

ΘΑΝΑΣΗΣ Γ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΑΔΗΣ

Ο L. WITTGENSTEIN ΚΑΙ Η ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ  
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η περίπτωση των M. Dummett και B. Stroud

Δεν είναι εύκολο να γνωρίζουμε κατά πόσον ο Ludwig Wittgenstein (1889 - 1951) ξεκίνησε από τη μαθηματική σκέψη για να αναπτύξει τις φιλοσοφικές του θέσεις ή ακολούθησε την αντίστροφη πορεία. Το γεγονός είναι ότι διερευνώντας τις μαθηματικές του απόψεις, ανακαλύπτουμε τη συνάφειά τους με τις φιλοσοφικές του δηλώσεις.

Οι απόψεις του Wittgenstein για τα μαθηματικά είναι παρούσες σε όλο το έργο του, αλλά σε τρία έργα, όπως: [*Παρατηρήσεις πάνω στα θεμέλια των Μαθηματικών*] (*Remarks on the Foundations of Mathematics - RFM*), *Φιλοσοφικές Έρευνες (ΦΕ)* (*Philosophical Investigations - PI*) και *Φιλοσοφική Γραμματική (Philosophical Grammar - PG)*, έχουν λάβει συστηματικότερη μορφή.

Στο κείμενό μου θα προσπαθήσω μέσα από δυο άρθρα των M. Dummett και B. Stroud<sup>1</sup>, να καταδείξω τις απόψεις του βιεννέζου φιλοσόφου για τη φιλοσοφία των Μαθηματικών, επιχειρώντας ένα σύντομο σχολιασμό των δύο κειμένων τα οποία θεωρώ ως αλληλοσυμπληρούμενα παρά την έντονη κριτική που άσκησε ο Stroud στις απόψεις του Dummett.

Συνοπτική εισαγωγή στις φιλοσοφικές απόψεις του Wittgenstein.

Δύο έργα σηματοδοτούν τις δύο φιλοσοφικές περιόδους του αυστριακού φιλοσόφου, το *Tractatus Logico-Philosophicus (TLP)* που αναφέρεται στην πρώτη και οι *Φιλοσοφικές Έρευνες* που αναφέρονται στην ύστερη. Και στις δυο φιλοσοφικές περιόδους, ο σκοπός του Wittgenstein υπήρξε η

1. Τα κείμενά τους δημοσιεύθηκαν στο: G. Pitcher (ed.), *Wittgenstein: "The Philosophical Investigations"*, New York, MacMillan, 1966 και έχουν τίτλο: M. Dummett, "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", σσ. 2420-447 και B. Stroud, "Wittgenstein and Logical Necessity", σσ. 477-496.



προσπάθεια κατανόησης της δομής των ορίων της σκέψης και η μέθοδός του εντοπιζόταν στη μελέτη της δομής και των ορίων της γλώσσας. Η φιλοσοφία του για την κριτική της γλώσσας μοιάζει με την προοπτική και το σκοπό της καντιανής κριτικής της σκέψης. Ο Wittgenstein θέλησε να ανακαλύψει την ακριβή τυπολογία της γραμμής, η οποία χωρίζει αυτό που έχει νόημα από το ανόητο<sup>1</sup>. Θεώρησε ότι ο μόνος τρόπος για να επιτύχουμε την κατανόηση της δομής αυτού που μπορεί να λεχθεί, είναι να χαράξουμε τα όρια κατανόησής του, επειδή όρια και δομή έχουν κοινή προέλευση.

### *Tractatus Logico-Philosophicus (TLP)*

#### 1. Γλώσσα - Λογική

Στο *TLP* ο Wittgenstein προσπαθεί να χαράξει τα όρια της γλώσσας και της σκέψης. Η κριτική του Wittgenstein είναι μια έμμεση κριτική της σκέψης διαμέσου της γλώσσας<sup>2</sup>. Η γλώσσα στο *TLP* μεταμφιέζει τη σκέψη και η αληθινή μορφή των σκέψεων αποκαλύπτεται από την τυπική (formal) ανάλυση των σύνθετων (compound) προτάσεων της γλώσσας σε στοιχειώδεις (elementary) προτάσεις. Η τυπική ανάλυση είναι η εξέταση του κόσμου από μια καθαρά λογική οπτική. Σύμφωνα με αυτήν, η πραγματικότητα προϋποτίθεται ως σύμπλεγμα γεγονότων που επιδέχονται μια συνεχή ανάλυση, ώσπου να βρεθούν τα έσχατα, ατομικά γεγονότα. Τα γεγονότα αυτά ονομάζονται έσχατα (ultimate), λόγω του ότι δεν συνδέονται μεταξύ τους. Απέναντι σε αυτή την πραγματικότητα - σύμπλεγμα, τοποθετείται ένα άλλο σύμπλεγμα που είναι η γλώσσα. Οι σύνθετες προτάσεις της γλώσσας αντιστοιχούν σε σύνθετα γεγονότα της πραγματικότητας και οι ατομικές σε ατομικά γεγονότα. Η γλώσσα αναλύεται σε έσχατες, ατομικές προτάσεις και αντιστοιχεί στο σύμπλεγμα κόσμος - πραγματικότητα, και αυτό το σύμπλεγμα με τη σειρά του τεμαχίζεται τελικά σε ατομικά γεγονότα (atomic facts), «έτσι που αν δοθούν όλες οι αληθινές στοιχειώδεις προτάσεις, ο κόσμος περιγράφεται ολότελα» (*TLP* 4.26).

#### 2. Θεωρία του νοήματος - Επαγωγή

Ο Wittgenstein θεωρεί τις στοιχειώδεις προτάσεις ως το σύνολο των εμπειρικών (factual) προτάσεων οι οποίες είναι λογικά αναξάρτητες η μια από την άλλη. Η αλήθεια ή το ψεύδος μιας στοιχειώδους πρότασης δεν συ-

1. D. Pears, *Wittgenstein*, London, Fontana Press, 1971, σ. 12.

2. Στο ίδιο, σ. 47.



