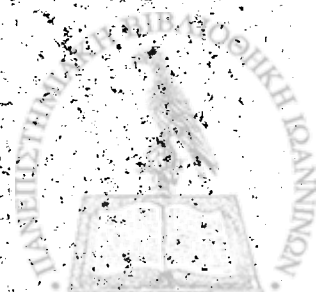


Γεωργίου Α. Καρακώστα

Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής

Εισαγωγή
Περίληψη και Ασκήσεις



Γεωργίου Α. Καρακώστα
Καθηγητού Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Συναρτήσεις
μιας μιγαδικής
μεταβλητής

Εισαγωγή

Περίληψη και Ασκήσεις



Περιεχόμενα

- § 1. Αλγεβρική μορφή μιγαδικού αριθμού, --- 1.
- § 2. Το μιγαδικό επίπεδο, ή Επίπεδο Gauss, --- 4.
- § 3. Συζυγής μιγαδικού αριθμού, --- 7.
- § 4. Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού, --- 10.
- § 5. Εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού, --- 11.
- § 6. Δυνάμεις μιγαδικού αριθμού, --- 12.
- § 7. Ρίζες μιγαδικού αριθμού, --- 16.
- § 8. Ειθείες γραμμές στο μιγαδικό επίπεδο, --- 22.
- § 9. Η τοπολογία του μιγαδικού επιπέδου, --- 23.
- § 10. Σύνχλιση ακολουθιών μιγαδικών αριθμών, --- 26.
- § 11. Το κατ' εκδοχήν σημείο ∞ , --- 30.
- § 12. Σειρές μιγαδικών αριθμών, --- 33.
- § 13. Μιγαδικές συναρτήσεις: γενικά, --- 35.
- § 14. Ρητές μιγαδικές συναρτήσεις, --- 36.
- § 15. Δυναμοσειρές στο μιγαδικό επίπεδο, --- 39.
- § 16. Η εκθετική μιγαδική συνάρτηση, --- 44.
- § 17. Οι τριγωνομετρικές μιγαδικές συναρτήσεις, --- 47.
- § 18. Οι υπερβολικές μιγαδικές συναρτήσεις, --- 50.
- § 19. Η λογαριθμική μιγαδική συνάρτηση, --- 53.
- § 20. Η μιγαδική συνάρτηση δύναμη, --- 54.
- § 21. Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές μιγαδικές συναρτήσεις, --- 55.
- § 22. Όριο μιγαδικής συνάρτησης, --- 57.
- § 23. Καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο, --- 61.
- § 24. Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης, --- 66.
- § 25. Ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις, --- 73.
- § 26. Αρμονικές συναρτήσεις, --- 76.
- § 27. Ομοιός ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης από το πραγματικό ή φανταστικό μέρος, --- 79.
- § 28. Γεωμετρική ερμηνεία της παράγωγου μιγαδικής συνάρτησης, --- 82.
- § 29. Εξάγει καμπύλης και τόπου μέσκι από ολόμορφη συνάρτηση, --- 84.
- § 30. Επικυμπίλνι ολόκληρημνται μιγαδικών συναρτήσεων, --- 89.
- § 31. Ολοκληρωμένη οειρών μιγαδικών συναρτήσεων, --- 96.



- § 32. Δείκτης στροφής καμπύλης, --- 99.
- § 33. Αλυσίδες καμπυλών, --- 104.
- § 34. Θεώρημα του Cauchy για το ολοκλήρωμα ολόμορφης συνάρτησης, --- 108.
- § 35. Τύπος του Cauchy για την Παράσταση ολόμορφης συνάρτησης με ολοκλήρωμα, --- 111.
- § 36. Τύπος του Cauchy για την παράσταση των παραγώγων ολόμορφης συνάρτησης με ολοκλήρωμα, --- 120.
- § 37. Θεωρήματα Cauchy-Liouville και Picard, --- 124.
- § 38. Σειρές Taylor και Laurent, --- 126.
- § 39. Ρίζες ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης, --- 133.
- § 40. Αρχή Ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων, --- 137.
- § 41. Ανώμαλα σημεία ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων, --- 140.
- § 42. Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα, --- 146.
- § 43. Θεώρημα του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα, --- 151.
- § 44. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$ όπου R είναι μια ρητή συνάρτηση, --- 155.
- § 45. Ολοκληρώματα της μορφής Πρωτ. τιμή $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, --- 158.
- § 46. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\omega x} dx$ όταν $R(z)$ δεν έχει πόλους στην πραγματική ευθεία, --- 161.
- § 47. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \omega x dx$ όταν $R(z)$ έχει το 0 πόλο 1ης τάξης, --- 164.
- § 48. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) dx$ όπου $0 < \alpha < 1$, --- 166.
- § 49. Υπολογισμός αθροίσματος σειράς με τη βοήθεια ολοκληρωτικών υπολοίπων, --- 169.



§ 1. Αλγεβρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Η αλγεβρική μορφή (algebraic form) ενός μιγαδικού αριθμού (complex number) z είναι η

$$z = x + iy$$

όπου x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και i είναι η λεγόμενη φανταστική μονάδα (imaginary unit), δηλαδή ένα στοιχείο που ικανοποιεί τη σχέση

$$i^2 = -1.$$

Το x είναι το πραγματικό μέρος Re (real part) του z και το y είναι το φανταστικό μέρος Im (imaginary part) του z , οπότε και γράφουμε

$$x = \text{Re}z \text{ και } y = \text{Im}z.$$

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι ίσοι, αν και μόνο

αν

$$\text{Re}z_1 = x_1 = x_2 = \text{Re}z_2$$

και

$$\text{Im}z_1 = y_1 = y_2 = \text{Im}z_2.$$

Επίσης

(α) Το άθροισμα $z_1 + z_2$ των αριθμών αυτών είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

και



β) το γινόμενο $z_1 z_2$ τοίτων είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Παράδειγμα 1.1.

Να επιλιθεί η εξίσωση

$$(3+i)x + (4-5i)y = 11+2i.$$

Λύση.

Γράφουμε στην αλγεβρική του μορφή τον μιγαδικό αριθμό που είναι στο αριστερό μέλος της εξίσωσης οπότε έχουμε

$$(3x+4y) + i(x-5y) = 11+2i.$$

Έτσι θα πρέπει να επαληθεύεται το σύστημα

$$\begin{cases} 3x+4y=11 \\ x-5y=2, \end{cases}$$

που έχει τη λύση

$$x=\frac{63}{19} \text{ και } y=\frac{5}{19}.$$

□

Παράδειγμα 1.2.

Να οριστεί μια σχέση ολικής διάταξης στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών και να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει διάταξη που να χαρακτηρίζει το σύνολο αυτό ως ένα διατεταγμένο σώμα.

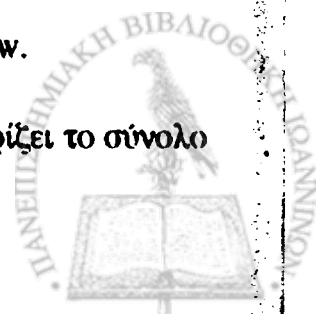
Λύση.

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών μπορούμε να ορίσουμε αρκετές σχέσεις ολικής διάταξης, όπως, για παράδειγμα, τις παρακάτω λεξικογραφικές διατάξεις:

α) $\sigma_1: (x+iy) \sigma_1 (u+iv): x < u \text{ και, αν } x=u, \text{ τότε } y \leq v.$

β) $\sigma_2: z \sigma_2 w: |z| < |w| \text{ και, αν } |z| = |w|, \text{ τότε } \text{Arg} z \leq \text{Arg} w.$

Όμως δεν υπάρχει καμία τέτοια διάταξη που να χαρακτηρίζει το σύνολο αυτό ως ένα διατεταγμένο σώμα, δηλαδή δεν υπάρχει ολική διάταξη



$$"z" = "=" \cup ">"$$

που να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

I) $z > w$ και $z' > w'$ συνεπάγονται ότι $(z+z') > (w+w')$,

και

II) $z > 0$ και $w > 0$ συνεπάγονται ότι $z \cdot w > 0$.

Πραγματικά, αν μια τέτοια διάταξη υπάρχει, τότε θα πρέπει να ισχύει τουλάχιστον μία από τις σχέσεις

$$|z| = 0, \quad |z| > 0, \quad |z| < 0.$$

Η πρώτη δεν ισχύει, αφού $|z| = 0$. Έστω ότι ισχύει η δεύτερη, δηλαδή $|z| > 0$. Τότε, σύμφωνα με την ιδιότητα (II), θα πρέπει να έχουμε και

$$|-1| > 0, \text{ δηλαδή } -1 > 0.$$

Οπότε, πάλι, σύμφωνα με την (II),

$$(-1) \cdot |z| > 0, \text{ ήτοι } -|z| > 0.$$

Τότε όμως από την ιδιότητα (I) θα έχουμε

$$(-1) + |z| > 0 + 0, \text{ δηλαδή } 0 > 0.$$

παραδοξολογία. Με παρόμοιο τρόπο αποδειχνεται ότι και η ανισότητα $|z| < 0$ είναι αδύνατη. □



1.1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x και y που ικανοποιούν αντιστοίχως τις παρακάτω εξισώσεις:

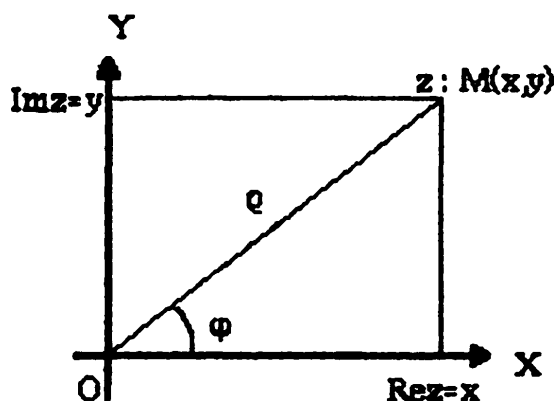
a) $(2x-1)(4+1) + (2x-1y)(-2+3i) = 6+5i.$

β) $(x-1y)(\alpha+i\beta) = i\alpha\beta, (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$

1.2. Να αποδειχτεί ότι υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί a, b τέτοιοι ώστε $a \cdot b \neq 0$ και $a^2 + b^2 = 0$.

§ 2. Το μιγαδικό επίπεδο, ή επίπεδο Gauss

Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ μπορεί να παρασταθεί στο λεγόμενο **μιγαδικό επίπεδο** (complex plane) ή το **επίπεδο του Gauss** $\mathbb{C}$ με το σημείο που αντιστοιχεί στο (x, y) ή με το διάνυσμα OM το οποίο έχει αρχή το σημείο O και πέρας το σημείο $M(x, y)$, βλέπε σχήμα:



Το μήκος ρ του διανύσματος OM είναι το **μέτρο** (modulus) ή η **απόλυτη τιμή** (absolute value) του μιγαδικού αριθμού z και παριστάνεται με $|z|$. Άρα έχουμε

$$\rho = |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Αν ο αριθμός z δεν είναι ο μιγαδικός αριθμός 0 , τότε το σημείο $M(x, y)$ δεν ταυτίζεται με την αρχή O των αξόνων και άρα το διάνυσμα OM είναι μη τετριμμένο. Κάθε γωνία φ μεταξύ του ημιάξονα OX και του διανύσματος OM λέγεται **όρισμα** (argument) του μιγαδικού αριθμού z και δηλώνεται με $\arg z$. Η διαφορά δύο τέτοιων γωνιών είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π . Επομένως, αν $z \neq 0$, υπάρχει μια τέτοια γωνία που λέγεται **βασικό όρισμα** (essential argument) ή **βασικός κλάδος** (essential branch) του ορίσματος ή **κύρια τιμή** (principal value) του ορίσματος του z , παριστάνεται με $\text{Arg} z$ και είναι τέτοια ώστε

να ισχύει

$$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$$

και

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \text{ όπου } k \text{ ακεραίος.}$$

Αν $z = x + iy$, τότε

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{Arctan}(y/x), & \text{αν } x > 0 \\ \pi + \operatorname{Arctan}(y/x), & \text{αν } x < 0 \text{ και } y \geq 0 \\ -\pi + \operatorname{Arctan}(y/x), & \text{αν } x < 0 \text{ και } y < 0 \\ \pi/2, & \text{αν } x = 0 \text{ και } y > 0 \\ -\pi/2, & \text{αν } x = 0 \text{ και } y < 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.1.

Να βρεθεί το μέτρο και ο βασικός κλάδος του ορίσματος του μιγαδικού αριθμού

$$z = -\sin \frac{\pi}{15} - i \cos \frac{\pi}{15}.$$

Λύση.

Έχουμε

$$\begin{aligned} \arg z &= \arctan \frac{-\cos \frac{\pi}{15}}{-\sin \frac{\pi}{15}} = \arctan(\cot \frac{\pi}{15}) = \arctan(\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15})) = \\ &= k\pi + \frac{13\pi}{30}, \end{aligned}$$

όπου k είναι ένας οποιοδήποτε ακεραίος αριθμός. Αλλά ισχύει ότι

$$\operatorname{Re} z = -\sin \frac{\pi}{15} < 0 \quad \text{και} \quad \operatorname{Im} z = -\cos \frac{\pi}{15} < 0,$$

οπότε (κι πρέπει

$$-\pi < \operatorname{Arg} z < -\frac{\pi}{2}.$$

Επομένως

$$\operatorname{Arg} z = k'\pi + \frac{13\pi}{30},$$

όπου k' είναι ένας ακεραίος που ικανοποιεί την ανισότητα

$$-\pi < k'\pi + \frac{13\pi}{30} < -\frac{\pi}{2}.$$



οπότε $k' = -1$. Έτσι έχουμε

$$\operatorname{Arg} z = -\pi + \frac{13\pi}{30} = -\frac{17\pi}{30}.$$

Τέλος

$$|z| = \sqrt{\left(-\sin\frac{\pi}{15}\right)^2 + \left(-\cos\frac{\pi}{15}\right)^2} = 1.$$

□

Παράδειγμα 2.2.

Να βρεθεί το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν την ανισότητα

$$\operatorname{Im} z^2 > 4.$$

Λύση.

Θέτουμε $z = x + iy$. Τότε έχουμε $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, οπότε

$$\operatorname{Im} z^2 = 2xy.$$

Από την υπόθεση πρέπει $2xy > 4$, ή

$$xy > 2.$$

Αυτή η ανισότητα παριστάνει το σύνολο όλων των σημείων στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου τα οποία βρίσκονται έξω από την υπερβολή $xy = 2$. □



2.1. Να βρεθούν τα μέτρα και τα βασικά ορίσματα αντίστοιχα των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

- | | |
|---|---|
| α) $z = 2 + i,$ | β) $z = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5},$ |
| γ) $z = -5 - i,$ | δ) $z = -7 - i,$ |
| ε) $z = 3 + 4i,$ | ζ) $z = -3 + i,$ |
| η) $z = -1 - i\sqrt{2},$ | θ) $z = 5 + 2i,$ |
| ι) $z = -2 + i2\sqrt{2}.$ | κ) $z = -1 + 2i$ |
| λ) $z = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} + i\frac{2\alpha}{1+\alpha^2},$ | $(0 < \alpha < 1).$ |



2.2. Να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι καμπύλες του καρτεσιανού επιπέδου που ορίζονται με τη βοήθεια των εξισώσεων:

α) $y = ax + \beta,$

β) $x^2 - y^2 = a^2,$

γ) $x^2 + y^2 + 2x = 0.$

2.3. Να αναγνωρισθεί η γραμμή που παριστάνει η εξίσωση

$$\bar{z}z - 1(z - \bar{z}) - 2 = 0.$$

2.4. Θεωρούμε δυο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 . Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z ο οποίος στο μιγαδικό επίπεδο κείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία z_1 και z_2 και η απόστασή του από το z_1 είναι διπλάσια από την απόστασή του από το z_2 .

2.5. Αν δοθούν τα σημεία z_1, z_2, z_3 να βρεθεί ένα σημείο z_4 ώστε τα z_1, z_2, z_3 και z_4 να είναι οι κορυφές ενός παραλληλογράμμου.

§ 3. Συζυγής μιγαδικού αριθμού

Ο συζυγής μιγαδικός αριθμός (conjugate complex number) $\bar{z}$ του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ είναι ο

$$\bar{z} = x - iy.$$

Επομένως έχουμε

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{και} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Αν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, το πηλίκο z_1/z_2 της διαίρεσης του z_1 διά του z_2 ($\neq 0$) είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}.$$

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:



- i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
- iii) $\overline{1 \cdot z_2} = 1 \cdot \overline{z_2}$,
- iv) $\overline{\bar{z}} = z$,
- v) $|\bar{z}| = |z|$,
- vi) $\overline{z\bar{z}} = |z|^2$,
- vii) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$,
- viii) $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$.
- ix) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
- x) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.
- xi) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
- xii) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ και $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

Παράδειγμα 3.1.

Να γραφεί η εξίσωση του κύκλου

$$x^2 + y^2 + 4(x + y) = 0$$

στο μιγαδικό επίπεδο.

Λύση.

Παρατηρούμε ότι

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$$

$$2x = z + \bar{z}, \quad 2y = i(\bar{z} - z).$$

Αντικαθιστώντας στη δοθείσα εξίσωση παίρνουμε

$$z\bar{z} + 2(z + \bar{z}) + 2i(\bar{z} - z) = 0,$$

ή

$$z\bar{z} + 2(1-i)z + 2(1+i)\bar{z} = 0.$$

□



3.1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x και y που ικανοποιούν



αντίστοιχα τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{1}{x+i(y-2)} + \frac{1+i}{1-i} = 2,$$

$$\beta) \frac{1}{z-1} + \frac{2+i}{1+i} = \sqrt{2}.$$

3.2. Να υπολογιστούν οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha) -\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z+1-i) < \frac{3}{4}\pi,$$

$$\beta) \text{Im}(z^2 - \bar{z}) = 1 - \text{Im } z.$$

$$\gamma) |z-1| < |\bar{z}-1|,$$

$$\delta) \text{Im} \frac{1}{z} < -\frac{1}{2},$$

$$\epsilon) \text{Re}(z^2 - \bar{z}).$$

$$\zeta) \text{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{4},$$

$$\eta) \bar{z}z + (2+i)z = 2-i.$$

$$\theta) z^2 + (\bar{z})^2 = 1,$$

$$\iota) \left| \frac{1}{z} \right| \leq 2,$$

$$\kappa) |z-3i| = 2$$

$$\lambda) |z-2-3i| < 5,$$

$$\mu) 1 < |z-1-i| < 3.$$

$$\nu) 1 < |z+1| < 2.$$

$$\xi) 3 < |z| < 4.$$

$$\omicron) |z-1| < |z-1i|.$$

$$\pi) \text{Re}(\bar{z})^2 = 1.$$

$$\rho) |z+1| + |z-1| = 1.$$

$$\sigma) |z| - 2 \text{Im } z = 3.$$

$$\tau) |z| - 3 \text{Re } z = 2.$$

$$\upsilon) |z-2i| = |1-2i|.$$

$$\phi) \text{Re}(2z+i) = |z|.$$

$$\chi) \bar{z} = z^2 + 1,$$

$$\psi) \bar{z} + i(z-\bar{z}) = 3-i.$$

$$\omega) |z| + z = 2+i.$$

3.3. Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\bar{z} = z^2.$$

3.4. Να ληθεί η εξίσωση

$$(2+i)^{-2} + (2-i)^{-2} = x+iy.$$



3.5. Να αποδειχτεί ότι ισχύει

$$|a-b|^2 \leq (1+|a|^2)(1+|b|^2),$$

όπου a, b είναι μιγαδικοί αριθμοί.

3.6. Να αποδειχτεί ότι αν ισχύει

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1,$$

τότε

$$|a|=1, \text{ ή } |b|=1$$

και, αν ισχύει

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1,$$

τότε

$$|a| < 1 \text{ και } |b| < 1, \text{ ή } |a| > 1 \text{ και } |b| > 1.$$

3.7. Αν z_1, z_2, z_3 είναι μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \text{ και } |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1,$$

να αποδειχτεί ότι τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς αυτούς είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο.

3.8. Να αποδειχτεί ότι τα σημεία z_1, z_2, z_3 του μιγαδικού επιπέδου είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν ικανοποιούν τη σχέση

$$\operatorname{Im} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 0.$$

§ 4. Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού

Η πολική μορφή (polar form) του μιγαδικού αριθμού $z=x+iy$ είναι η



$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

όπου ρ είναι το μέτρο και φ το όρισμα του μιγαδικού αριθμού z .



4.1. Να γραφούν στην πολική τους μορφή οι παρακάτω μιγαδικοί αριθμοί:

α) $z = -3,$ β) $z = 5i,$

γ) $z = -\sqrt{3} + i\sqrt{3},$ δ) $z = 4 - i\sqrt{2},$

ε) $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}),$

ς) $z = \frac{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}, \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}).$

§ 5. Εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού

Η εκθετική μορφή (exponential form) του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ είναι η

$$z = \rho e^{i\varphi},$$

όπου ρ είναι το μέτρο και φ το όρισμα του μιγαδικού αριθμού z .



5.1. Να γραφούν στην εκθετική τους μορφή οι εξής μιγαδικοί αριθμοί:

α) $z = 1 - i,$

β) $z = 2 - 3i,$



$$\gamma) \quad z = \sqrt{3} + i\sqrt{2},$$

$$\delta) \quad z = 1 - i\sqrt{2},$$

$$\epsilon) \quad z = \cos\theta - i\sin\theta \quad \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right).$$

5.2. Να αποδειχτεί ότι τα σημεία z_1, z_2, z_3 του μιγαδικού επιπέδου σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}.$$

§ 6. Δυνάμεις μιγαδικού αριθμού

Αν δυο μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 δίνονται στην πολική τους μορφή

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{και} \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

τότε το γινόμενο τους καθορίζεται από τη σχέση

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

δηλαδή, αν μιγαδικοί αριθμοί πολλαπλασιάζονται, τότε τα μέτρα τους επίσης πολλαπλασιάζονται (αυτό το είδαμε και παραπάνω), ενώ τα ορίσματά τους προστίθενται:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

Το πηλίκο του μιγαδικού αριθμού z_1 διά του z_2 ($\neq 0$) καθορίζεται από τη σχέση

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

δηλαδή

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

και

$$\text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$



Γενικεύοντας τον κανόνα του γινομένου προκύπτει ότι αν υψώσουμε έναν μιγαδικό αριθμό

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

σε δύναμη με εκθέτη έναν θετικό ακέραιο n παίρνουμε τον τύπο

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

δηλαδή

$$\rho^n = \rho^n$$

και

$$\text{Arg } z^n = n \text{Arg } z + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Η τελευταία σχέση δίνει τον τύπο του de Moivre

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

που ισχύει για κάθε ακέραιο αριθμό n .

Παράδειγμα 6.1.

Να υπολογιστεί η δύναμη

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8.$$

Λύση.

Εκφράζουμε πρώτα τον αριθμητή και τον παρονομαστή στην πολική τους μορφή. Παρατηρούμε ότι

$$1-i = \sqrt{2}, \quad \text{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{2}.$$

και

$$1+i = \sqrt{2}, \quad \text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{2}.$$

Άρα

$$1-i = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

και

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right).$$

Έκπ. απ' τον τύπο de Moivre προκύπτει ότι



$$\begin{aligned} \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 &= \frac{(\sqrt{2}|\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})|)^8}{(\sqrt{2}|\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})|)^8} = \frac{\cos(-\frac{8\pi}{2}) + i\sin(-\frac{8\pi}{2})}{\cos(\frac{8\pi}{2}) + i\sin(\frac{8\pi}{2})} = \\ &= \frac{\cos(4\pi) - i\sin(4\pi)}{\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 6.2.

Να βρεθεί το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών που ικανοποιούν την ανισότητα

$$\operatorname{Im} z^2 > 2.$$

Λύση.

Θέτοντας $z = x + iy$ πρέπει να ισχύει

$$\operatorname{Im}(x + iy)^2 > 2,$$

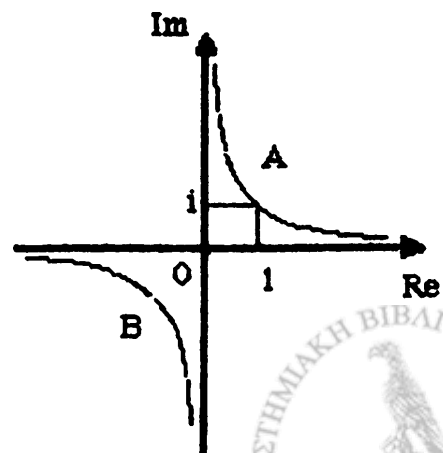
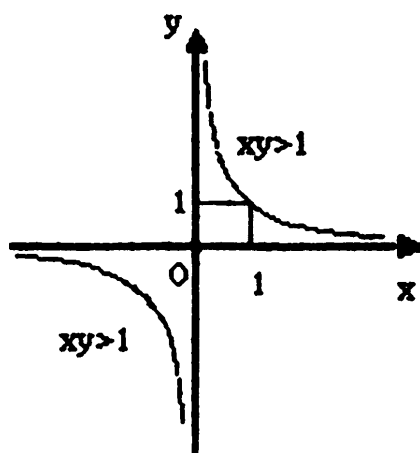
δηλαδή

$$\operatorname{Im}(x^2 - y^2 + 2ixy) > 2, \text{ ήτοι } 2xy > 2,$$

οπότε

$$xy > 1.$$

Επομένως το σημείο (x, y) πρέπει να κείται "μέσα" στην υπερβολή $xy = 1$, ή, ισοδύναμα, το σημείο z πρέπει να κείται στον αντίστοιχο τόπο $A \cup B$ του μιγαδικού επιπέδου, βλέπε σχήματα.





6.1. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις

α) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{80}$

β) $(2-2i)^5$

γ) $(\sqrt{3}-3i)^4$

δ) $(-1+i\sqrt{3})^{60}$

6.2. Να αποδειχτεί ότι το πολυώνυμο

$$p(x) = (\cos \beta + x \sin \beta)^n - \cos n\beta - x \sin n\beta$$

όπου β σταθερό και n θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2, διαιρείται (ακριβώς) δια του x^2+1 .

6.3. Να εκφραστούν οι τιμές

$$\sin 3\varphi, \cos 3\varphi, \sin 4\varphi \text{ και } \cos 4\varphi$$

συναρτήσει των $\sin \varphi$ και $\cos \varphi$.

6.4. Να αποδειχτεί ότι για κάθε φ ισχύει η σχέση

$$\left(\frac{1+i \tan \varphi}{1-i \tan \varphi}\right)^k = \frac{1+i \tan(k\varphi)}{1-i \tan(k\varphi)}$$

όπου k είναι οποιουδήποτε ακέραιος.

6.5. Να λυθεί η εξίσωση

$$(x+i)^n - (x-i)^n = 0$$

6.6. Να λυθεί η εξίσωση

$$\cos x + i \sin x = \sin x + i \cos x$$



6.7. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα

α) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin kx,$

β) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos kx,$

γ) $\sin x + \sin 4x + \dots + \sin(3k+1)x.$

δ) $\cos x + \cos 4x + \dots + \cos(3k+1)x.$

ε) $1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos kx.$

ζ) $\cos x + \cos(x+y) + \cos(x+2y) + \dots + \cos(x+ky).$

§ 7. Ρίζες μιγαδικού αριθμού

Οι n -στές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού $z = \rho e^{i\varphi}$ δίνονται από τον τύπο

$$z_k = \rho^{1/k} e^{i(\varphi + 2k\pi)/n}, \quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Παράδειγμα 7.1.

Να ληθεί η εξίσωση

$$z^n = \bar{z},$$

όπου n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1.

Λύση.

Γράφουμε τον αριθμό z στην εκθετική μορφή: $z = \rho e^{i\varphi}$. Τότε έχουμε

$$\bar{z} = e^{-i\varphi},$$

οπότε η εξίσωση που δίνεται γράφεται

$$\rho^n e^{in\varphi} = \rho e^{-i\varphi},$$



ή

$$e^{i(n+1)\varphi} = 1, \quad \varphi = \frac{2k\pi}{n+1}, \quad k=0,1,\dots,n$$

Από αυτή βρίσκουμε ότι

$$\varphi=1 \quad \text{και} \quad e^{i(n+1)\varphi}=1,$$

και επομένως

$$i(n+1)\varphi = i2k\pi,$$

όπου $k=0,1,\dots,n$, δηλαδή

$$\varphi = \frac{2k\pi}{n+1}, \quad \text{όπου } k=0,1,\dots,n.$$

□

Παράδειγμα 7.2.Να βρεθεί ο κλάδος της $\sqrt[n]{z}$ για τον οποίο ισχύει $\sqrt[n]{1} = 1$.**Λύση.**Εφαρμόζοντας τον τύπο που είδαμε παραπάνω για $n=2$ προκύπτουν οι δύο τετραγωνικές ρίζες του z :

$$z_1 = \sqrt[2]{1} e^{i\varphi/2}$$

και

$$z_2 = \sqrt[2]{1} e^{i(\varphi+2\pi)/2} = \sqrt[2]{1} e^{i\varphi/2} e^{i\pi} = -\sqrt[2]{1} e^{i\varphi/2}.$$

Αλλά, αν $z=1$, έχουμε $|z|=1$ και $\varphi = \text{Arg } z = 0$. Άρα η σχέση $\sqrt[n]{1} = 1$ ικανοποιείται από τον δεύτερο κλάδο της ρίζας, δηλαδή την ρίζα z_2 , αφού, προφανώς, ισχύει

$$-1 = \sqrt[2]{1} e^{i0} = \sqrt[2]{1} (\cos 0 + i \sin 0).$$

□

Παράδειγμα 7.3.

Να βρεθούν οι κλάδοι ρίζας της μονάδας.

Λύση.Πρώτοι παρατηρούμε ότι $|1|=1$ και $\text{Arg } 1 = 0$. Έτσι εφαρμόζοντας τον τύπο που είδαμε παραπάνω για $n=3$, παίρνουμε

$$e_1 = 1,$$



$$\varepsilon_2 = e^{i2\pi/3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

και

$$\varepsilon_3 = e^{i4\pi/3} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

Παράδειγμα 7.4.

Η τριτοβάθμια εξίσωση

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

όπου a, b, c είναι μιγαδικοί αριθμοί, με την αντικατάσταση

$$z = -\frac{a}{3} + w$$

μετασχηματίζεται σε άλλη της οποίας ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή γίνεται

$$(1) \quad w^3 + Aw + B = 0,$$

όπου A και B είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Να αποδειχτεί ότι οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι δίνονται από τους τύπους του Cardano

$$w_1 = Z + H, \quad w_2 = \varepsilon(Z + \varepsilon H), \quad w_3 = \varepsilon^2(Z + \varepsilon^2 H),$$

όπου

$\varepsilon = 1$ είναι μία από τις κυβικές ρίζες της μονάδας,

οι αριθμοί Z, H παίρνονται έτσι ώστε

$$ZH = -\frac{A}{3}$$

και να επαληθεύουν τις εξισώσεις

$$Z^3 = \theta, \quad H^3 = \theta',$$



και οι θ, θ' είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\theta^2 + B\theta - \frac{A^3}{27} = 0.$$

Λύση.

Θέτουμε

(2)

$$w := \zeta \cdot \frac{A}{\zeta^3}.$$

οπότε παίρνουμε

$$\zeta^3 - \frac{A^3}{27\zeta^3} + B = 0,$$

ή, αν θέσουμε

$$\zeta^3 = \theta,$$

παίρνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\theta^2 + B\theta - \frac{A^3}{27} = 0,$$

η οποία έχει δυο ρίζες η_1 και η_2 . Θέτοντας $\theta = \eta_1$, από τη σχέση $\zeta^3 = \theta$ παίρνουμε τις τρεις κυβικές ρίζες $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ του η_1 , οι οποίοι με τη σειρά τους, από τη σχέση (2) δίνουν τους αριθμούς w_1, w_2, w_3 . Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία με το $\theta = \eta_2$, παίρνουμε άλλους τρεις αριθμούς $\zeta'_1, \zeta'_2, \zeta'_3$ και στη συνέχεια τους w'_1, w'_2, w'_3 .

Ισχυριζόμαστε ότι οι αριθμοί w'_1, w'_2, w'_3 ταυτίζονται με τους w_1, w_2, w_3 , όχι απαραίτητα αντίστοιχα. Πραγματικά, παρατηρούμε πρώτα ότι αν ε είναι μια κυβική ρίζα της μονάδας, με $\varepsilon \neq 1$, τότε

$$(3) \quad \zeta_2 = \varepsilon \zeta_1, \quad \zeta'_2 = \varepsilon \zeta'_1, \quad \zeta_3 = \varepsilon^2 \zeta_1, \quad \zeta'_3 = \varepsilon^2 \zeta'_1.$$

Αλλιώς γράφει ότι

$$\eta_1 \eta_2 = -\frac{A^3}{27}.$$

οπότε

$$\eta_2 = -\frac{A^3}{27\eta_1}$$

και επομένως



$$\zeta_1' = -\frac{A}{3\zeta_1},$$

$$\zeta_2' = e\zeta_1' = -e \frac{A}{3\zeta_1} = -\frac{A}{e^2 3\zeta_1} = -\frac{A}{3\zeta_3},$$

$$\zeta_3' = e^2 \zeta_1' = -e^2 \frac{A}{3\zeta_1} = -\frac{A}{e 3\zeta_1} = -\frac{A}{3\zeta_2}.$$

Άρα έχουμε

$$w_1' = \zeta_1' \cdot \frac{A}{3\zeta_1'} = -\frac{A}{3\zeta_1} \cdot \frac{A}{3[-\frac{A}{3\zeta_1}]} = \zeta_1 \cdot \frac{A}{3\zeta_1} = w_1,$$

$$w_2' = \zeta_2' \cdot \frac{A}{3\zeta_2'} = -\frac{A}{3\zeta_3} \cdot \frac{A}{3[-\frac{A}{3\zeta_3}]} = \zeta_3 \cdot \frac{A}{3\zeta_3} = w_3,$$

$$w_3' = \zeta_3' \cdot \frac{A}{3\zeta_3'} = -\frac{A}{3\zeta_2} \cdot \frac{A}{3[-\frac{A}{3\zeta_2}]} = \zeta_2 \cdot \frac{A}{3\zeta_2} = w_2,$$

πράγμα που αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό μας.

