση της εξίσωσης (3.2), ενώ οι Bohner και Tisdell στο άρθρο [16] ασχολήθηκαν με την συσχέτιση της ταλάντωσης της εξίσωσης (3.2) με την ταλάντωση της αντίστοιχης μη ομογενούς εξίσωσης. Η πρώτη παράγραφος του παρόντος κεφαλαίου περιέχει ορισμένα βασικά θεωρήματα ταλάντωσης για την (3.1), από τα οποία με κατάλληλη επιλογή συναρτήσεων προκύπτουν αντίστοιχα πορίσματα, για διάφορες μορφές της (3.2). Στην δεύτερη παράγραφο μελετάται η ταλάντωση μίας ειδικής περίπτωσης της εξίσωσης (3.1) και γίνεται σύγκριση των συμπερασμάτων με αντίστοιχα γνωστά συμπεράσματα για την συνεχή περίπτωση.

3.2 Ταλάντωση Συνήθων Μη Γραμμικών Δυναμικών Εξισώσεων Δεύτερης Τάξης

Στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε με την ταλάντωση των λύσεων της εξίσωσης (3.1) για τις οποίες ισχύει

$$\sup\{|x(t)| : t > t_0\} > 0 \text{ για κάθε } t_0 \in \mathbb{T} \text{ με } t_0 \geq a.$$

Σε όλη την παρούσα ενότητα θα θεωρούμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

(H1) Οι συναρτήσεις $p,\ q : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι δπ-συνεχείς με $p > 0,\ q > 0$.

(H2) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $xf(x) > 0$ για $x \neq 0$ και υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x)| \geq K|x| \text{ για } x \neq 0.$$

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$I := \int_\alpha^\infty \frac{\Delta t}{p(t)}.$$

Τα συμπεράσματα αυτής της ενότητας ομαδοποιούνται σε δύο υποενότητες. Η πρώτη υποενότητα αφορά την περίπτωση όπου το ολοκλήρωμα I απειρίζεται θετικά ενώ η δεύτερη υποενότητα αφορά την περίπτωση όπου το ολοκλήρωμα I είναι ένας θετικός αριθμός.

3.2.1 Η περίπτωση $I = \infty$

Πριν προχωρήσουμε στην διατύπωση των κυρίων συμπερασμάτων της παρούσας υποενότητας, προτάσσουμε δύο χρήσιμα λήμματα που αφορούν την συμπεριφορά μη ταλαντούμενων λύσεων της εξίσωσης (3.1).

Λήμμα 3.2.1. *Αν x είναι μία μη ταλαντούμενη λύση της (3.1), τότε υπάρχει $t_0 \in [a,\infty)_{\mathbf{T}}$ τέτοιο ώστε*

$$x(t)x^\Delta(t) > 0 \quad \text{για} \quad t \in (t_0,\infty)_{\mathbf{T}}. \tag{3.3}$$

Απόδειξη. Ας είναι x μία μη ταλαντούμενη λύση της (3.1). Η x θα είναι τελικώς θετική ή τελικώς αρνητική. Θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση που η x είναι τελικώς θετική, καθώς η περίπτωση που η x είναι τελικώς αρνητική αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο. Υπάρχει ένα $t_0 \in [a,\infty)_{\mathbf{T}}$ τέτοιο ώστε

$$x(t) > 0, \quad t \in (t_0,\infty)_{\mathbf{T}}.$$

Θέτουμε $y = px^\Delta$ και παρατηρούμε ότι, για την απόδειξη του συμπερασματός μας, αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$y(t) > 0, \quad t \in (t_0,\infty)_{\mathbf{T}}. \tag{3.4}$$

Για $t > t_0$, ισχύει $x(\sigma(t)) > 0$ και, συνεπώς, λόγω της υπόθεσης (H2), είναι $f(x(\sigma(t))) > 0$ για $t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$. Παραγωγίζοντας την συνάρτηση y, παίρνουμε

$$y^{\Delta}(t) = \left[p(t)x^{\Delta}(t)\right]^{\Delta} = -q(t)f(x(\sigma(t))) < 0,$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση y είναι τελικώς γνησίως φθίνουσα. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $t_1 \in \mathbb{T}$ με $t_1 > t_0$ τέτοιο ώστε

$$y(t_1) = c < 0,$$

τότε, από την μονοτονία της y έπεται ότι

$$p(s)x^{\Delta}(s) = y(s) \leq y(t_1) = c \quad \text{για} \quad s \geq t_1$$

και συνεπώς

$$x^{\Delta}(s) \leq \frac{c}{p(s)} \text{ για όλα τα } s \geq t_1.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση από t_1 έως t, για $t \geq t_1$, παίρνουμε

$$x(t) \ = \ x(t_1) + \int_{t_1}^{t} x^{\Delta}(s)\Delta s \leq x(t_1) + c\int_{t_1}^{t} \frac{\Delta s}{p(s)}.$$

Επειδή $c < 0$, από την υπόθεση $\int_{t_1}^{\infty} \frac{\Delta s}{p(s)} = \infty$ έπεται ότι για $t \to \infty$ είναι $x(t) \to -\infty$, που αντίκειται στην υπόθεση ότι η x είναι μία τελικώς θετική λύση. Άρα $y(t) > 0$ για κάθε $t > t_0$ και, επειδή η συνάρτηση p είναι θετική, θα είναι και $x^{\Delta}(t) > 0$ για κάθε $t > t_0$. □

Λήμμα 3.2.2. *Αν x είναι μία λύση της (3.1) με $x(t) > 0$ για κάθε $t \geq t_0 \geq \alpha$, τότε*

$$0 \leq \frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)} \leq \frac{1}{p(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\Delta s}{p(s)}}, \quad t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.5}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $y = px^{\Delta}$ και, εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του Λήμματος 3.2.1, αποδεικνύουμε ότι $y^{\Delta}(t) < 0$ και $y(t) \geq 0$ για κάθε $t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$. Ολοκληρώνοντας την (3.1) και κάνοντας χρήση της υπόθεσης ότι η λύση x είναι θετική στο $(t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$, παίρνουμε, για $t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$,

$$x(t) \geq x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{y(s)\Delta s}{p(s)} \geq y(t)\int_{t_0}^{t} \frac{\Delta s}{p(s)},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$0 \leq y(t) \leq \frac{x(t)}{\int_{t_0}^{t}\frac{\Delta s}{p(s)}}, \quad t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Διαιρώντας την παραπάνω ανισότητα με $p(t)x(t) > 0$, $t > t_0$, παίρνουμε τελικά την (3.5). □

Για τα επόμενα δύο θεωρήματα θα κάνουμε χρήση της ακόλουθης υπόθεσης:

(H3) Υπάρχει μία συνάρτηση $r \in \mathcal{R}^+(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε η συνάρτηση $p \cdot r : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ να είναι Δ-παραγωγίσιμη και υπάρχουν $M > 0$ και $t^* \geq a$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε $t_0 \geq t^*$ να είναι $r(t)e_r(t, t_0)p(t) \leq M$ για όλα τα μεγάλα t.

Για διευκόλυνσή μας στις διατυπώσεις των θεωρημάτων αυτών, ορίζουμε, για $t_0 \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$, τις συναρτήσεις C, Q, Q_1, $\psi : (t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ με

$$
\begin{aligned}
C(t; t_0) : &= 1 + \frac{\mu(t)}{p(t)\int_{t_0}^{t} \frac{\Delta s}{p(s)}}, && (3.6)\\
Q_1(t; t_0) : &= \frac{1 + \mu(t)r(t)}{p(t)e_r(t, t_0)}, && (3.7)\\
\psi(t; t_0) : &= e_r(\sigma(t), t_0)\left[Kq(t) + \frac{1}{2}(p(t)r(t))^{\Delta} + \frac{r^2(t)p(t)}{4C(t)}\right], && (3.8)\\
Q(t; t_0) : &= -\frac{r(t)(1 + \mu(t)r(t))}{C(t)} + r(t). && (3.9)
\end{aligned}
$$

Θεώρημα 3.2.1. *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις (H1), (H2) και (H3). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για οποιοδήποτε $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ είναι*

$$
\limsup_{t \to \infty} \int_{t_1}^{t} H(s; t_0) = \infty, \tag{3.10}
$$

όπου

$$
H(t; t_0) = \psi(t; t_0) - \frac{Q^2(t; t_0)C(t; t_0)}{4Q_1(t; t_0)}, \quad t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}.
$$

Τότε η εξίσωση (3.1) ταλαντούται.

Απόδειξη. Έστω x μία μη ταλαντούμενη λύση της (3.1). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η x είναι τελικώς θετική. Με χρήση του Λήμματος 3.2.1, διαπιστώνουμε ότι υπάρχει $t_0 \in \mathbb{T}$ τέτοιο ώστε $x(t) > 0$ και $x^{\Delta}(t) > 0$ για $t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$. Για το $t_0 \in \mathbb{T}$ που θεωρήσαμε, ορίζουμε τις συναρτήσεις C, Q_1, ψ και Q με τις σχέσεις (3.6), (3.7), (3.8) και (3.9) αντίστοιχα, καθώς και την συνάρτηση $w : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ με

$$
w(t) := e_r(t, t_0)\left[\frac{p(t)x^{\Delta}(t)}{x(t)} - \frac{1}{2}p(t)r(t)\right], \quad t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.11}
$$

Παρατηρούμε ότι η w είναι Δ-παραγωγίσιμη στο $(t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$. Παραγωγίζοντας την συνάρτηση w και λαμβάνοντας υπόψη ότι, επειδή $r \in \mathcal{R}^+(\mathbb{T})$, θα είναι $e_r(t, t_0) > 0$, παίρνουμε, για $t > t_0$,

$$
w^{\Delta}(t) = e_r^{\Delta}(t, t_0)\left[\frac{p(t)x^{\Delta}(t)}{x(t)} - \frac{1}{2}p(t)r(t)\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&+e_r(\sigma(t),t_0)\left[\frac{p(t)x^{\Delta}(t)}{x(t)}-\frac{1}{2}p(t)r(t)\right]^{\Delta}\\
= \; & r(t)e_r(t,t_0)\left[\frac{p(t)x^{\Delta}(t)}{x(t)}-\frac{1}{2}p(t)r(t)\right]\\
&+e_r(\sigma(t),t_0)\left\{\frac{x(t)[p(t)x^{\Delta}(t)]^{\Delta}-p(t)(x^{\Delta}(t))^2}{x(t)x(\sigma(t))}-\frac{1}{2}[p(t)r(t)]^{\Delta}\right\},
\end{aligned}
$$

δηλαδή, για $t\in(t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$,

$$
\begin{aligned}
w^{\Delta}(t) &= r(t)w(t)+e_r(\sigma(t),t_0)\frac{[p(t)x^{\Delta}(t)]^{\Delta}}{x(\sigma(t))}-\frac{e_r(\sigma(t),t_0)}{p(t)}\times\\
&\quad\times\frac{x(t)}{x(\sigma(t))}\left[\frac{p(t)x^{\Delta}(t)}{x(t)}\right]^2-\frac{1}{2}e_r(\sigma(t),t_0)[p(t)r(t)]^{\Delta}. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $x(\sigma(t))=x(t)+\mu(t)x^{\Delta}(t)$ και με χρήση του Λήμματος 3.2.2, έχουμε, για $t>t_0,\ t\in\mathbb{T}$,

$$
\frac{x(\sigma(t))}{x(t)} = 1+\mu(t)\frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)}\le 1+\frac{\mu(t)}{p(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\Delta s}{p(s)}}=C(t;t_0),
$$

και άρα

$$
-\frac{x(t)}{x(\sigma(t))}\le-\frac{1}{C(t;t_0)},\quad t\in(t_0,\infty)_{\mathbb{T}}. \qquad (3.13)
$$

Από την (3.12) με χρήση της (3.13) παίρνουμε, για $t\in(t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$,

$$
\begin{aligned}
w^{\Delta}(t) &\le r(t)w(t)-e_r(\sigma(t),t_0)q(t)\frac{(f\circ x^{\sigma})(t)}{x(\sigma(t))}\\
&\quad-\frac{e_r(\sigma(t),t_0)}{p(t)C(t;t_0)}\left[\frac{p(t)x^{\Delta}(t)}{x(t)}\right]^2-\frac{1}{2}e_r(\sigma(t),t_0)[p(t)r(t)]^{\Delta}. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Επίσης από την (3.11) έχουμε

$$
\left[\frac{p(t)x^{\Delta}(t)}{x(t)}\right]^2=\frac{w^2(t)}{e_r^2(t,t_0)}+\frac{p(t)r(t)}{e_r(t,t_0)}w(t)+\frac{1}{4r^2(t)p^2(t)},\quad t>t_0.
$$