νεπάγεται την αλήθεια ή το ψεύδος της άλλης. «Από μια στοιχειώδη πρόταση δεν συνεπάγεται καμιά άλλη» (*TLP* 5.133). Στο *TLP* ο Wittgenstein εκφράζει την άποψη ότι οι εμπειρικές προτάσεις κομίζουν επαρκή εξήγηση της λογικής αναγκαιότητας. Η αλήθεια ή το ψεύδος κάθε εμπειρικής πρότασης εξαρτάται από την αλήθεια ή το ψεύδος των προτάσεων στις οποίες αναλύεται. Κάθε εμπειρική πρόταση είναι συνάρτηση της αλήθειας των προτάσεων που αναλύεται. Οι προτάσεις των μαθηματικών και της λογικής είναι ταυτολογίες<sup>1</sup>.

### Φιλοσοφικές Έρευνες (ΦΕ)

Στις Φιλοσοφικές Έρευνες, διερευνώνται από τον Wittgenstein οι ειδικές διαφορές μεταξύ των ποικίλων μορφών των προτάσεων. Ο φιλόσοφος έχει τη γνώμη στο ύστερο έργο του, ότι το *TLP* περιφρονούσε την ενασχόληση με τη συγκεκριμένη περίπτωση και οδηγούνταν σε μια ψευδή γενίκευση. Η στροφή του ύστερου Wittgenstein στη γλώσσα καταργεί τις γενικεύσεις και δηλώνει το ενδιαφέρον του για τις ιδιαίτερες περιπτώσεις που περιγράφει η γλώσσα. Τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί δεν τα κατατάσσει σ' ένα σύστημα ταξινομήσεων αλλά παρακολουθεί τη λειτουργία τους ως να βρίσκεται το κέντρο τους (ο πυρήνας) παντού. Γι' αυτό και δεν προσπάθησε να δημιουργήσει φιλοσοφικό σύστημα. Στις Φιλοσοφικές Έρευνες, η φιλοσοφική πρακτική δεν εισηγείται καμιά επιστημονική θεωρία ούτε και λειτουργεί με επιστημονική μέθοδο. Η σωστή της μέθοδος είναι η συλλογή και η επισκόπηση των γλωσσικών γεγονότων και δεν συγκροτεί καμιά επιστημονική θεωρία γι' αυτά. Τα γεγονότα έχουν μια σημασία η οποία δεν μπορεί να γίνει αντιληπτή από καμιά επιστημονική θεωρία. Ο Wittgenstein συλλέγει, ταξινομεί, παραθέτει και επισκοπεί τα γεγονότα και για να φτάσει στη θέση της επισκόπησης ή της αποσαφήνισης των γεγονότων ή των εννοιών ξεφεύγει από τη γενίκευση και από την καταφυγή σε στηρίγματα που βρίσκονται έξω από το χώρο της γλώσσας. Αφήνει κατά μέρος την οντολογία και προσφεύγει στην ανθρωποκεντρική θεωρία και με κεντρικό σημείο αναφοράς τη γλώσσα, ερμηνεύει τον κόσμο.

Όλα αυτά δείχνουν ότι οι θέσεις του Wittgenstein δεν μπορούν να διατυπωθούν μέσω της τυπικής θεωρίας του νόηματος. Ο Wittgenstein πιστεύει ότι το νόημα της γλώσσας είναι πραξολογικό και σύνθετο και δεν αποδίδεται με τυπικούς λογικούς όρους, γιατί η ίδια η φύση της γλώσσας καθιστά αδύνατη την τυπική συστηματοποίησή της. Το νόημα στις Φιλοσο-

1. Εκτενή ανάλυση για το θέμα αυτό, επιχειρεί ο P.M.S. Hacker στο βιβλίο του: *Insight and Illusion*, Oxford, Clarendon Press, 1986, σσ. 28-55.



φικές Έρευνες είναι αυτό που εξηγείται με το να δίνουμε μια εξήγηση του νόηματος. Το νόημα είναι το σύστοιχο της κατανόησης και η κατανόηση είναι το σύστοιχο της εξήγησης. Η κατανόηση, λόγου χάρη μιας λέξης, είναι το θέμα της γνώσης του τρόπου για να τη χρησιμοποιήσουμε σωστά, δηλαδή να γίνουμε κάτοχοι της χρήσης της (Gebrauch, use). Η σωστή χρήση της αποτελεί το κριτήριο της κατανόησής της. Έτσι δηλώνεται ότι το νόημα μιας λέξης είναι η χρήση της στη γλώσσα (ΦΕ 143). Τα γλωσσικά παιχνίδια είναι τρόποι χρήσης σημείων. Η μελέτη τους είναι μελέτη των μορφών της γλώσσας, όπου η σημασία μιας λέξης ή το νόημα μιας έκφρασης σχετίζονται με ένα πλαίσιο, με κανόνες εφαρμογής, με εκμάθηση και προπάντων με υποδείγματα. Εκείνο που δυσκολεύει τη μελέτη τους, κατά τον Wittgenstein, είναι η τάση μας για γενίκευση, η οποία προέρχεται από τις φιλοσοφικές συγχύσεις<sup>1</sup>. Τα γλωσσικά παιχνίδια δεν έχουν κοινές ιδιότητες και δεν μπορούμε να τα εξηγήσουμε απαριθμώντας τα χαρακτηριστικά τους. «Τα σαφή και απλά γλωσσικά μας παιχνίδια δεν είναι προκαταρκτικές μελέτες για μια μελλοντική ρύθμιση της γλώσσας, σαν να λέγαμε πρώτες προσεγγίσεις, όπου δεν λαβαίνουμε υπόψη μας την τριβή και την αντίσταση του αέρα. Τα γλωσσικά παιχνίδια είναι μάλλον αντικείμενα σύγκρισης η οποία πρέπει να φωτίσει τις καταστάσεις της γλώσσας μας μέσα από την ομοιότητα ή την ανομοιότητα» (ΦΕ 130).

