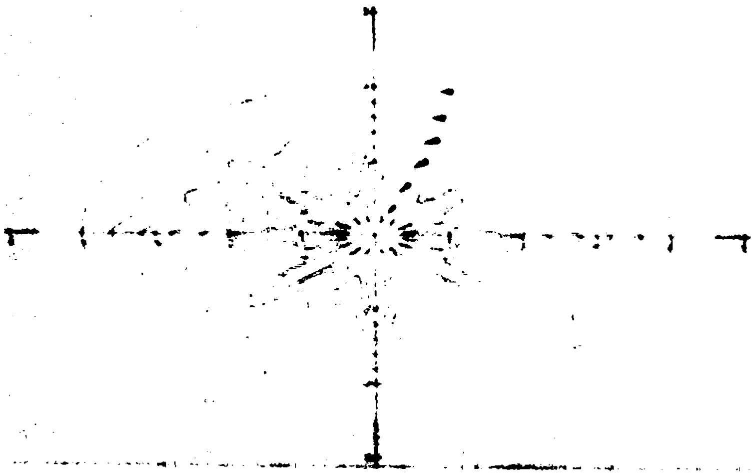
ΓΕΩΡΓΙΟΣ Λ. ΚΑΡΑΚΩΣΤΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Λ. ΚΑΡΑΚΩΣΤΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ
ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εἰσαγωγὴ

Πολλὲς φορὲς γιὰ νὰ ἐκτελέσουμε κάποια ἐργασία δὲν ἔχουμε ἀρκετὸ χῶρο. Τότε, ἂν μποροῦμε, διευρύνουμε τὸν χῶρο μας, ὥστε μέσα σὲ αὐτόν, νὰ ἔχουμε τὴ δυνατότητα νὰ ἐργαστοῦμε. Ἀκριβῶς τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ ὅταν πρόκειται νὰ μελετήσουμε κάποια μαθηματικὰ προβλήματα. Γιὰ παράδειγμα, τὸ σύνολο $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἐφοδιασμένο μὲ τὶς γνωστὲς πράξεις τῆς πρόσθεσης καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δὲν ἐπαρκεῖ γιὰ νὰ ἐπιλύσουμε μιὰ ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$x + 3 = 1.$$

Ὅμως, ὅταν τὸ σύνολο τοῦτο ἐπεκταθεῖ στὸ σύνολο $\mathbb{Z}$ τῶν ἀκεραίων, ἡ ἐξίσωση ἔχει λύση, τὴν $x = -2$. Βέβαια, οἱ πράξεις ἐπὶ τοῦ νέου συνόλου $\mathbb{Z}$ εἶναι ἐπεκτάσεις τῶν ἀντιστοίχων πράξεων ἐπὶ τοῦ $\mathbb{N}$. Ὁ ἀριθμὸς -2 εἶναι ἕνας ἀκέραιος, ποὺ προφανῶς, δὲν εἶναι φυσικὸς ἀριθμός. Παρόμοια, ἡ ἐξίσωση

$$2x - 1 = 0$$

δὲν ἔχει λύση στὸ σύνολο $\mathbb{Z}$ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὡστόσο, ἐπεκτείνοντας τὸ $\mathbb{Z}$ στὸ σύνολο $\mathbb{Q}$ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, ἡ ἐξίσωση ἔχει τὴ λύση $x = 1/2$, ποὺ δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός. Ἀκόμα, ἡ ἐξίσωση

$$x^2 - 3 = 0$$

δὲν ἔχει λύση στὸ σύνολο $\mathbb{Q}$ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Ὅμως, ὅταν τοῦτο ἐπεκταθεῖ στὸ σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν βρίσκουμε ὡς λύση ἕναν ἀριθμὸ ποὺ τὸν παριστάνουμε μὲ τὸ σύμβολο $\sqrt{3}$. Πάλι, οἱ πράξεις ἐπὶ τοῦ νέου συνόλου $\mathbb{R}$ εἶναι ἐπεκτάσεις τῶν ἀντιστοίχων πράξεων ἐπὶ τοῦ $\mathbb{Q}$.

Μὲ βάση τὴν παραπάνω διαδικασία, δηλαδὴ τὶς διαδοχικὲς ἐπεκτάσεις τῶν διαθέσιμων χώρων καὶ μὲ ἀφορμὴ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἐξίσωση

$$x^2 + 1 = 0$$

δὲν μπορεῖ νὰ ἐπιλυθεῖ στὸ σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἐπεκτείνουμε τὸ σύνολο τοῦτο γιὰ νὰ πάρουμε τὸ λεγόμενο σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν C, ὅπου ἡ ἐξίσωση ἔχει λύση. Ἡ λύση αὐτὴ εἶναι ἕνα στοιχεῖο ἐξωπραγματικό, δηλαδὴ μιὰ ὀντότητα ποὺ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ παριστάνεται ὡς i. Τοῦτο, τὸ ὀνομάζουμε, ἐπίσης, ἀριθμὸ καὶ ὡς ἕνα σύμβολο στὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἔχει τὴν ἴδια ἀφηρημένη ὑπόσταση, ὅπως τὰ γνωστὰ σύμβολα ∅, 0, 3, -5, 1/2, κλπ.

Αὐτὴ ἡ διαδικασία, ποὺ ὁδήγησε στὴν ἀνακάλυψη τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ἀκολουθήθηκε κατὰ τὸν 16ο αἰώνα, ὅταν οἱ Ἰταλοὶ μαθηματικοὶ προσπαθοῦσαν νὰ βροῦν τρόπους γιὰ τὴν ἐπίλυση ἐξισώσεων τρίτου βαθμοῦ, ὅπως, π.χ., εἶναι ἡ $x^3 + x = 2$. Τὸ ἔτος 1572 ὁ Ἰταλὸς Rafaello Bombelli, παρουσίασε τὸ βιβλίο του ‹Algebra, στὸ ὁποῖο, μελετῶντας τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν, ἔθεσε τὸ ἐρώτημα: Ποιὰ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ -1; Τὸ 1693 ὁ Leibnitz ὑποθέτει ὅτι ὑπάρχει ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ -1, ὡστόσο, θεωρεῖ ὅτι ὅλοι **οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἔννοιες ποὺ τοποθετοῦνται ἀνάμεσα στὴν ὕπαρξη καὶ στὴν ἀνυπαρξία**. Το ἔτος 1777 ὁ Euler, πρῶτος, χρησιμοποιεῖ τὸ σύμβολο i, ὅμως τοῦτο ἄρχισε νὰ χρησιμοποιεῖται συστηματικά, (ὁπότε καὶ καθιερώθηκε) ἀπὸ τὸν Gauss τὸ ἔτος 1801.

Οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ χρειάζονται σὲ ἀρκετοὺς (ἐφαρμοσμένους) ἐπιστημονικοὺς κλάδους γιὰ τὴ μελέτη τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, τῆς κυματικῆς θεωρίας, τῆς διάδοσης θερμότητας, τῆς κβαντομηχανικῆς καὶ ἄλλων φυσικῶν φαινομένων. Ἀλλὰ καὶ σὲ πολλὲς περιπτώσεις ἡ χρήση τῶν μιγαδικῶν γίνεται γιὰ διευκόλυνση στὴν ἐπίλυση προβλημάτων ποὺ ἀναφέρονται στὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Γιὰ παράδειγμα, πολλὰ ὁλοκληρώματα πραγματικῶν συναρτήσεων ὑπολογίζονται εὐκολότερα μὲ τὴ χρήση μιγαδικῆς ὁλοκλήρωσης. Ὡστόσο, σὲ ἄλλες περιπτώσεις, ἡ χρήση τους ἐπιβάλλεται ἀπὸ τὸ ἴδιο τὸ πρόβλημα.

Τὸ βιβλίο τοῦτο περιέχει μιὰ εἰσαγωγὴ στὴ θεωρία τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων μὲ σκοπὸ νὰ ἀποτελέσει βασικὸ βοήθημα γιὰ τὴ διδασκαλία τοῦ μαθήματος μὲ τίτλο **Μιγαδικὲς Συναρτήσεις 1** τοῦ Προγράμματος Σπουδῶν τοῦ Τμήματος Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων. Δίνονται ἀρκετὰ παραδείγματα καὶ ἄλυτα προβλήματα, ὥστε ἡ θεωρία νὰ γίνει εὐκολότερα κατανοητὴ καὶ νὰ ἐμπεδωθεῖ, χωρὶς νὰ ἀπαιτεῖται ἡ προσφυγὴ σὲ ἄλλα βοηθήματα καὶ ἰδιαίτερα φροντιστήρια. Πολλὰ ἀπὸ τὰ παραδείγματα καὶ τὰ προβλήματα τέθηκαν ὡς θέματα ἐξετάσεων τῆς τελευταίας δεκαετίας.

Ἰωάννινα, Ἀπρίλιος 2013 Γεώργιος Λ. Καρακώστας

⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛

Κεφάλαιο 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ $\mathbb{C}$

1.1.1 Τὸ καρτεσιανὸ ἐπίπεδο

Εἶναι γνωστὸ ὅτι τὸ σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐφοδιασμένο μὲ τὶς πράξεις τῆς πρόσθεσης $+$ καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\cdot$ εἶναι ἕνα (ἀλγεβρικὸ) σῶμα. Ἀναζητοῦμε ἕνα σῶμα $\mathbb{C}$, τὸ ὁποῖο ἐπεκτείνει γνήσια τὸ σῶμα $\mathbb{R}$ καὶ ποὺ διαθέτει ἕνα στοιχεῖο τέτοιο ὥστε νὰ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση

$$x^2 + 1 = 0. \tag{1.1}$$

Ἐδῶ τὸ σύμβολο $+$ δηλώνει τὴν πράξη τῆς πρόσθεσης ἐπὶ τοῦ $\mathbb{C}$, ἡ ὁποία ἐπεκτείνει τὴ γνωστὴ πρόσθεση ἐπὶ τοῦ $\mathbb{R}$.

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμε τὸ καρτεσιανὸ ἐπίπεδο, δηλαδὴ τὸ σύνολο $\mathbb{R}^2$ (τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα εἶναι τὰ 2-διάστατα διανύσματα) ἐφοδιασμένο μὲ τὶς ἀκόλουθες δύο πράξεις:

• Τὴν πράξη τῆς πρόσθεσης διανυσμάτων, ποὺ γίνεται μὲ τὴ μέθοδο τοῦ παραλληλογράμμου

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

• Τὴν πράξη τοῦ βαθμωτοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δηλαδὴ τὸν πολλαπλασιασμὸ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ διάνυσμα

$$\beta(x,y) = (\beta x, \beta y), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Μὲ τὰ δεδομένα αὐτά, τὸ σύνολο $\mathbb{R}^2$ εἶναι ἕνας **διανυσματικὸς χῶρος ὑπεράνω τοῦ** $\mathbb{R}$. Πραγματικά, ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα:

1. **Τὸ $(\mathbb{R}^2, +)$ εἶναι μεταθετικὴ ὁμάδα.** Πραγματκὰ, ἰσχύουν οἱ παρακάτω ἰδιότητες:

   • Τὸ ἄθροισμα δύο στοιχείων τοῦ $\mathbb{R}^2$ εἶναι στοιχεῖο τοῦ $\mathbb{R}^2$.

   • Ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότητα, δηλαδὴ

$$(x,y) + [(x_1,y_1) + (x_2,y_2)] = [(x,y) + (x_1,y_1)] + (x_2,y_2).$$

   • Ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο, τὸ $(0,0)$, ἀφοῦ ἰσχύει

$$(x,y) + (0,0) = (0,0) + (x,y) = (x,y).$$

   • Γιὰ κάθε στοιχεῖο (x,y), ὑπάρχει τὸ ἀντίθετό του καὶ εἶναι τὸ στοιχεῖο $(-x,-y)$, ἀφοῦ ἰσχύει

$$(x,y) + (-x,-y) = (x-x, y-y) = (0,0).$$

   • Ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότητα:

$$(x,y) + (x_1,y_1) = (x_1,y_1) + (x,y).$$

2. **Ὁ βαθμωτὸς πολλαπλασιασμὸς ἔχει τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:**

   • $\beta((x,y) + (x',y')) = \beta(x,y) + \beta(x',y'), \quad \beta \in \mathbb{R}$

   • $\beta[\gamma(x,y)] = [\beta\gamma](x,y), \quad \beta, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$

1.1.2 Τὸ σῶμα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

Σκοπὸς μας εἶναι νὰ μετατρέψουμε τὸν διανυσματικὸ χῶρο $\mathbb{R}^2$ σὲ σῶμα. Πρὸς τοῦτο διατηροῦμε τὴν πράξη τῆς πρόσθεσης +, δηλαδὴ αὐτὴ ποὺ ὁρίζεται ὡς

- $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$,

ἀλλά, ταυτόχρονα, ὁρίζουμε καὶ τὴν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στοιχείων τοῦ συνόλου $\mathbb{R}^2$, ὡς ἑξῆς:

- $(x, y) \cdot (x_1, y_1) = (xx_1 - yy_1, xy_1 + x_1y)$.

Συμβολίζουμε μὲ $\mathbb{C}$ τὸ σύνολο $\mathbb{R}^2$ ἐφοδιασμένο μὲ τὶς πράξεις αὐτές.

Πρόταση 1.1.2.1 *Τὸ σύνολο $\mathbb{C}$ εἶναι ἕνα (ἀλγεβρικὸ) σῶμα.*

Ἀπόδειξη: Ὅπως εἴδαμε παραπάνω, τὸ σύνολο $\mathbb{C}$ εἶναι μεταθετικὴ ὁμάδα ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση. Ἐπομένως ἀπομένει νὰ δείξουμε ἄλλα δύο πράγματα: Πρῶτον ὅτι τὸ σύνολο τοῦτο χωρὶς τὸ μηδενικὸ στοιχεῖο (0,0) εἶναι μεταθετικὴ ὁμάδα ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμὸ καί, δεύτερον, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπιμερίζεται τῆς πρόσθεσης.

Πράγματι ἔχουμε τὰ ἑξῆς:

Τὸ $(\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ **εἶναι μεταθετικὴ ὁμάδα.** Γιὰ νὰ δείξουμε τοῦτο, παρατηροῦμε ὅτι

- τὸ γινόμενο δύο στοιχείων τοῦ $\mathbb{C}$ εἶναι στοιχεῖο τοῦ $\mathbb{C}$,
- ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότητα, δηλαδὴ ἡ

$$
\begin{aligned}
&(x, y) \cdot [(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)] = (x, y)(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \\
&= (x(x_1x_2 - y_1y_2) - y(x_1y_2 + x_2y_1), x(x_1y_2 + x_2y_1) + y(x_1x_2 - y_1y_2)) \\
&= (xx_1x_2 - xy_1y_2 - yx_1y_2 - yx_2y_1, xx_1y_2 + xx_2y_1 + yx_1x_2 - yy_1y_2) \\
&= ((xx_1 - yy_1)x_2 - (xy_1 + yx_1)y_2, (xx_1 - yy_1)y_2 + (xy_1 + yx_1)x_2) \\
&= (xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1) \cdot (x_2, y_2) = [(x, y) \cdot (x_1, y_1)] \cdot (x_2, y_2),
\end{aligned}
$$

- ἔχει οὐδέτερο στοιχεῖο τὸ $(1, 0)$, ἀφοῦ ἰσχύει

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (1x - 0y, 0x + 1y) = (x, y),$$

- ὑπάρχει τὸ ἀντίστροφο κάθε (μὴ μηδενικοῦ) στοιχείου (x, y) καὶ εἶναι τὸ στοιχεῖο

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right),$$

ἀφοῦ ἰσχύει

$$(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1,0),$$

καί, τέλος,

- ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότητα:

$$\begin{aligned}(x,y)\cdot(x_1,y_1) &= (xx_1 - yy_1, xy_1 + x_1y)\\ &= (x_1x - y_1y, x_1y + y_1x)\\ &= (x_1,y_1)\cdot(x,y).\end{aligned}$$

Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπιμερίζεται τῆς πρόσθεσης, δηλαδὴ ἰσχύει

$$\begin{aligned}(x,y)\cdot[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] &= (x,y)\cdot(x_1+x_2, y_1+y_2)\\ &= (x(x_1+x_2) - y(y_1+y_2), x(y_1+y_2) + (x_1+x_2)y)\\ &= (xx_1 + xx_2 - yy_1 - yy_2, xy_1 + xy_2 + x_1y + x_2y)\\ &= (xx_1 - yy_1, xy_1 + x_1y) + (xx_2 - yy_2, xy_2 + x_2y)\\ &= (x,y)\cdot(x_1,y_1) + (x,y)\cdot(x_2,y_2). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Τὰ στοιχεῖα τοῦ σώματος $\mathbb{C}$, ποὺ ἔχουν τὴ μορφὴ $(x, 0)$, συνιστοῦν ἕνα ὑπόσωμα τοῦ $\mathbb{C}$ τὸ ὁποῖο εἶναι ἰσόμορφο (δηλαδή, κάτι σὰν ἀντίγραφο) τοῦ σώματος $\mathbb{R}$. Πράγματι παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

- $(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$,
- $(x, 0)\cdot(x', 0) = (xx', 0)$.

Ἑπομένως, γιὰ κάθε πραγματικὸ ἀριθμὸ x, τὸ στοιχεῖο $(x, 0)$ μπορεῖ νὰ ταυτιστεῖ μὲ τὸ στοιχεῖο x τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὁπότε καὶ συμφωνοῦμε νὰ γράφουμε $(x, 0) = x$. Ἰδιαίτερα, τὸ σημεῖο $(0, 0)$ ταυτίζεται μὲ τὸ 0 καὶ τὸ στοιχεῖο $(1, 0)$ ταυτίζεται μὲ τὴ μονάδα 1 τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ὅμως, θὰ ἔχουμε πάντοτε ὑπόψη μας ὅτι, ὑπάρχει διαφορὰ μεταξὺ τῆς μονάδας 1 τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς μονάδας

$$(1,0) = 1 + i \cdot 0 = 1$$

τοῦ συνόλου τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Τέλος, παρατηροῦμε ὅτι τὸ στοιχεῖο $i := (0,1)$, ποὺ λέγεται **φανταστικὴ μονάδα**, ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση

$$i^2 + 1 = (0,1)^2 + (1,0) = (-1,0) + (1,0) = (0,0) = 0,$$

δηλαδὴ τοῦτο ἱκανοποιεῖ τὴ θεμελιώδη σχέση (1.1), ἡ ὁποία ἦταν καὶ ἡ ἀφορμὴ γιὰ τὸν ὁρισμὸ τοῦ συνόλου $\mathbb{C}$.

Μὲ τὴν παραπάνω παραδοχὴ γιὰ τὸν συμβολισμό, βλέπουμε ὅτι τὸ τυχὸν στοιχεῖο $z = (x,y)$ τοῦ συνόλου $\mathbb{C}$ μπορεῖ νὰ λάβει τὴ λεγόμενη **ἀλγεβρικὴ μορφὴ**

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x + (0,1)(y,0) = x + iy,$$

ὅπου, βέβαια, τὰ στοιχεῖα x καὶ y εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί. Ἔτσι, συμπεραίνουμε ὅτι τὸ σύνολο $\mathbb{C}$ περιέχει ἀκριβῶς τὰ στοιχεῖα τῆς μορφῆς αὐτῆς. Ἰδιαίτερα, ὅπως εἴπαμε, κάθε στοιχεῖο τῆς μορφῆς $z = (x,0)$ γράφεται ὡς $z = x + i0 = x$.

1.1.3 Ἰδιότητες καὶ πράξεις

Ἐδῶ θὰ δοῦμε ὁρισμένες ἰδιότητες ποὺ ἔχει ὁ χῶρος $\mathbb{C}$.

Πρόταση 1.1.3.1 *Ἡ ἔννοια τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι καλὰ ὁρισμένη, δηλαδὴ κάθε ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν (x,y) ὁρίζει ἕναν καὶ μόνο ἕναν μιγαδικὸ ἀριθμὸ $z = x + iy$.*

Ἀπόδειξη: Ἂν κάποιος μιγαδικὸς ἀριθμὸς z ἔχει δύο ἀλγεβρικὲς παραστάσεις, τὴν $x_1 + y_1 i$ καὶ $x_2 + y_2 i$, τότε θὰ ἰσχύει

$$x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i.$$

Ἑπομένως, θὰ ἔχουμε

$$x_1 - x_2 = x_1 + y_1 i - y_1 i - x_2 = x_2 + y_2 i - y_1 i - x_2 = i(y_2 - y_1).$$

Ὑψώνοντας στὸ τετράγωνο καὶ τὰ δύο μέλη τῆς σχέσης αὐτῆς, παίρνουμε τὴν ἰσότητα

$$(x_1 - x_2)^2 = i^2(y_2 - y_1)^2 = -(y_2 - y_1)^2.$$

Ἐδῶ ἔχουμε τὸν μὴ ἀρνητικὸ ἀριθμὸ $(x_1 - x_2)^2$ ἴσον μὲ τὸν μὴ θετικὸ ἀριθμὸ $-(y_2 - y_1)^2$. Ἄρα οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι μὲ τὸ 0, ἀπὸ ὅπου προκύπτει ὅτι $x_1 = x_2$ καὶ $y_1 = y_2$. ■

Ἂν $z = x + iy$ εἶναι ἕνας μιγαδικὸς ἀριθμός, τότε ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς x εἶναι τὸ **πραγματικὸ μέρος** τοῦ z καὶ παριστάνεται μὲ

$$x = \mathrm{Re}(z).$$

Ἐπίσης, ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς y εἶναι τὸ **φανταστικὸ μέρος** τοῦ z καὶ παριστάνεται μὲ

$$y = \mathrm{Im}(z).$$

Μὲ τὸν νέο συμβολισμὸ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, τὸ **ἄθροισμα** $z_1 + z_2$ καὶ τὸ γινόμενο $z_1 \cdot z_2$ τῶν ἀριθμῶν $z_1 := x_1 + y_1 i$ καὶ $z_2 := x_2 + y_2 i$ εἶναι, ἀντίστοιχα, οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

καὶ

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Συνήθως τὸ γινόμενο $z_1 \cdot z_2$ παριστάνεται καὶ ὡς $z_1 z_2$, δηλαδὴ χωρὶς τὸ σύμβολο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Πόρισμα 1.1.3.1 *Ἡ ἰσότητα $w = a + i\beta = 0$, ἰσχύει τότε καὶ μόνο τότε, ὅταν $a = \beta = 0$.*

Ἀπόδειξη: Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὴν προηγούμενη πρόταση καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ στοιχεῖο 0 ἔχει ἀλγεβρικὴ παράσταση $0 + i0$. ■

Πρόταση 1.1.3.2 *Ἔστω $w = a + i\beta$ ἕνας μιγαδικὸς ἀριθμὸς τέτοιος ὥστε $w \neq 0$. Τότε ἰσχύει $w \cdot z = 0$, ἂν καὶ μόνο ἂν $z = 0$.*

Ἀπόδειξη: Ἂν $z = 0$, τότε, προφανῶς, $w \cdot z = 0$.

Ἀντίστροφα. Ἐπειδὴ ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $w = a + i\beta$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἀπὸ τὸ ἀμέσως προηγούμενο Πόρισμα, προκύπτει ὅτι

$$a^2 + \beta^2 \neq 0.$$

Ἔστω $z = x + iy$ ἡ ἀλγεβρικὴ παράσταση τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z. Ἀπὸ τὴν ὑπόθεση καὶ τὸν ὁρισμὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἔχουμε

$$0 = wz = ax - \beta y + i(ay + \beta x).$$

Ἔτσι, ἀπὸ τὴν Πρόταση 1.1.3.1, προκύπτει τὸ ἀλγεβρικὸ σύστημα

$$ax - \beta y = 0, \quad \beta x + ay = 0.$$

Ἐπειδὴ ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν εἶναι ἴση μὲ τὸν ἀριθμὸ $a^2 + \beta^2$, ποὺ, ὅπως εἴπαμε, εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, τὸ ἀλγεβρικὸ σύστημα θὰ ἔχει λύση τὴν $x = 0$, $y = 0$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἄν ἰσχύει $0 = wz$, τότε θὰ πρέπει $z = 0$. ■

1.1.4 Διάταξη στὸ σύνολο $\mathbb{C}$

Ὅπως ἀναφέρθηκε παραπάνω, τὸ σῶμα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἔχει ὡς ὑπόσωμα τὸ σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Το γεγονὸς τοῦτο συμβιβάζεται μὲ τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα:

Σημείωση 1.1.4.1 *Ὅλες οἱ γνωστὲς ταυτότητες ποὺ ἰσχύουν μεταξὺ πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐξακολουθοῦν νὰ ἰσχύουν καὶ γιὰ τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμούς.*

Ὡστόσο ὑπάρχουν ἰδιότητες τὶς ὁποῖες ἔχουν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἀλλὰ δὲν ἔχουν οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοί. Μιὰ τέτοια ἰδιότητα εἶναι ἡ διάταξη. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἀπὸ τὴν κατασκευή του, εἶναι ἕνα **διατεταγμένο σῶμα**. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ γνωστὴ διάταξη $<$, ἡ ὁποία ὑφίσταται μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἶναι **ὁλική**[1] καὶ μάλιστα, ἱκανοποιεῖ τὶς ἀκόλουθες σχέσεις:

[1] δηλαδὴ εἶναι τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν x, y, ἰσχύει ἀκριβῶς μία ἀπὸ τὶς σχέσεις: $x < y$, $x = y$, $y < x$.

(1) Ἄν $x < y$ καὶ $x' < y'$, τότε $x + x' < y + y'$.

(2) Ἄν $x < y$ καὶ $0 < a$, τότε $ax < ay$.

Στὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν τὸ γεγονὸς τοῦτο δὲν μπορεῖ νὰ συμβαίνει. Πραγματικά, ἔχουμε τὴν ἑξῆς πρόταση:

Πρόταση 1.1.4.1 Δὲν ὑπάρχει ὁλικὴ διάταξη ποὺ νὰ καθιστᾶ τὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $\mathbb{C}$ ἕνα διατεταγμένο σῶμα.

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχει μιὰ ὁλικὴ διάταξη $<$, ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τὶς ἑξῆς συνθῆκες:

(1) Ἄν $z < w$ καὶ $z' < w'$, τότε $z + z' < w + w'$.

(2) Ἄν $z < w$ καὶ $0 < a$, τότε $az < aw$.

Τότε, θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει τουλάχιστον μία ἀπὸ τὶς σχέσεις

$$i = 0, \quad i < 0, \quad 0 < i.$$

Ἡ ἰσότητα, $i = 0$, προφανῶς, δὲν ἰσχύει, ἀφοῦ τότε σύμφωνα μὲ τὴν Πρόταση 1.1.3.1, θὰ πρέπει νὰ ἔχουμε τὴν ἰσότητα $(0, 1) = (0, 0)$, δηλαδὴ $0 = 1$, ἄτοπο.

Ἔστω ὅτι ἰσχύει

$$0 < i.$$

Σύμφωνα μὲ τὴ συνθήκη (2), ἐπειδὴ $0 < i$ καὶ $0 < i$, θὰ ἔχουμε καὶ

$$0 < ii, \quad \text{δηλαδὴ } 0 < -1,$$

ὁπότε, πάλι, σύμφωνα μὲ τὴ συνθήκη (2), θὰ ἔχουμε

$$0 < (-1)i, \quad \text{ἤτοι } 0 < -i.$$

Ἔτσι ότε, ὅμως, ἀπὸ τὴ συνθήκη (1), προκύπτει ὅτι

$$0 + 0 < (-i) + i, \quad \text{δηλαδὴ } 0 < 0,$$

σχέση, ἡ ὁποία εἶναι ἀδύνατη.

Μὲ παρόμοιο τρόπο ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἡ σχέση $i < 0$ εἶναι ἀδύνατη. ■

Σχέσεις ὁλικῆς διάταξης στὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, μποροῦν νὰ ὁριστοῦν χωρίς ὅμως αὐτὲς νὰ εἶναι συμβατὲς μὲ τὶς πράξεις τοῦ σώματος, ὅπως δείχνεται στὸ παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.1.1 *Ἡ λεξικογραφικὴ διάταξη $\mathcal{M}$, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς*

$$(x+yi)\ \mathcal{M}\ (u+vi) : x < u \text{ καί, ἄν ἰσχύει } x = u, \text{ τότε } y < v,$$

δὲν εἶναι συμβατὴ μὲ τὶς πράξεις.

Ἀπόδειξη: Θέτουμε $z := 1+i, w := 2+2i$ καὶ $a := 1+2i$. Τότε παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$z\ \mathcal{M}\ w \text{ καὶ } 0\ \mathcal{M}\ a.$$

Ὅμως συμβαίνει ὅτι

$$az = (1+i)(1+2i) = -1+3i \text{ καὶ } aw = (2+2i)(1+2i) = -2+6i,$$

ὁπότε, προφανῶς, δὲν ἰσχύει ἡ σχέση

$$(1+i)(1+2i)\ \mathcal{M}\ (2+2i)(1+2i),$$

δηλαδὴ ἡ

$$(az)\ \mathcal{M}\ (aw). \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 1.1.4.1 *Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση*

$$(3+i)x + (4-5i)y = -14+27i,$$

ὅπου x, y εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Λύση: Γράφουμε τὸν μιγαδικὸ ἀριθμό, ποὺ εἶναι στὸ ἀριστερὸ μέρος τῆς ἐξίσωσης, στὴν ἀλγεβρικὴ του μορφή, ὁπότε ἔχουμε

$$(3x+4y) + i(x-5y) = -14+27i.$$

Ἔτσι θὰ πρέπει νὰ ἐπαληθεύεται τὸ σύστημα

$$3x+4y = -14, \quad x-5y = 27,$$

τὸ ὁποῖο ἔχει τὴ λύση

$$x = 2 \text{ καὶ } y = -5. \ \blacklozenge$$

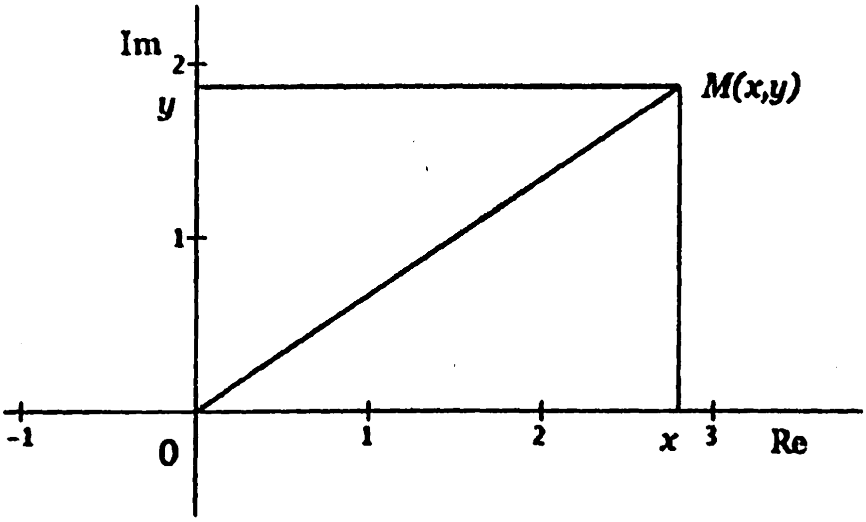
1.2 ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

1.2.1 Ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου $\mathbb{C}$ στὸ ἐπίπεδο

Τὸ **μιγαδικὸ ἐπίπεδο**, ἢ **ἐπίπεδο Gauss**, γιὰ τὸ ὁποῖο χρησιμοποιοῦμε ἐπίσης τὸ σύμβολο $\mathbb{C}$, εἶναι τὸ καρτεσιανὸ ἐπίπεδο, μὲ τὸ χαρακτηριστικὸ ὅτι κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ μὲ συντεταγμένες (x, y) παριστάνει τὸν μοναδικὸ μιγαδικὸ ἀριθμὸ

$$z := x + yi.$$

Δηλαδή, ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z := x + iy$ παριστάνεται μὲ τὸ διάνυσμα OM, τὸ ὁποῖο ἔχει ἀρχὴ τὸ σημεῖο O καὶ πέρας τὸ σημεῖο $M(x, y)$. Στὸ



Σχήμα 1.1: *Κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕναν ἀκριβῶς μιγαδικὸ ἀριθμὸ καὶ κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕνα καὶ μόνο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου.*

μιγαδικὸ ἐπίπεδο οἱ ἄξονες **συντεταγμένων** ἔχουν διαφορετικὴ ὀνομασία, ἀπὸ ἐκείνη ποὺ ἔχουν στὸ καρτεσιανό ἐπίπεδο. Ὁ ὁριζόντιος ἄξονας, δηλαδὴ ὁ ἄξονας τῶν τιμῶν τοῦ x, λέγεται **πραγματικός** ἄξονας **Re** καὶ ὁ κατακόρυφος ἄξονας, δηλαδὴ ὁ ἄξονας τῶν τιμῶν τοῦ y, λέγεται **φανταστικός** ἄξονας **Im**.

Τὸ σύνολο

$$\{z : z = x + i0,\ \ x \geq 0\}$$

εἶναι ὁ θετικὸς πραγματικὸς ἡμιάξονας, ἐνῶ τὸ σύνολο

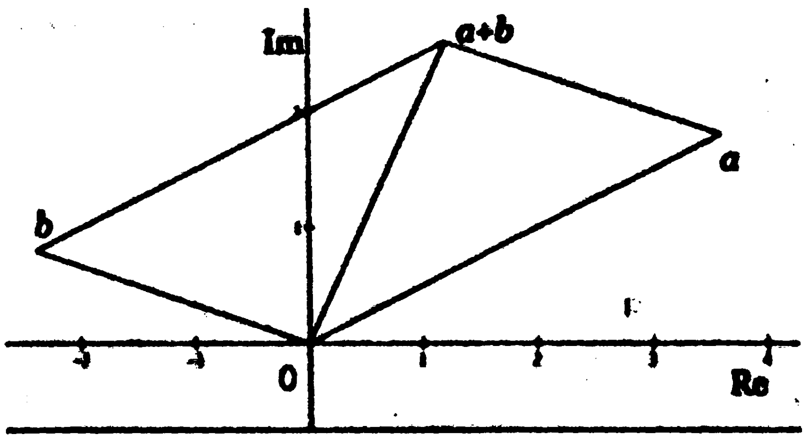
$$\{z : z = x + i0,\ \ x \leq 0\}$$

εἶναι ὁ ἀρνητικὸς πραγματικὸς ἡμιάξονας. Ἀνάλογα ἔχουμε τὸν θετικὸ φανταστικὸ ἡμιάξονα,

$$\{z : z = 0 + ix,\ \ x \geq 0\}$$

καὶ τὸν ἀρνητικὸ φανταστικὸ ἡμιάξονα

$$\{z : z = 0 + ix,\ \ x \leq 0\}.$$



Σχήμα 1.2: *Πρόσθεση μιγαδικῶν ἀριθμῶν μὲ τὴ μέθοδο τοῦ παραλληλογράμμου.*

Μὲ βάση τὸν ὁρισμὸ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, τὸ ἄθροισμα δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν a καὶ b ἀντιστοιχεῖ στὸ ἄθροισμα διανυσμάτων, ὅπως αὐτὸ πραγματοποιεῖται πάνω στὸ καρτεσιανὸ ἐπίπεδο. Δηλαδή, ἂν τὸ διάνυσμα Oa μετακινηθεῖ παράλληλα πρὸς τὸν ἑαυτό του, κατὰ τέτοιον τρόπο ὥστε τὸ ἀρχικό του σημεῖο O νὰ συμπέσει μὲ τὸ σημεῖο b, τότε τὸ τελικὸ σημεῖο θὰ συμπέσει μὲ τὸ ἄθροισμα $a + b$. Ἰσοδύναμα, τὸ σημεῖο $a + b$ εἶναι ἡ τέταρτη κορυφὴ τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ ὁποίου οἱ ἄλλες τρεῖς κορυφὲς εἶναι τὰ σημεῖα 0, a τὸ b. Γι' αὐτὸ καὶ ἡ μέθοδος αὐτὴ γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ ἀθροίσματος, λέγεται **κανόνας τοῦ παραλληλογράμμου.**

1.2.2 Μέτρο καὶ ὅρισμα

Ὅπως ἀναφέρθηκε παραπάνω, κάθε (μὴ μηδενικὸς) μιγαδικὸς ἀριθμός $z := x + iy$ ταυτίζεται μὲ τὸ σημεῖο $M := M(x, y)$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ἀλλὰ καὶ μὲ τὸ διάνυσμα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ σημεῖο αὐτό. Τὸ μῆκος ρ τοῦ διανύσματος μὲ ἀρχὴ τὸ 0 καὶ πέρας τὸ σημεῖο $M(x, y)$ εἶναι τὸ μέτρο, ἢ ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z καὶ παριστάνεται μὲ $|z|$, δηλαδὴ ἔχουμε

$$\rho = |z| := (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Εὔκολα μποροῦμε νὰ δείξουμε τὴν ἑξῆς πρόταση:

Πρόταση 1.2.2.1 *Τὸ μέτρο μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἔχει τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες:*

1) $|z| = 0$, *ἄν καὶ μόνο ἄν* $z = 0.$,

2) $|zw| = |z||w|$.

3) $||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$. *(Τριγωνικὴ ἰδιότητα)*

Συγκρίνοντας τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ ὁποῖο ἔχει κορυφὲς τὰ σημεῖα 0, x καὶ $M(x, y)$ μποροῦμε νὰ δοῦμε ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$|\mathrm{Re}(z)| = |x| \leq |z| \ \text{ καὶ } \ |\mathrm{Im}(z)| = |y| \leq |z|.$$

Πρόβλημα 1.2.2.1 *Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση* $|z|^4 = |z - 1|^4$.

Λύση: Θέτοντας $z = x + iy$, βλέπουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $|z|^2 = |z - 1|^2$, δηλαδὴ τὴν

$$x^2 + y^2 = (x - 1)^2 + y^2.$$

Ἄρα αὐτὴ πρέπει νὰ ἐπαληθεύεται γιὰ κάθε y καὶ γιὰ $x = \frac{1}{2}$. Συνεπῶς, ἡ ἐξίσωση ἔχει λύση κάθε σημεῖο τῆς μορφῆς $z = \frac{1}{2} + iy$, ὅπου $y \in \mathbb{R}$. ♦

Πρόβλημα 1.2.2.2 *Νὰ βρεθεῖ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο τὸ σύνολο* A *ὅλων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν* z *ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση*

$$\mathrm{Re}(z + |z|) \geq \mathrm{Im}(z - i|z|).$$

Ἀπόδειξη: Θέτουμε $z = x + iy$ καὶ βρίσκουμε τὴν ἀνισότητα

$$x + |z| \geq y - |z|,$$

δηλαδὴ τὴν $2|z| \geq y - x$.

Ἂν ἰσχύει $y \leq x$, τότε ἡ ἀνισότητα $|z| \geq y - x$, προφανῶς, ἰσχύει γιὰ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμὸ z. Ἔστω ὅτι ἰσχύει $y \geq x$. Τότε πρέπει νὰ ἀληθεύει ἡ

$$(2|z|)^2 \geq (y - x)^2,$$

δηλαδὴ ἡ

$$4(x^2 + y^2) \geq y^2 + x^2 - 2xy,$$

ἡ ὁποία γράφεται καὶ ὡς

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy \geq 0.$$

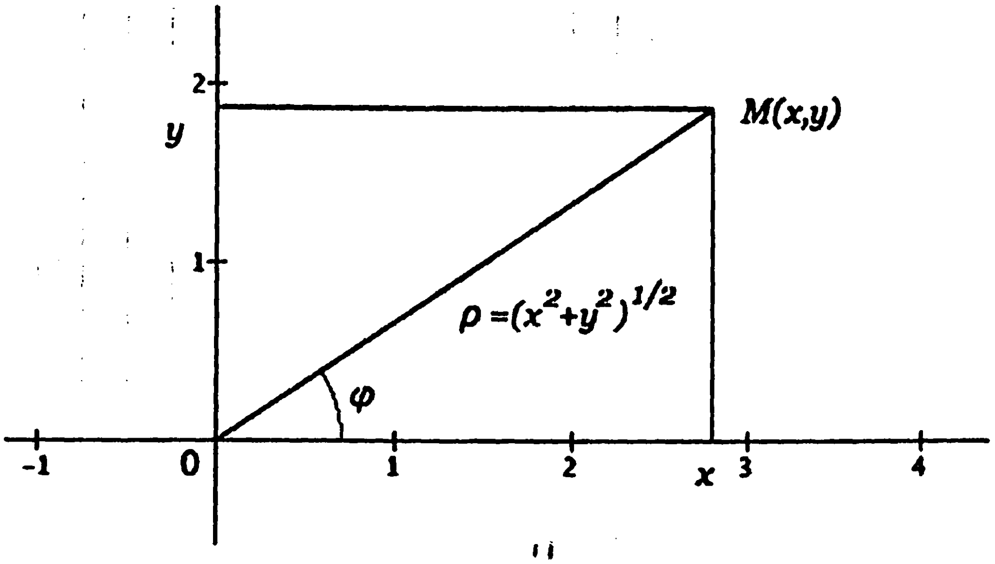
Ἡ ποσότητα, ποὺ βρίσκεται στὸ ἀριστερὸ μέλος τῆς ἀνισότητας αὐτῆς, ἰσοῦται μὲ

$$(x + \frac{1}{3}y)^2 + \frac{8}{9}y^2,$$

ἡ ὁποία πάντοτε εἶναι μὴ ἀρνητική. Ἔτσι, κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = x + iy$, μὲ $y \geq x$, ἐπαληθεύει τὴν ἀνισότητα καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενο σύνολο A εἶναι ὁλόκληρο τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο. ♦

Ἔστω $M(x, y)$ τὸ σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸν μιγαδικὸ ἀριθμὸ $z = x + iy \neq 0$. Ἂν φ εἶναι μιὰ γωνία ποὺ ἔχει κορυφὴ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων, ἀρχικὴ πλευρὰ τὸν (θετικὸ) ἡμιάξονα Ox καὶ τελικὴ πλευρὰ τὸν φορέα τοῦ διανύσματος OM, λέμε ὅτι αὐτὴ εἶναι τὸ ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z καὶ δηλώνεται μὲ τὸ σύμβολο $\arg(z)$. Ἡ γωνία αὐτὴ θὰ μποροῦσε νὰ εἶναι ὅπως στὸ σχῆμα, ἀλλὰ καὶ κάθε γωνία τῆς μορφῆς $\varphi + 2k\pi$ ἔχει τὴν ἴδια ἰδιότητα. Κάθε μιὰ ἀπὸ αὐτὲς τὶς γωνίες εἶναι ὅρισμα arg τοῦ σημείου z. Ἑπομένως, ἡ διαφορὰ δύο τέτοιων γωνιῶν φ_1 καὶ φ_2 εἶναι ἕνα ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ ἀριθμοῦ 2π. Ὅμως, σὲ κάθε μὴ μηδενικὸ μιγαδικὸ ἀριθμὸ z ἀντιστοιχεῖ μιὰ καὶ μοναδικὴ γωνία

$$\varphi \in (-\pi, \pi],$$



Σχήμα 1.3: *Κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχει ἕνα μέτρο καὶ ἕνα βασικὸ ὅρισμα.*

ποὺ παριστάνεται μὲ τὸ σύμβολο

$$\mathrm{Arg}(z).$$

Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται βασικὸ ὅρισμα, ἤ βασικὸς κλάδος τοῦ ὁρίσματος, ἤ κύρια τιμὴ τοῦ ὁρίσματος καὶ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση

$$\arg(z) = \{\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Στὰ ἑπόμενα, θὰ θεωροῦμε ὅτι δυὸ ὁρίσματα εἶναι ἴσα, ἄν ἡ διαφορὰ τους εἶναι ἕνα ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ 2π. Μάλιστα, δέ, γιὰ δύο μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς z_1 καὶ z_2, ὅταν γράφουμε

$$\arg(z_1) = \arg(z_2),$$

θὰ ἐννοοῦμε ἰσότητα μεταξὺ συνόλων, ἀφοῦ ἡ ἰσότητα αὐτὴ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει ἀκέραιος ἀριθμὸς k τέτοιος ὥστε νὰ ἰσχύει

$$\mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2) + 2k\pi i.$$

Ἄν $z := x+yi$ εἶναι ἕνας μιγαδικὸς ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 0, μποροῦμε νὰ δοῦμε ὅτι τὸ βασικὸ ὅρισμα δίνεται ὡς ἑξῆς:

$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \operatorname{Arctan}(\frac{y}{x}), & \text{ἄν } x > 0, \\ \pi + \operatorname{Arctan}(\frac{y}{x}), & \text{ἄν } x < 0 \text{ καὶ } y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{Arctan}(\frac{y}{x}), & \text{ἄν } x < 0 \text{ καὶ } y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ἄν } x = 0 \text{ καὶ } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ἄν } x = 0 \text{ καὶ } y < 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Πρόβλημα 1.2.2.3 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι δὲν ὑπάρχει μιγαδικὸς ἀριθμὸς c τέτοιος ὥστε, γιὰ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμὸ z, νὰ ἱκανοποιεῖται ἡ ἀνισότητα*

$$|c + i\operatorname{Arg}[z - c^2]| \leq 1.$$

Ἀπόδειξη: Ἄν γιὰ κάποιο μιγαδικὸ ἀριθμὸ c ἰσχύει ἡ δοθεῖσα σχέση γιὰ κάθε z, τότε αὐτὴ θὰ ἰσχύει καὶ γιὰ τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς $z = 1 + c^2$ καὶ $z = -1 + c^2$. Τότε, ὅμως, βρίσκουμε, ἀντίστοιχα, ὅτι

$$|c| \leq 1 \text{ καὶ } |c + i\pi| \leq 1.$$

Οἱ δύο σχέσεις δὲν μπορεῖ νὰ ἰσχύουν ταυτόχρονα, ἀφοῦ, τότε θὰ ἴσχυε ὅτι

$$2 = 1 + 1 > |c + i\pi| + |c| \geq |c + i\pi - c| = |i\pi| = \pi,$$

πρᾶγμα ἄτοπο. ♦

Πρόβλημα 1.2.2.4 *Νὰ ἀπεικονιστεῖ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο τὸ σύνολο*

$$A := \{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z - i}{z + 1}\right| = 1\}.$$

Λύση: Ἕνα σημεῖο z ἀνήκει στὸ σύνολο A ἄν καὶ μόνο ἄν ἰσχύει $|z - i| = |z + 1|$. Ἄρα τοῦτο ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ σημεῖα i καὶ -1, δηλαδὴ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου A αντιστοιχοῦν στὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ποὺ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ποὺ ὁρίζουν τὰ σημεῖα αὐτά. Ἡ μεσοκάθετος αὐτὴ εἶναι ἡ εὐθεῖα μὲ ἐξίσωση $y = -x$. ♦

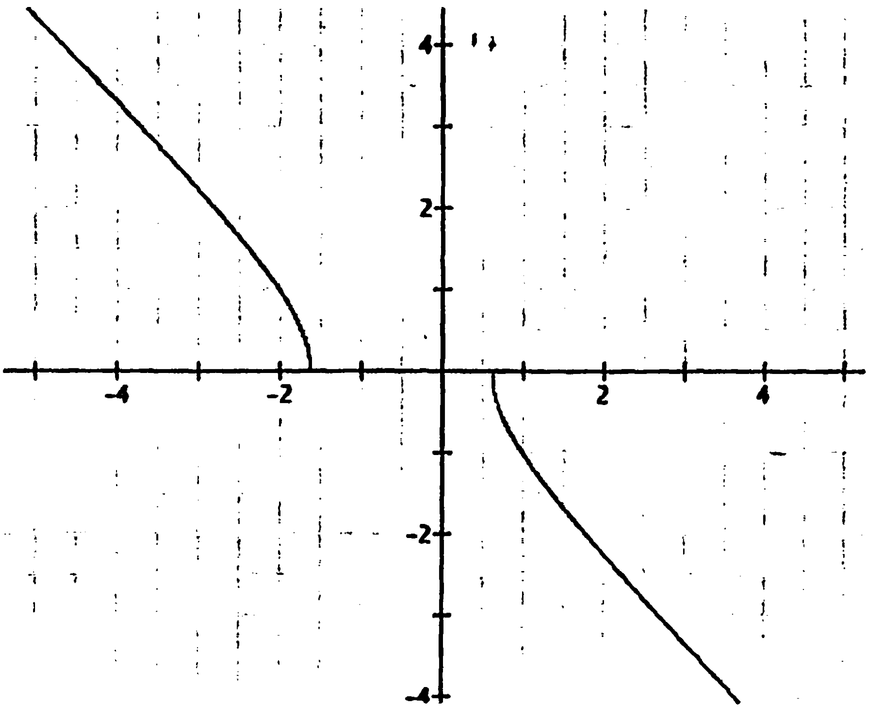
Πρόβλημα 1.2.2.5 *Νὰ βρεθεῖ τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση*

$$\mathrm{Arg}(1 - z - z^2) = \frac{\pi}{2}.$$

Λύση: Θέτοντας $z = x + iy$ ἡ σχέση αὐτὴ γίνεται

$$\mathrm{Arg}(1 - x - iy - x^2 + y^2 - 2ixy) = \frac{\pi}{2}.$$

Τοῦτο δηλώνει ὅτι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $1 - x - iy - x^2 + y^2 - 2ixy$ κεῖται



Σχήμα 1.4: *Οἱ δύο καμπύλες εἶναι τμήματα ὑπερβολῆς τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα ἐπαληθεύουν τὴ σχέση* $\mathrm{Arg}(1 - z - z^2) = \frac{\pi}{2}$.

πάνω στὸν θετικὸ φανταστικὸ ἡμιάξονα, πρᾶγμα ποὺ συμβαίνει ὅταν καὶ μόνο ὅταν

$$\mathrm{Re}(1 - x - iy - x^2 + y^2 - 2ixy) = 0$$

καὶ

$$\mathrm{Im}(1 - x - iy - x^2 + y^2 - 2ixy) > 0.$$

Ἑπομένως ἔχουμε

$$1 - x - x^2 + y^2 = 0 \text{ καὶ } -y - 2xy > 0,$$

ἤ

$$(x + \frac{1}{2})^2 - y^2 = \frac{5}{4} \text{ καὶ } y(1 + 2x) < 0.$$

Ἄρα τὸ ζεῦγος (x, y) ἀποτελεῖ λύση τοῦ συστήματος αὐτοῦ, ἄν, καὶ μόνο ἄν, τοῦτο βρίσκεται πάνω στὰ τμήματα τῆς ὑπερβολῆς, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα. ♦

Πρόβλημα 1.2.2.6 *Νὰ βρεθεῖ τὸ μέτρο καὶ ὁ βασικὸς κλάδος τοῦ ὀρίσματος τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ*

$$z := -\sin\frac{\pi}{15} - i\cos\frac{\pi}{15}.$$

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι

$$\mathrm{Re}(z) = -\sin\frac{\pi}{15} < 0 \text{ καὶ } \mathrm{Im}(z) = -\cos\frac{\pi}{15} < 0,$$

ὁπότε τὸ σημεῖο z βρίσκεται στὸ τρίτο τεταρτημόριο. Ἑπομένως, σύμφωνα μὲ τὸν τύπο (1.2), ὁ βασικὸς κλάδος τοῦ ὀρίσματος τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z εἶναι

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}(z) &= -\pi + \mathrm{Arctan}(\frac{y}{x}) = -\pi + \mathrm{Arctan}\frac{-\cos(\frac{\pi}{15})}{-\sin(\frac{\pi}{15})}\\ &= -\pi + \mathrm{Arctan}(\cot\frac{\pi}{15}) = -\pi + \mathrm{Arctan}(\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}))\\ &= -\pi + \frac{13\pi}{30} = -\frac{17\pi}{30}.\end{aligned}$$

Τὸ μέτρο τοῦ z εἶναι ὁ ἀριθμὸς

$$|z| = \sqrt{(-\sin\frac{\pi}{15})^2 + (-\cos\frac{\pi}{15})^2} = 1. \ \blacklozenge$$

1.2.3 Τριγωνομετρικὴ μορφὴ καὶ πράξεις

Ἄν ρ εἶναι τὸ μέτρο καὶ φ τὸ ὅρισμα ἑνὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z, τότε χρησιμοποιῶντας τὴν παράσταση τοῦ z στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο, βρίσκουμε

$$x = \rho\cos(\varphi) \text{ καὶ } y = \rho\sin(\varphi).$$

Ἔτσι προκύπτει ἡ λεγόμενη **πολικὴ** ἤ **τριγωνομετρικὴ μορφή**, τοῦ z, δηλαδὴ ἡ παράσταση

$$z = \rho[\cos\varphi + i\sin\varphi].$$

Μὲ τὴν εὐκαιρία τῆς τριγωνομετρικῆς μορφῆς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ, παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$\begin{aligned} i\rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) &= \rho(-\sin(\varphi) + i\cos(\varphi)) \\ &= \rho[\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\varphi + \frac{\pi}{2})], \end{aligned}$$

γεγονὸς τὸ ὁποῖο σημαίνει τὸ ἑξῆς:

Πόρισμα 1.2.3.1 *Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴ φανταστικὴ μονάδα i εἶναι μιὰ πράξη ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴ στροφὴ τοῦ ἀριθμοῦ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο κατὰ γωνία $\pi/2$ (βλέπε σχῆμα) κατὰ τὴ λεγόμενη θετικὴ φορά, δηλαδὴ κατὰ τὴν ἀντίθετη φορὰ τῆς κίνησης τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.*

Τὸν χαρακτηρισμὸ *θετική*, ἤ *ἀρνητικὴ* φορὰ θὰ τὸν δικαιολογήσουμε ἀργότερα.

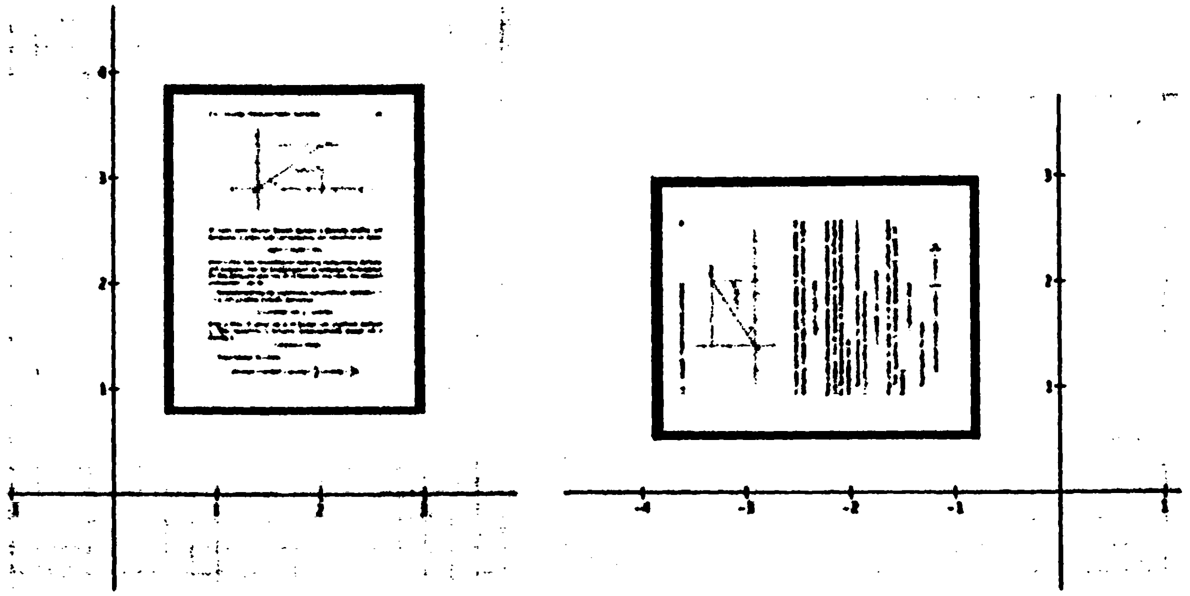
Γενικά, τὸ **γινόμενο** δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν

$$z_1 := \rho_1[\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)]$$

καὶ

$$z_2 := \rho_2[\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)]$$

εἶναι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z := z_1z_2$ ὁ ὁποῖος προκύπτει ἄν ἐκτελέσουμε κανονικὰ τὴν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μεταξύ τῶν ποσοτήτων



Σχήμα 1.5: *Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ i σημαίνει στροφὴ ἀριστερὰ κατὰ 90 μοῖρες.*

$\rho_1[\cos(\varphi_1)+i\sin(\varphi_1)]$ καὶ $\rho_2[\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2)]$, ὅπως ἀκριβῶς αὐτὴ γίνεται στὴν περίπτωση τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἔτσι βρίσκουμε ὅτι τὸ γινόμενο τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Τοῦτο δηλώνει ὅτι, ἰσχύει τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Πρόταση 1.2.3.1 *Ἄν δύο μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ z_1 καὶ z_2 πολλαπλασιάζονται, τότε τὰ μέτρα τους ἐπίσης πολλαπλασιάζονται, ἐνῶ τὰ ὁρίσματά τους προστίθενται.*

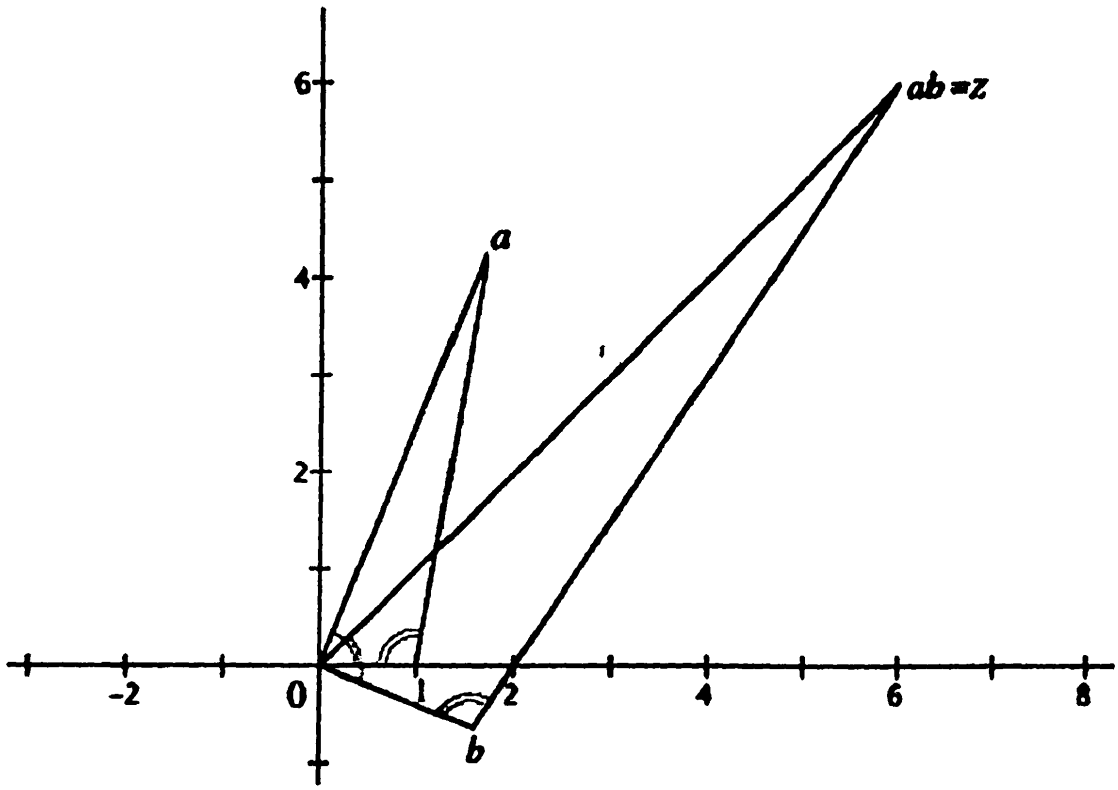
Ἀπόδειξη: Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ἰσχύει

$$|z_1z_2| = \rho_1\rho_2 = |z_1||z_2|$$

καὶ

$$\begin{aligned} arg(z_1z_2) &= \{\varphi_1+\varphi_2+2k\pi : \ k\in\mathbb{Z}\} \\ &= \{\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2+2k\pi : \ k\in\mathbb{Z}\} \\ &= \arg z_1+\arg z_2. \ \blacklozenge \end{aligned}$$

Τὸ παραπάνω συμπέρασμα μᾶς βοηθᾶ στὴ γεωμετρικὴ κατασκευὴ (δηλαδὴ μὲ τὴ χρήση μόνο τοῦ κανόνα καὶ τοῦ διαβήτη) τοῦ γινομένου ab δυὸ μιγαδικῶν ἀριθμῶν a, b.



Σχήμα 1.6: *Γεωμετρικὴ κατασκευὴ γινομένου.*

Πραγματικά, ὑποθέτοντας ὅτι τὸ σημεῖο z εἶναι τὸ γινόμενο τῶν δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν, θέτουμε $ab =: z$, ὁπότε βρίσκουμε

$$\frac{a}{1} = \frac{z}{b}.$$

Στὴ συνέχεια ταυτίζουμε τὰ σημεῖα $1, a, b, z$ μὲ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $O1$, Oa, Ob, Oz, ἀντίστοιχα, ὁπότε ἡ παραπάνω ἀναλογία δηλώνει ὅτι τὸ τρίγωνο $T_{(0,1,a)}$ μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα $0, 1, a$ εἶναι ὅμοιο καὶ ὁμόρροπο μὲ τὸ τρίγωνο $T_{(0,b,z)}$ μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα $0, b, z$. (Ὁμόρροπα εἶναι τὰ τρίγωνα ὅταν οἱ γωνίες τῶν δύο τριγώνων μὲ κορυφὴ τὸ 0 ἔχουν τὴν ἴδια φορά.) Ἐδῶ χρησιμοποιοῦμε τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ ὁμόλογες πλευρὲς ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἀνάλογες. Ἔτσι, γιὰ τὴ γεωμετρικὴ εὕρεση τοῦ σημείου z, μὲ τὴ χρήση μόνο τοῦ κανόνα καὶ τοῦ διαβήτη, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Θεωροῦμε τὸ τρίγωνο $T_{(0,1,a)}$ καὶ στὴ συνέχεια κατασκευάζουμε τὸ τρίγωνο $T_{(0,b,z)}$, κατὰ τέτοιον τρόπο ὥστε τοῦτο νὰ εἶναι ὅμοιο τοῦ τριγώνου $T_{(0,1,a)}$. Σημειώνεται ὅτι πρέπει τὸ σημεῖο 0 νὰ εἶναι ἡ μία κορυφὴ τοῦ $T_{(0,b,z)}$, τὸ σημεῖο b νὰ ἀντιστοιχεῖ στὸ σημεῖο 1 καὶ ἐπὶ πλέον νὰ ἔχει τὸν ἴδιο προσανατολισμὸ μὲ τὸ τρίγωνο $T_{(0,1,a)}$. Τότε ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ τριγώνου $T_{(0,b,z)}$, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στὸ σημεῖο a, εἶναι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = ab$.

Πρόβλημα 1.2.3.1 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι τὰ σημεῖα z_1, z_2, z_3 τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου σχηματίζουν ἰσόπλευρο τρίγωνο ἄν καὶ μόνο ἄν ἰσχύει ἡ συνθήκη*

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}.$$

Ἀπόδειξη: Θέτουμε $A := z_3 - z_1$ καὶ $B := z_2 - z_1$, ὁπότε ἡ παραπάνω σχέση γράφεται ὡς

$$\frac{A}{B} = \frac{-B}{A - B}.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι, χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι ἡ κορυφὴ z_1 εἶναι ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου.

Ἐπίσης, πολλαπλασιάζοντας καὶ τὰ δύο μέλη τῆς παραπάνω σχέσης μὲ τὸν μιγαδικὸ ἀριθμὸ $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, ὅπου φ εἶναι τὸ ὅρισμα τοῦ B, μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε ὅτι ἡ πλευρὰ$0B$ τοῦ τριγώνου εἶναι ἐπὶ τοῦ θετικοῦ πραγματικοῦ ἡμιάξονα.

Ἔτσι θεωροῦμε ὅτι ἔχουμε ἕνα τρίγωνο $0AB$, ὅπου $|B| = \beta$, $\mathrm{Arg}(B) = 0$, $|A| = a$, $\mathrm{Arg}(A) = \theta$ καὶ πρέπει νὰ δείξουμε ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσόπλευρο, ἄν καὶ μόνο ἄν ἰσχύει ἡ σχέση

$$\frac{a[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]}{\beta} = -\frac{\beta}{a[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] - \beta}.$$

Ἀπὸ τὴν ἀναλογία αὐτὴ προκύπτει ὅτι

$$a[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] = \beta[\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}].$$

Ἐπιλύοντας τὴν ἐξίσωση βρίσκουμε ὅτι

$$a = \beta \text{ καὶ } \theta = \pm\frac{\pi}{3}.$$

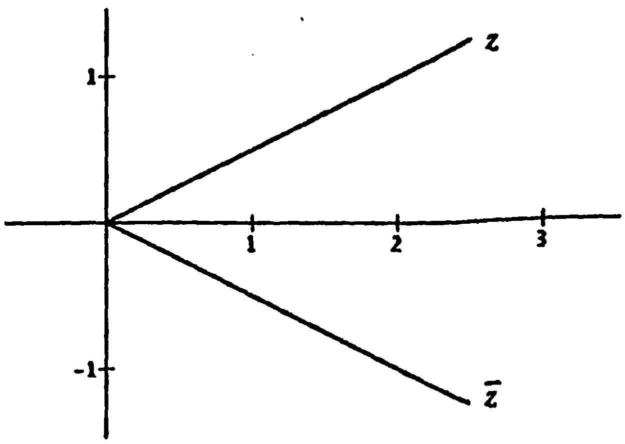
Ἔτσι συμπεραίνουμε ὅτι τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἔχει τὴν μεταξὺ τῶν ἴσων πλευρῶν γωνία ἴση μὲ 60 μοῖρες. Τοῦτο, βέβαια, δηλώνει ὅτι τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσόπλευρο. ♦

1.2.4 Συζυγὴς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ

Ὁ συζυγὴς $\bar{z}$ τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z := x + iy$ εἶναι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος ἔχει τὸ ἴδιο πραγματικὸ μέρος μὲ τὸν z, ἀλλὰ ἀντίθετο φανταστικὸ μέρος, δηλαδή

$$\bar{z} := x - iy.$$

Ἄρα ἔχουμε



Σχήμα 1.7: *Τὰ σημεῖα z καὶ $\bar{z}$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν πραγματικὸ ἄξονα.*

$$\mathrm{Re}(z) = x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ καὶ } \mathrm{Im}(z) = y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \tag{1.3}$$

καὶ ἀκόμη

$$|\bar{z}| = |z| \text{ καὶ } z\bar{z} = |z|^2.$$

Πρόβλημα 1.2.4.1 *Στὸ καρτεσιανὸ ἐπίπεδο δίνεται ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου*

$$x^2 + y^2 + 4(x + y) = 0.$$

Νὰ δοθεῖ ἡ ἐξίσωση τοῦ ἴδιου κύκλου στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο.

Λύση: Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμε τὶς σχέσεις (1.3) καὶ βρίσκουμε

$$|z|^2 + 2(z + \overline{z}) + 2i(\overline{z} - z) = 0,$$

ἤ, τελικά,

$$|z|^2 + 2(1 - i)z + 2(1 + i)\overline{z} = 0. \ \blacklozenge$$

Ἂν z_1, z_2 εἶναι δυὸ μιγαδικοὶ ἀριθμοί, ὅπου $z_2 \neq 0$, τὸ πηλῖκο z_1/z_2 τῆς διαίρεσης τοῦ z_1 διὰ τοῦ z_2 εἶναι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμός

$$\frac{z_1}{z_2} := \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Τὸ πηλῖκο τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z_1 διὰ ἑνὸς μὴ μηδενικοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z_2 εἶναι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς ποὺ προκύπτει ἂν ἐκτελέσουμε κανονικὰ τὴ διαίρεση μεταξὺ τῶν ποσοτήτων

$$z_1 := \rho_1[\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)] \quad \text{καὶ} \quad z_2 := \rho_1[\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)],$$

ὅπως στὴν περίπτωση τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἔτσι βρίσκουμε ὅτι τὸ πηλίκο τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Πρόταση 1.2.4.1 *Ἂν ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς z_1 διαιρεῖται διὰ τοῦ z_2, τότε τὸ μέτρο τοῦ z_1 διαιρεῖται διὰ τοῦ μέτρου τοῦ z_2 καὶ τὸ ὅρισμα τοῦ z_2 ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ ὅρισμα τοῦ z_1.*

Ἀπόδειξη: Τοῦτο συμβαίνει διότι, ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὰ παραπάνω στοιχεῖα, ἰσχύει

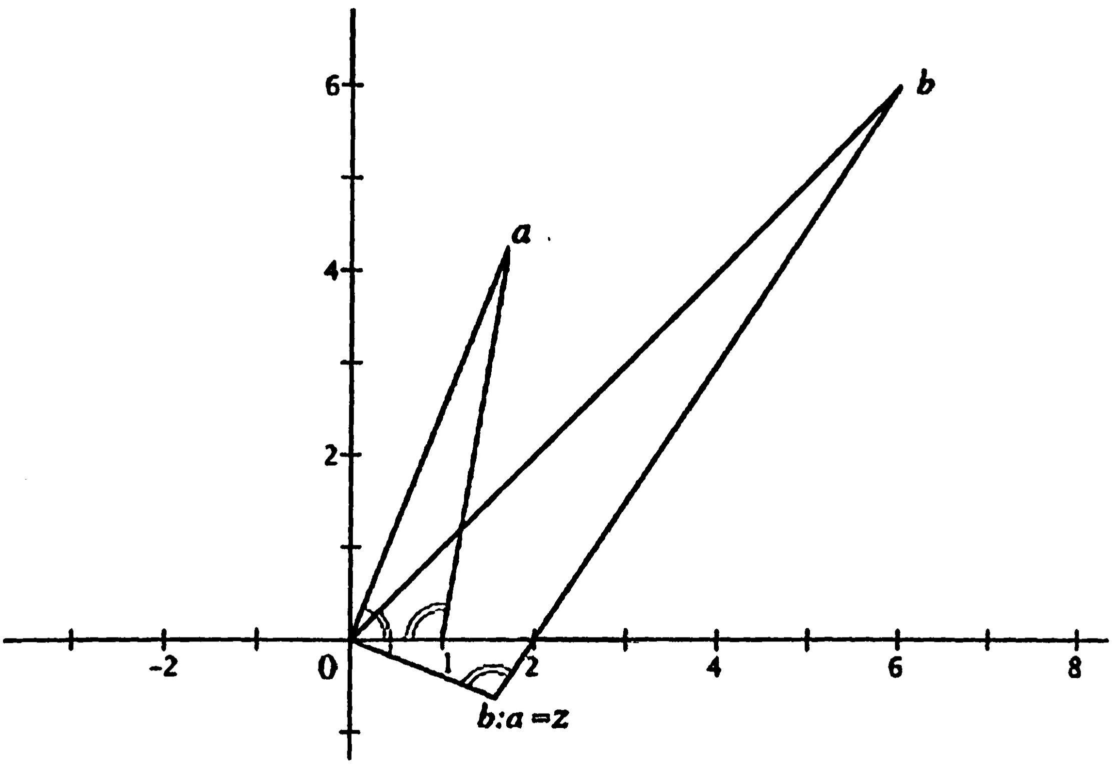
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

καὶ

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 + 2k\pi = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2) + 2k\pi = \arg(z_1) - \arg(z_2),$$

ὅπου k εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός. ♦

Ἡ προηγούμενη παρατήρηση βοηθᾶ στὴ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τοῦ πηλίκου b/a, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογη μὲ ἐκείνη τοῦ γινομένου.



Σχήμα 1.8: *Γεωμετρικὴ κατασκευὴ πηλίκου.*

Πρὸς τοῦτο θέτουμε $z := b/a$, καὶ, ὅπως στὴν περίπτωση τῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς τοῦ γινομένου, ταυτίζουμε τὰ σημεῖα $1, a, b, z$ μὲ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $O1$, Oa, Ob, Oz.

Τότε ἡ ἰσότητα

$$\frac{z}{b} = \frac{1}{a}$$

δηλώνει ὅτι τὸ τρίγωνο $T_{(0,1,a)}$ μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα $0, 1, a$ εἶναι ὅμοιο καὶ ὁμόρροπο μὲ τὸ τρίγωνο $T_{(0,z,b)}$ μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα $0, z, b$. Ἔτσι λοιπόν, γιὰ τὸν ἐντοπισμὸ τοῦ σημείου z σχηματίζουμε τὸ τρίγωνο $T_{(0,1,a)}$. Στὴ συνέχεια, σχηματίζουμε τὸ τρίγωνο $T_{(0,z,b)}$ ὅμοιο τοῦ $T_{(0,1,a)}$, ὅπου τὸ σημεῖο O εἶναι ἡ μία κορυφὴ τοῦ $T_{(0,z,b)}$, τὸ σημεῖο a ἀντιστοιχεῖ στὸ σημεῖο b καὶ ἐπὶ πλέον νὰ ἔχει τὸν ἴδιο προσανατολισμὸ μὲ τὸ τρίγωνο $T_{(0,1,a)}$, μὲ τὴν ἔννοια ὅτι οἱ γωνίες τῶν δύο τριγώνων μὲ κορυφὴ τὸ O νὰ ἔχουν τὴν ἴδια φορά. Τότε ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ τριγώνου $T_{(0,z,b)}$, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στὸ σημεῖο 1, θὰ εἶναι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = b/a$.

Μὲ βάση τὸν τρόπο γεωμετρικῆς κατασκευῆς τοῦ γινομένου καὶ τοῦ πηλίκου, εἶναι εὔκολο νὰ προσδιορίσουμε μὲ γεωμετρικὸ τρόπο καὶ τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι μποροῦν νὰ προκύψουν μὲ διαδοχικὴ ἐφαρμογὴ τῶν πράξεων αὐτῶν, σὲ συνδυασμό καὶ μὲ τὴν πράξη τῆς πρόσθεσης.

Πρόβλημα 1.2.4.2 *Νὰ προσδιοριστεῖ μὲ γεωμετρικὸ τρόπο ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $(ab)/c$.*

Λύση: Πρὸς τοῦτο θέτουμε $z := (ab)/c$, ὁπότε βρίσκουμε τὴν ἀναλογία

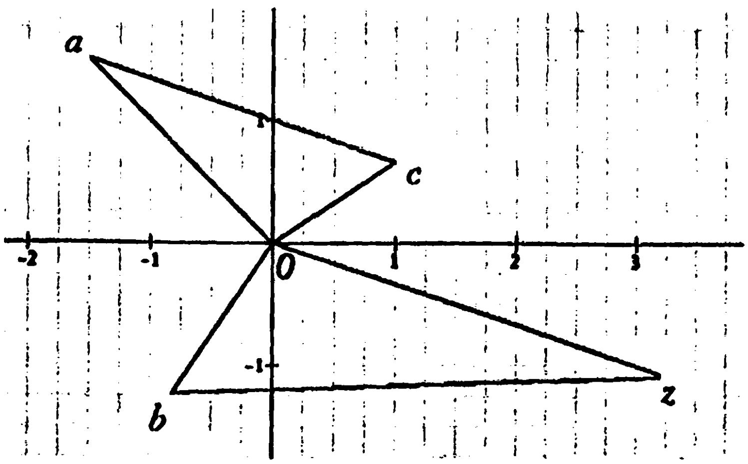
$$\frac{a}{c} = \frac{z}{b}.$$

Ἔτσι, παρατηροῦμε ὅτι τὸ τρίγωνο $T_{(0,c,a)}$ μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα $0, c, a$ εἶναι ὅμοιο καὶ ὁμόρροπο πρὸς τὸ τρίγωνο $T_{(0,b,z)}$ μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα $0, b, z$.

Το γεγονὸς τοῦτο, εὔκολα, μᾶς ὁδηγεῖ στὴ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τοῦ σημείου z. ♦

1.2.5 Γενικὲς ἰδιότητες καὶ Δύναμη

Γιὰ τὶς βασικὲς πράξεις μεταξὺ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες, οἱ ὁποῖες ἀποδεικνύονται εὔκολα:



Σχήμα 1.9: *Γεωμετρική κατασκευή τοῦ σημείου $(ab)/c$.*

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$,
- $\overline{\left[\frac{z_1}{z_2}\right]} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Γιὰ κάθε ἀκέραιο ἀριθμὸ n, ἡ δύναμη z^n ὁρίζεται ὅπως ἀκριβῶς καὶ στοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς. Ἔτσι ἔχουμε

$$z^n = \begin{cases} 0, & \text{ἄν } z = 0 \\ z \cdot z \cdots z, & \text{ἄν } n > 0,\ z \neq 0 \\ \frac{1}{z \cdot z \cdots z}, & \text{ἄν } n < 0,\ z \neq 0 \\ 1, & \text{ἄν } n = 0,\ z \neq 0, \end{cases}$$

ὅπου στὸ δεξιὸ μέλος ὑπάρχουν $|n|$ παράγοντες.

Μὲ βάση τὶς ἰδιότητες τοῦ γινομένου, μποροῦμε, εὔκολα νὰ δοῦμε ὅτι γιὰ κάθε ἀκέραιο ἀριθμὸ n ἰσχύει

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n.$$

Συνδυάζοντας τὶς παραπάνω ἰδιότητες προκύπτει τὸ ἀκόλουθο γενικὸ συμπέρασμα:

Πόρισμα 1.2.5.1 *Ἔστω $R(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ μιὰ πραγματικὴ ρητὴ παράσταση (δηλαδὴ μιὰ ἀλγεβρικὴ παράσταση, ὅπου σημειώνονται μόνο οἱ πράξεις τῆς πρόσθεσης, ἀφαίρεσης, πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαίρεσης) τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $x_1, x_2, \cdots, x_k$.*

Τότε, γιὰ κάθε $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{C}$, ἰσχύει ὅτι

$$\overline{R(a_1, a_2, \cdots, a_k)} = R(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_k}).$$

Ἂν θεωρήσουμε τὴν τριγωνομετρικὴ μορφὴ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἐφαρμόσουμε τὴν ἐπαγωγικὴ μέθοδο, προκύπτει τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Πρόταση 1.2.5.1 *Ἡ δύναμη τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ*

$$z := \rho[\cos\varphi + i\sin\varphi]$$

μὲ ἐκθέτη ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ n, εἶναι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμός

$$z^n = \rho^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]. \tag{1.4}$$

Ἀπόδειξη: Γιὰ $n = 1$ ἡ σχέση αὐτὴ ἰσχύει. Ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύει γιὰ $n = k$. Τότε ἔχουμε

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= \rho^{k+1}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{k+1} \\ &= \rho^{k+1}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= \rho^{k+1}(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi))(k\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= \rho^{k+1}[(\cos k\varphi\cos\varphi - \sin k\varphi\sin\varphi) \\ &\qquad + i(\cos(k\varphi)\sin\varphi + \sin(k\varphi)\cos\varphi)] \\ &= \rho^{k+1}[\cos((k+1)\varphi) + i\sin((k+1)\varphi)]. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ἐπίσης, γιὰ κάθε $z \neq 0$, ἔχουμε

$$z^{-1} = \frac{1}{z},$$

ὁπότε καὶ

$$z^{-k} = \frac{1}{z^k} = \frac{1}{(\rho[\cos\varphi + i\sin\varphi])^k} = \frac{1}{\rho^k[\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)]}$$

$$= \frac{\cos(k\varphi) - i\sin(k\varphi)}{\rho^k|\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)|} = \rho^{-k}[\cos((-k)\varphi) + i\sin((-k)\varphi)].$$

Ἄρα ὁ τύπος (1.4) ἰσχύει γιὰ κάθε ἀκέραιο πραγματικὸ ἀριθμὸ n.
■

1.2.6 Τύπος De Moivre

Κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς μὲ ὄρισμα φ καὶ μέτρο $\rho = 1$, ἱκανοποιεῖ τὸν τύπο **De Moivre**:

$$[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου De Moivre προκύπτουν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ πολλαπλασίων τόξων. Γιὰ παράδειγμα, ἀπὸ τὴ σχέση

$$\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi) = [\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]^3$$

$$= \cos^3(\varphi) + 3i\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) + 3i^2\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) + i^3\sin^3(\varphi)$$

παίρνουμε τὶς (γνωστὲς) τριγωνομετρικὲς ταυτότητες

$$\cos(3\varphi) = \cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) = 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)$$

καὶ

$$\sin(3\varphi) = 3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^3(\varphi) = 3\sin(\varphi) - 4\sin^3(\varphi).$$

Πρόβλημα 1.2.6.1 *Νὰ ὑπολογιστεῖ ἡ ποσότητα*

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$$

Λύση: Ἐπειδὴ ἰσχύει

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{1^2 - i^2} = \frac{1 - 2i - 1}{2} = -i,$$

θὰ ἔχουμε

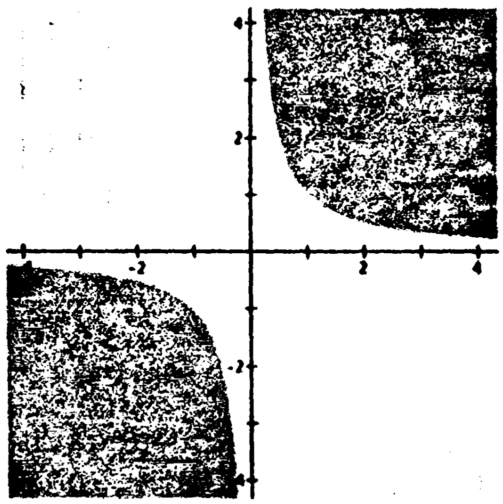
$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 = (-i)^8 = (-i)^{2.4} = (-1)^4 = 1. \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 1.2.6.2 *Νὰ προσδιοριστεῖ τὸ σύνολο ὅλων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν z ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνισότητα* $\mathrm{Im}(z^2) > 2$.

Λύση: Θέτουμε $z := x + iy$, ὁπότε θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει

$$\mathrm{Im}(x^2 - y^2 + 2ixy) = 2xy > 2,$$

δηλαδὴ $xy > 1$. Ἔτσι τὸ σημεῖο μὲ συντεταγμένες (x, y) πρέπει νὰ ἀνήκει μέσα στὴν ὑπερβολὴ μὲ ἐξίσωση $xy = 1$. ♦



Σχήμα 1.10: *Ὁ γραμμοσκιασμένος τόπος, δηλαδὴ τὸ ἐσωτερικὸ τῆς ὑπερβολῆς* $xy > 1$ *εἶναι τὸ σύνολο τῶν σημείων ποὺ ἐπαληθεύουν τὴ σχέση* $\mathrm{Im}(z^2) > 2$.

1.2.7 Ρίζες

Πρόταση 1.2.7.1 *Δίνεται ἕνας μιγαδικὸς ἀριθμὸς z. Ἂν n εἶναι ἕνας φυσικὸς ἀριθμός, τότε ὑπάρχουν n μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ* $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$, *οἱ ὁποῖοι λέγονται n-στὲς ρίζες τοῦ z, ἢ ρίζες τάξης n τοῦ z, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση*

$$w_j^n = z, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Ἀπόδειξη: Θέτουμε

$$w = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

καὶ

$$z = \rho[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)].$$

Μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου De Moivre, βρίσκουμε

$$r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ὁπότε προκύπτουν οἱ σχέσεις

$$r^n = \rho \text{ καὶ } \cos(n\theta) = \cos(\varphi), \ \sin(n\theta) = \sin(\varphi).$$

Ἡ πρώτη σχέση, προφανῶς, δίνει τὴ μοναδικὴ λύση $r = \rho^{1/n}$. Οἱ δύο τελευταῖες σχέσεις συναληθεύουν ὅταν

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \ k = 0, 1, 2, \cdots n-1.$$

Ἑπομένως οἱ n-στὲς ρίζες τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z := \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ δίνονται ἀπὸ τὸν τύπο

$$z_k := \rho^{\frac{1}{n}}\Big[\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})\Big], \ k = 0, 1, \ldots, n-1. \ \blacksquare \tag{1.6}$$

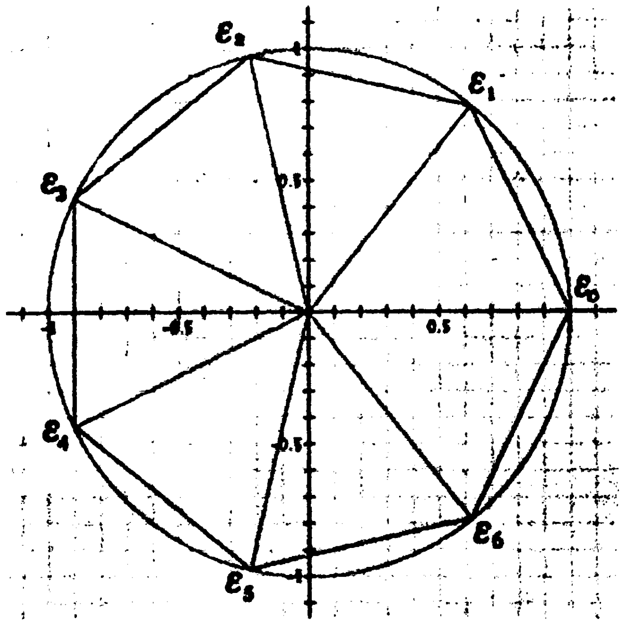
Σημείωση 1.2.7.1 *Ἡ ποσότητα $\sqrt[n]{z}$ λέγεται n-στὴ ρίζα του z καὶ παριστᾶνει ὁποιαδήποτε n-στὴ ρίζα του z, δηλαδή, ὁποιονδήποτε μιγαδικὸ ἀριθμὸ τοῦ ὁποίου ἡ n-στὴ δύναμη ἰσοῦται μὲ z. Θὰ πρέπει, ὅμως, νὰ διευκρινίζουμε κάθε φορὰ ποιὸν κλάδο τῆς ρίζας χρησιμοποιοῦμε.*

Θέτοντας στὸν τύπο (1.6) τὶς τιμὲς $\rho = 1$ καὶ $\varphi = 0$ προκύπτουν οἱ n-οστὲς ρίζες τῆς μονάδας

$$1 = |1|(\cos(0) + i\sin(0)),$$

δηλαδὴ οἱ ἀριθμοὶ

$$\varepsilon_k = \cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n}), \ k = 0, 1, \cdots, n-1.$$



Σχῆμα 1.11: *Οἱ εἰκόνες στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο τῶν ἑπτὰ ριζῶν ἕβδομης τάξης τῆς μονάδας σχηματίζουν κανονικὸ ἑπτάγωνο.*

Εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο οἱ n-οστὲς ρίζες τῆς μονάδας ἀντιστοιχοῦν στὶς κορυφὲς τοῦ κανονικοῦ n-γώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου στὸν μοναδιαῖο κύκλο, ὅπου μία κορυφή του βρίσκεται στὴ θέση τῆς μονάδας (τοῦ πραγματικοῦ ἄξονα).

Παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$\varepsilon_k = \varepsilon_1 \varepsilon_{k-1}, \quad k = 2, 3, \cdots n-1,$$

καθῶς ἐπίσης καὶ

$$\varepsilon_n = \varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_0 = 1.$$

Ἰδιαίτερα, γιὰ τὶς κυβικὲς ($n = 3$) ρίζες τῆς μονάδας, δηλαδὴ τοὺς ἀριθμοὺς $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, ἔχουμε

$$\varepsilon_0 = 1,$$

$$\varepsilon_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Πρόβλημα 1.2.7.1 *Δίνεται ἕνας μὴ μηδενικὸς μιγαδικὸς ἀριθμὸς* z. *Νὰ προσδιοριστεῖ ὁ κλάδος τῆς* $\sqrt{z}$ *γιὰ τὸν ὁποῖο ἰσχύει* $\sqrt{1} = -1$.

Λύση: Θέτουμε $z = \rho(\cos(\varphi)) + i\sin(\varphi))$ καὶ ἐφαρμόζουμε τὸν τύπο τῶν ριζῶν γιὰ τὴν περίπτωση $n = 2$. Τότε προκύπτουν οἱ δύο τετραγωνικὲς ρίζες τοῦ z:

$$z_1 := \sqrt{\rho}\Big(\cos(\frac{\varphi}{2})) + i\sin(\frac{\varphi}{2})\Big)$$

καὶ

$$z_2 := \sqrt{\rho}\Big(\cos(\frac{\varphi + 2\pi}{2})) + i\sin(\frac{\varphi + 2\pi}{2})\Big) = -\sqrt{\rho}\Big(\cos(\frac{\varphi}{2})) + i\sin(\frac{\varphi}{2})\Big).$$

Προσπαθοῦμε νὰ δοῦμε ποιὸς ἀπό τοὺς δύο τύπους ὁδηγεῖ στὴ σχέση $\sqrt{1} = -1$, ὅταν $z = 1$. Ἂν ἰσχύει $z = 1$, τότε ἔχουμε $|z| = \rho = 1$ καὶ $\varphi = \mathrm{Arg}(z) = 0$. Ἔτσι, ὁ πρῶτος τύπος δίνει

$$-1 = 1(\cos(0)) + i\sin(0)) = 1,$$

πρᾶγμα ἄτοπο. Ὁ δεύτερος τύπος γίνεται

$$-1 = -\sqrt{1}(\cos 0 + i\sin 0),$$

πρᾶγμα ποὺ ἰσχύει. Ἄρα ἡ σχέση $\sqrt{1} = -1$ ἱκανοποιεῖται ἀπὸ τὸν δεύτερο κλάδο τῆς ρίζας, δηλαδὴ τὴ ρίζα z_2. ♦

Πρόβλημα 1.2.7.2 *Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση*

$$z^n = \bar{z},$$

ὅπου n *εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ* 1.

Λύση: Ἂν $z = 0$, προφανῶς ἡ ἐξίσωση ἱκανοποιεῖται. Ἔστω $z \neq 0$. Γράφουμε τὸν ἀριθμὸ z στὴν πολικὴ μορφὴ $z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Τότε ἔχουμε

$$\bar{z} = \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)),$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωση ποὺ δίνεται γράφεται ὡς

$$\rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Ἀπλοποιοῦμε μὲ ρ καὶ πολλαπλασιάζουμε τὰ δύο μέλη τῆς σχέσης αὐτῆς ἐπὶ $(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ἔτσι βρίσκουμε ὅτι

$$\rho^{n-1}(\cos((n+1)\varphi)) + i\sin((n+1)\varphi)) = 1.$$

Ἀπὸ ἐδῶ προκύπτει ὅτι $\rho = 1$ καὶ

$$\cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi) = 1.$$

Ἑπομένως πρέπει νὰ ἰσχύει

$$(n+1)\varphi = 2k\pi, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

δηλαδὴ

$$\varphi = \frac{2k\pi}{n+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Ἔτσι οἱ ζητούμενοι μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ὁ $z_0 = 0$ καὶ οἱ

$$z_K = \cos(\frac{2k\pi}{n+1}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n+1}), \quad k = 0, 1, \ldots, n. \; \blacklozenge$$

Πρόβλημα 1.2.7.3 *Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση*

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0,$$

ὅπου οἱ συντελεστὲς a, b, c εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

Λύση: Ἡ ἐπίλυση θὰ γίνει μὲ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τοῦ **Cardano.** Σύμφωνα μὲ τὴ μέθοδο αὐτὴ ἀκολουθοῦμε τὰ ἑξῆς πέντε βήματα:

Βῆμα Α. Θέτουμε $z := -\frac{a}{3} + w$, ὁπότε ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωση μετασχηματίζεται στὴν

$$w^3 + Aw + B = 0, \tag{1.7}$$

ὅπου οἱ νέοι συντελεστὲς A, B δίνονται ἀπὸ τοὺς τύπους

$$A = \frac{-a^2}{3} + b \text{ καὶ } B = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

Βῆμα Β. Θέτουμε

$$w := \zeta - \frac{A}{3\zeta} \tag{1.8}$$

καὶ ἔτσι παίρνουμε τὴν ἐξίσωση

$$\zeta^3 - \frac{A^3}{27\zeta^3} + B = 0.$$

Βῆμα Γ. Θέτουμε $\zeta^3 =: \xi$, ὁπότε προκύπτει ἡ δευτεροβάθμια ἐξίσωση

$$\xi^2 + B\xi - \frac{A^3}{27} = 0.$$

Βῆμα Δ. Ἐπιλύουμε τὴν ἐξίσωση αὐτή, ἐφαρμόζοντας τὴ μέθοδο τὴν ὁποία ἀκολουθοῦμε γιὰ τὴν ἐπίλυση τῆς δευτεροβάθμιας ἐξίσωσης μὲ πραγματικοὺς συντελεστὲς καὶ βρίσκουμε τὶς ρίζες

$$\xi = \frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4}{27}A^3}}{2}, \quad \xi' = \frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4}{27}A^3}}{2}.$$

Ἡ ἐξίσωση $\zeta^3 = \xi$, δίνει τὶς τρεῖς κυβικὲς ρίζες $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ ξ. Μὲ βάση τὶς ρίζες αὐτὲς καὶ μὲ τὴ βοήθεια τῆς σχέσης (1.8) παίρνουμε τρεῖς μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς w_1, w_2, w_3, ἀντίστοιχα.