Τελικά από τις (2) και (3) προκύπτει ότι οι τρεις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι μιγαδικοί αριθμοί

$$w_1 = \zeta_1 - \frac{A}{3\zeta_1} = \zeta_1 + \zeta_1',$$

$$w_2 = \zeta_2 - \frac{A}{3\zeta_2} = e\zeta_1 + \zeta_3' = e(\zeta_1 + e\zeta_1'),$$

$$w_3 = \zeta_3 - \frac{A}{3\zeta_3} = e^2 \zeta_1 + \zeta_2' = e^2 \zeta_1 + e\zeta_1' = e^2 \zeta_1 + e^4 \zeta_1' = e^2(\zeta_1 + e^2 \zeta_1'),$$

από όπου παίρνουμε το συμπέρασμα για

$$Z = \zeta_1, H = \zeta_1', \theta = \eta_1 \text{ και } \theta' = \eta_2.$$

□



7.1. Υποθέτουμε ότι $e_1, e_2, \dots, e_n$ είναι οι n -στές ρίζες της μονάδας. Να αποδειχτεί ότι

α) $e_1 + e_2 + \dots + e_n = 0.$



β) $\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \dots \cdot \epsilon_{n-1} = 1.$

7.2. Να αποδειχτεί ότι οι n -στές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού z ταυτίζονται με τις κορυφές ενός κανονικού n -γώνου με κέντρο την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και ακτίνα ίση με $|z|^{1/n}$.

7.3. Αν e είναι μια n -στή ρίζα της μονάδας, να αποδειχτεί ότι ισχύει

$$1 + 2e + 3e^2 + \dots + ne^{n-1} = -\frac{n}{1-e}.$$

7.4. Να υπολογιστούν όλες οι τιμές των παρακάτω ριζών:

α) $\sqrt[4]{1-i},$

β) $\sqrt[4]{-1},$

γ) $\sqrt{-1},$

δ) $\sqrt[3]{1},$

ε) $\sqrt[4]{-1},$

ζ) $\sqrt[4]{1},$

η) $\sqrt[3]{1-i},$

θ) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i},$

ι) $\sqrt[5]{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}.$

7.5. Να βρεθεί ικανή συνθήκη ώστε η εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

όπου a, b, c είναι μιγαδικοί αριθμοί, να έχει πραγματικές ρίζες.

7.6. Αν X είναι το σύνολο όλων των n -στών ριζών της μονάδας εμφανιζόμενων με την πείξη του πολλαπλασιασμού " $\cdot$ ", να αποδειχτεί ότι η δοκίμια $(X, \cdot)$ είναι μια Αβελιανή (δηλαδή, αντιμεταθετική) ομάδα.



§ 8. Ευθείες γραμμές στο μιγαδικό επίπεδο

Η ευθεία που διέρχεται από ένα σημείο a του μιγαδικού επιπέδου και σχηματίζει γωνία με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα ίση με το όρισμα του μιγαδικού αριθμού b παριστάνεται με $E(a,b)$. Επομένως η ευθεία $E(a,b)$ είναι το προσανατολισμένο σύνολο των σημείων z του μιγαδικού επιπέδου τα οποία γράφονται στη μορφή $z=a+ib$, για κάποιο πραγματικό αριθμό t . Η διάταξη των πραγματικών αριθμών t καθορίζει και τον προσανατολισμό ή τη φορά της ευθείας.

Παράδειγμα 8.1.

Να βρεθεί η προσανατολισμένη γωνία μεταξύ των ευθειών $E(1, 2+i)$ και $E(-1,1-i)$ του μιγαδικού επιπέδου.

Λύση.

Οι γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες $E(1,2+i)$ και $E(-1,1-i)$ με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα είναι αντίστοιχα ίσες με

$$\operatorname{Arg}(2+i)=\operatorname{Arctan}2 \text{ και } \operatorname{Arg}(1-i)=\operatorname{Arctan}(-1)=-\pi/4.$$

Επομένως η προσανατολισμένη γωνία μεταξύ των δύο ευθειών είναι ίση με

$$2\pi-(\operatorname{Arctan}2+\pi/2)=3\pi/2-\operatorname{Arctan}2,$$

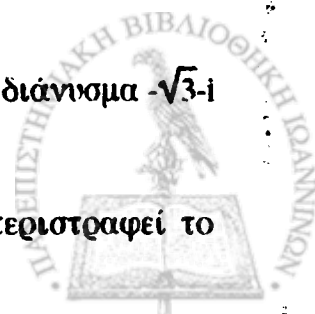
αφού η αρχική πλευρά της κείται πάνω στην πρώτη ευθεία και η τελική πάνω στη δεύτερη. □



8.1. Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός που προκύπτει αν το διάνυσμα $-\sqrt{3}+3i$ το περιστρέψουμε (θετικά, δηλαδή με φορά την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ωρολογίου) κατά 90° .

8.2. Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός που προκύπτει αν το διάνυσμα $-\sqrt{3}-i$ το περιστρέψουμε κατά 120° .

8.3. Να βρεθεί η γωνία κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί το



διάνυσμα $3-4i$ ώστε να συμπίπτει με το $5\sqrt{2} - 15\sqrt{2}$.

8.4. Να βρεθεί η γιννία μεταξύ των ενδειών

- α) $E(2i, 3+4i)$ και $E(0,1)$.
- β) $E(-1+2i, 1-i)$ και $E(2,3i)$.
- γ) $E(1-i, 1+i)$ και $E(1+i, -1+i)$.
- δ) $E(1+2i, 2-i)$ και $E(2-i, 1+2i)$.

§ 9. Η τοπολογία του μιγαδικού επιπέδου

Η απόσταση (distance) δύο μιγαδικών αριθμών

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{και} \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

ορίζεται να είναι ο πραγματικός αριθμός

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

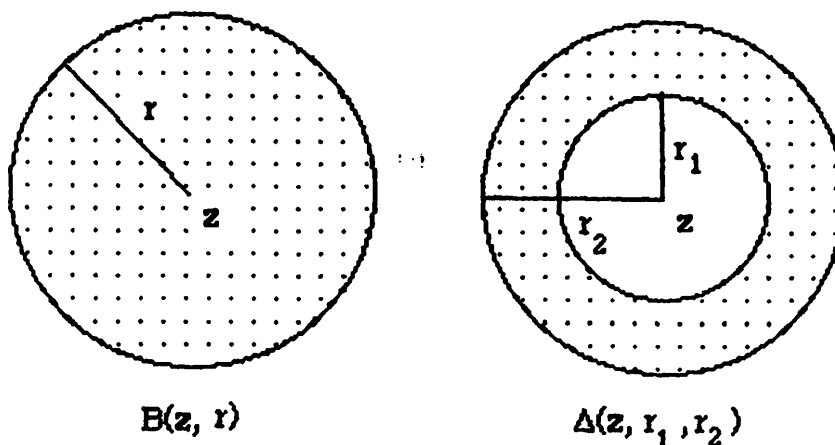
Επιπλέον ο ανοικτός δίσκος (open disc), ή η ανοικτή μπάλλα (open ball) ή η ανοικτή κυκλική περιοχή με κέντρο το σημείο z και ακτίνα r είναι το σύνολο

$$B(z, r) = \{ w \in \mathbb{C} : |z - w| < r \}.$$

Ο ανοικτός δακτύλιος (open ring) ή η ανοικτή δακτυλική περιοχή με κέντρο το σημείο z και ακτίνες r_1 και r_2 είναι το σύνολο

$$A(z, r_1, r_2) = \{ w \in \mathbb{C} : r_1 < |z - w| < r_2 \}$$





Ένα υποσύνολο U του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ είναι **περιοχή** (neighborhood) ενός σημείου z , αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $r > 0$ τέτοιος ώστε

$$B(z, r) \subseteq U.$$

Το U είναι **περιοχή** (neighborhood) του συνόλου A , αν τούτο είναι περιοχή κάθε σημείου z του A .

Ένα σύνολο A είναι **ανοικτό** (open), αν για κάθε στοιχείο z του A υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η ανοικτή μπάλλα με κέντρο το z και ακτίνα r να περιέχεται στο A .

Ο **πυρήνας** ή το **εσωτερικό** (interior) Σ° ενός συνόλου Σ είναι η ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του Σ .

Ένα σύνολο $B \subseteq \mathbb{C}$ είναι **κλειστό** (closed), αν το συμπλήρωμά του B^c είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Η **θήκη** ή το **κάλυμμα** (closure) $\bar{\Sigma}$ ενός συνόλου Σ είναι η τομή όλων των κλειστών υπερσυνόλων του Σ .

Το **σύνορο** (boundary) $\partial \Sigma$ ενός συνόλου Σ είναι το σύνολο $\bar{\Sigma} - \Sigma^\circ$.

Ένα σύνολο είναι **συνεκτικό** (connected) αν τούτο δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση δυο μη κενών ανοικτών υποσυνόλων ξένων μεταξύ τους.

Ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{C}$ είναι **φραγμένο** (bounded), αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε το σύνολο K να περιέχεται στην ανοικτή μπάλλα $B(0, r)$, δηλαδή αν ισχύει $|z| < r$

γ για κάθε z του συνόλου K .

Τέλος, ένα σύνολο είναι συμπαγές (compact), αν τοίτο είναι κλειστό και φραγμένο.

Στη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων σπουδαίο ρόλο παίζουν τα μη κενά, ανοικτά και συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{C}$ τα οποία ονομάζονται τόποι (regions).

Παράδειγμα 9.1.

Να εξεταστεί αν το σύνολο

$$A := \{ z : |z^2 - 1| < 1 \}$$

είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Λύση.

Θεωρήσμε έναν μιγαδικό αριθμό z στο σύνολο A . Τότε πρέπει να ισχύει

$$0 := |z^2 - 1| < 1.$$

Αν μπορούμε να προκηνορίσουμε ένα $r > 0$ τέτοιο ώστε κάθε μιγαδικός αριθμός w τέτοιος ώστε $|z - w| < r$ να ικανοποιεί επίσης την ανισότητα $|w^2 - 1| < 1$, τότε το σύνολο A θα είναι ανοικτό.

Έστω r ένας θετικός αριθμός τέτοιος ώστε να ισχύει

$$r^2 + r|z| < 1 - 0.$$

Τότε, αν $|z - w| < r$, θα έχουμε $|w| < |z| + r$ και επομένως

$$|w^2 - 1| = |w^2 - z^2 + z^2 - 1| \leq |w^2 - z^2| + |z^2 - 1| < |w - z|(|w| + |z|) + 0 < r(|z| + r) + 0 < 1.$$

πράγμα που αποδείχνει ότι το A είναι ανοικτό σύνολο.

Επίσης, αν ισχύει $|z^2 - 1| < 1$, τότε θα έχουμε και $|z|^2 - 1 < 1$, οπότε

$$|z| < \sqrt{2}.$$



δηλαδή το σύνολο A είναι φραγμένο. □



9.1. Να αποδειχτεί ότι κάθε ανοικτός δίσκος και κάθε ανοικτή δακτυλική περιοχή ενός σημείου είναι ένας τόπος.

§ 10. Σύγκλιση ακολουθιών μιγαδικών αριθμών

Έστω (z_n) μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ένα σημείο a είναι το **όριο** (limit) της ακολουθίας αυτής, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας δείκτης $N(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε κάθε όρος z_n της ακολουθίας με δείκτη $n > N(\varepsilon)$ να ικανοποιεί την ανισότητα

$$|z_n - a| < \varepsilon.$$

Μια ακολουθία (z_n) με όριο a λέγεται ότι **συγκλίνει** (converges) προς το a , πράγμα που δηλώνεται με

$$\lim z_n = a.$$

Σε κάθε ακολουθία (z_n) μιγαδικών αριθμών αντιστοιχούν δύο ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε

$$z_n = x_n + iy_n, n=1,2,\dots$$

Η ακολουθία $(z_n = x_n + iy_n)$ συγκλίνει προς τον μιγαδικό αριθμό $a = \alpha + i\beta$, αν και μόνο αν η ακολουθία (x_n) συγκλίνει προς τον α και η (y_n) προς τον β . Το γεγονός αυτό επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τις τοπολογικές ιδιότητες του καρτεσιανού επιπέδου για να πάρουμε αντίστοιχες τοπολογικές ιδιότητες του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$.

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη, δηλαδή το σύνολο των

όρων της είναι φραγμένο, ενώ κάθε φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών έχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία.

Η έννοια της βασικής ακολουθίας, ή ακολουθίας Cauchy ορίζεται ακριβώς ανάλογα με την περίπτωση ακολουθίας πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, μια ακολουθία (z_n) λέμε ότι είναι βασική, ή ακολουθία Cauchy, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας δείκτης $N(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n > N(\varepsilon)$ και $m > N(\varepsilon)$ να ισχύει

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Μια ακολουθία συγκλίνει, αν και μόνο αν αυτή είναι βασική.

Έστω $(z_n = \rho_n e^{i\varphi_n})$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\rho_n \rightarrow \rho \text{ και } \varphi_n \rightarrow \varphi.$$

Συνδυάζοντας την τριγωνομετρική με την εκθετική μορφή και λάβουμε υπόψη μας τη συνέχεια των συναρτήσεων $\sin$ και $\cos$ παίρνουμε ότι

$$z_n \rightarrow \rho e^{i\varphi}.$$

Παράδειγμα 10.1.

Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1.$$

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$. Πρέπει να βρεθεί ένας δείκτης $N(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq N(\varepsilon)$ να ισχύει

$$\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Αλλά παρατηρούμε ότι

$$\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1}.$$

οπότε το πρώτο μέλος γίνεται μικρότερο του ε για κάθε $n \geq N(\varepsilon)$, όπου



$$N(\varepsilon) = 1 + [\text{ακέραιο μέρος του } (\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1)].$$

□

Παράδειγμα 10.2.

Ν' αποδειχτεί ότι

$$\text{αν } \lim z_n = a, \text{ τότε και } \lim |z_n| = |a|.$$

Απόδειξη.

Πραγματικά, επειδή $\lim z_n = a$, έπεται ότι

$$\lim |z_n - a| = 0.$$

Αλλά, από την τριγωνική ιδιότητα της απόλυτης τιμής παίρνουμε ότι

$$||z_n| - |a|| \leq |z_n - a|,$$

από όπου προκύπτει το συμπέρασμα.

□

Παράδειγμα 10.3.

Να αποδειχτεί ότι η ακολουθία μιγαδικών αριθμών

$$z_n = \text{Arg} \frac{(-1)^n}{n}, \quad n=1, 2, \dots$$

δεν συγκλίνει.

Απόδειξη.

Επειδή στην πραγματικότητα οι τιμές της ακολουθίας είναι

$$z_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος} \\ \pi, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

έπεται ότι η ακολουθία δεν μπορεί να συγκλίνει.

□

Παράδειγμα 10.4.

Να αποδειχτεί ότι η ακολουθία



$$x_n := 1 + \rho \cos \alpha + \rho^2 \cos 2\alpha + \dots + \rho^n \cos n\alpha, \quad n=1,2,\dots$$

όπου $0 < \rho < 1$, συγκλίνει και να υπολογιστεί το όριό της.

Απόδειξη.

Θέτουμε

$$y_n := \rho \sin \alpha + \rho^2 \sin 2\alpha + \dots + \rho^n \sin n\alpha, \quad n=1,2,\dots$$

και αναζητούμε το όριο της ακολουθίας $(z_n = x_n + iy_n)$. Αλλά για

$$w := \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

παίρνουμε

$$z_n = 1 + w + w^2 + \dots + w^n = \frac{1 - w^{n+1}}{1 - w} \rightarrow \frac{1}{1 - w}$$

δύτι $|w| = \rho < 1$. Άρα

$$\lim x_n = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - w} = \frac{1 - \rho \cos \alpha}{1 - 2\rho \cos \alpha + \rho^2}.$$

□



10.1. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω ακολουθίες:

α) $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{i\pi/n}, \quad \beta) \quad z_n = (1+2i)^n,$

γ) $z_n = \frac{e^{in}}{n^2}, \quad \delta) \quad z_n = \frac{n+1}{2n-3i}$

10.2. Να εξεταστεί αν συγκλίνουν οι ακολουθίες που ορίζονται με τους παρακάτω αναδρομικούς τύπους:

α) $z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n, \quad z_1 = a$

β) $z_{n+1} = \ln z_n, \quad z_1 = a$



$$\gamma) \quad z_{n+1} = \exp(i\theta_n), \text{ όπου } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{1+2(\theta_n)}, \theta_1=1.$$

10.3. Αν $(z_n = x_n + iy_n)$ είναι μια ακολουθία τέτοια ώστε

$$\lim |z_n| = 1,$$

τί μπορούμε να πούμε για τη σύγκλιση των ακολουθιών (x_n) και (y_n) ;

10.4. Αν $(z_n = x_n + iy_n)$ είναι μια ακολουθία τέτοια ώστε

$$\lim z_n = \infty,$$

τί μπορούμε να πούμε για τη σύγκλιση των ακολουθιών (x_n) και (y_n) ;

§ 11. Το κατ' εκδοχήν σημείο ∞

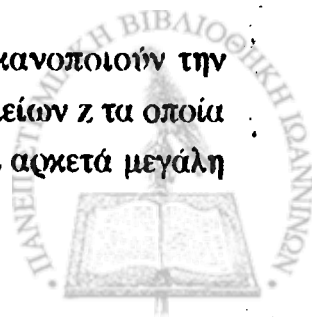
Υποθέτουμε ότι (z_n) είναι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε να ισχύει $|z_n| > M$ για κάθε δείκτη $n > N$, τότε λέμε ότι η ακολουθία (z_n) **συγκλίνει** (converges) προς το άπειρο ∞ οπότε και γράφουμε

$$\lim z_n = \infty.$$

Αν στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ ενσωματώσουμε το λεγόμενο κατ' εκδοχήν σημείο ∞ (infinity) που ορίστηκε στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο, τότε παίρνουμε το **επεκτεταμένο, ή συμπαγές μιγαδικό επίπεδο** (extended ή compact complex plane), ή απλά το **επεκτεταμένο επίπεδο**

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Το σύνολο όλων των σημείων z του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν την ανισότητα $|z| > r$ για κάποιο $r > 0$, δηλαδή το σύνολο όλων των σημείων z τα οποία ανήκουν στο συμπλήρωμα του κλειστού κύκλου με κέντρο το 0 και αρκετά μεγάλη



ακτίνα r , ονομάζεται περιοχή του ∞ (neighborhood of the point at infinity).

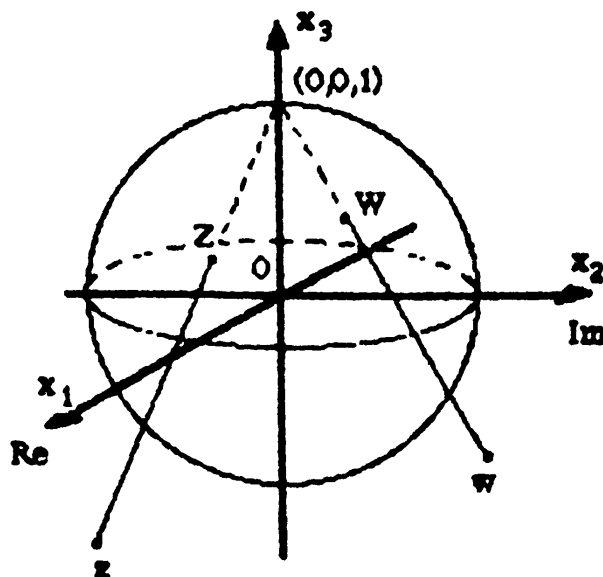
Με τη βοήθεια της στερεογραφικής προβολής (stereographic projection) του επεκτεινμένου μιγαδικού επιπέδου επί της σφαίρας του Riemann ορίζεται η χορδική απόσταση μεταξύ δύο σημείων του με τον τύπο

$$\chi(z, w) := \frac{2|z - w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, \quad \text{αν } z, w \text{ είναι μιγαδικοί αριθμοί,}$$

και

$$\chi(z, \infty) := \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}, \quad \text{αν } w = \infty$$

Στην πραγματικότητα η χορδική απόσταση των μιγαδικών αριθμών z και w είναι ίση με την (ευκλείδεια) απόσταση των προβολών Z και W αντίστοιχα των σημείων αυτών πάνω στη σφαίρα του Riemann, βλέπε και σχήμα.



Το επεκτεινόμενο μιγαδικό επίπεδο εφοδιασμένο με τη χορδική απόσταση (η οποία είναι μια μετρική) είναι ένας σημαντικός τοπολογικός χώρος του οποίου υπόχρημος είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών εφοδιασμένο με την απόσταση $\chi \leq 1$. Όλες οι τοπολογικές έννοιες του μιγαδικού επιπέδου επεκτείνονται και στο επεκτεινόμενο μιγαδικό επίπεδο. Για παράδειγμα η δακτυλική περιοχή $\Delta(\infty, r_1, r_2)$ του ∞ είναι το σύνολο

$$\Delta(\infty, r_1, r_2) := \{z : r_1 < \chi(z, \infty) < r_2\}.$$



Παράδειγμα 11.1.

Να υπολογιστεί η χορδική απόσταση $\chi(1-i, 1+2i)$.

Λύση.

Παρατηρούμε ότι

$$|1-i-(1+2i)| = |1-i-1-2i| = 3, |1-i| = \sqrt{2}$$

και

$$|1+2i| = \sqrt{5}.$$

Επομένως

$$\chi(1-i, 1+2i) = 2.3/\sqrt{1+2}\sqrt{1+5} = 6/3\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

□



11.1. Υποθέτουμε ότι είναι γνωστό το γεγονός ότι για μια ακολουθία $(z_n = x_n + iy_n)$ ισχύει

$$\lim z_n = \infty.$$

Τι μπορούμε να πούμε για τη σύγκλιση των ακολουθιών (x_n) και (y_n) ;

11.2. Να υπολογιστούν οι παρακάτω χορδικές αποστάσεις

$$\alpha) \quad \chi(3i, 1+4i), \quad \beta) \quad \chi(0, 1-2i),$$

$$\gamma) \quad \chi(1+i, 1-5i), \quad \delta) \quad \chi(0, \infty),$$

$$\epsilon) \quad \chi(1+i, \infty).$$

11.3. Να αποδειχτεί ότι το supremum της συνάρτησης $\chi(., .)$ ισούται το 2 και στη συνέχεια να δοθούν δύο ακολουθίες μιγαδικών αριθμών (z_n) και (w_n) τέτοιες ώστε

$$\lim(z_n - w_n) = \infty$$

και

$$\lim \chi(z_n, 0) = \lim \chi(w_n, 0) = 2.$$

11.4. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων z του μιγαδικού



επιπέδου των οποίων η χορδική απόσταση $\chi(z, 0)$ από το 0 είναι ίση με $|z|$.

§ 12. Σειρές μιγαδικών αριθμών

Οι έννοιες σύγκλισης και απόλυτης σύγκλισης μιας σειράς (series) μιγαδικών αριθμών, δηλαδή σειράς της μορφής

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n,$$

όπου $z_n = x_n + iy_n$ και η μελέτη σύγκλισης πραγματοποιείται σιγήθως με τη βοήθεια σειρών πραγματικών αριθμών. Αν το σύνολο τιμών του δείκτη n είναι προφανές, τότε την παραπάνω σειρά τη γράφουμε και απλά ως

$$\sum z_n$$

Παράδειγμα 12.1.

Να αποδειχτεί ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$$

συνverγει απόλυτα.

Απόδειξη.

Έχουμε

$$e^{in} = \cos n + i \sin n,$$

και επομένως η μελέτη σύγκλισης της δοθείσας σειράς ανάγεται στη μελέτη σύγκλισης των δύο σειρών πραγματικών αριθμών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$



Αλλά και οι δύο αυτές σειρές συγκλίνουν απόλυτα και επομένως και η δοθείσα σειρά συγκλίνει απόλυτα. $\square$

Παράδειγμα 12.2.

Να εξεταστεί αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(\pi/n)}}{n}.$$

Λύση.

Εδώ παρατηρούμε ότι

$$e^{i(\pi/n)} = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}.$$

Αλλά από τις δύο σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi/n)}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{n}$$

συγκλίνει μόνο η δεύτερη (ενώ η πρώτη δεν συγκλίνει). Επομένως η δοθείσα σειρά μιγαδικών αριθμών δεν συγκλίνει. $\square$



12.1. Να εξεταστεί αν οι παρακάτω σειρές μιγαδικών αριθμών συγκλίνουν:

α) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n\sqrt{n}},$

β) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i(\pi/n)}}{\sqrt{n}}.$

γ) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{3^n},$

δ) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}} \cos n}$



§ 13. Μιγαδικές συναρτήσεις: γενικά

Οι μιγαδικές συναρτήσεις (complex functions) έχουν ως πεδίο τιμών το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, ενώ το πεδίο ορισμού μπορεί να είναι κάποιο υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.

Έστω f μια μιγαδική συνάρτηση. Τότε για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=x+iy$ η τιμή

$$w=f(z)$$

είναι ένας μιγαδικός αριθμός και άρα αυτός γράφεται ως

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Η συνάρτηση u είναι το πραγματικό μέρος της f , ενώ η v είναι το φανταστικό μέρος. Έτσι η f μπορεί να προσδιοριστεί από τις δύο συναρτήσεις u και v .

Παράδειγμα 13.1.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z)=z^2-iz.$$

Θέτουμε $z=x+iy$ και $w=u+iv$, βρίσκουμε

$$u+iv=(x+iy)^2-i(x+iy)=x^2+2ixy-y^2-ix-y=x^2-y^2-y+i(2xy-x),$$

οπότε η εξίσωση $w=f(z)$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα των εξισώσεων

$$u=x^2-y^2-y$$

$$v=2xy-x.$$

□



$$f(z) = \frac{1}{z}$$

να βρεθούν οι εικόνες των παρακάτω συνόλων:

α) $\{z: |z| = \frac{1}{2}\},$

β) $\{z: \operatorname{Re} z = 0\},$

γ) $\{z: |z| = z^2\},$

δ) $\{z: |z| + z = 0\},$

ε) $\{z: \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\},$

ζ) $\{z: \operatorname{Arg} z = \frac{3\pi}{4}\},$

η) $\{z: \operatorname{Arg} z^2 = -\frac{\pi}{2}\}.$

13.2. Να βρεθεί η εικόνα του συνόλου

$$\{z: \operatorname{Re} z = 0 \text{ ή } \operatorname{Im} z = 0\}$$

μέσω των παρακάτω απεικονίσεων:

α) $w = \frac{z+1}{z-1},$ β) $w = 1 + \frac{1}{z},$

γ) $w = z + \frac{1}{z},$ δ) $w = z^2.$

13.3. Να βρεθεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης

$$f(z) = z + z^2 + \frac{1}{z}.$$

§ 14. Ρητές

μιγαδικές συναρτήσεις

Η απλούστερη μορφή μιγαδικής συνάρτησης είναι αυτή που δίνεται από ένα



πολυώνυμο (polynomial)

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

όπου οι συντελεστές $a_0, a_1, \dots, a_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί και $a_0 \neq 0$. Ο φυσικός αριθμός n είναι ο βαθμός του πολυωνύμου. Το πεδίο ορισμού κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο.

Το πηλίκο δύο συναρτήσεων οι οποίες είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (δηλαδή δεν έχουν κοινό παράγοντα) ορίζει μία ρητή συνάρτηση (rational function), δηλαδή μια συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}$$

Μια ρητή συνάρτηση παίρνει (πεπερασμένες) μιγαδικές τιμές για κάθε z που ανήκει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών εκτός εκείνων που μηδενίζουν τον παρονομαστή. Στις ρίζες του παρονομαστή η f παίρνει την τιμή ∞ .

Παράδειγμα 14.1.

Να βρεθεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) = \frac{iz-1}{z+2i}$$

Λύση.

Θέτουμε $z = x+iy$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{i(x+iy)-1}{x+iy+2i} = \frac{-(1+y)+ix}{x+i(y+2)} = \frac{-(1+y)+ix}{x+i(y+2)} \cdot \frac{x-i(y+2)}{x-i(y+2)} = \\ &= \frac{x+i(x^2+y^2+3y+2)}{x^2+(y+2)^2} \end{aligned}$$

Επομένως το πραγματικό μέρος της f είναι

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+(y+2)^2}$$

και το φανταστικό μέρος

$$v(x,y) = \frac{x^2+y^2+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$$



Παράδειγμα 14.2.

Να αναλυθεί το κλάσμα

$$\frac{3+i}{(z-2)(z+i)}$$

σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Λύση.

Θέτουμε

$$\frac{3+i}{(z-2)(z+i)} = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z+i}$$

και αναζητούμε τους μιγαδικούς αριθμούς a και b . Απαλείφοντας τους παρονομαστές παίρνουμε την ταυτότητα

$$3+i = a(z+i) + b(z-2) = (a+b)z + ai - 2b,$$

από όπου παίρνουμε

$$a+b=0 \text{ και } ai-2b=3+i.$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε

$$a=-b=\frac{3+i}{2+i}=\frac{7-i}{5},$$

οπότε το αρχικό κλάσμα γράφεται ως

$$\frac{3+i}{(z-2)(z+i)} = \frac{7-i/5}{z-2} - \frac{7-i/5}{z+i}.$$

□



14.1. Να βρεθούν τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των παρακάτω συναρτήσεων:



$$\alpha) f(z) = \frac{iz+1}{iz-1}, \quad \beta) f(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\gamma) f(z) = 3z - iz^2, \quad \delta) f(z) = 1 - 2z^3$$

$$\epsilon) f(z) = z^3 - iz$$

14.2. Να εξεταστεί για ποιές τιμές των μιγαδικών αριθμών a, b, c και d η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

είναι ένα-προς-ένα.

14.3. Να αναλυθούν σε αθροίσματα απλών κλασμάτων τα παρακάτω κλάσματα:

$$\alpha) \frac{1+i}{(z-2i)(z+1)(2z-1)}$$

$$\beta) \frac{1}{(z-1)(z^2+4)}$$

§ 15. Δυναμοσειρές στο μιγαδικό επίπεδο

Μια δυναμοσειρά (power series) με κέντρο το σημείο z_0 είναι μια σειρά μιγαδικών αριθμών της μορφής

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς αυτής είναι ο ανοικτός κύκλος $B(z_0, R)$ στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο το σημείο z_0 όπου η ακτίνα σύγκλισης (radius of convergence) R της δυναμοσειράς είναι ίση με



$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Επίσης, στην περίπτωση κατά την οποία το όριο

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|}$$

υπάρχει, τότε η ακτίνα σύγκλισης R μπορεί να δοθεί και από τον τύπο

$$R = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Στην ανάπτυξη της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων σημαντικό ρόλο παίζουν αθροίσματα σειρών της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^n.$$

Στην περίπτωση αυτή θέτουμε $b_{-n} = a_n$ και συμφωνούμε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^0 b_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

να το γράφουμε στη μορφή

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n.$$

Η σειρά αυτή, η οποία λέγεται σειρά **Laurent**, συγκλίνει στην ανοικτή δακτυλική περιοχή $\Delta(z_0, r_1, r_2)$, όπου

$$r_1 := \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|}$$

και



$$r_2 = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}},$$

με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι $r_1 < r_2$. Οι τιμές των ακτίνων αυτών μπορούν να βρεθούν και με τους τύπους

$$r_1 = \lim \frac{|b_{n-1}|}{|b_n|}$$

και

$$r_2 = \lim \frac{|b_n|}{|b_{n+1}|}.$$

αρκεί τα όρια αυτά να υπάρχουν.

Παράδειγμα 15.1.

Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

Λύση.

Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup \frac{1}{n^{1/n}}} = \lim \sqrt[n]{n} = 1. \quad \square$$

Παράδειγμα 15.2.

Να βρεθεί το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n (z-2i)^n.$$

Λύση.

Υπολογίζουμε πρώτα την απόλυτη τιμή του μιγαδικού αριθμού $(1+i)^n$.

Παρατηρούμε ότι έχουμε

$$|(1+i)^n| = 1^2 = (\sqrt{2})^n = 2^{n/2}.$$



Επομένως η ακτίνα σύγκλισης είναι

$$R = \frac{1}{\lim |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\lim (2n/2)^{1/n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και άρα το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ο ανοικτός δίσκος $B(2i, \sqrt{2}/2)$. $\square$

Παράδειγμα 15.3.

Να βρεθεί το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{10^n}.$$

Λύση.

Για την πρώτη σειρά έχουμε $b_n = (3+4i)^n$, οπότε

$$r_1 = \limsup \sqrt[n]{|b_n|} = |3+4i| = 5$$

και άρα η πρώτη σειρά συγκλίνει στον δακτύλιο $\Delta(-2i, 5, +\infty)$.

Για τη δεύτερη σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{10^n}$$

έχουμε $b_n = \frac{1}{10^n}$, οπότε

$$r_2 = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}} = 10.$$

Έτσι η δεύτερη σειρά συγκλίνει στον δίσκο $B(-2i, 10)$, πράγμα που σημαίνει ότι η αρχική σειρά συγκλίνει στον δακτύλιο $\Delta(-2i, 5, 10)$. $\square$



Παράδειγμα 15.4.

Να βρεθεί το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ln}}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{ln+1/2}}.$$

Λύση.

Για την πρώτη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ln}}{(z+1)^n}$$

έχουμε $b_n = e^{ln}$. Επομένως,

$$r_1 = \limsup \sqrt[n]{b_n} = 1,$$

πράγμα που σημαίνει ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει στην ανοικτή δισκυλική περιοχή $\Delta(-1, 1, +\infty)$.

Για τη σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{ln+1/2}}$$

έχουμε $b_n = e^{-(n+1)/2}$. Άρα η δεύτερη σύγκλισης είναι

$$r_2 = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{b_n}} = \limsup e^{-1/2n} = 1$$

και έτσι η δεύτερη σειρά συγκλίνει στον δίσκο $B(-1, 1)$. Επειδή η τομή των δύο συνόλων $\Delta(-1, 1, +\infty)$ και $B(-1, 1)$ είναι το κενό σύνολο, έπεται ότι η δοθείσα σειρά δεν συγκλίνει πουθενά στο μιγαδικό επίπεδο. $\square$



$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

έχουν ακτίνες σύγκλισης r και r' αντίστοιχα. Να προσδιοριστεί η ακτίνα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών:

$$\alpha) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n, \quad \beta) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n) z^n.$$

$$\gamma) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n z^n, \quad \delta) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n.$$

15.2. Να προσδιοριστεί η ακτίνα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών:

$$\alpha) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in} (z-1)^n, \quad \beta) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{1-2i} \right)^n.$$

$$\gamma) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (1+n)^n z^n, \quad \delta) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (in)^{-n} z^n,$$

$$\epsilon) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (1+n) z^n, \quad \zeta) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} i^n z^n.$$

§ 16. Η εκθετική μιγαδική συνάρτηση

Η εκθετική συνάρτηση (exponential function) e^z ή και $\exp(z)$ ορίζεται ως το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

και έχει πεδίο ορισμού ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο.