Από την (3.14), με χρήση της παραπάνω σχέσης και λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση (H2), βρίσκουμε, για $t>t_0$,

$$
\begin{aligned}
w^{\Delta}(t) &\le r(t)w(t)-e_r(\sigma(t),t_0)q(t)\frac{Kx(\sigma(t))}{x(\sigma(t))}-\frac{e_r(\sigma(t),t_0)w^2(t)}{C(t;t_0)p(t)e_r^2(t,t_0)}\\
&\quad-\frac{e_r(\sigma(t),t_0)r(t)w(t)}{C(t;t_0)e_r(t,t_0)}-\frac{e_r(\sigma(t),t_0)r^2(t)p(t)}{4C(t;t_0)}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}e_r(\sigma(t),t_0)[p(t)r(t)]^{\Delta},$$

δηλαδή, για $t \in (t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$,

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) &\leq -e_r(\sigma(t),t_0)\left\{Kq(t)+\frac{1}{2}[p(t)r(t)]^{\Delta}+\frac{r^2(t)p(t)}{4C(t;t_0)}\right\} \\ &\quad -\frac{e_r(\sigma(t),t_0)w^2(t)}{C(t;t_0)p(t)e_r^2(t,t_0)}-\left[\frac{r(t)e_r(\sigma(t),t_0)}{C(t;t_0)e_r(t,t_0)}-r(t)\right]w(t) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Με χρήση της $e_r(\sigma(t),t_0)=[1+\mu(t)r(t)]e_r(t,t_0)$, $t\in\mathbb{T}$, από την (3.15) παίρνουμε, για $t\in\mathbb{T}$ με $t>t_0$,

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) &\leq -\psi(t;t_0)-\frac{[1+\mu(t)r(t)]w^2(t)}{C(t;t_0)p(t)e_r(t,t_0)}-\left\{\frac{r(t)[1+\mu(t)r(t)]}{C(t;t_0)}-r(t)\right\}w(t) \\ &= -\psi(t;t_0)-\frac{Q_1(t;t_0)}{C(t;t_0)}w^2(t)+Q(t;t_0)w(t) \\ &= -\psi(t;t_0)-\left[\sqrt{\frac{Q_1(t;t_0)}{C(t;t_0)}}w(t)-\frac{1}{2}Q(t;t_0)\sqrt{\frac{C(t;t_0)}{Q_1(t;t_0)}}\right]^2+\frac{Q^2(t;t_0)C(t;t_0)}{4Q_1(t;t_0)}, \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$w^{\Delta}(t)\leq-\left[\psi(t;t_0)-\frac{Q^2(t;t_0)C(t;t_0)}{4Q_1(t;t_0)}\right],\quad t\in(t_0,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.16}$$

Για $t_1\in\mathbb{T}$ με $t_1>t_0$, ολοκληρώνοντας την (3.16) στο $[t_1,t]_{\mathbb{T}}$, βρίσκουμε

$$w(t)-w(t_1)\leq-\int_{t_1}^{t}\left[\psi(s;t_0)-\frac{Q^2(s;t_0)C(s;t_0)}{4Q_1(s;t_0)}\right]\Delta s,\quad t\geq t_1,$$

ή

$$\int_{t_1}^{t}\left[\psi(s;t_0)-\frac{Q^2(s;t_0)C(s;t_0)}{4Q_1(s;t_0)}\right]\Delta s\leq w(t_1)-w(t),\quad t\geq t_1. \tag{3.17}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι p, x, x^{Δ} είναι θετικές, από τον ορισμό της συνάρτησης w και την υπόθεση (H3) βρίσκουμε ότι, για $t\geq t_1$, είναι

$$\begin{aligned} w(t) &= e_r(t,t_0)\left[\frac{p(t)x^{\Delta}(t)}{x(t)}-\frac{1}{2}p(t)r(t)\right] \\ &\geq -\frac{1}{2}p(t)r(t)e_r(t,t_0)\geq-\frac{1}{2}M, \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι το δεξιό μέλος της (3.17) είναι άνω φραγμένο, πράγμα που αντίκειται στην υπόθεση (3.10). Επομένως όλες οι λύσεις της εξίσωσης (3.1) ταλαντούνται. □

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι ανάλογα με τις επιλογές της συάρτησης r στην υπόθεση (H3) μπορούν να προκύψουν διαφορετικές ικανές συνθήκες για την ταλάντωση της εξίσωσης (3.1). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εφαρμογές του Θεωρήματος 3.2.1 στις περιπτώσεις που $r(t) = 0$ ή $r(t) = \frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{T}$.

Για $r = 0$ η συνθήκη (H3) πληρούται για κάθε $t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ και είναι $Q_1(t; t_0) = 0$, $\psi(t; t_0) = Kq(t)$, $t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$, $e_r(t, t_0) = 1$, $t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$. Από το Θεώρημα 3.2.1 προκύπτει το επόμενο πόρισμα που, στην περίπτωση $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, είναι το ταλαντωτικό κριτήριο των Leighton-Wintner.

Πόρισμα 3.2.1. *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις (H1) και (H2). Αν*

$$\int_a^{\infty} q(s)\Delta s = \infty,$$

τότε η εξίσωση (3.1) ταλαντούται.

Αν $r(t) = \frac{1}{t}$, τότε $e_r(t, t_0) = \frac{t}{t_0}$ και για να ισχύει η συνθήκη (H3) αρκεί η συνάρτηση p να είναι άνω φραγμένη. Έτσι οδηγούμαστε στο επόμενο κριτήριο.

Πόρισμα 3.2.2. *Υποθέτουμε ότι οι (H1) και (H2) πληρούνται και ότι η συνάρτηση p είναι άνω φραγμένη. Αν για οποιοδήποτε $t_0 \in [\alpha, \infty)_{\mathbb{T}}$ είναι*

$$\limsup_{t \longrightarrow \infty} \int_{t_0}^{t} \left(\sigma(s) \left\{ Kq(s) + \left[\frac{p(s)}{2s}\right]^{\Delta} + \frac{p(s)}{4s^2 C(s; t_0)} \right\} - \frac{A^2(s) C(s; t_0)}{4B(s)} \right) \Delta s = \infty,$$

όπου

$$A(t) := -\frac{1}{tC(t; t_0)} \left[1 + \frac{1}{t}\mu(t) - C(t; t_0) \right], \quad t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$$

και

$$B(t) := \frac{t + \mu(t)}{t^2 p(t)}, \quad t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$$

τότε η εξίσωση (3.1) ταλαντούται.

Στην συνέχεια θεωρούμε την δυναμική εξίσωση (3.1) για $p(t) = 1$, $t \in \mathbb{T}$ και $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε η (3.1) παίρνει την μορφή

$$x^{\Delta\Delta}(t) + q(t)x^{\sigma}(t) = 0, \ t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.18}$$

Με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2.1 στην εξίσωση (3.18), παίρνουμε το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 3.2.3. *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις (H1), (H2) και (H3) και επιπλέον, υποθέτουμε ότι για οποιοδήποτε $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ είναι*

$$\limsup_{t \longrightarrow \infty} \int_{t_1}^{t} \left\{ \sigma(s) \left[q(s) - \frac{1}{2s\sigma(s)} + \frac{1}{4s^2 C_1(s; t_0)} \right] - \frac{A_1^2(s) C_1(s; t_0)}{4B_1(s; t_0)} \right\} \Delta s = \infty,$$

όπου

$$
\begin{aligned}
A_1(t): &= -\frac{1}{tC_1(t;t_0)}\left[1+\frac{1}{t}\mu(t)-C_1(t;t_0)\right],\ t\in(t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\\
B_1(t): &= \frac{t+\mu(t)}{t^2},\ t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}},\\
C_1(t;t_0): &= 1+\frac{\mu(t)}{t-t_0}\ t\in(t_0,\infty)_{\mathbb{T}}.
\end{aligned}
$$

Τότε η εξίσωση (3.18) ταλαντούται.

Παραθέτουμε τώρα το δεύτερο ταλαντωτικό κριτήριο για την δυναμική εξίσωση (3.1).

Θεώρημα 3.2.2. *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (H1), (H2) και (H3) πληρούνται. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για οποιοδήποτε $t_1\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ είναι*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^m}\int_a^t (t-s)^m\left[\psi(s;t_0)-\frac{Q^2(s;t_0)C(s;t_0)}{4Q_1(s;t_0)}\right]\Delta s=\infty, \tag{3.19}$$

όπου m είναι ένας φυσικός αριθμός. Αν η συνάρτηση $\phi:[a,\infty)_{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}$ με

$$\phi(t)=\frac{1}{t^m}\int_a^t e_r^{\sigma}(s,t_0)p^{\sigma}(s)r^{\sigma}(s)\sum_{\nu=0}^{m-1}[t-\sigma(s)]^{\nu}(t-s)^{m-\nu-1}\Delta s, \tag{3.20}$$

είναι άνω φραγμένη, τότε η εξίσωση (3.1) ταλαντούται.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η (3.19) ισχύει και ότι η συνάρτηση ϕ που ορίζεται με την (3.20) είναι άνω φραγμένη. Ας είναι x μία μη ταλαντούμενη λύση της (3.1). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι x είναι τελικώς θετική και με χρήση του Λήμματος 3.2.1 θεωρούμε $t_0\in[\alpha,\infty)_{\mathbb{T}}$ τέτοιο ώστε $x(t)>0$ και $x^{\Delta}(t)>0$ για $t\in(t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$. Ορίζουμε την συνάρτηση w με την σχέση (3.11) και, εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 3.2.1, διαπιστώνουμε ότι η (3.16) είναι αληθής και συνεπώς είναι

$$\left[\psi(t;t_0)-\frac{Q^2(t;t_0)C(t;t_0)}{4Q_1(t;t_0)}\right]<-w^{\Delta}(t),\quad t\in(t_0,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Για $t_1\in\mathbb{T}$ με $t_1>t_0$ από την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\int_{t_1}^t (t-s)^m\left[\psi(s;t_0)-\frac{Q^2(s;t_0)C(s;t_0)}{4Q_1(s;t_0)}\right]\Delta s\le-\int_{t_1}^t (t-s)^m w^{\Delta}(s)\Delta s,\quad t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.21}$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες το δεξιό μέλος της (3.21) και κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 1.2.4 για την Δ-παραγώγιση συναρτήσεων δυνάμεων, παίρνουμε, για $t\in\mathbb{T}$ με $t\ge t_1$,

$$\int_{t_1}^t (t-s)^m w^{\Delta}(s)\Delta s$$

$$= [(t-s)^m w(s)]_{t_1}^t + (-1)^{m+1} \int_{t_1}^t \sum_{\nu=0}^{m-1} (\sigma(s)-t)^\nu (s-t)^{m-\nu-1} w(\sigma(s))\Delta s$$

ή

$$\int_{t_1}^t (t-s)^m w^\Delta(s)\Delta s$$
$$= (t-t_1)^m w(t_1) - \int_{t_1}^t w(\sigma(s)) \sum_{\nu=0}^{m-1} (t-\sigma(s))^\nu (t-s)^{m-\nu-1}\Delta s. \quad (3.22)$$

Από τον ορισμό της w και το γεγονός ότι οι x, x^Δ και p είναι θετικές στο $(t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ έπεται ότι

$$w(t) \geq -\frac{1}{2} p(t) r(t) e_r(t,t_0), \quad t \in (t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$$

και άρα

$$-w(\sigma(t)) \leq \frac{1}{2} p^\sigma(t) r^\sigma(t) e_r^\sigma(t,t_0), \quad t \in (t_0,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Επομένως, από την σχέση (3.22) με χρήση της προηγούμενης ανισότητας, για $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$, παίρνουμε

$$\int_{t_1}^t (t-s)^m \left[\psi(s;t_0) - \frac{Q^2(s;t_0)C(s;t_0)}{4Q_1(s;t_0)}\right]\Delta s$$
$$\leq (t-t_1)^m w(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_1}^t p^\sigma(s) r^\sigma(s) e_r^\sigma(s,t_0) \sum_{\nu=0}^{m-1} (t-\sigma(s))^\nu (t-s)^{m-\nu-1}\Delta s,$$

από όπου προκύπτει ότι, για $t \in \mathbb{T}$ με $t > t_1$, ισχύει

$$\frac{1}{t^m}\int_{t_1}^t (t-s)^m \left[\psi(s;t_0) - \frac{Q^2(s;t_0)C(s;t_0)}{4Q_1(s;t_0)}\right]\Delta s$$
$$\leq \left(\frac{t-t_1}{t}\right)^m w(t_1) + \frac{1}{2}\frac{1}{t^m}\int_{t_1}^t p^\sigma(s) r^\sigma(s) e_r^\sigma(s,t_0) \sum_{\nu=0}^{m-1} (t-\sigma(s))^\nu (t-s)^{m-\nu-1}\Delta s.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (3.19), παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος της ανισότητας τείνει στο άπειρο, ενώ από την (3.20) έπεται ότι το δεύτερο μέλος είναι άνω φραγμένο. Αυτό είναι άτοπο και επομένως όλες οι λύσεις της (3.1) είναι ταλαντούμενες. □

Η πρώτη μας παρατήρηση σχετικά με το Θεώρημα 3.2.2 είναι η διαπίστωση ότι, αν $r \in \mathcal{R}^+(\mathbb{T})$ και $r(t) \leq 0$, $t \in \mathbb{T}$, τότε η συνθήκη (3.20) είναι αληθής για κάθε $t \in \mathbb{T}$. Ειδικά για την περίπτωση που $t_0 = \alpha$, $r(t) = 0$ η (3.19) παίρνει την μορφή

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^m}\int_a^t (t-s)^m q(s)\Delta s = \infty, \quad t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}, \quad (3.23)$$

ενώ εύκολα διαπιστώνεται ότι η συνθήκη (H3) πληρούται για κάθε $t \in (\alpha, \infty)_{\mathbf{T}}$ και είναι $Q_1(t;\alpha) = Q(t;\alpha) = 0$ και $\psi(t;\alpha) = kq(t)$, $e_r(t,\alpha) = 1$, $t \in (\alpha,\infty)_{\mathbf{T}}$. Στην περίπτωση αυτή το Θεώρημα 3.2.2 μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση ενός γνωστού ταλαντωτικού κριτηρίου τύπου Kamenev [26] για δεύτερης τάξης διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών.

