ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ, ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΡΟΜΗΘΕΥΤΗ-ΑΓΟΡΑΣΤΗ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ: ΠΡΟΣΦΟΡΑ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΕΚΠΤΩΣΕΩΝ

ΚΡΟΜΜΥΔΑ ΙΡΙΣ-ΠΑΝΔΩΡΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2008

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
026000348922

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 23/06/2008 από την εξεταστική επιτροπή:

Σκούρη Κωνσταντίνα (επιβλέπουσα)	**Λέκτορας**	Κ Σκούρα
Λάγκαρης Χρήστος	**Αναπληρωτής Καθηγητής**	
Παπαχρήστος Σωτήριος	**Αναπληρωτής Καθηγητής**	

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ευχαριστίες

Η παρούσα διατριβή αποτελεί το τελευταίο μέρος για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα του τομέα Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω την κα. Σκούρη Κωνσταντίνα, Λέκτορα του τμήματος Μαθηματικών και επιβλέπουσα της μεταπτυχιακής μου διατριβής, που μου υπέδειξε το θέμα της και με βοήθησε στην συγγραφή της. Την ευχαριστώ για τις απαντήσεις στις απορίες μου, τις παρατηρήσεις της όσον αφορά το σωστό γράψιμο της διατριβής καθώς και για την υπομονή της και για τον χρόνο που μου αφιέρωσε.

Ευχαριστώ επίσης, τον κ. Παπαχρήστο Σωτήριο και τον κ. Λάγκαρη Χρήστο, μέλη της τριμελούς επιτροπής, για τις εύστοχες παρατηρήσεις και διορθώσεις τους.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Κοσμά Φερεντίνο, Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών, για την πολύτιμη βοήθεια του και την στήριξη του καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Ευχαριστώ το σύνολο των μελών του τομέα Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας για την συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης, καθώς επίσης το σύνολο των μελών του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για τις γνώσεις που αποκόμισα κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Ευχαριστώ, τέλος, την οικογένεια μου για την υλική και κυρίως ηθική υποστήριξη τους και το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ.) για την υποτροφία που μου παρείχε κατά τη φοίτηση μου στο δεύτερο έτος των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Κρομμύδα Ίρις-Πανδώρα

Ιωάννινα 2008

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις συνθήκες του έντονου ανταγωνισμού της τρέχουσας δεκαετίας η αποτελεσματική διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας αποτελεί σημαντικό ανταγωνιστικό πλεονέκτημα ανάλογο σε αποτελεσματικότητα με την ποιότητα των προϊόντων, τη διαφήμιση και την τιμολογιακή πολιτική. Είναι γεγονός ότι η αβέβαιη οικονομία της δεκαετίας που διανύουμε, ιδιαίτερα η Ευρωπαϊκή, χαρακτηρίζεται από ώριμες αγορές, υψηλό κόστος ενέργειας, πιθανές ελλείψεις ενέργειας και πρώτων υλών, μεγάλο ανταγωνισμό, μικρή αύξηση της παραγωγικότητας και απειλή πληθωρισμού αλλά και διεθνοποίηση της αγοράς, πολυπλοκότητα των νέων τεχνολογιών με απρόβλεπτη ταχύτητα εξέλιξης τους.

Υπό αυτές τις συνθήκες, η διατήρηση της αύξησης των κερδών και της απόδοσης στην επένδυση μιας επιχείρησης, γίνεται πολύ δύσκολη υπόθεση. Η διερεύνηση εναλλακτικών μεθόδων μείωσης του κόστους, αποτελεί απαραίτητο στοιχείο επιβίωσης και αύξησης της ανταγωνιστικότητας των επιχειρήσεων. Στα πλαίσια αυτά κρίνεται αναγκαία η ανάπτυξη μακροπρόθεσμων συνεργασιών και συντονισμού μεταξύ των επιχειρήσεων και μεταξύ επιχειρήσεων και πελατών που δραστηριοποιούνται στην ίδια αλυσίδα προκειμένου να μπορέσουν να ανταπεξέλθουν στο αυξανόμενο κόστος.

Η αποτελεσματική οργάνωση και διοίκηση της ροής προϊόντων και πληροφοριών σε μια εφοδιαστική αλυσίδα αποτελεί επιτακτική ανάγκη σε μία παγκοσμιοποιημένη και ψηφιακή οικονομία, όπου ο ανταγωνισμός από ατομικός (επιχείρηση εναντίον επιχείρησης) γίνεται συλλογικός (εφοδιαστική αλυσίδα εναντίον εφοδιαστικής αλυσίδας).

Οι παραδοσιακές αντιλήψεις στο θέμα οργάνωσης αγορών μεταβάλλονται με γρήγορο ρυθμό. Η σημασία των σχέσεων μεταξύ αγοραστών και προμηθευτών αυξάνει. Είναι πλέον αντιληπτό ότι για να εξασφαλίσει ο αγοραστής την έγκαιρη ανταπόκριση του προμηθευτή στις απαιτήσεις του δεν μπορεί να συναλλάσσεται με πολλούς προμηθευτές (Σιφνιώτης, 1997). Πολλοί Ιάπωνες λένε «είμαι ευτυχής αν μπορώ να βρω ένα καλό προμηθευτή. Να βρω δύο καλούς και συνεπείς προμηθευτές είναι ίσως αδύνατο να επιτευχθεί για καθένα από τα προϊόντα που αγοράζουμε από

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τρίτους». Η δημιουργία μακροχρόνιου δεσμού μεταξύ προμηθευτή και αγοραστή φαίνεται ότι οδηγεί σε όφελος και για τους δύο. Συγκεκριμένα έχει αποδειχθεί (Chopra Meidlh, 2004) ότι η συνεργασία - συντονισμός:

- συμβάλλει στην εξασθένηση του γνωστού φαινομένου bullwhip effect
- αυξάνει το κέρδος για την αλυσίδα, μειώνοντας το κόστος διαχείρισης παραγγελιών, το κόστος μεταφοράς και διανομής και το κόστος διατήρησης του αποθέματος
- αυξάνει την ποιότητα
- οδηγεί στην άμεση και αποτελεσματική ικανοποίηση των αναγκών μειώνοντας το χρόνο υστέρησης και το επίπεδο αποθέματος

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η αποτελεσματική διαχείριση των αποθεμάτων (inventory management) της επιχείρησης είναι ζωτικής σημασίας. Το πρόβλημα της διαχείρισης αποθεμάτων αποτελεί ένα από τα πιο κλασσικά και ευρύτερα μελετημένα προβλήματα στο χώρο της Επιχειρησιακής Έρευνας, και αντιμετωπίζεται αποτελεσματικά προσδιορίζοντας κανόνες για τη λήψη των παρακάτω αποφάσεων:

1) πότε είναι αναγκαίο να τεθεί μια παραγγελία για την ανανέωση του αποθέματος;
2) πόσο είναι αναγκαίο να παραγγείλουμε σε κάθε ανανέωση;

Οι κανόνες για τη λήψη των αποφάσεων αυτών στοχεύουν στην ικανοποίηση της αναμενόμενης ζήτησης, υπό τους τιθέμενους περιορισμούς, με τον καθορισμό της πολιτικής παραγγελίας (ποσότητα προϊόντος που θα παραγγελθεί σε συγκεκριμένες χρονικές περιόδους για την ανανέωση του αποθέματος), με τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος λειτουργίας του συστήματος.

Οι μηχανισμοί συνεργασίας - συντονισμού μεταξύ προμηθευτή και αγοραστή κατά τη διαχείριση του αποθέματος συνίστανται:

- στην προσφορά ποσοτικών εκπτώσεων (quantity discount) - θεωρείται ένας από τους πιο δημοφιλείς μηχανισμούς συντονισμού μεταξύ προμηθευτή και αγοραστή.
- στη δυνατότητα, που προσφέρεται από τον προμηθευτή στον αγοραστή, καθυστερημένης εξόφλησης του κόστους αγοράς (credit period)
- στη δυνατότητα επιστροφής των προϊόντων (buy back/return policy)
- στη δυνατότητα αυξομείωσης της παραγγελίας
- στην αποδοχή πολιτικών που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος λειτουργίας του συστήματος προμηθευτή - αγοραστή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στη παρούσα διατριβή θα μελετηθούν μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων στα οποία ο μηχανισμός συνεργασίας μεταξύ προμηθευτή και αγοραστή κατά τη διαχείριση του αποθέματος συνίστανται στην προσφορά ποσοτικών εκπτώσεων (quantity discount).

Οι εκπτώσεις αυτές διακρίνονται στις (Tersine (1994), Silver et al (1998)):

1. εκπτώσεις επί της ολικής ποσότητας παραγγελίας με τιμή κλιμακούμενη με το ύψος της παραγγελίας (all units quantity discounts).
2. Κλιμακωτά αυξανόμενες ποσοτικές εκπτώσεις (Incremental quantity discounts)

Στην περίπτωση των εκπτώσεων επί της ολικής ποσότητας παραγγελίας το κόστος αγοράς της μονάδας του προϊόντος διαμορφώνεται σε σχέση με την αγοραζόμενη ποσότητα, Q, ως εξής:

$$P_i = \begin{cases} P_1 \text{ για } 0 < Q < Q_2 \\ P_2 \text{ για } Q_2 \leq Q < Q_3 \\ . \\ . \\ . \\ P_n \text{ για } Q_n \leq Q \end{cases}$$

Οι ειδικά προσφερόμενες τιμές αγοράς του προϊόντος, P_i, ικανοποιούν τις σχέσεις $P_1 > P_2 > \ldots > P_n$ και οι ποσότητες Q_i, $i = 1,\ldots n$ είναι εκείνες στις οποίες γίνεται η αλλαγή στην τιμή.

Στην περίπτωση των κλιμακωτά αυξανόμενων ποσοτικών εκπτώσεων το κόστος αγοράς της μονάδας του προϊόντος διαμορφώνεται σε σχέση με την αγοραζόμενη ποσότητα, Q, ως εξής:

$$P_i = \begin{cases} P_0 \text{ για τις πρώτες } Q_1 \text{ μονάδες προιόντος} \\ P_1 \text{ για τις επόμενες } Q_2 - Q_1 \text{ μονάδες προιόντος} \\ . \\ . \\ . \\ P_j \text{ για εκείνες τις μονάδες που ξεπερνούν την ποσότητα } Q_j - 1 \end{cases}$$

Όπου πάλι οι ειδικά προσφερόμενες τιμές αγοράς του προϊόντος, P_i, ικανοποιούν τις σχέσεις $P_1 > P_2 > \ldots > P_n$ και οι ποσότητες Q_i, $i = 1,\ldots j$ είναι εκείνες στις οποίες γίνεται η αλλαγή στην τιμή.

Η προσφορά ποσοτικών εκπτώσεων ως μηχανισμός συνεργασίας προμηθευτή αγοραστή είναι ένα θέμα που αποτέλεσε αντικείμενο έρευνας τις τελευταίες δυο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δεκαετίες και τα άρθρα που έχουν δημοσιευτεί σχετικά με το θέμα είναι αρκετά. Στην παρούσα διατριβή γίνεται μια προσπάθεια παρουσίασης των πιο αντιπροσωπευτικών.

Η δομή της διατριβής έχει ως εξής:

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται μοντέλα συντονισμού προμηθευτή – αγοραστή διαχείρισης αποθεμάτων με σκοπό τη μεγιστοποίηση του κέρδους του προμηθευτή. Το πιο βασικό μοντέλο του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι το μοντέλο του Monahan (1984). Στο μοντέλο αυτό προσφέρεται ποσοτική έκπτωση στον αγοραστή ως κίνητρο για να δεχθεί να παραγγείλει εκείνη την ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος του προμηθευτή. Έπειτα παρουσιάζονται τα μοντέλα των Rosenblatt and Lee (1985) και (1986) και του Goyal (1987a) και (1987b) τα οποία γενικεύουν το μοντέλο του Monahan ενσωματώνοντας το κόστος διατήρησης αποθέματος για τον προμηθευτή, το οποίο είχε παραληφθεί στο προηγούμενο μοντέλο. Μια επέκταση του μοντέλου του Monahan προτείνουν και ο Banerjee (1986b) και Joglekar (1988) θεωρώντας ότι ο προμηθευτής είναι και παραγωγός του προϊόντος. Τέλος οι Weng and Wong (1993) αναπτύσσουν ένα μοντέλο στο οποίο η ζήτηση του αγοραστή είναι συνάρτηση της τιμής πώλησης του προϊόντος.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται μοντέλα των οποίων στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους του συστήματος. Αρχικά παρουσιάζεται το μοντέλο των Lal and Staelin (1984), στο οποίο χρησιμοποιώντας μια διαφορετικής μορφής συνάρτηση κόστους για τον προμηθευτή, καθορίζεται η ποσοτική έκπτωση που πρέπει να προσφέρει ο προμηθευτής έτσι ώστε να παρακινήσει τον αγοραστή να υιοθετήσει την ποσότητα παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος του συστήματος. Στη συνέχεια, στο μοντέλο του Banerjee (1986a), εξετάζονται οι συνέπειες από την υιοθέτηση της από κοινού οικονομικής παραγγελίας για τον αγοραστή και τον προμηθευτή όταν ο δεύτερος είναι και παραγωγός του προϊόντος. Στο ίδιο πλαίσιο ακολουθούν τα μοντέλα των Dada and Srikanth (1987), Chakravarty and Martin (1988) και Kim & Hwang (1989). Τέλος, παρουσιάζεται το μοντέλο του Weng (1995) στο οποίο θεωρείται ότι η ζήτηση του αγοραστή είναι ελαστική ως προς την τιμή πώλησης του προϊόντος.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εξετάζεται η προσφορά ποσοτικών εκπτώσεων στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων. Αντιπροσωπευτικά είναι τα μοντέλα των Kohli & Park (1989) και Chiang et al. (1994).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τέλος, στον επίλογο προτείνονται πιθανές επεκτάσεις των μοντέλων που παρουσιάστηκαν.

Οι βασικές υποθέσεις όλων των παραπάνω μοντέλων συνοψίζονται σε συγκριτικούς πίνακες που δίνονται στο παράρτημα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συμβολισμός

D	ρυθμός ζήτησης του αγοραστή	μονάδες προϊόντος / μονάδα χρόνου
Q	ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή	μονάδες προϊόντος
P	μοναδιαίο κόστος αγοράς για τον αγοραστή	χρηματικές μονάδες / μονάδα προϊόντος
c	μοναδιαίο κόστος αγοράς ή παραγωγής για τον προμηθευτή	χρηματικές μονάδες / μονάδα προϊόντος
R	ρυθμός παραγωγής προμηθευτή	μονάδες προϊόντος / μονάδα χρόνου
k	ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή	θετικός ακέραιος
S_b	κόστος παραγγελίας για τον αγοραστή	χρηματικές μονάδες / παραγγελία
S_s	κόστος παραγγελίας ή κόστος εκκίνησης της παραγωγής για τον προμηθευτή	χρηματικές μονάδες / παραγγελία
S_p	κόστος επεξεργασίας της παραγγελίας του αγοραστή από τον προμηθευτή	χρηματικές μονάδες / παραγγελία
h_b	κόστος διατήρησης αποθέματος για τον αγοραστή	ποσοστό της τιμής του προϊόντος / μονάδα χρόνου
h_s	κόστος διατήρησης αποθέματος για τον προμηθευτή	ποσοστό της τιμής του προϊόντος / μονάδα χρόνου
$h_b^{'}$	κόστος διατήρησης αποθέματος για τον αγοραστή	χρηματικές μονάδες / μονάδα προϊόντος / μονάδα χρόνου
$h_s^{'}$	κόστος διατήρησης αποθέματος για τον αγοραστή	χρηματικές μονάδες / μονάδα προϊόντος / μονάδα χρόνου
M	το καθαρό κέρδος του προμηθευτή από τις πωλήσεις	ποσοστό της τιμής πώλησης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

TC_b	Συνάρτηση συνολικού κόστους αγοραστή
TC_s	Συνάρτηση συνολικού κόστους προμηθευτή
TP_b	Συνάρτηση συνολικού κέρδους αγοραστή
TP_s	Συνάρτηση συνολικού κέρδους προμηθευτή
JTC	Συνάρτηση από κοινού κόστους αγοραστή-προμηθευτή
JTP	Συνάρτηση από κοινού κέρδους αγοραστή-προμηθευτή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2. ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΥΠΟ ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΡΟΜΗΘΕΥΤΗ – ΑΓΟΡΑΣΤΗ: ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΕΚΠΤΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΟΥ ΠΡΟΜΗΘΕΥΤΗ

Μετά την ανάπτυξη του μοντέλου της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας από τον Harris (1913), τα περισσότερα μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων υπό πολιτικές εκπτώσεων που ακολούθησαν είχαν ως αντικειμενικό στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους ή την ελαχιστοποίηση του κόστους του αγοραστή, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη ο προμηθευτής. Στα περισσότερα από τα μοντέλα αυτά η πολιτική που ακολουθείται είναι η εξής: ο προμηθευτής προσφέρει κάποια ποσοτική έκπτωση στην τιμή αγοράς του προϊόντος και ο αγοραστής με βάση αυτή καθορίζει την ποσότητα παραγγελίας του προσπαθώντας να ελαχιστοποιήσει το κόστος του.

Προφανώς, υιοθετώντας τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας για τον αγοραστή ελαχιστοποιείται το κόστος του, όχι όμως και το κόστος του προμηθευτή. Αντιθέτως αποδεικνύεται ότι συμφέρει τον προμηθευτή να παρακινήσει τον αγοραστή στην αύξηση του μεγέθους της παραγγελίας του.

Τα οφέλη για τον προμηθευτή από την αύξηση της ποσότητας παραγγελίας του αγοραστή είναι:

1. Μείωση του κόστους παραγγελιών ή εκκινήσεων της παραγωγής αφού μεγαλύτερες σε μέγεθος παραγγελίες από τον αγοραστή συνεπάγονται
   (α) λιγότερες παραγγελίες και για τον προμηθευτή των οποίων το κόστος είναι συνήθως μεγαλύτερο από το κόστος παραγγελίας του αγοραστή, ή
   (β) λιγότερες εκκινήσεις παραγωγής όταν ο προμηθευτής είναι και παραγωγός του προϊόντος
2. Αύξηση του μεγέθους των παραγγελιών δίνει τη δυνατότητα στον προμηθευτή να εκμεταλλευτεί πιθανές εκπτώσεις στο κόστος μεταφοράς
3. Τέλος η μεταβολή στο μέγεθος και στις χρονικές στιγμές των πληρωμών από τον αγοραστή μπορεί να αυξήσει τη χρηματική ρευστότητα του προμηθευτή

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν μοντέλα συντονισμού για την διαχείριση αποθεμάτων στα οποία στόχος είναι ο καθορισμός της ποσοτικής έκπτωσης που θα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

παρακινήσει τον αγοραστή να αυξήσει την ποσότητα παραγγελίας του με σκοπό την μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους του προμηθευτή.

2.1 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων για την μεγιστοποίηση του κέρδους του προμηθευτή όταν η πολιτική αναπλήρωσης του αποθέματος του είναι «παρτίδα προς παρτίδα»

Ένα από τα πιο βασικά μοντέλα αυτού του Κεφαλαίου είναι το μοντέλο που αναπτύχθηκε από τον *Monahan (1984)* πάνω στο οποίο βασίστηκαν τα περισσότερα μοντέλα που ακολούθησαν.

Το μοντέλο αναπτύσσεται κάτω από τις παρακάτω υποθέσεις:

Υποθέσεις

1. Υπάρχει ένας προμηθευτής που προμηθεύει έναν αγοραστή με ένα προϊόν
2. Ο ρυθμός ζήτησης του αγοραστή και κατ' επέκταση και του προμηθευτή είναι γνωστός (determenistic) και σταθερός
3. Δεν υπάρχουν περιορισμοί στην ποσότητα παραγγελίας
4. Τα είδη κόστους δεν αλλάζουν σημαντικά με το πέρασμα του χρόνου, συνεπώς ο πληθωρισμός θεωρείται αμελητέος
5. Ο χρόνος ανοχής (lead time), το χρονικό διάστημα από τη στιγμή τοποθέτησης της παραγγελίας μέχρι τη στιγμή της παραλαβής της, θεωρείται μηδενικός
6. Δεν επιτρέπονται ελλείψεις
7. Ο ανεφοδιασμός του αγοραστή γίνεται στιγμιαία (infinite replenishment rate)
8. Υπάρχει πλήρης πληροφόρηση μεταξύ αγοραστή και προμηθευτή για τις παραμέτρους κόστους του καθενός αντίστοιχα
9. Ο χρονικός ορίζοντας είναι άπειρος
10. Το κόστος αγοράς του προϊόντος διαμορφώνεται με σύστημα εκπτώσεων επί της ολικής ποσότητας παραγγελίας με τιμή κλιμακούμενη με το ύψος της παραγγελίας (all units quantity discount).

Στη συνέχεια δίνεται ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί

Συμβολισμός:

D = ο ρυθμός ζήτησης του αγοραστή (μονάδες προϊόντος / μονάδα χρόνου)

Q = η ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή (μονάδες προϊόντος)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

P = μοναδιαίο κόστος αγοράς για τον αγοραστή (χρηματικές μονάδες / μονάδα προϊόντος)

S_b = κόστος παραγγελίας για τον αγοραστή (χρηματικές μονάδες / παραγγελία)

S_s = κόστος παραγγελίας ή κόστος εκκίνησης της παραγωγής για τον προμηθευτή (χρηματικές μονάδες / παραγγελία)

h_b = κόστος διατήρησης αποθέματος για τον αγοραστή ως ποσοστό της τιμής του προϊόντος ανά μονάδα χρόνου

M = το καθαρό κέρδος του προμηθευτή από τις πωλήσεις εκφρασμένο ως ποσοστό της τιμής πώλησης.

Στόχος του μοντέλου είναι η επιλογή της βέλτιστη πολιτικής εκπτώσεων (τιμολογιακή πολιτική) η οποία θα παρακινήσει τον αγοραστή να μεταβεί σε εκείνη την ποσότητα παραγγελίας που μεγιστοποιεί το κέρδος του προμηθευτή ενώ το κόστος του αγοραστή παραμένει σταθερό.

Η συνάρτηση κόστους του αγοραστή δίνεται ως εξής:

(κόστος αγοράς του προϊόντος) + (κόστος παραγγελίας) + (κόστος διατήρησης αποθέματος)

$$TC_b = PD + S_b\left(\frac{D}{Q}\right) + h_b P\left(\frac{Q}{2}\right). \qquad (2.1.1)$$

Οπότε προκύπτει η γνωστή Οικονομική Ποσότητα Παραγγελίας (EOQ):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS_b}{h_b P}}. \qquad (2.1.2)$$

Αντικαθιστώντας την ποσότητα (2.1.2) στην σχέση (2.1.1) προκύπτει το ελάχιστο συνολικό κόστος του αγοραστή το οποίο ισούται με:

$$TC_b = PD + \sqrt{2DShP}. \qquad (2.1.3)$$

Έστω ότι ο προμηθευτής θέλει να παρακινήσει τον αγοραστή να αυξήσει την παραγγελία του από την EOQ Q^* σε KQ^*, $K \in \mathbb{R}$. Το ελάχιστο κόστος του αγοραστή για ποσότητα παραγγελίας KQ^* θα είναι:

$$TC_b(K) = PD + \sqrt{2DS_b h_b P} + \sqrt{2DS_b h_b P}\left({(K-1)^2}/{2K} \right)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Προφανώς για κάθε $K>1$ είναι $TC_b(K)>TC_b$. Συνεπώς, ο αγοραστής θα δεχτεί αυτή την αλλαγή στην πολιτική του μόνο αν του προσφερθεί κάποια έκπτωση, η οποία θα εξισορροπήσει τουλάχιστον το επιπλέον κόστος που θα υποχρεωθεί να πληρώσει.

Έστω d_k η έκπτωση ανά μονάδα προϊόντος που προσφέρει ο προμηθευτής για παραγγελία KQ^*, τότε πρέπει προφανώς:

$$d_K D \geq \sqrt{2DS_b h_b P}\frac{(K-1)^2}{2K}$$

και επομένως η έκπτωση με την οποία ο αγοραστής εξισορροπεί το επιπλέον κόστος του είναι:

$$d_K = \sqrt{\frac{2S_b h_b P}{D}}\frac{(K-1)^2}{2K} \tag{2.1.4}$$

Το συνολικό κέρδος του προμηθευτή, όταν ακολουθεί πολιτική έκπτωσης, προκύπτει αν από το κέρδος των πωλήσεων αφαιρεθεί η έκπτωση που θα προσφέρει στον αγοραστή και το κόστος παραγγελίας:

$$TP_s = DMP - d_K D - \frac{D}{KQ^*}S_S \tag{2.1.5}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο θεωρείται ότι ο προμηθευτής ακολουθεί πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα» (lot-for-lot) για την αναπλήρωση του αποθέματος. Δηλαδή, για κάθε παραγγελία του αγοραστή ο προμηθευτής παραγγέλνει ή παράγει την ανάλογη ποσότητα και την αποστέλλει απευθείας στον αγοραστή. Προφανώς όταν ακολουθείται η πολιτική αυτή ο προμηθευτής δεν διατηρεί απόθεμα και επομένως δεν επιβαρύνεται με έξοδα διατήρησης αποθέματος. Η πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα» μπορεί να εφαρμοστεί σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, όπως όταν υπάρχει ασυνήθιστα υψηλό κόστος διατήρησης αποθέματος ή όταν υπάρχει έλλειψη χώρου αποθήκευσης.

Αντικαθιστώντας το d_K από τη σχέση (2.1.4) στην (2.1.5) και μεγιστοποιώντας ως προς K προκύπτει:

$$K^* = \sqrt{\left(S_s/S_b\right)+1} \tag{2.1.6}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επομένως K^*Q^* είναι η ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή που μεγιστοποιεί το κέρδος του προμηθευτή και d_{K^*} είναι η έκπτωση που πρέπει να προσφέρει ο προμηθευτής στον αγοραστή για να τον παρακινήσει να αλλάξει την ποσότητα παραγγελίας του από Q^* σε K^*Q^*.

Από την σχέση (2.1.6) φαίνεται ότι η ποσότητα παραγγελίας δε θα αλλάξει στην ασυνήθιστη περίπτωση που το κόστος παραγγελίας του προμηθευτή είναι μηδέν. Επίσης προκύπτει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το κόστος παραγγελίας του προμηθευτή σε σχέση με αυτό του αγοραστή τόσο μεγαλύτερη αύξηση συμφέρει τον προμηθευτή να γίνει στο μέγεθος της παραγγελίας του αγοραστή.

Στο παραπάνω μοντέλο επισημαίνονται οι εξής αδυναμίες:

1. Ο μοναδικός αποδέκτης του οικονομικού οφέλους που προκύπτει από την αλλαγή της πολιτικής είναι ο προμηθευτής και επομένως δεν είναι βέβαιο ότι ο αγοραστής θα πεισθεί να μεταβεί σε μεγαλύτερη ποσότητα παραγγελίας αφού δεν έχει κανένα κέρδος.
2. Μελετάται μόνο η περίπτωση που ακολουθείται η πολιτική αναπλήρωσης του αποθέματος «παρτίδα προς παρτίδα»
3. Θεωρείται ότι η αναπλήρωση αποθέματος του προμηθευτή γίνεται από εξωτερική πηγή (άπειρος ρυθμός αναπλήρωσης) και δε λαμβάνεται υπόψη η περίπτωση του πεπερασμένου ρυθμού αναπλήρωσης, όταν δηλαδή ο προμηθευτής είναι και παραγωγός του προϊόντος.

Τα μοντέλα που παρουσιάζονται στη συνέχεια επεκτείνουν ή τροποποιούν το μοντέλο του Monahan (1984) σε μια προσπάθεια να ξεπεραστούν οι παραπάνω αδυναμίες.

2.2 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων για την μεγιστοποίηση του κέρδους του προμηθευτή όταν η ποσότητα παραγγελίας του είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας παραγγελίας του αγοραστή

Επέκταση του μοντέλου του Monahan (1984) αποτελεί το μοντέλο των *Rosenblatt & Lee (1985)* το οποίο παρουσιάζεται σε αυτή την παράγραφο. Στο μοντέλο αυτό υιοθετούνται οι εξής επιπλέον (της παραγράφου (2.1)) υποθέσεις:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1. Ο προμηθευτής δεν ακολουθεί πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα» για την αναπλήρωση του αποθέματος και επομένως επιβαρύνεται με το κόστος διατήρησης αποθέματος
2. Η έκπτωση που προσφέρει ο προμηθευτής στον αγοραστή είναι γραμμική

Στη συνέχεια δίνεται και ο επιπλέον συμβολισμός:

Y = η ποσότητα παραγγελίας του προμηθευτή

k = ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή ($k \in \mathbb{Z}^+$)

c = μοναδιαίο κόστος αγοράς για τον προμηθευτή (χρηματικές μονάδες / μονάδα προϊόντος)

h_s = κόστος διατήρησης αποθέματος για τον προμηθευτή ως ποσοστό της τιμής του προϊόντος ανά μονάδα χρόνου

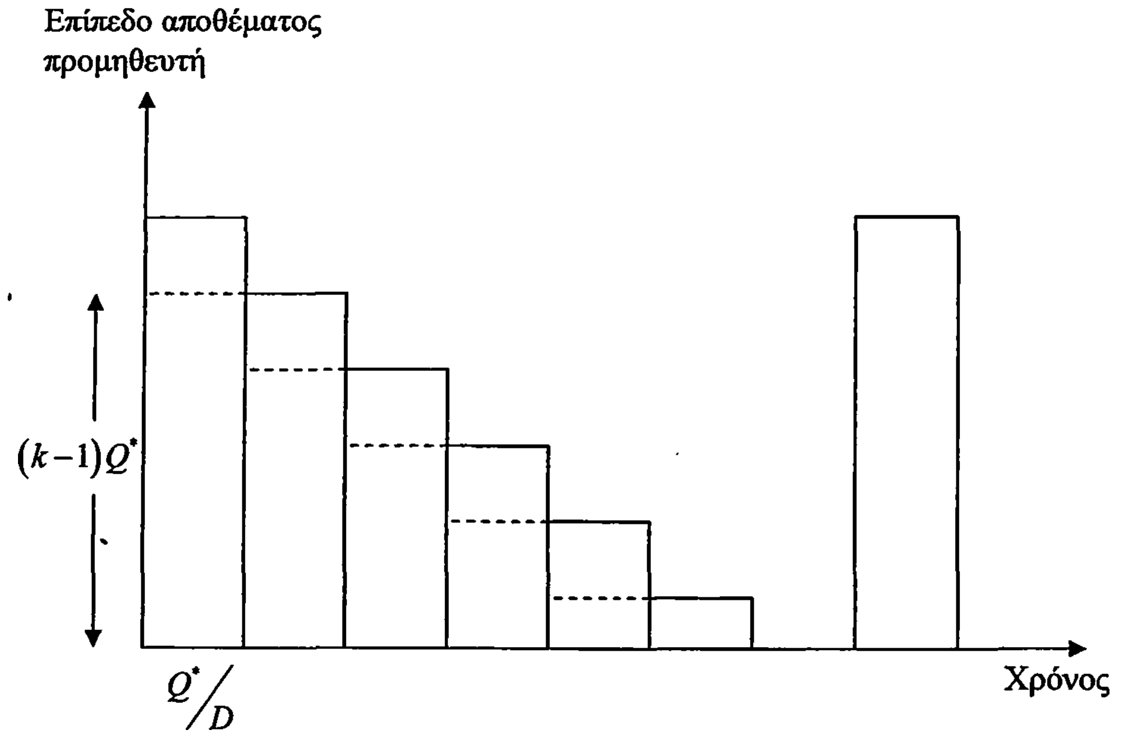
Όπως και στο μοντέλο του Monahan (1984) θεωρείται ότι ο αγοραστής, όταν δεν υπάρχει πρόσφορα έκπτωσης από τον προμηθευτή, επιλέγει την EOQ Q^* για την αναπλήρωση του αποθέματος του. Τότε προφανώς ο προμηθευτής δέχεται, ανά $\frac{Q^*}{D}$ χρονικά διαστήματα, παραγγελίες μεγέθους Q^* από τον αγοραστή.

Αποδεικνύεται παρακάτω ότι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας του προμηθευτή, Y^*, είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή ($Y^* = kQ^*, k \in \mathbb{Z}^+$).

Έστω ότι $Y = kQ^* + m$, όπου $k \in \mathbb{Z}^+$ και $0 \leq m < Q^*$. Μετά την πρώτη αναπλήρωση του αποθέματος του αγοραστή το επίπεδο αποθέματος του προμηθευτή θα είναι $Y = (k-1)Q^* + m$, ομοίως μετά την δεύτερη αναπλήρωση θα είναι $Y = (k-2)Q^* + m$ και μετά την k-οστή αναπλήρωση θα είναι ίσο με m. Το επίπεδο αποθέματος αυτό δεν επαρκεί για να ικανοποιήσει μια νέα παραγγελία από τον αγοραστή και άρα ο προμηθευτής θα πρέπει να θέσει μια καινούργια παραγγελία για να αναπληρώσει το δικό του απόθεμα. Επομένως, η βέλτιστη επιλογή που ελαχιστοποιεί το κόστος διατήρησης του προμηθευτή είναι $m = 0$.

Επίσης αποδεικνύεται ότι σε αυτή την περίπτωση το μέσο απόθεμα του προμηθευτή θα ισούται με $\frac{Q^*(k-1)}{2}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 2.1. Επίπεδο αποθέματος προμηθευτή

Όπως φαίνεται και στο *Σχήμα 2.1* το συνολικό απόθεμα που διατηρείται από τον προμηθευτή για κάθε κύκλο παραγγελίας του είναι ίσο με

$$\left[(k-1)Q^* + (k-2)Q^* + \ \dots \ + 2Q^* + Q^* + 0\right]\left(\frac{Q^*}{D}\right).$$

Δοθέντος ότι το μέγεθος της παραγγελίας του προμηθευτή είναι $Y^* = kQ^*$ και η διάρκεια ενός κύκλου παραγγελίας του είναι $\frac{kQ^*}{D}$, το μέσο απόθεμα του προμηθευτή ανά μονάδα χρόνου ισούται με $\dfrac{k(k-1)Q^*\left(\frac{Q^*}{D}\right)}{2\left(\frac{kQ^*}{D}\right)} = \dfrac{(k-1)Q^*}{2}$.

Συνεπώς η συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή, στην οποία τώρα προφανώς θα προστεθεί και το κόστος διατήρησης αποθέματος, είναι:

$$TP_s = (P-c)D - S_S\frac{D}{kQ^*} - h_s c\frac{Q^*(k-1)}{2} \qquad (2.2.1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(ο όρος cD είναι σταθερός ως προς τις μεταβλητές απόφασης του προμηθευτή και θα αγνοηθεί στη συνέχεια).

