

ΘΩΜΑΣ Κ. ΧΑΣΑΝΗΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

ΚΑΙ

ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1987



ΘΩΜΑΣ Κ. ΧΑΣΑΝΗΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

και

ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1987



Πρόλογος .

Τα μαθήματα που ακολουθούν έχουν στόχο να αποτελέσουν μια εισαγωγή στη Διαφορική Γεωμετρία των καμπυλών και των επιφανειών. Μερικές μόνο από τις τοπικές και ολικές ιδιότητες των καμπυλών και των επιφανειών πρόκειται να μελετηθούν με κύριο βάρος στις τοπικές ιδιότητες. Η Διαφορική Γεωμετρία στα πρώτα της βήματα ξεκίνησε σαν ένα κεφάλαιο του Απειροστικού Λογισμού (εύρεση εφαπτομένης μιας καμπύλης, μήκος τόξου καμπύλης κ.λ.π.). Πολλοί είναι εκείνοι που συνεισέφεραν στα πρώτα της βήματα. Ενδεικτικά αναφέρω τους: Leonhard Euler (1707-1783), Gaspard Monge (1746-1818), Joseph Louis Lagrange (1736-1813) και Augustin Cauchy (1789-1857). Όμως το αποφασιστικό βήμα για τη Διαφορική Γεωμετρία έγινε από τον Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Με τη θεμελιακή δουλειά, "Disquisitiones generales circa superficies curvas (1827)" του Gauss, η Διαφορική Γεωμετρία από ένα κεφάλαιο του Απειροστικού Λογισμού που ήταν, αναβαθμίστηκε σε ανεξάρτητο κλάδο στα Μαθηματικά. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι αυτή η δουλειά του Gauss ήταν το πιστοποιητικό γένεσης της Διαφορικής Γεωμετρίας. Η κύρια ιδέα του Gauss ήταν ότι, μια επιφάνεια έχει μια εσωτερική Γεωμετρία που καθορίζεται μόνο από το μήκος των τόξων, τα οποία μετρούνται πάνω στην επιφάνεια. Οι ιδέες του Gauss γενικεύτηκαν από τον Bernhard Riemann (1826-1866) με αποτέλεσμα τη γένεση της γεωμετρίας "Γεωμετρία Riemann", που φέρνει το όνομά του.

Σήμερα μετά τόσα χρόνια από τη θεμελιακή δουλειά του Gauss θα άξιζε να θυμήσουμε ένα απόφθεγμα του μεγάλου μαθηματικού George Birkhoff, ο οποίος όντας αναλύοντας είπε: "... . Ίσως η Γεωμετρία σε τελική ανάλυση, δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη λήψη των διαισθητικών κοσμημάτων της Ανάλυσης".

Θωμάς Χασάνης

Γιάννενα, 1987



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Για μια καλλίτερη προσέγγιση στο μάθημα οι φοιτητές μπορούν να συμβουλευτούν τα παρακάτω βιβλία , τα οποία υπάρχουν στη Βιβλιοθήκη του Τμήματος Μαθηματικών :

(1) Manfredo P.do Carmo , Differential Geometry of Curves and Surfaces , Prentice-Hall , Inc. , Englewood Cliffs , New Jersey , 1976 .

(2) B. O'Neil , Elementary Differential Geometry , Academic Press , New York , 1966 .

(3) W.Klingenberg , A course in Differential Geometry , Translated by D.Hoffman , Springer , New York - Hedelberg - Berlin , 1978 .

(4) J.A. Thorpe , Elementary Topics in Differential Geometry , Springer , New York - Heidelberg - Berlin , 1979 .

Τα παραπάνω προαφέρονται για μια σύγχρονη αντιμετώπιση του μαθήματος . Ειδικότερα το (1) αποτέλεσε πρότυπο για τον συγγραφέα τούτων των σημειώσεων .

(5) J.J. Stoker , Differential Geometry , Wiley-Interscience , New York , 1969 .

(6) D.J. Struik , Lectures on Classical Differential Geometry , 2nd ed. , Addison-Wesley , Reading , MA , 1960 .

(7) T.J. Willmore , An Introduction to Differential Geometry , Oxford University Press , Oxford , 1959 .

Τα 5,6,7 προαφέρονται για μια πιο κλασσική αντιμετώπιση του μαθήματος .



Ι. ΚΑΜΠΥΛΕΣ

1.1. Ορισμοί - Παραδείγματα .

Θεωρούμε ένα ανοικτό διάστημα $I=(a,b)$, όπου μπορεί $a=-\infty$ ή $b=\infty$.

Ανάλογα με τους στόχους που θέλει κανείς να πετύχει δίνει και το κατάλληλο ορισμό καμπύλης . Για μας ο παρακάτω ορισμός είναι ικανοποιητικός .

Ορισμός 1.1.1. Μια απεικόνιση $\gamma:I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t)=(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ λέγεται καμπύλη τάξης C^k αν οι συντεταγμένες της γ , δηλαδή οι συναρτήσεις $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$ έχουν συνεχείς παραγώγους μέχρι και k τάξης . Η μεταβλητή t λέγεται παράμετρος της καμπύλης γ .

Παρατήρηση 1.1.1. (i) Μια καμπύλη τάξης C^0 είναι μια συνεχής απεικόνιση $\gamma:I \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(ii) Μια καμπύλη τάξης C^∞ λέγεται , διαφορίσιμη ή λεία (smooth) καμπύλη .

(iii) Πρέπει να διακρίνουμε το σύνολο $\gamma(I)$ (είναι ένα σύνολο σημείων του $\mathbb{R}^3$) από τη καμπύλη $\gamma:I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Έτσι το σύνολο $\gamma(I)$ θα λέγεται εικόνα ή τροχιά της γ . Μερικές φορές θα λέμε καμπύλη και θα εννοούμε το $\gamma(I)$.

(iv) Για μια καμπύλη $\gamma:I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \rightarrow \gamma(t)=(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$, το $\gamma(t)$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου , που κινείται στη τροχιά $\gamma(I)$ της γ .

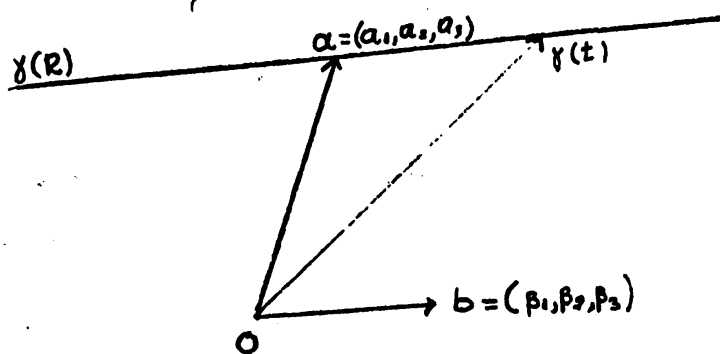
(v) Ο περιορισμός μιας καμπύλης τάξης C^k , $\gamma:I=(a,b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ σε ένα κλειστό διάστημα $[\gamma, \delta] \subset I$, δηλαδή η $\beta: [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^3$, με $\beta(t)=\gamma(t)$ για $t \in [\gamma, \delta]$, θα λέγεται και αυτή καμπύλη τάξης C^k .

Στόχος μας είναι να μελετήσουμε μερικές τοπικές ιδιότητες των λείων καμπυλών . Θα δώσουμε πρώτα μερικά παραδείγματα .

Παράδειγμα 1.1.1. Ας είναι $a=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και $b=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\gamma:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, που ορίζεται με τη σχέση

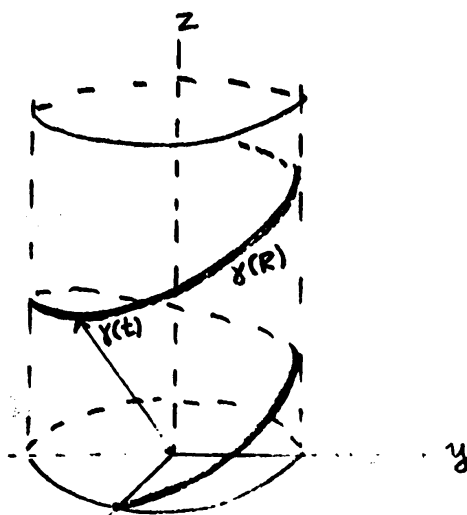


$\gamma(t) = (a_1 + t\beta_1, a_2 + t\beta_2, a_3 + t\beta_3)$. Η απεικόνιση αυτή είναι μια λεία καμπύλη. Η τροχιά της (σχήμα 1) είναι μια ευθεία που περνά από το σημείο α και παράλληλη προς το διάνυσμα b . Αν $b = (0, 0, 0)$, τότε $\gamma(t) = (a_1, a_2, a_3) = \alpha$ δηλαδή μια σταθερή απεικόνιση (σταθερή καμπύλη).



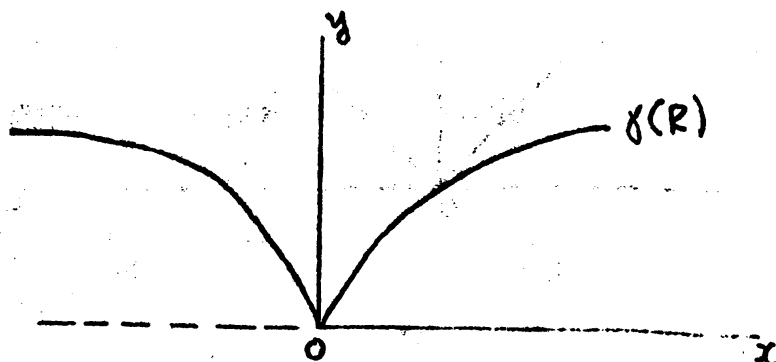
σχήμα 1

Παράδειγμα 1.1.2. Η απεικόνιση $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, που ορίζεται ως $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ είναι μια λεία καμπύλη, αφού οι συντεταγμένες $a \cos t, a \sin t, bt$ έχουν συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης. Μπορούμε να δούμε πως η εικόνα (τροχιά) $\gamma(R)$ είναι πάνω σε ένα κύλινδρο (ποιά η εξίσωση του κυλίνδρου ;). Η καμπύλη αυτή λόγω του σχήματος της εικόνας (σχήμα 2) λέγεται κυλινδρική έλικα.



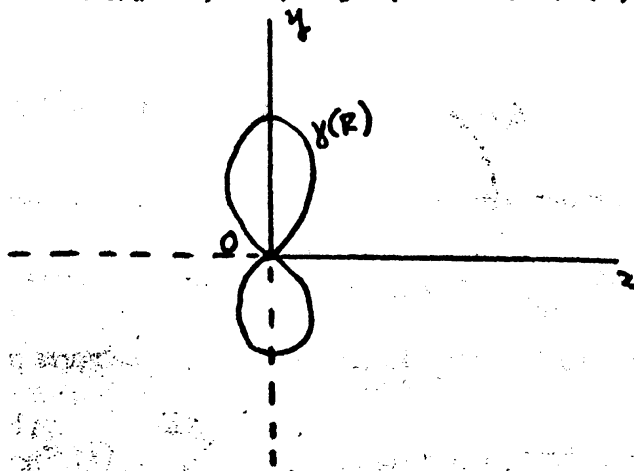
σχήμα 2

Παράδειγμα 1.1.3. Η $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (t^3, t^2, 0)$ είναι επίσης μια λεία καμπύλη με τροχιά το γράφημα του σχήματος 3.



σχήμα 3

Παράδειγμα 1.1.4. Η απεικόνιση $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (\sin 2t, \sin t, 0)$ είναι επίσης μια λεία καμπύλη, της οποίας η εικόνα είναι στο επίπεδο Oxy και έχει το σχήμα του 8 (σχήμα 4). Παρατηρούμε ότι $\gamma(0) = (0, 0, 0) = \gamma$ (ακέραιο πολ-

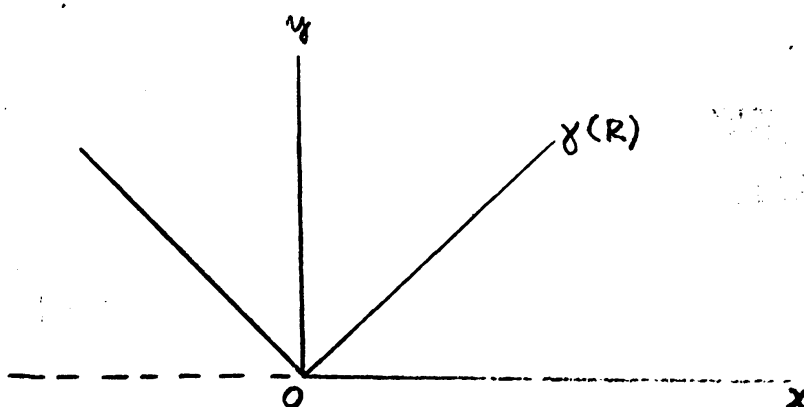


σχήμα 4

λαπλάσιο του π), δηλαδή η $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ δεν είναι 1-1 (αμφιμονοσήμαντη πάνω στην εικόνα της).

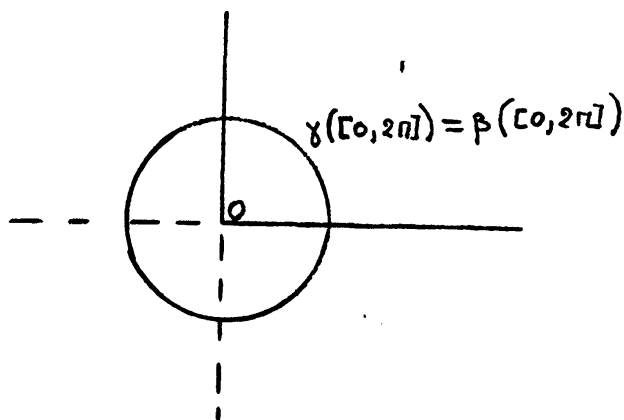
Παράδειγμα 1.1.5. Η απεικόνιση $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ που δίνεται με την $\gamma(t) = (t, |t|, 0)$ δεν είναι λεία καμπύλη (γιατί ;). Η γ είναι μια καμπύλη τάξης C^0 . Η εικόνα της είναι πάνω στο επίπεδο Oxy (σχήμα 5).





σχήμα 5

Παράδειγμα 1.1.6. Οι απεικονίσεις $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ που δίνονται ως $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $\beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$ είναι λείες καμπύλες (κοίταξε παρατήρηση 1.1.1. (v)) , με εικόνες στο επίπεδο Oxy και μάλιστα έχουν την ίδια εικόνα το κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ (σχήμα 6) .



σχήμα 6

Είναι φανερό ότι η γ σκεπάζει μια φορά το κύκλο και η β δύο φορές .

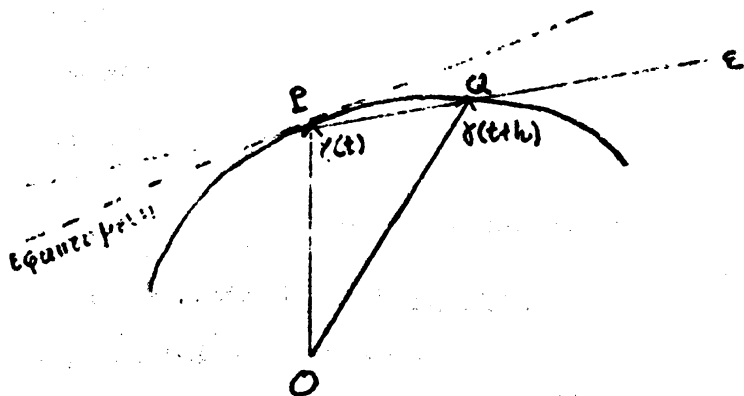
Ορισμός 1.1.2. Καμπύλες των οποίων η εικόνα είναι πάνω σε ένα επίπεδο (όχι κατ'ανάγκη επίπεδο συντεταγμένων) λέγονται επίπεδες καμπύλες .

Έτσι οι καμπύλες στα παραδείγματα 1.1.1. , 1.1.3. , 1.1.4. , 1.1.5. και 1.1.6 είναι επίπεδες. Επίσης η καμπύλη $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \gamma(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t})$ είναι επίπεδη. Η τροχιά της βρίσκεται στο επίπεδο $x-y+z+1=0$.



1.2. Κανονικές καμπύλες , Αναπαραμετρήσεις .

Ας είναι $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια λεία καμπύλη και $t \in I$. θεωρούμε το σημείο $\gamma(t)=P$ της εικόνας της γ (σχήμα 7) . Επίσης θεωρούμε το σημείο $Q=\gamma(t+h)$. Ας είναι ε η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία P και Q .



σχήμα 7

Το διάνυσμα PQ είναι $PQ=\gamma(t+h)-\gamma(t)$. Έτσι η ευθεία ε είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}$. Όταν το $Q \rightarrow P$, δηλαδή $h \rightarrow 0$, τότε η ευθεία ε τείνει να γίνει η εφαπτομένη του $\gamma(I)$ στο P και συνεπώς η εφαπτομένη του $\gamma(I)$ στο $P=\gamma(t)$ είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}$. Το όριο αυτό υπάρχει αφού η καμπύλη γ είναι λεία και είναι το

$\gamma'(t) = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}(t), \frac{d\gamma_2}{dt}(t), \frac{d\gamma_3}{dt}(t) \right)$. Έτσι η εφαπτομένη του $\gamma(I)$ στο σημείο

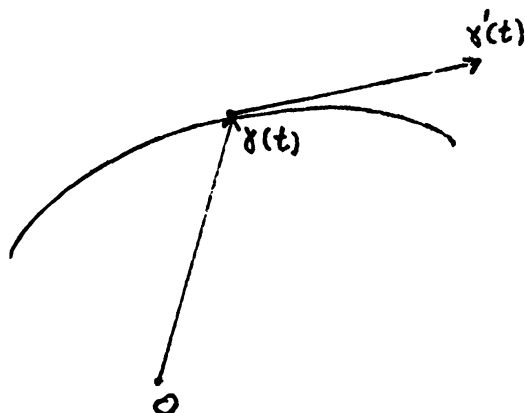
$\gamma(t)$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \gamma'_3(t))$. Για το λόγο αυτό το διάνυσμα $\gamma'(t)$ λέγεται εφαπτόμενο διάνυσμα της γ στο t .

Επειδή όμως το $\gamma(I)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η τροχιά ενός υλικού σημείου , που βρίσκεται στο σημείο $\gamma(t)$ τη χρονική στιγμή t , για τούτο το διάνυσμα $\gamma'(t)$ λέγεται και διάνυσμα ταχύτητας της γ στο t .

Ορισμός 1.2.1. Έστω η λεία καμπύλη $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$.



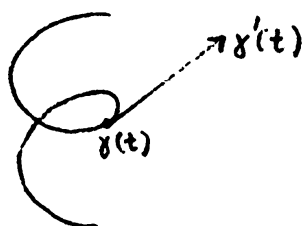
Το διάνυσμα $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \gamma'_3(t))$ λέγεται εφαπτόμενο διάνυσμα ή διάνυσμα ταχύτητας της γ στο t ή $\gamma(t)$. Αυτό το διάνυσμα αρχίζει από το σημείο $\gamma(t)$ (σχήμα 8).



σχήμα 8

Παρατήρηση 1.2.1. Συνήθως αποφεύγουμε να λέμε διάνυσμα ταχύτητας στο τάδε σημείο της τροχιάς χωρίς να αναφέρουμε κάπως τη παράμετρο, αφού όταν η τροχιά της έχει αυτοτομές (όπως η καμπύλη του παραδείγματος 1.1.4), τότε σε ένα σημείο αυτοτομής της τροχιάς έχουμε δύο τουλάχιστον διανύσματα ταχύτητας. Αντίθετα μπορούμε άνετα να μιλάμε, χωρίς να δημιουργείται σύγχυση, για διάνυσμα ταχύτητας στο t ή στο $\gamma(t)$.

Παράδειγμα 1.2.1. Το διάνυσμα ταχύτητας της έλικας $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ στο t είναι το $\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$. Είναι ένα διάνυσμα με αρχικό σημείο το $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$.



Παράδειγμα 1.2.2. Το διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης του Παραδείγματος



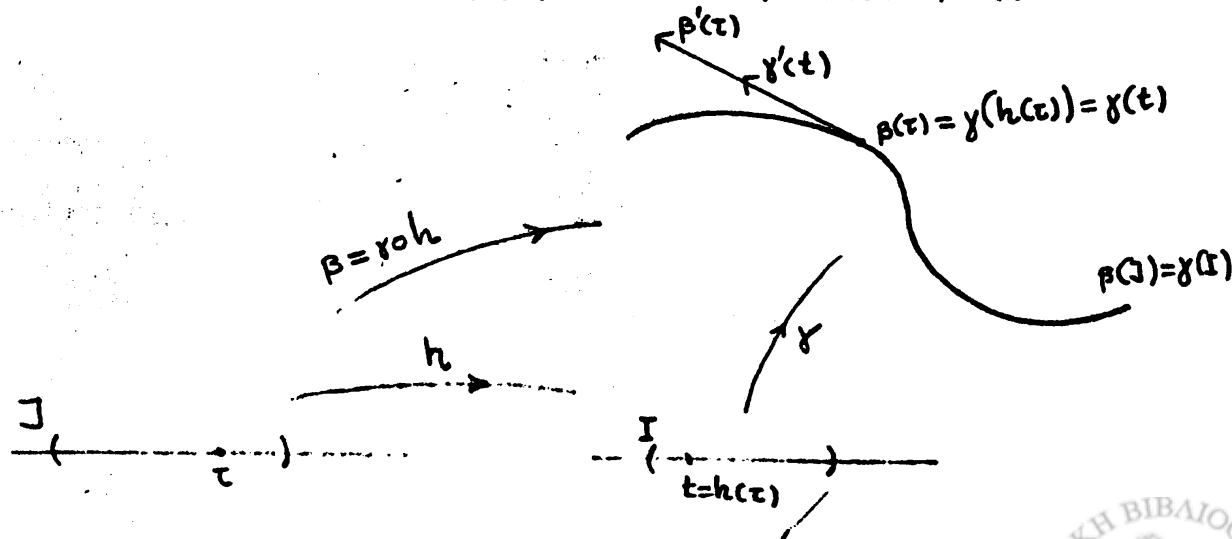
1.1.3 στο t είναι το $\gamma'(t)=(3t^2, 2t, 0)$ και έχει αρχικό σημείο το $\gamma(t)$. Το διάνυσμα ταχύτητας στο $t=0$ είναι $(0,0,0)$ δηλαδή το μηδενικό διάνυσμα και έχει αρχικό σημείο το σημείο $\gamma(0)=(0,0,0)$.

Παράδειγμα 1.2.3. Τα διανύσματα ταχύτητας στο t των καμπυλών β και γ του παραδείγματος 1.1.6 είναι : $\beta'(t)=(-\sin t, \cos t, 0)$ και $\gamma'(t)=2(-\sin t, \cos t, 0)$. Τι σχέση έχουν τα $\beta'(t)$ και $\gamma'(t)$;

Ορισμός 1.2.2. Μια λεία καμπύλη $\gamma:I \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται κανονική στο $t \in I$, αν $\gamma'(t) \neq 0$ και κανονική στο I αν είναι κανονική για κάθε $t \in I$, δηλαδή αν το διάνυσμα ταχύτητας είναι παντού μη μηδενικό. Παρακάτω θα ασχοληθούμε μόνο με κανονικές καμπύλες.

Έτσι η καμπύλη $\gamma(t)=(\cos t, \sin t, 0)$ είναι κανονική παντού στο $\mathbb{R}$, ενώ η καμπύλη $\beta:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\beta(t)=(t^2, t^3, 0)$ δεν είναι κανονική στο $t=0$.

Θεωρούμε τώρα μια λεία καμπύλη $\gamma:I \rightarrow \mathbb{R}^3$ και ας είναι $h:J \rightarrow I$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση με $h(J)=I$, όπου J είναι ένα καινούργιο διάστημα της πραγματικής ευθείας. Τότε από το διαφορικό λογισμό ξέρουμε πως η σύνθεση $\beta=\gamma \circ h:J \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι πάλι λεία απεικόνιση, δηλαδή η β είναι πάλι μια λεία καμπύλη (σχήμα 9).



σχήμα 9

και μάλιστα οι β και γ έχουν την ίδια τροχιά. Η καμπύλη $\beta(\tau)=\gamma(h(\tau))$ λέγε-

ται αναπαραμέτρηση της καμπύλης γ με την h .

Παράδειγμα 1.2.4. Έστω $I=(1,9)$ και $\gamma:I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια λεία καμπύλη με $\gamma(t)=(t-1, t\sqrt{t}, \sqrt{t})$. Αν $J=(1,3)$ και $h:J \rightarrow I$ με $h(\tau)=\tau^2$ τότε η αναπαραμέτρηση της γ με την h είναι η καμπύλη $\beta:J \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\beta(\tau)=\gamma(h(\tau))=\gamma(\tau^2)=(\tau^2-1, \tau^3, \tau)$.

Παράδειγμα 1.2.5. Έστω η καμπύλη $\gamma:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως $\gamma(t)=(\alpha \cos t, \alpha \sin t, 0)$ και $h:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(\tau)=\epsilon\tau+\delta$ με $\epsilon \neq 0$. Η αναπαραμέτρηση της γ με την h είναι η καμπύλη $\beta:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\beta(\tau)=\gamma(h(\tau))=\gamma(\epsilon\tau+\delta)=(\alpha \cos(\epsilon\tau+\delta), \alpha \sin(\epsilon\tau+\delta), 0)$. Οι καμπύλες β, γ έχουν ίδια εικόνα, αλλά διαφέρουν ως προς τη παράμετρο.

Παρατήρηση 1.2.2. Έστω $\gamma:I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια λεία καμπύλη. Η γ μας λέει πως διαγράφουμε την εικόνα $\gamma(I)$ (πως κινούμαστε πάνω στο $\gamma(I)$). Έτσι η αναπαραμέτρηση $\beta=\gamma \circ h$ της γ με την $h:J \rightarrow I$ μας καθορίζει ένα καινούργιο τρόπο κίνησης πάνω στο σύνολο $\gamma(I)$. Με πιο απλά λόγια η γ δίνει στα σημεία της εικόνας κάποιες "ετικέτες" τα t , ενώ η β δίνει στα ίδια σημεία κάποιες "ετικέτες" τα τ .

Η παρακάτω πρόταση μας λέει πως συνδέονται τα διανύσματα ταχύτητας μιας λείας καμπύλης γ και της αναπαραμέτρησης β .

Πρόταση 1.2.1. Έστω $\gamma:I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια λεία καμπύλη και $\beta:J \rightarrow \mathbb{R}^3$ η αναπαραμέτρηση της γ με την $h:J \rightarrow I$. Τότε

$$(1) \quad \beta'(\tau) = \frac{dh}{d\tau}(\tau) \gamma'(h(\tau)).$$

(Κόβταξε σχήμα 9).

Απόδειξη : Επειδή $\beta(\tau)=\gamma(h(\tau))$. Τότε σύμφωνα με το κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης έχουμε τη σχέση (1), που ζητάμε.



Παρατήρηση 1.2.3. Όπως βλέπουμε από τη σχέση (1), αν η καμπύλη γ είναι κανονική, τότε η αναπαραμέτρηση β είναι κανονική (δηλαδή $\beta'(\tau) \neq 0$), αν και μόνο αν $\frac{dh}{d\tau}(\tau) \neq 0$ για κάθε $\tau \in J$. Με άλλα λόγια η β είναι κανονική αν και μόνο αν η h είναι γνήσια μονότονη συνάρτηση ώστε τα διαστήματα J και I να είναι σε αμκρμονοσήμαντη αντιστοιχία.

Ορισμός 1.2.3. Μια αναπαραμέτρηση $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ της $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με την $h: J \rightarrow I$, $t = h(\tau)$, λέγεται κανονική αναπαραμέτρηση αν $\frac{dh}{d\tau}(\tau) \neq 0$, $\forall \tau \in J$.

Κανονικές αναπαραμετρήσεις είναι αυτές, που μας ενδιαφέρουν.

1.3. Συνάρτηση μήκους τόξου - Μήκος καμπύλης.

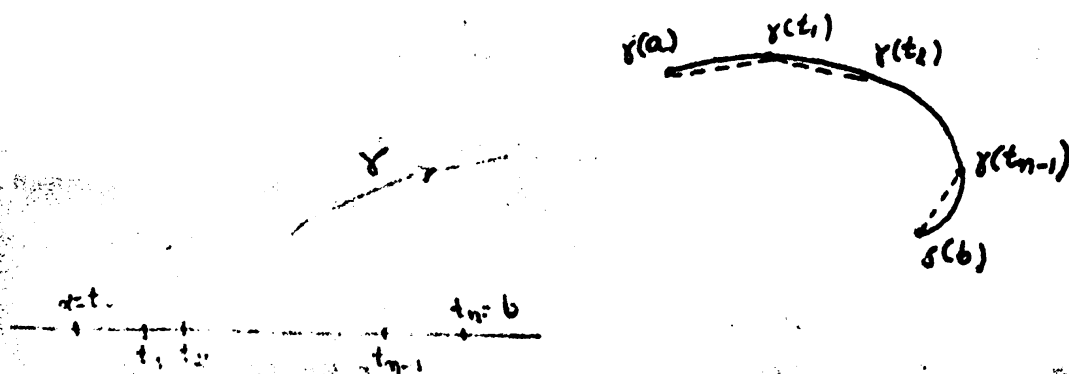
Θεωρούμε μια καμπύλη $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ τάξης C^k (Παρατήρηση 1.1.1(v)). Θέλουμε να ορίσουμε το μήκος της καμπύλης από το a ως το b και να βρούμε ένα τύπο που να μας δίνει αυτό το μήκος.

Για κάθε διαμέριση (partition)

$$\delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

του διαστήματος $[a, b]$ εξετάζουμε το άθροισμα $\ell(\gamma, \delta) = \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$.

Είναι φανερό πως το $\ell(\gamma, \delta)$ γεωμετρικά εκφράζει το μήκος μιας πολυγωνικής γραμμής ενγεγραμμένης στο $\gamma([a, b])$ με κορυφές τα σημεία $\gamma(a) = \gamma(t_0)$, $\gamma(t_1)$, ..., $\gamma(t_n) = \gamma(b)$ (σχήμα 10).



σχήμα 10



Ορίζουμε τώρα μήκος διαμέρισης $\delta = \|\delta\| = \max(t_i - t_{i-1})$, $i=1, \dots, n$. Θεωρώντας το σύνολο όλων των διαμερίσεων του $[a, b]$ μπορούμε να κοιτάξουμε για το όριο

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \|\delta\| \rightarrow 0}} L(\gamma, \delta) \quad .$$

Αν αυτό το όριο υπάρχει (και είναι πεπερασμένο) το σημειώνουμε με $L_a^b(\gamma)$ και το λέμε μήκος της καμπύλης γ από το a ως το b , η δε καμπύλη $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται τότε ευθυγραμμίσιμη (rectifiable). Με μεθόδους του λογισμού μπορούμε να δείξουμε την παρακάτω πρόταση.

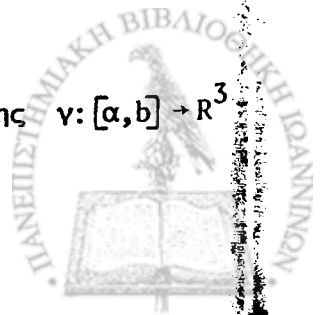
Πρόταση 1.3.1. Αν $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια καμπύλη τάξης C^k ($k \geq 1$), τότε η γ είναι ευθυγραμμίσιμη και ισχύει :

$$\text{μήκος της } \gamma \text{ από το } a \text{ ως το } b = L_a^b(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad .$$

Παρατήρηση 1.3.1. Η απαίτηση στη πρόταση 1.3.1. ότι η καμπύλη είναι τουλάχιστον τάξης C^1 είναι απαραίτητη όπως δείχνει το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.3.1. Θεωρούμε τη καμπύλη $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, που ορίζεται ως : $\gamma(t) = (t, t \sin \frac{\pi}{t})$ για $t \neq 0$ και $\gamma(0) = (0, 0)$. Αυτή η καμπύλη είναι C^0 (δηλαδή συνεχής). Ο περιορισμός της στο $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ είναι ευθυγραμμίσιμη καμπύλη με μήκος τουλάχιστον το $\frac{2}{n + \frac{1}{2}}$. Έτσι το μήκος αυτής στο διάστημα $[\frac{1}{N}, 1]$ είναι μεγαλύτερο του $2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{i+1}$. Άρα το μήκος της γ είναι μη φραγμένο και συνεπώς η γ είναι μη-ευθυγραμμίσιμη (nonrectifiable).

Πρόταση 1.3.2. Το μήκος μιας λείας και κανονικής καμπύλης $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$



και το μήκος μιας κανονικής αναπαραμέτρησης της γ είναι ίσα (δηλαδή το μήκος καμπύλης είναι ανεξάρτητο από κανονικές αναπαραμετρήσεις) .

Απόδειξη : Έστω $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια κανονική αναπαραμέτρηση της $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με την $h: [c, d] \rightarrow [a, b], t = h(\tau)$. Έτσι $\beta(\tau) = \gamma(h(\tau))$. Επειδή η αναπαραμέτρηση είναι κανονική έχουμε $\frac{dh}{d\tau}(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in [c, d]$. Τώρα έχουμε

$$L_c^d(\beta) = \int_c^d |\beta'(\tau)| d\tau \stackrel{(1)}{\underset{\text{σελίδα 8}}{=}} \int_c^d |\gamma'(h(\tau))| \left| \frac{dh}{d\tau}(\tau) \right| d\tau$$

$$\text{αν } \frac{dh}{d\tau} > 0 \quad \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L_a^b(\gamma)$$

ή

$$\text{αν } \frac{dh}{d\tau} < 0 \quad - \int_b^a |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L_a^b(\gamma) .$$

Έστω τώρα $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια λεία κανονική καμπύλη και $t_0 \in [a, b]$. Τότε η ποσότητα $\int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du$ μας δίνει το μήκος από το t_0 ως το t και είναι φανερό πως αυτό εξαρτάται από το t . Έτσι έχουμε

$$(2) \quad s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du$$

Η συνάρτηση $s(t)$ μας δίνει για κάθε t το μήκος τόξου από το t_0 ως το t και λέγεται συνάρτηση μήκους τόξου με αρχή το t_0 (δηλαδή μετράμε τόξα πάνω στο $\gamma([a, b])$ αρχίζοντας από το $\gamma(t_0)$) .



Είναι φανερό πως αν πάρουμε σαν αρχή άλλο σημείο (έστω το t_1) τότε σχηματίζουμε μια καινούργια συνάρτηση μήκους τόξου. Αυτή θα μας δίνει τα μήκη τόξων μετρώντας τα από το t_1 .

Τώρα από τη σχέση (2) παίρνουμε

$$\frac{ds}{dt}(t) = |v'(t)| \neq 0, \text{ για όλα τα } t,$$

αφού η καμπύλη είναι κανονική. Έτσι η συνάρτηση $s(t)$ είναι γνήσια αύξουσα (μονότονη). Σύμφωνα με το θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης του Λογισμού υπάρχει η αντίστροφος $t = t(s)$ και μάλιστα $\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t(s))} = \frac{1}{|v'(t(s))|} > 0$. Έτσι η $\beta(s) = \gamma(t(s))$ είναι μια κανονική αναπαραμέτρηση της γ [η συνάρτηση $h(t)$ της πρότασης 1.2.1. εδώ τη συμβολίσαμε με $t(s)$]. Επίσης από τη σχέση (1) (σελίδα 8) έχουμε :

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \frac{dt}{ds}(s) \gamma'(t(s)) \text{ και συνεπώς } |\beta'(s)| = \frac{dt}{ds}(s) |v'(t(s))| \\ &= \frac{1}{|v'(t(s))|} |v'(t(s))| = 1. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια το διάνυσμα ταχύτητας της β είναι παντού μοναδιαίο. Το πεδίο ορισμού της β είναι ένα καινούργιο διάστημα J με παράμετρο s και $t: J \rightarrow I$, $t(s) = t$.

Έτσι έχουμε αποδείξει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.1. Για κάθε λεία και κανονική καμπύλη $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ υπάρχει πάντα κανονική αναπαραμέτρηση $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ με διάνυσμα ταχύτητας μοναδιαίο.

Παρατήρηση : Για να βρούμε την αναπαραμέτρηση που μας εξασφαλίζει το θεώρημα 1.3.1 δουλεύουμε ως εξής : Παίρνουμε ένα τυχαίο $t_0 \in I$. Βρίσκουμε την $s(t) = \int_{t_0}^t |v'(u)| du$, την αντιστρέφουμε (δηλαδή λύνουμε ως προς t) και μετά

βάζουμε στη $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ το $t =$ με τη λύση που βρήκαμε. Μερικές φορές κοιτάζουμε να διαλέξουμε κατάλληλο t_0 ώστε να απλοποιηθούν οι λογαριασμοί μας.

Παράδειγμα 1.3.2. Δίνεται η λεία καμπύλη $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$. Το διάνυσμα ταχύτητας είναι $\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ και όπως είπαμε είναι ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο $\gamma(t)$. Έχουμε

$|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Έτσι η γ είναι κανονική παντού αν $a^2 + b^2 \neq 0$. Θέλουμε να βρούμε μια αναπαραμέτρηση με διάνυσμα ταχύτητας μοναδιαίο. Βρίσκουμε τη συνάρτηση μήκους τόξου με αρχή το t_0 . Έχουμε

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du = \int_{t_0}^t \sqrt{a^2 + b^2} du = \sqrt{a^2 + b^2} (t - t_0),$$

δηλαδή

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} (t - t_0) \rightarrow t = t_0 + \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Τώρα η αναπαραμέτρηση που ζητάμε είναι :

$$\beta(s) = \left(a \cos \left(t_0 + \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \sin \left(t_0 + \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), b \left(t_0 + \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right).$$

Μπορείτε να ελέγξετε ότι η $\beta(s)$ έχει διάνυσμα ταχύτητας παντού μοναδιαίο.

Επίσης αν έχουμε διαλέξει $t_0 = 0$ τότε θα έχουμε

$$\beta(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Παρατήρηση : Όταν μια καμπύλη $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ έχει διάνυσμα ταχύτητας παντού μοναδιαίο τότε, $L_a^b(\gamma) = b - a$ (γιατί ;). Επίσης η συνάρτηση μήκους τόξου με αρχή το t_0 είναι $s = t - t_0$ (γιατί ;). Για το λόγο αυτό σ' αυτή τη περίπτωση λέμε πως η καμπύλη $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ έχει παράμετρο μήκους τόξου.

1.4. Πλαίσιο και τύποι των Serret-Frenet .

Σ'αυτή τη παράγραφο θα ασχοληθούμε με καμπύλες $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$, που έχουν διάνυσμα ταχύτητας παντού μοναδιαίο (σύμφωνα με το θεώρημα 1.3.1. αυτό μπορεί να γίνει για κάθε λεία κανονική καμπύλη), δηλαδή θα κοιτάξουμε καμπύλες με παράμετρο μήκους τόξου. Έστω λοιπόν $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$, με $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ μια (κανονική) λεία καμπύλη με παράμετρο μήκους τόξου. Έτσι το διάνυσμα $\gamma'(s) = (\gamma'_1(s), \gamma'_2(s), \gamma'_3(s))$ έχει μήκος μονάδα παντού, έχει αρχή το σημείο $\gamma(s)$ και είναι εφαπτόμενο της τροχιάς $\gamma([\alpha, \beta])$ στο $\gamma(s)$. Συμβολίζουμε αυτό το διάνυσμα με $T(s)$. Έτσι

$$T(s) = \dot{\gamma}(s) = (\dot{\gamma}_1(s), \dot{\gamma}_2(s), \dot{\gamma}_3(s)) ,$$

όπου έχουμε βάλει τελεία $(\dot{})$ αντί $(')$ για να δηλώσουμε ότι παραγωγίζουμε ως προς το μήκος τόξου.

Ορισμός 1.4.1. Ο αριθμός $k(s) = |\ddot{\gamma}(s)| = |\dot{T}(s)|$ λέγεται καμπυλότητα της γ στο s και ο αντίστροφος $\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$ λέγεται αχτίνα καμπυλότητας.

Έτσι όπως έχουμε ορίσει τη καμπυλότητα βλέπουμε ότι αυτή είναι ένας μη αρνητικός αριθμός σε κάθε σημείο της καμπύλης.

Τα παρακάτω παραδείγματα δείχνουν πως ο ορισμός της καμπυλότητας ικανοποιεί τη διαίθεσή μας.

Παράδειγμα 1.4.1. Έστω α, b δύο διανύσματα με $|\alpha| = 1$. Τότε η λεία καμπύλη (ευθεία), που ορίζεται ως $\gamma(s) = \alpha s + b$ έχει καμπυλότητα 0 παντού. Το διάνυσμα ταχύτητας είναι $\dot{\gamma}(s) = \alpha$, δηλαδή είναι παντού μοναδιαίο. Έτσι η καμπύλη έχει παράμετρο το μήκος τόξου με αρχή κάποιο σημείο της (ποιό;). Επειδή το α είναι σταθερό διάνυσμα, δηλαδή δεν εξαρτάται από το s , έχουμε $k(s) = |\ddot{\gamma}(s)| = |\dot{\alpha}| = 0$.



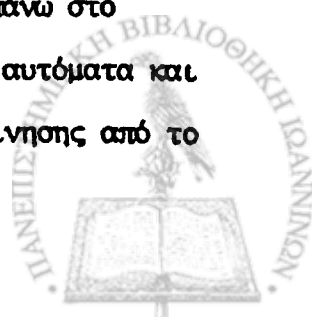
Αντίστροφα . Αν μια καμπύλη με μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας έχει καμπυ-
λότητα παντού μηδέν , τότε αυτή είναι ευθεία . Πραγματικά , από $k(s) = |\ddot{\gamma}(s)| = 0$,
έχουμε $\ddot{\gamma}(s) = 0$ και ολοκληρώνοντας δύο φορές παίρνουμε $\gamma(s) = \alpha s + b$.

Παράδειγμα 1.4.2. Η καμπύλη $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0)$
έχει διάνυσμα ταχύτητας $\gamma'(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$ το οποίο είναι μοναδιαίο . Έτσι
το s είναι παράμετρος μήκους τόξου με αρχή το $0 \in [0, 2\pi]$. Άρα
 $T(s) = \dot{\gamma}(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$ και συνεπώς $\ddot{\gamma}(s) = (-\cos s, \sin s, 0)$. Έχουμε λοιπόν
 $k(s) = |\ddot{\gamma}(s)| = 1$. Δηλαδή η καμπύλη $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ έχει σταθερή καμπυλότητα
1. Είναι φανερό ότι η τροχιά της $\gamma(s)$ είναι κύκλος ακτίνας 1 .

Παρατήρηση : Το σημείο $\gamma(s)$ και το διάνυσμα $T(s)$, μας καθορίζουν
πλήρως την εξέλιξη της εφαπτόμενης ευθείας του $\gamma([a, b])$ στο $\gamma(s)$.

Παρατήρηση : Έστω $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, όχι κατ'ανάγκη με μοναδιαίο διάνυσμα
ταχύτητας . Το σημείο $\gamma(t)$ διαγράφει την εικόνα $\gamma([a, b])$ πηγαίνοντας από το
σημείο $\gamma(a)$ προς το $\gamma(b)$. Θεωρούμε τώρα μια αναπαραμέτρηση της γ με την
 $h: [a, b] \rightarrow [a, b], t = h(\tau) = a + b - \tau$. Αυτή η αναπαραμέτρηση είναι κανονική αφού
 $\frac{dh}{d\tau} = -1 \neq 0$ και μάλιστα σύμφωνα με τη πρόταση 1.2.1 ισχύει $\beta'(\tau) = -\gamma'(h(\tau))$.

Το σημείο $\beta(\tau) = \gamma(a + b - \tau)$ της αναπαραμέτρησης διαγράφει το $\gamma([a, b])$ πηγαί-
νοντας από το $\beta(a) = \gamma(b)$ προς το $\beta(b) = \gamma(a)$, δηλαδή η β διαγράφει τη τρο-
χιά αντίθετα . Από τη σχέση $\beta'(\tau) = -\gamma'(h(\tau))$ με μια ακόμη παραγώνγιση έχουμε ότι
 $\beta''(\tau) = \gamma''(h(\tau))$. Έτσι βλέπουμε ότι σε τέτοιου είδους αναπαραμέτρηση ενώ τα
διανύσματα ταχύτητας είναι αντίθετα , τα διανύσματα β'' , γ'' (που λέγονται
και διανύσματα επιτάχυνσης) έχουν την ίδια φορά . Αυτό το σχόλιο μας λέγει
ότι όταν έχουμε μια καμπύλη $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας τότε
το διάνυσμα $\dot{\gamma}(s)$ έχει την ίδια πάντα φορά όπως και να κινούμαστε πάνω στο
 $\gamma([a, b])$. Επίσης όταν μας δοθεί μια καμπύλη $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ορίζεται αυτόματα και
ένας προσανατολισμός πάνω στο $\gamma([a, b])$, δηλαδή ένας τρόπος κίνησης από το



$\gamma(a)$ προς το $\gamma(b)$. Έτσι η γ και η αναπαράμετρηση β που δώσαμε ορίζουν στο $\gamma([a,b])$ αντίθετους προσανατολισμούς . (Βρείτε συνθήκη στην h ώστε η $\gamma(t)$ και $\beta(\tau)=\gamma(h(t))$ να ορίζουν ίδιο ή αντίθετο προσανατολισμό) .

Τώρα αν σε ένα σημείο s (ή $\gamma(s)$) της καμπύλης $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ η καμπυλότητα $k(s)=|\ddot{\gamma}(s)|=|\dot{T}(s)|$ δεν είναι μηδέν (οπότε η καμπυλότητα δεν είναι μηδέν σε μια περιοχή του s λόγω συνέχειας) τότε μπορούμε να ορίσουμε εκεί (δηλαδή στο s) δύο ακόμη διανύσματα με τις παρακάτω σχέσεις

$$(1) \quad N(s) = \frac{\dot{T}(s)}{k(s)}$$

και

$$(2) \quad B(s) = T(s) \times N(s) \quad , \quad \text{όπου } \times \text{ σημαίνει εξωτερικό γινόμενο} .$$

Ισχυρισμός . Τα διανύσματα $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ είναι μοναδιαία και κάθετα ανά δύο .

Απόδειξη . Από την υπόθεση έχουμε $|T(s)|=|\dot{\gamma}(s)|=1$. Επίσης

$$|N(s)| = \frac{|\dot{T}(s)|}{k(s)} = \frac{|\ddot{\gamma}(s)|}{k(s)} = \frac{|\ddot{\gamma}(s)|}{|\ddot{\gamma}(s)|} = 1 .$$

Τώρα από τη σχέση $T(s) \cdot T(s) = 1$, αν παραγωγίσουμε παίρνουμε

$$2T(s) \cdot \dot{T}(s) = 0 \stackrel{(1)}{\implies} 2T(s) \cdot k(s)N(s) = 0 \implies T(s) \perp N(s) . \text{ Επίσης από τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου συμπεραίνουμε πως } B(s) \perp T(s) , B(s) \perp N(s) \text{ και } |B(s)| = 1 .$$

Συμπέρασμα . Αν $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια καμπύλη με μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας τότε σε κάθε σημείο $\gamma(s)$ με $k(s)>0$ ορίζονται τρία διανύσματα $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ μοναδιαία και ανά δύο κάθετα . Αυτά τα τρία διανύσματα ορίζουν μια Ορθοκανονική Βάση (πλαίσιο) στο σημείο $\gamma(s)$, που λέγεται Πλαίσιο των Serret-Frenet .

Παρατήρηση . Σε ένα σημείο όπου $k(s)=0$, δεν μπορεί να γίνει κάτι ανάλογο . Έτσι τα σημεία μιας καμπύλης με $k(s)=0$ πρέπει να μελετηθούν με ιδιαίτερη προσοχή . Αν όμως ισχύει $k(s)=0$ σε ένα κομμάτι της $\gamma(I)$ τότε αυτό το κομμάτι , όπως είδαμε στο παράδειγμα 1.4.1 , είναι ευθεία .

Ορισμός 1.4.2. Το διάνυσμα $T(s)$ λέγεται μοναδιαίο εφαπτόμενο της γ , το $N(s)$ πρώτο κάθετο της γ , το $B(s)$ δεύτερο κάθετο της γ , στο σημείο $\gamma(s)$. Εξ άλλου οι ευθείες που περνούν από το $\gamma(s)$ και είναι παράλληλες προς $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ αντίστοιχα λέγονται εφαπτομένη ευθεία , πρώτη κάθετη ευθεία και δεύτερη κάθετη ευθεία .

Ορισμός 1.4.3. Ο αριθμός $\tau(s)=-\dot{B}(s) \cdot N(s)$ λέγεται στρέψη της καμπύλης $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ στο σημείο s . Η στρέψη ορίζεται μόνο όπου $k(s) > 0$.

Παρατηρήσεις . (i) Αντίθετα με τη καμπυλότητα η στρέψη μιας καμπύλης μπορεί να παίρνει και αρνητικές τιμές .

(ii) Το σημείο - στον ορισμό της στρέψης το έχουμε βάλει για παραδοσιακούς λόγους .

Σημαντική παρατήρηση : Ας είναι $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια λεία καμπύλη με μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας . Είδαμε πως ορίζεται μια λεία συνάρτηση $k: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto k(s) = |\dot{T}(s)| = |\ddot{\gamma}(s)|$, που λέγεται συνάρτηση καμπυλότητας της γ και η τιμή της $k(s)$ λέγεται καμπυλότητα της γ στο s (ή στο $\gamma(s)$) . Επίσης ορίζεται στα σημεία του $[a,b]$ όπου $k(s) \neq 0$, η στρέψη της καμπύλης . Αν η καμπυλότητα της καμπύλης μηδενίζεται μόνο σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του $[a,b]$, έστω στο $A = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ τότε η στρέψη ορίζεται και είναι συνεχής μόνο στο $[a,b] - A$. Μερικές φορές όμως η συνάρτηση $\tau(s)$, μπορεί να οριστεί με συνεχή τρόπο και στα σημεία του A (χωρίς αυτό να μπορεί να γίνεται πάντα) .



Σε τέτοιες περιπτώσεις ορίζεται μια συνεχής συνάρτηση $\tau: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \tau(s)$, που λέγεται συνάρτηση στρέψης της καμπύλης γ (κοίταξε άσκηση 12) .

Θεώρημα 1.4.1. (Τύποι των Serret-Frenet) . Ας είναι $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια λεία καμπύλη με μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας , καμπυλότητα $k(s) > 0$ και στρέψη $\tau(s)$: Τότε ισχύουν :

$$(3) \quad \dot{T}(s) = k(s)N(s)$$

$$(4) \quad \dot{N}(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$(5) \quad \dot{B}(s) = -\tau(s)N(s)$$

Οι σχέσεις αυτές λέγονται τύποι των Serret-Frenet .

Απόδειξη . Ο πρώτος τύπος βγαίνει από τον ορισμό του $N(s)$. Από τη σχέση $B(s) \cdot B(s) = 1$ με παραγωγήλιση παίρνουμε $2B(s) \cdot \dot{B}(s) = 0$, δηλαδή $\dot{B}(s) \perp B(s)$. Επίσης από τη σχέση $B(s) \cdot T(s) = 0$ με παραγωγήλιση παίρνουμε :
 $\dot{B}(s) \cdot T(s) + B(s) \cdot \dot{T}(s) = 0 \xrightarrow{(3)} \dot{B}(s) \cdot T(s) + k(s)B(s) \cdot N(s) = 0 \xrightarrow{B(s) \cdot N(s) = 0} \dot{B}(s) \cdot T(s) = 0$,
δηλαδή $\dot{B}(s) \perp T(s)$. Αφού λοιπόν το $\dot{B}(s)$ είναι κάθετο στο $T(s)$ και το $B(s)$, θα είναι παράλληλο με το $N(s)$ δηλαδή $\dot{B}(s) = \lambda N(s)$. Άρα $\lambda = \dot{B}(s) \cdot N(s) = -\tau(s)$ και συνεπώς $\dot{B}(s) = -\tau(s)N(s)$, έτσι αποδείξαμε και τον τρίτο τύπο . Για να αποδείξουμε το δεύτερο τύπο θα χρησιμοποιήσουμε μια άσκηση της αναλυτικής γεωμετρίας : Αν e_1, e_2, e_3 είναι μια ορθοκανονική βάση και x ένα διάνυσμα τότε $x = (x \cdot e_1)e_1 + (x \cdot e_2)e_2 + (x \cdot e_3)e_3$ (δείξτε το) . Με βάση λοιπόν αυτή την άσκηση θα έχουμε

$$(*) \quad \dot{N}(s) = (\dot{N}(s) \cdot T(s))T(s) + (\dot{N}(s) \cdot N(s))N(s) + (\dot{N}(s) \cdot B(s))B(s)$$

Όμως ισχύει $N(s) \cdot \dot{N}(s) = 0$ (γιατί ;) . Επίσης από την $N(s) \cdot T(s) = 0$ έχουμε

$$\text{με παραγωγήλιση} \quad \dot{N}(s) \cdot T(s) + N(s) \cdot \dot{T}(s) = 0 \xrightarrow{(3)} \dot{N}(s) \cdot T(s) + N(s) \cdot k(s)N(s) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{N}(s) \cdot T(s) + k(s) = 0 \Rightarrow \dot{N}(s) \cdot T(s) = -k(s)$$



επί πλέον από

$$N(s) \cdot B(s) = 0 \rightarrow \dot{N}(s) \cdot B(s) + N(s) \cdot \dot{B}(s) = 0 \rightarrow \dot{N}(s) \cdot B(s) = -\dot{B}(s) \cdot N(s) = \tau(s)$$

Έτσι η (*) γίνεται

$$\dot{N}(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \quad ,$$

δηλαδή ο δεύτερος τύπος που θέλουμε να αποδείξουμε .

Παράδειγμα 1.4.3. Δίνεται η λεία καμπύλη $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, ως

$$\beta(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} , a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} , \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \quad \text{με} \quad a > 0$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η β έχει παράμετρο το μήκος τόξου , δηλαδή διά-
νυσμα ταχύτητας μοναδιαίο . Για την $\beta(s)$ με τους ορισμούς μας έχουμε :

$$T(s) = \dot{\beta}(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} , \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} , \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$\dot{T}(s) = \ddot{\beta}(s) = \left(-\frac{a}{a^2+b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} , -\frac{a}{a^2+b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} , 0 \right)$$

Άρα $k(s) = |\dot{T}(s)| = \frac{a}{a^2+b^2} > 0$

$$N(s) = \frac{\dot{T}(s)}{k(s)} = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} , -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} , 0 \right)$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} , -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} , \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

Άρα $\dot{B}(s) = \left(\frac{b}{a^2+b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} , \frac{b}{a^2+b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} , 0 \right)$



και συνεπώς

$$\tau(s) = -\dot{B}(s) \cdot N(s) = \frac{b}{a^2+b^2} .$$

Βλέπουμε ότι η στρέψη είναι θετική αν $b > 0$ και αρνητική αν $b < 0$. Η στρέψη είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν αν $b = 0$.

Παρατήρηση . Αν στο παραπάνω παράδειγμα το $b = 0$, τότε η στρέψη της καμπύλης είναι μηδέν . Από την άλλη πλευρά όμως αν $b = 0$ τότε η καμπύλη είναι η $\beta(s) = (\alpha \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \alpha \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0)$ δηλαδή όλα τα σημεία του $\beta(R)$ είναι στο επίπεδο Oxy , δηλαδή είναι μια επίπεδη καμπύλη . Αυτό δεν είναι τυχαίο όπως φαίνεται στη παρακάτω πρόταση .

Πρόταση 1.4.1 . Έστω $\gamma: I \rightarrow R^3$ μια λεία καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου και $k(s) > 0$. Αυτή είναι επίπεδη αν και μόνο αν $\tau(s) = 0$, $\forall s \in I$.

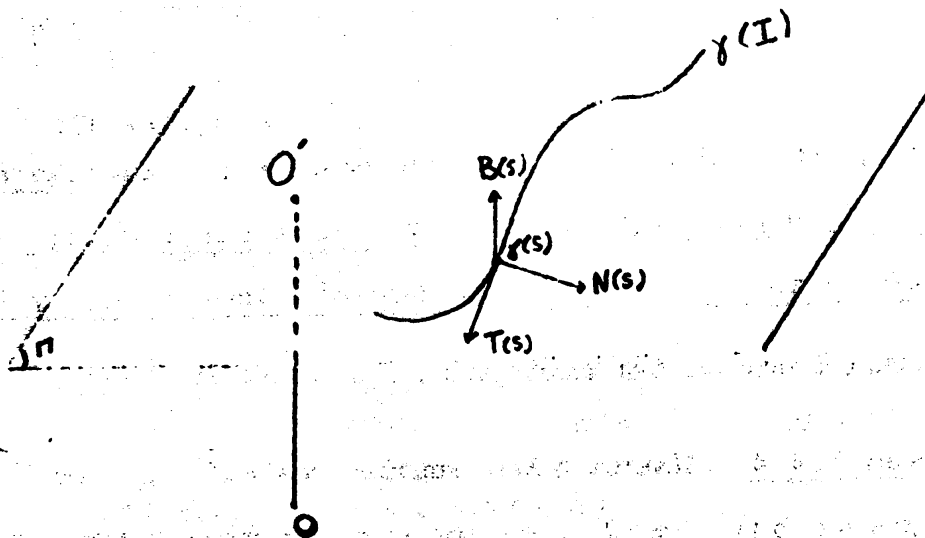
Απόδειξη . Έστω $\tau(s) = 0$, $\forall s \in I$. Τότε από τον τρίτο τύπο των Serret-Frenet έχουμε $\dot{B}(s) = 0$, δηλαδή $B(s) = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$ σταθερό διάνυσμα . Αν $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ είναι το τυχαίο σημείο της εικόνας της καμπύλης τότε

$$\frac{d}{ds}(\gamma(s) \cdot B(s)) = \underbrace{T(s) \cdot B(s)}_0 + \underbrace{\gamma(s) \cdot \dot{B}(s)}_0 = 0 , \text{ αφού } T \perp B \text{ και } \dot{B} = 0 .$$

Άρα $\gamma(s) \cdot B(s) = c = \text{σταθερό} \implies \alpha_1 \gamma_1(s) + \alpha_2 \gamma_2(s) + \alpha_3 \gamma_3(s) = c$

Έτσι το τυχαίο $\gamma(s)$ επαληθεύει την εξίσωση $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = c$, που είναι εξίσωση ενός επιπέδου , άρα το $\gamma(I)$ είναι πάνω σε αυτό το επίπεδο .

Αντίστροφα ας είναι π το επίπεδο πάνω στο οποίο βρίσκεται η $\gamma(I)$ (σχήμα 11) και O η αρχή των συντεταγμένων . Έστω O' η προβολή του O πάνω στο π . Έχουμε $O'O \cdot (\gamma(s) - O'O) = 0$. Παραγωγίζοντας έχουμε $O'O \cdot T(s) = 0$, άρα το $T(s)$ είναι διάνυσμα του επιπέδου π .



