

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΑΛΙΚΗ ΣΑΜΑΡΤΣΙΔΟΥ

**ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΦΑΡΕΤΡΩΝ ΚΑΙ ΤΟ
ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ GABRIEL**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2009



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000340928



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΑΛΙΚΗ ΣΑΜΑΡΤΣΙΔΟΥ

**ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΦΑΡΕΤΡΩΝ ΚΑΙ ΤΟ
ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ GABRIEL**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2009



THE NATIONAL ARCHIVES
1000 ...

THE NATIONAL ARCHIVES
1000 ...

YOUTH ...

THE NATIONAL ARCHIVES
1000 ...

THE NATIONAL ARCHIVES
1000 ...

THE NATIONAL ARCHIVES
1000 ...



Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία), που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, υπο την επίβλεψη του **Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Απόστολου Μπεληγιάννη**.

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΚΡΙΣΗΣ

Μπεληγιάννης Απόστολος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος
Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)

Μαρμαρίδης Νικόλαος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Θωμά Απόστολος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος
Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων



ΓΙΑ ΕΞΕΝΑ ΠΟΥ...

Η παρούσα έκθεση αφορά στην εξέταση των αποτελεσμάτων της έρευνας που πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος "Εξέταση των αποτελεσμάτων της έρευνας".

ΤΡΙΑΝΤΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΚΡΙΣΗΣ

Μεταξύ των μελών της Επιτροπής Κρίσης, οι οποίοι έχουν οριστεί σύμφωνα με τον Νόμο, είναι:

Μεταξύ των μελών της Επιτροπής Κρίσης, οι οποίοι έχουν οριστεί σύμφωνα με τον Νόμο, είναι:

Όσοι από τους μετέχοντες στην Επιτροπή Κρίσης, οι οποίοι έχουν οριστεί σύμφωνα με τον Νόμο, είναι:



Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
1 Γενική Θεωρία Αναπαραστάσεων Φαρετρών	7
1.1 Φαρέτρες και Αναπαραστάσεις-Ορισμοί και Παραδείγματα	7
1.2 Απλές και μη-Αναλύσιμες Αναπαραστάσεις	16
1.3 Προβολικές και Εμβολικές (Injective) Αναπαραστάσεις	23
2 Δακτύλιοι, Πρότυπα και Κατηγορίες	33
2.1 Θεωρία Δακτυλίων και Προτύπων	33
2.2 Κατηγορίες και Συναρτητές	44
2.2.1 Γενική Θεωρία Κατηγοριών	44
2.2.2 Πυρήνες, Συνπυρήνες και Αβελιανές Κατηγορίες	50
2.2.3 Γενική Θεωρία Συναρτητών	52
2.3 Δακτύλιοι του Artin	57
2.4 Άλγεβρες του Artin	72
3 Η Άλγεβρα-Μονοπάτι και το Πρώτο Θεώρημα του Gabriel	89
3.1 Η Άλγεβρα-Μονοπάτι	89
4 Συναρτητές Ανάκλασης	117
4.1 Κληρονομικές Άλγεβρες	117
4.2 Συναρτητές Ανάκλασης	122
4.3 Dynkin και Euclidean διαγράμματα	151
5 Το Θεώρημα του Gabriel	161
5.1 Μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις των A_1, A_2, A_3 και D_4	161
5.2 Το θεώρημα του Gabriel για τις φαρέτρες τύπου Dynkin	171
5.3 Το θεώρημα του Gabriel για τις φαρέτρες τύπου Euclidean	173
5.4 Το θεώρημα του Gabriel	176
Βιβλιογραφία	181



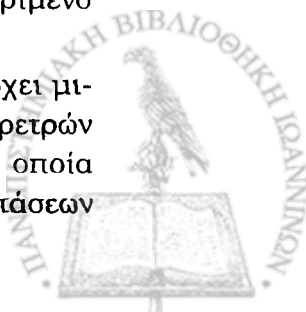
Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσης διατριβής είναι η παρουσίαση της απόδειξης του φημισμένου, και θεμελιώδους στην Θεωρία Αναπαραστάσεων, Θεωρήματος του Gabriel αναφορικά με την ταξινόμηση προσανατολισμένων διαγραμμάτων, ή διαφορετικά φαρετρών, τα οποία έχουν πεπερασμένο πλήθος κλάσεων ισομορφίας μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος.

Αναλυτικότερα, ο Peter Gabriel σε μια θεμελιώδη εργασία του η οποία δημοσιεύθηκε το 1972 και η οποία ουσιαστικά δημιούργησε έναν νέο κλάδο έρευνας, απέδειξε ότι το πλήθος των κλάσεων ισομορφίας των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων μιας φαρέτρας είναι πεπερασμένο αν και μόνον αν το υποκείμενο γράφημα της φαρέτρας, το οποίο προκύπτει αν αγνοήσουμε τον προσανατολισμό της, είναι διάγραμμα τύπου Dynkin. Σημειώνουμε ότι τα διαγράμματα Dynkin εμφανίζονται και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο σε διάφορες περιοχές των Μαθηματικών, αναφέρουμε για παράδειγμα: την ταξινόμηση των απλών αλγεβρών Lie, την θεωρία των πεπερασμένων κρυσταλλογραφικών συστημάτων ριζών και των ομάδων Coxeter, την θεωρία των ιδιομορφιών με την έννοια του Arnold, στην θεωρία υπερχορδών και στη Μαθηματική Φυσική, και γενικότερα σε πολλές περιοχές στις οποίες μπορεί να διατυπωθεί κατάλληλα ένα πρόβλημα ταξινόμησης μαθηματικών αντικειμένων “πεπερασμένου τύπου”.

Από την άλλη πλευρά ο Gabriel, δοθέντος ενός σώματος, αντιστοίχισε σε κάθε πεπερασμένη φαρέτρα με πεπερασμένο πλήθος κορυφών και χωρίς προσανατολισμένους κύκλους, μια βασική άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης, η οποία είναι γνωστή ως η *άλγεβρα-μονοπάτι* της φαρέτρας, η οποία είναι κληρονομική. Αντίστροφα αν το σώμα είναι αλγεβρικά κλειστό, απέδειξε ότι κάθε βασική κληρονομική άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης είναι ισόμορφη με την άλγεβρα-μονοπάτι μιας κατάλληλης φαρέτρας. Η παραπάνω 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ φαρετρών και αλγεβρών έχει την ιδιότητα οι κατηγορίες των αναπαραστάσεων της φαρέτρας και των προτύπων υπεράνω της άλγεβρας να είναι ισοδύναμες. Ως συνέπεια το Θεώρημα του Gabriel χαρακτηρίζει τις κληρονομικές άλγεβρες με πεπερασμένο πλήθος κλάσεων ισομορφίας μη-αναλύσιμων πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων. Γενικότερα σε μια άλλη εργασία του το 1973 ο Gabriel απέδειξε ότι κάθε βασική άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός αλγεβρικά κλειστού σώματος παρίσταται από μια φαρέτρα, η οποία είναι αντικείμενο συγκεκριμένων σχέσεων μεταξύ των βελών της, με άλλα λόγια είναι ισόμορφη με συγκεκριμένο πηλίκο της άλγεβρας-μονοπάτι.

Επιπρόσθετα στο θεμελιώδες θεώρημά του ο Gabriel απέδειξε ότι υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων φαρετρών τύπου Dynkin και των θετικών ριζών κατάλληλης τετραγωνικής μορφής η οποία αντιστοιχίζεται σε κάθε φαρέτρα. Έτσι το πρόβλημα ταξινόμησης αναπαραστάσεων



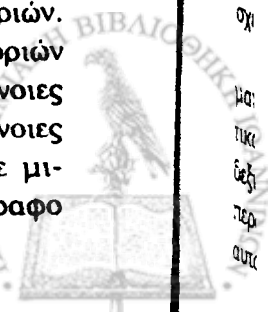
ανάγεται σε, πολύπλοκο αλλά εφικτής λύσης πρόβλημα Γραμμικής Άλγεβρας, και με βάση την θεωρία του Gabriel είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ποιές φαρέτρες έχουν πεπερασμένες πολλές μη ισόμορφες μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις, καθώς και πλήρη περιγραφή αυτών. Από την άλλη πλευρά επειδή, λόγω του Θεωρήματος των Krull-Schmidt, κάθε αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης μιας φαρέτρας είναι με μοναδικό τρόπο ευθύ άθροισμα μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων, η γνώση της κλάσης των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων επιτρέπει την πλήρη γνώση όλων των αναπαραστάσεων.

Σημειώνουμε ότι η εργασία του Gabriel γενίκευσε σχετικά αποτελέσματα και μεθόδους των Gelfand-Ponomarev αναφορικά με την ταξινόμηση των τετράδων υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου. Αυτή η ταξινόμηση, η οποία επιτεύχθηκε το 1971, αναφέρεται σε ταξινόμηση αναπαραστάσεων συγκεκριμένης φαρέτρας. Το 1973 οι Bernstein-Gelfand-Ponomarev έδωσαν μια απλούστερη απόδειξη του Θεωρήματος του Gabriel χρησιμοποιώντας νέες μεθόδους. Συγκεκριμένα χρησιμοποίησαν *συναρτητές ανάκλασης*, οι οποίοι αργότερα οδήγησαν στην θεμελίωση της Θεωρίας Tilting. Η απόδειξη των Bernstein-Gelfand-Ponomarev του Θεωρήματος του Gabriel θεωρείται ως η πλέον επικρατούσα, αλλά σε κάποια σημεία της χρησιμοποιεί στοιχεία Αλγεβρικής Γεωμετρίας. Πρόσφατα (2007) ο H. Krause παρουσίασε μια απόδειξη στο πνεύμα των Bernstein-Gelfand-Ponomarev η οποία είναι περισσότερο στοιχειώδης και αποφεύγει χρήση Αλγεβρο-Γεωμετρικών αποτελεσμάτων. Η απόδειξη του Krause είναι η απόδειξη την οποία θα αναπτύξουμε στην παρούσα διατριβή.

Η περιγραφή των Κεφαλαίων της διατριβής έχει ως εξής:

Η εργασία αυτή ξεκινάει με τη γενική θεωρία αναπαραστάσεων φαρετρών. Εισάγουμε την έννοια της φαρέτρας, που ουσιαστικά είναι ένα προσανατολισμένο γράφημα και των αναπαραστάσεων της πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} . Δίνουμε τους ορισμούς των μορφισμών μεταξύ αναπαραστάσεων, υποαναπαράστασης και δυικής φαρέτρας. Στη συνέχεια μελετάμε τις απλές αναπαραστάσεις και δείχνουμε ότι κάθε απλή αναπαράσταση τυχαίας φαρέτρας έχει συγκεκριμένη μορφή. Ακολουθεί μελέτη των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων. Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο ορίζοντας τις προβολικές και injective αναπαραστάσεις και δίνουμε κάποια σημαντικά παραδείγματα για το πώς υπολογίζουμε αυτές τις αναπαραστάσεις σε μια τυχαία φαρέτρα.

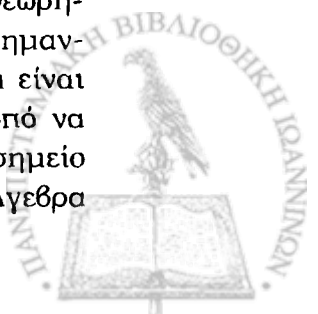
Στο δεύτερο κεφάλαιο ξεκινάμε με βασικές έννοιες δακτυλίων και προτύπων οι οποίες θεωρούνται γνωστές και είναι θεμελιώδεις για την κατανόηση αυτής της εργασίας. Σημειώνουμε ότι κάνουμε διάκριση μεταξύ αριστερών και δεξιών προτύπων αφού ο δακτύλιος που δουλεύουμε δεν είναι κατ'ανάγκη μεταθετικός. Ορίζουμε στη συνέχεια τα υποπρότυπα, πρότυπα πηλικά και πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα. Κατασκευάζουμε το ευθύ γινόμενο και το ευθύ άθροισμα προτύπων. Στα ευθέα άθροισματα δίνονται οι ορισμοί για το πότε ένα πρότυπο είναι μη-αναλύσιμο, αναλύσιμο και αν είναι ευθύς άθροιστέος ενός άλλου προτύπου. Συνεχίζουμε με Noetherian και Artinian πρότυπα. Αποδεικνύουμε δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα για το πότε ένα πρότυπο είναι Noetherian ή Artinian. Τέλος κλείνουμε την παράγραφο μελετώντας τα προβολικά και injective πρότυπα. Στη δεύτερη παράγραφο του κεφαλαίου ξεκινάμε την μελέτη των κατηγοριών. Διατυπώνουμε τους κατάλληλους ορισμούς και δίνουμε παραδείγματα κατηγοριών όπως η κατηγορία αναπαραστάσεων φαρετρών. Συνεχίζουμε ορίζοντας τις έννοιες υποκατηγορία, πλήρης υποκατηγορία και δυική κατηγορία. Ακολουθούν έννοιες όπως πυρήνες, συνπυρήνες αλλά και αβελιανές κατηγορίες για να έχουμε μια ολοκληρωμένη εικόνα της θεωρίας κατηγοριών. Κλείνουμε την παράγραφο



μελετώντας συναρτητές, μια έννοια η οποία μας επιτρέπει την σύγκριση μεταξύ δύο κατηγοριών. Ιδιαίτερα ορίζουμε ένα συναρτητή $\text{Mod-}R \rightarrow R\text{-Mod}$ και έτσι περνάμε από τα αριστερά R -πρότυπα στα δεξιά. Θέλουμε στη συνέχεια να μελετήσουμε πότε δύο κατηγορίες είναι ισοδύναμες. Για το λόγο αυτό δίνουμε ένα θεώρημα που είναι ένα σημαντικό κριτήριο για το πότε δύο κατηγορίες είναι ή δεν είναι ισοδύναμες. Στην επόμενη παράγραφο μελετάμε και πάλι τα Noetherian και Artinian πρότυπα. Αποδεικνύουμε το σημαντικό θεώρημα Jordan-Holder για πρότυπα πεπερασμένου μήκους και τέλος ορίζουμε και μελετάμε το ριζικό και τα ημιαπλά πρότυπα. Αποδεικνύουμε ότι τα ημιαπλά πρότυπα είναι Noetherian και Artinian και δίνουμε σημαντικές προτάσεις που μας δίνουν κριτήρια για το πότε προβολικά πρότυπα είναι μη-αναλύσιμα. Ορίζουμε τον τοπικό δακτύλιο, σχολιάζουμε τη σύνδεση τοπικών δακτυλίων και ανάλυσης ενός προτύπου σε ευθείς αθροιστέους και κλείνουμε την παράγραφο με κάποια στοιχεία ομολογιακής άλγεβρας. Στην συνέχεια περνάμε στην επόμενη παράγραφο όπου μελετάμε πρότυπα υπεράνω αλγεβρών του Artin. Από αυτό το σημείο και μέχρι το τέλος ο δακτύλιος που μελετάμε θα είναι μεταθετικός δακτύλιος του Artin και με $\text{mod-}\Lambda$ συμβολίζουμε την κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων αριστερών Λ -προτύπων. Διατυπώνουμε τον ορισμό της Artin R -άλγεβρας, της R -κατηγορίας και του R -συναρτητή. Δίνουμε τους κατηγορικούς ορισμούς για τα προβολικά και injective πρότυπα και μελετάμε τη δομή των προβολικών R -προτύπων. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε προτάσεις που μας δίνουν χαρακτηρισμούς για τα μη-αναλύσιμα προβολικά πρότυπα και ορίζουμε τον συναρτητή εκτίμησης e_A . Ακολουθεί ένα σημαντικό θεώρημα που μας δίνει πληροφορίες για το πότε ένα πρότυπο A της κατηγορίας $\text{mod-}\Lambda$ είναι μη-αναλύσιμο καθώς και πληροφορίες αναφορικά με τη μοναδικότητα ανάλυσης. Αυτό το σημαντικό θεώρημα είναι των Krull-Schmidt. Τέλος δείχνουμε την ύπαρξη δυσκότητας μεταξύ των κατηγοριών $\text{mod-}\Lambda$ και $\text{mod-}\Lambda^{op}$. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς injective περίβλημα και κύρια επέκταση δείχνουμε ότι ο contravariant συναρτητής μεταξύ των κατηγοριών $\text{mod-}\Lambda$ και $\text{mod-}\Lambda^{op}$ είναι μια δυσκότητα.

Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζουμε την άλγεβρα-μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ μιας φαρέτρας Q . Ουσιαστικά θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}Q$ με βάση τα μονοπάτια της φαρέτρας Q και δείχνουμε ότι η $\mathbb{K}Q$ έχει δομή \mathbb{K} -άλγεβρας. Στη συνέχεια ορίζουμε τον τανυστικό δακτύλιο $T(\Sigma, V)$ ο οποίος δείχνουμε ότι έχει δομή R -άλγεβρας. Μελετάμε μη-αναλύσιμα προβολικά πρότυπα για μια πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ πάνω από το σώμα \mathbb{K} . Θεωρούμε το ιδεώδες J που παράγεται από όλα τα βέλη. Το J είναι μηδενοδύναμο και η άλγεβρα-πηλίκο $\mathbb{K}Q/J$ είναι ημιαπλή. Άρα $J = \tau$. Με τη βοήθεια των ταυτοδύναμων στοιχείων βρίσκουμε ότι το Λe_i είναι προβολικό πρότυπο και επειδή το $\Lambda e_i/\tau e_i$ έχει διάσταση 1 το Λe_i είναι μη-αναλύσιμο προβολικό πρότυπο. Στη συνέχεια ορίζουμε την έννοια της σχέσης φαρέτρας και δίνουμε αρκετά παραδείγματα φαρετρών με σχέσεις. Τέλος αποδεικνύουμε ότι κάθε βασική άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα \mathbb{K} είναι ισόμορφη με κάποια \mathbb{K} -άλγεβρα $\mathbb{K}(Q, p)$ η οποία ορίζεται από μια φαρέτρα με σχέσεις. Σπουδαίο βοήθημα για τη συγγραφή των παραπάνω αποτέλεσε το [2].

Στο τέταρτο κεφάλαιο ξεκινάμε μελετώντας κάποιους ορισμούς και θεωρήματα από την θεωρία των κληρονομικών αλγεβρών. Διατυπώνουμε ένα σημαντικό θεώρημα που μας προμηθεύει με κριτήρια για το πότε μια άλγεβρα είναι δεξιά κληρονομική. Δίνουμε τον ορισμό της Artin R -άλγεβρας με σκοπό να περάσουμε στην άλγεβρα μονοπάτι $\mathbb{K}Q$. Το κύριο αποτέλεσμα στο σημείο αυτό και ιδιαίτερα χρήσιμο είναι ότι η πεπερασμένης διάστασης \mathbb{K} -άλγεβρα



$\mathbb{K}Q$ είναι κληρονομική και με την χρήση λημάτων καταλήγουμε στο κεντρικό αποτέλεσμα ότι κάθε στοιχειώδης κληρονομική άλγεβρα Λ πεπερασμένης διάστασης πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} , είναι ισόμορφη με την άλγεβρα-μονοπάτι μιας κατάλληλης φαρέτρας. Στη δεύτερη παράγραφο δίνουμε τους ορισμούς των sink και source κορυφών μιας φαρέτρας καθώς και της απεικόνισης ανάκλασης. Έννοιες που θα μας βοηθήσουν στους ορισμούς του σημαντικότερου εργαλείου για την απόδειξη του κύριου αποτελέσματος της διατριβής, τους συναρτητές ανάκλασης και συναρτητές Coxeter. Συνεχίζουμε ενδεικτικά με παραδείγματα και προτάσεις που αφορούν ιδιότητες των συναρτητών ανάκλασης. Στην επόμενη παράγραφο μελετάμε τα Dynkin και Euclidean διαγράμματα και σκοπός μας είναι να συνδέσουμε τα διαγράμματα Dynkin με τις φαρέτρες πεπερασμένου τύπου χρησιμοποιώντας συστήματα ριζών και την τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ με τύπο $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i < j} d_{ij} x_i x_j$. Η σύνδεση επιτυγχάνεται από το γεγονός, όπως αποδεικνύουμε, ότι ένα γράφημα το οποίο είναι Dynkin έχει πεπερασμένο σύνολο θετικών ριζών. Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Coxeter και κλείνουμε το κεφάλαιο με κάποια αποτελέσματα για τα Euclidean διαγράμματα.