Η γλώσσα συνδέεται ως εξής με το γλωσσικό παιχνίδι: Η ομιλία της γλώσσας, κατά τον Wittgenstein, είναι μέρος της μορφής ζωής. Το ομιλείν είναι συνδεδεμένο με τη δραστηριότητα ενός γλωσσικού παιχνιδιού. Το να χρησιμοποιούμε προτάσεις για διαφορετικούς σκοπούς ομιλίας συνίσταται στο να δημιουργούμε και να αντιδρούμε σε κινήσεις στο γλωσσικό παιχνίδι. Δηλαδή στην παραγωγή και την ανταπόκριση σε εκφράσεις της γλώσσας μας. Η χρησιμοποίηση μιας πρότασης για να βεβαιώσουμε κάτι ή για να δώσουμε μια διαταγή προϋποθέτει την κατοχή μιας τεχνικής, από μέρος του ομιλητή, δηλαδή των παιχνιδιών της βεβαίωσης και της διαταγής. Μ' άλλα λόγια προϋποθέτει την κατανόηση της χρήσης των προτάσεων. Μόνο μέσω της πρότασης μπορεί να κάνει κάποιος μια κίνηση στο γλωσσικό παιχνίδι και για να κατανοήσει αυτή την πρόταση, προϋποθέτει να κατέχει το συσχετιζόμενο με την πρόταση γλωσσικό παιχνίδι. Οι έννοιες αυτές εντάσσονται στο πλαίσιο της «μορφής ζωής», η οποία είναι ένα δεδομένο και αναιτιολόγητο πραξολογικό πρότυπο της ανθρώπινης δραστηριότητας και όπως θα έλεγε ο Wittgenstein: «μέρος της ανθρώπινης ιστορίας» (ΦΕ 125).

1. L. Wittgenstein, *Το Μπλε και το Καφέ Βιβλίο*, Μετ. Κ. Κωβαίος, Αθήνα, Καρδαμίτσας, 1984, σ. 44.



Οι παραπάνω απόψεις σηματοδοτούν δυο αλλαγές μεταξύ της πρώιμης και της ύστερης περιόδου του Wittgenstein:

1. Την εγκατάλειψη της ιδέας ότι η δομή της πραγματικότητας καθορίζει τη δομή της γλώσσας και την υποστήριξη της αντίστροφης θέσης ότι η γλώσσα μας καθορίζει τον τρόπο κατανόησης της πραγματικότητας.

2. Ενώ στο *TLP*, θεωρεί ότι όλες οι γλώσσες έχουν κοινή λογική δομή η οποία αποκαλύπτεται με τη λογική (τυπική) ανάλυση, στις *Φιλοσοφικές Έρευνες* γράφει ότι η γλώσσα δεν έχει κοινή ουσία, η οποία και δεν εξηγεί τις συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων μορφών της<sup>1</sup>. Οι μορφές της γλώσσας συνδέονται μεταξύ τους μ' ένα σύνθετο τρόπο, όπως συνδέονται τα παιχνίδια ή τα πρόσωπα των ανθρώπων που ανήκουν στην ίδια οικογένεια. Η γλώσσα αποτελεί ένα κομμάτι της ανθρώπινης ζωής και πρέπει να εξεταστεί μαζί με την παράθεση όλων των συμπλεγμάτων μορφής και λειτουργίας της. Γι' αυτό το λόγο και οι φιλοσοφικές θεωρίες είναι προϊόντα της φαντασίας μας που τυφλώνουν και δεν επιτρέπουν να δούμε τα πραγματικά συμπλέγματα των γλωσσικών πρακτικών μας.

Το κείμενο του M. Dummett.

Ο Dummett αναφέρεται ως επί το πλείστον στο έργο του Wittgenstein (*Remarks on the Foundation of Mathematics*), παραδεχόμενος ότι ο φιλόσοφος εκφράζει με μεγάλη σαφήνεια για τα προβλήματα της μαθηματικής επιστήμης, εμφανίζει όμως αδυναμίες στη συγκρότηση μιας μαθηματικής θεωρίας. Η δομή και το περιεχόμενο του κειμένου έχουν ως εξής:

Πρώτα παραθέτει ο Dummett την προβληματική των δυο μεγάλων ερμηνευτικών τάσεων στα μαθηματικά: του πλατωνισμού και των διάφορων μορφών της κατασκευασιορχίας (*constructivism*)<sup>2</sup>. Κατόπιν εκφράζει

1. Hacker, ό.π., σ. 29. «Συγκεκριμένα συμφωνεί με τον Frege και τον Russell, ότι η γλώσσα μεταμφιέζει τη λογική μορφή αλλά διαφωνεί ριζικά με την άποψή τους ότι η γλώσσα μειονεκτεί λογικά.» Η στάση του Wittgenstein στο *TLP* είναι ότι δεν υπάρχει μέση οδός μεταξύ του έχοντος νόημα και του ανόητου.

2. Κατά τον «μαθηματικό πλατωνισμό» οι μαθηματικές έννοιες συγκροτούν ένα αυτόνομο και ανεξάρτητο από μας πεδίο, ένεκα του οποίου οι προτάσεις τους είναι είτε αληθείς ή ψευδείς. Βλ. P. Bernays, "On Platonism", (1935) στο P. Benacerraf, H. Putnam, *Philosophy of Mathematics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1983. Αντίθετες προς τον μαθηματικό ρεαλισμό που εκφράζουν οι πλατωνιστές είναι οι «κατασκευαστικές απόψεις», σύμφωνα με τις οποίες το μαθηματικό αντικείμενο είναι: α) κατασκευή και όχι αυθύπαρκτη οντότητα και β) η κατασκευή εξαρτάται από τη γνωστική διεργασία. Βλ. Π. Χριστοδουλίδη, "Ο Wittgenstein και η Φιλοσοφία των



