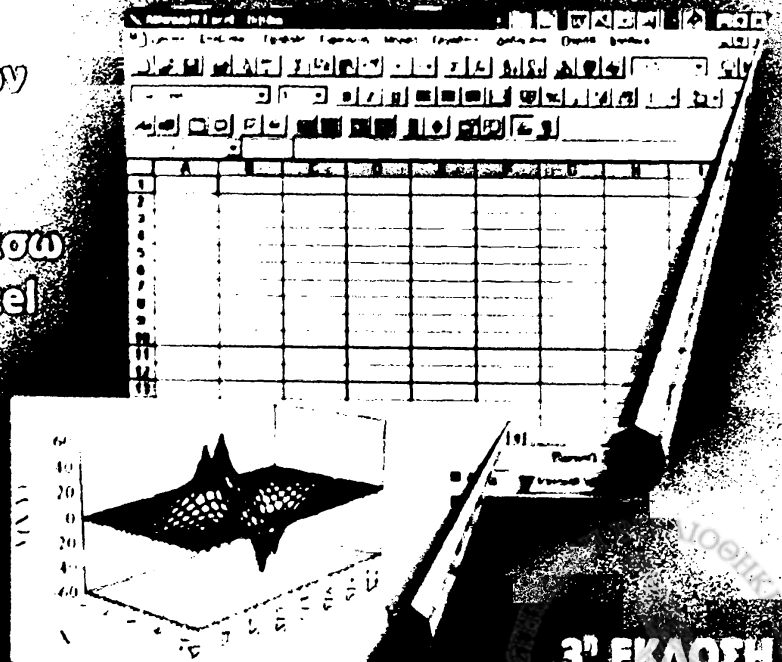


Π. Α. ΑΣΗΜΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

ΦΥΣΙΚΗ ΜΕ ΤΟ Εxcel ΧΡ

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Μία πλήρης σειρά ασκήσεων
του βασικού μαθήματος
Ηλεκτρομαγνητισμού στην
τριτοβάθμια εκπαίδευση, μέσω
του λογισμικού πακέτου Excel



3^η ΕΚΔΟΣΗ



Φυσική με το *Excel*

Ηλεκτρομαγνητισμός



Φυσική με το *Excel*

Ηλεκτρομαγνητισμός

Π. Α. ΑΣΗΜΑΚΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητού του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Ιωάννινα 2005



Στη Jane, την Άννα και τη Δάφνη



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μια προσπάθεια να παρουσιαστεί ο χαρακτήρας και η εξέλιξη της ελληνικής λογοτεχνίας, με ιδιαίτερη προσοχή στην πορεία της πεζογραφίας. Η εργασία βασίζεται σε μια συστηματική μελέτη των κειμένων, με στόχο να αποσαφηνιστούν οι βασικές τάσεις και οι επιρροές που έχουν διαμορφώσει το ελληνικό λογοτεχνικό κείμενο. Η μελέτη αυτή είναι η πρώτη από μια σειρά που θα ασχοληθεί με την ιστορία της ελληνικής λογοτεχνίας, με την ελπίδα ότι θα συμβάλει στην κατανόηση της πορείας της και στην ανακάλυψη των κρυφών νόμων που την διέπουν.



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗ ΤΩΝ ΑΝΤΙΤΥΠΙΩΝ της πρώτης έκδοσης και ενώ το μάθημα έχει διδαχθεί πλέον επί πέντε συναπτά έτη, το βιβλίο τυπώνεται εκ νέου σε δεύτερη έκδοση με κατά πολύ αυξημένη ύλη και αριθμό ασκήσεων. Στη δεύτερη έκδοση έχουν προστεθεί τρία νέα κεφάλαια. Στο Κεφάλαιο 2 αναπτύσσονται τεχνικές για τον απ' ευθείας υπολογισμό ηλεκτροστατικών δυνάμεων μέσω του νόμου του Coulomb με παραδείγματα διατάξεων σημειακών φορτίων αλλά και απλών συνεχών κατανομών ηλεκτρικού φορτίου. Στο Κεφάλαιο 7 εισάγονται τεχνικές αριθμητικής παραγωγής συναρτήσεων και μέσω αυτών του υπολογισμού της κλίσης της συνάρτησης δυναμικού $\nabla\varphi$ και της απόκλισης του ηλεκτρικού πεδίου $\nabla \cdot \mathbf{E}$. Τέλος, το Κεφάλαιο 6 της πρώτης έκδοσης έχει αναπτυχθεί σε δύο νέες ενότητες (Κεφάλαια 8 και 9) όπου η παρουσία στο χώρο αγωγών και διηλεκτρικών υλικών εξετάζεται ξεχωριστά. Επιπλέον, στην αρχή του Κεφαλαίου 8 αναπτύσσεται η θεωρία των ηλεκτροστατικών ειδώλων, η οποία στη συνέχεια χρη-



σιμοποιείται στην περιγραφή της διαμόρφωσης του ηλεκτρικού πεδίου με την παρουσία αγωγών.

Ο αριθμός των Εργαστηριακών Ασκήσεων που περιέχονται σε κάθε κεφάλαιο έχει αυξηθεί σημαντικά, έτσι ώστε να είναι δυνατή η διαμόρφωση διαφορετικού προγράμματος ασκήσεων σε διαδοχικά ακαδημαϊκά έτη. Τόσο οι παλαιότερες όσο και οι νέες Εργαστηριακές Ασκήσεις, που αρχικά κυκλοφόρησαν ως συμπληρωματικά φυλλάδια στην πρώτη έκδοση, έχουν πλέον υποστεί τη βάση της εφαρμογής στο φοιτητικό εργαστήριο υπολογιστών, ενώ έχουν (κατά μία προσφιλή έκφραση των μεταπτυχιακών φοιτητών που συνέβαλαν στη διδασκαλία του μαθήματος) «περάσει από ψιλό κόσκινο» ως προς τη σαφήνεια των οδηγιών προς τους φοιτητές.

Όπως παρατηρείται στο Παράρτημα της δεύτερης έκδοσης, το *Excel* διαθέτει πλούσια συλλογή γραφικών για την απόδοση βαθμωτών συναρτήσεων μιας ή δύο μεταβλητών. Από το οπλοστάσιο όμως των γραφικών λείπουν παντελώς τα εργαλεία για την απόδοση ανυσματικών συναρτήσεων όπως το ηλεκτρικό ή το μαγνητικό πεδίο. Η αδυναμία αυτή αντιμετωπίστηκε στην πρώτη έκδοση με τη συγγραφή ενός, ομολογουμένως κάπως δύσχρηστου, προγράμματος με την ονομασία *Απεικόνιση Β*. Η διαδικασία αυτή έχει γίνει τώρα πολύ πιο ευέλικτη και φιλική προς τον χρήστη με τη διαμόρφωση ενός νέου προγράμματος με την ονομασία *Απεικόνιση Πεδίου* που περιέχεται στη δισκέτα της δεύτερης έκδοσης. Η διαμόρφωση του νέου προγράμματος απαίτησε μεταξύ άλλων τη συγγραφή μιας νέας γραμματοσειράς (*ArrowsSymbolFont*), η οποία απλώς πρέπει να εγκατασταθεί από τη δισκέτα του βιβλίου, όπως κάθε άλλη γραμματοσειρά, προτού ο υπολογιστής χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη Εργαστηριακής Άσκησης που περιλαμβάνει την απεικόνιση πεδίου. Από το σημείο αυτό και μετά, απλό άνοιγμα του βιβλίου του *Excel Απεικόνιση Πεδίου* δημιουργεί αυτομάτως την απεικόνιση του πεδίου με δυναμικές γραμμές.



Στην πρώτη έκδοση του βιβλίου οι οδηγίες για τις Εργαστηριακές Ασκήσεις είχαν γραφεί για την έκδοση *Excel 7* – την πιο πρόσφατη την εποχή εκείνη. Στη δεύτερη έκδοση οι οδηγίες έχουν γραφεί για την ελληνική έκδοση του *Excel XP*, ενώ μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτούσιες και για την αμέσως προγενέστερη έκδοση *Excel 2000*. Πρέπει πάντως να σημειωθεί ότι με την πάροδο του χρόνου, το Excel παγιώνεται όλο και περισσότερο, τουλάχιστον ως προς τις απλές εντολές και διεργασίες, έτσι ώστε οι διαφορές μεταξύ διαδοχικών εκδόσεων που επηρεάζουν το παρόν βιβλίο να είναι όλο και λιγότερες.

Θα ήθελα πάλι να ευχαριστήσω τους μεταπτυχιακούς φοιτητές (σήμερα διδάκτορες) του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κ.κ. Δ. Καραμάνη, Κ. Σταμούλη και Χ. Παπαχριστοδούλου, καθώς και τους νεώτερους, κ.κ. Ν. Πατρώνη και Δ. Καραδήμο, που δίδαξαν κατά περιόδους πολλά από τα φροντιστήρια και με τις παρατηρήσεις τους βοήθησαν στη βελτίωση των οδηγιών προς τους φοιτητές. Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλονται στον κ. Καραδήμο, ο οποίος συνέγραψε τη γραμματοσειρά *ArtowsSymbolFont*.

Π.Α.Α.

Ιωάννινα, Ιούλιος, 2002



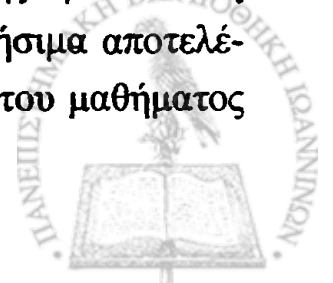
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΕΚΔΟΣΗ

Ο ΟΙΟΣ ΕΧΕΙ ΔΙΔΑΞΕΙ μάθημα Ηλεκτρομαγνητισμού – σε οποιοδήποτε επίπεδο – θα μαρτυρήσει ότι πρόκειται ενδεχομένως για την πλέον δύσπεπτη ενότητα της Φυσικής. Τούτο είναι ιδιαίτερα αληθές προκειμένου περί ενός εισαγωγικού μαθήματος στο πρώτο έτος, κατά το οποίο ο φοιτητής, ευθύς εξ αρχής, εκτίθεται σε μια πληθώρα νέων εννοιών, όπως η «δράση από απόσταση», πεδία, δυναμικά και την αρχή της επαλληλίας. Οι νέες αυτές έννοιες πρέπει να εισαχθούν με προσοχή κατά την παραδοσιακή διδασκαλία στο αμφιθέατρο. Για να αφομοιωθούν όμως και να γίνουν οικείες στο φοιτητή θα πρέπει να ακολουθηθούν από ένα ικανό αριθμό παραδειγμάτων και ασκήσεων σε φροντιστηριακά μαθήματα, τα οποία κατά τη συνήθη πρακτική παρακολουθούνται από μικρότερες ομάδες φοιτητών. Παραδοσιακά, τα παραδείγματα που επιλέγονται για το σκοπό αυτό είναι εκείνα που επιδέχονται λύση, σε κλειστή μορφή, με όσο το δυνατόν απλούστερη εφαρμογή της μαθηματικής ανάλυσης, όπως το ηλεκτρικό πεδίο μιας ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας ή η μαγνητική επαγωγή στον άξονα ενός δακτυλίου που



διαρρέεται από σταθερό ρεύμα. Συχνά τα παραδείγματα αυτά εμφανίζονται εξεζητημένα και ανιαρά και ο φοιτητής αναπόφευκτα οδηγείται σε ερωτήματα του τύπου «... και τι θα συμβεί αν θεωρήσουμε ένα σημείο του χώρου έξω από τον άξονα του δακτυλίου;» Ευτυχώς, η μεγάλη διάδοση κατά την τελευταία δεκαετία ισχυρών και φθηνών προσωπικών υπολογιστών, καθώς και η διαθεσιμότητα μιας πλειάδας πακέτων λογισμικού, έρχονται σήμερα να επιλύσουν σε ένα βαθμό το πρόβλημα.

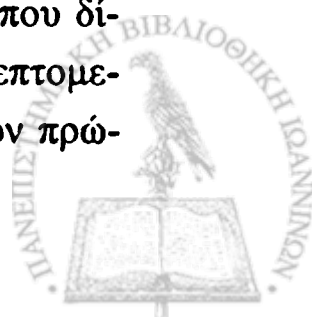
Κατά την τελευταία διετία, το Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων έχει αναδιοργανώσει το εισαγωγικό μάθημα του πρώτου έτους στον Ηλεκτρομαγνητισμό ώστε να περιλαμβάνει, πέρα από τις τέσσερις ώρες διδασκαλίας στο αμφιθέατρο, ένα εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών, το οποίο οι φοιτητές παρακολουθούν σε μικρές ομάδες των 15 έως 20 ατόμων. Για τη διαμόρφωση των φροντιστηριακών ασκήσεων που εκτελούνται στο εργαστήριο υπολογιστών, μελετήθηκαν μια πλειάδα λογισμικών πακέτων που έχουν πρόσφατα κυκλοφορήσει με στόχο τη διδασκαλία της Φυσικής μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή. Πολλά απ' αυτά βρέθηκε ότι έχουν περισσότερο τον χαρακτήρα επίδειξης. Από τον φοιτητή ζητείται να πληκτρολογήσει ορισμένες εντολές – που συνήθως πρέπει να αποστηθίσει χωρίς περαιτέρω εξήγηση – και στη συνέχεια να παρακολουθήσει μια επίδειξη που κάποιος έχει ετοιμάσει γι' αυτόν. Πιστεύουμε ότι από παιδαγωγική άποψη, η διεργασία που περισσότερο ωφελεί τον φοιτητή είναι αυτή κατά την οποία ο ίδιος συγκροτεί το πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή και σε κάθε βήμα αντιλαμβάνεται τι κάνει. Με στόχο την κατεύθυνση αυτή μελετήθηκαν πολλά πακέτα επιστημονικών υπολογισμών, όπως το *MathCad* και το *Mathematica*, αλλά διαπιστώθηκε ότι απαιτείται αρκετά μακροχρόνια διδασκαλία σε καθαρά επίπεδο Πληροφορικής προτού ένας πρωτοετής φοιτητής είναι σε θέση να παραγάγει χρήσιμα αποτελέσματα. Για τους λόγους αυτούς για τη διαμόρφωση του μαθήματος



χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά το λογισμικό πακέτο *Excel* της εταιρείας *Microsoft* και στοιχεία της γλώσσας *Visual Basic* που το συμπληρώνει.

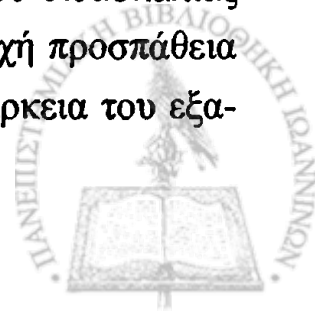
Το βιβλίο που ακολουθεί περιέχει μια σειρά ασκήσεων που μπορούν να εκτελεστούν κατά τη διάρκεια ενός εξαμήνου παράλληλα με την διδασκαλία της θεωρίας του Ηλεκτρομαγνητισμού. Πρέπει ευθύς εξ' αρχής να τονιστεί ότι δεν πρόκειται για ένα διδακτικό βιβλίο στο χώρο της Πληροφορικής, όπως τα παραδοσιακά συγγράμματα Ηλεκτρομαγνητισμού δεν είναι διδακτικά βιβλία στο χώρο της Μαθηματικής Ανάλυσης ή του Ανυσματικού Λογισμού. Αποκλειστικός διδακτικός στόχος του βιβλίου είναι η Φυσική και ιδιαίτερα τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Για το λόγο αυτό, αμέσως μετά από μια αναγκαία πρώτη γνωριμία με το *Excel* στο πρώτο κεφάλαιο, οι εντολές, μακροεντολές και συναρτήσεις του λογισμικού πακέτου εισάγονται μόνο όταν και όπου απαιτούνται για την αντιμετώπιση ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Βεβαίως, οι σελίδες που ακολουθούν δεν εξαντλούν επ' ουδενί λόγω τις πολλές δυνατότητες του *Excel*.

Κατά την εκτέλεση μιας άσκησης στο εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών, ο φοιτητής καλείται να δημιουργήσει ένα Βιβλίο του *Excel* που αντιμετωπίζει ένα συγκεκριμένο πρόβλημα και να καταλήξει σε αριθμητικά αποτελέσματα. Στη συνέχεια αποθηκεύει το Βιβλίο που κατασκεύασε σε μια προσωπική του δισκέτα για περαιτέρω επεξεργασία στο σπίτι. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν επιπλέον ασκήσεις που μπορούν να δοθούν στο φοιτητή για πρόσθετη κατ' οίκον εξάσκηση. Οι εντολές του *Excel* και οι συναρτήσεις της γλώσσας *Visual Basic* που εισάγονται κατά τις Εργαστηριακές Ασκήσεις των πρώτων κεφαλαίων έχουν σκόπιμα διαμορφωθεί στο απλούστερο δυνατόν επίπεδο. Επιπλέον, οι οδηγίες που δίνονται για την εκτέλεση κάθε άσκησης είναι εξαιρετικά λεπτομερείς. Ιδιαίτερα, οι οδηγίες στις Εργαστηριακές Ασκήσεις των πρώ-



των κεφαλαίων δίνονται με τόση λεπτομέρεια, ώστε και ένας φοιτητής που για πρώτη φορά αντιμετωπίζει το λογισμικό πακέτο να μπορεί να τις εκτελέσει, μαθαίνοντας έτσι το *Excel* παράλληλα με τη Φυσική.

Η διδασκαλία του εισαγωγικού μαθήματος στον Ηλεκτρομαγνητισμό με τη βοήθεια προσωπικού ηλεκτρονικού υπολογιστή εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κατά το ακαδημαϊκό έτος 1997-98, με μια ομάδα 75 περίπου πρωτοετών φοιτητών. Τα πρώτα αποτελέσματα αυτού του πειράματος είναι εξαιρετικά ενθαρρυντικά. Η παρακολούθηση των φροντιστηριακών ασκήσεων στο εργαστήριο υπολογιστών ήταν κατά πολύ μαζικότερη απ' ό τι στα παραδοσιακά φροντιστήρια επίλυσης ασκήσεων στο μαυροπίνακα. Παρατηρήθηκε ακόμη ότι πολλοί φοιτητές – ιδιαίτερα όσοι δεν διέθεταν προσωπικό υπολογιστή στο σπίτι – καταλάωναν αρκετό επιπλέον χρόνο στο εργαστήριο υπολογιστών, το οποίο χρειάστηκε να παραμένει ανοικτό καθ' όλη σχεδόν τη διάρκεια της ημέρας. Οι εργασίες πάνω στις Εργαστηριακές Ασκήσεις που παρέδιδαν οι φοιτητές κάθε εβδομάδα αντανakλούσαν σημαντική προσπάθεια αλλά και ικανοποίηση. Η συνεχής προσπάθεια με στόχο την καλύτερη κατανόηση των φυσικών εννοιών με παράλληλη ανάπτυξη δεξιοτήτων στο χειρισμό του ηλεκτρονικού υπολογιστή ώστε να αποκομίζουν άμεσα αποτελέσματα, διατηρούσε την εγρήγορση και το ενδιαφέρον των φοιτητών. Μερικές από τις ευτυχέστερες στιγμές στη μακρά σταδιοδρομία μου ως δασκάλου προήλθαν από την ικανοποίηση που έβλεπα να καθρεφτίζεται στα πρόσωπα νεαρών φοιτητών και φοιτητριών όταν σε κάποιο στάδιο της άσκησης συμπλήρωναν με επιτυχία ακόμη και ένα σχετικά απλό υπολογισμό ή γραφική παράσταση. Παρ' όλα αυτά, ένα δίδαγμα που αντλήθηκε από την πρώτη εφαρμογή του νέου τρόπου διδασκαλίας ήταν ότι ο τύπος αυτός του μαθήματος απαιτεί συνεχή προσπάθεια του φοιτητή – και του διδάσκοντα – καθ' όλη τη διάρκεια του εξα-



μήνου. Ορισμένοι φοιτητές που δεν αντιλήφθηκαν την απαίτηση αυτή και αποφάσισαν να περιμένουν μέχρι τον Ιούνιο για να διαβάσουν εντατικά πριν από την τελική εξέταση, πολύ γρήγορα έμειναν πίσω και τελικά απέτυχαν στις εξετάσεις τους. Μια συνεχής παρακολούθηση της προόδου των φοιτητών, καθ' όλο το εξάμηνο και επί προσωπικού επιπέδου, από το διδακτικό προσωπικό είναι επομένως απαραίτητη ώστε το μάθημα να επιτύχει και να ωφελήσει όσο το δυνατόν περισσότερους φοιτητές.

Μοιραία, ο τύπος του ανά χείρας βιβλίου του προσδίδει αρκετά εφήμερο χαρακτήρα. Τα λογισμικά πακέτα που βρίσκονται στη διάθεση της επιστήμης εξελίσσονται συνεχώς. Το μάθημα που περιγράφεται θα μπορούσε να είχε διαμορφωθεί πριν από μερικά χρόνια με βάση ένα άλλο πακέτο λογιστικών φύλλων, όπως το *dBase IV*, το *Lotous 1,2,3* ή το *Framework* – τα οποία ήλθαν και παρήλθαν. Το παρόν βιβλίο βασίζεται στις ελληνικές εκδόσεις του πακέτου *Excel 5* και *Excel 7* (δεν υπάρχει *Excel 6*) γιατί αυτό είναι σήμερα το πλέον πρόσφορο, απλό και ευέλικτο λογισμικό εργαλείο για τους σκοπούς του μαθήματος. Ήδη, ενώ συμπληρωνόταν η συγγραφή του βιβλίου, η εταιρεία *Microsoft* ανακοίνωσε τη νέα έκδοση *Excel 97*, η οποία όμως δεν έχει ακόμη μεταφραστεί στα ελληνικά. Ευτυχώς, το *Excel 97* δεν διαφέρει πολύ από τις προηγούμενες εκδόσεις. Όλα τα παραδείγματα και οι ασκήσεις του βιβλίου μπορούν να εκτελεστούν και στο *Excel 97*, με μόνη εξαίρεση την εισαγωγή μακροεντολών, τις οποίες η νέα έκδοση χειρίζεται κατά λίγο διαφορετικό τρόπο μέσω του μενού "Εργαλεία".

Στη διαμόρφωση του νέου μαθήματος είχα πολλαπλή βοήθεια. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κ.κ. Δ. Καραμάνη, Κ. Σταμούλη και Χ. Παπαχριστοδούλου, που δίδαξαν πολλά από τα φροντιστήρια και με κριτικό μάτι συνέβαλαν στη βελτίωση των οδηγιών προς τους φοιτητές. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστή-



σω την οικογένειά μου για την υπομονή και κατανόηση που έδειξαν όταν κατά τη διάρκεια των θερινών διακοπών του 1998 έγραφα αυτό το βιβλίο. Τους το αφιερώνω, με αγάπη.

Π.Α.Α.

Ιωάννινα, Δεκέμβριος, 1998



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	40
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	50
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	60
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	70
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8	80
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9	90
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10	100
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11	110
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12	120
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13	130
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14	140
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15	150
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16	160
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17	170
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 18	180
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 19	190
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 20	200
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 21	210
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 22	220
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 23	230
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 24	240
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 25	250
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 26	260
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 27	270
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 28	280
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 29	290
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 30	300
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 31	310
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 32	320
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 33	330
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 34	340
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 35	350
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 36	360
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 37	370
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 38	380
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 39	390
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 40	400
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 41	410
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 42	420
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 43	430
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 44	440
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 45	450
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 46	460
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 47	470
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 48	480
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 49	490
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 50	500
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 51	510
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 52	520
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 53	530
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 54	540
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 55	550
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 56	560
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 57	570
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 58	580
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 59	590
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 60	600
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 61	610
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 62	620
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 63	630
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 64	640
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 65	650
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 66	660
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 67	670
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 68	680
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 69	690
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 70	700
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 71	710
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 72	720
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 73	730
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 74	740
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 75	750
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 76	760
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 77	770
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 78	780
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 79	790
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 80	800
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 81	810
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 82	820
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 83	830
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 84	840
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 85	850
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 86	860
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 87	870
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 88	880
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 89	890
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 90	900
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 91	910
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 92	920
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 93	930
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 94	940
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 95	950
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 96	960
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 97	970
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 98	980
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 99	990
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 100	1000



Εισαγωγή	ii
Εισαγωγή στην πρώτη έκδοση	v
Περιεχόμενα	xii
Εργαστηριακές ασκήσεις	xviii
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Μια πρώτη γνωριμία με το <i>Excel</i>	1
Οργάνωση των αρχείων	3
Βιβλία, φύλλα και κελιά	8
Αναφορά σε κελιά	10
Επιλογή, αντιγραφή και μετακίνηση κελιών	12
Μαθηματικοί τύποι	14
Συναρτήσεις του <i>Excel</i>	19
Γραφικές παραστάσεις	28
Απεικόνιση ανυσμάτων	32
Η γλώσσα Visual Basic	33
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	33



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Δυνάμεις μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων	39
Δυνάμεις μεταξύ σημειακών φορτίων	41
Το ηλεκτρικό πεδίο ηλεκτρικού διπόλου	53
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	69
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Αριθμητική ολοκλήρωση συναρτήσεων	77
Αριθμητική ολοκλήρωση συναρτήσεων μιας μεταβλητής	79
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	96
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Ηλεκτρικό πεδίο	99
Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ράβδου	101
Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου δακτυλίου	111
Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ταινίας	122
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	129
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Ηλεκτρικό δυναμικό	133
Δυναμικό σημειακών φορτίων	134
Δυναμικό φορτισμένου δακτυλίου	142
Δυναμικό φορτισμένου δίσκου	151
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	158
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. Η εξίσωση Poisson	163
Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Poisson	164
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	192
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7. Κλίση του δυναμικού και απόκλιση του πεδίου	195
Ηλεκτρικό δυναμικό και πεδίο σημειακών φορτίων	198



Απόκλιση ηλεκτρικού πεδίου	223
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	229
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Αγωγοί	233
Είδηλα ηλεκτροστατικών φορτίων	235
Σφαιρικός αγωγός σε περιοχή σταθερού ηλεκτρικού πεδίου	257
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	268
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9. Διηλεκτρικά υλικά	271
Ηλεκτρικό δυναμικό και πεδίο σημειακού φορτίου σε διηλεκτρικά μέσα	276
Σφαίρα από γραμμικό διηλεκτρικό υλικό με γνωστή πόλωση σε περιοχή σταθερού ηλεκτρικού πεδίου	289
Σφαίρα από γραμμικό διηλεκτρικό υλικό σε περιοχή σταθερού ηλεκτρικού πεδίου	299
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	309
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10. Μαγνητικά πεδία	311
Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού	313
Μαγνητικό πεδίο κινούμενου φορτισμένου μάντα	320
Κινούμενος φορτισμένος μάντας και η αρχή της επαλληλίας	329
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	340
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11. Το μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου	341
δακτυλίου	
Η μαγνητική επαγωγή ρευματοφόρου δακτυλίου	342
Μαγνητική διπολική ροπή	355
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	363



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12. Πηνία	365
Η μαγνητική επαγωγή πηνίου	367
Μαγνητική επαγωγή πηνίου <i>Helmholtz</i>	381
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	385
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ. Απεικόνιση πεδίου	387
Ευρετήριο	391



1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20
21	21
22	22
23	23
24	24
25	25
26	26
27	27
28	28
29	29
30	30
31	31
32	32
33	33
34	34
35	35
36	36
37	37
38	38
39	39
40	40
41	41
42	42
43	43
44	44
45	45
46	46
47	47
48	48
49	49
50	50
51	51
52	52
53	53
54	54
55	55
56	56
57	57
58	58
59	59
60	60
61	61
62	62
63	63
64	64
65	65
66	66
67	67
68	68
69	69
70	70
71	71
72	72
73	73
74	74
75	75
76	76
77	77
78	78
79	79
80	80
81	81
82	82
83	83
84	84
85	85
86	86
87	87
88	88
89	89
90	90
91	91
92	92
93	93
94	94
95	95
96	96
97	97
98	98
99	99
100	100

INDONESIA

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Μια πρώτη γνωριμία με το <i>Excel</i>	1
1.1. Δημιουργία του προσωπικού σας Φακέλου	3
1.2. Μετονομασία και αποθήκευση αρχείων	4
1.3. Μαθηματικοί τύποι και συναρτήσεις του <i>Excel</i>	20
1.4. Αριθμητική τιμή συνάρτησης δύο μεταβλητών	24
1.5. Γραφικές παραστάσεις δύο διαστάσεων	28
1.6. Γραφικές παραστάσεις τριών διαστάσεων	30
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	33
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Δυνάμεις μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων	39
2.1. Δυνάμεις μεταξύ τεσσάρων σημειακών φορτίων	43
2.2. Ηλεκτρικό πεδίο ηλεκτρικού διπόλου	53
2.3. Ηλεκτρικό πεδίο μιας απλής συνεχούς κατανομής ηλεκτρικού φορτίου	64
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	69
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Αριθμητική ολοκλήρωση συναρτήσεων	77
3.1. Αριθμητική ολοκλήρωση συνάρτησης	82



3.2. Αριθμητική ολοκλήρωση συνάρτησης <i>Visual Basic</i>	88
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	96
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Ηλεκτρικό πεδίο	99
4.1. Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ράβδου	103
4.2. Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου δακτυλίου	113
4.3. Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ταινίας με άπειρες διαστάσεις	125
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	129
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Ηλεκτρικό δυναμικό	133
5.1. Δυναμικό γραμμικού ηλεκτρικού τετραπόλου	136
5.2. Δυναμικό φορτισμένου δακτυλίου	144
5.3. Δυναμικό φορτισμένου δίσκου	152
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	158
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. Η εξίσωση Poisson	163
6.1. Επίλυση της Εξίσωσης Poisson	167
6.2. Ηλεκτρικό πεδίο πυκνωτή με επίπεδους οπλισμούς	179
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	192
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7. Κλίση του δυναμικού και απόκλιση του πεδίου	195
7.1. Ηλεκτρικό δυναμικό και πεδίο σημειακού φορτίου	198
7.2. Ηλεκτρικό δυναμικό και πεδίο ηλεκτρικού διπόλου	206
7.3. Ηλεκτρικό δυναμικό και πεδίο ηλεκτρικού τετραπόλου	214
7.4. Προσδιορισμός του ηλεκτρικού φορτίου μέσω της εξίσωσης Poisson	224
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	229



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Αγωγοί	233
8.1. Σημειακό φορτίο σε μικρή απόσταση από επίπεδη επιφάνεια γειωμένου αγωγού	238
8.2. Σημειακό φορτίο σε μικρή απόσταση από σφαιρικό αγωγό	248
8.3. Γειωμένος σφαιρικός αγωγός σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο	262
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	268
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9. Διηλεκτρικά υλικά	271
9.1. Σημειακό φορτίο σε μικρή απόσταση από επίπεδη συνοριακή επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών υλικών	281
9.2. Σφαίρα από διηλεκτρικό υλικό με γνωστή πόλωση	292
9.3. Διηλεκτρική σφαίρα σε περιοχή σταθερού ηλεκτρικού πεδίου	302
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	309
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10. Μαγνητικά πεδία	311
10.1. Μαγνητική επαγωγή ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού	314
10.2. Μαγνητική επαγωγή κινούμενου φορτισμένου ιμάντα	322
10.3. Μαγνητική επαγωγή κινούμενου φορτισμένου ιμάντα. Προσέγγιση μέσω της αρχής της επαλληλίας	331
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	340
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11. Το μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου δακτυλίου	341
11.1. Μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου δακτυλίου	344
11.2. Μαγνητικό πεδίο διπόλου	358
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	363



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12. Πηνία	365
12.1. Μαγνητικό πεδίο πηνίου	369
12.2. Μαγνητικό πεδίο πηνίου <i>Helmholtz</i>	383
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	385



ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΝΑ

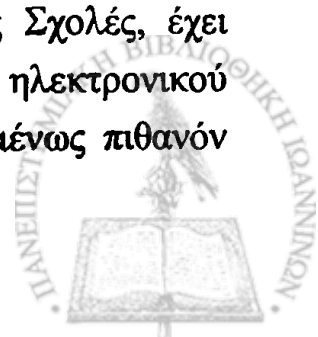
**Μια πρώτη γνωριμία
με το *Excel***



ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ ΠΑΚΕΤΟ *EXCEL* κατασκευάστηκε από την εταιρεία *Microsoft* για την αντιμετώπιση των λογιστικών αναγκών σε εμπορικές επιχειρήσεις. Πολύ σύντομα όμως, ιδιαίτερα με τις ραγδαίες βελτιώσεις και νέες δυνατότητες που πρόσθεσαν μετέπειτα εκδόσεις του πακέτου, έγινε αντιληπτό ότι η ισχυρή υπολογιστική του ικανότητα και ευελιξία είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν σε καθαρά επιστημονικούς υπολογισμούς.

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο του βιβλίου θα κάνουμε μια πρώτη γνωριμία με το *Excel*. Θα δούμε τους βασικούς χειρισμούς που μας επιτρέπουν να πραγματοποιούμε πράξεις μεταξύ αριθμών, να ορίζουμε μεταβλητές και να υπολογίζουμε την αριθμητική τιμή μιας συνάρτησης. Όπως ήδη έχουμε τονίσει, το βιβλίο αυτό δεν αποτελεί διδακτικό εγχειρίδιο στο χώρο της Πληροφορικής. Σκοπός μας εδώ είναι να κάνουμε Φυσική, χρησιμοποιώντας τον ηλεκτρονικό υπολογιστή ως εργαλείο. Έτσι, σε όλη την έκταση του βιβλίου θα ανακαλύπτουμε νέες δυνατότητες του *Excel* όπου και όποτε μας χρειάζονται – θα έλεγε κανείς, παρεμπιπτόντως. Μια όμως πρώτη γνωριμία με το λογισμικό πακέτο και μια ανασκόπηση των βασικών χειρισμών κειμένου και αριθμών είναι ίσως χρήσιμη.

Στη σύγχρονη Πανεπιστημιακή εκπαίδευση, ιδιαίτερα στις Σχολές Θετικών Επιστημών και στις Πολυτεχνικές Σχολές, έχει καθιερωθεί η εισαγωγή του φοιτητή σε μεθόδους ηλεκτρονικού υπολογιστή ήδη από το πρώτο εξάμηνο. Είναι επομένως πιθανόν



πολλοί από τους αναγνώστες του παρόντος βιβλίου να είναι ήδη εξοικειωμένοι με το πακέτο *Excel*. Φοιτητές αυτής της κατηγορίας μπορούν να προχωρήσουν αμέσως στο δεύτερο κεφάλαιο του βιβλίου. Άλλοι που ενδεχομένως θέλουν να εμβαθύνουν στις πολλές δυνατότητες του πακέτου παραπέμπονται στο εγχειρίδιο της εταιρείας *Microsoft* ή στα πολλά διδακτικά βοηθήματα που κυκλοφορούν.

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΩΝ ΑΡΧΕΙΩΝ

Προτού προχωρήσουμε σε οποιαδήποτε άλλη ενέργεια, καλό είναι να οργανώσετε το χώρο εργασίας σας – κάτι που θα κάνετε στο γραφείο σας με την οργάνωση της βιβλιοθήκης, των συρταριών και των εγγράφων σας. Την εργασία αυτή μπορείτε να την κάνετε με το πρόγραμμα *Εξερεύνηση των Windows*.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1.1

Δημιουργία του προσωπικού σας Φακέλου

1. Ανοίξτε το πρόγραμμα *Εξερεύνηση των Windows* με το αντίστοιχο εικονίδιο στη *Γραμμή Εργαλείων* του *Microsoft Office* (είναι το εικονίδιο που περιέχει ένα γαλάζιο μεγεθυντικό φακό πάνω σε ένα κίτρινο έγγραφο) ή με τη διαδοχική επιλογή

Έναρξη → Προγράμματα → Εξερεύνηση των Windows.

2. Στην αριστερή στήλη της οθόνης που θα ανοίξει επιλέξτε την ένδειξη [C:]
3. Από τα μενού του προγράμματος επιλέξτε



Αρχείο → Δημιουργία → Φάκελος.

Στη δεξιά στήλη της οθόνης θα εμφανιστεί ένα εικονίδιο φακέλου με την ένδειξη **Νέος φάκελος**. Σβήστε την ένδειξη "Νέος φάκελος" και στη θέση της πληκτρολογήστε το επίθετό σας. Πιέστε **Enter**. Τώρα έχετε ένα προσωπικό φάκελο στον σκληρό δίσκο (C:) όπου μπορείτε να αποθηκεύετε τα αρχεία σας.

4. Κλείστε το πρόγραμμα *Εξερεύνηση των Windows*.

Στα επόμενα κεφάλαια θα κληθείτε να εκτελέσετε μια σειρά Εργαστηριακών Ασκήσεων. Το τελικό προϊόν κάθε άσκησης θα είναι ένα πρόγραμμα του *Excel* που επιλύει κάποιο πρόβλημα στον ηλεκτρομαγνητισμό για το οποίο έχετε καταβάλει κόπο και φαιά ουσία. Θα θέλετε προφανώς να διατηρήσετε το πρόγραμμα αυτό ώστε στο μέλλον να το χρησιμοποιήσετε για νέους υπολογισμούς ή να το τροποποιήσετε και να το βελτιώσετε. Για το σκοπό αυτό μπορείτε να το αποθηκεύσετε ως ένα αρχείο στο φάκελο που μόλις δημιουργήσατε στην προηγούμενη Εργαστηριακή Άσκηση ή σε μια δισκέτα (στη θύρα A:), ώστε να είναι δυνατή η μεταφορά του σε άλλον υπολογιστή. Για μεγαλύτερη ασφάλεια μπορείτε να αποθηκεύσετε το αρχείο σας και στα δύο μέσα. Η επόμενη Εργαστηριακή Άσκηση περιγράφει πώς πραγματοποιείται αυτή η διεργασία.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1.2

Μετονομασία και αποθήκευση αρχείων

1. Ανοίξτε το πρόγραμμα *Excel* με το αντίστοιχο εικονίδιο στη Γραμμή Εργαλείων του *Microsoft Office* (είναι το εικονίδιο που



περιέχει ένα πράσινο X) ή με τη διαδοχική επιλογή στα Windows

Έναρξη → Προγράμματα → Microsoft Excel.

Το *Excel* ανοίγει με τη βασική οθόνη του σχήματος 1-1 που θα μελετήσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στην επόμενη παράγραφο. Προς το παρόν σας παρέχει ένα λογιστικό «Βιβλίο» με ένα αριθμό άγραφων «Φύλλων», τα οποία θα συμπληρώσετε με κείμενο, αριθμούς και αποτελέσματα υπολογισμών κατά την εκτέλεση της εργασίας σας. Στο άνω αριστερό μέρος της οθόνης υπάρχει η ένδειξη

Microsoft Excel - Βιβλίο 1

Το *Excel* έχει ονομάσει αυτομάτως το Βιβλίο στο οποίο θα εργαστείτε *Βιβλίο 1*. Αν προσπαθήσετε να ανοίξετε περισσότερα Βιβλία, θα τα ονομάσει αυτομάτως *Βιβλίο 2*, *Βιβλίο 3*, κλπ. Όπως και με τα κοινά βιβλία, μπορείτε να δώσετε στα Βιβλία του *Excel* ένα διαφορετικό τίτλο, ο οποίος θα αντανακλά το περιεχόμενό τους. Για να μετονομάσετε και να αποθηκεύσετε με το νέο όνομα ένα Βιβλίο του *Excel*

- Επιλέξτε από τα μενού

Αρχείο → Αποθήκευση ως ...

- Στο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει, θα παρατηρήσετε ότι υπάρχει η ένδειξη

Όνομα αρχείου:

Βιβλίο 1



- Σβήστε την ένδειξη *Βιβλίο 1* και αντικαταστήστε την με τον τίτλο που επιθυμείτε, π.χ. *Άσκηση 5.2* ή *Ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου*.
- Στη θέση Αποθήκευση σε: επιλέξτε διαδοχικά το σκληρό δίσκο C: και, στο νέο παράθυρο που θα ανοίξει, το προσωπικό σας φάκελο που δημιουργήσατε στην Εργαστηριακή Άσκηση 1.1.
- Επιλέξτε Αποθήκευση.

2. Για να αποθηκεύσετε το ίδιο αρχείο σε μια δισκέτα

- Τοποθετήστε μια δισκέτα στη θύρα A:
- Επιλέξτε από τα μενού Αρχείο → Αποθήκευση ως ...
- Στο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει θα παρατηρήσετε ότι στη θέση Όνομα αρχείου: υπάρχει τώρα το σωστό όνομα του Βιβλίου σας. Δεν χρειάζεται επομένως να επέμβετε.
- Στη θέση Αποθήκευση σε: επιλέξτε Δισκέτα 3.5 (A:).
- Επιλέξτε Αποθήκευση.

Η διεργασία που μόλις περιγράφηκε θα αποτελέσει το πρώτο βήμα σε κάθε Εργαστηριακή Άσκηση που θα εκτελέσετε στο μέλλον. Από το σημείο αυτό και πέρα δεν χρειάζεται να επαναληφθεί, εκτός αν θέλετε να αλλάξετε μέσο αποθήκευσης. Το *Excel* θυμάται ανά πάσα



στιγμή το όνομα του Βιβλίου και τη θέση στην οποία το αποθηκεύσατε την τελευταία φορά. Αν επιλέξετε από τα μενού την παραπλήσια με την προηγούμενη διαδοχή

Αρχείο → Αποθήκευση

το *Excel* θα σβήσει την έκδοση του Βιβλίου από τη θέση όπου είναι μέχρι τώρα αποθηκευμένο και θα την αντικαταστήσει με την έκδοση όπως αυτή βρίσκεται κατά τη δεδομένη στιγμή στην οθόνη του υπολογιστή. Η επιλογή της διαδοχής αυτής είναι ισοδύναμη με την ενεργοποίηση του αντίστοιχου εικονιδίου στη γραμμή εργαλείων του *Excel*.

Κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας ενός Βιβλίου του *Excel* συνιστάται η περιοδική αποθήκευσή του (π.χ. κάθε 10 λεπτά) με την επιλογή Αρχείο → Αποθήκευση ή την ενεργοποίηση του αντίστοιχου εικονιδίου. Η πρακτική αυτή θα σας προφυλάξει από ενδεχόμενη απώλεια της εργασίας σας. Αν, για παράδειγμα, υπάρξει διακοπή του ηλεκτρικού ρεύματος, το μόνο που θα χάσετε είναι η εργασία που εκτελέσατε μετά την τελευταία αποθήκευση του αρχείου. Μετά την αποκατάσταση του ρεύματος και την επανεκκίνηση του *Excel* μπορείτε να ανακαλέσετε το αποθηκευμένο αρχείο και να συνεχίσετε την εργασία σας με σχετικά μικρή απώλεια χρόνου και κόπου.

Παρατηρείται ότι η διεργασία της αποθήκευσης ενός αρχείου εκτελείται πολύ πιο γρήγορα στο σκληρό δίσκο C: απ' ό τι στη δισκέτα A: Για να μην σπαταλάτε άδικα χρόνο, μπορείτε αρχικά να αποθηκεύσετε το Βιβλίο σας στο σκληρό δίσκο C:, να συνεχίσετε την περιοδική αποθήκευσή του στο δίσκο C: καθ' όλη τη διάρκεια επεξεργασίας του Βιβλίου και στο τέλος να δημιουργήσετε ένα



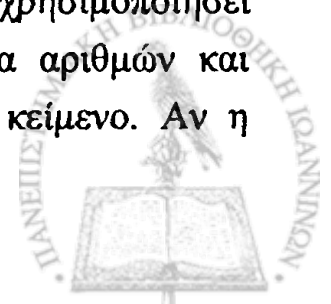
αντίγραφο στη δισκέτα σας με τη διεργασία της Εργαστηριακής Άσκησης 1.2.

ΒΙΒΛΙΑ, ΦΥΛΛΑ ΚΑΙ ΚΕΛΙΑ

Η οθόνη που εμφανίζεται με την εκκίνηση του *Excel* περιέχεται στο σχήμα 1-1. Το *Excel* δημιουργεί αρχικά ένα Βιβλίο με μερικά Φύλλα. Στο Βιβλίο δίνεται αυτόματα ο τίτλος *Βιβλίο 1*, ενώ τα Φύλλα διακρίνονται με τις ονομασίες *Φύλλο1*, *Φύλλο2*, κλπ. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να μετονομάσουμε τον τίτλο ενός Βιβλίου, ώστε να ανταποκρίνεται καλύτερα προς το θέμα του. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δώσουμε διαφορετικά ονόματα στα διάφορα Φύλλα. Μπορούμε ακόμη να διαγράψουμε ολόκληρα Φύλλα, να προσθέσουμε νέα ή να μεταφέρουμε Φύλλα από ένα Βιβλίο σε άλλο. Θα δούμε τις διεργασίες αυτές αργότερα, όταν ανακύψει η αντίστοιχη ανάγκη.

Μπορούμε να δούμε ένα Βιβλίο του *Excel* σαν ένα λογιστικό βιβλίο, όπως αυτά που τηρούν οι εμπορικές επιχειρήσεις. Εξ' άλλου αυτός ήταν και ο αρχικός στόχος του *Excel*: η μηχανοργάνωση εμπορικών επιχειρήσεων! Κάθε Φύλλο του *Excel* είναι διαγραμματισμένο σε στήλες και σειρές («αράδες», που έλεγαν οι παλιοί λογιστές) όπως ακριβώς τα χειρόγραφα λογιστικά βιβλία. Η τομή μιας σειράς και μιας στήλης δημιουργεί ένα κελί, όπου μπορεί να καταχωρηθεί κείμενο, ένας αριθμός μια ημερομηνία ή να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή ενός μαθηματικού τύπου ή μιας συνάρτησης.

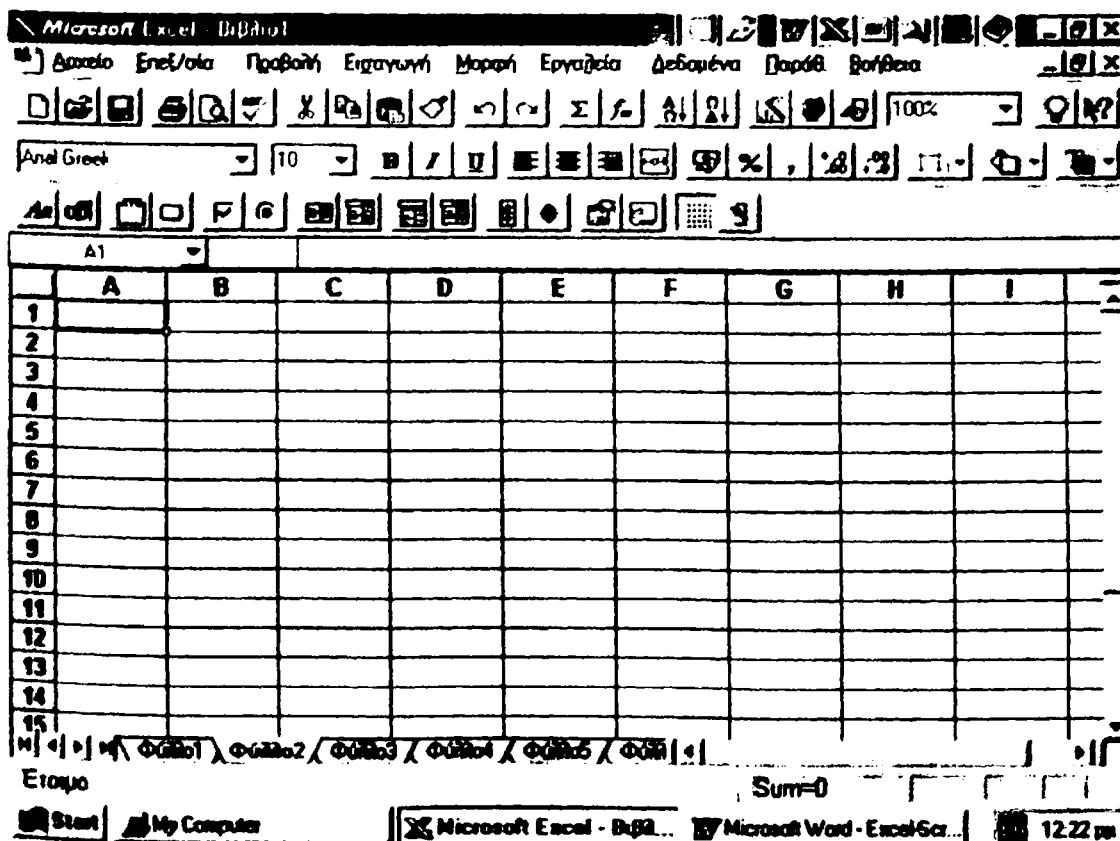
Μπορείτε να επιλέξετε ένα συγκεκριμένο κελί με το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού. Το *Excel* διερευνά τη φύση της πληροφορίας που πληκτρολογείτε στη συνέχεια και ερμηνεύει ανάλογα τα δεδομένα που εισάγετε. Αν πληκτρολογήσετε ένα αριθμό, το *Excel* αποθηκεύει την αριθμητική τιμή και μπορεί να τη χρησιμοποιήσει σε υπολογισμούς. Αν πληκτρολογήσετε ένα μίγμα αριθμών και γραμμάτων, θα αποθηκεύσει την πληροφορία ως κείμενο. Αν η



πληκτρολόγηση αρχίζει με το σύμβολο «ίσον» (=), το Excel, αποθηκεύει το περιεχόμενο του κελιού ως μαθηματικό τύπο.

Κάθε κελί ενός Φύλλου χαρακτηρίζεται από δύο ιδιότητες: το περιεχόμενο και την τιμή του. Το περιεχόμενο είναι ό,τι πληκτρολογείτε στο κελί και η τιμή είναι ό,τι εμφανίζεται στην οθόνη. Για κείμενο και αριθμούς το περιεχόμενο και η τιμή ταυτίζονται. Για μαθηματικούς τύπους, το περιεχόμενο είναι το κείμενο που πληκτρολογήσατε και η τιμή είναι το αποτέλεσμα, υπό μορφή αριθμού, που εμφανίζεται στην οθόνη.

Επιλέγοντας ένα κελί ή μια ομάδα κελιών μπορείτε να μορφοποιήσετε την εμφάνισή τους με τα ανάλογα εικονίδια στη γραμμή εργαλείων. Μπορείτε να στοιχίσετε την τιμή που εμφανίζεται στην οθόνη αριστερά, δεξιά ή στο κέντρο του κελιού. Μπορείτε να εμφα-



Σχήμα 1-1 Βασική οθόνη του Excel με ένα Βιβλίο, το οποίο περιέχει άδεια Φύλλα.



νίσετε τους χαρακτήρες ως πλάγιους, έντονους ή υπογραμμισμένους. Τέλος, μπορείτε να τονίσετε ένα ή περισσότερα κελιά με περίγραμμα, σκίαση ή απόχρωση της επιλογής σας. Η μορφοποίηση ενός κελιού δεν επηρεάζει το περιεχόμενό του.

Ένα σύννηθες λάθος κατά την εισαγωγή στοιχείων σε ένα κελί είναι η εισαγωγή ενός αριθμού, τον οποίο το Excel εκλαμβάνει ως κείμενο. Τούτο μπορεί να συμβεί αν χρησιμοποιηθεί λάθος σύμβολο για την υποδιαστολή ή το γράμμα όμικρον (O) αντί του μηδενός (0). Αν δεν έχει οριστεί αλλιώς με συνειδητή ρύθμιση από το μενού **Εργαλεία** → **Επιλογές**, το Excel στοιχίζει αυτόματα αριθμούς δεξιά και κείμενο αριστερά. Έτσι με απλή επισκόπηση της οθόνης είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ποια στοιχεία θεωρεί το Excel ως αριθμούς και ποια ως κείμενο.

ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΕ ΚΕΛΙΑ

Ένα κελί του Excel μπορεί να αναφέρεται στο περιεχόμενο ενός άλλου κελιού μέσω των συντεταγμένων του δευτέρου στο ίδιο ή άλλο Φύλλο. Όπως φαίνεται στο σχήμα 1-1, οι στήλες ενός Φύλλου αριθμούνται σύμφωνα με τη διαδοχή του αγγλικού αλφαβήτου (A, B, C, ...) από αριστερά προς τα δεξιά, ενώ οι σειρές με τη διαδοχή των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, ... από άνω προς τα κάτω. Έτσι στην επόμενη εικόνα

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				

το γραμμοσκιασμένο κελί αναφέρεται ως το κελί B3.



Η αναφορά ενός κελιού σε ένα άλλο που μόλις περιγράψαμε είναι η απλούστερη δυνατή. Αν, για παράδειγμα, στο κελί G3 υπάρχει αποθηκευμένος ο αριθμός 3.17 και στο κελί H7 έχει πληκτρολογηθεί

=G3

το κελί H7 θα εμφανίσει την τιμή 3.17. Η αναφορά μπορεί να αφορά ακόμη κελί άλλου Φύλλου. Στην περίπτωση αυτή η αναφορά πρέπει να περιέχει και το αντίστοιχο όνομα του Φύλλου. Η σύνταξη είναι

=ΌνομαΦύλλου!ΣτήληΓραμμή

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να αναφερθούμε στο κελί που βρίσκεται στο Φύλλο Πεδίο με συντεταγμένες G4, η αναφορά είναι

=Πεδίο!G4

Μια σημαντική, και όπως θα δούμε στη συνέχεια εξαιρετικά χρήσιμη, ιδιότητα του προηγούμενου τρόπου αναφοράς σε ένα κελί είναι ότι η αναφορά έχει σχετικό χαρακτήρα. Αν, όπως δείχνει το επόμενο παράδειγμα,

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6				=B3	
7					

στο κελί D6 πληκτρολογήσουμε την ένδειξη =B3, τούτο δεν σημαί-



νει ότι αναφερόμαστε απαραίτητα στο κελί που βρίσκεται στη στήλη B και στη σειρά 3. Σημαίνει ότι στο κελί D6 θα εμφανιστεί το περιεχόμενο του κελιού με συντεταγμένες 2 στήλες αριστερότερα και 3 σειρές πιο πάνω από το κελί D6. Η σχετική αυτή αναφορά σε συντεταγμένες μπορεί να μετατραπεί σε απόλυτη αναφορά με τη χρήση του συμβόλου \$. Π.χ., η αναφορά \$F\$7 αφορά το κελί που όντως βρίσκεται στη στήλη F και στη σειρά 7. Κατά τον ίδιο τρόπο, αναφορές μπορούν να έχουν μικτό χαρακτήρα. Αν, για παράδειγμα, το κελί D6 περιέχει την αναφορά \$B5, αυτή αφορά το κελί που βρίσκεται στη στήλη B και μια σειρά πάνω από το κελί D6, ενώ η αναφορά H\$11 αφορά το κελί που βρίσκεται τέσσερις στήλες δεξιότερα και στη σειρά 11.

Ο χαρακτήρας της αναφοράς σε ένα κελί, όπως θα δούμε αμέσως στη συνέχεια, παίζει ουσιαστικό ρόλο κατά την αντιγραφή ή μεταφορά του περιεχομένου κελιών.

ΕΠΙΛΟΓΗ, ΑΝΤΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΗ ΚΕΛΙΩΝ

Όπως ήδη αναφέρθηκε, μπορείτε να επιλέξετε ένα κελί με το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού. Ένα επιλεγμένο κελί εμφανίζεται στην οθόνη του υπολογιστή με μαύρο περίγραμμα. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορείτε να επιλέξετε μια περιοχή κελιών κρατώντας πατημένο το αριστερό πλήκτρο και σύροντας κατάλληλα το ποντίκι. Στο συμβολισμό του Excel, μια περιοχή κελιών σημειώνεται με το σημείο της άνω και κάτω στιγμής (:). Για παράδειγμα, η περιοχή που ορίζεται από την τομή των στηλών C έως F και των σειρών 9 έως 14 σημειώνεται ως η περιοχή C9:F14. Μια επιλεγμένη περιοχή εμφανίζεται στην οθόνη του υπολογιστή με γκρίζο χρώμα, εκτός από το άνω αριστερά κελί, το οποίο εμφανίζεται με λευκή σκίαση και μαύρο περίγραμμα (κάνεις εκτός από τους κατασκευαστές του Excel δεν γνωρίζει γιατί συμβαίνει το τελευταίο!).

Το περιεχόμενο κελιών μπορεί να υποστεί **Αποκοπή, Αντιγρα-**



φή και **Επικόλληση**, όπως το κείμενο στους περισσότερους Επεξεργαστές Κειμένου (π.χ., στο πακέτο *Microsoft Word*, με το οποίο επικοινωνεί το *Excel* μέσω του γενικότερου συστήματος *Microsoft Office*). Με την επιλογή από τα μενού

Επεξ/σία → Αποκοπή

ή

Επεξ/σία → Αντιγραφή

το περιεχόμενο του κελιού ή της περιοχής κελιών που έχουν επιλεγεί αντιγράφεται στο πρόχειρο των Windows. Στην πρώτη περίπτωση εξαφανίζεται από τα επιλεγμένα κελιά, ενώ στη δεύτερη απλώς αντιγράφεται και παραμένει στην αρχική θέση. Σε μια επόμενη επιλογή από τα μενού

Επεξ/σία → Επικόλληση

το περιεχόμενο στο πρόχειρο μεταφέρεται σε κάποιο άλλο κελί ή περιοχή κελιών που έχει στο μεταξύ επιλεγεί. Με τον τρόπο αυτό μπορείτε να αντιγράψετε ή να μεταφέρετε το περιεχόμενο ενός κελιού σε ένα άλλο ή το περιεχόμενο ενός κελιού σε μια περιοχή κελιών. Μπορείτε ακόμη να αντιγράψετε ή να μεταφέρετε το περιεχόμενο μιας περιοχής σε μια άλλη. Στην τελευταία περίπτωση όμως υπάρχουν ορισμένοι κανόνες που πρέπει να τηρηθούν ως προς το σχήμα και μέγεθος των δύο περιοχών.

Πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα ότι κατά τη μεταφορά πληροφορίας από ένα κελί σε άλλο, μεταφέρεται το περιεχόμενο του κελιού και όχι απαραίτητα η τιμή του. Αν οι δύο ιδιότητες του κελιού ταυτίζονται, όπως στην περίπτωση αριθμού ή κειμένου, τότε το περιεχόμενο και η τιμή του θυγατρικού κελιού επίσης ταυτίζονται με τις αντίστοιχες ιδιότητες του μητρικού. Αν όμως το περιεχόμενο του μητρι-



κού κελιού περιέχει μια σχετική αναφορά, η τιμή που θα προκύψει μετά τη μεταφορά μπορεί να αλλάξει. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, την περίπτωση όπου το κελί D6 περιέχει την ένδειξη =B3 και στο κελί B3 είναι αποθηκευμένος ο αριθμός 4.372. Η τιμή που θα εμφανιστεί στο κελί D6 είναι επίσης ο αριθμός 4.372. Αν τώρα αντιγράψετε το κελί D6 στο κελί F7 το Excel θα μεταφράσει την ένδειξη =B3 ως «το περιεχόμενο του κελιού με συντεταγμένες 2 στήλες αριστερότερα και 3 σειρές πιο πάνω από το κελί F7», δηλαδή το περιεχόμενο του κελιού D5 – το οποίο μπορεί να μην είναι ο αριθμός 4.372. Την ενδιαφέρουσα αυτή συμπεριφορά θα μελετήσουμε στην Εργαστηριακή Άσκηση 1.3.

Βεβαίως, διαφορετική θα είναι η συμπεριφορά αν η αναφορά που μεταφέρεται είναι απόλυτη. Για να συνεχίσουμε το προηγούμενο παράδειγμα, αν το κελί D6 περιέχει την ένδειξη =\$B\$3, η τιμή που θα εμφανιστεί μετά τη μεταφορά στο κελί F7 θα είναι επίσης 4.372. Επαφίεται στον αναγνώστη να προσδιορίσει ποιο θα είναι το αποτέλεσμα μεταφοράς μικτών αναφορών, όπως =\$B3 ή =B\$3.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Το περιεχόμενο ενός κελιού μπορεί να είναι ένας **μαθηματικός τύπος**, δηλαδή μια αλγεβρική έκφραση που περιέχει αριθμούς, μεταβλητές και σύμβολα αλγεβρικών πράξεων. Στην περίπτωση αυτή η τιμή του κελιού που εμφανίζεται στην οθόνη είναι η αριθμητική τιμή της αλγεβρικής έκφρασης μετά την εκτέλεση όλων των πράξεων. Το Excel αντιλαμβάνεται ότι το κείμενο που πληκτρολογήσατε αποτελεί μαθηματικό τύπο από το σημείο «ίσον» (=) που πρέπει να προτάξετε στην όλη έκφραση. Αν το σημείο «ίσον» λείπει, το Excel εκλαμβάνει την έκφραση ως κείμενο.

Η σύνταξη ενός μαθηματικού τύπου σε μια γλώσσα που αντιλαμβάνεται το Excel είναι εξαιρετικά απλή – πηγάζει σχεδόν αυ-



θόρμητα από τη διαίσθησή σας. Είναι βέβαιο ότι σύντομα θα εκπλαγείτε με την ευκολία που θα διαπιστώσετε κατά τη σύνταξη και των πλέον περίπλοκων αλγεβρικών εκφράσεων. Για να είναι έγκυρος ένας μαθηματικός τύπος και να είναι δυνατή η εύρεση της αριθμητικής του τιμής θα πρέπει να τηρηθούν ορισμένοι απλοί κανόνες:

1. Η αριθμητική τιμή όλων των μεταβλητών πρέπει να έχει οριστεί εκ των προτέρων, δηλαδή να βρίσκεται αποθηκευμένη σε κάποιο κελί του *Excel*. Αν, για παράδειγμα, η αλγεβρική έκφραση περιέχει τη μεταβλητή x , η τιμή του x πρέπει να είναι διαθέσιμη, π.χ. αποθηκευμένη στο κελί B2.
2. Όλες οι αλγεβρικές πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών πρέπει να αναγράφονται διεξοδικά. Για παράδειγμα, η συνήθης συντόμευση στη άλγεβρα $3x$ αναγνωρίζεται από το *Excel* ως κείμενο. Αν θέλετε να αποτελέσει μέρος μαθηματικού τύπου, θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε το σημείο του πολλαπλασιασμού (*) και να γράψετε $3*x$.

Τα σύμβολα που αναγνωρίζει το *Excel* ως τελεστές αλγεβρικών πράξεων περιέχονται στον Πίνακα 1-1.

Με τις απλές αυτές οδηγίες πρέπει να είστε τώρα έτοιμοι να συντάξετε τον πρώτο σας μαθηματικό τύπο στη γλώσσα του *Excel*. Θεωρείστε, ως πρώτο παράδειγμα, το πολυώνυμο δεύτερου βαθμού

$$5x^2 - 7x + 4 \quad (1.1)$$

όπου η τιμή του x είναι αποθηκευμένη στο κελί B2 του ίδιου Φύλλου. Χωρίς μεγάλη δυσκολία είναι βέβαιο ότι θα γράψετε

$$=5*B2^2-7*B2+4 \quad (1.2)$$



Αν το Excel συναντήσει την τελευταία έκφραση, θα εκτελέσει όλες τις αλγεβρικές πράξεις και στο κελί θα εμφανιστεί η αριθμητική τιμή του αποτελέσματος.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1-1, το Excel έχει υιοθετήσει εσωτερικά ορισμένους κανόνες για τη διαδοχή εκτέλεσης αλγεβρικών πράξεων. Κατά την εύρεση της αριθμητικής τιμής μιας αλγεβρικής έκφρασης οι πράξεις εκτελούνται με τη σειρά που επιβάλλει ο βαθμός προτεραιότητας στον Πίνακα 1-1. Για παράδειγμα, στην εξ. (1.2) θα εκτελεστεί πρώτα η ύψωση της τιμής του κελιού B2 στο τετράγωνο, θα ακολουθήσουν οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και στο τέλος θα εκτελεστούν οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Αν δύο πράξεις έχουν τον ίδιο βαθμό προτεραιότητας, θα εκτελεστούν διαδοχικά από δεξιά προς τα αριστερά.

Ο βαθμός προτεραιότητας εκτέλεσης αλγεβρικών πράξεων από

Πίνακας 1-1 Τελεστές αλγεβρικών πράξεων στο Excel και βαθμός προτεραιότητας.

Τελεστής	Αλγεβρική πράξη	Προτεραιότητα
Αρνητική τιμή	-	1
Ύψωση σε δύναμη	^	3
Πολλαπλασιασμός	*	4
Διαίρεση	/	4
Άθροισμα	+	5
Αφαίρεση	-	5
Ισότητα	=	7
Μικρότερο από	<	7
Μεγαλύτερο από	>	7
Μικρότερο ή ίσο	<=	7
Μεγαλύτερο ή ίσο	>=	7
Διάφορο	<>	7



το Excel μπορεί ορισμένες φορές να οδηγήσει σε διάφορο από το επιθυμητό αποτέλεσμα. Θεωρείστε για παράδειγμα, την αλγεβρική έκφραση

$$\frac{3x^2 + 5}{x - 1} \quad (1.3)$$

με την τιμή της μεταβλητής x αποθηκευμένη στο κελί A4. Χωρίς πολύ σκέψη θα μπορούσε κανείς να τη μεταφράσει ως

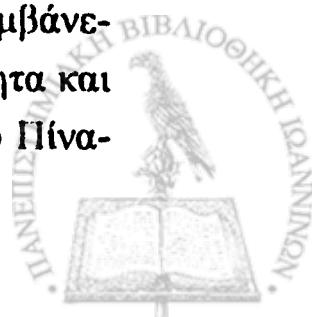
$$=3*A4^2+5/A4-1 \quad (1.4)$$

Το Excel όμως, όπως μόλις είδαμε, θα εκτελέσει τις πράξεις της εξ. (1.4) με την εξής σειρά: Θα υψώσει πρώτα την τιμή του κελιού A4 στο τετράγωνο. Στη συνέχεια θα διαιρέσει τον αριθμό 5 με την τιμή του κελιού A4 και θα πολλαπλασιάσει την τιμή του $(A4)^2$ με τον αριθμό 3. Τέλος θα προσθέσει τα δύο αποτελέσματα του δεύτερου σταδίου και θα αφαιρέσει τον αριθμό 1. Η αλγεβρική έκφραση επομένως που αντιστοιχεί στη σύνταξη της εξ. (1.4) είναι η

$$3x^2 + \frac{5}{x} - 1 \quad (1.5)$$

κάτι πολύ διαφορετικό απ' ό τι αποσκοπούσε η εξ. (1.3). Πώς είναι επομένως δυνατόν να αλλάξουμε τη διαδοχή των πράξεων ώστε η σύνταξη στη γλώσσα του Excel να αντιπροσωπεύει την αλγεβρική έκφραση της εξ. (1.3); Με τη χρήση παρενθέσεων.

Κατά την εύρεση της αριθμητικής τιμής ενός μαθηματικού τύπου, το Excel θεωρεί κάθε αλγεβρική έκφραση που περιλαμβάνεται μεταξύ ενός ζεύγους παρενθέσεων ως αυτόνομη οντότητα και εκτελεί τις πράξεις, με την προτεραιότητα που περιέχει ο Πίνα-



Καθώς 1-1, αρχίζοντας από τις εσώτερες παρενθέσεις.

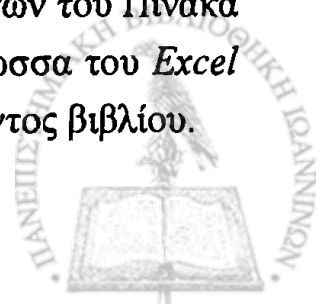
Η διεργασία που υπονοεί η εξ. (1.3) είναι η διαίρεση του διωνύμου $3x^2+5$ προς το διώνυμο $x-1$. Σε προφανή συμβολισμό μπορούμε να γράψουμε στη γλώσσα του *Excel*

$$=(3*A4^2+5)/(A4-1) \quad (1.4)$$

μια έκφραση που δεν επιδέχεται αμφισβήτηση ως προς τη διαδοχή των πράξεων. Η χρήση παρενθέσεων κατά τη σύνταξη ενός μαθηματικού τύπου είναι κάτι που μπορεί να αλλάξει καθοριστικά τη διαδοχή και σημασία των πράξεων. Ακόμη όμως και αν δεν επιφέρει καμιά αλλαγή στο τελικό αποτέλεσμα μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση του αποτελέσματος που επιδιώκεται.

Δύο παρατηρήσεις που αφορούν θέματα, τα οποία ίσως θα προκάλεσαν την περιέργεια του αναγνώστη, είναι επιβεβλημένες. Κατά περίεργο τρόπο το *Excel* θεωρεί τον μετασχηματισμό ενός αλγεβρικού αριθμού στον αντίθετό του (με το πρόσημο «-») ως μια ιδιαίτερη αλγεβρική πράξη – και μάλιστα στην εκτέλεσή της δίνει την πρώτη προτεραιότητα. Τούτο δεν συμβαίνει σε άλλες γλώσσες όπως στη *FORTRAN* ή στη *Visual Basic* που θα δούμε στη συνέχεια του βιβλίου. Έτσι, για παράδειγμα, στη γλώσσα του *Excel*, η έκφραση $=-1^2$ οδηγεί στο αριθμητικό αποτέλεσμα 1, ενώ σε όλες τις άλλες γλώσσες το σημείο «-» έχει την προτεραιότητα της αφαίρεσης και το αποτέλεσμα είναι -1. Βεβαίως, στη γλώσσα του *Excel*, η προηγούμενη έκφραση μπορεί να γίνει συμβατή προς τις άλλες γλώσσες ηλεκτρονικού υπολογιστή αν γραφεί ως $=(-1)^2$.

Η δεύτερη, ίσως επουσιώδης, παρατήρηση αφορά την απουσία των επιπέδων 2 και 6 στην προτεραιότητα των τελεστών του Πίνακα 1-1. Τα επίπεδα αυτά αφορούν δύο τελεστές στη γλώσσα του *Excel* που δεν θα μας απασχολήσουν στα πλαίσια του παρόντος βιβλίου.



ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ EXCEL

Το Excel διαθέτει μια πλούσια βιβλιοθήκη με τις συνήθεις συναρτήσεις που απαιτούνται σε επιστημονικούς υπολογισμούς. Οι συναρτήσεις του Excel υπολογίζουν αθροίσματα αριθμών, τριγωνομετρικούς αριθμούς, λογαρίθμους, εκθετικές εκφράσεις, κλπ. Στη συνέχεια του βιβλίου θα αντλήσουμε συναρτήσεις από τη βιβλιοθήκη του Excel και θα μελετήσουμε εκεί τη χρήση κάθε συνάρτησης, όπου και όποτε οι ανάγκες μας για τη σύνταξη ενός μαθηματικού τύπου το απαιτούν. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να περιεργαστεί τις διαθέσιμες συναρτήσεις στο μενού **Βοήθεια** του Excel.

Συναρτήσεις του Excel χρησιμοποιούνται λίγο, πολύ όπως και σε κάθε άλλη γλώσσα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Κατά τη σύνταξη ενός μαθηματικού τύπου, πληκτρολογείται το όνομα της συνάρτησης, ενώ μέσα σε παρενθέσεις ακολουθούν οι μεταβλητές της συνάρτησης. Στην Ελληνική έκδοση του Excel, οι μεταβλητές χωρίζονται με το σύμβολο του ερωτηματικού (;). Έτσι, η συνάρτηση SIN(A4) επιστρέφει το ημίτονο του αριθμού που βρίσκεται αποθηκευμένος στο κελί A4, ενώ η συνάρτηση LN(3*F6^2/4+1) επιστρέφει το φυσικό λογάριθμο της ποσότητας $\frac{3}{4}x^2 + 1$, όπου η τιμή του x βρίσκεται αποθηκευμένη στο κελί F6. Οι μεταβλητές μιας συνάρτησης μπορεί να είναι αριθμοί, αναφορές σε κελιά, μαθηματικοί τύποι ή άλλες συναρτήσεις. Αν η μεταβλητή μιας συνάρτησης δεν βρίσκεται μέσα στο εύρος τιμών που αναμένει η συνάρτηση (π.χ. αν προσπαθήσετε να βρείτε τον φυσικό λογάριθμό ενός αρνητικού αριθμού), το αποτέλεσμα είναι η διαγνωστική ένδειξη #ΑΡΙΘΜΟΣ!. Αν η μεταβλητή δεν έχει τη σωστή μορφή (έχει, π.χ., τη μορφή κειμένου, ενώ η συνάρτηση αναμένει αριθμό) η ένδειξη στο αντίστοιχο κελί είναι #ΤΙΜΗ!.



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1.3

Μαθηματικοί τύποι και συναρτήσεις του Excel

Στην Εργαστηριακή αυτή Άσκηση θα δούμε στην πράξη μερικές από τις δυνατότητες του Excel που αναφέρθηκαν μέχρι τώρα. Ως παράδειγμα θα θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(t) = (\alpha t + \beta)e^{-\gamma t} \quad (1.5)$$

όπου α , β και γ είναι τρεις σταθερές και η μεταβλητή t παίρνει θετικές τιμές. Θα προσδιορίσουμε την αριθμητική τιμή της συνάρτησης $f(t)$ για τιμές της μεταβλητής t στην περιοχή $0 \leq t \leq 50$, σε βήματα $\Delta t = 2$ και για τιμές των σταθερών $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.15$ και $\gamma = 0.12$.

1. Δημιουργείστε ένα νέο Βιβλίο του Excel και αποθηκεύστε το με το όνομα Άσκηση 1.3. Στο Φύλλο1 και με απαρχή το κελί A1 πληκτρολογείστε τα δεδομένα σύμφωνα με την ακόλουθη διάταξη

	A	B	C
1	$\alpha =$	0.2	
2	$\beta =$	0.15	
3	$\gamma =$	0.12	
4	Βήμα =	2	
5			

2. Στα κελιά A6 και B6 τοποθετήστε τους τίτλους του πίνακα που θα διαμορφώσετε για την αριθμητική τιμή της συνάρτησης $f(t)$ ως προς τιμές της μεταβλητής t . Το Φύλλο1 πρέπει τώρα να έχει



τη μορφή

	A	B	C
1	$\alpha =$	0.2	
2	$\beta =$	0.15	
3	$\gamma =$	0.12	
4	Βήμα =	2	
5			
6	t	f(t)	
7	0		
8			

Όπως θα παρατηρήσετε έχουμε επιφέρει και μερικές αισθητικές βελτιώσεις στη μορφή του πίνακα: έχουμε στοιχίσει τα ονόματα των δεδομένων στο δεξιό μέρος του κελιού, ενώ οι τίτλοι των στηλών **t** και **f(t)** έχουν γραφεί με έντονους χαρακτήρες και έχουν στοιχιστεί στο κέντρο των κελιών. Στο κελί A7 έχει ακόμη καταχωρηθεί η αρχική τιμή της μεταβλητής t ($=0$).

3. Στο κελί A8 εισάγετε τον μαθηματικό τύπο που αυξάνει την τιμή της μεταβλητής κατά ένα βήμα. Η έκφραση που μπορείτε να πληκτρολογήσετε είναι

$$=A7+\$B\$4 \quad (1.6)$$

Προσέξτε ότι στην τελευταία έκφραση η αναφορά στο κελί A7 είναι σχετική ενώ στο κελί B4 απόλυτη (έχει χρησιμοποιηθεί το σύμβολο \$). Ο μαθηματικός τύπος επομένως μεταφράζεται σε μια εντολή προς το Excel: Προσθήσε στο περιεχόμενο του αμέσως πιο πάνω κελιού το περιεχόμενο του κελιού B4. Το αποτέλεσμα της πράξης θα πρέπει να είναι ο αριθμός 2 ($= 0+2$).



Κατά την εισαγωγή μαθηματικού τύπου σε ένα κελί του *Excel* είναι σημαντικό να προσέξουμε ορισμένα σημεία:

α. Οι αναφορές σε κελιά (π.χ., A4, B6, H8) πρέπει να πληκτρολογηθούν με λατινικούς χαρακτήρες. Αν και το ελληνικό Α είναι οπτικά το ίδιο με το λατινικό A, το *Excel* διακρίνει τη διαφορά και απορρίπτει την αναφορά ως μη έγκυρη. Μια καλή πρακτική συνίσταται στην εκμετάλλευση του γεγονότος ότι το *Excel* δεν διακρίνει μεταξύ πεζών και κεφαλαίων χαρακτήρων. Μπορείτε επομένως να πληκτρολογήσετε τον τύπο με αποκλειστικά πεζούς χαρακτήρες (π.χ. a4, b6, h8) όπου όλοι οι χαρακτήρες ελληνικού και λατινικού αλφαβήτου είναι εμφανώς διάφοροι και μια μη έγκυρη αναφορά μπορεί εύκολα να εντοπιστεί (π.χ., α4, β6, η8). Έτσι κι αλλιώς, το *Excel*, μετά την περάτωση της εισαγωγής (με το πλήκτρο **Enter**), μετατρέπει αυτόματα όλους τους πεζούς χαρακτήρες σε κεφαλαίους.

β. Κατά την εισαγωγή ενός τύπου, το κείμενο που πληκτρολογείται εμφανίζεται σε ένα παράθυρο στο άνω μέρος της οθόνης. Στο παράθυρο αυτό τύπων μπορείτε να τοποθετήσετε σε οποιοδήποτε σημείο του κειμένου τον δείκτη του ποντικιού και να επεξεργαστείτε την έκφραση απαλείφοντας λάθη ή προσθέτοντας νέα στοιχεία.