Θεώρημα 3.2.3. *Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης*

$$(p(t)x'(t))' + q(t)f(x(t)) = 0, \quad t \in [a,\infty), \tag{3.24}$$

όπου $p : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι δπ-συνεχής και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $xf(x) > 0$ για $x \neq 0$. Έστω ότι υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \geq K|x|$ για $x \neq 0$. Αν

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^m} \int_a^t (t-s)^m q(s)ds = \infty,$$

τότε η εξίσωση (3.24) ταλαντούται.

Θεώρημα 3.2.4. *Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών*

$$\Delta\left[p(n)\Delta x(n)\right] + q(n)f(x(n+1)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.25}$$

όπου $(p_n)_{n\geq 0}$, $(q_n)_{n\geq 0}$ ακολουθίες μη αρνητικών πραγματικών αριθμών και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $xf(x) > 0$ για $x \neq 0$. Έστω ότι υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \geq K|x|$ για $x \neq 0$. Αν

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{t^m} \sum_{s=1}^{n-1} (n-s)^m q(s) = \infty.$$

τότε η εξίσωση (3.25) ταλαντούται.

Το επόμενο ταλαντωτικό συμπέρασμα οφείλεται στους Bohner και Saker [15].

Θεώρημα 3.2.5. *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις (H1) και (H2). Αν υπάρχει μία $\Delta-$παραγωγίσιμη συνάρτηση $z : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_a^t \left\{Kq(s)[z^\sigma(s)]^2 - p(s)[z(s)]^2\right\} \Delta s = \infty, \tag{3.26}$$

τότε η εξίσωση (3.1) ταλαντούται.

Απόδειξη. Έστω ότι x είναι μία μη ταλαντούμενη λύση της εξίσωσης (3.1). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η x είναι τελικώς θετική. Από το Λήμμα 3.2.1 έχουμε ότι υπάρχει ένα $t_0 \in [a,\infty)_{\mathbf{T}}$ τέτοιο ώστε $x(t) > 0$ και $x^\Delta(t) > 0$ για $t \in [t_0,\infty)_{\mathbf{T}}$. Θέτουμε

$$w(t) = \frac{z^2(t)p(t)x^\Delta(t)}{x(t)}, \quad t \in [t_0,\infty)_{\mathbf{T}}$$

και έχουμε ότι $w(t) > 0$ για όλα τα $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$. Παραγωγίζοντας την w μετά από πράξεις, παίρνουμε, για $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$,

$$-w^{\Delta}(t) = [z^{\sigma}(t)]^2 q(t) \frac{(f \circ x^{\sigma})(t)}{x^{\sigma}(t)} + \frac{z^2(t)x(t)}{x^{\sigma}(t)} \left(\frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)} - \frac{z^{\Delta}(t)}{z(t)} \right)^2 - p(t)[z^{\Delta}(t)]^2,$$

από όπου, με χρήση της $\frac{f(x^{\sigma})}{x^{\sigma}} \geq K$, έπεται ότι

$$-w^{\Delta}(t) \geq q(t)K[z^{\sigma}(t)]^2 - p(t)[z^{\Delta}(t)]^2, \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.27}$$

Ολοκληρώνοντας την (3.27) βρίσκουμε, για $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$,

$$w(t_0) - w(t) = -\int_{t_0}^{t} w^{\Delta}(s)\Delta s \geq \int_{t_0}^{t} \left\{ q(s)K[z^{\sigma}(s)]^2 - p(s)[z^{\Delta}(s)]^2 \right\} \Delta s,$$

από όπου, λαμβάνοντας υπόψη ότι $w(t) > 0$, παίρνουμε ότι

$$w(t_0) \geq \int_{t_0}^{t} \left[q(s)K[z^{\sigma}(s)]^2 - p(s)[z^{\Delta}(s)]^2 \right] \Delta s, \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}},$$

το οποίο αντίκειται στην υπόθεση (3.26). Επομένως όλες οι λύσεις της εξίσωσης (3.1) ταλαντούνται. □

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2.5 προκύπτει αν επιλέξουμε $z = \sqrt{\delta}$, όπου $\delta : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μία θετική Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση. Βρίσκουμε ότι $z^{\Delta} = \frac{\delta^{\Delta}}{\sqrt{\delta} + \sqrt{\delta^{\sigma}}}$ και από το Θεώρημα 3.2.5 παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.2.4. *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (H1) και (H2) πληρούνται. Έστω ότι υπάρχει μία Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση $\delta : \mathbb{T} \to (0, \infty)$ τέτοια ώστε*

$$\limsup_{t \to \infty} \int_{a}^{t} \left\{ Kq(s)\,[\delta^{\sigma}(s)]^2 - p(s) \left(\frac{\delta^{\Delta}(s)}{\sqrt{\delta(s)} + \sqrt{\delta^{\sigma}(s)}} \right)^2 \right\} \Delta s = \infty. \tag{3.28}$$

Τότε η εξίσωση (3.1) ταλαντούται.

Περαιτέρω, για $\delta(t) = 1$, $t \in \mathbb{T}$ και $\delta(t) = t$, $t \in \mathbb{T}$ από το Πόρισμα 3.2.4 προκύπτουν τα ακόλουθα δύο ταλαντωτικά κριτήρια.

Πόρισμα 3.2.5. *Αν οι συνθήκες (H1) και (H2) πληρούνται και*

$$\limsup_{t \to \infty} \int_{a}^{t} q(s)\Delta s = \infty,$$

τότε η εξίσωση (3.1) ταλαντούται.

Ας σημειωθεί ότι το Πόρισμα 3.2.5 βελτιώνει το Πόρισμα 3.2.1.

Πόρισμα 3.2.6. *Αν οι συνθήκες (H1) και (H2) πληρούνται και*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_a^t \left\{ Kq(s)\sigma(s) - \frac{p(s)}{\left[\sqrt{s} + \sqrt{\sigma(s)}\right]^2} \right\} \Delta s = \infty, \tag{3.29}$$

τότε η εξίσωση (3.1) ταλαντούται.

Το επόμενο θεώρημα των Bohner και Saker [15] αποτελεί βελτίωση του Θεωρήματος 3.2.5.

Θεώρημα 3.2.6. *Αν υπάρχει μία $\Delta-$παραγωγίσιμη συνάρτηση z και ενας περιττός φυσικός m τέτοιοι ώστε*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^m} \int_a^t (t-s)^m \left\{ Kq(s)[z^\sigma(s)]^2 - p(s)[z^\Delta(s)]^2 \right\} \Delta s = \infty, \tag{3.30}$$

τότε η εξίσωση (3.1) ταλαντούνται.

Απόδειξη. Ας είναι x μία μη ταλαντούμενη λύση της (3.1). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η x είναι τελικώς θετική. Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.5, καταλήγουμε στην σχέση (3.27). Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (3.27) με $(t-s)^m$ όπου $t \ge s$ και ολοκληρώνοντας την ανισότητα που προκύπτει, για $t \ge t_0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^t (t-s)^m \left\{ q(s)K[z^\sigma(s)]^2 - p(s)[z^\Delta(s)]^2 \right\} \Delta s \\
\le\ & -\int_{t_0}^t (t-s)^m w^\Delta(s) \Delta s \\
=\ & -\left[-(t-t_0)^m w(t_0) - (-1)^m \int_{t_0}^t \sum_{\nu=0}^{m-1} (\sigma(t)-s)^\nu (t-s)^{m-\nu-1} w(\sigma(s)) \Delta s \right] \\
=\ & (t-t_0)^m w(t_0) - \int_{t_0}^t \sum_{\nu=0}^{m-1} (\sigma(t)-s)^\nu (t-s)^{m-\nu-1} w(\sigma(s)) \Delta s
\end{aligned}$$

και άρα

$$\int_{t_0}^t (t-s)^m \left\{ q(s)K[z^\sigma(s)]^2 - p(s)[z^\Delta(s)]^2 \right\} \Delta s \le (t-t_0)^m w(t_0), \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbf{T}}.$$

Διαιρώντας με t^m, για $t \in [t_0, \infty)_{\mathbf{T}}$, από την προηγούμενη ανισότητα βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{t^m} \int_{t_0}^t (t-s)^m \left\{ q(s)K[z^\sigma(s)]^2 - p(s)[z^\Delta(s)]^2 \right\} \Delta s \le \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)^m w(t_0). \tag{3.31}$$

Από την ανισότητα (3.31) έχουμε ότι η συνάρτηση

$$\frac{1}{t^m}\int_{t_0}^{t}(t-s)^m\left\{q(s)K[z^\sigma(s)]^2-p(s)[z^\Delta(s)]^2\right\}\Delta s,\quad t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$$

είναι άνω φραγμένη, πράγμα που αντίκειται στην (3.30). Επομένως όλες οι λύσεις της (3.1) ταλαντούνται. □

Το επόμενο ταλαντωτικό κριτήριο οφείλεται στον Saker [37].

Θεώρημα 3.2.7. *Υποθέτουμε ότι πληρούνται οι υποθέσεις (H1) και (H2). Αν υπάρχει μία Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση $\delta:\mathbb{T}\to(0,\infty)$ τέτοια ώστε, για κάθε θετική σταθερά M, να είναι*

$$\limsup_{t\to\infty}\int_a^t\left\{K\delta(\sigma(s))q(s)-\frac{[\delta^\Delta(s)]^2p(s)[s+M\mu(s)]}{4s\delta(\sigma(s))}\right\}\Delta s=\infty, \tag{3.32}$$

τότε κάθε λύση της (3.1) ταλαντούται.

Απόδειξη. Έστω ότι η εξίσωση (3.1) έχει μία μη ταλαντούμενη λύση x. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η λύση x είναι τελικώς θετική. Από το Λήμμα 3.2.1 έπεται ότι υπάρχει ένα $t_0\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ τέτοιο ώστε

$$x(t)>0,\quad x^\Delta(t)>0,\quad t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.33}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $w:[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}$ με

$$w(t):=\delta(t)\frac{p(t)x^\Delta(t)}{x(t)},\quad t\geq t_0 \tag{3.34}$$

και παρατηρούμε ότι λόγω των υποθέσεων για το πρόσημο των δ, p, x, η συνάρτηση w παίρνει μόνο θετικές τιμές. Παραγωγίζοντας την w, παίρνουμε, για $t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$,

$$\begin{aligned} w^\Delta(t) &= \delta^\Delta(t)\frac{p(t)x^\Delta(t)}{x(t)}+\delta(\sigma(t))\left(\frac{p(t)x^\Delta(t)}{x(t)}\right)^\Delta \\ &= \frac{\delta^\Delta(t)}{\delta(t)}w(t)+\delta(\sigma(t))\frac{x(t)[p(t)x^\Delta(t)]^\Delta-p(t)[x^\Delta(t)]^2}{x(t)x(\sigma(t))} \\ &= \frac{\delta^\Delta(t)}{\delta(t)}w(t)+\frac{\delta(\sigma(t))[p(t)x^\Delta(t)]^\Delta}{x(\sigma(t))}-\frac{\delta(\sigma(t))p(t)[x^\Delta(t))]^2}{x(t)x(\sigma(t))}\end{aligned}$$

και άρα

$$w^\Delta(t)=\frac{\delta^\Delta(t)}{\delta(t)}w(t)+\frac{\delta(\sigma(t))[p(t)x^\Delta(t)]^\Delta}{x(\sigma(t))}-\frac{\delta(\sigma(t))w^2(t)}{\delta^2(t)p(t)}\frac{x(t)}{x(\sigma(t))},\quad t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.35}$$