σχήμα 11

Παραγωγίζουμε πάλι : $O'O \cdot k(s)N(s) = 0 \xrightarrow{k(s) > 0} O'O \cdot N(s) = 0$,
δηλαδή και το $N(s)$ είναι διάνυσμα του π . Επειδή όμως $B(s) = T(s) \times N(s)$
(από τον ορισμό) , συμπεραίνουμε ότι το $B(s)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο
στο π και συνεπώς $B(s) = a = \text{σταθερό} \rightarrow \dot{B}(s) = 0 \xrightarrow{\text{3ος τύπος}} \tau(s) = 0$, $\forall s \in I$.

Τα μέχρι τώρα αποτελέσματά μας αφορούν λείες καμπύλες με μοναδιαίο διάνυσμα
ταχύτητας . Τι συμβαίνει όμως όταν έχουμε μια λεία και κανονική καμπύλη
 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με διάνυσμα ταχύτητας μεταβλητού μήκους ; Στο θεώρημα 1.3.1. είδα-
με ότι υπάρχει μια κανονική αναπαράμετρηση $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta(s) = \gamma(t(s))$ όπου
 $t: J \rightarrow I$, $s = t(s)$ και η οποία β είναι λεία κανονική καμπύλη με παράμετρο
μήκος τόξου . Έτσι για την β , σύμφωνα με την μέχρι τώρα θεωρία μας μπορούμε
να βρούμε τα $\bar{k}(s)$, $\bar{\tau}(s)$, $\bar{T}(s)$, $\bar{N}(s)$, $\bar{B}(s)$. Ορίζουμε λοιπόν για την κα-
μπύλη γ , που δεν έχει απαραίτητα παράμετρο μήκους τόξου τα εξής :

καμπυλότητα της γ στο t συμβολισμός $k(t)$ ορισμός $\bar{k}(s(t))$

στρέψη της γ στο t ορισμός $\tau(t)$ ορισμός $\tau(s(t))$

$T(t)$ ορισμός $\bar{T}(s(t))$

$N(t)$ ορισμός $\bar{N}(s(t))$

$B(t)$ ορισμός $\bar{B}(s(t))$



Τα $k(t)$, $\tau(t)$, $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$ λέγονται αντίστοιχα : καμπυλότητα της γ στο t , στρέψη της γ στο t , εφαπτομενικό της γ στο t , πρώτο κάθετο της γ στο t και δεύτερο κάθετο της γ στο t .

Θα το διευκρινίσουμε με ένα παράδειγμα .

Παράδειγμα 1.4.4. Δίνεται η λεία καμπύλη $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, ως $\gamma(t) = (\alpha \cos t, \alpha \sin t, b t)$, ($\alpha > 0$) , που μας είναι γνωστή ως κυλινδρική έλικα . Θέλουμε να βρούμε την καμπυλότητά της , τη στρέψη της καθώς και τα διανύσματα $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$.

Έχουμε ότι $\gamma'(t) = (-\alpha \sin t, \alpha \cos t, b)$ και $|\gamma'(t)| = \sqrt{\alpha^2 + b^2}$. Έτσι αν $\alpha^2 + b^2 \neq 1$ η καμπύλη μας δεν έχει παράμετρο το μήκος τόξου , δηλαδή το t δεν μετρά τόξα . Θα κάνουμε αναπαραμέτρηση αυτής ώστε να έχουμε παράμετρο το μήκος τόξου . Ακολουθώντας το παράδειγμα 1.2.3 με αρχή $t_0 = 0$ έχουμε $t = \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} = t(s)$.

Έτσι η $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta(s) = \gamma(t(s)) = (\alpha \cos \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}, \alpha \sin \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}})$

είναι κανονική αναπαραμέτρηση της γ με παράμετρο το μήκος τόξου . Για την β σύμφωνα με το παράδειγμα 1.4.3 έχουμε :

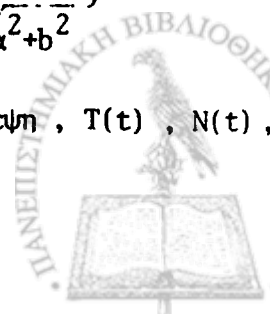
$$\bar{k}(s) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + b^2} , \quad \bar{\tau}(s) = \frac{b}{\alpha^2 + b^2} ,$$

$$\bar{T}(s) = \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \right)$$

$$\bar{N}(s) = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}, 0 \right)$$

$$\bar{B}(s) = \left(\frac{b}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \right)$$

Έτσι σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω για την καμπυλότητα , στρέψη , $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$, της γ θα έχουμε :



$$k(t) = \bar{k}(s(t)) = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\tau(t) = \bar{\tau}(s(t)) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$T(t) = \bar{T}(s(t)) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin t, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos t, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$N(t) = \bar{N}(s(t)) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$B(t) = \bar{B}(s(t)) = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin t, -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos t, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

αφού $t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Η παραπάνω διαδικασία είναι πολλές φορές κουραστική . Το παρακάτω θεώρημα βοηθάει σε τέτοιες καταστάσεις .

Θεώρημα 1.4.2. Ας είναι $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια λεία κανονική καμπύλη με παράμετρο t , όχι κατ'ανάγκη το μήκος τόξου . Αν $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \neq 0$, τότε ισχύουν :

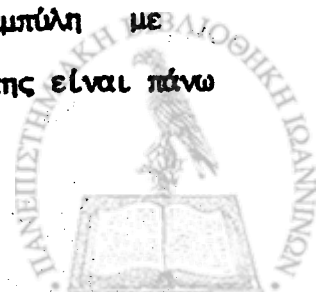
$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} , \quad N(t) = B(t) \times T(t) , \quad B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$k(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} , \quad \tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

Απόδειξη . Η άσκηση 2 .

Μετά από τα παραπάνω είναι αμέσως φανερό ότι η Πρόταση 1.4.1 ισχύει και για καμπύλες με όχι αναγκαστικά παράμετρο το μήκος τόξου . Έτσι έχουμε

Πρόταση 1.4.5. Έστω $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια λεία και κανονική καμπύλη με $k(t) > 0$, για όλα τα $t \in I$. Η καμπύλη είναι επίπεδη (η τροχιά της είναι πάνω



σε ένα επίπεδο) αν και μόνο αν $\tau(t)=0$, για όλα τα $t \in I$.

Απόδειξη. Για την $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$, που είναι κανονική αναπαραμέτρηση της γ , με παράμετρο το μήκος τόξου ισχύει $\bar{k}(s) > 0$ και $\tau(t) = \bar{\tau}(s(t)) = 0$. Επίσης οι τροχιές $\beta(J)$, $\gamma(I)$ είναι ίδιες.

Παρατήρηση. Η απαίτηση ότι $k(t) > 0$ παντού στο I είναι απαραίτητη (κοίταξε άσκηση 12 και τη σημαντική παρατήρηση της σελίδας 17).

Παράδειγμα 1.4.5. Θεωρούμε τη λεία καμπύλη $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, ως $\gamma(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t})$. Έχουμε :

$$\gamma'(t) = (1, -\frac{1}{t^2}, -\frac{1+t^2}{t^2})$$
, άρα η γ είναι κανονική

$$\gamma''(t) = (0, \frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3})$$
, συνεπώς $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \neq 0$

$$\gamma'''(t) = (0, -\frac{6}{t^4}, -\frac{6}{t^4})$$

Είναι αμέσως φανερό πως $(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t) = 0$. Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα 1.4.2 θα έχουμε $\tau(t)=0$ για όλα τα t .

Έτσι η καμπύλη θα είναι επίπεδη. Ποιό όμως είναι το επίπεδο πάνω στο οποίο βρίσκεται η τροχιά της γ ; θα εκθέσουμε μια διαδικασία η οποία αφ' ενός μας δίνει αυτό το επίπεδο και πολλές φορές αποτελεί τρόπο ελέγχου αν μια καμπύλη είναι επίπεδη ή όχι. Σκεφτόμαστε ως εξής: Αν η καμπύλη ήταν επίπεδη, θα έπρεπε τα σημεία της $\gamma(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t})$ να επαληθεύουν την εξίσωση ενός επιπέδου $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$. Δηλαδή θα έπρεπε για όλα τα t να ισχύει :

$$A t + B \left(\frac{1+t}{t} \right) + \Gamma \left(\frac{1-t^2}{t} \right) + \Delta = 0, \quad \text{για όλα τα } t$$



ή

$$(A-\Gamma)t^2 + (B+\Delta)t + B+\Gamma = 0 \quad , \quad \text{για όλα τα } t$$

και συνεπώς

$$\left. \begin{array}{l} A-\Gamma = 0 \\ B+\Delta = 0 \\ B+\Gamma = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} A = \Gamma \\ B = -\Gamma \\ \Delta = -B = \Gamma \end{array} .$$

Άρα το τυχαίο σημείο της καμπύλης είναι πάνω στο επίπεδο

$$x-y+z+1=0 .$$

Έτσι δείξαμε ότι η γ είναι επίπεδη και συγχρόνως βρήκαμε το επίπεδο της τροχιάς της .

Ασκήσεις .

1. Αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες μιας καμπύλης περνούν από το ίδιο σημείο, τότε η καμπύλη είναι ευθεία .

2. Έστω $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια λεία κανονική καμπύλη με παράμετρο όχι κατ'ανάγκη το μήκος τόξου . Αν $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \neq 0$ τότε ισχύουν :

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \quad , \quad N(t) = B(t) \times T(t) \quad , \quad B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$k(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} \quad , \quad \tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2} .$$

3. Δίνεται η καμπύλη $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3)$. Να βρείτε τα $k(t)$, $\tau(t)$, $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$.

4. Μια λεία επίπεδη καμπύλη με καμπυλότητα $k(s) = R = \text{σταθερό} > 0$ είναι περιφέρεια ακτίνας $\frac{1}{R}$.



5. Προσδιορίστε τη συνάρτηση $f(t)$ ώστε η καμπύλη $\gamma(t)=(a \cos t, a \sin t, f(t))$ να είναι επίπεδη .

6. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $\varphi(t)$ ώστε η καμπύλη $\gamma(t)=(t, \sin t, \varphi(t))$ να έχει πρώτη κάθετη ευθεία παντού παράλληλη προς το επίπεδο Oyz .

7. Έστω P, Q δύο σημεία του χώρου και $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια λεία καμπύλη που τα ενώνει (δηλαδή : $\gamma(a)=P$, $\gamma(b)=Q$) . Δείξτε ότι απ'όλες τις καμπύλες που ενώνουν τα P, Q η ευθεία είναι αυτή με το μικρότερο μήκος .

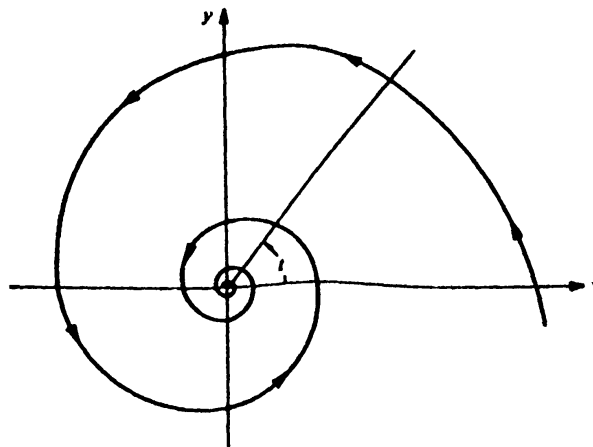
8. Έστω η λεία καμπύλη $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t)=(ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t, 0)$, όπου a, b σταθερές $a > 0$, $b < 0$

(i) Δείξτε ότι όπως $t \rightarrow \infty$, τότε το $\gamma(t)$ πλησιάζει την αρχή $O(0,0,0)$ και ελίσσεται γύρω από το O . Η εικόνα της (σχήμα 12) είναι η λογαριθμική σπείρα (logarithmic spiral) .

(ii) Δείξτε ότι το $\gamma'(t) \rightarrow (0,0,0)$ καθώς $t \rightarrow \infty$ και ότι το

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt$$

είναι πεπερασμένο , δηλαδή το μήκος $L_{t_0}^{\infty}(\gamma)$ είναι πεπερασμένο με άλλα λόγια η $\gamma: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι ευθυγραμμισιμη .



σχήμα 12



9. Γενικώς μια καμπύλη $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται κυλινδρική έλικά αν σε κάθε σημείο η εφαπτόμενη ευθεία σχηματίζει σταθερή γωνία με δοθείσα σταθερή διεύθυνση. Η σταθερή διεύθυνση λέγεται διεύθυνση του άξονα της έλικας.

(i) Μια καμπύλη είναι κυλινδρική έλικά αν και μόνο αν ο λόγος $\frac{\tau}{k}$ είναι σταθερός.

(ii) Η καμπύλη $\gamma(t) = (at, bt^2, t^3)$ με a, b σταθερές είναι κυλινδρική έλικά αν και μόνο αν $4b^4 = 9a^2$.

10. Δίνεται η λεία και κανονική καμπύλη $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, χωρίς κατ'ανάγκη παράμετρο το μήκος τόξου. Αν η τροχιά της είναι πάνω σε μια σφαίρα με κέντρο το διάνυσμα a , τότε ισχύει $(a - \gamma(t)) \cdot T(t) = 0$.

11. Έστω $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια λεία καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου και $k(s) > 0$. Η καμπύλη $\gamma_1: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, που ορίζεται ως $\gamma_1(s) = T(s)$ λέγεται σφαιρική δελχτρία των εφαπτομένων ή εφαπτομενική δελχτρία της γ . Η καμπύλη $\gamma_2: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, που ορίζεται ως $\gamma_2(s) = N(s)$ λέγεται σφαιρική δελχτρία των πρώτων καθέτων ή πρώτη σφαιρική δελχτρία της γ . Η καμπύλη $\gamma_3: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, που ορίζεται ως $\gamma_3(s) = B(s)$ λέγεται σφαιρική δελχτρία των δεύτερων καθέτων ή δεύτερη σφαιρική δελχτρία της γ .

(i) Αν k_1, τ_1 είναι η καμπυλότητα και η στρέψη της γ_1 τότε :

$$k_1^2 = \frac{k^2 + \tau^2}{k^2}, \quad \tau_1 = \frac{k\dot{\tau} - \dot{k}\tau}{k(k^2 + \tau^2)}.$$

(ii) Η εφαπτόμενη της γ_1 είναι παράλληλη προς τη πρώτη κάθετη στο αντίστοιχο σημείο της γ .

(iii) Αν k_3, τ_3 είναι η καμπυλότητα και η στρέψη της γ_3 τότε :

$$k_3^2 = \frac{k^2 + \tau^2}{\tau^2}, \quad \tau_3 = \frac{\tau\dot{k} - k\dot{\tau}}{\tau(k^2 + \tau^2)}, \quad \text{όταν } \tau \neq 0.$$



12. Δίνεται η απεικόνιση $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{για } t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{για } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{για } t = 0 \end{cases} .$$

(i) Δείξτε ότι η γ είναι λεία καμπύλη .

(ii) Η γ είναι κανονική για κάθε t .

(iii) $k(t) \neq 0$ για $t \notin \{0, \sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}\}$ και $k(0 \text{ ή } \sqrt{2/3} \text{ ή } -\sqrt{2/3}) = 0$

(iv) Η $\tau(t)$ μπορεί να οριστεί (με συνέχεια) έτσι ώστε $\tau(t) \equiv 0$ παντού , ενώ η καμπύλη δεν είναι επίπεδη .

(Αυτή η άσκηση μας λέει ότι η υπόθεση $k(t) > 0$ στη πρόταση 1.4.5 είναι απαραίτητη) .

1.5. Τοπική κανονική παράσταση καμπύλης .

Έστω $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια κανονική καμπύλη με παράμετρο μήκος τόξου . Συνήθως όταν θέλουμε να μελετήσουμε τοπικές ιδιότητες της καμπύλης , δηλαδή ιδιότητες σε μια περιοχή ενός σημείου (π.χ. συμπεριφορά , σχήμα εικόνας γύρω από ένα σημείο) , χρησιμοποιούμε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων για αυτή τη μελέτη . Το πιο κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων για τέτοιες μελέτες είναι το σύστημα που ορίζεται από το πλαίσιο των Serret-Frenet .

Ας είναι O ένα σημείο πάνω στη καμπύλη $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$, στη περιοχή του οποίου θέλουμε να μελετήσουμε τη καμπύλη . Μπορούμε να υποθέσουμε πως $\gamma(0)=O$. Επίσης σαν άξονες Ox, Oy, Oz παίρνουμε αντίστοιχα τις ημιευθείες που ορίζονται από τα $T(0), N(0), B(0)$ (αυτά ορίζονται όπως ξέρουμε αρκεί $k(0) > 0$) . Τότε το διάνυσμα θέσης του σημείου $\gamma(s)$ δίνεται από τη σχέση :

$$(*) \quad \gamma(s) = \gamma(0) + \gamma_1(s)T(0) + \gamma_2(s)N(0) + \gamma_3(s)B(0) .$$



Αν όμως το σημείο $\gamma(s)$ είναι γειτονικό (πολύ κοντά) στο $\gamma(0)=0$ τότε έχουμε αναπτύσσοντας σε σειρά Maclaurin (σειρά Taylor στο $s=0$) , ότι :

$$(**) \quad \gamma(s) = \gamma(0) + s\dot{\gamma}(0) + \frac{s^2}{2}\ddot{\gamma}(0) + \frac{s^3}{6}\dddot{\gamma}(0) + R,$$

όπου R είναι οι όροι βαθμού ≥ 4 ως προς s .

Από τους τύπους των Serret-Frenet έχουμε

$$\dot{\gamma}(0) = T(0), \ddot{\gamma}(0) = k(0)N(0), \dddot{\gamma}(0) = -k^2(0)T(0) + \dot{k}(0)N(0) + k(0)\tau(0)B(0)$$

Βάζοντας αυτές τις σχέσεις στην (**) και συγκρίνοντας με την (*), παίρνουμε :

$$\gamma_1(s) = s - \frac{k^2(0)}{6}s^3 + R_1$$

$$\gamma_2(s) = \frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{\dot{k}(0)}{6}s^3 + R_2$$

$$\gamma_3(s) = \frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3 + R_3$$

όπου $R = (R_1, R_2, R_3)$. Έτσι η καμπύλη γ κοντά στο σημείο $s=0$ δίνεται ως

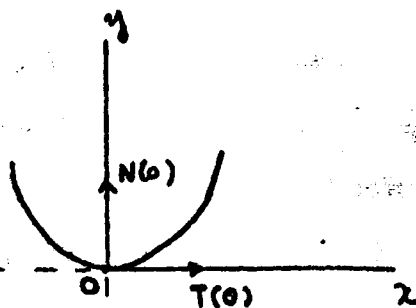
$$\gamma(s) = \left(s - \frac{k^2(0)}{6}s^3 + R_1, \frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{\dot{k}(0)}{6}s^3 + R_2, \frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3 + R_3 \right).$$

Η έκφραση αυτή λέγεται τοπική παράσταση της καμπύλης στο $s=0$.

Θέλοντας τώρα να μελετήσουμε το σχήμα της εικόνας κοντά στο $s=0$, αρκεί να βρούμε τις προβολές στα επίπεδα συντεταγμένων Oxy , Oyz , Oxz αντίστοιχα.

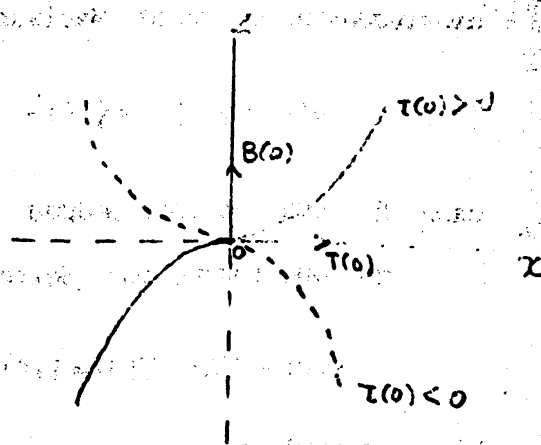
Προβολή στο Oxy : $2y = k(0)x^2$

δηλαδή παραβολή



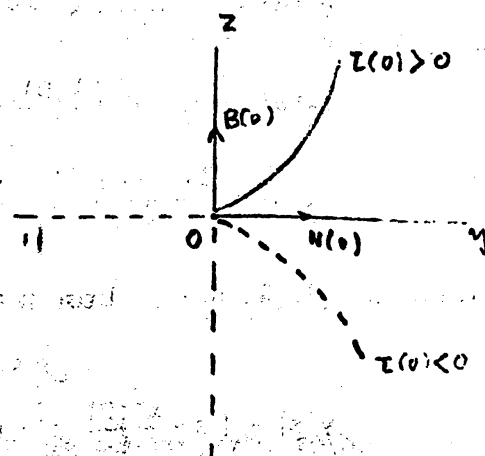
Προβολή στο Oxz : $6z = k(0)\tau(0)x^3$

δηλαδή είναι μια
καμπύλη τρίτου βαθμού



Προβολή στο Oyz : $2\tau^2(0)y^3 = 9k(0)z^2$

Είναι μια ημικυβική
παραβολή (ή παραβολή
του Neil).



1.6. Επίπεδες καμπύλες .

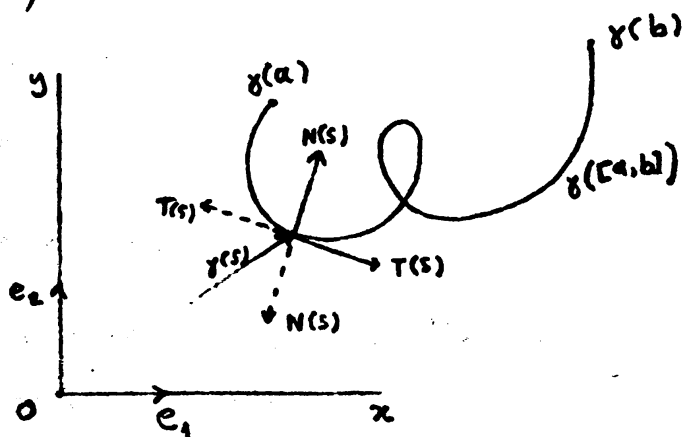
Όπως είδαμε στη πρόταση 1.4.1 (σελίδα 20) μια λεία καμπύλη $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $k(s) > 0$ είναι επίπεδη (η εικόνα $\gamma([a, b])$ είναι πάνω σε ένα επίπεδο), αν και μόνο αν η στρέψη $\tau(s) \equiv 0 \quad \forall s \in [a, b]$.

Στη παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε επίπεδες καμπύλες . Έτσι μπορούμε να πούμε ότι μια επίπεδη καμπύλη είναι μια λεία απεικόνιση $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Θα θεωρήσουμε στη συνέχεια ότι μια επίπεδη καμπύλη έχει παράμετρο το μήκος τόξου s δηλαδή $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$.

Η καμπυλότητα αυτής αν τη θεωρήσουμε σαν καμπύλη του χώρου είναι σύμφωνα με τον ορισμό 1.4.1, $k(s) = |\ddot{\gamma}(s)|$, δηλαδή είναι παντού ένας μη αρνητικός αριθμός.

Μπορούμε στις επίπεδες καμπύλες να ορίσουμε και κατά άλλο τρόπο τη καμπυλότητα έτσι ώστε να μπορεί να γίνεται και αρνητική.

Ο ορισμός αυτός γίνεται ως εξής: θεωρούμε στο επίπεδο μια βάση ορθοκανονική την (e_1, e_2) που να ανήκει στο κανονικό προσανατολισμό του R^2 . Μετά ορίζουμε το πρώτο μοναδιαίο κάθετο $N(s)$, για κάθε $s \in [a, b]$, έτσι ώστε η βάση $(T(s), N(s))$, όπου $T(s) = \dot{\gamma}(s)$, να έχει τον ίδιο προσανατολισμό με την (e_1, e_2) .



σχήμα 13

δηλαδή το $N(s)$ είναι στροφή του $T(s)$ κατά γωνία $+\frac{\pi}{2}$.

Τότε ορίζουμε τη (προσημασμένη) καμπυλότητα στο s (καλύτερα στο $\gamma(s)$) από τη σχέση (Το $\dot{T}(s)$ είναι κάθετο στο $T(s)$).

$$(*) \quad \dot{T}(s) = k(s)N(s) \quad .$$

Ορίζοντας έτσι τη καμπυλότητα μιας επίπεδης καμπύλης βλέπουμε ότι μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές, ενώ η ποσότητα $|k(s)|$ είναι η καμπυλότητα της γ αν ακολουθούσαμε τον ορισμό 1.4.1. Είναι αμέσως τώρα φανερό ότι ισχύει (γιατί;)

$$(**) \quad \dot{N}(s) = -k(s)T(s) \quad .$$

Οι σχέσεις $(*)$, $(**)$ είναι οι τύποι των Serret-Frenet προκειμένου για επίπεδες καμπύλες.

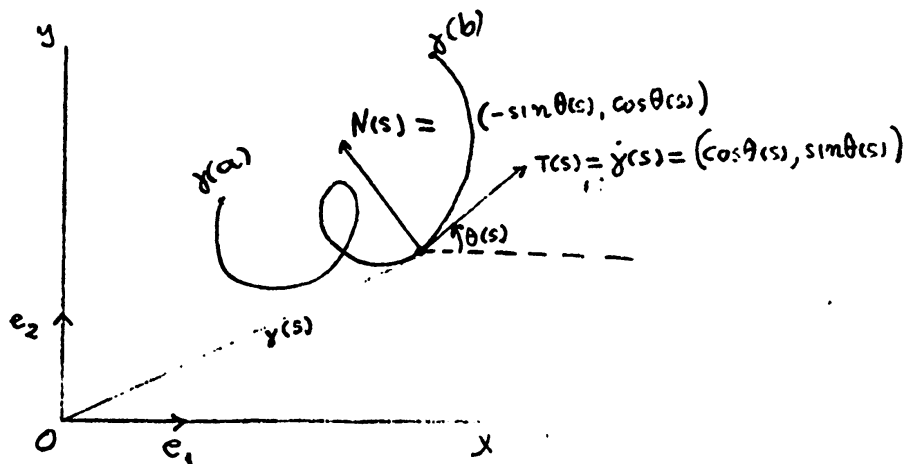
Έχοντας υπόψη τη δεύτερη παρατήρηση στη σελίδα 15, βλέπουμε ότι ο καινούργιος ορισμός καμπυλότητας εξαρτάται και από το προσανατολισμό της καμπύλης



(πως διαγράφουμε τη καμπύλη) . Έτσι όταν αλλάξουμε προσανατολισμό στη καμπύλη τότε το πλαίσιο $(T(s), N(s))$ παριστάνεται με τα διακεκομμένα διανύσματα . Από τη δεύτερη παρατήρηση στη σελίδα 15 το διάνυσμα $\dot{T}(s) = \ddot{\gamma}(s)$ δεν αλλάζει φορά , έτσι από την (*) προκύπτει ότι για να ισχύει πρέπει και το $k(s)$ να αλλάζει πρόσημο .

Θα δούμε τώρα μια σχέση που μας δίνει τη καμπυλότητα (όπως την ορίσαμε τώρα) για επίπεδες καμπύλες και η οποία σχέση χρησιμοποιείται αρκετά συχνά σε εφαρμογές καθώς και για να βγάσουμε συμπεράσματα πάνω στις επίπεδες καμπύλες .

Έστω η λεία καμπύλη $\gamma: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Σημειώνουμε με $\theta(s)$ τη γωνία που σχηματίζει ο άξονας Ox με το διάνυσμα ταχύτητας της γ στο $\gamma(s)$ (σχήμα 14)



σχήμα 14

Μπορούμε να ορίσουμε το $\theta(s)$ έτσι ώστε να είναι λεία συνάρτηση στο $[\alpha, b]$. Πραγματικά σε μια περιοχή ενός σημείου $\gamma(s_0)$ μπορούμε να ορίσουμε το $\theta(s)$ σα λεία συνάρτηση από τις σχέσεις $\cos \theta(s) = \dot{\gamma}(s) \cdot e_1$ και $\sin \theta(s) = \dot{\gamma}(s) \cdot e_2$. Επειδή όμως το διάστημα $I = [\alpha, b]$ μπορούμε να το σκεπάσουμε με πεπερασμένο πλήθος διαστημάτων (θεώρημα των Heine-Borel) , μπορούμε να ορίσουμε το $\theta(s)$ σα λεία συνάρτηση πάνω σε όλο το $[\alpha, b]$. Η παραπάνω διαδικασία γίνεται γιατί το $\theta(s)$ δεν ορίζεται μονοσήμαντα παρά μόνο ως προς πολλαπλάσια του 2π .

Θα δείξουμε τώρα πως :



$$(A) \quad k(s) = \frac{d\theta}{ds}(s) \quad .$$

Με άλλα λόγια το $k(s)$ μας δίνει ένα μέτρο για το πως αλλάζει η εφαπτομένη .

Έτσι στην ευθεία που δεν αλλάζει η εφαπτομένη θα πρέπει να έχουμε $k(s) = 0$,
 $\forall s \in [\alpha, b]$ (πράγμα που ξέρουμε παράδειγμα 1.4.1) .

Πραγματικά , έχουμε :

$$T(s) = \dot{\gamma}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$$

$$\Rightarrow \dot{T}(s) = (-\sin \theta(s) \frac{d\theta}{ds}(s), \cos \theta(s) \frac{d\theta}{ds}(s)) = \frac{d\theta}{ds}(s) (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = \frac{d\theta}{ds}(s) N(s)$$

$$\Rightarrow \dot{T}(s) = \frac{d\theta}{ds}(s) N(s) \quad .$$

Συγκρίνοντας τώρα με την $\dot{T}(s) = k(s)N(s)$, συμπεραίνουμε τη σχέση που θέλουμε :

$$k(s) = \frac{d\theta}{ds}(s) \quad .$$

Ας δούμε ακόμη μερικούς τύπους που μας δίνουν τη καμπυλότητα (όπως την ορίσαμε τώρα) προκειμένου για επίπεδες καμπύλες .

(I). Έστω μια λεία επίπεδη καμπύλη $\gamma: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου . Έχουμε : $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$, $T(s) = (\dot{\gamma}_1(s), \dot{\gamma}_2(s))$, $\dot{T}(s) = \ddot{\gamma}(s) = (\ddot{\gamma}_1(s), \ddot{\gamma}_2(s))$. Επίσης επειδή η βάση $(T(s), N(s))$ θέλουμε να έχει το κανονικό προσανατολισμό του $\mathbb{R}^2$ θα έχουμε και $N(s) = (-\dot{\gamma}_2(s), \dot{\gamma}_1(s))$. Τώρα από την $\dot{T}(s) = k(s)N(s)$ παίρνουμε $k(s) = \dot{T}(s) \cdot N(s) = (\ddot{\gamma}_1(s), \ddot{\gamma}_2(s)) \cdot (-\dot{\gamma}_2(s), \dot{\gamma}_1(s)) = \dot{\gamma}_1(s)\ddot{\gamma}_2(s) - \dot{\gamma}_2(s)\ddot{\gamma}_1(s)$. Δηλαδή :

$$(I) \quad k(s) = \dot{\gamma}_1(s)\ddot{\gamma}_2(s) - \dot{\gamma}_2(s)\ddot{\gamma}_1(s)$$

(II). Έστω μια λεία επίπεδη καμπύλη $\gamma: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παράμετρο όχι κατ' ανάγκη το μήκος τόξου . Έχουμε $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Αν s είναι η παράμετρος μήκος τόξου τότε ξέρουμε $\frac{ds}{dt}(t) = |\gamma'(t)|$ (σελίδα 12) .



Έτσι έχουμε για $i=1,2$ ότι :

$$v_i(s) = v_i(t(s)) \implies \dot{v}_i(s) = v_i'(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(s)$$

και

$$\ddot{v}_i(s) = v_i''(t(s)) \left(\frac{dt}{ds}(s) \right)^2 + v_i'(t(s)) \frac{d^2t}{ds^2}(s)$$

Αντικαθιστώντας στο τύπο (I) και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{|v'(t(s))|}$

έχουμε :

$$(II) \quad k(t) = \frac{v_1'(t)v_2''(t) - v_2'(t)v_1''(t)}{|v'(t)|^3}$$

Παρατήρηση : Ακολουθούμε εδώ τη διαδικασία της σελίδας 21, προκειμένου για καμπύλες, που δεν έχουν παράμετρο το μήκος τόξου .

ΑΣΚΗΣΗ : Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση . Θεωρούμε την απεικόνιση $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, που ορίζεται ως $\gamma(x) = (x, f(x))$. Βλέπουμε ότι η γ είναι μια λεία καμπύλη . Δείξτε ότι η (προσημασμένη) καμπυλότητα της γ δίνεται από τη σχέση

$$k(x) = \frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}}$$

(Η εικόνα $\gamma(\mathbb{R})$, λέγεται γράφημα της f . Έτσι κυρτά γραφήματα έχουν θετική καμπυλότητα, ενώ κοίλα γραφήματα έχουν αρνητική καμπυλότητα) .

Κλείνοντας αυτή τη παράγραφο, ας ασχοληθούμε με το εξής πρόβλημα για επίπεδες καμπύλες : Όταν δοθεί μια διαφορίσιμη συνάρτηση $k(s)$, ορισμένη στο $[a, b]$, υπάρχει επίπεδη καμπύλη που έχει την $k(s)$ σαν καμπυλότητα ; Η απάντηση είναι ναι και μας τη δίνει το παρακάτω θεώρημα .

ΘΕΩΡΗΜΑ (ύπαρξης και μοναδικότητας επίπεδης καμπύλης) . Έστω $k(s)$ μια λεία συνάρτηση που ορίζεται στο $I = [a, b]$. Υπάρχει μία και μόνο μία επίπεδη (κανονική) λεία καμπύλη με καμπυλότητα $k(s)$ και το s σα παράμετρο μήκους τόξου .



Παρατήρηση : Η μοναδικότητα αναφέρεται ως προς το σχήμα της εικόνας και όχι ως προς τη θέση της εικόνας . Με άλλα λόγια αν γ_1, γ_2 είναι δύο καμπύλες που ικανοποιούν το θεώρημα τότε $\gamma_2 = L \cdot \gamma_1 + u$, όπου u ένα σταθερό διάνυσμα του R^2 και L μια στροφή του R^2 .

Απόδειξη . Από τη σχέση (A) (σελίδα 33) παίρνουμε :

$$\theta(s) = \theta(\alpha) + \int_{\alpha}^s k(s) ds .$$

Θεωρούμε τώρα το μοναδιαίο διάνυσμα :

$$T(s) = \dot{\gamma}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$$

και ολοκληρώνοντας

$$\gamma(s) = \gamma(\alpha) + \left(\int_{\alpha}^s \cos \theta(s) ds , \int_{\alpha}^s \sin \theta(s) ds \right)$$

Η καμπύλη $\gamma(s)$ είναι λεία και έχει παράμετρο μήκους τόξου το s αφού $\dot{\gamma}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \rightarrow |\dot{\gamma}(s)| = 1$. Επίσης η καμπυλότητα (προσημασμένη) αυτής βάσει του τύπου (I) (σελίδα 33) είναι :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1(s) &= \cos \theta(s) = \cos \left\{ \theta(\alpha) + \int_{\alpha}^s k(s) ds \right\} \\ \dot{\gamma}_2(s) &= \sin \theta(s) = \sin \left\{ \theta(\alpha) + \int_{\alpha}^s k(s) ds \right\} \end{aligned}$$

→

$$\ddot{\gamma}_1(s) = -k(s) \sin \theta(s) , \quad \ddot{\gamma}_2(s) = k(s) \cos \theta(s) .$$

Άρα : καμπυλότητα της γ στο $s =$

$$= \dot{\gamma}_1(s) \ddot{\gamma}_2(s) - \dot{\gamma}_2(s) \ddot{\gamma}_1(s) = k(s) \{ \cos^2 \theta(s) + \sin^2 \theta(s) \} = k(s)$$

Επίσης η καμπύλη ορίζεται μονοσήμαντα αν ξέρουμε το $\gamma(\alpha)$ [δηλαδή το u στη

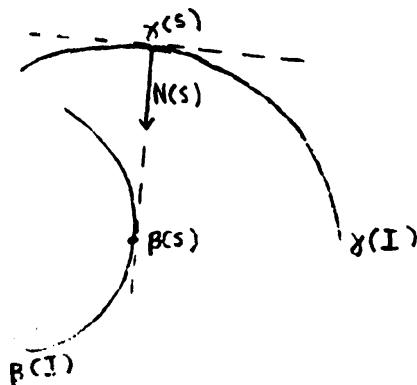
παρατήρηση] και το $\theta(\alpha)$ [δηλαδή το L στη παρατήρηση] .

Έτσι μια συνάρτηση $k(s)$ καθορίζει μονοσήμαντα , από άποψης σχήματος εικόνας , μια καμπύλη στο επίπεδο .

Παρατήρηση . Ένα ανάλογο θεώρημα υπάρχει και για καμπύλες του χώρου . Θα αναφέρουμε αυτό το αποτέλεσμα χωρίς απόδειξη : Δίνονται δύο λείες συναρτήσεις $k(s) > 0$, $\tau(s)$ που ορίζονται στο $I=[\alpha, b]$. Τότε υπάρχει μια και μόνο μια λεία καμπύλη $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με το s σα παράμετρο μήκους τόξου , και τις $k(s)$, $\tau(s)$ σα καμπυλότητα και στρέψη αντίστοιχα . Και εδώ η μοναδικότητα αναφέρεται στο σχήμα της εικόνας και όχι τη θέση .

Ασκήσεις .

1. Να βρείτε επίπεδη καμπύλη με καμπυλότητα $k(s) = 1/R = \text{σταθ.}$
2. Δίνεται μια λεία καμπύλη $\gamma: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παράμετρο μήκους τόξου , $N(s)$ το μοναδιαίο κάθετο όπως ορίζεται στη σελίδα 31 , και $k(s)$ η (προσημασμένη) καμπυλότητα . Έστω $k(s) \neq 0$, για κάθε $s \in [\alpha, b]$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\beta: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, που ορίζεται ως : $\beta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)} N(s)$. Τότε :
 - (i) Η β είναι λεία καμπύλη , που λέγεται ενειλιγμένη της γ (σχήμα 15) .
 - (ii) Οι εφαπτόμενες των γ, β σε αντίστοιχα σημεία είναι κάθετες .



σχήμα 15



3. Έστω $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια λεία επίπεδη καμπύλη. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $t_0: a < t_0 < b$ η συνάρτηση $|\gamma(t)|$ παίρνει μέγιστη τιμή. Τότε η (προσημασμένη) καμπυλότητα στο t_0 ικανοποιεί τη σχέση: $|k(t_0)| \geq \frac{1}{|\gamma(t_0)|}$.

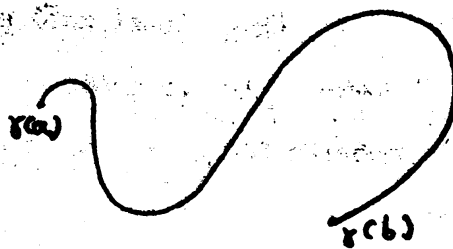
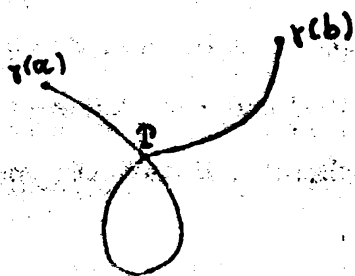
1.7. Ολικά προβλήματα για επίπεδες καμπύλες.

Η παράγραφος αυτή αφιερώνεται σε επίπεδες καμπύλες και έχει σα σκοπό να πάρουμε μια γεύση από ολική θεωρία καμπύλων (δηλαδή: Μας ενδιαφέρει ολόκληρη η καμπύλη και όχι μόνο ένα κομμάτι της). Το πρώτο πρόβλημα, που θα εξετάσουμε είναι ίσως το αρχαιότερο ολικό πρόβλημα της Διαφορικής Γεωμετρίας και είναι γνωστό ως ισοπεριμετρικό πρόβλημα.

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα: Από όλες τις απλές κλειστές επίπεδες καμπύλες μήκους L ποια περικλείει το μεγαλύτερο εμβαδό;

Θα επεξεργαστούμε αυτό το πρόβλημα δίνοντας δύο γενικούς ορισμούς.

Ορισμός 1.7.1. Μια λεία καμπύλη $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται απλή (simple) αν η $\gamma([a, b])$ δεν αυτοτέμνεται, δηλαδή αν η γ είναι 1-1.

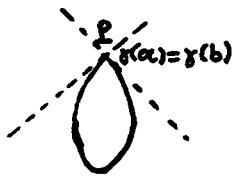


όχι απλή. Το σημείο αυτοτέμνεται.

απλή

Ορισμός 1.7.2. Μια καμπύλη C^k -τάξης $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται κλειστή καμπύλη C^k -τάξης (closed) αν $\gamma(a) = \gamma(b)$ και όλες οι παράγωγοι μέχρι C^k -τάξης συμφωνούν στα a, b .





κλειστή καμπύλη C^0 -τάξης αλλά όχι
κλειστή καμπύλη C^1 -τάξης, αφού
στο P δεν συμφωνούν οι πρώτες
παράγωγοι.

απλή-κλειστή

κλειστή-όχι απλή

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει απάντηση στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα.

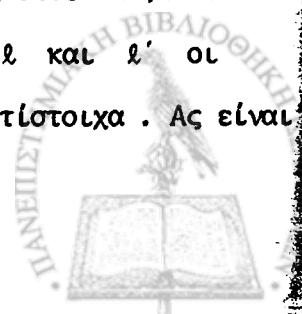
Θεώρημα 1.7.1. Μεταξύ όλων των επιπέδων καμπυλών, που είναι απλές, κλει-
στές και με το ίδιο μήκος, ο κύκλος περικλείει το μεγαλύτερο εμβαδό. Πιο
γενικά: Αν μια απλή κλειστή επίπεδη καμπύλη $C = \gamma([a, b])$ μήκους L περικλεί-
ει εμβαδό A , τότε ισχύει

$$(*) \quad L^2 \geq 4\pi A, \quad ,$$

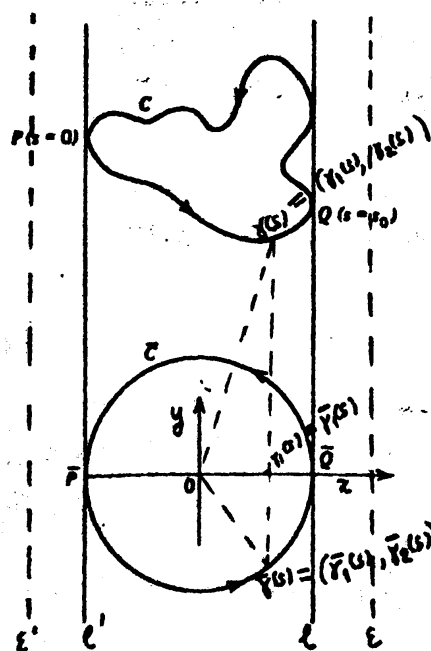
όπου το $=$ ισχύει, αν και μόνο αν, η C είναι κύκλος.

Παρατήρηση. Έχουν δοθεί κατά καιρούς διάφορες αποδείξεις αυτού του
θεωρήματος. Η πρώτη αναλυτική απόδειξη δόθηκε το 1902 από τον A.Hurwitz και
μια απλή (!) απόδειξη δόθηκε το 1939 από τον E.Schmidt. Η απόδειξη που θα δώ-
σουμε εδώ είναι αυτή του E.Schmidt.

Απόδειξη. Παίρνουμε δύο παράλληλες ευθείες (ϵ) και (ϵ') που δεν κόβουν
τη κλειστή καμπύλη C και η C να είναι στη λωρίδα μεταξύ των $(\epsilon), (\epsilon')$ (σχήμα
16). Κινούμε τις $(\epsilon), (\epsilon')$ παράλληλα προς τον εαυτό τους έως ότου να γίνουν
εφαπτόμενες της C (γιατί μπορεί να γίνει αυτό;). Ας είναι ℓ και ℓ' οι
θέσεις των ευθειών, που εφάπτονται στα σημεία P και Q αντίστοιχα. Ας είναι



s η παράμετρος μήκους τόξου της C ώστε $\gamma(0)=P=\gamma(L)$ και $\gamma(s_0)=Q$. Θεωρούμε ένα κύκλο $\bar{C}$ ακτίνας R και κέντρου O , ώστε ο κύκλος να μην τέμνει τη C και να εφάπτεται των ℓ και ℓ' . Είναι φανερό πως το $2R$ εκφράζει την απόσταση των ℓ και ℓ' .



Σχήμα 16

Παίρνουμε το O σαν αρχή συντεταγμένων και τον άξονα Ox κάθετο στις ℓ, ℓ' . Ας είναι $\gamma(s)=(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ το γενικό σημείο της C ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων και έστω ότι η διαγραφή της C γίνεται όπως στο σχήμα (θετικός προσανατολισμός). Το γενικό σημείο του κύκλου είναι :

$$\bar{\gamma}(s) = (\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s)) = (\gamma_1(s), \bar{\gamma}_2(s))$$

όπου

$$\bar{\gamma}_2(s) = -\sqrt{R^2 - \gamma_1^2(s)} \quad , \quad \text{για } 0 \leq s \leq s_0$$

και

$$\bar{\gamma}_2(s) = \sqrt{R^2 - \gamma_1^2(s)} \quad , \quad \text{για } s_0 \leq s \leq L$$

Σημειώνουμε τώρα με $A, \bar{A}$ τα εμβαδά που περικλείουν αντίστοιχα η C και ο κύκλος $\bar{C}$. Από τον ολοκληρωτικό λογισμό ξέρουμε πως :

$$A = \int_0^L \gamma_1(s) \dot{\gamma}_2(s) ds, \quad \bar{A} = \pi R^2 = - \int_0^L \bar{\gamma}_2(s) \dot{\bar{\gamma}}_1(s) ds.$$

Έτσι

$$(1) \quad A + \pi R^2 = \int_0^L (\gamma_1(s) \dot{\gamma}_2(s) - \bar{\gamma}_2(s) \dot{\bar{\gamma}}_1(s)) ds \leq \int_0^L \sqrt{(\gamma_1(s) \dot{\gamma}_2(s) - \bar{\gamma}_2(s) \dot{\bar{\gamma}}_1(s))^2} ds$$

$$(2) \quad \leq \int_0^L \sqrt{(\gamma_1^2(s) + \bar{\gamma}_2^2(s))(\dot{\gamma}_1^2(s) + \dot{\gamma}_2^2(s))} ds = \int_0^L \sqrt{(\gamma_1^2(s) + \bar{\gamma}_2^2(s))} ds = LR,$$

όπου στην (2) έχουμε εφαρμόσει τη ταυτότητα του Lagrange .

Τώρα , επειδή $\sqrt{A} \cdot \sqrt{\pi R^2} \leq \frac{1}{2} (A + \pi R^2)$, όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $A = \pi R^2$ (Γενικά : για δύο θετικούς αριθμούς M, N ισχύει $\sqrt{MN} \leq \frac{1}{2} (M+N)$ με το ίσο $\Leftrightarrow M=N$) , έχουμε :

$$(3) \quad \sqrt{A} \cdot \sqrt{\pi R^2} \leq \frac{1}{2} (A + \pi R^2) \leq \frac{1}{2} LR$$

$\Rightarrow$

$$4A\pi R^2 \leq L^2 R^2 \Rightarrow L^2 \geq 4\pi A.$$

Αυτό που θέλαμε να δείξουμε : Πότε ισχύει το $L^2 \geq 4\pi A$;

Αν ισχύει το $=$ θα πρέπει σε όλες τις παραπάνω πράξεις να έχουμε ισότητα .

Έτσι :

$$A = \pi R^2, \quad \text{από τη (3)}$$



$$(4) \quad v_1(s)\dot{v}_1(s) + \bar{v}_2(s)\dot{v}_2(s) = 0 \quad , \quad \text{από τη (2)}$$

και

$$(5) \quad v_1(s)\dot{v}_2(s) - \bar{v}_2(s)\dot{v}_1(s) > 0 \quad , \quad \text{από τη (1)}$$

Τώρα η (4) δίνει :

$$\frac{v_1(s)}{\dot{v}_2(s)} = - \frac{\bar{v}_2(s)}{\dot{v}_1(s)} = \pm \frac{\sqrt{v_1^2(s) + \bar{v}_2^2(s)}}{\sqrt{\dot{v}_1^2(s) + \dot{v}_2^2(s)}} = \pm R$$

$$\rightarrow v_1(s) = \pm R \dot{v}_2(s) \quad , \quad \bar{v}_2(s) = \pm R \dot{v}_1(s)$$

Επειδή όμως πρέπει να ισχύει η (5) θα έχουμε

$$v_1(s) = R \dot{v}_2(s) \quad , \quad \bar{v}_2(s) = -R \dot{v}_1(s)$$

$$\rightarrow T(s) = \dot{v}(s) = (\dot{v}_1(s), \dot{v}_2(s)) = \left(-\frac{\bar{v}_2(s)}{R} , \frac{v_1(s)}{R} \right)$$

= μοναδιαίο εφαπτόμενο στο κύκλο $\bar{C}$

Έτσι : $\left(\frac{dv_1}{ds} , \frac{dv_2}{ds} \right) = \left(\frac{d\bar{v}_1}{ds} , \frac{d\bar{v}_2}{ds} \right)$, όπου $\bar{s}$ το μήκος τόξου στον $\bar{C}$

$$\text{Άρα} \quad \frac{dv_1}{ds} = \frac{d\bar{v}_1}{ds} \rightarrow ds = d\bar{s}$$

και

$$\frac{dv_2}{ds} = \frac{d\bar{v}_2}{ds} = \frac{d\bar{v}_2}{d\bar{s}} \rightarrow v_2 = \bar{v}_2 + \alpha$$

όπου α σταθερά ολοκλήρωσης . Έχουμε τελικά :

$$\bar{v}_1(s) = v_1(s)$$

$$\bar{v}_2(s) = v_2(s) - \alpha$$



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΠΑΤΡΑΣ

ή

$$R^2 = \tilde{\gamma}_1^2(s) + \tilde{\gamma}_2^2(s) = \gamma_1^2(s) + (\gamma_2(s) - \alpha)^2 .$$

Δηλαδή το τυχαίο σημείο $(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ της C ικανοποιεί την εξίσωση :

$$x^2 + (y - \alpha)^2 = R^2 ,$$

που είναι εξίσωση ενός κύκλου .

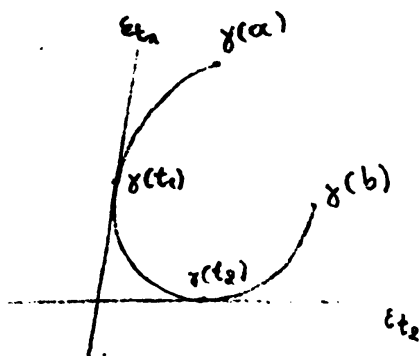
Παρατήρηση : Παραλλαγές του ισοπεριμετρικού προβλήματος υπάρχουν και για απλές κλειστές καμπύλες πάνω σε επιφάνειες .

Ένα ενδιαφέρον πόρισμα του θεωρήματος 1.7.1 είναι το παρακάτω .

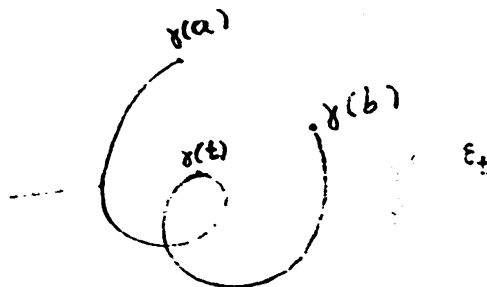
Πόρισμα 1.7.1. Από όλες τις απλές κλειστές καμπύλες , που περικλείουν ίδιο εμβαδό , η περιφέρεια κύκλου έχει το μικρότερο μήκος .

Το δεύτερο ολικό πρόβλημα που θα εξετάσουμε , είναι το θεώρημα των τεσσάρων κορυφών . Πριν διατυπώσουμε αυτό το θεώρημα θα δώσουμε ακόμη μερικούς ορισμούς .

Ορισμός 1.7.3. Μια κανονική επίπεδη καμπύλη $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (όχι αναγκαστικά κλειστή) λέγεται κυρτή (convex) αν για κάθε $t \in [a, b]$ η εφαπτόμενη ευθεία ε_t στο $\gamma(t)$ αφήνει την εικόνα $\gamma([a, b])$ της γ σε ένα από τα δύο κλειστά ημιεπίπεδα που χωρίζεται το $\mathbb{R}^2$ από την ε_t . Διαφορετικά η γ λέγεται μη-κυρτή (non-convex) .



κυρτή καμπύλη



μη κυρτή καμπύλη



Ορισμός 1.7.4. Παίρνουμε μια κανονική επίπεδη καμπύλη $\gamma: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Ένα σημείο $t_0 \in (\alpha, b)$ λέγεται κορυφή (vertex) της γ αν ισχύει $k'(t_0) = 0$.

Έτσι οι κορυφές της γ είναι τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης καμπυλότητας $k(t)$.

Παρατήρηση. Χωρίς μεγάλη δυσκολία μπορούμε να διαπιστώσουμε πως η έλλειψη (όχι κύκλος) έχει ακριβώς τέσσερες κορυφές (ποιές ;). Να γίνει για άσκηση.

Το παρακάτω ενδιαφέρον θεώρημα μας δίνει πληροφορίες για τον αριθμό των κορυφών μια απλής κλειστής και κυρτής καμπύλης.

Θεώρημα των τεσσάρων κορυφών (four vertex theorem) : Μια απλή κλειστή κυρτή καμπύλη έχει τουλάχιστον τέσσερες κορυφές.

Παρατήρηση : Αυτό το θεώρημα αποδείχθηκε από τον Ινδό μαθηματικό S. Mukhopadhyaya το 1909. Το θεώρημα ισχύει και για κάποιες μη κυρτές καμπύλες, όμως η απόδειξη του είναι αρκετά δύσκολη. Για μη κυρτές απλές καμπύλες το θεώρημα ισχύει πάντα. Αποδείξεις έχουν δοθεί από S.B. Jackson (1944) και L. Vietoris (1952).

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος θα δούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 1.7.1. Για κάθε επίπεδη κλειστή καμπύλη $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$, όπου s είναι η παράμετρος μήκος τόξου, και για τυχαίες σταθερές A, B, Γ ισχύει :

$$\int_0^L (A \gamma_1(s) + B \gamma_2(s) + \Gamma) \dot{k}(s) ds = 0,$$

όπου $k(s)$ είναι η συνάρτηση καμπυλότητας της γ και L το μήκος της γ .

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε πως ισχύουν οι σχέσεις :



$$(i) \quad \int_0^L \dot{k}(s) ds = 0$$

$$(ii) \quad \int_0^L v_1(s) \dot{k}(s) ds = 0$$

και

$$(iii) \quad \int_0^L v_2(s) \dot{k}(s) ds = 0$$

Για την (i) έχουμε

$$\int_0^L \dot{k}(s) ds = \int_0^L dk(s) = k(L) - k(0) = 0$$

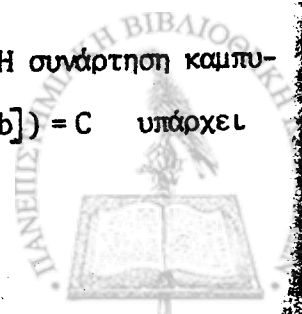
Για την (ii) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^L v_1(s) \dot{k}(s) ds &= \int_0^L d(v_1(s)k(s)) - \int_0^L \dot{v}_1(s)k(s) ds \\ &= v_1(s)k(s) \Big|_0^L - \int_0^L \dot{v}_1(s)k(s) ds \\ &= - \int_0^L \dot{v}_1(s)k(s) ds = - \int_0^L \ddot{v}_2(s) ds = - \int_0^L d(\dot{v}_2(s)) = 0, \end{aligned}$$

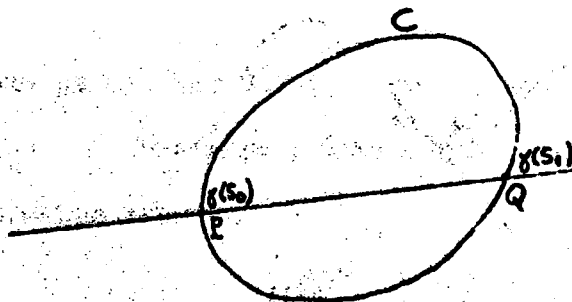
αφού $T(s) = (\dot{v}_1(s), \dot{v}_2(s))$, $N(s) = (-\dot{v}_2(s), \dot{v}_1(s))$ και $\dot{T}(s) = k(s)N(s)$ (τύπος Serret-Frenet).

Όμοια αποδεικνύουμε την (iii).

Απόδειξη του θεωρήματος των τεσσάρων κορυφών. Η συνάρτηση καμπυλότητας $k(s)$ είναι λεία και λόγω της συμπαγότητας του $\gamma([a, b]) = C$ υπάρχει

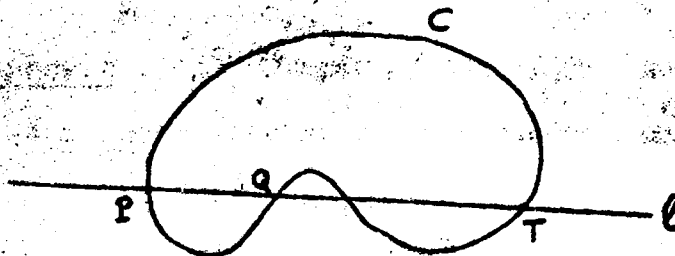


ένα σημείο $s_0 \in [0, L]$ όπου η $k(s)$ παίρνει το απόλυτο μέγιστο της και ένα σημείο $s_1 \in [0, L]$, όπου η $k(s)$ παίρνει το απόλυτο ελάχιστο της. Αν $s_0 = s_1$ τότε η $k(s)$ είναι σταθερή και συνεπώς όλα τα σημεία του $[0, L]$ είναι κορυφές της γ .
Ας είναι $s_0 \neq s_1$ και $P = \gamma(s_0)$, $Q = \gamma(s_1)$ (σχήμα 17).