γ. Αναφορά σε ένα άλλο κελί μπορεί να δηλωθεί με πληκτρολόγηση των συντεταγμένων του. Εναλλακτικά μπορείτε να εκμεταλλευτείτε την ευχέρεια που παρέχει το *Excel* και να εισάγετε μια αναφορά με επιλογή του αντίστοιχου κελιού. Αν, για παράδειγμα, κατά την εισαγωγή ενός μαθηματικού τύπου χρειαστεί να αναφερθείτε στο κελί F4, αντί να πληκτρολογήσετε "F4" ή "f4", επιλέξτε με το ποντίκι το κελί F4. Θα παρατηρήσετε ότι στο πα-



ράθυρο τύπου έχει προστεθεί η ένδειξη "F4". Η ευχέρεια αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη κατά την αναφορά σε κελιά διαφορετικού Φύλλου ή και Βιβλίου (π.χ. εισαγωγή αναφοράς του τύπου Φύλλο4!D5). Με τη μέθοδο αυτή αποφεύγονται εκτενείς πληκτρολογήσεις και λάθη. Παρατηρείται ότι η τελευταία μέθοδος εισάγει μόνο σχετικές αναφορές. Αν μετά την εισαγωγή του τύπου ορισμένες σχετικές αναφορές πρέπει να μετατραπούν σε απόλυτες, τούτο μπορεί να γίνει με εισαγωγή του συμβόλου \$ στο παράθυρο επεξεργασίας τύπων.

4. Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού A8 στην περιοχή A9:A32.
5. Επιλέξτε ένα κελί στη στήλη A, π.χ., το κελί A15. Παρατηρήστε ότι κατά την αντιγραφή του κελιού A8 ο μαθηματικός τύπος της εξ. (1.6) μετασχηματίστηκε για το κελί A15 ως

$$=A14+$$B$4$$

που μεταφέρει σωστά την εντολή προς το Excel: Πρόσθεσε στο περιεχόμενο του αμέσως πιο πάνω κελιού το περιεχόμενου του κελιού B4.

6. Στο κελί B7 εισάγετε τον μαθηματικό τύπο που υπολογίζει τη συνάρτηση της εξ. (1.5) για την αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής x στο κελί A7. Η έκφραση που μπορείτε να πληκτρολογήσετε ή να διαμορφώσετε με επιλογή των κελιών στα οποία αναφέρεστε είναι

$$=(\B1*\$A7+\$B$2)*EXP(-\$B$3*\$A7)$$

(1.7)



Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε τη φύση των αναφορών (σχετικές ή απόλυτες) στην προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή B8:B32.

7. Επιλέξτε ένα κελί στη στήλη B, π.χ., το κελί B18. Παρατηρείστε ότι κατά την αντιγραφή του κελιού B7 ο μαθηματικός τύπος της εξ. (1.7) μετασχηματίστηκε για το κελί B18 ως

$$=(B1*$A18+$B$2)*EXP(-$B$3*$A18)$$

που υπολογίζει την τιμή της συνάρτησης $f(t)$ για την τιμή της μεταβλητής t στην ίδια σειρά (σειρά 18).

Κατά παρόμοιο τρόπο είναι δυνατόν να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή συνάρτησης δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Ένα παράδειγμα συνάρτησης δύο μεταβλητών εξετάζεται στην επόμενη Εργαστηριακή Άσκηση.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1.4

Η αριθμητική τιμή συνάρτησης δύο μεταβλητών

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση των δύο μεταβλητών x και y

$$g(x,y) = \exp\left(-\frac{(y-\alpha)^2}{\sigma_1^2}\right) \left[\exp\left(-\frac{(x-\alpha-\beta)^2}{\sigma_2^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x-\alpha+\beta)^2}{\sigma_2^2}\right) \right] \quad (1.8)$$

όπου α , β , σ_1 και σ_2 είναι σταθερές. Θα προσδιορίσουμε την αριθμητική τιμή της συνάρτησης $g(x,y)$ για τιμές των μεταβλητών στην



περιοχή $0 \leq x, y \leq 26$, σε βήματα $\Delta x = \Delta y = 1$ και για τιμές των σταθερών $\alpha = 13$, $\beta = 5$, $\sigma_1 = 5$ και $\sigma_2 = 9$.

1. Δημιουργείστε ένα νέο Βιβλίο του Excel και αποθηκεύστε το με το όνομα Άσκηση 1.4. Στο Φύλλο1 πληκτρολογήστε τα δεδομένα σύμφωνα με την ακόλουθη διάταξη

	A	B	C
1	$\alpha =$	13	
2	$\beta =$	5	
3	$\sigma_1 =$	11	
4	$\sigma_2 =$	4	
5	Βήμα =	1	
6			

2. Στο κελί A8 εισάγετε την αρχική τιμή της μεταβλητής $x (= 0)$.
3. Στο κελί A9 εισάγετε τον μαθηματικό τύπο που αυξάνει την τιμή της μεταβλητής x κατά ένα βήμα. Η έκφραση που μπορείτε να πληκτρολογήσετε είναι

$$=A8+SB\$5 \quad (1.9)$$

Προσέξτε ότι στην τελευταία έκφραση η αναφορά στο κελί A8 είναι σχετική ενώ στο κελί B5 απόλυτη (έχει χρησιμοποιηθεί το σύμβολο \$). Ο μαθηματικός τύπος επομένως μεταφράζεται σε μια εντολή προς το Excel: Πρόσθεσε στο περιεχόμενο του αμέσως πιο πάνω κελιού το περιεχόμενο του κελιού B5. Το αποτέλεσμα της πράξης θα πρέπει να είναι ο αριθμός 1 ($= 0+1$).

4. Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού A9 στην περιοχή



A10:A34.

5. Στο κελί B7 εισάγετε την αρχική τιμή της μεταβλητής y ($= 0$).
6. Στο κελί C7 εισάγετε τον μαθηματικό τύπο που αυξάνει την τιμή της μεταβλητής y κατά ένα βήμα. Η έκφραση που μπορείτε να πληκτρολογήσετε είναι

$$=B7+\$B\$5 \quad (1.10)$$

Προσέξτε ότι στην τελευταία έκφραση η αναφορά στο κελί B7 είναι σχετική ενώ στο κελί B5 απόλυτη (έχει χρησιμοποιηθεί το σύμβολο \$). Ο μαθηματικός τύπος επομένως μεταφράζεται σε μια εντολή προς το Excel: Πρόσθεσε στο περιεχόμενο του αμέσως προηγούμενου κελιού της ίδιας σειράς το περιεχόμενο του κελιού B5. Το αποτέλεσμα της πράξης θα πρέπει να είναι ο αριθμός 1 ($= 0+1$).

7. Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C7 στην περιοχή D7:AB7. Η μορφή του Φύλλου 1 πρέπει τώρα να είναι αυτή του σχήματος 1-2.
8. Στο κελί B8 εισάγετε τον μαθηματικό τύπο που υπολογίζει τη συνάρτηση της εξ. (1.8) για τις αντίστοιχες τιμές των μεταβλητών x και y στα κελιά A8 και B7 αντίστοιχα. Η έκφραση που μπορείτε να πληκτρολογήσετε ή να διαμορφώσετε με επιλογή των κελιών στα οποία αναφέρεστε είναι

$$=EXP(-((\$A8-\$B\$1)^2)/\$B\$3^2)*(EXP(-((B\$7-\$B\$1-\$B\$2)^2)/\$B\$4^2)+EXP(-((B\$7-\$B\$1+\$B\$2)^2)/\$B\$4^2))$$



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$\alpha =$	13						
2	$\beta =$	5						
3	$\sigma_1 =$	5						
4	$\sigma_2 =$	9						
5	Βήμα =	1						
6								
7		0	1	2	3	4	5	6
8	0							
9	1							
10	2							
11	3							
12	4							
13	5							
14	6							

Σχήμα 1-2 Μορφή του Φύλλου 1 μετά το βήμα 7 της Εργαστηριακής Άσκησης 1.4.

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε τη φύση των αναφορών (σχετικές ή απόλυτες) στην προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή B8:AB34.

9. Επιλέξτε ένα κελί μέσα στην περιοχή B8:AB34, π.χ., το κελί G21. Παρατηρείστε ότι κατά την αντιγραφή του κελιού B8 ο μαθηματικός τύπος της εξ. (1.11) μετασχηματίστηκε για το κελί G21 ως

$$=EXP(-((\$A21-\$B\$1)^2)/\$B\$3^2)*(EXP(-((G\$7-\$B\$1-\$B\$2)^2)/\$B\$4^2)+EXP(-((G\$7-\$B\$1+\$B\$2)^2)/\$B\$4^2))$$

που υπολογίζει την τιμή της συνάρτησης $g(x,y)$ για την τιμή της μεταβλητής x στην ίδια στήλη (στήλη G) και για την τιμή της



μεταβλητής y στην ίδια σειρά (σειρά 21).

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σε μια περιοχή τιμών των μεταβλητών της αυξάνει κατά πολύ την εποπτική μας ικανότητα. Το *Excel* διαθέτει ένα πλούσιο οπλοστάσιο λογισμικών εργαλείων για τη γρήγορη και εύκολη δημιουργία γραφημάτων σε δύο ή τρεις διαστάσεις. Όπως πάντα, θα μελετήσουμε τις δυνατότητες αυτές με μια Εργαστηριακή Άσκηση.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1.5

Γραφικές παραστάσεις δύο διαστάσεων

Ως παραδείγματα των δυνατοτήτων γραφημάτων του *Excel* θα αποδώσουμε σε γραφική παράσταση τη συνάρτηση της εξ. (1.5) που μελετήσαμε στην Εργαστηριακή Άσκηση 1.3.

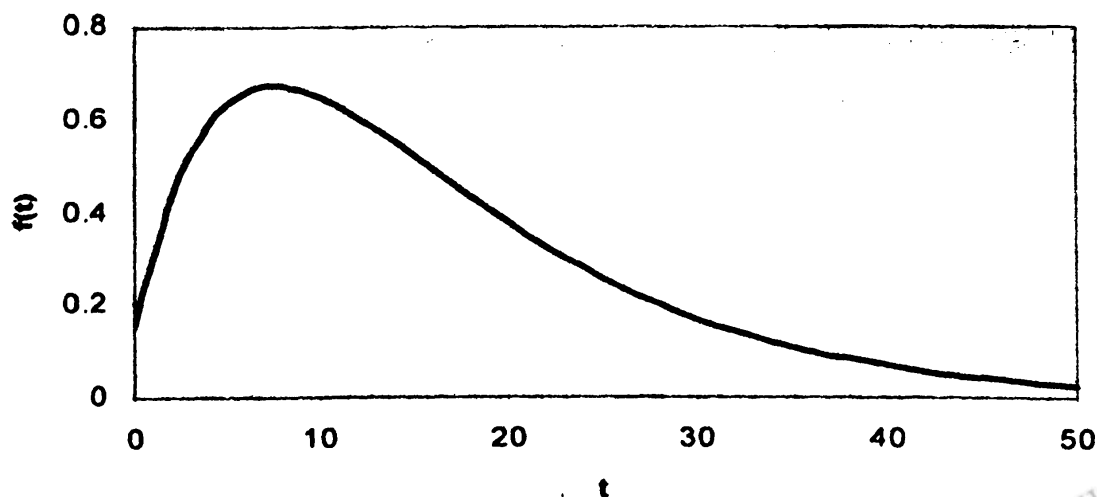
1. Ανοίξτε το αρχείο *Excel Άσκηση 1.3*.
2. Στο Φύλλο1 επιλέξτε την περιοχή A7:B32. Οι δύο στήλες της επιλεγμένης περιοχής περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές του άξονα X και του άξονα Y στο γράφημα που πρόκειται να κατασκευάσετε.
3. Από τα μενού του *Excel* επιλέξτε **Εισαγωγή → Γράφημα...**
4. Στο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει, επιλέξτε το είδος του γραφήματος που επιθυμείτε να κατασκευάσετε. Επιλέξτε (Δια-



σπορά) XY και την τρίτη εικόνα με τις συνεχείς ομαλές καμπύλες. Επιλέξτε Επόμενο >

5. Στο επόμενο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει, εμφανίζεται μια προεπισκόπηση του γραφήματος. Επιλέξτε Επόμενο >
6. Το επόμενο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει, περιέχει πέντε κάρτες. Επιλέξτε την κάρτα Τίτλοι. Στο παράθυρο εισαγωγής δεδομένων Τίτλος γραφήματος εισάγετε ένα κατάλληλο τίτλο (π.χ., *Γράφημα Άσκησης 1.3*). Στο παράθυρο εισαγωγής δεδομένων Άξονας τιμών (X):: εισάγετε την ένδειξη t και στο παράθυρο εισαγωγής δεδομένων Άξονας τιμών (Y): την ένδειξη $f(t)$.
7. Στο ίδιο παράθυρο διαλόγου, επιλέξτε την κάρτα Γραμμές πλέγματος και απενεργοποιείστε όλες τις δυνατές επιλογές. Επιλέξτε την κάρτα Υπόμνημα και απενεργοποιείστε την επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος. Επιλέξτε Επόμενο >

Γράφημα Άσκησης 1.3



Σχήμα 1-3 Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(t)$ της εξ. (1.5).

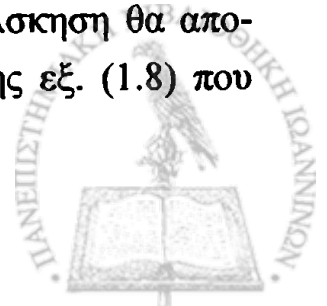
8. Στο επόμενο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει, επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας και στη συνέχεια Τέλος >
9. Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του *Excel* έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει την γραφική παράσταση που κατασκευάσατε και που θα πρέπει να έχει μορφή παρόμοια με αυτή του σχήματος 1-3.
10. Παρατηρείστε ότι το γράφημα έχει δυναμική υπόσταση. Κάθε μεταβολή των τιμών στο Φύλλο1 ανανεώνει το γράφημα. Μεταβάλετε τις τιμές των παραμέτρων α , β και γ στο Φύλλο1 και σχολιάστε πως επηρεάζεται η μορφή του γραφήματος στο σχήμα 1-2.

Αν μια συνάρτηση $g(x,y)$ εξαρτάται από δύο μεταβλητές x και y , είναι δυνατόν να αποδώσουμε τη συμπεριφορά της με ένα τρισδιάστατο γράφημα, όπου το επίπεδο XY περιέχει το πεδίο τιμών των μεταβλητών x και y και ο άξονας Z τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $g(x,y)$. Όπως θα δούμε με τη βοήθεια της Εργαστηριακής Άσκησης που ακολουθεί, η δημιουργία τρισδιάστατων (3Δ) γραφημάτων μέσω του *Excel* είναι μια σχετικά απλή και αυτοματοποιημένη διαδικασία.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1.6

Γραφικές παραστάσεις τριών διαστάσεων

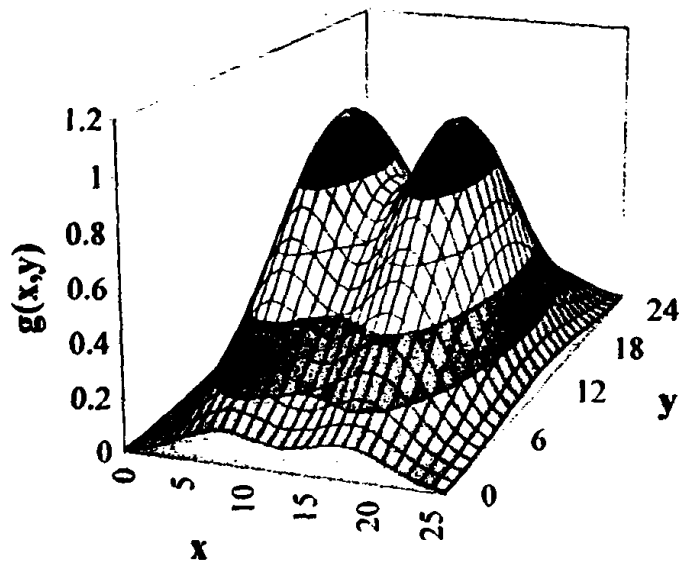
Σε αναλογία με την προηγούμενη Εργαστηριακή Άσκηση θα αποδώσουμε σε γραφική παράσταση τη συνάρτηση της εξ. (1.8) που



μελετήσαμε στην Εργαστηριακή Άσκηση 1.4.

1. Ανοίξτε το αρχείο *Excel Άσκηση 1.4*.
2. Στο Φύλλο1 επιλέξτε την περιοχή A7:AB34.
3. Από τα μενού του *Excel* επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα ...**
4. Στο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει, επιλέξτε **Επιφάνεια** και στη συνέχεια **Επόμενο >**
5. Στο επόμενο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει, εμφανίζεται μια προεπισκόπηση του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο >**
6. Το επόμενο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει, περιέχει πέντε κάρτες. Επιλέξτε την κάρτα **Τίτλοι**. Στο παράθυρο εισαγωγής δεδομένων **Τίτλος** γραφήματος: εισάγετε ένα κατάλληλο τίτλο (π.χ., *Γράφημα Άσκησης 1.4*). Στο παράθυρο εισαγωγής δεδομένων **Άξονας κατηγοριών (X)**: εισάγετε την ένδειξη **x** και στο παράθυρο εισαγωγής δεδομένων **Άξονας σειρών (Y)**: την ένδειξη **y**. Στο παράθυρο εισαγωγής δεδομένων **Άξονας τιμών (Z)**: εισάγετε την ένδειξη **g(x,y)**.
7. Στο ίδιο παράθυρο διαλόγου, επιλέξτε την κάρτα **Γραμμές πλέγματος** και απενεργοποιείστε όλες τις δυνατές επιλογές. Επιλέξτε την κάρτα **Υπόμνημα** και απενεργοποιείστε την επιλογή **Εμφάνιση υπομνήματος**. Επιλέξτε **Επόμενο >**
8. Στο επόμενο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει, επιλέξτε **Σε νέο φύλλο εργασίας** και στη συνέχεια **Τέλος >**





Σχήμα 1-4 Γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x,y)$ της εξ. (1.8).

9. Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει την γραφική παράσταση που κατασκευάσατε και που θα πρέπει να έχει μορφή παρόμοια με αυτή του σχήματος 1-4.
10. Παρατηρείστε ότι το γράφημα έχει δυναμική υπόσταση. Κάθε μεταβολή των τιμών στο Φύλλο1 ανανεώνει το γράφημα. Μεταβάλετε τις τιμές των παραμέτρων a , β , σ_1 και σ_2 στο Φύλλο1 και σχολιάστε πως επηρεάζεται η μορφή του γραφήματος στο σχήμα 1-4.

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Αν και η απεικόνιση μονόμετρων μεγεθών, όπως η ενέργεια ή το δυναμικό, αποτελεί μια κατά το μάλλον ή ήττον αυτοματοποιημένη διεργασία στο Excel, η απόδοση σε γραφική μορφή ανυσμάτων δεν είναι τόσο εύκολη υπόθεση. Ο καλύτερος τρόπος απόδοσης της

συμπεριφοράς ενός ανυσματικού πεδίου σε δύο διαστάσεις είναι η χαρτογράφηση του χώρου μέσω των λεγόμενων *δυναμικών γραμμών*, ήτοι μέσω καμπυλών που αποδίδουν σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ανύσματος. Δυστυχώς, το *Excel* δεν παρέχει τη δυνατότητα δημιουργίας παρόμοιων γραφημάτων. Για το λόγο αυτό, στα πλαίσια του παρόντος βιβλίου, έχει δημιουργηθεί μια σειρά προγραμμάτων που αυτοματοποιούν τη διεργασία χαρτογράφησης μιας ανυσματικής συνάρτησης, όπως το *Excel* αυτοματοποιεί την κατασκευή γραφημάτων. Τα προγράμματα αυτά βρίσκονται στη δισκέτα που ακολουθεί το βιβλίο και περιγράφονται στο Παράρτημα Α. Στο Παράρτημα Α περιέχονται ακόμη οι οδηγίες που πρέπει να ακολουθήσετε για την μεταφορά στον υπολογιστή σας των αρχείων που θα σας παρέχουν τη δυνατότητα δημιουργίας απεικόνισης ανυσματικών πεδίων.

Η ΓΛΩΣΣΑ VISUAL BASIC

Πέρα από τις συναρτήσεις που διατίθενται προς άμεση χρήση από το *Excel*, υπάρχει και η ευχέρεια ορισμού επί τούτου συναρτήσεων οποιασδήποτε μορφής. Από την έκδοση 5 του *Excel* και μετέπειτα, η εταιρεία *Microsoft* έχει ενσωματώσει στο πακέτο ένα υποσύνολο της γλώσσας *Visual Basic* με την ονομασία *Visual Basic Applications (VBA)*. Η σύνταξη στη γλώσσα *VBA* είναι παρόμοια με τη σύνταξη μαθηματικών τύπων του *Excel*, ενώ η δομή της γλώσσας έχει πολλά κοινά χαρακτηριστικά με προηγμένες γλώσσες ηλεκτρονικού υπολογιστή, όπως η *FORTRAN*.

Θα έχετε την ευκαιρία να συντάξετε συναρτήσεις στη γλώσσα *VBA* πολύ σύντομα, στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1-1 Το περιεχόμενο του κελιού B11 είναι ο μαθηματικός τύπος



$$=0.5*\$B\$3*\$A11^2$$

- α. Αν ο μαθηματικός αυτός τύπος αντιγραφεί στο κελί B15, πώς θα μεταβληθεί;
- β. Πώς θα μεταβληθεί αν αποκοπεί και επικολληθεί στο κελί F14;
- γ. Τι είναι πιθανόν ότι υπολογίζει ο μαθηματικός αυτός τύπος;

1-2 Αν η τιμές των μεταβλητών x , y και z βρίσκονται αποθηκευμένες αντίστοιχα στα κελιά B2, B3 και B4, γράψτε τον μαθηματικό τύπο που υπολογίζει στο Excel τις συναρτήσεις

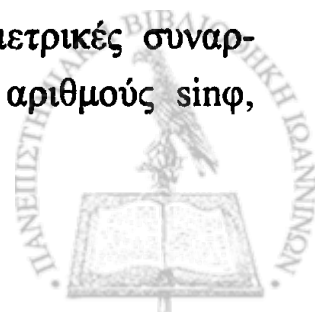
α. $3x^2 - 2x + 6$

β. $[(x^2 - 1)^2 - 1][(y^2 - 1)^2 - 1][(z^2 - 1)^2 - 1]$

γ. $\left(\frac{x^2}{y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2} \right)^2 - 1$

1-3 Η μεταβλητή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων του Excel αναμένεται σε ακτίνια.

- α. Προσδιορίστε τη σχέση που μετατρέπει μια γωνία από μοίρες σε ακτίνια.
- β. Χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις υπολογίστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sin\phi$,



$\cos\varphi$, $\tan\varphi$ και $\cot\varphi$ των γωνιών $\varphi = 10^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 75^\circ$ και 90° .

γ. Σε ένα κελί του *Excel* γράψτε την έκφραση $=PI()$ όπου, όπως δείχνει ο συμβολισμός, PI είναι μια συνάρτηση του *Excel* χωρίς μεταβλητή. Ποια είναι η αριθμητική τιμή που επιστρέφει η συνάρτηση $PI()$; Χρησιμοποιείστε την συνάρτηση $PI()$ στην παράγραφο β. της άσκησης.

1-4 Αν ένα κινητό σε χρόνο $t = 0$ έχει ταχύτητα v_0 , τότε, αν κινείται με επιτάχυνση γ , κατά τη χρονική στιγμή $t > 0$, η ταχύτητά του v και η απόσταση x που θα έχει διανύσει δίνονται από τις σχέσεις

$$v = v_0 + \gamma t$$

και

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2$$

Με διαδικασία ανάλογη προς αυτή της Εργαστηριακής Άσκησης 1.3 δημιουργείστε ένα πίνακα που υπολογίζει την ταχύτητα και την απόσταση που διανύει το κινητό κατά το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 10$ s, σε βήματα $\Delta t = 0.1$ s, αν $v_0 = 10$ m/s και $\gamma = 25$ m/s².

Αποδώστε τα αποτελέσματά σας σε γραφική παράσταση.

1-5 Το καίσιιο-137 που μόλυνε το οικοσύστημα της Ελλάδας μετά το πυρηνικό ατύχημα στο Τσερνομπίλ έχει χρόνο υποδιπλασιασμού $T_{1/2} = 30.17$ y. Υπολογίζεται ότι από τον αντιδραστήρα του Τσερνομπίλ διέφυγε κατά το ατύχημα ραδιενέργεια καισιίου-137 ίση περίπου με 85×10^{15} Bq (μπεκερέλ). Η ραδιενέργεια αυτή μειώνεται συνεχώς καθώς με την πάροδο του χρόνου το



καίσιιο-137 μεταστοιχειώνεται αυθόρμητα σε ένα άλλο σταθερό ισότοπο. Ο νόμος που διέπει τη μεταστοιχείωση είναι

$$W(t) = W_0 e^{-t/\tau}$$

όπου W_0 είναι η ραδιενέργεια που διέφυγε από τον αντιδραστήρα το 1986, $W(t)$ είναι η ραδιενέργεια που παραμένει μετά την πάροδο χρόνου t και

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln(2)}$$

Στην τελευταία σχέση $\ln(2)$ είναι ο φυσικός λογάριθμος του αριθμού 2.

Με διαδικασία ανάλογη προς αυτή της Εργαστηριακής Άσκησης 1.3 δημιουργείτε ένα πίνακα που υπολογίζει την εξέλιξη κατά τα επόμενα 100 έτη της ραδιενέργειας του καισίου-137 που διέφυγε από τον αντιδραστήρα του Τσερνομπίλ.

Αποδώστε τα αποτελέσματά σας σε γραφική παράσταση.

Πόση ραδιενέργεια θα έχει παραμείνει κατά το έτος 2004; Πότε η ραδιενέργεια θα μειωθεί στο 10% της αρχικής της τιμής;

1-6 Η πυκνότητα μάζας μιας σφαίρας δίνεται περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R}{\alpha}\right)}} \quad (1.12)$$

όπου r είναι η απόσταση από το κέντρο της και ρ_0 , R και α τρεις σταθερές. Για τιμές των σταθερών $\rho_0 = 3 \text{ g/cm}^3$, $R = 10 \text{ cm}$ και $\alpha = 0.5 \text{ cm}$



- α. Με διαδικασία ανάλογη προς αυτή της Άσκησης 1-5 δημιουργήστε ένα πίνακα που υπολογίζει την πυκνότητα της σφαίρας ως συνάρτησης της απόστασης από το κέντρο της.
- β. Αποδώστε τα προηγούμενα αποτελέσματα σε γραφική παράσταση. Μεταβάλετε τις τιμές των παραμέτρων ρ_0 , R και α και, παρατηρώντας τις μεταβολές της γραφικής παράστασης, περιγράψτε τη φυσική σημασία καθεμιάς.
- γ. Δημιουργήστε ένα νέο Βιβλίο του Excel. Στο Φύλλο1 τοποθετήστε τα χαρακτηριστικά της σφαίρας όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα

	A	B	C
1	$\rho_0 =$	3	
2	$R =$	10	
3	$\alpha =$	0.5	
4			

Θεωρείστε ότι το Φύλλο2 του Βιβλίου σας είναι το επίπεδο XY και ότι το κέντρο της σφαίρας βρίσκεται στο κελί M13. Αν στο επίπεδο XY οι συντεταγμένες του κελιού M13 είναι (x_0, y_0) , τότε η απόσταση r δίνεται από τη σχέση

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

όπου x και y είναι οι συντεταγμένες ενός κελιού στο Φύλλο2.

Οι συντεταγμένες ενός κελιού σε ένα Φύλλο του Excel μπορούν να προσδιοριστούν μέσω των συναρτήσεων ROW και COLUMN.



Η συνάρτηση ROW(κελί) επιστρέφει τη σειρά που βρίσκεται το κελί. Π.χ., η έκφραση =ROW(F14) επιστρέφει την τιμή 14. Η έκφραση =ROW(), χωρίς μεταβλητή, επιστρέφει τη σειρά του επιλεγμένου κελιού. Παρόμοια είναι η συμπεριφορά της συνάρτησης COLUMN ως προς τη στήλη ενός κελιού.

Η ποσότητα επομένως $x - x_0$ στην έκφραση που προσδιορίζει την απόσταση r από το κελί M13 ισοδυναμεί με την έκφραση ROW() - ROW(\$M\$13). Κατά παρόμοιο τρόπο, με χρήση της συνάρτησης COLUMN, μπορεί να εκφραστεί η ποσότητα $y - y_0$.

Με βάση τα προηγούμενα, στο Φύλλο2 του Βιβλίου σας υπολογίστε την απόσταση r από το κελί M13 σε όλα τα κελιά της περιοχής A1:Z26.

Στο Φύλλο3 του Βιβλίου σας υπολογίστε σε όλη την περιοχή A1:Z26 την τιμή της εξ. (1.12).

- δ. Αποδώστε την περιοχή A1:Z26 του Φύλλου3 σε τρισδιάστατη γραφική παράσταση. Μεταβάλετε τις τιμές των παραμέτρων ρ_0 , R και a στο Φύλλο1 και, παρατηρώντας τις μεταβολές της γραφικής παράστασης, περιγράψτε τη φυσική σημασία καθεμιάς.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΥΟ

Δυνάμεις μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων



Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ εμφανίζεται με την αλληλεπίδραση μεταξύ υλικών σωμάτων που φέρουν φορτίο. Για δύο στατικά σημειακά φορτία q_1 και q_2 , το μέτρο της δύναμης $F_{1 \leftarrow 2}$ που ασκεί το φορτίο q_2 στο φορτίο q_1 δίνεται από το νόμο του Coulomb ως

$$F_{1 \leftarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2.1)$$

όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο φορτίων. Στην εξ. (2.1) έχει συμπεριληφθεί η σταθερά $1/4\pi\epsilon_0$ με τιμή

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \quad (2.2)$$

που οφείλεται στον αυθαίρετο ορισμό της μονάδας μέτρησης του ηλεκτρικού φορτίου. Τονίζεται ότι η εξ. (2.1), γνωστή και ως νόμος του Coulomb ισχύει για σημειακά φορτία, ήτοι φορτία με διαστάσεις αμελητέες ως προς την μεταξύ τους απόσταση r .

Ο νόμος του Coulomb αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη πειραματικά αποτελέσματα, στα οποία βασίζεται το οικοδόμημα της Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας. Μια σημαντική ιδιότητα της ηλεκτροστα-



τικής αλληλεπίδρασης που επίσης εξάγεται από την πειραματική παρατήρηση είναι γνωστή ως αρχή της επαλληλίας. Έχει δηλαδή επαληθευτεί πειραματικά ότι η δύναμη που εξασκείται μεταξύ δύο σημειακών φορτίων δεν μεταβάλλεται αν στη γειτονία των δύο αυτών φορτίων υπάρχουν και άλλα ηλεκτρικά φορτία. Από την παρατήρηση αυτή έπεται ότι η ολική δύναμη που ασκείται σε ένα φορτίο q_0 από ένα σύνολο φορτίων q_1, q_2, \dots, q_N είναι ίση με το ανυσματικό άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων που ασκεί καθένα από τα φορτία q_1, q_2, \dots, q_N στο φορτίο q_0 . Σε προφανή μαθηματικό συμβολισμό, μπορούμε να γράψουμε την αρχή της επαλληλίας ως

$$\mathbf{F}_{0 \leftarrow 1, 2, \dots, N} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{0 \leftarrow k} \quad (2.3)$$

όπου καθένας από τους όρους στο δεξιό μέρος της εξ. (2.3) δίνεται από το νόμο του Coulomb.

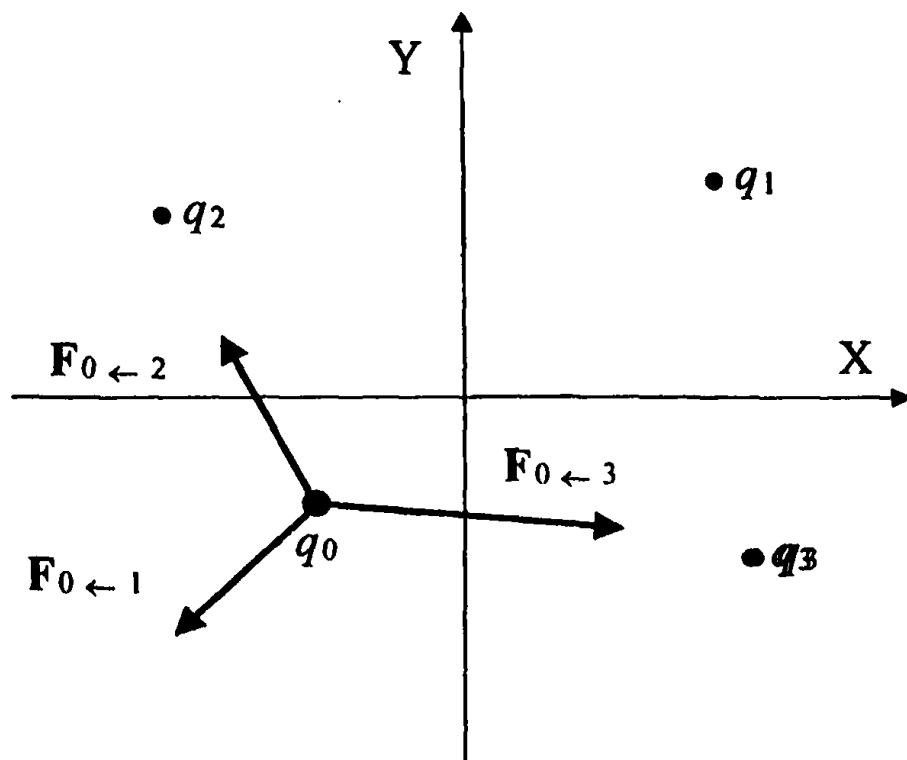
Το νόμο του Coulomb και την αρχή της επαλληλίας θα μελετήσουμε στο παρόν Κεφάλαιο.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

Όπως φαίνεται στο σχήμα 2-1, θα θεωρήσουμε ένα πλήθος N σημειακών φορτίων q_1, q_2, \dots, q_N , τα οποία βρίσκονται σε σταθερές θέσεις πάνω σε ένα επίπεδο XY με συντεταγμένες (x_k, y_k) , καθώς και ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο q_0 με συντεταγμένες (x_0, y_0) . Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η ολική δύναμη \mathbf{F}_0 που ασκείται στο φορτίο q_0 ισούται [βλ. εξ (2.3)] με το ανυσματικό άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων $\mathbf{F}_{0 \leftarrow k}$, οι οποίες δίνονται από το νόμο του Coulomb στην εξ. (2.1).

Για τον υπολογισμό της συνισταμένης των δυνάμεων στο σχήμα 2-1, μπορούμε να αναλύσουμε καθεμιά στις συνιστώσες της





Σχήμα 2-1 Δυνάμεις Coulomb που ασκούνται από τρία σημειακά φορτία q_1 , q_2 και q_3 σε ένα σημειακό φορτίο q_0 . Τα φορτία (q_0, q_1) είναι ομώνυμα ενώ τα ζεύγη (q_0, q_2) και (q_0, q_3) αντιπροσωπεύουν ετερόνυμα φορτία.

στο σύστημα συντεταγμένων XY ως

$$F_{0 \leftarrow k}(x) = |F_{0 \leftarrow k}| \cos \theta_k \quad (2.4\alpha)$$

και

$$F_{0 \leftarrow k}(y) = |F_{0 \leftarrow k}| \sin \theta_k \quad (2.4\beta)$$

όπου θ_k είναι η γωνία που σχηματίζει η δύναμη $F_{0 \leftarrow k}$ με τον οριζόντιο άξονα. Στη συνέχεια, η συνισταμένη F_0 μπορεί να βρεθεί από το άθροισμα των εξ. (2.4) ως

$$F_0(x) = \sum_k F_{0 \leftarrow k}(x) \quad (2.5\alpha)$$

και

$$F_0(y) = \sum_k F_{0 \leftarrow k}(y) \quad (2.5\beta)$$

με μέτρο της ολικής δύναμης F_0

$$F_0 = \sqrt{F_0(x)^2 + F_0(y)^2} . \quad (2.6)$$

Η διεύθυνση της δύναμης F_0 μπορεί να αποδοθεί από τη γωνία θ_0 που σχηματίζει με τον άξονα X του συστήματος συντεταγμένων και δίνεται από την έκφραση

$$\theta_0 = \tan^{-1} \left(\frac{F_0(y)}{F_0(x)} \right) . \quad (2.7)$$

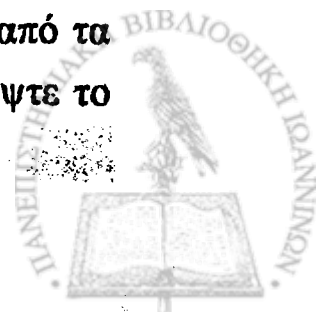
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 2.1

Δυνάμεις μεταξύ τεσσάρων σημειακών φορτίων

Θα θεωρήσουμε μια διάταξη παρόμοια με αυτή του σχήματος 2-1. Το σύστημα συντεταγμένων XY μπορεί να οριστεί σε ένα Φύλλο *Excel* αν θεωρήσουμε τον άξονα X κατά τη φορά των σειρών και τον άξονα Y κατά τη φορά των στηλών.

1. Δημιουργήστε ένα νέο βιβλίο του *Excel*. Μετονομάστε το Φύλλο 1 *Δυνάμεις* και το Φύλλο 2 *Φορτία*.

Για να μετονομάσετε ένα Φύλλο, επιλέξτε το Φύλλο, και από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Φύλλο** → **Μετονομασία**. Γράψτε το όνομα του Φύλλου που επιθυμείτε και πιάστε **Enter**.



2. Στο Φύλλο Φορτία δημιουργείτε μια απεικόνιση τεσσάρων φορτίων q_0, q_1, q_2, q_3 πάνω σε ένα επίπεδο. Για το σκοπό αυτό
- Διαμορφώστε ένα χώρο 25×25 κελιών με ίσο ύψος και ίσο εύρος, μεταβάλλοντας το εύρος των στηλών Α έως και Υ.

Το εύρος μιας στήλης μπορεί να ρυθμιστεί αν τοποθετήσετε το ποντίκι στη σειρά των τίτλων των στηλών (Α, Β, C, ...) και στη διαχωριστική γραμμή μεταξύ δύο στηλών. Αν, με πατημένο το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού, σύρετε το ποντίκι προς τα αριστερά ή δεξιά, το εύρος της στήλης μειώνεται ή αυξάνει αναλόγως. Μπορείτε να ρυθμίσετε το εύρος περισσότερων από μιας στήλης ταυτόχρονα με την ακόλουθη διαδικασία: Επιλέξτε τις στήλες στις οποίες θέλετε να ρυθμίσετε το εύρος. Με το πλήκτρο **Ctrl** πατημένο, ρυθμίστε με το ποντίκι το εύρος μιας από τις επιλεγμένες στήλες. Θα παρατηρήσετε ότι όλες οι επιλεγμένες στήλες θα εμφανιστούν με το ίδιο εύρος.

- Στο χώρο που ορίζεται από τα κελιά Α1:Υ25 επιλέξτε διαδοχικά και επισημάνετε με ένα έντονο χρώμα τέσσερα κελιά όπου θα τοποθετήσετε τα τέσσερα φορτία q_0, q_1, q_2, q_3 . Για το σκοπό αυτό, επιλέξτε ένα κελί. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά** → **Μοτίβο**. Από την παλέτα των χρωμάτων που θα ανοίξει, επιλέξτε ένα έντονο χρώμα. Επαναλάβετε την εργασία για τρία άλλα κελιά στην περιοχή Α1:Υ25.
- Το *Excel* παρέχει τη δυνατότητα ονομασίας ενός κελιού έτσι ώστε να είναι δυνατή η αναφορά σ' αυτό από άλλα κελιά του ίδιου Φύλλου ή Βιβλίου. Επιλέξτε ένα από τα κελιά όπου έχετε τοποθετήσει ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο και από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στο παράθυρο που



θα ανοίξει γράψτε ένα όνομα για το φορτίο (π.χ. q_0). Επαναλάβετε την εργασία ορίζοντας ονόματα για τα υπόλοιπα φορτία¹ (π.χ. q_1 , q_2 , q_3).

Παρατηρείστε ότι όταν επιλέγετε ένα κελί, στο *Παράθυρο Ονόματος* του *Excel* (συνήθως το άνω αριστερό παράθυρο της γραμμής εργαλείων) αναγράφονται οι συντεταγμένες του κελιού (π.χ., E12). Αν όμως για το συγκεκριμένο κελί έχει οριστεί ένα όνομα, στο *Παράθυρο Ονόματος* εμφανίζεται το όνομα του κελιού (π.χ., q_1).

- Σε καθένα από τα κελιά που επιλέξατε, γράψτε την τιμή του ηλεκτρικού φορτίου που θέλετε να τοποθετήσετε στο σημείο αυτό (π.χ. $1.25E-02$ για να τοποθετήσετε 12.5 mC). Παρατηρείστε ότι ο αριθμός που γράψατε, λόγω της ειδικής διαμόρφωσης του εύρους των κελιών, δεν χωράει και το κελί εμφανίζεται με την ένδειξη $\#\#$. Η τιμή όμως που περιέχει το κελί εμφανίζεται στο παράθυρο της γραμμής εργαλείων με την ένδειξη $=$.

Το Φύλλο *Φορτία* πρέπει τώρα να έχει μορφή παρεμφερή με αυτή του σχήματος 2-2.

3. Στο Φύλλο *Δυνάμεις* καταγράψτε τα δεδομένα του προβλήματος και προετοιμάστε ένα πίνακα για την καταγραφή των αποτελεσμάτων. Για το σκοπό αυτό

¹ Το *Excel* δεν σας επιτρέπει να δώσετε σε ένα κελί ένα όνομα που μπορεί να έχει μια ιδιαίτερη σημασία. Θα μπορούσατε, για παράδειγμα, να δώσετε σε ένα κελί το όνομα q_0 . Τα ονόματα όμως q_1 , q_2 , q_3 αποτελούν διευθύνσεις συγκεκριμένων κελιών (τα κελιά στη στήλη Q και στις σειρές 1, 2, 3) και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν.



- Στα κελιά A1 και B1 γράψτε την τιμή της σταθεράς $1/4\pi\epsilon_0$ ώστε τα αποτελέσματά σας να εκφράζονται στις σωστές μονάδες.
- Στα κελιά B3:E3 γράψτε τα ονόματα που ορίσατε για τα σημειακά φορτία του Φύλλου Φορτία
- Στα κελιά B4:E4, αμέσως κάτω από τα ονόματα, καταχωρίστε τις τιμές που επιλέξατε για κάθε ηλεκτρικό φορτίο του Φύλλου Φορτία με την εντολή

$$=q_k$$

όπου $k = 0, 1, 2, 3$. Τα σημειακά φορτία μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
1																											
2																											
3																											
4																											
5																											
6																											
7																											
8																											
9																											
10																											
11																											
12																											
13																											
14																											
15																											
16																											
17																											
18																											
19																											
20																											
21																											
22																											
23																											
24																											
25																											
26																											

Σχήμα 2-2 Παράδειγμα του Φύλλου Φορτία στην Εργαστηριακή Άσκηση 2.1.



2. Δυνάμεις μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων

	A	B	C	D	E	F
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	9E+09				
2						
3		q_0	q_1	q_2	q_3	
4	Φορτίο (C)	0.0035	-0.00012	-0.12	0.033	
5	r^2					
6	F					
7	F(x)					
8	F(y)					
9						
10						
11	$\Sigma F(x)$					
12	$\Sigma F(y)$					
13						
14	ΣF					
15						
16	Theta					
17						

Σχήμα 2-3 Προκαταρκτική μορφή του Φύλλου Δυνάμεις στην Εργαστηριακή Άσκηση 2.1.

- Στα κελιά A4:A8 γράψτε τους τίτλους των φυσικών μεγεθών που θα υπολογίσετε σταδιακά για τον προσδιορισμό της δύναμης στο φορτίο q_0 . Το Φύλλο Δυνάμεις πρέπει τώρα να έχει τη μορφή του σχήματος 2-3.
- Στα κελιά C5:E5 υπολογίστε το τετράγωνο της απόστασης καθενός φορτίου q_1, q_2, q_3 από το φορτίο q_0 . Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στα τρία κελιά C5:E5 είναι αντίστοιχα

$$=(\text{ROW}(q_0)-\text{ROW}(q_1))^2+(\text{COLUMN}(q_0)-\text{COLUMN}(q_1))^2$$

$$=(\text{ROW}(q_0)-\text{ROW}(q_2))^2+(\text{COLUMN}(q_0)-\text{COLUMN}(q_2))^2$$

$$=(\text{ROW}(q_0)-\text{ROW}(q_3))^2+(\text{COLUMN}(q_0)-\text{COLUMN}(q_3))^2$$



Οι συναρτήσεις ROW(κελί) και COLUMN(κελί) επιστρέφουν αντίστοιχα την σειρά ή την στήλη που βρίσκεται το κελί στο οποίο αναφέρονται. Ιδιαίτερα, οι ίδιες συναρτήσεις χωρίς μεταβλητή [ROW() και COLUMN()] επιστρέφουν αντίστοιχα την σειρά ή τη στήλη του τρέχοντος κελιού.

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε τις τρεις προηγούμενες εκφράσεις. Παρατηρείστε ότι ως συντεταγμένες κάθε φορτίου χρησιμοποιήσαμε την αντίστοιχη στήλη (συντεταγμένη x) και την αντίστοιχη σειρά (συντεταγμένη y) μέσω των συναρτήσεων του Excel COLUMN() και ROW().

4. Στο κελί C6 υπολογίστε τη δύναμη Coulomb που ασκεί το φορτίο q_1 στο φορτίο q_0 σύμφωνα με την εξ. (2.1). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την έκφραση

$$=B\$1*B\$4*C4/C5$$

Αφού βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση αντιγράψτε την στα κελιά D6 και E6.

5. Στα κελιά C7 και C8 υπολογίστε τις προβολές της δύναμης Coulomb που ασκεί το φορτίο q_1 στο φορτίο q_0 μέσω των εξ. (2.4). Στο σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται, το ημίτονο και συνημίτονο της γωνίας θ_k δίνεται αντίστοιχα από τις εκφράσεις

$$\cos \theta_k = \frac{\text{COLUMN}(q_0) - \text{COLUMN}(q_k)}{r} \quad (2.8\alpha)$$

και

$$\sin \theta_k = \frac{\text{ROW}(q_k) - \text{ROW}(q_0)}{r} \quad (2.8\beta)$$



Ένα λεπτό σημείο που αφορά τις εξ. (2.8) και γενικότερα το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε στο *Excel*, θα πρέπει ίσως να τονιστεί ιδιαίτερα: Συμβατικά συστήματα συντεταγμένων στο χώρο δύο διαστάσεων αποδίδουν τη θέση ενός σημείου μέσω ενός οριζόντιου άξονα X και ένα κατακόρυφο άξονα Y , των οποίων οι τιμές αυξάνουν αντίστοιχα προς τα δεξιά και προς τα άνω. Η σωστή φορά του άξονα X παραμένει σε ένα σύστημα συντεταγμένων του *Excel* αν η οριζόντια συνιστώσα x αποδοθεί με τη στήλη του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση $COLUMN()$. Αν όμως η κατακόρυφη συνιστώσα y αποδοθεί με τη σειρά του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση $ROW()$, η φορά του άξονα Y είναι αντίστροφη από την αναμενόμενη, καθόσον η αρίθμηση των κελιών αυξάνει προς τα κάτω. Αυτός είναι και ο λόγος διαφοροποίησης της σειράς των μεταβλητών στους αριθμητές των εξ. (2.8).

Οι εκφράσεις επομένως που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στα κελιά C7 και C8 είναι

$$=C6*(COLUMN(q_0)-COLUMN(q_1))/SQRT(C5)$$

και

$$=C6*(ROW(q_1)-ROW(q_0))/SQRT(C5)$$

Αφού βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε τις προηγούμενες εκφράσεις, αντιγράψτε τις αντίστοιχα στα κελιά D7:E7 και D8:E8. Στα κελιά D7 και D8 αντικαταστήσετε το όνομα του φορτίου q_1 με το όνομα q_2 και στα κελιά E7 και E8 το όνομα q_1 με το όνομα q_3 .

6. Στα κελιά B11 και B12 υπολογίστε αντίστοιχα το άθροισμα των οριζόντιων και κάθετων συνιστωσών των δυνάμεων Coulomb



που ασκούνται στο φορτίο q_0 από τα φορτία q_1 , q_2 και q_3 .
Οι εκφράσεις που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε είναι

$$=SUM(C7:E7)$$

και

$$=SUM(C8:E8)$$

7. Στο κελί B14 υπολογίστε την ολική δύναμη που ασκείται στο φορτίο q_0 . Η προφανής έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε είναι

$$=SQRT(B11^2+B12^2)$$

8. Τέλος, στο κελί B16 υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει η ολική δύναμη με τον οριζόντιο άξονα μέσω της εξ. (2.7). Για τον υπολογισμό της αντίστροφης εφαπτομένης, το Excel διαθέτει τη συνάρτηση ATAN2.

Η σύνταξη της συνάρτησης ATAN2 είναι:

$$ATAN2(X;Y)$$

όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο XY. Παρατηρείται ότι η συνάρτηση ATAN2(X;Y) επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση. Η συνάρτηση ATAN2(X;Y) επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

Το αποτέλεσμα της συνάρτησης ATAN2 μπορεί να μετα-



τραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το Excel διαθέτει τη συνάρτηση PI(), η οποία επιστρέφει την τιμή π (= 3.14...) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο κελί B16 είναι

=IF(B12<0;ATAN2(B11;B12)*180/PI()+360;ATAN2(B11;B12)*180/PI())

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την έκφραση και τη χρήση της συνάρτησης IF.

Η συνάρτηση =IF(συνθήκη;f;g) επιστρέφει το αποτέλεσμα του υπολογισμού f αν ικανοποιείται η συνθήκη ή το αποτέλεσμα του υπολογισμού g αν δεν αληθεύει η συνθήκη.

Για το παράδειγμα της παραγράφου 3, το Φύλλο Δυνάμεις πρέπει να έχει τώρα τη μορφή του σχήματος 2-4.

9. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορείτε να υπολογίσετε την ολική δύναμη σε καθένα από τα φορτία του Φύλλου Φορτία. Ακολουθώντας τη διεργασία της παραγράφου 2, μετονομάστε (βλ. σχήμα 2-2) το κελί N8 ως q_0 και το κελί F12 ως q_1. Τα αποτελέσματα στο Φύλλο Δυνάμεις αφορούν τώρα τις δυνάμεις που ασκούνται στο σημειακό φορτίο που βρίσκεται στο κελί N8.
10. Είναι δυνατόν να ελέγξετε την ορθότητα των αποτελεσμάτων της παρούσας άσκησης χρησιμοποιώντας τη διαδικασία της προηγούμενης παραγράφου. Αν, για παράδειγμα, τοποθετήσετε



	A	B	C	D	E	F
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	9E+09				
2						
3		q_0	q_1	q_2	q_3	
4	Φορτίο (C)	0.0035	-0.00012	-0.12	0.033	
5	r^2		80	205	146	
6	F		-47.25	-18439	7119.863	
7	F(x)		42.26168	16741.89	-2946.22	
8	F(y)		21.13084	-7727.02	6481.685	
9						
10						
11	ΣF(x)	13837.93				
12	ΣF(y)	-1224.21				
13						
14	ΣF	13891.97				
15						
16	Theta	354.9443				
17						

Σχήμα 2-4 Τελική μορφή του Φύλλου Δυνάμεις στην Εργαστηριακή Άσκηση 2.1.

τα τρία φορτία στην ίδια σειρά, η γωνία της δύναμης που αναπτύσσεται στο φορτίο q_0 πρέπει να είναι ίση με 0° ή 180° . Αν πάλι θέσετε $q_2 = q_3 = 0$, η δύναμη μεταπίπτει στη δύναμη Coulomb μεταξύ δύο σημειακών φορτίων που μπορείτε εύκολα να επιβεβαιώσετε «με το χέρι». Πραγματοποιήστε μερικούς παρόμοιους ελέγχους και δείξτε, κατά το δυνατόν, ότι οι υπολογισμοί σας είναι σωστοί

11. Εκτυπώστε το Φύλλο Φορτία και από τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου σχεδιάστε υπό κλίμακα τις δυνάμεις που ασκούνται σε καθένα από τα σημειακά φορτία λόγω της ύπαρξης των υπολοίπων στο χώρο. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ

Το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο του χώρου ορίζεται ως

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} \quad (2.9)$$

όπου \mathbf{F} είναι η δύναμη που ασκείται σε ένα σημειακό φορτίο q αν τούτο τοποθετηθεί στο σημείο \mathbf{r} . Έτσι, αν στην Εργαστηριακή Άσκηση 2.1 ορίσουμε $q_0 = 1$, το αποτέλεσμα θα είναι το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο που έχει τοποθετηθεί το φορτίο q_0 . Την ιδιότητα αυτή θα εκμεταλλευτούμε στην επόμενη Εργαστηριακή Άσκηση.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 2.2

Ηλεκτρικό πεδίο ηλεκτρικού διπόλου

1. Δημιουργήστε ένα νέο βιβλίο του *Excel* με έξι Φύλλα.

Για να προσθέσετε Φύλλα σε ένα ήδη ανοικτό βιβλίο του *Excel* επιλέξτε από τα μενού Εισαγωγή → Φύλλο εργασίας.

Ονομάστε τα Φύλλα ως εξής:

1. Δεδομένα
2. Φορτία
3. $E(x)$
4. $E(y)$
5. Πεδίο
6. Γωνία



Για να μετονομάσετε ένα Φύλλο, επιλέξτε το Φύλλο, και από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Φύλλο** → **Μετονομασία**. Γράψτε το όνομα του Φύλλου που επιθυμείτε και πιάστε **Enter**.

2. Στο Φύλλο *Φορτία* δημιουργείτε μια απεικόνιση ενός ηλεκτρικού διπόλου με δύο σημειακά φορτία q_1 , q_2 πάνω σε ένα επίπεδο. Για το σκοπό αυτό

- Διαμορφώστε ένα χώρο 25×25 κελιών με ίσο ύψος και ίσο εύρος, μεταβάλλοντας το εύρος των στηλών Α έως και Υ.

Το εύρος μιας στήλης μπορεί να ρυθμιστεί αν τοποθετήσετε το ποντίκι στη σειρά των τίτλων των στηλών (Α, Β, C, ...) και στη διαχωριστική γραμμή μεταξύ δύο στηλών. Αν, με πατημένο το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού, σύρετε το ποντίκι προς τα αριστερά ή δεξιά, το εύρος της στήλης μειώνεται ή αυξάνει αναλόγως. Μπορείτε να ρυθμίσετε το εύρος περισσοτέρων από μιας στήλης ταυτόχρονα με την ακόλουθη διαδικασία: Επιλέξτε τις στήλες στις οποίες θέλετε να ρυθμίσετε το εύρος. Με το πλήκτρο **Ctrl** πατημένο, ρυθμίστε με το ποντίκι το εύρος μιας από τις επιλεγμένες στήλες. Θα παρατηρήσετε ότι όλες οι επιλεγμένες στήλες θα εμφανιστούν με το ίδιο εύρος.

- Στο χώρο που ορίζεται από τα κελιά Α1:Υ25 επιλέξτε διαδοχικά και επισημάνετε με ένα έντονο χρώμα δύο κελιά, σε μικρή μεταξύ τους απόσταση, όπου θα τοποθετήσετε τα φορτία q_1 και q_2 . Μια καλή επιλογή, ώστε να σχηματιστεί ένα πεδίο με συμμετρία στο χώρο Α1:Υ25, είναι τα κελιά W11 και W13. Για το σκοπό αυτό, επιλέξτε ένα κελί (π.χ., το κελί W11). Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά** → **Μοτίβο**. Από την παλέτα των χρωμάτων που θα ανοίξει, επιλέξτε ένα



έντονο χρώμα. Επαναλάβετε την εργασία για το κελί W13.

- Το *Excel* παρέχει τη δυνατότητα ονομασίας ενός κελιού έτσι ώστε να είναι δυνατή η αναφορά σ' αυτό από άλλα κελιά του ίδιου Φύλλου ή Βιβλίου. Επιλέξτε ένα από τα κελιά όπου έχετε τοποθετήσει ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο και από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στο παράθυρο που θα ανοίξει γράψτε ένα όνομα για το φορτίο (π.χ. q_1). Επαναλάβετε την εργασία για το δεύτερο σημειακό φορτίο, το οποίο ονομάστε q_2 .

Παρατηρείστε ότι όταν επιλέγετε ένα κελί, στο *Παράθυρο Ονόματος* του *Excel* (συνήθως το άνω αριστερό παράθυρο της γραμμής εργαλείων) αναγράφονται οι συντεταγμένες του κελιού (π.χ., E12). Αν όμως για το συγκεκριμένο κελί έχει οριστεί ένα όνομα, στο *Παράθυρο Ονόματος* εμφανίζεται το όνομα του κελιού (π.χ., q_1).

Το Φύλλο *Φορτία* πρέπει τώρα να έχει μορφή παρεμφερή με αυτή του σχήματος 2-5, όπου το κάτω φορτίο είναι το φορτίο q_1 και το άνω το φορτίο q_2 .

3. Στο Φύλλο *Δεδομένα* γράψτε τα δεδομένα του προβλήματος. Για το σκοπό αυτό

- Στα κελιά A1 και B1 γράψτε την τιμή της σταθεράς $1/4\pi\epsilon_0$ ώστε τα αποτελέσματα του πεδίου να εκφράζονται στις σωστές μονάδες ($V\ m^{-1}$).
- Στο κελί A3 και B3 γράψτε το όνομα και την τιμή του φορτίου q_1 (π.χ. -0.00012) και στα κελιά A4 και B4 την τιμή του



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1																										
2																										
3																										
4																										
5																										
6																										
7																										
8																										
9																										
10																										
11																										
12																										
13																										
14																										
15																										
16																										
17																										
18																										
19																										
20																										
21																										
22																										
23																										
24																										
25																										
26																										

Σχήμα 2-5 Παράδειγμα του Φύλλου Φορτία στην Εργαστηριακή Άσκηση 2.2 Το κάτω κόκκινο κελί αντιπροσωπεύει το φορτίο q_1 και το άνω το φορτίο q_2 .

φορτίου q_2 . Καθ' όσον ένα ηλεκτρικό δίπολο συγκροτείται από δύο σημειακά φορτία με ίσο και αντίθετο ηλεκτρικό φορτίο, στο κελί B4 γράψτε την τιμή του φορτίου q_2 εισάγοντας την εντολή $= -B3$.

- Επανέλθετε στο Φύλλο Φορτία και στη θέση του φορτίου q_1 γράψτε την εντολή

$=\text{Δεδομένα!B3}$

και στη θέση του φορτίου q_2 την εντολή

$=\text{Δεδομένα!B4}$

Όταν θέλουμε να αποδώσουμε το περιεχόμενο ενός κελιού σε ένα άλλο, μπορούμε να το επιτύχουμε με την αναγραφή στο θυγατρι-

κό κελί της πλήρους διεύθυνσης του μητρικού, όπως έγινε με τις δύο προηγούμενες εντολές. Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε στο θυγατρικό κελί το σημείο = και στη συνέχεια να επιλέξουμε το μητρικό κελί.

Δοκιμάστε τις δύο εναλλακτικές μεθόδους στο προηγούμενο βήμα.

Το Φύλλο Δεδομένα πρέπει τώρα να έχει τη μορφή

	A	B	C
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	9.00E+09	
2			
3	$q_1 =$	-0.00012	
4	$q_2 =$	0.00012	
5			

4. Στο κελί A1 του Φύλλου $E(x)$ υπολογίστε την οριζόντια συνιστώσα της δύναμης που ασκούν τα δύο φορτία του ηλεκτρικού διπόλου σε ένα υποθετικό μοναδιαίο φορτίο που έχει τοποθετηθεί στο σημείο αυτό. Η έκφραση που θα χρησιμοποιήσουμε δίνεται από τις εξ. (2.1), (2.3) και (2.4α). Το συνημίτονο της γωνίας θ_k στην εξ. (2.4α) δίνεται, σε γλώσσα του *Excel*, από την εξ. (2.8α), όπου η απόσταση r από τη θέση κάθε φορτίου q_k στον παρονομαστή είναι ίση με

$$r = ((\text{ROW}() - \text{ROW}(q_k))^2 + (\text{COLUMN}() - \text{COLUMN}(q_k))^2)^{1/2}$$

Οι συναρτήσεις ROW(κελί) και COLUMN(κελί) επιστρέφουν αντίστοιχα την σειρά ή την στήλη που βρίσκεται το κελί στο οποίο αναφέρονται. Ιδιαίτερα, οι ίδιες συναρτήσεις χωρίς μεταβλητή [ROW() και COLUMN()] επιστρέφουν αντίστοιχα την σειρά ή τη στήλη του τρέχοντος κελιού.



Η οριζόντια συνιστώσα επομένως της δύναμης που ασκείται από το φορτίο q_k σε ένα μοναδιαίο φορτίο στο κελί A1 δίνεται από τη σχέση

$$= \text{Δεδομένα!}\$B\$1 * q_k * (\text{COLUMN}() - \text{COLUMN}(q_k)) / ((\text{ROW}() - \text{ROW}(q_k))^2 + (\text{COLUMN}() - \text{COLUMN}(q_k))^2)^{3/2}$$

και η οριζόντια συνιστώσα της ολικής δύναμης από τα δύο φορτία q_1 και q_2 είναι ίση με

$$= \text{Δεδομένα!}\$B\$1 * (q_1 * (\text{COLUMN}() - \text{COLUMN}(q_1)) / ((\text{ROW}() - \text{ROW}(q_1))^2 + (\text{COLUMN}() - \text{COLUMN}(q_1))^2)^{3/2} + q_2 * (\text{COLUMN}() - \text{COLUMN}(q_2)) / ((\text{ROW}() - \text{ROW}(q_2))^2 + (\text{COLUMN}() - \text{COLUMN}(q_2))^2)^{3/2})$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και γράψτε την στο κελί A1 του Φύλλου $E(x)$.

5. Αντιγράψτε τη σχέση αυτή σε όλα τα κελιά της περιοχής A1:Y25. Παρατηρείται ότι η προηγούμενη σχέση έχει απροσδιόριστο αποτέλεσμα στα κελιά του Φύλλου $E(x)$ όπου έχουν τοποθετηθεί τα δύο σημειακά φορτία του ηλεκτρικού διπόλου. Για το λόγο αυτό τα αντίστοιχα κελιά έχουν τώρα την ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Σβήστε το περιεχόμενο των κελιών αυτών με το πλήκτρο **Delete**. Μπορείτε να επισημάνετε τα κελιά αυτά προσδίδοντάς τους ένα έντονο χρώμα όπως στο Φύλλο *Φορτία*.
6. Στο κελί A1 του Φύλλου $E(y)$ υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκούν τα δύο φορτία του ηλεκτρικού διπόλου σε ένα υποθετικό μοναδιαίο φορτίο που έχει τοποθετηθεί στο σημείο αυτό. Η αντίστοιχη έκφραση που ισχύει εδώ



είναι [η διαφορά προέρχεται από τη χρησιμοποίηση της εξ. (2.8β) για τον υπολογισμό του ημιτόνου της γωνίας θ_k]

$$\begin{aligned} &= \text{Δεδομένα!} \$B\$1 * (q_1 * (\text{ROW}(q_1) - \text{ROW}()) \\ &/ ((\text{ROW}(q_1) - \text{ROW}())^2 + (\text{COLUMN}() - \text{COLUMN}(q_1))^2)^{3/2} \\ &+ q_2 * (\text{ROW}(q_2) - \text{ROW}()) / ((\text{ROW}() - \text{ROW}(q_2))^2 \\ &+ (\text{COLUMN}() - \text{COLUMN}(q_2))^2)^{3/2}) \end{aligned}$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και γράψτε την στο κελί A1 του Φύλλου *E(y)*.

7. Αντιγράψτε τη σχέση αυτή σε όλα τα κελιά της περιοχής A1:Y25. Παρατηρείται ότι η προηγούμενη σχέση έχει απροσδιόριστο αποτέλεσμα στα κελιά του Φύλλου *E(y)* όπου έχουν τοποθετηθεί τα δύο σημειακά φορτία του ηλεκτρικού διπόλου. Για το λόγο αυτό τα αντίστοιχα κελιά έχουν τώρα την ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Σβήστε το περιεχόμενο των κελιών αυτών με το πλήκτρο **Delete**. Μπορείτε να επισημάνετε τα κελιά αυτά προσδίδοντάς τους ένα έντονο χρώμα όπως στο Φύλλο *Φορτία*.

8. Στο Φύλλο *Πεδίο* υπολογίστε το μέτρο της ολικής δύναμης που ασκούν τα δύο φορτία του ηλεκτρικού διπόλου σε ένα υποθετικό μοναδιαίο φορτίο που έχει τοποθετηθεί στο σημείο αυτό. Η σχέση εδώ

$$= \text{SQRT}('E(x)'!A1^2 + 'E(y)'!A1^2)$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και γράψτε την στο κελί A1 του Φύλλου *Πεδίο*.

9. Αντιγράψτε τη σχέση αυτή σε όλα τα κελιά της περιοχής



A1:Y25. Μπορείτε να επισημάνετε τα κελιά του Φύλλου *Πεδίο* όπου έχουν τοποθετηθεί τα δύο σημειακά φορτία του ηλεκτρικού διπόλου προσδίδοντάς τους ένα έντονο χρώμα όπως στο Φύλλο *Φορτία*.

10. Τέλος, στο Φύλλο *Γωνία* υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει η ολική δύναμη με τον οριζόντιο άξονα μέσω της εξ. (2.7). Για τον υπολογισμό της αντίστροφης εφαπτομένης, το *Excel* διαθέτει τη συνάρτηση *ATAN2*.

Η σύνταξη της συνάρτησης *ATAN2* είναι:

$$\text{ATAN2}(X ; Y)$$

όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο XY . Παρατηρείται ότι η συνάρτηση $\text{ATAN2}(X;Y)$ επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση. Η συνάρτηση $\text{ATAN2}(X;Y)$ επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

Το αποτέλεσμα της συνάρτησης *ATAN2* μπορεί να μετατραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το *Excel* διαθέτει τη συνάρτηση *PI()*, η οποία επιστρέφει την τιμή π ($= 3.14\dots$) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο κελί A1 του Φύλλου *Γωνία* είναι



$$=IF('E(y)!'A1<0;ATAN2('E(x)!'A1;'E(y)!'A1)*180/PI()+360; ATAN2('E(x)!'A1;'E(y)!'A1)*180/PI())$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την έκφραση και τη χρήση της συνάρτησης IF.

Η συνάρτηση =IF(συνθήκη;f;g) επιστρέφει το αποτέλεσμα του υπολογισμού f αν ικανοποιείται η συνθήκη ή το αποτέλεσμα του υπολογισμού g αν δεν αληθεύει η συνθήκη.

Αντιγράψτε τη σχέση αυτή σε όλα τα κελιά της περιοχής A1:Y25. Παρατηρείται ότι η προηγούμενη σχέση έχει προσδιορίστο αποτέλεσμα στα κελιά του Φύλλου Γωνία όπου έχουν τοποθετηθεί τα δύο σημειακά φορτία του ηλεκτρικού διπόλου. Για το λόγο αυτό τα αντίστοιχα κελιά έχουν τώρα την ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Σβήστε το περιεχόμενο των κελιών αυτών με το πλήκτρο **Delete**. Μπορείτε να επισημάνετε τα κελιά αυτά προσδίδοντάς τους ένα έντονο χρώμα όπως στο Φύλλο Φορτία.

11. Τα αποτελέσματα στο βιβλίο του *Excel* που κατασκευάσατε εκφράζονται με ένα μεγάλο αριθμό δεκαδικών ψηφίων που ενδεχομένως μειώνουν την εποπτική σας δυνατότητα. Σε καθένα από τα Φύλλα που περιέχει αποτελέσματα επιλέξτε την περιοχή A1:Y25 και μεταβάλλετε το περιεχόμενο των κελιών σε ακραίους. Μπορείτε επιπλέον να μειώσετε το εύρος των στηλών A:Y ώστε να μην εμφανίζονται μεγάλα κενά μεταξύ των αριθμών.

Η μορφή του αριθμού που περιέχεται σε ένα επιλεγμένο κελί μπορεί να προσδιοριστεί μέσω του μενού **Μορφή**. Επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά** → **Αριθμός**. Στο παράθυρο **Κατηγορία** που



θα ανοίξει, επιλέξτε Αριθμός. Στο παράθυρο Πλήθος δεκαδικών ψηφίων γράψτε το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που επιθυμείτε. Για την έκφραση του αποτελέσματος με ακέραιο γράψτε στο παράθυρο Πλήθος δεκαδικών ψηφίων τον αριθμό 0.

Αν έχετε ακολουθήσει τη διάταξη και τις τιμές των φορτίων που δόθηκαν ως παράδειγμα στην αρχή της παρούσας Εργαστηριακής Άσκησης, η τελική μορφή του Φύλλου *Γωνία* πρέπει τώρα να είναι αυτή που περιέχεται στο σχήμα 2-6.

12. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου

- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (*Excel 2000*) ή Να μη γίνει ενημέρωση (*Excel XP*).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.



2. Δυνάμεις μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
1	199	196	194	191	188	185	182	178	175	171	166	162	157	152	146	140	134	128	121	113	106	98	90	82	74		
2	203	201	199	196	193	190	187	183	180	176	171	167	162	157	151	145	138	131	123	116	107	99	90	81	73		
3	209	206	204	201	199	196	192	189	185	181	177	172	167	162	156	150	143	135	127	118	109	100	90	80	71		
4	214	212	210	207	205	202	199	195	192	188	183	179	174	168	162	155	148	140	131	122	112	101	90	79	68		
5	220	218	216	214	211	208	205	202	199	195	191	186	181	175	169	162	155	146	136	126	115	103	90	77	65		
6	226	224	222	220	218	215	213	210	206	203	199	194	189	184	177	170	162	153	143	132	119	105	90	75	61		
7	233	231	229	228	226	223	221	218	215	212	208	204	199	193	187	180	172	163	152	139	125	108	90	72	55		
8	240	238	237	235	234	232	230	227	225	222	218	214	210	205	199	192	184	175	164	150	133	113	90	67	47		
9	247	246	245	244	242	241	239	237	235	232	230	226	223	218	213	207	200	191	179	165	147	123	90	58	33		
10	255	254	253	252	251	250	249	248	246	244	242	240	237	234	230	225	219	211	201	188	169	141	90	39	11		
11	262	262	261	261	260	259	259	258	257	256	255	253	251	249	246	243	238	232	222	209	191	90	270	270	270		
12	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	
13	278	278	279	279	280	281	281	282	283	284	285	287	289	291	294	297	302	308	318	331	349	90	191	209			
14	285	286	287	288	289	290	291	292	294	296	298	300	303	306	310	315	321	329	339	352	371	39	90	141	169		
15	293	294	295	296	298	299	301	303	305	308	310	314	317	322	327	333	340	349	361	375	391	41	58	90	122	147	
16	300	302	303	305	306	308	310	313	315	318	322	326	330	335	341	348	356	365	375	387	401	41	67	90	113	133	
17	307	309	311	312	314	317	319	322	325	328	332	336	341	347	353	360	368	377	387	398	411	42	72	90	108	125	
18	314	316	318	320	322	325	327	330	334	337	341	346	351	356	363	370	378	387	397	408	420	43	77	90	103	115	
19	320	322	324	326	329	332	335	338	341	345	349	354	359	365	372	379	387	396	406	417	428	44	81	90	101	112	
20	326	328	330	333	335	338	341	345	348	352	357	363	369	375	382	389	397	406	416	427	438	45	86	90	100	109	
21	331	334	336	339	341	344	348	351	355	359	364	370	376	382	389	396	404	413	423	434	445	46	91	90	99	107	
22	337	339	341	344	347	350	353	357	361	365	370	376	382	388	395	402	410	419	429	440	451	47	96	90	98	106	
23	341	344	346	349	352	355	358	362	366	370	375	381	387	393	400	407	415	424	434	445	456	48	101	90	97	104	
24	346	348	351	354	357	360	363	367	371	375	380	386	392	398	404	411	419	428	438	449	460	49	106	90	97	103	
25	350	353	355	358	361	364	367	371	375	379	384	390	396	402	408	415	423	432	442	453	464	50	111	90	97	103	
26																											

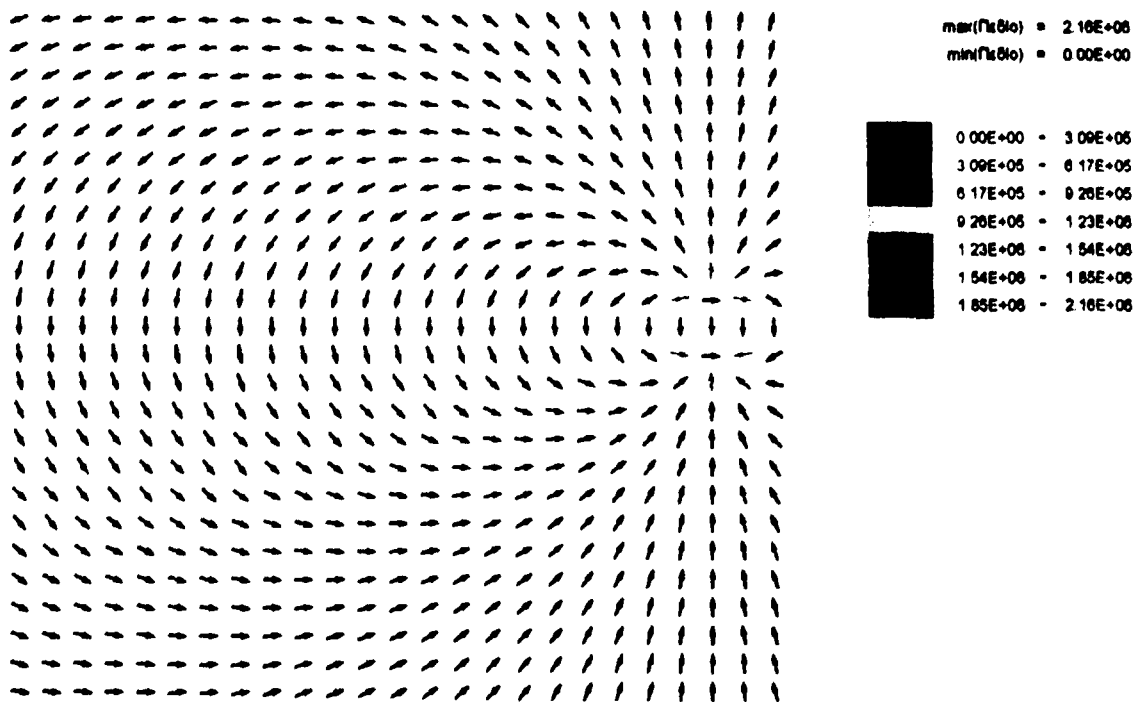
Σχήμα 2-6 Τελική μορφή του Φύλλου Γωνία στην Εργαστηριακή Άσκηση 2.2.

- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας Ctrl-e.

Για το ηλεκτρικό δίπολο που μελετήσαμε στην παρούσα άσκηση, το Φύλλο Δυναμικές Γραμμές πρέπει τώρα να έχει τη μορφή του σχήματος 2-7.

Η ταχύτητα με την οποία ο ηλεκτρονικός υπολογιστής εκτελεί αριθμητικές πράξεις, επιτρέπει σε πολλές περιπτώσεις τον υπολογισμό της δύναμης Coulomb ή του ηλεκτρικού πεδίου για ένα μεγάλο αριθμό ηλεκτρικών φορτίων στο χώρο. Ιδιαίτερα χρήσιμη, όπως θα δούμε στην επόμενη άσκηση είναι η δυνατότητα αυτή στο χειρισμό συνεχών κατανομών ηλεκτρικού φορτίου.





Σχήμα 2-7 Το Φύλλο Δυναμικές Γραμμές στην Εργαστηριακή Άσκηση 2.2.

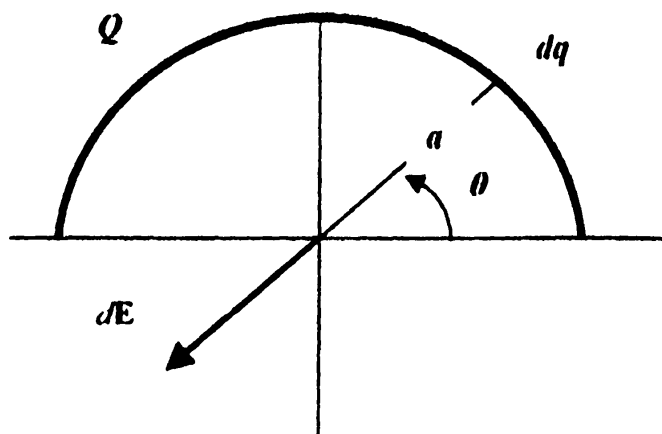
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 2.3

Ηλεκτρικό πεδίο μιας απλής συνεχούς κατανομής ηλεκτρικού φορτίου

Ως παράδειγμα ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από μια συνεχή κατανομή φορτίου θα θεωρήσουμε μια συνεχή ομοιόμορφη κατανομή ολικού ηλεκτρικού φορτίου Q κατά μια ημικυκλική ακτίνας a , όπως φαίνεται στο σχήμα 2-8 και θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο της ημικυκλικής.