Στο πέμπτο κεφάλαιο είμαστε σε θέση να αποδειξουμε το Θεώρημα του Gabriel το οποίο είναι το κεντρικό αποτέλεσμα της διατριβής. Ξεκινάμε δίνοντας μια αναλυτική περιγραφή των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων των φαρετρών τύπου A_1, A_2, A_3 και D_4 . Στη συνέχεια διατυπώνουμε το θεώρημα του Gabriel για τις φαρέτρες τύπου Dynkin και ακολουθούν κάποιες παρατηρήσεις για την έννοια του defect ενός διανύσματος $x \in \mathbb{Z}^n$. Ακολουθεί το θεώρημα του Gabriel για τις φαρέτρες τύπου Euclidean και τέλος το γενικό θεώρημα του Gabriel:

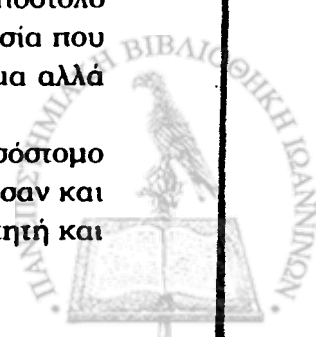
Θεώρημα. Έστω Q μια συνεκτική φαρέτρα. Τότε υπάρχουν μόνο πεπερασμένες πολλήδες κλάσεις ισομορφίας μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων της Q αν και μόνον αν το υποκείμενο γράφημα της φαρέτρας είναι Dynkin διάγραμμα. Επιπλέον αν το υποκείμενο γράφημα της φαρέτρας είναι Dynkin, τότε υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των κλάσεων ισομορφίας μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων της Q και των θετικών ριζών της τετραγωνικής μορφής η οποία αντιστοιχεί στην φαρέτρα.

Στο τέλος του κεφαλαίου δίνουμε έναν πίνακα που μας δίνει το πλήθος των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων για συγκεκριμένες φαρέτρες και ένα παράδειγμα που μας δίνει αναλυτική περιγραφή των μη ισόμορφων μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων της φαρέτρας A_n .

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου και την ευγνωμοσύνη μου στον επιβλέποντά μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Απόστολο Μπεληγιάννη, για την σπουδαία βοήθεια, την καθοδήγηση και την υποστήριξη που μου έδωσε αυτά τα δύο χρόνια. Ευχαριστώ για την επιλογή του θέματος, για την υπομονή και την κατανόηση που πάντα είχε μαζί μου. Ευχαριστώ για την ευκαιρία που μου έδωσε να μάθω περισσότερα και να αγαπήσω ακόμα πιο πολύ τα μαθηματικά.

Ευχαριστώ ακόμη, και τα άλλα μέλη της τριμελούς επιτροπής κρίσης, τον Καθηγητή κ. Νικόλαο Μαρμαρίδη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Απόστολο Θωμά για τα σχόλια τους πάνω στην εργασία μου και την άψογη συνεργασία που είχαμε κατά την διάρκεια των σπουδών μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα αλλά και για όλα χρόνια των σπουδών μου στο τμήμα Μαθηματικών Ιωαννίνων.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους υποψήφιους Διδάκτορες, Χρυσόστομο Ψαρουδάκη και Χρήστο Τατάκη για την σημαντική βοήθεια που μου έδωσαν και για τις πάντα σωστές υποδείξεις. Ευχαριστώ ακόμη τον μεταπτυχιακό φοιτητή και



συνδοιπόρο μου Κλεάνθη Ξεντίδη για την άφογη συνεργασία που είχαμε αυτά τα δύο χρόνια. Ευχαριστώ θερμά το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και ιδιαίτερα τον Τομεα Άλγεβρας-Γεωμετρίας για την βοήθεια που μου προσέφερε σε αυτό το "ταξίδι".

Ευχαριστώ τους φίλους μου μαθηματικούς Κωνσταντίνα, Σωτήρη, Βάσια, Έλενα,... για την φιλία τους και για τις απίστευτες στιγμές που περάσαμε μαζί. Η αγάπη τους και η στήριξη τους σε κάθε μου βήμα ήταν σπουδαία. Ευχαριστώ όλους τους φίλους και συναδέλφους απο το Τμήμα Μαθηματικών Ιωαννίνων για την σύμπλευση. Ευχαριστώ την Ελίζα για την αγάπη της και για τις πολύτιμες συμβουλές της. Ευχαριστώ τον Άγγελο για την ώθηση που μου έδωσε και για το ότι ήταν πάντα δίπλα μου με κατανόηση σε κάθε μου δυσκολία. Τέλος ευχαριστώ και ευγνωμονώ τους γονείς μου, Δήμητρα και Χάρη και την αδερφή μου Σοφία για την αγάπη τους και συνεχή στήριξη όλα αυτά τα χρόνια που είμαι μακριά τους αλλά και για το ότι είμαι σήμερα. Όλα τα μπορούμε!

Αλίκη Σαμαρτσίδου, Ιωάννινα 2009.



Κεφάλαιο 1

Γενική Θεωρία Αναπαραστάσεων Φαρετρών

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε την έννοια των φαρετρών και των αναπαραστάσεών τους. Στην πρώτη παράγραφο ξεκινάμε με τους ορισμούς και τις ιδιότητες και προχωράμε στις επόμενες παραγράφους μελετώντας κάποιες ειδικές κλάσεις αναπαραστάσεων που θα χρησιμοποιήσουμε και σε επόμενα κεφάλαια αλλά και στην απόδειξη του θεωρήματος του Gabriel. Το παρόν κεφάλαιο βασίζεται στο [1].

1.1 Φαρέτρες και Αναπαραστάσεις-Ορισμοί και Παραδείγματα

Στην πρώτη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου ορίζονται τα προσανατολισμένα γραφήματα που μας ενδιαφέρουν και παρουσιάζεται η ορολογία που χρησιμοποιείται. Θα δώσουμε αρκετά παραδείγματα φαρετρών και αφού ορίσουμε και την έννοια αναπαράστασης φαρέτρας θα μελετήσουμε πλήρως τις ιδιότητες τους.

Ορισμός 1.1.1. Μια **φαρέτρα** είναι ένα προσανατολισμένο γράφημα. Συγκεκριμένα μια φαρέτρα είναι μια τετράδα

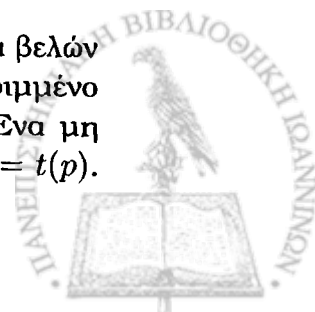
$$Q = (Q_0, Q_1, s, t)$$

η οποία αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο Q_0 τα στοιχεία του οποίου καλούνται κορυφές, ένα σύνολο Q_1 τα στοιχεία του οποίου καλούνται βέλη και από δύο απεικονίσεις $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$, όπου $s(a) = i$ και $t(a) = j$ όταν $a : i \rightarrow j$ είναι ένα βέλος από την κορυφή i στην κορυφή j .

Παρατήρηση 1.1.2. Ένα βέλος $a \in Q_1$ ξεκινά από το $s(a)$ και τελειώνει στο $t(a)$. Γράφουμε

$$a : s(a) \rightarrow t(a)$$

Ένα **μονοπάτι** στην φαρέτρα Q είναι είτε μια διατεταγμένη ακολουθία βελών $\xi = \xi_r \dots \xi_1$ μήκους $r \geq 1$ με $t(\xi_p) = s(\xi_{p+1})$ για $1 \leq p < r$ είτε το τετριμμένο μονοπάτι e_i μήκους 0 με $s(e_i) = i = t(e_i)$ για κάθε $i \in Q_0$. Ένα μη τετριμμένο μονοπάτι p καλείται **προσανατολισμένος κύκλος** αν $s(p) = t(p)$. Γράφουμε το μονοπάτι $\xi = \xi_r \dots \xi_1$ ως εξής :

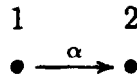


$$i_1 \xrightarrow{\xi_1} i_2 \xrightarrow{\xi_2} \cdots \xrightarrow{\xi_r} i_{r+1}$$

Το μονοπάτι ξ ξεκινά από το $s(\xi) = s(\xi_1)$ και καταλήγει στο $t(\xi) = t(\xi_r)$.

Ας δούμε κάποια παραδείγματα για να κατανοήσουμε τον ορισμό.

Παράδειγμα 1.1.3. 1. Έστω η φαρέτρα Q_1



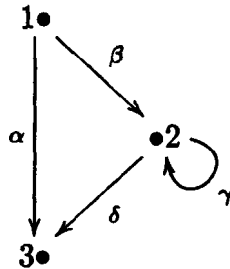
η οποία αποτελείται από $Q_0 = \{1, 2\}$, $Q_1 = \{\alpha\}$, $s(\alpha) = 1$, $t(\alpha) = 2$.

2. Έστω η φαρέτρα Q_2



η οποία είναι προσανατολισμένος κύκλος με $Q_0 = \{1\}$, $Q_1 = \{\alpha\}$, $s(\alpha) = t(\alpha) = 1$.

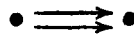
3. Έστω η φαρέτρα Q_3



η οποία αποτελείται από $Q_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $s(\alpha) = s(\beta) = 1$, $s(\gamma) = s(\delta) = 2$, $t(\alpha) = t(\delta) = 3$, $t(\beta) = t(\gamma) = 2$.

Παράδειγμα 1.1.4. Κάποιες ειδικές φαρέτρες

1. Η φαρέτρα του **Kronecker**

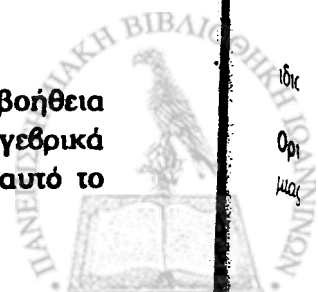


2. Η φαρέτρα **n-υπόχωρων**



η οποία έχει $n+1$ το πλήθος κορυφές και n το πλήθος βέλη.

Συνεχίζουμε τώρα και ορίζουμε την αναπαράσταση φαρέτρας με την βοήθεια ενός σώματος \mathbb{K} το οποίο υποθέτουμε, χάριν απλότητας, ότι είναι αλγεβρικά κλειστό. Από εδώ και μέχρι το τέλος του κεφαλαίου σταθεροποιούμε αυτό το σώμα και δουλεύουμε με αυτό.



Ορισμός 1.1.5. Έστω Q μια φαρέτρα. Μια αναπαράσταση της Q επι του \mathbb{K} , είναι μια συλλογή

$$X = (X_i, X_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

η οποία αποτελείται από ένα διανυσματικό χώρο X_i για κάθε κορυφή i και μια γραμμική απεικόνιση $X_\alpha : X_{s(\alpha)} \rightarrow X_{t(\alpha)}$ για κάθε βέλος α .

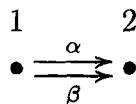
Παρατήρηση 1.1.6. Για κάθε φαρέτρα υπάρχει η μηδενική αναπαράσταση στην οποία σε κάθε κορυφή αντιστοιχίζεται ο μηδενικός διανυσματικός χώρος και σε κάθε βέλος η μηδενική απεικόνιση.

Παράδειγμα 1.1.7. Έστω η φαρέτρα



τότε μια αναπαράσταση αυτής είναι της μορφής $X = (V, f)$ όπου $f : V \rightarrow V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση. Για παράδειγμα : $V \xrightarrow{1} V$ όπου V διανυσματικός χώρος και $f = 1$ η ταυτοτική γραμμική απεικόνιση.

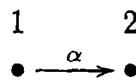
Παράδειγμα 1.1.8. Έστω η φαρέτρα



τότε μια αναπαράσταση αυτής της φαρέτρας θα είναι $X = (V_1, V_2, f_\alpha, f_\beta)$ όπου V_1, V_2 διανυσματικοί χώροι και f_α, f_β γραμμικές απεικονίσεις. Διαγραμματικά έχουμε την αναπαράσταση :

$$V_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_\alpha} \\ \xrightarrow{f_\beta} \end{array} V_2$$

Παράδειγμα 1.1.9. Έστω η φαρέτρα



υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ ορίζουμε την αναπαράσταση

$$\mathbb{K}^m \xrightarrow{f_\alpha} \mathbb{K}^n, \quad x \mapsto f_\alpha(x) = Ax$$

όπου f_α είναι μια γραμμική απεικόνιση που για λόγους απλότητας τη συμβολίζουμε με τον σταθερό $n \times m$ πίνακα A . Για τη συγκεκριμένη αναπαράσταση θα μιλήσουμε αναλυτικότερα παρακάτω.

Ας δούμε τώρα τη σύνδεση μεταξύ αναπαραστάσεων φαρετρών και κάποιες ιδιότητες τους.

Ορισμός 1.1.10. Ένας **μορφισμός** $\phi : X \rightarrow Y$ μεταξύ δυο αναπαραστάσεων μιας φαρέτρας Q είναι μια συλλογή $\phi = (\phi_i)_{i \in Q_0}$ γραμμικών απεικονίσεων

$$\{\phi_i : X_i \rightarrow Y_i \mid i \in Q_0\}$$



ετσι ώστε για κάθε βέλος $\alpha : s(\alpha) \rightarrow t(\alpha)$ στην φαρέτρα το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X_{s(\alpha)} & \xrightarrow{\phi_{s(\alpha)}} & Y_{s(\alpha)} \\ X_{\alpha} \downarrow & & \downarrow Y_{\alpha} \\ X_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\phi_{t(\alpha)}} & Y_{t(\alpha)} \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Δηλαδή $Y_{\alpha} \phi_{s(\alpha)} = \phi_{t(\alpha)} X_{\alpha}$ για κάθε βέλος α .

Ορισμός 1.1.11. Αν $\phi : X \rightarrow Y$ και $\psi : Y \rightarrow Z$ είναι δυο μορφισμοί μεταξύ αναπαραστάσεων μιας φαρέτρας Q τότε η σύνθεση $\psi\phi$ ορίζεται ως η συλλογή γραμμικών απεικονίσεων

$$\{\psi_i \phi_i : X_i \rightarrow Z_i \mid i \in Q_0\}$$

για κάθε κορυφή i , όπου $\psi\phi = (\psi\phi)_i = \psi_i \phi_i$. Τότε για κάθε βέλος $\alpha : s(\alpha) \rightarrow t(\alpha)$ της φαρέτρας Q το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X_{s(\alpha)} & \xrightarrow{\psi_{s(\alpha)} \phi_{s(\alpha)}} & Z_{s(\alpha)} \\ X_{\alpha} \downarrow & & \downarrow Z_{\alpha} \\ X_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\psi_{t(\alpha)} \phi_{t(\alpha)}} & Z_{t(\alpha)} \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Δηλαδή, ισχύει η σχέση $Z_{\alpha} \psi_{s(\alpha)} \phi_{s(\alpha)} = \psi_{t(\alpha)} \phi_{t(\alpha)} X_{\alpha}$ για κάθε $\alpha \in Q_1$.

Για κάθε αναπαράσταση έχουμε τον μορφισμό $1_X : X \rightarrow X$ με $(1_X)_i = 1_{X_i}$ για κάθε $i \in Q_0$.

Το σύνολο των μορφισμών $X \rightarrow Y$ συμβολίζεται με $\text{Hom}_Q(X, Y)$ και το σύνολο των ενδομορφισμών $X \rightarrow X$ με $\text{End}_Q(X)$.

Ορισμός 1.1.12. Έστω X, Y δυο αναπαραστάσεις της φαρέτρας Q . Καλούμε την X υποαναπαράσταση της Y και γράφουμε $X \subseteq Y$ αν X_i είναι υπόχωρος του Y_i για κάθε $i \in Q_0$ και

$$Y_{\alpha}|_{X_{s(\alpha)}} = X_{\alpha}$$

για κάθε βέλος $\alpha \in Q_1$.

Έστω X, Y δυο αναπαραστάσεις της φαρέτρας Q . Ας δούμε τις ιδιότητες του $\text{Hom}_Q(X, Y)$.

Ορισμός 1.1.13. Για έναν μορφισμό $h : X \rightarrow Y$ αναπαραστάσεων της φαρέτρας Q ορίζουμε τον πυρήνα να είναι η υποαναπαράσταση $\text{Ker } h$ της X με

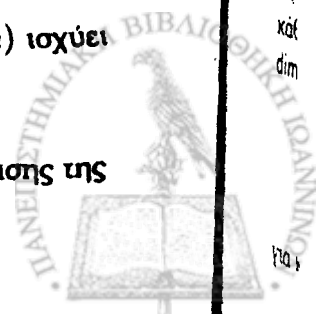
$$(\text{Ker } h)_i = \text{Ker } h_i$$

για κάθε $i \in Q_0$.

Παρατήρηση 1.1.14. Παρατηρούμε ότι για κάθε βέλος $\alpha : s(\alpha) \rightarrow t(\alpha)$ ισχύει ότι

$$X_{\alpha}(\text{Ker } h_{s(\alpha)}) \subset \text{Ker } h_{t(\alpha)}$$

όπου $X_{\alpha} : X_{s(\alpha)} \rightarrow X_{t(\alpha)}$ είναι η γραμμική απεικόνιση της αναπαράστασης της φαρέτρας Q .



Ορισμός 1.1.15. Για έναν μορφισμό $h : X \rightarrow Y$ ορίζουμε την *εικόνα* να είναι η υποαναπαράσταση $\text{Im } h$ της Y με

$$(\text{Im } h)_i = \text{Im } h_i$$

για κάθε $i \in Q_0$.

Ορισμός 1.1.16. Για έναν μορφισμό $h : X \rightarrow Y$ ορίζουμε τον *συνπυρήνα* του h να είναι η αναπαράσταση Coker h με

$$(\text{Coker } h)_i = (Y / \text{Im } h)_i = (Y_i / \text{Im } h_i) = \text{Coker } h_i$$

για κάθε $i \in Q_0$.

Ορισμός 1.1.17. Ένας μορφισμός $h : X \rightarrow Y$ καλείται **μονομορφισμός** αν και μόνον αν $h_i : X_i \rightarrow Y_i$ είναι μονομορφισμοί για κάθε $i \in Q_0$. Δηλαδή $h_i : X_i \rightarrow Y_i$ είναι ένα προς ένα για κάθε $i \in Q_0$.

Ένας μορφισμός $h : X \rightarrow Y$ καλείται **επιμορφισμός** αν και μόνον αν $h_i : X_i \rightarrow Y_i$ είναι επιμορφισμοί για κάθε $i \in Q_0$. Δηλαδή $h_i : X_i \rightarrow Y_i$ είναι επί για κάθε $i \in Q_0$.

Οι μορφισμοί $h_i : X_i \rightarrow Y_i$ θα καλούνται **ισομορφισμοί** αν και μόνον αν είναι μονομορφισμοί και επιμορφισμοί για κάθε $i \in Q_0$.

Ο μορφισμός $h : X \rightarrow Y$ είναι **ισομορφισμός** αν και μόνον αν οι $h_i : X_i \rightarrow Y_i$ είναι ισομορφισμοί για κάθε $i \in Q_0$.

Πρόταση 1.1.18. Ένας μορφισμός $h : X \rightarrow Y$ είναι **μονομορφισμός** αν και μόνον αν $\text{Ker } h = 0$ και είναι **επιμορφισμός** αν και μόνον αν $\text{Im } h = Y$.

Απόδειξη. Έπεται εύκολα οπότε αφήνεται στον αναγνώστη. □

Ορισμός 1.1.19. Έστω X μια αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης μιας φαρέτρας Q . Το διάνυσμα $\dim X \in \mathbb{Z}^{|Q_0|}$ καλείται το **διάνυσμα διάστασης** της X όπου

$$(\dim X)_i = \dim_{\mathbb{K}} X_i$$

για κάθε $i \in Q_0$.

Αφού είδαμε κάποιες απο τις ιδιότητες των αναπαραστάσεων φαρετρών θα μελετήσουμε τώρα ακόμα μια χρήσιμη ιδιότητα που μας διευκολύνει. Στην παρακάτω παρατήρηση θα δούμε οτι κάθε αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης έχει μια παρα πολύ καλή περιγραφή. Για τον λόγο αυτό θεωρούμε μια φαρέτρα Q και μια πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση αυτής.

Παρατήρηση 1.1.20. Έστω V μια αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης μιας φαρέτρας Q . Για κάθε κορυφή $i \in Q_0$ έχουμε τον διανυσματικό χώρο $V(i)$ ο οποίος έχει πεπερασμένη διάσταση, δηλαδή $\dim V(i) = n_i < \infty$ και για κάθε $\alpha \in Q_1$ με $\alpha : i \rightarrow j$ την γραμμική απεικόνιση $f_\alpha : V(i) \rightarrow V(j)$ με $\dim V(j) = n_j < \infty$.