σχήμα 17

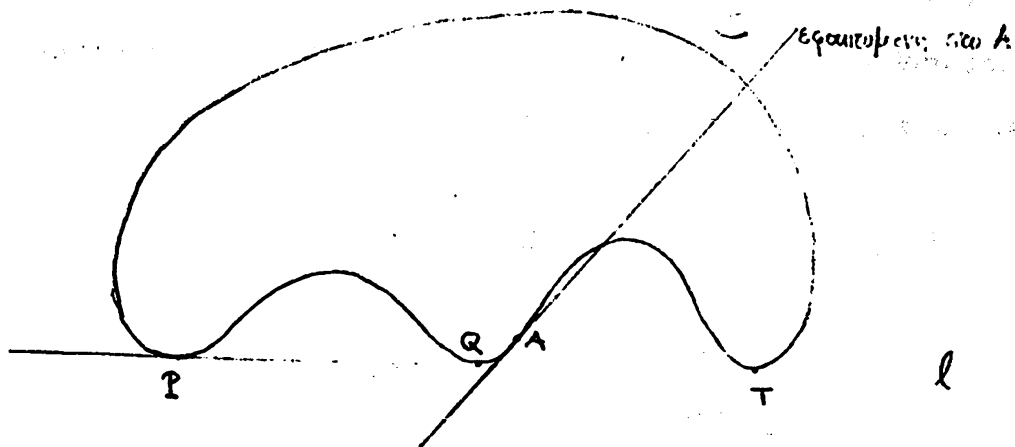
Είναι φανερό ότι $\dot{k}(s_0) = \dot{k}(s_1) = 0$. Έτσι η γ έχει τουλάχιστον δύο κορυφές. Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει άλλη κορυφή, δηλαδή $\dot{k}(s) \neq 0$, για κάθε $s \in [0, L] - \{s_0, s_1\}$. Ισχυριζόμαστε ότι η ευθεία $\ell = PQ$ τέμνει τη τροχιά $C = \gamma([0, L])$ μόνο στα P, Q . Πραγματικά, αν είχαμε και άλλο σημείο (σχήμα 18) έστω το T , τότε η εφαπτόμενη της C στο ενδιάμεσο σημείο από τα P, Q, T



σχήμα 18

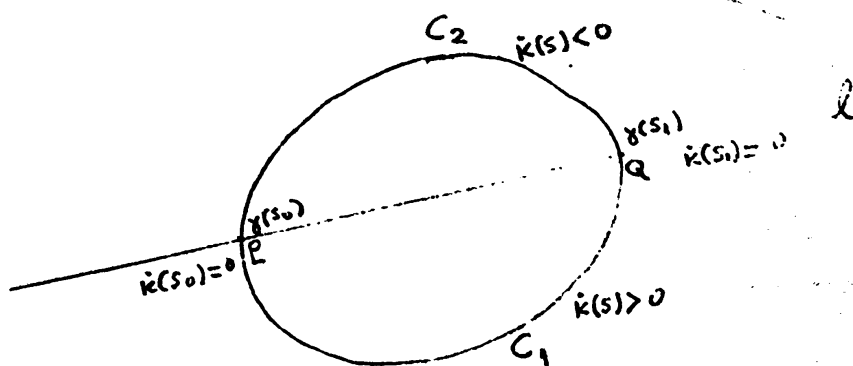
(στο σχήμα μας στο Q) πρέπει να είναι λόγω κυρτότητας η ℓ (γιατί ;). Τότε όμως η ℓ πρέπει να είναι λόγω κυρτότητας και εφαπτόμενη της C στα P και

T (γιατί ;). Έτσι θα έχουμε την εξής κατάσταση (σχήμα 19).



σχήμα 19

Τότε όμως η εφαπτόμενη της C σε γειτονικά σημεία του Q (όπως στο A) θα χωρίζει τα σημεία P, T της C (αδύνατο λόγω κυρτότητας), εκτός αν το ευθύγραμμο τμήμα PT είναι κομμάτι της C . Όμως τότε το κομμάτι PT της C αποτελείται όλο από κορυφές, πράγμα άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι έχουμε μόνο δύο κορυφές. Έτσι, πραγματικά η PQ τέμνει την C μόνο στα σημεία P, Q που εκ κατασκευής είναι κορυφές της C .

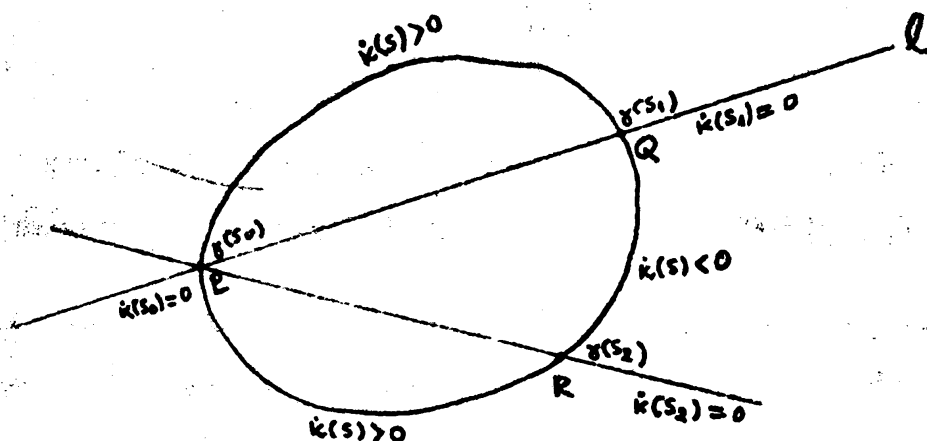


Ας είναι τώρα $Ax + By + \Gamma = 0$ η εξίσωση της l . Η $\dot{k}(s)$ διατηρεί το πρόσημο της (έστω $\dot{k}(s) > 0$) στο κομμάτι C_1 της C , καθώς και το πρόσημό της ($\dot{k}(s) < 0$) στο κομμάτι C_2 της C . Επίσης η ποσότητα $Ay_1(s) + By_2(s) + \Gamma$ διατηρεί πρόσημο στα κομμάτια C_1 και C_2 της C . Ας υποθέσουμε πως $Ay_1(s) + By_2(s) + \Gamma > 0$

στο C_1 οπότε, $Av_1(s) + Bv_2(s) + \Gamma < 0$ στο C_2 . Τότε όμως θα έχουμε ότι
 $(Av_1(s) + Bv_2(s) + \Gamma)k(s) > 0$ παντού στη C , εκτός από τα σημεία P και Q
 όπου έχουμε $(Av_1(s) + Bv_2(s) + \Gamma)k(s) = 0$. Άρα θα έχουμε

$$\int_0^L (Av_1(s) + Bv_2(s) + \Gamma)k(s)ds > 0$$

που αντιφάσκει με το λήμμα 1.7.1. Έτσι η καμπύλη μας έχει ακόμη μια κορυφή,
 έστω $R = \gamma(s_2)$. Αν δεν υπάρχει άλλη κορυφή, θα έχουμε καταστάσεις ανάλογες με
 αυτή του παρακάτω σχήματος



Κάνοντας την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως, αλλά παίρνοντας την ευθεία
 RQ θα καταλήξουμε ότι πρέπει να υπάρχει και τέταρτη κορυφή.

Παρατηρήσεις. (i) Σύμφωνα με παρατήρηση, που έχουμε κάνει προηγουμένως
 να ο αριθμός 4 κορυφές δεν μπορεί να βελτιωθεί, αφού η έλλειψη έχει ακριβώς
 4 κορυφές.

(ii) Σύμφωνα με το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για επίπεδες καμπύλες,
 που δείξαμε στη σελίδα 34 προκύπτει: Η συνάρτηση $k(s) = c + \cos s$, για $0 \leq s \leq 2\pi$
 και $c = \text{σταθ.} > 1$ δεν μπορεί να είναι η καμπυλότητα μια απλής κλειστής κυρτής
 καμπύλης, αφού η παράγωγος της $\dot{k}(s) = -\sin s$ έχει μόνο δύο κρίσιμα σημεία στο
 διάστημα $[0, 2\pi]$. Είναι όμως συνάρτηση καμπυλότητας κάποιας καμπύλης.



II. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ .

2.1. Στοιχεία διαφορίσιμων απεικονίσεων .

Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια απεικόνιση , όπου U ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και $f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), f_2(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$, όπου $f_1, \dots, f_n: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ είναι οι συντεταγμένες (συναρτήσεις συντεταγμένων) της f .

Ορισμός 2.1.1. Μια $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται διαφορίσιμη ή λεία (smooth) απεικόνιση αν οι συντεταγμένες $f_1, \dots, f_n$ είναι διαφορίσιμες (λείες)

Παράδειγμα . Η $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, που ορίζεται ως $f(x, y) = (x^2, xy, x+y)$ είναι λεία αφού οι $f_1(x, y) = x^2$, $f_2(x, y) = xy$, $f_3(x, y) = x+y$ είναι λείες .

Όταν $m=1$, τότε μια λεία απεικόνιση $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται μια λεία καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ (έχουμε ήδη εξετάσει καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$) . Έτσι μια λεία καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ είναι μια λεία απεικόνιση $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$, όπου $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ είναι οι συντεταγμένες της γ . Για $t_0 \in I$ το διάνυσμα (που αρχίζει από το $\gamma(t_0)$) $\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0))$ λέγεται διάνυσμα ταχύτητας της γ στο t_0 .

Παράδειγμα . Έστω η καμπύλη $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, που δίνεται ως $\gamma(t) = (t, t^2, t^3, t^4)$. Το διάνυσμα ταχύτητας στο t είναι το $\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2, 4t^3)$ με αρχικό σημείο το $\gamma(t)$.

Παράδειγμα . Όταν δοθεί ένα διάνυσμα v του $\mathbb{R}^n$ που αρχίζει από το σημείο $p_0 \in \mathbb{R}^n$, τότε μπορούμε να βρούμε μια καμπύλη $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\gamma(0) = p_0$ και $\gamma'(0) = v$.

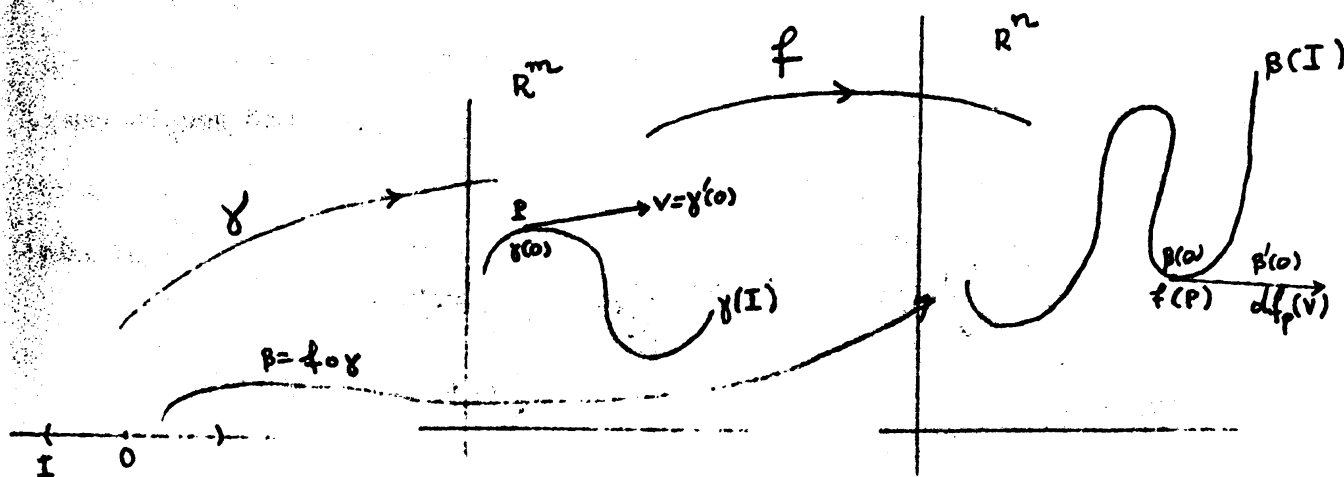
Πραγματικά , η καμπύλη $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, που ορίζεται ως



$\gamma(t) = p_0 + t v = (x_1^0, \dots, x_n^0) + t(v_1, \dots, v_n) = (x_1^0 + t v_1, \dots, x_n^0 + t v_n)$ έχει αυτή την ιδιότητα (είναι η μόνη ;), όπου $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Συμβολισμός. Αν p είναι ένα σημείο του R^n με το σύμβολο $T_p R^n$ θα εννοούμε όλα τα διανύσματα του R^n που αρχίζουν από το p και λέγεται εφαπτόμενος χώρος του R^n στο p . Με το σύμβολο TR^n θα εννοούμε όλα τα διανύσματα του R^n που αρχίζουν από τα διάφορα σημεία του R^n και λέγεται εφαπτόμενη δέσμη του R^n . Είναι φανερό πως $TR^n = \bigcup_{p \in R^n} T_p R^n$.

Ορισμός 2.1.2. Έστω $f: U \subset R^m \rightarrow R^n$ μια λεία απεικόνιση και $p \in U$. Λέμε παράγωγο της f στο p ή διαφορικό της f στο p και συμβολίζουμε με df_p (ή f_{*p}) την απεικόνιση $df_p: T_p R^m \rightarrow T_{f(p)} R^n$, που ορίζεται ως εξής: Αν $v \in T_p R^m$ και $\gamma: I \rightarrow R^m$ μια καμπύλη με $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$, τότε $df_p(v) = \beta'(0) =$ διάνυσμα ταχύτητας στο 0 της $\beta(t) = f(\gamma(t))$ (σχήμα 20).



σχήμα 20

Παρατήρηση 2.1.1. Ο παραπάνω ορισμός είναι καλός, δηλαδή δεν εξαρτάται από τη καμπύλη γ . Δηλαδή, αν πάρουμε άλλη καμπύλη, έστω $\bar{\gamma}$, με $\bar{\gamma}(0) = p$, $\bar{\gamma}'(0) = v$ τότε η $\bar{\beta}(t) = f(\bar{\gamma}(t))$ έχει διάνυσμα ταχύτητας $\bar{\beta}'(0) = \beta'(0)$.

Πραγματικά, ας είναι $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$



και $\gamma: R \rightarrow R^m$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$ με $\gamma(0) = (\gamma_1(0), \dots, \gamma_m(0)) = p$ και $\gamma'(0) = (\gamma'_1(0), \dots, \gamma'_m(0)) = v$. Τότε

$$\beta(t) = f(\gamma(t)) = (f_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)), \dots, f_n(\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)))$$

Έτσι : $\beta(0) = f(\gamma(0)) = f(p)$ και

$$(*) \quad \beta'(0) = ((f_1 \circ \gamma)'(0), \dots, (f_n \circ \gamma)'(0))$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^1}(p) \cdot \gamma'_1(0) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x^m}(p) \gamma'_m(0), \dots, \right. \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x^1}(p) \cdot \gamma'_1(0) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x^m}(p) \gamma'_m(0) \right),$$

σύμφωνα με τον κανόνα σύνθετης παραγώγισης ή

$$\beta'(0) = (D_{\gamma'(0)} f_1, \dots, D_{\gamma'(0)} f_n) = (D_v f_1, \dots, D_v f_n),$$

όπου $D_v f_i$ σημαίνει παράγωγος της f_i κατά τη κατεύθυνση του v .

Έτσι το $\beta'(0)$ είναι ανεξάρτητο της γ , πράγμα που δείχνει αυτό που θέλουμε

Η (*) γράφεται και ως

$$\beta'(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^m}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x^m}(p) \end{pmatrix}}_{n \times m - \text{πίνακας}} \begin{pmatrix} \gamma'_1(0) \\ \vdots \\ \gamma'_m(0) \end{pmatrix}$$

ή σύντομα $\beta'(0) = df_p(v) = J_f(p)v$, όπου $J_f(p) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)$ είναι ένας



$n \times m$ -πίνακας, που λέγεται Ιακωβιανός πίνακας της f στο p . Όταν

$n = m$ η ορίζουσα του $\det J_f(p) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(p)$ λέγεται Ιακωβιανή ορίζουσα της f στο σημείο p .

Παρατήρηση 2.1.2. Η df_p είναι γραμμική απεικόνιση με αντίστοιχο πίνακα, ως προς τις κανονικές βάσεις των R^m , R^n , τον Ιακωβιανό.

Παρατήρηση 2.1.3. Η $f: U \subset R^m \rightarrow R^n$ λέγεται κανονική στο $p \in U$ αν η τάξη του Ιακωβιανού πίνακα είναι m . Αυτό σημαίνει ότι η df_p ως γραμμική απεικόνιση είναι 1-1 ή ότι ο χώρος $df_p(T_p R^m)$ έχει διάσταση m .

2.2. Ορισμός και παραδείγματα επιφανειών.

Ας πάρουμε μια διαχωρίσιμη απεικόνιση $\chi: U \subset R^2 \rightarrow R^3: (u, v) \rightarrow \chi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, όπου U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του R^2 . Αν $q = (u_0, v_0)$ είναι ένα σημείο του U θα συμβολίζουμε την παράγωγο απεικόνιση χ στο q με $d\chi_q$ αντί χ_{*q} . Μια τέτοια απεικόνιση λέγεται κανονική στο q αν η $d\chi_q: T_q R^2 \rightarrow T_{\chi(q)} R^3$ είναι αμφιμονοσήμαντη ή ισοδύναμα αν ο Ιακωβιανός πίνακας

$$J_\chi(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}, \text{ είναι τάξεως } 2.$$

Αυτό σημαίνει πως μια τουλάχιστον από τις ορίζουσες



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} , \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} , \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$$

δεν μηδενίζεται στο σημείο $q = (u_0, v_0)$.

Παράδειγμα 2.2.1. Δίνεται η διαφορίσιμη απεικόνιση

$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (u,v) \rightarrow X(u,v) = (u^2-v^2, u+v, u-v)$. Η απεικόνιση αυτή είναι κανονική σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$. Πραγματικά έχουμε πως η ορίζουσα

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \equiv -2 \neq 0 , \quad \text{όπου } y(u,v) = u+v \quad \text{και} \quad z(u,v) = u-v .$$

Έτσι ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης είναι τάξεως 2 σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ και συνεπώς η απεικόνιση είναι κανονική .

Ας υποθέσουμε τώρα πως έχουμε μια διαφορίσιμη απεικόνιση

$$X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset \mathbb{R}^3: (u,v) \mapsto X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) ,$$

η οποία είναι και αμφιμονοσήμαντη (δηλαδή 1-1) . Τότε προφανώς υπάρχει η αντίστροφη $X^{-1}: X(U) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$. Θα λέμε πως η X^{-1} είναι συνεχής αν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $F: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου $A \supset X(U)$ και A μια περιοχή του $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε $X^{-1} = F|_{X(U)}$ (όπου $F|_{X(U)}$ ο περιορισμός της F στο $X(U)$) .

Παράδειγμα 2.2.2. Ας πάρουμε την απεικόνιση

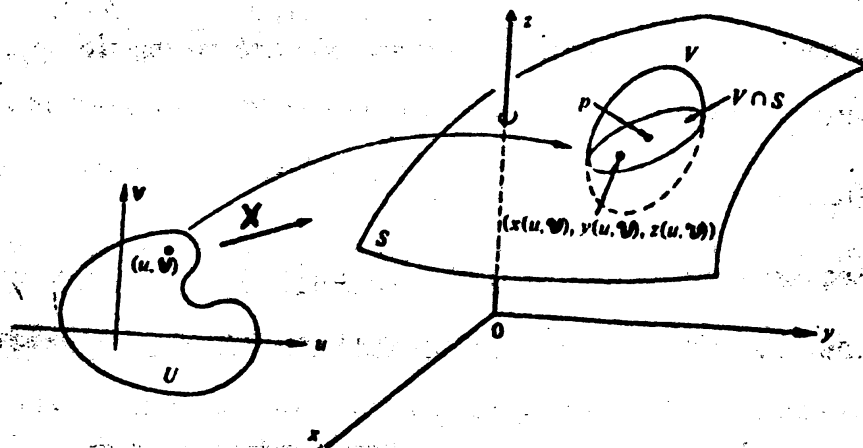
$$X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset \mathbb{R}^3: (u,v) \rightarrow X(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}) , \quad \text{όπου}$$

$U = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2: u^2+v^2 < 1 \}$. Η απεικόνιση X είναι προφανώς αμφιμονοσήμαντη και η αντίστροφή της $X^{-1}: X(U) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ είναι συνεχής διότι $X^{-1} = \pi_3|_{X(U)}$ όπου $\pi_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x,y,z) \mapsto \pi_3(x,y,z) = (x,y)$ είναι μια συνεχής απεικόνιση (η τρίτη φυσική συνάρτηση συντεταγμένων του $\mathbb{R}^3$, δηλαδή η προβολή στο Oxy επίπεδο) .

Ορισμός 2.2.1. Μια συνεχής απεικόνιση $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset \mathbb{R}^3$ η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη και έχει συνεχή αντίστροφη, λέγεται ομοιομορφισμός (homeomorphism).

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δώσουμε τον ορισμό της κανονικής επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$.

Ορισμός 2.2.2. Ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}^3$, $(S \subset \mathbb{R}^3)$ λέγεται κανονική επιφάνεια (regular surface) αν σε κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή V του $\mathbb{R}^3$ και μια απεικόνιση $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε να ισχύουν οι παρακάτω τρεις συνθήκες (σχήμα 21)



σχήμα 21

συνθήκη 1 : Η X είναι διαφορίσιμη απεικόνιση · δηλαδή αν

$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ τότε οι $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης.

συνθήκη 2 : Η X είναι ομοιομορφισμός.

συνθήκη 3 : Η X είναι κανονική σε κάθε σημείο του U .

Ορισμός 2.2.3. Έστω S μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, p ένα σημείο της και $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ η απεικόνιση (που υπάρχει σύμφωνα με τον ορισμό 2.2.2) έτσι ώστε $p = X(u_0, v_0)$, όπου $(u_0, v_0) \in U$.

Η απεικόνιση X θα λέγεται παραμέτρηση ή σύστημα συντεταγμένων (system of coordinates) γύρω από το σημείο p , το δε σύνολο $V \cap S$ θα λέγεται περιοχή συντεταγμένων (coordinate neighborhood) στο p .

Παρατήρηση. Πολλές φορές αντί να γράφουμε $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ για ένα σύστημα συντεταγμένων θα γράφουμε απλά $X(u,v)$ με $(u,v) \in U$.

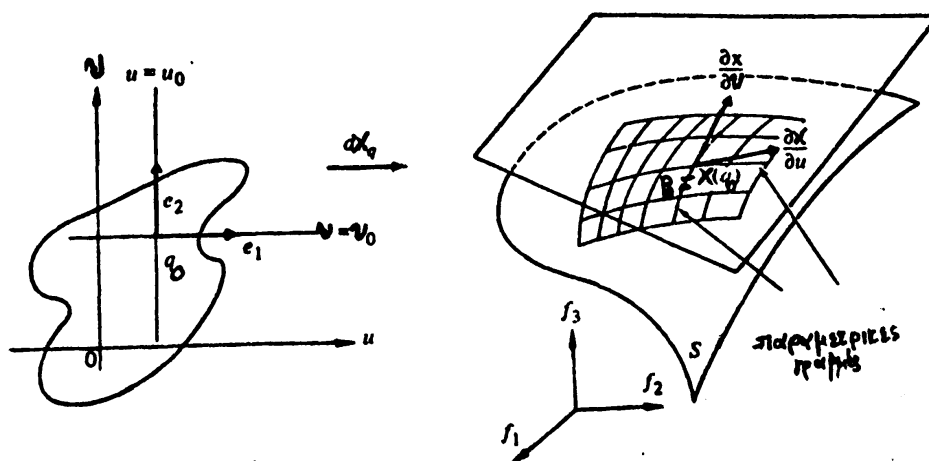
Προτού δούμε μερικά παραδείγματα επιφανειών θα εξετάσουμε για λίγο ένα σύστημα συντεταγμένων μιας κανονικής επιφάνειας S γύρω από ένα σημείο p_0 .

Ας είναι $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3: (u,v) \mapsto X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ ένα σύστημα συντεταγμένων της κανονικής επιφάνειας S γύρω από το σημείο $p_0 = X(u_0, v_0)$, όπου $q_0 = (u_0, v_0) \in U$. Από αυτό το σύστημα συντεταγμένων μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο καμπύλες της επιφάνειας που περνούν από το σημείο p_0 , τις

$$\alpha(u) = X(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$$

$$\beta(v) = X(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$$

Οι παραπάνω καμπύλες λέγονται παραμετρικές γραμμές της επιφάνειας S από το σημείο p_0 ως προς το σύστημα συντεταγμένων X (σχήμα 22).



σχήμα 22



Εξ άλλου τα διανύσματα ταχύτητας των παραμετρικών γραμμών α και β στο σημείο p_0 είναι :

$$\alpha'(u_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)_{p_0 = X(u_0, v_0)}$$

$$\beta'(v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)_{p_0 = X(u_0, v_0)}$$

Για απλούστευση θα συμβολίζουμε :

$$\alpha'(u_0) = \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) = X_u(u_0, v_0)$$

$$\beta'(v_0) = \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0) = X_v(u_0, v_0) .$$

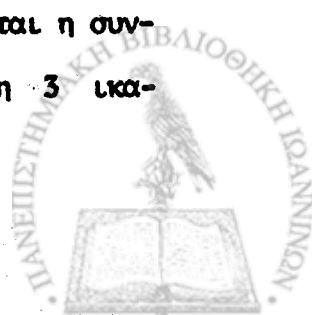
Τελικά παρατηρούμε ότι το εξωτερικό γινόμενο $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)$ είναι διαφορετικό του μηδενικού διανύσματος (γιατί ;)

Ας δώσουμε τώρα δύο απλά παραδείγματα κανονικών επιφανειών .

Παράδειγμα 2.2.3. Ας πάρουμε το σύνολο $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, το οποίο είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και ως γνωστό από την Αναλυτική Γεωμετρία είναι η επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας 1. Θα δούμε πως αυτό το υποσύνολο είναι κανονική επιφάνεια .

Αν $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, όπου $R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ είναι εύκολο να δει κανένας ότι η απεικόνιση $X_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ με $(x, y) \in U$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων και μάλιστα ότι $X_1(U)$ είναι το ανοιχτό ημισφαίριο του S^2 το πάνω από το επίπεδο Oxy .

Πραγματικά , επειδή $x^2 + y^2 < 1$, για $(x, y) \in U$ οι συναρτήσεις $x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ έχουν συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης , έτσι ικανοποιείται η συνθήκη 1 του ορισμού 2.2.2 . Επίσης επειδή $\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} \equiv 1$ και η συνθήκη 3 ικα-



νοποιείται . Τέλος η X_1 είναι ομοιομορφισμός (βλέπε παράδειγμα 2.2.2 παραπάνω) , δηλαδή και η συνθήκη 2 του ορισμού της κανονικής επιφάνειας ικανοποιείται .

Σκοπός μας τώρα είναι να καλύψουμε το S^2 με συστήματα συντεταγμένων ώστε να είναι κανονική επιφάνεια .

Θεωρούμε τις παραμετρήσεις :

$$X_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2})$$

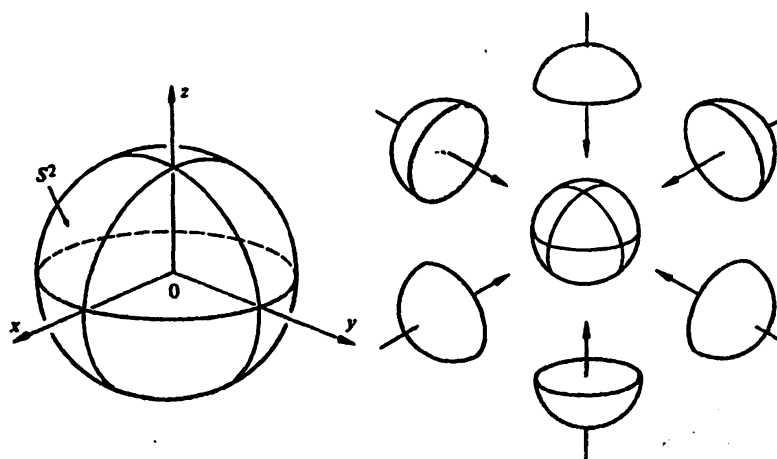
$$X_3(x, z) = (x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z)$$

$$X_4(x, z) = (x, -\sqrt{1-x^2-z^2}, z)$$

$$X_5(y, z) = (\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)$$

$$X_6(y, z) = (-\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)$$

Είναι εύκολο να δει κανένας (σχήμα 23) πως οι περιοχές συντεταγμένων που ορίζονται από τα παραπάνω συστήματα συντεταγμένων καλύπτουν το S^2 , έτσι το σύνολο



σχήμα 23

αυτό είναι κανονική επιφάνεια .



Παράδειγμα 2.2.4. Έστω το σύνολο $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0\}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ σταθερές και $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Το σύνολο π , που είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ είναι μια κανονική επιφάνεια. Πραγματικά χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε πως $\gamma \neq 0$, οπότε η απεικόνιση

$$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto X(x, y) = (x, y, \frac{-\delta - \alpha x - \beta y}{\gamma})$$

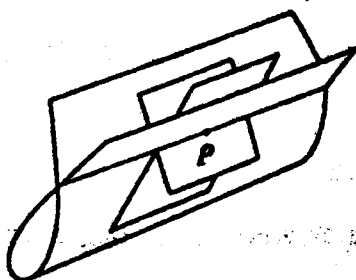
είναι παραμέτρηση (γιατί ;) γύρω από κάθε σημείο του π . Σύμφωνα με τον ορισμό 2.2.2 το π είναι κανονική επιφάνεια, που είναι γνωστή από την Αναλυτική Γεωμετρία σαν επίπεδο.

Πριν προχωρήσουμε ας κάνουμε μερικά χρήσιμα σχόλια για τον ορισμό 2.2.2.

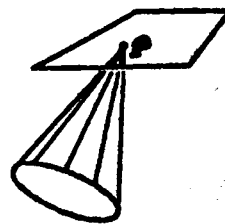
Σχόλια στον ορισμό 2.2.2.

(1) Πρέπει κανείς να διακρίνει μια διαφορά μεταξύ καμπυλών και επιφανειών. Ενώ καμπύλη θεωρούμε μια απεικόνιση, επιφάνεια είναι ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}^3$ και όχι απεικόνιση. Η επιφάνεια S καλύπτεται με τις εικόνες κάποιων απεικονίσεων (παραμετρήσεων), που ικανοποιούν τις συνθήκες 1, 2 και 3.

(2) Η συνθήκη 2 του ορισμού 2.2.2 δεν επιτρέπει στη κανονική επιφάνεια S να έχει αυτομές (να αυτοτέμνονται). Αυτό επιβάλλεται, αν θέλουμε να μιλάμε για συγκεκριμένο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας S στο σημείο $P \in S$ (σχήμα 24α). Τέλος η συνθήκη 3 του ορισμού 2.2.2 επιβάλλει την ύπαρξη εφαπτόμενου επιπέδου σε όλα τα σημεία της κανονικής επιφάνειας S (κοίταξε παράγραφο 2.4).



(α)



(β)



Στα δύο παραδείγματα κανονικών επιφανειών που είδαμε, δεν είναι και τόσο δύσκολο να βρούμε παραμετρήσεις (συστήματα συντεταγμένων) γύρω από κάθε σημείο τους. Υπάρχουν περιπτώσεις, που συναντάμε δυσκολία στο να βρούμε παραμετρήσεις. Έτσι μερικές φορές μας είναι δύσκολο να αποφασίσουμε αν ένα υποσύνολο του R^3 είναι κανονική επιφάνεια ή όχι. Γι' αυτό παρακάτω θα βρούμε ένα κριτήριο, που χρησιμοποιείται αρκετά συχνά και μας βγάζει από αυτή τη δυσκολία αρκετές φορές. Θα δώσουμε πρώτα δύο ορισμούς.

Ορισμός 2.2.4. Αν $f: U \subset R^2 \rightarrow R$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοιχτό υποσύνολο U , τότε το σύνολο

$$\Gamma_f = \{ (x, y, z) \in R^3 : z = f(x, y) \},$$

είναι υποσύνολο του R^3 και λέγεται γράφημα της συνάρτησης f .

Ορισμός 2.2.5. Δίνεται μια διαφορίσιμη συνάρτηση

$$F: U \subset R^3 \rightarrow R$$

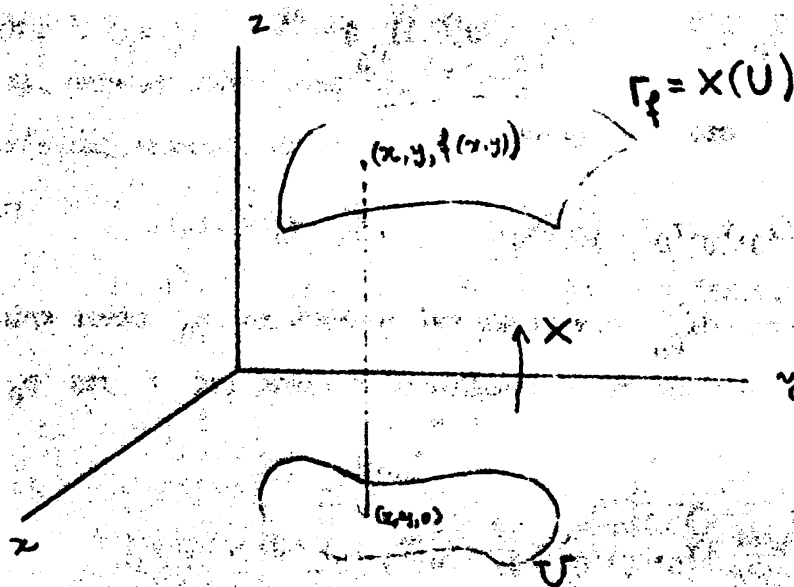
με πεδίο ορισμού το U . Ένα σημείο $p_0 \in U$ λέγεται κρίσιμο σημείο (critical point) της F , αν η παράγωγος απεικόνιση F_{*p_0} ή dF_{p_0} δεν είναι απεικόνιση επί (surjective). Ένα σημείο $\alpha \in R$ θα λέγεται κρίσιμη τιμή (critical value) της F αν το σύνολο $F^{-1}(\alpha) = \{ (x, y, z) \in U : F(x, y, z) = \alpha \}$ περιέχει κρίσιμα σημεία της F , άλλως λέγεται μη κρίσιμη τιμή της F .

Θα αποδείξουμε μια πρόταση για γραφήματα.

Πρόταση 2.2.1. Αν $f: U \subset R^2 \rightarrow R$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση με



πεδίο ορισμού το ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^2$, τότε το γράφημα Γ_f της f είναι κανονική επιφάνεια (σχήμα 25)



σχήμα 25

Απόδειξη . Είναι εύκολο να δούμε ότι η απεικόνιση

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto X(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

είναι σύστημα συντεταγμένων (παραμέτρηση) γύρω από κάθε σημείο του γραφήματος Γ_f . Πραγματικά η συνθήκη 1 του ορισμού 2.2.2 είναι προφανής. Η συνθήκη 3

ικανοποιείται διότι $\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} \equiv 1$. Τέλος η X είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1) και

ισχύει $X^{-1} = \pi_3|_{\Gamma_f}$, όπου $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \pi_3(x, y, z) = (x, y)$. Έτσι η X^{-1}

είναι συνεχής, άρα η X είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή ικανοποιείται και η συν-

θήκη 2. Επειδή όμως $\Gamma_f = X(U)$ η X είναι παραμέτρηση γύρω από κάθε σημείο του γραφήματος Γ_f και σύμφωνα με τον ορισμό 2.2.2 το γράφημα είναι κανονική επιφάνεια.

Θα δούμε στη συνέχεια μια πρόταση, που θα αποφασίζει σχεδόν αμέσως αν ένα υποσύνολο $S \subset \mathbb{R}^3$ είναι κανονική επιφάνεια. Αρχικά θα εξετάσουμε τι σημαίνει

ότι το σημείο $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ είναι κρίσιμο σημείο μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Ισχύουν : $df_{p_0}((1,0,0)_{p_0}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$,

$df_{p_0}((0,1,0)_{p_0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ και $df_{p_0}((0,0,1)_{p_0}) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$. Έτσι ο

Ιακωβιανός πίνακας της f στο p_0 είναι ο ,

$$J_f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) .$$

Η παραδοχή ότι η παράγωγος df_{p_0} δεν είναι επί (δηλαδή το p_0 είναι κρίσιμο σημείο) ισοδυναμεί με το γεγονός ότι ο Ιακωβιανός πίνακας της f στο p_0 είναι τάξεως 0 , δηλαδή :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 .$$

Αντίθετα αν μια από τις μερικές παραγώγους της f δεν μηδενίζεται στο p_0 , τότε το p_0 δεν είναι κρίσιμο σημείο .

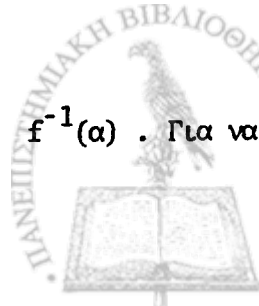
Πρόταση 2.2.2 . Αν $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση και $\alpha \in f(U)$ μια μη κρίσιμη τιμή της f , τότε το σύνολο $f^{-1}(\alpha)$ είναι κανονική επιφάνεια .

Παράδειγμα 2.2.5 . Πριν από την απόδειξη της πρότασης θα εξετάσουμε μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της . Θεωρούμε ένα ομογενές πολυώνυμο $P(x, y, z)$ βαθμού $k \neq 0$. Τότε για οποιοδήποτε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$ το σύνολο $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : P(x, y, z) = \alpha\}$ είναι κανονική επιφάνεια . Πραγματικά από την ταυτότητα του Euler για ομογενή πολυώνυμα

$$x \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = k P(x, y, z) ,$$

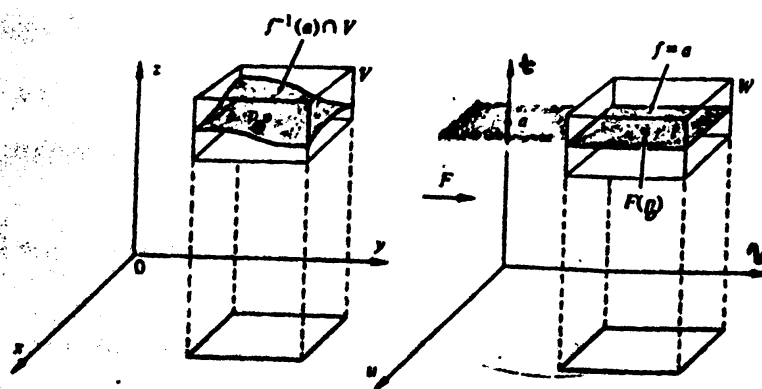
συμπεραίνουμε ότι κάθε $\alpha \neq 0$ είναι μη κρίσιμη τιμή (γιατί;) . Έτσι το σύνολο M σύμφωνα με τη πρόταση είναι κανονική επιφάνεια .

Απόδειξη . Ας πάρουμε ένα σημείο $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ του $f^{-1}(\alpha)$. Για να



αποδείξουμε αυτό που θέλουμε θα πρέπει να βρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων (παραμέτρηση) του $f^{-1}(a)$ γύρω από το σημείο p_0 . Επειδή η τιμή a είναι μη κρίσιμη τιμή, οπότε το p_0 είναι μη κρίσιμο σημείο της f , μια τουλάχιστον από τις μερικές παραγώγους της f δεν μηδενίζεται στο p_0 . Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0$. Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \rightarrow F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)) \equiv (u, v, t)$$



σχήμα 26

της οποίας ο πίνακας Jacobi στο p_0 είναι ο

$$J_F(p_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $J_F(p_0)$ είναι τάξης 3 διότι $\det J_F(p_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0$, άρα η απεικόνιση F είναι κανονική στο p_0 . Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Αντιστρόφου Συναρτήσεως (κόιταξε ένα βιβλίο λογισμού πολλών μεταβλητών) υπάρχει μια περιοχή V του p_0 και μια περιοχή W του $F(p_0)$, ώστε η $F|_V$ να είναι

αμφιδιαφορίση (σχήμα 26). Έτσι λοιπόν υπάρχει η $F^{-1}: W \rightarrow V$, είναι διαφορίσιμη και μάλιστα $F^{-1}: W \rightarrow V: (u, v, t) \mapsto F^{-1}(u, v, t) = (x, y, z)$ με $x = u$, $y = v$ και $z = g(u, v, t)$. Ειδικότερα για $t = \alpha$, έχουμε $z = g(u, v, \alpha) = g(x, y, \alpha) = h(x, y)$ και $f(x, y, g(x, y, \alpha)) = f(x, y, h(x, y)) = \alpha$. Αυτό σημαίνει πως το σύνολο $V \cap f^{-1}(\alpha)$ είναι γράφημα της διαφορίσιμης συνάρτησης $z = h(x, y)$ και σύμφωνα με την πρόταση 2.2.1 το σύνολο $V \cap f^{-1}(\alpha)$ είναι περιοχή συντεταγμένων του $f^{-1}(\alpha)$ γύρω από το p_0 . Επειδή όμως αυτή η διαδικασία μπορεί να γίνει γύρω από κάθε σημείο του $f^{-1}(\alpha)$, συμπεραίνουμε πως αυτό είναι κανονική επιφάνεια.

Παρατήρηση. Επιφάνειες όπως η $f^{-1}(\alpha)$ λέγονται επιφάνειες στάθμης της f .

Ας δούμε τώρα ένα ακόμη παράδειγμα κανονικής επιφάνειας.

Παράδειγμα 2.2.6. Το σύνολο $M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$ είναι

κανονική επιφάνεια, γνωστή από την Αναλυτική Γεωμετρία σαν ελλειψοειδές.

Πραγματικά, η συνάρτηση $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ είναι διαφορίσιμη

και έχει το 0 μη κρίσιμη τιμή (γιατί ;). Σύμφωνα λοιπόν με την πρόταση 2.2.2 το σύνολο

$$f^{-1}(0) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \right\} \equiv M$$

είναι κανονική επιφάνεια και μάλιστα μια επιφάνεια στάθμης της

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \quad (\text{Κοίταξε και παράδειγμα 2.2.5}).$$

Άσκηση. Δείξτε ότι ο τόρος (σπείρα) είναι μια κανονική επιφάνεια.

Αυτό που μας λέγει η πρόταση 2.2.1 είναι βασικά ότι το γράφημα κάθε διαφορίσιμης συνάρτησης $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κανονική επιφάνεια. Είναι εύλογο το



ερώτημα μήπως κάθε κανονική επιφάνεια ή τουλάχιστον κομμάτια της είναι γραφήματα διαφορίσιμης συναρτήσεως :

Απάντηση δίνει η παρακάτω πρόταση .

Πρόταση 2.2.3 . Δίνεται μια κανονική επιφάνεια $S \subset \mathbb{R}^3$ και p ένα σημείο της. Τότε υπάρχει ένα κομμάτι V της S γύρω από το p ώστε το V να είναι γράφημα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης της μορφής $z = f(x, y)$ ή $x = h(y, z)$ ή $y = g(x, z)$.

Απόδειξη . Αφού η S είναι κανονική επιφάνεια, γύρω από το σημείο p υπάρχει σύστημα συντεταγμένων

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S : (u, v) \mapsto X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) .$$

Από την συνθήκη 3 του ορισμού 2.2.2 , συμπεραίνουμε πως μια τουλάχιστο από τις παρακάτω ορίζουσες

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} , \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} , \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$$

δεν μηδενίζεται στο $q = X^{-1}(p)$. Ας υποθέσουμε πως η $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ δεν μηδενίζεται στο σημείο $q = X^{-1}(p)$.

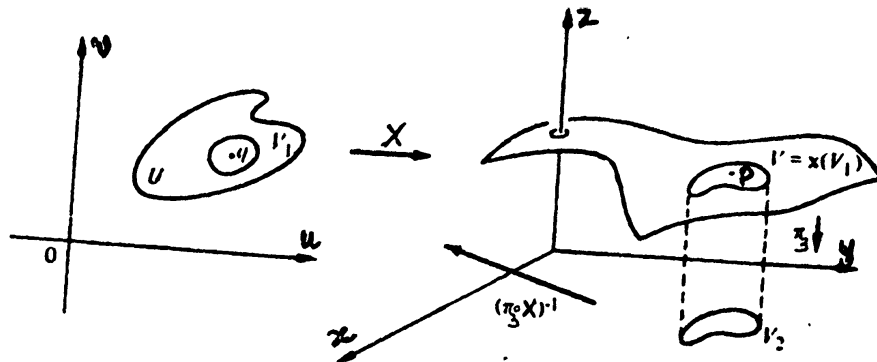
Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \pi_3(x, y, z) = (x, y)$ η οποία είναι διαφορίσιμη και συνεχής έχουμε πως $\pi_3 \circ X(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Επειδή όμως η $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ είναι διαφορετική του μηδενός στο σημείο $q = X^{-1}(p)$, συμπεραίνουμε από το θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης ότι υπάρχει περιοχή V_1 του q και περιοχή V_2 του $\pi_3(p)$ έτσι ώστε η $\pi_3 \circ X : V_1 \rightarrow V_2$ να είναι αμφιδιαμόρφωση του V_1 επί του V_2 (σχήμα 27) . Έτσι η $(\pi_3 \circ X)^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$ είναι διαφορίσιμη και αμφιμονοσήμαντη (1-1) . Ας θέσω $X(V_1) = V \subset S$ και ας θεωρήσω την συνάρτηση

$$K : V_1 \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto K(u, v) = z(u, v) .$$



Τότε έχουμε πως

$$\begin{aligned} K \circ (\pi_3 \circ X)^{-1} : V_2 \rightarrow R : (x, y) &\mapsto K \circ (\pi_3 \circ X)^{-1}(x, y) = \\ &= K(u(x, y), v(x, y)) = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y) \end{aligned}$$



σχήμα 27

δηλαδή το κομμάτι V είναι γράφημα της διαφοροίσιμης συνάρτησης $z = f(x, y)$.
Όμοια δουλεύουμε αν μια από τις άλλες ορίζουσες δεν μηδενίζεται.

Θα δούμε ακόμα μια βασική πρόταση.

Πρόταση 2.2.4. Έστω S μια κανονική επιφάνεια και p ένα σημείο της. Έστω επίσης $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια απεικόνιση έτσι ώστε $p \in X(U) \subset S$ και να ισχύουν οι συνθήκες 1 και 3 του ορισμού 2.2.2. Αν η X είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1), τότε η X^{-1} είναι συνεχής (άρα η X ομοιομορφισμός) δηλαδή η X είναι ένα σύστημα συντεταγμένων (παραμέτρηση) γύρω από το σημείο p .

Απόδειξη. Ας είναι $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, όπου $(u, v) \in U$. Έστω επίσης q τυχαίο σημείο του U . Αφού η X ικανοποιεί τις συνθήκες 1 και 3, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$.

Αν θεωρήσουμε την διαφοροίσιμη και συνεχή απεικόνιση



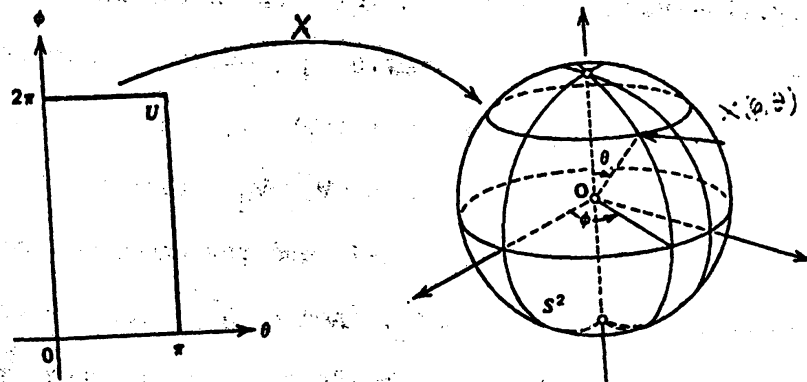
$\pi_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y, z) \mapsto \pi_3(x, y, z) = (x, y)$, τότε συμπεραίνουμε (γιατί ;) ότι η $\pi_3 \circ X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι κανονική στο σημείο q , οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης υπάρχει ανοιχτή περιοχή V_1 του q και ανοιχτή περιοχή V_2 του $\pi_3 \circ X(q)$, έτσι ώστε η $\pi_3 \circ X: V_1 \rightarrow V_2$ είναι αμφιδιακρόριση του V_1 επί του V_2 . Επειδή όμως η X είναι 1-1 από την υπόθεση , όταν δουλεύουμε στο $X(V_1)$ έχουμε , $X^{-1} = (\pi_3 \circ X)^{-1} \circ \pi_3$. Άρα η X^{-1} είναι συνεχής στο $X(q)$ σαν σύνθεση των συνεχών $(\pi_3 \circ X)^{-1}, \pi_3$. Επειδή όμως το q είναι τυχαίο σημείο του U , συμπεραίνουμε πως η X^{-1} είναι συνεχής στο $X(U)$, συμπέρασμα το οποίο θέλαμε να δούμε .

Δεν θα είχε καμιά αξία , αν δεν βλέπαμε μια εφαρμογή της παραπάνω πρότασης . Για τον σκοπό αυτό ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα .

Παράδειγμα 2.2.7 . Έστω το σύνολο $S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$, το οποίο είναι κανονική επιφάνεια (παράδειγμα 2.2.3) . Ας είναι $U = \{ (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < 2\pi , 0 < \theta < \pi \} \subset \mathbb{R}^2$ και $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (\varphi, \theta) \mapsto X(\varphi, \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. Θέλουμε να δούμε αν η X είναι σύστημα συντεταγμένων (παραμέτρηση) της S^2 . Κανονικά θα έπρεπε να δούμε αν ισχύουν οι συνθήκες 1, 2 και 3 . Πραγματικά οι συνθήκες 1 και 3 είναι εύκολο να δει κάποιος πως ισχύουν . Στην περίπτωση της συνθήκης 2 τα πράγματα δεν είναι και τόσο απλά . Έτσι η πρόταση 2.2.4 θα μας βοηθήσει σ' αυτό . Πραγματικά , ξέρουμε από το παράδειγμα 2.2.3 ότι το S^2 είναι κανονική επιφάνεια και είναι εύκολο να δεί κάποιος πως η X είναι 1-1 , έτσι σύμφωνα με την πρόταση 2.2.4 η X^{-1} είναι συνεχής και επομένως η X είναι σύστημα συντεταγμένων όπως θέλαμε να αποδείξουμε .

Αυτές οι συντεταγμένες (φ, θ) (σχήμα 28) λέγονται και γεωγραφικές συντεταγμένες της σφαίρας και μάλιστα είναι το γεωγραφικό μήκος και ύψος (αζιμούθιο) κάθε σημείου της σφαίρας .





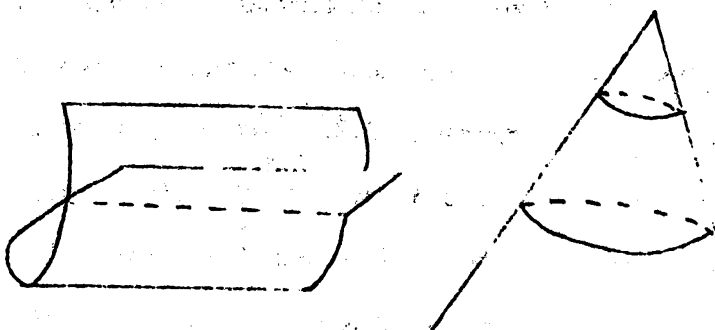
σχήμα 28

Άσκηση . Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα είναι κανονικές επιφάνειες

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z=0 \text{ και } x^2+y^2 \leq 1 \}$$

$$N = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z=0 \text{ και } x^2+y^2 < 1 \}$$

Άσκηση . Εξετάστε αν τα παρακάτω σχήματα μπορούν να παριστάνουν κανονικές επιφάνειες σύμφωνα με τον ορισμό 2.2.2 που δώσαμε .



Άσκηση . Η $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto \chi(u,v) \stackrel{\text{op}}{=} (R \cos u, R \sin u, v)$ είναι σύστημα συντεταγμένων μιας επιφάνειας. Τι είναι (γεωμετρικά) η επιφάνεια ; Τι είναι οι παραμετρικές γραμμές ;



2.3. Συναρτήσεις επί επιφανειών και απεικονίσεις επιφανειών .

Ένας από τους σκοπούς της Διαφορικής Γεωμετρίας είναι η μελέτη των τοπικών ιδιοτήτων των επιφανειών (local differential geometry) , δηλαδή η μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων, που εξαρτώνται από την συμπεριφορά των επιφανειών στην περιοχή ενός σημείου τους .

Ο ορισμός 2.2.2 της κανονικής επιφάνειας που δώσαμε , είναι κατάλληλος γι' αυτό το σκοπό . Πραγματικά ένα σημείο μιας επιφάνειας ανήκει σε μια περιοχή συντεταγμένων και στα σημεία αυτής της περιοχής αντιστοιχούν οι συντεταγμένες τους (δηλαδή τα (u,v)) . Έτσι τις ιδιότητες που μας ενδιαφέρουν μπορούμε να τις μελετήσουμε αν τις εκφράσουμε σ' αυτές τις συντεταγμένες .

Για παράδειγμα , τι θα εννοούσε λέγοντας ότι μια συνάρτηση $f:S \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο p της S :

Το πιο φυσικό είναι να πάρουμε ένα σύστημα συντεταγμένων γύρω από το σημείο p , με συντεταγμένες (u,v) , να βρούμε την έκφραση της f , ως προς αυτές τις συντεταγμένες και αν αυτή έχει συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης ως προς u και v , να πούμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο p . Σε μια τέτοια περίπτωση, επειδή ένα σημείο κανονικής επιφάνειας μπορεί να ανήκει σε πολλά συστήματα συντεταγμένων θα αντιμετωπίσουμε αμέσως το εξής ερώτημα : Μπορεί ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων (u,v) η έκφραση της f να είναι διαφορίσιμη και ως προς άλλο ένα (ξ,η) να μην είναι ; Αν συνέβαινε αυτό , τότε ένας τέτοιος ορισμός δεν θα ήταν καλός εφ' όσον εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων , που διαλέγουμε . Άμα ξέραμε ότι μπορούμε να πάμε από το ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο κατά ένα λείο (διαφορίσιμο) τρόπο , η απάντηση στο ερώτημα θα ήταν όχι δεν μπορεί .

Η παρακάτω πρόταση μας εξασφαλίζει αυτή την δυνατότητα .

Πρόταση 2.3.1. Έστω p ένα σημείο μιας κανονικής επιφάνειας S και



$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) ,$$

$$Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 : (\xi, \eta) \mapsto Y(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta))$$

δύο συστήματα συντεταγμένων (παραμετρήσεις) της S γύρω από το σημείο p ,
δηλαδή $p \in X(U) \cap Y(V) = W$. Τότε η συνάρτηση $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ είναι
αμφιδιακρόριση (δηλαδή η h είναι διακρορίσιμη και έχει διακρορίσιμη αντίστροφη) .

Πριν κάνουμε την απόδειξη αυτής της πρότασης , ας κάνουμε ένα σχόλιο .

Σχόλιο : Αν $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, όπου $(u, v) \in U$ και
 $Y(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta))$ με $(\xi, \eta) \in V$, τότε η
 $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2$ έχει συναρτήσεις συντεταγμένων $u = u(\xi, \eta)$,
 $v = v(\xi, \eta)$ με $(\xi, \eta) \in Y^{-1}(W)$. Αυτό που πρέπει να αποδείξουμε είναι ότι οι συν-
αρτήσεις $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$ είναι διακρορίσιμες (έχουν συνεχείς παραγώνους
κάθε τάξης) και ότι αντιστρέφονται , δηλαδή μπορούν να λυθούν ως προς ξ και
 η και ότι οι $\xi = \xi(u, v)$, $\eta = \eta(u, v)$ είναι διακρορίσιμες . Επειδή η h είναι
και 1-1 , σαν σύνθεση 1-1 συναρτήσεων , θα είναι αμφιδιακρόριση .

Απόδειξη της πρότασης 2.3.1 . Επειδή οι X^{-1} και Y είναι ομοιομορ-
φισμοί (συνθήκη 2 του ορισμού 2.2.2) συμπεραίνουμε πως η $h = X^{-1} \circ Y$ είναι ομοι-
ομορφισμός , σαν σύνθεση ομοιομορφισμών . Βέβαια δεν μπορούμε να πούμε ότι η h
είναι διακρορίσιμη με το ίδιο σκεπτικό και αυτό γιατί η X^{-1} είναι συνάρτηση που
ορίζεται στην S και για τέτοιες συναρτήσεις δεν ξέρουμε ακόμη τι σημαίνει να
είναι διακρορίσιμη .

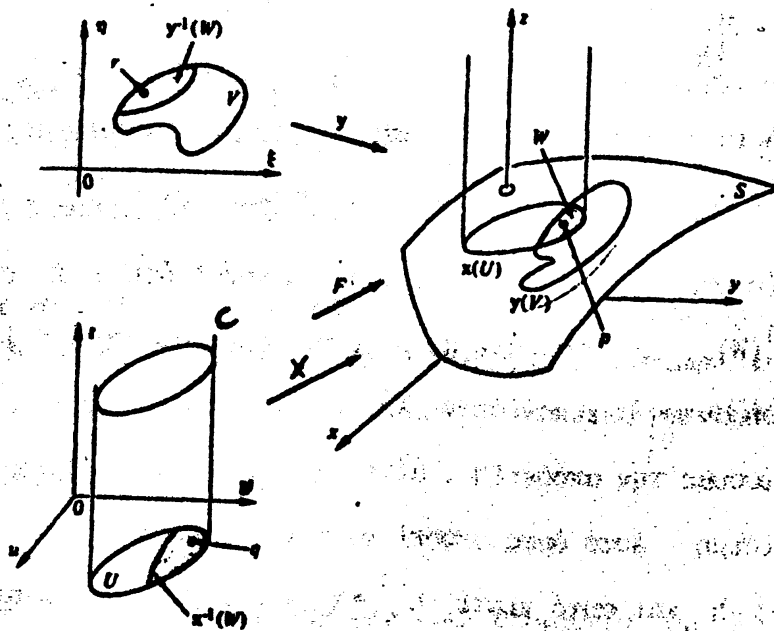
Ας πάρουμε τώρα ένα σημείο $r \in Y^{-1}(W)$ και ας θέσουμε $q = h(r)$ και
 $p = X(q)$. Επειδή η $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ είναι παραμέτρηση , από την
συνθήκη κανονικότητας (συνθήκη 3 του ορισμού 2.2.2) , μπορούμε να υποθέσουμε χω-
ρίς βλάβη της γενικότητας ότι η ορίζουσα $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$. Μετά από αυτή την



παραδοχή, ας θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$F: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3: (u, v, t) \mapsto F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t)$$

όπου $(u, v) \in U$ και $t \in \mathbb{R}$. Γεωμετρικά η απεικόνιση F απεικονίζει έναν ορθό κύλινδρο C με βάση το U , σε ορθό κύλινδρο με βάση το $X(U)$ (σχήμα 20).



σχήμα 20

Είναι φανερό ότι η F είναι διαφορίσιμη (οι συναρτήσεις συντεταγμένων είναι διαφορίσιμες) και ότι

$$F|_{U \times \{0\}} = X$$

Επίσης η Ιακωβιανή ορίζουσα της F στο σημείο (q, t) είναι :

$$\det J_F(q, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

δηλαδή η F είναι κανονική στο σημείο (q, t) και έτσι μπορεί τοπικά να αντι-

στραφεί , δηλαδή υπάρχει περιοχή A του R^3 γύρω από το σημείο $p = X(q)$ και μια περιοχή B του R^3 γύρω από το $(q,0)$ έτσι ώστε η $F^{-1}:A \rightarrow B$, υπάρχει και είναι διαφορίσιμη . Από την άλλη μεριά έχουμε ότι η Y είναι συνεχής σαν διαφορίσιμη , άρα υπάρχει περιοχή N του r με $Y(N) \subset A$. Φανερά τώρα έχουμε ότι :

$$h|_N = F^{-1} \cdot Y|_N .$$

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω οι F^{-1} και Y είναι διαφορίσιμες έτσι και η σύνθεσή τους $F^{-1} \cdot Y|_N$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $r \in Y^{-1}(W)$. Επειδή όμως το r είναι τυχαίο σημείο του $Y^{-1}(W)$, συμπεραίνουμε ότι η h είναι διαφορίσιμη σ'όλο το $Y^{-1}(W)$. Ξέρουμε ότι η h είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1) σαν σύνθεση των αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων X^{-1} , Y .

Για να τελειώσουμε την απόδειξη , μένει ακόμη να αποδείξουμε ότι και η h^{-1} είναι διαφορίσιμη . Αυτό όμως μπορεί να γίνει εύκολα αν δουλέψουμε όπως στην περίπτωση της h και αυτό γιατί $h^{-1} = Y^{-1} \cdot X$. Μετά από αυτά έχουμε ότι η h είναι αμφιδιαφόριση .