Η συνεισφορά ενός στοιχειώδους φορτίου dq στο ηλεκτρικό πεδίο δίνεται και εδώ από το νόμο του Coulomb, που στην περίπτωση αυτή εκφράζεται με τη σχέση

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho ds}{a^2} \quad (2.10)$$



Σχήμα 2-8 Ομοιόμορφη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου Q κατά ημιπεριφέρεια ακτίνας a .

όπου

$$\rho = \frac{Q}{\pi a}$$

είναι η πυκνότητα φορτίου και $ds = a d\theta$ είναι το στοιχειώδες μήκος κατά την ημιπεριφέρεια. Η εξ. (2.10) επομένως μπορεί να γραφεί ως

$$dE = \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0} \frac{Q d\theta}{a^2}. \quad (2.11)$$

Από τη συμμετρία της διάταξης, είναι προφανές ότι η οριζόντια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου E στο κέντρο της ημιπεριφέρειας μηδενίζεται, καθ' όσον για κάθε στοιχείο του φορτίου στη γωνία θ θα υπάρξει μια ίση και αντίθετη συνεισφορά από το στοιχείο σε γωνία $\pi - \theta$. Έτσι, στο ολικό ηλεκτρικό πεδίο θα συνεισφέρει μόνον η κατακόρυφη συνιστώσα, η οποία, από τη γεωμετρία του προβλήματος, μπορεί να γραφεί ως

$$dE_y = -\frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0} \frac{Q \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta}{a^2} = -\frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 a^2} \sin\theta d\theta. \quad (2.12)$$

Η τελευταία συνάρτηση μπορεί εύκολα να ολοκληρωθεί, δίνοντας το αποτέλεσμα

$$E = E_y = -\frac{2Q}{4\pi^2 \epsilon_0 a^2}. \quad (2.13)$$

Το πρόβλημα όμως μπορεί να επιλυθεί και αριθμητικά, θεωρώντας τις επί μέρους συνεισφορές στο ηλεκτρικό πεδίο κάθε στοιχειώδους φορτίου σε όλη την έκταση της κατανομής.

1. Δημιουργείστε ένα νέο Βιβλίο του *Excel* με ένα μόνο Φύλλο.

Αν το Βιβλίο που δημιουργήσατε έχει περισσότερα από ένα Φύλλα, μπορείτε να τα απαλείψετε επιλέγοντας από τα μενού Επεξεργασία → Διαγραφή φύλλου.

2. Με απαρχή το κελί A1, καταχωρείστε στο Φύλλο Εργασίας τα δεδομένα του προβλήματος σύμφωνα με το σχήμα 2-9. Τα δεδομένα περιλαμβάνουν το ολικό φορτίο $Q = 15 \text{ nC}$, την τιμή της σταθεράς $1/4\pi\epsilon_0$ και η ακτίνα της ημιπεριφέρειας $a = 50 \text{ cm}$. Καθ' όσον προτιθέμεθα να χωρίσουμε την ημιπεριφέρεια του σχήματος 2-8 σε 1000 μέρη, στο κελί B4 έχει τοποθετηθεί η τιμή του βήματος

$$=PI()/1000$$

όπου PI() είναι η συνάρτηση του *Excel* που επιστρέφει την τιμή



2. Δυνάμεις μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων

	A	B	C	D
1	Q =	1.50E-08	C	
2	a =	0.5	m	
3	1/4πε0 =	8.99E+09	N m ² / C ²	
4	Βήμα =	0.003141593	rad	
5				
6	E(αναλυτικά) =	-343.3927052	V/m	
7	E(αριθμητικά) =		V/m	
8				
9	theta	dE		
10	0			
11				

Σχήμα 2-9 Δεδομένα της Εργαστηριακής Άσκησης 2.3.

του π ($= 3.14\dots$) με ακρίβεια 16 ψηφίων.

Στο κελί B6 έχει υπολογιστεί η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο της ημιπεριφέρειας σύμφωνα με την αναλυτική εκτίμηση της εξ. (2.13). Η έκφραση του *Excel* που έχει χρησιμοποιηθεί είναι

$$=-B3*2*B1/(PI()*B2^2)$$

Επιπλέον στα κελιά A9 και B9 έχουν καταχωρηθεί οι επικεφαλίδες για ένα πίνακα διαμερισμού της ημιπεριφέρειας σε 1000 μέρη και τον υπολογισμό της συνεισφοράς dE κάθε στοιχειώδους φορτίου στο ηλεκτρικό πεδίο

3. Στο κελί A10 καταχωρίστε την ελάχιστη τιμή της γωνίας θ ($= 0$) και στο κελί A11 τη στοιχειώδη αύξησή της κατά το βήμα του κελιού B4

$$=A10+BS$4$$

Αντιγράψτε την προηγούμενη έκφραση σε όλη την περιοχή



A12:A1010. Το κελί A1010 πρέπει τώρα να έχει την τιμή της σταθεράς π .

4. Στο κελί B10 υπολογίστε την εκτίμηση της εξ. (2.12) με την έκφραση

$$=-\$B\$3*\$B\$1/(PI()*\$B\$2^2)*SIN(A10)*\$B\$4$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή B11:B1010.

5. Στο κελί B7 υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο αθροίζοντας τις συνεισφορές στην περιοχή B10:B1010 με την έκφραση

$$=SUM(B10:B1010)$$

6. Αυξήστε τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων στις δύο εκτιμήσεις του ηλεκτρικού πεδίου που εμφανίζονται στα κελιά B6 και B7 μέχρις ότου παρατηρήσετε διαφορές στα λιγότερο σημαντικά ψηφία.

Η μορφή του αριθμητικού αποτελέσματος σε ένα κελί μπορεί να μεταβληθεί μέσω του μενού **Μορφή**. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε την κάρτα **Αριθμός**. Στο παράθυρο **Κατηγορία:**, επιλέξτε **Αριθμός** ή **Επιστημονική**. Στο παράθυρο **Πλήθος δεκαδικών ψηφίων:** επιλέξτε το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που επιθυμείτε. Επιλέξτε **OK**.

Εναλλακτικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα αντίστοιχα εικονίδια στη γραμμή εργαλείων.



Σχολιάστε την ακρίβεια της αριθμητικής εκτίμησης σε σχέση με την αναλυτική μορφή της εξ. (2.13).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 2-1 Θεωρείστε τέσσερα σημειακά ηλεκτρικά φορτία q , $-q$, $-2q$, $2q$, διαταγμένα αντίστοιχα κατά τις τέσσερις κορυφές ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ με πλευρά $a = 5$ cm. Αν $q = 0.1$ μC , υπολογίστε αναλυτικά τη δύναμη που ασκείται στο φορτίο $2q$. Εκτελέστε την Εργαστηριακή Άσκηση 2.1 για τη διάταξη αυτή των φορτίων και συγκρίνετε τα αποτελέσματα.
- 2-2 Θεωρείστε τέσσερα σημειακά ηλεκτρικά φορτία q , Q , q , Q , διαταγμένα αντίστοιχα κατά τις τέσσερις κορυφές ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ. Αν $q = \alpha Q$, ποια πρέπει να είναι η τιμή της παραμέτρου α ώστε να μηδενίζεται η δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρικό φορτίο Q ; Λύστε την Άσκηση αναλυτικά και επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα με τη βοήθεια της Εργαστηριακής Άσκησης 2.1.
- 2-3 Θεωρείστε τρία σημειακά φορτία $q_1 = 3$ μC , $q_2 = -5$ μC και $q_3 = 8$ μC , διαταγμένα κατά τις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά 12 cm. Χρησιμοποιείτε το Βιβλίο της Εργαστηριακής Άσκησης 2.1 για να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκείται σε κάθε φορτίο της διάταξης.
[Βοήθημα: Θεωρείστε ότι ένα από τα τέσσερα σημειακά φορτία στην Εργαστηριακή Άσκηση 2.1 είναι μηδενικό].
- 2-4 Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα ηλεκτρικό δίπολο σε απόσταση r και πάνω στη μεσοκάθετο προς το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των φορτίων q και $-q$, δίνεται από την προσεγγι-



στική σχέση

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \quad (2.14)$$

όπου $p = qd$ είναι η ηλεκτρική διπολική ροπή του συστήματος των δύο φορτίων και d είναι η απόσταση μεταξύ q και $-q$. Η προσέγγιση ισχύει για μεγάλες αποστάσεις, ήτοι για $r \gg d$.

Για το παράδειγμα του σχήματος 2-5, η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το σύστημα $(q, -q)$ πάνω στη μεσοκάθετο του ηλεκτρικού διπόλου έχει υπολογιστεί στα κελιά A12:V12 του Φύλλου ΣΕ στην Εργαστηριακή Άσκηση 2.2.

- Στο Βιβλίο της Εργαστηριακής Άσκησης 2.2 δημιουργήστε ένα νέο Φύλλο και ονομάστε το *Προσέγγιση*. Αντιγράψτε τις τιμές των κελιών A12:V12 του Φύλλου ΣΕ στην περιοχή A1:V1 του Φύλλου *Προσέγγιση*.

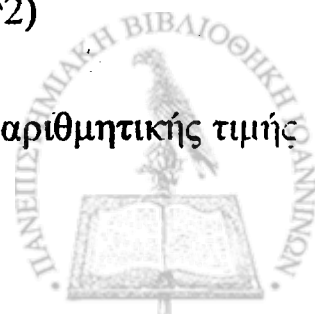
Παρατηρείστε ότι αν προσπαθήσετε να διεκπεραιώσετε την προηγούμενη διεργασία με την απλή διαδοχή Αντιγραφή → Επικόλληση, το Excel θα αντιγράψει τους τύπους και όχι τις αριθμητικές τιμές που περιέχει κάθε κελί. Για παράδειγμα, αν αντιγραφεί απλώς το κελί A12 του Φύλλου ΣΕ, με περιεχόμενο

$$=SQRT('E(x)!'A12^2+'E(y)!'A12^2)$$

στο κελί A1 του Φύλλου *Προσέγγιση*, το αποτέλεσμα θα είναι

$$=SQRT('E(x)!'A1^2+'E(y)!'A1^2)$$

Το Excel δίνει τη δυνατότητα αντιγραφής της αριθμητικής τιμής



ενός κελιού (και όχι του τύπου) με την εξής διαδικασία

- Επιλέξτε το κελί ή την περιοχή κελιών που θέλετε να αντιγράψετε και από τα μενού Επεξεργασία → Αντιγραφή.
- Επιλέξτε το στόχο της αντιγραφής (ένα κελί ή μια περιοχή κελιών στο ίδιο ή άλλο Φύλλο) και από τα μενού Επεξεργασία → Ειδική Επικόλληση. Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Τιμές. Πιέστε OK.

- Στο κελί A2 του Φύλλου *Προσέγγιση* υπολογίστε την προσεγγιστική εκτίμηση του ηλεκτρικού πεδίου με βάση την εξ. (2.14). Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε είναι

$$=\text{Δεδομένα!}\$B\$1 * q_1 * (\text{ROW}(q_2) - \text{ROW}(q_1)) / (\text{COLUMN}(q_1) - \text{COLUMN}())^3$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A2:V2.

Με βάση τη διαφορά των τιμών στις σειρές 1 και 2 του Φύλλου *Προσέγγιση*, σχολιάστε ποιοτικά την ακρίβεια της εξ. (2.14).

2-5 Τα αποτελέσματα της προηγούμενης Άσκησης είναι δυνατόν να αποδοθούν ποσοτικά με μια γραφική παράσταση

- Με βάση το Βιβλίο της Εργαστηριακής Άσκησης 2.2, εκτελέστε την προηγούμενη Άσκηση 2-4.
- Στο κελί A3 του Φύλλου *Προσέγγιση*, υπολογίστε το λόγο d/r της χαρακτηριστικής διάστασης του ηλεκτρικού διπόλου d



προς την απόσταση r του κελιού από το δίπολο. Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε είναι

$$=(\text{ROW}(q_2)-\text{ROW}(q_1))/(\text{COLUMN}(q_1)-\text{COLUMN}())$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A3:V3.

- Στο κελί A4 του Φύλλου *Προσέγγιση*, υπολογίστε την επί τοις εκατό απόκλιση της προσεγγιστικής τιμής του ηλεκτρικού πεδίου $E_{\text{προσ}}$ από την ακριβή $E_{\text{ακρ}}$ σύμφωνα με τη σχέση

$$100 \frac{E_{\text{προσ}} - E_{\text{ακρ}}}{E_{\text{ακρ}}}$$

Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε είναι

$$=100*(A2-A1)/A1$$

- Στο Φύλλο *Προσέγγιση* επιλέξτε την περιοχή A3:V4. Οι δύο στήλες της επιλεγμένης περιοχής περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές του άξονα X και του άξονα Y στο γράφημα που πρόκειται να κατασκευάσετε.
- Από τα μενού του *Excel* επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει, επιλέξτε το είδος του γραφήματος που επιθυμείτε να κατασκευάσετε. Επιλέξτε (Διασπορά) XY και την τρίτη εικόνα με τις συνεχείς ομαλές καμπύλες. Επιλέξτε **Επόμενο** >



- Στο επόμενο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει, εμφανίζεται μια προεπισκόπηση του γραφήματος που θα δημιουργηθεί. Επιλέξτε Επόμενο >
- Το επόμενο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει, περιέχει πέντε κάρτες. Επιλέξτε την κάρτα Τίτλοι. Στο παράθυρο εισαγωγής δεδομένων Τίτλος γραφήματος: εισάγετε ένα κατάλληλο τίτλο (π.χ., *Γράφημα Άσκησης 2-5*). Στο παράθυρο εισαγωγής δεδομένων Άξονας τιμών (X): εισάγετε την ένδειξη r/d και στο παράθυρο εισαγωγής δεδομένων Άξονας τιμών (Y): την ένδειξη % Απόκλιση.
- Στο ίδιο παράθυρο διαλόγου, επιλέξτε την κάρτα Γραμμές πλάγματος και απενεργοποιείστε όλες τις δυνατές επιλογές. Επιλέξτε την κάρτα Υπόμνημα και απενεργοποιείστε την επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος. Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο επόμενο παράθυρο διαλόγου που θα ανοίξει, επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας: και στη συνέχεια Τέλος >
- Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του *Excel* έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει την γραφική παράσταση που κατασκευάσατε. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

2-6 Επαναλάβετε σε γενικές γραμμές την Εργαστηριακή Άσκηση 2.2 διαμορφώνοντας ένα Φύλλο Φορτία, έκτασης 50 × 50 κελιών (περιοχή A1:AX50), στο μέσο της οποίας τοποθετήστε διαδοχικά τέσσερα σημειακά φορτία q , $-q$, q , $-q$ σύμφωνα με το σχήμα 2-10. Η διάταξη αυτή είναι γνωστή ως ηλεκτρικό τετρά-



	S	T	Y	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
25														
26														
27														
28														
29														
30														
31														
32														

Σχήμα 2-10 Διάταξη ηλεκτρικού τετραπόλου στην Άσκηση 2-6.

πολο.

Όπως και στην Εργαστηριακή Άσκηση 2.2, προσδιορίστε σε κάθε σημείο της περιοχής A1:AX50

- Τη συνιστώσα X, $E(x)$, του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί η διάταξη των τεσσάρων φορτίων.
- Τη συνιστώσα Y, $E(y)$, του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί η διάταξη των τεσσάρων φορτίων.
- Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου

$$E = \sqrt{E(x)^2 + E(y)^2}$$

- Τη γωνία θ που σχηματίζει το ηλεκτρικό πεδίο με τον οριζό-



ντιο άξονα.

- Εισάγετε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου* και αποδώστε το ηλεκτρικό πεδίο σε μορφή δυναμικών γραμμών.

2-7 Επαναλάβετε την Εργαστηριακή Άσκηση 2.3 θεωρώντας ότι ολικό φορτίο $Q = 15 \text{ nC}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο πρώτο τεταρτημόριο περιφέρειας κύκλου με ακτίνα $a = 50 \text{ cm}$. [Προσοχή: Στην περίπτωση αυτή, η οριζόντια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου δεν μηδενίζεται και θα πρέπει να υπολογίστε τις δύο συνιστώσες $E(x)$ και $E(y)$].

Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο E , τόσο αναλυτικά όσο και με αριθμητικές μεθόδους.

2-8 Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Εργαστηριακής Άσκησης 2.3, υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στη μεσοκάθετο και σε απόσταση $d = 25 \text{ cm}$ από μια ομοιόμορφη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου πυκνότητας $\lambda = 12 \text{ nC m}^{-1}$, η οποία είναι τοποθετημένη πάνω σε μια ράβδο αμελητέου πάχους και ολικού μήκους $L = 75 \text{ cm}$. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο E , τόσο αναλυτικά όσο και με αριθμητικές μεθόδους.

Μεταβάλλοντας το μήκος της ράβδου L , δημιουργήστε ένα πίνακα της αριθμητικής τιμής του ηλεκτρικού πεδίου ως προς το λόγο d/L για $d = 25 \text{ cm}$ και διάφορα μεγέθη της ράβδου κατά τακτά διαστήματα μεταξύ $L = 25 \text{ cm}$ και $L = 3 \text{ m}$. Αποδώστε τα δεδομένα του πίνακα σε γραφική παράσταση.

Δείξτε ότι για ευθύγραμμη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου με σταθερή πυκνότητα λ και άπειρη έκταση, το ηλεκτρικό πεδίο μεταβάλλεται ως προς το αντίστροφο της απόστασης d από την κατανομή, σύμφωνα με τη σχέση



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \quad (2.15)$$

Συγκρίνετε τα αποτελέσματα της αριθμητικής εκτίμησης με το αριθμητικό αποτέλεσμα της αναλυτικής έκφρασης στην εξ. (2.15).



ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΡΙΑ

**Αριθμητική ολοκλήρωση
συναρτήσεων**



ΣΕ ΠΟΛΛΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ η επεξεργασία ενός προβλήματος οδηγεί στην ολοκλήρωση μιας συνάρτησης στη μορφή

$$F(a, b, y, z, \dots) = \int_a^b f(x, y, z, \dots) dx \quad (3.1)$$

μεταξύ δύο τιμών a και b της μεταβλητής x . Στο συμβολισμό της εξ. (3.1), $f(x, y, z, \dots)$ είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από τις μεταβλητές x, y, z, \dots ενώ το αποτέλεσμα, η συνάρτηση $F(a, b, y, z, \dots)$, εξαρτάται από όλες τις μεταβλητές y, z, \dots της συνάρτησης f που δεν συμμετέχουν στην ολοκλήρωση και επιπλέον από τα όρια της ολοκλήρωσης a και b . Αν η μορφή της συνάρτησης f είναι αρκετά απλή, το ολοκλήρωμα της εξ. (3.1) μπορεί να βρεθεί σε αναλυτική μορφή είτε με μεθόδους της μαθηματικής ανάλυσης ή, στην καλύτερη περίπτωση, έτοιμο σε κάποιο βιβλίο με πίνακες αόριστων ολοκληρωμάτων. Αν συντρέχει η ευτυχής αυτή συγκυρία, η επίλυση του προβλήματος έχει ουσιαστικά συντελεστεί. Αριθμητικές τιμές της συνάρτησης F μπορούν τώρα να βρεθούν για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών a, b, y, z, \dots από την αναλυτική μορφή που προέκυψε.

Πολύ συχνά η ευτυχής κατάσταση που μόλις περιγράφηκε δεν απαντάται. Είτε δεν είμαστε αρκετά «έξυπνοι» ώστε να βρούμε την αναλυτική μορφή της συνάρτησης F ή η ολοκλήρωση είναι τόσο περίπλοκη ώστε στο παρελθόν να μην έχει βρεθεί μαθηματικός αρκετά «έξυπνος» για να την υπολογίσει και να την καταγράψει σε κά-



ποιο βιβλίο. Η μόνη μας διέξοδος στην περίπτωση αυτή είναι η ολοκλήρωση της συνάρτησης f με αριθμητικές μεθόδους.

Αριθμητικές μέθοδοι ολοκλήρωσης συναρτήσεων δεν αποτελούν νέα εφεύρεση της μαθηματικής επιστήμης. «Συνταγές» για την εύρεση της αριθμητικής τιμής ενός ολοκληρώματος ήσαν γνωστές ήδη από τον 18^ο και 19^ο αιώνα. Ο όλος τομέας όμως των αριθμητικών μεθόδων παρέμενε λίγο πολύ στο χώρο της θεωρητικής διατύπωσης μια και ο χρόνος που απαιτείτο για την εφαρμογή τους εμφανιζόταν απαγορευτικός. Η κατάσταση αυτή άλλαξε άρδην με την εισαγωγή των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Οι μυριάδες αριθμητικών πράξεων, που όπως σύντομα θα δούμε, θα απαιτούσαν την επιστράτευση ενός πλήθους μαθηματικών (που επιπλέον δεν θα έκαναν λάθη στις πράξεις) για τον προσδιορισμό της αριθμητικής τιμής και του πλέον απλού ολοκληρώματος μπορούν να γίνουν σήμερα μέσω του υπολογιστή σε κλάσμα του δευτερολέπτου. Επιπλέον, η διαμόρφωση λογισμικών πακέτων, όπως το *Excel*, μετατρέπει την όλη διεργασία σε σχεδόν παιχνίδι.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Μπορούμε να δούμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x)$

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx \quad (3.2)$$

μεταξύ δύο τιμών x_1 και x_N της μεταβλητής x ως το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής στο σχήμα 3-1. Σε πρώτη προσέγγιση, το εμβαδόν αυτό μπορεί να εκτιμηθεί σύμφωνα με τη διεργασία που επίσης δίνεται στο σχήμα 3-1. Θα θεωρήσουμε τα N σημεία x_1, x_2, \dots, x_N τα οποία χωρίζουν το διάστημα $[x_1, x_N]$ σε $N-1$ ίσα διαστήματα μήκους h

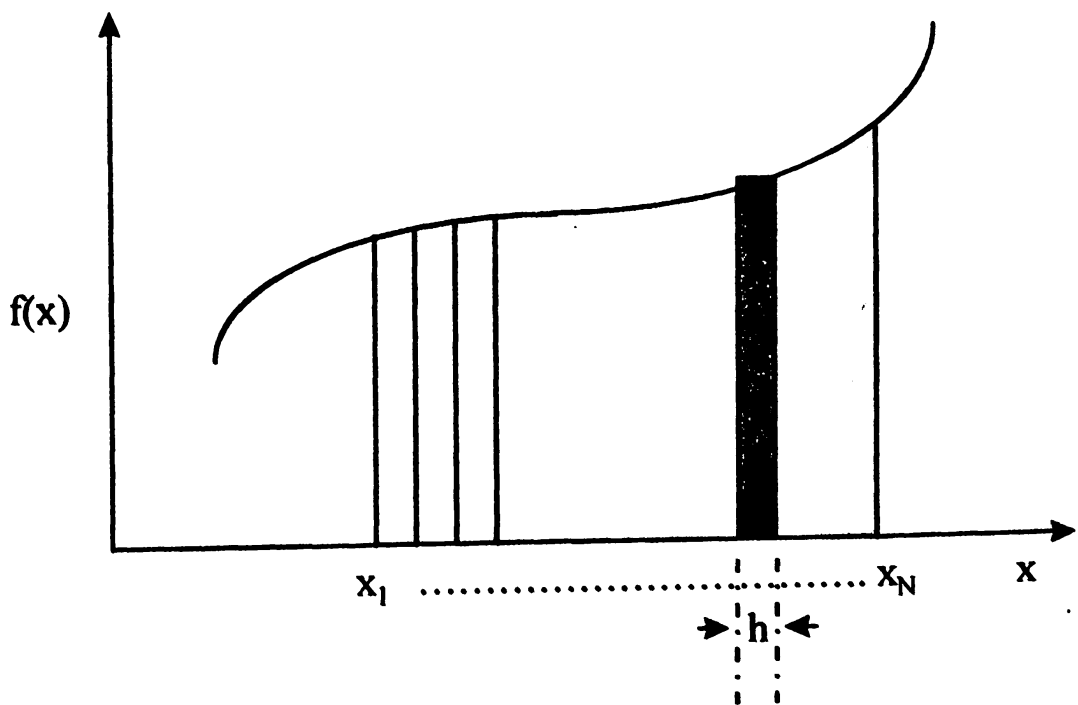


$$h = \frac{x_N - x_1}{N-1}. \quad (3.3)$$

Είναι τώρα φανερό από το σχήμα ότι μια πρώτη προσέγγιση του εμβαδού της γραμμοσκιασμένης περιοχής μπορεί να επιτευχθεί αν αθροίσουμε το εμβαδόν της περιοχής κάθε ιστού που δημιουργείται με τον προηγούμενο διαχωρισμό. Προσεγγίζοντας το εμβαδόν του κάθε ιστού με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μπορούμε να γράψουμε σε προφανή συμβολισμό

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = \sum_{k=2}^N h \cdot \frac{f_k + f_{k-1}}{2} \quad (3.4)$$

όπου $f_k = f(x_k)$ είναι η τιμή της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_k



Σχήμα 3-1 Σχηματική παράσταση ολοκληρώματος συνάρτησης μιας μεταβλητής.



και το κλάσμα $(f_k + f_{k-1})/2$ αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$.

Η ακρίβεια της σχετικά πρωτόγονης εκτίμησης στην εξ. (3.4) εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης $f(x)$. Είναι για παράδειγμα εύκολο να δείξουμε ότι η εξ. (3.4) είναι απόλυτα ακριβής για τη γραμμική συνάρτηση $f(x) = ax + b$. Σε άλλες περιπτώσεις η ακρίβεια της εξ. (3.4) μπορεί να είναι εξαιρετικά πενιχρή. Σημαντική βελτίωση στην ακρίβεια του αποτελέσματος στην εξ. (3.4) είναι δυνατόν να επιτευχθεί αν οι όροι του αθροίσματος πολλαπλασιαστούν με κατάλληλους συντελεστές. Ήδη από τον 19^ο αιώνα είναι γνωστοί δύο κανόνες για την ολοκλήρωση μιας συνάρτησης, που θα παραθέσουμε εδώ υπό μορφή «συνταγής» χωρίς περαιτέρω απόδειξη¹

Κανόνας του τραπεζοειδούς:

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = h \left[\frac{5}{12} f_1 + \frac{13}{12} f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_{N-2} + \frac{13}{12} f_{N-1} + \frac{5}{12} f_N \right] + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \quad (3.5)$$

Κανόνας του Simpson:

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = h \left[\frac{1}{3} f_1 + \frac{4}{3} f_2 + \frac{2}{3} f_3 + \frac{4}{3} f_4 + \dots + \frac{2}{3} f_{N-2} + \frac{4}{3} f_{N-1} + \frac{1}{3} f_N \right] + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \quad (3.6)$$

όπου στον κανόνα του *Simpson* τα αποσιωπητικά (...) δηλώνουν εναλλαγή όρων με συντελεστές $2/3$ και $4/3$. Ο τελευταίος όρος στις



προηγούμενες εκφράσεις δίνει την εκτίμηση του σφάλματος στον υπολογισμό. Όπως αναμένεται δηλώνει ότι η ακρίβεια αυξάνει με αντίστοιχη αύξηση του αριθμού N (ή σμίκρυνση του βήματος h) της ολοκλήρωσης.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 3.1

Αριθμητική ολοκλήρωση συνάρτησης

Ως παράδειγμα αριθμητικής ολοκλήρωσης θα θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4}{(x^2 + a^2)^{\frac{9}{2}}} \quad (3.7)$$

με άριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{9}{2}}} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{1}{5} \frac{x^5}{(x^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{7} \frac{x^7}{(x^2 + a^2)^{\frac{7}{2}}} \right) \quad (3.8)$$

που βρέθηκε σε κάποιο εγχειρίδιο συλλογής άριστων ολοκληρωμάτων.

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του Excel. Μετονομάστε το Φύλλο 1 Δεδομένα και το Φύλλο 2 Αθροίσματα.

Για να μετονομάσετε ένα Φύλλο, επιλέξτε το Φύλλο, και από τα

¹ Βλ., π.χ., W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1986, p. 107ff.



μενού επιλέξτε Μορφή → Φύλλο → Μετονομασία. Γράψτε το όνομα του Φύλλου που επιθυμείτε και πιάστε **Enter**.

2. Στο Φύλλο *Δεδομένα* καταγράψτε, αρχίζοντας από το κελί A1, το κάτω και άνω όριο της ολοκλήρωσης και την τιμή της σταθεράς a στην εξ. (3.8), π.χ.

	A	B	C
1	Κάτω όριο:	-1	
2	Άνω όριο:	1	
3	Σταθερά:	4	
4			

3. Στο Φύλλο *Αθροίσματα*, στα κελιά A1 και B1, τοποθετείστε το βήμα της ολοκλήρωσης h . Για διαχωρισμό του πεδίου ολοκλήρωσης σε 1000 τμήματα, η τιμή του διαστήματος h στο κελί B1 πρέπει να δίνεται από τη συνάρτηση

$$=0.001 * (\text{Δεδομένα!B2} - \text{Δεδομένα!B1})$$

Με τη συνάρτηση αυτή στο κελί B1, το Φύλλο *Αθροίσματα* πρέπει να έχει τώρα τη μορφή

	A	B	C
1	$h =$	0.002	
2			

4. Στη σειρά 3 τοποθετείστε τις επικεφαλίδες των μεγεθών που θα υπολογίσετε



	A	B	C	D	E
1	h =	0.002			
2					
3	x	f(x)	Τραπεζοειδές	Simpson	
4					

5. Στο κελί A4 τοποθετείστε την τιμή του κάτω ορίου της ολοκλήρωσης

$$=\text{Δεδομένα!}\$B\$1$$

6. Στο κελί A5 αυξήστε την τιμή του x κατά το βήμα h , γράφοντας

$$=A4+\$B\$1$$

7. Αντιγράψτε το κελί A5 στα κελιά A6 μέχρι A1004. Η τιμή στο κελί A1004 πρέπει να είναι τώρα 1.

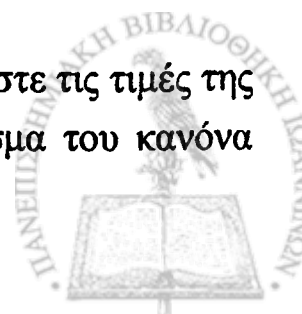
8. Στη στήλη B του Φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $f(x, a)$.

- Στο κελί B4 εισάγετε την έκφραση

$$=A4^4/(A4^2+\text{Δεδομένα!}\$B\$3^2)^{(9/2)}$$

- Αντιγράψτε το κελί B4 στα κελιά B5 μέχρι B1004.

9. Στη στήλη C του Φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $f(x, a)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα



του Τραπεζοειδούς.

- Στο κελί C4 εισάγετε

$$=5/12*B4$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C4 στο κελί C1004.

- Στο κελί C5 εισάγετε

$$=13/12*B5$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C5 στο κελί C1003.

- Στο κελί C6 εισάγετε

$$=B6$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C6 στα κελιά C7: C1002.

10. Στη στήλη D του Φύλλου *Άθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $f(x,a)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του Simpson.

- Στο κελί D4 εισάγετε

$$=1/3*B4$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D4 στο κελί D1004.

- Στο κελί D5 εισάγετε



$$=4/3*B5$$

και στο κελί D6

$$=2/3*B6$$

- Επιλέξτε τα κελιά D5:D6 και αντιγράψτε το περιεχόμενό τους στα κελιά D7:D1002.
- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D5 στο κελί D1003.

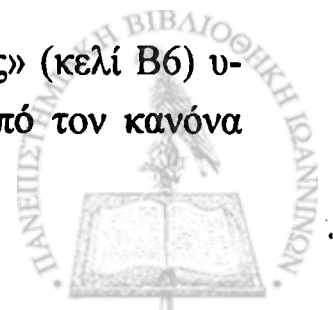
11. Στο Φύλλο Δεδομένα, με απαρχή το κελί A5 δημιουργήστε ένα κατάλογο για τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης

	A	B	C
1	Κάτω όριο:	-1	
2	Άνω όριο:	1	
3	Σταθερά:	4	
4			
5	Άθροισμα f(x)		
6	Τραπεζοειδές		
7	Simpson		
8	Αναλυτικά		
9			

- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής «Άθροισμα f(x)» (κελί B5) υπολογίστε το ολοκλήρωμα που προκύπτει από το απλό άθροισμα των τιμών της συνάρτησης επί το βήμα:

$$=Αθροίσματα!B1*SUM(Αθροίσματα!B4:Αθροίσματα!B1004)$$

- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής «Τραπεζοειδές» (κελί B6) υπολογίστε το ολοκλήρωμα που προκύπτει από τον κανόνα



του τραπεζοειδούς:

$$= \text{Αθροίσματα!B1} * \text{SUM}(\text{Αθροίσματα!C4}:\text{Αθροίσματα!C1004})$$

- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής «Simpson» (κελί B7) υπολογίστε το ολοκλήρωμα που προκύπτει από τον κανόνα του Simpson:

$$= \text{Αθροίσματα!B1} * \text{SUM}(\text{Αθροίσματα!D4}:\text{Αθροίσματα!D1004})$$

12. Για σύγκριση με την τιμή που δίνει η αναλυτική έκφραση του ολοκληρώματος θα υπολογίσουμε στο κελί B8 τη συνάρτηση που δίνεται από την εξ. (3.8). Στο κελί B8 γράψτε την έκφραση

$$\begin{aligned} &= 1/B3^4 * (1/5 * B2^5 / (B2^2 + B3^2)^{(5/2)} \\ &- 1/7 * B2^7 / (B2^2 + B3^2)^{(7/2)}) \\ &- (1/B3^4 * (1/5 * B1^5 / (B1^2 + B3^2)^{(5/2)} \\ &- 1/7 * B1^7 / (B1^2 + B3^2)^{(7/2)})) \end{aligned}$$

που αντιπροσωπεύει τη διαφορά της αριθμητικής τιμής της εξ. (3.8) στα δύο όρια της ολοκλήρωσης.

13. Αυξήστε τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων στις τέσσερις εκτιμήσεις του ολοκληρώματος της εξ. (3.8) μέχρις ότου παρατηρήσετε διαφορές στα λιγότερο σημαντικά ψηφία.

Η μορφή του αριθμητικού αποτελέσματος σε ένα κελί μπορεί να μεταβληθεί μέσω του μενού **Μορφή**. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή → Κελιά...** Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε την κάρτα **Αριθμός**. Στο παράθυρο **Κατηγορία:**, επιλέξτε **Αριθμός** ή **Επιστημονική**. Στο παράθυρο **Πλήθος δεκαδικών ψηφίων:**



επιλέξτε το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που επιθυμείτε. Επιλέξτε OK.

Εναλλακτικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα αντίστοιχα εικονίδια στη γραμμή εργαλείων.

Συγκρίνοντας προς το αποτέλεσμα στο κελί B9, σχολιάστε την ακρίβεια καθεμιάς από τις λοιπές εκτιμήσεις του ολοκληρώματος.

Στην προηγούμενη Εργαστηριακή Άσκηση η αριθμητική τιμή της συνάρτησης $f(x,a)$ βρέθηκε με τη βοήθεια ενός μαθηματικού τύπου του *Excel*, ο οποίος ορίστηκε μέσω του συμβόλου =. Η ενσωμάτωση της γλώσσας προγραμματισμού *Visual Basic* στο *Excel* δίνει τη δυνατότητα ορισμού επί τούτου συναρτήσεων, οι οποίες, όπως και οι λοιπές συναρτήσεις του *Excel* [π.χ., SQRT(X), LOG(X), SIN(X)], μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συντομεύσεις αριθμητικών διεργασιών. Τη δυνατότητα αυτή θα μελετήσουμε στην επόμενη Εργαστηριακή Άσκηση κατά την ολοκλήρωση μιας ακόμη μαθηματικής συνάρτησης.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 3.2

Αριθμητική ολοκλήρωση συνάρτησης *Visual Basic*

Ως ένα δεύτερο παράδειγμα αριθμητικής ολοκλήρωσης θα θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \quad (3.9)$$

με άριστο ολοκλήρωμα



$$\int \frac{\sin x \, dx}{1 - \cos x} = \ln(1 - \cos x) \quad (3.10)$$

που βρέθηκε σε κάποιο εγχειρίδιο συλλογής αόριστων ολοκληρωμάτων.

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του *Excel*. Μετονομάστε το Φύλλο 1 *Δεδομένα* και το Φύλλο 2 *Αθροίσματα*.

Για να μετονομάσετε ένα Φύλλο, επιλέξτε το Φύλλο, και από τα μενού επιλέξτε Μορφή → Φύλλο → Μετονομασία. Γράψτε το όνομα του Φύλλου που επιθυμείτε και πιάστε **Enter**.

2. Στο Φύλλο *Δεδομένα* καταγράψτε, αρχίζοντας από το κελί A1, το κάτω και άνω όριο της ολοκλήρωσης στην εξ. (3.9), π.χ.

	A	B	C
1	Κάτω όριο:	30	
2	Άνω όριο:	120	
3			
4			

Για ολοκλήρωση μεταξύ των γωνιών $x = 30^\circ$ και $x = 120^\circ$.

3. Στο Φύλλο *Αθροίσματα*, στα κελιά A1 και B1, τοποθετείστε το βήμα της ολοκλήρωσης h . Για διαχωρισμό του πεδίου ολοκλήρωσης σε 1000 τμήματα, η τιμή του διαστήματος h στο κελί B1 πρέπει να δίνεται από τη συνάρτηση

$$=0.001*(\text{Δεδομένα!B2}-\text{Δεδομένα!B1})$$



Με τη συνάρτηση αυτή στο κελί B1, το Φύλλο *Αθροίσματα* πρέπει να έχει τώρα τη μορφή

	A	B	C
1	h =	0.09	
2			

4. Στη σειρά 3 τοποθετείστε τις επικεφαλίδες των μεγεθών που θα υπολογίσετε

	A	B	C	D	E
1	h =	0.09			
2					
3	x	f(x)	Τραπεζοειδές	Simpson	
4					

5. Στο κελί A4 τοποθετείστε την τιμή του κάτω ορίου της ολοκλήρωσης

=Δεδομένα!\$B\$1

6. Στο κελί A5 αυξήστε την τιμή του x κατά το βήμα h , γράφοντας

=A4+\$B\$1

7. Αντιγράψτε το κελί A5 στα κελιά A6 μέχρι A1004. Η τιμή στο κελί A1004 πρέπει να είναι τώρα 120.

8. Δημιουργείστε μια συνάρτηση του *Excel* που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $f(x)$ της εξ. (3.9). Για το σκοπό αυτό:



- Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Επεξεργασία Visual Basic**.
- Στην οθόνη σας, θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*.

Κατά τη συγγραφή του παρόντος βιβλίου, το λογισμικό πακέτο της *Microsoft Visual Basic* δεν έχει ακόμη μεταφραστεί στην ελληνική γλώσσα. Για το λόγο αυτό οι εντολές των μενού δίνονται στην αγγλική.

- Από τα μενού επιλέξτε **Insert** → **Module**. Στην κενή σελίδα που θα ανοίξει γράψτε σε γλώσσα *Visual Basic* τη συνάρτηση $f(x)$. Για την συνάρτηση της εξ. (3.9) η σύνταξη είναι:

```
Function f(x)
f = Sin(x) / (1 - Cos(x))
End Function
```

- Από τα μενού επιλέξτε **File** → **Close and return to Microsoft Excel**.
9. Στη στήλη B του Φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $f(x)$.
- Στο κελί B4 εισάγετε την έκφραση

=f(A4*PI()/180)

ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις [$\sin(x)$, $\cos(x)$, κ.λπ.] στη γλώσσα προγραμματισμού του *Excel* αναμένουν την τιμή της μεταβλητής x σε ακτίνια. Αν μια γωνία είναι γνωστή σε



μοίρες, τότε ο μετασχηματισμός $\theta \rightarrow \frac{\pi}{180} \theta$ δίνει την τιμή της γωνίας σε ακτίνια. Το Excel διαθέτει την συνάρτηση PI(), η οποία επιστρέφει την τιμή του π ($\approx 3.14\dots$) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

- Αντιγράψτε το κελί B4 στα κελιά B5 μέχρι B1004.

10. Στη στήλη C του Φύλλου *Άθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $f(x)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του Τραπεζοειδούς.

- Στο κελί C4 εισάγετε

$$=5/12*B4$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C4 στο κελί C1004.

- Στο κελί C5 εισάγετε

$$=13/12*B5$$

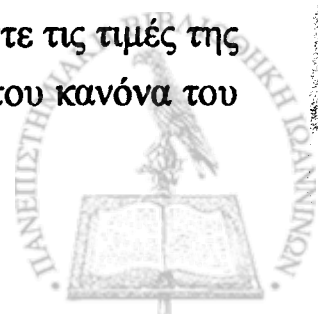
- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C5 στο κελί C1003.

- Στο κελί C6 εισάγετε

$$=B6$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C6 στα κελιά C7: C1002.

11. Στη στήλη D του Φύλλου *Άθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $f(x)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του Simpson.



3. Αριθμητική ολοκλήρωση συναρτήσεων

- Στο κελί D4 εισάγετε

$$=1/3*B4$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D4 στο κελί D1004.

- Στο κελί D5 εισάγετε

$$=4/3*B5$$

και στο κελί D6

$$=2/3*B6$$

- Επιλέξτε τα κελιά D5 και D6 και αντιγράψτε το περιεχόμενό τους στα κελιά D7:D1002.
- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D5 στο κελί D1003.

12. Στο Φύλλο Δεδομένα, με απαρχή το κελί A5 δημιουργείστε ένα κατάλογο για τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα

	A	B	C
1	Κάτω όριο:	30	
2	Άνω όριο:	120	
3			
4			
5	Άθροισμα f(x)		
6	Τραπεζοειδές		
7	Simpson		
8	Αναλυτικά		
9			



- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής «Άθροισμα $f(x)$ » (κελί B5) υπολογίστε το ολοκλήρωμα που προκύπτει από το απλό άθροισμα των τιμών της συνάρτησης επί το βήμα:

$$=Aθροίσματα!B1*PI()/180$$
$$*SUM(Aθροίσματα!B4:Aθροίσματα!B1004)$$

- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής «Τραπεζοειδές» (κελί B6) υπολογίστε το ολοκλήρωμα που προκύπτει από τον κανόνα του τραπεζοειδούς:

$$=Aθροίσματα!B1*PI()/180$$
$$*SUM(Aθροίσματα!C4:Aθροίσματα!C1004)$$

- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής «Simpson» (κελί B7) υπολογίστε το ολοκλήρωμα που προκύπτει από τον κανόνα του Simpson:

$$=Aθροίσματα!B1*PI()/180$$
$$*SUM(Aθροίσματα!D4:Aθροίσματα!D1004)$$

13. Για σύγκριση με την τιμή που δίνει η αναλυτική έκφραση του ολοκληρώματος στην εξ. (3.10) θα πρέπει να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση $g(x)$. Όπως προηγουμένως,

- Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Επεξεργασία Visual Basic**.
- Στην οθόνη σας, θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*.



- Από τα μενού επιλέξτε **I**nsert → **M**odule. Στην κενή σελίδα που θα ανοίξει γράψτε σε γλώσσα *Visual Basic* τη συνάρτηση $g(x)$. Για την συνάρτηση της εξ. (3.10) η σύνταξη είναι:

```
Function g(x)
g = Log(1 - Cos(x))
End Function
```

- Από τα μενού επιλέξτε **F**ile → **C**lose and return to **M**icro-**s**oft **E**xcel.
- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής «Αναλυτικά» (κελί B8) υπολογίστε το ολοκλήρωμα που προκύπτει από την αναλυτική έκφραση της εξ. (3.10):

$$= g(B2*PI()/180) - g(B1*PI()/180)$$

14. Αυξήστε τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων στις τέσσερις εκτιμήσεις του ολοκληρώματος της εξ. (3.10) μέχρις ότου παρατηρήσετε διαφορές στα λιγότερο σημαντικά ψηφία.

Η μορφή του αριθμητικού αποτελέσματος σε ένα κελί μπορεί να μεταβληθεί μέσω του μενού **M**ορφή. Από τα μενού επιλέξτε **M**ορφή → **Κ**ελιά... Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε την κάρτα **Α**ριθμός. Στο παράθυρο **Κ**ατηγορία:, επιλέξτε **Α**ριθμός ή **Ε**πιστημονική. Στο παράθυρο **Π**λήθος δεκαδικών ψηφίων: επιλέξτε το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που επιθυμείτε. Επιλέξτε **Ο**Κ.

Εναλλακτικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα αντίστοιχα εικονίδια στη γραμμή εργαλείων.



Συγκρίνοντας προς το αποτέλεσμα στο κελί B9, σχολιάστε την ακρίβεια καθεμιάς από τις λοιπές εκτιμήσεις του ολοκληρώματος.

Δεν πρέπει πλέον να παραμένει καμιά αμφιβολία ότι με τη βοήθεια του *Excel* η αριθμητή ολοκλήρωση συνάρτησης μιας μεταβλητής, ακόμη και στην περίπτωση όπου δεν είναι δυνατή η εύρεση αναλυτικής έκφρασης σε κλειστή μορφή, μπορεί να θεωρηθεί παιχνίδι. Στο Κεφάλαιο 11 θα δούμε μια πλέον προχωρημένη μέθοδο που θα απλοποιήσει ακόμη περισσότερο τη διεργασία που μόλις περιγράψαμε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3-1 Δείξτε ότι για τη συνάρτηση

$$f(x) = ax + b \quad (3.11)$$

η προσέγγιση της εξ. (3.4) δίνει

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = h \cdot \frac{f_1 + f_N}{2} \quad (3.12)$$

Σχολιάστε το τελευταίο αποτέλεσμα σε σχέση με τη γραφική παράσταση του σχήματος 3-1.

3-2 Εφαρμόστε τον κανόνα του τραπεζοειδούς [εξ. (3.5)] και τον κανόνα του Simpson [εξ. (3.6)] για την εκτίμηση του ολοκληρώματος της συνάρτησης $f(x)$ στην εξ. (3.11) και συγκρίνετε τα αποτελέσματα με το αποτέλεσμα της εξ. (3.12).

3-3 Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας μόνο χαρτί και μολύβι την αριθ-



3. Αριθμητική ολοκλήρωση συναρτήσεων

μητική τιμή της συνάρτησης $f(x)$ της εξ. (3.7) για $x = 1.2$ και $a = 4$, χρονομετρώντας τη διάρκεια που χρειάζεστε για να εκτελέσετε όλες τις πράξεις. Υπολογίστε το χρόνο που θα απαιτούσε η ολοκλήρωση της εξ. (3.8) μέσω του κανόνα του Simpson για $N = 1000$.

3-4 Επαναλάβετε τη διαδικασία της Εργαστηριακής Άσκησης 3.1 για $N = 50, 100, 250$ και 500 για τη συνάρτηση $f(x)$ της εξ. ((3.7). Υπολογίστε την επί τοις εκατό απόκλιση των τριών προσεγγιστικών εκτιμήσεων του ολοκληρώματος ως προς την τιμή που προκύπτει από την ολοκλήρωση της αναλυτικής μορφής στην εξ. (3.8) και σχολιάστε τα αποτελέσματα.

3-5 Από ένα εγχειρίδιο ολοκληρωμάτων επιλέξτε μια συνάρτηση με γνωστό, σε αναλυτική μορφή, αόριστο ολοκλήρωμα. Επιλέξτε δύο όρια ολοκλήρωσης και προσδιορίστε αριθμητικά το ολοκλήρωμα με την βοήθεια του προγράμματος *Excel* που κατασκευάσατε στην Εργαστηριακή Άσκηση 3.1. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την τιμή που δίνει η αναλυτική έκφραση.

3-6 Αποδώστε σε γλώσσα *Visual Basic* τις συναρτήσεις $f(x)$ των ακόλουθων ολοκληρωμάτων

α.
$$\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

β.
$$\int f(x) dx = \int \frac{(A + B \sin x) dx}{\cos x (a + b \cos x)}$$

γ.
$$\int f(x) dx = \int \frac{\cos dx}{\sqrt{1 + p^2 \sin^2 x}}$$



όπου a, b, A, B και p είναι σταθερές.

Με τη βοήθεια ενός εγχειριδίου συλλογής αόριστων ολοκληρωμάτων, ελέγξτε αν καθένα από τα ολοκληρώματα οδηγεί σε μια αναλυτική συνάρτηση $g(x)$ και σε καταφατική περίπτωση αποδώστε την σε γλώσσα *Visual Basic*.

3-7 Σε ένα εγχειρίδιο συλλογής αόριστων ολοκληρωμάτων βρέθηκε η έκφραση

$$\int \frac{\cos^{2m} x dx}{\sin x} = \sum_{k=1}^m \frac{\cos^{2k} x}{2k} + \ln(\sin x) = \sum_{k=1}^m \frac{\cos^{2k-1} x}{2k-1} + \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

όπου $m > 1$ είναι ακέραιος αριθμός.

Επιλέξτε δύο όρια και ολοκληρώστε αριθμητικά τη συνάρτηση $\frac{\cos^{2m} x}{\sin x}$ για $m = 12$. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με τα αποτελέσματα που δίνουν οι δύο σειρές στο δεξιό μέρος του προηγούμενου αναπτύγματος.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΕΣΣΕΡΑ

Ηλεκτρικό πεδίο



ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ διακριτών σημειακών φορτίων μπορεί να βρεθεί εύκολα μέσω των μεθόδων που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 2 για τον υπολογισμό της δύναμης Coulomb. Επιπλέον, στην Εργαστηριακή Άσκηση 2.3 υπολογίσαμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί στο χώρο μια συνεχής κατανομή φορτίου $\rho(\mathbf{r})$, όταν τα ολοκληρώματα που προκύπτουν κατά την επίλυση του προβλήματος είναι δυνατόν να αποδοθούν σε αναλυτική μορφή. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου η συνάρτηση που αποδίδει το ηλεκτρικό πεδίο dE ενός στοιχείου $\rho dx dy dz$ της κατανομής είναι αρκετά πολύπλοκη ώστε η αναλυτική της ολοκλήρωση να μην είναι εφικτή. Στις περιπτώσεις αυτές, η αριθμητική ολοκλήρωση συναρτήσεων που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του ηλεκτροστατικού πεδίου

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_x(x, y, z)\hat{\mathbf{i}} + E_y(x, y, z)\hat{\mathbf{j}} + E_z(x, y, z)\hat{\mathbf{k}} \quad (4.1)$$

που δημιουργεί στο χώρο η κατανομή φορτίου. Μερικά παραδείγματα της κατηγορίας αυτής θα μελετήσουμε στο παρόν Κεφάλαιο.

Στην εξ. (4.1) E_x, E_y, E_z είναι οι τρεις συνιστώσες του ανύσματος \mathbf{E} και $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ τα μοναδιαία ανύσματα κατά τους τρεις άξονες των συντεταγμένων X, Y, Z . Οι τρεις συναρτήσεις E_x, E_y, E_z στην εξ. (4.1) μπορούν να βρεθούν κατ' αρχήν από το γενικό τύπο



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r' \quad (4.2)$$

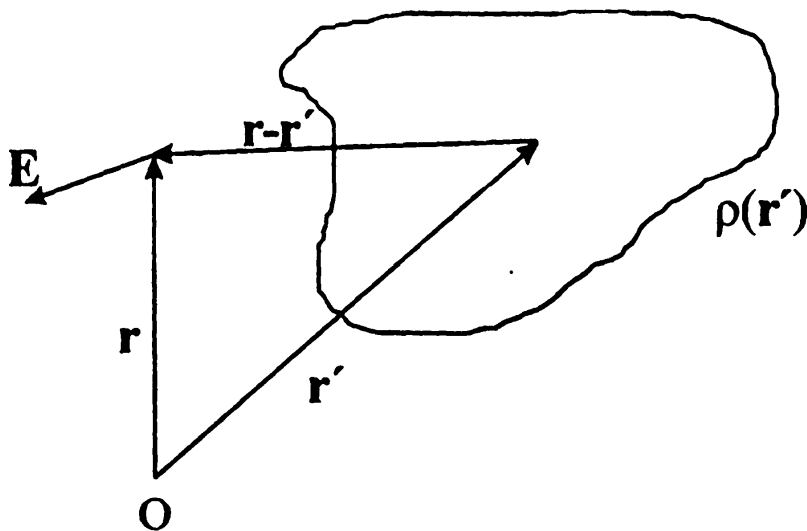
όπου d^3r' είναι το στοιχείο του όγκου στο χώρο της κατανομής φορτίου $\rho(\mathbf{r}')$. Η γεωμετρία της εξ. (4.2) δίνεται στο σχήμα 4-1.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε ορισμένα παραδείγματα κατανομής φορτίου όπου, λόγω της συμμετρίας που χαρακτηρίζει το πρόβλημα ο υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου απαιτεί την ολοκλήρωση ως προς μια και μόνη μεταβλητή.

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΗΣ ΡΑΒΔΟΥ

Θεωρείστε μια ράβδο ολικού μήκους ℓ κατά τον άξονα X και με το μέσο της στην αρχή των συντεταγμένων. Η ράβδος φέρει καθ' όλο το μήκος της σταθερή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου λ [$C m^{-1}$]. Θεωρείστε ακόμη ένα σημείο P στις συντεταγμένες $(x,y) = (b,a)$. Η γεωμετρία της διάταξης δίνεται στο σχήμα 4-2.

Μπορούμε να δείξουμε (βλ. Άσκηση 4-1) ότι οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} στο σημείο P δίνονται από τις σχέσεις



Σχήμα 4-1 Το ηλεκτρικό πεδίο κατανομής φορτίου $\rho(\mathbf{r})$.

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} e_x(x,a,b) dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{(b-x)dx}{[(b-x)^2 + a^2]^{3/2}} \quad (4.3\alpha)$$

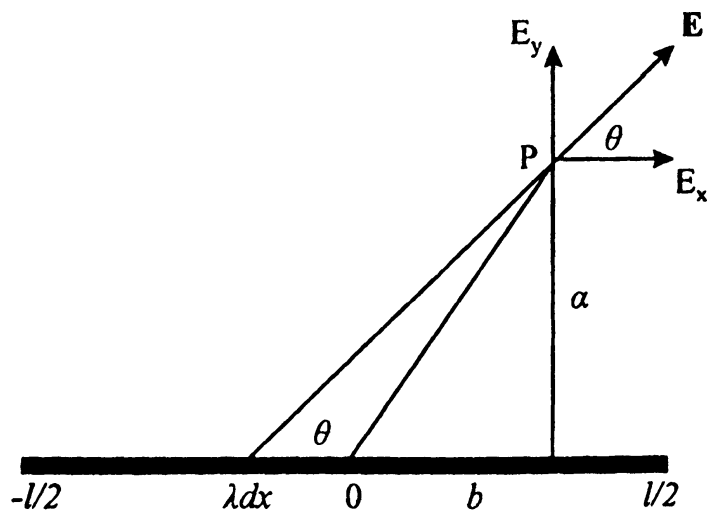
$$E_y = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} e_y(x,a,b) dx = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{[(b-x)^2 + a^2]^{3/2}} \quad (4.3\beta)$$

Οι εξ. (4.3) είναι δυνατόν να ολοκληρωθούν αναλυτικά (βλ. Άσκηση 4.2) με αποτέλεσμα

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(b-l/2)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(b+l/2)^2 + a^2}} \right] \quad (4.4\alpha)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{b+l/2}{\sqrt{(b+l/2)^2 + a^2}} - \frac{b-l/2}{\sqrt{(b-l/2)^2 + a^2}} \right]. \quad (4.4\beta)$$

Η γωνία θ που σχηματίζει το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} με τη διεύθυνση της ράβδου είναι



Σχήμα 4-2 Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ράβδου.



$$\theta = \tan^{-1} \frac{E_y}{E_x}. \quad (4.5)$$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 4.1
Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ράβδου

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του *Excel*. Μετονομάστε το Φύλλο 1 *Δεδομένα* και το Φύλλο 2 *Αθροίσματα*.
2. Στο Φύλλο *Δεδομένα* καταγράψτε, αρχίζοντας από το κελί A1, το κάτω και άνω όριο της ολοκλήρωσης, π.χ.

	A	B	C
1	Κάτω όριο:	-2	
2	Άνω όριο:	2	
3			

3. Στο Φύλλο *Δεδομένα* καταγράψτε, αρχίζοντας από το κελί D1, τις σταθερές $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, λ , ℓ , a και b που υπεισέρχονται στις εξ. (4.3), π.χ.

	D	E	F	G	H
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	8.96E+09	$\lambda =$	3.00E-08	
2	L =	4			
3	a =	6			
4	b =	1.5			
5					



4. Στο Φύλλο *Αθροίσματα*, στα κελιά A1 και B1, τοποθετείστε το βήμα της ολοκλήρωσης h .

	A	B	C
1	$h =$	0.004	
2			

Για διαχωρισμό του πεδίου ολοκλήρωσης σε 1000 τμήματα, η τιμή του διαστήματος h στο κελί B1 είναι

$$=0.001*(\text{Δεδομένα!B2}-\text{Δεδομένα!B1})$$

5. Στη σειρά 3 εισάγετε τις επικεφαλίδες

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$h =$	0.004						
2								
3	x	$E_x(a,b)$	Τραπ/δές	Simpson	$E_y(a,b)$	Τραπ/δές	Simpson	
4								

6. Στο κελί A4 τοποθετείστε την τιμή του κάτω ορίου της ολοκλήρωσης

$$=\text{Δεδομένα!}\$B\$1$$

7. Στο κελί A5 αυξήστε την τιμή του x κατά το βήμα h , γράφοντας

$$=A4+\$B\$1$$

8. Αντιγράψτε το κελί A5 στα κελιά A6 μέχρι A1004. Η τιμή στο

κελί A1004 πρέπει να είναι τώρα 2.

9. Δημιουργήστε μια συνάρτηση του *Excel* που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $e_x(x, a, b)$ που ολοκληρώνεται στην εξ. (4.3α). Για το σκοπό αυτό:

- Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Επεξεργασία Visual Basic**.
- Στην οθόνη σας, θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*.

Κατά τη συγγραφή του παρόντος βιβλίου, το λογισμικό πακέτο της *Microsoft Visual Basic* δεν έχει ακόμη μεταφραστεί στην ελληνική γλώσσα. Για το λόγο αυτό οι εντολές των μενού δίνονται στην αγγλική.

- Από τα μενού επιλέξτε **Insert** → **Module**. Στην κενή σελίδα που θα ανοίξει γράψτε την συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση της εξ. (4.3α) η σύνταξη είναι:

```
Function Ex(x, a, b)
Ex = (b - x) / ((b - x) ^ 2 + a ^ 2) ^ (3 / 2)
End Function
```

- Από τα μενού επιλέξτε **File** → **Close and return to Microsoft Excel**.

10. Δημιουργήστε μια συνάρτηση του *Excel* που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $e_y(x, a, b)$ που ολοκληρώνεται στην εξ. (4.3β). Για το σκοπό αυτό:



- Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Επεξεργασία Visual Basic**.
- Στην οθόνη σας, θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*.
- Από τα μενού επιλέξτε **Insert** → **Module**. Στην κενή σελίδα που θα ανοίξει γράψτε την συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση της εξ. (4.3β) η σύνταξη είναι:

Function Ey(x, a, b)

$$Ey = a / ((b - x)^2 + a^2)^{(3/2)}$$

End Function

- Από τα μενού επιλέξτε **File** → **Close and return to Microsoft Excel**.
11. Στη στήλη B του Φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $e_x(x, a, b)$.
- Στο κελί B4 εισάγετε την έκφραση

$$=Ex(A4;Δεδομένα!E3;Δεδομένα!E4)$$

- Αντιγράψτε το κελί B4 στα κελιά B5 μέχρι B1004.
12. Στη στήλη C του Φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $e_x(x, a, b)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του Τραπεζοειδούς.
- Στο κελί C4 εισάγετε



$$=5/12*B4$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C4 στο κελί C1004.
- Στο κελί C5 εισάγετε

$$=13/12*B5$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C5 στο κελί C1003.
- Στο κελί C6 εισάγετε

$$=B6$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C6 στα κελιά C7: C1002.

13. Στη στήλη D του Φύλλου *Άθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $e_x(x,a,b)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του Simpson.

- Στο κελί D4 εισάγετε

$$=1/3*B4$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D4 στο κελί D1004.
- Στο κελί D5 εισάγετε

$$=4/3*B5$$

και στο κελί D6



$$=2/3*B6$$

- Επιλέξτε τα κελιά D5 και D6 και αντιγράψτε το περιεχόμενό τους στα κελιά D7:D1002.
- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D5 στο κελί D1003.

14. Στη στήλη E του Φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $e_y(x, a, b)$.

- Στο κελί E4 εισάγετε την έκφραση

$$=Ey(A4;Δεδομένα!E3;Δεδομένα!E4)$$

- Αντιγράψτε το κελί E4 στα κελιά E5 μέχρι E1004.

15. Στις στήλες F και G καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $e_y(x, a, b)$ που απαιτούνται αντίστοιχα στα αθροίσματα των κανόνων του Τραπεζοειδούς και του Simpson. Για το σκοπό αυτό αντιγράψτε απλώς την περιοχή AC4:D1004 στην περιοχή που αρχίζει με το κελί F4 (θα καλυφθεί όλη η περιοχή F4:G1004). Περιεργαστείτε το περιεχόμενο των κελιών στις στήλες F και G και παρατηρήστε ότι, κατά την αντιγραφή, το Excel έχει μεταβάλει τις διευθύνσεις των κελιών ώστε τώρα να αναφέρονται στις τιμές της συνάρτησης $e_y(x, a, b)$ στη στήλη E.

16. Στο Φύλλο *Δεδομένα*, με απαρχή το κελί A6 δημιουργείστε ένα κατάλογο για τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης



4. Ηλεκτρικό πεδίο

	A	B	C	D	E	F
6		E(x)	E(y)	E	Γωνία	
7	Τραπεζοειδές					
8	Simpson					
9	Αναλυτικά					
10						

- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής «Τραπεζοειδές» (κελί B7 και κελί C7) υπολογίστε τα ολοκληρώματα που προκύπτουν από τον κανόνα του τραπεζοειδούς:

B7:

= $\int_{G1}^{E1} A_{\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha\tau\alpha!} \cdot \sum(A_{\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha\tau\alpha!} C4: A_{\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha\tau\alpha!} C1004)$

C7:

= $\int_{G1}^{E1} A_{\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha\tau\alpha!} \cdot \sum(A_{\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha\tau\alpha!} F4: A_{\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha\tau\alpha!} F1004)$

- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής «Simpson» (κελί B8 και κελί C8) υπολογίστε τα ολοκληρώματα που προκύπτουν από τον κανόνα του Simpson:

B8:

= $\int_{G1}^{E1} A_{\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha\tau\alpha!} \cdot \sum(A_{\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha\tau\alpha!} D4: A_{\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha\tau\alpha!} D1004)$

C8:

= $\int_{G1}^{E1} A_{\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha\tau\alpha!} \cdot \sum(A_{\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha\tau\alpha!} G4: A_{\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha\tau\alpha!} G1004)$



- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής «Αναλυτικά» (κελί B9 και κελί C9) υπολογίστε τα ολοκληρώματα όπως προκύπτουν από τις αναλυτικές εκφράσεις των εξ. (4.4):

B9:

$$=G1*E1*(1/((E4-E2/2)^2+E3^2)^0.5-1/((E4+E2/2)^2+E3^2)^0.5)$$

C9:

$$=G1*E1/E3*((E4+E2/2)/((E4+E2/2)^2+E3^2)^0.5-(E4-E2/2)/((E4-E2/2)^2+E3^2)^0.5)$$

17. Στο κελί D7 υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

με τη σχέση

D7: =SQRT(B7^2+C7^2)

Αντιγράψτε το κελί D7 στα κελιά D8 και D9.

18. Στο κελί E7 υπολογίστε την γωνία θ που σχηματίζει το ηλεκτρικό πεδίο E με τη διεύθυνση της ράβδου

E7: =ATAN2(B7;C7)*180/PI()

όπου η συνάρτηση του Excel ATAN2(X;Y) επιστρέφει, σε ακτίνια, την γωνία που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα ένα άνυσμα με συνιστώσες X και Y και PI() είναι μια συνάρτηση του Excel που επιστρέφει την τιμή του π με ακρίβεια 15 ψηφί-

ων. Ο παράγοντας $180/\pi()$ μετατρέπει τα ακτίνια σε μοίρες.
Αντιγράψτε το κελί E7 στα κελιά E8 και E9.

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΔΑΚΤΥΛΙΟΥ

Θα θεωρήσουμε ένα ομοιόμορφα φορτισμένο δακτύλιο ακτίνας R με ολικό φορτίο q . Αντικείμενό μας θα είναι ο προσδιορισμός του μέτρου και της διεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο P με συντεταγμένες (x, y, z) .

Χωρίς απώλεια από τη γενικότητα μπορούμε να επιλέξουμε το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε ο δακτύλιος να βρίσκεται στο επίπεδο XY και το σημείο P στο επίπεδο XZ . Τότε, από τη συμμετρία του προβλήματος έπεται ότι το άνωσμα του ηλεκτρικού πεδίου E θα βρίσκεται στο επίπεδο XZ . Αρκεί επομένως να υπολογίσουμε τις συνιστώσες E_x και E_z .

Θα θεωρήσουμε τη συνεισφορά dE ενός στοιχειώδους μήκους ds του δακτυλίου, το οποίο σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα X (σχήμα 4-3). Παρατηρείται ότι $ds = R d\varphi$, ενώ το ηλεκτρικό φορτίο dq του στοιχειώδους μήκους ds είναι

$$dq = \frac{q}{2\pi R} ds = \frac{q d\varphi}{2\pi} \quad (4.6)$$

Τότε,

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi} \frac{1}{r^2} d\varphi \quad (4.7)$$

και

$$dE_z = dE \cos\zeta \quad (4.8\alpha)$$



$$dE_x = dE \cos \chi . \quad (4.8\beta)$$

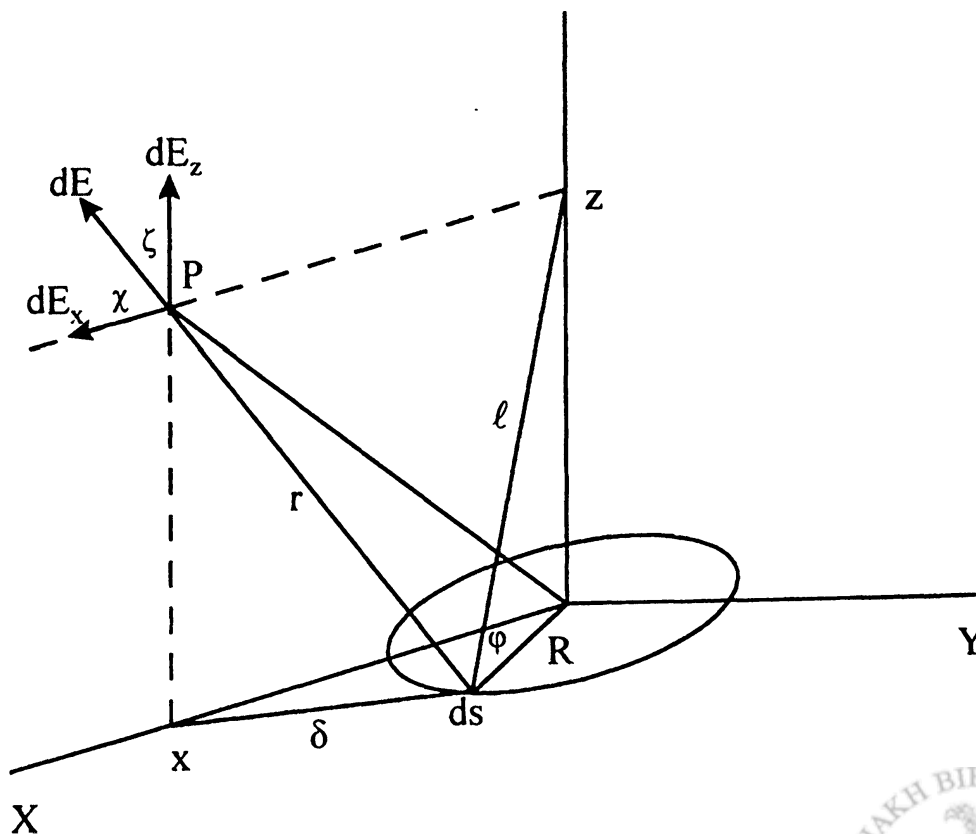
Από τη γεωμετρία του σχήματος 4-3 προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\delta = \sqrt{x^2 + R^2 - 2xR \cos \varphi} \quad (4.9)$$

$$r = \sqrt{z^2 + \delta^2} = \sqrt{z^2 + x^2 + R^2 - 2xR \cos \varphi} \quad (4.10)$$

$$\cos \zeta = \frac{z}{r} \quad (4.11)$$

$$\ell = \sqrt{z^2 + R^2} \quad (4.12)$$



Σχήμα 4-3 Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου δακτυλίου.

$$\cos \chi = \frac{x^2 + r^2 - \ell^2}{2rx} = \begin{cases} 0, & \alpha\nu x = 0 \\ \frac{x - R \cos \varphi}{r}, & \alpha\nu x \neq 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Οι εξ. (4.8) παίρνουν επομένως τη μορφή

$$dE_z(\varphi, R, x, z) = \frac{q}{8\pi^2 \varepsilon_0} \frac{z d\varphi}{[z^2 + x^2 + R^2 - 2Rx \cos \varphi]^{3/2}} \quad (4.14\alpha)$$

$$dE_x(\varphi, R, x, z) = \frac{q}{8\pi^2 \varepsilon_0} \frac{(x - R \cos \varphi) d\varphi}{[z^2 + x^2 + R^2 - 2Rx \cos \varphi]^{3/2}} \quad (4.14\beta)$$

Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου E_x και E_z προκύπτουν από την ολοκλήρωση των τελευταίων συναρτήσεων ως προς τη γωνία φ . Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_z^2} \quad (4.15)$$

ενώ το άνωσμα E σχηματίζει με τον άξονα Z γωνία α

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{E_z}{\sqrt{E_x^2 + E_z^2}}. \quad (4.16)$$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 4.2

Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου δακτυλίου

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του *Excel*. Μετονομάστε το Φύλ-



λο 1 Δεδομένα και το Φύλλο 2 Αθροίσματα.

2. Στο Φύλλο Δεδομένα καταγράψτε, αρχίζοντας από το κελί A1, το κάτω και άνω όριο της ολοκλήρωσης στις εξ.(4.14) [$0^\circ \rightarrow 360^\circ$].

	A	B	C
1	Κάτω όριο:	0	
2	Άνω όριο:	360	
3			

3. Στο Φύλλο Δεδομένα καταγράψτε, αρχίζοντας από το κελί D1, τις σταθερές $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, q , R , x και z που υπεισέρχονται στις εξ. (4.14), π.χ.

	D	E	F	G	H
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	8.96E+09	$q =$	3.00E-08	
2	$R =$	1.5			
3	$x =$	6			
4	$z =$	10			
5					

4. Στο Φύλλο Αθροίσματα, στα κελιά A1 και B1, τοποθετείστε το βήμα της ολοκλήρωσης h .

	A	B	C
1	$h =$	0.36	
2			

Για διαχωρισμό του πεδίου ολοκλήρωσης σε 1000 τμήματα, η



τιμή του διαστήματος h στο κελί B1 είναι

$$=0.001*(\Delta\epsilon\delta\omicron\mu\epsilon\lambda\omicron\nu\alpha!B2-\Delta\epsilon\delta\omicron\mu\epsilon\lambda\omicron\nu\alpha!B1)$$

5. Στη σειρά 3 προετοιμάστε ένα πίνακα για την καταχώριση των τιμών των συναρτήσεων $dE_x(\varphi, R, x, z)$ και $dE_z(\varphi, R, x, z)$ εισάγοντας τις επικεφαλίδες

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	h =	0.004						
2								
3	phi	Ex(phi,R,x,z)	Τραπ/δέξ	Simpson	Ez(phi,R,x,z)	Τραπ/δέξ	Simpson	
4								

6. Στο κελί A4 τοποθετείστε την τιμή του κάτω ορίου της ολοκλήρωσης

$$=\Delta\epsilon\delta\omicron\mu\epsilon\lambda\omicron\nu\alpha!\$B\$1$$

7. Στο κελί A5 αυξήστε την τιμή του x κατά το βήμα h , γράφοντας

$$=A4+\$B\$1$$

8. Αντιγράψτε το κελί A5 στα κελιά A6 μέχρι A1004. Η τιμή στο κελί A1004 πρέπει να είναι τώρα 360.

9. Δημιουργήστε μια συνάρτηση του *Excel* που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $dE_x(\varphi, R, x, z)$ της εξ. (4.14β). Για το σκοπό αυτό:

- Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Επεξεργασία Visual**



Basic.

- Στην οθόνη σας, θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*.
- Από τα μενού επιλέξτε **I**nsert → **M**odule. Στην κενή σελίδα που θα ανοίξει γράψτε την συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση $dE_x(\varphi, R, x, z)$ της εξ. (4.14β) η σύνταξη είναι:¹

```
Function Ex(phi, R, x, z)
Ex = (x - R * Cos(phi)) / (z ^ 2 + x ^ 2 + R ^ 2 _
- 2 * R * x * Cos(phi)) ^ 1.5
End Function
```

- Από τα μενού επιλέξτε **F**ile → **C**lose and return to **M**icrosoft **E**xcel.
10. Δημιουργείστε μια συνάρτηση του *Excel* που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $dE_z(\varphi, R, x, z)$ της εξ. (4.14α). Για το σκοπό αυτό:
- Επιλέξτε **Ε**ργαλεία → **Μ**ακροεντολή → **Ε**πεξεργασία **V**isual **B**asic.
 - Στην οθόνη σας, θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*.

¹ Ο χαρακτήρας «_» στη δεύτερη σειρά της συνάρτησης που ακολουθεί υποδηλώνει συνέχιση της εντολής στην επόμενη σειρά και συνήθως χρησιμοποιείται όταν μια έκφραση της γλώσσας *Visual Basic* είναι εκτενής. Εδώ χρησιμοποιείται καθαρά για τυπογραφικούς λόγους και στην εκτέλεση της Άσκησης μπορεί να παραληφθεί γράφοντας τη δεύτερη και τρίτη σειρά της συνάρτησης $E_x(\varphi, R, x, z)$ σε μια σειρά.



- Από τα μενού επιλέξτε **I**nsert → **M**odule. Στην κενή σελίδα που θα ανοίξει γράψτε την συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση $dE_z(\varphi, R, x, z)$ της εξ. (4.14α) η σύνταξη είναι:

```
Function Ez(phi, R, x, z)
Ez = z / (z ^ 2 + x ^ 2 + R ^ 2 - 2 * R * x * Cos(phi)) ^ 1.5
End Function
```

- Από τα μενού επιλέξτε **F**ile → **C**lose and return to **M**icro-**s**oft **E**xcel.

11. Στη στήλη B του Φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $dE_x(\varphi, R, x, z)$.

- Στο κελί B4 εισάγετε την έκφραση

=Ex(A4*PI()/180;Δεδομένα!\$E\$2;Δεδομένα!\$E\$3;Δεδομένα!\$E\$4)

- Αντιγράψτε το κελί B4 στα κελιά B5 μέχρι B1004.

12. Στη στήλη E του Φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $dE_z(\varphi, R, x, z)$.

- Στο κελί E4 εισάγετε την έκφραση

=Ez(A4*PI()/180;Δεδομένα!\$E\$2;Δεδομένα!\$E\$3;Δεδομένα!\$E\$4)

- Αντιγράψτε το κελί E4 στα κελιά E5 μέχρι E1004.



ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις [$\sin(x)$, $\cos(x)$, κ.λπ.] στη γλώσσα προγραμματισμού του *Excel* αναμένουν την τιμή της μεταβλητής x σε ακτίνια. Αν μια γωνία είναι γνωστή σε μοίρες, τότε ο μετασχηματισμός $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{180} \varphi$ δίνει την τιμή της γωνίας σε ακτίνια. Το *Excel* διαθέτει την συνάρτηση $\text{PI}()$, η οποία επιστρέφει την τιμή του π ($\approx 3.14\dots$) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

13. Στη στήλη C του Φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $dE_x(\varphi, R, x, z)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του Τραπεζοειδούς.

- Στο κελί C4 εισάγετε

$$=5/12*B4$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C4 στο κελί C1004.

- Στο κελί C5 εισάγετε

$$=13/12*B5$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C5 στο κελί C1003.

- Στο κελί C6 εισάγετε

$$=B6$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C6 στα κελιά C7: C1002.

14. Στη στήλη D του Φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της



συνάρτησης $dE_z(\varphi, R, x, z)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του Simpson.

- Στο κελί D4 εισάγετε

$$=1/3*B4$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D4 στο κελί D1004.

- Στο κελί D5 εισάγετε

$$=4/3*B5$$

και στο κελί D6

$$=2/3*B6$$

- Επιλέξτε τα κελιά D5 και D6 και αντιγράψτε το περιεχόμενό τους στα κελιά D7:D1002.

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D5 στο κελί D1003.

15. Στις στήλες F και G καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $dE_z(\varphi, R, x, z)$ που απαιτούνται αντίστοιχα στα αθροίσματα των κανόνων του Τραπεζοειδούς και του Simpson. Για το σκοπό αυτό αντιγράψτε απλώς όλη την περιοχή C4:D1004 στην περιοχή που αρχίζει με το κελί F4 (θα καλυφθεί όλη η περιοχή F4:G1004). Περιεργαστείτε το περιεχόμενο των κελιών στις στήλες F και G και παρατηρήστε ότι, κατά την αντιγραφή, το Excel έχει μεταβάλει τις διευθύνσεις των κελιών έτσι ώστε τώρα να αναφέρονται στις τιμές της συνάρτησης $dE_z(\varphi, R, x, z)$ στη στήλη E.