Από την εξίσωση (3.1) και την υπόθεση (H2) έχουμε, για $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$,

$$(p(t)x^{\Delta}(t))^{\Delta} = -q(t)f(x(\sigma(t))) \leq -Kq(t)x(\sigma(t)). \tag{3.36}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $x(\sigma(t)) = x(t) + \mu(t)x^{\Delta}(t)$, $t \in \mathbb{T}$, από τις (3.35) και (3.36) προκύπτει

$$w^{\Delta}(t) \leq \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(t)}w(t) - K\delta(\sigma(t)q(t) - \frac{\delta(\sigma(t))w^2(t)}{\delta^2(t)p(t)}\frac{1}{1+\mu(t)\frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)}}, \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.37}$$

Από το πρόσημο και τη μονοτονία των συναρτήσεων x και x^{Δ} στο $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ έχουμε

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x^{\Delta}(s)\Delta s \geq x^{\Delta}(t)(t - t_0),$$

από όπου έπεται ότι υπάρχουν μία θετική σταθερά M και ένα $t_1 \in \mathbb{T}$ με $t_1 \geq t_0$ τέτοια ώστε

$$\frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)} \leq \frac{M}{t}, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Με χρήση της προηγούμενης ανισότητας, από την (3.37) παίρνουμε, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$,

$$w^{\Delta}(t) \leq -K\delta(\sigma(t))q(t) + \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(t)}w(t) - \frac{\delta(\sigma(t))w^2(t)}{\delta^2(t)p(t)}\frac{t}{t+M\mu(t)}$$

και συνεπώς

$$w^{\Delta}(t) \leq -K\delta(\sigma(t))q(t) + \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(t)}w(t) - \frac{Q(t)w^2(t)}{\delta^2(t)}, \quad t \in [t_1, \infty), \tag{3.38}$$

όπου

$$Q(t) := \frac{\delta(\sigma(t))}{p(t)}\frac{t}{t+M\mu(t)}, \quad t \geq t_1.$$

Από την (3.38) με συμπλήρωση τετραγώνων βρίσκουμε

$$w^{\Delta}(t) \leq -K\delta(\sigma(t))q(t) + \frac{\left(\delta^{\Delta}(t)\right)^2}{4Q(t)} - \left[\frac{\sqrt{Q(t)}}{\delta(t)}w(t) - \frac{\delta^{\Delta}(t)}{2\sqrt{Q(t)}}\right]^2, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$w^{\Delta}(t) < -\left\{K\delta(\sigma(s))q(s) - \frac{\left[\delta^{\Delta}(s)\right]^2}{4Q(s)}\right\}, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.39}$$

Ολοκληρώνοντας την (3.39) στο διάστημα $[t_1, t]_{\mathbb{T}}$, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, παίρνουμε

$$-w(t_1) < w(t) - w(t_1) < -\int_{t_1}^{t}\left\{K\delta(\sigma(s))q(s) - \frac{\left[\delta^{\Delta}(s)\right]^2}{4Q(s)}\right\}\Delta s,$$

από όπου βρίσκουμε ότι

$$\int_{t_1}^{t} \left\{ K\delta(\sigma(s))q(s) - \frac{\left[\delta^{\Delta}(s)\right]^2}{4Q(s)} \right\} \Delta s < w(t_1) \quad \text{για κάθε} \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}},$$

που έρχεται σε αντίθεση με την σχέση (3.32). Επομένως όλες οι λύσεις της (3.1) ταλαντούνται. □

Για $\delta(t) = t$, $t \in \mathbb{T}$, από το Θεώρημα 3.2.7 παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.2.7. *Υποθέτουμε ότι πληρούνται οι υποθέσεις (H1) και (H2). Αν, για κάθε θετική σταθερά M, ισχύει*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{a}^{t} \left\{ K\sigma(s)q(s) - \frac{p(s)[s + M\mu(s)]}{4s\sigma(s)} \right\} \Delta s = \infty, \tag{3.40}$$

τότε η εξίσωση (3.1) ταλαντούται.

Το επόμενο θεώρημα οφείλεται στον Saker [37] και αποτελεί βελτίωση του Θεωρήματος 3.2.7.

Θεώρημα 3.2.8. *Ας είναι $\delta(t)$ μία θετική συνάρτηση. Αν υπάρχει ένας περιττός φυσικός m τέτοιος ώστε για κάθε θετική σταθερά M να ισχύει*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^m} \int_{a}^{t} (t-s)^m \left\{ K\delta(\sigma(s))q(s) - \frac{[\delta^{\Delta}(s)]^2 p(s)[s + M\mu(s)]}{4s\delta(\sigma(s))} \right\} \Delta s = \infty, \tag{3.41}$$

τότε η εξίσωση (3.1) ταλαντούται.

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι x είναι μία μη ταλαντούμενη λύση της (3.1). Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.7, καταλήγουμε ότι ισχύει, για κάποιο $t_1 \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$, η σχέση (3.39), από την οποία έχουμε

$$\left\{ K\delta(\sigma(t))q(t) - \frac{\left[\delta^{\Delta}(t)\right]^2}{4Q(t)} \right\} < -w^{\Delta}(t), \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Από την παραπάνω ανισότητα έχουμε, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t} (t-s)^m \left\{ K\delta(\sigma(s))q(s) - \frac{\left[\delta^{\Delta}(s)\right]^2}{4Q(s)} \right\} \Delta s &\le - \int_{t_1}^{t} (t-s)^m w^{\Delta}(s) \Delta s \\ = - \left\{ -(t-t_1)^m w(t_1) + (-1)^{m+1} \int_{t_1}^{t} \sum_{\nu=0}^{m-1} [\sigma(t) - s]^{\nu} (t-s)^{m-\nu-1} w(\sigma(s)) \Delta s \right\} \end{aligned}$$

ή

$$\int_{t_1}^{t}(t-s)^m\left\{K\delta(\sigma(s))q(s)-\frac{\left[\delta^{\Delta}(s)\right]^2}{4Q(s)}\right\}\Delta s \le -\int_{t_1}^{t}(t-s)^m w^{\Delta}(s)\Delta s$$

$$\le (t-t_1)^m w(t_1)-(-1)^{m+1}\int_{t_1}^{t}\sum_{\nu=0}^{m-1}(\sigma(t)-s)^{\nu}(t-s)^{m-\nu-1}w(\sigma(s))\Delta s.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο m είναι περιττός ακέραιος και η w είναι θετική στο $[t_1,\infty)_{\mathbf{T}}$, από την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε, για $t\in[t_1,\infty)_{\mathbf{T}}$,

$$\int_{t_1}^{t}(t-s)^m\left\{K\delta(\sigma(s))q(s)-\frac{\left[\delta^{\Delta}(s)\right]^2}{4Q(s)}\right\}\Delta s < (t-t_1)^m w(t_1),$$

από όπου έπεται ότι, για κάθε $t\in[t_1,\infty)_{\mathbf{T}}$, έχουμε

$$\frac{1}{t^m}\int_{t_1}^{t}(t-s)^m\left\{K\delta(\sigma(s))q(s)-\frac{\left[\delta^{\Delta}(s)\right]^2}{4Q(s)}\right\}\Delta s < \left(1-\frac{t_1}{t}\right)^m w(t_1),$$

και, συνεπώς,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^m}\int_{t_1}^{t}(t-s)^m\left\{K\delta(\sigma(s))q(s)-\frac{[\delta^{\Delta}(s)]^2p(s)[s+M\mu(s)]}{4s\delta(\sigma(s))}\right\}\Delta s < w(t_1),$$

που αντίκειται στην υπόθεση (3.41). Επομένως όλες οι λύσεις της (3.1) ταλαντούνται.

□

Θα κλείσουμε την παρούσα ενότητα εφαρμόζοντας ορισμένα από τα συμπεράσματά μας στην δεύτερης τάξης δυναμική εξίσωση Cauchy-Euler.

$$x^{\Delta\Delta}(t)+\frac{\gamma}{t\sigma(t)}x^{\sigma}(t)=0,\quad t\in[1,\infty)_{\mathbf{T}}. \tag{3.42}$$

Η εξίσωση αυτή είναι της μορφής (3.1) με $p(t)=1$, $t\in\mathbb{T}$, $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ και $q(t)=\frac{\gamma}{t\sigma(t)}$, $t\in\mathbb{T}$.

Αν $\mathbb{T}=[1,\infty)$, τότε η (3.42) παίρνει την μορφή της δεύτερης τάξης διαφορικής εξίσωσης

$$x''(t)+\frac{\gamma}{t^2}x=0,\quad t\ge 1. \tag{3.43}$$

Προκειμένου να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 3.2.3, διαπιστώνουμε ότι $K=1$, $C_1(t)=1$, $B_1(t)=\frac{1}{t}$, $A_1(t)=0$, $q(t)=\frac{\gamma}{t^2}$, $t\in\mathbb{T}$. Επομένως, με εφαρμογή του Πορίσματος 3.2.3, βρίσκουμε ότι η εξίσωση (3.43) είναι ταλαντούμενη αν

$$\limsup_{t\to\infty}\int_1^t\left[\frac{\gamma}{s}-\frac{1}{2s}+\frac{s}{4s^2}\right]ds=\limsup_{t\to\infty}\int_1^t\left[\frac{\gamma-\frac{1}{4}}{s}\right]ds=\infty.$$

Είναι προφανές ότι η παραπάνω σχέση είναι αληθής όταν $\gamma > \frac{1}{4}$.

Ας εφαρμόσουμε τώρα το Πόρισμα 3.2.7 για την εξίσωση (3.43). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνθήκη (3.40) γίνεται

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty}\int_{\alpha}^{t}\left[\sigma(s)q(s)-\frac{s+M\mu(s)}{4s\sigma(s)}\right]\Delta s &= \limsup_{t\to\infty}\int_{1}^{t}\left[\frac{\gamma s}{s^2}-\frac{s}{4s^2}\right]ds\\ &= \limsup_{t\to\infty}\int_{1}^{t}\frac{4\gamma-1}{s}ds=\infty.\end{aligned}$$

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση αρκεί $\gamma > \frac{1}{4}$, και, συνεπώς, καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα που πήραμε από την εφαρμογή του Πορίσματος 3.2.3.

Στην περίπτωση που $\mathbb{T}=\mathbb{N}$, η (3.42) παίρνει την μορφή της δεύτερης τάξης εξίσωσης διαφορών

$$\Delta^2 x(n)+\frac{\gamma}{n(n+1)}x(n+1)=0, \quad n=1,2,\dots. \tag{3.44}$$

Προκειμένου να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 3.2.3, διαπιστώνουμε ότι είναι $\mu(n)=1$, $\sigma(n)=n+1$, $C_1(n)=\frac{n-t_0+1}{n-t_0}$ και

$$\frac{A_1^2(n)}{B_1(n)}=\frac{t_0^2}{n^2(n+1)(n-t_0+1)^2}.$$

Επομένως, με εφαρμογή του Πορίσματος 3.2.3, προκύπτει ότι η εξίσωση (3.44) ταλαντούται αν

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\int_{a}^{n}\left[\frac{\gamma}{s}-\frac{1}{2s}+\frac{s^2-1}{4s^3}-\frac{t_0^2}{4s^2(s+1)(s-t_0)(s-t_0+1)}\right]\Delta s\\ &=\limsup_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n-1}\left[\frac{\gamma}{s}-\frac{1}{2s}+\frac{1}{4s}\right]=\limsup_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n-1}\left[\frac{\gamma-\frac{1}{4}}{s}\right]=\infty,\end{aligned}$$

δηλαδή όταν $\gamma > \frac{1}{4}$. Στην συνέχεια εφαρμόζουμε το Πόρισμα 3.2.7. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $M=1$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{a}^{n}\left[\sigma(s)q(s)-\frac{s+M\mu(s)}{4s\sigma(s)}\right]\Delta s &= \limsup_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n-1}\left[\frac{\gamma(s+1)}{s(s+1)}-\frac{s+1}{4s(s+1)}\right]\\ &= \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{s=1}^{n-1}\frac{4\gamma-1}{s}-\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\gamma}{s^2}\right).\end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση (3.44) ταλαντούται όταν $\gamma > \frac{1}{4}$.

Ας ασχοληθούμε τώρα με την εφαρμογή του Πορίσματος 3.2.6 στην γενική εξίσωση Cauchy-Euler (3.42). Επειδή $K = 1$, παίρνουμε ότι η εξίσωση (3.42) ταλαντούται αν

$$\limsup_{t\to\infty} \int_1^t \left[\frac{\gamma}{s} - \frac{1}{(\sqrt{s} + \sqrt{\sigma(s)})^2} \right] \Delta s = \infty.$$

Παρατηρώντας ότι, για $s \in [1, \infty)_{\mathbf{T}}$, είναι

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{s} - \frac{1}{(\sqrt{s} + \sqrt{\sigma(s)})^2} &\geq \frac{\gamma}{s} - \frac{1}{(\sqrt{s} + \sqrt{s})^2} \\ &= \frac{\gamma}{s} - \frac{1}{(2\sqrt{s})^2} = \frac{\gamma - \frac{1}{4}}{s}, \end{aligned}$$

από το Πόρισμα 3.2.6 έπεται ότι η εξίσωση (3.42) ταλαντούται αν $\gamma > \frac{1}{4}$ και

$$\int_1^t \frac{\Delta t}{t} = \infty. \tag{3.45}$$

Ας σημειωθεί ότι οι Bohner και Guseinov απέδειξαν στην εργασία [12] ότι η συνθήκη (3.45) ισχύει σε οποιαδήποτε χρονοβαθμίδα που δεν είναι άνω φραγμένη. Επομένως, για $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ και $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, οι εξισώσεις (3.43) και (3.44), ταλαντούνται όταν $\gamma > \frac{1}{4}$.

