



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΔΥΙΚΟΤΗΤΑ POINCARÉ ΚΑΙ ALEXANDER

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

ΚΛΕΑΝΘΗΣ ΞΕΝΙΤΙΔΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2009



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000346927





**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ**

ΔΥΙΚΟΤΗΤΑ POINCARÉ ΚΑΙ ALEXANDER

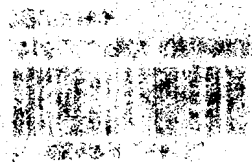
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

ΚΛΕΑΝΘΗΣ ΞΕΝΙΤΙΑΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2009





ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΟΝ ΚΑΙ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΝ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΟΝ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΝ

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΟΝ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΝ

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΟΝ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΝ



ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: Επαμεινώνδας Κεχαγιάς, Επίκουρος
Καθηγητής

ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Επαμεινώνδας Κεχαγιάς, Επίκουρος Καθηγητής

Θεμιστοκλής Κουφογιώργος, Καθηγητής

Χρήστος Μπαϊκούσης, Καθηγητής



Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ VII

1	ΟΜΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΟΜΟΛΟΓΙΑ	1
1.1	Cellular Ομολογιακές Ομάδες	1
1.2	Συνομολογιακές Ομάδες	9
1.2.1	Δυσικές Ομάδες	9
1.3	Συνομολογία Τοπολογικών Χώρων	16
1.3.1	Cellular Συνομολογία	19
2	CUP PRODUCT	23
2.1	Cup Product	23
2.2	Ο Συνομολογιακός Δακτύλιος	27
2.3	Τανυστικό Γινόμενο	30
3	ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ	33
3.1	Βασικές Ένοιες	33
3.2	Προσανατολισμός Πολλαπλοτήτων	35



4 ΕΥΘΕΑ ΟΡΙΑ 49

4.1 Ευθέα Όρια 49

5 POINCARÉ DUALITY 55

5.1 Συνομολογία Με Συμπαγή Υποστήριξη 55

5.2 Cap Product 59

5.3 Poincaré Duality 61

6 ALEXANDER DUALITY 67

6.1 Θεώρημα Alexander Duality 67

7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 73

7.1 Εμφυτεύσεις Πολλαπλοτήτων 73

7.2 $S^1 \hookrightarrow M^2$ 77

7.3 $S^2 \hookrightarrow S^3$ 78

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ 81

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 82



Εισαγωγή

Η έννοια της πολλαπλότητας υπεισέρχεται στα Μαθηματικά σχεδόν σε κάθε κλάδο, από την Ανάλυση (\mathbb{R}^n) μέχρι την άλγεβρα (ομάδες Lie). Ένα σημαντικό πρόβλημα είναι αυτό της εμφύτευσης: Δοθέντων δύο πολλαπλοτήτων N^k και M^n , ($k < n$), εμφυτεύεται η N στην M ; Και με πόσους τρόπους. Αυτό είναι ένα δύσκολο πρόβλημα το οποίο έχει απαντηθεί για συγκεκριμένες κατηγορίες πολλαπλοτήτων.

Σ' αυτή την μεταπτυχιακή εργασία θα μελετήσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα για $n=2,3$. Πιο συγκεκριμένα θα αρχίσουμε τη μελέτη μας με τη δυϊκότητα Poincare και Alexander μεταξύ τοπολογικών πολλαπλοτήτων. Η Poincare δυϊκότητα συνδέει τις ομολογιακές και συνομολογιακές ομάδες μίας πολλαπλότητας. Ο Henri Poincare απέδειξε μία διαφορετική μορφή του σημερινού θεωρήματος Poincare Duality για συμπαγείς πολλαπλότητες. Τη σύγχρονη μορφή του πήρε το θεώρημα τη δεκαετία του 1930 όταν οι Eduard Čech και Hassler Whitney εισήγαγαν τα cup και cap products. Η Alexander δυϊκότητα είναι αποτέλεσμα του J.W.Alexander και συνδέει τη συνομολογιακή ομάδα ενός υποσυνόλου μίας πολλαπλότητας με την σχετική ομολογιακή ομάδα του συμπληρωματικού του υποσυνόλου. Για την απόδειξη του θεωρήματος Poincare Duality θα χρειαστούμε τη θεωρία των ευθέων ορίων μιας και η απόδειξη θα δοθεί για κάθε πολλαπλότητα, όχι απαραίτητα συμπαγή. Για το θεώρημα Alexander Duality θα χρειαστούμε μια ειδική περίπτωση της Čech συνομολογίας. Επίσης θα εισάγουμε την έννοια του προσανατολισμού σε μία πολλαπλότητα, αφού τα δύο παραπάνω θεωρήματα εφαρμόζονται σε προσανατολισμένες πολλαπλότητες.

Ειδικά, στο πρώτο κεφάλαιο θα κάνουμε μία εισαγωγή στις ομολογιακές και τις συνομολογιακές ομάδες. Θα μελετήσουμε τις cellular ομολογιακές



ομάδες και σύμφωνα με αυτήν τη μελέτη θα υπολογίσουμε τις ομολογιακές ομάδες κάποιων βασικών χώρων που έχουν CW ανάλυση, όπως ο μιγαδικός προβολικός χώρος CP^n , η προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους g , M_g , και η μη προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους g , N_g . Στην ενότητα των συνομολογιακών ομάδων θα κάνουμε μία εισαγωγή στις συνομολογιακές ομάδες τοπολογικών χώρων και τις cellular συνομολογιακές ομάδες. Επίσης θα ορίσουμε το συναρτητή $\text{Ext}(_, _)$ ο οποίος είναι πολύ χρήσιμος για τον υπολογισμό των συνομολογιακών ομάδων. Πράγματι, αν C είναι ένα αλυσιδωτό complex ελεύθερων αβελιανών ομάδων και G μία ελεύθερη αβελιανή ομάδα, τότε από το Universal Coefficient Theorem θα έχουμε τον ισομορφισμό:

$$H^n(C; G) \approx \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) \oplus \text{hom}(H_n(C), G)$$

αφού η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow H^n(C; G) \longrightarrow \text{hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0$$

διασπάται.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα ορίσουμε το cup product. Έστω R ένας δακτύλιος και X ένας τοπολογικός χώρος. Το cup product είναι μία απεικόνιση:

$$S^k(X; R) \times S^l(X; R) \xrightarrow{\smile} S^{k+l}(X; R)$$

Απεικονίζει το γινόμενο των συναλυσίδων $\varphi \in S^k(X; R)$ και $\psi \in S^l(X; R)$ στην $k+l$ -συναλυσίδα $\varphi \smile \psi$ που η τιμή της σε ένα singular simplex $\sigma : \Delta^{k+l} \rightarrow X$ δίνεται από τον τύπο:

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}) \psi(\sigma|_{[v_k, \dots, v_{k+l}]})$$

Θα δούμε ότι το cup product επάγεται στις συνομολογιακές ομάδες. Επίσης επάγει ένα γινόμενο στην βαθμολογημένη ομάδα $H^*(X; R)$ ενός χώρου X , που είναι το ευθύ άθροισμα των ομάδων $H^i(X; R)$. Έτσι η ομάδα $H^*(X; R)$ γίνεται δακτύλιος. Δύο ομοιομορφικοί χώροι X και Y έχουν ισόμορφους δακτύλιους $H^*(X; R)$ και $H^*(Y; R)$. Έτσι μπορούμε να διαχωρίσουμε δύο χώρους για τους οποίους οι δακτύλιοι $H^*(X; R)$ και $H^*(Y; R)$ δεν είναι ισόμορφοι ως δακτύλιοι, ενώ πιθανόν να είναι ισόμορφοι ως ομάδες.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα εισάγουμε την έννοια του προσανατολισμού σε πολλαπλότητες. Παρατηρούμε ότι για μία πολλαπλότητα M διάστασης n ισχύει:

$$H_n(M, M - x) \approx \mathbb{Z}, \quad \forall x \in M$$

Ένας προσανατολισμός στο x θα είναι η επιλογή ενός γεννήτορα της $H_n(M, M - x)$. Θα δούμε πως ο προσανατολισμός επεκτείνεται σε μία περιοχή του x και.



αν η M είναι προσανατολίσιμη, σε ολόκληρη την M . Συνήθως σε αυτή τη μελέτη θα δουλεύουμε με προσανατολίσιμες πολλαπλότητες αφού τα θεωρήματα Poincare Duality και Alexander Duality αναφέρονται σε προσανατολίσιμες πολλαπλότητες. Βέβαια κάθε πολλαπλότητα είναι \mathbb{Z}_2 -προσανατολίσιμη.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα εισάγουμε τη θεωρία των ευθέων ορίων, την οποία θα χρειαστούμε για να αποδείξουμε το θεώρημα Poincare Duality, αλλά και για να ορίσουμε την Alexander συνομολογία.

Στην πρώτη ενότητα του πέμπτου κεφαλαίου θα κάνουμε εφαρμογή της θεωρίας των ευθέων ορίων για τις ομάδες:

$$H^q(X, X - K)$$

όπου $K \in \mathcal{K} = \{K \subseteq X, K \text{ συμπαγές}\}$. Στο K δίνουμε τη διάταξη του εγκλεισμού, δηλαδή $K < K' \Leftrightarrow K \subseteq K'$. Έτσι έχουμε το σύστημα $\{H^q(X, X - K), K \in \mathcal{K}\}$. Στο βασικό θεώρημα αυτής της μελέτης, που είναι το Poincare Duality, θα δείξουμε ότι για μία προσανατολίσιμη πολλαπλότητα M^n υπάρχει ισομορφισμός από το όριο του προηγούμενου συστήματος $H_c^q(M)$ στην ομολογιακή ομάδα $H_{n-q}(M)$:

$$H_c^q(M) \approx H_{n-q}(M)$$

Ο ισομορφισμός αυτός δίνεται από την οριακή απεικόνιση των απεικονίσεων:

$$\begin{aligned} \zeta \frown: H^q(M, M - K) &\longrightarrow H_{n-q}(M) \\ \gamma &\longmapsto \zeta \frown \gamma \end{aligned}$$

όπου $K \in \mathcal{K}$ και ζ_K ένας τοπικός προσανατολισμός της M κατά μήκος του K .

Στο έκτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε την Alexander δυϊκότητα. Το θεώρημα Alexander Duality αποδεικνύεται με τη βοήθεια του θεωρήματος Poincare Duality και μιας ειδικής περίπτωσης της θεωρίας της Čech συνομολογίας. Θεωρούμε την οικογένεια \mathcal{V} όλων των περιοχών που περιέχουν ένα υποσύνολο A και τη διατάσσουμε με τη διάταξη του υπερσυνόλου, δηλαδή $V < V' \Leftrightarrow V \supseteq V'$. Ορίζουμε την Čech συνομολογία του A :

$$\check{H}^q(A) = \varinjlim_{\mathcal{V}} H^q(V)$$

Στο θεώρημα Alexander Duality για μία προσανατολίσιμη συμπαγή πολλαπλότητα M^n και A ένα κλειστό υποσύνολό της έχουμε τον ισομορφισμό:

$$\check{H}^q(A) \approx H_{n-q}(M, M - A)$$



Τέλος στο έβδομο κεφάλαιο θα δούμε κάποιες εφαρμογές των δύο βασικών θεωρημάτων. Θα μελετήσουμε εμφυτεύσεις πολλαπλοτήτων στη σφαίρα, ή πιο γενικά σε συμπαγείς πολλαπλότητες. Τα βασικά αποτελέσματα περιγράφονται στα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα (7.1.10). Έστω $K \cong S^m$ υποπολληπλότητα της M^n . Τότε:

$$H_n(M, M - K) \approx H^0(K) = H^0(S^m) \approx \mathbb{Z}$$

$$H_{n-m}(M, M - S^m) \approx H^m(S^m) \approx \mathbb{Z}$$

$$\text{και } H_{n-i}(M, M - K) \approx H^i(S^m) = 0 \text{ για } i \neq 0, m$$

Θεώρημα (7.1.13). Έστω $M \cong S^n$ συμπαγής και K συμπαγής συνεκτική υποπολληπλότητα της M . Τότε:

$$H_n(M - K) = 0$$

$$H_i(M) = 0, \quad i \neq 0, n$$

$$H_i(M, M - K) \approx \tilde{H}_{i-1}(M - K), \quad i \leq n - 1$$

Εφαρμογές των προηγουμένων είναι το γνωστό θεώρημα διαχωρισιμότητας του Jordan.

Θεώρημα (7.1.16 Jordan Separation Theorem). Κάθε υπόχωρος του \mathbb{R}^n ομοιομορφικός με την S^{n-1} διαχωρίζει τον \mathbb{R}^n σε δύο τοξιακά συνεκτικούς υποχώρους. Ο ένας είναι φραγμένος.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Επαμεινώνδα Κεχαγιά για την άριστη συνεργασία που είχαμε και τα δύο μέλη της επιτροπής, τον κ. Θεμιστοκλή Κουφογιώργο και τον κ. Χρήστο Μπαϊκούση για τις χρήσιμες συμβουλές που μου δώσαν.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάτορα Χρυσόστομο Ψαρουδάκη και την μεταπτυχιακή φοιτήτρια Αλίκη Σαμαρτζίδου για την βοήθειά τους και τους φίλους μου Πέτρο Καραγιαννίδη και Δημήτρη Ζορμπά για την παρέα τους.



ΟΜΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΟΜΟΛΟΓΙΑ

1.1 CELLULAR ΟΜΟΛΟΓΙΑΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ομολογία $H_*(X)$ ενός χώρου X ο οποίος είναι CW-σύμπλεγμα. Αυτός αποτελείται από απλούστερα κομμάτια X^n των οποίων η ομολογία υπολογίζεται ευκολότερα. Με βάση τις $H_*(X^n, X^{n-1})$ θα υπολογίσουμε την $H_*(X)$.

Ορισμός 1.1.1. Ορίζουμε τον n -δίσκο να είναι το σύνολο $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$ και την n -σφαίρα να είναι το σύνολο $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$.

Υπενθυμίζουμε το θεώρημα της εκτομής.

Θεώρημα 1.1.2 (θεώρημα εκτομής). Θεωρούμε τους υπόχωρους $Z \subseteq A \subseteq X$ τέτοιους ώστε $\bar{Z} \subseteq A$. Τότε ο εγκλεισμός $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ επάγει ισομορφισμούς στις ομολογιακές ομάδες $H_n(X - Z, A - Z) \rightarrow H_n(X, A)$ για κάθε n . Όμοια αν $A, B \subseteq X$ τέτοια ώστε $A \cup B = X$, τότε ο εγκλεισμός $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ επάγει ισομορφισμούς $H_n(B, A \cap B) \rightarrow H_n(X, A)$ για κάθε n .

Απόδειξη. Βλέπε στο [1] στη σελίδα 119. □

Ορισμός 1.1.3. Έστω X ένας χώρος και A ένα μη κενό κλειστό υποσυνολό του τέτοιο ώστε να είναι *deformation retract* κάποιας περιοχής του X , τότε το ζεύγος (X, A) ονομάζεται **καλό ζεύγος**.

Παράδειγμα 1.1.4. Το ζεύγος (\mathbb{R}^n, C) με $C \subsetneq \mathbb{R}^n$ συμπαγές, είναι καλό ζεύγος.

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε αν υπάρχει σχέση μεταξύ της σχετικής ομολογίας και της κανονικής. Όταν το ζεύγος (X, A) είναι καλό ο χώρος



πηλίκου X/A μπορεί να μελετηθεί και ως εξής: Έστω p σημείο του A και $f : A \rightarrow \{p\}$ η σταθερή απεικόνιση. Τότε ο X/A είναι ομοιομορφικός με τον χώρο $X \sqcup \{p\}/f$ όπου ταυτίζουμε το $a \in A$ με την εικόνα του $f(a) = p$.

Πρόταση 1.1.5. Για ένα καλό ζεύγος (X, A) η απεικόνιση πηλίκου $q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ επάγει ισομορφισμούς $q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \approx \tilde{H}_n(X/A)$ για κάθε n .

Απόδειξη. Βλέπε στο [1] στη σελίδα 124. \square

Επειδή τα CW-υποσυμπλέγματα είναι καλά ζεύγη έχουμε το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 1.1.6. Αν ένα CW συμπλέγμα γράφεται ως ένωση δύο υποσυμπλεγμάτων A και B , τότε ο εγκλεισμός $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ επάγει ισομορφισμούς στις ομολογιακές ομάδες $H_n(B, A \cap B) \rightarrow H_n(X, A)$ για κάθε n .

Πόρισμα 1.1.7. Έστω $x_\alpha \in X_\alpha$ τέτοια ώστε τα ζεύγος (X_α, x_α) να είναι καλά ζεύγη και $\bigvee_\alpha X_\alpha$ το σφηνοειδές άθροισμα, τότε οι εγκλεισμοί $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \bigvee X_\alpha$ επάγουν ισομορφισμό $\bigoplus_\alpha i_\alpha : \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \rightarrow \tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$.

Απόδειξη. Βλέπε στο [1] στην σελίδα 126. \square

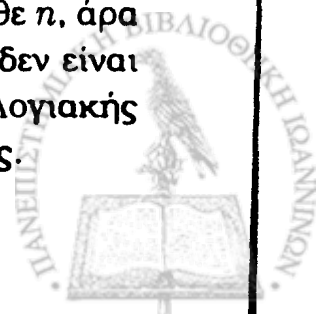
Θεώρημα 1.1.8. Έστω μη κενά ανοιχτά σύνολα $U \subseteq \mathbb{R}^m$ και $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Εάν τα U και V είναι ομοιομορφικά, τότε $m = n$.

Απόδειξη. Για $x \in U$ έχουμε ισομορφισμό $H_k(U, U - \{x\}) \approx H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\})$. Από την μακρά ακριβή ακολουθία για το ζεύγος $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\})$ έχουμε:

$$\cdots \rightarrow H_k(\mathbb{R}^m) \rightarrow H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\}) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{R}^m - \{x\}) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \cdots$$

Αφού $\mathbb{R}^m - \{x\} \simeq S^{m-1}$, η $H_k(U, U - \{x\})$ είναι \mathbb{Z} για $k = m$ και 0 διαφορετικά. Για τον ίδιο λόγο $H_k(V, V - \{x\})$ είναι \mathbb{Z} για $k = n$ και 0 διαφορετικά. Τέλος, αφού ένας ομοιομορφισμός $h : U \rightarrow V$ επάγει ισομορφισμούς $H_k(U, U - \{x\}) \rightarrow H_k(V, V - \{h(x)\})$ για κάθε k , θα πρέπει να έχουμε $m = n$. \square

Γενικεύοντας την ιδέα της απόδειξης ορίζουμε τις **τοπικές ομολογιακές ομάδες** ενός χώρου X σε ένα σημείο $x \in X$ να είναι οι ομάδες $H_n(X, X - \{x\})$. Για μια ανοιχτή περιοχή U του x έχουμε ισομορφισμούς $H_n(X, X - \{x\}) \approx H_n(U, U - \{x\})$, άρα αυτές οι ομάδες εξαρτώνται από την τοπολογία που έχει ο X κοντά στο x . Ένας ομοιομορφισμός $f : X \rightarrow Y$ επάγει ισομορφισμούς $H_n(X, X - \{x\}) \approx H_n(Y, Y - \{f(x)\})$ για κάθε x και για κάθε n , άρα από αυτές τις ομάδες μπορούμε να συμπεράνουμε πότε δύο χώροι δεν είναι τοπικά ομοιομορφικοί σε κάποιο σημείο. Η έννοια της τοπικής ομολογιακής ομάδας είναι ουσιώδης για τον προσανατολισμό μίας πολλαπλότητας.



Ορισμός 1.1.9. Αν μία ομάδα $H_n(X)$ γράφεται ως ευθύ άθροισμα κυκλικών ομάδων, τότε το πλήθος των \mathbb{Z} συνιστωσών ονομάζεται ο n -οστός **αριθμός Betti** β_n του X , και οι ακέραιοι που ορίζουν τους βαθμούς των πεπερασμένα κυκλικών συνιστωσών ονομάζονται **torsion coefficients**.

Ορισμός 1.1.10. Η **χαρακτηριστική Euler** ενός χώρου X ορίζεται ως

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n \beta_n$$

όταν το άθροισμα είναι πεπερασμένο.

Για ένα πεπερασμένο CW-σύμπλεγμα X η χαρακτηριστική Euler δίνεται από το άθροισμα $\chi(X) = \sum_n (-1)^n c_n$ όπου c_n είναι το πλήθος των n -κελύφων του X .

Βαθμός

Ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία στη μελέτη των συμπαγών προσανατολισμένων πολλαπλοτήτων είναι η έννοια του βαθμού μιας απεικόνισης $f : N \rightarrow M$. Ο βαθμός είναι ένας ακέραιος ο οποίος με απλά λόγια μας λέει πόσες φορές η f διπλώνει την N γύρω από την M .

Ορισμός 1.1.11. Για μία απεικόνιση $f : S^n \rightarrow S^n$ με $n > 0$, ο επαγόμενος ομομορφισμός $f_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ από μία άπειρη κυκλική ομάδα στον εαυτό της είναι της μορφής $f_*(\alpha) = d\alpha$ για κάποιον ακέραιο d . Ο ακέραιος αυτός ονομάζεται **βαθμός** της f , $\deg f$.

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- (i) $\deg \text{id} = 1$, αφού $\text{id}_* = \text{id}$
- (ii) $\deg f = 0$, αν η f δεν είναι επί. Πράγματι, αν διαλέξουμε $x_0 \in S^n - f(S^n)$, τότε η f γράφεται ως η σύνθεση $S^n \rightarrow S^n - \{x_0\} \hookrightarrow S^n$ και άρα $H_n(S^n - \{x_0\}) = 0$, αφού το $S^n - \{x_0\}$ είναι συστελόμενο. Επομένως $f_* = 0$.
- (iii) Αν $f \simeq g$ τότε $\deg f = \deg g$, αφού $f_* = g_*$.
- (iv) $\deg fg = \deg f \deg g$, αφού $(fg)_* = f_*g_*$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι εάν η f είναι ομοτοπική ισοδυναμία, τότε $\deg f = \pm 1$, αφού $fg \simeq \text{id}$.
- (v) Εάν η f είναι κατοπτρισμός της S^n , τότε $\deg f = -1$.
- (vi) Η αντιπολική απεικόνιση $-\text{id} : S^n \rightarrow S^n, x \mapsto -x$ έχει βαθμό $(-1)^{n+1}$, αφού είναι σύνθεση $n + 1$ κατοπτρισμών.



(vii) Εάν η f δεν έχει σταθερό σημείο τότε έχει βαθμό $(-1)^{n+1}$. Έστω $f(x) \neq x$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα από το $f(x)$ στο $-x$, που ορίζεται από τη σχέση $t \mapsto (1-t)f(x) - tx$ για $0 \leq t \leq 1$, δεν περνάει από την αρχή των αξόνων. Άρα σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε την ομοτοπία από την f στην αντιπολική $f_t(x) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{|(1-t)f(x) - tx|}$.

Τώρα έστω μία $f : S^n \rightarrow S^n, n > 0$, για την οποία ισχύει ότι για κάποιο σημείο $y \in S^n$ η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(y)$ αποτελείται από πεπερασμένα το πλήθος σημεία, έστω x_1, \dots, x_m . Έστω τώρα U_1, \dots, U_m περιοχές των σημείων οι οποίες δεν τέμνονται μεταξύ τους και απεικονίζονται μέσω της f σε μία περιοχή V του y . Τότε ισχύει $f(U_i - x_i) \subseteq V - y$ για κάθε i και έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

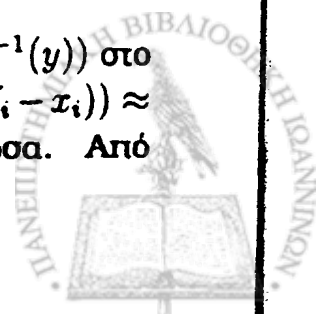
$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(U_i, U_i - x_i) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V - y) \\
 & \swarrow \approx & \downarrow k_i & & \downarrow \approx \\
 H_n(S^n, S^n - x_i) & \xleftarrow{p_i} & H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n, S^n - y) \\
 & \swarrow \approx & \uparrow j & & \uparrow \approx \\
 & & H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n)
 \end{array}$$

όπου οι απεικονίσεις p_i και k_i επάγονται από τους εγκλεισμούς. Οι δύο ισομορφισμοί στο πάνω μισό του διαγράμματος προέρχονται από το θεώρημα εκτομής και οι δύο ισομορφισμοί στο κάτω μισό του διαγράμματος προέρχονται από τις ακριβείς ακολουθίες των αντίστοιχων ζευγών. Επομένως οι δύο ομάδες στην επάνω γραμμή του διαγράμματος είναι ισόμορφες με $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$ και άρα ο ομομορφισμός $f_* : H_n(U_i, U_i - x_i) \rightarrow H_n(V, V - y)$ είναι πολλαπλασιασμός με έναν ακέραιο ο οποίος ονομάζεται **τοπικός βαθμός** της f στο x_i και συμβολίζεται με $\deg f|_{x_i}$.

Για παράδειγμα αν η f είναι ομοιομορφισμός τότε το y μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο της S^n και υπάρχει μοναδικό x_i , άρα όλες οι απεικονίσεις στο διάγραμμα είναι ισομορφισμοί και $\deg f|_{x_i} = \deg f = \pm 1$. Πιο γενικά εάν η f απεικονίζει κάθε U_i ομοιομορφικά στο V τότε $\deg f|_{x_i} = \pm 1$ για κάθε i .

Πρόταση 1.1.12. $\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα εκτομής ο μεσαίος όρος $H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y))$ στο παραπάνω διάγραμμα είναι το ευθύ άθροισμα των ομάδων $H_n(U_i, U_i - x_i) \approx \mathbb{Z}$ και οι απεικονίσεις k_i είναι οι εγκλεισμοί στην 1-οστή συνιστώσα. Από



τη μεταθετικότητα του πάνω τριγώνου οι προβολές αυτής της ομάδας στις συνιστώσες της δίνονται από τις απεικονίσεις p_i και από τη μεταθετικότητα του κάτω τριγώνου έχουμε ότι $p_i j(1) = 1$, άρα $j(1) = (1, \dots, 1) = \sum_i k_i(1)$. Από τη μεταθετικότητα του πάνω τετραγώνου έχουμε ότι η μεσαία f_* απεικονίζει το $k_i(1)$ στο $\deg f|_{x_i}$, άρα το $\sum_i k_i(1) = j(1)$ απεικονίζεται στο $\sum_i \deg f|_{x_i}$. Τέλος από τη μεταθετικότητα του κάτω τετραγώνου έχουμε το ζητούμενο $\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}$. \square

Παράδειγμα 1.1.13. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μία απεικόνιση $S^n \rightarrow S^n$ οποιουδήποτε βαθμού για $n \geq 1$. Έστω $q : S^n \rightarrow \bigvee_k S^n$ η απεικόνιση που ταυτίζει το συμπλήρωμα k δίσκων D_i της S^n που δεν τέμνονται μεταξύ τους. Επίσης έστω $p : \bigvee_k S^n \rightarrow S^n$ μία απεικόνιση η οποία ταυτίζει όλες τις σφαίρες του σφηνοειδούς άθροισματος $\bigvee_k S^n$ σε μία. Θεωρούμε τη σύνθεση $f = pq$. Τότε για σχεδόν όλα τα $y \in S^n$ έχουμε ότι το $f^{-1}(y)$ αποτελείται από ένα x_i σε κάθε D_i . Ο τοπικός βαθμός της f στο x_i είναι ± 1 αφού η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός στο x_i . Συνθέτοντας την p με κατοπτρισμούς των συνιστωσών του $\bigvee_k S^n$, μπορούμε να προσαρμόσουμε κάθε τοπικό βαθμό σε $+1$ ή -1 . Άρα παίρνουμε μία απεικόνιση $S^n \rightarrow S^n$ βαθμού $\pm k$.

Cellular Ομολογία

Λήμμα 1.1.14. Έστω $X = \bigcup_n X^n$ ένα CW σύμπλεγμα πεπερασμένης διάστασης, τότε

- (i) η $H_k(X^n, X^{n-1})$ είναι μηδέν για $k \neq n$ και ελεύθερη αβελιανή για $k = n$, με βάση σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα n -κελύφοι του X .
- (ii) $H_k(X^n) = 0$ για $k > n$. Ειδικά $H_k(X) = 0$ για $k > \dim X$.
- (iii) Ο εγκλεισμός $i : X^n \hookrightarrow X$ επάγει τον ισομορφισμό $i_* : H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ αν $k < n$.

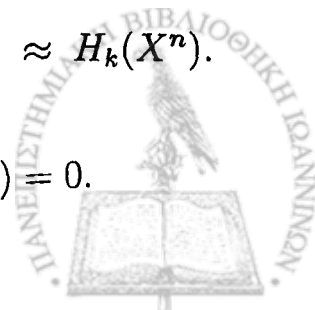
Απόδειξη. (i) Το ζεύγος (X^n, X^{n-1}) είναι καλό ζεύγος και ο χώρος X^n/X^{n-1} είναι το σφηνοειδές άθροισμα n -σφαιρών, μία για κάθε n -κέλυφος του X .

(ii) Θεωρούμε την μακρά ακριβή ακολουθία του ζευγαριού (X^n, X^{n-1}) ,

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1}) \rightarrow \dots$$

Αν $k \neq n, n-1$ τότε έχουμε ισομορφισμούς $H_k(X^{n-1}) \approx H_k(X^n)$. Επομένως αν $k > n$ έχουμε,

$$H_k(X^n) \approx H_k(X^{n-1}) \approx H_k(X^{n-2}) \approx \dots \approx H_k(X^0) = 0.$$

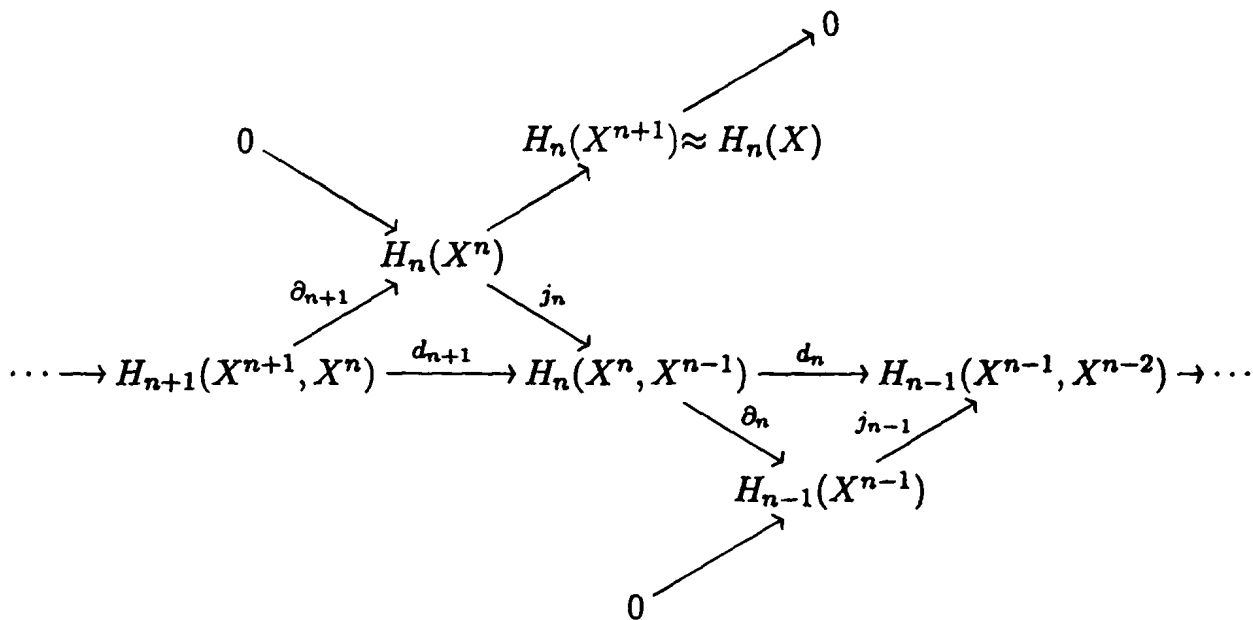


(iii) Από την ίδια ακολουθία, αν $k < n$ τότε,

$$H_k(X^n) \approx H_k(X^{n+1}) \approx \dots \approx H_k(X^{n+m}) \quad \forall m \geq 0.$$

□

Έστω X ένα CW σύμπλεγμα, τότε από τις μακριές ακριβείς ακολουθίες των ζευγών (X^{n+1}, X^n) , (X^n, X^{n-1}) και (X^{n-1}, X^{n-2}) έχουμε το παρακάτω διάγραμμα.