16. Στο Φύλλο Δεδομένα, με απαρχή το κελί A5 δημιουργείστε ένα κατάλογο για τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης σύμφωνα με τον πίνακα που ακολουθεί

	A	B	C	D
5		E(x)	E(z)	
6	Τραπεζοειδές			
7	Simpson			
8				
9	Μέτρο του E			
10	Γωνία			
11	Αναλυτικά (x=0)			
12	Ασυμπτωτική τιμή			
13				

17. Στα κελιά B6, B7, C6 και C7 υπολογίστε τα ολοκληρώματα των δύο συνιστωσών του πεδίου με τους δύο κανόνες. Οι εκφράσεις του Excel που θα τοποθετήσετε στα κελιά είναι:

B6:

=G\$1*\$E\$1/(2*PI())*Αθροίσματα!\$B\$1*PI()/180
*SUM(Αθροίσματα!C4: Αθροίσματα!C1004)

B7:

=G\$1*\$E\$1/(2*PI())*Αθροίσματα!\$B\$1*PI()/180
*SUM(Αθροίσματα!D4:Αθροίσματα!D1004)

C6:

=G\$1*\$E\$1/(2*PI())*Αθροίσματα!\$B\$1*PI()/180
*SUM(Αθροίσματα!F4: Αθροίσματα!F1004)



C7:

$$= \$G\$1 * \$E\$1 / (2 * \text{PI}()) * \text{Αθροίσματα!} \$B\$1 * \text{PI}() / 180 \\ * \text{SUM}(\text{Αθροίσματα!} G4 : \text{Αθροίσματα!} G1004)$$

18. Στα κελιά B9 και B10 υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E και την γωνία α που σχηματίζει το άνυσμα E με τον άξονα Z , όπως δίνονται από τις εξ. (4.15) και (4.16). Οι εκφράσεις του *Excel* που θα τοποθετήσετε στα κελιά είναι:

$$B9: =\text{SQRT}(B7^2 + C7^2)$$

$$B10: =\text{ACOS}(C7/B9) * 180 / \text{PI}()$$

19. Στο κελί B11 υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E στην περίπτωση όπου $x = 0$ [βλ. εξ. (4.22) στις Ασκήσεις]. Η έκφραση του *Excel* που μπορείτε να τοποθετήσετε στο κελί B11 είναι:

$$B11: =E1 * G1 * E4 / (E2^2 + E4^2)^{1.5}$$

Εισάγετε την τιμή 0 στο κελί E3 και σχολιάστε τα αποτελέσματα των υπολογισμών.

20. Στο κελί B12 υπολογίστε την τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στην ασυμπτωτική περιοχή $x \gg a$ και $z \gg a$. Η έκφραση του *Excel* που θα τοποθετήσετε στο κελί, σύμφωνα με την εξ. (4.23) στις Ασκήσεις, είναι:

$$B12: =E1 * G1 / (E3^2 + E4^2)$$

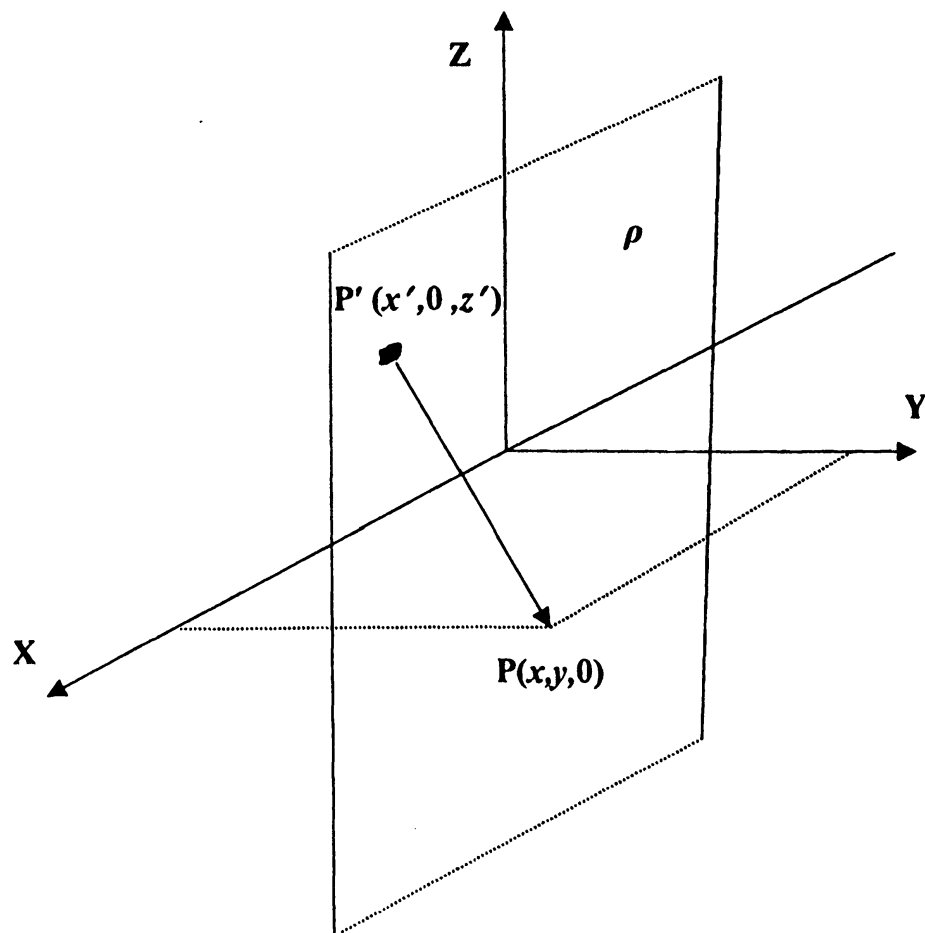
Εισάγετε στα κελιά E3 και E4 μεγάλες τιμές και σχολιάστε



τα αποτελέσματα των υπολογισμών.

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΗΣ ΤΑΙΝΙΑΣ

Θεωρείστε μια επίπεδη ταινία πλάτους d και άπειρου μήκους, η οποία φέρει μια κατανομή ηλεκτρικού φορτίου ρ ($C\ m^{-2}$). Χωρίς να χάσουμε τίποτε από τη γενικότητα, μπορούμε, όπως φαίνεται στο σχήμα 4-4, να θεωρήσουμε ότι η ταινία βρίσκεται στο επίπεδο XZ , κατά τη διεύθυνση του άξονα Z , ενώ κατά μήκος του άξονα X κατα-



Σχήμα 4-4 Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ταινίας.

λαμβάνει την περιοχή $x = -\frac{d}{2}$ έως $x = \frac{d}{2}$. Ζητείται ο υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου γύρω από την ταινία.

Καθ' όσον το πρόβλημα δεν εξαρτάται από τη συντεταγμένη z , μπορούμε να θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο στο χώρο $P(x, y, 0)$, πάνω στο επίπεδο XY που τέμνει τον άξονα Z στην αρχή των συντεταγμένων. Θα θεωρήσουμε επιπλέον ένα τυχαίο σημείο $P'(x', y', z')$ πάνω στην ταινία και το άνυσμα από το σημείο P' ως το σημείο P

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\hat{\mathbf{i}} + (y - y')\hat{\mathbf{j}} + (z - z')\hat{\mathbf{k}} = (x - x')\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} - z'\hat{\mathbf{k}} \quad (4.16)$$

όπου $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ είναι τα τρία μοναδιαία ανύσματα αντίστοιχα κατά τους άξονες X, Y, Z . Σύμφωνα με την εξ. (4.2), το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί η ταινία στο σημείο P θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{\rho(x', z') dx' dz' [(x - x')\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} - z'\hat{\mathbf{k}}]}{[(x - x')^2 + y^2 + z'^2]^{3/2}}. \quad (4.17)$$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι η ολοκλήρωση ως προς z' θα δώσει μηδενικό αποτέλεσμα για τον τελευταίο όρο στον αριθμητή της εξ. (4.17). Μπορούμε επομένως να γράψουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P ως

$$\mathbf{E} = E_x(x, y)\hat{\mathbf{i}} + E_y(x, y)\hat{\mathbf{j}} \quad (4.18)$$

όπου

$$E_x(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{\rho(x', z')(x - x') dx' dz'}{[(x - x')^2 + y^2]^{3/2}} \quad (4.19a)$$



και

$$E_y(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{\rho(x', z') y dx' dz'}{[(x-x')^2 + y^2]^{3/2}}. \quad (4.19\beta)$$

Αν η συνάρτηση $\rho(x, z)$ είναι πολύπλοκη, δεν είναι βέβαιο ότι οι εξ. (4.19) μπορούν να ολοκληρωθούν αναλυτικά. Στην ειδική περίπτωση όπου η συνάρτηση ρ είναι μια σταθερά, η ολοκλήρωση ως προς z' είναι σχετικά απλή, ενώ η ολοκλήρωση ως προς x' οδηγεί στις αναλυτικές μορφές

$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{(x-x') dx'}{[(x-x')^2 + y^2]} \\ &= \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} \right] \end{aligned} \quad (4.20\alpha)$$

και

$$\begin{aligned} E_y(x, y) &= \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{y dx'}{[(x-x')^2 + y^2]} \\ &= \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \left[\tan^{-1} \left(\frac{x + \frac{d}{2}}{y} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{x - \frac{d}{2}}{y} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.20\beta)$$

Την τελευταία περίπτωση θα μελετήσουμε στην επόμενη Εργαστηριακή Άσκηση.



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 4.3

Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ταινίας με άπειρες διαστάσεις

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του *Excel*, με ένα Φύλλο, το οποίο μετονομάστε *Δεδομένα*.
2. Με απαρχή το κελί A1 εισάγετε τα δεδομένα του προβλήματος σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα.

	A	B	C	D	E	F
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	8.96E+09				
2	$\rho =$	3.00E-06				
3	$d =$	12				
4	$x =$	25				
5	$y =$	14				
6	$step =$	0.012				
7						
8						
9						
10	x'	$dE(x)$	$dE(y)$	Simpson_x	Simpson_y	
11						

Το κελί B6 περιέχει το βήμα της ολοκλήρωσης που έχει υπολογιστεί ως

$$= \$C\$3/1000$$

ενώ στη σειρά 10 έχουν προετοιμαστεί οι τίτλοι του πίνακα που θα κατασκευάσουμε για την αριθμητική ολοκλήρωση των εξ. (4.20).

3. Για διευκόλυνση στους υπολογισμούς που ακολουθούν, θα δώσουμε ονόματα στα δεδομένα του προβλήματος. Ονομάστε τα κελιά στο Φύλλο *Δεδομένα* σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα



Κελί	Όνομα
B1	Ke
B2	rho
B3	d
B4	x
B5	y
B6	step

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα** στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Ke). Επιλέξτε **OK**.

4. Προετοιμάστε τον πίνακα για την ολοκλήρωση των συναρτήσεων στις εξ. (4.20) σύμφωνα με τον κανόνα του Simpson. Για το σκοπό αυτό

- Στο κελί A11 καταχωρίστε το κάτω όριο της ολοκλήρωσης με την εντολή

$$= -d/2$$

- Στο κελί A12 γράψτε την εντολή

$$=A11+step$$

και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A13:A1011. Το κελί A1011 πρέπει τώρα να περιέχει το άνω όριο της ολοκλήρωσης.

- Στο κελί B11 υπολογίστε την τιμή της συνάρτησης dE_x της



εξ. (4.20α) με την εντολή

$$= 2 * K_e * \rho * (x - A11) / ((x - A11)^2 + y^2)$$

και αντιγράψτε το σε όλη την περιοχή B12:B1011.

- Στο κελί C11 υπολογίστε την τιμή της συνάρτησης dE_y της εξ. (4.20β) με την εντολή

$$= 2 * K_e * \rho * y / ((x - A11)^2 + y^2)$$

και αντιγράψτε το σε όλη την περιοχή C12:C1011.

- Στο κελί D11 εισάγετε

$$= 1/3 * B11$$

και αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D11 στο κελί D1011.

- Στο κελί D12 εισάγετε

$$= 4/3 * B12$$

και στο κελί D13

$$= 2/3 * B13$$

- Επιλέξτε τα κελιά D12 και D13 και αντιγράψτε το περιεχόμενό τους στην περιοχή D14:D1009.

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D12 στο κελί D1010.



- Τέλος, αντιγράψτε το περιεχόμενο των κελιών D11:D1011 στην περιοχή E11:E1011.
5. Στο ίδιο Φύλλο (Δεδομένα) προετοιμάστε ένα πίνακα για την καταγραφή των αποτελεσμάτων των ολοκληρώσεων σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα.

	C	D	E	F	G
1	Αποτελέσματα				
2					
3			Simpson	Αναλυτικά	
4		E(x) =			
5		E(y) =			
6					

Στο κελί E4 υπολογίστε το ολοκλήρωμα της εξ. (4.20α) μέσω του κανόνα του Simpson με την έκφραση

$$=\text{step}*\text{SUM}(\text{D11}:\text{D1011})$$

και στο κελί E5 το ολοκλήρωμα της εξ. (4.20β) με την έκφραση

$$=\text{step}*\text{SUM}(\text{E11}:\text{E1011})$$

6. Υπολογίστε τις τιμές που προκύπτουν από τις αντίστοιχες αναλυτικές εκφράσεις, εισάγοντας στο κελί F4 την έκφραση

$$=\text{rho}^2*\text{Ke}*\text{LN}(\text{SQRT}(((\text{x}+\text{d}/2)^2+\text{y}^2)/((\text{x}-\text{d}/2)^2+\text{y}^2))))$$

και στο κελί F5 την έκφραση

$$=\text{rho}^2*\text{Ke}*(\text{ATAN}((\text{x}+\text{d}/2)/\text{y})-\text{ATAN}((\text{x}-\text{d}/2)/\text{y}))$$



Συγκρίνετε και σχολιάστε τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4-1 Δείξτε ότι για μια άπειρη σε έκταση ευθύγραμμη κατανομή φορτίου με σταθερή πυκνότητα λ , οι εξ. (4.4) οδηγούν σε ηλεκτρικό πεδίο με διεύθυνση κάθετη προς την κατανομή και μέτρο

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

όπου r είναι η απόσταση από την κατανομή.

4-2 Δίνεται μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος μήκους $\ell = 2$ m με γραμμική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου $\lambda = 3 \times 10^{-8}$ C m⁻¹. Θεωρείστε ένα νοητό ευθύγραμμο τμήμα μήκους 10 m, παράλληλο προς την ράβδο σε απόσταση $h = 1.5$ m. Το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο της ράβδου. Θεωρείστε ακόμη 21 σημεία πάνω στο νοητό ευθύγραμμο τμήμα, τα οποία απέχουν από το ένα άκρο του αποστάσεις $x_k = 0.5k$, $k = 0, 1, \dots, 20$. Υπολογίστε με τη βοήθεια του *Excel*, σε όλα τα σημεία x_k :

- Την αριθμητική τιμή του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου που προκύπτει από τις αναλυτικές εκφράσεις των εξ. (4.4).
- Την τιμή του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου που προκύπτει από την αριθμητική ολοκλήρωση των εξ. (4.3). Σχολιάστε



την ακρίβεια των δύο κανόνων (τραπεζοειδούς και Simpson) σε σχέση με το προηγούμενο «ακριβές» αποτέλεσμα.

Αποδώστε, με τη βοήθεια του Excel, τα αποτελέσματά σας σε γραφική παράσταση.

4-3 Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία x_k της προηγούμενης άσκησης για μια μη ομοιόμορφη κατανομή πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου, όπου δεν είναι δυνατή η αναλυτική ολοκλήρωση των αντίστοιχων εξ. (4.3). Κατανομές που μπορείτε να δοκιμάσετε είναι:

$$\lambda(x) = \lambda_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

$$\lambda(x) = \lambda_0 (\ell + x) \exp[-3(\ell + x)] \quad (4.21)$$

$$\lambda(x) = \lambda_0 \exp\left[-\frac{4x^2}{\ell^2}\right]$$

όπου λ_0 είναι κάποια σταθερά.

Αποδώστε, με τη βοήθεια του Excel, τα αποτελέσματά σας, καθώς και την κατανομή των εξ. (4.21) που χρησιμοποιήσατε, σε γραφική παράσταση.

4-4 Δείξτε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στον άξονα του δακτυλίου (άξονας Z) του σχήματος 4-3 δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.22)$$



4-5 Δείξτε ότι στην ασυμπτωτική περιοχή $x \gg 0, z \gg 0$ το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου του δακτυλίου του σχήματος 4-3 εκφυλίζεται σε πεδίο σημειακού φορτίου, ήτοι δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + z^2}. \quad (4.23)$$

4-6 Δίνεται ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος ακτίνας $R = 3$ m με ολικό φορτίο $q = 3 \times 10^{-8}$ C. Θεωρείστε ένα νοητό ευθύγραμμο τμήμα μήκους 20 m, παράλληλο προς το επίπεδο του δακτυλίου σε απόσταση 5 m. Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στον άξονα του δακτυλίου. Θεωρείστε ακόμη 21 σημεία πάνω στο νοητό ευθύγραμμο τμήμα, τα οποία απέχουν από το ένα άκρο του αποστάσεις $x_k = k, k = 0, 1, \dots, 20$. Υπολογίστε με τη βοήθεια του *Excel*, σε όλα τα σημεία x_k την αριθμητική τιμή και διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου που προκύπτει από τις εξ. (4.14).

Αποδώστε, με τη βοήθεια του *Excel*, τα αποτελέσματά σας σε γραφική παράσταση.

4-7 Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση θεωρώντας ένα δακτύλιο με μη ομοιόμορφη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου της μορφής

$$\lambda(\varphi) = \lambda_0 \sin(n\varphi) \quad (4.24)$$

όπου λ_0 είναι μια σταθερά με διαστάσεις γραμμικής πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου ($C \text{ m}^{-1}$) και n ένας θετικός ακέραιος διάφορος του μηδενός. Αποδώστε, με τη βοήθεια του *Excel*, τα αποτελέσματά σας, καθώς και την κατανομή της εξ. (4.24) που χρησιμοποιήσατε, σε γραφική παράσταση.



[**Βοήθημα:** Παρατηρείται ότι τώρα το ηλεκτρικό φορτίο dq του στοιχειώδους μήκους ds κατά την περιφέρεια του δακτυλίου είναι $dq = \lambda ds = \lambda R d\varphi$.]

4-8 Αποδείξτε, με απ' ευθείας ολοκλήρωση, με μετασχηματισμό των μεταβλητών ολοκλήρωσης ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο την αναλυτική μορφή του ηλεκτρικού πεδίου μιας ομοιόμορφα φορτισμένης ταινίας στις εξ. (4.20).

4-9 Δείξτε ότι για μεγάλες αποστάσεις σε σχέσεις με το πλάτος d μιας φορτισμένης ταινίας ($x \gg d$, $y \gg d$), το ηλεκτρικό πεδίο των εξ. (4.20) μεταπίπτει στο ηλεκτρικό πεδίο μιας ομοιόμορφα φορτισμένης γραμμικής κατανομής με άπειρες διαστάσεις.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΕΝΤΕ

Ηλεκτρικό δυναμικό



ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ που δημιουργείται στο χώρο από ένα σύνολο σημειακών φορτίων q_1, q_2, \dots, q_N δίνεται από τη σχετικά απλή έκφραση

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \quad (5.1)$$

όπου $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|$ είναι η απόσταση του φορτίου q_k από το σημείο \mathbf{r} . Η ταχύτητα με την οποία ο ηλεκτρονικός υπολογιστής εκτελεί πράξεις επιτρέπει και στην περίπτωση αυτή τον άμεσο προσδιορισμό της συνάρτησης δυναμικού με απ' ευθείας υπολογισμό του αθροίσματος στην εξ. (5.1).

ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

Ως παράδειγμα υπολογισμού του δυναμικού που δημιουργεί στο χώρο μια κατανομή σημειακών ηλεκτρικών φορτίων θα θεωρήσουμε τη διάταξη των τριών φορτίων $q, -2q, q$, γνωστή ως γραμμικό ηλεκτρικό τετράπολο, που εικονίζεται στο σχήμα 5-1. Τα τρία φορτία είναι διαταγμένα κατά τον άξονα Z με μεταξύ τους αποστάσεις d , ενώ το φορτίο $-2q$ βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων.

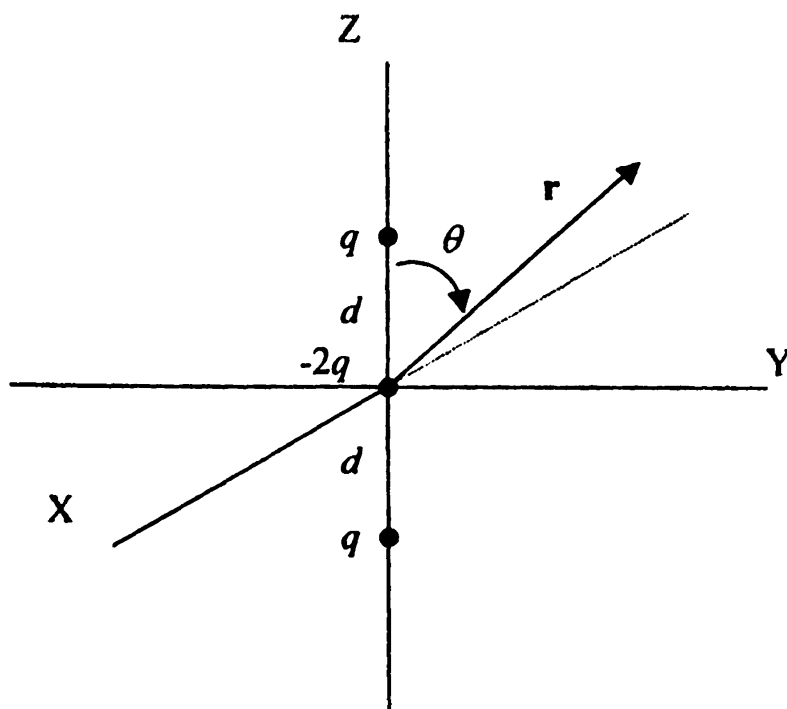


Από τη συμμετρία της διάταξης γύρω από τον άξονα Z, είναι προφανές ότι αρκεί να υπολογίσουμε το δυναμικό σε ένα επίπεδο που περιλαμβάνει τον κατακόρυφο άξονα, το οποίο, χωρίς να χάσουμε τίποτε από τη γενικότητα, μπορούμε να λάβουμε ως το επίπεδο XZ.

Για μεγάλες αποστάσεις $r \gg d$, δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι η συνάρτηση δυναμικού του γραμμικού τετραπόλου μπορεί να υπολογιστεί σε καλή προσέγγιση ως

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd^2(3\cos^2\theta - 1)}{r^3} \quad (5.2)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το άνωσμα \mathbf{r} με τον άξονα Z.



Σχήμα 5-1 Διάταξη γραμμικού ηλεκτρικού τετραπόλου.



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 5.1

Δυναμικό γραμμικού ηλεκτρικού τετραπόλου

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του *Excel* με πέντε φύλλα.

Μπορείτε να προσθέσετε νέα Φύλλα σε ένα ήδη ανοικτό Βιβλίο επιλέγοντας από τα μενού Εισαγωγή → Φύλλο εργασίας.

2. Μετονομάστε τα Φύλλα ως

1. Δεδομένα
2. Διάταξη
3. Απευθείας
4. Ασυμπτωτικά
5. Απόκλιση %

3. Στο Φύλλο *Δεδομένα* εισάγετε τα δεδομένα του προβλήματος σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα

	A	B	C
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	8.96E+09	
2	$q =$	1.50E-06	
3	$d =$		
4			

Για διευκόλυνση στους μετέπειτα υπολογισμούς, ονομάστε το κελί B2, q και το κελί B3, d .

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού Εισαγωγή → Όνομα → Ορισμός. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο Όνόματα στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., d). Επιλέξτε OK.



4. Για τον προσδιορισμό του δυναμικού του ηλεκτρικού τετραπόλου, θα εργαστούμε εδώ σε ένα αρκετά εκτεταμένο χώρο 75×75 κελιών. Στο Φύλλο Διάταξη εισάγετε στο κελί A1 τον αριθμό 0. Αντιγράψτε το κελί A1 στην περιοχή A1:BW75. Η περιοχή αυτή, διαστάσεων 75×75 , είναι η περιοχή στην οποία θα σημειώσετε την διάταξη φορτίου. Ρυθμίστε το πλάτος των στηλών ώστε να είναι ίσο με το ύψος των κελιών.

Μπορείτε να ρυθμίσετε το πλάτος περισσότερων από μιας στήλης ταυτόχρονα με την ακόλουθη διαδικασία: Επιλέξτε τις στήλες στις οποίες θέλετε να ρυθμίσετε το πλάτος. Με το πλήκτρο **Ctrl** πατημένο, ρυθμίστε με το ποντίκι το πλάτος μιας από τις επιλεγμένες στήλες. Θα παρατηρήσετε ότι όλες οι επιλεγμένες στήλες θα εμφανιστούν με το ίδιο πλάτος.

Για να έχετε καλύτερη εποπτεία του χώρου διάταξης των φορτίων,

- Επιλέξτε την περιοχή A1:BW75. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Περίγραμμα**. Στα παράθυρα που θα ανοίξει, επιλέξτε τα κουμπιά με τις ενδείξεις **Πλαίσιο** και **Πλέγμα**. Επιλέξτε **OK**.
- Το κελί AK37 είναι το κέντρο της περιοχής σας όπου θα τοποθετηθεί το φορτίο $-2q$. Επιλέξτε το κελί AK37. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Μοτίβα**. Επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης του κελιού AK37 ένα έντονο χρώμα. Επιλέξτε **OK**.
- Στη στήλη AK, επιλέξτε δύο κελιά, πάνω και κάτω από το



κελί ΑΚ37, όπου θα τοποθετήσετε τα δύο φορτία q του σχήματος 5-1 (π.χ., τα κελιά ΑΚ33 και ΑΚ41). Επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης και για αυτά τα κελιά αυτά το ίδιο μοτίβο με το κελί ΑΚ37.

- Για διευκόλυνση στους μετέπειτα υπολογισμούς, ονομάστε το κελί ΑΚ33, qu και το κελί ΑΚ37, qc και το κελί ΑΚ41, ql .
- Μπορείτε τώρα να υπολογίσετε την παράμετρο d του σχήματος 5-1. Στο κελί Β3 του Φύλλου *Δεδομένα* τοποθετείστε την εντολή

$$=ROW(qc)-ROW(qu)$$

- Καθ' όσον έχετε δώσει στο κελί *Δεδομένα*!B2 το όνομα q , μπορείτε να αποδώσετε τα φορτία του ηλεκτρικού τετραπόλου εισάγοντας στα κελιά του Φύλλου *Διάταξη* ΑΚ33 και ΑΚ41 την εντολή

$$= q$$

και στο κελί ΑΚ37 την εντολή

$$= - 2 * q$$

5. Στο Φύλλο *Απευθείας* υπολογίστε το δυναμικό που δημιουργεί το ηλεκτρικό τετράπολο σύμφωνα με την εξ. (5.1). Χρησιμοποιώντας τις σειρές και τις στήλες του Φύλλου αντίστοιχα ως συντεταγμένες x και z , μπορούμε να γράψουμε την απόσταση r ενός κελιού από το φορτίο, για παράδειγμα, qc , ως

$$r = SQRT((ROW()-ROW(qc))^2+(COLUMN()-COLUMN(qc))^2)$$



$$= ((\text{ROW}()-\text{ROW}(qc))^2+(\text{COLUMN}()-\text{COLUMN}(qc))^2)^{0.5} \quad (5.3)$$

Έτσι, για τον υπολογισμό της συνεισφοράς στο δυναμικό και των τριών φορτίων του τετραπόλου, τοποθετείστε στο κελί A1 την έκφραση

$$\begin{aligned} &= \text{Δεδομένα!}\$B\$1 * \\ & (qu/((\text{ROW}()-\text{ROW}(qu))^2+(\text{COLUMN}()-\text{COLUMN}(qu))^2)^{0.5} \\ & + qc/((\text{ROW}()-\text{ROW}(qc))^2+(\text{COLUMN}()-\text{COLUMN}(qc))^2)^{0.5} \\ & + ql/((\text{ROW}()-\text{ROW}(ql))^2+(\text{COLUMN}()-\text{COLUMN}(ql))^2)^{0.5}) \end{aligned}$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:BW75 του Φύλλου *Απειθείας*.

6. Στο Φύλλο *Ασυμπτωτικά* υπολογίστε το δυναμικό που δημιουργεί το ηλεκτρικό τετράπολο σύμφωνα με την εξ. (5.2). Για την απόδοση της απόστασης r από την αρχή των συντεταγμένων μπορούμε πάλι να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση της εξ. (5.3), ενώ το συνημίτονο της πολικής γωνίας θ δίνεται από την έκφραση

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= (\text{ROW}()-\text{ROW}(qc))^2 \\ & /((\text{ROW}()-\text{ROW}(qc))^2+(\text{COLUMN}()-\text{COLUMN}(qc))^2) \end{aligned}$$

Έτσι, η έκφραση που μπορείτε να τοποθετήσετε στο κελί A1 είναι

$$\begin{aligned} &= \text{Δεδομένα!}\$B\$1 * q * d^2 * \\ & (3 * (\text{ROW}()-\text{ROW}(qc))^2 \\ & /((\text{ROW}()-\text{ROW}(qc))^2+(\text{COLUMN}()-\text{COLUMN}(qc))^2) - 1) \end{aligned}$$



$$/((\text{ROW}()-\text{ROW}(\text{qc}))^2+(\text{COLUMN}()-\text{COLUMN}(\text{qc}))^2)^{1.5}$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:BW75 του Φύλλου *Ασυμπτωτικά*.

7. Τέλος, στο Φύλλο *Απόκλιση %*, υπολογίστε την επί τοις εκατό απόκλιση των δύο εκτιμήσεων του δυναμικού του ηλεκτρικού τετραπόλου. Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο κελί A1 είναι

$$=100*(\text{Ασυμπτωτικά!A1}-\text{Απευθείας!A1})/\text{Απευθείας!A1}$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:BW75 του Φύλλου *Απόκλιση %*.

8. Η εποπτεία του δυναμικού που δημιουργεί το τετράπολο στο χώρο αυξάνει αν αποδώσουμε τις τιμές του Φύλλου *Απευθείας* σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο *Απευθείας* επιλέξτε την περιοχή A1:BW75.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο** >
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο** >



- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί επιλέξτε την κάρτα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ., ως

Τίτλος γραφήματος:

Δυναμικό γραμμικού τετραπόλου [εξ. (5.1)]

Κατηγορία (X): X

Τιμή (Z): $V(X,Z)$

Σειρά (Y): Z

- Επιλέξτε την κάρτα **Υπόμνημα** και απενεργοποιείστε την ένδειξη **Εμφάνιση υπομνήματος**.
- Επιλέξτε **Επόμενο** >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας.
- Επιλέξτε **Τέλος**.
- Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του *Excel* έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει τη γραφική παράσταση. Μετονομάστε το Φύλλο σε *Γράφημα Απευθείας*.
- Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφη-



μα και από τα μενού του Excel **Γράφημα** → **Προβολή 3Δ...**
Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

9. Επαναλάβετε την προηγούμενη διεργασία και δημιουργείστε ανάλογα γραφήματα για τα Φύλλα *Ασυμπτωτικά* και *Απόκλιση %*. Σχολιάστε, ιδιαίτερα με τη βοήθεια του γραφήματος του Φύλλου *Απόκλιση %*, τη διαφορά των δύο εκτιμήσεων του δυναμικού.
-

Για συνεχείς κατανομές φορτίου, σε αναλογία με την εξ. (4.1), το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί στο χώρο μια κατανομή φορτίου $\rho(\mathbf{r})$ μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (5.4)$$

Το ολοκλήρωμα της τελευταίας σχέσης μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά αν η συνάρτηση $\rho(\mathbf{r})$ είναι αρκετά απλή ή αν το σημείο \mathbf{r} στο χώρο εμφανίζει κάποια ιδιαίτερη συμμετρία ως προς την κατανομή φορτίου. Σε αντίθετη περίπτωση θα πρέπει να επιστρατευτούν μέθοδοι αριθμητικής εκτίμησης του ολοκληρώματος. Στο παρόν κεφάλαιο θα δούμε δυο τέτοιες περιπτώσεις.

ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΔΑΚΤΥΛΙΟΥ

Θα θεωρήσουμε έναν ομοιόμορφα φορτισμένο δακτύλιο ακτίνας R με ολικό φορτίο q και ένα σημείο P στο χώρο, σε απόσταση r από το κέντρο του δακτυλίου, ενώ το άνωσμα \mathbf{r} σχηματίζει γωνία α με τον άξονά του. Χωρίς απώλεια από την γενικότητα μπορούμε να θεωρήσουμε τον δακτύλιο στο επίπεδο XY με τον άξονά του κατά τον



άξονα Z.

Από τη γεωμετρία του σχήματος 5-2, η συνεισφορά ενός στοιχειώδους μήκους $d\ell$ του δακτυλίου στο δυναμικό στο σημείο P θα είναι

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{s} \quad (5.5)$$

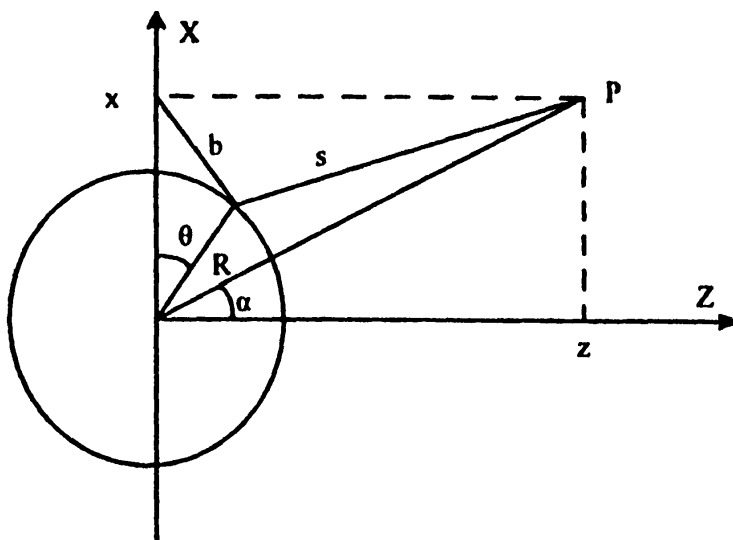
όπου dq είναι το φορτίο του στοιχειώδους μήκους $d\ell$

$$dq = \frac{q}{2\pi R} d\ell = \frac{q}{2\pi R} R d\vartheta = \frac{q}{2\pi} d\vartheta. \quad (5.6)$$

Στην τελευταία σχέση ϑ είναι η γωνία που σχηματίζει το στοιχειώδες μήκος $d\ell$ με τον άξονα X.

Από τα τρίγωνα του σχήματος μπορούμε να γράψουμε

$$s = \sqrt{b^2 + z^2} \quad (5.7)$$



Σχήμα 5-2 Το δυναμικό φορτισμένου δακτυλίου.

$$b = \sqrt{x^2 + R^2 - 2xR \cos \vartheta} \quad (5.8)$$

όπου οι συντεταγμένες (x, z) του σημείου P δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= r \sin \alpha \\ z &= r \cos \alpha \end{aligned} \quad (5.9)$$

Η απόσταση s επομένως μπορεί να γραφεί ως

$$s = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin \alpha \cos \vartheta} \quad (5.10)$$

και η συνάρτηση δυναμικού ως

$$\varphi(r, \alpha, R) = \frac{q}{8\pi^2 \varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin \alpha \cos \vartheta}}. \quad (5.11)$$

Παρατηρείται ότι για $\alpha = 0$ η τελευταία έκφραση δίνει το σωστό αποτέλεσμα

$$\varphi(r, R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2 + R^2}} \quad (5.12)$$

στον άξονα του φορτισμένου δακτυλίου.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 5.2

Δυναμικό φορτισμένου δακτυλίου

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του *Excel*. Μετονομάστε το Φύλλο 1 *Δεδομένα* και το Φύλλο 2 *Αθροίσματα*.



5. Ηλεκτρικό δυναμικό

2. Στο Φύλλο Δεδομένα καταγράψτε, αρχίζοντας από το κελί A1, το κάτω και άνω όριο της ολοκλήρωσης στις εξ.(2) [$0^\circ \rightarrow 360^\circ$]

	A	B	C
1	Κάτω όριο:	0	
2	Άνω όριο:	360	
3			

3. Στο Φύλλο Δεδομένα καταγράψτε, αρχίζοντας από το κελί D1, τις σταθερές $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, q , R , r και α που υπεισέρχονται στην εξ. (5.11), π.χ.

	D	E	F	G	H
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	8.96E+09	$q =$	3.00E-08	
2	$R =$	1.5			
3	$r =$	6			
4	$\alpha =$	30			
5					

4. Στο Φύλλο Αθροίσματα, στα κελιά A1 και B1, τοποθετείστε το βήμα της ολοκλήρωσης h .

	A	B	C
1	$h =$	0.36	
2			

Για διαχωρισμό του πεδίου ολοκλήρωσης σε 1000 τμήματα, η τιμή του διαστήματος h στο κελί B1 είναι

$$=0.001*(\Delta\epsilon\delta\omicron\mu\epsilon\mu\epsilon\lambda\alpha!B2-\Delta\epsilon\delta\omicron\mu\epsilon\mu\epsilon\lambda\alpha!B1)$$



5. Στη σειρά 3 προετοιμάστε ένα πίνακα για την καταχώριση των τιμών της συναρτήσεως $d\varphi$ εισάγοντας τις επικεφαλίδες

	A	B	C	D	E
1	h =	0.36			
2					
3	theta	$\varphi(\text{theta}, r, \alpha, a)$	Τραπεζοειδές	Simpson	
4					

6. Στο κελί A4 τοποθετείστε την τιμή του κάτω ορίου της ολοκλήρωσης

$$=\text{Δεδομένα!}\$B\$1$$

7. Στο κελί A5 αυξήστε την τιμή του x κατά το βήμα h , γράφοντας

$$=A4+\$B\$1$$

8. Αντιγράψτε το κελί A5 στα κελιά A6 μέχρι A1004. Η τιμή στο κελί A1004 πρέπει να είναι τώρα 360.

9. Δημιουργήστε μια συνάρτηση του *Excel* που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $d\varphi$ της εξ. (5.11). Για το σκοπό αυτό:

- Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Επεξεργασία Visual Basic**.
- Στην οθόνη σας, θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*.
- Από τα μενού επιλέξτε **Insert** → **Module**. Στην κενή σελίδα



που θα ανοίξει γράψτε την συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση $d\varphi$ της εξ. (5.8) η σύνταξη είναι:

```
Function V(theta, r, alpha, a)
V = 1 / Sqr(r ^ 2 + a ^ 2 - 2 * a * r * Sin(alpha) * Cos(theta))
End Function
```

- Από τα μενού επιλέξτε **File** → **Close and return to Microsoft Excel**.

10. Στη στήλη B του Φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $d\varphi$.

- Στο κελί B4 εισάγετε την έκφραση

```
=V(A4*PI()/180;Δεδομένα!$E$3;Δεδομένα!$E$4*PI()/180;
Δεδομένα!$E$2)
```

- Αντιγράψτε το κελί B4 στα κελιά B5 μέχρι B1004.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις [sin(x), cos(x), κ.λπ.] στη γλώσσα προγραμματισμού του *Excel* αναμένουν την τιμή της μεταβλητής x σε ακτίνια. Αν μια γωνία είναι γνωστή σε μοίρες, τότε ο μετασχηματισμός $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{180} \varphi$ δίνει την τιμή της γωνίας σε ακτίνια. Το *Excel* διαθέτει την συνάρτηση PI(), η οποία επιστρέφει την τιμή του π (=3.14...) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

11. Στη στήλη C του Φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $d\varphi$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του



Τραπεζοειδούς.

- Στο κελί C4 εισάγετε

$$=5/12*B4$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C4 στο κελί C1004.

- Στο κελί C5 εισάγετε

$$=13/12*B5$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C5 στο κελί C1003.

- Στο κελί C6 εισάγετε

$$=B6$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C6 στα κελιά C7: C1002.

12. Στη στήλη D του Φύλλου *Άθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $d\phi$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του Simpson.

- Στο κελί D4 εισάγετε

$$=1/3*B4$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D4 στο κελί D1004.

- Στο κελί D5 εισάγετε



$$=4/3*B5$$

και στο κελί D6

$$=2/3*B6$$

- Επιλέξτε τα κελιά D5 και D6 και αντιγράψτε το περιεχόμενό τους στα κελιά D7:D1002.
- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D5 στο κελί D1003.

13. Στο Φύλλο Δεδομένα, με απαρχή το κελί A5 δημιουργήστε ένα κατάλογο για τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης

	A	B	C
--	---	---	---

5		$\varphi(r)$	
6	Τραπεζοειδές		
7	Simpson		
8			
9	Αναλυτικά (alpha = 0)		
10	Ασυμπτωτική τιμή		
11			

14. Στα κελιά B6 και B7 υπολογίστε το ολοκλήρωμα του δυναμικού με τους δύο κανόνες. Οι εκφράσεις του Excel που θα τοποθετήσετε στα κελιά είναι:

B6:

$$= \$G\$1 * \$E\$1 / (2 * \text{PI}()) * \text{Αθροίσματα!} \$B\$1 * \text{PI}() / 180 * \text{SUM}(\text{Αθροίσματα!} C4 : \text{Αθροίσματα!} C1004)$$



B7:

$$=\$G\$1*\$E\$1/(2*PI())*Αθροίσματα!\$B\$1*PI()/180$$
$$*SUM(Αθροίσματα!D4:Αθροίσματα!D1004)$$

15. Στο κελί B9 υπολογίστε το δυναμικό στην περίπτωση όπου $\alpha = 0$ [εξ. (5.12)]. Η έκφραση του *Excel* που θα τοποθετήσετε στο κελί είναι:

$$B9: =E1*G1/SQRT(E3^2+E2^2)$$

16. Στο κελί B10 υπολογίστε την τιμή του δυναμικού στην ασυμπτωτική περιοχή $r \gg R$. Η έκφραση του *Excel* που θα τοποθετήσετε στο κελί είναι:

$$B10: =E1*G1/E3$$

17. Μεταβάλλετε τα δεδομένα του προβλήματος και περιγράψτε πώς μεταβάλλεται το δυναμικό στο χώρο γύρω από το δακτύλιο.

- Συγκρίνετε τα αποτελέσματα των υπολογισμών μέσω των δύο μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης και σχολιάστε τη συμφωνία τους.
- Θέστε $\alpha = 0$ και συγκρίνετε το αποτέλεσμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης με το αριθμητικό αποτέλεσμα που δίνει η αναλυτική έκφραση της εξ. (5.12).
- Μεταβάλλετε τα δεδομένα του προβλήματος έτσι ώστε να ισχύει η συνθήκη $r \gg R$ και σχολιάστε την ακρίβεια της ασυμπτωτικής εκτίμησης.



ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΔΙΣΚΟΥ

Τα παραδείγματα που έχουμε δει ως τώρα, λόγω της ειδικής συμμετρίας που διαθέτουν, απαιτούν την ολοκλήρωση των εξ. (3.2) ή (5.4) ως προς μια και μόνη μεταβλητή. Τούτο δεν συμβαίνει πάντα. Ένα παράδειγμα, στο οποίο ο προσδιορισμός του δυναμικού απαιτεί ολοκλήρωση μιας συνάρτησης ως προς δύο μεταβλητές θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Θα θεωρήσουμε ένα ομοιόμορφα φορτισμένο δίσκο ακτίνας R με ολικό φορτίο q και ένα σημείο P σε απόσταση r από το κέντρο του δίσκου, το οποίο σχηματίζει γωνία α με τον άξονά του.

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στον δίσκο είναι

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2} \quad (5.13)$$

Όπως δείχνει το σχήμα 5-3 θα θεωρήσουμε την συνεισφορά στο σημείο P ενός στοιχειώδους δακτυλίου με ακτίνα ρ . Σύμφωνα με το προηγούμενο αποτέλεσμα, η συνεισφορά στο δυναμικό του στοιχειώδους δακτυλίου είναι

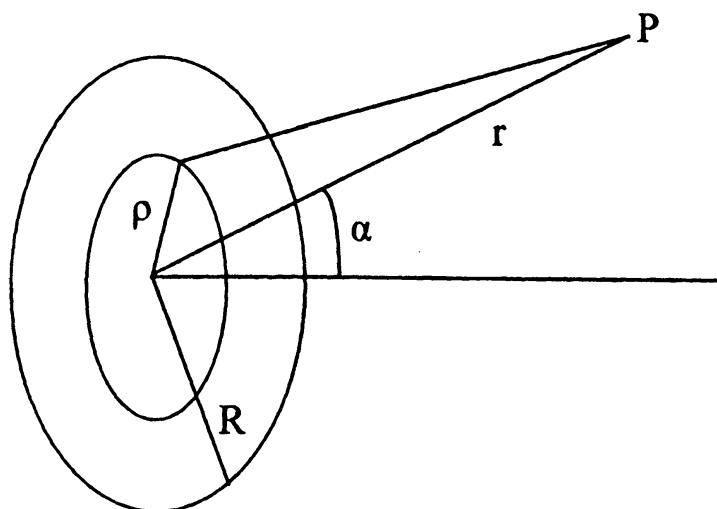
$$d\Phi = \frac{dq}{8\pi^2 \epsilon_0} \varphi(r, \alpha, \rho) \quad (5.14)$$

όπου $\varphi(r, \alpha, \rho)$ είναι το ολοκλήρωμα της εξ. (5.11). Το φορτίο του στοιχειώδους δακτυλίου dq δίνεται από τη σχέση

$$dq = \sigma 2\pi\rho d\rho = \frac{2q}{R^2} \rho d\rho \quad (5.15)$$

οπότε το δυναμικό στο σημείο P είναι





Σχήμα 5-3 Το δυναμικό φορτισμένου δίσκου.

$$\Phi(r, \alpha, R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\pi R^2} \int_0^R \varphi(r, \alpha, \rho) \rho d\rho \quad (5.16)$$

Παρατηρείται ότι για $\alpha = 0$ η τελευταία σχέση μπορεί να ολοκληρωθεί αναλυτικά με αποτέλεσμα

$$\Phi(r, R) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left[\sqrt{r^2 + R^2} - r \right]. \quad (5.17)$$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 5.3

Δυναμικό φορτισμένου δίσκου

Θα υπολογίσουμε την αριθμητική τιμή του διπλού ολοκληρώματος στην εξ. (5.16) εφαρμόζοντας τον κανόνα του τραπεζοειδούς με διαχωρισμό του πεδίου ολοκλήρωσης σε 100 τμήματα.

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του Excel. Μετονομάστε το Φύλλο 1 Δεδομένα και το Φύλλο 2 Αθροίσματα.

5. Ηλεκτρικό δυναμικό

2. Στο Φύλλο Δεδομένα καταγράψτε, αρχίζοντας από το κελί A1, το κάτω και άνω όριο της ολοκλήρωσης στην εξ.(5.11) [$0^\circ \rightarrow 360^\circ$]

	A	B	C
1	Κάτω όριο:	0	
2	Άνω όριο:	360	
3			

3. Στο Φύλλο Δεδομένα καταγράψτε, αρχίζοντας από το κελί D1, τις σταθερές $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, q , R , r και α που υπεισέρχονται στην εξ. (5.16), π.χ.

	D	E	F	G	H
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	8.96E+09	$q =$	3.00E-08	
2	$R =$	1.5			
3	$r =$	6			
4	$\alpha =$	30			
5					

4. Στο Φύλλο Αθροίσματα, στα κελιά A1:B2, τοποθετείστε τα βήματα της ολοκλήρωσης $h(\theta)$ και $h(\rho)$.

	A	B	C
1	$h(\theta) =$	3.6	
2	$h(\rho) =$	0.015	
3			

Για διαχωρισμό του πεδίου ολοκλήρωσης σε 100 τμήματα, η τιμή του διαστήματος h στα κελιά B1 και B2 είναι:



$$B1: =0.01*(\text{Δεδομένα!B2}-\text{Δεδομένα!B1})$$

$$B2: =0.01*\text{Δεδομένα!E\$2}$$

5. Θα καταγράψουμε τις τιμές που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της εξ. (5.11) ως προς ϑ στη σειρά 6 του Φύλλου *Αθροίσματα*. Για το σκοπό αυτό εισάγετε στο κελί A6 την ένδειξη

	A	B
6	$\varphi(\text{rho}) * \text{rho} =$	
7		

6. Με απαρχή το κελί A10 δημιουργείτε στη στήλη A το πεδίο των τιμών της μεταβλητής ϑ . Για το σκοπό αυτό,

- Στο κελί A10 τοποθετείστε την τιμή του κάτω ορίου της ολοκλήρωσης ως προς ϑ

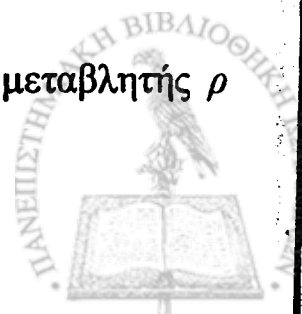
$$=\text{Δεδομένα!B1}$$

- Στο κελί A11 αυξήστε την τιμή του ϑ κατά το βήμα $h(\text{theta})$, γράφοντας

$$=\text{A10}+\text{\$B\$1}$$

- Αντιγράψτε το κελί A11 στα κελιά A12 μέχρι A110. Η τιμή στο κελί A110 πρέπει να είναι τώρα 360.

7. Στη σειρά 8 δημιουργείτε το πεδίο τιμών της μεταβλητής ρ στην εξ. (5.16). Για το σκοπό αυτό



- Στο κελί A8 εισάγετε την ένδειξη

$\rho =$

- Στο κελί B8 τοποθετείστε την τιμή του κάτω ορίου της ολοκλήρωσης ως προς ρ

0

- Στο κελί C8 αυξήστε την τιμή του ρ κατά το βήμα $h(\rho)$, γράφοντας

$=B8+\$B\2

- Αντιγράψτε το κελί C8 στα κελιά D8 μέχρι CX8. Η τιμή στο κελί CX8 πρέπει να είναι τώρα 1.5.

8. Δημιουργήστε μια συνάρτηση του *Excel* που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $d\varphi$ της εξ. (5.11). Για το σκοπό αυτό:

- Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Επεξεργασία Visual Basic**.
- Στην οθόνη σας, θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*.
- Από τα μενού επιλέξτε **Insert** → **Module**. Στην κενή σελίδα που θα ανοίξει γράψτε την συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση $d\varphi$ της εξ. (5.11) η σύνταξη είναι:



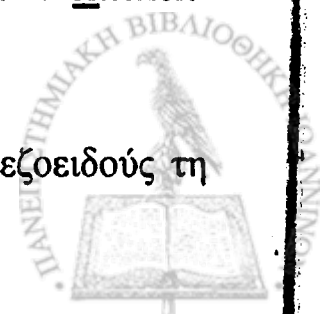
Function V(theta, r, alpha, a)

$$V = 1 / \text{Sqr}(r^2 + a^2 - 2 * a * r * \text{Sin}(\alpha) * \text{Cos}(\theta))$$

End Function

- Από τα μενού επιλέξτε **File** → **Close and return to Microsoft Excel**.
9. Στη στήλη B του Φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $d\varphi$ για την τιμή της μεταβλητής ρ που περιέχεται στην ίδια στήλη (κελί B8).
- Στο κελί B10 εισάγετε την έκφραση
 $=V(\$A10*PI()/180;\Delta\epsilon\delta\omicron\mu\epsilon\nu\alpha!\$E\$3;\Delta\epsilon\delta\omicron\mu\epsilon\nu\alpha!\$E\$4*PI()/180;B\$8)$
 - Αντιγράψτε το κελί B10 στα κελιά B11 μέχρι B110.
10. Αντιγράψτε τα κελιά B10:B110 στην περιοχή C10:CX110. Για το σκοπό αυτό,
- Επιλέξτε την περιοχή B10:B110.
 - Από τα μενού του *Excel* επιλέξτε **Επεξεργασία** → **Αντιγραφή**.
 - Επιλέξτε την περιοχή C10:CX10.
 - Από τα μενού του *Excel* επιλέξτε **Επεξεργασία** → **Επικόλληση**.

11. Στη σειρά 6 υπολογίστε με τον κανόνα του τραπεζοειδούς τη



συνάρτηση $\varphi(r, \rho, \alpha)$ που ολοκληρώνεται στην εξ. (5.16), για την τιμή της μεταβλητής ρ που περιέχεται στην ίδια στήλη (κελί B8). Για το σκοπό αυτό,

- Στο κελί B6 εισάγετε την έκφραση

$$=B\$1*PI()/180*(5/12*(B10+B110)+13/12*(B11+B109)+SUM(B12:B108))*B\$8$$

- Αντιγράψτε το κελί B6 στην περιοχή C6:CX6.

12. Στο Φύλλο Δεδομένα, με απαρχή το κελί A7 δημιουργείστε ένα κατάλογο για τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης

	A	B
7	$\Phi(r, \alpha, R) =$	
8		
9	Αναλυτικά ($\alpha=0$)	
10	Ασυμπτωτική τιμή	
11		

13. Στο κελί B7 υπολογίστε το ολοκλήρωμα της εξ. (5.11) με τον κανόνα του τραπεζοειδούς, εισάγοντας

$$=E1*G1/(PI()*E2^2)*Αθροίσματα!B2*(5/12*(Αθροίσματα!B6+Αθροίσματα!CX6)+13/12*(Αθροίσματα!C6+Αθροίσματα!CW6)+SUM(Αθροίσματα!D6:Αθροίσματα!CV6))$$

14. Στο κελί B9 υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος στην πε-



ρίπτωση $\alpha = 0$, όπως προκύπτει από την αναλυτική έκφραση της εξ. (5.12), εισάγοντας

$$=E1*2*G1/E2^2*(SQRT(E3^2+E2^2)-E3)$$

15. Στο κελί B10 υπολογίστε την τιμή του δυναμικού στην ασυμπτωτική περιοχή $r \gg R$. Η έκφραση του Excel που θα τοποθετήσετε στο κελί είναι:

$$=E1*G1/E3$$

16. Μεταβάλλετε τα δεδομένα του προβλήματος και περιγράψτε πώς μεταβάλλεται το δυναμικό στο χώρο γύρω από το δίσκο.

- Θέστε $\alpha = 0$ και συγκρίνετε το αποτέλεσμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης με το αριθμητικό αποτέλεσμα που δίνει η αναλυτική έκφραση της εξ. (5.17).
- Μεταβάλλετε τα δεδομένα του προβλήματος έτσι ώστε να ισχύει η συνθήκη $r \gg R$ και σχολιάστε την ακρίβεια της ασυμπτωτικής εκτίμησης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5-1 Αποδείξτε την ασυμπτωτική έκφραση της εξ. (5.2) για το δυναμικό που δημιουργεί στο χώρο η γραμμική τετραπολική διάταξη του σχήματος 5-1. [Βοήθημα: Χρησιμοποιείστε την ασυμπτωτική προσέγγιση διωνύμου για $x \ll 1$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots]$$



5-2 Αν έχετε εκτελέσει την Εργαστηριακή Άσκηση 5.1, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ίδιο Βιβλίο του *Excel* για τη μελέτη ενός ηλεκτρικού διπόλου με πολύ λίγες μετατροπές.

- Στο Φύλλο *Διάταξη*, τοποθετήστε στο κελί AK33 την εντολή

$$= q$$

στο κελί AK33 τον αριθμό 0 και στο κελί AK41 την εντολή

$$= - q$$

- Η ασυμπτωτική μορφή του δυναμικού που δημιουργεί το δίπολο σε αποστάσεις $r \gg d$, σε αναλογία με την εξ. (5.2), δίνεται από τη σχέση

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd \cos\theta}{r^2}. \quad (5.18)$$

Η σχέση επομένως που μπορούμε να γράψουμε στο Φύλλο *Ασυμπτωτικά* είναι

$$\begin{aligned} &= \text{Δεδομένα!} \$B\$1 * q^2 * d * (\text{ROW}(qc) - \text{ROW}()) \\ & / \text{SQRT}((\text{ROW}() - \text{ROW}(qc))^2 + (\text{COLUMN}() - \text{COLUMN}(qc))^2) \\ & / ((\text{ROW}() - \text{ROW}(qc))^2 + (\text{COLUMN}() - \text{COLUMN}(qc))^2) \end{aligned}$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την τελευταία έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:BW75 του Φύλλου *Ασυμπτωτικά*.

- Ακολουθείστε όλες τις λοιπές οδηγίες της Εργαστηριακής Άσκησης 5.1.



5-3 Αποδείξτε την ασυμπτωτική έκφραση της εξ. (5.18) στην προηγούμενη Άσκηση για το δυναμικό που δημιουργεί στο χώρο ένα ηλεκτρικό δίπολο. [Βοήθημα: Χρησιμοποιείστε την ασυμπτωτική προσέγγιση διωνύμου για $x \ll 1$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots]$$

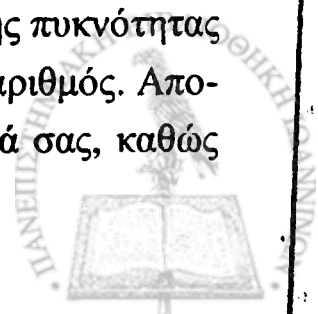
5-4 Δίνεται ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος ακτίνας $R = 3$ m με ολικό φορτίο $q = 6 \times 10^{-8}$ C. Θεωρείστε ένα νοητό ευθύγραμμο τμήμα μήκους 20 m, παράλληλο προς το επίπεδο του δακτυλίου σε απόσταση 5 m. Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στον άξονα του δακτυλίου. Θεωρείστε ακόμη 21 σημεία πάνω στο νοητό ευθύγραμμο τμήμα, τα οποία απέχουν από το ένα άκρο του αποστάσεις $x_k = k$, $k = 0, 1, \dots, 20$. Υπολογίστε με τη βοήθεια του *Excel*, σε όλα τα σημεία x_k :

- Την αριθμητική τιμή του δυναμικού που προκύπτει από την εξ. (5.11).
- Αποδώστε, με τη βοήθεια του *Excel*, τα αποτελέσματά σας σε γραφική παράσταση.

5-5 Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση θεωρώντας ένα δακτύλιο με πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου κατά την περιφέρειά του της μορφής

$$\lambda(r) = \lambda_0 \cos(m\theta) \quad (5.19)$$

όπου λ_0 είναι μια σταθερά με διαστάσεις γραμμικής πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου ($C m^{-1}$) και m ένας ακέραιος αριθμός. Αποδώστε, με τη βοήθεια του *Excel*, τα αποτελέσματά σας, καθώς



και την κατανομή της εξ. (5.19) που χρησιμοποιήσατε, σε γραφική παράσταση.

5-6 Δίνεται ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος ακτίνας $R = 3 \text{ m}$ με ολικό φορτίο $q = 3 \times 10^{-8} \text{ C}$. Θεωρείστε ένα νοητό ευθύγραμμο τμήμα μήκους 20 m , παράλληλο προς το επίπεδο του δίσκου σε απόσταση 5 m . Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στον άξονα του δίσκου. Θεωρείστε ακόμη 21 σημεία πάνω στο νοητό ευθύγραμμο τμήμα, τα οποία απέχουν από το ένα άκρο του αποστάσεις $x_k = k$, $k = 0, 1, \dots, 20$. Υπολογίστε με τη βοήθεια του *Excel*, σε όλα τα σημεία x_k :

- Την αριθμητική τιμή του δυναμικού που προκύπτει από την εξ. (5.16).
- Αποδώστε, με τη βοήθεια του *Excel*, τα αποτελέσματά σας σε γραφική παράσταση.

5-7 Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση θεωρώντας ένα δίσκο με επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου της μορφής

$$\sigma(r) = \sigma_0 e^{-\frac{r}{R}} \quad (5.20)$$

όπου σ_0 είναι μια σταθερά με διαστάσεις επιφανειακής πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου (C m^{-2}). Αποδώστε, με τη βοήθεια του *Excel*, τα αποτελέσματά σας, καθώς και την κατανομή της εξ. (5.20) που χρησιμοποιήσατε, σε γραφική παράσταση. [Βοήθημα: Παρατηρείται ότι τώρα το ηλεκτρικό φορτίο dq ενός στοιχειώδους δακτυλίου με ακτίνα ρ είναι



$$dq = \sigma 2\pi r dr = 2\pi \sigma_0 e^{-\frac{\rho}{R}} \rho d\rho]$$

5-8 Προσδιορίστε την έκφραση που δίνει το δυναμικό ενός δακτυλίου ακτίνας R στον άξονα του δακτυλίου αν ή κατανομή ηλεκτρικού φορτίου κατά την περιφέρειά του δίνεται από την εξ. (5.19) της Άσκησης 5-5. Υπολογίστε το δυναμικό πάνω στον άξονα του δακτυλίου στα σημεία $z = R, 2R, 3R, \dots, 20R$ και αποδώστε τα αποτελέσματά σας σε γραφική παράσταση.

5-9 Προσδιορίστε την έκφραση που δίνει το δυναμικό ενός δίσκου ακτίνας R στον άξονα του δίσκου, αν ή κατανομή ηλεκτρικού φορτίου στην επιφάνειά του δίνεται από την εξ. (5.20) της Άσκησης 5-7. Υπολογίστε το δυναμικό πάνω στον άξονα του δίσκου στα σημεία $z = R, 2R, 3R, \dots, 20R$ και αποδώστε τα αποτελέσματά σας σε γραφική παράσταση.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΞΙ

Η εξίσωση Poisson

6

Η ΕΞΙΣΩΣΗ Poisson

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.1)$$

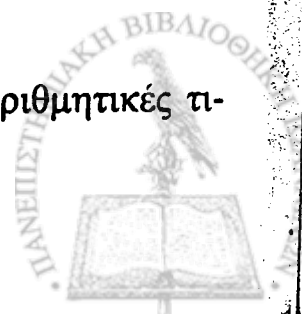
περιγράφει τη συμπεριφορά της συνάρτησης δυναμικού $\varphi(\mathbf{r})$ που δημιουργεί στο χώρο μια κατανομή πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου $\rho(\mathbf{r})$. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη λύση της εξ. (6.1) για συγκεκριμένες κατανομές φορτίου στο χώρο με αριθμητικές μεθόδους μέσω του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ POISSON

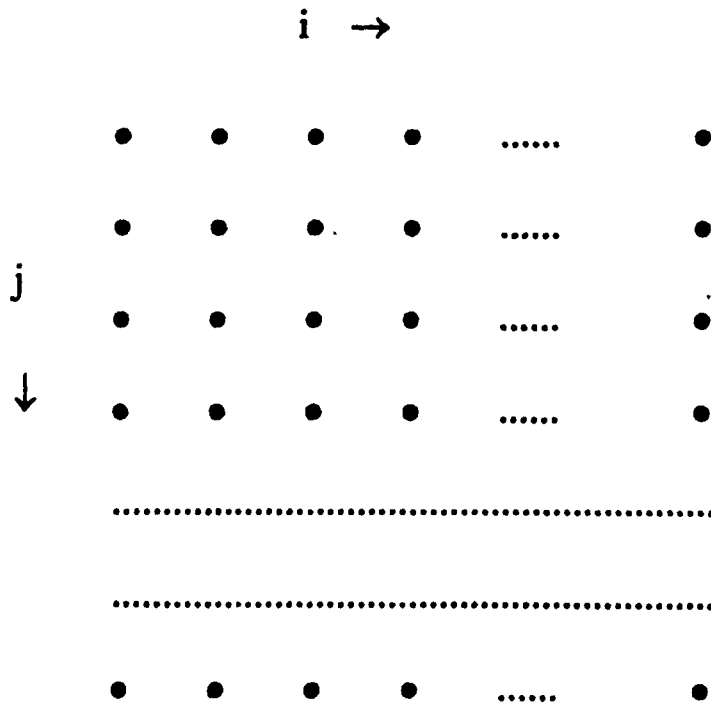
Μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων εμφανίζει συμμετρία, σύμφωνα με την οποία η εξίσωση Poisson εξαρτάται μόνο από δύο διαστάσεις του χώρου. Προβλήματα της μορφής αυτής αφορούν κατανομές φορτίου με γραμμική, κυλινδρική ή σφαιρική συμμετρία. Στα πλαίσια αυτά θα θεωρήσουμε την εξίσωση Poisson σε δύο διαστάσεις στη μορφή

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (6.2)$$

Θα θεωρήσουμε ακόμη ότι η συνάρτηση φ παίρνει αριθμητικές τι-



μέσ σε ένα πλέγμα σημείων, τα οποία θα απαριθμήσουμε με τους δείκτες (i,j) αντίστοιχα κατά τους άξονες X και Y , όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Τότε, από τον ορισμό της δεύτερης παραγώγου, μπορούμε να γράψουμε

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{\Delta \left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \right)}{\Delta x} \quad (6.3)$$

ή, για $\Delta x = 1$, προς απλοποίηση των σχέσεων,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{i,j} &= \varphi(i+1,j) - \varphi(i,j) - [\varphi(i,j) - \varphi(i-1,j)] \\ &= \varphi(i+1,j) - 2\varphi(i,j) + \varphi(i-1,j). \end{aligned} \quad (6.4)$$



Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να γράψουμε

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \varphi(i,j+1) - 2\varphi(i,j) + \varphi(i,j-1). \quad (6.5)$$

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 4(\langle \varphi \rangle - \varphi) \quad (6.6)$$

όπου

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{4} [\varphi(i,j+1) + \varphi(i,j-1) + \varphi(i+1,j) + \varphi(i-1,j)] \quad (6.7)$$

είναι ο μέσος όρος της συνάρτησης δυναμικού στο σημείο (i,j) , όπως προσδιορίζεται από τα τέσσερα γειτονικά του σημεία.

Η εξίσωση Poisson επομένως παίρνει τη μορφή

$$4(\langle \varphi \rangle - \varphi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ή

$$\varphi = \langle \varphi \rangle + \frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.7)$$

Ο αλγόριθμος που προτείνει η τελευταία σχέση είναι ο ακόλουθος: Αν η συνάρτηση φ στο σημείο (i,j) είναι γνωστή σε κάποια προσέγγιση, τότε αντικατάσταση της τιμής της φ μέσω της εξ. (6.7) δίνει καλύτερη προσέγγιση.



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 6.1

Επίλυση της εξίσωσης Poisson

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του *Excel*. Μετονομάστε το Φύλλο 1 *Δυναμικό* το Φύλλο 2 *Βοηθητικό* και το Φύλλο 3 *Διάταξη*.
2. Στο Φύλλο *Διάταξη* εισάγετε στο κελί A1 τον αριθμό 0. Αντιγράψτε το κελί A1 στην περιοχή A1:Y25. Η περιοχή αυτή, διαστάσεων 25 × 25, είναι η περιοχή στην οποία θα σημειώσετε τη διάταξη φορτίου. Ρυθμίστε το πλάτος των στηλών ώστε να είναι ίσο με το ύψος των κελιών.

Μπορείτε να ρυθμίσετε το πλάτος περισσότερων από μιας στήλης ταυτόχρονα με την ακόλουθη διαδικασία: Επιλέξτε τις στήλες στις οποίες θέλετε να ρυθμίσετε το πλάτος. Με το πλήκτρο **Ctrl** πατημένο, ρυθμίστε με το ποντίκι το πλάτος μιας από τις επιλεγμένες στήλες. Θα παρατηρήσετε ότι όλες οι επιλεγμένες στήλες θα εμφανιστούν με το ίδιο πλάτος.

3. Για να έχετε καλύτερη εποπτεία του χώρου διάταξης των φορτίων
 - Επιλέξτε την περιοχή A1:Y25. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Περίγραμμα**. Στα παράθυρα που θα ανοίξει, επιλέξτε τα κουμπιά με τις ενδείξεις **Πλαίσιο** και **Πλέγμα**.
 - Επιλέξτε την περιοχή A1:Y1. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Μοτίβα**. Επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης των κελιών ένα απαλό χρώμα. Επαναλάβετε την εργασία για



τις περιοχές A1:A25, A25:Y25 και Y1:Y25.

- Το κελί M13 είναι το κέντρο της περιοχής σας. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Μοτίβα**. Επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης του κελιού M13 ένα έντονο χρώμα.
4. Δημιουργείστε στο χώρο μια διάταξη σημειακών φορτίων. Για παράδειγμα, μπορείτε να δημιουργήσετε ένα *Ηλεκτρικό Τετράπολο* τοποθετώντας στα κελιά M9 και I13 το φορτίο (σε αυθαίρετες μονάδες) 9 και στα κελιά Q13 και M17 το φορτίο -9. Επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης των κελιών που περιέχουν μη μηδενικό φορτίο κάποιο διακριτικό χρώμα. Για το προτεινόμενο παράδειγμα διάταξης φορτίου, το Φύλλο *Διάταξη* πρέπει να έχει τη μορφή του σχήματος 6-1.
5. Το Φύλλο *Βοηθητικό* προορίζεται για την προσωρινή αποθήκευση αποτελεσμάτων σε κάθε εφαρμογή του αλγορίθμου της εξ. (6.7).
- Εισάγετε στο κελί A1 τον αριθμό 0. Αντιγράψτε το κελί A1 στην περιοχή A1:Y25.
 - Επιλέξτε την περιοχή A1:Y1. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά** → **Μοτίβα**. Επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης των κελιών ένα απαλό χρώμα. Επαναλάβετε την εργασία για τις περιοχές A1:A25, A25:Y25 και Y1:Y25. Οι περιοχές αυτές αντιπροσωπεύουν μεγάλες αποστάσεις και το δυναμικό τους θα παραμένει μηδενικό.
6. Επιλέξτε την περιοχή A1:Y25 στο Φύλλο *Βοηθητικό* και αντιγράψτε την στο Φύλλο *Δυναμικό*.



7. Αν σε κάποιο στάδιο του υπολογισμού, το Φύλλο Βοηθητικό περιέχει το δυναμικό που δημιουργεί η διάταξη φορτίων στο Φύλλο Διάταξη, τότε μπορούμε να πάρουμε μια καλύτερη προσέγγιση του δυναμικού αν στο Φύλλο Δυναμικό εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο της εξ. (6.7).

- Στο Φύλλο Δυναμικό εισάγετε στο κελί B2 τον αλγόριθμο

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Σχήμα 6-1 Το Φύλλο Διάταξη για το σύστημα ενός ηλεκτρικού τετραπόλου. Με διαφορετική σκίαση σημειώνονται τα κελιά που αντιπροσωπεύουν τη θέση φορτίων, το κέντρο της διάταξης και σημεία σε πολύ μεγάλες αποστάσεις όπου το δυναμικό μηδενίζεται.



της εξ. (6.7):

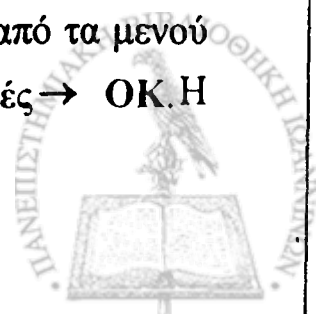
$$=(\text{Βοηθητικό!A2}+\text{Βοηθητικό!C2}+\text{Βοηθητικό!B1}+\text{Βοηθητικό!B3})/4+\text{Διάταξη!B2}/4$$

- Αντιγράψτε το κελί B2 στην περιοχή B2:X24, διατηρώντας το περίγραμμα της περιοχής σε μηδενικό δυναμικό. Η περιοχή H8:R18 πρέπει τώρα να έχει τη μορφή

	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	2.25	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	2.25	0	0	0	0	0	0	0	-2.25	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	-2.25	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

8. Για να επαναλάβουμε τον αλγόριθμο της εξ. (6.7) θα πρέπει να αντιγράψουμε τις αριθμητικές τιμές του δυναμικού στο Φύλλο Δυναμικό στην αντίστοιχη περιοχή του Φύλλου Βοηθητικό.

- Στο Φύλλο Δυναμικό επιλέξτε την περιοχή B2:X24.
- Από τα μενού επιλέξτε Επεξεργασία → Αντιγραφή.
- Στο Φύλλο Βοηθητικό επιλέξτε το κελί B2 και από τα μενού Επεξεργασία → Ειδική Επικόλληση → Τιμές → ΟΚ.Η



περιοχή H8:R18 στο Φύλλο Δυναμικό πρέπει τώρα να έχει τη μορφή

	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
8	0	0	0	0	0	0.5625	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0.5625	2.25	0.5625	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0.5625	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0.5625	0	0	0	0	0	0	0	-0.5625	0
13	0.5625	2.25	0.5625	0	0	0	0	0	-0.5625	-2.25	-0.5625
14	0	0.5625	0	0	0	0	0	0	0	-0.5625	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	-0.5625	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	-0.5625	-2.25	-0.5625	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	-0.5625	0	0	0	0	0

9. Η διεργασία επαναλήψεως του αλγορίθμου - και η βελτίωση της προσέγγισης του δυναμικού - είναι δυνατόν να αυτοματοποιηθεί με τη δυνατότητα ορισμού Μακροεντολής στο *Excel*.

- Από τα μενού επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Καταγραφή νέας μακροεντολής**.
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει καταγράψτε ένα όνομα της μακροεντολής που θα δημιουργήσετε (προσέξτε ότι στο όνομα δεν πρέπει να περιέχονται διαστήματα), π.χ. *Poisson_algorithm*. Στο παράθυρο εισαγωγής Πλήκτρο συντόμευσης: **Ctrl+p** καταχωρήστε ένα γράμμα με το οποίο στο μέλλον θα μπορείτε να καλείτε την μακροεντολή, π.χ. το γράμμα *p*. Τελειώστε με **OK**.
- Από τη στιγμή αυτή κάθε ενέργειά σας καταγράφεται ως διαδικασία της μακροεντολής **Ctrl+p**. Επαναλάβετε τη διαδικασία του βήματος 8, ήτοι
 - * Επιλέξτε το Φύλλο *Δυναμικό* (ακόμη και αν είναι ήδη επι-



λεγμένο).

- * Στο Φύλλο *Δυναμικό* επιλέξτε την περιοχή B2:X24.
- * Από τα μενού επιλέξτε Επεξεργασία → Αντιγραφή.
- * Στο Φύλλο *Βοηθητικό* επιλέξτε το κελί B2 και από τα μενού Επεξεργασία → Ειδική Επικόλληση → Τιμές → OK.
- * Στο Φύλλο *Βοηθητικό* επιλέξτε το κελί B2.
- * Επιλέξτε το Φύλλο *Δυναμικό* και στη συνέχεια το κελί B2
- Επιλέξτε από τα μενού Εργαλεία → Μακροεντολή → Διακοπή καταγραφής.
- Κατά τη διάρκεια της προηγούμενης διεργασίας, το *Excel* προγραμμάτισε για σας τη μακροεντολή σε γλώσσα *Visual Basic*. Μπορείτε να περιεργαστείτε το πρόγραμμα που δημιούργησε το *Excel* μέσω των επιλογών Εργαλεία → Μακροεντολή → Μακροεντολές. Στο παράθυρο που θα ανοίξει, επιλέξτε το όνομα της μακροεντολής που δημιουργήσατε (π.χ. Poisson_algorithm) και στη συνέχεια Επεξεργασία. Στην οθόνη σας θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*. Η μακροεντολή Poisson_algorithm που προγραμμάτισε για σας το *Excel* πρέπει να έχει τη γενική μορφή (είναι δυνατόν, ανάλογα με την έκδοση του *Excel* που διαθέτετε, να περιλαμβάνονται μερικές επιπρόσθετες εντολές ή σπονός σημασίας που αναφέρονται



στη σταδιακή επιλογή κελιών κατά την καταγραφή της μακροεντολής)

```
Sub Poisson_algorithm()  
,  
' Poisson_algorithm Μακροεντολή  
' Καταγραφή μακροεντολής 24/4/2002 από [το όνομά σας]  
,  
' Συντόμευση πληκτρολογίου: Ctrl+p  
,  
  
  Sheets("Δυναμικό").Select  
  Range("B2:X24").Select  
  Selection.Copy  
  Sheets("Βοηθητικό").Select  
  Range("B2").Select  
  Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation _  
    :=xlNone, SkipBlanks:=False, Transpose:=False  
  Range("B2").Select  
  Sheets("Δυναμικό").Select  
  Range("B2").Select  
End Sub
```

Κλείστε την επιφάνεια εργασίας της *Visual Basic* και επανέλθετε στο Βιβλίο εργασίας του *Excel*.

10. Στο εξής, επανάληψη του αλγορίθμου με την πληκτρολόγηση **Ctrl+p** θα επιτυγχάνει όλο και καλύτερη προσέγγιση του δυναμικού. Αναμένεται ότι τελικά το περιεχόμενο του Φύλλου *Δυναμικό* θα συγκλίνει προς την «ακριβή» τιμή του δυναμικού. Πληκτρολογείτε αρκετές φορές τον συνδυασμό **Ctrl+p** (μπορείτε να διατηρείτε το πλήκτρο **Ctrl** πατημένο και να πέζετε με



γοργές κινήσεις αρκετές φορές το πλήκτρο **p**) και παρατηρείστε τις τιμές στο Φύλλο *Δυναμικό* να μεταβάλλονται. Αναλόγως με την ακρίβεια που επιθυμείτε, επαναλάβετε αυτή την εργασία αρκετές φορές. Επιλέξτε κάποιο κριτήριο για τον τερματισμό της διεργασίας. Για παράδειγμα, παρακολουθείστε την μεταβολή της τιμής ενός κελιού στην οθόνη σας (π.χ. το κελί B15) και τερματίστε την εφαρμογή του αλγορίθμου όταν η πληκτρολόγηση **Ctrl+p** επηρεάζει πλέον μόνο το τρίτο σημαντικό ψηφίο.