Παρατηρούμε ότι εφαρμόζοντας διαφορετικά κριτήρια αποδείχθηκε ότι η εξίσωση (3.42) ταλαντούται όταν $\gamma > \frac{1}{4}$ και στις δύο περιπτώσεις που $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ και $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι συμβατό με αντίστοιχα κριτήρια ταλάντωσης που έχουν αποδειχτεί για την συνεχή [32] και διακριτή περίπτωση [41].

3.2.2 Η περίπτωση $I < \infty$

Στην παρούσα υποενότητα ασχολούμαστε με την ταλάντωση της εξίσωσης (3.1) όταν το ολοκλήρωμα I είναι πεπερασμένο. Πιο συγκεκριμένα, δίνουμε ικανές συνθήκες ώστε οι λύσεις της (3.1) να ταλαντούνται ή να τείνουν στο μηδέν για $t \to \infty$. Το πρώτο συμπέρασμα αφορά την περίπτωση που η f είναι αύξουσα και οφείλεται στους Bohner και Saker [15].

Θεώρημα 3.2.9. *Υποθέτουμε ότι οι (H1) και (H2) πληρούνται. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι αύξουσα. Αν*

$$\int_a^\infty \frac{1}{p(t)} \int_a^t q(s) \Delta s \Delta t = \infty$$

και υπάρχει μία Δ- παραγωγίσιμη συνάρτηση z η οποία να ικανοποιεί την σχέση (3.26), τότε κάθε λύση της (3.1) είτε ταλαντούται είτε τείνει στο μηδέν για $t \to \infty$.

Η υπόθεση για την μονοτονία της f δεν απαιτείται στα επόμενα δύο συμπεράσματα.

Θεώρημα 3.2.10. *Υποθέτουμε ότι οι (H1), (H2) και (H3) πληρούνται. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η σχέση (3.10). Αν*

$$\int_a^\infty \left[\frac{1}{p(t)}\int_a^t q(s)\Delta s\right]\Delta t = \infty, \tag{3.46}$$

τότε κάθε λύση της (3.1) είτε ταλαντούται είτε τείνει στο μηδέν για $t \to \infty$.

Απόδειξη. Έστω ότι $x : [t_x, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι μία μη ταλαντούμενη λύση της (3.1). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η x τελικώς θετική, δηλαδή υπάρχει ένα $t_0 \in [\alpha, \infty]_{\mathbb{T}}$ τέτοιο ώστε $x(t) > 0$ για $t > t_0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $x^\Delta(t) > 0$ για $t > t_0$.

(ii) Υπάρχει $t_1 \in \mathbb{T}$ με $t_1 > t_0$ και τέτοιο ώστε $x^\Delta(t_1) \leq 0$.

Στην πρώτη περίπτωση, εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1, καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως, στην περίπτωση (i), η εξίσωση (3.1) ταλαντούται.

Στην συνέχεια ασχολούμαστε με την περίπτωση (ii). Υποθέτουμε δηλαδή ότι υπάρχει ένα $t_1 > t_0$, τέτοιο ώστε $x^\Delta(t_1) \leq 0$. Από την εξίσωση (3.1) παίρνουμε

$$(p(t)x^\Delta(t))^\Delta = -q(t)f(x^\sigma(t)) \leq 0, \quad t \geq t_1,$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση $p(t)x^\Delta(t)$ είναι φθίνουσα στο $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, και συνεπώς

$$p(t)x^\Delta(t) \leq p(t_1)x^\Delta(t_1) \leq 0, \quad \text{για } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}},$$

από όπου, λαμβάνοντας υπόψη ότι $p(t) > 0$, $t \in \mathbb{T}$, έπεται ότι $x^\Delta(t) \leq 0$ για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$. Κατά συνέπεια η x είναι φθίνουσα και θετική στο $[t_1, \infty)$, και άρα το όριο της x στο $+\infty$ υπάρχει ως πραγματικός αριθμός. Ας είναι

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = b \in [0, \infty).$$

Αν $b > 0$, τότε $x(\sigma(t)) \geq b > 0$ για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ και από την υπόθεση (H2) έχουμε ότι

$$f(x(\sigma(t))) \geq Kx(\sigma(t)) \geq Kb > 0, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}},$$

από όπου παίρνουμε

$$(p(t)x^\Delta(t))^\Delta = -q(t)f(x^\sigma(t)) \leq -Kbq(t), \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Από την προηγούμενη ανισότητα με ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$p(t)x^\Delta(t) \leq p(t_1)x^\Delta(t_1) - Kb\int_{t_1}^t q(s)\Delta s \leq -Kb\int_{t_1}^t q(s)\Delta s, \quad t \geq t_1. \tag{3.47}$$

Διαιρώντας την (3.47) με $p(t)$ και ολοκληρώνοντας από t_1 εώς t παίρνουμε

$$x(t) - x(t_1) \leq -Kb \int_{t_1}^{t} \frac{1}{p(s)} \int_{t_1}^{t} q(\tau)\Delta\tau\Delta s.$$

Από την υπόθεση (3.46) έπεται ότι το δεξιό μέλος της προηγούμενης ανισότητας τείνει στο $-\infty$ για $t \to \infty$. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι θα πρέπει να είναι και $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$, πράγμα το οποίο αντίχειται στην υπόθεση ότι $x(t) > 0$ για $t > t_0$. Επομένως $b = 0$, δηλαδή $\lim_{t\to\infty} x(t) := 0$. □

Το επόμενο κριτήριο οφείλεται στον Saker [37].

Θεώρημα 3.2.11. *Υποθέτουμε ότι οι (H1) και (H2) πληρούνται.Έστω ότι υπάρχει μία θετική συνάρτηση δ τέτοια ώστε για κάθε σταθερά $M > 0$, να ισχύει η σχέση (3.32). Αν*

$$\int_{a}^{\infty} \frac{1}{p(t)} \int_{a}^{t} q(s)\Delta s\Delta t = \infty$$

τότε κάθε λύση της (3.1) είτε ταλαντούται είτε τείνει στο μηδέν για $t \to \infty$.

3.3 Ταλάντωση Μίας Κλάσης Αποσβεννύμενων Μη Γραμμικών Δυναμικών Εξισώσεων Δεύτερης Τάξης

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την ταλάντωση της δυναμικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$x^{\Delta\Delta}(t) + q(t)x^{\Delta^\sigma}(t) + p(t)(f \circ x^\sigma)(t) = 0, \quad t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}, \tag{3.48}$$

όπου p, q είναι πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες σε μία χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}$ με $\sup \mathbb{T} = \infty$. Σε ολόκληρη την παρούσα ενότητα θα υποθέτουμε ότι οι p, q και f ικανοποιούν τις υποθέσεις:

(H4) Οι συναρτήσεις $p,\ q : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι δπ-συνεχείς.

(H5) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{0\}$ και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$f'(x) > 0 \text{ και } xf(x) > 0 \text{ για } x \neq 0.$$

Παρατηρουμε ότι η υπόθεση (H5) επιτρέπει στην συνάρτηση f να είναι είτε υπογραμμική είτε υπεργραμμική. Για παράδειγμα η συνάρτηση f μπορεί να είναι της μορφής $f(x) = x^\gamma$, $x \in \mathbb{R}$ με $\gamma > 0$, όπου γ είναι το πηλίκο δύο περιττών ακεραίων. Ας σημειωθεί ότι, αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (3.48) με την συνάρτηση $r(t) := e_q(t, t_0)$, τότε η εξίσωση (3.48) παίρνει την μορφή

$$(r(t)x^\Delta(t))^\Delta + p_1(t)(f \circ x^\sigma)(t) = 0, \quad t \in [a, \infty]_{\mathbb{T}}, \tag{3.49}$$

όπου θέσαμε $p_1(t) := r(t)p(t)$, $t \in \mathbb{T}$. Σημειώνουμε, επίσης, ότι, αν $q \in \mathcal{R}^+(\mathbb{T})$, τότε από το Θεώρημα 1.4.6 έπεται ότι $r(t) > 0$, $t \in \mathbb{T}$.

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε μία, επιπλέον, υπόθεση που θα χρησιμοποιηθεί στην διατύπωση των συμπερασμάτων αυτής της ενότητας.

(H6) Η συνάρτηση $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν σε κανένα διάστημα της μορφής $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ για $t_0 \in \mathbb{T}$ και ισχύει

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} g(s)\Delta s > 0.$$

Μία άμεση συνέπεια της υπόθεσης (H6) δίνεται στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.3.1. *Ας είναι $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που ικανοποιεί την συνθήκη (H6). Τότε για οποιοδήποτε $t_0 \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$, υπάρχει ένα $t_1 \geq t_0$ τέτοιο ώστε*

$$\int_{t_1}^{t} g(s)\Delta s \geq 0 \text{ για όλα τα } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}} \tag{3.50}$$

Απόδειξη. Έστω ότι δεν υπάρχει $t_1 \geq t_0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (3.50). Τότε για ένα αυθαίρετο αλλά σταθερό $t > t_0$, θέτουμε

$$t_1 = t_1(t) := \sup\left\{r > t : \int_t^r g(s)\Delta s < 0\right\}.$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι το t_1 είναι πεπερασμένο. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν $t_1 = \infty$, μπορούμε να βρούμε μία ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{T}$ με $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ τέτοια ώστε

$$\int_t^{t_n} g(s)\Delta s < 0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

το οποίο όμως αντίκειται στην υπόθεση (H6). Επομένως είναι $t_1 < \infty$, δηλαδή

$$\int_{t_1}^{t} g(s)\Delta s \geq 0 \text{ για } t \geq t_1,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Το επόμενο λήμμα δίνει μία σημαντική ιδιότητα των μη ταλαντούμενων λύσεων της (3.48).

Λήμμα 3.3.2. *Έστω x μία μη ταλαντούμενη λύση της (3.48). Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $q \in \mathcal{R}^+(\mathbb{T})$ και ότι η συνάρτηση p_1 ικανοποιεί την συνθήκη (H6). Αν*

$$\int_a^\infty \frac{1}{r(t)}\Delta t = \infty, \tag{3.51}$$

τότε υπάρχει ένα $t_1 \in \mathbb{T}$ με $t_1 \geq a$ τέτοιο ώστε

$$x(t)x^\Delta(t) > 0, \quad t \in [t_1, \infty)_\mathbb{T}.$$

Απόδειξη. Ας είναι x μία μη ταλαντούμενη λύση της (3.48). Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να θεωρήσουμε ότι η x είναι μία τελικώς θετική λύση, δηλαδή υπαρχει $t_0 \in [a, \infty)_\mathbb{T}$ τέτοιο ώστε $x(t) > 0$ για $t \in [t_0, \infty)_\mathbb{T}$. Επειδή η συνάρτηση p_1 ικανοποιεί την συνθήκη (H6), από το Λήμμα 3.3.1 έπεται ότι υπάρχει $t_1 \in \mathbb{T}$ με $t_1 \geq t_0$ τέτοιο ώστε

$$\int_{t_1}^t p_1(s)\Delta s \geq 0, \quad t \in [t_1, \infty)_\mathbb{T}. \tag{3.52}$$

Προκειμένου να καταλήξουμε σε άτοπο υποθέτουμε ότι η συνάρτηση x^Δ δεν είναι τελικώς θετική και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(i) Έστω ότι η x^Δ είναι τελικώς αρνητική. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι είναι $x^\Delta(t) < 0$ για κάθε $t \in [t_1, \infty)_\mathbb{T}$. Ολοκληρώνοντας την (3.49) από t_1 έως $t > t_1$, βρίσκουμε

$$r(t)x^\Delta(t) - r(t_1)x^\Delta(t_1) + \int_{t_1}^t p_1(s)f(x^\sigma(s))\Delta s = 0, \quad t \in [t_1, \infty)_\mathbb{T}$$

ή

$$r(t)x^\Delta(t) + \int_{t_1}^t p_1(s)f(x^\sigma(s))\Delta s = r(t_1)x^\Delta(t_1) < 0, \quad t \in [t_1, \infty)_\mathbb{T}. \tag{3.53}$$

Κάνοντας χρήση της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ολοκλήρωμα της (3.53), βρίσκουμε

$$\int_{t_1}^t p_1(s)f(x^\sigma(s))\Delta s = f(x(t))\int_{t_1}^t p_1(s)\Delta s - \int_{t_1}^t (f\circ x)^\Delta(s)\int_{t_1}^s p_1(u)\Delta u\Delta s. \tag{3.54}$$

Από το Θεώρημα 1.5.5 και την (H5) έχουμε ότι

$$(f\circ x)^\Delta(t) = \left\{\int_0^1 f'(x(t) + h\mu(t)x^\Delta(t))dh\right\}x^\Delta(t) \leq 0, \quad t \in [t_1, \infty)_\mathbb{T}$$

και συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη την (3.52) βρίσκουμε

$$\int_{t_1}^t (f\circ x)^\Delta(s)\int_{t_1}^s p_1(u)\Delta u\Delta s \leq 0, \quad t \in [t_1, \infty)_\mathbb{T}. \tag{3.55}$$

Συνδυάζοντας την (3.54) και την (3.55) βρίσκουμε

$$\int_{t_1}^{t} p_1(s) f(x^\sigma(s))\Delta s \geq f(x(t)) \int_{t_1}^{t} p_1(s)\Delta s \geq 0, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Με χρήση της προηγούμενης ανισότητας από την (3.53), προκύπτει

$$r(t)x^\Delta(t) \leq r(t_1)x^\Delta(t_1) < 0, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Διαιρώντας την παραπάνω σχέση με $r(t)$ (είναι $r(t) > 0$, $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$) και ολοκληρώνοντας από t_1 εώς t, βρίσκουμε

$$x(t) \leq x(t_1) + r(t_1)x^\Delta(t_1) \int_{t_1}^{t} \frac{1}{r(s)}\Delta s, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.56}$$

Από την (3.51) και την υπόθεση ότι $x^\Delta(t_1) < 0$ έπεται ότι το δεξιό μέλος της σχέσης (3.56) τείνει στο $-\infty$ για $t \to \infty$, πράγμα που αντίκειται στην υπόθεση ότι η x είναι τελικώς θετική.