όπου d_{n+1} και d_n ορίζονται ως οι συνθέσεις των $j_n \partial_{n+1}$ και $j_{n-1} \partial_n$ αντίστοιχα. Η σύνθεση $d_n d_{n+1}$ περιέχει δύο συνεχόμενες απεικονίσεις στο διαγώνιο αλυσιδωτό complex, άρα είναι 0. Επομένως η οριζόντια γραμμή στο διάγραμμα είναι αλυσιδωτό complex και ονομάζεται **cellular αλυσιδωτό complex** του X . Οι ομολογιακές ομάδες του cellular αλυσιδωτού complex ονομάζονται **cellular ομολογιακές ομάδες** του X και συμβολίζονται με $H_n^{CW}(X)$.

Θεώρημα 1.1.15. $H_n^{CW}(X) \approx H_n(X)$

Απόδειξη. Από το παραπάνω διάγραμμα έχουμε $H_n(X) = H_n(X^n) / \text{Im} \partial_{n+1}$. Η j_n είναι ένα προς ένα, άρα απεικονίζει το $\text{Im} \partial_{n+1}$ ισομορφικά στο $\text{Im}(j_n \partial_{n+1}) = \text{Im} d_{n+1}$ και το $H_n(X^n)$ ισομορφικά στο $\text{Im} j_n = \text{ker } \partial_n$. Άρα η j_n επάγει ισομορφισμό του $H_n(X^n) / \text{Im} \partial_{n+1}$ στο $\text{ker } d_n / \text{Im} d_{n+1}$. □

Παρακάτω βλέπουμε μερικές εφαρμογές.

(i) $H_n(X) = 0$ αν το X είναι CW σύμπλεγμα χωρίς n -κελύφοι.



(ii) Πιο γενικά, αν το X είναι ένα CW σύμπλεγμα με k n -κελύφοι, τότε η $H_n(X)$ παράγεται από το πολύ k στοιχεία. Πράγματι, η $H_n(X^n, X^{n-1})$ είναι ελεύθερη αβελιανή σε k γεννήτορες, άρα η υποομάδα $\ker d_n$ θα πρέπει να γεννάται από το πολύ k στοιχεία, άρα το ίδιο ισχύει και για την $\ker d_n/\text{Im}d_{n+1}$.

(iii) Έστω X ένα CW σύμπλεγμα που έχει το πολύ ένα κέλυφος σε κάθε δύο συνεχόμενες διαστάσεις, τότε η $H_n(X)$ είναι ελεύθερη αβελιανή με βάση σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα n -κελύφοι του X . Αυτό ισχύει διότι η απεικόνιση d_n σε αυτή την περίπτωση είναι η μηδενική.

Παράδειγμα 1.1.16. Σύμφωνα με την τελευταία εφαρμογή θα υπολογίσουμε τις ομολογιακές ομάδες του μιγαδικού προβολικού χώρου $\mathbb{C}P^n$. Ο $\mathbb{C}P^n$ έχει CW ανάλυση με ένα κέλυφος σε κάθε άρτια διάσταση $2k \leq 2n$. Άρα,

$$H_i(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{για } i = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

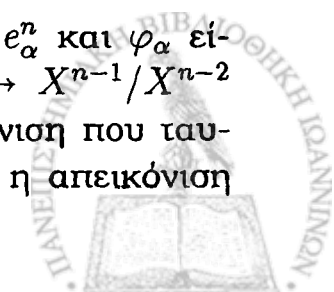
Η επόμενη πρόταση στηρίζεται στην πρόταση 1.1.12

Πρόταση 1.1.17 (cellular συνιοριακός τύπος). $d_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$, όπου $d_{\alpha\beta}$ είναι ο βαθμός της απεικόνισης $S_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow S_\beta^{n-1}$, δηλαδή της σύνθεσης της απεικόνισης προσκόλλησης του κελύφους e_α^n με την απεικόνιση πηλίκο που ταυτίζει το $X^{n-1} - e_\beta^{n-1}$ σε ένα σημείο.

Εδώ ταυτίζουμε τα κελύφοι e_α^n και e_β^{n-1} με τους γεννήτορες της αντίστοιχης συνιστώσας των cellular αλυσιδωτών ομάδων. Για την επεξήγηση του παραπάνω τύπου θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα,

$$\begin{array}{ccccc} H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) & \xrightarrow[\approx]{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(\partial D_\alpha^n) & \xrightarrow{\Delta_{\alpha\beta*}} & \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \\ \downarrow \Phi_{\alpha*} & & \downarrow \varphi_\alpha & & \uparrow q_{\beta*} \\ H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{q_*} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\ & \searrow d_n & \downarrow j_{n-1} & & \downarrow \approx \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{\approx} & H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2}) \end{array}$$

όπου Φ_α είναι η χαρακτηριστική απεικόνιση του κελύφους e_α^n και φ_α είναι η απεικόνιση προσκόλλησης. Η απεικόνιση $q : X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2}$ είναι η απεικόνιση πηλίκο. Η απεικόνιση q_β είναι η απεικόνιση που ταυτίζει το συμπλήρωμα του κελύφους e_β^{n-1} σε ένα σημείο και η απεικόνιση



$\Delta_{\alpha\beta} : \partial D_{\alpha}^n \rightarrow S_{\beta}^{n-1}$ είναι η σύνθεση $q_{\beta}q_{\alpha}$, δηλαδή η σύνθεση της απεικόνισης προσκόλλησης του e_{α}^n με την απεικόνιση πηλίκο $X^{n-1} \rightarrow S_{\beta}^{n-1}$ που ταυτίζει το συμπληρωματικό του e_{β}^{n-1} στο X^{n-1} σε ένα σημείο.

Η απεικόνιση $\Phi_{\alpha*}$ απεικονίζει το γεννήτορα $[D_{\alpha}^n]$ της $H_n(D_{\alpha}^n, \partial D_{\alpha}^n)$ σε ένα γεννήτορα της \mathbb{Z} συνιστώσας της $H_n(X^n, X^{n-1})$ που αντιστοιχεί στο κέλυφος e_{α}^n . Από τη μεταθετικότητα του αριστερού μισού του διαγράμματος έχουμε ότι $d_n(e_{\alpha}^n) = j_{n-1}\varphi_{\alpha*}\partial[D_{\alpha}^n]$. Η απεικόνιση $q_{\beta*}$ είναι η προβολή της $H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$ στην \mathbb{Z} συνιστώσα που αντιστοιχεί στο e_{β}^{n-1} . Τέλος, από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος έχουμε το ζητούμενο.

Η $d_1 : H_1(X^1, X^0) \rightarrow H_0(X^0)$ είναι η simplicial συνοριακή απεικόνιση, επομένως αν υπάρχει μόνο ένα 0-κέλυφος τότε η d_1 είναι η μηδενική.

Παράδειγμα 1.1.18. Έστω M_g η κλειστή προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους g με τη συνήθη CW ανάλυση από ένα 0-κέλυφος, $2g$ 1-κελύφοι και ένα 2-κέλυφος που προσκολούνται σύμφωνα με το γινόμενο $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$. Το cellular αλυσιδωτό complex είναι το,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

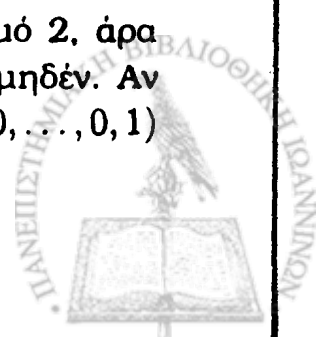
Η d_1 είναι μηδέν αφού υπάρχει μόνο ένα 0-κέλυφος. Για την d_2 έχουμε,

$$d_2(e^2) = \sum_{\beta=1}^{2g} d_{\beta}e_{\beta}^1$$

Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα η φ_{α} στέλνει το σύνορο ∂e^2 στη θηλιά $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ η οποία είναι ομοτοπική με τη σταθερή, άρα οι απεικονίσεις $\Delta_{\alpha\beta}$ είναι ομοτοπικές με τη σταθερή και άρα έχουν βαθμό 0. Επομένως $d_{\beta} = 0$ και η απεικόνιση d_2 είναι η μηδενική. Τελικά οι ομολογιακές ομάδες της M_g είναι,

$$H_n(M_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , n = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & , n = 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 1.1.19. Έστω N_g η κλειστή μη προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους g με τη συνήθη CW ανάλυση από ένα 0-κέλυφος, g 1-κελύφοι και ένα 2-κέλυφος που προσκολούνται σύμφωνα με τη λέξη $a_1^2a_2^2 \cdots a_g^2$. Η απεικόνιση d_1 είναι μηδέν αφού υπάρχει μόνο ένα 0-κέλυφος. Για την $d_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^g$ έχουμε ότι η $\Delta_{\alpha\beta}$ είναι ομοτοπική με την $z \mapsto z^2$ που έχει βαθμό 2, άρα $d_2(1) = (2, 2, \dots, 2)$. Επομένως η d_2 είναι 1-1 και η $H_2(N_g)$ είναι μηδέν. Αν αλλάξουμε τη βάση της \mathbb{Z}^g αντικαθιστώντας το τελευταίο στοιχείο $(0, \dots, 0, 1)$ με $(1, \dots, 1)$ έχουμε ότι $H_1(N_g) \approx \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2$. Τέλος $H_0(N_g) \approx \mathbb{Z}$.



Από τα δύο τελευταία παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι για μία κλειστή συνεκτική πολλαπλότητα M διάστασης n αρκεί να γνωρίζουμε την ομολογιακή ομάδα $H_n(M)$ για να ελέγξουμε αν η M είναι προσανατολισίμη.

Παράδειγμα 1.1.20 (πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$). Έστω $\mathbb{R}P^n$ ο πραγματικός προβολικός χώρος με την συνήθη CW ανάλυση από ένα κέλυφος e^k σε κάθε διάσταση $k \leq n$, και την απεικόνιση προσκόλλησης $\varphi : S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k-1}$. Για να υπολογίσουμε τη συνοριακή απεικόνιση d_k αρκεί να υπολογίσουμε το βαθμό της σύνθεσης $S^{k-1} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}P^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} = S^{k-1}$. Η απεικόνιση $q\varphi$ είναι ομοιομορφισμός αν περιοριστεί σε κάποια από τις δύο συνιστώσες του $S^{k-1} - S^{k-2}$. Υπολογίζοντας τοπικούς βαθμούς έχουμε ότι $\deg q\varphi = \deg \text{id} + \deg(-\text{id}) = 1 + (-1)^k$, άρα η d_k είναι η μηδενική όταν το k είναι περιττός και πολλαπλασιασμός με το 2 όταν το k είναι άρτιος. Άρα το cellular αλυσιδωτό complex είναι το,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός}$$

Επομένως,

$$H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , k = 0 \text{ και } k = n \text{ περιττός} \\ \mathbb{Z}_2 & , k \text{ περιττός } 0 < k < n \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

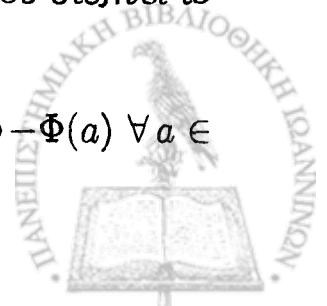
1.2 ΣΥΝΟΜΟΛΟΓΙΑΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

1.2.1 Δυϊκές Ομάδες

Ορισμός 1.2.1. Έστω A και G αβελιανές ομάδες. Ορίζουμε την αβελιανή ομάδα $\text{hom}(A, G)$ όλων των ομομορφισμών από την A στην G με την παρακάτω πράξη:

$$\text{για } a \in A \text{ ορίζουμε } (\Phi + \Psi)(a) = \Phi(a) + \Psi(a).$$

- Μοναδιαίο στοιχείο της $\text{hom}(A, G)$ είναι ο ομομορφισμός που στέλνει το A στο μοναδιαίο στοιχείο της G .
- Αντίστροφος του Φ είναι ο ομομορφισμός που στέλνει το a στο $-\Phi(a) \forall a \in A$.



Παράδειγμα 1.2.2.

$$\text{hom}(\mathbb{Z}, G) \approx G$$

Ορίζουμε τον ισομορφισμό

$$\begin{aligned} \lambda : \text{hom}(\mathbb{Z}, G) &\longrightarrow G \\ (\Phi : \mathbb{Z} \rightarrow G) &\longmapsto \Phi(1) \end{aligned}$$

- Η λ είναι ομομορφισμός διότι $\lambda(\Phi + \Psi) = (\Phi + \Psi)(1) = \Phi(1) + \Psi(1) = \lambda(\Phi) + \lambda(\Psi)$.
- Η λ είναι ένα προς ένα αφού $\lambda(\Phi) = 0 \Rightarrow \Phi(1) = 0 \Rightarrow \Phi = 0$.
- Η λ είναι επί. Πράγματι, έστω $g \in G$, ορίζεται η Φ με $\Phi(1) = g$ και $\Phi(x) = \Phi(\underbrace{1 + \dots + 1}_x \text{ φορές}) = \underbrace{\Phi(1) + \dots + \Phi(1)}_x \text{ φορές} = \underbrace{g + \dots + g}_x \text{ φορές}$

Ορισμός 1.2.3. Για έναν ομομορφισμό $f : A \rightarrow B$ ορίζουμε το δυϊκό του να είναι η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \text{hom}(A, G) &\xleftarrow{f^*} \text{hom}(B, G) \\ (A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\Phi} G) &\longleftarrow (\Phi : B \rightarrow G). \end{aligned}$$

Δηλαδή $f^*(\Phi) = \Phi \circ f$.

Εύκολα φαίνεται ότι η f^* είναι ομομορφισμός. Επίσης ισχύει $(fg)^* = g^* f^*$. Για την ταυτοτική $\text{id} : A \rightarrow A$ έχουμε:

$$\text{id}^*(\Phi) = \Phi \circ \text{id} = \Phi$$

άρα η $\text{id}^* : \text{hom}(A, G) \rightarrow \text{hom}(A, G)$ είναι η ταυτοτική.

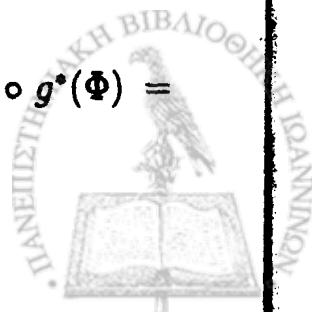
Επιπλέον αν το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & C \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & B & \end{array}$$

είναι μεταθετικό, τότε και το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}(A, G) & \xleftarrow{h^*} & \text{hom}(C, G) \\ & \searrow f^* & \nearrow g^* \\ & \text{hom}(B, G) & \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Πράγματι $h^*(\Phi) = \Phi(h) = \Phi(g \circ f)$ και $f^* \circ g^*(\Phi) = f^*(\Phi \circ g) = \Phi \circ g \circ f$.



Θεώρημα 1.2.4. (i) Αν η f είναι ισομορφισμός τότε και η f^* είναι ισομορφισμός.

(ii) Αν η f είναι ο μηδενικός ομομορφισμός, τότε και η f^* είναι ο μηδενικός ομομορφισμός.

(iii) Αν η f είναι επί, τότε η f^* είναι ένα προς ένα, δηλαδή ακρίβεια του $B \xrightarrow{f} C \rightarrow 0$ σημαίνει ακρίβεια του $\text{hom}(B, G) \xleftarrow{f^*} \text{hom}(C, G) \leftarrow 0$.

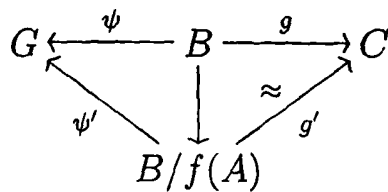
Απόδειξη. (iii) Έστω ότι η f είναι επί. Έστω $\psi \in \text{hom}(C, G)$ έτσι ώστε $f^*(\psi) = 0 = \psi \circ f$. Τότε $\psi(f(b)) = 0 \forall b \in B$. Καθώς το b διατρέχει το B το $f(b)$ διατρέχει όλα τα στοιχεία του C , άρα $\psi(c) = 0 \forall c \in C$. \square

Θεώρημα 1.2.5. Αν η ακολουθία $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ είναι ακριβής, τότε και η δυϊκή της, δηλαδή η

$$\text{hom}(A, G) \xleftarrow{f^*} \text{hom}(B, G) \xleftarrow{g^*} \text{hom}(C, G) \leftarrow 0$$

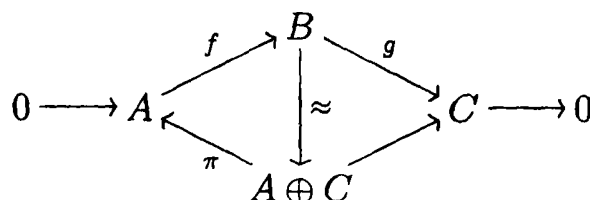
είναι ακριβής. Επιπλέον αν η f είναι ένα προς ένα και η πρώτη ακολουθία διασπάται τότε η f^* είναι επί και η δεύτερη ακολουθία διασπάται.

Απόδειξη. Η g είναι επί, άρα από το προηγούμενο θεώρημα η g^* είναι ένα προς ένα. Μένει να δείξουμε την ακρίβεια στο $\text{hom}(B, G)$. $h = g \circ f = 0 \Rightarrow h^* = f^* \circ g^* = 0$. Από την άλλη έστω $f^*(\psi) = 0$. Θα δείξουμε ότι $\psi = g^*(\Phi)$ για κάποιο $\Phi \in \text{hom}(C, G)$. Ο $f^*(\psi) = \psi \circ f$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός άρα ο ψ μηδενίζεται στην υποομάδα $f(A) = \text{Im} f$. Άρα ο ψ επάγει τον ομομορφισμό $\psi' : B/f(A) \rightarrow G$. Από ακρίβεια του πρώτου έχουμε ότι η g επάγει ισομορφισμό $g' : B/f(A) \rightarrow C$ όπως το παρακάτω διάγραμμα :



Η $\Phi = \psi' \circ (g')^{-1}$ είναι ομομορφισμός από την C στην G και $g^*(\Phi) = \Phi \circ g = \psi' \circ (g')^{-1} \circ g = \psi$.

Τώρα έστω ότι η f απεικονίζει ισομορφικά το A σε μία συνιστώσα του B και $\pi : B \rightarrow A$ να είναι ο ομομορφισμός για τον οποίο ισχύει $\pi \circ f = \text{id}_A$. Έχουμε το παρακάτω διάγραμμα :



Έχουμε $f^* \circ \pi^* = \text{id}_{\text{hom}(A, G)}$, άρα η f^* είναι επί και από το splitting lemma η $\pi^* : \text{hom}(A, G) \rightarrow \text{hom}(B, G)$ διασπάει τη δυϊκή ακολουθία. \square

Θεώρημα 1.2.6. (i) $\text{hom}(A_1 \oplus A_2, G) \approx \text{hom}(A_1, G) \oplus \text{hom}(A_2, G)$.

(ii) Αν η $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ είναι πολλαπλασιασμός με το m τότε και η f^* είναι πολλαπλασιασμός με το m .

(iii) $\text{hom}(\mathbb{Z}_m, G) \approx \ker(G \xrightarrow{m} G)$.

Απόδειξη. (ii) Έστω ότι η f είναι η $f : \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}$, τότε $f^*(\Phi)(x) = \Phi(f(x)) = \Phi(mx) = m\Phi(x)$. Άρα $f^*(\Phi) = m\Phi$.

(iii) Θεωρούμε την ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0.$$

Τότε η δυϊκή της:

$$\text{hom}(\mathbb{Z}, G) \xleftarrow{m} \text{hom}(\mathbb{Z}, G) \xleftarrow{f} \text{hom}(\mathbb{Z}_m, G) \longleftarrow 0$$

είναι ακριβής. Επομένως έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή $\text{hom}(\mathbb{Z}_m, G) \approx \ker(G \xrightarrow{m} G)$, αφού η f είναι ένα προς ένα και $\text{Im } f = \ker(G \xrightarrow{m} G)$ από ακρίβεια. \square

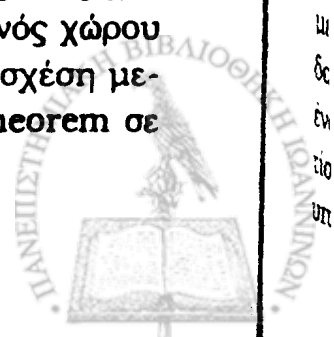
Τώρα είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε τις συνομολογιακές ομάδες ενός τοπολογικού χώρου. Θεωρούμε ένα τυχαίο αλυσιδωτό complex αβελιανών ομάδων όπως το παρακάτω.

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Για να πάρουμε το δυϊκό του αντικαθιστούμε τις αλυσιδωτές ομάδες C_n με τις συναλυσιδωτές ομάδες $C_n^* = \text{hom}(C_n, G)$ και κάθε συνοριακή απεικόνιση $\partial : C_n \rightarrow C_{n-1}$ με τη δυϊκή συνσυνοριακή απεικόνιση $\delta = \partial^* : C_n^* \rightarrow C_{n-1}^*$. Η δυϊκή ακολουθία αυτού του αλυσιδωτού complex είναι αλυσιδωτό complex και ονομάζεται συναλυσιδωτό complex.

Ορισμός 1.2.7. Οι ομολογιακές ομάδες $\ker \delta / \text{Im} \delta$ στην C_n^* στο συναλυσιδωτό complex ονομάζονται **συνομολογιακές ομάδες** και συμβολίζονται με $H^n(C; G)$.

Είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να γνωρίζουμε τη σχέση της ομολογίας ενός χώρου με τη συνομολογία του. Θα περίμενε κανείς η συνομολογία ενός χώρου να είναι η δυϊκή της ομολογίας. Δυστυχώς δεν είναι τόσο απλή η σχέση μεταξύ τους όπως θα δούμε μελετώντας το Universal Coefficient Theorem σε αυτήν την ενότητα.



Ορισμός 1.2.8. Έστω H μια αβελιανή ομάδα. Μία ακριβής ακολουθία ελεύθερων αβελιανών ομάδων όπως παρακάτω:

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

καλείται **free resolution** (ελεύθερη διάλυση) της H .

Αν πάρουμε την δυϊκή αυτής της ακολουθίας ως προς G έχουμε το συναλυσιδωτό complex:

$$\cdots \longleftarrow F_2^* \xleftarrow{f_2^*} F_1^* \xleftarrow{f_1^*} F_0^* \xleftarrow{f_0^*} H^* \longleftarrow 0$$

Ορίζουμε την n -συνομολογιακή ομάδα της F να είναι η ομάδα $H^n(F; G) = \ker f_{n+1}^* / \text{Im } f_n^*$.

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ένα γνωστό λήμμα σχετικά με τη συμπεριφορά δύο διαλύσεων.

Λήμμα 1.2.9. (i) Για δύο ελεύθερες διαλύσεις F και F' αβελιανών ομάδων H και H' κάθε ομομορφισμός $\alpha : H \rightarrow H'$ μπορεί να επεκταθεί σε αλυσιδωτή απεικόνιση $F \rightarrow F'$ όπως παρακάτω.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_1 \downarrow & & \alpha_0 \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ \cdots & \longrightarrow & F'_2 & \xrightarrow{f'_2} & F'_1 & \xrightarrow{f'_1} & F'_0 & \xrightarrow{f'_0} & H' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Επιπλέον κάθε δύο τέτοιες αλυσιδωτές απεικονίσεις της α είναι αλυσιδωτά ομοιοπικές.

(ii) Για δύο ελεύθερες διαλύσεις F και F' της H υπάρχουν ισομορφισμοί $H^n(F; G) \approx H^n(F'; G) \forall n$.

Απόδειξη. Βλέπε στο [1] στη σελίδα 194. □

Κάθε αβελιανή ομάδα H έχει free resolution της μορφής:

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

με $F_i = 0$ για $i > 1$. Ορίζουμε την F_0 να είναι η ελεύθερη αβελιανή ομάδα $\mathcal{F}(H)$ που παράγεται από ένα σύνολο γεννητόρων της H . Τότε έχουμε έναν επιμορφισμό $f_0 : F_0 \rightarrow H$ που στέλνει τα βασικά στοιχεία στους αντίστοιχους γεννήτορες. Ο πυρήνας της f_0 είναι ελεύθερη ομάδα, αφού είναι υποομάδα ελεύθερης ομάδας. Ορίζουμε την F_1 να είναι η ελεύθερη ομάδα

$\mathcal{R}(H) = \ker f_0$ και $f_1 : F_1 \rightarrow F_0$ να είναι ο εγκλεισμός. Τέλος διαλέγουμε $F_i = 0$ για $i > 1$. Επομένως έχουμε $H^n(F; G) = 0$ για $n > 1$. Από το προηγούμενο λήμμα συμπεραίνουμε ότι αυτό ισχύει για κάθε ελεύθερη διάλυση. Συμβολίζουμε με $\text{Ext}(H, G)$ την ομάδα $H^1(F; G)$. Ο συναρτητής $\text{Ext}(_, _)$ ο οποίος πέρνει τιμές στις αβελιανές ομάδες υπολογίζει τις κλάσεις ισοδυναμίας των επεκτάσεων $0 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow 0$.

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί το κύριο μέρος αυτής της ενότητας και θα το χρησιμοποιήσουμε επανηλημένως στη μελέτη αυτής.

Θεώρημα 1.2.10 (Universal Coefficient Theorem). *Αν ένα αλυσιδωτό complex C ελεύθερων αβελιανών ομάδων έχει ομολογιακές ομάδες $H_n(C)$ τότε οι συνομολογιακές ομάδες του συναλυσιδωτού complex προσδιορίζονται από τις διασπώμενες ακολουθίες:*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow H^n(C; G) \longrightarrow \text{hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0.$$

Απόδειξη. Βλέπε στο [1] στην σελίδα 195. □

Η επόμενη πρόταση μας βοηθάει στον υπολογισμό της ομάδας $\text{Ext}(H, G)$.

Πρόταση 1.2.11. (i) $\text{Ext}(H \oplus H', G) \approx \text{Ext}(H, G) \oplus \text{Ext}(H', G)$.

(ii) $\text{Ext}(H, G) = 0$, αν η H είναι ελεύθερη.

(iii) $\text{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) \approx G/nG$.

Απόδειξη. (i)

$$\begin{aligned} \text{Ext}(H \oplus H') &= \text{hom}(\mathcal{R}(H \oplus H')) / \text{hom}(\mathcal{F}(H \oplus H')) \\ &= \text{hom}(\mathcal{R}(H) \oplus \mathcal{R}(H')) / \text{hom}(\mathcal{F}(H) \oplus \mathcal{F}(H')) \\ &= \text{hom}(\mathcal{R}(H), G) \oplus \text{hom}(\mathcal{R}(H'), G) / \\ &\quad \text{hom}(\mathcal{F}(H), G) \oplus \text{hom}(\mathcal{F}(H'), G) \\ &= \text{hom}(\mathcal{R}(H), G) / \text{hom}(\mathcal{F}(H), G) \oplus \\ &\quad \text{hom}(\mathcal{R}(H'), G) / \text{hom}(\mathcal{F}(H'), G) \\ &= \text{Ext}(H, G) \oplus \text{Ext}(H', G) \end{aligned}$$

(ii) Αν η H είναι ελεύθερη υπάρχει το free resolution της H :

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow H \longrightarrow 0.$$

Άρα $\text{Ext}(H, G) = 0$.



(iii) Θεωρούμε το free resolution:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0.$$

Η δυϊκή της είναι το παρακάτω αλυσιδωτό complex:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \text{hom}(\mathbb{Z}, G) & \xleftarrow{n} & \text{hom}(\mathbb{Z}, G) & \longleftarrow & \text{hom}(\mathbb{Z}_n, G) \longleftarrow 0. \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & G & \xleftarrow{n} & G & & \end{array}$$

Άρα $\text{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) = G/nG$.

□

Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι αν η H είναι πεπερα-
σμένα παραγώμενη, τότε η ομάδα $\text{Ext}(H, \mathbb{Z})$ είναι ισόμορφη με την torsion
υποομάδα της H . Επιπλέον η $\text{hom}(H, \mathbb{Z})$ είναι ισόμορφη με το ελεύθερο
μέρος της H . Πράγματι, αφού η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής, τότε η ακολουθία

$$0 \longleftarrow \text{hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xleftarrow{m} \text{hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longleftarrow \text{hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) \longleftarrow 0$$

είναι αλυσιδωτό complex. Επομένως $\text{hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = \ker(\mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}) = 0$.

Πόρισμα 1.2.12. Αν οι ομολογιακές ομάδες H_n και H_{n-1} ενός αλυσιδωτού
complex C ελεύθερων αβελιανών ομάδων είναι πεπερασμένα παραγόμενες
με torsion υποομάδες $T_n \subseteq H_n$ και $T_{n-1} \subseteq H_{n-1}$, η συνομολογιακή ομάδα
 $H^n(C; \mathbb{Z})$ είναι ισόμορφη με την $(H_n/T_n) \oplus T_{n-1}$.

Πόρισμα 1.2.13. Αν μία αλυσιδωτή απεικόνιση μεταξύ αλυσιδωτών comple-
xes αβελιανών ομάδων επάγει ισομορφισμούς στις ομολογιακές ομάδες, τότε
επάγει ισομορφισμούς και στις συνομολογιακές ομάδες για οποιαδήποτε ομάδα
 G .