11. Για να επαναλάβουμε τον όλο υπολογισμό ή για να υπολογίσουμε το δυναμικό που δημιουργεί μια νέα διάταξη φορτίων θα πρέπει να μηδενίσουμε τις τιμές στο Φύλλο *Βοηθητικό*. Προς το σκοπό αυτό θα διαμορφώσουμε μια ακόμη μακροεντολή.

- Από τα μενού επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Καταγραφή νέας μακροεντολής**.
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει καταγράψτε ένα όνομα της μακροεντολής που θα δημιουργήσετε (προσέξτε ότι στο όνομα δεν πρέπει να περιέχονται διαστήματα), π.χ. **Poisson_reset**. Στο παράθυρο εισαγωγής **Πλήκτρο συντόμευσης**: **Ctrl+** καταχωρήστε ένα γράμμα με το οποίο στο μέλλον θα μπορείτε να καλείτε την μακροεντολή, π.χ. το γράμμα **s**. Τελειώστε με **OK**.
 - * Επιλέξτε το Φύλλο *Βοηθητικό*.
 - * Στο Φύλλο *Βοηθητικό* επιλέξτε την περιοχή **B2:X24**.
 - * Πιέστε το πλήκτρο **Delete** ή **Del**.



- * Στο Φύλλο *Βοηθητικό* επιλέξτε το κελί B2.
- * Επιλέξτε το Φύλλο *Δυναμικό* και στη συνέχεια το κελί B2
- Επιλέξτε από τα μενού **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Διακοπή καταγραφής**.
- Μπορείτε να περιεργαστείτε το πρόγραμμα που δημιούργησε το *Excel* μέσω των επιλογών **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Μακροεντολές**. Στο παράθυρο που θα ανοίξει, επιλέξτε το όνομα της νέας μακροεντολής που δημιουργήσατε (π.χ. *Poisson_reset*) και στη συνέχεια **Επεξεργασία**. Στην οθόνη σας θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*. Η μακροεντολή *Poisson_reset* που προγραμματίσατε για σας το *Excel* πρέπει να έχει τη γενική μορφή (είναι δυνατόν, ανάλογα με την έκδοση του *Excel* που διαθέτετε, να περιλαμβάνονται μερικές επιπρόσθετες εντολές ή σπονος σημασίας που αναφέρονται στη σταδιακή επιλογή κελιών κατά την καταγραφή της μακροεντολής)

```
Sub Poisson_reset()
```

```
' Poisson_reset Μακροεντολή
```

```
' Καταγραφή μακροεντολής 24/4/2002 από [το όνομά σας]'
```

```
' Συντόμευση πληκτρολογίου: Ctrl+s
```

```
Sheets("Βοηθητικό").Select
```

```
Range("B2:X24").Select
```

```
Selection.ClearContents
```

```
Range("B2").Select
```




```
Sheets("Δυναμικό ").Select  
Range("B2").Select  
End Sub
```

12. Η εποπτεία του δυναμικού που δημιουργεί η συγκεκριμένη διάταξη στο χώρο αυξάνει αν αποδώσουμε τις τιμές του Φύλλου *Δυναμικό* σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Εφαρμόστε τον αλγόριθμο αρκετές φορές ώστε να επιτύχετε την ακρίβεια που επιθυμείτε.
- Στο Φύλλο *Δυναμικό* επιλέξτε την περιοχή B2:X24.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο** >
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο** >
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος:
Δυναμικό ηλεκτρικού τετραπόλου

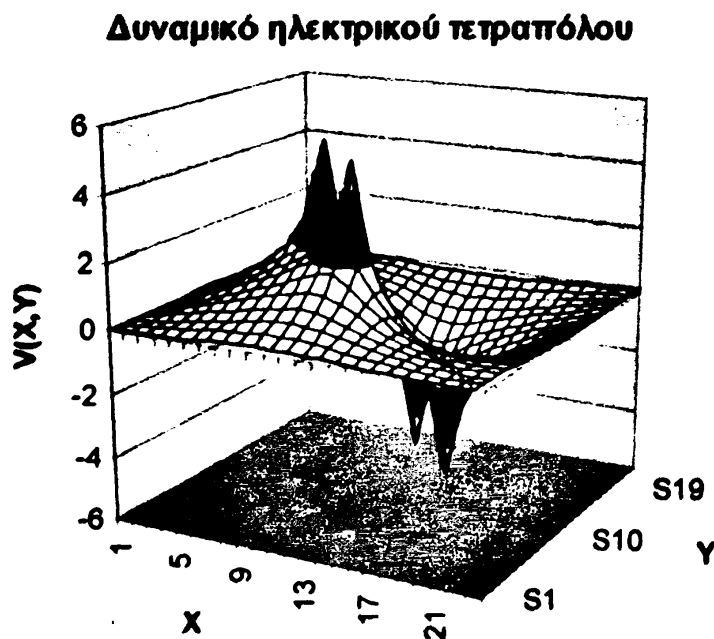
Κατηγορία (X): X

Τιμή (Z): V(X, Y)

Σειρά (Y): Y



- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.
- Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία Γράφημα1 που περιέχει την γραφική παράσταση. Το γράφημα που δημιουργήθηκε πρέπει να έχει μορφή παρόμοια με αυτή του σχήματος 6-2.
- Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφη-



Σχήμα 6-2 Γραφική παράσταση 3Δ δυναμικού ηλεκτρικού τετραπόλου όπως υπολογίζεται από την εξίσωση Poisson.



μα και από τα μενού του Excel **Γράφημα** → **Προβολή 3Δ...**
Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

- Παρατηρείστε ότι το γράφημα έχει δυναμική υπόσταση. Κάθε μεταβολή των τιμών στο Φύλλο *Δυναμικό* ανανεώνει το γράφημα.

Η συνάρτηση δυναμικού $\varphi(\mathbf{r})$ επιτρέπει τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ μέσω της σχέσης

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (6.8)$$

Η τελευταία σχέση περιγράφει ένα άνυσμα με διεύθυνση τη διεύθυνση της μέγιστης μεταβολής της συνάρτησης $\varphi(\mathbf{r})$ στο χώρο και μέτρο

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}. \quad (6.9)$$

Αν η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου είναι κατά ένα από τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων (π.χ., τον άξονα X), η εξ. (6.9) παίρνει την απλή μορφή

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}. \quad (6.10)$$

Την τελευταία σχέση θα εκμεταλλευτούμε στην επόμενη Εργαστηριακή Άσκηση.



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 6.2

Ηλεκτρικό πεδίο πυκνωτή με επίπεδους οπλισμούς

1. Δημιουργείτε ένα νέο βιβλίο του *Excel* με τέσσερα φύλλα. Μετονομάστε το Φύλλο 1 *Πεδίο*, το Φύλλο 2 *Δυναμικό*, το Φύλλο 3 *Βοηθητικό* και το Φύλλο 4 *Διάταξη*.
2. Σε αντίθεση με την προηγούμενη άσκηση, θα εργαστούμε εδώ σε ένα αρκετά εκτεταμένο χώρο 75×75 κελιών. Στο Φύλλο *Διάταξη* εισάγετε στο κελί A1 τον αριθμό 0. Αντιγράψτε το κελί A1 στην περιοχή A1:BW75. Η περιοχή αυτή, διαστάσεων 75×75 , είναι η περιοχή στην οποία θα σημειώσετε την διάταξη φορτίου. Ρυθμίστε το πλάτος των στηλών ώστε να είναι ίσο με το ύψος των κελιών.

Μπορείτε να ρυθμίσετε το πλάτος περισσότερων από μιας στήλης ταυτόχρονα με την ακόλουθη διαδικασία: Επιλέξτε τις στήλες στις οποίες θέλετε να ρυθμίσετε το πλάτος. Με το πλήκτρο **Ctrl** πατημένο, ρυθμίστε με το ποντίκι το πλάτος μιας από τις επιλεγμένες στήλες. Θα παρατηρήσετε ότι όλες οι επιλεγμένες στήλες θα εμφανιστούν με το ίδιο πλάτος.

3. Για να έχετε καλύτερη εποπτεία του χώρου διάταξης των φορτίων,
 - Επιλέξτε την περιοχή A1:BW75. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Περίγραμμα**. Στα παράθυρα που θα ανοίξει, επιλέξτε τα κουμπιά με τις ενδείξεις **Πλαίσιο** και **Πλέγμα**.



- Επιλέξτε την περιοχή A1:BW1. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Μοτίβα**. Επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης των κελιών ένα απαλό χρώμα. Επαναλάβετε την εργασία για τις περιοχές A1:A75, A75:BW75 και BW1:BW75.
 - Το κελί AK37 είναι το κέντρο της περιοχής σας. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Μοτίβα**. Επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης του κελιού AK37 ένα έντονο χρώμα.
4. Στο κέντρο του χώρου που ορίζει το Φύλλο *Διάταξη* δημιουργείστε την τομή ενός πυκνωτή με επίπεδους οπλισμούς. Για το σκοπό αυτό
- Επιλέξτε τα κελιά AH25:AH49. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Μοτίβα**. Επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης των κελιών AH25:AH49 ένα έντονο χρώμα.
 - Στο κελί AH25 τοποθετείστε το φορτίο -5 (σε αυθαίρετες μονάδες). Αντιγράψτε το κελί AH25 σε όλη την περιοχή AH25:AH49.
 - Επαναλάβετε την προηγούμενη διεργασία για την περιοχή AN25:AN49, τοποθετώντας τώρα το φορτίο (σε αυθαίρετες μονάδες) 5 .
Το Φύλλο *Διάταξη* πρέπει να έχει τη μορφή του σχήματος 6-3.
5. Το Φύλλο *Βοηθητικό* προορίζεται για την προσωρινή αποθήκευση αποτελεσμάτων σε κάθε εφαρμογή του αλγορίθμου της





ADAEAFIAGAH AI AJAKALAMANAOAPIAQARAS

22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
27	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
28	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
29	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
30	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
31	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
32	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
33	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
34	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
35	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
36	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
37	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
38	0	0	0	0		0	0		0		0	0	0	0
39	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
40	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
41	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
42	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
43	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
44	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
45	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
46	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
47	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
48	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
49	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
50	0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
54	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
55	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Σχήμα 6-3 Η περιοχή γύρω από το κέντρο του Φύλλου Διάταξη στην Εργαστηριακή Άσκηση 6.2.

εξ. (6.7).

- Εισάγετε στο κελί A1 τον αριθμό 0. Αντιγράψτε το κελί A1 στην περιοχή A1:BW75.



- Επιλέξτε την περιοχή A1:BW1. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά** → **Μοτίβα**. Επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης των κελιών ένα απαλό χρώμα. Επαναλάβετε την εργασία για τις περιοχές A1:A75, A75:BW75 και BW1:BW75. Οι περιοχές αυτές αντιπροσωπεύουν μεγάλες αποστάσεις και το δυναμικό τους θα παραμένει μηδενικό.
6. Επιλέξτε την περιοχή A1:BW75 στο Φύλλο *Βοηθητικό* και αντιγράψτε την στο Φύλλο *Δυναμικό*.
7. Αν σε κάποια στιγμή το Φύλλο *Βοηθητικό* περιέχει το δυναμικό που δημιουργεί η διάταξη φορτίων στο Φύλλο *Διάταξη*, τότε μπορούμε να πάρουμε μια καλύτερη προσέγγιση του δυναμικού αν στο Φύλλο *Δυναμικό* εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο της εξ. (6.7).
- Στο Φύλλο *Δυναμικό* εισάγετε στο κελί B2 τον αλγόριθμο της εξ. (6.7):
$$=(\text{Βοηθητικό!A2}+\text{Βοηθητικό!C2}+\text{Βοηθητικό!B1}+\text{Βοηθητικό!B3})/4+\text{Διάταξη!B2}/4$$
- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε το κελί B2 στην περιοχή B2:BV74, διατηρώντας το περίγραμμα της περιοχής σε μηδενικό δυναμικό. Η περιοχή AF23:AP51 πρέπει τώρα να έχει τη μορφή του σχήματος 6-4.
8. Για να επαναλάβουμε τον αλγόριθμο της εξ. (6.7) θα πρέπει να αντιγράψουμε τις αριθμητικές τιμές του δυναμικού στο Φύλλο *Δυναμικό* στην αντίστοιχη περιοχή του Φύλλου *Βοηθητικό*.



6. Η εξίσωση Poisson

	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	A
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
26	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
27	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
28	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
29	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
30	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
31	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
32	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
33	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
34	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
35	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
36	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
37	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
38	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
39	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
40	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
41	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
42	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
43	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
44	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
45	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
46	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
47	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
48	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
49	0	0	-1.25	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
52												

Σχήμα 6-4 Η περιοχή γύρω από το κέντρο του Φύλλου Δυναμικό στην Εργαστηριακή Άσκηση 6.2 μετά το βήμα 7.

- Στο Φύλλο Δυναμικό επιλέξτε την περιοχή B2:BV74.
- Από τα μενού επιλέξτε Επεξεργασία → Αντιγραφή.
- Στο Φύλλο Βοηθητικό επιλέξτε το κελί B2 και από τα μενού Επεξεργασία → Ειδική Επικόλληση → Τιμές → OK. Η περιοχή AF23:AP51 στο Φύλλο Δυναμικό πρέπει τώρα να έχει τη μορφή του σχήματος 6-5.

	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	A
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	-0.3125	0	0	0	0	0	0.3125	0	0	0
25	0	-0.3125	-1.5625	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.5625	0.3125	0	0
26	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
27	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
28	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
29	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
30	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
31	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
32	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
33	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
34	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
35	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
36	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
37	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
38	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
39	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
40	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
41	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
42	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
43	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
44	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
45	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
46	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
47	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
48	0	-0.3125	-1.875	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.875	0.3125	0	0
49	0	-0.3125	-1.5625	-0.3125	0	0	0	0.3125	1.5625	0.3125	0	0
50	0	0	-0.3125	0	0	0	0	0	0.3125	0	0	0
51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
52												

Σχήμα 6-5 Η περιοχή γύρω από το κέντρο του Φύλλου Δυναμικό στην Εργαστηριακή Άσκηση 6.2 .μετά το βήμα 8.

9. Η διεργασία επαναλήψεως του αλγορίθμου - και η βελτίωση της προσέγγισης του δυναμικού - είναι δυνατόν να αυτοματοποιηθεί με τη δυνατότητα ορισμού Μακροεντολής στο *Excel*.

- Από τα μενού επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Καταγραφή νέας μακροεντολής**.
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει καταγράψτε ένα όνομα της μακροεντολής που θα δημιουργήσετε (προσέξτε ότι στο όνομα δεν πρέπει να περιέχονται διαστήματα), π.χ. `Poisson_algorithm`. Στο παράθυρο εισαγωγής Πλήκτρο συντό-

μευσης: Ctrl+ καταχωρήστε ένα γράμμα με το οποίο στο μέλλον θα μπορείτε να καλείτε την μακροεντολή, π.χ. το γράμμα p. Τελειώστε με OK.

- Από τη στιγμή αυτή κάθε ενέργειά σας καταγράφεται ως διαδικασία της μακροεντολής Ctrl+p. Επαναλάβετε τη διαδικασία του βήματος 8, ήτοι
 - * Επιλέξτε το Φύλλο *Δυναμικό* (ακόμη και αν είναι ήδη επιλεγμένο).
 - * Στο Φύλλο *Δυναμικό* επιλέξτε την περιοχή B2:BV74.
 - * Από τα μενού επιλέξτε Επεξεργασία → Αντιγραφή.
 - * Στο Φύλλο *Βοηθητικό* επιλέξτε το κελί B2 και από τα μενού Επεξεργασία → Ειδική Επικόλληση → Τιμές → OK.
 - * Στο Φύλλο *Βοηθητικό* επιλέξτε το κελί B2.
 - * Επιλέξτε το Φύλλο *Δυναμικό* και στη συνέχεια το κελί B2
- Επιλέξτε από τα μενού Εργαλεία → Μακροεντολή → Διακοπή καταγραφής.
- Κατά τη διάρκεια της προηγούμενης διεργασίας, το *Excel* προγραμματίσει για σας τη μακροεντολή σε γλώσσα *Visual Basic*. Μπορείτε να περιεργαστείτε το πρόγραμμα που δημιουργήσε το *Excel* μέσω των επιλογών Εργαλεία → Μ



κροεντολή → Μακροεντολές. Στο παράθυρο που θα ανοίξει, επιλέξτε το όνομα της μακροεντολής που δημιουργήσατε (π.χ. Poisson_algorithm) και στη συνέχεια Επεξεργασία. Στην οθόνη σας θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*. Η μακροεντολή Poisson_algorithm που προγραμμάτισε για σας το Excel πρέπει να έχει τη γενική μορφή (είναι δυνατόν, ανάλογα με την έκδοση του Excel που διαθέτετε, να περιλαμβάνονται μερικές επιπρόσθετες εντολές ή σσονος σημασίας που αναφέρονται στη σταδιακή επιλογή κελιών κατά την καταγραφή της μακροεντολής)

```
Sub Poisson_algorithm()
```

```
' Poisson_algorithm Μακροεντολή
```

```
' Καταγραφή μακροεντολής 24/4/2002 από [το όνομά σας]
```

```
' Συντόμευση πληκτρολογίου: Ctrl+p
```

```
Sheets("Δυναμικό").Select
```

```
Range("B2:BV74").Select
```

```
Selection.Copy
```

```
Sheets("Βοηθητικό").Select
```

```
Range("B2").Select
```

```
Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, _
```

```
Operation:=xlNone, SkipBlanks _
```

```
:=False, Transpose:=False
```

```
Range("B2").Select
```

```
Sheets("Δυναμικό").Select
```

```
Range("B2").Select
```

```
End Sub
```



Κλείστε την επιφάνεια εργασίας της *Visual Basic* και επανέλθετε στο Βιβλίο εργασίας του *Excel*.

10. Στο εξής, επανάληψη του αλγορίθμου με την πληκτρολόγηση **Ctrl+p** θα επιτυγχάνει όλο και καλύτερη προσέγγιση του δυναμικού. Αναμένεται ότι τελικά το περιεχόμενο του Φύλλου *Δυναμικό* θα συγκλίνει προς την «ακριβή» τιμή του δυναμικού. Πληκτρολογείτε αρκετές φορές τον συνδυασμό **Ctrl+p** (μπορείτε να διατηρείτε το πλήκτρο **Ctrl** πατημένο και να πιέζετε με γοργές κινήσεις αρκετές φορές το πλήκτρο **p**) και παρατηρείστε τις τιμές στο Φύλλο *Δυναμικό* να μεταβάλλονται. Αναλόγως με την ακρίβεια που επιθυμείτε, επαναλάβετε αυτή την εργασία αρκετές φορές. Επιλέξτε κάποιο κριτήριο για τον τερματισμό της διεργασίας. Για παράδειγμα, παρακολουθείστε την μεταβολή της τιμής ενός κελιού στην οθόνη σας (π.χ. το κελί B15) και τερματίστε την εφαρμογή του αλγορίθμου όταν η πληκτρολόγηση **Ctrl+p** επηρεάζει πλέον μόνο το τρίτο ή τέταρτο σημαντικό ψηφίο.
11. Για να επαναλάβουμε τον όλο υπολογισμό ή για να υπολογίσουμε το δυναμικό που δημιουργεί μια νέα διάταξη φορτίων θα πρέπει να μηδενίσουμε τις τιμές στο Φύλλο *Βοηθητικό*. Προς το σκοπό αυτό θα διαμορφώσουμε μια ακόμη μακροεντολή.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Καταγραφή νέας μακροεντολής**.
 - Στο παράθυρο που θα ανοίξει καταγράψτε ένα όνομα της μακροεντολής που θα δημιουργήσετε (προσέξτε ότι στο όνομα δεν πρέπει να περιέχονται διαστήματα), π.χ. **Poisson_reset**. Στο παράθυρο εισαγωγής Πλήκτρο συντόμευ-



σης: Ctrl+ καταχωρήστε ένα γράμμα με το οποίο στο μέλλον θα μπορείτε να καλείτε την μακροεντολή, π.χ. το γράμμα s. Τελειώστε με OK.

- * Επιλέξτε το Φύλλο *Βοηθητικό*.
 - * Στο Φύλλο *Βοηθητικό* επιλέξτε την περιοχή B2:BV74.
 - * Πιέστε το πλήκτρο **Delete** ή **Del**.
 - * Στο Φύλλο *Βοηθητικό* επιλέξτε το κελί B2.
 - * Επιλέξτε το Φύλλο *Δυναμικό* και στη συνέχεια το κελί B2
- Επιλέξτε από τα μενού **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Διακοπή καταγραφής**.
 - Μπορείτε να περιεργαστείτε το πρόγραμμα που δημιούργησε το *Excel* μέσω των επιλογών **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Μακροεντολές**. Στο παράθυρο που θα ανοίξει, επιλέξτε το όνομα της νέας μακροεντολής που δημιουργήσατε (π.χ. *Poisson_reset*) και στη συνέχεια **Επεξεργασία**. Στην οθόνη σας θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*. Η μακροεντολή *Poisson_reset* που προγραμμάτισε για σας το *Excel* πρέπει να έχει τη γενική μορφή (είναι δυνατόν, ανάλογα με την έκδοση του *Excel* που διαθέτετε, να περιλαμβάνονται μερικές επιπρόσθετες εντολές ή σσονος σημασίας που αναφέρονται στη σταδιακή επιλογή κελιών κατά την καταγραφή της μακροεντολής)



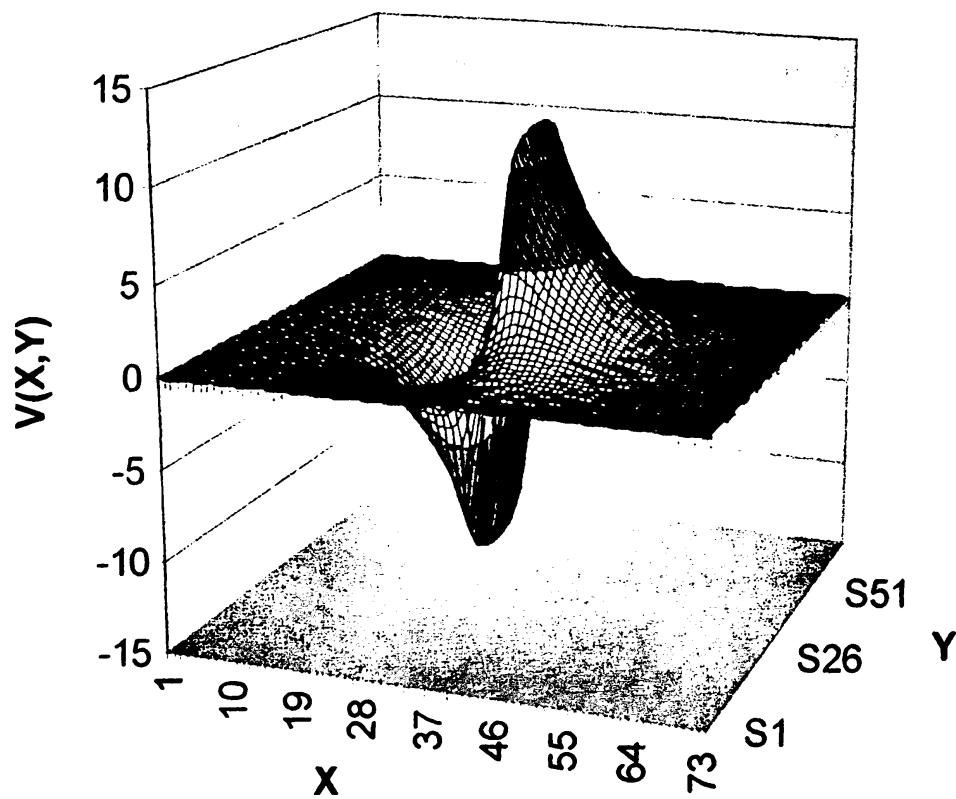
```
Sub Poisson_reset()  
,  
' Poisson_reset Μακροεντολή  
' Καταγραφή μακροεντολής 24/4/2002 από [το όνομά σας]  
,  
' Συντόμευση πληκτρολογίου: Ctrl+s  
,  
  
Sheets("Βοηθητικό").Select  
Range("B2:BV74").Select  
Selection.ClearContents  
Range("B2").Select  
Sheets("Δυναμικό ").Select  
Range("B2").Select  
End Sub
```

12. Η εποπτεία του δυναμικού που δημιουργεί η συγκεκριμένη διάταξη στο χώρο αυξάνει αν αποδώσουμε τις τιμές του Φύλλου *Δυναμικό* σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Εφαρμόστε τον αλγόριθμο αρκετές φορές ώστε να επιτύχετε την ακρίβεια που επιθυμείτε.
- Στο Φύλλο *Δυναμικό* επιλέξτε την περιοχή B2:BV74.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο** >
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο** >



Δυναμικό πυκνωτή με επίπεδους οπλισμούς



Σχήμα 6-6 Δυναμικό πυκνωτή με επίπεδους οπλισμούς.

- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος:

Δυναμικό πυκνωτή με επίπεδους οπλισμούς

Κατηγορία (X): X

Τιμή (Z): $V(X,Y)$

Σειρά (Y): Y

- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
 - Επιλέξτε Επόμενο >
 - Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.
 - Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία Γράφημα1 που περιέχει την γραφική παράσταση. Το γράφημα που δημιουργήθηκε πρέπει να έχει μορφή παρόμοια με αυτή του σχήματος 6-6.
 - Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του Excel Γράφημα → Προβολή 3Δ... Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.
 - Παρατηρείστε ότι το γράφημα έχει δυναμική υπόσταση. Κάθε μεταβολή των τιμών στο Φύλλο Δυναμικό ανανεώνει το γράφημα.
13. Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στο χώρο από τη συνάρτηση δυναμικού που μόλις υπολογίσαμε, μπορεί να βρεθεί με παραγωγή της συνάρτησης δυναμικού. Από τη συμμετρία του προβλήματος είναι φανερό ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει οριζόντια διεύθυνση στη μεσοκάθετο προς τους δύο σπλισμούς, ήτοι κατά τη σειρά 38 του σχήματος 6-3, όπου, στο συμβολισμό των εξ. (6.3) και (6.4), μπορούμε να γράψουμε



$$E = \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{i,j} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \varphi(i+1, j) - \varphi(i-1, j) \quad (6.11)$$

Στο κελί C1 του Φύλλου *Πεδίο* καταχωρίστε τη σχέση της εξ. (6.11)

=Δυναμικό!D38-Δυναμικό!B38

Αντιγράψτε τη σχέση αυτή σε όλη την περιοχή D1:BU1. Η πρώτη σειρά του Φύλλου *Πεδίο* περιέχει τώρα το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου κατά τον κεντρικό άξονα του πυκνωτή.

14. Αποδώστε το ηλεκτρικό πεδίο που μόλις υπολογίσατε σε γραφική παράσταση. Για το σκοπό αυτό

- Στο Φύλλο *Πεδίο*, επιλέξτε την περιοχή C1:BU1.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Γραμμές**. Επιλέξτε την πρώτη εικόνα με τις συνεχείς καμπύλες και στη συνέχεια **Επόμενο >**
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Τέλος**.

Σχολιάστε τη μορφή του γραφήματος που προκύπτει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6-1 Δημιουργείστε ένα Βιβλίο του *Excel*, σύμφωνα με τις οδηγίες,



της Εργαστηριακής Άσκησης 6.1 για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Poisson. Στο Φύλλο Διάταξη δημιουργείστε ένα ηλεκτρικό δίπολο, ήτοι δύο σημειακά φορτία $+q$ και $-q$ σε μεταξύ τους απόσταση d . Για τη διάταξη αυτή επαναλάβετε τη διεργασία της Εργαστηριακής Άσκησης 6.1.

6-2 Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση για μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδο με άπειρο μήκος και τετράγωνη διατομή πλευράς τεσσάρων κελιών στο επίπεδο που είναι κάθετο προς τον άξονα της ράβδου.

6-3 Επαναλάβετε την Άσκηση 6-1 για μια ηλεκτροστατική διάταξη σημειακών φορτίων της επιλογής σας.

6-4 Επαναλάβετε την Εργαστηριακή Άσκηση 6.2, μεταβάλλοντας την έκταση των οπλισμών του πυκνωτή και την απόσταση μεταξύ των οπλισμών. Σχολιάστε την επίδραση των δύο αυτών παραμέτρων στη μορφή του ηλεκτρικού πεδίου που διαμορφώνεται.

6-5 Θεωρείστε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, το οποίο καταλαμβάνει το χώρο $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$, $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$, $-\infty \leq z \leq \infty$, όπου $a = 7 \text{ m}$ και $b = 15 \text{ m}$. Στο εσωτερικό του παραλληλεπίπεδου βρίσκεται ομοιόμορφα κατανεμημένο ηλεκτρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho = 12 \mu\text{C m}^{-3}$. Χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο της εξ. (6.7) και τις τεχνικές των Εργαστηριακών Ασκήσεων 6.1 και 6.2 για να προσδιορίσετε το δυναμικό στο επίπεδο XY.

6-6 Στη γεωμετρία της προηγούμενης άσκησης, θεωρείστε ότι στο εσωτερικό του παραλληλεπίπεδου βρίσκεται κατανεμημένο η-



λεκτρικό φορτίο με πυκνότητα, η οποία παραμένει σταθερή κατά τους άξονες Y και Z, ενώ κατά τον άξονα X μεταβάλλεται γραμμικά ως

$$\rho(x) = 2 \frac{\rho_0}{a} x$$

όπου $a = 7 \text{ m}$, $b = 15 \text{ m}$ και $\rho_0 = 12 \text{ } \mu\text{C m}^{-3}$. Χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο της εξ. (6.7) και τις τεχνικές των Εργαστηριακών Ασκήσεων 6.1 και 6.2 για να προσδιορίσετε το δυναμικό στο επίπεδο XY.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΠΤΑ

**Κλίση του δυναμικού και
απόκλιση του πεδίου**

7

Σ Ε ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ \mathbf{r} , το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ συνδέεται με τη συνάρτηση $\varphi(\mathbf{r})$ του ηλεκτρικού δυναμικού μέσω της σχέσης

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right). \quad (7.1)$$

Αν επομένως είναι γνωστή η αναλυτική μορφή της συνάρτησης δυναμικού, η παραγωγή της εξ. (7.1) μπορεί να δώσει την ανυσματική συνάρτηση $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Αντίθετα, αν η συνάρτηση $\varphi(\mathbf{r})$ είναι γνωστή μόνο αριθμητικά σε διακριτά σημεία του χώρου, η παραγωγή πρέπει να πραγματοποιηθεί με αριθμητικές μεθόδους.

Πρέπει εξ' αρχής να σημειωθεί ότι αριθμητικές μέθοδοι παραγωγής συναρτήσεων δεν εμφανίζουν την ακρίβεια που είδαμε κατά την ολοκλήρωση στα προηγούμενα Κεφάλαια, ιδιαίτερα σε περιοχές όπου η μεταβολή της συνάρτησης με αντίστοιχη μεταβολή της μεταβλητής είναι δραστική. Αν, για παράδειγμα, η αριθμητική τιμή μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι γνωστή σε διαδοχικά σημεία x_1, x_2, \dots, x_N , με μεταξύ τους σταθερή απόσταση Δx , ως $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)$, τότε οι εναλλακτικές προσεγγίσεις πρώτου βαθμού, που απορρέουν από τον ορισμό της παραγώγου



$$\frac{df}{dx}(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{\Delta x} \quad (7.2\alpha)$$

$$\frac{df}{dx}(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\Delta x} \quad (7.2\beta)$$

$$\frac{df}{dx}(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2\Delta x} \quad (7.2\gamma)$$

δίνουν συνήθως αποτελέσματα με πενιχρή ακρίβεια.

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι σχετικά ομαλή, κατά πολύ ακριβέστερες εκτιμήσεις της παραγώγου μπορούμε να επιτύχουμε με την εκμετάλλευση τεσσάρων σημείων γύρω από το σημείο x_k , με την προσέγγιση¹

$$\frac{df}{dx}(x_k) = \frac{1}{24\Delta x} [2f(x_{k-2}) - 16f(x_{k-1}) + 16f(x_{k+1}) - 2f(x_{k+2})] \quad (7.3)$$

ενώ με συγκρίσιμη ακρίβεια δίνεται και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης από την έκφραση

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_k) = \frac{1}{12(\Delta x)^2} [-f(x_{k-2}) + 16f(x_{k-1}) - 30f(x_k) + 16f(x_{k+1}) - f(x_{k+2})] \quad (7.4)$$

¹ Βλ., π.χ., M. Abramowitz and I. Stegun, Eds., *Handbook of Mathematical Functions*, Washington, D.C., U.S. Department of Commerce, 1970, p. 914.



η οποία δίνεται εδώ για λόγους πληρότητας. Τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου μέσω της εξ. (7.1), στην προσέγγιση της εξ. (7.3), θα ελέγξουμε με ένα απλό παράδειγμα στις επόμενες Εργαστηριακές Ασκήσεις.

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΚΑΙ ΠΕΔΙΟ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

Ως παραδείγματα υπολογισμού του ηλεκτρικού πεδίου από το αντίστοιχο δυναμικό θα θεωρήσουμε τρεις γνώριμες διατάξεις σημειακών φορτίων: ένα σημειακό φορτίο q στον κατά τα άλλα ελεύθερο χώρο, ένα ηλεκτρικό δίπολο και ένα ηλεκτρικό τετράπολο.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 7.1

Ηλεκτρικό δυναμικό και πεδίο σημειακού φορτίου

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του *Excel* με τα εξής Φύλλα:
 1. Δεδομένα
 2. Διάταξη
 3. Δυναμικό
 4. $E(x)$
 5. $E(y)$
 6. Πεδίο
 7. Γωνία
2. Στο Φύλλο *Δεδομένα* γράψτε τα δεδομένα του προβλήματός σας, ήτοι τη σταθερά $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ και την τιμή του φορτίου q . Ονομάστε το κελί B1, Ke και το κελί B2, q0.



	A	B	C
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	8.96E+09	
2	q =	1.50E-06	
3			

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα** στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Ke). Επιλέξτε OK.

3. Στο Φύλλο *Διάταξη* εισάγετε στο κελί A1 τον αριθμό 0. Αντιγράψτε το κελί A1 στην περιοχή A1:Y25. Η περιοχή αυτή, διαστάσεων 25×25 , είναι η περιοχή στην οποία θα σημειώσετε την διάταξη φορτίου. Ρυθμίστε το πλάτος των στηλών ώστε να είναι ίσο με το ύψος των κελιών.

Μπορείτε να ρυθμίσετε το πλάτος περισσότερων από μιας στήλης ταυτόχρονα με την ακόλουθη διαδικασία: Επιλέξτε τις στήλες στις οποίες θέλετε να ρυθμίσετε το πλάτος. Με το πλήκτρο **Ctrl** πατημένο, ρυθμίστε με το ποντίκι το πλάτος μιας από τις επιλεγμένες στήλες. Θα παρατηρήσετε ότι όλες οι επιλεγμένες στήλες θα εμφανιστούν με το ίδιο πλάτος.

4. Για να έχετε καλύτερη εποπτεία του χώρου διάταξης των φορτίων,
- Επιλέξτε την περιοχή A1:Y25. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Περίγραμμα**. Στα παράθυρα που θα ανοίξει, επιλέξτε τα κουμπιά με τις ενδείξεις **Πλαίσιο** και **Πλέγ-**



μα.

- Το κελί M13 είναι το κέντρο της περιοχής σας. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Μοτίβα**. Επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης του κελιού M13 ένα έντονο χρώμα.
- Ονομάστε το κελί M13, q και τοποθετήστε σ' αυτό το σημειακό φορτίο q_0 με την εισαγωγή της εντολής

$$= q_0$$

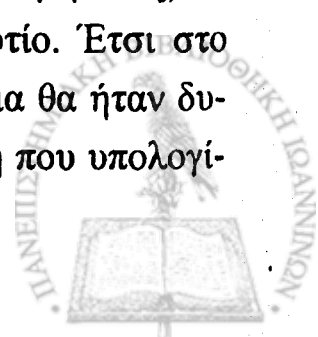
5. Στο Φύλλο *Δυναμικό*, υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί στο χώρο το σημειακό φορτίο q σύμφωνα με την εξ. (5.1). Για το σκοπό αυτό γράψτε στο κελί A1 την έκφραση

$$=Ke*q/((ROW()-ROW(q))^2+(COLUMN()-COLUMN(q))^2)^0.5$$

Οι συναρτήσεις ROW(κελί) και COLUMN(κελί) επιστρέφουν αντίστοιχα την σειρά ή την στήλη που βρίσκεται το κελί στο οποίο αναφέρονται. Ιδιαίτερα, οι ίδιες συναρτήσεις χωρίς μεταβλητή [ROW() και COLUMN()] επιστρέφουν αντίστοιχα την σειρά ή τον αριθμό του τρέχοντος κελιού.

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

Παρατηρείται ότι η εξ. (5.1), και επομένως η σχέση του *Excel* που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του δυναμικού, δίνει απροσδιόριστο αποτέλεσμα (διαίρεση δια του μηδενός) σε σημεία του χώρου όπου υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο. Έτσι στο κελί M13 υπάρχει η ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Το σφάλμα θα ήταν δυνατόν να αποτραπεί αν περιβάλλαμε την έκφραση που υπολογί-



ζει το δυναμικό με μια συνάρτηση $IF()$. Η λύση αυτή παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι επιβραδύνει κατά τι τον υπολογισμό. Μια πλέον πρακτική λύση είναι να επέμβουμε μετά το πέρας του υπολογισμού και στο κελί M13 να εισαγάγουμε μια αυθαίρετη τιμή. Η πιο λογική τιμή είναι ίσως ο μέσος όρος των τιμών που περιέχονται στα γειτονικά κελιά του M13. Μπορείτε επομένως να εισαγάγετε στο κελί M13 την εντολή

$$=(L12+M12+N12+N13+N14+M14+L14+L13)/8$$

6. Η εποπτεία του δυναμικού που δημιουργεί το σημειακό φορτίο στο χώρο αυξάνει αν αποδώσουμε τις τιμές του Φύλλου Δυναμικό σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο Δυναμικό επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο** >
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο** >
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Δυναμικό σημειακού φορτίου

Κατηγορία (X): X



Τιμή (Z): Δυναμικό

Σειρά (Y): Y

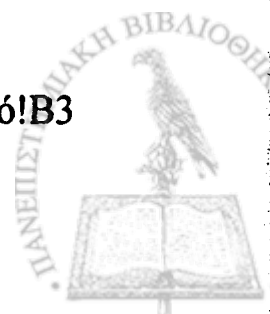
- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία Γράφημα1 που περιέχει την γραφική παράσταση. Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του Excel Γράφημα → Προβολή 3Δ... Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

7. Στο Φύλλο $E(x)$ υπολογίστε την οριζόντια συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με την εξ. (7.1) και την προσέγγιση της εξ. (7.3). Καθόσον η εξ. (7.3) απαιτεί για κάθε κελί τη γνώση της τιμής του δυναμικού σε δύο εκατέρωθεν κελιά, ο υπολογισμός του πεδίου είναι δυνατός μόνον στην περιοχή C3:W23.

- Σε εφαρμογή της εξ. (7.3), τοποθετήστε στο κελί C3 την εντολή

$$= - 1/24*(2*\Delta\text{δυναμικό!A3}-16*\Delta\text{δυναμικό!B3})$$



$$+16*\text{Δυναμικό!D3}-2*\text{Δυναμικό!E3})$$

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή C3:W23.

8. Στο Φύλλο $E(y)$ υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με την εξ. (7.1) και την προσέγγιση της εξ. (7.3). Καθόσον η εξ. (7.3) απαιτεί για κάθε κελί τη γνώση της τιμής του δυναμικού σε δύο εκατέρωθεν κελιά, ο υπολογισμός του πεδίου είναι δυνατός μόνον στην περιοχή C3:W23.

- Σε εφαρμογή της εξ. (7.3), τοποθετείστε στο κελί C3 την εντολή

$$=1/24*(2*\text{Δυναμικό!C1}-16*\text{Δυναμικό!C2} \\ +16*\text{Δυναμικό!C4}-2*\text{Δυναμικό!C5})$$

Παρατηρείται ότι οι εκφράσεις για τον υπολογισμό της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας του πεδίου διαφέρουν κατά ένα αρνητικό πρόσημο. Τούτο είναι απόρροια του ιδιότυπου συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε στο *Excel*.

Συμβατικά συστήματα συντεταγμένων στο χώρο δύο διαστάσεων αποδίδουν τη θέση ενός σημείου μέσω ενός οριζόντιου άξονα X και ένα κατακόρυφο άξονα Y, των οποίων οι τιμές αυξάνουν αντίστοιχα προς τα δεξιά και προς τα άνω. Η σωστή φορά του άξονα X παραμένει σε ένα σύστημα συντεταγμένων του *Excel* αν η οριζόντια συνιστώσα x αποδοθεί με τη στήλη του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση COLUMN(). Αν όμως η κατακόρυφη



συνιστώσα y αποδοθεί με τη σειρά του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση ROW(), η φορά του άξονα Y είναι αντίστροφη από την αναμενόμενη, καθόσον η αρίθμηση των κελιών αυξάνει προς τα κάτω.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή C3:W23.

9. Στο Φύλλο *Πεδίο*, υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μέσω της σχέσης

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad (7.5)$$

τοποθετώντας στο κελί C3 την εντολή

$$=SQRT('E(y)!'C3^2+'E(x)!'C3^2)$$

και αντιγράφοντάς την σε όλη την περιοχή C3:W23.

10. Τέλος, στο Φύλλο *Γωνία*, υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το άνωσμα E με τον οριζόντιο άξονα X . Για το σκοπό αυτό

- Τοποθετείστε στο κελί C3 την εντολή

$$=IF('E(y)!'C3<0;ATAN2('E(x)!'C3;'E(y)!'C3)*180/PI()+360; ATAN2('E(x)!'C3;'E(y)!'C3)*180/PI())$$

Η σύνταξη της συνάρτησης ATAN2 είναι:

$$ATAN2(X,Y)$$

όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο



XY. Παρατηρείται ότι η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση. Η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

Το αποτέλεσμα της συνάρτησης ATAN2 μπορεί να μετατραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το

Excel διαθέτει τη συνάρτηση PI(), η οποία επιστρέφει την τιμή π ($= 3.14\dots$) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή C3:W23.

11. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου

- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (Excel 2000) ή Να μη γίνει ενημέρωση (Excel XP).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.



- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.
- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 7.2

Ηλεκτρικό δυναμικό και πεδίο ηλεκτρικού διπόλου

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του *Excel* με τα εξής Φύλλα:

1. Δεδομένα
2. Διάταξη
3. Δυναμικό
4. $E(x)$
5. $E(y)$
6. Πεδίο
7. Γωνία

2. Στο Φύλλο *Δεδομένα* γράψτε τα δεδομένα του προβλήματός σας, ήτοι τη σταθερά $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ και την τιμή του φορτίου q

	A	B	C
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	8.96E+09	
2	$q =$	1.50E-06	
3			

Ονομάστε το κελί B1, K_e και το κελί B2, q_0 .



Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα** στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Ke). Επιλέξτε **OK**.

3. Στο Φύλλο *Διάταξη* τοποθετείστε στο κελί A1 τον αριθμό 0. Αντιγράψτε το κελί A1 στην περιοχή A1:Y25. Η περιοχή αυτή, διαστάσεων 25 × 25, είναι η περιοχή στην οποία θα σημειώσετε την διάταξη φορτίου. Ρυθμίστε το πλάτος των στηλών ώστε να είναι ίσο με το ύψος των κελιών.

Μπορείτε να ρυθμίσετε το πλάτος περισσότερων από μιας στήλης ταυτόχρονα με την ακόλουθη διαδικασία: Επιλέξτε τις στήλες στις οποίες θέλετε να ρυθμίσετε το πλάτος. Με το πλήκτρο **Ctrl** πατημένο, ρυθμίστε με το ποντίκι το πλάτος μιας από τις επιλεγμένες στήλες. Θα παρατηρήσετε ότι όλες οι επιλεγμένες στήλες θα εμφανιστούν με το ίδιο πλάτος.

4. Για να έχετε καλύτερη εποπτεία του χώρου διάταξης των φορτίων,
 - Επιλέξτε την περιοχή A1:Y25. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Περίγραμμα**. Στα παράθυρα που θα ανοίξει, επιλέξτε τα κουμπιά με τις ενδείξεις **Πλαίσιο** και **Πλέγμα**.
 - Το κελί M13 είναι το κέντρο της περιοχής σας. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Μοτίβα**. Επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης του κελιού M13 ένα έντονο χρώμα.



- Εκατέρωθεν του κελιού M13 και κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, π.χ. στα κελιά M11 και M15, τοποθετείστε δύο ίσα και αντίθετα φορτία. Στο κελί M11 τοποθετείστε την εντολή

$$= q0$$

και στο κελί M15 την εντολή

$$= - q0$$

Ονομάστε το κελί M11, q_u και το κελί M15, q_d .

Το σύστημα σημειακών φορτίων που κατασκευάσατε απαντάται με την ονομασία **ηλεκτρικό δίπολο**.

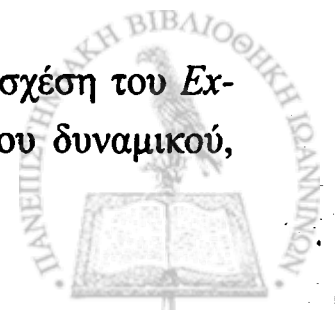
5. Στο Φύλλο *Δυναμικό*, υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί στο χώρο το ηλεκτρικό δίπολο σύμφωνα με την εξ. (5.1). Για το σκοπό αυτό γράψτε στο κελί A1 την έκφραση

$$=Ke*(qu/((ROW()-ROW(qu))^2+(COLUMN()-COLUMN(qu))^2)^0.5 +qd/((ROW()-ROW(qd))^2+(COLUMN()-COLUMN(qd))^2)^0.5)$$

Οι συναρτήσεις ROW(κελί) και COLUMN(κελί) επιστρέφουν αντίστοιχα την σειρά ή την στήλη που βρίσκεται το κελί στο οποίο αναφέρονται. Ιδιαίτερα, οι ίδιες συναρτήσεις χωρίς μεταβλητή [ROW() και COLUMN()] επιστρέφουν αντίστοιχα την σειρά ή τον αριθμό του τρέχοντος κελιού.

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

Παρατηρείται ότι η εξ. (5.1), και επομένως η σχέση του *Excel* που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του δυναμικού,



δίνει απροσδιόριστο αποτέλεσμα (διαίρεση δια του μηδενός) σε σημεία του χώρου όπου υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο. Έτσι στα κελιά M11 και M15 υπάρχει τώρα η ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Το σφάλμα θα ήταν δυνατόν να αποτραπεί αν περιβάλλαμε την έκφραση που υπολογίζει το δυναμικό με μια συνάρτηση IF(). Η λύση αυτή παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι επιβραδύνει κατά τι τον υπολογισμό. Μια πλέον πρακτική λύση είναι να επέμβουμε μετά το πέρας του υπολογισμού και στο κελί M13 να εισαγάγουμε μια αυθαίρετη τιμή. Η πιο λογική τιμή είναι ίσως ο μέσος όρος των τιμών που περιέχονται στα γειτονικά κελιά των M11 και M15. Μπορείτε επομένως να εισαγάγετε στο κελί M11 την εντολή

$$=(L10+M10+N10+N11+N12+M12+L12+L11)/8$$

Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού M11 στο κελί M15. Περιεργαστείτε τώρα το περιεχόμενο του κελιού M15 και βεβαιωθείτε ότι το *Excel* μετέφερε σωστά την εντολή για υπολογισμό του μέσου όρου των 8 γειτονικών του κελιών, ήτοι μετασχηματίστηκε σε

$$=(L14+M14+N14+N15+N16+M16+L16+L15)/8$$

6. Η εποπτεία του δυναμικού που δημιουργεί το σημειακό φορτίο στο χώρο αυξάνει αν αποδώσουμε τις τιμές του Φύλλου *Δυναμικό* σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο *Δυναμικό* επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**



- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο** >
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο** >
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Δυναμικό ηλεκτρικού διπόλου

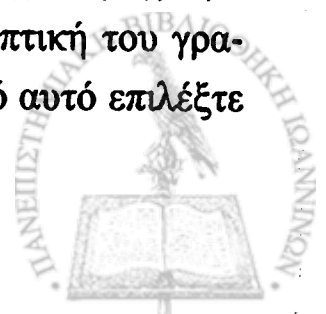
Κατηγορία (X): X

Τιμή (Z): Δυναμικό

Σειρά (Y): Y

- Στην καρτέλα **Υπόμνημα** βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή **Εμφάνιση υπομνήματος**.
- Επιλέξτε **Επόμενο** >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Σε νέο φύλλο εργασίας**. Επιλέξτε **Τέλος**.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει την γραφική παράσταση. Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε



το γράφημα και από τα μενού του *Excel* **Γράφημα** → **Προβολή 3Δ...** Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

7. Στο Φύλλο $E(x)$ υπολογίστε την οριζόντια συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με την εξ. (7.1) και την προσέγγιση της εξ. (7.3). Καθόσον η εξ. (7.3) απαιτεί για κάθε κελί τη γνώση της τιμής του δυναμικού σε δύο εκατέρωθεν κελιά, ο υπολογισμός του πεδίου είναι δυνατός μόνον στην περιοχή C3:W23.

- Σε εφαρμογή της εξ. (7.3), τοποθετείστε στο κελί C3 την εντολή

$$= -1/24*(2*\text{Δυναμικό!A3}-16*\text{Δυναμικό!B3}+16*\text{Δυναμικό!D3}-2*\text{Δυναμικό!E3})$$

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή C3:W23.

8. Στο Φύλλο $E(y)$ υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με την εξ. (7.1) και την προσέγγιση της εξ. (7.3). Καθόσον η εξ. (7.3) απαιτεί για κάθε κελί τη γνώση της τιμής του δυναμικού σε δύο εκατέρωθεν κελιά, ο υπολογισμός του πεδίου είναι δυνατός μόνον στην περιοχή C3:W23.

- Σε εφαρμογή της εξ. (7.3), τοποθετείστε στο κελί C3 την εντολή

$$=1/24*(2*\text{Δυναμικό!C1}-16*\text{Δυναμικό!C2}+16*\text{Δυναμικό!C4}-2*\text{Δυναμικό!C5})$$



Παρατηρείται ότι οι εκφράσεις για τον υπολογισμό της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας του πεδίου διαφέρουν κατά ένα αρνητικό πρόσημο. Τούτο είναι απόρροια του ιδιότυπου συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε στο *Excel*.

Συμβατικά συστήματα συντεταγμένων στο χώρο δύο διαστάσεων αποδίδουν τη θέση ενός σημείου μέσω ενός οριζόντιου άξονα X και ένα κατακόρυφο άξονα Y , των οποίων οι τιμές αυξάνουν αντίστοιχα προς τα δεξιά και προς τα άνω. Η σωστή φορά του άξονα X παραμένει σε ένα σύστημα συντεταγμένων του *Excel* αν η οριζόντια συνιστώσα x αποδοθεί με τη στήλη του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση COLUMN(). Αν όμως η κατακόρυφη συνιστώσα y αποδοθεί με τη σειρά του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση ROW(), η φορά του άξονα Y είναι αντίστροφη από την αναμενόμενη, καθόσον η αρίθμηση των κελιών αυξάνει προς τα κάτω.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή C3:W23.

9. Στο Φύλλο *Πεδίο*, υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μέσω της σχέσης

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad (7.5)$$

τοποθετώντας στο κελί C3 την εντολή

=SQRT('E(y)!'C3^2+'E(x)!'C3^2)

και αντιγράφοντάς την σε όλη την περιοχή C3:W23.



10. Τέλος, στο Φύλλο Γωνία, υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το άνυσμα E με τον οριζόντιο άξονα X . Για το σκοπό αυτό

- Τοποθετείστε στο κελί C3 την εντολή

=IF('E(y)!'C3<0;ATAN2('E(x)!'C3;'E(y)!'C3)*180/PI()+360;
ATAN2('E(x)!'C3;'E(y)!'C3)*180/PI())

Η σύνταξη της συνάρτησης ATAN2 είναι:

ATAN2(X,Y)

όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο XY . Παρατηρείται ότι η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση. Η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

Το αποτέλεσμα της συνάρτησης ATAN2 μπορεί να μετατραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το

Excel διαθέτει τη συνάρτηση PI(), η οποία επιστρέφει την τιμή π (= 3.14...) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή C3:W23.

11. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομέ-



νως δύο πλαίσια διαλόγου

- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Οχι (Excel 2000) ή Να μη γίνει ενημέρωση (Excel XP).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.
- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 7.3

Ηλεκτρικό δυναμικό και πεδίο ηλεκτρικού τετραπόλου

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του Excel με τα εξής Φύλλα:

1. Δεδομένα
2. Διάταξη



7. Κλίση του δυναμικού και απόκλιση του πεδίου

3. Δυναμικό
4. $E(x)$
5. $E(y)$
6. Πεδίο
7. Γωνία

2. Στο Φύλλο Δεδομένα γράψτε τα δεδομένα του προβλήματός σας, ήτοι τη σταθερά $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ και την τιμή του φορτίου q

	A	B	C
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	8.96E+09	
2	$q =$	1.50E-06	
3			

Ονομάστε το κελί B1, Ke και το κελί B2, q0.

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα** στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Ke). Επιλέξτε **OK**.

3. Στο Φύλλο *Διάταξη* τοποθετείστε στο κελί A1 τον αριθμό 0. Αντιγράψτε το κελί A1 στην περιοχή A1:Y25. Η περιοχή αυτή, διαστάσεων 25×25 , είναι η περιοχή στην οποία θα σημειώσετε την διάταξη φορτίου. Ρυθμίστε το πλάτος των στηλών ώστε να είναι ίσο με το ύψος των κελιών.

Μπορείτε να ρυθμίσετε το πλάτος περισσότερων από μιας στήλης ταυτόχρονα με την ακόλουθη διαδικασία: Επιλέξτε τις στήλες στις οποίες θέλετε να ρυθμίσετε το πλάτος. Με το πλήκτρο **Ctrl**



πατημένο, ρυθμίστε με το ποντίκι το πλάτος μιας από τις επιλεγμένες στήλες. Θα παρατηρήσετε ότι όλες οι επιλεγμένες στήλες θα εμφανιστούν με το ίδιο πλάτος.

4. Για να έχετε καλύτερη εποπτεία του χώρου διάταξης των φορτίων,

- Επιλέξτε την περιοχή A1:Y25. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Περίγραμμα**. Στα παράθυρα που θα ανοίξει, επιλέξτε τα κουμπιά με τις ενδείξεις **Πλαίσιο** και **Πλέγμα**.
- Το κελί M13 είναι το κέντρο της περιοχής σας. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Μοτίβα**. Επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης του κελιού M13 ένα έντονο χρώμα.
- Εκατέρωθεν του κελιού M13 και κατά την κατακόρυφη και οριζόντια διεύθυνση, π.χ. στα κελιά M11, M15, K13 και O13, τοποθετείστε τέσσερα σημειακά φορτία. Στα κελιά M11 και M15 τοποθετείστε την εντολή

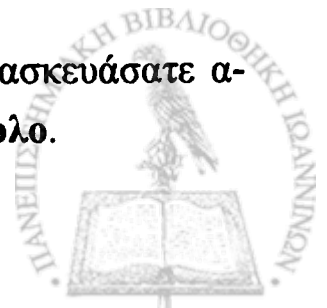
$$= q_0$$

και στα κελιά K13 και O13 την εντολή

$$= -q_0$$

Ονομάστε το κελί M11, q_u , το κελί M15, q_d , το κελί K13, q_l και το κελί O13, q_r .

Το σύστημα σημειακών φορτίων που κατασκευάσατε απαντάται με την ονομασία **ηλεκτρικό τετράπολο**.



5. Στο Φύλλο Δυναμικό, υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί στο χώρο το ηλεκτρικό τετράπολο σύμφωνα με την εξ. (5.1). Για το σκοπό αυτό γράψτε στο κελί A1 την έκφραση

$$\begin{aligned} &=Ke*(qu/((ROW()-ROW(qu))^2+(COLUMN()-COLUMN(qu))^2)^0.5 \\ &+qd/((ROW()-ROW(qd))^2+(COLUMN()-COLUMN(qd))^2)^0.5 \\ &+ql/((ROW()-ROW(ql))^2+(COLUMN()-COLUMN(ql))^2)^0.5 \\ &+qr/((ROW()-ROW(qr))^2+(COLUMN()-COLUMN(qr))^2)^0.5 \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις ROW(κελί) και COLUMN(κελί) επιστρέφουν αντίστοιχα την σειρά ή την στήλη που βρίσκεται το κελί στο οποίο αναφέρονται. Ιδιαίτερα, οι ίδιες συναρτήσεις χωρίς μεταβλητή [ROW() και COLUMN()] επιστρέφουν αντίστοιχα την σειρά ή τον αριθμό του τρέχοντος κελιού.

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

Παρατηρείται ότι η εξ. (5.1), και επομένως η σχέση του *Excel* που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του δυναμικού, δίνει απροσδιόριστο αποτέλεσμα (διαίρεση δια του μηδενός) σε σημεία του χώρου όπου υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο. Έτσι στα κελιά M11, M15, K13 και O13 υπάρχει τώρα η ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Το σφάλμα θα ήταν δυνατόν να αποτραπεί αν περιβάλλαμε την έκφραση που υπολογίζει το δυναμικό με μια συνάρτηση IF(). Η λύση αυτή παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι επιβραδύνει κατά τι τον υπολογισμό. Μια πλέον πρακτική λύση είναι να επέμβουμε μετά το πέρας του υπολογισμού και στο κελί M13 να εισαγάγουμε μια αυθαίρετη τιμή. Η πιο λογική τιμή είναι ίσως ο μέσος όρος των τιμών που περιέχονται στα γειτονικά κελιά των M11 και M15. Μπορείτε επομένως να εισαγάγετε στο κελί M11 την εντολή



$$=(L10+M10+N10+N11+N12+M12+L12+L11)/8$$

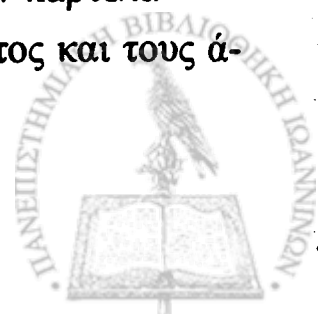
Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού M11 στο κελί M15. Περιεργαστείτε τώρα το περιεχόμενο του κελιού M15 και βεβαιωθείτε ότι το *Excel* μετέφερε σωστά την εντολή για υπολογισμό του μέσου όρου των 8 γειτονικών του κελιών, ήτοι μετασχηματίστηκε σε

$$=(L14+M14+N14+N15+N16+M16+L16+L15)/8$$

Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού M11 στα κελιά K13 και O13.

6. Η εποπτεία του δυναμικού που δημιουργεί το σημειακό φορτίο στο χώρο αυξάνει αν αποδώσουμε τις τιμές του Φύλλου *Δυναμικό* σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο *Δυναμικό* επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο >**
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο >**
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.



Τίτλος γραφήματος: Δυναμικό ηλεκτρικού τετραπόλου

Κατηγορία (X): X

Τιμή (Z): Δυναμικό

Σειρά (Y): Y

- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του *Excel* έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει την γραφική παράσταση. Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του *Excel* **Γ**ράφημα → **Π**ροβολή 3Δ... Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

7. Στο Φύλλο $E(x)$ υπολογίστε την οριζόντια συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με την εξ. (7.1) και την προσέγγιση της εξ. (7.3). Καθόσον η εξ. (7.3) απαιτεί για κάθε κελί τη γνώση της τιμής του δυναμικού σε δύο εκατέρωθεν κελιά, ο υπολογισμός του πεδίου είναι δυνατός μόνον στην περιοχή C3:W23.



- Σε εφαρμογή της εξ. (7.3), τοποθετείστε στο κελί C3 την εντολή

$$= - 1/24*(2*\text{Δυναμικό!A3}-16*\text{Δυναμικό!B3} \\ +16*\text{Δυναμικό!D3}-2*\text{Δυναμικό!E3})$$

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή C3:W23.

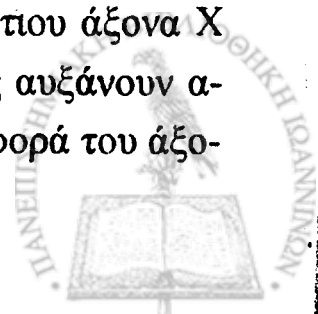
8. Στο Φύλλο $E(y)$ υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με την εξ. (7.1) και την προσέγγιση της εξ. (7.3). Καθόσον η εξ. (7.3) απαιτεί για κάθε κελί τη γνώση της τιμής του δυναμικού σε δύο εκατέρωθεν κελιά, ο υπολογισμός του πεδίου είναι δυνατός μόνον στην περιοχή C3:W23.

- Σε εφαρμογή της εξ. (7.3), τοποθετείστε στο κελί C3 την εντολή

$$=1/24*(2*\text{Δυναμικό!C1}-16*\text{Δυναμικό!C2} \\ +16*\text{Δυναμικό!C4}-2*\text{Δυναμικό!C5})$$

Παρατηρείται ότι οι εκφράσεις για τον υπολογισμό της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας του πεδίου διαφέρουν κατά ένα αρνητικό πρόσημο. Τούτο είναι απόρροια του ιδιότυπου συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε στο *Excel*.

Συμβατικά συστήματα συντεταγμένων στο χώρο δύο διαστάσεων αποδίδουν τη θέση ενός σημείου μέσω ενός οριζόντιου άξονα X και ένα κατακόρυφο άξονα Y, των οποίων οι τιμές αυξάνουν αντίστοιχα προς τα δεξιά και προς τα άνω. Η σωστή φορά του άξο-



να X παραμένει σε ένα σύστημα συντεταγμένων του Excel αν η οριζόντια συνιστώσα x αποδοθεί με τη στήλη του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση COLUMN(). Αν όμως η κατακόρυφη συνιστώσα y αποδοθεί με τη σειρά του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση ROW(), η φορά του άξονα Y είναι αντίστροφη από την αναμενόμενη, καθόσον η αρίθμηση των κελιών αυξάνει προς τα κάτω.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή C3:W23.

9. Στο Φύλλο *Πεδίο*, υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μέσω της σχέσης

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad (7.5)$$

τοποθετώντας στο κελί C3 την εντολή

$$=SQRT('E(y)!'C3^2+'E(x)!'C3^2)$$

και αντιγράφοντάς την σε όλη την περιοχή C3:W23.

10. Τέλος, στο Φύλλο *Γωνία*, υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το άνυσμα E με τον οριζόντιο άξονα X. Για το σκοπό αυτό

- Τοποθετείστε στο κελί C3 την εντολή

$$=IF('E(y)!'C3<0;ATAN2('E(x)!'C3;'E(y)!'C3)*180/PI()+360; ATAN2('E(x)!'C3;'E(y)!'C3)*180/PI())$$



Η σύνταξη της συνάρτησης ATAN2 είναι:

$$\text{ATAN2}(X,Y)$$

όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο XY . Παρατηρείται ότι η συνάρτηση $\text{ATAN2}(X,Y)$ επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση. Η συνάρτηση $\text{ATAN2}(X,Y)$ επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

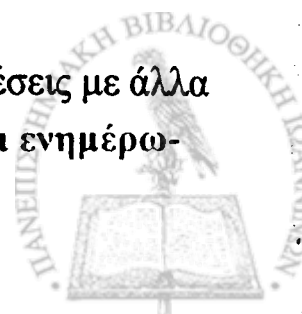
Το αποτέλεσμα της συνάρτησης ATAN2 μπορεί να μετατραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το

Excel διαθέτει τη συνάρτηση $\text{PI}()$, η οποία επιστρέφει την τιμή π ($= 3.14\dots$) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή C3:W23.

11. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου

- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (*Excel 2000*) ή Να μη γίνει ενημέρω-



ση (Excel XP).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.
- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.

ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Η διαφορική μορφή του νόμου του Gauss έχει τη μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.6)$$

που σε συνδυασμό με την εξ. (7.1) δίνει την εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.7)$$

ή

$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \varphi. \quad (7.8)$$

Αν επομένως η μορφή του ηλεκτρικού πεδίου ή της συνάρτησης δυ-



ναμικού είναι γνωστή σε μια περιοχή του χώρου, η κατανομή ηλεκτρικού φορτίου είναι δυνατόν να προσδιοριστεί μέσω των εξ. (7.6) ή (7.8).

Θα θεωρήσουμε πάλι την περίπτωση ενός σημειακού φορτίου q στον κατά τα άλλα ελεύθερο χώρο, το οποίο δημιουργεί το δυναμικό

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (7.9)$$

όπου \mathbf{r}_0 είναι η θέση του φορτίου q . Είναι εύκολο να δείξουμε αναλυτικά ότι η διπλή παραγωγή $\nabla^2\varphi$ δίνει παντού μηδενικό αποτέλεσμα, εκτός από το σημείο $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, όπου το αποτέλεσμα είναι απροσδιόριστο. Την ακρίβεια του αριθμητικού υπολογισμού της ποσότητας $\nabla^2\varphi$ θα ελέγξουμε με την επόμενη Εργαστηριακή Άσκηση.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 7.4

Προσδιορισμός του ηλεκτρικού φορτίου μέσω της εξίσωσης Poisson

1. Δημιουργείτε ένα νέο βιβλίο του Excel με τα εξής Φύλλα:

1. Δεδομένα
2. Διάταξη
3. Δυναμικό
4. $\rho(r)$

2. Στο Φύλλο Δεδομένα γράψτε τα δεδομένα του προβλήματός σας, ήτοι τη σταθερά $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ και την τιμή του φορτίου q



	A	B	C
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	8.96E+09	
2	q =	1.50E-06	
3			

Ονομάστε το κελί B1, Ke και το κελί B2, q0.

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα** στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Ke). Επιλέξτε **OK**.

3. Στο Φύλλο *Διάταξη* εισάγετε στο κελί A1 τον αριθμό 0. Αντιγράψτε το κελί A1 στην περιοχή A1:Y25. Η περιοχή αυτή, διαστάσεων 25×25 , είναι η περιοχή στην οποία θα σημειώσετε την διάταξη φορτίου. Ρυθμίστε το πλάτος των στηλών ώστε να είναι ίσο με το ύψος των κελιών.

Μπορείτε να ρυθμίσετε το πλάτος περισσότερων από μιας στήλης ταυτόχρονα με την ακόλουθη διαδικασία: Επιλέξτε τις στήλες στις οποίες θέλετε να ρυθμίσετε το πλάτος. Με το πλήκτρο **Ctrl** πατημένο, ρυθμίστε με το ποντίκι το πλάτος μιας από τις επιλεγμένες στήλες. Θα παρατηρήσετε ότι όλες οι επιλεγμένες στήλες θα εμφανιστούν με το ίδιο πλάτος.

4. Για να έχετε καλύτερη εποπτεία του χώρου διάταξης των φορτίων:

- Επιλέξτε την περιοχή A1:Y25. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Περίγραμμα**. Στα παράθυρα που θα ανοί-



ξει, επιλέξτε τα κουμπιά με τις ενδείξεις Πλαίσιο και Πλέγμα.

- Το κελί M13 είναι το κέντρο της περιοχής σας. Από τα μενού επιλέξτε **Μορφή** → **Κελιά...** → **Μοτίβα**. Από την παλέτα που θα ανοίξει, επιλέξτε ως μοτίβο γραμμοσκίασης του κελιού M13 ένα έντονο χρώμα.
- Ονομάστε το κελί M13, q και τοποθετήστε σ' αυτό το σημειακό φορτίο q0 με την εισαγωγή της εντολής

$$= q0$$

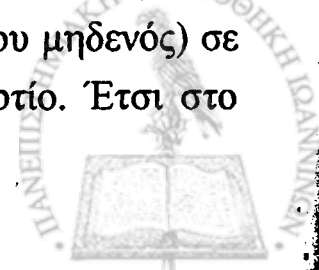
5. Στο Φύλλο *Δυναμικό*, υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί στο χώρο το σημειακό φορτίο q σύμφωνα με την εξ. (5.1). Για το σκοπό αυτό γράψτε στο κελί A1 την έκφραση

$$=Ke*q/((ROW()-ROW(q))^2+(COLUMN()-COLUMN(q))^2)^0.5$$

Οι συναρτήσεις ROW(κελί) και COLUMN(κελί) επιστρέφουν αντίστοιχα την σειρά ή την στήλη που βρίσκεται το κελί στο οποίο αναφέρονται. Ιδιαίτερα, οι ίδιες συναρτήσεις χωρίς μεταβλητή [ROW() και COLUMN()] επιστρέφουν αντίστοιχα την σειρά ή τον αριθμό του τρέχοντος κελιού.

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

Παρατηρείται ότι η εξ. (5.1), και επομένως η σχέση του Excel που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του δυναμικού, δίνει απροσδιόριστο αποτέλεσμα (διαίρεση δια του μηδενός) σε σημεία του χώρου όπου υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο. Έτσι στο



κελί M13 υπάρχει η ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Το σφάλμα θα ήταν δυνατόν να αποτραπεί αν περιβάλλαμε την έκφραση που υπολογίζει το δυναμικό με μια συνάρτηση IF(). Η λύση αυτή παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι επιβραδύνει κατά τι τον υπολογισμό. Μια πλέον πρακτική λύση είναι να επέμβουμε μετά το πέρας του υπολογισμού και στο κελί M13 να εισαγάγουμε μια αυθαίρετη τιμή. Η πιο λογική τιμή είναι ίσως ο μέσος όρος των τιμών που περιέχονται στα γειτονικά κελιά του M13. Μπορείτε επομένως να εισαγάγετε στο κελί M13 την εντολή

$$=(L12+M12+N12+N13+N14+M14+L14+L13)/8$$

6. Αποδώστε τις τιμές του Φύλλου Δυναμικό σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο Δυναμικό επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε Εισαγωγή → Γράφημα...
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Επιφάνεια → Επόμενο >
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα Τίτλοι και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Δυναμικό σημειακού φορτίου



Κατηγορία (X): X

Τιμή (Z): Δυναμικό

Σειρά (Y): Y

- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει την γραφική παράσταση. Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γράφηματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του Excel **Γράφημα** → **Προβολή 3Δ...** Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

7. Στο Φύλλο $\rho(r)$ υπολογίστε την πυκνότητα φορτίου στο χώρο μέσω της εξ. (7.8), στα πλαίσια της αριθμητικής προσέγγισης που παρέχει η εξ. (7.4). Καθόσον η εξ. (7.4) απαιτεί για κάθε κελί τη γνώση της τιμής του δυναμικού σε δύο εκατέρωθεν κελιά, ο υπολογισμός του πεδίου είναι δυνατός μόνον στην περιοχή C3:W23.

- Σε εφαρμογή της εξ. (7.4), τοποθετείστε στο κελί C3 την εντολή



$$\begin{aligned} &= -1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot K_e) \cdot 1/12 \cdot \\ &((- \Delta \text{υναμικό!A3} + 16 \cdot \Delta \text{υναμικό!B3} - 30 \cdot \Delta \text{υναμικό!C3} \\ &+ 16 \cdot \Delta \text{υναμικό!D3} - \Delta \text{υναμικό!E3}) \\ &+ (- \Delta \text{υναμικό!C5} + 16 \cdot \Delta \text{υναμικό!C4} - 30 \cdot \Delta \text{υναμικό!C3} \\ &+ 16 \cdot \Delta \text{υναμικό!C2} - \Delta \text{υναμικό!C1})) \end{aligned}$$

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή C3:W23.

8. Αποδώστε τις τιμές της πυκνότητας φορτίου που υπολογίσατε στο Φύλλο $\rho(r)$ σε τρισδιάστατο γράφημα ακολουθώντας τα βήματα της προηγούμενης παραγράφου 6 και σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 7-1 Χρησιμοποιώντας την εξ. (7.3) αποδείξτε την εξ. (7.4).
- 7-2 Επαναλάβετε την Εργαστηριακή Άσκηση 7.1 για τη διάταξη ενός γραμμικού ηλεκτρικού τετραπόλου, ήτοι τριών σημειακών φορτίων διαταγμένων σε μια ευθεία γραμμή και κατά ίσες αποστάσεις, εκ των οποίων τα δύο ακραία φέρουν ηλεκτρικό φορτίο q και το μεσαίο φορτίο $-2q$.
- 7-3 Χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss ή με άλλο τρόπο δείξτε ότι, γύρω από μια ομοιόμορφη κυλινδρική κατανομή ηλεκτρικού φορτίου σταθερής πυκνότητας ρ , με ακτίνα R και άπειρη έκταση κατά τον άξονά της, το ηλεκτρικό πεδίο έχει ακτινική διεύθυνση και μέτρο



$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \quad r < R$$

$$= \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \quad r \geq R$$
(7.10)

όπου r είναι η απόσταση από τον άξονα της κατανομής.

7-4 Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις για το ηλεκτρικό πεδίο μιας άπειρης κατά τον άξονά της, ομοιόμορφης, κυλινδρικής κατανομής φορτίου ακτίνας R , δείξτε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικού είναι

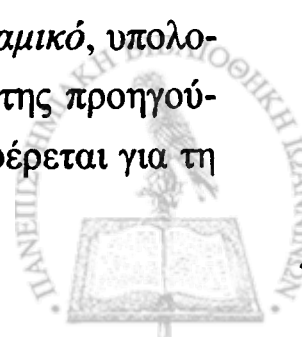
$$\varphi(r) = \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2) \quad r < R$$

$$- \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \quad r \geq R$$
(7.11)

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου.

7-5 Θεωρείστε ένα δισδιάστατο χώρο 75×75 κελιών σε ένα Φύλλο του Excel με κελιά ίσου ύψους και πλάτους, ο οποίος τέμνεται κάθετα από την κατανομή ηλεκτρικού φορτίου των προηγούμενων δύο Ασκήσεων. Θεωρείστε ακόμη ότι ο άξονας της κυλινδρικής κατανομής φορτίου τέμνει το επίπεδο του Φύλλου στο κέντρο του χώρου, ήτοι στο κελί ΑΚ37. Οι διαστάσεις κάθε κελιού είναι 1×1 cm. Για $R = 7$ cm και $\rho = 1.5 \times 10^{-10}$ C cm⁻³

- Σε ένα Φύλλο, που μπορείτε να ονομάσετε Δυναμικό, υπολογίστε τη συνάρτηση δυναμικού των εξ. (7.11) της προηγούμενης Άσκησης [Βοήθημα: Η εξ. (7.11) προσφέρεται για τη



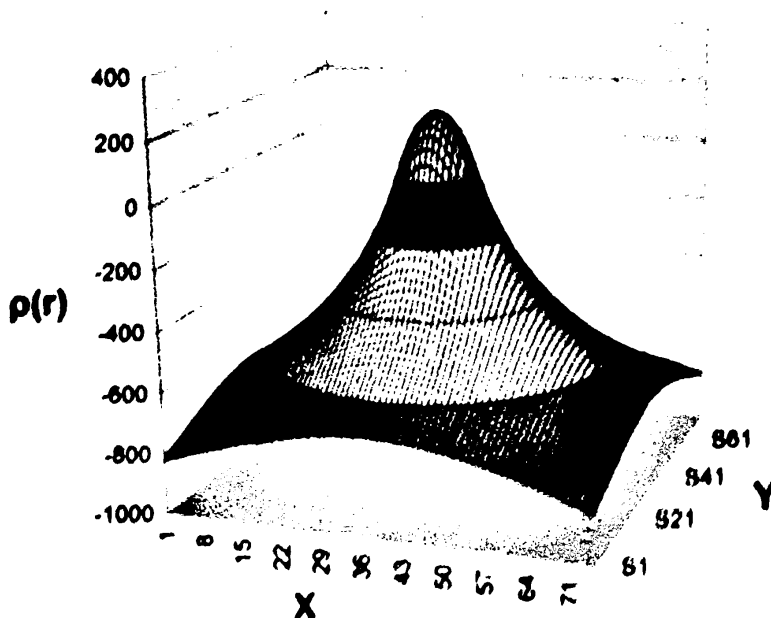
7. Κλίση του δυναμικού και απόκλιση του πεδίου

χρησιμοποίηση μιας συνάρτησης IF(). Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε είναι

$$\begin{aligned} &=IF(SQRT((ROW()-ROW(\$AK\$37))^2 \\ &+(COLUMN()-COLUMN(\$AK\$37))^2)<R0; \\ &\rho\pi\text{I}()*K_e*(R0^2-((ROW()-ROW(\$AK\$37))^2 \\ &+(COLUMN()-COLUMN(\$AK\$37))^2)); \\ &-\rho\text{I}()*K_e*LN(SQRT((ROW()-ROW(\$AK\$37))^2 \\ &+(COLUMN()-COLUMN(\$AK\$37))^2)/R0)) \end{aligned}$$

όπου δύο κελιά, τα οποία περιέχουν τα δεδομένα του προβλήματος R και ρ έχουν ονομαστεί αντίστοιχα $R0$ και ρ . Η ονομασία K_e έχει δοθεί σε κάποιο κελί που περιέχει τη σταθερά $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$].