Ο υπολογισμός της βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας του προμηθευτή ανάγεται στην επίλυση του παρακάτω προβλήματος:

$$\max_{k\geq 1, k\in \mathbb{Z}} TP_s$$

ή ισοδύναμα:

$$\min_{k\geq 1, k\in \mathbb{Z}} \phi(k) = \frac{h_s c Q^*(k-1)}{2} + S_s \frac{D}{kQ^*}$$

Ο αριθμός k^* που ελαχιστοποιεί την παραπάνω συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\phi(k^*-1) > \phi(k^*) \leq \phi(k^*+1)$$

Αντικαθιστώντας την $\phi(k)$ και εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει:

$$k^*(k^*-1) < \frac{2S_s D}{h_s c Q^{*2}} \leq k^*(k^*+1) \qquad (2.2.2)$$

Επειδή $Q^* = \sqrt{\frac{2DS_b}{h_b P}}$ (σχέση (2.1.2)) η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας του προμηθευτή ($k^* Q^*$), όταν δεν ακολουθεί πολιτική έκπτωσης, δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$k^*(k^*-1) < \frac{S_s h_b P}{S_b h_s c} \leq k^*(k^*+1).$$

Παρατηρήσεις

1. Αν $h_s = h_b$ και $P = \lambda c$, $\lambda \geq 1$, τότε $k^*(k^*-1) < \frac{\lambda S_s}{S_b} \leq k^*(k^*+1)$
2. Αν λ=1 ($P = c$), η πολιτική «παρτίδα για παρτίδα» ($k^* = 1$) θα πρέπει να εφαρμόζεται μόνο όταν $\frac{S_s}{S_b} \leq 2$.

Έστω ότι ο προμηθευτής προσφέρει γραμμική ποσοτική έκπτωση $P = a - bQ$, όπου a η αρχική τιμή πώλησης και b ο ρυθμός έκπτωσης ανά μονάδα προϊόντος, με

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σκοπό να παρακινήσει τον αγοραστή να αυξήσει την ποσότητα παραγγελίας του. Το πρόβλημα του προμηθευτή είναι να υπολογίσει το k και το b έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

Το κόστος του αγοραστή με προσφορά ποσοτικής γραμμικής έκπτωσης δίνεται ως:

$$TC_b = (a-bQ)D + \left(\frac{D}{Q}\right)S_b + \left(\frac{Q}{2}\right)h_b(a-bQ) \qquad (2.2.3)$$

ελαχιστοποιώντας τη (2.2.3) ως προς Q και λύνοντας ως προς b προκύπτει:

$$b = \frac{\left(\frac{h_b a}{2}\right) - \left(\frac{S_b D}{Q^{**2}}\right)}{D + h_b Q^{**}} \qquad (2.2.4)$$

Δοθέντος του b ο αγοραστής μπορεί να υπολογίσει μέσω της σχέσης (2.2.4) την ποσότητα παραγγελίας του, Q^{**}, που ελαχιστοποιεί το κόστος του.

Προφανώς για να ελαχιστοποιεί η ποσότητα Q^{**} την συνάρτηση κόστους του αγοραστή πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\partial^2 TC_b}{\partial Q^2} \geq 0 \text{ , όταν } Q = Q^{**} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2S_b D}{Q^{**3}} - h_b b \geq 0 .$$

μέσω της (2.2.4) και μετά από πράξεις προκύπτει:

$$\frac{2D}{h_b Q^{**3}} + \frac{3}{Q^{**2}} \geq \frac{h_b a}{2DS_b} \qquad (2.2.5)$$

Αν Q_1 είναι ο μοναδικός θετικός Q που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{2D}{h_b Q_1^3} + \frac{3}{Q_1^2} = \frac{h_b a}{2DS_b} . \qquad (2.2.6)$$

τότε σύμφωνα με την ανισότητα (2.2.5) δεν υπάρχει έκπτωση b που θα παρακινούσε τον αγοραστή να παραγγείλει σε ποσότητες $Q > Q_1$.

Άρα Q_1 είναι η μέγιστη ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή για προσφορά έκπτωσης b.

Η συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή, όταν αυτός ακολουθεί πολιτική ποσοτικής έκπτωσης, είναι:

$$TP_s = (a-bQ)D - S_S \frac{D}{kQ} - h_s c \frac{(k-1)Q}{2} . \qquad (2.2.7)$$

Ο προμηθευτής θέλει να υπολογίσει το b και το αντίστοιχο k, έτσι ώστε η ποσότητα παραγγελίας που θα επιλέξει ο αγοραστής με βάση αυτά να μεγιστοποιεί το κέρδος του.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η σχέση (2.2.7) μέσω της (2.2.4) γίνεται:

$$TP_s = \left(a - \frac{\left(\frac{h_b a Q}{2}\right) - \left(\frac{S_b D}{Q}\right)}{D + h_b Q}\right) D - S_s \frac{D}{kQ} - h_s c \frac{(k-1)Q}{2} \qquad (2.2.8)$$

Μια επιπλέον συνθήκη προκύπτει από το γεγονός ότι το b πρέπει προφανώς να είναι ένας θετικός αριθμός:

$$b \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{h_b a}{2}\right) - \left(\frac{S_b D}{Q^2}\right) \geq 0 \Rightarrow Q \geq \sqrt{\frac{2DS_b}{h_b a}} \equiv Q^*,$$

όπου Q^* η EOQ του αγοραστή όταν δεν υπάρχει προσφορά ποσοτικής έκπτωσης, δηλαδή όταν $P = a$ ($b = 0$). Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο αφού σκοπός της ποσοτικής έκπτωσης είναι μεγαλύτερες σε μέγεθος παραγγελίες.

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τις δύο παραπάνω συνθήκες, για την μεγιστοποίηση του κέρδους του προμηθευτή θα πρέπει να ληφθούν υπόψη μόνο τα Q για τα οποία ισχύει:

$$Q^* \leq Q \leq Q_1 \qquad (2.2.9)$$

Υπενθυμίζεται ότι δοθέντος του Q, μπορεί μέσω της (2.2.2), να υπολογιστεί το k^*.

Η ανισότητα (2.2.2) μετά από πράξεις γίνεται:

$$\sqrt{\frac{2S_s D}{h_s c k^* (k^* + 1)}} \leq Q < \sqrt{\frac{2S_s D}{h_s c k^* (k^* - 1)}} \qquad (2.2.10)$$

Τότε σύμφωνα με τις σχέσεις (2.2.9) και (2.2.10) πρέπει:

$$\sqrt{\frac{2S_s D}{h_s c k(k+1)}} \leq Q \leq Q_1 \Rightarrow \sqrt{\frac{2S_s D}{h_s c k(k+1)}} \leq Q_1$$

$$\Rightarrow \frac{2S_s D}{h_s c Q_1^2} \leq k(k+1) \qquad (2.2.11)$$

και

$$Q^* \leq Q < \sqrt{\frac{2S_s D}{h_s c k(k-1)}} \Rightarrow Q^* < \sqrt{\frac{2S_s D}{h_s c k(k-1)}} \Rightarrow k(k-1) < \frac{2S_s D}{h_s c Q^{*2}}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ή
$$k(k-1) < \frac{S_s h_b a}{S_b h_s c}, \tag{2.2.12}$$

αφού $Q^* = \sqrt{\dfrac{2DS_b}{h_b a}}$.

Έστω $k_{\min}$ το μικρότερο k που ικανοποιεί την (2.2.11) και έστω $k_{\max}$ το μεγαλύτερο k που ικανοποιεί την (2.2.12). Τότε προφανώς δεν χρειάζεται να εξεταστούν τα k για τα οποία ισχύει $k < k_{\min}$ και $k > k_{\max}$.

Με βάση τα παραπάνω ο αλγόριθμος, των Rosenblatt & Lee (1985), που προκύπτει για τον υπολογισμό της βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας του προμηθευτή, του αγοραστή και της ποσοτικής έκπτωσης είναι:

1. Θεωρώ $k = k_{\min}$
2. Μεγιστοποιώ την συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή (2.2.8), για τα Q που δίνονται από τη σχέση (2.2.10)
3. Αν $k < k_{\max}$, θέτω $k = k+1$ και μεταβαίνω στο βήμα 2
4. Συγκρίνω τα κέρδη για τους διάφορους συνδυασμούς των (k, Q) που βρέθηκαν στο βήμα 2 και επιλέγω τον βέλτιστο
5. Η τιμή του b υπολογίζεται από τη σχέση (2.2.4).

Σημειώνεται ότι στο μοντέλο των Rosenblatt & Lee (1985), σε αντίθεση με το μοντέλο του Monahan (1984), η αύξηση του μεγέθους της παραγγελίας ωφελεί και τον αγοραστή και τον προμηθευτή.

2.3 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων για την μεγιστοποίηση το κέρδους του προμηθευτή όταν η ποσότητα παραγγελίας του είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή και τίθεται περιορισμός στην έκπτωση

Οι *Rosenblatt & Lee (1986)* επεκτείνουν το προηγούμενο μοντέλο τους (ενότητα 2.2) θέτοντας περιορισμό στην έκπτωση που προσφέρει ο προμηθευτής, έτσι ώστε η μειωμένη τιμή πώλησης του προϊόντος να μην γίνεται αρνητική ή μικρότερη από ένα ελάχιστο επιθυμητό κέρδος πού θέτει ο προμηθευτής.

Όπως και στο μοντέλο του Monahan (1984), ο προμηθευτής παρακινεί τον αγοραστή να αυξήσει την ποσότητα παραγγελίας του σε KQ^*, $K \in \mathbb{R}$, όπου Q^* η

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

EOQ. Η έκπτωση ανά μονάδα προϊόντος που πρέπει να προσφέρει ο προμηθευτής θα είναι τουλάχιστον (βλέπε σχέση (2.1.4))

$$d_K = \sqrt{\frac{2S_b h_b P}{D}\frac{(K-1)^2}{2K}} \tag{2.3.1}$$

Αν η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας του προμηθευτή, όπως και στο προηγούμενο μοντέλο, είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή,

$$k\left(KQ^*\right), k \in \mathbb{Z}^+$$

τότε η συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή είναι:

$$TP_s = PD - d_K D - S_S \frac{D}{kKQ^*} - h_s' P \frac{KQ^*(k-1)}{2}, \tag{2.3.2}$$

όπου $h_s' = h_s \frac{c}{P}$.

Έστω ότι ο περιορισμός που θέτει ο προμηθευτής στην ποσοτική έκπτωση είναι:

$$P - c - d_K \geq \Delta \geq 0 \tag{2.3.3}$$

όπου Δ το περιθώριο κέρδους που επιθυμεί ο προμηθευτής.

Στόχος του μοντέλου είναι η μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους του προμηθευτή (σχέση (2.3.2)) ως προς k και K, υπό τον περιορισμό των σχέσεων (2.3.1) και (2.3.3).

Η (2.3.3) λόγω της (2.3.1) γίνεται:

$$P - c - \sqrt{\frac{2S_b h_b P}{D}\frac{(K-1)^2}{2K}} \geq \Delta$$

και μετά από πράξεις:

$$K^2 - 2\left(1 + (P - c - \Delta)\sqrt{\frac{D}{2S_b h_b P}}\right)K + 1 \leq 0$$

Αν $\overline{K}$ και $\underline{K}$ ($\underline{K} < \overline{K}$) οι δύο ρίζες της παραπάνω ανίσωσης τότε ο περιορισμός (2.3.3) ισχύει μόνο όταν:

$$\underline{K} \leq K \leq \overline{K} \quad \text{ή} \quad 1 \leq K \leq \overline{K} \tag{2.3.4}$$

αφού εύκολα αποδεικνύεται ότι $\underline{K} \leq 1$ και $K \geq 1$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επομένως το πρόβλημα του προμηθευτή είναι:

$$\max\ TP_s = PD - \left[\sqrt{2DS_b h_b P}\,\frac{(K-1)^2}{2K}\right] - S_S\frac{D}{kKQ^*} - h_s' P\frac{KQ^*(k-1)}{2}$$

$$\text{s.t.}\quad 1 \le K \le \overline{K} \quad \text{και} \quad k = 1,2,3....$$

Θεωρώντας το k σταθερό και μεγιστοποιώντας τη συνάρτηση κέρδους ως προς K προκύπτει:

$$K^*(k) = \sqrt{\frac{1+{S_s}/{kS_b}}{1+(k-1){h_s}/{h_b}}} \quad \text{για δοθέν } k. \qquad (2.3.5)$$

Σημειώνεται ότι αν $k=1$ τότε προκύπτει η πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα» και καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με το μοντέλο του Monahan (1984) (σχέση (2.1.6)).

Αν τώρα θεωρηθεί το K σταθερό και το k^* μεγιστοποιεί την συνάρτηση κέρδους ως προς k, θα πρέπει να ισχύει:

$$TP_s\left(k^*/K\right) \ge TP_s\left(k^*+1/K\right) \quad \text{και} \quad TP_s\left(k^*/K\right) > TP_s\left(k^*-1/K\right).$$

Οι παραπάνω δυο ανισότητες συναληθεύουν όταν:

$$\sqrt{\left(\frac{S_s}{S_b}\frac{h_b}{h_s}\right)\frac{1}{k^*\left(k^*+1\right)}} \le K \le \sqrt{\left(\frac{S_s}{S_b}\frac{h_b}{h_s}\right)\frac{1}{k^*\left(k^*-1\right)}} \qquad (2.3.6)$$

Συνεπώς αν K ανήκει στο παραπάνω διάστημα τότε το k^* μεγιστοποιεί την συνάρτηση κέρδους.

Συμβολίζουμε με:

$$K_k = \sqrt{\left(\frac{S_s}{S_b}\frac{h_b}{h_s}\right)\frac{1}{k(k+1)}},\ k = 1,2,3...$$

Έτσι η (2.3.6) γίνεται

$$K_{k^*} \le K \le K_{k^*-1}.$$

Πρέπει, σύμφωνα με τους περιορισμούς, να ισχύει $K \le \overline{K}$, άρα

$$\overline{K} < \sqrt{\left(\frac{S_s}{S_b}\frac{h_b}{h_s}\right)\frac{1}{k(k-1)}} \Rightarrow k(k-1) < \frac{S_s}{S_b}\frac{h_b}{h_s}\frac{1}{\overline{K}^2}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επομένως, το κάτω φράγμα για το k^* είναι ο μεγαλύτερος k, έστω $\underline{k}$, για τον οποίο ισχύει η παραπάνω ανισότητα.

Επίσης πρέπει να ισχύει $1 \le K \Rightarrow 1 \ge \frac{S_s}{S_b}\frac{h_b}{h_s}\frac{1}{k(k+1)} \Rightarrow k(k+1) \ge \frac{S_s}{S_b}\frac{h_b}{h_s}$

Και άρα το πάνω φράγμα για το k^* είναι ο μικρότερος k, έστω $\bar{k}$, για τον οποίο ισχύει το παραπάνω.

Συνεπώς: $\underline{k} \le k^* \le \bar{k}$.

Συμφώνα με τα παραπάνω ο αλγόριθμος για την εύρεση των βέλτιστων K και k όπως προτείνεται από τους Rosenblatt & Lee (1986) είναι:

1. Ξεκινάμε με $i = \underline{k}$.
2. Θέτουμε $j, j \ge i$, τέτοιο ώστε $K_j \le K^*(i) \le K_{j-1}$.
3. Αν $i = j$, τότε $(i, K^*(i))$ είναι υποψήφια λύση του προβλήματος. Θέτουμε $i = i + 1$. Αν $j > i$, τότε θέτουμε $i = j$.
4. Αν $i < \bar{k}$, τότε μεταβαίνουμε στο βήμα (2).

   Αν $i = \bar{k}$, τότε $(\bar{k}, K^*(\bar{k}))$ είναι υποψήφια λύση του προβλήματος.
5. Σταματάμε. Καθορίζουμε την βέλτιστη λύση από το σύνολο των υποψήφιων λύσεων, συγκρίνοντας τα αντίστοιχα κέρδη τους.

Μετά την εύρεση των βέλτιστων K και k μπορεί να υπολογιστεί η τιμή της έκπτωσης από τη σχέση (2.3.1).

Τέλος, επειδή όπως προαναφέρθηκε πρέπει να ισχύει $k(k+1) \ge \frac{S_s}{S_b}\frac{h_b}{h_s}$, παρατηρούμε ότι η πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα» θα πρέπει να εφαρμόζεται όταν $\frac{S_s}{S_b}\frac{h_b}{h_s} \le 2$.

2.4 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων για τη μεγιστοποίηση του κέρδους του προμηθευτή όταν η ποσότητα παραγγελίας του είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας παραγγελίας του αγοραστή - τροποποίηση του αλγορίθμου των Rosenblatt & Lee (1985)

Σε αντίθεση με τους Rosenblatt & Lee (1986), ο *Goyal (1987a)* θεωρεί ως μη λογικό τον περιορισμό στην έκπτωση. Τονίζει ότι μοναδικός σκοπός του προμηθευτή είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

να μεγιστοποιήσει το κέρδος του και είναι πιθανόν, υψηλότερες εκπτώσεις στην τιμή πώλησης να οδηγήσουν σε μεγαλύτερα κέρδη για αυτόν. Επίσης προτείνει έναν πιο απλό αλγόριθμο για την εύρεση της βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας και έκπτωσης.

Όπως και στα προηγούμενα μοντέλα (Monahan (1984), Rosenblatt & Lee (1985)) έτσι και στο μοντέλο του Goyal (1987α), το μέγεθος της ποσοτικής έκπτωσης που πρέπει να προσφέρει ο προμηθευτής στον αγοραστή, για να τον παρακινήσει να μεταβεί σε ποσότητα παραγγελίας ίση με KQ^*, όπου Q^* = EOQ, θα πρέπει να είναι (σχέση (2.1.4)):

$$d_K = \sqrt{\frac{2S_b h_b P}{D}}\frac{(K-1)^2}{2K} \tag{2.4.1}$$

Επίσης, η βέλτιστη παραγγελία για τον προμηθευτή είναι $k\left(KQ^*\right), k \in \mathbb{Z}^+$.

Τροποποιώντας την συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή, του μοντέλου της παραγράφου 2.3 (σχέση (2.3.2)), προκύπτει η σχέση:

$$TP_s = (P-c)D + \sqrt{2DS_b h_b P}\left[1-\frac{1}{2}\left(K\left(1+(k-1)\frac{h_s'}{h_b}\right)+\frac{1}{K}\left(1+\frac{S_s}{kS_b}\right)\right)\right] \tag{2.4.2}$$

Για τη μεγιστοποίηση της παραπάνω συνάρτησης κέρδους, αρκεί να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $Z = \left(K\left(1+(k-1)\frac{h_s'}{h_b}\right)+\frac{1}{K}\left(1+\frac{S_s}{kS_b}\right)\right)$.

Ή

$$Z = K(A+kB)+\frac{1}{K}\left(1+\frac{C}{k}\right), \tag{2.4.3}$$

όπου

$$A = 1-\frac{h_s'}{h_b}, \quad B = \frac{h_s'}{h_b} \quad \text{και} \quad C = \frac{S_s}{S_b}.$$

Τότε για δοθέν k, η βέλτιστη τιμή του K, δίνεται από την εξής σχέση:

$$K(k) = \sqrt{\frac{1+\left(C/k\right)}{(A+kB)}} \tag{2.4.4}$$

με αντικατάσταση της (2.4.4) στην (2.4.3) προκύπτει:

$$Z(k) = 2\sqrt{(A+kB)\left(1+\frac{C}{k}\right)} \tag{2.4.5}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η ελαχιστοποίηση της (2.4.5) ως προς k, απαιτεί την ελαχιστοποίηση της υπόριζης ποσότητας:

$$X = A + BC + kB + \frac{AC}{k}$$

και επειδή A,B,C σταθερά αρκεί να ελαχιστοποιηθεί το $R(k) = kB + \frac{AC}{k}$.

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη ελαχιστοποίησης είναι

$$R(k-1) > R(k) \quad \text{και} \quad R(k+1) > R(k),$$

από την οποία εύκολα προκύπτει η συνθήκη:

$$k(k-1) < \frac{AC}{B} \le k(k+1). \qquad (2.4.6)$$

Σημειώνεται ότι $k = 1$, όταν $\frac{AC}{B} \le 2$. Συνεπώς όταν ισχύει $\frac{AC}{B} \le 2$ η βέλτιστη πολιτική για τον προμηθευτή είναι η πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα».

Έτσι ο αλγόριθμος, όπως προτείνεται από τον Goyal (1987), είναι:

1. Υπολογίζεται το $\frac{AC}{B}$. Αν $\frac{AC}{B} > 2$ πηγαίνουμε στο βήμα (2). Αλλιώς θέτουμε $k = 1$ και καθορίζουμε το K από τη σχέση (2.4.4) και την τιμή της έκπτωσης από τη σχέση (2.4.1). Τέλος.
2. Καθορίζουμε το k που ικανοποιεί τη συνθήκη (2.4.6). Υπολογίζουμε το K από τη σχέση (2.4.4) και την τιμή της έκπτωσης από τη σχέση (2.4.1).

Ο αλγόριθμος του Goyal (1987) είναι προφανώς πιο απλός και προκύπτει πιο εύκολα από τον αλγόριθμο των Rosenblatt & Lee (1985).

2.5 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων για τη μεγιστοποίηση του κέρδους του προμηθευτή όταν η ποσότητα παραγγελίας του είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας παραγγελίας του αγοραστή και το κόστος διατήρησης αποθέματος του αγοραστή είναι ανεξάρτητο της τιμής του προϊόντος

Στα μοντέλα που μελετήθηκαν έως τώρα, το κόστος διατήρησης αποθέματος εκφραζόταν ως ένα ποσοστό της τιμής αγοράς του προϊόντος. Ο *Goyal (1987b)* προτείνει ένα μοντέλο καθορισμού της ποσότητας παραγγελίας του αγοραστή,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

λαμβάνοντας υπόψη την ποσοτική έκπτωση που προσφέρει ο προμηθευτής, θεωρώντας το κόστος διατήρησης αποθέματος ανεξάρτητο της τιμής του προϊόντος.

Συμβολισμός:

$h_b^{'}$ = κόστος διατήρησης αποθέματος για τον αγοραστή ανά μονάδα προϊόντος ανά μονάδα χρόνου

$h_s^{'}$ = κόστος διατήρησης αποθέματος για τον προμηθευτή ανά μονάδα προϊόντος ανά μονάδα χρόνου

Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση κόστους του αγοραστή δίνεται από την σχέση:

$$TC_b = DP + \frac{D}{Q}S_b + \frac{Q}{2}h_b^{'},$$

και το ελάχιστο κόστος του είναι:

$$TC_b(Q^*) = DP + \sqrt{2DS_b h_b^{'}}.$$

Για να παρακινήσει ο προμηθευτής τον αγοραστή να παραγγείλει μεγαλύτερη ποσότητα προϊόντος από την EOQ θα πρέπει προφανώς να τον αποζημιώσει για τον επιπλέον κόστος $TC_b - TC_b\left(Q^*\right)$ με το οποίο θα επιβαρυνθεί.

Επομένως η αποζημίωση που θα πρέπει να δοθεί στον αγοραστή θα ισούται με:

$$X(Q) = a\left(TC_b - TC_b\left(Q^*\right)\right) = a\left(\frac{D}{Q}S_b + \frac{Q}{2}h_b^{'} - \sqrt{2DS_b h_b^{'}}\right) \tag{2.5.1}$$

όπου a είναι μια σταθερά που καθορίζεται από την σχέση μεταξύ προμηθευτή και αγοραστή, ως εξής:

Στην περίπτωση που ο προμηθευτής έχει μεγαλύτερη ισχύ από τον αγοραστή, η τιμή του a μπορεί να είναι μικρότερη της μονάδας. Στην περίπτωση που ο αγοραστής και ο προμηθευτής είναι ισότιμοι και για να πειστεί ο αγοραστής να αυξήσει την ποσότητα παραγγελίας, τόσο όσο συμφέρει τον προμηθευτή, θα πρέπει $a \geq 1$.

Η αποζημίωση που απαιτεί ο αγοραστής, σχέση (2.5.1), προσφέρεται από τον προμηθευτή με την μορφή ποσοτικής έκπτωσης στην τιμή του προϊόντος:

Τιμή ανά μονάδα προϊόντος με έκπτωση = $P - \frac{X(Q)}{D}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έστω ότι ο προμηθευτής προμηθεύεται το προϊόν από κάποιον τρίτο και η ποσότητα παραγγελίας του ισούται με kQ, $k \in \mathbb{Z}^+$, όπου Q η ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή. Τότε η συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή ισούται με:

$$TP_s = D(P-c) - a\left(\frac{D}{Q}S_b + \frac{Q}{2}h_b' - \sqrt{2DS_b h_b'}\right) - \frac{D}{kQ}S_s - \frac{(k-1)Q}{2}h_s'$$

ή $$TP_s = D(P-c) + a\sqrt{2DS_b h_b'} - \frac{D}{Q}\left(aS_b + \frac{S_s}{k}\right) - \frac{Q}{2}\left(ah_b' + (k-1)h_s'\right)$$

Για την μεγιστοποίηση της TP_s αρκεί να ελαχιστοποιηθεί η παρακάτω συνάρτηση ως προς Q:

$$R(Q) = \frac{D}{Q}\left(aS_b + \frac{S_s}{k}\right) + \frac{Q}{2}\left(ah_b' + (k-1)h_s'\right).$$

Από την οποία προκύπτει:

$$Q(k) = \sqrt{\frac{2D(aS_b + {}^{S_s}\!/\!_{k})}{ah_b'(k-1)h_s'}} \qquad (2.5.2)$$

Αντικαθιστώντας στην $R(Q)$ το $Q(k)$ της σχέσεως (2.5.2) προκύπτει η εξής συνάρτηση του k:

$$R(k) = \sqrt{2D(aS_b + {}^{S_s}\!/\!_{k})\left(ah_b'(k-1)h_s'\right)}.$$

Έστω $T(k) = \dfrac{(R(k))^2}{2D} = a^2 S_b h_b' - aS_b h_s' + S_s h_b' + aS_b h_s' k + \dfrac{S_s(ah_b' - h_s')}{k}$.

Αν k^* η τιμή του k που ελαχιστοποιεί την $T(k)$ θα ισχύει:

$$T(k^*) \le T(k^* - 1) \quad \text{και} \quad T(k^*) \le T(k^* + 1)$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$k^*(k^* - 1) \le \frac{S_s(ah_b' - h_s')}{aS_b h_s'} \qquad \text{και} \qquad k^*(k^* + 1) \ge \frac{S_s(ah_b' - h_s')}{aS_b h_s'}$$

ή $$k^*(k^* - 1) \le \frac{S_s(ah_b' - h_s')}{aS_b h_s'} \le k^*(k^* + 1). \qquad (2.5.3)$$

Ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό των Q και k είναι:

1. Καθορίζοντας το $\dfrac{S_s(ah_b' - h_s')}{aS_b h_s'}$, υπολογίζεται το k από τη σχέση (2.5.3)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2. Αντικαθιστώντας το k^* στην (2.5.2) υπολογίζεται η ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή $Q(k^*)$ και η ποσότητα παραγγελίας του προμηθευτή $k^*Q(k^*)$.

3. Από την (2.5.1) υπολογίζεται η ποσοτική έκπτωση $X(Q(k^*))$ που πρέπει να προσφερθεί από τον προμηθευτή στον αγοραστή.

2.6 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων για την αύξηση κέρδους του προμηθευτή όταν ο ρυθμός αναπλήρωσης του αποθέματος του προμηθευτή είναι πεπερασμένος και η πολιτική αναπλήρωσης του αποθέματος του είναι «παρτίδα προς παρτίδα»

Ο *Banerjee (1986b)* προτείνει ένα μοντέλο στο οποίο θεωρείται ότι ο προμηθευτής παράγει ο ίδιος το προϊόν με ρυθμό παραγωγής R. Επίσης θεωρείται ότι η αναπλήρωση του αποθέματος του προμηθευτή γίνεται με πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα» και επομένως το μοντέλο αυτό είναι ουσιαστικά μια επέκταση του μοντέλου του Monahan (1984) για πεπερασμένο ρυθμό αναπλήρωσης. Θεωρείται ότι ο χρόνος ανοχής είναι μη μηδενικός.

Χρησιμοποιούνται οι εξής (επιπλέον των προηγούμενων παραγράφων) συμβολισμοί:

R = ρυθμός παραγωγής προμηθευτή (μονάδες προϊόντος / μονάδα χρόνου)

c = μοναδιαίο κόστος παραγωγής για τον προμηθευτή (χρηματικές μονάδες / μονάδα προϊόντος)

T_1 = ο συνολικός χρόνος ανοχής

T_2 = χρονική διάρκεια της παραγωγής του προϊόντος

Ο χρόνος ανοχής T_1 αποτελείται από:

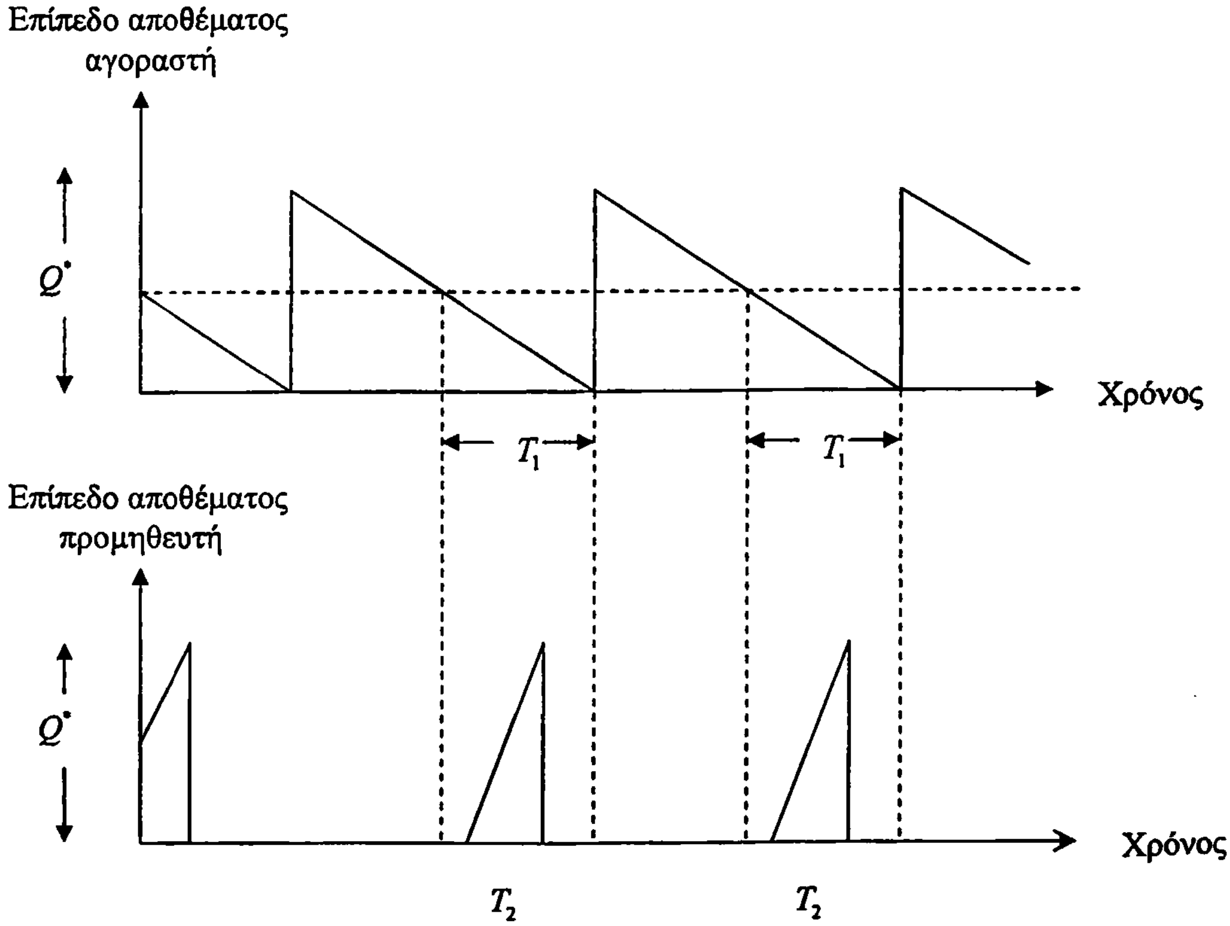
- Το χρόνο που απαιτείται για τη διαβίβαση της παραγγελίας, την επεξεργασίας της και το στήσιμο της παραγωγικής διαδικασίας.
- Τη χρονική διάρκεια της παραγωγής του προϊόντος (T_2).
- Το συνολικό χρόνο επιθεώρησης, συσκευασίας και παράδοσης της «παρτίδας».

Ο προμηθευτής-παραγωγός παραδίδει την έτοιμη «παρτίδα» στον αγοραστή αφού ολοκληρωθεί η παραγωγική διαδικασία. Επομένως έχει νόημα να συμπεριληφθεί το κόστος διατήρησης αποθέματος στην συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για την παραγωγή μιας παρτίδας Q μονάδων προϊόντος απαιτούνται T_2 μονάδες χρόνου. Σε αυτό το διάστημα ο προμηθευτής θα έχει μέσο απόθεμα ίσο με $\frac{Q}{2}$. Επομένως το μέσο απόθεμα του προμηθευτή για έναν κύκλο παραγγελίας θα ισούται με $\left(\frac{Q}{2}\right)T_2$. Επειδή σε μια χρονική περίοδο θα υπάρξουν $\frac{D}{Q}$ παραγγελίες προκύπτει ότι αν Q^* η EOQ του αγοραστή, το μέσο απόθεμα του προμηθευτή ανά χρονική περίοδο θα ισούται με: $I = \left(\frac{Q^*}{2}\right)T_2\frac{D}{Q^*}$, όμως $T_2 = \frac{Q^*}{R}$ και άρα:

$$I = \frac{DQ^*}{2R} \tag{2.6.1}$$



Σχήμα 2.2. Εξέλιξη του επιπέδου αποθέματος αγοραστή και προμηθευτή

Η συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή, (σχέση (2.1.5)), συμπεριλαμβάνοντας και το κόστος διατήρησης αποθέματος θα είναι η εξής:

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$TP_s = D(MP - d_K) - \frac{D}{KQ^*} S_S - h_s c \frac{DKQ^*}{2R}$$

Αν στην παραπάνω σχέση αντικατασταθεί η γνωστή σχέση της ποσοτικής έκπτωσης (σχέση (2.1.4)) και γίνει μεγιστοποίηση ως προς K προκύπτει η εξής βέλτιστη τιμή:

$$K^* = \sqrt{\frac{1+\left(S_s/S_b\right)}{1+\left(Dh_s c/Rh_b P\right)}}$$

Αν θέσουμε $a = \frac{S_s}{S_b}$ και $\beta = {Dh_s c}/{Rh_b P}$, τότε $K^* = \sqrt{\frac{1+a}{1+\beta}}$.