Ἐπίσης, ἡ ἐξίσωση $\zeta^3 = \xi'$ δίνει τὶς τρεῖς κυβικὲς ρίζες $\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3'$, τοῦ ξ', οἱ ὁποῖες, πάλι μὲ τὴ βοήθεια τῆς σχέσης (1.4), δίνουν ἄλλους τρεῖς ἀντίστοιχους ἀριθμοὺς w_1', w_2', w_3'.

Θὰ δείξουμε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ w_1', w_2', w_3' ταυτίζονται μὲ τοὺς w_1, w_2, w_3, ἀλλὰ ὄχι ἀπαραίτητα ἀντίστοιχα. Πραγματικά, ἂν ε εἶναι μιὰ κυβικὴ ρίζα τῆς μονάδας, μὲ $\varepsilon \neq 1$, τότε ἔχουμε

$$\zeta_2 = \varepsilon\zeta_1, \quad \zeta_2' = \varepsilon\zeta_1', \quad \zeta_3 = \varepsilon^2\zeta_1, \quad \zeta_3' = \varepsilon^2\zeta_1'. \tag{1.9}$$

Ἐπειδή, ὅμως, ἰσχύει

$$(\zeta_1\zeta_2)^3 = \zeta_1^3\zeta_2^3 = \xi\xi' = -\frac{A^3}{27},$$

προκύπτει ὅτι

$$\begin{aligned}\zeta_1' &= -\frac{A}{3\zeta_1},\\ \zeta_2' &= \varepsilon\zeta_1' = -\varepsilon\frac{A}{3\zeta_1} = -\frac{A}{\varepsilon^2 3\zeta_1} = -\frac{A}{3\zeta_3},\\ \zeta_3' &= \varepsilon^2\zeta_1' = -\varepsilon^2\frac{A}{3\zeta_1} = -\frac{A}{\varepsilon 3\zeta_1} = -\frac{A}{3\zeta_2}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Ἄρα ἔχουμε καὶ

$$\begin{aligned}w_1' &= \zeta_1' - \frac{A}{3\zeta_1'} = \frac{-A}{3\zeta_1} - \frac{A}{3[\frac{-A}{3\zeta_1}]} = \zeta_1 - \frac{A}{3\zeta_1} = w_1,\\ w_2' &= \zeta_2' - \frac{A}{3\zeta_2'} = \frac{-A}{3\zeta_3} - \frac{A}{3[\frac{-A}{3\zeta_3}]} = \zeta_3 - \frac{A}{3\zeta_3} = w_3,\\ w_3' &= \zeta_3' - \frac{A}{3\zeta_3'} = \frac{-A}{3\zeta_2} - \frac{A}{3[\frac{-A}{3\zeta_2}]} = \zeta_2 - \frac{A}{3\zeta_2} = w_2.\end{aligned}$$

Βῆμα Ε. Ἀπὸ τὶς σχέσεις (1.9) καὶ (1.10) προκύπτουν οἱ τρεῖς μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ

$$\begin{aligned}w_1 &= \zeta_1 - \frac{A}{3\zeta_1} = \zeta_1 + \zeta_1',\\ w_2 &= \zeta_2 - \frac{A}{3\zeta_2} = \varepsilon\zeta_1 + \zeta_3' = \varepsilon(\zeta_1 + \varepsilon\zeta_1'),\\ w_3 &= \zeta_3 - \frac{A}{3\zeta_3} = \varepsilon^2\zeta_1 + \zeta_2' = \varepsilon^2\zeta_1 + \varepsilon\zeta_1' = \varepsilon^2\zeta_1 + \varepsilon^4\zeta_1' = \varepsilon^2(\zeta_1 + \varepsilon^2\zeta_1'),\end{aligned}$$

οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τὶς τρεῖς ρίζες τῆς ἐξίσωσης (1.7).

Τέλος, ἀπὸ αὐτὲς τὶς ρίζες παίρνουμε τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς

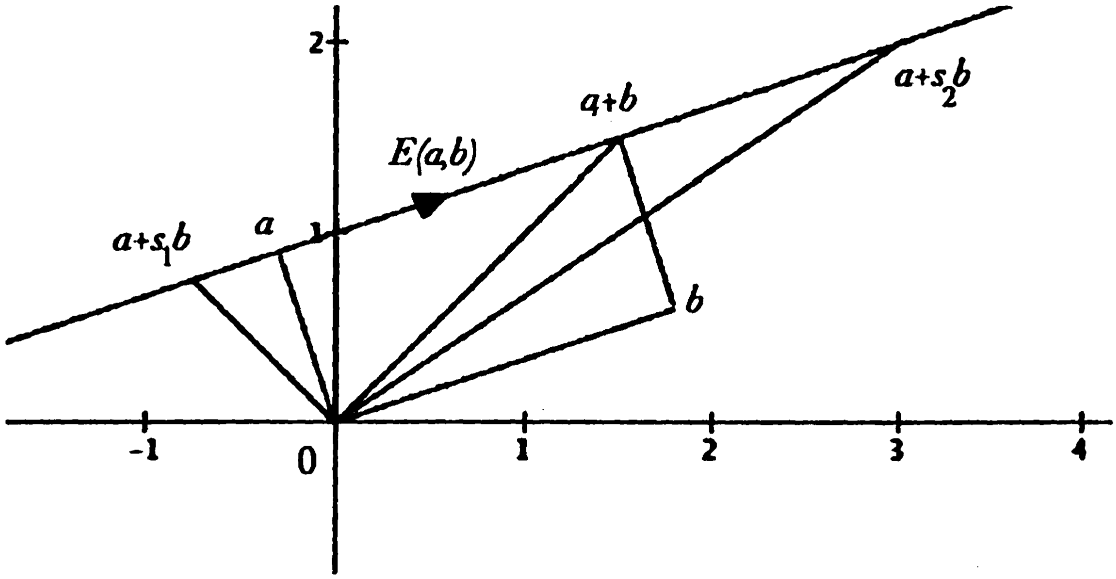
$$z_j := -\frac{a}{3} + w_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τὶς λύσεις τῆς ἀρχικῆς τριτοβάθμιας ἐξίσωσης. ♦

1.3 ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

1.3.1 Εὐθεῖες γραμμὲς

Θεωροῦμε δύο μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς a, b ἐκ τῶν ὁποίων ὁ b εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Μποροῦμε νὰ βλέπουμε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς ὡς διανύσματα τοὺ ἐπιπέδου. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο a καὶ σχηματίζει μὲ τὸν θετικὸ πραγματικὸ ἡμιάξονα γωνία ἴση μὲ τὸ βασικὸ ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ b, παριστάνεται μὲ $E(a, b)$.



Σχῆμα 1.12: *Ἡ εὐθεῖα* $E(a, b)$.

Ἔστω w ἕνα σημεῖο τῆς εὐθείας $E(a, b)$. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ προκύπτει ὅτι ὑπάρχει κάποιος πραγματικὸς ἀριθμὸς s τέτοιος ὥστε $w = a + sb$.

Θὰ δείξουμε ὅτι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς s εἶναι μοναδικός.

Πραγματικά, ἄν ὑπάρχει καὶ ἄλλος ἀριθμὸς s_1 τέτοιος ὥστε $w = a + s_1 b$, τότε θὰ ἰσχύει

$$a + sb = a + s_1 b.$$

Ἡ σχέση αὐτὴ δίνει τὴν ἰσότητα

$$(s - s_1)b = 0,$$

ὁπότε, ἀπὸ τὴν Πρόταση 4.2.1.1 ἕπεται ὅτι $s = s_1$.

Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω, ἡ ἀντιστοιχία

$$s \longleftrightarrow a + sb$$

εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη. Τὴν εἰκόνα τοῦ s τὴν παριστάνουμε μὲ $w(s)$, δηλαδὴ ἔχουμε

$$w(s) = a + sb.$$

Ἡ διάταξη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν s καθορίζει καὶ τὸν προσανατολισμό, ἤ τὴ φορὰ τῆς εὐθείας. Δηλαδή, ἡ εὐθεῖα γραμμὴ θεωρεῖται ὅτι εἶναι ἕνας εὐθὺς μονόδρομος στὸ ἐπίπεδο τὸν ὁπῖο διανύουμε καὶ ἡ παράμετρος s μετρᾶ τὴ χρονικὴ στιγμὴ κατὰ τὴν ὁποία βρισκόμαστε στὸ σημεῖο $w(s)$.

Ἕνα σημεῖο $w(s_1)$ θεωρεῖται ὅτι **προηγεῖται** τοῦ σημείου $w(s_2)$, ἄν ἰσχύει $s_1 < s_2$.

Γιὰ κάθε σημεῖο $w := w(s) = a + sb$ τῆς εὐθείας γραμμῆς $E(a, b)$ ἰσχύει ὅτι

$$\operatorname{Im}\frac{w-a}{b} = \operatorname{Im}\frac{a+sb-a}{b} = \operatorname{Im}\frac{sb}{b} = \operatorname{Im}(s) = 0.$$

Τὸ γεγονὸς τοῦτο ὁδηγεῖ στὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Πρόταση 1.3.1.1 *Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο a καὶ ἔχει συντελεστὴ κατεύθυνσης τὸ ὄρισμα τοῦ σημείου b, μπορεῖ νὰ ὁριστεῖ καὶ μὲ τὸν τύπο*

$$E(a, b) = \{w \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im}\frac{w-a}{b} = 0\}.$$

Μὲ βάση τὴν πρόταση αὐτὴ τὸ **θετικὸ ἡμιεπίπεδο** $E^+(a, b)$ τὸ ὁποῖο ὁρίζεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖα γραμμὴ $E(a, b)$, εἶναι τὸ σύνολο τῶν σημείων w ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνισότητα

$$\operatorname{Im}\frac{w-a}{b} > 0.$$

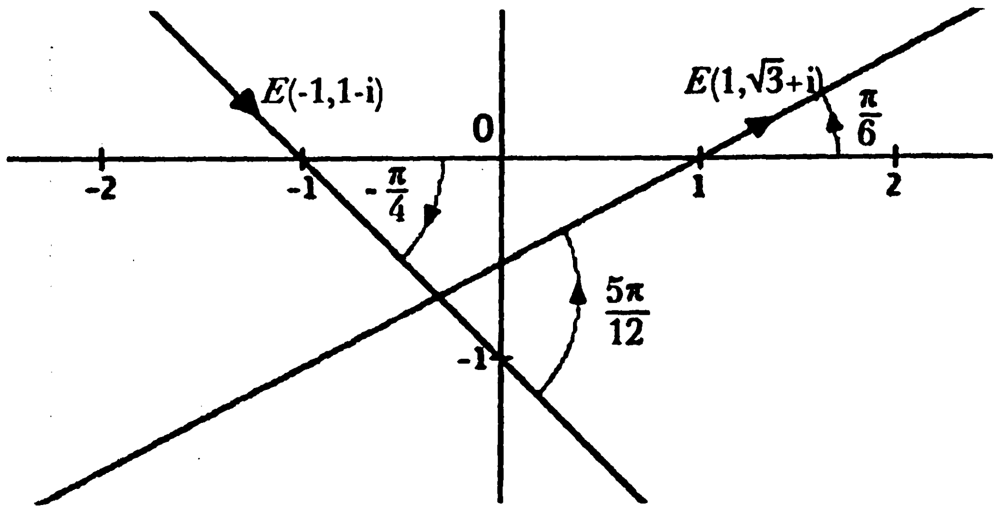
Ἐπίσης, τὸ ἀρνητικὸ ἡμιεπίπεδο $E^-(a,b)$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν σημείων w τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση

$$\mathrm{Im}\frac{w-a}{b} < 0.$$

Πρόβλημα 1.3.1.1 *Νὰ βρεθεῖ ἡ προσανατολισμένη γωνία μεταξὺ τῶν εὐθειῶν*

$$E(-1, 1-i) \ \textit{καὶ} \ E(1, \sqrt{3}+i).$$

Λύση: Ἡ ζητούμενη γωνία ταυτίζεται μὲ τὴ διαφορὰ τῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζουν οἱ δύο εὐθεῖες μὲ τὸν θετικὸ πραγματικὸ ἡμιάξονα. Οἱ γωνίες αὐτὲς εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μὲ



Σχῆμα 1.13: *Ἡ γωνία μεταξὺ τῶν εὐθειῶν* $E(-1, 1-i)$ *καὶ* $E(1, \sqrt{3}+i)$ *εἶναι ἴση μὲ* $\frac{5\pi}{12}$.

$$\mathrm{Arg}(1-i) = \mathrm{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

καὶ

$$\mathrm{Arg}(\sqrt{3}+i) = \mathrm{Arctan}(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}$$

Ἄρα, ἡ προσανατολισμένη γωνία μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ἴση μὲ

$$\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{12}. \ \blacklozenge$$

1.3.2 Εὐθύγραμμα τμήματα

Θεωροῦμε δύο σημεῖα $w(s_1) =: w_1$ καὶ $w(s_2) =: w_2$ τῆς εὐθείας

$$E(a, b) = \{w : \ w = a + sb, \ s \in \mathbb{R}\},$$

ὅπου $s_1 < s_2$. Δηλαδὴ ἔχουμε $w_1 = a + s_1 b$ καὶ $w_2 = a + s_2 b$. Ἀφαιρῶντας κατὰ μέλη βρίσκουμε $w_2 - w_1 = (s_2 - s_1)b$, ὁπότε καὶ προκύπτουν οἱ τιμὲς τῶν ἀριθμῶν b καὶ a:

$$b = \frac{w_2 - w_1}{s_2 - s_1} \ \text{καὶ} \ a = w_1 - s_1 b = w_1 - s_1 \frac{w_2 - w_1}{s_2 - s_1}.$$

Ἑπομένως, γιὰ κάθε $s \in [s_1, s_2]$, ἡ παράσταση $w(s) = a + sb$ γράφεται ὡς

$$w(s) = a + sb = w_1 - s_1 \frac{w_2 - w_1}{s_2 - s_1} + s \frac{w_2 - w_1}{s_2 - s_1} = w_1 + \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}(w_2 - w_1),$$

δηλαδὴ

$$w(s) = \left(1 - \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}\right) w_1 + \frac{s - s_1}{s_2 - s_1} w_2.$$

Θεωροῦμε μιὰ νέα μεταβλητὴ t, αὐτὴ ποὺ ὁρίζεται μὲ τὴν παράσταση

$$t := \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}, \ \text{ὁπότε} \ s = s_1 + t(s_2 - s_1) = (1 - t)s_1 + ts_2.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει $s \in [s_1, s_2]$, ἄν καὶ μόνο ἄν ἰσχύει $t \in [0, 1]$. Μάλιστα συμβαίνει ἡ τιμὴ τὴς παραμέτρου s νὰ εἶναι ἴση μὲ s_1 καὶ s_2, ἄν καὶ μόνο ἄν $t = 0$ καὶ $t = 1$, ἀντίστοιχα.

Θέτουμε

$$z(t) := w((1 - t)s_1 + ts_2),$$

ὁπότε ἡ προηγούμενη παράσταση γίνεται

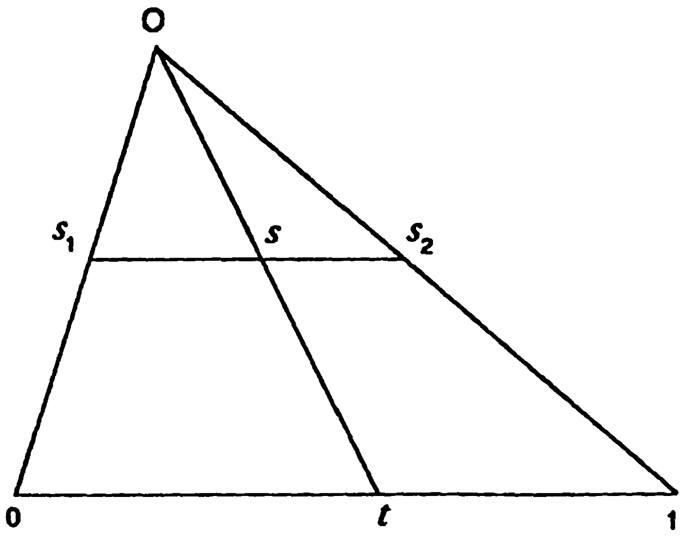
$$z(t) = w(s) = (1-t)w_1 + tw_2, \quad t \in [0,1].$$

Τὸ σύνολο τῶν σημείων z ποὺ γράφονται στὴ μορφὴ

$$z := z(t) = (1-t)a + tb, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ἀποτελεῖ τὸ **εὐθύγραμμο τμῆμα** μὲ ἀρχὴ τὸ σημεῖο a καὶ πέρας τὸ b καὶ παριστάνεται ὡς $[a,b]$.

Γιὰ να δείξουμε τὸν τρόπο ἀντιστοίχισης τῆς μεταβλητῆς s στὴ μεταβλητὴ t, ποὺ κὰναμε παραπάνω, ἐργαζόμαστε ὅπως στὸ σχῆμα. Δηλαδὴ θεωροῦμε δυὸ τυχόντα διαφορετικοῦ μήκους παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα ταυτίζουμε μὲ τὰ κλειστὰ διαστήματα $[s_1, s_2]$ καὶ $[0,1]$. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἄκρα 0 καὶ s_1 τέμνει τὴν εὐθεῖα γραμμὴ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἄκρα 1 και s_2 στὸ σημεῖο O. Τώρα, ἡ ζητούμενη ἀντιστοίχιση γίνεται μὲ εὐθεῖες γραμμὲς ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖο O. Πραγματικά, ἀπὸ τὸ O φέρουμε μιὰ εὐθεῖα γραμμὴ



Σχῆμα 1.14: *Δέσμη τριῶν εὐθειῶν ποὺ τέμνονται ἀπὸ δύο παράλληλες εὐθεῖες, τέμνονται σὲ μέρη ἀνάλογα.*

ὥστε νὰ τέμνει τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα $[s_1, s_2]$ στὸ σημεῖο s. Τότε αὐτὴ τέμνει τὸ δεύτερο εὐθύγραμμο τμῆμα σὲ ἕνα ἀκριβῶς σημεῖο, τὸ t.

Ἔτσι, δημιουργεῖται μιὰ δέσμη εὐθειῶν ποὺ τέμνονται ἀπὸ δύο παράλληλες εὐθεῖες. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα τοῦ Θαλῆ, ἕπεται ὅτι αὐτὲς τέμνονται σὲ μέρη ἀνάλογα. Δηλαδή, ἔχουμε

$$\frac{s - s_1}{t - 0} = \frac{s_2 - s_1}{1 - 0}.$$

Ἀπὸ τὴ σχέση αὐτὴ παίρνουμε τὴν ἔκφραση τοῦ t ὡς συνάρτηση τοῦ s, ὅπως αὐτὴ ὁρίστηκε παραπάνω.

1.3.3 Πολυγωνικὲς γραμμὲς

Ἂν δοθοῦν k τὸ πλῆθος σημεῖα $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{k-1}, z_k$, θὰ λέμε ὅτι τὸ σύμβολο $[z_1, z_2, \cdots, z_k]$ παριστάνει τὸ σύνολο τῶν σημείων ὅλων αὐτῶν τῶν διαδοχικῶν εὐθυγράμμων τμημάτων. Τὸ σύνολο τοῦτο τὸ ὀνομάζουμε ἄθροισμα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_3]$, $\ldots [z_{k-1}, z_k]$ καὶ τότε γράφουμε

$$[z_1, z_2, \cdots, z_k] := [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + \cdots + [z_{k-1}, z_k].$$

Ὡς γεωμετρικὸ στοιχεῖο, τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα z_1, z_2, z_3, $\cdots$, z_{k-1}, z_k, καί, φυσικά, μὲ πλευρὲς τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_3]$, $\ldots, [z_{k-1}, z_k]$.

Ἕνα σύνολο $A \subsetneq \mathbb{C}$ λέγεται κυρτό, ἂν γιὰ κάθε δύο σημεῖα $a, b \in A$ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα $[ab]$, ποὺ αὐτὰ ὁρίζουν, ἀνήκει στὸ σύνολο A.

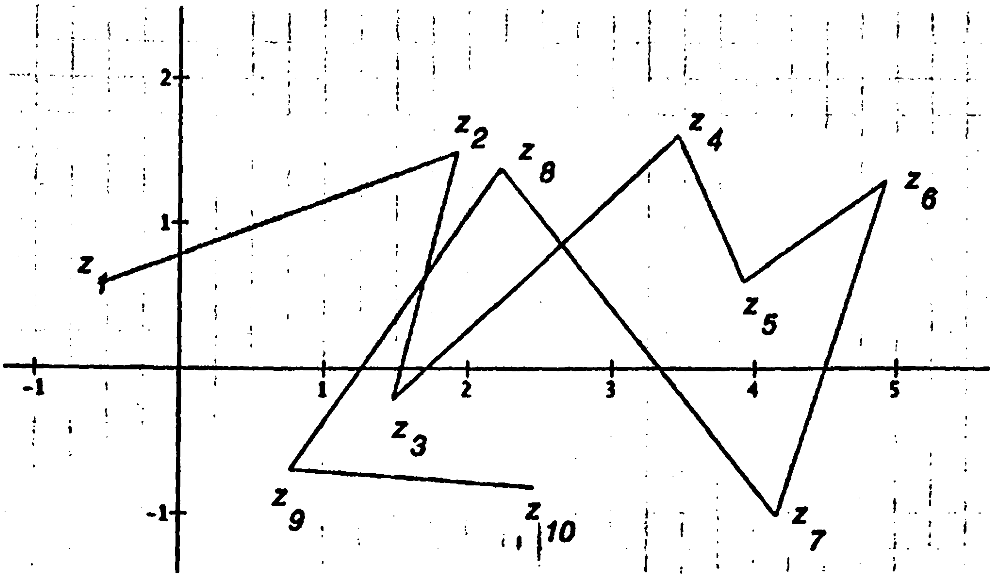
1.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἂν k εἶναι ἕνας φυσικὸς ἀριθμός, νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα

   $i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + ki^k$,

   $i + 1 \cdot 2i^2 + 2 \cdot 3i^3 + \ldots + (k-1) \cdot ki^k$ καὶ

   $i + 2^2 i^2 + 3^2 i^3 + \ldots + k^2 i^k$.



Σχήμα 1.15: *Ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ* $[z_1, z_2, \cdots, z_{10}]$ *μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα* $z_1, z_2, \cdots, z_{10}$.

2. Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση

$$\frac{1}{z-2i} + \frac{1+iz}{(1-i)^2} = 4.$$

3. Ἄν x, y εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(3+i)x + (5-4i)y = 12+5i$.

4. Νὰ ἀναλυθοῦν σὲ ἀθροίσματα ἁπλῶν κλασμάτων τὰ κλάσματα

$$\frac{2i}{(3-iz)(3+4iz)}, \quad \frac{1}{(z-i)(z^2+4)}, \quad \frac{5zi}{(z-3i)(z^2+9)}.$$

5. Νὰ προσδιοριστεῖ τὸ σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(z^3) > 0\}$.

6. Νὰ προσδιοριστεῖ τὸ σύνολο τῶν σημείων $z := x + iy$ ποὺ εἶναι τέτοια ὥστε $(2x-i)(4+i) + (2x-yi)(-2+3i) = 6+5i$.

7. Νὰ προσδιοριστεῖ τὸ σύνολο τῶν σημείων $z := x + iy$ τέτοιων ὥστε $(x-yi)(a+\beta i) = a\beta$, ὅπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

8. Νὰ ἀπεικονιστοῦν στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο τὰ σύνολα τῶν σημείων τὰ ὁποῖα στὸ καρτεσιανὸ ἐπίπεδο ὁρίζονται ἀντίστοιχα μὲ τὴ βοήθεια τῶν ἑξῆς σχέσεων:

$$x^2 + y^2 + 4(x + y) = 0, \quad y = ax + \beta,$$

$$x^2 - y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 + 2x = 0, \quad (x - 1)^2 + 2y^2 = 1.$$

9. Ἂν δοθοῦν τὰ μὴ συγγραμμικὰ σημεῖα z_1, z_2 καὶ z_3 τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, νὰ βρεθεῖ ἕνα σημεῖο z_4 τέτοιο ὥστε τὰ z_1, z_2, z_3, z_4 νὰ εἶναι οἱ κορυφὲς ἑνὸς παραλληλογράμμου.

10. Νὰ βρεθοῦν τὰ μέτρα καὶ τὰ βασικὰ ὁρίσματα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} + 3i$, $-3 + i\sqrt{3}$, $-1 - i\sqrt{3}$, $-3 - i\sqrt{3}$, $3 + 3i$, $2i$.

11. Στὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ὁρίζουμε μία σχέση σ ὡς ἑξῆς:

Τὸ ζεῦγος (z, w) ἀνήκει στὴ σχέση σ σημαίνει ὅτι ἰσχύει $|z| < |w|$ καί, ἄν ἰσχύει $|z| = |w|$, τότε $\mathrm{Arg}(z) < \mathrm{Arg}(w)$.

Ν' ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ $\sigma \cup \{=\}$ εἶναι μία σχέση ὁλικῆς διάταξης.

12. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ἄθροισμα $(1 - i)^9 + (1 + i)^9$.

13. Νὰ προσδιοριστοῦν τὰ σημεῖα z τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν μία ἀπὸ τὶς σχέσεις:

$$-\frac{\pi}{3} < \mathrm{Arg}(z + 2 - i) < \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{Im}\frac{1}{z} < -\frac{1}{2}, \quad \mathrm{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{4}, \quad 1 < |z - 1 - i| < 3.$$

14. Νὰ βρεθεῖ ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς ποὺ προκύπτει ἄν ὁ μιγαδικὸς ἀριθμός-διάνυσμα $-\sqrt{3} + 3i$ περιστραφεῖ θετικὰ κατὰ 45^o.

15. Νὰ βρεθεῖ ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς ποὺ προκύπτει ἄν ὁ μιγαδικὸς ἀριθμός-διάνυσμα $-\sqrt{3} - i$ περιστραφεῖ κατὰ -120^o.

16. Νὰ βρεθεῖ ἡ γωνία κατὰ τὴν ὁποία πρέπει νὰ περιστραφεῖ ὁ μιγαδικὸς ἀριθμός-διάνυσμα $3 - 4i$ ὥστε νὰ συμπέσει μὲ τὸ $5/\sqrt{2} - i5/\sqrt{2}$.

17. Νὰ προσδιοριστεῖ μὲ γεωμετρικὸ τρόπο στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενο καὶ τὸ πηλίκο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $-1+2i$ καὶ $2-i$.

18. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι στὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες

$$a\bar{a} = |a|^2, \quad |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2), \quad |a \pm b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm 2\mathrm{Re}(a\bar{b}).$$

19. Ἄν z εἶναι μιὰ λύση τῆς πολυωνυμικῆς ἐξίσωσης

$$\beta_0 z^n + \beta_1 z^{n-1} + \cdots + \beta_n = 0,$$

ὅπου $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι καὶ ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $\bar{z}$ εἶναι λύση.

20. Νὰ προσδιοριστεῖ τὸ σύνολο τῶν σημείων z τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν μία ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες σχέσεις

$$\mathrm{Im}(z^2 - \bar{z}) = 1 - \mathrm{Im}(z), \quad |z-1| < |\bar{z} - i|, \quad \mathrm{Re}(z^2 - \bar{z}) = 1,$$

$$\bar{z}z + (2+i)z = 2 - i, \quad z^2 + (\bar{z})^2 = 1.$$

21. Ἄν a, b εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἰσχύει ἡ ἀνισότητα $|a-b|^2 \leq (1+|a|^2)(1+|b|^2)$.

22. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι, ἄν ἰσχύει ἡ ἰσότητα $|a-b| = |1-\bar{a}b|$, τότε ἔχουμε $|a| = 1$, ἢ $|b| = 1$ καὶ, ἄν ἰσχύει $|a-b| < |1-\bar{a}b|$, τότε $|a| < 1$ καὶ $|b| < 1$, ἢ $|a| > 1$ καὶ $|b| > 1$.

23. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι γιὰ μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς a_j, b_j, $j = 1, 2, \cdots, k$, ἰσχύει ἡ **ταυτότητα τοῦ Lagrange**

$$\Big|\sum_{1\leq n\leq k} a_n b_n\Big|^2 = \Big(\sum_{1\leq n\leq k} |a_n|^2\Big)\Big(\sum_{1\leq n\leq k} |b_n|^2\Big) - \sum_{1\leq m<n\leq k} |a_m\bar{b}_n - a_n\bar{b}_m|^2.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτή, νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἰσχύει ἡ **ἀνισότητα τοῦ Cauchy**

$$\Big|\sum_{1\leq n\leq k} a_n b_n\Big| \leq \sqrt{\Big(\sum_{1\leq n\leq k} |a_n|^2\Big)}\sqrt{\Big(\sum_{1\leq n\leq k} |b_n|^2\Big)}.$$

24. Νὰ προσδιοριστεῖ μὲ γεωμετρικὸ τρόπο στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενο καὶ τὸ πηλίκο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $-1+2i$ καὶ $2-i$.

25. Νὰ ὑπολογιστοῦν μὲ γεωμετρικὸ τρόπο στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοί:

$$z_1 := (1+i)^2, \quad z_2 := z_1 - (2+3i), \quad z_3 := 2z_2/1 - 2i.$$

26. Νὰ προσδιοριστεῖ μὲ γεωμετρικὸ τρόπο στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $(1+i)(2-3i) : (4+2i)$.

27. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι τὸ πολυώνυμο

$$p(x) := (\cos\beta + x\sin\beta)^k - \cos k\beta - x\sin k\beta,$$

ὅπου β εἶναι ἕνας σταθερὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ k εἶναι θετικὸς ἀκέραιος μεγαλύτερος τοῦ 2, διαιρεῖται διὰ τοῦ πολυωνύμου x^2+1.

28. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι γιὰ κάθε φ ἰσχύει ἡ σχέση

$$\left(\frac{1+i\tan(\varphi)}{1-i\tan(\varphi)}\right)^k = \frac{1+i\tan(k\varphi)}{1-i\tan(k\varphi)},$$

ὅπου k εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος.

29. Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(x+i)^n - (x-i)^n = 0$.

30. Ἂν x εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ k θετικὸς ἀκέραιος ἀριθμός, νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ ἀθροίσματα:

$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin kx,$

$\cos x + \cos(x+y) + \cos(x+2y) + \ldots + \cos(x+ky),$

$\sin x + \sin 4x + \ldots + \sin(3k+1)x,$

$\cos x + \cos 4x + \ldots + \cos(3k+1)x,$

$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos kx,$

$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos kx.$

31. Νὰ ὑπολογιστοῦν οἱ τιμὲς τῶν ριζῶν $\sqrt[4]{1-i}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt{-i}$.

32. Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $az^2 + bz + c = 0$, (ὅπου a, b, c εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί).

33. Ἄν E εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν n-οστῶν ριζῶν τῆς μονάδας ἐφοδιασμένο μὲ τὴν πράξη τοῦ γνωστοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\cdot$, νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ δυάδα $(E, \cdot)$ εἶναι μιὰ Ἀβελιανὴ (δηλαδὴ ἀντιμεταθετικὴ) ὁμάδα.

34. Ἔστω $M_n(z)$ τὸ σύνολο τῶν n- οστῶν ριζῶν τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z. Νὰ προσδιοριστεῖ τὸ σύνολο ὅλων τῶν σημείων z τοῦ ἐπιπέδου ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση $M_n(z) = M_n(\bar{z})$.

35. Ἄν $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ εἶναι οἱ n-στὲς ρίζες τῆς μονάδας, νὰ ὑπολογιστοῦν οἱ ποσότητες $1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}$ καὶ $\varepsilon_1.\varepsilon_2.\ldots.\varepsilon_{n-1}$.

36. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι τρία σημεῖα z_1, z_2, z_3 τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου εἶναι συνευθειακά, ἄν καὶ μόνο ἄν αὐτὰ ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση $\operatorname{Im}(z_3 - z_1)/(z_2 - z_1) = 0$.

37. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι τὰ σύνολα τῆς μορφῆς $E^+(a, b)$ καὶ $E^-(a, b)$ εἶναι κυρτά.

38. Ἔστω T τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ποὺ βρίσκονται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τριγώνου μὲ κορυφὲς τὰ μὴ συγγραμμικὰ σημεῖα a, b, c. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἰσχύει

$$T = E^+(a, b-a) \cap E^+(b, c-b) \cap E^+(c, a-c),$$

ἤ

$$T = E^-(a, b-a) \cap E^-(b, c-b) \cap E^-(c, a-c).$$

39. Θεωροῦμε δύο μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς z_1 καὶ z_2. Νὰ προσδιοριστεῖ σημεῖο $a \in [z_1 z_2]$ τέτοιο ὥστε $|a - z_1| = 2|a - z_2|$.

⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛

Κεφάλαιο 2

ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

2.1 ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ἐπειδὴ τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο, ὡς γραμμικὸς χῶρος, ταυτίζεται μὲ τὸ καρτεσιανό ἐπίπεδο, ἡ τοπολογία τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ταυτίζεται μὲ τὴ γνωστὴ τοπολογία τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου. Αὐτὴ εἶναι ἡ τοπολογία ἡ ὁποία εἰσάγεται μὲ βάση τὴ μετρικὴ d καὶ ποὺ ὁρίζεται μὲ τὴν ἀπόλυτη τιμὴ (2-διάστατων) διανυσμάτων, ἤτοι

$$d(z, w) := |z - w|.$$

Ἔτσι, ἡ ἀπόσταση δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν z, w εἶναι τὸ μέτρο $|z - w|$ τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z - w$.

2.1.1 Βασικὲς ἔννοιες

Οἱ πλέον βασικὲς τοπολογικὲς ἔννοιες εἶναι οἱ ἀκόλουθες :

- Ὁ ἀνοικτὸς **δίσκος** μὲ κέντρο τὸ σημεῖο a καὶ ἀκτῖνα $r > 0$ εἶναι τὸ σύνολο

$$B(a, r) := \{z : |z - a| < r\}.$$

- **Περιοχὴ** ἑνὸς σημείου a εἶναι ἕνα σύνολο A μὲ τὴν ἰδιότητα ὅτι ὑπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ὥστε $B(a, \delta) \subseteq A$. Μιὰ περιοχὴ τοῦ σημείου a τὴν παριστάνουμε, συνήθως, ὡς V_a.

- Ὁ ἀνοικτὸς **δακτύλιος**, ἢ ἀνοικτὴ **δακτυλικὴ περιοχὴ**, εἶναι τὸ σύνολο
$$\Delta(a, r, R) := \{z : r < |z - a| < R\}.$$

- **Ἀνοικτὸ** εἶναι ἕνα σύνολο A, ὅταν γιὰ κάθε σημεῖο $z \in A$, ὑπάρχει $r > 0$, μὲ τὴν ἰδιότητα ὅτι $B(z, r) \subseteq A$.

- **Περιοχὴ** ἑνὸς συνόλου A εἶναι ἕνα σύνολο U μὲ τὴν ἰδιότητα ὅτι ὑπάρχει ἀνοικτὸ σύνολο V τέτοιο ὥστε $A \subseteq V \subseteq U$.

- **Κλειστὸ** εἶναι ἕνα σύνολο B, ὅταν τὸ συμπλήρωμά του, δηλαδὴ τὸ σύνολο $B^c := \mathbb{C} \setminus B$ εἶναι ἀνοικτό.

- **Φραγμένο** εἶναι ἕνα σύνολο B, ἄν τοῦτο εἶναι ὑποσύνολο κάποιου δίσκου μὲ κέντρο τὸ 0.

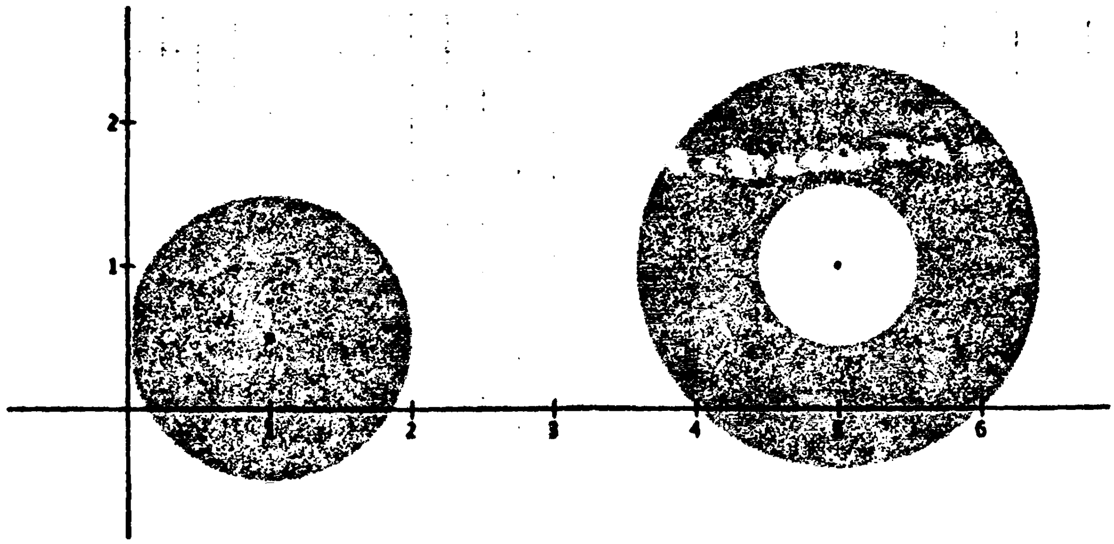
- **Συνεκτικὸ** εἶναι ἕνα σύνολο A, ἄν δὲν ὑπάρχουν μὴ κενὰ ἀνοικτὰ σύνολα A_1 καὶ A_2 τέτοια ὥστε $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A \subseteq A_1 \cup A_2$, $A \cap A_1 \neq \emptyset$ καὶ $A \cap A_2 \neq \emptyset$.

- Ὁ **τρύπιος δίσκος** μὲ κέντρο τὸ σημεῖο a καὶ ἀκτῖνα r παριστάνεται μὲ $B_0(a, r)$ καὶ εἶναι τὸ σύνολο ποὺ προκύπτει ἄν ἀπὸ τὸν δίσκο $B(a, r)$, ἀφαιρέσουμε τὸ κέντρο του.

- **Τόπος**, εἶναι ἕνα μὴ κενό, ἀνοικτὸ καὶ συνεκτικὸ σύνολο.

Ἰδιαίτερα, ὁ δίσκος $B(0, 1)$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου λέγεται **μοναδιαῖος δίσκος** καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ δίσκου αὐτοῦ, δηλαδὴ τὸ σύνολο
$$K(0, 1) := \{z : |z| = 1\}$$
λέγεται **μοναδιαῖος κύκλος**.

Πρόβλημα 2.1.1.1 *Νὰ ἐξεταστεῖ ἄν τὸ σύνολο*
$$A := \{z \in \mathbb{C} : \frac{|z - i|}{1 + |z - i|} \leq \frac{|z|}{1 + |z|} + \frac{1}{2}\}$$



Σχήμα 2.1: *Ὁ δίσκος* $B(1+\frac{i}{2},1)$ *καὶ ὁ δακτύλιος* $\Delta(5+i,0.3,\sqrt{2})$.

εἶναι ἀνοικτὸ καὶ φραγμένο.

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμὸ z ἔχουμε

$$\frac{|z-i|}{1+|z-i|} = \frac{1}{1+\frac{1}{|z-i|}} \le \frac{1}{1+\frac{1}{|z|+1}} = \frac{|z|}{2+|z|} + \frac{1}{2+|z|} \le \frac{|z|}{1+|z|} + \frac{1}{2}.$$

Ἄρα $z \in B$, δηλαδὴ τὸ σύνολο B εἶναι ὅλο τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο, τὸ ὁποῖο εἶναι ἀνοικτὸ καὶ μὴ φραγμένο σύνολο. ■

2.1.2 Ἰδιότητες τοῦ τόπου

Μιὰ χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα ποὺ εἶναι χρήσιμη στὰ ἑπόμενα, εἶναι ἡ ἀκόλουθη:

Θεώρημα 2.1.2.1 *Ἂν $\mathcal{T}$ εἶναι ἕνας τόπος καὶ A εἶναι ἕνα σύνολο τὸ ὁποῖο ταυτόχρονα εἶναι ἀνοικτὸ καὶ κλειστὸ ὑποσύνολο τοῦ τόπου, τότε τοῦτο ταυτίζεται μὲ τὸν τόπο.*

Ἀπόδειξη: Ἂν τὸ σύνολο A δὲν ταυτίζεται μὲ τὸν τόπο $\mathcal{T}$, τὸ σύνολο $\mathcal{T} \setminus A$ εἶναι μὴ κενό. Ἄρα ὁ τόπος, ποὺ εἶναι ἕνα ἀνοικτὸ σύνολο, γράφεται ὡς ἕνωση τῶν δύο ξένων (μὴ κενῶν) ἀνοικτῶν συνόλων A καὶ $\mathcal{T} \setminus A$. Προφανῶς, τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἀντίκειται πρὸς τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ τόπος εἶναι συνεκτικὸ σύνολο. ■

Τὸ ἑπόμενο θεώρημα περιγράφει μιὰ χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα τῶν τόπων.

Θεώρημα 2.1.2.2 *Ἂν $\mathcal{T}$ εἶναι ἕνας τόπος, τότε κάθε δύο σημεῖα τοῦ τόπου μποροῦν νὰ ἑνωθοῦν μὲ μιὰ πολυγωνικὴ γραμμὴ τῆς ὁποίας οἱ πλευρὲς εἶναι παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες τοῦ συστήματος.*

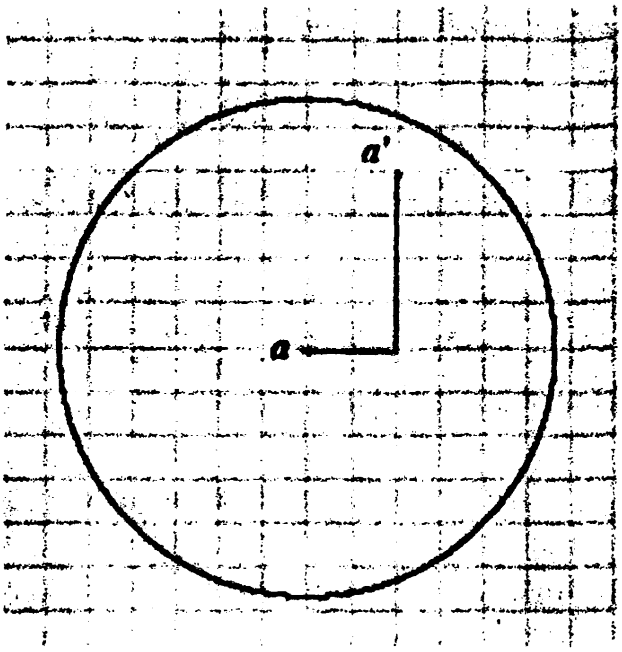
Ἀπόδειξη: Ἔστω a ἕνα σημεῖο τοῦ τόπου $\mathcal{T}$. Ὀνομάζουμε $P(a)$ τὴν ἰδιότητα ποὺ ἔχει ἕνα σημεῖο τοῦ τόπου ὅταν τοῦτο μπορεῖ νὰ ἑνωθεῖ μὲ τὸ σημεῖο a μὲ μιὰ πολυγωνικὴ γραμμὴ μὲ πλευρὲς παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες.

Ἐπειδὴ ὁ τόπος $\mathcal{T}$ εἶναι ἀνοικτὸ σύνολο, μαζὶ μὲ τὸ σημεῖο a θὰ περιέχει καὶ ἕναν δίσκο $B(a,r)$ μὲ κέντρο τὸ a καὶ ἀκτῖνα $r > 0$. Κάθε σημεῖο a' τοῦ δίσκου ἔχει τὴν ἰδιότητα $P(a)$, ἀφοῦ, προφανῶς, μπορεῖ νὰ ἑνωθεῖ μὲ τὸ κέντρο μὲ μιὰ πολυγωνικὴ γραμμὴ μὲ πλευρὲς παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες. Τοῦτο συνεπάγεται ὅτι τὸ σύνολο T_1 τῶν σημείων τοῦ τόπου $\mathcal{T}$, ποὺ ἔχουν τὴν ἰδιότητα $P(a)$, εἶναι μὴ κενὸ καὶ ἀνοικτό. Ἄρα τὸ σύνολο

$$T_2 := \mathcal{T} \setminus T_1$$

εἶναι κλειστό. Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ συμπέρασμα θὰ ἰσχύει ὅταν τὸ σύνολο σύνολο T_2 εἶναι κενό. Ἔστω ὅτι τοῦτο δὲν συμβαίνει. Τότε μποροῦμε νὰ λάβουμε ἕνα σημεῖο $b \in T_2$. Τὸ σημεῖο b δὲν ἔχει τὴν ἰδιότητα $P(a)$, δηλαδὴ δὲν μπορεῖ νὰ ἑνωθεῖ μὲ πολυγωνικὴ γραμμὴ μὲ τὸ σημαῖο a. Ἐπειδὴ ἔχουμε $b \in \mathcal{T}$, καὶ τὸ σύνολο $\mathcal{T}$ εἶναι ἀνοικτό, ὑπάρχει $r' > 0$ τέτοιο ὥστε ὁ δίσκος μὲ κέντρο b καὶ ἀκτῖνα r' νὰ περιέχεται στὸ $\mathcal{T}$. Προφανῶς, κανένα σημεῖο τοῦ δίσκου αὐτοῦ δὲν πρέπει νὰ ἔχει τὴν ἰδιότητα $P(a)$, ὁπότε τὸ σύνολο T_2 εἶναι ἀνοικτὸ σύνολο.

Ἔτσι ἀποδείχθηκε ὅτι τὸ σύνολο $\mathcal{T}$, ἂν καὶ εἶναι συνεκτικό, γράφεται ὡς ἕνωση δυὸ ἀνοικτῶν συνόλων, δηλαδή, τῶν T_1 καὶ T_2. Το γεγονὸς τοῦτο, λόγω τοῦ θεωρήματος 2.1.2.1, εἶναι ἄτοπο, ὁπότε κάποιο ἀπὸ τὰ δύο σύνολα εἶναι τὸ κενό. Αὐτὸ πρέπει νὰ εἶναι τὸ σύνολο T_2. ■



Σχήμα 2.2: *Κάθε σημεῖο τοῦ δίσκου συνδέεται μὲ τὸ κέντρο μὲ μιὰ πολυγωνικὴ γραμμὴ δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.*

2.1.3 Ἄλλες ἔννοιες

Ἄλλες γνωστὲς τοπολογικὲς ἔννοιες εἶναι οἱ ἑξῆς:

- Ἡ διάμετρος ἑνὸς συνόλου A:

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{|x-y| : x, y \in A\}.$$

- Ὁ πυρήνας ἑνὸς συνόλου A:

$$A^\circ := \bigcup\{X : \ X \subseteq A, \ X \text{ ἀνοικτὸ}\}.$$

- Ἡ θήκη ἑνὸς συνόλου A:

$$\overline{A} := \bigcap\{X : \ A \subseteq X, \ X \text{ κλειστὸ}\}.$$

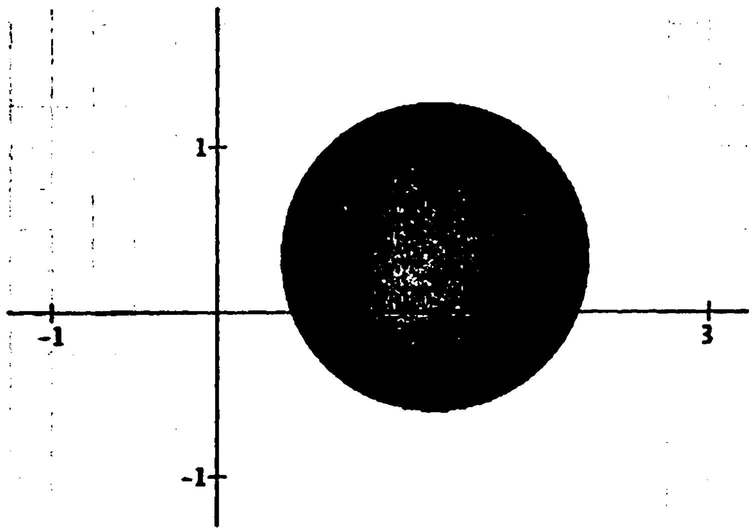
- **Τὸ σύνορο ἑνὸς συνόλου** A εἶναι τὸ σύνολο

$$\overline{A} \cap \overline{A^c},$$

ὅπου A^c εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου A, δηλαδὴ τὸ σύνολο $\mathbb{C} \setminus A$.

Πρόβλημα 2.1.3.1 *Νὰ βρεθεῖ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο τὸ σύνολο B ὅλων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν z ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση*

$$\frac{|z+i|}{|z-1|} \geq 2.$$



Σχήμα 2.3: *Ἡ θήκη τοῦ δίσκου $B(\frac{4}{3}+i\frac{1}{3}, 2\frac{\sqrt{2}}{3})$ περιέχει μόνο τὰ σημεῖα ποὺ ἐπιλύουν τὴν ἀνισότητα $\frac{|z+i|}{|z-1|} \geq 2$.*

Λύση: Θέτοντας $z = x + iy$ βρίσκουμε ὅτι ἡ σχέση αὐτὴ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν

$$3x^2 - 8x + 3y^2 - 2y + 3 \leq 0,$$

ἡ ὁποία γράφεται καὶ ὡς

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \left(2\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2.$$

Ἡ σχέση αὐτὴ παριστᾶνει τὴ θήκη τοῦ κύκλου (στὸ καρτεσιανὸ ἐπίπεδο) μὲ κέντρο τὸ σημεῖο $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ καὶ ἀκτίνα $2\frac{\sqrt{2}}{3}$. Ἔτσι τὸ ζητούμενο σύνολο B ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς $z = x + iy$, ὅπου στὸ καρτεσιανὸ ἐπίπεδο τὰ ζεύγη (x, y) ἀνήκουν στὴ θήκη τοῦ παραπάνω κύκλου. ♦

Πρόβλημα 2.1.3.2 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι τὸ σύνολο*

$$A := \{z : |z^2 - 1| < 1\}$$

εἶναι ἀνοικτὸ καὶ φραγμένο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{C}$.

Ἀπόδειξη: Θεωροῦμε ἕνα στοιχεῖο $z \in A$. Τότε ἔχουμε

$$\lambda := |z^2 - 1| < 1. \tag{2.1}$$

Γιὰ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὸ σύνολο A εἶναι ἀνοικτό, θὰ πρέπει νὰ δείξουμε ὅτι ὑπάρχει ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς $r > 0$ τέτοιος ὥστε, ἄν κάποιος μιγαδικὸς ἀριθμὸς w ἱκανοποιεῖ τὴν ἀνισότητα $|z - w| < r$, τότε αὐτός νὰ ἱκανοποιεῖ, ἐπίσης, τὴ σχέση (2.1) δηλαδὴ νὰ ἰσχύει ὅτι $|w^2 - 1| < 1$.

Γιὰ κάθε σημεῖο w ἰσχύει

$$|w^2 - 1| \leq |w^2 - z^2| + |z^2 - 1| = |w - z||w + z| + \lambda.$$

Ἔστω r ἕνας θετικὸς ἀριθμὸς τέτοιος ὥστε $|z - w| < r$. Τότε ἔχουμε

$$|w| \leq |z| + |w - z| < |z| + r.$$

Ἄρα ἰσχύει

$$|w^2 - 1| \leq |w - z|(|w| + |z|) + \lambda < r(2|z| + r) + \lambda.$$

Ἔτσι, ἂν ἐπιλέξουμε τὸν πραγματικὸ ἀριθμὸ r νὰ εἶναι μικρὸς τόσος ὥστε

$$r(2|z| + r) + \lambda < 1,$$

βρίσκουμε

$$|w^2 - 1| < 1,$$

πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι $B(z, r) \subseteq A$. Ἄρα τὸ σύνολο A εἶναι ἀνοικτό.

Ἐπίσης, ἄν z εἶναι τυχὸν σημεῖο τοῦ συνόλου A, ἀπὸ τὴ σχέση (2.1) παίρνουμε

$$|z|^2 - 1 < 1$$

καὶ ἄρα ἰσχύει $|z| < \sqrt{2}$, δηλαδὴ τὸ σύνολο A εἶναι καὶ φραγμένο. ♦

2.2 ΣΥΓΚΛΙΣΗ

2.2.1 Ἀκολουθίες

Ἔστω $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \cdots$ μιὰ ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τῆς τοπολογίας τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ἡ ἀκολουθία αὐτὴ συγκλίνει πρὸς κάποιον μιγαδικὸ ἀριθμὸ w, ἄν **γιὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης n_0 τέτοιος ὥστε νὰ ἰσχύει**

$$|z_n - w| < \varepsilon, \text{ γιὰ κάθε } n \geq n_0. \tag{2.2}$$

Τὸ γεγονὸς τοῦτο τὸ δηλώνουμε γράφοντας

$$\lim z_n = w, \text{ ἤ } z_n \to w$$

καὶ μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι ἡ ἀκολουθία (z_n) συγκλίνει πρὸς τὸ σημεῖο w, ὅταν κάθε δίσκος μέ κέντρο τὸ w περιέχει μιὰ οὐρὰ τῆς ἀκολουθίας.

Ἐπίσης, μιὰ ἀκολουθία (z_n) λέγεται βασική, ἄν **γιὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης n_0 τέτοιος ὥστε νὰ ἰσχύει**

$$|z_n - z_m| < \varepsilon, \text{ γιὰ κάθε } n, m \geq n_0. \tag{2.3}$$

Πρόταση 2.2.1.1 *Ἕνας μιγαδικὸς ἀριθμὸς $w = a + i\beta$ εἶναι τὸ ὅριο μιᾶς ἀκολουθίας $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \cdots$, ἄν καὶ μόνο ἄν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ a καὶ β εἶναι τὰ ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν (x_n) καὶ (y_n), ἀντίστοιχα.*

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε ὅτι γιὰ τὴν ἀκολουθία $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \cdots$ καὶ τὸν ἀριθμὸ $w = a + i\beta$ ἰσχύει ὅτι $\lim(x_n + iy_n) = a + i\beta$. Ἀπὸ τὴ σχέση (2.2) παίρνουμε

$$|x_n - a| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - \beta)^2} = |z_n - w| < \varepsilon, \text{ γιὰ κάθε } n \geq n_0,$$

καθὼς ἐπίσης καὶ

$$|y_n - \beta| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - \beta)^2} = |z_n - w| < \varepsilon, \text{ γιὰ κάθε } n \geq n_0.$$

Οἱ ἀνισότητες αὐτὲς ἀποδεικνύουν ὅτι $\lim x_n = a$ καὶ $\lim y_n = \beta$.

Ἀντίστροφα. Ἂν οἱ δύο ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν x_n, $n = 1, 2, \cdots$ καὶ y_n, $n = 1, 2, \cdots$ ἔχουν ὅρια τοὺς ἀριθμοὺς a καὶ β, ἀντίστοιχα, τότε γιὰ τυχὸν $\varepsilon > 0$ ὑπάρχουν δεῖκτες n_1 καὶ n_2 τέτοιοι ὥστε νὰ ἰσχύουν

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ γιὰ κάθε } n \geq n_1$$

καὶ

$$|y_n - \beta| < \varepsilon, \text{ γιὰ κάθε } n \geq n_2.$$

Θέτοντας $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, οἱ ἀνισότητες $|x_n - a| \leq \varepsilon$ καὶ $|y_n - a| < \varepsilon$ θὰ ἀληθεύουν ταυτόχρονα, γιὰ κάθε $n \geq n_0$. Ἀλλὰ τότε θὰ ἔχουμε

$$|z_n - w| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - \beta)^2} < \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{2}, \text{ γιὰ κάθε } n \geq n_0.$$

Προφανῶς, τοῦτο ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \cdots$ ἔχει ὅριο τὸν μιγαδικὸ ἀριθμὸ $a + i\beta$. ■

Ἀπὸ τὴν παραπάνω πρόταση προκύπτει τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Θεώρημα 2.2.1.1 *(Boltzano) Κάθε φραγμένη ἀκολουθία ἔχει μιὰ συγκλίνουσα ὑπακολουθία.*

Ἀπόδειξη: Ἔστω $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \cdots$ μιὰ φραγμένη ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Τότε ὑπάρχει πραγματικὸς ἀριθμὸς $M > 0$ τέτοιος ὥστε νὰ ἰσχύει $|z_n| < M$, γιὰ κάθε n. Ἄρα θὰ ἰσχύουν καὶ οἱ σχέσεις

$$|x_n| \leq |z_n| < M, \quad \text{καὶ } |y_n| \leq |z_n| < M.$$

γιὰ κάθε n. Ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Boltzano γιὰ τὶς ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει ὑπακολουθία (x_{k_n}) τῆς ἀκολουθίας (x_n), ἡ ὁποία συγκλίνει πρὸς κάποιον πραγματικὸ ἀριθμὸ a. Ἐπειδή, ὅμως, ἰσχύει $|y_{k_n}| < M$, γιὰ κάθε n, πάλι ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Boltzano, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει ὑπακολουθία $(y_{\lambda_{k_n}})$ τῆς ἀκολουθίας (y_{k_n}), ἡ ὁποία συγκλίνει πρὸς κάποιον πραγματικὸ ἀριθμὸ β. Ἔτσι, τελικά, ἡ ἀκολουθία $(z_{\lambda_{k_n}})$, ἡ ὁποία εἶναι μιὰ ὑπακολουθία τῆς ἀκολουθίας (z_n), συγκλίνει πρὸς τὸν μιγαδικὸ ἀριθμὸ $w = a + i\beta$. ■

Πρόβλημα 2.2.1.1 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι, γιὰ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμὸ a μὲ $|a| < 1$, ἡ ἀκολουθία (a^n) συγκλίνει πρὸς τὸ μηδέν.*

Ἀπόδειξη: Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ τυχὸν $\varepsilon > 0$, μὲ $\varepsilon < 1$, ἰσχύει ἡ ἀνισότητα $|a^n| < \varepsilon$, ἂν καὶ μόνο ἂν $|a|^n < \varepsilon$, δηλαδή, ἂν καὶ μόνο ἂν $n \log|a| < \log\varepsilon$. Ἡ τελευταία σχέση ἰσχύει ἂν καὶ μόνο ἂν

$$n \geq n_0 := \lfloor \frac{\log(\varepsilon)}{\log|a|} \rfloor + 1.$$

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι πλήρης. ♦

Πρόβλημα 2.2.1.2 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἰσχύει*

$$\lim \frac{n-i}{n+1} = 1.$$

Ἀπόδειξη: Ἔστω $\varepsilon > 0$. Πρέπει νὰ βρεθεῖ ἕνας δείκτης $N(\varepsilon)$ τέτοιος ὥστε γιὰ κάθε $n \geq N(\varepsilon)$ νὰ ἰσχύει

$$\left|\frac{n-i}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Ἀλλά, παρατηροῦμε ὅτι

$$\left|\frac{n-i}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{1+i}{n+1}\right| = \frac{\sqrt{2}}{n+1} < \frac{2}{n} \leq \varepsilon,$$

ὁπότε τὸ πρῶτο μέλος γίνεται μικρότερο τοῦ ε, γιὰ κάθε $n \geq N(\varepsilon)$, ὅπου

$$N(\varepsilon) := 1 + \lfloor \text{ἀκέραιο μέρος τοῦ } \frac{2}{\varepsilon} \rfloor. \ ♦$$

Πρόβλημα 2.2.1.3 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι, ἂν ἰσχύει $\lim z_n = a$, τότε ἰσχύει καὶ $\lim |z_n| = |a|$.*

Ἀπόδειξη: Πραγματικά, ἂν

$$\lim z_n = a, \quad \text{τότε} \quad \lim |z_n - a| = 0.$$

Ἀπὸ τὴν τριγωνικὴ ἰδιότητα τῆς ἀπόλυτης τιμῆς, παίρνουμε ὅτι

$$||z_n| - |a|| \leq |z_n - a|, n = 1, 2, \ldots,$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτει τὸ παραπάνω συμπέρασμα. ♦

Πρόβλημα 2.2.1.4 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν*

$$z_n := \operatorname{Arg}\frac{(-1)^n}{n}, n = 1, 2, \dots$$

δὲν συγκλίνει.

Ἀπόδειξη: Ἡ ἀκολουθία αὐτὴ γράφεται ὡς $z_n = 0$, ἂν n εἶναι ἄρτιος καὶ $z_n = \pi$, ἂν n εἶναι περιττός. Ἄρα δὲν συγκλίνει. ♦

Πρόβλημα 2.2.1.5 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι, γιὰ κάθε $\rho \in (0, 1)$, ἡ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν*

$$x_n := 1 + \rho\cos(a) + \rho^2\cos(2a) + \dots + \rho^n\cos(na), n = 1, 2, \dots$$

συγκλίνει. Ἐπίσης νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὅριό της.

Ἀπόδειξη: Θέτουμε

$$y_n := \rho\sin(a) + \rho^2\sin(2a) + \dots + \rho^n\sin(na), n = 1, 2, \dots$$

καὶ ἀναζητοῦμε τὸ ὅριο τῆς ἀκολουθίας $z_n := x_n + iy_n, n = 1, 2, \dots$ Ἐπίσης θέτοντας

$$w := \rho(\cos a + i\sin a),$$

παρατηροῦμε ὅτι $|w| = \rho < 1$. Ὁ ὅρος z_n γράφεται στὴ μορφὴ

$$z_n = 1 + w + w^2 + \dots + w^n = \frac{1 - w^{n+1}}{1 - w},$$

γιὰ κάθε $n = 1, 2, \dots$, ὁπότε

$$\begin{aligned}\lim z_n = \lim\frac{1 - w^{n+1}}{1 - w} &= \frac{1}{1 - w} = \frac{1}{1 - \rho\cos(a) - i\rho\sin(a)}\\ &= \frac{1 - \rho\cos(a) + i\rho\sin(a)}{1 - 2\rho\cos(a) + \rho^2},\end{aligned}$$

ὅπου χρησιμοποιήσαμε τὸ συμπέρασμα τοῦ προβλήματος 2.2.1.1. Ἑπομένως ἔχουμε

$$\lim x_n = \operatorname{Re}\frac{1}{1 - w} = \frac{1 - \rho\cos(a)}{1 - 2\rho\cos(a) + \rho^2}. \ \blacklozenge$$

Στὸ σημεῖο αὐτὸ ὑπενθυμίζουμε ὅτι ἕνας μετρικὸς χῶρος εἶναι **πλήρης**, ἄν κάθε βασικὴ ἀκολουθία του συγκλίνει.

Πρόταση 2.2.1.2 *Τὸ σύνολο $\mathbb{C}$ εἶναι ἕνας πλήρης μετρικὸς χῶρος.*

Ἀπόδειξη: Ἔστω $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \cdots$ μιὰ βασικὴ ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Τότε ἰσχύει ἡ σχέση (2.3), ἀπὸ ὅπου παίρνουμε

$$|x_n - x_m| \le |z_n - z_m| < \varepsilon, \text{ γιὰ κάθε } n, m \ge n_0$$

καὶ

$$|y_n - y_m| \le |z_n - z_m| < \varepsilon, \text{ γιὰ κάθε } n, m \ge n_0.$$

Ἄρα οἱ ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀρίθμῶν (x_n) καὶ (y_n) εἶναι βασικές, ὁπότε αὐτὲς συγκλίνουν πρὸς κάποιους πραγματικοὺς ἀριθμοὺς a καὶ β, ἀντίστοιχα. Τώρα ἀπὸ τὴν Πρόταση 2.2.1.1 προκύπτει τὸ συμπέρασμα.
■

2.2.2 Σειρὲς

Μιὰ σειρὰ

$$z_0 + z_1 + \ldots + z_n + \ldots =: \sum_{n=0}^{+\infty} z_n,$$

μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z_n := x_n + iy_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ συγκλίνει **ἁπλὰ**, ἀντίστοιχα **ἀπόλυτα**, ἄν οἱ σειρὲς $\sum x_n$ καὶ $\sum y_n$ συγκλίνουν **ἁπλὰ**, ἀντίστοιχα ἀπόλυτα. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἔχουμε

$$\sum z_n = \sum x_n + i \sum y_n.$$

Πρόταση 2.2.2.1 *Μιὰ σειρὰ $\sum z_n$ συγκλίνει ὅταν ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων της εἶναι βασική.*

Ἀπόδειξη: Ἡ σειρὰ $\sum z_n$, ὅπου $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \cdots$ συγκλίνει ἄν καὶ μόνο ἄν οἱ σειρὲς $\sum x_n$ καὶ $\sum y_n$ συγκλίνουν. Ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει ἄν καὶ μόνο ἄν οἱ πραγματικὲς ἀκολουθίες τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων

$$t_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

καὶ

$$r_n := y_1 + y_2 + \cdots + y_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

συγκλίνουν, δηλαδὴ ἄν καὶ μόνο ἄν ἡ ἀκολουθία

$$s_n := t_n + ir_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

συγκλίνει. ■

Πρόταση 2.2.2.2 *Ἄν μιὰ σειρὰ $\sum z_n$ συγκλίνει, τότε ἡ ἀκολουθία (z_n) συγκλίνει πρὸς τὸ μηδέν. Ἄρα αὐτὴ εἶναι φραγμένη.*

Ἀπόδειξη: Ἐπειδὴ ἡ σειρὰ συγκλίνει, ἀπὸ τὴν προηγούμενη πρόταση ἕπεται ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων της συγκλίνει. Ἄρα αὐτὴ εἶναι βασική. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, γιὰ κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει δείκτης n_0, τέτοιος ὥστε

$$n \geq n_0 \implies |z_n + z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+k}| \leq \varepsilon$$

γιὰ κάθε $k = 0, 1, 2, \cdots$ Θέτοντας $k = 0$, προκύπτει τὸ συμπέρασμα. ■

Τὰ κριτήρια γιὰ τὴν ἀπλὴ καὶ τὴν ἀπόλυτη σύγκλιση σειρῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐφαρμόζονται καὶ στὶς σειρὲς μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἔτσι, ἔχουμε τὰ συμπεράσματα ποὺ δίνονται στὶς ἀκόλουθες προτάσεις:

Πρόταση 2.2.2.3 *(Κριτήριο σύγκρισης) Ἔστω $\sum z_n$ μιὰ σειρὰ μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἄν γιὰ κάθε n ἰσχύει $|z_n| \leq M_n$, καὶ ἡ σειρὰ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $\sum M_n$ συγκλίνει, τότε καὶ ἡ σειρὰ $\sum z_n$ συγκλίνει καὶ μάλιστα ἀπόλυτα.*

Ἀπόδειξη: Ἔστω $\varepsilon > 0$. Ἐπειδὴ ἡ σειρὰ $\sum M_n$ συγκλίνει, ὑπάρχει δείκτης n_0 τέτοιος ὥστε

$$n \geq n_0 \implies M_n + M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+k} \leq \varepsilon$$

γιὰ κάθε $k = 0, 1, 2, \cdots$ Ἄρα τότε θὰ ἰσχύει καὶ

$$n \geq n_0 \implies \leq |z_n| + |z_{n+1}| + \cdots + |z_{n+k}| \leq M_n + M_{n+1} + \cdots + M_{n+k} \leq \varepsilon$$

γιὰ κάθε $k = 0, 1, 2, \cdots$ Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς σειρᾶς $\sum |z_n|$ εἶναι βασική, ὁπότε συγκλίνει. Ἄρα καὶ ἡ ἀρχικὴ σειρὰ συγκλίνει. ■

Πρόταση 2.2.2.4 *(Κριτήριο D'Alembert). Δίνεται μιὰ σειρὰ $\sum z_n$ μιγαδικῶν ἀριθμῶν, γιὰ τὴν ὁποία ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχει $r > 0$ τέτοιο ὥστε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = r.$$

Ἂν ἰσχύει $r < 1$, τότε ἡ σειρὰ συγκλίνει.

Ἂν ἰσχύει $r > 1$, τότε ἡ σειρὰ δὲν συγκλίνει.

Ἂν ἰσχύει $r = 1$, τότε δὲν μποροῦμε νὰ ἀποφανθοῦμε γιὰ τὴ σύγκλιση τῆς σειρᾶς.

Ἀπόδειξη: Ἂν $r < 1$ ἐπιλέγουμε ἕνα $s \in (r, 1)$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι ὑπάρχει δείκτης n_0 τέτοιος ὥστε $|z_{n+1}| < s|z_n|$, γιὰ κάθε $n \geq n_0$. Τοῦτο συνεπάγεται ὅτι γιὰ κάθε $k = 1, 2, \cdots$ καὶ γιὰ κάθε τέτοιο n ἰσχύει

$$|z_{n+k}| < s^k |z_{n_0}|.$$

Ἐπειδὴ ἡ σειρὰ

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k |z_{n_0}| = |z_{n_0}| \sum_{k=0}^{\infty} s^k,$$

ὡς γεωμετρικὴ πρόοδος, συγκλίνει (πρὸς τὸ σημεῖο $|z_{n_0}|/(1-s)$) σύμφωνα μὲ τὸ κριτήριο 2.2.2.3, ἡ ἀρχικὴ σειρὰ συγκλίνει.

Ὑποθέτουμε ὅτι $r > 1$. Ἐπιλέγουμε ἕνα $S \in (1, r)$. Ἐπειδὴ $S < r$, ὑπάρχει δείκτης n_0 τέτοιος ὥστε $|z_{n+1}| > S|z_n|$, γιὰ κάθε $n \geq n_0$. Τοῦτο συνεπάγεται ὅτι γιὰ κάθε $k = 1, 2, \cdots$ ἰσχύει

$$|z_{n_0+k}| > S^k |z_{n_0}|.$$

Ἄρα, ἐπειδὴ $S > 1$, θὰ ἰσχύει $S^k \to +\infty$, ὁπότε ἡ ἀκολουθία (z_n) δὲν εἶναι μηδενική. Ἔτσι, σύμφωνα μὲ τὴν Πρόταση 2.2.2.2, ἡ ἀρχικὴ σειρὰ δὲν συγκλίνει.

Τέλος, ὑποθέτουμε ὅτι $r = 1$, ὅπως, γιὰ παράδειγμα, συμβαίνει γιὰ τὶς σειρὲς $\sum \frac{1}{n}$ καὶ $\sum \frac{1}{n^2}$. Παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$\begin{aligned}\sum \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty.\end{aligned}$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ σειρὰ $\sum \frac{1}{n}$ δὲν συγκλίνει πρὸς πραγματικὸ ἀριθμό. Ὅμως γιὰ τὴ σειρὰ $\sum \frac{1}{n^2}$ παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] = 1 + 1 = 2.$$

Ἔτσι ἡ σειρὰ αὐτὴ συγκλίνει. ∎

Πρὶν δώσουμε τὸ ἑπόμενο κριτήριο, ὑπενθυμίζουμε κάποιες ἔννοιες ἀπὸ τὶς ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν:

Ἔστω A τὸ σύνολο τῶν ὁριακῶν σημείων μιᾶς ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν x_n, $n = 1, 2, \cdots$. Τότε τὸ **ἀνώτερο ὅριο** $\limsup x_n$ εἶναι τὸ $\max(A)$ καὶ τὸ **κατώτερο ὅριο** $\liminf x_n$ εἶναι τὸ $\min(A)$. Ἂν τὸ σύνολο A δὲν εἶναι ἄνω φραγμένο, τότε ἔχουμε $\limsup x_n = +\infty$ καί, ἂν δὲν εἶναι κάτω φραγμένο, τότε $\liminf x_n = -\infty$. Ἐπίσης, ἡ ἀκολουθία (x_n) συγκλίνει πρὸς κάποιο στοιχεῖο $l \in [-\infty, +\infty]$, ἂν καὶ μόνο ἂν ἰσχύει $\liminf x_n = \limsup x_n = l$.

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ συμπεράσματος ποὺ ἀκολουθεῖ, μπορεῖ νὰ ἐπιτευχθεῖ εὔκολα καὶ γι' αὐτὸ παραλείπεται.

Πρόταση 2.2.2.5 *Ἂν (x_n) καὶ (y_n) εἶναι δύο ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:*

1) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$,

2) $\liminf(x_n + y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$.

Ἰδιαίτερα, ἂν τὸ ὅριο τῆς (y_n) ὑπάρχει, τότε ἰσχύουν οἱ

1') $\limsup(x_n + y_n) = \limsup x_n + \lim y_n$,

2') $\liminf(x_n + y_n) = \liminf x_n + \lim y_n$.

Ἐπίσης, ἄν οἱ ὅροι τῶν ἀκολουθιῶν αὐτῶν εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, τότε ἔχουμε και

3) $\limsup(x_n y_n) \leq (\limsup x_n)(\limsup y_n)$,

2) $\liminf(x_n y_n) \geq (\liminf x_n)(\liminf y_n)$.

Ἰδιαίτερα, ἄν τὸ ὅριο τῆς (y_n) ὑπάρχει, τότε ἰσχύουν οἱ

1') $\limsup(x_n y_n) = (\limsup x_n)(\lim y_n)$,

2') $\liminf(x_n y_n) = (\liminf x_n)(\lim y_n)$.

Πρόταση 2.2.2.6 *(Κριτήριο ριζῶν τοῦ Cauchy) Ἔστω (z_n) μιὰ ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Θέτουμε*

$$L := \limsup |z_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Ἄν ἰσχύει $L < 1$, τότε ἡ σειρὰ $\sum z_n$ συγκλίνει.

Ἄν ἰσχύει $L > 1$, τότε ἡ σειρὰ $\sum z_n$ δὲν συγκλίνει.

Ἄν ἰσχύει $L = 1$, τότε δὲν μποροῦμε νὰ ἀποφανθοῦμε γιὰ τὴ σύγκλιση τῆς σειρᾶς $\sum z_n$.

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύει $L < 1$, δηλαδὴ ὅτι

$$\limsup |z_n|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Θεωροῦμε ἕναν πραγματικὸ ἀριθμὸ M τέτοιον ὥστε

$$\limsup |z_n|^{\frac{1}{n}} < M < 1.$$

Τοῦτο δηλώνει ὅτι τὰ ὅρια ὅλων τῶν συγκλινουσῶν ὑπακολουθιῶν τῆς ἀκολουθίας $(|z_n|)$ εἶναι μικρότερα τοῦ M. Ἄρα ὑπάρχει δείκτης n_0 τέτοιος ὥστε νὰ ἰσχύει $|z_n| < M^n$, γιὰ κάθε $n \geq n_0$. Τώρα, ἐπειδὴ ἡ σειρὰ

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} M_n$$

εἶναι μιὰ γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ ἄθροισμα $M^{n_0}/(1-M)$, ἀπὸ τὸ κριτήριο σύγκρισης, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ἀρχικὴ σειρὰ συγκλίνει.

Τώρα ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύει $L > 1$. Θεωροῦμε ἕναν πραγματικὸ ἀριθμὸ N τέτοιον ὥστε $L > N > 1$. Ἐπειδὴ τὸ L εἶναι σημεῖο συσσώρευσης τῆς ἀκολουθίας

$$(|z_n|^{\frac{1}{n}}),$$

θὰ ὑπάρχουν ἄπειροι ὅροι τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ ἀριθμοῦ N. Ἄρα ὑπάρχουν ἄπειροι δεῖκτες n τέτοιοι ὥστε

$$|z_n| > N^n.$$

Ἀλλά, τότε ἡ ἀκολουθία $|z_n|$ δὲν μπορεῖ νὰ συγκλίνει πρὸς τὸ σημεῖο 0, ὅπως πρέπει, σύμφωνα μὲ τὴν Πρόταση 2.2.2.2, πρᾶγμα ἄτοπο.

Τέλος, γιὰ τὴν περίπτωση $L = 1$, ἡ σειρὰ μπορεῖ ἢ ὄχι νὰ συγκλίνει, δηλαδὴ δὲν μποροῦμε νὰ ἀποφανθοῦμε, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ παραδείγματα ποὺ χρησιμοποιήθηκαν στὴν ἀπόδειξη τοῦ Κριτηρίου D' Alembert.

Τοῦτο ἀποδεικνύει τὸ συμπέρασμα. ■

2.2.3 Συμπαγὴ σύνολα

Ἡ συμπαγότητα εἶναι μιὰ σημαντικὴ τοπολογικὴ ἔννοια, γνωστὴ ἀπὸ τὴ θεωρία γενικῶν μετρικῶν χώρων. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ὑπάρχουν τρεῖς ἰσοδύναμοι ὁρισμοὶ τῆς συμπαγότητας, οἱ ἑξῆς:

Ὁρισμός 2.2.3.1 *Ἕνα σύνολο K εἶναι συμπαγές, ἂν τοῦτο εἶναι κλειστὸ καὶ φραγμένο.*

Ὁρισμός 2.2.3.2 *Ἕνα σύνολο K εἶναι συμπαγές, ἂν κάθε ἀκολουθία του ἔχει μιὰ ὑπακολουθία ἡ ὁποία συγκλίνει πρὸς κάποιο σημεῖο τοῦ K.*

Ὁρισμός 2.2.3.3 *Ἕνα σύνολο K εἶναι συμπαγές, ἂν γιὰ κάθε συλλογὴ ἀνοικτῶν συνόλων V_i τέτοια ὥστε $K \subseteq \cup_i V_i$, (δηλαδὴ γιὰ κάθε ἀνοικτὴ κάλυψη τοῦ K), ὑπάρχουν δεῖκτες $i_1, i_2, \cdots, i_n$ τέτοιοι ὥστε $K \subseteq \cup_{j=1}^n V_{i_j}$.*

Μεταξὺ συμπαγῶν καὶ κλειστῶν συνόλων ἰσχύει ἡ παρακάτω ἰδιότητα:

Θεώρημα 2.2.3.1 *Ἂν K εἶναι συμπαγὲς καὶ A κλειστὸ σύνολο ξένο πρὸς τὸ K, τότε ὑπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ὥστε*

$$\varepsilon \leq \inf\{|z - w| : \ z \in K, \ w \in A\}.$$

Ἀπόδειξη: Ἂν τοῦτο δὲν ἰσχύει, γιὰ κάθε $n = 1, 2, \cdots$, θὰ ὑπάρχουν στοιχεῖα $z_n \in K$ καὶ $w_n \in A$ τέτοια ὥστε

$$|z_n - w_n| < \frac{1}{n}.$$

Ἐπειδὴ τὸ σύνολο K εἶναι συμπαγές, ἡ ἀκολουθία (z_n) θὰ ἔχει μιὰ ὑπακολουθία (z_{k_n}), ἡ ὁποία θὰ συγκλίνει πρὸς κάποιο σημεῖο $z_0 \in K$. Τότε, ὅμως, θὰ ἰσχύει καὶ

$$|w_{k_n} - z_0| \leq |w_{k_n} - z_{k_n}| + |z_{k_n} - z_0| < \frac{1}{k_n} + |z_{k_n} - z_0| \to 0.$$

Προφανῶς, τοῦτο σημαίνει ὅτι $w_{k_n} \to z_0$. Λόγω τῆς κλειστότητας τοῦ συνόλου A, θὰ πρέπει τὸ σημεῖο z_0 νὰ ἀνήκει στὸ σύνολο A. Ἔτσι προκύπτει ὅτι $z_0 \in K \cap A$, πρᾶγμα ἄτοπο, διότι τὰ δύο σύνολα εἶναι ξένα μεταξύ τους. ■

Τὸ ἑπόμενο θεώρημα ἀναφέρεται στοὺς γενικοὺς μετρικοὺς χώρους, ἄρα ἐφαρμόζονται καὶ στὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Θεώρημα 2.2.3.2 *(Cantor) Ἔστω (K_n) μιὰ ἀκολουθία συμπαγῶν συνόλων τέτοια ὥστε:*

1) $K_{n+1} \subseteq K_n$, *γιὰ κάθε* $n = 1, 2, \cdots$, *καὶ*

2) $\lim \mathrm{diam}(K_n) = 0$.

Τότε τὸ σύνολο $\cap K_n$ *περιέχει ἀκριβῶς ἕνα στοιχεῖο*[1].

[1] Ἡ ἀπόδειξη ἔχει γίνει σὲ σχετικὰ μαθήματα τοπολογίας.

2.3 Η ΣΦΑΙΡΑ ΤΟΥ RIEMANN

2.3.1 Στερεογραφικὴ προβολὴ

Σκοπὸς μας στὸ ἐδάφιο τοῦτο εἶναι νὰ συμπαγοποιήσουμε τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο. Πρῶτα θὰ κατασκευάσουμε μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τῆς ἐπιφάνειας τῆς μοναδιαίας σφαίρας, πλὴν τοῦ βόρειου πόλου. Τότε τὸν βόρειο πόλο τὸν ἀντιστοιχίζουμε σὲ ἕνα στοιχεῖο ποὺ εἶναι ἐκτὸς τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καὶ ποὺ τὸ λέμε **κατ' εκδοχὴν σημεῖο** τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ἢ ἄπειρο. Μὲ τὴν προσθήκη τοῦ σημείου τούτου τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο συμπαγοποιεῖται.

Ἔστω $\mathbb{R}^3$ ὁ 3-διάστατος εὐκλείδειος χῶρος, ἐφοδιασμένος μὲ τὴν εὐκλείδεια ἀπόσταση.

Ἡ σφαίρα Riemann εἶναι ἡ μοναδιαία σφαῖρα S στὸν χῶρο $\mathbb{R}^3$, δηλαδὴ τὸ σύνολο

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Ταυτίζουμε τὸν ἄξονα Ox_1 μὲ τὸν πραγματικὸ ἄξονα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καὶ τὸν Ox_2 μὲ τὸν φανταστικὸ ἄξονα. Ἔτσι τὸ ὁριζόντιο ἐπίπεδο x_1Ox_2 ταυτίζεται μὲ τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο $\mathbb{C}$.

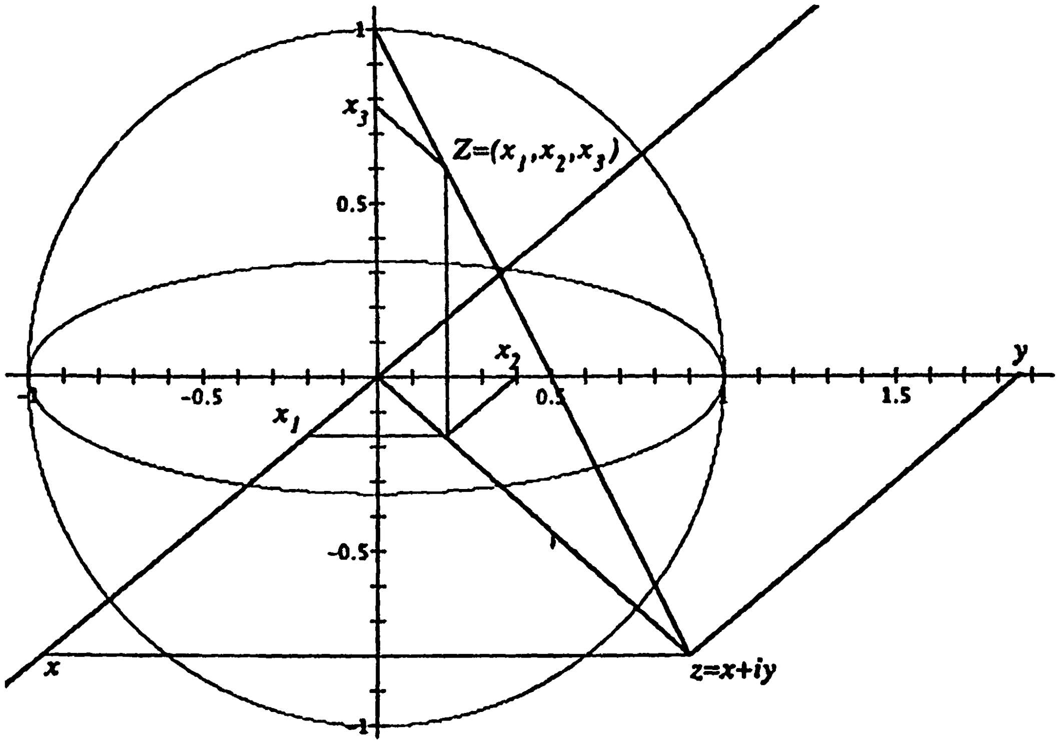
Ἔστω B ὁ βόρειος πόλος τῆς σφαίρας καὶ $z = x + iy$ ἕνα σημεῖο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ τοῦ χώρου $\mathbb{R}^3$ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸν βόρειο πόλο B καὶ τὸ σημεῖο z τέμνει τὴν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας σὲ ἕνα ἀκριβῶς σημεῖο Z. Ἔτσι, ὁρίζεται μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση

$$\Pi : S \longleftrightarrow \mathbb{C},$$

ὅπου $\Pi(Z) := z = x + iy$.

Στὴ συνέχεια, συγκρίνοντας ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα τοῦ χώρου, μποροῦμε εὔκολα νὰ δοῦμε ὅτι οἱ συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) τοῦ σημείου Z καὶ ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = x + iy$ συνδέονται μὲ τὶς σχέσεις

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{x_2} = \frac{1}{1 - x_3}.$$



Σχήμα 2.4: *Σφαίρα τοῦ Riemann.*

Ἀπὸ αὐτὲς βρίσκουμε ὅτι

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3},$$

ὁπότε προκύπτει ὅτι

$$x_1 = x(1 - x_3), \;\; x_2 = y(1 - x_3),$$

ἐνῶ ἔχουμε καὶ τὴ σχέση

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Τελικά, οἱ συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) τοῦ σημείου Z καὶ ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς z συνδέονται μὲ τὶς σχέσεις

$$x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \;\; x_2 = \frac{z - \overline{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \;\; x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \tag{2.4}$$

Μὲ τὴν ἀπεικόνιση Π, ποὺ λέγεται στερεογραφικὴ προβολή, τὸ νότιο ἡμισφαίριο ἀπεικονίζεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ μοναδιαίου κύκλου καὶ τὸ βόρειο ἡμισφαίριο ἀπεικονίζεται στὸ ἐξωτερικὸ τοῦ μοναδιαίου κύκλου.

Πρόταση 2.3.1.1 *Κάθε κύκλος πάνω στὴ σφαίρα ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὸν βόρειο πόλο ἀπεικονίζεται σὲ μιὰ εὐθεῖα γραμμὴ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ἐνῶ, κάθε κύκλος ποὺ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸν βόρειο πόλο ἀπεικονίζεται σὲ ἕναν κύκλο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου.*

Ἀπόδειξη: Ἕνας κύκλος πάνω στὴ σφαίρα εἶναι ἡ τομὴ τῆς S καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου

$$ax_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta.$$

Ἀντικαθιστῶντας τὶς σχέσεις (2.4) στὴν ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου βρίσκουμε

$$(\gamma - \delta)(x^2 + y^2) + 2ax + 2\beta y - \gamma - \delta = 0,$$

ὅπου θέσαμε $z = x + iy$. Ἡ τελευταία σχέση παριστάνει τὴν ἐξίσωση κύκλου ὅταν ἰσχύει $\gamma \neq \delta$ καὶ τὴν ἐξίσωση εὐθείας, ὅταν $\gamma = \delta$.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ πρώτη περίπτωση συμβαίνει ὅταν τὸ ἐπίπεδο δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο $(0,0,1)$ τοῦ τριδιάστατου χώρου, ἐνῶ ἡ δεύτερη περίπτωση, δηλαδή, ἡ $\gamma = \delta$, ὅταν τὸ ἐπίπεδο διέρχεται ἀπὸ τὸ $(0,0,1)$. ■

Ἐπεκτείνοντας τὴν ἔννοια τῆς προβολῆς ὁρίζουμε τὴν εἰκόνα τοῦ βορείου πόλου τῆς σφαίρας νὰ εἶναι ἕνα σημεῖο ποὺ τὸ ὀνομάζουμε **ἄπειρο**, ἢ **κατ' εξοχὴν σημεῖο** καὶ τὸ παριστάνουμε μὲ ∞.

Τὸ **ἐπεκτεταμένο** ἢ **συμπαγές** μιγαδικὸ ἐπίπεδο ὁρίζεται νὰ εἶναι τὸ σύνολο $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ὅπου γιὰ τὸ στοιχεῖο ∞ δεχόμαστε ὅτι ἐπιτρέπονται οἱ πράξεις

$$a + \infty = \infty + a = \infty \quad \text{καὶ} \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty,$$

γιὰ κάθε $a, b \in \mathbb{C}$, μὲ $b \neq 0$.

2.3.2 Χορδικὴ ἀπόσταση

Ἂν οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ z, w εἶναι οἱ ἀντίστοιχες εἰκόνες τῶν σημείων (x_1, x_2, x_3) καὶ (y_1, y_2, y_3) πάνω στὴ σφαίρα μέσω τῆς στερεογραφικῆς προβολῆς, ὁρίζουμε τὴ **χορδικὴ ἀπόσταση** $\chi(z, w)$ τούτων νὰ εἶναι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ἡ ὁποία ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα (x_1, x_2, x_3) καὶ (y_1, y_2, y_3). Δηλαδὴ ὁρίζουμε

$$\chi(z, w) := |(x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3)|.$$

Πρόταση 2.3.2.1 *Ἡ χορδικὴ ἀπόσταση δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο*

$$\chi(z, w) = \begin{cases} \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, & z, w \in \mathbb{C} \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}, & z \in \mathbb{C} \quad w = \infty. \end{cases}$$

Ἀπόδειξη: Παρατηροῦμε ὅτι ἡ χορδικὴ ἀπόσταση παίρνει τὴ μορφὴ

$$\begin{aligned} \chi(z, w) &= \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ἀλλὰ ἰσχύει

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \frac{m}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)},$$

ὅπου

$$\begin{aligned} m :&= (z + \bar{z})(w + \bar{w}) - (z - \bar{z})(w - \bar{w}) + (|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1) \\ &= zw + z\bar{w} + \bar{z}w + \bar{z}\bar{w} - zw + z\bar{w} + \bar{z}w - \bar{z}\bar{w} + z\bar{z}w\bar{w} - z\bar{z} - w\bar{w} + 1 \\ &= 2z\bar{w} + 2\bar{z}w + z\bar{z}w\bar{w} - z\bar{z} - w\bar{w} + 1 \\ &= z\bar{z}w\bar{w} + z\bar{z} + w\bar{w} + 1 + 2z\bar{w} + 2\bar{z}w - 2z\bar{z} - 2w\bar{w} \\ &= (1 + z\bar{z})(1 + w\bar{w}) - 2z(\bar{z} - \bar{w}) + 2w(\bar{z} - \bar{w}) \\ &= (1 + |z|^2)(1 + |w|^2) - 2|z - w|^2. \end{aligned}$$

Ἑπομένως, τελικά, βρίσκουμε ὅτι

$$\chi(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}}.$$

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νὰ βροῦμε καὶ ὅτι

$$\chi(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}. \ \blacksquare$$

Πρόβλημα 2.3.2.1 *Να ὑπολογιστεῖ ἡ χορδική ἀπόσταση* $\chi(1-i, 1+2i)$.

Λύση: Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$|1-i-(1+2i)| = |-3i| = 3, \quad |1-i| = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad |1+2i| = \sqrt{5},$$

ὁπότε ἔχουμε

$$\chi(1-i, 1+2i) = \frac{2.3}{\sqrt{1+2}\sqrt{1+5}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \ \blacklozenge$$

2.3.3 Τοπολογία τοῦ ἐπεκτεταμένου ἐπιπέδου

Πρόταση 2.3.3.1 *Γιὰ τὸ ἐπεκτεταμένο μιγαδικὸ ἐπίπεδο ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:*

α) Ἡ χορδικὴ ἀπόσταση ὁρίζει μιὰ μετρικὴ $\chi(\cdot,\cdot)$ *στὸ σύνολο* $\mathbb{C}_\infty$.

β) Ἡ χορδικὴ ἀπόσταση, ἄν περιοριστεῖ στὸ σύνολο $\mathbb{C}$ *εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴ μετρικὴ* d *(ποὺ εἰσάγεται μὲ τὴν ἀπόλυτη τιμὴ* $|\cdot - \cdot|$*).*

Ἀπόδειξη: α) Ἡ συνάρτηση χ εἶναι ὁ περιορισμὸς στὰ σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας τῆς μοναδιαίας σφαίρας τῆς (γνωστῆς) εὐκλείδειας μετρικῆς τοῦ 3-διάστατου χώρου $\mathbb{R}^3$. Ἑπομένως ἡ χ εἶναι μετρική.

β) Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι οἱ μετρικὲς χ καὶ d εἶναι ἰσοδύναμες, δηλαδή, θὰ ἀποδείξουμε ὅτι μιὰ ἀκολουθία (z_n) τοῦ συνόλου $\mathbb{C}$ συγκλίνει πρὸς κάποιο σημεῖο z_0 ὡς πρὸς τὴ μετρικὴ d, ἄν καὶ μόνο ἄν αὐτὴ συγκλίνει πρὸς τὸ σημεῖο z_0 ὡς πρὸς τὴ μετρικὴ χ.