(ii) Έστω ότι η x^Δ δεν είναι τελικώς αρνητική. Τότε, από την αρχική μας υπόθεση ότι η x^Δ δεν είναι τελικώς θετική έπεται ότι η x^Δ ταλαντούται. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$w(t) := -\frac{r(t)x^\Delta(t)}{f(x(t))}, \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Επειδή η x^Δ ταλαντούται, μπορούμε να βρούμε ένα $t_1 \in \mathbb{T}$ με $t_1 > t_0$ τέτοιο ώστε $x^\Delta(t_1) < 0$, δηλαδή $w(t_1) > 0$. Παραγωγίζοντας την w, βρίσκουμε, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$,

$$\begin{aligned} w^\Delta(t) &= -\frac{(r(t)x^\Delta(t))^\Delta f(x(t)) - r(t)x^\Delta(t) f \circ x)^\Delta(t)}{f(x(t))f(x^\sigma(t))} \\ &= -\frac{-p_1(t)f(x^\sigma(t))}{f(x^\sigma(t))} + w(t)\frac{(f \circ x)^\Delta(t)}{f(x^\sigma(t))} \\ &= p_1(t) + w^2(t)\frac{f(x(t))}{r(t)x^\Delta(t)f(x^\sigma(t))}(f \circ x)^\Delta(t) \end{aligned}$$

και, με χρήση του κανόνα αλυσίδας του Θεωρήματος 1.5.5, παίρνουμε, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$,

$$w^\Delta(t) = p_1(t) + w^2(t)\frac{f(x(t))}{r(t)f(x^\sigma(t))}\left\{\int_0^1 f'(x(t) + h\mu(t)x^\Delta(t)dh\right\}.$$

Κάνοντας χρήση της (H5) και της υπόθεσης ότι η x είναι θετική στο $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$, από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι

$$w^\Delta(t) \geq p_1(t), \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}},$$

από όπου με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$w(t) \geq w(t_1) + \int_{t_1}^{t} p_1(s)\Delta s, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.57}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνάρτηση p_1 πληροί την (H6), από την (3.57) παίρνουμε

$$\liminf_{t\to\infty} w(t) \geq w(t_1) > 0,$$

που σημαίνει ότι η x^Δ είναι τελικώς αρνητική, το οποίο αντίχειται στην υπόθεση ότι η x^Δ ταλαντούται. Επομένως ισχύει ότι $x^\Delta(t) > 0$ για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$. □

Είναι αξιοσημείωτο ότι, σε αντίθεση με τα συμπεράσματα της δεύτερης ενότητας, στην παρούσα ενότητα δεν τίθεται κάποιος περιορισμός για τα πρόσημα των p και q.

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε το πρώτο ταλαντωτικό συμπέρασμα για την εξίσωση (3.48).

Θεώρημα 3.3.1. *Υποθέτουμε ότι $q \in \mathcal{R}^+(\mathbb{T})$ και ότι η συνάρτηση p_1 ικανοποιεί την συνθήκη (H6). Αν*

$$\int_a^\infty \frac{1}{r(t)}\Delta t = \infty \tag{3.58}$$

και

$$\int_a^\infty p_1(s)\Delta s = \infty, \tag{3.59}$$

τότε η εξίσωση (3.48) ταλαντούται.

Απόδειξη. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι x είναι μία τελικώς θετική λύση της (3.48), δηλαδή ότι υπάρχει $t_0 \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$ τέτοιο ώστε $x(t) > 0$, $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$. Έχοντας υπόψη την (3.58), από το Λήμμα 3.3.2 έπεται ότι υπάρχει ένα $t_1 \in \mathbb{T}$ με $t_1 \geq t_0$ τέτοιο ώστε $x^\Delta(t) > 0$ για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (3.49) με $\frac{1}{f(x(\sigma(t)))}$, $t \geq t_1$ και ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\int_{t_1}^t [r(s)x^\Delta(s)]^\Delta \frac{1}{f(x(\sigma(s)))}\Delta s + \int_{t_1}^t p_1(s)\Delta s = 0, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}},$$

από όπου με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, βρίσκουμε

$$\left[\frac{r(s)x^\Delta(s)}{f(x(s))}\right]_{t_1}^t - \int_{t_1}^t r(s)x^\Delta(s)\left[\frac{1}{f(x(s)}\right]^\Delta \Delta s + \int_{t_1}^t p_1(s)\Delta s = 0$$

ή

$$\frac{r(t)x^\Delta(t)}{f(x(t))} - \int_{t_1}^t r(s)x^\Delta(s)\left[\frac{1}{f(x(s)}\right]^\Delta \Delta s + \int_{t_1}^t p_1(s)\Delta s = \frac{r(t_1)x^\Delta(t_1)}{f(x(t_1))}. \tag{3.60}$$

Με χρήση του κανόνα της αλυσίδας έχουμε, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$,

$$\int_{t_1}^t r(s)x^\Delta(s)\left[\frac{1}{f(x(s))}\right]^\Delta \Delta s$$

$$= -\int_{t_1}^{t} r(s)x^{\Delta}(s)\frac{(f\circ x)^{\Delta}(s)}{f(x(s))f(x(\sigma(s)))}\Delta s$$
$$= -\int_{t_1}^{t} r(s)x^{\Delta}(s)\left\{\int_0^1 f'\left(x(s)+h\mu(s)x^{\Delta}(s)\right)dh\right\}\frac{x^{\Delta}(s)}{f(x(s))f(x(\sigma(s)))}\Delta s.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση (H5) και ότι οι x^{Δ}, r, είναι θετικές στο $[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$, διαπιστώνουμε ότι

$$\int_{t_1}^{t} r(s)x^{\Delta}(s)\left[\frac{1}{f(x(s))}\right]^{\Delta}\Delta s \leq 0, \quad t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}},$$

από όπου, με χρήση της (3.60), παίρνουμε την ανισότητα

$$\frac{r(t)x^{\Delta}(t)}{f(x(t))}+\int_{t_1}^{t} p_1(s)\Delta s \leq \frac{r(t_1)x^{\Delta}(t_1)}{f(x(t_1))}, \quad t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Από την (3.59) έπεται ότι το αριστερό σκέλος της παραπάνω ανισότητας απειρίζεται, ενώ το δεξιό είναι άνω φραγμένο. Επομένως όλες οι λύσεις της (3.48) ταλαντούνται.

□

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι, αν θεωρήσουμε το πραγματικό διάστημα $\mathbb{T}=[a,+\infty)$, για $q(t)=0$ και $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ το Θεώρημα 3.3.1 αποτελεί γενίκευση του ακόλουθου γνωστού θεωρήματος του Fite [20].

Θεώρημα 3.3.2. *Η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης*

$$x''(t)+p(t)x(t)=0, \ t\in[a,\infty)$$

ταλαντούται, αν $\int_a^{\infty} p(t)dt=\infty$.

Θεώρημα 3.3.3. *Υποθέτουμε ότι* $q(t)\geq 0$, $t\in\mathbb{T}$ *και ότι η* p_1 *ικανοποιεί την (H6). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι πληρούται η ακόλουθη συνθήκη μη-γραμμικότητας της* f

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty}\frac{du}{f(u)}<\infty. \tag{3.61}$$

Αν

$$\int_a^{\infty}\frac{1}{r(t)}=\infty,$$

και

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{r(t)}\int_a^t \sigma(s)p_1(s)\Delta s=\infty, \tag{3.62}$$

τότε η εξίσωση (3.48) ταλαντούται.

Απόδειξη. Ας είναι x μία μη ταλαντούμενη λύση της (3.48). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η x είναι τελικώς θετική, δηλαδή υπάρχει $t_0 \in [a, \infty)_{\mathbf{T}}$ τέτοιο ώστε $x(t) > 0$ και από το Λήμμα 3.3.2 υπάρχει $t_1 \geq t_0$ τέτοιο ώστε $x^{\Delta}(t) > 0$, για όλα τα $t \in [t_1, \infty)_{\mathbf{T}}$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$H(t) := \frac{t}{f(x(t))}, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbf{T}}.$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες από t_1 έως t , για $t \geq t_1$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t} H(\sigma(s)(rx^{\Delta})^{\Delta}(s)\Delta s \\
&= H(t)r(t)x^{\Delta}(t) - H(t_1)r(t_1)x^{\Delta}(t_1) - \int_{t_1}^{t} r(s)x^{\Delta}(s)H^{\Delta}(s)\Delta s \\
&= H(t)r(t)x^{\Delta}(t) - H(t_1)r(t_1)x^{\Delta}(t_1) - \int_{t_1}^{t} r(s)x^{\Delta}(s)\frac{f(x(s)) - s(f\circ x)^{\Delta}(s)}{f(x(s))f(x(\sigma(s))}\Delta s
\end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t} H(\sigma(s)(rx^{\Delta})^{\Delta}(s)\Delta s &= H(t)r(t)x^{\Delta}(t) - H(t_1)r(t_1)x^{\Delta}(t_1) - \int_{t_1}^{t} \frac{r(s)x^{\Delta}(s)}{f(x(\sigma(s))}\Delta s \\
&+ \int_{t_1}^{t} \frac{H(s)r(s)x^{\Delta}(s)(f\circ x)^{\Delta}(s)}{f(x(\sigma(s))}\Delta s. \qquad (3.63)
\end{aligned}$$

Θέτουμε $x_h(t) := x(t) + h\mu(t)x^{\Delta}(t)$, $t \in \mathbb{T}$ και παρατηρούμε ότι $x_h(t) > 0$, $t \in [t_1, \infty)_{\mathbf{T}}$, Λαμβάνοντας υπόψη την (H5), βρίσκουμε, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbf{T}}$,

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t} \frac{H(s)r(s)x^{\Delta}(s)(f\circ x)^{\Delta}(s)}{f(x(\sigma(s))}\Delta s \\
&= \int_{t_1}^{t} \frac{H(s)r(s)x^{\Delta}(s)}{f(x(\sigma(s))}\left(\int_0^1 f'(x_h(s))dh\right)x^{\Delta}(s)\Delta s > 0
\end{aligned}$$

και συνεπώς από την (3.63) παίρνουμε, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbf{T}}$,

$$\int_{t_1}^{t} H(\sigma(s)(rx^{\Delta})^{\Delta}(s)\Delta s \geq H(t)r(t)x^{\Delta}(t) - H(t_1)r(t_1)x^{\Delta}(t_1) - \int_{t_1}^{t} \frac{r(s)x^{\Delta}(s)}{f(x(\sigma(s))}\Delta s.$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (3.49) με $H(\sigma(t))$ και ολοκληρώνοντας, με χρήση της παραπάνω ανισότητας, παίρνουμε, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbf{T}}$,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{t_1}^{t} H(\sigma(s)(rx^{\Delta})^{\Delta}(s)\Delta s + \int_{t_1}^{t} \sigma(s)p_1(s)\Delta s \\
&\geq H(t)r(t)x^{\Delta}(t) - H(t_1)r(t_1)x^{\Delta}(t_1) - \int_{t_1}^{t} \frac{r(s)x^{\Delta}(s)}{f(x(\sigma(s))}\Delta s + \int_{T}^{t} \sigma(s)p_1(s)\Delta s
\end{aligned}$$