Επισημαίνεται ότι όταν ο ρυθμός παραγωγής R τείνει στο άπειρο τότε $\beta = 0$ και η παραπάνω σχέση για το βέλτιστο K, ανάγεται σε αυτή που προκύπτει από το μοντέλο του Monahan (σχέση (2.1.6)).

Παρατηρήσεις

1. Αν $a = \beta$ τότε $K^* = 1$, σε αυτή την περίπτωση είναι προτιμότερο να μην υπάρξει μεταβολή στην ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή.
2. Αν $a > 1$ και $0 < \beta < 1$, (το οποίο και συμβαίνει συνήθως), τότε προφανώς $K^* > 1$ και είναι προς το συμφέρον του προμηθευτή, ο αγοραστής να αυξήσει την ποσότητα παραγγελίας του.
3. Αν $a < \beta$, το οποίο είναι ασυνήθιστο αλλά όχι αδύνατο, προκύπτει $K^* < 1$, δηλαδή ο προμηθευτής σε αυτή την περίπτωση θα ωφεληθεί από μικρότερες και συχνότερες παραγγελίες από τη μεριά του αγοραστή.

2.7 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων για την αύξηση κέρδους του προμηθευτή όταν ο ρυθμός αναπλήρωσης του αποθέματος του προμηθευτή είναι πεπερασμένος και η ποσότητα παραγωγής είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας παραγγελίας του αγοραστή

Ο *Joglekar (1988)* επίσης αναθεωρεί το μοντέλο του Monahan (1984) για την περίπτωση που ο προμηθευτής παράγει ο ίδιος το προϊόν με ρυθμό παραγωγής R. Στο μοντέλο του αποδεικνύει ότι το μοντέλο του Monahan δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση που ο προμηθευτής είναι και παραγωγός του προϊόντος για δυο λόγους:

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

α) Σε αυτή την περίπτωση δεν είναι ρεαλιστικό η συχνότητα παραγγελίας του αγοραστή να ταυτίζεται με τη συχνότητα παραγωγής του προμηθευτή (πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα»), επειδή το κόστος εκκίνησης παραγωγής του προμηθευτή είναι συνήθως αρκετά υψηλό

β) Ακόμα και όταν ακολουθείται πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα», δεν είναι ρεαλιστική η υπόθεση ότι το κόστος διατήρησης αποθέματος του προμηθευτή δεν επηρεάζεται από τη συχνότητα παραγγελίας του αγοραστή (δεν λαμβάνεται υπόψη το κόστος διατήρησης αποθέματος του προμηθευτή)

Αρχικά θεωρείται ότι ο προμηθευτής ακολουθεί πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα». Τότε το κόστος διατήρησης αποθέματος του προμηθευτή ανά χρονική περίοδο θα ισούται με:

$$(1-M)Ph_s\frac{Q}{2}\frac{D}{R} \text{ (βλέπε Banerjee (1986b), παράγραφος 2.6),}$$

όπου M το κέρδος του προμηθευτή από τις πωλήσεις όπως αυτό ορίστηκε στην παράγραφο 2.1.

Είναι προφανές ότι το κόστος διατήρησης αποθέματος εξαρτάται άμεσα από την ποσότητα παραγγελίας του προμηθευτή.

Η συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή θα είναι σε αυτή την περίπτωση:

$$TP_s = DMP - \frac{D}{Q}S_s - (1-M)h_sP\frac{Q}{2}\frac{D}{R}.$$

Όταν ο προμηθευτής προσφέρει έκπτωση d_K (βλέπε Monahan σχέση (2.1.4)), με σκοπό να παρακινήσει τον αγοραστή να αυξήσει την παραγγελία του από Q^* σε KQ^*, η συνάρτηση κέρδους του θα είναι:

$$TP_s' = DMP - d_K D - \frac{D}{KQ}S_s - (1-M)h_sP\frac{KQ}{2}\frac{D}{R} \tag{2.7.1}$$

Μεγιστοποιώντας την παραπάνω σχέση ως προς K προκύπτει:

$$K = \sqrt{\frac{1+{}^{S_s}/_{S_b}}{1+\frac{h_s}{h_b}(1-M)\frac{D}{R}}}. \tag{2.7.2}$$

Για να συμφέρει τον προμηθευτή η προσφορά της ποσοτικής έκπτωσης πρέπει προφανώς να ισχύει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

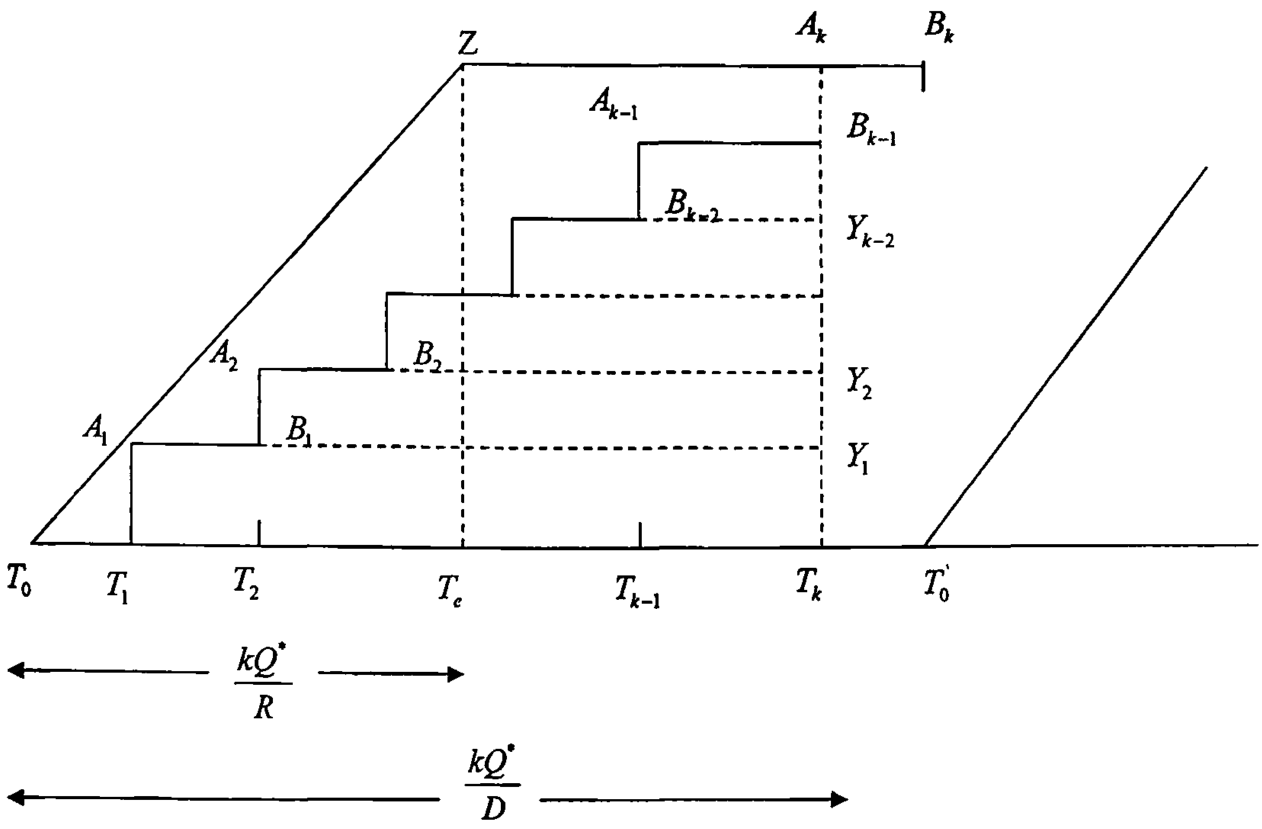
$$TP_s' \leq TP_s$$

από το οποίο προκύπτει ότι η μέγιστη ποσοτική έκπτωση ανά μονάδα προϊόντος που συμφέρει τον προμηθευτή να προσφέρει είναι

$$d_K = \left\{ \frac{S_s}{KQ} - (1-M) h_s P \frac{Q}{2R} \right\} (K-1). \qquad (2.7.3)$$

Από τις σχέσεις (2.7.2) και (2.7.3) δίνεται η βέλτιστη πολιτική έκπτωσης του πρόμηθευτή όταν λαμβάνεται υπόψη και το κόστος διατήρησης αποθέματος.

Έστω τώρα ότι ο προμηθευτής κατασκευάζει kQ, $k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ μονάδες προϊόντος σε κάθε παραγωγική διαδικασία και έστω ότι ξεκινά την παραγωγική διαδικασία τη χρονική στιγμή T_0, έτσι ώστε οι πρώτες Q^* μονάδες προϊόντος να παραχθούν ακριβώς τη στιγμή T_1 που πρέπει να αποσταλούν στον αγοραστή. Οι υπόλοιπες $(k-1)Q^*$ μονάδες θα πραχθούν σε $(k-1)\frac{Q^*}{R}$ χρονικό διάστημα μέχρι τη χρονική στιγμή T_e, που τελειώνει η παραγωγική διαδικασία.



Σχήμα 2.3. Παραγωγή και αποστολή παρτίδων για έναν κύκλο παραγωγής του προμηθευτή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Προφανώς η διάρκεια της παραγωγικής διαδικασίας T_0T_e θα ισούται με $\frac{kQ^*}{R}$ μονάδες χρόνου. Το χωρίο $T_0ZA_kB_k$ του *Σχήματος 2.3* παριστάνει την παραγωγή του προμηθευτή σε ένα κύκλο $T_0T_0^{'}$ και το ύψος T_eZ ισούται με kQ^*. Προφανώς η διάρκεια ενός κύκλου θα ισούται με $\frac{kQ^*}{D}$ μονάδες χρόνου.

Έστω $T_1,T_2,...,T_k$ οι χρονικές στιγμές αποστολής της $1^{ης}$, $2^{ης}$ και k-στης παραγγελίας του αγοραστή αντίστοιχα. Τότε $T_0T_1=\frac{Q^*}{R}$ και $T_1T_2=T_2T_3=...=T_{k-1}T_k=\frac{Q^*}{D}$. Το κλιμακωτό σχήμα $T_0T_1A_1B_1A_2...B_{k-1}A_kB_k$ παριστάνει τις αποστολές του προμηθευτή κατά τη διάρκεια ενός κύκλου. Επομένως το απόθεμα προϊόντος του προμηθευτή ισοδυναμεί με τη διαφορά του χωρίου $T_0ZA_kB_k$ και του κλιμακωτού σχήματος $T_0T_1A_1B_1A_2...B_{k-1}A_kB_k$.

Το εμβαδόν του τριγώνου T_0ZT_e είναι $\frac{1}{2}(kQ^*)\left(\frac{kQ^*}{R}\right)$ και του παραλληλογράμμου $T_eZA_kT_k$ είναι $kQ^*\left((k-1)\left(\frac{Q^*}{D}\right)-\left(\frac{Q^*}{R}\right)\right)$. Το άθροισμα του εμβαδού των παραλληλογράμμων $T_1A_1Y_1T_k$, $B_1A_2Y_2Y_1$, ... , $B_{k-2}A_{k-1}B_{k-1}Y_{k-2}$ είναι

$$Q^*\left((k-1)\left(\frac{Q^*}{D}\right)+(k-2)\left(\frac{Q^*}{D}\right)+...+\left(\frac{Q^*}{D}\right)\right)=\left(\frac{Q^{*2}}{D}\right)\left(\frac{1}{2}k(k-1)\right).$$

Επομένως το απόθεμα του προμηθευτή σε αυτή την περίπτωση, ισούται με

$$\left[\frac{1}{2}(kQ^*)\left(\frac{kQ^*}{R}\right)+kQ^*\left((k-1)\left(\frac{Q^*}{D}\right)-\left(\frac{Q^*}{R}\right)\right)\right]-\left(\frac{Q^{*2}}{D}\right)\left(\frac{1}{2}k(k-1)\right)$$

από το οποίο, αν διαιρέσουμε με τη διάρκεια του κύκλου $\frac{kQ^*}{D}$ και μετά από υπολογισμούς, προκύπτει $\frac{Q}{2}\left\{(k-1)-(k-2)\frac{D}{R}\right\}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το μέσο απόθεμα του προμηθευτή στην περίπτωση που παράγει ο ίδιος το προϊόν με πεπερασμένο ρυθμό παραγωγής R, θα ισούται με:

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{Q}{2}\left\{(k-1)-(k-2)\frac{D}{R}\right\} \tag{2.7.4}$$

Τότε η συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή είναι

$$TP_s^* = DMP - \frac{D}{kQ}S_s - (1-M)h_sP\frac{Q}{2}\left\{(k-1)-(k-2)\frac{D}{R}\right\} \tag{2.7.5}$$

το βέλτιστο k θα είναι αυτό που ελαχιστοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\frac{D}{kQ}S_s + (1-M)h_sP\frac{Q}{2}\left\{(k-1)-(k-2)\frac{D}{R}\right\}$$

με αντικατάσταση της EOQ, ($Q^* = \sqrt{\frac{2DS_b}{h_bP}}$), έχουμε

$$k^* = \sqrt{\frac{h_b}{h_s}\frac{S_s}{S_b}\frac{1}{(1-M)}\frac{R}{(R-D)}}. \tag{2.7.6}$$

Αν $h_b = h_s$ και το S_s είναι αρκετά μεγαλύτερο από το S_b, το k^* θα είναι πιθανότατα μεγαλύτερο του 2, αφού εξ' ορισμού τα $\frac{1}{(1-M)}$ και $\frac{R}{(R-D)}$ είναι μεγαλύτερα της μονάδας. Το k^* θα είναι ιδιαίτερα μεγάλο όταν ο ρυθμός παραγωγής R είναι κοντά στο ρυθμό ζήτησης του αγοραστή

Σημειώνεται ότι η βέλτιστη πολιτική παραγωγής υπερέχει μιας βέλτιστης πολιτικής ποσοτικής έκπτωσης, ειδικά στην περίπτωση όπου το κόστος εκκίνησης της παραγωγικής διαδικασίας του προμηθευτή είναι αρκετά μεγαλύτερο από το κόστος παραγγελίας του αγοραστή.

2.8 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων για την αύξηση του κέρδους του προμηθευτή όταν η ζήτηση του αγοραστή είναι ελαστική ως προς την τιμή

Στα μοντέλα που παρουσιάστηκαν έως τώρα επικρατούσε η υπόθεση ότι η ζήτηση του αγοραστή είναι ανεξάρτητη από την τιμή πώλησης του προϊόντος. Στην πραγματικότητα όμως, μπορεί να παρατηρηθεί, ότι η ζήτηση συνήθως αυξάνεται καθώς η τιμή πώλησης του προϊόντος μειώνεται.

Οι *Weng & Wong (1993)* προτείνουν ένα μοντέλο ποσοτικής έκπτωσης, όπου η ζήτηση από τη μεριά του αγοραστή δεν είναι σταθερή, αλλά εξαρτάται από την τιμή του προϊόντος. Τα μοντέλα με σταθερή ζήτηση μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική περίπτωση του συγκεκριμένου μοντέλου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έστω ότι η συνάρτηση της, ελαστικής ως προς την τιμή, ζήτησης είναι η εξής:

$$D = D_0 P^{-n} \quad (D_0 > 0, n \geq 1) \tag{2.8.1}$$

όπου

D_0 η σταθερά κλίμακας και

n η σταθερά ελαστικότητας της ζήτησης.

Η συνάρτηση (2.8.1) προφανώς είναι φθίνουσα ως προς P και άρα η ζήτηση του αγοραστή αυξάνεται καθώς η τιμή του προϊόντος μειώνεται.

Αν $(1-d)$ το ποσοστό έκπτωσης στην τιμή του προϊόντος, που προσφέρεται από τον προμηθευτή, τότε η ζήτηση του αγοραστή για τη μειωμένη τιμή Pd θα ισούται, σύμφωνα με την παραπάνω συνάρτηση, με

$$D_D = D_0 (Pd)^{-n} = Dd^{-n},$$

Όταν δεν υπάρχει προσφορά ποσοτικής έκπτωσης, ο αγοραστής κατά τα γνωστά θα παραγγείλει την EOQ Q^* και θα έχει ελάχιστο κόστος

$$TC_b(Q^*) = PD + \sqrt{2DS_b h_b P}.$$

Στην περίπτωση της ελαστικής ως προς την τιμή ζήτησης, ο προμηθευτής προσφέρει ποσοτική έκπτωση στον αγοραστή με σκοπό όχι μόνο να τον παρακινήσει να αυξήσει το μέγεθος της παραγγελίας του σε έστω Q, $Q > Q^*$, αλλά και για να οδηγήσει σε αύξηση της ζήτησης του αυξάνοντας με αυτό τον τρόπο τα έσοδά του.

Στη συνέχεια δίνονται οι περιορισμοί που θέτει ο αγοραστής για να δεχτεί την πολιτική έκπτωσης του προμηθευτή. Διακρίνονται δυο περιπτώσεις:

1. Στην πρώτη περίπτωση η ζήτηση είναι ελαστική ως προς την τιμή και ο περιορισμός του αγοραστή είναι το ανά μονάδα κέρδος του να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από αυτό που θα είχε χωρίς έκπτωση
2. Στην δεύτερη περίπτωση η ζήτηση είναι σταθερή και ο περιορισμός του αγοραστή είναι το συνολικό του κόστος με την έκπτωση να είναι μικρότερο ή ίσο από αυτό που θα είχε χωρίς την έκπτωση

➤ ***Περιορισμός αύξησης του ανά μονάδα κέρδους του αγοραστή όταν η ζήτηση είναι ελαστική ως προς την τιμή***

Το συνολικό κόστος του αγοραστή, υπό την πολιτική έκπτωσης του προμηθευτή, ισούται με

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$TC_b(Q) = (Pd)D_D + S_b\frac{D_D}{Q} + h_bPd\frac{Q}{2}$$

$$= (Pd)Dd^{-n} + S_b\frac{Dd^{-n}}{Q} + h_bPd\frac{Q}{2} \qquad (2.8.2)$$

Το κέρδος του αγοραστή ανά μονάδα προϊόντος χωρίς και με την έκπτωση είναι αντίστοιχα:

$$P_b - \frac{TC_b(Q^*)}{D}$$

και

$$P_{bD} - \frac{TC_b(Q)}{D_D},$$

όπου P_b και P_{bD} η τιμή πώλησης του αγοραστή για ζήτηση D και D_D αντίστοιχα.

Ο αγοραστής, για να δεχτεί την έκπτωση του προμηθευτή και να προβεί σε μεγαλύτερη ποσότητα παραγγελίας, θέτει τον περιορισμό το ανά μονάδα προϊόντος κέρδος του με την έκπτωση να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από αυτό που θα είχε χωρίς την έκπτωση:

$$P_{bD} - \frac{TC_b(Q)}{D_D} = \beta\left(P_b - \frac{TC_b(Q^*)}{D}\right), \quad \beta \geq 1 . \qquad (2.8.3)$$

Θεωρώντας ότι η τιμή πώλησης του αγοραστή είναι σταθερή και ανεξάρτητη της ζήτησης, έστω $P_b = P_{bD} = P_b'$, τότε η (2.8.3) γράφεται

$$\left[\beta TC_b(Q^*) - (\beta - 1)P_b'D\right]d^{-n} = TC_b(Q).$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (2.8.2) στην παραπάνω εξίσωση και μετά από υπολογισμούς προκύπτει:

$$Ph_bd^{n+1}Q^2 + 2S_bD + 2\left\{\left[Pd + (\beta-1)P_b'\right]D - \beta TC(Q^*)\right\}Q = 0 \qquad (2.8.4)$$

➢ ***Περιορισμός μείωσης του συνολικού κόστους αγοραστή όταν η ζήτηση είναι σταθερή***

Έστω ότι η ζήτηση είναι σταθερή και ανεξάρτητη της τιμής του προϊόντος ($n = 0$). Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση κόστους του αγοραστή, υπό την πολιτική έκπτωσης του προμηθευτή, είναι:

$$TC_b(Q) = (Pd)D + S_b\frac{D}{Q} + h_bPd\frac{Q}{2}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ο προμηθευτής προσπαθεί να παρακινήσει τον αγοραστή να αυξήσει την ποσότητα παραγγελίας του σε Q μονάδες προϊόντος, προσφέροντας ποσοτική έκπτωση, με σκοπό να μεγιστοποιήσει το συνολικό του κέρδος. Ο αγοραστής, από τη μεριά του, θα δεχτεί αυτή την προσφορά με την προϋπόθεση το ετήσιο συνολικό κόστος του να είναι μικρότερο από αυτό που θα είχε χωρίς την έκπτωση.

Ο παραπάνω περιορισμός του αγοραστή μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$aTC_b(Q^*) = TC_b(Q),\; 0 < a \le 1 \tag{2.8.5}$$

ή

$$aTC_b(Q^*) = (Pd)D + S_b\frac{D}{Q} + h_b Pd\frac{Q}{2}$$

ή

$$d = \frac{2\left(aTC_b(Q^*)Q - DS_b\right)}{PQ(h_b Q + 2D)}. \tag{2.8.6}$$

➢ ***Μεγιστοποίηση του κέρδους του προμηθευτή υπό τους περιορισμούς του αγοραστή***

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης κέρδους του προμηθευτή, διακρίνονται δύο περιπτώσεις όσον αφορά τον τρόπο απόκτησης του προϊόντος από τον προμηθευτή.

Στην πρώτη περίπτωση, ο προμηθευτής αγοράζει από κάποια εξωτερική πηγή το προϊόν. Τότε, όπως απέδειξαν οι Rosenblatt & Lee (1985) (βλέπε ενότητα 2.2), η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας για τον προμηθευτή, θα είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή, kQ, $k \in \mathbb{Z}^+$ και το μέσο απόθεμα σε αυτή την περίπτωση θα ισούται με $\frac{(k-1)Q}{2}$.

Στην δεύτερη περίπτωση, ο προμηθευτής παράγει ο ίδιος το προϊόν με ρυθμό παραγωγής R και η βέλτιστη ποσότητα παραγωγής ανά παρτίδα είναι kQ, $k \in \mathbb{Z}^+$. Τότε το μέσο απόθεμα του προμηθευτή θα ισούται με (βλέπε ενότητα 2.7 - Joglekar (1988))

$$\left[(k-1) - (k-2)^{D_D}\!\big/\!_R\right]\frac{Q}{2}.$$

Η συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή ισούται με το συνολικά έσοδα από τις πωλήσεις μείον το κόστος αγοράς ή παραγωγής του προϊόντος, το κόστος επεξεργασίας της παραγγελίας του αγοραστή, το κόστος παραγγελίας ή εκκίνησης παραγωγής και το κόστος διατήρησης αποθέματος:

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$TP_s(d,Q,k) = D_D(Pd-c) - S_p\frac{D_D}{Q} - S_s\frac{D_D}{kQ} - Ph_s'\frac{mQ}{2} \tag{2.8.7}$$

όπου

$h_s' = \frac{h_s P}{c}$ = το κόστος διατήρησης αποθέματος του προμηθευτή

S_p = το κόστος επεξεργασίας της παραγγελίας του αγοραστή και

$m = k-1$, όταν το προϊόν προμηθεύεται από κάποιον τρίτο ή

$m = \left[(k-1)-(k-2)^{D_D}/_{R}\right]$, όταν ο προμηθευτής παράγει ο ίδιος το προϊόν.

Το πρόβλημα λοιπόν, έγκειται στον υπολογισμό των τιμών των d, Q και k οι οποίες μεγιστοποιούν το κέρδος του προμηθευτή υπό τον περιορισμό των σχέσεων (2.8.4) ή (2.8.6).

Έστω ότι λαμβάνουμε υπόψη το δεύτερο περιορισμό (για σταθερή ζήτηση), τότε το πρόβλημα μας γράφεται ως εξής:

$$\max\ TP_s(d,Q,k) = D(Pd-c) - S_p\frac{D}{Q} - S_s\frac{D}{kQ} - Ph_s'\frac{mQ}{2}$$

$$\text{s.t.}\quad d = \frac{2\left(aTC_b(Q^*)Q - DS_b\right)}{PQ(h_bQ+2D)}$$

$$d \le 1$$

Προφανώς για να είναι $d \le 1$, δηλαδή να υπάρχει προσφορά ποσοτικής έκπτωσης από τον προμηθευτή, θα πρέπει $Q \ge Q^*$.

Με αντικατάσταση του d στη συνάρτηση κέρδους προκύπτει:

$$\max_{Q\ge Q^*}\ TP_s(Q,k) = D\left(\frac{2\left(aTC_b(Q^*)Q - DS_b\right)}{Q(h_bQ+2D)} - c\right) - S_p\frac{D}{Q} - S_s\frac{D}{kQ} - Ph_s'\frac{mQ}{2}.$$

Αγνοώντας τον περιορισμό $Q \ge Q^*$ και παραγωγίζοντας, για δοθέν k, την παραπάνω σχέση ως προς Q προκύπτει:

$$\frac{dTP_s}{dQ} = -\frac{2aTC_b(Q^*)Dh_b}{(h_bQ+2D)^2} + \frac{4D^2S_b(h_bQ+D)}{\left[Q(h_bQ+2D)\right]^2} + S_p\frac{D}{Q^2} + S_s\frac{D}{kQ^2} - Ph_s'\frac{m}{2} \tag{2.8.8}$$

Μετά από απλοποιήσεις και θέτοντας ίσο με μηδέν προκύπτει:

$$Q^4 + BQ^3 + CQ^2 - EQ - \frac{BE}{4} = 0,\quad m > 0. \tag{2.8.9}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Όπου:

$$B=\frac{4D}{h_b},$$

$$C=\frac{2D\left[2mPh_sD+2aTC_b\left(Q^*\right)h_b-h_b^2\left(S_p+S_s/k\right)\right]}{mPh_sh_b^2},$$

$$E=\frac{8D^2\left(S_b+S_p+S_s/k\right)}{mPh_sh_b}.$$

Η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (2.8.9) είναι:

$$Q^{**}=\frac{1}{4}\left\{\frac{2(E+BG/2)}{\sqrt{BE+G^2}}-B+\sqrt{\left[\frac{2(E+BG/2)}{\sqrt{BE+G^2}}-B\right]^2+8\left(\sqrt{BE+G^2}-G\right)}\right\}, \quad (2.8.10)$$

όπου

$$G=\frac{C}{3}+\left(\frac{C}{3}\right)^2Y^{-1}+Y,$$

$$X=\frac{E\left[B^3-4(E+CB)\right]}{8},$$

$$Y=\left\{\left(\frac{C}{3}\right)^3+\sqrt{X[X-2]\left(\frac{C}{3}\right)^3}-X\right\}^{1/3}.$$

Η σχέση $(2.8.8)\to\infty$ όταν $Q\to 0$ και $(2.8.8)\to -Ph_s\frac{m}{2}$ όταν $Q\to\infty$. Επομένως η (2.8.8) θα είναι θετική για $0<Q<Q^{**}$ και αρνητική για $Q^{**}<Q<+\infty$. Έτσι αποδείχτηκε ότι η ποσότητα Q^{**} (σχέση (2.8.10) μεγιστοποιεί το κέρδος του προμηθευτή.

Όταν $m=0$ (ακολουθείται πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα») η σχέση (2.8.9) ισούται με:

$$h_b\left(h_b\left(S_p+S_s\right)-2aTC_b\left(Q^*\right)\right)Q^2+4Dh_b\left(S_b+S_p+S_s\right)Q+4D^2\left(S_b+S_p+S_s\right)=0.$$

Η παραπάνω εξίσωση θα έχει μια θετική ρίζα μόνο εάν $h_b\left(S_p+S_s\right)-2aTC_b\left(Q^*\right)<0$. Μια αναγκαία συνθήκη λοιπόν για να υπάρχει προσφορά ποσοτικής έκπτωσης από τον προμηθευτή όταν ακολουθείται πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα» ($m=0$) είναι:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$1-a<\left(1-\frac{h_b\left(S_p+S_s\right)}{2TC_b\left(Q^*\right)}\right). \tag{2.8.11}$$

Τότε η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας που μεγιστοποιεί το κέρδος του προμηθευτή είναι:

$$Q^{**}=2D\frac{\sqrt{\left(S_b+S_p+S_s\right)\left[S_b+2aP\left(Q^*+D/h_b\right)\right]}+\left(S_b+S_p+S_s\right)}{2aP\left(h_bQ^*+D\right)-h_b\left(S_p+S_s\right)} \tag{2.8.12}$$

Η σχέση (2.8.8) για $m=0$ γίνεται:

$$\frac{dTP_s}{dQ}=-\frac{2aTC_b\left(Q^*\right)Dh_b}{\left(h_bQ+2D\right)^2}+\frac{4D^2S_b\left(h_bQ+D\right)}{\left[Q\left(h_bQ+2D\right)\right]^2}+\left(S_p+S_s\right)\frac{D}{Q^2}. \tag{2.8.13}$$

Όταν ισχύει ο περιορισμός (2.8.11), η σχέση (2.8.13)$\to\infty$ όταν $Q\to 0$ και όταν $Q\to\infty$ η (2.8.13) τείνει αρνητικά στο 0. Επομένως η (2.8.13) θα είναι θετική για $0<Q<Q^{**}$ και αρνητική για $Q^{**}<Q<+\infty$. Άρα αποδείχτηκε ότι και η ποσότητα που δίνεται από τη σχέση (2.8.12) μεγιστοποιεί το κέρδος του προμηθευτή όταν $m=0$.

Τελικά προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

Για σταθερή ζήτηση, ο προμηθευτής προσφέρει ποσοτική έκπτωση $(1-d^*)$ στον αγοραστή όταν το μέγεθος της παραγγελίας του δεύτερου είναι Q^{***}. Όπου:

$$Q^{***}=\begin{cases} Q^{**}, & \text{αν } Q^{**}>Q^* \\ Q^*, & \text{αν } Q^{**}\le Q^* \end{cases} \quad \text{και} \quad d^*=\frac{2\left(aTC_b\left(Q^*\right)Q^{***}-DS_b\right)}{PQ^{***}\left(h_bQ^{***}+2D\right)}.$$

Η ποσότητα Q^{**} δίνεται από τις σχέσεις (2.8.10) και (2.8.12), όταν $m>0$ και $m=0$ αντίστοιχα.

Η ποσότητα Q^{***} μεγιστοποιεί το κέρδος του προμηθευτή και ο αγοραστής έχει κέρδος $(1-a)100\%$, $0<a\le 1$, από την ποσοτική έκπτωση.

Σημειώνεται ότι το αποτέλεσμα του Monahan (1984) (βλέπε παράγραφος (2.1)) είναι μια ειδική περίπτωση της σχέσης (2.8.12).

Στην περίπτωση που ο ρυθμός παραγωγής του προμηθευτή είναι πολύ μεγαλύτερος από τη ζήτηση του αγοραστή, δηλαδή $\frac{D}{R}\to 0$, η βέλτιστή πολιτική του προμηθευτή

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και για την περίπτωση που προμηθεύεται το προϊόν από εξωτερική πηγή και για την περίπτωση που το παράγει ο ίδιος θα είναι η ίδια ($m \approx k-1$).

Με βάση τα παραπάνω και θεωρώντας ότι:

1. Η συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή είναι (σχέση (2.8.7)) μια δευτεροβάθμια συνάρτηση του k.
2. Όταν η ζήτηση είναι ελαστική ως προς την τιμή, η ποσότητα παραγγελίας για την οποία ο προμηθευτής είναι διατεθειμένος να προσφέρει ποσοτική έκπτωση, έχει κάτω φράγμα την EOQ Q^*. Ή ισοδύναμα, το κάτω φράγμα για το ποσοστό έκπτωσης $(1-d)$ του προμηθευτή, είναι $(1-d) \geq 0$

προκύπτουν οι εξής αλγόριθμοι για τον καθορισμό της βέλτιστης πολιτικής του προμηθευτή (d^*, Q^{***}, k^*), για σταθερή και ελαστική ζήτηση.

Αλγόριθμος 1 (Σταθερή ζήτηση):

1. Ξεκινάμε με $k=0$.
2. Έστω $k=k+1$.
3. Καθορίζουμε τα $Q(k)$ και d_k με βάση τις σχέσεις (2.8.10), (2.8.12) και (2.8.6).
4. Αν $Q(k) \leq Q^*$, τότε $Q(k)=Q^*$ και $d_k=1$.
5. Αν $k \geq 2$, μετάβαση στο βήμα (6), αλλιώς στο βήμα (2).
6. Αν $TP_s(d_{k-1}, Q(k-1), k-1) < TP_s(d_k, Q(k), k)$, μετάβαση στο βήμα (2), αλλιώς σταματάμε. Τότε $Q^{***} = Q(k-1), d^* = d_{k-1}, k^* = k-1$.

Αλγόριθμος 2 (Ελαστική ως προς την τιμή ζήτηση)

1. Ξεκινάμε με $k=0$, έστω $(1-d_{low})$ το μεγαλύτερο δυνατόν ποσοστό έκπτωσης.
2. Έστω $k=k+1$, $Q(k)=Q^*$. Καθορίζουμε το d_k με χρήση της σχέσης (2.8.4), $TP_s^*(d_k^*, Q^*(k), k)$.
3. Έστω $d_k = d_k - \Delta$. Αν $d_k < d_{low}$, μετάβαση στο βήμα (5) αλλιώς καθορίζουμε την $Q(k)$ με χρήση της σχέσης (2.8.4).
4. Αν $TP_s(d_k, Q(k), k) < TP_s^*(d_k^*, Q^*(k), k)$, μετάβαση στο βήμα (3).
5. Αν $k \geq 2$, μετάβαση στο βήμα (6), αλλιώς στο βήμα (2).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6. Αν $TP_s^*\left(d_{k-1}^*, Q^*(k-1), k-1\right) < TP_s^*\left(d_k^*, Q^*(k), k\right)$ μετάβαση στο βήμα (2), αλλιώς σταματάμε. Τότε $Q^{***} = Q^*(k-1), d^* = d_{\kappa-1}^*, k^* = k-1$.

Στη συνέχεια και ως εφαρμογή των παραπάνω δίνεται ένα αριθμητικό παράδειγμα.

Παράδειγμα

Έστω $P=\$20$, $c=\$15$, $h_b=h_s'=0.4$, $S_p=\$300$, $S_s=\$600$, $R=20{,}000$ (όταν ο προμηθευτής είναι και παραγωγός), $S_b=\$100$.

1. **Σταθερή ζήτηση:**

Η ζήτηση του αγοραστή ανά χρονική περίοδο είναι 10,000 μονάδες και η EOQ του αγοραστή, όταν δεν υπάρχει προσφορά ποσοτικής έκπτωσης, είναι 500 μονάδες.