την άποψη ότι ο Wittgenstein υιοθετεί ακραία εκδοχή της κατασκευασιαρχίας για την οποία η αλήθεια της μαθηματικής πρότασης είναι η απόδειξή της, δηλαδή ότι η απόδειξη ταυτίζεται με τη μαθηματική αλήθεια (proof is truth). Φυσιολογικά λοιπόν έρχεται και η επόμενη θέση του Wittgenstein για την έννοια της λογικής αναγκαιότητας, θέτοντας τα ερωτήματα για την προέλευση και την αναγνώρισή της. Εδώ γίνεται και η πρώτη νύξη από τον Dummett ότι ο Wittgenstein υιοθετεί τη συμβασιοκρατική μέθοδο, όπου η αναγκαιότητα δεν επιβάλλεται από εμάς πάνω στην πραγματικότητα αλλά πάνω στη γλώσσα<sup>1</sup>. Δηλαδή μια πρόταση είναι αναγκαία λόγω της επιβολής της και όχι λόγω της σχέσης με το πεδίο των αναγκαιών οντοτήτων της. Κατ' αυτό τον τρόπο η λογική αναγκαιότητα εξαρτάται από τις προθέσεις μας, που αντιστοιχούν στην εκάστοτε περίσταση (ντεσιζιονισμός). Η παραπάνω ανάγνωση διευκολύνει αφάνταστα τον Dummett να αποδώσει στον Wittgenstein το χαρακτηρισμό του ακραίου συμβασιοκράτη (full-blooded conventionalist), για τον οποίο η λογική αναγκαιότητα κάθε απόφασης είναι πάντα η άμεση έκφραση μιας γλωσσικής σύμβασης, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη καμιά προγενέστερη σύμβαση. Για να γίνουμε σαφέστεροι, ο Dummett αναφέρει ότι, κατά τον Wittgenstein, σε κάθε βήμα μας είμαστε ελεύθεροι να δεχθούμε ή να απορρίψουμε μια απόδειξη, χωρίς να μας εμποδίζει καμιά διαδικασία συναγωγής αποτελέσματος-δηλαδή αποδοχής αξιωμάτων τα οποία δηλώνονται μέσα από προτάσεις θεωρημάτων - να δεχθούμε ή να απορρίψουμε την απόδειξη<sup>2</sup>. Και φυσικά μια τέτοια ανάγνωση δεν βρίσκει σύμφωνο τον Dummett ο οποίος θα θεωρούσε ορθή την άποψη του Wittgenstein, μόνο στην περίπτωση κατά την οποία δεν θα είχαν πλήρως διαμορφωθεί οι αρχές της συναγωγής ή θα βρίσκονταν σε ατελή μορφή.

Ένα άλλο στοιχείο που θίγει ο Dummett στο κείμενό του είναι το θέμα της μαθηματικής λογικής στα γραπτά του Wittgenstein και η συνάφειά του με τη θεωρία του νοήματος. Ο Dummett θεωρεί ότι η κριτική που ασκεί στη μαθηματική λογική ο Wittgenstein είναι ουσιαστικά κριτική του νοήματος<sup>3</sup>. Εδώ ο Dummett θίγει το σημείο της λειτουργίας των κανόνων στη μαθηματική πράξη και κατ' επέκταση στην κανονιστική διάσταση της γλωσσικής δραστηριότητας. Είναι ίσως το σημείο για τον Dum-

Μαθηματικών», στο *Συμπόσιο Wittgenstein*, Γ. Τζαβάρας (επ.), Αθήνα, Δωδώνη, 1991, σ. 62. καθώς και το βιβλίο του Γ. Μαραγκού, *Γνωσιολογισμοί*, Αθήνα, Οδυσσεάς, 1996, σσ. 22-51.

1. Dummett, ό.π., σ. 424.

2. Στο ίδιο, σ. 424.

3. Στο ίδιο, σ. 428.



mett στο οποίο ο Wittgenstein αναφέρεται στην πολυχρωμία (motley) των μαθηματικών όπου κατά το παράδειγμα των ιντουϊσιονιστών δεν μπορούμε από πριν να γνωρίζουμε τις δυνατές μορφές των επιχειρημάτων τα οποία χρησιμοποιούνται στις μαθηματικές αποδείξεις<sup>1</sup>. Έτσι η δυνατότητα ή μη ύπαρξης της απόδειξης θα βρίσκεται στην δυνατότητα της εκάστοτε απόφασής μας. Ενώ λοιπόν κατά τον Dummett η απόδειξη πρέπει να έχει μια τέτοια μορφή που να την καθιστά απολύτως αληθή ή να την αποκλείει από την δυνατότητα της γλωσσικής έκφρασής της, η στάση του Wittgenstein όπως συνεχίζει η ανάγνωση του Dummett, δεν δηλώνει καθαρά αν η απόδειξη εκπληρώνει τα πιο πάνω χαρακτηριστικά. Σύμφωνα με τον Dummett, ο Wittgenstein θεωρεί ότι μπορούμε να ξεχωρίσουμε από πριν τις πιθανές μορφές των επιχειρημάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις μαθηματικές αποδείξεις. Η απόδειξη - γεγονός που δεν μπορεί να δεχθεί ο Dummett - έχει ως στόχο να μας οδηγήσει σε σχηματισμό λέξεων απρόσβλητων ή στον αποκλεισμό μορφών από τη γλώσσα μας. Και η αποδοχή ενός θεωρήματος σημαίνει την αποδοχή ενός νέου γλωσσικού κανόνα έτσι βλητων ή στον αποκλεισμό μορφών από τη γλώσσα μας. Και η αποδοχή ενός θεωρήματος σημαίνει την αποδοχή ενός νέου γλωσσικού κανόνα έτσι που οι έννοιες μας να μην είναι δυνατόν να μείνουν αναλλοίωτες στην απόδειξη.