Θεωρούμε τώρα βάση του διανυσματικού χώρου $V(i)$

$$B(i) = \{\vec{e}_1^i, \dots, \vec{e}_{n_i}^i\}$$

για κάθε $i \in Q_0$.



Τότε υπάρχει ισομορφισμός

$$g_i : V(i) \rightarrow \mathbb{K}_{n_i}$$

ο οποίος ορίζεται ως εξής

$$g_i(k_1 \vec{e}_1^i + \dots + k_{n_i} \vec{e}_{n_i}^i) = \begin{pmatrix} k_1^i \\ \vdots \\ k_{n_i}^i \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τώρα τις γραμμικές απεικονίσεις

$$f_\alpha' : \mathbb{K}_{n_i} \rightarrow \mathbb{K}_{n_j}$$

με τύπο $f_\alpha'(x) = Ax$, όπου $A = (\alpha_{ij}) \in M_{n_j, n_i}(\mathbb{K})$ είναι ο πίνακας της f_α στις παραπάνω βάσεις των $V(i)$, $V(j)$ και έχουμε το εξής διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n_i} & \xrightarrow{f_\alpha'} & \mathbb{K}_{n_j} \\ g_i^{-1} \downarrow & & \uparrow g_j \\ V(i) & \xrightarrow{f_\alpha} & V(j) \end{array}$$

το οποίο είναι μεταθετικό. Ορίζουμε έτσι μια καινούρια αναπαράσταση $V' = (\mathbb{K}_{n_i}, f_\alpha')_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$. Έτσι έχουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ αναπαραστάσεων $g = (g_i)_{i \in Q_0}$ με

$$g : V \rightarrow V'$$

Δουλεύουμε τότε με την αναπαράσταση $V' = (\mathbb{K}_{n_i}, f_\alpha')_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ αντί της γενικής αναπαράστασης $V = (V(i), f_\alpha)$.

Ας μελετήσουμε τώρα κάποιες εφαρμογές της παρατήρησης.

Παράδειγμα 1.1.21. Έστω η φαρέτρα Q

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \end{array}$$

και έστω η αναπαράσταση

$$V : V_1 \xrightarrow{f_\alpha} V_2$$

αυτής με $\dim V_1 = n_1$ και $\dim V_2 = n_2$. Υποθέτουμε επίσης $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n_1}\}$ να είναι βάση του V_1 και $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n_2}\}$ να είναι βάση του V_2 .

Ορίζουμε τότε μορφοισμό αναπαραστάσεων $g : V_i \rightarrow \mathbb{K}_{n_i}$ με τύπο $g = (g_1, g_2)$ όπου $g_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{K}_{n_1}$ με

$$g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_1} \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_{n_1} \vec{e}_{n_1}$$



και $g_2 : V_2 \rightarrow \mathbb{K}_{n_2}$ με

$$g_2 \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n_2} \end{pmatrix} = k_1 \vec{\varepsilon}_1 + \dots + k_{n_2} \vec{\varepsilon}_{n_2}$$

Τότε ο g είναι ισομορφισμός αφού μεταφέρει βάση σε βάση. Αρα έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n_1} & \xrightarrow{f'_\alpha} & \mathbb{K}_{n_2} \\ g_1^{-1} \downarrow & & \uparrow g_2 \\ V_1 & \xrightarrow{f_\alpha} & V_2 \end{array}$$

όπου $f'_\alpha(x) = Ax$, $A = (\alpha_{ij}) \in M_{n_2, n_1}(\mathbb{K})$. Αρα έχω ισομορφισμό μεταξύ των αναπαραστάσεων V και V' .

Παράδειγμα 1.1.22. Έστω Q η φαρέτρα

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \end{array}$$

πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} και έστω δυο πίνακες A, B . Πότε οι αναπαραστάσεις

$$V_A : \mathbb{K}_m \xrightarrow{A} \mathbb{K}_n$$

και

$$V_B : \mathbb{K}_m \xrightarrow{B} \mathbb{K}_n$$

είναι ισόμορφες ;

Σύμφωνα με τον ορισμό θα πρέπει να υπάρχουν αντιστρέψιμες γραμμικές απεικονίσεις $f_1 : \mathbb{K}_m \rightarrow \mathbb{K}_m$ και $f_2 : \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ τέτοιες ώστε $Bf_1 = f_2A$ ή ισοδύναμα $f_2Af_1^{-1} = B$. Δηλαδή οι αναπαραστάσεις V_A και V_B είναι ισόμορφες αν και μόνον αν ο B πίνακας προκύπτει από τον A με αλλαγή βάσεων των χώρων $\mathbb{K}_m, \mathbb{K}_n$.

Παράδειγμα 1.1.23. Έστω η φαρέτρα Q

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & \bullet & \\ & \curvearrowright & \\ & \alpha & \end{array}$$

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$ ορίζουμε αναπαράσταση της φαρέτρας Q να είναι

$$V_A : \mathbb{K}_n \xrightarrow{A} \mathbb{K}_n$$

Αν A, B είναι δυο $n \times n$ τετραγωνικοί πίνακες τότε οι αναπαραστάσεις V_A και V_B είναι ισόμορφες αν και μόνον αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ τέτοια ώστε $fA = Bf$ ή ισοδύναμα $fAf^{-1} = B$. Δηλαδή οι δυο αναπαραστάσεις θα είναι ισόμορφες αν και μόνον αν οι πίνακες A, B είναι όμοιοι.



Παράδειγμα 1.1.24. Έστω Q η φαρέτρα του **Kronecker**

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \bullet & \xrightarrow[\beta]{\alpha} & \bullet \end{array}$$

Έστω η αναπαράσταση V αυτής η οποία δίνεται απο

$$V : V_1 \xrightarrow[f_\beta]{f_\alpha} V_2$$

όπου $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$ και έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ βάση του V_1 και $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ βάση του V_2 .

Μέσω του ισομορφισμού $g = (g_1, g_2)$ όπου $g_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ με

$$g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$

και $g_2 : V_2 \rightarrow \mathbb{K}_2$ με

$$g_2 \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = k_1 \vec{\varepsilon}_1 + k_2 \vec{\varepsilon}_2$$

μεταφερόμαστε στην αναπαράσταση V' , όπου

$$f'_\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

και

$$f'_\beta \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Όπου διαγραμματικά η V' δίνεται απο

$$\mathbb{K}_2 \xrightarrow[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}]{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{K}_2$$

Μια άλλη αναπαράσταση V'' της φαρέτρας Q του **Kronecker** είναι

$$\mathbb{K} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}]{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{K}_2$$

Παρατηρούμε οτι και οι δυο είναι πεπερασμένης διάστασης. Έχουμε τότε έναν



μορφισμό $V'' \rightarrow V'$ που ορίζεται ως εξής :

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \\
 & \xrightarrow{\quad} & \\
 \mathbb{K} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K}_2 \\
 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \\
 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \\
 \mathbb{K}_2 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K}_2 \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &
 \end{array}$$

Όντως εύκολα διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα είναι μεταθετικό αφού

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

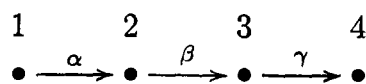
Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό της δυικής φαρέτρας και θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο.

Ορισμός 1.1.25. Έστω μια φαρέτρα Q όπου Q_0 είναι το σύνολο των κορυφών της Q . Θα συμβολίζουμε με Q^{op} τη φαρέτρα που έχει το ίδιο σύνολο κορυφών Q_0 και για κάθε βέλος $\alpha : s(\alpha) \rightarrow t(\alpha)$ στην Q υπάρχει ένα βέλος $\alpha^{op} : t(\alpha) \rightarrow s(\alpha)$ στην Q^{op} . Η Q^{op} θα καλείται **δυική φαρέτρα** της φαρέτρας Q .

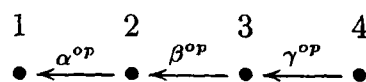
Ορισμός 1.1.26. Για ένα μονοπάτι $\xi = \xi_r \dots \xi_1$ στη φαρέτρα Q , με ξ^{op} θα συμβολίζουμε το μονοπάτι $\xi^{op} = \xi_1^{op} \dots \xi_r^{op}$ στην Q^{op} .

Ακολουθούν δυο παραδείγματα για την κατανόηση των παραπάνω ορισμών.

Παράδειγμα 1.1.27. Έστω Q η φαρέτρα :



Τότε βάσει του ορισμού η δυική φαρέτρα Q^{op} της Q θα έχει τις ίδιες κορυφές και τα βέλη της θα αλλάξουν φορά. Δηλαδή θα είναι:



Έστω τώρα V μια αναπαράσταση της φαρέτρας Q με

$$V_1 \xrightarrow{f_\alpha} V_2 \xrightarrow{f_\beta} V_3 \xrightarrow{f_\gamma} V_4$$



Τότε η αναπαράσταση

$$DV_1 \xleftarrow{f_{\alpha}^{op}} DV_2 \xleftarrow{f_{\beta}^{op}} DV_3 \xleftarrow{f_{\gamma}^{op}} DV_4$$

είναι αναπαράσταση της φαρέτρας Q^{op} και τη συμβολίζουμε με V^{op} όπου DV_i είναι οι δυικοί διανυσματικοί χώροι που αντιστοιχούν στις κορυφές της Q^{op} .

Παράδειγμα 1.1.28. Έστω η φαρέτρα Q

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \\ & \xleftarrow{\beta} & \end{array}$$

Τότε η δυική φαρέτρα Q^{op} είναι η φαρέτρα :

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \bullet & \xleftarrow{\alpha^{op}} & \bullet \\ & \xrightarrow{\beta^{op}} & \end{array}$$

1.2 Απλές και μη-Αναλύσιμες Αναπαραστάσεις

Στην δεύτερη παράγραφο θα μελετήσουμε κάποιες σπουδαίες κλάσεις αναπαραστάσεων φαρετρών ξεκινώντας από τις απλές και προχωρώντας στις μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις που θα μας απασχολήσουν μέχρι το τέλος της διατριβής.

Ορισμός 1.2.1. Μια αναπαράσταση της φαρέτρας Q υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , καλείται **απλή** αν δεν έχει γνήσιες μη-τετριμμένες υποαναπαραστάσεις.

Παράδειγμα 1.2.2. Έστω η φαρέτρα

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \end{array}$$

και έστω ένα σώμα \mathbb{K} . Έστω E μια απλή αναπαράσταση αυτής με

$$V_1 \xrightarrow{f_{\alpha}} V_2$$

όπου V_1, V_2 είναι διανυσματικοί χώροι και f_{α} γραμμική απεικόνιση. Τότε έχουμε δυο απλές υποαναπαραστάσεις :

$$E_1 : \mathbb{K} \xrightarrow{0} 0$$

$$E_2 : 0 \xrightarrow{0} \mathbb{K}$$

Θα δείξουμε ότι η αναπαράσταση $E_1 : \mathbb{K} \xrightarrow{0} 0$ είναι απλή. Έστω V^* μια υποαναπαράσταση αυτής με V_1, V_2 διανυσματικούς χώρους και f_{α} μια γραμμική απεικόνιση για $\alpha \in Q_1$ με $\alpha : 1 \rightarrow 2$. Δηλαδή υπάρχει μονομορφισμός $g = (g_1, g_2)$ με $g_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{K}$ και $g_2 : V_2 \rightarrow 0$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f_{\alpha}} & V_2 \\ g_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}$$



να είναι μεταθετικό. Άρα $V_2 = \text{Ker } g_2 = 0$ διότι η $V_2 \rightarrow 0$ είναι μονομορφισμός. Έτσι το διάγραμμα γίνεται :

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f_\alpha} & 0 \\ g_1 \downarrow & & \downarrow 0 \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}$$

Αν τώρα g_1 είναι επί απεικόνιση τότε $V_1 \simeq \mathbb{K}$ και έτσι έχουμε g ισομορφισμό μεταξύ της υποαναπαράστασης V^* και της E_1

Αν g_1 δεν είναι επί απεικόνιση τότε

$$\dim V_1 < \dim \mathbb{K} = 1 \Rightarrow \dim V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

Άρα η υποαναπαράσταση V^* είναι η μηδενική. Παρόμοια αποδεικνύουμε ότι και η E_2 είναι απλή υποαναπαράσταση.

Θα δείξουμε τώρα ότι κάθε κορυφή μιας φαρέτρας ορίζει απλή αναπαράσταση.

Πρόταση 1.2.3. Έστω Q φαρέτρα και \mathbb{K} σώμα. Για την κορυφή i θεωρούμε την αναπαράσταση $S(i) = (S(i)_j, S(i)_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ με

$$S(i)_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \mathbb{K}, & i = j \end{cases}$$

και

$$S(i)_\alpha = 0$$

για κάθε $j \in Q_0$ και $\alpha \in Q_1$. Τότε η αναπαράσταση αυτή είναι απλή.

Απόδειξη. Έστω η φαρέτρα $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ και ορίζουμε για κάθε $j \in Q_0$ την αναπαράσταση $S(i)$ με

$$S(i)_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \mathbb{K}, & i = j \end{cases}$$

και

$$S(i)_\alpha = 0$$

για κάθε $j \in Q_0$ και $\alpha \in Q_1$ με $\alpha : i \rightarrow j$. Θα δείξουμε ότι αυτές οι αναπαράστασεις είναι απλές. Δηλαδή ότι οι μόνες υποαναπαράστασεις αυτών είναι είτε η μηδενική είτε οι ίδιες.

Έστω λοιπόν $i \in Q_0$ και έστω V υποαναπαράσταση της $S(i)$ με $V(i)_j$ διανυσματικός χώρος για κάθε $j \in Q_0$ και $V(i)_\alpha$ γραμμική απεικόνιση για κάθε $\alpha \in Q_1$. Τότε έστω g^i μορφισμός μεταξύ των $S(i)$ και V ο οποίος ορίζεται $g^i = (g_j^i)_{j \in Q_0}$ με

$$g_j^i : V(i)_j \rightarrow S(i)_j$$

μονομορφισμός για κάθε $j \in Q_0$.

Για την κορυφή $i \neq j$ η αναπαράσταση $S(i)$ θα έχει διανυσματικό χώρο $S(i)_j = 0$ και έτσι οι μονομορφισμοί g_j^i θα είναι

$$g_j^i : V(i)_j \rightarrow 0$$



Αυτό σημαίνει ότι $V(i)_j = \text{Ker } g_j^i = 0 \Rightarrow V(i)_j = 0$. Άρα $g_j^i = 0$.

Για την κορυφή $i = j$ η αναπαράσταση $S(i)$ θα περιέχει διανυσματικούς χώρους $S(i)_i = \mathbb{K}$ και οι g_i^i μορφοισμοί θα είναι

$$g_i^i : V(i)_i \rightarrow \mathbb{K}$$

Μια τέτοια γραμμική απεικόνιση είναι είτε επί είτε η μηδενική. Αν η g_i^i είναι επί απεικόνιση θα έχουμε $V(i)_i \simeq \mathbb{K}$. Δηλαδή η υποαναπαράσταση $V(i)$ θα έχει

$$V(i)_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ V(i)_i \simeq \mathbb{K}, & i = j \end{cases}$$

και

$$V(i)_\alpha = 0$$

για κάθε $\alpha \in Q_1$.

Δηλαδή θα υπάρχει ισομορφισμός g^i μεταξύ των $V(i)$ και $S(i)$. Άρα οι $V(i)$, $S(i)$ θα είναι ισόμορφες αναπαραστάσεις

$$V(i) \simeq S(i)$$

Αν η g_i^i δεν είναι επί απεικόνιση ο υπόχωρος $V(i)_i$ θα έχει διάσταση μικρότερη της διάστασης του \mathbb{K} (αφού αν είναι $\dim \mathbb{K} = \dim V(i)_i$ η απεικόνιση g_i^i θα ήταν επί). Όμως $\dim \mathbb{K} = 1$. Άρα

$$\dim V(i)_i = 0 \Rightarrow V(i)_i = 0$$

Συνεπώς η υποαναπαράσταση $V(i)$ θα περιέχει

$$V(i)_i = 0$$

και

$$V(i)_\alpha = 0$$

για κάθε $\alpha \in Q_1$. Άρα η υποαναπαράσταση $V(i)$ θα είναι η μηδενική και έτσι η αναπαράσταση $S(i)$ δεν έχει γνήσιες υποαναπαραστάσεις εκτός της μηδενικής. \square

Η παρακάτω πρόταση που θα διατυπώσουμε χωρίς απόδειξη δίνει την αναλυτική περιγραφή των απλών αναπαραστάσεων.

Πρόταση 1.2.4. Έστω Q φαρέτρα χωρίς προσανατολισμένους κύκλους και \mathbb{K} σώμα. Τότε κάθε απλή αναπαράσταση S της φαρέτρας Q για δεδομένη κορυφή i έχει την παραπάνω μορφή. Δηλαδή

$$S \simeq S(i)$$

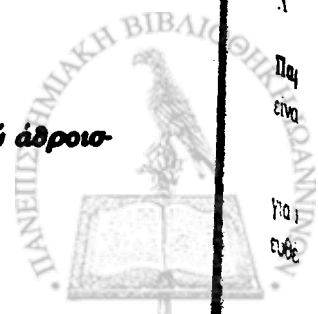
Πριν μιλήσουμε για τις μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις θα δώσουμε τον ορισμό του ευθέως αθροίσματος και θα μελετήσουμε κάποιες από τις ιδιότητες του.

Ορισμός 1.2.5. Έστω

$$X_1, \dots, X_r$$

πεπερασμένες στο πλήθος αναπαραστάσεις μιας φαρέτρας Q . Τότε το **ενδιάμεσο** αυτών

$$X = X_1 \oplus \dots \oplus X_r$$



είναι μια αναπαράσταση X μαζί με μορφοισμούς

$$i_i : X_i \rightarrow X, 1 \leq i \leq r$$

και

$$\pi_i : X \rightarrow X_i, 1 \leq i \leq r$$

τέτοιες ώστε

$$\sum_{i=1}^r i_i \pi_i = 1_X$$

$$\pi_i i_i = 1_{X_i}$$

και

$$\pi_i i_j = 0, \text{ για κάθε } i \neq j$$

με $1 \leq i \leq r$. Μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε μια από τις X_i , μέσω της απεικόνισης i_i , ως υποαναπαράσταση της X . Δηλαδή αν $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_r$, τότε έχουμε

$$X^i = \sum_{j=1}^r X_j$$

και

$$X_j^i \cap \sum_{j \neq k} X_k^i = 0$$

για $1 \leq i \leq r$.

Αντίστροφα, αν X_1, \dots, X_r είναι μια οικογένεια υποαναπαράστασεων της αναπαράστασης X που ικανοποιεί τις σχέσεις $X = \sum_{i=1}^r X_i$ και $X_i \cap \sum_{i \neq j} X_j = 0$ τότε

$$X = X_1 \oplus \dots \oplus X_r$$

με τους μορφοισμούς

$$i_i : X_i \rightarrow X$$

και

$$\pi_i = (p_i i_i)^{-1} p_i$$

όπου $p_i : X \rightarrow X / \sum_{i \neq j} X_j$ με i_i την έγκλειση και π_i τον κανονικό επιμορφοισμό.

Παρατήρηση 1.2.6. Η $\sum X_i$ είναι η μικρότερη υποαναπαράσταση της X που περιέχει την X_i για κάθε $i \in I$.

Ορισμός 1.2.7. Μια οικογένεια υποαναπαράστασεων X_1, \dots, X_r της αναπαράστασης X που ικανοποιεί τις σχέσεις $X = \sum_{i=1}^r X_i$ και $X_i \cap \sum_{i \neq j} X_j = 0$ για κάθε $1 \leq i \leq r$ καλείται η **ανάλυση** του ευθέως αθροίσματος της αναπαράστασης X στις αναπαράστασεις X_1, \dots, X_r .

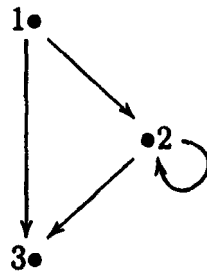
Παρατήρηση 1.2.8. Η σχέση $X = \sum_{i=1}^r X_i$ για κάθε κορυφή ξεχωριστά θα είναι

$$X = X_1 \oplus \dots \oplus X_r \Leftrightarrow X_j = (X_1)_j \oplus \dots \oplus (X_r)_j$$

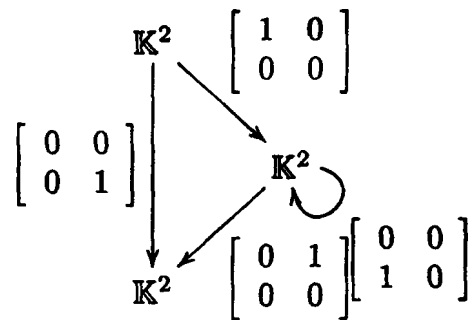
για κάθε $j \in Q_0$. Δηλαδή $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_r$ αν και μόνον αν έχουμε ανάλυση ευθέως αθροίσματος διανυσματικών χώρων $X_j = (X_1)_j \oplus \dots \oplus (X_r)_j$.