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμε μιὰ ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \cdots$, ἡ ὁποία συγκλίνει πρὸς τὸ στοιχεῖο z_0, ὡς πρὸς τὴ χορδικὴ ἀπόσταση. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, γιὰ τυχόν $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει n_0 τέτοιο ὥστε νὰ ἰσχύει

$$\chi(z_n, z_0) \le \varepsilon^2,$$

γιὰ κάθε $n \geq n_0$. Μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς ε εἶναι τέτοιος ὥστε

$$\varepsilon < \frac{2}{\sqrt{1+|z_0|^2}}. \tag{2.5}$$

Ἄρα, γιὰ κάθε $n \geq n_0$, ἔχουμε

$$2|z_n - z_0| \leq \varepsilon^2 \sqrt{1+|z_n|^2}\sqrt{1+|z_0|^2}. \tag{2.6}$$

Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ ἀκολουθία (z_n) δὲν συγκλίνει πρὸς τὸ σημεῖο z_0 ὡς πρὸς τὴ μετρικὴ d τοῦ χώρου $\mathbb{C}$. Τότε ὑπάρχει ὑπακολουθία (z_{k_n}) τέτοια ὥστε

$$|z_{k_n} - z_0| \geq \varepsilon$$

γιὰ κάθε n. Ἀπὸ τὴ σχέση αὐτὴ παίρνουμε

$$\frac{4}{\varepsilon^2(1+z_0)^2} - 1 < |z_{k_n}|, \quad n \geq n_0.$$

Ἐπειδὴ ἡ σχέση (2.6) ἰσχύει καὶ γιὰ τοὺς ὅρους τῆς ὑπακολουθίας (z_{k_n}), θὰ ἔχουμε

$$2 \leq \varepsilon\sqrt{1+|z_{k_n}|^2}\sqrt{1+|z_0|^2}, \quad n \geq n_0.$$

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς ε μπορεῖ νὰ εἶναι ὁποιοσδήποτε, ἔπεται ὅτι ἡ ἀκολουθία (z_{k_n}) δὲν εἶναι φραγμένη. Συνεπῶς αὐτὴ ἔχει μιὰ ὑπακολουθία $(z_{k_{m_n}})$ τέτοια ὥστε $|z_{k_{m_n}}| \to +\infty$. Τότε, ὅμως, ἀπὸ τὴν (2.6) ἔχουμε καὶ

$$\varepsilon^2 \geq \chi(z_{k_{m_n}}, z_0) \geq \chi(\infty, z_0) - \chi(z_{k_{m_n}}, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z_0|^2}} - \frac{2}{\sqrt{1+|z_{k_{m_n}}|^2}},$$

ὁπότε μεταβαίνοντας στὸ ὅριο, παίρνουμε

$$\varepsilon^2 \geq \frac{2}{\sqrt{1+|z_0|^2}},$$

γιὰ κάθε $\varepsilon > 0$. Προφανῶς τοῦτο εἶναι ἀδύνατο, λόγω τῆς σχέσης (2.5). Ἄρα ἡ ἀκολουθία συγκλίνει καὶ ὡς πρὸς τὴ μετρικὴ d.

Ἀντίστροφα. Ἄν ἡ ἀκολουθία (z_n) συγκλίνει ὡς πρὸς d πρὸς τὸ σημεῖο z_0 τότε θὰ ἔχουμε

$$\chi(z_n, z_0) = \frac{2|z_n - z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2}\sqrt{1+|z_0|^2}} \longrightarrow \frac{0}{\sqrt{1+|z_0|^2}\sqrt{1+|z_0|^2}} = 0,$$

δηλαδὴ αὐτὴ συγκλίνει καὶ ὡς πρὸς τὴ χορδικὴ ἀπόσταση χ, γεγονός, ποὺ ἀποδεικνύει τὸ συμπέρασμα. ■

Ἀπὸ τὰ παραπάνω στοιχεῖα προκύπτει ὅτι μὲ τὴ βοήθεια τῆς χορδικῆς ἀπόστασης ὁρίζεται ἡ τοπολογία τοῦ ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Ἑπομένως, ὅλες οἱ γνωστὲς τοπολογικὲς ἔννοιες μποροῦν νὰ ἀναφέρονται στὸ σύνολο αὐτό. Γιὰ παράδειγμα, ὁ τρύπιος δίσκος $B_0(\infty, r)$ εἶναι τὸ σύνολο

$$B_0(\infty, r) := \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{ἄν } r \geq 2 \\ \{z \in \mathbb{C} : \chi(\infty, z) < r\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{\frac{4}{r^2} - 1}\}, & \text{ἄν } r < 2. \end{cases}$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ C_∞ ὡς πρὸς τὴ χορδικὴ ἀπόσταση εἶναι ἴση μὲ 2.

Σημείωση 2.3.3.1 *Ἐπειδὴ γιὰ κάθε z μὲ $|z| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ἰσχύει*

$$\frac{1}{|z|} \leq \chi(z, \infty) \leq \frac{2}{|z|},$$

ἡ σύγκλιση μιᾶς ἀκολουθίας (z_n) πρὸς τὸ ∞ μπορεῖ νὰ διατυπωθεῖ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$z_n \to \infty \Longrightarrow (\forall \varepsilon)(\exists n_0) n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{1}{|z_n|} < \varepsilon, \text{ ἤ } \frac{1}{\varepsilon} < |z_n|.$$

Μὲ τὴ χορδικὴ ἀπόσταση τὸ σύνολο $\mathbb{C}_\infty$ ἔχει τὴν ἀκόλουθη ἰδιότητα:

Θεώρημα 2.3.3.1 *Τὸ ἐπεκτεταμένο μιγαδικὸ ἐπίπεδο $\mathbb{C}_\infty$, ἄν ἐφοδιαστεῖ μὲ τὴ μετρικὴ χ καθίσταται ἕνας συμπαγὴς μετρικὸς χῶρος, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς τοπολογικὸ ὑπόχωρο τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο.*

Ἀπόδειξη: Θεωροῦμε μιὰ ἀκολουθία σημείων $z_n := x_n + iy_n$ τοῦ χώρου $\mathbb{C}_\infty$. Ἰσχυριζόμαστε ὅτι ὑπάρχει μιὰ ὑπακολουθία ἡ ὁποία συγκλίνει πρὸς κάποιο στοιχεῖο τοῦ χώρου $\mathbb{C}_\infty$.

Ὑποθέτουμε, πρῶτα, ὅτι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς εἶναι τελικὰ διαφορετικοὶ τοῦ σημείου ∞. Ὑπάρχουν δύο περιπτώσεις: Ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη, ἢ δὲν εἶναι φραγμένη.

Θεωροῦμε τὴν πρώτη περίπτωση, δηλαδὴ ὅτι εἶναι φραγμένη. Ἄρα ὑπάρχει πραγματικὸς ἀριθμὸς $M > 0$ τέτοιος ὥστε $|z_n| \leq M$, γιὰ κάθε δείκτη n. Ἐπειδὴ τὸ σύνολο $\overline{B(0, M)}$ εἶναι συμπαγές, ὑπάρχει ὑπακολουθία (z_{k_n}) ποὺ συγκλίνει πρὸς κάποιο σημεῖο $z_0 \in \mathbb{C}$. Τότε, ὅμως ἰσχύει

$$\chi(z_{k_n}, z_0) = \frac{2|z_{k_n} - z_0|}{\sqrt{1 + |z_{k_n}|^2}\sqrt{1 + |z_0|^2}} \leq 2|z_{k_n} - z_0| \longrightarrow 0,$$

δηλαδὴ στὴν περίπτωση αὐτὴ ὁ ἰσχυρισμὸς μας ἰσχύει.

Τώρα θεωροῦμε τὴ δεύτερη περίπτωση, δηλαδὴ ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄνω φρᾶγμα τῆς ἀκολουθίας. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὑπάρχει ὑπακολουθία (z_{k_n}) τέτοια ὥστε $|z_{k_n}| \to \infty$. Τότε, ὅμως, ἔχουμε καὶ ὅτι

$$\chi(z_{k_n}, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z_{k_n}|^2}} \longrightarrow 0,$$

ὁπότε ἡ ὑπακολουθία (z_{k_n}) συγκλίνει πρὸς τὸ ∞. Ἔτσι καὶ στὴν περίπτωση αὐτὴ ὁ ἰσχυρισμὸς μας ἰσχύει.

Τέλος, ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχουν ἄπειροι ὅροι z_{m_n} τῆς ἀκολουθίας (z_n), οἱ ὁποῖοι ταυτίζονται μὲ τὸ σημεῖο ∞. Τότε, ἡ σταθερὴ ἀκολουθία (z_{m_n}), ἐπίσης, θὰ συγκλίνει πρὸς τὸ σημεῖο ∞. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἀποδεικνύει πλήρως τὸν ἰσχυρισμὸ μας, δηλαδή, ὅτι τὸ ἐπεκτεταμένο μιγαδικὸ ἐπίπεδο εἶναι συμπαγὴς χῶρος.

Μένει νὰ δείξουμε ὅτι ὁ τοπολογικὸς χῶρος $\mathbb{C}_\infty$ εἶναι ἐπέκταση τοῦ τοπολογικοῦ χώρου $\mathbb{C}$. Δηλαδὴ θὰ δείξουμε ὅτι ὁ περιορισμὸς τῆς χορδικῆς ἀπόστασης πάνω στὸ σύνολο $\mathbb{C}$ ὁρίζει τὴν τοπολογία τοῦ $\mathbb{C}$ ποὺ εἰσάγεται μὲ βάση τὴν ἀπόλυτη τιμή. Τοῦτο, ὅμως, ἔχει ἀποδειχτεῖ στὴν Πρόταση 2.3.3.1. ■

2.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Μὲ χρήση τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὁρίου, νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι
$$\lim \frac{n+i}{2n-3i} = \frac{1}{2}.$$

2. Νὰ ἐξεταστεῖ ἂν συγκλίνουν οἱ ἀκολουθίες ποὺ ὁρίζονται μὲ τοὺς ἀναδρομικοὺς τύπους
$$z_{n+1} := iz_n, \; z_{n+1} := \frac{iz_n}{2}, \; z_{n+1} := inz_n, \; \text{ὅπου } z_1 := a.$$

3. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι, ἂν K εἶναι ἕνα συμπαγὲς σύνολο καὶ a ἕνα σημεῖο ἔξω ἀπὸ τὸ σύνολο K, τότε ὑπάρχει σημεῖο $b \in K$ τέτοιο ὥστε $|a-b| = \inf_{z \in K} |a-z|$.

4. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι οἱ ἀνοικτοὶ δίσκοι καὶ οἱ ἀνοικτὲς δακτυλικὲς περιοχὲς εἶναι τόποι.

5. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι τὰ σύνολα τῆς μορφῆς $E^+(a,b)$ καὶ $E^-(a,b)$ εἶναι χυρτά.

6. Νὰ βρεθεῖ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων z τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου τῶν ὁποίων ἡ χορδικὴ ἀπόσταση ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων εἶναι ἴση μὲ $|z|$.

7. Νὰ ὑπολογιστοῦν οἱ χορδικὲς ἀποστάσεις τῶν σημείων $3i$, $1+4i$, 0, $1-2i$, $1+i$, $1-5i$, $1+2i$, $-i$, $2-3i$ καὶ τοῦ στοιχείου ∞, ὅταν αὐτὰ ληφθοῦν ἀνὰ δύο.

8. Ὑποθέτουμε ὅτι μιὰ ἀκολουθία μὲ ὅρους $z_n := x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \cdots$ συγκλίνει πρὸς τὸ σημεῖο ∞. Τί μποροῦμε νὰ ποῦμε γιὰ τὴ σύγκλιση τῶν ἀκολουθιῶν (x_n) καὶ (y_n);

⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛

Κεφάλαιο 3

ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ἔστω

$$z(t) := x(t) + iy(t), \quad t \in [a, \beta]$$

μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη σὲ ἕνα κλειστὸ διάστημα $[a, \beta]$ τῆς πραγματικῆς εὐθείας καὶ μὲ τιμὲς στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο. Θὰ λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση z εἶναι **συνεχής**, ἂν οἱ δύο συναρτήσεις x, y εἶναι συνεχεῖς. Ἐπίσης, ἡ συνάρτηση z εἶναι **παραγωγίσιμη**, ἂν οἱ x, y εἶναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Γιὰ τὴν παράγωγο τῆς συνάρτησης z γράφουμε

$$z' = x' + iy'.$$

Παρόμοια, ἂν οἱ συναρτήσεις x, y εἶναι (κατὰ Riemann) ὁλοκληρώσιμες στὸ διάστημα $[a, \beta]$, τότε λέμε ὅτι καὶ ἡ z εἶναι ὁλοκληρώσιμη καὶ γράφουμε

$$\int_a^\beta z(t)dt = \int_a^\beta x(t)dt + i\int_a^\beta y(t)dt.$$

Τὸ σύνολο γ τῶν τιμῶν μιᾶς συνεχοῦς μιγαδικῆς συνάρτησης πραγματικῆς μεταβλητῆς

$$z(t) := x(t) + iy(t), \quad t \in [a, \beta]$$

ὀνομάζεται **καμπύλη** στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο καὶ ἡ συνάρτηση $z(\cdot)$ λέγεται **παραμετρικὴ παράσταση** τῆς γ. Δεχόμαστε καὶ τὴν περίπτωση κατὰ τὴν ὁποία τὸ διάστημα $[a, \beta]$ εἶναι τετριμμένο, δηλαδὴ ἰσχύει $a = \beta$. Τότε λέμε ὅτι ἡ καμπύλη εἶναι **τετριμμένη**. Ὡς συνεχὴς εἰκόνα τοῦ συμπαγοῦς καὶ συνεκτικοῦ συνόλου $[a, \beta]$ **ἡ καμπύλη εἶναι ἕνα συμπαγὲς καὶ συνεκτικὸ σύνολο.**

Ἂν t_1, t_2, εἶναι δύο σημεῖα τοῦ διαστήματος $[a, \beta]$, μὲ $t_1 < t_2$, τότε λέμε ὅτι τὸ σημεῖο $z(t_1)$ **προηγεῖται** τοῦ σημείου $z(t_2)$. Μὲ τὴ διάταξη αὐτὴ στὰ σημεῖα τῆς γ ὁρίζεται ὁ **προσανατολισμός**, ἤ ἡ **φορὰ** τῆς καμπύλης. Ἔτσι, τὸ σημεῖο $z(a) = \mathbf{a}$ εἶναι τὸ **ἀρχικὸ σημεῖο** τῆς καμπύλης καὶ τὸ $z(\beta) = \mathbf{b}$ εἶναι τὸ **τελικὸ** της σημεῖο.

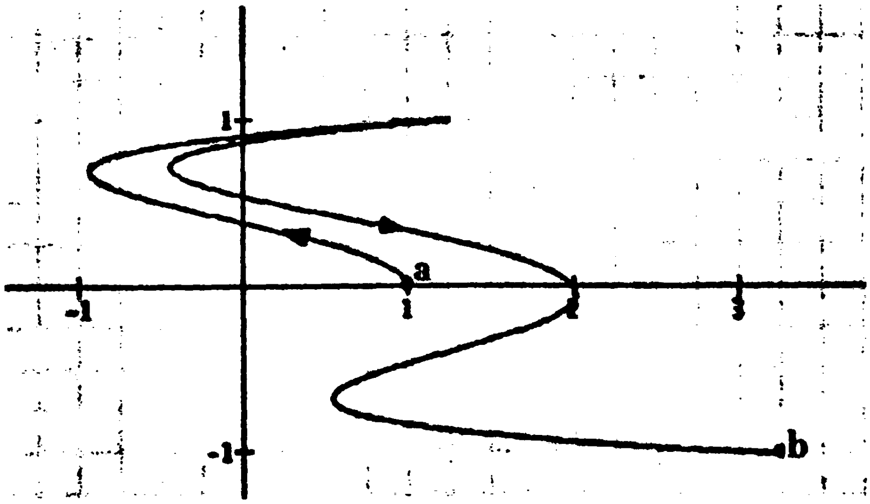
Ἑπομένως, **μιὰ καμπύλη στὸ ἐπίπεδο μὲ παραμετρικὴ παράσταση** $z(t) := x(t) + iy(t)$, $t \in [a, \beta]$ **εἶναι ἕνας μονόδρομος, δηλαδὴ ἕνας δρόμος μιᾶς κατεύθυνσης, τὸν ὁποῖο διανύουμε κατὰ τὸ χρονικὸ διάστημα** $[a, \beta]$, **μὲ τρόπο ποὺ περιγράφεται ἀπὸ τὴ συνάρτηση μὲ τύπο** $z = z(t)$.

Ἂν τὸ τελικὸ σημεῖο ταυτίζεται μὲ τὸ ἀρχικό, τότε ἡ καμπύλη εἶναι **κλειστή**. Ἂν ἡ συνάρτηση $z(t), t \in [a, \beta)$ εἶναι ἕνα - πρὸς - ἕνα, τότε ἡ καμπύλη γ εἶναι **ἁπλή**.

Κάθε κλειστὴ καμπύλη διαμερίζει τὸ ἐπεκτεταμένο μιγαδικὸ ἐπίπεδο σὲ ξένα ἀνὰ δύο συνεκτικὰ σύνολα. Τὸ συνεκτικὸ ἐκεῖνο σύνολο ποὺ περιέχει τὸ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖο ∞ εἶναι τὸ **ἐξωτερικὸ** τῆς καμπύλης καὶ παριστάνεται μὲ τὸ σύμβολο $\mathrm{ext}(\gamma)$. Τότε τὸ σύνολο

$$\mathrm{int}(\gamma) := \mathbb{C} \setminus \left[\mathrm{ext}(\gamma) \cup \gamma\right],$$

δηλαδὴ τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου $\mathrm{ext}(\gamma) \cup \gamma$ εἶναι τὸ **ἐσωτερικὸ** τῆς καμπύλης. Προφανῶς, τὸ σύνολο τοῦτο εἶναι φραγμένο.



Σχήμα 3.1: *Ἡ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση* $z(t) := t + \cos(4\pi t) + i(\sin(\pi t))$, $t \in [0, 1.5]$.

3.1.1 Κύκλος

Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ εἴδαμε παραπάνω, ὁ κύκλος εἶναι ἡ πιὸ βασικὴ ἁπλὴ καὶ κλειστὴ καμπύλη στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο. Ὁ κύκλος $K(a, r)$ μὲ κέντρο ἕνα σημεῖο a καὶ ἀκτίνα r εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὁποίων ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τὸ σημεῖο a εἶναι σταθερὴ καὶ ἴση πρὸς r. Δηλαδὴ εἶναι τὸ σύνολο

$$K(a, r) := \{z : \ |z - a| = r\}.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ σημεῖο $z - a$ εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου $K(0, r)$ μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0 καὶ ἀκτίνα r, ὁπότε τοῦτο γράφεται καὶ ὡς

$$z - a = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)),$$

ὅπου θ εἶναι τὸ ὅρισμα τοῦ $z - a$. Ἄρα κάθε σημεῖο τοῦ κύκλου ἔχει τὴ μορφὴ

$$z = a + r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)), \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Ἀντίστροφα, κάθε σημεῖο ποὺ γράφεται στὴν παραπάνω μορφή, ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση $|z - a| = r|\cos(\theta) + i\sin(\theta)| = r$, ὁπότε τὸ σημεῖο $z - a$ κεῖται πάνω στὸν κύκλο. Συνεπῶς, ἡ παραπάνω ἔκφραση δίνει ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου μὲ κέντρο τὸ σημεῖο a καὶ ἀκτίνα r.

Παρατηροῦμε ὅτι ἄν θέσουμε

$$t := \begin{cases} \theta, & \text{ἄν } \theta \in (0,\pi] \\ 2\pi+\theta, & \text{ἄν } \theta \in (-\pi,0], \end{cases}$$

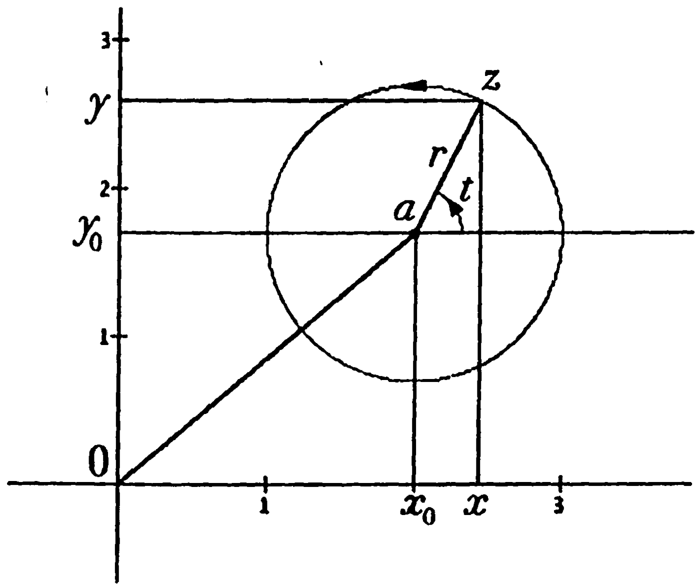
τότε ἰσχύει

$$\cos(t) = \cos(\theta) \text{ καὶ } \sin(t) = \sin(\theta).$$

Ἑπομένως κάθε σημεῖο τοῦ κύκλου $K(a,r)$ γράφεται στὴ μορφὴ

$$z = a + r(\cos(t) + i\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Συνήθως τὸ διάστημα, στὸ ὁποῖο μεταβάλλεται ἡ μεταβλητὴ t, θεωρεῖται κλειστό, δηλαδὴ παίρνουμε τὸ $[0, 2\pi]$, ἀφοῦ οἱ τιμὲς $t = 0$ καὶ $t = 2\pi$ δίνουν τὸ ἴδιο σημεῖο, τὸ $z = a + r$.



Σχήμα 3.2: *Κάθε σημεῖο $z = x + iy$ τοῦ κύκλου $K(a,r)$ γράφεται ὡς $z = a + r(\cos(t) + i\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.*

Ἡ παραπάνω παραμετρικὴ παράσταση τοῦ κύκλου μπορεῖ νὰ προκύψει καὶ ἀμέσως ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι, ὅπως δείχνεται μὲ τὸ βέλος στὸ σχῆμα, ἄν τὸ σημεῖο z εἶναι τὸ $x + iy$, τότε ἰσχύει $x = r\cos(t)$ καὶ $y = r\sin(t)$, ὅπου $t \in [0, 2\pi]$. Ἄρα ἔχουμε $z = x+iy = r(\cos(t)+i\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Ἡ φορὰ τῆς καμπύλης αὐτῆς, ὅπως φαίνεται καὶ στὸ σχῆμα, εἶναι ἡ ἀντίθετη τῆς φορᾶς τῆς κίνησης τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου. Αὐτὴ εἶναι ἡ λεγόμενη θετικὴ φορὰ τῆς καμπύλης καὶ ὁ χαρακτηρισμὸς αὐτὸς θὰ δικαιολογηθεῖ ἀργότερα. Ἕνας τρόπος γιὰ νὰ δοῦμε ἄν μιὰ ἁπλὴ κλειστὴ καμπύλη ἔχει θετικὴ φορά, εἶναι νὰ θεωρήσουμε τὴν καμπύλη ὡς μονόδρομο, ὅπου τὸ ἀριστερό μας χέρι εἶναι πρὸς τὸ ἐσωτερικὸ τῆς καμπύλης.

Πρόβλημα 3.1.1.1 *Νὰ περιγραφεῖ ἡ καμπύλη γ ποὺ ἔχει παραμετρικὴ παράσταση τὴ συνάρτηση*

$$z(t) := t + 2 + it^2, t \in [0, 1].$$

Λύση: Γιὰ κάθε $t \in [0, 1]$ ἰσχύει

$$\mathrm{Re}(z(t)) = x = t + 2, \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{Im}(z(t)) = y = t^2.$$

Ἀπ' τὴν πρώτη σχέση προκύπτει ὅτι ὅταν τὸ t μεταβάλλεται στὸ διάστημα $[0, 1]$, τότε τὸ x μεταβάλλεται στὸ διάστημα $[2, 3]$. Τώρα, μεταξύ τῶν δύο αὐτῶν σχέσεων ἀπαλείφουμε τὸ t, ὁπότε προκύπτει ἡ σχέση

$$y = (x - 2)^2,$$

ἡ ὁποία στὸ καρτεσιανὸ ἐπίπεδο παριστᾶνει μιὰ παραβολή. Ἐπομένως ἡ καμπύλη γ εἶναι τὸ τμῆμα τῆς παραβολῆς αὐτῆς ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὶς τιμὲς τοῦ $x \in [2, 3]$. ♦

Πρόβλημα 3.1.1.2 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι κάθε δακτύλιος εἶναι τόπος.*

Ἀπόδειξη: Ἔστω $\Delta(a, r_1, r_2)$ ἕνας δακτύλιος. Πρῶτα, θὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὸ σύνολο τοῦτο εἶναι ἀνοικτό, δηλαδή, ὅτι μαζί μὲ κάθε σημεῖο b τοῦ δακτυλίου ὑπάρχει δίσκος ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρο τὸ b καὶ περιέχεται στὸν δακτύλιο.

Ἔστω, λοιπὸν, b ἕνα σημεῖο τοῦ δακτυλίου. Ἄρα ἰσχύει

$$r_1 < |a-b| < r_2.$$

Θέτουμε

$$r := \min\{r_2 - |a-b|, |a-b| - r_1\}.$$

Θὰ δείξουμε ὅτι ὁ δίσκος $B(b,r)$ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ δακτυλίου. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμε ἕνα στοιχεῖο $z \in B(b,r)$, ὁπότε ἰσχύει $|b-z| < r$. Τότε ἔχουμε

$$\begin{aligned} |z-a| &= |(z-b)+(b-a)| \leq |z-b| + |b-a| \\ &< r + |b-a| \leq r_2 - |a-b| + |b-a| = r_2 \end{aligned}$$

καὶ

$$\begin{aligned} |z-a| &= |(a-b)-(z-b)| \geq |a-b| - |z-b| \\ &> |a-b| - r \geq |a-b| - |a-b| + r_1 = r_1. \end{aligned}$$

Ἑπομένως τὸ σημεῖο z ἀνήκει στὸν δακτύλιο, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι ὁ δακτύλιος εἶναι ἀνοικτὸ σύνολο.

Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι ὁ δακτύλιος εἶναι συνεκτικὸ σύνολο. Ἂν τοῦτο δὲν εἶναι συνεκτικὸ, ὑπάρχουν ἀνοικτὰ σύνολα A_1, A_2 τέτοια ὥστε

1) $A \subseteq A_1 \cup A_2$,

2) $A \cap A_1 \neq \emptyset$,

3) $A \cap A_2 \neq \emptyset$, καὶ

4) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Παίρνουμε δύο στοιχεῖα

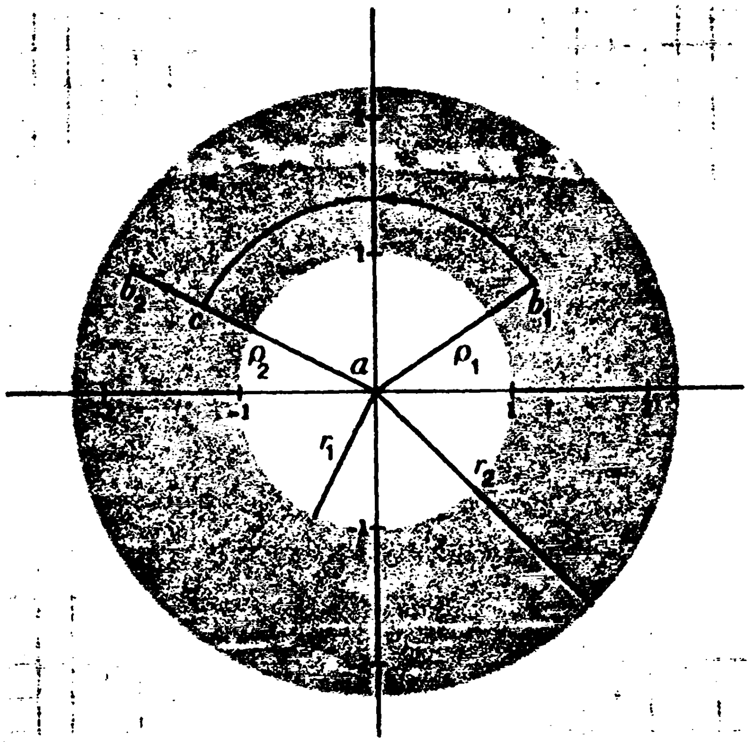
$$b_1 = a + \rho_1(\cos(t_1) + i\sin(t_1)) \in A \cap A_1$$

καὶ

$$b_2 = a + \rho_2(\cos(t_2) + i\sin(t_2)) \in A \cap A_2,$$

γιὰ τὰ ὁποῖα, προφανῶς, ἰσχύει $r_1 < \rho_1 < r_2$ καὶ $r_1 < \rho_2 < r_2$, ἐνῶ μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι $t_1 < t_2$. Ὁρίζουμε τὴ συνάρτηση

$$\varphi(t) := \begin{cases} a + \rho_1(\cos(t) + i\sin(t)), & t \in [t_1, t_2] \\ a + [(1-t+t_2)\rho_1 + (t-t_2)\rho_2](\cos(t_2) + i\sin(t_2)), & t \in (t_2, t_2+1]. \end{cases}$$



Σχήμα 3.3: *Σύνδεση δύο σημείων τοῦ δακτυλίου.*

Τὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συνάρτησης φ εἶναι τὸ συνεκτικὸ σύνολο $[t_1, t_2 + 1]$ καὶ τὸ μέτρο τῆς τιμῆς $\varphi(t) - a$ εἶναι ἴσο μὲ ρ_1, ἢ ἴσο μὲ $(1 - t + t_2)\rho_1 + (t - t_2)\rho_2$, τιμὲς ποὺ ἀνήκουν στὸ διάστημα (r_1, r_2). Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτηση φ παίρνει τιμὲς στὸν ἀρχικὸ δακτύλιο. Ἐπομένως, ἐπειδὴ αὐτὴ εἶναι συνεχής, τὸ σύνολο τιμῶν της, δηλαδὴ τὸ σύνολο $B := \varphi([t_1, t_2 + 1])$ εἶναι συνεκτικὸ ὑποσύνολο τοῦ δακτυλίου. Μάλιστα, δέ, ἰσχύει

$$B \subseteq A \subseteq A_1 \cup A_2$$

καὶ

$$\emptyset \neq \{b_1\} \subseteq B \cap A_1, \quad \emptyset \neq \{b_2\} \subseteq B \cap A_2,$$

ὅπου, ὑπενθυμίζουμε ὅτι, τὰ σύνολα A_1 καὶ A_2 εἶναι τέτοια ὥστε $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Τοῦτο εἶναι ἄτοπο, ἐπειδὴ τὸ σύνολο B εἶναι συνεκτικό. Στὸ σχῆμα φαίνεται ὁ δακτύλιος $\Delta(a, r_1, r_2)$, ὅπου τὸ σύνολο τιμῶν τῆς φ εἶναι ἡ καμπύλη ποὺ ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὸ τόξο ποὺ συνδέει τὸ σημεῖο

b_1 μὲ τὸ c καὶ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα $[cb_2]$. ♦

3.1.2 Ἀναπαραμέτρηση καμπύλης

Στὸ ἐδάφιο 3.1.1 ἀναφέραμε τὸν κύκλο, ὅπου, ἐκφράσαμε πρῶτα τὴν παράσταση τοῦ κύκλου ὡς πρὸς τὴ μεταβλητὴ θ καὶ στὴ συνέχεια τὴν ἐκφράσαμε ὡς πρὸς μιὰ νέα μεταβλητή, τὴν t. Μιὰ τέτοια διαδικασία, δηλαδὴ τὴ μετάβαση ἀπὸ μιὰ παράμετρο σὲ μιὰ ἄλλη, τὴ λέμε ἀναπαραμέτρηση τῆς καμπύλης.

Ὁρισμός 3.1.2.1 *Ἔστω γ μιὰ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z(t)$, $t \in [a, \beta]$ καὶ ἔστω $t = \psi(s)$, $s \in [a_0, \beta_0]$ μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη συνεχὴς συνάρτηση τέτοια ὥστε*

$$\psi(a_0) = a, \quad \psi(\beta_0) = \beta.$$

Τότε ἡ σύνθεση

$$w(s) := z(\psi(s)), \quad s \in [a_0, \beta_0]$$

ὁρίζει μιὰ καμπύλη γ^* ποὺ λέγεται ἀναπαραμέτρηση τῆς καμπύλης γ, ἐνῷ ἡ συνάρτηση ψ λέγεται συνάρτηση ἀναπαραμέτρησης.

Εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι κάθε συνάρτηση ψ ποὺ ὁδηγεῖ σὲ ἀναπαραμέτρηση τῆς καμπύλης, εἶναι γνήσια αὔξουσα. Ἐπίσης, ἂν μιὰ καμπύλη γ^* προκύπτει ἀπὸ ἀναπαραμέτρηση τῆς γ, τότε αὐτὲς ἔχουν τὴν ἴδια φορὰ καί, ἂν θεωρηθοῦν ὡς σημειοσύνολα, αὐτὲς ταυτίζονται.

Πρόβλημα 3.1.2.1 *Δίνεται μία καμπύλη γ μὲ παραμετρικὴ παράσταση*

$$z = z(t), \quad t \in [-1, 8].$$

Νὰ βρεθεῖ μιὰ ἀναπαραμέτρηση γ^* τῆς καμπύλης αὐτῆς μὲ παραμετρικὴ παράσταση

$$z = z^*(s), \quad s \in [1, 4].$$

Λύση: Πρέπει νὰ βροῦμε μιὰ συνεχὴ (αὔξουσα) συνάρτηση

$$t = \psi(s), \quad s \in [1, 4].$$

ἡ ὁποία θὰ ἀπεικονίζει ἀμφιμονοσήμαντα τὸ διάστημα $[1,4]$ ἐπὶ τοῦ διαστήματος $[-1,8]$, κατὰ τέτοιον τρόπο ὥστε $\psi(1)=-1$ καὶ $\psi(4)=8$. Τότε ἡ συνάρτηση

$$z = z(\psi(s)) = z^*(s), s \in [1,4]$$

θὰ εἶναι μία τέτοια ἀναπαραμέτρηση.

Πρὸς τοῦτο μποροῦμε νὰ ἀκολουθήσουμε πολλοὺς τρόπους.

1ος τρόπος: Θέτουμε

$$t := \mu s + \nu$$

καὶ προσπαθοῦμε ἀπό τὰ δεδομένα νὰ προσδιορίσουμε τοὺς συντελεστὲς μ καὶ ν. Πραγματικά, ἔχουμε τὶς δύο ἐξισώσεις

$$-1 = 1\mu + \nu \text{ καὶ } 8 = 4\mu + \nu.$$

Ἐπιλύοντας ὡς πρὸς μ και ν τὸ σύστημα αὐτό, βρίσκουμε $\mu = 3$ και $\nu = -4$. Ἄρα ἡ ζητούμενη συνάρτηση ψ ἔχει τύπο

$$\psi(s) := t = 3s - 4, \quad s \in [1,4].$$

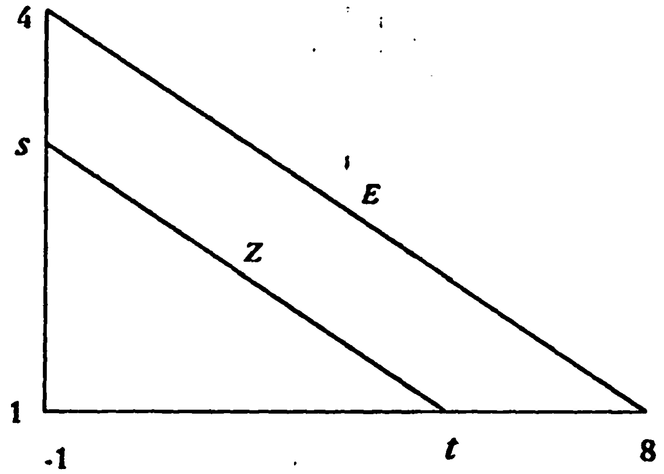
2ος τρόπος: Ἐργαζόμαστε ὅπως ἀκριβῶς καὶ στὸ ἐδάφιο 1.3. Δηλαδή, γράφουμε δύο παράλληλα ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα ε_1 καὶ ε_2 ὅπου στὸ πρῶτο ἀπεικονίζουμε τὸ διάστημα $[1,4]$ καὶ στὸ ἄλλο τὸ $[-1,8]$. Ἑνώνοντας τὰ ἀντίστοιχα ἄκρα βρίσκουμε τὸ σημεῖο τομῆς O, τὸ ὁποῖο θεωροῦμε ὡς τὸ κέντρο προβολῆς τοῦ $[1,4]$ ἐπὶ τοῦ $[-1,8]$. Ἔτσι ἑνώνουμε τὸ τυχόν σημεῖο s τοῦ $[1,4]$ μὲ τὴν κορυφὴ O καὶ προεκτείνουμε τὴν ἀντίστοιχη εὐθεία. Αὐτὴ τέμνει τὸ τμῆμα $[-1,8]$ στὸ σημεῖο t. Ἀπὸ τὴν ἀναλογία τῶν τμημάτων ποὺ σχηματίζονται, ἔχουμε

$$\frac{t-(-1)}{s-1} = \frac{8-(-1)}{4-1},$$

ὁπότε προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτηση $t=\psi(s)$ ἔχει τύπο ὅπως αὐτὸς βρέθηκε μὲ τὸν 1ο τρόπο.

3ος τρόπος: Ἀπεικονίζουμε τὰ δύο διαστήματα πάνω σὲ δύο ἄξονες ποὺ τέμνονται κάθετα καὶ ταυτίζουμε τὰ ἀρχικὰ ἄκρα -1 καὶ 1 τῶν δύο διαστημάτων μὲ τὴν τομὴ τῶν δύο ἀξόνων. Ἑνώνουμε τὰ ἄκρα 8 καὶ

4 μὲ μιὰ εὐθεῖα γραμμὴ E καὶ στὴ συνέχεια ἀπὸ κάθε σημεῖο s τοῦ διαστήματος $[1,4]$ φέρουμε εὐθεῖα γραμμὴ Z παράλληλη πρὸς τὴν E. Ἡ Z τέμνει τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα $[-1,8]$ σὲ ἕνα σημεῖο t. Ἀπὸ τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα, ποὺ σχηματίζονται, μποροῦμε ἀμέσως νὰ πάρουμε τὴν ἴδια ἀναλογία ὅπως καὶ στὴν πρώτη περίπτωση καὶ ἄρα καὶ τὴν ἴδια συνάρτηση ψ.

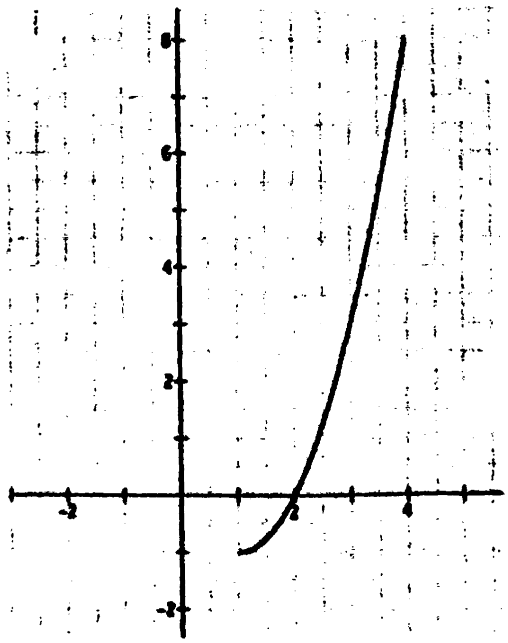


Σχῆμα 3.4: *Γραμμικὴ μετάβαση ἀπὸ τὴν παράμετρο t στὴν παράμετρο s.*

4ος τρόπος: Μὲ τὶς παραπάνω μεθόδους βρίσκουμε συναρτήσεις ψ ποὺ εἶναι γραμμικές. Μποροῦμε ὅμως νὰ ἀκολουθήσουμε καθαρὰ ἀναλυτικὸ τρόπο καὶ νὰ ἀναζητήσουμε μὴ γραμμικὲς τέτοιες συναρτήσεις. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμε τὸ καρτεσιανὸ ἐπίπεδο στὸ ὁποῖο ἀπεικονίζουμε τὰ διαστήματα $[1,4]$ καὶ $[-1,8]$.

Ἐπειδὴ ἀναζητοῦμε συνεχὴ ἀναπαραμέτρηση τῆς καμπύλης, ἀναγκαστικὰ θὰ πρέπει νὰ κατασκευάσουμε μιὰ συνεχὴ ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση ψ τοῦ διαστήματος $[1,4]$ ἐπί τοῦ διαστήματος $[-1,8]$. Ἄρα θὰ πρέπει νὰ θεωρήσουμε μιὰ συνεχὴ καὶ γνήσια αὔξουσα συνάρτηση. Γιὰ παράδειγμα, ἡ συνάρτηση

$$t = \psi(s) := s^2 - 2s, \quad s \in [1,4],$$



Σχήμα 3.5: *Μὴ γραμμικὴ μετάβαση ἀπὸ τὴν παράμετρο t στὴν παράμετρο s.*

προφανῶς, ἔχει τὶς ἰδιότητες ποὺ θέλουμε. ♦

Ὁρισμός 3.1.2.2 *Μιὰ καμπύλη γ μὲ παραμετρικὴ παράσταση*

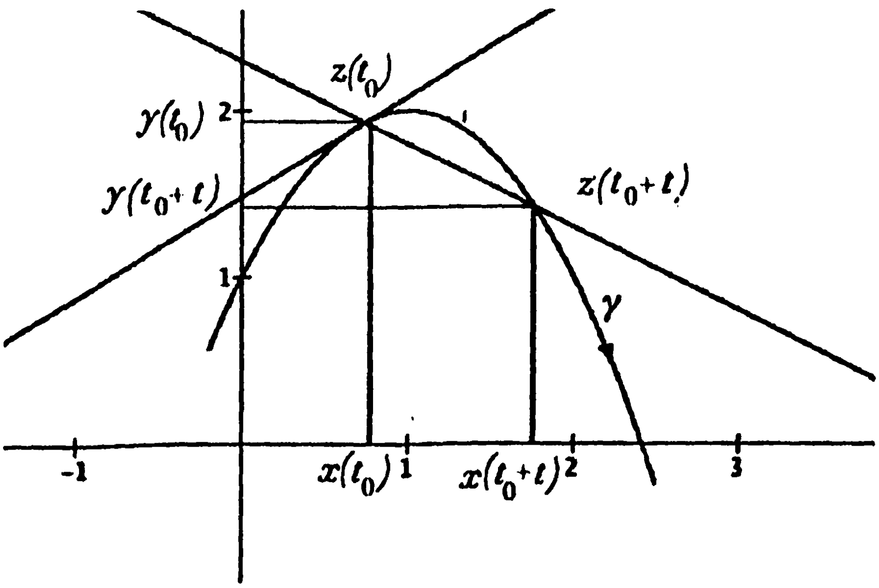
$$z(t) := x(t) + iy(t), \quad t \in [a, \beta].$$

εἶναι διαφορίσιμη σὲ ἕνα σημεῖο $w = z(t_0)$, ὅπου $t_0 \in [a, \beta]$, ἂν οἱ συναρτήσεις x καὶ y εἶναι παραγωγίσιμες καὶ ἔχουν συνεχεῖς παραγώγους στὸ σημεῖο t_0. Ἂν ἡ καμπύλη γ εἶναι διαφορίσιμη σὲ ὅλα τὰ σημεῖα της, λέμε ὅτι εἶναι διαφορίσιμη.

Ἡ διαφορισιμότητα τῶν συναρτήσεων x καὶ y ἔχει πολὺ στενὴ σχέση μὲ τὴν ὕπαρξη ἐφαπτόμενης εὐθείας στὴν καμπύλη. Πραγματικά, ὑποθέτουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις x, y εἶναι διαφορίσιμες σὲ ἕνα σημεῖο t_0 καὶ θεωροῦμε τὰ σημεῖα $z(t_0)$ καὶ $z(t_0 + t)$ τῆς καμπύλης γ, ὅπου t εἶναι ἀρκετὰ μικρό, τέτοιο ὥστε τὸ σημεῖο $t_0 + t$ νὰ ἀνήκει στὸ διάστημα $[a, \beta]$. Τὰ σημεῖα $z(t_0)$ καὶ $z(t_0 + t)$ ὁρίζουν μιὰ χορδή, τῆς ὁποίας ἡ κλίση εἶναι ἴση πρὸς

$$\frac{y(t_0+t)-y(t_0)}{x(t_0+t)-x(t_0)} = \frac{\frac{y(t_0+t)-y(t_0)}{t}}{\frac{x(t_0+t)-x(t_0)}{t}}.$$

Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι τὸ σημεῖο $z(t_0+t)$ μετακινεῖται καὶ προσεγγίζει τὸ σημεῖο $z(t_0)$, τότε ὁριακὰ ἡ χορδὴ θὰ λάβει τὴ θέση τῆς εὐθείας ποὺ ἐφάπτεται τῆς καμπύλης στὸ σημεῖο $z(t_0)$. Βλέπε σχῆμα. Σὲ μιὰ τέτοια διαδικασία ἡ μεταβλητὴ t παίρνει τὴν ὁριακὴ τιμὴ 0. Ἔτσι, ἡ κλίση τῆς



Σχῆμα 3.6: *Τὸ ὅρισμα τοῦ $z'(t_0)$ εἶναι ἡ κλίση τῆς ἐφαπτόμενης εὐθείας στὸ σημεῖο $z(t_0)$.*

χορδῆς θὰ λάβει τὴν ὁριακὴ τιμὴ

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{y(t_0+t)-y(t_0)}{t}}{\frac{x(t_0+t)-x(t_0)}{t}} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}, \tag{3.1}$$

ποὺ παριστᾶνει τὴν κλίση τῆς ἐφαπτόμενης εὐθείας.

Παράδειγμα 3.1.1 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση*

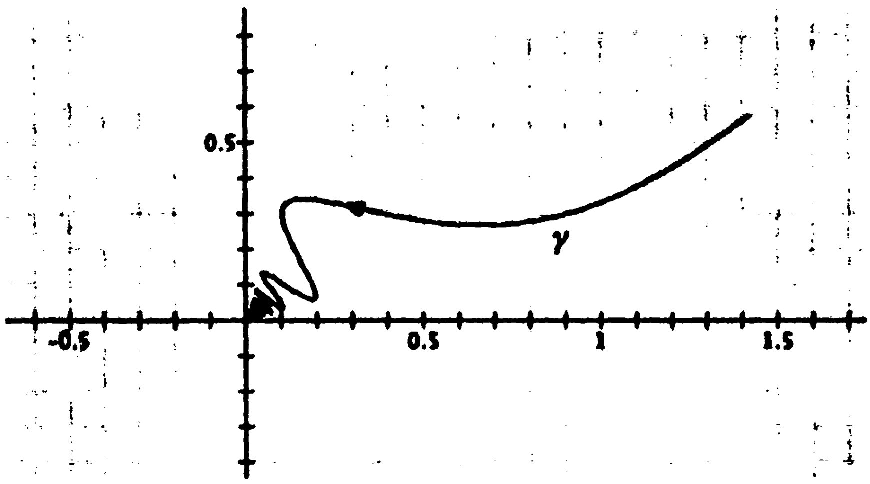
$$z(t) := t + \frac{t}{2}\sin(\frac{1}{t}) + i\big(t - \frac{t}{2}\sin(\frac{1}{t})\big), \quad t \in [0,1],$$

δὲν εἶναι διαφορίσιμη.

Ἀπόδειξη: Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συνάρτησης $z = z(t)$, $t \in [0,1]$ δὲν ἔχει ὅριο στὸ σημεῖο $t = 0$, ὁπότε ἡ z' δὲν εἶναι συνεχής. Πραγματικά, παρατηροῦμε ὅτι, γιὰ κάθε $n = 1, 2, \cdots$, ἰσχύει

$$z'\left(\frac{1}{2n\pi \pm (\frac{\pi}{2})}\right) = 1 \pm \frac{1}{2} + i\left(-1 \pm \frac{1}{2}\right). \ \blacklozenge$$

Στὸ σχῆμα φαίνεται ἡ συμπεριφορὰ τῆς συνάρτησης αὐτῆς, ὅπου κοντὰ



Σχήμα 3.7: *Ἡ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση* $z(t) := t + \frac{t}{2}\sin(\frac{1}{t}) + i\left(t - \frac{t}{2}\sin(\frac{1}{t})\right)$, $t \in [0,1]$, *δὲν εἶναι διαφορίσιμη στὸ σημεῖο* 0.

στὸ σημεῖο 0 ἡ καμπύλη ἔχει ταλαντώσεις τέτοιες ὥστε στὸ σημεῖο 0 νὰ μὴν ὑπάρχει ἐφαπτόμενη εὐθεῖα.

3.1.3 Λεία καμπύλη

Εἶναι φανερὸ ὅτι γιὰ νὰ ἐξασφαλίσουμε τὴν ὕπαρξη τῆς ἐφαπτόμενης εὐθείας $z(t) := x(t) + iy(t)$, $t \in [a, \beta]$, δὲν θέλουμε μόνο νὰ γνωρίζουμε τὴν ὕπαρξη τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων x, y, ἀλλὰ καὶ τὴν ὕπαρξη τῆς ὁριακῆς τιμῆς τοῦ πηλίκου διαφορῶν, τοῦ ἀριστεροῦ μέρους τῆς σχέσης

(3.1). Καὶ ἂν μὲν ὁ ἕνας τουλάχιστον ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $y'(t_0)/x'(t_0)$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, τότε τὸ κλᾶσμα αὐτὸ ἔχει ὁριακὴ τιμή, ὅμως, ὅταν καὶ οἱ δύο ὅροι εἶναι μηδέν, τότε δημιουργεῖται πρόβλημα. Ἔτσι, γιὰ νὰ εἴμαστε βέβαιοι ὅτι ὑπάρχει ἡ ἐφαπτόμενη εὐθεῖα σὲ κάθε σημεῖο τῆς καμπύλης, ἀπαιτοῦμε ἡ καμπύλη νὰ εἶναι **λεία**, μὲ τὴν ἑξῆς ἔννοια:

Ὁρισμός 3.1.3.1 *Ἡ καμπύλη γ εἶναι* **λεία σὲ ἕνα σημεῖο** $w = z(t_0)$ **ὅπου** $t_0 \in [\alpha, \beta]$, *ἂν αὐτὴ εἶναι διαφορίσιμη στὸ $z(t_0)$ καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύει ὅτι*

$$|z'(t_0)| = |x'(t_0) + iy'(t_0)| \neq 0.$$

Ἡ καμπύλη γ εἶναι λεία, ἂν αὐτὴ εἶναι λεία σὲ κάθε σημεῖο της.

Ἂν ἡ καμπύλη εἶναι λεία σὲ ἕνα σημεῖο $z(t_0)$, τότε ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z'(t_0)$ δὲν εἶναι μηδὲν καὶ ἡ καμπύλη ἔχει ἐφαπτόμενη εὐθεῖα γραμμὴ στὸ σημεῖο $z(t_0)$. Ἡ εὐθεῖα αὐτή, προφανῶς, εἶναι ἡ

$$E(z(t_0), z'(t_0)),$$

ἀφοῦ ἡ κλίση της εἶναι ἴση μὲ $\operatorname{Arg}(z'(t_0))$. Ἂν, ὅμως, ἰσχύει $z'(t_0) = 0$, τότε ἴσως νὰ μὴν ὑπάρχει ἐφαπτόμενη εὐθεῖα στὸ σημεῖο $z(t_0)$.

Παράδειγμα 3.1.2 *Ἡ καμπύλη μὲ παράσταση*

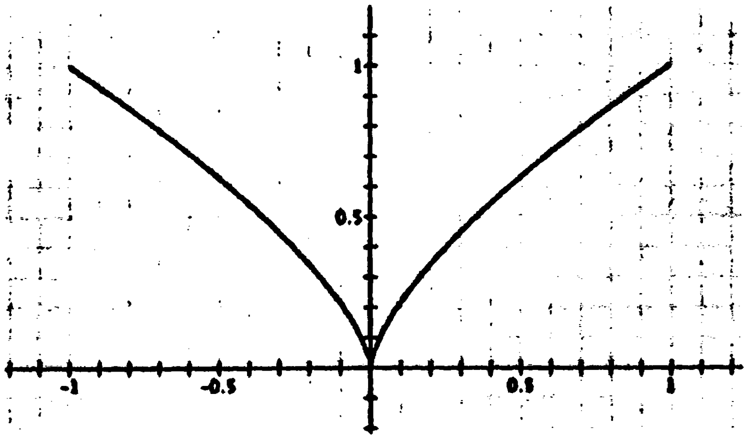
$$z(t) := t^3 + it^2, \quad t \in [-1, 1],$$

δὲν εἶναι λεία.

Ἀπόδειξη: Ἀρχικὰ παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση ἔχει παράγωγο τέτοια ὥστε $z'(0) = 0$. Γιὰ νὰ δοῦμε τὴ συμπεριφορά της στὸ σημεῖο 0, θέτουμε $x := t^3$ καὶ $y := t^2$ καὶ ἀπαλείφουμε τὴ μεταβλητὴ t μεταξὺ τῶν δύο παραστάσεων. Τότε προκύπτει ἡ σχέση

$$y = \frac{x^2}{3}, \quad y \in [-1, 1].$$

Προφανῶς, ἡ συνάρτηση αὐτὴ στὸ σημεῖο 0 δὲν ἔχει ἐφαπτόμενη εὐθεῖα, παρὰ μόνο ἐφαπτόμενη ἡμιευθεῖα, τὸν ἡμιάξονα $0y$. ♦



Σχήμα 3.8: *Μιὰ καμπύλη ποὺ δὲν εἶναι λεία στὸ σημεῖο 0.*

3.1.4 Διαμέριση καμπύλης. Πρόσθεση καμπυλῶν

Ὁρισμός 3.1.4.1 *Μιὰ καμπύλη γ μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z = z(t)$, $t \in [a, \beta]$ λέμε ὅτι εἶναι* **κατὰ τμήματα διαφορίσιμη**, *ὅταν ὑπάρχει μιὰ διαμέριση*

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = \beta$$

τοῦ διαστήματος $[a, \beta]$, τέτοια ὥστε

1) ἡ συνάρτηση $z(\cdot)$ εἶναι διαφορίσιμη σὲ κάθε διάστημα (t_j, t_{j+1}), $j = 0, 1, 2, \cdots, k-1$, καὶ ἔχει συνεχὴ παράγωγο στὰ διαστήματα αὐτά, καὶ

2) τὰ ὅρια

$$\lim_{t \to t_j + 0} z(t) \text{ καὶ } \lim_{t \to t_{j+1} - 0} z(t)$$

νὰ ὑπάρχουν, ὡς μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

Ἑπομένως, ἂν γ_j εἶναι ἡ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z = z(t)$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$, τότε ἡ γ γράφεται ὡς

$$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k.$$

Στὸν παραπάνω ὁρισμὸ ἐννοεῖται ὅτι στὸ ἄκρο $a = t_0$ ὑπάρχει τὸ δεξιὸ ὅριο καὶ στὸ ἄκρο $\beta = t_k$ ὑπάρχει τὸ ἀριστερὸ ὅριο τῆς z'. Μὲ ἄλλα λόγια, ἡ καμπύλη γ εἶναι κατὰ τμήματα διαφορίσιμη, ἄν μπορεῖ νὰ διαμεριστεῖ καὶ νὰ γραφεῖ ὡς τὸ ἄθροισμα ἑνὸς πεπερασμένου πλήθους διαφορίσιμων καμπυλῶν.

Διαφορίσιμη ἀναπαραμέτρηση τῆς καμπύλης γ εἶναι μιὰ ἀναπαραμέτρηση τῆς γ γιὰ τὴν ὁποία ἡ ἀντίστοιχη συνάρτηση ἀναπαραμέτρησης ψ εἶναι παραγωγίσιμη καὶ ἔχει συνεχῆ παράγωγο. Ἀνάλογα πρὸς τὸν ὁρισμὸ τῆς κατὰ τμήματα διαφορίσιμης καμπύλης, ὁρίζεται καὶ ἡ **κατὰ τμήματα διαφορίσιμη ἀναπαραμέτρηση**. **Στὰ ἑπόμενα θὰ θεωροῦμε πάντοτε ὅτι οἱ ἀναπαραμετρήσεις καμπυλῶν εἶναι τουλάχιστον κατὰ τμήματα διαφορίσιμες.**

Θεωροῦμε δύο καμπῦλες γ_1 καὶ γ_2 μὲ παραμετρικὲς παραστάσεις $z_1(t), t \in [a_1, \beta_1]$ καὶ $z_2(t), t \in [a_2, \beta_2]$, ἀντίστοιχα, τέτοιες ὥστε

$$z_1(\beta_1) = z_2(a_2).$$

Τότε ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$z(t) := \begin{cases} z_1(t), & t \in [a_1, \beta_1] \\ z_2(t - \beta_1 + a_2), & t \in [\beta_1, \beta_1 + \beta_2 - a_2] \end{cases}$$

ἔχει σύνολο τιμῶν τὴν ἕνωση $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Τὸ σύνολο τοῦτο, ἔστω γ, τὸ λέμε **ἄθροισμα** τῶν δύο καμπυλῶν, καὶ γράφουμε

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2.$$

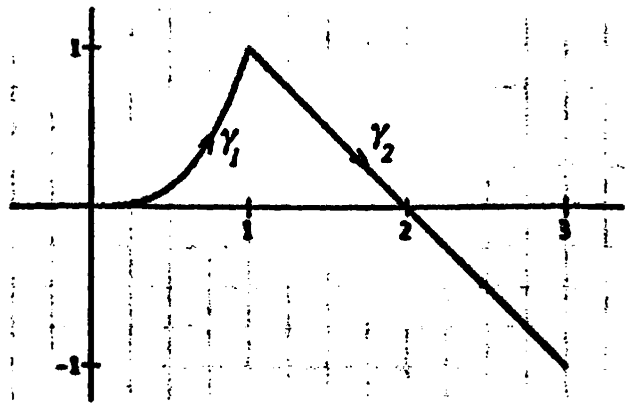
Τὸ ἀρχικὸ σημεῖο τῆς καμπύλης γ εἶναι τὸ ἀρχικὸ σημεῖο τῆς γ_1 καὶ τὸ τελικὸ σημεῖο τῆς γ εἶναι τὸ τελικὸ σημεῖο τῆς γ_2.

Πρόβλημα 3.1.4.1 *Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν καμπυλῶν γ_1 καὶ γ_2 μὲ ἀντίστοιχες παραμετρικὲς παραστάσεις*

$$z_1 := \frac{1+i}{2}t - 2 - i, \quad t \in [2, 4]$$

καὶ

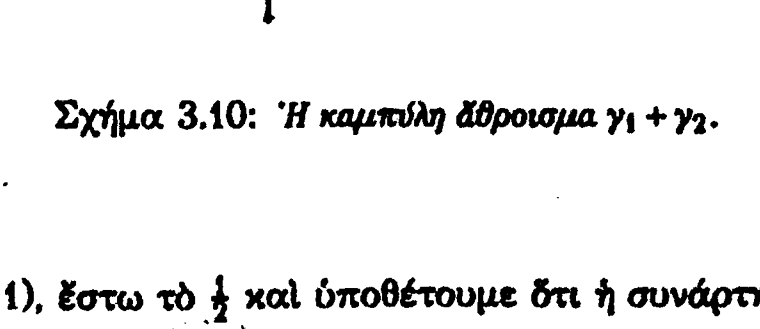
$$z_2 := \frac{t}{3}(2 - i) + \frac{2}{3}(1 + i), \quad t \in [-1, 2].$$



Σχήμα 3.9: *Ἡ καμπύλη ἄθροισμα $\gamma_1 + \gamma_2$.*

Λύση: Κατ' ἀρχὰς παρατηροῦμε ὅτι, τὸ τελικὸ σημεῖο $z_1(4) = i$ τῆς καμπύλης γ_1 ταυτίζεται μὲ τὸ ἀρχικὸ σημεῖο $z_2(-1)$ τῆς γ_2. Ἄρα οἱ δύο καμπῦλες προστίθενται καὶ θὰ ἀναζητήσουμε τὸ ἄθροισμα $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ τῶν δύο καμπυλῶν.

Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ ζητούμενη καμπύλη γ ἔχει παραμετρικὴ παράσταση $z(\cdot)$ ὁρισμένη στὸ διάστημα $[0, 1]$. Παίρνουμε ἕνα σημεῖο τοῦ δια-



Σχήμα 3.10: *Ἡ καμπύλη ἄθροισμα $\gamma_1 + \gamma_2$.*

στήματος $(0, 1)$, ἔστω τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ ὑποθέτουμε ὅτι ἡ συνάρτηση

$$z_1^*(s) = z_1(t(s)), \quad s \in [0, \frac{1}{2}],$$

ὅπου
$$t(s) := 4s + 2, \quad s \in [0, \frac{1}{2}],$$
εἶναι μία ἀναπαραμέτρηση τῆς γ_1. Ἐπίσης, ἡ συνάρτηση
$$z_2^*(s) = z_2(t(s)), \quad s \in [\frac{1}{2}, 1],$$
ὅπου
$$t(s) := \frac{6s-4}{3}, \quad s \in [1/2, 1]$$
εἶναι μία ἀναπαραμέτρηση τῆς γ_2. Πρὸς τοῦτο, μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε ἕναν ἀπὸ τοὺς τρόπους ποὺ εἴδαμε στὸ παράδειγμα 3.1.2.1.

Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καμπυλῶν εἶναι ἡ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση
$$z^*(s) = \begin{cases} 2(1+i)s - 1, & \text{ἄν } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(2-i)s - 2(1-i), & \text{ἄν } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad \blacklozenge$$

Ἄν γ εἶναι μιὰ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z = z(t)$, $t \in [a, \beta]$, τότε τὸ σύμβολο $-\gamma$ παριστάνει τὴν ἴδια καμπύλη, ἀλλὰ μὲ τὴν ἀντίθετη φορά. Προφανῶς, μιὰ παραμετρικὴ παράσταση τῆς $-\gamma$, εἶναι ἡ συνάρτηση
$$w(t) = z(-t + 2\beta), \quad t \in [\beta, 2\beta - a],$$
ἐνῶ τὸ ἄθροισμα
$$\gamma + (-\gamma) = \gamma - \gamma$$
εἶναι ἡ τετριμμένη καμπύλη ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα σημεῖο, τὸ $z(a)$.

3.1.5 Μῆκος καμπύλης

Τὸ μῆκος $\mu(\gamma)$ μιᾶς κατὰ τμήματα διαφορίσιμης καμπύλης γ μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z(t)$, $t \in [a, \beta]$ εἶναι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς
$$\mu(\gamma) := \int_\gamma |dz| = \int_a^\beta |z'(t)| dt = \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Λόγω τῆς συνέχειας τῶν παραγώγων x', y' τὸ μῆκος μιᾶς καμπύλης εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός.

Πρόταση 3.1.5.1 *Τὸ μῆκος μιᾶς καμπύλης εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὴν παραμετρικὴ παράσταση τῆς καμπύλης.*

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε, πρῶτα, ὅτι ἡ καμπύλη γ εἶναι διαφορίσιμη καὶ

$$z(t), \quad t \in [a, \beta]$$

εἶναι μιὰ παραμετρικὴ παράσταση. Ἔστω

$$t = t(s), \quad s \in [a', \beta']$$

μιὰ αὔξουσα διαφορίσιμη συνάρτηση μὲ συνεχὴ παράγωγο τέτοια ὥστε

$$t(a') = a \text{ καὶ } t(\beta') = \beta.$$

Τότε συνάρτηση

$$z_1(s) := z(t(s)), \quad s \in [a', \beta']$$

εἶναι μιὰ διαφορίσιμη ἀναπαραμέτρηση τῆς καμπύλης. Μάλιστα, δέ, ἔχουμε

$$\int_a^\beta |z'(t)|dt = \int_{a'}^{\beta'} |z'(t(s))||t'(s)ds = \int_{a'}^{\beta'} \left|\frac{dz \circ t}{ds}\right|ds = \int_{a'}^{\beta'} |z_1'(s)|ds,$$

πρᾶγμα ποὺ ἀποδεικνύει τὴν πρόταση. Ἂν ἡ καμπύλη εἶναι κατὰ τμήματα διαφορίσμη, τὸ συμπέρασμα ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύει ἀφοῦ κάθε διαφορίσιμο τμῆμα τῆς καμπύλης εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὴν παραμετρικὴ του παράσταση. ■

3.1.6 Ἀλυσίδες καμπυλῶν

Γενικότερα, ἂν $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ εἶναι κατὰ τμήματα διαφορίσιμες καμπῦλες στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο, τὸ σύνολο

$$C := \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$$

ὀνομάζεται ἀλυσίδα. Τὸ σύνολο τοῦτο τὸ παριστάνουμε καὶ ὡς

$$C = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$$

καὶ λέμε ὅτι ἡ C εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν καμπυλῶν τούτων.

Στὸ σύνολο τῶν ἁλυσίδων ὁρίζουμε τὴν πράξη

$$C := C_1 + C_2,$$

νὰ εἶναι ἡ ἕνωση τῶν στοιχείων τῶν ἁλυσίδων C_1 καὶ C_2. Ἡ πράξη τῆς πρόσθεσης ἁλυσίδων ἔχει τὶς ἰδιότητες τῆς πρόσθεσης, δηλαδή,

- αὐτὴ εἶναι προσεταιριστικὴ καὶ ἀντιμεταθετική,
- ἔχει οὐδέτερο στοιχεῖο τὴν τετριμμένη ἁλυσίδα (δηλαδὴ μιὰ ἁλυσίδα ποὺ οἱ καμπῦλες της ἐκφυλίζονται σὲ σημεῖα) καὶ
- μαζὶ μὲ κάθε ἁλυσίδα C ὑπάρχει ἡ ἀντίθετὴ της, ἡ $-C$, δηλαδὴ αὐτὴ ποὺ ἔχει μέλη τὶς ἀντίθετες καμπῦλες τῆς C.

3.2 ΟΜΟΤΟΠΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

Θεωροῦμε δύο κατὰ τμήματα διαφορίσιμες ἁπλὲς κλειστὲς καμπῦλες γ_0 καὶ γ_1 σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$ μὲ παραμετρικὲς παραστάσεις $z_0(t)$, $t \in [a, \beta]$ καὶ $z_1(t)$, $t \in [a, \beta]$, ἀντίστοιχα. Τονίζουμε ὅτι καὶ οἱ δύο συναρτήσεις z_0 καὶ z_1 ὁρίζονται πάνω στὸ ἴδιο διάστημα $[a, \beta]$.

Ἡ καμπύλη γ_0 λέμε ὅτι εἶναι **ὁμοτοπικὴ** τῆς καμπύλης γ_1 στὸν τόπο $\mathcal{T}$, ὅταν ἡ γ_0 μπορεῖ νὰ μετακινηθεῖ, συρρόμενη κατὰ συνεχὴ τρόπο στὸν τόπο, ὥστε νὰ ἔλθει καὶ νὰ ταυτιστεῖ μὲ τὴν καμπύλη γ_1. Ἐπὶ πλέον, θὰ πρέπει ἡ καμπύλη, ὅταν μετακινεῖται, νὰ παραμένει ἁπλὴ καὶ κλειστὴ μέσα στὸν τόπο.

Ὁ μαθηματικὸς ὁρισμὸς τῆς ὁμοτοπίας εἶναι ὁ ἑξῆς:

Ὁρισμός 3.2.0.1 *Ἡ ἁπλὴ κλειστὴ καμπύλη γ_0 εἶναι* **ὁμοτοπικὴ** *τῆς ἁπλῆς κλειστῆς καμπύλης γ_1 στὸν τόπο $\mathcal{T}$, πρᾶγμα ποὺ θὰ παριστάνουμε ὡς*

$$\gamma_0 \sim \gamma_1,$$

ἂν ὑπάρχει μιὰ συνάρτηση

$$H : [a, \beta] \times [0, 1] \to \mathcal{T}$$

ἡ ὁποία ἔχει τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:

1. *Ἡ $H(\cdot,\cdot)$ εἶναι συνεχὴς ὡς πρὸς τὶς δύο μεταβλητές.*

2. *Ἰσχύει $H(t,0) = z_0(t)$ καὶ $H(t,1) = z_1(t)$, γιὰ κάθε $t \in [a,\beta]$.*

3. *Γιὰ κάθε $s \in [0,1]$ ἡ συνάρτηση $z(t) := H(t,s)$, $t \in [a,\beta]$ εἶναι ἡ παραμετρικὴ παράσταση μιᾶς κατὰ τμήματα διαφορίσιμης ἁπλῆς κλειστῆς καμπύλης στὸν τόπο $\mathcal{T}$.*

Ἡ συνάρτηση H λέγεται συνάρτηση ὁμοτοπίας.

Παραδείγματα γιὰ τὴν κατανόηση τῆς ἔννοιας ὁμοτοπικῶν καμπυλῶν δίνονται στὰ παρακάτω σχήματα.

Στὸ πρῶτο σχῆμα δίνεται ὁ τόπος ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{1.8} < 3.5,$$

δηλαδὴ τὸ ἐσωτερικὸ μιᾶς ἔλλειψης. Στὸν τόπο αὐτὸ ἡ ἐσωτερικὴ ἀστροειδὴς καμπύλη ποὺ ἔχει παραμετρικὴ παράσταση τὴ συνάρτηση

$$z_1(t) = [(\cos(4t))^6 + \frac{1}{2}(\sin(4t))^6][2\cos t + i\sin t], \quad t \in [0,2\pi]$$

εἶναι ὁμοτοπικὴ πρὸς τὴν ἐξωτερικὴ καμπύλη, ποὺ εἶναι ἡ ἔλλειψη μὲ παραμετρικὴ παράσταση τὴν

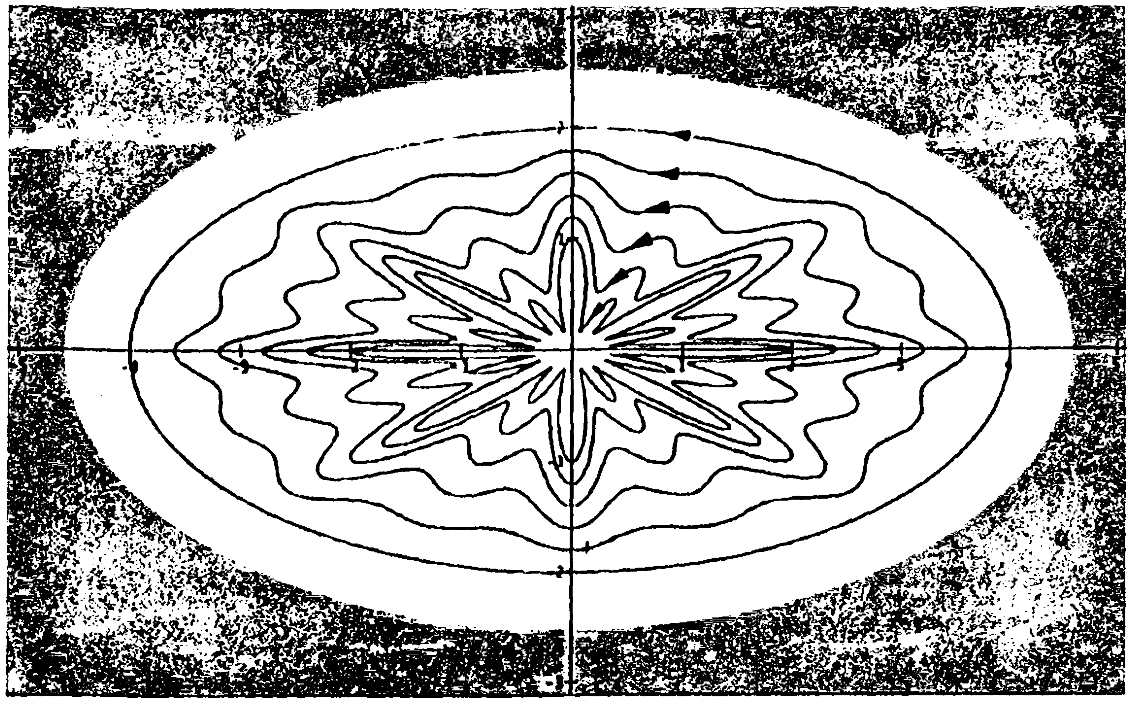
$$z_2(t) = 2[2\cos t + i\sin t], \quad t \in [0,2\pi].$$

Ἡ συνάρτηση ὁμοτοπίας ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὶς δύο καμπῦλες εἶναι ἡ

$$H(t,s) := (1-s)z_1(t) + sz_2(t), \quad t \in [0,2\pi], \quad s \in [0,1].$$

Οἱ ἐνδιάμεσες διαδοχικὲς θέσεις τὶς ὁποῖες παίρνει ἡ ἐσωτερικὴ καμπύλη γιὰ νὰ φτάσει τὴν ἔλλειψη, δείχνονται στὸ σχῆμα καὶ εἶναι οἱ καμπῦλες μὲ παραμετρικὲς παραστάσεις

$$z(t) = H(t,s), \quad t \in [0,2\pi],$$



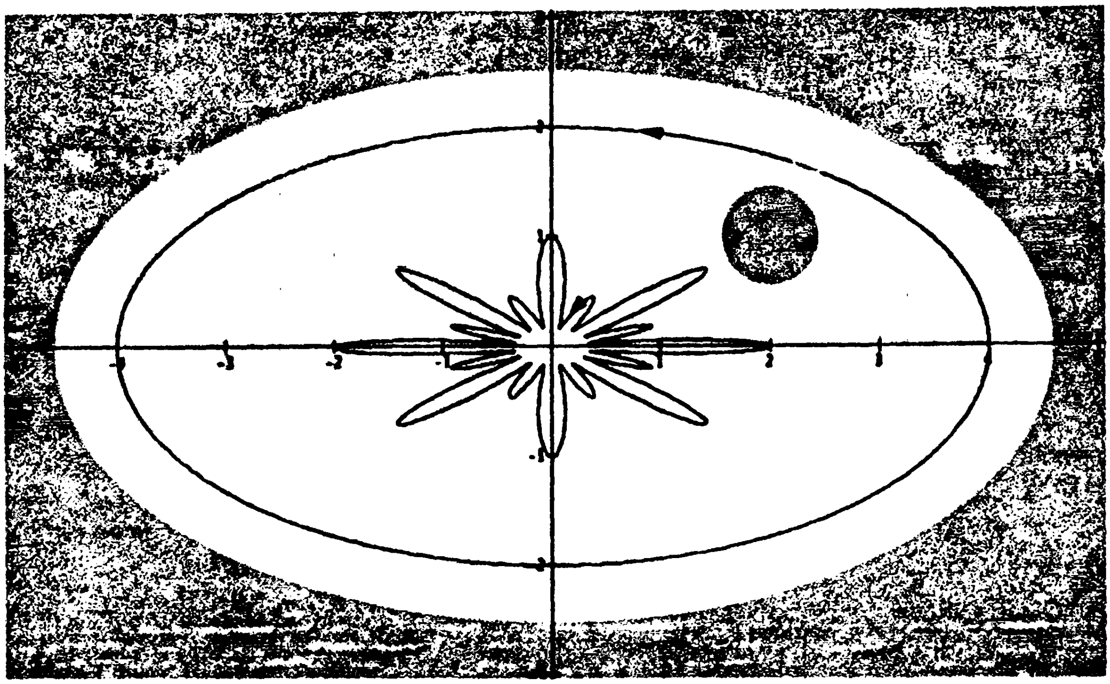
Σχήμα 3.11: *Ἡ ἀστροειδὴς καμπύλη εἶναι ὁμοτοπικὴ τῆς ἔλλειψης.*

ὅταν θέσουμε $s = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$.

Στὸ δεύτερο σχῆμα, ἔχουμε τὸν τόπο ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸ τῆς ἔλλειψης τοῦ πρώτου παραδείγματος, ἀλλὰ ἔχει ἀφαιρεθεῖ ἕνας μικρὸς δίσκος. Δηλαδὴ ὁ τόπος εἶναι διπλὰ συνεκτικός. Ἐδῶ ἡ μία καμπύλη κατὰ τὴ μετακίνησή της γιὰ νὰ φτάσει στὴ θέση τῆς ἄλλης θὰ συναντήσει τὸν δίσκο, ὁπότε θὰ πρέπει νὰ ἐξέλθει τοῦ τόπου. Ἄρα οἱ δύο καμπῦλες δὲν εἶναι ὁμοτοπικές.

Στὸ τρίτο σχῆμα οἱ δύο καμπῦλες δὲν ἔχουν τὸν ἴδιο προσανατολισμό. Ἔτσι, στὴν προσπάθειὰ μας νὰ μετακινήσουμε τὴ μία ὥστε νὰ φτάσει στὴ θέση τῆς ἄλλης, θὰ δοῦμε ὅτι σὲ κάποια στιγμὴ ἡ καμπύλη θὰ πρέπει νὰ διπλωθεῖ καὶ ἑπομένως νὰ αὐτοτμηθεῖ, ὁπότε θὰ πάψει νὰ εἶναι ἁπλή. Ἄρα αὐτὲς οἱ καμπῦλες δὲν εἶναι ὁμοτοπικὲς στὸν τόπο ποὺ δίνεται.

Πρόταση 3.2.0.1 *Στὸ σύνολο τῶν ἁπλῶν κλειστῶν καμπυλῶν ἡ ἰδιότητα*



Σχήμα 3.12: *Ἡ ἀστροειδὴς καμπύλη δὲν εἶναι ὁμοτοπικὴ τῆς ἔλλειψης.*

τῆς ὁμοτοπίας ὁρίζει μιὰ σχέση ἰσοδυναμίας. Ἑπομένως τὸ σύνολο αὐτὸ διαμερίζεται σὲ κλάσεις ὁμοτοπικῶν καμπυλῶν.

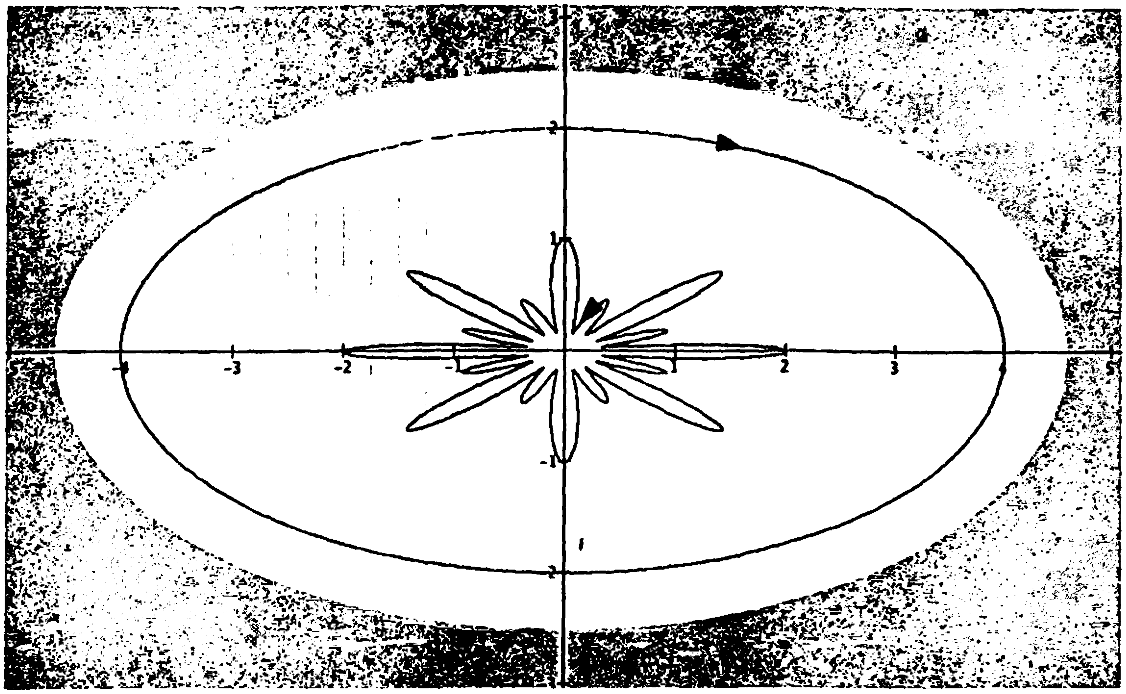
Ἀπόδειξη: Ἀνακλαστικὴ ἰδιότητα. Ἂν γ εἶναι μιὰ ἁπλὴ κλειστὴ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z = z(t)$, $t \in [a,\beta]$, τότε ὁ τύπος

$$H(t,s) := z(t), \quad t \in [a,\beta], \quad s \in [0,1]$$

ὁρίζει μιὰ συνάρτηση ὁμοτοπίας τῆς καμπύλης γ μὲ τὸν ἑαυτό της. Ἄρα ἰσχύει $\gamma \sim \gamma$, δηλαδὴ ἡ σχέση $\sim$ εἶναι ἀνακλαστική.

Συμμετρικὴ ἰδιότητα. Ὑποθέτουμε ὅτι γ_0 καὶ γ_1 εἶναι ἁπλὲς κλειστὲς καμπῦλες μὲ παραμετρικὲς παραστάσεις $z_1(t)$, $t \in [a,\beta]$ καὶ $z_2(t)$, $t \in [a,\beta]$, ἀντίστοιχα, τέτοιες ὥστε $\gamma_0 \sim \gamma_1$. Ἄρα ὑπάρχει συνάρτηση ὁμοτοπίας $H(t,s)$, $t \in [a,\beta]$, $s \in [0,1]$ μὲ $H(\cdot,0) = z_0(\cdot)$ καὶ $H(\cdot,1) = z_1(\cdot)$. Τότε ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$H^*(\cdot,s) = H(\cdot,1-s), \quad s \in [0,1]$$



Σχήμα 3.13: *Ἡ ἀστροειδὴς καμπύλη δὲν εἶναι ὁμοτοπικὴ τῆς ἔλλειψης.*

ἔχει τὴν ἰδιότητα $H^*(\cdot,0) = z_1(\cdot)$ καὶ $H^*(\cdot,1) = z_0(\cdot)$, πρᾶγμα ποὺ ἀποδεικνύει ὅτι ἰσχύει $\gamma_1 \sim \gamma_0$. Ἑπομένως ἡ σχέση $\sim$ εἶναι συμμετρική.

Μεταβατικὴ ἰδιότητα. Θεωροῦμε τρεῖς ἁπλὲς κλειστὲς καμπῦλες $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ μὲ παραμετρικὲς παραστάσεις $z_1(t)$, $t \in [a,\beta]$, $z_2(t)$, $t \in [a,\beta]$, $z_3(t)$, $t \in [a,\beta]$, ἀντίστοιχα, τέτοιες ὥστε $\gamma_1 \sim \gamma_2$ καὶ $\gamma_2 \sim \gamma_3$. Ἑπομένως ὑπάρχουν συναρτήσεις ὁμοτοπίας $H_1(t,s)$, $t \in [a,\beta]$, $s \in [0,1]$ καὶ $H_2(t,s)$, $t \in [a,\beta]$, $s \in [0,1]$ τέτοιες ὥστε

$$H_1(\cdot,0) = z_1(\cdot),\quad H_1(\cdot,1) = z_2(\cdot),\quad H_2(\cdot,0) = z_2(\cdot),\quad H_2(\cdot,1) = z_3(\cdot).$$

Τώρα παρατηροῦμε ὅτι ὁ τύπος

$$H(t,s) := \begin{cases} H_1(t,2s), & t \in [a,\beta],\ s \in [0,\frac{1}{2}] \\ H_2(t,2s-1), & t \in [a,\beta],\ s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

ὁρίζει μιὰ συνάρτηση τέτοια ὥστε

$$H(\cdot,0) = H_1(\cdot,0) = z_1(\cdot) \text{ καὶ } H(\cdot,1) = H_2(\cdot,1) = z_3(\cdot).$$

Τοῦτο ἀποδεικνύει ὅτι οἱ καμπῦλες γ_1 καὶ γ_3 εἶναι ὁμοτοπικές καὶ ἑπομένως ἡ σχέση $\sim$ ἔχει καὶ τὴ μεταβατικὴ ἰδιότητα. ■

Πρόβλημα 3.2.0.1 *Θεωροῦμε πραγματικοὺς ἀριθμοὺς $0, r, r_0, r_1, R$ τέτοιους ὥστε $0 < r < r_0 < r_1 < R$ καὶ ἕνα σημεῖο $a \in \mathbb{C}$. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι οἱ κύκλοι $K(a, r_0)$ καὶ $K(a, r_1)$, ὅταν ἔχουν τὴν ἴδια φορά, εἶναι ὁμοτοπικοὶ στὸν δακτύλιο $\Delta(a, r, R)$.*

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ δύο κύκλοι $K(a, r_0)$ καὶ $K(a, r_1)$ ἔχουν θετικὴ φορά. Τότε μποροῦμε νὰ λάβουμε ὡς παραμετρικὲς παραστάσεις τὶς συναρτήσεις $z_0(t) = r_0 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ καὶ $z_1(t) = r_1 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, ἀντίστοιχα. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση

$$H(t, s) := a + [(1 - s)r_1 + sr_2](\cos(t) + i\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi], \quad s \in [0, 1]$$

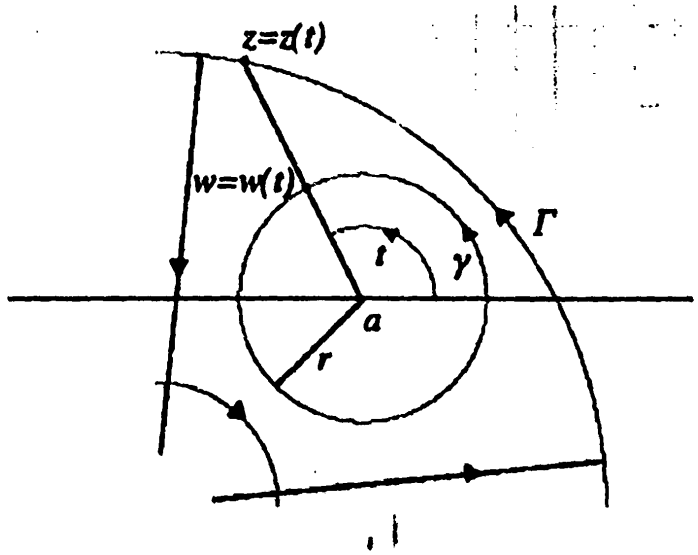
ὁρίζει μιὰ συνάρτηση ὁμοτοπίας, ἀφοῦ μεταφέρει τὸν κύκλο $K(a, r_0)$ στὸν κύκλο $K(a, r_1)$, χωρίς νὰ ἐξέρχεται ἀπὸ τὸν δακτύλιο. Ἂν οἱ καμπῦλες ἔχουν ἀρνητικὴ φορά, τότε, ὅπου παραπάνω ὑπάρχει t, θέτουμε $-t$. ♦

Τὸ συμπέρασμα ποὺ δίνεται στὸ ἑπόμενο πρόβλημα εἶναι χρήσιμο στὶς ἀποδείξεις ποὺ θὰ δοῦμε ἀργότερα.

Πρόβλημα 3.2.0.2 *Θεωροῦμε ἕναν κλειστὸ δακτυλικὸ τομέα P καὶ ἕνα σημεῖο $a \in P$, τὸ ὁποῖο μπορεῖ νὰ "βλέπει" ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τομέα. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, γιὰ κάθε σημεῖο z τοῦ δοθέντος τομέα, τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα $[az]$ περιέχεται στὸν τομέα[1]. Θεωροῦμε καὶ ἕναν κύκλο μέσα στὸν τομέα, μὲ κέντρο τὸ σημεῖο a καὶ ἀκτῖνα r. Τότε οἱ θετικὰ προσανατολισμένες περίμετροι Γ τοῦ δακτυλικοῦ τομέα καὶ γ τοῦ κύκλου εἶναι ὁμοτοπικές στὸ ἐπίπεδο.*

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε ὅτι $w(t) := a + r[\cos(t) + i\sin(t)]$, $t \in [0, 2\pi]$ εἶναι μιὰ παραμετρικὴ παράσταση τοῦ κύκλου γ. Γιὰ τὸ τυχὸν σημεῖο $w = w(t)$ τῆς γ φέρουμε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα $[aw]$ τὸ ὁποῖο καὶ τέμνει τὴν καμπύλη Γ στὸ σημεῖο $z = z(t)$.

[1] Ἕνα σύνολο ποὺ περιέχει ἕνα σημεῖο ποὺ βλέπει ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ συνόλου λέγεται *ἀστροειδές* καὶ τὸ σημεῖο λέγεται *κέντρο τοῦ ἀστροειδοῦς*. Ἕνα ἀστροειδὲς σύνολο μπορεῖ νὰ ἔχει πολλὰ κέντρα.



Σχήμα 3.14: *Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι ὁμοτοπικὴ τῆς περιμέτρου τοῦ δακτυλικοῦ τμήματος.*

Τώρα, παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση

$$H(t,s) := (1-s)w(t) + sz(t), \quad (t,s) \in [0,2\pi] \times [0,1]$$

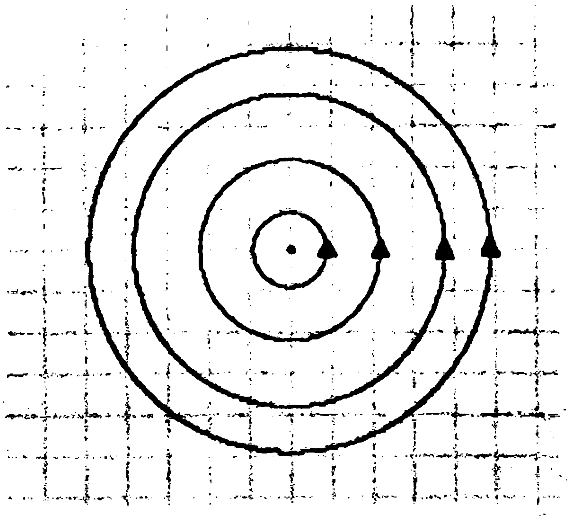
ὁρίζει μιὰ ὁμοτοπία μεταξὺ τῶν δύο καμπυλῶν. ♦

Τὸ προηγούμενο συμπέρασμα θὰ μποροῦσε νὰ προκύψει μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ παρακάτω γενικοῦ θεωρήματος, ποὺ ἀναφέρεται στὴ θεωρία ὁμοτοπίας καὶ τοῦ ὁποίου τὴν ἀπόδειξη παραλείπουμε.

Θεώρημα 3.2.0.1 (*Θεώρημα Jordan*) *Θεωροῦμε μιὰ ἁπλὴ κλειστὴ καὶ θετικὰ προσανατολισμένη καμπύλη Γ καὶ ἕναν θετικὰ προσανατολισμένο κύκλο γ ποὺ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς Γ. Τότε οἱ καμπῦλες Γ καὶ γ εἶναι ὁμοτοπικὲς στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο.*

Ὁρισμός 3.2.0.2 *Μιὰ κλειστὴ καμπύλη γ σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$ λέγεται* **μηδὲν-ὁμοτοπικὴ στὸν τόπο** $\mathcal{T}$, *ἂν εἶναι ὁμοτοπικὴ πρὸς μιὰ καμπύλη ἐκφυλισμένη σὲ ἕνα σημεῖο.*

Γιὰ παράδειγμα, ὁ κύκλος $B(0,r)$ εἶναι μιὰ καμπύλη μηδὲν ὁμοτοπικὴ στὸν δίσκο $B(0,R)$, γιὰ κάθε $r \in (0,R)$. Πραγματικά, μποροῦμε νὰ μεταβάλλουμε συνεχῶς τὴν ἀκτίνα r τοῦ κύκλου παίρνοντας τὸ ὅριο $r \to 0$. Τότε ὁ κύκλος θὰ συσταλεῖ τόσο ὥστε νὰ ἐκφυλιστεῖ λαμβάνοντας τὴν ὁριακὴ θέση τοῦ κέντρου του.



Σχήμα 3.15: *Ὁμοτοπικοὶ κύκλοι.*

Στὸ σημεῖο αὐτὸ ὑπενθυμίζουμε ὅτι ἕνα ὑποσύνολο A τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου λέγεται **ἁπλὰ συνεκτικό**, ἂν τὸ A καθῶς ἐπίσης καὶ τὸ συμπλήρωμά του A^c, εἶναι συνεκτικὰ σύνολα. Ἡ συνεκτικότητα ἔχει ἄμεση σχέση μὲ τὴν ὁμοτοπία. Πραγματικά, ἔχουμε τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα, τοῦ ὁποίου τὴν ἀπόδειξη παραλείπουμε γιατὶ ξεφεύγει ἀπὸ τὸν σκοπὸ τοῦ παρόντος βιβλίου.