Ένα άλλο σημείο που θίγει ο Dummett είναι η διαφορά μεταξύ του Wittgenstein και των ευορατικών (ιντουϊσιονιστών). Ενώ για τους πλατωνιστές το νόημα των μαθηματικών όρων εξαρτάται από τις αληθοσυνθήκες τους, για τους ευορατικούς το νόημα σχετίζεται με τις συνθήκες που δικαιολογούν την επιβεβαίωσή του<sup>2</sup>. Αρνούμενος και τις δύο εκδοχές ο Wittgenstein, κατά τον Dummett, καταφεύγει στην έννοια της χρήσης ως βασικής έννοιας συγκρότησης του νοήματος. Και με δεδομένη τη χρήση εμφανίζεται η βασική του ιδέα της απόφασης για την αλήθεια ή μη των μαθηματικών προτάσεων σε κάθε περίπτωση. Δηλαδή το θέμα του ντεσιζιονισμού σύμφωνα με τον οποίον εξαρτάται από τη βούλησή μας να αποφασίσουμε ποιά πρόταση που επιλέγουμε ισχύει αναγκαστικά. Ο Dummett έχει την εντύπωση ότι σ' αυτό το σημείο ο Wittgenstein υπονομεύει τη γλωσσική επικοινωνία λέγοντας ότι εξαρτάται από την απόφαση μας να θεωρήσουμε μια συγκεκριμένη πρόταση ως αληθή. Γιατί κατά τον Dummett το γεγονός της απόφασής μας δεν θα επηρεάσει μόνο τη συγκεκριμένη παραπάνω πρόταση αλλά θα επηρεάσει και το νόημα των άλλων προτάσεων και έτσι

1. Στο ίδιο, σ. 429.

2. Στο ίδιο, σ. 434.



για να ορίσουμε το νόημά τους θα χρειαστεί να έχουμε μια συνολική θεώρηση για την έννοια της χρήσης στη γλώσσα, γεγονός το οποίο είναι αδύνατο<sup>1</sup>.

Και ο Dummett καταλήγει με την άποψη ότι, ο Wittgenstein θεωρεί ότι το νόημα μιας μαθηματικής πρότασης καθορίζεται από την απόδειξη δηλαδή από την εύρεση της απόδειξης κατά την οποία είναι δυνατό να αλλάξει και το νόημα της μαθηματικής πρότασης. Στο σημείο αυτό εκφράζει τη γνώμη ότι οι απόψεις του Wittgenstein παρουσιάζουν σημαντικές αδυναμίες γιατί αποτυγχάνουν να παρουσιάσουν μια ενοποιημένη θεωρία για τα μαθηματικά. Για τον Dummett ο κυριότερος λόγος άρνησης της πλατωνιστικής αντικειμενικότητας της μαθηματικής αλήθειας από τον Wittgenstein, είναι η μη αποδοχή από μέρος του της αντικειμενικότητας της απόδειξης των μαθηματικών<sup>2</sup>. Η άποψή του είναι ότι η απόδειξη δεν μας ωθεί σε καμιά αποδοχή. Κατά τον Wittgenstein η πολυχρωμία (motley) των μαθηματικών συνίσταται στο γεγονός ότι δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε όλες τις δυνατές μορφές των επιχειρημάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στα μαθηματικά.

Τέλος ο Dummett στην ανάγνωση του Wittgenstein προτείνει μια ενδιαμέση οδό μεταξύ του πλατωνισμού και της κατασκευασιαρχίας. Σύμφωνα με αυτή την ανάγνωση η ύπαρξη των αντικειμένων αναδύεται ενώπιόν μας με σκοπό την γνωσιακή προσπέλασή τους. Δεν κατασκευάζουμε τα αντικείμενα αλλά πρέπει να τα δεχθούμε όπως τα βρίσκουμε και μας επιβάλλονται<sup>3</sup>.

### *Η απάντηση του Stroud*

Ο Stroud, κατά πρώτο λόγο, εστιάζει την απάντησή του στον χαρακτηρισμό που αποδίδεται από τον Dummett στον Wittgenstein ως «ακραίο συμβασιοκράτη»<sup>4</sup>. Ειδικά στο θέμα που αφορά τη μαθηματική απόδειξη ο Stroud ερμηνεύει τη θέση του Wittgenstein διαφορετικά από τον Dummett. Η θέση του Wittgenstein δηλώνει ότι είναι δυνατόν για τον καθένα να δεχτεί τα αξιώματα και τους κανόνες της συναγωγής και να απορρίψει την απόδειξη χωρίς να έχει αποτύχει να κατανοήσει τα αξιώματα ή τους κανόνες<sup>5</sup>. Ο Dummett αντιτίθεται σ' αυτήν λέγοντας ότι δεν γνωρίζουμε πώς θα φαινόταν η άποψη του Wittgenstein σ' εκείνον ο οποίος υπό από τις συνήθεις συνθήκες θα απέρριπτε την απόδειξη. Κατά τον Dummett τα επι-

1. Στο ίδιο, σ. 435.

2. Στο ίδιο, σ. 445-6.

3. Στο ίδιο, σ. 447.

4. Stroud, ό.π., σ. 477.

5. *RFM*, IV, 48.





χειρήματα που παραθέτει ο Wittgenstein είναι ασθενή. Σύμφωνα όμως με τον Stroud, εκείνο που απασχολεί τον Wittgenstein δεν είναι η παραπάνω άποψη που δηλώνει η ανάγνωση του Dummett αλλά το να εξηγήσει τι είναι αυτό που κάνει την άρνηση της αναγκαιάς αλήθειας, αδύνατη ή ακατανόητη. Δηλαδή δεν είναι αρκετό να λέμε ότι κάτι είναι «λογικά αδύνατο», όταν η ίδια η εξήγηση της λογικής αναγκαιότητας αμφισβητείται<sup>1</sup>. Ο Stroud θεωρεί ότι με τα γραπτά του ο Wittgenstein αντιτίθεται στη δεσπόζουσα άποψη των Frege, Russell και του Λογικού Θετικισμού, όπου η φιλοσοφία έχει λόγο ύπαρξης ως λογική έρευνα.