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το five lemma στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμ-
μα:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) & \longrightarrow & H^n(C; G) & \xrightarrow{h} & \text{hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow (\alpha_*)^* & & \uparrow \alpha^* & & \uparrow (\alpha_*)^* \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-1}(C'), G) & \longrightarrow & H^n(C'; G) & \xrightarrow{h} & \text{hom}(H_n(C'), G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

□



1.3 ΣΥΝΟΜΟΛΟΓΙΑ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Ορισμός 1.3.1. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και G μία αβελιανή ομάδα. Ορίζουμε την **singular n -συναλυσιδωτή ομάδα** να είναι η δυϊκή ομάδα $\text{hom}(S_n(X), G)$, όπου $S_n(X)$ η singular n -αλυσιδωτή ομάδα του X . Επίσης ορίζουμε τη **συνσυνοριακή απεικόνιση** $\delta : S^n(X; G) \rightarrow S^{n+1}(X; G)$ να είναι η δυϊκή της συνοριακής απεικόνισης $\partial : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$.

Μία n -συναλυσίδα $\varphi \in S^n(X; G)$ αντιστοιχεί σε κάθε singular n -simplex $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ μία τιμή $\varphi(\sigma) \in G$. Για μία συναλυσίδα $\varphi \in S^n(X; G)$ το συνσύνορό της είναι η σύνθεση $S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} S_n(X) \xrightarrow{\varphi} G$. Δηλαδή για ένα singular $(n+1)$ -simplex $\sigma : \Delta^{n+1} \rightarrow X$ έχουμε:

$$(\delta\varphi)(\sigma) = \varphi(\partial\sigma) = \sum_i (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{n+1}]})$$

Ορισμός 1.3.2. Η δυϊκή ακολουθία:

$$\dots \longleftarrow S^{n+1}(X; G) \xleftarrow{\delta} S^n(X; G) \xleftarrow{\delta} S^{n-1}(X; G) \xleftarrow{\delta} \dots \xleftarrow{\delta} S^0(X; G) \xleftarrow{\delta} 0$$

είναι αλυσιδωτό complex και καλείται **συναλυσιδωτό complex**. Ορίζουμε τις **συνολομολογιακές ομάδες του X** , $H^i(X; G)$ να είναι το πηλίκο $\ker \delta / \text{Im} \delta$. Τα στοιχεία του $\ker \delta$ καλούνται **συνκύκλοι** και τα στοιχεία του $\text{Im} \delta$ **συνσύνορα**.

Μία συναλυσίδα φ είναι συνκύκλος αν $\delta\varphi = \varphi\partial = 0$. Δηλαδή αν η φ μηδενίζει στα σύνορα.

Οι αλυσιδωτές ομάδες $S^n(X)$ είναι ελεύθερες, άρα εφαρμόζοντας το universal coefficient theorem για τη συνολομολογία έχουμε ότι οι συνολομολογιακές ομάδες με αυθαίρετους συντελεστές προσδιορίζονται από τις ομολογιακές ομάδες με συντελεστές στο \mathbb{Z} σύμφωνα με την παρακάτω διασπώμενη ακολουθία.

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X; G) \longrightarrow \text{hom}(H_n(X), G) \longrightarrow 0.$$

Ειδικά αν οι ομολογιακές ομάδες του X είναι πεπερασμένα παραγώμενες, τότε από το πόρισμα 1.2.12 μπορούμε να υπολογίσουμε τις συνολομολογιακές ομάδες του X .

Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε τις συνολομολογιακές ομάδες του X για $n = 1$ και $n = 2$. Για $n = 0$ δεν υπάρχει ο Ext όρος, επομένως από το universal coefficient theorem έχουμε τον ισομορφισμό:

$$H^0(X; G) \approx \text{hom}(H_0(X), G).$$



Αφού τα singular 0-simplices είναι τα σημεία του X , μία συναλυσίδα στο $S^0(X; G)$ είναι μία τυχαία απεικόνιση $\varphi : X \rightarrow G$, όχι απαραίτητα συνεχής ακόμα και αν η G έχει τοπολογία. Για να είναι η φ συνκύκλος θα πρέπει για κάθε singular 1-simplex $\sigma : [v_0, v_1] \rightarrow X$ να έχουμε:

$$\delta\varphi(\sigma) = \varphi(\partial\sigma) = \varphi(\sigma(v_1)) - \varphi(\sigma(v_0)) = 0.$$

Δηλαδή θα πρέπει η φ να είναι σταθερή σε κάθε τροχιακή συνιστώσα του X . Άρα η $H^0(X; G)$ είναι όλες οι απεικονίσεις από το σύνολο των τροχιακών συνιστωσών του X στην G . Τώρα για $n = 1$ το universal coefficient theorem μας δίνει ισομορφισμό:

$$H^1(X; G) \approx \text{hom}(H_1(X), G)$$

αφού η $H_0(X)$ είναι ελεύθερη και $\text{Ext}(H_0(X), G) = 0$.

Θεωρούμε το αλυσιδωτό complex:

$$\cdots \longrightarrow S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

και παίρνουμε το δυϊκό του:

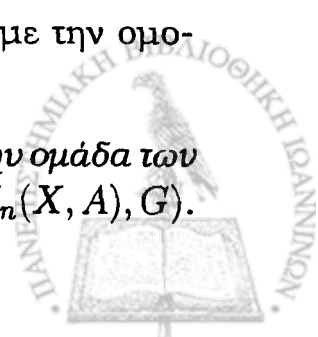
$$\cdots \longleftarrow S^0(X) \xleftarrow{\varepsilon^*} \mathbb{Z} \longleftarrow 0$$

Ορισμός 1.3.3. Όπως και στις ομολογιακές ομάδες ορίζουμε τις *ελαττούμενες συνομολογιακές ομάδες* να είναι το πηλίκο \ker / Im στην παραπάνω ακολουθία.

Όμοια με τις ομολογιακές ομάδες έχουμε $\tilde{H}^n(X; G) = H^n(X; G)$ για $n > 0$ και από universal coefficient theorem $\tilde{H}^0(X) \approx \text{hom}(\tilde{H}_0(X), G)$. Θεωρούμε την $H^0(X; G)$ ως τις απεικονίσεις από τον X στην G που είναι σταθερές στις τροχιακές συνιστώσες του X . Η $\varepsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ στέλνει κάθε singular 0-simplex σ στο 1, άρα η ε^* στέλνει τον ομομορφισμό $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G$ στη σύνθεση $S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} G$ που είναι η απεικόνιση $\sigma \mapsto \varphi(1)$. Άρα είναι μία σταθερή απεικόνιση και αφού το $\varphi(1)$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στην G , το $\text{Im}\varepsilon^*$ αποτελείται ακριβώς από όλες τις σταθερές απεικονίσεις. Άρα η $\tilde{H}^0(X; G)$ είναι όλες οι απεικονίσεις $X \rightarrow G$ που είναι σταθερές σε κάθε τροχιακή συνιστώσα του X modulo αυτές που είναι σταθερές παντού.

Θα ορίσουμε τώρα τη σχετική συνομολογία κατ' αντιστοιχία με την ομολογία

Ορισμός 1.3.4. Έστω $A \subseteq X$ ένας υπόχωρος του X . Ορίζουμε την ομάδα των σχετικών n -συναλυσίδων $S^n(X, A; G)$ να είναι η ομάδα $\text{hom}(S_n(X, A), G)$.



Η σχετική συνσυνοριακή απεικόνιση δ ορίζεται ως η δυϊκή της αντίστοιχης σχετικής συνοριακής απεικόνισης στις ομολογιακές ομάδες. Τα στοιχεία του πυρήνα της $\delta : S^n(X, A; G) \rightarrow S^{n+1}(X, A; G)$ καλούνται **σχετικοί συνκύκλοι** και τα στοιχεία της εικόνας της καλούνται **σχετικά συνόνορα**.

Ορισμός 1.3.5. Έστω $A \subseteq X$ ένας υπόχωρος του X . Ορίζουμε τις **σχετικές συνομολογιακές ομάδες** του X να είναι οι ομάδες $H^i(X, A; G) = \ker \delta / \text{Im} \delta$.

Θεωρούμε την ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow S_n(A) \xrightarrow{i} S_n(X) \xrightarrow{j} S_n(X, A) \longrightarrow 0,$$

όπου $S_n(A)$ είναι υποομάδα της $S_n(X)$ και η $S_n(X, A)$ είναι το πηλίκο τους. Η ακολουθία αυτή διασπάται επειδή η σχετική ομάδα είναι ελεύθερη. Άρα και η δυϊκή

$$0 \longleftarrow S^n(A; G) \xleftarrow{i^*} S^n(X; G) \xleftarrow{j^*} S^n(X, A; G) \longleftarrow 0$$

διασπάται και άρα είναι ακριβής. Επομένως η $S^n(X, A; G)$ είναι υποομάδα της $S^n(X; G)$ και η $S^n(A; G)$ είναι το πηλίκο τους.

Το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & S^n(A; G) & \xleftarrow{i^*} & S^n(X; G) & \xleftarrow{j^*} & S^n(X, A; G) & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \\ 0 & \longleftarrow & S^{n+1}(A; G) & \xleftarrow{i^*} & S^{n+1}(X; G) & \xleftarrow{j^*} & S^{n+1}(X, A; G) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

είναι μεταθετικό αφού και το αντίστοιχο στην ομολογία είναι μεταθετικό. Επομένως επάγεται η παρακάτω μακρά ακριβή ακολουθία των συνομολογιακών ομάδων:

$$\dots \longrightarrow H^n(X, A; G) \xrightarrow{j^*} H^n(X; G) \xrightarrow{i^*} H^n(A; G) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X, A; G) \longrightarrow \dots$$

Όπως στην ομολογία έτσι και στην συνομολογία μία συνεχής απεικόνιση επάγει ομομορφισμούς.

Έστω $f : X \rightarrow Y$. Τότε ορίζεται η $f_{\#} : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ με $f_{\#}(\sigma) = f \circ \sigma$. Η δυϊκή αυτής της απεικόνισης είναι η $f^{\#} : S^n(Y; G) \rightarrow S^n(X; G)$. Δηλαδή για $\varphi \in \text{hom}(S_n(Y); G)$ έχουμε $f^{\#}\varphi = \varphi f_{\#}$. Από τη σχέση $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ έχουμε ότι η $f_{\#}$ απεικονίζει σύνορα σε σύνορα και κύκλους σε κύκλους. Παίρνοντας τη δυϊκή μορφή αυτής της σχέσης έχουμε:

$$\begin{aligned} (f_{\#}\partial)^* &= (\partial f_{\#})^* \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta f^{\#} &= f^{\#}\delta. \end{aligned}$$



Επομένως η $f^\#$ απεικονίζει συνσύνορα σε συνσύνορα και συνκύκλους σε συνκύκλους. Άρα η $f^\#$ επάγει ομομορφισμούς $f^* : H^n(Y; G) \rightarrow H^n(X; G)$. Στην περίπτωση των σχετικών ομάδων μία απεικόνιση $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ επάγει την $f^* : H^n(Y, B; G) \rightarrow H^n(X, A; G)$.

Θα δείξουμε ότι αν $f \simeq g : X \rightarrow Y$ τότε $f^* = g^* : H^n(Y) \rightarrow H^n(X)$. Αυτό αποδύκνείται παίρνοντας τις δυϊκές μορφές στην αντίστοιχη απόδειξη για τις ομολογιακές ομάδες, όπου είχαμε την αλυσιδωτή ομοτοπία P τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} g_\# - f_\# &= \partial P + P\partial \Rightarrow \\ \Rightarrow g^\# - f^\# &= P^*\delta + \delta P^*. \end{aligned}$$

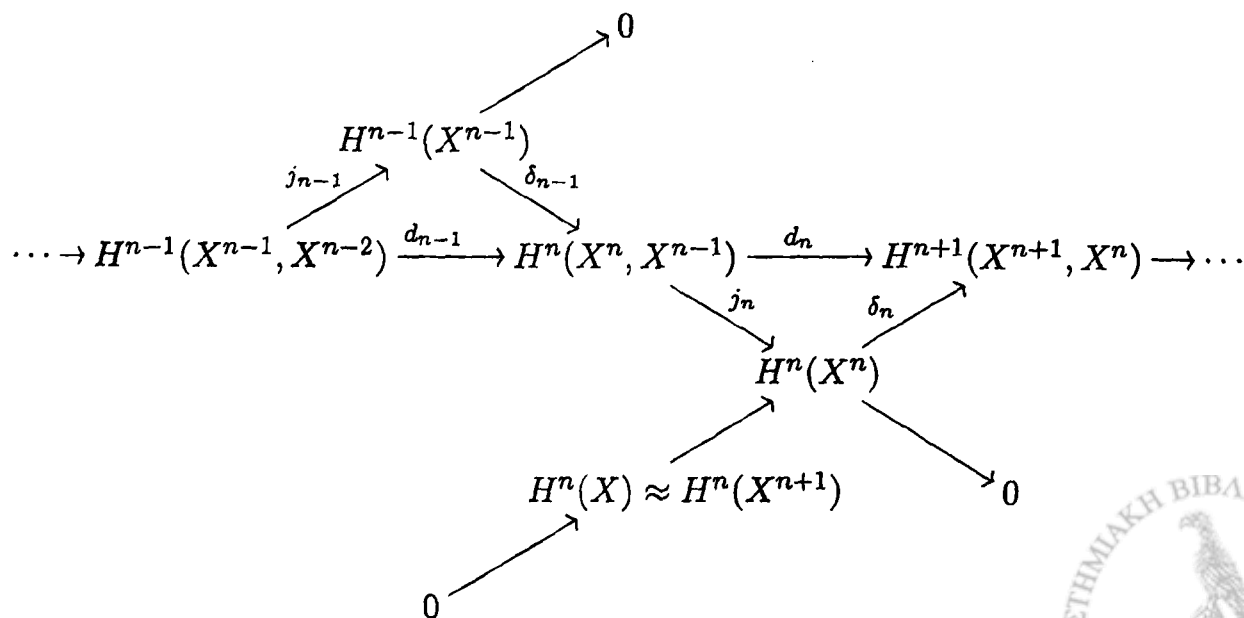
Άρα η P^* είναι αλυσιδωτή ομοτοπία μεταξύ των $f^\#$ και $g^\# : S^n(Y; G) \rightarrow S^n(X; G)$. επομένως $f^* = g^*$.

Θεώρημα 1.3.6 (Θεώρημα εκτομής για τις συνομολογιακές ομάδες). Έστω $Z \subseteq A \subseteq X$ με $\bar{Z} \subseteq A$. Τότε ο εγκλεισμός $i : (X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ επάγει ισομορφισμούς:

$$i^* : H^n(X, A; G) \rightarrow H^n(X - Z, A - Z; G) \quad \forall n.$$

1.3.1 Cellular Συνομολογία

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τη cellular συνομολογία όπως κάναμε στην αρχή της μελέτης για τη cellular ομολογία. Έστω X ένα CW-σύμπλεγμα. Έχουμε το παρακάτω διάγραμμα, αντίστοιχο του διαγράμματος για την cellular ομολογία πριν από το θεώρημα 1.1.15.



Εδώ $d_n = \delta_n \circ j_n$. Η οριζόντια ακολουθία είναι αλυσιδωτό complex, αφού η σύνθεση $d_n d_{n-1}$ περιέχει τη σύνθεση $j_n \delta_{n-1} = 0$, και ονομάζεται cellular αλυσιδωτό complex.

Πρόταση 1.3.7. (i) $H^k(X^n, X^{n-1}; G) = 0$ για $k \neq n$.

(ii) $H^k(X^n; G) \approx H^k(X^{n-1}; G)$ για $k \neq n, n-1$.

(iii) $H^k(X^n; G) = 0$ για $k > n$.

(iv) $H^k(X, X^{n+1}; G) = 0$ για $k \leq n+1$.

(v) ο εγκλεισμός $i : X^n \hookrightarrow X$ επάγει ισομορφισμό $i^* : H^k(X^n) \xrightarrow{\approx} H^k(X)$ αν $k < n$.

Απόδειξη. Η απόδειξη στηρίζεται στο Universal Coefficient Theorem.

(i) Για $k \neq n$ έχουμε $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$, επομένως η ομάδα $\text{hom}(H_k(X^n, X^{n-1}), G)$ είναι η μηδενική. Επίσης η $H_{k-1}(X^n, X^{n-1})$ είναι ελεύθερη, άρα $\text{Ext}(H_{k-1}(X^n, X^{n-1}); G) = 0$. Επομένως από το universal coefficient theorem έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Από μακρά ακριβή ακολουθία του ζευγαριού (X^n, X^{n-1}) και το (i) έχουμε το ζητούμενο.

(iii) Από τους ισομορφισμούς στο (ii).

$$0 = H^k(X^0) \approx H^k(X^1) \approx \dots \approx H^k(X^n) \text{ για } k > n$$

(iv) Από το (i).

(v) Αφού αυτός ο εγκλεισμός επάγει ισομορφισμούς στις ομολογιακές ομάδες τότε θα επάγει ισομορφισμούς και στις συνομολογιακές ομάδες όπως έχουμε ήδη αποδείξει.

□

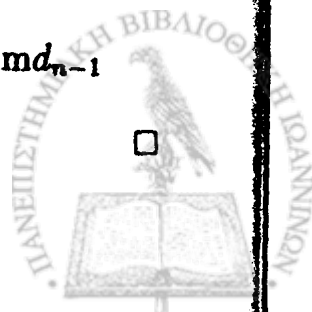
Θεώρημα 1.3.8.

$$H^n(X; G) \approx \ker d_n / \text{Im} d_{n-1}$$

Απόδειξη.

$$H^n(X; G) \approx H^n(X^{n+1}; G) \approx \ker \delta_n \approx \ker d_n / \text{Im} \delta_{n-1} \approx \ker d_n / \text{Im} d_{n-1}$$

□



Όπως στην ομολογία έτσι και στη συνομολογία ορίζεται η Mayer-Vietoris μακρά ακριβής ακολουθία.

Έστω $S_n(A + B)$ η υποομάδα της $S_n(X)$ που αποτελείται από αλυσίδες που είναι αθροίσματα n -αλυσίδων στο A και n -αλυσίδων στο B . Θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow S_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} S_n(A) \oplus S_n(B) \xrightarrow{\psi} S_n(A + B) \longrightarrow 0$$

και τη δυϊκή της:

$$0 \longrightarrow S^n(A + B, G) \longrightarrow S^n(A; G) \oplus S^n(B; G) \longrightarrow S^n(A \cap B; G) \longrightarrow 0.$$

Ο εγκλεισμός $S_n(A + B) \subseteq S_n(X)$ είναι αλυσιδωτή ομοτοπική ισοδυναμία, άρα και ο δυϊκός περιορισμός $S^n(X; G) \rightarrow S^n(A + B; G)$ είναι αλυσιδωτή ομοτοπική ισοδυναμία. Επομένως επάγει ισομορφισμούς στις αντίστοιχες συνομολογιακές ομάδες. Η πρώτη ακολουθία διασπάται άρα και η δεύτερη διασπάται, επομένως είναι ακριβής. Άρα επάγεται η παρακάτω μακρά ακριβής ακολουθία η οποία ονομάζεται Mayer-Vietoris.

$$\cdots \rightarrow H^n(X; G) \rightarrow H^n(A; G) \oplus H^n(B; G) \rightarrow H^n(A \cap B; G) \rightarrow H^{n+1}(X; G) \rightarrow \cdots$$



CUP PRODUCT

2.1 CUP PRODUCT

Το κύριο πλεονέκτημα της συνομολογίας είναι ότι εφοδιάζεται με γινόμενο, οπότε οι αβελιανές ομάδες γίνονται δακτύλιοι. Το γινόμενο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο γιατί μπορούμε να διαχωρίσουμε τοπολογικούς χώρους οι οποίοι έχουν ισόμορφες συνομολογιακές ομάδες αλλά δεν είναι ισόμορφοι δακτύλιοι.

Ορισμός 2.1.1. Έστω R ένας δακτύλιος. Για συναρτήσεις $\varphi \in S^k(X; R)$ και $\psi \in S^l(X; R)$ το **cup product** $\varphi \smile \psi \in S^{k+l}(X; R)$ είναι η συναρτησίδα που η τιμή της σε ένα singular simplex $\sigma : \Delta^{k+l} \rightarrow X$ δίνεται από τον τύπο:

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]})\psi(\sigma|_{[v_k, \dots, v_{k+l}]})$$

όπου στο δεξιό μέρος της ισότητας έχουμε το γινόμενο στον R .

Λήμμα 2.1.2. Για $\varphi \in S^k(X; R)$ και $\psi \in S^l(X; R)$ ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi.$$

Απόδειξη. Για $\sigma : \Delta^{k+l+1} \rightarrow X$ έχουμε,

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}]})\psi(\sigma|_{[v_{k+1}, \dots, v_{k+l+1}]})$$

και

$$(-1)^k (\varphi \smile \delta\psi)(\sigma) = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]})\psi(\sigma|_{[v_k, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1}]})$$



Αν προσθέσουμε τις δύο ισότητες ο τελευταίος όρος του πρώτου αθροίσματος ακυρώνεται με τον πρώτο όρο του δεύτερου αθροίσματος και αυτό που μένει είναι $(\varphi \smile \psi)(\partial\sigma)$ αφού,

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k+l+1} (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1}]}$$

□

Από τον τύπο $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi \pm \varphi \smile \delta\psi$ είναι προφανές ότι το cup product δύο συνκύκλων είναι συνκύκλος. Πράγματι, έστω φ, ψ δύο συνκύκλοι, δηλαδή $\delta\varphi = 0$ και $\delta\psi = 0$. Τότε $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi \pm \varphi \smile \delta\psi = 0$. Επίσης το cup product ενός συνκύκλου και ενός συνσυνόρου είναι συνσύνоро, αφού

$$\begin{aligned} \varphi \smile \delta\psi &= \pm\delta(\varphi \smile \psi) \text{ αν } \delta\varphi = 0 \\ \text{και } \delta\varphi \smile \psi &= \delta(\varphi \smile \psi) \text{ αν } \delta\psi = 0. \end{aligned}$$

Επομένως το cup product μεταξύ αλυσίδων επάγεται στις συνομολογιακές ομάδες

$$H^k(X; R) \times H^l(X; R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X; R).$$

Αν ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο, τότε υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο για το cup product, αυτό είναι η κλάση $1 \in H^0(X; R)$ που ορίζεται από τους 0-συνκύκλους που δίνουν την τιμή $1 \in R$ σε κάθε 0-simplex. Επίσης είναι προσεταιριστικό και επιμεριστικό.

Παράδειγμα 2.1.3. Έστω X ένα 2-διάστατο CW-σύμπλεγμα που δημιουργείται προσκολλώντας ένα 2-κέλυφος στην S^1 σύμφωνα με την απεικόνιση $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^m$. Από cellular συνομολογια έχουμε:

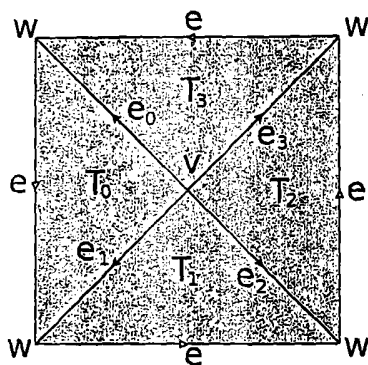
$$H^i(X; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , i = 0 \\ 0 & , i = 1 \\ \mathbb{Z}_m & , i = 2. \end{cases}$$

Άρα δεν έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε το cup product με συντελεστές στο \mathbb{Z} . Για συντελεστές στο \mathbb{Z}_m έχουμε:

$$H^i(X; \mathbb{Z}_m) = \begin{cases} \mathbb{Z}_m & , i = 0 \\ \mathbb{Z}_m & , i = 1 \\ \mathbb{Z}_m & , i = 2. \end{cases}$$

Παίνουμε την Δ -complex ανάλυση του X από ένα κανονικό m -γωνο χωρισμένο σε m τρίγωνα T_i , όπως το σχήμα 2.1. Άρα έχουμε 2 0-simplices



Σχήμα 2.1: Για $m = 4$

$\{v, w\}$, $m+1$ 1-simplices $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e\}$ και m 2-simplices $\{T_0, T_1, T_2, T_3\}$. Ο κύκλος e γεννά την $H_1(X)$. Ένας γεννήτορας α του $H^1(X; \mathbb{Z}_m)$ εκπροσωπείται από έναν συνκύκλο φ που δίνει την τιμή 1 στο 1-simplex e . Για να είναι ο φ συνκύκλος θα πρέπει να ισχύει:

$$\delta\varphi = 0 \Leftrightarrow \delta\varphi(T_i) = 0 \forall i \Leftrightarrow \varphi(\partial T_i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\varphi(e_i) + \varphi(e) = \varphi(e_{i+1}) \quad \forall i \pmod{m}.$$

Επειδή $\varphi(e) = 1$ μπορούμε να επιλέξουμε:

$$\varphi(e_i) = i \in \mathbb{Z}_m.$$

Η ομάδα $H_2(X, \mathbb{Z}_m)$ γεννιάται από την κλάση της αλυσίδας $T_0 + \dots + T_{m-1}$, ενώ $H_2(X) = 0$. Ένας γεννήτορας β της $H^2(X, \mathbb{Z}_m)$ μπορεί να είναι η κλάση του 2-συνκύκλου ο οποίος δίνει την τιμή 1 στην $\sum T_i$. Μπορεί για παράδειγμα να είναι ένας ο οποίος δίνει την τιμή 1 στον T_i και 0 στον T_j , $j \neq i$. Εδώ έχουμε ότι $H^2(X, \mathbb{Z}_m) \approx \text{hom}(H_2(X, \mathbb{Z}_m), \mathbb{Z}_m)$. Το γινόμενο $\varphi \smile \varphi$ είναι στοιχείο της $H^2(X, \mathbb{Z}_m)$ και θέλουμε να βρούμε την τιμή του. Θα το υπολογίσουμε στον κύκλο $\sum T_i$.

$$\varphi \smile \varphi(\sum T_i) = \sum \varphi \smile \varphi(T_i) = \sum \varphi(e_i)\varphi(e) = \sum i = 0 + \dots + (m-1)$$

Άρα $\varphi \smile \varphi = (\sum_0^{m-1} i)\beta \pmod{m}$. Στο \mathbb{Z}_m το άθροισμα $0 + 1 + \dots + (m-1)$ είναι 0 αν ο m είναι περιττός και k αν $m = 2k$. Άρα,

$$\begin{aligned} \alpha \smile \alpha &= 0, \text{ αν ο } m \text{ είναι περιττός} \\ \text{και } \alpha \smile \alpha &= k\beta, \text{ αν } m = 2k. \end{aligned}$$

Ειδικά αν $m = 2$ τότε ο X είναι ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^2$ και $\alpha \smile \alpha = \beta$.



Εισάγουμε τώρα τα παρακάτω επαγόμενα cup products στη σχετική συνομολογία:

$$H^k(X; R) \times H^l(X, A; R) \xrightarrow{\sim} H^{k+l}(X, A; R)$$

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X; R) \xrightarrow{\sim} H^{k+l}(X, A; R)$$

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X, A; R) \xrightarrow{\sim} H^{k+l}(X, A; R).$$

Αφού τουλάχιστον ένα από τα φ και ψ μηδενίζει στο A , τότε και το $\varphi \smile \psi$ μηδενίζει στο A . Επίσης υπάρχει το πιο γενικό relative cup product:

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X, B; R) \xrightarrow{\sim} H^{k+l}(X, A \cup B; R).$$

Το αρχικό cup product περιορίζεται στο

$$S^k(X, A; R) \times S^l(X, B; R) \longrightarrow S^{k+l}(X, A + B; R),$$

όπου $S^n(X, A + B; R)$ η υποομάδα της $S^n(X; R)$ που αποτελείται από συναλυσίδες που μηδενίζουν σε αθροίσματα αλυσίδων στο A και αλυσίδων στο B . Αν τα A και B είναι ανοιχτά υποσύνολα του X , οι εγκλεισμοί:

$$S^n(X, A \cup B) \hookrightarrow S^n(X, A + B; R)$$

επάγουν ισομορφισμούς στη συνομολογία, από το five-lemma και από το γεγονός ότι οι απεικονίσεις:

$$S^n(A \cup B; R) \longrightarrow S^n(A + B; R)$$

επάγουν ισομορφισμούς στη συνομολογία. Άρα το cup product:

$$S^k(X, A; R) \times S^l(X, B; R) \longrightarrow S^{k+l}(X, A + B; R)$$

επάγει το παραπάνω σχετικό cup product. Επίσης αυτό το cup product ισχύει και όταν ο X είναι CW-σύμπλεγμα και τα A και B είναι υποσυμπλέγματα του X .

Πρόταση 2.1.4. Έστω $f : X \rightarrow Y$. Για την επαγόμενη $f^* : H^n(Y; R) \rightarrow H^n(X; R)$ ισχύει ο τύπος:

$$f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta).$$



Απόδειξη. Αυτό προέρχεται από τον τύπο $f^\#(\varphi) \smile f^\#(\psi) = f^\#(\varphi \smile \psi)$.

$$\begin{aligned} (f^\# \varphi \smile f^\# \psi)(\sigma) &= f^\# \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}) f^\# \psi(\sigma|_{[v_k, \dots, v_{k+l}]})) \\ &= \varphi(f\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}) \psi(f\sigma|_{[v_k, \dots, v_{k+l}]}) \\ &= (\varphi \smile \psi)(f\sigma) = f^\#(\varphi \smile \psi)(\sigma). \end{aligned}$$

□

2.2 Ο ΣΥΝΟΜΟΛΟΓΙΑΚΟΣ ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ

Ορισμός 2.2.1. Ορίζουμε την ομάδα $H^*(X; R)$ να είναι το ευθύ άθροισμα των ομάδων $H^n(X; R)$. Τα στοιχεία του $H^*(X; R)$ είναι πεπερασμένα άθροίσματα $\sum_i \alpha_i$ με $\alpha_i \in H^i(X; R)$. Το γινόμενο δύο τέτοιων στοιχείων ορίζεται ως:

$$\left(\sum_i \alpha_i \right) \left(\sum_j \beta_j \right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j.$$

Αυτό το γινόμενο κάνει την $H^*(X; R)$ δακτύλιο. Ο δακτύλιος αυτός έχει μοναδιαίο στοιχείο αν ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο.

Από το παράδειγμα 2.1.3 έχουμε ότι ο δακτύλιος $H^*(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$ αποτελείται από τα πολυώνυμα $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2$ με συντελεστές $a_i \in \mathbb{Z}_2$. Δηλαδή $H^*(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^3)$.

Ορισμός 2.2.2. Ένας δακτύλιος A καλείται **βαθμοποιημένος δακτύλιος** εάν έχει ανάληψη σε άθροισμα $\bigoplus_{i \geq 0} A_i$ προσθετικών ομάδων τέτοιο ώστε ο πολλαπλασιασμός να είναι $A_k \times A_l \rightarrow A_{k+l}$. Για να πούμε ότι ένα στοιχείο $a \in A$ ανήκει στην A_k γράφουμε $|a| = k$ και καλούμε το $|a|$ **διάσταση** του a .

Αμέσως θα υπολογίσουμε τη συνομολογία των προβολικών χώρων οι οποίοι είναι ιδιαίτερα σημαντικοί στην τοπολογία και τη γεωμετρία. Η απόδειξη στηρίζεται στο σχετικό cup product και στην γνωστή τους ανάλυση σαν CW-συμπλέγματα.