Αυτή έχει τις εξής ιδιότητες:

α) $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$, όπου a, b είναι μιγαδικοί αριθμοί.

β) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), δηλαδή e^z είναι μία περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2\pi i$.

γ) Αν $z = x+iy$, τότε $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ και άρα $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

Παράδειγμα 16.1.

Να βρεθεί το πραγματικό και φανταστικό μέρος της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) = \exp(\bar{z}^2).$$

Λύση.

Θέτοντας $z = x+iy$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp[(x-iy)^2] = \exp[x^2 - y^2 - 2ixy] = \exp(x^2 - y^2)e^{-2ixy} = \\ &= \exp(x^2 - y^2)[\cos 2xy - i \sin 2xy] \end{aligned}$$

και επομένως

$$\operatorname{Re} f(z) = \exp(x^2 - y^2) \cos 2xy$$

και

$$\operatorname{Im} f(z) = -\exp(x^2 - y^2) \sin 2xy. \quad \square$$

Παράδειγμα 16.2.

Να αποδειχτεί ότι για κάθε $z = x+iy$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Απόδειξη.

Εις επιμέλειά μας το συμπέρασμα που δίνεται στην τελευταία παρατήρηση της § 10. Προς τούτο θέτουμε

$$w_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Τότε αποδείχθηκε ότι ισχύει



$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2} \right]^{\frac{n}{2}}.$$

Αλλά έχουμε

$$\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2} \right]^{\frac{n}{2}} \geq \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}},$$

οπότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}} = e^x.$$

Επίσης έχουμε και

$$\begin{aligned} \ln \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2} \right]^{\frac{n}{2}} &= \frac{n}{2} \ln \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2} \right] = \frac{n}{2} \ln \left[1 + \frac{x^2 + y^2}{n^2} + \frac{2x}{n} \right] \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{2n} + x, \end{aligned}$$

από όπου παίρνουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \leq e^x.$$

Η ανισότητα αυτή μαζί με την προηγούμενη συνεπάγονται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = e^x.$$

Για τον υπολογισμό του ορίου του ορίσματος του z_n παρατηρούμε ότι με εφαρμογή του γνωστού κανόνα L' Hospital για πραγματικές συναρτήσεις προκύπτει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \arctan \frac{y}{t+x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 y}{(x+t)^2 + y^2} = y,$$

και κατά συνέπεια θα έχουμε και

$$\operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = n \arctan \frac{y/n}{1+x/n} = n \arctan \frac{y}{n+x} \rightarrow y.$$



Τώρα με βάση την τελευταία παρατήρηση της § 6 παίρνουμε το συμπέρασμα. $\square$



16.1. Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $e^z + 1 = 0,$

β) $e^{2z} + e^z + 1 = 0,$

16.2. Να βρεθεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) = \exp(-z) + \exp(\bar{z}).$$

16.3. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω ακολουθίες:

α) $z_n = \exp[-i(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3n})].$

β) $z_n = n \exp(\frac{i\pi}{2}).$

§ 17. Οι τριγωνομετρικές μιγαδικές συναρτήσεις

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις (trigonometric functions) ημίτονο (sinus) $\sin z$ και συνημίτονο (cosinus) $\cos z$ ορίζονται αντίστοιχα από τις δυναμοσειρές

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

οι οποίες συγκλίνουν απόλυτα για κάθε τιμή του z και επομένως οι συναρτήσεις $\sin z$ και $\cos z$ έχουν πεδίο ορισμού ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο. Επίσης αυτές είναι περιοδικές με περίοδο τον πραγματικό αριθμό 2π και έχουν μόνο πραγματικές ρίζες στις σημεία $z = k\pi$ και $z = \pi/2 + k\pi$, αντίστοιχα, όπου $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Οι συναρτήσεις εφαπτομένη (tangent) $\tan z$ και συνεφαπτομένη (cotangent) $\cot z$ ορίζονται, όπως αναμένεται, με τους τύπους



$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Από αυτές η $\tan z$ ορίζεται παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός των σημείων που μηδενίζουν το $\cos z$, δηλαδή εκτός των αριθμών της μορφής $\pi/2 + k\pi$, όπου $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Η συνάρτηση $\cot z$ ορίζεται στο μιγαδικό επίπεδο εκτός των σημείων που μηδενίζουν το $\sin z$, δηλαδή εκτός των σημείων της μορφής $z=k\pi$, όπου $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Όλοι οι τύποι- ταυτότητες της τριγωνομετρίας που ισχύουν για τις γνωστές τριγωνομετρικές συναρτήσεις με μεταβλητή πραγματικό αριθμό εξακολουθούν να ισχύουν και για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής.

Τέλος, οι συναρτήσεις e^z , $\sin z$ και $\cos z$ συσχετίζονται μεταξύ τους με τους τύπους του Euler:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

από όπου παίρνουμε

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Παράδειγμα 17.1.

Να βρεθεί το μέτρο και το βασικό όρισμα του μιγαδικού αριθμού $\sin(2i)$.

Λύση.

Σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους έχουμε

$$\sin(2i) = \frac{e^{i2i} - e^{-i2i}}{2i} = \frac{e^{-2} - e^2}{2i} = \frac{e^4 - 1}{2e^2} i,$$

οπότε

$$|\sin(2i)| = \frac{e^4 - 1}{2e^2} \text{ και } \operatorname{Arg} \sin(2i) = \frac{\pi}{2}.$$

□



17.1. Να υπολογιστούν τα μέτρα και τα βασικά όρια των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

α) $\tan \pi i$,

β) $\sin(isin 1)$



γ) $\cos(\pi + i \ln 2),$

δ) $\sin(1 + i \frac{\pi}{2}),$

ε) $\sin(\frac{\pi}{2} + i \ln 2),$

ζ) $\tan(\frac{1+i}{1-i}).$

17.2. Να υπολογιστεί το μέτρο του μιγαδικού αριθμού

$$\sin(\pi - i \ln(2 + \sqrt{5})).$$

17.3. Να βρεθεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης

$$f(z) = \sin(z+i) + \cos(z-i).$$

17.4. Να επιλυθεί η εξίσωση

$$|\sin(\frac{\pi}{2} + ix)| = 1.$$

17.5. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση ακολουθία

$$z_n = n \sin(\frac{1}{n}), n=1, 2, \dots$$

17.6. Να εξεταστεί αν οι ακόλουθες σειρές μιγαδικών αριθμών (σηλώνονται):

α) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \ln}{2^n}.$

β) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \ln^2}{3n^2}.$

γ) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sin \ln}{4^n}.$

δ) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{2\sqrt{2}\cos i n}.$

17.7. Να προκηρυχτεί η κατεύθυνση σύγκλισης των δυναμοσειρών:

α) $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\frac{\pi}{n})(z+2i)^n.$

β) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\sin^n(1+2i n)}.$



§ 18. Οι υπερβολικές μιγαδικές συναρτήσεις

Οι υπερβολικές μιγαδικές συναρτήσεις (hyperbolic complex functions) $\sinh z$, $\cosh z$, $\tanh z$ και $\coth z$ ορίζονται με τους τύπους

υπερβολικό ημίτονο (hyperbolic sinus): $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$

υπερβολικό συνημίτονο (hyperbolic cosinus): $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$

υπερβολική εφαπτομένη (hyperbolic tangent): $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z},$

υπερβολική συνεφαπτομένη (hyperbolic cotangent): $\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$

Το πεδίο ορισμού των δύο πρώτων υπερβολικών συναρτήσεων είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο. Η υπερβολική εφαπτομένη ορίζεται παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία που μηδενίζουν το $\cosh z$, δηλαδή εκτός από τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής $i(2k+1)\pi/2$, όπου k είναι τυχόν ακέραιος. Η υπερβολική συνεφαπτομένη ορίζεται παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία που μηδενίζουν το $\sinh z$, δηλαδή εκτός από τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής $ik\pi$, όπου k είναι τυχόν ακέραιος.

Οι τριγωνομετρικές και οι υπερβολικές συναρτήσεις συνδέονται με τους εξής τύπους:

$\sin z = -i \sinh iz,$	$\sinh z = -i \sin iz,$
$\cos z = \cosh iz,$	$\cosh z = \cos iz,$
$\tan z = -i \tanh iz,$	$\tanh z = -i \tan iz,$
$\cot z = i \coth iz,$	$\coth z = i \cot iz.$

Παράδειγμα 18.1.

Να λυθεί η εξίσωση

$$\sin z = 2.$$

Λύση .

Θέτουμε $z = x + iy$. οπότε βρίσκουμε



$$2 = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} \sin x \cosh y = 2, \\ \cos x \sinh y = 0. \end{cases}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $\cos x = 0$ ή $\sinh y = 0$. Αν ισχύει η σχέση $\sinh y = 0$, τότε έχουμε $y = 0$ και από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $\sin x = 2$, πράγμα αδύνατο. Άρα ισχύει $\cos x = 0$, οπότε $x = k\pi + \pi/2$ (k ακέραιος). Τότε από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι $\cosh y = 2(-1)^k$. Αλλά $\cosh y > 0$, οπότε πρέπει $k = 2m$ και

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = 2, \text{ ή } e^y + e^{-y} = 4, \text{ ή } e^{2y} - 4e^y + 1 = 0.$$

Θέτουμε $\lambda = e^y$ και παίρνουμε την εξίσωση

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0,$$

η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς $2 \pm \sqrt{3}$. Το ίδιο συμπέρασμα θα προέκυπτε αν θέταμε $\lambda = e^{-y}$. Έτσι παίρνουμε $y = \pm \ln|2 \pm \sqrt{3}|$ και επομένως η δοθείσα εξίσωση έχει λύσεις τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής

$$z = 2m\pi + \frac{\pi}{2} \pm i \ln|2 \pm \sqrt{3}|.$$

όπου m ακέραιος. □

Παράδειγμα 18.2.

Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos \ln) z^n.$$

Λύση.

Οι συντελεστές της δυναμοσειράς είναι οι



$$a_n = \cos in = \frac{e^{i \cdot in} + e^{-i \cdot in}}{2} = \frac{e^{-n} + e^n}{2} = \cosh n$$

και επομένως η ακτίνα σύγκλισης είναι η

$$\begin{aligned} R &= \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \\ &= \lim \frac{|\cosh n|}{|\cosh(n+1)|} = \lim \frac{\cosh n}{\cosh(n+1)} = \\ &= \lim \frac{\cosh n}{\cosh n \cosh 1 + \sinh n \sinh 1} = \\ &= \lim \frac{1}{\cosh 1 + \tanh n \sinh 1} = \frac{1}{\cosh 1 + \sinh 1} = e^{-1}, \end{aligned}$$

αφού έχουμε ότι

$$\lim \tanh n = \lim \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \lim \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} = 1.$$

□



18.1. Να αποδειχτούν οι παρακάτω σχέσεις:

- α) $\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$
- β) $\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$
- γ) $\tan(x+iy) = \frac{\tan x + i \tanh y}{1 - i \tan x \tanh y},$
- δ) $\sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$
- ε) $\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y - i \sinh x \sin y,$
- ζ) $\tanh(x+iy) = \frac{\tanh x + i \tanh y}{1 - i \tanh x \tanh y}$



18.2. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία

$$z_n = \frac{\cosh(\ln n)}{n}.$$

§ 19. Η λογαριθμική μιγαδική συνάρτηση

Η λογαριθμική συνάρτηση (logarithmic function) $\ln z$, όπου $z \neq 0$, ορίζεται να είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης, και

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι πλειότιμη και η πρωτεύουσα ή κύρια τιμή της (principal value) είναι η συνάρτηση

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z,$$

όπου $\operatorname{Arg} z$ είναι το βισιικό όρισμα του μιγαδικού αριθμού z . Προφανώς ισχύει ότι

$$i \ln z = \ln z + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\operatorname{Ln} z$ είναι το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών εκτός του 0.

Επίσης ισχύουν οι σχέσεις

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \quad \text{και} \quad \ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2.$$

Παράδειγμα 19.1

Να γραφεί στην αλγεβρική των μιγαδικών μορφή ο αριθμός $\operatorname{Ln}(1+2i-e^i)$.

Λύση.

Παρατηρούμε ότι η αλγεβρική μορφή του μιγαδικού αριθμού $1+2i-e^i$ είναι



$$1+2i-e^i = 1+2i -\cos 1 -i\sin 1 = (1-\cos 1) + i(2-\sin 1),$$

οπότε ο λογάριθμός του ισούται με

$$\operatorname{Ln}(1+2i-e^i) = \ln|1+2i-e^i| + i \operatorname{Arg}(1+2i-e^i) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln((1-\cos 1)^2 + (2-\sin 1)^2) + i \operatorname{Arctan} \frac{2-\sin 1}{1-\cos 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(3-2\cos 1-2\sin 1) + i \operatorname{Arctan} \frac{2-\sin 1}{1-\cos 1}.$$

□



19.1. Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι των εξής αριθμών:

- | | |
|---------------------|------------------------------|
| α) $-1-i,$ | β) $\frac{\pi}{2} + i\ln 2,$ |
| γ) $3-2i + e^{2i}.$ | δ) $\cos(1-i),$ |
| ε) $\sin(e^i),$ | ζ) $\operatorname{Ln}(1+i).$ |

§ 20. Η μιγαδική συνάρτηση δύναμη

Η γενική συνάρτηση δύναμη (power function) z^a , όπου a είναι μιγαδικός αριθμός ορίζεται με τον τύπο

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Γενικά η συνάρτηση αυτή είναι πλειότιμη, και η πρωτεύουσα τιμή της είναι η

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z},$$

η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών.



Η γενική εκθετική συνάρτηση (general exponential function) a^z (a είναι ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός) ορίζεται με τον τύπο

$$a^z = e^{z \ln a}.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι επίσης πλειότιμη και η πρωτεύουσα τιμή της είναι η

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a},$$

η οποία ορίζεται παντού στο μιγαδικό επίπεδο.

Παράδειγμα 20.1.

Να γράφει στην αλγεβρική του μορφή ο μιγαδικός αριθμός

$$z = i^i.$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι

$$i^i = e^{i \ln(i)} = e^{i(\ln|i| + i \arg i)} = e^{i(0 + (2k\pi + \pi/2))} = e^{-(2k\pi + \pi/2)},$$

όπου k είναι τυχόν ακέραιος. Σημειώνουμε ότι η πρωτεύουσα τιμή της δύναμης i^i είναι η $e^{-\pi/2}$. □



20.1. Να υπολογιστούν οι λογαριθμοί των εξής αριθμών:

α) $i(1+i)(1+2i).$

β) $(2-i)^i.$

γ) $(1-i)^{3-2i}.$

δ) $2^{3i-1}.$

§ 21. Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές μιγαδικές συναρτήσεις

Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις (inverse trigonometric functions) $\arcsin z$, $\arccos z$, $\arctan z$ και $\operatorname{arccot} z$, ορίζονται αντίστοιχα ως οι



αντίστροφες συναρτήσεις των $\sin z$, $\cos z$, $\tan z$ και $\cot z$. Για παράδειγμα, αν έχουμε $z = \sin w$, τότε w είναι το τόξο ημιτόνου του z και γράφουμε $w = \arcsin z$. Όλες αυτές οι συναρτήσεις είναι πλειότιμες και μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια της λογαριθμικής συνάρτησης ως εξής:

$$\arcsin z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm i \ln(z \pm i\sqrt{1-z^2}),$$

$$\arccos z = 2k\pi \pm i \ln(z \pm i\sqrt{1-z^2}),$$

$$\arctan z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz},$$

$$\operatorname{arccot} z = -\frac{i}{2} \ln \frac{z+i}{z-i}.$$

Οι πρωτεύουσες τιμές των συναρτήσεων αυτών ορίζονται μέσω των πρωτευουσών τιμών των αντίστοιχων λογαριθμικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 21.1.

Να λυθεί η εξίσωση

$$\sin z = 2$$

(βλ. και Παράδειγμα 18.1).

Λύση.

Η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\arcsin 2 = z,$$

οπότε με βάση τους παραπάνω τύπους έχουμε

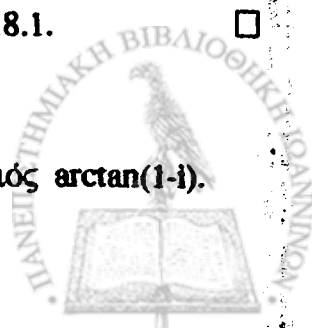
$$z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm i \ln(2 + i\sqrt{1-2^2}) = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm i \ln(2 \pm \sqrt{3}i),$$

δηλαδή το ίδιο συμπέρασμα που βρήκαμε και στο Παράδειγμα 18.1. □

Παράδειγμα 21.2.

Να γραφεί στην αλγεβρική του μορφή ο μιγαδικός αριθμός $\arctan(1-i)$.

Λύση.



Εφαρμόζοντας τον παραπάνω σχετικό τύπο προκύπτει

$$\arctan(1-i) = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+i(1-i)}{1-i(1-i)} = -\frac{1}{2} \ln \frac{2+i}{-i} = -\frac{1}{2} \ln(1-2i).$$

Εξάλλου έχουμε

$$\ln(1-2i) = \ln|1-2i| + i \arg(1-2i) = \ln\sqrt{5} + i(-\arctan 2 + 2k\pi),$$

οπότε, τελικά,

$$\arctan(1-i) = -\frac{1}{2} [\ln\sqrt{5} + i(-\arctan 2 + 2k\pi)] = -\frac{1}{2} \arctan 2 + k\pi - \frac{1}{4} \ln 5. \quad \square$$



21.1. Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $4\cos z + 5 = 0,$

β) $\sin z = \pi i,$

γ) $\sin z = i \frac{\pi}{2},$

δ) $z - \tanh \pi i = 0.$

ε) $e^{ix} = \cos \pi x$ (x είναι πραγματικός αριθμός).

22. Όριο μιγαδικής συνάρτησης

Θεωρούμε μια μιγαδική συνάρτηση f ορισμένη τουλάχιστον σε μια δικτυλική περιοχή της μορφής $\Delta(z_0, 0, r)$. Ένας μιγαδικός αριθμός l είναι το όριο (limit) της f στο σημείο z_0 αν για κάθε θετικό αριθμό ε αντιστοιχεί ένας αριθμός $\delta = \delta(\varepsilon)$ θετικός, τέτοιος ώστε για όλα τα σημεία z της δικτυλικής περιοχής $\Delta(z_0, 0, r)$, τα οποία ικανοποιούν τη συνθήκη $0 < |z - z_0| < \delta$ να έχουμε

$$|f(z) - l| < \varepsilon$$

οπότε και γράφουμε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l.$$



Ανάλογα δίνεται και ο ορισμός του ορίου της f όταν $L=\infty$ και/ ή $z_0=\infty$. Ένας άλλος ορισμός ορίου μιγαδικής συνάρτησης είναι και ο εξής: Αν για κάθε ακολουθία (z_n) του δακτυλίου $\Delta(z_0, 0, r)$ η οποία συγκλίνει προς το σημείο z_0 η αντίστοιχη ακολουθία $(f(z_n))$ των τιμών της συνάρτησης συγκλίνει προς το σημείο L του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου, τότε έχουμε ότι

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

Αν γνωρίζουμε ότι

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

και

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L,$$

όπου

$$z_0 = x_0 + iy_0 \text{ και } L = a + ib,$$

τότε ισχύουν και οι σχέσεις

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x,y) = a$$

και

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x,y) = b.$$

Όλες οι γνωστές ιδιότητες των ορίων πραγματικών συναρτήσεων ισχύουν και για το όριο μιγαδικής συνάρτησης. Πραγματικά, αν έχουμε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \text{ και } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B,$$

τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$\alpha) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B,$$



$$\beta) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = A \cdot B,$$

$$\gamma) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \text{ αν } B \neq 0$$

Η έννοια της συνέχειας (continuity) μπορεί εύκολα να δοθεί ως συνήθως με τη βοήθεια του ορίου της συνάρτησης. Δηλαδή, μια συνάρτηση $f(z)$ είναι συνεχής σε ένα σημείο a του πεδίου ορισμού της, αν ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a),$$

ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε z του πεδίου ορισμού της $f(z)$, με $|z - a| < \delta$ να ισχύει ότι $|f(z) - f(a)| < \epsilon$.

Μπορεί να διαπιστωθεί ότι

α) όλες οι πολωνομικές συναρτήσεις, η πρωτεύουσα τιμή της εκθετικής συνάρτησης e^z , οι δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin z$, $\cos z$ καθώς επίσης και οι δύο υπερβολικές συναρτήσεις $\sinh z$, $\cosh z$ είναι συνεχείς πάνω σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο,

β) η τριγωνομετρική συνάρτηση $\tan z$ είναι συνεχής παντού εκτός από τα σημεία της μορφής $k\pi + (\pi/2)$, όπου k είναι ακέραιος αριθμός.

γ) η τριγωνομετρική συνάρτηση $\cot z$ είναι συνεχής παντού εκτός από τα σημεία της μορφής $k\pi$, όπου k είναι ακέραιος αριθμός.

δ) η υπερβολική συνάρτηση $\tanh z$ είναι συνεχής παντού εκτός από τα σημεία της μορφής $(2k+1)\pi/2$, όπου k είναι ακέραιος αριθμός.

ε) η υπερβολική συνάρτηση $\coth z$ είναι συνεχής παντού εκτός από τα σημεία της μορφής $ik\pi$, όπου k είναι ακέραιος αριθμός.

ζ) οι βλαπτικοί κλάδοι των συναρτήσεων $\arg z$ και $\ln z$, δηλαδή οι συναρτήσεις που παριστάνονται με $\text{Arg } z$ και $\text{Ln } z$, αντίστοιχα, είναι συνεχείς παντού στο πεδίο της ορισμού εκτός από τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που βρίσκονται πάνω στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα, δηλαδή αυτές είναι συνεχείς στο σύνολο $\{z: z \neq 0\}$.



Παράδειγμα 22.1.

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2z}{\cosh z + i \sinh z}.$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\cos 2z}{\cosh z + i \sinh z} = \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\cos z - i \sin z} = \cos z + i \sin z$$

και επομένως, λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων $\cos z$ και $\sin z$, το ζητούμενο όριο είναι το

$$\lim_{z \rightarrow \pi/4} (\cos z + i \sin z) = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

□



22.1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2iz - 1}{2z + 1}, \quad \beta) \quad \lim_{z \rightarrow -i\pi/2} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + 1},$$

$$\gamma) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\sinh iz}, \quad \delta) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im}(z^2 + 2z + e^z).$$

22.2. Να αποδειχτεί με τη χρήση του ε - δ ορισμού ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του μιγαδικού επιπέδου:

$$\alpha) \quad f(z) = z^3, \quad \beta) \quad f(z) = \operatorname{Re}(z^2).$$

$$\gamma) \quad f(z) = \operatorname{Im} z, \quad \delta) \quad f(z) = z \sin z$$

$$\varepsilon) \quad f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n.$$



§ 23. Καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο

Μία καμπύλη (curve) γ στο μιγαδικό επίπεδο είναι η συνεχής εικόνα $z(t)$ στο μιγαδικό επίπεδο ενός διαστήματος $I=[\alpha, \beta]$ της πραγματικής ευθείας. Η συνεχής σπάρτη

$$z(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta]$$

λέγεται **παραμετρική παράσταση** (parametric representation) της καμπύλης.

Αν $t_1 < t_2$ το σημείο $z(t_1)$ προηγείται του σημείου $z(t_2)$. Με τη διάταξη αυτή πάνω στα σημεία της γ ορίζεται ο προσανατολισμός ή η φορά (orientation) της καμπύλης γ η οποία στο σχήμα δηλώνεται με ένα βέλος. Το σημείο $z(\alpha)$ είναι το αρχικό σημείο (starting point) της καμπύλης και το $z(\beta)$ είναι το τελικό της σημείο (final point). Αν αλλάξουμε τη φορά της καμπύλης γ παίρνουμε την καμπύλη $-\gamma$, η οποία έχει αρχικό σημείο το $z(\beta)$ και τελικό το $z(\alpha)$. Αν το τελικό σημείο ταινίζεται με το αρχικό τότε η καμπύλη είναι κλειστή (closed curve).

Αν η σπάρτη $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ είναι ένα-προς-ένα, τότε η καμπύλη γ είναι απλή (simple curve). Μια απλή κλειστή καμπύλη λέγεται κλειστή καμπύλη του Jordan.

Κάθε κλειστή καμπύλη χωρίζει το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο σε δύο συνεκτικά σύνολα. Το συνεκτικό εκείνο σύνολο που περιέχει το κατ'εξοχήν σημείο ∞ είναι το εξωτερικό (exterior) της καμπύλης και παριστάνεται με $\text{Ext}(\gamma)$. Αν η καμπύλη είναι και απλή, δηλαδή αν η γ είναι μια κλειστή καμπύλη του Jordan, τότε αυτή χωρίζει το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο σε δύο συνεκτικά υποσύνολα, το $\text{Ext}(\gamma)$ και το εσωτερικό (interior) της γ που παριστάνεται με $\text{Int}(\gamma)$.

Μια αναπαράμετρηση (reparameterization) της καμπύλης γ είναι μια καμπύλη γ^* η οποία ταινίζεται με την καμπύλη γ ως σύνολο σημείων του μιγαδικού επιπέδου και έχει παρμετρική παρμετρηση

$$z^*(s) = z(t), \text{ όπου } t = \varphi(s), s \in [\alpha^*, \beta^*].$$

είναι μία πραγματική ένα-προς-ένα απεικόνιση του $[\alpha^*, \beta^*]$ επί του $[\alpha, \beta]$.



Η καμπύλη γ είναι **διαφορίσιμη** (differentiable) ή **ομαλή** (regular) σε ένα σημείο t_0 του διαστήματος I , αν οι συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ έχουν συνεχείς παραγώγους στο σημείο t_0 και **λεία στο σημείο t_0** (smooth at the point t_0) αν αυτή είναι διαφορίσιμη στο t_0 και επιπλέον ισχύει ότι

$$|z'(t_0)| = |x'(t_0) + iy'(t_0)| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2} \neq 0.$$

Αν η καμπύλη γ είναι διαφορίσιμη σε όλα τα σημεία, ή λεία σε όλα τα σημεία τότε λέμε αντίστοιχα ότι είναι απλά **διαφορίσιμη**, ή **λεία**. Η καμπύλη γ είναι **κατά τμήματα διαφορίσιμη** (piecewise differentiable) (αντίστ. **λεία**) (piecewise smooth) αν αυτή μπορεί να διασπαστεί σε ένα πεπερασμένο πλήθος διαφορίσιμων (αντίστ. λείων) καμπυλών.

Διαφορίσιμη αναπαράμετρηση της καμπύλης γ είναι μια αναπαράμετρηση της γ (βλέπε παραπάνω) για την οποία η συνάρτηση ψ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο.

Αν γ είναι μία διαφορίσιμη καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$z(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta],$$

το **μήκος** (length) $\mu(\gamma)$ της καμπύλης αυτής είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\mu(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η καμπύλη γ στο μιγαδικό επίπεδο καθορίζεται από την εξίσωση

$$F(x, y) = 0$$

και θεωρούμε μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$, η οποία είναι ένα-προς-ένα, ορισμένη και συνεχής τουλάχιστον πάνω στην καμπύλη γ . Για να βρούμε την παραμετρική παράσταση της καμπύλης

$$\Gamma = f(\gamma)$$

θέτουμε

$$w := u + iv = f(z)$$



και απαλείφουμε τα x και y μεταξύ των εξισώσεων

$$\begin{cases} u=u(x, y) \\ v=v(x, y) \\ F(x, y)=0. \end{cases}$$

Αν η καμπύλη γ ορίζεται παραμετρικά, δηλαδή, με μια παράσταση της μορφής

$$z(t)=x(t)+iy(t), t \in I,$$

τότε η καμπύλη $\Gamma=f(\gamma)$ ορίζεται από την παράσταση

$$w=f(z)=\operatorname{Re} f(x(t), y(t))+i \operatorname{Im} f(x(t), y(t)), t \in I.$$

Παράδειγμα 23.1.

Να σχηματιστεί η καμπύλη γ στο μιγαδικό επίπεδο η οποία έχει ως παραμετρική παράσταση τη συνάρτηση

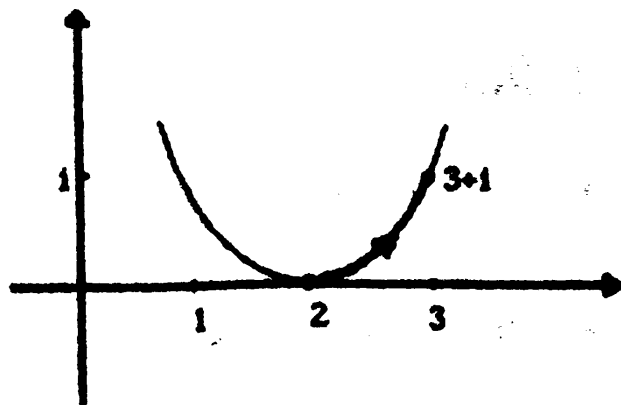
$$z(t)=t+2+it^2, t \in [0,1].$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι

$$\operatorname{Re} z(t)=x=t+2 \text{ και } \operatorname{Im} z(t)=y=t^2.$$

Μεταξί των δύο (πρώτων) εξισώσεων απαλείφουμε το t , οπότε βρίσκουμε τη σχέση



$$y=(x-2)^2, \text{ όπου } x \in [2,3].$$



Η σχέση αυτή ορίζει στο καρτεσιανό επίπεδο μια καμπύλη που είναι τμήμα παραβολής, όπως στο παραπάνω σχήμα. $\square$

Παράδειγμα 23.2.

Θεωρούμε την περιφέρεια γ του κύκλου με παραμετρική παρίσταση

$$z(t) = re^{it} = r \cos t + i r \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

και με θετική (positive) φορά, δηλαδή τη φορά που είναι αντίθετη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ωρολογίου. Να βρεθεί η καμπύλη Γ που είναι η εικόνα της γ μέσω της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{z}{\bar{z}}.$$

Λύση.

Έστω $w = u(t) + iv(t)$ η παραμετρική παράσταση της ζητούμενης καμπύλης Γ . Θέτουμε $z = x + iy$ για την καμπύλη γ , οπότε βρίσκουμε

$$x = r \cos t \text{ και } y = r \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Επομένως έχουμε

$$u + iv = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{z\bar{z}} = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ και } v = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Αντικαθιστώντας τα x, y με τις εκφράσεις τους από την παράσταση της γ , βρίσκουμε

$$u(t) = \cos 2t \text{ και } v(t) = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

ή, θέτοντας $s = 2t$,

$$u(s) = \cos s \text{ και } v(s) = \sin s, \quad 0 \leq s \leq 4\pi,$$

οπότε $u^2 + v^2 = 1$. Άρα η ζητούμενη καμπύλη είναι περιφέρεια του μοναδιαίου



κίτλου διαγεγραμμένη δύο φορές με τη θετική φορά, όπως τούτο φαίνεται από το γεγονός ότι $0 \leq s \leq 4\pi$.

□



23.1. Να σχεδιαστούν στο μιγαδικό επίπεδο οι καμπύλες των οποίων οι παραμετρικές παραστάσεις δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

- α) $z(t) = 1 - 2it, \quad 0 \leq t \leq 2$
- β) $z(t) = t + it^2, \quad t \in \mathbb{R}$
- γ) $z(t) = t + (1/t), \quad t \in \mathbb{R}$
- δ) $z(t) = t + i\sqrt{1-t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1$
- ε) $z(t) = \lambda(t + i \cdot e^{-it}), \quad t \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$

23.2. Να βρεθούν οι εικόνες μέσω του μετασχηματισμού $w = 1/z$ των καμπυλίων του z -μιγαδικού επιπέδου με τις εξής παραμετρικές παραστάσεις:

- α) $z(t) = t + 2i(1-t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$
- β) $z(t) = \sin t - i \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$
- γ) $z(t) = \cosh t + i \sinh t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

23.3. Να βρεθούν οι εικόνες του κίτλου με κέντρο το 0 και ακτίνα $r (> 0)$ μέσω των ισοκιττήσεων

- α) $f(z) = z + \frac{1}{z},$
- β) $f(z) = z - \frac{1}{z}$

23.4. Να δοθούν παραμετρικές παραστάσεις των παρακάτω καμπυλίων:

- α) Η καμπύλη που αποτελείται από την τεθλασμένη γραμμή με κορυφές τα σημεία $1-i, 2i, -3+4i$ και $-4-2i$.
- β) Η καμπύλη που είναι τμήμα της υπερβολής $y = 1/x$, έχει



αρχικό σημείο το $1+i$ και τελικό το $\frac{1}{3}+3i$.

γ) Η καμπύλη που είναι τμήμα της παραβολής $x=2y^2-1$, έχει αρχικό σημείο το -1 και τελικό το $1+i$.

δ) Η καμπύλη που είναι η περίμετρος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $1-i$, $2+i$ και $-2+3i$ και με φορά όπως αυτή ορίζεται με τη σειρά των κορυφών που δόθηκαν.

§ 24. Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης

Μια συνάρτηση $f(z)$, $z \in \mathcal{J}$, όπου $\mathcal{J}$ είναι ένας τόπος του μιγαδικού επιπέδου είναι **παραγωγίσιμη** (differentiable) σε ένα σημείο $z_0 \in \mathcal{J}$, αν το όριο

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

ή ισοδύναμα το

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

υπάρχει και είναι ένας μιγαδικός αριθμός. Αυτό ονομάζεται **παράγωγος** (derivative) της συνάρτησης f στο σημείο z_0 και παριστάνεται με $f'(z_0)$. Ανάλογα ορίζεται και η παράγωγος n -τάξης $f^{(n)}(z_0)$ στο σημείο z_0 όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Όλοι οι κανόνες και όλες οι ιδιότητες που έχουν οι παράγωγοι πραγματικών συναρτήσεων εξακολουθούν να ισχύουν και εδώ.

Αν $z=x+iy$ και $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, τότε σε κάθε σημείο όπου η συνάρτηση $f(z)$ είναι παραγωγίσιμη έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Οι ισότητες αυτές είναι γνωστές ως **συνθήκες Cauchy-Riemann** (Cauchy-

Riemann conditions). Αντίστροφα, αν σε κάποιο σημείο (x,y) οι συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι παραγωγίσιμες ως προς x και y με συνεχείς παραγώγους και επιπλέον οι συνθήκες Cauchy-Riemann ικανοποιούνται, τότε η συνάρτηση $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $z=x+iy$.