2. Ελαστική προς την τιμή ζήτηση:

Η φθίνουσα ως προς την τιμή ζήτηση του αγοραστή σε αυτή την περίπτωση είναι $D=8\left(10^7\right)(Pd)^{-3}$. Χωρίς προσφορά έκπτωσης, η ζήτηση του αγοραστή ανά χρονική περίοδο είναι 10,000 μονάδες και η EOQ του αγοραστή 500 μονάδες. Έστω ότι η τιμή πώλησης του αγοραστή ισούται με $P_b'=\$25$.

	ΣΤΑΘΕΡΗ ΖΗΤΗΣΗ $a=1$		ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΤΙΜΗ ΖΗΤΗΣΗ $\beta=1$	
	Προμηθευτής	Παραγωγός	Προμηθευτής	Παραγωγός
Βέλτιστη πολιτική προμηθευτή $\left(d^*, Q^{***}, k^*\right)$	(98.51%,1616,1)	(99.5%,1005,2)	(96.69%,2940,1)	(99.2%,1237,2)
Βελτίωση του κέρδους του προμηθευτή	12.0%	5.3%	20.5%	7.6%

Πίνακας 2.1. Βέλτιστες πολιτικές προμηθευτή-παραγωγού όταν $a=1$ και $\beta=1$

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στον *Πίνακα 2.1* δίνονται οι βέλτιστες πολιτικές του προμηθευτή για την περίπτωση που ο αγοραστής δέχεται την προσφορά έκπτωσης του προμηθευτή όταν το κόστος του ή το ανά μονάδα κέρδος του είναι ίσο με αυτό που είχε αρχικά, δηλαδή $a=1$ και $\beta=1$.

Στον *Πίνακα 2.2* θεωρείται ότι ο αγοραστής δέχεται την προσφορά έκπτωσης του προμηθευτή όταν το συνολικό κόστος του μειωθεί κατά 99% ($a=0.99$) όταν η ζήτηση είναι σταθερή ή όταν το ανά μονάδα κέρδος του αυξηθεί κατά 101% ($\beta=1.01$) όταν η ζήτηση είναι ελαστική ως προς την τιμή.

Τέλος, στον *Πίνακα 2.3* φαίνεται ότι το κέρδος του προμηθευτή από την προσφορά ποσοτικής έκπτωσης αυξάνεται όσο μεγαλώνει η σταθερά της ελαστικότητας της ζήτησης ($\beta=1$).

	ΣΤΑΘΕΡΗ ΖΗΤΗΣΗ $a=0.99$		ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΤΙΜΗ ΖΗΤΗΣΗ $\beta=1.01$	
	Προμηθευτής	Παραγωγός	Προμηθευτής	Παραγωγός
Βέλτιστη πολιτική προμηθευτή (d^*,Q^{***},k^*)	(97.49%, 1633,1)	(98.49%, 1011,2)	(96.52%, 2926,1)	(98.99%, 1237,2)
Βελτίωση του κέρδους του προμηθευτή	6.7 %	0.1 %	20.1 %	7.2 %

Πίνακας 2.2 Βέλτιστες πολιτικές προμηθευτή-παραγωγού όταν $a=0.99$ και $\beta=1.01$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΣΤΑΘΕΡΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ	ΠΡΟΜΗΘΕΥΤΗΣ		ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ	
	Βέλτιστη πολιτική (d^*,Q^{***},k^*)	Βελτίωση του κέρδους του προμηθευτή	Βέλτιστη πολιτική $(d^*;Q^{***},k^*)$	Βελτίωση του κέρδους του προμηθευτή
$n=1$	(98.16%,1853,1)	14.2%	(98.40%,1708,1)	4.3%
$n=2$	(97.62%,2234,1)	16.9%	(99.33%,1138,2)	6.7%
$n=3$	(96.69%,2940,1)	20.5%	(99.20%,1237,2)	7.6%
$n=4$	(94.95%,4486,1)	26.0%	(98.54%,1704,1)	9.9%

Πίνακας 2.3. Βέλτιστες πολιτικές προμηθευτή-παραγωγού για διάφορες τιμές της σταθεράς ελαστικότητας της ζήτησης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3. ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΥΠΟ ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΡΟΜΗΘΕΥΤΗ – ΑΓΟΡΑΣΤΗ: ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΕΚΠΤΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Η πολιτική ποσοτικών εκπτώσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως μηχανισμός συντονισμού με σκοπό την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους του συστήματος. Η έννοια της από κοινού οικονομικής ποσότητας παραγγελίας (Joint Economic Lot Size - JELS), δηλαδή της ποσότητας παραγγελίας που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση του από κοινού κόστους του αγοραστή και προμηθευτή εισήχθη από τον Goyal το 1977.

Σε αυτό το κεφάλαιο στόχος των μοντέλων που θα μελετηθούν είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους προμηθευτή - αγοραστή όταν ο πρώτος προσφέρει ποσοτικές εκπτώσεις και ο καταμερισμός των κερδών που προκύπτουν από τη υιοθέτηση αυτής της πολιτικής.

3.1 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων για την αύξηση του συνολικού κέρδους του συστήματος όταν το κόστος διατήρησης αποθέματος του αγοραστή είναι ανεξάρτητο της τιμής του προϊόντος και χρησιμοποιείται διαφορετική μορφή συνάρτησης κόστους του προμηθευτή

Στο μοντέλο των *Lal & Staelin (1984)* μελετάται η περίπτωση όπου ο προμηθευτής προσπαθεί να παρακινήσει τον αγοραστή να υιοθετήσει την ποσότητα παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος του συστήματος προσφέροντας του κάποια πολιτική ποσοτικής έκπτωσης. Το κόστος διατήρησης αποθέματος είναι ανεξάρτητο της τιμής του προϊόντος και υπάρχει μια διαφοροποίηση στη συνάρτηση κόστους του προμηθευτή σε σχέση με τα μοντέλα που μελετήθηκαν έως τώρα η οποία συνίσταται στην υπόθεση της εξαίρεσης του κόστους δέσμευσης κεφαλαίου του αποθέματος που στέλνεται στον αγοραστή.

Το λειτουργικό κόστος του αγοραστή και του προμηθευτή είναι αντίστοιχα:

Λειτουργικό κόστος αγοραστή για ποσότητα παραγγελίας Q:

$$TC_b^{'}(Q) = S_b \frac{D}{Q} + h_b^{'} \frac{Q}{2} \qquad (3.1.1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Λειτουργικό κόστος προμηθευτή για ποσότητα παραγγελίας Q: (κόστος επεξεργασίας της παραγγελίας του αγοραστή) – (μείωση κόστους δεσμευμένου κεφαλαίου (απόθεμα) από την αγορά των Q μονάδων προϊόντος από τον αγοραστή):

$$TC_s'(Q) = S_p \frac{D}{Q} - h_s' \frac{Q}{2} \tag{3.1.2}$$

Συνολικό λειτουργικό κόστος συστήματος:

$$JTC'(Q) = TC_b'(Q) + TC_s'(Q) = (S_b + S_p)\frac{D}{Q} + (h_b' - h_s')\frac{Q}{2}$$

Η EOQ του αγοραστή είναι κατά τα γνωστά η $Q^* = \sqrt{\frac{2DS_b}{h_b'}}$, ενώ η ποσότητα παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το συνολικό λειτουργικό κόστος είναι η

$$Q^{**} = \sqrt{\frac{2(S_b + S_p)D}{(h_b' - h_s')}}.$$

Προφανώς πρέπει $h_b' > h_s'$, το οποίο θεωρείται ότι συνήθως ισχύει. Τότε $Q^{**} > Q^*$ και $JTC'(Q^{**}) \le JTC'(Q^*)$ (αφού η συνάρτηση $JTC'(Q)$ είναι κυρτή και ελαχιστοποιείται για Q^{**}).

Συνεπάγεται ότι $TC_b'(Q^{**}) - TC_b'(Q^*) \le TC_s'(Q^*) - TC_s'(Q^{**})$. Επομένως, η μείωση στο κόστος του προμηθευτή, όταν η ποσότητας παραγγελίας αυξηθεί από Q^* σε Q^{**}, είναι μεγαλύτερη σε σχέση με την αύξηση που προκαλείται στο κόστος του αγοραστή. Αυτή η διαφορά δίνει τη δυνατότητα στον προμηθευτή να παρακινήσει τον αγοραστή να μεταβεί σε ποσότητα παραγγελίας Q^{**} μεταφέροντας του κάποια από τα επιπλέον κέρδη.

Για την κατανομή των κερδών από την νέα πολιτική διακρίνονται δυο ακραίες περιπτώσεις ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του συστήματος:

1) Στην πρώτη περίπτωση τα δυο μέλη του συστήματος (προμηθευτής-αγοραστής) αποφασίζουν από κοινού να μεταβούν στην ποσότητα Q^{**}, η οποία ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος του συστήματος, κατανέμοντας τα κέρδη που προκύπτουν από την πολιτική αυτή. Η κατανομή των κερδών γίνεται ανάλογα με τη δύναμη διαπραγμάτευσης του κάθε μέλους.

2) Στη δεύτερη περίπτωση ο προμηθευτής αποστέλλει στον αγοραστή έναν κατάλογο τιμών ανάλογο με την ποσότητα παραγγελίας του δεύτερου και ο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αγοραστής με τη σειρά του αποφασίζει και ανακοινώνει στον προμηθευτή σε ποια ποσότητα επιθυμεί να παραγγέλνει. Είναι φανερό ότι σε αυτή την περίπτωση ο προμηθευτής έχει την κυρίαρχη θέση στη διαπραγμάτευση αφού μπορεί μαντεύοντας την αντίδραση του αγοραστή να καθορίσει την τιμολογιακή πολιτική (πολιτική έκπτωσης) που μεγιστοποιεί το κέρδος του.

Γενικά φαίνεται ότι η δεύτερη περίπτωση αντιπροσωπεύει πιο συχνά την πραγματικότητα και είναι αυτή που θα μελετηθεί στο μοντέλο αυτό.

Έστω ότι ο προμηθευτής ακολουθεί πολιτική εκπτώσεων επί της ολικής ποσότητας παραγγελίας με τιμή κλιμακούμενη με το ύψος της παραγγελίας (all units quantity discount): Για παραγγελία $Q \le Q_0$ χρεώνει τιμή P_0 ανά μονάδα προϊόντος, για ποσότητες $Q_0 < Q \le Q_1$ τιμή P_1, για $Q_1 < Q \le Q_2$ τιμή P_2 κ.ο.κ μέχρι τιμή P_m, όπου $P_0 > P_1 > P_2 > \ldots > P_m$.

Έστω ότι $p(Q)$ η τιμή του προϊόντος ως συνάρτηση της ποσότητα παραγγελίας με βάση την παραπάνω πολιτική. Έστω επιπλέον ότι για τη συνάρτηση αυτή ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

1. Υπάρχουν οι $p'(Q)$ και $p''(Q)$
2. Δοθέντος του $p(Q)$ ο αγοραστής θα αποφασίσει ότι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας του θα είναι η Q^{**}
3. Ισχύει $TC_s(Q^{**}) < TC_s'(Q^{*})$, όπου $TC_s(Q) = (P_0 - p(Q))D + TC_s'(Q)$, $Q > Q^{*}$ το αυξημένο κόστος του προμηθευτή λόγω της έκπτωσης.

Μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις είναι η εξής:

$$p = P_0 \exp\left[-a\left(Q - Q^{*}\right)\right], \text{ όταν } Q \ge Q^{*} \qquad (3.1.3)$$

$$p = P_0 \qquad , \text{ όταν } Q \le Q^{*}$$

όπου $a > 0$ μια σταθερά η οποία αποτελεί τη μεταβλητή απόφασης του προμηθευτή. Το συνολικό κόστος του αγοραστή σύμφωνα με αυτή την πολιτική εκπτώσεων θα είναι:

$$TC_b(Q) = Dp + S_b \frac{D}{Q} + h_b' \frac{Q}{2} = DP_0 \exp\left[-a\left(Q - Q^{*}\right)\right] + S_b \frac{D}{Q} + h_b' \frac{Q}{2}, \text{ για } Q \ge Q^{*}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Και η EOQ του θα είναι η λύση της παρακάτω εξίσωσης:

$$\frac{dTC_b(Q)}{dQ} = -aDP_0 \exp\left[-a\left(Q-Q^*\right)\right] - \frac{DS_b}{Q^2} + \frac{h_b'}{2} = 0 .$$

Ο προμηθευτής θέλει να παρακινήσει τον αγοραστή να μεταβεί στην ποσότητα παραγγελίας Q^{**}, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, επομένως θα επιλέξει σταθερά a^* η οποία θα ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση μόνο όταν $Q = Q^{**}$:

$$a^* DP_0 \exp\left[-a^*\left(Q^{**}-Q^*\right)\right] = \frac{h_b'}{2} - \frac{DS_b}{Q^{**2}} . \qquad (3.1.4)$$

Έστω $K_1 = Q^{**} - Q^* > 0$ και $K_2 = \frac{1}{P_0 D}\left[\frac{h_b'}{2} - \frac{DS_b}{Q^{**2}}\right] > 0$, τότε η εξίσωση (3.1.4) γράφεται ως εξής:

$$K_2 \exp\left(K_1 a^*\right) - a^* = 0 . \qquad (3.1.5)$$

Για τη συνάρτηση $y = K_2 \exp\left(K_1 a^*\right) - a^*$ ισχύουν τα παρακάτω:

$y' = K_1 K_2 \exp\left(K_1 a^*\right) - 1$,

$y' = 0 \Leftrightarrow a^* = \frac{1}{K_1}\log\frac{1}{K_1 K_2}$,

$y'' = K_1^2 K_2 \exp\left(K_1 a^*\right) > 0,\ \forall a^*$, ($y$ κυρτή).

Ανάλογα με τις τιμές των K_1 και K_2 η εξίσωση $y = 0$ μπορεί να έχει μια, δυο ή και καμία ρίζα.

Για $a^* = \frac{1}{K_1}\log\frac{1}{K_1 K_2}$, ($y'\left(a^*\right) = 0$) είναι $y^* = \frac{1}{K_1}\left(1 - \log\frac{1}{K_1 K_2}\right)$.

Αν $\frac{1}{K_1 K_2} < e$, τότε $y^* > 0$ και η εξίσωση (3.1.5) δεν έχει καμία ρίζα,

αν $\frac{1}{K_1 K_2} = e$, τότε $y^* = 0$ και η εξίσωση (3.1.5) έχει μοναδική ρίζα την $a^* = \frac{1}{K_1}$

και τέλος όταν $\frac{1}{K_1 K_2} > e$ είναι $y^* < 0$ και η εξίσωση (3.1.5) θα έχει δύο ρίζες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επομένως η εξίσωση (3.1.5) έχει λύση όταν $K_1K_2 \leq \frac{1}{e}$, ή αλλιώς $\frac{1}{K_1K_2} \geq 2.7813$.

Εξ' ορισμού είναι $K_1K_2 = \left(Q^{**} - Q^{*}\right)\frac{1}{P_0D}\left[\frac{h_b'}{2} - \frac{DS_b}{Q^{**2}}\right]$.

Έστω ότι $Q^{**} \leq 2.747Q^{*}$, $\frac{h_b'}{P_0} \leq 0.33$ και $D \geq 2Q^{*}$, τότε

$$K_1K_2 \leq \frac{1.747Q^{*}}{P_0D}\left[\frac{h_b'}{2} - \frac{DS_b}{7.546Q^{*2}}\right] \leq \frac{1.747Q^{*}}{P_0D}\frac{h_b'}{2}\left[1 - \frac{2DS_b}{7.546Q^{*2}h_b'}\right]$$

και επειδή $Q^{*2} = \frac{2DS_b}{h_b'}$, είναι $K_1K_2 \leq \frac{1.747Q^{*}h_b'}{2P_0D}\left[\frac{6.546}{7.546}\right] \leq 0.25$.

Επομένως, κάτω από τις παραπάνω υποθέσεις, ισχύει ότι $\frac{1}{K_1K_2} > e$ και άρα η εξίσωση (3.1.5) έχει δυο ρίζες από τις οποίες προφανώς ο προμηθευτής θα επιλέξει την μικρότερη για την πολιτική έκπτωσης που θα εφαρμόσει.

Οι υποθέσεις $D \geq 2Q^{*}$ και $Q^{**} \leq 2.747Q^{*}$ ερμηνεύονται ως εξής:

(α) ο αγοραστής παραγγέλνει αρκετά συχνά, τουλάχιστον δύο φορές το χρόνο, έτσι ώστε να υπάρχει κάποιο κέρδος από τη μείωση της συχνότητας των παραγγελιών του και

(β) η μεταβολή στην ποσότητα παραγγελίας που απαιτείται για να επιτευχθεί από κοινού βελτιστοποίηση δεν είναι τόσο μεγάλη ώστε να απαιτείται πολύ μεγάλη προσφορά έκπτωσης από τον προμηθευτή.

Η κατανομή των κερδών, που θα αποφέρει η εφαρμογή της παραπάνω πολιτικής έκπτωσης, εξαρτάται από την ποσότητα παραγγελίας που ορίζεται ως η ελάχιστη ποσότητα για την οποία προσφέρεται η έκπτωση. Έστω $\overline{Q}$ η ποσότητα αυτή, αντί για την Q^{*} που θεωρήθηκε παραπάνω, και έστω r το μέρος των κερδών που ο προμηθευτής αποφασίζει ότι αντιστοιχεί στον αγοραστή. Προφανώς $r = \left[P_0 - p\left(Q^{**}\right)\right]D - \Delta$, όπου $\Delta = TC_b'\left(Q^{**}\right) - TC_b'\left(Q^{*}\right)$ η αύξηση στο κόστος του αγοραστή από την αύξηση του μεγέθους της παραγγελίας του.

Τότε: $$p\left(Q^{**}\right) = P_0 - \frac{\left(\Delta + r\right)}{D}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$P_0 \exp\left[-a^*\left(Q^{**}-\bar{Q}\right)\right] = P_0 - \frac{(\Delta + r)}{D} \tag{3.1.6}$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (3.1.5), για $K_1 = Q^{**} - \bar{Q}$, και (3.1.6) προκύπτει:

$$\bar{Q} = Q^{**} - \left[\frac{1-(\Delta+r)/DP_0}{K_2}\right] \ln\left[\frac{1}{1-(\Delta+r)/DP_0}\right] \tag{3.1.7}$$

και
$$a^* = K_2\left[\frac{1}{1-(\Delta+r)/DP_0}\right]. \tag{3.1.8}$$

Οι παραπάνω σχέσεις καθορίζουν την πολιτική έκπτωσης με βάση το r που επιλέγει ο προμηθευτής.

Προφανώς όταν $\bar{Q} < Q^*$ το μεγαλύτερο μέρος των κερδών πηγαίνουν στον αγοραστή, ενώ όταν $\bar{Q} > Q^*$ το μεγαλύτερο μέρος των κερδών πηγαίνουν στον προμηθευτή.

Το συνολικό κόστος του προμηθευτή όταν υιοθετείται η παραπάνω πολιτική έκπτωσης είναι:

$$TC_s(Q) = \left[P_0 - P_0 \exp\left[-a^*\left(Q - Q^*\right)\right]\right] D + S_p \frac{D}{Q} - h_s' \frac{Q}{2}.$$

Πρέπει να ελεγχθεί αν όντως η ποσότητα Q^{**} ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος του προμηθευτή όταν ακολουθείται η πολιτική έκπτωσης (3.1.3).

Παραγωγίζοντας ως προς Q και θέτοντας όπου Q, Q^{**} προκύπτει:

$$TC_s'\left(Q^{**}\right) = a^* P_0 D \exp\left[-a^*\left(Q^{**} - Q^*\right)\right] - S_p \frac{D}{Q^{**2}} - \frac{h_s'}{2}$$

$$TC_s''\left(Q^{**}\right) = -a^{*2} P_0 D \exp\left[-a^*\left(Q^{**} - Q^*\right)\right] + S_p \frac{2D}{Q^{**3}}.$$

Αντικαθιστώντας το a^* στην παραπάνω συνάρτηση από την εξίσωση (3.1.4) προκύπτει:

$$TC_s''\left(Q^{**}\right) = -a^*\left(\frac{h_b'}{2} - \frac{DS_b}{Q^{**2}}\right) + S_p \frac{2D}{Q^{**3}}$$

ή
$$TC_s''\left(Q^{**}\right) = \left[\frac{2DS_p}{h_b' Q^{**3}} - \frac{a^*}{2}\left(1-k^2\right)\right] h_b', \quad \text{όπου } k = \frac{Q^*}{Q^{**}}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παραπάνω τέθηκε $\Delta = TC_b'(Q^{**}) - TC_b'(Q^*)$ το οποίο ισούται με $\Delta = S_b D\left(\frac{1}{Q^{**}} - \frac{1}{Q^*}\right) + \frac{h_b'}{2}(Q^{**} - Q^*) = Q^{**} h_b' \frac{(1-k)^2}{2}$. Αντικαθιστώντας το Δ και το a^* από τη σχέση (3.1.8) στην παραπάνω συνάρτηση προκύπτει:

$$TC_s''(Q^{**}) = \left[\frac{2DS_p}{h_b' Q^{**3}} - \frac{h_b'(1-k^2)/2}{DP_0 - (h_b'/2)Q^{**}(1-k)^2(1+x)} \frac{(1-k^2)}{2}\right] h_b', \text{ όπου } x = \frac{r}{\Delta}.$$

Για $0 \le x \le 1$ και $0.5S_b \le S_p \le 1.5S_b$ αποδεικνύεται ότι:

$$(2Q^{**})TC_s''(Q^{**}) \ge k^2 - \frac{(1-k^2)^2}{2\left[DP_0/h_b' Q^{**} - (1-k)^2\right]}.$$

Επίσης θεωρώντας όπως και παραπάνω ότι ισχύει $\frac{h_b'}{P_0} \le 0.33$ και $D \ge 2Q^*$ προκύπτει

ότι: $(2Q^{**})TC_s''(Q^{**}) \ge k^2 - \frac{(1-k^2)(1-k)^2}{2\left[6k - 1 + k^2\right]}$. Έτσι αν $k > 0.364$, τότε $TC_s''(Q^{**}) > 0$

και αποδείχτηκε ότι βάση κάποιων υποθέσεων η ποσότητα Q^{**} ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος του προμηθευτή.

3.2 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων για την αύξηση του συνολικού κέρδους του συστήματος όταν ο ρυθμός αναπλήρωσης του αποθέματος του προμηθευτή είναι πεπερασμένος και η πολιτική αναπλήρωσης του αποθέματος του είναι «παρτίδα προς παρτίδα»

Στο μοντέλο του *Bannerjee (1986a)* που παρουσιάζεται στην συγκεκριμένη παράγραφο εξετάζονται οι συνέπειες στο κόστος του αγοραστή και του προμηθευτή από την υιοθέτηση διαφορετικής ποσότητας παραγγελίας από την βέλτιστη για τον καθένα αντίστοιχα.

Στο μοντέλο αυτό ο προμηθευτής είναι παραγωγός του προϊόντος με πεπερασμένο ρυθμό παραγωγής R και υιοθετείται πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα» για την αναπλήρωση του αποθέματος. Επίσης το κόστος διατήρησης αποθέματος του αγοραστή ισούται με αυτό του προμηθευτή, $h_b = h_s = h$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι συναρτήσεις του λειτουργικού κόστους του αγοραστή και του προμηθευτή δίνονται παρακάτω:

$$TC_b(Q) = S_b \frac{D}{Q} + \frac{Q}{2} hP$$
$$TC_s(Q) = S_s \frac{D}{Q} + \frac{DQ}{2R} hc .$$

Η EOQ του αγοραστή σε αυτή την περίπτωση θα είναι $Q_b^* = \sqrt{\frac{2DS_b}{hP}}$ και του προμηθευτή $Q_s^* = \sqrt{\frac{2RS_s}{hc}}$. Επίσης, το ελάχιστο κόστος τους θα είναι $TC_b(Q_b^*) = \sqrt{2DS_b hP}$ και $TC_s(Q_s^*) = D\sqrt{\frac{2S_s hc}{R}}$ αντίστοιχα.

Αν ο προμηθευτής υιοθετήσει την EOQ του αγοραστή το κόστος του θα ισούται με:

$$TC_s(Q_b^*) = \frac{DS_s}{\sqrt{\frac{2DS_b}{hP}}} + \frac{Dhc}{2R}\sqrt{\frac{2DS_b}{hP}} .$$

Έστω $a = \frac{S_s}{S_b}$, που παριστάνει το λόγο του κόστους εκκίνησης παραγωγής του προμηθευτή προς το κόστος παραγγελίας του αγοραστή και $\beta = \frac{Dc}{RP}$, που παριστάνει το λόγο του κόστους διατήρησης αποθέματος του προμηθευτή προς αυτό του αγοραστή. Τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$TC_s(Q_b^*) = \frac{\frac{1}{2}(a+\beta)}{\sqrt{a\beta}} TC_s(Q_s^*) . \qquad (3.2.1)$$

Από την σχέση (3.2.1) προκύπτει ότι το ποσοστό της ζημίας του προμηθευτή, όταν αυτός υιοθετεί την EOQ του αγοραστή αντί για τη δικιά του, είναι:

$$PC_s\left(Q_s^* \mapsto Q_b^*\right) = \frac{\left[\frac{1}{2}(a+\beta)/\sqrt{a\beta}\right] TC_s(Q_s^*) - TC_s(Q_s^*)}{TC_s(Q_s^*)} 100$$

ή $$PC_s\left(Q_s^* \mapsto Q_b^*\right) = \left[\left(\frac{1}{2}(a+\beta)/\sqrt{a\beta}\right) - 1\right] 100 .$$

Επομένως, η απόλυτη ζημία του προμηθευτή ακολουθώντας την τακτική αυτή είναι:

$$AC_s\left(Q_s^* \mapsto Q_b^*\right) = \left[\left(\frac{1}{2}(a+\beta)/\sqrt{a\beta}\right) - 1\right] TC_s(Q_s^*) . \qquad (3.2.2)$$

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι όταν το a πλησιάζει το β η ζημία του προμηθευτή θα τείνει στο μηδέν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ομοίως, αν ο αγοραστής υιοθετήσει την EOQ του προμηθευτή, το κόστος του

θα ισούται με: $$TC_b(Q_s^*) = \frac{\frac{1}{2}(a+\beta)}{\sqrt{a\beta}} TC_b(Q_b^*). \tag{3.2.3}$$

Το ποσοστό και η απόλυτη ζημία από αυτή την τακτική για τον αγοραστή θα είναι

$$PC_b\left(Q_b^* \mapsto Q_s^*\right) = \left[\left(\tfrac{1}{2}(a+\beta)/\sqrt{a\beta}\right)-1\right]100$$

και $$AC_b\left(Q_b^* \mapsto Q_s^*\right) = \left[\left(\tfrac{1}{2}(a+\beta)/\sqrt{a\beta}\right)-1\right]TC_b(Q_b^*). \tag{3.2.4}$$

Σημειώνεται ότι τα ποσοστά ζημίας του αγοραστή και του προμηθευτή είναι πανομοιότυπα.

Εύκολα προκύπτει ότι: $$Q_s^* = \sqrt{\frac{a}{\beta}} Q_b^* \tag{3.2.5}$$

και $$TC_s(Q_s^*) = \sqrt{a\beta}\, TC_b(Q_b^*). \tag{3.2.6}$$

Το συνολικό λειτουργικό κόστος του συστήματος ισούται με:

$$JTC(Q) = \frac{D}{Q}(S_b + S_s) + \frac{Q}{2} h\left(P + \frac{D}{R}c\right) \tag{3.2.7}$$

Τότε η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το συνολικό λειτουργικό κόστος είναι: $$Q_J^* = \sqrt{\frac{2D(S_b + S_s)}{h\left(P + \frac{D}{R}c\right)}} \tag{3.2.8}$$

που αν αντικατασταθεί στην συνάρτηση (3.2.7) προκύπτει το ελάχιστο κόστος του συστήματος: $$JTC(Q_J^*) = \sqrt{2Dh(S_b + S_s)\left(P + \frac{D}{R}c\right)}.$$

Η ποσότητα (3.2.8) γράφεται και ως εξής: $$Q_J^* = \sqrt{\frac{(1+a)}{(1+\beta)}} Q_b^*. \tag{3.2.9}$$

Τότε από τις σχέσεις (3.2.5) και (3.2.9) προκύπτει ότι:

$$Q_J^* = \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{a}\right)}{\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}} Q_s^*. \tag{3.2.10}$$

Επίσης θα είναι: $$JTC(Q_J^*) = \sqrt{(1+a)(1+\beta)}\, TC_b(Q_b^*) \tag{3.2.11}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και
$$JTC(Q_J^*)=\sqrt{\left(1+\tfrac{1}{\alpha}\right)\left(1+\tfrac{1}{\beta}\right)}\,TC_s(Q_s^*)\,. \tag{3.2.12}$$

Από τις σχέσεις (3.2.9) και (3.2.10) προφανώς για $\alpha=\beta$ θα είναι $Q_J^*=Q_s^*=Q_b^*$. Αντίθετα αν $\alpha>\beta$, τότε $Q_b^*<Q_J^*<Q_s^*$ και αν $\alpha<\beta$, $Q_s^*<Q_J^*<Q_b^*$.

Έτσι λοιπόν, όταν οι EOQ του αγοραστή και του προμηθευτή δεν είναι ίσες, που είναι και το σύνηθες, η από κοινού EOQ (JELS) μπορεί να είναι ένας καλός συμβιβασμός. Το συνολικό κόστος του συστήματος όταν υιοθετείται η EOQ του αγοραστή θα ισούται με:

$$JTC(Q_b^*)=\left[1+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]TC_b(Q_b^*) \tag{3.2.13}$$

και το από κοινού ποσοστό ζημίας σε αυτή την περίπτωση θα είναι:

$$JPC\left(Q_J^*\mapsto Q_b^*\right)=\left[\frac{1+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sqrt{\left(1+\tfrac{1}{\alpha}\right)\left(1+\tfrac{1}{\beta}\right)}}-1\right]100\,.$$

Ενώ αν υιοθετηθεί η EOQ του προμηθευτή το συνολικό κόστος ισούται με:

$$JTC(Q_s^*)=\left[1+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\alpha}+\tfrac{1}{\beta}\right)\right]TC_s(Q_s^*)\,. \tag{3.2.14}$$

και ομοίως το από κοινού ποσοστό ζημίας σε αυτή την περίπτωση θα είναι:

$$JPC\left(Q_J^*\mapsto Q_s^*\right)=\left[\frac{1+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\alpha}+\tfrac{1}{\beta}\right)}{\sqrt{\left(1+\tfrac{1}{\alpha}\right)\left(1+\tfrac{1}{\beta}\right)}}-1\right]100\,.$$

Επίσης η απόλυτη ζημία στην πρώτη περίπτωση είναι:

$$JAC\left(Q_J^*\mapsto Q_b^*\right)=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{(1+\alpha)}-\sqrt{(1+\beta)}\right)^2 TC_b(Q_b^*) \tag{3.2.15}$$

και στη δεύτερη: $JAC\left(Q_J^*\mapsto Q_s^*\right)=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\left(1+\tfrac{1}{\alpha}\right)}-\sqrt{\left(1+\tfrac{1}{\beta}\right)}\right)^2 TC_s(Q_s^*)$. (3.2.16)

Σημειώνεται ότι αν $\alpha=\beta$, τότε και στις δυο περιπτώσεις η από κοινού ζημία είναι μηδέν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Το κόστος του αγοραστή και του προμηθευτή αν υιοθετηθεί η από κοινού EOQ Q_J^* είναι:

$$TC_b(Q_J^*) = \frac{1+\frac{1}{2}(a+\beta)}{\sqrt{(1+a)(1+\beta)}} TC_b(Q_b^*) \qquad (3.2.17)$$

και

$$TC_s\left(Q_J^*\right) = \frac{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}} TC_s\left(Q_s^*\right). \qquad (3.2.18)$$

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι συνέπειες της υιοθέτησης της από κοινού EOQ για τον αγοραστή και τον προμηθευτή:

	$Q_b^* \mapsto Q_J^*$	$Q_s^* \mapsto Q_J^*$
Ζημία αγοραστή	$AC_b\left(Q_b^* \mapsto Q_J^*\right) = \left[\frac{1+\frac{1}{2}(a+\beta)}{\sqrt{(1+a)(1+\beta)}}-1\right] TC_b(Q_b^*)$	Μηδέν
Κέρδος αγοραστή	Μηδέν	$AP_b\left(Q_s^* \mapsto Q_J^*\right) = \left[1-\frac{1+2/(a+\beta)}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}}\right] TC_b\left(Q_s^*\right)$
Ζημία προμηθευτή	Μηδέν	$AC_s\left(Q_s^* \mapsto Q_J^*\right) = \left[\frac{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}}-1\right] TC_s\left(Q_s^*\right)$
Κέρδος προμηθευτή	$AP_s\left(Q_b^* \mapsto Q_J^*\right) = \left[1-\frac{1+2/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)}{\sqrt{(1+a)(1+\beta)}}\right] TC_s\left(Q_b^*\right)$	Μηδέν

Πίνακας 3.1. Συνέπειες της υιοθέτησης της από κοινού EOQ για τον αγοραστή και τον προμηθευτή

Σημειώνεται ότι το ποσοστό ζημίας του αγοραστή από την υιοθέτηση της από κοινού EOQ ισούται με το από κοινού ποσοστό ζημίας όταν αντί για την από κοινού EOQ χρησιμοποιείται η EOQ του αγοραστή. Το ίδιο συμβαίνει και για το ποσοστό ζημίας του αγοραστή για τη χρήση της από κοινού EOQ και του από κοινού ποσοστό ζημίας για τη χρήση της EOQ του προμηθευτή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Προφανώς το από κοινού κόστος για ποσότητα παραγγελίας Q_J^* δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από αυτό για Q_b^*. Επομένως είναι $AP_s\left(Q_b^* \mapsto Q_J^*\right) > AC_b\left(Q_b^* \mapsto Q_J^*\right)$ και αφαιρώντας το δεύτερο από το πρώτο προκύπτει ότι η από κοινού ζημία για την επιλογή αυτής της τακτικής θα είναι

$$JAP\left(Q_b^* \mapsto Q_J^*\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{(1+a)} - \sqrt{(1+\beta)}\right)^2 TC_b(Q_b^*)$$

η οποία ισούται με την από κοινού ζημία για την επιλογή της Q_J^* αντί της Q_b^*.