Θεώρημα 2.2.3.

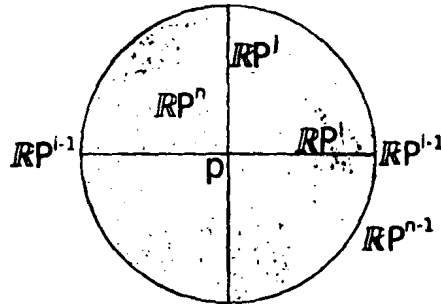
$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) &\approx \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1}) \\ \text{και } H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) &\approx \mathbb{Z}_2[\alpha], \text{ όπου } |\alpha| = 1. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) &\approx \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1}) \\ \text{και } H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) &\approx \mathbb{Z}[\alpha], \text{ όπου } |\alpha| = 2. \end{aligned}$$



Απόδειξη. Για τη συνομολογία του προβολικού χώρου θα χρησιμοποιήσουμε \mathbb{Z}_2 συντελεστές. Αρκεί να δείξουμε ότι το cup product ενός γεννήτορα της $H^{n-1}(\mathbb{R}P^n)$ με ένα γεννήτορα της $H^1(\mathbb{R}P^n)$ είναι γεννήτορας της $H^n(\mathbb{R}P^n)$. Θα δείξουμε πιο γενικά ότι το cup product ενός γεννήτορα της $H^i(\mathbb{R}P^n)$ με ένα γεννήτορα της $H^{n-i}(\mathbb{R}P^n)$ είναι γεννήτορας της $H^n(\mathbb{R}P^n)$.



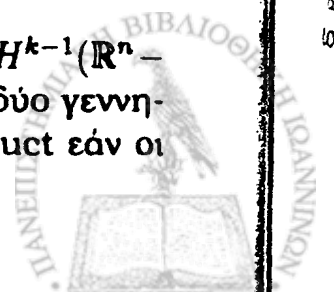
Σχήμα 2.2: Προβολικός Χώρος

Ο $\mathbb{R}P^n$ είναι τα μη μηδενικά διανύσματα $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ modulo πολλαπλασιασμό με μη μηδενικούς συντελεστές. Θέτουμε $j = n - i$. Στον $\mathbb{R}P^n$ υπάρχει ένα αντίγραφο του $\mathbb{R}P^i$ που εκπροσωπείται από διανύσματα που οι j τελευταίες συντεταγμένες x_{i+1}, \dots, x_n είναι μηδέν. Επίσης υπάρχει ένα αντίγραφο του $\mathbb{R}P^j$ που εκπροσωπείται από τα διανύσματα που οι πρώτες i συντεταγμένες, x_0, \dots, x_{i-1} , είναι μηδέν. Η τομή $\mathbb{R}P^i \cap \mathbb{R}P^j$ είναι τα διανύσματα με μόνη μη μηδενική συντεταγμένη την x_i , δηλαδή είναι ένα σημείο p . Τώρα έστω U ο υπόχωρος του $\mathbb{R}P^n$ που εκπροσωπείται από διανύσματα με μη μηδενική την x_i συντεταγμένη. Κάθε σημείο U μπορεί να εκπροσωπηθεί από διανύσματα με $x_i = 1$ και τις υπόλοιπες συντεταγμένες αυθαίρετες. Άρα το U είναι ομοιομορφικό με τον \mathbb{R}^n . Μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι το σημείο p απεικονίζεται στο 0 μέσω αυτού του ομοιομορφισμού. Από το σχήμα 2.2 έχουμε ότι $U = \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^{n-1}$.

Θεωρούμε το επόμενο αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc}
 H^i(\mathbb{R}P^n) \times H^j(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\smile} & H^n(\mathbb{R}P^n) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^j) \times H^j(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^i) & \xrightarrow{\smile} & H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \{p\}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \times H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^i) & \xrightarrow{\smile} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}).
 \end{array}$$

Εδώ χρησιμοποιούμε ότι $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j \simeq S^{n-j-1}$ και $H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \approx H^{k-1}(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \approx H^{k-1}(S^{n-j-1})$. Το κάτω cup product απεικονίζει γινόμενο δύο γεννητόρων σε γεννήτορα. Το ίδιο θα ισχύει και για το πάνω cup product εάν οι



τέσσερις κάθετες απεικονίσεις είναι ισομορφισμοί. Η κάτω δεξιά απεικόνιση είναι ισομορφισμός από το θεώρημα εκτομής. Η πάνω δεξιά απεικόνιση είναι ισομορφισμός αφού το $\mathbb{R}P^n - \{p\}$ είναι deformation retract του $\mathbb{R}P^{n-1}$, άρα $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \{p\}) \approx H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1})$ και από cellular συνομολογία $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}) \approx H^n(\mathbb{R}P^n)$. Για να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις στην αριστερή στήλη είναι ισομορφισμοί αρκεί να δείξουμε ότι όλες οι απεικονίσεις στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα είναι ισομορφισμοί,

$$\begin{array}{ccccccc} H^i(\mathbb{R}P^n) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{i-1}) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^j) & \longrightarrow & H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^i(\mathbb{R}P^i) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{R}P^i, \mathbb{R}P^{i-1}) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{R}P^i, \mathbb{R}P^i - \{p\}) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i - \{0\}). \end{array}$$

Το αριστερό τετράγωνο αποτελείται από ισομορφισμούς από cellular συνομολογία. Η απεικόνιση στα δεξιά είναι προφανώς ισομορφισμός. Η δεξιά κάτω απεικόνιση είναι ισομορφισμός από θεώρημα εκτομής. Η δεύτερη από δεξιά οριζόντια απεικόνιση είναι ισομορφισμός επειδή το $\mathbb{R}P^i - \{p\}$ είναι deformation retract του $\mathbb{R}P^{i-1}$. Οι υπόλοιπες απεικονίσεις θα είναι ισομορφισμοί εάν η μεσαία πάνω απεικόνιση είναι ισομορφισμός. Αυτή είναι ισομορφισμός αφού το $\mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^j$ είναι deformation retract του $\mathbb{R}P^{i-1}$. Πράγματι, ο υπόχωρος $\mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^j \subseteq \mathbb{R}P^n$ αποτελείται από σημεία που εκπροσωπούνται από διανύσματα $v = (x_0, \dots, x_n)$ με τουλάχιστον μία από τις x_0, \dots, x_{i-1} μη μηδενική. Ο τύπος

$$f_t(v) = (x_0, \dots, x_{i-1}, tx_i, \dots, tx_n) \quad 0 \leq t \leq 1$$

ορίζει ένα deformation retract του $\mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^j$ στο $\mathbb{R}P^{i-1}$.

Στην περίπτωση του πραγματικού προβολικού χώρου $\mathbb{R}P^\infty$ ο εγκλεισμός $\mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ επάγει ισομορφισμούς στις συνομολογιακές ομάδες από cellular συνομολογία. Επειδή $H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \approx H^i(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2)$ για $i \leq n$ έχουμε $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \dots$ με το προηγούμενο cup product. Δηλαδή,

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty) \approx \mathbb{Z}_2[\alpha].$$

Όμοια αποδύκνεται η περίπτωση του μιγαδικού προβολικού χώρου. \square

Πρόταση 2.2.4. Ο ισομορφισμός ομάδων $H^*(\bigsqcup_\alpha X_\alpha; R) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha H^*(X_\alpha; R)$ με $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων, αφού κάθε απεικόνιση i_α^* είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Όμοια για το σφηνοειδές άθροισμα έχουμε ισομορφισμό δακτυλίων:

$$\tilde{H}^*\left(\bigvee_\alpha X_\alpha; R\right) \approx \prod_\alpha \tilde{H}^*(X_\alpha; R).$$



Εδώ κάθε χώρος X_a έχει ένα σημείο x_a ως προς το οποίο δημιουργείται το σφηνοειδές άθροισμα και κάθε τέτοιο x_a είναι *deformation retract* μιας περιοχής του X_a για κάθε a .

Παράδειγμα 2.2.5. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο μιγαδικός προβολικός χώρος CP^2 δεν είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με το σφηνοειδές άθροισμα $S^2 \vee S^4$. Αυτό δεν μπορούμε να το δείξουμε χρησιμοποιώντας τις ομάδες $H^*(CP^2)$ και $H^*(S^2 \vee S^4)$, αφού ως ομάδες είναι ισόμορφες. Όμως ως δακτύλιοι είναι διαφορετικοί αφού το τετράγωνο κάθε στοιχείου του $H^*(S^2 \vee S^4)$ είναι μηδέν σύμφωνα με τον ισομορφισμό:

$$\tilde{H}^*(S^2 \vee S^4; \mathbb{Z}) \approx \tilde{H}^*(S^2; \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}^*(S^4; \mathbb{Z})$$

και το τετράγωνο ενός γεννήτορα του $H^*(CP^2; \mathbb{Z})$ είναι μη μηδενικό όπως είδαμε στο θεώρημα 2.2.3.

Θεώρημα 2.2.6. Για κάθε $\alpha \in H^k(X, A; R)$ και $\beta \in H^l(X, A; R)$ ισχύει ο τύπος:

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{kl} \beta \smile \alpha.$$

Δηλαδή το *cup product* είναι αντιμεταθετικό, μόνιου ± 1 .

Η απόδειξη είναι υπολογιστική και παραλείπεται.

2.3 ΤΑΝΥΣΤΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Θα μελετήσουμε τη σχέση του *cup product* με το γινόμενο τοπολογικών χώρων.

Ορισμός 2.3.1. Ορίζουμε το **cross product** στην κανονική του μορφή να είναι η απεικόνιση:

$$H^k(X; R) \times H^l(Y; R) \xrightarrow{\times} H^{k+l}(X \times Y; R)$$

και στη σχετική του μορφή να είναι η απεικόνιση:

$$H^k(X, A; R) \times H^l(Y, B; R) \xrightarrow{\times} H^{k+l}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R)$$

με $\alpha \times \beta = p_1^*(\alpha) \smile p_2^*(\beta)$ όπου p_1 και p_2 οι προβολές του $X \times Y$ στα X και Y αντίστοιχα. Το *cross product* επάγεται στους αντίστοιχους συνομολογιακούς δακτύλιους.

Πρώτα θα ορίσουμε το τανυστικό γινόμενο.



Ορισμός 2.3.2. Για αβελιανές ομάδες A και B το τανυστικό γινόμενο $A \otimes B$ ορίζεται να είναι το πηλίκο $A \times B/Q$, όπου Q η ομάδα που παράγεται από τις σχέσεις $(\alpha + \alpha') \times \beta = \alpha \times \beta + \alpha' \times \beta$ και $\alpha \times (\beta + \beta') = \alpha \times \beta + \alpha \times \beta'$ με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$. Το μηδενικό στοιχείο του $A \otimes B$ είναι το $0 \otimes 0 = 0 \otimes \beta = \alpha \otimes 0$. Επίσης $-(\alpha \otimes \beta) = (-\alpha) \otimes \beta = \alpha \otimes (-\beta)$.

Πρόταση 2.3.3. (i) $A \otimes B \approx B \otimes A$.

$$(ii) (\bigoplus_i A_i) \otimes B \approx \bigoplus_i (A_i \otimes B).$$

$$(iii) (A \otimes B) \otimes C \approx A \otimes (B \otimes C).$$

$$(iv) \mathbb{Z} \otimes A \approx A.$$

$$(v) \mathbb{Z}_n \otimes A \approx A/nA.$$

(vi) Οι ομομορφισμοί $f : A \rightarrow A'$ και $g : B \rightarrow B'$ επάγουν ομομορφισμό:

$$\begin{aligned} f \otimes g : A \otimes B &\longrightarrow A' \otimes B' \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto f(\alpha) \otimes g(\beta). \end{aligned}$$

(vii) Μία διγραμμική απεικόνιση $\varphi : A \times B \rightarrow C$ επάγει ομομορφισμό:

$$\begin{aligned} A \otimes B &\longrightarrow C \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto \varphi(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Γενικεύοντας ορίζουμε $A \otimes_R B$, για A, B R -πρότυπα, να είναι το πηλίκο $(A \otimes B)/Q$ όπου Q η ομάδα που παράγεται από τις σχέσεις $r\alpha \otimes \beta = \alpha \otimes r\beta$ για $r \in R, \alpha \in A$ και $\beta \in B$. Στην περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m$ ή \mathbb{Q} έχουμε $A \otimes_R B = A \otimes B$.

Το cup product είναι επιμεριστικό, επομένως το cross product είναι διγραμμικό. Από την τελευταία ιδιότητα της προηγούμενης πρότασης έχουμε ότι το cross product επάγει ομομορφισμό:

$$\begin{aligned} H^*(X; R) \otimes_R H^*(Y; R) &\xrightarrow{\times} H^*(X \times Y; R) \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto \alpha \times \beta \end{aligned}$$

ο οποίος γίνεται ομομορφισμός δακτυλίων αν ορίσουμε πολλαπλασιασμό:

$$(\alpha \otimes \beta)(\gamma \otimes \delta) = (-1)^{|\beta||\gamma|} \alpha\gamma \otimes \beta\delta.$$



Άρα το cross product στέλνει το $(\alpha \otimes \beta)(\gamma \otimes \delta) = (-1)^{|\beta||\gamma|} \alpha\gamma \otimes \beta\delta$ στο

$$\begin{aligned} (-1)^{|\beta||\gamma|} \alpha\gamma \times \beta\delta &= (-1)^{|\beta||\gamma|} p_1^*(\alpha \smile \gamma) \smile p_2^*(\beta \smile \delta) \\ &= (-1)^{|\beta||\gamma|} p_1^*(\alpha) \smile p_1^*(\gamma) \smile p_2^*(\beta) \smile p_2^*(\delta) \\ &= p_1^*(\alpha) \smile p_2^*(\beta) \smile p_1^*(\gamma) \smile p_2^*(\delta) \\ &= (\alpha \times \beta)(\gamma \times \delta) \end{aligned}$$

που είναι το cup product των εικόνων των $\alpha \otimes \beta$ και $\gamma \otimes \delta$. Αναφέρουμε το επόμενο θεώρημα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 2.3.4. Το cross product $H^*(X; R) \otimes_R H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X \times Y; R)$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων αν τα X και Y είναι CW-συμπλέγματα και το $H^k(Y; R)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο R -πρότυπο $\forall k$.

Απόδειξη. Βλέπε στο [7]. □

Παράδειγμα 2.3.5. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε τον ισομορφισμό δακτυλίων:

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \mathbb{R}P^\infty) \approx H^*(\mathbb{R}P^\infty) \otimes H^*(\mathbb{R}P^\infty).$$

Άρα από το θεώρημα 2.2.3 έχουμε

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \mathbb{R}P^\infty) \approx \mathbb{Z}_2[\alpha] \otimes \mathbb{Z}_2[\beta] \approx \mathbb{Z}_2[\alpha, \beta].$$

Γενικά ισχύει

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty) \approx \mathbb{Z}_2[a_1, \dots, a_k].$$



3

ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

3.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μία πολλαπλότητα είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο το οποίο τοπικά προσδιορίζεται από n -άδες πραγματικών αριθμών. Τοπικά είναι ομοιομορφική με τον \mathbb{R}^n . Δηλαδή αποτελείται από κομμάτια του \mathbb{R}^n τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με ομοιομορφισμούς. Στη μελέτη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 3.1.1. Μια **πολλαπλότητα διάστασης n** είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος X με αριθμήσιμη βάση περιοχών, του οποίου κάθε σημείο έχει ανοιχτή περιοχή U ομοιομορφική με ανοιχτή περιοχή του \mathbb{R}^n . Μία **υποπολλαπλότητα διάστασης k** της πολλαπλότητας X είναι ένα σύνολο $A \subseteq X$ με τη σχετική τοπολογία του οποίου κάθε σημείο έχει ανοιχτή περιοχή U ώστε το $U \cap A$ να είναι ομοιομορφικό με ανοιχτή περιοχή του \mathbb{R}^k .

Ορισμός 3.1.2. Γενικεύοντας του ορισμό της πολλαπλότητας, μία **πολλαπλότητα με σύνορο διάστασης n** είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος με αριθμήσιμη βάση περιοχών του οποίου κάθε σημείο έχει ανοιχτή περιοχή ομοιομορφική με ανοιχτή περιοχή του \mathbb{R}^n ή με ανοιχτή περιοχή του $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$.

Πρόταση 3.1.3. Έστω M ένας τοπολογικός χώρος και a ένα κλειστό σημείο του μέσα σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του ομοιομορφικό με τον \mathbb{R}^n , τότε

$$H_n(M, M - \{a\}) \approx \mathbb{Z} \text{ και } H_i(M, M - \{a\}) = 0, i \neq n.$$

Απόδειξη. Από θεώρημα εκτομής έχουμε

$$H_i(M, M - \{a\}) \approx H_i(U, U - \{a\}),$$



όπου U μία περιοχή του a ομοιομορφική με τον \mathbb{R}^n . Στη συνέχεια από την μακρά ακριβή ακολουθία και από συσταλιότητα του \mathbb{R}^n έχουμε:

$$\begin{aligned} H_i(U, U - \{a\}) &\approx H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{a\}) \\ &\approx \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}). \end{aligned}$$

Αλλά επίσης $\mathbb{R}^n - \{0\} \simeq S^{n-1}$. Άρα

$$H_i(M, M - \{a\}) \approx \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & , i = n \\ 0 & , i \neq n. \end{cases}$$

□

Η προηγούμενη πρόταση ισχύει για κάθε πολλαπλότητα αφού για κάθε σημείο της πολλαπλότητας υπάρχει περιοχή ομοιομορφική με τον \mathbb{R}^n και επιπλέον σε κάθε Hausdorff τοπολογικό χώρο τα μονοσύνολα είναι κλειστά. Επίσης ισχύει για κάθε σημείο ενός CW συμπλέγματος το οποίο ανήκει στο εσωτερικό κάποιου κελύφους διάστασης n .

Επιπλέον σε μία πολλαπλότητα με σύνορο M , αν ένα σημείο $x \in M$ αντιστοιχίζεται μέσω ενός ομοιομορφισμού σε ένα σημείο $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ τέτοιο ώστε $x_n = 0$, τότε από το θεώρημα εκτομής έχουμε,

$$H_n(M, M - \{x\}) \approx H_n(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n - \{x\}) = 0.$$

Τέτοια σημεία $x \in M$ αποτελούν έναν υπόχωρο της M ο οποίος ονομάζεται **σύνορο** της M και συμβολίζεται με ∂M .

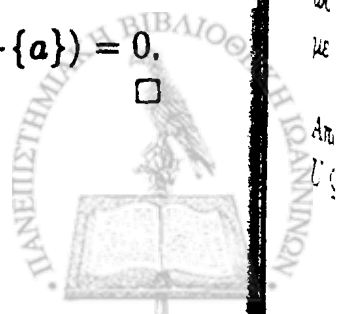
Επιστρέφουμε στις πολλαπλότητες χωρίς σύνορο.

Πρόταση 3.1.4. Ο εγκλεισμός $M - \{a\} \hookrightarrow M$ επάγει ισομορφισμούς στην ομολογία σε διαστάσεις $i \neq n, n - 1$.

Απόδειξη. Έστω η μακρά ακριβής ακολουθία του ζεύγους $(M, M - \{a\})$.

$$\cdots \rightarrow H_{i+1}(M, M - \{a\}) \rightarrow H_i(M - \{a\}) \rightarrow H_i(M) \rightarrow H_i(M, M - \{a\}) \rightarrow \cdots$$

Όμως για $i \neq n, n - 1$ έχουμε $H_{i+1}(M, M - \{a\}) = 0$ και $H_i(M, M - \{a\}) = 0$, οπότε έχουμε το ζητούμενο. □



3.2 ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΩΝ

Ο προσανατολισμός στις πολλαπλότητες είναι μία ολική ιδιότητα η οποία όμως καθορίζεται τοπικά όπως και η διαφορική δομή. Θα δούμε ότι καθορίζεται από επιλογή γεννητόρων συγκεκριμένων ομολογιακών προτύπων. Ας δούμε πρώτα ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.2.1. Ένας προσανατολισμός στην S^1 είναι επιλογή ενός προσανατολισμού για τη βασική θηλιά. Επομένως έχουμε δύο προσανατολισμούς, αφού $\pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z} \approx \langle \alpha \rangle \approx \langle -\alpha \rangle$.

Ορισμός 3.2.2. Αν σ^q είναι ένα q -simplex ή ένα singular q -simplex ορίζουμε την υποστήριξή του να είναι η εικόνα του και την συμβολίζουμε με $|\sigma^q|$. Αν $c = \sum_i a_i c_i^q$ είναι αλυσίδα με $a_i \neq 0$, τότε

$$|c| = \bigcup_i |\sigma_i^q|.$$

Στο εξής θα συμβολίζουμε με R ένα μοναδιαίο αντιμεταθετικό δακτύλιο. Έστω M^n μία πολλαπλότητα διάστασης n και $x \in M^n$. Τότε έχουμε:

$$H_n(M, M - \{x\}) \approx H_{n-1}(S^{n-1}) \approx R.$$

Η $H_n(M, M - \{x\})$ γίνεται ελεύθερο R -πρότυπο με έναν γεννήτορα.

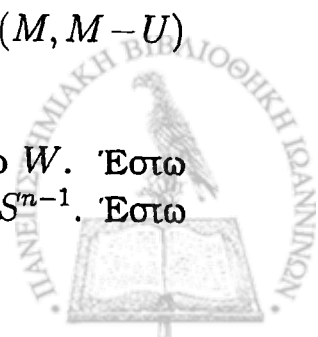
Ορισμός 3.2.3. Ένας τοπικός R -προσανατολισμός της M στο x είναι ένας γεννήτορας του R -προτύπου $H_n(M, M - \{x\})$.

Πρόταση 3.2.4. Έστω α_x ένας γεννήτορας της $H_n(M, M - \{x\})$. Τότε υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του x και κλάση $\alpha \in H_n(M, M - U)$ ώστε $j_x^U(\alpha) = \alpha_x$, όπου $j_x^U : H_n(M, M - U) \rightarrow H_n(M, M - \{x\})$.

Απόδειξη. Έστω $u \in S_n(M)$ αλυσίδα ώστε $\bar{u} = \alpha_x$ και $\partial u \in S_n(M - \{x\})$. Η υποστήριξη $|\partial u|$ είναι συμπαγής, άρα το $U = M - |\partial u|$ είναι ανοιχτό, $x \in U$. Ορίζουμε v να είναι η εικόνα του u στην $S_n(M)/S_n(M - U)$. Τότε ισχύει $j_x^U(\bar{v}) = \bar{u} = \alpha_x$. Τέλος ορίζουμε $\bar{v} = \alpha$. \square

Πρόταση 3.2.5. Για κάθε W περιοχή του x υπάρχει U περιοχή του x στο W ώστε $\forall y \in U$ η j_y^U να είναι ισομορφισμός. Δηλαδή υπάρχει $\alpha \in H_n(M, M - U)$ με $\langle j_y^U(\alpha) \rangle = H_n(M, M - \{y\}) \forall y \in U$.

Απόδειξη. Έστω $V \cong \mathbb{R}^n$ τοπικός χάρτης της M στο x μέσα στο W . Έστω $U \subseteq V$ έτσι ώστε η εικόνα του U στον \mathbb{R}^n να είναι η $(B^n)^\circ = B^n - S^{n-1}$. Έστω



$$y \in U \subseteq V \subseteq M.$$

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M, M - U) & \xrightarrow{\approx} & H_n(V, V - U) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(V - U) \approx \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \\ \downarrow j_V^U & & \downarrow & & \approx \downarrow \\ H_n(M, M - \{y\}) & \xrightarrow{\approx} & H_n(V, V - U) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(V - \{y\}) \approx \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}). \end{array}$$

Οι απεικονίσεις που είναι πάνω αριστερά και κάτω αριστερά είναι ισομορφισμοί από το θεώρημα εκτομής. Η πάνω δεξιά απεικόνιση είναι ισομορφισμός από την μακρά ακριβή ακολουθία

$$\dots \longrightarrow H_n(V) \longrightarrow H_n(V, V - U) \longrightarrow H_{n-1}(V - U) \longrightarrow H_{n-1}(V) \longrightarrow \dots$$

αφού $H_n(V) = 0$ και $H_{n-1}(V) = 0$. Επιπλέον το δεξιό τετράγωνο είναι μεταθετικό, επομένως η j_V^U είναι ισομορφισμός. \square

Παρατηρούμε ότι θα είχαμε το ίδιο αποτέλεσμα εαν θεωρούσαμε το U να είναι ομοιομορφικό με ένα ορθογώνιο υπερπαραλληλεπίπεδο που περιέχει το y , η διάσταση του οποίου να μην είναι απαραίτητα n . Αυτό γιατί η προηγούμενη απόδειξη στηρίζεται στην εκτομή $(V, V - U) \hookrightarrow (M, M - U)$ και στον ισομορφισμό $\tilde{H}_{n-1}(V - U) \approx \tilde{H}_{n-1}(V - \{y\})$. Αυτές όμως οι ιδιότητες πληρούνται από ένα τέτοιο υπερπαραλληλεπίπεδο.

Ορισμός 3.2.6. Έστω $U \subseteq M$. Ένα στοιχείο $\alpha \in H_n(M, M - U)$ καλείται τοπικός προσανατολισμός της M κατά μήκος του U αν $\langle j_V^U(\alpha) \rangle = H_n(M, M - \{y\}) \forall y \in U$.

Παρατηρούμε ότι αν $V \subseteq U \subseteq M$ και α ο τοπικός προσανατολισμός της M κατά το U , τότε και το $j_V^U(\alpha)$ είναι τοπικός προσανατολισμός της M κατά το V . Δηλαδή το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M - U) & \longrightarrow & H_n(M, M - V) \\ & \searrow j_V^U & \downarrow j_V^U \\ & & H_n(M, M - \{y\}) \end{array}$$

είναι μεταθετικό, $j_V^U(j_V^U(\alpha)) = j_V^U(\alpha)$.

Ορισμός 3.2.7. Ένα σύστημα R -προσανατολισμού της M αποτελείται από:

- (i) $\{U_i, i \in I\}$ ανοιχτό κάλυμμα της M
- (ii) $\forall i \in I$ υπάρχει τοπικός προσανατολισμός $\alpha_i \in H_n(M, M - U_i)$



(iii) $\forall x \in U_i \cap U_j$ ισχύει ότι $j_x^{U_i}(\alpha_i) = j_x^{U_j}(\alpha_j)$.

Λήμμα 3.2.8. Δύο συστήματα προσανατολισμού θα καλούνται *ισοδύναμα* αν δίνουν τον ίδιο γεννήτορα της $H_n(M, M - \{x\}) \forall x \in M$. Η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 3.2.9. Η M καλείται **R-προσανατολισίμη** αν υπάρχει σύστημα προσανατολισμού.

Πρόταση 3.2.10. (i) Έστω N μία ανοιχτή υποπολλαπλότητα της R -προσανατολισμένης M . Τότε και η N είναι R -προσανατολισίμη.

(ii) Η M είναι R -προσανατολισίμη αν και μόνο αν όλες οι συνεκτικές συνιστώσες της είναι R -προσανατολισίμες.

Απόδειξη. (i) Έστω $\{U_i, \alpha_i\}_{i \in I}$ ένα σύστημα προσανατολισμού της M . Για κάθε $x \in N$ έχουμε τον ισομορφισμό:

$$\begin{aligned} H_n(N, N - \{x\}) &\xrightarrow{\approx} H_n(M, M - \{x\}) \\ \beta_x &\longmapsto \alpha_x. \end{aligned}$$

Έστω $x \in U_i$. Τότε υπάρχει ανοιχτή περιοχή του x , V_x με $V_x \subseteq N \cap U_i$, ώστε η κλάση β_x να έχει συνεχή επέκταση $\beta_{i,x}$ στην N κατά μήκος της V_x . Αυτό θα πρέπει να ισχύει για κάθε $y \in V_x$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι ο τοπικός προσανατολισμός ταυτίζεται με τον ολικό

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M, M - U_i) & \longrightarrow & H_n(M, M - V_x) & \xrightarrow{\approx} & H_n(N, N - V_x) \\ & \searrow j_y^{U_i} & \downarrow & & \downarrow \\ & & H_n(M, M - \{y\}) & \approx & H_n(N, N - \{y\}). \end{array}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι αυτά αποτελούν σύστημα, δηλαδή $\forall y \in V_x \cap V_z \Rightarrow j_y^{V_x}(\beta_{i,x}) = j_y^{V_z}(\beta_{j,z})$. Επειδή το $j_y^{V_x}(\beta_{i,x})$ ταυτίζεται με το $j_y^{V_x} j_{V_x}^{U_i}(\alpha_i)$ και το $j_y^{V_z}(\beta_{j,z})$ με το $j_y^{V_z} j_{V_z}^{U_j}(\alpha_j)$ και αυτά ταυτίζονται μεταξύ τους, αφού προέρχονται από το αρχικό σύστημα, έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Οι συνεκτικές συνιστώσες είναι ανοιχτά υποσύνολα της M , άρα από το (i) είναι προσανατολισίμες. Αντίστροφα αν όλες είναι προσανατολισίμες τότε και η M θα είναι προσανατολισίμη γιατί κάθε συνιστώσα έχει το δικό της ανεξάρτητο σύστημα. □

Πρόταση 3.2.11. Έστω M μία συνεκτική πολλαπλότητα. Αν δύο R -προσανατολισμοί συμφωνούν σε ένα σημείο τότε είναι ισοδύναμοι.



Απόδειξη. Έστω $A \subseteq M$ το σύνολο των σημείων $x \in M$ όπου οι δύο προσανατολισμοί συμφωνούν. Θα δείξουμε ότι το A είναι ανοιχτό. Έστω (U, α) και (V, β) ώστε $x \in U \cap V$ και $j_x^U(\alpha) = j_x^V(\beta)$. Τότε $\exists W \subseteq U \cap V$ ανοιχτό ώστε η j_x^W να είναι ισομορφισμός και μάλιστα η j_y^W να είναι ισομορφισμός για κάθε $y \in W$. Άρα το W είναι υποσύνολο του A και άρα το A είναι ανοιχτό. Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι και το $M - A$ είναι ανοιχτό. Αλλά η M είναι συνεκτική, επομένως $A = M$. \square

Πόρισμα 3.2.12. Μία συνεκτική προσανατολίσιμη πολλαπλότητα έχει ακριβώς δύο προσανατολισμούς.

Παράδειγμα 3.2.13. (i) Έστω η S^n για $n > 1$. Για κάθε $x \in S^n$ έχουμε:

$$H_n(S^n, S^n - \{x\}) \approx H_{n-1}(S^{n-1})$$

και

$$R \approx H_n(S^n) \approx H_n(S^n, S^n - \{x\}) \approx H_{n-1}(S^{n-1}) \approx R.$$

Ο γεννήτορας της $H_n(S^n)$ δίνει όλους τους γεννήτορες των $H_n(S^n, S^n - \{x\})$.

(ii) Ο \mathbb{R}^n είναι ομοιομορφικός με το $S^n - \{x\}$ που είναι ανοιχτό υποσύνολο της S^n . Άρα ο \mathbb{R}^n είναι προσανατολίσιμος.