Αν θέσουμε

$$x = \operatorname{Re} \frac{z+\bar{z}}{2} \text{ και } y = \operatorname{Im} \frac{z-\bar{z}}{2i},$$

και θεωρήσουμε τα x και y ως συναρτήσεις των z και $\bar{z}$, τότε η συνάρτηση f μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση των z και $\bar{z}$. Στην περίπτωση αυτή παίρνουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] + i \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right],$$

οπότε, αν ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann, θα ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Έτσι, αν η συνάρτηση f έχει παράγωγο σε ένα σημείο z του μιγαδικού επιπέδου, τότε στο σημείο αυτό θα επαληθεύεται η εξίσωση $\partial f / \partial \bar{z} = 0$, την οποία βρήκαμε μόλις παραπάνω. Επιπλέον η σχέση αυτή έχει μία καθαρά τυπική έννοια και όχι ουσιαστική, διότι δεν έχει και οραστεί η παράγωγος της f ως προς τη συζυγή μεταβλητή $\bar{z}$. Πλην όμως ο τύπος αυτός μπορεί άνετα να εφαρμοστεί αντί των συνθηκών Cauchy-Riemann.

Για τις μιγαδικές συναρτήσεις ισχύει ο κανόνας του L' Hospital: (L' Hospital's rule):

Αν γινι δύο μιγαδικές συναρτήσεις f και g είναι γνωστό ότι

- i) είναι ορισμένες σε έναν τόπο J ,
- ii) είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο z_0 του J
- iii) ισχύει $g'(z_0) \neq 0$ και ισχύει



$$f(z_0) = 0 = g(z_0),$$

τότε ισχύει και ότι

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Παράδειγμα 24.1.

Να εξεταστεί αν υπάρχουν σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = x - iy$$

είναι παραγωγίσιμη.

Λύση.

Παρατηρούμε ότι $f(z) = \bar{z}$, οπότε θα ισχύει ότι $\partial f / \partial \bar{z} = 1$, το οποίο είναι πάντοτε διάφορο του μηδενός. Άρα δεν υπάρχουν σημεία στα οποία η f παραγωγίζεται. $\square$

Παράδειγμα 24.2.

Να εξεταστεί αν υπάρχουν σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = |z-2i|^2 + |z-1|^2$$

να παραγωγίζεται.

Λύση.

Η συνάρτηση αυτή γράφεται ως

$$f(z) = (z-2i)(\bar{z}-2i) + (z-1)(\bar{z}-1) = (z-2i)(\bar{z}+2i) + (z-1)(\bar{z}-1),$$

οπότε αν υπάρχουν σημεία όπου αυτή παραγωγίζεται θα πρέπει να ικανοποιούν την τυπική εξίσωση $\partial f / \partial \bar{z} = 0$. Η εξίσωση αυτή είναι η $(z-2i) + (z-1) = 0$, η οποία έχει λύση τη $z_0 = \frac{1}{2} + i$. Τώρα θα πρέπει να ελέγξουμε αν στο σημείο αυτό η δοθείσα συνάρτηση παραγωγίζεται. Πραγματικά έχουμε



$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{(z_0+h-2i)(\bar{z}_0+\bar{h}+2i) + (z_0+h-1)(\bar{z}_0+\bar{h}-1) - \frac{5}{2}}{h} =$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{\bar{h}}{h} + \frac{h\bar{h}^2}{h}.$$

Όμως η συνάρτηση αυτή δεν έχει όριο όταν h τείνει προς το 0. Πραγματικά έχουμε

$$\text{αν } h=i, \text{ τότε } \frac{\bar{h}}{h} = 1,$$

ενώ,

$$\text{αν } h=1i, \text{ τότε } \frac{\bar{h}}{h} = -1,$$

οπότε το όριο του πηλίκου διαφορών της f στο σημείο z_0 δεν υπάρχει. Άρα η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται σε κανένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου. $\square$

Παράδειγμα 24.3.

Να εξεταστεί αν υπάρχουν σημεία του κύκλου $B(0, 3/2)$ στα οποία η συνάρτηση f με τύπο

$$f(z) = |z|^2 + \sin |z|^2 + 3 - 2i,$$

είναι παραγωγίσιμη.

Λύση.

Παρατηρούμε ότι αν υπάρχουν τέτοια σημεία θα πρέπει σ' αυτά να επαληθεύεται η εξίσωση $\partial f / \partial \bar{z} = 0$. Αλλά έχουμε

$$f(z) = z\bar{z} + \sin(z\bar{z}) + 3 - 2i,$$

οπότε

$$\partial f / \partial \bar{z} = z + z \cos(z\bar{z}) = 0,$$

η οποία δίνει $z=0$ και $\cos |z|^2 = -1$. Άρα έχουμε $z=0$ και $|z|^2 = (2k+1)\pi$. Από αυτές η μεγαλύτερη θετική τιμή του $|z|$ είναι η $|z| = \sqrt{\pi} = \sqrt{3.14} > 3/2$. Επομένως η μόνη τιμή του z μέσα στον κύκλο $B(0, 3/2)$ για την οποία μπορεί ενδεχομένως να υπάρχει η



παράγωγος της f είναι η $z=0$. Για να βεβαιωθούμε αν πράγματι τούτο σημαίνει εξετάζουμε το πηλίκο διαφορών της f στο $z=0$. Πραγματικά έχουμε

$$\left| \frac{f(z)-f(0)}{z-0} \right| = \left| \frac{|z|^2 + \sin |z|^2}{z} \right| \leq 2|z|,$$

το οποίο τείνει προς το 0 όταν το z τείνει προς το 0. Άρα το μόνο σημείο του κύκλου $B(0, 3/2)$ στο οποίο η δοθείσα συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη είναι το $z=0$. $\square$

Παράδειγμα 24.4.

Να αποδειχτεί ότι κάθε σημείο του μιγαδικού επιπέδου στο οποίο παραγωγίζεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = |z-1|^2 \exp(z|z|^2)$$

ανήκει στο σύνολο $A = \{z = x+iy : |z|^2 |z-1| = 1 \text{ και } y(|z|^2 + x^2 - y^2) = 0\}$.

Λύση.

Γράφουμε πρώτα τον τύπο της συνάρτησης στη μορφή

$$f(z) = (z-1)(\bar{z}+1) \exp(z^2 \bar{z}),$$

Τώρα, αν υπάρχουν σημεία στα οποία η f παραγωγίζεται, θα πρέπει αυτά να ικανοποιούν την τυπική εξίσωση

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,$$

από την οποία παίρνουμε

$$z-1 + |z-1|^2 z^2 = 0, \text{ ή } z-1 = -|z-1|^2 z^2$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει αφ' ενός μεν ότι

$$(1) \quad |z-1||z|^2 = 1,$$

αφ' ετέρου δε ότι ο αριθμός $(z-1)/z^2$, είναι πραγματικός αριθμός. Άρα και ο



αριθμός $(\bar{z})^2(z-1)$ είναι πραγματικός, οπότε αυτός έχει φανταστικό μέρος ίσον με το μηδέν. Θέτοντας $z=x+iy$, η σχέση $\text{Im}(\bar{z})^2(z-1)=0$, γίνεται

$$y|z|^2 + x^2 - y^2 = 0,$$

η οποία μαζί με την (1) δείχνουν ότι το σημείο z ανήκει στο σύνολο A . ό.έ.δ.

□

Παράδειγμα 24.5.

Να βρεθεί η μιγαδική συνάρτηση f αν γνωρίζουμε ότι το πραγματικό μέρος της είναι η συνάρτηση $u(x,y)=3e^x \cos y$ και επιπλέον ότι $f(0)=3$.

Λύση.

Από την πρώτη συνθήκη Cauchy-Riemann έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3e^x \cos y,$$

οπότε με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$v(x,y) = \int 3e^x \cos y dy = 3e^x \sin y + \varphi'(x),$$

$$v(x,y) = \int 3e^x \cos y dy = 3e^x \sin y + \varphi(x),$$

όπου πρέπει να προσδιοριστεί η συνάρτηση φ . Υπολογίζοντας την παράγωγο της $v(x,y)$ ως προς x και χρησιμοποιώντας τη δεύτερη συνθήκη Cauchy-Riemann, βρίσκουμε

$$3e^x \sin y + \varphi'(x) = - \frac{\partial u}{\partial y} = 3e^x \sin y,$$

και έτσι $\varphi(x) = c$ (σταθερά). Επομένως η συνάρτηση f είναι της μορφής

$$f(z) = 3e^x \cos y + i(3e^x \sin y + c) = 3e^x e^{iy} + ic = 3e^z + ic.$$

Αφ' την $f(0) = 3$ παίρνουμε $c=0$, οπότε τελικά η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$f(z) = 3e^z.$$

□



Παράδειγμα 24.6.

Να υπολογιστεί το όριο στο σημείο 0 της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) = \frac{z - e^z + 1 - \sin z}{z + \sinh z}.$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι στο σημείο 0 αυτή παίρνει την απροσδιόριστη μορφή 0 : 0. Επίσης παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις στον αριθμητή και παρονομαστή είναι παραγωγίσιμες στην περιοχή του μηδενός και επιπλέον

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z - e^z + 1 - \sin z)' = \lim_{z \rightarrow 0} (1 - e^z - \cos z) = 1 - 1 - 1 = -1,$$

και

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z + \sinh z)' = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + \cosh z) = 1 + 1 = 2.$$

Έτσι εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hospital παίρνουμε ότι

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - e^z + 1 - \sin z}{z + \sinh z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^z - \cos z}{1 + \cosh z} = \frac{-1}{2}.$$



24.1. Να βρεθούν τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες:

α) $f(z) = z^2 \bar{z},$

β) $f(z) = z e^z,$

γ) $f(z) = |z|^2 \operatorname{Re} z,$

δ) $f(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z,$

ε) $f(z) = \sin 2z - 2i,$

ζ) $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2.$

η) $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z,$

θ) $f(z) = |z - 2i|^2 + |z - 1|^2,$

ι) $f(z) = \cosh z,$

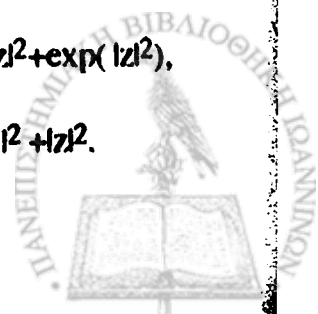
κ) $f(z) = z(\operatorname{Re} z) + \operatorname{Im} z,$

λ) $f(z) = (z + 1) |z|^2,$

μ) $f(z) = -z |z|^2 + \exp(|z|^2),$

ν) $f(z) = z + (z + 1 + i) \bar{z},$

ξ) $f(z) = |z - 2i|^2 + |z|^2.$



24.2. Να αποδειχτεί ότι μεταβαίνοντας από τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) στις πολικές συντεταγμένες (ρ, φ) οι συνθήκες Cauchy-Riemann παίρνουν τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

24.3. Να βρεθούν όλες οι ολόμορφες συναρτήσεις των οποίων το πραγματικό μέρος είναι η συνάρτηση

$$u(x, y) = [(x^2 - y^2)\cos y - 2xy\sin y]e^x.$$

24.4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z \sin z}$

β) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^4 - 3z^3}{z - \sin z}$

§ 25. Ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις

Μια μιγαδική συνάρτηση $f: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται ολόμορφη (holomorphic) ή αναλυτική (analytic) σε ένα σημείο $z_0 \in \mathcal{J}$, αν υπάρχει περιοχή $U(z_0)$ των σημείων z_0 τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παραγωγίζεται σε κάθε $z \in U(z_0)$. Μια συνάρτηση είναι ολόμορφη ή αναλυτική στον τόπο $\mathcal{J}$, αν αυτή είναι τέτοια σε όλα τα σημεία του τόπου $\mathcal{J}$. Για κάθε ολόμορφη συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ισχύει πάντοτε

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Μια συνάρτηση που είναι ολόμορφη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο λέγεται ακεραία συνάρτηση (entire function).

Παράδειγμα 25.1.

Να εξεταστεί αν η εκθετική συνάρτηση e^z είναι ακεραία.



Λύση.

Αν $z = x+iy$, έχουμε

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

οπότε

$$u(x,y) = e^x \cos y \text{ και } v(x,y) = e^x \sin y.$$

Οι συναρτήσεις u και v , ως συναρτήσεις των πραγματικών μεταβλητών x, y , είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο (x,y) (αυτές έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης) και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann (βλ. και Παράδειγμα 2 παραπάνω). Επομένως η συνάρτηση e^z είναι ολόμορφη σ' ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή αυτή είναι ακεραία. Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$(e^z)' = \frac{\partial(e^x \cos y)}{\partial x} + i \frac{\partial(e^x \sin y)}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z. \quad \square$$

Παράδειγμα 25.2.

Να υπολογιστεί το σύνολο όλων των σημείων του μιγαδικού επιπέδου στα οποία η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = \begin{cases} z, & \text{αν } |z| < 1 \\ e^{i \operatorname{Arg} z}, & \text{αν } |z| \geq 1 \end{cases}$$

είναι ολόμορφη.

Λύση.

Κατ' αρχήν η f είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $B(0,1)$, διότι εκεί ταυτίζεται με την ταυτοτική συνάρτηση $f(z) = z$.

Έστω τώρα ένα σημείο a με $|a| \geq 1$ και έστω $\varphi = \operatorname{Arg} a$. Άρα, τότε $f(a) = e^{i\varphi}$. Αν η συνάρτηση f ήταν ολόμορφη στο σημείο a θα υπήρχε και στο a η παράγωγός της, έστω d . Τούτο σημαίνει ότι το όριο του πηλίκου διαφορών της f στο a υπάρχει και είναι ίσο με

$$\lim_{h \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = d.$$



Υποθέτουμε ότι h τείνει προς το a κατά μήκος της ακτίνας που συνδέει το 0 με το a , δηλαδή υποθέτουμε ότι $h=re^{i\varphi}$, όπου $r \geq 1$ και $r \rightarrow |a|$. Τότε $h \rightarrow a$ και

$$d = \lim_{h \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{r \rightarrow |a|} \frac{f(a+re^{i\varphi}) - f(a)}{re^{i\varphi}} = \lim_{r \rightarrow |a|} \frac{e^{i\varphi} - e^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} = 0.$$

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι h τείνει προς το a κατά μήκος της περιφέρειας $|z|=|a|$, δηλαδή υποθέτουμε ότι h είναι της μορφής $h = |a|e^{i\omega}$, όπου $-\pi < \omega < \pi$ και $\omega \rightarrow \varphi$. Τότε $h \rightarrow a$ και

$$d = \lim_{h \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\omega \rightarrow \varphi} \frac{|a|(e^{i\varphi} + e^{i\omega}) - |a|e^{i\varphi}}{|a|e^{i\varphi}} = \lim_{\omega \rightarrow \varphi} e^{i(\omega - \varphi)} = 1,$$

πράγμα που δεν συμφωνεί με την τιμή που βρήκαμε αμέσως παραπάνω. Άρα η συνάρτηση f δεν είναι ολόμορφη στα σημεία z με $|z| \geq 1$. $\square$



25.1. Να αποδειχτεί ότι στον τόπο $\{z: z+|z|=0\}$ η συνάρτηση $f(z) = 1/z$ είναι ολόμορφη.

25.2. Να αποδειχτεί ότι αν δυο ολόμορφες συναρτήσεις f και g ικανοποιούν τη σχέση $f'(z) = g'(z)$ για κάθε z , τότε ισχύει και $f(z) = g(z) + c$, όπου c είναι μία οποιαδήποτε σταθερά.

25.3. Να αποδειχτεί ότι μεταβαίνοντας από τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) στις πολικές συντεταγμένες (ρ, φ) οι συνθήκες Cauchy-Riemann παίρνουν τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

25.4. Να αποδειχτεί ότι αν μια ολόμορφη συνάρτηση $f(z)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\operatorname{Im} f(z) = 0, \text{ για κάθε } z,$$

τότε αυτή είναι σταθερή.



25.5. Να αποδειχτεί ότι αν μια συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι ολόμορφη σε έναν τόπο $\mathcal{J}$, τότε στον τόπο $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+iy \in \mathcal{J}\}$ ισχύει

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

25.6. Να αποδειχτεί ότι αν μια συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι ολόμορφη σε έναν τόπο $\mathcal{J}$, τότε στον τόπο $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+iy \in \mathcal{J}\}$ οι οικογένειες των καμπυλών

$$u(x,y) = \text{σταθ. και } v(x,y) = \text{σταθ.}$$

είναι ορθογώνιες.

25.7. Να αποδειχτεί ότι το μέτρο R και το όρισμα Φ μιας ολόμορφης συνάρτησης

$$f(z) = R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$$

συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

§ 26. Αρμονικές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $\varphi(x,y)$ λέγεται **αρμονική** (harmonic) σε έναν τόπο $\mathcal{J}$, αν στον τόπο αυτόν η φ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι τουλάχιστον δεύτερης τάξης και ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$



Αν μια συνάρτηση $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ είναι ολόμορφη στον τόπο $\mathcal{T}$, τότε και οι δύο συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι αρμονικές στον $\mathcal{T}$. Όμως αν $u_1(x,y)$ και $v_1(x,y)$ είναι δυο αρμονικές συναρτήσεις, η συνάρτηση $f_1(z)=u_1(x,y)+i v_1(x,y)$ μπορεί να μην είναι ολόμορφη, διότι για να συμβαίνει τούτο θα πρέπει οι δυο συναρτήσεις $u_1(x,y)$ και $v_1(x,y)$ να ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann. Δυο αρμονικές συναρτήσεις u, v που ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann λέγονται **συζυγείς αρμονικές** (conjugate harmonic) συναρτήσεις. Η διάταξη στο ζεύγος (u,v) είναι βασική.

Παράδειγμα 26.1.

Να υπολογιστούν όλες οι πραγματικές συναρτήσεις ψ για τις οποίες η συνάρτηση

$$u(x,y)=\psi(x^2-y^2)$$

είναι αρμονική.

Λύση.

Για να είναι η συνάρτηση u αρμονική θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace. Άρα θα έχουμε

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

Θέτουμε

$$s:=x^2-y^2.$$

Τότε έχουμε

$$u=\psi(s),$$

όπου s είναι συνάρτηση των x και y . Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης βρίσκουμε

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \psi'(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 2x\psi'(s),$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \psi'(s) \frac{\partial s}{\partial y} = -2y\psi'(s),$$



$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = 2\psi'(s) + 2x\psi''(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 2\psi'(s) + 4x^2\psi''(s),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -2\psi'(s) - 2y\psi''(s) \frac{\partial s}{\partial y} = -2\psi'(s) + 4y^2\psi''(s).$$

Επομένως έχουμε

$$\nabla^2 u = 2\psi'(s) + 4x^2\psi''(s) - 2\psi'(s) + 4y^2\psi''(s) = 4(x^2 + y^2)\psi''(s) = 0,$$

από όπου παίρνουμε

$$\psi''(s) = 0.$$

Λύνοντας αυτή τη διαφορική εξίσωση προκύπτει η συνάρτηση

$$\psi(s) = \alpha + \beta s,$$

όπου α και β είναι δύο οποιοδήποτε πραγματικοί αριθμοί. □



26.1. Αφού αποδειχτεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αρμονικές, να βρεθούν οι συζυγείς αρμονικές τους συναρτήσεις :

$$\alpha) \quad u = \ln(x^2 + y^2), \quad \beta) \quad u = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x},$$

$$\gamma) \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \delta) \quad u = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

26.2. Να εξεταστεί πότε η συνάρτηση $u = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ είναι αρμονική.

26.3. Αν μια συνάρτηση είναι αρμονική σε έναν τόπο του μιγαδικού επιπέδου και έχει παραγώγους κάθε τάξης, να αποδειχτεί ότι κάθε παράγωγός της είναι επίσης αρμονική στον τόπο αυτόν.

26.4. Να αποδειχτεί ότι το γινόμενο δυο συναρτήσεων, οι οποίες είναι συζυγείς αρμονικές σε έναν τόπο, είναι αρμονική στον τόπο αυτόν.

26.5. Αν $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι ένα ζευγάρι συζυγών αρμονικών συναρτήσεων σε έναν τόπο του καρτεσιανού επιπέδου, να εξεταστεί ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι στον τόπο αυτόν αρμονική:

α) $w(x,y) = Au(x,y) + Bv(x,y)$, όπου A και B είναι σταθεροί μιγαδικοί αριθμοί.

β) $w(x,y) = u^2(x,y) - v^2(x,y).$

γ) $w(x,y) = u(x,y)v(x,y).$

δ) $w(x,y) = e^{u(x,y)} \cos v(x,y).$

26.6. Να βρεθούν όλες οι πραγματικές συναρτήσεις ψ , αν είναι γνωστό ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αρμονικές σε όλο το καρτεσιανό επίπεδο:

α) $u(x,y) = \psi(xy).$

β) $u(x,y) = \psi\left(\frac{y}{x}\right).$

γ) $u(x,y) = \psi(\alpha x + \beta y).$

δ) $u(x,y) = \psi(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$

ε) $u(x,y) = \psi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right).$

26.7. Αν οι συναρτήσεις u_n, v_n ($n=1, 2, \dots, k$) είναι συζυγείς αρμονικές, και έχουν συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης, να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις

$$u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + \dots + u_k + v_k$$

και

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_k v_k$$

είναι αρμονικές.

§ 27. Ορισμός ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης από το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Cauchy-Riemann, μπορούμε πάντοτε να βρούμε μία ολόμορφη συνάρτηση $f(z)$ αν γνωρίζουμε το πραγματικό μέρος της $u(x,y)$ ή το



φανταστικό μέρος της $v(x,y)$. Και τούτο γιατί, αν γνωρίζουμε το ένα μέρος, τότε βρίσκουμε και το άλλο επιλύοντας τις σχετικές διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν από τις συνθήκες Cauchy-Riemann. Όμως με τους παρακάτω τύπους η συνάρτηση f μπορεί να ορισθεί αμέσως χωρίς τη διαδικασία αυτή με μόνο το πραγματικό μέρος της $u(x,y)$ ή το φανταστικό μέρος της $v(x,y)$. Πραγματικά, ισχύουν οι εξής τύποι:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - \bar{f}(\bar{z}_0),$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) + \bar{f}(\bar{z}_0).$$

Εξυπακούεται ότι για να συμβαίνει κάτι τέτοιο θα πρέπει οι συναρτήσεις u και v να είναι αρμονικές συναρτήσεις.

Παράδειγμα 27.1.

Να βρεθεί η ολόμορφη συνάρτηση f της οποίας το πραγματικό μέρος είναι η συνάρτηση

$$u(x,y) = 3(x^2 - y^2)$$

και ικανοποιεί τη σχέση $f(0)=i$.

Λύση.

Κατ' αρχή η συνάρτηση u είναι αρμονική. Άρα υπάρχει τέτοια συνάρτηση f . Εφαρμόζοντας κατ' ευθείαν τον παραπάνω τύπο και έχοντας υπόψη ότι $z_0=0$ παίρνουμε

$$f(z) = 2 \cdot 3 \left[\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{2i}\right)^2 \right] - (-i) = 3z^2 + i.$$

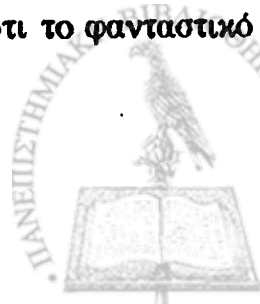
□

Παράδειγμα 27.2.

Να βρεθεί η ολόμορφη συνάρτηση f αν γνωρίζουμε ότι το φανταστικό μέρος της είναι η συνάρτηση με τύπο

$$v(x,y) = 2(2\sinh x \sin y + xy)$$

και ισχύει $f(0)=5$.



Λύση.

Η v είναι αρμονική συνάρτηση. Εφαρμόζοντας τον παραπάνω σχετικό τύπο παίρνουμε ότι

$$f(z) = 2i \cdot 2 \left(2 \sinh \frac{z}{2} \sin \frac{z}{2i} + \frac{z}{2} \frac{z}{2i} \right) = 8i \sinh \frac{z}{2} \sin \frac{z}{2i} + z^2 =$$

$$= 2(e^{z/2} - e^{-z/2})^2 + z^2 = 4 \cosh z + z^2 - 4.$$

□

Παράδειγμα 27.3.

Να βρεθούν όλες οι ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις των οποίων το πραγματικό μέρος είναι

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 2y$$

και επιπλέον ικανοποιούν τη σχέση $[f(i)]^3 = 1+i$.

Λύση.

Κατ' αρχήν από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι $f(i)$ είναι μία από τις κυβικές ρίζες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ του μιγαδικού αριθμού $1+i$, όπου

$$\varepsilon_1 = 2^{1/3} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right),$$

$$\varepsilon_2 = 2^{1/3} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$$

$$\varepsilon_3 = 2^{1/3} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$$

Αν ε είναι μια οποιαδήποτε από τις ρίζες αυτές, εφαρμόζοντας τον παραπάνω σχετικό τύπο παίρνουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= 2 \left(\frac{z-1}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{z+1}{2i} \right)^2 - 4 \left(\frac{z+1}{2i} \right) - \varepsilon = \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{2}(z+1)^2 + 2i(z+1) - \varepsilon \\ &= z^2 + 2iz - 3 - \varepsilon, \end{aligned}$$



οπότε προκύπτει ότι οι ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις που έχουν πραγματικό μέρος τη συνάρτηση u είναι οι

$$f_1(z) = z^2 + 2iz - 3 - \varepsilon_1, \quad f_2(z) = z^2 + 2iz - 3 - \varepsilon_2, \quad f_3(z) = z^2 + 2iz - 3 - \varepsilon_3,$$

όπου $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι οι παραπάνω μιγαδικοί αριθμοί. □



27.1. Να βρεθούν οι ολόμορφες συναρτήσεις $f(z)$ αν είναι γνωστό ότι το πραγματικό μέρος $u(x,y)$, ή το φανταστικό μέρος $v(x,y)$ και μια τιμή $f(z_0)$ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

α) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f(\pi) = \frac{1}{\pi}.$

β) $u(x,y) = \text{Arc tan } \frac{y}{x}, \quad f(1) = 0.$

γ) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x, \quad f(i) = 1.$

δ) $u(x,y) = 2\sin x \cos y - x, \quad f(0) = 0.$

ε) $v(x,y) = 2\cos x \cosh y - x^2 + y^2, \quad f(0) = 3.$

ζ) $v(x,y) = -2\sin 2x \sinh 2y + y, \quad f(0) = 1.$

η) $v(x,y) = 2(\sinh x \sin y + xy), \quad f(0) = i.$

§ 28. Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου μιγαδικής συνάρτησης

Υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση $f(z)$ είναι ολόμορφη σε ένα σημείο z_0 και ακόμη ότι ισχύει $f'(z_0) \neq 0$.



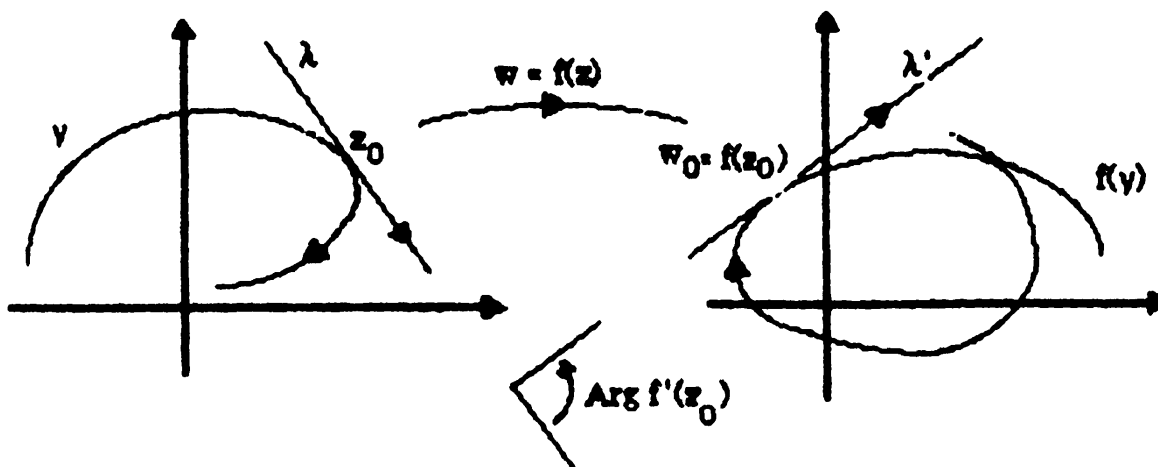
Το μέτρο του $f'(z_0)$, δηλαδή ο πραγματικός αριθμός $|f'(z_0)|$ είναι ο συντελεστής διαστολής ή συστολής στο σημείο z_0 όταν το μιγαδικό z -επίπεδο απεικονιστεί στο μιγαδικό w -επίπεδο μέσω της απεικόνισης $w = f(z)$. Μάλιστα δε έχουμε

α) διαστολή (expansion), όταν ισχύει $|f'(z_0)| > 1$,

και

β) συστολή (contraction), όταν ισχύει $|f'(z_0)| < 1$.

Το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $f'(z_0)$ είναι η γωνία κατά την οποία μία ευθεία γραμμή λ που είναι εφαπτόμενη στο σημείο z_0 μιας τυχαίας λείας καμπύλης γ που διέρχεται από το σημείο z_0 στο μιγαδικό z -επίπεδο πρέπει να στροφίσει ώστε να λάβει τη θέση της ευθείας γραμμής λ' που είναι εφαπτόμενη στο σημείο $f(z_0)$ της καμπύλης $f(\gamma)$ στο μιγαδικό w -επίπεδο, λαμβάνοντας υπόψη τη φορά των καμπυλίων γ και $f(\gamma)$, βλέπε σχήμα.



Παράδειγμα 28.1.

Να βρεθεί ο συντελεστής διαστολής και η γωνία στροφής του μιγαδικού επιπέδου στο σημείο $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ κάτω από τον μετασχηματισμό

$$w = z^2.$$

Λύση.

Εδώ έχουμε $f(z) = z^2$, οπότε οπτικιστικά πρέπει να βρούμε αντίστοιχα το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $f'(z_0)$. Αλλά έχουμε



$$\Gamma(z_0) = 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 4(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

Τούτο σημαίνει ότι

$$|\Gamma(z_0)| = 4 \quad \text{και} \quad \text{Arg } \Gamma(z_0) = \frac{\pi}{4},$$

δηλαδή ο συντελεστής διαστολής είναι ίσος με 4 και η γωνία στροφής ίση με $\pi/4$. $\square$



28.1. Να υπολογιστεί ο συντελεστής συστολής ή διαστολής καθώς επίσης και η γωνία στροφής του μιγαδικού επιπέδου κάτω από τους εξής μετασχηματισμούς στα αντίστοιχα σημεία:

α) $f(z) = e^z$, στο σημείο $z_0 = \ln 2 + i\pi/4$.

β) $f(z) = \sin z$, στο σημείο $z_0 = 1 + i$.

γ) $f(z) = z^3$, στο σημείο $z_0 = 1 + i\pi/2$.

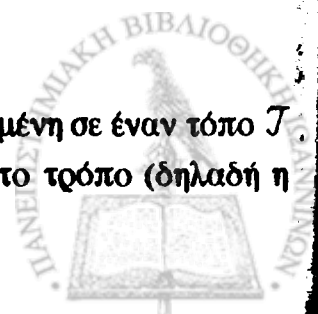
28.2. Να βρεθεί το τμήμα του μιγαδικού επιπέδου το οποίο συστέλλεται και το τμήμα που διαστέλλεται κάτω από τους εξής μετασχηματισμούς:

α) $f(z) = e^z$, β) $f(z) = \text{Ln } z$,

γ) $f(z) = \frac{1}{z}$, δ) $f(z) = z^3$.

§ 29. Εικόνα καμπύλης και τόπου μέσα από ολόμορφη συνάρτηση

Υποθέτουμε τώρα ότι $f(z)$ είναι μια ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε έναν τόπο $\mathcal{J}$ που απεικονίζει τον $\mathcal{J}$ σε έναν τόπο $\mathcal{J}^*$ κατά μονοσήμαντο τρόπο (δηλαδή η



απεικόνιση

$$f: J \rightarrow J^*$$

είναι ένα-προς-ένα). Έστω και γ μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στον τόπο J με παραμετρική παράσταση

$$z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, \beta].$$

Τότε η συνάρτηση $f(z(t))$, $t \in [a, \beta]$ είναι η παραμετρική παράσταση μιας κατά τμήματα διαφορίσιμης καμπύλης καμπύλης $\Gamma = f(\gamma)$ στον τόπο J^* η οποία έχει μήκος

$$\mu(\Gamma) = \int_a^\beta |f'(z(t))| |z'(t)| dt = \int_a^\beta |f'(x(t) + iy(t))| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Πάλι, έστω $f(z)$ μια ένα-προς-ένα ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε έναν τόπο J και έστω K ένα απλά συνεκτικό υποσύνολο του J . Τότε η συνάρτηση

$$w = f(z),$$

απεικονίζει το σύνολο K του z -μγαδικού επιπέδου στο σύνολο

$$K^* = f(K)$$

του w -μγαδικού επιπέδου. Στην περίπτωση αυτή το εμβαδόν $S(K^*)$ του συνόλου K^* δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$S(K^*) = \iint_K |f'(x + iy)|^2 dx dy.$$

Παράδειγμα 29.1.

Δίνεται η καμπύλη γ με παραμετρική παράσταση

$$z(t) = 2 + it, t \in [-1, 1].$$



Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης Γ που είναι η εικόνα της γ μέσω της απεικόνισης

$$w=z^2.$$

Λύση.