Πρόταση 3.2.0.2 ***Ἕνα σύνολο A εἶναι ἁπλὰ συνεκτικό, ἂν καὶ μόνο ἂν τοῦτο εἶναι συνεκτικὸ καὶ ἐπὶ πλέον κάθε κλειστὴ καμπύλη στὸ σύνολο A εἶναι μηδὲν-ὁμοτοπικὴ στὸ A.***

3.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Νὰ περιγραφοῦν στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο οἱ καμπῦλες τῶν ὁποίων οἱ παραμετρικὲς παραστάσεις δίνονται ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες σχέσεις:

$z(t) := t + 2 + it^2, \ \ t \in [0, 1]$,

$z(t) := 1 - 2it, \ \ 0 \leq t \leq 2$,

$z(t) := t^2 + it, \ \ t \in [-3, 3]$,

$z(t) := t + (i/t), \ \ t \in [0, 1]$.

2. Νὰ δοθοῦν παραμετρικὲς παραστάσεις τῶν παρακάτω καμπυλῶν:

   α) Τῆς καμπύλης ποὺ εἶναι τμῆμα τῆς ὑπερβολῆς $y = \frac{1}{x}$, ἔχει ἀρχικὸ σημεῖο τὸ $1 + i$ καὶ τελικὸ τὸ $\frac{1}{3} + 3i$.

   β) Τῆς καμπύλης ποὺ εἶναι τμῆμα τῆς παραβολῆς $x = 2y^2 - 1$, ἔχει ἀρχικὸ σημεῖο τὸ -1 καὶ τελικὸ τὸ $1 + i$.

3. Νὰ δοθοῦν παραμετρικὲς παραστάσεις τῶν παρακάτω καμπυλῶν:

   α) Τῆς πολυγωνικῆς καμπύλης μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα $1 - i, 2i, -3 + 4i, -4 - 2i$, διαδοχικά.

   β) Τῆς καμπύλης ποὺ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα $1 - i, 2 + i, -2 + 3i$ καὶ μὲ φορὰ ὅπως αὐτὴ ὁρίζεται μὲ τὴ σειρὰ τῶν κορυφῶν ποὺ δόθηκαν.

4. Γιὰ ἕνα $\delta > 0$, θέτουμε $a := -3\delta - i$, $b := i\delta$ καὶ $c := 5\delta + 2i$. Νὰ γραφεῖ μία παραμετρικὴ παράσταση τῆς πολυγωνικῆς καμπύλης $[a, b, c]$.

5. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν καμπυλῶν ποὺ δίνονται μὲ τὶς παραμετρικὲς παραστάσεις

   $z_1(t) := 3it^2 - 5t + (1 - 2i)\sin \pi t, t \in [-2, 3]$ καὶ

   $z_2(t) := (2i - 1)t + 3(3i - 2), t \in [9, 10]$.

6. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου T θετικὰ προσανατολισμένη καὶ ἕνας θετικὰ προσανατολισμένος κύκλος K, ἐγγεγραμμένος στὸ τετράγωνο T εἶναι ὁμοτοπικὲς καμπῦλες στὸ ἐπίπεδο.

7. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ὁ θετικὰ προσανατολισμένος μοναδιαῖος κύκλος καὶ ἡ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση $x(t) := 3\cos(t)$, $y(t) := 2\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ βρίσκονται στὸ σύνολο

$$A := \{z : |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq 4\}.$$

Στὴ συνέχεια, νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι οἱ καμπῦλες αὐτὲς εἶναι ὁμοτοπικὲς στὸ σύνολο A.

⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛

Κεφάλαιο 4

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.1 ΓΕΝΙΚΑ

4.1.1 Παράσταση

Μιὰ μιγαδικὴ συνάρτηση f μιγαδικῆς μεταβλητῆς ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα ὑποσύνολο $D(f)$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καὶ σύνολο τιμῶν ἕνα ὑποσύνολο $R(f)$ τοῦ συνόλου τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Συνήθως, τὰ πεδία ὁρισμοῦ τέτοιων συναρτήσεων εἶναι τόποι.

Ἂν f, g εἶναι μιγαδικὲς συναρτήσεις μὲ κοινὸ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$, τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενο τούτων ὁρίζονται, ἀντίστοιχα, μὲ τοὺς τύπους

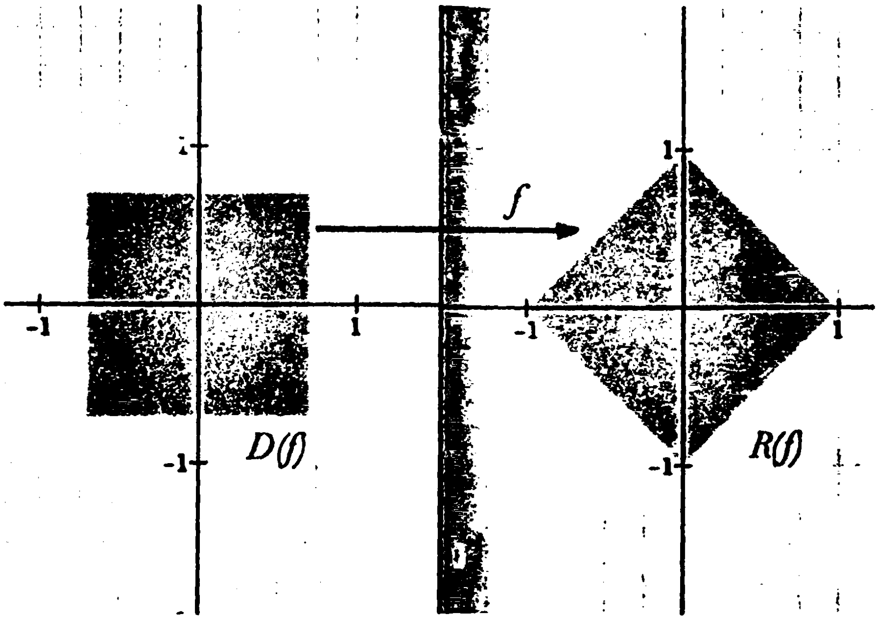
$$(f+g)(z) := f(z) + g(z), \quad (fg)(z) := f(z)g(z).$$

Ἐπίσης, γιὰ κάθε μιγαδικὴ συνάρτηση $f(z)$, $z \in D(f)$ καὶ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμὸ c, τὸ σύμβολο cf παριστάνει τὴ συνάρτηση μὲ τύπο

$$(cf)(z) := cf(z), \quad z \in D(f).$$

Ἔστω f μιὰ μιγαδικὴ συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο $D(f) \subseteq \mathbb{C}$. Γιὰ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμὸ $z := x + iy \in D(f)$, ἡ τιμὴ

$$w = f(z)$$



Σχήμα 4.1: *Μιὰ μιγαδικὴ συνάρτηση ἀπεικονίζει ὑποσύνολα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου σὲ ὑποσύνολα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου.*

εἶναι ἕνας μιγαδικὸς ἀριθμός, ὁπότε αὐτὸς γράφεται στὴ μορφὴ

$$w = u + iv.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ τύποι

$$u = \mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$$

$$v = \mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$$

ὁρίζουν τὶς πραγματικὲς συναρτήσεις $u = u(x, y)$ καὶ $v = v(x, y)$ τῶν μεταβλητῶν x καὶ y. Ἑπομένως ἡ συνάρτηση f γράφεται στὴ μορφὴ

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

δηλαδὴ ἡ μιγαδικὴ συνάρτηση f καθορίζεται ἀπὸ τὶς δύο συναρτήσεις u καὶ v, οἱ ὁποῖες ἔχουν κοινὸ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο $\{(x, y) : x + iy \in D(f)\}$.

Πρόβλημα 4.1.1.1 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ εἰκόνα τοῦ τόπου*

$$K := \{z : |\mathrm{Re}(z)| > |\mathrm{Im}(z)|\}$$

μέσω τῆς συνάρτησης f μὲ τύπο

$$f(z) := z^2$$

εἶναι τὸ σύνολο

$$K^* = \{w : \mathrm{Re}(w) > 0\}.$$

Ἀπόδειξη: Γιὰ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμὸ $z = x + iy \in K$, ἰσχύει $|x| > |y|$ καὶ ἄρα $x^2 > y^2$. Ἡ εἰκόνα τοῦ z μέσω τῆς f εἶναι τὸ σημεῖο

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Τότε, προφανῶς, ἔχουμε

$$\mathrm{Re}(f(z)) = x^2 - y^2 > 0.$$

ὁπότε ἰσχύει

$$f(K) \subseteq K^*.$$

Τώρα ἔστω τυχὸν $w = u + iv \in K^*$. Ἄρα ἰσχύει $u > 0$. Ἀναζητοῦμε ἕνα $z = x + iy \in K$ τέτοιο ὥστε $z^2 = w$, δηλαδή, $x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$. Τότε βρίσκουμε

$$x^2 - y^2 = u \text{ καὶ } 2xy = v.$$

Ἄν $v = 0$, τότε πρέπει $y = 0$, ὁπότε $z = \sqrt{u} + i0$.

Ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύει $v \neq 0$. Χρησιμοποιῶντας αὐτὲς τὶς δύο ἐξισώσεις καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι $|w| = |z^2| = x^2 + y^2$, παίρνουμε

$$x = \pm\sqrt{\frac{u + |w|}{2}} \text{ καὶ } y = \pm\frac{v}{|v|}\sqrt{\frac{-u + |w|}{2}}.$$

Ἄρα ἡ λύση εἶναι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς

$$z = \pm\sqrt{\frac{u + |w|}{2}} \pm \frac{v}{|v|}\sqrt{\frac{-u + |w|}{2}},$$

ὅπου τὰ πρόσημα ± τῶν δύο προσθετέων εἶναι ἀνεξάρτητα μεταξὺ τους. Ἐπειδὴ $u > 0$, θὰ ἰσχύει $|x| > |y|$, ὁπότε τὸ σημεῖο z ἀνήκει στὸ σύνολο K. Ἔτσι ἀποδείχθηκε ὅτι

$$f(K) = K'. \ \blacklozenge$$

4.2 ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Πρίν παρουσιάσουμε τὶς ἀναλυτικὲς ἰδιότητες μιγαδικῶν συναρτήσεων, ὑπενθυμίζουμε ὅτι, ἄν z_0 εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καὶ r εἶναι ἕνας θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμός, τότε ὁ τρύπιος δίσκος $B_0(z_0, r)$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ δίσκου $B(z_0, r)$ ἐκτὸς τοῦ κέντρου του.

Ὑποθέτουμε ὅτι f εἶναι μιὰ μιγαδικὴ συνάρτηση ὁρισμένη τουλάχιστον σὲ ἕναν τρύπιο δίσκο $B_0(z_0, r)$, ὅπου $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$.

Ὁρισμός 4.2.0.1 *Ἕνα στοιχεῖο L τοῦ ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου $\mathbb{C}_\infty$ εἶναι τὸ* **ὅριο τῆς μιγαδικῆς συνάρτησης f στὸ σημεῖο** *$z_0 \in \mathbb{C}_\infty$, ἄν, γιὰ κάθε ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν (z_n), ἰσχύει*

$$\lim z_n = z_0 \implies \lim f(z_n) = L.$$

Στὴν περίπτωση αὐτὴ λέμε καὶ ὅτι **στὸ z_0 ἡ συνάρτηση f συγκλίνει πρὸς τὸ σημεῖο L** καὶ γράφουμε

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L, \quad \text{ἢ} \quad \lim_{z_0} f = L.$$

Πρόβλημα 4.2.0.2 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι οἱ συναρτήσεις*

$$f_1(z) := \frac{\bar{z}}{z}, \ z \neq 0 \ \text{καὶ} \ f_2(z) := \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2, \ z \neq 0$$

δὲν ἔχουν ὅριο στὸ σημεῖο 0.

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ τὴν ἀκολουθία $z_n := \frac{1}{n} + i0$, $n = 1, 2, \cdots$ ἰσχύει $z_n \to 0$ καὶ ἀκόμη

$$\lim f_1(z_n) = \lim \frac{\frac{1}{n} - i0}{\frac{1}{n} + i0} = 1.$$

Ἐπίσης γιὰ τὴν ἀκολουθία $w_n := 0 + i\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$ ἰσχύει $w_n \to 0$ καὶ ἀκόμη

$$\lim f_1(w_n) = \lim \frac{0 - i\frac{1}{n}}{0 + i\frac{1}{n}} = -1.$$

Ἐπομένως τὸ ὅριο τῆς f_1 δὲν ὑπάρχει.

Παρόμοια, γιὰ τὴ συνάρτηση f_2 παρατηροῦμε ὅτι γιὰ τὴν ἀκολουθία $z_n = \frac{1}{n} + i0$, $n = 1, 2, \cdots$ ἰσχύει $z_n \to 0$ καὶ ἀκόμη

$$\lim f_2(z_n) = 1.$$

Ἐπίσης, γιὰ τὴν ἀκολουθία $w'_n := \frac{1}{n}(1 + i)$ ἔχουμε $w'_n \to 0$ καὶ

$$\lim f_2(w'_n) = -1.$$

Ἐπομένως καὶ ἡ συνάρτηση f_2 δὲν ἔχει ὅριο στὸ σημεῖο 0. ♦

Ἡ σύγκλιση μιᾶς συνάρτησης f σὲ ἕνα σημεῖο $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ πρὸς κάποιο σημεῖο $L \in \mathbb{C}_\infty$, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ γεγονὸς ὅτι, γιὰ κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ὥστε

$$f(B_0(z_0, \delta)) \subseteq B(L, \varepsilon). \tag{4.1}$$

Ἔχοντας ὑπ' ὄψη μας καὶ τὴ Σημείωση 2.3.3.1 ἡ σχέση (4.1) ἐξειδικεύεται στὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

- $z_0 \in \mathbb{C}$ καὶ $L \in \mathbb{C}$: $|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - L| < \varepsilon$.
- $z_0 \in \mathbb{C}$ καὶ $L = \infty$: $|z - z_0| < \delta \implies |f(z)| > 1/\varepsilon$.
- $z_0 = \infty$ καὶ $L \in \mathbb{C}$: $|z| > 1/\delta \implies |f(z) - L| < \varepsilon$.
- $z_0 = \infty$ καὶ $L = \infty$: $|z| > 1/\delta \implies |f(z)| > 1/\varepsilon$.

Θεώρημα 4.2.0.1 *Ἂν ἡ συνάρτηση f ἔχει τὴν ἀλγεβρικὴ παράσταση*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

και, ἄν γιὰ κάποιο σημεῖο $z_0 := x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, *ἰσχύει*

$$\lim_{z_0} f = L := a + i\beta \in \mathbb{C},$$

τότε ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} u(x, y) = a \ \ \textit{καὶ} \ \lim_{x \to x_0, y \to y_0} v(x, y) = \beta.$$

Ἀπόδειξη: Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ὁρίου ἔχουμε ὅτι, γιὰ κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ὥστε

$$0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

ἤ

$$0 < |(x + iy) - (x_0 + iy_0))| < \delta$$
$$\Longrightarrow |[u(x, y) + iv(x, y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]| < \varepsilon,$$

ἤ

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$
$$\Longrightarrow \sqrt{[u(x, y) - u(x_0, y_0)]^2 + [v(x, y) - v(x_0, y_0)]^2} < \varepsilon,$$

ἤ

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$
$$\Longrightarrow |u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \varepsilon \ \textit{καὶ} \ |v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Τοῦτο ἀποδεικνύει τὸ συμπέρασμα. ■

Ἡ ἀπόδειξη τῶν ἰδιοτήτων ποὺ περιγράφονται στὴν Πρόταση ποὺ ἀκολουθεῖ, γίνεται ὅπως καὶ στὴν περίπτωση τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων.

Πρόταση 4.2.0.1 *Δίνονται δύο μιγαδικὲς συναρτήσεις ὁρισμένες σὲ μιὰ περιοχὴ ἑνὸς σημείου* z_0 *τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Ἄν τὰ ὅρια*

$$\lim_{z_0} f =: A, \ \lim_{z_0} g =: B,$$

υπάρχουν, τότε, μὲ τὴν προϋπόθεση ὅτι οἱ παρακάτω πράξεις εἶναι ἐπιτρεπτές, ἔχουμε τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:

$$\lim_{z_0}[f \pm g] = A \pm B$$

$$\lim_{z_0}[f \cdot g] = A \cdot B$$

$$\lim_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{A}{B}, (B \neq 0).$$

4.2.1 Συνέχεια

Ἔστω $f : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ μιὰ μιγαδικὴ συνάρτηση, ὅπου $\mathcal{T}$ εἶναι ἕνας τόπος τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου.

Ὁρισμός 4.2.1.1 *Ἡ μιγαδικὴ συνάρτηση f εἶναι **συνεχὴς σὲ ἕνα σημεῖο** $z_0 \in A$, ἂν ἰσχύει*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Ἰσοδύναμα, ἡ f εἶναι συνεχὴς στὸ z_0, ὅταν

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \mathcal{T})|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Ἂν ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχὴς σὲ κάθε σημεῖο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, λέμε ὅτι αὐτὴ εἶναι **συνεχής**. Ἂν στὸν παραπάνω $\varepsilon - \delta$ ὁρισμὸ τῆς συνέχειας ο ἀριθμὸς δ ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸν ε δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ σημεῖο z_0, τότε λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι **ὁμοιόμορφα συνεχής**. Οἱ γνωστὲς ἰδιότητες συνεχῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ἐξακολουθοῦν νὰ ἰσχύουν καὶ γιὰ τὶς συνεχεῖς μιγαδικὲς συναρτήσεις.

Πρόβλημα 4.2.1.1 *Νὰ ἐξεταστεῖ ἂν τὰ σύνολα $A := \{z \in \mathbb{C} : |z^3| < |z^2 + 1|\}$ εἶναι ἀνοικτὰ καὶ φραγμένα.*

Ἀπόδειξη: Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι, ἐπειδὴ ἰσχύει

$$||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|.$$

ἔπεται ὅτι

ἡ συνάρτηση $z \to |z|$ εἶναι συνεχής.

Τὸ συμπέρασμα τοῦτο συνεπάγεται ὅτι ἡ πραγματικὴ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := |z^3| - |z^2 + 1|,$$

ἡ ὁποία εἶναι ὁρισμένη στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο, εἶναι συνεχὴς καὶ τέτοια ὥστε

$$A = f^{-1}(-\infty, 0).$$

Ἀλλὰ τὸ διάστημα $(-\infty, 0)$ εἶναι ἀνοικτό, ὁπότε καὶ τὸ σύνολο A εἶναι ἐπίσης ἀνοικτό.

Ἂν τὸ σύνολο A δὲν ἦταν φραγμένο, θὰ ὑπῆρχε κάποια ἀκολουθία (z_n) σημείων τοῦ A μὲ ὅριο τὸ ∞. Δηλαδὴ θὰ ἴσχυε

$$|z_n^3| < |z_n^2 + 1|$$

καὶ $\frac{1}{z_n} \to 0$. Ἑπομένως θὰ ἔπρεπε νὰ ἰσχύει

$$1 < |\frac{1}{z_n} + \frac{1}{z_n^3}| \to 0,$$

πρᾶγμα ἄτοπο. ♦

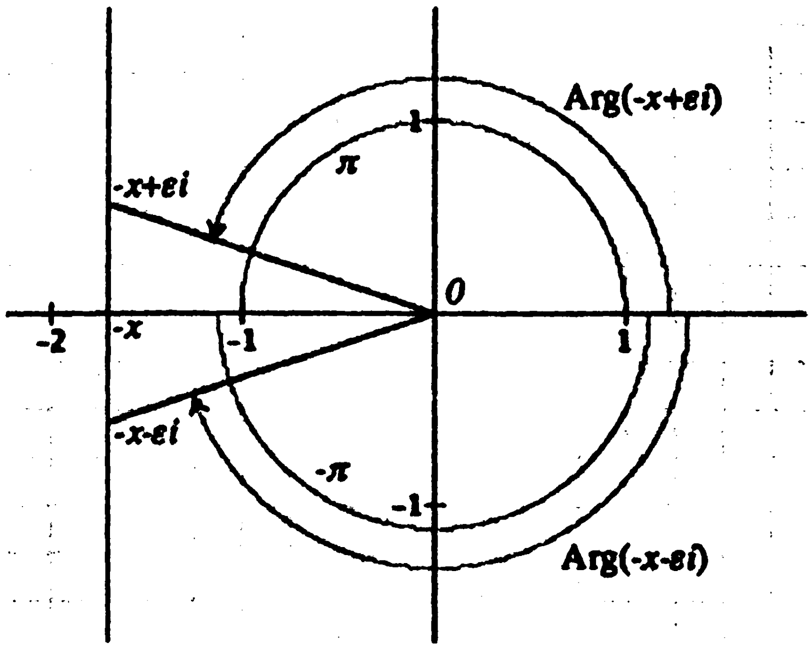
Πρόταση 4.2.1.1 *Ἡ συνάρτηση*

$$z \to \mathrm{Arg}(z)$$

εἶναι συνεχὴς παντοῦ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα ποὺ ἀνήκουν πάνω στὸν ἀρνητικὸ πραγματικὸ ἡμιάξονα, δηλαδὴ εἶναι συνεχὴς στὸ σύνολο

$$\{z \in \mathbb{C} : \ z + |z| \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \ z + |z| = 0\}.$$

Ἀπόδειξη: Ἂν θέσουμε $z_\pm = -x \pm \varepsilon$, ὅπου x καὶ ε εἶναι θετικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί, τότε, ὅταν ε τείνει πρὸς τὸ 0, τὰ σημεῖα z_+ καὶ z_- τείνουν πρὸς τὸ ἴδιο σημεῖο $-x$ τοῦ ἀρνητικοῦ πραγματικοῦ ἡμιάξονα. Τώρα παρατηροῦμε ὅτι τὸ z_+ τείνει πρὸς τὸ $-x$ ἀπὸ τὸ ἄνω μιγαδικὸ ἐπίπεδο, ὁπότε τὸ βασικὸ ὅρισμά του τείνει πρὸς τὴν τιμὴ π. Ὅμως, τὸ σημεῖο z_- τείνει πρὸς τὸ $-x$ ἀπὸ τὸ κάτω μιγαδικὸ ἐπίπεδο, ὁπότε τὸ βασικὸ ὅρισμά του τείνει πρὸς τὴν τιμὴ $-\pi$. Τοῦτο ἀποδεικνύει ὅτι ἡ συνάρτηση Arg δὲν εἶναι συνεχὴς στὰ σημεῖα ποὺ ἀνήκουν πάνω στὸν ἀρνητικὸ πραγματικὸ ἡμιάξονα. Ἡ συνέχεια τῆς συνάρτησης αὐτῆς στὰ



Σχήμα 4.2: *Ἡ συνάρτηση Arg δὲν εἶναι συνεχὴς στὰ σημεῖα τοῦ ἀρνητικοῦ πραγματικοῦ ἄξονα.*

ὑπόλοιπα σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου προκύπτει ἀπὸ τὸν τύπο (1.2) καὶ τὸ ὅτι ἡ συνάρτηση $\mathrm{Arctan}(\frac{y}{x})$ εἶναι συνεχὴς στὰ σημεῖα αὐτά. ■

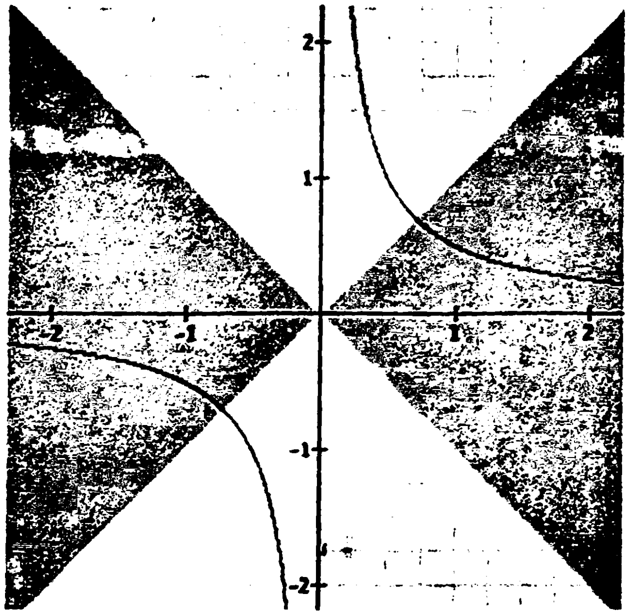
Πρόβλημα 4.2.1.2 *Νὰ προσδιοριστεῖ τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου στὰ ὁποῖα ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$f(z) := \mathrm{Arg}(i - z^2)$$

δὲν εἶναι συνεχής.

Λύση: Ὅπως ἀποδείχθηκε παραπάνω, ἡ συνάρτηση $\mathrm{Arg}(\zeta)$ δὲν εἶναι συνεχὴς στὰ σημεῖα ζ ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση

$$\zeta + |\zeta| = 0.$$



Ἔτσι, ἡ δοθεῖσα συνάρτηση δὲν εἶναι συνεχὴς στὰ σημεῖα z γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει

$$i - z^2 + |i - z^2| = 0,$$

δηλαδὴ στὰ σημεῖα $z = x + iy$ γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει

$$i - x^2 + y^2 - 2ixy + |i - x^2 + y^2 - 2ixy| = 0,$$

ἤ

$$-x^2 + y^2 + i(1 - 2xy) + |-x^2 + y^2 + i(1 - 2xy)| = 0.$$

Ἄρα ἔχουμε

$$1 - 2xy = 0 \text{ καὶ } -x^2 + y^2 + |-x^2 + y^2| = 0,$$

ὁπότε συμπεραίνουμε ὅτι τὰ σημεῖα, στὰ ὁποῖα ἡ f δὲν εἶναι συνεχὴς, εἶναι ἐκεῖνα ποὺ ἱκανοποιοῦν τὶς σχέσεις

$$2xy = 1 \text{ καὶ } |x| \geq |y|.$$

Συνεπῶς, ὅπως δείχνεται καὶ στὸ σχῆμα, τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι ἀκριβῶς τὰ σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς ποὺ βρίσκονται μέσα στὸ σκιασμένο τμῆμα τοῦ ἐπιπέδου. ♦

4.2.2 Εἰκόνα καμπύλης μέσω συνεχοῦς συνάρτησης

Ὑποθέτουμε ὅτι f εἶναι μία συνεχὴς μιγαδικὴ συνάρτηση ποὺ ἀπεικονίζει ἕναν τόπο $\mathcal{T}$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}^*$, ἐπίσης τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Στὸν τόπο $\mathcal{T}$ θεωροῦμε μιὰ καμπύλη γ μὲ παραμετρικὴ παράσταση

$$z(t) := x(t) + iy(t), t \in [a, \beta].$$

Ἐπειδὴ ἡ σύνθεση $f \circ z$ εἶναι ἡ συνεχὴς συνάρτηση

$$w(t) := f(z(t)), \quad t \in [a, \beta],$$

ἕπεται ὅτι ἡ εἰκόνα τῆς καμπύλης γ μέσω τῆς συνάρτησης f εἶναι ἡ καμπύλη $\Gamma := f(\gamma)$ στὸν τόπο $\mathcal{T}^*$, ἡ ὁποία ἔχει παραμετρικὴ παράσταση τὴ συνάρτηση

$$w := w(t), \quad t \in [a, \beta].$$

Πρόβλημα 4.2.2.1 *Θεωροῦμε τὸν κύκλο γ μὲ παραμετρικὴ παράσταση*

$$z(t) := r(\cos(t) + i\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Νὰ βρεθεῖ ἡ καμπύλη Γ ποὺ εἶναι ἡ εἰκόνα τῆς γ μέσω τῆς συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{z}{\bar{z}}.$$

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε ὅτι $w(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ εἶναι ἡ παραμετρικὴ παράσταση τῆς ζητούμενης καμπύλης Γ. Γιὰ τὴν καμπύλη γ ἔχουμε $z(t) = x(t) + iy(t)$, ὁπότε προκύπτει $x(t) = r\cos(t)$ καὶ $y(t) = r\sin t$, ὅπου $t \in [0, 2\pi]$. Ἑπομένως ἔχουμε

$$f(z(t)) = u(t) + iv(t) = \frac{z(t)}{\overline{z(t)}} = \frac{z(t)^2}{z(t)\overline{z(t)}} = \frac{(x(t) + iy(t))^2}{x(t)^2 + y(t)^2},$$

ἀπὸ ὅπου παίρνουμε τὶς τιμὲς

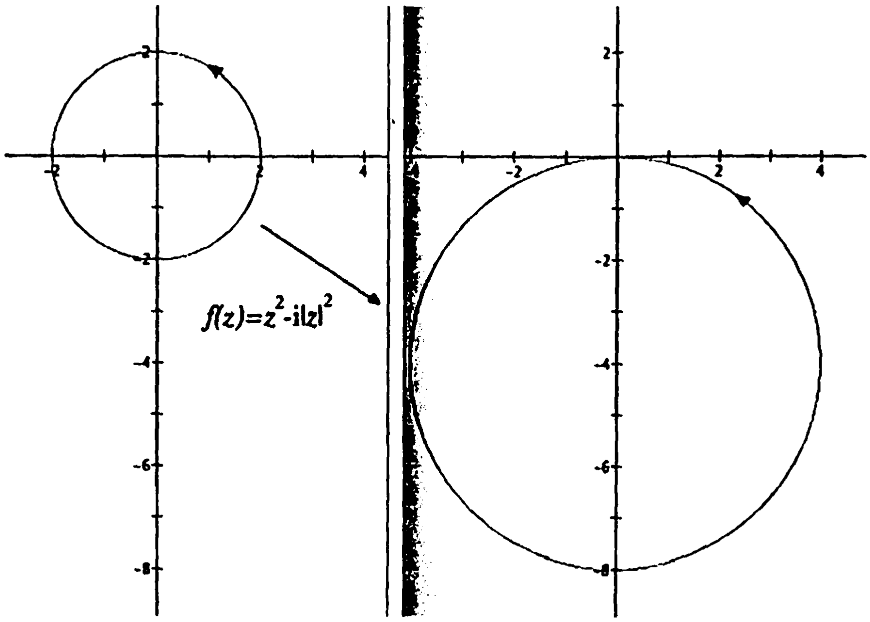
$$u(t) = \frac{x(t)^2 - y(t)^2}{x(t)^2 + y(t)^2} \text{ καὶ } v(t) = \frac{2x(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

Ἀντικαθιστῶντας τὰ $x(t), y(t)$ μὲ τὶς ἐκφράσεις τους ἀπὸ τὴν παράσταση τῆς καμπύλης γ, βρίσκουμε

$$u(t) = \cos(2t) \text{ καὶ } v(t) = \sin(2t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς συμπεραίνουμε ὅτι ἡ ζητούμενη καμπύλη εἶναι ὁ μοναδιαῖος κύκλος διαγεγραμμένος δύο φορές, μὲ θετικὴ φορά, ὅπως τοῦτο φαίνεται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ παράμετρος $2t$ μεταβάλλεται στὸ διάστημα $[0, 4\pi]$. Μάλιστα, δέ, τοῦτο συμβαίνει γιὰ κάθε ἀκτίνα r τοῦ ἀρχικοῦ κύκλου. ♦

Πρόβλημα 4.2.2.2 *Νὰ βρεθεῖ ἡ εἰκόνα τῆς καμπύλης μὲ παραμετρικὴ παράσταση* $x(t) = 2\cos(t)$ *καὶ* $y(t) = 2\sin t$, *ὅπου* $t \in [0, 2\pi]$, *μέσω τῆς συνάρτησης* f *μὲ τύπο* $f(z) := z^2 - i|z|^2$.



Σχήμα 4.3: *Ἡ εἰκόνα τοῦ μικροῦ κύκλου μέσω τῆς συνάρτησης* $f(z) := z^2 - i|z|^2$, $z \in \mathbb{C}$, *εἶναι ὁ μεγάλος κύκλος.*

Λύση: Θέτουμε $u + iv := f(z) = f(x + iy)$, ὁπότε βρίσκουμε

$$u = x^2 - y^2 = 4(\cos^2 t - \sin^2 t) = 4\cos(2t)$$

καὶ

$$v = 2xy - x^2 - y^2 = 8\sin t\cos t - 4\cos^2 t - 4\sin^2 t = 4\sin(2t) - 4.$$

Ἄρα ἡ καμπύλη ἔχει εἰκόνα στὸ σύνολο τῶν σημείων $u+iv$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου τὴν καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση

$$u(t) = 4\cos(2t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$v(t) = 4\sin(2t) - 4, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα αὐτὰ ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση

$$u^2 + (v+4)^2 = 4^2,$$

ἔπεται ὅτι ἡ εἰκόνα τῆς καμπύλης μέσω τῆς f εἶναι ὁ κύκλος μὲ κέντρο τὸ σημεῖο $-4i$ καὶ ἀκτῖνα ἴση μὲ 4, διαγεγραμμένος δύο φορὲς καὶ μὲ θετικὴ φορά, βλ. σχῆμα. ♦

Πρόβλημα 4.2.2.3 *Νὰ περιγραφεῖ ἡ εἰκόνα τοῦ κύκλου γ μὲ παραμετρικὴ παράσταση*

$$z(t) := r(\cos(t) + i\sin(t)), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

ὅπου $r \neq 1$, μέσω τῆς συνάρτησης f μὲ τύπο

$$f(z) := z + \frac{1}{z}, \quad z \neq 0.$$

Λύση: Ὁ κύκλος γ ἐκφράζεται καὶ μὲ τὸ ζεῦγος τῶν συναρτήσεων

$$x = x(t) = r\cos(t) \text{ καὶ } y = y(t) = r\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

καὶ ἔχει θετικὴ φορά.

Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ καμπύλη $\Gamma = f(\gamma)$, ἔχει παραμετρικὴ παράσταση τὴν

$$w(t) = u(t) + iv(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

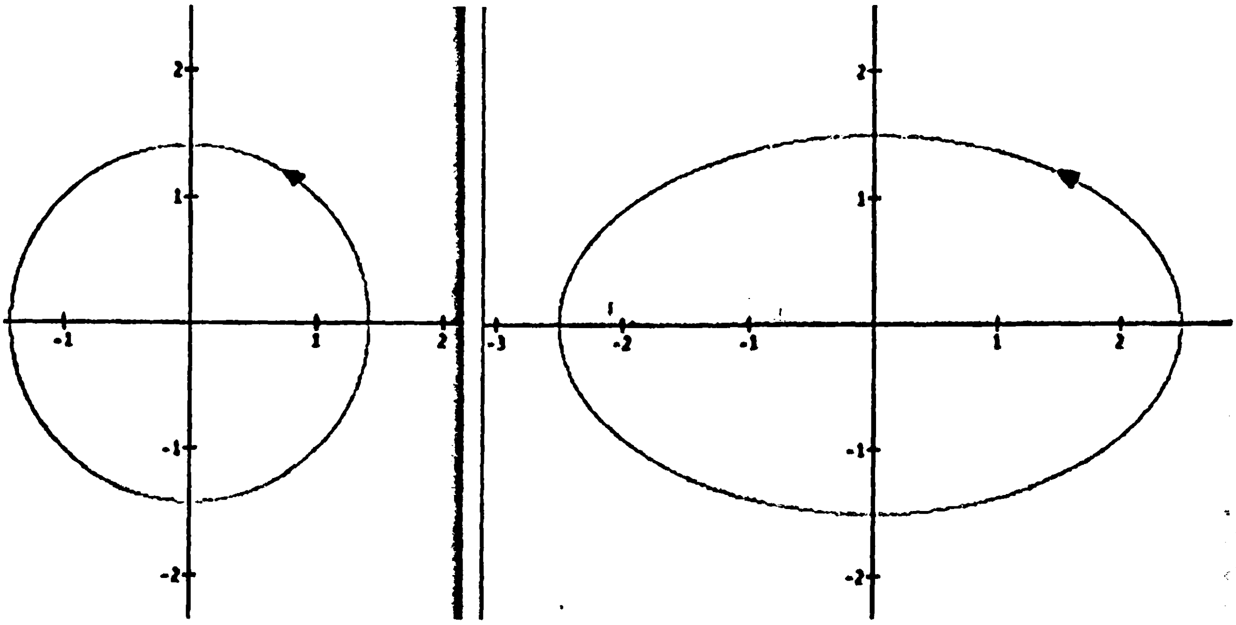
Ἑπομένως ἔχουμε

$$\begin{aligned} w(t) = u(t) + iv(t) = f(z(t)) &= z(t) + \frac{1}{z(t)} \\ &= r(\cos(t) + i\sin(t)) + \frac{1}{r}(\cos(t) - i\sin(t)) \\ &= (r + \frac{1}{r})\cos(t) + i(r - \frac{1}{r})\sin(t), \end{aligned}$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτουν οἱ τιμὲς

$$u = (r + \frac{1}{r})\cos(t) \text{ καὶ } v = (r - \frac{1}{r})\sin(t).$$

Ἔτσι, ἡ ζητούμενη καμπύλη Γ εἶναι ἡ ἔλλειψη ποὺ περιγράφεται ἀπὸ



Σχῆμα 4.4: *Ἡ εἰκόνα τοῦ κύκλου μέσω τῆς συνάρτησης $f(z) := z + \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}$, εἶναι ἡ ἔλλειψη.*

τὴ σχέση

$$\frac{u^2}{(r + r^{-1})^2} + \frac{v^2}{(r - r^{-1})^2} = 1$$

τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου, μὲ θετικὴ φορά. Βλέπε σχῆμα. ♦

4.2.3 Διαφορισιμότητα

Ἔστω $\mathcal{T}$ ἕνας τόπος στὸ μιγαδικὸ ἐπὶπεδο καὶ z_0 ἕνα σημεῖο τοῦ τόπου. Μιὰ συνάρτηση $f(z), z \in \mathcal{T}$, εἶναι **παραγωγίσιμη**, ἢ **διαφορίσιμη** στὸ σημεῖο $z_0 \in \mathcal{T}$, ἂν τὸ ὅριο

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

ἢ ἰσοδύναμα τὸ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

ὑπάρχει καὶ εἶναι μιγαδικὸς ἀριθμός. Τὸ ὅριο αὐτὸ παριστάνεται μὲ $f'(z_0)$, ἢ καὶ μὲ $f'(z)|_{z=z_0}$ καὶ ὀνομάζεται ἡ **παράγωγος** τῆς συνάρτησης f στὸ σημεῖο z_0. Ἂν ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f σὲ κάθε σημεῖο, λέμε ὅτι ἡ f εἶναι **παραγωγίσιμη**.

Ἔστω n ἕνας θετικὸς ἀκέραιος ἀριθμός. Ἡ παράγωγος n-τάξης $f^{(n)}$ τῆς συνάρτησης f εἶναι ἡ παράγωγος τῆς συνάρτησης $f^{(n-1)}$, ὅπου $f^{(0)} := f$.

Ὁρισμός 4.2.3.1 *Μιὰ συνάρτηση f εἶναι* **ὁλόμορφη**, *ἢ* **ἀναλυτικὴ** *σὲ ἕνα σημεῖο a τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, ὅταν ὑπάρχει περιοχὴ V_a τοῦ σημείου a τέτοια ὥστε ἡ παράγωγος τῆς f σὲ κάθε σημεῖο τῆς περιοχῆς V_a νὰ ὑπάρχει.*

Ἂν ἡ συνάρτηση f εἶναι ὁλόμορφη σὲ κάθε σημεῖο τοῦ τόπου, (ἰσοδύναμα, ἐπειδὴ ὁ τόπος εἶναι ἀνοικτὸ σύνολο, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι παραγωγίσιμη σὲ κάθε σημεῖο τοῦ τόπου,) λέμε, ἁπλά, ὅτι εἶναι ὁλόμορφη.

Ἀργότερα θὰ δοῦμε ὅτι, ἂν μιὰ συνάρτηση f εἶναι ὁλόμορφη σὲ ἕναν τόπο, τότε αὐτὴ ἔχει παραγώγους κάθε τάξης στὸν τόπο.

Ὁρισμός 4.2.3.2 *Μιὰ συνάρτηση ποὺ εἶναι ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ὅλο τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο λέγεται* **ἀκεραία**.

4.2.4 Ἰδιότητες παραγώγων

Πρόταση 4.2.4.1 *Ἡ διαφορισιμότητα σὲ ἕνα σημεῖο συνεπάγεται τὴ συνέχεια στὸ σημεῖο αὐτό.*

Ἀπόδειξη: Ἔστω $f : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ μιὰ μιγαδικὴ συνάρτηση ἡ ὁποία εἶναι διαφορίσιμη σὲ ἕνα σημεῖο $z_0 \in \mathcal{T}$. Τότε ἡ συνάρτηση

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z \neq z_0 \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

εἶναι συνεχὴς στὸ σημεῖο z_0 καὶ τέτοια ὥστε $g(z_0) = f'(z_0)$. Ἐπομένως ἔχουμε

$$\lim_{z\to z_0}[f(z) - f(z_0)] = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)g(z) = 0g(z_0) = 0.$$

Τοῦτο ἀποδεικνύει τὴ συνέχεια τῆς f στὸ σημεῖο z_0. ∎

Στὴν προηγούμενη πρόταση ἀποδείχθηκε ταυτόχρονα καὶ τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Πρόταση 4.2.4.2 *Ἔστω f μιὰ μιγαδικὴ συνάρτηση ὁρισμένη σὲ ἕνα σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$. Τότε ἡ f εἶναι διαφορίσιμη σὲ ἕνα σημεῖο $z_0 \in \mathcal{T}$, ἄν καὶ μόνο ἄν ὑπάρχει συνάρτηση $g : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ ἡ ὁποία εἶναι συνεχὴς στὸ σημεῖο z_0 καὶ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z), \quad z \in \mathcal{T}.$$

Τὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα ἀποδεικνύονται εὔκολα χρησιμοποιῶντας τὴν προηγούμενη πρόταση.

Πρόταση 4.2.4.3 *Ἄν f καὶ g εἶναι συναρτήσεις διαφορίσιμες σὲ ἕνα σημεῖο z_0, τότε διαφορίσιμες εἶναι καὶ οἱ συναρτήσεις*

$$f \pm g, \; f \cdot g, \; \frac{f}{g} \; (\text{ἄν } g(z_0) \neq 0)$$

καὶ μάλιστα, ἀντίστοιχα, ἔχουμε

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \; (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', \; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}.$$

Πρόταση 4.2.4.4 *Ἄν f εἶναι μιὰ συνάρτηση διαφορίσιμη σὲ ἕνα σημεῖο z_0 καὶ g εἶναι μιὰ συνάρτηση διαφορίσιμη στὸ σημεῖο $f(z_0)$, τότε καὶ ἡ συνάρτηση $g \circ f$ εἶναι διαφορίσιμη στὸ σημεῖο z_0 καὶ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση*

$$[g \circ f]'(z_0) = [g(f(z))]'\big|_{z=z_0} = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Ἐπειδὴ ἡ ταυτοτικὴ συνάρτηση, δηλαδὴ ἡ συνάρτηση μὲ τύπο $f(z) = z$, ἔχει παράγωγο τὴ μονάδα, ἀπὸ τὴν τελευταία Πρόταση προκύπτει τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα:

Πόρισμα 4.2.4.1 *Ὑποθέτουμε ὅτι $f : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ καὶ $g : f(\mathcal{T}) \to \mathbb{C}$ εἶναι δύο συναρτήσεις τέτοιες ὥστε*

$$g(f(z)) = z,$$

γιὰ ὅλα τὰ σημεῖα z ποὺ ἀνήκουν σὲ μιὰ περιοχὴ V_{z_0} ἑνὸς σημείου $z_0 \in \mathcal{T}$. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχὴς στὸ σημεῖο z_0 καὶ ἡ g εἶναι συνεχὴς στὸ σημεῖο $f(z_0)$. Ἐάν ἡ παράγωγος $g'(f(z_0))$ ὑπάρχει καὶ εἶναι μὴ μηδενική, τότε καὶ ἡ παράγωγος τῆς f στὸ σημεῖο z_0 ὑπάρχει καὶ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση

$$f'(z_0) = \frac{1}{g'(f(z_0))}.$$

4.2.5 Κανόνες L' Hospital

Οἱ κανόνες L' Hospital, οἱ ὁποῖοι διατυπώνονται στὰ ἑπόμενα δύο θεωρήματα, ἀφοροῦν τὸν προσδιορισμὸ τῶν οριακῶν τιμῶν κάποιων παραστάσεων ποὺ ὁδηγοῦν σὲ κλάσματα τῆς μορφῆς

$$\frac{0}{0}, \text{ ἢ } \frac{\infty}{\infty}.$$

Οἱ κανόνες αὐτοί, γνωστοὶ ἀπὸ τὶς πραγματικὲς συναρτήσεις, ἐξακολουθοῦν νὰ ἰσχύουν καὶ γιὰ τὶς μιγαδικὲς συναρτήσεις καὶ οἱ ἀποδείξεις τους γίνονται ὅπως καὶ στὴν περίπτωση τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων.

Θεώρημα 4.2.5.1 *Ἂν οἱ συναρτήσεις f, g εἶναι ὁρισμένες σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$ καὶ παραγωγίσιμες σὲ ἕνα σημεῖο $z_0 \in \mathcal{T}$ καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύει*

$$f(z_0) = 0 = g(z_0) \text{ καὶ } g'(z_0) \neq 0,$$

τότε τὸ ὅριο $\lim_{z_0} \frac{f}{g}$ ὑπάρχει καὶ μάλιστα ἰσχύει

$$\lim_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Θεώρημα 4.2.5.2 *Ἂν οἱ συναρτήσεις f, g εἶναι ὁρισμένες καὶ παραγωγίσιμες σὲ μιὰ τρύπια περιοχὴ ἑνὸς σημείου $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ καὶ ἰσχύει*

$$\lim_{z_0} f = \lim_{z_0} g = 0, \quad \text{ἤ} \quad \lim_{z_0} f = \lim_{z_0} g = \infty$$

καὶ τὸ ὅριο

$$\lim_{z_0} \frac{f'}{g'} =: L$$

ὑπάρχει, τότε καὶ τὸ ὅριο $\lim_{z_0} \frac{f}{g}$, ἐπίσης, ὑπάρχει καὶ μάλιστα ἰσχύει

$$\lim_{z_0} \frac{f}{g} = L.$$

4.2.6 Συνθῆκες Cauchy - Riemann

Ἔστω $f : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$. Γιὰ κάθε σημεῖο $z = x + iy$ τοῦ τόπου ἡ τιμὴ

$$f(z) = f(x + iy)$$

ὡς μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχει ἀλγεβρικὴ παράσταση τὴν

$$u(x, y) + iv(x, y).$$

Ἔτσι τὸ σύμβολο $f(x, y)$ εἶναι μιὰ ἄλλη γραφὴ τοῦ $u(x, y) + iv(x, y)$.

Ἂν ἡ παράγωγος $f'(z)$ ὑπάρχει στὸ σημεῖο $z = x + iy \in \mathcal{T}$, τότε αὐτὴ θὰ ἔχει τιμὴ ἴση μὲ

$$\lim_{h \in \mathbb{R},\ h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \lim_{h \in \mathbb{R},\ h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = f_x(x, y),$$

ἀλλὰ καὶ μὲ

$$\lim_{h \in \mathbb{R},\ h \to 0} \frac{f(z + ih) - f(z)}{ih} = \lim_{h \in \mathbb{R},\ h \to 0} -i \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = -if_y(x, y).$$

Ἑπομένως οἱ δύο τιμὲς εἶναι ἴσες. Ἔτσι προκύπτει τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Πρόταση 4.2.6.1 *Ἡ διαφορισιμότητα μιᾶς συνάρτησης f στὸ σημεῖο z συνεπάγεται ὄχι μόνο τὴν ὕπαρξη τῶν μερικῶν παραγώγων της ὡς πρὸς τὶς δύο μεταβλητὲς x, y, ἀλλὰ ἐπίσης καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι αὐτὲς οἱ παράγωγοι ἱκανοποιοῦν τὴν ἐξίσωση*

$$f_x = -if_y, \text{ ἤ } f_y = if_x.$$

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ $f(z)$ γράφεται στὴ μορφὴ

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

ἀπὸ τὴν παραπάνω ἐξίσωση προκύπτει ὅτι

$$u_x + iv_x = f_x = -if_y = -i(u_y + iv_y) = v_y - iu_x.$$

Ἔτσι παίρνουμε τὸ σύστημα

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x, \end{cases} \tag{4.2}$$

τὸ ὁποῖο ἐκφράζει τὶς συνθῆκες ὁλομορφίας **Cauchy - Riemann**.

Πρόβλημα 4.2.6.1 *Δίνεται ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$f(z) := f(x+iy) = x^2 + iy^2.$$

Νὰ βρεθεῖ τὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν z στοὺς ὁποίους ἡ συνάρτηση αὐτὴ παραγωγίζεται.

Λύση: Τὸ πραγματικὸ καὶ τὸ φανταστικὸ μέρος τῆς συνάρτησης f εἶναι, ἀντίστοιχα, οἱ συναρτήσεις ποὺ ὁρίζονται μὲ τοὺς τύπους

$$u(x,y) := x^2, \quad v(x,y) := y^2.$$

Οἱ μερικὲς παράγωγοι τῶν συναρτήσεων u καὶ v εἶναι οἱ

$$u_x = 2x, u_y = 0, v_x = 0, v_y = 2y,$$

ὁπότε οἱ συνθῆκες Cauchy-Riemann δίνουν $2x = 2y$ καὶ $0 = 0$. Ἔτσι, ἂν ἡ συνάρτηση f παραγωγίζεται σὲ κάποιο σημεῖο $z := x + iy$, θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει $x = y$. Μὲ ἄλλα λόγια, τὸ σημεῖο z θὰ ἔχει τὴ μορφὴ $z = x + ix$, ὅπου x εἶναι ὁποιοσδήποτε πραγματικὸς ἀριθμός.

Θὰ ἐξετάσουμε ἄν ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς συνάρτησης f στὸ τυχὸν σημεῖο $z = x + ix$. Πρὸς τοῦτο βλέπουμε ὅτι

$$\frac{f(x+ix+a+i\beta)-f(x+ix)}{a+i\beta} = \frac{(x+a)^2+i(x+\beta)^2-x^2-ix^2}{a+i\beta},$$

τὸ ὁποῖο, τελικά, ἰσοῦται μὲ

$$2x + \frac{a^2+i\beta^2}{a+i\beta}.$$

Ὅταν τὸ $a + i\beta$ τείνει πρὸς τὸ 0, ἡ ποσότητα αὐτὴ τείνει πρὸς τὸ $2x$, ἀφοῦ ἰσχύει ὅτι

$$\frac{|a^2+i\beta^2|}{|a+i\beta|} = \sqrt{\frac{a^4+\beta^4}{a^2+\beta^2}} \leq \sqrt{a^2+\beta^2} = |a+i\beta|.$$

Ἑπομένως σὲ κάθε σημεῖο τῆς μορφῆς $z = x + ix$ ἡ συνάρτηση f παραγωγίζεται καὶ ἔχει παράγωγο ἴση μὲ $2x$. ♦

Πρόταση 4.2.6.2 *Ἄν f εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$ καὶ ἔχει μέτρο σταθερό, τότε αὐτὴ εἶναι σταθερή.*

Ἀπόδειξη: Ἔστω T τὸ σύνολο τῶν σημείων (x, y) τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου μὲ $x + iy \in \mathcal{T}$. Ἐπειδὴ ἡ συνάρτηση $f = u + iv$ ἔχει σταθερὸ μέτρο στὸν τόπο $\mathcal{T}$, ὑπάρχει κάποιος μιγαδικὸς ἀριθμὸς c τέτοιος ὥστε

$$u^2(x,y) + v^2(x,y) = c^2,$$

γιὰ κάθε $(x, y) \in T$. Ἄν $c = 0$ τὸ συμπέρασμα ἰσχύει. Ἔστω ὅτι $c \neq 0$. Ἔχουμε

$$uu_x + vv_x = 0 \text{ καὶ } uu_y + vv_y = 0,$$

ὁπότε χρησιμοποιῶντας καὶ τὶς συνθῆκες Cauchy - Riemann παίρνουμε τὸ σύστημα

$$\begin{cases} uu_x - vu_y = 0 \\ uu_y + vu_x = 0. \end{cases}$$

Λύνοντας τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν ὡς πρὸς u_x καὶ u_y βρίσκουμε ὅτι

$$u_x = u_y = 0.$$

Ἄρα ἡ συνάρτηση u εἶναι σταθερὴ στὸ σύνολο T. Παρόμοια, προκύπτει ὅτι καὶ ἡ συνάρτηση v εἶναι σταθερὴ στὸ σύνολο T. Τὰ στοιχεῖα αὐτὰ συνεπάγονται ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι σταθερὴ στὸν τόπο $\mathcal{T}$. ■

Χρησιμοποιῶντας τὶς σχέσεις

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i},$$

μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε τὶς μεταβλητὲς x καὶ y ὡς συναρτήσεις τῶν μεταβλητῶν z καὶ $\bar{z}$. Ἄρα ἡ συνάρτηση f μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ ὡς συνάρτηση τῶν μεταβλητῶν z καὶ $\bar{z}$, ἀφοῦ αὐτὴ γράφεται ὡς

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

Ἔτσι, ἂν ἡ συνάρτηση f εἶναι παραγωγίσιμη σὲ ἕνα σημεῖο $z_0 = (x_0, y_0)$, τότε θὰ ἰσχύει

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|_{z=z_0} \\
&= u_x(x_0,y_0)\left.\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\right|_{z=z_0} + u_y(x_0,y_0)\left.\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right|_{z=z_0} + iv_x(x_0,y_0)\left.\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\right|_{z=z_0} + iv_y(x_0,y_0)\left.\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right|_{z=z_0} \\
&= \frac{1}{2}u_x(x_0,y_0) + i\frac{1}{2}u_y(x_0,y_0) + i\frac{1}{2}v_x(x_0,y_0) - \frac{1}{2}v_y(x_0,y_0) \\
&= \frac{1}{2}[u_x(x_0,y_0) - v_y(x_0,y_0)] + i\frac{1}{2}[u_y(x_0,y_0) + v_x(x_0,y_0)].
\end{aligned}$$

Ἔτσι προκύπτει ὅτι οἱ συνθῆκες Cauchy- Riemann ἰσοδυναμοῦν μὲ τὴ σχέση

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|_{z=z_0} = 0. \tag{4.3}$$

Ἄρα παίρνουμε τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα:

Πρόταση 4.2.6.3 *Ἂν ἡ συνάρτηση f ἔχει παράγωγο σὲ ἕνα σημεῖο z_0, τότε στὸ σημεῖο αὐτὸ θὰ ἐπαληθεύεται ἡ συνεπτυγμένη μορφὴ τῶν συνθηκῶν Cauchy-Riemann, δηλαδὴ ἡ σχέση (4.3).*

Ἡ σχέση (4.3) εἶναι μιὰ ἀναγκαία συνθήκη ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὶς συνθῆκες Cauchy-Riemann (4.2).

Πρόβλημα 4.2.6.2 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι δὲν ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου στὰ ὁποῖα ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$f(z) := \overline{z}$$

εἶναι παραγωγίσιμη.

Ἀπόδειξη: Τὸ συμπέρασμα προκύπτει ἀπὸ τὴ σχέση (4.3) καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta \overline{z}} = 1(\neq 0). \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 4.2.6.3 *Νὰ βρεθοῦν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου στὰ ὁποῖα ἡ συνάρτηση μὲ τύπο $f(z) := |z-2i|^2 + |z-1|^2$ παραγωγίζεται.*

Λύση: Γράφουμε τὸν τύπο τῆς συνάρτησης αὐτῆς στὴ μορφὴ

$$f(z) = (z-2i)(\overline{z}+2i) + (z-1)(\overline{z}-1).$$

Ἂν ὑπάρχει κάποιο σημεῖο $z = z_0$, ὅπου ἡ f παραγωγίζεται, θὰ πρέπει νὰ ἱκανοποιεῖται ἡ (τυπικὴ) ἐξίσωση

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta \overline{z}}\Big|_{z=z_0} = (z_0 - 2i) + (z_0 - 1) = 0.$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτὴ ἔχει λύση τὴν $z_0 := \frac{1}{2} + i$.

Στὴ συνέχεια, μὲ βάση τὸ πηλίκο διαφορῶν, ἐλέγχουμε ἂν στὸ σημεῖο z_0 ἡ δοθεῖσα συνάρτηση παραγωγίζεται.

Γιὰ τυχὸν σημεῖο $h \neq 0$ ἰσχύει

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \\
&= \frac{1}{h}[(z_0 + h - 2i)[\overline{(z_0+h)} + 2i] + (z_0 + h - 1)[\overline{(z_0+h)} - 1] \\
&\qquad - (z_0 - 2i)[\overline{z_0} + 2i] + (z_0 - 1)[\overline{z_0} - 1]] \\
&= \frac{1}{h}[|\frac{1}{2} + h - i)|^2 + |\frac{1}{2} - h - i|^2 - |\frac{1}{2} - i|^2 - |\frac{1}{2} - i|^2] = 2\overline{h}.
\end{aligned}$$

Ἔτσι, τὸ ὅριο τοῦ πηλίκου διαφορῶν στὸ σημεῖο 0 εἶναι ἴσο μὲ τὸ 0 κι ἑπομένως ἡ συνάρτηση f εἶναι παραγωγίσιμη μόνο στὸ σημεῖο $z_0 = \frac{1}{2} + i$.. ♦

Πρόβλημα 4.2.6.4 *Δίνεται ἡ συνάρτηση f μὲ τύπο*

$$f(z) := 1 + |z|^{2\lambda} + i(\mathrm{Re}(z))^{\lambda},$$

ὅπου λ εἶναι ἕνας μὴ μηδενικὸς πραγματικὸς ἀριθμός. Νὰ ἐξεταστεῖ, ἂν γιὰ τὶς διάφορες τιμὲς τοῦ λ, ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου στὰ ὁποῖα ἡ f εἶναι παραγωγίσιμη.

Λύση: Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση ὁρίζεται σὲ ὁλόκληρο τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο. Γιὰ νὰ ἐξετάσουμε τὴ διαφορισιμότητα τῆς f γράφουμε τὸν τύπο της στὴ μορφὴ

$$f(z) = 1 + z^{\lambda}(\bar{z})^{\lambda} + \frac{i}{2^{\lambda}}(z + \bar{z})^{\lambda}.$$

Κάθε σημεῖο z_0, στὸ ὁποῖο ἡ f παραγωγίζεται, θὰ ἱκανοποιεῖται ἡ ἐξίσωση

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \lambda z_0^{\lambda}(\overline{z_0})^{\lambda-1} + \lambda\frac{i}{2^{\lambda}}(z_0 + \overline{z_0})^{\lambda-1} = 0.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: $\lambda \neq 1$ καὶ $\lambda = 1$.

Περίπτωση $\lambda \neq 1$. Θέτουμε $z_0 := x + iy$, ὁπότε προκύπτει τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$x(x^2 + y^2)^{\lambda-1} = 0, \quad y(x^2 + y^2)^{\lambda-1} + \frac{1}{2}x^{\lambda-1} = 0.$$

Γιὰ κάθε $\lambda \neq 1$ ἔχουμε τὴ λύση $x = y = 0$, ἤτοι $z_0 = 0$. Ἔτσι μόνο στὸ σημεῖο $z_0 = 0$ μπορεῖ ἡ δοθεῖσα συνάρτηση νὰ παραγωγίζεται. Γιὰ νὰ βεβαιωθοῦμε γιὰ τὴν ὕπαρξη τῆς παραγώγου, παίρνουμε τὸ πηλίκο διαφορῶν

$$\frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \frac{|h|^{2\lambda} + i(\mathrm{Re}(h))^{\lambda}}{h}.$$

Ὑποθέτουμε ὅτι $0 < \lambda < 1$ καὶ θεωροῦμε ἕναν θετικὸ πραγματικὸ ἀριθμό $h = x$. Τότε, τὸ παραπάνω κλᾶσμα εἶναι ἴσο μὲ

$$x^{2\lambda-1} + ix^{\lambda-1},$$

τὸ ὁποῖο, προφανῶς, ὅταν x τείνει πρὸς τὸ 0, δὲν ἔχει ὅριο πραγματικὸ ἀριθμό. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, γιὰ κάθε $0 < \lambda < 1$, δὲν ὑπάρχει σημεῖο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου στὸ ὁποῖο παραγωγίζεται ἡ συνάρτηση f.

Ἔστω $\lambda > 1$. Τότε τὸ πηλίκο διαφορῶν τῆς f στὸ σημεῖο 0 ἔχει μέτρο μικρότερο ἢ ἴσο τοῦ

$$\frac{|h|^{2\lambda} + |h|^{\lambda}}{|h|} = |h|^{2\lambda-1} + |h|^{\lambda-1},$$

τὸ ὁποῖο τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν τὸ h τείνει πρὸς τὸ 0. Ἔτσι ἡ παράγωγος τῆς f ὑπάρχει μόνο στὸ σημεῖο 0 καὶ εἶναι ἴση μὲ τὸ 0.

Περίπτωση $\lambda = 1$. Τότε ἡ f γράφεται ὡς

$$f(z) = 1 + z\bar{z} + \frac{i}{2}(z + \bar{z}),$$

ὁπότε ἔχουμε

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|_{z=z_0} = z + \frac{i}{2},$$

ποσότητα ποὺ μηδενίζεται στὸ σημεῖο $z_0 = -\frac{i}{2}$. Στὸ σημεῖο αὐτὸ τὸ πηλίκο διαφορῶν τῆς f γίνεται

$$\frac{f(z) - f(-\frac{i}{2})}{z + \frac{i}{2}} = \frac{|z|^2 + \frac{i}{2}(z + \bar{z}) - \frac{1}{4}}{z + \frac{i}{2}} = \frac{(z + \frac{i}{2})(\bar{z} + \frac{i}{2})}{z + \frac{i}{2}} = \bar{z} + \frac{i}{2},$$

ποσότητα ἡ ὁποία τείνει πρὸς τὸ σημεῖο i ὅταν τὸ z τείνει πρὸς τὸ $-\frac{i}{2}$. Ἔτσι, στὴν περίπτωση ὅπου $\lambda = 1$, ἡ συνάρτηση f παραγωγίζεται μόνο στὸ σημεῖο $-\frac{i}{2}$ καὶ ἔχει παράγωγο σὲ αὐτὸ ἴση μὲ i. ♦

Πρόβλημα 4.2.6.5 *Νὰ ἐξεταστεῖ ἂν ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου στὰ ὁποῖα ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$f(z) := \frac{2|z|^2 + iz}{1 + |z|^2}$$

εἶναι παραγωγίσιμη καί, ἂν ναί, νὰ βρεθοῦν οἱ παράγωγοι σὲ αὐτά.

Λύση: Ἡ συνάρτηση αὐτὴ γράφεται ὡς

$$f(z) = 2 + i\frac{z+2i}{1+|z|^2} = 2 + i\frac{z+2i}{1+z\bar{z}}.$$

Ἔτσι ἡ μερικὴ παράγωγος τῆς f ὡς πρὸς $\bar{z}$ ἰσοῦται μὲ

$$f_{\bar{z}}(z) = -i\frac{z(z+2i)}{(1+|z|^2)^2}.$$

Αὐτὴ μηδενίζεται στὰ σημεῖα $z=0$ καὶ $z=-2i$.

Γιὰ τὸ σημεῖο 0 ἔχουμε $f(0)=2$, ὁπότε

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{2h\bar{h}+ih}{h(1+|h|^2)} = \frac{2\bar{h}+i}{1+|h|^2} \to i, \text{ ὅταν } h \to 0.$$

Γιὰ τὸ σημεῖο $-2i$ ἔχουμε $f(-2i)=2$, ὁπότε

$$\frac{f(z)-f(-2i)}{z+2i} = \frac{i(z+2i)}{(z+2i)(1+|z|^2)} = \frac{i}{1+|z|^2} \to \frac{i}{5}, \text{ ὅταν } z \to -2i.$$

Ἔτσι, ἀποδείξαμε ὅτι ἡ δοθεῖσα συνάρτηση παραγωγίζεται μόνο στὰ σημεῖα $0, -2i$ καὶ οἱ παράγωγοι σὲ αὐτὰ εἶναι ἴσες μὲ i καὶ $i/5$, ἀντίστοιχα. ♦

Πρόβλημα 4.2.6.6 *Νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνα σημεῖο z_0 στὸ ὁποῖο ἡ συνάρτηση*

$$f(z) := |z^4| + 2|z^2| + 4\bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}$$

παραγωγίζεται. Στὴ συνέχεια νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ παράγωγος στὸ z_0 εἶναι ἴση με -4.

Ἀπόδειξη: Ὁ τύπος τῆς συνάρτησης γράφεται ὡς

$$f(z) = z^2\bar{z}^2 + 2z\bar{z} + 4\bar{z}.$$

Ἂν ὑπάρχει σημεῖο $z_0 = x+iy$ στὸ ὁποῖο ἡ f παραγωγίζεται, τοῦτο θὰ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Ἰσοδύναμα θὰ ἰσχύει ὅτι

$$2z_0^2\overline{z_0} + 2z_0 + 4 = 0,$$

ἤ

$$2z_0|z_0|^2 + 2z_0 + 4 = 0.$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτὴ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὸ σύστημα

$$2x(x^2 + y^2) + 2x + 4 = 0 \;\; \text{καὶ} \;\; 2y(x^2 + y^2) + 2y = 0.$$

Ἀπὸ τὴ δεύτερη ἐξίσωση προκύπτει ἡ μοναδικὴ τιμὴ $y = 0$, ὁπότε ἡ πρώτη ἐξίσωση δίνει

$$x^3 + x + 2 = 0.$$

Παραγοντοποιῶντας τὴν παράσταση τοῦ πρώτου μέλους παίρνουμε

$$(x + 1)(x^2 - x + 2) = 0.$$

Ἔτσι προκύπτει ἡ ρίζα $x = -1$, ὁπότε τὸ μοναδικὸ σημεῖο στὸ ὁποῖο εἶναι πιθανὸν ἡ f νὰ παραγωγίζεται εἶναι τὸ σημεῖο $z_0 = -1$.

Ἐξετάζουμε ἂν τὸ ὅριο τοῦ πηλίκου διαφορῶν

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

ὑπάρχει καὶ εἶναι ἴσο μὲ -4, ὅταν ἡ μεταβλητὴ h τείνει πρὸς τὸ 0. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμε ὅτι $f(-1) = -1$ καὶ

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - (-4) \\
&= \frac{|h - 1|^4 + 2|h - 1|^2 + 4\overline{(h - 1)} - (-1) + 4h}{h} \\
&= \frac{(h - 1)^2\overline{(h - 1)}^2 + 2(h - 1)\overline{(h - 1)} + 4\overline{(h - 1)} - (-1) + 4h}{h} \\
&= \frac{(h^2 - 2h + 1)(\overline{h}^2 - 2\overline{h} + 1) + 2(h - 1)(\overline{h} - 1) + 4\overline{h} - 4 + 1 + 4h}{h} \\
&= \frac{h^2\overline{h}^2 - 2h^2\overline{h} - 2h\overline{h}^2 + 6h\overline{h} + \overline{h}^2 + h^2}{h} \\
&= h\overline{h}^2 - 2h\overline{h} - 2\overline{h}^2 + 6\overline{h} + \overline{h}\frac{\overline{h}}{h} + h,
\end{aligned}$$

τὸ ὁποῖο, πράγματι, τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν $h \to 0$. ♦

Πρόβλημα 4.2.6.7 *Δίνεται ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$f(z) := z - i\bar{z}[\mathrm{Im} z]^2 - |z|^2.$$

Νὰ βρεθεῖ ὁ φραγμένος τόπος ποὺ ἔχει σύνορο τὴν καμπύλη γ μὲ παραμετρικὴ παράσταση

$$z(t) := 2\cos(t) + i(1 - \sqrt{2}\sin(t)),\ t \in [0, 2\pi],$$

ὅπου ἡ f παραγωγίζεται καὶ νὰ βρεθεῖ ἡ παράγωγος στὰ σημεῖα αὐτά.

Λύση: Γράφουμε τὸν τύπο τῆς συνάρτησης στὴ μορφὴ

$$f(z) := z - i\bar{z}\Big[\frac{z - \bar{z}}{2i}\Big]^2 - z\bar{z},$$

τὴν παραγωγίζουμε ὡς πρὸς $\bar{z}$ καὶ τὴν ἐξισώνουμε μὲ τὸ 0. Ἔτσι προκύπτει ἡ ἐξίσωση

$$i(z - \bar{z})^2 - 2i\bar{z}(z - \bar{z}) - 4z = 0,$$

ἡ ὁποία, γιὰ $z = x + iy$, παίρνει τὴ μορφὴ

$$-2iy^2 + xy - x - iy = 0.$$

Αὐτὴ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ σύστημα

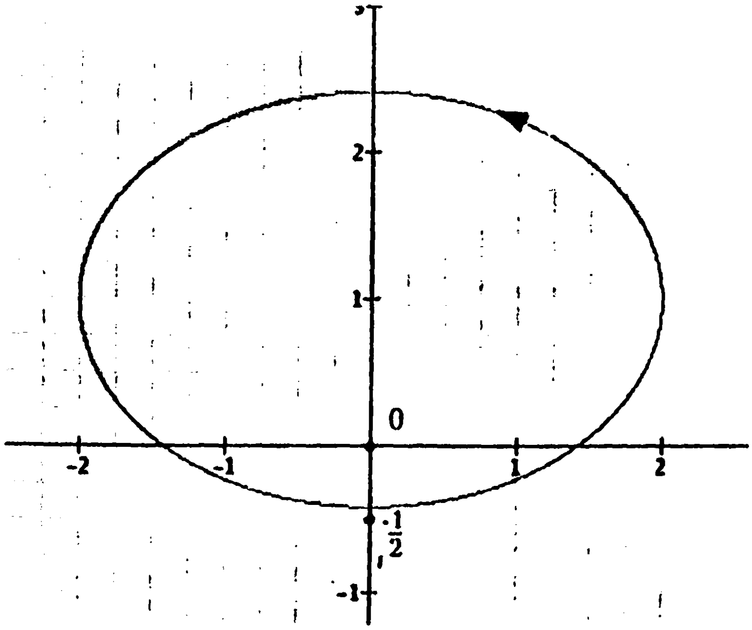
$$2y^2 + y = 0,\quad xy - x = 0,$$

τὸ ὁποῖο ἔχει λύσεις $(x, y) = (0, 0)$ και $(x, y) = (0, -1/2)$.

Γιὰ τὴ δοθεῖσα καμπύλη γ, παρατηροῦμε ὅτι, ἂν θέσουμε $x := 2\cos t$ καὶ $y := 1 - \sqrt{2}\sin t$, προκύπτει ἡ σχέση

$$S(x, y) := \Big(\frac{x}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\Big)^2 - 1 = 0,$$

πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι ἡ καμπύλη εἶναι ἡ θετικὰ προσανατολισμένη ἔλλειψη μὲ κέντρο τὸ σημεῖο $z = 0 + i = i$, x-ἀκτίνα ἴση μὲ 2 καὶ y-ἀκτίνα ἴση μὲ $\sqrt{2}$.



Τὸ σημεῖο $0 = (0, 0)$ κεῖται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς ἔλλειψης, γιατὶ ἰσχύει $S(0, 0) = \frac{-1}{2} < 0$, ἐνῶ τὸ σημεῖο $-\frac{i}{2} = (0, -1/2)$ κεῖται στὸ ἐξωτερικό της, ἀφοὺ ἰσχύει $S(0, -1/2) = \frac{1}{8} > 0$. Συνεπῶς πιθανὸ σημεῖο παραγώγισης εἶναι τὸ σημεῖο $z_0 = 0$.

Τὸ πηλίκο διαφορῶν τῆς συνάρτησης στὸ 0 εἶναι

$$\frac{z - i\bar{z}[\mathrm{Im} z]^2 - |z|^2}{z} = 1 - i(\mathrm{Im} z)^2\frac{\bar{z}}{z} - \bar{z},$$

τὸ ὁποῖο, ὅταν $z \to 0$, συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸ 1. Ἄρα τὸ μόνο σημεῖο τοῦ τόπου, ὅπου ἡ συνάρτηση παραγωγίζεται, εἶναι τὸ 0 καὶ ἡ παράγωγος σὲ αὐτό εἶναι ἴση μὲ 1. ♦

Ὅπως εἴδαμε παραπάνω, ἂν ἡ συνάρτηση f εἶναι παραγωγίσιμη σὲ κάθε σημεῖο ἑνὸς τόπου $\mathcal{T}$, τότε οἱ μερικὲς παράγωγοι τῆς f ὡς πρὸς τὶς πραγματικὲς μεταβλητὲς x, y ὑπάρχουν σὲ κάθε σημεῖο (x, y) τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου μὲ $z := x + iy \in \mathcal{T}$. Τότε οἱ συνθῆκες Cauchy-Riemann ἱκανοποιοῦνται σὲ κάθε τέτοιο σημεῖο. Τὸ ἀντίστροφο τοῦ γεγονότος αὐτοῦ μπορεῖ νὰ μὴν ἰσχύει, ὅπως δείχνεται στὸ παρακάτω πρόβλημα:

Πρόβλημα 4.2.6.8 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση*

$$f(z) := \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

παρ' ὅλο ποὺ στὸ σημεῖο 0 ἱκανοποιεῖ τὶς συνθῆκες Cauchy-Riemann δὲν εἶναι παραγωγίσιμη στὸ σημεῖο αὐτό.

Ἀπόδειξη: Τὸ πηλίκο διαφορῶν στὸ σημεῖο 0 εἶναι τὸ

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{\bar{z}^2}{z^2},$$

τὸ ὁποῖο, ὅπως εἴδαμε στὸ πρόβλημα 4.2.0.2, δὲν ἔχει ὅριο ὅταν $z \to 0$. Ὡστόσο θὰ ἐλέγξουμε ἂν οἱ συνθῆκες Cauchy-Riemann ἱκανοποιοῦνται. Πρὸς τοῦτο θέτουμε $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ὅπου ἔχουμε

$$u(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{καὶ} \quad v(x, y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2}.$$

Ἔτσι βρίσκουμε

$$u_x(0, 0) = 1, \quad u_y(0, 0) = 0, \quad v_x(0, 0) = 0, \quad v_y(0, 0) = 1,$$

πρᾶγμα ποὺ συνεπάγεται ὅτι οἱ συνθῆκες Cauchy-Riemann ἱκανοποιοῦνται. ♦

Ἡ περίπτωση ὅπου οἱ συνθῆκες Cauchy-Riemann μποροῦν νὰ ἐξασφαλίσουν τὴ διαφορισιμότητα μιᾶς συνάρτησης ἀναφέρεται στὸ ἑπόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 4.2.6.1 *Ὑποθέτουμε ὅτι*

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z \in \mathcal{T}$$

εἶναι μιὰ συνάρτηση τέτοια ὥστε οἱ μερικὲς παράγωγοι u_x, u_y, v_x, v_y νὰ ὑπάρχουν καὶ νὰ εἶναι συνεχεῖς σὲ ἕνα σημεῖο (x_0, y_0), ὅπου $z_0 := x_0 + iy_0 \in \mathcal{T}$. Ἂν οἱ συνθῆκες Cauchy-Riemann ἱκανοποιοῦνται στὸ σημεῖο z_0, τότε ἡ συνάρτηση f εἶναι διαφορίσιμη στὸ z_0.

Ἀπόδειξη. Ἐπιλέγουμε $r > 0$ ἔτσι ὥστε ὁ δίσκος $B(z_0, r)$ νὰ περιέχεται στὸν τόπο $\mathcal{T}$.

Ἔστω τυχὸν σημεῖο $h = s + it$, μὲ $0 < |s + it| < r$. Τότε τὸ σημεῖο $z_0 + h$ ἀνήκει στὸν δίσκο $B(z_0, r)$. Ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα μέσης τιμῆς γιὰ πραγματικὲς συναρτήσεις ἔχουμε

$$\begin{aligned}
&f(z_0 + h) - f(z_0) \\
&\quad = u(x_0 + s, y_0 + t) - u(x_0 + s, y_0) + u(x_0 + s, y_0) - u(x_0, y_0) \\
&\qquad + i[v(x_0 + s, y_0 + t) - v(x_0 + s, y_0) + v(x_0 + s, y_0) - v(x_0, y_0)] \\
&\quad = u_y(x_0 + s, y_0 + t_1)t + u_x(x_0 + s_1, y_0)s \\
&\qquad + i[v_y(x_0 + s, y_0 + t_2)t + v_x(x_0 + s_2, y_0)s]
\end{aligned}$$

ὅπου οἱ ἀριθμοὶ s_1, s_2, t_1, t_2 ἱκανοποιοῦν τὶς σχέσεις $|s_1|, |s_2| \leq |s|$ καὶ $|t_1|, |t_2| \leq |t|$.

Λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη τὶς συνθῆκες Cauchy-Riemann, τὸ δεύτερο μέλος γίνεται

$$\begin{aligned}
&u_y(x_0, y_0)t + [u_y(x_0 + s, y_0 + t_1) - u_y(x_0, y_0)]t \\
&\qquad + u_x(x_0, y_0)s + [u_x(x_0 + s_1, y_0) - u_x(x_0, y_0)]s \\
&\quad + i\big(v_y(x_0, y_0)t + [v_y(x_0 + s, y_0 + t_2) - v_y(x_0, y_0)]t \\
&\qquad + v_x(x_0, y_0)s + [v_x(x_0 + s_2, y_0) - v_x(x_0, y_0)]s\big) \\
&= f_y(x_0, y_0)t + f_x(x_0, y_0)s + R(s, t, s_1, s_2, t_1, t_2) \\
&= if_x(x_0, y_0)t + f_x(x_0, y_0)s + R(s, t, s_1, s_2, t_1, t_2) \\
&= f_x(x_0, y_0)h + R(s, t, s_1, s_2, t_1, t_2),
\end{aligned}$$

ὅπου ἡ συνάρτηση R ὁρίζεται μὲ τὸν τύπο

$$\begin{aligned}
R(s, t, s_1, s_2, t_1, t_2) = {} & [u_y(x_0 + s, y_0 + t_1) - u_y(x_0, y_0)]t \\
& + [u_x(x_0 + s_1, y_0) - u_x(x_0, y_0)]s \\
& + i[v_y(x_0 + s, y_0 + t_2) - v_y(x_0, y_0)]t \\
& + i[v_x(x_0 + s_2, y_0) - v_x(x_0, y_0)]s.
\end{aligned}$$

Ἡ ποσότητα αὐτὴ τείνει πρὸς τὸ σημεῖο 0, ὅταν $h \to 0$, λόγω τῆς συνέχειας τῶν μερικῶν παραγώγων u_x καὶ v_x στὸ σημεῖο (x_0, y_0). Ἄρα ἔχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h-0}-f_x(x_0,y_0)\right| &= \left|\frac{R(s,t,s_1,s_2,t_1,t_2)}{h}\right| \\ &\le |u_y(x_0+s,y_0+t_1)-u_y(x_0,y_0)|\left|\frac{t}{h}\right| \\ &+ |u_x(x_0+s_1,y_0)-u_x(x_0,y_0)|\left|\frac{s}{h}\right| \\ &+ |v_y(x_0+s,y_0+t_2)-v_y(x_0,y_0)|\left|\frac{t}{h}\right| \\ &+ |v_x(x_0+s_2,y_0)-v_x(x_0,y_0)|\left|\frac{s}{h}\right|.\end{aligned}$$

Ἐπειδὴ οἱ συναρτήσεις u_x, u_y, v_x, v_y εἶναι συνεχεῖς καὶ ἰσχύει

$$\left|\frac{t}{h}\right| \le 1, \quad \left|\frac{s}{h}\right| \le 1,$$

ἡ τελευταία ποσότητα τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν $h \to 0$. Τοῦτο ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα. ■

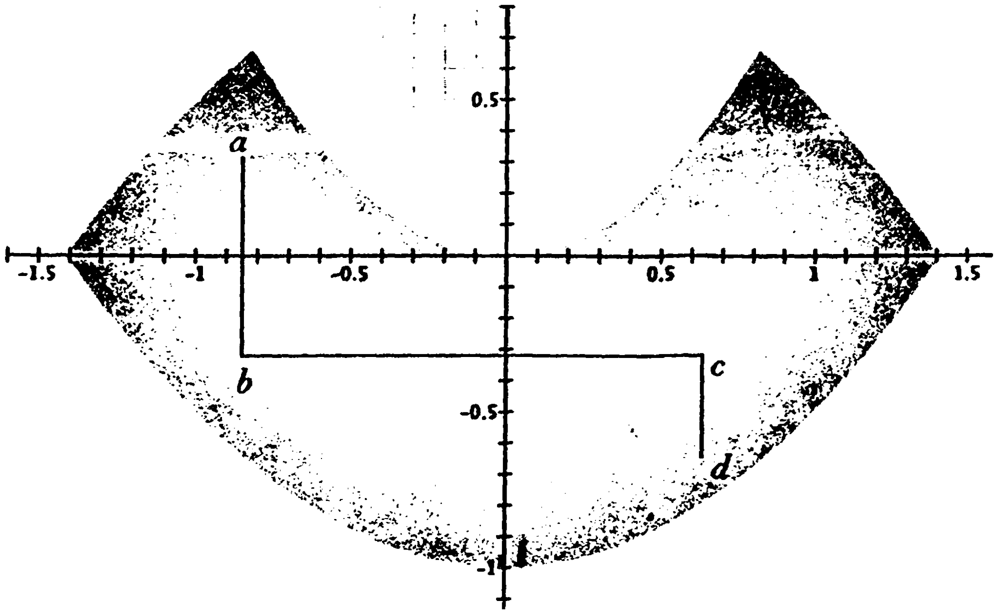
Πρόταση 4.2.6.4 *Ἂν $\mathcal{T}$ εἶναι ἕνας τόπος στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο καὶ $f(z), z \in \mathcal{T}$ εἶναι μιὰ ὁλόμορφη συνάρτηση τέτοια ὥστε $f'(z) = 0$, γιὰ κάθε $z \in \mathcal{T}$, τότε αὐτὴ εἶναι σταθερή.*

Ἀπόδειξη: Λόγω τῆς σχέσης $f'(z) = 0$, θὰ ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις

$$u_x(x,y) = u_y(x,y) = v_x(x,y) = v_y(x,y) = 0,$$

σὲ κάθε σημεῖο (x,y) μὲ $z = x+iy \in \mathcal{T}$. Ἄρα οἱ συναρτήσεις $u = u(x,y)$ καὶ $v = v(x,y)$ εἶναι σταθερὲς ὡς πρὸς x καὶ y. Μὲ ἄλλα λόγια οἱ συναρτήσεις u, v διατηροῦν σταθερὴ τιμὴ κατὰ μῆκος τῶν εὐθειῶν γραμμῶν τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου, ποὺ εἶναι ὁριζόντιες ἢ κατακόρυφες, δηλαδὴ κατὰ μῆκος εὐθειῶν ποὺ εἶναι παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες.

Ἐπειδὴ ὁ τόπος εἶναι ἕνα ἀνοικτὸ καὶ συνεκτικὸ σύνολο, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 2.1.2.2, κάθε δύο σημεῖα a καὶ d τοῦ τόπου μποροῦν νὰ ἑνωθοῦν μεταξύ τους μὲ μιὰ πολυγωνικὴ γραμμὴ ποὺ ἔχει πλευρὲς παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες. Κατὰ μῆκος κάθε ὁριζόντιας καὶ κατακόρυφης πλευρᾶς ἡ συνάρτηση f διατηρεῖ σταθερὴ τιμή. Ἑπομένως ἰσχύει $f(a) = f(d)$, δηλαδή, ἡ f εἶναι σταθερὴ συνάρτηση. ■



Σχήμα 4.5: *Κάθε δύο σημεῖα τοῦ τόπου συνδέονται μεταξύ τους μὲ πολυγωνικὴ καμπύλη ποὺ ἔχει πλευρὲς παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες.*

4.2.7 Ἁρμονικὲς συναρτήσεις

Ἀπὸ μαθήματα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ εἶναι γνωστὴ ἡ ἔννοια τῆς ἁρμονικῆς συνάρτησης. Ἐδῶ θὰ δοῦμε τὴ σχέση ποὺ ἔχουν οἱ ἁρμονικὲς πραγματικὲς συναρτήσεις μὲ τὶς ὁλόμορφες συναρτήσεις.

Ὁρισμός 4.2.7.1 *Μιὰ συνάρτηση ϕ (x, y) ὁρισμένη σὲ ἕναν τόπο T τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου λέγεται* ἁρμονική, *ἂν αὐτὴ ἔχει συνεχεῖς μερικὲς παραγώγους δεύτερης τάξης καὶ ἱκανοποιεῖ τὴν* **ἐξίσωση Laplace**

$$\Delta\phi := \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0.$$

Ὁ τελεστὴς Δ λέγεται **τελεστὴς Laplace** .

Πρόβλημα 4.2.7.1 *Νὰ προσδιοριστοῦν ὅλες οἱ διαφορίσιμες πραγματικὲς συναρτήσεις ψ πραγματικῆς μεταβλητῆς γιὰ τὶς ὁποῖες ἡ πραγματικὴ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$u(x, y) := \psi(x^2 - y^2)$$

είναι άρμονική.

Λύση: Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμε τὸ γεγονὸς ὅτι, ἐπειδὴ ἡ συνάρτηση u εἶναι ἁρμονική, θὰ πρέπει νὰ ἱκανοποιεῖ τὴν ἐξίσωση τοῦ Laplace, δηλαδὴ

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

Θέτουμε

$$s := x^2 - y^2,$$

ὁπότε ἔχουμε $u = \psi(s)$, ὅπου s εἶναι συνάρτηση τῶν x, y. Ἐφαρμόζοντας τὸν γνωστὸ κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης βρίσκουμε

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \psi'(s)\frac{\partial s}{\partial x} = 2x\psi'(s), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \psi'(s)\frac{\partial s}{\partial y} = -2y\psi'(s),$$

καὶ ἀκόμα

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = 2\psi'(s) + 2x\psi''(s)\frac{\partial s}{\partial x} = 2\psi'(s) + 4x^2\psi''(s),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -2\psi'(s) - 2y\psi''(s)\frac{\partial s}{\partial y} = -2\psi'(s) + 4y^2\psi''(s).$$

Ἄρα

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} &= 2\psi'(s) + 4x^2\psi''(s) - 2\psi'(s) + 4y^2\psi''(s) \\ &= 4(x^2 + y^2)\psi''(s) = 0,\end{aligned} \tag{4.4}$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτει ὅτι $\psi''(s) = 0$. Ἡ γενικὴ λύση αὐτῆς τῆς διαφορικῆς ἐξίσωσης εἶναι ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$\psi(s) = a + \beta s,$$

ὅπου a καὶ β εἶναι τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί. ♦

Ἄν μιὰ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := u(x,y) + iv(x,y)$$

εἶναι ὁλόμορφη στὸν τόπο $\mathcal{T}$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, τότε στὸν τόπο[1]

$$T := \{(x, y) : x + iy \in \mathcal{T}\}$$

τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου ἱκανοποιοῦνται οἱ συνθῆκες ὁλομορφίας Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Ὑποθέτοντας, πρὸς τὸ παρόν, ὅτι οἱ δεύτερης τάξης παράγωγοι τῶν u, v ὑπάρχουν καὶ εἶναι συνεχεῖς[2] προκύπτει ὅτι

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy}, \quad u_{yy} = -v_{xy},$$

ὁπότε

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Παρόμοια βρίσκουμε καὶ ὅτι

$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Ἑπομένως οἱ δύο συναρτήσεις $u(x, y)$ καὶ $v(x, y)$ εἶναι ἁρμονικὲς στὸν T.

Σημειώνεται ὅτι, ἂν δίνονται δυὸ ἁρμονικὲς συναρτήσεις $u(x, y)$ καὶ $v(x, y)$, τότε ἡ συνάρτηση $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$ μπορεῖ νὰ μὴν εἶναι ὁλόμορφη. Ὅμως συμβαίνει τὸ ἑξῆς:

Πρόταση 4.2.7.1 *Ὅταν ἡ συνάρτηση $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$ εἶναι ὁλόμορφη, τότε οἱ συναρτήσεις $u(x, y)$ καὶ $v(x, y)$, εἶναι ἁρμονικὲς καὶ ἱκανοποιοῦν τὶς συνθῆκες Cauchy -Riemann.*

Δυὸ ἁρμονικὲς συναρτήσεις u, v ποὺ ἱκανοποιοῦν τὶς συνθῆκες Cauchy - Riemann λέγονται **συζυγεῖς ἁρμονικές συναρτήσεις**.

Ἡ διάταξη στὸ ζεῦγος (u, v) εἶναι οὐσιαστική. Μάλιστα δέ, εἶναι εὔκολο νὰ δείξουμε ὅτι ἂν ἡ συνάρτηση $f = u + iv$ εἶναι ὁλόμορφη, τότε καὶ ἡ συνάρτηση $v + iu$ εἶναι, ἐπίσης, ὁλόμορφη, μόνο ὅταν ἡ συνάρτηση f εἶναι σταθερή[3].

---

[1]Τὰ δύο σύμβολα T καὶ $\mathcal{T}$, ἄρα καὶ τὰ σύνολα ποὺ παριστάνουν, εἶναι διαφορετικά!

[2]Ἀργότερα θὰ δοῦμε ὅτι οἱ ὁλόμορφες συναρτήσεις ἔχουν παραγώγους κάθε τάξης, ὁπότε ἡ ἰδιότητα τῆς συνέχειας εξασφαλίζεται ἀπὸ τὴν ὕπαρξη τῆς παραγώγου δεύτερης τάξης.

[3]Νὰ ληφθεῖ ὡς ἄσκηση.

Πρόβλημα 4.2.7.2 *Νὰ βρεθεῖ μιὰ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ποὺ πρέπει νὰ πληροῦν οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ c καὶ b ὥστε ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$f(z) := f(x+iy) = cx^3 + bx^2y + ibxy^2 - icy^3$$

νὰ εἶναι ἀκεραία.

Λύση: Θέτουμε $c =: a + ia'$ και $b =: \beta + i\beta'$. Τότε ἡ συνάρτηση γράφεται ὡς

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

ὅπου οἱ συναρτήσεις u, v ὁρίζονται ἀπό τοὺς τύπους

$$u(x,y) := ax^3 + \beta x^2 y - \beta' xy^2 + a'y^3$$

καὶ

$$v(x,y) := a'x^3 + \beta' x^2 y + \beta xy^2 - ay^3$$

Τότε οἱ συνθῆκες Cauchy-Riemann θὰ ἰσχύουν γιὰ κάθε x, y, δηλαδή θὰ ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$3ax^2 + 2\beta xy - \beta' y^2 = \beta' x^2 + 2\beta xy - 3ay^2$$

καὶ

$$\beta x^2 - 2\beta' xy + 3a'y^2 = -3a'x^2 - 2\beta' xy - \beta y^2$$

γιὰ κάθε x καὶ y. Τοῦτο συνεπάγεται ὅτι

$$3a = \beta' \text{ καὶ } \beta = -3a'.$$

Ἔτσι βρίσκουμε

$$b = \beta + i\beta' = -3a' + i3a = 3i(a + ia') = 3ic,$$

συνθήκη ἡ ὁποία εἶναι ἀναγκαία γιὰ τὴν παραγώγιση τῆς f.

Ἐπίσης, ἡ συνθήκη αὐτὴ εἶναι καὶ ἱκανή, ἀφοῦ, οἱ μερικὲς παράγωγοι τῶν συναρτήσεων u καὶ v, ὡς πολυωνυμικές, εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις καὶ ἄν αὐτή ἰσχύει, τότε ἰσχύουν οἱ συνθῆκες Cauchy - Riemann. ♦

Πρόβλημα 4.2.7.3 *Νὰ ἐξεταστεῖ ἄν ὑπάρχει καί, ἄν ναί, νὰ βρεθεῖ ὁλόμορφη μιγαδικὴ συνάρτηση f τῆς ὁποίας τὸ φανταστικὸ μέρος εἶναι ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$v(x,y) := 3x^2y - y^3 + y$$

καὶ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση $f(-i) + f(i) = 2$.