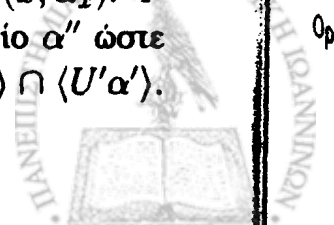
Δεν είναι κάθε πολλαπλότητα προσανατολίσιμη. Η ταινία του Möbius δεν είναι ολικά προσανατολίσιμη, αλλά τοπικά. Θα δείξουμε αμέσως ότι ο προσανατολισμός εξαρτάται και από τον δακτύλιο R .

Πρόταση 3.2.14. Για $R = \mathbb{Z}_2$ κάθε πολλαπλότητα είναι \mathbb{Z}_2 -προσανατολίσιμη.

Απόδειξη. Αυτό είναι προφανές αφού το \mathbb{Z}_2 έχει μόνο έναν γεννήτορα. \square

Θεώρημα 3.2.15. Έστω M μία συνεκτική μη προσανατολισμένη πολλαπλότητα. Υπάρχει προσανατολισμένη συνεκτική πολλαπλότητα E και καλυπτική απεικόνιση $p: E \rightarrow M$ ώστε $|p^{-1}\{x\}| = 2$.

Απόδειξη. Έστω $E = \{(x, \alpha_x) | x \in M \text{ και } \langle \alpha_x \rangle = H_n(M, M - \{x\})\}$ και $p: E \rightarrow M$ με $p(x, \alpha_x) = x$. Προφανώς $|p^{-1}\{x\}| = 2$. Θα ορίσουμε μία τοπολογία στο E ώστε η p να γίνει καλυπτική. Για κάθε $x \in M$ και $\alpha_x \in H_n(M, M - \{x\})$ υπάρχει U ανοιχτό και $\alpha \in H_n(M, M - U)$ ώστε $j_y^U(\alpha) = \alpha_y \forall y \in U$. Τα σύνολα αυτά συμβολίζονται με $\langle U, \alpha \rangle$ και αποτελούν βάση της τοπολογίας στο E . Για $x \in U \cap U'$ και $\langle U, \alpha \rangle \cap \langle U', \alpha' \rangle$ πρέπει να βρούμε $\langle U'', \alpha'' \rangle \subseteq \langle U, \alpha \rangle \cap \langle U', \alpha' \rangle$ που να περιέχει το (x, α_x) . Ισχύει ότι $\alpha_x = j_x^U(\alpha) = j_x^{U'}(\alpha')$. Υπάρχει $U'' \subseteq U \cap U'$ και στοιχείο α'' ώστε $j_x^{U''}(\alpha'') = \alpha_x$ και $\alpha'' = j_{U''}^U(\alpha) = j_{U''}^{U'}(\alpha')$. Άρα $\langle U'', \alpha'' \rangle \subseteq \langle U, \alpha \rangle \cap \langle U', \alpha' \rangle$.



Η απεικόνιση p είναι καλυπτική αφού $p(\langle U, \alpha \rangle) = U$ και μάλιστα είναι ομοιομορφισμός στο U αφού $\forall x \in U \alpha_x = j_x^U(\alpha)$. Άρα $\langle U, \alpha \rangle \sqcup \langle U, -\alpha \rangle$. Θα ορίσουμε σύστημα προσανατολισμού για την E . Για κάθε $x \in M$ βρίσκουμε U ανοιχτό υποσύνολο ενός συστήματος συντεταγμένων $V \cong \mathbb{R}^n$ με $\bar{U} \subseteq V$ και U ομοιομορφικό με ορθογώνιο υπερπαραλληλεπίπεδο του \mathbb{R}^n . Ισχύει ότι $U \simeq *$, άρα $V - U \simeq S^{n-1}$. Επιλέγουμε τα U και V να είναι στοιχεία της βάσης του E : $\langle U, \alpha_U \rangle$ και $\langle V, \alpha_V \rangle$ με $j_V^U(\alpha_V) = \alpha_U$. Έστω ω_{x, α_x} γεννήτορας της $H_n(E, E - (x, \alpha_x))$. Καλούμε $V' = \langle V, \alpha_V \rangle$ και $U' = \langle U, \alpha_U \rangle$. Από το θεώρημα εκτομής έχουμε

$$H_n(E, E - (x, \alpha_x)) \approx H_n(V', V' - (x, \alpha_x)) \approx H_n(V, V - \{x\}) \approx \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}).$$

$$\begin{array}{ccc} H_n(E, E - U') & \longrightarrow & H_n(E, E - (x, \alpha_x)) \\ \parallel & & \parallel \\ H_n(V', V' - U') & \longrightarrow & H_n(V', V' - (x, \alpha_x)) \\ \parallel & & \parallel \\ \tilde{H}_{n-1}(V' - U') & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(V' - (x, \alpha_x)) \\ \parallel & & \parallel \\ \tilde{H}_{n-1}(V - U) & \xrightarrow{\approx} & \tilde{H}_{n-1}(V - \{x\}) \\ \parallel & & \parallel \\ H_n(V, V - U) & \longrightarrow & H_n(V, V - \{x\}) \end{array}$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το $j_{(x, \alpha_x)}^{U'}(\omega_{U'})$ είναι ισοδύναμο ως προς ισομορφισμό με το $j_{V-x}^{V-U}(\alpha_{V-U})$, δηλαδή τον γεννήτορα της $\tilde{H}_{n-1}(V - \{x\})$. Έστω τώρα $(y, \alpha_y) \in V' \cap Z'$ τότε θα έχουμε από το προηγούμενο διάγραμμα ότι το $j_{(y, \alpha_y)}^{V'}(\omega_{V'})$ ταυτίζεται με το $j_{V-\{y\}}^{V-U}(\alpha_{V-U})$ και το $j_{(y, \alpha_y)}^{Z'}(\omega_{Z'})$ με το $j_{Z-\{y\}}^{Z-W}(\alpha_{Z-W})$. Επομένως και τα $j_{V-\{y\}}^{V-U}(\alpha_{V-U})$ και $j_{Z-\{y\}}^{Z-W}(\alpha_{Z-W})$ ταυτίζονται. Άρα $j_y^V(\alpha_V) = \alpha_y = j_y^Z(\alpha_Z)$ και άρα $j_{(y, \alpha_y)}^{V'}(\omega_{V'}) = j_{(y, \alpha_y)}^{Z'}(\omega_{Z'})$. \square

Πόρισμα 3.2.16. Κάθε απλά συνεκτική πολλαπλότητα είναι προσανατολίσιμη. Κάθε πολλαπλότητα της οποίας η πρωταρχική ομάδα δεν έχει υποομάδα με δείκτη 2 είναι προσανατολίσιμη.

Απόδειξη. Έστω M μία μη προσανατολίσιμη πολλαπλότητα, τότε υπάρχει προσανατολισμένη συνεκτική πολλαπλότητα E και καλυπτική απεικόνιση $p: E \rightarrow M$ ώστε $[\pi_1(x) : p_*\pi_1(E)] = 2$. \square

Τώρα θα γενικεύσουμε τον προηγούμενο χώρο E .

Ορισμός 3.2.17. Ορίζουμε το **R-orientation sheaf** της M να είναι το σύνολο

$$M^0 = \{(x, \alpha_x) | x \in M \text{ και } \alpha_x \in H_n(M, M - \{x\})\}$$



και απεικόνιση $p : M^0 \rightarrow M$ με $p(x, \alpha_x) = x$. Εδώ το α_x είναι τυχαίο στοιχείο και όχι απαραίτητα γεννήτορας. Έχουμε $p^{-1}\{x\} \approx H_n(M, M - \{x\})$. Θα ορίσουμε τοπολογία στο M^0 ώστε η p να είναι καλυπτική. Θεωρούμε τα σύνολα:

$$\langle U, \alpha_U \rangle = \{(x, \alpha_x) \mid x \in U, j_x^U(\alpha_U) = \alpha_x\}$$

με U ανοιχτό. Τα σύνολα αυτά αποτελούν βάση για την τοπολογία του M^0 . Επίσης κάνουν την p καλυπτική.

Ορισμός 3.2.18. Έστω $R = \mathbb{Z}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $v : M^0 \rightarrow \mathbb{N}$ με τύπο $v(x, \alpha_x) = |d|$ ώστε $\alpha_x = d\lambda_x$ με λ_x γεννήτορα της $H_n(M, M - \{x\}) \approx \mathbb{Z}$.

Λήμμα 3.2.19. Έστω $q > 0$, τότε το σύνολο $v^{-1}(q)$ είναι ανοιχτό στην M^0 και η απεικόνιση $\Phi : v^{-1}(q) \xrightarrow{p} M$ είναι μία δύο φύλλων καλυπτική.

Απόδειξη. Έστω $(x, \alpha_x) \in v^{-1}(q)$, δηλαδή $\alpha_x = q\lambda_x$ ή $\alpha_x = -q\lambda_x$ όπου $\langle \lambda_x \rangle = H_n(M, M - x)$. Υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του x τέτοια ώστε η j_y^U να είναι ισομορφισμός $\forall y \in U$. Δηλαδή

$$j_y^U(\lambda_U) = \lambda_y$$

όπου $\langle \lambda_U \rangle = H_n(M, M - U)$ και $\langle \lambda_y \rangle = H_n(M, M - y)$. Έστω ότι $\alpha_x = q\lambda_x$. Η απόδειξη είναι όμοια και στην αντίθετη περίπτωση. Έχουμε $v(U, q\lambda_U) = q$, επομένως $(U, q\lambda_U) \subseteq v^{-1}(q)$. Επίσης το $(U, q\lambda_U)$ είναι ανοιχτό, άρα το $v^{-1}(q)$ είναι ανοιχτό στο M^0 .

Έστω τώρα $x \in M$, τότε $\Phi^{-1}(x) = \{(x, q\lambda_x), (x, -q\lambda_x)\}$. Θεωρούμε ανοιχτή περιοχή U του x τέτοια ώστε η j_y^U να είναι ισομορφισμός $\forall y \in U$. Τότε

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(U) &= \{(U, \alpha_U) \mid \alpha_U \in H_n(M, M - U) \text{ με } \alpha_U = q\lambda_U\} \\ &\sqcup \{(U, -\alpha_U) \mid \alpha_U \in H_n(M, M - U) \text{ με } \alpha_U = q\lambda_U\}, \end{aligned}$$

όπου $\langle \lambda_U \rangle = H_n(M, M - U)$. Επομένως για τυχαίο $x \in M$ βρήκαμε ανοιχτή περιοχή U , της οποίας η αντίστροφη εικόνα είναι ξένη ένωση δύο συνόλων ομοιομορφικών με το U . \square

Πόρισμα 3.2.20.

$$v^{-1}(1) \cong E \text{ και } v^{-1}(0) \cong M$$

Ορισμός 3.2.21. Έστω $A \subseteq M$. Μία συνεχής απεικόνιση $s : A \rightarrow M^0$ καλείται **section** αν η σύνθεση $A \xrightarrow{s} M^0 \xrightarrow{p} M$ είναι ο εγκλεισμός $A \hookrightarrow M$. Αν $x \in A$ με $s(x) = (x, \alpha_x)$ ορίζουμε $s' : A \rightarrow \bigcup_{x \in A} H_n(M, M - \{x\})$ με τύπο $s'(x) = \alpha_x$. Αν $A = M$ και ορίζεται section, τότε αυτό θα λέγεται **οβλικό**.

Ορισμός 3.2.22. Έστω ΓA το σύνολο όλων των sections πάνω από το A . Το σύνολο αυτό γίνεται R -πρότυπο αν ορίσουμε πράξεις:

$$\begin{aligned}(s_1 + s_2)(x) &= (x, s'_1(x) + s'_2(x)) \text{ για } x \in A \\ (rs)(x) &= (x, rs'(x)) \text{ για } r \in R, x \in A.\end{aligned}$$

Πρόταση 3.2.23. Η M είναι R -προσανατολισμένη αν και μόνο αν υπάρχει ολικό section $s : M \rightarrow v^{-1}(1) \subseteq M^0$.

Απόδειξη. Έστω ότι η M είναι R -προσανατολισμένη, τότε υπάρχει $\{U_i, i \in I\}$ ανοιχτό κάλυμμα της M τέτοιο ώστε $\forall i \in I$ να υπάρχει τοπικός προσανατολισμός $\alpha_i \in H_n(M, M - U_i)$ και $\forall x \in U_i \cap U_j$ να ισχύει $j_x^{U_i}(\alpha_i) = j_x^{U_j}(\alpha_j)$. Ορίζουμε ολικό section $s : M \rightarrow v^{-1}(1)$ με $s(x) = (x, j_x^{U_i}(\alpha_i))$ για $U_i \ni x$. Προφανώς η απεικόνιση s είναι συνεχής και η απεικόνιση $M \xrightarrow{s} v^{-1}(1) \xrightarrow{p} M$ είναι ο εγκλεισμός.

Αντίστροφα τώρα έστω ότι υπάρχει ένα ολικό section $s : M \rightarrow v^{-1}(1)$. Τότε

$$v^{-1}(1) = \{(x, \lambda_x)\} \sqcup \{(x, -\lambda_x)\}$$

όπου $\langle \lambda_x \rangle = H_n(M, M - x)$. Η απεικόνιση s είναι συνεχής, επομένως

$$\text{Im } s \subseteq \{(x, \lambda_x)\} \text{ ή } \text{Im } s \subseteq \{(x, -\lambda_x)\}.$$

Για κάθε $x \in M$ θεωρούμε περιοχή U_x του x τέτοια ώστε η απεικόνιση $j_y^{U_x}$ να είναι ισομορφισμός $\forall y \in U_x$ και ορίζουμε τοπικό προσανατολισμό στο U_x , τον $\lambda_{U_x} \in H_n(M, M - U_x)$ με $j_x^{U_x}(\lambda_{U_x}) = s'(x)$. Έστω $x \in U_{x_1} \cap U_{x_2}$, τότε $j_x^{U_{x_1}}(\lambda_{U_{x_1}}) = s'(x)$ και $j_x^{U_{x_2}}(\lambda_{U_{x_2}}) = s'(x)$. Επομένως η M είναι προσανατολίσιμη. \square

Ορισμός 3.2.24. Θα λέμε ότι η M είναι R -προσανατολισμένη κατά μήκος του A αν υπάρχει section $s : A \rightarrow v^{-1}(1) \subseteq M^0$.

Πρόταση 3.2.25. Η M είναι R -προσανατολισμένη κατά μήκος του A αν και μόνο αν υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : p^{-1}(A) \rightarrow A \times R$ ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(A) & \xrightarrow{\phi} & A \times R \\ & \searrow & \swarrow \\ & A & \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Το ΓA είναι ισόμορφο με το σύνολο όλων των συνεχών απεικονίσεων από το A στο R . Αν το A έχει k συνιστώσες τότε $\Gamma A \approx R^k$.



Απόδειξη. Έστω $s : A \rightarrow v^{-1}(1) = E$ ένα section. Τότε $s(x) = (x, \alpha_x)$ ώστε $\langle \alpha \rangle = H_n(M, M - \{x\}) \forall x \in A$. Έστω $(x, \beta_x) \in M^0$ με $\beta_x = \lambda_x \alpha_x$, όπου $\lambda_x \in R$. Ορίζουμε την $\phi : p^{-1}(A) \rightarrow A \times R$ με $\phi(x, \beta_x) = (x, \lambda_x)$. Τα βασικά στοιχεία στο $p^{-1}(A)$ είναι τα $\langle U \cap A, \alpha_{U \cap A} \rangle$ με $j_x^{U \cap A} = \alpha_x$ και το R έχει τη διακριτή τοπολογία, επομένως η ϕ είναι ομοιομορφισμός.

Αντίστροφα τώρα, αν δίνεται ο ομοιομορφισμός ϕ , τότε ορίζουμε το section $s : A \rightarrow v^{-1}(1)$ με $s(x) = \phi^{-1}(x, 1)$. \square

Ορισμός 3.2.26. Ορίζουμε τον ομομορφισμό:

$$j_A : H_n(M, M - A) \longrightarrow \Gamma A$$

με

$$\alpha \longmapsto (j_A(\alpha) : A \rightarrow p^{-1}(A) \subseteq M^0)$$

όπου

$$j_A(\alpha) : x \longmapsto j_A(\alpha)(x) = (x, j_x^A(\alpha)).$$

Η $j_A(\alpha)$ θα πρέπει να είναι συνεχής. Η κλάση α δίνεται από μία αλυσίδα c . Δηλαδή $\alpha = \bar{c}$ με $c \in S_n(M)$ και $\partial c \in S_{n-1}(M - A)$. Έστω $|c|$ η υποστήριξη της c , η οποία είναι συμπαγής. Τότε το $U = M - \partial|c|$ είναι ανοιχτό και $\partial|c| \subseteq M - A$, άρα $A \subseteq U$. Άρα έχουμε

$$H_n(M, M - U) \longrightarrow H_n(M, M - A)$$

με

$$\alpha_U = \bar{c}_U \longmapsto \bar{c} = \alpha.$$

Έστω V ένα ανοιχτό σύνολο στο U ώστε να έχουμε $\alpha_V \in H_n(M, M - V)$ με $j_V^U(\alpha_U) = \alpha_V$, $j_x^V(\alpha_V) = j_x^A(\alpha_x)$. Έχουμε $j_A(\alpha)(V \cap A) \subseteq \langle V, \alpha_V \rangle$. Επίσης $j_x^A(\alpha) = j_x^A j_A^U(\alpha_U) = j_x^A j_A^V(\alpha_V)$.

Ορισμός 3.2.27. Έστω s ένα section του A . Θα λέμε ότι το s έχει συμπαγή υποστήριξη αν είναι 0 έξω από ένα συμπαγές $K \subseteq A$, δηλαδή $s|_{A-K} = 0$. Το σύνολο αυτών των sections συμβολίζεται με $\Gamma_C A$ και είναι R -πρότυπο. Αν το A είναι συμπαγές, τότε $\Gamma A = \Gamma_C A$.

Θεώρημα 3.2.28. Έστω A ένα κλειστό υποσύνολο της M^n . Τότε:

(i) $H_q(M, M - A) = 0 \forall q > n$

(ii) Η απεικόνιση $j_A : H_n(M, M - A) \rightarrow \Gamma_C A \leq \Gamma A$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Πρώτο Βήμα. Θα δείξουμε ότι αν το θεώρημα ισχύει για τα κλειστά σύνολα A_1, A_2 και για την τομή τους $A_1 \cap A_2$, τότε θα ισχύει και για την ένωση $A = A_1 \cup A_2$. Στην τριάδα $M, (M - A_1), (M - A_2)$ εφαρμόζουμε την Mayer-Vietoris ακολουθία.

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{q+1}((M - A_1) \cup (M - A_2)) \rightarrow H_q((M - A_1) \cap (M - A_2)) \rightarrow \\ \rightarrow H_q((M - A_1) \oplus (M - A_2)) \rightarrow H_q((M - A_1) \cup (M - A_2)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Όμως $(M - A_1) \cap (M - A_2) = M - A_1 \cup A_2 = M - A$. Άρα

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_q(M, M - A) \rightarrow H_q(M, M - A_1) \oplus H_q(M, M - A_2) \rightarrow \\ \rightarrow H_q(M, M - A_1 \cap A_2) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Για $q > n$ έχουμε $H_q(M, M - A) = 0$. Για $q = n$ έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(M, M - A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma_C A \\ \downarrow & & \downarrow r_{1-r_2} \\ H_n(M, M - A_1) \oplus H_n(M, M - A_2) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma_C A_1 \oplus \Gamma_C A_2 \\ \downarrow & & \downarrow r_{1+r_2} \\ H_n(M, M - A_1 \cap A_2) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma_C(A_1 \cap A_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\text{Im} j_A \subseteq \Gamma_C A$. Τότε η j_A θα είναι ισομορφισμός από το διάγραμμα. $\text{Im} j_A \subseteq \Gamma_C A \Leftrightarrow \forall w \neq 0$ με $w \in H_n(M, M - A)$, $\exists W \subseteq A$ συμπαγές ώστε $j_x^A(w) = 0 \forall x \in A - W$. Αφού $w \neq 0$ θα υπάρχει $c \in S_n(M)$ ώστε $\bar{c} = w$ και $|c| \not\subseteq M - A$ ενώ $|\partial c| \subseteq M - A$, $|c| \cap A \neq \emptyset$ και $|c| \cap A$ συμπαγές. Επίσης $|c| \cap A \subsetneq A$. Άρα $A - |c| \cap A$ ανοιχτό και έστω $x \in A - |c| \cap A$. Υπάρχει V_x ανοιχτό και U_x ανοιχτό ώστε $\bar{V}_x \subseteq U_x \subseteq A - |c|$ με $\bar{V}_x \cong S^{n-1}$. Έστω $W = \bar{V}_x$, τότε $|c| \subseteq A - W \subseteq M - W$. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$j_y^A(w) = 0 \quad \forall y \in A - W \Leftrightarrow j_W^A j_y^W(w) = 0$$

Αλλά αφού $|c| \in M - W$, θα έχουμε $j_w^A(\bar{c}) \in H_n(M, M - W)$ θα είναι 0.

Δεύτερο Βήμα. Υποθέτουμε ότι το A είναι συνεκτικό και συμπαγές υποσύνολο του U με $U \cong \mathbb{R}^n$ και η $p|_U$ να είναι ομοιομορφισμός όπου p η καλυπτική απεικόνιση. Έχουμε A κλειστό, U ανοιχτό, $U - A \neq \emptyset$, $M - A$ ανοιχτό και $M - \bar{U}$ ανοιχτό. Άρα $(M - A) - M - \bar{U} = U - A$. Από το θεώρημα εκτομής έχουμε:

$$H_q(M, M - A) \approx H_q(U, U - A) \approx \tilde{H}_{q-1}(U - A).$$



Αν το A είναι ορθογώνιο υπερπαραλληλεπίπεδο τότε $U - A \simeq S^{n-1}$. Άρα $H_q(M, M - A) \approx \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$. Άρα αν $q > n$ τότε $H_q(M, M - A) = 0$. Επιπλέον $U \cong \mathbb{R}^n$ προσανατολισμένο και το A είναι συνεκτικό και συμπαγές, άρα

$$\Gamma A = \Gamma_C A = R \approx \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \approx H_n(M, M - A).$$

Τώρα έστω ότι το A είναι πεπερασμένη ένωση ορθογωνίων υπερπαραλληλεπίπεδων, έστω $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$. Θα δείξουμε αυτήν την περίπτωση με επαγωγή στο m . Για $m = 1$ είδαμε ότι ισχύει. Για $m = 2$, έχουμε $A = A_1 \cup A_2$. Το $A_1 \cap A_2$ είναι επίσης ορθογώνιο υπερπαραλληλεπίπεδο, διάστασης μικρότερης ή ίσης των διαστάσεων των A_1 και A_2 . Άρα για την ένωση ισχύει από το πρώτο βήμα της απόδειξης. Έστω τώρα ότι ισχύει για το σύνολο $A' = A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}$. Θα εφαρμόσουμε το πρώτο βήμα της απόδειξης. Θέλουμε να ισχύει για την ένωση $A' \cup A_m$. Αν ισχύει για την τομή $A' \cap A_m$ τότε έχουμε τελειώσει. Η τομή αυτή είναι το πολύ $n - 1$ υπερπαραλληλεπίπεδα μικρότερης διάστασης. Άρα το θεώρημα ισχύει για την τομή και από το πρώτο βήμα ισχύει και για το A .

Τρίτο Βήμα. Υποθέτουμε ότι το A είναι όπως στο δεύτερο βήμα, χωρίς την υπόθεση της συνεκτικότητας. Έστω $s \in \Gamma A = \Gamma_C A$, $s : A \rightarrow M^0$ και p η καλυπτική. Το $s(A)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του M^0 . Όμως $s(A) \subseteq p^{-1}\{U\} = \sqcup(U, \alpha_U)$ με $\alpha_U \in H_n(M, M - U)$. Άρα η τομή $s(A) \cap (U, \alpha_U)$ είναι διάφορη του κενού για πεπερασμένο πλήθος των α_U . Το A είναι επίσης συμπαγές, άρα καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος ανοιχτών, έστω $U_1, \dots, U_k \subseteq U$. Μπορούμε να πάρουμε τα σύνολα της κάλυψης να είναι ξένα μεταξύ τους, διότι $U \cong \mathbb{R}^n$ και ο \mathbb{R}^n είναι κανονικός χώρος. Άρα μπορούμε να τα διαχωρίσουμε. Έστω $s' : U \rightarrow \Gamma U$ επέκταση του s μέσω της $p^{-1}\{U\}$. Για κάθε $x \in A \subseteq U \cong \mathbb{R}^n$ επιλέγουμε ορθογώνιο υπερπαραλληλεπίπεδο μέσα στο U με κάποια υπερέδρα του παράλληλη σε κάποιον άξονα. Άρα το A καλύπτεται από τέτοια σύνολα μέσα στο U . Έστω A' η ένωση αυτών των υπερορθογωνίων. Άρα σύμφωνα με το δεύτερο βήμα το θεώρημα ισχύει στο A' . Έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M - A) & \longleftarrow & H_n(M, M - A') \\ \downarrow j_A & & \downarrow j_{A'} \\ \Gamma_C A & \longleftarrow & \Gamma_C A' \end{array}$$

Για $s \in \Gamma_C A$ υπάρχει $s' \in \Gamma_C A'$, άρα η j_A είναι επί. Θα δείξουμε ότι η j_A είναι ένα προς ένα. Έστω $q \geq n$ και $\alpha \in H_n(M, M - A)$ με $j_A(\alpha) = 0$. Έστω $c \in S_q(M)$ με $\partial c \in S_{q-1}(M - A)$ και $\bar{c} = \alpha$, τότε $M - \partial|c| \supseteq A$. Έστω $V = M - \partial|c|$ και $\alpha = j_A^V(\alpha')$. Τώρα για κάθε $x \in A$ έχουμε $j_x^V(\alpha') = j_x^A j_A^V(\alpha') = 0$. Άρα υπάρχει V' με $A \subseteq V' \subseteq V$ ανοιχτό ώστε $j_x^V(\alpha') = 0 \forall x \in V'$. Επιλέγουμε ένα A' ως πεπερασμένη ένωση υπερορθογωνίων όπως προηγουμένως με $A \subseteq$

$A' \subseteq V' \cap U$. Τότε από το δεύτερο βήμα $j_{A'}^V(\alpha') = 0$ και $\alpha = j_A^{A'}(j_{A'}^V(\alpha')) = 0$. Τελικά η j_A είναι ένα προς ένα.

Τέταρτο Βήμα. Έστω ότι το A είναι συμπαγές. Τότε θα είναι πεπερασμένη ένωση συμπαγών υποσυνόλων ώστε καθένα από αυτά να βρίσκεται μέσα σε σύστημα συνιεταγμένων όπως στο τρίτο βήμα. Επομένως εφαρμόζοντας το πρώτο βήμα έχουμε ότι το θεώρημα ισχύει σε αυτήν την περίπτωση.

Πέμπτο Βήμα. Έστω $A \subseteq U$ με U ανοιχτό και \bar{U} συμπαγές. Άρα το A είναι συμπαγές στο \bar{U} . Δηλαδή το ζητούμενο ισχύει για τα σύνολα \bar{U} και A .

$$H_n(\bar{U}, \bar{U} - A) \approx \Gamma_C^{\bar{U}}(A) \text{ και } H_q(\bar{U}, \bar{U} - A) = 0 \text{ αν } q > n$$

Θα το δείξουμε για τα σύνολα U και A . Για τους υποχώρους $M, U \cup (M - \bar{U}), (U - A) \cup (M - \bar{U})$ έχουμε

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_q(U \cup (M - \bar{U}), (U - A) \cup (M - \bar{U})) &\rightarrow H_q(M, (U - A) \cup (M - \bar{U})) \rightarrow \\ &\rightarrow H_q(M, U \cup (M - \bar{U})) \rightarrow H_{q-1}(U \cup (M - \bar{U}), (U - A) \cup (M - \bar{U})) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Από θεώρημα εκτομής έχουμε:

$$H_q(U, U - A) \xrightarrow{\approx} H_q(U \cup (M - \bar{U}), (U - A) \cup (M - \bar{U})).$$

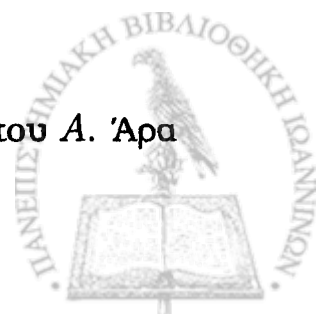
Επιπλέον

$$H_{q+1}(M, U \cup (M - \bar{U})) \rightarrow H_q(U, U - A) \rightarrow H_q(M, (U - A) \cup (M - \bar{U})).$$

Όμως $U \cup (M - \bar{U}) = M - \partial U$ όπου το ∂U είναι συμπαγές, άρα εφαρμόζεται το τέταρτο βήμα. Και $(M - \bar{U}) \cup (U - A) = M - (\partial U \cup A)$, άρα και εδώ μπορούμε να εφαρμόσουμε το τέταρτο βήμα. Επομένως για $q > n$ έχουμε $H_{q+1}(M, U \cup (M - \bar{U})) = H_q(M, (U - A) \cup (M - U)) = H_q(U, U - A) = 0$. Για $q = n$ έχουμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(U, U - A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma_C A \\ \downarrow & & \downarrow i \\ H_n(M, M - (\partial U \cup A)) & \xrightarrow{\approx} & \Gamma_C(A \cup \partial U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(M, M - \partial U) & \xrightarrow{\approx} & \Gamma_C \partial U. \end{array}$$

Έστω τώρα $s \in \Gamma_C A$, τότε $s|_{A-K} = 0$ για K συμπαγές υποσύνολο του A . Άρα $i(s)|_A = s$, και η j_A είναι ισομορφισμός.



Έκτο Βήμα. Έστω ότι το A είναι τυχαίο κλειστό. Έστω $s \in \Gamma_C A$ με $s|_{A-K} = 0$, όπου K συμπαγές. Καλύπτουμε το K με σύνολα U_i ώστε το U_i να είναι ομοιομορφικό με το $(B^n)^\circ$. Άρα υπάρχει $U = \bigcup_{i=1}^l U_i$ με \bar{U} συμπαγές και $K \subseteq U$. Έστω $A' = A \cap U$ κλειστό στο U . Εφαρμόζουμε το πέμπτο βήμα στα σύνολα A' και U . Έστω s' να είναι ο περιορισμός του s στο A' , $s|_{A'}$. Έχουμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U - A') & \longrightarrow & H_n(M, M - A) \\ \downarrow \approx & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_C A' \longrightarrow \Gamma_C A. \end{array}$$

Άρα $s \in \text{Im } j_A$. Θα δείξουμε ότι η j_A είναι ένα προς ένα. Έστω $\alpha \in H_q(M, M - A)$ και για $q = n$ θεωρούμε ότι $j_A(\alpha) = 0$. Θα δείξουμε ότι $\alpha = 0 \ \forall q \geq n$. Όπως προηγουμένως έστω $c \in S_q(M)$ με $\partial c \in S_{q-1}(M - A)$ και $\bar{c} = \alpha$. Υπάρχει U ανοιχτό με \bar{U} συμπαγές και $U \supseteq |c|$. Έστω $A' = A \cap |c|$. Άρα υπάρχει $\beta \in H_q(U, U - A')$ ώστε να απεικονίζεται στο α . Για $q > n$ έχουμε $H_q(U, U - A') = 0 \Rightarrow H_q(M, M - A) = 0$ και για $q = n$ έχουμε $j_{A'}(\beta) = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. Άρα η απεικόνιση j_A είναι ισομορφισμός. \square

Πόρισμα 3.2.29. Έστω $A \subseteq M$ συνεκτικό και μη συμπαγές, τότε $H_n(M, M - A) = 0$. Άρα αν $A = M$ συνεκτική μη συμπαγής τότε $H_n(M) = 0$.