Η πλατωνική αντίληψη για τις μαθηματικές προτάσεις αδυνατεί να δώσει μια πλήρη εξήγηση για το τι σημαίνει «σωστό συμπέρασμα» κατά την εκτέλεση μιας μαθηματικής πράξης, όπως στην περίπτωση που δίνουμε εντολή σε κάποιον να εκτελέσει την πράξη της πρόσθεσης  $\div 2$  σε μια αριθμητική ακολουθία. Για τους πλατωνιστές και τους οπαδούς της τυποκρατικής θεωρίας εκείνος που δεν ανταποκρίνεται στη σωστή εκτέλεση της πράξης, δηλαδή στην πρόσθεση δύο αριθμών σε κάθε προηγούμενο ούτως ώστε να έχουν οι διαδοχικοί αριθμοί της ακολουθίας μια διαφορά δύο αριθμών ένας από τον άλλον, θεωρείται ότι αυτός που εκτελεί την πράξη ή έχει επιδείξει εσφαλμένη κατανόηση της εντολής ή έχει κάνει λάθος<sup>2</sup>. Η συμβασιοκρατική αντίρρηση στον πλατωνισμό συνίσταται στο να δείξει οι μέχρι στιγμής τρόποι της μέτρησης, του υπολογισμού και του συμπερασμού δεν είναι οι μόνοι δυνατοί που υπάρχουν. Όμως στην παρούσα περίπτωση της πρόσθεσης είναι λογικά αδύνατο για κάποιον να καταλάβει τι σημαίνει  $\div 2$  και να εκτελέσει την πράξη της πρόσθεσης στην ακολουθία παίρνοντας διαφορετικό αποτέλεσμα.

Για τον Wittgenstein όμως το πρόβλημα βρίσκεται στην ίδια τη φύση της κατανόησης των εννοιών. Στην προκειμένη περίπτωση στην κατανόηση της εντολής<sup>3</sup>. Ο Wittgenstein αναφέρεται στη θεωρία του νοήματος και στα γλωσσικά παίγνια τα οποία όμως δεν περιορίζει στη γλώσσα, όπως εσφαλμένα διέκρινε ο Dummett. Για τον Wittgenstein, η ίδια η διαδικασία της κατανόησης αποτελεί ένα γλωσσικό παίγνιο και οι μαθηματικές προτάσεις εντάσσονται στη γενική θεώρησή του νοήματος, όπου η χρήση, η κατανόηση, η εξήγηση του νοήματος και οι κανόνες ισχύουν και για τις μαθηματικές προτάσεις. Ακόμη και στην περίπτωση των αποκλίσεων της εκτέλεσης υπολογιστικών πράξεων όπως λ.χ. κάποιος που έχει μάθει να εκτελεί την πράξη διαφόρων ακολουθιών όπως τις εκτελούμε και εμείς, άρχιζε να διαφο-

1. Stroud, ό.π., σ. 478.

2. Στο ίδιο, ό.π., σ. 480.

3. Στο ίδιο, ό.π., σ. 481.



ροποιείται από τις πράξεις εκείνες που πρέπει να γνωρίζουμε, το γεγονός αυτό σημαίνει, κατά τον Wittgenstein, ότι δεν ανήκει πλέον στο παίγνιο μας. Και στην ερώτηση του Wittgenstein για την προέλευση αυτής της νέας δυνατότητας, η απάντηση βρίσκεται μέσα στις πράξεις της αυτής διαδικασίας του συνάγειν (συμπεραίνειν), υπολογίζειν κ.ο.κ. Δηλαδή το πρόβλημα βρίσκεται στην κατανόηση κάποιου κανόνα και στην κατανόηση της πρακτικής η οποία έχει να κάνει με τη μορφή ζωής η οποία συγκεφαλαιώνει τις δι-υποκειμενικές πρακτικές.

Σύμφωνα με την ανάγνωση του Stroud, η παρέκκλιση από τον συνήθη τρόπο μέτρησης ή την εκτέλεση μιας πράξης, που αναφέρει ο Wittgenstein, δεν οφείλεται στο γεγονός ότι οι άνθρωποι που εκτελούν τις πράξεις έχουν αποδεχθεί διαφορετικές συμβάσεις και στη δεδομένη στιγμή της πράξης επιλέγουν τη μια σύμβαση από τις άλλες εναλλακτικές. Για παράδειγμα στην περίπτωση της εκτέλεσης της πράξης  $+ 2$  σε μια ακολουθία αριθμών. όπως 998, 1000..., ο μαθητής που εκτελεί την πράξη μετά τον αριθμό 1000 δεν γράφει τον αριθμό 1002 που είναι το αποτέλεσμα της πράξης  $1000 + 2$ , αλλά γράφει 1004. Αυτό σε καμιά περίπτωση δεν δηλώνει ότι ο μαθητής προτίμησε μια εναλλακτική σύμβαση από τις άλλες. Ή, ακόμη και αν αποφάσιζε ότι το αποτέλεσμα είναι 1002, δεν θα ήταν η απόφασή του που θα τον έκανε να κάνει το σωστό βήμα. Συνεπώς, ο Wittgenstein δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως «ακραίος συμβασιοκράτης».

Κατά τον Stroud, τα παραπάνω ερμηνεύονται από τον Wittgenstein με βάση τα «γεγονότα της φυσικής ιστορίας του ανθρώπου» (*RFM I*, 141). Η θέση αυτή του Wittgenstein, υποδηλώνει την αποδοχή μιας σειράς εκδοχών οι οποίες συγκροτούν την ανθρώπινη συμπεριφορά - στην προκειμένη περίπτωση την εκτέλεση της πράξης - και οι οποίες εντάσσονται και εμπλέκονται στο πλαίσιο της ανθρώπινης πρακτικής. Κατά τον Wittgenstein η κατανόηση του κανόνα καθορίζει ποιες εφαρμογές του είναι σωστές και ο τρόπος που ακολουθείται ένας κανόνας εξαρτάται από τη συγκεκριμένη μας πρακτική στο οικείο γλωσσικό παίγνιο<sup>1</sup>. Ως εκ τούτου, η κατανόηση των οδηγιών που λαμβάνουν να μην αποκλείει την αποδοχή άλλης μεθόδου ενώ βρίσκονται ακόμη σε συμφωνία μαζί μας σχετικά με τον κανόνα. Όπως στην περίπτωση του μαθητευόμενου που εκτελεί την πράξη  $+ 2$  η αδυναμία εκτέλεσης της εντολής είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι εντάσσεται σε άλλο γλωσσικό παίγνιο. Όπου μπορεί να κατανοούμε ότι η συγκρότηση των εννοιών σ' αυτό το γλωσσικό παίγνιο είναι διαφορετική από τη δική μας, όμως ενδεχομένως να είναι δυνατόν να μην κατανοούμε τις έννοιες καθαυτές που εμφανίζονται στο διαφορετικό από το δικό μας γλωσσι-

1. Στο ίδιο, ό.π., σ. 492.