Ἀπόδειξη: Ἂν ἡ συνάρτηση v εἶναι τὸ φανταστικὸ μέρος κάποιας ὁλόμορφης συνάρτησης f, θὰ πρέπει αὐτὴ νὰ εἶναι ἁρμονική. Γιὰ νὰ ἐξετάσουμε τοῦτο παρατηροῦμε ὅτι

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = 6y - 6y = 0,$$

ὁπότε, πράγματι, ἡ συνάρτηση v εἶναι ἁρμονική. Ἄρα ὑπάρχει ὁλόμορφη συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Τώρα, ἀπὸ τὶς συνθῆκες Cauchy-Riemann ἔχουμε

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 1,$$

ὁπότε προκύπτει

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x + \eta(y),$$

ὅπου η εἶναι μιὰ πραγματικὴ συνάρτηση παραγωγίσιμη παντοῦ. Ἀπὸ αὐτὴ τὴ σχέση ἔχουμε

$$u_y(x,y) = -6xy + \eta'(y),$$

ἐνῶ γνωρίζουμε ὅτι καὶ

$$v_x(x,y) = 6xy.$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὶς συνθῆκες Cauchy-Riemann ἔχουμε $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$, ὁπότε πρέπει $\eta'(y) = 0$, δηλαδὴ $\eta(y) = \beta$, σταθερὸς ἀριθμός. Ἑπομένως ὁ γενικὸς τύπος τῆς συνάρτησης f εἶναι ὁ

$$\begin{aligned} f(z) &= x^3 - 3xy^2 + x + i(3x^2y - y^3 + y) + \beta \\ &= x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 + x + iy + \beta = z^3 + z + \beta. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἰσχύει ἡ σχέση $f(-i) + f(i) = 2$, δηλαδὴ

$$(-i)^3 + (-i) + \beta + i^3 + i + \beta = 2,$$

θὰ πρέπει νὰ ἔχουμε $\beta = 1$. Ἄρα ἡ ζητούμενη ὁλόμορφη συνάρτηση ἔχει τύπο $f(z) = z^3 + z + 1$. ♦

4.3 ΣΥΜΜΟΡΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἔστω f μιὰ συνάρτηση, ἡ ὁποία εἶναι ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν τόπο. Ἂν γιὰ κάποιο σημεῖο a, ἡ f ἱκανοποιεῖ τὴ συνθήκη

$$f'(a)) \neq 0,$$

τότε αὐτὴ διατηρεῖ τὴ γωνία μεταξὺ δύο καμπυλῶν ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖο a. Γιὰ νὰ γίνουμε πιὸ ἀκριβεῖς, δίνουμε, πρῶτα, τὸν ἑξῆς ὁρισμό:

Ὁρισμός 4.3.0.2 *Μιὰ συνάρτηση $f : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ λέγεται σύμμορφη σὲ ἕνα σημεῖο a τοῦ τόπου $\mathcal{T}$, ἂν ὑπάρχουν πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $r > 0$ καὶ $\theta \in [0, 2\pi)$, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα:*

Γιὰ κάθε διαφορίσιμη καμπύλη γ στὸν τόπο $\mathcal{T}$ μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z(t)$, $t \in [0,1]$, τέτοια ὥστε $z'(0) \neq 0$ καὶ $z(0) = a$, ἰσχύει

$$|(f \circ z)'(0)| = r|z'(0)|$$

καὶ

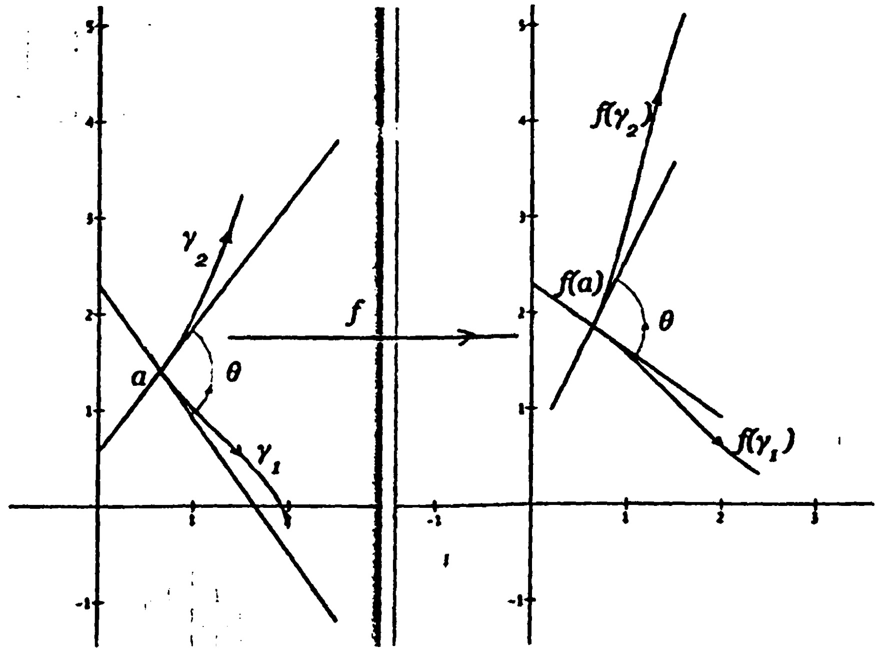
$$\arg((f \circ z)'(0)) = \theta + \arg(z'(0)).$$

Θεωροῦμε δύο διαφορίσιμες καμπῦλες γ_1 καὶ γ_2 στὸν τόπο $\mathcal{T}$ οἱ ὁποῖες ἔχουν παραστάσεις $z_1(t)$, $t \in [0,1]$ καὶ $z_2(t)$, $t \in [0,1]$ ἀντίστοιχα, καὶ εἶναι τέτοιες ὥστε νὰ ἰσχύει

$$z_1(0) = z_2(0) =: a \text{ καὶ } z_1'(0)z_2'(0) \neq 0.$$

Ἂν ἡ συνάρτηση f εἶναι σύμμορφη στὸ σημεῖο a, τότε αὐτὴ διατηρεῖ τὶς γωνίες τῶν (ἐφαπτόμενων εὐθειῶν τῶν) καμπυλῶν στὸ σημεῖο αὐτό. (Βλέπε σχῆμα.) Πραγματικά, ἀπὸ τὸν παραπάνω ὁρισμό, προκύπτει ὅτι ἰσχύει

$$\arg((f \circ z_2)'(0)) - \arg((f \circ z_1)'(0)) = \arg(z_2'(0)) - \arg(z_1'(0)).$$



Σχήμα 4.6: *Μιὰ σύμμορφη ἀπεικόνιση διατηρεῖ τὶς γωνίες τεμνόμενων καμπυλῶν.*

Θεώρημα 4.3.0.1 *Δίνεται μιὰ συνάρτηση* $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$: $z = x + iy \in \mathcal{T}$ *καὶ ἕνα σημεῖο* $a := x_0 + iy_0 \in \mathcal{T}$, *τέτοια ὥστε οἱ μερικὲς παράγωγοι τῶν συναρτήσεων* u *καὶ* v *νὰ ὑπάρχουν στὸ σημεῖο* (x_0, y_0) *καὶ νὰ εἶναι συνεχεῖς σὲ αὐτό. Τότε, ἡ συνάρτηση* f *εἶναι σύμμορφη στὸ σημεῖο* a, *ἂν καὶ μόνο ἂν ἡ τιμὴ* $f'(a)$ *ὑπάρχει καὶ εἶναι μὴ μηδενική.*

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι σύμμορφη στὸ σημεῖο $a = x_0 + iy_0$.

Θεωροῦμε ἕναν πραγματικὸ ἀριθμὸ $\rho > 0$ τέτοιον ὥστε ὁ δίσκος $B(a,\rho)$ νὰ περιέχεται στὸν τόπο $\mathcal{T}$. Τότε, ἡ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση

$$z_1(t) = a + \rho t = (x_0 + \rho t) + iy_0, \quad t \in [0,1],$$

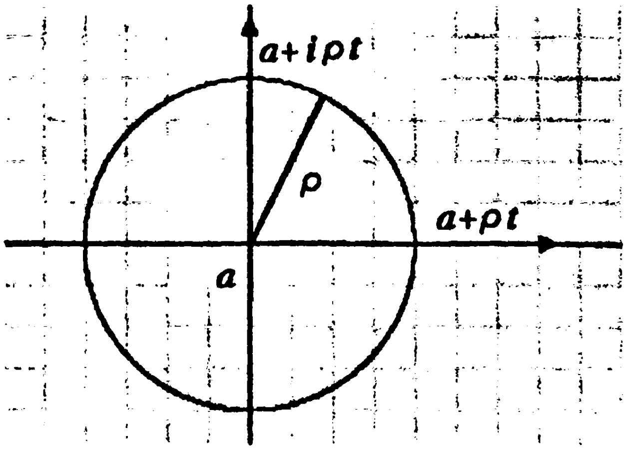
ἀνήκει στὸν τόπο καὶ ἱκανοποιεῖ τὶς σχέσεις:

$$z_1(0) = a, \quad z_1'(0) = \rho,$$

$$(f \circ z_1)(t) = u(x_0 + \rho t, y_0) + iv(x_0 + \rho t, y_0).$$

Ἄρα ἰσχύει

$$(f \circ z_1)'(0) = \rho u_x(x_0, y_0) + i\rho v_x(x_0, y_0).$$



Ἐπίσης, παρατηροῦμε ὅτι ἡ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z_2(t) = a + i\rho t$, $t \in [0, 1]$ ἀνήκει στὸν τόπο $\mathcal{T}$ καὶ ἱκανοποιεῖ τὶς σχέσεις

$$z_2(0) = a, \quad z_2'(0) = i\rho,$$

$$(f \circ z_2)'(0) = \rho u_y(x_0, y_0) + i\rho v_y(x_0, y_0).$$

Ἐπειδή, ὅμως, ἰσχύει

$$\arg(z_1'(0)) - \arg(z_2'(0)) = \arg(\rho) - \arg(i\rho) = -\pi/2,$$

θὰ πρέπει, λόγω τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι σύμμορφη στὸ σημεῖο a, νὰ ἰσχύει καὶ

$$\arg(f \circ z_1)'(0) - \arg(f \circ z_2)'(0) = -\pi/2,$$

ὁπότε

$$\arg(f \circ z_1)'(0) = \arg(f \circ z_2)'(0) - \pi/2.$$

Ἐπίσης, ἐπειδὴ ἡ συνάρτηση f εἶναι σύμμορφη, ὑπάρχει ἕνα $r > 0$ τέτοιο ὥστε

$$|(f \circ z_1)'(0)| = r|z_1'(0)| = r\rho = r|z_2'(0)| = |(f \circ z_2)'(0)|.$$

Ἑπομένως θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει

$$\begin{aligned}(f \circ z_1)'(0) &= |(f \circ z_1)'(0)| e^{i \arg(f \circ z_1)'(0)} \\ &= |(f \circ z_2)'(0)| e^{i \arg(f \circ z_2)'(0) - i\pi/2} \\ &= -i|(f \circ z_2)'(0)| e^{i \arg(f \circ z_2)'(0)} = -i(f \circ z_2)'(0).\end{aligned}$$

Ἀπὸ τὶς δύο αὐτὲς σχέσεις παίρνουμε τὴν ἰσότητα

$$\rho u_x(x_0, y_0) + i\rho v_x(x_0, y_0) = -i\rho u_y(x_0, y_0) + \rho v_y(x_0, y_0)).$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή, προφανῶς, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὶς συνθῆκες Cauchy-Riemann. Τώρα, τὸ συμπέρασμα ἕπεται ἀπὸ τὸ Θεώρημα 4.2.6.1.

Ἀντίστροφα. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ τιμὴ $f'(a)$ ὑπάρχει καὶ ἰσχύει

$$|f'(a)| =: r > 0.$$

Θέτουμε

$$\theta := \arg(f'(a)).$$

Τότε, γιὰ κάθε διαφορίσιμη καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z(t)$, $t \in [0, 1]$ καὶ $z(0) = a$, ἰσχύει

$$(f \circ z)'(0) = f'(a) z'(0),$$

ὁπότε προκύπτει ὅτι

$$|(f \circ z)'(0)| = r|z'(0)| \text{ και } \arg(f \circ z)'(0) = \theta + \arg(z'(0)).$$

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι πλήρης. ■

4.4 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

4.4.1 Ἀκολουθίες

Ἔστω $f_0, f_1, f_2, \cdots$ μιὰ ἀκολουθία μιγαδικῶν συναρτήσεων ὁρισμένων σὲ ἕνα σύνολο A. Ἡ ἀκολουθία αὐτὴ **συγκλίνει κατὰ σημεῖο πρὸς μιὰ συνάρτηση** f, καὶ γράφουμε

$$f_n \to f(\sigma\eta\mu.),$$

ὅταν, γιὰ κάθε $z \in A$, ἡ ἀκολουθία τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

$$f_0(z),\ f_1(z),\ f_2(z),\ \cdots$$

συγκλίνει πρὸς τὸν μιγαδικὸ ἀριθμὸ $f(z)$. Δηλαδὴ ἰσχύει $f_n \to f$(σημ.), ὅταν

$$(\forall z \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Ἡ ἀκολουθία αὐτὴ **συγκλίνει ὁμοιόμορφα πρὸς μιὰ συνάρτηση** f, καὶ γράφουμε ἁπλὰ

$$f_n \to f,$$

ὅταν

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall z \in A)(\forall n \geq n_0)|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι, ἂν μιὰ ἀκολουθία συγκλίνει ὁμοιόμορφα πρὸς μιὰ συνάρτηση, τότε αὐτὴ συγκλίνει καὶ κατὰ σημεῖο πρὸς τὴ συνάρτηση αὐτή. Τὸ ἀντίστροφο μπορεῖ νὰ μὴ συμβαίνει, ὅπως δείχνεται στὸ ἑπόμενο πρόβλημα:

Πρόβλημα 4.4.1.1 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων*

$$f_n(z) := z^n,\ |z| < 1$$

συγκλίνει κατὰ σημεῖο πρὸς τὴ συνάρτηση $f(z) := 0,\ |z| < 1$, *ἀλλὰ δὲν συγκλίνει ὁμοιόμορφα.*

Ἀπόδειξη: Γιὰ κάθε σταθερὸ σημεῖο z μὲ $|z| < 1$ ἡ ἀκολουθία (z^n) συγκλίνει πρὸς τὸ 0, βλέπε καὶ Πρόβλημα 2.2.1.1. Ἄρα ἔχουμε $f_n \to 0$(σημ.).

Ἂν ἡ (f_n) συγκλίνει ὁμοιόμορφα, θὰ συγκλίνει πρὸς τὴ μηδενικὴ συνάρτηση. Ἔτσι, γιὰ κάθε $\varepsilon > 0$, μὲ $\varepsilon < 1$, ὑπάρχει n_0, τέτοιο ὥστε γιὰ κάθε $n \geq n_0$, νὰ ἰσχύει $|z^n| < \varepsilon$ γιὰ κάθε z μὲ $|z| < 1$. Ὅμως βλέπουμε ὅτι, γιὰ τὸ σημεῖο $z := \varepsilon^{1/(n_0+1)}i$, ἰσχύει $|z| < 1$ καὶ $|z^{n_0}| = \varepsilon^{n_0/(n_0+1)} > \varepsilon$, πρᾶγμα ἄτοπο. Ἑπομένως ἡ ἀκολουθία δὲν συγκλίνει ὁμοιόμορφα. ♦

Ὅλες οἱ ἰδιότητες ποὺ ἰσχύουν γιὰ ἀκολουθίες πραγματικῶν συναρτήσεων ἐξακολουθοῦν νὰ ἰσχύουν καὶ γιὰ τὴν περίπτωση τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων. Ἐνδεικτικὰ ἀναφέρουμε τὸ ἀκόλουθο βασικὸ συμπέρασμα:

Πρόταση 4.4.1.1 *Ἄν οἱ ὅροι μιᾶς ἀκολουθίας συναρτήσεων f_n, $n = 1, 2, \cdots$ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις, καὶ ἡ ἀκολουθία συγκλίνει ὁμοιόμορφα πρὸς μιὰ συνάρτηση f, τότε καὶ ἡ f εἶναι συνεχὴς συνάρτηση.*

4.4.2 Σειρὲς

Ἄν δοθεῖ μιὰ ἀκολουθία μιγαδικῶν συναρτήσεων $f_0, f_1, f_2, \cdots$ ὁρισμένων σὲ ἕνα σύνολο A τὸ τυπικὸ ἄθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots$$

ὀνομάζεται **σειρὰ** τῶν συναρτήσεων αὐτῶν. Ἡ σειρὰ **συγκλίνει κατὰ σημεῖο** (ἀντίστοιχα, **ὁμοιόμορφα**), ἄν ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων

$$s_n(z) := f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

συγκλίνει κατὰ σημεῖο (ἀντίστοιχα, ὁμοιόμορφα). Ἐπειδὴ τὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι πλήρης χῶρος, ἡ ἀκολουθία (s_n) συγκλίνει ἄν καὶ μόνο ἄν αὐτὴ εἶναι βασική. Τοῦτο συνεπάγεται ὅτι ἡ σειρὰ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ συγκλίνει κατὰ σημεῖο, ὅταν

$$(\forall z \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geq n_0 \implies |s_{n+k}(z) - s_n(z)| < \varepsilon,$$

ἐνῶ συγκλίνει ὁμοιόμορφα, ὅταν

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall z \in A)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geq n_0 \implies |s_{n+k}(z) - s_n(z)| < \varepsilon.$$

Ἑπομένως ἡ σειρὰ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ συγκλίνει κατὰ σημεῖο, ὅταν

$$(\forall z \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geq n_0 \implies |\sum_{m=1}^{k} f_{n+m}(z)| < \varepsilon,$$

ἐνῶ συγκλίνει ὁμοιόμορφα, ὅταν

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall z \in A)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geq n_0 \implies |\sum_{m=1}^{k} f_{n+m}(z)| < \varepsilon.$$

Χρησιμοποιῶντας τοὺς παραπάνω ὁρισμοὺς παίρνουμε εὔκολα τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα:

Θεώρημα 4.4.2.1 *(M-Κριτήριο Weierstrass) Δίνεται μιὰ ἀκολουθία (M_n) θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τέτοια ὥστε ἡ σειρὰ $\sum M_n$ νὰ συγκλίνει. Ὑποθέτουμε ὅτι $f_n : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \cdots$ εἶναι μιὰ ἀκολουθία μιγαδικῶν συναρτήσεων, ὅπου $\mathcal{T}$ εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, τέτοια ὥστε*

$$\sup_{z\in\mathcal{T}} |f_n(z)| \leq M_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Τότε ἡ σειρὰ $\sum f_n(z)$ συγκλίνει ἀπόλυτα καὶ ὁμοιόμορφα.

Τὸ ἄθροισμα δύο σειρῶν

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad \text{καὶ} \quad \sum_{n=0}^{\infty} g_n,$$

ὅπου οἱ συναρτήσεις $f_0, f_1, \cdots, g_0, g_1, \cdots$ ἔχουν τὸ ἴδιο πεδίο ὁρισμοῦ, εἶναι ἡ σειρὰ

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n).$$

Εἶναι εὔκολο νὰ ἀποδείξουμε ὅτι, ἂν οἱ δύο σειρὲς συγκλίνουν κατὰ σημεῖο (ἀντίστοιχα, ὁμοιόμορφα), τότε τὸ ἄθροισμά τους ἐπίσης συγκλίνει κατὰ σημεῖο (ἀντίστοιχα, ὁμοιόμορφα).

4.4.3 Δυναμοσειρὲς

Θεωροῦμε ἕνα σημεῖο a καὶ μιὰ ἀκολουθία $a_0, a_1, \cdots$ μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἡ δυναμοσειρὰ μὲ κέντρο τὸ σημεῖο a καὶ συντελεστὲς τοὺς ἀριθμοὺς $a_0, a_1, \cdots$ εἶναι ἡ σειρὰ

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n.$$

Ἐνδιαφερόμαστε γιὰ τὶς τιμὲς τῆς μεταβλητῆς z γιὰ τὶς ὁποῖες ἡ σειρὰ αὐτὴ συγκλίνει. Ἀλλά, πρῶτα δίνουμε τὸ ἑξῆς παράδειγμα:

Γιὰ κάθε $z \neq 0$ ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $1+z+\cdots+z^n =: s_n$ ἔχει ἄθροισμα

$$\frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Ἑπομένως, ἂν ἰσχύει $|z| < 1$, τότε ἡ γεωμετρικὴ σειρὰ $\sum z^n$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸ $1/(1-z)$. Ὡστόσο, γιὰ κάθε z μὲ $|z| > 1$, αὐτὴ δὲν συγκλίνει. Πραγματικά, ἂν τοῦτο συνέβαινε, γιὰ κάποιο z μὲ $|z| > 1$, θὰ ἔπρεπε ἡ ἀκολουθία (s_n), ὡς συγκλίνουσα, νὰ εἶναι φραγμένη. Ἐπειδή, ὅμως, γιὰ κάθε σταθερὸ z, ἰσχύει

$$|z^{n+1}| \leq 1 + |1-z||s_n|, \text{ γιὰ κάθε δείκτη } n,$$

ἡ ἀκολουθία (z^{n+1}) εἶναι φραγμένη. Προφανῶς, τοῦτο, σημαίνει ὅτι ἡ ἀνισότητα $|z| > 1$ δὲν μπορεῖ νὰ ἰσχύει.

Γενικεύοντας τὸ παραπάνω συμπέρασμα παίρνουμε τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα (τῶν Cauchy, Hadamard):

Θεώρημα 4.4.3.1 *Ἡ δυναμοσειρὰ $\sum a_n(z-a)^n$ συγκλίνει στὸν ἀνοικτὸ δίσκο $B(a,R)$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου μὲ κέντρο τὸ σημεῖο a καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴ λεγόμενη* ***ἀκτῖνα σύγκλισης****, δηλαδὴ τὴν ποσότητα*

$$R := \begin{cases} \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ἄν } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 0, \\ +\infty, & \text{ἄν } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Ἀπόδειξη: Θέτουμε

$$b_n := a_n(z-a)^n.$$

Σύμφωνα μὲ τὴν Πρόταση 2.2.2.6, ὅταν ἡ ποσότητα $L := \limsup \sqrt[n]{|b_n|}$ εἶναι μικρότερη τῆς μονάδας, ἡ σειρὰ $\sum |b_n|$ συγκλίνει, ἄρα καὶ ἡ ἀρχικὴ σειρὰ συγκλίνει. Δηλαδὴ αὐτὴ συγκλίνει ὅταν ἱκανοποιεῖται ἡ σχέση

$$1 > \limsup \sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|} = |z-a| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} =: |z-a|\frac{1}{R},$$

ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτῖνα σύγκλισης. Ἄρα ἡ σειρὰ συγκλίνει ὅταν $|z-a| < R$, δηλαδὴ ὅταν $z \in B(a,R)$. ■

Ὁ δίσκος $B(a,R)$ ποὺ δίνεται στὸ προηγούμενο συμπέρασμα ὀνομάζεται **δίσκος σύγκλισης** τῆς δυναμοσειρᾶς.

Πρόταση 4.4.3.1 *Ὅταν τὸ ὅριο τῆς ἀκολουθίας μὲ ὅρους*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

ὑπάρχει, τότε καὶ τὸ ὅριο τῆς ἀκολουθίας

$$(\sqrt[n]{|a_n|})$$

ὑπάρχει, καὶ τὰ ὅρια αὐτὰ εἶναι ἴσα. Ἄρα, τότε, ἡ ἀκτῖνα σύγκλισης R μπορεῖ νὰ δοθεῖ καὶ ἀπ' τὸν τύπο

$$R := \lim \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Ἀπόδειξη: Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὸ γνωστὸ γεγονὸς ὅτι γιὰ κάθε ἀκολουθία θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x_n, $n = 1, 2, \cdots$, ἰσχύει ἡ ἀνισότητα

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Πρόβλημα 4.4.3.1 *Νὰ ὑπολογιστεῖ ἡ ἀκτίνα σύγκλισης τῆς δυναμοσειρᾶς*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n} z^n.$$

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι οἱ συντελεστές τῆς σειρᾶς εἶναι οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ

$$a_n = \frac{(-i)^n}{n}, n = 1, 2, \ldots,$$

ὁπότε ἡ ἀκτίνα σύγκλισης τῆς σειρᾶς εἶναι ἡ[4]

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left|\frac{(-i)^n}{n}\right|}} = \lim \sqrt[n]{n} = 1. \ \blacklozenge$$

[4]ΑΣΚΗΣΗ: Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ ἀκολουθία ($n^{1/n}$) συγκλίνει πρὸς τὴ μονάδα.

Πρόβλημα 4.4.3.2 *Νὰ βρεθεῖ ὁ δίσκος σύγκλισης τῆς δυναμοσειρᾶς*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1+i)^n(z-2i)^n.$$

Λύση: Ὑπολογίζουμε πρῶτα τὴν ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $(1+i)^n$.

Πρὸς τοῦτο ἔχουμε

$$|(1+i)^n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n = 2^{\frac{n}{2}}.$$

Ἐπομένως ἡ ἀκτίνα σύγκλισης εἶναι ἴση μὲ

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup(2^{\frac{n}{2}})^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ὁπότε ὁ δίσκος σύγκλισης τῆς δυναμοσειρᾶς εἶναι ὁ $B(2i, \frac{\sqrt{2}}{2})$. ♦

Θεώρημα 4.4.3.2 *Ἡ σειρὰ $\sum a_n(z-a)^n$ δὲν συγκλίνει στὸ συμπλήρωμα τοῦ κλειστοῦ δίσκου $\overline{B(a,R)}$, ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτῖνα σύγκλισης.*

Ἀπόδειξη: Ἔστω z ἕνα σημεῖο ποὺ ἀνήκει στὸ συμπλήρωμα τοῦ δίσκου $\overline{B(a,R)}$. Τότε θὰ ἰσχύει $|z-a| > R$.

Ἄρα Ἐπιλέγουμε ρ τέτοιο ὥστε $|z-a| > \rho > R$. Ἄρα θὰ ἰσχύει καὶ $|a_n(z-a)^n| > |a_n|\rho^n$. Ἐπομένως θὰ ἔχουμε καὶ

$$\limsup |a_n(z-a)^n|^{\frac{1}{n}} \geq \rho \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{\rho}{R} > 1.$$

Σύμφωνα μὲ τὸ κριτήριο ριζῶν τοῦ Cauchy, βλ. Πρόταση 2.2.2.6, ἡ σειρὰ δὲν συγκλίνει. ■

Θεώρημα 4.4.3.3 *Ἡ σύγκλιση τῆς σειρᾶς $\sum a_n(z-a)^n$ εἶναι ἀπόλυτη καὶ ὁμοιόμορφη σὲ κάθε συμπαγὲς ὑποσύνολο τοῦ δίσκου $B(a,R)$, ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτῖνα σύγκλισης.*

Ἀπόδειξη: Ἔστω K ἕνα συμπαγὲς ὑποσύνολο τοῦ δίσκου $B(a,R)$. Τοῦτο εἶναι ἕνα σύνολο ξένο πρὸς τὸ συμπλήρωμα τοῦ δίσκου $B(a,R)$, τὸ ὁποῖο εἶναι κλειστὸ σύνολο. Ἄρα, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 2.2.3.1, ὑπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ὥστε

$$|z-w| \geq \varepsilon,$$

γιὰ κάθε $z \in K$ καὶ $w \notin B(a,R)$.

Ἔστω τυχὸν $z \in K$, μὲ $z \neq a$. Θέτουμε

$$t_0 := \frac{R}{|z-a|}$$

καὶ ὁρίζουμε τὴ συνάρτηση ζ μὲ τύπο

$$\zeta(t) := a + t(z-a), \quad t \geq 0.$$

Ἐπειδὴ $|z-a| < R$, θὰ ἰσχύει $t_0 > 1$ καί, γιὰ κάθε $t \in [0, t_0)$, τὸ σημεῖο $\zeta(t)$ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση

$$|\zeta(t) - a| = t|z-a| < t_0|z-a| = R.$$

Ἄρα γιὰ κάθε $t \in [0, t_0)$ ἰσχύει $\zeta(t) \in B(a,R)$, ἐνῶ τὸ σημεῖο $\zeta(t_0)$ ἀνήκει στὸ σύνορο τοῦ δίσκου, δηλαδὴ τοῦτο δὲν βρίσκεται μέσα στὸν δίσκο. Ἔτσι πρέπει νὰ ἰσχύει

$$|z - \zeta(t_0)| \geq \varepsilon.$$

Ἐπομένως ἔχουμε

$$\varepsilon \leq |z - a - t_0(z-a)| = (t_0 - 1)|z-a| = t_0|z-a| - |z-a| = R - |z-a|,$$

δηλαδὴ

$$|z-a| \leq R - \varepsilon.$$

Ἄρα, γιὰ κάθε $z \in K$, ἔχουμε

$$|a_n(z-a)^n| \leq |a_n|(R-\varepsilon)^n.$$

Τώρα, ἐπειδὴ ἰσχύει

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n||(R-\varepsilon)^n|} = (R-\varepsilon)|\frac{1}{R} < 1,$$

ἡ σειρὰ $\sum |a_n|(R-\varepsilon)^n$ συγκλίνει, ὁπότε σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 4.4.2.1 ἡ σύγκλιση τῆς δυναμοσειρᾶς στὸ σύνολο K εἶναι ἀπόλυτη καὶ ὁμοιόμορφη. ■

Στὸ σύνολο σύγκλισης ἡ παράγωγος μιᾶς δυναμοσειρᾶς ταυτίζεται μὲ τὴ δυναμοσειρὰ τῶν παραγώγων. Πραγματικά, ἰσχύει τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα:

Θεώρημα 4.4.3.4 *Ἄν*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

εἶναι μιὰ δυναμοσειρὰ ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα σύγκλισης R, τότε καὶ ἡ δυναμοσειρὰ

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-a)^{n-1}$$

ἔχει ἀκτῖνα σύγκλισης ἴση μὲ R καί, γιὰ κάθε $z \in B(a,R)$, ἰσχύει ἡ σχέση

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-a)^{n-1} = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n.$$

Ἀπόδειξη: Τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἀκτῖνα σύγκλισης τῆς δυναμοσειρᾶς τῶν παραγώγων εἶναι ἴση μὲ R προκύπτει ἀπ' τὴ σχέση

$$\limsup |na_n|^{1/n} = \lim n^{1/n} \limsup |a_n|^{1/n} = 1 \limsup |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}.$$

Ἔτσι, ἀπομένει νὰ δείξουμε ὅτι ἡ δυναμοσειρὰ $\sum a_n(z-a)^n$ παραγωγίζεται σὲ κάθε σημεῖο τοῦ δίσκου $B(a,R)$ καὶ ἔχει παράγωγο τὴ σειρὰ τῶν παραγώγων τῶν ὅρων της.

Χωρὶς βλάβη τῆς γενικότητας, θέτουμε $a = 0$ καὶ ὁρίζουμε τὶς συναρτήσεις μὲ τύπους

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{και} \quad g(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}.$$

Σταθεροποιοῦμε ἕνα σημεῖο $w \in B(0, R)$ καὶ ἐπιλέγουμε πραγματικὸ ἀριθμὸ ρ τέτοιον ὥστε $|w| < \rho < R$. Γιὰ κάθε σημεῖο $z \in B(0, \rho)$, μὲ $z \neq w$, ἔχουμε

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big[\frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1}\Big].$$

Γιὰ τὴν τιμὴ $n = 1$ ἡ ποσότητα ποὺ εἶναι μέσα στὴν ἀγκύλη εἶναι ἴση μὲ μηδέν, ἐνῶ, γιὰ κάθε $n \geq 2$, ἡ ποσότητα αὐτὴ εἶναι ἴση μὲ

$$\begin{aligned}
&z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1} - nw^{n-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (z^k - w^k) w^{n-k-1} = (z - w) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=0}^{k-1} z^r w^{k-r-1} w^{n-k-1} \\
&= (z - w) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=0}^{k-1} z^r w^{n-r-2}.
\end{aligned}$$

Ἐπειδὴ ἰσχύει $|w|, |z| < \rho$, ἔχουμε

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=0}^{k-1} z^r w^{n-r-2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=0}^{k-1} \rho^{n-2} = \sum_{k=1}^{n-1} k\rho^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2},$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτει ὅτι

$$\Big|\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w)\Big| \leq \frac{1}{\rho^2} |z - w| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} \rho^n.$$

Τώρα, τὸ γεγονὸς ὅτι $\rho < R$ συνεπάγεται ὅτι

$$\limsup \Big|a_n \frac{n(n-1)}{2} \rho^n\Big|^{1/n} = \rho \lim \Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)^{1/n} \limsup |a_n|^{1/n} = \frac{\rho}{R} < 1,$$

ἕπεται ὅτι ἡ σειρὰ στὸ δεύτερο μέλος τῆς προηγούμενης σχέσης συγκλίνει. Ἄρα τὸ ἀριστερὸ μέλος τῆς σχέσης αὐτῆς τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ σημεῖο z τείνει πρὸς τὸ w. Τοῦτο συνεπάγεται ὅτι $f'(w) = g(w)$ καὶ ἡ ἀπόδειξη εἶναι πλήρης. ■

4.4.4 Σειρὲς Laurent

Στὴ θεωρία τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων ἀθροίσματα σειρῶν τῆς μορφῆς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-a)^n$$

παίζουν σημαντικὸ ρόλο. Ἡ ἔκφραση αὐτὴ ὁρίζει μιὰ συνάρτηση καὶ παίρνει μιγαδικὲς τιμὲς γιὰ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμὸ z γιὰ τὸ ὁποῖο καὶ οἱ δύο σειρὲς συγκλίνουν. Σὲ μιὰ τέτοια περίπτωση, θέτουμε $b_{-n} := a_n$, γιὰ κάθε $n = 1, 2, \cdots$ καὶ συμφωνοῦμε ὥστε τὸ ἄθροισμα τοῦτο νὰ τὸ γράφουμε στὴν ἑνοποιημένη μορφὴ

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-a)^n = \cdots + \frac{b_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{b_{-1}}{(z-a)} + b_0 + b_1(z-a) + \cdots + b_n(z-a)^n + \cdots$$

Ἡ σειρὰ αὐτὴ λέγεται **σειρὰ Laurent μὲ κέντρο τὸ σημεῖο** a.

Πρόταση 4.4.4.1 *Ἡ σειρὰ Laurent* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-a)^n$, *συγκλίνει γιὰ κάθε σημεῖο* z *ποὺ ἀνήκει στὴν ἀνοικτὴ δακτυλικὴ περιοχὴ* $\Delta(a, r_1, r_2)$, *ὅπου*

$$r_1 := \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|} \ \text{καὶ} \ r_2 := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}},$$

ὅταν ἰσχύει $r_1 < r_2$.

Ἀπόδειξη: Ἐξ ὁρισμοῦ ἡ σειρὰ αὐτὴ συγκλίνει ὅταν οἱ δύο σειρὲς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_{-n}(z-a)^{-n} \ \text{καὶ} \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-a)^n$$

συγκλίνουν.

Ἡ πρώτη σειρὰ συγκλίνει ὅταν

$$\limsup |b_{-n}(z-a)^{-n}|^{1/n} < 1,$$

δηλαδή, ὅταν

$$r_1 := \limsup |b_{-n}|^{1/n} < |z-a|.$$

Ἡ δεύτερη σειρὰ εἶναι μιὰ δυναμοσειρὰ ποὺ, ὅπως γνωρίζουμε, συγκλίνει στὸν ἀνοικτὸ δίσκο $B(a, r_2)$, ὅπου r_2 εἶναι ἡ ἀκτίνα σύγκλισης. Ἄρα, ἡ σειρὰ Laurent συγκλίνει γιὰ ὅλα τὰ σημεῖα z ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση

$$r_1 < |z - a| < r_2,$$

δηλαδή, ὅταν $z \in \Delta(a, r_1, r_2)$. Προφανῶς, ὁ δακτύλιος αὐτὸς ὁρίζεται ὅταν, βέβαια, ἰσχύει $r_1 < r_2$. ■

Πρόβλημα 4.4.4.1 *Νὰ βρεθεῖ ὁ δακτύλιος σύγκλισης τῆς δυναμοσειρᾶς*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(3+4i)^n(z+2i)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+2i)^n}{10^n}.$$

Λύση: Ἡ δυναμοσειρὰ αὐτὴ ἔχει κέντρο τὸ σημεῖο $-2i$. Ἐπίσης, ὁ πρῶτος προσθετέος εἶναι ἡ σειρὰ μὲ συντελεστὲς

$$b_{-n} := (3+4i)^n,$$

ὁπότε ἔχουμε

$$r_1 = \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|} = |3+4i| = 5.$$

Ἄρα ἡ πρώτη σειρὰ συγκλίνει στὸν δακτύλιο $\Delta(-2i, 5, +\infty)$.

Ἡ δεύτερη σειρὰ ἔχει συντελεστὲς

$$b_n := 10^{-n},$$

ὁπότε

$$r_2 = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}} = 10.$$

Ἔτσι ἡ δεύτερη σειρὰ συγκλίνει στὸν δίσκο $B(-2i, 10)$ κι ἐπομένως ἡ ἀρχικὴ σειρὰ συγκλίνει στὸν δακτύλιο $\Delta(-2i, 5, 10)$. ♦

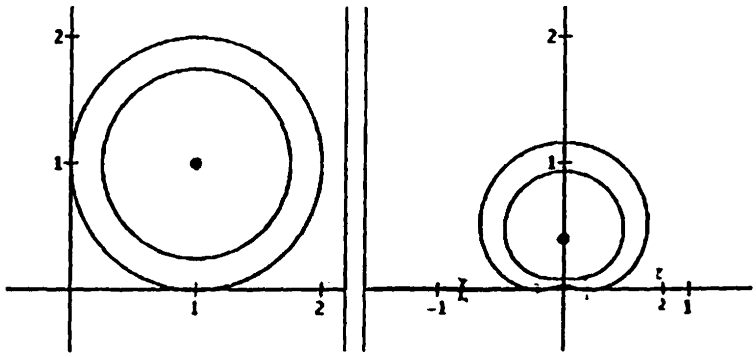
4.5 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.5.1 Ρητὲς συναρτήσεις

Ἡ ἁπλούστερη μορφὴ μιγαδικῆς συνάρτησης εἶναι ἡ **πολυωνυμικὴ**

$$p(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n,$$

ὅπου οἱ συντελεστὲς $a_0, a_1, \ldots, a_n$ εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $a_n \neq 0$. Ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς n εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου. Κάθε πολυωνυμικὴ συνάρτηση ὁρίζεται καὶ παραγωγίζεται σὲ ὁλόκληρο τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο.



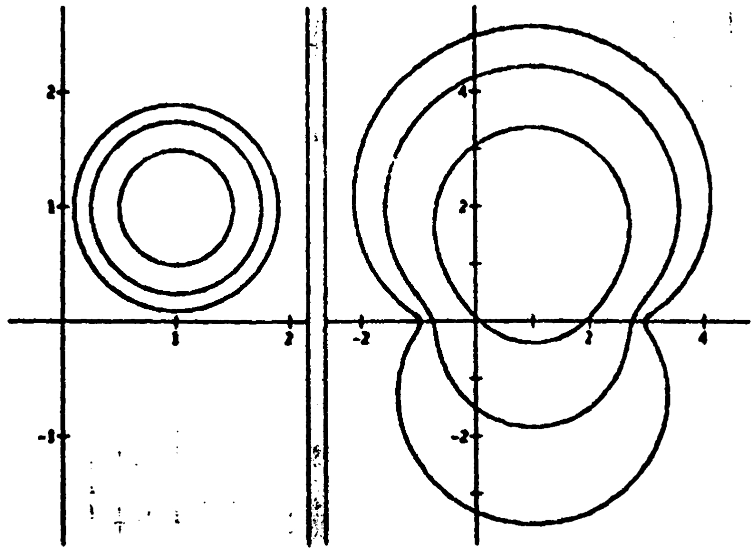
Σχήμα 4.7: *Ἡ εἰκόνα δύο κύκλων μέσω τῆς συνάρτησης* $f(z) := 0.2z^2$.

Τὸ πηλίκο δύο συναρτήσεων οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ἀπὸ δύο πολυώνυμα $p(z), q(z)$ πρῶτα μεταξὺ τους, (δηλαδὴ δὲν ἔχουν κοινὸν παράγοντα πλὴν τῆς μονάδας,) ὁρίζει τὴ **ρητὴ συνάρτηση** μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Σὲ κάθε σημεῖο ποὺ δὲν μηδενίζει τὸν παρονομαστή, ἡ ρητὴ συνάρτηση παίρνει (πεπερασμένες) μιγαδικὲς τιμὲς καὶ παραγωγίζεται.

Πρόβλημα 4.5.1.1 *Νὰ βρεθοῦν τὸ πραγματικὸ καὶ τὸ φανταστικὸ μέρος τῆς*



Σχήμα 4.8: *Ἡ εἰκόνα τριῶν κύκλων μέσω τῆς συνάρτησης* $f(z) := z^2 + 1 + z^{-2}$.

ρητῆς συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{iz - 1}{z + 2i}.$$

Λύση: Πρὸς τοῦτο θέτουμε $z := x + iy$. Τότε ἔχουμε

$$f(z) = \frac{i(x + iy) - 1}{x + iy + 2i} = \frac{-(1 + y) + ix}{x + i(y + 2)},$$

ὁπότε παίρνουμε

$$f(z) = \frac{-(1 + y) + ix}{x + i(y + 2)} \cdot \frac{x - i(y + 2)}{x - i(y + 2)} = \frac{x + i(x^2 + y^2 + 3y + 2)}{x^2 + (y + 2)^2}.$$

Ἐπομένως τὸ πραγματικὸ μέρος τῆς συνάρτησης f εἶναι ἡ πραγματικὴ συνάρτηση με τύπο

$$u(x, y) := \frac{x}{x^2 + (y + 2)^2}$$

καὶ τὸ φανταστικὸ μέρος ἡ πραγματικὴ συνάρτηση με τύπο

$$v(x, y) := \frac{x^2 + y^2 + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}. \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 4.5.1.2 *Νὰ ἀναλυθεῖ ὁ τύπος τῆς συνάρτησης*

$$f(z) := \frac{3+i}{(z-2)(z+i)}$$

σὲ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.

Λύση: Θέτουμε

$$\frac{3+i}{(z-2)(z+i)} = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z+i}$$

καὶ ἀναζητοῦμε τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς a καὶ b.

Κάνοντας ἀπαλειφὴ τῶν παρονομαστῶν παίρνουμε τὴν ταυτότητα

$$3+i = a(z+i) + b(z-2) = (a+b)z + ai - 2b,$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτει τὸ σύστημα

$$a+b=0 \text{ καὶ } ai-2b=3+i.$$

Ἐπιλύουμε τὸ σύστημα αὐτὸ καὶ βρίσκουμε

$$a = -b = \frac{3+i}{2+i} = \frac{7-i}{5},$$

ὁπότε, ἔπεται ὅτι, ὁ τύπος τῆς συνάρτησης γράφεται ὡς

$$\frac{3+i}{(z-2)(z+i)} = \frac{7-i}{5(z-2)} - \frac{7-i}{5(z+i)}. \ \blacklozenge$$

4.5.2 Ἡ ἐκθετικὴ συνάρτηση

Ἐπειδὴ ἡ ἀκολουθία μὲ ὅρους

$$c_n := (n!)^{1/n}$$

συγκλίνει πρὸς τὸ σὺν ἄπειρο[5], ἡ ἀκτῖνα σύγκλισης τῆς δυναμοσειρᾶς

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

[5] Εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἀκολουθία (c_n) εἶναι αὔξουσα καὶ ἡ ἀκολουθία τῶν ἄρτιων ὅρων συγκλίνει πρὸς τὸ $+\infty$.

εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄπειρο. Ἄρα ἡ δυναμοσειρὰ αὐτὴ μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0, γιὰ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμὸ z, συγκλίνει πρὸς ἕναν μιγαδικὸ ἀριθμὸ ποὺ τὸν παριστάνουμε μὲ e^z, ἢ καὶ $\exp(z)$.

Ἡ ἀπεικόνιση $z \to e^z$ ὁρίζει τὴ λεγόμενη ἐκθετικὴ μιγαδικὴ συνάρτηση καὶ ἡ σύγκλιση τῆς δυναμοσειρᾶς πρὸς τὴν ἐκθετικὴ συνάρτηση εἶναι ὁμοιόμορφη πάνω σὲ συμπαγῆ ὑποσύνολα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Προφανῶς ἔχουμε

$$e^0 = 1 + \frac{0}{1!} + \frac{0}{2!} + \frac{0}{3!} + \cdots + \frac{0}{n!} + \cdots = 1.$$

Θεώρημα 4.5.2.1 *Ἡ ἐκθετικὴ μιγαδικὴ συνάρτηση ἔχει τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:*

(1) $\frac{d}{dz}e^{bz} = be^{bz}$. Ἔτσι, ὅταν $b = 1$, παίρνουμε $\frac{d}{dz}e^z = e^z$.

(2) $e^z \cdot e^{a-z} = e^a$, ὅπου a, z εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

(3) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

(4) $(e^z)^a = e^{az}$.

(5) $e^z \neq 0$, γιὰ κάθε z.

(6) Γιὰ κάθε $z = x + iy$ ἔχουμε $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ καὶ ἄρα ἰσχύει $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.

(7) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ γιὰ κάθε ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), δηλαδὴ ἡ συνάρτηση $\exp(\cdot)$ εἶναι περιοδικὴ μὲ περίοδο $2\pi i$.

Ἀπόδειξη: (1) Τοῦτο προκύπτει μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος 4.4.3.4.

(2) Παρατηροῦμε ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συνάρτησης $z \to e^z e^{a-z}$ εἶναι ἴση μὲ τὸ μηδέν. Ἄρα, σύμφωνα μὲ τὴν Πρόταση 4.2.6.4, αὐτὴ εἶναι σταθερή. Ἐπομένως στὰ σημεῖα z καὶ a θὰ ἔχει τὴν ἴδια τιμή, δηλαδὴ ἰσχύει

$$e^z e^{a-z} = e^a e^{a-a} = e^a e^0 = e^a.$$

(3) Προκύπτει ἀπὸ τὴν προηγούμενη σχέση θέτοντας $a = 0$.

(4) Ὅπως γιὰ τὴ σχέση (2), ἀποδεικνύουμε ὅτι ἡ συνάρτηση

$$z \to (e^z)^a \cdot e^{-az}$$

εἶναι σταθερή. Ἄρα αὐτὴ παίρνει τιμὴ ἴση πρὸς τὴν

$$(e^1)^a \cdot e^{-a} = e^a e^{-a} = 1.$$

(5) Προκύπτει ἄμεσα ἀπὸ τὴν ἰδιότητα (3).

(6) Ἐφαρμόζοντας τὴν ἰδιότητα (2), παίρνουμε

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

δηλαδὴ

$$e^z = e^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = e^x\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big) = e^x(\cos y + i\sin y).$$

(7) Ἔχουμε

$$e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1,$$

ὁπότε, γιὰ κάθε ἀκέραιο ἀριθμὸ k, θὰ ἰσχύει

$$e^{2k\pi i} = (e^{2\pi i})^k = 1,$$

ὁπότε καὶ

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z. \quad \blacksquare$$

Χρησιμοποιῶντας τὴν ἰδιότητα (6) τοῦ παραπάνω θεωρήματος καὶ τὴν τριγωνομετρικὴ ἔκφραση τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, προκύπτει τὸ ἑπόμενο συμπέρασμα:

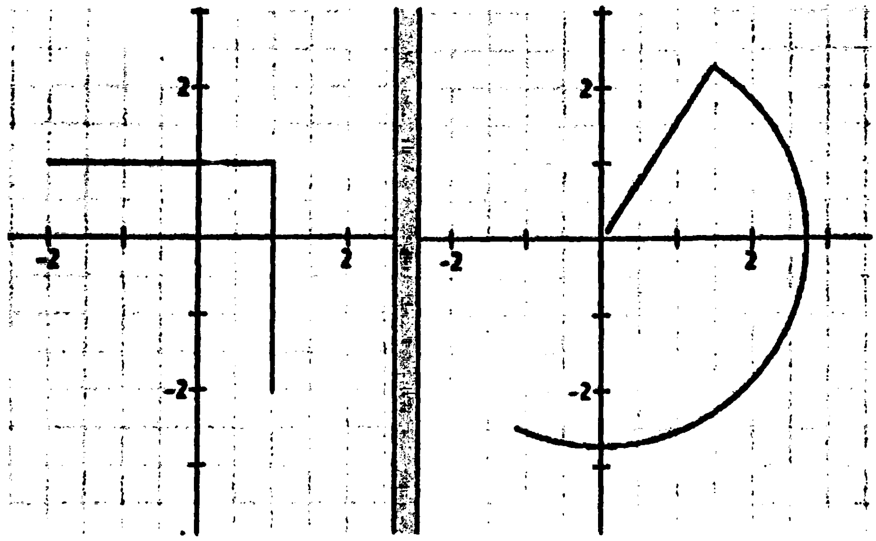
Πόρισμα 4.5.2.1 *Κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς z γράφεται στὴν ἐκθετικὴ μορφὴ*

$$z = \rho e^{i\theta},$$

ὅπου ρ εἶναι τὸ μέτρο καὶ θ τὸ ὄρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z.

Πρόβλημα 4.5.2.1 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ πραγματικὸ καὶ φανταστικὸ μέρος τῆς συνάρτησης μὲ τύπο*

$$f(z) := \exp(\bar{z}^2).$$



Σχήμα 4.9: *Ἡ ἐκθετικὴ συνάρτηση ἀπεικονίζει ὁριζόντια εὐθύγραμμα τμήματα σὲ τμήματα εὐθειῶν ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὴν ἀρχὴ καὶ κατακόρυφα εὐθύγραμμα τμήματα σὲ τόξα κύκλων μὲ κέντρο τὴν ἀρχή.*

Λύση: Θέτουμε $z := x + iy$, ὁπότε παίρνουμε

$$f(z) = e^{(x-iy)^2} = e^{x^2-y^2-2ixy} = e^{x^2-y^2}e^{-2ixy} = e^{x^2-y^2}[\cos(2xy) - i\sin(2xy)].$$

Ἑπομένως ἔχουμε

$$\mathrm{Re}(f(z)) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) \quad \text{καὶ} \quad Im(f(z)) = -e^{x^2-y^2}\sin(2xy). \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 4.5.2.2 ***Νὰ προσδιοριστεῖ τὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν στὰ ὁποῖα ἡ συνάρτηση μὲ τύπο***

$$f(z) = e^{i\mathrm{Arg}(z)}, \quad |z| \geq 0$$

παραγωγίζεται.

Λύση: Θεωροῦμε ἕναν μιγαδικὸ ἀριθμὸ a τέτοιον ὥστε $a+|a| \neq 0$. Θέτουμε

$$\theta := \mathrm{Arg}(a),$$

ὁπότε ἔχουμε
$$f(a) = e^{i\theta}.$$

Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση f ἔχει στὸ σημεῖο a παράγωγο ἴση μὲ d. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ὅριο τοῦ πηλίκου διαφορῶν τῆς f στὸ a ὑπάρχει καὶ εἶναι ἴσο μὲ
$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = d.$$

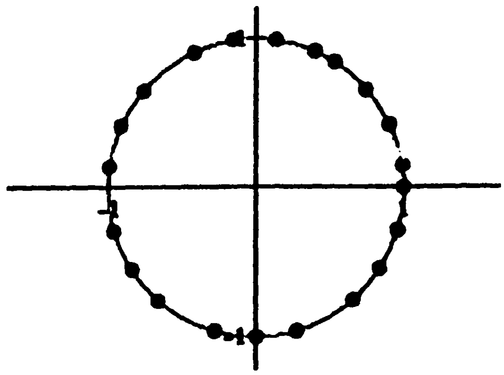
Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ σημεῖο z τείνει πρὸς τὸ a κατὰ μῆκος τῆς ἀκτίνας ποὺ συνδέει τὸ 0 μὲ τὸ a. Τότε τὸ σημεῖο z ἔχει τὴ μορφὴ
$$re^{i\theta}, \text{ ὅπου } r \text{ εἶναι τέτοιο ὥστε } r \to |a|.$$
Ὅταν τὸ σημεῖο z προσεγγίζει τὸ σημεῖο a, θὰ ἔχουμε
$$d = \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{r\to|a|}\frac{f(re^{i\theta})-f(a)}{(r-|a|)e^{i\theta}} = \lim_{r\to|a|}\frac{e^{i\theta}-e^{i\theta}}{(r-|a|)e^{i\theta}} = 0.$$
Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι τὸ σημεῖο z προσεγγίζει τὸ a κατὰ μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ δίσκου $B(0,|a|)$. Τότε τοῦτο εἶναι τῆς μορφῆς
$$|a|e^{i(\omega+\theta)}, \text{ ὅπου } \omega \to 0,$$
ὁπότε παίρνουμε
$$d = \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{\omega\to 0}\frac{e^{i(\omega+\theta)}-e^{i\theta}}{|a|(e^{i(\omega+\theta)}-e^{i\theta})} = \frac{1}{|a|}.$$

Ἡ τιμὴ αὐτὴ γιὰ κανένα σημεῖο $a \in \mathbb{C}$ δὲν συμφωνεῖ μὲ τὴν τιμὴ 0 ποὺ βρήκαμε ἀμέσως παραπάνω. Ἄρα ἡ συνάρτηση f δὲν ἔχει παράγωγο στὸ πεδίο ὁρισμοῦ της. ♦

Πρόβλημα 4.5.2.3 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι τὸ σύνολο τῶν ὁριακῶν σημείων τῆς ἀκολουθίας μὲ ὅρους $z_n := e^{in}$ εἶναι ὁ μοναδιαῖος κύκλος K. Δηλαδή, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς εἶναι πυκνοὶ*[6] *στὸ σύνολο K.*

Ἀπόδειξη: Ἐπειδὴ ἰσχύει $|z_n| = 1$, γιὰ κάθε n, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου K. Στὸ σχῆμα φαίνονται τὰ σημεῖα e^{in} γιὰ $n = 0, 1, \cdots, 20$.

[6] Μὲ βάση τὸ συμπέρασμα τοῦτο, προκύπτει ὅτι τὸ σύνολο τῶν ὁριακῶν σημείων τῶν ἀκολουθιῶν $(\cos(n))$ καὶ $(\sin(n))$ εἶναι τὸ διάστημα $[-1, 1]$.



Θὰ ἀποδείξουμε, πρῶτα, ὅτι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας διαφέρουν ἀνὰ δύο. Πραγματικά, ὑποθέτουμε ὅτι, γιὰ κάποιους φυσικοὺς ἀριθμοὺς $n > m$, ἰσχύει $z_m = z_n$, δηλαδὴ

$$e^{in} = e^{im},$$

ὁπότε ἔχουμε καὶ

$$e^{i(n-m)} = 1.$$

Τοῦτο συνεπάγεται ὅτι

$$\cos(n-m) + i\sin(n-m) = 1,$$

ἰσότητα ἡ ὁποία ἀληθεύει μόνο ὅταν $n - m = 2k\pi$, γιὰ κάποιον ἀκέραιο ἀριθμὸ k. Ἀλλὰ ὁ ἀριθμὸς $n - m$ εἶναι ἀκέραιος, ἐνῶ ὁ ἀριθμὸς 2π εἶναι ἄρρητος. Ἔτσι, ὑποχρεωτικὰ πρέπει νὰ ἔχουμε $n - m = 0$, δηλαδή, $n = m$.

Τώρα, θεωροῦμε ἕναν πραγματικὸ ἀριθμὸ $\varepsilon > 0$, σχετικὰ μικρό, π.χ. $\varepsilon < 1$ καὶ σταθεροποιοῦμε ἕναν φυσικὸ ἀριθμὸ $N > 1$ τέτοιον ὥστε $2\pi/N < \varepsilon$. Στὴ συνέχεια, διαιροῦμε τὸν κύκλο P σὲ N ἴσα τόξα, ὁπότε τὸ μῆκος κάθε τόξου θὰ εἶναι ἴσο μὲ $2\pi/N$. Ἑπομένως ὑπάρχουν ὅροι z_n, z_m, μὲ δείκτες $n > m$ ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση

$$|z_n - z_m| < \frac{2\pi}{N} < \varepsilon.$$

Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κάθε $k = 0, 1, 2, \cdots$, ἰσχύει

$$|e^{ik(n-m)} - e^{i(k-1)(n-m)}| = |e^{i(k-1)(n-m)}||e^{i(n-m)} - 1| = |e^{-im}||z_n - z_m| < \frac{2\pi}{N} < \varepsilon.$$

Θέτουμε $\lambda := n - m$. Τότε τοῦτο γράφεται στὴ μορφὴ

$$\lambda = 2\pi k + \lambda',$$

ὅπου $\lambda' \in [0, 2\pi)$. Ἄρα ἰσχύει $e^{ik\lambda} = e^{ik\lambda'}$, γιὰ κάθε k. Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $1, e^{i\lambda'}, e^{2i\lambda'}, \cdots$ εἶναι τέτοιοι ὥστε

$$|e^{i\lambda'} - 1| = |e^{2i\lambda'} - e^{i\lambda'}| = |e^{3i\lambda'} - e^{2i\lambda'}| = \cdots < \varepsilon.$$

Σημειώνεται ὅτι, γιὰ κάθε n, ὁ ἀριθμὸς $|e^{(n+1)i\lambda'} - e^{ni\lambda'}|$ εἶναι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τοῦ μοναδιαίου κύκλου μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα $e^{ni\lambda'}$ καὶ $e^{ni\lambda'}$.

Ἔστω $z = e^{i\varphi}$ ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου, ὅπου $\varphi \in [0, 2\pi)$. Ὑπάρχει μὴ ἀρνητικὸς ἀκέραιος r καὶ $\lambda'' < \lambda'$ τέτοια ὥστε

$$\varphi = r\lambda' + \lambda''.$$

Ἑπομένως ἔχουμε

$$|z - e^{ri\lambda'}| = |e^{i(r\lambda' + \lambda'')} - e^{ri\lambda'}| = |e^{i\lambda''} - 1| = |\cos(\lambda'') + i\sin(\lambda'') - 1|^{1/2},$$

ὁπότε

$$|z - e^{ri\lambda'}| = (2 - \sin(2\lambda'')^{1/2} \leq (2 - \sin(2\lambda')^{1/2} = |e^{i\lambda'} - 1| < \varepsilon.$$

Τοῦτο συνεπάγεται ὅτι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς εἶναι ε-πυκνοὶ στὸν κύκλο P, πρᾶγμα ποὺ ἀποδεικνύει τὸ συμπέρασμα. ♦

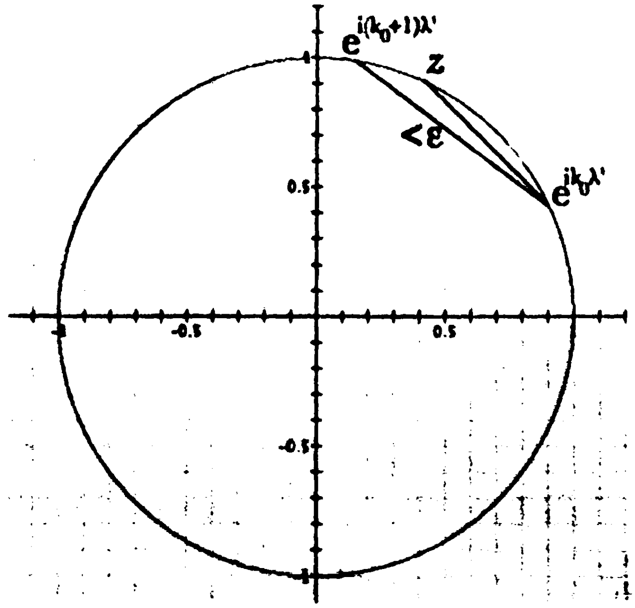
Πρόβλημα 4.5.2.4 *Νὰ βρεθεῖ ἡ μιγαδικὴ συνάρτηση f ἂν εἶναι γνωστὸ ὅτι τὸ πραγματικὸ μέρος της εἶναι ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$u(x, y) := 3e^x \cos(y)$$

καὶ ἐπὶ πλέον ὅτι ἰσχύει $f(0) = 3$.

Λύση: Ἀπὸ τὴν πρώτη συνθήκη Cauchy- Riemann, ἔχουμε

$$u_x = v_y = 3e^x \cos(y).$$



Μὲ ὁλοκλήρωση, παίρνουμε

$$v(x,y) = \int 3e^x \cos(y)dy = 3e^x \sin(y) + \varphi(x),$$

ὅπου πρέπει νὰ προσδιοριστεῖ ἡ συνάρτηση φ. Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζουμε τὴν παράγωγο τῆς $v(x,y)$ ὡς πρὸς x καὶ, τότε, χρησιμοποιῶντας τὴ δεύτερη συνθήκη Cauchy - Riemann, βρίσκουμε

$$3e^x \sin(y) + \varphi'(x) = -u_y = 3e^x \sin(y).$$

Ἄρα πρέπει νὰ ἰσχύει $\varphi(x) = c$ (σταθερὸς ἀριθμὸς), ὁπότε ἡ συνάρτηση f εἶναι τῆς μορφῆς

$$f(z) = 3e^x \cos(y) + i(3e^x \sin(y) + c) = 3e^x e^{iy} + ic = 3e^z + ic.$$

Ἐπειδή, ὅμως, ἰσχύει $f(0) = 3$, θὰ πρέπει $c = 0$, ὁπότε, τελικά, ἡ ζητούμενη ὁλόμορφη συνάρτηση ἔχει τύπο

$$f(z) := 3e^z. \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 4.5.2.5 ***Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι ἡ σειρὰ***

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$$

συγκλίνει ἀπόλυτα.

Ἀπόδειξη: Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κάθε n ἰσχύει $e^{in} = \cos(n) + i\sin(n)$ καὶ ἑπομένως ἡ μελέτη σύγκλισης τῆς ἀρχικῆς σειρᾶς ἀνάγεται στὴ μελέτη σύγκλισης τῶν δύο σειρῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} \text{ καὶ } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

Εὔκολα προκύπτει ὅτι καὶ οἱ δύο αὐτὲς σειρὲς συγκλίνουν ἀπόλυτα καὶ ἑπομένως καὶ ἡ ἀρχικὴ σειρὰ συγκλίνει ἀπόλυτα. ♦

Πρόβλημα 4.5.2.6 *Θὰ ἐξετάσουμε ἂν συγκλίνει ἡ σειρὰ*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}.$$

Ἀπόδειξη: Ἐπειδὴ ἰσχύει

$$e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

ἔχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n} + i\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n}.$$

Ἀλλὰ παρατηροῦμε ὅτι ὁ πρῶτος προσθετέος γίνεται

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{1}\right)}{1} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n} \geq -1 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{n} = -1 + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

ὁπότε ἡ σειρὰ αὐτὴ δὲν συγκλίνει. Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα σειρὰ μιγαδικῶν ἀριθμῶν δὲν συγκλίνει. ♦

Πρόβλημα 4.5.2.7 *Νὰ ἐξεταστεῖ ὡς πρὸς τὴ σύγκλιση ἡ σειρὰ Laurent*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} e^{in} (z+1)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(in+\frac{1}{2})} (z+1)^n.$$

Λύση: Τὸ κέντρο τῆς σειρᾶς εἶναι τὸ σημεῖο -1. Ἐπίσης, οἱ συντελεστὲς τῆς πρώτης σειρᾶς εἶναι

$$b_{-n} := 2^{-n}e^{in}, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Ἄρα ἔχουμε

$$r_1 = \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|} = \frac{1}{2},$$

πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι ἡ πρώτη σειρὰ συγκλίνει στὴν ἀνοικτὴ δακτυλικὴ περιοχὴ $\Delta(-1, \frac{1}{2}, +\infty)$.

Οἱ συντελεστὲς τῆς δεύτερης σειρᾶς εἶναι οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ

$$b_n := e^{-(in+\frac{1}{2})}.$$

Ἄρα ἡ ἀκτίνα σύγκλισης εἶναι ἡ

$$r_2 = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}} = \lim e^{\frac{1}{2n}} = 1$$

κι ἄρα ἡ δεύτερη σειρὰ συγκλίνει στὸν δίσκο $B(-1, 1)$.

Ἔτσι ἡ σειρὰ Laurent συγκλίνει στὴν τομὴ τῶν δύο συνόλων, δηλαδή, στὸν δακτύλιο $\Delta(-1, \frac{1}{2}, 1)$. ♦

Πρόβλημα 4.5.2.8 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι γιὰ κάθε σημεῖο* $z := x + iy$ *ἰσχύει*

$$\lim (1 + \frac{z}{n})^n = e^z.$$

Ἀπόδειξη: Ἔστω $z = x + iy$ τυχὼν μιγαδικὸς ἀριθμός. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς e^z γράφεται ὡς

$$e^z = e^x e^{iy}.$$

Θέτουμε

$$a_n := (1 + \frac{z}{n})^n = |a_n| e^{i\mathrm{Arg}(a_n)}.$$

Ἔτσι, τὸ συμπέρασμα θὰ προκύψει ἂν ἀποδειχτεῖ ὅτι

$$\lim |a_n| = e^x \text{ καὶ } \lim \mathrm{Arg}(a_n) = y. \tag{4.5}$$

Ἂν ἔχουμε $\mathrm{Arg}(z) = y = 0$, τότε, εἶναι γνωστὸ ὅτι, τὸ συμπέρασμα ἰσχύει.

Ὑποθέτουμε ὅτι $\mathrm{Arg}(z) = y \neq 0$, ὁπότε τὸ σημεῖο z εἶναι μακριὰ ἀπὸ τὸν ἀρνητικὸ πραγματικὸ ἄξονα. Ἑπομένως ἡ συνάρτηση $w \to \mathrm{Arg}(w)$ εἶναι συνεχὴς στὸ σημεῖο z.

Ἀλλὰ ἰσχύει ὅτι

$$\mathrm{Arg}(a_n) = \mathrm{Arg}[(1 + \frac{z}{n})^n] = n\mathrm{Arg}(1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}).$$

Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ σταθερὸ x ὑπάρχει n_0 τέτοιο ὥστε, γιὰ κάθε $n \geq n_0$ νὰ ἰσχύει

$$1 + \frac{x'}{n} > 0.$$

Ἑπομένως, λόγω τῆς σχέσης (1.2), θὰ ἔχουμε

$$\mathrm{Arg}(1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}) = \mathrm{Arctan}\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}.$$

Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ὁρίου $\lim \mathrm{Arg}(a_n)$ ἐφαρμόζουμε τὸν γνωστὸ κανόνα L'Hospital τύπου 0/0 γιὰ πραγματικὲς συναρτήσεις. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι

$$\lim_{t\to+\infty} t(\mathrm{Arctan}\frac{y}{t + x}) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\frac{y}{t+x}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2 y}{(x + t)^2 + y^2} = y.$$

Ἑπομένως ἔχουμε καὶ

$$\lim \mathrm{Arg}(a_n) = \lim n\mathrm{Arctan}\frac{y}{n + x} = y.$$

Τώρα παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$|z_n| = \left|(1 + \frac{z}{n})^n\right| = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = [(1 + \frac{x}{n})^2 + (\frac{y}{n})^2]^{\frac{n}{2}}.$$

Ἀλλὰ ἰσχύει

$$[(1 + \frac{x}{n})^2 + (\frac{y}{n})^2]^{\frac{n}{2}} \geq [(1 + \frac{x}{n})^2]^{\frac{n}{2}} = (1 + \frac{x}{n})^n,$$

ὁπότε προκύπτει

$$\liminf|a_n| \geq \lim (1+\frac{x}{n})^n = e^x. \tag{4.6}$$

Ἐπίσης ἔχουμε καὶ

$$\log[(1+\frac{x}{n})^2+(\frac{y}{n})^2]^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}\log[(1+\frac{x}{n})^2+(\frac{y}{n})^2] = \frac{n}{2}\log[1+\frac{x^2+y^2}{n^2}+\frac{2x}{n}]$$

τὸ ὁποῖο, προφανῶς, εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὴν ποσότητα

$$\frac{n}{2}[\frac{x^2+y^2}{n^2}+\frac{2x}{n}] = \frac{x^2+y^2}{2n}+x.$$

Ἔτσι προκύπτει ὅτι

$$\limsup \log|a_n| \leq x.$$

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτηση log εἶναι αὔξουσα, τὸ πρῶτο μέρος τῆς ἀνισότητας αὐτῆς ἰσοῦται[7] μὲ $\log\limsup|a_n|$. Ἔτσι παίρνουμε ὅτι

$$\limsup|a_n| \leq e^x.$$

Ἡ σχέση αὐτὴ μαζὶ μὲ τὴν (4.6) συνεπάγονται ὅτι

$$\lim|a_n| = e^x.$$

Τελικά, τὸ συμπέρασμα ἕπεται ἀπὸ τὴ σχέση (4.5). ♦

4.5.3 Οἱ τριγωνομετρικὲς συναρτήσεις

Οἱ τριγωνομετρικὲς συναρτήσεις **ημίτονο** sin καὶ **συνημίτονο** cos ὁρίζονται, ἀντίστοιχα, ἀπὸ τὶς δυναμοσειρὲς

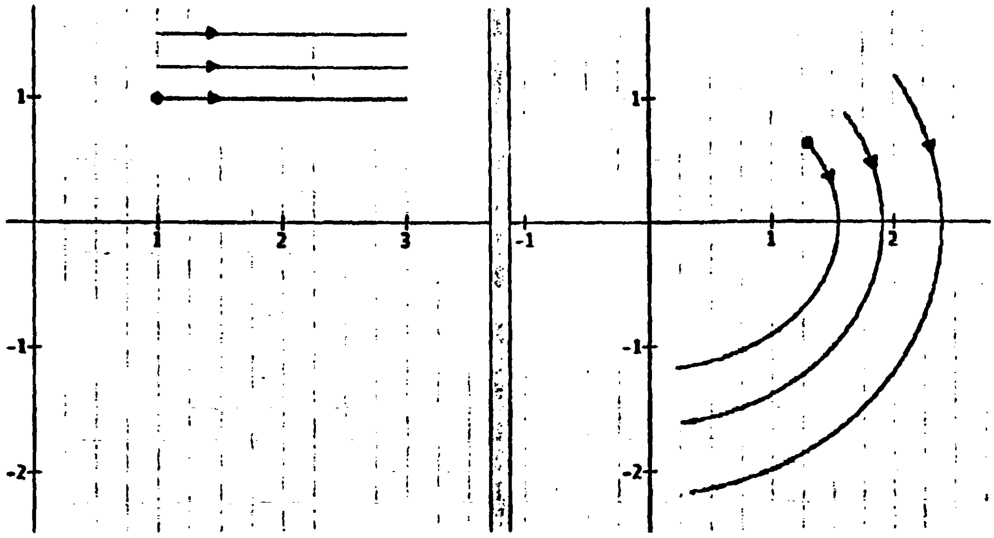
$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

καὶ

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

οἱ ὁποῖες, προφανῶς, συγκλίνουν ἀπόλυτα στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο. Ἑπομένως, οἱ συναρτήσεις sin καὶ cos ἔχουν πεδίο ὁρισμοῦ ὁλόκληρο τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο, εἶναι συνεχεῖς καὶ παραγωγίζονται παντοῦ. Οἱ πα-

[7]Νὰ ληφθεῖ ὡς ἄσκηση.



Σχήμα 4.10: *Ἡ εἰκόνα ὁριζόντιας εὐθείας μέσω τῆς συνάρτησης $f(z) := sin(z)$ εἶναι ἔλλειψη.*

ράγωγοι τῶν συναρτήσεων αὐτῶν δίνονται, (ὅπως καὶ στὴν πραγματικὴ περίπτωση,) ἀπὸ τοὺς τύπους

$$(\sin)' = \cos, \quad (\cos)' = -\sin .$$

Ἐπίσης, αὐτὲς εἶναι περιοδικὲς μὲ περίοδο τὸν πραγματικὸ ἀριθμὸ 2π καὶ ἔχουν μόνο (πραγματικές) ρίζες τὰ σημεῖα $k\pi$ καὶ $\frac{\pi}{2}+k\pi$, ἀντίστοιχα, ὅπου $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Εὔκολα μπορεῖ νὰ διαπιστωθεῖ ὅτι ἡ εἰκόνα ὁριζόντιας εὐθείας γραμμῆς $\{z = x + ai : x \in \mathbb{R}\}$, μέσω τῆς συνάρτησης μὲ τύπο $f(z) := \sin(z)$ εἶναι ἔλλειψη. Πράγματι ἔχουμε

$$\sin(x + ai) = \sin x \cos(ai) + \cos(x)\sin(ai) = \sin x \cosh(a) + i\cos(x)\sinh(a).$$

Τὸ δεξιὰ μέρος είναι ἕνας μιγαδικὸς ἀριθμὸς $u + iv$, ὅπου

$$u := \sin x \cosh(a), \quad \text{καὶ} \quad v = \cos(x)\sinh(a).$$

Ἄρα ἔχουμε

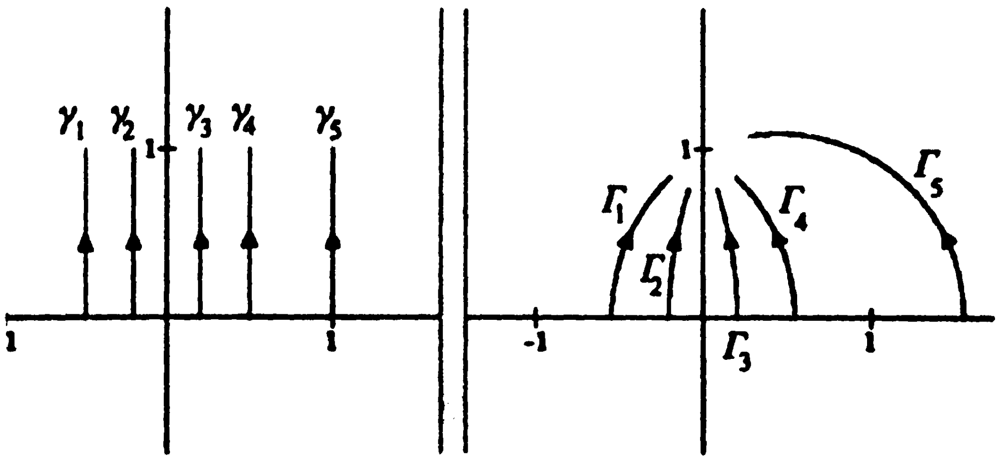
$$\frac{u^2}{(\cosh(a))^2} + \frac{v^2}{(\sinh(a))^2} = 1.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ εἰκόνα τῆς ὁριζόντιας εὐθείας εἶναι ἡ ἔλλειψη μὲ κέντρο τὸ 0, ὁριζόντια ἀκτίνα ἴση μὲ $\cosh(a)$ καὶ κατακόρυφη ἀκτίνα ἴση μὲ $\sinh(a)$.

Οἱ συναρτήσεις **ἐφαπτομένη** tan καὶ **συνεφαπτομένη** cot ὁρίζονται, ὅπως ἀναμένεται, μὲ τοὺς τύπους

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Ἡ συνάρτηση tan ὁρίζεται παντοῦ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο ἐκτὸς τῶν σημείων ποὺ μηδενίζουν τὸ cos, δηλαδὴ ἐκτὸς τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\frac{\pi}{2} + k\pi$, γιὰ κάθε $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Αὐτὴ εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμη παντοῦ μὲ παράγωγο τὴν $1 + \tan^2$. Στὸ



Σχήμα 4.11: *Ἡ συνάρτηση* tan *ἀπεικονίζει κατακόρυφα εὐθύγραμμα τμήματα σὲ καμπύλες ποὺ μοιάζουν μὲ τόξα κύκλων, ἀλλὰ δὲν εἶναι.*

Ἡ συνάρτηση cot εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμη παντοῦ, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ πραγματικοῦ ἄξονα τῆς μορφῆς $k\pi$, γιὰ κάθε $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ καὶ ἔχει παράγωγο τὴ συνάρτηση $-1 - \cot^2$.

Πρόταση 4.5.3.1 *Ὅλες οἱ τριγωνομετρικὲς ταυτότητες, ποὺ ἰσχύουν γιὰ τὶς γνωστὲς πραγματικὲς τριγωνομετρικὲς συναρτήσεις πραγματικῆς μεταβλητῆς ἐξακολουθοῦν νὰ ἰσχύουν καὶ γιὰ τὶς μιγαδικὲς τριγωνομετρικὲς συναρτήσεις μιγαδικῆς μεταβλητῆς.*

Οἱ συναρτήσεις exp, sin καὶ cos συσχετίζονται μεταξὺ τους μὲ τὸν τύπο τοῦ **Euler**

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

ἀπὸ ὅπου παίρνουμε

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{και} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Οἱ σχέσεις αὐτὲς εἶναι πολὺ χρήσιμες, ἀφοῦ μετατρέπουν τὶς τριγωνομετρικὲς συναρτήσεις σὲ ἐκθετικές.

Πρόβλημα 4.5.3.1 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ μέτρο καὶ τὸ βασικὸ ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ* $\sin(2i)$.

Λύση: Σύμφωνα μὲ τοὺς παραπάνω τύπους, ἔχουμε

$$\sin(2i) = \frac{e^{i2i} - e^{-i2i}}{2i} = \frac{e^{-2} - e^{2}}{2i} = \frac{e^{4} - 1}{2e^{2}} i,$$

ὁπότε προκύπτει ὅτι

$$|\sin(2i)| = \frac{e^4 - 1}{2e^2} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{Arg}\sin(2i) = \frac{\pi}{2}. \quad \blacklozenge$$

Πρόβλημα 4.5.3.2 *Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση* $\sin(z) = 2$.

Λύση: Θέτουμε $z := x + iy$, ὁπότε βρίσκουμε

$$2 = \sin(x + iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy)$$

$$= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y).$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτὴ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\sin(x)\cosh(y) = 2, \quad \cos(x)\sinh(y) = 0.$$

Ἀπὸ τὴ δεύτερη ἐξίσωση παίρνουμε $\cos(x) = 0$, ἢ $\sinh(y) = 0$.

Ἂν ἰσχύει ἡ σχέση $\sinh(y) = 0$, τότε $y = 0$, ὁπότε ἀπὸ τὴν πρώτη ἐξίσωση προκύπτει ὅτι $\sin(x) = 2$, πρᾶγμα ἀδύνατο. Ἄρα πρέπει

$$\cos(x) = 0, \text{ δηλαδὴ } x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

(k ἀκέραιος). Τότε, ἀπὸ τὴν πρώτη ἐξίσωση, προκύπτει ὅτι

$$\cosh(y) = 2(-1)^k.$$

Ἀλλά, γιὰ κάθε y, ἡ ποσότητα $\cosh(y)$ εἶναι θετική, ὁπότε ὁ ἀκέραιος k πρέπει νὰ εἶναι ἄρτιος, δηλαδὴ $k = 2m$ καὶ

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = 2, \text{ ἢ } e^y + e^{-y} = 4, \text{ ἢ } e^{2y} - 4e^y + 1 = 0.$$

Θέτουμε $\lambda := e^y$ καὶ ἐπιλύουμε τὴν ἐξίσωση

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0,$$

ἡ ὁποία ἔχει ρίζες τοὺς ἀριθμοὺς $2 \pm \sqrt{3}$. Ἔτσι παίρνουμε

$$y = \log[2 \pm \sqrt{3}]$$

καὶ ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωση ἔχει λύσεις τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς τῆς μορφῆς

$$z = 2m\pi + \frac{\pi}{2} + i\log[2 \pm \sqrt{3}],$$

ὅπου m ἀκέραιος. ♦

Πρόβλημα 4.5.3.3 *Νὰ ὑπολογιστεῖ ἡ παράγωγος τῆς συνάρτησης μὲ τύπο*

$$f(z) := \frac{z^2 - 3zi + 6}{1 + z + \sin(z)},$$

στὸ σημεῖο $z = 0$.

Λύση: Μποροῦμε νὰ ἀκολουθήσουμε δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Παρατηροῦμε ὅτι τὸ πηλίκο διαφορῶν $[f(z) - f(0)]/z$ στὸ σημεῖο $z = 0$ ἔχει ἀριθμητὴ τὴν ποσότητα

$$\begin{aligned}\frac{z^2 - 3zi + 6}{1 + z + \sin(z)} - 6 &= \frac{z^2 - 3(2 + i)z - 6\sin(z)}{1 + z + \sin(z)} \\ &= z\frac{z - 3(2 + i)}{1 + z + \sin(z)} - \frac{6\sin(z)}{1 + z + \sin(z)}.\end{aligned}$$

Ἑπομένως τὸ **πηλίκο** διαφορῶν τῆς f στὸ σημεῖο $z = 0$ εἶναι τὸ

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} &= \frac{z-3(2+i)}{1+z+\sin(z)} \\ &- \frac{6}{1+z+\sin(z)}\Big[1-\frac{z^2}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots\Big].\end{aligned}$$

Ἔτσι παίρνουμε ὅτι

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = -3(2+i)-6 = -12-3i.$$

2ος τρόπος: Γιὰ κάθε σημεῖο z ἔχουμε

$$f'(z) = \frac{(1+z+\sin(z))(2z-3i)-(1+\cos(z))(z^2-3zi+6)}{(1+z+\sin(z))^2},$$

ὁπότε

$$f'(0) = \frac{1(-3i)-12}{1} = -12-3i,$$

τιμὴ τὴν ὁποία βρήκαμε καὶ μὲ τὸν πρῶτο τρόπο. ♦

4.5.4 Λογάριθμος.

Ἡ **λογαριθμικὴ** μιγαδικὴ συνάρτηση log, ἢ ln, ὁρίζεται νὰ εἶναι ἡ ἀντίστροφη τῆς ἐκθετικῆς μιγαδικῆς συνάρτησης. Ἔτσι, εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι αὐτὴ δίνεται μὲ τὸν τύπο

$$\log z = \log|z| + i\arg z = \log|z| + i\mathrm{Arg}z + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

ὅπου Argz εἶναι τὸ βασικὸ ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z.

Ἡ τιμὴ $\log z$ **δὲν ὁρίζεται** γιὰ $z = 0$, δηλαδὴ τὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συνάρτησης log εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἐκτὸς ἀπὸ τὸ 0. Ἡ συνάρτηση αὐτὴ εἶναι πλειότιμη καὶ ἡ **πρωτεύουσα**, ἢ **κύρια**, τιμή της εἶναι ἡ συνάρτηση

$$\mathrm{Log}z := \log|z| + i\mathrm{Arg}z.$$

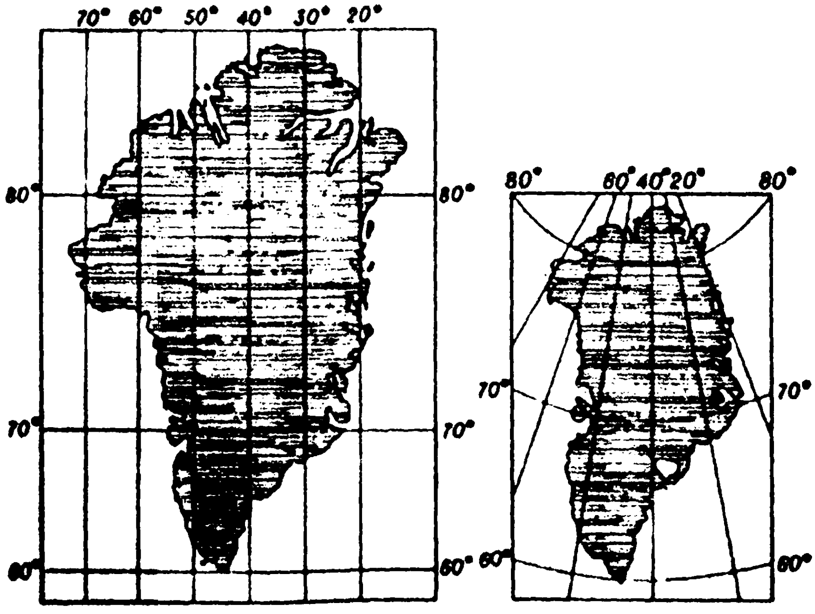
Ἀπὸ τὴν Πρόταση 1.1.3.2 προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτηση Log εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμη παντοῦ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ ἀρνητικοῦ πραγματικοῦ ἡμιάξονα, δηλαδὴ τὰ σημεῖα τοῦ συνόλου $\{z : z + |z| = 0\}$. Μάλιστα δέ, χρησιμοποιῶντας τὴν παράγωγο ἀντίστροφης συνάρτησης, μὲ βάση τὸ Πόρισμα 4.2.4.1, παίρνουμε

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log}(z) = \frac{1}{z}. \tag{4.7}$$

Εὔκολα μποροῦμε νὰ δείξουμε ὅτι ὁ λογάριθμος ἔχει τὴν ἰδιότητα

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b).$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐκθετικὴ συνάρτηση ἀπεικονίζει κατακόρυφα εὐθύγραμμα τμήματα σὲ τόξα κύκλων, ἕπεται ὅτι ἡ λογαριθμικὴ συνάρτηση ἀπεικονίζει τόξα κύκλων σὲ κατακόρυφα εὐθύγραμμα τμήματα.



Τὸ γεγονὸς τοῦτο χρησιμοποιεῖται στὴν κατασκευὴ χαρτῶν. Πραγματικά, ἔστω ὅτι θέλουμε νὰ κατασκευάσουμε τὸν χάρτη μιᾶς νησίδας. Πρὸς τοῦτο ταυτίζουμε τὴν ὑδρόγειο σφαίρα μὲ τὴ μοναδιαία σφαίρα τοῦ 3-διάστατου χώρου καὶ στὴ συνέχεια παίρνουμε τὴ στερεογραφικὴ προβολὴ της πάνω στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο, ὅπως στὸ σχῆμα[8]. Τότε προκύπτει ἡ εἰκόνα ποὺ φαίνεται στὸ δεξιὸ μέρος τοῦ σχήματος. Ἡ εἰκόνα τῆς νησίδας μέσω τῆς συνάρτησης Log δίνει τὸν γνωστὸ χάρτη τῆς νησίδας, ποὺ φαίνεται στὸ ἀριστερὸ μέρος τοῦ σχήματος.

Πρόβλημα 4.5.4.1 *Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση* $\sin z = 2$. *(Βλέπε καὶ Παράδειγμα 4.5.3.2.)*

Ἀπόδειξη: Γράφουμε τὴ δοθεῖσα ἐξίσωση στὴ μορφὴ

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i.$$

Θέτοντας $\zeta := e^{iz}$ προκύπτει ἡ δευτεροβάθμια ἐξίσωση

$$\zeta^2 - 4i\zeta - 1 = 0.$$

Οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης αὐτῆς εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $\zeta_\pm = 2i \pm i\sqrt{3}$, ἀπὸ ὅπου παίρνουμε ὅτι $iz_\pm = \log(2i \pm i\sqrt{3})$. Ἑπομένως, ἡ λύση τῆς ἀρχικῆς ἐξίσωσης εἶναι ἡ

$$z_\pm = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - i\log(2 \pm \sqrt{3}). \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 4.5.4.2 *Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση* $\sin(z - i) = 1$.

Λύση: Ἡ ἐξίσωση εἶναι ἰσοδύναμη πρὸς τὴν $\sin(w) = 1$, ὅπου $w := z - i$. Ἔτσι παίρνουμε

$$\frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}) = 1,$$

ἀπὸ τὴν ὁποία προκύπτει ὅτι $e^{iw} = i$. Ἄρα ἔχουμε

$$iw = \log(i) = \log|i| + i\arg i = i\frac{\pi}{2} + i2k\pi,$$

ὁπότε $w = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Τελικά, ἡ λύση τῆς ἀρχικῆς ἐξίσωσης εἶναι ἡ

$$z = w + i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i, \quad k \in \mathbb{Z}. \ \blacklozenge$$

---

[8] A. I. Markushevich, *Complex numbers and conformal mappings*, Mir Publ. Moscow, 1979.

Πρόβλημα 4.5.4.3 *Νὰ προσδιοριστοῦν τὰ σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου στὰ ὁποῖα ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$f(z) := \bar{z} + \mathrm{Log}(z\bar{z} + \bar{z})$$

εἶναι συνεχής.

Λύση: Ὁ πρῶτος προσθετέος ὁρίζει μία συνάρτηση συνεχὴ σὲ κάθε σημεῖο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Ὁ δεύτερος προσθετέος, δηλαδὴ ἡ συνάρτηση

$$z \to \mathrm{Log}(z\bar{z} + \bar{z})$$

δὲν εἶναι συνεχὴς στὰ σημεῖα γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $\zeta + |\zeta| = 0$, ὅπου $\zeta := z\bar{z} + \bar{z}$. Ἀπὸ τὴν τελευταία σχέση ἔχουμε

$$z\bar{z} + \bar{z} + |z\bar{z} + \bar{z})| = 0,$$

ἢ

$$x^2 + y^2 + x - iy + |x^2 + y^2 + x - iy| = 0,$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτει ὅτι $y = 0$ καὶ $x^2 + x + |x^2 + x| = 0$, δηλαδή, $y = 0$ καὶ $x^2 + x \leq 0$. Ἔτσι βρίσκουμε

$$y = 0 \text{ καὶ } -1 \leq x \leq 0.$$

Ἑπομένως ἡ συνάρτηση f εἶναι παντοῦ συνεχὴς στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ πραγματικοῦ ἄξονα ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνισότητα $-1 \leq x \leq 0$. ♦

4.5.5 Ἡ συνάρτηση δύναμη

Ἡ μιγαδικὴ συνάρτηση δύναμη

$$z \to z^a,$$

ὅπου a εἶναι ἕνας μιγαδικὸς ἀριθμός, ὁρίζεται ἀπὸ τὸν τύπο

$$\{z^a\} := \{e^{a \log z}\}.$$

Ἡ συνάρτηση αὐτὴ εἶναι πλειότιμη καὶ ἡ **πρωτεύουσα τιμὴ** της, ἢ ὁ **βασικὸς κλάδος** της, εἶναι ἡ

$$z^a := e^{a\mathrm{Log}z},$$

ἡ ὁποία ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο ὅλων τῶν μὴ μηδενικῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Αὐτὴ εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίζεται σὲ κάθε σημεῖο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ ἀρνητικοῦ πραγματικοῦ ἡμιάξονα.

4.5.6 Ἡ γενικὴ ἐκθετικὴ συνάρτηση

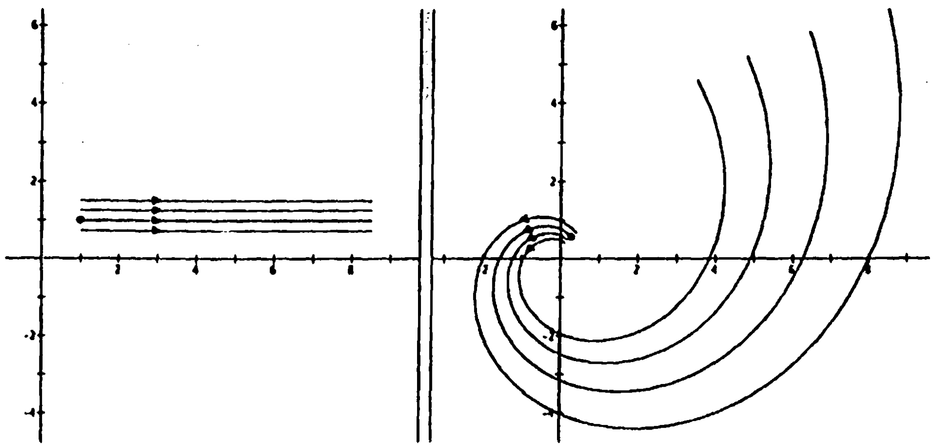
Ἡ **ἐκθετικὴ** μιγαδικὴ συνάρτηση

$$z \to a^z$$

ὅπου a εἶναι ἕνας μὴ μηδενικὸς μιγαδικὸς ἀριθμός, δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο

$$\{a^z\} := \{e^{z\log a}\}.$$

Η συνάρτηση αὐτὴ εἶναι πλειότιμη καὶ ἡ πρωτεύουσα τιμὴ της, ἢ ὁ



Σχήμα 4.12: *Οἱ εἰκόνες ὁριζοντίων εὐθυγράμμων τμημάτων μέσω τῆς ἐκθετικῆς συνάρτησης $f(z) = (1+i)^z$, $z \in \mathbb{C}$, εἶναι οἱ ἑλικοειδεῖς καμπῦλες στὸ σχῆμα δεξιά.*

βασικὸς κλάδος της, εἶναι ἡ συνάρτηση ποὺ ὁρίζεται στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο μὲ τὸν τύπο

$$a^z := e^{z \operatorname{Log} a}.$$

εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίζεται ἐκεῖ.

Πρόβλημα 4.5.6.1 *Νὰ βρεθεῖ ἡ ὁλόμορφη μιγαδικὴ συνάρτηση f ποὺ ἔχει πραγματικὸ μέρος τὴ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$u(x,y) := 3e^x \cos y$$

καὶ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση $f(0) = 3$.