Για να παρακινήσει ο προμηθευτής τον αγοραστή να αλλάξει το μέγεθος της παραγγελίας του από την EOQ του σε Q_J^* μπορεί να του προσφέρει κάποια ποσοτική έκπτωση d ανά μονάδα προϊόντος η οποία θα βρίσκεται στο διάστημα

$$\tfrac{1}{D} AC_b\left(Q_b^* \mapsto Q_J^*\right) \le d \le \tfrac{1}{D} AP_s\left(Q_b^* \mapsto Q_J^*\right)$$

ή

$$d_{\min} \le d \le d_{\max}.$$

Όταν η ποσοτική έκπτωση ισούται με το κάτω όριο, όταν $d = d_{\min}$, τότε όλα τα κέρδη που προκύπτουν από την υιοθέτηση της από κοινού EOQ πηγαίνουν στον προμηθευτή και ο αγοραστής είναι αδιάφορος ανάμεσα στην Q_b^* και Q_J^*. Όταν η ποσοτική έκπτωση ισούται με το άνω όριο, $d = d_{\max}$ όλα τα κέρδη πηγαίνουν στον αγοραστή ενώ το κόστος του προμηθευτή παραμένει το ίδιο. Ένας δίκαιος καταμερισμός των κερδών προκύπτει αν η απόλυτη από κοινού ζημία από την αλλαγή της Q_b^* σε Q_J^* μοιραστεί ισότιμα στον αγοραστή και τον προμηθευτή:

$$d = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{(1+a)} - \sqrt{(1+\beta)}\right)^2 \frac{TC_b(Q_b^*)}{D}.$$

Μια άλλη περίπτωση είναι να υιοθετείται η EOQ του προμηθευτή και ο αγοραστής θέλοντας να χρησιμοποιηθεί η από κοινού EOQ να προσφέρει μια αύξηση μεγέθους u στην τιμή του προϊόντος με σκοπό να παρακινήσει τον προμηθευτή να δεχτεί την αλλαγή αυτή. Η ζημία του προμηθευτή από την αλλαγή της ποσότητας παραγγελίας από Q_s^* σε Q_J^* είναι $AC_s\left(Q_s^* \mapsto Q_J^*\right)$ και το κέρδος του αγοραστή $AP_b\left(Q_s^* \mapsto Q_J^*\right)$ (βλέπε πίνακα). Τότε προφανώς:

$$JAP\left(Q_s^* \mapsto Q_J^*\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\left(1+\tfrac{1}{a}\right)} - \sqrt{\left(1+\tfrac{1}{\beta}\right)}\right)^2 TC_s(Q_s^*).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επομένως η u θα ανήκει στο διάστημα:

$$\frac{1}{D} AC_s\left(Q_s^* \mapsto Q_J^*\right) \le u \le \frac{1}{D} AP_b\left(Q_s^* \mapsto Q_J^*\right)$$

ή

$$u_{\min} \le u \le u_{\max}.$$

Όταν $u = u_{\min}$, όλα τα κέρδη από τη υιοθέτηση της Q_J^* πηγαίνουν στον αγοραστή, ενώ όταν $u = u_{\max}$ όλα τα κέρδη πηγαίνουν στον προμηθευτή. Και σε αυτή την περίπτωση ένας δίκαιος καταμερισμός των κερδών πετυχαίνεται όταν

$$u = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{a}\right)} - \sqrt{\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}\right)^2 \frac{TC_s(Q_s^*)}{D}.$$

Παρακάτω δίνεται ένα αριθμητικό παράδειγμα:

Παράδειγμα

Έστω $D = 1000$ μονάδες/έτος, $R = 3200$ μονάδες/έτος, $S_b = \$100$/παραγγελία, $S_s = \$400$/εκκίνηση, $P = \$25$/μονάδα, $c = \$20$/μονάδα και $h = 0.2$. Τότε σύμφωνα με όσα διατυπώθηκαν παραπάνω είναι $a = 4$ και $\beta = 0.25$. Επίσης $Q_b^* = 200$ μονάδες, $TC_b\left(Q_b^*\right) = \$1000$ και $Q_s^* = 800$ μονάδες, $TC_s\left(Q_s^*\right) = \$1000$. Αν ο προμηθευτής υιοθετήσει την EOQ του αγοραστή το κόστος του θα αυξηθεί σε $TC_s\left(Q_b^*\right) = \$2125$ και η ζημία του θα είναι προφανώς \$1125 ή 112.5% του ελάχιστου κόστους του $TC_s\left(Q_s^*\right)$. Ομοίως αν ο αγοραστής υιοθετήσει την EOQ του προμηθευτή το κόστος του θα είναι $TC_b\left(Q_s^*\right) = \$2125$ και άρα και εκείνος θα έχει ζημία \$1125 ή 112.5% του ελάχιστου κόστους του. Όταν ο ένας από τους δυο μεγιστοποιεί το κέρδος του ο άλλος υφίσταται μεγάλη ζημία. Σημειώνεται ότι στο παράδειγμα αυτό ισχύει $TC_s\left(Q_b^*\right) = TC_b\left(Q_s^*\right)$ επειδή $a\beta = 1$.

Η από κοινού EOQ ισούται με $Q_J^* = 400$ μονάδες και το από κοινού ελάχιστο κόστος με $JTC\left(Q_J^*\right) = \$2500$. Η από κοινού ζημία από την υιοθέτηση της EOQ είτε του αγοραστή είτε του προμηθευτή αντί της Q_J^* θα είναι 25% ή \$625 ανά έτος.

Το κόστος του αγοραστή αν χρησιμοποιηθεί η Q_J^* είναι $TC_b\left(Q_J^*\right) = \$1250$ και του προμηθευτή $TC_s\left(Q_J^*\right) = \$1250$ επίσης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έστω ότι χρησιμοποιείται η EOQ του αγοραστή, τότε η μετάβαση στην από κοινού EOQ θα έχει ως αποτέλεσμα ζημία μεγέθους \$250 για τον αγοραστή και ταυτόχρονα κέρδος \$875 για τον προμηθευτή. Συνεπώς το κέρδος του προμηθευτή είναι σαφώς μεγαλύτερο από ότι η ζημία του αγοραστή. Η από κοινού ζημία σε αυτή την περίπτωση όπως αναφέρθηκε και παραπάνω είναι $JTC\left(Q_b^*\right) = \$625$ Αν ο προμηθευτής προσφέρει ποσοτική έκπτωση \$0.25 ανά μονάδα και με αυτό τον τρόπο πείσει τον αγοραστή να μεταβεί στην από κοινού EOQ η αύξηση των \$250 στο λειτουργικό κόστος του αγοραστή αντισταθμίζεται από το κέρδος στο κόστος αγοράς (0.25×1000) λόγω της έκπτωσης. Για να γίνει όμως ίσος καταμερισμός των κερδών (η από κοινού ζημία των \$625 να μοιραστεί ισομερώς) πρέπει η ποσοτική έκπτωση να ισούται με \$0.3125 $\left(\frac{625}{2 \times 1000}\right)$. Σε αυτή την περίπτωση το κέρδος του αγοραστή και του προμηθευτή θα είναι \$75 και \$312.50 αντίστοιχα

3.3 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων για την αύξηση του συνολικού κέρδους του συστήματος όταν το κόστος διατήρησης αποθέματος του αγοραστή είναι ανεξάρτητο της τιμής του προϊόντος

Στο πλαίσιο της ελαχιστοποίησης του συνολικού κόστους του συστήματος υπό τη προσφορά ποσοτικής έκπτωσης, οι *Dada & Srikanth (1987)* προτείνουν ένα μοντέλο στο οποίο χρησιμοποιείται παρόμοια μορφή συνάρτησης κόστους προμηθευτή με τους Lal & Staelin (1984) (βλέπε ενότητα 3.1) χωρίς όμως την απαίτηση των πολλών περιορισμών του μοντέλου αυτού.

Υποθέτοντας ότι το κόστος διατήρησης αποθέματος είναι ανεξάρτητο της τιμής του προϊόντος θεωρούνται τα παρακάτω:

Συνολικό κόστος αγοραστή ανά χρονική περίοδο:

$$TC_b(Q,P) = DP + \frac{S_b D}{Q} + h_b \cdot \frac{Q}{2} \tag{3.3.1}$$

Κόστος προμηθευτή, το οποίο αποτελείται από (κόστος επεξεργασίας της παραγγελίας του προμηθευτή) – (μείωση του κόστους δεσμευμένου κεφαλαίου λόγω της αγοράς μονάδων προϊόντος από τον αγοραστή) – (έσοδα από τις πωλήσεις), ανά χρονική περίοδο:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$TC_s(Q,P)=\frac{S_p D}{Q}-h_s^{'}\frac{Q}{2}-DP\,. \tag{3.3.2}$$

Πριν την προσφορά ποσοτικής έκπτωσης από τον προμηθευτή, ως γνωστόν, ο αγοραστής υιοθετεί την EOQ $Q^{*}=\sqrt{\frac{2S_b D}{h_b^{'}}}$. Για να παρακινηθεί να αυξήσει το μέγεθος της παραγγελίας του σε ποσότητα Q, $(Q>Q^{*})$, θα πρέπει προφανώς να ισχύει

$TC_b(Q,P(Q))\leq TC_b(Q^{*},P_0)$, όπου P_0 η τιμή του προϊόντος πριν την έκπτωση.

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω ανισότητα την σχέση (3.3.1) προκύπτει

$$P(Q)\leq\frac{TC_b(Q^{*},P_0)}{D}-\frac{S_b}{Q}-\frac{h_b^{'}}{2D}Q\equiv P_{\max}(Q)\,. \tag{3.3.3}$$

Η $P_{\max}(Q)$ ισοδυναμεί με την τιμή του προϊόντος για την οποία ο αγοραστής μένει στο ίδιο επίπεδο κέρδους παραγγέλλοντας είτε Q είτε Q^{*}, ενώ για κάθε ποσότητα Q για την οποία ισχύει $P(Q)<P_{\max}(Q)$ ο αγοραστής θα έχει μεγαλύτερο κέρδος για Q αντί για Q^{*}.

Ομοίως, για να έχει κίνητρο ο προμηθευτής να προσφέρει ποσοτική έκπτωση στον προμηθευτή θα πρέπει να ισχύει

$$TC_s(Q,P(Q))\leq TC_s(Q^{*},P_0)$$

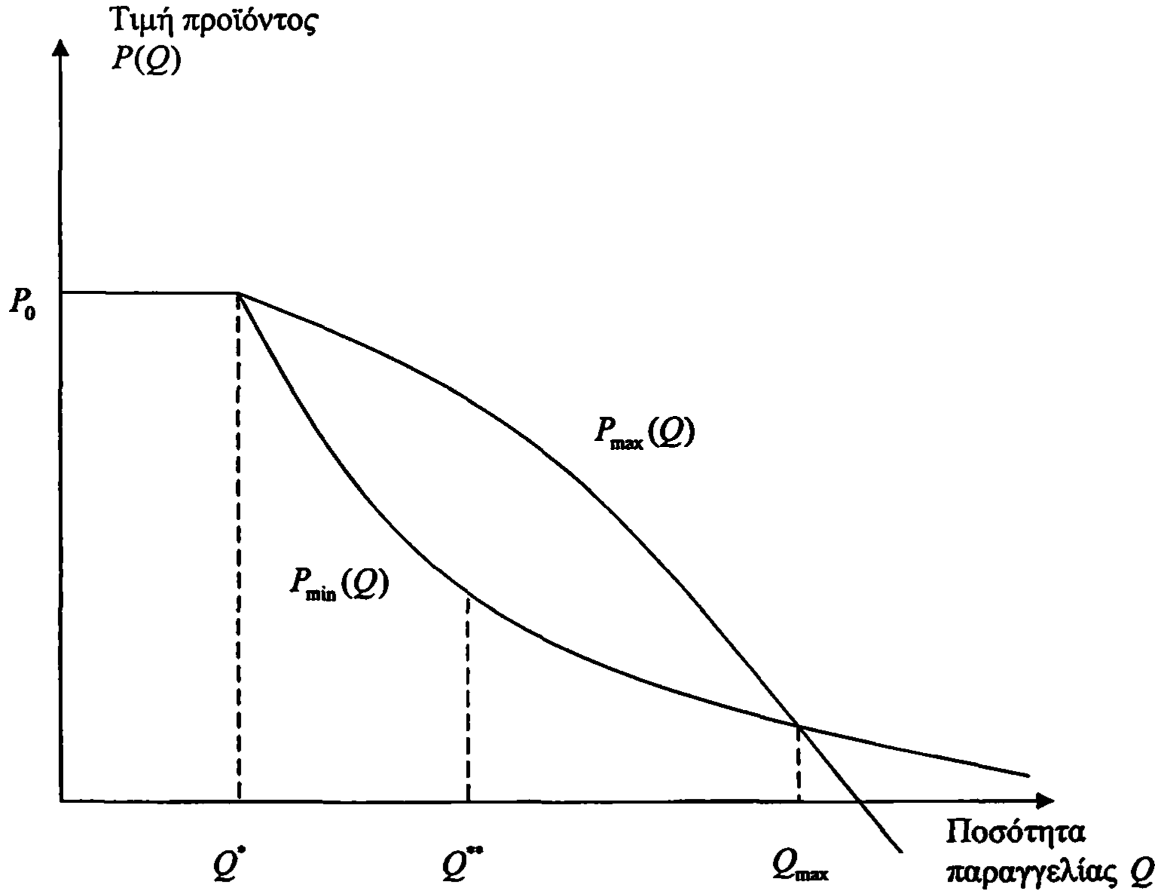
απ' όπου με αντικατάσταση της (3.3.2) προκύπτει

$$P(Q)\geq\frac{S_p}{Q}-\frac{h_s^{'}}{2D}Q-\frac{TC_s(Q^{*},P_0)}{D}\equiv P_{\min}(Q)\,. \tag{3.3.4}$$

Κάθε ποσότητα παραγγελίας μεγέθους Q για την οποία ισχύει $P(Q)>P_{\min}(Q)$ αποφέρει μεγαλύτερο κέρδος στον προμηθευτή σε σχέση με την Q^{*}.

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, η πολιτική και που είναι βέλτιστη και για τον αγοραστή και για τον προμηθευτή είναι $Q^{*}<Q<Q_{\max}$ και $P_{\min}(Q)<P(Q)<P_{\max}(Q)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 3.1. Η τιμή του προϊόντος ως συνάρτηση της ποσότητας παραγγελίας

Το άθροισμα του κόστους του αγοραστή και του κόστους του προμηθευτή αποτελεί το συνολικό κόστος του συστήματος JTC, το οποίο είναι ανεξάρτητο της τιμής του προϊόντος:

$$JTC(Q) = TC_b(Q, P(Q)) + TC_s(Q, P(Q)) = \left(S_b + S_p\right)\frac{D}{Q} + \left(h_b' - h_s'\right)\frac{Q}{2}.$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ελαχιστοποιείται για:

$$Q^{**} = \sqrt{\frac{2\left(S_b + S_p\right)D}{\left(h_b' - h_s'\right)}}.$$

Μια αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει το Q^{**} είναι η $h_b' > h_s'$, η οποία συνήθως θεωρείται ότι ισχύει.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.3.3) και (3.3.4), το συνολικό κόστος γράφεται ως εξής:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$JTC(Q) = JTC(Q^*) - D\left(P_{\max}(Q) - P_{\min}(Q)\right).$$

Προφανώς το συνολικό κόστος του συστήματος ελαχιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται η διαφορά $P_{\max}(Q) - P_{\min}(Q)$.

Το κέρδος του συστήματος από την υιοθέτηση της ποσότητας παραγγελίας Q αντί για την Q^* ισοδυναμεί με:

$$JTP(Q) = JTC(Q^*) - JTC(Q) = D(P_{\max}(Q) - P_{\min}(Q)).$$

Ομοίως το κέρδος για τον αγοραστή ισοδυναμεί με

$$TP_b(Q, P(Q)) = D(P_{\max}(Q) - P(Q))$$

και του προμηθευτή με $TP_s(Q, P(Q)) = D(P(Q) - P_{\min}(Q))$.

Επειδή το κέρδος του συστήματος μεγιστοποιείται για ποσότητα παραγγελίας Q^{**}, θα πρέπει η ποσοτική έκπτωση που προσφέρει ο προμηθευτής να είναι τέτοια ώστε και τα κέρδη του αγοραστή και του προμηθευτή να μεγιστοποιούνται για Q^{**}.

Έστω

$$P_\lambda(Q) = \lambda P_{\max}(Q) + (1-\lambda) P_{\min}(Q), \text{ όπου } 0 \le \lambda \le 1.$$

Αντικαθιστώντας το $P_\lambda(Q)$ με το $P(Q)$ στις σχέσεις των κερδών αγοραστή και προμηθευτή προκύπτει:

$$TP_b(Q, P_\lambda(Q)) = (1-\lambda) D(P_{\max}(Q) - P_{\min}(Q))$$

και

$$TP_s(Q, P_\lambda(Q)) = \lambda D(P_{\max}(Q) - P_{\min}(Q)).$$

Επομένως το κέρδος του συστήματος, το κέρδος του αγοραστή και το κέδρος του προμηθευτή μεγιστοποιούνται για την ίδια ποσότητα παραγγελίας η οποία ισοδυναμεί με την ποσότητα Q^{**} που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος του συστήματος.

Η πολιτική έκπτωσης $P_\lambda(Q)$ παρέχει έναν μηχανισμό κατανομής των κερδών ανάμεσα στον αγοραστή και τον προμηθευτή. Όταν $\lambda = 1$, $P_\lambda(Q) = P_{\max}(Q)$ και επομένως όλα τα κέρδη πηγαίνουν στον προμηθευτή. Όταν $\lambda = 0$, $P_\lambda(Q) = P_{\min}(Q)$ και όλα τα κέρδη πηγαίνουν στον αγοραστή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3.4 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων για την αύξηση του συνολικού κέρδους του συστήματος όταν η πολιτική αναπλήρωσης του αποθέματος του είναι «παρτίδα προς παρτίδα»

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζεται το μοντέλο που προτείνετε από τους *Chakravarty & Martin (1988)* για το οποίο υιοθετούνται οι ακόλουθες υποθέσεις:

Υποθέσεις

1. ο προμηθευτής προμηθεύεται το προϊόν από κάποια εξωτερική πηγή (άπειρος ρυθμός παραγωγής) ακολουθώντας πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα».
2. ο προμηθευτής προσφέρει ποσοτική έκπτωση στον αγοραστή, p η μειωμένη μοναδιαία τιμή του προϊόντος, $0 < p \leq P$.

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα μοντέλα, στο μοντέλο των Chakravarty & Martin, (1988), επειδή ακολουθείτε πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα» και ο ρυθμός αναπλήρωσης του αποθέματος είναι άπειρος, το κόστος διατήρησης αποθέματος του προμηθευτή δεν λαμβάνεται υπόψη. Σκοπός του μοντέλου είναι ο υπολογισμός της ποσότητας παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το από κοινού κόστος του αγοραστή και προμηθευτή με βάση κάποια προκαθορισμένη συμφωνία της κατανομής των κερδών που θα προκύψουν.

Συνάρτηση κόστους αγοραστή: $TC_b(p,Q) = pD + S_b \frac{D}{Q} + h_b p \frac{Q}{2}$

Συνάρτηση κόστους προμηθευτή: $TC_s(p,Q) = (P-p)D + (S_s + S_p)\frac{D}{Q}$

Στο συγκεκριμένο μοντέλο, το μοναδικό κέρδος για τον προμηθευτή από την αύξηση της ποσότητας παραγγελίας του αγοραστή είναι η μείωση του κόστους εκκίνησης παραγωγής και επεξεργασίας παραγγελίας. Το κέρδος αυτό θα πρέπει προφανώς να υπερβαίνει τη μείωση των κερδών από τις πωλήσεις λόγω της προσφοράς ποσοτικής έκπτωσης.

Από το άθροισμα των παραπάνω συναρτήσεων προκύπτει το συνολικό κόστος του συστήματος:

$$JTC(p,Q) = PD + (S_b + S_s + S_p)\frac{D}{Q} + h_b p \frac{Q}{2}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Όταν δεν υπάρχει προσφορά ποσοτικής έκπτωσης από τον προμηθευτή, ο αγοραστής επιλέγει τη γνωστή EOQ $Q^* = \sqrt{\frac{2DS_b}{h_b P}}$ και το κόστος του αγοραστή, του προμηθευτή και του συνολικού συστήματος δίνονται από τις εξής συναρτήσεις:

$$TC_b(P,Q^*) = PD + \sqrt{2DS_b h_b P}$$

$$TC_s(P,Q^*) = \left(S_s + S_p\right)\sqrt{\frac{Dh_b P}{2S_b}}$$

$$JTC(P,Q^*) = PD + \sqrt{2DS_b h_b P} + \left(S_s + S_p\right)\sqrt{\frac{Dh_b P}{2S_b}}$$

Το κόστος του συστήματος όμως, για τιμή προϊόντος χωρίς έκπτωση P, ελαχιστοποιείται για

$$Q^{**} = \sqrt{\frac{2\left(S_b + S_s + S_p\right)D}{h_b P}}, \text{ όπου προφανώς } Q^{**} > Q^*.$$

Τότε $JTC(P,Q^{**}) = PD + \sqrt{2D\left(S_b + S_s + S_p\right)h_b P}$, όπου $JTC(P,Q^{**}) < JTC(P,Q^*)$.

Όμως είναι $TC_b(P,Q^{**}) > TC_b(P,Q^*)$ και επομένως ο αγοραστής για να μεταβεί σε ποσότητα παραγγελίας Q^{**} θα πρέπει να αποζημιωθεί για το επιπλέον κόστος του.

Για τιμή $p < P$ η από κοινού συνάρτηση κόστους ελαχιστοποιείται για ποσότητα παραγγελίας:

$$Q^{***} = \sqrt{\frac{2\left(S_b + S_s + S_p\right)D}{h_b p}}, \text{ για την οποία ισχύει } Q^{***} > Q^{**} > Q^*.$$

Σημειώνεται ότι για δοθέν Q', το συνολικό κόστος του συστήματος $JTC(p,Q')$ μειώνεται καθώς μικραίνει η τιμή του προϊόντος p ενώ αντίθετα το κόστος του προμηθευτή $TC_s(p,Q')$ αυξάνεται.

Επομένως ο καθορισμός της ποσοτικής έκπτωσης υπόκειται στους εξής περιορισμούς

$$TC_b(p,Q') \le TC_b(P,Q^*)$$

και $$TC_s(p,Q') \le TC_s(P,Q^*),$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επομένως με την καινούργια πολιτική (p,Q') δεν θα πρέπει να παρατηρείται αύξηση ούτε στο κόστος του αγοραστή ούτε του προμηθευτή σε σχέση με το κόστος που θα είχαν για την οικονομική ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή Q^* και τιμή P.

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\min\ JTC(p,Q) = PD + \left(S_b + S_s + S_p\right)\frac{D}{Q} + h_b p\frac{Q}{2}$$

$$s.t.\quad pD + S_b\frac{D}{Q} + h_b p\frac{Q}{2} \le PD + \sqrt{2DS_b h_b P}$$

$$\left(P-p\right)D + \left(S_s + S_p\right)\frac{D}{Q} \le \left(S_s + S_p\right)\sqrt{\frac{Dh_b P}{2S_b}}$$

$$p, Q > 0$$

Το κέρδος του αγοραστή από την αλλαγή στην ποσότητα παραγγελίας ισοδυναμεί με

$$BS = TC_b(P,Q^*) - TC_b(p,Q) = \left(P-p\right)D + \sqrt{2DS_b h_b P} - S_b\frac{D}{Q} - h_b p\frac{Q}{2} \qquad (3.4.1)$$

και του προμηθευτή με

$$SS = TC_s(P,Q^*) - TC_s(p,Q)$$

$$\text{ή}\quad SS = \left(S_s + S_p\right)\sqrt{\frac{Dh_b P}{2S_b}} - \left(P-p\right)D - \left(S_s + S_p\right)\frac{D}{Q} \qquad (3.4.2)$$

Έστω ότι

$$SS = aBS \qquad (3.4.3)$$

όπου $a \ge 0$ μια παράμετρος που λειτουργεί ως εργαλείο διαπραγμάτευσης για την κατανομή των κερδών.

Για $a = 1$ υπάρχει ίση κατανομή των κερδών, για $a = 0$ όλα τα κέρδη πηγαίνουν στον αγοραστή και για a αρκετά μεγάλο τα περισσότερα κέρδη πηγαίνουν στον προμηθευτή.

Το πρόβλημα επομένως μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\min\ JTC(p,Q) = PD + \left(S_b + S_s + S_p\right)\frac{D}{Q} + h_b p\frac{Q}{2}$$

$$s.t.\quad SS = aBS$$

$$p, Q > 0$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.4.1) και (3.4.2) στην (3.4.3) προκύπτει:

$$p = \frac{H + \left(S_s + S_p - aS_b\right)\dfrac{D}{Q}}{\left(1+a\right)D + \dfrac{Q}{2}ah_b}, \qquad (3.4.4)$$

όπου $$H = a\sqrt{2S_b DPh_b} + \left(1+a\right)PD - \left(S_s + S_p\right)\sqrt{\frac{DPh_b}{2S_b}}.$$

Το συνολικό κόστος του συστήματος με αντικατάσταση της (3.4.4) είναι:

$$JTC(a,Q) = PD + \left(S_b + S_s + S_p\right)\frac{D}{Q} + \frac{H}{a} + \frac{h_b}{2}\frac{S_s + S_p - aS_b - 2H\dfrac{\left(1-a\right)}{ah_b}}{1 + a + \dfrac{Q}{2D}ah_b}$$

Ελαχιστοποιώντας το παραπάνω κόστος προκύπτει:

$$Q^* = \frac{\left(1+a\right)\sqrt{S_s + S_p + S_b}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}h_b\left[-\left(S_s + S_p - aS_b\right)\right] + H\left(1+a\right)} - \dfrac{1}{2}ah_b\sqrt{S_s + S_p + S_b}} \qquad (3.4.5)$$

Τέλος αντικαθιστώντας την (3.4.5) στην (3.4.4) προκύπτει η μειωμένη τιμή του προϊόντος που προσφέρεται από τον προμηθευτή όταν ο αγοραστής παραγγέλνει ποσότητα προϊόντος Q^*, η οποία είναι η ποσότητα που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος του συστήματος χωρίς να προκαλεί αύξηση στο κόστος του αγοραστή ή του προμηθευτή.

3.5 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων (α) για την μεγιστοποίηση του κέρδους του προμηθευτή, (β) την ελαχιστοποίηση του κόστους του αγοραστή και (γ) την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους του συστήματος

Στο μοντέλο των *Kim & Hwang (1989)* εξετάζονται οι τρεις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Στην πρώτη περίπτωση ο προμηθευτής προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το κέρδος του χωρίς να αυξήσει το κόστος του αγοραστή που σχετίζεται με τη διατήρηση αποθέματος
2. Στην δεύτερη περίπτωση ο αγοραστής προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το κόστος διατήρησης αποθέματος χωρίς να μειώσει το κέρδος του προμηθευτή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3. Τέλος, στην τρίτη περίπτωση στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους του συστήματος και η κατανομή των κερδών που θα προκύψουν

Έστω d ο συντελεστής έκπτωσης, Pd είναι η μειωμένη τιμή του προϊόντος μετά την έκπτωση.

Το κέρδος του προμηθευτή ισοδυναμεί με τα έσοδα από τις πωλήσεις μείων το κόστος παραγγελίας και αγοράς του προϊόντος και δίνεται από τη παρακάτω συνάρτηση:

$$TP_s = PdD - S_s \frac{D}{Q} - cD$$

Επειδή ο τελευταίος όρος της συνάρτησης είναι ανεξάρτητος από την έκπτωση και την ποσότητα παραγγελίας τον αγνοούμε και επομένως η συνάρτηση κέρδους γίνεται:

$$TP_s(d,Q) = PdD - S_s \frac{D}{Q}$$

Η συνάρτηση κόστους του αγοραστή, υπό την πολιτική έκπτωσης του προμηθευτή, είναι η εξής:

$$TC_b(d,Q) = PdD + S_b \frac{D}{Q} + h_b Pd \frac{Q}{2}$$

Σε ειδικές περιπτώσεις, όπως όταν το προϊόν για το οποίο ενδιαφέρεται ο αγοραστής μονοπωλείται από κάποιον προμηθευτή ή όταν κάποιος προμηθευτής έχει κάποιο ιδιαίτερο πλεονέκτημα σε σχέση με τους υπόλοιπους ή τέλος όταν ο προμηθευτής έχει καλύτερη πληροφόρηση σε σχέση με τον αγοραστή με την οποία μπορεί να πάρει πιο σωστές αποφάσεις, τότε προφανώς ο προμηθευτής έχει το πάνω χέρι στις διαπραγματεύσεις για τον καθορισμό της ποσότητας παραγγελίας και της έκπτωσης.

Σε αυτή την περίπτωση ο προμηθευτής προτείνει μια νέα πολιτική (d,Q), για την οποία ισχύει $d<1$ και $Q>Q^*$ (Q^* = EOQ του αγοραστή), με την οποία προσπαθεί να πετύχει μεγιστοποίηση του κέρδους του χωρίς να αυξήσει το κόστος του αγοραστή. Το πρόβλημα του προμηθευτή διατυπώνεται ως εξής:

$$\max_{d,Q} TP_s(d,Q) = PdD - S_s \frac{D}{Q} \tag{3.5.1}$$

$$s.t.\quad TC_b(d,Q) \le TC_b(1,Q^*) \tag{3.5.2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για σταθερό Q, η (3.5.1) αυξάνεται μονότονα καθώς το d αυξάνεται. Το ίδιο συμβαίνει και στην (3.5.2). Επομένως το βέλτιστο (d,Q) προκύπτει όταν ισχύει η ισότητα στην ανισότητα (3.5.2):

$$TC_b(d,Q) = TC_b(1,Q^*) \tag{3.5.3}$$

Από την (3.5.3) προκύπτει:

$$d = \frac{\frac{2S_bD}{Q^*} + h_bPQ^* + 2PD - \frac{2S_bD}{Q}}{h_bPQ + 2PD} \tag{3.5.4}$$

Αντικαθιστώντας το d της (3.5.4) στην (3.5.1) και μεγιστοποιώντας ως προς Q προκύπτει:

$$Q^{**} = \frac{-Y + \sqrt{Y^2 - 4XZ}}{2X},$$

Όπου $$X = 2h_b\left(\frac{S_bD}{Q^*} + h_bP\frac{Q^*}{2} + PD\right) - S_sh_b^2$$

$$Y = -4h_bD(S_b + S_s)$$

$$Z = -4D^2(S_b + S_s).$$

Η βέλτιστη τιμή της έκπτωσης d^* προκύπτει με αντικατάσταση του Q^{**} στην σχέση (3.5.4).

Μια άλλη εκδοχή είναι όταν ο αγοραστής είναι αυτός που ελέγχει την διαπραγμάτευση. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί στην περίπτωση που η παραγγελία του αγοραστή αποτελεί το μεγαλύτερο μέρος των πωλήσεων του προμηθευτή. Τότε ο αγοραστής θέλει να καθορίσει τα (d,Q), τα οποία θα ελαχιστοποιήσουν το κόστος του χωρίς να μειωθεί όμως το κόστος του προμηθευτή. Το πρόβλημα του αγοραστή διατυπώνεται ως εξής:

$$\min_{d,Q} TC_b(d,Q) = PdD + S_b\frac{D}{Q} + h_bPd\frac{Q}{2} \tag{3.5.5}$$

$$s.t. \quad TP_s(d,Q) \geq TP_s(1,Q^*) \tag{3.5.6}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η (3.5.5) προφανώς φθίνει μονότονα καθώς το d μειώνεται για σταθερό Q όπως επίσης και το κέρδος του προμηθευτή, επομένως το κόστος του αγοραστή ελαχιστοποιείται όταν η ανισότητα (3.5.6) γίνεται ισότητα, συνεπώς όταν ισχύει:

$$PdD - S_s \frac{D}{Q} = PD - S_s \frac{D}{Q^*}.$$

Μετά από υπολογισμούς προκύπτει η εξής λύση στο πρόβλημα του αγοραστή:

$$Q^{**} = \sqrt{\frac{2DQ^*(S_b + S_s)}{h_b(PQ^* - S_s)}} \quad \text{και} \quad d^* = 1 - \frac{S_s}{PQ^*} + \frac{S_s}{PQ^{**}}$$

Τέλος, υπάρχει και η περίπτωση όπου γίνεται αμοιβαία διαπραγμάτευση μεταξύ του αγοραστή και του προμηθευτή με σκοπό την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους του συστήματος και κατανομή των κερδών που προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση αυτή. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\min_{d,Q} JTC(d,Q) &= TC_b(d,Q) - TP_s(d,Q) \\ &= S_b \frac{D}{Q} + h_b Pd \frac{Q}{2} + S_s \frac{D}{Q} \qquad (3.5.7)\end{aligned}$$

$$s.t.\quad (1-r)\left\{TP_s(d,Q) - TP_s(1,Q^*)\right\} = r\left\{TC_b(d,Q) - TC_b(1,Q^*)\right\} \qquad (3.5.8)$$

όπου r $(0 \le r \le 1)$ το προκαθορισμένο ποσοστό των κερδών που αντιστοιχούν στον προμηθευτή.

Επισημαίνεται ότι όταν $r = 1$ το παραπάνω πρόβλημα ανάγεται στην πρώτη περίπτωση και όταν $r = 0$ ανάγεται στη δεύτερη περίπτωση.

Από την (3.5.8) προκύπτει:

$$d = \frac{2\left\{rQTC_b(1,Q^*) + (1-r)QTP_s(1,Q^*) + (1-r)S_s D - rS_b D\right\}}{PQ(rh_b Q + 2D)}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (3.5.7) και ελαχιστοποιώντας ως προς Q προκύπτει η εξής βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας:

$$Q^{**} = \frac{-Y + \sqrt{Y^2 - 4XZ}}{2X},$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Όπου $$X = 2h_b\left(rTC_b\left(1,Q^*\right)+\left(1-r\right)YN_s\left(1,Q^*\right)\right)-rS_s h_b^2$$

$$Y = -4rh_b D\left(S_b + S_s\right)D$$

$$Z = -4D^2\left(S_b + S_s\right).$$

Σημειώνεται ότι αν τεθεί $S_s = 0$ η Q^{**} ανάγεται στην EOQ Q^*.

3.6 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων για την αύξηση του συνολικού κέρδους του συστήματος όταν η ζήτηση του αγοραστή είναι ελαστική ως προς την τιμή

Στο μοντέλο του *Weng, (1995)*, εξετάζονται πολιτικές εκπτώσεων επί της ολικής ποσότητας παραγγελίας (all-units quantity discounts) και πολιτικές κλιμακωτά αυξανόμενων ποσοτικών εκπτώσεων (incremental quantity discounts) υπό την υπόθεση ότι η ζήτηση είναι φθίνουσα συνάρτηση της τιμής του προϊόντος. Επίσης εξετάζονται δυο διαφορετικά σενάρια:

1. Ο προμηθευτής προσφέρει ποσοτική έκπτωση στον αγοραστή με σκοπό να τον παρακινήσει να μεταβεί σε ποσότητα παραγγελίας που μεγιστοποιεί το κέρδος του πρώτου.
2. Ο προμηθευτής και ο αγοραστής συνεργάζονται με σκοπό να μεγιστοποιήσουν το από κοινού τους κέρδος

Σενάριο 1

Διακρίνονται δυο περιπτώσεις:

1. ο προμηθευτής προσφέρει ποσοτική έκπτωση επί της ολικής ποσότητας παραγγελίας
2. ο προμηθευτής προσφέρει κλιμακωτά αυξανόμενες εκπτώσεις

Σενάριο 1- Περίπτωση 1

Έστω d_A το ποσοστό έκπτωσης στην τιμή του προϊόντος για ποσότητες παραγγελίας μεγαλύτερες η ίσες από Q_A (Q_A = price breakpoint), τότε προφανώς η μειωμένη τιμή του προϊόντος θα είναι $P\left(1-d_A\right)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επίσης έστω $D = D(P)$ η συνάρτηση της ελαστικής ως προς την τιμή ζήτησης όταν δεν υπάρχει έκπτωση και $D_d = D(P - Pd_A)$ όταν υπάρχει.