- Αποδώστε το αποτέλεσμα του υπολογισμού σας σε τρισδιάστατο γράφημα, το οποίο πρέπει να έχει τη μορφή του σχήματος που ακολουθεί



- Με τις αριθμητικές μεθόδους που αναπτύχθηκαν στις Εργαστηριακές Ασκήσεις 7.1 – 7.3, υπολογίστε σε τέσσερα επόμενα Φύλλα, που μπορείτε να ονομάσετε $E(x)$, $E(y)$, Πεδίο και Γωνία E , αντίστοιχα τις δύο συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου, το μέτρο του και τη γωνία που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα.
- Τέλος, σε ένα νέο Φύλλο, υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο μέσω της εξ. (7.10) της Άσκησης 7-3 και συγκρίνετε τα αποτελέσματα του αναλυτικού υπολογισμού με την αριθμητική προσέγγιση.

7-6 Επαναλάβετε την Εργαστηριακή Άσκηση 7.4 χρησιμοποιώντας, αντί της προσέγγισης της δεύτερης παραγώγου μέσω της εξ. (7.4), την απλούστερη προσέγγιση

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_k) = \frac{1}{(\Delta x)^2} [f(x_{k-1}) - 2f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

και σχολιάστε τα αποτελέσματα των δύο προσεγγίσεων.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΟΚΤΩ

Αγωγοί



ΑΝ ΣΤΟΝ ΚΑΤΑ ΤΑ ΑΛΛΑ ΚΕΝΟ ΧΩΡΟ υπάρχει ένα ηλεκτρικό πεδίο - το οποίο προφανώς δημιουργείται από κάποια διάταξη στατικών φορτίων - και στον χώρο αυτό εισαγάγουμε ένα αντικείμενο, το πεδίο θα μεταβληθεί. Το νέο πεδίο που τελικά θα διαμορφωθεί θα εξαρτάται τόσο από το σχήμα όσο και από το υλικό του αντικειμένου. Όσον αφορά τη σύσταση του αντικειμένου, μπορούμε να χωρίσουμε τα υλικά από τα οποία μπορεί να είναι κατασκευασμένο σε δύο κατηγορίες: σε αγωγούς, στο εσωτερικό των οποίων το ηλεκτρικό φορτίο είναι ελεύθερο να κινηθεί και σε διηλεκτρικά υλικά ή μονωτές, όπου το φορτίο παραμένει δέσμιο στη θέση όπου έχει αρχικά τοποθετηθεί. Οι δύο κατηγορίες αυτών υλικών έχουν διαφορετική συμπεριφορά ως προς τα ηλεκτρικά φαινόμενα. Στο Κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσουν τα φαινόμενα που ανακύπτουν από την παρουσία αγωγών στο χώρο. Στο επόμενο Κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις επιπτώσεις της παρουσίας διηλεκτρικών υλικών.

Οι ιδιότητες των αγωγών απορρέουν άμεσα από την ελευθερία που παρέχουν στην απρόσκοπτη κίνηση ηλεκτρικού φορτίου. Μερικές από αυτές είναι:

- Στο εσωτερικό ενός αγωγού η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου και το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζονται.



- Η επιφάνεια ενός αγωγού είναι ισοδυναμική επιφάνεια.
- Αν ο αγωγός φέρει φορτίο, τούτο εμφανίζεται μόνον ως επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.
- Αμέσως έξω από την συνοριακή επιφάνεια μεταξύ αγωγού και κενού χώρου, το ηλεκτρικό πεδίο E είναι κάθετο προς την επιφάνεια του αγωγού με μέτρο ανάλογο προς την επιφανειακή πυκνότητα σ

$$\sigma = \varepsilon_0 E = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (8.1)$$

όπου φ είναι η συνάρτηση δυναμικού.

ΕΙΔΩΛΑ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

Τα ηλεκτροστατικά είδωλα αποτελούν μια μέθοδο προσδιορισμού της συνάρτησης δυναμικού χωρίς την επίλυση διαφορικών εξισώσεων, όπως η εξίσωση Poisson ή η εξίσωση Laplace. Η μέθοδος περιορίζεται σε μια σχετικά μικρή κατηγορία ηλεκτροστατικών συστημάτων, αλλά η εφαρμογή της είναι ενδιαφέρουσα και σημαντική.

Η μέθοδος των ηλεκτροστατικών ειδώλων μπορεί καλύτερα να παρουσιαστεί μέσω ενός απλού παραδείγματος. Ας θεωρήσουμε, όπως φαίνεται στο σχήμα 8-1(α), μια άπειρη σε έκταση, επίπεδη επιφάνεια S ενός αγωγού, ο οποίος καταλαμβάνει τον χώρο V' και διατηρείται σε μηδενικό δυναμικό. Ας θεωρήσουμε ακόμη ότι στον χώρο V , έξω από τον αγωγό, και σε απόσταση d από την επιφάνεια S βρίσκεται ένα σημειακό φορτίο q . Τώρα, δεν χρειάζεται μεγάλη εμπειρία με ηλεκτροστατικά συστήματα για να γνωρίζουμε ότι μια ισοδυναμική επιφάνεια με μηδενικό δυναμικό, όπως η επιφάνεια S ,



απαντάται στο επίπεδο, το οποίο είναι κάθετο στο μέσο της απόστασης μεταξύ δύο ίσων και αντίθετων σημειακών φορτίων $-q$ και q . Το ισοδύναμο αυτό σύστημα, που περιέχεται στο σχήμα 8-1(β), μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της συνάρτησης δυναμικού στο χώρο V . Ειδικότερα, αν θεωρήσουμε ότι το φορτίο q και το είδωλό του q' βρίσκονται κατά τον άξονα Z και ως αρχή των συντεταγμένων ληφθεί η τομή της επιφάνειας S με το μέσο της απόστασης μεταξύ των δύο φορτίων, μπορούμε να γράψουμε

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(z-d)^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+d)^2 + \rho^2}} \right) \quad (8.2)$$

όπου

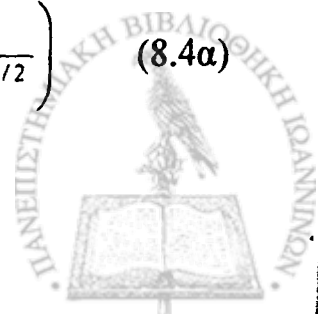
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

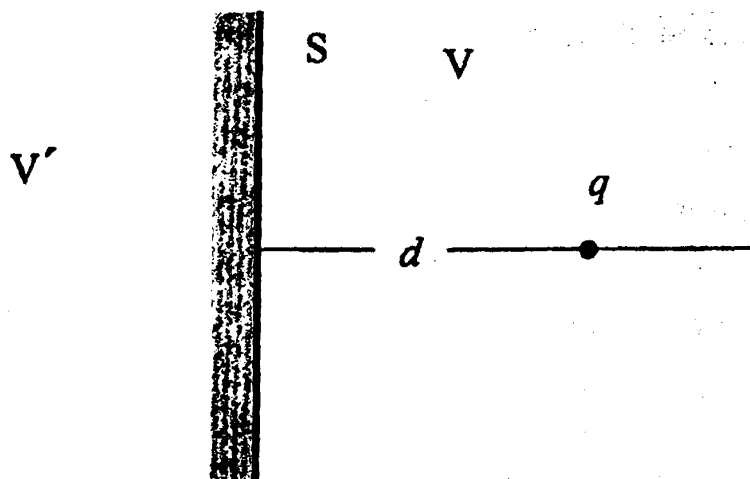
είναι η απόσταση της προβολής του σημείου (x, y, z) πάνω στην επιφάνεια S από την αρχή των συντεταγμένων, ενώ, από την εξ. (8.1), η πυκνότητα φορτίου στην επιφάνεια του αγωγού S δίνεται ως

$$\sigma = \epsilon_0 E = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{zx=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (8.3)$$

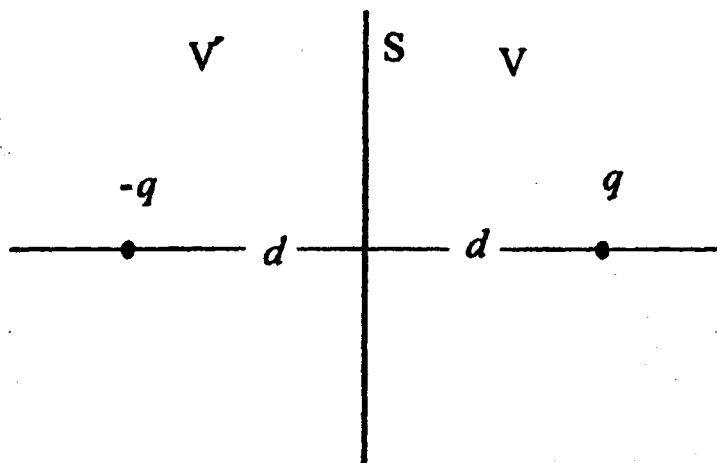
Από τη σχέση $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ και με απ' ευθείας παραγωγή της εξ. (8.2) μπορούμε ακόμη να προσδιορίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο V . Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κατά τον άξονα Z δίνεται από τη σχέση

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z-d}{[(z-d)^2 + \rho^2]^{3/2}} - \frac{z+d}{[(z+d)^2 + \rho^2]^{3/2}} \right) \quad (8.4\alpha)$$





(α)



(β)

Σχήμα 8-1 (α) Σύστημα σημειακού φορτίου και γειωμένου αγωγού.
 (β) Ισοδύναμο σύστημα σημειακού φορτίου και ηλεκτροστατικού
 ειδώλου.

ενώ κατά την απόσταση ρ από την αρχή των συντεταγμένων, πάνω στο
 επίπεδο XY, από τη σχέση

$$E_{\rho} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\rho}{[(z-d)^2 + \rho^2]^{3/2}} - \frac{\rho}{[(z+d)^2 + \rho^2]^{3/2}} \right) \quad (8.4\beta)$$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 8.1

Σημειακό φορτίο σε μικρή απόσταση από επίπεδη επιφάνεια γειωμένου αγωγού

1. Δημιουργείστε ένα νέο Βιβλίο του *Excel* με τα εξής Φύλλα

1. Δεδομένα
2. Δυναμικό
3. $E(z)$
4. $E(\rho)$
5. Πεδίο
6. Γωνία
7. Πυκνότητα φορτίου

2. Στο Φύλλο *Δεδομένα* γράψτε τα δεδομένα του προβλήματος. Στα πλαίσια του *Excel*, θα θεωρήσουμε ότι το επίπεδο *XZ* καταλαμβάνει ένα χώρο 25×25 κελιών με την επιφάνεια *S* κάθετη προς το Φύλλο του *Excel* κατά την κατακόρυφη διεύθυνση στη στήλη x_0 και το φορτίου q σε απόστασ d δεξιά της επιφανείας

	A	B	C
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	8.96E+09	
2	$q =$	1.50E-06	
3	$d =$	6	
4	$x_0 =$	10	
5			

Ονομάστε το κελί B1, K_e , το κελί B2, q , το κελί B3, d και το κελί B4, x_0 .

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα



ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο Όνόματα στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Ke). Επιλέξτε OK.

3. Στο Φύλλο *Δυναμικό*, υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί το φορτίο q και το είδωλό του στο χώρο σύμφωνα με την εξ. (8.2). Για το σκοπό αυτό, μπορείτε να γράψετε στο κελί A1 την έκφραση

$$=IF(COLUMN()-x0;0;Ke*q*(1/(SQRT((COLUMN()-x0-d)^2+(ROW()-ROW(A13))^2))-1/(SQRT((COLUMN()-x0+d)^2+(ROW()-ROW(A13))^2))))$$

Παρατηρείται ότι το δυναμικό της εξ. (8.2) ισχύει μόνο στον χώρο V του σχήματος 8-1, ενώ στο χώρο V' (στο εσωτερικό του αγωγού) μηδενίζεται. Τούτο εξασφαλίζεται από τη συνάρτηση $IF()$ που περιβάλλει την τελευταία σχέση.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
- Παρατηρείται ακόμη ότι η εξ. (8.2), και επομένως η σχέση του *Excel* που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του δυναμικού, δίνει απροσδιόριστο αποτέλεσμα (διαίρεση δια του μηδενός) σε σημεία του χώρου όπου υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο. Έτσι στο κελί που αντιστοιχεί στη θέση του φορτίου q υπάρχει τώρα η ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Το σφάλμα θα ήταν δυνατόν να αποτραπεί αν περιβάλλαμε την έκφραση που υπολογίζει το δυναμικό με μια συνάρτηση $IF()$. Η λύση αυτή παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι επιβραδύνει κατά τι τον υπολογισμό. Μια πλέον πρακτική λύση είναι να επέμβετε μετά το πέρας του υπολογισμού και στο κελί που περιέχει την ανω-



μαλία να εισαγάγετε μια αυθαίρετη τιμή (π.χ., την τιμή 0).

4. Αποδώστε τις τιμές του Φύλλου Δυναμικό σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο Δυναμικό επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο >**
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο >**
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Δυναμικό σημειακού φορτίου
έξω από γειωμένο επίπεδο αγωγό

Κατηγορία (X): Z

Τιμή (Z): Δυναμικό

Σειρά (Y): ρ

- Στην καρτέλα **Υπόμνημα** βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή **Εμφάνιση υπομνήματος**.



- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του *Excel* έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει τη γραφική παράσταση.

Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του *Excel* **Γράφημα** → **Προβολή 3Δ...** Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

5. Στο Φύλλο *E(z)* υπολογίστε την οριζόντια συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με την εξ. (8.4α). Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο κελί A1 είναι

$$=IF(COLUMN()<x0;"";Ke*q*((COLUMN()-x0-d)/((COLUMN()-x0-d)^2+(ROW()-ROW(A13))^2)^1.5-(COLUMN()-x0+d)/((COLUMN()-x0+d)^2+(ROW()-ROW(A13))^2)^1.5)$$

όπου η εξωτερική συνάρτηση *IF()* εξασφαλίζει ότι το ηλεκτρικό πεδίο ορίζεται μόνο στο χώρο *V* του σχήματος 8-1.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
- Διορθώστε τα κελιά που περιέχουν την ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Με τον τρόπο που αντιμετωπίσατε το σφάλμα στο Φύλλο Δυναμικό.



6. Στο Φύλλο $E(\rho)$ υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με την εξ. (8.4β). Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο κελί A1 είναι

$$=IF(COLUMN()-x0;"";q*Ke*((ROW()-ROW(A13))
/((COLUMN()-x0+d)^2+(ROW()-ROW(A13))^2)^1.5
-(ROW()-ROW(A13))
/((COLUMN()-x0-d)^2+(ROW()-ROW(A13))^2)^1.5))$$

όπου η εξωτερική συνάρτηση IF() εξασφαλίζει ότι το ηλεκτρικό πεδίο ορίζεται μόνο στο χώρο V του σχήματος 8-1.

Παρατηρείται ότι οι εκφράσεις για τον υπολογισμό της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας του πεδίου διαφέρουν κατά ένα αρνητικό πρόσημο. Τούτο είναι απόρροια του ιδιότυπου συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε στο *Excel*.

Συμβατικά συστήματα συντεταγμένων στο χώρο δύο διαστάσεων αποδίδουν τη θέση ενός σημείου μέσω ενός οριζόντιου άξονα X και ένα κατακόρυφο άξονα Y, των οποίων οι τιμές αυξάνουν αντίστοιχα προς τα δεξιά και προς τα άνω. Η σωστή φορά του άξονα X παραμένει σε ένα σύστημα συντεταγμένων του *Excel* αν η οριζόντια συνιστώσα x αποδοθεί με τη στήλη του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση COLUMN(). Αν όμως η κατακόρυφη συνιστώσα y αποδοθεί με τη σειρά του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση ROW(), η φορά του άξονα Y είναι αντίστροφη από την αναμενόμενη, καθόσον η αρίθμηση των κελιών αυξάνει προς τα κάτω.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.



- Διορθώστε τα κελιά που περιέχουν την ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Με τον τρόπο που αντιμετωπίσατε το σφάλμα στο Φύλλο Δυναμικό.

7. Στο Φύλλο Πεδίο, υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μέσω της σχέσης

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_\rho^2} \quad (8.5)$$

τοποθετώντας στο κελί A1 την εντολή

=IF(COLUMN()<x0;"";SQRT('E(ρ)'!A1^2+'E(z)'!A1^2))

και αντιγράφοντάς την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

8. Στο Φύλλο Γωνία, υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το άνωσμα E με τον οριζόντιο άξονα X. Για το σκοπό αυτό

- Τοποθετείστε στο κελί A1 την εντολή

=IF(COLUMN()<x0;"";IF('E(ρ)'!A1<0;
ATAN2('E(z)'!A1;'E(ρ)'!A1)*180/PI()+360;
ATAN2('E(z)'!A1;'E(ρ)'!A1)*180/PI()))

όπου η εξωτερική συνάρτηση IF() εξασφαλίζει ότι το ηλεκτρικό πεδίο ορίζεται μόνο στο χώρο V του σχήματος 8-1.

Η σύνταξη της συνάρτησης ATAN2 είναι:

ATAN2(X, Y)

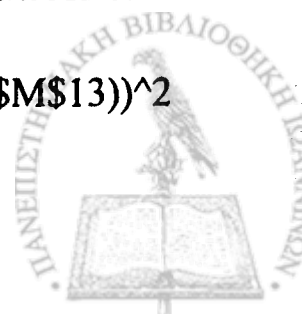


όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο XY . Παρατηρείται ότι η συνάρτηση $ATAN2(X,Y)$ επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση. Η συνάρτηση $ATAN2(X,Y)$ επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

Το αποτέλεσμα της συνάρτησης $ATAN2$ μπορεί να μετατραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το Excel διαθέτει τη συνάρτηση $PI()$, η οποία επιστρέφει την τιμή π ($= 3.14\dots$) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή $A1:Y25$.
 - Διορθώστε τα κελιά που περιέχουν την ένδειξη $\#ΔΙΑΠ/0!$ Με τον τρόπο που αντιμετωπίσατε το σφάλμα στο Φύλλο Δυναμικό.
9. Τέλος, στο Φύλλο Πυκνότητα φορτίου υπολογίστε την επιφανειακή πυκνότητα στον αγωγό που προβλέπει η εξ. (8.3). Θεωρείστε μια περιοχή της επιφάνειας του αγωγού που καλύπτει στο Φύλλο Πυκνότητα φορτίου την περιοχή των κελιών $A1:Y25$ με το σημειακό φορτίο q σε απόσταση d απέναντι από το κελί $M13$. Η έκφραση που μπορείτε να καταχωρήσετε στο κελί $A1$ είναι

$$=-q*d/(2*PI()*(d^2+(COLUMN()-COLUMN(M13))^2$$



$$+(\text{ROW}()-\text{ROW}(\$M\$13))^2)^{1.5}$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

10. Αποδώστε σε τρισδιάστατο γράφημα την πυκνότητα φορτίου στην επιφάνεια του αγωγού και σχολιάστε το αποτέλεσμα.

9. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου

- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (*Excel 2000*) ή Να μη γίνει ενημέρωση (*Excel XP*).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.
- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.



Μεγαλύτερο ενδιαφέρον εμφανίζει η παρουσία στο χώρο σφαιρικών αγωγών. Για την επίλυση παρόμοιων προβλήματα θα εκμεταλλευτούμε δύο απλές παρατηρήσεις από την εμπειρία μας με σημειακά φορτία:

- Οι ισοδυναμικές επιφάνειες που δημιουργεί ένα σημειακό φορτίο είναι σφαιρικές επιφάνειες με κέντρο τη θέση του φορτίου.
- Δύο σημειακά φορτία q_1 και q_2 , τα οποία απέχουν απόσταση d , δημιουργούν στο χώρο μια και μόνον σφαιρική ισοδυναμική επιφάνεια με δυναμικό $\varphi = 0$, ακτίνα

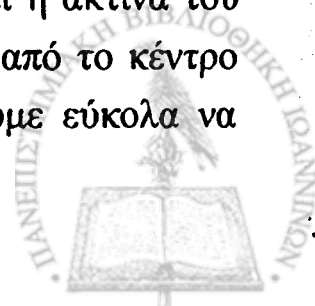
$$R = \left| \frac{q_1 q_2}{q_1^2 - q_2^2} \right| d, \quad (8.6)$$

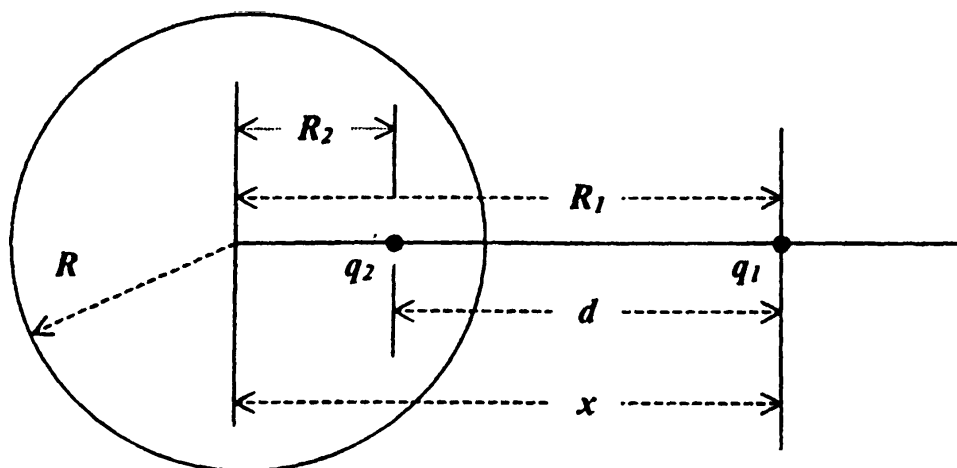
κέντρο πάνω στην ευθεία που ενώνει τα δύο φορτία και σε απόσταση

$$x = \frac{q_1^2}{q_1^2 - q_2^2} d \quad (8.7)$$

από το φορτίο q_1 . Το αποτέλεσμα αυτό είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί από τη μορφή της συνάρτησης δυναμικού δύο σημειακών φορτίων.

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύστημα του σχήματος 8-2, ήτοι ένα γειωμένο σφαιρικό αγωγό ακτίνας R και ένα σημειακό φορτίο q_1 έξω από τον αγωγό σε απόσταση $R_1 > R$ από το κέντρο του. Στην περίπτωση αυτή τα δεδομένα του προβλήματος είναι η ακτίνα του αγωγού R και η απόσταση $R_1 (= x)$ του φορτίου q_1 από το κέντρο του. Αντιστρέφοντας τις εξ. (8.6) και (8.7) μπορούμε εύκολα να





Σχήμα 8-2 Σφαιρική ισοδυναμική επιφάνεια δύο σημειακών φορτίων.

προσδιορίσουμε τη θέση του φορτίου q_2 που θα δημιουργήσει μηδενική ισοδυναμική επιφάνεια στη θέση της σφαιρικής επιφάνειας του αγωγού ως

$$R_2 = \frac{R^2}{R_1} \quad (8.8)$$

και την τιμή του ως

$$q_2 = -\frac{R}{R_1} q_1. \quad (8.9)$$

Δεν χρειάζεται τώρα παρά ένα βήμα για να επεκτείνουμε το πρόβλημα στην περίπτωση ενός αγωγού σε σταθερό δυναμικό. Αν U είναι η τιμή της ισοδυναμικής επιφάνειας του αγωγού, αυτή μπορεί να δημιουργηθεί από την τοποθέτηση ενός σημειακού φορτίου

$$q_3 = 4\pi\epsilon_0 R U \quad (8.10)$$

στο κέντρο του.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 8.2

Σημειακό φορτίο σε μικρή απόσταση από σφαιρικό αγωγό

Θα θεωρήσουμε ένα σφαιρικό αγωγό ακτίνας $R = 5 \text{ m}$, ο οποίος διατηρείται σε δυναμικό $U = 1 \text{ kV}$ και ένα σημειακό φορτίο $q_1 = 5 \text{ } \mu\text{C}$, σε απόσταση $R_1 = 16 \text{ m}$ από το κέντρο του αγωγού.

Το σύστημα διαθέτει συμμετρία γύρω από τον άξονα που ενώνει το φορτίο q_1 και το κέντρο του σφαιρικού αγωγού, τον οποίο θα θεωρήσουμε ως τον άξονα X . Μπορούμε επομένως να εργαστούμε σε δύο διαστάσεις και να γράψουμε το δυναμικό σε όλο το χώρο εκτός του αγωγού ως

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{\sqrt{(x - R_1)^2 + y^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x - R_2)^2 + y^2}} + \frac{q_3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \quad (8.11)$$

ενώ από τη σχέση $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ και με απ' ευθείας παραγωγή της εξ. (8.11) μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου ως

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1(x - R_1)}{[(x - R_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{q_2(x - R_2)}{[(x - R_2)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{q_3x}{[x^2 + y^2]^{3/2}} \right) \quad (8.12\alpha)$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1y}{[(x - R_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{q_2y}{[(x - R_2)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{q_3y}{[x^2 + y^2]^{3/2}} \right) \quad (8.12\beta)$$

1. Δημιουργείστε ένα νέο Βιβλίο του *Excel* με τα εξής Φύλλα

1. Δεδομένα



2. Δυναμικό
3. $E(x)$
4. $E(y)$
5. Πεδίο
6. Γωνία

2. Στο Φύλλο Δεδομένα γράψτε τα δεδομένα του προβλήματος, ήτοι την ακτίνα της σφαίρας, το δυναμικό της επιφανείας της, το μέγεθος του σημειακού φορτίου και την απόσταση του σημειακού φορτίου από το κέντρο της σφαίρας. Προετοιμάστε ακόμη ένα πίνακα για τα στοιχεία των ειδώλων.

	A	B	C	D	E	F
1	$1/4πε_0 =$	8.96E+09		R2 =	1.5625	
2	R =	5		q2 =	-1.56E-06	
3	U =	1000		q3 =	5.58E-07	
4	Κέντρο =	\$F\$13				
5	q1 =	5.00E-06				
6	R1 =	16				
7						

Ονομάστε τα κελιά στο Φύλλο Δεδομένα σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα

Κελί	Όνομα
B1	Ke
B2	R0
B3	U
B5	q_1
B6	R_1
E1	R_2
E2	q_2
E3	q_3



Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα στο βιβλίο εργασίας**: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Ke). Επιλέξτε **OK**.

Στα κελιά E1, E2 και E3 υπολογίστε αντίστοιχα τις παραμέτρους R_1 , q_2 και q_3 των ειδώλων σύμφωνα με τις εξ. (8.8) – (8.10) καταχωρώντας τις εντολές

$$E1: \quad =R0^2/R_1$$

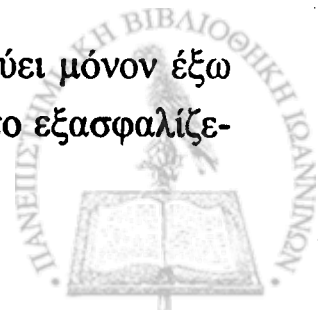
$$E2: \quad =-R0/R_1*q_1$$

$$E3: \quad =1/Ke*R0*U$$

3. Στο Φύλλο *Δυναμικό*, υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί το φορτίο q_1 και τα είδωλά του στο χώρο σύμφωνα με την εξ. (8.11). Με τα δεδομένα του προβλήματος που μόλις καταχωρίσατε, μπορείτε να γράψετε στο κελί A1 την έκφραση

$$\begin{aligned} &=IF(SQRT((ROW()-ROW(\$F\$13))^2 \\ &+(COLUMN()-COLUMN(\$F\$13))^2)<R0;0; \\ &Ke*(q_3/SQRT((COLUMN()-COLUMN(\$F\$13))^2 \\ &+(ROW(\$F\$13)-ROW())^2) \\ &+q_2/SQRT((COLUMN()-COLUMN(\$F\$13)-R_2)^2 \\ &+(ROW(\$F\$13)-ROW())^2) \\ &+q_1/SQRT((COLUMN()-COLUMN(\$F\$13)-R_1)^2 \\ &+(ROW(\$F\$13)-ROW())^2))) \end{aligned}$$

Παρατηρείται ότι το δυναμικό της εξ. (8.11) ισχύει **μόνον** έξω από τον σφαιρικό αγωγό του σχήματος 8-2. Τούτο εξασφαλίζε-



ται από τη συνάρτηση IF() που περιβάλλει την τελευταία σχέση.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
 - Παρατηρείται ακόμη ότι η εξ. (8.11), και επομένως η σχέση του Excel που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του δυναμικού, δίνει απροσδιόριστο αποτέλεσμα (διαίρεση δια του μηδενός) σε σημεία του χώρου όπου υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο. Έτσι στο κελί όπου έχει τοποθετηθεί το φορτίο q , υπάρχει τώρα η ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Το σφάλμα θα ήταν δυνατόν να αποτραπεί αν περιβάλλαμε την έκφραση που υπολογίζει το δυναμικό με μια συνάρτηση IF(). Η λύση αυτή παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι επιβραδύνει κατά τι τον υπολογισμό. Μια πλέον πρακτική λύση είναι να επέμβουμε μετά το πέρας του υπολογισμού και στο επίμαχο κελί να εισαγάγουμε μια αυθαίρετη τιμή. Η πιο λογική τιμή είναι ίσως ο μέσος όρος των τιμών που περιέχονται στα γειτονικά του κελιά.
4. Αποδώστε τις τιμές του Φύλλου Δυναμικό σε τρισδιάστατο γράφημα.
- Στο Φύλλο Δυναμικό επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
 - Από τα μενού επιλέξτε Εισαγωγή → Γράφημα...
 - Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Επιφάνεια → Επόμενο >
 - Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε Επόμενο >



- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα Τίτλοι και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Δυναμικό σημειακού φορτίου
έξω από αγωγήμη σφαίρα

Κατηγορία (X): X

Τιμή (Z): Δυναμικό

Σειρά (Y): Y

- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει τη γραφική παράσταση.

Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του Excel Γράφημα → Προβολή 3Δ... Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

5. Στο Φύλλο $E(x)$ υπολογίστε την οριζόντια συνιστώσα του πεδί-



ου σύμφωνα με την εξ. (8.12α). Η έκφραση που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στο κελί A1 είναι

$$\begin{aligned}
 &=IF(SQRT((ROW()-ROW(\$F\$13))^2 \\
 &+(COLUMN()-COLUMN(\$F\$13))^2)<R0;0; \\
 &Ke*(q_3*(COLUMN()-COLUMN(\$F\$13)) \\
 &/((COLUMN()-COLUMN(\$F\$13))^2 \\
 &+(ROW(\$F\$13)-ROW())^2)^{1.5} \\
 &+q_2*(COLUMN()-COLUMN(\$F\$13)-R_2) \\
 &/((COLUMN()-COLUMN(\$F\$13)-R_2)^2 \\
 &+(ROW(\$F\$13)-ROW())^2)^{1.5} \\
 &+q_1*(COLUMN()-COLUMN(\$F\$13)-R_1) \\
 &/((COLUMN()-COLUMN(\$F\$13)-R_1)^2 \\
 &+(ROW(\$F\$13)-ROW())^2)^{1.5}))
 \end{aligned}$$

όπου η εξωτερική συνάρτηση IF() εξασφαλίζει ότι το ηλεκτρικό πεδίο ορίζεται μόνον έξω από το σφαιρικό αγωγό του σχήματος 8-2.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
 - Διορθώστε τα κελιά που περιέχουν την ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Με τον τρόπο που αντιμετωπίσατε το σφάλμα στο Φύλλο Δυναμικό.
6. Στο Φύλλο $E(y)$ υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με την εξ. (8.12β). Η έκφραση που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στο κελί A1 είναι

$$=IF(SQRT((ROW()-ROW(\$F\$13))^2$$



$$\begin{aligned}
 &+(\text{COLUMN}()-\text{COLUMN}(\$F\$13))^2)<R0;0; \\
 &-K_e*(q_3*(\text{ROW}()-\text{ROW}(\$F\$13))/((\text{COLUMN}()-\text{COLUMN}(\$F\$13))^2 \\
 &+(\text{ROW}(\$F\$13)-\text{ROW}())^2)^{1.5} \\
 &+q_2*(\text{ROW}()-\text{ROW}(\$F\$13))/((\text{COLUMN}()-\text{COLUMN}(\$F\$13)-R_2)^2 \\
 &+(\text{ROW}(\$F\$13)-\text{ROW}())^2)^{1.5} \\
 &+q_1*(\text{ROW}()-\text{ROW}(\$F\$13))/((\text{COLUMN}()-\text{COLUMN}(\$F\$13)-R_1)^2 \\
 &+(\text{ROW}(\$F\$13)-\text{ROW}())^2)^{1.5})
 \end{aligned}$$

όπου η εξωτερική συνάρτηση IF() εξασφαλίζει ότι το ηλεκτρικό πεδίο ορίζεται μόνον έξω από το σφαιρικό αγωγό του σχήματος 8-2.

Παρατηρείται ότι οι εκφράσεις για τον υπολογισμό της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας του πεδίου διαφέρουν κατά ένα αρνητικό πρόσημο. Τούτο είναι απόρροια του ιδιότυπου συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε στο *Excel*.

Συμβατικά συστήματα συντεταγμένων στο χώρο δύο διαστάσεων αποδίδουν τη θέση ενός σημείου μέσω ενός οριζόντιου άξονα X και ένα κατακόρυφο άξονα Y, των οποίων οι τιμές αυξάνουν αντίστοιχα προς τα δεξιά και προς τα άνω. Η σωστή φορά του άξονα X παραμένει σε ένα σύστημα συντεταγμένων του *Excel* αν η οριζόντια συνιστώσα x αποδοθεί με τη στήλη του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση COLUMN(). Αν όμως η κατακόρυφη συνιστώσα y αποδοθεί με τη σειρά του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση ROW(), η φορά του άξονα Y είναι αντίστροφη από την αναμενόμενη, καθόσον η αρίθμηση των κελιών αυξάνει προς τα κάτω.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.



- Διορθώστε τα κελιά που περιέχουν την ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Με τον τρόπο που αντιμετωπίσατε το σφάλμα στο Φύλλο Δυναμικό.

7. Στο Φύλλο *Πεδίο*, υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μέσω της σχέσης

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad (8.5)$$

τοποθετώντας στο κελί A1 την εντολή

```
=IF(SQRT((ROW()-ROW($F$13))^2
+(COLUMN()-COLUMN($F$13))^2)<R0;"";
SQRT('E(y)!'A1^2+'E(x)!'A1^2))
```

και αντιγράφοντάς την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

8. Τέλος, στο Φύλλο *Γωνία*, υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το άνυσμα **E** με τον οριζόντιο άξονα **X**. Για το σκοπό αυτό

- Τοποθετείστε στο κελί A1 την εντολή

```
=IF(SQRT((ROW()-ROW($F$13))^2
+(COLUMN()-COLUMN($F$13))^2)<R0;"";
IF('E(y)!'A1<0;ATAN2('E(x)!'A1;'E(y)!'A1)*180/PI()+360;
ATAN2('E(x)!'A1;'E(y)!'A1)*180/PI()))
```

όπου η εξωτερική συνάρτηση IF() εξασφαλίζει ότι το ηλεκτρικό πεδίο ορίζεται μόνον έξω από το σφαιρικό αγωγό του σχήματος 8-2.



Η σύνταξη της συνάρτησης ATAN2 είναι:

$$\text{ATAN2}(X,Y)$$

όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο XY . Παρατηρείται ότι η συνάρτηση $\text{ATAN2}(X,Y)$ επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση. Η συνάρτηση $\text{ATAN2}(X,Y)$ επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

Το αποτέλεσμα της συνάρτησης ATAN2 μπορεί να μετατραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το

Excel διαθέτει τη συνάρτηση $\text{PI}()$, η οποία επιστρέφει την τιμή π ($= 3.14\dots$) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
9. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
 - Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (*Excel 2000*) ή Να μη γίνει ενημέρωση (*Excel XP*).



Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.
- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.

ΣΦΑΙΡΙΚΟΣ ΑΓΩΓΟΣ ΣΕ ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Η μέθοδος των ηλεκτροστατικών ειδώλων που μόλις μελετήσαμε επιτρέπει τη διερεύνηση της συμπεριφοράς μιας αγώγιμης σφαίρας στην περιοχή ενός αρχικά σταθερού και ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου. Χωρίς να χάσουμε τίποτε από τη γενικότητα, θα θεωρήσουμε ότι το σταθερό αυτό πεδίο \mathbf{E} είναι παράλληλο προς τον άξονα των συντεταγμένων Z

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{k}} \quad (8.13)$$

Το αντίστοιχο δυναμικό έχει προφανώς τη μορφή

$$\varphi = -E_0 z + C = -E_0 r \cos \theta + C \quad (8.14)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το άνυσμα θέσης \mathbf{r} με τον άξο-



να Z και C μια σταθερά. Αν επιλέξουμε την τιμή του δυναμικού στην αρχή των συντεταγμένων ίση με το μηδέν, ήτοι $\varphi(z = 0) = 0$ έπεται ότι και η τιμή της σταθεράς C είναι ίση με το μηδέν και το δυναμικό παίρνει τη μορφή

$$\varphi = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta . \quad (8.15)$$

Το ομογενές πεδίο που μόλις περιγράψαμε μπορεί να δημιουργηθεί με τη βοήθεια κατάλληλων σημειακών φορτίων. Αν, για παράδειγμα, δύο ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$ τοποθετηθούν στα σημεία $\mp d$ του άξονα Z , τότε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται κοντά στην αρχή των συντεταγμένων είναι σε καλή προσέγγιση ομογενές και με τη μορφή της εξ. (8.13). Η προσέγγιση γίνεται καλύτερη όσο τα σημειακά φορτία $\pm Q$ απομακρύνονται από την αρχή των συντεταγμένων.

Θα θεωρήσουμε τώρα ότι στον χώρο αυτό εισάγεται μια αφόρτιστη σφαίρα από αγωγίμο υλικό με ακτίνα R και κέντρο την αρχή των συντεταγμένων. Περιμένουμε ότι τα φορτία των δομικών λίθων που συγκροτούν το υλικό της σφαίρας - και που μέχρι τη στιγμή αυτή ήσαν ομοιόμορφα κατανεμημένα ώστε η σφαίρα να εμφανίζεται αφόρτιστη - θα ανακατανεμηθούν, έτσι ώστε να ικανοποιούνται όλες οι ιδιότητες ενός αγωγού. Συγκεκριμένα περιμένουμε ότι θα δημιουργηθεί μια επιφανειακή κατανομή φορτίου, τέτοια ώστε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού (πεδίο που δημιουργεί η επιφανειακή κατανομή φορτίου, συν το εξωτερικό πεδίο) να έχει τιμή ίση με το μηδέν. Το ηλεκτρικό πεδίο έξω από τον αγωγό θα ισούται τώρα με το ανυσματικό άθροισμα του αρχικού πεδίου της εξ. (8.13) και του πεδίου που δημιουργεί η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του αγωγού. Η γεωμετρία της διάταξης δίνεται στο σχήμα 8-3.



Από τις εξ. (8.8) και (8.9), τα είδωλα των φορτίων $\pm Q$ στα σημεία $\mp d$ έχουν τιμές

$$q = \mp \frac{QR}{d} \quad (8.16)$$

και βρίσκονται στα σημεία

$$d_1 = \mp \frac{R^2}{d}. \quad (8.17)$$

Σε ένα σημείο επομένως του χώρου με συντεταγμένες (r, θ) η συνάρτηση δυναμικού θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{(r^2 + d^2 + 2rd \cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta)^{1/2}} \right] \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{QR}{d \left(r^2 + \frac{R^4}{d^2} + \frac{2R^2 r}{d} \cos\theta \right)^{1/2}} + \frac{QR}{d \left(r^2 + \frac{R^4}{d^2} - \frac{2R^2 r}{d} \cos\theta \right)^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (8.18)$$

Στην προσέγγιση $r \ll d$ η εξ. (8.18) μπορεί να γραφεί ως

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{d \left(1 + \frac{2r}{d} \cos\theta \right)^{1/2}} - \frac{Q}{d \left(1 - \frac{2r}{d} \cos\theta \right)^{1/2}} \right]$$



$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{QR}{dr \left(1 + \frac{2R^2}{d^2} \cos\theta\right)^{1/2}} + \frac{QR}{dr \left(1 - \frac{2R^2}{d^2} \cos\theta\right)^{1/2}} \right] \quad (8.19)$$

που με τη βοήθεια του διώνυμου αναπτύγματος

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2} x \quad (8.20)$$

για $x \ll 1$, δίνει την εξαιρετικά απλή μορφή

$$\varphi(r, \theta) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos\theta. \quad (8.21)$$

Παρατηρείται ότι η ποσότητα

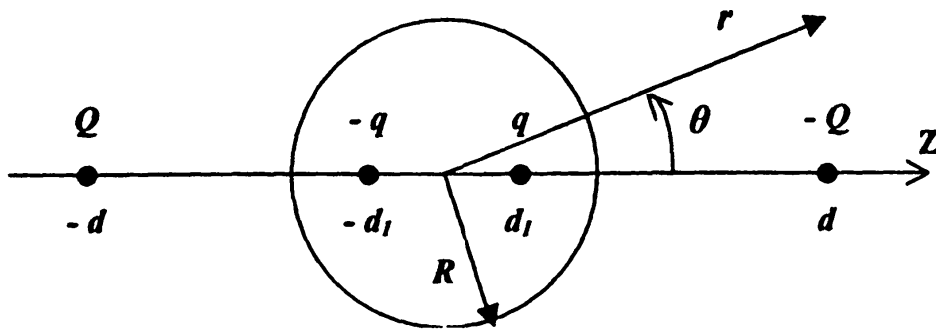
$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} \quad (8.22)$$

είναι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν τα φορτία Q και $-Q$, ήτοι το σταθερό ηλεκτρικό πεδίο προτού εισαχθεί στο χώρο ο σφαιρικός αγωγός. Θα γράψουμε επομένως την τελική μορφή του πεδίου έξω από τον αγωγό ως

$$\varphi(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos\theta, \quad r > R \quad (8.23\alpha)$$

Προφανώς, στην επιφάνεια και στο εσωτερικό της σφαίρας





Σχήμα 8-3 Σφαιρικός αγωγός σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

$$\varphi(r, \theta) = 0, \quad r \leq R \quad (8.23\beta)$$

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου της σφαίρας μπορεί να βρεθεί με απ' ευθείας παραγωγή της εξ. (8.23α). Σύμφωνα με την εξ. (8.1)

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = \epsilon_0 E_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \Big|_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (8.24)$$

ενώ το ηλεκτρικό πεδίο απαιτεί την πλέον περίπλοκη παραγωγή της εξ. (8.23α) στην έκφραση $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Έτσι, οι τρεις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου έξω από τον σφαιρικό αγωγό είναι

$$E_x = 3xz \frac{R^3}{r^5} E_0 \quad (8.25\alpha)$$

$$E_y = 3yz \frac{R^3}{r^5} E_0 \quad (8.25\beta)$$

$$E_z = \left(1 - \frac{R^3}{r^3} + 3z^2 \frac{R^3}{r^5} \right) E_0 \quad (8.25\gamma)$$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 8.3

Γειωμένος σφαιρικός αγωγός σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Θα θεωρήσουμε ένα σφαιρικό αγωγό ακτίνας $R = 7 \text{ m}$, ο οποίος διατηρείται σε δυναμικό $U = 0$ και ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο $E_0 = 1 \text{ kV}$ κατά τον οριζόντιο άξονα.

Το σύστημα διαθέτει συμμετρία γύρω από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του σφαιρικού αγωγού, τον οποίο θα θεωρήσουμε ως τον άξονα Z . Μπορούμε επομένως να εργαστούμε σε δύο διαστάσεις (στο επίπεδο XZ) και να γράψουμε το δυναμικό, σύμφωνα με τις εξ. (8.23) ως

$$\begin{aligned} \varphi(x, z) &= -E_0 z \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right), & r > R \\ &= 0, & r \leq R \end{aligned} \quad (8.26)$$

όπου, ως συνήθως, $r = \sqrt{x^2 + z^2}$. Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου δίνονται από τις εξ. (8.25α) και (8.25γ).

1. Δημιουργείστε ένα νέο Βιβλίο του *Excel* με τα εξής Φύλλα

1. Δεδομένα
2. Δυναμικό
3. $E(z)$
4. $E(y)$
5. Πεδίο
6. Γωνία

2. Στο Φύλλο *Δεδομένα* γράψτε τα δεδομένα του προβλήματος.



	A	B	C
1	R =	7	
2	Κέντρο =	\$M\$13	
3	E0 =	1000	
4			

Ονομάστε το κελί B1, R0 και το κελί B3, E0

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα** στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., R0). Επιλέξτε **OK**.

3. Στο Φύλλο *Δυναμικό*, υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργείται στο χώρο σύμφωνα με την εξ. (8.26). Με τα δεδομένα του προβλήματος που μόλις καταχωρίσατε, μπορείτε να γράψετε στο κελί A1 την έκφραση

$$=IF(SQRT((ROW()-ROW(\$M\$13))^2+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)<R0;0;-E0*(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))*(1-R0^3)/((ROW()-ROW(\$M\$13))^2+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)^1.5))$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

4. Αποδώστε τις τιμές του Φύλλου *Δυναμικό* σε τρισδιάστατο γράφημα.
- Στο Φύλλο *Δυναμικό* επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
 - Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**



- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο** >
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο** >
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες **Z**, **X** και **Y**, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Δυναμικό σφαιρικού αγωγού σε ομογενές πεδίο

Κατηγορία (X): Z

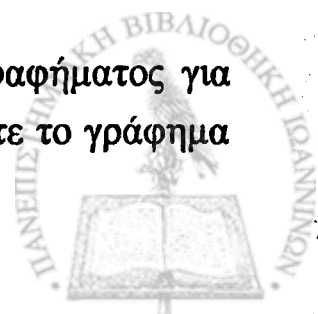
Τιμή (Z): Δυναμικό

Σειρά (Y): Y

- Στην καρτέλα **Υπόμνημα** βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή **Εμφάνιση υπομνήματος**.
- Επιλέξτε **Επόμενο** >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Σε νέο φύλλο εργασίας**. Επιλέξτε **Τέλος**.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει τη γραφική παράσταση.

Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα



και από τα μενού του *Excel* **Γράφημα** → **Προβολή 3Δ...** Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

5. Στο Φύλλο $E(z)$ υπολογίστε την οριζόντια συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με την εξ. (8.25γ). Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο κελί A1 είναι

```
=IF(SQRT((ROW()-ROW($M$13))^2
+(COLUMN()-COLUMN($M$13))^2)<R0;0;
E0*(1-R0^3/((ROW()-ROW($M$13))^2
+(COLUMN()-COLUMN($M$13))^2)^1.5
+3*(COLUMN()-COLUMN($M$13))^2*R0^3
/((ROW()-ROW($M$13))^2
+(COLUMN()-COLUMN($M$13))^2)^2.5))
```

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

6. Στο Φύλλο $E(y)$ υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με την εξ. (8.25β). Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο κελί A1 είναι

```
=IF(SQRT((ROW()-ROW($M$13))^2
+(COLUMN()-COLUMN($M$13))^2)<R0;0;
-3*E0*(ROW()-ROW($M$13))*(COLUMN()-
COLUMN($M$13))
*R0^3/((ROW()-ROW($M$13))^2
+(COLUMN()-COLUMN($M$13))^2)^2.5)
```

Παρατηρείται ότι οι εκφράσεις για τον υπολογισμό της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας του πεδίου διαφέρουν κατά ένα αρνητικό πρόσημο. Τούτο είναι απόρροια του ιδιότη-



που συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε στο *Excel*.

Συμβατικά συστήματα συντεταγμένων στο χώρο δύο διαστάσεων αποδίδουν τη θέση ενός σημείου μέσω ενός οριζόντιου άξονα X και ένα κατακόρυφο άξονα Y , των οποίων οι τιμές αυξάνουν αντίστοιχα προς τα δεξιά και προς τα άνω. Η σωστή φορά του άξονα X παραμένει σε ένα σύστημα συντεταγμένων του *Excel* αν η οριζόντια συνιστώσα x αποδοθεί με τη στήλη του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση `COLUMN()`. Αν όμως η κατακόρυφη συνιστώσα y αποδοθεί με τη σειρά του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση `ROW()`, η φορά του άξονα Y είναι αντίστροφη από την αναμενόμενη, καθόσον η αρίθμηση των κελιών αυξάνει προς τα κάτω.

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή `A1:Y25`.

7. Στο Φύλλο *Πεδίο*, υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μέσω της σχέσης

$$E = \sqrt{E_z^2 + E_y^2} \quad (8.26)$$

τοποθετώντας στο κελί `A1` την εντολή

```
=IF(SQRT((ROW()-ROW($M$13))^2  
+(COLUMN()-COLUMN($M$13))^2)<R0;"";  
SQRT('E(y)!A1^2+'E(z)!A1^2))
```

και αντιγράφοντάς την σε όλη την περιοχή `A1:Y25`.



8. Τέλος, στο Φύλλο Γωνία, υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το άνυσμα E με τον οριζόντιο άξονα Z . Για το σκοπό αυτό

- Τοποθετείστε στο κελί A1 την εντολή

```
=IF(SQRT((ROW()-ROW($M$13))^2+(COLUMN()-
COLUMN($M$13))^2)<R0;"";IF('E(y)!'A1<0;
ATAN2('E(z)!'A1;'E(y)!'A1)*180/PI()+360;
ATAN2('E(z)!'A1;'E(y)!'A1)*180/PI()))
```

Η σύνταξη της συνάρτησης ATAN2 είναι:

$$\text{ATAN2}(X, Y)$$

όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο XY . Παρατηρείται ότι η συνάρτηση $\text{ATAN2}(X, Y)$ επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση. Η συνάρτηση $\text{ATAN2}(X, Y)$ επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

Το αποτέλεσμα της συνάρτησης ATAN2 μπορεί να μετατραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το

Excel διαθέτει τη συνάρτηση $\text{PI}()$, η οποία επιστρέφει την τιμή π ($= 3.14\dots$) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.



9. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
 - Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι(Excel 2000) ή Να μη γίνει ενημέρωση(Excel XP).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.
- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8-1 Χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη ιδιότητα που χαρακτηρίζει έναν αγωγό, ήτοι ότι στο εσωτερικό του το ηλεκτρικό φορτίο είναι ελεύθερο να κινηθεί, αποδείξτε ότι

- Στο εσωτερικό ενός αγωγού η πυκνότητα ηλεκτρικού φορ-



τίου και το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζονται.

- Η επιφάνεια ενός αγωγού είναι ισοδυναμική επιφάνεια.
- Αν ο αγωγός φέρει φορτίο, τούτο εμφανίζεται μόνον ως επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

8-2 Χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss αποδείξτε την εξ. (8.1).

8-3 Με απ' ευθείας παραγωγή της εξ. (8.2) αποδείξτε τις εξ. (8.4).

8-4 Δείξτε ότι τα σημειακά φορτία q_1 και q_2 που εικονίζονται στο σχήμα 8-2 δίνουν μηδενικό δυναμικό στην επιφάνεια μιας σφαίρας με τις παραμέτρους που προσδιορίζουν οι εξ. (8.6) και (8.7). Δείξτε ακόμη ότι ο γεωμετρικός αυτός τόπος είναι μοναδικός, δηλαδή ότι δεν υπάρχουν άλλα σημεία στο χώρο όπου μηδενίζεται η συνάρτηση δυναμικού.

8-5 Δείξτε ότι η σφαίρα του σχήματος 8-2 τέμνει πάντα το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο φορτία q_1 και q_2 .

8-6 Επαναλάβετε την Εργαστηριακή Άσκηση 8.2 για την περίπτωση ενός σημειακού φορτίου στο εσωτερικό μιας σφαιρική κοιλότητας αγωγού, της οποίας η επιφάνεια διατηρείται σε μηδενικό δυναμικό. Δεδομένα του προβλήματος τώρα είναι η τιμή του φορτίου q_2 και η απόστασή του από το κέντρο της κοιλότητας R_2 (βλ. σχήμα 8-2) ενώ η τιμή και η θέση του ειδώλου μπορούν να υπολογιστούν μέσω των εξ. (8.8) και (8.9).

8-7 Δείξτε ότι στην επιφάνεια μιας μεταλλικής σφαίρας το δυναμι-



κό της εξ. (8.23α) έχει τη σωστή συμπεριφορά.

8-8 Δείξτε ότι στην προσέγγιση του διώνυμου αναπτύγματος στην εξ. (8.20), η εξ. (8.19) οδηγεί στην εξ. (8.21), αν παραλειφθούν όροι, οι οποίοι τείνουν προς το μηδέν καθώς $d \rightarrow \infty$.

8-9 Δείξτε ότι η εξ. (8.23α) οδηγεί στις εξ. (8.25).



ΚΕΦΑΛΑΙΟ

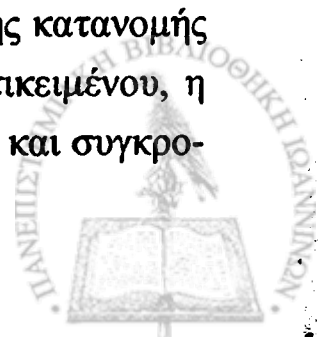
ΕΝΕΑ

Διηλεκτρικά υλικά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ

Δ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΥΛΙΚΑ Η ΜΟΝΩΤΕΣ, δηλαδή υλικά στα οποία το φορτίο παραμένει δέσμιο στη θέση όπου έχει αρχικά τοποθετηθεί, εμφανίζουν ουσιαστικά αντίθετη συμπεριφορά από αυτή των αγωγών που μελετήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Μερικές απ' αυτές είναι:

- Ηλεκτρικό πεδίο, στην περιοχή του οποίου εισάγεται ένα αντικείμενο από μονωτικό υλικό, θα δράσει κατά δύο τρόπους πάνω στο αντικείμενο: αφ' ενός θα τείνει να ευθυγραμμίσει προς την διεύθυνση του πεδίου τις διπολικές ροπές των ατόμων ή μορίων του υλικού του, ενώ αφ' ετέρου θα τείνει να αυξήσει το μέγεθος των ευθυγραμμισμένων διπολικών ροπών. Όταν τελικά επέλθει κατάσταση ισορροπίας, το υλικό θα χαρακτηρίζεται από μια *πόλωση P*, ήτοι μια κατανομή πυκνότητας ηλεκτρικής διπολικής ροπής στον χώρο που καταλαμβάνει το αντικείμενο.
- Στη θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού αποδεικνύεται ότι, τουλάχιστον όσο αφορά τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα, η παρουσία ενός αντικειμένου από μονωτικό υλικό στο χώρο είναι ισοδύναμη με την παρουσία στον κενό χώρο μιας συγκεκριμένης κατανομής φορτίου. Αν *P* είναι η πόλωση του υλικού του αντικειμένου, η κατανομή αυτή έχει το ίδιο σχήμα με το αντικείμενο και συγκρο-



τείται από μια επιφανειακή κατανομή με τιμή

$$\sigma_p = P \cdot \hat{n} \quad (9.1)$$

όπου \hat{n} είναι η κάθετη διεύθυνση προς την επιφάνεια του αντικείμενου και μια πυκνότητα φορτίου στο εσωτερικό του με τιμή

$$\rho_p = -\nabla \cdot P. \quad (9.2)$$

Θα αναφερθούμε στα νοητά φορτία που δίνονται από τις εξ. (9.1) και (9.2) με τον όρο *δέσμια φορτία* σε αντιδιαστολή με τα *ελεύθερα φορτία*, ήτοι πραγματικά ηλεκτρικά φορτία που τυχόν έχουν τοποθετηθεί σε σημεία μέσα ή έξω από το αντικείμενο.

- Παρατηρείται ότι η πόλωση $P(\mathbf{r})$ δεν είναι εξ' αρχής γνωστή. Μπορεί να υπολογιστεί μόνο μετά από την επίλυση του προβλήματος και τον προσδιορισμό του ηλεκτρικού πεδίου $E(\mathbf{r})$ μέσω της σχέσης

$$P = \chi_e(E)E \quad (9.3)$$

όπου $\chi_e(E)$ είναι η *ηλεκτρική επιδεκτικότητα* του υλικού - γενικά μια συνάρτηση του ηλεκτρικού πεδίου E και ενδεχομένως της διεύθυνσής του στο χώρο. Σε ορισμένα υλικά και για ένα μεγάλο εύρος τιμών του ηλεκτρικού πεδίου, η ηλεκτρική επιδεκτικότητα είναι ανεξάρτητη του πεδίου και της διεύθυνσης στον χώρο, ήτοι ισχύει η σχέση

$$P = \chi_e E \quad (9.4)$$

όπου χ_e είναι μια σταθερά. Τα υλικά αυτά ονομάζονται *γραμμικά*



και *ισοτροπικά*.

- Μια ποσότητα που αποδεικνύεται χρήσιμη στο χειρισμό διηλεκτρικών υλικών είναι η ανυσματική συνάρτηση της *ηλεκτρικής μετατόπισης* $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ που ορίζεται ως

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (9.5)$$

και μέσω της εξ. (9.3) μπορεί να εκφραστεί αποκλειστικά μέσω του ηλεκτρικού πεδίου ως

$$\mathbf{D} = [\varepsilon_0 + \chi_e(\mathbf{E})] \mathbf{E} = \varepsilon(\mathbf{E}) \mathbf{E} \quad (9.6)$$

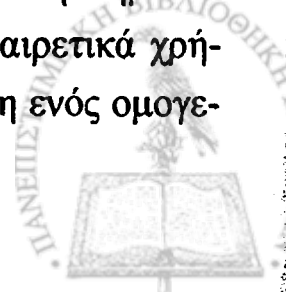
όπου στο τελευταίο σκέλος της εξ. (9.6) έχει οριστεί, χάριν συντομίας του συμβολισμού, η συνάρτηση αναλογίας $\varepsilon(\mathbf{E})$ μεταξύ των ανυσμάτων \mathbf{D} και \mathbf{E} , που απαντάται με την ονομασία *ηλεκτρική διαπερατότητα*. Βεβαίως, για ένα ομογενές ισοτροπικό υλικό η συνάρτηση $\varepsilon(\mathbf{E})$, όπως και η ηλεκτρική επιδεκτικότητα, μεταπίπτει σε μια σταθερά

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi_e \quad (9.7)$$

και η εξ. (9.6) παίρνει την απλή μορφή

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (9.8)$$

Παρ' όλο ότι η ηλεκτρική μετατόπιση δεν αντιπροσωπεύει μετρήσιμο φυσικό μέγεθος (το μόνο μέγεθος με φυσική σημασία είναι το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}), αποδεικνύεται ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο στην ειδική, αλλά συνήθη, περίπτωση ενός ομογε-



νούς, ισοτροπικού διηλεκτρικού υλικού. Στην περίπτωση αυτή, όπως αποδεικνύεται εύκολα από το νόμο του Gauss και την ισοδυναμία του διηλεκτρικού υλικού με τις κατανομές φορτίων των εξ. (9.1) και (9.2), η ηλεκτρική μετατόπιση ικανοποιεί σε κάθε σημείο του χώρου τη διαφορική εξίσωση

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (9.9)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα ελεύθερου ηλεκτρικού φορτίου, ή σε μορφή επιφανειακού ολοκληρώματος

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = q \quad (9.10)$$

όπου q είναι το ολικό ελεύθερο φορτίο που περιβάλλει η επιφάνεια S . Από τις σχέσεις αυτές έπεται τώρα η χρησιμότητα της ηλεκτρικής μετατόπισης \mathbf{D} . Όλες οι ηλεκτροστατικές σχέσεις που εξαγάγαμε μέχρι τώρα για το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} ισχύουν για την ηλεκτρική μετατόπιση, αν παραλείψουμε τη σταθερά ϵ_0 . Επιπλέον, αν το φαινόμενο λαμβάνει χώρα μέσα σε ένα ομογενές και ισοτροπικό υλικό με άπειρες διαστάσεις, το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τις ίδιες συναρτήσεις, μέσω των οποίων εκφράζεται στον κενό χώρο, αν η σταθερά ϵ_0 αντικατασταθεί από τη σταθερά ϵ . Για παράδειγμα, ένα σημειακό φορτίο q μέσα σε ένα υλικό με ηλεκτρική διαπερατότητα ϵ δημιουργεί μέσα στο υλικό την ηλεκτρική μετατόπιση

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (9.11)$$

όπου $\hat{\mathbf{r}}$ είναι η ακτινική διεύθυνση, και ηλεκτρικό πεδίο



$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} . \quad (9.12)$$

- Σε συνοριακές επιφάνειες μεταξύ διηλεκτρικών υλικών, η συνάρτηση δυναμικού είναι συνεχής, ενώ η ηλεκτρική μετατόπιση εμφανίζει ασυνέχειες κατά την πυκνότητα φορτίου στην επιφάνεια. Αν S είναι η συνοριακή επιφάνεια μεταξύ δύο ομογενών και ιστροπικών διηλεκτρικών υλικών 1 και 2 με ηλεκτρική διαπερατότητα ϵ_1 και ϵ_2 , $(\Phi_1, \mathbf{D}_1, \mathbf{E}_1)$ και $(\Phi_2, \mathbf{D}_2, \mathbf{E}_2)$ είναι αντίστοιχα η συνάρτηση δυναμικού, η ηλεκτρική μετατόπιση και το ηλεκτρικό πεδίο στους δύο χώρους που καταλαμβάνουν τα υλικά και σ είναι η πυκνότητα φορτίου στην επιφάνεια S , τότε σε όλα τα σημεία της επιφάνειας ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (9.13)$$

και

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = (\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = \sigma . \quad (9.14)$$

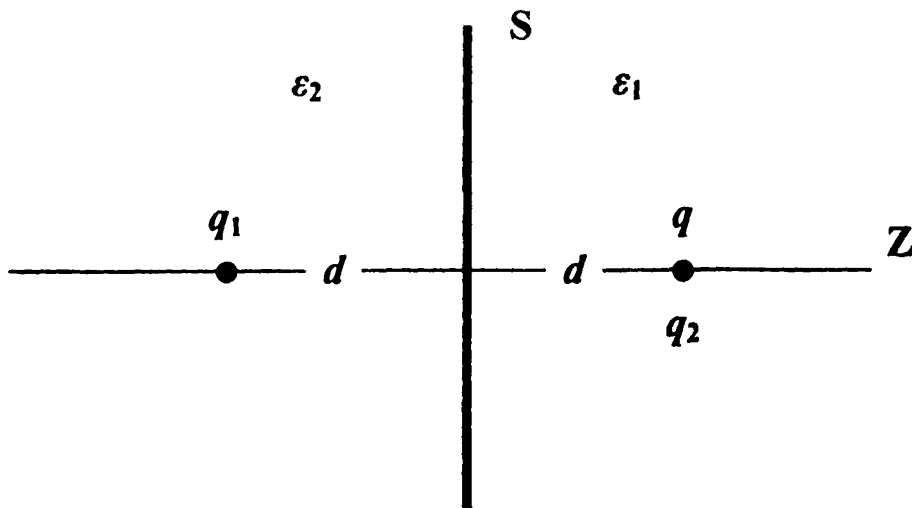
όπου $\hat{\mathbf{n}}_1$ είναι το μοναδιαίο άνυσμα, κάθετο προς την επιφάνεια S , και με φορά από την περιοχή του υλικού 1 προς την περιοχή του υλικού 2. Όσον αφορά τη συνάρτηση δυναμικού, η εξ. (9.14) μπορεί να γραφεί ως

$$\epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} - \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} = \sigma . \quad (9.15)$$

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΚΑΙ ΠΕΔΙΟ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΣΕ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΜΕΣΑ

Η μέθοδος των ηλεκτροστατικών ειδώλων που μελετήσαμε στο





Σχήμα 9-1 Σημειακό ηλεκτρικό φορτίο q κοντά στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών υλικών.

προηγούμενο Κεφάλαιο μπορεί να εφαρμοστεί με μικρές παραλλαγές στην περίπτωση που ο χώρος καταλαμβάνεται από διηλεκτρικά υλικά. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το απλό σύστημα του σχήματος 9-1 όπου δύο ομογενή και ιστροπικά υλικά 1 και 2 με ηλεκτρική διαπερατότητα ϵ_1 και ϵ_2 συναντώνται σε μια επίπεδη επιφάνεια S . Στο χώρο 1 και σε απόσταση d από την επιφάνεια S βρίσκεται ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο q . Θα επιλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων όπου η απόσταση του φορτίου q από την επιφάνεια S ορίζει τον άξονα Z και θα προσπαθήσουμε να αποδώσουμε την ύπαρξη των διηλεκτρικών υλικών με ηλεκτροστατικά είδωλα των δύο υλικών. Συγκεκριμένα, θα αποδώσουμε το υλικό 1 ($z > 0$) με το σημειακό φορτίο q_1 , στο εσωτερικό του υλικού 2. Το υλικό 2 ($z < 0$) θα αποδοθεί από ένα δεύτερο σημειακό φορτίο-είδωλο q_2 , στο εσωτερικό του υλικού 1. Από τη συμμετρία του προβλήματος έπεται ότι τα φορτία q_1 και q_2 θα πρέπει να βρίσκονται πάνω στον άξονα Z , ενώ, όπως φαίνεται στο σχήμα 9-1, καθ' όσον μπορούμε να ορίσουμε τελικά αυθαίρετα την απόλυτη τιμή τους, μπορούμε ακόμη, για απλούστευση της διάταξης, να λάβουμε τη θέση



του φορτίου q_1 στη θέση $z = -d$ και του φορτίου q_2 στη θέση $z = d$. Στην απεικόνιση αυτή, το δυναμικό στους δύο χώρους μπορεί να γραφεί ως

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{q}{\sqrt{(z-d)^2 + \rho^2}} + \frac{q_1}{\sqrt{(z+d)^2 + \rho^2}} \right], \quad z > 0 \quad (9.16)$$

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q_2}{\sqrt{(z-d)^2 + \rho^2}}, \quad z < 0$$

όπου, χάριν συντομίας του συμβολισμού, έχει τεθεί

$$\rho^2 = x^2 + y^2. \quad (9.17)$$

Με απλή παραγωγή των εξ. (9.16) μπορούμε να δείξουμε τώρα ότι οι συνιστώσες του αντίστοιχου ηλεκτρικού πεδίου στις δύο περιοχές είναι

$$E_{1x}(x, \rho) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{q(z-d)}{[(z-d)^2 + \rho^2]^{3/2}} + \frac{q_1(z+d)}{[(z+d)^2 + \rho^2]^{3/2}} \right] \quad (9.18\alpha)$$

$$E_{1\rho}(x, \rho) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{q\rho}{[(z-d)^2 + \rho^2]^{3/2}} + \frac{q_1\rho}{[(z+d)^2 + \rho^2]^{3/2}} \right]$$

για $z > 0$, και



$$E_{2x}(x, \rho) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q_2(z-d)}{[(z-d)^2 + \rho^2]^{3/2}}$$

(9.18β)

$$E_{2\rho}(x, \rho) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q_2\rho}{[(z-d)^2 + \rho^2]^{3/2}}$$

για $z < 0$.

Η τιμή των φορτίων q_1 και q_2 μπορεί να βρεθεί από τις συνοριακές συνθήκες των εξ. (9.13) και (9.15). Καθ' όσον η επιφάνεια S είναι αφόρτιστη ($\sigma = 0$), μπορούμε να γράψουμε

$$\Phi_1(z=0, \rho) = \Phi_2(z=0, \rho) \quad (9.19\alpha)$$

και

$$\epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (9.19\beta)$$

Δεν χρειάζεται τώρα παρά λίγη άλγεβρα για να δείξουμε ότι το σύστημα των εξ. (9.19) προσδιορίζει την τιμή των ειδώλων ως

$$q_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad (9.20\alpha)$$

και

$$q_2 = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad (9.20\beta)$$



Με τις τιμές αυτές, το δυναμικό των εξ. (9.16) μπορεί να γραφεί ως

$$\Phi_1(x, \rho) = \frac{q}{4\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left[\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\sqrt{(z-d)^2 + \rho^2}} + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\sqrt{(z+d)^2 + \rho^2}} \right], \quad z > 0$$

(9.21)

$$\Phi_2(x, \rho) = \frac{\epsilon_1}{2\pi\epsilon_2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{\sqrt{(z-d)^2 + \rho^2}}, \quad z < 0$$

ενώ οι εξ. (9.18) παίρνουν τη μορφή

$$E_{1x}(x, \rho) = \frac{q}{4\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left[\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)(z-d)}{[(z-d)^2 + \rho^2]^{3/2}} + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)(z+d)}{[(z+d)^2 + \rho^2]^{3/2}} \right]$$

(9.22α)

$$E_{1\rho}(x, \rho) = \frac{q\rho}{4\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left[\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{[(z-d)^2 + \rho^2]^{3/2}} + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{[(z+d)^2 + \rho^2]^{3/2}} \right]$$

για $z > 0$, και

$$E_{2x}(x, \rho) = \frac{\epsilon_1}{2\pi\epsilon_2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q(z-d)}{[(z-d)^2 + \rho^2]^{3/2}}$$

(9.22β)

$$E_{2\rho}(x, \rho) = \frac{\epsilon_1}{2\pi\epsilon_2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q\rho}{[(z-d)^2 + \rho^2]^{3/2}}$$



για $z < 0$.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 9.1

Σημειακό φορτίο σε μικρή απόσταση από επίπεδη συνοριακή επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών υλικών

Από τη συμμετρία του προβλήματος μπορούμε να εργαστούμε σε δύο διαστάσεις. Ακολουθώντας το σχήμα 9-1, θα θεωρήσουμε ένα χώρο 25×25 κελιών με τον άξονα Z κατά την οριζόντια διεύθυνση στη σειρά 13 και τον άξονα X κατά την κατακόρυφη διεύθυνση στη στήλη M . Ο άξονας Y είναι κάθετος στο επίπεδο του Φύλλου, στο κελί $M13$, με τη θετική φορά προς τα έξω. Θα θεωρήσουμε ακόμη ότι η επιφάνεια S του σχήματος 9-1 βρίσκεται στο επίπεδο XY και τέμνει το επίπεδο του Φύλλου κατά τη στήλη M , ενώ το φορτίο q βρίσκεται πάνω στον άξονα Z (στη σειρά 13) d κελιά δεξιά του κελιού $M13$. Ζητείται το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο.

1. Δημιουργείστε ένα νέο Βιβλίο του *Excel* με τα εξής Φύλλα

1. Δεδομένα
2. Δυναμικό
3. $E(z)$
4. $E(x)$
5. Πεδίο
6. Γωνία

2. Στο Φύλλο *Δεδομένα* γράψτε τα δεδομένα του προβλήματος και υπολογίστε τις τιμές των ηλεκτροστατικών ειδώλων.



	A	B	C	D	E	F
1	$1/4\pi\epsilon_0 =$	8.96E+09		$1/4\pi\epsilon_1 =$	3.32E+08	
2	q =	1.50E-06		$1/4\pi\epsilon_2 =$	4.48E+09	
3	d =	6		q1 =	1.29E-06	
4	$\epsilon_1/\epsilon_0 =$	27		q2 =	2.79E-06	
5	$\epsilon_2/\epsilon_0 =$	2				
6						

Ονομάστε τα κελιά στο Φύλλο Δεδομένα σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα

Κελί	Όνομα
B1	Ke
B2	q
B3	d
B4	ϵ_1
B5	ϵ_2
E1	Ke1
E2	Ke2
E3	q_1
E4	q_2

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα στο βιβλίο εργασίας**: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Ke). Επιλέξτε OK.

Στα κελιά E1 και E2 υπολογίστε αντίστοιχα τις παραμέτρους

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_1} \text{ και } \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \text{ καταχωρώντας αντίστοιχα τις εντολές}$$

$$E1: =Ke/\epsilon_1$$



$$E2: =Ke/\epsilon_2$$

και στα κελιά E3, και E4 τις τιμές των ειδώλων q_1 και q_2 σύμφωνα με τις εξ. (9.20) καταχωρώντας τις εντολές

$$E3: =(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2) * q$$

$$E4: =2 * \epsilon_1 / (\epsilon_1 + \epsilon_2) * q$$

3. Στο Φύλλο *Δυναμικό*, υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί το φορτίο q και τα είδωλά του στο χώρο σύμφωνα με τις εξ. (9.16). Για το σκοπό αυτό μπορείτε να γράψετε στο κελί A1 την έκφραση

```
=IF(COLUMN()<13;
Ke2*q_2/SQRT(((COLUMN()-COLUMN($M$13)-d)^2
+(ROW()-ROW($M$13))^2);
Ke1*(q/SQRT(((COLUMN()-COLUMN($M$13)-d)^2
+(ROW()-ROW($M$13))^2)
+q_1/SQRT(((COLUMN()-COLUMN($M$13)+d)^2
+(ROW()-ROW($M$13))^2)))
```

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
- Παρατηρείται ότι οι εξ. (9.16), και επομένως οι σχέσεις του *Excel* που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του δυναμικού, δίνουν απροσδιόριστο αποτέλεσμα (διαίρεση δια του μηδενός) σε σημεία του χώρου όπου υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο. Έτσι στο κελί M13 υπάρχει τώρα η ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Το σφάλμα θα ήταν δυνατόν να αποτραπεί αν περιβάλλαμε την έκφραση που υπολογίζει το δυναμικό με μια συνάρτηση



IF()). Η λύση αυτή παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι επιβραδύνει κατά τι τον υπολογισμό. Μια πλέον πρακτική λύση είναι να επέμβουμε μετά το πέρας του υπολογισμού και στο κελί M13 να εισαγάγουμε μια αυθαίρετη τιμή. Η πιο λογική τιμή είναι ίσως ο μέσος όρος των τιμών που περιέχονται στα γειτονικά του κελιά. Μπορείτε επομένως να εισαγάγετε στο κελί M13 την εντολή

$$=(R12+S12+T12+T13+T14+S14+R14+R13)/8$$

4. Αποδώστε τις τιμές του Φύλλου Δυναμικό σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο Δυναμικό επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο >**
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο >**
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Δυναμικό σημειακού φορτίου
σε διηλεκτρικά υλικά

Κατηγορία (X): Z



Τιμή (Z): Δυναμικό

Σειρά (Y): X

- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του *Excel* έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει τη γραφική παράσταση.

Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του *Excel* **Γράφημα** → **Προβολή 3Δ...** Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

5. Στο Φύλλο *E(z)* υπολογίστε την οριζόντια συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με τις εξ. (9.18). Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο κελί A1 είναι

$$\begin{aligned} &=IF(COLUMN()<13;K_e2*q_2*(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13)-d) \\ &/((COLUMN()-COLUMN(\$M\$13)-d)^2+(ROW()-ROW(\$M\$13))^2)^{1.5}; \\ &K_e1*(q*(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13)-d) \\ &/((COLUMN()-COLUMN(\$M\$13)-d)^2+(ROW()-ROW(\$M\$13))^2)^{1.5} \\ &+q_1*(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13)+d) \\ &/((COLUMN()-COLUMN(\$M\$13)+d)^2+(ROW()-ROW(\$M\$13))^2)^{1.5})) \end{aligned}$$



- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
 - Διορθώστε τα κελιά που περιέχουν την ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Με τον τρόπο που αντιμετωπίσατε το σφάλμα στο Φύλλο Δυναμικό.
6. Στο Φύλλο $E(x)$ υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με τις εξ. (9.18). Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο κελί A1 είναι

$$=IF(COLUMN()<13; \\ -Ke2*q_2*(ROW()-ROW(\$M\$13)) \\ /(((COLUMN()-COLUMN(\$M\$13)-d)^2+(ROW()-ROW(\$M\$13))^2)^1.5; \\ -Ke1*(q*(ROW()-ROW(\$M\$13)))/((COLUMN()-COLUMN(\$M\$13)-d)^2 \\ +(ROW()-ROW(\$M\$13))^2)^1.5+q_1*(ROW()-ROW(\$M\$13)) \\ /(((COLUMN()-COLUMN(\$M\$13)+d)^2+(ROW()-ROW(\$M\$13))^2)^1.5))$$

Παρατηρείται ότι οι εκφράσεις για τον υπολογισμό της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας του πεδίου διαφέρουν κατά ένα αρνητικό πρόσημο. Τούτο είναι απόρροια του ιδιότυπου συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε στο *Excel*.

Συμβατικά συστήματα συντεταγμένων στο χώρο δύο διαστάσεων αποδίδουν τη θέση ενός σημείου μέσω ενός οριζόντιου άξονα X και ένα κατακόρυφο άξονα Y , των οποίων οι τιμές αυξάνουν αντίστοιχα προς τα δεξιά και προς τα άνω. Η σωστή φορά του άξονα X παραμένει σε ένα σύστημα συντεταγμένων του *Excel* αν η οριζόντια συνιστώσα x αποδοθεί με τη στήλη του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση $COLUMN()$. Αν όμως η κατακόρυφη συνιστώσα y αποδοθεί με τη σειρά του κελιού και μετρηθεί με τη



συνάρτηση ROW(), η φορά του άξονα Y είναι αντίστροφη από την αναμενόμενη, καθώς η αρίθμηση των κελιών αυξάνει προς τα κάτω.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
- Διορθώστε τα κελιά που περιέχουν την ένδειξη #ΔΙΑΠ/0! Με τον τρόπο που αντιμετωπίσατε το σφάλμα στο Φύλλο Δυναμικό.