Λύση: Ἀπὸ τὴν πρώτη συνθήκη Cauchy- Riemann, [βλ. συνθῆκες (4.2)] ἔχουμε

$$v_y(x,y) = u_x(x,y) = 3e^x \cos y,$$

ὁπότε μὲ ὁλοκλήρωση παίρνουμε

$$v(x,y) = \int 3e^x \cos y dy = 3e^x \sin y + \varphi(x).$$

Θα πρέπει νὰ προσδιοριστεῖ ἡ συνάρτηση φ. Ὑπολογίζοντας τὴν παράγωγο τῆς $v(x,y)$ ὡς πρὸς x καὶ χρησιμοποιῶντας τὴ δεύτερη συνθήκη Cauchy - Riemann, βρίσκουμε

$$3e^x \sin y + \varphi'(x) = -u_y = 3e^x \sin y,$$

ὁπότε πρέπει ἡ συνάρτηση $\varphi(x)$ νὰ εἶναι ἴση μὲ μιὰ σταθερὴ τιμὴ c. Ἐπομένως ἡ συνάρτηση f δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο

$$f(z) = 3e^x \cos y + i(3e^x \sin y + c) = 3e^x e^{iy} + ic = 3e^z + ic, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ἐπειδὴ ἔχουμε $f(0) = 3$, πρέπει νὰ ἰσχύει $c = 0$, ὁπότε, τελικά, ἡ ζητούμενη συνάρτηση εἶναι ἡ

$$f(z) := 3e^z, \quad z \in \mathbb{C}. \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 4.5.6.2 *Νὰ γραφεῖ στὴν ἀλγεβρικὴ του μορφὴ ὁ βασικὸς κλάδος τῆς δύναμης*

$$z = i^i.$$

Λύση: Ἔχουμε

$$i^i = e^{i\mathrm{Log}(i)} = e^{i(\log|i| + i\mathrm{Arg}(i))} = e^{i(0+i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}. \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 4.5.6.3 *Ἂν a^b παριστάνει τὸν βασικὸ κλάδο τῆς δύναμης $\{a^b\}$, νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὅριο*

$$\lim_{n\to+\infty} i^i(2i)^{2i}(3i)^{3i}\cdots(ni)^{ni}.$$

Λύση: Γιὰ κάθε φυσικὸ ἀριθμὸ n ὁ βασικὸς κλάδος τῆς δύναμης $\{(ni)^{ni}\}$ εἶναι ὁ

$$(ni)^{ni} = e^{ni\mathrm{Log}(ni)} = e^{ni[\log(n)+i\mathrm{Arg}(ni)]} = e^{ni[\log n + i\frac{\pi}{2}]},$$

δηλαδὴ

$$(ni)^{ni} = e^{-n\frac{\pi}{2}+in\log(n)},$$

ὁ ὁποῖος ἔχει μέτρο ἴσο μὲ

$$|(ni)^{ni}| = e^{-n\frac{\pi}{2}}.$$

Ἑπομένως τὸ δοθέν γινόμενο ἔχει μέτρο ἴσο μὲ

$$|i^i(2i)^{2i}(3i)^{3i}\cdots(ni)^{ni}| = e^{-[1+2+3+\ldots+n]\frac{\pi}{2}},$$

τὸ ὁποῖο τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς n τείνει πρὸς τὸ ἄπειρο. Τὸ γεγονὸς τοῦτο συνεπάγεται ὅτι τὸ ζητούμενο ὅριο εἶναι τὸ σημεῖο 0. ♦

Πρόβλημα 4.5.6.4 *Δίνεται ἡ ἀκολουθία $z_n := i/n, \ n = 1, 2, \cdots$ Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἰσχύει*

$$\lim_{n\to+\infty} z_1^{z_1} z_2^{z_2} \ldots z_n^{z_n} = 0.$$

Ἀπόδειξη: Γιὰ κάθε n ἔχουμε

$$z_n^{z_n} = e^{z_n \mathrm{Log}(z_n)} = e^{\frac{i}{n}\mathrm{Log}(\frac{i}{n})} = e^{\frac{i}{n}(\log(\frac{1}{n})+i\mathrm{Arg}\frac{i}{n})} = e^{\frac{i}{n}(\log(\frac{1}{n})+i\mathrm{Arg}\frac{i}{n})} = e^{-\frac{i}{n}\log(n)-\frac{\pi}{2n}}.$$

Ἑπομένως ἰσχύει

$$|z_n^{z_n}| = |e^{-\frac{i}{n}\log(n)-\frac{\pi}{2n}}| = e^{-\frac{\pi}{2n}}.$$

Ἐπειδὴ ἡ σειρὰ $\sum \frac{\pi}{2n}$ συγκλίνει πρὸς τὸ $+\infty$, ἔπεται ὅτι

$$\lim_{n\to+\infty}|z_1^{z_1} z_2^{z_2}\ldots z_n^{z_n}| = \lim_{n\to+\infty}|z_1^{z_1}||z_2^{z_2}|\ldots|z_n^{z_n}| = e^{-\sum\frac{\pi}{2n}} = 0.$$

Ἄρα τὸ ὅριο τῆς ἀρχικῆς ἀκολουθίας εἶναι ἴσο μὲ τὸ 0. ♦

Πρόβλημα 4.5.6.5 *Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση*

$$(2i)^z = 1 + i.$$

Λύση: Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν

$$e^{z\mathrm{Log}(2i)} = 1 + i,$$

δηλαδὴ τὴν

$$e^{z[\log 2 + i\frac{\pi}{2}]} = 1 + i.$$

Ἡ σχέση αὐτὴ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν

$$z[\log 2 + i\frac{\pi}{2}] = \log(1+i) = \log|1+i| + i\arg(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i,$$

ἀπὸ τὴν ὁποία παίρνουμε τὴ λύση

$$z = \frac{1}{2} + \frac{2k\pi i(\log 2 - i\frac{\pi}{2})}{\log^2(2) + \frac{\pi^2}{4}}. \ \blacklozenge$$

4.5.7 Οἱ ὑπερβολικὲς μιγαδικὲς συναρτήσεις

Οἱ **ὑπερβολικές** μιγαδικὲς συναρτήσεις **ὑπερβολικὸ ἡμίτονο** sinh **ὑπερβολικὸ συνημίτονο** cosh **ὑπερβολικὴ ἐφαπτομένη** tanh καὶ **ὑπερβολικὴ συνεφαπτομένη** coth ὁρίζονται, ἀντίστοιχα, μὲ τοὺς τύπους

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}, \quad \coth(z) := \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)}.$$

Τὸ πεδίο ὁρισμού τῶν δύο πρώτων ὑπερβολικῶν συναρτήσεων εἶναι ὁλόκληρο τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο καὶ τὰ σημεῖα στὰ ὁποῖα μηδενίζονται εἶναι τὰ $k\pi i$ καὶ $(k+\frac{1}{2})\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, ἀντίστοιχα. Ἡ ὑπερβολικὴ ἐφαπτομένη ὁρίζεται παντοῦ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα ποὺ μηδενίζουν τὸ cosh. Ἡ ὑπερβολικὴ συνεφαπτομένη ὁρίζεται παντοῦ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο ἐκτός ἀπὸ τὰ σημεῖα ποὺ μηδενίζουν τὸ sinh.

Οἱ τριγωνομετρικὲς καὶ οἱ ὑπερβολικὲς μιγαδικὲς συναρτήσεις συνδέονται μεταξὺ τους μὲ τοὺς ἑξῆς τύπους:

$$\sin(z) = -i\sinh(iz), \quad \sinh(z) = -i\sin(iz),$$

$$\cos(z) = \cosh(iz), \quad \cosh(z) = \cos(iz),$$

$$\tan(z) = -i\tan(iz), \quad \tanh(z) = -i\tan(iz),$$

$$\cot(z) = i\coth(iz), \quad \coth(z) = i\cot(iz).$$

Οἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων αὐτῶν ὑπολογίζονται μὲ βάση τὴν παράγωγο τῆς ἐκθετικῆς συνάρτησης. Γιὰ παράδειγμα ἔχουμε

$$\sinh'(z) = \cosh(z), \quad \cosh'(z) = \sinh(z).$$

Πρόβλημα 4.5.7.1 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὅριο*

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\cosh(iz) + i\sinh(iz)}.$$

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$\frac{\cos(2z)}{\cosh(iz)+i\sinh(iz)}=\frac{\cos^2(z)-\sin^2(z)}{\cos(z)-\sin(z)}=\cos(z)+\sin(z),$$

ὁπότε, λόγω τῆς συνέχειας τῶν συναρτήσεων cos καὶ sin, τὸ ζητούμενο ὅριο εἶναι ἴσο μὲ

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}(\cos(z)+\sin(z))=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}.\ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 4.5.7.2 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὅριο στὸ σημεῖο 0 τῆς παράστασης*

$$f(z):=\frac{z-e^z+1-\sin(z)}{z+\sinh(z)}.$$

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι στὸ σημεῖο 0 ἡ παράσταση αὐτὴ παίρνει τὴν ἀπροσδιόριστη μορφὴ 0/0.

Οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες (στὴν περιοχὴ τοῦ μηδενὸς) καὶ τέτοιες ὥστε

$$\lim_{z\to 0}(z-e^z+1-\sin(z))'=\lim_{z\to 0}(1-e^z-\cos(z))=1-1-1=-1,$$

καὶ

$$\lim_{z\to 0}(z+\sinh(z))'=\lim_{z\to 0}(1+\cosh z)=1+1=2.$$

Ἔτσι, ἐφαρμόζοντας τὸν κανόνα L' Hospital, παίρνουμε

$$\lim_{z\to 0}\frac{z-e^z+1-\sin(z)}{z+\sinh(z)}=\lim_{z\to 0}\frac{1-e^z-\cos(z)}{1+\cosh(z)}=\frac{-1}{2}.\ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 4.5.7.3 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$u(x,y):=x^2-y^2+x\sin(x)\cosh(y)-y\cos(x)\sinh(y)$$

εἶναι τὸ πραγματικὸ μέρος μιᾶς ἀκεραίας συνάρτησης f ἡ ὁποία καὶ νὰ βρεθεῖ.

Λύση: Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι ἡ u εἶναι ἁρμονική. Πραγματικά, ἔχουμε

$$u_x = 2x + \sin(x)\cosh(y) + x\cos(x)\cosh(y) + y\sin(x)\sinh(y),$$

$$u_{xx} = 2 + 2\cos(x)\cosh(y) - x\sin(x)\cosh(y) + y\cos(x)\sinh(y),$$

$$u_y = -2y + x\sin(x)\sinh(y) - \cos(x)\sinh(y) - y\cos(x)\cosh(y),$$

$$u_{yy} = -2 + x\sin(x)\cosh(y) - 2\cos(x)\cosh(y) - y\cos(x)\sinh(y).$$

Ἔτσι προκύπτει ὅτι

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

ὁπότε ἡ συνάρτηση u εἶναι ἁρμονική. Τώρα, ἔστω $v(x,y)$ ἡ συζυγὴς ἁρμονικὴ της. Ἄρα ἰσχύει $v_y = u_x$ καὶ $v_x = -u_y$. Ἀπό τὴν πρώτη σχέση παίρνουμε

$$v_y(x,y) = 2x + \sin(x)\cosh(y) + x\cos(x)\cosh(y) + y\sin(x)\sinh(y),$$

ὁπότε μὲ ὁλοκλήρωση ἔχουμε

$$v(x,y) = 2xy + x\cos(x)\sinh(y) + y\sin(x)\cosh(y) + c(x).$$

Ἀπὸ αὐτὴ καὶ τὴν $v_x = -u_y$ ἔχουμε

$$2y + \cos(x)\sinh(y) - x\sin(x)\sinh(y) + y\cos(x)\cosh(y) + c'(x)$$

$$= 2y - x\sin(x)\sinh(y) + \cos(x)\sinh(y) + y\cos(x)\cosh(y),$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτει ὅτι $c(x) = c$ (σταθερὸς ἀριθμὸς). Ἄρα ἡ ζητούμενη ἀκεραία συνάρτηση δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 + x\sin(x)\cosh(y) - y\cos(x)\sinh(y) \\ &\quad + i(2xy + x\cos(x)\sinh(y) + y\sin(x)\cosh(y) + c) \\ &= x^2 - y^2 + i2xy + x(\sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)) \\ &\quad + iy(i\cos(x)\sinh(y) + \sin(x)\cosh(y)) + ic \\ &= (x+iy)^2 + (x+iy)\sin(x+iy) + ic = z^2 + x\sin z + ic. \end{aligned}$$ ♦

Πρόβλημα 4.5.7.4 *Νὰ ὑπολογιστεῖ ἡ ἀκτίνα σύγκλισης τῆς δυναμοσειρᾶς*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}[\cos(in)]z^n.$$

Λύση: Οἱ συντελεστὲς τῆς δυναμοσειρᾶς εἶναι οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ $a_n := \cos(in), n = 0, 1, 2, \cdots$ Ἐπομένως, σύμφωνα μὲ τὴν Πρόταση 4.4.3.1, ἡ ἀκτίνα σύγκλισης τῆς δυναμοσειρᾶς εἶναι ἴση μὲ

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\cos(in)}{\cos(i(n+1))} = \lim \frac{e^n + e^{-n}}{e^{n+1} + e^{-n-1}} = \lim \frac{1 + e^{-2n}}{e + e^{-2n-1}} = e^{-1}. \ \blacklozenge$$

4.6 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Νὰ βρεθοῦν οἱ εἰκόνες μέσω τῆς συνάρτησης μὲ τύπο $f(z) := \frac{1}{z}$ τῶν καμπυλῶν μὲ τὶς ἑξῆς παραμετρικὲς παραστάσεις

   α) $z(t) := t + 2i(1-t), \ 0 \le t \le 1,$

   β) $z(t) := \sin t - i\cos t, \ 0 \le t \le 2\pi.$

   γ) $z(t) := \cosh t + i\sinh t, \ 0 \le t \le 2\pi.$

2. Νὰ βρεθοῦν στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο οἱ εἰκόνες τῶν συνόλων

$$A_1 := \{z = x + iy : \ x = y\}$$

   καὶ

$$A_2 := \{z = x + iy : \ x = -y\}$$

   μέσω τῶν συναρτήσεων μὲ τύπους $f_1(z) := z^2$ και $f_2(z) := \frac{1}{z^2}$.

3. Νὰ βρεθοῦν οἱ εἰκόνες τοῦ κύκλου μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0 καὶ ἀκτῖνα $r(> 0)$ μέσω τῶν μετασχηματισμῶν

$$f_1(z) := z - \frac{1}{z} \text{ καὶ } f_2(z) := 1 - \frac{1}{z^2}.$$

4. Νὰ βρεθεῖ τὸ πραγματικὸ μέρος τοῦ βασικοῦ κλάδου τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z^z + i\sin z$, ὅταν $z := 1 + i$ καὶ τὸ φανταστικὸ μέρος ὅταν $z := 1 - i$.

5. Νὰ ἐξεταστεῖ γιὰ ποιὲς τιμὲς τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν a, b, c, d ἡ συνάρτηση μὲ τύπο
$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$
εἶναι ἕνα - πρὸς - ἕνα.

6. Νὰ βρεθοῦν τὰ πραγματικὰ καὶ τὰ φανταστικὰ μέρη τῶν συναρτήσεων ποὺ ὁρίζονται ἀντίστοιχα μὲ τοὺς τύπους:
$$f_1(z) := \frac{iz+1}{iz-1},\ f_2(z) := \frac{\bar{z}}{z},\ f_3(z) := i - 2z^3,\ f_4(z) := z^3 - i\bar{z}.$$

7. Μέσω τῆς συνάρτησης μὲ τύπο $f(z) := z - 1$ νὰ βρεθοῦν οἱ εἰκόνες τῶν ἑξῆς συνόλων:

$\{z \neq 0 : \mathrm{Re} z = 0\}$, $\{z \neq 0 : |z| = z^2\}$, $\{z \neq 0 : |z| + z = 0\}$,

$\{z \neq 0 : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im} z\}$, $\{z : \mathrm{Arg}(z) = 3\pi/4\}$, $\{z : \mathrm{Arg}(z^2) = \pi/2\}$.

8. Νὰ προσδιοριστεῖ ἡ εἰκόνα τοῦ συνόλου
$$\{z : \mathrm{Re}(z) = 0 \ \text{ἤ}\ \mathrm{Im}(z) = 0\}$$
μέσω κάθε μιᾶς τῶν ἀπεικονίσεων ποὺ ὁρίζονται μὲ τοὺς τύπους:
$$f_1(z) := \frac{z+1}{z-1},\ f_2 z) := 1 + \frac{1}{z},\ f_3(z) := z^2.$$

9. Νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ ὅρια στὸ σημεῖο 0 τῶν παραστάσεων
$$\frac{z^2 + 2iz - 1}{2(z+1)},\ \mathrm{Im}(z^2 + 2z + e^z).$$

10. Μὲ χρήση τοῦ $\varepsilon - \delta-$ ὁρισμοῦ νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι εἶναι συνεχεῖς σὲ κάθε σημεῖο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου οἱ συναρτήσεις μὲ τύπους
$$f_1(z) := z^3,\ f_2(z) := \mathrm{Re}(z^2),\ f_3(z) := \mathrm{Im}(z).$$

11. Νὰ προσδιοριστεῖ τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου στὰ ὁποῖα εἶναι συνεχεῖς οἱ συναρτήσεις μὲ τύπους

$$f_1(z) := \operatorname{Arg}(1 - z^2),\ \ f_2(z) := \operatorname{Arg}(1 + i - z^2),\ \ f_3(z) := \operatorname{Arg}(1 - z - z^2).$$

12. Νὰ ὑπολογιστοῦν οἱ ἀκτῖνες σύγκλισης τῶν δυναμοσειρῶν

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n} z^n,\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} (1+i)^n (z-2i)^n,\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} i^n z^n,\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{z-i}{1-2i}\Big)^n,\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(in)^n},\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} (i+n) z^n.$$

13. Νὰ ἐξεταστεῖ ἂν συγκλίνουν οἱ σειρὲς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(in)}{2^n},\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos i(n^2)}{3n^2},\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sin(in)}{4^n}.$$

14. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἂν μιὰ συνάρτηση $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$ εἶναι ὁλόμορφη σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$, τότε στὸν τόπο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \mathcal{T}\}$ ἰσχύει

$$u_x v_x + u_y v_y = 0,$$

ἢ μὲ ἄλλα λόγια οἱ οἰκογένειες τῶν καμπυλῶν $u(x, y) =$ σταθ. καὶ $v(x, y) =$ σταθ. εἶναι ὀρθογώνιες.

15. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι τὸ μέτρο R καὶ τὸ ὄρισμα Φ μιᾶς ὁλόμορφης συνάρτησης

$$f(z) = R(x, y) \exp(i\Phi(x, y))$$

συνδέονται μεταξύ τους μὲ τὶς σχέσεις

$$R_x = R\Phi_y \ \text{ καὶ } \ R_y = -R\Phi_x.$$

16. Νὰ ἐξεταστεῖ ἂν ἀληθεύει ἡ παρακάτω Πρόταση:

Ἂν μιὰ μιγαδικὴ συνάρτηση f παραγωγίζεται σὲ ἕνα σημεῖο z_0, τότε ἰσχύει ἡ σχέση

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\Big|_{z=z_0} = 0.$$

17. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := e^{|z|^2} - \frac{1}{2}|z|^2\overline{z}$$

εἶναι παραγωγίσιμη μόνο στὸ σημεῖο 0 καὶ ἰσχύει $f'(0) = 0$.

18. Νὰ ἐξεταστεῖ ἄν ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ὅπου ἡ μιγαδικὴ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := \mathrm{Re}\frac{z}{z+2i}$$

παραγωγίζεται.

19. Νὰ ἐξεταστεῖ σὲ ποιὰ σημεῖα ἡ συνάρτηση μὲ τύπο $f(z) := |z|^2 + i|z|^4$ παραγωγίζεται καὶ ἄν ¨ναὶ¨ νὰ βρεθεῖ ἡ παράγωγος σὲ αὐτά.

20. Νὰ ἐξεταστεῖ ἄν ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ δίσκου $B(0, \frac{3}{2})$ στὰ ὁποῖα ἡ συνάρτηση f μὲ τύπο

$$f(z) := |z|^2 + \sin(|z|^2) + 3 - 2i,$$

εἶναι παραγωγίσιμη.

21. Νὰ βρεθεῖ τὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν z στὰ ὁποῖα ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς μιγαδικῆς συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := f(x+iy) = x^2 + iy^2.$$

22. Νὰ ἐξεταστεῖ ἄν ὑπάρχουν σημεῖα στὸ μιγαδικό ἐπίπεδο ὅπου παραγωγίζεται ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) = \frac{|z|^2}{|z-1|^2} + \frac{|z-1|^2}{|z|^2}$$

καὶ ἄν ¨ναὶ ¨ νὰ βρεθεῖ ἡ παράγωγος σὲ αὐτά.

23. Νὰ ἐξεταστεῖ ἄν ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ὅπου ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := 2|z-i|^2 + |z+i|^4$$

παραγωγίζεται καί, ἄν ¨ναὶ¨, νὰ βρεθεῖ ἡ παράγωγος σὲ αὐτά.

24. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση μὲ τύπο $f(z) := e^{iz}$ εἶναι περιοδική.

25. Νὰ ἀποδειχτοῦν οἱ σχέσεις:

$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$

$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$

$\tan(x+iy) = [\tan x + i \tanh y]/[1 - i \tan x \tanh y].$

26. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

$$4\cos z = -5, \quad \sin z = \pi i, \quad \sin z = i\frac{\pi}{2}, \quad \tan z = \pi i, \quad e^{ix} = \cos \pi x, (x \in \mathbb{R}).$$

27. Νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ ὅρια τῶν παραστάσεων

$$\frac{e^z - 1}{\sin z}, \quad \frac{z^4 - 3z^3}{z - \sin z},$$

ὅταν ἡ μεταβλητὴ z τείνει πρὸς τὸ σημεῖο 0.

28. Νὰ βρεθοῦν τὰ σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου στὰ ὁποῖα οἱ συναρτήσεις, ποὺ ὁρίζονται μὲ τοὺς παρακάτω τύπους, εἶναι παραγωγίσιμες:

$f_1(z) := ze^z,\ f_2(z) := |z|^2\mathrm{Re}(z),\ f_3(z) := \bar{z}\mathrm{Im}(z),\ f_4(z) := \sin(2z) - 2i,$
$f_5(z) := (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2,\ f_6(z) := \bar{z}\mathrm{Re}(z),\ f_7(z) := |z-2i|^2 + |z-1|^2,$
$f_8(z) := z(\mathrm{Re}(z)) + \mathrm{Im}(z),\ f_9(z) := (z+1)|z|^2,\ f_{10}(z) := -z|z|^2 + \exp(|z|^2),$
$f_{11}(z) := z + (z+1+i)\bar{z},\ f_{12}(z) := |z-2i|^2 + |z|^2,\ f_{13}(z) := |z|^2 + i|z|^4$
$f_{14}(z) = f(x+iy) := (x - iy + 1)(x^2 + y^2 + x + iy + 1)^{-1}.$

29. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

$$e^z + i = 0, \quad e^{2z} + e^z + 1 = 0.$$

30. Νὰ ὑπολογιστοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν

$$-1-i, \quad \frac{\pi}{2} + i\log 2, \quad 3 - 2i + e^{2i}, \quad \cos(1-i), \quad \sin(e^i), \quad \mathrm{Log}(1+i).$$

31. Νὰ γραφεῖ στὴν ἀλγεβρικὴ του μορφὴ ὁ ἀριθμὸς $\mathrm{Log}(1+2i-e^i)$.

32. Νὰ βρεθοῦν τὰ σύνολα στὰ ὁποῖα εἶναι ὁλόμορφες οἱ συναρτήσεις ποὺ ὁρίζονται μὲ τοὺς τύπους

$f(z) := \mathrm{Log}(2z-3i)$,

$f(z) := \mathrm{Log}(iz^2+z-i)$,

$f(z) := \mathrm{Log}(\sin z - iz)$,

$f(z) := \mathrm{Log}(e^z+iz)$.

33. Νὰ ἀπεικονιστεῖ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο τὸ σύνολο τῶν σημείων στὰ ὁποῖα ἡ μιγαδικὴ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := \sin(z) + i\mathrm{Log}(2i-z^2)$$

δὲν εἶναι συνεχής.

34. Δίνονται πραγματικοὶ αριθμοὶ a, β, γ, δ καὶ ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$u(x,y) := a(x^2-y^2) - 2\beta xy + \gamma x - \delta y.$$

Νὰ ἐξεταστεῖ ἄν ὑπάρχει (καί, ἄν ναί, νὰ βρεθεῖ) ἀκεραία μιγαδικὴ συνάρτηση f ποὺ ἔχει πραγματικὸ μέρος τὴ συνάρτηση αὐτὴ καὶ εἶναι τέτοια ὥστε $f(a) = a^3 + ia\delta$.

35. Νὰ ὑπολογιστοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν

$$i^{1+i},\ \ (1+i)(1+2i),\ \ (2-i)^i,\ \ (1-i)^{3-2i},\ \ 2^{3i-1}.$$

36. Δίνονται πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$. Νὰ βρεθεῖ τὸ φανταστικὸ μέρος τοῦ βασικοῦ κλάδου τῆς δύναμης

$$[\sin(x+iy)]^i.$$

37. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι σὲ πολικὲς συντεταγμένες (ρ, φ) οἱ συνθῆκες Cauchy-Riemann παίρνουν τὴ μορφὴ

$$u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\varphi,\ \ v_\rho = -\frac{1}{\rho} u_\varphi.$$

38. Ἀφοῦ ἀποδειχτεῖ ὅτι οἱ συναρτήσεις μὲ τύπους

$u(x,y) := \log(x^2+y^2)$,

$u(x,y) := \mathrm{Arc}\tan(y/x)$,

$u(x,y) := x(x^2+y^2)^{-1}$,

$u(x,y) := -y(x^2+y^2)^{-1}$

εἶναι ἁρμονικές, νὰ βρεθοῦν οἱ συζυγεῖς ἁρμονικὲς τους.

39. Νὰ βρεθοῦν ὅλες οἱ ὁλόμορφες συναρτήσεις f ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση $f'(0)+f'(0)=0$ καὶ ἔχουν πραγματικὸ μέρος τὴ συνάρτηση $u(x,y) = x\cos x\cosh y + y\sinh y\sin x$.

40. Νὰ βρεθοῦν ὅλες οἱ πραγματικὲς συναρτήσεις ψ, ἂν εἶναι γνωστὸ ὅτι ἡ συνάρτηση $u(x,y)$, ἡ ὁποία ὁρίζεται σὲ ὅλο τὸ καρτεσιανὸ ἐπίπεδο μὲ ἕναν ἀπὸ τοὺς παρακάτω τύπους, εἶναι ἁρμονική:

$u(x,y) := \psi(x^2-y^2)$,

$u(x,y) := \psi(xy)$,

$u(x,y) := \psi(y/x)$,

$u(x,y) := \psi(ax+\beta y)$,

$u(x,y) := \psi(x+(x^2+y^2)^{1/2})$,

$u(x,y) := \psi(x+y^2/x)$.

⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛

Κεφάλαιο 5

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

5.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

5.1.1 Ὁλοκλήρωμα μιγαδικῆς συνάρτησης πραγματικῆς μεταβλητῆς

Ἔστω

$$\varphi(t) := x(t) + iy(t), \quad t \in [a, \beta]$$

μιὰ συνεχὴς μιγαδικὴ συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ πραγματικὲς συναρτήσεις

$$x = x(t), \quad t \in [a, \beta] \quad \text{καὶ} \quad y = y(t), \quad t \in [a, \beta]$$

εἶναι συνεχεῖς. Τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συνάρτησης φ ὁρίζεται μὲ τὸν τύπο

$$\int_a^\beta \varphi(t)dt := \int_a^\beta x(t)dt + i\int_a^\beta y(t)dt.$$

Εἶναι εὔκολο νὰ ἀποδείξουμε τὴν ἀκόλουθη πρόταση:

Πρόταση 5.1.1.1 *Ἡ συνάρτηση $\varphi \to \int_a^\beta \varphi(t)dt$ εἶναι γραμμική.*

Ἐπίσης ἰσχύει ἡ ἑξῆς σημαντικὴ ἰδιότητα:

Πρόταση 5.1.1.2 *Γιὰ κάθε συνεχῆ συνάρτηση* $\varphi : [a, \beta] \to \mathbb{C}$ *ἰσχύει ὅτι*

$$|\int_a^\beta \varphi(t)dt| \leq \int_a^\beta |\varphi(t)|dt.$$

Ἀπόδειξη: Γιὰ δύο τυχόντα σημεῖα t καὶ s τοῦ διαστήματος $[a, \beta]$ ἐφαρμόζουμε τὴ γνωστὴ ἀνισότητα Cauchy-Schwartz στὰ 2-διάστατα διανύσματα $(x(t), y(t))$ καὶ $(x(s), y(s))$. Δηλαδὴ ἔχουμε

$$x(t)x(s) + y(t)y(s) \leq \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\sqrt{x^2(s) + y^2(s)}.$$

Ὁλοκληρώνοντας καὶ τὰ δύο μέλη ὡς πρὸς τὴ μεταβλητὴ s ἀπὸ τὸ a μέχρι τὸ β παίρνουμε τὴν ἀνισότητα

$$x(t)\int_a^\beta x(s)ds + y(t)\int_a^\beta y(s)ds \leq \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\int_a^\beta \sqrt{x^2(s) + y^2(s)}ds.$$

Στὴ συνέχεια, ὁλοκληρώνουμε ὡς πρὸς t καὶ παίρνουμε

$$\int_a^\beta x(t)dt \int_a^\beta x(s)ds + \int_a^\beta y(t)dt \int_a^\beta y(s)ds$$

$$\leq \int_a^\beta \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}dt \int_a^\beta \sqrt{x^2(s) + y^2(s)}ds,$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητούμενη σχέση. ■

5.1.2 Ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα

Ὑποθέτουμε ὅτι γ εἶναι μία διαφορίσιμη καμπύλη στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο μὲ παραμετρικὴ παράσταση

$$z = z(t), \quad t \in [a, \beta]$$

καὶ θεωροῦμε μιὰ συνεχῆ μιγαδικὴ συνάρτηση f μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο τῶν σημείων τῆς καμπύλης. Τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

ὀνομάζεται ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα τῆς συνάρτησης f κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης γ.

Πρόβλημα 5.1.2.1 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int_\gamma (z+\sqrt{z})dz,$$

ὅπου γ εἶναι τὸ ἄνω τμῆμα τοῦ μοναδιαίου κύκλου μὲ θετικὴ φορὰ καὶ ὅπου $\sqrt{z}$ εἶναι ἐκεῖνος ὁ κλάδος τῆς τετραγωνικῆς ρίζας τοῦ z γιὰ τὸν ὁποῖο ἰσχύει $\sqrt{1}=-1$.

Λύση: Μιὰ παραμετρικὴ παράσταση τῆς καμπύλης γ εἶναι ἡ

$$z(t) := e^{it},\, t \in [0,\pi]$$

καὶ γιὰ κάθε t οἱ δυὸ τετραγωνικὲς ρίζες τοῦ $z(t)$ εἶναι οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ

$$e^{i\frac{t}{2}} \text{ καὶ } e^{i\frac{t}{2}+i\pi}.$$

Ἀπὸ τοὺς δυὸ αὐτοὺς ἀριθμοὺς δεχόμαστε τὸν δεύτερο, ἀφοῦ γιὰ $t=0$, ἔχουμε

$$e^{i\frac{0}{2}+i\pi} = e^{i\pi} = -1.$$

Ἔτσι τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (z+\sqrt{z})dz &= \int_0^\pi (e^{it}+e^{i\frac{t}{2}+i\pi})ie^{it}dt \\
&= i\int_0^\pi (e^{2it}-e^{\frac{3it}{2}})dt \\
&= \frac{1}{2}e^{2it}\Big|_0^\pi - \frac{2}{3}e^{i\frac{3}{2}t}\Big|_0^\pi = \frac{1}{2}(e^{2i\pi}-e^0) - \frac{2}{3}(e^{i\frac{3\pi}{2}}-e^0) \\
&= -\frac{2}{3}(-i-1) = \frac{2}{3}(1+i). \ \blacklozenge
\end{aligned}$$

Τὸ ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα ὁρίζεται καὶ γιὰ καμπῦλες ποὺ εἶναι κατὰ τμήματα διαφορίσιμες ὡς ἑξῆς:

Ἔστω γ μία κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z = z(t)$, $t \in [a,\beta]$. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ 3.1.4.1, ὑπάρχει μιὰ διαμέριση

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = \beta$$

τοῦ διαστήματος $[a,\beta]$, τέτοια ὥστε ἡ $z(\cdot)$ νὰ ἔχει συνεχὴ παράγωγο σὲ κάθε διάστημα (t_j, t_{j+1}), $j = 0, 1, 2, \cdots, k-1$ καὶ, ἐπὶ πλέον, τὰ ὅρια

$$\lim_{t \to t_j + 0} z(t) \text{ καὶ } \lim_{t \to t_{j+1} - 0} z(t)$$

νὰ ὑπάρχουν, ὡς μιγαδικοὶ ἀριθμοί. Τότε, γιὰ κάθε $j = 0, 1, 2, \cdots, k-1$, τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(z(t))z'(t)dt$$

ὑπάρχει, διότι ἡ συνάρτηση $t \to f(z(t))z'(t)$ μπορεῖ νὰ ἐπεκταθεῖ σὲ ὁλόκληρο τὸ κλειστὸ διάστημα $[t_j, t_{j+1}]$ καὶ νὰ εἶναι συνεχὴς σὲ αὐτό. Πραγματικά, τοῦτο γίνεται ὅταν δώσουμε τιμὲς ἴσες μὲ τὰ πλευρικὰ της ὅρια, δηλαδή, θέτοντας

$$f(z(t_j))z'(t_j) = f(z(t_j)) \lim_{t \to t_j + 0} z'(t)$$

καὶ

$$f(z(t_{j+1}))z'(t_{j+1}) = f(z(t_{j+1})) \lim_{t \to t_{j+1} - 0} z'(t).$$

Ἡ ποσότητα

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(z(t))z'(t)dt$$

ὀνομάζεται **ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα** τῆς συνάρτησης f κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης γ.

Γενικότερα, ἄν

$$C := \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$$

εἶναι μιὰ ἁλυσίδα κατὰ τμήματα διαφορίσιμων καμπυλῶν στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο καὶ f εἶναι μιὰ συνάρτηση συνεχὴς σὲ ὅλα τὰ σημεῖα τῶν καμπυλῶν, ὁρίζουμε ὡς **ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα τῆς f πάνω στὸ ἄθροισμα τῶν καμπυλῶν** νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωμάτων πάνω σὲ κάθε μία ἀπὸ αὐτές, δηλαδή

$$\int_C f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

5.1.3 Ἀλλαγὴ μεταβλητῆς ὁλοκλήρωσης

Μὲ βάση τὸν ὁρισμὸ τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος παίρνουμε τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Θεώρημα 5.1.3.1 *Τὸ ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα πάνω σὲ μιὰ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν παραμετρικὴ παράσταση τῆς καμπύλης.*

Ἀπόδειξη: Χωρὶς βλάβη τῆς γενικότητας, μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι ἡ καμπύλη εἶναι διαφορίσιμη.

Ἔστω γ μιὰ διαφορίσιμη καμπύλη καὶ $z = z(t)$, $t \in [a, \beta]$ μιὰ παραμετρικὴ παράσταση τῆς καμπύλης. Ἐπίσης, θεωροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση $t := \psi(s)$, $s \in [a_0, \beta_0]$ εἶναι μιὰ διαφορίσιμη ἀναπαραμέτρηση τῆς καμπύλης.

Παίρνουμε μιὰ συνεχὴ συνάρτηση $f : \gamma \to \mathbb{C}$. Μὲ βάση τὴν παραμετρικὴ παράσταση τῆς καμπύλης, τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς f πάνω στὴν καμπύλη γ εἶναι τὸ

$$\int_a^\beta f(z(t)z'(t)dt,$$

ἐνῶ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο, μὲ βάση τὴν ἀναπαραμέτρηση $z_1(s) := z(\psi(s))$, $s \in [a_0, \beta_0]$ τῆς καμπύλης, εἶναι ἴσο μὲ τὸ

$$\int_{a_0}^{\beta_0} f(z_1(s))z_1'(s)ds.$$

Οἱ δύο αὐτὲς ποσότητες εἶναι ἴσες, ἀφοῦ ἰσχύει

$$\int_{a_0}^{\beta_0} f(z(\psi(s))z'(\psi(s))\psi'(s)ds = \int_{a_0}^{\beta_0} f(z(\psi(s))z'(\psi(s))d(\psi(s)) = \int_a^\beta f(z(t)z'(t)dt.$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι τὰ ἴδια πράγματα ἰσχύουν ὅταν ἡ συνάρτηση $t := \psi(s)$, $s \in [a_0, \beta_0]$ εἶναι μιὰ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη ἀναπαραμέτρηση τῆς καμπύλης. ■

5.1.4 Ἰδιότητες ὁλοκλήρωσης

Τὰ ἑπόμενα θεωρήματα ἀναφέρονται σὲ γενίκευση γνωστῶν ἰδιοτήτων ὁλοκληρωμάτων πραγματικῶν συναρτήσεων.

Θεώρημα 5.1.4.1 *Ἄν f, g εἶναι δυὸ συνεχεῖς συναρτήσεις καὶ b, c εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί, τότε γιὰ κάθε κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη γ ἰσχύει*

$$\int_\gamma (bf(z) + cg(z))dz = b\int_\gamma f(z)dz + c\int_\gamma g(z)dz.$$

Ἀπόδειξη: Ἔστω $z = z(t)$, $t \in [a, \beta]$ μιὰ παραμετρικὴ παράσταση τῆς διαφορίσιμης καμπύλης γ. Χωρὶς βλάβη τῆς γενικότητας, μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι καμπύλη εἶναι διαφορίσιμη. Τότε ἔχουμε

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (bf(z) + cg(z))dz &= \int_a^\beta (bf(z(t)) + cg(z(t)))z'(t)dt \\
&= \int_a^\beta bf(z(t))z'(t)dt + \int_a^\beta cg(z(t)))z'(t)dt \\
&= b\int_a^\beta f(z(t))z'(t)dt + c\int_a^\beta g(z(t))z'(t)dt \\
&= b\int_\gamma f(z)dz + c\int_\gamma g(z)dz. \ ■
\end{aligned}$$

Θεώρημα 5.1.4.2 *Ἄν $\mu(\gamma)$ εἶναι τὸ μῆκος μιᾶς κατὰ τμήματα διαφορίσιμης καμπύλης γ καὶ M εἶναι ἕνα ἄνω φρᾶγμα τῆς συνάρτησης $|f(z)|$, $z \in \gamma$, τότε ἰσχύει*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq M\mu(\gamma).$$

Ἐπομένως, ἂν γ εἶναι μιὰ τετριμμένη καμπύλη, (ὁπότε τὸ μῆκος της εἶναι ἴσο μὲ τὸ μηδέν,) τότε θὰ ἰσχύει

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Ἀπόδειξη: Χωρὶς βλάβη τῆς γενικότητας, μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι καμπύλη εἶναι διαφορίσιμη. Ἔστω $z = z(t)$, $t \in [a,\beta]$ μιὰ διαφορίσιμη συνάρτηση ποὺ εἶναι παραμετρικὴ παράσταση τῆς γ. Τότε, μὲ βάση τὸ συμπέρασμα τῆς Πρότασης 5.1.1.2, ἔχουμε

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^\beta f(z(t))z'(t)dt\right| \le \int_a^\beta |f(z(t))||z'(t)|dt \le M\mu(\gamma). \blacksquare$$

Πρόβλημα 5.1.4.1 *Γιὰ κάθε σταθερὸ $\delta > 0$ μὲ $\delta < 2/\sqrt{5}$, θεωροῦμε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα γ_δ μὲ ἀρχὴ τὸ σημεῖο $-r$ καὶ πέρας τὸ $i\delta$, καθῶς ἐπίσης καὶ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα γ'_δ μὲ ἀρχὴ τὸ σημεῖο $i\delta$ καὶ πέρας τὸ 2δ. Ἂν f εἶναι μιὰ ὁλόμορφη μιγαδικὴ συνάρτηση ὁρισμένη στὸν δίσκο $B(0,2)$ νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι*

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\gamma_\delta+\gamma'_\delta} f(z)dz = 0.$$

Ἀπόδειξη: Μιὰ παραμετρικὴ παράσταση τῆς καμπύλης γ_δ εἶναι ἡ

$$z(t) = \delta(-1 + t + it), \quad t \in [0,1]$$

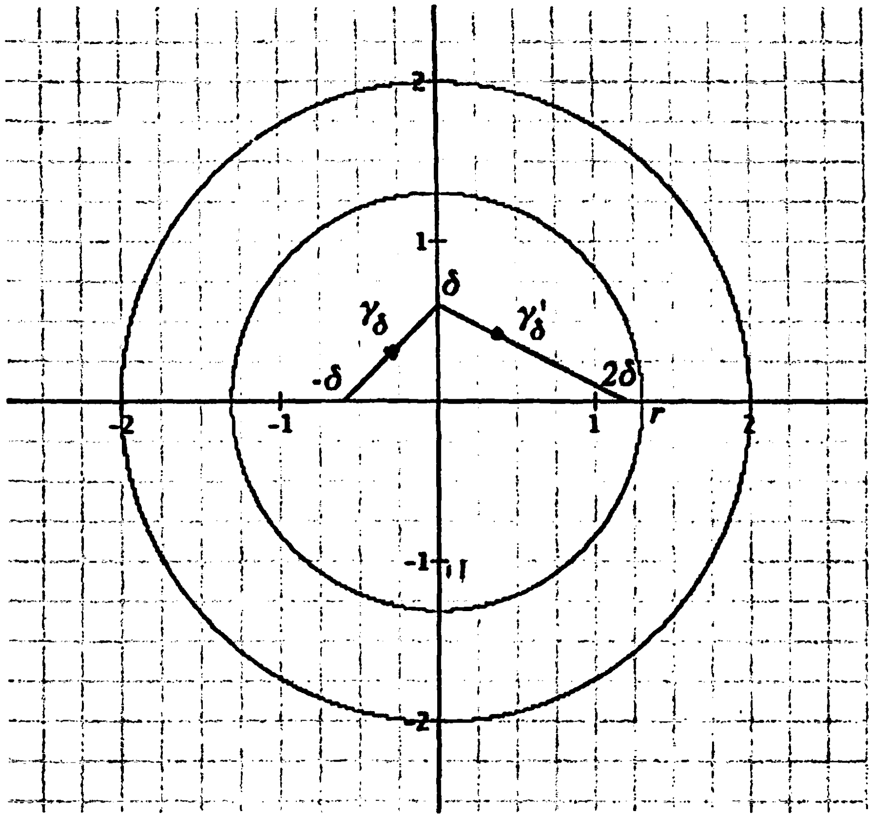
καὶ τῆς γ'_δ εἶναι ἡ

$$z_1(t) = \delta(i(1-t) + 2t), \quad t \in [0,1].$$

Ἔτσι, εὔκολα μποροῦμε νὰ δοῦμε ὅτι ἰσχύει $|z(t)| \le \delta$ καὶ $|z_1(t)| \le 2\delta$, γιὰ κάθε $t \in [0,1]$. Ἂν δ εἶναι ὅπως στὸ πρόβλημα, θεωροῦμε $r \in (\sqrt{5}\delta, 2)$ σταθερὸ ἀριθμό. Ἐπίσης ἔχουμε $\mu(\gamma_\delta) = \sqrt{2}\delta$ καὶ $\mu(\gamma'_\delta) = \sqrt{5}\delta$.

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχὴς στὸν δίσκο $B(0,2)$ καὶ ἐπειδὴ ὁ κλειστὸς δίσκος $\overline{B(0,r)}$ εἶναι συμπαγὲς ὑποσύνολο τοῦ $B(0,2)$, ὑπάρχει $M > 0$ τέτοιο ὥστε

$$|f(z)| \le M, \quad z \in \overline{B(0,r)}.$$



Σχήμα 5.1: *Οἱ καμπῦλες γ_δ καὶ γ'_δ.*

Τότε, ὅμως, ἐπειδὴ ἰσχύει $\delta < r/\sqrt{5}$, ἔπεται ὅτι

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_\delta+\gamma'_\delta} f(z)dz\right| &\leq \left|\int_{\gamma_\delta} f(z)dz\right| + \left|\int_{\gamma'_\delta} f(z)dz\right| \\ &\leq M\mu(\gamma_\delta) + M\mu(\gamma'_\delta) = M(\sqrt{2} + \sqrt{5})\delta.\end{aligned}$$

Ὅταν ἡ παράμετρος δ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν, τὸ ὅριο τῆς ποσότητας αὐτῆς εἶναι τὸ μηδὲν. ♦

Θεώρημα 5.1.4.3 *Ὑποθέτουμε ὅτι f καὶ F εἶναι δυὸ συναρτήσεις ὁρισμένες σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου τέτοιες ὥστε*

$$F'(z) = \frac{dF(z)}{dz} = f(z), \quad z \in \mathcal{T},$$

δηλαδὴ ἡ συνάρτηση F εἶναι ἕνα **ἀόριστο ὁλοκλήρωμα** *τῆς f. Τότε, γιὰ κάθε κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη γ μὲ ἀρχικὸ σημεῖο a καὶ τελικὸ σημεῖο b, ἰσχύει ὁ τύπος τῶν* **Newton-Leibnitz:**

$$\int_\gamma f(z)dz = F(b) - F(a).$$

Ἑπομένως γιὰ κάθε κατὰ τμήματα διαφορίσιμη κλειστὴ καμπύλη γ, ἡ ὁποία ἀνήκει στὸν τόπο $\mathcal{T}$, ἰσχύει

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Ἀπόδειξη: Ἄν $z(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$ εἶναι μιὰ παραμετρικὴ παράσταση τῆς καμπύλης, θὰ ἔχουμε $z(\alpha) = a$ καὶ $z(\beta) = b$. Τότε τὸ ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα ἰσοῦται μὲ

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt = \int_\alpha^\beta F'(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{dF(z(t))}{dt} = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

■

Πρόβλημα 5.1.4.2 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int_\gamma (z^2 + 3z + 2)dz,$$

ὅπου γ εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὸ σημεῖο $1 - i$ μὲ τὸ $-1 + 2i$.

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$z^2 + 3z + 2 = \frac{d}{dz}\Big(\frac{z^3}{3} + \frac{3z^2}{2} + 2z\Big),$$

ὁπότε ἐφαρμόζοντας τὸν τύπο Newton - Leibnitz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_\gamma (z^2 + 3z + 2)dz &= \frac{(-1 + 2i)^3}{3} + \frac{3(-1 + 2i)^2}{2} + 2(-1 + 2i) \\ &\quad - \frac{(1 - i)^3}{3} - \frac{3(1 - i)^2}{2} - 2(1 - i) \\ &= -\frac{25}{6} + 3i.\end{aligned}$$

♦

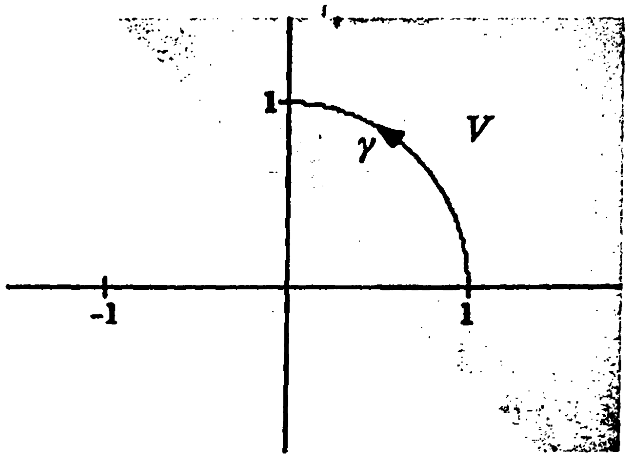
Πρόβλημα 5.1.4.3 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{Log}^3 z}{z} dz,$$

ὅπου γ εἶναι τὸ μικρότερο τόξο τοῦ μοναδιαίου κύκλου μὲ ἀρχικὸ σημεῖο τὸ 1 καὶ τελικὸ τὸ i.

Λύση: Τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ τὸ λύσουμε μὲ δύο τρόπους:

1ος τρόπος: Παρατηροῦμε ὅτι ὑπάρχει μιὰ περιοχὴ V τῆς καμπύλης γ ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὸ σύνολο $\{z : z + |z| = 0\}$, βλέπε σχῆμα. Ἄρα ἡ



Σχήμα 5.2: *Ἡ περιοχὴ V τῆς καμπύλης γ δὲν τέμνει τὸ σύνολο* $\{z : z + |z| = 0\}$.

πρὸς ὁλοκλήρωση συνάρτηση εἶναι ὁλόμορφη στὴν περιοχὴ V καὶ τέτοια ὥστε

$$\frac{\mathrm{Log}^3 z}{z} = \frac{d}{dz}\frac{\mathrm{Log}^4 z}{4}.$$

Ἑπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα εἶναι ἴσο μὲ

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{Log}^3(z)}{z} dz = \frac{\mathrm{Log}^4 i}{4} - \frac{\mathrm{Log}^4 1}{4} = \frac{\mathrm{Log}^4 i}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{i\pi}{2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{64}.$$

2ος τρόπος: Ἐπειδὴ κάθε σημεῖο z τῆς καμπύλης γ ἔχει μέτρο ἴσο μὲ 1, μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε ὡς παραμετρικὴ παράσταση τῆς καμπύλης τὴ συνάρτηση $z := e^{it}$, ὅπου ἡ πραγματικὴ μεταβλητὴ t ὁρίζεται στὸ διάστημα μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$. Τότε ἔχουμε

$$\operatorname{Log}(z) = it \quad \text{καὶ} \quad dz = ie^{it}dt,$$

ὁπότε, τελικά, προκύπτει

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{Log}^3 z}{z}dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{i^3 t^3 i e^{it}dt}{e^{it}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 dt = \frac{\pi^4}{64}. \ \blacklozenge$$

Θεώρημα 5.1.4.4 *Ἂν $\sum f_n$ εἶναι μιὰ σειρὰ μιγαδικῶν συναρτήσεων ὁρισμένων καὶ συνεχῶν πάνω σὲ μιὰ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη γ καὶ ἡ ὁποία σειρὰ συγκλίνει ὁμοιόμορφα πάνω στὴν καμπύλη γ, τότε τὸ ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα τῆς σειρᾶς πάνω στὴ γ ἰσοῦται μὲ τὴ σειρὰ τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων, δηλαδὴ ἰσχύει ὅτι*

$$\int_\gamma \sum f_n(z)dz = \sum \int_\gamma f_n(z)dz.$$

Ἀπόδειξη: Θέτουμε

$$g_n(z) := \sum_{j=0}^{n} f_j(z) \quad \text{καὶ} \quad B_n = \sum_{j=0}^{n} \int_\gamma f_j(z)dz.$$

Ἂν g εἶναι τὸ ὁμοιόμορφο ὅριο τῆς ἀκολουθίας (g_n) πάνω στὴν καμπύλη, γιὰ τυχὸν $\varepsilon > 0$, θὰ ὑπάρχει n_0 τέτοιο ὥστε

$$n \geq n_0 \quad \text{καὶ} \quad z \in \gamma \implies |g_n(z) - g(z)| < \varepsilon.$$

Ἄρα τότε, γιὰ κάθε $n \geq n_0$, θὰ ἰσχύει

$$\left| \int_\gamma g(z)dz - B_n \right| = \left| \int_\gamma (g(z) - g_n(z))dz \right|,$$

ὁπότε, ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα 5.1.4.2, παίρνουμε

$$\left| \int_\gamma g(z)dz - B_n \right| \leq \varepsilon\mu(\gamma).$$

Προφανῶς, τοῦτο ἀποδεικνύει τὸ συμπέρασμα. ■

Θεώρημα 5.1.4.5 *Υποθέτουμε ὅτι U εἶναι ἕνα ἀνοικτὸ ὑποσύνολο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καὶ ὅτι γ εἶναι μιὰ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη. Ἄν $f(z,\zeta)$, $(z,\zeta)\in\gamma\times U$ εἶναι μιὰ συνεχὴς μιγαδικὴ συνάρτηση, τότε, ἡ συνάρτηση*

$$G(\zeta) := \int_\gamma f(z,\zeta)dz,\ \ \zeta\in U$$

εἶναι συνεχής.

Ἀπόδειξη: Θεωροῦμε τυχὸν σημεῖο ζ_0 καὶ μιὰ ἀκολουθία (ζ_n) σημείων τοῦ συνόλου U μὲ ὅριο τὸ ζ_0. Τότε, τὸ σύνολο

$$K := \gamma\times\{\zeta_0, \zeta_n :\ n = 1, 2, \cdots\}$$

εἶναι συμπαγὲς καί, ἔτσι, ἡ συνάρτηση $f(z,\zeta)$, $(z,\zeta)\in\gamma\times U$ εἶναι ὁμοιόμορφα συνεχὴς στὸ K. Ἑπομένως, γιὰ τυχὸν $\varepsilon>0$, ὑπάρχει δείκτης n_0 τέτοιος ὥστε νὰ ἰσχύει

$$|f(z,\zeta_n) - f(z,\zeta_0)| \le \varepsilon,$$

γιὰ κάθε $n\ge n_0$. Σταθεροποιοῦμε ἕναν δείκτη $n\ge n_0$. Τότε, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.1.4.2, παίρνουμε

$$|G(\zeta_n) - G(\zeta_0)| = \left|\int_\gamma f(z,\zeta_n)dz - \int_\gamma f(z,\zeta_0)dz\right|$$

$$= \left|\int_\gamma \big(f(z,\zeta_n) - f(z,\zeta_0)\big)dz\right| \le \varepsilon\mu(\gamma).$$

Ἡ σχέση αὐτὴ ἀποδεικνύει τὸ συμπέρασμα. ∎

Θεώρημα 5.1.4.6 *Ἔστω $f(z,\zeta)$ μιὰ μιγαδικὴ συνάρτηση ὁρισμένη σὲ ἕνα σύνολο τῆς μορφῆς $\gamma\times U$, ὅπου U εἶναι ἀνοικτὸ ὑποσύνολο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καὶ γ εἶναι μιὰ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη. Ἄν ἡ μερικὴ παράγωγος $f_\zeta(z,\zeta)$ ὑπάρχει σὲ κάθε σημεῖο (z,ζ) καὶ εἶναι συνεχής, τότε ἰσχύει*

$$\frac{d}{d\zeta}\int_\gamma f(z,\zeta)dz = \int_\gamma f_\zeta(z,\zeta)dz,\ \ \zeta\in U.$$

Ἀπόδειξη: Θέτουμε

$$G(\zeta) := \int_\gamma f(z,\zeta)dz$$

καὶ θεωροῦμε ἕνα σταθερὸ σημεῖο $\zeta_0 \in U$. Πρέπει νὰ ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει

$$G'(\zeta_0) = \int_\gamma f_\zeta(z,\zeta_0)dz.$$

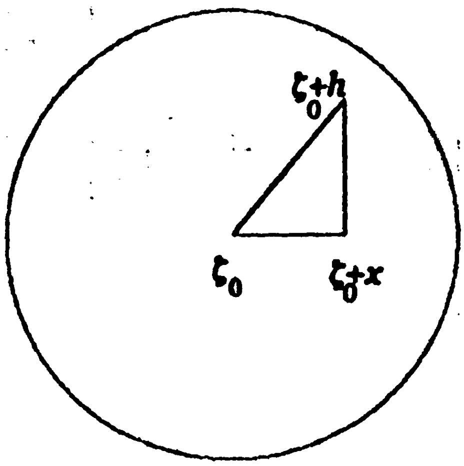
Προφανῶς, ὑπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ὥστε

$$\overline{B(\zeta_0, \varepsilon/2)} \subseteq B(\zeta_0, \varepsilon) \subseteq U.$$

Ἐπειδὴ ἡ μερικὴ παράγωγος $f_\zeta(\cdot,\cdot)$ εἶναι μιὰ συνάρτηση συνεχής, αὐτὴ εἶναι καὶ ὁμοιόμορφα συνεχὴς στὸ συμπαγὲς σύνολο $\gamma \times \overline{B(\zeta_0, \varepsilon/2)}$. Ἄρα ὑπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ὥστε

$$|f_\zeta(z, \zeta_0 + h) - f_\zeta(z, \zeta_0)| \leq \varepsilon, \tag{5.1}$$

γιὰ κάθε h μὲ $|h| \leq \delta$.



Σχῆμα 5.3: *Ἡ πολυγωνικὴ καμπύλη* $[\zeta_0, \zeta_0 + x, \zeta_0 + h]$, *βρίσκεται μέσα στὸν δίσκο* $B_0(\zeta_0, \delta)$.

Ἔστω $h = x + iy$, μὲ $|h| \le \delta$. Τότε ἔχουμε

$$\frac{G(\zeta_0 + h) - G(\zeta_0)}{h} - \int_\gamma f_\zeta(z, \zeta_0)dz = \frac{1}{h}\int_\gamma \left[f(z, \zeta_0 + h) - f(z, \zeta_0) - hf_\zeta(z, \zeta_0)\right]dz$$
$$= \frac{1}{h}\int_\gamma \Big[\int_{\gamma_h} \big(f_\zeta(z, \zeta) - f_\zeta(z, \zeta_0)\big)d\zeta\Big]dz,$$

ὅπου γ_h εἶναι ἡ πολυγωνικὴ καμπύλη $[\zeta_0, \zeta_0{+}x, \zeta_0{+}h]$, ἡ ὁποία, προφανῶς, βρίσκεται μέσα στὸν δίσκο $B_0(\zeta_0, \delta)$. Τὸ μῆκος τῆς καμπύλης αὐτῆς εἶναι μικρότερο ἢ ἴσο τοῦ $2|h|$. Ἑπομένως, λόγω τῆς σχέσης (5.1) καὶ τοῦ θεωρήματος 5.1.4.2 θὰ ἔχουμε

$$\left|\frac{G(\zeta_0 + h) - G(\zeta_0)}{h} - \int_\gamma f_\zeta(z, \zeta_0)dz\right| \le \frac{1}{|h|}\varepsilon 2|h|\mu(\gamma) = 2\varepsilon\mu(\gamma).$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ πηλίκο διαφορῶν τῆς συνάρτησης G στὸ σημεῖο ζ_0 ἔχει ὅριο ἴσο μὲ $\int_\gamma f_\zeta(z, \zeta_0)dz$. ■

Τὸ ἑπόμενο θεώρημα ἀποδεικνύεται μὲ ἄμεση χρήση τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος.

Θεώρημα 5.1.4.7 *Ἔστω g μιὰ μιγαδικὴ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ παραγωγίσιμη σὲ ἕναν τόπο μὲ συνεχῆ παράγωγο. Ἂν γ εἶναι μιὰ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στὸν τόπο καὶ f εἶναι μιὰ συνάρτηση συνεχὴς στὸ σύνολο $g(\gamma)$, τότε ἰσχύει ὁ* **κανόνας ὁλοκλήρωσης μὲ ἀντικατάσταση***:*

$$\int_\gamma f(g(z))g'(z)dz = \int_{g(\gamma)} f(w)dw.$$

5.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_\gamma (1 + 2i - 2\bar{z})dz,$$

ὅπου γ εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὰ σημεῖα 0 καὶ $1+i$, ἢ τὸ τμῆμα τῆς παραβολῆς $y = x^2$ ποὺ ἑνώνει τὰ σημεῖα 0 καὶ $1+i$, ἢ ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ $[0, -1+i, 1+i]$.

2. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_\gamma (z^2 + 3z + 2)dz,$$

ὅπου γ εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὸ σημεῖο $1 - i$ μὲ τὸ $-1 + 2i$.

3. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := z^2 + 3|z|^2$$

κατὰ μῆκος τοῦ θετικὰ προσανατολισμένου μοναδιαίου κύκλου.

4. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συνάρτησης μὲ τύπο $f(z) := \exp(\bar{z})$ κατὰ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ποὺ ἑνώνει τὸ σημεῖο 0 μὲ τὸ $\pi - i\pi$, καὶ κατὰ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ποὺ ἑνώνει τὸ σημεῖο $-i\pi$ μὲ τὸ π.

5. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συνάρτησης μὲ τύπο $f(z) := z\mathrm{Im}(z^2)$ κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z(t) := e^{it}, t \in [-\pi, 0]$.

6. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συνάρτησης μὲ τύπο $f(z) := z\mathrm{Re}(z)$ κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z(t) := e^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

7. Ἂν a, b εἶναι δύο διαφορετικὰ σημεῖα ἑνὸς ἀνοικτοῦ δίσκου καὶ f εἶναι μιὰ συνεχὴς συνάρτηση ὁρισμένη στὸν δίσκο, νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἰσχύει

$$\frac{1}{b-a}\int_{[ab]} f(w)dw = \int_0^1 f(a + t(b-a))dt.$$

❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀

Κεφάλαιο 6

ΤΟΠΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

6.1 ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

6.1.1 Δύο χρήσιμα ὁλοκληρώματα

Ἔστω γ ὁ κύκλος μὲ παράσταση

$$z(t) = a + re^{it}, \;\; 0 \le t \le 2\pi.$$

Ἐφαρμόζοντας τὸ Θεώρημα 5.1.4.3 παίρνουμε

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = 0,$$

γιὰ κάθε ἀκέραιο ἀριθμὸ n τέτοιον ὥστε $n \neq -1$. Στὴν περίπτωση ὅπου $n = -1$ ἐφαρμόζουμε τὸν ὁρισμὸ τοῦ ὁλοκληρώματος, ὁπότε παίρνουμε

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i. \tag{6.1}$$

Ἂν ἡ καμπύλη γ ἔχει ἀντίθετη φορά, δηλαδὴ ἔχει παραμετρικὴ παράσταση

$$z(t) = a + re^{-it}, \;\; 0 \le t \le 2\pi,$$

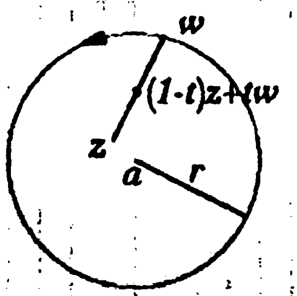
τότε προκύπτει ὅτι
$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = -2\pi i.$$

Τὸ πρόσημο τοῦ δεξιοῦ μέλους τῶν παραπάνω ἰσοτήτων δικαιολογεῖ καὶ τὸν χαρακτηρισμὸ *θετικὴ φορὰ* καὶ *ἀρνητικὴ φορά*.

Στὴν προηγούμενη περίπτωση τὸ σημεῖο a, τὸ ὁποῖο ἐμφανίζεται στὸν παρονομαστὴ τῆς συνάρτησης ποὺ ὁλοκληρώνουμε, εἶναι τὸ κέντρο τοῦ κύκλου. Ὡστόσο, γενικότερα ἔχουμε τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Θεώρημα 6.1.1.1 *Ἄν γ εἶναι ἡ θετικὰ προσανατολισμένη περιφέρεια ἑνὸς δίσκου $B(a,r)$, τότε, γιὰ κάθε $z \in B(a,r)$, ἰσχύει*
$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = 2\pi i.$$

Ἀπόδειξη: Ἔστω $z \in B(a,r)$. Γιὰ κάθε $t \in [0,1]$ τὸ σημεῖο
$$(1-t)a + tz$$
ἀνήκει μέσα στὸν δίσκο $B(a,r)$, ἀφοῦ ἰσχύει
$$|(1-t)a + tz - a| = t|a-z| < r.$$
Ἄρα ἡ συνάρτηση μὲ τύπο
$$\varphi(t,w) := \frac{1}{w-a+t(a-z)},$$
εἶναι καλὰ ὁρισμένη καὶ παραγωγίσιμη ὡς πρὸς $w \in \gamma$ καὶ $t \in [0,1]$, μὲ συνεχῆ παράγωγο. Θεωροῦμε τὴ συνάρτηση
$$g(t) := \int_\gamma \varphi(t,w)dw = \int_\gamma \frac{dw}{w-a+t(a-z)}, \quad t \in [0,1],$$
γιὰ τὴν ὁποία παρατηροῦμε ὅτι, λόγω τοῦ Θεωρήματος 5.1.4.6, ἰσχύει
$$g'(t) = \int_\gamma \frac{z-a}{[w-a+t(a-z)]^2}dw.$$



Σχήμα 6.1: *Γιὰ κάθε* $t \in [0,1]$ *τὸ σημεῖο* $(1-t)a + tz = a - t(a-z)$ *ἀνήκει μέσα στὸν δίσκο* $B(a,r)$,.

Ἀλλά, γιὰ κάθε σταθερὸ t ἡ συνάρτηση

$$F(w) := -\frac{z-a}{w-a+t(a-z)}$$

ἔχει παράγωγο

$$F'(w) = \frac{z-a}{[w-a+t(a-z)]^2},$$

ὁπότε, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.1.4.3, προκύπτει ὅτι $g'(t) = 0$, γιὰ κάθε $t \in [0,1]$. Ἑπομένως, λόγω καὶ τῆς σχέσης (6.1), ἔχουμε

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = g(1) = g(0) = \int_\gamma \frac{dw}{w-a} = 2\pi i. \blacksquare$$

6.1.2 Ὁλοκλήρωμα σὲ κύκλο

Στὸ κεφάλαιο τοῦτο θὰ δοῦμε ὅτι ὁρισμένα ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα μποροῦν νὰ ὑπολογιστοῦν εὔκολα, χρησιμοποιῶντας τὶς τιμές τῆς συνάρτησης, ἢ τὶς τιμὲς τῶν παραγώγων της.

Θεώρημα 6.1.2.1 *(1ο Θεώρημα τοῦ Cauchy)* *Ἔστω f μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$, μὲ συνεχῆ παράγωγο*[1], $B(a,r)$ *ἕνας*

[1]Ἀργότερα θὰ δοῦμε ὅτι ἡ συνθήκη τῆς συνεχοῦς παραγώγου ἐξασφαλίζεται ἀπὸ τὴν ὁλομορφία τῆς συνάρτησης.

δίσκος ὁ ὁποῖος μαζὶ μὲ τὴ θήκη του ἀνήκει στὸν τόπο καὶ ἔστω γ ἡ θετικὰ προσανατολισμένη περιφέρεια τοῦ δίσκου. Τότε ἰσχύει

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw, \quad z \in B(a,r).$$

Ἀπόδειξη: Σταθεροποιοῦμε ἕνα σημεῖο $z \in B(a,r)$. Γιὰ κάθε $w \in \gamma$ καὶ $t \in [0,1]$, τὸ σημεῖο

$$z + t(w-z) = (1-t)z + tw$$

ἀνήκει στὸν κλειστὸ δίσκο $\overline{B(a,r)}$, ἄρα ἀνήκει καὶ στὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f. Θεωροῦμε τὴ συνάρτηση

$$h(t) := \int_\gamma \frac{f(z+t(w-z))}{w-z}dw, \quad t \in [0,1].$$

Σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 5.1.4.6, ἔχουμε

$$h'(t) = \int_\gamma f'(z+t(w-z))dw.$$

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτηση

$$F(w) := \begin{cases} \frac{f(z+t(w-z))}{t}, & 0 < t \le 1 \\ f(z), & t = 0, \end{cases}$$

ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση

$$F'(w) = f'(z+t(w-z)), \quad w \in \gamma,$$

ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.1.4.3 ἔπεται ὅτι θὰ ἰσχύει

$$h'(t) = 0, \quad t \in [0,1].$$

Ἑπομένως ἡ συνάρτηση h εἶναι σταθερή, ὁπότε, λόγω καὶ τοῦ Θεωρήματος 6.1.1.1, ἔχουμε

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = h(1) = h(0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}dw = f(z)\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = 2\pi i f(z).$$

Τοῦτο ἀποδεικνύει τὸ συμπέρασμα. ■

6.1.3 Ἀνάπτυγμα σὲ σειρὰ Taylor

Θεώρημα 6.1.3.1 *Ἔστω f μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη μὲ συνεχῆ παράγωγο σὲ ἕναν τόπο ποὺ περιέχει ἕναν κλειστὸ δίσκο $\overline{B(a,R)}$. Τότε ἡ f γράφεται στὴ μορφὴ*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad z \in B(a,R),$$

ὅπου οἱ συντελεστὲς δίνονται ἀπὸ τὸν τύπο

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{f^n(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Ἡ καμπύλη γ πάνω στὴν ὁποία γίνεται ἡ ὁλοκλήρωση, εἶναι ἡ θετικὰ προσανατολισμένη περιφέρεια τοῦ δίσκου $B(a,R)$. Ἡ σύγκλιση τῆς σειρᾶς εἶναι ὁμοιόμορφη πάνω σὲ συμπαγῆ ὑποσύνολα τοῦ δίσκου. Ἐπίσης, οἱ συντελεστὲς τῆς σειρᾶς εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένοι.

Ἀπόδειξη: Σταθεροποιοῦμε ἕνα σημεῖο $z \in B(a,R)$. Τότε, γιὰ κάθε $w \in \gamma$, ἔχουμε

$$\frac{|z-a|}{|w-a|} < 1,$$

ὁπότε, ἀπὸ τὸ κριτήριο τοῦ Weierstrass γιὰ τὴ σύγκλιση σειρῶν, προκύπτει ὅτι ἡ σειρὰ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} = \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(w-a)^3} + \cdots = \frac{\frac{1}{w-a}}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-z}$$

συγκλίνει ἀπόλυτα καὶ ὁμοιόμορφα ὡς πρὸς $w \in \gamma$. Ἐπομένως τὸ ἴδιο θὰ συμβαίνει καὶ γιὰ τὴ σειρὰ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(w)}{(w-a)^{n+1}} = \frac{f(w)}{w-z}, \quad w \in \gamma,$$

ἀφοῦ ἡ συνάρτηση f εἶναι φραγμένη ἐπὶ τῆς καμπύλης γ. Ἄρα, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 5.1.4.4, μποροῦμε νὰ ἀλλάξουμε τὴ σειρὰ ἄθροισης καὶ ὁλοκλήρωσης καὶ νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ 1ο Θεώρημα Cauchy (Θεώρημα 6.1.2.1) γιὰ τὴν παράσταση ὁλόμορφης συνάρτησης σὲ δίσκο. Ἔτσι παίρνουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n. \tag{6.2}$$

Ἡ σύγκλιση τῆς σειρᾶς (6.2) εἶναι ἀπόλυτη καὶ ὁμοιόμορφη πάνω στὰ συμπαγῆ ὑποσύνολα, λόγω τοῦ Θεωρήματος 4.4.3.3.

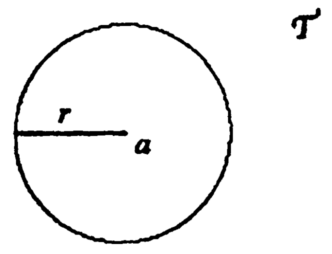
Ἔστω $k = 0, 1, 2, \cdots$ Παραγωγίζοντας k φορὲς τὴ σειρὰ ποὺ προέκυψε παίρνουμε

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(z-a)^{n-k}.$$

καὶ θέτοντας $z = a$ παίρνουμε

$$f^{(k)}(a) = a_k k!,$$

πρᾶγμα ποὺ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα. ∎



Σχήμα 6.2: *Τὸ ἀνάπτυγμα Taylor μὲ κέντρο τὸ σημεῖο a ὑπάρχει στὸν δίσκο $B(a, r)$, ὅπου r εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ a ἀπὸ τὸ σύνορο του τόπου $\mathcal{T}$.*

Σημείωση: Χάριν συντομίας, λέμε "**ἀνάπτυγμα Taylor**", ἀντὶ τοῦ "**ἀνάπτυγμα σὲ σειρὰ Taylor**".

Στὸ σχῆμα φαίνεται ὁ μέγιστος δίσκος μέσα στὸν ὁποῖο ὑπάρχει τὸ ἀνάπτυγμα Taylor μὲ κέντρο τὸ σημεῖο a. Αὐτὸς εἶναι ὁ $B(a, r)$, ὅπου r εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ a ἀπὸ τὸ σύνορο τοῦ τόπου $\mathcal{T}$.

Πρόβλημα 6.1.3.1 *Νὰ βρεθεῖ τὸ ἀνάπτυγμα Taylor μὲ κέντρο τὸ σημεῖο* $a = 1$ *στὸν δίσκο* $B(1, 1)$ *τῆς συνάρτησης μὲ τύπο*

$$f(z) := \frac{i}{z^2 - iz}.$$

Λύση: Τὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συνάρτησης εἶναι ὁ τόπος $\mathcal{T} := \mathbb{C} \setminus \{0, i\}$ καὶ τὸ σύνορο τοῦ τόπου αὐτοῦ εἶναι τὸ σύνολο $\{0, i\}$. Ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου $a = 1$ ἀπὸ τὸ σύνορο εἶναι ἴση μὲ

$$\inf\{|1 - 0|, |1 - i|\} = \inf\{1, \sqrt{2}\} = 1.$$

Ἄρα ἡ συνάρτηση f μπορεῖ νὰ ἀναπτυχτεῖ σὲ σειρὰ Taylor μέσα στὸν δίσκο $B(1, 1)$.

Ἀναλύουμε τὸ κλάσμα σὲ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων:

$$f(z) = \frac{i}{z^2 - iz} = \frac{i}{(z - i)z} = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z - i}.$$

Γιὰ κάθε σημεῖο $z \in B(1, 1)$, ἰσχύει $|z - 1| < 1$. Ἐπομένως ἔχουμε

$$\frac{-1}{z} = \frac{-1}{1 - (1 - z)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(1 - z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z - 1)^n.$$

Ἐπίσης ἰσχύει

$$\left|\frac{z - 1}{1 - i}\right| = \frac{|z - 1|}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

καὶ ἐπομένως ἔχουμε

$$\frac{1}{z - i} = \frac{1}{(1 - i) + (z - 1)} = \frac{1}{1 - i}\frac{1}{1 + \frac{z-1}{1-i}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(1 - i)^{-(n+1)}(-1)^n(z - 1)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}(i - 1)^{-(n+1)}(z - 1)^n.$$

Ἔτσι, τὸ ἀνάπτυγμα Taylor τῆς συνάρτησης μὲ κέντρο τὸ σημεῖο $a = 1$ στὸν δίσκο $B(1,1)$ εἶναι τὸ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1} - (i-1)^{-(n+1)}\right](z-1)^n, \quad z \in B(1,1). \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 6.1.3.2 *Νὰ ἀναπτυχτεῖ σὲ σειρὰ Taylor στὸν δίσκο $B(0,1)$ μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0 ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$f(z) := \frac{z}{(z-i)^2}.$$

Λύση: Στὸν δίσκο $B(0,1)$ ἡ συνάρτηση ἔχει ἀνάπτυγμα Taylor τῆς μορφῆς

$$f(z) := \frac{z}{(z-i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

ὅπου οἱ συντελεστὲς a_n, $n = 0, 1, \cdots$ εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί. Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι, ἐπειδὴ ἰσχύει $f(0) = 0$, θὰ πρέπει ὁ σταθερὸς ὅρος a_0 νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν. Ἄρα ἔχουμε

$$\frac{1}{(z-i)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}, \quad z \in B(0,1).$$

Ἀκόμη παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$\frac{1}{(z-i)^2} = -\frac{d}{dz}\frac{1}{z-i},$$

ὁπότε τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συνάρτησης f θὰ βρεθεῖ ἄν ἀναπτύξουμε τὴ συνάρτηση μὲ τύπο $1/(z-i)$ σὲ σειρὰ Taylor στὸν δίσκο $B(0,1)$ μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0 καὶ στὴ συνέχεια νὰ πάρουμε τὴν παράγωγο πρώτης τάξης. (Τοῦτο μπορεῖ νὰ γίνει, ἐπειδὴ ἡ σειρὰ συγκλίνει ἀπόλυτα ὁμοιόμορφα πάνω σὲ κάθε συμπαγὲς ὑποσύνολο τοῦ δίσκου.)

Ἐπειδή, γιὰ κάθε $z \in B(0,1)$, ἰσχύει $\left|\frac{z}{i}\right| < 1$, θὰ ἔχουμε

$$\frac{1}{z-i} = \frac{i}{1-\frac{z}{i}} = i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n+1} z^n.$$

Παραγωγίζοντας καὶ τὰ δύο μέλη τῆς παραπάνω σχέσης προκύπτει

$$-\frac{1}{(z-i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)i^{-n}z^n$$

καὶ ἄρα, τελικά, βρίσκουμε ὅτι

$$\frac{z}{(z-i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)i^{-n+2}z^{n+1}, \quad z \in B(0,1). \ \blacklozenge$$

6.1.4 Ὁλοκληρώματα σὲ κλειστὲς καμπύλες δίσκων

Θεώρημα 6.1.4.1 *Ἂν f εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν δίσκο $B(a,r)$ μὲ συνεχῆ παράγωγο καὶ γ εἶναι μιὰ κλειστὴ καμπύλη στὸν δίσκο, τότε ἰσχύει*

$$\int_\gamma f(w)dw = 0.$$

Ἀπόδειξη: Στὸν δίσκο $B(a,r)$ ἡ συνάρτηση f ἔχει ἀνάπτυγμα Taylor τῆς μορφῆς

$$f(z) = \sum a_n(z-a)^n$$

καὶ ἡ σύγκλιση αὐτὴ εἶναι ὁμοιόμορφη πάνω στὸ συμπαγὲς σύνολο γ. Θέτοντας

$$F(z) := \sum \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1},$$

παρατηροῦμε ὅτι, λόγω τοῦ Θεωρήματος 4.4.3.4, ἰσχύει

$$F'(z) = f(z),$$

γιὰ κάθε $z \in B(a,r)$. Τώρα, τὸ συμπέρασμα ἕπεται μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ Θεωρήματος 5.1.4.3. ■

Θεώρημα 6.1.4.2 *Ἔστω f μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$, μὲ συνεχῆ παράγωγο, $\overline{B(a,r)}$ ἕνας κλειστὸς δίσκος στὸν τόπο καὶ γ ἡ θετικὰ προσανατολισμένη περιφέρεια τοῦ δίσκου. Τότε ἰσχύει ὁ τύπος*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw,$$

γιὰ κάθε $n = 0, 1, \cdots$ *καὶ κάθε* $z \in B(a, r)$.

Ἀπόδειξη: Τὸ συμπέρασμα προκύπτει ἀπὸ τὴν παράσταση τὴν ὁποία ἔχει ἡ συνάρτηση f ὅταν περιοριστεῖ πάνω στὸν δίσκο $B(a, r)$, ὅπως εἴδαμε στὸ Θεώρημα 6.1.2.1. ■

Ἀπὸ τὸν τύπο τοῦ παραπάνω θεωρήματος ἕπονται τὰ ἑξῆς συμπεράσματα:

Πόρισμα 6.1.4.1 *Οἱ συντελεστὲς τοῦ ἀναπτύγματος Taylor μὲ κέντρο τὸ σημεῖο a δίνονται καὶ ἀπὸ τὸν τύπο*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, \cdots$$

Πόρισμα 6.1.4.2 *Οἱ συντελεστὲς* a_n, $n = 0, 1, \cdots$ *εἶναι μοναδικοί.*

Πόρισμα 6.1.4.3 *Ἂν ἡ συνάρτηση f ἔχει συνεχῆ πρώτη παράγωγο, τότε ὑπάρχουν οἱ παράγωγοι κάθε τάξης.*

6.1.5 Θεωρήματα Goursat καὶ Morrera

Ἐδῶ θὰ δοῦμε ὅτι ἡ ὑπόθεση τῆς συνέχειας τῆς παραγώγου μιᾶς ὁλόμορφης συνάρτησης (ὅπως τὴ χρησιμοποιούσαμε στὰ προηγούμενα συμπεράσματα) γιὰ τὸ γενικὸ θεώρημα τοῦ Cauchy δὲν εἶναι ἀπαραίτητη γιατὶ ἡ ἰδιότητα αὐτὴ προκύπτει ἀπὸ τὴν ὁλομορφία τῆς συνάρτησης.

Θεώρημα 6.1.5.1 *(Goursat) Δίνεται ἕνας τόπος* $\mathcal{T}$ *καὶ μιὰ συνάρτηση*

$$f : \mathcal{T} \to \mathbb{C},$$

ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη στὸν τόπο. Τότε, γιὰ κάθε τριγωνικὴ καμπύλη Δ *ποὺ μαζὶ μὲ τὸ ἐσωτερικό της ἀνήκει στὸν τόπο* $\mathcal{T}$, *ἰσχύει ὅτι*

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0,$$

Ἀπόδειξη: Ἔστω T_0 ἕνα τρίγωνο, τὸ ὁποῖο μαζί μὲ τὸ ἐσωτερικὸ του βρίσκεται μέσα στὸν τόπο $\mathcal{T}$ καὶ ἔστω Δ_0 ἡ καμπύλη-περίμετρος τοῦ T_0 θετικὰ προσανατολισμένη. (Προφανῶς ἡ φορὰ τῆς καμπύλης δὲν ἐπηρεάζει τὴν ἀπόδειξη.) Παίρνοντας τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου T_0 σχηματίζουμε τέσσερα τρίγωνα T^1, T^2, T^3, T^4, μὲ περιμέτρους $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$, ἀντίστοιχα, θετικὰ προσανατολισμένες.

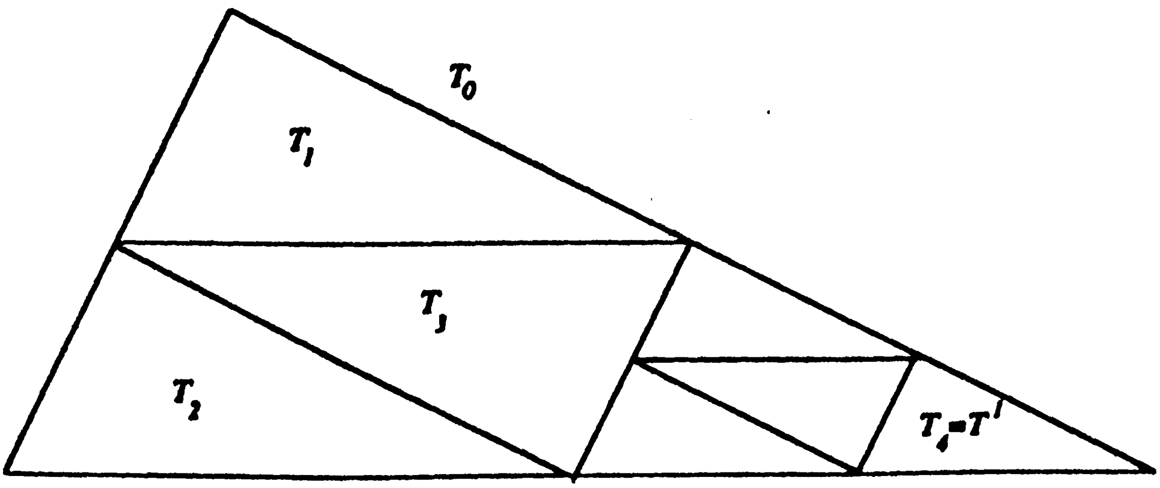
Ἐπειδὴ, προφανῶς, ἰσχύει ὅτι $\Delta_0 = \Delta^1 + \Delta^2 + \Delta^3 + \Delta^4$, ἔχουμε

$$\int_{\Delta_0} f(w)dw = \int_{\Delta^1} f(w)dw + \int_{\Delta^2} f(w)dw + \int_{\Delta^3} f(w)dw + \int_{\Delta^4} f(w)dw.$$

Ἐπομένως ὑπάρχει ἕνα ἀπὸ τὰ τρίγωνα T^1, T^2, T^3, T^4, τὸ ὁποῖο ὀνομάζουμε T_1, μὲ περίμετρο Δ_1, τέτοιο ὥστε

$$\left|\int_{\Delta_0} f(w)dw\right| \leq 4\left|\int_{\Delta_1} f(w)dw\right|.$$

Συνεχίζοντας, ἐπαγωγικά, μὲ τὸν ἴδιο τρόπο προκύπτει μιὰ ἀκολουθία



τριγώνων T_n μὲ περιμέτρους Δ_n τὰ ὁποῖα ἔχουν τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:

$$\cdots T_n \subsetneq \cdots \subsetneq T_2 \subsetneq T_1 \subsetneq T_0$$

καὶ

$$\left|\int_{\Delta_0} f(w)dw\right| \leq 4^n\left|\int_{\Delta_n} f(w)dw\right|, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{6.3}$$

Ἂν ὀνομάσουμε d_n τὴ μεγαλύτερη πλευρὰ τοῦ τριγώνου T_n καὶ p_n τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου του, τότε, προφανῶς, θὰ ἰσχύει σχέση

$$d_n = \frac{d_0}{2^n} \quad \text{και} \quad p_n = \frac{p_0}{2^n}.$$

Ἐπειδὴ κάθε τρίγωνο εἶναι συμπαγὲς σύνολο, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 2.2.3.2 τοῦ Cantor, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει μοναδικὸ σημεῖο $z_0 \in T_n$ τὸ ὁποῖο ἀνήκει σὲ ὅλα τὰ τρίγωνα.

Ἔστω $\varepsilon > 0$. Ἀπὸ τὴ διαφορισιμότητα τῆς f στὸ σημεῖο z_0, ἐξασφαλίζεται ἡ ὕπαρξη κάποιου δείκτη n_0 τέτοιου ὥστε, γιὰ κάθε $n \geq n_0$, τὸ τρίγωνο T_n νὰ ἀνήκει στὸν δίσκο $B(z_0, \varepsilon)$ καὶ ἐπὶ πλέον νὰ ἰσχύει

$$|f(w) - f(z_0) - f'(z_0)(w - z_0)| \leq \varepsilon |w - z_0|,$$

γιὰ κάθε $w \in T_n$. Εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι ἰσχύει

$$\int_{\Delta_n} f(z_0)dw = 0 = \int_{\Delta_n} f'(z_0)(w - z_0)dw,$$

γεγονὸς ποὺ συνεπάγεται ὅτι

$$\left| \int_{\Delta_n} f(w)dw \right| = \left| \int_{\Delta_n} [f(w) - f(z_0) - f'(z_0)(w - z_0)]dw \right|$$

$$\leq \varepsilon \int_{\Delta_n} |w - z_0| dw \leq \varepsilon d_n p_n = \frac{\varepsilon d_0 p_0}{4^n}.$$

Ἔτσι, ἀπὸ τὴν ἀνισότητα (6.3), προκύπτει ὅτι

$$\left| \int_{\Delta_0} f(w)dw \right| \leq \varepsilon d_0 p_0,$$

πρᾶγμα ποὺ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα. ∎

Θεώρημα 6.1.5.2 *(Morrera) Ἔστω $B(c, r)$ ἕνας δίσκος καὶ $f : B(c, r) \to \mathbb{C}$ μιὰ συνεχὴς συνάρτηση τέτοια ὥστε νὰ ἰσχύει*

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0,$$

γιὰ κάθε τριγωνικὴ καμπύλη Δ, ἡ ὁποία, ἀνήκει στὸν δίσκο. Τότε ὑπάρχει μιὰ συνάρτηση $F : B(c,r) \to \mathbb{C}$, τέτοια ὥστε

$$\frac{dF(z)}{dz} = f(z).$$

Δηλαδὴ ἡ f ἔχει ἕνα ἀόριστο ὁλοκλήρωμα.

Ἀπόδειξη: Ὁρίζουμε τὴ συνάρτηση

$$F(z) := \int_{[cz]} f(w)dw, \quad z \in B(c,r).$$

Τότε, ἀπὸ τὴν ὑπόθεση ἔχουμε ὅτι, γιὰ κάθε ζεῦγος σημείων z, z_0 τοῦ δίσκου $B(c,r)$ ἰσχύει

$$\int_{[c,z,z_0,c]} f(w)dw = 0,$$

ὁπότε καὶ

$$\int_{[cz]} f(w)dw - \int_{[cz_0]} f(w)dw = \int_{[z_0 z]} f(w)dw.$$

Ἔτσι, παίρνουμε

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0 z]} f(w)dw = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))dt.$$

Παίρνοντας τὸ ὅριο τῆς παράστασης αὐτῆς, ὅταν z τείνει πρὸς τὸ z_0 καὶ χρησιμοποιῶντας τὴ συνέχεια τῆς συνάρτησης f, ἕπεται ἡ ἰσότητα $F'(z_0) = f(z_0)$. ■

6.1.6 Θεωρήματα Cauchy γιὰ ὁλόμορφες συναρτήσεις

Θεώρημα 6.1.6.1 *Ἔστω $B(c,r)$ ἕνας δίσκος καὶ $f : B(c,r) \to \mathbb{C}$ μιὰ συνεχὴς συνάρτηση. Τότε ἡ f ἔχει ἕνα ἀόριστο ὁλοκλήρωμα στὸν δίσκο, ἂν καὶ μόνο ἂν ἰσχύει*

$$\int_\gamma f(w)dw = 0, \tag{6.4}$$

γιὰ κάθε κατὰ τμήματα διαφορίσιμη κλειστὴ καμπύλη γ ἡ ὁποία ἀνήκει στὸν δίσκο $B(c,r)$.

Ἀπόδειξη. Ἂν ἡ συνάρτηση f ἔχει ἀόριστο ὁλοκλήρωμα, τότε τὸ συμπέρασμα εἶναι προφανές.

Ἀντίστροφα, ἂν ἡ σχέση (6.4) ἀληθεύει, γιὰ κάθε κατὰ τμήματα διαφορίσιμη κλειστὴ καμπύλη γ, ἡ ὁποία ἀνήκει στὸν δίσκο $B(c,r)$, τότε θὰ ἰσχύει καὶ γιὰ κάθε τριγωνικὴ καμπύλη ποὺ μαζὶ μὲ τὸ ἐσωτερικό της ἀνήκει στὸν δίσκο. Ἔτσι, τὸ συμπέρασμα προκύπτει ἀπὸ τὸ Θεώρημα τοῦ Morrera. ■

Θεώρημα 6.1.6.2 *(Γενικὸ Θεώρημα Cauchy) Ἔστω $B(c,r)$ ἕνας δίσκος καὶ $f : B(c,r) \to \mathbb{C}$ μιὰ συνεχὴς συνάρτηση. Τότε ἡ συνάρτηση f εἶναι ὁλόμορφη, ἂν καὶ μόνο ἂν ἡ σχέση (6.4) ἰσχύει γιὰ κάθε κατὰ τμήματα διαφορίσιμη κλειστὴ καμπύλη γ, ποὺ ἀνήκει στὸν δίσκο.*

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι ὁλόμορφη. Ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Goursat, ἕπεται ὅτι ἰσχύει

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0,$$

γιὰ κάθε τριγωνικὴ καμπύλη Δ στὸν δίσκο, ὁπότε ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Morrera προκύπτει ὅτι ὑπάρχει ἕνα ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς f. Τώρα, τὸ συμπέρασμα ἕπεται ἀπὸ τὸ Θεώρημα 6.1.6.1.

Ἀντίστροφα. Ἔστω ὅτι ἡ σχέση (6.4) ἰσχύει γιὰ κάθε κατὰ τμήματα διαφορίσιμη κλειστὴ καμπύλη γ ἡ ὁποία ἀνήκει στὸν δίσκο $B(c,r)$. Τότε, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 6.1.5.2, ὑπάρχει μιὰ συνάρτηση F τέτοια ὥστε

$$F' = f.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ F εἶναι ὁλόμορφη στὸν δίσκο καὶ αὐτὴ ἔχει συνεχῆ πρώτη παράγωγο στὸν δίσκο $B(c,r)$. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 6.1.4.2, ἕπεται ὅτι ἡ συνάρτηση F ἔχει παραγώγους κάθε τάξης. Τὸ γεγονὸς τοῦτο συνεπάγεται ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι ὁλόμορφη. ■

Πρόβλημα 6.1.6.1 *Θὰ ὑπολογίσουμε τὸ ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα*

$$\int_{\gamma} \sin^2(z)dz$$

ὅπου γ εἶναι ἡ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση

$$z(t) := t + i\cos(t), \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Ἀπόδειξη: Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση $\sin^2(z)$ εἶναι ὁλόμορφη παντοῦ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο. Θεωροῦμε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα γ' ποὺ ἑνώνει τὸ σημεῖο $-\frac{\pi}{2}$ μὲ τὸ $\frac{\pi}{2}$. Τότε ἡ καμπύλη $\gamma - \gamma'$ εἶναι κλειστὴ καὶ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη. Ἔτσι, ἐπειδὴ μιὰ παραμετρικὴ παράσταση τῆς καμπύλης γ' εἶναι ἡ

$$z(t) := t, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

θὰ ἔχουμε

$$\int_{\gamma-\gamma'} \sin^2(z)dz = 0,$$

ὁπότε προκύπτει ὅτι

$$\int_{\gamma} \sin^2(z)dz = -\int_{\gamma'} \sin^2(z)dz = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt = -\frac{\pi}{2}. \quad \blacklozenge$$

6.1.7 Τοπικὰ φραγμένες συναρτήσεις

Μέχρι τώρα ὑποθέταμε ὅτι ἡ (κλειστὴ) καμπύλη ποὺ χρησιμοποιοῦμε γιὰ νὰ ἰσχύει ἡ σχέση (6.4) εἶναι τέτοια ὥστε σὲ κάθε σημεῖο τοῦ ἐσωτερικοῦ της ἡ συνάρτηση νὰ εἶναι ὁλόμορφη. Ὡστόσο, μποροῦμε νὰ δοῦμε ὅτι τὸ συμπέρασμα αὐτὸ ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύει, ἀκόμη καὶ ἂν ὑπάρχουν σημεῖα, ὅπου ἡ συνάρτηση δὲν (φαίνεται ὅτι) εἶναι ὁλόμορφη, ἀλλὰ εἶναι τοπικὰ φραγμένη μὲ τὴν ἀκόλουθη ἔννοια:

Ὁρισμός 6.1.7.1 *Μιὰ συνάρτηση f ὁρισμένη τουλάχιστον σὲ ἕναν δίσκο $B(a, r)$ λέμε ὅτι εἶναι* **τοπικὰ φραγμένη** *στὸ σημεῖο a, ἂν ὑπάρχει $M > 0$ καὶ περιοχὴ $V_a \subsetneq B(a, r)$ τοῦ σημείου a τέτοια ὥστε νὰ ἰσχύει $|f(z)| \leq M$, γιὰ κάθε $z \in V_a$.*

Μιὰ ἱκανὴ συνθήκη ὥστε μιὰ συνάρτηση νὰ εἶναι τοπικὰ φραγμένη, δίνεται στὴν ἑξῆς πρόταση:

Πρόταση 6.1.7.1 *Ἔστω f μιὰ συνάρτηση ἡ ὁποία εἶναι ὁρισμένη σὲ ἕναν δίσκο $B(a,r)$. Ἂν τὸ ὅριο τῆς f στὸ σημεῖο a ὑπάρχει, τότε αὐτὴ εἶναι τοπικὰ φραγμένη στὸ σημεῖο a.*

Ἀπόδειξη: Ἔστω l τὸ ὅριο τῆς f στὸ a. Χρησιμοποιοῦμε τὸν ε-δ ὁρισμό. Ἔτσι, θέτοντας $\varepsilon = 1$, ἐξασφαλίζουμε τὴν ὕπαρξη ἑνὸς $\delta > 0$, τέτοιου ὥστε $\delta < r$ καὶ

$$0 < |z-a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - l| < 1.$$

Ἄρα γιὰ κάθε τέτοιο σημεῖο z ἔχουμε

$$|f(z)| \leq |f(z) - l| + |l| < 1 + |l|,$$

ὁπότε προκύπτει

$$|f(z)| \leq \max\{|f(a)|, 1 + |l|\} =: M, \quad z \in B(0,\delta) =: V_a. \blacksquare$$

Θεώρημα 6.1.7.1 *Δίνεται ἕνας δίσκος $B(c,r)$, a ἕνα σημεῖο τοῦ δίσκου $B(c,r)$ καὶ μιὰ συνάρτηση $f : B(c,r) \to \mathbb{C}$ ἡ ὁποία εἶναι ὁλόμορφη στὸ σύνολο $B(c,r) \setminus \{a\}$ καὶ τοπικὰ φραγμένη στὸ σημεῖο a. Τότε ἰσχύει*

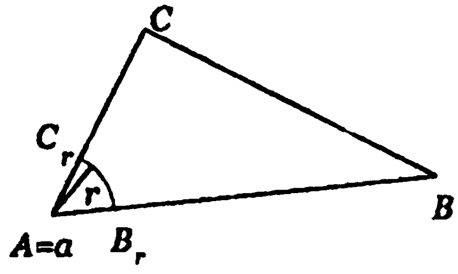
$$\int_\gamma f(w)dw = 0,$$

γιὰ κάθε κατὰ τμήματα διαφορίσιμη κλειστὴ καμπύλη γ, ἡ ὁποία ἀνήκει στὸν δίσκο.