Η καμπύλη γ ανήκει στον τόπο

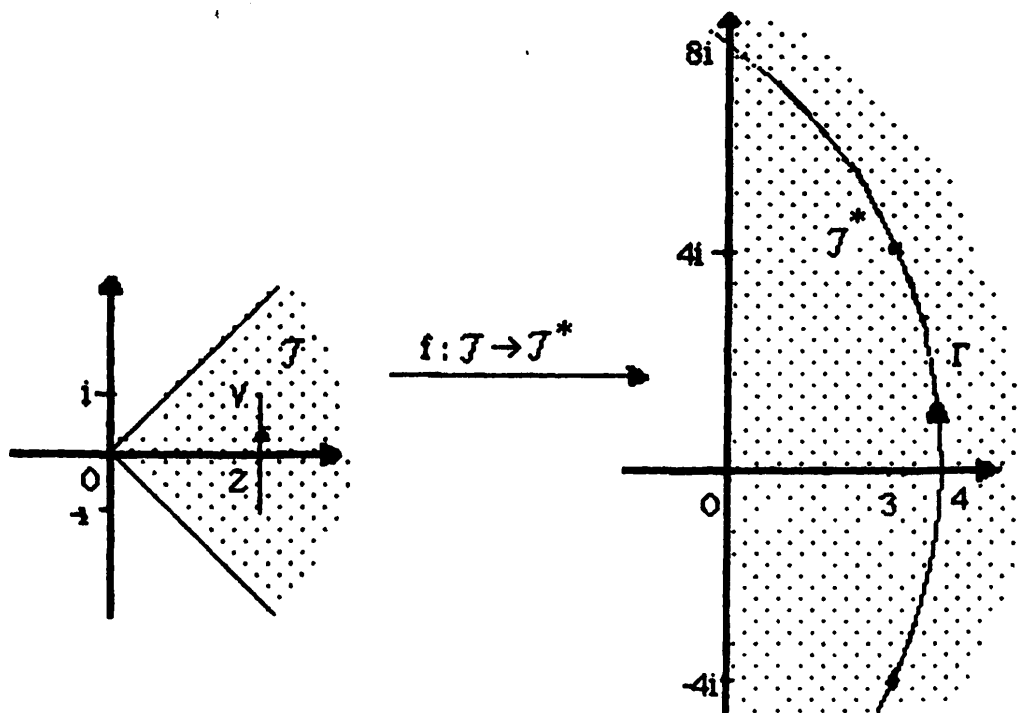
$$\mathcal{J}=\{z: \operatorname{Re} z > (\operatorname{Im} z)^2\}$$

του μιγαδικού επιπέδου. Η εικόνα του τόπου αυτού μέσω της απεικόνισης $w=z^2$ είναι ο τόπος

$$\mathcal{J}^*=\{w: \operatorname{Re} w > 0\},$$

βλ. το παρακάτω σχήμα. Η καμπύλη γ απεικονίζεται στην καμπύλη Γ (που είναι τόξο παραβολής) και έχει παραμετρική παράσταση

$$w(t)=4-t^2+4it, t \in [-1,1].$$



Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος της νέας καμπύλης εφαρμόζουμε τον παραπάνω τύπο και βρίσκουμε



$$\begin{aligned}\mu(\Gamma) &= \int_{-1}^1 2z(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{4+t^2} dt = \\ &= 4 \int_0^1 \sqrt{4+t^2} dt = 4 \left[\frac{4}{5} + \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{4} \right].\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 29.2.

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του συνόλου που είναι η εικόνα μέσω της συνάρτησης

$$f(z) = e^z$$

του τετραγώνου

$$K = \{z: |1 - \operatorname{Re} z| \leq \alpha \text{ και } |\operatorname{Im} z| \leq \alpha\},$$

όπου α είναι ένας σταθερός θετικός πραγματικός αριθμός.

Λύση.

Έστω $z = x + iy$ ένα σημείο το συνόλου K . Τότε θα πρέπει να έχουμε

$$1 - \alpha \leq x \leq 1 + \alpha \text{ και } -\alpha \leq y \leq \alpha.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας τον προηγούμενο τύπο παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}S(J^*) &= \iint_K (x + iy)^2 dx dy = \iint_K e^{2x} dx dy \\ &= \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^{2x} dx \int_{-\alpha}^{\alpha} dy = 2\alpha e^2 \sinh 2\alpha.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 29.3.

Να βρεθεί η εικόνα του ορθογωνίου παραλληλογράμμου

$$K = \{z: 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2 \text{ και } 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$$



μέσω της συνάρτησης $w=f(z):=e^z$. Έπειτα να υπολογιστεί το εμβαδόν του με στοιχειώδη τρόπο και στη συνέχεια να εφαρμοστεί ο σχετικός τύπος που δόθηκε στην παραπάνω παράγραφο. Να εξηγηθεί γιατί τα δύο αποτελέσματα δεν συμφωνούν.

Λύση.

Αν $z=x+iy$ ανήκει στο σύνολο K θα πρέπει να έχουμε $1 \leq x \leq 2$ και $0 \leq y \leq 10$. Επομένως, επειδή $2\pi < 10$, η εικόνα K^* του K μέσω του δοθέντος μετασχηματισμού είναι ο κλειστός κυκλικός δακτύλιος

$$K^* = \{w: e \leq |w| \leq e^2\}$$

του οποίου το εμβαδό είναι ίσο με $\pi(e^4 - e^2)$.

Από την άλλη μεριά αν εφαρμόσουμε τον σχετικό τύπο παίρνουμε ότι το εμβαδόν τούτο πρέπει να ισούται με $5(e^4 - e^2)$, γεγονός το οποίο δεν συμφωνεί με το προηγούμενο συμπέρασμα. Το λάθος οφείλεται στο ότι ο σχετικός τύπος δεν μπορεί να εφαρμοστεί, αφού η συνάρτηση f δεν απεικονίζει το σύνολο K στο K^* κατά μονοσήμαντο τρόπο, δηλαδή δεν είναι ένα-προς-ένα. Πραγματικά, παρατηρούμε ότι τα σημεία $x+0i$ και $x+2\pi i$ του συνόλου K έχουν την ίδια εικόνα $w=e^x+0i$ στο σύνολο K^* για κάθε x με $1 \leq x \leq 2$. □



29.1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν καθώς επίσης και το μήκος του συνόρου του τόπου που είναι η εικόνα του τετραγώνου

$$\{z: 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$$

μέσω της απεικόνισης $w=z^2$.

29.2. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της εικόνας μέσω του μετασχηματισμού $w=\cos z$ του τετραγώνου

$$\{z: \frac{\pi}{6} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{3} \text{ και } \frac{\pi}{6} \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{\pi}{3}\}.$$

29.3. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της εικόνας μέσω του μετασχηματισμού $w=z^2$ του δακτυλικού τμήματος



$$\{z: 1 \leq z \leq 2 \text{ και } -\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg} z \leq \frac{\pi}{3}\}.$$

29.4. Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης που είναι η εικόνα μέσω του μετασχηματισμού $w=e^z$ του ευθυγράμμιου τμήματος $y=x, 0 \leq x \leq 2\pi$.

§ 30. Επικαμπύλια ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων

Έστω γ μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο με παραμετρική παράσταση $z=z(t), t \in [\alpha, \beta]$ και $f(z)$ μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των σημείων της καμπύλης. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt$$

είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (line integral) της συνάρτησης f κατά μήκος της καμπύλης γ . Τούτο είναι ένας μιγαδικός αριθμός που δεν εξαρτάται από την παραμετρική παράσταση της καμπύλης γ και επιπλέον έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

α) Αν $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ είναι μια διαμέριση της καμπύλης γ τότε έχουμε

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz$$

β) Αν f, g είναι δυο συνεχείς συναρτήσεις και a, b είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε

$$\int_{\gamma} (af(z) + bg(z)) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz.$$

γ) Αν $\mu(\gamma)$ είναι το μήκος της καμπύλης γ και M ένα άνω φράγμα της συνάρτησης $|f(z)|, z \in \gamma$, τότε ισχύει



$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \mu(\gamma).$$

δ) Υποθέτουμε ότι f και F είναι δυο συναρτήσεις ορισμένες σε έναν τόπο $\mathcal{J}$ του μιγαδικού επιπέδου τέτοιες ώστε

$$F'(z) = f(z), \quad \text{για κάθε } z \in \mathcal{J}.$$

Τότε για κάθε κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη γ με αρχικό σημείο a και τελικό σημείο b ισχύει ο τύπος των **Newton-Leibnitz**:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(b) - F(a).$$

Επομένως ισχύει και

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

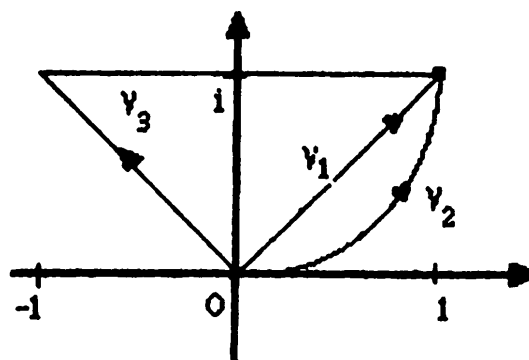
για κάθε κατά τμήματα διαφορίσιμη κλειστή καμπύλη γ που βρίσκεται στον τόπο $\mathcal{J}$.

Παράδειγμα 30.1.

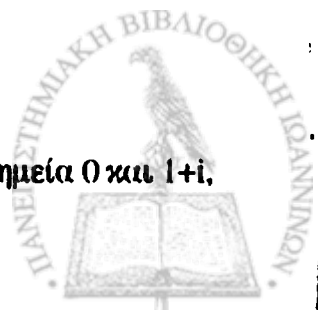
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} [1+2i - 2\bar{z}] dz$$

όπου γ είναι μία από τις καμπύλες του παρακάτω σχήματος που έχουν αρχικό σημείο το 0 και τελικό το σημείο $1+i$:



α) γ_1 είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία 0 και $1+i$.



β) γ_2 είναι τμήμα της παραβολής $y=x^2$, και

γ) γ_3 είναι η τεθλασμένη γραμμή που αποτελείται από τα δύο

ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν αντίστοιχα τα σημεία $0, -1+i$ και $-1+i, 1+i$.

Λύση.

α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $\gamma=\gamma_1$. Μια παραμετρική παράσταση της καμπύλης αυτής είναι $z(t) = t + it, t \in [0,1]$. Επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} (1+2i - 2\bar{z})dz &= \int_0^1 (1+2i - 2(t-it))(1+i)dt = \\ &= (1+i) \left[(1+2i) \int_0^1 dt - 2(1-i) \int_0^1 t dt \right] = (1+i) \left[(1+2i) - (1-i) \right] = \\ &= 3i(1+i) = -3(1-i). \end{aligned}$$

β) Έστω ότι $\gamma=\gamma_2$. Μια παραμετρική παράσταση της καμπύλης είναι η $z(t)=t+it^2, t \in [0,1]$, οπότε το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} (1+2i - 2\bar{z})dz &= \int_0^1 (1+2i - 2(t-it^2))(1+2it)dt = \\ &= \int_0^1 (1+2it+2i-4t-2t-4it^2+2it^2-4t^3)dt = \\ &= \int_0^1 (1+2i-6t-4t^3+2it-2it^2)dt = 1+2i-3-i+\frac{2}{3}i = \\ &= -3+\frac{7}{3}i. \end{aligned}$$

γ) Τώρα έστω ότι $\gamma = \gamma_3$. Εδώ παρατηρούμε ότι η καμπύλη αυτή διασπάται σε δυο άλλες καμπύλες γ και γ' που είναι τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα σημεία $0, -1+i$ και $-1+i, 1+i$ αντίστοιχα. Μια παραμετρική παράσταση της καμπύλης γ είναι η $z(t) = -1+it, t \in [0,1]$, και της γ' η $z(t) = t+i, t \in [-1,1]$. Επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{\gamma_3} (1+2i - 2\bar{z})dz = \int_{\gamma} (1+2i - 2\bar{z})dz + \int_{\gamma'} (1+2i - 2\bar{z})dz =$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 [1+2i-2(-t-it)](-1+i)dt + \int_{-1}^1 [1+2i-2(t-i)](1)dt = \\
 &= (-1+i) \int_0^1 [1+2i-2t+2it]dt + \int_{-1}^1 [1+4i-2t]dt = \\
 &= (1+i)[1+2i-1+i] + (1+4i)2 = (1+i)3i + 2+8i = \\
 &= -1+11i.
 \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 30.2.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} [z + \sqrt{z}] dz,$$

όπου γ είναι η πάνω ημιπεριφέρεια του μοναδιαίου κύκλου με θετική φορά και $\sqrt{z}$ είναι εκείνος ο κλάδος της τετραγωνικής ρίζας του z για τον οποίο ισχύει $\sqrt{1} = -1$.

Λύση.

Μια παραμετρική παράσταση της καμπύλης γ είναι η $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ και οι δυο τετραγωνικές ρίζες του $z(t)$ είναι οι

$$e^{i(t/2)} \text{ και } e^{i(t/2) + i\pi}.$$

Από τους δυο αυτούς κλάδους κρατάμε τον δεύτερο, αφού για $t=0$ έχουμε $e^{i(0/2) + i\pi} = e^{i\pi} = -1$. Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} [z + \sqrt{z}] dz &= \int_0^{\pi} [e^{it} + e^{i(t/2) + i\pi}] i e^{it} dt = i \int_0^{\pi} e^{2it} dt + i e^{i\pi} \int_0^{\pi} e^{i(3t/2)} dt = \\
 &= \frac{1}{2} e^{2it} \Big|_{[0, \pi]} - \frac{2}{3} e^{i(3t/2)} \Big|_{[0, \pi]} = \frac{1}{2} (e^{2i\pi} - e^0) - \frac{2}{3} (e^{i(3\pi/2)} - e^0) = \\
 &= -\frac{2}{3} (0 - 1 - 1) = \frac{2}{3} (1+i).
 \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 30.3.

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα



$$\int_{\gamma} (z^2 + 3z + 2) dz,$$

όπου γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο $1-i$ με το $-1+2i$.

Λύση.

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$z^2 + 3z + 2 = \frac{d}{dz} \left(\frac{z^3}{3} + \frac{3z^2}{2} + 2z \right),$$

οπότε εφαρμόζοντας τον τύπο Newton - Leibniz παίρνουμε

$$\int_{\gamma} (z^2 + 3z + 2) dz = \frac{(1-i)^3}{3} + \frac{3(1-i)^2}{2} + 2(1-i) - \frac{(-1+2i)^3}{3} - \frac{3(-1+2i)^2}{2} - 2(-1+2i) =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{17}{3}i + \frac{17}{6} + \frac{8}{3}i = \frac{25}{6} - 3i.$$

□

Παράδειγμα 30.4.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{\ln^3 z}{z} dz,$$

όπου γ είναι το μικρότερο τμήμα της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου με αρχικό σημείο το 1 και τελικό το 1 .

Λύση.

1ος τρόπος: Παρατηρούμε ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι ολόμορφη σε μια περιοχή της καμπύλης γ και τέτοια ώστε

$$\frac{\ln^3 z}{z} = \frac{d}{dz} \left(\frac{\ln^4 z}{4} \right).$$

Επομένως το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\int_{\gamma} \frac{\ln^3 z}{z} dz = \frac{\ln^4 1}{4} - \frac{\ln^4 1}{4} = \frac{\ln^4 1}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{\ln}{4} \right)^4 = \frac{\pi^4}{64}.$$



2ος τρόπος: Θέτουμε $z = e^{i\varphi}$ (εδώ έχουμε $\rho = |z| = 1$), οπότε παίρνουμε

$$\ln z = i\varphi, \quad dz = i e^{i\varphi} d\varphi,$$

όπου η πραγματική μεταβλητή μεταβάλλεται στο διάστημα μεταξύ 0 και $\pi/2$. Άρα έχουμε

$$\int_{\gamma} \frac{\ln^3 z}{z} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{i 3\varphi^3 e^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^3 d\varphi = \frac{\pi^4}{64}.$$

□



30.1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} (z^2 + 3|z|^2) dz,$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο το σημείο 0.

30.2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} e^{\bar{z}} dz,$$

όπου γ είναι

- α) το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το 0 με το $\pi - i\pi$,
και
β) το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο $-i\pi$ με το π .

30.3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} (2z^2 + 3z - 1 + i) dz,$$

όπου γ είναι η καμπύλη που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το 0 με το $1-i$ και το $1-i$ με το $2+i$.



30.4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} (\sin z + z \cos z) dz,$$

όπου γ είναι η καμπύλη που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το 1 με το 0 και το 0 με το i .

30.5. Για κάθε ακέραιο $n > 1$ και $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ έστω z_k ο k -κλάδος της n -οστής ρίζας του μιγαδικού αριθμού z . Αν γ είναι μια οποιαδήποτε διαφορίσιμη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδειχτεί ότι ισχύει

$$\sum_{k=0}^n \int_{\gamma} \frac{dz}{z_k} = 0.$$

30.6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

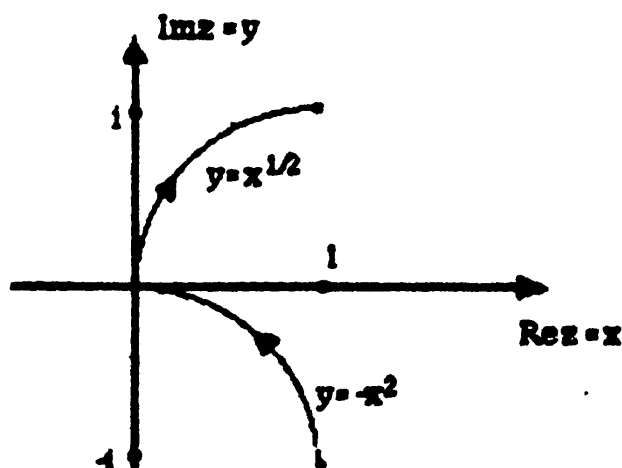
$$\int_{\gamma} z \operatorname{Im} z^2 dz$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση $z(t) = e^{it}$, $t \in [-\pi, 0]$.

30.7. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} (z^{1995} + \sin z) dz,$$

όπου γ είναι η καμπύλη του παρακάτω σχήματος:



30.8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} z \operatorname{Re} z dz$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

30.9. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^{3/4}}$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ και ο κλάδος της τέταρτης ρίζας του z είναι εκείνος για τον οποίο ισχύει $\sqrt[4]{1} = 1$.

30.10. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z dz}{\sqrt{\sin z}}$$

όπου γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο -1 με το i και ο κλάδος της ρίζας του $\sin z$ είναι εκείνος για τον οποίο ισχύει

$$\sqrt{\sin(-1)} = i\sqrt{\sin 1}.$$

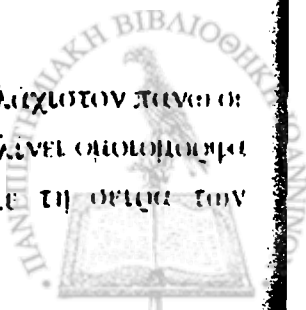
§ 31. Ολοκλήρωση

σειρών μιγαδικών συναρτήσεων

Υποθέτουμε ότι

$$\sum f_n$$

είναι μια σειρά συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων τουλάχιστον πάνω σε μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη γ . Αν η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιομορφικά πάνω στη γ , τότε το ολοκλήρωμα της σειράς είναι ίσο με τη σειρά των



ολοκληρωμάτων, δηλαδή ισχύει ότι

$$\int_{\gamma} [\sum f_n(z)] dz = \sum \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

είναι μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης R και ότι γ είναι μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στον δίσκο $B(z_0, R)$ με αρχικό σημείο a και τελικό σημείο b . Εφαρμόζοντας τον παρακάτω τύπο παίρνουμε

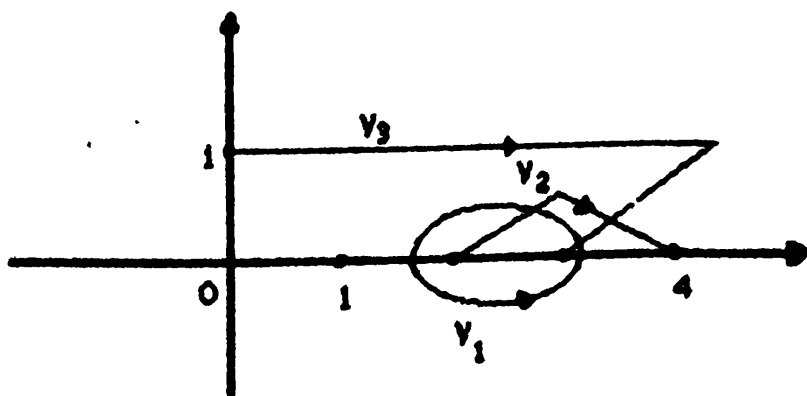
$$\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{(b-z_0)^{n+1} - (a-z_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Παράδειγμα 31.1.

Να εξεταστεί αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-3)^n dz$$

υπάρχει όταν γ είναι μία από τις καμπύλες του παρακάτω σχήματος και, στην περίπτωση που υπάρχει, να υπολογιστεί τούτο.



Λύση.

Παρατηρούμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-3)^n$$

είναι ίση με 2, οπότε η δυναμοσειρά συγκλίνει όταν z ανήκει στην ανοικτή κυκλική περιοχή $B(3,2)$. Επίσης παρατηρούμε ότι οι καμπύλες γ_1 και γ_2 ανήκουν ολόκληρες μέσα στην περιοχή αυτή, ενώ η γ_3 έχει ένα τμήμα της εκτός της περιοχής. Άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπάρχει μόνο κατά μήκος των δύο πρώτων καμπυλών. Μάλιστα δε εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο βρίσκουμε

$$\int_{\gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-3)^n dz = 0,$$

διότι η καμπύλη γ_1 είναι κλειστή και

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-3)^n dz &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(4-3)^{n+1} - (2-3)^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{(n+1)2^n}, \end{aligned}$$

διότι η καμπύλη γ_2 έχει αρχικό σημείο το 2 και τελικό το 4. □



31.1. Δίνονται οι καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ και γ_4 , όπου

γ_1 είναι η καμπύλη που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν διαδοχικά τα σημεία i με το -1 , το -1 με το $-1-i$ και το $-1-i$ με το $-i$.

γ_2 είναι η αρνητικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο $-i$ και ακτίνα ίση με $1/2$.

γ_3 είναι το ειδικό τμήμα το οποίο ενώνει το σημείο 1 με το $3+i$.

γ_4 είναι η θετικά προσανατολισμένη ημιπεριφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα ίση με 5.

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα παρακάτω επικαμπύλια ολοκληρώματα και αν "ναι", να υπολογιστούν αυτά κατά μήκος των καμπυλών γ_1 , γ_2 , γ_3 και γ_4 :

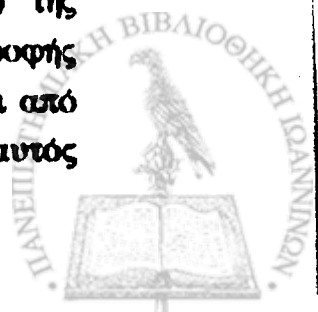
$$\alpha) \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{3}\right)^n dz.$$

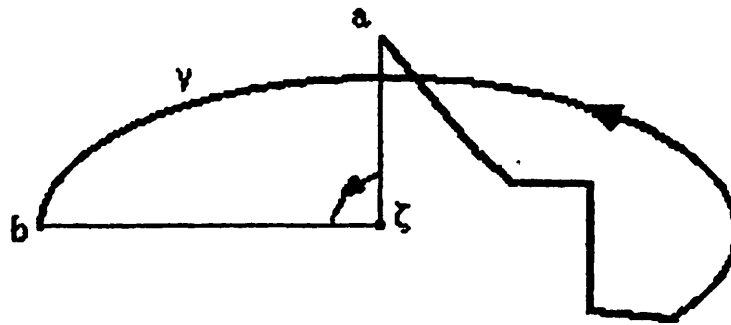
$$\beta) \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n!} dz.$$

$$\gamma) \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z+1+i}{2}\right)^n dz.$$

§ 32. Δείκτης στροφής καμπύλης

Έστω γ μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο και ζ ένα σημείο το οποίο δεν ανήκει πάνω στην καμπύλη. Υποθέτουμε ότι ένας παρατηρητής που στέκεται στο σημείο ζ παρατηρεί ένα κινητό που διαγράφει την καμπύλη γ από το αρχικό σημείο a μέχρι το τελικό της σημείο b . Τότε το βλέμμα του παρατηρητή γράφει μια γωνία θ . Το πηλίκο της γωνίας θ μετρομένης σε ακτίνα δια του αριθμού 2π , δηλαδή το τμήμα του κύκλου που γράφει το βλέμμα του παρατηρητή, είναι ο δείκτης στροφής (winding number, ή index) της καμπύλης γ ως προς το σημείο ζ , που παριστάνεται με $I(\gamma, \zeta)$. Ο δείκτης στροφής λαμβάνεται θετικός αν η κίνηση του βλέμματος του παρατηρητή γίνεται από δεξιά προς τα αριστερά, ενώ αν γίνεται από αριστερά προς τα δεξιά, τότε αυτός λαμβάνεται αρνητικός.





Ο μαθηματικός ορισμός του δείκτη στροφής δίνεται από τον τύπο

$$I(\gamma, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left[\ln \frac{a-\zeta}{b-\zeta} + \int_{\gamma} \frac{dz}{z-\zeta} \right]$$

Επομένως αν η καμπύλη γ είναι κλειστή τότε ο δείκτης στροφής της γ ως προς κάθε σημείο ζ που δεν ανήκει πάνω στη γ είναι

$$I(\gamma, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-\zeta}$$

Στην περίπτωση της κλειστής καμπύλης ο δείκτης στροφής είναι πάντοτε ένας ακέραιος αριθμός. Μάλιστα δε ισχύει

$$I(\gamma, \zeta) = 0, \text{ για κάθε } \zeta \in \text{εξ}(\gamma).$$

Αν η καμπύλη γ είναι απλή και κλειστή τότε ισχύει επιπλέον ότι

$$I(\gamma, \zeta) = \pm 1, \text{ για κάθε } \zeta \in \text{εσ}(\gamma).$$

Αν έχουμε την τιμή $+1$, η καμπύλη έχει θετική φορά και αν τη -1 , αυτή έχει την αρνητική φορά.

Παράδειγμα 32.1.

Να υπολογιστεί ο δείκτης στροφής της καμπύλης γ με παραμετρική παράσταση

$$z(t) = 3e^{it}, \quad t \in [0, \frac{1}{2}]$$

ως προς το σημείο 0.

Λύση.

1ος τρόπος: Το σημείο 0 δεν ανήκει πάνω στην καμπύλη γ και η καμπύλη



είναι διαιφκρήσιμη. Άρα ο δείκτης στροφής υπάρχει και ισούται με

$$I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \left[\ln \frac{|z|}{|w|} + \int_{\gamma} \frac{dz}{z\zeta} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[\ln \frac{3}{3} + \int_0^{1/2} \frac{3i\pi e^{i\pi t} dt}{3e^{i\pi t}} \right] = \frac{1}{2\pi i} \left[0 + \pi i \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4}.$$

2ος τρόπος: Η καμπύλη γ είναι το πρώτο τέταρτο της θετικά προσανατολισμένης περιφέρειας του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα ίση με 3. Άρα ο δείκτης στροφής είναι

$$I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}.$$

□

Παράδειγμα 32.2.

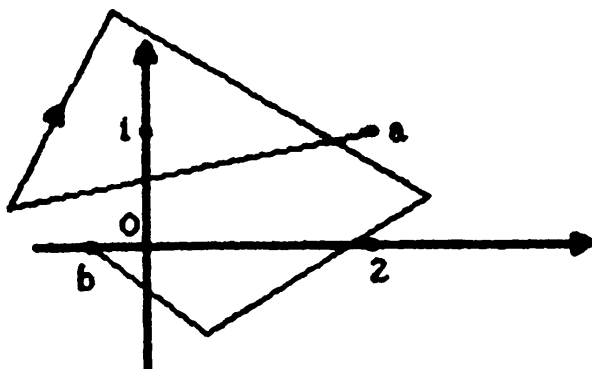
Να κατασκευαστεί μία κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη γ που να έχει δείκτη στροφής ως προς το σημείο 1 ίσον με $-4/3$.

Λύση.

Ο αριθμός $4/3$ δηλώνει ότι αν σταθούμε στο σημείο 1 και παρατηρούμε ένα κινητό που διαγράφει την καμπύλη, τότε θα στραφούμε προς τα δεξιά κατά μια γωνία ίση με

$$(4/3) \times 360^\circ = 360^\circ + 120^\circ.$$

Επίσης το πρόσημο " - " σημαίνει ότι βαδίζοντας πάνω στην καμπύλη έχουμε το σημείο 1 προς τα δεξιά μας.



Άρα μια τέτοια καμπύλη μπορεί να είναι όπως στο σχήμα, όπου το αρχικό σημείο είναι το $a=2+i$ και τελικό το $b=-\sqrt{3}/3$.

□



Παράδειγμα 32.3.

Υποθέτουμε ότι γ_1 και γ_2 είναι δύο κλειστές διαφορίσιμες καμπύλες με παραμετρικές παραστάσεις $z_1(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ και $z_2(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, τέτοιες ώστε να ισχύει

$$|z_1(t) - z_2(t)| < |z_2(t)|, \text{ για κάθε } t \in [\alpha, \beta].$$

Να αποδειχτεί ότι $I(\gamma_1, 0) = I(\gamma_2, 0)$.

Απόδειξη.

Αν για κάποιο $t \in [\alpha, \beta]$ ισχύει ότι $z_2(t) = 0$, τότε από τη δοθείσα σχέση θα έχουμε $|z_1(t)| < 0$, άτοπο. Επομένως η $z_2(t)$ δεν μηδενίζεται για καμμία τιμή του t . Έτσι θέτοντας

$$z(t) = \frac{z_1(t)}{z_2(t)}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

παίρνουμε μία συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση

$$|z(t) - 1| < 1, \text{ για κάθε } t \in [\alpha, \beta]$$

και η οποία επομένως παριστάνει μία κλειστή διαφορίσιμη καμπύλη γ που βρίσκεται μέσα στον κύκλο με κέντρο 1 και ακτίνα 1. Άρα το 0 ανήκει στο εξωτερικό της καμπύλης γ και επομένως ο δείκτης στροφής της καμπύλης γ ως προς το σημείο 0 θα είναι ίσος με μηδέν, δηλαδή $I(\gamma, 0) = 0$. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} 0 = I(\gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{z'(t)dt}{z(t)-0} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{z_1'(t)dt}{z_1(t)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{z_2'(t)dt}{z_2(t)} = \\ &= I(\gamma_1, 0) - I(\gamma_2, 0), \end{aligned}$$

πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο συμπέρασμα. $\square$



Παράδειγμα 32.4.

Έστω γ μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο η οποία δεν διέρχεται από το σημείο 0 και η οποία έχει παραμετρική παράσταση $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, \beta]$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$x(a)y(\beta) = x(\beta)y(a).$$

Να αποδειχτεί ότι ο δείκτης στροφής της καμπύλης γ ως προς το σημείο 0 είναι ένας ακέραιος αριθμός.

Απόδειξη.

Έστω a το αρχικό και b το τελικό σημείο της καμπύλης γ . Είναι προφανές ότι για να είναι ο δείκτης στροφής $I(\gamma, 0)$ ένας ακέραιος αριθμός, θα πρέπει οι δύο προσκινιτολισμένες ευθείες $E(0, a)$ και $E(0, b)$ να ταυτίζονται. Τούτο θα συμβαίνει αν και μόνο αν η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές είναι ίση με το 0, αφού και οι δύο ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο 0. Αλλά η γωνία αυτή είναι ίση με

$$\arg b - \arg a = \arctan \frac{y(\beta)}{x(\beta)} - \arctan \frac{y(a)}{x(a)} = 0,$$

λόγω της συνθήκης που δόθηκε. Άρα, πραγματικά, οι δύο ευθείες ταυτίζονται και το συμπέρασμα αποδείχτηκε.

□



32.1. Να δοθεί παράδειγμα απλής μη κλειστής καμπύλης γ που να ικανοποιεί τη σχέση $I(2\gamma, 1) + I(-\gamma, 0) = 2$.

32.2. Να δοθεί παράδειγμα απλής μη κλειστής καμπύλης γ που να ικανοποιεί τη σχέση $I(\gamma, 1) + I(\gamma, -1) = 5$.

32.3. Να δοθεί παράδειγμα μιας απλής καμπύλης γ που να ικανοποιεί τη σχέση $I(\gamma, 1+i) = 3,25$.

32.4. Έστω γ μια κατά τμήματα διαφορίσιμη κλειστή καμπύλη και έστω a ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου το οποίο απέχει από την καμπύλη γ απόσταση $d (> 0)$, δηλαδή



$$d = \min \{ |a - z| : z \in \gamma \}.$$

Να αποδειχτεί ότι ισχύει η σχέση

$$\mu(\gamma) \geq 2\pi d \cdot |I(\gamma, a)|.$$

§ 33. Αλυσίδες καμπυλών

Μία αλυσίδα καμπυλών, ή απλά αλυσίδα (chain), Γ στο μιγαδικό επίπεδο είναι μια πεπερασμένη συλλογή καμπυλών $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, γεγονός που το δηλώνουμε γράφοντας

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n.$$

Το άθροισμα δυο αλυσίδων είναι η αλυσίδα που αποτελείται από όλες τις καμπύλες και των δύο αλυσίδων. Επίσης για κάθε μη μηδενικό ακέραιο αριθμό λ γράφουμε $\lambda\gamma$ και εννοούμε την αλυσίδα εκείνη που έχει την καμπύλη γ τόσες φορές όσες δηλώνει ο ακέραιος λ έχοντας τη φορά της γ , αν $\lambda > 0$ και την αντίθετη της γ , αν $\lambda < 0$.

Το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** μιας μιγαδικής συνάρτησης f που είναι ορισμένη και συνεχής κατά μήκος μιας αλυσίδας

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n,$$

ορίζεται με τον τύπο

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz,$$

και (επομένως) ο δείκτης στροφής $I(\Gamma, \zeta)$ της αλυσίδας ως προς ένα σημείο ζ που δεν ανήκει σε καμία καμπύλη της αλυσίδας ορίζεται να είναι ο αριθμός

$$I(\Gamma, \zeta) = I(\gamma_1, \zeta) + I(\gamma_2, \zeta) + \dots + I(\gamma_n, \zeta).$$

Μια κλειστή αλυσίδα Γ , δηλαδή μια αλυσίδα της οποίας όλες οι καμπύλες



μπαγκιόν και εγκυκλίων και να γίνουν κλειστές, είναι ομόλογη μηδέν στον τόπο $\mathcal{T}$, αν ο δείκτης στροφής της αλυσίδας ως προς κάθε σημείο που δεν ανήκει στον τόπο $\mathcal{T}$ είναι ίσος με το μηδέν. Τούτο δηλώνεται με

$$\Gamma \sim 0 \text{ στον } \mathcal{T}.$$

Δύο αλυσίδες c_1 και c_2 είναι ομόλογες σε έναν τόπο $\mathcal{T}$ και γράφουμε

$$\Gamma_1 \sim \Gamma_2 \text{ στον } \mathcal{T},$$

όταν η αλυσίδα $\Gamma_1 - \Gamma_2 := \Gamma_1 + (-\Gamma_2)$ είναι ομόλογη μηδέν στον τόπο $\mathcal{T}$.

Παράδειγμα 33.1.