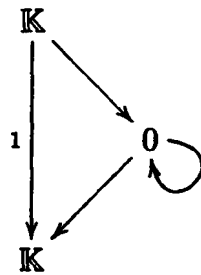
Παράδειγμα 1.2.9. Έστω η φαρέτρα Q



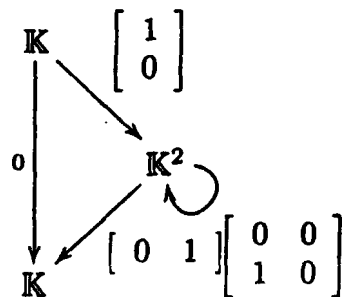
και V μια αναπαράσταση αυτής



Τότε η V είναι ισόμορφη με την $W \oplus W'$ όπου W είναι η αναπαράσταση :



και W' η :



Ορισμός 1.2.10. Έστω Q μια φαρέτρα και $X = (X_i, X_\alpha)$, $Y = (Y_i, Y_\alpha)$ αναπαράστασεις της. Το σύνολο των μορφισμών $X \rightarrow Y$ θα είναι το σύνολο

$$\text{Hom}_Q(X, Y) = \text{Hom}_Q((X_i, X_\alpha), (Y_i, Y_\alpha)) = \{f_i : X_i \rightarrow Y_i \mid i \in Q_0\}$$

όπου $f = (f_i)_{i \in Q_0}$ και f_i γραμμικές απεικονίσεις. Προφανώς το σύνολο $\text{Hom}_Q(X, Y)$ είναι \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος.

Και τώρα ένα σημαντικό λήμμα.



Λήμμα 1.2.11. Έστω $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_r$ και $Y = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_s$ δυο αναπαραστάσεις. Τότε έχουμε τις εξής αναλήψεις διανυσματικών χώρων

$$\bigoplus_{i=1}^r \text{Hom}(X_i, Y) = \text{Hom}(X, Y) = \bigoplus_{j=1}^s \text{Hom}(X, Y_j)$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την ισότητα $\text{Hom}(X, Y) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Hom}(X_i, Y)$. Από τον ορισμό του ευθέως αθροίσματος θα πρέπει οι $\text{Hom}(X_i, Y)$ να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sum_{i=1}^r \pi_i^* i_i^* = 1_{\text{Hom}(X, Y)}$$

και

$$i_i^* \pi_i^* = 1_{\text{Hom}(X_i, Y)}$$

για κάθε κορυφή i όπου οι μορφισμοί i_i^* και π_i^* είναι οι εξής

$$i_i^* : \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X_i, Y)$$

με τύπο $i_i^*(\alpha : X \rightarrow Y) = \alpha \circ i_i : X_i \rightarrow Y$ και έστω $i_i^* = \text{Hom}(i_i, Y)$ όπου i_i είναι η έγκλειση $i_i : X_i \rightarrow X$ για κάθε $1 \leq i \leq r$ και

$$\pi_i^* : \text{Hom}(X_i, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Y)$$

με τύπο $\pi_i^*(\alpha : X_i \rightarrow Y) = \alpha \circ \pi_i : X \rightarrow Y$ και έστω $\pi_i^* = \text{Hom}(\pi_i, Y)$ όπου $\pi_i : X \rightarrow X_i$ για κάθε $1 \leq i \leq r$.

Τότε αν $\alpha_1 \in \text{Hom}(X, Y)$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \pi_i^* i_i^*(\alpha_1) &= \sum_{i=1}^r \pi_i^*(\alpha_1 \circ i_i) = \sum_{i=1}^r (\alpha_1 \circ i_i \circ \pi_i) = \\ &= \alpha_1 \circ \sum_{i=1}^r \pi_i i_i = \alpha_1 \circ 1_X = \alpha_1 \end{aligned}$$

Άρα

$$\sum_{i=1}^r \pi_i^* i_i^* = 1_{\text{Hom}(X, Y)}$$

Ακόμη αν $\alpha_2 \in \text{Hom}(X_i, Y)$ θα έχουμε

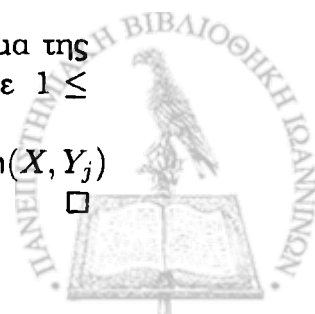
$$\begin{aligned} i_i^* \pi_i^*(\alpha_2) &= i_i^*(\alpha_2 \circ \pi_i) = (\alpha_2 \circ \pi_i \circ i_i) = \\ &= \alpha_2 \circ 1_{X_i} = \alpha_2 \end{aligned}$$

Άρα

$$i_i^* \pi_i^* = 1_{\text{Hom}(X_i, Y)}$$

Συνεπώς δείξαμε ότι το σύνολο $\text{Hom}(X, Y)$ διασπάται στο ευθύ άθροισμα της οικογένειας $\text{Hom}(X_i, Y)$ των συνόλων των μορφισμών $X_i \rightarrow Y$ για κάθε $1 \leq i \leq r$.

Παρόμοια αποδεικνύεται και η δεύτερη σχέση $\text{Hom}(X, Y) = \bigoplus_{j=1}^s \text{Hom}(X, Y_j)$ με τις ανάλογες σχέσεις. \square



Παρατήρηση 1.2.12. Γράφουμε

$$X^r = X \oplus \cdots \oplus X$$

και εννοούμε το ευθύ άθροισμα απο r αντίγραφα της αναπαράστασης X .

Συνεχίζουμε την παράγραφο ορίζοντας την κλάση των αναπαραστάσεων που θα μας απασχολήσει περισσότερο απο κάθε άλλη κλάση σε αυτή τη διατριβή. Θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο οτι η κλάση των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων μας περιγράφει πλήρως οποιοδήποτε πρόβλημα στην θεωρία αναπαραστάσεων. Ξεκινάμε λοιπόν με τους βασικούς ορισμούς και κάποιες παρατηρήσεις.

Ορισμός 1.2.13. Μια μη-μηδενική αναπαράσταση X μιας φαρέτρας Q καλείται **μη-αναλύσιμη** αν η σχέση $X = X_1 \oplus X_2$ συνεπάγεται $X_1 = 0$ ή $X_2 = 0$.

Παρατήρηση 1.2.14. Κάθε μη-μηδενική αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης μιας φαρέτρας Q , μπορεί να γραφεί ως το ευθύ άθροισμα μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων. Δηλαδή για κάθε $X \neq 0$ υπάρχουν μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις X_1, \dots, X_r τέτοιες ώστε

$$X \simeq X_1 \oplus \dots \oplus X_r$$

Με άλλα λόγια αν $X = (X_i, X_\alpha)$ αναπαράσταση της φαρέτρας Q τότε θα είναι είτε μη-αναλύσιμη είτε αναλύσιμη. Αν είναι μη-αναλύσιμη το αποτέλεσμα είναι προφανές. Αν είναι αναλύσιμη, έστω οτι γράφεται ως $X = X_1 \oplus X_2$, όπου X_1 και X_2 υποαναπαραστάσεις οι οποίες είναι είτε μη-αναλύσιμες, οποτε και πάλι το αποτέλεσμα προφανές, είτε αναλύσιμες οπότε η αναπαράσταση X θα γράφεται αναλυτικότερα. Δηλαδή $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ κ.ο.κ. Άρα συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο θα έχουμε τελικά μια ανάλυση της X της μορφής :

$$X \simeq X_1 \oplus \dots \oplus X_r$$

Οι αναπαραστάσεις X_j για $j = 1, \dots, r$ είναι υποαναπαραστάσεις της X . Έστω τώρα οτι οι υποαναπαραστάσεις X_j δεν είναι πεπερασμένες το πλήθος. Θα δείξουμε οτι αυτό είναι άτοπο. Γνωρίζουμε οτι για κάθε κορυφή $i \in Q_0$ έχουμε

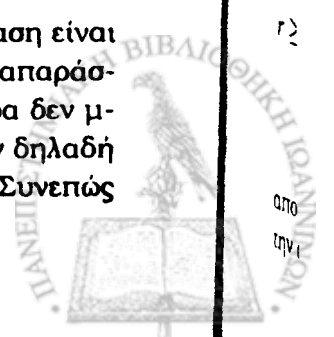
$$X_i \simeq X_{i1} \oplus \dots \oplus X_{ir}$$

όπου X_i είναι διανυσματικοί χώροι και ακόμη οτι

$$\dim X_i = \dim X_{i1} + \dots + \dim X_{ir}$$

Άρα αν οι X_j δεν είναι πεπερασμένες το πλήθος τότε και η διάσταση $\dim X_i$ δεν θα είναι πεπερασμενη. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού υποθέσαμε οτι η αναπαράσταση $X = (X_i, X_\alpha)$ είναι πεπερασμένης διάστασης και αυτό σημαίνει οτι οι διανυσματικοί χώροι X_i για κάθε $i \in Q_0$ είναι πεπερασμένης διάστασης.

Παρατήρηση 1.2.15. Εύκολα παρατηρούμε οτι κάθε απλή αναπαράσταση είναι μη-αναλύσιμη ενώ το αντίθετο δεν ισχύει. Δηλαδή αν X είναι απλή αναπαράσταση τότε οι μόνες υποαναπαραστάσεις αυτής είναι θα είναι οι $0, X$ αρα δεν μπορεί να γραφεί ως ευθύ άθροισμα μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων. Αν δηλαδή $X = X_1 \oplus X_2$ τότε $X_1 = 0$ ή $X_1 = X$ (ανάλογα $X_2 = 0$ ή $X_2 = X$). Συνεπώς X μη-αναλύσιμη.



Παρατήρηση 1.2.16. Όπως θα δούμε αργότερα, βλέπε θεώρημα Krull-Schmidt 2.4.20, η ανάλυση μιας αναπαράστασης σε ευθύ άθροισμα μη-αναλύσιμων αναπαράστασεων είναι μοναδική.

Συνεχίζουμε στην επόμενη παράγραφο με τις προβολικές και injective αναπαράστασεις ενώ με τις μη-αναλύσιμες θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στα επόμενα κεφάλαια.

1.3 Προβολικές και Εμβολικές (Injective) Αναπαράστασεις

Πριν δώσουμε τους ορισμούς των προβολικών και εμβολικών (injective) αναπαράστασεων θα ορίσουμε τον χώρο $\mathbb{K}[X]$, όπου X δοσμένο σύνολο, καθώς και το σύνολο $Q(i, j)$ με τις ιδιότητες του.

Έστω λοιπόν σύνολο X . Ορίζουμε με $\mathbb{K}[X]$ τον διανυσματικό χώρο με βάση X . Δηλαδή το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών

$$\sum_p \lambda_p x_p$$

με $x_p \in X$, $\lambda_p \in \mathbb{K}$ και $\lambda_p = 0$ σχεδόν παντού.

Επίσης κάθε απεικόνιση $\phi : X \rightarrow Y$ επάγει την γραμμική απεικόνιση

$$\mathbb{K}[\phi] : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[Y]$$

με τύπο $\mathbb{K}[\phi](\sum_p \lambda_p x_p) = \sum_p \lambda_p \phi(x_p)$.

Παρατήρηση 1.3.1. Στην αρχή του κεφαλαίου ορίσαμε το μονοπάτι σε μια φαρέτρα Q να είναι μια προσανατολισμένη ακολουθία βελών $\xi = \xi_r \dots \xi_1$ μήκους $r \geq 1$. Έστω τώρα δύο κορυφές $i = \xi_1 = s(\xi)$, $j = \xi_r = t(\xi)$ στη φαρέτρα Q .

Η σύνθεση δύο μονοπατιών $v = \xi_s \dots i$ και $w = j \dots \xi_s$ ορίζεται ως $vw = j \dots \xi_s \dots i$.

Ορίζουμε με $Q(i, j)$ το σύνολο όλων των μονοπατιών ξ με $s(\xi) = i$ και $t(\xi) = j$. Η σύνθεση λοιπόν σε αυτό το σύνολο δίνεται από τις απεικονίσεις

$$Q(i, \xi) : Q(i, s(\xi)) \rightarrow Q(i, t(\xi))$$

με τύπο $Q(i, s(\xi))(\mu) = \xi\mu$ όπου μ είναι ένα μονοπάτι με αρχή την κορυφή i και τέλος την κορυφή $s(\xi)$ και

$$Q(\xi, j) : Q(t(\xi), j) \rightarrow Q(s(\xi), j)$$

με τύπο $Q(\xi, j)(\lambda) = \lambda\xi$ όπου λ είναι ένα μονοπάτι με αρχή την κορυφή $t(\xi)$ και τέλος την κορυφή j .

Για κάθε αναπαράσταση V και για κάθε μονοπάτι $\xi = \xi_r \dots \xi_1$ μήκους $r \geq 1$ με $s(\xi) = i$ και $t(\xi) = j$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$V(\xi) = V(\xi_r) \dots V(\xi_1) : V(i) \rightarrow V(j)$$

Έστω $\mathbb{K}[Q(i, j)]$ να είναι ο διανυσματικός χώρος με βάση όλα τα μονοπάτια από την κορυφή i στην κορυφή j . Επίσης για ένα βέλος $\alpha : j \rightarrow h$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\mathbb{K}[Q(i, \alpha)] : \mathbb{K}[Q(i, j)] \rightarrow \mathbb{K}[Q(i, h)]$$



με τύπο $\mathbb{K}[Q(i, \alpha)](w) = \mathbb{K}[Q(i, \alpha)(w)] = \alpha w$ να είναι η σύνθεση με το μονοπατι α απο αριστερά και για ένα βέλος $\beta : h \rightarrow i$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\mathbb{K}[Q(\beta, j)] : \mathbb{K}[Q(i, j)] \rightarrow \mathbb{K}[Q(h, j)]$$

με τύπο $\mathbb{K}[Q(\beta, j)](w) = \mathbb{K}[Q(\beta, j)(w)] = w\beta$ να είναι η σύνθεση με το μονοπατι β απο δεξιά, όπως προηγουμένως.

Τώρα μπορούμε να δώσουμε τους ορισμούς των προβολικών και εμβολικών (injective) αναπαραστάσεων. Θα ακολουθήσουν και κάποιες εφαρμογές για την κατανόηση των ορισμών.

Ορισμός 1.3.2. Έστω Q φαρέτρα και i κορυφή. Ορίζουμε να είναι

$$P(i)_j = \mathbb{K}[Q(i, j)]$$

και

$$P(i)_\alpha = \mathbb{K}[Q(i, \alpha)]$$

με $j \in Q_0$, $\alpha \in Q_1$ η **προβολική αναπαράσταση** για την κορυφή i και γράφουμε

$$P(i) = (P(i)_j, P(i)_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1} = (\mathbb{K}[Q(i, j)], \mathbb{K}[Q(i, \alpha)])_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

Αντίστοιχα ορίζουμε

$$I(i)_j = D\mathbb{K}[Q(i, j)]$$

και

$$I(i)_\alpha = D\mathbb{K}[Q(i, \alpha)]$$

με $j \in Q_0$, $\alpha \in Q_1$ την **εμβολική (injective) αναπαράσταση** για την κορυφή i και γράφουμε

$$I(i) = (I(i)_j, I(i)_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1} = (D\mathbb{K}[Q(i, j)], D\mathbb{K}[Q(i, \alpha)])_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

όπου D ορίζουμε την **δυσκότητα** στον χώρο \mathbb{K} . Δηλαδή

$$DV = V^{op} = \{f : V \rightarrow \mathbb{K} \mid f : \text{γραμμική}\}$$

Παρατήρηση 1.3.3. Η προβολική αναπαράσταση της φαρέτρας Q^{op} είναι η $\bar{P}(i)$ όπου

$$D\bar{P}(i) = I(i)$$

Παρατήρηση 1.3.4. Σημειώνουμε ότι αν V είναι μια αναπαράσταση της φαρέτρας Q , με DV ορίζουμε την **δυσκή αναπαράσταση** της V .

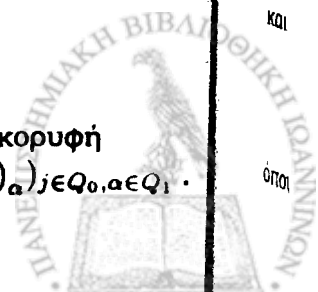
Παράδειγμα 1.3.5. Έστω η φαρέτρα Q

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & 3 \\ \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet & \xrightarrow{\beta} & \bullet \end{array}$$

Θα μελετήσουμε την προβολική και την injective αναπαράσταση για την κορυφή

1. Δηλαδή την $P(1) = (P(1)_j, P(1)_\gamma)_{j \in Q_0, \gamma \in Q_1}$ και την $I(i) = (I(i)_j, I(i)_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$.

Θα μελετήσουμε πρώτα την $P(1)$.



Έχουμε λοιπόν να μελετήσουμε για κάθε κορυφή $j \in Q_0 = \{1, 2, 3\}$ τους $P(1)_j$ διανυσματικούς χώρους και για κάθε βέλος $\gamma \in Q_1 = (\alpha, \beta)$ τις απεικονίσεις $P(1)_\gamma$. Δηλαδή

$$P(1)_1 = \mathbb{K}[Q(1, 1)], \quad P(1)_2 = \mathbb{K}[Q(1, 2)], \quad P(1)_3 = \mathbb{K}[Q(1, 3)]$$

και

$$P(i)_\alpha = \mathbb{K}[Q(i, \alpha)], \quad P(i)_\beta = \mathbb{K}[Q(i, \beta)]$$

Όμως $|Q(1, 1)| = 1$ μονοπάτι, $|Q(1, 2)| = 1$ μονοπάτι, $|Q(1, 3)| = 1$ μονοπάτι άρα

$$P(1)_1 = P(1)_2 = P(1)_3 = \mathbb{K}$$

Επίσης

$$P(1)_\alpha : P(1)_1 \rightarrow P(1)_2, \quad P(1)_\beta : P(1)_2 \rightarrow P(1)_3$$

Όμως

$$Q(1, \alpha) : Q(1, 1) \rightarrow Q(1, 2)$$

είναι η απεικόνιση με τύπο $Q(1, \alpha)(e) = e\alpha$ όπου e είναι το τετριμμένο μονοπάτι με $s(e) = 1 = t(e)$. Άρα

$$P(1)_\alpha = \mathbb{K}[Q(1, \alpha)] : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

με βάσεις αντίστοιχα $\{e\}$ και $\{\alpha\}$. Άρα

$$P(1)_\alpha = 1_{\mathbb{K}}$$

Ακόμη

$$Q(1, \beta) : Q(1, 2) \rightarrow Q(1, 3)$$

είναι η απεικόνιση με τύπο $Q(1, \beta)(\alpha) = \beta\alpha$. Άρα

$$P(1)_\beta = \mathbb{K}[Q(1, \beta)] : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

με βάσεις αντίστοιχα $\{\alpha\}$ και $\{\beta\alpha\}$. Άρα

$$P(1)_\beta = 1_{\mathbb{K}}$$

αφου αν δούμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \langle \alpha \rangle & \xrightarrow{\sim} & \langle 1 \rangle \\ f \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbb{K}} \\ \langle \beta\alpha \rangle & \xrightarrow{\sim} & \langle 1 \rangle \end{array}$$

είναι μεταθετικό, όπου f είναι η απεικόνιση $f : \langle \alpha \rangle \rightarrow \langle \beta\alpha \rangle$ μεταξύ των βάσεων και $\langle 1 \rangle$ είναι η βάση του \mathbb{K} χώρου. Άρα $f = 1_{\mathbb{K}}$. Σημειώνουμε οτι η απεικόνιση

$$\langle \alpha \rangle \xrightarrow{\sim} \langle 1 \rangle, \quad k\alpha \mapsto k$$