Κατά τα γνωστά η EOQ του αγοραστή, όταν δεν υπάρχει προσφορά έκπτωσης από τον προμηθευτή, είναι η $Q^* = \sqrt{\frac{2DS_b}{h_b P}}$ και το συνολικό κόστος του σε αυτή την περίπτωση είναι

$$TC_b = PD + \sqrt{2DS_b h_b P}. \tag{3.6.1}$$

Αν ο αγοραστής δεχτεί την προσφορά έκπτωσης του προμηθευτή και μεταβεί σε ποσότητα παραγγελίας Q_A τότε το συνολικό κόστος του θα ισούται με

$$TC_{bd} = P(1-d_A)D_d + S_b \frac{D_d}{Q_A} + h_b P(1-d_A)\frac{Q_A}{2}. \tag{3.6.2}$$

Για να δεχτεί ο αγοραστής αυτή την αλλαγή στην ποσότητα παραγγελίας του θέτει τον περιορισμό το κέρδος του να αυξηθεί τουλάχιστον κατά $(\gamma-1)100\%$, $\gamma \geq 1$. Ο παραπάνω περιορισμός γράφεται ως εξής:

$$P_{bd}D_d - TC_{bd} = \gamma(P_b D - TC_b),$$

όπου P_{bd} και P_b η τιμή πώλησης του αγοραστή για ζήτηση D_d και D αντίστοιχα και γ μια παράμετρος που εκφράζει την αύξηση στο κέρδος του αγοραστή.

Αν η τιμή πώλησης του αγοραστή είναι σταθερή, $P_{bd} = P_b$, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής;

$$TC_{bd} = P_b(D_d - \gamma D) + \gamma TC_b. \tag{3.6.3}$$

Η ποσότητα παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το κόστος του αγοραστή (σχέση (3.6.2)) για μια έκπτωση έστω $d_b(\gamma)$ είναι η $Q_b(\gamma) = \sqrt{\frac{2D_d S_b}{h_b P(1-d_b(\gamma))}}$ και το κέρδος του σε αυτή την περίπτωση θα είναι $\left[P_b - P(1-d_b(\gamma))\right]D_d - \sqrt{2D_d S_b h_b P(1-d_b(\gamma))}$.

Το $d_b(\gamma)$ ορίζεται από τον περιορισμό $\left[P_b - P(1-d_b(\gamma))\right]D_d - \sqrt{2D_d S_b h_b P(1-d_b(\gamma))} = \gamma TP_b^0$, όπου TP_b^0 το κέρδος του

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

προμηθευτή όταν δεν υπάρχει προσφορά έκπτωσης. Άρα $\left(d_b(\gamma), Q_b(\gamma)\right)$ η βέλτιστη πολιτική του αγοραστή, όταν υπάρχει προσφορά ποσοτικής έκπτωσης από τον προμηθευτή, που οδηγεί σε αύξηση του κέρδους του κατά $(\gamma-1)100\%$, $\gamma \geq 1$.

Η συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή για προσφορά έκπτωσης d_A είναι (βλέπε παράγραφο 2.8, Weng & Wong (1993)):

$$TP_s(Q_A, d_A, k) = (P-c)D_d - Pd_A D_d - S_p \frac{D_d}{Q_A} - S_s \frac{D_d}{kQ_A} - h_s Pm \frac{Q_A}{2}, \quad (3.6.4)$$

Όπου $h_s^{'} = h_s \frac{P}{c}$ και $m = (k-1)$ στην περίπτωση που ο προμηθευτής αγοράζει από κάποιον τρίτο το προϊόν ενώ $m = \left[(k-1) - (k-2)\frac{D_d}{R}\right]$ στην περίπτωση που ο προμηθευτής παράγει ο ίδιος το προϊόν με ρυθμό παραγωγής R.

Έστω ότι στόχος του προμηθευτή είναι να αυξήσει το κέρδος του κατά $(\rho-1)100\%$, $\rho \geq 1$. Τότε αν $\left(d_s(\rho), Q_s(\rho)\right)$ η βέλτιστη πολιτική του προμηθευτή, το $d_s(\rho)$ ορίζεται από τη σχέση:

$$TP_s\left(Q_s(\rho), d_s(\rho), k\right) = \rho TP_s^0,$$

όπου TP_s^0 το κέρδος του προμηθευτή όταν δεν υπάρχει προσφορά ποσοτικής έκπτωσης και υιοθετείται η EOQ του αγοραστή Q^* και $Q_s(\rho)$ η ποσότητα παραγγελίας που ικανοποιεί τον περιορισμό (3.6.3) του αγοραστή για έκπτωση $d_s(\rho)$.

Προφανώς θα πρέπει να ισχύει $d_s(\rho) \geq d_b(\gamma)$ και επομένως για τη βέλτιστη πολιτική έκπτωσης $\left(d_A^*, Q_A^*\right)$, η οποία θα αυξάνει το κέρδος του προμηθευτή και θα είναι αποδεκτή από τον αγοραστή, θα πρέπει να ισχύει $\left(d_A^*, Q_A^*\right) \in \left\{(d, Q) / d_s(\rho) \geq d \geq d_b(\gamma)\right\}$.

Από την σχέση (3.6.3), που εκφράζει τον περιορισμό του αγοραστή για το κέρδος του, με αντικατάσταση των σχέσεων (3.6.1) και (3.6.2) και μετά από υπολογισμούς προκύπτει η εξής δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς Q_A:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(1-d_A)Q_A^2-2\left\{\frac{(D_d-\gamma D)P_b}{Ph_b}+\frac{\gamma D-(1-d_A)D_d}{h_b}+\gamma Q^*\right\}Q_A+\frac{2S_bD_d}{Ph_b}=0$$

της οποίας οι λύσεις είναι $Q_{A1,2}=\frac{A\pm\sqrt{A^2-(1-d_A)Q^{*}\,D_d/D}}{1-d_A}$,

όπου $A=\frac{(D_d-\gamma D)P_b}{Ph_b}+\frac{\gamma D-(1-d_A)D_d}{h_b}+\gamma Q^*$.

Συνεπώς υπάρχουν 3 ποσότητες παραγγελίας που οδηγούν σε αύξηση του κέρδους του αγοραστή κατά $(\gamma-1)100\%$, $\gamma\geq 1$, η $Q_b(\gamma)$ και οι $Q_{A1,2}$.

Προφανώς, από τις τρεις παραπάνω λύσεις ο προμηθευτής θα επιλέξει την μεγαλύτερη:

$$Q_A=\frac{A+\sqrt{A^2-(1-d_A)Q^{*}\,D_d/D}}{1-d_A}. \tag{3.6.5}$$

Σημειώνεται ότι $Q_A\geq Q_b(\gamma)$, αφού καθώς το d_A αυξάνεται, αυξάνεται και το Q_A και είναι $d_A\geq d_b(\gamma)$.

Παρόλο που η EOQ του αγοραστή για έκπτωση d_A^* θα ήταν μικρότερη από την Q_A^* και θα του απέδιδε μεγαλύτερη αύξηση στο κέρδος του δεν μπορεί να την υιοθετήσει επειδή είναι μικρότερη από την ελάχιστη ποσότητα Q_A^* για την οποία ο προμηθευτής είναι διατεθειμένος να προσφέρει έκπτωση (price breakpoint).

Έστω ότι υπάρχουν r εναλλακτικές ποσοτικές εκπτώσεις από τις οποίες πρέπει να επιλέξει ο προμηθευτής $d_{A1}=d_b(\gamma)<d_{A2}<\ldots<d_{A\rho}=d_s(\rho)$. Για ποσοτική έκπτωση d_{Ai} η αντίστοιχη price breakpoint ποσότητα Q_{Ai} (η μεγαλύτερη που μπορεί να προσφέρει ο προμηθευτής) καθορίζεται μοναδικά από τη σχέση (3.6.5).

Από τη σχέση (3.6.4) παρατηρείται ότι το κέρδος του προμηθευτή για δοθέν d_{Ai} και Q_{Ai} είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση του ακεραίου k. Πρέπει λοιπόν να βρεθεί το μικρότερο k_i για το οποίο ισχύει $TP_s(k_i)\geq TP_s(k_i+1)$.

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω ανισότητα την (3.6.4) και μετά από υπολογισμούς προκύπτει:

$$k_i(k_i+1)\geq\left(\frac{Q_s}{Q_{Ai}}\right)^2, \tag{3.6.6}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου $Q_s = \sqrt{\frac{2S_s D_d}{h_s P}}$ στην περίπτωση που ο προμηθευτής αγοράζει το προϊόν και

$Q_s = \sqrt{\frac{2S_s D_d}{h_s P\left(1 - {D_d}/{R}\right)}}$ στην περίπτωση που το παράγει.

Θέτοντας $\left(\frac{Q_s}{Q_{Ai}}\right)^2 = L(L+1)$ και λύνοντας την εξίσωση προκύπτει $L = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{Q_s}{Q_{Ai}}\right)^2} - \frac{1}{2}$. Επομένως ο ακέραιος k_i που επαληθεύει την (3.6.6) είναι ο $\lceil L \rceil$.

Για $k_i = 1$ προκύπτει ότι η βέλτιστη πολιτική για τον προμηθευτή είναι η πολιτική «παρτίδα προς παρτίδα» όταν ισχύει $Q_s \le \sqrt{2} Q_{Ai}$.

Τελικά, η βέλτιστη πολιτική έκπτωσης για δοθείσες εναλλακτικές ποσοτικές εκπτώσεις $d_{A1} = d_b(\gamma) < d_{A2} < \ldots < d_{A\rho} = d_s(\rho)$ καθορίζεται ως εξής:

$$TP_s\left(Q_A^*, d_A^*, k^*\right) = \max_{i=1,\ldots,r}\left\{TP_s\left(Q_{Ai}, d_{Ai}, k_i\right)\right\}$$

$$\text{s.t.} \quad Q_{A1} = \sqrt{\frac{2D_d S_b}{h_b P\left(1 - d_b(\gamma)\right)}}$$

$$Q_{Ai} = \frac{A + \sqrt{A^2 - (1 - d_A) Q^* {D_d}/{D}}}{1 - d_A}$$

$$k_i = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{Q_s}{Q_{Ai}}\right)^2} - \frac{1}{2} \right\rceil, \quad i = 1, .., r.$$

Σενάριο 1- Περίπτωση 2

Έστω d_I το ποσοστό έκπτωσης για όλες τις μονάδες που παραγγέλλονται επιπλέον μιας ποσότητας Q (Q = price break-point). Τότε η μέση τιμή για μια ποσότητα

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

παραγγελίας έστω Q_l είναι $\left[PQ+P(1-d_l)(Q_l-Q)\right]/Q_l$ ή $P\left(1-d'\right)$, όπου $d'=d_l\left(1-\frac{Q}{Q_l}\right)$.

Το συνολικό κόστος του αγοραστή σε αυτή την περίπτωση ισούται με:

$$TC_{bd}=P\left(1-d'\right)D_d+S_b\frac{D_d}{Q_l}+h_bP\left(1-d'\right)\frac{Q_l}{2}, \tag{3.6.8}$$

όπου $D_d=D\left(P-Pd'\right)$.

Αν αντικαταστήσω στη συνάρτηση κόστους (3.6.8) $d'=d_l\left(1-\frac{Q}{Q_l}\right)$ προκύπτει:

$$\begin{aligned}TC_{bd}&=P\left(1-d_l+d_l\frac{Q}{Q_l}\right)D_d+S_b\frac{D_d}{Q_l}+h_bP\left(1-d_l+d_l\frac{Q}{Q_l}\right)\frac{Q_l}{2}\\&=P\left(1-d_l\right)D_d+\frac{\left(S_b+Pd_lQ\right)D_d}{Q_l}+h_bP\left(1-d_l\right)\frac{Q_l}{2}+h_bPd_l\frac{Q}{2}.\end{aligned}$$

Η ποσότητα παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το παραπάνω κόστος του αγοραστή είναι η:

$$Q_l=\sqrt{\frac{2\left(S_b+Pd_lQ\right)D_d}{h_bP\left(1-d_l\right)}} \tag{3.6.9}$$

και το ελάχιστο κόστος του ισούται με:

$$TC_{bd}=\sqrt{2\left(S_b+Pd_lQ\right)h_bP\left(1-d_l\right)D_d}+P\left(1-d_l\right)D_d+h_bPd_l\frac{Q}{2}. \tag{3.6.10}$$

Με αυτόν τον τρόπο το κόστος του αγοραστή γράφτηκε ως συνάρτηση των d_l και Q, που είναι οι μεταβλητές απόφασης του προμηθευτή.

Ο περιορισμός που θέτει ο αγοραστής για να αποδεχτεί την προσφορά έκπτωσης του προμηθευτή δίνεται από τη σχέση (3.6.3) και μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\xi TC_b=TC_{bd},\ \text{όπου}\ \ \xi=\gamma+\frac{P_b\left(D_d-\gamma D\right)}{TC_b}.$$

Ο παραπάνω περιορισμός με χρήση των σχέσεων (3.6.1) και (3.6.10) γράφεται:

$$\xi\left(PD+\sqrt{2DS_bh_bP}\right)=\sqrt{2\left(S_b+Pd_lQ\right)h_bP\left(1-d_l\right)D_d}+P\left(1-d_l\right)D_d+h_bPd_l\frac{Q}{2}.$$

Μετά από πράξεις προκύπτει:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\xi\left(h_bQ^* + D\right) - \left(1-d_l\right)D_d - h_b d_l \frac{Q}{2} = \sqrt{\left(1-d_l\right)D_d}\sqrt{\frac{\left(h_bQ^*\right)^2}{D} + 2h_b d_l Q},$$

όπου Q^* η EOQ του αγοραστή χωρίς προσφορά έκπτωσης.

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ως μια δευτεροβάθμια εξίσωση του Q, για σταθερό $d^{'}$, της οποίας η λύση είναι:

$$Q = \frac{2}{h_b d_l}\left\{\xi\left(h_bQ^* + D\right) + \left(1-d_l\right)D_d - \sqrt{\left(1-d_l\right)D_d}\sqrt{4\xi\left(h_bQ^* + D\right) + \frac{\left(h_bQ^*\right)^2}{D}}\right\}.$$

Η συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή για αυτή την πολιτική εκπτώσεων ισούται με:

$$TP_s\left(Q, d_l, k\right) = \left(P-c\right)D_d - Pd_l\left(1-\frac{Q}{Q_l}\right)D_d - S_p\frac{D_d}{Q_l} - S_s\frac{D_d}{kQ_l} - h_s Pm\frac{Q_l}{2}.$$

Τότε αποδεικνύεται όπως και στην πρώτη περίπτωση ότι, για δοθείσες εναλλακτικές εκπτώσεις d_{li}, $i = 1, 2, \ldots, r$, η βέλτιστη πολιτική έκπτωσης του προμηθευτή προσδιορίζεται ως εξής:

$$TP_s\left(Q^*, d_l^*, k^*\right) = \max_{i=1,\ldots,r}\left\{TP_s\left(Q_i, d_{li}, k_i\right)\right\}$$

$$\text{s.t.}\quad Q_i = \frac{2}{h_b d_{li}}\left\{\xi\left(h_bQ^* + D\right) + \left(1-d_{li}\right)D_d - \sqrt{\left(1-d_{li}\right)D_d}\sqrt{4\xi\left(h_bQ^* + D\right) + \frac{\left(h_bQ^*\right)^2}{D}}\right\},$$

$$k_i = \left[\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{Q_s}{Q_{li}}\right)^2} - \frac{1}{2}\right],\quad i = 1, .., r,$$

όπου $\xi = \gamma + \dfrac{P_b\left(D_d - \gamma D\right)}{TC_b}$, η Q_{li} είναι συνάρτηση των Q_i και d_{li} και δίνεται από τη σχέση (3.6.9), η Q_s δίνεται όπως ορίστηκε στην περίπτωση 1, όπου αντί για d_A είναι $d^{'}$.

Σενάριο 2

Έστω d το ποσοστό έκπτωσης που προσφέρει ο προμηθευτής για παραγγελίες μεγαλύτερες από Q (Q= price breakpoint).

Το από κοινού κέρδος ισούται με το άθροισμα των κερδών του προμηθευτή και του αγοραστή:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$JTP(Q,d,k)=TP_s(Q,d,k)+TP_b(Q,d),$$

όπου $$TP_s(Q,d,k)=(P-c)D_d-PdD_d-S_p\frac{D_d}{Q}-S_s\frac{D_d}{kQ}-h_sPm\frac{Q}{2}$$

και $$TP_b=\left[P_b-P(1-d)\right]D_d-S_b\frac{D_d}{Q}-h_bP(1-d)\frac{Q}{2}.$$

Επομένως:

$$JTP(Q,d,k)=(P_b-c)D_d-\left(S_b+S_p+\frac{S_s}{k}\right)\frac{D_d}{Q}-P\frac{Q}{2}\{h_sm+h_b(1-d)\}. \quad (3.6.11)$$

Έστω ότι ο προμηθευτής είναι διατεθειμένος να προσφέρει ποσοτική έκπτωση (d,Q) που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος μόνο εάν το δικό του κέρδος αυξηθεί τουλάχιστον κατά $(\delta_s^*-1)100\%$, $\delta_s^*\geq 1$. Ομοίως, έστω ότι ο αγοραστής για να δεχτεί την ποσοτική έκπτωση θέτει την προϋπόθεση το κέρδος του να αυξηθεί τουλάχιστον κατά $(\delta_b^*-1)100\%$, $\delta_b^*\geq 1$.

Όταν δεν υπάρχει προσφορά έκπτωσης, $d_0=0$, έστω k_0 το ακέραιο πολλαπλάσιο της EOQ Q^* του αγοραστή που αποτελεί την παραγγελία του προμηθευτή, τότε το κέρδος του προμηθευτή χωρίς έκπτωση είναι $TP_s^0=TP_s(Q^*,d_0,k_0)$ και του αγοραστή $TP_b^0=TP_b(Q^*,d_0)$. Για πολιτική έκπτωσης (d,Q) το κέρδος του προμηθευτή αυξάνεται κατά $(\delta_s(d)-1)100\%$ και του αγοραστή κατά $(\delta_b(d)-1)100\%$, όπου $\delta_s(d)=\dfrac{TP_s(Q,d,k)}{TP_s^0}$ και $\delta_b(d)=\dfrac{TP_b(Q,d)}{TP_b^0}$.

Επομένως για να γίνει αποδεκτή η πολιτική έκπτωσης (d,Q) και από τον προμηθευτή και από τον αγοραστή πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

$$\delta_s(d)\geq\delta_s^*, \quad (3.6.12)$$

$$\delta_b(d)\geq\delta_b^*. \quad (3.6.13)$$

Οι παραπάνω συνθήκες είναι γενικές και εξαρτώνται από τις απαιτήσεις που έχουν ο προμηθευτής και αγοραστής αντίστοιχα για την αύξηση του κέρδους τους καθώς μεγιστοποιείται το συνολικό κέρδος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μεγιστοποιώντας την συνάρτηση (3.6.11), για δοθέν d^* και k^*, ως προς Q προκύπτει η ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος του συστήματος:

$$Q^{**} = \sqrt{\frac{2\left(S_b + S_p + \frac{S_s}{k}\right)D_d}{P\{h_s m + h_b(1-d)\}}}. \tag{3.6.14}$$

Επίσης η μερική παράγωγος της (3.6.11) ως προς d είναι:

$$\frac{\partial JTP}{\partial d} = \left(P_b - c - \frac{S_b + S_p + S_s/k}{Q}\right)\frac{dD_d}{dd} + Ph_b\frac{Q}{2}.$$

Εξ ορισμού είναι $\frac{dD_d}{dd} > 0$ (αφού η ζήτηση θεωρήθηκε φθίνουσα συνάρτηση της τιμής) και επειδή η συνάρτηση JTP είναι προφανώς πάντα θετική θα ισχύει $\left(P_b - c - \frac{S_b + S_p + S_s/k}{Q}\right) > 0$. Επομένως προκύπτει ότι $\frac{\partial JTP}{\partial d} > 0$ και άρα η από κοινού συνάρτηση κέρδους είναι αύξουσα συνάρτηση του ποσοστού έκπτωσης d.

Από το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει ότι η βέλτιστή έκπτωση φράσσεται από τον περιορισμό κέρδους του προμηθευτή (3.6.12).

Επομένως η πολιτική έκπτωσης του προμηθευτή $\left(Q^{**}, d^*, k^*\right)$ που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος του συστήματος καθορίζεται μοναδικά από τις σχέσεις (3.6.12), (3.6.14) και τον μικρότερο ακέραιο για τον οποίο ισχύει $JTP(k) \geq JTP(k+1)$ υπό τον περιορισμό (3.6.13).

Έστω η ειδική περίπτωση που η ζήτηση είναι σταθερή, $\frac{dD_d}{d(P-Pd)} = 0$, και το κόστος διατήρησης αποθέματος του αγοραστή είναι ανεξάρτητο της τιμής του προϊόντος. Τότε το συνολικό κέρδος είναι συνάρτηση μόνο της ποσότητας παραγγελίας και ανεξάρτητη του ποσοστού έκπτωσης:

$$JTP(Q,k) = (P_b - c)D - \left(S_b + S_p + \frac{S_s}{k}\right)\frac{D}{Q} - P\frac{Q}{2}\{h_s m + h_b\}.$$

Η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας σε αυτή την περίπτωση είναι:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$Q^{**}=\sqrt{\frac{2\left(S_b+S_p+\frac{S_s}{k}\right)D}{P\{h_s m+h_b\}}}.$$

Όταν η ζήτηση του αγοραστή είναι ελαστική ως προς την τιμή, η ποσοτική έκπτωση που προσφέρει ο προμηθευτής παίζει δυο ρόλους: πρώτον αυξάνει την ζήτηση και δεύτερον μειώνει το λειτουργικό κόστος του προμηθευτή. Έστω ότι το συνολικό κόστος του συστήματος, για πολιτική έκπτωσης $\left(Q^{**},d^*,k^*\right)$, αυξάνεται κατά $\left(\delta_J^*-1\right)100\%$, ($\delta_J^*\geq 1$).
Τότε η αύξηση αυτή διαχωρίζεται σε αυτή λόγω της αυξημένης ζήτησης, έστω $a_d 100\%$ και σε αυτή λόγω της μείωσης του λειτουργικού κόστους, έστω $a_t 100\%$:

$$a_d+a_t=\delta_J^*-1,$$

όπου

$$a_d=\frac{(P_b-c)(D_d-D)}{JTP_0},$$

$$a_t=\frac{TC_{JU}-TC_{JD}}{JTP_0},$$

$TC_{JU}=\left\{1+\frac{1}{2}\left[\frac{S_p+S_s/k_0}{S_b}+\frac{h_s}{h_b}m_0\right]\right\}\sqrt{2S_bDPh_b}$ (το συνολικό κόστος χωρίς ποσοτική έκπτωση),

$TC_{JD}=\sqrt{2\left(S_b+S_p+S_s/k_0\right)D_dP\left[h_sm^*+h_b\left(1-d^*\right)\right]}$ (το συνολικό κόστος με ποσοτική έκπτωση και JTP_0 το συνολικό κόστος χωρίς ποσοτική έκπτωση).

Όταν η ζήτηση είναι σταθερή, τότε $a_d=0$, ($D_d=D$).

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση της ελαστικής ως προς την τιμή ζήτησης ο προμηθευτής θα προσφέρει τόση έκπτωση όση απαιτείται ώστε να φτάσει στο επιθυμητό επίπεδο κέρδους του. Αντίθετα στην περίπτωση της σταθερής ζήτησης ο προμηθευτής προσφέρει την ελάχιστη έκπτωση που απαιτεί ο αγοραστής ώστε να αποδεχτεί να αλλάξει την ποσότητα παραγγελίας του.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4. ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΥΠΟ ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΡΟΜΗΘΕΥΤΗ – ΑΓΟΡΑΣΤΗ: ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΕΚΠΤΩΣΕΩΝ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων στα οποία ο καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων γίνεται με τη βοήθεια της θεωρίας παιγνίων. Πριν την παρουσίαση των μοντέλων κρίνεται χρήσιμο να δοθούν κάποιες εισαγωγικές έννοιες.

4.1 Εισαγωγικές έννοιες

Τα τελευταία 30 χρόνια, η θεωρία παιγνίων έχει βρει ευρύτατη εφαρμογή σε πολλούς τομείς. Σημαντική είναι η συμβολή της στα οικονομικά όπως επίσης και στην επιχειρησιακή έρευνα. Η θεωρία παιγνίων ξεκίνησε ουσιαστικά από τους von Neumann και Morgenstern με το βιβλίο που εξέδωσαν το 1944 μελετώντας παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Ένας από τους πιο σημαντικούς περαιτέρω θεμελιωτές είναι ο John F.Nash που μελέτησε παίγνια μη-μηδενικού αθροίσματος και εισήγαγε την «ισορροπία κατά Nash». Το κύριο αντικείμενο της θεωρίας παιγνίων είναι η ανάλυση αποφάσεων σε καταστάσεις (παιχνίδια) στρατηγικής αλληλεπίδρασης.

Στη συνέχεια δίνονται κάποιες βασικές έννοιες της θεωρίας παιγνίων που χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση των μοντέλων του Κεφαλαίου.

- ***Παίγνια δυο παικτών μηδενικού και μη-μηδενικού αθροίσματος***

Σε ένα παίγνιο κάθε παίκτης έχει στη διάθεση του έναν αριθμό, πεπερασμένο ή άπειρο, επιλογών, που αναφέρονται ως στρατηγικές. Έστω X_i το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη i. Για την περίπτωση παιγνίων με δυο παίκτες $i=1,2$. Επίσης, σε κάθε παίκτη i αντιστοιχεί μια συνάρτηση χρησιμότητας u_i η οποία απεικονίζει κάθε συνδυασμό στρατηγικών στους πραγματικούς αριθμούς:

$$u_i : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Ονομάζουμε παίγνια μηδενικού αθροίσματος τα παίγνια εκείνα όπου η απώλεια του ενός παίκτη είναι η αμοιβή του άλλου. Σε αυτή την περίπτωση το άθροισμα των

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

συναρτήσεων χρησιμότητας των δυο παικτών είναι μηδέν για κάθε πιθανό συνδυασμό των στρατηγικών τους: $u_1(x_1,x_2)+u_2(x_1,x_2)=0,\ \forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

Στα παίγνια μη-μηδενικού αθροίσματος και ειδικά στα παίγνια σταθερού αθροίσματος το άθροισμα των συναρτήσεων χρησιμότητας των δυο παικτών είναι ένας σταθερός αριθμός: $u_1(x_1,x_2)+u_2(x_1,x_2)=c,\ \forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

Για ένα συνδυασμό στρατηγικών (x_1^*,x_2^*) λέμε ότι έχουμε ισορροπία κατά Nash όταν ισχύει: $u_1(x_1^*,x_2^*)\geq u_1(x_1,x_2^*)$ και $u_2(x_1^*,x_2^*)\geq u_2(x_1^*,x_2)$. Κάθε πεπερασμένο παίγνιο έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας.

- ***Pareto αποτελεσματικότητα***

Η Pareto αποτελεσματικότητα, που πήρε το όνομα της από τον Ιταλό οικονομολόγο Vilfredo Pareto, ορίζεται ως εξής: Μια κατανομή αγαθών θα λέγεται κατά Pareto αποτελεσματική όταν δεν υπάρχει καμία άλλη κατανομή των αγαθών αυτών για την οποία κάποιος θα βρεθεί σε καλύτερη θέση χωρίς να χειροτερέψει τη θέση κάποιου άλλου.

- ***Μοντέλα διαπραγμάτευσης***

Ένα διαπραγματευτικό πρόβλημα αποτελείται από το εφικτό σύνολο, το σύνολο των Pareto αποτελεσματικών λύσεων και το σημείο διαφωνίας.

Το μοντέλο διαπραγμάτευσης του Nash, υποθέτοντας ότι στην περίπτωση διαφωνίας η χρησιμότητα για τον κάθε παίκτη θα είναι μηδέν, προβλέπει ότι η διαπραγματευτική λύση είναι αυτή για την οποία μεγιστοποιείται το γινόμενο των ατομικών συναρτήσεων χρησιμότητας των δυο παικτών και

Το μοντέλο διαπραγμάτευσης των Kalai & Smordinsky προβλέπει ότι η διαπραγματευτική λύση θα αντιστοιχεί στο σημείο όπου το σύνολο των αποτελεσματικών επιλογών τέμνει τη γραμμή που ενώνει το σημείο διαφωνίας με το «ιδανικό σημείο», δηλαδή το σημείο στο οποίο και οι δυο παίκτες πετυχαίνουν μέγιστη χρησιμότητα.

- ***Ισορροπία Stackelberg***

Στα μοντέλα μη-συνεργασίας συνήθως ο ένας από τους δυο παίκτες βρίσκεται σε πιο ισχυρή θέση από τον άλλον και έχει την δυνατότητα να επιβάλλει τις στρατηγικές

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

του. Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να εφαρμοστεί η ισορροπία Stackelberg η οποία καθορίζει την συμπεριφορά του παίκτη που βρίσκεται σε ισχυρή θέση, ο οποίος ονομάζεται «ηγέτης», και την αντίδραση του άλλου παίκτη, ο οποίος ονομάζεται «ακόλουθος», στην απόφαση του ηγέτη. Το παιχνίδι εξελίσσεται ως εξής: Ο «ηγέτης» ανακοινώνει την στρατηγική του και την επιβάλλει στον αντίπαλο του. Ο άλλος παίκτης ανταποκρίνεται στην ενέργεια του «ηγέτη» προσπαθώντας να μεγιστοποιήσει το δικό του κριτήριο βελτιστοποίησης. Το παιχνίδι παίζεται ανεξάρτητα και χωρίς συνεργασία με τον κάθε παίκτη να προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το ατομικό του κέρδος.

4.2 Καθορισμός Pareto αποτελεσματικών ποσοτικών εκπτώσεων με τη χρήση καμπυλών αδιαφορίας για το κόστος του αγοραστή και το κέρδος του προμηθευτή

Στο μοντέλο των *Kohli & Park (1989)* που παρουσιάζεται σε αυτή την ενότητα, θεωρείται μια πολιτική εκπτώσεων $x=(Q_x,P_x)$, η οποία αναλογεί σε οποιοδήποτε είδος έκπτωσης (επί της ολικής ποσότητας παραγγελίας ή κλιμακωτά αυξανόμενη) για την οποία η μέση μοναδιαία τιμή των Q_x μονάδων είναι P_x. Έτσι η P_x αντιστοιχεί στα έσοδα που αποφέρει στον προμηθευτή μια παραγγελία μεγέθους Q_x διαιρεμένα με το Q_x.

Χωρίς προσφορά έκπτωσης, η συνάρτηση κόστους του αγοραστή για την παραγγελία Q μονάδων προϊόντος, είναι:

$$TC_b = DP_0 + S_b\frac{D}{Q} + h_b^{'}\frac{Q}{2}, \tag{4.2.1}$$

όπου P_0 η μέση μοναδιαία τιμή του προϊόντος όταν δεν υπάρχει έκπτωση.

Σημειώνεται ότι στο μοντέλο αυτό το κόστος διατήρησης αποθέματος θεωρείται ανεξάρτητο της τιμής του προϊόντος.

Προφανώς η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή σε αυτή την περίπτωση είναι η γνωστή EOQ $Q_0 = \sqrt{\dfrac{2S_bD}{h_b^{'}}}$.

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

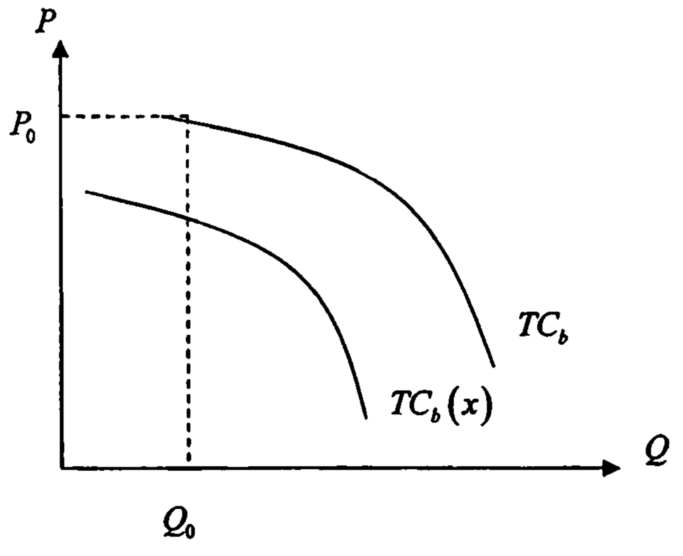
Αν ο προμηθευτής προσφέρει έκπτωση $x=(Q_x,P_x)$ για παραγγελία Q_x μονάδων από τον αγοραστή, τότε η συνάρτηση κόστους του αγοραστή θα είναι:

$$TC_b(x)=DP_x+S_b\frac{D}{Q_x}+h_b^{'}\frac{Q_x}{2}. \qquad (4.2.2)$$

Έστω η διαφορά $\Delta TC_b(x)=TC_b-TC_b(x)$, η οποία παριστάνει την μείωση $(\Delta TC_b(x)>0)$ ή την αύξηση $(\Delta TC_b(x)<0)$ στο κόστος του αγοραστή που προκαλείται από την ποσοτική έκπτωση x. Αφαιρώντας από την (4.2.2) την (4.2.1) προκύπτει η εξής σχέση:

$$P_x=P_0-\frac{\Delta TC_b(x)}{D}-S_b\left(\frac{1}{Q_x}-\frac{1}{Q_0}\right)-\frac{h_b^{'}}{2D}(Q_x-Q_0). \qquad (4.2.3)$$

Επειδή $\frac{d^2P_x}{dQ_x^2}=-\frac{2S_b}{Q_x^3}<0$, η εξίσωση (4.2.3) είναι μια κοίλη συνάρτηση ως προς Q_x και μπορεί να παραστήσει μια καμπύλη αδιαφορίας για όλους τους συνδυασμούς (Q_x,P_x) για τους οποίους ο αγοραστής θα έχει ένα δοθέν κόστος $TC_b(x)=TC_b-\Delta TC_b(x)$.