κό παίγνιο<sup>1</sup>. Το γεγονός ότι ακολουθείται ένα διαφορετικό γλωσσικό παίγνιο δεν αποτελεί, κατά τον Stroud, αποτέλεσμα μιας απόφασης (όπως ανέφερε ο Dummett) ούτε και σύμβασης. Είναι ένα ενδεχόμενο γεγονός για το οποίο όμως, αν δεν υπήρχε «συμφωνία σε κρίσεις», δεν θα υπήρχε η κατανόηση στη συγκρότηση των εννοιών του.

Αναφέρει ο Wittgenstein στις *Φιλοσοφικές Έρευνες*, παρ. 242: «Στην κατανόηση που έχει η γλώσσα ως μέσο της ανήκει όχι μονάχα η ομοφωνία σχετικά με τους ορισμούς, αλλά και η ομοφωνία στις κρίσεις (όσο και αν αυτό φαίνεται περίεργο). Αυτό μοιάζει να καταργεί τη λογική αλλά δεν το κάνει. Άλλο είναι η περιγραφή των μεθόδων για τη μέτρηση, κι άλλο είναι να βρίσκεις και να διατυπώνεις τα αποτελέσματα της μέτρησης. Αλλά αυτό που ονομάζουμε «μετρώ», το καθορίζει, ανάμεσα στα άλλα, και μια ορισμένη σταθερότητα στα αποτελέσματα της μέτρησης». Οι «κρίσεις» δηλώνουν τα όρια της γνώσης μας και η συμφωνία με αυτές αποτελεί την και θολική συμφωνία των ανθρώπων να συμπεριφέρονται σε δεδομένες περιστάσεις με συγκεκριμένο τρόπο. Είναι αυτές οι φυσικές αντιδράσεις, οι ίδιες ανθρώπινες πρακτικές που συγκροτούν τη μορφή ζωής μας.

Η ανάγνωση του Stroud δηλώνει ότι για να έχουμε τη δυνατότητα νοήματος και επικοινωνίας, χρειάζεται να έχουμε και κάποιες κανονικότητες οι οποίες δεν είναι μόνο λογικές αλλά *ανθρωπολογικές*<sup>2</sup>. Ο Wittgenstein αρνείται κάθε αναγωγή σε γενγονότα που ενδεχομένως να δικαιολογούν τη συμπεριφορά μας γιατί η ίδια η έννοια της ανθρώπινης πρακτικής ή της μορφής ζωής είναι αυτοθεμελιούμενη. Τελικώς ο Stroud οδηγείται στο συμπέρασμα ότι ο Wittgenstein δεν είναι ούτε ντεσιζιονιστής, λόγω της αποδοχής κάποιων δεσμεύσεων οι οποίες δεν είναι τυπικές αλλά αναγκαίες πραξεολογικές και ανθρωποκεντρικές. Σύμφωνα με τον Wittgenstein, κάθε δικαιολόγηση ή μη για τις παραπάνω έννοιες βρίσκεται στην άποψή του για τις «μορφές ζωής».

### Ε π ί μ ε τ ρ ο

Θεωρώ ότι η επίκληση της έννοιας των «μορφών ζωής» που ανακαλύπτουμε στον ύστερο Wittgenstein, είναι το σημείο που θα συμφωνήσω ανεπιφύλακτα με τον Stroud, αν και ο ίδιος στο κείμενό του δεν το αναλύει ιδιαίτερα. Όμως, το κρίσιμο σημείο των δύο κειμένων είναι το θέμα των κανόνων και της αναγκαιότητάς τους<sup>3</sup>. Ο Wittgenstein υπεραμύνεται της λο-

1. Στο ίδιο, ό.π., σ. 493.

2. Στο ίδιο, ό.π., σ. 495.

3. Για το ζήτημα της γλωσσικής κανονιστικότητας στον Wittgenstein καθώς και εκτενή κριτική στα κείμενα του Dummett, βλ. στο Β. Τσινόρεμα: «Ο Wittgenstein και



γικής αναγκαιότητας γιατί αναγνωρίζει ότι οι κανόνες εμπεριέχουν την αναγκαιότητα και επέχουν θέση αξιώματος. Οι κανόνες δεν πρέπει να ενταχθούν σε κάποιο αφηρημένο πλαίσιο εκτός της πραγματικότητας. Συνυπάρχουν με την ανθρώπινη πράξη και βρίσκονται σε συμφωνία με τη συλλογική μας απόφαση. Δεν δημιουργούν νέα νοήματα και δεν επιβάλλουν κανένα καθορισμό νοήματος, αντίθετα συνδέουν πάντοτε την έκφραση με τις συνθήκες που δικαιολογούν τη χρήση της. Η χρήση είναι η προϋπόθεση του κανόνα. Αρμόδια για κάθε καθορισμό είναι η ελεύθερη δημιουργία του ανθρώπινου νου. Για τον Wittgenstein, η αναπόδραση προσπάθειά μας να ερμηνεύσουμε τον κανόνα μας οδηγεί σε μια κατάσταση ατέρμονων ανακυκλώσεων και επανερμηνειών, όπου κάθε καινούργια προϋποθέτει τη νεότερή της για να ερμηνευθεί (*ΦΕ 198*).