Απόδειξη. Έστω $\alpha \in H_n(M, M - A)$ τότε $j_A(\alpha) \in \Gamma A$. Δηλαδή το $j_A(\alpha)$ είναι μία απεικόνιση $A \rightarrow p^{-1}(A)$ συνεχής. Το A είναι συνεκτικό, επομένως και το $j_A(\alpha)(A)$ είναι συνεκτικό του $p^{-1}(A)$.

$$p^{-1}(A) \subseteq M^0 = \{(x, \omega_x) | x \in M, \omega_x \in H_n(M, M - x)\}$$

με $H_n(M, M - x) \cong R$ με τη διακριτή τοπολογία. Το $p^{-1}(A)$ είναι συνεκτικό, άρα έχει μορφή $\{(_, r) | r \text{ σταθερό} \in R\}$. Έχουμε $j_A(\alpha) \in \Gamma_C A$, άρα είναι μηδέν εκτός συμπαγούς υποσυνόλου του A . Άρα επειδή είναι σταθερό θα πρέπει να είναι 0. Δηλαδή $j_A(\alpha)(x) = (x, 0) \ \forall x \in A$. Αφού το A είναι συνεκτικό, είναι και κλειστό. Δηλαδή $H_n(M, M - A) \approx \Gamma_C A = 0$. \square

Πόρισμα 3.2.30. Αν η συμπαγής A έχει k συσιστώσες και η M είναι προσανατολίσιμη κατά την A , τότε $H_n(M, M - A) = R^k$ διότι $\Gamma_C A = \Gamma A = R^k$.

Πόρισμα 3.2.31. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές με k συσιστώσες. Τότε το k ισούται με το rank της $H_{n-1}(\mathbb{R}^n - A)$.

Απόδειξη. Ο \mathbb{R}^n είναι προσανατολίσιμος, άρα είναι προσανατολίσιμος κατά μήκος του A . Άρα από το προηγούμενο πόρισμα έχουμε

$$H_{n-1}(\mathbb{R}^n - A) \approx H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - A) \approx R^k.$$



Ορισμός 3.2.32. Έστω M συμπαγής συνεκτική και R -προσανατολίσιμη πολλαπλότητα, τότε $\Gamma M \approx R$. Έστω j ένας γεννήτορας της $H_n(M)$. Ο j καλείται **πρωταρχική κλάση** και ο τοπικός προσανατολισμός σε κάθε $x \in M$ δίνεται από το $j_x^M(j)$. Δηλαδή $\langle j_x^M(j) \rangle = H_n(M, M - x)$.

Πόρισμα 3.2.33. Έστω M συμπαγής πολλαπλότητα. Τότε $H_n(M, \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2$.

Πρόταση 3.2.34. Έστω M^n και N^n συνεκτικές συμπαγείς και προσανατολίσιμες πολλαπλότητες. Έστω $f : M^n \rightarrow N^n$ καλυπτική m φύλλον. Για κάθε $x \in M$ επιλέγουμε U_x ανοιχτό και $V_{f(x)} = f(U_x)$ ώστε το $f^{-1}(V_{f(x)})$ να είναι ξένη ένωση ομοιομορφικών με το U_x . Τότε έχουμε τους παρακάτω ισομορφισμούς. Εδώ $R = \mathbb{Z}$.

$$H_n(M, M - x) \xrightarrow{\approx} H_n(U_x, U_x - x) \xrightarrow{\approx} H_n(V_{f(x)}, V_{f(x)} - f(x)) \xrightarrow{\approx} \\ \xrightarrow{\approx} H_n(N, N - f(x)).$$

Έστω j_M και j_N οι πρωταρχικές κλάσεις, τότε $f_*(j_M) = \lambda j_N$. Ισχύει $\lambda = m$. Ο ακέραιος λ καλείται **βαθμός της f** , $\deg f = \lambda$. Η f διατηρεί τον προσανατολισμό αν και μόνο αν $\deg f > 0$.

Απόδειξη. Όμοια με την θεωρία των τοπικών βαθμών έχουμε το παρακάτω διάγραμμα

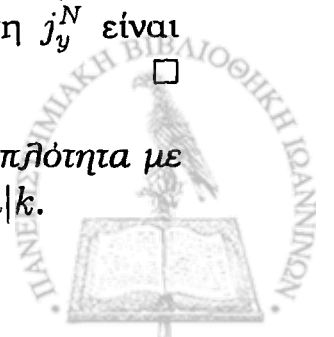
$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{x \in f^{-1}(y)} H_n(U_x, U_x - x) & \longrightarrow & H_n(V, V - y) & & \\ & \searrow & \downarrow \approx & & \\ H_n(M, M - f^{-1}(y)) & \xrightarrow{\approx} & \bigoplus_{x \in f^{-1}(y)} H_n(M, M - x) & \xrightarrow{g} & H_n(N, N - y) \\ & \swarrow & \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ & & H_n(M) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N) \end{array}$$

$\bigoplus_{i=1}^m j_{x_i}^M$ (από $H_n(M, M - f^{-1}(y))$ προς $H_n(M)$)

j_y^N (από $H_n(N, N - y)$ προς $H_n(N)$)

Επομένως ο βαθμός της g είναι $\deg g = \sum_i \deg g|_{x_i}$ και $\deg g_{x_i} = 1 \forall i$ ή $\deg g_{x_i} = -1 \forall i$. Δηλαδή $\deg g = m$. Επομένως η πρωταρχική κλάση j_M απεικονίζεται στο στοιχείο $m \lambda_y$ μέσω της $g \circ \bigoplus_{i=1}^m j_{x_i}^M$, όπου $\langle \lambda_y \rangle = H_n(N, N - y)$. Όμως η N είναι προσανατολίσιμη, επομένως η απεικόνιση j_y^N είναι ισομορφισμός, και $f_*(j_M) = \lambda j_N$. Άρα $\lambda = m$. □

Πρόταση 3.2.35. Έστω M^n συμπαγής προσανατολίσιμη πολλαπλότητα με $n > 1$ και $f : S^n \rightarrow M^n$ με $\deg f = k \geq 1$. Τότε $|\pi_1(M)| = m$ με $m|k$.



Απόδειξη. Έστω (E, p) ο καλυπτικός χώρος της M^n . Τότε η f ανασύρεται μοναδικά, αφού η S^n είναι απλά συνεκτική και τοπικά τροχιακά συνεκτική.

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \tilde{f} \nearrow & & \downarrow p \\ S^n & \xrightarrow{f} & M^n \end{array}$$

Τότε $f_*(H_n(S^n, S^n - x)) \leq p_*(H_n(E, E - \tilde{f}(x)))$. Επομένως ο καλυπτικός χώρος έχει m στρώματα με $m|k$. Άρα $|\pi_1(M^n)| = m$. \square

Θα κλείσουμε την ενότητα αυτή με ένα γνωστό αποτέλεσμα σχετικά με την εμφύτευση συμπαγών πολλαπλοτήτων σε Ευκλείδειους χώρους.

Πρόταση 3.2.36. Έστω M n -διάστατη πολλαπλότητα και $x \in M$. Τότε υπάρχει απεικόνιση $f : M \rightarrow S^n$, ανοιχτή περιοχή U του x και σημείο P στην S^n τέτοια ώστε $f|_U : U \xrightarrow{\cong} S^n - P$ και $f(M - U) = \{P\}$.

Απόδειξη. Έστω V χάρτης γύρω από το x και U χάρτης γύρω από το x τέτοιος ώστε $\bar{U} \subseteq V$. Έστω $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ομοιομορφισμός και $h : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - P$ η φυσική απεικόνιση που ταυτίζει το σύνορο του \mathbb{R}^n και το στέλνει στο P . Τότε ορίζουμε την f ως:

$$f(y) = \begin{cases} P & , y \in X - U \\ hg(y) & , y \in U. \end{cases}$$

\square

Λήμμα 3.2.37. Έστω $K \subseteq M$ συμπαγές. Τότε υπάρχουν ανοιχτή περιοχή V του K και ένα προς ένα απεικόνιση της V σε Ευκλείδειο χώρο.

Απόδειξη. $\forall x \in K$ διαλέγουμε U_x και f_x όπως στην προηγούμενη πρόταση. Το K είναι συμπαγές, άρα μπορούμε να επιλέξουμε πεπερασμένο πλήθος τέτοιων περιοχών που να καλύπτουν το K . Έστω $V = \bigcup_{i=1}^r U_i$. Ορίζουμε:

$$f : M \rightarrow S^n \times S^n \times \dots \times S^n.$$

με $f(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x))$. Τότε ο περιορισμός της f στο V είναι ένα προς ένα. Επιπλέον το γινόμενο r σφαιρών εμφυτεύεται σε Ευκλείδειο χώρο $r(n+1)$ διάστασης. \square

Πόρισμα 3.2.38. Κάθε συμπαγής πολλαπλότητα εμφυτεύεται σε Ευκλείδειο χώρο.



4

ΕΥΘΕΑ ΟΡΙΑ

4.1 ΕΥΘΕΑ ΟΡΙΑ

Σε αυτήν την ενότητα θα δώσουμε τα απαραίτητα στοιχεία επί των ευθέων ορίων τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε για το υπόλοιπο αυτής της μελέτης.

Ορισμός 4.1.1. Έστω M ένα σύνολο. Θα λέμε ότι στο M υπάρχει μία ημι-διάταξη \prec , αν $a \prec a \forall a \in M$ και αν $a \prec b$ και $b \prec c$ τότε $a \prec c \forall a, b, c \in M$. Το M θα λέγεται **διατεταγμένο** αν $\forall a, b \in M \exists c \in M$ με $a \prec c$ και $b \prec c$.

Ορισμός 4.1.2. Ένα υποσύνολο $M' \subseteq M$ θα καλείτε **καταληκτικό** αν $\forall a \in M \exists b \in M'$ με $a \prec b$.

Μία απεικόνιση $\Phi : M \rightarrow M'$ μεταξύ διατεταγμένων συνόλων θα ικανοποιεί την σχέση:

$$a \prec b \Rightarrow \Phi(a) \prec \Phi(b).$$

Ορισμός 4.1.3. Έστω M ένα διατεταγμένο σύνολο. Ένα **ευθύ σύστημα** $\{X, \Pi\}$ πάνω από το M είναι μία οικογένεια συνόλων $\{X^a\}_{a \in M}$ μαζί με απεικονίσεις

$$\Pi_a^b : X^a \longrightarrow X^b \quad \text{όπου } a \prec b$$

οι οποίες έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\Pi_a^a = \text{id}_{X^a} \forall a \in M$
- και αν $a \prec b \prec c$ τότε $\Pi_b^c \Pi_a^b = \Pi_a^c$



Μία απεικόνιση από ένα σύστημα σε ένα άλλο αποτελείται από μία $\Phi : M \rightarrow M'$ και $\forall a \in M \Phi^a : X^a \rightarrow X'^{\Phi(a)}$ ώστε αν $a < b$ τότε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X^a & \xrightarrow{\Pi_a^b} & X^b \\ \Phi^a \downarrow & & \downarrow \Phi^b \\ X'^{\Phi(a)} & \xrightarrow{\Pi_{\Phi(a)}^{\Phi(b)}} & X'^{\Phi(b)} \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Τώρα έστω οι απεικονίσεις

$$\begin{aligned} \Phi & : \{X, \Pi\} \longrightarrow \{X', \Pi'\} \\ \Phi' & : \{X', \Pi'\} \longrightarrow \{X'', \Pi''\} \end{aligned}$$

Ορίζεται η σύνθεση

$$\begin{aligned} \Phi' \Phi & : \{X, \Pi\} \longrightarrow \{X'', \Pi''\} \\ \forall a \in M \quad X^a & \longrightarrow X'^{\Phi(a)} \longrightarrow X''^{\Phi'(\Phi(a))} \end{aligned}$$

ώστε τα αντίστοιχα διαγράμματα να είναι μεταθετικά.

Έστω M και M' διατεταγμένα με $M' \subseteq M$ και $\{X, \Pi\}$ ένα ευθύ σύστημα πάνω από το M . Τα σύνολα και οι απεικονίσεις που αντιστοιχούν στα $a \in M'$ ορίζουν ένα υποσύστημα του αρχικού. Αν M' είναι καταληκτικό τότε και το υποσύστημα καλείται καταληκτικό.

Παράδειγμα 4.1.4. Η $\Phi : M' \hookrightarrow M$ να είναι ο εγκλεισμός και οι Φ^a να είναι οι ταυτοτικές

$$\Phi^a : X^a \longrightarrow X^{\Phi(a)=a} \quad \text{με } a \in M.$$

Αυτές δημιουργούν μία ένεση του υποσυστήματος $\{X', \Pi'\} \rightarrow \{X, \Pi\}$ όπου $\{X', \Pi'\}$ είναι το υποσύστημα που δίνεται από το $M' \subseteq M$.

Έστω ένα ευθύ σύστημα $\{G, \Pi\}$ πάνω από το M ώστε τα G^a να είναι R-πρότυπα και οι απεικονίσεις Π_a^b να είναι ομομορφισμοί. Έστω $\sum_{a \in M} G^a$ να είναι το ευθύ άθροισμα των R-πρωτύπων και $i_a : G^a \rightarrow \sum_{a \in M} G^a$ να είναι οι εγκλεισμοί. Τα στοιχεία $g \in G^a$ θα ταυτίζονται με την εικόνα τους $i_a(g)$.

Ορισμός 4.1.5. Για κάθε $a < b$ και $g^a \in G^a$ το στοιχείο $\Pi_a^b(g^a) - g^a$ καλείται **σχέση**. Καλούμε Q την υποομάδα της $\sum_a G^a$ που γεννάται από όλες τις σχέσεις. Ορίζουμε το **ευθύ όριο** του συστήματος $\{G, \Pi\}$ πάνω από το M να είναι η ομάδα

$$\left(\sum_a G^a \right) / Q = \varinjlim_M G^a = G^\infty.$$



Οι προφανείς απεικονίσεις

$$\Pi^a : G^a \xrightarrow{i_a} \sum_M G^a \longrightarrow G^\infty$$

καλούνται **προβολές**.

Λήμμα 4.1.6. (i) Αν $a \prec b$ τότε $\Pi^b \Pi_a^b = \Pi^a$.

(ii) Αν $u \in G^\infty$ τότε $\exists a \in M$ και $g^a \in G^a$ ώστε $\Pi^a(g^a) = u$.

(iii) Αν $g \in G^c$ και $\Pi^c(g) = 0$ τότε $\exists d \succ c$ ώστε $\Pi_c^d(g) = 0$.

(iv) $\Pi^a(g^a) = \Pi^b(g^b) \Leftrightarrow \exists c \succ a, b$ τέτοιο ώστε $\Pi_a^c(g^a) = \Pi_b^c(g^b)$.

Θεώρημα 4.1.7. Έστω $\{G, \Pi\}$ ένα ευθύ σύστημα από R -πρότυπα. Θα λέμε ότι το $g^a \in G^a$ είναι **ισοδύναμο** ή **σχετίζεται** με το $g^b \in G^b$, $g^a \sim g^b$ αν $\exists c \succ a, b$ ώστε $\Pi_a^c(g^a) = \Pi_b^c(g^b)$. Αυτή η σχέση ισοδυναμίας διαμερίζει τα g^a σε κλάσεις ισοδυναμίας. Θα ορίσουμε ένα άθροισμα στις κλάσεις ισοδυναμίας

$$\bar{g}_1 + \bar{g}_2 = \bar{g}.$$

Βρίσκουμε $a \in M$ με $\bar{g}_1^a = \bar{g}_1$ και $\bar{g}_2^a = \bar{g}_2$ και ορίζουμε $\bar{g} = \overline{g_1^a + g_2^a}$. Το γινόμενο $r\bar{g}$ ορίζεται ανάλογα:

$$r\bar{g} = \overline{r g_1^a} \text{ με } \bar{g} = \bar{g}_1^a \text{ για κάποιο } a.$$

Η δομή αυτή στο σύνολο των κλάσεων ορίζει ένα R -πρότυπο το οποίο είναι ισόμορφο με το G^∞ .

Θεώρημα 4.1.8. Αν $\{G, \Pi\}$ είναι ευθύ σύστημα και $\forall a, b \in M$ με $a \prec b$ οι απεικονίσεις Π_a^b είναι (i) επί (ii) ένα προς ένα, τότε και η Π^a είναι (i) επί (ii) ένα προς ένα. Επιπλέον αν η Π_a^b είναι ισομορφισμός τότε και η Π^a είναι ισομορφισμός $\forall a \in M$.

Απόδειξη. Βλέπε στο [4]. □

Παράδειγμα 4.1.9. Έστω G μία ομάδα. Ορίζουμε ένα σύνολο

$$M = \{S \subseteq G, |S| < \infty\}$$

και το διατάσσουμε με τον εγκλεισμό $S \prec S' \Leftrightarrow S \subseteq S'$. Παρατηρούμε ότι $\forall S$ και $S' \exists S \cup S' \succ S, S'$. Για κάθε $a \in M$ ορίζουμε την $G^a = \langle a \rangle \leq G$. Για $a \prec b$ υπάρχουν οι εγκλεισμοί $G^a \xrightarrow{\Pi_a^b} G^b$. Το $\{G, \Pi\}$ γίνεται ευθύ σύστημα και έχουμε $G^\infty \approx G$. Δηλαδή κάθε ομάδα μπορεί να ιδωθεί ως ευθύ όριο πεπερασμένων υποομάδων της. Αν $|G| < \infty$ τότε $G \in M$ και $\{G\} \subseteq M$ είναι καταληκτικό, άρα

$$\Pi^G : G \xrightarrow{\approx} G^\infty.$$



Ορισμός 4.1.10. Έστω $\Phi : \{G, \Pi\} \rightarrow \{G', \Pi'\}$ απεικόνιση μεταξύ δύο ευθέων συστημάτων. Ορίζεται η

$$\widehat{\Phi} : \sum_M G^a \longrightarrow \sum_{M'} G'^a$$

μέσω των $\Phi^a : G^a \longrightarrow G^{\Phi(a)}$. Θεωρούμε μία σχέση στην $\sum_M G^a$, $\Pi_a^b(g^a) - g^a \in \sum_M G^a$ με $a < b$. Τότε η

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}(\Pi_a^b(g^a) - g^a) &= \widehat{\Phi}\Pi_a^b(g^a) - \widehat{\Phi}(g^a) \\ &= \Phi^b\Pi_a^b(g^a) - \Phi^a(g^a) \\ &= \Pi_{\Phi(a)}^{\Phi(b)}\Phi^a(g^a) - \Phi^a(g^a) \end{aligned}$$

είναι σχέση στην $\sum_{M'} G'^a$.

Επίσης ορίζεται η $\Phi^\infty : G^\infty \longrightarrow G'^\infty$ και $\Phi^\infty\Pi^a = \Pi'^{\Phi(a)}\Phi^a$. Αν $g^a \sim g^b$ τότε $\Phi^a(g^a) \sim \Phi^b(g^b) \Rightarrow \widehat{\Phi}\bar{g}^a = \overline{\Phi^a g^a}$.

Παρατήρηση Αν $\{G, \Pi\}$ είναι ευθύ σύστημα τοπολογικών ομάδων, δεν ορίζεται φυσική τοπολογία στο G^∞ . Παρότι ορίζεται τοπολογία στο $\sum_a G^a$ η Q δεν είναι κλειστή υποομάδα. Η επαγόμενη τοπολογία στην G^∞ δεν είναι T_2 .

Θεώρημα 4.1.11. Θεωρούμε δύο ευθέα συστήματα $\{G, \Pi\}$ και $\{G', \Pi'\}$ πάνω από τα M και M' . Έστω Φ μία απεικόνιση από το $\{G, \Pi\}$ στο $\{G', \Pi'\}$. Αν υπάρχει καταληκτικό διατεταγμένο υποσύνολο $N \subseteq M$ ώστε το $\Phi(N)$ να είναι και αυτό καταληκτικό στο M' και $\Phi^b : G^b \approx G'^{\Phi(b)} \forall b \in N$, τότε $\Phi^\infty : G^\infty \approx G'^\infty$.

Απόδειξη. Βλέπε στο [4]. □

Πόρισμα 4.1.12. Έστω M' καταληκτικό στο M και $\{G', \Pi'\}$ να είναι το υποσύστημα του $\{G, \Pi\}$ που ορίζεται από το M' στο M . Έστω $\Phi : \{G', \Pi'\} \rightarrow \{G, \Pi\}$ ο φυσικός εγκλεισμός, τότε $\Phi^\infty : G'^\infty \approx G^\infty$.

Ορισμός 4.1.13. Έστω M διατεταγμένο σύνολο και $\forall a \in M$ μία ακολουθία από R -πρότυπα

$$S^a = \{G^{a,q}, \Phi^{a,q}\}$$

με

$$\dots \longrightarrow G^{a,q} \xrightarrow{\Phi^{a,q}} G^{a,q+1} \xrightarrow{\Phi^{a,q+1}} G^{a,q+2} \longrightarrow \dots$$

Ένα ευθύ σύστημα ανωτέρων ακολουθιών πάνω από το M είναι μία απεικόνιση

$$\psi : M \longrightarrow \{S, \Pi\} \text{ με } \psi(a) = S^a$$



ώστε για $a \prec b$ οι απεικονίσεις $\Pi_a^b : S^a \longrightarrow S^b$ να είναι ομομορφισμοί με $\Pi_a^a = \text{id}$ και για $a \prec b \prec c$ να ισχύει $\Pi_b^c \Pi_a^b = \Pi_a^c$, όπου οι $\Pi_a^b : S^a \longrightarrow S^b$ είναι οι ακολουθίες ομομορφισμών.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & G^{a,q} & \xrightarrow{\Phi^{a,q}} & G^{a,q+1} & \xrightarrow{\Phi^{a,q+1}} & G^{a,q+2} & \longrightarrow & \dots \\ & & \Pi_a^b(q) \downarrow & & \Pi_a^b(q+1) \downarrow & & \Pi_a^b(q+2) \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & G^{b,q} & \longrightarrow & G^{b,q+1} & \longrightarrow & G^{b,q+2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Για κάθε q σταθερό δίνεται το ευθύ σύστημα $\{G^{a,q}, \Pi_a^b(q)\}$ πάνω από το M . Ορίζεται το **ευθύ όριο** του συστήματος $G^{\infty,q}$. Οι ομομορφισμοί $\{\Phi^{a,q}\}$ για q σταθερό ορίζουν απεικόνιση $\Phi^q : \{G^{a,q}, \Pi_a^b(q)\} \longrightarrow \{G^{a,q+1}, \Pi_a^b(q+1)\}$. Το όριο των Φ^q ορίζεται από την $\Phi^{\infty,q} : G^{\infty,q} \longrightarrow G^{\infty,q+1}$. Η ακολουθία S^∞ καλείται το **ευθύ όριο** του $\{S, \Pi\}$.

Ορισμός 4.1.14. Μια ανώτερη ακολουθία ευθέων συστημάτων καλείται **τάξης 2** αν για κάθε q στην ακολουθία:

$$\dots \longrightarrow G^{a,q} \xrightarrow{\Phi^{a,q}} G^{a,q+1} \xrightarrow{\Phi^{a,q+1}} G^{a,q+2} \longrightarrow \dots$$

ισχύει $\Phi^{a,q} \Phi^{a,q+1} = 0$.

Θεώρημα 4.1.15. Αν κάθε ακολουθία ενός ευθέους συστήματος ανωτέρων ακολουθιών είναι τάξης 2, τότε και η οριακή ακολουθία $S^\infty = \{G^{\infty,q}, \Phi^{\infty,q}\}$ είναι επίσης τάξης 2.

Απόδειξη. Βλέπε στο [4]. □

Πόρισμα 4.1.16. Το ευθύ όριο σέβεται το ευθύ άθροισμα και την ακρίβεια ακολουθιών.



5

POINCARÉ DUALITY

Η πρώτη μορφή του θεωρήματος Poincaré Duality είχε παρουσιαστεί από τον Henri Poincaré το 1893. Είχε τη μορφή με τους αριθμούς Betti: Σε μία συμπαγή προσανατολισμένη n -διάστατη πολλαπλότητα οι αριθμοί Betti στις διαστάσεις k και $n - k$ για $0 \leq k \leq n$ είναι ίσοι. Θα αναφέρουμε αυτήν την μορφή ως πόρισμα στο βασικό θεώρημα. Το θεώρημα Poincaré Duality πήρε την σύγχρονη μορφή του την δεκαετία του 1930, όταν οι Eduard Čech και Hassler Whitney εισήγαγαν τα cup και cap products. Οι ίδιοι έδωσαν τη σύγχρονη μορφή του θεωρήματος: Αν η M είναι συμπαγής προσανατολίσιμη n -διάστατη πολλαπλότητα, τότε υπάρχει ένας κανονικός ισομορφισμός από την $H_k(M)$ στην $H^{n-k}(M)$. Ο ισομορφισμός αυτός απεικονίζει ένα στοιχείο της $H^k(M)$ στο cap product του με μία πρωταρχική κλάση της M . Για μη συμπαγείς προσανατολίσιμες πολλαπλότητες η συνομολογία αντικαθίσταται με την συνομολογία με συμπαγή υποστήριξη. Σε αυτήν τη μελέτη θα αποδείξουμε το θεώρημα Poincaré Duality για τυχαία προσανατολίσιμη πολλαπλότητα. Θα εισάγουμε τώρα τη θεωρία της συνομολογίας με συμπαγή υποστήριξη.

5.1 ΣΥΝΟΜΟΛΟΓΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΑΓΗ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ

Έστω M^n R -προσανατολίσιμη συμπαγής πολλαπλότητα. Τότε η M έχει πρωταρχική κλάση j_M η οποία καθορίζεται από τον ισομορφισμό:

$$\langle j_M \rangle = H_n(M, R) \approx \Gamma M \approx R.$$

Για $K \subseteq M$ συμπαγές, ο τοπικός προσανατολισμός j_K δίνεται από τον εγκλεισμό $j_K^M(j_M) = j_K$.

$$\langle j_K \rangle = H_n(M, M - K) \approx \Gamma K \approx R$$



Αν η M δεν είναι συμπαγής, τότε η πρωταρχική κλάση j_K δίνεται πάλι από τον προηγούμενο ισομορφισμό. Σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει πρωταρχική κλάση j_M , οπότε η απόδειξη του θεωρήματος του Poincaré στηρίζεται σε διαφορετική θεωρία συνομολογίας από αυτήν που χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα. Η θεωρία αυτή καλείται **singular συνομολογία με συμπαγή υποστήριξη**. Η σύνδεσή της με την κανονική θεωρία δίνεται ως ακολούθως.

Θεωρούμε το αλυσιδωτό complex

$$\cdots \longrightarrow S_q(X) \xrightarrow{\partial} S_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

και το δυϊκό του

$$\cdots \longleftarrow S^q(X) \xleftarrow{\delta} S^{q-1}(X) \longleftarrow \cdots$$

Έστω $A \subseteq X$. Έχουμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_q(A) & \xrightarrow{i} & S_q(X) & \longrightarrow & S_q(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_{q-1}(A) & \xrightarrow{i} & S_{q-1}(X) & \longrightarrow & S_{q-1}(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Έστω $[z] \in H_q(X, A)$ τότε $\partial z \in S_{q-1}(A)$, όμοια αν $[z] \in H^q(X, A)$ τότε $\delta z \in S^{q+1}(A)$. Δηλαδή η δz είναι μία απεικόνιση:

$$\delta z : S_{q+1}(A) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

με

$$\delta z(\sigma_A) = z(\partial \sigma_A), \text{ όπου } \sigma_A \in S_{q+1}(A).$$

Άρα, για την $z : S_q(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ισχύει $z(\tau|_{X-A}) = 0$.

Έστω X^n πολλαπλότητα διάστασης n . Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{K} = \{K \subseteq X, K \text{ συμπαγής}\}$. Στο \mathcal{K} δίνουμε διάταξη με εγκλεισμό, δηλαδή $K < K' \Leftrightarrow K \subseteq K'$. Το σύστημα $\{H^q(X, X - K), K \in \mathcal{K}\}$ είναι ευθύ πάνω από το \mathcal{K} : Έστω $K < K'$, δηλαδή $K \subseteq K'$ και $X - K \supseteq X - K'$, τότε ο εγκλεισμός $(X, X - K') \hookrightarrow (X, X - K)$ επάγει την $i^q : H^q(X, X - K) \rightarrow H^q(X, X - K')$.

Ορισμός 5.1.1. Ορίζουμε τη συνομολογία του X με συμπαγή υποστήριξη να είναι η ομάδα

$$H_c^q(X) = \varinjlim_{\mathcal{K}} H^q(X, X - K).$$



Παρατηρούμε ότι αν η X είναι συμπαγής πολλαπλότητα, τότε $H_c^q(X) \approx H^q(X)$. Αφού η X είναι συμπαγής, το μονοσύνολο $\{X\}$ είναι καταληκτικό στο \mathcal{K} . Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \varinjlim_{\mathcal{K}} H^q(X, X - K) &\approx \varinjlim_X H^q(X, X - X) \\ &\Rightarrow H_c^q(X) \approx H^q(X). \end{aligned}$$

Έστω $u \in H_c^q(X)$. Τότε υπάρχει K ώστε $u = \overline{[v]}$ με $[v] \in H^q(X, X - K)$, όπου $v \in S^q(X)$ με $\delta v \in S^{q+1}(X - K)$. Αν $\sigma \in S_{q+1}(X - K)$ τότε $(\delta v)(\sigma) = v(\partial\sigma) \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή $v(\tau|_K) = 0$ με $\tau \in S_q(X)$.

Έστω τώρα $f : X \rightarrow Y$. Υπάρχουν οι επαγόμενες $f^q : H^q(Y) \rightarrow H^q(X)$. Έστω K ένα συμπαγές υποσύνολο της X , τότε το $f(X)$ είναι συμπαγές στο Y .

Ορισμός 5.1.2. Μία απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ καλείται **proper** αν πληρεί την παρακάτω ιδιότητα:

$\forall L$ συμπαγές στο Y το $f^{-1}(L)$ είναι συμπαγές στο X .