Σχήμα 4.1. Καμπύλες αδιαφορίας κόστους του αγοραστή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Προφανώς για $\Delta TC_b(x)=0$ η καμπύλη αδιαφορίας TC_b θα διέρχεται από το σημείο (Q_0,P_0) και για κάθε $\Delta TC_b(x)>0(<0)$ η καμπύλη αδιαφορίας της συνάρτησης κόστους του αγοραστή θα πλησιάζει (απομακρύνεται) από την αρχή των αξόνων.

Επομένως προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα για τον αγοραστή:

1. Είναι αδιάφορος ανάμεσα στην αγορά ποσότητας Q_0 σε τιμή χωρίς έκπτωση P_0 και στην υιοθέτηση οποιασδήποτε προσφοράς έκπτωσης (Q_x,P_x) η οποία θα ανήκει στην καμπύλη αδιαφορίας TC_b.
2. Προτιμά οποιαδήποτε προσφορά έκπτωσης (Q_x,P_x) η οποία ανήκει στην περιοχή κάτω από την καμπύλη αδιαφορίας TC_b από καμία έκπτωση.
3. Προτιμά να αγοράσει ποσότητα Q_0 σε τιμή χωρίς έκπτωση P_0 από το να υιοθετήσει οποιαδήποτε προσφορά έκπτωσης (Q_x,P_x) η οποία θα ανήκει στην περιοχή πάνω από την καμπύλη αδιαφορίας TC_b.

Όσον αφορά τον προμηθευτή, το κόστος του για παραγγελία ποσότητας Q_0 από τον αγοραστή και τιμή πώλησης του προϊόντος P_0, αποτελείται από το κόστος επεξεργασίας των παραγγελιών του αγοραστή, τη μείωση του κόστος κεφαλαίου λόγω της αγοράς του προϊόντος από τον αγοραστή και κάποιο σταθερό κόστος FC,

$$S_p\frac{D}{Q_0}-h_s^{'}\frac{Q_0}{2}+FC \text{ (βλέπε ενότητες 3.1 και 3.3).}$$

Η συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή σε αυτή την περίπτωση (έσοδα – κόστος), θα είναι:

$$TP_s=D(P_0-c)-S_p\frac{D}{Q_0}+h_s^{'}\frac{Q_0}{2}-FC \qquad (4.2.4)$$

Στην περίπτωση που ο προμηθευτής επιλέξει να προσφέρει ποσοτική έκπτωση $x=(Q_x,P_x)$ στον αγοραστή η συνάρτηση κέρδους του θα είναι:

$$TP_s(x)=D(P_x-c)-S_p\frac{D}{Q_x}+h_s^{'}\frac{Q_x}{2}-FC\,. \qquad (4.2.5)$$

Αφαιρώντας τη σχέση (4.2.4) από τη (4.2.5) προκύπτει:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

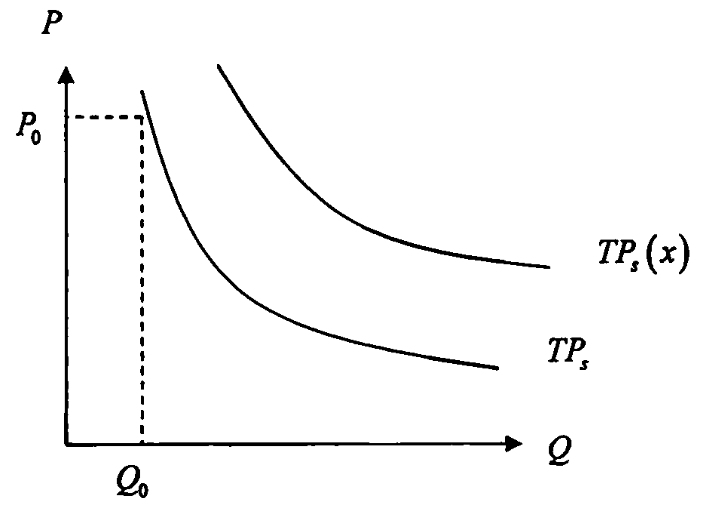
$$TP_s(x) = DP_x - DP_0 - S_p D\left(\frac{1}{Q_x} - \frac{1}{Q_0}\right) + \frac{h_s^{'}}{2}(Q_x - Q_0) + TP_s. \qquad (4.2.6)$$

Έστω $TP_s(x) = TP_s + \Delta TP_s(x)$, όπου $\Delta TP_s(x)$ η αύξηση (όταν $\Delta TP_s(x) > 0$) ή η μείωση (όταν $\Delta TP_s(x) < 0$) στα κέρδη του προμηθευτή που προκαλείται από την προσφορά της ποσοτικής έκπτωσης $x = (Q_x, P_x)$. Προφανώς ο προμηθευτής θα επιλέξει να προσφέρει ποσοτική έκπτωση στον αγοραστή μόνο όταν $TP_s(x) > TP_s$.

Από τη σχέση (4.2.6) προκύπτει:

$$P_x = P_0 + \frac{\Delta TP_s(x)}{D} + S_p\left(\frac{1}{Q_x} - \frac{1}{Q_0}\right) - \frac{h_s^{'}}{2}(Q_x - Q_0) \qquad (4.2.7)$$

Επειδή $\frac{d^2 P_x}{dQ_x^2} = \frac{2S_p}{Q_x^3} > 0$, η εξίσωση (4.2.7) είναι μια κυρτή συνάρτηση ως προς Q_x και μπορεί να παραστήσει μια καμπύλη αδιαφορίας για όλους τους συνδυασμούς (Q_x, P_x) για τους οποίους ο προμηθευτής θα έχει ένα δοθέν κέρδος $TP_s(x) = TP_s + \Delta TP_s(x)$.



Σχήμα 4.2. Καμπύλες αδιαφορίας κέρδους του προμηθευτή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Προφανώς για $\Delta TP_s(x)=0$ η καμπύλη **αδιαφορίας** TP_s θα διέρχεται από το σημείο (Q_0,P_0) και για $\Delta TP_s(x)>0(<0)$ θα απομακρύνεται (πλησιάζει) από την αρχή των αξόνων.

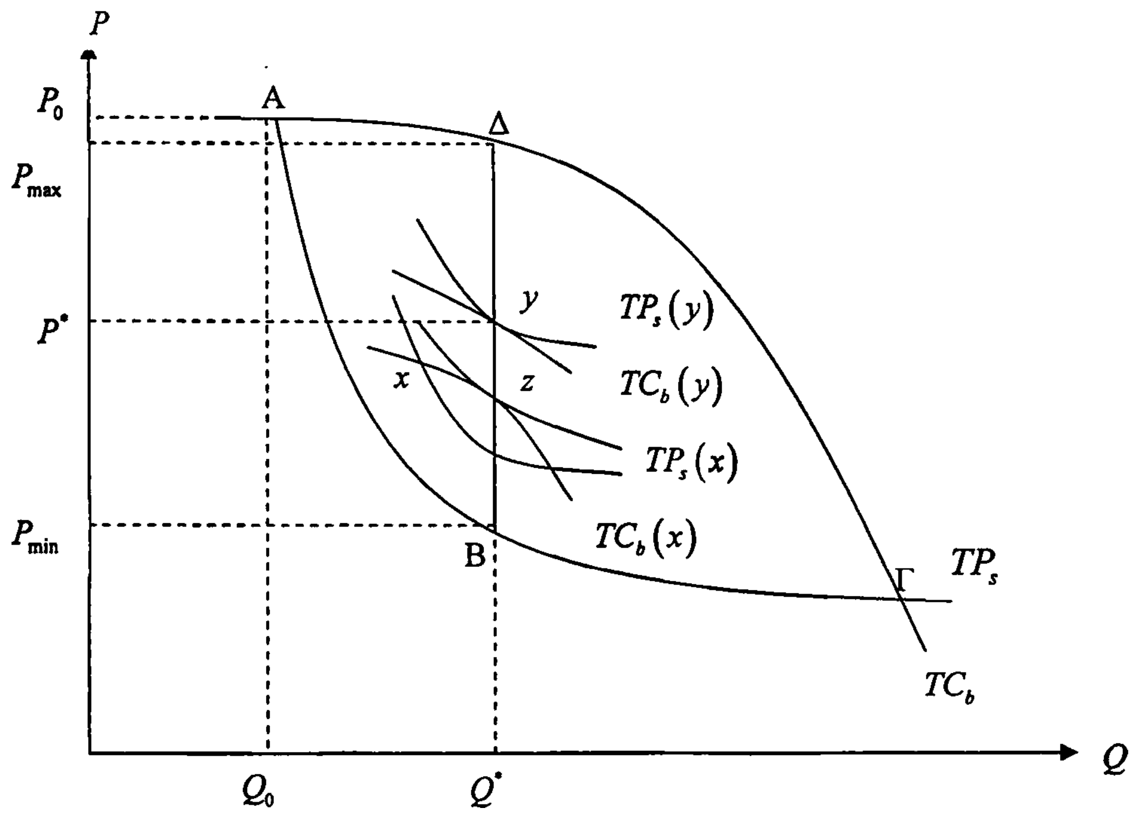
Επομένως, όπως και για τον αγοραστή, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα για τον προμηθευτή:

1. Είναι αδιάφορος ανάμεσα στην πώληση ποσότητας Q_0 σε τιμή χωρίς έκπτωση P_0 και στην προσφορά οποιασδήποτε έκπτωσης (Q_x,P_x) η οποία θα ανήκει στην καμπύλη αδιαφορίας TP_s.
2. Προτιμά να προσφέρει οποιαδήποτε έκπτωση (Q_x,P_x) η οποία ανήκει στην περιοχή πάνω από την καμπύλη αδιαφορίας TP_s από το να μην προσφέρει καμία έκπτωση.
3. Προτιμά να πουλήσει ποσότητα Q_0 σε τιμή χωρίς έκπτωση P_0 από το να προσφέρει οποιαδήποτε έκπτωση (Q_x,P_x) η οποία θα ανήκει στην περιοχή κάτω από την καμπύλη αδιαφορίας TP_s.

Αποδείχτηκε προηγουμένως ότι οι καμπύλες TP_s και TC_b περνούν και οι δύο από το σημείο (Q_0,P_0). Επειδή όμως η κλίση της καμπύλης TC_b, η οποία ισούται με $\frac{S_b}{Q_x^2}-\frac{h_b'}{2D}$, είναι μηδέν για $Q_x=Q_0=\sqrt{\frac{2S_bD}{h_b}}$ και η κλίση της καμπύλης TP_s, η οποία είναι $-\frac{S_p}{Q_x^2}-\frac{h_s'}{2D}$, είναι αρνητική για $Q_x=Q_0=\sqrt{\frac{2S_bD}{h_b}}$, προφανώς οι δυο καμπύλες δεν εφάπτονται αλλά τέμνονται στο σημείο (Q_0,P_0). Επομένως, λόγω του ότι η TP_s είναι κυρτή και η TC_b κοίλη, θα υπάρχουν πάντα τιμές των Q και P για τις οποίες θα ισχύει $\Delta TP_s(x)\geq 0$ και $\Delta TC_b(x)\geq 0$ ταυτόχρονα.

Όλα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω παριστάνονται στο παρακάτω *Σχήμα 4.3*.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 4.3. Εφικτές και Pareto αποτελεσματικές ποσοτικές εκπτώσεις

Μια έκπτωση $x=(Q_x,P_x)$ η οποία ικανοποιεί ταυτόχρονα τους περιορισμούς $\Delta TP_s(x)\geq 0$ και $\Delta TC_b(x)\geq 0$, θα ανήκει στην περιοχή ΑΒΓΔ του *Σχήματος 4.3* και θα λέγεται εφικτή. Επομένως το σύνολο

$$X=\{(Q_x,P_x)/\Delta TP_s(x)\geq 0,\Delta TC_b(x)\geq 0,Q_x\neq Q_0,P_x\neq P_0\}$$

θα είναι το σύνολο των εφικτών εκπτώσεων.

Ο αγοραστής και ο προμηθευτής θα επιλέξουν μια έκπτωση του συνόλου X διαπραγματευόμενοι την κατανομή των κερδών.

Έστω x και y δυο εκπτώσεις που ανήκουν στο σύνολο X. Τότε η x υπερισχύει κατά Pareto από την y όταν ισχύει:

$$TC_b(x)<TC_b(y) \quad \text{και} \quad TP_s(x)\geq TP_s(y) \tag{4.2.8}$$

$$\text{ή} \quad TC_b(x)\leq TC_b(y) \quad \text{και} \quad TP_s(x)>TP_s(y) \tag{4.2.9}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνεπώς, η x υπερισχύει κατά Pareto από την y όταν :

a) Το κόστος του αγοραστή για έκπτωση x είναι μικρότερο από ότι με έκπτωση y και το κέρδος του προμηθευτή είναι τουλάχιστον ίσο ή

b) Το κέρδος του προμηθευτή είναι μεγαλύτερο για έκπτωση x από ότι με έκπτωση y και το κόστος του αγοραστή είναι το πολύ ίσο.

Αν $y \in X$ είναι μια έκπτωση η οποία δεν ικανοποιεί ούτε την (4.2.8) ούτε την (4.2.9) τότε η y είναι Pareto αποτελεσματική.

Θα αποδειχθεί ότι αν Y το υποσύνολο όλων των εκπτώσεων του X οι οποίες ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο των σημείων όπου οι καμπύλες αδιαφορίας του αγοραστή και του προμηθευτή εφάπτονται, τότε το Y αποτελεί το σύνολο όλων των Pareto αποτελεσματικών εκπτώσεων του X.

Παραπέμποντας στο *Σχήμα 4.3*, έστω το σημείο $y \in X$ στο οποίο εφάπτονται οι καμπύλες αδιαφορίας $TC_b(y)$ και $TP_s(y)$. Παρόλο που το κόστος του αγοραστή παραμένει το ίδιο για οποιοδήποτε σημείο (πολιτική έκπτωσης) πάνω στην καμπύλη $TC_b(y)$ το κέρδος του προμηθευτή μεγιστοποιείται για το σημείο y αυτής της καμπύλης. Επομένως το σημείο y υπερισχύει από οποιοδήποτε άλλο σημείο της καμπύλης $TC_b(y)$. Ομοίως, ενώ το κέρδος του προμηθευτή θα είναι το ίδιο για κάθε σημείο της καμπύλης $TP_s(y)$, το κόστος του αγοραστή ελαχιστοποιείται μόνο στο σημείο y αυτής της καμπύλης και άρα το σημείο y υπερισχύει και από οποιοδήποτε άλλο σημείο της καμπύλης $TP_s(y)$.

Έστω τώρα ένα σημείο $x \in X$ το οποίο δεν ανήκει στις καμπύλες $TC_b(y)$ και $TP_s(y)$. Τότε το σημείο x είτε θα ανήκει σε κάποια ψηλότερη από την $TC_b(y)$ καμπύλη αδιαφορίας $\left(TC_b(x) > TC_b(y)\right)$, οπότε ο αγοραστής προφανώς θα προτιμήσει την y από τη x, είτε σε κάποια καμπύλη χαμηλότερη από την $TP_s(y)$ $\left(TP_s(x) < TP_s(y)\right)$, οπότε ο προμηθευτής θα προτιμήσει επίσης την y από τη x. Και στις δύο περιπτώσεις η y υπερισχύει από τη x και αφού $x(\neq y)$ ένα τυχαίο σημείο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στο X, μπορούμε να γενικεύσουμε ότι το y υπερισχύει από οποιοδήποτε άλλο σημείο του X.

Αποδείχτηκε επομένως ότι $y \in Y$ και άρα το σύνολο των Pareto αποτελεσματικών εκπτώσεων δεν είναι κενό. Επίσης, αφού $TC_b(y)$ και $TP_s(y)$ είναι οποιεσδήποτε τυχαίες καμπύλες με κοινό σημείο επαφής στο X, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου οι καμπύλες αδιαφορίας του αγοραστή και του προμηθευτή εφάπτονται στο X, αποτελεί ένα σύνολο Pareto αποτελεσματικών εκπτώσεων του X έστω Z.

Τέλος αρκεί να αποδειχτεί ότι τα μοναδικά σημεία του X που είναι Pareto αποτελεσματικά είναι τα σημεία που ανήκουν στο Z, δηλαδή $Y = Z$. Έστω $x \in X - Z$ ένα σημείο (έκπτωση) που ανήκει σε μια καμπύλη αδιαφορίας $TC_b(x)$ και έστω $z \in Z$ το σημείο επαφής της $TC_b(x)$ με κάποια καμπύλη $TP_s(z)$, τότε ο προμηθευτής προφανώς προτιμά το z από το x ενώ ο αγοραστής είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο, επομένως το z υπερισχύει από το x. Για κάθε σημείο λοιπόν $x \in X - Z$ υπάρχει κάποιο σημείο $z \in Z$ το οποίο υπερισχύει του x.

Τελικά προκύπτει ότι τα μοναδικά Pareto αποτελεσματικά σημεία (εκπτώσεις) είναι αυτά που ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο των σημείων του X όπου οι καμπύλες αδιαφορίας του αγοραστή και του προμηθευτή εφάπτονται.

Οι κλίσεις των καμπυλών αδιαφορίας του αγοραστή και του προμηθευτή που περιγράφονται από τις εξισώσεις (4.2.3) και (4.2.7) είναι $\frac{S_b}{Q_x^2} - \frac{h_b'}{2D}$ και $-\frac{S_p}{Q_x^2} - \frac{h_s'}{2D}$ αντίστοιχα. Το σημείο επαφής των δυο καμπυλών θα είναι αυτό για το οποίο ισχύει $\frac{S_b}{Q_x^2} - \frac{h_b'}{2D} = -\frac{S_p}{Q_x^2} - \frac{h_s'}{2D}$, επομένως

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(S_b + S_p)D}{h_b' - h_s'}} \tag{4.2.10}$$

Άρα όλες οι Pareto αποτελεσματικές εκπτώσεις αντιστοιχούν στην ποσότητα παραγγελίας Q^* και διαφέρουν μόνο ως προς την τιμή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στο *Σχήμα 4.3* οι Pareto αποτελεσματικές εκπτώσεις περιγράφονται από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ, όπου $P_{\max}$ και $P_{\min}$ τα σημεία όπου η ευθεία $Q = Q^*$ τέμνει την καμπύλη TC_b και την TP_s αντίστοιχα.

Από τη σχέση (4.2.3) για $Q_x = Q^*$ και $\Delta TC_b(x) = 0$ προκύπτει:

$$P_{\max} = P_0 - S_b\left(\frac{1}{Q^*} - \frac{1}{Q_0}\right) - \frac{h_b'}{2D}\left(Q^* - Q_0\right) \tag{4.2.11}$$

και από τη σχέση (4.2.7) για $Q_x = Q^*$ και $\Delta YP_s(x) = 0$:

$$P_{\min} = P_0 + S_p\left(\frac{1}{Q^*} - \frac{1}{Q_0}\right) - \frac{h_s'}{2D}\left(Q^* - Q_0\right). \tag{4.2.12}$$

Επομένως,

$$Y = \left\{\left(Q^*, P_y\right) / P_{\min} \le P_y \le P_{\max}\right\} \tag{4.2.13}$$

Οι Pareto αποτελεσματικές εκπτώσεις είναι οι μοναδικές εκπτώσεις που μεγιστοποιούν την αύξηση του κέρδους του προμηθευτή και την μείωση του κόστους του αγοραστή, επομένως μεγιστοποιούν, όπως αποδεικνύεται παρακάτω, το άθροισμα $\Delta TP_s(x) + \Delta TC_b(x)$ το οποίο ονομάζεται αποτελεσματικό κέρδος (G).

Έστω $x \in X$ μια εφικτή έκπτωση για την οποία ο προμηθευτής έχει κέρδος $TP_s(x)$, τότε (από σχέσεις (4.2.4) και (4.2.5))

$$\Delta TP_s(x) = \left\{D(P_x - c) - S_p\frac{D}{Q_x} + h_s'\frac{Q_x}{2} - FC\right\} - \left\{D(P_0 - c) - S_p\frac{D}{Q_0} + h_s'\frac{Q_0}{2} - FC\right\}$$

$$= DP_x - D\left\{P_0 + S_p\left(\frac{1}{Q_x} - \frac{1}{Q_0}\right) - \frac{h_s'}{2D}(Q_x - Q_0)\right\}$$

$$= DP_x - DP_L, \text{ όπου } P_L = P_0 + S_p\left(\frac{1}{Q_x} - \frac{1}{Q_0}\right) - \frac{h_s'}{2D}(Q_x - Q_0).$$

Ομοίως το κόστος του αγοραστή για έκπτωση $x \in X$ είναι $TC_b(x)$ και τότε (από σχέσεις (4.2.1) και (4.2.2))

$$\Delta TC_b(x) = \left(DP_0 + S_b\frac{D}{Q_0} + h_b'\frac{Q_0}{2}\right) - \left(DP_x + S_b\frac{D}{Q_x} + h_b\frac{Q_x}{2}\right)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= -DP_x + D\left\{P_0 - S_b\left(\frac{1}{Q_x} - \frac{1}{Q_0}\right) - \frac{h_b'}{2D}(Q_x - Q_0)\right\}$$

$$= -DP_x + DP_U, \text{ όπου } P_U = P_0 - S_b\left(\frac{1}{Q_x} - \frac{1}{Q_0}\right) - \frac{h_b'}{2D}(Q_x - Q_0).$$

Άρα τελικά από τα παραπάνω προκύπτει:

$$G(x) = \Delta TP_s(x) + \Delta TC_b(x) = D(P_u - P_L)$$
$$= D\left[\left\{\frac{(S_b + S_p)}{Q_0} + Q_0\frac{(h_b' - h_s')}{2D}\right\} - \left\{\frac{(S_b + S_p)}{Q_x} - Q_x\frac{(h_b' - h_s')}{2D}\right\}\right].$$

Η παραπάνω σχέση μεγιστοποιείται για $Q_x = \sqrt{\frac{2(S_b + S_p)D}{(h_b' - h_s')}} = Q^*$.

Επίσης για $Q_x = Q^*$ είναι $P_U = P_{max}$ και $P_L = P_{min}$, επομένως

$$G = \max\{\Delta TP_s(x) + \Delta TC_b(x) / x \in X\} = D(P_{max} - P_{min}) = \Delta TP_s(y) + \Delta TC_b(y) \quad (4.2.14)$$

για κάθε $y \in Y$.

Παρατήρηση

Οι Pareto αποτελεσματικές εκπτώσεις του συγκεκριμένου μοντέλου ταυτίζονται με τις βέλτιστες εκπτώσεις που προκύπτουν από την μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους του συστήματος στο μοντέλο των Dada & Srikanth (1987), (βλέπε παράγραφο 3.3).

Εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε πολιτική (Q^*, P^*), $P^* \in [P_{min}, P_{max}]$ ο αγοραστής θα έχει κέρδος $\Delta TC_b(y) = D(P_{max} - P^*)$ και ο προμηθευτής θα έχει κέρδος $\Delta TP_s(y) = D(P^* - P_{min})$. Επομένως αν $P^* = P_{max}$ όλο το κέρδος από την πολιτική έκπτωσης εντοπίζεται στην αύξηση του κέρδους του προμηθευτή, ενώ αν $P^* = P_{min}$ το κέρδος εντοπίζεται στην μείωση του κόστους του αγοραστή.

Στη συνέχεια εφαρμόζονται τα μοντέλα διαπραγμάτευσης του Nash και των Kalai & Smordinsky θεωρώντας ότι ο αγοραστής και ο προμηθευτής διαπραγματεύονται την

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τιμή της έκπτωσης μέσα στο διάστημα $[P_{\min}, P_{\max}]$ διακρίνοντας περιπτώσεις ανάλογα με τη προδιάθεση του αγοραστή και του προμηθευτή ως προς το ρίσκο.

1. Έστω ότι ο αγοραστής και ο προμηθευτής είναι ουδέτεροι ως προς το ρίσκο. Τότε οι συναρτήσεις χρησιμότητας τους θα ταυτίζονται με το κέρδος που τους αποφέρει η επιλογή κάποιας πολιτικής έκπτωσης x:

$$u_b(x) = \Delta TC_b(x) \text{ και } u_s(x) = \Delta TP_s(x).$$

Η μέγιστη χρησιμότητα που μπορούν να πετύχουν είναι $D(P_{\max} - P_{\min})$. Ο αγοραστής όταν το αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης είναι $(Q^*, P_{\min})$ και ο προμηθευτής όταν το αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης είναι $(Q^*, P_{\max})$.

Το σύνολο των Pareto αποτελεσματικών επιλογών (εκπτώσεων) περιγράφεται από την συνάρτηση:

$$u_b(x) = D(P_{\max} - P_{\min}) - u_s(x). \tag{4.2.15}$$

1.α) *Το μοντέλο διαπραγμάτευσης του Nash*

Το μοντέλο διαπραγμάτευσης του Nash προβλέπει ότι η μέση μοναδιαία τιμή για την οποία θα συμφωνήσουν ο αγοραστής και ο προμηθευτής θα είναι αυτή για την οποία μεγιστοποιείται το γινόμενο των ατομικών τους συναρτήσεων χρησιμότητας και υποθέτοντας ότι στην περίπτωση διαφωνίας δεν θα υπάρξει πολιτική έκπτωσης. Επομένως προβλέπει ως λύση της διαπραγμάτευσης το σημείο του συνόλου Pareto το οποίο μεγιστοποιεί το γινόμενο:

$$u_b(x)u_s(x) = \Delta TC_b(x)\Delta TP_s(x) = D^2(P_{\max} - P^*)(P^* - P_{\min}),$$

άρα $P^* = \dfrac{P_{\max} + P_{\min}}{2}$.

Επομένως, όταν και ο αγοραστής και ο προμηθευτής είναι ουδέτεροι ως προς το ρίσκο, το μοντέλο του Nash προβλέπει ότι η έκπτωση για την οποία θα συμφωνήσουν θα είναι η $\left(Q^*, \dfrac{P_{\max} + P_{\min}}{2}\right)$ και θα γίνει ίση κατανομή του αποτελεσματικού κέρδους, δηλαδή

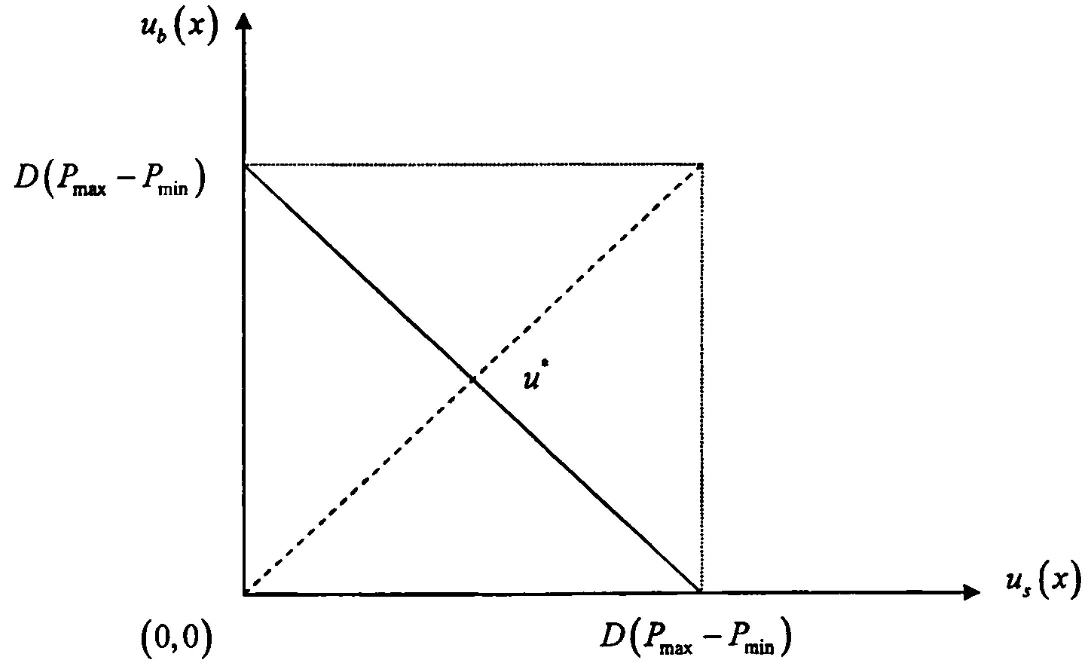
$$\Delta TC_b(Q^*, P^*) = \Delta TP_s(Q^*, P^*) = \frac{D(P_{\max} - P_{\min})}{2}, \text{ για } P^* = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.β) *Το μοντέλο διαπραγμάτευσης των Kalai & Smordinsky*

Όμοιο αποτέλεσμα προκύπτει και από το μοντέλο διαπραγμάτευσης των Kalai & Smordinsky για την περίπτωση που ο προμηθευτής και ο αγοραστής είναι ουδέτεροι ως προς το ρίσκο.

Το μοντέλο διαπραγμάτευσης των Kalai & Smordinsky προβλέπει ότι η μέση μοναδιαία τιμή για την οποία θα συμφωνήσουν ο αγοραστής και ο προμηθευτής θα αντιστοιχεί στο σημείο όπου το σύνολο των αποτελεσματικών επιλογών τέμνει τη γραμμή που ενώνει το σημείο διαφωνίας, (το σημείο για το οποίο δεν γίνεται αποδεκτή κάποια πολιτική έκπτωσης), με το «ιδανικό σημείο», (το σημείο στο οποίο το κέρδος και του αγοραστή και του προμηθευτή ισούται με το συνολικό αποτελεσματικό κέρδος που προκύπτει από την πολιτική έκπτωσης), το οποίο προφανώς δεν ανήκει στην εφικτή περιοχή.



Σχήμα 4.4. Μοντέλο διαπραγμάτευσης των Kalai & Smordinsky

Η γραμμή που ενώνει το «ιδανικό σημείο» $\left(D(P_{max}-P_{min}),D(P_{max}-P_{min})\right)$ και το σημείο διαφωνίας $(0,0)$ τέμνει το σύνολο Pareto στο σημείο $u^*=\left(\frac{D(P_{max}-P_{min})}{2},\frac{D(P_{max}-P_{min})}{2}\right)$, (βλέπε *Σχήμα 4.4*). Επομένως και για αυτό το

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μοντέλο προβλέπεται ίση κατανομή των κερδών μεταξύ του αγοραστή και του προμηθευτή

2. Έστω ότι ο αγοραστής είναι ουδέτερος ως προς το ρίσκο ενώ ο προμηθευτής είναι αντίθετος.

Οι συναρτήσεις χρησιμότητας σε αυτή την περίπτωση θα είναι αντίστοιχα: $u_b(x) = \Delta TC_b(x)$ και $u_s(x) = \Delta TP_s(x)^{1/2}$. Τότε ο αγοραστής πετυχαίνει μέγιστη χρησιμότητα ίση με $D(P_{\max} - P_{\min})$ όταν το αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης είναι η έκπτωση $(Q^*, P_{\min})$, ενώ ο προμηθευτής πετυχαίνει μέγιστη χρησιμότητα $\{D(P_{\max} - P_{\min})\}^{1/2}$ για έκπτωση $(Q^*, P_{\max})$.

Το σύνολο των Pareto αποτελεσματικών επιλογών περιγράφεται από την εξίσωση:

$$u_b(x) = D(P_{\max} - P_{\min}) - u_s(x)^2. \tag{4.2.16}$$

Η παραπάνω συνάρτηση δηλώνει ότι, αν μεταφερθούν έστω g χρηματικές μονάδες του αποτελεσματικού κέρδους από τον αγοραστή στον προμηθευτή, αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα η χρησιμότητα του αγοραστή να μειωθεί κατά g μονάδες και η χρησιμότητα του προμηθευτή να αυξηθεί κατά $g^{1/2}$ μονάδες.

2.α) *Το μοντέλο διαπραγμάτευσης του Nash*

Συμφωνά με το μοντέλο του Nash σε αυτή την περίπτωση, το βέλτιστο αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης είναι η έκπτωση με μέση μοναδιαία τιμή P^* που μεγιστοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$u_b(x)u_s(x)^{1/2} = \Delta TC_b(x)\Delta TP_s(x)^{1/2} = D(P_{\max} - P^*)\{D(P^* - P_{\min})\}^{1/2}, \text{ δηλαδή}$$

με $P^* = \dfrac{P_{\max} + 2P_{\min}}{3}$.

Τότε ο ουδέτερος προς το ρίσκο αγοραστής κερδίζει τα δυο τρίτα του αποτελεσματικού κέρδους και ο αντίθετος προς το ρίσκο προμηθευτής κερδίζει το υπόλοιπο ένα τρίτο, δηλαδή:

$$\Delta TC_b\left(Q^*, \frac{P_{\max} + 2P_{\min}}{3}\right) = \frac{2D(P_{\max} - P_{\min})}{3} \quad \text{και}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\Delta TP_s\left(Q^*,\frac{P_{max}+2P_{min}}{3}\right)=\frac{D(P_{max}-P_{min})}{3}.$$

2.β) *Το μοντέλο διαπραγμάτευσης των Kalai & Smordinsky*

Σύμφωνα με το μοντέλο των Kalai & Smordinsky η βέλτιστη λύση της διαπραγμάτευσης θα είναι η πολιτική έκπτωσης (Q^*,P^*), όπου P^* το σημείο στο οποίο τέμνονται η γραμμή της εξίσωσης (4.2.16) και τη γραμμή που ενώνει το «ιδανικό σημείο» $\left(D(P_{max}-P_{min}),\{D(P_{max}-P_{min})\}^{1/2}\right)$ και το σημείο διαφωνίας $(0,0)$, η οποία δίνεται από την εξίσωση $u_b(x)=\{D(P_{max}-P_{min})\}^{1/2}u_s(x)$. Το σημείο αυτό είναι το $(u_b(x),u_s(x))=\left(0.618D(P_{max}-P_{min}),0.618\{D(P_{max}-P_{min})\}^{1/2}\right)$.

Επειδή $u_b(x)=\Delta TC_b(x)$ και $u_s(x)=\Delta YP_s(x)^{1/2}$, προφανώς ο αγοραστής με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο και την παραπάνω πολιτική έκπτωσης, κερδίζει το 61.8% του αποτελεσματικού κέρδους και ο αγοραστής το 38.2%. Η μέση μοναδιαία τιμή που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη έκπτωση είναι $P^*=0.384P_{max}+0.618P_{min}$.

Και σε αυτό το μοντέλο, όπως και στο μοντέλο του Nash, το μεγαλύτερο μέρος του αποτελεσματικού κέρδους πηγαίνει στον ουδέτερο προς το ρίσκο αγοραστή αντί του αντίθετου προς το ρίσκο προμηθευτή.

3. Τέλος εξετάζεται η περίπτωση όπου και ο αγοραστής και ο προμηθευτής είναι αντίθετοι προς το ρίσκο.