και άρα, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$,

$$H(t)r(t)x^{\Delta}(t) + \int_{t_1}^{t} \sigma(s)p_1(s)\Delta s \leq H(t_1)r(t_1)x^{\Delta}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \frac{r(s)x^{\Delta}(s)}{f(x(\sigma(s))}\Delta s. \quad (3.64)$$

Από την υπόθεση ότι $q(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{T}$ έπεται ότι $r^{\Delta}(t) = q(t)e_q(t, t_0) \geq 0$ στο $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ και, συνεπώς, έχοντας υπόψη το πρόσημο της x^{Δ} και ότι η f πληροί την (H5), παίρνουμε

$$\int_{t_1}^{t} \frac{r(s)x^{\Delta}(s)}{f(x(\sigma(s))}\Delta s \leq r(t) \int_{t_1}^{t} \frac{x^{\Delta}(s)}{f(x(\sigma(s))}\Delta s. \quad (3.65)$$

Στην συνέχεια ορίζουμε την συνάρτηση $G : [u_0, \infty) \to \mathbb{R}$ με

$$G(u) := \int_{u_0}^{u} \frac{1}{f(s)} ds, \quad u > u_0,$$

όπου $u_0 = x(t_1) > 0$. Προφανώς είναι $G'(u) = \frac{1}{f(u)}$. Επειδή $x_h(t) \leq x(\sigma(t))$, $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, από την μονοτονία της f, έπεται ότι

$$\frac{1}{f(x_h(t))} \geq \frac{1}{f(x(\sigma(t)))}, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας του Θεωρήματος 1.5.5, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, έχουμε

$$[G(x(t)]^{\Delta} = \left[\int_0^1 \frac{1}{f(x_h(t))} dh\right] x^{\Delta}(t) \geq \left[\int_0^1 \frac{1}{f(x(\sigma(t)))} dh\right] x^{\Delta}(t)$$

και συνεπώς

$$[G(x(t)]^{\Delta} \geq \frac{x^{\Delta}(t)}{f(x(\sigma(t)))}, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \quad (3.66)$$

Επειδή $x^{\Delta}(t) > 0$ και $x(t) > 0$, $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, έπεται ότι υπάρχει το όριο της x για $t \to \infty$. Θέτουμε

$$\lim_{t \to \infty} x(t) := L \leq \infty$$

και παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t \to \infty} G(x(t)) = \lim_{t \to \infty} \int_{u_0}^{x(t)} \frac{du}{f(u)} = \int_{u_0}^{L} \frac{du}{f(u)}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (3.61) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{t \to \infty} G(x(t)) := L_1 < \infty.$$

Προφανώς είναι $\int_{t_1}^{t} [G(x(s))]^{\Delta} \Delta s = G(x(t)) - G(x(t_1))$, $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, και με χρήση της (3.66) παίρνουμε

$$G(x(t)) - G(x(t_1)) \geq \int_{t_1}^{t} \frac{x^{\Delta}(s)}{f(x(\sigma(s)))}\Delta s, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Από τον τρόπο ορισμού της G έπεται ότι η G είναι αύξουσα και συνεπώς, από την προηγούμενη ανισότητα και τον ορισμό του L_1, προκύπτει ότι

$$L_1 - G(x(t_1)) \geq G(x(t)) - G(x(t_1)) \geq \int_{t_1}^{t} \frac{x^{\Delta}(s)}{f(x(\sigma(s)))}\Delta s, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbf{T}},$$

από όπου, για $L_2 := L_1 - G(x(t_1))$, έχουμε ότι

$$L_2 \geq \int_{t_1}^{t} \frac{x^{\Delta}(s)}{f(x(\sigma(s)))}\Delta s, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbf{T}}. \tag{3.67}$$

Συνδυάζοντας τις (3.64), (3.65) και (3.67) παίρνουμε, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbf{T}}$,

$$H(t)x^{\Delta}(t) + \frac{1}{r(t)}\int_{t_1}^{t} \sigma(s)p_1(s)\Delta s \leq \frac{H(t_1)r(t_1)x^{\Delta}(t_1)}{r(t)} + L_2.$$

από όπου, επειδή $r(t) \geq r(t_1)$, $t \geq t_1$, (είναι $r^{\Delta}(t) \geq 0$) έχουμε

$$\frac{tx^{\Delta}(t)}{f(x(t))} + \frac{1}{r(t)}\int_{t_1}^{t} \sigma(s)p_1(s)\Delta s - L_2 \leq \frac{t_1 r(t_1)x^{\Delta}(t_1)}{r(t)f(x(t_1))} \leq \frac{t_1 x^{\Delta}(t_1)}{f(x(t_1))}$$

και συνεπώς

$$\frac{tx^{\Delta}(t)}{f(x(t))} + \frac{1}{r(t)}\int_{t_1}^{t} \sigma(s)p_1(s)\Delta s \leq \frac{t_1 x^{\Delta}(t_1)}{f(x(t_1))} + L_2, \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbf{T}}. \tag{3.68}$$

Έχοντας υπόψη ότι $x^{\Delta}(t) > 0$ και $f(x(t)) > 0$ για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbf{T}}$, παρατηρούμε ότι από την (3.68) έπεται ότι η συνάρτηση $\frac{1}{r(t)}\int_{t_1}^{t} \sigma(s)p_1(s)\Delta s$ είναι άνω φραγμένη στο $[t_1, \infty)_{\mathbf{T}}$, πράγμα που αντίκειται στην (3.62). Επομενως όλες οι λύσεις της (3.48) ταλαντούνται. □

Αν $q(t) = 0$, $t \in \mathbb{T}$, τότε η εξίσωση (3.48) παίρνει την μορφή

$$x^{\Delta\Delta}(t) + p(t)(f \circ x^{\sigma})(t) = 0, \quad t \in [a, \infty]_{\mathbf{T}}. \tag{3.69}$$

Με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.3.3 προκύπτει το ακόλουθο κριτήριο ταλάντωσης για την εξίσωση (3.69).

Πόρισμα 3.3.1. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση p ικανοποιεί την συνθήκη (H6) και ότι η συνάρτηση f πληροί την συνθήκη μη γραμμικότητας (3.61). Αν*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{a}^{t} \sigma(s)p(s)\Delta s = \infty,$$

τότε η εξίσωση (3.69) ταλαντούται.

Το Πόρισμα 3.3.1 αποτελεί γενίκευση του ακόλουθου γνωστού θεωρήματος του Atkinson [10].

Θεώρημα 3.3.4. *Η διαφορική εξίσωση*

$$x''(t) + p(t)x^{2n+1} = 0, \quad t \in [a, \infty),$$

όπου $p : [a, \infty) \to \mathbb{R}^+$ είναι μία συνεχής συνάρτηση και n είναι ένας φυσικός, ταλαντρύται αν

$$\int_a^\infty tp(t)dt = \infty.$$

Ας σημειωθεί ότι, σε αντίθεση με το κριτήριο του Atkinson, η συνάρτηση p στο Πόρισμα 3.3.1 δεν είναι κατά ανάγκη θετική. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.3 προκύπτει ότι, αν από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.3.3 παραληφθεί η συνθήκη (3.61), τότε μπορεί να αποδειχθεί το επόμενο κριτήριο ταλαντωσης για τις φραγμένες λύσεις της (3.48).

Πόρισμα 3.3.2. *Υποθέτουμε ότι $q(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{T}$ και ότι η p_1 ικανοποιεί την (H6). Αν*

$$\int_a^\infty \frac{1}{r(t)} = \infty$$

και

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{r(t)} \int_a^t \sigma(s)p_1(s)\Delta s = \infty,$$

τότε όλες οι φραγμένες λύσεις της (3.48) ταλαντούνται.

Η επόμενη υπόθεση αφορά την συμπεριφορά της f για μεγάλες τιμές τις μεταβλητής. Συγκεκριμένα η υπόθεση (H7) εξασφαλίζει την ύπαρξη συνόλων της μορφής $[\tau, \infty)$ με $\tau \in \mathbb{T}$, όπου η g να είναι κάτω φραγμένη από αυθαίρετα μεγάλα κάτω φράγματα.

(H7) Αν $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, τότε, για κάθε $k > 0$, υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε

$$g(x) \geq m \text{ για } x \geq k.$$

Στην συνέχεια, θα αποδείξουμε ένα ακόμη κριτήριο ταλάντωσης, χρησιμοποιώντας γενικευμένο μετασχηματισμό Riccati. Για να το επιτύχουμε αυτό, θα αναφέρουμε πρώτα ένα λήμμα (βλέπε άρθρο [11]), το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη.

Λήμμα 3.3.3. *Έστω ότι x είναι μία λύση της (3.48) και $x(t)x^\Delta(t) > 0$ για $t \geq t_0 \geq a$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι z και $f \circ x$ είναι Δ-παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{T}$, με $x(f(x)) \neq 0$, $x \neq 0$. Αν*

$$w := \frac{z^2 r x^\Delta}{f \circ x},$$

τότε

$$-w^\Delta = p_1(z^\sigma)^2 - \frac{rx^\Delta(z^\Delta)^2}{(f\circ x)^\Delta} + \frac{rx^\Delta(f\circ x)(f\circ x)^\sigma}{(f\circ x)^\Delta}\left[\left(\frac{z}{f\circ x}\right)^\Delta\right]^2.$$

Θεώρημα 3.3.5. *Υποθέτουμε ότι η p_1 ικανοποιεί την (H5) και η f ικανοποιεί την (H7). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι*

$$\int_a^\infty \frac{1}{r(t)} = \infty$$

και ότι υπάρχει μία Δ-παραγωγίσιμη συνάρτηση $z : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ τέτοια ώστε

$$\limsup_{t\to\infty} \int_a^t \left\{p_1(s)[z^\sigma(s)]^2 - Kr(s)[z^\Delta(s)]^2\right\} \Delta s = \infty. \tag{3.70}$$

Τότε η εξίσωση (3.48) ταλαντούται.

Απόδειξη. Ας είναι x μία μη ταλαντούμενη λύση της (3.48). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η x είναι τελικώς θετική δηλαδή υπάρχει $t_0 \in \mathbb{T}$ τέτοιο ώστε $x(t) > 0$ για $t \geq t_0$. Από το Λήμμα 3.3.2 προκύπτει ότι υπάρχει ένα $t_1 \geq t_0$ τέτοιο ώστε $x^\Delta(t) > 0$ για $t \in [t_1, \infty)_\mathbf{T}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $w : [t_0, \infty)_\mathbf{T} \to \mathbb{R}$ με

$$w(t) := \frac{z^2(t)r(t)x^\Delta(t)}{(f\circ x)(t)}.$$

Παρατηρούμε ότι, για $t \in [t_1, \infty)_\mathbf{T}$, είναι $w(t) > 0$. Από το Λήμμα 3.3.3 έχουμε

$$\begin{aligned}-w^\Delta(t) &= p_1(t)(z^\sigma(t))^2 - \frac{r(t)x^\Delta(t)[z^\Delta(t)]^2}{(f\circ x)^\Delta(t)} \\ &\quad + \frac{r(t)x^\Delta(t)(f\circ x)(t)(f\circ x)^\sigma(t)}{(f\circ x)^\Delta(t)}\left[\left(\frac{z(t)}{(f\circ x)(t)}\right)^\Delta\right]^2.\end{aligned}$$

Επειδή $x(t) > 0$ και $r(t) > 0$, για $t \geq t_1$, έπεται ότι

$$-w^\Delta(t) \geq p_1\left[z^\sigma(t)\right]^2 - \frac{r(t)x^\Delta(t)[z^\Delta(t)]^2}{(f\circ x)^\Delta(t)}, \quad t \in [t_1, \infty)_\mathbf{T}.$$

Επομένως, ολοκληρώνοντας παίρνουμε, για $t \geq t_1$,

$$-w(t) + w(t_1) \geq \int_{t_1}^t p_1(s)[z^\sigma(s)]^2\Delta s - \int_{t_1}^t \frac{r(s)x^\Delta(s)[z^\Delta(s)]^2}{(f\circ x)^\Delta(s)}\Delta s. \tag{3.71}$$

Από την συνθήκη (H7), έπεται ότι για $k = x(t_1)$, υπάρχει μία θετική σταθερά m τέτοια ώστε

$$f'(x_h(t)) \geq m, \quad t \in [t_1, \infty)_\mathbf{T}, \tag{3.72}$$

όπου

$$x_h(t) = x(t) + h\mu(t)x^\Delta(t) \geq x(t) \geq x(t_1).$$

Παρατηρούμε ότι από το Θεώρημα 1.5.5 έχουμε ότι

$$(f \circ x)^{\Delta} = \left(\int_0^1 f'(x_h(t))dh \right) x^{\Delta}(t)$$

και, με χρήση της (3.72), για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, παίρνουμε

$$\frac{(f \circ x)^{\Delta}(t)}{x^{\Delta}(t)} = \int_0^1 f'(x_h(t))dh \geq m \int_0^1 dh = m,$$

οπότε

$$0 > -\frac{x^{\Delta}(t)}{(f \circ x)^{\Delta}(t)} \geq -\frac{1}{m}, \quad \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.73}$$

Από τις (3.71) και (3.73) βρίσκουμε, για $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, ότι

$$w(t_1) \;\; \geq \;\; w(t_1) - w(t) \geq \int_{t_1}^{t} p_1(s)[z^{\sigma}(s)]^2 \Delta s - \frac{1}{m} \int_{t_1}^{t} r(s)[z^{\Delta}(s)]^2 \Delta s,$$

δηλαδή

$$w(t_1) \geq \int_{t_1}^{t} \left\{ p_1(s)[z^{\sigma}(s)]^2 - Kr(s)[z^{\Delta}(s)]^2 \right\} \Delta s, \tag{3.74}$$

όπου $K = \frac{1}{m} > 0$. Η τελευταία ανισότητα αντίκειται στην (3.70). Επομένως η (3.48) ταλαντούται. □

Παρατήρηση 3.3.1. Αν $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη (H7), δηλαδή το Θεώρημα 3.3.5 εφαρμόζεται και στην γραμμική περίπτωση, σε αντίθεση με το Θεώρημα 3.3.3.