Η παραπάνω πρόταση μας βοηθάει να δώσουμε τον παρακάτω καλό ορισμό .

Ορισμός 2.3.1. Ας είναι $f:V \subset S \rightarrow R$ μια συνάρτηση , που ορίζεται στο ανοιχτό υποσύνολο V της κανονικής επιφάνειας S . Η f θα λέγεται διαφορίσιμη στο σημείο $p \in V$, αν για κάποιο σύστημα συντεταγμένων $X:U \subset R^2 \rightarrow S$ με $p \in X(U) \subset V$, η σύνθεση $f \circ X:U \subset R^2 \rightarrow R$ είναι διαφορίσιμη στο $X^{-1}(p)$. Η f θα λέγεται διαφορίσιμη σ'όλο το V αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του V .

Παρατήρηση . Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι καλός , δηλαδή δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων που παίρνουμε για να κάνουμε τον έλεγχο . Πραγματικά , αν $Y:V \subset R^2 \rightarrow S$ είναι άλλο ένα σύστημα συν-



τεταγμένων γύρω από το σημείο p τότε η σύνθεση $f \circ Y = (f \circ X) \circ (X^{-1} \circ Y) = (f \circ X) \circ h$ είναι διαφορίσιμη σαν σύνθεση των διαφορίσιμων απεικονίσεων $f \circ X$ και h . Επίσης το σύνολο $V \subset S$ είναι ανοιχτό του S ως προς την επαγόμενη τοπολογία από το R^3 .

Δίνουμε στη συνέχεια ένα ενδιαφέρον παράδειγμα για διαφορίσιμες συναρτήσεις $f: V \subset S \rightarrow R$.

Παράδειγμα 2.3.1. Έστω $V \subset S$ ένα ανοιχτό υποσύνολο της κανονικής επιφάνειας S και $W \subset R^3$ μια περιοχή του R^3 τέτοια ώστε $V \subset W$. Έστω επίσης $f: W \rightarrow R$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε η $f|_V: V \rightarrow R$ είναι διαφορίσιμη.

Πραγματικά, αν $X: U \subset R^2 \rightarrow S \subset R^3$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε η $f \circ X: U \rightarrow R$ είναι διαφορίσιμη σαν σύνθεση διαφορίσιμων συναρτήσεων. Αλλά $f|_V \circ X = f \circ X$. Έτσι σύμφωνα με τον ορισμό 2.3.1 η $f|_V$ είναι διαφορίσιμη, αφού η $f|_V \circ X$ είναι διαφορίσιμη.

Άσκηση. Αν S είναι μια κανονική επιφάνεια του R^3 και $p_0 \in R^3$, τότε η $f: S \rightarrow R; p \mapsto f(p) = |p - p_0|^2$, όπου $|p - p_0|^2$ είναι το τετράγωνο της απόστασης στον R^3 των σημείων p και p_0 , είναι διαφορίσιμη. Η συνάρτηση $g: S \rightarrow R; p \mapsto g(p) = |p - p_0|$ είναι διαφορίσιμη;

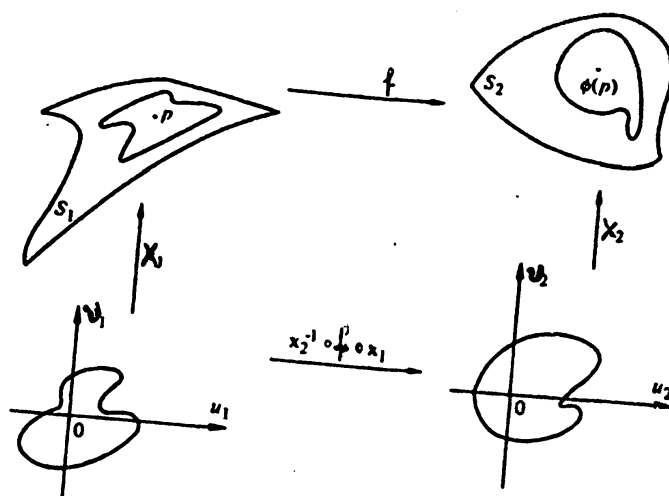
Το επόμενο βήμα μας είναι να δούμε πότε μια συνεχής απεικόνιση $f: V \subset S_1 \rightarrow S_2$ μεταξύ δύο κανονικών επιφανειών θα λέγεται διαφορίσιμη σ' ένα σημείο $p \in V$:

Ορισμός 2.3.2. Δίνεται μια συνεχής απεικόνιση $f: V \subset S_1 \rightarrow S_2$, μεταξύ δύο κανονικών επιφανειών S_1 και S_2 . Η f θα λέγεται διαφορίσιμη στο σημείο $p \in V$, αν για δύο συστήματα συντεταγμένων

$X_1: U_1 \subset R^2 \rightarrow S_1$, $X_2: U_2 \subset R^2 \rightarrow S_2$ με $p \in X_1(U_1)$ και $f(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$; η απεικόνιση (σχήμα 21) $X_2^{-1} \circ f \circ X_1: U_1 \rightarrow U_2$ είναι



διαφορίσιμη στο σημείο $q = \chi_1^{-1}(p)$. Ειδικότερα μια απεικόνιση $f: V \subset S_1 \rightarrow S_2$ θα λέγεται διαφορίσιμη στο V , αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του V .



σχήμα 21

Τέλος μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f: S_1 \rightarrow S_2$ μεταξύ δύο κανονικών επιφανειών S_1 και S_2 με $f(S_1) = S_2$, η οποία έχει μια διαφορίσιμη αντίστροφη $f^{-1}: S_2 \rightarrow S_1$, θα λέγεται αμφιδιαφορίσιμη. Σε μια τέτοια κατάσταση οι επιφάνειες S_1 και S_2 θα λέγονται αμφιδιαφορικές.

Παρατήρηση. Η αμφιδιαφορίσιμη στη μελέτη των κανονικών επιφανειών παίζει τον ίδιο ρόλο όπως ο ισομορφισμός μεταξύ γραμμικών χώρων (διανυσματικών χώρων). Δηλαδή δύο αμφιδιαφορικές κανονικές επιφάνειες από απόψεως διαφορισιμότητας δεν θεωρούνται διαφορετικές (θέμα της διαφορικής τοπολογίας).

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω για να αποφασίσουμε αν μια απεικόνιση $f: V \subset S_1 \rightarrow S_2$ μεταξύ δύο κανονικών επιφανειών είναι διαφορίσιμη πρέπει να πάρουμε συστήματα συντεταγμένων X της μιας επιφάνειας και Y της άλλης και να δούμε μετά αν η σύνθεση $Y^{-1} \circ f \circ X$ είναι διαφορίσιμη. Είναι φανερό πως αυτή η διαδικασία μερικές φορές μας μπλέκει σε πολλές και ανιαρές πράξεις. Οι παρακάτω δύο προτάσεις απλοποιούν τη δουλειά αυτή σε μερικές περιπτώσεις.

Πρόταση 2.3.2. Αν $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε η $X^{-1}: X(U) \subset S \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Αν p είναι ένα σημείο του $X(U)$ και $Y: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι άλλο ένα σύστημα συντεταγμένων της S γύρω από το p , τότε σύμφωνα με την πρόταση 2.2.1 η απεικόνιση $X^{-1} \circ Y: Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$, όπου $W = X(U) \cap Y(U)$, είναι διαφορίσιμη (και μάλιστα αμφιδιαφόριση). Επειδή όμως η $X^{-1} \circ Y$ είναι διαφορίσιμη, τότε σύμφωνα με τον ορισμό 2.3.1 η απεικόνιση $X^{-1}: X(U) \subset S \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ είναι διαφορίσιμη. Περισσότερο ακόμη μπορούμε να πούμε ότι η X είναι αμφιδιαφόριση, αφού έχει διαφορίσιμη αντίστροφη.

Πρόταση 2.3.3. Δίνονται δύο κανονικές επιφάνειες S_1 και S_2 . Αν V είναι μια περιοχή του $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε $S_1 \subset V$ και $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση τέτοια ώστε $\phi(S_1) \subset S_2$, τότε η απεικόνιση $\phi|_{S_1}: S_1 \rightarrow S_2$ είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Ας είναι p ένα σημείο της S_1 και

$$X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad Y: U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$$

δύο συστήματα συντεταγμένων γύρω από τα σημεία p και $\phi(p)$ αντίστοιχα και έτσι ώστε $p \in X(U_1)$, $\phi(X(U_1)) \subset Y(U_2)$.

Τότε η απεικόνιση

$$Y^{-1} \circ \phi \circ X: U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^2$$

είναι διαφορίσιμη στο $X^{-1}(p)$ σαν σύνθεση των διαφορίσιμων απεικονίσεων Y^{-1} και $\phi \circ X$.

Επειδή όμως $Y^{-1} \circ \phi \circ X = Y^{-1} \circ \phi|_{S_1} \circ X$ συμπεραίνουμε σύμφωνα με τον ορισμό 2.3.2

πως η $\phi|_{S_1}$ είναι διαφορίσιμη στο p και επειδή το p είναι τυχαίο σημείο, έχουμε ότι η $\phi|_{S_1}$ είναι διαφορίσιμη σ'όλη την S_1 .



Ας δούμε τώρα σε δύο παραδείγματα πως χρησιμοποιούνται οι παραπάνω δύο προτάσεις .

Παράδειγμα 2.3.2 . Δίνεται η κανονική επιφάνεια της σφαίρας , ακτίνας 1 , δηλαδή

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \quad \text{και η απεικόνιση}$$

$$A : S^2 \rightarrow S^2 : (x,y,z) \mapsto A(x,y,z) = (-x,-y,-z) \quad ,$$

η αντιδιαμετρική απεικόνιση όπως λέγεται .

Θα δούμε τώρα πως αυτή η απεικόνιση είναι διαφορίσιμη . Πραγματικά , η απεικόνιση $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto F(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ είναι διαφορίσιμη (έχει διαφορίσιμες συναρτήσεις συντεταγμένων) . Σύμφωνα λοιπόν με την πρόταση 2.3.3 η απεικόνιση $F|_{S^2} = A$ θα είναι διαφορίσιμη .

Παράδειγμα 2.3.3 . Αν $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ είναι η κανονική επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας 1 και $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ η κανονική επιφάνεια ελλειψοειδής , τότε η απεικόνιση

$$A : S^2 \rightarrow M : (x,y,z) \mapsto A(x,y,z) = (ax, by, cz)$$

είναι διαφορίσιμη .

Πραγματικά , η απεικόνιση $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto F(x,y,z) = (ax, by, cz)$ είναι διαφορίσιμη (έχει διαφορίσιμες συναρτήσεις συντεταγμένων) και συνεπώς η $A = F|_{S^2}$ είναι διαφορίσιμη σύμφωνα με την πρόταση 2.3.3 .

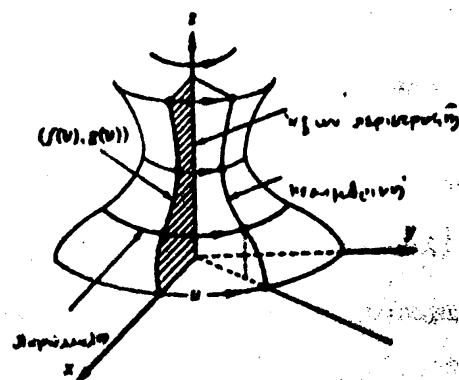
Τελειώνοντας αυτή τη παράγραφο , ας δούμε ένα βασικό παράδειγμα κανονικής επιφάνειας , που λέγεται επιφάνεια εκ περιστροφής (surface of revolution) .

Παράδειγμα 2.3.4. Ας πάρουμε μια απλή κανονική καμπύλη του επιπέδου xz



την $c: I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto c(v) = (f(v), g(v))$

δηλαδή $x = f(v)$, $z = g(v)$ τέτοια ώστε $f(v) > 0$. Ας αρχίσουμε τώρα να περιστρέφουμε την εικόνα $c(I)$ γύρω από τον άξονα Oz . Μετά από μια πλήρη περιστροφή η καμπύλη μας έχει διαγράψει ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}^3$, το οποίο είναι εύκολο να αποδείξει κανένας πως είναι κανονική επιφάνεια. Πραγματικά, αν συμβολίσουμε με u την γωνία περιστροφής τότε η απεικόνιση $\chi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto \chi(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$ είναι παραμέτρηση του συνόλου S (γιατί ;). Επιφάνειες που γίνονται κατ'αυτό τον τρόπο λέγονται επιφάνειες εκ περιστροφής (σχήμα 22).



σχήμα 22

Σε μια επιφάνεια εκ περιστροφής, οι διάφορες θέσεις της τροχιάς $c(I)$ λέγονται μεσημβρινοί (meridians), ενώ οι καμπύλες που διαγράφουν τα σημεία της $c(I)$ κατά την περιστροφή (και οι οποίες είναι περιφέρειες) λέγονται παράλληλοι (parallels). Τέλος η καμπύλη c λέγεται και γενέτειρα καμπύλη της επιφάνειας εκ περιστροφής.

Άσκηση. Δείξτε ότι το σύνολο S του παραδείγματος 2.3.3 είναι κανονική επιφάνεια.



Άσκηση . Κάνετε μια αμφιδιαφόριση μεταξύ μοναδιαίας σφαίρας και ελλειψοειδούς .

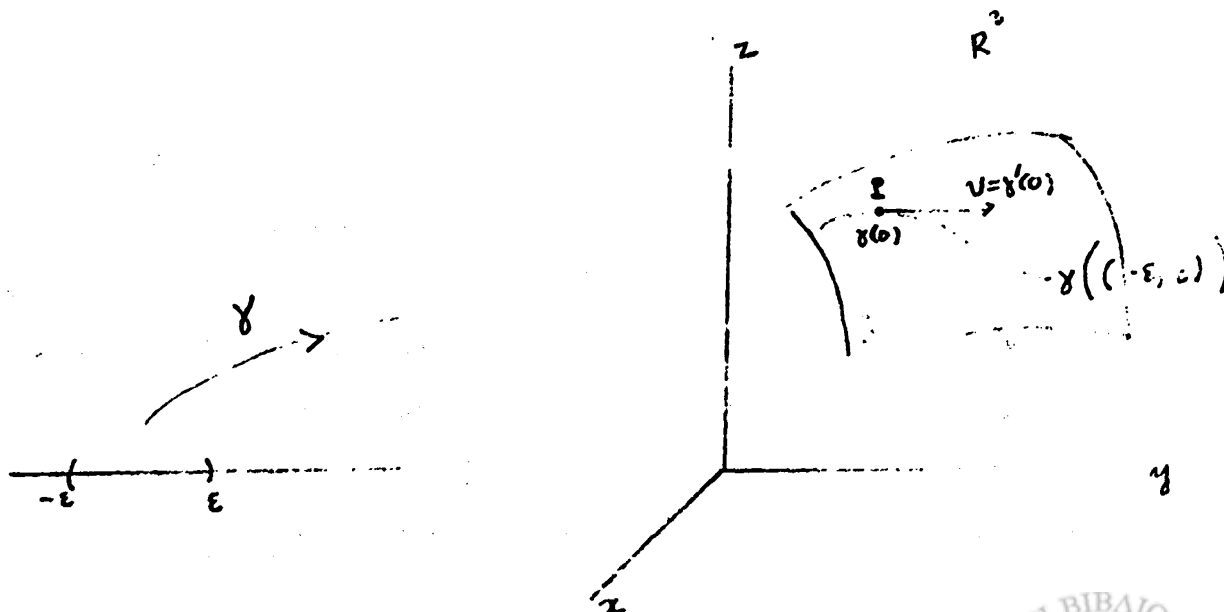
Άσκηση . Δείξτε ότι η σχέση " S_1 αμφιδιαφορική της S_2 " είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των κανονικών επιφανειών .

2.4. Εφαπτόμενο επίπεδο κανονικής επιφάνειας - Διαφορικό μιας απεικόνισης μεταξύ επιφανειών-Προσανατολισιμες επιφάνειες .

Διαιοθητικά καταλαβαίνει κάποιος πως σε κάθε σημείο μια κανονικής επιφάνειας έχουμε και ένα εφαπτόμενο επίπεδο . Θα δούμε πραγματικά πως η συνθήκη 3 του ορισμού 2.2.2 μας εξασφαλίζει ένα εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο μιας κανονικής επιφάνειας S .

Ας δώσουμε πρώτα τον παρακάτω ορισμό .

Ορισμός 2.4.1 . Έστω S μια κανονική επιφάνεια και p ένα σημείο της . Ένα διάνυσμα $v \in T_p R^3$ λέγεται εφαπτόμενο διάνυσμα της επιφάνειας S στο p , αν υπάρχει μια καμπύλη $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow S$, τέτοια ώστε $\gamma(0) = p$ και

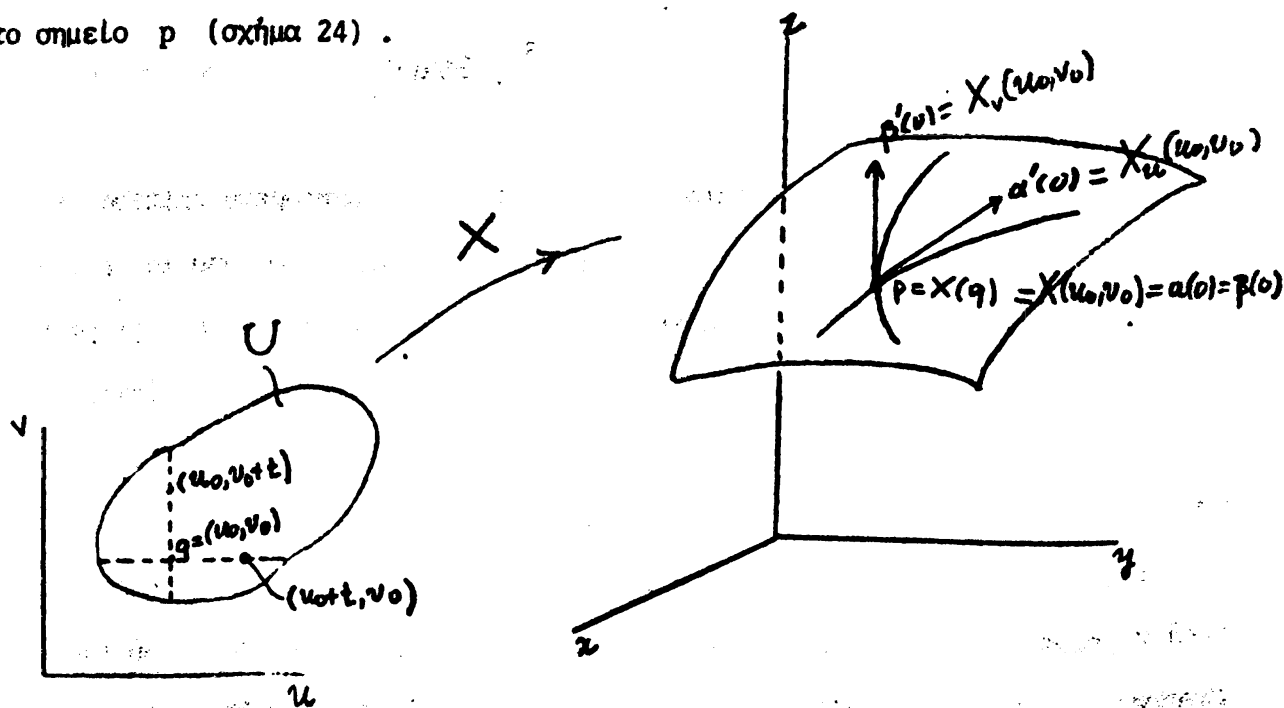


σχήμα 23



$\gamma'(0) = v$ ή όπως αλλιώς λέμε αν υπάρχει μια καμπύλη της επιφάνειας από το p με αρχική ταχύτητα v (σχήμα 23) .

Παράδειγμα 2.4.1. Αν p είναι ένα σημείο μια κανονικής επιφάνειας S και $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S: (u,v) \mapsto X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ ένα σύστημα συντεταγμένων της S γύρω από το σημείο p , με $p = X(q) = X(u_0, v_0)$, (όπου $q = (u_0, v_0)$) τότε τα διανύσματα $X_u(u_0, v_0)$, $X_v(u_0, v_0)$ είναι εφαπτόμενα διανύσματα της S στο σημείο p (σχήμα 24) .



σχήμα 24

Πραγματικά, οι καμπύλες :

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow S: t \mapsto \alpha(t) \stackrel{\text{ορ}}{=} X(u_0 + t, v_0)$$

$$\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow S: t \mapsto \beta(t) \stackrel{\text{ορ}}{=} X(u_0, v_0 + t)$$

είναι καμπύλες της επιφάνειας με $\alpha(0) = p$, $\beta(0) = p$ και $\alpha'(0) = X_u(u_0, v_0)$, $\beta'(0) = X_v(u_0, v_0)$. Οι καμπύλες α, β λέγονται παραμετρικές γραμμές της S .

ως προς τη παραμέτρηση $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$.

Θεωρούμε τώρα ένα σύστημα συντεταγμένων

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S : (u, v) \mapsto X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

γύρω από ένα σημείο $p = X(q) = X(u_0, v_0)$, όπου $q = (u_0, v_0) \in U$.

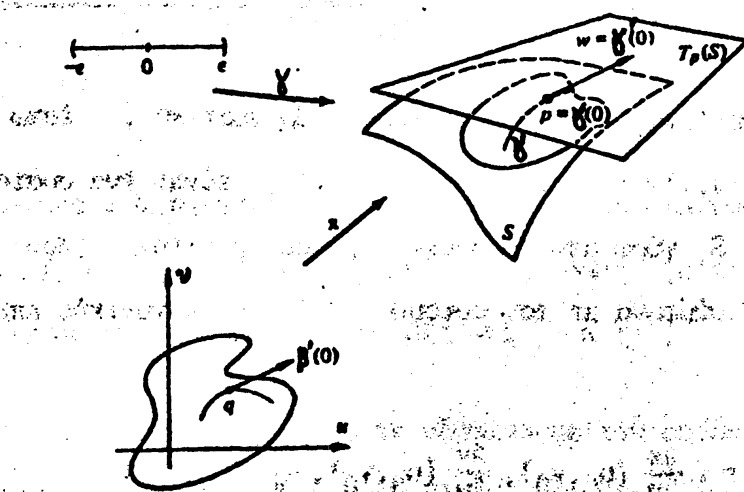
Επειδή η απεικόνιση X είναι κανονική στο q , έχουμε πως η παράγωγος απεικόνιση $dX_q : T_q \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$ είναι αμφιμονοσήμαντη και σύμφωνα με γνωστό συμπέρασμα από τη Γραμμική Άλγεβρα , έχουμε πως το πεδίο τιμών $dX_q(T_q \mathbb{R}^2)$ είναι ένας διανυσματικός υποχώρος διάστασης 2 του $T_p \mathbb{R}^3$, δηλαδή ένα επίπεδο που το λέμε εφαπτόμενο επίπεδο της S στο p .

Βέβαια από αυτή τη διαδικασία φαίνεται πως το εφαπτόμενο επίπεδο στο p , εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων που διαλέγουμε γύρω από το p . Αυτή η κατάσταση όμως δεν είναι επιθυμητή . Θα δούμε πως αυτό δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα , δηλαδή το εφαπτόμενο επίπεδο είναι ανεξάρτητο από το σύστημα συντεταγμένων . Για το σκοπό αυτό ας συμβολίσουμε με $T_p(S)$ το σύνολο των εφαπτομένων διανυσμάτων της S στο p . Το σύνολο $T_p(S)$ δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων . Στόχος μας είναι να δούμε ότι $dX_q(T_q \mathbb{R}^2) \equiv T_p(S)$, οπότε πραγματικά το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο p δεν θα εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων και θα το συμβολίζουμε απλά με $T_p(S)$. Η παρακάτω πρόταση μας δίνει αυτό που θέλουμε .

Πρόταση 2.4.1. Έστω S μια κανονική επιφάνεια και p ένα σημείο της . Ας πάρουμε ένα σύστημα συντεταγμένων $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S : (u, v) \mapsto X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ της S γύρω από το p με $X(q) = p$, όπου $q = (u_0, v_0) \in U$. Το σύνολο των εφαπτομένων διανυσμάτων της S στο p , δηλαδή το σύνολο $T_p(S)$ ταυτίζεται με το σύνολο (επίπεδο) $dX_q(T_q \mathbb{R}^2)$.

Απόδειξη . Αν w είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της S στο $p = X(q)$, τότε σύμφωνα με τον ορισμό 2.4.1 συμπεραίνουμε πως υπάρχει μια καμπύλη $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow X(U) \subset S$ με $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = w$. Είναι φανερό ότι η διαφορί-

σμη απεικόνιση $\beta = X^{-1} \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ είναι μια καμπύλη στο U . Από την $\beta = X^{-1} \circ \gamma$, έχουμε εύκολα ότι $\gamma = X \circ \beta$. Έτσι εφαρμόζοντας τον κανόνα σύνθετης παραγώγισης (κοίταξε ορισμό 2.1.2) έχουμε : $\gamma'(0) = dX_q(\beta'(0))$ ή $w = dX_q(\beta'(0))$. Αυτή η τελευταία σχέση μας λέει ότι $w \in dX_q(T_q R^2)$, αφού $\beta'(0) \in T_q R^2$. Όστε λοιπόν έχουμε : Αν $w \in T_q(S)$, τότε $w \in dX_q(T_q R^2)$ (σχήμα 25).



σχήμα 25

Αντίστροφα, έστω $w \in dX_q(T_q R^2)$, δηλαδή $w = dX_q(v)$, όπου $v \in T_q R^2$. Θα δείξουμε ότι το w είναι εφαπτόμενο διάνυσμα, δηλαδή $w \in T_p S$, οπότε έχουμε τελειώσει την απόδειξή μας.

Πραγματικά, η $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow U : t \mapsto \beta(t) = q + tv$, είναι μια καμπύλη του R^2 που έχει διάνυσμα ταχύτητας στο σημείο q (για $t=0$) το v (γιατί ;). Τέλος η απεικόνιση $\gamma = X \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U) \subset S$ είναι μια καμπύλη της S , με $\gamma(0) = X \circ \beta(0) = X(\beta(0)) = X(q) = p$ και

$$\gamma'(0) \stackrel{\text{ορισμός 2.1.2}}{=} dX_q(\beta'(0)) = dX_q(v) = w.$$

Άρα το διάνυσμα w είναι εφαπτόμενο της επιφάνειας S στο σημείο p , σύμφωνα με τον ορισμό 2.4.1. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως $T_p(S) \equiv d\chi_q(T_q R^2)$.

Παρατήρηση. Όπως είδαμε παραπάνω σε κάθε σημείο p μιας κανονικής επιφάνειας S , υπάρχει ένα εφαπτόμενο επίπεδο $T_p(S)$ που αποτελείται από όλα τα διανύσματα τα εφαπτόμενα της S στο σημείο p .

Μπορούμε να βρούμε μια βάση αυτού του εφαπτόμενου επιπέδου (δηλαδή δύο διανύσματα εφαπτόμενα της S στο p τα οποία είναι και γραμμικά ανεξάρτητα) ;

Θα δούμε πως αυτό μπορεί να γίνει πολύ εύκολα. Πραγματικά, έστω $\chi : U \subset R^2 \rightarrow S : (u,v) \mapsto \chi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας S γύρω από το σημείο p με $p = \chi(q)$, όπου $q = (u_0, v_0) \in U$. (Αυτό μπορεί να γίνει σύμφωνα με τον ορισμό 2.2.2 της κανονικής επιφάνειας). Τότε τα διανύσματα :

$$\chi_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \chi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) \chi(u_0, v_0)$$

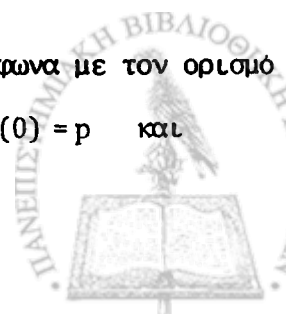
$$\chi_v(u_0, v_0) = \frac{\partial \chi}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) \chi(u_0, v_0)$$

είναι εφαπτόμενα διανύσματα της S στο σημείο p (παράδειγμα 2.4.1).

Επί πλέον γνωρίζουμε ότι $\chi_u(u_0, v_0) \times \chi_v(u_0, v_0) \neq$ μηδενικού διανύσματος, δηλαδή τα $\chi_u(u_0, v_0)$, $\chi_v(u_0, v_0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού το εξωτερικό τους γινόμενο δεν μηδενίζεται.

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως τα διανύσματα αυτά αποτελούν βάση του εφαπτόμενου επιπέδου $T_p(S)$. Είναι λοιπόν λογικό να προσπαθήσουμε να βρούμε τις συνιστώσες ενός εφαπτόμενου διανύσματος της S στο σημείο p , ως προς αυτή τη βάση.

Παίρνουμε λοιπόν ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p(S)$. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό 2.4.1 υπάρχει μια καμπύλη $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset R \rightarrow S$, τέτοια ώστε $\alpha(0) = p$ και



$\alpha'(0) = w$. Ας θεωρήσουμε τώρα την καμπύλη $\beta = X^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ και ας δεχτούμε ότι οι συναρτήσεις συντεταγμένων της είναι $(u(t), v(t))$, δηλαδή

$$\beta(t) = (u(t), v(t)) \quad (\text{κοίταξε άσκηση 3 της σελίδας 89}).$$

Τότε έχουμε $\alpha(t) = X \circ \beta(t) = X(u(t), v(t))$.

Άρα

$$w = \alpha'(0) = \left. \frac{d}{dt} X \circ \beta(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} X(u(t), v(t)) \right|_{t=0} =$$

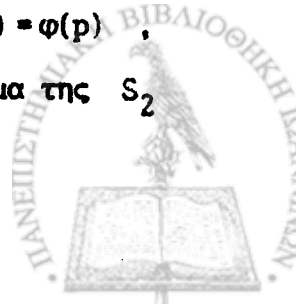
$$= X_u(u(0), v(0))u'(0) + X_v(u(0), v(0))v'(0) =$$

$$= X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0), \quad \text{σύμφωνα με τον κανόνα σύν-}$$

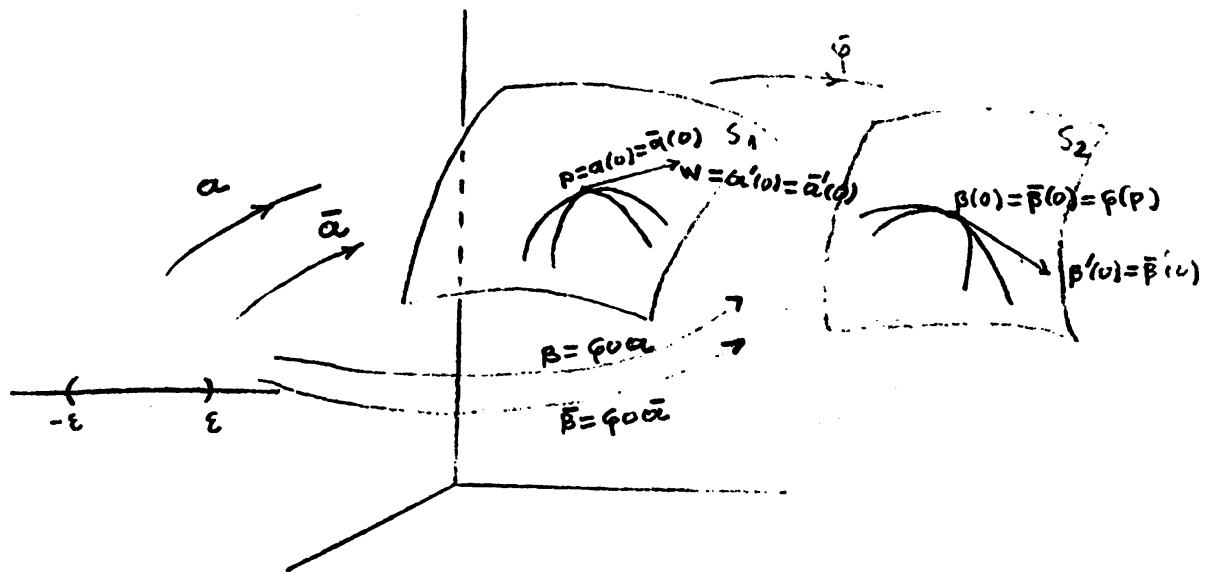
θετης παραγώνισης. Κατά συνέπεια οι συνιστώσες του διανύσματος w ως προς τη βάση $\{X_u(q), X_v(q)\}$ είναι $(u'(0), v'(0))$, όπου $(u(t), v(t))$ είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων της καμπύλης $\beta(t) = X^{-1} \circ \alpha(t)$.

Άσκηση. Αν $v \in T_p(S)$, τότε σύμφωνα με τον ορισμό υπάρχει καμπύλη $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ με $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = v$. Να βρείτε μια τέτοια καμπύλη και να αποδείξετε ότι δεν είναι μοναδική.

Ας κάνουμε μερικά σχόλια ακόμη, προτού ορίσουμε την παράγωγο απεικόνιση (ή διαφορικό) μιας διαφορίσιμης απεικόνισης $\varphi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ μεταξύ δύο κανονικών επιφανειών, όπου V είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο της S_1 . Αν p είναι ένα σημείο του V και w ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της S στο p , τότε υπάρχει μια καμπύλη $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \subset S_1$ (σύμφωνα με τον ορισμό του εφαπτόμενου διανύσματος) με $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = w$. Τότε η διαφορίσιμη απεικόνιση $\beta = \varphi \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_2$ είναι μια καμπύλη της S_2 με $\beta(0) = \varphi(\alpha(0)) = \varphi(p)$. Το διάνυσμα ταχύτητας $\beta'(0)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα της S_2 στο $\varphi(p)$, δηλαδή $\beta'(0) \in T_{\varphi(p)}(S_2)$. Ας πάρουμε και μια άλλη καμπύλη $\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \subset S_1$ με $\bar{\alpha}(0) = p$ και $\bar{\alpha}'(0) = w$. Τότε πάλι η $\bar{\beta} : \varphi \circ \bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_2$ είναι καμπύλη της S_2 με $\bar{\alpha}(0) = \varphi(\bar{\alpha}(0)) = \varphi(p)$, οπότε και πάλι το διάνυσμα ταχύτητας $\bar{\beta}'(0)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα της S_2 .



στο $\varphi(p)$, δηλαδή $\bar{\beta}'(0) \in T_{\varphi(p)}(S_2)$ (σχήμα 26).

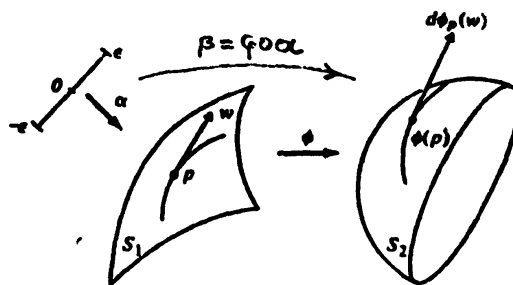


σχήμα 26

Εύλογο είναι τώρα το ερώτημα : Τι σχέση έχουν τα διανύσματα $\beta'(0)$, $\bar{\beta}'(0)$; Είναι εύκολο να δει κανένας ότι $\beta'(0) = \bar{\beta}'(0)$.

Άσκηση . Να δείξετε ότι $\beta'(0) = \bar{\beta}'(0)$.

Βλέπουμε λοιπόν από τα παραπάνω ότι, όποια καμπύλη α και να πάρουμε με $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = w$, τότε το διάνυσμα ταχύτητας της $\beta = \varphi \circ \alpha$ που παίρνουμε στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_{\varphi(p)}(S_2)$ είναι πάντα το ίδιο και εξαρτάται από το σημείο p , το διάνυσμα w και την απεικόνιση φ . Γι'αυτό ας το συμβολίσουμε $d\varphi_p(w)$. Μετά από αυτό έχει έννοια ο παρακάτω ορισμός (σχήμα 27).



σχήμα 27

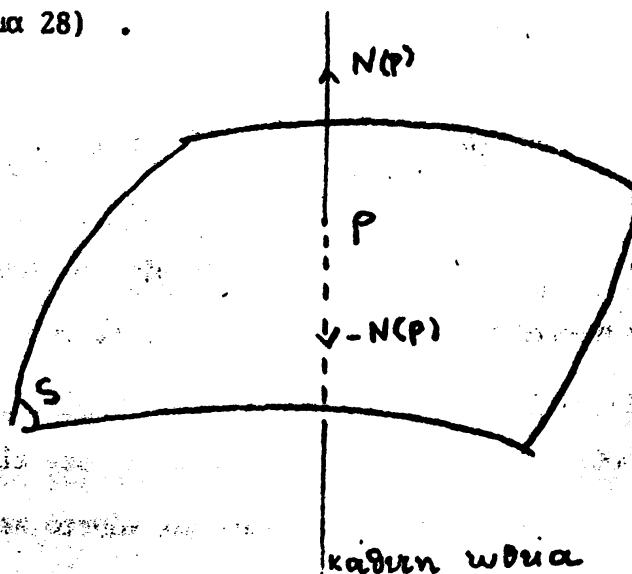


Ορισμός 2.4.2. Δίνεται η διαφορίσιμη απεικόνιση $\varphi: V \subset S_1 \rightarrow S_2$ και ένα σημείο p της S_1 τέτοιο ώστε $p \in V$. Η απεικόνιση $d\varphi_p: T_p(S_1) \rightarrow T_p(S_2): w \mapsto d\varphi_p(w)$ λέγεται παράγωγος απεικόνιση της φ στο p (ή διαφορικό της φ στο p).

Πρόταση 2.4.2. Έστω η διαφορίσιμη απεικόνιση $\varphi: V \subset S_1 \rightarrow S_2$ και p ένα σημείο στο V . Τότε το διαφορικό $d\varphi_p$ της φ στο p είναι μια γραμμική απεικόνιση.

Απόδειξη. Σαν άσκηση.

Θεωρούμε τώρα ένα σημείο p πάνω σε μια κανονική επιφάνεια S . Τότε μπορούμε να βρούμε δύο διανύσματα μοναδιαία (με μήκος μονάδα) και κάθετα στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_p(S)$. Τα διανύσματα αυτά λέγονται κάθετα και μοναδιαία διανύσματα στο σημείο p της S και αν το ένα είναι $N(p)$, τότε το άλλο είναι $-N(p)$. Και τα δύο αυτά διανύσματα βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία που περνά από το p και λέγεται κάθετη ευθεία στο σημείο p της επιφάνειας S (σχήμα 28).



σχήμα 28

Με τη βοήθεια αυτής της ευθείας μπορούμε να ορίσουμε τη γωνία δύο κανονικών επιφανειών που περνούν και οι δύο από ένα σημείο p . Έτσι θα λέμε γωνία δύο επιφανειών S_1 και S_2 σε ένα κοινό σημείο τους p την γωνία των καθέτων ευθειών στο σημείο p .

Πως όμως θα βρούμε τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα (για να βρούμε μετά τις κάθετες ευθείες) :

Με αυτό το ερώτημα θα ασχοληθούμε αμέσως. Ας πάρουμε λοιπόν ένα σύστημα συντεταγμένων $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S: (u,v) \mapsto X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ γύρω από το σημείο $p = X(q)$ μιας κανονικής επιφάνειας S , όπου $q = (u_0, v_0) \in U$.

Τότε τα διανύσματα $X_u(q)$, $X_v(q)$ είναι εφαπτόμενα διανύσματα της S στο p (παράδειγμα 2.4.1). Άρα το διάνυσμα $X_u(q) \times X_v(q)$ συμβολίζουμε $(X_u \times X_v)(q)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_p(S)$. Συνεπώς το διάνυσμα :

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} (q)$$

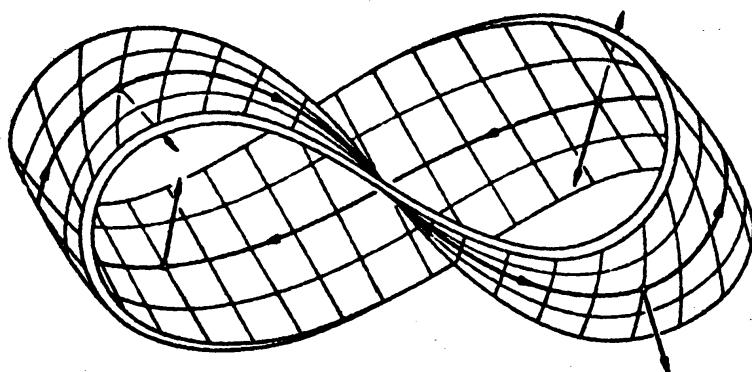
είναι ένα από τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα της S στο σημείο p . Έτσι μπορούμε να κάνουμε μια διαφορίσιμη απεικόνιση με πεδίο ορισμού το $X(U)$ ως :

$$N: X(U) \subset S \rightarrow \mathbb{R}^3: p \mapsto N(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} (X^{-1}(p)) .$$

Αυτή η διαφορίσιμη απεικόνιση μας δίνει σε κάθε σημείο p του $X(U)$ και ένα μοναδιαίο και κάθετο διάνυσμα στο σημείο p της S . Γι'αυτό λέγεται διαφορίσιμο μοναδιαίο και κάθετο διανυσματικό πεδίο στο $X(U)$.

Βέβαια όταν μας δοθεί μια κανονική επιφάνεια S δεν είναι πάντα σίγουρο πως μπορούμε να βρούμε ένα διαφορίσιμο μοναδιαίο και κάθετο πεδίο σε όλη την S , όπως φαίνεται στο σχήμα 29, όπου σαν S έχουμε πάρει την επιφάνεια που λέγεται λωρίδα του Möbius (Möbius strip). Αν όμως αυτό μπορεί να γίνει, δηλαδή μπορούμε να βρούμε ένα διαφορίσιμο, μοναδιαίο και κάθετο πεδίο σε





σχήμα 29

όλη την S , δηλαδή μια διαφορίσιμη απεικόνιση $N: S \rightarrow R^3: p \mapsto N(p)$, όπου $N(p)$ είναι ένα κάθετο και μοναδιαίο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_p(S)$, τότε η S λέγεται προσανατολίσιμη επιφάνεια (orientable surface).

Βέβαια από τη δουλειά που κάναμε παραπάνω βλέπουμε πως τοπικά κάθε επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη, δηλαδή στο $X(U)$ μπορούμε πάντα να βρούμε ένα διαφορίσιμο, μοναδιαίο και κάθετο πεδίο.

Παράδειγμα 2.4.2. Ας είναι $f: R^3 \rightarrow R$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση και α μια μη κρίσιμη τιμή της f , τότε όπως είναι γνωστό (πρόταση 2.2.2) το σύνολο $f^{-1}(\alpha) = \{(x, y, z) \in R^3: f(x, y, z) = \alpha\}$ είναι μια κανονική επιφάνεια την οποία είχαμε ονομάσει και επιφάνεια στάθμης.

Θα δούμε πως αυτή η επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη και μετά θα προσπαθήσουμε να βρούμε το εφαπτόμενο επίπεδο (εξέταση εφαπτομένου επιπέδου) σε ένα σημείο της (x_0, y_0, z_0) .

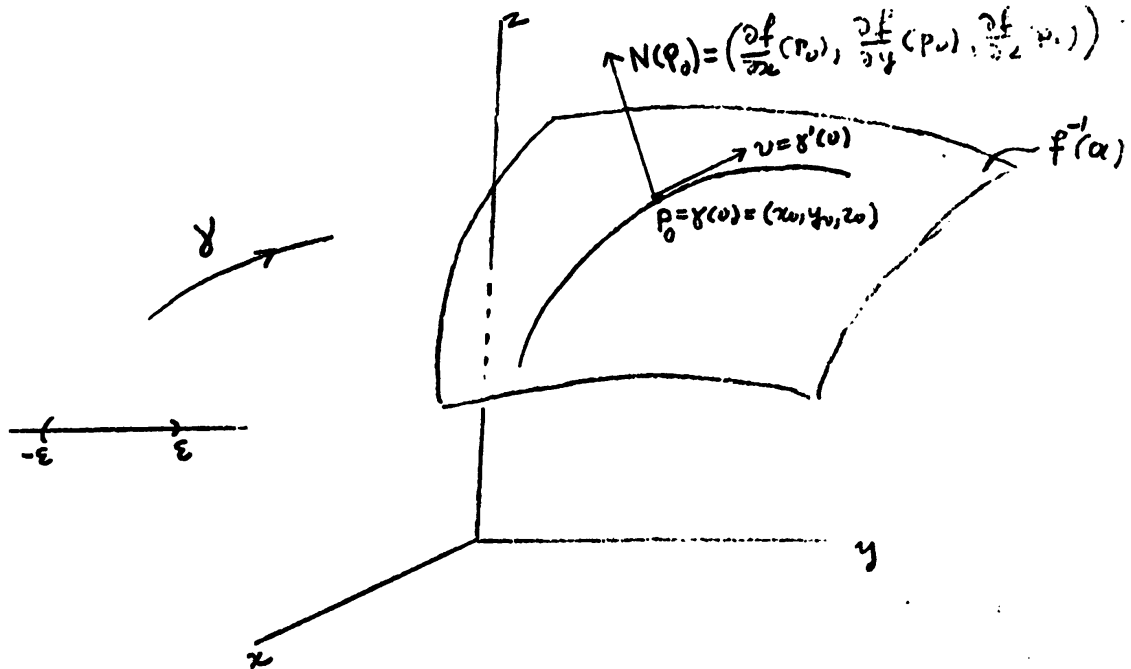
Ας πάρουμε ένα σημείο $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ της $f^{-1}(\alpha)$, θα δείξουμε ότι το διάνυσμα

$(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0), \frac{\partial f}{\partial z}(p_0))$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της $f^{-1}(\alpha)$

στο p_0 .



Για να αποδείξουμε ότι είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα αυτού του επιπέδου (σχήμα 30).



σχήμα 30

Πραγματικά, αν v είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της $f^{-1}(\alpha)$ στο p_0 , τότε σύμφωνα με τον ορισμό 2.4.1, υπάρχει μια καμπύλη $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow f^{-1}(\alpha) \subset \mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε $\gamma(0) = p_0$ και $\gamma'(0) = v$.

Αν $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$, (όπου $\gamma_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων της καμπύλης) θα έχουμε $f(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = \alpha$. Παραγωγίζοντας ως προς t με τον κανόνα σύνθετης παραγώγισης θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \frac{d\gamma_1}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \frac{d\gamma_2}{dt}(t) + \\ + \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \frac{d\gamma_3}{dt}(t) = 0. \end{aligned}$$

Για $t=0$ παίρνουμε:



$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \frac{dv_1}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \frac{dv_2}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \frac{dv_3}{dt}(0) = 0, \text{ διότι}$$

$$v(0) = (v_1(0), v_2(0), v_3(0)) = p_0.$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι τα διανύσματα

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0), \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \right), \left(\frac{dv_1}{dt}(0), \frac{dv_2}{dt}(0), \frac{dv_3}{dt}(0) \right) = v'(0) = v$$

είναι κάθετα, αφού το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν. Έτσι λοιπόν το

διάνυσμα $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0), \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \right)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο

της $f^{-1}(\alpha)$ στο σημείο p_0 . Άρα το

$$N(p_0) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0), \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \right)^2}}$$

είναι ένα

μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο p_0 . Γενικά λοιπόν στο σημείο $p = (x, y, z)$ της $f^{-1}(\alpha)$ το μοναδιαίο κάθετο θα είναι :

$$N(p) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(p) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(p) \right)^2}}$$

Έτσι λοιπόν η διαφορίσιμη απεικόνιση

$$N : f^{-1}(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^3 : p \mapsto N(p) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(p) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(p) \right)^2}}$$

είναι ένα διαφορίσιμο μοναδιαίο και κάθετο πεδίο σε όλη την $f^{-1}(\alpha)$, δηλαδή η

$f^{-1}(\alpha)$ είναι μια προσανατολισμένη επιφάνεια.



Ας βρούμε τώρα το εφαπτόμενο επίπεδο της $f^{-1}(\alpha)$ στο σημείο $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Από την πιο πάνω δουλειά συμπεραίνουμε ότι το διάνυσμα $(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0), \frac{\partial f}{\partial z}(p_0))$ είναι κάθετο σ' αυτό το επίπεδο. Αυτό όμως το επίπεδο περνάει και από το σημείο $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, έτσι η εξίσωση του επιπέδου που ζητάμε θα είναι :

$$(x-x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) + (y-y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) + (z-z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) = 0.$$

Παρατήρηση : Το μέτρο του διανύσματος $(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p))$ είναι

$\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x}(p))^2 + (\frac{\partial f}{\partial y}(p))^2 + (\frac{\partial f}{\partial z}(p))^2} \neq 0$ και αυτό γιατί μια τουλάχιστο από τις ποσότητες $\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)$ δεν μηδενίζεται αφού το α δεν είναι κρίσιμη τιμή της f .

Άσκηση 1 . Δίνεται η κανονική επιφάνεια $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, σφαίρας ακτίνας R . Να βρείτε ένα διαφορίσιμο, μοναδιαίο και κάθετο πεδίο πάνω σε όλη την S^2 .

Άσκηση 2 . Δίνεται μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, όπου U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Να δείξετε ότι το γράφημα Γ_f της f είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια. Να βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο σε ένα σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ του γραφήματος. Ένα γράφημα μπορούμε να το πάρουμε σαν επιφάνεια στάθμης κάποιας διαφορίσιμης συνάρτησης $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; (ποιάς ;)

Παρατηρήσεις : (1) Το παράδειγμα 2.4.2 και η άσκηση 2 παραπάνω μας εξηγούν γιατί είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε μη προσανατολίσιμες επιφάνειες (non orientable surfaces).

(2) Η προσανατολισιμότητα είναι ολική ιδιότητα (global property) των



επιφανειών (μας ενδιαφέρει ολόκληρη η επιφάνεια). Όπως είδαμε κάθε επιφάνεια είναι τοπικά προσανατολίσιμη.

Θεωρούμε τώρα μια προσανατολίσιμη επιφάνεια S . Σύμφωνα με τον ορισμό μας μπορούμε να βρούμε μια διαφορίσιμη απεικόνιση $N: S \rightarrow R^3$, $p \mapsto N(p)$, όπου $N(p)$ είναι ένα κάθετο και μοναδιαίο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_p(S)$ της S . Τότε όμως και η απεικόνιση $\bar{N}: S \rightarrow R^3$, $p \mapsto \bar{N}(p) = -N(p)$ είναι διαφορίσιμη και το $\bar{N}(p)$ είναι μοναδιαίο και κάθετο διάνυσμα στο $T_p(S)$. Έτσι όταν μια επιφάνεια S είναι προσανατολίσιμη, μπορούμε να βρούμε δύο διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία N και $-N$, που οι τιμές των είναι μοναδιαία διανύσματα και κάθετα στην επιφάνεια. Καθένα από αυτά λέγεται προσανατολισμός (orientation) της S . Έτσι κάθε προσανατολίσιμη συνεκτική επιφάνεια έχει δύο προσανατολισμούς. Όταν σε μια προσανατολίσιμη επιφάνεια S θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό, λέμε ότι έχουμε μια προσανατολισμένη επιφάνεια (oriented surface).

Παρατήρηση. Όταν λέμε ότι "Δίνεται μια προσανατολισμένη επιφάνεια", εννοούμε ότι έχουμε μια προσανατολίσιμη επιφάνεια με ένα συγκεκριμένο κάθετο διανυσματικό πεδίο. Έτσι η επιφάνεια της σφαίρας μπορεί να θεωρηθεί ως προσανατολισμένη με το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο ή ως προσανατολισμένη με το εσωτερικό μοναδιαίο κάθετο.

Ασκήσεις.

1. Δίνεται μια κανονική επιφάνεια S , που καλύπτεται μόνο με μια περιοχή συντεταγμένων. Τότε η S είναι προσανατολίσιμη.
2. Δίνεται μια κανονική επιφάνεια S , που καλύπτεται μόνο με δύο περιοχές συντεταγμένων V_1, V_2 ($V_1 \cup V_2 = S$). Αν η τομή $V_1 \cap V_2$ είναι συνεκτικό σύνολο, τότε η S είναι προσανατολίσιμη.
3. Ας είναι $X: U \subset R^2 \rightarrow S$ μια παραμέτρηση της επιφάνειας S . Αν $\gamma: I \rightarrow S$,



$t \rightarrow \gamma(t)$ είναι μια καμπύλη της S , ώστε $\gamma(I) \subset X(U)$, τότε υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις $u(t), v(t)$ με πεδίο ορισμού το I , έτσι ώστε :

$$\gamma(t) = X(u(t), v(t)) \quad , \quad \text{για όλα τα } t \in I \quad .$$

2.5. Παραμετρημένες επιφάνειες .

Στη σελίδα 27, τονίσαμε μια αξιόλογη διαφορά μεταξύ καμπυλών και επιφανειών. Έτσι ενώ η καμπύλη είναι μια απεικόνιση, επιφάνεια είναι ένα υποσύνολο S του R^3 , το οποίο μπορεί να καλυφθεί με τις εικόνες κάποιων απεικονίσεων (παραμετρήσεων). Αυτή η αντιμετώπιση, που κάναμε για τις επιφάνειες είναι η σωστή, όταν θέλουμε να μελετήσουμε τόσο τις τοπικές όσο και τις ολικές ιδιότητες των επιφανειών. Όμως θα μπορούσε κάποιος να αντιμετωπίσει τις επιφάνειες σαν απεικονίσεις, όπως ακριβώς τις καμπύλες. Αυτό γίνεται σε αρκετά εγχειρίδια κλασσικής Διαφορικής Γεωμετρίας. Αυτή όμως η αντιμετώπιση μας περιορίζει συνήθως μόνο στη μελέτη τοπικών ιδιοτήτων των επιφανειών. Παρά το γεγονός αυτό θα ήταν χρήσιμο να δούμε και αυτή την αντιμετώπιση.

Ορισμός 2.5.1. Μια παραμετρημένη επιφάνεια (parametrized surface) είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $X: U \subset R^2 \rightarrow R^3, (u, v) \rightarrow X(u, v)$, όπου U είναι ένα ανοικτό σύνολο του R^2 . Αν για κάθε $q \in U$ η $dX_q: T_q R^2 \rightarrow T_{X(q)} R^3$ είναι αμφιμονοσήμαντη (δηλαδή, τα διανύσματα X_u, X_v είναι γραμμικά ανεξάρτητα), τότε η παραμετρημένη επιφάνεια $X: U \subset R^2 \rightarrow R^3$ λέγεται κανονική παραμετρημένη επιφάνεια (regular parametrized surface). Ένα σημείο $q_0 \in U$, όπου η $dX_{q_0}: T_{q_0} R^2 \rightarrow T_{X(q_0)} R^3$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντη λέγεται ιδιάζων σημείο (singular point) της παραμετρημένης επιφάνειας $X: U \subset R^2 \rightarrow R^3$.

Παρατήρηση : Ο ορισμός 2.5.1 σε αντίθεση με τον ορισμό 2.2.2 επιτρέπει στην παραμετρημένη επιφάνεια να έχει αυτοτομές .



Παράδειγμα 2.5.1. Θεωρούμε την κανονική καμπύλη $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \gamma(t)$

με μη μηδενική καμπυλότητα $k(t)$. Τότε η απεικόνιση

$$X: U = I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(t, v) = \gamma(t) + v\gamma'(t), \quad \text{όπου } (t, v) \in U$$

είναι μια παραμετρημένη επιφάνεια. Για τη παραμετρημένη επιφάνεια X έχουμε:

$$X_t = \frac{\partial X}{\partial t} = \gamma'(t) + v\gamma''(t)$$

$$X_v = \frac{\partial X}{\partial v} = \gamma'(t)$$

και

$$X_t \times X_v = v\gamma''(t) \times \gamma'(t).$$

Όμως η καμπυλότητα της γ , δίνεται από τη σχέση

$$k(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3},$$

(άσκηση 2, σελίδα 25). Έτσι επειδή η γ έχει μη μηδενική καμπυλότητα θα ισχύει ότι

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) \neq 0, \quad \text{για κάθε } t \in I.$$

Συνεπώς η απεικόνιση

$$X: W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(t, v) = \gamma(t) + v\gamma'(t),$$

όπου $W = \{(t, v) \in \mathbb{R}^2 : t \in I \text{ και } v \in \mathbb{R} \text{ με } v \neq 0\}$, είναι μια κανονική παραμετρημένη επιφάνεια, αφού τότε $X_t \times X_v \neq 0$, για όλα τα $(t, v) \in W$. Αυτή η παραμετρημένη επιφάνεια λέγεται εφαπτόμενη επιφάνεια (tangent surface) της κανονικής καμπύλης γ .

Κλείνοντας αυτή τη παράγραφο, θα δείξουμε με μια πρόταση ότι για τη μελέτη τοπικών ιδιοτήτων των επιφανειών, οι ορισμοί 2.2.2 και 2.5.1 είναι "ισοδύναμοι".



Πρόταση 2.5.1. Ας είναι $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια κανονική παραμετρημένη επιφάνεια και $q = (u_0, v_0) \in U$. Τότε υπάρχει περιοχή W του q , τέτοια ώστε το υποσύνολο $X(W)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι κανονική επιφάνεια σύμφωνα με τον ορισμό 2.2.2.

Απόδειξη. Έστω $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, με

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

η κανονική παραμετρημένη επιφάνεια. Λόγω της κανονικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0.$$

Ορίζουμε τώρα τη διαφορίσιμη απεικόνιση $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, ως

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v, t) \in U \times \mathbb{R}.$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα της F στο $(u_0, v_0, 0) = q$ είναι :

$$\det J_F(q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} (u_0, v_0, 0) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$$

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης υπάρχει περιοχή W_1 του q και περιοχή W_2 του $F(q) = X(q)$ ώστε η $F : W_1 \rightarrow W_2$ να είναι αμφιδιαμόρφωση. Τώρα θέτοντας $W = U \cap W_1$, παρατηρούμε ότι $F|_W = X|_W$. Έτσι το υποσύνολο $X(W)$ είναι αμφιδιαφορικό με το W και συνεπώς το $X(W)$ είναι κανονική επιφάνεια σύμφωνα με τον ορισμό 2.2.2.

Παρατηρήσεις : (1) Είναι φανερό πως για μια κανονική επιφάνεια S κάθε σύστημα συντεταγμένων ή παραμέτρηση $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι κανονική παραμετρημένη επιφάνεια.



(2) Πολλές έννοιες και σχέσεις ισχύουν τόσο για κανονικές επιφάνειες όσο και για κανονικές παραμετρημένες επιφάνειες .

Άσκηση . Θεωρούμε τη κανονική καμπύλη $\gamma: I \rightarrow R^3$, $s \mapsto \gamma(s)$ με παράμετρο το μήκος τόξου και μη μηδενική καμπυλότητα $k(s)$. (i) Η απεικόνιση

$$X(s, v) = \gamma(s) + R(n(s) \cos v + b(s) \sin v) , \quad R = \text{σταθ.} \neq 0$$

είναι μια παραμετρημένη επιφάνεια , όπου $n(s)$, $b(s)$ είναι αντίστοιχα το πρώτο και δεύτερο κάθετο της καμπύλης γ .

(ii) Εξετάστε πότε η $X(s, v)$ είναι κανονική παραμετρημένη επιφάνεια .



III. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

3.1. Απεικόνιση του Gauss και οι βασικές της ιδιότητες .

Ας ξαναδούμε σύντομα λίγα στοιχεία από τη παράγραφο 2.4. σχετικά με τις προσανατολίσιμες επιφάνειες . Είδαμε πως όταν πάρουμε ένα σημείο p μιας κανονικής επιφάνειας S μπορούμε να βρούμε δύο διανύσματα μοναδιαία (μήκους 1) και κάθετα στο εφαπτόμενο της επίπεδο $T_p(S)$. Επίσης αν $X:U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων , τότε μπορούμε να βρούμε μια διαφορίσιμη απεικόνιση

$$N: X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3 : p \mapsto N(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} (X^{-1}(p)) ,$$

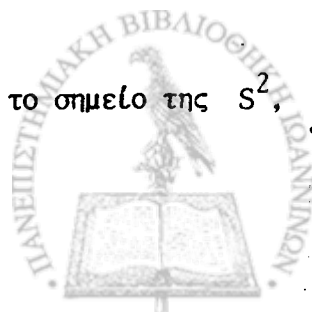
που σε κάθε σημείο $p \in X(U)$ μας δίνει σαν εικόνα ένα μοναδιαίο και κάθετο στο $T_p(S)$ διάνυσμα . Τέλος μια κανονική επιφάνεια S , για την οποία μπορούμε να βρούμε μια διαφορίσιμη απεικόνιση $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3 : p \mapsto N(p)$, που για κάθε σημείο $p \in S$ μας δίνει σαν εικόνα ένα μοναδιαίο και κάθετο στο $T_p(S)$ διάνυσμα , λέγεται προσανατολίσιμη επιφάνεια . Σ'αυτή τη περίπτωση το N το είπαμε προσανατολισμό της S . Μια επιφάνεια S με ένα προσανατολισμό N την ονομάσαμε προσανατολισμένη επιφάνεια . Είναι φανερό τότε ότι και το $-N$ είναι ένα διαφορίσιμο μοναδιαίο και κάθετο πεδίο στην S , ο άλλος προσανατολισμός της S . Σε όλο αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιούμε μόνο προσανατολισμένες επιφάνειες και θα προσέχουμε πάντα να δουλεύουμε χρησιμοποιώντας μόνο το N ή μόνο το $-N$ για να μη φτάνουμε σε αντιφάσεις .

Ορισμός 3.1.1. Έστω S μια προσανατολισμένη κανονική επιφάνεια και $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ η κανονική επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας 1 .

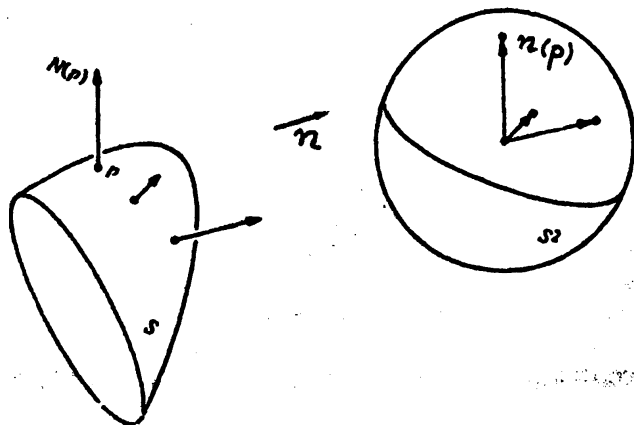
Σφαιρική απεικόνιση ή απεικόνιση του Gauss λέγεται η απεικόνιση

$$n: S \rightarrow S^2$$

που κατασκευάζεται ως εξής : η εικόνα $n(p)$ του $p \in S$ είναι το σημείο της S^2 ,



που παίρνουμε αν μεταφέρουμε το $N(p)$ παράλληλα έως ότου η αρχή του συμπίσει με την αρχή των συντεταγμένων (δηλαδή το κέντρο της S^2) (σχήμα 31).



σχήμα 31

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση του Gauss είναι διαφορίσιμη απεικόνιση και αυτό γιατί $n(p) = N(p)$ και η N είναι διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν p είναι ένα σημείο της S , τότε το διαφορικό της n στο p , δηλαδή η $dn_p: T_p(S) \rightarrow T_{n(p)}(S^2)$ είναι μια γραμμική απεικόνιση (πρόταση 2.4.2). Τα επίπεδα $T_p(S)$ και $T_{n(p)}(S^2)$ είναι παράλληλα σαν κάθετα σε παράλληλα διανύσματα, έτσι μπορούμε να πούμε ότι τα διανύσματα του $T_{n(p)}(S^2)$ ταυτίζονται με διανύσματα του $T_p(S)$, αν μεταφέρουμε παράλληλα το επίπεδο $T_{n(p)}(S^2)$ ώστε να ταυτιστεί με το $T_p(S)$. Μετά από αυτή τη ταύτιση μπορούμε να πούμε ότι το διαφορικό dn_p είναι μια γραμμική απεικόνιση του $T_p(S)$ στον εαυτό του (δηλαδή ένας γραμμικός μετασχηματισμός του $T_p(S)$). δηλαδή $dn_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$. Θα γράψουμε $L_p = -dn_p$ (το πρόσημο - μόνο για τεχνικούς λόγους). Θα χρησιμοποιήσουμε το L αντί του L_p , όταν το σημείο $p \in S$, στο οποίο δουλεύουμε είναι αυτονόητο.

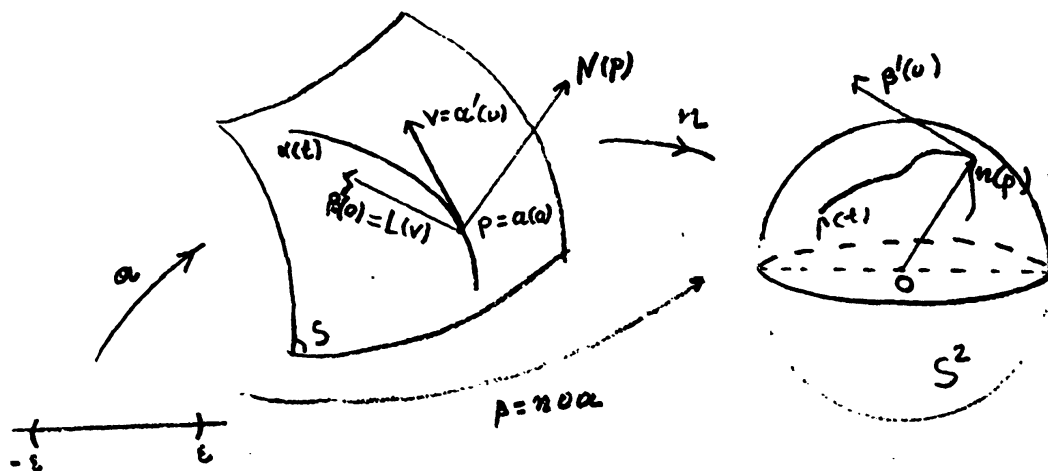
Ορισμός 3.1.2. Έστω S μια κανονική επιφάνεια. Ο γραμμικός μετασχη-



ματισμός (γραμμική απεικόνιση) $L = -d\eta_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ λέγεται απεικόνιση του Weingarten.

Είναι αξιοσημείωτο ότι πολλές τοπικές ιδιότητες των επιφανειών προκύπτουν από τη μελέτη της απεικόνισης του Weingarten.

Πως δουλεύει όμως η απεικόνιση του Weingarten; Δηλαδή όταν μας δοθεί ένα διάνυσμα $v \in T_p(S)$, ποιά είναι η εικόνα του το $L(v)$; Για να βρούμε την εικόνα δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι $L = -d\eta_p$ καθώς και τον ορισμό του διαφορικού μιας απεικόνισης σε σημείο (ορισμός 2.4.2). Για να βρούμε λοιπόν το $L(v)$, παίρνουμε μια καμπύλη $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, τέτοια ώστε $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = v$. Μετά θεωρούμε την καμπύλη $\beta = n \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2 : t \mapsto \beta(t) = n(\alpha(t)) = n(\alpha(t))$ ορισμός της n $N(\alpha(t)) = N \circ \alpha(t)$. Το διάνυσμα ταχύτητας $\beta'(0) = (N \circ \alpha)'(0)$ είναι σύμφωνα με τον ορισμό του διαφορικού η εικόνα $d\eta_p(v)$ του v (σχήμα 32). Δηλαδή: $L(v) = -(N \circ \alpha)'(0)$.



σχήμα 32

Παράδειγμα 3.1.1. Ας είναι S μια κανονική επιφάνεια και p_0 ένα σημείο της. Αν $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων της S γύρω από

το σημείο $p_0 = X(u_0, v_0)$, όπου $(u_0, v_0) \in U$, τότε είναι γνωστό (παράδειγμα 2.4.1) ότι τα διανύσματα $X_u(u_0, v_0)$, $X_v(u_0, v_0)$ είναι εφαπτόμενα, δηλαδή ανήκουν στο $T_{p_0}(S)$. Ας βρούμε τα $L(X_u(u_0, v_0))$ και $L(X_v(u_0, v_0))$. Θεωρούμε την καμπύλη $\alpha(t) = X(u_0 + t, v_0)$. Είναι φανερό ότι $\alpha(0) = X(u_0, v_0) = p_0$ και $\alpha'(0) = X_u(u_0, v_0)$. Τότε όμως $n \circ \alpha(t) = n(\alpha(t)) = N(\alpha(t)) = N(u_0 + t, v_0)$. Άρα, $(N \circ \alpha)'(0) = N(u_0 + t, v_0)'(0) = N_u(u_0, v_0)$, σύμφωνα με τον κανόνα σύνθετης παραγώγισης. Γενικά λοιπόν θα έχουμε $L(X_u) = -N_u$. Όμοια $L(X_v) = -N_v$.

Προτού προχωρήσουμε μας χρειάζεται μια βασική έννοια από την Γραμμική Άλγεβρα.

Ορισμός 3.1.3. Έστω $F: V \rightarrow V$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός (γραμμική απεικόνιση), όπου V είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης 2. Τότε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα του F με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ όταν $F(v) = \lambda v$.

Ας βρούμε τώρα την απεικόνιση Weingarten μερικών γνωστών κανονικών επιφανειών.

Παράδειγμα 3.1.2. Θεωρούμε την επιφάνεια επίπεδο $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0\}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ σταθερές και α, β, γ όχι όλα μηδενικά. Είναι γνωστό τότε ότι το διάνυσμα $N = \frac{(\alpha, \beta, \gamma)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$ είναι μοναδιαίο και κάθετο στο επίπεδο (σχήμα 33).



Έτσι λοιπόν η απεικόνιση του Gauss για το επίπεδο είναι :

$$n : \pi \rightarrow S^2 : p \mapsto n(p) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \right).$$

Είναι λοιπόν μια σταθερή απεικόνιση, συνεπώς $dn_p \equiv 0$ (μηδενική απεικόνιση) και άρα $L \equiv 0$, ήτοι η απεικόνιση Weingarten για το επίπεδο είναι η μηδενική απεικόνιση, άρα όλα τα διανύσματα του επιπέδου είναι ιδιοδιανύσματα του L με αντίστοιχες ιδιοτιμές το 0 , αφού $L(v) = 0 \cdot v$.

Παράδειγμα 3.1.3. Ας πάρουμε την κανονική επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας R , δηλαδή την

$$S_R^2 = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \}.$$

Είναι φανερό ότι η επιφάνεια αυτή είναι μια επιφάνεια στάθμης για τη συνάρτηση $f : R^3 \rightarrow R : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Έτσι σύμφωνα με το παράδειγμα 2.4.2, ένα διαφορίσιμο μοναδιαίο και κάθετο πεδίο στην S_R^2 είναι το :

$$\begin{aligned} N : S_R^2 \rightarrow R^3 : (x, y, z) \mapsto N(x, y, z) &= \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{2R} \\ &= \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right). \end{aligned}$$

Επίσης η απεικόνιση $-N : S_R^2 \rightarrow R^3 : (x, y, z) \mapsto \left(-\frac{x}{R}, -\frac{y}{R}, -\frac{z}{R} \right)$ είναι το άλλο διαφορίσιμο, μοναδιαίο και κάθετο πεδίο στην S_R^2 . Αν λοιπόν

$\alpha : I \rightarrow S_R^2 : t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ είναι μια καμπύλη στην S_R^2 τέτοια ώστε $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = (x'(0), y'(0), z'(0)) = v$, τότε έχουμε :

$$L(v) = -(N \circ \alpha)'(0) = -\left(\frac{x(t)}{R}, \frac{y(t)}{R}, \frac{z(t)}{R} \right)'(t=0) =$$

$$= -\left(\frac{x'(0)}{R}, \frac{y'(0)}{R}, \frac{z'(0)}{R} \right) = -\frac{1}{R}(x'(0), y'(0), z'(0)) = -\frac{1}{R}v.$$



Έτσι λοιπόν η απεικόνιση Weingarten για την S_R^2 είναι :

$$L : T_p(S_R^2) \rightarrow T_p(S_R^2) : v \mapsto L(v) = -\frac{v}{R} .$$

Άρα όλα τα διανύσματα είναι ιδιοδιανύσματα του L με αντίστοιχες ιδιότητες $-\frac{1}{R}$. Είναι εύκολο να δει κάποιος, πως αν πάρουμε το $-N$ τότε η απεικόνιση Weingarten θα είναι :

$$L : T_p(S_R^2) \rightarrow T_p(S_R^2) : v \mapsto L(v) = \frac{v}{R} .$$

Παράδειγμα 3.1.4. Ας πάρουμε την κανονική επιφάνεια :

$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, z \in \mathbb{R}\}$. η οποία είναι γνωστή σαν επιφάνεια "ορθός κυκλικός κύλινδρος" ακτίνας R . Η επιφάνεια αυτή είναι επιφάνεια στάθμης για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2$. Έτσι σύμφωνα με το παράδειγμα 2.4.2 , η διαφορίσιμη απεικόνιση

$$N : C \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto N(x, y, z) = \frac{(2x, 2y, 0)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0 \right)$$

είναι ένα διαφορίσιμο, μοναδιαίο και κάθετο πεδίο στη C . Είναι φανερό, γιατί η τρίτη συντεταγμένη του N είναι 0 . Αυτό συμβαίνει διότι σε κάθε σημείο του κυλίνδρου το κάθετο διάνυσμα είναι κάθετο στον άξονα Oz και έτσι δεν έχει συνιστώσα ως προς αυτόν τον άξονα . Αν τώρα $\alpha : I \rightarrow C : t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ είναι μια καμπύλη πάνω στον κύλινδρο με $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = (x'(0), y'(0), z'(0)) = v$, τότε $n \circ \alpha(t) = n(\alpha(t)) = \left(\frac{x(t)}{R}, \frac{y(t)}{R}, 0 \right) \equiv N(t)$. Άρα

$$N'(0) = \left(\frac{x'(0)}{R}, \frac{y'(0)}{R}, 0 \right) \quad \text{και συνεπώς}$$

$$L(\alpha'(0)) = -\left(\frac{x'(0)}{R}, \frac{y'(0)}{R}, 0 \right) \quad \text{ή} \quad L(v) = -\frac{1}{R}(v^1, v^2, 0) .$$

$$\text{όπου} \quad v = (v^1, v^2, v^3) .$$

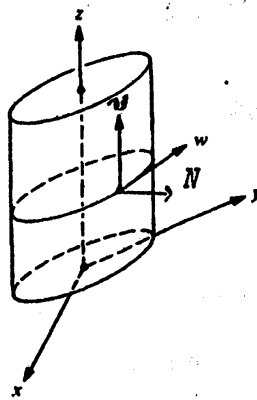
Έτσι λοιπόν τα διανύσματα του $T_p(C)$ τα παράλληλα προς τον άξονα Oz , δηλαδή



τα $v = (0,0,\lambda)$ είναι ιδιοδιανύσματα του L με αντίστοιχη ιδιοτιμή το 0 .

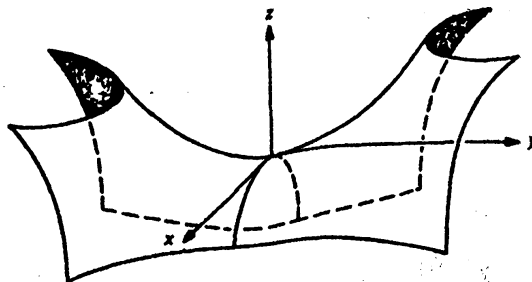
Πραγματικά $L(0,0,\lambda) = -\frac{1}{R}(0,0,0) = 0(0,0,\lambda)$. Από την άλλη πλευρά τα διανύσματα του $T_p(C)$, που είναι κάθετα στον άξονα Oz , δηλαδή τα διανύσματα $w = (w^1, w^2, 0)$ είναι ιδιοδιανύσματα του L με αντίστοιχη ιδιοτιμή το $-\frac{1}{R}$.

Πραγματικά $L(w) = L(w^1, w^2, 0) = -\frac{1}{R}(w^1, w^2, 0) = -\frac{1}{R}w$ (σχήμα 33).



Σχήμα 33

Παράδειγμα 3.1.5. Θεωρούμε την επιφάνεια $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$ (σχήμα 34).



σχήμα 34



Η επιφάνεια αυτή είναι γράφημα της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x,y) \mapsto f(x,y) = y^2 - x^2$. Είναι τότε γνωστό (πρόταση 2.2.1) ότι η απεικόνιση $\chi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3: (u,v) \mapsto \chi(u,v) = (u, v, v^2 - u^2)$ είναι σύστημα συντεταγμένων γύρω από κάθε σημείο αυτής της επιφάνειας. Έτσι λοιπόν ένα διαφορίσιμο μοναδιαίο και κάθετο πεδίο στην S είναι το :

$$N: S \rightarrow \mathbb{R}^3: p \mapsto N(p) = \frac{\chi_u \times \chi_v}{\|\chi_u \times \chi_v\|} (u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+1}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}} \right),$$

αφού $\chi_u(u,v) = (1, 0, -2u)$, $\chi_v(u,v) = (0, 1, 2v)$.

Ας εξετάσουμε την απεικόνιση Weingarten αυτής της επιφάνειας στο σημείο $(0,0,0)$. Παρατηρούμε ότι $\chi_u(0,0) = (1,0,0)$ και $\chi_v(0,0) = (0,1,0)$. Συγκριμένα όμως με το παράδειγμα 3.1.1 έχουμε :

$$L(1,0,0) = L(\chi_u(0,0)) = -N_u(0,0) = -2(1,0,0),$$

αν παραγωγίσουμε το N ως προς u και πάρουμε τη τιμή στο $(0,0)$.

Επίσης

$$L(0,1,0) = L(\chi_v(0,0)) = -N_v(0,0) = 2(0,1,0).$$

Έτσι λοιπόν τα διανύσματα $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ του $T_{(0,0,0)}(S)$ είναι ιδιοδιανύσματα του L με αντίστοιχες ιδιοτιμές -2 και 2 . Βέβαια αν $(\alpha, \beta, 0)$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα του $T_{(0,0,0)}(S)$, τότε επειδή η L είναι γραμμική απεικόνιση θα έχουμε :

$$L(\alpha, \beta, 0) = L(\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)) = \alpha L(1,0,0) + \beta L(0,1,0)$$

$$= -2\alpha(1,0,0) + 2\beta(0,1,0) = (-2\alpha, 2\beta, 0).$$

Πρίν δούμε μια σπουδαία ιδιότητα της απεικόνισης Weingarten θα κάνουμε μια παρένθεση για να δούμε πως μπορούμε να κάνουμε "μετρήσεις" πάνω σε μια κανονική επιφάνεια. Ας αρχίσουμε από τα ερασιτέμενα διανύσματα μιας επι-



επιφάνειας σε ένα σημείο p . Αν πάρουμε δύο διανύσματα $v, w \in T_p(S)$ τότε το πιο φυσικό είναι να λέμε εσωτερικό γινόμενο αυτών και το συμβολίζουμε με $\langle v, w \rangle$, το εσωτερικό τους γινόμενο σαν να είναι διανύσματα του $T_p(R^3)$. Το μήκος του v θάναι τότε $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Έτσι λοιπόν έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.1.4. Η διγραμμική συνάρτηση $I : T_p(S) \times T_p(S) \rightarrow R : (v, w) \mapsto I(v, w) = \langle v, w \rangle$ λέγεται πρώτη διγραμμική μορφή της S στο σημείο p , ενώ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $I : T_p(S) \rightarrow R : v \mapsto I(v) = \|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ λέγεται πρώτη τετραγωνική μορφή της S στο p ή πρώτη θεμελιώδης μορφή της S (first fundamental form).

Θα δούμε παρακάτω, ότι πραγματικά η γνώση της πρώτης θεμελιώδους μορφής μιας επιφάνειας, μας επιτρέπει να κάνουμε μετρήσεις στην επιφάνεια (δηλαδή μπορούμε να μετράμε μήκη καμπυλών, γωνίες, εμβαδά, κ.λ.π.) δουλεύοντας μόνο με την επιφάνεια χωρίς να λάβουμε υπόψη τον Ευκλείδειο χώρο R^3 , στον οποίο βρίσκεται η επιφάνεια. Αυτό ήταν και η αρχή για την ανάπτυξη της "εσωτερικής γεωμετρίας" της επιφάνειας αφού μπορούμε να κάνουμε γεωμετρία στην επιφάνεια χωρίς να λάβουμε υπόψη τον περιβάλλοντα χώρο.

Αν μας δίνεται μια κανονική επιφάνεια S και ένα σύστημα συντεταγμένων $X : U \subset R^2 \rightarrow S$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε τις παρακάτω τρεις συναρτήσεις.

$$E : U \subset R^2 \rightarrow R : (u, v) \mapsto E(u, v) \stackrel{\text{oo}}{=} \|X_u(u, v)\|^2 = \langle X_u, X_u \rangle(u, v)$$

$$F : U \subset R^2 \rightarrow R : (u, v) \mapsto F(u, v) \stackrel{\text{oo}}{=} \langle X_u, X_v \rangle(u, v)$$

$$G : U \subset R^2 \rightarrow R : (u, v) \mapsto G(u, v) \stackrel{\text{oo}}{=} \|X_v(u, v)\|^2 = \langle X_v, X_v \rangle(u, v).$$

Οι τρεις αυτές συναρτήσεις, που είναι διαφορίσιμες και ορίζονται στο U λέγονται θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της επιφάνειας S ως προς το σύστημα συντεταγμένων X .

Αν ξέρουμε τις τρεις συναρτήσεις E, F, G μπορούμε να βρούμε εύκολα πια το



μήκος κάθε διανύσματος που εκφάπτεται στην επιφάνειά μας . Πραγματικά , αν v είναι ένα τυχαίο διάνυσμα , επειδή αυτό γράφεται σαν $v = \alpha X_u + \beta X_v$ θα έχουμε :

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle \alpha X_u + \beta X_v, \alpha X_u + \beta X_v \rangle = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 .$$

Έτσι λοιπόν , αν $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ είναι μια καμπύλη της επιφάνειας S , (άσκηση 3, σελίδα 89) , τότε μπορούμε να βρούμε το μήκος του διανύσματος ταχύτητας . Πραγματικά έχουμε :

$$\alpha'(t) = X_u(u(t), v(t)) \left(\frac{du}{dt}(t) \right) + X_v(u(t), v(t)) \left(\frac{dv}{dt}(t) \right) ,$$

σύμφωνα με τον κανόνα σύνθετης παραγώγισης .

Έτσι ,

$$I(\alpha'(t)) = \|\alpha'(t)\|^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \langle X_u(u(t), v(t)) \left(\frac{du}{dt}(t) \right) + X_v(u(t), v(t)) \left(\frac{dv}{dt}(t) \right) ,$$

$$X_u(u(t), v(t)) \left(\frac{du}{dt}(t) \right) + X_v(u(t), v(t)) \left(\frac{dv}{dt}(t) \right) \rangle =$$

$$E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 , \text{ παραλείποντας το } t \text{ για συντομία .}$$

Έτσι , $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} =$ το μήκος του διανύσματος ταχύτητας και άρα το μήκος τόξου της καμπύλης μας θα είναι :

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt .$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι για να υπολογίσουμε το μήκος μιας καμπύλης χρειαζόμαστε μόνο τα E, F, G δηλαδή μόνο την πρώτη θεμελιώδη μορφή της S . Από την τελευταία σχέση παίρνουμε τώρα ότι :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} \quad \text{ή}$$

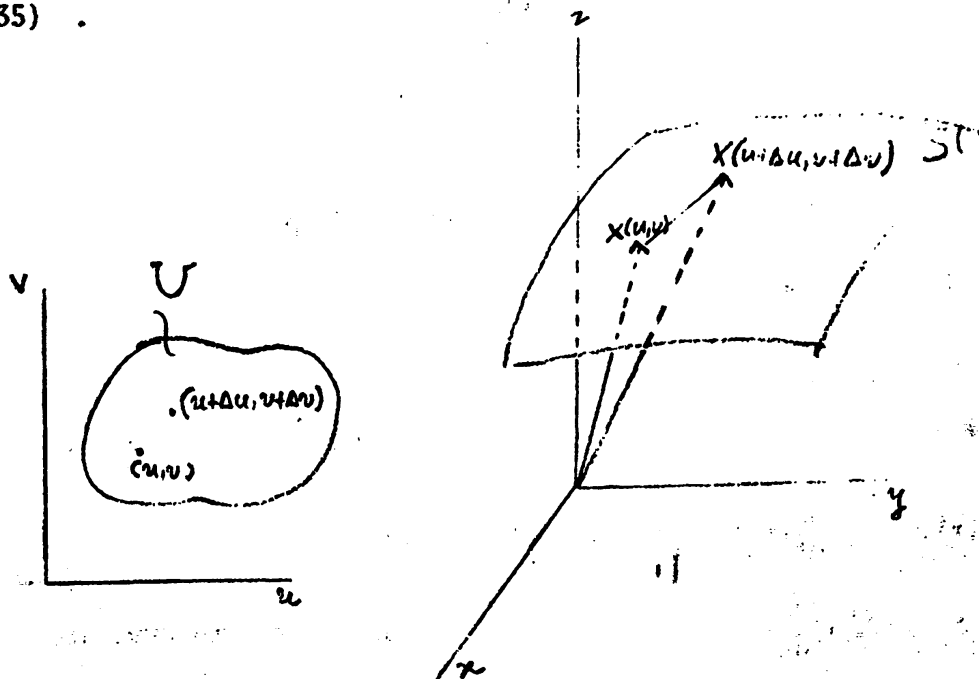
$$(*) \quad ds^2 = (ds)^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 .$$

Θα λέμε τη τετραγωνική μορφή $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ μετρική (metric) της



επιφάνειας S , αφ' ενός μεν γιατί με τη βοήθεια αυτή και μόνο μπορούμε να κάνουμε τις μετρήσεις μας, αφ' ετέρου δε γιατί η ποσότητα ds μας δίνει γεωμετρικά την απόσταση δύο γειτονικών σημείων της επιφάνειας, όπως θα δούμε αμέσως τώρα.

Ας είναι $X(u,v)$, $X(u+\Delta u, v+\Delta v)$ δύο γειτονικά σημεία της επιφάνειας S (σχήμα 35).



σχήμα 35

Η απόσταση των σημείων $X(u,v)$, $X(u+\Delta u, v+\Delta v)$ ($\Delta u, \Delta v$ μικρά) δίνεται από το μήκος του διανύσματος $X(u+\Delta u, v+\Delta v) - X(u,v)$. Αλλά προσεγγιστικά ισχύει :

$$X(u+\Delta u, v+\Delta v) \approx X(u,v) + X_u \Delta u + X_v \Delta v.$$

Έτσι έχουμε :

$$\| X(u+\Delta u, v+\Delta v) - X(u,v) \|^2 \approx \langle X_u \Delta u + X_v \Delta v, X_u \Delta u + X_v \Delta v \rangle =$$

$$= E \Delta u^2 + 2F \Delta u \Delta v + G \Delta v^2.$$



Αφού έτσι έχουν τα πράγματα , δηλαδή το ds μας δίνει το απειροστό μήκος στην επιφάνεια , πρέπει να περιμένει κανένας ότι το ds δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων . Αυτό μας λέγει η παρακάτω άσκηση .

Άσκηση . Αν $X(u,v)$ και $Y(\xi,\eta)$ είναι δύο συστήματα συντεταγμένων μιας κανονικής επιφάνειας , γύρω από ένα σημείο της S τότε :

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = \bar{E} d\xi^2 + 2\bar{F} d\xi d\eta + \bar{G} d\eta^2$$

, όπου E, F, G και $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ είναι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της S , ως προς τα συστήματα X και Y αντίστοιχα .

Παρατήρηση 3.1.1. Από τον ορισμό των E, F, G έχουμε ότι , $E > 0$ $G > 0$. Επίσης επειδή $\|X_u \times X_v\|^2 = \langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2$, συμπεραίνουμε πως $EG - F^2 > 0$. Αυτό μας λέει ότι η μετρική $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ είναι θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή .

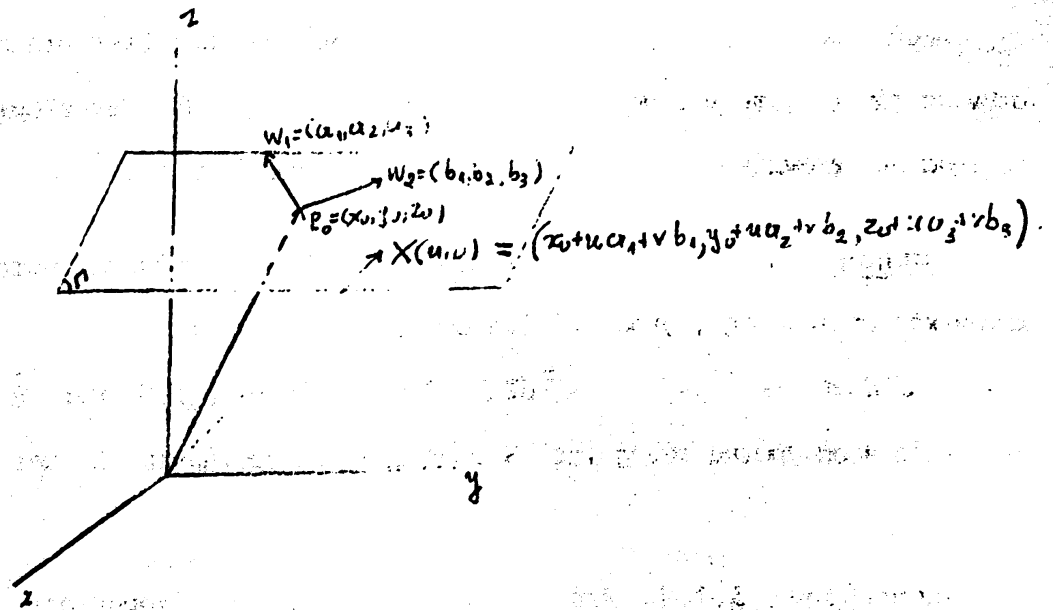
Παρατήρηση 3.1.2. Τη μετρική $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ τη βρήκαμε αφού υποθέσαμε ότι τα μήκη διανυσμάτων θα τα βρίσκουμε σα να ήταν διανύσματα του R^3 και με βάση αυτή τη μετρική βρίσκουμε μήκη καμπυλών και γενικά μπορούμε να κάνουμε μια γεωμετρία στην επιφάνεια . Όταν λοιπόν μας δώσουν μια θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή $g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2$, όπου g_{11}, g_{12}, g_{22} είναι συναρτήσεις , ορισμένες σε ένα UCR^2 μπορούμε και πάλι κατά τον ίδιο τρόπο να κάνουμε μια γεωμετρία πάνω στο U . Με άλλα λόγια τα μήκη , γωνίες κ.λ.π. θα τα μετράμε με βάση αυτή τη τετραγωνική μορφή που μας έδωσαν . Αυτή είναι και η βάση της γεωμετρίας του Riemann .

Ας δούμε τώρα πως βρίσκουμε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων για μερικές επιφάνειες .

Παράδειγμα 3.1.6. Ας πάρουμε ένα επίπεδο π που περνά από το σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$ και



$w_2 = (b_1, b_2, b_3)$, τα οποία είναι μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους (σχήμα 36) .



σχήμα 36

Είναι φανερό τότε πως η απεικόνιση

$$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi \subset \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto X(u, v) = (x_0 + u a_1 + v b_1, y_0 + u a_2 + v b_2, z_0 + u a_3 + v b_3)$$

είναι σύστημα συντεταγμένων γύρω από κάθε σημείο του επιπέδου π . Έτσι λοιπόν

$$X_u(u, v) = (a_1, a_2, a_3) \text{ και } X_v(u, v) = (b_1, b_2, b_3) .$$

Συνεπώς $E = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$, $F = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ και $G = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$. Έτσι

η μετρική στο επίπεδο π είναι η $ds^2 = du^2 + dv^2$. Η τελευταία σχέση, δεν είναι τίποτε άλλο από το θεώρημα του Πυθαγόρα .

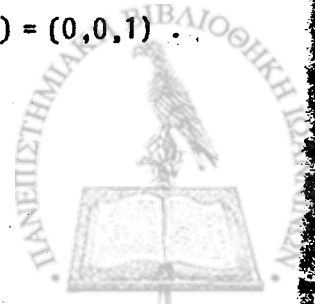
Παράδειγμα 3.1.7. Ας πάρουμε την επιφάνεια "ορθός κυκλικός κύλινδρος"

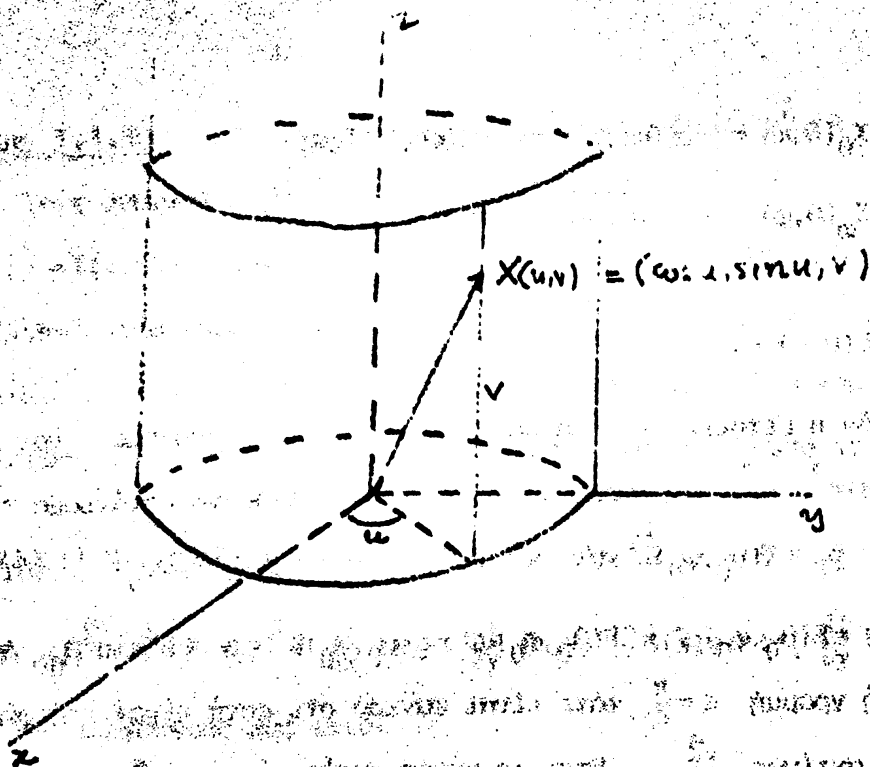
ακτίνας 1 , δηλαδή την επιφάνεια $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\}$ (σχήμα 37) .

Είναι φανερό πως η απεικόνιση $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$,

όπου $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$, είναι ένα σύστημα συντεταγμένων στον

κύλινδρο : Έχουμε τότε : $X_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0)$ και $X_v(u, v) = (0, 0, 1)$.





σχήμα 37

Συνεπώς $E=1$, $F=0$, $G=1$. Έτσι η μετρική στον κύλινδρο ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων είναι $ds^2 = du^2 + dv^2$.

Παρατήρηση 3.1.3. Βλέπει κάποιος πως για τον κύλινδρο και για το επίπεδο τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης ως προς τα συστήματα που πήραμε είναι τα ίδια. Αυτό δεν είναι τυχαίο (θα το δικαιολογήσουμε στην επόμενη παράγραφο 3.2.). Χονδρικά μπορούμε να πούμε τώρα ότι, αν κόψουμε τον κύλινδρο κατακόρυφα και τον στρώσουμε πάνω στο επίπεδο χωρίς να τον τεντώσουμε, τότε εφαρμόζει τέλεια πάνω στο επίπεδο. Αυτό έχει μεγάλη σημασία και σ' αυτό θα στηριχτούμε για να δικαιολογήσουμε αυτή την παρατήρηση.

Παράδειγμα 3.1.8. Είναι γνωστό (παράδειγμα 2.2.6) ότι η απεικόνιση $U: CR^2 \rightarrow S^2: (θ, φ) \mapsto X(θ, φ) = (\sin θ \cos φ, \sin θ \sin φ, \cos θ)$, όπου $U = \{(θ, φ) \in CR^2 : 0 < θ < \pi, 0 < φ < 2\pi\}$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων της μοναδιαίας σφαίρας. Ας βρούμε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της μοναδιαίας σφαίρας ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων. Έχουμε:

$$X_{\theta}(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$$

$$X_{\varphi}(\theta, \varphi) = (-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0)$$

Άρα :

$$E(\theta, \varphi) = 1, \quad F = 0, \quad G(\theta, \varphi) = \sin^2\theta$$

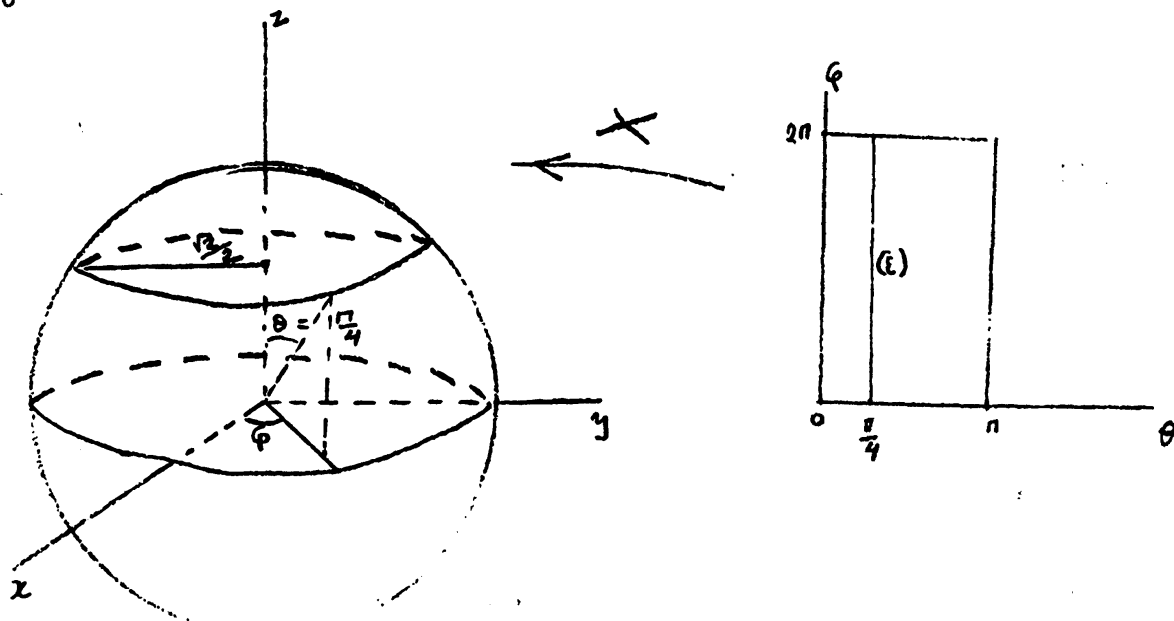
Έτσι λοιπόν η μετρική της σφαίρας ως προς αυτό το σύστημα είναι

$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Αν τώρα w είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της σφαίρας S^2 στο σημείο $p_0 = X(\theta_0, \varphi_0)$ και $w = \alpha X_{\theta}(\theta_0, \varphi_0) + \beta X_{\varphi}(\theta_0, \varphi_0)$, τότε :

$\|w\|^2 = I(w) = E(\theta_0, \varphi_0)\alpha^2 + 2F(\theta_0, \varphi_0)\alpha\beta + G(\theta_0, \varphi_0)\beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \sin^2\theta_0$. Αν πάρουμε τη παραμετρική γραμμή $\theta = \frac{\pi}{4}$ τότε είναι φανερό ότι αυτή είναι περιφέρεια κύκλου (σχήμα 37) ακτίνας $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Έτσι το μήκος αυτής είναι $\pi\sqrt{2}$. Από την άλλη πλευρά το διάνυσμα ταχύτητας αυτής είναι $X_{\varphi}(\frac{\pi}{4}, \varphi) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi, 0)$.

Έτσι η ταχύτητά της είναι $v(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα το μήκος είναι ίσο με

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} d\varphi = \pi\sqrt{2}, \text{ όπως περιμέναμε.}$$



Τα σημεία της κάθετης γραμμής ε με την X απεικονίζονται στην περιφέρεια.

σχήμα 37



Παράδειγμα 3.1.9. Έστω η διαχωρίσιμη συνάρτηση $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto f(x, y)$. Τότε σύμφωνα με γνωστή πρόταση το σύνολο

$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$ είναι κανονική επιφάνεια γνωστή σαν γραφήμα της συνάρτησης f . Είναι φανερό πως η απεικόνιση $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Gamma_f \subset \mathbb{R}^3: (x, y) \mapsto X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ είναι σύστημα συντεταγμένων γύρω από κάθε σημείο του γραφήματος. Ας βρούμε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης του γραφήματος ως προς αυτό το σύστημα.

Έχουμε: $X_x(x, y) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y))$ και $X_y(x, y) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$. Έτσι λοιπόν:

$$E(x, y) = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2, \quad F(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad G(x, y) = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2.$$

Δηλαδή η μετρική της επιφάνειας μας είναι

$$ds^2 = \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2\right) dx^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2\right) dy^2$$

Σ' αυτό το τελευταίο παράδειγμα βλέπουμε πως το F δεν είναι σταθερά μηδέν, ενώ στα προηγούμενα ήταν $F \equiv 0$. Έχει λοιπόν έννοια ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 3.1.5. Ας είναι $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ ένα σύστημα συντεταγμένων μιας κανονικής επιφάνειας S . Το σύστημα θα λέγεται ορθογώνιο αν $F \equiv 0$ παντού στο U . Ειδικότερα ένα ορθογώνιο σύστημα για το οποίο ισχύει $E = G$ παντού στο U λέγεται ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων. (Μπορούμε σε μια κανονική επιφάνεια να βρούμε ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων.)

Παρατήρηση 3.1.4. Αν $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων μιας κανονικής επιφάνειας S , τότε σε κάθε σημείο p του $X(U)$ υπάρχουν δύο εφαπτόμενα διανύσματα τα X_u, X_v τα οποία είναι διανύσματα ταχύτητας των παραμετρικών γραμμών. Η γωνία αυτών των διανυσμάτων λέγεται και γωνία των παραμετρικών γραμμών σε εκείνο το σημείο. Η γωνία όμως των X_u, X_v δίνεται από τη σχέση

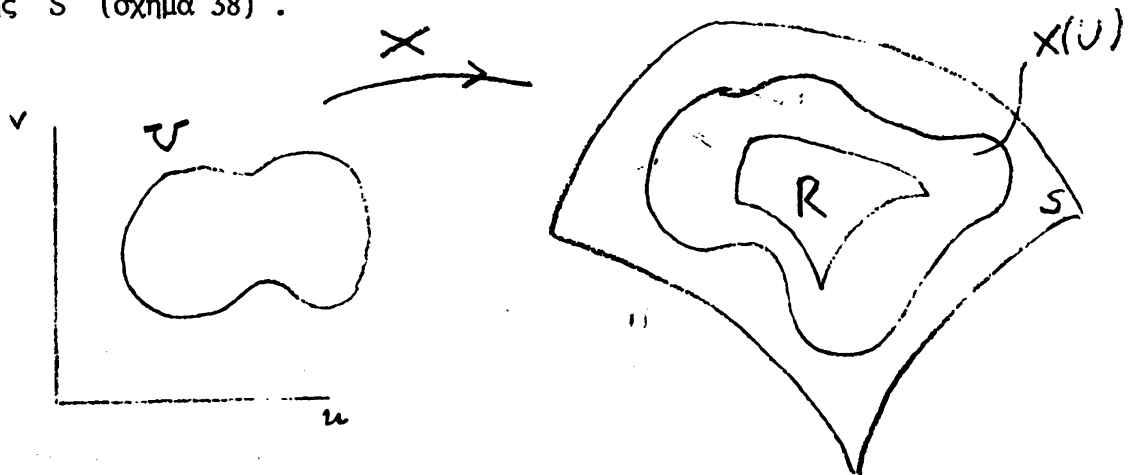
$$\cos \theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|} = \frac{F}{\sqrt{E} \sqrt{G}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad \text{Έτσι λοιπόν όταν το } F = 0 \text{ τότε } \theta = \frac{\pi}{2},$$

δηλαδή η παραμετρικές γραμμές είναι ορθογώνιες (κάθετες) και αντίστροφα. Δηλαδή



δή σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων οι παραμετρικές γραμμές είναι κάθετες.

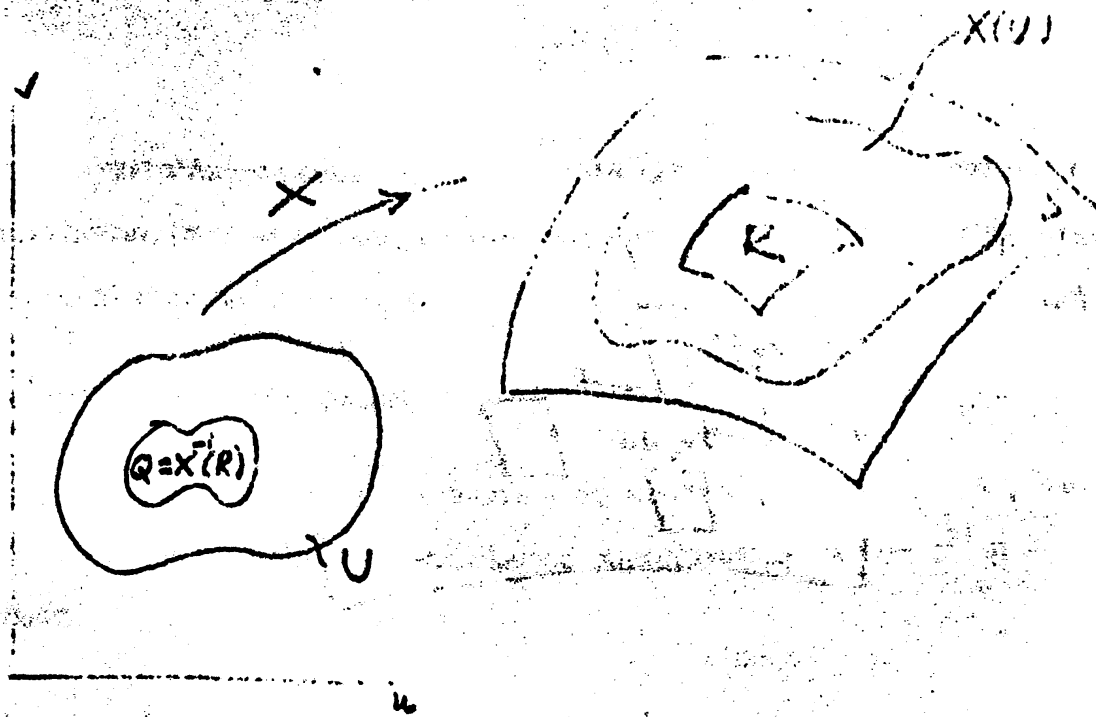
Ένα άλλο ερώτημα που θα μας απασχολήσει τώρα είναι το εξής : Όταν μας δίνουν μια κανονική επιφάνεια S και ένα κομμάτι αυτής R πως θα βρούμε το εμβαδόν αυτού του κομματιού ή καλλίτερα τι θα λέμε εμβαδόν του κομματιού R ; Βέβαια δεν θα αντιμετωπίσουμε το ερώτημα αυτό σ'όλη του την έκταση , αλλά μόνο σε μια ειδική περίπτωση , μόνο δηλαδή όταν το R είναι υποσύνολο ενός $X(U)$, όπου $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων της S (σχήμα 38) .



σχήμα 38

Ας πάρουμε λοιπόν ένα σύστημα συντεταγμένων $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ μιας κανονικής επιφάνειας S και ένα κομμάτι R της S έτσι ώστε $R \subset X(U)$ και ας είναι $Q = X^{-1}(R)$. Είναι φανερό τότε ότι $Q \subset U$ (σχήμα 39) . Επίσης είναι γνωστό από την αναλυτική γεωμετρία ότι το $\|X_u \times X_v\|$ μας δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα X_u και X_v . Αντίθετα το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα διανύσματα $X_u du$, $X_v dv$ (du, dv πολύ μικρά) έχει εμβαδόν





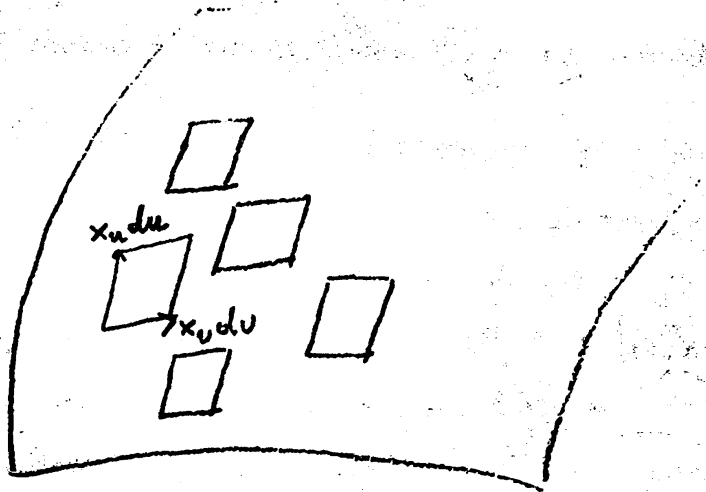
σχήμα 39

$\| X_u du \times X_v dv \| = \| X_u \times X_v \| du \cdot dv$. Παίρνουμε τώρα ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $Y : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, έτσι ώστε πάλι να έχουμε $R \subset Y(\bar{U})$, και θέτουμε $\bar{Q} = Y^{-1}(R)$. Το σύστημα Y είναι τέτοιο ώστε τα διανύσματα $X_u \times X_v$, $Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}}$ να είναι ομορροπα , δηλαδή να δίνουν τον ίδιο προσανατολισμό της S . Τι σχέση έχουν τα ολοκληρώματα :

$$\iint_Q \| X_u \times X_v \| du dv \quad , \quad \iint_{\bar{Q}} \| Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}} \| d\bar{u} d\bar{v} \quad ;$$

Πρέπει κανένας να περιμένει ότι είναι ίσα . Πραγματικά το καθένα εκφράζει το άθροισμα των εμβαδών των μικρών παραλληλογράμων που κατασκευάζουμε στα σημεία του R με πλευρές $(X_u du, X_v dv)$ και $(Y_{\bar{u}} d\bar{u}, Y_{\bar{v}} d\bar{v})$ αντίστοιχα (σχήμα 40) . Ακριβέστερα αν $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(X(U) \cap Y(\bar{U})) \rightarrow X^{-1}(X(U) \cap Y(\bar{U}))$, $(\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$, τότε έχουμε : $X^{-1} \circ Y(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$ ή $Y(\bar{u}, \bar{v}) = X(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$ και συνεπώς





σχήμα 40

$$Y_{\bar{u}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}$$

$$Y_{\bar{v}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}$$

με τον κανόνα σύνθετης παραγώγισης .

Έτσι λοιπόν :

$$Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}} = (X_u \times X_v) \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) = X_u \times X_v \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$$

Τελικά θα έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_Q \| Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}} \| d\bar{u}d\bar{v} &= \iint_{\bar{Q}} \| X_u \times X_v \| \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \right| d\bar{u}d\bar{v} = \\ &= \iint_Q \| X_u \times X_v \| du dv \end{aligned}$$



σύμφωνα με το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών σε πολλαπλά ολοκληρώματα. Συνεπώς όποιο σύστημα συντεταγμένων (που να δίνουν τον ίδιο προσανατολισμό) και αν πάρουμε στην επιφάνεια, τότε το ολοκλήρωμα $\iint_Q \|X_u \times X_v\| \, du \, dv$ παίρνει πάντα την ίδια τιμή.

Έχει λοιπόν έννοια ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 3.1.6. Έστω R ένα κομμάτι μιας κανονικής επιφάνειας S , που περιέχεται στο πεδίο τιμών $X(U)$ ενός συστήματος συντεταγμένων $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Ο θετικός αριθμός

$$A(R) = \iint_Q \|X_u \times X_v\| \, du \, dv, \quad \text{όπου} \quad Q = X^{-1}(R)$$

λέγεται εμβαδόν του κομματιού R και η ολοκληρωτέα ποσότητα $\|X_u \times X_v\| \, du \, dv$ λέγεται εμβαδικό στοιχείο (area element) της S ως προς το σύστημα συντεταγμένων X .

Παρατήρηση 3.1.5. Βέβαια ονομάσαμε το ολοκλήρωμα $\iint_Q \|X_u \times X_v\| \, du \, dv$

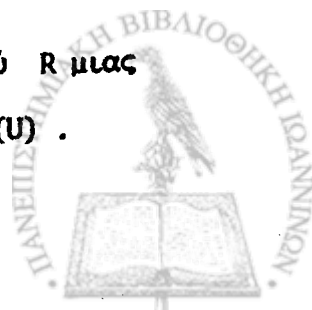
εμβαδόν του κομματιού $R = X(Q)$. Η ονομασία αυτή έχει τη μαθηματική της δικαιολογία, η οποία ξεφεύγει του σκοπού αυτών των σημειώσεων. Διαισθητικά και από την ανάλυση που κάναμε παραπάνω σε κάποιο βαθμό δικαιολογείται αυτή η ονομασία.

Παρατήρηση 3.1.6. Είναι φανερό ότι: $\|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2}$, άρα μπορούμε να πούμε ότι

$$A(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv, \quad \text{όπου η ποσότητα} \quad \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

είναι άλλη έκφραση για το εμβαδικό στοιχείο της επιφάνειας S .

Παρατήρηση 3.1.7. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κομματιού R μιας κανονικής επιφάνειας S , υποθέτουμε ότι το R είναι μέσα σε κάποιο $X(U)$.



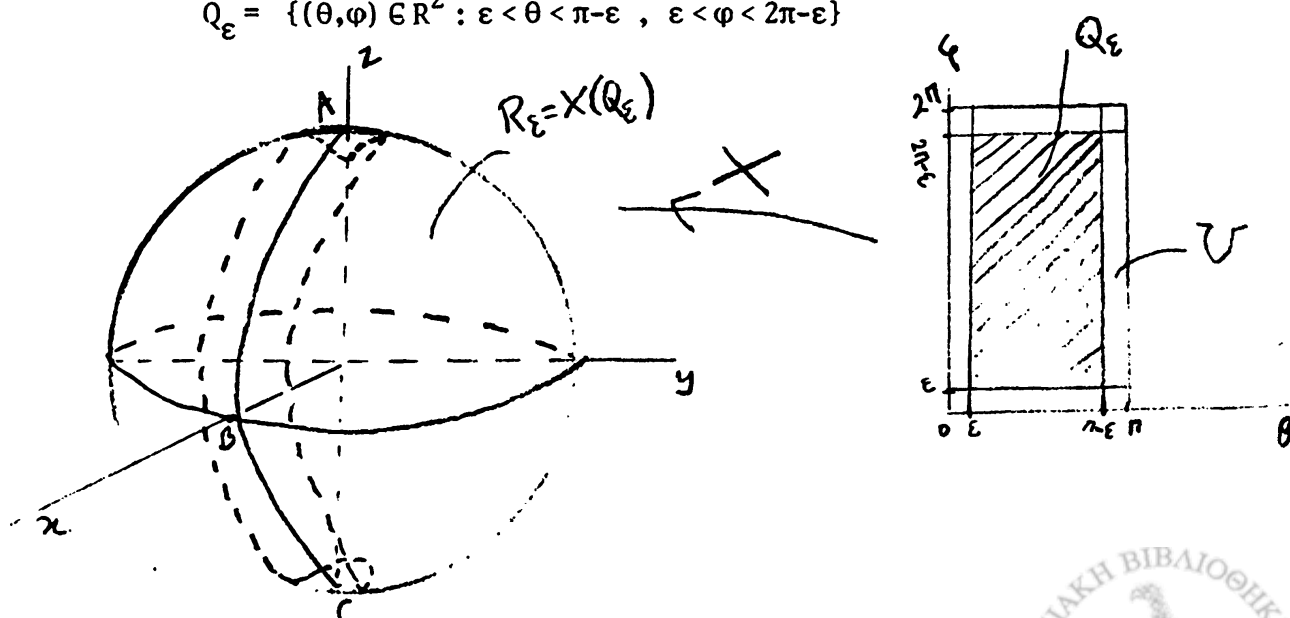
Έτσι λοιπόν όταν έχουμε μια επιφάνεια και θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν της, μπορούμε να δουλέψουμε μόνο όταν η επιφάνεια σκεπάζεται από μια περιοχή συντεταγμένων, δηλαδή από ένα $X(U)$. Αυτός ο περιορισμός δεν είναι και τόσο σοβαρός σε μερικές περιπτώσεις. Όπως για παράδειγμα, όταν ένα σύστημα συντεταγμένων X καλύπτει σχεδόν όλη την επιφάνεια S και αφήνει μόνο μερικές γραμμές. Επειδή όμως οι γραμμές δεν έχουν εμβαδόν, μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν του κομματιού της S που σκεπάζεται από το X και αυτό θα είναι και το εμβαδόν της επιφάνειας S . Ένα παράδειγμα σε αυτή την περίπτωση θα μας κατατοπίσει περισσότερο.

Παράδειγμα 3.1.10. Να βρούμε το εμβαδόν της επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας. Είναι γνωστό πως η απεικόνιση

$$X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2: (\theta, \varphi) \mapsto X(\theta, \varphi) = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$

είναι ένα σύστημα συντεταγμένων της σφαίρας (παράδειγμα 2.2.6), όπου $U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2: 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ και μάλιστα το $X(U)$ σκεπάζει όλη την S^2 εκτός από μισό μέγιστο κύκλο τον $AB\Gamma$ (σχήμα 41). Ας είναι τώρα ε ένας μικρός θετικός αριθμός και

$$Q_\varepsilon = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2: \varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon, \varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon\}$$



σχήμα 41



Τότε το $R_\epsilon = X(Q_\epsilon)$ είναι όλη η σφαίρα εκτός από μια φέτα γύρω από τον $AB\Gamma$ (σχήμα 41). Τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της S^2 ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων είναι (παράδειγμα 3.1.8), $E=1$, $F=0$, $G=\sin^2\theta$. Έτσι το στοιχειώδες εμβαδόν της σφαίρας είναι $\sqrt{EG-F^2} d\varphi d\theta = \sin\theta d\varphi d\theta$. Επειδή τώρα $R_\epsilon \subset X(U)$, έχουμε

$$\begin{aligned} A(R_\epsilon) &= \iint_{Q_\epsilon} \sin\theta d\varphi d\theta = \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} d\varphi \cdot \int_\epsilon^{\pi-\epsilon} \sin\theta d\theta = \\ &= \varphi \Big|_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \cdot (-\cos\theta) \Big|_\epsilon^{\pi-\epsilon} = 2(\pi-\epsilon) \cdot (\cos\epsilon - \cos(\pi-\epsilon)) \end{aligned}$$

Δηλαδή :

$$A(R_\epsilon) = 2(\pi-\epsilon) \cdot (\cos\epsilon - \cos(\pi-\epsilon))$$

Είναι φανερό ότι, όταν $\epsilon \rightarrow 0$, τότε το $A(R_\epsilon) \rightarrow A(S^2)$ = το εμβαδόν της σφαίρας.