7. Στο Φύλλο Πεδίο, υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μέσω της σχέσης

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_z^2} \quad (9.23)$$

τοποθετώντας στο κελί A1 την εντολή

$$=SQRT('E(z)!'A1^2+'E(x)!'A1^2)$$

καί αντιγράφωντάς την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

8. Στο Φύλλο Γωνία, υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το άνυσμα E με τον οριζόντιο άξονα Z. Για το σκοπό αυτό

- Τοποθετείστε στο κελί A1 την εντολή

$$=IF('E(x)!'A1<0;ATAN2('E(z)!'A1;'E(x)!'A1)*180/PI()+360; ATAN2('E(z)!'A1;'E(x)!'A1)*180/PI())$$



Η σύνταξη της συνάρτησης ATAN2 είναι:

$$\text{ATAN2}(X, Y)$$

όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο XY . Παρατηρείται ότι η συνάρτηση $\text{ATAN2}(X, Y)$ επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση. Η συνάρτηση $\text{ATAN2}(X, Y)$ επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

Το αποτέλεσμα της συνάρτησης ATAN2 μπορεί να μετατραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το Excel διαθέτει τη συνάρτηση $\text{PI}()$, η οποία επιστρέφει την τιμή π ($= 3.14\dots$) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
9. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
 - Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (Excel 2000) ή Να μη γίνει ενημέρωση (Excel XP).



Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.
- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.

ΣΦΑΙΡΑ ΑΠΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ ΠΟΛΩΣΗ ΣΕ ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Ας επανέλθουμε σε διατάξεις σφαιρικών αγωγών και ας θεωρήσουμε ότι στον κατά τα άλλα κενό χώρο υπάρχει ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο με τη μορφή της εξ. (8.13)

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{k}}. \quad (9.24)$$

Ας θεωρήσουμε ακόμη ότι στον χώρο αυτό εισάγουμε μια σφαίρα ακτίνας R , η οποία είναι κατασκευασμένη από ένα ομογενές, γραμμικό και ιστροπικό υλικό. Όπως ήδη αναφέρθηκε, τόσο το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} που θα διαμορφωθεί στο χώρο, όσο και η πόλωση \mathbf{P} στο εσωτερικό της σφαίρας, είναι αρχικά άγνωστες ποσότητες και οι τιμές τους θα προκύψουν ταυτοχρόνως από τη λύση του προβλήματος. Παρ' όλα αυτά είναι χρήσιμο να εξετάσουμε το δυναμικό που



δημιουργεί μια σφαίρα όταν είναι εξ αρχής γνωστή η πόλωση του υλικού της.

Αν η πόλωση της σφαίρας είναι γνωστή και σταθερή με τιμή P , τότε από τις εξ. (9.1) και (9.2) το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του δυναμικού που δημιουργεί μια σφαίρα με μηδενικό φορτίο

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0 \quad (9.25)$$

στο εσωτερικό της και επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P \cos \theta. \quad (9.26)$$

Η διάταξη αυτή ηλεκτρικού φορτίου θυμίζει έντονα την περίπτωση ενός γειωμένου σφαιρικού αγωγού που μελετήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Είδαμε εκεί ότι το δυναμικό που δημιουργείται στο χώρο έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση στην επιφάνεια της σφαίρας μιας πυκνότητας φορτίου με τη συναρτησιακή μορφή της εξ. (9.26). Στην περίπτωση του αγωγού, η πυκνότητα αυτή δημιουργεί ένα πεδίο που, αν προστεθεί στο αρχικό πεδίο της εξ. (9.24), δημιουργεί μηδενικό πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας, ενώ στον εξωτερικό χώρο δημιουργεί το πεδίο που προβλέπει το δυναμικό του δεύτερου όρου της εξ. (8.23α). Αντιστρέφοντας επομένως τη σχέση αιτίου και αιτιατού, συμπεραίνουμε ότι μια σφαιρική επιφανειακή πυκνότητα φορτίου της μορφής της εξ. (9.26) δημιουργεί στο χώρο δυναμικό της μορφής

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta, & r \leq R \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta, & r > R \end{cases} \quad (9.27)$$



Το τελευταίο αποτέλεσμα προβλέπει ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας, όπως και στην περίπτωση ενός σφαιρικού αγωγού, είναι ομογενές

$$\mathbf{E}_{\text{μεσα}} = -\nabla\Phi = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} = -\frac{\chi_e}{3\epsilon_0} \mathbf{E} \quad (9.28)$$

αν και δεν εξουδετερώνει πλήρως το εξωτερικό πεδίο \mathbf{E} όπως συμβαίνει στην περίπτωση μιας αγωγίμης σφαίρας.

Στο εξωτερικό της σφαίρας, το δυναμικό της εξ. (9.27) που δημιουργείται μπορεί να αναγνωριστεί ως το δυναμικό ενός ηλεκτρικού διπόλου \mathbf{p} στην αρχή των συντεταγμένων

$$\Phi_{\text{εξω}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (9.29)$$

όπου \mathbf{p} είναι η ολική ηλεκτρική διπολική ροπή της σφαίρας

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{P}. \quad (9.30)$$

Συγκεντρώνοντας επομένως όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα, μπορούμε να γράψουμε αναλυτικά για το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο, μέσα και γύρω από τη σφαίρα

$$\left. \begin{array}{l} E_x = E_y = 0 \\ E_z = -\frac{P}{3\epsilon_0} \end{array} \right\}, \quad r \leq R. \quad (9.31\alpha)$$



$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{R^3 P}{\epsilon_0 r^5} xz \\ E_y &= \frac{R^3 P}{\epsilon_0 r^5} yz \\ E_z &= \frac{R^3 P}{3\epsilon_0 r^5} (3z^2 - r^2) \end{aligned} \right\}, \quad r > R. \quad (9.31\beta)$$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 9.2

Σφαίρα από διηλεκτρικό υλικό με γνωστή πόλωση

Από τη συμμετρία του προβλήματος μπορούμε να εργαστούμε σε δύο διαστάσεις. Έτσι, θα θεωρήσουμε ένα χώρο 25×25 κελιών με τον άξονα Z κατά την οριζόντια διεύθυνση στη σειρά 13 και τον άξονα X κατά την κατακόρυφη διεύθυνση στη στήλη M . Ο άξονας Y είναι κάθετος στο επίπεδο του Φύλλου, στο κελί $M13$, με τη θετική φορά προς τα έξω. Θα θεωρήσουμε ακόμη ότι μια σφαίρα από διηλεκτρικό υλικό ακτίνας R , με το κέντρο της στο κελί $M13$, τέμνει το επίπεδο XZ κατά ένα μεγάλο της κύκλο. Ζητείται το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο στο επίπεδο XZ .

Ως ρεαλιστική τιμή της πόλωσης P της σφαίρας θα θεωρήσουμε αυτή που, μέσω της εξ. (9.4), δημιουργείται από ένα σχετικά ήπιο ηλεκτρικό πεδίο $E = 1000 \text{ V m}^{-1}$. Στην περίπτωση ενός τυπικού μονωτικού υλικού, όπως η πορσελάνη με ηλεκτρική επιδεκτικότητα $\chi_e = 5.3 \times 10^{-11} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$, η εξ. (9.4) δίνει $P = 5.3 \times 10^{-8} \text{ C m}^{-2}$.

1. Δημιουργείστε ένα νέο Βιβλίο του *Excel* με τα εξής Φύλλα

1. Δεδομένα
2. Δυναμικό



3. $E(z)$
4. $E(x)$
5. Πεδίο
6. Γωνία

2. Στο Φύλλο Δεδομένα γράψτε τα δεδομένα του προβλήματος.

	A	B	C
1	$1/\epsilon_0 =$	1.13E+11	
2	R =	4	
3	Κέντρο =	\$M\$13	
4	P =	5.30E-08	
5			

Ονομάστε τα κελιά στο Φύλλο Δεδομένα σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα

Κελί	Όνομα
B1	e0m1
B2	R0
B3	centre
B4	P

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα** στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Ke). Επιλέξτε OK.

(Στο κελί B1 έχει καταχωρηθεί η τιμή της παραμέτρου $\frac{1}{\epsilon_0}$).

3. Στο Φύλλο Δυναμικό, υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί στο χώρο η σφαίρα σύμφωνα με τις εξ. (9.27). Για



το σκοπό αυτό μπορείτε να γράψετε στο κελί A1 την έκφραση

$$\begin{aligned} &=IF(SQRT((ROW()-ROW(\$M\$13))^2 \\ &+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)<R0; \\ &e0m1*P/3*(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13)); \\ &e0m1*P/3*R0^3*(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13)) \\ &/((ROW()-ROW(\$M\$13))^2 \\ &+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)^1.5) \end{aligned}$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

4. Αποδώστε τις τιμές του Φύλλου Δυναμικό σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο Δυναμικό επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο** >
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο** >
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Δυναμικό διηλεκτρικής σφαιρας με σταθερή πόλωση



Κατηγορία (X): Z

Τιμή (Z): Δυναμικό

Σειρά (Y): X

- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του *Excel* έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει τη γραφική παράσταση.

Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του *Excel* **Γράφημα** → **Προβολή 3Δ...** Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

5. Στο Φύλλο *E(z)* υπολογίστε την οριζόντια συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με τις εξ. (9.31). Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο κελί A1 είναι

$$\begin{aligned} &=IF(SQRT((ROW()-ROW(\$M\$13))^2 \\ &+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)<R0;-e0m1*P/3; \\ &e0m1/3*R0^3*P*(3*(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2 \\ &-(ROW()-ROW(\$M\$13))^2+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2) \\ &/((ROW()-ROW(\$M\$13))^2+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)^2.5) \end{aligned}$$



Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

6. Στο Φύλλο $E(x)$ υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με τις εξ. (9.31). Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο κελί A1 είναι

$$=IF(SQRT((ROW()-ROW(\$M\$13))^2+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)<R0;0;-e0m1*R0^3*P*(ROW()-ROW(\$M\$13))*(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))/((ROW()-ROW(\$M\$13))^2+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)^2.5)$$

Παρατηρείται ότι οι εκφράσεις για τον υπολογισμό της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας του πεδίου διαφέρουν κατά ένα αρνητικό πρόσημο. Τούτο είναι απόρροια του ιδιότυπου συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε στο *Excel*.

Συμβατικά συστήματα συντεταγμένων στο χώρο δύο διαστάσεων αποδίδουν τη θέση ενός σημείου μέσω ενός οριζόντιου άξονα X και ένα κατακόρυφο άξονα Y , των οποίων οι τιμές αυξάνουν αντίστοιχα προς τα δεξιά και προς τα άνω. Η σωστή φορά του άξονα X παραμένει σε ένα σύστημα συντεταγμένων του *Excel* αν η οριζόντια συνιστώσα x αποδοθεί με τη στήλη του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση $COLUMN()$. Αν όμως η κατακόρυφη συνιστώσα y αποδοθεί με τη σειρά του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση $ROW()$, η φορά του άξονα Y είναι αντίστροφη από την αναμενόμενη, καθόσον η αρίθμηση των κελιών αυξάνει προς τα κάτω.

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.



7. Στο Φύλλο *Πεδίο*, υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μέσω της σχέσης

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_z^2} \quad (9.23)$$

τοποθετώντας στο κελί A1 την εντολή

$$=SQRT('E(z)!'A1^2+'E(x)!'A1^2)$$

και αντιγράφοντάς την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

9. Στο Φύλλο *Γωνία*, υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το άνωμα E με τον οριζόντιο άξονα Z. Για το σκοπό αυτό

- Τοποθετείστε στο κελί A1 την εντολή

$$=IF(SQRT((ROW()-ROW(\$M\$13))^2+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)<R0;0;IF('E(x)!'A1<0;ATAN2('E(z)!'A1;'E(x)!'A1)*180/PI()+360;ATAN2('E(z)!'A1;'E(x)!'A1)*180/PI()))$$

Η σύνταξη της συνάρτησης ATAN2 είναι:

$$ATAN2(X,Y)$$

όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο XY. Παρατηρείται ότι η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση.



Η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

Το αποτέλεσμα της συνάρτησης ATAN2 μπορεί να μετατραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το

Excel διαθέτει τη συνάρτηση PI(), η οποία επιστρέφει την τιμή π (= 3.14...) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
9. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
 - Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (Excel 2000) ή Να μη γίνει ενημέρωση (Excel XP).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία



μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.

- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.
-

ΣΦΑΙΡΑ ΑΠΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΣΕ ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Ας επανέλθουμε τώρα στην περίπτωση της διηλεκτρικής σφαίρας που εισάγεται σε ένα σταθερό εξωτερικό πεδίο \mathbf{E} , όπου δεν γνωρίζουμε εκ προοιμίου την τελική πόλωση \mathbf{P} . Θα προσπαθήσουμε να δούμε τι θα συμβεί εξετάζοντας ένα σενάριο σταδιακών προσεγγίσεων.

Κατ' αρχάς, με την εισαγωγή της σφαίρας, περιμένουμε ότι το εξωτερικό πεδίο της εξ. (9.24) θα δημιουργήσει μια ομοιόμορφη πόλωση στο υλικό, σύμφωνα με την εξ. (9.4),

$$\mathbf{P}_0 = \chi_e \mathbf{E}. \quad (9.32)$$

Αυτή βεβαίως δεν είναι η τελική πόλωση, καθώς το πεδίο \mathbf{E} δεν είναι και το τελικό πεδίο. Στην σταδιακή όμως προσέγγιση που χρησιμοποιούμε, η πόλωση αυτή θα δημιουργήσει με τη σειρά της ένα επιπρόσθετο ηλεκτρικό πεδίο μέσα στη σφαίρα, σύμφωνα με την εξ. (9.28),

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}_0 = -\frac{\chi_e}{3\epsilon_0} \mathbf{E}. \quad (9.33)$$

Το νέο πεδίο \mathbf{E}_1 θα προκαλέσει με τη σειρά του μια πρόσθετη πόλωση \mathbf{P}_1 στη σφαίρα



$$\mathbf{P}_1 = \chi_e \mathbf{E}_1 = \chi_e \left(-\frac{\chi_e}{3\varepsilon_0} \right) \mathbf{E} \quad (9.34)$$

και η πόλωση αυτή θα μεταβάλει το πεδίο κατά

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P}_1 = \left(-\frac{\chi_e}{3\varepsilon_0} \right)^2 \mathbf{E}. \quad (9.35)$$

Είναι φανερό ότι καθώς συνεχίζονται οι διαδοχικές προσεγγίσεις στο τελικό πεδίο, η συνεισφορά τάξης n θα είναι

$$\mathbf{E}_n = \left(-\frac{\chi_e}{3\varepsilon_0} \right)^n \mathbf{E} \quad (9.36)$$

και το τελικό πεδίο θα είναι

$$\mathbf{E}_{\text{τελικό}} = \mathbf{E} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{3\varepsilon_0} \right)^n \right] \mathbf{E}. \quad (9.37)$$

Η συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά της τελευταίας σχέσης δίνει

$$\mathbf{E}_{\text{τελικό}} = \frac{1}{1 + \frac{\chi_e}{3\varepsilon_0}} \mathbf{E} = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E} = \frac{3}{2 + \kappa_e} \mathbf{E} \quad (9.38)$$

όπου στην τελευταία σχέση έχει χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της ηλεκτρικής διαπερατότητας

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi_e$$

(9.7)



και της ειδικής ηλεκτρικής διαπερατότητας κ_e

$$\kappa_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}. \quad (9.39)$$

Η εξ. (9.38) προβλέπει σταθερό πεδίο - και κατά συνέπεια σταθερή πόλωση

$$\mathbf{P}_{\text{τελικο}} = \chi_e \mathbf{E}_{\text{τελικο}} \quad (9.40)$$

στο εσωτερικό της σφαίρας.

Θα αφηθεί ως άσκηση να αποδειχθεί ότι, συγκεντρώνοντας όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα, το δυναμικό που δημιουργείται τελικά στον χώρο με την παρουσία της διηλεκτρικής σφαίρας έχει τη μορφή

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{3}{\kappa_e + 2} E_0 r \cos \theta, & r \leq R \\ -E_0 r \cos \theta + \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta, & r > R \end{cases} \quad (9.41)$$

Τέλος, με απ' ευθείας παραγωγή της εξ. (9.41), η σχέση $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ δίνει τις συνιστώσες του αντίστοιχου ηλεκτρικού πεδίου ως

$$\left. \begin{aligned} E_x = E_y = 0 \\ E_z = \frac{3E_0}{\kappa_e + 2} \end{aligned} \right\}, \quad r \leq R \quad (9.42a)$$



$$\left. \begin{aligned} E_x &= 3 \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} E_0 \frac{R^3}{r^5} xz \\ E_y &= 3 \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} E_0 \frac{R^3}{r^5} yz \\ E_z &= E_0 + 3 \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} E_0 \frac{R^3}{r^5} (3z^2 - r^2) \end{aligned} \right\}, \quad r > R. \quad (9.42\beta)$$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 9.3

Διηλεκτρική σφαίρα σε περιοχή σταθερού ηλεκτρικού πεδίου

Από τη συμμετρία του προβλήματος μπορούμε να εργαστούμε σε δύο διαστάσεις. Έτσι, θα θεωρήσουμε ένα χώρο 25×25 κελιών με τον άξονα Z κατά την οριζόντια διεύθυνση στη σειρά 13 και τον άξονα X κατά την κατακόρυφη διεύθυνση στη στήλη M . Ο άξονας Y είναι κάθετος στο επίπεδο του Φύλλου, στο κελί $M13$, με τη θετική φορά προς τα έξω. Θα θεωρήσουμε ακόμη ότι μια σφαίρα από διηλεκτρικό υλικό με ηλεκτρική διαπερατότητα $\kappa_e = \epsilon/\epsilon_0$, ακτίνα R και κέντρο στο κελί $M13$, τέμνει το επίπεδο XZ κατά ένα μεγάλο της κύκλο. Ζητείται το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο στο επίπεδο XZ όταν στο χώρο υπάρχει ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο E_0 κατά τη θετική φορά του άξονα Z .

1. Δημιουργείστε ένα νέο Βιβλίο του *Excel* με τα εξής Φύλλα

1. Δεδομένα
2. Δυναμικό
3. $E(z)$
4. $E(x)$
5. Πεδίο
6. Γωνία



2. Στο Φύλλο Δεδομένα γράψτε τα δεδομένα του προβλήματος.

	A	B	C
1	ke =	6	
2	R =	7	
3	Κέντρο =	\$M\$13	
4	E0 =	100.00	

Ονομάστε τα κελιά στο Φύλλο Δεδομένα σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα

Κελί	Όνομα
B1	ke
B2	R0
B3	centre
B4	E0

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα** στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Ke). Επιλέξτε OK.

3. Στο Φύλλο Δυναμικό, υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί στο χώρο η σφαίρα σύμφωνα με τις εξ. (9.41). Για το σκοπό αυτό μπορείτε να γράψετε στο κελί A1 την έκφραση

$$\begin{aligned}
 &=IF(SQRT((ROW()-ROW(\$M\$13))^2 \\
 &+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)<R0; \\
 &-3/(ke+2)*E0*(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13)); \\
 &-E0*(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))+(ke-1)/(ke+2)*E0*R0^3
 \end{aligned}$$



$$\frac{*(\text{COLUMN}()-\text{COLUMN}(\$M\$13))}{((\text{ROW}()-\text{ROW}(\$M\$13))^2 + (\text{COLUMN}()-\text{COLUMN}(\$M\$13))^2)^{1.5}}$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

4. Αποδώστε τις τιμές του Φύλλου Δυναμικό σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο Δυναμικό επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο >**
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο >**
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Δυναμικό διηλεκτρικής σφαιρας σε σταθερό ηλεκτρικό πεδίο

Κατηγορία (X): Z

Τιμή (Z): Δυναμικό



Σειρά (Υ): Χ

- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία Γράφημα1 που περιέχει τη γραφική παράσταση.

Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του Excel Γράφημα → Προβολή 3Δ... Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

5. Στο Φύλλο $E(z)$ υπολογίστε την οριζόντια συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με τις εξ. (9.42). Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο κελί A1 είναι

$$\begin{aligned} &=IF(SQRT((ROW()-ROW(\$M\$13))^2 \\ &+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)<R0;3*E0/(ke+2); \\ &E0+3*(ke-1)/(ke+2)*E0*R0^3*(3*(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2 \\ &-((ROW()-ROW(\$M\$13))^2+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)) \\ &/((ROW()-ROW(\$M\$13))^2+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)^2.5) \end{aligned}$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.



6. Στο Φύλλο $E(x)$ υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα του πεδίου σύμφωνα με τις εξ. (9.42). Η έκφραση που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο κελί A1 είναι

$$\begin{aligned} &=IF(SQRT((ROW()-ROW(\$M\$13))^2 \\ &+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)<R0;0; \\ &-3*(ke-1)/(ke+2)*E0*R0^3* \\ &(ROW()-ROW(\$M\$13))*(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13)) \\ &/(((ROW()-ROW(\$M\$13))^2+(COLUMN()-COLUMN(\$M\$13))^2)^2.5) \end{aligned}$$

Παρατηρείται ότι οι εκφράσεις για τον υπολογισμό της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας του πεδίου διαφέρουν κατά ένα αρνητικό πρόσημο. Τούτο είναι απόρροια του ιδιότυπου συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε στο *Excel*.

Συμβατικά συστήματα συντεταγμένων στο χώρο δύο διαστάσεων αποδίδουν τη θέση ενός σημείου μέσω ενός οριζόντιου άξονα X και ένα κατακόρυφο άξονα Y , των οποίων οι τιμές αυξάνουν αντίστοιχα προς τα δεξιά και προς τα άνω. Η σωστή φορά του άξονα X παραμένει σε ένα σύστημα συντεταγμένων του *Excel* αν η οριζόντια συνιστώσα x αποδοθεί με τη στήλη του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση $COLUMN()$. Αν όμως η κατακόρυφη συνιστώσα y αποδοθεί με τη σειρά του κελιού και μετρηθεί με τη συνάρτηση $ROW()$, η φορά του άξονα Y είναι αντίστροφη από την αναμενόμενη, καθόσον η αρίθμηση των κελιών αυξάνει προς τα κάτω.

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη σχέση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.



7. Στο Φύλλο *Πεδίο*, υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μέσω της σχέσης

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_z^2} \quad (9.23)$$

τοποθετώντας στο κελί A1 την εντολή

=SQRT('E(z)!'A1^2+'E(x)!'A1^2)

και αντιγράφοντάς την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

8. Στο Φύλλο *Γωνία*, υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το άνω-σμμα E με τον οριζόντιο άξονα Z. Για το σκοπό αυτό

- Τοποθετείστε στο κελί A1 την εντολή

```
=IF(SQRT((ROW()-ROW($M$13))^2
+(COLUMN()-COLUMN($M$13))^2)<R0;
0;IF('E(x)!'A1<0;ATAN2('E(z)!'A1;'E(x)!'A1)*180/PI()+360;
ATAN2('E(z)!'A1;'E(x)!'A1)*180/PI()))
```

Η σύνταξη της συνάρτησης ATAN2 είναι:

ATAN2(X,Y)

όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο XY. Παρατηρείται ότι η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση.



Η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

Το αποτέλεσμα της συνάρτησης ATAN2 μπορεί να μετατραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το

Excel διαθέτει τη συνάρτηση PI(), η οποία επιστρέφει την τιμή π ($= 3.14\dots$) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
9. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
 - Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (*Excel 2000*) ή Να μη γίνει ενημέρωση (*Excel XP*).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία



μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.

- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.
-

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9-1 Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που αντιστοιχεί στο δυναμικό των εξ. (9.16) δίνεται από τις εξ. (9.18).

9-2 Δείξτε ότι οι συνοριακές συνθήκες των εξ. (9.19) δίνουν τις τιμές των φορτίων στις εξ. (9.20).

9-3 Αποδείξτε τις εξ. (9.41) και (9.42).

9-4 Πώς πρέπει να τροποποιηθούν τα δεδομένα της Εργαστηριακής Άσκησης 9.3 ώστε να θεωρηθεί ότι απομακρύνθηκε η σφαίρα από διηλεκτρικό υλικό με ειδική διαπερατότητα κ_e ; Δείξτε ότι μετά την απομάκρυνση της σφαίρας, τόσο οι εξ. (9.41) και (9.42), όσο και τα αποτελέσματα της Εργαστηριακής Άσκησης δίνουν το σωστό ηλεκτρικό πεδίο.

9-5 Στην Εργαστηριακή Άσκηση 9.1 μεταβάλετε τις τιμές των παραμέτρων q και d και περιγράψτε πως επηρεάζουν τα αποτελέσματα.

9-6 Στην Εργαστηριακή Άσκηση 9.2 μεταβάλετε την τιμή της παραμέτρου P και περιγράψτε πως επηρεάζει τα αποτελέσματα.

9-7 Στην Εργαστηριακή Άσκηση 9.2 μεταβάλετε την τιμή της πα-



ραμέτρου Ε0 και περιγράψτε πως επηρεάζει τα αποτελέσματα.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΕΚΑ

Μαγνητικά πεδία



ΟΠΩΣ ΕΙΔΑΜΕ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4, τα αποτελέσματα της ύπαρξης στο χώρο μιας στατικής κατανομής φορτίου $\rho(\mathbf{r})$ μπορούν να αποδοθούν μέσω του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ που προκύπτει από την ολοκλήρωση της εξ. (4.2). Κατά τον ίδιο τρόπο, η ύπαρξη κινούμενων φορτίων οδηγεί σε νέες ιδιότητες του χώρου που αποδίδονται με μια ανάλογη ανυσματική συνάρτηση πεδίου $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, την οποία θα ονομάσουμε **μαγνητική επαγωγή**. Αν τα κινούμενα φορτία αποδοθούν από την πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, η μαγνητική επαγωγή, σε αναλογία προς την εξ. (4.2), δίνεται από τον νόμο των **Biot και Savart**

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' \quad (10.1)$$

όπου μ_0 είναι μια σταθερά και η ολοκλήρωση εκτείνεται σε όλο το χώρο.

Η εξ. (10.1) παίρνει απλούστερη μορφή αν τα κινούμενα φορτία μπορούν να εκφραστούν ως ένα **ρεύμα**

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \quad (10.2)$$

όπου $d\mathbf{A}$ είναι το στοιχείο της επιφάνειας S . Τότε, η εξ. (10.1) παίρ-



νει τη μορφή

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C d\ell \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (10.3)$$

όπου $d\ell$ είναι το στοιχείο του δρόμου C που διαγράφει το ρεύμα I .

Το ρεύμα I που ορίσαμε στην εξ. (10.2) μπορεί να έχει τη μορφή της γνωστής μας συνεχούς ροής φορτίου μέσα σε ένα επιμήκη αγωγό (ένα σύρμα). Μπορεί ακόμη να έχει τη μορφή μηχανικής κίνησης φορτίου ή ροής ιόντων, π.χ. κατά την ηλεκτρόλυση. Τη μαγνητική επαγωγή που δημιουργούν στο χώρο δύο διαφορετικές μορφές ρεύματος θα μελετήσουμε στο παρόν κεφάλαιο, αρχίζοντας από την απλούστερη περίπτωση του μαγνητικού πεδίου ενός ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού.

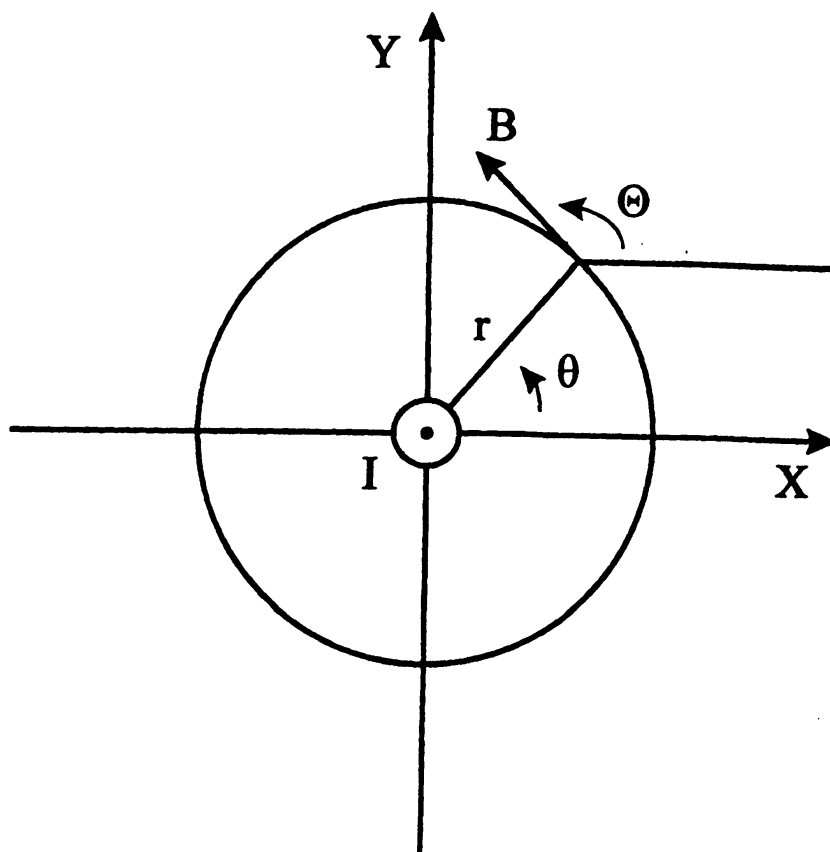
ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΦΟΡΟΥ ΑΓΩΓΟΥ

Όπως φαίνεται στο σχήμα 10-1, θα θεωρήσουμε ένα λεπτό αγωγό κατά τον άξονα Z , ο οποίος διέρχεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και φέρει σταθερό ρεύμα I . Η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} σε ένα σημείο το οποίο προσδιορίζεται από το άνωσμα θέσης \mathbf{r} , βρίσκεται στο επίπεδο XY και είναι κάθετο προς το \mathbf{r} . Το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής μπορεί να προσδιοριστεί από τον νόμο του Ampère ως

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}. \quad (10.4)$$

Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει το άνωσμα θέσης με τον άξονα X , τότε η γωνία Θ που σχηματίζει η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} με τον θετικό άξονα X είναι





Σχήμα 10-1 Μαγνητική επαγωγή γύρω από ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό.

$$\Theta = \theta + \frac{\pi}{2}. \quad (10.5)$$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 10.1

Μαγνητική επαγωγή ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του Excel με τα εξής Φύλλα:

1. Δεδομένα
2. Πεδίο
3. Γωνία θ



4. Γωνία

2. Στο Φύλλο Δεδομένα γράψτε τα δεδομένα του προβλήματός σας, ήτοι την τιμή της σταθεράς $\mu_0/4\pi$ και την τιμή του ρεύματος. Ο αγωγός θεωρείται ότι τέμνει κάθετα το επίπεδο του Φύλλου σε ένα χώρο 25×25 κελιών με κέντρο το κελί M13.

	A	B	C
1	$\mu_0/4\pi =$	1.00E-07	
2	Ρεύμα =	10	
3	centre_row =	13	
4	centre_column =	13	
5			

Ονομάστε τα κελιά στο Φύλλο Δεδομένα σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα

Κελί	Όνομα
B1	Km
B2	I0
B3	cr
B4	cc

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα** στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Km). Επιλέξτε **OK**.

3. Στο Φύλλο Πεδίο γράψτε στο κελί A1 την μαγνητική επαγωγή της εξ. (10.4). Παρατηρείται ότι η εξ. (10.4) απειρίζεται για $r = 0$. Η συνθήκη αυτή είναι δυνατόν να ελεγχθεί με μια συνάρτηση IF



που περιβάλλει τον υπολογισμό. Η έκφραση που μπορείτε να γράψετε είναι

$$=IF(AND(ROW()=cr;COLUMN()=cc);0;2*Km*I0/SQRT((ROW()-cr)^2+(COLUMN()-cc)^2))$$

4. Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
5. Στο Φύλλο Γωνία θ καταγράψτε την γωνία θ του σχήματος 10-1. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση του Excel ATAN2, που επιστρέφει την αντίστροφη εφαπτομένη $\tan^{-1}\theta$.

Η σύνταξη της συνάρτησης ATAN2 είναι:

$$ATAN2(X,Y)$$

όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο XY. Παρατηρείται ότι η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση. Η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

Το αποτέλεσμα της συνάρτησης ATAN2 μπορεί να μετατραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το

Excel διαθέτει τη συνάρτηση PI(), η οποία επιστρέφει την τιμή π ($= 3.14\dots$) με ακρίβεια 15 ψηφίων.



Η έκφραση που μπορείτε να γράψετε είναι

$$\begin{aligned} &=IF((C1-ROW())<0;ATAN2((COLUMN()-C1); \\ &(C1-ROW()))*180/PI()+360;ATAN2((COLUMN()-C1); \\ &(C1-ROW()))*180/PI()) \end{aligned}$$

Η συμπεριφορά της συνάρτησης ATAN2 στην αρχή των συνεταγμένων ελέγχεται από την εξωτερική συνάρτηση IF.

6. Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
7. Στο Φύλλο *Γωνία* τοποθετήστε την γωνία θ της εξ. (10.5). Παρατηρείται ότι με την εξ. (10.5) οι γωνίες που σχηματίζει το άνυσμα **B** με τον άξονα **X** μπορεί να έχουν τιμή μεγαλύτερη από 360° . Η κατάσταση διορθώνεται αν στο πρώτο τεταρτημόριο αφαιρεθεί από το αποτέλεσμα 360° . Η έκφραση που μπορείτε να γράψετε είναι

$$=IF('Γωνία \theta'!A1+90>360;'Γωνία \theta'!A1-270;'Γωνία \theta'!A1+90)$$

8. Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
9. Η εποπτεία της μαγνητικής επαγωγής που δημιουργεί ο αγωγός στο χώρο αυξάνει αν αποδώσουμε τις τιμές του Φύλλου *Πεδίο* σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο *Πεδίο* επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**



- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο** >
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο** >
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες **Z**, **X** και **Y**, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού

Κατηγορία (X): X

Τιμή (Z): Πεδίο

Σειρά (Y): Y

- Στην καρτέλα **Υπόμνημα** βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή **Εμφάνιση υπομνήματος**.
- Επιλέξτε **Επόμενο** >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Σε νέο φύλλο εργασίας**. Επιλέξτε **Τέλος**.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του *Excel* έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει τη γραφική παράσταση.



Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του *Excel* **Γ**ράφημα → Προβολή 3Δ... Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

10. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου

- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε **Ε**νεργοποίηση μακροεντολών.
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε **Ό**χι (*Excel 2000*) ή **Ν**α μη γίνει ενημέρωση (*Excel XP*).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.
- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.



ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΙΜΑΝΤΑ

Θεωρείστε ένα ομοιόμορφα φορτισμένο ιμάντα πλάτους $2L$, ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα. Όπως φαίνεται στο σχήμα 10-2 μπορούμε να επιλέξουμε το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε ο ιμάντας να βρίσκεται στο επίπεδο XZ μεταξύ $x = -L$ και $x = L$ με την κίνησή του κατά τη θετική φορά του άξονα Z . Η κίνηση του ιμάντα ισοδυναμεί με ροή ρεύματος I κατά τον άξονα Z .

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μαγνητική επαγωγή σε ένα σημείο του χώρου αν θεωρήσουμε τη συνεισφορά λεπτών λωρίδων πλάτους dx' κατά το πλάτος του ιμάντα. Κάθε λωρίδα ισοδυναμεί με ευθύγραμμο αγωγό αμελητέας διατομής, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα

$$dI = \frac{I}{2L} dx' \quad (10.6)$$

και η συνεισφορά του στη μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} σε ένα σημείο του χώρου στη θέση (x, y, z) θα είναι

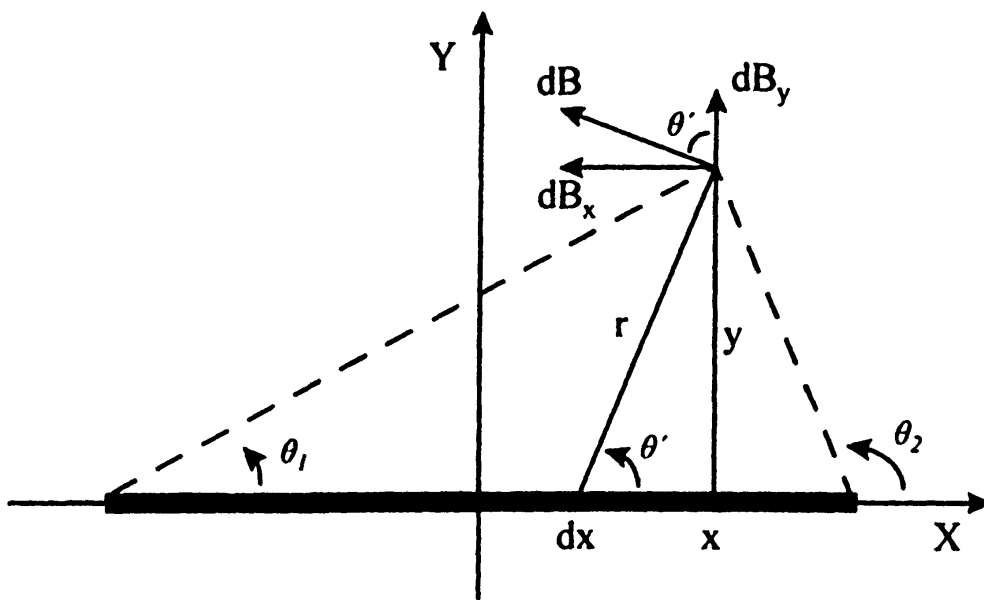
$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{2L} \frac{dx'}{r} \quad (10.7)$$

Η γεωμετρία των εξ. (10.6) και (10.7) δίνεται στο σχήμα 10-2.

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι η εξ. (10.7) μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση της γωνίας θ' στη μορφή

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{L} \frac{d\theta'}{\sin\theta'} \quad (10.8)$$





Σχήμα 10-2 Κινούμενος φορτισμένος μάντας πλάτους $2L$. Η κίνηση του μάντα είναι κάθετη προς την σελίδα με φορά προς τον αναγνώστη.

ενώ οι δύο συνιστώσες της μαγνητικής επαγωγής είναι

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{L} d\theta' \quad (10.9\alpha)$$

και

$$dB_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{L} \cot \theta' d\theta'. \quad (10.9\beta)$$

Όπως σημειώνεται στο σχήμα 10-2, τα όρια της ολοκλήρωσης ως προς τη γωνία θ' είναι

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x+L} \right) \quad (10.10\alpha)$$

και

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-L}\right) \quad (10.10\beta)$$

Μπορούμε ακόμη να δείξουμε ότι ολοκλήρωση των εξ. (10.9) οδηγεί στις σχέσεις

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{L} \left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x+L}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-L}\right) \right] \quad (10.11\alpha)$$

και

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{L} \ln \left(\frac{\left| \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x-L}\right)\right) \right|}{\left| \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x+L}\right)\right) \right|} \right). \quad (10.11\beta)$$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 10.2

Μαγνητική επαγωγή κινούμενου φορτισμένου μάντα

1. Ακολουθώντας τα βήματα της Εργαστηριακής Άσκησης 10.1 υπολογίστε τη μαγνητική επαγωγή που δημιουργεί η κίνηση του φορτισμένου μάντα σε ένα βιβλίο του *Excel*. Δημιουργείστε ένα βιβλίο του *Excel* με τα εξής Φύλλα:

1. Δεδομένα
2. $B(x)$
3. $B(y)$
4. Πεδίο
5. Γωνία



2. Στο Φύλλο Δεδομένα γράψτε τα δεδομένα του προβλήματος, ήτοι την τιμή της σταθεράς $\mu_0/4\pi$ την τιμή του ρεύματος και το πλάτος του ιμάντα. Ο αγωγός θεωρείται ότι τέμνει κάθετα το επίπεδο του Φύλλου σε ένα χώρο 25×25 κελιών με κέντρο το κελί M13.

	A	B	C
1	$\mu_0/4\pi =$	1.00E-07	
2	Ρεύμα =	10	
3	centre row =	13	
4	centre column =	13	
5	L =	9	
6			

Ονομάστε τα κελιά στο Φύλλο Δεδομένα σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα

Κελί	Όνομα
B1	Km
B2	I0
B3	cr
B4	cc
B5	L

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα** στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Km). Επιλέξτε OK.

3. Στο Φύλλο B(x) γράψτε στο κελί A1 την έκφραση για την οριζόντια συνιστώσα της μαγνητικής επαγωγής στην εξ. (10.11α)



```
=Km*I0/L*(IF(ATAN2(COLUMN()-cc+L;cr-ROW())<0;
ATAN2(COLUMN()-cc+L;cr-ROW()+2*PI());
ATAN2(COLUMN()-cc+L;cr-ROW()))
-(IF(ATAN2(COLUMN()-cc-L;cr-ROW())<0;
ATAN2(COLUMN()-cc-L;cr-ROW()+2*PI());
ATAN2(COLUMN()-cc-L;cr-ROW()))))
```

Η προηγούμενη έκφραση εμφανίζεται τεχνητά πολύπλοκη λόγω της επανειλημμένης χρήσης της συνάρτησης IF() στον υπολογισμό της γωνίας που επιστρέφει η συνάρτηση ATAN2().

Η σύνταξη της συνάρτησης ATAN2 είναι:

ATAN2(X,Y)

όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο XY. Παρατηρείται ότι η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση. Η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

Το αποτέλεσμα της συνάρτησης ATAN2 μπορεί να μετατραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το

Excel διαθέτει τη συνάρτηση PI(), η οποία επιστρέφει την τιμή π ($= 3.14\dots$) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.



4. Στο Φύλλο $B(y)$ γράψτε στο κελί A1 την έκφραση για την κατακόρυφη συνιστώσα της μαγνητικής επαγωγής στην εξ. (10.11β)

```
=Km*I0/L*LN(ABS(SIN(
IF(ATAN2(COLUMN()-cc-L;cr-ROW())<0;
ATAN2(COLUMN()-cc-L;cr-ROW()+2*PI();
ATAN2(COLUMN()-cc-L;cr-ROW()))))
/ABS(SIN(IF(ATAN2(COLUMN()-cc+L;cr-ROW())<0;
ATAN2(COLUMN()-cc+L;cr-ROW()+2*PI();
ATAN2(COLUMN()-cc+L;cr-ROW())))))))
```

Και εδώ, η έκφραση εμφανίζεται τεχνητά πολύπλοκη λόγω της επανειλημμένης χρήσης της συνάρτησης IF() στον υπολογισμό της γωνίας που επιστρέφει η συνάρτηση ATAN2().

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

5. Παρατηρείται ότι οι εξ. (10.11), και επομένως οι σχέσεις του *Excel* που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό της μαγνητικής επαγωγής, δίνουν απροσδιόριστο αποτέλεσμα (διαίρεση δια του μηδενός) σε ορισμένα σημεία του χώρου. Έτσι, σε ορισμένα κελιά των Φύλλων $B(x)$ και $B(y)$ υπάρχει τώρα η ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Το σφάλμα θα ήταν δυνατόν να αποτραπεί αν περιβάλλαμε τις εκφράσεις που υπολογίζουν τις συνιστώσες της μαγνητικής επαγωγής συναρτήσεις IF(). Η λύση αυτή παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι περιπλέκει ακόμη περισσότερο τις αντίστοιχες εκφράσεις, ενώ επιβραδύνει κατά τι τον υπολογισμό. Μια πλέον πρακτική λύση είναι να επέμβουμε μετά το πέρας του υπολογισμού και στα κελιά όπου εμφανίζεται η ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! να εισαγάγουμε μια αυθαίρετη τιμή. Η πιο λογική τιμή στην περίπτωση αυτή είναι η τιμή 0 (μηδέν).



Μετά το τέλος του υπολογισμού διορθώστε στα Φύλλα $B(x)$ και $B(y)$ όλα τα κελιά που περιέχουν την ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0!

6. Στο Φύλλο *Πεδίο* υπολογίστε το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} . \quad (10.12)$$

καταχωρώντας στο κελί A1 την έκφραση

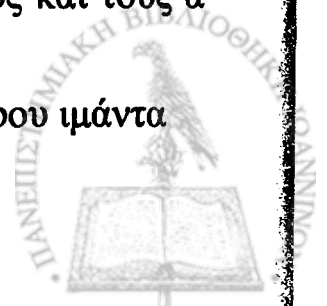
$$=SQRT('B(x)!'A1^2+'B(y)!'A1^2)$$

και αντιγράφοντάς την σε όλη της περιοχή A1:Y25.

7. Αποδώστε τις τιμές του Φύλλου *Πεδίο* σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο *Πεδίο* επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο >**
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο >**
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Πεδίο ρευματοφόρου ιμάντα



Κατηγορία (X): X

Τιμή (Z): Πεδίο

Σειρά (Y): Y

- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του *Excel* έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει τη γραφική παράσταση.

Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του *Excel* **Γράφημα** → **Προβολή 3Δ...** Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

8. Στο Φύλλο *Γωνία*, υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το άνωσμα **B** με τον οριζόντιο άξονα X

$$\Theta = \tan^{-1} \left(\frac{B_y}{B_x} \right).$$

Για το σκοπό αυτό



- Τοποθετείστε στο κελί A1 την εντολή

=IF(ATAN2('B(x)!'A1;'B(y)!'A1)<0;
ATAN2('B(x)!'A1;'B(y)!'A1)*180/PI()+360;
ATAN2('B(x)!'A1;'B(y)!'A1)*180/PI())

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

9. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου

- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (*Excel 2000*) ή Να μη γίνει ενημέρωση (*Excel XP*).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.
- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.



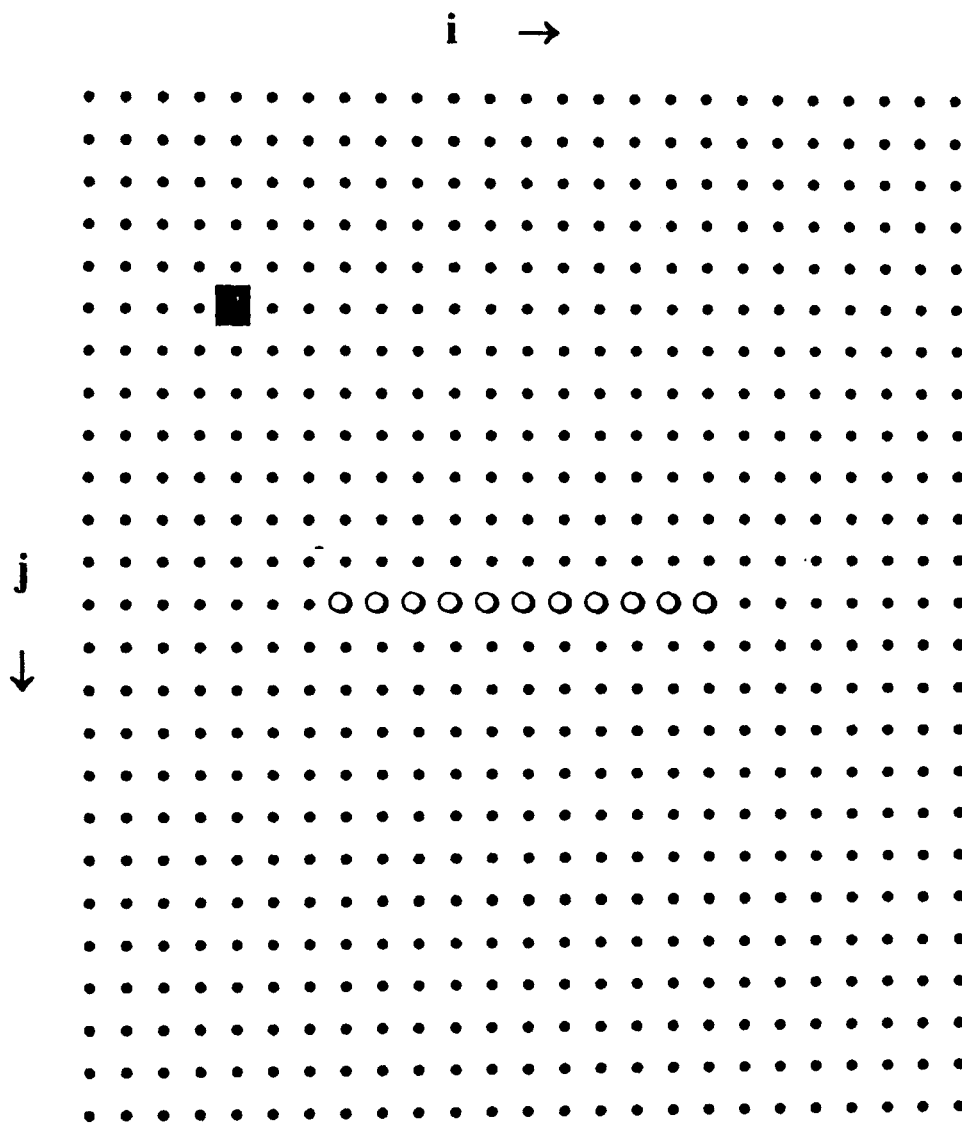
ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΣ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΣ ΙΜΑΝΤΑΣ ΚΑΙ Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ

Ας δούμε τον κινούμενο φορτισμένο ιμάντα που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο από μια νέα οπτική γωνία. Στο χώρο διακριτών σημείων που θεωρούμε, ο ιμάντας μπορεί να θεωρηθεί ως μια αλληλουχία ρευματοφόρων αγωγών κατά το επίπεδο που καλύπτει (στην οριζόντια διεύθυνση του σχήματος 10-2) από τη θέση $x = -L$ έως τη θέση $x = L$. Σε μορφή Φύλλου του *Excel* ο χώρος αυτός περιγράφεται στο σχήμα 10-3 με τον ιμάντα κάθετο προς το επίπεδο της σελίδας του βιβλίου.

Αν τώρα στον χώρο του σχήματος 10-3 θεωρήσουμε ένα σημείο P με συντεταγμένες (I, J) , λόγω της αρχής της επαλληλίας, η ολική μαγνητική επαγωγή θα προκύψει από τη συνεισφορά καθενός από τους ευθύγραμμους αγωγούς που θεωρούμε ότι συγκροτούν τον ιμάντα. Από τη συμμετρία όμως του προβλήματος, η μαγνητική επαγωγή που δημιουργεί στο σημείο P ένας αγωγός, ο οποίος βρίσκεται μετατοπισμένος κατά k σημεία προς τη θετική φορά του άξονα X , είναι ίση με αυτή που δημιουργεί στο σημείο $(I-k, J)$ ένας αγωγός στο κέντρο της διάταξης. Συμπεραίνεται επομένως ότι η μαγνητική επαγωγή που δημιουργούν στο σημείο P $2L+1$ αγωγοί διατεταγμένοι από το σημείο $x = -L$ έως το σημείο $x = L$, μπορεί να βρεθεί αν αθροίσουμε τη μαγνητική επαγωγή που δημιουργεί στα σημεία $x = J, z = I-L, I-L+1, \dots, I, I+L$ ένας αγωγός στο κέντρο της διάταξης.

Ο προηγούμενος συλλογισμός οδηγεί στη στρατηγική για τον υπολογισμό της μαγνητικής επαγωγής που δημιουργεί στον χώρο ο ιμάντας: Σε δύο Φύλλα του *Excel* θα υπολογίσουμε, όπως και στην Εργαστηριακή Άσκηση 10.1, σε κάθε σημείο (i, j) , τις δύο συνιστώσες $b_x(i, j)$ και $b_y(i, j)$ της μαγνητικής επαγωγής για ένα ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό στην αρχή των συντεταγμένων. Στη συνέχεια, σε δύο νέα Φύλλα του *Excel*, θα υπολογίσουμε τη μαγνητική επαγω-





Σχήμα 10-3 Ρευματοφόρος μάντα σε χώρο διακριτών σημείων.

γή του μάντα από τις σχέσεις

$$B_x(i, j) = \sum_{i'=i-L}^{i+L} b_x(i', j) \quad (10.14\alpha)$$

$$B_y(i, j) = \sum_{i'=i-L}^{i+L} b_y(i', j) \quad (10.14\beta)$$

όπου $2L+1$ είναι το πλήθος των αγωγών στο σχήμα 10-3.



Οι συνεισφορές $b_x(i,j)$ και $b_y(i,j)$ κάθε αγωγού στις συνιστώσες της μαγνητικής επαγωγής μπορούν να βρεθούν από τις εξ. (10.4) και (10.5)

$$b_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \cos \Theta = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \sin \theta \quad (10.15\alpha)$$

$$b_y = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \sin \Theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \cos \theta \quad (10.15\beta)$$

ενώ το μέτρο της ολικής μαγνητικής επαγωγής είναι

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (10.16)$$

και η γωνία που σχηματίζει το άνυσμα B με τον οριζόντιο άξονα

$$\Theta_B = \tan^{-1} \frac{B_y}{B_x} \quad (10.17)$$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 10.3

Μαγνητική επαγωγή κινούμενου φορτισμένου ιμάντα.

Προσέγγιση μέσω της αρχής της επαλληλίας

1. Δημιουργείστε ένα βιβλίο του *Excel* με τα εξής Φύλλα:

1. Δεδομένα
2. $B(x)$ αγωγού¹

¹ Στις καταχωρήσεις $B(x)$ αγωγού και $B(y)$ αγωγού, τα $B(x)$ και $B(y)$ είναι γραμμένα με λατινικούς χαρακτήρες.



3. $B(y)$ αγωγού
4. Γωνία θ
5. $B(x)$
6. $B(y)$
7. Πεδίο
8. Γωνία

2. Στο Φύλλο Δεδομένα γράψτε τα δεδομένα του προβλήματος, ήτοι την τιμή της σταθεράς $\mu_0/4\pi$, την τιμή του ρεύματος και το πλάτος του μάντα. Ο αγωγός θεωρείται ότι τέμνει κάθετα το επίπεδο του Φύλλου σε ένα χώρο 25×25 κελιών με κέντρο το κελί M13.

	A	B	C
1	$\mu_0/4\pi =$	1.00E-07	
2	Ρεύμα =	10	
3	centre_row =	13	
4	centre_column =	13	
5	L =	7	
6			

Ονομάστε τα κελιά στο Φύλλο Δεδομένα σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα

Κελί	Όνομα
B1	Km
B2	I0
B3	cr
B4	cc
B5	L



Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα** στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Km). Επιλέξτε **OK**.

3. Τα Φύλλα $B(x)$ αγωγού και $B(y)$ αγωγού προορίζονται για την καταχώρηση της μαγνητικής επαγωγής που συνεισφέρει ένας αγωγός στο κέντρο του χώρου [βλ. εξ. (10.15)], ενώ τα Φύλλα $B(x)$ και $B(y)$ για την καταχώρηση των αθροισμάτων στις εξ. (10.14). Έτσι, τα Φύλλα $B(x)$ αγωγού και $B(y)$ αγωγού θα πρέπει να δημιουργηθούν με αρκετά μεγαλύτερο αριθμό στηλών απ' ό,τι τα Φύλλα $B(x)$ και $B(y)$. Με τα δεδομένα της προηγούμενης παραγράφου ($cr = 13$, $cc = 13$), στον χώρο των Φύλλων $B(z)$ αγωγού και $B(x)$ αγωγού θα συμπεριλάβουμε 51 στήλες επί 25 σειρές με κέντρο του χώρου το κελί στη στήλη $2cc = 26$ και σειρά $cr = 13$ (το κελί Y13). Στη γεωμετρία αυτή, θα υπολογίσουμε κατ' αρχάς τη γωνία θ του σχήματος 10-1 που απαιτείται στις εξ. (10.15). Για το σκοπό αυτό καταχωρίστε στο κελί A1 του Φύλλου *Γωνία θ* την έκφραση

```
=IF((cr-ROW())<0;ATAN2(COLUMN()-2*cc;  
cr-ROW()+2*PI();ATAN2(COLUMN()-2*cc;cr-ROW()))
```

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:AY25.

Η γωνία θ , όπως υπολογίζεται από την τελευταία έκφραση, έχει απροσδιόριστη τιμή στην αρχή των συντεταγμένων. Έτσι, στο κελί Z13 του Φύλλου *Γωνία θ* εμφανίζεται τώρα η ένδειξη #ΔΙΑΙΡ/0! Διορθώστε την ανωμαλία αυτή θέτοντας στο κελί Z13 την τιμή 0 (μηδέν).



4. Καταχωρίστε στο κελί A1 του Φύλλου B(x)αγωγού την έκφραση που υπολογίζει την εξ. (10.15α)

```
=IF(AND(ROW()=cr;COLUMN()=2*cc);0;  
-2*Km*I0/SQRT((ROW()-cr)^2+(COLUMN()-2*cc)^2)  
*SIN(Γωνία θ!A1))
```

όπου η συνάρτηση IF() εξασφαλίζει τη σωστή συμπεριφορά στην αρχή των συντεταγμένων.

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:AY25.

5. Καταχωρίστε στο κελί A1 του Φύλλου B(y)αγωγού την έκφραση που υπολογίζει την εξ. (10.15β)

```
=IF(AND(ROW()=cr;COLUMN()=2*cc);0;  
2*Km*I0/SQRT((ROW()-cr)^2+(COLUMN()-2*cc)^2)  
*COS(Γωνία θ!A1))
```

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:AY25.

6. Στα Φύλλα B(x) και B(y) δημιουργείστε τα αθροίσματα των εξ. (10.14). Οι εκφράσεις που μπορείτε να γράψετε στα αντίστοιχα κελιά A1 είναι

```
=SUM(OFFSET('B(x)αγωγού'!N1;0;-L)           (10.18α)  
:OFFSET('B(x)αγωγού'!N1;0;L))
```

και

```
=SUM(OFFSET('B(y)αγωγού'!N1;0;-L)           (10.18β)
```



:OFFSET('B(y)αγωγού'!N1;0;L))

Στις τελευταίες εντολές χρησιμοποιείται η συνάρτηση OFFSET, η οποία επιστρέφει το περιεχόμενο ενός κελιού, μετατοπισμένου κατά ένα αριθμό σειρών ή και στηλών από κάποιο κελί αναφοράς.

Η σύνταξη της συνάρτησης OFFSET είναι:

OFFSET(κελί αναφοράς; πλήθος σειρών μετατόπισης; πλήθος στηλών μετατόπισης)

όπου αν το πλήθος σειρών είναι αρνητικός αριθμός η μετατόπιση θεωρείται προς τα άνω και αν θετικός προς τα κάτω. Αντίστοιχα, αν το πλήθος στηλών είναι θετικός αριθμός η μετατόπιση θεωρείται προς τα δεξιά και αν αρνητικός προς τα αριστερά.

Για παράδειγμα, η εντολή

OFFSET('B(x)αγωγού'!M4;0;-3)

επιστρέφει το περιεχόμενο του κελιού 'B(x)αγωγού'!J4 και η εντολή OFFSET(CA7;5;-2) το περιεχόμενο του κελιού BY12.

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε τις προηγούμενες εκφράσεις και αντιγράψτε τις σε όλη την περιοχή A1:Y25 των αντίστοιχων Φύλλων.

7. Στο Φύλλο *Πεδίο* υπολογίστε το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής



$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} . \quad (10.12)$$

καταχωρώντας στο κελί A1 την έκφραση

$$=SQRT('B(x)!'A1^2+'B(y)!'A1^2)$$

και αντιγράφοντάς την σε όλη της περιοχή A1:Y25.

8. Αποδώστε τις τιμές του Φύλλου *Πεδίο* σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο *Πεδίο* επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο >**
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο >**
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Πεδίο ρευματοφόρου ιμάντα

Κατηγορία (X): X

Τιμή (Z): Πεδίο



Σειρά (Y): Y

- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του *Excel* έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει τη γραφική παράσταση.

Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του *Excel* **Γράφημα** → **Προβολή 3Δ...** Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

9. Στο Φύλλο *Γωνία*, υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το άνυσμα **B** με τον οριζόντιο άξονα **X**

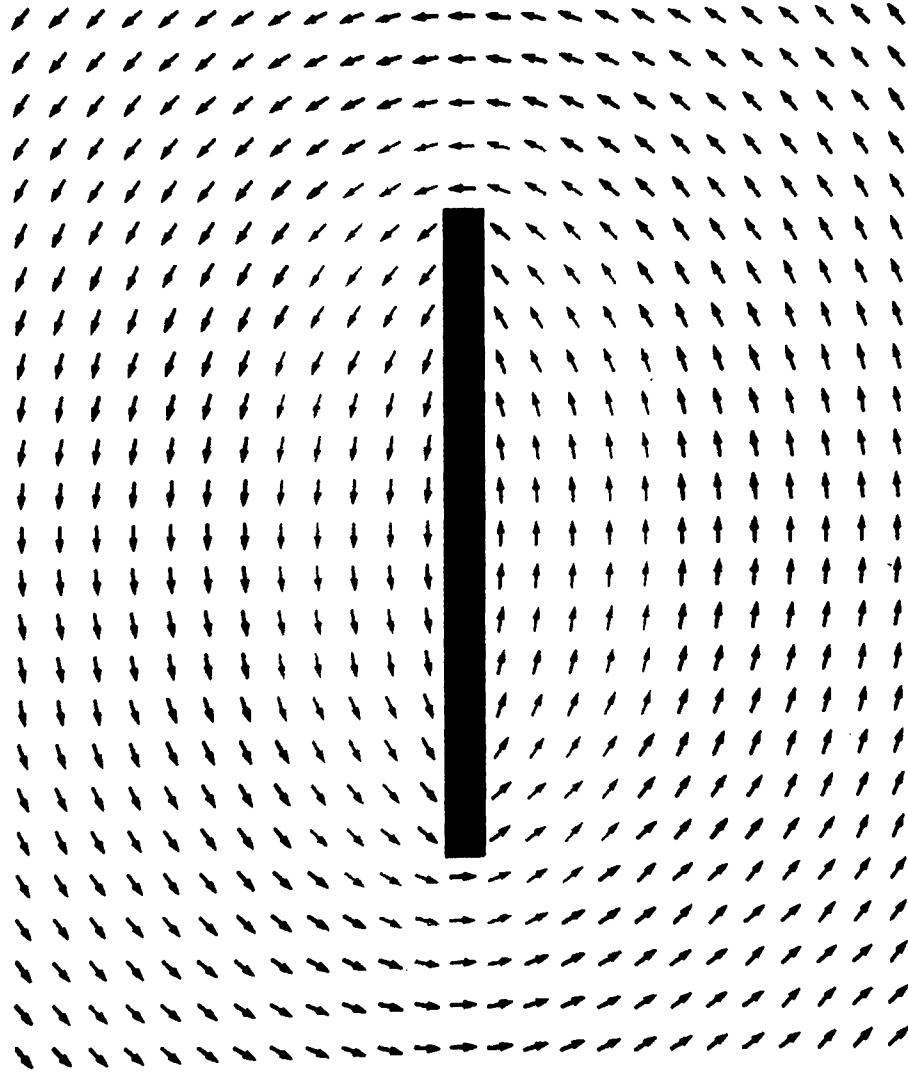
$$\Theta = \tan^{-1} \left(\frac{B_y}{B_x} \right) \quad (10.13)$$

Για το σκοπό αυτό

- Τοποθετείστε στο κελί A1 την εντολή

```
=IF(ATAN2('B(x)!'A1;'B(y)!'A1)<0;  
ATAN2('B(x)!'A1;'B(y)!'A1)*180/PI()+360;  
ATAN2('B(x)!'A1;'B(y)!'A1)*180/PI())
```





$\max(\text{Πεδίο}) = 6.64\text{E-}06$
 $\min(\text{Πεδίο}) = 1.15\text{E-}21$



$1.15\text{E-}21 - 9.48\text{E-}07$
 $9.48\text{E-}07 - 1.90\text{E-}06$
 $1.90\text{E-}06 - 2.84\text{E-}06$
 $2.84\text{E-}06 - 3.79\text{E-}06$
 $3.79\text{E-}06 - 4.74\text{E-}06$
 $4.74\text{E-}06 - 5.69\text{E-}06$
 $5.69\text{E-}06 - 6.64\text{E-}06$

Σχήμα 10-4 Μαγνητική επαγωγή κινούμενου μάντα. Η μορφή του Φύλλου Δυναμικές Γραμμές στην Εργαστηριακή Άσκηση 10.3.

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
10. Επιθεωρήστε όλα τα Φύλλα που κατασκευάσατε στο σημείο αυτό και εντοπίστε σημεία όπου ο υπολογισμός δίνει απροσδιόριστο αποτέλεσμα (π.χ., #ΔΙΑΙΡ0!). Διορθώστε όλα τα σημεία αυτά θέτοντας στα αντίστοιχα κελιά την τιμή 0 (μηδέν).
11. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
 - Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (*Excel 2000*) ή Να μη γίνει ενημέρωση (*Excel XP*).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.
- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.



11. Η μορφή του Φύλλου Δυναμικές Γραμμές πρέπει τώρα να έχει τη μορφή του σχήματος 10-4. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά της Εργαστηριακής Άσκησης 10.2.
-

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 10-1 Δείξτε ότι η εξ. (10.8) είναι άμεσο επακόλουθο της εξ. (10.7).
- 10-2 Δείξτε ότι απ' ευθείας ολοκλήρωση των εξ. (10.9) οδηγεί στις εξ. (10.11).
- 10-3 Δείξτε ότι για $x = 0$ και $x \gg L$ οι εξ. (10.11) έχουν τη σωστή συμπεριφορά.
- 10-4 Εξηγήστε γιατί στις εξ. (10.18), οι οποίες καταγράφονται στο κελί A1, εμπλέκεται το κελί N1.
- 10-5 Επαναλάβετε την Εργαστηριακή Άσκηση 10.3 για την περίπτωση δύο παράλληλων ρευματοφόρων αγωγών με μεταξύ τους απόσταση $X = 2L + l$. Ποιά είναι η τροποποίηση στις εξ. (10.18) που αποδίδει αυτή τη γεωμετρία;
- 10-6 Επαναλάβετε την Εργαστηριακή Άσκηση 10.3 για $L = 0$ και σχολιάστε το αποτέλεσμα.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΝΤΕΚΑ

**Το μαγνητικό πεδίο
ρευματοφόρου δακτυλίου**



ΕΝΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι αυτό που δημιουργείται από την ύπαρξη στο χώρο ενός και μόνον ρευματοφόρου κυκλικού δακτυλίου. Δακτύλιοι μπορούν να συνδυαστούν ώστε να δημιουργήσουν πιο περίπλοκες διατάξεις, όπως πηνία διαφόρων σχημάτων, με σημαντικές εφαρμογές στη σύγχρονη τεχνολογία. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, το μαγνητικό πεδίο παρόμοιων διατάξεων μπορεί να υπολογιστεί από το μαγνητικό πεδίο ενός δακτυλίου με απλή εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας.

Η ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ ΡΕΥΜΑΤΟΦΟΡΟΥ ΔΑΚΤΥΛΙΟΥ

Θα θεωρήσουμε ένα δακτύλιο ακτίνας R , ο οποίος διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I , στο επίπεδο XY , με κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Η γεωμετρία της διάταξης είναι παρόμοια με αυτή του σχήματος 4-3 στο Κεφάλαιο 4. Η μαγνητική επαγωγή B σε ένα σημείο στο χώρο, το οποίο χωρίς να χάσουμε τίποτε από τη γενικότητα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι βρίσκεται στο επίπεδο XZ , είναι δυνατόν να υπολογιστεί από τον νόμο των Biot και Savart της εξ. (10.3)



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (11.1)$$

όπου η ολοκλήρωση είναι κατά την περιφέρεια του δακτυλίου.

Όπως και στην περίπτωση του φορτισμένου δακτυλίου, η συμμετρία του προβλήματος οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το άνυσμα \mathbf{B} θα βρίσκεται στο επίπεδο XZ . Για σημεία πάνω στον άξονα του δακτυλίου, η ολοκλήρωση της εξ. (11.1) πραγματοποιείται εύκολα και δίνει το αποτέλεσμα

$$B_z(x=0) = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (11.2\alpha)$$

$$B_x(x=0) = 0. \quad (11.2\beta)$$

Η ολοκλήρωση όμως της εξ. (11.1) σε τυχαίο σημείο του επιπέδου XZ είναι εξαιρετικά περίπλοκη, λόγω του εξωτερικού γινομένου $d\ell \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Για τους σκοπούς του παρόντος κεφαλαίου θα χρησιμοποιήσουμε, χωρίς λεπτομερή απόδειξη, το τελικό αποτέλεσμα που μπορεί να γραφεί ως

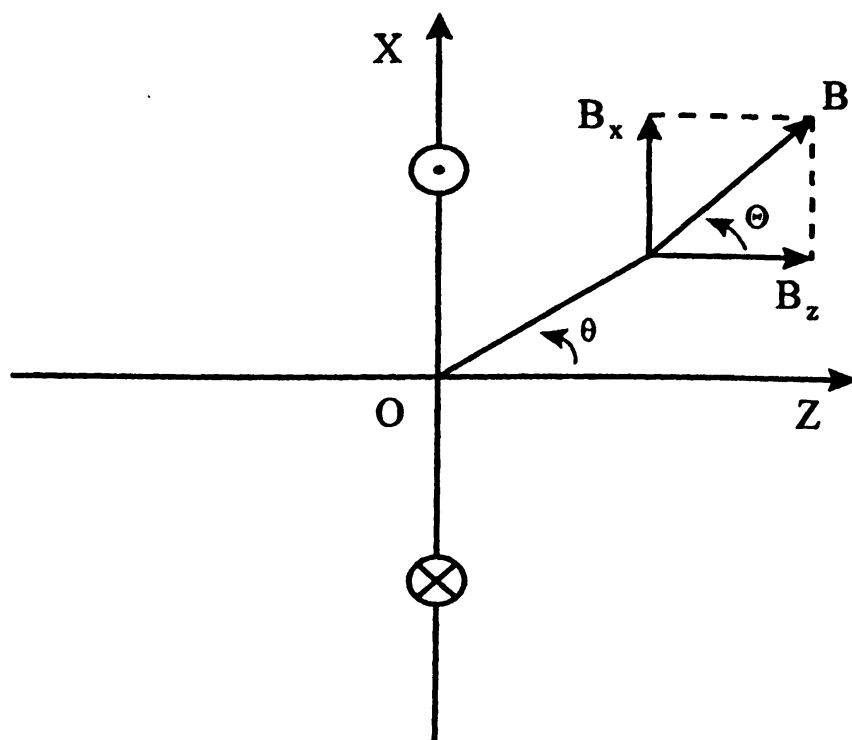
$$B_z = \frac{R}{x} I_0 - RxI_1 + R^2 I_2 \quad (11.3\alpha)$$

$$B_x = RzI_1 \quad (11.3\beta)$$

όπου I_0 , I_1 και I_2 είναι τα ολοκληρώματα

$$I_0(R, x, z) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \eta d\eta}{(R^2 + z^2 + x^2 - 2Rx \cos \eta)^{1/2}} \quad (11.4\alpha)$$





Σχήμα 11-1 Μαγνητική επαγωγή γύρω από ρευματοφόρο δακτύλιο. Ο άξονας του δακτυλίου είναι κατά τον άξονα Z.

και

$$I_k(R,x,z) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^k \eta d\eta}{(R^2 + z^2 + x^2 - 2Rx \cos \eta)^{3/2}} \quad (11.4\beta)$$

τα οποία μπορούν να υπολογιστούν με αριθμητική ολοκλήρωση μέσω του κανόνα του τραπεζοειδούς ή του κανόνα του Simpson.

Η γεωμετρία των εξ. (11.3) και (11.4) περιέχεται στο σχήμα 11-1.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 11.1

Μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου δακτυλίου

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του *Excel* με τα εξής Φύλλα:



11. Το μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου δακτυλίου

1. Δεδομένα
2. $B(x)$
3. $B(z)$
4. Πεδίο
5. Γωνία

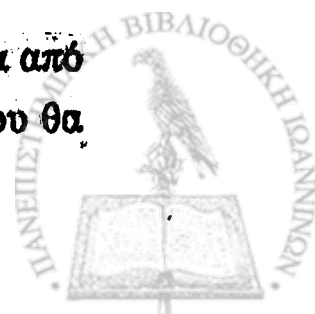
2. Στο Φύλλο Δεδομένα γράψτε τα δεδομένα του προβλήματός σας, ήτοι την τιμή της σταθεράς $\mu_0/4\pi$ και την τιμή του ρεύματος. Ο αγωγός θεωρείται ότι τέμνει κάθετα το επίπεδο του Φύλλου σε ένα χώρο 25×25 κελιών με κέντρο το κελί M13.

	A	B	C
1	$\mu_0/4\pi =$	1.00E-07	
2	Ρεύμα =	10	
3	centre row =	13	
4	centre column =	13	
5	R =	6	
6			

Ονομάστε τα κελιά στο Φύλλο Δεδομένα σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα

Κελί	Όνομα
B1	Km
B2	I0
B3	cr
B4	cc
B5	R0

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού Εισαγωγή → Όνομα → Ορισμός. Στην οθόνη που θα



ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο Όνόματα στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Km). Επιλέξτε OK.

3. Στις ασκήσεις των πρώτων κεφαλαίων, η αριθμητική ολοκλήρωση συναρτήσεων έγινε με τη βοήθεια του *Excel* γράφοντας αναλυτικά σε μια στήλη τις τιμές της συνάρτησης κατά (μικρά) σταθερά βήματα της μεταβλητής και στη συνέχεια αθροίζοντας τις τιμές σύμφωνα με τον κανόνα του τραπεζοειδούς ή τον κανόνα του Simpson. Στην παρόν κεφάλαιο θα δούμε ένα εναλλακτικό - και κομψότερο - τρόπο αριθμητικής ολοκλήρωσης με προγραμματισμό σε γλώσσα *Visual Basic*.
4. Δημιουργείστε μια συνάρτηση του *Excel* που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $I_0(R, x, z)$ της εξ. (11.4α). Για το σκοπό αυτό:
 - Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Επεξεργασία Visual Basic**.
 - Στην οθόνη σας, θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*.
 - Από τα μενού επιλέξτε **I**nsert → **M**odule. Στην κενή σελίδα που θα ανοίξει γράψτε την συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση $I_0(R, x, z)$ της εξ. (11.4α) η σύνταξη είναι:

Function hint0(R, x, z)

' Ορισμός μεταβλητών:



11. Το μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου δακτυλίου

- ' N = Αριθμός διαστημάτων στην αριθμητική ολοκλήρωση
- ' phi = Γωνία (σε ακτίνια) κατά την περιφέρεια του δακτυλίου
- ' step = Βήμα της ολοκλήρωσης (σε ακτίνια)
- ' zeta = Σταθερός όρος στον παρονομαστή
- ' integ = Προϊόν σταδιακής άθροισης κατά την ολοκλήρωση

Dim N, twopi, phi, step, zeta, counter, integ

twopi = 6.28318530717959

N = 200

zeta = R ^ 2 + x ^ 2 + z ^ 2

step = twopi / N

- ' Αρχικό και τελικό σημείο στο άθροισμα της ολοκλήρωσης

integ = 5 / 12 * 2 / (zeta - 2 * R * x) ^ 0.5

- ' Δεύτερο και προτελευταίο σημείο στο άθροισμα της ολοκλήρωσης

**integ = integ + 13 / 12 * (Cos(step) / (zeta - 2 * R * x * Cos(step)) ^ 0.5 _
+ Cos(twopi - step) / (zeta - 2 * R * x * Cos(twopi - step)) ^ 0.5)**

- ' Γωνία μετά το δεύτερο σημείο στο άθροισμα της ολοκλήρωσης

phi = 2 * step

- ' Άθροισμα από το τρίτο σημείο μέχρι το σημείο N - 2

For counter = 1 To N-3

integ = integ + Cos(phi) / (zeta - 2 * R * x * Cos(phi)) ^ 0.5

phi = phi + step

Next counter

- ' Άθροισμα x Βήμα

hint0 = integ * step

End Function



5. Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την λογική ροή της προηγούμενης συνάρτησης. Προς διευκόλυνσή σας, κατά την σύνταξη της συνάρτησης έχουν προστεθεί αρκετά σχόλια (μη εκτελέσιμες εκφράσεις). Υπενθυμίζεται ότι η γλώσσα *Visual Basic* χειρίζεται μια έκφραση ως σχόλιο αν στην αρχή της γραμμής υπάρχει ο χαρακτήρας '. Προφανώς, η σωστή λειτουργία της συνάρτησης δεν απαιτεί την δακτυλογράφηση των σχολίων, τα οποία μπορείτε, αν επιθυμείτε, να παραλείψετε¹. Η συνάρτηση χρησιμοποιεί τον κανόνα του τραπεζοειδούς, ο οποίος έχει τη μορφή (βλ. Κεφάλαιο 3)

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx = h\left[\frac{5}{12} f_1 + \frac{13}{12} f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_{N-2} + \frac{13}{12} f_{N-1} + \frac{5}{12} f_N\right] + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \quad (3.5)$$

Όπως σημειώνεται στα σχόλια, αρχικά υπολογίζονται τα ακραία σημεία του αθροίσματος, ενώ το άθροισμα των όρων $f_3 + f_4 + \dots + f_{N-2}$ υπολογίζεται στην επαναληπτική διαδικασία

For counter = [όρια]

.....