όπου $k \in \mathbb{K}$ είναι ισομορφισμός. Άρα

$$P(1) : \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$



είναι η προβολική αναπαράσταση για την κορυφή 1. Ανάλογα μπορούμε να εξετάσουμε και για τις κορυφές 2 και 3. Δηλαδή για την κορυφή 2 θα έχουμε $|Q(2, 1)| = 0$, $|Q(2, 2)| = 1$, $|Q(2, 3)| = 1$. Άρα

$$P(2)_1 = 0, \quad P(2)_2 = P(2)_3 = \mathbb{K}$$

και

$$\begin{aligned} P(2)_\alpha : P(2)_1 &\rightarrow P(2)_2 \Rightarrow P(2)_\alpha : 0 \rightarrow \mathbb{K} \\ P(2)_\beta : P(2)_2 &\rightarrow P(2)_3 \Rightarrow P(2)_\beta : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \end{aligned}$$

Άρα

$$P(2) : 0 \xrightarrow{0} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$

Ενώ για την κορυφή 3 θα έχουμε

$$P(3) : 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{K}$$

Θα μελετήσουμε τώρα την $I(1)$. Έχουμε να μελετήσουμε για κάθε κορυφή $j \in Q_0 = \{1, 2, 3\}$ τους $I(1)_j$ διανυσματικούς χώρους και για κάθε βέλος $\gamma \in Q_1 = (\alpha, \beta)$ τις απεικονίσεις $I(1)_\gamma$. Δηλαδή

$$I(1)_1 = D\mathbb{K}[Q(1, 1)], \quad I(1)_2 = D\mathbb{K}[Q(1, 2)], \quad I(1)_3 = D\mathbb{K}[Q(1, 3)]$$

και

$$I(i)_\alpha = D\mathbb{K}[Q(i, \alpha)], \quad I(i)_\beta = D\mathbb{K}[Q(i, \beta)]$$

Όμως $|Q(1, 1)| = 1$ μονοπάτι και $|Q(1, 2)| = |Q(1, 3)| = 0$ μονοπάτι άρα

$$I(1)_1 = \mathbb{K}, \quad I(1)_2 = I(1)_3 = 0$$

και

$$\begin{aligned} I(1)_\alpha : I(1)_1 &\rightarrow I(1)_2 \Rightarrow I(1)_\alpha : \mathbb{K} \rightarrow 0 \\ I(1)_\beta : I(1)_2 &\rightarrow I(1)_3 \Rightarrow I(1)_\beta : 0 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Άρα

$$I(1) : \mathbb{K} \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

Για την κορυφή 2 θα έχουμε

$$I(2)_1 = D\mathbb{K}[Q(2, 1)], \quad I(2)_2 = D\mathbb{K}[Q(2, 2)], \quad I(2)_3 = D\mathbb{K}[Q(2, 3)]$$

και

$$I(i)_\alpha = D\mathbb{K}[Q(i, \alpha)], \quad I(i)_\beta = D\mathbb{K}[Q(i, \beta)]$$

Δηλαδή $|Q(2, 1)| = |Q(2, 2)| = 1$, $|Q(2, 3)| = 0$. Άρα

$$I(2)_1 = I(2)_2 = \mathbb{K}, \quad I(2)_3 = 0$$

Όμως

$$Q(2, \alpha) : Q(2, 1) \rightarrow Q(2, 2)$$

είναι η απεικόνιση με τύπο $Q(2, \alpha)(\alpha^{op}) = \alpha\alpha^{op} = e$ όπου e είναι το τετριμμένο μονοπάτι με $s(e) = 1 = t(e)$. Άρα

$$I(2)_\alpha = D\mathbb{K}[Q(2, \alpha)] : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$



με βάσεις αντίστοιχα $\{\alpha^{op}\}$ και $\{e\}$. Άρα

$$I(2)_\alpha = 1_{\mathbb{K}}$$

Ακόμη

$$I(2)_\beta = D\mathbb{K}[Q(2, \beta)] : \mathbb{K} \rightarrow 0$$

άρα $I(2)_\beta = 0$. Άρα

$$I(2) : \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{0} 0$$

Για την κορυφή 3 θα έχουμε

$$I(3)_1 = D\mathbb{K}[Q(3, 1)], \quad I(3)_2 = D\mathbb{K}[Q(3, 2)], \quad I(3)_3 = D\mathbb{K}[Q(3, 3)]$$

και

$$I(i)_\alpha = D\mathbb{K}[Q(i, \alpha)], \quad I(i)_\beta = D\mathbb{K}[Q(i, \beta)]$$

Δηλαδή $|Q(3, 1)| = |Q(3, 2)| = |Q(3, 3)| = 1$. Άρα

$$I(3)_1 = I(3)_2 = I(3)_3 = \mathbb{K}$$

Όμως

$$Q(3, \alpha) : Q(3, 1) \rightarrow Q(3, 2)$$

είναι η απεικόνιση με τύπο $Q(3, \alpha)(\alpha^{op}\beta^{op}) = \alpha\alpha^{op}\beta^{op}$. Άρα

$$I(3)_\alpha = \mathbb{K}[Q(3, \alpha)] : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

με βάσεις αντίστοιχα $\{\alpha^{op}\beta^{op}\}$ και $\{\beta^{op}\}$. Άρα

$$I(3)_\alpha = 1_{\mathbb{K}}$$

αφου αν δούμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \langle \alpha^{op}\beta^{op} \rangle & \xrightarrow{\sim} & \langle 1 \rangle \\ f \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbb{K}} \\ \langle \beta^{op} \rangle & \xrightarrow{\sim} & \langle 1 \rangle \end{array}$$

είναι μεταθετικό, όπου f είναι η απεικόνιση $f : \langle \alpha^{op}\beta^{op} \rangle \rightarrow \langle \beta^{op} \rangle$ μεταξύ των βάσεων και $\langle 1 \rangle$ είναι η βάση του \mathbb{K} χώρου. Άρα $f = 1_{\mathbb{K}}$. Σημειώνουμε ότι η απεικόνιση

$$\langle \beta^{op} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle 1 \rangle, \quad k\beta^{op} \mapsto k$$

όπου $k \in \mathbb{K}$ είναι ισομορφισμός. Ακόμη

$$Q(3, \beta) : Q(3, 2) \rightarrow Q(3, 3)$$

είναι η απεικόνιση με τύπο $Q(3, \beta)(\beta^{op}) = \beta\beta^{op} = e$ όπου e είναι το τετριμμένο μονοπάτι με $s(e) = 1 = t(e)$. Άρα

$$I(3)_\beta = D\mathbb{K}[Q(3, \beta)] : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

με βάσεις αντίστοιχα $\{\beta^{op}\}$ και $\{e\}$. Άρα

$$I(3)_\beta = 1_{\mathbb{K}}$$

Άρα

$$I(3) : \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$

είναι η injective αναπαράσταση για την κορυφή 3.



Ακολουθούν προτάσεις που αφορούν τις ιδιότητες των προβολικών και injective αναπαραστάσεων.

Πρόταση 1.3.6. Έστω X αναπαράσταση της φαρέτρας Q . Τότε έχουμε τους φυσικούς ισομορφισμούς

$$\text{Hom}(P(i), X) \cong X_i$$

και

$$\text{Hom}(X, I(i)) \cong DX_i$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τον πρώτο ισομορφισμό. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\delta : \text{Hom}(P(i), X) \rightarrow X_i$$

με τύπο $\delta(\phi : P(i) \rightarrow X) = \phi_i(e_i)$ όπου $\phi = (\phi_i)_{i \in Q_0}$ είναι ένας μορφισμός αναπαραστάσεων

$$\phi_i : P(i)_j \rightarrow X_i \Rightarrow \phi_i : \mathbb{K}[Q(i, j)] \rightarrow X_i$$

για κάθε κορυφή i .

Η απεικόνιση δ είναι 1-1 αφού

$$\text{Ker } \delta = \{\phi \in \text{Hom}(P(i), X) / \delta(\phi) = 0\} \Rightarrow$$

$$\text{Ker } \delta = \{\phi \in \text{Hom}(P(i), X) / \phi_i(e_i) = 0\} \Rightarrow$$

$$\text{Ker } \delta = \{\phi \in \text{Hom}(P(i), X) / \phi_i = 0\} \Rightarrow \text{Ker } \delta = 0$$

Έστω τώρα $\vec{x}_i \in X_i$ με $\vec{x}_i \neq 0$. Θεωρώ τότε τον χώρο $\langle \vec{x}_i \rangle$ και τον ισομορφισμό

$$\mathbb{K} \xrightarrow{\sim} \langle \vec{x}_i \rangle, k \mapsto k\vec{x}_i$$

Έτσι $\phi_i(k) = k\vec{x}_i \in X_i$. Τώρα για κάθε βέλος $\alpha : s(\alpha) \rightarrow t(\alpha)$ το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} P(i)_{s(\alpha)} & \xrightarrow{P(i)_\alpha} & P(i+1)_{t(\alpha)} \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \phi_{i+1} \\ X_i & \xrightarrow{X_\alpha} & X_{i+1} \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

Δηλαδή $\phi_{i+1}P(i)_\alpha = X_\alpha\phi_i$ για κάθε κορυφή i . Άρα $\phi_{i+1}P(i)_\alpha(k) = X_\alpha\phi_i(k) = X_\alpha(kx_i)$ για κάθε κορυφή i . Συνεπώς για κάθε $\vec{x}_i \in X_i$ βρήκαμε μορφισμό $\phi = (\phi_i)_{i \in Q_0}$ με την ιδιότητα

$$\phi_{i+1}P(i)_\alpha = X_\alpha\phi_i$$

Έτσι η απεικόνιση δ είναι επί και συνεπώς ισομορφισμός.

Πριν αποδείξουμε το δεύτερο ισομορφισμό

$$\text{Hom}(X, I(i)) \cong DX_i$$

θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ένα σημαντικό λήμμα.



Λήμμα 1.3.7. Έστω X αναπαράσταση της φαρέτρας Q και Y αναπαράσταση της δυικής φαρέτρας Q^{op} . Τότε υπάρχει μονομορφισμός

$$\varepsilon_X : X \rightarrow D^2 X$$

με τύπο $\varepsilon_X(x)(\phi) = \phi(x)$ για $x \in X$ και $\phi \in DX$, ο οποίος επάγει κανονικό ισομορφισμό

$$\text{Hom}(Y, DX) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X, DY)$$

$$\phi : Y \rightarrow DX \longrightarrow (D\phi) \circ \varepsilon_X$$

Εδώ D^2 ορίζει την διπλή δυκότητα της αναπαράστασης X .

Απόδειξη. Έστω $X = (X_i, X_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ αναπαράσταση της φαρέτρας Q και έστω $Y = (Y_i, Y_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ αναπαράσταση της δυικής φαρέτρας Q^{op} . Τότε υπάρχει μονομορφισμός

$$\varepsilon_{X_i} : X_i \rightarrow (D^2 X)_i = D^2(X_i)$$

με τύπο $\varepsilon_{X_i}(x)(\phi_i) = \phi_i(x)$ για $x \in X_i$ και $\phi_i \in DX_i$ και αντίστοιχα

$$\varepsilon_{Y_i} : Y_i \rightarrow (D^2 Y)_i = D^2(Y_i)$$

με τύπο $\varepsilon_{Y_i}(y)(\psi_i) = \psi_i(y)$ για $y \in Y_i$ και $\psi_i \in DY_i$ για κάθε $i \in Q_0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\delta : \text{Hom}(Y, DX) \longrightarrow \text{Hom}(X, DY)$$

$$\phi \longrightarrow \delta(\phi) = (D\phi) \circ \varepsilon_X$$

είναι ισομορφισμός. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε τις απεικονίσεις

$$\delta_i : \text{Hom}(Y_i, DX_i) \rightarrow \text{Hom}(X_i, DY_i)$$

για κάθε $i \in Q_0$, όπου X_i, Y_i είναι διανυσματικοί χώροι με $i \in Q_0$. Όμως για κάθε ζεύγος X_i, Y_i είναι διανυσματικών χώρων ο κανονικός μονομορφισμός $\varepsilon_{X_i} : X_i \rightarrow (D^2 X)_i = D^2(X_i)$ με τύπο $\varepsilon_{X_i}(x)(\phi_i) = \phi_i(x)$ για $x \in X_i$ και $\phi_i \in DX_i$ επάγει ισομορφισμό

$$\delta_i : \text{Hom}(Y_i, DX_i) \rightarrow \text{Hom}(X_i, DY_i)$$

για κάθε $i \in Q_0$. Αφού λοιπόν κάθε δ_i είναι ισομορφισμός συνεπάγεται ότι $\delta = (\delta_i)_{i \in Q_0}$ είναι ισομορφισμός. \square

Επιστρέφουμε λοιπόν στην σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε και με χρήση του παραπάνω λήμματος έχουμε

$$\text{Hom}(X, I(i)) = \text{Hom}(X, D\bar{P}(i)) \cong \text{Hom}(\bar{P}(i), DX) \cong DX_i \Rightarrow$$

$$\text{Hom}(X, I(i)) \cong DX_i$$

\square

Πρόταση 1.3.8. 1. Οι αναπαραστάσεις $P(i)$ για κάθε $i \in Q_0$ είναι ανα ζεύγη μη-ισόμορφες.



2. Οι αναπαραστάσεις $I(i)$ για κάθε $i \in Q_0$ είναι ανα ζεύγη μη-ισόμορφες.

Απόδειξη. 1. Έστω i, j δυο κορυφές με $i \neq j$. Υποθέτουμε ότι $P(i) \simeq P(j)$. Γνωρίζουμε ότι η απλή αναπαράσταση είναι της μορφής $S(i) = (S(i)_j, S(i)_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ με

$$S(i)_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \mathbb{K}, & i = j \end{cases}$$

και

$$S(i)_\alpha = 0$$

για κάθε $j \in Q_0$ και $\alpha \in Q_1$. Έτσι χρησιμοποιώντας την Πρόταση (1.3.6) έχουμε

$$\mathbb{K} \cong S(i)_i \cong \text{Hom}(P(i), S(i)) \cong \text{Hom}(P(j), S(i)) \cong S(i)_j = 0$$

Άτοπο. Άρα $i = j$ και έτσι $P(i) \simeq P(j)$ μόνο σε αυτή την περίπτωση.

2. Παρόμοια αποδεικνύεται και η δεύτερη πρόταση. Δηλαδή έστω i, j δυο κορυφές με $i \neq j$ και $I(i) \simeq I(j)$. Τότε

$$\mathbb{K} \cong DS(i)_i \cong \text{Hom}(S(i), I(i)) \cong \text{Hom}(S(i), I(j)) \cong DS(i)_j = 0$$

Άτοπο. Άρα $I(i) \simeq I(j)$ μόνο στην περίπτωση $i = j$. Υπενθυμίζουμε ότι $DS(i)$ ορίζει την δυική αναπαράσταση της αναπαράστασης $S(i)$. □

Πρόταση 1.3.9. Έστω Q φαρέτρα με μη προσανατολισμένους κύκλους. Τότε για μια κορυφή i της φαρέτρας, οι $P(i), I(i)$ είναι πεπερασμένης διάστασης με

$$\text{End}(P(i)) \cong \mathbb{K} \cong \text{End}(I(i))$$

Απόδειξη. Αφού η φαρέτρα Q δεν έχει προσανατολισμένους κύκλους, το σύνολο $Q(i, j)$ των μονοπατιών ξ με αρχή την κορυφή $s(\xi) = i$ και τέλος $t(\xi) = j$ είναι πεπερασμένο για κάθε ζεύγος κορυφών i, j . Υπενθυμίζουμε ότι $\text{End}(X)$ είναι το σύνολο των ενδομορφισμών $X \rightarrow X$. Άρα χρησιμοποιώντας την πρόταση (1.3.6) έχουμε

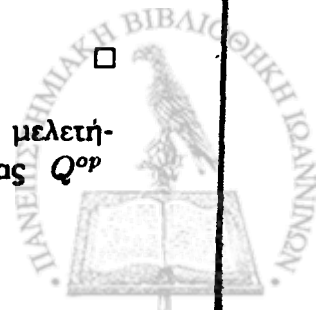
$$\text{End}(P(i)) \cong \text{Hom}(P(i), P(i)) \cong P(i)_i = \mathbb{K}[Q(i, i)] = \mathbb{K}$$

αφού το σύνολο $Q(i, i)$ έχει μόνο ένα στοιχείο, το τετριμμένο μονοπάτι e_i μήκους 0 με $s(e_i) = i = t(e_i)$. Ομοίως

$$\begin{aligned} \text{End}(I(i)) &\cong \text{Hom}(I(i), I(i)) \cong DI(i)_i = D(D\mathbb{K}[Q(i, i)]) = \\ &= D^2(\mathbb{K}[Q(i, i)]) = \mathbb{K}[Q(i, i)] = \mathbb{K} \end{aligned}$$

□

Πρίν κλείσουμε την παράγραφο ας δώσουμε ένα παράδειγμα για να μελετήσουμε τις προβολικές και injective αναπαραστάσεις της δυικής φαρέτρας Q^{op} μίας φαρέτρας Q .



Παράδειγμα 1.3.10. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet & \xrightarrow{\beta} & \bullet & \xrightarrow{\gamma} & \bullet \end{array}$$

Τότε όπως είδαμε η δυική φαρέτρα Q^{op} της Q θα είναι:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ \bullet & \xleftarrow{\alpha^{op}} & \bullet & \xleftarrow{\beta^{op}} & \bullet & \xleftarrow{\gamma^{op}} & \bullet \end{array}$$

Η προβολική αναπαράσταση $P(1)$ της φαρέτρας Q θα είναι

$$\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$

και η προβολική αναπαράσταση $\overline{P(1)}$ της φαρέτρας Q^{op} θα είναι

$$\mathbb{K} \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow 0$$

Αντίστοιχα η injective αναπαράσταση $I(1)$ της φαρέτρας Q θα είναι

$$\mathbb{K} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

και η injective αναπαράσταση $I(1)$ της φαρέτρας Q^{op} θα είναι

$$\mathbb{K} \xleftarrow{1} \mathbb{K} \xleftarrow{1} \mathbb{K} \xleftarrow{1} \mathbb{K}$$



Κεφάλαιο 2

Δακτύλιοι, Πρότυπα και Κατηγορίες

Θα ξεκινήσουμε αυτό το κεφάλαιο με κάποιες βασικές έννοιες δακτυλίων και θα συνεχίσουμε με την βασική θεωρία προτύπων που αποτελούν γενίκευση των διανυσματικών χώρων της Γραμμικής Άλγεβρας με διαφορά ότι στο βαθμωτό πολλαπλασιασμό επιτρέπεται να λαμβάνουμε στοιχεία από ένα τυχαίο δακτύλιο και όχι απαραίτητα από ένα σώμα. Θα συνεχίσουμε με την βασική θεωρία κατηγοριών και συναρτητών και θα καλύψουμε ένα μεγάλο μέρος της θεωρίας αυτής και για λόγους πληρότητας ενώ στην επόμενη παράγραφο θα ασχοληθούμε με τους δακτύλιους του Artin. Θα κλείσουμε το κεφάλαιο με την μελέτη αλγεβρών του Artin και των πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων τους. Ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό της θεωρίας των Artin αλγεβρών σε αντίθεση με αριστερούς δακτυλίου του Artin είναι ότι οι δακτύλιοι ενδομορφισμών End των πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων είναι πάλι άλγεβρες του Artin. Μπορούμε λοιπόν να μετατρέπουμε προβλήματα που περιέχουν μόνο ένα πεπερασμένο αριθμό προτύπων πάνω από μια άλγεβρα του Artin, σε προβλήματα που περιέχουν πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα πάνω από μια άλγεβρα του Artin. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται projectivization και διευκρινίζεται κυρίως με το θεώρημα Krull-Schmidt το οποίο θα αποδείξουμε. Για τις δύο τελευταίες παραγράφους μελετήσαμε το [2]. Ας ξεκινήσουμε με τη βασική θεωρία προτύπων.

2.1 Θεωρία Δακτυλίων και Προτύπων

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου ένα πρότυπο είναι απλώς ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός δακτυλίου R . Ο ορισμός του προτύπου είναι ίδιος με τον ορισμό του διανυσματικού χώρου χωρίς όμως να απαιτούμε ο R να είναι σώμα, αλλά οποιοσδήποτε δακτύλιος. Πριν δώσουμε τον ορισμό του προτύπου ας δώσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς από τη θεωρία δακτυλίων.

Ορισμός 2.1.1. Ένας δακτύλιος $(R, +, \cdot)$ είναι ένα σύνολο μαζί με δυο διμελείς πράξεις $+$ και \cdot , τις οποίες τις αποκαλούμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό αντίστοιχα, ορισμένες στο R ως

$$+ : R \times R \rightarrow R, (a, b) \mapsto a + b, \quad \cdot : R \times R \rightarrow R, (a, b) \mapsto a \cdot b$$



με τις ιδιότητες

1. $H (R, +)$ είναι αβελιανή ομάδα με μηδενικό στοιχείο το $0 \in R$
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

για κάθε $a, b, c \in R$. Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός και ισχύουν ο δεξιός και αριστερός επιμεριστικός νόμος. Ο δακτύλιος R καλείται **αντιμεταθετικός** αν και μόνον αν $a \cdot b = b \cdot a$ για κάθε $a, b \in R$.