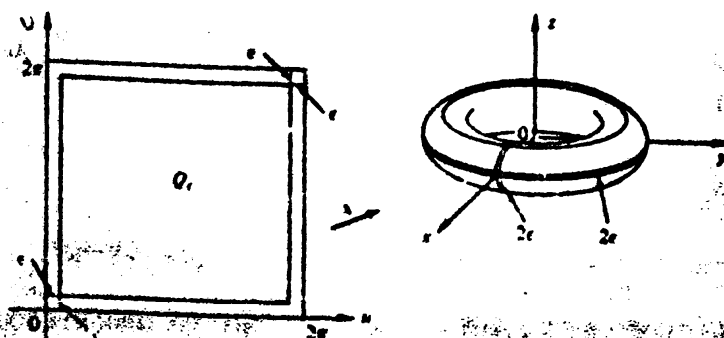
Έτσι λοιπόν έχουμε :

$$A(S^2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(R_\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{2(\pi-\epsilon)(\cos\epsilon - \cos(\pi-\epsilon))\} = 4\pi$$

Άσκηση. Να βρείτε το εμβαδόν του τόρου (Νύξη: Χρησιμοποιείστε το σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3(u,v) \mapsto X(u,v) = ((a+rcos u)\cos v, (a+rcos u)\sin v, r\sin u)$$

ie $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi\}$ και κάνετε διαδικασία όμοια με αυτή του παραδείγματος 3.1.10. (Να βοηθηθείτε και από το σχήμα 42).



σχ. 42

Ας ξαναγυρίσουμε τώρα στην απεικόνιση Weingarten για να δούμε μια σπουδαία ιδιότητά της . Μας χρειάζεται ο παρακάτω ορισμός .

Ορισμός 3.1.7. Έστω $F: V \rightarrow V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός (μια γραμμική απεικόνιση) , όπου V είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης 2. Υποθέτουμε πως ο διανυσματικός χώρος V είναι εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο , που συμβολίζουμε με $\langle , \rangle$. Η απεικόνιση F λέγεται αυτοπροσηρτημένη (self-adjoint) όταν ισχύει $\langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle$, για όλα τα διανύσματα $v, w \in V$. (Προσοχή : μπορεί να μιλάμε για αυτοπροσηρτημένη γραμμική απεικόνιση μόνο αν ο χώρος V έχει εσωτερικό γινόμενο) .

Πρόταση 3.1.1. Η απεικόνιση Weingarten $L: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ είναι αυτοπροσηρτημένη , όταν στο $T_p(S)$ θεωρούμε το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο .

Απόδειξη . Ας πάρουμε ένα σύστημα συντεταγμένων $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$ της S γύρω από το σημείο p . Τότε , όπως είναι φανερό , έχουμε : $\langle N, X_u \rangle = 0$ και $\langle N, X_v \rangle = 0$. Αν πάρουμε παραγώγους αυτών των σχέσεων ως προς v και u αντίστοιχα προκύπτει

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0$$

και

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 .$$

Επειδή όμως $X_{uv} = X_{vu}$, από τις δύο τελευταίες σχέσεις θα πάρουμε $\langle N_v, X_u \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle = \langle N_u, X_v \rangle$. Έτσι λοιπόν έχουμε $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$. Θέτοντας στη τελευταία σχέση $L(X_u) = -N_u$ και $L(X_v) = -N_v$ (παράδειγμα 3.1.1) παίρνουμε

$$\langle L(X_u), X_v \rangle = \langle L(X_v), X_u \rangle = \langle X_u, L(X_v) \rangle ,$$

λόγω συμμετρικότητας του εσωτερικού γινομένου .

Έτσι η σχέση $\langle L(v), w \rangle = \langle v, L(w) \rangle$ που θέλουμε να αποδείξουμε , για να είναι



η L αυτοπροσχητημένη . Ισχύει για τα διανύσματα X_u, X_v που κάνουν μια βάση του $T_p(S)$. Είναι εύκολο να αποδείξει κανένας ότι αυτή η σχέση ισχύει για κάθε ζευγάρι διανυσμάτων $v, w \in T_p(S)$.

Άσκηση . Δείξτε τη σχέση $\langle L(v), w \rangle = \langle v, L(w) \rangle$ για τυχαία $v, w \in T_p(S)$.

(Νύξη : παίρνουμε $v = \alpha X_u + \beta X_v, w = \gamma X_u + \delta X_v$) .

Μετά από την παραπάνω πρόταση βλέπουμε πως η συνάρτηση

$II : T_p(S) \times T_p(S) \rightarrow R : (v, w) \mapsto II(v, w) \stackrel{\text{oo}}{=} \langle L(v), w \rangle$ είναι συμμετρική , διγραμμική και λέγεται δεύτερη διγραμμική μορφή της S στο σημείο p , ενώ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $II : T_p(S) \rightarrow R : v \mapsto II(v) \stackrel{\text{oo}}{=} \langle L(v), v \rangle$ λέγεται δεύτερη τετραγωνική μορφή της S στο σημείο p ή δεύτερη θεμελιώδης μορφή της S (second fundamental form) .

Θα κατασκευάσουμε τώρα τρεις συναρτήσεις ανάλογες προς τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης . Έτσι λοιπόν αν $X : U \subset R^2 \rightarrow S$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων μιας κανονικής επιφάνειας S τότε οι τρεις διαφορίσιμες συναρτήσεις :

$$\ell : U \subset R^2 \rightarrow R : (u, v) \mapsto \ell(u, v) \stackrel{\text{oo}}{=} \langle L(X_u), X_u \rangle = II(X_u)$$

$$m : U \subset R^2 \rightarrow R : (u, v) \mapsto m(u, v) \stackrel{\text{oo}}{=} \langle L(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, L(X_v) \rangle$$

$$n : U \subset R^2 \rightarrow R : (u, v) \mapsto n(u, v) \stackrel{\text{oo}}{=} \langle L(X_v), X_v \rangle = II(X_v) ,$$

λέγονται θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης της επιφάνειας S ως προς το σύστημα συντεταγμένων X .

Άσκηση . Να δείξετε ότι : $\ell \stackrel{\text{oo}}{=} \langle L(X_u), X_u \rangle = - \langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle$

$$m \stackrel{\text{oo}}{=} \langle L(X_u), X_v \rangle = - \langle N_u, X_v \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle$$

και

$$n \stackrel{\text{oo}}{=} \langle L(X_v), X_v \rangle = - \langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle$$

(Νύξη : Να δείτε απόδειξη πρότασης



3.1.1 παραπάνω και παράδειγμα 3.1.1) .

Ορισμός 3.1.8. Έστω ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in T_p(S)$. Τότε ο αριθμός $II(u)$, όπου $u = \frac{v}{\|v\|}$, λέγεται κάθετη καμπυλότητα της επιφάνειας S στο σημείο p ως προς τη διεύθυνση v και συμβολίζεται με $k_n(v)$.

$$\text{Δηλαδή , } k_n(v) = II\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \left\langle L\left(\frac{v}{\|v\|}\right), \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \frac{\langle L(v), v \rangle}{\|v\|^2} .$$

Παρατήρηση 3.1.9. Από τον ορισμό της κάθετης καμπυλότητας φαίνεται αμέσως (πως ;) ότι : Αν v και w είναι παράλληλα και εφαπτόμενα διανύσματα στο $T_p(S)$, τότε $k_n(v) = k_n(w)$. Έτσι λοιπόν μπορούμε να υπολογίζουμε κάθετες καμπυλότητες μόνο για τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα .

Παρατήρηση 3.1.10. Είναι φανερό ότι αν για τον ορισμό της απεικόνισης Weingarten πάρουμε το $-N$ αντί του N τότε η κάθετη καμπυλότητα αλλάζει πρόσημο .

Ας πάρουμε τώρα μια καμπύλη με μοναδιαία ταχύτητα πάνω στην επιφάνεια S , τέτοια ώστε $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = v$, οπότε $\|v\| = 1$. Επειδή το διάνυσμα ταχύτητας $\alpha(s)$ της α είναι εφαπτόμενο στην επιφάνεια θα έχουμε : $\langle N(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = 0$ ή παραγωγίζοντας ως προς s έχουμε : $\langle \dot{N}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle + \langle N(s), \ddot{\alpha}(s) \rangle = 0$. Έτσι λοιπόν για $s = 0$ θα πάρουμε :

$$(*) \quad \langle \dot{N}(0), v \rangle = \langle \dot{N}(0), \dot{\alpha}(0) \rangle = -\langle N(0), \ddot{\alpha}(0) \rangle .$$

Τώρα ισχύει

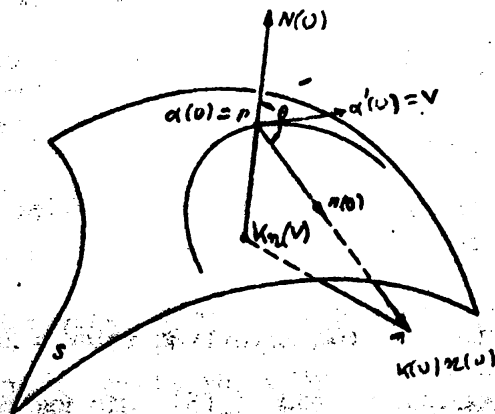
$$k_n(v) \stackrel{\text{ορ}}{=} II(v) = \langle L(v), v \rangle = -\langle \dot{N}(0), \dot{\alpha}(0) \rangle ,$$

$$\text{αφού } L(v) = L(\dot{\alpha}(0)) = -\dot{N}(0) ,$$

$$\begin{aligned} (*) \quad \langle N(0), \ddot{\alpha}(0) \rangle &= \langle N(0), k(0)n(0) \rangle \\ &= k(0) \langle N(0), n(0) \rangle = k(0) \cos \theta , \end{aligned}$$



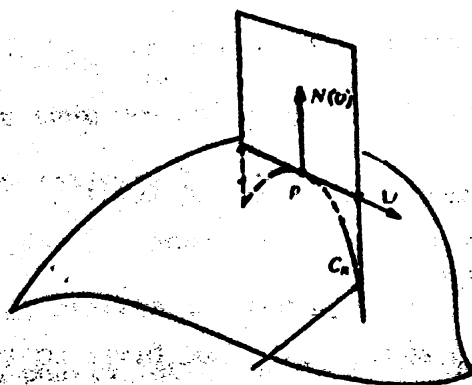
όπου n είναι το πρώτο κάθετο πεδίο της α (παλιά το είχαμε συμβολίσει N) , k η καμπυλότητα της καμπύλης α , $\alpha''(0) = k(0)n(0)$ ο πρώτος τύπος του Frenet και θ είναι η γωνία των $N(0)$, $n(0)$. Έτσι λοιπόν η κάθετη καμπυλότητα $k_n(v)$ είναι η προβολή του διανύσματος $k(0)n(0)$ πάνω στο $N(0)$ (σχήμα 43) .



σχήμα 43

Ας δώσουμε τώρα μια γεωμετρική ερμηνεία της κάθετης καμπυλότητας για να δικαιολογήσουμε και το όνομά της .

Αν v είναι ένα μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της S στο σημείο p , δηλαδή $v \in T_p(S)$ και $\|v\| = 1$, τότε είναι φανερό ότι το v και το $N(0)$ ορίζουν ένα επίπεδο που τέμνει την επιφάνειά μας σε μια καμπύλη έστω την C_v (σχήμα 44).



σχήμα 44

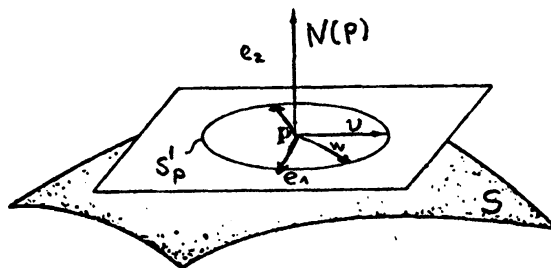


Καμπύλες της επιφάνειας που παίρνουμε κατ'αυτό το τρόπο λέγονται κάθετες τομές (normal sections). Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κάθετη τομή C_n έχει μοναδιαία ταχύτητα, αν όχι της κάνουμε αναπαραμέτρηση. Το πρώτο κάθετο διάνυσμα της C_n στο p είναι $\pm N(0)$, οπότε $\theta=0$ ή π . Έτσι από τα παραπάνω θα έχουμε :

$$k_n(v) = k(0) \cos\theta \stackrel{\text{για } \theta=0 \text{ ή } \pi}{=} k(0) \cdot (\pm 1) = \pm k(0) ,$$

όπου τώρα $k(0)$ είναι η καμπυλότητα της C_n στο p . Έτσι λοιπόν βλέπουμε ότι η κάθετη καμπυλότητα μιας επιφάνειας S σε ένα σημείο p και ως προς μια διεύθυνση v , στην ουσία είναι η καμπυλότητα μιας κάθετης τομής της επιφάνειας (με κάποιο $+$ ή $-$).

Παίρνουμε τώρα ένα σημείο p μιας κανονικής επιφάνειας S και ας είναι S_p^1 το σύνολο όλων των διανυσμάτων v του $T_p(S)$ που έχουν μέτρο 1 (σχήμα 45).



σχήμα 45

Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση την :

$$k_n : S_p^1 \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto k_n(v) ,$$

δηλαδή μια συνάρτηση που για κάθε $v \in S_p^1$ μας δίνει σε τιμή τη κάθετη καμπυλότητα της επιφάνειας S ως προς τη διεύθυνση v . Η συνάρτηση k_n λέγεται

συνάρτηση κάθετης καμπυλότητας της S στο p . Οποσδήποτε υπάρχει ένα τουλάχιστον διάνυσμα e_1 στο S_p^1 , ώστε το $k_n(e_1)$ να είναι η μεγαλύτερη τιμή (δηλαδή ως προς τη διεύθυνση e_1 η συνάρτηση k_n παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή) , που για πιο απλά θα συμβολίζουμε με $k_1(p)$. Επίσης υπάρχει ένα τουλάχιστον διάνυσμα e_2 στο S_p^1 , ώστε το $k_n(e_2)$ να είναι η μικρότερη τιμή (δηλαδή ως προς τη διεύθυνση e_2 η συνάρτηση k_n παίρνει τη μικρότερη τιμή) και που για πιο απλά θα συμβολίζουμε με $k_2(p)$. Διανύσματα όπως τα e_1 και e_2 και τα πολλαπλάσιά τους θα λέγονται κύρια διανύσματα (principal vectors) της S στο p και οι διευθύνσεις τους θα λέγονται κύριες διευθύνσεις (principal directions) της S στο p . Αντίστοιχα οι τιμές $k_1(p)$ και $k_2(p)$ λέγονται κύριες καμπυλότητες (principal curvatures) της S στο p . Επειδή πρέπει να ξεκαθαρίσουμε καλά τι είναι αυτά τα $k_1(p)$, $k_2(p)$, το ξανατονίζουμε . Η συνάρτηση k_n παίρνει μια πιο μεγάλη τιμή που συμβολίζουμε με $k_1(p)$ και μια πιο μικρή τιμή που συμβολίζουμε με $k_2(p)$. Τα διανύσματα ως προς τα οποία παίρνουμε αυτές τις τιμές τα λέμε κύρια διανύσματα .

Θα δώσουμε έναν ορισμό πριν αναφέρουμε μερικά παραδείγματα .

Ορισμός 3.1.9. Ένα σημείο p μιας κανονικής επιφάνειας S θα λέγεται ομφαλικό σημείο (umbilic point) αν $k_1(p) = k_2(p)$. Αντίθετα θα λέγεται μη ομφαλικό αν $k_1(p) \neq k_2(p)$.

Παράδειγμα 3.1.11. Ας πάρουμε την επιφάνεια επίπεδο . Τότε (παράδειγμα 3.1.2) έχουμε ότι σε κάθε σημείο p του επιπέδου και για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα v , εφαπτόμενο του επιπέδου στο p ισχύει $L_p(v) = 0$. Έτσι λοιπόν $k_n(v) = II(v) = \langle L(v), v \rangle = 0$, δηλαδή η συνάρτηση κάθετης καμπυλότητας k_n του επιπέδου στο p είναι σταθερή και ίση με μηδέν . Συνεπώς $k_1(p) = k_2(p) = 0$. Με άλλα λόγια όλα τα σημεία του επιπέδου είναι ομφαλικά .

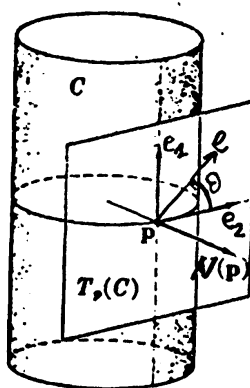


Παράδειγμα 3.1.12. Ας πάρουμε ένα σημείο p της σφαίρας ακτίνας R . Τότε (παράδειγμα 3.1.3), έχουμε ότι για κάθε διάνυσμα v εφαπτόμενο της σφαίρας στο p ισχύει $L(v) = -\frac{v}{R}$. Έτσι λοιπόν

$k_n(v) = II(v) = \langle L(v), v \rangle = -\langle \frac{v}{R}, v \rangle = -\frac{1}{R} \langle v, v \rangle = -\frac{1}{R}$. Δηλαδή και εδώ η συνάρτηση κάθετης καμπυλότητας k_n της σφαίρας στο p είναι σταθερή. Έτσι λοιπόν $k_1(p) = k_2(p) = -\frac{1}{R}$. Άρα και τα σημεία της σφαίρας είναι όλα ομφαλικά.

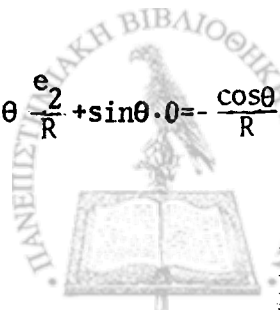
Παρατήρηση 3.1.11. Αξίζει να σημειώσουμε ότι διαλέγοντας για την σφαίρα το άλλο κάθετο (προσανατολισμό) τότε $Lv = \frac{v}{R}$ και για την κάθετη καμπυλότητα θα είχαμε $k_n(v) = \frac{1}{R}$.

Παράδειγμα 3.1.13. Παίρνουμε τώρα τον κύλινδρο C (Παράδειγμα 3.1.4). Τότε για το διάνυσμα $e_1 = (0, 0, 1) \in T_p(C)$ έχουμε $L(e_1) = 0$, οπότε $k_n(e_1) = 0$. Αντίθετα για ένα μοναδιαίο διάνυσμα $e_2 = (\alpha, \beta, 0) \in T_p(C)$ έχουμε $L(e_2) = -\frac{e_2}{R}$, οπότε $k_n(e_2) = -\frac{1}{R}$. Βέβαια για ένα τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα $e \in T_p(C)$ που κάνει γωνία θ με το e_2 θα έχουμε (σχήμα 46): $e = \cos\theta e_2 + \sin\theta e_1$



σχήμα 46

Άρα $L(e) = L(\cos\theta e_2 + \sin\theta e_1) = \cos\theta L(e_2) + \sin\theta L(e_1) = -\cos\theta \frac{e_2}{R} + \sin\theta \cdot 0 = -\frac{\cos\theta}{R} e_2$



Έτσι λοιπόν θα έχουμε : $k_n(e) = II(e) = \langle Le, e \rangle = - \langle \frac{\cos \theta}{R} e_2, \cos \theta e_2 + \sin \theta e_1 \rangle = - \frac{\cos^2 \theta}{R}$. Βλέπουμε λοιπόν πως η k_n έχει μεγαλύτερη τιμή το 0 (για $\theta = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή για το διάνυσμα e_1) και μικρότερη τιμή $-\frac{1}{R}$ (για $\theta = 0$, δηλαδή για το διάνυσμα e_2) . Τελικά έχουμε $k_1(p) = 0$ και $k_2(p) = -\frac{1}{R}$. Με άλλα λόγια κανένα σημείο του κυλίνδρου δεν είναι ομφαλικό . Πρατηρούμε επίσης ότι τα διανύσματα e_1 , e_2 είναι κύρια διανύσματα . Αυτά όμως τα διανύσματα αν θυμηθούμε το παράδειγμα 3.1.4 είναι και ιδιοδιανύσματα του L με αντίστοιχες ιδιοτιμές $-\frac{1}{R}$ και 0 . Αυτή η σύμπτωση δεν είναι καθόλου τυχαία , όπως θα δούμε αμέσως τώρα . Να αναφέρουμε επίσης ότι παίρνοντας για τον κύλινδρο το άλλο κάθετο τότε θα είχαμε $k_1(p) = \frac{1}{R}$, $k_2(p) = 0$. Παρατήρηση : Παρατηρούμε ότι αλλάζοντας το N αλλάζει ο ρόλος των e_1, e_2 και k_1, k_2 .

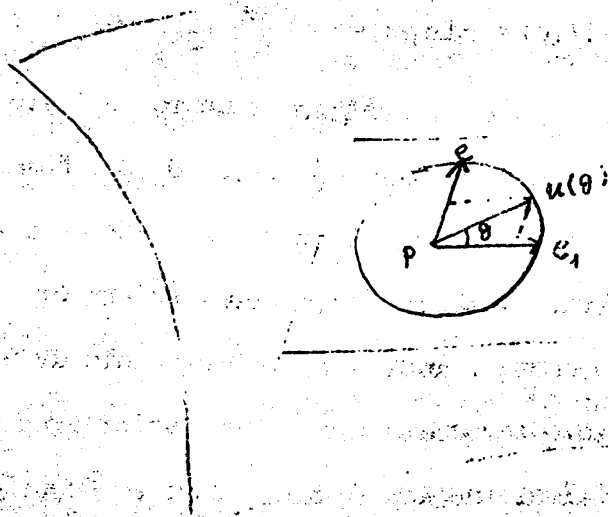
θα δούμε τώρα μια ενδιαφέρουσα πρόταση .

Πρόταση 3.1.2. Σε κάθε σημείο p μιας κανονικής επιφάνειας S υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2\}$ από κύρια διανύσματα έτσι ώστε $L(e_1) = k_1(p)e_1$, $L(e_2) = k_2(p)e_2$.

Απόδειξη . Ας πάρουμε ένα κύριο διάνυσμα e_1 ως προς το οποίο η συνάρτηση k_n κάθετης καμπυλότητας παίρνει την μεγαλύτερη τιμή δηλαδή $k_1(p)$. Έτσι $k_1(p) = k_n(e_1) = \langle L(e_1), e_1 \rangle$. Ας είναι δε e ένα μοναδιαίο διάνυσμα του $T_p(S)$ κάθετο στο e_1 , δηλαδή $\langle e_1, e \rangle = 0$. Έτσι λοιπόν τα διανύσματα e_1, e κάνουν μια ορθοκανονική βάση του $T_p(S)$. Κάθε λοιπόν μοναδιαίο διάνυσμα $u(\theta)$ του $T_p(S)$, που σχηματίζει γωνία θ με το e_1 (σχήμα 47) , γράφεται σα γραμμικός συνδυασμός των e_1, e ως :

$$u(\theta) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e$$





σχήμα 47

Έτσι λοιπόν η κάθετη καμπυλότητα ως προς το διάνυσμα $u(\theta)$ θα είναι

$$k_n(u(\theta)) \stackrel{\text{πιο σύντομα}}{=} k_n(\theta) = II(u(\theta)) = \langle L(u(\theta)), u(\theta) \rangle$$

$$= \langle L(\cos\theta e_1 + \sin\theta e), \cos\theta e_1 + \sin\theta e \rangle = \langle \cos\theta L(e_1) + \sin\theta L(e), \cos\theta e_1 + \sin\theta e \rangle$$

$$= \cos^2\theta \langle L(e_1), e_1 \rangle + 2\cos\theta\sin\theta \langle L(e_1), e \rangle + \sin^2\theta \langle L(e), e \rangle$$

$$= k_1(p)\cos^2\theta + \sin 2\theta \langle L(e_1), e \rangle + \sin^2\theta \langle L(e), e \rangle$$

$$\text{αφού } k_1(p) = \langle L e_1, e_1 \rangle$$

Τελικά λοιπόν έχουμε :

$$(1) \quad k_n(\theta) = k_1(p)\cos^2\theta + \sin 2\theta \langle L(e_1), e \rangle + \sin^2\theta \langle L(e), e \rangle$$

Η συνάρτηση $k_n(\theta)$ είναι μιας μεταβλητής . Για να βρούμε για ποια θ η συνάρτηση αυτή παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή , όπως ξέρουμε από την ανάλυση πρέπει να λύσουμε την εξίσωση :

$$(2) \quad \frac{dk_n}{d\theta}(\theta) = -k_1(p)\sin 2\theta + 2\cos 2\theta \langle L(e_1), e \rangle + \sin 2\theta \langle L(e), e \rangle = 0$$

Ξέρουμε, όμως από τη κατασκευή μας ότι η συνάρτηση $k_n(\theta)$ παίρνει μεγίστη τιμή για $\theta=0$, δηλαδή για το e_1 . Έτσι η εξίσωση (2) πρέπει να επαληθεύεται για $\theta=0$. Για $\theta=0$ η (2) γίνεται

$$2 \langle L(e_1), e \rangle = 0,$$

δηλαδή πρέπει $\langle L(e_1), e \rangle = 0$, οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$(3) \quad k_n(\theta) = k_1(p)\cos^2\theta + \sin^2\theta \langle L(e), e \rangle$$

και η (2) γίνεται:

$$(4) \quad \frac{dk_n}{d\theta}(\theta) = -k_1(p)\sin 2\theta + \sin 2\theta \langle L(e), e \rangle = \sin 2\theta (\langle L(e), e \rangle - k_1(p)) = 0$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $k_1(p) = \langle L(e), e \rangle$. Αν αυτό ισχύει τότε από την (4)

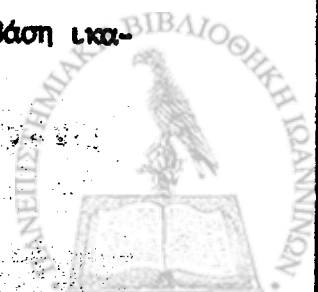
συμπεραίνουμε ότι $\frac{dk_n}{d\theta}(\theta) = 0$, δηλαδή η συνάρτηση κάθετης καμπυλότητας $k_n(\theta)$ είναι σταθερή. Τότε όμως πρέπει $k_1(p) = k_2(p) = c$, δηλαδή το σημείο p είναι ομφαλικό. Αλλά τότε

$$L(e_1) = \underbrace{\langle L(e_1), e_1 \rangle}_{c} e_1 + \overset{0}{\langle L(e_1), e \rangle} e = ce_1 = k_1(p)e_1$$

$$L(e) = \overset{0}{\langle L(e), e_1 \rangle} e_1 + \underbrace{\langle L(e), e \rangle}_{c} e = ce = k_2(p)e$$

δηλαδή η ορθοκανονική βάση $\{e_1, e\}$ ικανοποιεί την πρότασή μας.

Άσκηση: Να δείξετε σ' αυτή την περίπτωση ότι κάθε ορθοκανονική βάση ικανοποιεί την πρότασή μας.



Περίπτωση 2. $\langle L(e), e \rangle \neq k_1(p)$. Σ' αυτή την περίπτωση η (4) επαληθεύεται μόνο για τις γωνίες $\theta = 0$ και $\theta = \frac{\pi}{2}$. Έτσι λοιπόν μόνο ως προς τα διανύσματα $e_1 (\theta=0)$ και $e_2 (\theta=\frac{\pi}{2})$ η $k_n(\theta)$ γίνεται μεγαλύτερη ή μικρότερη . Επειδή όμως ξέρουμε ότι ως προς το e_1 γίνεται μεγαλύτερη , θα γίνεται μικρότερη ως προς το e_2 . (Μπορούμε να το επαληθεύσουμε και αν πάρουμε τη δεύτερη παράγωγο της $k_n(\theta)$). Έτσι λοιπόν το διάνυσμα $e = e_2$ είναι κύριο διάνυσμα και έτσι $k_2(p) = k_n(e=e_2) = \langle L(e_2), e_2 \rangle$. Μετά από αυτά έχουμε

$$L(e_1) = \underbrace{\langle L(e_1), e_1 \rangle}_{k_1(p)} e_1 + \overset{0}{\langle L(e_1), e_2 \rangle} e_2 = k_1(p) e_1$$

και

$$L(e_2) = \overset{0}{\langle L(e_2), e_1 \rangle} e_1 + \underbrace{\langle L(e_2), e_2 \rangle}_{k_2(p)} e_2 = k_2(p) e_2$$

Είναι φανερό ότι όταν το p δεν είναι ομφαλικό μια μόνο ορθοκανονική βάση ικανοποιεί την πρότασή μας .

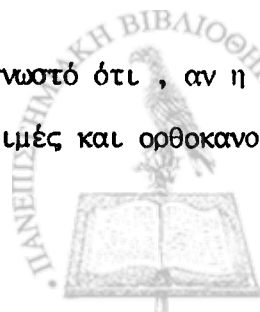
Σχόλια 1. Βλέπουμε από τη παραπάνω πρόταση ότι τα κύρια διανύσματα e_1, e_2 μιας κανονικής επιφάνειας S σε ένα σημείο p είναι ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνιση L του Weingarten με αντίστοιχες ιδιοτιμές $k_1(p)$ και $k_2(p)$.

2. Αν e_1, e_2 είναι τα κύρια διανύσματα μιας κανονικής επιφάνειας S σε ένα μη ομφαλικό σημείο p και $u(\theta)$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα που κάνει γωνία θ με το e_1 , τότε η κάθετη καμπυλότητα ως προς το $u(\theta)$ είναι :

$$k_n(u(\theta)) \xrightarrow{\text{πιο σύντομα}} k_n(\theta) = k_1(p) \cos^2 \theta + k_2(p) \sin^2 \theta ,$$

όπως βγαίνει από τη σχέση (3) στη παραπάνω απόδειξη . Αυτή η τελευταία εξίσωση (τύπος) , λέγεται και εξίσωση του Euler .

Σημαντική παρατήρηση . Από τη Γραμμική Άλγεβρα είναι γνωστό ότι , αν η $L: V \rightarrow V$ είναι αυτοπροσηρτημένη , τότε έχει πραγματικές ιδιοτιμές και ορθοκανο-



νική βάση από ιδιοδιανύσματα . Θα μπορούσαμε κάλλιστα να ονομάσουμε τις ιδιοτιμές ως κύριες καμπυλότητες και τα ιδιοδιανύσματα ως κύρια διανύσματα και να αποφύγουμε πολλές από τις προηγούμενες διαδικασίες . Δεν το προτιμήσαμε όμως για λόγους γεωμετρικής εποπτείας .

Ορισμός 3.1.10. Έστω S μια κανονική επιφάνεια . Τότε η συνάρτηση

$$K : S \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto K(p) \stackrel{\text{ορ}}{=} k_1(p)k_2(p)$$

λέγεται συνάρτηση καμπυλότητας του Gauss (Gauss curvature) της επιφάνειας S , ενώ η συνάρτηση

$$H : S \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto H(p) \stackrel{\text{ορ}}{=} \frac{1}{2} (k_1(p) + k_2(p))$$

λέγεται συνάρτηση μέσης καμπυλότητας της S (mean curvature) .

Ορισμός 3.1.11. Ένα σημείο p μιας κανονικής επιφάνειας S λέγεται :

- (i) Ελλειπτικό (elliptic) , αν $K(p) > 0$
- (ii) Υπερβολικό (hyperbolic) , αν $K(p) < 0$
- (iii) Παραβολικό (parabolic) , αν $K(p) = 0$ και $(k_1(p), k_2(p)) \neq (0, 0)$
- (iv) Επίπεδο (planar) , αν $k_1(p) = k_2(p) = 0$

Παρατήρηση : Ένα επίπεδο σημείο είναι πάντα ομφαλικό χωρίς να συμβαίνει και το αντίστροφο .

Ας βρούμε τώρα τη συνάρτηση καμπυλότητας Gauss και τη συνάρτηση μέσης καμπυλότητας για μερικές γνωστές επιφάνειες .

Παραδειγμα 3.1.14. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.1.11 σε κάθε σημείο p του επιπέδου έχουμε $k_1(p) = k_2(p) = 0$. Δηλαδή όλα τα σημεία του επιπέδου είναι επίπεδα και μάλιστα $K \equiv 0$, $H \equiv 0$.

Παραδειγμα 3.1.15. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.1.12 σε κάθε σημείο p της σφαίρας ακτίνας R έχουμε $k_1(p) = k_2(p) = -\frac{1}{R}$. Έτσι θα έχουμε



$K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p) = \frac{1}{R^2} > 0$. Δηλαδή όλα τα σημεία της σφαίρας είναι ελλειπτικά .

Επίσης $H(p) = \frac{1}{2} (k_1(p) + k_2(p)) = \frac{1}{2} (-\frac{1}{R} - \frac{1}{R}) = -\frac{1}{R}$. Για τη σφαίρα ακτίνας R βλέπουμε ότι η συνάρτηση καμπυλότητας Gauss K και η συνάρτηση μέσης καμπυλότητας H είναι σταθερές . Αν παίρναμε το άλλο κάθετο για τη σφαίρα θα βρίσκαμε πάλι $K(p) = \frac{1}{R^2}$, αλλά $H(p) = \frac{1}{R}$.

Παράδειγμα 3.1.16. Για τον κύλινδρο C ακτίνας R θα έχουμε ότι σε κάθε σημείο p του κυλίνδρου ισχύουν , $k_1(p) = 0$ και $k_2(p) = -\frac{1}{R}$. Έτσι λοιπόν $K(p) = 0$ ($k_1(p) = 0$, $k_2(p) = -\frac{1}{R} \neq 0$) , δηλαδή όλα τα σημεία του κυλίνδρου είναι παραβολικά . Επίσης $H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)) = \frac{1}{2} (-\frac{1}{R} + 0) = -\frac{1}{2R}$.

Εύλογο είναι τώρα το παρακάτω ερώτημα : Μήπως κάθε ιδιοδιάνυσμα του L είναι κύριο διάνυσμα της επιφάνειας ; Πραγματικά αυτό συμβαίνει και δείχνεται στη παρακάτω πρόταση .

Πρόταση 3.1.3. Έστω p ένα σημείο μιας κανονικής επιφάνειας S και $v \in T_p(S)$ ένα ιδιοδιάνυσμα του L με αντίστοιχη ιδιοτιμή α (δηλαδή : $L(v) = \alpha v$) . Τότε το v είναι κύριο διάνυσμα με αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα το α .

Απόδειξη . Αν το σημείο p είναι ομφαλικό , τότε η πρόταση είναι φανερή . Ας δεχτούμε λοιπόν ότι το p δεν είναι ομφαλικό ($k_1(p) \neq k_2(p)$) . Σε μια τέτοια κατάσταση , σίγουρα το α είναι διαφορετικό από το $k_1(p)$ ή το $k_2(p)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k_1(p) \neq \alpha$. Από τη πρόταση 3.1.2 όμως έχουμε $L(e_1) = k_1(p)e_1$. Άρα , αφού ο L αυτοπροσχηματισμένος ισχύει , $\langle L(e_1), v \rangle = \langle e_1, L(v) \rangle$ ή $\langle k_1(p)e_1, v \rangle = \langle e_1, \alpha v \rangle$ ή $(k_1(p) - \alpha) \langle e_1, v \rangle = 0$. Συνεπώς $\langle e_1, v \rangle = 0$, αφού $k_1(p) \neq \alpha$. Αυτό σημαίνει ότι το v είναι παράλληλο με το e_2 , δηλαδή το v είναι κύριο διάνυσμα . Ας βρούμε τη κάθετη καμπυλότητα ως προς τη διεύθυνση του v . Θα έχουμε :



$$\begin{aligned} k_2(p) &\stackrel{\text{op}}{=} k_n(e_2) = k_n(v) = \left\langle L\left(\frac{v}{\|v\|}\right), \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\|v\|^2} \langle L(v), v \rangle = \frac{1}{\|v\|^2} \langle \alpha v, v \rangle = \frac{\alpha}{\|v\|^2} \langle v, v \rangle = \alpha. \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν δείξαμε αυτό που θέλαμε .

Ας φανταστούμε τώρα μια κανονική καμπύλη $\gamma: I \rightarrow S$ μιας κανονικής επιφάνειας S , τέτοια ώστε σε κάθε σημείο $\gamma(t)$ της καμπύλης το διάνυσμα ταχύτητας $\gamma'(t)$ είναι κύριο διάνυσμα της επιφάνειας S στο $\gamma(t)$. Μια τέτοια καμπύλη λέγεται γραμμή καμπυλότητας της επιφάνειας S . Πως όμως μπορούμε να ελέγχουμε αν μια καμπύλη $\gamma: I \rightarrow S$ είναι γραμμή καμπυλότητας ; Η παρακάτω πρόταση μας εξασφαλίζει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η γ γραμμή καμπυλότητας .

Πρόταση 3.1.4. Μια κανονική καμπύλη γ της κανονικής επιφάνειας S είναι γραμμή καμπυλότητας (line of curvature) της S , αν και μόνο αν , τα διανύσματα $N'(t)$ και $\gamma'(t)$ είναι παράλληλα , όπου $N(t) = N(\gamma(t))$.

Απόδειξη . Ας δεχτούμε πρώτα ότι ισχύει $N'(t) = -\lambda(t)\gamma'(t)$. Θα δείξουμε ότι η καμπύλη γ είναι γραμμή καμπυλότητας , δηλαδή ότι το διάνυσμα $\gamma'(t)$ είναι κύριο διάνυσμα για κάθε t . Πραγματικά , επειδή $L(\gamma'(t)) = -N'(t)$ (ορισμός απεικόνισης Weingarten) θα έχουμε $L(\gamma'(t)) = \lambda(t)\gamma'(t)$, δηλαδή το $\gamma'(t)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του L με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda(t)$. Σύμφωνα λοιπόν με τη πρόταση 3.1.3. το $\gamma'(t)$ είναι κύριο διάνυσμα , αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε. Επίσης το $\lambda(t)$ είναι κύρια καμπυλότητα της S στο σημείο $\gamma(t)$ ως προς τη διεύθυνση $\gamma'(t)$. Αντίστροφα τώρα , σαν άσκηση .

Παραδειγμα 3.1.17. Θεωρούμε τον ορθό κυκλικό κύλινδρο ακτίνας R . Τό-



τε σύμφωνα με το παράδειγμα 3.1.4 ένα διάνυσμα κάθετο στον κύλινδρο είναι το $N(x,y,z) = (\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0)$. Θεωρώ τη καμπύλη $\gamma: I \rightarrow C: t \rightarrow \gamma(t) = (x(t), y(t), \alpha)$, όπου $\alpha = \text{σταθερό}$ και $(x(t))^2 + (y(t))^2 = R^2$. Έχουμε, $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), 0)$. Επίσης $N(t) = N(\gamma(t)) = (\frac{x(t)}{R}, \frac{y(t)}{R}, 0)$ και συνεπώς $N'(t) = \frac{1}{R} (x'(t), y'(t), 0) = \frac{1}{R} \gamma'(t)$. Έτσι η καμπύλη γ είναι γραμμή καμπυλότητας του κυλίνδρου.

Θα κλείσουμε με ένα ακόμη ορισμό.

Ορισμός 3.1.12. Ένα διάνυσμα $v \in T_p S$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\langle Lv, v \rangle = 0$ λέγεται ασυμπτωτικό διάνυσμα (ή διεύθυνση) στο $p \in S$. Μια κανονική καμπύλη $\gamma: I \rightarrow S$ τέτοια ώστε το $\gamma'(t)$ είναι ασυμπτωτικό για κάθε t λέγεται ασυμπτωτική καμπύλη της επιφάνειας.

Ασκήσεις

1. Έστω p ένα υπερβολικό σημείο μιας κανονικής επιφάνειας S . Να αποδείξετε ότι στο $T_p(S)$ υπάρχουν δύο ασυμπτωτικές διευθύνσεις. Να δείτε ότι αυτές οι διευθύνσεις διχοτομούνται από τις κύριες διευθύνσεις. Τι γίνεται σε ένα παραβολικό, ελλειπτικό, επίπεδο σημείο;
2. Να δείξετε ότι το άθροισμα των καθέτων καμπυλοτήτων μιας κανονικής επιφάνειας S σε ένα σημείο p , ως προς δύο τυχαία κάθετα διανύσματα είναι σταθερό και ίσο με $2H(p)$, όπου H η συνάρτηση μέσης καμπυλότητας.
3. Μια κανονική επιφάνεια S λέγεται συνεκτική όταν κάθε δύο οποιαδήποτε σημεία της μπορούν να ενωθούν με μια καμπύλη που βρίσκεται ολόκληρη πάνω στην επιφάνεια. Να αποδείξετε ότι μια κανονική συνεκτική επιφάνεια, που έχει όλα τα σημεία ομφαλικά, είναι κομμάτι από επίπεδο ή κομμάτι από σφαίρα.
4. Έστω p ένα σημείο μιας κανονικής επιφάνειας S και $v \in T_p(S)$ ένα διάνυσμα σταθερό. Αν $k_n(\theta)$ είναι η κάθετη καμπυλότητα ως προς ένα διάνυσμα $u(\theta)$ που κάνει γωνία θ με το σταθερό διάνυσμα v , να αποδείξετε ότι η μέση καμπυλότητα της επιφάνειας S στο σημείο p , δίνεται από τη σχέση

$$H(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k_n(\theta) d\theta.$$



5. Η συμμετρική διγραμμική συνάρτηση $III : T_p(S) \times T_p(S) \rightarrow R : (v, w) \mapsto III(v, w) =$
 $= \langle L^2(v), w \rangle$, όπου $L^2(v) = L(L(v))$, λέγεται τρίτη διγραμμική μορφή
 της επιφάνειας , ενώ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $III : T_p(S) \rightarrow R : v \mapsto III(v) =$
 $= \langle L^2(v), v \rangle$ λέγεται τρίτη τετραγωνική μορφή της επιφάνειας ή τρίτη
θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας . Να δείξετε ότι ισχύει :

$$III - 2H II + KI = 0 .$$

3.2. Ισομετρικές Απεικονίσεις Επιφανειών .

Σ' αυτή τη παράγραφο θα ασχοληθούμε με μια κατηγορία απεικονίσεων επιφανειών ,
 δηλαδή απεικονίσεων που διατηρούν κάποια στοιχεία των επιφανειών .

Στη προηγούμενη παράγραφο ορίσαμε τη μετρική μιας κανονικής επιφάνειας και
 είδαμε πως με τη βοήθεια της μετρικής μπορούμε να βρούμε μήκη διανυσμάτων , μή-
 κη καμπυλών , κ.λ.π. Έτσι η μετρική μιας επιφάνειας μας βοηθάει να κάνουμε τις
 μετρήσεις μας πάνω στην επιφάνεια , χωρίς να λάβουμε υπόψη τον περιβάλλοντα χώ-
 ρο , αν και η μετρική προέκυψε από τον περιβάλλοντα χώρο . Το γεγονός αυτό είναι
 η αρχή για τη δημιουργία της λεγόμενης "Εσωτερικής Γεωμετρίας των Επιφανειών"
 (Intrinsic Geometry of Surfaces) . Στο μέρος αυτό της θεωρίας των επιφανειών
 τοποθετούνται σχέσεις και ιδιότητες που εξαρτώνται μόνο από τη μετρική . Εξ άλλου
 στα παραδείγματα 3.1.6 και 3.1.7 είδαμε ότι το επίπεδο και ο κύλινδρος έχουν ,
 ως προς κάποια συγκεκριμένα συστήματα συντεταγμένων , μετρική της ίδιας μορφής
 παρά το γεγονός ότι επίπεδο και κύλινδρος είναι διαφορετικές από άποψη σχήματος
 επιφάνειες . Επί πλέον ένα επίπεδο κομμάτι ύφασμα μπορούμε να το τυλίξουμε πάνω
 στο κύλινδρο . χωρίς να μπορούμε να κάνουμε το ίδιο πάνω στη σφαίρα χωρίς να
 διπλώσουμε το ύφασμα ή να το κόψουμε . Θα κοιτάξουμε να μαθηματικοποιήσουμε
 αυτές τις παρατηρήσεις .

Στα επόμενα S και $\tilde{S}$ θα είναι κανονικές επιφάνειες .



θα αρχίσουμε τη συζήτηση με έναν ορισμό .

Ορισμός 3.2.1. Μια απεικόνιση $F: S \rightarrow \bar{S}$ δύο κανονικών επιφανειών λέγεται ισομετρία (isometry) στο σημείο $p \in S$, αν η dF_p (άλλως F_{*p}) διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα . Δηλαδή ισχύει

(1) $\langle v, w \rangle = \langle dF_p(v), dF_p(w) \rangle$, για όλα τα $v, w \in T_p S$. Αν η $F: S \rightarrow \bar{S}$ είναι αμφιδιαφόριση και ισομετρία σε κάθε $p \in S$, τότε η F λέγεται ισομετρία μεταξύ των $S, \bar{S}$ και οι δύο επιφάνειες λέγονται ισομετρικές ή εφαρμόσιμες επιφάνειες (isometric surfaces) .

Παρατήρηση . Κάθε επιφάνεια S είναι ισομετρική με τον εαυτό της , αφού η ταυτότητα $I: S \rightarrow S$ είναι αμφιδιαφόριση και ισομετρία σε κάθε σημείο $p \in S$.

Άσκηση : Η σχέση " H S είναι ισομετρική με την $\bar{S}$ " είναι σχέση ισοδυναμίας μέσα στο σύνολο των επιφανειών .

Πρόταση 3.2.1. Ας είναι $F: S \rightarrow \bar{S}$ μια απεικόνιση των επιφανειών $S, \bar{S}$. Υποθέτουμε πως $I, \bar{I}$ είναι οι πρώτες θεμελιώδεις μορφές των $S, \bar{S}$ στα σημεία $p, F(p)$ αντίστοιχα . Η F είναι ισομετρία στο p , αν και μόνο αν ισχύει :

$$(2) \quad I(v) = \bar{I}(dF(v)) \quad , \quad \text{για κάθε } v \in T_p S \quad .$$

Απόδειξη . Αν η F είναι ισομετρία στο p τότε ισχύει φανερά η (2) . Αντίστροφα , ας είναι $v, w \in T_p S$. Τότε η (2) και η ταυτότητα $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle v+w, v+w \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle \}$ συνεπάγονται αμέσως την (1) . Έτσι η F είναι ισομετρία στο p .

Παρατήρηση : Βλέπουμε λοιπόν ότι αν $F: S \rightarrow \bar{S}$ είναι μια απεικόνιση , τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα



- (1) F ισομετρία στο p
- (2) dF_p διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο
- (3) dF_p διατηρεί μήκη διανυσμάτων.

Θεωρούμε τώρα μια απεικόνιση $F: S \rightarrow \bar{S}$ και ας είναι $\gamma: I \rightarrow S$ μια καμπύλη της S . Τότε η $\beta = F \circ \gamma: I \rightarrow \bar{S}$ είναι μια καμπύλη της $\bar{S}$, που συμβολίζουμε με $F(\gamma)$. Η παρακάτω πρόταση είναι σημαντική.

Πρόταση 3.2.2. Ας είναι $F: S \rightarrow \bar{S}$ μια αμφιδιακρόριση. Η F είναι ισομετρία, αν και μόνο αν, για κάθε καμπύλη γ της S , οι γ και $F(\gamma)$ έχουν ίδιο μήκος.

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε πως η F είναι ισομετρία τότε τα μήκη των $\gamma'(t)$, $dF(\gamma'(t))$ είναι ίσα και συνεπώς τα μήκη $\int_I |\gamma'(t)| dt$, $\int_I |dF(\gamma'(t))| dt$ των γ , $F(\gamma)$ είναι ίσα. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε πως η F διατηρεί τα μήκη των καμπυλών. Θα δείξουμε πως είναι ισομετρία σε κάθε σημείο $p \in S$. Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων $X: UCR^2 \rightarrow S$, γύρω από το $p \in S$. Είναι φανερό πως η $F \circ X = Y: UCR^2 \rightarrow \bar{S}$ είναι σύστημα συντεταγμένων της $\bar{S}$ γύρω από το $F(p)$. Θεωρούμε τώρα καμπύλη $\gamma: [0, \alpha] \rightarrow S$, $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ με $\gamma(0) = X(u(0), v(0)) = p$ και $\gamma'(0) = v$. Τότε η $\beta = F \circ \gamma: [0, \alpha] \rightarrow \bar{S}$ είναι καμπύλη της $\bar{S}$ με $\beta(0) = F(p)$ και $\beta'(0) = dF_p(v)$. Τα μήκη τόξων των γ , $F(\gamma) = \beta$ με αρχή το 0 είναι:

$$s_1(t) = \int_0^t |\gamma'(t)| dt, \quad s_2(t) = \int_0^t |dF(\gamma'(t))| dt.$$

Σύμφωνα με την υπόθεσή μας $s_1(t) = s_2(t)$. Έτσι λοιπόν $|\gamma'(t)| = |dF(\gamma'(t))|$ και συνεπώς $|\gamma'(0)| = |dF(\gamma'(0))|$ ή $|v| = |dF(v)|$. Η πρόταση 3.2.1 τώρα μας λέγει πως η F είναι ισομετρία στο p . Αρκού όμως η F είναι και αμφιδιακρόριση, θα είναι ισομετρία σύμφωνα με τον ορισμό μας.



Παρατήρηση . Η παραπάνω πρόταση μας λέει και το εξής σημαντικό συμπέρασμα . Όταν η $F : S \rightarrow \bar{S}$ είναι ισομετρία και θεωρήσουμε τα συστήματα συντεταγμένων $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $Y = F \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{S}$, (δηλαδή θεωρούμε στις $S, \bar{S}$ ίδιες παραμέτρους) τότε στα αντίστοιχα σημεία (σημεία με ίδιες παραμέτρους) , τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της S είναι ίσα αντιστοίχως με τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της $\bar{S}$. Πραγματικά , αφού $Y_u = dF(X_u)$, $Y_v = dF(X_v)$ θα έχουμε :

$$E(u,v) = \langle X_u, X_v \rangle = \langle dF(X_u), dF(X_v) \rangle = \langle Y_u, Y_v \rangle = \bar{E}(u,v)$$

$$F(u,v) = \quad \text{με όμοιο τρόπο} \quad = \bar{F}(u,v)$$

$$G(u,v) = \quad \text{με όμοιο τρόπο} \quad = \bar{G}(u,v) .$$

Τώρα τον κύλινδρο C κόβοντάς τον κατακόρυφα μπορούμε να τον ανοίξουμε και να τον εφαρμόσουμε σε ένα κομμάτι A του επιπέδου . Αυτό σημαίνει πως το κομμάτι A είναι ισομετρική επιφάνεια με τον κύλινδρο , αφού στην αντιστοιχία αυτή , αντίστοιχες καμπύλες έχουν ίδιο μήκος . Αυτή η διαπίστωση δικαιολογεί και το γεγονός ότι στα παραδείγματα 3.1.6 και 3.1.7 βρήκαμε πρώτες θεμελιώδεις μορφές της ίδιας μορφής .

Η παρακάτω πρόταση μας δίνει ένα αντίστροφο του συμπεράσματος , που διαπιστώσαμε στη προηγούμενη παρατήρηση .

Πρόταση 3.2.3. Ας είναι $X : U \rightarrow S$, $\bar{X} : U \rightarrow \bar{S}$ τοπικά συστήματα συντεταγμένων των $S, \bar{S}$ αντίστοιχα . Αν $E(u,v) = \bar{E}(u,v)$, $F(u,v) = \bar{F}(u,v)$ και $G(u,v) = \bar{G}(u,v)$, τότε η $F = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{X}(U)$ είναι ισομετρία .

Απόδειξη . Είναι φανερό πως η F είναι αμφιδιαφύριση . Αρκεί να δείξουμε πως διατηρεί τα μήκη των καμπυλών . Πραγματικά , αυτό συμβαίνει , αφού για τη καμπύλη $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ και την εικόνα της $\beta(t) : F(\gamma(t)) = \bar{X} \circ X^{-1}(X(u(t), v(t))) = \bar{X}(u(t), v(t))$ έχουμε :

$$\gamma'(t) = X_u u'(t) + X_v v'(t) , \quad \beta'(t) = \bar{X}_u u'(t) + \bar{X}_v v'(t)$$

και συνεπώς



$| \gamma'(t) | = | \beta'(t) |$, λόγω του ότι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης είναι ίσα . Δηλαδή , $\langle X_u, X_u \rangle = E = \bar{E} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle$, $\langle X_u, X_v \rangle = F = \bar{F} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle$, $\langle X_v, X_v \rangle = G = \bar{G} = \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle$. Έτσι σύμφωνα με τη πρόταση 3.2.2 η F είναι ισομετρία .

Είναι φανερό πως δεν υπάρχει αμφιδιακρόση μετὰξὺ ὅλου τοῦ ἐπιπέδου καὶ ὅλου τοῦ κυλίνδρου (γιατί;) . Έτσι ὅλο το ἐπίπεδο δεν μπορεί να είναι ισομετρική επιφάνεια με ὅλο τον κύλινδρο . Εντούτοις ὅλος ο κύλινδρος είναι ισομετρική επιφάνεια με ἓνα κομμάτι τοῦ ἐπιπέδου (κόβουμε τον κύλινδρο σε μια γενέτειρα καὶ τον ἀνοίγουμε να εφαρμόσει στο ἐπίπεδο) . Το γεγονός αὐτό μας οδηγεί στο παρακάτω ὀρισμό .

Ὄρισμός 3.2.2. Δίνονται οἱ κανονικὲς ἐπιφάνειες $S, \bar{S}$. Ἡ ἀπεικόνιση $F: S \rightarrow \bar{S}$ λέγεται τοπικὴ ισομετρία (local isometry) ἀν γιὰ κάθε $p \in S$, ὑπάρχει περὶοχή V τοῦ p , ἔτσι ὥστε ἡ $F|_V: V \subset S \rightarrow F(V) \subset \bar{S}$ εἶναι ισομετρία . Ἀν ὑπάρχει τοπικὴ ισομετρία $F: S \rightarrow \bar{S}$, τότε ἡ S λέγεται τοπικὰ ισομετρικὴ (locally isometric) με τὴν $\bar{S}$.

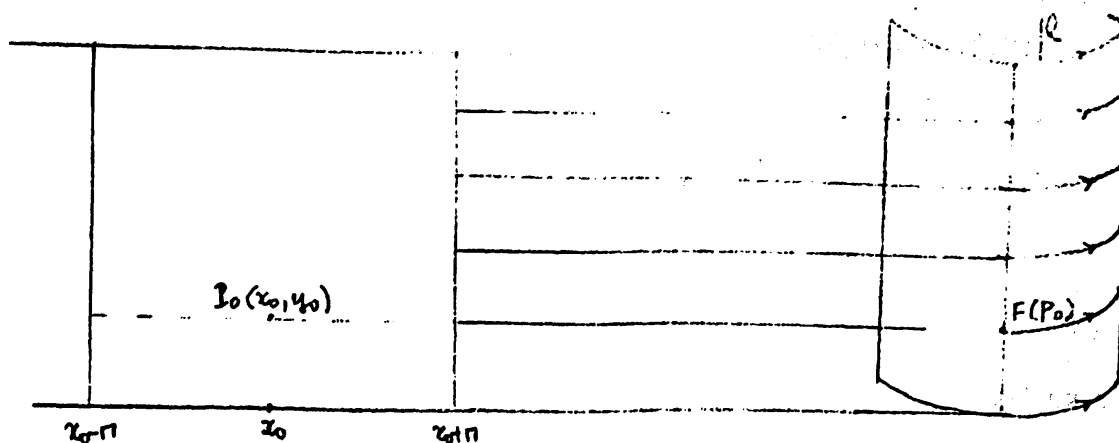
Παρατήρηση : Εἶναι φανερό πως μια ἀμφιδιακρόση $F: S \rightarrow \bar{S}$, που εἶναι τοπικὴ ισομετρία , εἶναι ισομετρία .

Παράδειγμα 3.2.1. Το ἐπίπεδο π εἶναι τοπικὰ ισομετρικὴ ἐπιφάνεια με τον κύλινδρο C . θεωροῦμε το ὀxy ἐπίπεδο γιὰ π . Τότε ἡ ἀπεικόνιση

$$F: \pi \rightarrow C , (x, y) \mapsto F(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$$

εἶναι τοπικὴ ισομετρία . Ἡ γεωμετρικὴ ἔννοια τῆς F εἶναι ὅτι τυλίσσει τὸ π ἀπειρες φορές γύρω ἀπὸ τον κύλινδρο C . Ἀς εἶναι $p_0 = (x_0, y_0) \in \pi$. θεωροῦμε τὴ λωρίδα $V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (x_0 - \pi, x_0 + \pi) , y \in \mathbb{R} \}$, που εἶναι μια περὶοχή τοῦ p_0 . Τότε εἶναι φανερό ὅτι $F(V)$ εἶναι ὅλος ο κύλινδρος ἐκτὸς ἀπὸ τὴν γενέτειρα $v = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos x_0 , y = \sin x_0 , z \in \mathbb{R} \}$. Ἐπὶ πλέον ἡ $F|_V: V \rightarrow F(V)$ εἶναι





αμφιδιακρόση . Όμως οι απεικονίσεις :

$$X : V \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3 : (x, y) \rightarrow X(x, y) = (x, y, 0)$$

$$\bar{X} : V \rightarrow F(V) \subset \mathbb{R}^3 : (x, y) \rightarrow \bar{X}(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$$

είναι συστήματα συντεταγμένων των $V, F(V)$ και ως προς αυτά , όπως ξέρουμε (παράδειγματα 3.1.6 και 3.1.7) οι πρώτες θεμελιώδεις μορφές είναι ίδιες . Έτσι η F είναι τοπική ισομετρία , δεν είναι όμως ισομετρία αφού η $F : \pi \rightarrow C$ δεν είναι αμφιδιακρόση .

Θα συνεχίσουμε τη συζήτηση ορίζοντας , χωρίς πολλές λεπτομέρειες , την (εσωτερική) απόσταση δύο σημείων P, Q πάνω σε μια επιφάνεια S .

Θεωρούμε μια κανονική επιφάνεια S και ας είναι P, Q δύο σημεία της . Παίρνουμε όλες τις κατά τμήματα λείες καμπύλες της S που ενώνουν τα δύο σημεία . Κάθε τέτοια καμπύλη έχει μήκος ένα μη αρνητικό αριθμό . Παίρνουμε το μεγαλύτερο κάτω φράγμα αυτών των μηκών . Ο αριθμός αυτός (μεγαλύτερο κάτω φράγμα) λέγεται (εσωτερική) απόσταση (intrinsic distance) των σημείων P, Q και συμβολίζεται με $d_S(P, Q)$.