Ἀπόδειξη: Τὸ συμπέρασμα θὰ προκύψει ἀπὸ τὰ προηγούμενα θεωρήματα, ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι τοῦτο ἀληθεύει γιὰ τριγωνικὲς καμπῦλες.

Ἔτσι, θεωροῦμε μιὰ τριγωνικὴ καμπύλη $\gamma := [ABCA]$, μὲ φορά, ὅπως ἀκολουθοῦν οἱ κορυφὲς A, B, C, A στὸν δίσκο $B(c,r)$. Διακρίνουμε τὶς ἑξῆς τέσσερις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. Τὸ σημεῖο a ἀνήκει στὸ ἐξωτερικὸ τῆς καμπύλης. Τότε ἡ συνάρτηση f εἶναι ὁλόμορφη σὲ μιὰ περιοχὴ τῆς καμπύλης γ ποὺ δὲν περιέχει τὸ σημεῖο a. Ἔτσι, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 6.1.6.1



τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς f κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης γ εἶναι ἴσο μὲ τὸ μηδέν.

Περίπτωση 2. Τὸ σημεῖο a εἶναι μιὰ κορυφὴ τοῦ τριγώνου. Ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύει $a = A$ καὶ θεωροῦμε ἕναν πραγματικὸ ἀριθμὸ $r > 0$ μικρότερο των μηκῶν τῶν δύο πλευρῶν AB καὶ AC. Παίρνουμε τὰ δύο σημεῖα B_r, C_r πάνω στὶς πλευρὲς AB καὶ AC ἀντίστοιχα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόσταση $r > 0$ ἀπὸ τὸ σημεῖο a. Ὀνομάζουμε γ_r καὶ Γ_r τὶς πολυγωνικὲς καμπῦλες $[A, B_r, C_r, A]$ καὶ $[B_r, B, C, C_r, B_r]$, ἀντίστοιχα. Τότε παρατηροῦμε ὅτι

$$\gamma = \gamma_r + \Gamma_r,$$

διότι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα B_rC_r καὶ C_rB_r ἔχουν ἄθροισμα τὴ μηδενικὴ καμπύλη. Ἑπομένως ἰσχύει

$$\int_\gamma f(w)dw = \int_{\gamma_r} f(w)dw + \int_{\Gamma_r} f(w)dw.$$

Ἐπειδὴ, προφανῶς, ἡ συνάρτηση f εἶναι ὁλόμορφη σὲ μιὰ περιοχὴ τῆς καμπύλης Γ_r, ἡ ὁποία δὲν περιέχει τὸ σημεῖο a, λόγω τοῦ Θεωρήματος 6.1.6.1, τὸ ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα πάνω σὲ αὐτὴ εἶναι ἴσο μὲ τὸ μηδέν. Ἔτσι ἔχουμε ὅτι

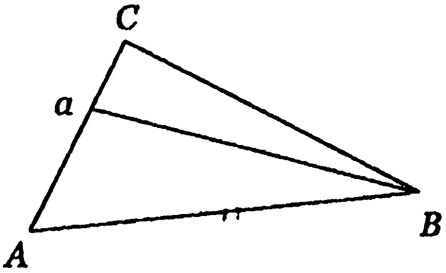
$$\int_\gamma f(w)dw = \int_{\gamma_r} f(w)dw.$$

Ἂν M εἶναι ἕνα φρᾶγμα τῆς f σὲ μιὰ περιοχὴ ποὺ περιέχει τὴν καμπύλη γ_r, ἀπὸ τὴν παραπάνω σχέση, προκύπτει ὅτι

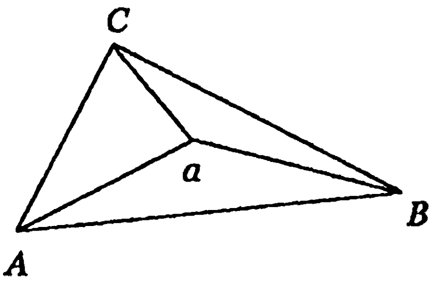
$$\left|\int_\gamma f(w)dw\right| = \left|\int_{\gamma_r} f(w)dw\right| \leq 4rM.$$

διότι τὸ (μέγιστο) μῆκος τῆς καμπύλης γ_r εἶναι ἴσο μὲ $4r$. Λαμβάνοντας τὸ ὅριο ὅταν $r \to 0$, προκύπτει

$$\int_\gamma f(w)dw = 0.$$



Περίπτωση 3. Τὸ σημεῖο a κεῖται πάνω σὲ κάποια πλευρά. Ἔστω ὅτι τὸ σημεῖο κεῖται πάνω στὴν πλευρὰ AC. Θεωροῦμε τὰ τρίγωνα AaB καὶ aBC, ὁπότε ἐφαρμόζουμε τὴν περίπτωση 2 στὴν ἁλυσίδα $[A, B, a, A]+$ $[a, B, C, a]$.



Περίπτωση 4. Τὸ σημεῖο a ἀνήκει στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τριγώνου Τότε σχηματίζουμε τρίγωνα ABa, BaC, CaA καὶ ἐφαρμόζουμε πάλι τὴ περίπτωση 2 στὴν ἁλυσίδα τῶν τριῶν τριγώνων.

Ἑπομένως σὲ κάθε περίπτωση τὸ ὁλοκλήρωμα κατὰ μῆκος τῆς τρι- γωνικῆς καμπύλης εἶναι ἴσο μὲ τὸ μηδέν, ὁπότε ὑπάρχει ἀόριστο ὁλο- κλήρωμα τῆς f. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς f κατὰ μῆκο κάθε κατὰ τμήματα διαφορίσιμης κλειστῆς καμπύλης γ, ποὺ μαζί μὲ τ ἐσωτερικὸ της ἀνήκει στὸν τόπο $\mathcal{T}$, εἶναι ἴσο μὲ τὸ μηδέν. Ἔτσι, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 6.1.6.1 ἕπεται τὸ συμπέρασμα. ■

6.1.8 Ὁλοκληρώματα πάνω σὲ ὁμοτοπικὲς καμπῦλες

Στὸ ἐδάφιο 3.2 εἴδαμε ὅτι δυὸ κλειστὲς καμπῦλες σὲ ἕναν τόπο εἶναι ὁμοτοπικὲς στὸν τόπο, ὅταν ἡ μία ἀπὸ αὐτὲς μπορεῖ νὰ μετακινηθεῖ κατὰ συνεχῆ τρόπο, χωρίς νὰ ἐξέλθει ἀπὸ τὸν τόπο, ὥστε νὰ ἔλθει καὶ νὰ καταλάβει τὴ θέση τῆς ἄλλης καμπύλης. Ἐδῶ θὰ δοῦμε ὅτι ὁλοκληρώματα ὁλόμορφων συναρτήσεων πάνω σὲ ὁμοτοπικὲς καμπῦλες εἶναι ἴσα.

Θεώρημα 6.1.8.1 *Ὑποθέτουμε ὅτι γ_0 καὶ γ_1 εἶναι δύο κατὰ τμήματα διαφορίσιμες κλειστὲς ὁμοτοπικὲς καμπῦλες σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$ καὶ f εἶναι μία συνάρτηση ὁρισμένη στὸν τόπο $\mathcal{T}$ καὶ ὁλόμορφη τουλάχιστον στὸν τόπο $\mathcal{T} \setminus \{a\}$, ὅπου a εἶναι ἕνα σημεῖο στὸ ὁποῖο ἡ f εἶναι τοπικὰ φραγμένη. Τότε ἰσχύει*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε ὅτι $H(t,s)$, $(t,s) \in [a,\beta] \times [0,1]$ εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁμοτοπίας τῶν δύο καμπυλῶν.

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτηση H εἶναι συνεχὴς καὶ τὸ πεδίο ὁρισμοῦ της $[a,\beta]\times[0,1]$ εἶναι συμπαγές, ἕπεται ὅτι αὐτὴ εἶναι ὁμοιόμορφα συνεχὴς καὶ τὸ σύνολο τῶν τιμῶν της εἶναι συμπαγές. Ἄρα, σύμφωνα καὶ μὲ τὸ Θεώρημα 2.2.3.1, ὑπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ὥστε κάθε δίσκος μὲ ἀκτῖνα ε καὶ μὲ κέντρο ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ συνόλου $H(t,s)$, $(t,s) \in [a,\beta] \times [0,1]$ νὰ περιέχεται στὸν τόπο $\mathcal{T}$.

Λόγω τῆς ὁμοιόμορφης συνέχειας τῆς συνάρτησης H, ὑπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ὥστε γιὰ κάθε $(t,s),(t',s') \in [a,\beta] \times [0,1]$ νὰ ἰσχύει

$$|t-t'| < \delta, \quad |s-s'| < \delta \Longrightarrow |H(t,s) - H(t',s')| < \varepsilon.$$

Θεωροῦμε ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ N τέτοιον ὥστε

$$\frac{1}{N} < \frac{\delta}{2}.$$

Τότε, γιὰ κάθε $j, k = 0, 1, \cdots, N-1$, ἡ συνάρτηση H ἀπεικονίζει τὸ τετράγωνο

$$[a + \frac{j}{N}(\beta - a), a + \frac{j+1}{N}(\beta - a)] \times [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$$

στὸν δίσκο μὲ κέντρο τὸ σημεῖο

$$c_{jk} := H(a + \frac{j}{N}(\beta - a), \frac{k}{N})$$

καὶ ἀκτῖνα ε. Ἔστω Γ_k ἡ κλειστὴ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση

$$H(t, \frac{k}{N}), \quad t \in [a, \beta].$$

Τότε ἔχουμε $\Gamma_0 = \gamma_0$ καὶ $\Gamma_N = \gamma_1$.

Γιὰ κάθε $j = 0, 1, \cdots, N-1$, θεωροῦμε τὴν κλειστὴ καμπύλη $\sigma_{j,k}$ μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα

$$c_{jk}, \quad c_{(j+1)k}, \quad c_{(j+1)(k+1)}, \quad c_{j(k+1)}$$

καὶ μὲ πλευρὲς τὶς ἑξῆς καμπῦλες (βλέπε σχῆμα):

1) Τὸ τμῆμα $c_{jk}, c_{(j+1)k}$ τῆς καμπύλης Γ_k, μὲ φορὰ ἐκείνη τῆς καμπύλης Γ_k,

2) Τὸ τμῆμα $c_{j(k+1)}, c_{(j+1)(k+1)}$ τῆς καμπύλης Γ_{k+1}, μὲ φορὰ ἀντίθετη τῆς φορᾶς τῆς καμπύλης Γ_{k+1},

3) Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα $c_{(j+1)k}c_{(j+1)(k+1)}$ καὶ

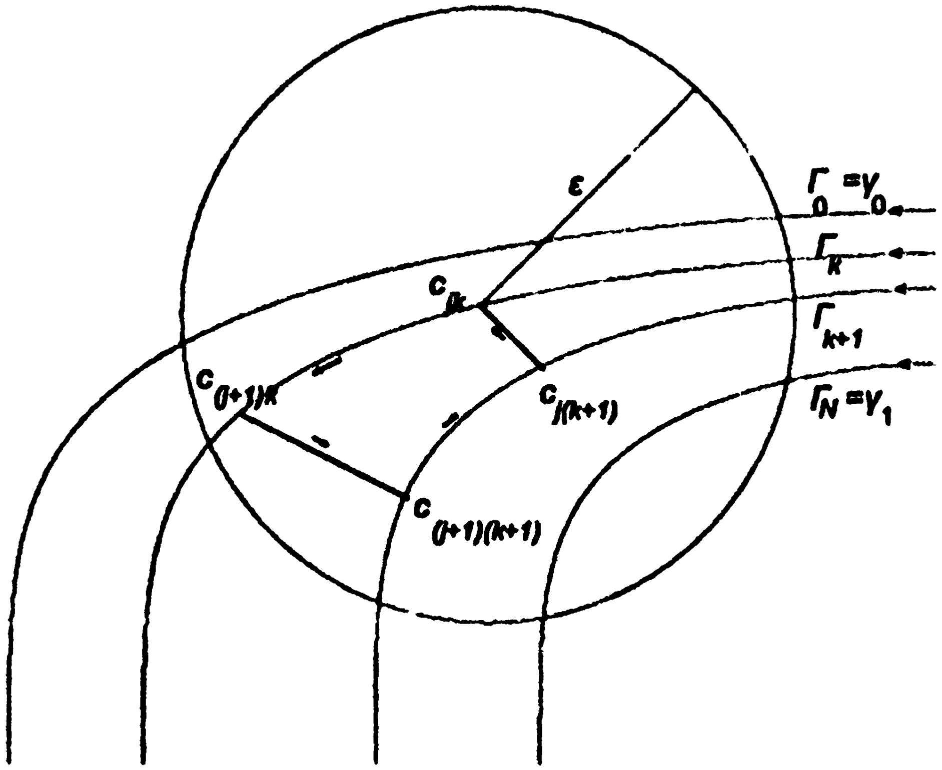
4) Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα $c_{j(k+1)}c_{jk}$.

Ἡ κλειστὴ καμπύλη $\sigma_{j,k}$ (μαζὶ μὲ τὸ ἐσωτερικό της) ἀνήκει στὸν δίσκο $B(\sigma_{jk}, \varepsilon)$, ὁπότε, ἐφαρμόζοντας τὸ Θεώρημα 6.1.6.2, προκύπτει ὅτι

$$\int_{\sigma_{j,k}} f(z)dz = 0.$$

Ἐπειδή, προφανῶς, ἰσχύει

$$\sigma_{0,k} + \sigma_{1,k} + \cdots + \sigma_{N-1,k} = \Gamma_k - \Gamma_{k+1},$$



Ἀθροίζοντας τὴν τελευταία σχέση γιὰ $j = 0, 1, \cdots, N-1$ βρίσκουμε ὅτι

$$\int_{\Gamma_k} f(z)dz = \int_{\Gamma_{k+1}} f(z)dz.$$

Ἀπὸ τὴ σχέση αὐτὴ ἔπεται τὸ συμπέρασμα, ἀφοῦ ἰσχύει

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_0} f(z)dz = \cdots = \int_{\Gamma_N} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz. \blacksquare$$

Ἕνα συμπέρασμα ποὺ προκύπτει ἄμεσα ἀπὸ τὰ Θεωρήματα 6.1.7.1 καὶ 6.1.8.1 εἶναι τὸ ἑξῆς:

Θεώρημα 6.1.8.2 *Ὑποθέτουμε ὅτι γ εἶναι μιὰ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη κλειστὴ καμπύλη μηδέν-ὁμοτοπικὴ σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$ καὶ f εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁλόμορφη στὸν τόπο $\mathcal{T} \setminus \{a\}$, ὅπου $a \in \mathcal{T}$. Ἂν ἡ συνάρτηση f εἶναι τοπικὰ φραγμένη στὸ σημεῖο a, τότε ἰσχύει*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

6.1.9 Ὁλοκληρώματα σὲ ἁπλὰ συνεκτικὰ σύνολα

Ἔχοντας ὑπ' ὄψη μας τὴν Πρόταση 3.2.0.2 καὶ τὸ θεώρημα 6.1.8.2 παίρνουμε τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα, ποὺ ἀφορᾶ ὁλοκληρώματα κατὰμῆκος κλειστῶν καμπυλῶν οἱ ὁποῖες βρίσκονται μέσα σὲ ἁπλὰ συνεκτικὰ σύνολα. Τὸ Θεώρημα τοῦτο ἀναφέρεται στὴν περίπτωση κατὰ τὴν ὁποία μπορεῖ νὰ ὑπάρχει σημεῖο a ὅπου ἡ συνάρτηση εἶναι τοπικὰ φραγμένη. Ἔτσι, προφανῶς, τὸ θεώρημα ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν ἡ συνάρτηση εἶναι παντοῦ ὁλόμορφη στὸν τόπο.

Θεώρημα 6.1.9.1 *Ἔστω $\mathcal{T}$ ἕνας ἁπλὰ συνεκτικὸς τόπος στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο καὶ a ἕνα σημεῖο τοῦ $\mathcal{T}$. Ἂν f εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη στὸν τόπο $\mathcal{T} \setminus \{a\}$, καὶ τοπικὰ φραγμένη στὸ σημεῖο a, τότε ἰσχύει*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

γιὰ κάθε κατὰ τμήματα διαφορίσιμη κλειστὴ καμπύλη γ στὸν τόπο.

6.2 ΔΕΙΚΤΗΣ ΣΤΡΟΦΗΣ

Ἔστω γ μιὰ καμπύλη, μὲ ἀρχὴ ἕνα σημεῖο a καὶ πέρας ἕνα σημεῖο b καὶ ἔστω z ἕνα σταθερὸ σημεῖο, τὸ ὁποῖο **δὲν κεῖται πάνω στὴν καμπύλη**. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ καμπύλη γ εἶναι ἕνας (ἐπίπεδος) δρόμος πάνω στὸν ὁποῖο κινεῖται ἕνας ποδηλάτης, μὲ ἀφετηρία τὸ σημεῖο a καὶ τερματισμὸ τὸ b. Ἂν ἕνας παρατηρητὴς βρίσκεται στὴ θέση τοῦ σημείου z καὶ παρακολουθεῖ τὴν κίνηση τοῦ ποδηλάτη, τελικά, τὸ βλέμμα τοῦ παρατηρητὴ θὰ ἔχει διαγράψει μιὰ γωνία θ. Τὸ πηλίκο $\theta/2\pi$ εἶναι ἡ ποσότητα ἐκείνη ποὺ παριστάνεται μὲ $I(\gamma, z)$ καὶ ὀνομάζεται **δείκτης στροφῆς τῆς καμπύλης ὡς πρὸς τὸ σημεῖο** z.

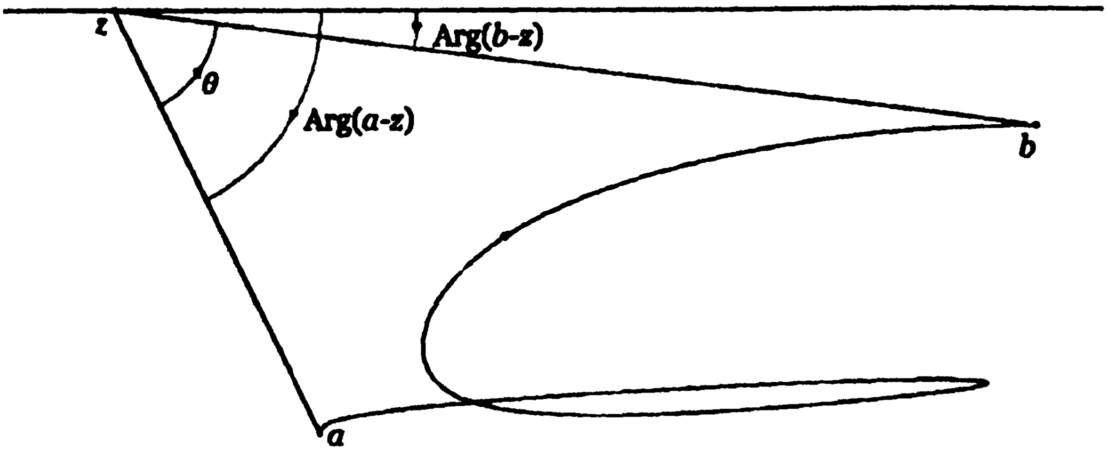
6.2.1 Ὁρισμὸς

Ὑποθέτοντας ὅτι ἡ καμπύλη εἶναι ὅπως στὸ σχῆμα, θὰ ἀναζητήσουμε τὸν μαθηματικὸ ὁρισμὸ τῆς ἔννοιας αὐτῆς.

Προφανῶς ἔχουμε

$$I(\gamma, z) = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\mathrm{Arg}(b-z) - \mathrm{Arg}(a-z)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}\Big(\frac{b-z}{a-z}\Big) = \frac{1}{2\pi i} i\mathrm{Arg}\Big(\frac{b-z}{a-z}\Big).$$

Χρησιμοποιῶντας τὸν ὁρισμὸ τοῦ λογαρίθμου μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ καὶ



Σχῆμα 6.3: *Ὁ δείκτης στροφῆς τῆς καμπύλης μὲ ἀρχὴ τὸ σημεῖο a καὶ πέρας τὸ σημεῖο b ὡς πρὸς τὸ σημεῖο z εἶναι ἡ ποσότητα θ/2π.*

τὴν παράγωγο τῆς συνάρτησης $z \to Log(z)$ [βλ. σχέση (4.7)], βρίσκουμε

$$\begin{aligned} I(\gamma, z) &= \frac{1}{2\pi i}\Big[\mathrm{Log}\Big(\frac{b-z}{a-z}\Big) - \log\Big|\frac{b-z}{a-z}\Big|\Big] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\Big[\log\frac{|a-z|}{|b-z|} + \mathrm{Log}(b-z) - \mathrm{Log}(a-z)\Big], \end{aligned}$$

ὁπότε, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 5.1.4.3, τελικά, προκύπτει ὅτι

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\Big[\log\frac{|a-z|}{|b-z|} + \int_\gamma \frac{dw}{w-z}\Big].$$

Ἂν ὑποτεθεῖ ὅτι ἡ καμπύλη εἶναι κλειστή, τότε ἔχουμε $a = b$ ὁπότε καὶ $|a-z| = |b-z|$. Μὲ βάση τὸν τύπο αὐτό, προκύπτει ὁ ἀκόλουθος μαθηματικὸς ὁρισμὸς τοῦ δείκτη στροφῆς γιὰ κλειστὲς καμπῦλες:

Ὁρισμός 6.2.1.1 *Ἔστω γ μιὰ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη κλειστὴ καμπύλη στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο καὶ ἔστω a ἕνα σημεῖο τὸ ὁποῖο δὲν ἀνήκει πάνω στὴν καμπύλη. Ὀνομάζουμε* **δείκτη στροφῆς** *τῆς κλειστῆς καμπύλης γ ὡς πρὸς τὸ σημεῖο z τὴν ποσότητα*

$$I(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}.$$

Γενικότερα, ἔστω

$$C := \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k$$

μιὰ ἁλυσίδα κλειστῶν καμπυλῶν καὶ z εἶναι ἕνα σημεῖο τὸ ὁποῖο δὲν κεῖται πάνω σὲ καμμιὰ ἀπὸ τὶς καμπῦλες τῆς ἁλυσίδας. **Ὁρίζουμε τὸν δείκτη στροφῆς τῆς ἁλυσίδας C ὡς πρὸς τὸ σημεῖο** z, νὰ εἶναι ἡ ποσότητα

$$I(C, z) := \sum_{n=1}^{k} I(\gamma_n, z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{k}\int_{\gamma_n}\frac{dw}{w-z}.$$

6.2.2 Ἰδιότητες

Πρόταση 6.2.2.1 *Ἂν ἕνα σημεῖο z κεῖται στὸ ἐξωτερικὸ μιᾶς κλειστῆς καμπύλης γ, τότε ἔχουμε $I(\gamma, z) = 0$.*

Ἀπόδειξη: Θεωροῦμε ἕναν ἁπλὰ συνεκτικὸ τόπο $\mathcal{T}$ ποὺ περιέχει τὴν καμπύλη, ἀλλὰ ὄχι τὸ σημεῖο z. Στὸν τόπο αὐτὸν ἡ συνάρτηση

$$w \to \frac{1}{w-z}$$

εἶναι ὁλόμορφη. Ἔτσι, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 6.1.9.1, προκύπτει τὸ συμπέρασμα. ■

Θεώρημα 6.2.2.1 *Ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:*

1. *Ὁ δείκτης στροφῆς $I(\gamma, z)$ μιᾶς κλειστῆς καμπύλης γ ὡς πρὸς ἕνα σημεῖο $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.*

2. *Ἡ συνάρτηση $z \to I(\gamma, z)$ εἶναι συνεχής.*

Ἀπόδειξη: 1) Ἂν $w(t)$, $t \in [0, 1]$ εἶναι μιὰ παραμετρικὴ παράσταση τῆς κλειστῆς καμπύλης γ, ἡ συνάρτηση

$$g(t) := \int_0^t \frac{w'(s)}{w(s) - z} ds, \quad t \in [0, 1],$$

ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση

$$\frac{d}{dt} \exp[-g(t)][w(t) - z] = 0.$$

Τοῦτο συνεπάγεται ὅτι ἡ συνάρτηση

$$t \to e^{-g(t)}[w(t) - z]$$

εἶναι σταθερή. Ἐπειδὴ ἰσχύει καὶ

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} g(1),$$

προκύπτει

$$e^{-2\pi i I(\gamma, z)}[w(1) - z] = e^{-g(1)}[w(1) - z] = e^{-g(0)}[w(0) - z] = w(0) - z.$$

Ἐπειδὴ ἡ καμπύλη εἶναι κλειστή, ἔχουμε $w(1) = w(0)$ καὶ ἄρα ἰσχύει

$$e^{-2\pi i I(\gamma, z)} = 1.$$

Τοῦτο συνεπάγεται ὅτι

$$-2\pi i I(\gamma, z) = \log 1 = \log|1| + i \arg(1) = i2k\pi,$$

ὁπότε $I(\gamma, z) = -k$, δηλαδή, ὁ δείκτης στροφῆς εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός.

2) Ἡ συνέχεια τῆς συνάρτησης $z \to I(\gamma, z)$ προκύπτει ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.1.4.5. ■

Ἐπειδὴ ἡ συνεχὴς εἰκόνα συνεκτικοῦ συνόλου εἶναι συνεκτικὸ σύνολο καὶ ἐπειδὴ τὰ μόνα συνεκτικὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν ἀκεραίων εἶναι τὰ μονοσύνολα, συνδυάζοντας τὰ δύο συμπεράσματα τοῦ παραπάνω θεωρήματος παίρνουμε τὸ ἑξῆς πόρισμα:

Πόρισμα 6.2.2.1 *Ἡ τιμὴ τῆς συνάρτησης $z \to I(\gamma, z)$ πάνω σὲ κάθε συνεκτικὴ συνιστῶσα*[2] *ἄλλο συνεκτικὸ τοῦ συνόλου $\mathbb{C} \setminus \gamma$ εἶναι ἕνας σταθερὸς ἀκέραιος ἀριθμός.*

Οἱ ὁμοτοπικὲς καμπῦλες διατηροῦν τὸν δείκτη στροφῆς. Πραγματικά, ἔχουμε τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Θεώρημα 6.2.2.2 *Ἂν γ_0 καὶ γ_1 εἶναι δύο κλειστὲς κατὰ τμήματα διαφορίσιμες καμπῦλες ὁμοτοπικὲς σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T} \setminus \{z\}$, τότε ἰσχύει*

$$I(\gamma_0, z) = I(\gamma_1, z).$$

Ἀπόδειξη: Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὸ Θεώρημα 6.1.8.1, ὅταν τὸ ἐφαρμόσουμε γιὰ τὸν τόπο $\mathcal{T}_1$ καὶ γιὰ τὴ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(w) := \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{w - z}.$$

Θεώρημα 6.2.2.3 *Δίνεται ἕνα σημεῖο z τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καὶ μιὰ κλειστὴ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη γ. Ἂν ἡ καμπύλη εἶναι ὁμοτοπικὴ στὸν τόπο $C \setminus \{z\}$ πρὸς ἕναν κύκλο Γ μὲ κέντρο τὸ σημεῖο z, τότε ἰσχύει*

$$I(\gamma, z) = \pm 1.$$

Ἀπόδειξη: Οἱ καμπῦλες γ καὶ Γ εἶναι ὁμοτοπικές, ἄρα ἔχουν τὸν ἴδιο δείκτη στροφῆς ὡς πρὸς τὸ σημεῖο z. Ἀπὸ τὰ στοιχεῖα ποὺ ἐκτίθενται στὸ ἐδάφιο 6.1.1, ἔχουμε $I(\Gamma, z) = \pm 1$. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἀποδεικνύει τὸ συμπέρασμα. ■

Πρόβλημα 6.2.2.1 *Ὑποθέτουμε ὅτι γ_1 καὶ γ_2 εἶναι δύο κλειστὲς κατὰ τμήματα διαφορίσιμες καμπῦλες μὲ παραστάσεις $z_1(t), t \in [\alpha, \beta]$ καὶ $z_2(t), t \in [\alpha, \beta]$, ἀντίστοιχα, τέτοιες ὥστε*

$$|z_1(t) - z_2(t)| < |z_2(t)|,$$

γιὰ κάθε $t \in [\alpha, \beta]$. Τότε ἰσχύει $I(\gamma_1, 0) = I(\gamma_2, 0)$.

[2] Συνεκτικὴ συνιστῶσα ἑνὸς συνόλου A εἶναι ἕνα συνεκτικὸ σύνολο S τέτοιο ὥστε κάθε συνεκτικὸ ὑποσύνολο S' τοῦ A μὲ τὴν ἰδιότητα ὅτι $S \subseteq S'$ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση $S = S'$.

Ἀπόδειξη: Ἂν γιὰ κάποιο $t \in [a, \beta]$ ἰσχύει $z_2(t) = 0$, τότε θὰ πρέπει νὰ ἔχουμε $|z_1(t)| < 0$, πρᾶγμα ἄτοπο. Ἄρα ἡ ποσότητα $z_2(t)$ δὲν μηδενίζεται γιὰ καμμία τιμὴ τοῦ t.

Τώρα, παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση

$$z(t) := \frac{z_1(t)}{z_2(t)}, \quad t \in [a, \beta]$$

ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση

$$|z(t) - 1| < 1,$$

γιὰ κάθε $t \in [a, \beta]$. Ἑπομένως αὐτὴ παριστάνει μιὰ κλειστὴ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη γ ποὺ βρίσκεται στὸν δίσκο $B(1, 1)$. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖο 0 ἀνήκει στὸ ἐξωτερικὸ τῆς γ, σύμφωνα μὲ τὴν Πρόταση 6.2.2.1, ἔχουμε $I(\gamma, 0) = 0$. Ἔτσι προκύπτει ὅτι

$$\begin{aligned}
0 = I(\gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_a^\beta \frac{z'(t)dt}{z(t)} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^\beta \left[\frac{z_1'(t)}{z_1(t)} - \frac{z_2'(t)}{z_2(t)}\right]dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_a^\beta \frac{z_1'(t)dt}{z_1(t)} - \frac{1}{2\pi i}\int_a^\beta \frac{z_2'(t)dt}{z_2(t)} \\
&= I(\gamma_1, 0) - I(\gamma_2, 0),
\end{aligned}$$

ἀπὸ ὅπου παίρνουμε τὸ ζητούμενο. ♦

6.2.3 Παράσταση ὁλόμορφης συνάρτησης

Θεώρημα 6.2.3.1 *Ἔστω γ μιὰ κλειστὴ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη μηδένομοτοπικὴ καμπύλη σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$ καὶ ἔστω f μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη στὸν τόπο $\mathcal{T}$. Τότε ἰσχύει ὁ τύπος*

$$I(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}dw, \quad z \in \mathcal{T} \setminus \gamma.$$

Ἀπόδειξη: Γιὰ τυχὸν σταθερὸ σημεῖο z ὁρίζουμε τὴ συνάρτηση

$$g(w,z) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \in \mathcal{T} \setminus \{z\} \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Ἡ συνάρτηση $g(\cdot, z)$ εἶναι ὁλόμορφη στὸν τόπο $\mathcal{T} \setminus \{z\}$ καὶ τοπικὰ φραγμένη στὸ σημεῖο z, ἀφοῦ τὸ ὅριο στὸ z, ὑπάρχει (βλ. Πρόταση 6.1.7.1). Ἔτσι, μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ Θεωρήματος 6.1.9.1, ἕπεται τὸ συμπέρασμα. ■

Θεώρημα 6.2.3.2 *Ἔστω γ μιὰ κλειστὴ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη μηδενόμοτοπικὴ καμπύλη σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$. Ἂν f εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη στὸν τόπο $\mathcal{T}$, τότε ἰσχύει ὁ τύπος*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw, \quad z \in \operatorname{int}(\gamma). \tag{6.5}$$

Ἀπόδειξη. Τοῦτο προκύπτει συνδυάζοντας τὰ θεωρήματα 6.1.8.2 καὶ 6.1.9.1. ■

Θεώρημα 6.2.3.3 *Ἔστω γ καὶ f ὅπως στὸ προηγούμενο θεώρημα. Τότε, γιὰ κάθε θετικὸ ἀκέραιο n, ἰσχύει*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw, \quad z \in \operatorname{int}(\gamma).$$

Ἀπόδειξη: Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.1.4.6 καὶ τὸν τύπο (6.5), μὲ διαδοχικὴ παραγώγιση, παίρνουμε τὸ συμπέρασμα. ■

Πρόβλημα 6.2.3.1 *Ἔστω γ ὁ θετικὰ προσανατολισμένος μοναδιαῖος κύκλος καὶ f μία μιγαδικὴ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ μιὰ περιοχὴ τῆς γ. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἰσχύει*

$$\int_\gamma \frac{f''(z)dz}{z^3} = 12\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z^5}.$$

Ἀπόδειξη: Γιὰ τὴ συνάρτηση $g := f''$ ἔχουμε

$$f^{(4)}(0) = g''(0) = \frac{2}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{g(z)dz}{z^3} = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{f''(z)dz}{z^3}.$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρὰ γιὰ τὴ συνάρτηση f ἔχουμε

$$f^{(4)}(0) = \frac{4!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z^5}dw.$$

Ἐξισώνοντας τὰ δύο πρῶτα μέλη προκύπτει ἡ ζητούμενη ἰσότητα. ♦

6.3 ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

6.3.1 Ἐπακόλουθα τοῦ θεωρήματος παράστασης

Θεώρημα 6.3.1.1 *Ἂν f εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁλόμορφη σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$, τότε δὲν ὑπάρχει σημεῖο a τοῦ τόπου τέτοιο ὥστε $f^{(n)}(a) = 0$, γιὰ κάθε n, ἐκτὸς καὶ ἂν ἡ f εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.*

Ἀπόδειξη: Ἔστω A τὸ σύνολο τῶν σημείων μὲ τὴν ἰδιότητα αὐτή καὶ ἔστω $a \in A$. Ἂν (a_k) εἶναι μιὰ ἀκολουθία στὸ σύνολο A ἡ ὁποία συγκλίνει πρὸς τὸ σημεῖο a, τότε θὰ ἰσχύει καὶ

$$\lim_k f^{(n)}(a_k) = f^{(n)}(a),$$

ἀφοῦ, γιὰ κάθε n, ἡ συνάρτηση $f^{(n)}$ εἶναι συνεχής. Ἄρα τὸ σύνολο A εἶναι κλειστό.

Ἐπίσης, γιὰ κάθε σημεῖο $a \in A$, ὑπάρχει ἀνοικτὸς δίσκος $B(a, r)$ μέσα στὸν ὁποῖο ἡ συνάρτηση f ἀναπτύσσεται σὲ σειρὰ Taylor μὲ κέντρο τὸ a τῆς μορφῆς

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

καὶ μὲ συντελεστὲς

$$a_n := \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0, \quad n = 0, 1, \cdots$$

Δηλαδὴ ἡ συνάρτηση εἶναι μηδὲν παντοῦ στὸν δίσκο $B(a,r)$, ἄρα τὸ ἴδιο θα συμβαίνει καὶ γιὰ τὶς παραγώγους της κάθε τάξης. Συνεπῶς ὁ δίσκος $B(a,r)$ περιέχεται στὸ σύνολο A, πρᾶγμα ποὺ δηλώνει ὅτι τὸ σύνολο A εἶναι καὶ ἀνοικτό. Ἄρα, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 2.1.2.1, τὸ σύνολο τοῦτο ταυτίζεται μὲ ὁλόκληρον τὸν τόπο, ὁπότε ἰσχύει $f(z) = 0$, γιὰ κάθε $z \in \mathcal{T}$. ■

Σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα 6.3.1.1, ἄν μία ὁλόμορφη μιγαδικὴ συνάρτηση ἔχει ὅλες τὶς παραγώγους της σὲ ἕνα σημεῖο ἑνὸς τόπου ἴσες μὲ τὸ μηδέν, τότε αὐτὴ πρέπει νὰ εἶναι μηδὲν παντοῦ στὸν τόπο[3].

Πρόταση 6.3.1.1 *Ἄν f εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν δίσκο $B(a,R)$, τότε, γιὰ κάθε $z \in B(a,R)$, ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ταυτότητες:*

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\overline{w}}{2}, \frac{z-\overline{w}}{2i}\right) - \overline{f(w)},$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z+\overline{w}}{2}, \frac{z-\overline{w}}{2i}\right) - \overline{f(w)}$$

Ἀπόδειξη: Θὰ ἐξετάσουμε τὴν πρώτη περίπτωση, γιατὶ ἡ ἄλλη ἐξετάζεται μὲ τὸν ἴδιο τρόπο. Γιὰ νὰ ἀποδείξουμε τὸ συμπέρασμα τοῦτο θὰ χρησιμοποιήσουμε τὶς συνθῆκες Cauchy-Riemann καὶ τὸ γεγονὸς ποὺ εἴδαμε στὴν Πρόταση 4.2.6.1, ὅτι, δηλαδή, σὲ κάθε σημεῖο $z = x + iy$, ὅπου ἡ f παραγωγίζεται, ἰσχύει

$$f(z) = u + iv, \ f' = u_x + iv_x, \ f'' = u_{xx} + iv_{xx}, \ f''' = u_{xxx} + iv_{xxx}, \ \cdots$$

Στὸν δίσκο $B(w,R)$ θεωροῦμε τὴ συνάρτηση

$$g(z) = f(z) - 2u\left(\frac{z+\overline{w}}{2}, \frac{z-\overline{w}}{2i}\right) + \overline{f(w)}, \ \ z \in \mathcal{T},$$

[3]Τὸ συμπέρασμα τοῦτο δὲν ἰσχύει γιὰ τὶς πραγματικὲς συναρτήσεις. Γιὰ παράδειγμα, ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

εἶναι παραγωγίσιμη παντοῦ στὴν πραγματικὴ εὐθεῖα καὶ ἔχει στὸ σημεῖο μηδὲν τὶς παραγώγους κάθε τάξης ἴσες μὲ τὸ μηδέν. Προφανῶς, αὐτὴ δὲν εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

ὅπου $w = a + i\beta$. Τώρα παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$g(w) = f(w) - 2u(a,\beta) + \overline{f(w)} = 0.$$

Ἐπίσης, χρησιμοποιῶντας καὶ τὶς συνθῆκες Cauchy-Riemann, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} g'(w) &= f'(w) - 2u_x(a,\beta)\frac{1}{2} - 2u_y(a,\beta)\frac{1}{2i} \\ &= f'(w) - u_x(a,\beta) + iu_y(a,\beta) \\ &= f'(w) - u_x(a,\beta) - iv_x(a,\beta) = 0. \end{aligned}$$

Παρόμοια, χρησιμοποιῶντας τὸ γεγονὸς ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$u_x = v_y, \quad u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{xy} = v_{yy}, \quad u_{xxx} = v_{yxx}, \quad \cdots$$

καὶ

$$v_x = -u_y, \quad v_{xx} = -u_{yx}, \quad v_{xy} = -u_{yy}, \quad v_{xxx} = -u_{yxx}, \quad \cdots$$

βρίσκουμε ὅτι ὅλες οἱ παράγωγοι τῆς συνάρτησης αὐτῆς μηδενίζονται στὸ σημεῖο 0, δηλαδή, πληροῦν τὶς σχέσεις $g^{(n)}(w) = 0$. Ἄρα, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 6.3.1.1, προκύπτει τὸ συμπέρασμα. Παρόμοια ἐξετάζουμε καὶ τὴν ἄλλη περίπτωση. ■

Σημείωση 6.3.1.1 *Χρησιμοποιῶντας τὸ προηγούμενο συμπέρασμα, μποροῦμε νὰ βρίσκουμε ἀμέσως τὸν τύπο τῆς ὁλόμορφης συνάρτησης f ὅταν δίνεται μιὰ συνθήκη γιὰ τὶς τιμὲς της, καθῶς ἐπίσης, καὶ τὸ πραγματικὸ μέρος u, ἢ τὸ φανταστικὸ μέρος v τῆς f.*

Πρόβλημα 6.3.1.1 *Νὰ βρεθεῖ ἡ ὁλόμορφη συνάρτηση f τῆς ὁποίας τὸ πραγματικὸ μέρος εἶναι ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$u(x,y) := 3(x^2 - y^2)$$

καὶ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση $f(0) = i$.

Λύση: Εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση u εἶναι ἁρμονική, ὁπότε συμπεραίνουμε ὅτι τέτοια συνάρτηση, ἔστω f, ὑπάρχει. Ἐφαρμόζοντας τὸν σχετικὸ τύπο τῆς πρότασης 6.3.1.1 μὲ $w = 0$, παίρνουμε

$$f(z) = 2 \cdot 3[(\frac{z}{2})^2 - (\frac{z}{2i})^2] - (-i) = 3z^2 + i. \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 6.3.1.2 *Νὰ βρεθεῖ μιὰ ὁλόμορφη συνάρτηση f ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση $f(0) = 0$ καὶ ἔχει φανταστικὸ μέρος τὴ συνάρτηση ποὺ ὁρίζεται μὲ τον τύπο*

$$v(x, y) := 2(2\sinh(2x)\sin 2y + xy).$$

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι ἡ v εἶναι ἁρμονικὴ συνάρτηση, ὁπότε προκύπτει ὅτι τέτοια συνάρτηση, ἔστω f, ὑπάρχει. Ἔτσι, ἂν ἐφαρμόσουμε τὸν σχετικὸ τύπο τῆς πρότασης 6.3.1.1 μὲ $w = 0$, παίρνουμε ὅτι

$$f(z) = 2i2(2\sinh(2\frac{z}{2})\sin(2\frac{z}{2i}) + \frac{z}{2}\frac{z}{2i}) = 8i\sinh(z)\sin(-iz) + z^2$$

δηλαδὴ

$$f(z) = 2(e^z - e^{-z})^2 + z^2 = 4\cosh(2z) + z^2 - 4. \ \blacklozenge$$

Θεώρημα 6.3.1.2 *(Ἐκτίμηση Cauchy) Ἔστω f μιὰ συνάρτηση ὁλόμορφη σὲ ἕναν δίσκο $B(a, R)$ καὶ συνεχὴς στὴ θήκη τοῦ δίσκου. Τότε ἰσχύει*

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{|w-a|=R} |f(w)|.$$

Ἀπόδειξη: Ἀπὸ τὸν τύπο τοῦ Θεωρήματος 6.2.3.3 βλέπουμε ὅτι τοῦτο ἰσχύει γιὰ κάθε $r < R$. Ἔτσι, παίρνοντας τὸ ὅριο, ὅταν $r \to R$, προκύπτει τὸ συμπέρασμα.■

Πρόβλημα 6.3.1.3 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz,$$

ὅπου γ εἶναι ὁ θετικὰ προσανατολισμένος κύκλος μὲ κέντρο τὸ σημεῖο $-i$ καὶ ἀκτίνα 1.

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι ἡ πρὸς ὁλοκλήρωση συνάρτηση ὁρίζεται παντοῦ ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα $+i$ καὶ $-i$. Ἀπὸ αὐτά, μόνο τὸ σημεῖο $-i$ ἀνήκει στὸ ἐσωτερικὸ τῆς καμπύλης γ. Ἑπομένως ἔχουμε

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = \int_\gamma \frac{\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}}{(z-(-i))^2} dz = \frac{2\pi i}{1!}\frac{d}{dz}(\frac{e^{iz}}{(z-i)^2})\Big|_{z=-i} = 0,$$

ὅπου, στὴ μεσαία ἰσότητα ἐφαρμόσαμε τὸν τύπο τοῦ Θεωρήματος 6.2.3.3 γιὰ τὴν 1η παράγωγο τῆς ὁλόμορφης συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}. \;\blacklozenge$$

Πρόβλημα 6.3.1.4 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z^2-1)^2}dz,$$

ὅπου γ εἶναι ὁ θετικὰ προσανατολισμένος κύκλος μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 1 καὶ ἀκτίνα 1.

Λύση: Ἡ συνάρτηση ὁρίζεται παντοῦ ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα +1 καὶ −1. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ σημεῖα μόνο τὸ +1 ἀνήκει στὸ ἐσωτερικὸ τῆς καμπύλης γ. Ἔτσι ἔχουμε

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z^2-1)^2}dz = \int_\gamma \frac{\frac{\sin(z)}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}\frac{d}{dz}\Big(\frac{\sin(z)}{(z+1)^2}\Big)\Big|_{z=1} = i\pi\frac{\cos(1)-\sin(1)}{2}. \;\blacklozenge$$

Πρόβλημα 6.3.1.5 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int_\gamma \frac{dz}{(2z^2+iz+1)^2},$$

ὅπου γ εἶναι ὁ θετικὰ προσανατολισμένος κύκλος μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0 καὶ ἀκτίνα 3/4.

Λύση: Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς γράφεται ὡς $4(z+i)^2(z-\frac{1}{2})^2$, οἱ πόλοι τῆς συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{1}{(2z^2+iz+1)^2}$$

εἶναι οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ $-i$ και $\frac{1}{2}$, οἱ ὁποῖοι μάλιστα ἔχουν πολλαπλότητα 2. Ἀπὸ αὐτούς, ὁ πρῶτος εἶναι στὸ $\varepsilon\xi(\gamma)$, ἐνῶ ὁ δεύτερος στὸ $\varepsilon\sigma(\gamma)$. Ἔτσι, σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy γιὰ τὴν παράσταση τῶν παραγώγων ὁλόμορφης συνάρτησης μὲ ὁλοκλήρωμα, ἔχουμε

$$\int_\gamma \frac{dz}{(2z^2+iz+1)^2} = \frac{1}{4}\int_\gamma \frac{\frac{dz}{(z+i)^2}}{(z-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{4}2\pi i\Big(\frac{1}{(z+i)^2}\Big)'\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{8\pi}{27}. \;\blacklozenge$$

6.3.2 Ἀρχὴ μεγίστου

Θεώρημα 6.3.2.1 *Μιὰ συνάρτηση ἡ ὁποία εἶναι ὁλόμορφη σὲ ἕναν δίσκο $B(a,R)$ καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἀπόλυτη τιμὴ λαμβάνει μέγιστο στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ δίσκου, εἶναι σταθερὴ στὸν δίσκο.*

Ἀπόδειξη: Ἔστω A τὸ σύνολο τῶν σημείων ὅπου ἡ $|f|$ παίρνει μέγιστο καὶ ἔστω σημεῖο $z_0 \in A$. Θεωροῦμε ἕνα $r_0 > 0$ τέτοιο ὥστε $B(z_0, r_0) \subseteq B(a,R)$. Ἔστω σταθερὸ $r \in (0, r_0)$ καὶ γ ἡ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Τότε ἔχουμε

$$|f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_0}dw\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt \leq \max_{t\in[0,2\pi]} |f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|.$$

Ἄρα ὅλες οἱ ποσότητες στὴν παραπάνω σχέση εἶναι ἴσες, ὁπότε ἰσχύει

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})|\right]dt.$$

Ἀλλὰ ἡ πραγματικὴ συνάρτηση ποὺ ὁλοκληρώνουμε στὸ δεύτερο μέλος εἶναι μὴ ἀρνητική, ὁπότε γιὰ νὰ εἶναι τὸ ὁλοκλήρωμα ἴσο μὲ τὸ μηδέν, θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει

$$|f(z_0)| = |f(z_0 + re^{it})|,$$

γιὰ κάθε $t \in [0, 2\pi]$ καὶ $r \in (0, r_0)$. Ἄρα καὶ

$$|f(z_0)| = |f(z)|, \quad z \in B(z_0, r_0).$$

Τὸ συμπέρασμα αὐτὸ ἀποδεικνύει ὅτι τὸ σύνολο A εἶναι ἀνοικτό. Προφανῶς, λόγω τῆς συνέχειας τῆς f, τὸ σύνολο A εἶναι καὶ κλειστό, ὁπότε, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 2.1.2.1, τὸ A ταυτίζεται μὲ τὸν δίσκο $B(a,R)$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτηση $|f|$ εἶναι σταθερὴ ἐπὶ τοῦ δίσκου. Ἐπειδὴ ἡ f εἶναι καὶ ὁλόμορφη, σύμφωνα μὲ τὴν Πρόταση 4.2.6.2, αὐτὴ εἶναι σταθερή. ■

6.3.3 Πρῶτο Θεώρημα Liouville

Θεώρημα 6.3.3.1 *Κάθε φραγμένη ἀκεραία συνάρτηση εἶναι σταθερή.*

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι φραγμένη, δηλαδή, ὅτι ὑπάρχει $M > 0$ τέτοιο ὥστε $|f(z)| < M$, γιὰ κάθε $z \in \mathbb{C}$. Ἔστω $z \in \mathbb{C}$ σταθερό. Θεωροῦμε ἕνα $R > |z|$. Ἀπὸ τὸν τύπο τοῦ Θεωρήματος 6.3.1.2 προκύπτει ὅτι

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{R} \max_{w \in K(z,R)} |f(w)| \leq \frac{1}{R} M.$$

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς R εἶναι ὁποιοσδήποτε, παίρνοντας τὰ ὅρια ὅταν $R \to +\infty$, προκύπτει ὅτι $f'(z) = 0$. Ἔτσι ἡ f ἔχει παράγωγο ἴση μὲ τὸ 0, ὁπότε αὐτὴ εἶναι σταθερή. ■

Πρόβλημα 6.3.3.1 *Ἂν f εἶναι μιὰ ἀκεραία μιγαδικὴ συνάρτηση ἡ ὁποία γιὰ κάθε $z \in \mathbb{C}$ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση*

$$f(1+z) = f(z) = f(i+z),$$

νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἰσχύει $f'(z) = 0$, γιὰ κάθε z.

Ἀπόδειξη: Θέτοντας $z-1$ καὶ $z-i$ στὴν παραπάνω σχέση προκύπτουν ἀντίστοιχα οἱ σχέσεις

$$f(z) = f(z-1) \text{ καὶ } f(z-i) = f(z).$$

Ἔστω $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Ἂν $\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor$ εἶναι τὰ ἀκέραια μέρη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x καὶ y καὶ $(x), (y)$ εἶναι τὰ δεκαδικὰ μέρη τους, τότε ἔχουμε $(x), (y) \in [0, 1)$ καὶ ἰσχύει $x = \lfloor x \rfloor + (x)$ καὶ $y = \lfloor y \rfloor + (y)$. Ὑποθέτουμε, πρῶτα, ὅτι $x \geq 1$ καὶ $y \geq 1$. Ἑπομένως ἔχουμε $\lfloor x \rfloor \geq 1$ καὶ $\lfloor y \rfloor \geq 1$. Ἄρα ἰσχύει

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) = f(\lfloor x \rfloor + (x) + i\lfloor y \rfloor + i(y)) \\ &= f(1 + (\lfloor x \rfloor - 1) + (x) + i\lfloor y \rfloor + i(y)) \\ &= f((\lfloor x \rfloor - 1) + (x) + i\lfloor y \rfloor + i(y)) \\ &= f((\lfloor x \rfloor - 1) + (x) + i + i(\lfloor y \rfloor - 1) + i(y)) \\ &= f((\lfloor x \rfloor - 1) + (x) + i(\lfloor y \rfloor - 1) + i(y)). \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο, ἐπαγωγικά, βρίσκουμε

$$f(z) = f((x) + i(y)).$$

Τώρα ὑποθέτουμε ὅτι $x < 0$ καὶ $y \geq 1$. Τότε ἔχουμε $\lfloor x \rfloor \leq -1$ καὶ $\lfloor y \rfloor \geq 1$. Ἄρα ἰσχύει

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) = f(\lfloor x \rfloor + (x) + i\lfloor y \rfloor + i(y)) \\ &= f(-1 + (\lfloor x \rfloor + 1) + (x) + i\lfloor y \rfloor + i(y)) \\ &= f((\lfloor x \rfloor + 1) + (x) + i\lfloor y \rfloor + i(y)) \\ &= f((\lfloor x \rfloor + 1) + (x) + i + i(\lfloor y \rfloor - 1) + i(y)) \\ &= f((\lfloor x \rfloor + 1) + (x) + i(\lfloor y \rfloor - 1) + i(y)). \end{aligned}$$

Καὶ πάλι, ὅπως καὶ παραπάνω, συνεχίζοντας μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο, ἐπαγωγικά, βρίσκουμε

$$f(z) = f((x) + i(y)).$$

Παρόμοια ἐξετάζουμε καὶ τὶς περιπτώσεις ὅπου $x < 0$ καὶ $y < 0$ καὶ $x \geq 1$ καὶ $y < 0$.

Τώρα, ἐπειδὴ ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $(x)+i(y)$ εἶναι στοιχεῖο τοῦ τετραγώνου T, ποὺ εἶναι συμπαγὲς σύνολο, καὶ ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής, ὑπάρχει $M > 0$, τέτοιο ὥστε

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Δηλαδή, ἡ συνάρτηση f, ἐκτὸς ἀπὸ ἀκεραία, εἶναι καὶ φραγμένη. Ἄρα, σύμφωνα μὲ τὸ πρῶτο θεώρημα Liouville, αὐτὴ εἶναι σταθερή. ♦

Πρόβλημα 6.3.3.2 *Ἂν $f(z)$ καὶ $g(z)$ εἶναι δυὸ ἀκεραίες μιγαδικὲς συναρτήσεις τέτοιες ὥστε*

$$|f(z)| < |g(z)|, \quad \textit{γιὰ κάθε } z,$$

τότε ἰσχύει καὶ

$$f(0)g(z) = f(z)g(0), \quad \textit{γιὰ κάθε } z.$$

Ἀπόδειξη: Ἂν γιὰ κάποιο σημεῖο a εἴχαμε $g(a) = 0$, τότε $|f(a)| < 0$, πρᾶγμα ἄτοπο. Ἄρα ἡ συνάρτηση g δὲν μηδενίζεται σὲ κανένα σημεῖο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Ἑπομένως ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$$

εἶναι ἀκεραία καὶ φραγμένη, ἀφοῦ ἰσχύει $|h(z)| < 1$, γιὰ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμὸ z. Ἄρα ἀπὸ τὸ πρῶτο θεώρημα τοῦ Liouville προκύπτει ὅτι ἡ h εἶναι σταθερὴ συνάρτηση, ὁπότε $h(z) = h(0)$. Τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴ ζητούμενη σχέση. ♦

Πρόβλημα 6.3.3.3 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ μόνη ἀκεραία συνάρτηση f ποὺ γιὰ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμό z ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση*

$$|f(z) - i| < |f(z)|e^{\mathrm{Re}(z)}$$

εἶναι ἡ σταθερὴ συνάρτηση $f(z) = i$.

Ἀπόδειξη: Πραγματικά, ἂν γιὰ κάποιο z ἰσχύει $f(z) = 0$, τότε θὰ ἰσχύει, ἐπίσης, καὶ $f(z) = i$, ἄτοπο. Ἄρα ἡ συνάρτηση f δὲν μηδενίζεται πουθενά. Τότε ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$h(z) := \frac{f(z) - i}{f(z)e^z}$$

εἶναι ἀκεραία καὶ φραγμένη. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὑπάρχει μιγαδικὸς ἀριθμὸς a τέτοιος ὥστε νὰ ἰσχύει

$$f(z) - i = af(z)e^z, \text{ γιὰ κάθε } z.$$

Ὑποθέτουμε ὅτι $a \neq 0$ καὶ θέτουμε

$$w := \mathrm{Log}(\frac{1}{a}).$$

Τότε βρίσκουμε

$$f(w) - i = f(w),$$

πρᾶγμα ἄτοπο. Ἄρα πρέπει νὰ ἰσχύει $a = 0$, ὁπότε καὶ

$$f(z) = i. \ ♦$$

Πρόβλημα 6.3.3.4 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι δὲν ὑπάρχει πολυωνυμικὴ μιγαδικὴ συνάρτηση P ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση*

$$\left|e^z + P(z)\right| < e^{\mathrm{Re}(z)}, \text{ γιὰ κάθε } z \in \mathbf{C}.$$

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε ὅτι τέτοια συνάρτηση ὑπάρχει. Διαιρῶντας καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητας μὲ τὸν παράγοντα $|e^z|$, παίρνουμε

$$\left|1 + e^{-z}P(z)\right| < 1, \text{ γιὰ κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Ἡ παράσταση ποὺ βρίσκεται μέσα στὴν ἀπόλυτη τιμή, ὁρίζει μιὰ ἀκεραία συνάρτηση ἡ ὁποία εἶναι ἀκεραία καὶ φραγμένη. Ἄρα, σύμφωνα με το Θεώρημα τοῦ Liouville, αὐτή εἶναι σταθερή. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὑπάρχει σταθερὸς μιγαδικὸς ἀριθμὸς c τέτοιος ὥστε νὰ ἰσχύει

$$1 + e^{-z}P(z) = c, \text{ γιὰ κάθε } z,$$

ὁπότε καὶ

$$P(z) = (c-1)e^z, \text{ γιὰ κάθε } z.$$

Ἄν ἰσχύει $c = 1$, τότε $P(z) = 0$, γιὰ κάθε z, ὁπότε, ἀπό τὴ δοθεῖσα σχέση, θὰ εἴχαμε

$$|e^z| < e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

Ἔτσι, καὶ γιὰ $z = 0$, θὰ εἴχαμε $1 < 1$, ἄτοπο. Ἄρα πρέπει $c \neq 1$, ὁπότε ἡ πολυωνυμικὴ συνάρτηση $P(z)$ πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ ἕνα μὴ μηδενικὸ πολλαπλάσιο τῆς ἐκθετικῆς συνάρτησης e^z. Τοῦτο εἶναι ἄτοπο, διότι, ἄν a εἶναι μιὰ ρίζα τῆς P, τότε θὰ εἴχαμε $(1-c)e^a = 0$, πρᾶγμα ἄτοπο. ♦

Πρόβλημα 6.3.3.5 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἄν μιὰ ἀκεραία μιγαδικὴ συνάρτηση f ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση*

$$\mathrm{Re}(f(z)) \leq 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

τότε αὐτὴ εἶναι σταθερή.

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχει μιὰ μὴ σταθερὴ τέτοια μιγαδικὴ συνάρτηση. Θέτουμε

$$f(z) := f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Τότε πρέπει νὰ ἰσχύει $u(x,y) \leq 0$ καὶ ἐπὶ πλέον ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$g(z) := \exp(f(z))$$

θὰ εἶναι ἐπίσης ἀκεραία καὶ μὴ σταθερὴ συνάρτηση. Ἀλλὰ παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$|g(z)| = \exp(u(x,y)) \leq 1,$$

δηλαδὴ ἡ συνάρτηση g εἶναι φραγμένη, ἄρα σταθερή, ἄτοπο. ♦

6.3.4 Δεύτερο Θεώρημα Liouville

Θεώρημα 6.3.4.1 *Ἔστω f μιὰ ἀκεραία συνάρτηση. Ἂν ὑπάρχουν πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $M > 0$ καὶ $\varepsilon > 0$, καθῶς ἐπίσης καὶ φυσικὸς ἀριθμὸς n, τέτοιοι ὥστε νὰ ἰσχύει*

$$|f(z)| \leq M|z|^n,$$

γιὰ κάθε $z \in \mathbb{C}$, μὲ $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$, τότε, ἡ συνάρτηση f ταυτίζεται μὲ ἕνα πολυώνυμο βαθμοῦ τὸ πολὺ n.

Ἀπόδειξη: Ἔστω z τυχόν σημεῖο. Θεωροῦμε ἕναν πραγματικὸ ἀριθμὸ r τέτοιον ὥστε

$$r > \max\left\{|z|, \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

Ἔστω γ_r ὁ κύκλος μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0 καὶ ἀκτίνα r, μὲ τυχόντα προσανατολισμό. Τότε ἰσχύει

$$|f^{(n+1)}(z)| = \frac{(n+1)!}{2\pi}\left|\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}dz\right| \leq \frac{(n+1)!}{2\pi}\frac{Mr^n 2\pi r}{(r-|z|)^{n+2}}.$$

Ἡ ποσότητα, ποὺ δίνεται στὸ δεύτερο μέλος, τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς r τείνει πρὸς τὸ $+\infty$. Ἔτσι, προκύπτει ὅτι ἰσχύει $f^{(n+1)}(z) = 0$, γιὰ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμὸ z. Προφανῶς, ἡ σχέση αὐτὴ συνεπάγεται τὸ συμπέρασμα. ∎

Πρόβλημα 6.3.4.1 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ μόνη ἀκεραία συνάρτηση f ποὺ γιὰ κάθε z ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση*

$$|f(z)| \leq |z|^{\frac{3}{2}}$$

εἶναι ἡ σταθερὴ συνάρτηση $f(z) = 0$.

Ἀπόδειξη: Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση $f(z)z^{-2}$ εἶναι φραγμένη στὴν περιοχὴ $\{z : |z| > 1\}$. Ἄρα, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 6.3.4.1 ἡ συνάρτηση f θὰ εἶναι ἕνα πολυώνυμο βαθμοῦ τὸ πολὺ 2, δηλαδὴ θὰ ἔχει τὴ μορφὴ

$$f(z) = a + bz + cz^2,$$

ὅπου a, b, c εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί. Τότε θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει καὶ

$$|a + bz + cz^2| \leq |z|^{\frac{3}{2}}, \text{ για κάθε } z.$$

Θέτοντας $z = 0$ παίρνουμε $a = 0$, ὁπότε ἡ παραπάνω σχέση γίνεται

$$|bz + cz^2| \leq |z|^{\frac{3}{2}},$$

γιὰ κάθε z. Διαιρῶντας μὲ τὸ z καὶ στὴ συνέχεια θέτοντας πάλι $z = 0$, βρίσκουμε $b = 0$. Ἔτσι θὰ πρέπει γιὰ κάθε z νὰ ἰσχύει

$$|cz^2| \leq |z|^{\frac{3}{2}},$$

ὁπότε καὶ

$$|c|^2|z| \leq 1.$$

Τοῦτο ἰσχύει γιὰ κάθε z μόνο ὅταν ἔχουμε $c = 0$, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι $f(z) = 0$. ♦

6.3.5 Ρίζες ὁλόμορφων συναρτήσεων

Θεώρημα 6.3.5.1 *Ἔστω f μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$. Τότε, γιὰ κάθε $z_0 \in \mathcal{T}$ μὲ $f(z_0) = 0$, ὑπάρχει ἕνας μοναδικὸς θετικὸς ἀκέραιος k καὶ συνάρτηση g ὁλόμορφη σὲ ἕναν δίσκο $B(z_0, r) \subseteq \mathcal{T}$, τέτοια ὥστε $g(z_0) \neq 0$ καὶ*

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z). \tag{6.6}$$

Ἀπόδειξη: Ἂν ἡ f εἶναι ἡ μηδενικὴ συνάρτηση, τότε, προφανῶς, τὸ συμπέρασμα ἰσχύει. Ἔστω, λοιπόν, ὅτι αὐτὴ δὲν εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν. Ἄρα ἡ f θὰ γράφεται στὴ μορφὴ

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n,$$

γιὰ κάθε z στὸν δίσκο μὲ κέντρο τὸ σημεῖο z_0 καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόσταση τοῦ z_0 ἀπὸ τὸ σύνορο τοῦ τόπου $\mathcal{T}$. Ἐδῶ οἱ συντελεστὲς δίνονται ἀπὸ τὴ σχέση

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 6.3.1.1, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει ἐλάχιστος δείκτης $k \geq 1$, τέτοιος ὥστε $a_k \neq 0$ καὶ $a_j = 0$, γιὰ κάθε $j < k$. Θέτοντας

$$g(z) := \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k},$$

βλέπουμε ὅτι ἡ συνάρτηση g ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση (6.6). ■

Ὁ ἀριθμὸς k εἶναι ἡ τάξη, ἢ ἡ πολλαπλότητα τῆς ρίζας z_0.

Πόρισμα 6.3.5.1 *Ἔστω $f : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ μιὰ ὁλόμορφη συνάρτηση καὶ z_0 ἕνα σημεῖο τοῦ $\mathcal{T}$. Ἂν ὑπάρχει θετικὸς ἀκέραιος k τέτοιος ὥστε νὰ ἱκανοποιεῖται ἡ σχέση*

$$(\forall n \in \{0, 1, \cdots, k-1\})\ f^{(n)}(z_0) = 0 \ \text{καὶ}\ f^{(k)}(z_0) \neq 0,$$

τότε τὸ σημεῖο z_0 εἶναι ρίζα πολλαπλότητας k.

Θεώρημα 6.3.5.2 *(Θεμελιῶδες θεώρημα Ἄλγεβρας) Κάθε πολυώνυμο βαθμοῦ $n(\geq 1)$ ἔχει n (διαφορετικές, ἢ ἴσες) ρίζες στὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.*

Ἀπόδειξη: Ἔστω

$$p_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

ἕνα πολυώνυμο, βαθμοῦ n. Θὰ ἀποδείξουμε, πρῶτα, ὅτι τὸ πολυώνυμο $p_n(z)$ ἔχει τουλάχιστον μία ρίζα. Πρὸς τοῦτο ὑποθέτουμε ὅτι ἡ ποσότητα $p_n(z)$ δὲν μηδενίζεται στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο, ὁπότε ἡ συνάρτηση

$$f(z) := \frac{1}{p_n(z)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

εἶναι ἀκεραία. Ἐπίσης, εἶναι προφανὲς ὅτι ὑπάρχει $R > 0$ τέτοιο ὥστε, γιὰ κάθε z μὲ $|z| > R$, νὰ ἰσχύει

$$\frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \frac{|a_{n-2}|}{|z^2|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|z^n|} \leq \frac{1}{2}.$$

Ἐπομένως ἔχουμε

$$|p_n(z)| = \left|z^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right)\right| \geq |z^n|\left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z^n|}\right) \geq \frac{|z^n|}{2}.$$

Ἄρα, γιὰ κάθε z μὲ $|z| \geq R$, ἰσχύει

$$|f(z)| \leq \frac{2}{R^n}.$$

Ἀλλὰ στὸν δίσκο $B(0,R)$ ἡ f εἶναι φραγμένη, ὁπότε ἔχουμε

$$|f(z)| \leq \max\{\sup_{|z|\leq R}|f(z)|, \sup_{|z|>R}|f(z)|\} \leq \max\{\sup_{|z|\leq R}|f(z)|, \frac{2}{R^n}\},$$

γιὰ κάθε $z \in \mathbb{C}$. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα τοῦ Liouville ἕπεται ὅτι ἡ f εἶναι σταθερή, ὁπότε $n = 0$, πρᾶγμα ἄτοπο.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ὅτι τὸ πολυώνυμο $p_n(z)$ ἔχει τουλάχιστον μία ρίζα, ἔστω z_1. Τότε τὸ $p_n(z)$ θὰ γράφεται στὴ μορφὴ

$$p_n(z) = (z - z_1)p_{n-1}(z),$$

ὅπου $p_{n-1}(z)$ εἶναι ἕνα πολυώνυμο βαθμοῦ $n-1$. Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω, καὶ τὸ πολυώνυμο $p_{n-1}(z)$ ἔχει μία ρίζα, ἔστω z_2. Συνεχίζοντας μὲ αυτὸν τὸν τρόπο συμπεραίνουμε ὅτι ὑπάρχει ἕνα σύνολο πολυωνύμων $p_n(z), p_{n-1}(z), \cdots, p_1(z)$ τῶν ὁποίων οἱ βαθμοὶ εἶναι, ἀντίστοιχα, οἱ ἀριθμοὶ $n, n-1, n-2, \cdots, 1$ καὶ μὲ ρίζες τὰ σημεῖα $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n$, ποὺ εἶναι τέτοια ὥστε

$$p_k(z) = (z - z_k)p_{k-1}(z), \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

ὅπου $p_0(z)$ εἶναι ἕνας σταθερὸς μιγαδικὸς ἀριθμός. Ἔτσι, τελικά, προκύπτει ὅτι τὸ πολυώνυμο $p(z)$ γράφεται στὴ μορφὴ

$$\begin{aligned} p_n(z) &= (z - z_1)p_{n-1}(z) = (z - z_1)(z - z_2)p_{n-2}(z) \\ &= \cdots \\ &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\cdots(z - z_n)p_0(z). \end{aligned}$$

Τοῦτο ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα. ∎

Πρόβλημα 6.3.5.1 *Νὰ βρεθεῖ ἡ τάξη τῆς ρίζας $z = 0$ γιὰ τὴ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$f(z) := \frac{z^4}{z - \sin(z)}.$$

Λύση: Γράφουμε τὸν παρονομαστὴ στὴ μορφὴ

$$\begin{aligned} z - \sin(z) &= z - (z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots) \\ &= z^3(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \ldots - (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \ldots). \end{aligned}$$

Ἄρα ὁ τύπος τῆς συνάρτησης γίνεται

$$f(z) = zh(z),$$

ὅπου παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση h ὁρίζεται μὲ τὸν τύπο

$$h(z) := \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \ldots - (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \ldots},$$

ἡ ὁποία εἶναι ὁλόμορφη σὲ μιὰ περιοχὴ τοῦ σημείου 0 καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύει $h(0) = 6$. Ἔτσι προκύπτει ὅτι τὸ σημεῖο $z = 0$ εἶναι ρίζα πρώτης τάξης. ♦

Πρόβλημα 6.3.5.2 *Νὰ βρεθεῖ ἡ τάξη τῶν ριζῶν τῆς συνάρτησης μὲ τύπο*

$$f(z) := (z^2 + 1)^2 \sinh(z).$$

Λύση: Οἱ ρίζες τῆς συνάρτησης εἶναι τὰ σημεῖα $-i, i, k\pi i$, γιὰ κάθε ἀκέραιο k. Τώρα παρατηροῦμε ὅτι ἡ $f(z)$ γράφεται ὡς

$$f(z) = (z + i)^2 h(z),$$

ὅπου ἡ

$$h(z) := (z - i)^2 \sinh(z)$$

εἶναι ὁλόμορφη συνάρτηση καὶ τέτοια ὥστε

$$h(-i) = 4i^2 \sinh(-i) = -4i \sin 1,$$

τιμὴ ποὺ εἶναι διάφορη τοῦ 0. Ἄρα τὸ σημεῖο $-i$ εἶναι ρίζα τάξης 2.

Παρόμοια προκύπτει ὅτι καὶ ἡ ρίζα i εἶναι τάξης 2.

Γιὰ τὶς ρίζες τῆς μορφῆς $k\pi i$ παρατηροῦμε ὅτι ἡ παράγωγος

$$f'(z) = 4z(z^2 + 1) \sinh(z) + (z^2 + 1)^2 \cosh(z)$$

παίρνει στὸ σημεῖο $k\pi i$ τιμὴ διάφορη ἀπὸ τὸ μηδὲν καὶ ἄρα ἡ ρίζα $k\pi i$ ἔχει πολλαπλότητα ἕνα. ♦

Πρόβλημα 6.3.5.3 *Νὰ βρεθοῦν οἱ ρίζες τῆς συνάρτησης μὲ τύπο*

$$f(z) := z^2 sinz$$

καὶ νὰ προσδιοριστεῖ ἡ πολλαπλότητά τους.

Λύση: Ἡ ἐξίσωση $z^2 \sin z = 0$ ἔχει ρίζες τὰ σημεῖα $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Γιὰ νὰ προσδιορίσουμε τὴν πολλαπλότητά τους χρησιμοποιοῦμε τὸ Πόρισμα 6.3.5.1 ὡς ἐξῆς:

Ἔχουμε $f(k\pi) = 0$ καὶ

$$f'(k\pi) = 2(k\pi)sin(k\pi) + (k\pi)^2 cos(k\pi) = 0, \text{ ἄν } k = 0,$$

ἐνῶ ἰσχύει

$$f'(k\pi) \neq 0, \text{ ἄν } k \neq 0.$$

Ἐπίσης ἔχουμε

$$f''(0) = 0 \quad \text{καὶ } f'''(0) = 6 \neq 0.$$

Ἑπομένως τὸ σημεῖο 0 εἶναι ρίζα τρίτης τάξης καὶ τὰ σημεῖα τῆς μορφῆς $k\pi$, ὅπου k εἶναι ἀκέραιος διάφορος τοῦ 0, εἶναι ρίζες πρώτης τάξης.
♦

Θεώρημα 6.3.5.3 *Ἄν f εἶναι μιὰ (ὄχι ἐκ ταυτότητος μηδέν) συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν τόπο, τότε οἱ ρίζες της εἶναι μεμονωμένα σημεῖα.*

Ἀπόδειξη: Ἄν ὑπάρχει ἀκολουθία ριζῶν (z_n) συγκλίνουσα πρὸς ἕνα σημεῖο z_0 μὲ $z_0 \neq z_n$, γιὰ κάθε n, τότε, λόγω τῆς συνέχειας τῆς f, τὸ z_0 εἶναι ἐπίσης ρίζα. Ἄρα ἔχουμε τὴν παράσταση

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z),$$

σὲ μιὰ περιοχὴ τοῦ z_0, ὅπου ἡ συνάρτηση g εἶναι ὁλόμορφη καὶ τέτοια ὥστε $g(z_0) \neq 0$. Ἀλλά, γιὰ κάθε δείκτη n, ἰσχύει

$$0 = f(z_n) = (z_n - z_0)^k g(z_n),$$

ὁπότε πρέπει νὰ ἰσχύει $g(z_n) = 0$. Ἔτσι προκύπτει ἡ ἰσότητα $g(z_0) = 0$, πρᾶγμα ἄτοπο. ■

Ἀπὸ τὸ παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει ἄμεσα τὸ ἑξῆς:

Πόρισμα 6.3.5.2 *Ἂν f εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν τόπο, τέτοια ὥστε τὸ σύνολο τῶν ριζῶν της νὰ ἔχει ἕνα ὁριακὸ σημεῖο, τότε ἡ συνάρτηση f εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.*

Θεώρημα 6.3.5.4 *(Ἀρχὴ ταυτότητας ὁλόμορφων συναρτήσεων) Θεωροῦμε δυὸ συναρτήσεις ὁρισμένες καὶ ὁλόμορφες σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$. Ἂν στὸν τόπο $\mathcal{T}$ ὑπάρχει φραγμένη ἀκολουθία (z_n) ποὺ ἔχει ὅρους διαφορετικοὺς ἀνὰ δύο καὶ τέτοιους ὥστε $f(z_n) = g(z_n)$, γιὰ κάθε $n = 1, 2, \ldots$, τότε ἰσχύει $f(z) = g(z)$, γιὰ κάθε $z \in T$.*

Ἀπόδειξη: Ὁρίζουμε τὴν ὁλόμορφη συνάρτηση μὲ τύπο

$$h(z) := f(z) - g(z).$$

Ἡ φραγμένη ἀκολουθία (z_n) ἔχει ἕνα ὁριακὸ σημεῖο z_0, γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει

$$h(z_0) = f(z_0) - g(z_0) = 0.$$

Ἔτσι, τὸ συμπέρασμα προκύπτει μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ Πορίσματος 6.3.5.2. ■

Πρόβλημα 6.3.5.4 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ μόνη ἀκεραία μιγαδικὴ συνάρτηση ποὺ ἔχει ρίζες (τουλάχιστον) τὰ σημεῖα*

$$a_n := \frac{i}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

εἶναι ἡ μηδενικὴ συνάρτηση.

Ἀπόδειξη: Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχει μιὰ ἀκεραία συνάρτηση F ποὺ ἔχει ρίζες τὰ σημεῖα αὐτά, τότε θὰ ἔχουμε $F(a_n) = 0$. Ἐπειδὴ ἡ ἀκολουθία (a_n) εἶναι φραγμένη, σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴ ταυτότητας ὁλόμορφων συναρτήσεων, θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει $F(z) = 0$, γιὰ κάθε σημεῖο z. ♦

Πρόβλημα 6.3.5.5 *Ἔστω φ μιὰ πραγματικὴ συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς τέτοια ὥστε*

$$\varphi(2) = 0 \text{ καὶ } \varphi(e^{-n}) = 1,$$

γιὰ κάθε $n = 1, 2, \cdots$ Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι δὲν ὑπάρχει ὁλόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ὥστε $f(x) = \varphi(x)$, γιὰ κάθε πραγματικὸ ἀριθμὸ x.

Ἀπόδειξη: Ἂν ὑπάρχει τέτοια συνάρτηση f, θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἀκεραία καὶ νὰ ταυτίζεται μὲ τὴν ἐπίσης ἀκεραία σταθερὴ συνάρτηση $g(z) = 1$ πάνω στὰ σημεῖα τῆς μορφῆς e^{-n}, ποὺ εἶναι οἱ ὅροι μιᾶς φραγμένης ἀκολουθίας. Ἄρα τότε, σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴ ταυτότητας ὁλόμορφων συναρτήσεων, ἡ συνάρτηση f θὰ ταυτίζεται μὲ τὴ σταθερὴ συνάρτηση $g(z) = 1$, ὁπότε θὰ ἰσχύει καὶ

$$1 = g(2) = f(2) = \varphi(2) = 0,$$

ἄτοπο. Ἄρα δὲν ὑπάρχει τέτοια ὁλόμορφη ἐπέκταση τῆς συνάρτησης φ. ♦

Πρόβλημα 6.3.5.6 *Ἔστω f μιὰ ἀκεραία μιγαδικὴ συνάρτηση τέτοια ὥστε γιὰ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμὸ ζ, μὲ $|\zeta - 3| = 1$, νὰ ἰσχύει ἡ σχέση*

$$f(\zeta)e^{i\zeta} = \sin\zeta.$$

Νὰ ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή

$$f(0) + f(\pi) + f'(0) + f'(\pi).$$

Λύση: Τὸ σύνολο τῶν σημείων ζ μὲ τὴν ἰδιότητα ὅτι $|\zeta - 3| = 1$ εἶναι ὁ κύκλος μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 3 καὶ ἀκτίνα 1. Ἑπομένως τοῦτο εἶναι ἕνα ἀπέραντο ὑποσύνολο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Πάνω στὸ σύνολο αὐτὸ ἡ ἀκεραία συνάρτηση $f(z)$ ταυτίζεται μὲ τὴν ἐπίσης ἀκεραία συνάρτηση $e^{-iz}\sin(z)$, ὁπότε αὐτὲς ταυτίζονται παντοῦ στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο, δηλαδὴ ἔχουμε

$$f(z) = e^{-iz}\sin(z).$$

Ἔτσι βρίσκουμε $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$, $f'(0) = 1$ καὶ $f'(\pi) = 1$, ὁπότε ἡ δοθεῖσα παράσταση ἔχει τὴν τιμὴ $0 + 0 + 1 + 1 = 2$. ♦

Πρόβλημα 6.3.5.7 *Ἂν $f_1, f_2, \ldots, f_k$ εἶναι ὁλόμορφες μιγαδικὲς συναρτήσεις ὁρισμένες σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$ καὶ τέτοιες ὥστε*

$$f_1(z) \cdot f_2(z) \cdots f_k(z) = 0, \quad z \in \mathcal{T},$$

νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνας δείκτης $\nu \in \{1, 2, \ldots, k\}$ τέτοιος ὥστε ἡ ἀντίστοιχη συνάρτηση f_ν νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴση μὲ τὸ μηδὲν ἐπὶ τοῦ $\mathcal{T}$.

Ἀπόδειξη: Ἐπειδὴ ὁ τόπος $\mathcal{T}$ εἶναι ἕνα ἀνοικτὸ σύνολο μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε μιὰ φραγμένη ἀκολουθία σημείων (z_n) στὸν $\mathcal{T}$ μὲ ὅρους διαφορετικοὺς ἀνὰ δύο. Τότε θὰ ἰσχύει καὶ

$$f_1(z_n)\cdot f_2(z_n)\cdots f_k(z_n)=0,\quad n=1,2,\ldots$$

Γιὰ κάθε $\nu=1,2,\ldots,k$ ὁρίζουμε τὰ σύνολα

$$A_\nu := \{n : f_\nu(z_n)=0\}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἕνωση ὅλων αὐτῶν τῶν συνόλων εἶναι τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $\{1,2,\cdots\}$ καὶ ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι ἀπέραντο, θὰ ὑπάρχει κάποιο σύνολο A_μ τὸ ὁποῖο θὰ εἶναι ἐπίσης ἀπέραντο. Ἀλλὰ τότε ἡ ἀντίστοιχη συνάρτηση f_μ θὰ ἔχει μιὰ φραγμένη ἀκολουθία ριζῶν καί, ἐπειδὴ ἡ συνάρτηση αὐτὴ εἶναι ἀκεραία, θὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴση μὲ τὸ μηδέν. ♦

6.4 ΑΝΩΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ

6.4.1 Ἀνωμαλίες ποὺ αἴρονται

Ἔστω f μιὰ μιγαδικὴ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν τρύπιο δίσκο $B_0(z_0,R)$, γιὰ κάποιο σημεῖο $z_0\in\mathbb{C}$ καὶ $R>0$. Τότε λέμε ὅτι ἡ f ἔχει μιὰ ἀνωμαλία στὸ σημεῖο z_0. Ἂν ὑπάρχει συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη στὸν δίσκο $B(z_0,R)$, ἡ ὁποία ταυτίζεται μὲ τὴ συνάρτηση f σὲ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τρύπιου δίσκο $B_0(z_0,R)$, τότε λέμε ὅτι ἡ f ἔχει **μιὰ ἀνωμαλία ἡ ὁποία αἴρεται.**

Θεώρημα 6.4.1.1 *Ἔστω f μιὰ συνάρτηση ὁλόμορφη σὲ ἕναν τρύπιο δίσκο $B_0(z_0,R)$. Τότε ἡ ἀνωμαλία τῆς f στὸ σημεῖο z_0 αἴρεται, ἄν καὶ μόνο ἂν ἰσχύει*

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0.$$

Ἀπόδειξη: Ἂν ἡ ἀνωμαλία αἴρεται, ἡ προτεινόμενη σχέση, προφανῶς, ἰσχύει. Ἀντίστροφα. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση

$$g(z):=\begin{cases}(z-z_0)f(z), & z\neq z_0\\ 0, & z=z_0\end{cases}$$

εἶναι ὁλόμορφη στὸν τρύπιο δίσκο $B_0(z_0, R)$, ἐνῶ στὸ κέντρο z_0 εἶναι τοπικὰ φραγμένη. Ἔτσι, ἀπὸ τὸ θεώρημα 6.1.6.1 καὶ τὸ γενικὸ θεώρημα τοῦ Cauchy 6.1.6.2, προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτηση g εἶναι ὁλόμορφη. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖο z_0 εἶναι ρίζα τῆς συνάρτησης g, αὐτὴ γράφεται ὡς

$$g(z) = (z - z_0)h(z)$$

σὲ μιὰ περιοχὴ τοῦ z_0, ποὺ περιέχεται στὸν δίσκο $B(z_0, R)$. Ἐδῶ ἡ συνάρτηση h εἶναι ὁλόμορφη στὴν περιοχὴ αὐτή. Τότε ἔχουμε $h(z) = f(z)$, γιὰ κάθε $z \in B_0(z_0, R)$, ὁπότε ἡ συνάρτηση h εἶναι μιὰ ὁλόμορφη ἐπέκταση τῆς f. ■

6.4.2 Πόλοι

Ἔστω f μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν τρύπιο δίσκο $B(z_0, R)$. Στὸ σημεῖο z_0 ἡ συνάρτηση f μπορεῖ νὰ ἔχει μία ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

- Τὸ ὅριο $\lim_{z\to z_0} f(z)$ νὰ ὑπάρχει, ὁπότε ἡ συνάρτηση f εἶναι τοπικὰ φραγμένη στὸ σημεῖο z_0. Συνεπῶς **ἡ ἀνωμαλία αἴρεται.**
- Τὸ ὅριο τῆς ποσότητας $f(z)$, ὅταν $z \to z_0$, νὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ σημεῖο ∞, ὁπότε λέμε ὅτι τὸ σημεῖο z_0 εἶναι **πόλος τῆς** f.
- Τὸ ὅριο $\lim_{z\to z_0} f(z)$ νὰ μὴν ὑπάρχει, ὁπότε λέμε ὅτι τὸ σημεῖο z_0 εἶναι **οὐσιωδῶς ἀνώμαλο σημεῖο τῆς** f.

Ὅταν τὸ σημεῖο z_0 εἶναι πόλος γιὰ μιὰ συνάρτηση f, ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$g(z) := \frac{1}{f(z)}$$

ἔχει ὅριο στὸ σημεῖο z_0 τὸ 0. Ἄρα ἡ ἀνωμαλία τῆς g στὸ z_0 αἴρεται, ὁπότε αὐτὴ ἔχει μιὰ ὁλόμορφη ἐπέκταση, ἔστω G, στὸ σημεῖο z_0 καὶ μάλιστα στὸ σημεῖο αὐτὸ ἡ G παίρνει τὴν τιμὴ μηδέν. Δηλαδὴ τὸ σημεῖο z_0 εἶναι ρίζα τῆς G. Ἑπομένως ὑπάρχει δίσκος $B(z_0, r)$ καὶ θετικὸς ἀκέραιος m, τέτοια ὥστε ἡ συνάρτηση G νὰ γράφεται στὴ μορφὴ

$$G(z) = (z - z_0)^m G_1(z), \quad z \in B(z_0, r),$$

ὅπου G_1 εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη στὸν δίσκο $B(z_0, r)$ τέτοια ὥστε$G_1(z_0) \neq 0$. Ἄρα, ἡ συνάρτηση f γράφεται στὴ μορφὴ

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} f_1(z), \quad z \in B_0(z_0, r),$$

ὅπου $f_1 := 1/G_1$. Ὁ ἀριθμὸς m λέγεται πολλαπλότητα, ἢ τάξη τοῦ πόλου.

Χρησιμοποιῶντας τὸ ἀνάπτυγμα Taylor τῆς G, δηλαδὴ γράφοντας

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

βλέπουμε ὅτι σὲ ἕναν τρύπιο δίσκο μὲ κέντρο τὸ σημεῖο z_0, ἡ συνάρτηση f μπορεῖ νὰ γραφεῖ στὴ μορφὴ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m} = \sum_{n=-m}^{\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n.$$

Ἀντίστροφα, ἂν ἡ συνάρτηση f μπορεῖ νὰ γραφεῖ στὴ μορφὴ αὐτή, τότε τὸ σημεῖο z_0 εἶναι πόλος τῆς f πολλαπλότητας m.

Πρόβλημα 6.4.2.1 *Νὰ χαρακτηριστεῖ τὸ σημεῖο $z_0 := 1$ ὡς πρὸς τὴ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$f(z) := \frac{\sin(\pi z)}{2e^{z-1} - z^2 - 1}.$$

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀριθμητὴς γράφεται ὡς

$$\begin{aligned}
\sin \pi z &= \sin(\pi - \pi z) = -\sin \pi(z-1) \\
&= -\pi(z-1) + \frac{(\pi(z-1))^3}{3!} - \frac{(\pi(z-1))^5}{5!} + \frac{(\pi(z-1))^7}{7!} - \dots \\
&= \pi(z-1)\left(-1 + \frac{(\pi(z-1))^2}{3!} - \frac{(\pi(z-1))^4}{5!} + \frac{(\pi(z-1))^6}{7!} - \dots\right).
\end{aligned}$$

γεγονὸς ποὺ σημαίνει ὅτι γιὰ τὸν ἀριθμητὴ τὸ σημεῖο 1 εἶναι ρίζα 1ης τάξης .

Ἐπίσης ὁ παρονομαστὴς γράφεται ὡς

$$\begin{aligned}2e^{z-1}-z^2-1 &= 2[1+(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{(z-1)^2}{2!}+\dots]-z^2-1\\ &= 1-z^2+2[(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{(z-1)^3}{3!}+\dots]\\ &= (z-1)[-1-z+2+\frac{2}{2!}(z-1)+\frac{2}{3!}(z-1)^2+\frac{2}{4!}(z-1)^3+\dots]\\ &= (z-1)^2[-1+1+\frac{2}{3!}(z-1)+\frac{2}{4!}(z-1)^2+\dots]\\ &= (z-1)^3[\frac{2}{3!}+\frac{2}{4!}(z-1)+\frac{2}{5!}(z-1)^2+\dots],\end{aligned}$$

καὶ ἑπομένως γιὰ τὸν παρονομαστὴ τὸ σημεῖο 1 εἶναι ρίζα τρίτης τάξης. Ἄρα τὸ σημεῖο τοῦτο εἶναι πόλος 2ης τάξης γιὰ τὴ συνάρτηση, διότι αὐτή γράφεται ὡς

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{\sin(\pi z)}{2e^{z-1}-z^2-1}\\ &= \frac{\pi(z-1)[-1+\frac{(\pi(z-1))^2}{3!}-\frac{(\pi(z-1))^4}{5!}+\frac{(\pi(z-1))^6}{7!}-\dots]}{(z-1)^3[\frac{2}{3!}+\frac{2}{4!}(z-1)+\frac{2}{5!}(z-1)^2+\dots]}\\ &= (z-1)^{-2}h(z),\end{aligned}$$

ὅπου

$$h(z) := \frac{\pi[-1+\frac{(\pi(z-1))^2}{3!}-\frac{(\pi(z-1))^4}{5!}+\frac{(\pi(z-1))^6}{7!}-\dots]}{\frac{2}{3!}+\frac{2}{4!}(z-1)+\frac{2}{5!}(z-1)^2+\dots}$$

εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁλόμορφη στὸ σημεῖο $z_0 = 1$ καὶ τέτοια ὥστε $h(1) = -3\pi \neq 0$. ♦

Πρόβλημα 6.4.2.2 *Νὰ βρεθεῖ ἡ τάξη τοῦ πόλου $z = 0$ τῆς συνάρτησης μὲ τύπο*

$$f(z) := \frac{1-\cos z}{z^5}.$$

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀριθμητὴς γράφεται ὡς

$$\begin{aligned}1-\cos(z) &= 1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\dots)\\ &= z^2[\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\dots-(-1)^n\frac{z^{2(n-1)}}{(2n)!}+\dots].\end{aligned}$$

Ἄρα, τελικά, ἡ $f(z)$ γράφεται στὴ μορφὴ

$$f(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^5} = z^{-3}\left[\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \cdots - (-1)^n \frac{z^{2(n-1)}}{(2n)!} + \cdots\right],$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτει ὅτι τὸ σημεῖο $z = 0$ εἶναι πόλος 3ης τάξης. ♦

6.4.3 Μερόμορφες συναρτήσεις

Ὅταν μιὰ συνάρτηση f ἔχει ἕνα σημεῖο a πόλο, τότε τὸ ὅριο τῆς f στὸ σημεῖο αὐτὸ εἶναι ἴσο μὲ ∞. Ἔτσι μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε ὅτι ἡ f **ὁρίζεται στὸν πόλο a καὶ παίρνει τὴν τιμὴ ∞**. Μὲ αὐτὴ τὴ γενικότερη θεώρηση, ὑποθέτουμε ὅτι μιὰ συνάρτηση εἶναι ὁρισμένη σὲ ἕναν τόπο καὶ κάθε σημεῖο τοῦ τόπου εἶναι σημεῖο ὁλομορφίας, ἢ πόλος τῆς f. Τότε λέμε ὅτι ἡ f εἶναι **μερόμορφη** συνάρτηση.