Παρατήρηση 2.1.2. Μελετούμε δακτυλίους οι οποίοι περιέχουν ένα στοιχείο $1 \in R$ με $1 \neq 0$ και $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ για κάθε $a \in R$. Αυτό το στοιχείο είναι μοναδικό και καλείται μονάδα του δακτυλίου R .

Ορισμός 2.1.3. Έστω $(R, +, \cdot)$ δακτύλιος και έστω $S \subseteq R$. Το υποσύνολο S καλείται **υποδακτύλιος** του R αν και μόνον αν

1. $0, 1 \in S$
2. $r_1 + r_2 \in S$
3. $r_1 \cdot r_2 \in S$

για κάθε $r_1, r_2 \in S$.

Ορισμός 2.1.4. Έστω $f : R \rightarrow S$ μια απεικόνιση μεταξύ των δακτυλίων R, S . Η f καλείται **ομομορφισμός δακτυλίων** αν και μόνον αν

1. $f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)$
2. $f(r_1 \cdot r_2) = f(r_1) \cdot f(r_2)$
3. $f(1_R) = 1_S$

για κάθε $r_1, r_2 \in R$.

Παρατήρηση 2.1.5. Έστω $f : R \rightarrow S$ ομομορφισμός δακτυλίων. Τότε

$$\text{Ker } f = \{r \in R \mid f(r) = 0\} \subseteq R$$

είναι ιδεώδες του R .

Θα περάσουμε τώρα στις βασικές έννοιες προτύπων.

Ορισμός 2.1.6. Έστω R δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο το 1.

1. Ένα **αριστερό R -πρότυπο** M είναι μια αβελιανή ομάδα $(M, +)$ μαζί με μια απεικόνιση

$$\phi : R \times M \rightarrow M, \quad (r, m) \mapsto \phi(r, m) = rm$$

τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες

$$(a') \text{ για κάθε } r \in R, m_1, m_2 \in M : r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$$

$$(b') \text{ για κάθε } r, s \in R, m \in M : (r + s)m = rm + sm$$



(γ') για κάθε $r, s \in R, m \in M$: $(rs)m = r(sm)$

(δ') για κάθε $m \in M$: $1m = m$

2. Ένα δεξιό R -πρότυπο N είναι μια αβελιανή ομάδα $(N, +)$ μαζί με μια απεικόνιση

$$\phi : R \times N \rightarrow N, (n, r) \mapsto \phi(n, r) = nr$$

τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες

(α') για κάθε $r \in R, n_1, n_2 \in N$: $(n_1 + n_2)r = n_1r + n_2r$

(β') για κάθε $r, s \in R, n \in N$: $n(r + s) = nr + ns$

(γ') για κάθε $r, s \in R, n \in N$: $n(rs) = (nr)s$

(δ') για κάθε $n \in N$: $n1 = n$

Παράδειγμα 2.1.7. Αν $R = \mathbb{Z}$ τότε τα \mathbb{Z} -πρότυπα συμπίπτουν με τις αβελιανές ομάδες, αφού αν M : \mathbb{Z} -πρότυπο τότε απο τον ορισμό M : αβελιανή ομάδα ενώ αν $(M, +)$ είναι μια αβελιανή ομάδα τότε ορίζω μια απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M, (n, m) \mapsto \phi(n, m) = \begin{cases} m + \dots + m = nm, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ (-m) + \dots + (-m), & n < 0 \end{cases}$$

και έτσι η $(M, +)$ με την παραπάνω απεικόνιση γίνεται M : \mathbb{Z} -πρότυπο.

Ορισμός 2.1.8. Έστω M ένα (αριστερό) \mathbb{Z} -πρότυπο. Ένα υποσύνολο $N \subseteq M$ καλείται R -υποπρότυπο του M αν και μόνον αν η $(N, +)$ είναι υποομάδα της αβελιανής ομάδας $(M, +)$ και για κάθε $r \in R, n \in N$ να ισχύει $rn \in N$.

Παρατήρηση 2.1.9. Το 0 και το M είναι R -υποπρότυπα και τα ονομάζουμε τετριμμένα υποπρότυπα. Έστω S ένα υποσύνολο του R -υποπρότυπου M . Έστω $A = \{N \mid N : \text{υποπρότυπο του } M \text{ που περιέχει το } S\}$. Έστω $K = \bigcap_{N \in A} N$. Τότε το K είναι το μικρότερο υποπρότυπο του M που περιέχει το S και το συμβολίζουμε με $\langle S \rangle$. Καλείται το μικρότερο υποπρότυπο που παράγεται απο το S .

Ορισμός 2.1.10. Ένα (αριστερό) R -πρότυπο M ονομάζεται πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο αν και μόνον αν υπάρχει $X \subseteq M$ με

$$\langle X \rangle = M$$

ισοδύναμα, αν και μόνον αν υπάρχουν

$$m_1, \dots, m_n \in M : \langle m_1, \dots, m_n \rangle = M$$

Δηλαδή για κάθε $m \in M \exists r_1, \dots, r_n \in R$ τέτοια ώστε $m = r_1 m_1 + \dots + r_n m_n$.

Παρατήρηση 2.1.11. Θα συμβολίζουμε με $R\text{-Mod}$ το σύνολο όλων των αριστερών R -προτύπων και με $\text{Mod-}R$ το σύνολο όλων των δεξιών R -προτύπων.

Ορισμός 2.1.12. Έστω $M, N \in R\text{-Mod}$. Μια απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ καλείται ομομορφισμός R -προτύπων αν και μόνον αν ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες

$$1. \text{ για κάθε } m_1, m_2 \in M \quad f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$$



2. για κάθε $r \in R, m \in M$ $f(rm) = rf(m)$

Έστω R δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και M, N (αριστερά) R -πρότυπα. Έστω ακόμη $f : M \rightarrow N$ ομομορφισμός.

Ορισμός 2.1.13. Ο πυρήνας του f ορίζεται να είναι :

$$\text{Ker } f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$$

και να είναι υποπρότυπο του M .

Η εικόνα του f ορίζεται να είναι :

$$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in M\} \subseteq N$$

και να είναι υποπρότυπο του N .

Ο f καλείται **μονομορφισμός** αν και μόνον αν $\text{Ker } f = \{0\}$

Ο f καλείται **επιμορφισμός** αν και μόνον αν $\text{Im } f = N$

Ο f καλείται **ισομορφισμός** αν και μόνον αν υπάρχει ομομορφισμός προτύπων $g : N \rightarrow M$ τέτοιος ώστε

$$fg = 1_N \text{ και } gf = 1_M.$$

Θα κατασκευάσουμε τώρα το ευθύ γινόμενο προτύπων και έπειτα το ευθύ άθροισμα. Έστω $\{M_i\}_{i \in I}$ συλλογή R -προτύπων, όπου το σύνολο δεικτών I γενικά είναι άπειρο.

Ορισμός 2.1.14. Το ευθύ γινόμενο της συλλογής προτύπων $\{M_i\}_{i \in I}$ είναι ένα R -πρότυπο P μαζί με ομομορφισμούς προτύπων

$$\pi_i : P \rightarrow M_i$$

για κάθε $i \in I$ έτσι ώστε :

Αν D είναι ένα R -πρότυπο και $\phi_i : D \rightarrow M_i$ ομομορφισμοί για κάθε $i \in I$ τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\theta : D \rightarrow P$ με $\pi_i \circ \theta = \phi_i$ για κάθε $i \in I$.

Ορίζουμε

$$P = \prod_{i \in I} M_i = \{(m_i)_{i \in I} \mid m_i \in M_i, \forall i \in I\}$$

Το P είναι R -πρότυπο με πράξεις

$$(m_i)_{i \in I} + (m'_i)_{i \in I} = (m_i + m'_i)_{i \in I}$$

$$r(m_i)_{i \in I} = (rm_i)_{i \in I}$$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε τους ομομορφισμούς π_i οπότε και ορίζουμε τους ομομορφισμούς R -προτύπων ως εξής :

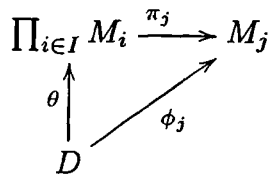
$$\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j, (m_i)_{i \in I} \mapsto m_j$$

για κάθε $j \in I$.



Έστω τώρα D ένα R -πρότυπο και $\phi_j : D \rightarrow M_j$ ομομορφισμοί προτύπων για κάθε $j \in I$.

Άρα ορίζουμε απεικόνιση $\theta : D \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ με $\theta(x) = (\phi_i(x))_{i \in I}$ η οποία είναι εύκολο να δείξουμε ότι είναι ομομορφισμός προτύπων. Διαγραμματικά :



και έχουμε

$$(\pi_j \circ \theta)(x) = \pi_j(\theta(x)) = \pi_j((\phi_i(x))_{i \in I}) = \phi_j(x)$$

για κάθε $x \in D$. Άρα το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Συνεπώς υπάρχει ομομορφισμός προτύπων θ . Ας δείξουμε ότι είναι και μοναδικός. Έστω

$$\theta' : D \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$$

ομομορφισμός τέτοιος ώστε $\pi_j \circ \theta' = \phi_j$ για κάθε $j \in I$. Για κάθε $x \in D$ ισχύει $\theta'(x) = (m_i)_{i \in I}$. Έχουμε λοιπόν

$$\pi_j(\theta'(x)) = \pi_j[(m_i)_{i \in I}]$$

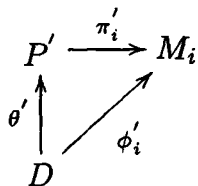
$$\phi_j(x) = m_j$$

για κάθε $j \in I$. Τότε $\theta'(x) = (\phi_i(x))_{i \in I} = \theta(x)$ για κάθε $x \in D$.

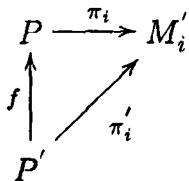
Μένει να δείξουμε ότι το P είναι μοναδικό πρότυπο με αυτή την ιδιότητα. Έστω P' είναι ένα άλλο πρότυπο μαζί με ομομορφισμούς

$$\pi'_i : P' \rightarrow M_i$$

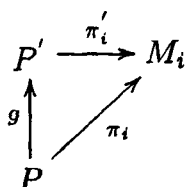
για κάθε $i \in I$ έτσι ώστε το διάγραμμα :



Έστω τώρα P ευθύ γινόμενο. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f : P' \rightarrow P$ έτσι ώστε $\pi_i f = \pi'_i$ για κάθε $i \in I$. Διαγραμματικά :



Όμως P' είναι και αυτό ευθύ γινόμενο. Δηλαδή υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $g : P \rightarrow P'$ έτσι ώστε $\pi'_i g = \pi_i$ για κάθε $i \in I$. Διαγραμματικά :



Ακόμη υπάρχει και ο ομομορφισμός $1_P : P \rightarrow P$ έτσι ώστε $\pi_i 1_P = \pi_i$ για κάθε $i \in I$. Διαγραμματικά :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_i} & M_i \\ \uparrow fg & \nearrow \pi_i & \\ P & & \end{array}$$

Άρα $\pi_i fg = \pi_i' g = \pi_i$ για κάθε $i \in I$ και λόγω μοναδικότητας $fg = 1_P$.
όπως και ο ομομορφισμός $1_{P'} : P' \rightarrow P'$ έτσι ώστε $\pi_i' 1_{P'} = \pi_i'$ για κάθε $i \in I$.
Διαγραμματικά :

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{\pi_i'} & M_i \\ \uparrow gf & \nearrow \pi_i & \\ P' & & \end{array}$$

Άρα $\pi_i' gf = \pi_i' f = \pi_i'$ για κάθε $i \in I$ και λόγω μοναδικότητας $gf = 1_{P'}$. Άρα P και P' είναι ισόμορφα.

Ορισμός 2.1.15. Έστω $\{M_i\}_{i \in I}$ μια συλλογή R -προτύπων. Το ευθύ άθροισμα της συλλογής $\{M_i\}_{i \in I}$ είναι ένα R -πρότυπο P μαζί με ομομορφισμούς προτύπων

$$\lambda_i : M_i \rightarrow P$$

για κάθε $i \in I$ έτσι ώστε :

Αν D είναι ένα R -πρότυπο και $\phi_i : M_i \rightarrow D$ ομομορφισμοί για κάθε $i \in I$ τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\theta : P \rightarrow D$ με $\theta \circ \lambda_i = \phi_i$ για κάθε $i \in I$.
Αν το δούμε και διαγραμματικά :

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\lambda_i} & P \\ \downarrow \phi_i & \searrow \theta & \\ D & & \end{array}$$

απαιτούμε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό. Ορίζουμε

$$P = \bigoplus_{i \in I} M_i = \{(m_i) \in \prod_{i \in I} M_i \mid m_i = 0 \text{ σχεδόν παντού}\}$$

Το P είναι R -πρότυπο με πράξεις ακριβώς όπως και πριν

$$(m_i)_{i \in I} + (m'_i)_{i \in I} = (m_i + m'_i)_{i \in I}$$

$$r(m_i)_{i \in I} = (rm_i)_{i \in I}$$

και μάλιστα $\bigoplus_{i \in I} M_i \subseteq \prod_{i \in I} M_i$ είναι υπομάδα και υποπρότυπο. Θέλουμε τώρα να κατασκευάσουμε τους ομομορφισμούς λ_j για κάθε $j \in I$

$$\lambda_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$$



με $\lambda_j(x) = (m_i)_{i \in I}$ όπου $m_i = \begin{cases} x, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ και ακόμη και τον ομομορφισμό $\theta : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow D$. Ορίζουμε λοιπόν

$$(m_i)_{i \in I} = (m_1, 0, \dots) + \dots + (0, \dots, 0, m_n, 0, \dots) = \lambda_1(m_1) + \dots + \lambda_n(m_n) = \sum_{j \in I} \lambda_j(m_j)$$

και ακόμη

$$\theta((m_i)_{i \in I}) = \theta\left(\sum_{j \in I} \lambda_j(m_j)\right) = \sum_{j \in I} \theta(\lambda_j(m_j)) = \sum_{j \in I} \phi_j(m_j)$$

Επειδή οι ϕ_j είναι ομομορφισμοί προτύπων και ο θ είναι ομομορφισμός προτύπων τότε για κάθε $x \in M_j$ θα έχουμε

$$\theta \circ \lambda_j(x) = \theta(\lambda_j(x)) = \phi_j(x)$$

για κάθε $j \in I$. Έτσι $\theta \circ \lambda_j = \phi_j$.

Θα δείξουμε ότι ο θ είναι μοναδικός. Έστω $\theta' : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow D$ ένας άλλος ομομορφισμός τέτοιος ώστε $\theta' \circ \lambda_j = \phi_j$ για κάθε $j \in I$. Τότε για κάθε $(m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ θα έχουμε

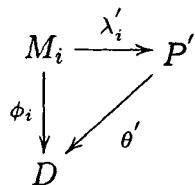
$$\theta'((m_i)_{i \in I}) = \theta'\left(\sum_{j \in I} \lambda_j(m_j)\right) = \sum_{j \in I} \theta'(\lambda_j(m_j)) = \sum_{j \in I} \phi_j(m_j) = \theta((m_i)_{i \in I})$$

Άρα $\theta = \theta'$ για κάθε $i \in I$.

Μένει να δείξουμε ότι το P είναι μοναδικό R -πρότυπο με την ιδιότητα του ευθέως άθροισματος. Έστω P' ένα άλλο πρότυπο μαζί με ομομορφισμούς $\lambda_i : M_i \rightarrow P'$ για κάθε $i \in I$. Τότε αν D είναι ένα R -πρότυπο και $\phi_i : M_i \rightarrow D$ ομομορφισμοί θα υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

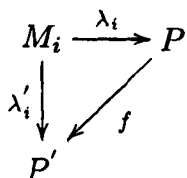
$$\theta' : P' \rightarrow D$$

με $\theta' \circ \lambda'_i = \phi_i$ για κάθε $i \in I$ και διαγραμματικά :



Απαιτούμε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

Όμως το P είναι ευθύ άθροισμα και έχει την ιδιότητα. Άρα υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f : P \rightarrow P'$ με $f \lambda_i = \lambda'_i$ για κάθε $i \in I$ και διαγραμματικά :



Απαιτούμε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό.



Επίσης P' είναι ευθύ άθροισμα άρα υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $g : P' \rightarrow P$ έτσι ώστε $g\lambda'_i = \lambda_i$ για κάθε $i \in I$ και διαγραμματικά :

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\lambda'_i} & P' \\ \lambda_i \downarrow & \searrow g & \\ P & & \end{array}$$

Απαιτούμε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό. Επίσης η ιδιότητα ισχύει και για τα P, P' . Άρα για το $P : g\lambda_i = g\lambda'_i = \lambda_i$ για κάθε $i \in I$ και διαγραμματικά

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\lambda_i} & P \\ \lambda_i \downarrow & \searrow gf & \\ P & & \end{array}$$

και λόγω μοναδικότητας έχουμε $gf = 1_P$. Παρόμοια για το $P' : fg\lambda'_i = f\lambda_i = \lambda'_i$ για κάθε $i \in I$ και διαγραμματικά

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\lambda'_i} & P' \\ \lambda'_i \downarrow & \searrow fg & \\ P' & & \end{array}$$

και λόγω μοναδικότητας έχουμε $fg = 1_{P'}$. Άρα P και P' ισόμορφα R -πρότυπα.

Ας μελετήσουμε τώρα δυο κλάσεις προτύπων, τα απλά και τα μη-αναλύσιμα πρότυπα καθώς και τις ιδιότητες τους.

Ορισμός 2.1.16. Έστω ένα (αριστερό) R -πρότυπο $M \neq 0$. Το M καλείται **απλό (simple)** αν και μόνον αν τα μόνα υποπρότυπα του M είναι τα 0 και M .

Πρόταση 2.1.17. Το M (αριστερό) R -πρότυπο είναι απλό αν και μόνον αν για κάθε $x \in M \setminus \{0\} : Rx = M$.

Απόδειξη. Έστω ένα απλό R -πρότυπο M και $x \in M \setminus \{0\}$ τότε $\{0\} \subseteq Rx \subseteq M$ με $Rx = \{rx \mid r \in R\}$. Επειδή το M είναι απλό έχουμε ότι

$$Rx = \{0\} \text{ ή } Rx = M$$

όμως $Rx \neq \{0\}$ γιατί $x \neq 0$. Άρα $Rx = M$.

Αντίστροφα έστω N υποπρότυπο του M και έστω $N \neq \{0\}$. Θα δείξουμε ότι $N = M$. Αφού $N \neq \{0\}$ σημαίνει ότι υπάρχει $x \in N : x \neq 0$ τότε $Rx = M$ υποπρότυπο του $N \subseteq M$ που σημαίνει $N = M$ και άρα το M είναι απλό. \square

Ορισμός 2.1.18. Ένα R -πρότυπο M καλείται **αναλύσιμο** αν και μόνον αν υπάρχουν A, B υποπρότυπα του M με $A, B \neq \{0\}$ και $M = A \oplus B$.

Ορισμός 2.1.19. Ένα R -πρότυπο M καλείται **μη-αναλύσιμο** αν και μόνον αν το $M = A \oplus B$ συνεπάγεται $A = \{0\}$ ή $B = \{0\}$.

Παρατήρηση 2.1.20. Αν M είναι απλό R -πρότυπο, τότε το M είναι **μη-αναλύσιμο**.

Ορισμός 2.1.21. Αν M είναι αριστερό R -πρότυπο, τότε

$$\text{End}_R(M) = \{\phi : M \rightarrow M \mid \phi \text{ ομομορφισμός}\}$$

είναι ένας δακτύλιος με πράξεις :

1. $\phi + \psi : M \rightarrow M$, $(\phi + \psi)(m) = \phi(m) + \psi(m)$
2. $\phi\psi : M \rightarrow M$, $(\phi\psi)(m) = \phi(\psi(m))$ για κάθε $\phi, \psi \in \text{End}_R(M)$, με μονάδα $1_{\text{End}_R(M)} = 1_M$ και καλείται **δακτύλιος ενδομορφισμών του M** .

Λήμμα 2.1.22. Αν M είναι απλό R -πρότυπο, τότε ο $\text{End}_R(M)$ είναι δακτύλιος διαίρεσης.