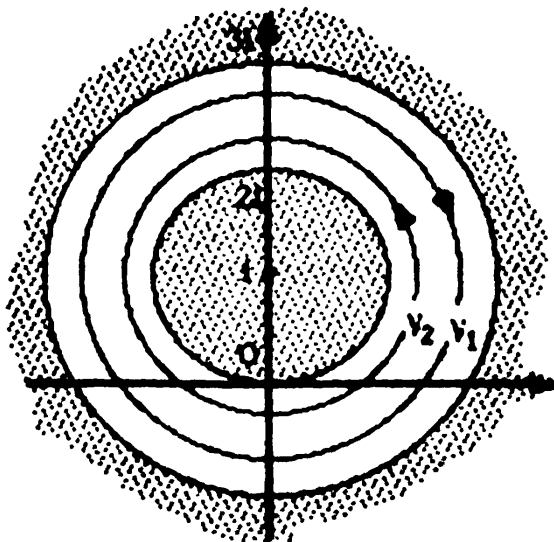
Μέσα στον ανοικτό δακτύλιο $\Delta(1,1,3)$ να κατασκευαστεί μια κλειστή αλυσίδα $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, (όπου οι δύο καμπύλες γ_1 και γ_2 είναι κλειστές) τέτοια ώστε η Γ να είναι ομόλογη μηδέν στη $\Delta(1,1,3)$, αλλά οι καμπύλες να μην είναι ομόλογες μηδέν στην περιοχή αυτή.

!

Λύση.

Θα πρέπει να ισχύει $I(\Gamma, \zeta) = 0$, ή ισοδύναμα, $I(\gamma_1, \zeta) + I(\gamma_2, \zeta) = 0$, για κάθε ζ που δεν ανήκει στην δακτυλική περιοχή $\Delta(1,1,3)$ και επιπλέον να υπάρχουν σημεία ζ τέτοια ώστε να ισχύει

$$I(\gamma_1, \zeta) = -I(\gamma_2, \zeta) \neq 0.$$



Επομένως μια τέτοια αλυσίδα θα μπορούσε να είναι όπως στο παραπάνω σχήμα. $\square$

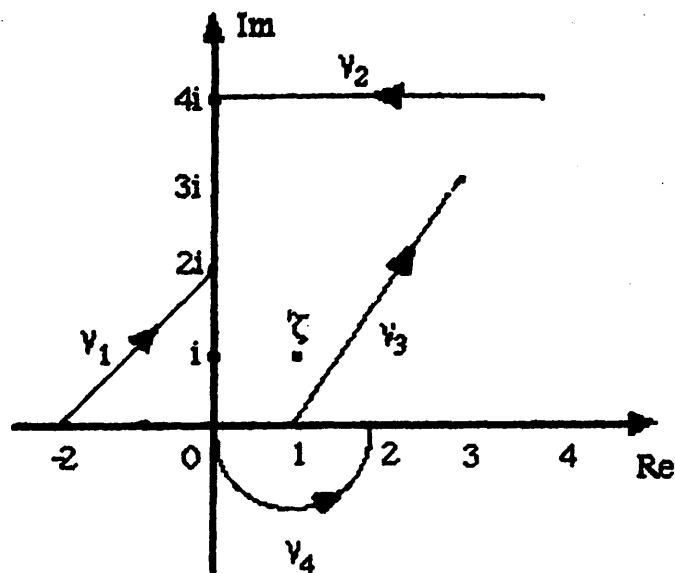


Παράδειγμα 33.2.

Να βρεθεί ο δείκτης στροφής ως προς το σημείο $\zeta=1+i$ της αλυσίδας

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 + 5\gamma_4,$$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ και γ_4 είναι οι καμπύλες του σχήματος,



δηλαδή

γ_1 : είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο -2 με το $2i$,

γ_2 : είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο $4+4i$ με το $4i$,

γ_3 : είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο -2 με το $2i$, και

γ_4 : είναι η κάτω ημιπεριφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 1, ακτίνα 1, αρχικό σημείο το 0 και τελικό το 2.

Λύση.

Από τον ορισμό του δείκτη στροφής της αλυσίδας Γ έχουμε

$$I(\Gamma, \zeta) = I(\gamma_1, \zeta) + I(\gamma_2, \zeta) - 2I(\gamma_3, \zeta) + 5I(\gamma_4, \zeta),$$

όπου $\zeta=1+i$.

Χρησιμοποιώντας απλή γεωμετρία βρίσκουμε ότι



$$I(\gamma_1, \zeta) = I(\gamma_1, 1+i) = -\frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} \right],$$

$$I(\gamma_2, \zeta) = I(\gamma_2, 1+i) = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} \right],$$

$$I(\gamma_3, \zeta) = I(\gamma_3, 1+i) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{3}{8},$$

$$I(\gamma_4, \zeta) = I(\gamma_4, 1+i) = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

Επομένως έχουμε

$$I(\Gamma, 1+i) = I(\gamma_1, 1+i) + I(\gamma_2, 1+i) - 2I(\gamma_3, 1+i) + 5I(\gamma_4, 1+i) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} \right] + \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} \right] + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

□



33.1. Δίνεται η αλυσίδα $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, όπου οι καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ και γ_4 , είναι οι εξής:

γ_1 : είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο -3i με το σημείο 3,

γ_2 : είναι το μεγαλύτερο τμήμα της περιφέρειας του κύκλου με κέντρο το σημείο 0, ακτίνα 1, αρχικό σημείο το 1 και τελικό το -1.

γ_3 : είναι το τμήμα της παραβολής

$$x = 4 - y^2,$$

με αρχικό σημείο το 2 και τελικό το 2i, και

γ_4 : είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο 2i με το σημείο -1.

Να βρεθεί ο δείκτης στροφής της αλυσίδας Γ ως προς τα σημεία

α) $\zeta = 1 - i,$

β) $\zeta = 1 + i,$



$$\gamma) \quad \zeta = 2 - 2i,$$

$$\delta) \quad \zeta = 3 + 2i.$$

33.2. Να δοθεί παράδειγμα μιας αλυσίδας $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, με την ιδιότητα ότι

$$I(\Gamma, 2i) = -\frac{7}{3}.$$

§ 34. Θεώρημα του Cauchy για το ολοκλήρωμα ολόμορφης συνάρτησης

Μια συνάρτηση f είναι τοπικά φραγμένη (locally bounded) σε ένα σημείο a του μιγαδικού επιπέδου, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $M > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$|f(z)| < M, \text{ για κάθε } z \text{ με } |z - a| < \varepsilon.$$

Είναι φανερό ότι αν το όριο της συνάρτησης $f(z)$ στο σημείο a , υπάρχει και είναι ένας (πεπερασμένος) μιγαδικός αριθμός, τότε αυτή είναι τοπικά φραγμένη στο a .

Το Θεώρημα του Cauchy για το Ολοκλήρωμα Ολόμορφης Συνάρτησης είναι το εξής:

Θεωρούμε μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και ολόμορφη σε έναν τόπο $\mathcal{J}$ του μιγαδικού επιπέδου εκτός από τα σημεία $a_1, a_2, \dots, a_n$ του τόπου $\mathcal{J}$, στα οποία όμως η f είναι τοπικά φραγμένη. Αν Γ είναι μια κλειστή αλυσίδα που βρίσκεται στον τόπο $\mathcal{J} - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ και είναι ομόλογη μηδέν στον τόπο $\mathcal{J}$, τότε ισχύει ότι

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Ένα συμπέρασμα χρήσιμο στις εφαρμογές το οποίο είναι άμεσο πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος είναι και το εξής :

Θεωρούμε μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και ολόμορφη σε έναν τόπο $\mathcal{J}$ του μιγαδικού επιπέδου εκτός από τα σημεία $a_1, a_2, \dots, a_n$ του τόπου $\mathcal{J}$, στα



οπότε όμως η f είναι τοπικά φραγμένη. Αν Γ_1 και Γ_2 είναι δύο κλειστές αλυσίδες που βρίσκονται στον τόπο $\mathcal{J} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ και είναι ομόλογες στον τόπο $\mathcal{J}$, τότε ισχύει ότι

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Παράδειγμα 34.1.

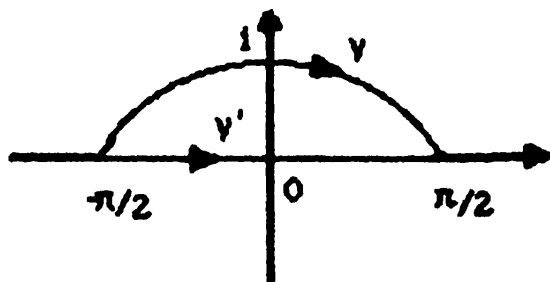
Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{\sin^2 z}{z} dz$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$z(t) = t + i \cos t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

βλέπε σχήμα.



Λύση.

Κατ' αρχήν η συνάρτηση με τύπο

$$\frac{\sin^2 z}{z}$$

είναι ολόμορφη παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από το σημείο 0, όπου όμως αυτή είναι τοπικά φραγμένη, αφού ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^2 z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \sin z = 1 \cdot 0 = 0.$$

Άρα το παραπάνω θεώρημα του Cauchy εφαρμόζεται για τις καμπύλες γ και γ'



όπου γ' είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $-\pi/2$ και $\pi/2$. Έτσι, επειδή μια παραμετρική παράσταση της καμπύλης γ' είναι η

$$z(t) = t, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

θα έχουμε

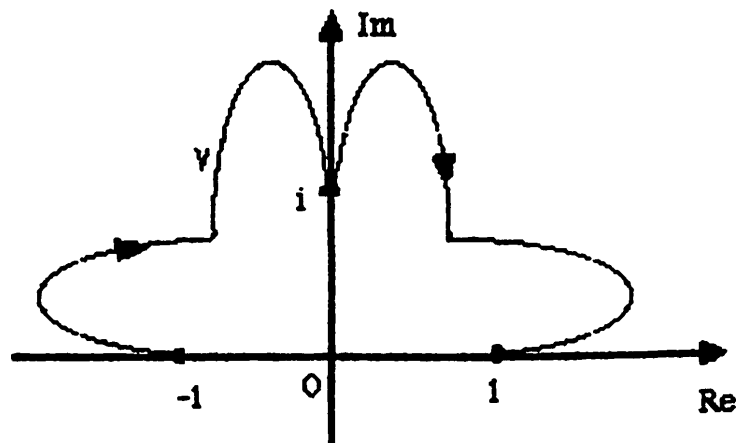
$$\int_{\gamma} \frac{\sin^2 z}{z} dz = \int_{\gamma'} \frac{\sin^2 z}{z} dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{t} dt = 0,$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα μηδενίζεται, αφού η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι περιττή. $\square$



34.1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} \frac{dz}{4+z^2}$ όπου γ είναι μια καμπύλη

όπως στο σχήμα:

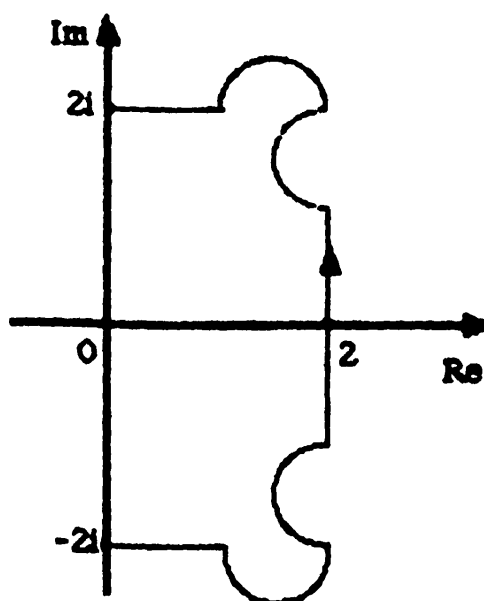


34.2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} z \cos z \, dz$$

όπου γ είναι μια καμπύλη όπως στο σχήμα:





§35. Τύπος του Cauchy για την παράσταση ολόμορφης συνάρτησης με ολοκλήρωμα

Αν f είναι μια ολόμορφη συνάρτηση σε έναν τόπο $\mathcal{J}$ του μιγαδικού επιπέδου και Γ είναι μια κλειστή αλυσίδα ομόλογη μηδέν στον τόπο $\mathcal{J}$, τότε ισχύει ο παρακάτω τύπος του Cauchy για την παράσταση ολόμορφης συνάρτησης με ολοκλήρωμα:

$$I(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \text{ για κάθε } z \in \mathcal{J} - \Gamma.$$

Επομένως, αν έχουμε μια απλή κλειστή καμπύλη γ θετικά προσανατολισμένη, θα ισχύει ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \text{ για κάθε } z \in \text{εσω}(\gamma).$$

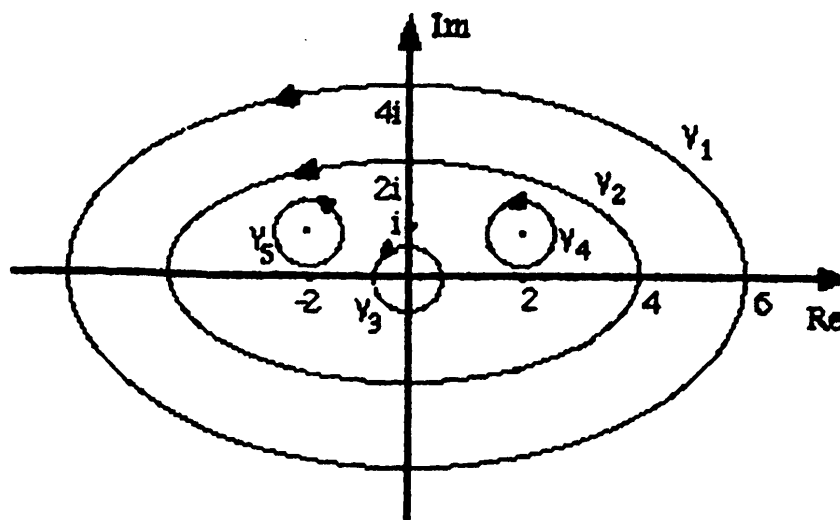
Παράδειγμα, 35.1.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα της συνάρτησης

$$\frac{z+1}{iz^3+2z^2-5iz}$$

κατά μήκος των ελλείψεων γ_1 και γ_2 που δίνονται στο παρακάτω σχήμα





Λύση.

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι η συνάρτηση που μας δίνεται είναι ολόμορφη παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία 0 , $2+i$ και $-2+i$, τα οποία μηδενίζουν τον παρονομαστή. Άρα ο τόπος όπου η συνάρτηση είναι ολόμορφη είναι

$$\mathcal{I} = \mathbb{C} - \{0, 2+i, -2+i\}.$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα κατά μήκος της καμπύλης γ_2 κατασκευάζουμε κύκλους με κέντρα τα σημεία 0 , $2+i$ και $-2+i$ και ακτίνες τόσο μικρές ώστε οι κύκλοι να μην έχουν κοινά σημεία. Ονομάζουμε γ_3 , γ_4 και γ_5 αντίστοιχα τις θετικά προσανατολισμένες περιφέρειες των κύκλων αυτών και θεωρούμε την αλυσίδα αυτή και η γ_2 είναι κλειστές και ομόλογες στον τόπο $\mathcal{I}$. Πραγματικά, για κάθε σημείο $\zeta \in \{0, 2+i, -2+i\}$ έχουμε

$$I(\gamma_2, \zeta) = 1,$$

αφού και τα τρία σημεία 0 , $2+i$, $-2+i$ είναι στο εσωτερικό της καμπύλης γ_2 , και η καμπύλη αυτή έχει τη θετική φορά. Επίσης έχουμε

$$I(\gamma_3, 0) + I(\gamma_4, 0) + I(\gamma_5, 0) = 1 + 0 + 0 = 1,$$

$$I(\gamma_3, 2+i) + I(\gamma_4, 2+i) + I(\gamma_5, 2+i) = 0 + 1 + 0 = 1, \text{ και}$$

$$I(\gamma_3, -2+i) + I(\gamma_4, -2+i) + I(\gamma_5, -2+i) = 0 + 0 + 1 = 1.$$



Έτσι ο τύπος του Cauchy για το ολοκλήρωμα ολόμορφης συνάρτησης (§ 30) εφαρμόζεται, οπότε παίρνουμε ότι

$$\int_{\gamma_2} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} = \int_{\gamma_3} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} + \int_{\gamma_4} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} + \int_{\gamma_5} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz}.$$

Έτσι αρκεί να υπολογίσουμε τα τρία ολοκληρώματα του δεύτερου μέλους. Προς τούτο παρατηρούμε ότι η συνάρτηση που μας δίνεται γράφεται ως

$$\frac{(z+1)}{iz^3+2z^2-5iz} = \frac{(z+1)}{iz(z-2-i)(z+2-i)},$$

οπότε, με εφαρμογή του τύπου του Cauchy για την παράσταση ολόμορφης συνάρτησης, παίρνουμε

$$\int_{\gamma_3} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} = \int_{\gamma_3} \frac{(z+1)dz}{iz(z-2-i)(z+2-i)} = 2\pi i \int_{\gamma_3} \frac{\frac{(z+1)}{i(z-2-i)(z+2-i)} dz}{z} =$$

$$= 2\pi i \cdot 1(\gamma_3, 0) \frac{1}{i(0-2-i)(0+2-i)} = -\frac{2\pi}{5}.$$

$$\int_{\gamma_4} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} = \int_{\gamma_4} \frac{(z+1)dz}{iz(z-2-i)(z+2-i)} = 2\pi i \int_{\gamma_4} \frac{\frac{(z+1)}{iz(z+2-i)} dz}{(z-2-i)} =$$

$$= 2\pi i \cdot 1(\gamma_4, 0) \frac{(2+i+1)}{i(2+i)(2+i+2-i)} = \frac{\pi}{10} (2-i)(3+i) = \frac{\pi}{10} (7-i),$$

και

$$\int_{\gamma_5} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} = \int_{\gamma_5} \frac{(z+1)dz}{iz(z-2-i)(z+2-i)} = 2\pi i \int_{\gamma_5} \frac{\frac{(z+1)}{iz(z-2-i)} dz}{(z+2-i)} =$$

$$= 2\pi i \cdot 1(\gamma_5, 0) \frac{(-2+i+1)}{i(-2+i)(-2+i-2-i)} = \frac{\pi}{10} (2+i)(-1+i) = \frac{\pi}{10} (-3+i).$$



Επομένως έχουμε

$$\int_{\gamma_2} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} = -\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10}(7-i) + \frac{\pi}{10}(-3+i) = 0.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι οι καμπύλες γ_1 και γ_2 είναι ομόλογες στον τόπο $\mathcal{I}$, οπότε σύμφωνα πάλι με το θεώρημα του Cauchy για το ολοκλήρωμα ολόμορφης συνάρτησης, θα έχουμε

$$\int_{\gamma_1} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} = \int_{\gamma_2} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} = 0.$$

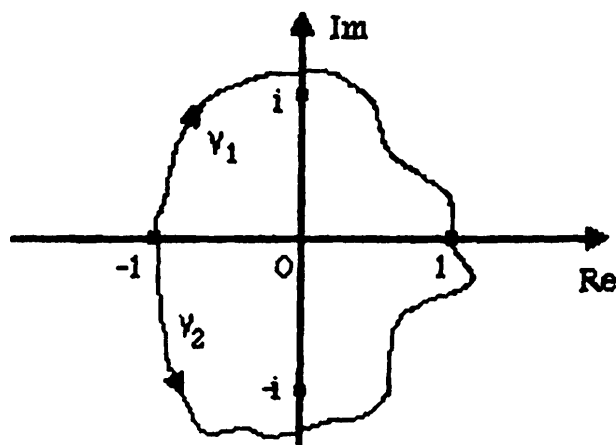
□

Παράδειγμα 35.2.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) = \frac{z-2i}{z^2+1}$$

κατά μήκος των διαφορίσιμων καμπυλών γ_1 , γ_2 , οι οποίες έχουν αρχικό σημείο το -1 , τελικό το 1 και είναι όπως στο σχήμα:



Λύση.

Πρώτα από όλα σημειώνουμε ότι οι πόλοι της συνάρτησης f είναι τα σημεία i και $-i$ και κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα γ που ενώνει το σημείο -1 με το 1 με παραμετρική παράσταση $z(t) = t$, $t \in [-1, 1]$.

Τώρα θεωρούμε την απλή κλειστή καμπύλη $\gamma_1 - \gamma$ και παρατηρούμε ότι ο πόλος i ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης. Έτσι εφαρμόζοντας τον τύπο του

Cauchy για την παγκύκλιση της ολόμορφης συνάρτησης $g(z)$ που ορίζεται με τον τύπο

$$g(z) = \frac{z-2i}{z+1},$$

έχουμε

$$g(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{g(z)dz}{z-i}.$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\frac{i-2i}{i+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{z-2i}{z^2+1} dz,$$

οπότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \frac{z-2i}{z^2+1} dz &= \int_{\gamma} \frac{z-2i}{z^2+1} dz - \pi i = 2 \int_0^1 \frac{t-2i}{t^2+1} dt - \pi i = 2 \int_0^1 \frac{t dt}{t^2+1} - 4i \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} - \pi i = \\ &= 0.4i [\operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} (-1)] - \pi i = -2\pi i - \pi i = -3\pi i. \end{aligned}$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο για την κάτω καμπύλη γ_2 έχουμε

$$\frac{-i-2i}{-i-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{z-2i}{z^2+1} dz,$$

από όπου, όπως και παραπάνω, βρίσκουμε

$$\int_{\gamma_2} \frac{z-2i}{z^2+1} dz = \int_{\gamma} \frac{z-2i}{z^2+1} dz + 3\pi i = -2\pi i + 3\pi i = \pi i.$$

□

Παράδειγμα 35.3.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^2+4z+3} dz,$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το 0 και ακτίνα 2.



Λύση.

Οι ρίζες του παρονομαστή είναι οι αριθμοί -1 και -3, οπότε μέσα στον κύκλο ο παρονομαστής μηδενίζεται στο σημείο -1. Επιπλέον η συνάρτηση

$$\frac{\cosh iz}{z+3}$$

είναι ολόμορφη σε μια περιοχή του κύκλου, οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\cosh iz}{z^2+4z+3} dz &= \int_{\gamma} \frac{\cosh iz}{(z+3)(z+1)} dz = \int_{\gamma} \frac{\cosh iz}{z+1} dz = 2\pi i \frac{\cosh iz}{z+1} \Big|_{z=-1} = \\ &= 2\pi i \frac{\cosh(-i)}{2} = \pi i \cosh i = \pi i \cos 1. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 35.4.

Έστω γ μια καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$z(t) = \pi(1+2e^{it}), t \in [0, 2\pi]$$

και $f(z)$ μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη και ολόμορφη σε έναν τόπο που περιέχει την καμπύλη γ μαζί με το εσωτερικό της. Να αποδειχτεί ότι ισχύει η ανισότητα

$$|f(2\pi)| \leq \frac{1}{2\pi^2} \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

Λύση.

Η παραμετρική παράσταση της καμπύλης γ γράφεται στη μορφή $z(t) = \pi+2\pi e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, από όπου φαίνεται ότι η γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο π και ακτίνα 2π . Αυτό σημαίνει ότι $I(\gamma, 2\pi)=1$ και επιπλέον ότι για κάθε σημείο ζ της γ ισχύει $|\zeta-2\pi| \geq \pi$. Έτσι, από τον τύπο του Cauchy για την παράσταση της $f(2\pi)$ με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$|f(2\pi)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-2\pi} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-2\pi|} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi^2} \int_{\gamma} |f(\zeta)| |d\zeta|.$$

□

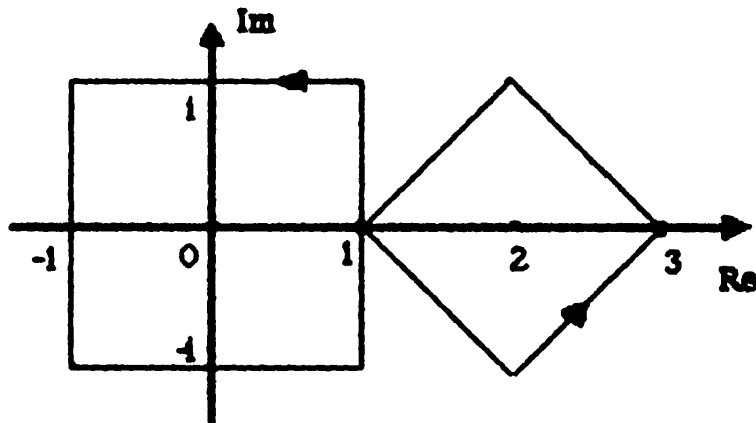




35.1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{z-1}{\pi(z^4-16)}$$

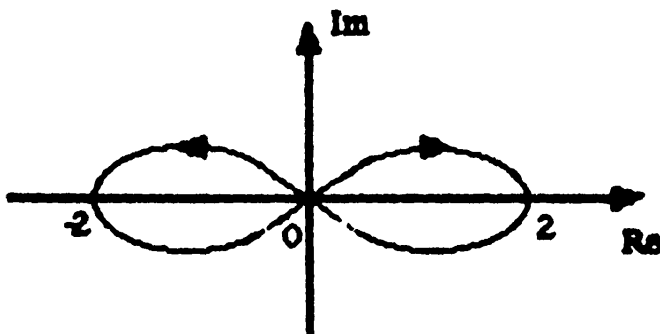
κατά μήκος της αλυσίδας $\gamma_1 + \gamma_2$ του παρακάτω σχήματος



35.2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{z^4-1} dz,$$

όπου γ είναι μια κλειστή καμπύλη όπως στο παρακάτω σχήμα:



35.3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{2z+1}{\pi(z^4-16)} dz,$$

όπου γ είναι η καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου με παραμετρική παράσταση

$$z(t) = (1+2\sin^2 2t)e^{it}, t \in [0, 2\pi].$$

35.4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

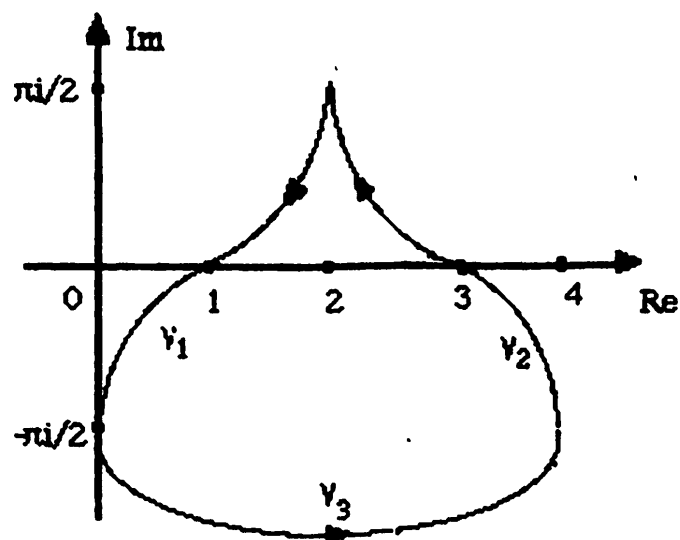
$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 - 3iz - 2} dz$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη καμπύλη-περίμετρος του τριγώνου στο μιγαδικό επίπεδο με κορυφές τα σημεία 2, $3i$ και -1 .

35.5. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\Gamma} \frac{\exp(z^2)}{z^2 - 2z} dz,$$

όπου $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ είναι η αλυσίδα των καμπύλων $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ όπως στο σχήμα,



οι οποίες αντίστοιχα έχουν παραμετρική παράσταση :

$$\gamma_1: z_1(t) = -t + i\text{Arcsin}(-t-1), t \in [-2, 0],$$

$$\gamma_2: z_2(t) = -t + i\text{Arcsin}(t+3), t \in [-4, -2],$$



73: $z_3(t) = t - i[\frac{\pi}{2} + \sin(\frac{\pi}{4}t)], t \in [0, 4].$

35.6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z^8-1)}.$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$z(t) = \frac{1}{2} + i\sin 4t, t \in [0, 2\pi].$$

35.7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz.$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο i και ακτίνα 1 .

35.8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{\tan z}{ze^{1/(z+2)}} dz$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα 1 .

35.9. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z(z-1)} dz$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το



σημείο 0 και ακτίνα 1.

§36. Τύπος του Cauchy για την παράσταση των παραγώγων ολόμορφης συνάρτησης με ολοκλήρωμα

Αν f είναι μια συνάρτηση ολόμορφη στον τόπο $\mathcal{T}$ και γ είναι μια θετικά προσανατολισμένη απλή κλειστή καμπύλη που περιέχεται μαζί με το εσωτερικό της στον τόπο $\mathcal{T}$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει η n -τάξεως παράγωγος της f σε κάθε σημείο $z \in \text{εσ}(\gamma)$ και μάλιστα δίνεται από τον τύπο

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Παράδειγμα 36.1.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz,$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο $-i$ και ακτίνα 1.

Λύση.

Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση ορίζεται παντού εκτός από τα σημεία $+i$ και $-i$. Από αυτά το σημείο $-i$ ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης γ . Τώρα παρατηρούμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left[\frac{e^{iz}}{(z-i)^2} \right] \Big|_{z=-i} = 0,$$

όπου στην μεσαία ισότητα εφαρμόσαμε τον τύπο του Cauchy για την παράσταση της 1ης παραγώγου της ολόμορφης συνάρτησης $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}$. □



Παράδειγμα 36.2.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z^2-1)^2} dz,$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 1 και ακτίνα 1.

Λύση.

Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση ορίζεται παντού εκτός από τα σημεία +1 και -1. Από αυτά το σημείο 1 ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης γ . Τώρα παρατηρούμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z^2-1)^2} dz = \int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z-1)^2(z+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{\sin z}{(z+1)^2} \right)' \Big|_{z=1} = i\pi \frac{\cos 1 - \sin 1}{2}. \quad \square$$

Παράδειγμα 36.3.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z-1)(z+1)^3} dz,$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα 2.

Λύση.

Οι μιγαδικοί αριθμοί που μηδενίζουν τον παρονομαστή είναι οι 1 και -1 και βρίσκονται στο εσω(γ). Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο τρόπους:

1ος τρόπος: Αναλύουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων και βρίσκουμε

$$\frac{1}{(z-1)(z+1)^3} = \frac{1}{8} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{8} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(z+1)^3}.$$



οπότε το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z-1)(z+1)^3} dz = \frac{1}{8} \int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z-1)} dz - \frac{1}{8} \int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z+1)} dz - \frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z+1)^2} dz - \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z+1)^3} dz.$$

Τώρα έχουμε

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z-1)} dz = 2\pi i \cosh 1,$$

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z+1)} dz = 2\pi i \cosh(-1) = 2\pi i \cosh 1,$$

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z+1)^2} dz = 2\pi i (\cosh z)' \Big|_{z=-1} = -2\pi i \sinh 1,$$

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z+1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (\cosh z)'' \Big|_{z=-1} = \pi i \cosh 1,$$

οπότε τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z-1)(z+1)^3} dz &= \frac{1}{8} 2\pi i \cosh 1 - \frac{1}{8} 2\pi i \cosh 1 - \frac{1}{4} (-2\pi i \sinh 1) - \frac{1}{2} \pi i \cosh 1 = \\ &= \frac{1}{2} \pi i \sinh 1 - \frac{1}{2} \pi i \cosh 1 = -\pi i \frac{\cosh 1 - \sinh 1}{2} = -\frac{\pi i}{2e}. \end{aligned}$$

2ος τρόπος: Κατασκευάζουμε δύο κύκλους γ_1 και γ_2 με κέντρα αντίστοιχα τα σημεία -1 και 1 τόσο μικρούς ώστε να μην τέμνονται και να βρίσκονται ολόκληροι στο εσ(γ). Τότε σε μια περιοχή του συνεκτικού σπινόλου που ορίζεται από τους κύκλους γ , γ_1 και γ_2 η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι ολόμορφη και καμπύλη γ είναι ομόλογη της αλυσίδας $\gamma_1 + \gamma_2$. Άρα από το θεώρημα του Cauchy για το ολοκλήρωμα ολόμορφης συνάρτησης παίρνουμε ότι

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z-1)(z+1)^3} dz = \int_{\gamma_1} \frac{\cosh z}{(z-1)(z+1)^3} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\cosh z}{(z-1)(z+1)^3} dz =$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{\gamma_1} \frac{\cosh z}{(z-1)^3} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\cosh z}{(z+1)^3} dz = \\
 &= \frac{2\pi i}{2!} \left[\frac{\cosh z}{z-1} \right]''' \Big|_{z=1} + 2\pi i \frac{\cosh z}{(z+1)^3} \Big|_{z=1} = \\
 &= -\pi i \frac{2e^{-1} + \cosh 1}{4} + \pi i \frac{\cosh 1}{4} = -\frac{\pi i}{2e}.
 \end{aligned}$$

□



36.1. Έστω f μιγαδική συνάρτηση ολόμορφη σε έναν τόπο $\mathcal{I}$ ο οποίος περιέχει τον ανοικτό δίσκο $B(0, 1)$. Να αποδειχτεί ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ και θετικό ακέραιο n ισχύει η ανισότητα

$$\max_{|z| \leq \lambda} |f^n(z)| \leq \frac{n!}{(1-\lambda)^{n+1}} \cdot \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(e^{i\theta})|.$$

36.2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz,$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση $z(t) = (\frac{1}{2} + 2i \sin t) e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

36.3. Αν γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα 2, να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_{\gamma} \frac{\cos^3 z}{z^3} dz$

β) $\int_{\gamma} \frac{\sinh^2 z}{z^3} dz$

γ) $\int_{\gamma} \frac{z \sinh z}{(z^2-1)^2} dz$

δ) $\int_{\gamma} \frac{\sinh^2 z}{z(z-1)} dz$



36.4. Αν γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 2 και ακτίνα 3, να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z/4)}{(z-1)^2} dz, \quad \beta) \int_{\gamma} \frac{z}{(z-2)^3(z-6)} dz,$$

$$\gamma) \int_{\gamma} \frac{z \sinh z}{z^3 - 4z^2} dz, \quad \delta) \int_{\gamma} \frac{\sinh z}{z(z^2-1)^2} dz,$$

§ 37. Θεωρήματα Cauchy-Liouville και Picard

Πρώτο Θεώρημα Cauchy-Liouville : Έστω f μια ακεραία συνάρτηση, δηλαδή μια συνάρτηση που είναι ολόμορφη σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο. Αν επιπλέον η f είναι και φραγμένη, τότε αυτή είναι σταθερά, δηλαδή υπάρχει $a \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε $f(z) = a$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Δεύτερο Θεώρημα Cauchy-Liouville : Έστω f μια ακεραία συνάρτηση για την οποία γνωρίζουμε ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί M και ε καθώς επίσης και φυσικός αριθμός n τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$|f(z)| \leq M|z|^n, \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}, \text{ με } |z| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Τότε η συνάρτηση f ταυτίζεται με ένα πολυώνυμο που έχει βαθμό το πολύ n .