Οι συναρτήσεις χρησιμότητας σε αυτή την περίπτωση θα είναι οι $u_b(x)=\Delta TC_b(x)^{1/2}$ και $u_s(x)=\Delta TP_s(x)^{1/2}$ αντίστοιχα.

Η μέγιστη χρησιμότητα και για τους δυο ισοδυναμεί με $\{D(P_{max}-P_{min})\}^{1/2}$, για τον αγοραστή όταν το αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης είναι το (Q^*,P_{min}) και για τον προμηθευτή όταν το αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης είναι το (Q^*,P_{max}). Το σύνολο των αποτελεσματικών επιλογών περιγράφεται από την εξίσωση:

$$u_b(x)=\left\{D(P_{max}-P_{min})-u_s(x)^2\right\}^{1/2} \tag{4.2.17}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3.α) *Το μοντέλο διαπραγμάτευσης του Nash*

Η βέλτιστη λύση της διαπραγμάτευσης, P^*, με βάση το μοντέλο του Nash είναι αυτή που μεγιστοποιεί την σχέση:

$$u_b(x)u_s(x) = \Delta TC_b(x)^{1/2}\,\Delta TP_s(x)^{1/2} = D\left\{\left(P_{\max} - P^*\right)\left(P^* - P_{\min}\right)\right\}^{1/2}.$$

Δηλαδή, η $P^* = \dfrac{P_{\max} + P_{\min}}{2}$. Επομένως το αποτέλεσμα για αυτή την περίπτωση ταυτίζεται με την πρώτη περίπτωση, όπου και ο αγοραστής και ο προμηθευτής είναι ουδέτεροι προς το ρίσκο, δηλαδή $\left(Q^*, \dfrac{P_{\max} + P_{\min}}{2}\right)$ και ίση κατανομή του αποτελεσματικού κέρδους.

3.β) *Το μοντέλο διαπραγμάτευσης των Kalai & Smordinsky*

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει επίσης από το μοντέλο των Kalai & Smordinsky, όπου η βέλτιστη λύση της διαπραγμάτευσης προκύπτει από την τομή των γραμμών των εξισώσεων (4.2.17) και $u_b(x) = u_s(x)$.

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Όταν ο αγοραστής και ο προμηθευτής έχουν την ίδια προδιάθεση ως προς το ρίσκο (περιπτώσεις 1 και 3), τότε και το μοντέλο του Nash και το μοντέλο των Kalai & Smordinsky προβλέπουν ίση κατανομή του αποτελεσματικού κέρδους.
- Ο παίκτης που παίρνει το μεγαλύτερο ρίσκο (π.χ. ο αγοραστής στην περίπτωση 2), σύμφωνα και με τα δυο μοντέλα, κερδίζει το μεγαλύτερο μέρος του αποτελεσματικού κέρδους.
- Τέλος, και τα δυο μοντέλα προβλέπουν ότι όσο πιο αντίθετος είναι ο αντίπαλος ως προς το ρίσκο τόσο μεγαλύτερο μέρος του αποτελεσματικού κέρδους θα αποκτήσει κάποιος, π.χ. ένας ουδέτερος προς το ρίσκο αγοραστής κερδίζει μεγαλύτερο μέρος του αποτελεσματικού κέρδους όταν διαπραγματεύεται με έναν αντίθετο προς το ρίσκο προμηθευτή, περίπτωση 2, απ' ότι με έναν ουδέτερος προς το ρίσκο προμηθευτή, περίπτωση 1.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.3 Καθορισμός ποσοτικών εκπτώσεων με βάση την ισορροπία Stackelberg

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται το μοντέλο των *Chiang et al. (1994)* για το οποίο ισχύουν οι εξής υποθέσεις:

1. Χρησιμοποιούνται ποσοτικές εκπτώσεις στο σύνολο της παραγγελίας (all-units quantity discounts)
2. Η ζήτηση του αγοραστή είναι σταθερή και ανεξάρτητη της τιμής του προϊόντος
3. Η βέλτιστη ποσότητα του προμηθευτή είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή, kQ, $k \in \mathbb{Z}^+$ (βλέπε μοντέλο (2.2)).
4. Ο στόχος του αγοραστή είναι να ελαχιστοποιήσει την αντίστοιχη συνάρτηση κόστους του $TC_b = PD + S_b \dfrac{D}{Q} + h_b P \dfrac{Q}{2}$ και του προμηθευτή είναι να μεγιστοποιήσει την αντίστοιχη συνάρτηση κέρδους του $TP_s = PD - S_s \dfrac{D}{kQ} - h_s P(k-1)\dfrac{Q}{2}$.

Στο μοντέλο αυτό το πρόβλημα καθορισμού της ποσοτικής έκπτωσης διατυπώνεται ως ένα παίγνιο με δύο παίκτες (αγοραστής – προμηθευτής) και μεταβλητές απόφασης την τιμή του προϊόντος P, την ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή Q και τον ακέραιο συντελεστή k που καθορίζει την ποσότητα παραγγελίας του προμηθευτή. Διακρίνονται δυο περιπτώσεις ανάλογα με το αν υπάρχει συνεργασία ή όχι μεταξύ του αγοραστή και του προμηθευτή.

<u>Μη-συνεργασία:</u>

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής του αγοραστή και του προμηθευτή η ισορροπία Stackelberg. Ο προμηθευτής βρίσκεται σε πιο ισχυρή θέση σε σχέση με τον αγοραστή, επειδή είναι αυτός που προσφέρει μια πολιτική έκπτωσης στην οποία πρέπει να ανταποκριθεί ο αγοραστής. Επομένως ο προμηθευτής, ως «ηγέτης», ανακοινώνει τη μέση τιμή του προϊόντος, P, και τον ακέραιο συντελεστή k, ο οποίος καθορίζει το μέγεθος της παραγγελίας του, και ο αγοραστής, ως «ακόλουθος», θεωρώντας αυτές τις δυο μεταβλητές ως σταθερές καθορίζει την ποσότητα παραγγελίας του Q. Έπειτα με βάση την βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή καθορίζεται η βέλτιστη πολιτική του προμηθευτή.

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συμφωνά με τα παραπάνω πρώτα θα καθοριστεί, δοθέντος των P και k, η ποσότητα παραγγελίας που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση κόστους του αγοραστή:

$$\min_{Q} TC_b = PD + S_b \frac{D}{Q} + h_b P \frac{Q}{2}$$
$$\text{s.t.} \quad Q \geq 0$$

Η λύση του παραπάνω προβλήματος είναι η γνωστή EOQ, $Q^* = \sqrt{\frac{2DS_b}{h_b P}}$.

Έπειτα, υπολογίζονται οι μεταβλητές απόφασης του προμηθευτή, P και k, μεγιστοποιώντας τη συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή υπό τον περιορισμό το λειτουργικό κόστος του αγοραστή να μην υπερβαίνει το μέγιστο προϋπολογισμό του, έστω B. Το παραπάνω πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\max_{P,k} TP_s = PD - S_s \frac{D}{kQ} - h_s P(k-1)\frac{Q}{2}$$

$$\text{s.t.} \quad S_b \frac{D}{Q} + h_b P \frac{Q}{2} \leq B,$$

$$Q = \sqrt{\frac{2DS_b}{h_b P}},$$

$$P \leq P_0 \quad (P_0 = \text{αρχική τιμή προϊόντος χωρίς την έκπτωση})$$

και $P \geq 0$, k θετικός ακέραιος.

Ή

$$\max_{P,k} TP_s = PD - \frac{S_s}{k}\sqrt{\frac{Dh_b P}{2S_b}} - h_s(k-1)\sqrt{\frac{DPS_b}{2h_b}}$$

$$\text{s.t.} \quad \sqrt{2DS_b h_b P} \leq B$$

$$P \leq P_0$$

και $P \geq 0$, k θετικός ακέραιος.

Ο ακέραιος k που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή ισοδυναμεί με τον ακέραιο που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση

$$g(k) = \frac{S_s}{k}\sqrt{\frac{Dh_b P}{2S_b}} + h_s(k-1)\sqrt{\frac{DPS_b}{2h_b}}.$$

Για τον βέλτιστο αυτό k^* προφανώς θα πρέπει να ισχύει $g(k-1) \geq g(k) \leq g(k+1)$, από το οποίο μετά από αντικατάσταση προκύπτει:

$$k^*(k^*-1) \leq \frac{S_s}{S_b}\frac{h_b}{h_s} \leq k^*(k^*+1) \qquad (4.3.1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επομένως ο βέλτιστος ακέραιος k^* είναι αυτός που ικανοποιεί την ανισότητα (4.3.1). Για $k=k^*$ η συνάρτηση κέρδους του προμηθευτή είναι μια συνάρτηση του P, για την οποία ισχύει:

$$\frac{dTP_s(P,k^*)}{dP}=0 \Rightarrow \bar{P}=\frac{\left(\frac{S_s}{k^*}\sqrt{\frac{Dh_b}{2S_b}}+h_s(k^*-1)\sqrt{\frac{DS_b}{2h_b}}\right)^2}{4D^2}$$

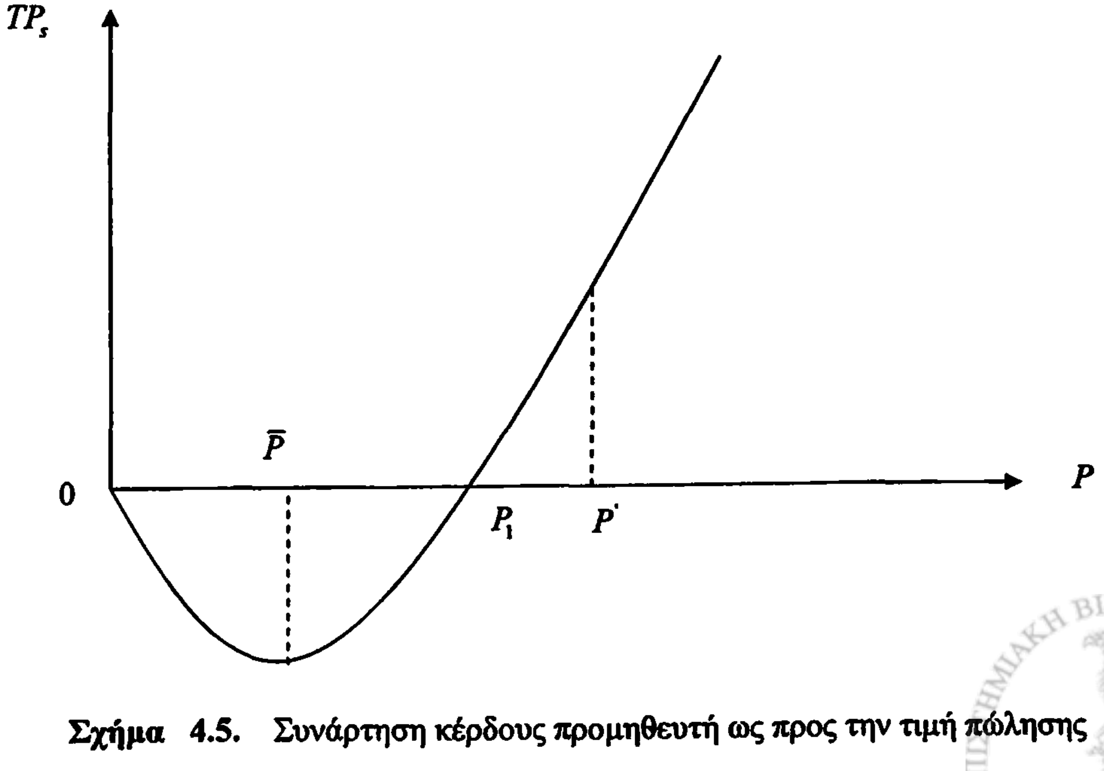
και $\frac{d^2TP_s(P,k^*)}{dP^2}>0$.

Επομένως το κέρδος του προμηθευτή ελαχιστοποιείται για $P=\bar{P}$ και η συνάρτηση $TP_s(P,k^*)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\bar{P}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\bar{P},+\infty]$.

Επίσης ισχύει $TP_s(P,k^*)=0 \Rightarrow P_1=\frac{\left(\frac{S_s}{k^*}\sqrt{\frac{Dh_b}{2S_b}}+h_s(k^*-1)\sqrt{\frac{DS_b}{2h_b}}\right)^2}{D^2}$ και $P=0$.

$TP_s(P,k^*)\leq 0 \Rightarrow P\leq P_1$, $TP_s(P,k^*)\geq 0 \Rightarrow P\geq P_1$ και $\lim_{P\to\infty} TP_s(P,k^*)=+\infty$.

Οι περιορισμοί $\sqrt{2DS_bh_bP}\leq B$ και $0\leq P\leq P_0$ ικανοποιούνται ταυτόχρονα για $P\in[0,P']$, όπου $P'=\min(P_0,P_2)$ και $P_2=\frac{B^2}{2DS_bh_b}$. Τα παραπάνω απεικονίζονται στο *Σχήμα 4.5.*



Σχήμα 4.5. Συνάρτηση κέρδους προμηθευτή ως προς την τιμή πώλησης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για να ισχύει $P_2 \geq P_1$ πρέπει:

$$\frac{B^2}{2DS_b h_b} \geq \frac{\left(\frac{S_s}{k^*}\sqrt{\frac{Dh_b}{2S_b}} + h_s\left(k^*-1\right)\sqrt{\frac{DS_b}{2h_b}}\right)^2}{D^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{DB^2}{2S_b h_b} \geq \frac{S_s^{\,2}}{k^{*2}}\frac{Dh_b}{2S_b} + 2\frac{S_s}{k^*}h_s\left(k^*-1\right)\frac{D}{2} + h^2{}_s\left(k^*-1\right)^2\frac{DS_b}{2h_b}$$

$$\Leftrightarrow B^2 \geq \left(\frac{S_s}{k^*}h_b + h_s\left(k^*-1\right)S_b\right)^2$$

$$\Leftrightarrow B \geq \left(\frac{S_s}{k^*}h_b + h_s\left(k^*-1\right)S_b\right).$$

Επειδή όμως από τη σχέση (4.3.1) ισχύει $k^*\left(k^*-1\right) \leq \frac{S_s}{S_b}\frac{h_b}{h_s}$ προκύπτει:

$$B \geq \left(\frac{S_s}{k^*}h_b + h_s\left(k^*-1\right)S_b\right) \geq \left(\left(k^*-1\right)h_sS_b + \left(k^*-1\right)h_sS_b\right) = 2\left(k^*-1\right)h_sS_b \geq 2h_sS_b.$$

Επομένως όταν ισχύει $B \geq 2h_sS_b$, τότε $P_2 \geq P_1$.

Τελικά προκύπτει, όπως φαίνεται και στο *Σχήμα 4.5*, ότι το κέρδος του προμηθευτή TP_s θα μεγιστοποιείται, υπό τους περιορισμούς που δόθηκαν, για $P = P'$, άρα η βέλτιστη τιμή του προϊόντος με έκπτωση θα είναι η $P^* = \min\{P_0, P_2\}$.

Όταν ισχύει $B \geq 2h_sS_b$ η ισορροπία Stackelberg πετυχαίνεται για (P^*, k^*, Q^*), όπου:

$$P^* = \min\left\{P_0, \frac{B^2}{2DS_bh_b}\right\},$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS_b}{h_bP^*}}$$

και k^* ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $k^*\left(k^*-1\right) \leq \frac{S_s}{S_b}\frac{h_b}{h_s}$.

Τότε το βέλτιστο κόστος του αγοραστή θα ισούται με:

$$TC_b^* = \begin{cases} \frac{B^2}{2S_bh_b} + B, & \text{αν } P_0 > \frac{B^2}{2DS_bh_b} \\ P_0D + \sqrt{2DS_bh_bP_0}, & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και το βέλτιστο κέρδος του προμηθευτή θα είναι

$$TP_s^* = \begin{cases} \dfrac{B^2}{2S_b h_b} - \dfrac{S_s B}{2S_b k^*} - \dfrac{h_s B}{2h_b}\left(k^* - 1\right), \text{ αν } P_0 > \dfrac{B^2}{2DS_b h_b} \\ P_0 D - \dfrac{S_s}{k^*}\sqrt{\dfrac{Dh_b P_0}{S_b}} - h_s\left(k^* - 1\right)\sqrt{\dfrac{DS_b P_0}{2h_b}}, \text{ αλλιώς} \end{cases}.$$

<u>Συνεργασία:</u>

Στην περίπτωση που υπάρχει συνεργασία μεταξύ του αγοραστή και του προμηθευτή, όταν ο προμηθευτής δεν βρίσκεται σε πιο ισχυρή (ή μονοπωλιακή) θέση, είναι προφανές ότι και οι δυο θα συνεργαστούν με σκοπό να παρθεί μια απόφαση που θα είναι ωφέλιμη και για τους δυο. Στα μοντέλα συνεργασίας αναζητείται η λύση που είναι Pareto αποτελεσματική, όπως αυτή ορίστηκε στην παράγραφο 4.1.

Επομένως, ο αγοραστής και ο προμηθευτής θα προσπαθήσουν να μεγιστοποιήσουν το από κοινού κέρδος (το κέρδος του συστήματος) υπό τους εξής περιορισμούς: το λειτουργικό κόστος του αγοραστή να μην υπερβαίνει τον προϋπολογισμό του, το συνολικό του κόστος μετά την συνεργασία να είναι τουλάχιστον μικρότερο από αυτό που θα είχε χωρίς συνεργασία και ομοίως το συνολικό κέρδος του προμηθευτή μετά την συνεργασία να είναι τουλάχιστον μεγαλύτερο από αυτό που θα είχε χωρίς συνεργασία.

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\max_{P,Q,k} \lambda TP_s - (1-\lambda)TC_b \qquad (0 < \lambda < 1)$$

$$\text{s.t.} \quad S_b \frac{D}{Q} + h_b P \frac{Q}{2} \le B,$$

$$TC_b \le TC_b^*,$$

$$TP_s \ge TP_s^*,$$

$$P \le P_0,$$

$$\text{και} \quad P \ge 0,\ Q \ge 0,\ k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Όλες οι Pareto αποτελεσματικές στρατηγικές προκύπτουν για τις διάφορες τιμές του λ. Αν $\lambda = \frac{1}{2}$, υπάρχει πλήρης συνεργασία και τα κέρδη που θα προκύψουν από τη συνεργασία αυτή πρέπει να κατανεμηθούν ισομερώς στον αγοραστή και στον προμηθευτή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Το παραπάνω πρόβλημα γράφεται και ως εξής:

$$\min_{P,Q,k}\ (1-2\lambda)PD+\frac{D}{Q}\left[\frac{\lambda S_s}{k}+(1-\lambda)S_b\right]+\frac{QP}{2}\left[\lambda h_s(k-1)+(1-\lambda)h_b\right]$$

$$\text{s.t.}\quad S_b\frac{D}{Q}+h_bP\frac{Q}{2}\le B,$$

$$PD+S_b\frac{D}{Q}+h_bP\frac{Q}{2}\le TC_b^*,$$

$$PD-S_s\frac{D}{kQ}-h_sP(k-1)\frac{Q}{2}\ge TP_s^*,$$

$$P\le P_0,$$

και $P\ge 0,\ Q\ge 0,\ k$ θετικός ακέραιος.

Έστω ο μετασχηματισμός: $Q=\exp(q)$ και $P=\exp(s)$

Τότε το παραπάνω πρόβλημα γράφεται:

$$\min_{s,q,k}\ (1-2\lambda)De^s+D\left[\frac{\lambda S_s}{k}+(1-\lambda)S_b\right]e^{-q}+\frac{1}{2}\left[\lambda h_s(k-1)+(1-\lambda)h_b\right]e^{q+s}$$

$$\text{s.t.}\quad DS_be^{-q}+\frac{h_b}{2}e^{s+q}\le B,$$

$$De^s+DS_be^{-q}+\frac{h_b}{2}e^{q+s}\le TC_b^*,$$

$$TP_s^*e^{-s}+\frac{DS_s}{k}e^{-q-s}+\frac{h_s(k-1)}{2}e^q\le D,$$

$$e^s\le P_0,$$

και k θετικός ακέραιος.

Το οποίο είναι ένα κυρτό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και μπορεί να επιλυθεί.

Παρακάτω δίνεται ένα αριθμητικό παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση του μοντέλου:

Έστω $B=\$1,200$ ανά έτος, $D=2,400$ μονάδες ανά έτος, $h_b=60\%$, $h_s=50\%$, $S_b=\$30$ ανά παραγγελία, $S_s=\$50$ ανά παραγγελία και $P_0=\$17$ ανά μονάδα προϊόντος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για την περίπτωση της μη – συνεργασίας προκύπτει το εξής σημείο ισορροπίας Stackelberg (P^*, k^*, Q^*):

$P^* = \$16,67$ ανά μονάδα προϊόντος η τιμή με έκπτωση,

$k^* = 2$ το ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή που θα είναι η παραγγελία του προμηθευτή (k^*Q^*),

$Q^* = 120$ μονάδες η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή.

Με βάση αυτή την λύση το συνολικό κέρδος του προμηθευτή ανέρχεται στα $TP_s^* = \$39,000$ και το συνολικό κόστος του αγοραστή στα $TC_b^* = \$41,200$.

Για την περίπτωση που υπάρχει συνεργασία μεταξύ του αγοραστή και του προμηθευτή προκύπτουν οι εξής Pareto αποτελεσματικές λύσεις για διάφορες τιμές του λ, που παριστάνει την δύναμη διαπραγμάτευσης που έχουν οι δυο παίκτες:

λ	P^{**}	k^{**}	Q^{**}	TP_s^{**}	TC_b^{**}
0.3	$16.45	1	245	$39,000.00	$40,933.48
0.4	$16.47	1	243	$39,034.17	$41,024.96
0.5	$16.49	1	240	$39,076.00	$41,063.28
0.6	$16.51	1	237	$39,117.67	$41,101.66
0.7	$16.55	1	234	$39,207.18	$41,189.50

Από τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται ότι όσο αυξάνει η διαπραγματευτική δύναμη του προμηθευτή (μεγάλες τιμές για το λ) τόσο αυξάνεται το κέρδος του προμηθευτή και παράλληλα και το κόστος του αγοραστή. Το αντίθετο προφανώς συμβαίνει καθώς το λ μικραίνει.

Επίσης παρατηρείται ότι στην περίπτωση της συνεργασίας το κέρδος του προμηθευτή είναι μεγαλύτερο ή ίσο και το κόστος του αγοραστή μικρότερο ή ίσο σε σχέση με την περίπτωση της μη-συνεργασίας. Συγκεκριμένα για $\lambda = 0.3$ ενώ το κέρδος του προμηθευτή παραμένει το ίδιο το κόστος του αγοραστή μειώνεται κατά $266.52. Επομένως μπορεί να σημειωθεί ότι είναι στο συμφέρον του αγοραστή και του προμηθευτή η επιδίωξη συνεργασίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήθηκαν μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων όταν ο μηχανισμός συνεργασίας προμηθευτή - αγοραστή είναι η προσφορά ποσοτικών εκπτώσεων από πλευράς προμηθευτή. Το βασικό συμπέρασμα είναι ότι η υιοθέτηση μιας πολιτικής ποσοτικών εκπτώσεων από τον προμηθευτή μπορεί να παρακινήσει τον αγοραστή να αυξήσει το μέγεθος της παραγγελίας του σε σχέση με την EOQ του, με αποτέλεσμα την αύξηση είτε του κέρδους του προμηθευτή είτε του συνολικού κέρδους του συστήματος. Αυτό οφείλεται κυρίως στην υπόθεση ότι το κόστος παραγγελίας ή εκκίνησης παραγωγής του προμηθευτή είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με αυτό του αγοραστή.

Επομένως, ο συντονισμός μεταξύ του προμηθευτή και του αγοραστή αυξάνει την απόδοση κατά μήκος της εφοδιαστικής αλυσίδας. Ωστόσο, στα μοντέλα που παρουσιάστηκαν, υπάρχουν πολλοί περιορισμοί όσον αφορά τις υποθέσεις τους. Έτσι πιθανές επεκτάσεις τους μπορούν να αφορούν:

1. Στη γενίκευση της συνεργασίας σε περισσότερους κρίκους της εφοδιαστικής αλυσίδας: προμηθευτές πρώτων υλών και λιανοπωλητές
2. Στη θεώρηση μη μηδενικού χρόνου ανοχής και συνεπώς στην απάντηση σε ερωτήματα που αφορούν τη διακίνηση των προϊόντων, τη συχνότητα που πρέπει να εκτελούνται οι παραδόσεις, την επιλογή δρομολογίου κ.λ.π.
3. Στην περισσότερο ρεαλιστική θεώρηση ότι σε κάθε αγοραστή αντιστοιχούν πολλοί προμηθευτές οι οποίοι ανταγωνίζονται μεταξύ τους.
4. Στη θεώρηση ότι σε κάθε προμηθευτή αντιστοιχούν πολλοί αγοραστές με διαφορετική ζήτηση και διαφορετικές παραμέτρους κόστους (ετερογενείς αγοραστές) καθώς και στην εύρεση μηχανισμών κατανομής των κερδών για την περίπτωση αυτή
5. Στην εφαρμογή μοντέλων διαπραγμάτευσης της θεωρίας παιγνίων σε κάποια μοντέλα τα οποία δεν διευκρινίζουν πως τα κέρδη που αποφέρει η υιοθέτηση μιας νέας πολιτικής θα μοιραστούν στον προμηθευτή και στον αγοραστή.
6. Στη θεώρηση μεταβλητής ως προς το χρόνο ζήτησης ή στοχαστικής ζήτησης
7. Στη θεώρηση ότι η συνεργασία προμηθευτή - αγοραστή γίνεται υπό περιορισμένη πληροφόρηση. Σημειώνεται ότι βασική υπόθεση των μοντέλων που

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

παρουσιάστηκαν είναι ότι κάθε εταίρος έχει πλήρη πληροφόρηση για τις παραμέτρους (κόστος, ζήτηση, χρόνος ανοχής, κλπ) του άλλου. Αυτή η υπόθεση δεν αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα και θεωρείται σημαντικό μειονέκτημα των μοντέλων αυτών.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στους παρακάτω πίνακες συνοψίζονται οι παράμετροι και οι βασικές υποθέσεις των μοντέλων που μελετήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μοντέλο	**Ρυθμός ζήτησης**	**Ρυθμός παραγωγής**	**Πολιτική αναπλήρωσης αποθέματος προμηθευτή**	**Κόστος διατήρησης αποθέματος**
Monahan, 1984	Σταθερός	Άπειρος	«παρτίδα προς παρτίδα»	Δεν λαμβάνεται υπόψη
Rosenblatt & Lee, 1985	Σταθερός	Άπειρος	Ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή	Ποσοστό της τιμής του προϊόντος
Rosenblatt & Lee, 1986	Σταθερός	Άπειρος	Ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή	Ποσοστό της τιμής του προϊόντος
Goyal, 1987α	Σταθερός	Άπειρος	Ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή	Ποσοστό της τιμής του προϊόντος
Goyal, 1987b	Σταθερός	Άπειρος	Ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή	Ανεξάρτητο της τιμής του προϊόντος
Banerjee, 1986b	Σταθερός	Πεπερασμένος	«παρτίδα προς παρτίδα»	Ποσοστό της τιμής του προϊόντος
Joglekar, 1988	Σταθερός	Πεπερασμένος	Ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή	Ποσοστό της τιμής του προϊόντος
Weng & Wong, 1993	Ελαστική ως προς την τιμή του προϊόντος	Πεπερασμένος ή Άπειρος	Ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή	Ποσοστό της τιμής του προϊόντος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μοντέλο	**Ρυθμός ζήτησης**	**Ρυθμός παραγωγής**	**Πολιτική αναπλήρωσης αποθέματος προμηθευτή**	**Κόστος διατήρησης αποθέματος**
Lal & Staelin, 1984	Σταθερός	Άπειρος	«παρτίδα προς παρτίδα»	Ανεξάρτητο της τιμής του προϊόντος
Bannerjee, 1986a	Σταθερός	Πεπερασμένος	«παρτίδα προς παρτίδα»	Ποσοστό της τιμής του προϊόντος
Dada & Srikanth, 1987	Σταθερός	Άπειρος	«παρτίδα προς παρτίδα»	Ανεξάρτητο της τιμής του προϊόντος
Chakravarty & Martin, 1988	Σταθερός	Άπειρος	«παρτίδα προς παρτίδα»	Δεν λαμβάνεται υπόψη
Kim & Hwang, 1989	Σταθερός	Άπειρος	«παρτίδα προς παρτίδα»	Δεν λαμβάνεται υπόψη
Weng, 1995	Ελαστική ως προς την τιμή του προϊόντος	Πεπερασμένος ή Άπειρος	Ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή	Ποσοστό της τιμής του προϊόντος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μοντέλο	**Ρυθμός ζήτησης**	**Ρυθμός παραγωγής**	**Πολιτική αναπλήρωσης αποθέματος προμηθευτή**	**Κόστος διατήρησης αποθέματος**
Kohli & Park, 1989	Σταθερός	Άπειρος	«παρτίδα προς παρτίδα»	Ανεξάρτητο της τιμής του προϊόντος
Chiang et al., 1994	Σταθερός	Άπειρος	Ακέραιο πολλαπλάσιο της παραγγελίας του αγοραστή	Ποσοστό της τιμής του προϊόντος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Περίληψη

Η συνεργασία και ο συντονισμός μεταξύ των εταίρων μιας εφοδιαστικής αλυσίδας αποτελεί σημαντικό ανταγωνιστικό πλεονέκτημα αφού έχει ως αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους λειτουργίας της. Στη παρούσα διατριβή μελετώνται μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων στα οποία ο μηχανισμός συνεργασίας μεταξύ προμηθευτή και αγοραστή κατά τη διαχείριση του αποθέματος συνίστανται στην προσφορά ποσοτικών εκπτώσεων.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται μοντέλα συντονισμού προμηθευτή – αγοραστή που έχουν σκοπό τη μεγιστοποίηση του κέρδους του αγοραστή δίνοντας κίνητρο στον αγοραστή να αλλάξει το μέγεθος της παραγγελίας του. Στο δεύτερο κεφάλαιο στόχος των μοντέλων που παρουσιάζονται είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους του συστήματος και η κατανομή των κερδών που προκύπτουν. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο το πρόβλημα του συντονισμού μεταξύ αγοραστή και προμηθευτή αντιμετωπίζεται ως ένα παίγνιο δυο ατόμων είτε συνεργασίας είτε μη-συνεργασίας. Οι περιορισμοί των μοντέλων και πιθανές επεκτάσεις τους δίνονται στον επίλογο.

Abstract

Coordination between two different business entities is an important way to gain competitive advantage as it lowers supply chain cost. This dissertation reviews literarure dealing with buyer vendor coordination models that have used quantity discounts as coordination mechnism under determenistic enviroment.

In the first chapter models that maximize the supplier's yearly net profit by giving incentive to the buyer to adopt different lot size are presented. In the second chapter the total system cost is minimised with respect to coordinated lot size and thereby the system savings are improved. The models that are presented in the second chapter also provide mechanisms for division of surplus generated in the channel due to coordination. Finally, in the third chapter the buyer vendor coordination problem is studied as a non-coopoerative and cooperative game. Limitations and possible extensions of the models are presented in the conclusion.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Banerjee, A. (1986a). A joint economic lot-size model for purchase and vendor. *Decision Sciences*, 17, 292-311.
2. Banerjee, A. (1986b). A quantity discount pricing model to increase vendor profits. *Management Science*, 32 (8), 1513-1517.
3. Benton, W.C. and Park, Seungwook (1996). A classification of literature on determening the lot size under quantity discounts. *European Journal of Operational Research*, 92 (2), 219-238.
4. Chakravarty, A.K. and Martin, G.E. (1988). An optimal joint buyer-seller discount pricing model, *Computers and Operations Research*, 15 (3), 271-281.
5. Chiang, C.W., Fitzsimmons, J., Huang, Z., Li, Susan (1994). A game theoretic approach to quantity discount problem. *Decision Sciences*, 25 (1), 153-168.
6. Chopra, S. and Meindl P. (2004). Supply Chain Managenment. 2nd ed. Pearson Education Inc.
7. Dada, M. and Srikanth, K.N. (1987). Pricing policies for quantity discounts. *Management Sciences*, 33 (10), 1247-1253.
8. Goyal, S.K. (1977). An integrated inventory model for a single supplier – single customer problem. *International Journal of Production Research*, 15 (1), 107-111.
9. Goyal, S.K. (1987a). Comment on: A generalized quantity discount pricing model to increase supplier's profits. . *Management Science*, 33 (12), 1635-1636.
10. Goyal, S.K. (1987b). Determination of a supplier's economic ordering policy. *Journal of the Operational Research Society*, 38 (9), 853-857.
11. Goyal, S.K. and Gupta, Y.P. (1989). Integrated inventory models: The buyer-vendor coordination. *European Journal of Operational Research*, 41, 261-269.
12. Harris, F.W. (1913). "How Many Parts To Make At Once" Factory. The Magazine of Management, 10 (2), 135-136, 152.
13. Joglekar, P.N. (1988). A quantity discount pricing model to increase vendor profits. *Management Science*, 34 (11), 1391-1398.
14. Kim, K.H. and Hwang, H. (1989). Simultaneous improvement of supplier's profit and buyer's cost by utilizing quantity discounts. . *Journal of the Operational Research Society*, 40 (3), 255-256.
15. Kohli, R. and Park, H. (1989). A cooperative game theory model of quantity discounts. *Management Science*, 35 (6), 693-707.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

16. Lal, R. and Staelin, R. (1984). An approach for developing an optimal discount pricing policy. *Management Science* 30, 1524-1539.

17. Monahan, J.P. (1984). A quantity discount pricing model to increase vendor profits. *Management Science*, 30, 720-726.

18. Rosenblatt, M.J. and Lee, H.L. (1985). Improving profitability with quantity discounts under fixed-demand. *IIE Transactions*, 17, 388-395.

19. Rosenblatt, M.J. and Lee, H.L. (1986). A generalized quantity discount pricing model to increase supplier's profits. *Management Science*, 32 (9), 1177-1185.

20. Sarmah S.P., D.Acharya and S.K Goyal (2006). Buyer vendor coordination models in supply chain management. *European Journal of Operational Research*, 175(2006) 1-15

21. Silver E.A., Pyke D.F. and Peterson R. (1998). Inventory Management and Production Planning and Scheduling. 3rd Edition. John Willey and Sons, New-York.

22. Σιφνιώτης Κ.Χ. (1997). Logistics Management Θεωρία και πράξη, Εκδόσεις Παπαζήση.

23. Tersine R.J. (1994). Principles of Inventory and Materials Management. 4th ed. Prentice-Hall.

24. Weng, Z.K. and Wong, R.T. (1993). General models for the supplier's all-unit quantity discount policy. *Naval Research Logistics*, 40, 971-991.

25. Weng, Z.K. (1995). Modeling quantity discounts under general price-sensitive demand functions: Optimal policies and relationships. *European Journal of Operational Research*, 86 (2), 300-314.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