Απόδειξη. Έστω $\phi \in \text{End}_R(M)$ και $\phi \neq 0$. Τότε $\text{Ker } \phi$ υποπρότυπο του M και $\text{Im } \phi$ υποπρότυπο του M . Αλλά M είναι απλό R -πρότυπο άρα

$$\text{Ker } \phi = \{0\} \text{ ή } \text{Ker } \phi = M$$

Δηλαδή

$$\phi : \text{μονομορφισμός ή } \phi = 0 \text{ (άτοπο)}$$

και

$$\text{Im } \phi = \{0\} \text{ ή } \text{Im } \phi = M$$

Δηλαδή

$$\phi = 0 \text{ (άτοπο) ή } \phi : \text{επιμορφισμός}$$

Άρα ϕ ισομορφισμός και τότε θα υπάρχει $\phi^{-1} \in \text{End}_R(M)$. Συνεπώς κάθε μη-μηδενικό στοιχείο του $\text{End}_R(M)$ είναι αντιστρέψιμο και έτσι ο $\text{End}_R(M)$ είναι δακτύλιος διαίρεσης. \square

Παρατήρηση 2.1.23. Κάθε δακτύλιος διαίρεσης είναι τοπικός δακτύλιος.

Ορισμός 2.1.24. Έστω R δακτύλιος και M αριστερό R -πρότυπο. Το M καλείται **ημιαπλό (semisimple)** αν και μόνον αν το M γράφεται ως ευθύ άθροισμα από απλά πρότυπα.

Αλλιώς το M καλείται **ημιαπλό** αν και μόνον αν υπάρχει οικογένεια απλών R -προτύπων τέτοια ώστε $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$.

Πόρισμα 2.1.25. Υποπρότυπα, πρότυπα-πηλικά, ευθέα άθροισματα και ευθείς άθροιστέοι ημιαπλών προτύπων είναι ημιαπλά πρότυπα.

Θα μελετήσουμε τώρα τα πρότυπα του Artin και της Noether πάνω από ένα δακτύλιο R με μοναδιαίο στοιχείο και θα αποδείξουμε δύο θεωρήματα που μας λένε πότε ένα πρότυπο είναι Noetherian ή Artinian.

Ορισμός 2.1.26. Ένα αριστερό R -πρότυπο M καλείται **Noetherian** αν για κάθε αύξουσα ακολουθία από R -υποπρότυπα του M

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq \dots$$

υπάρχει ένας θετικός ακέραιος m έτσι ώστε $M_n = M_m$ για κάθε $n \geq m$.



Ορισμός 2.1.27. Ένα αριστερό R -πρότυπο M καλείται **Artinian** αν για κάθε φθίνουσα ακολουθία από R -υποπρότυπα του M

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_n \supseteq M_{n+1} \supseteq \dots$$

υπάρχει ένας θετικός ακέραιος m έτσι ώστε $M_n = M_m$ για κάθε $n \geq m$.

Θα αποδείξουμε τώρα κάποια σημαντικά θεωρήματα με κριτήρια για τα Artinian και Noetherian πρότυπα.

Θεώρημα 2.1.28. Έστω ένα αριστερό R -πρότυπο M . Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

1. Το M είναι Noetherian πρότυπο.
2. Κάθε υποπρότυπο του M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Απόδειξη. (i) \Rightarrow (ii) Έστω N ένα υποπρότυπο του R -πρότυπου M και

$$S = \{L \subseteq N \mid L : \text{πεπερασμένα παραγόμενο}\}$$

Τότε $S \neq \emptyset$ αφού το $\{0\}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο και έτσι ανήκει στο S . Ακόμη το S είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο που έχει μέγιστο στοιχείο έστω το L .

Έστω $L \neq N$ τότε θα υπάρχει ένα $x \in N$ και $x \notin L$ αφού $L \subseteq N$. Δηλαδή

$$Rx = \{rx \mid r \in R\} \subseteq N$$

Τότε $L \subseteq L + Rx \subseteq N$. Γνωρίζουμε ότι το L είναι πεπερασμένα παραγόμενο και έστω $\{y_1, \dots, y_n\}$ ένα σύνολο γεννητόρων. Δηλαδή $L = Ry_1 + \dots + Ry_n$. Τότε το $\{y_1, \dots, y_n, x\}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $L + Rx$ το οποίο είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Επειδή το L είναι μέγιστο στοιχείο θα έχουμε $L = L + Rx$. Δηλαδή $x \in L$ το οποίο είναι άτοπο και συνεπώς $L = N$. Έτσι το N είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

(ii) \Rightarrow (i) Έστω $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq \dots$ αύξουσα ακολουθία από R -υποπρότυπα του M και έστω $N = \bigcup_{n \geq 1} M_n$ υποπρότυπο του M με $\{x_1, \dots, x_k\}$ σύνολο γεννητόρων του N . Τότε

$$x_1 \in N \quad \Rightarrow \quad \exists n_1 \geq 1 \quad : \quad x_1 \in M_{n_1}$$

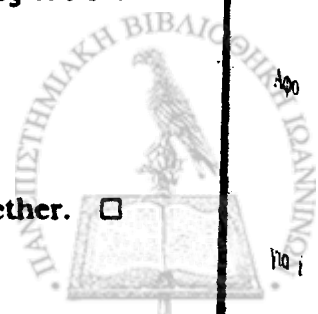
$$\vdots$$

$$x_k \in N \quad \Rightarrow \quad \exists n_k \geq 1 \quad : \quad x_k \in M_{n_k}$$

Επειδή τα M_{n_1}, \dots, M_{n_k} είναι υποπρότυπα που ανήκουν στην ακολουθία θα υπάρχει $p \geq 1$ με $M_{n_i} \subseteq M_{n_p}$ για κάθε $i = 1, \dots, k$. Τότε $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq M_{n_p}$. Άρα $M_{n_p} = N$, αφού $M_{n_p} \subseteq N$ και τα $\{x_1, \dots, x_k\}$ είναι γεννήτορες του N . Τότε $M_{n_p} = M_k$ για κάθε $k \geq n_p$ γιατί αν $x \in M_{n_p+1}$ τότε

$$x \in \bigcup_{n \geq 1} M_n = N = M_{n_p}$$

Έτσι η ακολουθία σταματά, που σημαίνει ότι το M είναι πρότυπο της Noether. \square



Ακολουθεί η δυική μορφή του θεωρήματος για τα προτυπα του Artin χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 2.1.29. Έστω ένα αριστερό R -πρότυπο M . Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

1. Το M είναι Artinian πρότυπο.
2. Κάθε πρότυπο-πηλίκο του M είναι πεπερασμένα συνπαραγόμενο.

Πριν συνεχίσουμε στην επόμενη πρόταση θα δώσουμε ένα σημαντικό ορισμό.

Ορισμός 2.1.30. Έστω ένα διάγραμμα R -προτύπων και ομομορφισμών μεταξύ αυτών της μορφής

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

Το παραπάνω διάγραμμα καλείται **ακολουθία** αν και μόνον αν $f_i \circ f_{i-1} = 0$ για κάθε i . Δηλαδή για κάθε $x \in M_{i-1}$ έχουμε $f_i(f_{i-1}(x)) = 0$.

Το παραπάνω διάγραμμα καλείται **ακριβής ακολουθία** αν και μόνον αν

$$\text{Ker } f_i = \text{Im } f_{i-1}$$

για κάθε i .

Λήμμα 2.1.31. Έστω

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

για ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

1. Το B είναι πρότυπο της Noether (του Artin).
2. Τα A, C είναι πρότυπα της Noether (του Artin).

Απόδειξη. (i) \Rightarrow (ii) Έστω ότι το B είναι Artinian. Τότε αφού το A είναι ισόμορφο με κάποιο υποπρότυπο του B τότε από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι το A είναι Artinian. Ακόμη από το τρίτο θεώρημα ισομορφισμών γνωρίζουμε ότι κάθε πρότυπο-πηλίκο του C είναι ισόμορφο με κάποιο πρότυπο-πηλίκο του B και άρα πάλι από το θεώρημα το C είναι Artinian.

(ii) \Rightarrow (i) Ισχυριζόμαστε ότι το A είναι υποπρότυπο του B και ότι $B/A = C$. Ακόμα υποθέτουμε ότι

$$L_1 \supseteq L_2 \supseteq \cdots \supseteq L_n \supseteq L_{n+1} \supseteq \cdots$$

είναι μια άπειρη ακολουθία από υποπρότυπα του B . Αφού $B/A \simeq C$ έχουμε ότι το B/A είναι Artinian. Άρα υπάρχει ένας ακέραιος m τέτοιος ώστε

$$L_m + A = L_{m+1} + A = L_{m+2} + A = \cdots$$

Επίσης το A είναι Artinian άρα υπάρχει ένας ακέραιος $n \geq m$ τέτοιος ώστε

$$L_n \cap A = L_{n+1} \cap A = L_{n+2} \cap A = \cdots$$

Αφού $L_n \supseteq L_{n+1} \supseteq \cdots$ έχουμε

$$\begin{aligned} L_n &= L_n \cap (L_n + A) = L_n \cap (L_{n+i} + A) = L_{n+i} \cap (L_n \cap A) = \\ &= L_{n+i} \cap (L_{n+i} \cap A) = L_{n+i} \end{aligned}$$

για $i = 1, 2, \dots$



Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με τους ορισμούς των προβολικών R -προτύπων και των injective R -προτύπων.

Ορισμός 2.1.32. Έστω ένα αριστερό R -πρότυπο P . Το P καλείται **προβολικό** R -πρότυπο αν για κάθε επιμορφισμό $\psi : B \rightarrow C$ και κάθε ομομορφισμό $\alpha : P \rightarrow C$ υπάρχει ομομορφισμός $\theta : P \rightarrow B$ με $\alpha = \psi\theta$.

Δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} P & & \\ \theta \downarrow & \searrow \alpha & \\ B & \xrightarrow{\psi} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

απαιτούμε να είναι μεταθετικό.

Ορισμός 2.1.33. Έστω ένα αριστερό R -πρότυπο I . Το I καλείται **injective** R -πρότυπο αν για κάθε μονομορφισμό $\phi : A \rightarrow B$ και κάθε ομομορφισμό $\beta : A \rightarrow I$ υπάρχει ομομορφισμός $\theta : B \rightarrow I$ με $\beta = \theta\phi$.

Δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{\phi} B \\ & & \beta \downarrow \swarrow \theta \\ & & I \end{array}$$

απαιτούμε να είναι μεταθετικό.

2.2 Κατηγορίες και Συναρτητές

2.2.1 Γενική Θεωρία Κατηγοριών

Η γλώσσα και τα αποτελέσματα της θεωρίας των κατηγοριών είναι πολύ σημαντικά εργαλεία σε πολλές περιοχές των μαθηματικών και κυρίως στην άλγεβρα.

Ξεκινάμε την παράγραφο αυτή με κάποιους βασικούς ορισμούς για τις κατηγορίες και παραδείγματα αυτών ενώ στη συνέχεια θα μελετήσουμε κατασκευές όπως του ευθέως αθροίσματος.

Ορισμός 2.2.1. Μια **κατηγορία** \mathcal{C} αποτελείται από :

1. Μια κλάση από αντικείμενα την οποία την συμβολίζουμε με $\text{ob } \mathcal{C}$
2. Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος από αντικείμενα (X, Y) ορίζουμε το σύνολο $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ του οποίου τα στοιχεία ονομάζονται μορφισμοί από το X στο Y .
3. Για κάθε διατεταγμένη τριάδα από αντικείμενα (X, Y, Z) ορίζουμε την απεικόνιση του καρτεσιανού γινομένου

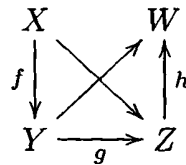
$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) : (f, g) \mapsto gf$$

Τότε τα αντικείμενα και οι μορφισμοί ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες :

1. Αν $(X, Y) \neq (Z, W)$ τότε $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \neq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$

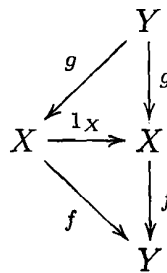


2. Αν $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_C(Y, Z)$ και $h \in \text{Hom}_C(Z, W)$ τότε $(hg)f = h(gf)$. Δηλαδή το διάγραμμα



είναι μεταθετικό.

3. Για κάθε αντικείμενο X έχουμε ένα (μοναδικό) στοιχείο $1_X \in \text{Hom}_C(X, X)$ έτσι ώστε $f1_X = f$ για κάθε $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ και $1_X g = g$ για κάθε $g \in \text{Hom}_C(Y, X)$. Δηλαδή το διάγραμμα



είναι μεταθετικό.

Ας δούμε κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.2.2. 1. Η κατηγορία των συνόλων Set . Στην κατηγορία αυτή τα αντικείμενα είναι η κλάση όλων των συνόλων. Αν A, B είναι δύο σύνολα, τότε το $\text{Hom}(A, B)$ είναι το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το σύνολο A στο B . Το γινόμενο gf , όπου $f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\text{Set}}(B, C)$ με $A, B, C \in \text{ob Set}$ είναι η σύνθεση απεικονίσεων και 1_A είναι η ταυτοτική απεικόνιση από το A στο A . Οι συνθήκες του ορισμού επαληθεύονται και έτσι το Set είναι κατηγορία.

2. Η κατηγορία των ομάδων που συμβολίζεται με Grp έχει ως αντικείμενα τις ομάδες ενώ για δύο ομάδες G, H , το $\text{Hom}(G, H)$ είναι το σύνολο όλων των ομομορφισμών ομάδων από την ομάδα G στην H . Το γινόμενο gf , όπου $f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(G, H)$, $g \in \text{Hom}_{\text{Set}}(H, K)$ με $G, H, K \in \text{ob Grp}$ είναι η σύνθεση ομομορφισμών και τέλος το 1_G είναι η ταυτοτική απεικόνιση από την ομάδα G στην ίδια που είναι ομομορφισμός. Οι συνθήκες του ορισμού και εδώ επαληθεύονται και έτσι το Grp είναι κατηγορία.
3. Η κατηγορία Ab είναι η κατηγορία των αβελιανών ομάδων με αντικείμενα τις αβελιανές ομάδες. Τα υπόλοιπα είναι όμοια με την κατηγορία Grp .
4. Η κατηγορία Ring είναι η κατηγορία των δακτυλίων με μονάδα όπου τα αντικείμενα είναι η κλάση των δακτυλίων και αν A, B είναι δύο δακτύλιοι το $\text{Hom}(A, B)$ είναι το σύνολο όλων των ομομορφισμών δακτυλίων από τον δακτύλιο A στον B .

Ο βασικότερος ορισμός και αυτός που θα ασχοληθούμε περισσότερο είναι ο παρακάτω ορισμός της κατηγορίας αναπαραστάσεων φαιερτών. Έστω λοιπόν ένα σώμα \mathbb{K} και μια φαιετρα $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$.



Ορισμός 2.2.3. Η κατηγορία αναπαραστάσεων φαιερών συμβολίζεται ως $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$ και αποτελείται από :

1. Μια κλάση με αντικείμενα αναπαραστάσεις φαιερών την οποία την συμβολίζουμε με $\text{ob Rep}(Q, \mathbb{K})$.
2. Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος από αναπαραστάσεις (X, Y) ορίζουμε το σύνολο $\text{Hom}_{\text{Rep}(Q, \mathbb{K})}(X, Y)$ του οποίου τα στοιχεία ονομάζονται μορφισμοί από το X στο Y .

Άρα αν

$$\phi : X \rightarrow Y$$

μορφισμός μεταξύ αναπαραστάσεων τότε $\phi \in \text{Hom}_{\text{Rep}(Q, \mathbb{K})}(X, Y)$ με $\phi = (\phi_i)_{i \in Q_0}$ όπου $\phi_i : X_i \rightarrow Y_i$ για κάθε $i \in Q_0$ τέτοια ώστε

$$Y_\alpha \phi_{s(\alpha)} = \phi_{t(\alpha)} X_\alpha$$

για κάθε $\alpha \in Q_1$.

3. Για κάθε διατεταγμένη τριάδα από αναπαραστάσεις (X, Y, Z) ορίζουμε την απεικόνιση του καρτεσιανού γινομένου

$$\text{Hom}_{\text{Rep}(Q, \mathbb{K})}(X, Y) \times \text{Hom}_{\text{Rep}(Q, \mathbb{K})}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Rep}(Q, \mathbb{K})}(X, Z) : (f, g) \mapsto gf$$

Δηλαδή αν $f \in \text{Hom}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}(Y, Z)$ τότε $(gf)_i = f_i g_i$ για κάθε $i \in Q_0$ με $gf \in \text{Hom}(X, Z)$.

Ορισμός 2.2.4. Μία κατηγορία \mathcal{D} ονομάζεται υποκατηγορία της κατηγορίας \mathcal{C} αν

1. Τα αντικείμενα της \mathcal{D} είναι υποκλάση της κλάσης των αντικειμένων της κατηγορίας \mathcal{C} .
2. Για κάθε $X, Y \in \mathcal{D}$ να ισχύει

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

3. Για κάθε $X \in \text{ob } \mathcal{D}$ το 1_X και το γινόμενο μορφισμών της \mathcal{D} είναι τα ίδια και στην \mathcal{C} .

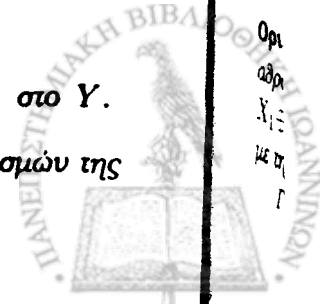
Ορισμός 2.2.5. Μία κατηγορία $\mathcal{D} = \text{rep}(Q, \mathbb{K})$ ονομάζεται υποκατηγορία της κατηγορίας $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$ αν

1. Τα αντικείμενα της κατηγορίας $\text{rep}(Q, \mathbb{K})$ δηλαδή οι πεπερασμένες διάστασης αναπαραστάσεις της $\text{rep}(Q, \mathbb{K})$ ανήκουν και στην κατηγορία $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$.
2. Για κάθε ζεύγος (X, Y) πεπερασμένης διάστασης αναπαραστάσεις της $\text{rep}(Q, \mathbb{K})$ να ισχύει

$$\text{Hom}_{\text{rep}(Q, \mathbb{K})}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\text{Rep}(Q, \mathbb{K})}(X, Y)$$

όπου $\text{Hom}_{\text{Rep}(Q, \mathbb{K})}(X, Y)$ είναι το σύνολο των μορφισμών από το X στο Y .

3. Για κάθε $X \in \text{rep}(Q, \mathbb{K})$ το $1_X : X \rightarrow X$ και το γινόμενο μορφισμών της κατηγορίας $\text{rep}(Q, \mathbb{K})$ ανήκουν και στην κατηγορία $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$.



Ορισμός 2.2.6. Μία υποκατηγορία \mathcal{D} της κατηγορίας \mathcal{C} καλείται **πλήρης (full)** αν

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

για κάθε $X, Y \in \mathcal{D}$. Δηλαδή η υποκατηγορία $\text{rep}(Q, \mathbb{K})$ είναι πλήρης γιατί

$$\text{Hom}_{\text{rep}(Q, \mathbb{K})}(X, Y) = \text{Hom}_{\text{Rep}(Q, \mathbb{K})}(X, Y)$$

για κάθε ζεύγος (X, Y) πεπερασμένης διάστασης αναπαραστάσεις της κατηγορίας $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$.

Παράδειγμα 2.2.7. Θεωρούμε την κατηγορία $R\text{-Mod}$ που έχει ως αντικείμενα την κλάση όλων των αριστερών προτύπων πάνω από ένα δακτύλιο R . Αν M, N είναι δύο αριστερά πρότυπα, τότε το $\text{Hom}(M, N)$ είναι όλοι οι ομομορφισμοί αριστερών προτύπων από το M στο N . Παρόμοια $\text{Mod-}R$ είναι η κατηγορία όλων των δεξιών R -προτύπων. Αν ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης, τότε η $R\text{-Mod}(\text{Mod-}R)$ είναι η κατηγορία των αριστερών (δεξιών) διανυσματικών χώρων υπεράνω του R .

Παρατήρηση 2.2.8. Έστω X, Y δύο αντικείμενα στην κατηγορία \mathcal{C} . Κάθε μορφομορφισμός $h : X \rightarrow X$ καλείται ενδομορφομορφισμός στο \mathcal{C} . Ένας μορφομορφισμός $u : X \rightarrow Y$ στην κατηγορία \mathcal{C} είναι μονομορφομορφισμός αν για κάθε αντικείμενο Z στην $\text{ob } \mathcal{C}$ και κάθε ζεύγος μορφομορφισμών $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ τέτοιο ώστε $u \circ f = u \circ g$ να έχουμε $f = g$ ή αλλιώς από τη σχέση $u \circ f = 0$ να συνεπάγεται $f = 0$ για κάθε $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$.