Παρατηρήσεις : 1. Είναι φανερό ότι η $d_S(P, Q)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση



από την απόσταση $|P-Q|$ των σημείων σαν σημεία του R^3 (άσκηση 7, στη σε-
λίδα 26).

2. Δεν είναι σωστό ότι μπορούμε να βρούμε πάντα μια καμπύλη της επιφάνειας S , που να ενώνει τα σημεία P, Q και της οποίας το μήκος να είναι όσο η από-
σταση $d_S(P, Q)$. Πραγματικά, αν $S = Oxy$ επίπεδο $- \{0\}$ και $P = (-1, 0, 0)$,
 $Q = (1, 0, 0)$ τότε $d_S(P, Q) = 2$, αλλά δεν υπάρχει καμπύλη της S , που να ενώνει
τα P, Q και να έχει μήκος 2 (γιατί ;).

3. Αν $F: S \rightarrow \bar{S}$ είναι μια ισομετρία, είναι φανερό πως για κάθε ζευγάρι
σημείων $P, Q \in S$ ισχύει ότι: $d_S(P, Q) = d_{\bar{S}}(F(P), F(Q))$ (γιατί ;).

3.3. Εξισώσεις Weingarten, Εξισώσεις του Gauss, Εξισώσεις των Mainardi-Codazzi.

Στη παράγραφο αυτή θα προσπαθήσουμε να βρούμε μερικούς χρήσιμους στη θεω-
ρία των επιφανειών τύπους για τον υπολογισμό της καμπυλότητας του Gauss και της
μέσης καμπυλότητας. Στην αρχή θα δώσουμε κάποιες γνωστές έννοιες από τη γραμ-
μική άλγεβρα. Έστω $F: V \rightarrow V$ μια αυτοπροσχητημένη γραμμική απεικόνιση, όπου
 V είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\dim V = 2$. Αν
 $\{v, w\}$ είναι μια βάση του V , τότε με τη βοήθεια αυτής της βάσης μπορούμε να
βρούμε ένα 2×2 -πίνακα, που λέγεται πίνακας της F , ως προς τη βάση $\{v, w\}$.
Πως βρίσκεται αυτός ο πίνακας; Δουλεύουμε ως εξής: Τα διανύσματα $F(v)$,
 $F(w)$ γράφονται σε γραμμικοί συνδυασμοί της βάσης $\{v, w\}$, δηλαδή:

$$F(v) = a_{11}v + a_{21}w$$

$$F(w) = a_{12}v + a_{22}w$$

Έτσι ο πίνακας που ζητάμε είναι ο:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{και πολλές φορές γράφουμε} \quad F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$



όπου χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο F για να συμβολίσουμε αυτόν τον πίνακα. Καταλαβαίνει κανένας τώρα ότι όταν αλλάξουμε τη βάση μας, θα βρούμε και διαφορετικό πίνακα. Όλοι όμως αυτοί οι πίνακες που προκύπτουν με την αλλαγή της βάσης έχουν μερικά κοινά πράγματα. Δύο από αυτά είναι η ορίζουσα και το ίχνος. Δηλαδή οι ποσότητες $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$, $\alpha_{11} + \alpha_{22}$ μένουν ίδιες όταν αλλάζουν οι βάσεις. Έτσι λοιπόν οι ποσότητες $\det F$ και $\text{trace } F$ μπορούμε να πούμε ότι είναι αναλλοίωτες ποσότητες για την απεικόνιση F και δεν εξαρτώνται από τη βάση που διαλέγουμε. Μετά από αυτά τα προκαταρκτικά ας έλθουμε στο θέμα μας για να δούμε το σημασία έχουν στη γεωμετρία αυτά που είπαμε παραπάνω. Είναι γνωστό ότι σε κάθε σημείο μιας κανονικής επιφάνειας έχουμε μια γραμμική απεικόνιση (η απεικόνιση Weingarten), που είναι και αυτοπροσηρτημένη. Έτσι γι' αυτήν ισχύουν ότι είπαμε παραπάνω. Δηλαδή οι ποσότητες $\det L$ και $\text{trace } L$ είναι αναλλοίωτες της L (δηλαδή της επιφάνειας) και δεν εξαρτώνται από τη βάση που διαλέγουμε, στο σημείο $p \in S$. Ξέρουμε ότι αν $\{e_1, e_2\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση από κύρια διανύσματα τότε :

$$L(e_1) = k_1(p)e_1 + 0e_2$$

$$L(e_2) = 0e_1 + k_2(p)e_2$$

Έτσι λοιπόν ο πίνακας της L ως προς αυτή τη βάση είναι ο :

$$\begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix} \quad \text{και επομένως οι ποσότητες}$$

$$K(p) = k_1(p)k_2(p) = \det L, \quad H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)) = \frac{1}{2} \text{trace } L \text{ δεν αλλάζουν}$$

όποια βάση και αν πάρουμε. Ας δούμε όμως τι συμβαίνει, αν πάρουμε σα βάση την $\{X_u, X_v\}$, όπου $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων γύρω από το σημείο p της επιφάνειας. Τότε έχουμε :



$$(1) \quad \begin{cases} L(X_U) = -N_U = \alpha_{11}X_U + \alpha_{21}X_V \\ L(X_V) = -N_V = \alpha_{12}X_U + \alpha_{22}X_V \end{cases}$$

Πραγματικά, τα διανύσματα $L(X_U)$, $L(X_V)$ είναι εραπτόμενα και γράφονται σε γραμμικοί συνδυασμοί της βάσης. Πρέπει να υπολογίσουμε λοιπόν τις ποσότητες α_{11} , α_{12} , α_{21} , α_{22} . Λαμβάνοντας υπόψη πως ορίζονται τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης θα πάρουμε από τις (1) πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με X_U και X_V αντίστοιχα ότι :

$$(2) \quad \begin{cases} l = \alpha_{11}E + \alpha_{21}F \\ m = \alpha_{11}F + \alpha_{21}G \\ n = \alpha_{12}E + \alpha_{22}F \\ p = \alpha_{12}F + \alpha_{22}G \end{cases}$$

Έτσι λοιπόν πρέπει να λύσουμε το σύστημα (2) για να βρούμε τα α_{11} , α_{12} , α_{21} και α_{22} . Η λύση είναι εύκολη και μας δίνει :

$$\alpha_{11} = \frac{lG - mF}{EG - F^2}, \quad \alpha_{12} = \frac{mG - nF}{EG - F^2}$$

$$\alpha_{21} = \frac{mE - lF}{EG - F^2}, \quad \alpha_{22} = \frac{nE - mF}{EG - F^2}$$

Μετα από αυτά οι σχέσεις (1) γράφονται :

$$(3) \quad \begin{cases} L(X_U) = -N_U = \frac{lG - mF}{EG - F^2} X_U + \frac{mE - lF}{EG - F^2} X_V \\ L(X_V) = -N_V = \frac{mG - nF}{EG - F^2} X_U + \frac{nE - mF}{EG - F^2} X_V \end{cases}$$

Οι παραπάνω σχέσεις (3) λέγονται και εξισώσεις του Weingarten.



Έτσι λοιπόν ως προς τη καινούργια μας βάση την $\{X_u, X_v\}$ ο πίνακας της L είναι ο :

$$\begin{pmatrix} \frac{\ell G - mF}{EG - F^2} & \frac{mG - nF}{EG - F^2} \\ \frac{mE - \ell F}{EG - F^2} & \frac{nE - mF}{EG - F^2} \end{pmatrix} .$$

Σύμφωνα με αυτά που είπαμε πρέπει :

$$K = k_1 k_2 = \frac{\ell G - mF}{EG - F^2} \cdot \frac{nE - mF}{EG - F^2} - \frac{mE - \ell F}{EG - F^2} \cdot \frac{mG - nF}{EG - F^2} = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} , \text{ μετά από}$$

πράξεις ,

και

$$H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \text{trace } L = \frac{1}{2} \left(\frac{\ell G - mF}{EG - F^2} + \frac{nE - mF}{EG - F^2} \right) = \frac{nE - 2mF + \ell G}{2(EG - F^2)} ,$$

μετά τις πράξεις .

Συμπέρασμα : Όταν έχουμε μια κανονική επιφάνεια και ξέρουμε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης , ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων , τότε η καμπυλότητα του Gauss K και η μέση καμπυλότητα H δίνονται από τις σχέσεις :

$$(4) \quad \left(K = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} , \quad H = \frac{nE - 2mF + \ell G}{2(EG - F^2)} \right) .$$

Ένα εύκολο ερώτημα τώρα είναι το παρακάτω : Όταν μας δίνουν τα K και H μπορούμε να βρούμε τις κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας .
Πραγματικά , αφού ξέρουμε ότι $k_1 k_2 = K$ και $k_1 + k_2 = 2H$, τότε τα k_1, k_2 είναι λύσεις της εξίσωσης

$$Z^2 - 2HZ + K = 0 .$$

Δηλαδή οι κύριες καμπυλότητες είναι :



$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad , \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad .$$

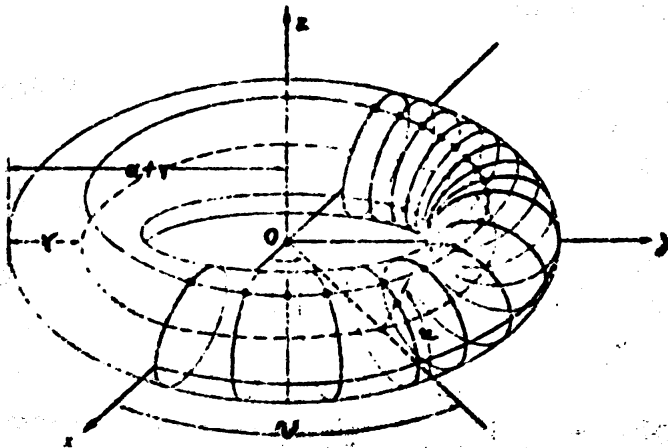
Από αυτές τις εκφράσεις συμπεραίνουμε ότι οι κύριες καμπυλότητες είναι συνεχείς συναρτήσεις πάνω στην επιφάνεια S και λείες μακριά από τα ομφαλικά σημεία .

Άσκηση . Να δείξετε ότι σε κάθε σημείο μιας κανονικής επιφάνειας ισχύει : $H^2 - K \geq 0$ και ότι το " $=$ " ισχύει αν και μόνον αν το σημείο είναι ομφαλικό .

Παράδειγμα 3.3.1. Είναι εύκολο να δει κάποιος ότι η απεικόνιση :

$$\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto \chi(u,v) = ((\alpha + r \cos u) \cos v, (\alpha + r \cos u) \sin v, r \sin u) ,$$

όπου $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi\}$, είναι ένα σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας τόρος (σχήμα 48) .



σχήμα 48

Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την καμπυλότητα του Gauss και τη μέση καμπυλότητα αυτής της επιφάνειας . Οι τύποι (4) είναι τα κλειδιά μας για αυτή την υπόθεση . Έχουμε :

$$\chi_u(u,v) = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$$

$$\chi_v(u,v) = (-(\alpha + r \cos u) \sin v, (\alpha + r \cos u) \cos v, 0)$$



$$X_{uu}(u,v) = (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u)$$

$$X_{uv}(u,v) = (r \sin u \sin v, r \sin u \cos v, 0)$$

$$X_{vv}(u,v) = (-(\alpha+r \cos u) \cos v, -(\alpha+r \cos u) \sin v, 0)$$

Επίσης το μοναδιαίο και κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια, που προκύπτει από τη παραμέτρηση X είναι :

$$N(u,v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u),$$

μετά από πράξεις .

Έτσι λοιπόν τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης είναι :

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = r^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle = (\alpha+r \cos u)^2.$$

Τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης θα είναι :

$$l = -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle = r, \quad m = 0, \quad n = (\alpha+r \cos u) \cos u.$$

Από τους τύπους (4) έχουμε τώρα :

$$K(u,v) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{\cos u}{r(\alpha+r \cos u)}$$

και

$$H(u,v) = \frac{nE - 2mF + lG}{2(EG - F^2)} = \frac{\alpha+2r \cos u}{2r(\alpha+r \cos u)}.$$

Από τη σχέση που μας δίνει την καμπυλότητα του Gauss μπορούμε να πάρουμε μερικές πληροφορίες :

1. Τα σημεία, που έχουν $u = \frac{\pi}{2}$ ή $\frac{3\pi}{2}$ έχουν $K = 0$ και είναι παραβολικά σημεία της επιφάνειας .

2. Τα σημεία, που έχουν $u \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ έχουν $K < 0$ και είναι υπερβολικά σημεία της επιφάνειας .



3. Τα σημεία , που έχουν $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ ή $u \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ έχουν $K > 0$ και είναι ελλειπτικά σημεία της επιφάνειας .

Βλέπουμε δηλαδή ότι ο τόρος έχει τρία είδη σημείων (παραβολικά , υπερβολικά και ελλειπτικά) .

Παράδειγμα 3.3.2. Δίνεται το γραφίμα $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$ μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρούμε τη καμπυλότητα Gauss καθώς και τη μέση καμπυλότητα αυτής της επιφάνειας . Μας αρκεί να βρούμε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης . Είναι γνωστό ότι στη περίπτωση του γραφήματος η απεικόνιση :

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Gamma_f \subset \mathbb{R}^3 (x,y) \rightarrow X(x,y) = (x,y,f(x,y))$$

είναι ένα σύστημα συντεταγμένων γύρω από κάθε σημείο του γραφήματος . Έτσι λοιπόν έχουμε :

$$X_x = (1, 0, f_x) \quad , \quad X_y = (0, 1, f_y) \quad , \quad X_{xx} = (0, 0, f_{xx}) \quad ,$$

$$X_{xy} = (0, 0, f_{xy}) \quad , \quad X_{yy} = (0, 0, f_{yy}) \quad , \quad \text{όπου } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad ,$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad , \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad .$$

Επίσης το κάθετο στην επιφάνεια μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζεται από τη παραμέτρηση είναι :

$$N = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \quad .$$

Τέλος τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης είναι :

$$E = \|X_x\|^2 = 1 + f_x^2$$

$$F = \langle X_x, X_y \rangle = f_x f_y$$

$$G = \|X_y\|^2 = 1 + f_y^2$$



$$l = \langle N, X_{xx} \rangle = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

$$m = \langle N, X_{xy} \rangle = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

και

$$n = \langle N, X_{yy} \rangle = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

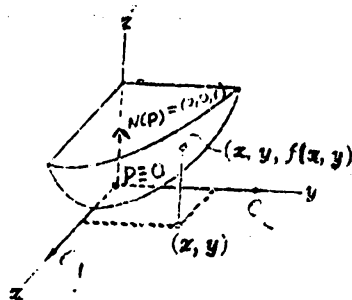
Έτσι λοιπόν θα έχουμε :

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}$$

και

$$H = \frac{nE - 2mF + lG}{2(EG - F^2)} = \frac{(1+f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_y^2)f_{xx}}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}}$$

Ας είναι τώρα p ένα σημείο μιας κανονικής επιφάνειας S . Είναι τότε γνωστό (πρόταση 2.2.3) ότι ένα κομμάτι V της S γύρω από το p είναι γράφημα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης της μορφής $z = f(x, y)$, $x = h(y, z)$, $y = g(x, y)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πούμε ότι το κομμάτι V είναι γράφημα της διαφορίσιμης συνάρτησης $z = f(x, y)$. Επίσης μπορούμε να πούμε ότι το σημείο p είναι η αρχή των συντεταγμένων, και ότι οι άξονες Ox , Oy δείχνουν κύριες διευθύνσεις, δηλαδή τα διανύσματα $e_1 = (1, 0, 0)$ και $e_2 = (0, 1, 0)$ είναι κύρια διανύσματα της S στο σημείο $P \equiv 0$ (σχήμα 49).



σχήμα 49



Για μια τέτοια κατάσταση θα έχουμε : $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$.

Ένα κάθετο στην επιφάνειά μας (παράδειγμα 3.3.2) θα είναι :

$$N(x,y) = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

Άρα

$$N_x(0,0) = (-f_{xx}(0,0), -f_{yx}(0,0), 0)$$

$$N_y(0,0) = (-f_{yx}(0,0), -f_{yy}(0,0), 0) ,$$

όπου παραγωγίσαμε ως προς x, y και πήραμε τη τιμή στο $(0,0)$.

Επειδή όμως τα διανύσματα $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ είναι από τη παραδοχή μας κύρια διανύσματα θα έχουμε :

$$k_1(p)(1,0,0) = L(1,0,0) = -N_x(0,0) = (f_{xx}(0,0), f_{yx}(0,0), 0)$$

$$k_2(p)(0,1,0) = L(0,1,0) = -N_y(0,0) = (f_{yx}(0,0), f_{yy}(0,0), 0)$$

Έτσι λοιπόν θα έχουμε :

$$k_1(p) = f_{xx}(0,0) , f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0 , k_2(p) = f_{yy}(0,0) .$$

Αν αναπτύξουμε τώρα τη συνάρτηση $f(x,y)$ σε σειρά Taylor κοντά στο σημείο $(0,0)$ θα έχουμε :

$$f(x,y) = f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0) + \frac{1}{2} ((x^2 f_{xx}(0,0) + 2xy f_{xy}(0,0) + y^2 f_{yy}(0,0))) + (\text{όροι τάξης } \geq 3)$$

ή αν πάρουμε τους περιορισμούς που βγάλαμε .

$$f(x,y) = \frac{1}{2} (k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2) + (\text{όροι τάξης } \geq 3) .$$

Έτσι λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι οι επιφάνειες , που είναι γραφήματα των

$z = f(x,y)$ και $z = \frac{1}{2} (k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2)$ πολύ κοντά στο $p=0$ έχουν το ίδιο σχημα .

Ακριβέστερα αν το σημείο p είναι ελλειπτικό . δηλαδή $k_1(p) \cdot k_2(p) > 0$,



τότε η επιφάνεια $z = \frac{1}{2} (k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2)$ είναι ή πάνω ή κάτω από το επίπεδο Oxy . Το ίδιο λοιπόν θα συμβαίνει και για την επιφάνεια $z = f(x,y)$.

Επίσης αν το σημείο p είναι υπερβολικό, δηλαδή $k_1(p)k_2(p) < 0$, τότε η επιφάνεια $z = \frac{1}{2} (k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2)$ έχει πολύ κοντά στο $p=0$ σημεία πάνω και κάτω από το επίπεδο Oxy . Το ίδιο λοιπόν θα συμβαίνει και για την επιφάνεια $z = f(x,y)$.

Συμπέρασμα. Το εφαπτόμενο επίπεδο $T_p(S)$ μιας κανονικής επιφάνειας S σε ένα σημείο p , ακρήνει την επιφάνεια πολύ κοντά στο p προς το ίδιο μέρος αν το p είναι ελλειπτικό σημείο και κόβει την επιφάνεια πολύ κοντά στο p , αν το σημείο p είναι υπερβολικό.

Αν στη συνέχεια πάρουμε το επίπεδο $z = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), τότε αυτό το επίπεδο κόβει την επιφάνεια $z = f(x,y)$ σε μια καμπύλη, που είναι περίπου ίδια κοντά στο 0 με την καμπύλη στην οποία το επίπεδο $z = \varepsilon$ κόβει την επιφάνεια $z = \frac{1}{2} (k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2)$, δηλαδή είναι περίπου ίδια με την καμπύλη $C : (z = \varepsilon, k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2 = 2\varepsilon)$. Η καμπύλη C όμως είναι έλλειψη όταν το σημείο p είναι ελλειπτικό, υπερβολή όταν το σημείο p είναι υπερβολικό και δύο παράλληλες ευθείες όταν το σημείο p είναι παραβολικό.

Έτσι λοιπόν μπορεί να πει κάποιος, ότι για κάθε σημείο p μιας επιφάνειας S το είδος της καμπύλης $k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2 = \pm 1$ μας δείχνει και το είδος του σημείου. Αυτή η καμπύλη $k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2 = \pm 1$ λέγεται και δείχτρια του Dupin (Dupin indicatrix) στο p .

Συνεχίζουμε με ένα ακόμη παράδειγμα. Παίρνουμε την απεικόνιση :

$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto X(u,v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$, όπου $b = \text{σταθερό} \neq 0$ και $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$. Είναι εύκολο να δει κάποιος ότι η απεικόνιση X είναι διαφορίσιμη, αμφιμονοσήμαντη, κανονική και ότι η $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$ είναι συνεχής. Έτσι το σύνολο $X(U)$ είναι μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Μετά από πράξεις μπορούμε να βρούμε ότι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης

τάξης είναι :

$$E=1 \quad , \quad F=0 \quad , \quad G=u^2+b^2$$

$$l=0 \quad , \quad m=\frac{-b}{\sqrt{b^2+u^2}} \quad , \quad n=0 \quad .$$

Έτσι θα έχουμε , $K=\frac{ln-m^2}{EG-F^2}=\frac{-b^2}{(b^2+u^2)^2}$ και $H=0$. Βλέπουμε λοιπόν ότι για αυ-

τή την επιφάνεια η συνάρτηση μέσης καμπυλότητας είναι σταθερά 0 . Τέτοιες επιφάνειες με $H=0$ λέγονται επιφάνειες ελάχιστης έκτασης (minimal surfaces) . Οι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης είναι μια ενδιαφέρουσα κατηγορία επιφανειών με πολλές εφαρμογές και θα έπρεπε κανείς να αφιερώσει αρκετό χρόνο για τη μελέτη τους .

Για τη μελέτη των επιφανειών έχει γίνει μέχρι τώρα φανερό ότι η επιλογή κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων απλοποιεί κάπως τη διαδικασία . Έτσι για παράδειγμα οι εξισώσεις Weingarten στη περίπτωση ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων με $m \equiv 0$, γίνονται :

$$L(X_u) = \frac{l}{E} X_u \quad \text{και} \quad L(X_v) = \frac{n}{G} X_v \quad (\text{τόσο απλές !}) \quad .$$

Θέλουμε ειδικότερα να δούμε ένα σύστημα συντεταγμένων $X:U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ μιας κανονικής επιφάνειας όπου οι παραμετρικές γραμμές είναι γραμμές καμπυλότητας . Ένα τέτοιο σύστημα X λέγεται σύστημα γραμμών καμπυλότητας της S . Πως όμως θα μπορούμε να ελέγχουμε αν ένα σύστημα είναι σύστημα γραμμών καμπυλότητας : Η παρακάτω πρόταση μας δίνει την απάντηση .

Πρόταση 3.3.1. Έστω σύστημα συντεταγμένων $X:U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$, έτσι ώστε στο $X(U)$ δεν υπάρχουν ομαλικά σημεία της S . Το X είναι σύστημα γραμμών καμπυλότητας της επιφάνειας S , αν και μόνο αν ισχύει , $F=m=0$.

Απόδειξη . Ας δεχτούμε πρώτα ότι το σύστημα $X:U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι σύστημα γραμμών καμπυλότητας . Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα ταχύτητας X_u, X_v των



παραμετρικών γραμμών είναι κύρια διανύσματα και συνεπώς τα $L(X_U)$, $L(X_V)$ είναι αντίστοιχα παράλληλα με τα X_U και X_V . Επειδή όμως τα κύρια διανύσματα σε κάθε σημείο είναι κάθετα θα έχουμε $F = \langle X_U, X_V \rangle = 0$. Επίσης από τις εξισώσεις Weingarten για να είναι τα $L(X_U)$, X_U παράλληλα πρέπει να ισχύει: $mE - lF = 0$ και επειδή $F = 0$, $E > 0$ πρέπει να έχουμε $m = 0$. Αντίστροφα, αν $m = F = 0$, τότε από τις εξισώσεις του Weingarten θα έχουμε, $L(X_U) = \frac{l}{E} X_U$, $L(X_V) = \frac{n}{G} X_V$. Δηλαδή τα διανύσματα ταχύτητας X_U, X_V των παραμετρικών γραμμών είναι κύρια διανύσματα, αφού είναι ιδιοδιανύσματα του L (πρόταση 3.1.3). Έτσι λοιπόν οι παραμετρικές γραμμές είναι γραμμές καμπυλότητας και το σύστημα X είναι σύστημα γραμμών καμπυλότητας. Είναι εύκολο να δει κάποιος (πώς;) , ότι στη περίπτωση που το X είναι σύστημα γραμμών καμπυλότητας οι κύριες καμπυλότητες είναι $\frac{l}{E}$ και $\frac{n}{G}$.

Έστω τώρα ένα σύστημα συντεταγμένων $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ μιας κανονικής επιφάνειας S . Είναι γνωστό ότι τα διανύσματα X_U, X_V, N σε κάθε σημείο της επιφάνειας είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή κάνουν μια βάση του $\mathbb{R}^3$ στο σημείο αυτό. Έτσι λοιπόν κάθε άλλο διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ στο σημείο αυτό θα είναι γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων. Συνεπώς θα έχουμε:

$$(5) \quad \begin{cases} X_{UU} = \Gamma_{11}^1 X_U + \Gamma_{11}^2 X_V + \alpha N \\ X_{UV} = \Gamma_{12}^1 X_U + \Gamma_{12}^2 X_V + \beta N \\ X_{VV} = \Gamma_{22}^1 X_U + \Gamma_{22}^2 X_V + \gamma N \\ X_{VU} = \Gamma_{21}^1 X_U + \Gamma_{21}^2 X_V + \delta N \end{cases}.$$

Θα κοιτάξουμε να βρούμε τους συντελεστές $\Gamma_{jk}^i, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ ($i, j, k = 1, 2$).

Αν πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά με N τις σχέσεις (5) παίρνουμε:

$$l = \langle X_{UU}, N \rangle = \alpha$$

$$m = \langle X_{UV}, N \rangle = \beta$$



$$n = \langle X_{vv}, N \rangle = \gamma$$

$$m = \langle X_{vu}, N \rangle = \delta$$

Έτσι λοιπόν οι (5) γίνονται :

$$(6) \quad \begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + l N \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + m N \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + n N \\ X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + m N \end{cases}$$

Οι εξισώσεις (6) λέγονται εξισώσεις του Gauss και οι συναρτήσεις (συντελεστές) Γ_{ij}^k ($i, j, k = 1, 2$) λέγονται σύμβολα Christoffel δευτέρου είδους.

Πως όμως θα υπολογίσουμε τα σύμβολα Γ_{ij}^k ; Θα δούμε πως αν ξέρουμε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης E, F, G της επιφάνειας, ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων $X: U \subset R^2 \rightarrow S$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε και τα σύμβολα Christoffel δευτέρου είδους, μόνο σαν συναρτήσεις των E, F, G και των παραγώνων των.

Θα συμφωνήσουμε πρώτα κάποιους συμβολισμούς. Θέτουμε $X_1 = X_u$, $X_2 = X_v$, $X_{12} = X_{uv}$, κ.λ.π. Επίσης θέτουμε $\Gamma_{ijk} = \langle X_i, X_{jk} \rangle$. Οι συναρτήσεις ποσότητες Γ_{ijk} λέγονται σύμβολα Christoffel πρώτου είδους.

Είναι φανερό ότι ισχύει :

$$(7) \quad \Gamma_{ijk} = \langle X_i, X_{jk} \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle X_i, X_j \rangle_k + \langle X_i, X_k \rangle_j - \langle X_j, X_k \rangle_i \}$$

Από την (7) φαίνεται αμέσως ότι τα σύμβολα Γ_{ijk} μπορούν να υπολογιστούν αμέσως συναρτήσει των παραγώνων των E, F, G . Για παράδειγμα :

$$\begin{aligned} \Gamma_{112} &= \langle X_1, X_{12} \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle X_1, X_1 \rangle_2 + \langle X_1, X_2 \rangle_1 - \langle X_1, X_2 \rangle_1 \} \\ &= \frac{1}{2} \langle X_u, X_u \rangle_v = \frac{1}{2} E_v \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Gamma_{212} &= \langle X_2, X_{12} \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle X_2, X_1 \rangle_2 + \langle X_2, X_2 \rangle_1 - \langle X_1, X_2 \rangle_2 \} \\ &= \frac{1}{2} \langle X_2, X_2 \rangle_1 = \frac{1}{2} \langle X_v, X_v \rangle_u = \frac{1}{2} G_u.\end{aligned}$$

Τώρα από τις εξισώσεις του Gauss (εξισώσεις (6)) πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με X_u, X_v διαδοχικά και λαμβάνοντας υπόψη τους συμβολισμούς έχουμε :

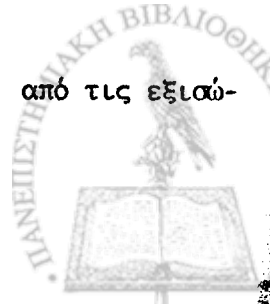
$$(8) \left\{ \begin{aligned}\Gamma_{111} &= \langle X_u, X_{uu} \rangle = E \Gamma_{11}^1 + F \Gamma_{11}^2 \\ \Gamma_{112} &= \langle X_u, X_{uv} \rangle = E \Gamma_{12}^1 + F \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{112} &= \langle X_u, X_{vu} \rangle = E \Gamma_{22}^1 + F \Gamma_{22}^2 \\ \Gamma_{121} &= \langle X_u, X_{vu} \rangle = E \Gamma_{21}^1 + F \Gamma_{21}^2 \\ \Gamma_{211} &= \langle X_v, X_{uu} \rangle = F \Gamma_{11}^1 + G \Gamma_{11}^2 \\ \Gamma_{212} &= \langle X_v, X_{uv} \rangle = F \Gamma_{12}^1 + G \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{222} &= \langle X_v, X_{vv} \rangle = F \Gamma_{22}^1 + G \Gamma_{22}^2 \\ \Gamma_{221} &= \langle X_v, X_{vu} \rangle = F \Gamma_{21}^1 + G \Gamma_{21}^2.\end{aligned}\right.$$

Από τις σχέσεις (8) γίνονται φανερές μερικές πληροφορίες . Τα Γ_{ij}^k μπορούν να υπολογιστούν συναρτήσεις των E, F, G και των Γ_{ijk} , τα οποία είναι συναρτήσεις των παραγώγων των E, F, G (σχέση 7) . Έτσι τα Γ_{ij}^k υπολογίζονται συναρτήσεις των E, F, G και των παραγώγων των . Για παράδειγμα , η λύση του συστήματος της 1ης και 5ης εξίσωσης από τις (8) δίνει :

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{G \Gamma_{111} - F \Gamma_{211}}{EG - F^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{E \Gamma_{211} - F \Gamma_{111}}{EG - F^2}.$$

Άλλη πληροφορία που παίρνουμε (πως ;) από τις (8) είναι ότι τα σύμβολα Γ_{ij}^k είναι συμμετρικά (δεν αλλάζουν) , ως προς τους δείχτες i, j .

Επειδή τώρα $\frac{\partial}{\partial v} X_{uu} = \frac{\partial}{\partial u} X_{uv}$, $\frac{\partial}{\partial v} X_{uv} = \frac{\partial}{\partial u} X_{vv}$ θα έχουμε από τις εξισώσεις του Gauss ότι :



$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial v} (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + \ell N) = \frac{\partial}{\partial u} (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + m N) \\ \text{και} \\ \frac{\partial}{\partial v} (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + m N) = \frac{\partial}{\partial u} (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + n N) \end{array} \right.$$

Στις σχέσεις (9) θα κάνουμε τις παραγωγίσεις και όπου συναντάμε τα

$X_{uu}, X_{uv}, X_{vu}, X_{vv}$ θα τα αντικαθιστάμε με τα ίσα των από τις εξισώσεις του Gauss (σχέσεις 6), όπου δε θα συναντάμε N_u, N_v θα τα αντικαθιστάμε με τα ίσα τους από τις εξισώσεις του Weingarten (σχέσεις 3). Έτσι σε κάθε μέλος μιας των (9) θα έχουμε τα διανύσματα τα X_u, X_v, N και επειδή αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα οι συντελεστές τους θα είναι ίσοι. Δηλαδή, αν κάνουμε τη παραπάνω δουλειά στη πρώτη από τις (9) θα πάρουμε τις παρακάτω τρεις εξισώσεις:

$$\frac{\partial}{\partial v} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + \ell \frac{nF - mG}{EG - F^2} = \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + m \frac{mF - \ell G}{EG - F^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + \ell \frac{mF - nE}{EG - F^2} = \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + m \frac{\partial F - mE}{EG - F^2}$$

$$m \Gamma_{11}^1 + n \Gamma_{11}^2 + \frac{\partial \ell}{\partial v} = \ell \Gamma_{12}^1 + m \Gamma_{12}^2 + \frac{\partial m}{\partial u}$$

ή πιο απλά:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} F \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = FK = \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{12}^1 - \frac{\partial}{\partial v} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \\ - E \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = -EK = \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{12}^2 - \frac{\partial}{\partial v} \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 \\ \frac{\partial \ell}{\partial v} - \frac{\partial m}{\partial u} = \ell \Gamma_{12}^1 + m(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - n \Gamma_{11}^2 \end{array} \right.$$

Όμοια από τη δεύτερη των (9) θα πάρουμε:



$$(11) \left\{ \begin{array}{l} F \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} \stackrel{(4)}{=} FK = \frac{\partial}{\partial v} \Gamma_{12}^2 - \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 \\ - G \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} \stackrel{(4)}{=} -GK = \frac{\partial}{\partial v} \Gamma_{12}^1 - \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^2 \\ \frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial u} = \ell \Gamma_{22}^1 + m(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - n \Gamma_{12}^2 \end{array} \right. .$$

Επειδή τα σύμβολα του Christoffel εξαρτώνται μόνο από τα E, F, G και τις παραγώγους τους, συμπεραίνουμε από τη πρώτη των (10) το παρακάτω θεώρημα :

ΘΑΥΜΑΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ GAUSS (Gauss theorem egregium) : Η καμπυλότητα Gauss μιας επιφάνειας εξαρτάται μόνο από τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης και τις παραγώγους των . Έτσι αν ξέρουμε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης μιας επιφάνειας, μπορούμε να υπολογίσουμε τη καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας .

Το παραπάνω θεώρημα είναι πολύ σημαντικό . Μπορούμε πρόχειρα να δούμε μια γεωμετρική του εφαρμογή . Αν πάρουμε ένα λαστιχένιο κομμάτι επιπέδου, τότε τσαλακώνοντας ή γυρίζοντας αυτό το κομμάτι χωρίς να το τεντώσουμε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πληθώρα από επιφάνειες, όπως π.χ. έναν κύλινδρο . Τότε όλες αυτές οι επιφάνειες έχουν την ίδια καμπυλότητα Gauss και μάλιστα ίση με μηδέν . Αφού όλες αυτές οι επιφάνειες είναι ισομετρικές (γιατί;). Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι ο τύπος $K = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2}$, που μας δίνει τη καμπυλότητα Gauss φαινομενικά μας λέει ότι η K εξαρτάται και από τα ℓ, m, n (!) .

Τέλος οι δύο τελευταίες εξισώσεις από τις (10), (11) δηλαδή οι εξισώσεις :



$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial v} - \frac{\partial m}{\partial u} = \ell \Gamma_{12}^1 + m(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - n \Gamma_{11}^2 \\ \frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial u} = \ell \Gamma_{22}^1 + m(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - n \Gamma_{12}^2 \end{cases}$$

λέγονται εξισώσεις των Mainardi-Codazzi .

Θα μπορούσε κάποιος να πει αρκετά πράγματα για τις επιφάνειες και τις εξισώσεις Gauss και Mainardi-Codazzi . Θα συνεχίσουμε με ένα παράδειγμα .

Παράδειγμα 3.3.3. Αν $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι σύστημα γραμμών καμπυλότητας πάνω σε μια κανονική επιφάνεια S , θα βρούμε τις εξισώσεις των Mainardi-Codazzi ως προς αυτό το σύστημα . Επειδή το σύστημα X είναι σύστημα γραμμών καμπυλότητας σύμφωνα με τη πρόταση 3.3.1 θα έχουμε : $F = m = 0$. Έτσι λοιπόν οι εξισώσεις (12) θα γίνουν τώρα :

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial v} = \ell \Gamma_{12}^1 - n \Gamma_{11}^2 \\ \frac{\partial n}{\partial u} = n \Gamma_{12}^2 - \ell \Gamma_{22}^1 \end{cases}$$

Αν όμως λάβουμε υπόψη ότι $F = 0$ και υπολογίσουμε τα σύμβολα του Christoffel θα βρούμε :

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G} \quad , \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \frac{E_v}{E} \quad , \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{G_u}{E} \quad , \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G}$$

Συνεπώς θα έχουμε από τις (13) ότι :

$$\ell_v = \frac{n}{2} \frac{E_v}{G} + \frac{\ell}{2} \frac{E_v}{E} = \frac{E_v}{2} \left(\frac{n}{G} + \frac{\ell}{E} \right) = \frac{E_v}{2} (k_2 + k_1) = E_v H$$

$$n_u = \frac{n}{2} \frac{G_u}{G} + \frac{\ell}{2} \frac{G_u}{E} = \frac{G_u}{2} \left(\frac{n}{G} + \frac{\ell}{E} \right) = \frac{G_u}{2} (k_2 + k_1) = G_u H$$

Έτσι για σύστημα γραμμών καμπυλότητας οι εξισώσεις των Mainardi-Codazzi παίρνουν την απλή μορφή :



$$(14) \quad \begin{cases} l_v = H E_v \\ n_u = H G_u \end{cases}$$

όπου H είναι η συνάρτηση μέσης καμπυλότητας της επιφάνειας S .

Ασκήσεις

1. Αν S είναι μια κανονική επιφάνεια και E, F, G είναι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης να αποδείξετε ότι :

$$K = \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{FE_v - EG_u}{E\sqrt{EG-F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2EF_u - FE_u - EE_v}{E\sqrt{EG-F^2}} \right) \right].$$

Ειδικότερα για ορθογώνιο σύστημα ($F=0$) θα έχουμε :

$$K = - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right].$$

(Νύξη : Χρησιμοποιείστε τη πρώτη από τις (10)) .

2. Να δείξετε ότι :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

3. Μια επιφάνεια S έχει , ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$,

μετρική την $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(1+u^2+v^2)^2}$. Να βρείτε τη καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας

Τι παρατηρείτε ;



4. Μπορεί ένα κομμάτι σφαίρας να είναι ισομετρικό με ένα κομμάτι :

α) επιπέδου ; β) τόρου ; γ) ελλειψοειδούς ;

3.4. Θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Επιφανειών .

Η παρούσα παράγραφος δεν έχει σα στόχο να λύσει κάποιο πρόβλημα της θεωρίας Επιφανειών , αλλά να σχολιάσει ένα τέτοιο πρόβλημα .

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ μιας επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$, η οποία επιφάνεια έχει ως προς αυτό το σύστημα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης τα : E, F, G, ℓ, m, n . Είναι γνωστό τότε ότι ισχύουν οι εξισώσεις :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + \ell N \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + m N \\ X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + m N \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + n N \end{array} \\ \begin{array}{l} N_u = \frac{mF - \ell G}{EG - F^2} X_u + \frac{\ell F - mE}{EG - F^2} X_v \\ N_v = \frac{nF - mG}{EG - F^2} X_u + \frac{mF - nE}{EG - F^2} X_v \end{array} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{εξισώσεις Gauss} \\ \text{εξισώσεις Weingarten} \end{array}$$

όπου $N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο της επιφάνειας που ορίζεται από

το σύστημα συντεταγμένων X .

Είδαμε στη προηγούμενη παράγραφο ότι τα σύμβολα Γ_{ij}^k εκφράζονται συναρτήσει των E, F, G και των παραγώγων των . Επίσης οι εξισώσεις :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (X_{uu})_v = (X_{uv})_u \\ (X_{uv})_v = (X_{vv})_u \\ N_{uv} = N_{vu} \end{array} \right.$$



παράγουν όπως είδαμε τις εξισώσεις (10) και (11) της προηγούμενης παράγραφου , οι οποίες όπως μπορεί να δείξει κάποιος μετά από πράξεις είναι ισοδύναμες με το εξής σύστημα εξισώσεων :

$$(3) \quad -E \frac{\lambda n - m^2}{EG - F^2} = \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{12}^2 - \frac{\partial}{\partial v} \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2$$

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial m}{\partial u} = \lambda \Gamma_{12}^1 + m(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - n \Gamma_{11}^2 \\ \frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial u} = \lambda \Gamma_{22}^1 + m(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - n \Gamma_{12}^2 \end{cases} .$$

Η (3) είναι γνωστή σαν εξίσωση Gauss (Gauss equation) , που μας δείχνει το θαυμαστό θεώρημα του Gauss . Οι (4) είναι οι εξισώσεις Mainardi-Codazzi που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο (εξισώσεις (12)) .

Οι εξισώσεις (2) , που είναι οι εξισώσεις συμβασιμότητας (compatibility conditions) για το σύστημα των εξισώσεων (1) , μας δίνουν τις συνθήκες (3), (4) για τα E, F, G, λ, m, n .

Γεννάται έτσι το εξής φυσικό ερώτημα : Υπάρχουν άλλες ανεξάρτητες συνθήκες μεταξύ των E, F, G, λ, m, n εκτός από την εξίσωση Gauss και τις εξισώσεις Mainardi-Codazzi ; Διαφορετικά , αν μας δοθούν τα E, F, G, λ, m, n τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες (3) , (4) , μπορούμε να λύσουμε "ακριβώς" το σύστημα των εξισώσεων (1) ;

Παρατήρηση . Όταν μας δοθούν τα E, F, G, λ, m, n τότε τα Γ_{ij}^k είναι γνωστά και έτσι το σύστημα των εξισώσεων (1) έχει αγνώστους τα $X(u, v)$, $N(u, v)$. Είναι φανερό δε ότι το σύστημα (1) πρόκειται για σύστημα εξισώσεων με μερικές παραγώγους και έτσι η αντιμετώπιση του ερωτήματος που θέσαμε προϋποθέτει κάποιες γνώσεις από θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους .



Το παρακάτω σημαντικό θεώρημα μας δίνει απάντηση στο ερώτημά μας .

Θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Επιφανειών (O. Bonnet)

Δίνονται οι διαφορίσιμες συναρτήσεις E, F, G, ℓ, m, n που ορίζονται στο ανοιχτό $W \subset \mathbb{R}^2$ με $E > 0$, $G > 0$ και $EG - F^2 > 0$. Υποθέτουμε ότι οι δοθείσες συναρτήσεις ικανοποιούν την εξίσωση του Gauss (εξίσωση (3)) και τις εξισώσεις των Mainardi-Codazzi . Τότε για κάθε $p \in W$, υπάρχει περιοχή $U \subset W$ του p και μια αμφιδιακρόση $X : U \rightarrow X(U) \subset \mathbb{R}^3$, έτσι ώστε η κανονική επιφάνεια $X(U)$ έχει τα E, F, G, ℓ, m, n σα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης . Επί πλέον η επιφάνεια $X(U)$ είναι μοναδική από άποψη σχήματος (όχι θέσης) .

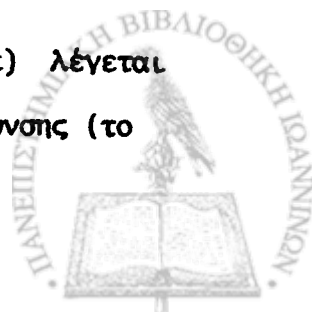
Απόδειξη : Μια απόδειξη αυτού του σημαντικού θεωρήματος μπορεί να βρεθεί στη σελίδα 311 του πρώτου βιβλίου της βιβλιογραφίας που δόσαμε .

Άσκηση : Μπορεί να βρείτε κανονική επιφάνεια με $E=G=1$, $F=0$, $\ell=1$, $m=0$, $n=-1$;

3.5. Γεωδαισιακές γραμμές - Γεωδαισιακή καμπυλότητα .

Θεωρούμε μια συνεκτική (connected) επιφάνεια S του $\mathbb{R}^3$ και δύο σημεία P, Q πάνω στην S . Είναι φανερό πως υπάρχουν πολλές καμπύλες πάνω στην S , που ενώνουν τα σημεία P, Q . Κάθε μια από αυτές έχει ένα μήκος . Ποιά ή ποιές (αν υπάρχουν) έχουν το μικρότερο μήκος ; Το ερώτημα αυτό είναι ένα από τα σημαντικότερα ερωτήματα , τόσο της θεωρίας Επιφανειών όσο και της Γεωμετρίας Riemann γενικώτερα . Σ' αυτή τη παράγραφο θα δώσουμε τα απαραίτητα στοιχεία για την απάντηση του ερωτήματος , χωρίς να προχωρήσουμε σε πολλές λεπτομέρειες . Δικαιολογημένη απάντηση στο ερώτημα θα πάρουμε στο μάθημα Γεωμετρία Riemann .

Ορισμός 3.5.1 . Μια (κανονική) καμπύλη $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \gamma(t)$ λέγεται γεωδαισιακή (geodesic) της επιφάνειας S , αν το διανυσμα επιτάχυνσης (το



διάνυσμα $\gamma''(t)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια για κάθε $t \in I$.

Παρατήρηση 3.5.1. Αν $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \gamma(t)$ είναι γεωδαισιακή καμπύλη της S , τότε έχει διάνυσμα ταχύτητας σταθερού μήκους, δηλαδή $|\gamma'(t)| = \text{σταθερό}$. Πραγματικά, ισχύει $\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0$, για κάθε t , αφού το διάνυσμα $\gamma'(t)$ εφάπτεται της επιφάνειας και το διάνυσμα $\gamma''(t)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια. Έτσι, $\frac{d}{dt} |\gamma'(t)|^2 = \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0$. Συνεπώς, $|\gamma'(t)| = \text{σταθερό}$. Ισχύει το αντίστροφο; Δηλαδή μια καμπύλη $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ με σταθερή ταχύτητα είναι γεωδαισιακή καμπύλη της S ;

Παρατήρηση 3.5.2. Όλες οι ευθείες, με σταθερά ταχύτητα, μιας επιφάνειας S είναι γεωδαισιακές της επιφάνειας. Πραγματικά, ως είναι $\gamma : I \rightarrow S$ μια ευθεία της S . Τότε $\gamma''(t) = 0$, για κάθε $t \in I$. Έτσι το διάνυσμα επιτάχυνσης της γ είναι κάθετο (αφού είναι μηδενικό) στην S και συνεπώς η γ είναι γεωδαισιακή καμπύλη της S σύμφωνα με τον ορισμό 3.5.1.

Θα δώσουμε στη συνέχεια δύο ενδιαφέροντα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.5.1. Θα βρούμε όλες τις γεωδαισιακές ενός επιπέδου. Ας είναι $\gamma : I \rightarrow \pi$, $t \mapsto \gamma(t)$ μια γεωδαισιακή του επιπέδου π και N ένα μοναδιαίο κάθετο στο επίπεδο. Τότε ισχύει παντού στο I , $\langle N(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle N(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ ή παραγωγίζοντας $\langle N'(t), \gamma'(t) \rangle + \langle N(t), \gamma''(t) \rangle = 0$ ή $\langle N(t), \gamma''(t) \rangle = 0$, αφού $N = \text{σταθερό}$ και συνεπώς $N' = 0$. Έτσι το διάνυσμα $\gamma''(t)$ είναι κάθετο στο $N(t)$. Όμως $\gamma''(t) // N(t)$ (αφού η γ είναι γεωδαισιακή). Έτσι πρέπει $\gamma''(t) = 0$ και με διπλή ολοκλήρωση παίρνουμε: $\gamma(t) = at + b$, όπου a, b είναι κάποια διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Σύμφωνα λοιπόν και με τη παρατήρηση 3.5.2, όλες οι γεωδαισιακές του επιπέδου είναι οι ευθείες αυτού.

Παράδειγμα 3.5.2. Θα βρούμε όλες τις γεωδαισιακές της σφαίρας ακτίνας



$$S_{R_0}^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R_0^2 \}$$

Ας είναι $\gamma : I \rightarrow S_{R_0}^2$ μια γεωδαισιακή της σφαίρας και ας υποθέσουμε ότι έχει παράμετρο το μήκος τόξου (διαφορετικά της κάνουμε αναπαραμέτρηση). Αφού η γ είναι γεωδαισιακή πρέπει $\ddot{\gamma} // N$, όπου N ένα μοναδιαίο κάθετο στη σφαίρα $S_{R_0}^2$ (κοίταξε παράδειγμα 3.1.3). Εξ άλλου από τον πρώτο τύπο του Frenet παίρνουμε,

$$\ddot{\gamma} = \dot{T} = k n,$$

όπου n είναι το πρώτο κάθετο πεδίο της γ , T το εφαπτόμενο πεδίο της γ και k η καμπυλότητά της. Συνεπώς $N // n$ και άρα $N = \pm n$.

Αν τώρα L είναι η απεικόνιση Weingarten της σφαίρας $S_{R_0}^2$, τότε (παράδειγμα 3.1.3) ισχύει :

$$(1) \quad L(T) = L(\dot{\gamma}) = -\frac{\dot{\gamma}}{R_0} = -\frac{T}{R_0}.$$

Επίσης

$$L(T) = L(\dot{\gamma}(s)) = -N'(s) = \bar{\tau} \dot{n}(s)$$

ή σύμφωνα με τον δεύτερο τύπο του Frenet

$$(2) \quad L(T) = \bar{\tau}(kT - \tau B),$$

όπου B είναι το δεύτερο κάθετο πεδίο της γ και τ η στρέψη της. Συγκρίνοντας τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι η καμπύλη γ έχει σταθερή καμπυλότητα

$k = \bar{\tau} \frac{1}{R_0}$ και μηδενική στρέψη $\tau = 0$. Έτσι η εικόνα της γ πάνω στην σφαίρα $S_{R_0}^2$ θα είναι περιφέρεια ακτίνας R_0 , δηλαδή μέγιστος κύκλος της $S_{R_0}^2$.

Άρα οι γεωδαισιακές της σφαίρας είναι οι μεγάλοι κύκλοι παραμετρημένοι, έτσι ώστε το διάνυσμα ταχύτητας να έχει σταθερό μήκος.

Άσκηση : Να βρεθούν όλες οι γεωδαισιακές του ορθού κυκλικού κελίνδρου.



Παρατήρηση 3.5.3. Αν πάρουμε δύο σημεία P, Q του επιπέδου ή της σφαίρας, τότε από όλες τις καμπύλες που τα ενώνουν αυτή που έχει το μικρότερο μήκος είναι το ευθύγραμμο τμήμα PQ για το επίπεδο ή τόξο μεγάλου κύκλου για τη σφαίρα. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση είναι κομμάτια γεωδαισιακών. Αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας για παράδειγμα λογισμό μεταβολών (calculus of variations) ότι, αν έχουμε δύο γειτονικά σημεία πάνω σε μια επιφάνεια τότε η καμπύλη που τα ενώνει και η οποία έχει το μικρότερο μήκος είναι γεωδαισιακή της επιφάνειας. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι οι γεωδαισιακές είναι οι "ευθείες" της επιφάνειας.

Οι γεωδαισιακές μιας επιφάνειας έχουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές των ευθειών του επιπέδου. Όμως οι ευθείες χαρακτηρίζονται με την ιδιότητα ότι έχουν μηδενική καμπυλότητα. Με ποια ποσότητα ανάλογη μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τις γεωδαισιακές; Θα δούμε πως υπάρχει ανάλογη ποσότητα, την οποία θα ορίσουμε παρακάτω, αφού πρώτα ξαναεξετάσουμε κάποιες έννοιες από προηγούμενες παραγράφους.

Θεωρούμε μια κανονική επιφάνεια S και ας είναι :

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S, (u, v) \rightarrow X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

ένα σύστημα συντεταγμένων αυτής. Κατασκευάσαμε (παράδειγμα 2.4.1) δύο οικογένειες καμπυλών πάνω στην επιφάνεια (πιο συγκεκριμένα πάνω στο $X(U)$), τις οποίες καμπύλες ονομάσαμε παραμετρικές γραμμές της S , ως προς το σύστημα X . Αν c είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε η καμπύλη :

$$\alpha : I \rightarrow S, \alpha(u) \stackrel{\text{or}}{=} X(u, c) = (x(u, c), y(u, c), z(u, c))$$

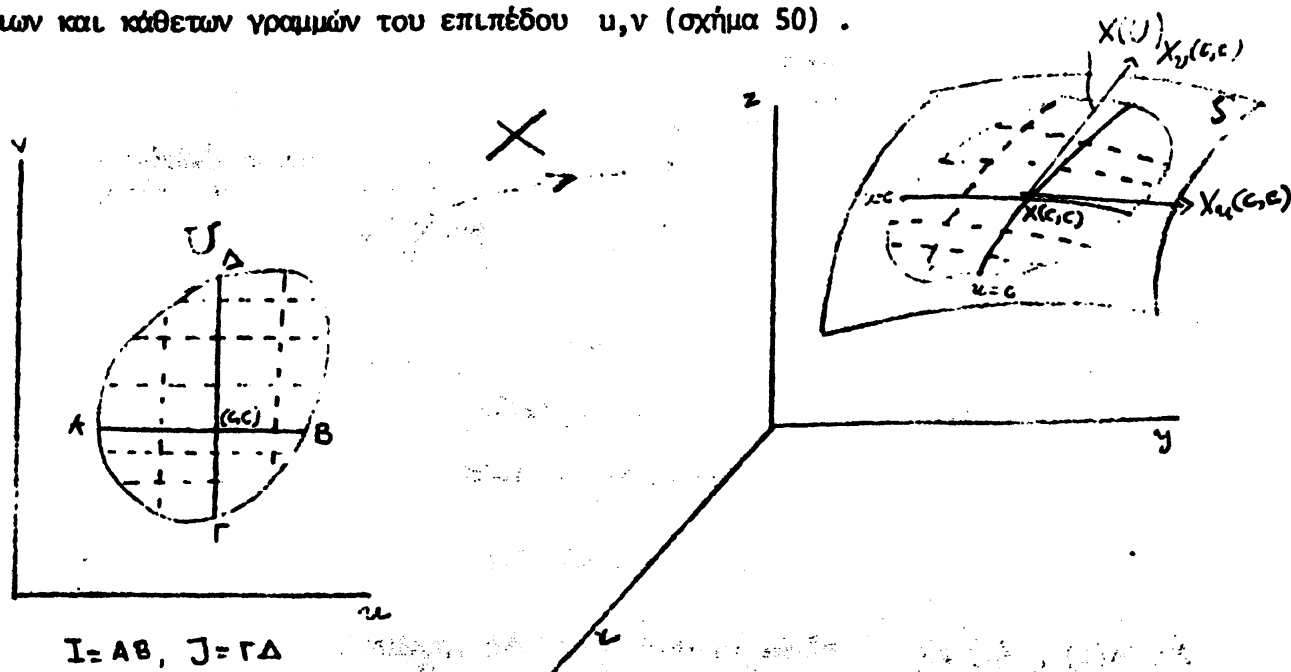
είναι μια παραμετρική γραμμή της επιφάνειας, που για συντομία θα λέμε u-παραμετρική γραμμή $v = c$. Είναι φανερό ποιά θα είναι η u-παραμετρική γραμμή $v = c_1$ (ποιά ;). Όμοια η καμπύλη

$$\beta : J \rightarrow S, \beta(v) \stackrel{\text{or}}{=} X(c, v) = (x(c, v), y(c, v), z(c, v))$$

είναι η v-παραμετρική γραμμή $u = c$. Βέβαια για τις διάφορες τιμές του



ε παίρνουμε καμπύλες σαν τις α και β , που όλες μαζί λέγονται παραμετρικές γραμμές της επιφάνειας S , ως προς το σύστημα X . Γεωμετρικά, οι τροχιές (εικόνες) των παραμετρικών γραμμών είναι οι εικόνες με την X των οριζόντιων και κάθετων γραμμών του επιπέδου u, v (σχήμα 50).



σχήμα 50

Το διάνυσμα ταχύτητας της παραμετρικής γραμμής $v = c$ είναι,

$$\alpha'(u) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, c), \frac{\partial y}{\partial u}(u, c), \frac{\partial z}{\partial u}(u, c) \right) \xrightarrow{\text{συμβολισμός}} X_u(u, c)$$

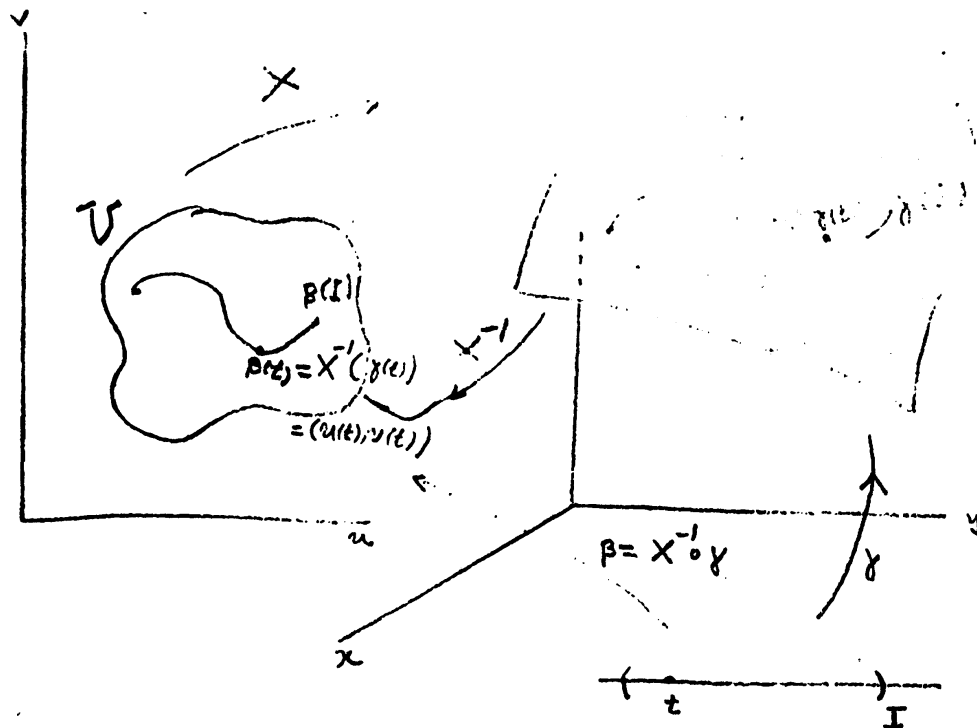
και της παραμετρικής γραμμής $u = c$ είναι,

$$\beta'(v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(c, v), \frac{\partial y}{\partial v}(c, v), \frac{\partial z}{\partial v}(c, v) \right) \xrightarrow{\text{συμβολισμός}} X_v(c, v)$$

Θεωρούμε τώρα μια καμπύλη $\gamma: I \rightarrow S$ της επιφάνειας S με $\gamma(I) \subset X(U)$.

Τότε η καμπύλη $\beta = \chi^{-1} \circ \gamma: I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ είναι μια καμπύλη στο $U \subset \mathbb{R}^2$ (σχήμα 51).





σχήμα 51

Αν $u(t), v(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι οι συντεταγμένες (συναρτήσεις συντεταγμένων) της καμπύλης β , δηλαδή $\beta(t) = (u(t), v(t))$, τότε $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$. Βλέπουμε λοιπόν πως αν μας δοθεί μια καμπύλη $\gamma : I \rightarrow S$, τότε υπάρχουν δύο μονοσήμαντα ορισμένες λείες συναρτήσεις $u(t), v(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει :

$\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ (κοίταξε άσκηση 3 στη σελίδα 89). Έτσι λοιπόν συνήθως αντί να λέμε "δίνεται η καμπύλη $\gamma : I \rightarrow S$ " θα λέμε "δίνεται η καμπύλη $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ ".