Έστω μία $f : X \rightarrow Y$ proper. Τότε έχουμε τις επαγόμενες απεικονίσεις

$$H^q(Y, Y - L) \xrightarrow{f^q} H^q(X, X - f^{-1}(L))$$

$$(X, X - f^{-1}(L)) \xrightarrow{f} (Y, Y - L)$$

και το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} H^q(Y, Y - L) & \xrightarrow{f^q} & H^q(X, X - f^{-1}(L)) \\ \Pi^L \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \Pi^{f^{-1}(L)} \\ H_c^q(Y) & \dashrightarrow & H_c^q(X). \end{array}$$

Για να συμπληρωθεί το διάγραμμα πρέπει για $L \prec L'$ το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} H^q(Y, Y - L) & \xrightarrow{f} & H^q(X, X - f^{-1}(L)) \\ \Pi_{L'}^L \downarrow & & \downarrow \Pi_{f^{-1}(L)}^{f^{-1}(L')} \\ H^q(Y, Y - L') & \xrightarrow{f} & H^q(X, X - f^{-1}(L')) \end{array}$$



να είναι μεταθετικό.

Η πρώτη στήλη είναι ευθύ σύστημα πάνω από το $\mathcal{K}' = \{L \text{ συμπαγές υποσύνολο του } Y\}$ και η δεύτερη είναι ευθύ σύστημα πάνω από το $\mathcal{K} = \{K \text{ συμπαγές στο } X\}$. Άρα επάγεται η $f^q : H_c^q(Y) \rightarrow H_c^q(X)$.

Παρατηρούμε ότι οι φυσικοί εγκλεισμοί $i : X \rightarrow Y$ είναι proper εάν για κάθε L συμπαγές στον Y το $i^{-1}(L)$ είναι συμπαγές στο X . Άρα ο X θα πρέπει να είναι κλειστός.

Έστω τώρα U ανοιχτό στο X και K συμπαγές στο U . Από το θεώρημα εκτομής έχουμε τον ισομορφισμό:

$$H^q(U, U - K) \xrightarrow{\approx} H^q(X, X - K)$$

Αν $K \prec K'$ στο U , τότε έχουμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} H^q(U, U - K) & \xrightarrow{\approx} & H^q(X, X - K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(U, U - K') & \xrightarrow{\approx} & H^q(X, X - K') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^q(U) & \longrightarrow & H_c^q(X) \end{array}$$

Παράδειγμα 5.1.3. Έστω $X = S^n$ και $U = S^n - \{p\}$. Έστω K συμπαγές στην S^n με $p \notin K$. Τότε τα σύνολα $S^n - K$ είναι ανοιχτές περιοχές του p . Δημιουργείται ένα διατεταγμένο σύνολο με αυτές τις περιοχές. Αυτό έχει ένα καταληκτικό υποσύνολο με συσσελόμενες περιοχές, δηλαδή $S^n - K \simeq \{*\}$. Έχουμε:

$$H^q(S^n, S^n - K) \approx H^q(S^n).$$

$$\begin{aligned} H^q(S^n, S^n - K) &\approx H^q(S^n - \{p\}, S^n - \{p\} - K) \\ &= H^q(U, U - K) \\ &\approx H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \end{aligned}$$

Παίρνουμε το εθύ όριο:

$$\begin{aligned} \varinjlim_{\mathcal{K}} H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) &\approx \varinjlim H^q(S^n, S^n - K) \\ &= \varinjlim \tilde{H}^q(S^n) \\ &= \tilde{H}^q(S^n) \end{aligned}$$



Όμως

$$\varinjlim H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) = H_c^q(\mathbb{R}^n),$$

άρα

$$H_c^q(\mathbb{R}^n) \approx \tilde{H}^q(S^n).$$

5.2 CAP PRODUCT

Το cap product είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί συνδέει τη συνομολογία με την ομολογία. Δεν είναι όμως εύχρηστο στους υπολογισμούς. Αλγεβρικά περιγράφεται από την απεικόνιση $1 \otimes : \text{hom}(D, R) \rightarrow \text{hom}(C \otimes D, C)$.

Ορισμός 5.2.1. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και R ένας δακτύλιος. Ορίζουμε το **cap product**:

$$\smile : S_k(X) \times S^l(X) \longrightarrow S_{k-l}(X)$$

με $\sigma \smile \varphi = \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_l]})\sigma|_{[v_{l+1}, \dots, v_k]}$ για $\sigma \in S_k(X)$ και $\varphi \in S^l(X)$. Το cap product είναι R -γραμμικό.

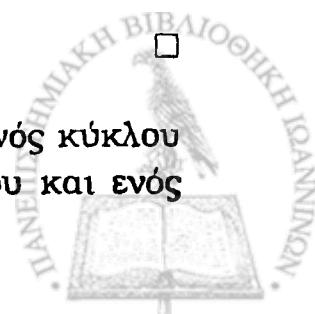
Πρόταση 5.2.2. Ισχύει η σχέση:

$$\partial(\sigma \smile \varphi) = (-1)^l(\partial\sigma \smile \varphi - \sigma \smile \delta\varphi).$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \partial\sigma \smile \varphi &= \sum_{i=0}^l (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \tilde{v}_i, \dots, v_{l+1}]})\sigma|_{[v_{l+1}, \dots, v_k]} \\ &\quad + \sum_{i=l+1}^k (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_l]})\sigma|_{[v_i, \dots, \tilde{v}_i, \dots, v_k]} \\ \sigma \smile \delta\varphi &= \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \tilde{v}_i, \dots, v_{l+1}]})\sigma|_{[v_{l+1}, \dots, v_k]} \\ \partial(\sigma \smile \varphi) &= \sum_{i=l}^k (-1)^{i-l} \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_l]})\sigma|_{[v_i, \dots, v_k]} \end{aligned}$$

Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι το cap product ενός κύκλου και ενός συνκύκλου είναι κύκλος, το cap product ενός κύκλου και ενός



συνσυνόρου είναι συνσύνορο και το cap product ενός συνόρου και ενός συνκύκλου είναι σύνορο. Επομένως το cap product επάγεται στις ομολογιακές ομάδες

$$H_k(X) \times H^l(X) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X).$$

Επίσης έχουμε τα σχετικά cap product:

$$H_k(X, A) \times H^l(X) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X, A)$$

$$H_k(X, A) \times H^l(X, A) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X)$$

και πιο γενικά:

$$H_k(X, A \cup B) \times H^l(X, A) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X, B)$$

με A και B ανοιχτά υποσύνολα του X .

Έστω $z \in Z_k(X, A \cup B)$ και $c \in Z^l(X, A)$. Τότε $\partial z \frown c = c(\partial z)_l(\partial z)_{k-l}$, όμως $\partial z \in S_k(A \cup B)$ και ο c μηδενίζει στην $S_k(A)$, άρα μένει το κομμάτι του $\partial z \frown c$ που βρίσκεται έξω από το A . Επιπλέον $z \frown \delta c = \delta c(z_k)z_{k-l} = c(\partial z_k)z_{k-l} = 0$, αφού ο c είναι συνκύκλος, δηλαδή μηδενίζει στα σύνορα. Άρα, από προηγούμενη πρόταση $\partial(z \frown c) \in S_{k-l}(B) \Rightarrow [z \frown c] \in H_{k-l}(X, B)$.

Πρόταση 5.2.3. Για μία απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ ισχύει:

$$f_*(\alpha) \frown \varphi = f_{k-l}(\alpha \frown f^l(\varphi)),$$

δηλαδή κατά μία έννοια το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} H_k(X) \times H^l(X) & \xrightarrow{\frown} & H_{k-l}(X) \\ \downarrow f_k & \uparrow f^l & \downarrow f_{k-l} \\ H_k(Y) \times H^l(Y) & \xrightarrow{\frown} & H_{k-l}(Y) \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Έστω $[\sigma] = \alpha$, τότε:

$$\begin{aligned} f_*\alpha \frown \varphi &= (f^*\varphi)(\sigma|_{\{v_0, \dots, v_l\}})f_*\sigma|_{\{v_l, \dots, v_k\}} \\ &= f_*((f^*\varphi)\sigma|_{\{v_0, \dots, v_l\}}\sigma|_{\{v_l, \dots, v_k\}}) \\ &= f_*(\alpha \frown f^*(\varphi)). \end{aligned}$$



5.3 POINCARÉ DUALITY

Έστω M \mathbb{R} -προσανατολίσιμη n -διάστατη πολλαπλότητα. Για K συμπαγές υποσύνολο της πολλαπλότητας θεωρούμε τον ομομορφισμό:

$$\begin{aligned} \zeta_K \frown: H^q(M, M - K) &\longrightarrow H_{n-q}(M) \\ \gamma &\longmapsto \zeta_K \frown \gamma \end{aligned}$$

όπου $\zeta_K \in H_n(M, M - K)$ τοπικός προσανατολισμός της M .

Έστω τώρα K και K' συμπαγή υποσύνολα του M με $K \subseteq K'$. Έχουμε το παρακάτω διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} H^q(M, M - K) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & & H_{n-q}(M) \\ \uparrow & \swarrow & \\ H^q(M, M - K') & & \end{array}$$

Επομένως επάγεται ο οριακός ομομορφισμός:

$$D: H_c^q(M) \longrightarrow H_{n-q}(M).$$

Υπενθυμίζουμε τη σχετική ακολουθία Mayer-Vietoris: Έστω $X_1, X_2 \subseteq X$ ανοιχτά υποσύνολα και $Y = X_1 \cup X_2, A = X_1 \cap X_2$. Η επόμενη μακρά ακολουθία είναι ακριβής:

$$\cdots \longrightarrow H_q(X, A) \xrightarrow{\phi} H_q(X, X_1) \oplus H_q(X, X_2) \xrightarrow{\psi} H_q(X, Y) \xrightarrow{\Gamma} H_{q-1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

Θα υπολογίσουμε την απεικόνιση Γ . Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc} S(A) & \longrightarrow & S(X_1) & \xrightarrow{k_1} & S(X_1, A) \\ \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \Bigg) j \\ S(X_2) & \longrightarrow & S(X) & \xrightarrow{k} & S(X, X_2) \end{array}$$

όπου i είναι η αλυσιδωτή απεικόνιση που επάγεται από τον εγκλεισμό και j η αλυσιδωτή αντίστροφος, $ij - \text{id} = \partial D + D\partial$ όπου D αλυσιδωτή ομοιοπία. Έστω $z \in Z_{q+1}(X)$ και $w \in S_{q+1}(X_1)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} ki(w) &\sim kz \quad \text{στο} \quad S(X, X_2) \\ k_1(\partial w) &= 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \partial w \in S_q(A). \end{aligned}$$

Τότε $\overline{\partial w} = \Gamma \bar{z}$. Επιπλέον για ένα κατάλληλο w ισχύει η σχέση $k_1 w = jkz$, αφού $kiw = ik_1 w = ijkw = kz + \partial Dkw$, και $k_1(\partial w) = \partial k_1 w = jk\partial z = 0$.



Λήμμα 5.3.1. Έστω U και V ανοιχτά με $B = U \cap V$ και $Y = U \cup V$. Επιπλέον θεωρούμε K συμπαγές υποσύνολο του U και L συμπαγές υποσύνολο του V . Το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό σε σχέση με το $(-1)^{q+1}$.

$$\begin{array}{ccc}
 H^{q+1}(Y, Y - K \cap L) & \xleftarrow{\gamma} & H^q(Y, Y - K \cup L) \\
 \approx \downarrow & & \downarrow \\
 H^{q+1}(B, B - K \cap L) & & \\
 \zeta_{K \cap L} \downarrow & & \downarrow \\
 H_{n-q-1}(B) & \xleftarrow{\Gamma} & H_{n-q}(Y)
 \end{array}$$

Απόδειξη. Έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc}
 S^*(Y, Y - K \cup L) & \longleftarrow & S^*(Y, Y - K) & \longleftarrow & S^*(Y, Y - K \cap L) \\
 \uparrow & & \swarrow & \uparrow & \swarrow \\
 & & S^*(U, U - K) & & S^*(B, B - K \cap L) \\
 \uparrow & & \swarrow & \uparrow & \swarrow \\
 S^*(M, M - K \cup L) & \longleftarrow & S^*(M, M - K) & \longleftarrow & S^*(M, M - K \cap L)
 \end{array}$$

όπου όλες οι κάθετες και οι πλάγιες απεικονίσεις επάγονται από τους εγκλεισμούς και είναι εκτομές. Αν $R \subseteq S$ και $j : (M, M - S) \rightarrow (M, M - R)$ είναι ο εγκλεισμός, τότε το στοιχείο $j_*(\zeta_S \cap j^*x) = \zeta_R \cap x$ στην $S(M, M - R)$ θα συμβολίζεται με $\zeta_S \cap x = \zeta_R \cap x$. Έστω $c \in S^*(Y, Y - K \cup L)$ με $\delta(c) = 0$. Έστω $a_2 \in S^*(M, M - K \cup L)$ η εικόνα του c μέσω της αλυσιδωτής ομοτοπικής αντιστροφής στην εκτομή. Τότε $\delta a_2 = 0$. Έστω $a_3 \in S^*(M, M - K)$ ένα στοιχείο τέτοιο ώστε $\delta a_3 \sim \gamma(a_2)$ στην $S^*(M, M - K \cap L)$. Έστω a_4 και a_5 οι εικόνες του a_3 στις $S^*(Y, Y - K)$ και $S^*(U, U - K)$ αντίστοιχα. Τότε η εικόνα του a_4 στην $S^*(Y, Y - K \cup L)$ είναι $c + \delta Dc$ όπου D είναι η αλυσιδωτή ομοτοπία. Άρα $\gamma(c) \sim \delta a_4$ στην $S^*(Y, Y - K \cap L)$. Από μεταθετικότητα οι εικόνες των δa_4 και δa_3 στην $S^*(B, B - K \cap L)$ είναι ίσες. Έχουμε:

$$\zeta_{K \cap L} \cap \gamma(c) = \zeta_{K \cap L} \cap \delta a_4 = \zeta_{K \cap L} \cap \delta a_3$$

και παίρνουμε τις εικόνες στο $S(B)$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
 \zeta_{K \cap L} \cap \delta a_3 &= \zeta_K \cap \delta a_3 = (-1)^{q+1} \partial(\zeta_K \cap a_3) \\
 &= (-1)^{q+1} \partial(\zeta_K \cap a_i), \quad i = 4, 5.
 \end{aligned}$$

Από την άλλη,

$$\zeta_K \cap a_4 = \zeta_{K \cup L} \cap (c + \delta Dc) = \zeta_{K \cup L} \cap c \pm \partial(\zeta_{K \cup L} \cap Dc).$$

Άρα το $\Gamma(\zeta_{K \cup L} \cap c)$ εκπροσωπείται από το $\partial(\zeta_K \cap a_5)$.



Τι
κα
H,
για
σε
και
τά
c

Θεώρημα 5.3.2 (Poincaré Duality). Αν M είναι R -προσανατολισμένη n -διάστατη πολλαπλότητα, τότε ο ομομορφισμός

$$D : H_c^q(M) \longrightarrow H_{n-q}(M)$$

είναι ισομορφισμός $\forall q$ με $0 \leq q \leq n$.

Απόδειξη. Πρώτο Βήμα. Θα δείξουμε ότι αν το θεώρημα ισχύει για τα ανοιχτά U και V και για την τομή τους $B = U \cap V$, τότε ισχύει και για την ένωσή τους $N = U \cup V$. Έστω συμπαγή $K \subseteq U$ και $L \subseteq V$. Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα όπου η αριστερή στήλη είναι η σχετική Mayer-Vietoris ακολουθία για την τριάδα $(N, N - K, N - L)$ μαζί με εκτομή της μορφής $(W, W - S) \subseteq (N, N - S)$ και η δεξιά στήλη είναι η Mayer-Vietoris ακολουθία για την τριάδα (N, U, V) .

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^q(B, B - K \cap L) & \xrightarrow{\zeta_{K \cap L} \frown} & H_{n-q}(B) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^q(U, U - K) \oplus H^q(V, V - L) & \xrightarrow{(\zeta_K \frown) \oplus (\zeta_L \frown)} & H_{n-q}(U) \oplus H_{n-q}(V) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^q(N, N - K \cup L) & \xrightarrow{\zeta_{K \cup L} \frown} & H_{n-q}(N) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^{q+1}(B, B - K \cap L) & \xrightarrow{\zeta_{K \cap L} \frown} & H_{n-q-1}(B) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Τα δύο πάνω τετράγωνα είναι μεταθετικά από naturality του cap product και το κάτω από το προηγούμενο λήμμα. Θεωρούμε τις ομάδες $H_{n-q}(B)$, $H_{n-q}(U) \oplus H_{n-q}(V)$ και $H_{n-q}(N) \forall q$ ως σταθερά συστήματα και τις απεικονίσεις $\zeta_{K \cap L} \frown$, $(\zeta_K \frown) \oplus (\zeta_L \frown)$ και $\zeta_{K \cup L} \frown$ ως απεικονίσεις από ένα σύστημα σε ένα άλλο. Καθώς το K διατρέχει το U , δηλαδή όλα τα συμπαγή του U , και το L όλα τα συμπαγή του V τα σύνολα $K \cap L$ και $K \cup L$ διατρέχουν όλα τα συμπαγή των B και N αντίστοιχα. Οπότε επάγεται το διάγραμμα με τις

οριακές απεικονίσεις.

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^q(B) & \xrightarrow[\approx]{D} & H_{n-q}(B) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^q(U) \oplus H_c^q(V) & \xrightarrow[\approx]{D \oplus D} & H_{n-q}(U) \oplus H_{n-q}(V) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^q(N) & \xrightarrow{D} & H_{n-q}(N) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^{q+1}(B) & \xrightarrow[\approx]{D} & H_{n-q-1}(B) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Επομένως από το five-lemma η $D : H_c^q(N) \rightarrow H_{n-q}(N)$ είναι ισομορφισμός.

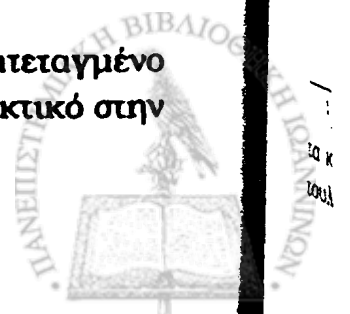
Δεύτερο Βήμα. Έστω $\{U_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων με ολική διάταξη τον εγκλεισμό, δηλαδή $U_{i_1} < U_{i_2} \Leftrightarrow U_{i_1} \subseteq U_{i_2}$. Θα δείξουμε ότι αν το θεώρημα ισχύει για κάθε U_i , τότε ισχύει και για την ένωσή τους $\bigcup_{i \in I} U_i = U$. Έχουμε τους ισομορφισμούς:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 : \varinjlim H_{n-q}(U_i) &\longrightarrow H_{n-q}(U) \\
 \psi_2 : \varinjlim H_c^q(U_i) &\longrightarrow H_c^q(U).
 \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι η ψ_1 είναι ισομορφισμός. Έστω ένας εκπρόσωπος ενός κύκλου στο U . Η υποστήριξή του είναι συμπαγής στο U , άρα ανήκει σε κάποιο U_i , λόγω διάταξης. Άρα η ψ_1 είναι επί. Τώρα αν ένας κύκλος σε κάποιο U_i είναι σύνορο στο U , τότε από συμπαγεία έχουμε ότι είναι σύνορο σε κάποιο $U_j \supseteq U_i$, άρα εκπροσωπεί το μηδέν στο $\varinjlim H_{n-q}(U_i)$. Άρα η ψ_1 είναι ένα προς ένα. Για τη δεύτερη απεικόνιση έχουμε τους παρακάτω ισομορφισμούς.

$$\begin{aligned}
 \varinjlim_{\{U_i\}_{i \in I}} (\varinjlim_{\mathcal{K}} H^q(U_i, U_i - K)) &\approx \varinjlim_{\{U_i\}_{i \in I}} (\varinjlim_{\mathcal{K}} H^q(U, U - K)) \\
 &= \varinjlim_{\mathcal{K}} H^q(U, U - K) \\
 &\approx H_c^q(U).
 \end{aligned}$$

Ο πρώτος ισομορφισμός ισχύει, επειδή το $\{U_i\}_{i \in I}$ είναι ολικά διατεταγμένο με τη διάταξη του εγκλεισμού και άρα το $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ είναι καταληκτικό στην οικογένεια $\{U_i\}_{i \in I}$.



Τρίτο Βήμα. Έστω ότι το U περιέχεται σε κάποιο σύστημα συνιεταγμένων. Θεωρούμε το U ως υπόχωρο του \mathbb{R}^n .

Πρώτη Περίπτωση: Το U είναι κυρτό. Έχουμε $U \cong \mathbb{R}^n$. Για να υπολογίσουμε το

$$\varinjlim_{\mathcal{K}} H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$$

αφήνουμε το K να τρέχει στο καταληκτικό υποσύστημα των κλειστών σφαιρών ακτίνας > 1 με κέντρο το 0. Αλλά για τέτοια K το ευθύ όριο είναι μηδέν για $q \neq n$. Και για $q = n$ έχουμε

$$H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \approx R.$$

Επομένως

$$H_c^n(\mathbb{R}^n) \approx R \approx H_0(\mathbb{R}^n).$$

Γενική Περίπτωση: Αριθμούμε το πυκνό σύνολο των σημείων στο U που έχουν ρητές συνιεταγμένες και διαλέγουμε για κάθε τέτοιο σημείο x_j κυρτή ανοιχτή περιοχή $V_j \subseteq U$ με $x_j \in V_j$. Έστω $U_1 = V_1$ και $U_i = U_{i-1} \cup V_i$ για $i > 1$. Έστω τώρα ότι το θεώρημα ισχύει για την ένωση $k < i$ ανοιχτών κυρτών συνόλων. Το $U_{i-1} \cap V_i$ είναι ένωση το πολύ $i - 1$ κυρτών συνόλων. Άρα από το πρώτο βήμα, την πρώτη περίπτωση και την επαγωγική υπόθεση το θεώρημα ισχύει για το U .

Τέταρτο Βήμα. Έστω $\{W_i | i \in I\}$ η οικογένεια που περιέχει όλα τα ανοιχτά υποσύνολα της M για τα οποία ισχύει το θεώρημα, με μερική διάταξη τον εγκλεισμό. Από το λήμμα του Zorn¹ υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο. Το μεγιστικό στοιχείο είναι το M , δηλαδή ολόκληρη η πολλαπλότητα. Πράγματι, έστω ότι το μεγιστικό στοιχείο είναι κάποιο $Y \subsetneq M$, τότε για $y \notin Y$ και V_y κυρτό ανοιχτό μέσα σε σύστημα συνιεταγμένων που περιέχει το y , έχουμε ότι $V_y \in \{W_i | i \in I\}$. Άρα έχουμε άτοπο. \square

Πόρισμα 5.3.3. Αν M είναι συνεκτική R -προσανατολίσιμη πολλαπλότητα, τότε $H_c^n(M) \approx R$.

Πόρισμα 5.3.4. Αν M είναι συμπαγής προσανατολίσιμη πολλαπλότητα, τότε: $\beta_q = \beta_{n-q}$ και $T_{n-q}(M) \approx T_{q-1}(M)$ όπου $T_q(M)$ το *torstion* κομμάτι της $H_q(M)$ και β_q ο αριθμός Betti στην διάσταση q .

Απόδειξη. Από το πόρισμα 1.2.12 έχουμε:

$$H^q(M) \approx H_q(M)/T_q(M) \oplus T_{q-1}(M).$$

¹Λήμμα του Zorn: Εάν X είναι ένα μη κενό μερικώς διατεταγμένο σύνολο με την ιδιότητα κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολό του έχει ένα άνω φράγμα, τότε το X περιέχει ένα τουλάχιστον μεγιστικό στοιχείο.



Όμως

$$\varinjlim_{\kappa} H^q(M, M - K) = H_c^q(M) = H^q(M)$$

αφού η M είναι συμπαγής. Άρα

$$\begin{aligned} H_c^q(M) &\approx H_q(M)/T_q(M) \oplus T_{q-1}(M) \\ \Rightarrow H_{n-q}(M) &\approx H_q(M)/T_q(M) \oplus T_{q-1}(M) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_{n-q}(M) \approx T_{q-1}(M) \text{ και } \beta_{n-q} = \beta_q$$

□



Ε
Π
κ
ι
θ
Α

6

ALEXANDER DUALITY

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη δυϊκότητα μεταξύ της συνομολογίας ενός συμπαγούς υποσυνόλου μιας προσανατολίσιμης πολλαπλότητας με την ομολογία του συμπληρωματικού του υποσυνόλου σε συμπληρωματικές διαστάσεις. Η συνομολογία αυτή που μελετήθηκε πρώτα από τον Alexander και γι' αυτό πήρε το ονομά του, δίνεται ως ευθύ όριο της singular συνομολογίας των περιοχών του συνόλου με διάταξη του περιέχεσθαι. Θα περιοριστούμε σε κλειστά σύνολα. Η συνομολογία του Alexander ικανοποιεί τα γνωστά αξιώματα μιας συνομολογίας και διαφέρει από την singular. Αλλά στην περίπτωση των κλειστών συνόλων είναι ισόμορφη με το ευθύ όριο της singular.

6.1 ΘΕΩΡΗΜΑ ALEXANDER DUALITY

Ορισμός 6.1.1. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται **AR (absolute retract)** αν για κάθε κανονικό χώρο Y και απεικόνιση $f : B \rightarrow X$, όπου $B \subseteq Y$ κλειστό, η f επεκτείνεται σε απεικόνιση $\tilde{f} : Y \rightarrow X$. Αν η f επεκτείνεται σε περιοχή του B , τότε ο X καλείται **ANR (absolute neighborhood retract)**.

Παράδειγμα 6.1.2. Έστω M^2 συμπαγής προσανατολίσιμη πολλαπλότητα και $i : S^1 \rightarrow M$ εμφύτευση ώστε $i(S^1) \simeq \{p\} \subseteq M$. Τότε η i επεκτείνεται σε $\tilde{i} : B^2 \rightarrow M$.

Ένας ανοιχτός υπόχωρος ενός ANR είναι ANR.

Θεώρημα 6.1.3. Κάθε συμπαγής πολλαπλότητα είναι ANR.

Απόδειξη. Βλέπε στο [4] στην σελίδα 225.



Πόρισμα 6.1.4. Έστω M μία συμπαγής πολλαπλότητα εμφυτευμένη σε Ευκλείδειο χώρο. Τότε η M είναι retract κάποιας ανοιχτής περιοχής.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα και τον ορισμό του ANR για $B = M$ και $f = \text{id}$. \square

Η M^n θα είναι προσανατολίσιμη.

Έστω $U \subseteq M$ ανοιχτό και $K \subseteq U$ συμπαγές. Από το θεώρημα εκτομής έχουμε τον ισομορφισμό:

$$H^q(U, U - K) \xrightarrow{\cong} H^q(M, M - K).$$

Αν $K \prec K'$ στο U τότε έχουμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} H^q(U, U - K) & \xrightarrow{\cong} & H^q(M, M - K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(U, U - K') & \xrightarrow{\cong} & H^q(M, M - K') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^q(U) & \xrightarrow{i} & H_c^q(M) \end{array}$$

Έστω A ένα κλειστό υποσύνολο της πολλαπλότητας. Θεωρούμε την οικογένεια \mathcal{V} όλων των ανοιχτών περιοχών V του A , διατεταγμένη με τη διάταξη του υπερσυνόλου. Δηλαδή $V \prec V' \Leftrightarrow V \supseteq V'$. Ορίζουμε:

$$\check{H}^q(A) = \varinjlim_{\mathcal{V}} H^q(V).$$

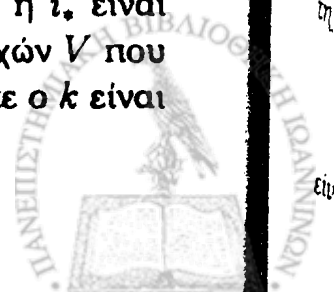
Περνάμε από τους εγκλεισμούς $A \hookrightarrow V$ στην οριακή απεικόνιση και έχουμε τον κανονικό ομομορφισμό:

$$k : \check{H}^q(A) \longrightarrow H^q(A).$$

Ορισμός 6.1.5. Αν ο k είναι ισομορφισμός, το A καλείται **tautly imbedded** στο X .

Πρόταση 6.1.6. Αν το A είναι ANR, τότε ο k είναι επιμορφισμός. Αν επιπλέον η M είναι ANR, τότε ο k είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $r : V \rightarrow A$ ένα retraction μιας περιοχής V του A στο A και $i : A \hookrightarrow V$ ο εγκλεισμός. Τότε $ri = \text{id} \Rightarrow (ri)_* = r_*i_* = \text{id} \Rightarrow$ η i_* είναι ένα προς ένα και άρα η i^* είναι επί. Η οικογένεια όλων των περιοχών V που είναι retractions στο A είναι καταληκτική στο συστήμα μας. Οπότε ο k είναι επιμορφισμός.



Έστω τώρα ότι και η M είναι ANR. Έστω U μία περιοχή του A και U' μία μικρότερη περιοχή του A με retraction $r : U' \rightarrow A$. Θα βρούμε μία ακόμα μικρότερη περιοχή V του A τέτοια ώστε αν $i : A \hookrightarrow U'$ και $j : V \hookrightarrow U'$ τότε να υπάρχει ομοτοπία: $i(r|_V) \simeq j$. Άρα $j^q = (r|_V)^q i^q$ και θα έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc}
 H^q(U) & \longrightarrow & H^q(A) \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 H^q(U') & \xrightarrow{j^q} & H^q(V) \\
 \searrow i^q & & \nearrow r^q \\
 & H^q(A) &
 \end{array}$$

Δηλαδή μία τυχαία κλάση στην $H^q(U)$ που πηγαίνει στο 0 στην $H^q(A)$, πηγαίνει στο 0 και στην $H^q(V)$. Άρα ο k θα είναι μονομορφισμός. Θα βρούμε τώρα την περιοχή V που αναφέραμε πιο πριν. Θεωρούμε το κλειστό υποσύνολο $(U' \times 0) \cup (A \times I) \cup (U' \times 1)$ του $U' \times I$. Έστω:

$$F(x, t) = \begin{cases} x & , \text{αν } t = 0 \text{ και } x \in U' \\ r(x) & , \text{αν } t = 1 \text{ και } x \in U' \\ x & , \text{αν } x \in A \end{cases}$$

Αφού το U' είναι ANR, η F επεκτείνεται σε απεικόνιση μιας περιοχής του $(U' \times 0) \cup (A \times I) \cup (U' \times 1)$ στο U' . Αυτή η περιοχή περιέχει ένα σύνολο της μορφής $V \times I$ όπου V μία περιοχή του A . Αυτή μας δίνει τη ζητούμενη ομοτοπία. \square

Έστω τώρα ότι η M είναι συμπαγής πολλαπλότητα. Άρα και το A θα είναι συμπαγές. Για ανοιχτή περιοχή V του A το $K = M - V$ είναι συμπαγές και περιέχεται στο $U = M - A$. Έχουμε τον ομομορφισμό:

$$H^q(V) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(M, V) \approx H^{q+1}(M - A, V - A) = H^{q+1}(U, U - K).$$

Αν αφήσουμε το V να διατρέχει την οικογένεια \mathcal{V} έχουμε τον επαγόμενο οριακό ομομορφισμό:

$$\delta : \check{H}^q(A) \longrightarrow H_c^{q+1}(U).$$

Θεώρημα 6.1.7. Έστω M συμπαγής πολλαπλότητα, A κλειστό υποσύνολό της και $U = M - A$. Τότε η ακολουθία

$$\dots \longrightarrow H_c^q(U) \xrightarrow{i} H^q(M) \xrightarrow{j} \check{H}^q(A) \xrightarrow{\delta} H_c^{q+1}(U) \longrightarrow \dots$$

είναι ακριβής.