Το παράδειγμα που ακολουθεί αποτελεί εφαρμογή του Πορίσματος 3.3.1.

Παράδειγμα 3.3.1. Θεωρούμε την χρονοβαθμίδα $\mathbb{T}_q = \{q^{N_0} : \; q > 1\}$ και την εξίσωση

$$x^{\Delta\Delta}(t) + p(t)(f \circ x^{\sigma})(t) = 0, \quad t \in \mathbb{T}_q, \tag{3.75}$$

όπου η συνάρτηση f ικανοποιοιεί την συνθήκη (3.61). Υποθέτουμε ότι $1 < \alpha < 2$ και θέτουμε

$$m := \frac{q^{\alpha-1} - 1}{q^{\alpha+1} + 1}.$$

Επιπλέον, για λ, $\beta \in \mathbb{R}$ με $\beta > 0$ και $\lambda > m\alpha$, θέτουμε

$$p(t) := \frac{1}{t^{\alpha}}(\lambda + \beta(-1)^n), \quad t = q^n \in \mathbb{T}_q.$$

Για $t_n = q^n \in \mathbb{T}_q$, $n = 1, 2, \ldots$, έχουμε

$$\int_{t_n}^{\infty} p(s)\Delta s \;\; = \;\; \sum_{k=n}^{\infty} \int_{t_k}^{\sigma(t_k)} p(s)\Delta s = \sum_{k=n}^{\infty} p(t_k)\mu(t_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda+\beta(-1)^k)}{q^{\alpha k}}(q-1)q^k \\
&= (q-1)\sum_{k=n}^{\infty}(\lambda+\beta(-1)^k)(q^{1-\alpha})^k \\
&= \frac{(q-1)q^{\alpha-1}}{q^{n(\alpha-1)}}\left(\frac{\lambda}{q^{\alpha-1}-1}+\frac{\beta(-1)^n}{q^{\alpha+1}-1}\right).
\end{aligned}$$

Επειδή

$$\frac{\lambda}{\beta} \geq \frac{q^{\alpha-1}-1}{q^{\alpha+1}+1} = m > 0,$$

έπεται ότι

$$\limsup_{t>0} \int_t^{\infty} p(s)\Delta s \geq 0, \quad t \in \mathbb{T}_q,$$

δηλαδή η συνάρτηση p ικανοποιεί την συνθήκη (H6). Επιπλέον, για $n \in \mathbb{N}$, είναι

$$\begin{aligned}
\int_1^{t_n} \sigma(s)p(s)\Delta s &= \sum_{k=1}^{n} \frac{q^{k+1}(\lambda+\beta(-1)^k)}{q^{\alpha k}}(q-1)q^k \\
&= q(q-1)\sum_{k=1}^{n} q^{(2-\alpha)k}(\lambda+\beta(-1)^k),
\end{aligned}$$

από όπου, επειδή $q > 1$, προκύπτει ότι $\limsup_{n\to\infty} \int_1^{t_n} \sigma(s)p(s)\Delta s = +\infty$. Από το Πόρισμα 3.3.1 έπεται ότι η εξίσωση (3.75) ταλαντούται.

Περίληψη

Ο σκοπός της παρούσης μεταπτυχιακής διατριβής είναι διττός, αφενός να παρουσιάσει μία σύντομη εισαγωγή στην θεωρία των χρονοβαθμίδων (time scales) και αφετέρου να δώσει μερικές εφαρμογές της θεωρίας στην μελέτη της ταλάντωσης δυναμικών εξισώσεων πρώτης και δεύτερης τάξης. Η διατριβή αποτελείται από τρία κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μία σύντομη εισαγωγή στην θεωρία των χρονοβαθμίδων όπου παρουσιάζονται οι βασικοί ορισμοί και ορισμένα βασικά θεωρήματα καθώς και αρκετά παραδείγματα στα οποία γίνεται φανερό ότι η θεωρία των χρονοβαθμίδων περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις τα αντίστοιχα συμπεράσματα για την συνεχή και διακριτή περίπτωση. Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάται η ταλάντωση δυναμικών εξισώσεων πρώτης τάξης (συνήθων, με υστέρηση καθώς και ουδετέρου τύπου). Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται ορισμένα συμπεράσματα που αφορούν την ταλάντωση μη γραμμικών δυναμικών εξισώσεων δεύτερης τάξης.

The purpose of the present thesis is double, to present a brief introduction to the basic theory of time scales and, as application of this theory, to give some recent results on the oscillation of dynamic equations of first or second order. The thesis consists of three chapters. The first chapter consists an introduction to the basic theory of time scales (definitions, fundamental theorems, examples). The second and third chapter are devoted to giving some recent results on the oscillation of first order dynamic equations and second order dynamic equations, respectively.

Βιβλιογραφία

[1] R. P. Agarwal, M. Bohner, Basic calculus on time scales and some of its applications, *J. Res. Math.* **35** (1999), 3-22.

[2] R. P. Agarwal, M. Bohner, A. Peterson, Inequalities on time scales:a survey, *Math. Inequal. Appl.* **4** (2001), 535-557.

[3] R. P. Agarwal, M. Bohner, D. O'Regan and A. Peterson, Dynamic equations on time scales: a survey, *J. Comput. Appl. Math.* **141** (2002), 1-26.

[4] E. Akin-Bohner, M. Bohner, S. H. Saker, Oscillation criteria for a certain class of second order Emden-Fowler dynamic equations, *Electron. Trans. Numer. Anal.* **27** (2007), 1-12

[5] E. Akin, L. Erbe, A. Peterson, B. Kaymakcalan, Oscillation results for a dynamic equation on a time scale, *J. Difference Equ. Appl.* **7** (2001), 793-810.

[6] D. Anderson, J. Bullock, L. Erbe, A. Peterson, H. Tran, Nabla dynamic equations on time scales, *Panamer. J. Math.* **13** (2003), 1-47.

[7] F. M. Atici, D. C. Biles, A. Lebedinsky, An application of time scales to economics, *Math. Comput. Modelling* **43** (2006), 718-726.

[8] F. M. Atici, G. Sh. Guseinov, On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales, *J. Math. Anal. Appl.* **141** (2002), 75-99.

[9] F. M. Atici, F. Uysal, A production-inventory model of HMMS on time scales, *Appl. Math. Lett.* **21** (2008), 236-243.

[10] F. V Atkinson, On second-order nonlinear oscillations, *Pacific J. Math.* **5** (1955), 643-647.

[11] M. Bohner, L. Erbe, A. Peterson, Oscillation for nonlinear second order dynamic equations on a time scale, *J. Math. Anal. Appl.* **301** (2005), 491-507.

[12] M. Bohner, G. Sh. Guseinov, Improper integrals on time scales, *Dynam. Systems Appl.* **12** (2003), 45-66

[13] M. Bohner, A. Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[14] M. Bohner, A. Peterson, First and second order linear dynamic equations on Time Scales, *J. Difference Equ. Appl.* 7 (2001), 767–792.

[15] M. Bohner, S. H. Saker, Oscillation of second order nonlinear dynamic equations on time scales, *Rocky Mountain J. Math.* **34** (2004), 1239-1254.

[16] M. Bohner, C. C. Tisdell, Oscillation and nonoscillation of forced second order dynamic equations, *Pacific J. Math.* **230** (2007), 59-71.

[17] L. Erbe, A. Peterson, S. H. Saker, Oscillation criteria for second-order nonlinear dynamic equations on time scales, *J. London Math. Soc.* **67** (2003), 701-714.

[18] L. Erbe, A. Peterson, Boundedness and oscillation for nonlinear dynamic equations on a time scales, *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2003), 735-744.

[19] L. H. Erbe, B. G. Zhang, Oscillation for first order linear differential equations with deviating arguments, *Differential Integral Equations* **1** (1988), 305-314.

[20] W. B. Fite, Concerning the zeros of solutions solutions of certain differential equations, *Trans Amer. Math. Soc.* 19 (1917), 341-352.

[21] G. Sh. Guseinov, Integration on time scales, *J. Math. Anal. Appl.* **285** (2003), 107-127.

[22] S. Hilger, Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results Math.* **18** (1990), 18-56.

[23] S. Hilger, Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, Ph.D. thesis, Universität Würzburg, 1988.

[24] B. Jackson, The time scale logarithm, *Appl. Math. Lett.* **21** (2008), 215-221.

[25] J. Jaroš, I. P. Stauroulakis, Oscillation tests for delay equations, Rocky Mountain J. Math. 29 (1999), 197-207.

[26] I. V. Kamenev, An integral test for conjugacy for second order linear differential equations, *Mat. Zametki* **23** (1978), 249-251. (Russian)

[27] R. G. Koplatatze, T. A. Chanturija, On oscillatory and monotone solutions of first order differential equations with deviating arguments, *Differencyal'nye Uravnenija* **18** (1982), 1463-1465.

[28] G. Ladas, Sharp conditions for oscillations caused by delays, *Appl. Anal.* **9** (1979), 93-98.

[29] G. Ladas, V. Lakshmikantham, J. S. Papadakis, Oscillations of higher-order retarded differential equations generated by the retarded argument, *Delay and Functional Differential Equations and Their Applications*, Academic Press, New York, 1972, 219-231.

[30] G. Ladas, Ch. G. Philos, Y. G. Sficas, Sharp conditions for the oscillation of delay difference equations, *J. Appl. Math. Simulation* **2** (1989), 101-111.

[31] V. Lakshmikantham, S. Sivasundaram, B. Kaymakcalan, *Dynamic Systems on Measure Chains*, Mathematics and its Applications, 370, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.

[32] H. J. Li, Oscillation criteria for second order linear differentisal equations, *J. Math. Anal. Appl.* **194** (1995), 312-321.

[33] R. J. Marks II, I. A. Gravagne, J. M. Davis, J. J. DaCunha, Nonregressivity in switched linear circuits and mechanical systems, *Math. Comput. Modelling* **43** (2006), 1383-1392.

[34] R. M. Mathsen, Q. R. Wang, H. W. Wu, Oscillation for neutral dynamic functional equations on time scales, *J. Difference Equ. Appl.* **10** (2004), 651-659.

[35] Z. Pospišil, Hyperbolic sine and cosine functions on measure chains, *Nonlinear Anal.* **47** (2001), 861-872.

[36] Y. Sahiner, I. P. Stavroulakis, Oscillations of first order delay dynamic equations, *Dynam. Systems Appl.* **15** (2006), 645-656.

[37] S. H. Saker, Oscillation of nonlinear dynamic equations on time scales, *Appl. Math. Comput.* **148** (2004), 81-91.

[38] J. H. Shen, New oscillation criteria for odd order neutral eqquations, *J. Math. Anal. Appl.* **201** (1996), 387-395.

[39] S. G. Topal, Rolle's and generalized mean value theorems on time scales, *J. Difference Equ. Appl.*, **8** (2002), 333-343.

[40] J. S. Yu, B. G. Zhang, Z. C Wang, Oscillation of delay difference equations, *Appl. Anal.* **53** (1994), 117-124.

[41] G. Zhang, S. S Cheng, A necessary and sufficient oscillation condition for the discrete Euler Equation, *Panamer. Math. J.* **9** (1999), 29-34.

[42] B. G. Zhang, X. Deng, Oscillation of delay differential equations on time scales, *Math. Comput. Modelling* **36** (2002), 1307-1318.

[43] B. G. Zhang, F. Lian, The Distibution of generalized zeros of solutions of delay differential equations on time scales, *J. Difference Equ. Appl.* **10** (2004), 759-771.

[44] B. Zhang, X. Yan, X. Liu, Oscillation criteria of certain delay dynamic equations on time scales, *J. Difference Equ. Appl.*,**11** (2005), 933-946.

[45] Y. Zhou, B.G. Zhang, Oscillation for difference equations for variable delay, *Dynam. Systems Appl.* **10** (2001), 133-144.

Ευρετήριο Όρων