Next counter

Στο κείμενο της συνάρτησης Function hint0 η εντολή

```
integ = integ + 13 / 12 * (Cos(step) / (zeta - 2 * R * x * Cos(step))) ^ 0.5 _
```

¹ Ακολουθώντας την πρακτική της γλώσσας *Visual Basic*, τα μη εκτελέσιμα σχόλια σημειώνονται με πράσινους χαρακτήρες.



$$+ \text{Cos}(t\omega\rho i - \text{step}) / (\text{zeta} - 2 * R * x * \text{Cos}(t\omega\rho i - \text{step})) ^ 0.5$$

επεκτείνεται σε δύο γραμμές. Η γλώσσα *Visual Basic* επιτρέπει τη συνέχιση μιας εντολής στην επόμενη γραμμή αν η προηγούμενη τελειώνει με τον χαρακτήρα της υπογράμμισης `_`.

Μετά την καταγραφή της συνάρτησης *Visual Basic*, επιστρέψτε στην οθόνη του *Excel* επιλέγοντας από τα μενού **File** → **Close and Return to Microsoft Excel**

6. Παρόμοια με την συνάρτηση Function $\text{hint0}(R, x, z)$ είναι και η συνάρτηση Function $\text{hintk}(R, x, z, k)$ που υπολογίζει το ολοκλήρωμα της εξ. (11.4β). Η νέα συνάρτηση έχει μια επί πλέον μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τον εκθέτη k στην έκφραση \cos^k στην εξ. (11.4β).
- Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Επεξεργασία Visual Basic**.
 - Στην οθόνη σας, θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*.
 - Από τα μενού επιλέξτε **Insert** → **Module**. Στην κενή σελίδα που θα ανοίξει γράψτε την συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση $I_k(R, x, z)$ της εξ. (11.4β) η σύνταξη είναι:

Function $\text{hintk}(R, x, z, k)$

* Ορισμός μεταβλητών:

* N = Αριθμός διαστημάτων στην αριθμητική ολοκλήρωση



- ' phi = Γωνία (σε ακτίνια) κατά την περιφέρεια του δακτυλίου
- ' step = Βήμα της ολοκλήρωσης (σε ακτίνια)
- ' zeta = σταθερός όρος στον παρονομαστή
- ' integ = Προϊόν σταδιακής άθροισης κατά την ολοκλήρωση

Dim N, twopi, phi, step, zeta, counter, integ

twopi = 6.28318530717959

N = 200

zeta = R ^ 2 + x ^ 2 + z ^ 2

step = twopi / N

- ' Αρχικό και τελικό σημείο στο άθροισμα της ολοκλήρωσης

integ = 5 / 12 * 2 / (zeta - 2 * R * x) ^ 1.5

- ' Δεύτερο και προτελευταίο σημείο στο άθροισμα της ολοκλήρωσης

integ = integ + 13 / 12 * ((Cos(step) ^ k) / (zeta - 2 * R * x * Cos(step)) ^ 1.5

-

+ Cos(twopi - step) ^ k / (zeta - 2 * R * x * Cos(twopi - step)) ^ 1.5)

- ' Γωνία μετά το δεύτερο σημείο στο άθροισμα της ολοκλήρωσης

phi = 2 * step

- ' Άθροισμα από το τρίτο σημείο μέχρι το σημείο N - 2

For counter = 1 To N - 3

integ = integ + (Cos(phi) ^ k) / (zeta - 2 * R * x * Cos(phi)) ^ 1.5

phi = phi + step

Next counter

- ' Άθροισμα x Βήμα

hintk = integ * step

End Function



Μετά την καταγραφή της συνάρτησης *Visual Basic*, επιστρέψτε στην οθόνη του *Excel* επιλέγοντας από τα μενού **File** → **Close and Return to Microsoft Excel**

7. Στο φύλλο *B(z)* γράψτε στο κελί A1 την μαγνητική επαγωγή της εξ. (11.3α). Η έκφραση που μπορείτε να γράψετε είναι

```
=IF(ROW()=cr;Km*I0*2*PI()*R0^2/(R0^2+(COLUMN()-cc)^2)^1.5;  
Km*I0*(R0/(cr-ROW()))*hint0(R0;cr-ROW());  
COLUMN()-cc)-R0*(cr-ROW())*hintk(R0;cr-ROW();COLUMN()-cc;1)  
+R0^2*hintk(R0;cr-ROW();COLUMN()-cc;2)))
```

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

8. Στο φύλλο *B(x)* γράψτε στο κελί A1 την μαγνητική επαγωγή της εξ. (11.3β). Η έκφραση που μπορείτε να γράψετε είναι

```
=Km*I0*(COLUMN()-cc)*R0*hintk(R0;cr-ROW();COLUMN()-cc;1)
```

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

9. Στο φύλλο *Πεδίο* γράψτε στο κελί A1 το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} .$$

Η έκφραση που μπορείτε να γράψετε είναι

```
=SQRT('B(z)!'A1^2+'B(x)!'A1^2)
```



Αντιγράψτε την έκφραση αυτή σε όλη την περιοχή A1:Y25.

10. Στο Φύλλο Γωνία καταγράψτε την γωνία

$$\Theta_B = \tan^{-1} \frac{B_x}{B_z}$$

που σχηματίζει η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} με την οριζόντια διεύθυνση (με τον άξονα Z). Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση του Excel ATAN2, που επιστρέφει την αντίστροφη εφαπτομένη $\tan^{-1}\theta$.

Η σύνταξη της συνάρτησης ATAN2 είναι:

$$\text{ATAN2}(X,Y)$$

όπου X και Y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο XY. Παρατηρείται ότι η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει την γωνία θ σε ακτίνια με θετικές τιμές στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ και αρνητικές τιμές στην περιοχή $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Αν επιθυμείτε την τιμή της γωνίας σε όλο τον τριγωνομετρικό κύκλο, θα πρέπει να προσθέσετε 2π στις αρνητικές τιμές που επιστρέφει η συνάρτηση. Η συνάρτηση ATAN2(X,Y) επιστρέφει απροσδιόριστο αποτέλεσμα για $X = Y = 0$.

Το αποτέλεσμα της συνάρτησης ATAN2 μπορεί να μετατραπεί σε μοίρες μέσω του μετασχηματισμού $\theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$. Το Excel διαθέτει τη συνάρτηση PI(), η οποία επιστρέφει την τιμή π (= 3.14...) με ακρίβεια 15 ψηφίων.

Η έκφραση που μπορείτε να γράψετε είναι



```
=IF(AND(COLUMN()=cc;OR(ROW()=cr-R0;ROW()=cr+R0));"";  
IF(ATAN2('B(z)!A1;'B(x)!A1)*180/PI()<0;ATAN2('B(z)!A1;  
'B(x)!A1)*180/PI()+360;ATAN2('B(z)!A1;'B(x)!A1)*180/PI()))
```

όπου η εξωτερική συνάρτηση IF() εξασφαλίζει ότι η τιμή της γωνίας θ δεν υπολογίζεται σε σημεία όπου δίνει απροσδιόριστο αποτέλεσμα ($z = 0, x = \pm R$).

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

11. Αποδώστε τις τιμές του Φύλλου *Πεδίο* σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο *Δυναμικό* επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο** >
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο** >
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Μαγνητική επαγωγή ρευματοφόρου δακτυλίου

Κατηγορία (X): Z



Τιμή (Z): Μαγνητική επαγωγή

Σειρά (Y): X

- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία Γράφημα1 που περιέχει τη γραφική παράσταση.

Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του Excel Γράφημα → Προβολή 3Δ... Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

12. Επιθεωρήστε όλα τα Φύλλα που κατασκευάσατε ως το σημείο αυτό και εντοπίστε σημεία όπου ο υπολογισμός δίνει απροσδιόριστο αποτέλεσμα (π.χ., #ΔΙΑΙΡΟ!). Διορθώστε όλα τα σημεία αυτά θέτοντας στα αντίστοιχα κελιά την τιμή 0 (μηδέν).
13. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου
 - Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντο-



λών.

- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (Excel 2000) ή Να μη γίνει ενημέρωση (Excel XP).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα Δυναμικές Γραμμές που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας Ctrl-g. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.
- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας Ctrl-e.

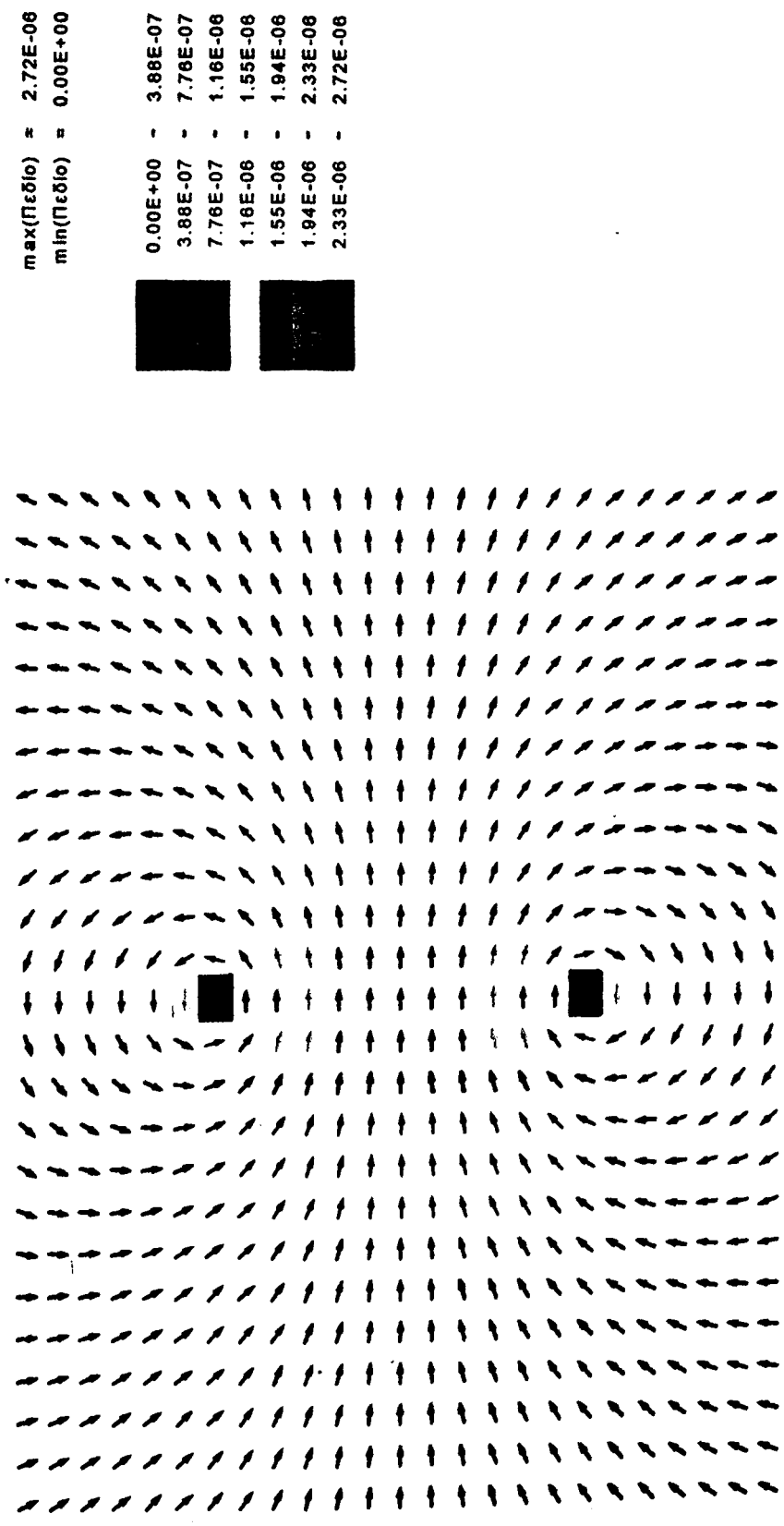
Το Φύλλο Δυναμικές Γραμμές πρέπει τώρα να έχει τη μορφή του σχήματος 11-2.

ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΔΙΠΟΛΙΚΗ ΡΟΠΗ

Αν στο χώρο υπάρχει μια τοπικά περιορισμένη κατανομή πυκνότητας ρεύματος $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, μπορούμε να ορίσουμε το φυσικό μέγεθος της μαγνητικής διπολικής ροπής \mathbf{m} ως

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) d^3r \quad (11.5)$$





$\max(\text{Πεδίο}) = 2.72\text{E-}06$
 $\min(\text{Πεδίο}) = 0.00\text{E+}00$

0.00E+00	-	3.88E-07
3.88E-07	-	7.76E-07
7.76E-07	-	1.16E-08
1.16E-08	-	1.55E-08
1.55E-08	-	1.94E-06
1.94E-06	-	2.33E-06
2.33E-06	-	2.72E-06

Σχήμα 11-2 Αλεκόνιση μαγνητικού πεδίου ρευματοφόρου δακτυλίου. Στο σχήμα σημειώνεται η τομή του επιπέδου με τον δακτύλιο.



όπου η ολοκλήρωση εκτείνεται σε όλο τον όγκο που καλύπτει η κατανομή ρεύματος. Για ένα δακτύλιο ακτίνας R που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η εξ. (11.5) παίρνει την απλή μορφή

$$\mathbf{m} = \pi R^2 I \hat{\mathbf{k}} \quad (11.6)$$

και σε μεγάλες αποστάσεις από τον δακτύλιο, σε σχέση με την ακτίνα του R , όπως αποδεικνύεται στα περισσότερα συγγράμματα Ηλεκτρομαγνητισμού, δημιουργεί μαγνητική επαγωγή \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}}{r^3} \quad (11.7)$$

όπου

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta \hat{\mathbf{k}} + \sin\theta \hat{\mathbf{i}} \quad (11.8)$$

είναι το μοναδιαίο άνυσμα κατά την ακτινική διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ ως προς την οριζόντια διεύθυνση του σχήματος 11-1.

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις είναι εύκολο να δείξουμε ότι στην προσέγγιση της μαγνητικής διπολικής ροπής οι εξ. (11.3) μπορούν να γραφούν ως

$$B_z = \frac{\mu_0}{4} R^2 I \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} m \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3} \quad (11.9\alpha)$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{4} R^2 I \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} m \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{r^3}. \quad (11.9\beta)$$



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 11.2

Μαγνητικό πεδίο διπόλου

1. Ακολουθώντας τα βήματα της Εργαστηριακής Άσκησης 11.1 υπολογίστε τη μαγνητική επαγωγή των εξ. (11.9). Δημιουργείτε ένα βιβλίο του *Excel* με τα εξής Φύλλα:

1. Δεδομένα
2. $B(x)$
3. $B(z)$
4. Πεδίο
5. Γωνία

2. Στο Φύλλο *Δεδομένα* γράψτε τα δεδομένα του προβλήματός σας, ήτοι την τιμή της σταθεράς $\mu_0/4\pi$ και την τιμή του ρεύμα-τος. Ο αγωγός θεωρείται ότι τέμνει κάθετα το επίπεδο του Φύλ-λου σε ένα χώρο 25×25 κελιών με κέντρο το κελί M13.

	A	B	C
1	$\mu_0/4\pi =$	1.00E-07	
2	Ρεύμα =	10	
3	centre_row =	13	
4	centre_column =	13	
5	R =	6	
6	m =	1.13E+03	
7			

Στο κελί B6 υπολογίστε τη μαγνητική διπολική ροπή του δακτυλίου σύμφωνα με την εξ. (11.6) με την εντολή

$$=PI()*B5^2*B2$$



Ονομάστε τα κελιά στο Φύλλο Δεδομένα σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα

Κελί	Όνομα
B1	Km
B2	I0
B3	cr
B4	cc
B5	R0
B6	m

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα στο βιβλίο εργασίας**: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Km). Επιλέξτε **OK**.

3. Στο Φύλλο B(z) γράψτε στο κελί A1 την έκφραση για την οριζόντια συνιστώσα της μαγνητικής επαγωγής στην εξ. (11.9α)

$$=Km*m*(3*(COLUMN()-cc)^2 / ((ROW()-cr)^2+(COLUMN()-cc)^2)^2.5 - 1/((ROW()-cr)^2+(COLUMN()-cc)^2)^1.5)$$

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

4. Στο Φύλλο B(x) γράψτε στο κελί A1 την έκφραση για την κατακόρυφη συνιστώσα της μαγνητικής επαγωγής στην εξ. (11.9β)

$$=Km*m*(3*(cr-ROW())*(COLUMN()-cc) / ((ROW()-cr)^2+(COLUMN()-cc)^2)^2.5)$$



Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

Μετά το τέλος του υπολογισμού διορθώστε στα Φύλλα B(z) και B(x) τα κελιά που περιέχουν την ένδειξη #ΔΙΑΠ/0! Θέτοντας μια αυθαίρετη τιμή, π.χ., την τιμή 0 (μηδέν).

5. Στο Φύλλο *Πεδίο* υπολογίστε το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

καταχωρώντας στο κελί A1 την έκφραση

```
=IF(AND(ROW()=cr;COLUMN()=cc);  
0;SQRT('B(z)!'A1^2+'B(x)!'A1^2))
```

και αντιγράφοντάς την σε όλη της περιοχή A1:Y25. Η συνάρτηση IF() αποτρέπει τη δημιουργία ανωμαλίας στην αρχή των συντεταγμένων όπου το πεδίο έχει απροσδιόριστη τιμή.

6. Αποδώστε τις τιμές του Φύλλου *Πεδίο* σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο *Πεδίο* επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο >**
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επό-**



μενο >

- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα Τίτλοι και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους άξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Πεδίο μαγνητικού διπόλου

Κατηγορία (X): Z

Τιμή (Z): Πεδίο

Σειρά (Y): X

- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του *Excel* έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει τη γραφική παράσταση.

Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του *Excel* Γράφημα → Προβολή 3Δ... Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.



7. Στο Φύλλο *Γωνία*, υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το άνωμα **B** με τον οριζόντιο άξονα *Z*

$$\Theta = \tan^{-1}\left(\frac{B_x}{B_z}\right).$$

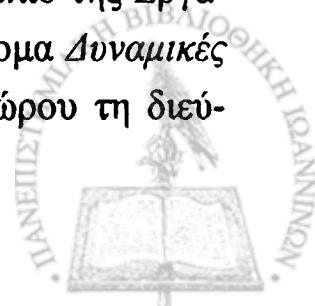
Για το σκοπό αυτό

- Τοποθετείστε στο κελί A1 την εντολή

```
=IF(AND(ROW()=cr;COLUMN()=cc);"";  
IF(ATAN2('B(z)!'A1;'B(x)!'A1)<0;ATAN2('B(z)!'A1;  
'B(x)!'A1)+2*PI();ATAN2('B(z)!'A1;'B(x)!'A1)))*180/PI()
```

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
8. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
 - Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (*Excel 2000*) ή Να μη γίνει ενημέρωση (*Excel XP*).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύ-



θυνηση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.
- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 11-1 Δείξτε ότι για σημεία πάνω στον άξονα ενός ρευματοφόρου δακτυλίου, ολοκλήρωση της εξ. (11.1) οδηγεί στη μαγνητική επαγωγή των εξ. (11.2).
- 11-2 Γράψτε μια συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic* που ολοκληρώνει μέσω του κανόνα του τραπεζοειδούς τη συνάρτηση της εξ. (3.7) που μελετήσαμε στην Εργαστηριακή Άσκηση 3.1. Μεταβάλετε κατάλληλα το Βιβλίο του *Excel* της Εργαστηριακής Άσκησης 3.1 ώστε να περιέχει τη νέα αυτή συνάρτηση και συγκρίνετε τα αριθμητικά αποτελέσματα.
- 11-3 Γράψτε μια συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic* που να υπολογίζει τα ολοκληρώματα των εξ. (11.4) μέσω του νόμου του Simpson. Συγκρίνετε τα αριθμητικά αποτελέσματα που θα προκύψουν με τα αποτελέσματα της Εργαστηριακής Άσκησης 11.1.
- 11-4 Γράψτε μια συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic* που να υπολο-



γίζει τα ολοκληρώματα των ακόλουθων συναρτήσεων

$$\alpha. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$\beta. \int_0^1 x \ln(1+x) dx$$

$$\gamma. \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$$

Ανατρέξτε σε ένα εγχειρίδιο ολοκληρωμάτων και συγκρίνετε τις εκτιμήσεις των συναρτήσεων *Visual Basic* που συντάξατε με τις προβλεπόμενες τιμές του εγχειριδίου

- 11-5 Δείξτε ότι οι εξ. (11.9) απορρέουν από την μαγνητική επαγωγή της εξ. (11.7).
- 11-6 Συγκρίνετε τα αποτελέσματα του υπολογισμού στην προσέγγιση της μαγνητικής διπολικής ροπής προς τα αποτελέσματα του υπολογισμού για ένα δακτύλιο με ακτίνα $R = 1$. Σχολιάστε την συμφωνία των αποτελεσμάτων, τόσο ως προς τα απόλυτα μεγέθη B_z , B_x και B , όσο και ως προς το γράφημα που απεικονίζει τη διεύθυνση και φορά της μαγνητικής επαγωγής με βέλη.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΩΔΕΚΑ

Πηνία



ΠΗΝΙΑ Η ΣΩΛΗΝΟΕΙΔΗ είναι διατάξεις από σύρμα που έχει περιελιχθεί γύρω από μία νοητή γεωμετρική επιφάνεια με αξονική συμμετρία. Για παράδειγμα, το πηνίο μπορεί να έχει τη μορφή κυλίνδρου ή ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Θα ονομάσουμε *άξονα του πηνίου* τον άξονα της νοητής αυτής επιφανείας και *διατομή του πηνίου* την επιφάνεια που σχηματίζεται από μια τομή κάθετη προς τον άξονα. Θα θεωρήσουμε ακόμη ότι οι σπείρες που σχηματίζει η περιέλιξη του πηνίου έχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ή **βήμα**, ενώ, αν το βήμα είναι αρκετά μικρό σε σχέση με τις διαστάσεις του πηνίου, κάθε βρόχος της περιέλιξης μπορεί να ταυτιστεί με το γεωμετρικό σχήμα της τομής του πηνίου.

Αν το πηνίο διαρρέεται από σταθερό ρεύμα, τότε στο εσωτερικό του και στον γύρω χώρο δημιουργείται μαγνητικό πεδίο. Όπως προαναγγείλαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η μαγνητική επαγωγή του πηνίου μπορεί να βρεθεί από την μαγνητική επαγωγή που δημιουργεί κάθε βρόχος της περιέλιξης. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε αποκλειστικά κυλινδρικά πηνία (με κυκλική διατομή) έτσι ώστε να είναι αμέσως εφαρμόσιμα τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 11. Στην Εργαστηριακή Άσκηση 12.2 θα δούμε μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή του κυλινδρικού πηνίου, το πηνίο *Helmholtz*, το οποίο εμφανίζει ιδιαίτερο τεχνολογικό ενδιαφέρον.



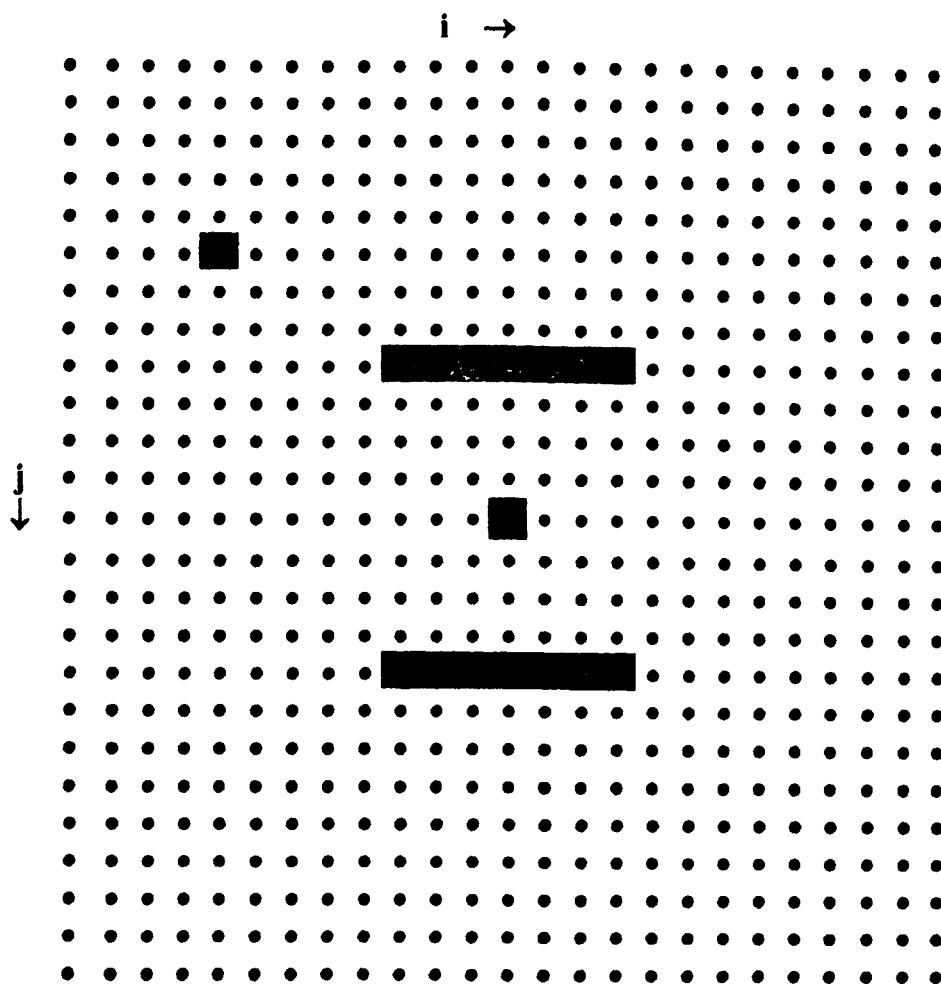
Η ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ ΠΗΝΙΟΥ

Η μαγνητική επαγωγή που δημιουργεί στο χώρο ένα πηνίο με L σπείρες μπορεί να ευρεθεί αν θεωρήσουμε το πηνίο ως μια διάταξη L διαδοχικών δακτυλίων. Το σχήμα 12-1 περιέχει μια τέτοια διάταξη με το κέντρο του πηνίου στην αρχή των συντεταγμένων και τον άξονά του κατά την οριζόντια διεύθυνση (που θα ονομάσουμε άξονα Z , σύμφωνα με την σύμβαση του προηγούμενου κεφαλαίου). Η μαγνητική επαγωγή στον χώρο αυτό ορίζεται σε διακριτά σημεία, τα οποία θα αριθμήσουμε με τον δείκτη i κατά τον οριζόντιο άξονα και τον δείκτη j κατά τον κατακόρυφο (άξονας X).

Αν τώρα στον χώρο του σχήματος 12-1 θεωρήσουμε ένα σημείο P με συντεταγμένες (I, J) , λόγω της αρχής της επαλληλίας, η ολική μαγνητική επαγωγή θα προκύψει από τη συνεισφορά κάθε δακτυλίου του πηνίου. Από τη συμμετρία όμως του προβλήματος, η μαγνητική επαγωγή που δημιουργεί στο σημείο P ένας δακτύλιος, ο οποίος βρίσκεται μετατοπισμένος κατά k σημεία προς τη θετική φορά του άξονα Z , είναι ίση με αυτή που δημιουργεί στο σημείο $(I-k, J)$ ένας δακτύλιος στο κέντρο της διάταξης. Συμπεραίνεται επομένως ότι η μαγνητική επαγωγή που δημιουργεί στο σημείο P ένα πηνίο με $2L+1$ σπείρες, διατεταγμένες από το σημείο $z = -L$ έως το σημείο $z = L$, μπορεί να βρεθεί αν αθροίσουμε τη μαγνητική επαγωγή που δημιουργεί στα σημεία $x = J, z = I-L, I-L+1, \dots, I, I+L$ ένας δακτύλιος στο κέντρο της διάταξης.

Ο προηγούμενος συλλογισμός οδηγεί στη στρατηγική για τον υπολογισμό της μαγνητικής επαγωγής που δημιουργεί στον χώρο ένα πηνίο: Σε δύο Φύλλα του *Excel* θα υπολογίσουμε, όπως και στην Εργαστηριακή Άσκηση 11.1, σε κάθε σημείο (i, j) τις δύο συνιστώσες $b_z(i, j)$ και $b_x(i, j)$ της μαγνητικής επαγωγής για ένα δακτύλιο στην αρχή των συντεταγμένων. Στη συνέχεια, σε δύο νέα Φύλλα του *Excel*, θα υπολογίσουμε τη μαγνητική επαγωγή του πηνίου από τις σχέσεις





Σχήμα 12-1. Διάταξη ρευματοφόρου πηνίου.

$$B_z(i, j) = \sum_{i'=i-L}^{i+L} b_z(i', j) \quad (12.1\alpha)$$

$$B_x(i, j) = \sum_{i'=i-L}^{i+L} b_x(i', j) \quad (12.1\beta)$$

όπου $2L+1$ είναι οι σπείρες του πηνίου στο σχήμα 12-1.

Βεβαίως, όπως και κατά την Εργαστηριακή Άσκηση 11.1, το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής του πηνίου θα δίνεται από τη σχέση

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} \quad (12.2)$$

ενώ η γωνία του ανύσματος \mathbf{B} με τον οριζόντιο άξονα θα είναι

$$\Theta_B = \tan^{-1} \frac{B_x}{B_z}. \quad (12.3)$$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 12.1

Μαγνητικό πεδίο πηνίου

Θα εργαστούμε εν πολλοίς όπως στην Εργαστηριακή Άσκηση 10.3, όπου το μαγνητικό πεδίο ενός κινούμενου ρευματοφόρου ιμάντα θεωρήθηκε ότι συγκροτείται από μια σειρά ευθύγραμμων ρευματοφόρων αγωγών.

1. Δημιουργείστε ένα βιβλίο του *Excel* με τα εξής Φύλλα:

1. Δεδομένα
2. $B(z)$ δακτυλίου¹
3. $B(x)$ δακτυλίου
4. $B(z)$
5. $B(x)$
6. Πεδίο
7. Γωνία

2. Στο Φύλλο *Δεδομένα* γράψτε τα δεδομένα του προβλήματος, ήτοι την τιμή της σταθεράς $\mu_0/4\pi$, την τιμή του ρεύματος και το πλάτος του ιμάντα. Ο αγωγός θεωρείται ότι τέμνει κάθετα το

¹ Στις καταχωρήσεις $B(z)$ δακτυλίου και $B(x)$ δακτυλίου, τα $B(z)$ και $B(x)$ είναι γραμμένα με λατινικούς χαρακτήρες.



επίπεδο του Φύλλου σε ένα χώρο 25×25 κελιών με κέντρο το κελί M13.

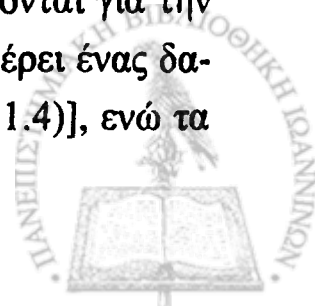
	A	B	C
1	$\mu_0/4\pi =$	1.00E-07	
2	Ρεύμα =	10	
3	centre_row =	13	
4	centre_column =	13	
5	R =	6	
6	Μήκος (+/-) =	7	
7			

Ονομάστε τα κελιά στο Φύλλο Δεδομένα σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα

Κελί	Όνομα
B1	Km
B2	I
B3	cr
B4	cc
B5	R0
B6	L

Για να ονομάσετε ένα κελί, επιλέξτε το κελί και στη συνέχεια από τα μενού **Εισαγωγή** → **Όνομα** → **Ορισμός**. Στην οθόνη που θα ανοίξει, καταχωρίστε στο παράθυρο **Όνόματα** στο βιβλίο εργασίας: το όνομα που επιθυμείτε (π.χ., Km). Επιλέξτε **OK**.

3. Τα Φύλλα $B(z)$ δακτυλίου και $B(x)$ δακτυλίου προορίζονται για την καταχώρηση της μαγνητικής επαγωγής που συνεισφέρει ένας δακτύλιος στο κέντρο του χώρου [βλ. εξ. (11.3) και (11.4)], ενώ τα



Φύλλα $B(z)$ και $B(x)$ για την καταχώρηση των αθροισμάτων στις εξ. (12.1). Έτσι, τα Φύλλα $B(z)$ δακτυλίου και $B(x)$ δακτυλίου θα πρέπει να δημιουργηθούν με αρκετά μεγαλύτερο αριθμό στηλών απ' ότi τα Φύλλα $B(z)$ και $B(x)$. Με τα δεδομένα της προηγούμενης παραγράφου ($c_r = 13$, $c_c = 13$), στον χώρο των Φύλλων $B(z)$ δακτυλίου και $B(x)$ δακτυλίου θα συμπεριλάβουμε 51 στήλες επί 25 σειρές με κέντρο του χώρου το κελί στη στήλη $2c_c - 1 = 25$ και σειρά $c_r = 13$ (το κελί Y13).

4. Όπως και στην Εργαστηριακή Άσκηση 11.1, θα δημιουργήσουμε δύο συναρτήσεις σε γλώσσα *Visual Basic* που υπολογίζουν τα ολοκληρώματα των εξ. (11.4). Δημιουργείστε μια συνάρτηση του *Excel* που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $I_0(R, x, z)$ της εξ. (11.4a). Για το σκοπό αυτό:

- Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Επεξεργασία Visual Basic**.
- Στην οθόνη σας, θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*.
- Από τα μενού επιλέξτε **Insert** → **Module**. Στην κενή σελίδα που θα ανοίξει γράψτε την συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση $I_0(R, x, z)$ της εξ. (11.4a) η σύνταξη είναι:

Function hint0(R, x, z)

' Ορισμός μεταβλητών:

' N = Αριθμός διαστημάτων στην αριθμητική ολοκλήρωση



- ' phi = Γωνία (σε ακτίνια) κατά την περιφέρεια του δακτυλίου
- ' step = Βήμα της ολοκλήρωσης (σε ακτίνια)
- ' zeta = Σταθερός όρος στον παρονομαστή
- ' integ = Προϊόν σταδιακής άθροισης κατά την ολοκλήρωση

Dim N, twopi, phi, step, zeta, counter, integ

twopi = 6.28318530717959

N = 200

zeta = R ^ 2 + x ^ 2 + z ^ 2

step = twopi / N

- ' Αρχικό και τελικό σημείο στο άθροισμα της ολοκλήρωσης

integ = 5 / 12 * 2 / (zeta - 2 * R * x) ^ 0.5

- ' Δεύτερο και προτελευταίο σημείο στο άθροισμα της ολοκλήρωσης

**integ = integ + 13 / 12 * (Cos(step) / (zeta - 2 * R * x * Cos(step)) ^ 0.5 _
+ Cos(twopi - step) / (zeta - 2 * R * x * Cos(twopi - step)) ^ 0.5)**

- ' Γωνία μετά το δεύτερο σημείο στο άθροισμα της ολοκλήρωσης

phi = 2 * step

- ' Άθροισμα από το τρίτο σημείο μέχρι το σημείο N - 2

For counter = 1 To N-3

integ = integ + Cos(phi) / (zeta - 2 * R * x * Cos(phi)) ^ 0.5

phi = phi + step

Next counter

- ' Άθροισμα x Βήμα

hint0 = integ * step

End Function



5. Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την λογική ροή της προηγούμενης συνάρτησης. Προς διευκόλυνσή σας, κατά την σύνταξη της συνάρτησης έχουν προστεθεί αρκετά σχόλια (μη εκτελέσιμες εκφράσεις). Υπενθυμίζεται ότι η γλώσσα *Visual Basic* χειρίζεται μια έκφραση ως σχόλιο αν στην αρχή της γραμμής υπάρχει ο χαρακτήρας '. Προφανώς, η σωστή λειτουργία της συνάρτησης δεν απαιτεί την δακτυλογράφηση των σχολίων, τα οποία μπορείτε, αν επιθυμείτε, να παραλείψετε¹. Η συνάρτηση χρησιμοποιεί τον κανόνα του τραπεζοειδούς, ο οποίος έχει τη μορφή (βλ. Κεφάλαιο 3)

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx = h \left[\frac{5}{12} f_1 + \frac{13}{12} f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_{N-2} + \frac{13}{12} f_{N-1} + \frac{5}{12} f_N \right] + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \quad (12.4)$$

Όπως σημειώνεται στα σχόλια, αρχικά υπολογίζονται τα ακραία σημεία του αθροίσματος, ενώ το άθροισμα των όρων $f_3 + f_4 + \dots + f_{N-1}$ υπολογίζεται στην επαναληπτική διαδικασία

For counter = [όρια]

.....

Next counter

Στο κείμενο της συνάρτησης Function hint0 η εντολή

```
integ = integ + 13 / 12 * (Cos(step) / (zeta - 2 * R * x * Cos(step))) ^ 0.5
```

¹ Ακολουθώντας την πρακτική της γλώσσας *Visual Basic*, τα μη εκτελέσιμα σχόλια σημειώνονται με πράσινους χαρακτήρες.



$$+ \text{Cos}(2\pi \text{opi} - \text{step}) / (\text{zeta} - 2 * R * x * \text{Cos}(2\pi \text{opi} - \text{step})) \wedge 0.5)$$

επεκτείνεται σε δύο γραμμές. Η γλώσσα *Visual Basic* επιτρέπει τη συνέχιση μιας εντολής στην επόμενη γραμμή αν η προηγούμενη τελειώνει με τον χαρακτήρα της υπογράμμισης `_`.

Μετά την καταγραφή της συνάρτησης *Visual Basic*, επιστρέψτε στην οθόνη του *Excel* επιλέγοντας από τα μενού **File** → **Close and Return to Microsoft Excel**

6. Παρόμοια με την συνάρτηση Function $\text{hint0}(R, x, z)$ είναι και η συνάρτηση Function $\text{hintk}(R, x, z, k)$ που υπολογίζει το ολοκλήρωμα της εξ. (11.4β). Η νέα συνάρτηση έχει μια επί πλέον μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τον εκθέτη k στην έκφραση \cos^k στην εξ. (11.4β).

- Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Επεξεργασία Visual Basic**.
- Στην οθόνη σας, θα ανοίξει η επιφάνεια εργασίας προγραμματισμού σε γλώσσα *Visual Basic*.
- Από τα μενού επιλέξτε **Insert** → **Module**. Στην κενή σελίδα που θα ανοίξει γράψτε την συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση $I_k(R, x, z)$ της εξ. (11.4β) η σύνταξη είναι:

Function $\text{hintk}(R, x, z, k)$

Ορισμός μεταβλητών:



12. Πηγία

```
' N = Αριθμός διαστημάτων στην αριθμητική ολοκλήρωση
' phi = Γωνία (σε ακτίνια) κατά την περιφέρεια του δακτυλίου
' step = Βήμα της ολοκλήρωσης (σε ακτίνια)
' zeta = σταθερός όρος στον παρονομαστή
' integ = Προϊόν σταδιακής άθροισης κατά την ολοκλήρωση
Dim N, twopi, phi, step, zeta, counter, integ
twopi = 6.28318530717959
N = 200
zeta = R ^ 2 + x ^ 2 + z ^ 2
step = twopi / N

' Αρχικό και τελικό σημείο στο άθροισμα της ολοκλήρωσης
integ = 5 / 12 * 2 / (zeta - 2 * R * x) ^ 1.5

' Δεύτερο και προτελευταίο σημείο στο άθροισμα της ολοκλήρωσης
integ = integ + 13 / 12 * ((Cos(step) ^ k) / (zeta - 2 * R * x * Cos(step)) ^ 1.5 _
+ Cos(twopi - step) ^ k / (zeta - 2 * R * x * Cos(twopi - step)) ^ 1.5)

' Γωνία μετά το δεύτερο σημείο στο άθροισμα της ολοκλήρωσης
phi = 2 * step

' Άθροισμα από το τρίτο σημείο μέχρι το σημείο N - 2
For counter = 1 To N - 3
    integ = integ + (Cos(phi) ^ k) / (zeta - 2 * R * x * Cos(phi)) ^ 1.5
    phi = phi + step
Next counter

' Άθροισμα x Βήμα
hintk = integ * step

End Function
```



Μετά την καταγραφή της συνάρτησης *Visual Basic*, επιστρέψτε στην οθόνη του *Excel* επιλέγοντας από τα μενού **File** → **Close and Return to Microsoft Excel**

7. Καταχωρίστε στο κελί A1 του Φύλλου *B(z)* δακτυλίου την έκφραση που υπολογίζει την οριζόντια συνιστώσα της μαγνητικής επαγωγής ενός δακτυλίου

$$\begin{aligned} &=IF(ROW()=cr;K_m*I^2*PI()*R_0^2/(R_0^2+(COLUMN()- \\ &2*cc)^2)^{1.5}; \\ &K_m*I*(R_0/(cr-ROW())*hint_0(R_0;cr-ROW();COLUMN()-2*cc) \\ &-R_0*(cr-ROW())*hint_k(R_0;cr-ROW();COLUMN()-2*cc;1) \\ &+R_0^2*hint_k(R_0;cr-ROW();COLUMN()-2*cc;2))) \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση *IF()* επιλέγει τη σωστή έκφραση μεταξύ των εξ. (11.2α) και (11.3α).

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:AY25.

8. Καταχωρίστε στο κελί A1 του Φύλλου *B(x)* δακτυλίου την έκφραση που υπολογίζει την κατακόρυφη συνιστώσα της μαγνητικής επαγωγής ενός δακτυλίου

$$\begin{aligned} &=K_m*I*(COLUMN()-2*cc)*R_0 \\ &*hint_k(R_0;cr-ROW();COLUMN()-2*cc;1) \end{aligned}$$

Προσέξτε ότι η έκφραση αυτή περιλαμβάνει αυτόματα και τις δύο εκφράσεις στις εξ. (11.2β) και (11.3β).

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:AY25.



9. Στα Φύλλα $B(z)$ και $B(x)$ δημιουργείστε τα αθροίσματα των εξ. (12.1). Οι εκφράσεις που μπορείτε να γράψετε στα αντίστοιχα κελιά A1 είναι

$$=SUM(OFFSET('B(z)δακτυλίου'!N1;0;-L):$$

$$OFFSET('B(z)δακτυλίου'!N1;0;L))$$

και

$$=SUM(OFFSET('B(x)δακτυλίου'!N1;0;-L):$$

$$OFFSET('B(x)δακτυλίου'!N1;0;L))$$

Στις τελευταίες εντολές χρησιμοποιείται η συνάρτηση OFFSET, η οποία επιστρέφει το περιεχόμενο ενός κελιού, μετατοπισμένου κατά ένα αριθμό σειρών ή και στηλών από κάποιο κελί αναφοράς.

Η σύνταξη της συνάρτησης OFFSET, στην απλή της μορφή, είναι:

OFFSET(κελί αναφοράς; πλήθος σειρών μετατόπισης; πλήθος στηλών μετατόπισης)

όπου αν το πλήθος σειρών είναι αρνητικός αριθμός η μετατόπιση θεωρείται προς τα άνω και αν θετικός προς τα κάτω. Αντίστοιχα, αν το πλήθος στηλών είναι θετικός αριθμός η μετατόπιση θεωρείται προς τα δεξιά και αν αρνητικός προς τα αριστερά.

OFFSET('B(x)αγωγού'!M4;0;-3)

επιστρέφει το περιεχόμενο του κελιού 'B(x)αγωγού'!J4 και η εντολή OFFSET(CA7;5;-2) το περιεχόμενο του κελιού BY12.



Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε τις προηγούμενες εκφράσεις και αντιγράψτε τις σε όλη την περιοχή A1:Y25 των αντίστοιχων Φύλλων.

10. Στο Φύλλο *Πεδίο* υπολογίστε το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} . \quad (12.2)$$

καταχωρώντας στο κελί A1 την έκφραση

=SQRT('B(x)!'A1^2+'B(z)!'A1^2)

και αντιγράφοντάς την σε όλη της περιοχή A1:Y25.

11. Αποδώστε τις τιμές του Φύλλου *Πεδίο* σε τρισδιάστατο γράφημα.

- Στο Φύλλο *Πεδίο* επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γράφημα...**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επιφάνεια** → **Επόμενο** >
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα του γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο** >
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλέξτε την καρτέλα **Τίτλοι** και συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και τους ά-



ξονες Z, X και Y, π.χ.

Τίτλος γραφήματος: Πεδίο πηνίου

Κατηγορία (X): X

Τιμή (Z): Μαγνητική επαγωγή

Σειρά (Y): Z

- Στην καρτέλα Υπόμνημα βεβαιωθείτε ότι είναι απενεργοποιημένη η επιλογή Εμφάνιση υπομνήματος.
- Επιλέξτε Επόμενο >
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε Σε νέο φύλλο εργασίας. Επιλέξτε Τέλος.

Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του *Excel* έχει προσθέσει ένα νέο Φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει τη γραφική παράσταση.

Μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από τα μενού του *Excel* **Γράφημα → Προβολή 3Δ...**

Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.

12. Στο Φύλλο *Γωνία*, υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το άνυσμα **B** με τον οριζόντιο άξονα **X**

$$\Theta = \tan^{-1} \left(\frac{B_z}{B_x} \right).$$

Για το σκοπό αυτό

- Τοποθετείστε στο κελί A1 την εντολή

```
=IF(ATAN2('B(z)!'A1;'B(x)!'A1)<0;  
ATAN2('B(z)!'A1;'B(x)!'A1)*180/PI()+360;  
ATAN2('B(z)!'A1;'B(x)!'A1)*180/PI())
```

- Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.
13. Επιθεωρήστε όλα τα Φύλλα που κατασκευάσατε στο σημείο αυτό και εντοπίστε σημεία όπου ο υπολογισμός δίνει απροσδιόριστο αποτέλεσμα (π.χ., #ΔΙΑΙΡΟ! ή #ΤΙΜΗ!). Διορθώστε όλα τα σημεία αυτά θέτοντας στα αντίστοιχα κελιά την τιμή 0 (μηδέν).
14. Ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
 - Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (*Excel 2000*) ή Να μη γίνει ενημέρωση (*Excel XP*).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.



- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.

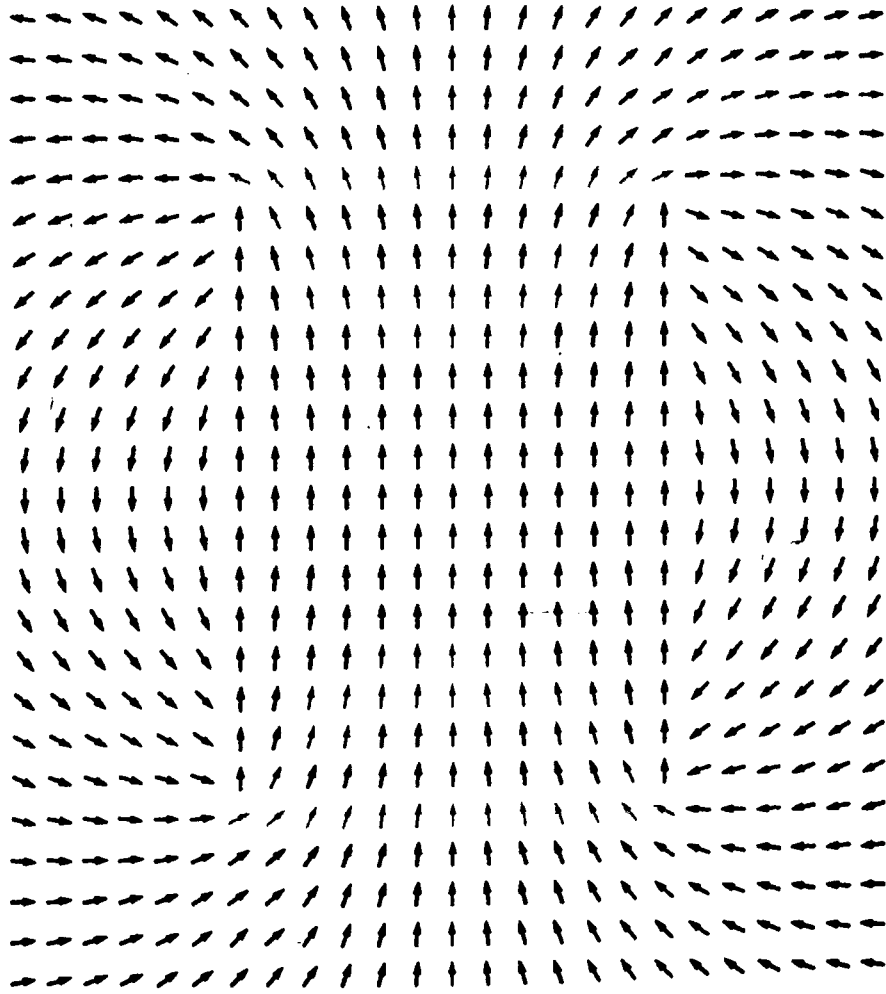
Το Φύλλο *Δυναμικές Γραμμές* πρέπει τώρα να έχει τη μορφή του σχήματος 12-2. Με βάση το σχήμα αυτό σχολιάστε τη μορφή του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ένα πηνίο.

- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.

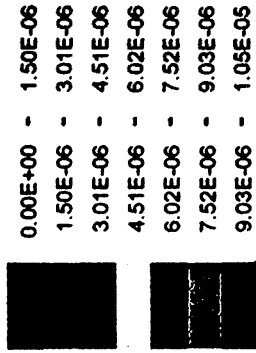
ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ ΠΗΝΙΟΥ *HELMHOLTZ*

Όπως θα διαπιστώθηκε στην προηγούμενη άσκηση, το πηνίο είναι μια εξαιρετικά χρήσιμη διάταξη για τη δημιουργία ομογενούς μαγνητικής επαγωγής. Σε πειραματικές όμως διατάξεις όπου θέλουμε να τοποθετήσουμε ένα αντικείμενο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, η πρόσβαση στο εσωτερικό του πηνίου μπορεί να είναι δυσχερής, ιδιαίτερα αν το πηνίο είναι μικρών διαστάσεων. Μια εναλλακτική διάταξη που δημιουργεί ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι η διάταξη *Helmholtz*, που, όπως φαίνεται στο σχήμα 12-3, συγκροτείται από δύο ομοαξονικούς δακτυλίους σε μεταξύ τους απόσταση $2L$. Στην πράξη, καθένας από τους δακτυλίους *Helmholtz* είναι δυνατόν να αποτελείται από N σπείρες με την ίδια ακτίνα R , αλλά μικρή έκταση του πηνίου προς την διεύθυνση Z . Στην περίπτωση αυτή, αν I είναι το ρεύμα που διαρρέει μια σπείρα, κάθε πηνίο ισοδυναμεί με ένα δακτύλιο ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα NI . Στην απεικόνιση του σχήματος 12-1, η διάταξη των πηνίων *Helmholtz* μπορεί να αποδοθεί με το σχήμα 12-4.





$\max(\text{Πεδίο}) = 1.05\text{E-}05$
 $\min(\text{Πεδίο}) = 0.00\text{E+}00$



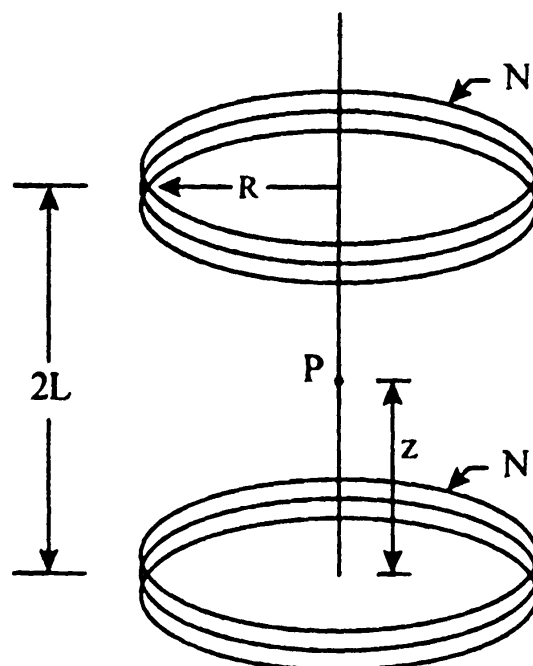
Σχήμα 12-2 Μαγνητική επαγωγή πηνίου. Η μορφή του Φύλλου Δυναμικές Γραμμές στην Εργαστηριακή Άσκηση 12.1.



Ο προσδιορισμός της μαγνητικής επαγωγής που δημιουργεί στο χώρο το πηνίο *Helmholtz* μπορεί να γίνει με πορεία ανάλογη προς αυτήν της Εργαστηριακής Άσκησης 12.1.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 12.2
Μαγνητικό πεδίο πηνίου *Helmholtz*

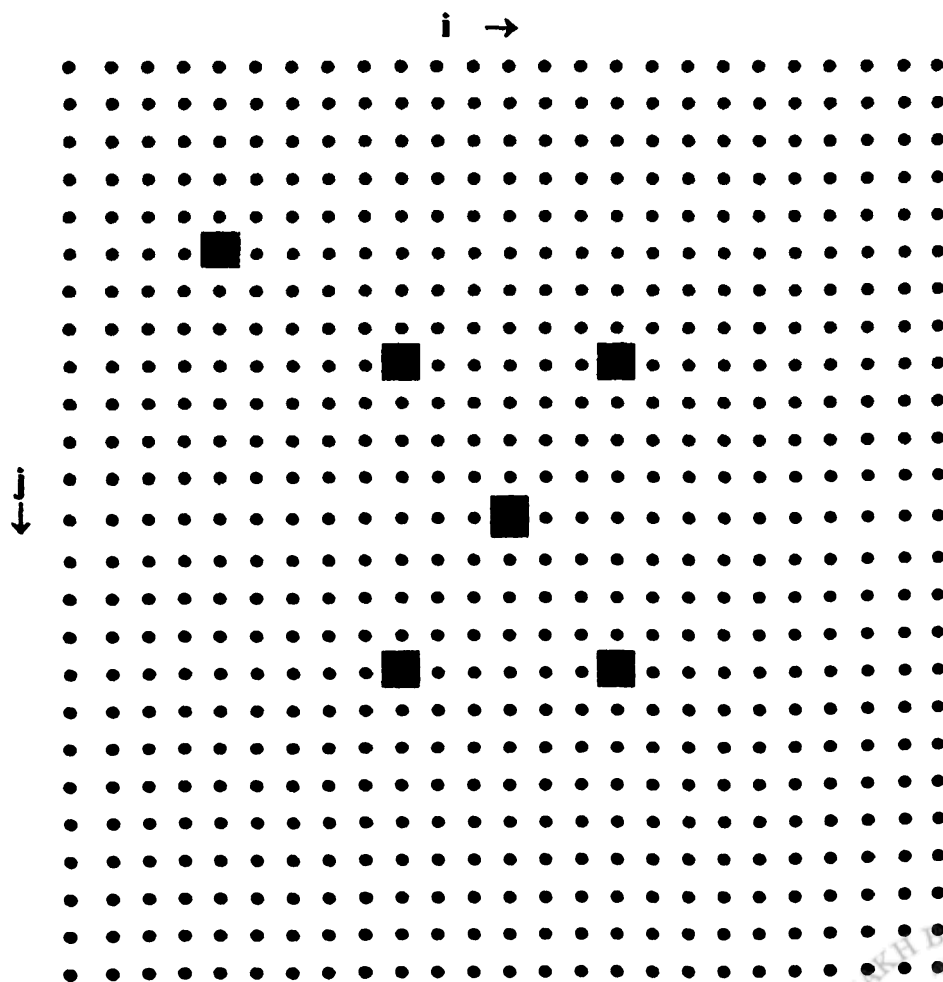
1. Ανοίξτε στο *Excel* το αρχείο που κατασκευάσατε στην Εργαστηριακή Άσκηση 12.1. Αποθηκεύστε το αμέσως με ένα νέο όνομα, π.χ. *Πεδίο πηνίου Helmholtz*, ώστε με τις αλλαγές που θα επιφέρετε να μην καταστρέψετε το αρχικό αρχείο της προηγούμενης Εργαστηριακής Άσκησης.
2. Συμβουλευόμενοι το σχήμα 12-3, προσδιορίστε πώς αλλάζουν οι εξ. (12.1) για τον προσδιορισμό της μαγνητικής επαγωγής



Σχήμα 12-3. Διάταξη πηνίων *Helmholtz*.

που δημιουργεί η διάταξη *Helmholtz*;

3. Προσδιορίστε τις αλλαγές που πρέπει να επιφέρετε στις εντολές των Φύλλων $B(z)$ και $B(x)$ ώστε να υπολογίζουν τη μαγνητική επαγωγή της διάταξης *Helmholtz* και τροποποιείστε ανάλογα τα αντίστοιχα Φύλλα. Θα χρειαστεί να επανακατασκευάσετε τα Φύλλα *Πεδίο* και *Γωνία* και να επαναλάβετε το βήμα 13 της Εργαστηριακής Άσκησης 12.1.
4. Προσδιορίστε τις αλλαγές που πρέπει να επιφέρετε στον έλεγχο που πραγματοποιεί η συνάρτηση IF στο Φύλλο *Γωνία* και τροποποιείστε ανάλογα το Φύλλο.



Σχήμα 12-4. Διάταξη πηνίου *Helmholtz*.

5. Ακολουθείστε τις οδηγίες της Παραγράφου 14 της προηγούμενης Εργαστηριακής Άσκησης και απεικονίστε τη διεύθυνση και φορά της μαγνητικής επαγωγής στο χώρο γύρω από μια διάταξη *Helmholtz*.
6. Ακολουθείστε την προηγούμενη διεργασία και υπολογίστε τη μαγνητική επαγωγή στο χώρο που δημιουργεί η διάταξη *Helmholtz* για διάφορες γεωμετρίες, π.χ., τις ακραίες περιπτώσεις $L = 3, R = 12$ και $L = 12, R = 3$, καθώς και τη βέλτιστη περίπτωση (βλ. Άσκηση 12-4) $L = R$ (π.χ. $L = R = 6$). Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας με βάση τόσο το Φύλλο *Γράφημα 1*, όσο και την απεικόνιση με δυναμικές γραμμές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 12-1 Στο Φύλλο *Δεδομένα* της Εργαστηριακής Άσκησης 12.1 μεταβάλετε τις παραμέτρους του πηνίου R και L . Σχολιάστε πως μεταβάλλεται το μαγνητικό πεδίο του πηνίου με τη μεταβολή αυτών των παραμέτρων.
- 12-2 Η μαγνητική επαγωγή στον άξονα ενός δακτυλίου με ακτίνα R δίνεται ως

$$B_z(x=0) = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (12.4)$$

$$B_x(x=0) = 0.$$

Από τις σχέσεις αυτές προσδιορίστε την αναλυτική μορφή της μαγνητικής επαγωγής που δημιουργεί η διάταξη *Helmholtz*



κατά τον άξονα Z.

12-3 Δείξτε ότι στην αρχή των συντεταγμένων ($z = 0$) η πρώτη παράγωγος της μαγνητικής επαγωγής $\frac{dB_z}{dz}$ μηδενίζεται για το πηνίο *Helmholtz*.

12-4 Δείξτε ότι για το πηνίο *Helmholtz*, στην αρχή των συντεταγμένων ($z = 0$) η δεύτερη παράγωγος της μαγνητικής επαγωγής $\frac{d^2 B_z}{dz^2}$ μηδενίζεται, αν ικανοποιείται η συνθήκη $L = R$.

Παρατηρείται ότι αν σε μια περιοχή του χώρου

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{d^2 B_z}{dz^2} = 0 \quad \text{και} \quad B_x = 0$$

στη γειτονία της περιοχής αυτής το μαγνητικό πεδίο είναι εξαιρετικά ομογενές.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Απεικόνιση Πεδίου



ΤΟ *EXCEL* ΔΙΑΘΕΤΕΙ πλούσια συλλογή γραφικών για την απόδοση βαθμωτών συναρτήσεων μιας ή δύο μεταβλητών. Από το οπλοστάσιο όμως των γραφικών λείπουν παντελώς τα εργαλεία για την απόδοση ανυσματικών συναρτήσεων όπως το ηλεκτρικό ή το μαγνητικό πεδίο.

Η γραφική απόδοση ενός πεδίου δίνεται κατά τον καλύτερο τρόπο από τις *δυναμικές γραμμές*, ήτοι συνεχείς προσανατολισμένες καμπύλες που σε κάθε σημείο του χώρου αποδίδουν τη διεύθυνση και φορά του πεδίου. Για πεδία με αξονική συμμετρία, όπου το πεδίο μπορεί να αποδοθεί σε δύο διαστάσεις, στα πλαίσια του παρόντος βιβλίου, έχουμε επιλέξει την απεικόνιση του πεδίου σε ένα Φύλλο του *Excel* (το οποίο ονομάζουμε *Δυναμικές Γραμμές*) με κελιά ίσων κατακόρυφων και οριζόντιων διαστάσεων και βέλη που αποδίδουν τη διεύθυνση του πεδίου ως προς τον οριζόντιο άξονα. Σε κάθε Εργαστηριακή Άσκηση υπολογίζεται ένα Φύλλο (με την ονομασία *Πεδίο*), το οποίο περιέχει το μέτρο του ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου. Σε ένα δεύτερο Φύλλο (με την ονομασία *Γωνία*) υπολογίζεται, σε μοίρες, η γωνία που δημιουργεί το άνυσμα του πεδίου με την οριζόντια διεύθυνση. Τα δύο αυτά Φύλλα χρησιμοποιούνται για την απεικόνιση του πεδίου στο Φύλλο *Δυναμικές Γραμμές* με την ακόλουθη διαδικασία:

1. Το *Excel* διαβάζει τη γωνία στο Φύλλο *Γωνία* και τοποθετεί στο



αντίστοιχο κελί του Φύλλου *Δυναμικές Γραμμές* ένα βέλος με κλίση προς τον οριζόντιο άξονα ίση με τη γωνία του πεδίου. Η ακρίβεια με την οποία αποδίδεται η γωνία από το βέλος είναι μικρότερη από $\pm 2.5^\circ$.

2. Το εύρος των τιμών στο Φύλλο *Πεδίο* χωρίζεται σε επτά ίσες περιοχές τιμών και τα βέλη του Φύλλου *Δυναμικές Γραμμές* χρωματίζονται με επτά διαφορετικά χρώματα που αποδίδουν την ένταση του πεδίου σε μια προεπιλεγμένη κλίμακα χρωμάτων.

Για την υλοποίηση της προηγούμενης διεργασίας χρειάστηκε κατ' αρχήν η δημιουργία μιας νέας γραμματοσειράς, η οποία συγκροτήθηκε από βέλη με κλίση ως προς τον οριζόντιο άξονα διαδοχικά κατά 5° σε όλη την περιοχή από 0° έως 360° . Η νέα γραμματοσειρά, με την ονομασία *ArrowsSymbolFont*, βρίσκεται στη δισκέτα που συνοδεύει το βιβλίο και θα πρέπει να εγκατασταθεί στον υπολογιστή σας πριν από την εκτέλεση Εργαστηριακής Άσκησης που υπολογίζει πεδίο. Για να εγκαταστήσετε τη νέα γραμματοσειρά ακολουθείστε τα εξής βήματα:

1. Στην Επιφάνεια Εργασίας του υπολογιστή σας επιλέξτε **Ο Υπολογιστής μου** → **Πίνακας Ελέγχου** → **Γραμματοσειρές**.
2. Τοποθετείστε τη δισκέτα του βιβλίου στη μονάδα **a**:
3. Από τα μενού επιλέξτε **Αρχείο** → **Εισαγωγή νέας γραμματοσειράς**.
4. Στο παράθυρο **Μονάδες δίσκων**: επιλέξτε **a**: και στο παράθυρο **Λίστα γραμματοσειρών**: επιλέξτε **Arrows (True Type)**. Επι-



λέξτε OK.

Οι οδηγίες για την απεικόνιση του πεδίου περιέχονται σε κάθε Εργαστηριακή Άσκηση όπου τούτο απαιτείται και επαναλαμβάνονται εδώ για λόγους πληρότητας.

Αφού έχετε εκτελέσει όλους τους υπολογισμούς στα Φύλλα *Πεδίο* και *Γωνία*, ανοίξτε το αρχείο *Απεικόνιση Πεδίου*. Θα ανοίξουν ενδεχομένως δύο πλαίσια διαλόγου

- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση μακροεντολών, επιλέξτε Ενεργοποίηση μακροεντολών.
- Στο πλαίσιο που σας ερωτά για αυτόματες συνδέσεις με άλλα Βιβλία, επιλέξτε Όχι (*Excel 2000*) ή Να μη γίνει ενημέρωση (*Excel XP*).

Το άνοιγμα του αρχείου θα δημιουργήσει στο Βιβλίο της Εργαστηριακής σας Άσκησης ένα νέο Φύλλο με το όνομα *Δυναμικές Γραμμές* που απεικονίζει σε κάθε σημείο του χώρου τη διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού πεδίου.

- Μπορείτε να έχετε ταυτόχρονη εποπτεία του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, σύμφωνα με την κλίμακα χρωμάτων που υπάρχει στο Φύλλο, πληκτρολογώντας **Ctrl-g**. Η διεργασία μπορεί όμως να απαιτήσει μερικά λεπτά.
- Μπορείτε να επανέλθετε σε μονόχρωμη απεικόνιση πληκτρολογώντας **Ctrl-e**.



EYPETHPIO



Το αλφαβητικό ευρετήριο περιέχει τους κυριότερους όρους και έννοιες, όπου αρχικά ορίζονται και όπου μετέπειτα αναλύονται ή χρησιμοποιούνται σε κάποια έκταση. Για την κατάταξη όρων με λατινικούς χαρακτήρες ακολουθείται η αντιστοιχία που έχει υιοθετήσει ο ΟΤΕ, ήτοι

B, V, W στο Β	C, Q στο Κ	D στο Δ
G στο Γ	H στο Χ	J στο Ζ
X στο Ξ	U στο Υ	

Τα γράμματα που ακολουθούν ορισμένους αριθμούς σελίδων συμβολίζουν:

<i>ff</i> :	και σελίδες που ακολουθούν
α:	απαντάται σε άσκηση
ε:	απαντάται σε Εργαστηριακή Άσκηση
σ:	απαντάται σε σχήμα.

\$, 12

*, 12

:, 15

= ,19

#ΑΡΙΘΜΟΣ!, 57, 88

#ΔΙΑΙΡ/0!, 58, 59, 200, 239,

241, 251, 253, 283, 325,

333, 380

#ΤΙΜΗ!, 380

ACOS, 121

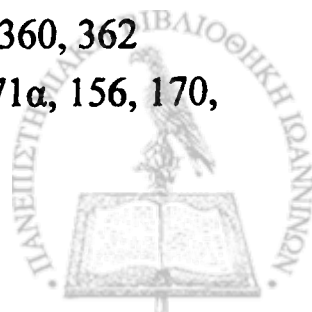
αγωγός, 234*ff*, 268α

- σφαιρικός, 257ε, 261σ,

262ε

AND, 316, 334, 360, 362

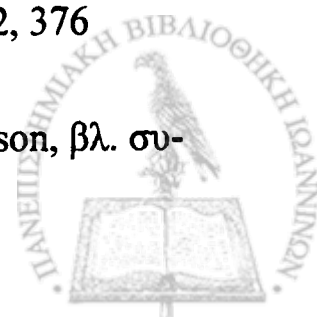
Αντιγραφή, 12, 71α, 156, 170,



- 172, 183, 185
- Απεικόνιση ανυσμάτων, iii, 32ff
- Απεικόνιση Πεδίου, iii, 62, 75α, 205, 213, 222, 245, 256, 288, 297, 308, 319, 328, 339, 354, 362, 380, 388ff, 390
- Αποκοπή, 12
- ΑρrowsSymbolFont, iii, iv
- Αρχείο, 3
- Αποθήκευση, 6, 7
 - Αποθήκευση ως ..., 6
 - οργάνωση, 3
- αρχή της επαλληλίας, 41
- ΑΤΑΝ, 128
- ΑΤΑΝ2, 50, 60, 110, 204, 205, 213, 221, 222, 243, 255, 256, 267, 287, 297, 307, 308, 316, 317, 324, 325, 328, 333, 337, 352, 362, 380
- Biot και Savart, νόμος, 312
- VBA, βλ. Visual Basic Applications
- Visual Basic, vii, 33ff, 97α, 98α, 363α, 373
- Επεξεργασία, 94, 105, 106, 115, 116, 146, 155, 346, 349
- Visual Basic Applications, 33
- βιβλίο, 5, 8ff
- γραμμικά υλικά, 273, 289, 299
- Γράφημα, 28, 29σ, 72α, 140, 142, 176, 178, 189, 191, 192, 201, 202, 209, 211, 218, 219, 227, 228, 240, 251, 252, 263, 265, 284, 285, 294, 295, 304, 305, 317, 319, 326, 327, 336, 337, 353, 354, 360, 361, 378, 379
- γραφική παράσταση, 28ff, 28ε
- δύο διαστάσεων, 28ff, 28ε
 - τριών διαστάσεων, 30ff, 30ε, 32σ
- δέσμια φορτία, 273
- διηλεκτρικά υλικά, 234, 272ff
- δυνάμεις Coulomb, βλ. Coulomb
- δυναμικές γραμμές, iii, 64σ, 388
- Excel, 2
- βασική οθόνη, 9σ



- EXP, 23, 24
ελεύθερα φορτία, 273
Εξερεύνηση των Windows, 3
Επεξεργασία, 13
Επικόλληση, 13, 156
- Ειδική, 71α, 170, 172,
183, 185
- ηλεκτρική διαπερατότητα,
274
ηλεκτρική διπολική ροπή,
291
ηλεκτρική επιδεκτικότητα,
273, 300
ηλεκτρική μετατόπιση, 274
ηλεκτρική πόλωση, 272,
289, 292ε
ηλεκτρικό δίπολο, 53ε, 56σ
- δυναμικό, 160α, 206ε
- πεδίο, 206ε
ηλεκτρικό δυναμικό, 134ff
- ηλεκτρικού τετραπόλου,
135
- κλίση, 196ff
- σημειακού φορτίου, 198ε
- σημειακού φορτίου σε
διηλεκτρικά μέσα,
276ε
- ηλεκτρικό πεδίο, 53
- απόκλιση, 196ff, 223ε
- ηλεκτρικού διπόλου, 53ff
- 53ε
- σημειακού φορτίου, 198ε
- σημειακού φορτίου σε
διηλεκτρικά μέσα,
276ε
ηλεκτρικό ρεύμα, 312
ηλεκτρικό τετράπολο, 135σ,
158α, 216
- γραμμικό, 136ε, 229α
- δυναμικό, 214ε
- πεδίο, 214ε
ηλεκτρικό φορτίο, 40
ηλεκτροστατικά είδωλα,
235ff
- σημειακού φορτίου προς
επίπεδο, 237σ, 238ε,
269α, 277σ, 281ε
- σημειακού φορτίου προς
σφαίρα, 246ff, 247σ,
248ε, 269α
- ισοτροπικά υλικά, 274
IF, 51, 61, 213, 221, 239,
241, 242, 243, 250, 253,
255, 265, 266, 267, 283,
285, 286, 295, 296, 297,
303, 305, 306, 307, 316,
317, 324, 325, 333, 334,
337, 351, 362, 376
- κανόνας Simpson, βλ. συ-



ναρτήσεις
κανόνας τραπεζοειδούς, βλ.

συναρτήσεις

Κελί, 8ff

- αναφορά, 10ff

- Μορφή, 87, 95

- περιεχόμενο, 9, 25

- τιμή, 9

COLUMN, 57, 138, 139,
140, 159α, 200, 203, 208,
212, 217, 226, 239, 241,
242, 243, 244, 250, 253,
255, 265, 266, 267, 283,
285, 286, 295, 296, 297,
303, 305, 306, 307, 316,
317, 324, 325, 333, 334,
351, 359, 360, 362, 376

Coulomb,

- δυνάμεις, 40ff, 43ε, 71α

- νόμος, 40ff

LN, 19, 128

LOG, 88

Microsoft Office, 4

- γραμμή εργαλίων, 4

μαγνητική διπολική ροπή,
355ff, 364α

μαγνητική επαγωγή, 312

μαγνητικό δίπολο, 358ε

μαγνητικό πεδίο, 312ff

- ευθύγραμμου αγωγού,
313, 314ε

Μαθηματικός τύπος, 14ff,
20ε, 22

Μακροεντολή, 91, 94, 105,
106, 115, 116, 146, 155,
171, 172, 174, 175, 184,
185, 187, 188, 346, 349,
371, 374

Module, 91, 95, 105, 106,
116, 117, 146, 155, 346,
349, 371, 374

μονωτής, 234, 272ff

νόμος του Coulomb, βλ.

Coulomb

νόμος των Biot και Savart,
βλ. Biot και Savart

ολοκλήρωμα,

- αόριστο, 88, 97α, 98α

ολοκλήρωση συναρτήσεων,

βλ. συναρτήσεις

- αριθμητική, 82ff, 88ε

OFF SET, 334, 335, 377

παράθυρο ονόματος, 45, 55

παρενθέσεις, 17

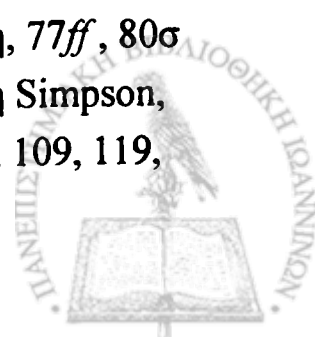
παραγωγή, 196ff

- ακρίβεια, 196

- αριθμητική, 196ff



- PI, 50, 60, 67, 94, 95, 110,
117, 118, 120, 147, 149,
150, 156, 157, 213, 221,
222, 243, 255, 267, 287,
297, 308, 316, 324, 325,
328, 337, 351, 352, 358,
362, 380
- πόλωση, βλ. ηλεκτρική πό-
λωση
- πηνίο, 366ff, 368σ
- βήμα, 366
 - μαγνητική επαγωγή, 367ff
, 369ε 382σ
 - Helmholtz, 381ff, 383ε,
383σ, 384σ, 385α,
386α
- Poisson εξίσωση, 164ff,
224ε
- αριθμητική επίλυση,
164ff, 167ε, 193α
- πυκνωτής, 179ε, 181σ
- ρεύμα, βλ. ηλεκτρικό ρεύμα
- ρευματοφόρος δακτύλιος,
343ff, 363α
- μαγνητικό πεδίο, 343,
344ε, 356σ, 364α,
385α
- ROW, 57, 71α, 138, 139,
140, 159α, 200, 204, 208,
212, 217, 226, 239, 241,
242, 245, 250, 253, 255,
265, 266, 267, 283, 285,
286, 295, 296, 297, 303,
305, 306, 307, 316, 317,
324, 325, 333, 334, 351,
359, 360, 362, 376
- σειρά, 8ff
- σημειακό φορτίο, 41, 42σ,
43ε, 46σ
- Simpson, βλ. συναρτήσεις
SIN, 68, 88
- Στήλη, 8ff
- εύρος, 44, 54
- SQRT, 50, 70α, 88, 110,
128, 138, 150, 158, 159α,
204, 212, 221, 243, 250,
253, 255, 265, 266, 267,
283, 285, 286, 287, 295,
296, 297, 303, 305, 306,
307, 316, 334, 351, 360,
378
- SUM, 50, 68, 86, 94, 149,
150, 334, 377
- συναρτήσεις,
- Visual Basic, 88ε, 97α,
98α, 364α
 - Excel, 19ff, 20ε, 24ε
 - ολοκλήρωση, 77ff, 80σ
 - ολοκλήρωση Simpson,
81ff, 96α, 109, 119,



- 128, 130α
- ολοκλήρωση τραπεζοει-
δούς, 81ff, 96α, 109,
118, 157, 363α
συνοριακή επιφάνεια, 276,
277σ, 281ε, 309α
σωληνοειδές, βλ. πηνίο
τελεστές αλγεβρικών πράξε-
ων, 16π
- προτεραιότητα, 16π
τραπεζοειδές, βλ. συναρτή-
σεις
φάκελος, 4
- δημιουργία, 4
- νέος, 4
φορτίο, βλ. ηλεκτρικό φορ-
τίο
φορτισμένη ράβδος, 101,
102σ, 129α
- ηλεκτρικό πεδίο, 101ff,
103ε
φορτισμένη ταινία, 122,
122σ
- ηλεκτρικό πεδίο, 123,
123ε, 132α
φορτισμένος δακτύλιος,
111ff, 131α, 160α
- δυναμικό, 142ff, 143σ,
144ε, 160α, 162α
- ηλεκτρικό πεδίο, 112σ,
113, 113ε
φορτισμένος δίσκος, 151ff,
161α
- δυναμικό, 151ff, 152σ,
152ε, 162α
φορτισμένος μάντας, 320ff,
322ε, 329, 330σ
- μαγνητικό πεδίο, 320,
322ε, 331ε, 338σ
φύλλο, 8ff
- διαγραφή, 66
- μετονομασία, 54, 83
Helmholtz, βλ. πηνίο Helm-
holtz



Copyright: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Απαγορεύεται η μερική ή ολική ανατύπωση, καθώς και η λήψη φωτοαντίγραφων από το βιβλίο χωρίς τη γραπτή άδεια του Τμήματος Δημοσιευμάτων του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και του συγγραφέα.

Διατίθεται και στο Βιβλιοπωλείο του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Πανεπιστημιούπολη – Δουρούτη, Ιωάννινα - Τηλ. (0651) 97122.

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ στους φοιτητές.

**Γραφικές Τέχνες
ΘΕΟΔΩΡΙΔΗ**

Γαριβάδη 10, 45221 Ιωάννινα
Τηλ.-Fax: 26510 – 77358