Απόδειξη. Έστω μία κλάση στην $H^q(U, U - K)$, όπου K συμπαγές υποσύνολο του U . Η εικόνα της μέσω της:

$$H^q(U, U - K) \xrightarrow{\approx} H^q(M, M - K) \longrightarrow H^q(M) \longrightarrow H^q(M - K)$$

είναι μηδέν. Το $M - K$ είναι περιοχή του A , άρα $ji = 0$. Από ακρίβεια της παραπάνω έχουμε $\ker j = \text{Im } i$. Τώρα έστω μία κλάση στην $H^q(M)$. Η εικόνα της μέσω της

$$H^q(M) \longrightarrow H^q(M) \longrightarrow H^{q+1}(M, M) = H^{q+1}(U, U)$$

είναι μηδέν, άρα $\delta j = 0$. Από την άλλη μία τυχαία κλάση στο $\ker \delta$ εκπροσωπείται από ένα στοιχείο στην εικόνα της $H^q(M) \rightarrow H^q(V)$, που πηγαίνει στο μηδέν στην $H^{q+1}(M, V)$ για κάποιο V .

$$\begin{array}{ccccccc} H^q(M) & \longrightarrow & H^q(V) & \longrightarrow & H^{q+1}(M, V) & \xrightarrow{\approx} & H^{q+1}(U, U - K) \\ \parallel & & \downarrow & & & \swarrow & \\ H^q(M) & \xrightarrow{j} & \check{H}^q(A) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{q+1}(U) & & \end{array}$$

Τέλος έχουμε την

$$H^q(V) \longrightarrow H^{q+1}(U, U - K) \longrightarrow H^{q+1}(M)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την ακριβή

$$H^q(M - K) \longrightarrow H^{q+1}(M, M - K) \longrightarrow H^{q+1}(M)$$

Επομένως και η οριακή της, που είναι η

$$\check{H}^q(A) \xrightarrow{\delta} H_c^{q+1}(U) \longrightarrow H^{q+1}(M)$$

είναι ακριβής. Άρα $\ker i = \text{Im } \delta$. □

Πόρισμα 6.1.8. Έστω A συμπαγές ANR σε συμπαγές ANR M και $U = M - A$. Τότε οι ομομορφισμοί:

$$H^q(U, U - K) \xrightarrow{\approx} H^q(M, M - K) \hookrightarrow H^q(M, A)$$

για K συμπαγές υποσύνολο του U επάγουν ισομορφισμό στην οριακή απεικόνιση:

$$H_c^q(U) \xrightarrow{\approx} H^q(M, A).$$



Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το five lemma στο διάγραμμα :

$$\begin{array}{ccccccc} H^{q-1}(A) & \longrightarrow & H_c^q(U) & \longrightarrow & H^q(M) & \longrightarrow & H^q(A) \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ H^{q-1}(A) & \longrightarrow & H^q(M, A) & \longrightarrow & H^q(M) & \longrightarrow & H^q(A) \end{array}$$

αφού από την πρόταση 6.1.6 έχουμε $\check{H}^q(A) = H^q(A) \quad \forall q$. □

Έστω τώρα μία \mathbb{R} -προσανατολίσιμη πολλαπλότητα M και $\zeta_A \in H_n(M, M-A)$ ένας \mathbb{R} -προσανατολισμός της. Για ανοιχτή περιοχή V του A , έχουμε:

$$H_n(V, V-A) \approx H_n(M, M-A).$$

Την εικόνα του ζ_A στην $H_n(V, V-A)$ θα τη συμβολίζουμε πάλι με ζ_A . Αν αφήσουμε το V να διατρέχει στην οικογένεια \mathcal{V} έχουμε τους ομομορφισμούς:

$$\zeta_A \frown : H^q(V) \longrightarrow H_{n-q}(V, V-A) \approx H_{n-q}(M, M-A)$$

οι οποίοι επάγουν τον οριακό ομομορφισμό:

$$D_A : \check{H}^q(A) \longrightarrow H_{n-q}(M, M-A)$$

Θεώρημα 6.1.9 (Alexander Duality). Έστω M \mathbb{R} -προσανατολισμένη συμπαγής n -διάστατη πολλαπλότητα και A κλειστό υποσύνολο της. Τότε ο D_A είναι ισομορφισμός $\forall q$.

Απόδειξη. Το διάγραμμα :

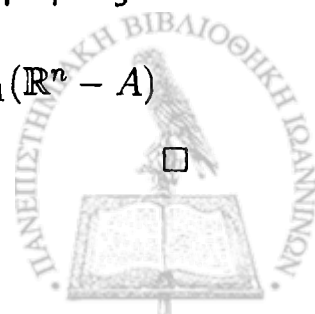
$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & H_c^q(U) & \longrightarrow & H^q(M) & \longrightarrow & \check{H}^q(A) & \longrightarrow & H_c^{q+1}(U) & \longrightarrow & H^{q+1}(M) \\ & \approx \downarrow D_U & & \approx \downarrow D_M & & \downarrow D_A & & \approx \downarrow D_U & & \approx \downarrow D_M \\ \longrightarrow & H_{n-q}(U) & \longrightarrow & H_{n-q}(M) & \longrightarrow & H_{n-q}(M, M-A) & \longrightarrow & H_{n-q-1}(U) & \longrightarrow & H_{n-q-1}(M) \end{array}$$

είναι μεταθετικό σε σχέση με το πρόσημο, όπου D_U και D_M είναι οι ισομορφισμοί από το Poincare Duality θεώρημα. Άρα από το five lemma έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 6.1.10. Έστω A μία συμπαγής υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^n . Τότε $H^q(A) \approx \check{H}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n - A)$ για $q < n$ και $H^n(A) = 0$.

Απόδειξη. Επειδή η A είναι συμπαγής στον \mathbb{R}^n , θα είναι ANR. Άρα $\check{H}^q(A) = H^q(A)$. Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{R}^n \cong S^n - \{p\}$. Άρα έχουμε τους ισομορφισμούς:

$$H^q(A) \xrightarrow{D_A} H_{n-q}(S^n, S^n - A) \longleftarrow H_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - A) \xrightarrow{\partial} \check{H}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n - A)$$



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

7.1 ΕΜΦΥΤΕΥΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΩΝ

Ένα σημαντικό πρόβλημα στη θεωρία πολλαπλοτήτων είναι το εξής: Έστω M^n και N^m δύο πολλαπλότητες με $m < n$. Υπάρχουν υποπολλαπλότητες της M οι οποίες είναι ομοιομορφικές με την N ; Θα μελετήσουμε αυτό το πρόβλημα μόνο για ειδικές περιπτώσεις $n = 2$ και 3 , αλλά θα παρουσιάσουμε και γενικά αποτελέσματα.

Ορισμός 7.1.1. Έστω X και Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ ένα προς ένα και συνεχές απεικόνιση. Αν η f επάγει ομοιομορφισμό μεταξύ του X και $f(X) \subseteq Y$, θα καλείται μία **εμφύτευση** του X στον Y .

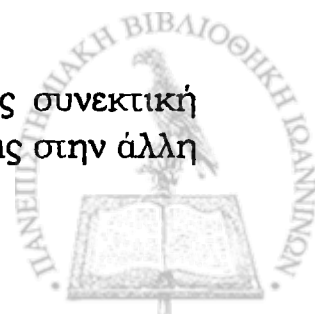
Παράδειγμα 7.1.2. Έστω $\delta : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ και το διάστημα $[0, 1)$ έχει την τοπολογία του υποχώρου από τον \mathbb{R} . Η f δεν είναι εμφύτευση.

Παράδειγμα 7.1.3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$. Η f είναι εμφύτευση.

Στα επόμενα με M^n θα συμβολίζουμε μία συνεκτική προσανατολίσιμη n -διάστατη πολλαπλότητα. Τις περισσότερες φορές η M^n θα είναι συμπαγής. Επίσης θεωρούμε $R = \mathbb{Z}$.

Ορισμός 7.1.4. Δύο υπόχωροι X_1 και X_2 ενός τοπολογικού χώρου X καλούνται **ισοδύναμα εμφυτεύσιμοι** αν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : X \xrightarrow{\cong} X$ με $f(X_1) = X_2$.

Πρόβλημα: Έστω M μία πολλαπλότητα και N μία συμπαγής συνεκτική υποπολλαπλότητά της. Ποιοί είναι οι τρόποι εμφύτευσης της μίας στην άλλη ως προς εμφυτεύσιμη ισοδυναμία;



Έχει αποδειχθεί ότι το πρόβλημα είναι άλυτο για τις τοπολογικές πολλαπλότητες. Θα χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία που μελετήσαμε για να βρούμε τοπολογικές αναλλοιώτους στις εμφυτεύσεις.

Ένα ασθενέστερο τοπολογικό πρόβλημα είναι το εξής:

Πρόβλημα: Έστω K ένας υπόχωρος του M . Να περιγραφούν όλοι οι πιθανοί ομομορφισμοί

$$H_i(M - K) \longrightarrow H_i(M).$$

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη με υποπολλαπλότητες μηδενικής διάστασης.

Θεώρημα 7.1.5. Έστω M μία συνεκτική πολλαπλότητα. Τότε $\forall x_0, y_0 \in M$ υπάρχει ομομορφισμός $f : M \rightarrow M$ ώστε $f(x_0) = y_0$. Δηλαδή μία πολλαπλότητα είναι ομογενής χώρος.

Απόδειξη. Έστω $\text{Aut}(M) = \{g, g : M \rightarrow M \text{ ομομορφισμός}\}$. Το σύνολο αυτό είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων. Επίσης δρα στην M :

$$\begin{aligned} \text{Aut} \times M &\longrightarrow M \\ (g, m) &\longmapsto g(m). \end{aligned}$$

Άρα το M διαμερίζεται με βάση τις τροχιές της δράσης:

$$M_x = \{y, \exists g \in \text{Aut}(M) \text{ με } g(y) = x\}.$$

Προφανώς το M_x είναι κλειστό υποσύνολο της M . Αρκεί να δείξουμε ότι είναι και ανοιχτό, τότε επειδή η M είναι συνεκτική θα έχουμε το ζητούμενο. Αρκεί να βρούμε μία ανοιχτή περιοχή για κάθε σημείο του M_x ώστε κάθε σημείο της περιοχής να είναι στο M_x . Έστω $y \in M$ και U χάρτης του ώστε $U \cong \mathbb{R}^n$, $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ με $\Phi(0) = y$. Έστω B^n ο μοναδιαίος δίσκος στον \mathbb{R}^n . Έστω $V = \Phi((B^n)^\circ)$ και $B = \Phi(B^n)$. Θα δείξουμε ότι $\forall z \in V, z \in M_y$. Ας είναι $u = \Phi^{-1}(z)$. Υπάρχει ομομορφισμός $\psi : B^n \rightarrow B^n$ ώστε $\psi(0) = u$ και $\psi(v) = v \forall v \in S^{n-1}$. Ορίζουμε την $g_1 : B \rightarrow B$ με:

$$B \xrightarrow{\Phi^{-1}} B^n \xrightarrow{\psi} B^n \xrightarrow{\Phi} B.$$

Η g_1 έχει τις εξής ιδιότητες, $g_1(y) = z$ και $g_1(x) = x \forall x \in \partial B$. Ορίζουμε την $g_2 : M - V \rightarrow M - V$ να είναι η ταυτοτική. Επειδή η g_1 και η g_2 συμπίπτουν σε κλειστό υποσύνολο της M ορίζεται η $g : M \rightarrow M$ με $g|_B = g_1$ και $g|_{M-V} = g_2$ με τις ζητούμενες ιδιότητες. \square

Αμέσως θα μελετήσουμε το γενικό πρόβλημα που θέσαμε και θα πάρουμε μερικά χρήσιμα αποτελέσματα τα οποία θα μας δώσουν τις απαντήσεις για $n = 2$ και 3 ως πορίσματα.



Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $x \in U \subseteq X$ με $\{x\}$ κλειστό και U περιοχή του x ομοιομορφική με τον \mathbb{R}^n . Από την πρόταση 3.1.3 έχουμε την μακρά ακριβή ακολουθία:

$$0 \rightarrow H_n(X - x) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, X - x) \rightarrow H_{n-1}(X - x) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow 0$$

Από το θεώρημα 3.2.28 παρατηρούμε ότι $H_i(M^n) = 0$ για $i > n$. Επίσης αν η M^n είναι συνεκτική συμπαγής προσανατολίσιμη πολλαπλότητα, τότε έχουμε τον ισομορφισμό

$$H_n(M) \approx H_n(M, M - x) \quad \forall x \in M.$$

Επίσης η $H_i(M)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη.

Πόρισμα 7.1.6. Έστω M^n συμπαγής συνεκτική και μη προσανατολίσιμη. Τότε $H_n(M) = 0$.

Απόδειξη. Η M είναι μη προσανατολίσιμη, οπότε δεν υπάρχουν ολικά sections, δηλαδή $\Gamma M = 0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 3.2.28 και έχουμε το ζητούμενο. \square

Πρόταση 7.1.7. Αν η M^n είναι συμπαγής συνεκτική προσανατολίσιμη πολλαπλότητα, τότε $H_n(M - p) = 0$ και $H_{n-1}(M - p) \approx H_{n-1}(M) \quad \forall p \in M$. Δηλαδή $H_i(M - p) \approx H_i(M)$ για $i \leq n - 1$.

Απόδειξη. Από την προηγούμενη μακρά ακριβή ακολουθία. \square

Παρατήρηση: Έστω M^n μία συμπαγής προσανατολίσιμη πολλαπλότητα και K μία συμπαγής υποπολλαπλότητα της. Η M και το K είναι ANR οπότε από την πρόταση 6.1.6 η απεικόνιση $k : \check{H}^i(K) \rightarrow H^i(K)$ είναι ισομορφισμός. Έτσι έχουμε τους ισομορφισμούς:

$$H^i(K) \approx \check{H}^i(K) \approx H_{n-i}(M, M - K).$$

Πόρισμα 7.1.8. Έστω M^n συμπαγής συνεκτική προσανατολίσιμη πολλαπλότητα και K συμπαγής συνεκτική υποπολλαπλότητα της M . Τότε

$$H_n(M) \approx H_n(M, M - K).$$

Απόδειξη. Από το πόρισμα 3.2.30 έχουμε $H_n(M) \approx \mathbb{Z}$ και από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε $H_n(M, M - K) \approx H^0(K) \approx \mathbb{Z}$. \square

Πόρισμα 7.1.9. Από την προηγούμενη ακολουθία και το προηγούμενο πόρισμα έχουμε:

$$H_n(M - K) = 0$$



Θα εφαρμόσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα για M και K σφαίρες γιατί αυτές αποτελούν τις απλούστερες περιπτώσεις.

Θεώρημα 7.1.10. Έστω $K \cong S^m$ υποπολλαπλότητα της M^n . Τότε:

$$H_n(M, M - K) \approx H^0(K) = H^0(S^m) \approx \mathbb{Z}$$

$$H_{n-m}(M, M - K) \approx H^m(S^m) \approx \mathbb{Z}$$

$$\text{και } H_{n-i}(M, M - K) \approx H^i(S^m) = 0 \text{ για } i \neq 0, m$$

Πόρισμα 7.1.11. Για $i \neq n, n-1, n-m, n-m-1$ ισχύει:

$$H_i(M - S^m) \xrightarrow{\approx} H_i(M)$$

Απόδειξη. Από την μακρά ακριβή ακολουθία:

$$\dots \rightarrow H_i(M - S^m) \rightarrow H_i(M) \rightarrow H_i(M, M - S^m) \rightarrow H_{i-1}(M - S^m) \rightarrow \dots$$

και από το προηγούμενο θεώρημα. \square

Πόρισμα 7.1.12. Έστω M^n συμπαγής και $K \cong S^m$ υποπολλαπλότητα της M . Τότε

$$H_i(M - S^m) \approx H_i(M) \text{ } i \neq n, n-m, n-m-1.$$

Θεώρημα 7.1.13. Έστω $M^n \cong S^n$.

$$H_n(M - K) = 0$$

$$H_i(M) = 0 \text{ } i \neq 0, n$$

$$H_i(M, M - K) \approx \tilde{H}_{i-1}(M - K) \text{ } i \leq n-1.$$

Πόρισμα 7.1.14. Έστω $M \cong S^n$ και $K \cong S^m$. Τότε $\tilde{H}_i(M - K) = 0$ για $i \neq n-m-1$ και $\tilde{H}_{n-m-1}(M - K) = \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα και την προηγούμενη παρατήρηση. \square

Προσοχή: Πουθενά δεν χρησιμοποιήσαμε ότι $K \cong S^m$. Το μόνο που χρησιμοποιήσαμε είναι ότι το K είναι συμπαγές και

$$H_i(K) = \begin{cases} 0 & , \text{ για } i \neq 0, m \\ \mathbb{Z} & , \text{ για } i = 0, m. \end{cases}$$

Άρα μιλάμε για ομολογιακές σφαίρες και όχι για πραγματικές σφαίρες.



Πόρισμα 7.1.15. Θεωρούμε την S^{n-1} εμφυτευμένη στην S^n , $S^{n-1} \hookrightarrow S^n$. Ο χώρος $S^n - S^{n-1}$ έχει δύο τροχιακές συνιστώσες και η ελλειτούμενη ομολογία του είναι ισόμορφη με την ομολογία ενός σημείου.

Πόρισμα 7.1.16 (Jordan Separation Theorem). Κάθε υπόχωρος του \mathbb{R}^n ομοιομορφικός με την S^{n-1} διαχωρίζει τον \mathbb{R}^n σε δύο τροχιακά συνεκτικούς υποχώρους. Ο ένας είναι φραγμένος.

Απόδειξη. Επειδή $\mathbb{R}^n \cong S^n - \{p\}$ αν αφαιρέσουμε ένα σημείο από την μία συνιστώσα από το προηγούμενο πόρισμα έχουμε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^n - S^{n-1}$ έχει δύο τροχιακές συνιστώσες. Επίσης από το θεώρημα 3.2.28 έχουμε $H_n(\mathbb{R}^n, S^{n-1}) \approx \Gamma_c(\mathbb{R}^n - S^{n-1})$. Θεωρούμε την παρακάτω ακολουθία:

$$0 \longrightarrow H_n(S^{n-1}, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i} H_n(\mathbb{R}^n, S^{n-1}) \xrightarrow{j} \\ \xrightarrow{j} H_{n-1}(S^{n-1}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{k} H_{n-1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \dots$$

Τότε $\text{rank} H_n(\mathbb{R}^n, S^{n-1}) = \text{rank ker } j + \text{rank Im } j = \text{rank Im } i + \text{rank ker } k = 0 + 1$. Επομένως $\text{rank } \Gamma_c(\mathbb{R}^n - S^{n-1}) = \text{rank } H_n(\mathbb{R}^n, S^{n-1}) = 1$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι το $\text{rank } \Gamma_c(X)$ είναι το πλήθος των φραγμένων συνιστωσών του X . Έστω $s : X \rightarrow H_n(M)$ section τοπικά σταθερό. Επειδή η $H_n(M)$ έχει την διακριτή τοπολογία, το s θα είναι σταθερό σε κάθε φραγμένη συνιστώσα. Θυμίζουμε ότι μία συνιστώσα είναι φραγμένη αν η θήκη της είναι συμπαγής. Άρα το rank του $\Gamma_c(X)$ δίνει τον αριθμό των φραγμένων συνιστωσών. \square

7.2 $S^1 \hookrightarrow M^2$

Έστω τώρα ότι έχουμε την εμφύτευση $S^1 \hookrightarrow M^2$, όπου η M^2 είναι συμπαγής προσανατολίσιμη πολλαπλότητα. Έχουμε την παρακάτω μακρά ακριβή ακολουθία

$$H_2(M - S^1) \rightarrow H_2(M) \rightarrow H_2(M, M - S^1) \rightarrow H_1(M - S^1) \rightarrow \\ \rightarrow H_1(M) \xrightarrow{\pi} H_1(M, M - S^1) \rightarrow \tilde{H}_0(M - S^1) \rightarrow \tilde{H}_0(M),$$

όπου $H_2(M - S^1) = 0$, $H_2(M) = \mathbb{Z}$, $\tilde{H}_0(M) = 0$ και $H^i(S^1) \approx H_{2-i}(M, M - S^1)$, δηλαδή $H_1(M, M - S^1) \approx H^1(S^1) \approx \mathbb{Z}$ και $H_2(M, M - S^1) \approx H^0(S^1) \approx \mathbb{Z}$. Θα υπολογίσουμε την $H_1(M - S^1)$.

$$\tilde{H}_0(M - S^1) \approx \mathbb{Z}/\text{Im } \pi \Rightarrow \text{rank } \tilde{H}_0(M - S^1) \leq 1.$$



Υποθέτουμε πρώτα ότι $\tilde{H}_0(M - S^1) \approx \mathbb{Z}$. Δηλαδή ο χώρος $M - S^1$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες. Από την ακολουθία

$$0 \longrightarrow H_1(M - S^1) \longrightarrow H_1(M) \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{H}_0(M - S^1) \longrightarrow 0$$

έχουμε $H_1(M - S^1) \approx H_1(M)$. Δηλαδή η πρώτη ομολογία δεν άλλαξε.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $\tilde{H}_0(M - S^1) = 0$. Τώρα έχουμε μία συνιστώσα. Τότε έχουμε την ακολουθία

$$0 \longrightarrow H_1(M - S^1) \xrightarrow{\Phi} H_1(M) \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{H}_0(M - S^1) \longrightarrow 0.$$

Γνωρίζουμε ότι $H_1(M) \approx \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$, δηλαδή το ευθύ άθροισμα k \mathbb{Z} συνιστωσών, από το παράδειγμα 1.1.18. Όμως $\Phi(H_1(M - S^1)) \approx H_1(M - S^1)$ και $\Phi(H_1(M - S^1)) \leq \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ άρα $\Phi(H_1(M - S^1)) \approx a_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus a_k\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus a_k\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$. Επομένως $a_i = 0$ για μοναδικό i και $a_j = 1$ για $j \neq i$. Άρα

$$H_1(M - S^1) \approx \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{k-1}.$$

Δηλαδή αν θεωρήσουμε τον τόρο $M^2 = S^1 \times S^1$, η S^1 μπορεί να εμφυτευθεί ως το σύνορο μιας περιοχής ομοιομορφικής με την $(B^2)^\circ$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο $M^2 - S^1$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες εκ των οποίων η μία είναι συσπασμένη και η άλλη ομοιομορφική με το σφηνοειδές άθροισμα δύο κύκλων. Αν η S^1 εμφυτευθεί σε έναν S^1 από τους $S^1 \times S^1 = M^2$, τότε ο $M^2 - S^1$ έχει μία συνεκτική συνιστώσα η οποία είναι ομοιομορφική με την S^1 .

Δηλαδή τα τοπολογικά εργαλεία σε αυτήν τη διάσταση είναι ικανά να μας λύσουν το πρόβλημα.

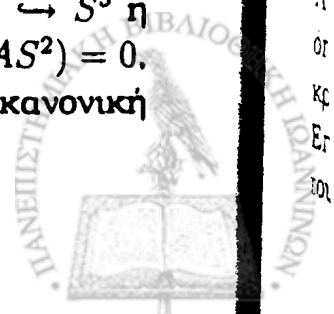
7.3 $S^2 \hookrightarrow S^3$

Θα μελετήσουμε τώρα το αντίστοιχο πρόβλημα για $M = S^3$ και $K = S^2$. Από το πόρισμα 7.1.14 έχουμε:

$$\tilde{H}_i(S^3 - S^2) = 0 \text{ για κάθε } i \neq 0$$

$$\text{και } \tilde{H}_0(S^3 - S^2) = \mathbb{Z}.$$

Ας δούμε δύο γνωστές εμφυτεύσεις: 1) την κανονική όπου η S^2 είναι ο ισημερινός της S^3 και τη σφαίρα του Alexander στην S^3 . Έστω $AS^2 \hookrightarrow S^3$ η σφαίρα του Alexander εμφυτευμένη στην S^3 . Έχουμε ότι $H_1(S^3 - AS^2) = 0$, αλλά $\pi_1(S^3 - AS^2) \neq 0$ (βλέπε [1] στην σελίδα 170). Ενώ στην κανονική εμφύτευση έχουμε $\pi_1(S^3 - S^2) = 0$.



Από τον ισομορφισμό του Alexander $H^i(K) \approx H_{n-i}(M - K)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} H_3(S^3, S^3 - S^2) &\approx \mathbb{Z} \\ H_2(S^3, S^3 - S^2) &= 0 \\ H_1(S^3, S^3 - S^2) &\approx \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Επομένως από την μακρά ακριβή ακολουθία:

$$\begin{aligned} H_3(S^3 - S^2) \longrightarrow H_3(S^3) \longrightarrow H_3(S^3, S^3 - S^2) \longrightarrow H_2(S^3 - S^2) \longrightarrow H_2(S^3) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_2(S^3, S^3 - S^2) \longrightarrow H_1(S^3 - S^2) \longrightarrow H_1(S^3) \longrightarrow H_1(S^3, S^3 - S^2) \longrightarrow \\ \longrightarrow \tilde{H}_0(S^3 - S^2) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

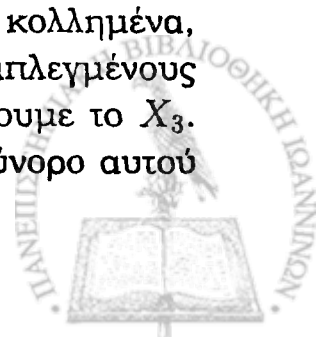
έχουμε:

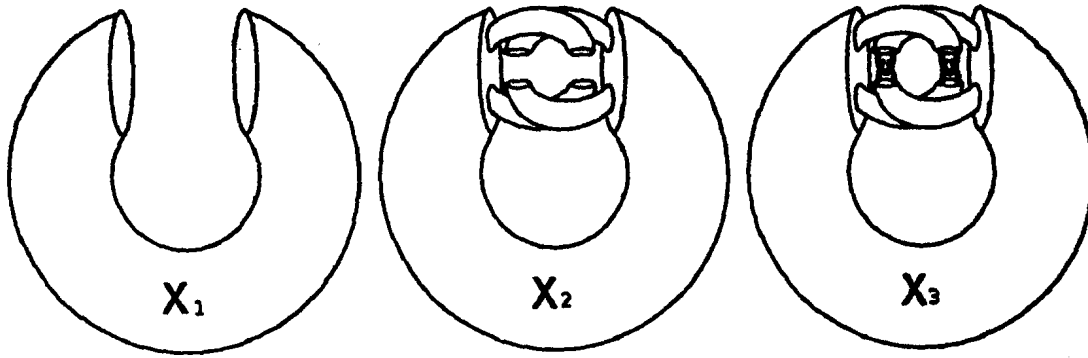
$$\begin{aligned} H_2(S^3 - S^2) &= 0 \\ H_1(S^3 - S^2) &= 0 \\ \tilde{H}_0(S^3 - S^2) &\approx \mathbb{Z} \Rightarrow H_0(S^3 - S^2) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ο χώρος $S^3 - S^2$ αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες.

Προσοχή: Η κερατοειδής σφαίρα AS^2 του Alexander (Alexander horned sphere) είναι εμφυτευμένη στην S^3 διαφορετικά από ότι είναι ο ισημερινός S^2 της S^3 . Η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να ξεχωρίσει αποτελεσματικά τους τρόπους που η S^m εμφυτεύεται στην S^n . Σύμφωνα με αυτήν την παρατήρηση δεν υπάρχει μοναδική εμφύτευση $S^2 \hookrightarrow S^3$.

Τέλος θα περιγράψουμε πως κατασκευάζεται η σφαίρα του Alexander. Έστω X_0 ο γεμάτος τόρος, δηλαδή ο τόρος μαζί με το εσωτερικό του. Το X_0 είναι ομοιομορφικό με την σφαίρα B^2 εαν κολλήσουμε σε αυτήν ένα χερούλι. Από το X_0 αφαιρούμε ένα κομμάτι όπως το παρακάτω σχήμα. Έτσι έχουμε το X_1 . Στο X_1 κολλάμε δύο χερούλια έτσι ώστε να μπλέκονται όπως δύο κρίκοι σε μία αλυσίδα. Από κάθε κρίκο αφαιρούμε ένα κομμάτι όπως κάναμε στο X_0 . Έτσι έχουμε το X_2 . Το X_2 είναι το X_1 μαζί με τέσσερα κέρατα κολλημένα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όμοια σε κάθε κέρατο κολλάμε δύο μπλεγμένους κρίκους και από κάθε κρίκο σβήνουμε ένα κομμάτι. Έτσι έχουμε το X_3 . Επαναλαμβάνουμε επ'άπειρο την παραπάνω διαδικασία. Το σύνολο αυτού του συνόλου είναι η κερατοειδής σφαίρα AS^2 του Alexander.





Σχήμα 7.1: Alexander Horned Sphere

Ευρετήριο

- ANR (absolute neighborhood retraction), 67
AR (absolute retract), 67
CW σύμπλεγμα, 2
Poincare Duality, 63
R-orientation sheaf, 39
R-προσανατολίσιμη, 37
cap product, 59
cellular αλυσιδωτό complex, 6
cellular ομολογιακές ομάδες, 6
cross product, 30
cup product, 23
free resolution, 13
proper, 57
section, 40
tautly imbedded, 68
torsion coefficients, 3
- αριθμός Betti, 3
βαθμός, 3
τοπικός, 4
βαθμολογημένος δακτύλιος, 27
δυσικός ομομορφισμός, 10
εμφύτευση, 73
ευθύ όριο, 50, 53
ευθύ σύστημα, 49
ισοδύναμα εμφυτεύσιμοι, 73
καλό ζεύγος, 1
πολλαπλότητα, 33
με σύνορο, 33
προβολικός χώρος
πραγματικός, 26
πρωταρχική κλάση, 47
χαρακτηριστική Euler, 3
σύνορο, 34
σύστημα R-προσανατολισμού, 36
σχέση, 50
συμπαγή υποστήριξη, 42
συναλυσιδωτές ομάδες, 12
συναλυσιδωτό complex, 12
συνομολογία με συμπαγή υποστήριξη, 56
συνομολογιακές ομάδες, 12
συνσυνοριακή απεικόνιση, 12
τάξης 2, 53
τανυστικό γινόμενο, 31
τοπικός R-προσανατολισμός, 35
υποστήριξη, 35



Βιβλιογραφία

- [1] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [2] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [3] James W. Vick. *Homology Theory An introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1994.
- [4] Marvin J. Greenberg and John R. Harper. *Algebraic Topology A First Course*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1984.
- [5] Albrecht Dold. *Lectures on Algebraic Topology*.
- [6] James R. Munkres. *Topology A First Course*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [7] William S. Massey. *Singular Homology Theory*. Springer-Verlag New York Inc., 1980.