Θεώρημα του Picard : Έστω f μια ακεραία συνάρτηση. Αν η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση, τότε το σύνολο τιμών της f είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$, ή το $\mathbb{C} - \{a\}$, όπου a είναι κάποιος μιγαδικός αριθμός.

Παράδειγμα 37.1.

Αν $f(z)$ και $g(z)$ είναι δυο ακεραίες μιγαδικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε να ισχύει

$$|f(z)| < |g(z)|, \text{ για κάθε } z.$$



να αποδειχτεί ότι ισχύει και

$$f(0)g(z)=f(z)g(0), \text{ για κάθε } z.$$

Λύση.

Αν για κάποιο a είχαμε $g(a)=0$, τότε θα είχαμε $|f(a)|<0$, άτοπο. Άρα η $g(z)$ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου και επομένως η συνάρτησή με τίτλο

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$$

είναι ακεραία και φραγμένη. Άρα από το πρώτο θεώρημα των Cauchy-Liouville προκύπτει ότι η h είναι σταθερά, οπότε $h(z)=h(0)$, που είναι η ζητούμενη σχέση. $\square$



37.1. Να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει μη σταθερή ακεραία μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$|f(z)| < 1 + |f(z)|, \text{ για κάθε } z.$$

37.2. Να αποδειχτεί ότι αν για κάποιο μιγαδικό αριθμό a και θετικό ακέραιο n η ακεραία συνάρτηση $f(z)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n} = a,$$

τότε η $f(z)$ είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού το πολύ n .

37.3. Να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχουν μη σταθερές αέριες συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$ τέτοιες ώστε για κάποιο $b \neq 0$ να ισχύει η σχέση

$$f(z) [b - f(z)] g(z) = 1,$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$.



§ 38. Σειρές

Taylor και Laurent

Υποθέτουμε ότι f είναι μια ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε έναν τόπο $\mathcal{T}$ και θεωρούμε ένα σημείο a στον τόπο $\mathcal{T}$, το οποίο απέχει από το σύνορο $\partial\mathcal{T}$ του τόπου $\mathcal{T}$ απόσταση ίση με r . Τότε στον ανοικτό δίσκο $B(a,r)$ η συνάρτηση f έχει ένα μοναδικό ανάπτυγμα σε σειρά **Taylor** με κέντρο το σημείο a , δηλαδή υπάρχει μια μοναδική δυναμοσειρά $\sum b_n(z-a)^n$ τέτοια ώστε

$$f(z) = \sum b_n(z-a)^n, \text{ για κάθε } z \in B(a,r).$$

Οι συντελεστές b_n , $n=0,1,2,\dots$ της δυναμοσειράς δίνονται από τους τύπους

$$b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

όπου γ είναι μία θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο a και ακτίνα $\rho < r$.

Υποθέτουμε ότι f είναι ολόμορφη σε μια ανοικτή δακτυλική περιοχή $\Delta(a, r_1, r_2)$, όπου $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$. Τότε η f έχει ένα μοναδικό ανάπτυγμα σε σειρά **Laurent** με κέντρο το σημείο a , δηλαδή η f μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n,$$

για κάθε $z \in \Delta(a, r_1, r_2)$. Οι συντελεστές b_n , $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ δίνονται από τον τύπο

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

όπου γ είναι μια οποιαδήποτε θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο a και ακτίνα r τέτοια ώστε $r_1 < r < r_2$.

Η σειρά



$$\sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-a)^n$$

είναι το κύριο μέρος (principal part) της σειράς Laurent και η

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

το κανονικό μέρος (regular part).

Παράδειγμα 38.1.

Να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

στη σήνυα:

α) $\Delta(0, 1, +\infty)$,

β) $\Delta(1, 0, 2)$.

Λύση.

α) Αναλύοντας τον τύπο της f σε άθροισμα απλών κλασμάτων βρίσκουμε

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)}.$$

Αν $z \in \Delta(0, 1, +\infty)$, θα ικανοποιεί την ανισότητα $|z| > 1$, οπότε θα ισχύει και η ανισότητα $|\frac{1}{z}| < 1$. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \\ &= \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

β) Αν $z \in \Delta(1, 0, 2)$, τότε έχουμε $0 < |z-1| < 2$ και άρα $|\frac{z-1}{2}| < 1$.

Επομένως



$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2(z-i)} - \frac{1}{2(z+i)} = \frac{1}{2(z-i)} - \frac{1}{4i \left(1 + \frac{z-i}{2i}\right)} = \\ &= \frac{1}{2(z-i)} - \frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n = \frac{1}{2(z-i)} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-i)^n, \end{aligned}$$

όπου $a_n = \frac{i^{n+1}}{2^{n+2}}$, $n=0, 1, 2, \dots$

□

Παράδειγμα 38.2.

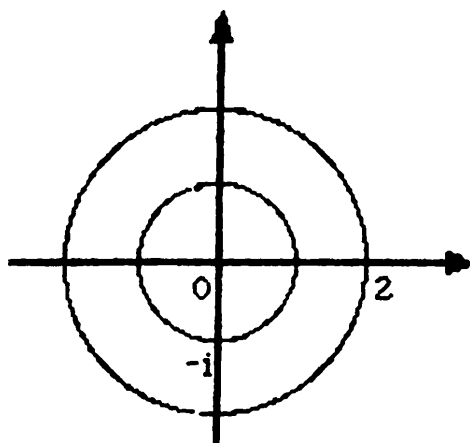
Να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο 0 η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = \frac{2i}{(z-2)(z+i)}.$$

Λύση.

Η συνάρτηση $f(z)$ είναι ορισμένη και ολόμορφη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία 2 και $-i$ τα οποία μηδενίζουν τον παρονομαστή. Έτσι η συνάρτηση αναπτύσσεται

- α) σε σειρά Taylor με κέντρο το 0 μέσα στον δίσκο $B(0, 1)$,
- β) σε σειρά Laurent με κέντρο το 0 μέσα στον δακτύλιο $\Delta(0, 1, 2)$, και
- γ) επίσης σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο 0 μέσα στον δακτύλιο $\Delta(0, 2, +\infty)$.



Γράφουμε τον τύπο της συνάρτησης σε άθροισμα απλών κλασμάτων

$$f(z) = \frac{2i}{(z-2)(z+i)} = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z+i},$$



όπου $a = b = 2(1+2i)/5$, και εξετάζουμε χωριστά τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Αν $|z| < 1$, τότε

$$\left| \frac{z}{2} \right| < 1 \quad \text{και} \quad \left| \frac{z}{1} \right| < 1.$$

Άρα έχουμε

$$\frac{a}{z-2} = -\frac{a}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{a}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -a \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n-1} z^n$$

και

$$\frac{b}{z+1} = -b \frac{1}{1+\frac{z}{1}} = -b \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{1}\right)^n = -b \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n.$$

οπότε το ανάπτυγμα Taylor της $f(z)$ με κέντρο το 0 μέσα στον δίσκο $B(0, 1)$ είναι το

$$f(z) = -a \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n-1} z^n - b \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

όπου

$$a_n = \frac{2(1+2i)}{5} [-2^{-n-1} + (-1)^{n+1}], \quad n=0, 1, 2, \dots$$

β) Αν $1 < |z| < 2$, τότε

$$\left| \frac{z}{2} \right| < 1 \quad \text{και} \quad \left| \frac{1}{z} \right| < 1.$$

Άρα έχουμε

$$\frac{a}{z-2} = -\frac{a}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{a}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -a \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n-1} z^n$$

και

$$\frac{b}{z+1} = \frac{b}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{b}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z}\right)^n = b \sum_{n=-\infty}^0 (-1)^{n+1} z^n.$$

οπότε το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)$ με κέντρο το σημείο 0 στη δακτυλική περιοχή



$\Delta(0,1,2)$ είναι το

$$f(z) = -\frac{2(1+2i)}{5} \sum_{n=-\infty}^0 i^{n+1} z^n - \frac{1+2i}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} z^n.$$

γ) Αν $2 < |z|$, τότε

$$\left| \frac{2}{z} \right| < 1 \quad \text{και} \quad \left| \frac{i}{z} \right| < 1.$$

Άρα έχουμε

$$\frac{a}{z-2} = \frac{a}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{a}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = a \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n-1} z^{-n}$$

και

$$\frac{b}{z+i} = \frac{b}{z} \frac{1}{1+\frac{i}{z}} = \frac{b}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n \left(\frac{1}{z}\right)^n = b \sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1} z^{-n},$$

οπότε το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)$ με κέντρο το σημείο 0 στη δακτυλική περιοχή $\Delta(0, 2, +\infty)$ είναι το

$$f(z) = -\frac{2(1+2i)}{5} \sum_{n=-\infty}^0 i^{n+1} z^n - \frac{1+2i}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} z^n = -\frac{1+2i}{5} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n.$$

όπου

$$b_n = 2i^{n+1} + 2^{-n}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Παράδειγμα 38.3.

Έστω f μια μιγαδική συνάρτηση ολόμορφη σε έναν τόπο $\mathcal{J}$. Να αποδειχτεί ότι το σύνολο A όλων των z του τόπου για τα οποία ισχύει $f^{(n)}(z) = 0$ για κάθε $n=0, 1, 2, \dots$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{J}$.

Λύση.

Υποθέτουμε ότι το σύνολο A δεν είναι ανοικτό. Άρα υπάρχει σημείο w



Ε.7. Ένις μη αλγεβρικός αριθμός k και μια ακολουθία (z_m) σημείων επίσης του J τέτοιαι ώστε

$$\lim z_m = w, \quad f^{(n)}(z_m) = 0 \text{ για κάθε } n=0 \text{ και } f^{(k)}(w) \neq 0.$$

Ονομάζουμε $g(z)$ τη συνάρτηση $f^{(k)}(z)$ και παρατηρούμε ότι αυτή ικανοποιεί τις σχέσεις

$$g^{(n)}(z_m) = 0 \text{ για κάθε } n=0 \text{ και } g(w) \neq 0.$$

Έστω $r > 0$ η υπόσταση του σημείου w από το σύνορο του τόπου J . Τότε από γεγονός ότι $\lim z_m = w$, έπεται ότι υπάρχει ένα σημείο z_m μέσα στην ανοικτή δίσκο $H(w, r)$, οπότε το σημείο w ανήκει μέσα στον ανοικτό δίσκο $B(z_m, r)$. Στον δίσκο αυτό η συνάρτηση g έχει ένα μοναδικό ανάπτυγμα σε σειρά Taylor με κέντρο το σημείο z_m

$$g(z) = \sum b_n (z - z_m)^n, \text{ για κάθε } z \in B(z_m, r).$$

Οι συντελεστές $b_n, n=0, 1, 2, \dots$ της δυναμοσειράς δίνονται από τους τύπους

$$b_n = \frac{g^{(n)}(z_m)}{n!} = 0,$$

λόγω της υπόθεσης που κάναμε για τις παραγώγους της συνάρτησης g . Άρα θα έχουμε $g(z) = 0$, για κάθε $z \in B(z_m, r)$, πράγμα το οποίο αντίκειται προς το γεγονός ότι $g(w) \neq 0$ και $w \in B(z_m, r)$. Άρα το σύνολο A είναι ανοικτό. $\square$



38.1. Να αναπτυχθούν σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο 0 οι συναρτήσεις

α) $f(z) = \frac{2z-1}{z^2-z-2}$

β) $f(z) = \frac{1}{z^2+z}$

γ) $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z^3}$

δ) $f(z) = \frac{2z}{z^2+iz+2}$



$$\epsilon) \quad f(z) = \frac{z+1}{z^2+z-2},$$

$$\zeta) \quad f(z) = \frac{z+1}{z^2+4z-5},$$

$$\eta) \quad f(z) = \frac{z}{z^2+i},$$

$$\theta) \quad f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2},$$

$$\iota) \quad f(z) = \frac{\sin^2 z}{z},$$

$$\kappa) \quad f(z) = z^3 e^{1/z},$$

$$\lambda) \quad f(z) = z^5 \cos \frac{1}{z},$$

$$\mu) \quad f(z) = \frac{1+\cos z}{z^3}.$$

38.2. Να αναπτυχθούν σε σειρά Laurent οι παρακάτω συναρτήσεις στις αντίστοιχες περιοχές:

$$\alpha) \quad f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}, \quad \Delta(-1,0,1)$$

$$\beta) \quad f(z) = \frac{z}{z^2-5z+6}, \quad \Delta(0,2,3) \text{ και } \Delta(0,3,+\infty)$$

$$\gamma) \quad f(z) = \frac{2}{(z^2+1)(z+2)}, \quad \Delta(0,1,4) \text{ και } \Delta(0,4,+\infty)$$

$$\delta) \quad f(z) = \frac{1}{z^2-1}, \quad \Delta(-2,1,3)$$

$$\epsilon) \quad f(z) = \frac{1}{z^2+2z-8}, \quad \Delta(-2,1,4)$$

$$\zeta) \quad f(z) = \frac{z+2}{z^2-4z+3}, \quad \Delta(1,2,+\infty)$$

$$\eta) \quad f(z) = \frac{z^5}{(z^2-4)^2}, \quad \Delta(0,2,+\infty)$$

$$\theta) \quad f(z) = \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}, \quad \Delta(0,1,2)$$



§ 39. Ρίζες ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης

Υποθέτουμε ότι f είναι μια ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε έναν τόπο $\mathcal{J}$ και θεωρούμε ένα σημείο a του τόπου $\mathcal{J}$. Αν το σημείο a είναι ρίζα (root, ή zero) της f , δηλαδή αν ισχύει ότι $f(a)=0$, και η f δεν είναι η σταθερή συνάρτηση 0, τότε υπάρχει ένας μιγαδικός φυσικός αριθμός k και μια ολόμορφη συνάρτηση h ορισμένη στον τόπο $\mathcal{J}$ τέτοια ώστε $h(a) \neq 0$ και

$$f(z) = (z - a)^k h(z), \text{ για κάθε } z \in \mathcal{J}.$$

Ο αριθμός k είναι η **πολλαπλότητα** ή **τάξη** (multiplicity) της ρίζας a ως προς τη συνάρτηση f .

Το σημείο a είναι ρίζα της f πολλαπλότητας k , αν και μόνο αν το ανώτερο της f σε σειρά Taylor με κέντρο το σημείο a είναι της μορφής

$$b_k(z-a)^k + b_{k+1}(z-a)^{k+1} + b_{k+2}(z-a)^{k+2} + \dots,$$

όπου $b_k \neq 0$. Τότε συνεπείγεται ότι ισχύει $f^{(n)}(a)=0$, $n=0, 1, \dots, k-1$ και $f^{(k)}(a) \neq 0$.

Παράδειγμα 39.1.

Να αποδειχτεί ότι κάθε πολυώνυμο $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{k-1} z^{k-1} + z^k$, $k \geq 1$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι τοίτο δεν έχει καμία ρίζα.

1ος τρόπος: Η συνάρτηση $P(z)$ είναι μη σταθερά και ακεραία, οπότε από το Θεώρημα του Picard υπάρχει μια ακολουθία (z_n) τέτοια ώστε να ισχύει

$$(I) \quad |P(z_n)| < \frac{1}{n}, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots$$

Θα δείξουμε ότι η (z_n) είναι φραγμένη. Πραγματικά, αν όχι, τότε υπάρχει υποακολουθία της, έστω, επίσης, (z_n) , τέτοια ώστε $\lim z_n = \infty$. Από την παραπάνω φανερότητα παίρνουμε ότι



$$|z_n| < \frac{1}{n|z_n|^{k-1}} + \frac{|a_0|}{|z_n|^{k-1}} + \frac{|a_1|}{|z_n|^{k-2}} + \dots + |a_{k-1}|,$$

οπότε μεταβαίνοντας στα όρια προκύπτει $+\infty \leq |a_{k-1}|$, άτοπο. Άρα η ακολουθία (z_n) είναι φραγμένη και από το θεώρημα του Bolzano αυτή έχει ένα σημείο συσσώρευσης, έστω a . Τότε από την (1) έπεται η $P(a)=0$, πράγμα που αποδεικνύει ότι το σημείο a είναι ρίζα του $P(z)$.

2ος τρόπος: Παρατηρούμε πρώτα ότι ισχύει

$$(1) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty.$$

Πραγματικά, έχουμε

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z^k| \left| \left[1 + \frac{a_{k-1}}{z} + \frac{a_{k-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_1}{z^{k-1}} + \frac{a_0}{z^k} \right] \right| \\ &\geq |z^k| \left[1 - \left| \frac{a_{k-1}}{z} \right| - \left| \frac{a_{k-2}}{z^2} \right| - \dots - \left| \frac{a_1}{z^{k-1}} \right| - \left| \frac{a_0}{z^k} \right| \right]. \end{aligned}$$

Έστω $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in \Delta(0, M, +\infty)$ να ισχύει

$$\left| \frac{a_m}{z^m} \right| < \frac{1}{2k}, \text{ για όλα τα } m=0, 1, \dots, k-1.$$

Επομένως για κάθε $z \in \Delta(0, M, +\infty)$ θα ισχύει και

$$|P(z)| > |z^k| \frac{1}{2},$$

από όπου προκύπτει η (1). Αυτή συνεπάγεται ότι η ακεραία συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$$

και άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z)| < 1$, για κάθε $z \in \Delta(0, \varepsilon^{-1}, +\infty)$. Αλλά, λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της συνάρτησης $f(z)$ πάνω στον κλειστό δίσκο με κέντρο το 0 και ακτίνα το ε^{-1} , αυτή είναι φραγμένη στον δίσκο αυτό. Έστω K ένα τέτοιο

φράγμι. Τότε (και έχουμε ότι $|f(z)| < \max\{1, K\}$, για κάθε μιγαδικό αριθμό z). Το Πρώτο Θεώρημα Cauchy-Liouville (§ 37) συνεπάγεται ότι η f είναι σταθερά, πράγμα που σημαίνει ότι ο βαθμός του $P(z)$ είναι 0, άτοπο. $\square$

Από το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει και το **Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας**:

Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού k έχει k το πλήθος ρίζες, όπου κάθε ρίζα λυμφίνεται n φορές, όπου n είναι η πολλαπλότητά της.

Παράδειγμα 39.2.

Να βρεθεί η τάξη της ρίζας $z=0$ για τη συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = \frac{z^4}{z - \sin z}.$$

Λύση.

Γράφουμε τον παρονομαστή στη μορφή

$$\begin{aligned} z - \sin z &= z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) = \\ &= z^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \dots \right), \end{aligned}$$

οπότε ο τύπος της συνάρτησης γίνεται

$$f(z) = z \cdot \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \dots},$$

από όπου φαίνεται ότι το $z=0$ είναι ρίζα 1ης τάξης. $\square$

Παράδειγμα 39.3.

Να βρεθούν οι ρίζες της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) = (z^2 + 1)^2 \sinh z$$

και να προσδιοριστεί η τάξη τους.



Λύση.

Θέτοντας $(z^2+1)^2 \sinh z = 0$, προκύπτει $(z^2+1)^2 = 0$, ή $\sinh z = 0$, από όπου βρίσκουμε

$$z = -i, \quad z = i, \quad z = k\pi i \quad (k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Τώρα παρατηρούμε ότι η $f(z)$ γράφεται ως

$$f(z) = (z+i)^2 h(z),$$

όπου η συνάρτηση $h(z) = (z-i)^2 \sinh z$ είναι ολόμορφη και τέτοια ώστε

$$h(-i) = 4i^2 \sinh(-i) = -4 \sinh i = -4i \sin 1,$$

το οποίο είναι διάφορο από το 0. Άρα η ρίζα $-i$ είναι ρίζα τάξης 2. Παρόμοια προκύπτει και ότι η ρίζα i είναι τάξης 2. Για τη ρίζα της μορφής $k\pi i$ παρατηρούμε ότι η παράγωγος

$$f'(z) = 4z(z^2+1) \sinh z + (z^2+1)^2 \cosh z$$

παίρνει στο σημείο $k\pi i$ τιμή διάφορη από το μηδέν και άρα η ρίζα $k\pi i$ είναι ρίζα πρώτης τάξης. □

Παράδειγμα 39.4.

Να βρεθούν οι ρίζες της συνάρτησης με τύπο $f(z) = z^2 \sin z$ και να προσδιοριστεί η πολλαπλότητά τους.

Λύση.

Λύνοντας την εξίσωση $z^2 \sin z = 0$ παίρνουμε ότι οι ρίζες της f είναι τα σημεία $z = k\pi$, όπου k είναι ένας οποιοσδήποτε ακέραιος. Για να προσδιορίσουμε την πολλαπλότητά τους εργαζόμαστε με τις παραγώγους.

Έχουμε $f(k\pi) = 0$ και

$$f'(k\pi) = 2(k\pi) \sin(k\pi) + (k\pi)^2 \cos(k\pi) = 0, \text{ αν } k \neq 0,$$

ενώ

$$f'(k\pi) \neq 0, \text{ αν } k \neq 0.$$

Επίσης έχουμε



$$f'(0) = 2 \cdot \sin 0 + 4 \cdot 0 \cdot \cos 0 - 0^2 \cdot \cos 0 = 0$$

και

$$f''(0) = 6 \cdot \cos 0 - 4 \cdot 0 \cdot \sin 0 - 2 \cdot 0 \cdot \cos 0 + 0^2 \cdot \sin 0 = 6 \neq 0.$$

Επομένως το σημείο 0 είναι ρίζα τρίτης τάξης και τα σημεία της μορφής $k\pi$, όπου k ακέραιος διάφορος του 0, είναι ρίζες πρώτης τάξης.



39.1. Να βρεθούν οι ρίζες των παρακάτω συναρτήσεων και να προσδιοριστεί η πολλαπλότητά τους:

α) $f(z) = z^4 + 4z^2,$

β) $f(z) = \frac{\sin z}{z},$

γ) $f(z) = \frac{\sinh^2 z}{z},$

δ) $f(z) = 1 + \cosh z,$

ε) $f(z) = \frac{(1 - \sinh z)^2}{z},$

ζ) $f(z) = (z + \pi i) \sinh z,$

η) $f(z) = \cos z^4,$

θ) $f(z) = (z^2 + \pi^2)(1 + e^{-z}).$

39.2. Να εξεταστεί αν το σημείο $z=0$ είναι ρίζα των παρακάτω συναρτήσεων και αν "ναι" να προσδιοριστεί η τάξη της.

α) $f(z) = z^6 [(z/2)^2 - (\sin(z/2))^2]^{-1}$

β) $f(z) = \frac{z^3}{1 + z \cdot e^z}.$

γ) $f(z) = 2(\sinh z - 1) \cdot z^2,$

δ) $f(z) = \frac{(1 - \cos 2z)^2}{z \cdot \sinh z}.$

§ 40. Αρχή Ταυτότητας

ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων

Θεωρούμε δύο ολόμορφες συναρτήσεις ορισμένες σε έναν τόπο $\mathcal{J}$. Αν υπάρχει φραγμένη ακολουθία (a_n) στον τόπο $\mathcal{J}$ με όρους διαφορετικούς ανά δύο τέτοια



ώστε να ισχύει ότι

$$f(a_n) = g(a_n), \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots,$$

τότε ισχύει και $f(z) = g(z)$, για κάθε $z \in \mathcal{I}$.

Παράδειγμα 40.1.

Να δοθεί παράδειγμα μιγαδικής συνάρτησης μιγαδικής μεταβλητής που να έχει ρίζες (τουλάχιστον) τα σημεία

$$a_n = \frac{i}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

και να μην είναι εκ ταυτότητος μηδέν. Να εξεταστεί αν υπάρχει ολόμορφη (σε όλο το $\mathbb{C}$, δηλαδή ακεραία) μη τετριμμένη τέτοια συνάρτηση.

Λύση.

Θεωρούμε μια πραγματική συνάρτηση $\varphi(x)$ που να έχει ως ρίζες τα σημεία που δίνονται. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να λάβουμε τη συνάρτηση με τύπο

$$\varphi(x) = x \sin \frac{\pi}{x}.$$

Η $\varphi(x)$ είναι ορισμένη παντού στην πραγματική ευθεία και τέτοια ώστε $\varphi(0) = 0$. Έτσι μια μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής που έχει ρίζες τα σημεία a_n είναι η

$$f(z) = z \sin \frac{\pi}{z}.$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μια ακεραία συνάρτηση F που έχει ρίζες τα σημεία αυτά, τότε θα έχουμε $F(a_n) = 0$ και επειδή η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη, σύμφωνα με την αρχή ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων, θα έχουμε $F(z) = 0$, για κάθε z . Δηλαδή μόνο η τετριμμένη συνάρτηση μπορεί να έχει την παραπάνω ιδιότητα, άτοπο. $\square$

Παράδειγμα 40.2.

Έστω φ μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής τέτοια ώστε να ισχύει $\varphi(e^{-n}) = 1$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και $\varphi(2) = 0$. Να εξεταστεί αν υπάρχει



ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(x) = \varphi(x)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Λύση.

Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση $f(z)$, θα πρέπει να είναι ακεραία και να ταινίζεται με την επίσης ακεραία σταθερή συνάρτηση $g(z) = 1$ πάνω στα σημεία e^{-n} που είναι οι όροι μιας φεγγμένης ακολουθίας. Άρα τότε, σύμφωνα με την αρχή ταινότητας ολόμορφων συναρτήσεων, η συνάρτηση $f(z)$ θα ταινίζεται με την σταθερή συνάρτηση $g(z) = 1$, οπότε θα ισχύει και $1 = g(2) = f(2) = \varphi(2) = 0$, άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια ολόμορφη επέκταση της φ . $\square$

Παράδειγμα 40.3.

Να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχουν μη σταθερές ακεραίες συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$ τέτοιες ώστε για κάποιον μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό b να ισχύει η σχέση

$$|f(z)g(z)| < |b - f(z)|$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Λύση.

Υποθέτουμε ότι τέτοιες συναρτήσεις υπάρχουν. Αν για κάποιο σημείο ζ είχαμε $f(\zeta) = b$, τότε θα είχαμε $|f(\zeta)g(\zeta)| < 0$, άτοπο. Άρα για κάθε z έχουμε $f(z) \neq b$, δηλαδή το σημείο b δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της $f(z)$, οπότε η συνάρτηση με τύπο

$$h(z) = \frac{f(z)g(z)}{b - f(z)}$$

είναι ακεραία και φεγγμένη. Από το θεώρημα Cauchy-Liouville συνεπύγεται τότε ότι αυτή είναι σταθερά. Άρα υπάρχει a τέτοιο ώστε να ισχύει $h(z) = a$, για κάθε z , ή

$$f(z)g(z) = a(b - f(z)), \quad \text{για κάθε } z.$$

Αν για κάποιο z είχαμε $f(z) = 0$, τότε, από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $a = 0$. Άρα ισχύει $f(z)g(z) = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι $f(z) = 0$, ή $g(z) = 0$, για κάθε z . Έτσι κάποιον από τα σύνολα $\{z : |z| \leq 1 \text{ και } f(z) = 0\}$ και $\{z : |z| \leq 1 \text{ και } g(z) = 0\}$ είναι απέραντο, οπότε από την Αρχή Ταινότητας Ολόμορφων Συναρτήσεων προκύπτει



ότι $f(z)=0$ για κάθε z , ή $g(z)=0$ για κάθε z , δηλαδή ότι η f ή g είναι σταθερά, άτοπο. Άρα έχουμε $f(z) \neq 0$, για κάθε z .

Έτσι βρήκαμε ότι τα σημεία b και 0 δεν ανήκουν στο σύνολο τιμών της ακεραίας συνάρτησης $f(z)$, γεγονός που αντίκειται προς το θεώρημα του Picard, βλ. § 37. □



40.1. Έστω φ μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής τέτοια ώστε να ισχύει

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots$$

και $\varphi(4)=0$. Να εξεταστεί αν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(x) = \varphi(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

40.2. Να αποδειχτεί ότι η μοναδική ακεραία μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$2\sin k + if(isink) = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

είναι η $f(z) = 2z$.

§ 41. Ανώμαλα σημεία ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων

Ένα σημείο a είναι (μεμονωμένο) **ανώμαλο σημείο** (isolated singular point) για μια συνάρτηση f αν η f είναι ολόμορφη σε μια περιοχή του σημείου a , πλην του a . Η μελέτη τέτοιων σημείων ανάγεται στην εξέταση της ύπαρξης ή όχι του ορίου της f στα σημεία αυτά.

Θεωρούμε έναν δακτύλιο της μορφής $\Delta(a, 0, r)$ στο μιγαδικό επίπεδο και μια συνάρτηση f ολόμορφη και ορισμένη στον δακτύλιο αυτό. Αν η f ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b,$$



όπου b είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τότε το a είναι αναιρέσιμο ή απαλείψιμο (removable) ανώμαλο σημείο και η f είναι τοπικά φραγμένη σ' αυτό. Τούτο συμβαίνει αν και μόνο αν στο ανάπτυγμα της f σε σειρά Laurent με κέντρο το a , δεν εμφανίζονται (μη μηδενικοί) όροι με αρνητικό εκθέτη, δηλαδή το κύριο μέρος της σειράς είναι μηδέν.

Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty,$$

τότε το σημείο a είναι πόλος (pole) της f . Τούτο συμβαίνει αν και μόνο αν υπάρχει $r_1 \in (0, r)$, ένας μοναδικός φυσικός αριθμός k και μια ολόμορφη συνάρτηση $h(z)$ ορισμένη στον δακτύλιο $\Delta(a, 0, r_1)$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$f(z) = (z - a)^{-k} h(z), \text{ για κάθε } z \in \Delta(a, 0, r_1).$$

Ο αριθμός k είναι η πολλαπλότητα, ή τάξη (multiplicity) του πόλου a της συνάρτησης f .

Το σημείο a είναι πόλος της f πολλαπλότητας k , αν και μόνο αν το ανάπτυγμα της f σε σειρά Laurent είναι της μορφής

$$\frac{b_k}{(z-a)^k} + \frac{b_{k+1}}{(z-a)^{k+1}} + \dots + b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots$$

όπου $b_k \neq 0$.

Μερόμορφη (meromorphic) είναι μια συνάρτηση σε έναν τόπο J , αν για κάθε $z \in J$ η f είναι ολόμορφη στο z , ή το z είναι πόλος της f .

Αν η συνάρτηση f δεν έχει όριο στο σημείο a , τότε το a είναι ένα ουσιασώς ανώμαλο σημείο (essentially singular point) για την f . Τούτο συμβαίνει αν και μόνο αν στο ανάπτυγμα της f σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο a υπάρχουν άπειροι το πλήθος όροι με αρνητικό δείκτη.

Θεώρημα των Cassorati - Weierstrass : Έστω f μια ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε έναν δακτύλιο της μορφής $\Delta(a, 0, r)$ και έστω ότι το σημείο a είναι ουσιασώς ανώμαλο σημείο για την f . Τότε για κάθε μιγαδικό αριθμό L υπάρχει



μια ακολουθία (z_n) τέτοια ώστε αυτή να συγκλίνει προς το a και η ακολουθία $(f(z_n))$ να συγκλίνει προς το L .

Παράδειγμα 41.1.

Να καθορισθεί ο τύπος του ανώμαλου σημείου $z=\pi$ για τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{\sin z}{z - \pi}.$$

Λύση.

Θέτουμε $\xi = z - \pi$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin z}{z - \pi} = \frac{\sin(z - \pi)}{z - \pi} = \frac{\sin \xi}{\xi} = \frac{\xi - \frac{\xi^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots}{\xi} = \\ &= 1 + \frac{\xi^2}{3!} - \dots - (-1)^n \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \\ &= 1 + \frac{(z - \pi)^2}{3!} - \dots - (-1)^n \frac{(z - \pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \end{aligned}$$

που είναι το ανάπτυγμα της f σε δυνάμεις του $z - \pi$, δηλαδή το ανάπτυγμα Taylor. Το γεγονός τούτο σημαίνει ότι το σημείο π είναι αναιρέσιμο σημείο για την f .
□

Παράδειγμα 41.2.

Να καθορισθεί ο τύπος του ανώμαλου σημείου $z=\pi$ για τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1 + \cos z}{z - \pi}.$$

Λύση.

Θέτουμε $\xi = z - \pi$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1 + \cos z}{z - \pi} = \frac{1 - \cos \xi}{\xi} = \frac{1 - (1 - \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{\xi^{2n}}{(2n)!} + \dots)}{\xi} = \\ &= \frac{\xi}{2!} - \frac{\xi^3}{4!} + \dots - (-1)^n \frac{\xi^{2n-1}}{(2n)!} + \dots = (z - \pi)h(z), \end{aligned}$$



όποιου τύπου

$$h(z) := \frac{1}{2!} - \frac{(z-\pi)^2}{4!} + \dots - (-1)^n \frac{(z-\pi)^{2n-2}}{(2n)!} + \dots$$

ορίζει μια ολόμορφη συνάρτηση τέτοια ώστε $h(\pi) = \frac{1}{2!}$. Άρα το σημείο $z=\pi$ είναι ρίζα 1ης τάξης για τη συνάρτηση που μας δόθηκε. $\square$

Παράδειγμα 41.3.

Να δοθεί παράδειγμα μιγαδικής συνάρτησης που να έχει το σημείο $1+i$ πόλο 2ης τάξης, το σημείο $1-2i$ ουσιωδώς ανώμαλο σημείο και να είναι ολόμορφη σε κάθε άλλο σημείο του μιγαδικού επιπέδου.

Λύση.

Η απλούστερη συνάρτηση που έχει το σημείο $1+i$ πόλο 2ης τάξης είναι η

$$f_1(z) = \frac{1}{(z-1-i)^2}.$$

Επίσης μια συνάρτηση που έχει το σημείο $1-2i$ ουσιωδώς ανώμαλο σημείο είναι η

$$f_2(z) = \exp\left[\frac{1}{z-1+2i}\right].$$

Επομένως μια συνάρτηση που έχει τις ζητούμενες ιδιότητες είναι η

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \frac{1}{(z-1-i)^2} + \exp\left[\frac{1}{z-1+2i}\right].$$

$\square$

Παράδειγμα 41.4.