Η εξάσκηση στη συνήθεια ή την κοινωνική πρακτική είναι ο τρόπος με τον οποίο ακολουθούμε τους κανόνες και η διαδικασία της εκμάθησης είναι πολύ σημαντική για την έννοια της κατανόησης των κανόνων. Η αναφορά του Wittgenstein στην «τυφλή υπακοή» του κανόνα (*ΦΕ 219*) αναγνωρίζει ότι ο κανόνας δεν είναι ανεξάρτητος από την ανθρώπινη κρακτική. Το νέο στοιχείο που δίνει ο Wittgenstein στην κανονιστική πρακτική είναι η εισαγωγή της έννοιας της «μορφής ζωής». Η έννοια της κανονιστικότητας και της αναγκαιότητας των κανόνων θεμελιώνεται στη «συμφωνία των κρίσεων» που υφίσταται στο πλαίσιο της μορφής ζωής. Ο κανόνας λειτουργεί μέσα στην πρακτική και αναφέρεται στην κανονικότητα της μορφής ζωής, δηλαδή στην συμφωνία στις πράξεις και στις κρίσεις. Παρομοίως, η συμφωνία των κρίσεων θεμελιώνεται μέσα στο πλαίσιο στο οποίο λαμβάνει χώρα. Είναι η ίδια η πρακτική των ανθρώπων που μοιράζονται τη μορφή ζωής και κατανοούν τη λειτουργία των κανόνων. Για να προλάβει σκοπέλους της λογικής ο Wittgenstein σχετικά με τη συμφωνία στις κρίσεις, αναφέρει ότι αποτελεί συναίνεση στην αποδοχή της μορφής της απεικόνισης, και εδώ δεν τίθενται ζητήματα για τις πεποιθήσεις και για την αλήθεια ή το ψεύδος τους που απασχολούν τη λογική (*RFM 353*).

Ο κανόνας τώρα, συνδέεται με τα μαθηματικά μέσω της εφαρμογής. Κομμάτι της έννοιας των μαθηματικών είναι η εφαρμογή. Οι μαθηματικοί κανόνες αντικατοπτρίζουν τις εμπειρικές προτάσεις και η μαθηματική πρόταση ορίζεται από την απόδειξη. Και όπως αρνείται τη θέση των Frege και Russell ότι τα μαθηματικά στηρίζονται αποκλειστικά στη λογική, διατυπώνει με σαφήνεια ότι: «Τα μαθηματικά είναι λογική μόνο σ' αυτό το μέ-



τρο: Οι κινήσεις τους είναι από κανόνες της γλώσσας μας σε άλλους κανόνες της γλώσσας μας» (*RFM I 165/99*). Για τον Wittgenstein οι νόμοι της λογικής εμφανίζουν τον τρόπο, με τον οποίο παρατηρούμε τον κόσμο. Δεν περιορίζονται από εμπειρικά δεδομένα αλλά αποτελούν γενικές περιγραφές.

Ο Wittgenstein δίνει διαφορετική φιλοσοφική ερμηνεία της λογικής αναγκαιότητας την οποία στηρίζει στην έννοια της πρακτικής, που διέπεται από κανόνες. Τα μαθηματικά αποτελούν μια κανονιστική πρακτική. Δεν απορρίπτει ο Wittgenstein την αναγκαιότητα, όπως εσφαλμένα του καταλογίζει ο Dummett. Η ερμηνεία που επιχειρεί ο Wittgenstein είναι πραξολογική αναγκαιότητα και δεν απειλεί την αναγκαιότητα των μαθηματικών.

Με τα παραπάνω βλέπουμε τη σύνδεση που κάνει ο Wittgenstein μεταξύ της θεωρίας του νόηματος και των μαθηματικών προτάσεων. Ο Wittgenstein δεν υπονομεύει σε καμιά περίπτωση το νόημα των προτάσεων της γλώσσας την ύστερη φιλοσοφία του, αντίθετα εισάγοντας την έννοια της χρήσης οριοθετεί το νόημα με την αναφορά της. Η πολλαπλότητα ή πολυχρωμία των μαθηματικών προτάσεων μας αναγκάζουν να εξετάσουμε χωριστά την κάθε περίπτωση και τις υπολογιστικές πράξεις που τη συνοδεύουν. «Και αυτή η πολλαπλότητα δεν είναι κάτι το σταθερό, το δοσμένο μία για πάντα. Αντίθετα γεννιούνται καινούργιοι τύποι γλώσσας, καινούργια γλωσσικά παίγνια, όπως θα μπορούσαμε να πούμε, και άλλοι παλιώνουν και ξεχνιούνται. (Μια προσεγγιστική εικόνα γι' αυτό θα μπορούσαν να μας δώσουν οι μεταβολές στα μαθηματικά)» (*ΦΕ 23*).

Ο Wittgenstein ζητά ν' αφήσουμε τα μαθηματικά ως έχουν. Και η υπηρεσία της φιλοσοφίας στα μαθηματικά καλό θα ήταν να περιοριστεί στη επισκόπηση (*Uebersicht, overview*) των κανόνων ορθής χρήσης των εννοιών, δηλαδή στην περίπτωσή μας, στην περιγραφή των κανόνων της γλώσσας και των κανόνων του μαθηματικού λογισμού. Η φιλοσοφία κατά τον Wittgenstein δεν λύνει τα προβλήματα της ζωής. Ούτε οι φιλόσοφοι θα κάνουν καλύτερα τα μαθηματικά με τις ερμηνευτικές τους παρατηρήσεις.



## SUMMARY

It is not widely known whether Wittgenstein started his mathematical thought in order to develop his philosophical theses or followed the opposite direction. The fact is that as we investigate his mathematical propositions, we reveal their similarity to his philosophical statements as well.

According to Dummett, Wittgenstein developed in mathematics a "full blooded conventionalism" holding that the logical necessity of any statement is always the direct expression of linguistic convention, to which the previously established conventions do not commit us. It seems that conventionalism either has to rely on the notion of the logical consequence, a metaphysical necessity, or distorts the deductive nature of mathematics and the compelling force of its proofs.

Stroud's reply on Dummett's claims seems to focus on the anthropological perspective which Wittgenstein gives in the understanding of the meaning of notions. In mathematics the problem is to be found in the nature of mathematical notions being in the context of language games and having normative characteristics. Such statement is leading us to the crucial concept of the forms of life, indicating that in order to communicate such as: understanding the "mole" of conventions we need to have normativities based on logical and anthropological data.

According to Wittgenstein mathematical propositions describe neither abstract entities nor empirical reality, nor do they reflect the transcendental workings of the mind. Their a priori status is due to the fact that, in spite of their descriptive appearance, their role is a normative one.

University of Ioannina

Thanassis Sakellariadis