Πρόταση 6.4.3.1 *Ἀθροίσματα, γινόμενα καὶ πηλῖκα μερόμορφων συναρτήσεων εἶναι, ἐπίσης, μερόμορφες συναρτήσεις.*

Ἀπόδειξη: Θὰ ἀποδείξουμε μόνο γιὰ τὸ πηλίκο. Οἱ ἄλλες περιπτώσεις ἐξετάζονται ἀνάλογα.

Ὑποθέτουμε ὅτι f καὶ g εἶναι δύο μερόμορφες μιγαδικὲς συναρτήσεις ὁρισμένες σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$ καὶ θεωροῦμε ἕνα σημεῖο $a \in \mathcal{T}$.

Διακρίνουμε τὶς παρακάτω ἕξι περιπτώσεις:

α) Τὸ a εἶναι σημεῖο ὁλομορφίας τῶν f, g καὶ ἡ g δὲν ἔχει ρίζα τὸ a. Τότε τὸ πηλίκο f/g εἶναι καλὰ ὁρισμένη σὲ μιὰ περιοχὴ τοῦ a καὶ εἶναι συνάρτηση ὁλόμορφη στὸ a.

β) Τὸ a εἶναι σημεῖο ὁλομορφίας τῶν f, g καὶ τὸ σημεῖο a εἶναι ρίζα τῆς f τάξης m καὶ ρίζα τῆς g τάξης n. Τότε τοῦτο εἶναι σημεῖο ὁλομορφίας τῆς f/g, ἂν $m \geq n$, καὶ πόλος τῆς f/g, ἂν $m < n$.

γ) Τὸ a εἶναι σημεῖο ὁλομορφίας τῆς f καὶ πόλος τῆς g τάξης n. Τότε ἡ συνάρτηση εἶναι ὁλόμορφη στὸ a.

δ) Τὸ a εἶναι πόλος τῆς f τάξης m καὶ σημεῖο ὁλομορφίας τῆς g, ἀλλὰ ὄχι ρίζα τῆς g. Τότε τὸ a εἶναι πόλος τοῦ πηλίκου τάξης m.

ε) Τὸ a εἶναι πόλος τῆς f τάξης m καὶ ρίζα τῆς g τάξης k. Τότε τὸ a εἶναι πόλος τοῦ πηλίκου τάξης $m+k$.

ς) Τὸ a εἶναι πόλος τῆς f τάξης m καὶ πόλος τῆς g τάξης n. Ἂν $m > n$, τὸ a εἶναι πόλος τοῦ πηλίκου τάξης $m-n$ καί, ἄν $m \leq n$, τότε τοῦτο εἶναι σημεῖο ὁλομορφίας τοῦ πηλίκου.

Ἔτσι, σὲ κάθε περίπτωση προκύπτει ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖο τοῦ τόπου $\mathcal{T}$ εἶναι σημεῖο ὁλομορφίας τοῦ πηλίκου, ἤ πόλος καὶ ἑπομένως τὸ πηλίκο εἶναι μερόμορφη συνάρτηση στὸν τόπο $\mathcal{T}$. ■

6.4.4 Οὐσιωδῶς ἀνώμαλα σημεῖα

Θεώρημα 6.4.4.1 (*Casorati-Weierstrass*) *Ἔστω f μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν τρύπιο δίσκο $B_0(z_0, R)$. Ἂν ἡ f ἔχει μιὰ οὐσιώδη ἀνωμαλία στὸ σημεῖο z_0, τότε γιὰ κάθε $r \in (z_0, R]$, ἰσχύει*

$$\overline{f(B_0(z_0, r))} = \mathbb{C}.$$

Ἀπόδειξη: Ἂν τὸ συμπέρασμα δὲν ἰσχύει, ὑπάρχει ἕνα σημεῖο c τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ποὺ δὲν ἀνήκει στὴ θήκη τῆς εἰκόνας κάποιου δίσκου $B_0(z_0, r)$, ὅπου $r \in (0, R]$. Ἄρα ὑπάρχει ἕνα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ὥστε

$$|f(z) - c| \geq \varepsilon, \quad z \in B_0(z_0, r).$$

Τότε ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$g(z) := \frac{f(z) - c}{z - z_0}$$

ἔχει ὅριο τὸ ἄπειρο, ὅταν τὸ σημεῖο z τείνει πρὸς τὸ z_0 καὶ ἑπομένως τὸ z_0 εἶναι πόλος. Ἂν ἡ τάξη τοῦ πόλου εἶναι m (≥ 1), τότε ἡ συνάρτηση g γράφεται στὴ μορφὴ

$$g(z) = (z - z_0)^{-m} h(z), \quad z \in B_0(z_0, r),$$

ὅπου ἡ h εἶναι ὁλόμορφη συνάρτηση. Ἄρα ἰσχύει

$$(z - z_0)^m [f(z) - c] = (z - z_0) h(z), \quad z \in B_0(z_0, r),$$

ὁπότε ἔχουμε

$$(z - z_0)^m f(z) = (z - z_0)^m c + (z - z_0)h(z), \quad z \in B_0(z_0, r).$$

Τὸ δεξιὰ μέλος τῆς σχέσης αὐτῆς τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν τὸ σημεῖο z τείνει πρὸς τὸ z_0 καὶ ἄρα ἔχουμε

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)[(z - z_0)^{m-1} f(z)] = 0.$$

Τοῦτο, λόγω τοῦ Θεωρήματος 6.4.1.1, συνεπάγεται ὅτι ἡ ἀνωμαλία στὸ σημεῖο z_0 αἴρεται, γιὰ τὴ συνάρτηση

$$f_1(z) := (z - z_0)^{m-1} f(z), \quad z \in B_0(z_0, r).$$

Ἀλλά, τότε ἡ συνάρτηση f γράφεται στὴ μορφὴ

$$f(z) := (z - z_0)^{-(m-1)} f_1(z), \quad z \in B_0(z_0, r)$$

πρᾶγμα ποὺ δηλώνει ὅτι τὸ σημεῖο z_0 εἶναι πόλος τῆς f. Το γεγονὸς τοῦτο εἶναι ἄτοπο. ■

6.5 ΣΕΙΡΕΣ LAURENT

Ὑποθέτουμε ὅτι f εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁλόμορφη σὲ ἕνα σύνολο τῆς μορφῆς $\{z : |z| > R\}$, γιὰ κάποιο R. Λέμε ἡ συνάρτηση f ἔχει μιὰ μεμονωμένη ἀνωμαλία στὸ ἄπειρο, ὅταν ἡ συνάρτηση

$$g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in B(0, \frac{1}{R})$$

ἔχει μιὰ ἀνωμαλία στὸ σημεῖο μηδέν. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι, ὅταν $R = 0$, τότε $1/R = +\infty$.

Γιὰ νὰ δοῦμε τὶ μπορεῖ νὰ συμβαίνει μὲ τέτοιες συναρτήσεις, ἐπιλέγουμε ἕναν πραγματικὸ ἀριθμὸ r μὲ $r > R$ καὶ ὀνομάζουμε $\gamma(r)$ τὴν καμπύλη ἡ ὁποία ἔχει παραμετρικὴ παράσταση

$$z(t) := re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Προφανῶς, αὐτὴ εἶναι ὁ θετικὰ προσανατολισμένος κύκλος μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0 καὶ ἀκτῖνα r. Ἔστω

$$\gamma(\frac{1}{r})$$

ὁ ἀρνητικὰ προσανατολισμένος κύκλος στὸν δίσκο $B(0,1/R)$, ποὺ περιγράφεται ἀπὸ τὴ συνάρτηση

$$w(t) := \frac{1}{r}e^{-it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ἂν ἡ ἀνωμαλία τῆς συνάρτησης g στὸ σημεῖο μηδέν αἴρεται, αὐτὴ ἔχει μιὰ ὁλόμορφη ἐπέκταση στὸν δίσκο $B(0,1/R)$, ὁπότε ἔχει ἕνα ἀνάπτυγμα Taylor

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{ὅπου} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma(1/r)} \frac{g(w)}{w^{n+1}}dw.$$

Ἰσοδύναμα, ἡ f ἔχει ἕνα **ἀνάπτυγμα Taylor μὲ κέντρο τὸ σημεῖο** ∞, τῆς μορφῆς

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad |z| > R,$$

ὅπου οἱ συντελεστὲς a_n δίνονται ἀπὸ τοὺς τύπους

$$a_n = \frac{-1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{g(\frac{1}{r}e^{-it})\frac{1}{r}e^{-it}(-i)dt}{(\frac{1}{r}e^{-it})^{n+1}} = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it})re^{it}idt}{(re^{it})^{-n+1}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)}\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz.$$

Σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 6.1.8.1, στὰ προηγούμενα ὁλοκληρώματα **ἡ καμπύλη $\gamma(r)$ μπορεῖ νὰ ἀντικατασταθεῖ μὲ ὁποιονδήποτε θετικὰ προσανατολισμένο κύκλο μὲ κέντρο τὸ 0 καὶ ἀκτῖνα μεγαλύτερη τοῦ R, διότι ὅλες αὐτὲς εἶναι ὁμοτοπικές στὸ σύνολο** $\{z: \ |z| > R\}$.

Ὑποθέτουμε ὅτι f εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν δακτύλιο $\Delta(0, R_1, R_2)$. Ἔστω z τυχόν σημεῖο τοῦ δακτυλίου. Τότε ἰσχύει $R_1 < |z| < R_2$. Ἐπιλέγουμε ἀριθμοὺς r_1, r_2 τέτοιους ὥστε

$$R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$$

καὶ θεωροῦμε τὶς θετικὰ προσανατολισμένες περιφέρειες γ_1 καὶ γ_2 μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0 καὶ ἀκτῖνες ἴσες μὲ r_1, r_2 ἀντίστοιχα. Μέσα στὸν δακτύλιο $\Delta(0, r_1, r_2)$ θεωροῦμε ἕναν θετικὰ προσανατολισμένο κύκλο γ μὲ κέντρο τὸ σημεῖο z. Φέρουμε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $[ab]$ καὶ $[dc]$, ὥστε νὰ μὴν τέμνουν τὴ γ, ὅπως στὸ σχῆμα. Ἔτσι σχηματίζεται ὁ δακτυλικὸς τομέας μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα a, b, c, d.

Ὀνομάζουμε Γ_1 τὴν περίμετρο τοῦ δακτυλικοῦ τομέα αὐτοῦ, δηλαδὴ τὴν κλειστὴ καμπύλη ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ δύο εὐθύγραμμα τμήματα $[ab]$ καὶ $[cd]$ καὶ τὰ δύο μικρὰ τόξα (da) καὶ (bc), ἤτοι

$$\Gamma_1 = [ab] + (bc) + [cd] + (da).$$

Ἐπίσης, ἔστω Γ_2 ἡ κλειστὴ καμπύλη ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ δύο εὐθύγραμμα τμήματα καὶ τὰ δύο μεγάλα τόξα (cb) καὶ (ad), δηλαδὴ

$$\Gamma_2 = (cb) + [ba] + (ad) + [dc].$$

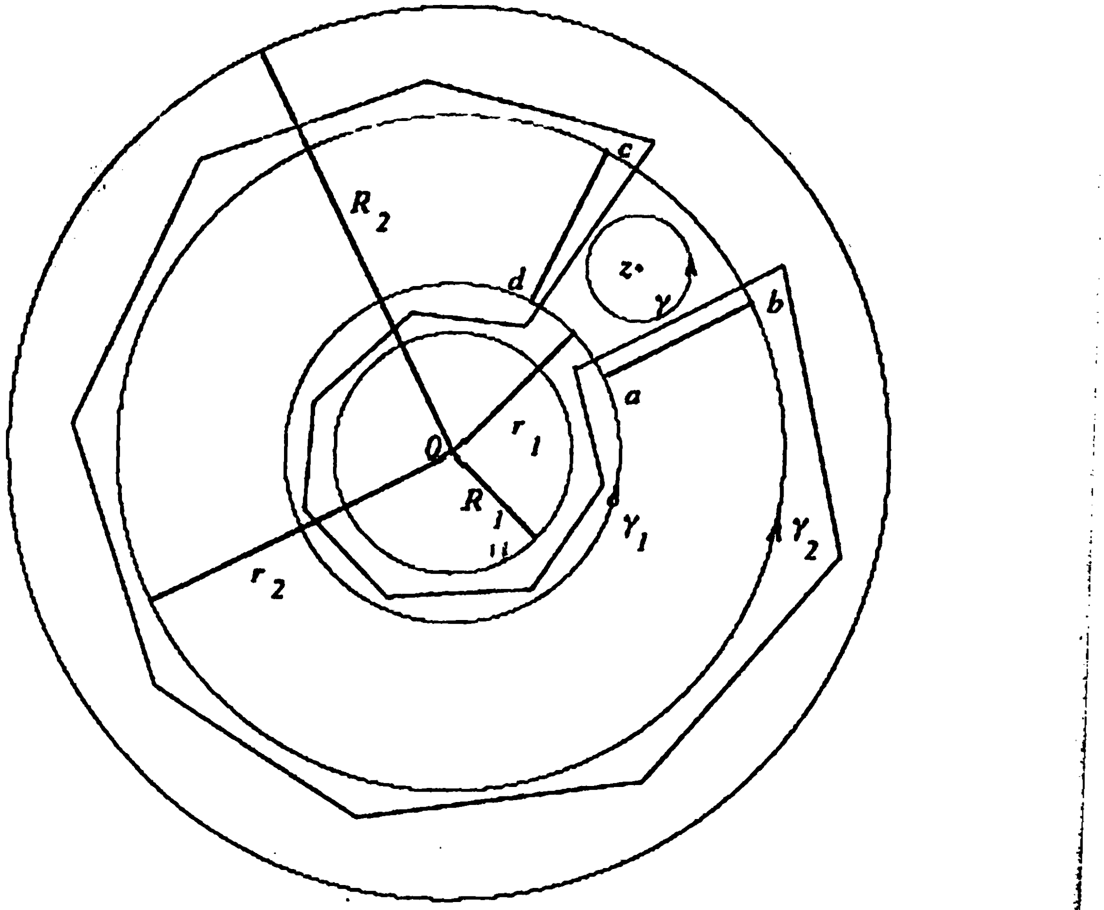
Εἶναι φανερὸ ὅτι ἰσχύει $\Gamma_1 + \Gamma_2 = -\gamma_1 + \gamma_2$, ὁπότε καὶ $\Gamma_1 = -\Gamma_2 - \gamma_1 + \gamma_2$. Ἡ ἁπλὴ κλειστὴ καμπύλη Γ_1 ἔχει στὸ ἐσωτερικό της τὴν καμπύλη γ, ὁπότε, σύμφωνα μὲ τὸ παράδειγμα 3.2.0.2, αὐτὲς εἶναι ὁμοτοπικὲς στὸν δακτύλιο $\Delta(0, r_1, r_2)$. Ἔτσι, ἀπὸ τὰ Θεωρήματα 6.2.2.2 καὶ 6.1.9.1, ἕπεται ὅτι ἰσχύει

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_2-\gamma_1+\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw + \int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw \qquad (6.7) \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw. \end{aligned}$$

Τοῦτο συμβαίνει, διότι ἡ καμπύλη Γ_2 μαζὶ μὲ τὸ ἐσωτερικό της ἀνήκει σὲ ἕναν τόπο, (ὁ ὁποῖος στὸ σχῆμα ἔχει σύνορο ποὺ περιγράφεται μὲ πολυγωνικὴ καμπύλη,) ὅπου ἡ συνάρτηση $w \to \frac{f(w)}{w-z}$ εἶναι ὁλόμορφη.

Τώρα παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κάθε $w \in \gamma_1$ ἰσχύει $\left|\frac{w}{z}\right| < 1$, ὁπότε ἔχουμε

$$-\frac{f(w)}{w-z} = \frac{1}{z}\frac{f(w)}{1-\frac{w}{z}} = \frac{1}{z}f(w)\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^m = f(w)\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{w^m}{z^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{f(w)}{w^{n+1}}z^n,$$



Σχήμα 6.4: *Ὁ κύκλος μὲ κέντρο τὸ σημεῖο z εἶναι ὁμοτοπικὸς τῆς περιμέτρου τοῦ δακτυλικοῦ τομέα.*

ἐνῶ γιὰ κάθε $w \in \gamma_2$ ἰσχύει $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$, ὁπότε ἔχουμε

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{1}{w}\frac{f(w)}{1-\frac{z}{w}} = \frac{1}{w}f(w)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n = f(w)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{w^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(w)}{w^{n+1}}z^n.$$

Ἡ σύγκλιση τῶν παραπάνω σειρῶν εἶναι ὁμοιόμορφη πάνω στις καμπῦλες γ_1 καὶ γ_2, ἀντίστοιχα. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ ὁλοκληρώματα τῶν σειρῶν εἶναι ἴσα μὲ τὰ ἀθροίσματα τῶν σειρῶν τῶν ὁλοκληρωμάτων.

Ἔτσι, θέτοντας

$$b_n := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{6.8}$$

ἀπὸ τὴ σχέση (6.7) παίρνουμε

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{f(w)}{w^{n+1}}z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω στοιχεῖα προκύπτει τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Θεώρημα 6.5.0.2 *Ἂν f εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν δακτύλιο $\Delta(z_0, R_1, R_2)$, ὅπου $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, τότε ὑπάρχουν μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ b_n, $n \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ὥστε νὰ ἰσχύει*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

γιὰ κάθε z στὸν δακτύλιο. Ἡ σύγκλιση τῆς σειρᾶς εἶναι ὁμοιόμορφη καὶ ἀπόλυτη πάνω σὲ κάθε συμπαγὲς ὑποσύνολο τοῦ δακτυλίου καὶ οἱ συντελεστὲς εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένοι.

Ἀπόδειξη: Θέτουμε $g(z) := f(z + z_0)$, $z \in \Delta(0, R_1, R_2)$ καὶ ἐφαρμόζουμε τὰ προηγούμενα. ■

Πρόβλημα 6.5.0.1 *Νὰ ἀναπτυχτεῖ σὲ δυναμοσειρὰ μὲ κέντρο τὸ σημεῖο $\frac{1}{2}+i$ ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$f(z) = \frac{3z - 1}{z(z - 1)}.$$

Λύση: Ἀναλύουμε τὸν τύπο τῆς συνάρτησης σὲ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων, ὁπότε παίρνουμε

$$f(z) = \frac{3z - 1}{z(z - 1)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z - 1}.$$

Τὸ κέντρο $\frac{1}{2} + i =: a$ ἀπέχει ἀπὸ τοὺς πόλους 0 καὶ 1 ἀπόσταση ἴση μὲ $\sqrt{5}/2$. Ἄρα ἡ συνάρτηση ἀναπτύσσεται σὲ σειρὰ Taylor στὸν δίσκο $B(\frac{1}{2} + i, \sqrt{5}/2)$ καὶ σὲ σειρὰ Laurent στὸν δακτύλιο $\Delta(\frac{1}{2} + i, \sqrt{5}/2, +\infty)$.

Τώρα γιὰ κάθε $z \in B(\frac{1}{2}+i, \sqrt{5}/2)$ ἰσχύει

$$|\frac{z-a}{a}| = \frac{|z-a|}{\sqrt{5}/2} < 1 \text{ καὶ } |\frac{z-a}{1-a}| = |\frac{z-a}{\frac{1}{2}-i}| = \frac{|z-a|}{\sqrt{5}/2} < 1.$$

Ἔτσι ὁ πρῶτος προσθετέος γίνεται

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-a)+a} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{z-a}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-a)^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-a)^n}{a^{n+1}}$$

καὶ ὁ δεύτερος

$$\begin{aligned}\frac{2}{z-1} &= \frac{2}{z-a-(1-a)} = \frac{-2}{1-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}}\\ &= \frac{-2}{1-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(1-a)^n} = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Ἑπομένως ἔχουμε

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-a)^n}{a^{n+1}} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\frac{(-1)^n}{a^{n+1}} - \frac{2}{(1-a)^{n+1}}\Big](z-a)^n.\end{aligned}$$

Ἐπίσης, γιὰ κάθε $z \in \Delta(\frac{1}{2}+i, \sqrt{5}/2, +\infty)$, ἰσχύει

$$|\frac{a}{z-a}| = \frac{\sqrt{5}/2}{|z-a|} < 1 \text{ καὶ } |\frac{1-a}{z-a}| = |\frac{\frac{1}{2}-i}{z-a}| = \frac{\sqrt{5}/2}{|z-a|} < 1.$$

Ὁ πρῶτος προσθετέος γίνεται

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{(z-a)+a} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{1+\frac{a}{z-a}}\\ &= \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^n}{(z-a)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^n}{(z-a)^{n+1}}\end{aligned}$$

καὶ ὁ δεύτερος

$$\begin{aligned}\frac{2}{z-1} &= \frac{2}{z-a-(1-a)} = \frac{2}{z-a}\frac{1}{1-\frac{1-a}{z-a}} \\ &= \frac{2}{z-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-a)^n}{(z-a)^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-a)^n}{(z-a)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Ἑπομένως ἔχουμε

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^n}{(z-a)^{n+1}} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big[(-1)^n a^n + 2(1-a)^n\Big]\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\end{aligned}$$

καὶ ἄρα, τελικά, βρίσκουμε ὅτι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συνάρτησης εἶναι τὸ

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1}\Big[\frac{(-1)^{k+1}}{a^{k+1}} + \frac{2}{(1-a)^{k+1}}\Big](z-a)^k. \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 6.5.0.2 *Νὰ βρεθεῖ τὸ ἀνάπτυγμα Laurent τῆς συνάρτησης μὲ τύπο*

$$f(z) := \frac{1}{z^2+1}$$

στοὺς δακτυλίους (α) $\Delta(0,1,+\infty)$ καὶ (β) $\Delta(i,0,2)$.

Λύση: Πρὸς τοῦτο ἀναλύουμε τὴν παράσταση ποὺ δίνει τὸν τύπο τῆς f σὲ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων, ὁπότε βρίσκουμε

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{-i}{2(z-i)} + \frac{i}{2(z+i)}.$$

(α) Ἔστω $z \in \Delta(0,1,+\infty)$. Τότε ἰσχύει $|z| > 1$, ὁπότε καὶ $|\frac{1}{z}| < 1$.

Ἑπομένως γιὰ κάθε τέτοιο z ἔχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2+1} = \frac{-i}{2(z-i)} + \frac{i}{2(z+i)} = \frac{-i}{2z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}} + \frac{i}{2z}\frac{1}{1+\frac{i}{z}} \\ &= \frac{-i}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n + \frac{i}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}(i+(-1)^n)}{2}z^{-n-1} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{i^{-k}(i-(-1)^k)}{2}z^k. \end{aligned}$$

(β) Ἂν $z \in \Delta(i,0,2)$, θὰ ἔχουμε $0 < |z-i| < 2$ καὶ ἄρα $|\frac{z-i}{2i}| < 1$. Ἑπομένως γιὰ κάθε τέτοιο z ἡ $f(z)$ γράφεται ὡς

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2+1} = \frac{-i}{2(z-i)} + \frac{i}{2(z+i)} = \frac{1}{2(z-i)} - \frac{1}{4i(1+\frac{z-i}{2i})} \\ &= \frac{1}{2(z-i)} - \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n = \frac{1}{2(z-i)} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{2^{n+2}}(z-i)^n. \ \blacklozenge \end{aligned}$$

Πρόβλημα 6.5.0.3 *Νὰ βρεθεῖ τὸ ἀνάπτυγμα Laurent μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0 τῆς συνάρτησης μὲ τύπο*

$$f(z) := \frac{2i}{(z-2)(z+i)}.$$

Λύση: Ἡ συνάρτηση f εἶναι ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα 2 καὶ $-i$, τὰ ὁποῖα μηδενίζουν τὸν παρονομαστή. Ἔτσι ἡ συνάρτηση ἀναπτύσσεται

(α) στὸν δίσκο $B(0,1)$ σὲ σειρὰ Taylor μὲ κέντρο τὸ 0,

(β) στὸν δακτύλιο $\Delta(0,1,2)$ σὲ σειρὰ Laurent μὲ κέντρο τὸ 0, καὶ

(γ) στὸν δακτύλιο $\Delta(0,2,+\infty)$ σὲ σειρὰ Laurent μὲ κέντρο τὸ 0.

Γράφουμε τὸν τύπο τῆς συνάρτησης ὡς ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων

$$f(z) := \frac{2i}{(z-2)(z+i)} = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z+i},$$

ὅπου

$$a = -b := \frac{2(1+2i)}{5}$$

καὶ ἐξετάζουμε διαδοχικὰ τὶς παραπάνω περιπτώσεις:

(α) Ἂν $|z| < 1$, τότε ἔχουμε

$$|\frac{z}{2}| < 1 \text{ καὶ } |\frac{z}{i}| < 1.$$

Ἄρα

$$\frac{a}{z-2} = -\frac{a}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{a}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n = -a\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}z^n$$

καὶ

$$\frac{b}{z+i} = -ib\frac{1}{1+\frac{z}{i}} = -ib\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{i})^n = -ib\sum_{n=0}^{\infty}i^n z^n.$$

Ἔτσι τὸ ἀνάπτυγμα Taylor τῆς f μὲ κέντρο τὸ 0 μέσα στὸν δίσκο $B(0,1)$ εἶναι τὸ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(1+2i)}{5}(-2^{-n-1} + i^{n+1})z^n.$$

(β) Αν $1 < |z| < 2$, τότε

$$|\frac{z}{2}| < 1 \text{ καὶ } |\frac{i}{z}| < 1.$$

Ἄρα ἔχουμε

$$\frac{a}{z-2} = -\frac{a}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{a}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n = -a\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}z^n$$

καὶ

$$\frac{b}{z+i} = \frac{b}{z}\frac{1}{1+\frac{i}{z}} = \frac{b}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{i}{z})^n = b\sum_{n=0}^{\infty}i^{-n}z^{-n-1} = b\sum_{n=-\infty}^{-1}i^{n+1}z^n.$$

Ἔτσι, τὸ ἀνάπτυγμα Laurent τῆς f στὴ δακτυλικὴ περιοχὴ $\Delta(0,1,2)$ εἶναι τὸ

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-\frac{2(1+2i)}{5}i^{n+1})z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1+2i}{5}2^{-n})z^n.$$

(γ) Ἂν $2 < |z|$, τότε
$$|\frac{2}{z}| < 1 \text{ καὶ } |\frac{i}{z}| < 1.$$
Ἄρα ἔχουμε
$$\frac{a}{z-2} = \frac{a}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{a}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n = a\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1}z^n$$
καὶ
$$\frac{b}{z+i} = \frac{b}{z}\frac{1}{1+\frac{i}{z}} = \frac{b}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{i}{z})^n = b\sum_{n=-\infty}^{-1} i^{n+1}z^n,$$
ὁπότε τὸ ἀνάπτυγμα Laurent τῆς f στὴ δακτυλικὴ περιοχὴ $\Delta(0,2,+\infty)$ εἶναι τὸ
$$f(z) = -\frac{2(1+2i)}{5}\sum_{n=-\infty}^{-1} i^{n+1}z^n + \frac{1+2i}{5}\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n}z^n$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}(\frac{1+2i}{5})(2^{-n} - 2i^{n+1})z^n. \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 6.5.0.4 *Νὰ ἀναπτυχτεῖ σὲ σειρὰ Laurent μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 1 ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*
$$f(z) := \frac{i}{(z-1)(z+i)}.$$

Λύση: Τὰ σημεῖα 1 καὶ i εἶναι οἱ πόλοι τῆς συνάρτησης καὶ ἀπέχουν μεταξύ τους ἀπόσταση ἴση μὲ $\sqrt{2}$. Ἄρα ἡ συνάρτηση ἀναπτύσσεται σὲ σειρὰ Laurent στοὺς δακτυλίους $\Delta(1,0,\sqrt{2})$ καὶ $\Delta(1,\sqrt{2},+\infty)$.

Γιὰ κάθε z τοῦ πρώτου δακτυλίου ἔχουμε $|z-1| < \sqrt{2}$, ὁπότε $\frac{|z-1|}{|1+i|} < 1$. Ἄρα ἔχουμε
$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{1+i+z-1} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{1+\frac{z-1}{1+i}} = \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{(1+i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{(1+i)^{n+1}}$$
καὶ ἑπομένως στὸν δακτύλιο $\Delta(1,0,\sqrt{2})$ ἡ συνάρτηση ἔχει ἀνάπτυγμα
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i}{(1+i)^{n+1}}(z-1)^{n-1} = \sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{i}{(1+i)^{n+2}}(z-1)^n.$$

Ἐπίσης γιὰ κάθε z τοῦ δακτυλίου $\Delta(1, \sqrt{2}, +\infty)$ ἔχουμε $\sqrt{2} < |z-1|$, ὁπότε $\frac{|1+i|}{|z-1|} < 1$. Ἄρα ἰσχύει

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{1+i+z-1} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{1+i}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{(z-1)^{n+1}}$$

καὶ ἑπομένως στὸν δακτύλιο $\Delta(1, \sqrt{2}, +\infty)$ ἡ συνάρτηση ἔχει ἀνάπτυγμα

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} i(1+i)^n(z-1)^{-n-2} = \sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{i}{(1+i)^{n+2}}(z-1)^n. \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 6.5.0.5 *Νὰ ὑπολογιστεῖ ὁ συντελεστὴς b_{-2} τοῦ ἀναπτύγματος Laurent μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 1 τῆς συνάρτησης μὲ τύπο*

$$f(z) := \frac{e^z}{z^2(z-1)}.$$

Λύση: Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση αὐτὴ ἀναπτύσσεται σὲ σειρὰ Laurent στὰ σύνολα $\Delta(1,0,1)$ καὶ $\Delta(1,1,+\infty)$.

Θεωροῦμε πρῶτα τὸν ἀνοικτὸ δακτύλιο $\Delta(1,0,1)$. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$g(z) := (z-1)f(z)$$

εἶναι ὁλόμορφη στὸν δίσκο $B(1,1)$, ἀφοῦ αὐτή γράφεται ὡς

$$g(z) = \frac{e^z}{z^2}.$$

Ἑπομένως ἔχει ἕνα ἀνάπτυγμα Taylor τῆς μορφῆς

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n,$$

ὁπότε θὰ ἰσχύει

$$(z-1)f(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n = a_0 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + \cdots .$$

Ἄρα ἔχουμε

$$f(z) = \frac{a_0}{z-1} + a_1 + a_2(z-1) + \cdots,$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτει ὅτι ὁ συντελεστὴς b_{-2} τοῦ ἀναπτύγματος τῆς f σὲ σειρὰ Laurent εἶναι ἴσος μὲ 0.

Τώρα θεωροῦμε τὸν δακτύλιο $\Delta(1, 1, +\infty)$. Κάθε σημεῖο τοῦ δακτυλίου αὐτοῦ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση $|z-1| > 1$, ὁπότε ἰσχύει

$$|(z-1)^{-1}| < 1.$$

Ἄρα ἔχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+(z-1)^{-1}} \\ &= \frac{1}{z-1}(1-(z-1)^{-1}+(z-1)^{-2}-(z-1)^{-3}+\ldots) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^{-n}.\end{aligned}$$

Μὲ παραγώγιση παίρνουμε

$$\frac{1}{z^2} = -\frac{d}{dz}\frac{1}{z} = -\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1}(z-1)^{-n-1}.$$

Ἐπίσης γράφουμε καὶ τὸν ἀριθμητὴ στὴ μορφὴ

$$e^z = ee^{z-1} = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^k}{k!}.$$

Ἔτσι, στὸν δακτύλιο $\Delta(1, 1, +\infty)$ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συνάρτησης θὰ εἶναι τὸ γινόμενο τῶν δύο σειρῶν

$$e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^k}{k!} \quad \text{καὶ} \quad -\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1}(z-1)^{-n-1}\frac{1}{z-1}.$$

Ἑπομένως ἔχουμε

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)} &= -e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^k}{k!}\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1}(z-1)^{-n-1}\frac{1}{z-1}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{en(-1)^n}{k!}(z-1)^{k-n-2}\\
&\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e(k-\lambda-2)(-1)^{k-\lambda-2}}{k!}(z-1)^{\lambda},
\end{aligned}
$$

ὅπου θέσαμε $\lambda := k - n - 2$. Ἄρα οἱ συντελεστὲς δίνονται ἀπὸ τὸν τύπο

$$
b_\lambda := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e}{k!}(k-\lambda-2)(-1)^{k-\lambda}.
$$

Ἑπομένως ὁ ζητούμενος συντελεστὴς εἶναι ὁ

$$
b_{-2} := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e}{k!}k(-1)^k = -e\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(-1)^m = -ee^{-1} = -1. \ \blacklozenge
$$

6.5.1 Τάξη ἀνώμαλου σημείου

Ἄν ἡ f ἔχει μιὰ μεμονωμένη ἀνωμαλία σὲ ἕνα σημεῖο z_0 καὶ εἶναι ὁλόμορφη στὸν τρύπιο δίσκο $B_0(z_0, r)$, τότε αὐτὴ ἔχει ἕνα ἀνάπτυγμα Laurent τῆς μορφῆς

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,
$$

γιὰ κάθε z μὲ $0 < |z - z_0| < r$. Ἡ τάξη τοῦ ἀνώμαλου σημείου ὁρίζεται νὰ εἶναι ο ἀριθμὸς

$$
ord_{z_0}(f) := \inf\{n \in \mathbf{Z} : b_n \neq 0\}.
$$

Τὰ παρακάτω στοιχεῖα προκύπτουν ἀπὸ τὴν ἀνάπτυξη τῆς συνάρτησης σὲ σειρά:

Πρόταση 6.5.1.1 *Ἡ συνάρτηση f ἔχει μιὰ ἀνωμαλία στὸ z_0 ἡ ὁποία αἴρεται, ἄν καὶ μόνο ἄν $ord_{z_0}(f) \geq 0$. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἡ συνάρτηση ἔχει ἕνα ἀνάπτυγμα Taylor μὲ κέντρο τὸ σημεῖο z_0. Ἰδιαίτερα δὲ, ἄν $ord_{z_0}(f) > 0$, τότε τὸ σημεῖο z_0 εἶναι ρίζα τῆς f καὶ $ord_{z_0}(f)$ εἶναι ἡ πολλαπλότητα τῆς ρίζας.*

Πρόταση 6.5.1.2 *Ἰσχύει $ord_{z_0}(f) = -\infty$, ἄν καὶ μονο ἄν ἡ συνάρτηση f ἔχει μιὰ οὐσιώδη ἀνωμαλία στὸ σημεῖο z_0.*

Πρόταση 6.5.1.3 *Ἰσχύει $-\infty < ord_{z_0}(f) < 0$, ἄν καὶ μόνο ἄν τὸ σημεῖο z_0 εἶναι πόλος τῆς f. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὁ ἀριθμὸς $-ord_{z_0}(f)$ εἶναι ἡ τάξη τοῦ πόλου.*

Πρόβλημα 6.5.1.1 *Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ὑπάρχει μηδενικὴ ἀκολουθία (z_n) τέτοια ὥστε*

$$\lim \sin \frac{1}{z_n} = i.$$

Ἀπόδειξη: Ἡ συνάρτηση $f(z) = \sin(1/z)$ ἔχει ἀνάπτυγμα

$$f(z) = \cdots + (-1)^{2n+1} \frac{1}{z^{2n+1}} + \cdots - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z},$$

ἀπὸ ὅπου ἕπεται ὅτι $ord_0(f) = -\infty$. Ἄρα τὸ σημεῖο 0 εἶναι οὐσιωδῶς ἀνώμαλο γιὰ τὴν f. Ἔτσι, σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα 6.4.4.1, γιὰ τὸ σημεῖο i καὶ γιὰ κάθε $n = 1, 2, \cdots$ ὑπάρχει σημεῖο z_n μὲ $|z_n| < \frac{1}{n}$ καὶ $|\sin(\frac{1}{z_n} - i| < \frac{1}{n}$. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ ἀκολουθία (z_n) ἔχει τὶς ζητούμενες ἰδιότητες. ♦

Πρόβλημα 6.5.1.2 *Νὰ δοθεῖ παράδειγμα μιγαδικῆς συνάρτησης f ἡ ὁποία ἔχει τὸ σημεῖο $a = 1 + i$ πόλο 2ης τάξης, τὸ σημεῖο $b = -2i$ οὐσιωδῶς ἀνώμαλο καὶ σὲ κάθε ἄλλο σημεῖο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου εἶναι ὁλόμορφη.*

Ἀπόδειξη: Μιὰ συνάρτηση, ἡ ὁποία ἔχει τὸ σημεῖο $1 + i$ πόλο δεύτερης τάξης καὶ παντοῦ ἀλλοῦ εἶναι ὁλόμορφη, πρέπει νὰ ἔχει ἀνάπτυγμα Laurent μὲ κέντρο τὸ σημεῖο $1 + i$ τέτοιο ὥστε οἱ δεῖκτες τῶν μὴ μηδενικῶν συντελεστῶν νὰ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸν ἀκέραιο ἀριθμό -2. Γιὰ παράδειγμα, μιὰ τέτοια συνάρτηση ὁρίζεται μὲ τὸν τύπο

$$f_1(z) := \frac{1}{(z - 1 - i)^2}.$$

Ἐπίσης μία συνάρτηση, ἡ ὁποία ἔχει τὸ σημεῖο $-2i$ οὐσιωδῶς ἀνώμαλο καὶ παντοῦ ἀλλοῦ εἶναι ὁλόμορφη, πρέπει νὰ ἔχει ἀνάπτυγμα Laurent μὲ κέντρο τὸ σημεῖο $-2i$ τέτοιο ὥστε οἱ δεῖκτες τῶν μὴ μηδενικῶν συντελεστῶν νὰ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ $-\infty$. Ἑπομένως μιὰ τέτοια συνάρτηση μπορεῖ νὰ ἔχει τύπο

$$f_2(z) := \exp(\frac{1}{z+2i}).$$

Τελικά, μιὰ συνάρτηση ποὺ ἔχει τὶς ζητούμενες ἰδιότητες εἶναι ἡ $f = f_1 + f_2$. ♦

Τὸ ἀνάπτυγμα Laurent μιᾶς συνάρτησης f σὲ ἕναν τρύπιο δίσκο μὲ κέντρο τὸ ἀνώμαλο σημεῖο z_0 γράφεται ὡς

$$f(z) = K_{z_0,f}(z) + H_{z_0,f}(z),$$

ὅπου

$$K_{z_0,f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-z_0)^n \text{ καὶ } H_{z_0,f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n.$$

Ὁ προσθετέος $K_{z_0,f}(z)$ λέγεται τὸ κανονικὸ μέρος τῆς f στὸ σημεῖο z_0 καὶ ὁ $H_{z_0,f}(z)$ λέγεται τὸ ὁλόμορφο μέρος τῆς f στὸ σημεῖο αὐτό. Σημειώνουμε ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὶς δύο σειρὲς συγκλίνει ἀπόλυτα καὶ ὁμοιόμορφα σὲ συμπαγῆ σύνολα.

6.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{e^z}{z^3+8}$$

κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z(t) := 1 + \cos t + 6i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. Δίνεται ἡ συνάρτηση $f(z) := e^z/(z+1)$, $z \in B(1, 2)$. Ἂν $\sum_0^{+\infty} a_n(z-1)^n$ εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα Taylor τῆς f μὲ κέντρο τὸ σημεῖο $z_0 = 1$, νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὅριο $\lim a_n$, ἀφοῦ προηγουμένως προσδιοριστοῦν οἱ συντελεστὲς a_n, $n = 0, 1, \cdots$. Μπορεῖ νὰ βρεθεῖ τὸ ὅριο χωρὶς νὰ προσδιοριστοῦν οἱ συντελεστές;

3. Δίνονται οἱ καμπῦλες γ_1, γ_2 μὲ παραμετρικὲς παραστάσεις ἀντίστοιχα τὶς συναρτήσεις

$$x_1(t) := 2\sin t, \quad y_1(t) := \cos t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$x_2(t) := \sin t, \quad y_2(t) := 3\cos t, \quad t \in [0, 4\pi],$$

καθῶς ἐπίσης καὶ μία συνάρτηση f ὁλόμορφη στὸν δίσκο $B(0, 4)$. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \frac{f(z)}{z(z+2i)} dz.$$

4. Νὰ ὑπολογιστεῖ ἡ ποσότητα $\max\{|z^2 + iz| : \ 1 \leq |z| \leq 3\}$.

5. Ἔστω f μία μιγαδικὴ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ μιὰ περιοχὴ τοὺ μοναδιαίου κύκλου $B(0, 1)$. Ἂν k, m καὶ n εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί τέτοιοι ὥστε $k > m$ καὶ $k > n$ καὶ γ εἶναι ἡ θετικὰ προσανατολισμένη περιφέρεια τοῦ κύκλου αὐτοῦ νὰ ὑπολογιστεῖ ἡ ποσότητα

$$g(z) := \int_\gamma \frac{f^{(k-m)}(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} : \int_\gamma \frac{f^{(k-n)}(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad z \in B(0, 1).$$

6. Ἔστω f μιὰ ἀκεραία συνάρτηση, ν ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ $z \in \mathbb{C}$. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι γιὰ ὁποιουσδήποτε πραγματικοὺς ἀριθμοὺς $a, \beta > 0$ ἰσχύει

$$\frac{\int_0^{2\pi} e^{-i\nu t} f(z + ae^{it})dt}{\int_0^{2\pi} e^{-i\nu t} f(z + \beta e^{it})dt} = \left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu.$$

7. Δίνεται μιὰ περιττὴ συνάρτηση f ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη στὸν τρύπιο δίσκο $B_0(0, 1)$. Ἂν τὸ σημεῖο 0 εἶναι πόλος τῆς f πολλαπλότητας 1, νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὅριο

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} (f(z)e^{2iz} + f^2(z)e^{-2iz})dz,$$

ὅπου γ_ε εἶναι ὁ θετικὰ προσανατολισμένος κύκλος $B(0, \varepsilon)$, ὅπου $\varepsilon \in (0, 1)$.

8. Δίνεται ἡ καμπύλη γ μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z(t) := 3\cos t + 2i\sin t,\ \ t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$I := \int_\gamma \frac{dz}{1-z^2}.$$

9. Ἂν f εἶναι μιὰ ἀκεραία συνάρτηση τέτοια ὥστε $f(z+2) = f(z+2i) = f(z)$, γιὰ κάθε z, νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἰσχύει $f'(z) = 0$.

10. Νὰ βρεθεῖ ἡ τάξη τῆς ρίζας $z = 0$ γιὰ τὴ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{z^4}{z - \sin z}.$$

11. Νὰ βρεθοῦν οἱ ρίζες τῆς συνάρτησης μὲ τύπο $f(z) := z^2 \sin z$ καὶ νὰ προσδιοριστεῖ ἡ πολλαπλότητά τους.

12. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι τὸ σημεῖο 1 εἶναι ρίζα 1ης τάξης τῆς συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{\sin \pi z}{2e^{z-1} - z^2 - 1}.$$

13. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι αἴρεται ἡ ἀνωμαλία στὸ σημεῖο π τῆς συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{\sin z}{z - \pi}.$$

14. Ἔστω f μιὰ ἀκεραία μιγαδικὴ συνάρτηση τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε $n = 1, 2, \cdots$, νὰ ἰσχύει ἡ σχέση

$$f(\frac{i}{n}) = e^{1/n} \sin(\frac{i}{n}).$$

Νὰ ὑπολογιστεῖ ἡ τιμὴ $f(0) + f(\pi) + f'(0) + f'(\pi)$.

15. Νὰ χαρακτηριστοῦν τὰ σημεῖα 0, i καὶ 2 ὡς πρὸς τὴ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{z-i}{z-2} \sin \frac{1}{z(z-i)} + z\frac{\sin(z-i)}{(z-i)(z-2)} + \frac{\sin z(z-2)^2}{z(z-i)^2}.$$

16. Νὰ ἐξεταστεῖ ἂν ἡ συνάρτηση μὲ τύπο $f(z) := z/\sin z$ εἶναι μερόμορφη.

17. Νὰ χαρακτηριστεῖ τὸ σημεῖο 0 ὡς πρὸς τὶς συναρτήσεις μὲ τύπους

$$f_1(z) = (\sin^5 z)/z, \quad f_2(z) := \frac{\sin^4 z}{z}, \quad f_3(z) := [1 - \cos z]z^{-5}.$$

18. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ὑπάρχει ἀκολουθία $z_n \to 0$ τέτοια ὥστε $\lim e^{1/z_n} = 3 + 7i$.

19. Νὰ ἀναπτυχτεῖ σὲ σειρὰ Taylor μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 1 στὸν δίσκο $B(0,1)$ ἡ συνάρτηση μὲ τύπο $f(z) := e^{-z}/z$. Στὴ συνέχεια, νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι

$$\sqrt{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\Big).$$

[Ὑπόδειξη: Μπορεῖ νὰ γίνει χρήση τῆς τιμῆς τῆς f στὸ σημεῖο $z = \frac{1}{2}$.]

20. Νὰ ἀναπτυχτεῖ σὲ σειρὰ Laurent ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{1}{z^2 + 1}$$

στοὺς δακτυλίους $\Delta(0, 1, +\infty)$ καὶ $\Delta(i, 0, 2)$.

21. Νὰ ἀναπτυχτοῦν σὲ σειρὰ Laurent μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0 οἱ συναρτήσεις μὲ τύπους

$$f_1(z) := \frac{2z - 1}{z^2 - z - 2}, \quad f_2(z) := \frac{1}{(z-2)(z+i)}, \quad f_3(z) := \frac{z}{(z+2)(z-2i)}$$

$$f_4(z) := \frac{1 - e^{-z}}{z^3}, \quad f_5(z) := \frac{z}{z^2 + iz + 2}, \quad f_6(z) := \frac{z+1}{z^2 + z - 2}, \quad f_7(z) := \frac{1}{z^2 + z}.$$

22. Νὰ ἀναπτυχθεῖ σὲ σειρὰ Laurent μὲ κέντρο τὸ σημεῖο i στὸν δακτύλιο $\Delta(i, 1, +\infty)$ ἡ συνάρτηση μὲ τύπο $f(z) := e^{-z}/z$.

23. Νὰ ἀναπτυχτεῖ σὲ σειρὰ Laurent μὲ κέντρο τὸ σημεῖο i ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z(iz+1)^2}.$$

24. Νὰ ἀναπτυχτεῖ σὲ σειρὰLaurent μὲ κέντρο τὸ σημεῖο -1 ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{1}{z^2+2z}.$$

25. Νὰ βρεθοῦν καὶ νὰ χαρακτηριστοῦν τὰ ἀνώμαλα σημεῖα γιὰ τὶς συναρτήσεις μὲ τύπους

$$f_1(z) := \frac{1+\cos z}{(z-\pi)^2},\ f_2(z) := \frac{\sin z}{z^2(i-z)},\ f_3(z) := \frac{z^2-1}{z^6+2z^5+3z^4}.$$

26. Νὰ δοθεῖ παράδειγμα μιγαδικῆς συνάρτησης ὡς πρὸς τὴν ὁποία τὸ σημεῖο $1+i$ εἶναι οὐσιωδῶς ἀνώμαλο σημεῖο, τὸ σημεῖο $2+i$ εἶναι πόλος 3ης τάξης καὶ εἶναι ὁλόμορφη σὲ κάθε ἄλλο σημεῖο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου.

⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛

Κεφάλαιο 7

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ

7.1 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CAUCHY

Ἔστω f μιὰ συνάρτηση ὁλόμορφη σὲ ἕναν τρύπιο δίσκο $B_0(z_0, r)$. Τότε αὐτὴ ἔχει ἀνάπτυγμα Laurent τῆς μορφῆς

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n.$$

Ὀνομάζουμε **ὁλοκληρωτικὸ ὑπόλοιπο** $\text{Res}_{z_0}(f)$ τῆς συνάρτησης f στὸ σημεῖο z_0 τὸν συντελεστὴ b_{-1} τοῦ ἀναπτύγματος Laurent τῆς f μὲ κέντρο τὸ z_0.

Ἀπὸ τὸν τύπο (6.8) ποὺ δίνει τοὺς συντελεστὲς τῆς σειρᾶς, παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$\text{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)dw,$$

ὅπου γ εἶναι ἕνας (ὁποιοσδήποτε) θετικὰ προσανατολισμένος κύκλος μὲ κέντρο τὸ z_0 καὶ ἀκτῖνα μικρότερη τοῦ r.

Ἡ εὕρεση τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ ὑπολοίπου μιᾶς συνάρτησης σὲ ἕνα σημεῖο z_0 ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴ μορφὴ τῆς συνάρτησης, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὸ εἶδος ἀνωμαλίας τοῦ σημείου.

Γιὰ παράδειγμα, ἔχουμε τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Πρόταση 7.1.0.4 *Ἂν ἡ συνάρτηση f εἶναι ἄρτια, τότε τὸ ὁλοκληρωτικὸ της ὑπόλοιπο στὸ σημεῖο 0 εἶναι ἴσο 0.*

Ἀπόδειξη: Τὸ ἀνάπτυγμα Laurent τῆς συνάρτησης εἶναι μιὰ σειρὰ ἡ ὁποία ἔχει δυνάμεις μόνο μὲ ἄρτιο ἐκθέτη. Ἄρα ὅλοι οἱ συντελεστὲς μὲ περιττὸ δείκτη εἶναι ἴσοι μὲ τὸ 0, ὁπότε καὶ θὰ ἰσχύει $b_{-1} = 0$. ■

Στὸ πνεῦμα τῆς παραπάνω Πρότασης εἶναι καὶ τὸ ἀκόλουθο παράδειγμα.

Πρόβλημα 7.1.0.3 *Ἂν β εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκληρωτικὸ ὑπόλοιπο τῆς συνάρτησης μὲ τύπο*

$$f(z) := \exp\left(\frac{1}{(z-\beta i)^2}\right)$$

στὸ σημεῖο $z = \beta i$.

Λύση: Τὸ ἀνάπτυγμα Laurent τῆς συνάρτησης f μὲ κέντρο τὸ σημεῖο βi εἶναι τὸ

$$1 + \frac{1}{1!(z-\beta i)^2} + \frac{1}{2!(z-\beta i)^4} + \frac{1}{3!(z-\beta i)^6} + \cdots + \frac{1}{n!(z-\beta i)^{2n}} + \cdots$$

Ἀπὸ ἐδῶ προκύπτει ὅτι τὸ ὁλοκληρωτικὸ ὑπόλοιπο τῆς f στὸ σημεῖο βi εἶναι ἴσο μὲ $b_{-1} = 0$. ♦

Ἂν τὸ σημεῖο z_0 εἶναι πόλος τῆς f τάξης n, τότε ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$g(z) := f(z)(z-z_0)^n$$

εἶναι ὁλόμορφη σὲ ἕναν μικρὸ δίσκο $B(z_0, R)$ μὲ κέντρο τὸ σημεῖο z_0. Ἔτσι, παίρνοντας ἕναν θετικὰ προσανατολισμένο κύκλο γ μὲ κέντρο τὸ σημεῖο z_0 καὶ ἀκτῖνα $r \in (0, R)$, βρίσκουμε ὅτι τὸ ὁλοκληρωτικὸ ὑπόλοιπο εἶναι ἡ ποσότητα

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z_0}(f) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^n}dw \\
&= \frac{1}{(n-1)!}g^{(n-1)}(z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{w\to z_0} g^{(n-1)}(w) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{w\to z_0}[(w-z_0)^n f(w)]^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

7.1.1 Θεώρημα Cauchy γιὰ τὰ ὁλοκληρωτικὰ ὑπόλοιπα

Θεώρημα 7.1.1.1 *Ὑποθέτουμε ὅτι $\mathcal{T}$ εἶναι ἕνας τόπος στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο καὶ f εἶναι μιὰ μερόμορφη συνάρτηση ὁρισμένη στὸν τόπο $\mathcal{T}$. Ἄν $z_1, z_2, \ldots, z_k$, εἶναι οἱ πόλοι της στὸν τόπο, τότε, γιὰ κάθε κατὰ τμήματα διαφορίσιμη κλειστὴ καμπύλη γ μηδέν-ὁμοτοπικὴ στὸν τόπο $\mathcal{T}$, ἡ ὁποία δὲν διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $z_1, z_2, \ldots, z_k$, ἰσχύει ὁ τύπος*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{k} I(\gamma, z_n)\mathrm{Res}_{z_n}(f).$$

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε ὅτι λ_j εἶναι ἡ πολλαπλότητα τοῦ πόλου z_j, $j = 1, 2, \cdots, k$.

Θεωροῦμε τὴ συνάρτηση μὲ τύπο $g(z) := f(z) - \sum_{j=1}^{k} K_{z_j,f}(z)$, ὅπου $K_{z_j,f}$ εἶναι ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$K_{z_j,f}(z) := \sum_{n=-\lambda_j}^{-1} b_n^j(z - z_j)^n,$$

δηλαδὴ εἶναι τὸ κανονικὸ μέρος τῆς f στὸ ἀνάπτυγμά της σὲ σειρὰ Laurent μὲ κέντρο τὸ σημεῖο z_j. Τότε ἡ συνάρτηση g εἶναι ὁλόμορφη στὸν τόπο $\mathcal{T}$, ὁπότε, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 6.1.6.2, θὰ ἰσχύει

$$\int_\gamma [f(w) - \sum_{j=1}^{k} K_{z_j,f}(w)]dw = \int_\gamma g(w)dw = 0.$$

Ἑπομένως, ἔχουμε

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(w)dw &= \sum_{j=1}^{k}\int_\gamma K_{z_j,f}(w)dw = \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=-\lambda_j}^{-1} b_n^j\int_\gamma (w - z_j)^n dw \\ &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{k=1}^{\lambda_j} b_{-k}^j\int_\gamma \frac{dw}{(w - z_j)^k} \\ &= \sum_{j=1}^{k} b_{-1}^j\int_\gamma \frac{dw}{w - z_j} = 2\pi i\sum_{j=1}^{k} I(\gamma, z_j)\mathrm{Res}_{z_j}(f). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Πρόβλημα 7.1.1.1 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz,$$

ὅπου γ εἶναι ὁ θετικὰ προσανατολισμένος κύκλος μὲ κέντρο τὸ 0 καὶ ἀκτῖνα ἴση μὲ 5.

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι τὸ σημεῖο 0 εἶναι ἕνα ἀνώμαλο σημεῖο τῆς συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{e^z - 1}{z^2 + z}.$$

Ὅμως, ἡ ἀνωμαλία τούτου αἴρεται, ἀφοῦ, ἐφαρμόζοντας τὸν τύπο L'Hospital ἔχουμε

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = \lim_{z \to 0} \frac{e^z}{2z + 1} = 1.$$

Ἑπομένως, στὸν δίσκο $B(0,5)$ ἡ f εἶναι ὁλόμορφη ἐκτὸς ἀπὸ τὸ σημεῖο -1, ποὺ εἶναι πόλος τῆς συνάρτησης. Ἄρα, ἀπὸ τὸ Θεώρημα τοῦ Cauchy γιὰ τὰ ὁλοκληρωτικὰ ὑπόλοιπα, παίρνουμε

$$\int_\gamma f(w) dw = 2\pi i I(\gamma, -1) \mathrm{Res}_{-1}(f).$$

Τὸ σημεῖο -1 εἶναι πόλος 1ης τάξης, ὁπότε τὸ ὁλοκληρωτικὸ ὑπόλοιπο τῆς f στὸ -1 εἶναι ἴσο μὲ

$$\mathrm{Res}_{-1}(f) = \lim_{z \to -1} (z+1) \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = 1 - e^{-1}.$$

Ἔτσι, τελικά, προκύπτει ὅτι

$$\int_\gamma f(w) dw = 2\pi i (1 - e^{-1}). \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 7.1.1.2 *Δίνεται ἡ συνάρτηση μὲ τύπο*

$$p(z) := z^2 - 3z + 3 + i$$

καὶ οἱ θετικὰ προσανατολισμένοι κύκλοι

$$\gamma_1 := B(0,1), \ \gamma_2 := B(0,2), \ \gamma_3 := B(0,3).$$

Νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ ὁλοκληρώματα

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} p(z)dz, \ \int_{\gamma_2} \frac{dz}{p(z)}, \ \int_{\gamma_1} \frac{p(z)dz}{z} \ \int_{\gamma_3} \frac{p(z)dz}{z-2}.$$

Λύση: Ἡ συνάρτηση p εἶναι πολυωνυμικὴ καὶ ἄρα ὁλόμορφη. Ἐπομένως ἰσχύει

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} p(z)dz = \int_{\gamma_1} p(z)dz + \int_{\gamma_2} p(z)dz + \int_{\gamma_3} p(z)dz = 0,$$

ἀφοῦ οἱ καμπῦλες εἶναι κλειστές.

Ἡ συνάρτηση p ἔχει ρίζες τὰ σημεῖα $z_1 := 2 - i$ καὶ $z_2 := 1 + i$, ὅπου $|z_1| = \sqrt{5}$ καὶ $|z_2| = \sqrt{2}$. Ἄρα ἡ ρίζα z_1 ἀνήκει στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου γ_3 καὶ στὸ ἐξωτερικὸ τῶν δύο κύκλων γ_1, γ_2, ἐνῶ τὸ σημεῖο z_2 ἀνήκει στὸ ἐσωτερικὸ τῶν δύο κύκλων γ_2, γ_3 καὶ στὸ ἐξωτερικὸ τοῦ κύκλου γ_1. Ἔτσι ἔχουμε

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{p(z)} = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{dz}{z-z_1}}{z-z_2} = 2\pi i \frac{1}{z-z_1}\Big|_{z=z_2} = \frac{2\pi i}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi i}{1-2i}$$

καὶ

$$\int_{\gamma_1} \frac{p(z)dz}{z} = 0,$$

ἀφοῦ ἡ συνάρτηση $P(z)/z$ δὲν ἔχει πόλους στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου γ_1.

Τέλος, παίρνουμε

$$\int_{\gamma_3} \frac{p(z)dz}{z-2} = 2\pi i p(2) = 2\pi i(1+i). \ \blacklozenge$$

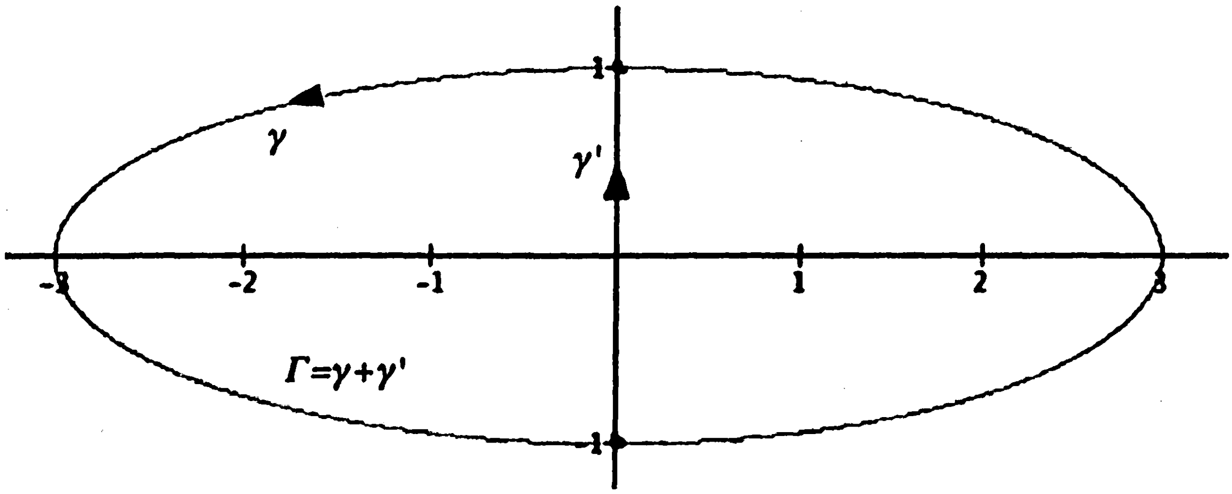
Πρόβλημα 7.1.1.3 *Δίνεται ἡ καμπύλη γ μὲ παραμετρικὴ παράσταση*

$$z(t) := 3\cos t + i\sin t, \quad t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}].$$

Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$I := \int_\gamma \frac{dz}{1-z^2}.$$

Λύση: Θεωροῦμε τὴν ἔλλειψη μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0, μὲ ἀκτίνα στὸν x-ἄξονα ἴση μὲ 3 καὶ στὸν y-ἄξονα ἴση μὲ 1. Τότε ἡ καμπύλη γ εἶναι τὸ τμῆμα τῆς ἔλλειψης αὐτῆς μὲ ἀρχὴ τὸ σημεῖο i καὶ πέρας τὸ $-i$, μὲ θετικὴ φορά.



Σχήμα 7.1: *Ἡ καμπύλη γ μαζί μὲ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα γ' ἔχουν ἄθροισμα τὴν κλειστὴ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη $\Gamma = \gamma + \gamma'$.*

Ἡ καμπύλη αὐτὴ μαζί μὲ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα γ' ποὺ ἑνώνει το σημεῖο $-i$ μὲ τὸ i, ἔχουν ἄθροισμα τὴν κλειστὴ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη $\Gamma = \gamma + \gamma'$.

Ἡ γ' ἔχει παραμετρικὴ παράσταση $z(t) = it, \quad t \in [-1, 1]$. Στὸ ἐσωτερικὸ τῆς καμπύλης Γ ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{1}{(1-z^2)}$$

ἔχει πόλο τὸ σημεῖο -1. Ἔτσι, σύμφωνα μὲ τὸν τὺπο τοῦ Θεωρήματος 7.1.1.1, ἔχουμε

$$I=\int_\gamma \frac{dz}{1-z^2}=\int_\Gamma \frac{dz}{1-z^2}-\int_{\gamma'}\frac{dz}{1-z^2}=\int_\Gamma \frac{dz}{(1-z)(1+z)}-\int_{\gamma'}\frac{dz}{1-z^2}$$
$$=2\pi i \mathrm{Res}_{z=-1}\frac{1}{1-z^2}-\int_{-1}^{1}\frac{idt}{1+t^2}=2\pi i\frac{1}{2}-i\mathrm{Arctan}(t)\Big|_{-1}^{1}$$
$$=\pi i-(\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4}))i=\frac{\pi i}{2}. \ \blacklozenge$$

7.1.2 Ὁλοκλήρωμα τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων

Ὑποθέτουμε ὅτι $R(\cdot,\cdot)$ εἶναι μιὰ συνεχὴς πραγματικὴ συνάρτηση καὶ ἔστω ὅτι θέλουμε νὰ ὑπολογίσουμε τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t,\cos t)dt.$$

Θέτουμε $z:=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, ὁπότε βρίσκουμε

$$\bar{z}=e^{-it}=\frac{1}{e^{it}}=\frac{1}{z},\ \sin t=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}),\ \cos t=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\ \text{καὶ}\ dt=-i\frac{dz}{z}.$$

Ἔτσι, τὸ δοθὲν ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t,\cos t)dt=-i\int_\gamma R\Big(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}),\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\Big)\frac{dz}{z},$$

ὅπου γ εἶναι ὁ θετικὰ προσανατολισμένος κύκλος μὲ ἀκτίνα τὴ μονάδα καὶ κέντρο τὸ σημεῖο 0. Τώρα ἐφαρμόζουμε τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy γιὰ τὰ ὁλοκληρωτικὰ ὑπόλοιπα καὶ ὑπολογίζουμε τὸ ὁλοκλήρωμα.

Πρόβλημα 7.1.2.1 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a+\beta\cos x)^2}dx,$$

ὅπου $a>\beta>0$.

Λύση: Ἐκτελοῦμε τὸν μετασχηματισμὸ τῆς προηγούμενης παραγράφου, ὁπότε βρίσκουμε

$$I = \frac{4}{i}\int_\gamma \frac{zdz}{(\beta z^2 + 2az + \beta)^2},$$

ὅπου γ εἶναι ὁ θετικὰ προσανατολισμένος μοναδιαῖος κύκλος. Τα σημεῖα

$$z_1 := \frac{-a + \sqrt{a^2 - \beta^2}}{\beta} \quad \text{και} \quad z_2 := \frac{-a - \sqrt{a^2 - \beta^2}}{\beta}$$

εἶναι πόλοι 2ης τάξης τῆς ρητῆς συνάρτησης

$$f(z) := \frac{z}{(\beta z^2 + 2az + \beta)^2}.$$

Ὁ δίσκος $B(0, 1)$ περιέχει μόνο τὸ σημεῖο z_1, ὁπότε τὸ ὁλοκληρωτικὸ ὑπόλοιπο τῆς f στὸ z_1 εἶναι

$$\mathrm{Res}_{z_1}(f) = \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\frac{z(z - z_1)^2}{\beta^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2} = \frac{a}{4(a^2 - \beta^2)^{3/2}}.$$

Ἔτσι, ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι

$$I = \frac{4}{i}2\pi i\mathrm{Res}_{z_1}(f) = \frac{2\pi a}{(a^2 - \beta^2)^{3/2}}. \ \blacklozenge$$

7.1.3 Ὁλοκλήρωμα γενικευμένο στὸ ∞

Στὰ ἑπόμενα θὰ δηλώνουμε μὲ $\mathbb{C}^+$ τὸ σύνολο $\{z : \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Θεώρημα 7.1.3.1 *Ὑποθέτουμε ὅτι f εἶναι μιὰ μερόμορφη συνάρτηση ὁρισμένη σὲ ἕναν τόπο ὁ ὁποῖος περιέχει τουλάχιστον τὸ σύνολο*

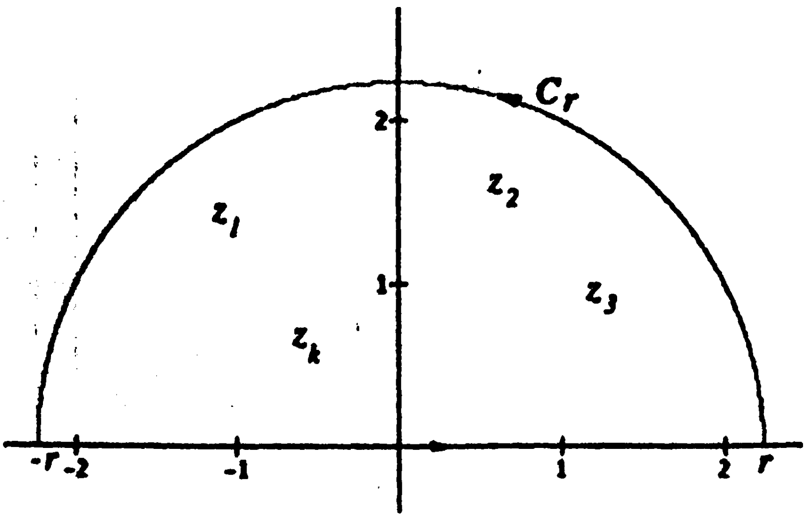
$$\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq 0\}.$$

Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση f ἔχει πεπερασμένο πλῆθος πόλων $z_1, z_2, \ldots, z_k$ στὸ σύνολο $\mathbb{C}^+$, ἀλλὰ κανένας ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς πόλους δὲν ἀνήκει πάνω στὸν *πραγματικὸ ἄξονα. Ἂν ἡ συνάρτηση f ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση* $\lim_{z\to\infty}[zf(z)] = 0$, *τότε ἰσχύει*

$$(PV)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{+r} f(x)dx = 2\pi i\sum_{n=1}^{k}\mathrm{Res}_{z_n}f.$$

Ἀπόδειξη: Γιὰ τυχόν $r > \max_j|z_j|$, στὸ ἡμιεπίπεδο $\mathbb{C}^+$ θεωροῦμε τὴ θετικὰ προσανατολισμένη ἡμιπεριφέρεια C_r μὲ κέντρο τὸ 0 καὶ ἀκτῖνα r. Ἔστω γ ἡ κλειστὴ καμπύλη $[-rr]+C_r$. Αὐτὴ εἶναι κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καὶ στὸ ἐσωτερικό της περιέχει ὅλα τὰ σημεῖα z_j, $j = 1, 2, \cdots, k$. Ἄρα, ἀπὸ τὸ Θεώρημα τοῦ Cauchy γιὰ τὰ ὁλοκληρωτικὰ ὑπόλοιπα, ἔχουμε

$$\begin{aligned} 2\pi i\sum_{n=1}^{k} I(\gamma, z_n)\mathrm{Res}_{z_n}f &= 2\pi i\sum_{n=1}^{k}\mathrm{Res}_{z_n}f = \int_{\gamma} f(z)dz \\ &= \int_{C_r} f(z)dz + \int_{-r}^{r} f(z)dz. \end{aligned} \tag{7.1}$$



Ἔστω $\varepsilon > 0$. Ἀπὸ τὴν ὑπόθεση, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει $R > 0$, τέτοιο ὥστε $|zf(z)| < \varepsilon$, ὅταν $|z| > R$. Ἔτσι, γιὰ κάθε $r > R > \max_j|z_j|$, θὰ ἔχουμε

$$\left|\int_{C_r} f(z)dz\right| \le \frac{\varepsilon}{r}\pi r = \varepsilon\pi.$$

Ἄρα τὸ πρῶτο ὁλοκλήρωμα στὸ δεξιὰ μέλος τῆς σχέσης (7.1) τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἐνῶ τὸ δεύτερο τείνει πρὸς τὸ

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{+r} f(x)dx.$$

Τοῦτο ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα. ■

7.1.4 Εἰδικὴ περίπτωση

Ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι ρητὴ καὶ τέτοια ὥστε ὁ βαθμὸς τοῦ παρονομαστὴ νὰ εἶναι τοὐλάχιστον κατὰ δύο μονάδες μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν βαθμὸ τοῦ ἀριθμητή, τότε ὑπάρχει τὸ γενικευμένο ὁλοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

καὶ ταυτίζεται μὲ τὴν πρωτεύουσα τιμή του.

Πρόβλημα 7.1.4.1 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$$

Λύση: Ἡ f ἔχει παρονομαστὴ ἕνα πολυώνυμο βαθμοὺ 4, ποὺ εἶναι κατὰ δύο μονάδες μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν βαθμὸ 2 τοῦ ἀριθμητή. Ἄρα τὸ ζητούμενο ὁλοκλήρωμα ὑπάρχει καὶ ἰσοῦται μὲ τὴν πρωτεύουσα τιμή του. Οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ

$$z_1 := \frac{(1+i)\sqrt{2}}{2},\ z_2 := \frac{(-1+i)\sqrt{2}}{2},\ z_3 := \frac{(1-i)\sqrt{2}}{2},\ z_4 := \frac{(-1-i)\sqrt{2}}{2}$$

εἶναι πόλοι 1ης τάξης καὶ ἀπὸ αὐτοὺς μόνο οἱ z_1, z_2 ἔχουν θετικὸ φανταστικὸ μέρος. Ἑπομένως, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 7.1.1.1, ἔχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = (PV)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i[\mathrm{Res}_{z_1}(f) + \mathrm{Res}_{z_2}(f)].$$

Ἀλλά, γιὰ $j = 1, 2$, παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$\mathrm{Res}_{z_j}(f) = \lim_{z \to z_j}(z - z_j)\frac{z^2 + 1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)} = -i\frac{\sqrt{2}}{4},$$

ὁπότε παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i[-i\frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}] = \pi\sqrt{2}. \ \blacklozenge$$

Θεώρημα 7.1.4.1 *(Ὁλοκλήρωμα γενικευμένο στὸ 0) Ὑποθέτουμε ὅτι f εἶναι μιὰ ρητὴ πραγματικὴ συνάρτηση ἡ ὁποία μπορεῖ νὰ ἔχει τὸ σημεῖο 0 πόλο 1ης τάξης, ἀλλὰ κανένα ἄλλο σημεῖο τῆς πραγματικῆς εὐθείας δὲν εἶναι πόλος. Γιὰ σταθερὸ $\omega > 0$ θέτουμε*

$$F(z) := f(z)e^{i\omega z}.$$

Ἂν στὸ ἡμιεπίπεδο $\mathbb{C}^+$ ἡ συνάρτηση f ἔχει πόλους τὰ σημεῖα $z_1, z_2, \ldots, z_k$ καὶ ἱκανοποιεῖ τὴ συνθήκη

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0,$$

τότε ἰσχύει ὁ τύπος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)dx = \mathrm{Im}\Big(2\pi i[\sum_{n=1}^{k}\mathrm{Res}_{z_n}(F) + \frac{1}{2}\mathrm{Res}_0(F)]\Big).$$

Ἀπόδειξη. Θέτουμε

$$r_0 := \min\{|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_k|\}$$

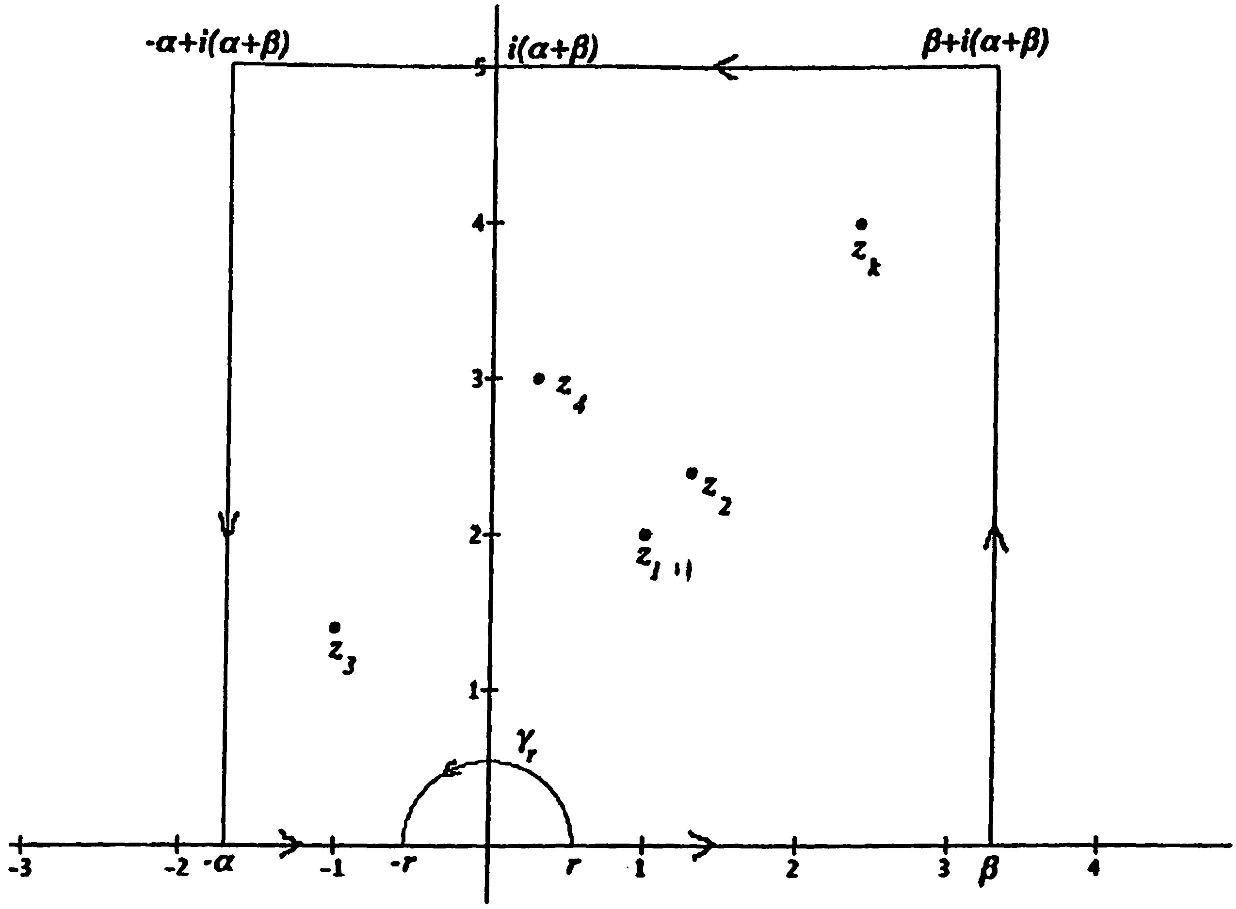
καὶ

$$r_1 := \max\{|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_k|\}.$$

Ἔστω $\varepsilon > 0$. Ὑπάρχει $r_2 > r_1$ τέτοιο ὥστε $|f(z)| < \varepsilon$, γιὰ κάθε z μὲ $|z| > r_2$.

Ἐπίσης, ἐπειδὴ ἡ συνάρτηση F ἔχει τὸ σημεῖο 0 πόλο 1ης τάξης, ὑπάρχει $r_3 \in (0, r_0)$ τέτοιο ὥστε στὸν δίσκο $B(0, r_3)$ ἡ F νὰ γράφεται ὡς

$$F(w) = \frac{b_{-1}}{w} + H_{0,F}(w).$$



Θεωροῦμε θετικοὺς ἀριθμοὺς $r < r_3$ καὶ a, β μὲ $a, \beta > r$ καὶ $a + \beta > r_2$. Στὸ σύνολο $\mathbb{C}^+$ λαμβάνουμε τὰ σημεῖα

$$-a, \ \ -r, \ \ r, \ \ \beta, \ \ \beta + i(a+\beta), \ \ -a + i(a+\beta),$$

ὅπως στὸ σχῆμα.

Τώρα, σχηματίζουμε τὴν κλειστὴ καὶ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη

$$\Gamma := [(-a)(-r)] - \gamma_r + [r\beta] + [\beta(a+\beta)] + [(-a)(a+\beta)] + [(a+\beta)(-a)],$$

ὅπου γ_r εἶναι ἡ (θετικὰ προσανατολισμένη) ἄνω ἡμιπεριφέρεια στὸ $\mathbb{C}^+$ μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0 καὶ διάμετρο τὸ διάστημα $[-rr]$.

Ἀπὸ τὴν ἐπιλογὴ τῶν ἀριθμῶν r, r_2 ἕπεται ὅτι ἡ καμπύλη Γ περικλείει στὸ ἐσωτερικό της ὅλους τοὺς πόλους τῆς f μὲ θετικὸ φανταστικὸ μέρος.

Τότε τὸ Θεώρημα Cauchy γιὰ τὰ ὁλοκληρωτικὰ ὑπόλοιπα ἐφαρμόζεται καὶ δίνει

$$\int_{\gamma} F(w)dw = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z_j}(F). \tag{7.2}$$

Τὸ πρῶτο μέλος τῆς (7.2) γράφεται ὡς τὸ ἄθροισμα

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$$

τῶν ὁλοκληρωμάτων τῆς F πάνω στὶς (ἕξι) ἐπὶ μέρους καμπῦλες

$$[(-a)(-r)],\ -\gamma_r,\ [r\beta],\ [\beta(a+\beta)],\ [(-a)(a+\beta)],\ [(a+\beta)(-a)],$$

ἀντίστοιχα. Ἔχουμε

$$I_2 = \int_{-\gamma} F(w)dw = -\int_{\gamma} (\frac{b_{-1}}{w} + H_{0,F}(w))dw = b_{-1}\int_{-\gamma} \frac{dw}{w}.$$

Ἀπὸ ἐδῶ εὔκολα παίρνουμε ὅτι

$$\lim_{r\to 0} b_{-1}\int_{\pi}^{0} idt = b_{-1}\pi i.$$

Ἐπίσης ἰσχύει

$$|I_4| = |\int_{[DE]} F(w)dw| = |\int_0^R f(\beta+iy)e^{j\omega(\beta+iy)}idy|$$
$$\leq \varepsilon\int_0^R e^{-\omega y}dy = \frac{\varepsilon}{\omega}(1-e^{-\omega R}) < \frac{\varepsilon}{\omega}.$$

Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὸ ὁλοκλήρωμα I_6. Γιὰ τὸ I_5 ἔχουμε

$$|I_5| = |\int_{[EF]} F(w)dw| = |\int_{\beta}^{-a} f(x+iR)e^{j\omega(x+iR)}dx|$$
$$\leq \varepsilon\int_{-a}^{\beta} e^{-\omega R}dx = \varepsilon Re^{-\omega R} < \varepsilon R.$$

Ἔτσι, ὅταν τὰ σημεῖα a, β τείνουν πρὸς τὸ $+\infty$, ἡ σχέση (1) γίνεται

$$(PV)\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx - b_{-1}\pi i = 2\pi i\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z_j}(F).$$

ἀπὸ ὅπου παίρνουμε τὸ συμπέρασμα. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι $b_{-1} = Res_0(F)$.
■

Πρόβλημα 7.1.4.2 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin2x}{x(5+4x+x^2)}dx.$$

Λύση: Ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{1}{z(5+4z+z^2)}$$

ἔχει τὸ σημεῖο $z = 0$ πόλο 1ης τάξης, ἐνῶ ὁ μοναδικὸς πόλος της μὲ θετικὸ φανταστικὸ μέρος εἶναι τὸ σημεῖο $-2+i$. Τὸ σημεῖο αὐτὸ εἶναι πόλος 1ης τάξης. Θέτουμε

$$F(z) := \frac{e^{i2z}}{z(5+4z+z^2)}$$

καὶ ἐφαρμόζουμε τὸν προηγούμενο τύπο. Τότε ἔχουμε

$$I = \mathrm{Im}(2\pi i[\mathrm{Res}_{-2+i}(F) + \frac{1}{2}\mathrm{Res}_0(F)]).$$

Ἀλλὰ ἰσχύει ὅτι

$$\mathrm{Res}_{-2+i}(F) = \lim_{z\to -2+i}(z+2-i)\frac{e^{i2z}}{z(5+4z+z^2)} = -\frac{e^{-2}e^{-4i}}{2(1+2i)}$$

και

$$\mathrm{Res}_0(F) = \lim_{z\to 0} z\frac{e^{i2z}}{z(5+4z+z^2)} = \frac{1}{5}.$$

Ἔτσι, τελικά, παίρνουμε

$$I = \mathrm{Im}(2\pi i[-\frac{e^{-2}e^{-4i}}{2(1+2i)} + \frac{1}{10}]] = \frac{\pi e^{-2}}{5}(2\sin 4 - \cos 4) + \frac{\pi}{5}. \ \blacklozenge$$

Πρόβλημα 7.1.4.3 *Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2+4}{x^4+16}dx.$$

Λύση: Ἡ συνάρτηση ἔχει γενικευμένο ὁλοκλήρωμα διότι ὁ βαθμὸς τοῦ παρονομαστὴ εἶναι κατὰ δύο μονάδες μεγαλύτερος ἐκείνου τοῦ ἀριθμητή. Ὁ παρονομαστὴς ἔχει ρίζες

$$z_k := 2e^{\frac{(2k-1)i\pi}{4}}, k = 1, 2, 3, 4.$$

Ἀπὸ αὐτὲς μόνο οἱ z_1, z_2 ἔχουν θετικὸ φανταστικὸ μέρος. Ἔτσι ἐφαρμόζοντας τὸν σχετικὸ τύπο τοῦ Cauchy βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{x^2+4}{x^4+16}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{x^4+16}dx = i\pi\Big(Res_{z=z_1}f(z) + Res_{z=z_2}f(z)\Big) \\
&= i\pi\frac{z_1^2+4}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} + i\pi\frac{z_2^2+4}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} \\
&= i\pi\frac{4e^{i\pi/2}+4}{8(e^{i\pi/4}-e^{3i\pi/4})(e^{i\pi/4}-e^{5i\pi/4})(e^{i\pi/4}-e^{7i\pi/4})} + \\
&\quad + i\pi\frac{4e^{3i\pi/2}+4}{8(e^{3i\pi/4}-e^{i\pi/4})(e^{3i\pi/4}-e^{5i\pi/4})(e^{3i\pi/4}-e^{7i\pi/4})} \\
&= i\pi\frac{4(1+i)}{8e^{i\pi/4}(1-i)2(1+i)} + i\pi\frac{4(1-i)}{8e^{3i\pi/4}(1+i)(1-i)2} \\
&= \frac{i\pi(1+i)e^{-i\pi/4}}{8} + \frac{i\pi(1-i)e^{-3i\pi/4}}{8} = \frac{i\pi}{8}e^{-i\pi/2}(e^{i\pi/4}+e^{-i\pi/4}) \\
&= \frac{i\pi}{8}(-i)2\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}. \ \blacklozenge
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 7.1.4.4

Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{(x-\pi)(x^2+1)}.$$

Λύση: Θέτοντας $y = x - \pi$, βρίσκουμε

$$I = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y dx}{y((y+\pi)^2+1)}.$$

Οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης $(z+\pi)^2 + 1 = 0$ εἶναι οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ $z_1 = -\pi + i$ καὶ $z_2 = -\pi - i$, ὁπότε ἔχουμε $(z+\pi)^2 + 1 = (z - z_1(z - z_2)$. Τώρα ἐφαρμόζουμε τὸν τύπο τοῦ θεωρήματος 7.1.4.1 γιὰ τὸν πόλο z_1 καὶ βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
I &= \mathrm{Im}\Big(2\pi i\Big[Res_{z=z_1}\frac{e^{iz}}{z(z-z_1)(z-z_2)} + \frac{1}{2}Res_{z=0}\frac{e^{iz}}{z((z+\pi)^2+1)}\Big]\Big) \\
&= \mathrm{Im}\Big(2\pi i\Big[\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{e^{iz}}{z(z-z_1)(z-z_2)} + \frac{1}{2}\lim_{z\to 0} z\frac{e^{iz}}{z((z+\pi)^2+1)}\Big]\Big) \\
&= \mathrm{Im}\Big(2\pi i\Big[\frac{e^{iz_1}}{z_1(z_1-z_2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\pi^2}\Big]\Big) \\
&= \mathrm{Im}\Big(2\pi i\Big[\frac{e^{i\pi}e^{i}}{(-\pi+i)(2i)} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\pi^2}\Big]\Big) \\
&= \mathrm{Im}\Big(\pi i\Big[\frac{-e^{-\pi}e^{i}}{1+\pi i} + \frac{1}{1+\pi^2}\Big]\Big) \\
&= \mathrm{Im}\Big(\pi i\Big[\frac{-e^{-\pi}(\cos 1 + i\sin 1)(1-\pi i)}{1+\pi^2} + \frac{1}{1+\pi^2}\Big]\Big) \\
&= \frac{\pi}{1+\pi^2}[1 + e^{-\pi}(\cos 1 + \pi\sin 1)]. \ \blacklozenge
\end{aligned}$$

7.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ δοθεῖ παράδειγμα μιγαδικῆς συνάρτησης τῆς ὁποίας τὸ ὁλοκληρωτικὸ ὑπόλοιπο ὡς πρὸς τὸ σημεῖο 0 εἶναι $1+i$, τὸ σημεῖο $-i$ εἶναι πόλος 3ης τάξης καὶ εἶναι ὁλόμορφη σὲ κάθε ἄλλο σημεῖο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου.

2. Στὴ συνέχεια νὰ βρεθεῖ τὸ ὁλοκληρωτικὸ ὑπόλοιπο τῆς συνάρτησης μὲ τύπο
$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^2 - 2z - 2(1-e^z)}$$
στὸ σημεῖο 0.

3. Νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ ὁλοκληρωτικὰ ὑπόλοιπα τῶν συναρτήσεων οἱ ὁποῖες ὁρίζονται μὲ τοὺς τύπους
$$f_1(z) := z^3 \sin\frac{1}{z^2}, \ f_2(z) := z^2\cos\frac{1}{z^2}$$
στὸ σημεῖο 0.

4. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι τὸ ὁλοκληρωτικὸ ὑπόλοιπο στὸ σημεῖο 0 τῆς συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{\sin(5z) - 5\sin z}{(\sin z - z)\sin z}$$

εἶναι ἴσο μὲ 120.

5. Νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ ὁλοκληρωτικὰ ὑπόλοιπα τῆς συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$$

σὲ ὅλους τοὺς πόλους της.

6. Νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ ὁλοκληρωτικὰ ὑπόλοιπα τῶν συναρτήσεων μὲ τοὺς τύπους

$$f_1(z) := z^3 e^{1/z},\ f_2(z) := \cos(\frac{1}{z}) + z^5,\ f_3(z) := \sin z \cos(\frac{1}{z}),$$

στὰ ἀνώμαλα σημεῖα.

7. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἰσχύει

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} e^{\frac{1}{z^2}} dz = 0,$$

ὅπου γ εἶναι ἡ θετικὰ προσανατολισμένη ἔλλειψη μὲ ἐξίσωση σὲ καρτεσιανὲς συντεταγμένες τὴν $x^2 + 16y^2 = 4$.

8. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι, ἂν γ εἶναι ἡ καμπύλη μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z(t) := 4 + e^{2it}$, $t \in [0, 3\pi]$, τότε ἰσχύει

$$\int_\gamma z^2 \tan z dz = \frac{-27\pi^3 i}{2}.$$

9. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{z}{(z-1)^2(z+3)^3},$$

κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης μὲ παράσταση ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση

$$\gamma : x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$$

καὶ ἔχει θετικὴ φορά.

10. Δίνεται ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) := z^2 - 2z$$

καὶ οἱ θετικὰ προσανατολισμένες περιφέρειες γ_1, γ_2 καὶ γ_3 τῶν κύκλων $B(0,1)$, $B(2,1)$ και $B(2i,1)$ ἀντίστοιχα. Νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ ὁλοκληρώματα

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} f(z)dz, \quad \int_{\gamma_1+\gamma_2} \frac{dz}{f(z)}, \quad \int_{\gamma_1} \frac{f(z)dz}{z^2}, \quad \int_{\gamma_3} \frac{f(z)dz}{z-2i}.$$

11. Νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ ὁλοκληρώματα

$$\int_\gamma \frac{\cos^3 z}{z^3}dz, \quad \int_\gamma \frac{\sin z \sin(z-1)}{z(z-1)}dz$$

ὅπου γ εἶναι ὁ θετικὰ προσανατολισμένος κύκλος μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 0 καὶ ἀκτῖνα 2.

12. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι, ἄν γ εἶναι ὁ θετικὰ προσανατολισμένος κύκλος μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 1 καὶ ἀκτῖνα 1, τότε ἰσχύει

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{(z^2-1)^2}dz = i\pi\frac{\cos 1 - \sin 1}{2}.$$

13. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συνάρτησης μὲ τύπο

$$f(z) := \frac{e^z}{z(z-1)^2},$$

κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης μὲ παραμετρικὴ παράσταση $z(t) := (0.5 + 2\sin t)e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

14. Νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ ὁλοκληρώματα τῶν συναρτήσεων μὲ τύπους

$$f_1(z) := \frac{\sin \pi z}{z^2 - z} \text{ καὶ } f_2(z) := \frac{e^{iz}}{z-\pi}$$

κατὰ μῆκος τοῦ θετικὰ προσανατολισμένου κύκλου $\{z : |z| = 4\}$. Νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ ὁλοκληρώματα

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+\sin x)^2}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5-2\cos x)^2}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{3}+\sin t+\cos t}dt.$$

15. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\mu+2\sin x}$, ὅπου $\mu > 2$.

16. Ἂν $0 < \lambda < 1$ εἶναι μιὰ σταθερὴ παράμετρος καὶ $0 < \beta < a$, νὰ ὑπολογιστοῦν στὸ διάστημα $[0, 2\pi]$ τὰ ὁλοκληρώματα τῶν συναρτήσεων μὲ τοὺς ἑξῆς τύπους:

$$f_1(x) := \frac{1}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2}, \quad f_2(x) := \frac{\cos^2(2x)}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2},$$

$$f_3(x) := \frac{\cos^2(2x)}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2}, \quad f_4(x) := \frac{\cos 2x}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2},$$

$$f_5(x) := \frac{\sin^2 x}{a + \beta\cos x}.$$

17. Νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ παρακάτω ὁλοκληρώματα:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}dx.$$

18. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι γιὰ κάθε φυσικὸ ἀριθμὸ n ἰσχύει ἡ σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\pi.$$

19. Νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ παρακάτω ὁλοκληρώματα:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin kx}{x(x^2+a^2)}dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^4+3x^2+2)}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x(1+x+x^2)}dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x-1)^2+x}dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 6x}{x(x-1)^2+2x}dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x(x^2+2x+5)},$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin 2x}{x(x^2+1)dx}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+13}dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(2+x^2)}dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 - 2x + 5} dx, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x(1 + x^2)^3}, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{(x^2 + 1) \sin 2x}{x(x^4 + 1)} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x(x^2 + 4x + 5)} dx, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(10 + 6x + x^2)} dx,$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{(x^2 + 1) \sin x dx}{x(4 + 9x^2)^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^3 + x^2 + x}.$$

Περιεχόμενα

Βοηθήματα

Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.

Joseph Bak and Donald J. Newman, *Complex analysis*, Springer-Verlag, 1982.

John B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, 1978.

Γ. Λ. Καρακώστας, *Μιγαδικὴ Ἀνάλυση*, Ἰωάννινα, 2006.

Δ. Χ. Κραβαρίτης, *Ἐφαρμοσμένη Μιγαδικὴ Ἀνάλυση*, Ἐκδόσεις Συμεών, 2006.

Raghavan Narasimhan, *Complex Analysis in One Variable*, Birkhäuser, 1985.

Ι. Γ. Σφήκας, *Εἰσαγωγὴ στὴ Θεωρία Μιγαδικῶν Συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς*, Ἰωάννινα, 1989.

Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1974.

Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο
με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Διανέμεται Δωρεάν στους φοιτητές.