Να χαρακτηριστεί το σημείο $z_0=1$ ως προς τη συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{2e^{z-1} \cdot z^2 \cdot 1}.$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής γράφεται ως

$$\sin \pi z = \sin \pi(z-1) = \pi(z-1) - \frac{(\pi(z-1))^3}{3!} + \frac{(\pi(z-1))^5}{5!} - \frac{(\pi(z-1))^7}{7!} + \dots$$



$$= \pi(z-1) \left[1 - \frac{(\pi(z-1))^2}{3!} + \frac{(\pi(z-1))^4}{5!} - \frac{(\pi(z-1))^6}{7!} + \dots \right].$$

γεγονός που σημαίνει ότι το σημείο $z_0 = 1$ είναι ρίζα 1ης τάξης .

Επίσης για τον παρονομαστή παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} 2e^{z-1} - z^{2-1} &= 2(1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{(z-1)^4}{4!} + \dots) - z^{2-1} = \\ &= 1 - z^2 + 2((z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{(z-1)^4}{4!} + \dots) = \\ &= (z-1)(-1 - z + 2 + \frac{2}{2!}(z-1) + \frac{2}{3!}(z-1)^2 + \frac{2}{4!}(z-1)^3 + \dots) = \\ &= (z-1)^2(-1 + 1 + \frac{2}{3!}(z-1) + \frac{2}{4!}(z-1)^2 + \dots) = \\ &= (z-1)^3(\frac{2}{3!} + \frac{2}{4!}(z-1) + \frac{2}{5!}(z-1)^2 + \dots), \end{aligned}$$

και επομένως το σημείο $z_0 = 1$ είναι ρίζα τρίτης τάξης. Άρα το σημείο τούτο είναι πόλος 2ης τάξης για τη συνάρτηση, διότι αυτή γράφεται ως

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin \pi z}{2e^{z-1} - z^{2-1}} = \frac{\pi(z-1) \left[1 - \frac{(\pi(z-1))^2}{3!} + \frac{(\pi(z-1))^4}{5!} - \frac{(\pi(z-1))^6}{7!} + \dots \right]}{(z-1)^3 \left(\frac{2}{3!} + \frac{2}{4!}(z-1) + \frac{2}{5!}(z-1)^2 + \dots \right)} = \\ &= (z-1)^{-2} h(z), \end{aligned}$$

όπου

$$h(z) = \frac{\pi \left(1 - \frac{(\pi(z-1))^2}{3!} + \frac{(\pi(z-1))^4}{5!} - \frac{(\pi(z-1))^6}{7!} + \dots \right)}{\frac{2}{3!} + \frac{2}{4!}(z-1) + \frac{2}{5!}(z-1)^2 + \dots}$$

είναι μια συνάρτηση ολόμορφη στο σημείο $z_0 = 1$ και τέτοις ώστε $h(1) = 3\pi \neq 0$. $\square$

Παράδειγμα 41.5.

Να βρεθεί η τάξη του πόλου $z=0$ της συνάρτησης



$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^5}.$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής γράφεται ως

$$1 - \cos z = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) =$$

$$= z^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2(n-1)}}{(2n)!} \right).$$

Άρα τελικά η $f(z)$ γράφεται στη μορφή

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^5} = z^{-3} \left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2(n-1)}}{(2n)!} \right),$$

από όπου προφανώς προκύπτει ότι το σημείο $z=0$ είναι πόλος 3ης τάξης. □

Παράδειγμα 41.6.

Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ακολουθία (z_n) τέτοια ώστε

$$\lim z_n = 0 \text{ και } \lim \exp\left(\frac{1}{z_n}\right) = 3+7i.$$

Λύση.

Τούτο προκύπτει από το γεγονός ότι το σημείο 0 είναι ουσιωδώς ανώμαλο σημείο για την $\exp(z)$, αφού, όπως μπορούμε να δούμε στο ανάπτυγμα της $\exp(z)$ σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο 0 υπάρχουν άπειροι το πλήθος όροι με αρνητικό δείκτη, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα των Cassorati - Weierstrass, ο μιγαδικός αριθμός $3+7i$ είναι το όριο μιας ακολουθίας $(f(z_n))$ για κάποια ακολουθία (z_n) η οποία συγκλίνει προς το 0. □



41.1. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ανώμαλα σημεία για τις συνιστώσες

α) $f(z) = \frac{1 + \cos z}{(z - \pi)^2},$

β) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(1-z)},$



$$\gamma) \quad f(z) = \frac{\sinh z}{z},$$

$$\delta) \quad f(z) = \frac{z^2-1}{z^6+2z^5+3z^4},$$

$$\epsilon) \quad f(z) = \cos \frac{1}{z+2i},$$

$$\zeta) \quad f(z) = \frac{\ln(1+z^4)}{z^3},$$

$$\eta) \quad f(z) = \cos \frac{1}{z+1} + \sin \frac{2-\pi z}{3(z+1)}.$$

41.2. Να χαρακτηριστεί το σημείο $z=0$ για τις συναρτήσεις

$$\alpha) \quad f(z) = \frac{1}{e^{-z}-1},$$

$$\beta) \quad f(z) = z \sinh \frac{1}{z},$$

$$\gamma) \quad f(z) = \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) + 3\frac{1}{z^{1995}}.$$

§ 42. Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Θεωρούμε έναν δακτύλιο της μορφής $\Delta(a, 0, r)$ στο μιγαδικό επίπεδο και συνάρτηση f ολόμορφη και ορισμένη στον δακτύλιο αυτό. Το **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** (residuun, ή residue) της f στο σημείο a είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) : = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz,$$

όπου γ είναι μια οποιαδήποτε θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο a και ακτίνα ρ τέτοια ώστε $0 < \rho < r$.

Αν γνωρίζουμε το ανάπτυγμα της f σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο a , τότε ο συντελεστής b_{-1} του όρου $(z-a)^{-1}$ της σειράς ισούται με το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο σημείο a , δηλαδή έχουμε

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = b_{-1}.$$



Αν το σημείο a είναι πόλος της f πολλαπλότητας k , τότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο a δίνεται από τον τύπο

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)^k f(z)]^{(k-1)}.$$

Παράδειγμα 42.1.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}$$

στα σημεία -1 και 2 .

Λύση.

Το σημείο -1 είναι πόλος 2ης τάξης, ενώ το σημείο 2 είναι πόλος 1ης τάξης. Έτσι εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο παίρνουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[(z+1)^2 \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^z}{(z-2)} \right] = -\frac{4}{9}e \end{aligned}$$

και ακόμη

$$\operatorname{Res}_{z=2} \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} = \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z-2) \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} \right] = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{e^2}{9}.$$

□

Παράδειγμα 42.2.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}$$

στα ανώμαλα σημεία της.

Λύση.

Τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης είναι τα 0 και $\pi/4$. Για το σημείο 0

έχουμε



$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z^2}{z^2} \frac{1}{z - \frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi},$$

πράγμα που σημαίνει ότι το 0 είναι αναίρεσιμο. Έτσι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z)$ στο σημείο 0 είναι μηδέν, αφού στο ανάπτυγμα Laurent με κέντρο το 0 δεν υπάρχουν όροι με αρνητικό δείκτη.

Για το σημείο $\pi/4$ παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z \rightarrow \pi/4} f(z) = \infty$$

και επομένως τούτο είναι πόλος της f και μάλιστα 1ης τάξης. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=\pi/4} \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2} &= \lim_{z \rightarrow \pi/4} (z - \frac{\pi}{4}) f(z) = \lim_{z \rightarrow \pi/4} (z - \frac{\pi}{4}) f(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\sin z^2}{z^2} = \frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 42.3.

Να υπολογιστεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^2},$$

στο σημείο 0.

Λύση.

Το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης αυτής με κέντρο το σημείο 0 είναι το

$$f(z) = z^3 \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \dots \right) = z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^7} - \dots$$

από όπου αμέσως προκύπτει ότι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης στο σημείο 0 είναι ίσο με 0. □

Παράδειγμα 42.4.

Να υπολογιστεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z^2},$$



στο σημείο 0.

Λύση.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι άρτια. Επομένως στο ανάπτυγμα της f σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο 0 όλοι οι όροι με περιττό δείκτη είναι ίσοι με το μηδέν. Τούτο, βέβαια, δηλώνει ότι και

$$b_{-1} = \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0.$$

□

Παράδειγμα 42.5.

Να υπολογιστεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) = \frac{\sin 5z - 5 \sin z}{(\sin z - z) \sin z},$$

στο σημείο 0.

Λύση.

Πρώτα θα χαρακτηρίσουμε το σημείο 0 ως προς τη συνάρτηση f . Πραγματικά, παρατηρούμε ότι ο αριθμητής γράφεται ως

$$\begin{aligned} \sin 5z - 5 \sin z &= 5z - \frac{(5z)^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{(5z)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\ &\quad - 5 \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) = \\ &= \frac{5^3 \cdot 5}{3!} z^3 - \frac{5^5 \cdot 5}{5!} z^5 + \dots = z^3 h(z), \end{aligned}$$

όπου

$$h(z) := -\frac{5^3 \cdot 5}{3!} + \frac{5^5 \cdot 5}{5!} z^2 - \dots$$

είναι ολόμορφη και τέτοια ώστε $h(0) = -(5^3 \cdot 5)/5! = -26 \neq 0$.

Επίσης ο παρονομιστής γράφεται ως

$$\begin{aligned} (\sin z - z) \sin z &= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots - z \right) \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) = \\ &= z^4 \left(-\frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \dots \right) \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \dots \right) = \end{aligned}$$



$$=z^4 g(z),$$

όπου

$$g(z) := \left(-\frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \dots \right) \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \dots \right)$$

είναι ολόμορφη συνάρτηση τέτοια ώστε $g(0) = -1/6$.

Υστερα από τα παραπάνω έχουμε

$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3\sin z}{(\sin z - z)\sin z} = \frac{z^3 h(z)}{z^4 g(z)} = z^{-1} G(z),$$

όπου $G(z) := \frac{h(z)}{g(z)}$ ορίζει μια συνάρτηση ολόμορφη σε μια περιοχή του μηδενός και τέτοια ώστε $G(0) = 156$. Το γεγονός τούτο σημαίνει ότι το σημείο 0 είναι πόλος της συνάρτησης f και μάλιστα 1ης τάξης. Άρα έχουμε

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin 3z - 3\sin z}{(\sin z - z)\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} G(z) = G(0) = 156. \quad \square$$

Παράδειγμα 42.6.

Να υπολογιστεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z},$$

στα ανώμαλα σημεία της.

Λύση.

Τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης αυτής είναι τα 0 και 1. Επειδή το 1 είναι πόλος 1ης τάξης θα έχουμε

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \frac{e^{1/1}}{-1} = -e.$$

Για το σημείο 0 παίρνουμε το ανάπτυγμα της συνάρτησης κατά Laurent με κέντρο το σημείο τούτο. Έχουμε

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z} = e^{1/z} \frac{1}{1-z} = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \right) (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) =$$



$$= \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) \frac{1}{z} + (\text{ΛΟΙΠΟΙ ΟΡΟΙ}),$$

οπότε

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) = e - 1.$$

□



42.1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των παρακάτω συνιστησών στα ανώμαλα σημεία τους :

- | | |
|---|---|
| α) $f(z) = z^3 e^{1/z},$ | β) $f(z) = \frac{\cosh z}{(z^2+1)(z-2)},$ |
| γ) $f(z) = \frac{e^z}{\frac{1}{4} \sin^2 z},$ | δ) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2(z-2)^3},$ |
| ε) $f(z) = \cos \frac{1}{z} + z^5,$ | ζ) $f(z) = \frac{\sin z}{(z+2i)(z-\frac{1}{2})},$ |
| η) $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3 \cdot z^2},$ | θ) $f(z) = \sin z \cos \frac{1}{z},$ |
| ι) $f(z) = \frac{z^{2k}}{(1-z)^k},$ | κ) $f(z) = e^{z/(1-z)},$ |

43. Θεώρημα του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{J}$ είναι ένας τόπος στο μιγαδικό επίπεδο και $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του $\mathcal{J}$. Αν f είναι μια ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη στον τόπο $\mathcal{J} - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, τότε ισχύει ο τύπος



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^k I(\Gamma, a_n) \operatorname{Res}_{z=a_n} f(z),$$

όπου Γ είναι μια τυχαία κλειστή αλυσίδα κατά τμήματα διαφορίσιμων καμπυλών που βρίσκεται στον τόπο $\mathcal{J} - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ και είναι ομόλογη μηδέν στον τόπο $\mathcal{J}$.

Παράδειγμα 43.1.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα 5.

Λύση.

Στο $\operatorname{es}(\gamma)$ η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι παντού ολόμορφη εκτός από τα σημεία 0 και -1. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα, θα έχουμε

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \left[I(\gamma, 0) \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} + I(\gamma, -1) \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} \right].$$

Αλλά το σημείο 0 είναι ένα αναίρεσιμο ανώμαλο σημείο, αφού

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} = 1$$

και επομένως

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = 0.$$

Έτσι τελικά έχουμε

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = 2\pi i (1 - e^{-1}).$$



Παράδειγμα 43.2.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \tan z \, dz$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα 3.

Λύση.

Μέχρι στον δίσκο $B(0, 3)$ η συνάρτηση $\tan z$ είναι ολόμορφη παντού εκτός από τα σημεία $\pi/2$ και $-\pi/2$, τα οποία είναι πόλοι 1ης τάξης. Για τα σημεία αυτά έχουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=\pi/2} \tan z &= \lim_{z \rightarrow \pi/2} (z - \pi/2) \frac{\sin z}{\cos z} = \lim_{z \rightarrow \pi/2} \sin z \frac{z - \pi/2}{\cos z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow \pi/2} \sin z \frac{1}{-\sin z} = -1, \end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα εφαρμόσαμε τον κανόνα L' Hospital. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\operatorname{Res}_{z=-\pi/2} \tan z = -1.$$

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \tan z \, dz &= 2\pi i \left[1(\gamma, \pi/2) \operatorname{Res}_{z=\pi/2} \tan z + 1(\gamma, -\pi/2) \operatorname{Res}_{z=-\pi/2} \tan z \right] = \\ &= 2\pi i (-1 - 1) = -4\pi i. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 43.3.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα



$$\int_{\gamma} \frac{e^{1/z^2}}{1+z^2} dz$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια της έλλειψης με εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες την $x^2 + 16y^2 = 4$.

Λύση.

Τα ανώμαλα σημεία της προς ολοκλήρωση συνάρτησης είναι τα 0, i, και -i. Από αυτά όμως μόνο το σημείο 0 ανήκει στο εσωτερικό της έλλειψης. Επιπλέον παρατηρούμε ότι τούτο είναι ένα ουσιωδώς ανώμαλο σημείο της συνάρτησης. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα τούτο θα εφαρμόσουμε τον τύπο του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπολοιπα. Έτσι έχουμε

$$\int_{\gamma} \frac{e^{1/z^2}}{1+z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{1/z^2}}{1+z^2} = 0,$$

διότι η συνάρτηση είναι άρτια και επομένως το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο 0 είναι μηδέν.

□



43.1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα, κατά μήκος των αντίστοιχων καμπυλών (οι οποίες θεωρείται ότι έχουν τη θετική φορά) :

α) $\int_{\gamma} \frac{z}{(z-1)^2(z+3)} dz, \quad \gamma: x^2/3 + y^2/3 = 2^2/3.$

β) $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^4 + 2z^2 + 1} dz, \quad \gamma: \{z: |z-i|=1\}.$

γ) $\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3} dz, \quad \gamma: \{z: |z|=4\}.$



$$\delta) \int_{\gamma} \frac{\sin \pi z}{z^2 - 7} dz, \quad \gamma: \{z: |z|=3\}.$$

$$\varepsilon) \int_{\gamma} z^2 \sin \frac{1}{z} dz, \quad \gamma: \{z: |z|=1\}.$$

$$\zeta) \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 - 4} dz, \quad \gamma: 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

§ 44. Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$$

όπου $R(x, y)$ είναι μια ρητή συνάρτηση.

Υποθέτουμε ότι έχουμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt,$$

όπου $R(x, y)$ είναι μια ρητή συνάρτηση των πραγματικών μεταβλητών x και y .

Για να υπολογίσουμε ένα τέτοιο ολοκλήρωμα εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε

$$z = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

οπότε βρίσκουμε

$$\sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$



και

$$dt = -i \frac{dz}{z}.$$

Έτσι το ολοκλήρωμα είναι ίσο με το

$$-i \int_{\gamma} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z},$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο το σημείο 0. Αν η ρητή συνάρτηση

$$f(z) := R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

δεν έχει πόλους πάνω στην περιφέρεια γ , εφαρμόζουμε το θεώρημα του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 44.1.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}, \quad (a > b > 0).$$

Λύση.

Κάνοντας τον μετασχηματισμό $z := e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, όπως είπαμε στη γενική περίπτωση, παίρνουμε

$$I = \frac{4}{i} \int_{\gamma} \frac{z dz}{(bz^2 + 2az + b)^2}.$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου.

Τα σημεία

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \quad \text{και} \quad z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$



είναι οι πόλοι της ρητής συνάρτησης

$$f(z) = \frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2}$$

και μάλιστα αυτοί είναι 2ης τάξης. Όμως μέσα στον κύκλο υπάρχει μόνο ο πόλος z_1 , οπότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης $f(z)$ στο z_1 είναι

$$\text{Res}_{z=z_1} \frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left(\frac{z(z-z_1)^2}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2} \right) = \frac{a}{4} (a^2 - b^2)^{-3/2}.$$

Επομένως έχουμε τελικά

$$I = \frac{4}{i} \int_{\gamma} \frac{z dz}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

□



44.1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}, \quad 0 < \lambda < 1.$

β) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2x dx}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}, \quad 0 < \lambda < 1.$

γ) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2x dx}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}, \quad \lambda > 1.$

δ) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}, \quad 0 < \lambda < 1.$



$$\varepsilon) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{a+b\cos x}, \quad 0 < b < a.$$

§ 45. Ολοκληρώματα της μορφής

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Υποθέτουμε ότι $f(z)$ είναι μια μερόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε έναν τόπο $\mathcal{T}$ ο οποίος περιέχει τουλάχιστον το πάνω κλειστό ημιεπίπεδο

$$E = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι η συνάρτηση f έχει πεπερασμένο πλήθος πόλων $a_1, a_2, \dots, a_n$ στο σύνολο E , αλλά κανένα από αυτά τα σημεία δεν βρίσκεται πάνω στον πραγματικό άξονα και επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [z f(z)] = 0.$$

Τότε ισχύει ο τύπος

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{n=1}^k \operatorname{Res}_{z=a_n} f(z),$$

όπου το πρώτο μέλος παριστάνει την κατά Cauchy πρωτεύουσα τιμή του ολοκληρώματος που, ως γνωστόν, ορίζεται να είναι το

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} f(x) dx,$$

αρκεί το όριο στο δεύτερο μέλος να υπάρχει.

Αν η f είναι ρητή συνάρτηση τέτοια ώστε ο βαθμός του παρονομαστή να



είναι τουλάχιστον κατά δύο μονάδες μεγαλύτερος από τον βαθμό του αριθμητή, τότε υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

και ικανοποιείται με την πρωτεύουσα τιμή του ολοκληρώματος. Στην περίπτωση αυτή ισχύει ο τύπος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{n=1}^k \operatorname{Res}_{z=a_n} f(z).$$

Παράδειγμα 45.1.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι η ρητή συνάρτηση με τύπο

$$R(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$$

έχει παρονομαστή με βαθμό 4 που είναι (τουλάχιστον) κατά δύο μονάδες μεγαλύτερος από τον βαθμό 2 του αριθμητή. Άρα το παραπάνω ολοκλήρωμα υπάρχει και ικανοποιείται με την πρωτεύουσα τιμή του. Τώρα οι πόλοι της $R(z)$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί

$$a_1 = \exp(i\frac{\pi}{4}), \quad a_2 = \exp(i\frac{3\pi}{4}), \quad a_3 = \exp(i\frac{5\pi}{4}), \quad a_4 = \exp(i\frac{7\pi}{4}).$$

Αυτοί είναι πόλοι 1ης τάξης και μόνον οι δύο πρώτοι έχουν θετικό φανταστικό μέρος.

Επομένως σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο θα έχουμε



$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = 2 \left[\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right] = \\ &= 4\pi i \left[\text{Res}_{z=a_1} \frac{z^2+1}{z^4+1} + \text{Res}_{z=a_2} \frac{z^2+1}{z^4+1} \right] = 0, \end{aligned}$$

διότι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=a_1} \frac{z^2+1}{z^4+1} &= \lim_{z \rightarrow a_1} (z-a_1) \frac{z^2+1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} = \\ &= \frac{a_1^2+1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} = \\ &= \frac{i+1}{e^{i\frac{\pi}{4}}(1-e^{i\frac{\pi}{2}})e^{i\frac{\pi}{4}}(1-e^{i\pi})e^{i\frac{\pi}{4}}(1-e^{3i\frac{\pi}{2}})} = -i \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=a_2} \frac{z^2+1}{z^4+1} &= \lim_{z \rightarrow a_2} (z-a_2) \frac{z^2+1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} = \\ &= \frac{a_2^2+1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)} = i \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

□



45.1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6},$

β) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3},$

γ) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m} dx}{(1+x^{2n})^2},$

δ) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2},$



$$ε) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad (a > 0, b > 0).$$

45.2. Να αποδειχτεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει η σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \pi.$$

§ 46. Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\omega x} dx$$

όταν $R(z)$ δεν έχει πόλους στην πραγματική ευθεία

Υποθέτουμε ότι $R(z)$ είναι μια ρητή συνάρτηση η οποία δεν έχει πόλους πάνω στον πραγματικό άξονα, ενώ οι πόλοι της με θετικό φανταστικό μέρος είναι οι $a_1, a_2, \dots, a_n$. Αν ο βαθμός του παρονομαστή της $R(z)$ είναι τουλάχιστον κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από τον βαθμό του αριθμητή, τότε για κάθε $\omega > 0$ ισχύει ο τύπος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{n=1}^k \operatorname{Res}_{z=a_n} [R(z) e^{i\omega z}].$$

Παράδειγμα 46.1.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9} dx.$$



Λύση.

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι το πραγματικό μέρος του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+9} dx,$$

το οποίο προφανώς υπάρχει διότι της ρητής συνάρτησης $R(x) = 1/(x^2+9)$ ο βαθμός (2) του παρονομαστή είναι (τουλάχιστον) κατά δύο μονάδες μεγαλύτερος από τον βαθμό (0) του αριθμητή. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θεωρούμε τη μιγαδική συνάρτηση

$$R(z) = \frac{1}{(z^2+9)}$$

η οποία έχει μόνο το σημείο $3i$ πόλο με θετικό φανταστικό μέρος. Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+9} e^{i\omega x} dx &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=3i} \left[\frac{e^{iz}}{z^2+9} \right] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 3i} [(z-3i) \frac{e^{iz}}{(z+3i)(z-3i)}] = \\ &= 2\pi i \frac{e^{-3}}{6i} = \frac{\pi e^{-3}}{3}. \end{aligned}$$

Έτσι τελικά έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+9} e^{i\omega x} dx = \operatorname{Re} \frac{\pi e^{-3}}{3} = \frac{\pi e^{-3}}{3}. \quad \square$$

Παράδειγμα 46.2.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+2)^2+9} dx.$$

Λύση.

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι το φανταστικό μέρος του ολοκληρώματος



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x+2)^2+9} dx,$$

το οποίο υπάγχει, διότι της ρητής συνάρτησης $R(x) := 1/((x+2)^2+9)$ ο βαθμός (2) του παρονομαστή είναι (τουλάχιστον) κατά δύο μονάδες μεγαλύτερος από τον βαθμό (0) του αριθμητή.

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος θεωρούμε τη μιγαδική συνάρτηση

$$R(z) := \frac{1}{(z+2)^2+9},$$

η οποία έχει μόνο το σημείο $-2+3i$ πόλο με θετικό φανταστικό μέρος. Έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x+2)^2+9} e^{i\omega x} dx &= \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-2+3i} \left[\frac{e^{iz}}{(z+2)^2+9} \right] \right\} = \\ &= \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \lim_{z \rightarrow -2+3i} [(z+2-3i) \frac{e^{iz}}{(z+2+3i)(z+2-3i)}] \right\} = \\ &= \operatorname{Im} \{ \pi e^{-3} e^{-2i} \} = \operatorname{Im} \{ \pi e^{-3} (\cos 2 + i \sin 2) \} = \\ &= \pi e^{-3} \cos 2. \end{aligned}$$

□



46.1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx,$

β) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x+1)^2+1} dx.$



$$\begin{aligned} \gamma) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+1)(x^2+4)}, \quad \delta) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+16} \\ \epsilon) \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{(1+x^2+x^4)}, \quad \zeta) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \sin \lambda x dx}{(x^2+1)^2}, \lambda > 0. \end{aligned}$$

§ 47. Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \omega x dx$$

όταν $R(z)$ έχει το 0 πόλο 1ης τάξης

Υποθέτουμε ότι πάνω στον πραγματικό άξονα ο μόνος πόλος για τη ρητή συνάρτηση $R(z)$ είναι το 0 και μάλιστα αυτός είναι πόλος 1ης τάξης. Αν επιπλέον η συνάρτηση $R(z)$ έχει πόλους με θετικό φανταστικό μέρος τα σημεία $a_1, a_2, \dots, a_n$ και ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0,$$

τότε για κάθε πραγματικό αριθμό ω ισχύει ο τύπος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \omega x dx = \operatorname{Im} \left[2\pi i \left(\sum_{n=1}^k \operatorname{Res}_{z=a_n} [R(z) e^{i\omega z}] + \frac{1}{2} \operatorname{Res}_{z=0} [R(z) e^{i\omega z}] \right) \right].$$

Παράδειγμα 47.1.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{x(5+4x+x^2)}.$$

Λύση.

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι της παραπάνω μορφής, αφού η συνάρτηση

$$R(z) = \frac{1}{z(5+4z+z^2)}$$

έχει το σημείο $z=0$ του πραγματικού άξονα πόλο 1ης τάξης. Επίσης ο μοναδικός πόλος της R με θετικό φανταστικό μέρος είναι το σημείο $-2+i$ και μάλιστα αυτό είναι πόλος 1ης τάξης. Έτσι εφαρμόζοντας τον προηγούμενο τύπο παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{x(5+4x+x^2)} = \text{Im} \left[2\pi i \left(\text{Res}_{z=-2+i} [R(z) e^{i2z}] + \frac{1}{2} \text{Res}_{z=0} [R(z) e^{i2z}] \right) \right].$$

Αλλά έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=-2+i} [R(z) e^{i2z}] &= \lim_{z \rightarrow -2+i} [(z+2-i) \frac{1}{z(5+4z+z^2)} e^{i2z}] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -2+i} \left[\frac{1}{z(z+2+i)} e^{i2z} \right] = -\frac{e^{-2} 2e^{-4i}}{2(1+2i)} \end{aligned}$$

και

$$\text{Res}_{z=0} [R(z) e^{i2z}] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[z \frac{1}{z(5+4z+z^2)} e^{i2z} \right] = \frac{1}{5}.$$

οπότε τελικά βρίσκουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{x(5+4x+x^2)} = \text{Im} \left[2\pi i \left(-\frac{e^{-2} 2e^{-4i}}{2(1+2i)} + \frac{1}{10} \right) \right] = \frac{\pi e^{-2}}{5} (2 \sin 4 - \cos 4) + \frac{\pi}{5}.$$



$$\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+\lambda^2)} dx,$$

$$\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^4+3x^2+2)} dx,$$

$$\gamma) \int_0^{+\infty} \frac{\sin kx}{x(x^2+a^2)} dx,$$

$$\delta) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x(1+x+x^2)} dx.$$

§ 48. Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) dx$$

όπου $0 < \alpha < 1$.

Υποθέτουμε ότι $R(z)$ είναι μια ρητή μιγαδική συνάρτηση, η οποία πάνω στον πραγματικό άξονα μπορεί να έχει πόλο μόνο το 0 και μάλιστα 1ης τάξης. Αν η συνάρτηση R ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [zR(z)] = 0,$$

τότε, για κάθε α , με $0 < \alpha < 1$, ισχύει ο τύπος

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) dx = \frac{4\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{n=1}^k \operatorname{Res}_{z=a_n} [e^{\pi i \alpha} (ze^{-i\pi/2})^{2\alpha} R(z^2)],$$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι οι πόλοι της συνάρτησης

$$f(z) = e^{\pi i \alpha} (ze^{-i\pi/2})^{2\alpha} R(z^2)$$



που έχουν θετικό φανταστικό μέρος.

Παράδειγμα 48.1.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3}}{1+x^2} dx.$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα τούτο γράφεται ως

$$\int_0^{+\infty} x^{1/3} \frac{1}{1+x^2} dx$$

και επομένως εφαρμόζεται ο παραπάνω τύπος. Οι πόλοι (που είναι μάλιστα και 1ης τάξης) της συνάρτησης

$$e^{\pi i/3} (ze^{-i\pi/2})^{2/3} z \frac{1}{1+z^4} = e^{\pi i/3} (ze^{-i\pi/2})^{2/3} \frac{z}{1+z^4}$$

είναι τα σημεία

$$z_1 = e^{i(\pi/4)}, \quad z_2 = e^{i(3\pi/4)}, \quad z_3 = e^{i(5\pi/4)}, \quad z_4 = e^{i(7\pi/4)},$$

από τα οποία μόνο τα δύο πρώτα έχουν θετικό φανταστικό μέρος. Επομένως έχουμε

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} [e^{\pi i/3} (ze^{-i\pi/2})^{2/3} \frac{z}{1+z^4}] =$$

$$= e^{\pi i/3} \lim_{z \rightarrow z_1} (z-z_1) (ze^{-i\pi/2})^{2/3} \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} =$$

$$= e^{\pi i/3} (z_1 e^{-i\pi/2})^{2/3} \frac{z_1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{e^{-\pi i/3}}{4}$$

και

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} [e^{\pi i/3} (ze^{-i\pi/2})^{2/3} \frac{z}{1+z^4}] =$$



$$= e^{\pi i/3} \lim_{z \rightarrow z_2} (z-z_2)(ze^{-i\pi/2})^{2/3} \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} =$$

$$= e^{\pi i/3} (z_2 e^{-i\pi/2})^{2/3} \frac{z_2}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} = \frac{1}{4}.$$

Έτσι εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο έχουμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{4/3}}{1+x^2} dx = \frac{4\pi i}{1-e^{2\pi i/3}} \left[\operatorname{Res}_{z=z_1} [e^{\pi i/3}(ze^{-i\pi/2})^{2/3} \frac{z}{1+z^4}] + \right.$$

$$\left. + [\operatorname{Res}_{z=z_2} [e^{\pi i/3}(ze^{-i\pi/2})^{2/3} \frac{z}{1+z^4}]] \right] =$$

$$= \frac{4\pi i}{1-e^{2\pi i/3}} \left[\frac{e^{-\pi i/3}}{4} - \frac{1}{4} \right] = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

□



48.1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α)	$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2},$	β)	$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x(1+x)},$
γ)	$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x+x^2},$	δ)	$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x} dx}{1+x^2},$
ε)	$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{2+2x+x^2},$	ζ)	$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x} dx}{2+2x+x^2}.$



**§ 49. Υπολογισμός αθροίσματος σειράς
με τη βοήθεια των ολοκληρωτικών υπολοίπων**

Υποθέτουμε ότι $f(z)$ είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, ολόμορφη παντού εκτός από τα σημεία $a_1, a_2, \dots, a_n$ τα οποία είναι πόλοι της f και μάλιστα κανένα από αυτά δεν συμπίπτει με κάποιο από τα $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Αν υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί ε και M τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$|zf(z)| < M, \text{ για κάθε } z \text{ με } |z| > \frac{1}{\varepsilon},$$

τότε ισχύει ο τύπος

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{n=1}^k \operatorname{Res} [f(z) \cot \pi z].$$

Παράδειγμα 49.1.

Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2},$$

όπου a είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

Λύση.

Θα υπολογίσουμε πρώτα το άθροισμα της σειράς

$$(1) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

Προς τούτο θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}.$$



η οποία είναι ολόμορφη παντού εκτός από τα σημεία ai και $-ai$, τα οποία είναι πόλοι 1ης τάξης. Τώρα παρατηρούμε ότι

$$|z^2 f(z)| = \left| \frac{z^2}{z^2 + a^2} \right| = \left| \frac{1}{1 + \frac{a^2}{z^2}} \right| \leq 1,$$

και επομένως για τον υπολογισμό του αθροίσματος της σειράς (1) μπορεί να εφαρμοστεί ο παραπάνω τύπος. Έτσι έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\pi \left[\operatorname{Res}_{z=ai} \left[\frac{1}{z^2 + a^2} \cot \pi z \right] + \operatorname{Res}_{z=-ai} \left[\frac{1}{z^2 + a^2} \cot \pi z \right] \right].$$

Αλλά τα σημεία ai και $-ai$ είναι πόλοι 1ης τάξης της συνάρτησης

$$\frac{1}{z^2 + a^2} \cot \pi z,$$

οπότε έχουμε

$$\operatorname{Res}_{z=ai} \left[\frac{1}{z^2 + a^2} \cot \pi z \right] = \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \left[\frac{1}{z^2 + a^2} \cot \pi z \right] = \frac{\cot \pi ai}{2ai}$$

και

$$\operatorname{Res}_{z=-ai} \left[\frac{1}{z^2 + a^2} \cot \pi z \right] = \lim_{z \rightarrow -ai} (z + ai) \left[\frac{1}{z^2 + a^2} \cot \pi z \right] = \frac{\cot \pi ai}{2ai}.$$

Επομένως το άθροισμα της σειράς (1) είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\pi \frac{\cot \pi ai}{ai} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a.$$

Τώρα έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2},$$

οπότε τελικά προκύπτει ότι



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{a} \coth \pi a - \frac{1}{2} \frac{1}{a^2} = \frac{\pi a \coth \pi a - 1}{2a^2} \quad \square$$



49.1. Να υπολογιστούν τα άθροίσματα των παρακάτω σειρών, όπου a είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός όχι ακέραιος.

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$

β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2}$

γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - a^3}$

δ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^2}$

ε) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 - a^4}$

ς) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^2}$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο με δαπάνη
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Κ.Α. Πανεπιστημιακού Τυπογραφείου.

Copyright : Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Απαγορεύεται η μερική ή ολική ανατύπωση, καθώς και η
λήψη φωτοαντιγράφων από το βιβλίο χωρίς τη γραπτή
άδεια του Τμήματος Δημοσιευμάτων του Πανεπιστημίου
Ιωαννίνων και του συγγραφέα.

Διατίθεται και στο Βιβλιοπωλείο του Πανεπιστημίου
Ιωαννίνων, Δομόλη, 451 10 Ιωάννινα τηλ. 21801.

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ στους φοιτητές.