Το διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$, σύμφωνα με τον κανόνα σύνθετης παραγώγισης θα είναι :

$$\gamma'(t) = X_u(u(t), v(t))u'(t) + X_v(u(t), v(t))v'(t)$$

ή για πιο σύντομα

$$(3) \quad \gamma' = X_u u' + X_v v'$$



Ας δούμε τώρα, ποιο είναι το διάνυσμα επιτάγχυνσης της καμπύλης

$\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ της επιφάνειας S ; Είναι φανερό ότι σε κάθε σημείο της καμπύλης τα διανύσματα X_u, X_v και N κάνουν μια βάση του εφαπτομένου χώρου του R^3 σε αυτό το σημείο (σύνολο διανυσμάτων του R^3 , που αρχίζουν από αυτό το σημείο). Έτσι το διάνυσμα επιτάγχυνσης γ'' θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων αυτής της βάσης. Άρα

$$(4) \quad \gamma'' = \lambda X_u + \mu X_v + \nu N,$$

όπου το διάνυσμα $\lambda X_u + \mu X_v$ είναι η συνιστώσα του διανύσματος γ'' , που είναι εφαπτομένη στην S και το νN είναι η συνιστώσα η κάθετη στην S . Τώρα από τη σχέση (3) παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \gamma'' &= (X_{uu} u' + X_{uv} v') u' + X_u u'' + (X_{vu} u' + X_{vv} v') v' + X_v v'' \\ &= X_u u'' + X_v v'' + X_{uu} (u')^2 + 2X_{uv} u' v' + X_{vv} (v')^2 \end{aligned}$$

ή χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Gauss (σελίδα 149)

$$\begin{aligned} &= X_u u'' + X_v v'' + (u')^2 \left[\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + l N \right] \\ &+ 2u' v' \left[\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + m N \right] \\ &+ (v')^2 \left[\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + n N \right] \\ &= \left[u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u' v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 \right] X_u \\ &+ \left[v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u' v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 \right] X_v \\ &+ \left[l(u')^2 + 2m u' v' + n(v')^2 \right] N. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \left[u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u' v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 \right] X_u + \left[v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u' v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 \right] X_v \\ &+ \left[l(u')^2 + 2m u' v' + n(v')^2 \right] N. \end{aligned}$$



Συγκρίνοντας με τη σχέση (4) έχουμε :

$$(6) \quad \begin{cases} \lambda = u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 \\ \mu = v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 \\ v = \{ \ell(u')^2 + 2m u'v' + n(v')^2 \} \end{cases} .$$

Τώρα σύμφωνα με τον ορισμό της γεωδαισιακής (ορισμός 3.5.1), μια καμπύλη $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ ή $(u(t), v(t))$ είναι γεωδαισιακή της S , αν και μόνο αν το $\lambda X_u + \mu X_v = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $\lambda = \mu = 0$ (γιατί ;). Έτσι μια καμπύλη $(u(t), v(t))$ της S είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν :

$$(7) \quad \begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0 \end{cases} .$$

Όταν μας δοθεί μια επιφάνεια S τότε τα σύμβολα του Christoffel είναι γνωστά. Έτσι αν λύσουμε το σύστημα (7) βρίσκουμε τις συναρτήσεις $u(t), v(t)$ που μας δίνουν όλες τις καμπύλες που είναι γεωδαισιακές. Επειδή όμως το σύστημα (7) είναι δευτέρου βαθμού για να βρούμε μια λύση, χρειαζόμαστε δύο αρχικές συνθήκες δηλαδή τα $(u(0), v(0))$ και $(u'(0), v'(0))$ δηλαδή το σημείο $X(u(0), v(0)) = P$ και το διάνυσμα $\gamma'(0) = X_u(p)u'(0) + X_v(p)v'(0)$. Έχουμε λοιπόν το παρακάτω συμπέρασμα :

Συμπέρασμα . Όταν δοθεί ένα σημείο P της S και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $w \in T_P S$, τότε υπάρχει μια και μόνο μια γεωδαισιακή $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ της S με $\gamma(0) = P$ και $\gamma'(0) = w$.

Παράδειγμα 3.5.3. Αν πάρουμε ένα σημείο της $S_{R_0}^2$ και ένα διάνυσμα σ αυτό το σημείο, τότε με αυτά τα στοιχεία καθορίζεται πλήρως ένας μόνο μεγάλος κύκλος της $S_{R_0}^2$, δηλαδή μόνο μια γεωδαισιακή.



Παρατήρηση 3.5.4. Όταν δοθεί στο σημείο P ένα διάνυσμα

$w = \alpha X_u(P) + \beta X_v(P)$, τότε με αυτές τις αρχικές συνθήκες το σύστημα (7) έχει μια λύση $(u(t), v(t))$. Τότε για την καμπύλη $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ (που είναι γεωδαισιακή) ισχύει: $E(u'(t))^2 + 2F u'(t)v'(t) + G(v'(t))^2 = |w|^2$ για κάθε t .

Πραγματικά, αφού η καμπύλη $(u(t), v(t))$ είναι γεωδαισιακή θα έχει σταθερή ταχύτητα.

Παρατήρηση 3.5.5. Βέβαια, όταν μας δοθεί μια επιφάνεια και μας ζητηθεί να βρούμε τις γεωδαισιακές της, πρέπει να καταστρώσουμε το σύστημα (7) και να προσπαθήσουμε να το λύσουμε, πράγμα όχι τόσο εύκολο. Μερικές φορές όμως, όταν η επιφάνεια είναι πολύ απλή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατ'ευθείαν τον ορισμό, όπως στα παραδείγματα 3.5.1. και 3.5.2.

Πρόταση 3.5.1. Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$ της κανονικής επιφάνειας S . Ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε η παραμετρική γραμμή $v=c$ να είναι γεωδαισιακή είναι να ισχύουν οι σχέσεις:

$$(8) \quad \begin{cases} E(u, c) = \text{σταθερό} \\ E_v(u, c) = 2F_u(u, c) \end{cases}.$$

Απόδειξη. Η παραμετρική γραμμή $v=c$ έχει ως παράμετρο το u (δηλαδή $u=t$), έτσι οι εξισώσεις της είναι: $u(t)=u$, $v(t)=c$.

Άρα, $u'=1$, $u''=0$, $v'=v''=0$. Από το σύστημα (7) θα πάρουμε πως η $v=c$ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν ισχύουν:

$$\Gamma_{11}^1 = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0$$

Τώρα το συμπέρασμα προκύπτει εύκολα αν πάρουμε την έκφραση των $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ συναρτήσει των E, F, G και των παραγώγων των (όσκηση 2, στη σελίδα 154) και λύνοντας αυτές τις εξισώσεις ως προς E_{uu}, F_v .

Παρατήρηση 3.5.6. Αν η παραμετρική γραμμή $v=c$ είναι γεωδαισιακή, τότε είναι φανερό ότι πρέπει $E(u,c) = \text{σταθερό}$, αφού το διάνυσμα ταχύτητας της $v=c$ είναι το $X_u(u,c)$ και το οποίο σύμφωνα με τη παρατήρηση 3.5.1 πρέπει να έχει σταθερό μήκος.

Παράδειγμα 3.5.5. Ξέρουμε (παράδειγμα 2.3.3) ότι η σπεικόνιση

$$X(u,v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

είναι σύστημα συντεταγμένων μιας επιφάνειας που έχουμε ονομάσει επιφάνεια εκ περιστροφής. Τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης είναι:

$$E = (f(v))^2, F = 0, G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2.$$

Σύμφωνα με τη πρόταση 3.5.1 μια παραμετρική γραμμή $v=c$ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν, ισχύουν οι (8). Η πρώτη των (8) ισχύει, για $v=c$. Η δεύτερη των (8) για τη συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται

$$2f(v) \cdot f'(v) = 2F_u = 0.$$

Έτσι η παραμετρική γραμμή $v=c$ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν ισχύει $f'(v) = 0$.

Άσκηση. Να δείξετε ότι στις επιφάνειες εκ περιστροφής οι παραμετρικές γραμμές $u=c$ (οι μεσημβρινοί) με κατάλληλη παραμέτρηση είναι γεωδαισιακές της επιφάνειας.

Επειδή σε κάθε καμπύλη μπορούμε να κάνουμε αναπαραμέτρηση, ώστε η παράμετρος να είναι το μήκος τόξου, ας κοιτάξουμε το εξής πρόβλημα: Πότε μια καμπύλη με διάνυσμα ταχύτητας μοναδιαίο είναι γεωδαισιακή της επιφάνειας S ;

Θεωρούμε μια καμπύλη $\gamma: I \rightarrow S$, $s \rightarrow \gamma(s)$ με παράμετρο το μήκος τόξου. Είναι φανερό (γιατί;) ότι τα διανύσματα $\dot{\gamma}, N, \dot{\gamma} \times N$ είναι μια ορθοκανονική βάση του



R^3 στο σημείο $\gamma(s)$. Έτσι θα ισχύει :

$$\ddot{\gamma} = \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma} + \langle \ddot{\gamma}, N \rangle N + \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \times N \rangle \dot{\gamma} \times N$$

$$= -\langle \dot{\gamma}, \dot{N} \rangle N + (\dot{\gamma} \ddot{\gamma} N) N \times \dot{\gamma} = (\dot{\gamma} \ddot{\gamma} N) N \times \dot{\gamma} + k_n(\dot{\gamma}) N,$$

όπου $(\dot{\gamma} \ddot{\gamma} N) = \langle \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}, N \rangle$ και αφού $|\dot{\gamma}| = 1$, $\langle \dot{\gamma}, N \rangle = 0$ και

$k_n(\dot{\gamma}) = \langle L \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = -\langle \dot{N}, \dot{\gamma} \rangle$ η κάθετη καμπυλότητα στη διεύθυνση του $\dot{\gamma}$.

Ορισμός 3.5.1. Έστω $\gamma(s)$ μια καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου πάνω στην επιφάνεια S . Η ποσότητα $k_g(s) = (\dot{\gamma} \ddot{\gamma} N)(s)$ λέγεται γεωδαισιακή καμπυλότητα της γ στο s . Η k_g εξαρτάται από τον προσανατολισμό της S .

Έχουμε λοιπόν την παρακάτω ενδιαφέρουσα ταυτότητα :

$$(*) \quad \ddot{\gamma} = k_g N \times \dot{\gamma} + k_n(\dot{\gamma}) N.$$

Η παρακάτω πρόταση είναι εύκολη συνέπεια της ταυτότητας (*).

Πρόταση 3.5.2. Έστω $\gamma(s)$ μια καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου πάνω στην επιφάνεια S . Η $\gamma(s)$ είναι γεωδαισιακή της S αν και μόνο αν η γεωδαισιακή καμπυλότητα είναι μηδέν.

Απόδειξη. Σαν άσκηση.

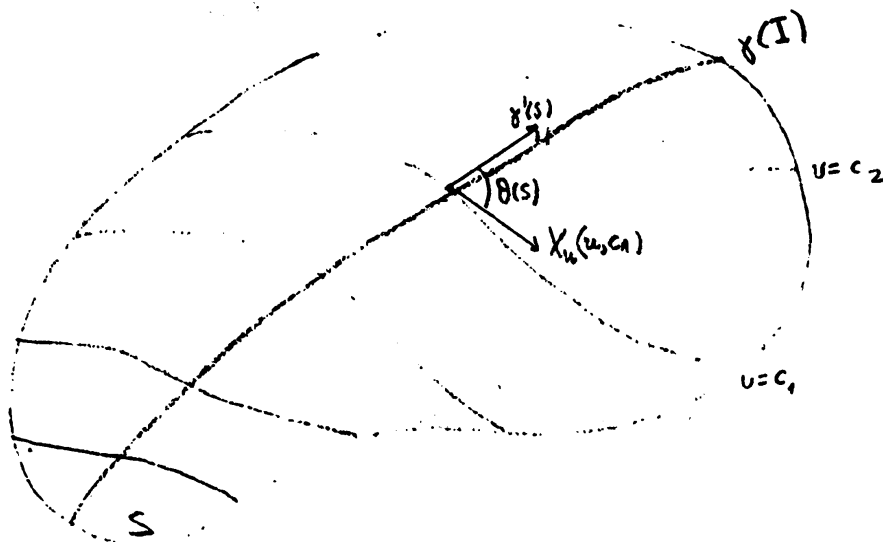
Άσκηση. Έστω $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$ μια καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου πάνω στην επιφάνεια S , όπου $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων της S . Τότε

$$k_g = \sqrt{EG - F^2} \left[\Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \left(\frac{dv}{ds} \right) + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \left(\frac{du}{ds} \right) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 - \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^3 + \frac{du}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds} \right].$$

Η παρακάτω πρόταση μας δίνει μια έκφραση (χρήσιμη για αυτά που ακολουθούν) για τη γεωδαισιακή καμπυλότητα μιας καμπύλης πάνω σε επιφάνεια. Η απόδειξη της είναι υπολογιστική και κουραστική. Θα την αναφέρουμε χωρίς πλήρη απόδειξη.

Πρόταση 3.5.3. Έστω $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$ μια καμπύλη με παράμετρο μήκος τόξου πάνω σε μια κανονική επιφάνεια S , όπου $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων της S . Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η καμπύλη γ με τις παραμετρικές γραμμές $v=c$ (σχήμα 52), τότε η γεωδαισιακή καμπυλότητα της γ είναι :

$$(9) \quad k_g = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{2E\sqrt{EG-F^2}} (2EF_u - FE_u - EE_v) \frac{du}{ds} + \frac{1}{2E\sqrt{EG-F^2}} (EG_u - FE_v) \frac{dv}{ds}$$



σχήμα 52

Απόδειξη. Το διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης γ είναι

$$\dot{\gamma} = X_u \frac{du}{ds} + X_v \frac{dv}{ds}, \text{ ενώ της παραμετρικής γραμμής } v=c \text{ είναι } \beta' = X_u.$$

Έτσι έχουμε :

$$\cos \theta = \frac{\langle \gamma', \beta' \rangle}{|\gamma'| |\beta'|} = \frac{E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds}}{1 \cdot \sqrt{E}} = \sqrt{E} \frac{du}{ds} + \frac{F}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds}$$



Άρα ,

$$(10) \quad \cos \theta = \sqrt{E} \frac{du}{ds} + \frac{F}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds}$$

Επίσης

$$(11) \quad \sin \theta = \frac{|\gamma' \times \beta'|}{|\gamma'| |\beta'|} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds}$$

Παραγωγίζουμε την (10) ως προς s και παίρνουμε ,

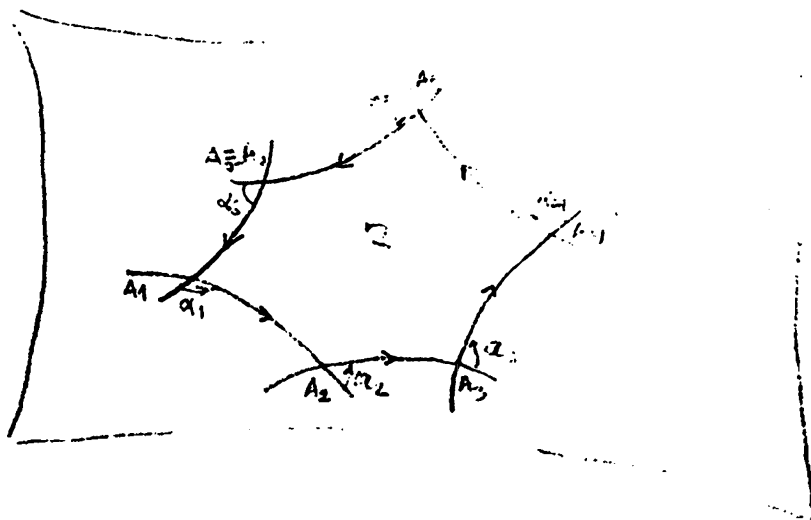
$$\begin{aligned} -\sin \theta \frac{d\theta}{ds} &= \sqrt{E} \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{F}{\sqrt{E}} \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{E_u \frac{du}{ds} + E_v \frac{dv}{ds}}{2\sqrt{E}} \frac{du}{ds} \\ &+ \frac{F_u \frac{du}{ds} + F_v \frac{dv}{ds}}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds} - \frac{F(E_u \frac{du}{ds} + E_v \frac{dv}{ds})}{2E^{3/2}} \frac{dv}{ds} \end{aligned}$$

Στη τελευταία σχέση αντικαθιστούμε το $\sin \theta$ από τη (11) και λύνουμε ως προς $\frac{d\theta}{ds}$. Τώρα χρησιμοποιώντας την άσκηση της σελίδας 154 και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τα σύμβολα του Christoffel παίρνουμε μια έκφραση για το k_g . Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις των k_g και $\frac{d\theta}{ds}$ στην (9) βλέπουμε ότι γίνεται μια ταυτότητα .

Παρατήρηση . Η σχέση (9) είναι γνωστή στη βιβλιογραφία και σαν τύπος του Liouville .

3.6. Θεωρήματα των Gauss - Bonnet .

Θεωρούμε μια κανονική επιφάνεια S και μια κλειστή πολυγωνική καμπύλη με πλευρές τα τόξα $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-2}A_{n-1}, A_{n-1}A_n$ ($A_n \equiv A_0$) , που περικλείει έναν απλά συνεκτικό τόπο R που είναι σε μια περιοχή συντεταγμένων $X(U)$ (σχήμα 53) . (Ένας τόπος λέγεται απλά συνεκτικός (simply connected), όταν κάθε κλειστή καμπύλη αυτού μπορεί να συσταλεί με συνεχή κίνηση σε ένα σημείο χωρίς να αφήσει την επιφάνεια) .



σχήμα 53 , για $n=6$

Πάνω στη πολυγωνική καμπύλη $A_0 \dots A_n$ διαλέγουμε μια θετική φορά διαγραφής της ως εξής: Όταν περπατάμε πατώντας την S και το κεφάλι να δείχνει το κάθετό της να αφήσουμε αριστερά μας το R και ας είναι α_r η γωνία που σχηματίζουν οι πλευρές $A_{r-1}A_r$ και A_rA_{r+1} (σχήμα 53, για $n=6$), όπου $r=1, \dots, n$ και $A_{n+1}=A_1$. Με άλλα λόγια οι γωνίες $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι οι εξωτερικές γωνίες του καμπυλογράμμου πολυγώνου $A_0A_1 \dots A_n$. Ας συμβολίσουμε με γ τη πολυγωνική γραμμή $A_0A_1 \dots A_n$, η οποία δεν είναι λεία αλλά αποτελείται από κομμάτια λεία και έχει ως παράμετρο το μήκος τόξου. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} k_g ds$ (όπου k_g είναι η γεωδαισιακή καμπυλότητα της γ) υπάρχει (γιατί ;). Η ποσότητα $2\pi - \sum_{r=1}^n \alpha_r - \int_{\gamma} k_g ds$ είναι ένας πραγματικός αριθμός και λέγεται υπεροχή (exceed) της καμπύλης γ , συμβολίζεται δε με $ex\gamma$. Έτσι έχουμε :

$$(1) \quad ex\gamma = 2\pi - \sum_{r=1}^n \alpha_r - \int_{\gamma} k_g ds$$

Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η πολυγωνική καμπύλη γ με τις παραμετρικές γραμμές $v=c$, είναι φανερό (!!) ότι :



$$(2) \quad \int_{\gamma} d\theta + \sum_{r=1}^n \alpha_r = 2\pi$$

Επίσης από τον τύπο του Liouville έχουμε :

$$(3) \quad \int_{\gamma} k_g ds = \int_{\gamma} d\theta + \int_{\gamma} \left[\frac{1}{2E\sqrt{EG-F^2}} (2EF_u - FE_u - EE_v) du + \frac{1}{2E\sqrt{EG-F^2}} (EG_u - FE_v) dv \right]$$

$$= \int_{\gamma} d\theta + \int_{\gamma} A du + B dv$$

όπου έχουμε θέσει

$$A = \frac{1}{2E\sqrt{EG-F^2}} (2EF_u - FE_u - EE_v) \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{2E\sqrt{EG-F^2}} (EG_u - FE_v)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) παίρνουμε

$$exy = - \int_{\gamma} (A du + B dv)$$

Επειδή η πολυγωνική γραμμή περικλείει έναν απλά συνεκτικό τόπο και οι συναρτήσεις A, B είναι διαφορίσιμες μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Green από τον απειροστικό λογισμό. Έτσι θα πάρουμε

$$exy = - \int_{\gamma} (A du + B dv) = - \iint_R \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) du dv$$

$$= - \iint_R \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) \sqrt{EG-F^2} du dv$$

$$= - \iint_R \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) dS$$

όπου $dS = \sqrt{EG-F^2} du dv$ παριστάνει ως γνωστό το στοιχειώδες εμβαδό της επιφάνειας, δηλαδή το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $X_u du$

και $\chi_V dv$.

Μπορούμε να διαπιστώσουμε μετά από κουραστικές πράξεις πως

$$K = - \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right).$$

Έτσι

$$(4) \quad exv = \iint_R K dS$$

ή από την (1)

$$(5) \quad 2\pi - \sum_{r=1}^n \alpha_r = \int_{\gamma} k_g ds = \iint_R K dS.$$

Η σχέση (5) είναι γνωστή και σαν τοπικός τύπος των Gauss-Bonnet.

Αν η καμπύλη γ ήταν λεία, δηλαδή δεν είχε γωνίες, τότε $\alpha_r = 0$, οπότε από την (5) παίρνουμε,

$$(6) \quad 2\pi - \int_{\gamma} k_g ds = \iint_R K dS.$$

Επίσης αν τα τόξα της πολυγωνικής γραμμής γ ήταν γεωδαισιακά τότε $k_g = 0$ και η (5) γίνεται,

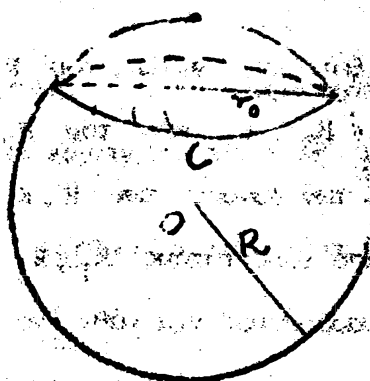
$$(7) \quad 2\pi - \sum_{r=1}^n \alpha_r = \iint_R K dS.$$

Τέλος αν η γ ήταν μια λεία γεωδαισιακή τότε από την (6) παίρνουμε,

$$(8) \quad 2\pi = \iint_R K dS.$$

Οι τύποι (6), (7) και (8) είναι ειδικές περιπτώσεις του γενικού τύπου (5).

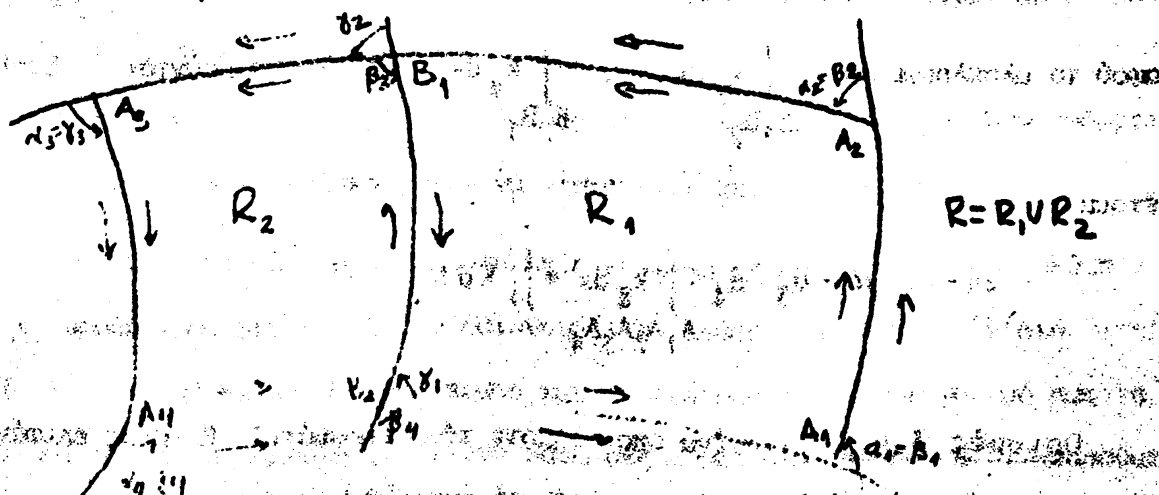
Εφαρμογή (Άσκηση). Να βρείτε το εμβαδό της μικρής σκούφιας στο δι-



πλανό σχήμα, όπου C είναι κύκλος ακτί-
νας r_0 και R είναι η ακτίνα της
σφαίρας.

Παρατήρηση 3.6.1. Οι παραπάνω υπολογισμοί γίνονται όταν ο τόπος R είναι υποσύνολο του $X(U)$, όπου $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων. Αν αυτό δεν συμβαίνει τότε χωρίζουμε το τόπο σε μικρότερα κομμάτια ώστε κάθε κομμάτι να είναι μέσα σε ένα σύστημα συντεταγμένων και αθροίζουμε τα αποτελέσμα-
τα (παράδειγμα 3.6.1). Επίσης χρησιμοποιήσαμε στα διπλά ολοκληρώματα σαν τόπο ολοκλήρωσης το R , το (πιο) σωστό θα ήταν να βάλουμε $X^{-1}(R)$.

Παράδειγμα 3.6.1. Ο τόπος R είναι ένωση των τόπων R_1 και R_2 (σχήμα 54).



σχήμα 54

Ο τόπος R έχει κορυφές τα A_1, A_2, A_3, A_4 και οι τόποι R_1, R_2 έχουν κορυφές

αντίστοιχα τα A_1, A_2, B_1, B_2 και B_2, B_1, A_3, A_4 . Οι εξωτερικές γωνίες του R είναι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ του R_1 οι $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, β_3 , β_4 και του R_2 οι γ_1 , γ_2 , $\gamma_3 = \alpha_3$, $\gamma_4 = \alpha_4$. Οι προσανατολισμοί των συνόρων των R, R_1, R_2 φαίνονται στο σχήμα 54. Υποθέτουμε ότι κάθε ένας από τους τόπους R_1, R_2 είναι σε περιοχή συντεταγμένων, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε για κάθε ένα από τους R_1, R_2 τον τοπικό τύπο των Gauss-Bonnet (σχέση (5)). Έτσι έχουμε :

$$\text{για } R_1 : 2\pi - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4 - \int_{A_1 A_2 B_1 B_2} k_g ds = \iint_{R_1} K dS$$

$$\text{για } R_2 : 2\pi - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 - \int_{B_2 B_1 A_3 A_4} k_g ds = \iint_{R_2} K dS .$$

Προσθέτοντας και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\gamma_2 + \beta_3 = \pi$, $\gamma_1 + \beta_4 = \pi$ θα πάρουμε ,

$$2\pi - \beta_1 - \beta_2 - \gamma_3 - \gamma_4 - \int_{A_1 A_2 A_3 A_4} k_g ds = \iint_R K dS ,$$

αφού τα ολοκληρώματα $\int_{B_1 B_2} k_g ds$, $\int_{B_2 B_1} k_g ds$ αλληλοαναιρούνται. Έτσι

έχουμε

$$2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \int_{A_1 A_2 A_3 A_4} k_g ds = \iint_R K dS$$

Ορισμός 3.6.1. Για ένα οποιοδήποτε τόπο (κομμάτι) R μιας επιφάνειας S το ολοκλήρωμα $\iint_R K dS$ λέγεται ολική καμπυλότητα του R .

Έτσι έχουμε το παρακάτω θεώρημα .

Θεώρημα 3.6.1. (Τοπικό θεώρημα των Gauss-Bonnet) . Αν μια πολυγωνική



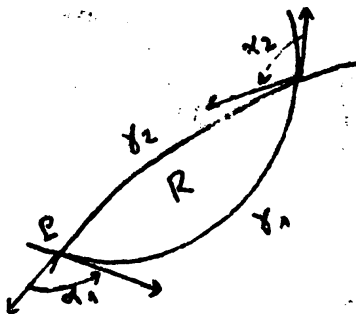
καμπύλη γ μιας επιφάνειας S περικλείει ένα απλά συνεκτικό τόπο R , τότε η ολική καμπυλότητα του R ισούται με την υπεροχή της καμπύλης γ .

Απόδειξη. Η σχέση (4) παραπάνω.

Εφαρμογές.

1. Έστω S μια προσανατολισμένη επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$. Ας είναι γ_1, γ_2 δύο γεωδαισιακές της που περνούν από το σημείο $P \in S$. Τότε οι γ_1, γ_2 δεν μπορούν να ξανασυναντηθούν ώστε να περικλείουν ένα απλά συνεκτικό τόπο R .

Ας υποθέσουμε ότι ξανασυναντιώνται. Τότε θα είχαμε σύμφωνα με το τύπο (7) ότι,



$$2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 = \iint_R K dS$$

Όμως $\alpha_1, \alpha_2 < \pi$, έτσι το πρώτο μέλος είναι θετικό, ενώ το δεύτερο αρνητικό ή

μηδέν ($K \leq 0$). Αυτό είναι άτοπο.

Εύκολα (πως ;) συμπεραίνουμε πως σε μια επιφάνεια με $K \leq 0$ δεν υπάρχει λεία και κλειστή γεωδαισιακή, που να περικλείει απλά συνεκτικό τόπο.

2. Έστω $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια κλειστή λεία καμπύλη με μη μηδενική καμπυλότητα και s παράμετρος μήκος τόξου. Παίρνουμε τη πρώτη σφαιρική δείχτρια $\gamma_2: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma_2(s) = \eta(s)$ ($\eta(s)$ πρώτο κάθετο διάνυσμα). Είναι φανερό πως γ_2 είναι μια λεία καμπύλη με εικόνα πάνω στη μοναδιαία σφαίρα S^2 . Μπορούμε να δούμε πως το $\gamma_2(I)$ χωρίζει την S^2 σε δύο ισομετρικά κομμάτια, αν η γ_2 είναι απλή.

Ας είναι $\bar{s}$ το μήκος τόξου της γ_2 . Τότε η γεωδαισιακή καμπυλότητα $\bar{k}_g$ της γ_2 , σαν καμπύλης της S^2 είναι



$$\bar{k}_g = \langle N(s), \dot{\gamma}_2(s) \times \ddot{\gamma}_2(s) \rangle = \langle N(s), \dot{n}(s) \times \ddot{n}(s) \rangle,$$

όπου με $\cdot$ συμβολίζουμε τη παράγωγο ως προς $\bar{s}$ και N το κάθετο της σφαίρας.
Είναι φανερό πως

$$\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 = \frac{1}{k^2 + \tau^2},$$

όπου k, τ η καμπυλότητα και η στρέψη αντίστοιχα της γ .

Έχουμε,

$$\dot{n}(s) = \frac{dn}{d\bar{s}}(s) = \frac{dn}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = (-kT + \tau B) \frac{ds}{d\bar{s}}$$

και

$$\ddot{n}(s) = (-kT + \tau B) \frac{d^2s}{d\bar{s}^2} + \left(-\frac{dk}{ds}T + \frac{d\tau}{ds}B\right) \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 - (k^2 + \tau^2)n\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2$$

Έτσι παίρνουμε,

$$\bar{k}_g = \langle N(s), \dot{n}(s) \times \ddot{n}(s) \rangle = -\left(\tau \frac{dk}{ds} - k \frac{d\tau}{ds}\right) \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3$$

$$= \frac{-\tau \frac{dk}{ds} + k \frac{d\tau}{ds}}{k^2 + \tau^2} \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right) = \frac{d}{d\bar{s}} \left(\text{τοξ εφ } \frac{\tau}{k}\right) \frac{ds}{d\bar{s}},$$

μετά από πράξεις και αφού $N(s) = n(s)$.

Άρα,

$$\bar{k}_g d\bar{s} = d \text{ τοξ εφ } \frac{\tau}{k}.$$

Τώρα το $\gamma_2(I)$ χωρίζει την S^2 σε δύο καμμάτια. Ας είναι R_1 το ένα κομμάτι. Εφαρμόζουμε το τοπικό θεώρημα των Gauss-Bonnet. Επειδή για τη S^2 έχουμε $K=1$, τότε η σχέση (6) δίνει:



$$2\pi - \int_{\gamma_2} \bar{k}_g d\bar{s} = \iint_{R_1} 1 dS = \text{εμβαδόν } R_1$$

ή

$$2\pi - \int_{\gamma_2} d \text{ τοξ } \varphi \frac{\tau}{K} = \text{εμβαδόν } R_1$$

ή

$$\text{εμβαδόν } R_1 = 2\pi = \frac{\text{εμβαδόν } S^2}{2}$$

3. Ξέρουμε πως η βάση για την επιπεδομετρία του Ευκλείδη είναι η Γεωμετρία των Τριγώνων. Επίσης είναι γνωστό ότι το αξίωμα παραλληλίας του Ευκλείδη είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι 2π . Βέβαια στο επίπεδο έχουμε ότι η καμπυλότητα του Gauss είναι $K=0$. Θα δούμε τώρα τι συμβαίνει με τις εσωτερικές γωνίες ενός γεωδαισιακού τριγώνου πάνω σε μια επιφάνεια S . Γεωδαισιακό τρίγωνο είναι μια πολυγωνική γραμμή με τρεις κορυφές έτσι ώστε τα τρία τόξα A_0A_1 , A_1A_2 , A_2A_3 ($A_0 \equiv A_3$) να είναι γεωδαισιακές.

Εφαρμόζοντας το τύπο (7) παίρνουμε :

$$2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \iint_R K dS$$

Επειδή όμως $\alpha_1 = \pi - \theta_1$, $\alpha_2 = \pi - \theta_2$,

$\alpha_3 = \pi - \theta_3$, όπου $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ είναι οι εσω-

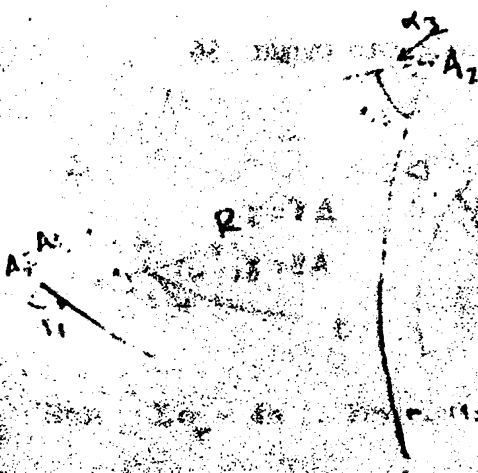
τερικές γωνίες θα έχουμε :

$$2\pi - (3\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) = \iint_R K dS$$

ή

$$(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - \pi = \iint_R K dS$$

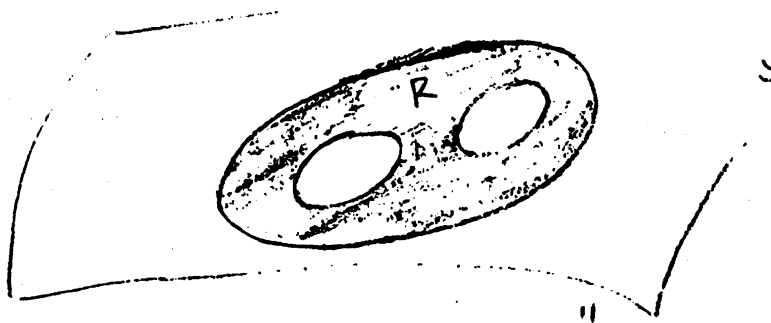
Έτσι αν $K \equiv 0$, τότε το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών είναι π



αν $K > 0$, τότε το άθροισμα των εσωτερικων γωνιών είναι $> \pi$

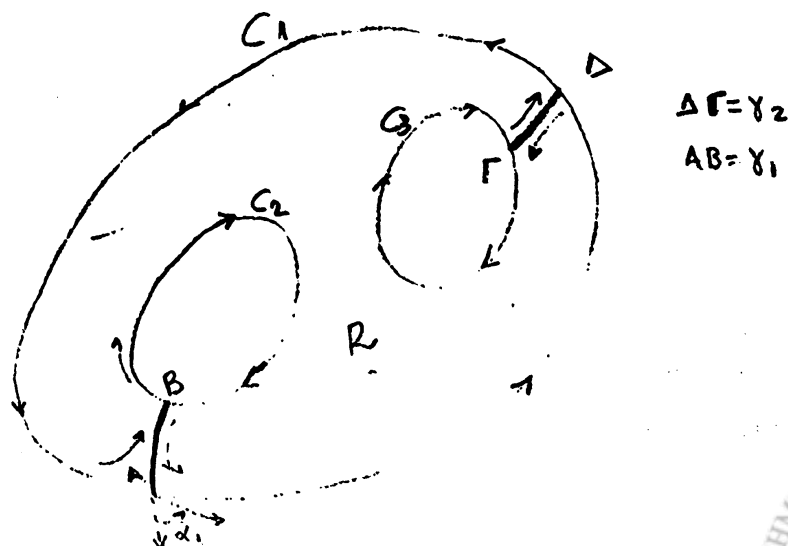
αν $K < 0$, " " " " $< \pi$

Το τοπικό θεώρημα των Gauss-Bonnet μπορούμε να το εφαρμόσουμε και για πολλαπλά συνεχτικά τόπους μιας επιφάνειας S , δηλαδή για απλά συνεχτικά τόπους από τους οποίους έχουμε αφαιρέσει απλά συνεχτικά τόπους . Για παράδειγμα το σχήμα 55 μας δίνει ένα τριπλά συνεχτικό τόπο (από έναν απλά συνεχτικό έχουμε αφαιρέσει δύο απλά συνεχτικούς)



σχήμα 55

Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να εφαρμόσουμε το τοπικό θεώρημα των Gauss-Bonnet για τριπλά συνεχτικούς τόπους (η ίδια διαδικασία γίνεται και για πολλαπλά συνεχτικούς τόπους) . Φέρνουμε δύο τόξα γ_1, γ_2 όπως στο σχήμα 56



σχήμα 56



Υποθέτουμε ότι οι καμπύλες C_1, C_2, C_3 είναι λείες χωρίς γωνίες .

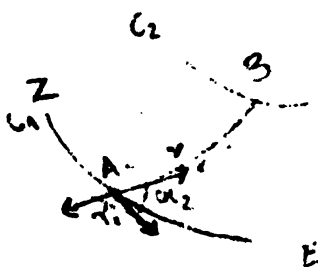
Θεωρούμε τη καμπύλη γ που αποτελείται από τα τόξα $\overline{AD}, \overline{DG} = \gamma_2, \overline{GT} = C_3, \overline{TA}, \overline{AB}, \overline{BA} = \gamma_1, \overline{BB} = C_2, \overline{BA}$ και με προσανατολισμό (φορά διαγραφής) θετικό (αυτό που φαίνεται στο σχήμα) . Η πολυγωνική καμπύλη γ είναι φανερό πως περι-
κλείει ένα απλά συνεχτικό τόπο , έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε το τοπικό θεώρημα των Gauss-Bonnet . Θα έχουμε :

$$\iint_R K dS = 2\pi - \sum \alpha_T - \int_{\gamma} k_g ds$$

Τα τόξα γ_1, γ_2 (δηλαδή $\overline{DT}, \overline{AB}$) διαγράφονται δύο φορές και μάλιστα μια φορά κατά τη μια διεύθυνση και την άλλη κατά την αντίθετη διεύθυνση . Έτσι αυτά τα τόξα δεν προσφέρουν τίποτα στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα . Δηλαδή :

$$\int_{\gamma} k_g ds = \int_{C_1} k_g ds + \int_{C_2} k_g ds + \int_{C_3} k_g ds$$

Τώρα επειδή από την υπόθεση τα C_1, C_2, C_3 είναι λεία η καμπύλη γ θα κάνει γωνίες μόνο στα A, B, Γ, Δ . Σε κάθε ένα από αυτά τα σημεία η εφαπτομένη πηδάει συνολικά κατά π (κοίταξε για παράδειγμα τι συμβαίνει στο A) .



α_1 εξωτερική γωνία για τη διαδρομή BAE

α_2 εξωτερική γωνία για τη διαδρομή ZAB . Αλλά

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$$

Έτσι $\sum \alpha_T = 4\pi$. Συνεπώς

$$\iint_R K dS = -2\pi - \int_{C_1} k_g ds - \int_{C_2} k_g ds - \int_{C_3} k_g ds$$

όπου βέβαια τα C_1, C_2, C_3 έχουν το προσανατολισμό που φαίνεται στο σχήμα .



Η παραπάνω τεχνική μας βοηθάει να αποδείξουμε το λεγόμενο ολικό θεώρημα των Gauss-Bonnet . Πρώτα μερικά προκαταρκτικά .

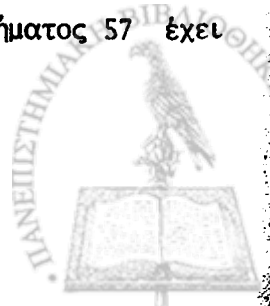
Με φραγμένη επιφάνεια S (δηλαδή επιφάνεια που δεν έχει σημεία όσο θέλουμε μακριά) χωρίς σύνορο θα λέγεται κλειστή επιφάνεια . Σφαίρα , Τόρος (σαμπρέλα) , Ελλειψοειδές , Επιφάνεια μπανάνας είναι μερικά παραδείγματα κλειστών επιφανειών . Αντίθετα ένα ημισφαίριο δεν είναι κλειστή επιφάνεια .

Ένα σημαντικό τοπολογικό συμπέρασμα της ολικής θεωρίας επιφανειών μας λέει (το αναφέρουμε χωρίς απόδειξη) : Μια κλειστή και προσανατολισμένη επιφάνεια είναι ομοιόμορφη με μια κλειστή και προσανατολισμένη επιφάνεια που προκύπτει από τη σφαίρα προσθέτοντας $0, 1, \dots, g$ χερούλια (λαβές) . Έτσι ο τόρος μπορεί να προκύψει από τη σφαίρα προσθέτοντας ένα χερούλι . Ένας τόρος με δύο τρύπες μπορεί να προκύψει από τη σφαίρα προσθέτοντας δύο χερούλια (σχήμα 57) .



σχήμα 57

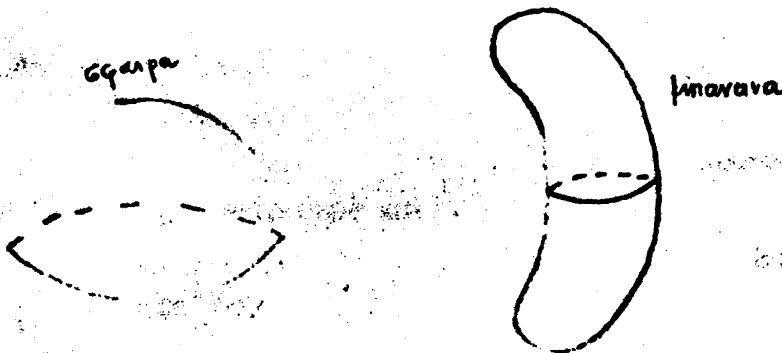
Ο αριθμός των χερούλιών λέγεται γένος της επιφάνειας . Έτσι η σφαίρα έχει γένος 0 , ο τόρος με μια τρύπα έχει γένος 1 ενώ η επιφάνεια του σχήματος 57 έχει γένος 2 . Τι γένος έχει η επιφάνεια του παρακάτω σχήματος :





Ορισμός 3.6.2. Έστω S μια κλειστή και προσανατολισμένη επιφάνεια γένους g . Ο αριθμός $\chi(S) = 2-2g$ λέγεται χαρακτηριστική Euler (Euler - Poincare characteristic) της S .

Παρατήρηση. Το γένος μιας επιφάνειας και η χαρακτηριστική Euler είναι τοπολογικές έννοιες και μάλιστα τοπολογικές αναλλοίωτες (δηλαδή, όταν αλλάζουμε μια επιφάνεια κατά συνεχή τρόπο τότε το γένος και η χαρακτηριστική δεν αλλάζουν). Έτσι η σφαίρα και η μπανάνα έχουν ίδιο γένος και ίδια χαρακτηριστική



ΘΕΩΡΗΜΑ. (ΟΛΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ GAUSS-BONNET). Αν S είναι μια κλειστή και προσανατολισμένη επιφάνεια γένους g τότε :

$$\iint_S K dS = 2\pi \chi(S) = 4\pi(1-g)$$



Παρατήρηση . Η παραπάνω σχέση μας λέει κάτι σημαντικό : Το ολοκλήρωμα $\iint_S K dS$ δεν αλλάζει όταν η επιφάνεια S αλλάζει κατά συνεχή τρόπο και ίσως είναι το πιο βαθύ θεώρημα της θεωρίας επιφανειών .

Απόδειξη . Έστω $g=0$. Χωρίζουμε την S σε δύο κομμάτια S_1 και S_2



με μια απλή κλειστή καμπύλη γ . Τότε τα S_1, S_2 είναι απλά συνεχτικοί τόποι . Ο προσανατολισμός (θετικός) της γ για το S_1 είναι 0 (1) (σχήμα) και για το S_2 είναι 0 (2) (αντίθετος) . Εφαρμόζουμε το τοπικό θεώρημα των Gauss-Bonnet για κάθε

κομμάτι S_1 και S_2 και έχουμε

$$2\pi - \int_{\gamma} k_g ds = \iint_{S_1} K dS$$

$$2\pi - \int_{\gamma} k_g ds = \iint_{S_2} K dS$$

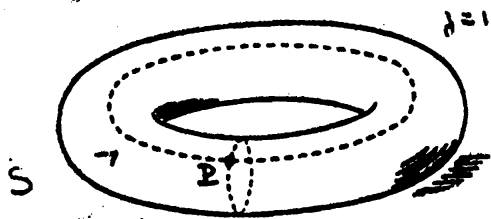
Προσθέτουμε και παίρνουμε

$$4\pi = \iint_S K dS$$

αφού τα επικαμπύλια ολοκληρώματα αλληλοακυρώνονται .

Έστω τώρα $g \geq 1$. Παίρνουμε ένα σημείο P πάνω στην S και από κει φέρνουμε $2g$ καμπύλες κλειστές που να σχηματίζουν στο P ανά δύο διαδοχικές γωνίες $\frac{2\pi}{4g}$ (το διπλανό σχήμα δείχνει πως γίνεται αυτό για $g=1$) .





Έτσι ώστε, αν κόψουμε την επιφάνεια κατά μήκος αυτών των καμπύλων να έχουμε ένα απλά συνεχτικό τόπο . Εφαρμόζουμε τώρα το τοπικό θεώρημα . Επειδή οι καμπύλες διαγράφονται η κάθε μια δύο φορές και μάλιστα μια φορά θετικά και μια αρνητικά , έτσι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int k_g ds$ δεν

συνεισφέρει τίποτα στο τύπο . Αντίθετα η εφαπτομένη πηδάλει κατά γωνία $\pi - \frac{2\pi}{4g}$ κάθε φορά που αφήνουμε μια καμπύλη και περνάμε στην επόμενη . Αυτό γίνεται στο P , $4g$ φορές . Έτσι τελικά ο τοπικός τύπος των Gauss-Bonnet θα μας δώσει :

$$2\pi - 4g\left(\pi - \frac{2\pi}{4g}\right) = \iint_S K dS$$

ή

$$4\pi - 4g\pi = \iint_S K dS$$

ή

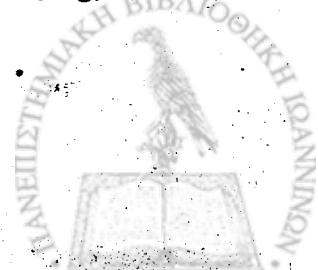
$$4\pi(1-g) = \iint_S K dS$$

Επειδή $\chi(S) = 2 - 2g$ παίρνουμε και

$$\iint_S K dS = 2\pi \chi(S)$$

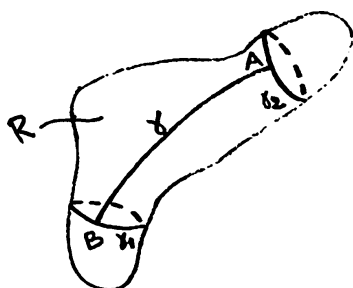
Εφαρμογές .

1. Μια κλειστή επιφάνεια S με θετική καμπυλότητα Gauss είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα (δηλαδή είναι γένους μηδέν) . Από τη σχέση $\iint_S K dS = 4\pi(1-g)$, αφού $K > 0$, συμπεραίνουμε πως $4\pi(1-g) > 0$. δηλαδή $g < 1$, άρα $g = 0$.



2. Αν S είναι μια κλειστή επιφάνεια με θετική καμπυλότητα Gauss τότε οι απλές κλειστές γεωδαισιακές τέμνονται μεταξύ τους . δηλαδή : αν γ_1, γ_2 είναι δύο απλές κλειστές γεωδαισιακές τότε αυτές θα τέμνονται .

Πραγματικά , από την εφαρμογή 1 , συμπεραίνουμε πως η S είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα . Ας υποθέσουμε ότι οι γ_1, γ_2 δεν τέμνονται . Τότε θα έχουμε μια λωρίδα της S μεταξύ των γ_1, γ_2 , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα .



Αν κόψουμε αυτή τη λωρίδα με μια καμπύλη γ και την ανοίξουμε γίνεται ένας τόπος απλά συνεχτικός . Στο τύπο των Gauss-Bonnet (τοπικός) επειδή η γ διαγράφεται δύο φορές δεν προσφέρει τίποτα . Επίσης στο A η εφαπτομένη πηδά συνολικά κατά π

καθώς και στο B . Έτσι θα έχουμε : $2\pi - 2\pi = \iint_R K dS \Rightarrow \iint_R K dS = 0$. Αυτό είναι άτοπο αφού $K > 0$.

Ασκήσεις

1. Να εφαρμόσετε το τοπικό θεώρημα των Gauss-Bonnet σε ένα επίπεδο δακτύλιο , που περιέχεται μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων .

2. Μπορείτε να βρείτε με υπολογισμούς (χωρίς το θεώρημα των Gauss-Bonnet) το ολοκλήρωμα $\iint_S K dS$, όταν S είναι η σφαίρα ή ο τόρος ;

3. Αν S είναι μια κλειστή προσανατολισμένη επιφάνεια γένους ≥ 1 , να δείξετε ότι αυτή έχει σημεία με καμπυλότητα Gauss θετική , αρνητική και μηδέν .



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Δίνεται η καμπύλη $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \rightarrow \gamma(t) \stackrel{\text{op}}{=} (e^t, e^t, e^t)$. Να βρείτε την εικόνα της και το μήκος $L_{-\infty}^{t_0}(\gamma)$

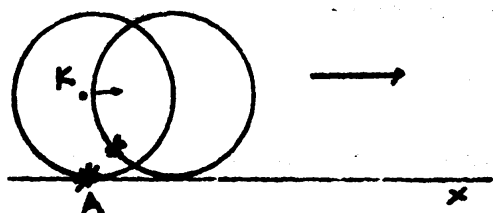
2. Δίνεται η καμπύλη $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζεται ως

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & t \geq 0 \\ (t^2, -t^2) & t \leq 0 \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι είναι μια καμπύλη τάξης C^1 και όχι C^2 .

3. Να βρείτε μια καμπύλη $\gamma(t)$ με $\gamma(0) = (2, 3, 0)$ και $\gamma'(t) = (e^t, -2t, t^2)$.

4. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος ακτίνας R κυλιέται πάνω στον άξονα x .



Να βρείτε καμπύλη που έχει εικόνα την τροχιά του A . Να βρείτε το μήκος αυτής της καμπύλης από το A ως το σημείο, που το A θα επανέλθει στον άξονα των x .

5. Να βρείτε τη καμπυλότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ στο τυχαίο της σημείο. Ποια είναι η καμπυλότητα της στις τέσσερες κορυφές της;

6. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $s \rightarrow f(s) \stackrel{\text{op}}{=} \frac{1}{s}$. Να βρείτε επίπεδη καμπύλη, που έχει καμπυλότητα την $f(s)$ και το s ως μήκος τόξου.

7. Δίνεται η καμπύλη $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t^2, -t + 2t^2 + 1)$. Αφού δείξετε ότι η καμπύλη είναι επίπεδη, να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου πάνω στην οποία βρίσκεται η εικόνα της.

8. Μια καμπύλη γ έχει εικόνα το σύνολο $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 = 3a^2y, 2xz = a^2, \text{ με } a = \text{σταθ.} \neq 0\}$. Να δείξετε ότι ισχύει παντού $\tau + k = 0$.



9. Δίνεται η επίπεδη καμπύλη

$$\gamma(\theta) = (3\cos\theta - \cos 3\theta, 3\sin\theta - \sin 3\theta), \text{ για } 0 < \theta < \pi.$$

Να δείξετε ότι : $\frac{1}{9k^2} + \frac{s^2}{36} = 1$, όπου s η συνάρτηση μήκους τόξου με αρχή το σημείο $\theta = \frac{\pi}{2}$.

10. Αν οι πρώτες κάθετες ευθείες μιας καμπύλης είναι παράλληλες σε σταθερό επίπεδο να δείξετε ότι η καμπύλη είναι κυλινδρική έλικά.

11. Να δείξετε ότι η καμπύλη $\gamma(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ είναι κυλινδρική έλικά και να βρείτε τη διεύθυνση του άξονά της.

12. Να δείξετε ότι οι v -παραμετρικές γραμμές του συστήματος συντεταγμένων $X(u, v) = (u^2 + 2uv, u + v, u^3 + 3u^2v)$ είναι ευθείες.

13. Μια κανονική επιφάνεια S είναι γράφημα της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 - (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow f(x, y) \stackrel{\text{op}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$. Να βρείτε την σφαιρική απεικόνιση καθώς και την εικόνα της.

14. Στο σημείο P της κανονικής επιφάνειας S θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα $E_1, \dots, E_m$ ($m > 2$) που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\frac{2\pi}{m}$. Αν $k_n(E_i) = \lambda_i$, να δείξετε ότι : $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = mH(P)$, όπου $H(P)$ είναι η μέση καμπυλότητα της S στο σημείο P .

15. Δίνεται το γράφημα Γ_f της $f(x, y) = x^2 + y^3$. Να βρείτε ποια σημεία είναι ελλειπτικά, υπερβολικά, παραβολικά. Υπάρχουν ομφαλικά σημεία;

16. Έστω $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$ ένα σύστημα συντεταγμένων της S . Τα σημεία του $X(U)$ είναι ομφαλικά, αν και μόνο αν, $\frac{\ell}{E} = \frac{m}{F} = \frac{n}{G}$.

17. Να βρεθούν τα ομφαλικά σημεία του γραφήματος της $f(x, y) = x^2 + y^2$.

18. Να βρείτε τις $f(x)$, $g(y)$ ώστε το γράφημα Γ_F της $F(x, y) = f(x) + g(y)$ να είναι ελάχιστης έκτασης.



19 . Δίνεται το σύστημα συντεταγμένων $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$,

$X(u,v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$ μιας κανονικής επιφάνειας S . Για ποιές λείες συναρτήσεις $f(u)$ το $X(U)$ είναι επιφάνεια ελάχιστης έκτασης ;

20 . Αν για την επιφάνεια S ισχύει $I = \alpha II$ με $\alpha = \text{σταθ.} \neq 0$, να δείξετε ότι η S είναι κομμάτι σφαίρας ακτίνας $|\alpha|$.

21 . Έστω $X(u,v)$ ένα σύστημα συντεταγμένων μιας κανονικής επιφάνειας S . α) Να βρεθεί η γεωδαισιακή καμπυλότητα της παραμετρικής γραμμής $u=c$.

β) Να δείξετε ότι : $N_u \times N_v = K X_u \times X_v$, όπου $N(u,v)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο , που ορίζεται από το σύστημα $X(u,v)$.

22 . Δίνεται κανονική επιφάνεια S . Αν τα εφαπτόμενα επίπεδα είναι παράλληλα προς σταθερή ευθεία (ϵ) , να δείξετε ότι $K \equiv 0$.

23 . Αν τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης ℓ, m, n ως προς το σύστημα $X(u,v)$ είναι μηδενικά , να δείξετε ότι η επιφάνεια είναι κομμάτι επιπέδου .

24 . Αν $X(u,v)$ είναι ισοθερμο σύστημα συντεταγμένων να δείξετε πως $X_{uu} + X_{vv} = 2EHN$.

25 . Οι κανονικές επιφάνειες $S, \bar{S}$ τέμνονται κατά μήκος της κανονικής καμπύλης $\gamma(s)$. Να δείξετε ότι ισχύει :

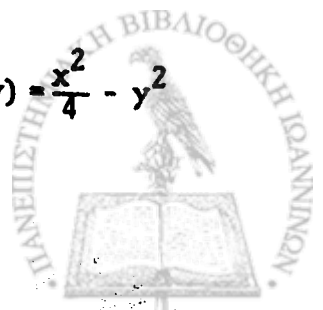
$$k^2 \sin^2 \theta = k_n^2 + \bar{k}_n^2 - 2k_n \bar{k}_n \cos \theta ,$$

όπου k η καμπυλότητα της $\gamma(s)$, $k_n, \bar{k}_n$ οι κάθετες καμπυλότητες στη διεύθυνση του $\dot{\gamma}(s)$, των $S, \bar{S}$ αντίστοιχα και $\theta = \angle (N, \bar{N})$.

26 . Αν $X(u,v)$ είναι σύστημα γραμμών καμπυλότητας της κανονικής επιφάνειας S να δείξετε ότι ισχύει :

$$(u_2)_u - (k_1)_v = \frac{1}{2} (k_1 - k_2) \left(\frac{G_u}{G} + \frac{E_v}{E} \right) .$$

27 . Να δείξετε ότι οι ασυμπτωτικές καμπύλες της Γ_f , για $f(x,y) = \frac{x^2}{4} - y^2$ είναι ευθείες γραμμές .



28 . Δίνεται το σύστημα $X(u,v) = (u,v,u^2+v^2)$ της S και η καμπύλη $\gamma(t) = X(t^2,t)$. Να βρείτε την $k_n(\gamma'(t))$.

29 . Έστω $U = \{u,v\} \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v > 0\}$ και $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $X(u,v) = (u \cos v, u \sin v, \log u)$, $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $Y(u,v) = (u \cos v, u \sin v, v)$.
 Δείξτε ότι τα υποσύνολα $S_1 = X(U)$, $S_2 = Y(U)$ είναι κανονικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$. Να βρείτε τις καμπυλότητες Gauss των S_1, S_2 . Να εξετάσετε αν είναι ισομετρικές .

30 . Δίνεται το σύστημα συντεταγμένων $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Αν όλες οι παραμετρικές γραμμές του συστήματος είναι γεωδαισιακές της S και τέμνονται υπό σταθερή γωνία , να δείξετε ότι $K \equiv 0$. (Εφαρμόστε τοπικό θεώρημα Gauss-Bonnet) .



Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο με δαπάνη
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Κ.Α. Πανεπιστημιακού Τυπογραφείου,

Τυπογράφος : Σ. Αναγνώστου

Copyright : Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Απαγορεύεται η μερική ή ολική ανατύπωση, καθώς και η
λήψη φωτοαντιγράφων από το βιβλίο χωρίς τη γραπτή
άδεια του Τμήματος Δημοσιευμάτων του Πανεπιστημίου
Ιωαννίνων και του συγγραφέα.

Διατίθεται και στο Βιβλιοπωλείο του Πανεπιστημίου
Ιωαννίνων, Δομπόλη, 451 10 Ιωάννινα τηλ. 21801.

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ στους φοιτητές.