Ορισμός 2.2.9. Δύο μονομορφομορφισμοί $u : X \rightarrow Y$ και $u' : X' \rightarrow Y$ είναι **ισοδύναμοι** αν υπάρχει ένας μορφομορφισμός $f : X \rightarrow X'$ τέτοιος ώστε $u' \circ f = u$. Μια ισοδύναμη κλάση από μονομορφομορφισμούς στο αντικείμενο Y καλείται **υποαντικείμενο** του Y .

Παρατήρηση 2.2.10. Ένας μορφομορφισμός $p : X \rightarrow Y$ στην κατηγορία \mathcal{C} είναι επιμορφομορφισμός αν για κάθε αντικείμενο Z στην $\text{ob } \mathcal{C}$ και κάθε ζεύγος μορφομορφισμών $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Z)$ τέτοιο ώστε $f \circ p = g \circ p$ να έχουμε $f = g$ ή αλλιώς από τη σχέση $f \circ p = 0$ να συνεπάγεται $f = 0$ για κάθε $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Z)$.

Ένας μορφομορφισμός $u : X \rightarrow Y$ στην κατηγορία \mathcal{C} είναι ισομορφομορφισμός αν υπάρχει ένας μορφομορφισμός $v : Y \rightarrow X$ στην κατηγορία \mathcal{C} τέτοιος ώστε $uv = 1_Y$ και $vu = 1_X$. Σε αυτή την περίπτωση ο μορφομορφισμός v είναι μοναδικά ορισμένος, εξαρτάται από τον u , και καλείται ο αντίστροφος του u ενώ γράφουμε $u^{-1} = v$.

Αν υπάρχει ισομορφομορφισμός $u : X \rightarrow Y$ στην κατηγορία \mathcal{C} λέμε ότι τα αντικείμενα X και Y είναι **ισόμορφα** στην κατηγορία \mathcal{C} και γράφουμε $X \simeq Y$. Ένας ισομορφομορφισμός στην κατηγορία \mathcal{C} είναι μονομορφομορφισμός και επιμορφομορφισμός ταυτόχρονα.

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του ευθέως αθροίσματος αντικειμένων της κατηγορίας \mathcal{C} .

Ορισμός 2.2.11. Έστω X_1, \dots, X_n αντικείμενα της κατηγορίας \mathcal{C} . Το **ευθύ άθροισμα** των αντικειμένων X_1, \dots, X_n της κατηγορίας \mathcal{C} είναι ένα αντικείμενο $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ της \mathcal{C} μαζί με μορφομορφισμούς $u_j : X_j \rightarrow X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ για $j = 1, \dots, n$ με την ιδιότητα :

Για κάθε αντικείμενο Z στην $\text{ob } \mathcal{C}$ και για κάθε σύνολο μορφομορφισμών

$$f_1 : X_1 \rightarrow Z, \dots, f_n : X_n \rightarrow Z$$



στην στην \mathcal{C} να υπάρχει ένας μοναδικός μορφοισμός

$$f : X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \rightarrow Z$$

τέτοιος ώστε $f_j = f u_j$ για κάθε $j = 1, \dots, n$.

Παρατήρηση 2.2.12. Γράφουμε $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ και αν αυτό το αντικείμενο υπάρχει τότε είναι μοναδικό μέχρι ισομορφισμό. Για κάθε $j = 1, \dots, n$ ο μορφοισμός $u_j : X_j \rightarrow X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ καλείται η **j-οστή έγκλειση**.

Θα μελετήσουμε τώρα ακόμα δύο κατασκευές οι οποίες μας παράγουν καινούργια αντικείμενα στην κατηγορία \mathcal{C} .

Ορισμός 2.2.13. Έστω \mathcal{C} μια κατηγορία. Ορίζουμε με \mathcal{C}^{op} μια νέα κατηγορία με αντικείμενα $ob \mathcal{C}^{op} = ob \mathcal{C}$ και για κάθε $X, Y \in ob \mathcal{C}^{op}$ έχουμε $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ενώ το $1_X \in \mathcal{C}^{op}$ είναι το ίδιο με το 1_X της κατηγορίας \mathcal{C} . Αυτή η νέα κατηγορία καλείται **δυσική** κατηγορία της \mathcal{C} .

Αν $f \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Y, Z)$ τότε το γινόμενο gf στην \mathcal{C}^{op} είναι ίσο με το γινόμενο fg στην \mathcal{C} . Διαγραμματικά, αν $X \xrightarrow{f} Y$ στην \mathcal{C} τότε $Y \xrightarrow{f^{op}} X$ στην \mathcal{C}^{op} και αν το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & & \swarrow g \\ & & Z \end{array}$$

είναι μεταθετικό στην \mathcal{C} , τότε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f^{op}} & Y \\ h^{op} \uparrow & & \swarrow g^{op} \\ & & Z \end{array}$$

είναι μεταθετικό στην \mathcal{C}^{op} .

Θα δούμε τώρα την δεύτερη κατασκευή που είναι το γινόμενο κατηγοριών.

Ορισμός 2.2.14. Έστω \mathcal{C} και \mathcal{D} δύο κατηγορίες. Ορίζουμε $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ το γινόμενο κατηγοριών το οποίο είναι κατηγορία που παράγεται από τις \mathcal{C} και \mathcal{D} με αντικείμενα $ob \mathcal{C} \times \mathcal{D} = ob \mathcal{C} \times ob \mathcal{D}$ και αν $A, B \in ob \mathcal{C}$ και $A', B' \in ob \mathcal{D}$ τότε

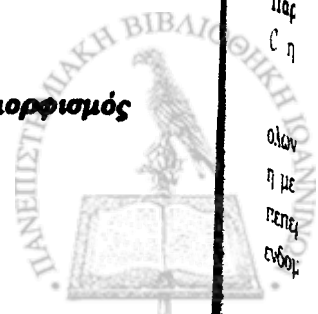
$$Hom_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((A, A'), (B, B')) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{D}}(A', B')$$

Ακόμη το $1_{(A, A')} = (1_A, 1_{A'})$ και αν $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, $f' \in Hom_{\mathcal{D}}(A', B')$, $g' \in Hom_{\mathcal{D}}(B', C')$ τότε

$$(g, g')(f, f') = (gf, g'f').$$

Ορισμός 2.2.15. Ένας μορφοισμός $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ονομάζεται **ισομορφισμός** αν υπάρχει ένας μορφοισμός $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ έτσι ώστε

$$fg = 1_B \text{ και } gf = 1_A$$



Παρατήρηση 2.2.16. Ο g είναι μοναδικά ορισμένος από τον f και γράφουμε $g = f^{-1}$. Η f^{-1} είναι ισομορφισμός και $(f^{-1})^{-1} = f$. Αν f, h είναι ισομορφισμοί, τότε fh είναι ισομορφισμός και $(fh)^{-1} = h^{-1}f^{-1}$.

Ορισμός 2.2.17. Ένας μορφισμός $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ονομάζεται **monic** αν για $g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ με $g_1f = g_2f$ τότε $g_1 = g_2$.

Ορισμός 2.2.18. Μια κατηγορία \mathcal{C} καλείται **preadditive** κατηγορία αν για κάθε ζεύγος $X, Y \in \text{ob } \mathcal{C}$ το σύνολο $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ των μορφισμών από το X στο Y έχει τη δόμη αβελιανής ομάδας και για κάθε $(X, Y, Z) \in \text{ob } \mathcal{C}$ ο μορφισμός

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

είναι διγραμμικός (bilinear).

Ορισμός 2.2.19. Μια κατηγορία \mathcal{C} καλείται **προσθετική (additive)** κατηγορία αν είναι (preadditive) κατηγορία και επιπλέον ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. Για κάθε πεπερασμένο σύνολο αντικειμένων X_1, \dots, X_n της \mathcal{C} υπάρχει το ευθύ άθροισμα $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ στην κατηγορία \mathcal{C} .
2. Υπάρχει ένα αντικείμενο $0 \in \text{ob } \mathcal{C}$ το οποίο θα καλείται το μηδενικό αντικείμενο της \mathcal{C} , τέτοιο ώστε ο μορφισμός 1_0 είναι το μηδενικό στοιχείο της αβελιανής ομάδας $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0)$.

Παρατήρηση 2.2.20. Έστω \mathcal{C} μια προσθετική κατηγορία και έστω $X_1 \oplus \dots \oplus X_n \in \text{ob } \mathcal{C}$ το ευθύ άθροισμα των X_1, \dots, X_n αντικειμένων της \mathcal{C} . Έστω ακόμη $u_j : X_j \rightarrow X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ να είναι η j -οστή έγκλειση. Τότε υπάρχει ένας μορφισμός

$$p_j : X_1 \oplus \dots \oplus X_n \rightarrow X_j$$

για κάθε $j = 1, \dots, n$ τέτοιος ώστε

$$p_j \circ u_j = 1_{X_j}, \quad p_j \circ u_i = 0 \text{ για } i \neq j \text{ και } \sum_{j=1}^n u_j \circ p_j = 1_{X_1 \oplus \dots \oplus X_n}$$

Ο μορφισμός αυτός καλείται η **j -οστή ευθεία προβολή**. Επιπλέον αν

$$g_1 : X \rightarrow X_1, \dots, g_n : X \rightarrow X_n$$

είναι ένα σύνολο μορφισμών στην κατηγορία \mathcal{C} τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός

$$g : X \rightarrow X_1 \oplus \dots \oplus X_n$$

τέτοιος ώστε $p_j \circ g = g_j$ για $j = 1, \dots, n$.

Ορισμός 2.2.21. Έστω ένα σώμα \mathbb{K} . Μια κατηγορία \mathcal{C} καλείται **\mathbb{K} -κατηγορία** αν για κάθε ζεύγος $X, Y \in \text{ob } \mathcal{C}$ το σύνολο $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ έχει τη δόμη \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου τέτοια ώστε η σύνθεση μορφισμών να είναι \mathbb{K} -διγραμμική απεικόνιση.

Παρατήρηση 2.2.22. Παρατηρούμε ότι για κάθε αντικείμενο X της \mathbb{K} -κατηγορίας \mathcal{C} η ομάδα

$$\text{End}_{\mathcal{C}} X = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$$

όλων των ενδομορφισμών από το X στο X αντικείμενο της \mathcal{C} , εφοδιασμένη με τη σύνθεση ως πράξη της ομάδας, είναι μια \mathbb{K} -άλγεβρα (οχι απαραίτητα πεπερασμένης διάστασης) με 1_X . Αυτή την ομάδα την καλούμε άλγεβρα των ενδομορφισμών του X .



2.2.2 Πυρήνες, Συνπυρήνες και Αβελιανές Κατηγορίες

Στη συνέχεια θα μιλήσουμε για πυρήνες, συνπυρήνες και αβελιανές κατηγορίες. Θεωρούμε για την συνέχεια και μέχρι το τέλος της παραγράφου ότι η κατηγορία \mathcal{C} είναι προσθετική. Έστω $f : X \rightarrow Y$ ένας μορφισμός.

Ορισμός 2.2.23. Ο πυρήνας του μορφισμού $f : X \rightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός

$$\kappa : K \rightarrow X$$

έτσι ώστε :

$$1. f\kappa = 0$$

2. για κάθε μορφισμό $g : Z \rightarrow X$ με $fg = 0$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός

$$\theta : Z \rightarrow K$$

με $g = \kappa\theta$. Δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\kappa} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ \theta \uparrow & & \nearrow g & & \\ Z & & & & \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

Ορισμός 2.2.24. Ο συνπυρήνας του μορφισμού $f : X \rightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός

$$c : Y \rightarrow D$$

έτσι ώστε :

$$1. cf = 0$$

2. για κάθε μορφισμό $g : Y \rightarrow Z$ με $gf = 0$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός

$$\theta : D \rightarrow Z$$

με $g = \theta c$. Δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{c} & D \\ & & \downarrow g & \searrow \theta & \\ & & Z & & \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

Πρόταση 2.2.25. Αν κ είναι ο πυρήνας ενός μορφισμού και αν ο συνπυρήνας του κ υπάρχει, τότε

$$\kappa = \text{Ker}(\text{Coker } \kappa)$$

Απόδειξη. Έστω $\kappa : K \rightarrow X$ ο πυρήνας του μορφισμού $f : X \rightarrow Y$. Τότε $f\kappa = 0$ και έτσι ο μορφισμός f αναλύεται πάνω στο $\text{Coker } \kappa$. Αν τώρα $g : Z \rightarrow X$ είναι ένας μορφισμός ώστε $\text{Coker}(\kappa g) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $fg = 0$ και έτσι ο g αναλύεται πάνω στο $\text{Ker } f = \kappa$. Έτσι $\kappa = \text{Ker}(\text{Coker } \kappa)$. \square

Συνεχίζουμε την παράγραφο με τις αβελιανές κατηγορίες. Θεωρούμε ότι η προσθετική κατηγορία \mathcal{C} που ορίσαμε στην αρχή έχει την ιδιότητα ότι κάθε μορφομορφισμός έχει πυρήνα και συνπυρήνα. Για ένα μορφομορφισμό $f : X \rightarrow Y$ υπάρχει μια κανονική ανάλυση που δίνεται από το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & \text{Coker } f \\ & & \downarrow \lambda & & \uparrow \mu & & \\ & & \text{Coker}(\text{Ker } f) & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Ker}(\text{Coker } f) & & \end{array}$$

Αν $\text{Coker } f = 0$ τότε $f = \mu g$ για κάποιον μορφομορφισμό $g : X \rightarrow \text{Ker}(\text{Coker } f)$. Τότε

$$\mu g \text{Ker } f = f \text{Ker } f = 0$$

και έπειδη η μ είναι μονομορφομορφισμός έχουμε ότι $g \text{Ker } f = 0$ άρα

$$g = \bar{f} \lambda$$

Έτσι κατασκευάσαμε την απεικόνιση

$$\bar{f} : \text{Coker}(\text{Ker } f) \rightarrow \text{Ker}(\text{Coker } f)$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα ας εφαρμόσουμε στην κατασκευή την κατηγορία των αβελιανών ομάδων Ab και τον μορφομορφισμό $f : G \rightarrow H$. Τότε το μεταθετικό διάγραμμα είναι :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \longrightarrow & G & \xrightarrow{f} & H & \longrightarrow & \text{Coker } f \\ & & \downarrow \lambda & & \uparrow \mu & & \\ & & G/\text{Ker } f & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Im } f & & \end{array}$$

με $\text{Coker}(\text{Ker } f) \simeq G/\text{Ker } f$ και $\text{Ker}(\text{Coker } f) \simeq \text{Im } f$ και \bar{f} ισομορφομορφισμός. Ας ορίσουμε τώρα την έννοια της αβελιανής κατηγορίας.

Ορισμός 2.2.26. Έστω \mathcal{C} μια κατηγορία. Η \mathcal{C} καλείται **αβελιανή** αν

1. Η \mathcal{C} είναι προσθετική κατηγορία
2. Κάθε μορφομορφισμός $f : X \rightarrow Y$ στην \mathcal{C} έχει πυρήνα $\kappa : \text{Ker } f \rightarrow X$, συνπυρήνα $c : Y \rightarrow \text{Coker } f$ του f και ο μορφομορφισμός

$$\bar{f} : \text{Coker}(\text{Ker } f) \rightarrow \text{Ker}(\text{Coker } f)$$

είναι ισομορφομορφισμός για κάθε μορφομορφισμό f .

Ακολουθεί ένα θεώρημα, χωρίς απόδειξη, που συνδέει πυρήνες και συνπυρήνες αβελιανών κατηγοριών.

Θεώρημα 2.2.27. Σε αβελιανές κατηγορίες οι πυρήνες Ker και οι συνπυρήνες Coker είναι αντίστροφες συναρτήσεις.

Θεώρημα 2.2.28. Έστω \mathcal{C} μια αβελιανή κατηγορία και έστω $f : X \rightarrow Y$ ένας μορφομορφισμός. Αν f είναι μονομορφομορφισμός και επιμορφομορφισμός τότε είναι ισομορφομορφισμός.



Απόδειξη. Έστω ένας μορφισμός $f : X \rightarrow Y$ ο οποίος είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός. Η απεικόνιση $Y \rightarrow 0$ είναι συνπυρήνας του f ενώ η απεικόνιση $Y \xrightarrow{1} Y$ είναι ο πυρήνας του $Y \rightarrow 0$. Άρα υπάρχει μια απεικόνιση $Y \xrightarrow{g} X$ με

$$Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{1} Y$$

Άρα $gf = 1_Y$. Ακόμη η απεικόνιση $0 \rightarrow A$ είναι πυρήνας του $f : X \rightarrow Y$ και οι μορφισμοί $f : X \rightarrow Y$ και $A \xrightarrow{1} A$ είναι συνπυρήνες του $0 \rightarrow A$. Άρα υπάρχει μορφισμός

$$g : Y \rightarrow X$$

τέτοιος ώστε

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{1} X$$

Συνεπώς $fg = 1_X$ και άρα ο μορφισμός $f : X \rightarrow Y$ είναι ισομορφισμός. \square

Παρατήρηση 2.2.29. 1. Αν f είναι μονομορφισμός, τότε $f = \text{Ker}(\text{Coker } f)$.

2. Αν f είναι επιμορφισμός, τότε $f = \text{Coker}(\text{Ker } f)$.

2.2.3 Γενική Θεωρία Συναρτητών

Στην παράγραφο αυτή θα εισάγουμε την έννοια του συναρτητή, δηλαδή εκείνους τους μορφισμούς που μας οδηγούν από τη μία κατηγορία στην άλλη, όπως και τις απεικονίσεις μεταξύ των συναρτητών που ονομάζονται φυσικοί μετασχηματισμοί.

Ορισμός 2.2.30. Έστω \mathcal{C} και \mathcal{D} δύο κατηγορίες. Τότε ένας **συναρτητής (covariant) συναρτητής** F από την \mathcal{C} στην \mathcal{D} αποτελείται από :

1. μια απεικόνιση $X \rightarrow FX$ από τα $\text{ob } \mathcal{C}$ στα $\text{ob } \mathcal{D}$
2. και για κάθε ζεύγος από αντικείμενα (X, Y) της κατηγορίας \mathcal{C} έχουμε την απεικόνιση $f \rightarrow F(f)$ του $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ στο $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$

Απαιτούμε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες

1. Αν gf ορίζεται στην κατηγορία \mathcal{C} , τότε $F(gf) = F(g)F(f)$.
2. $F(1_X) = 1_{FX}$.

Παρατήρηση 2.2.31. Από τη συνθήκη 1. έχουμε ότι κάθε μεταθετικό τρίγωνο

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & \searrow g & \\ & & Z \end{array}$$

στην κατηγορία \mathcal{C} επάγει μεταθετικό τρίγωνο

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{F(f)} & FY \\ F(h) \downarrow & \searrow F(g) & \\ & & FZ \end{array}$$



στην κατηγορία \mathcal{D} .

Ορισμός 2.2.32. Ένας συναρτητής από την κατηγορία \mathcal{C} στην \mathcal{D} καλείται **ανταναβλιώσιος (contravariant) συναρτητής** αν είναι συναρτητής από την κατηγορία \mathcal{C}^{op} στην \mathcal{D} . Δηλαδή είναι μια απεικόνιση F από τα $\text{ob } \mathcal{C}$ στα $\text{ob } \mathcal{D}$ για κάθε ζεύγος από αντικείμενα (X, Y) στην \mathcal{C} υπάρχει μια απεικόνιση F από το $\text{Hom}(X, Y)$ στο $\text{Hom}(FX, FY)$ έτσι ώστε

$$F(fg) = F(g)F(f) \text{ και } F(1_X) = 1_{FX}$$

Παρατήρηση 2.2.33. Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{K}$ κατηγορίες. Αν $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ και $F' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{K}$ είναι συναρτητές μπορούμε να ορίσουμε τη σύνθεση

$$F'F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$$

με την ιδιότητα: Για κάθε $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ να ισχύει $F'F(X) = F'(F(X))$ και για κάθε μορφισμό $f : X \rightarrow Y$ στην \mathcal{C} να ισχύει $F'F(f) = F'(F(f))$. Τότε η σύνθεση $F'F$ είναι συναρτητής.

Ορισμός 2.2.34. Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{K}$ κατηγορίες και έστω $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ η κατηγορία γινόμενο. Τότε ένας συναρτητής από την κατηγορία $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ στην \mathcal{K} ονομάζεται **αμφισυναρτητής** από την κατηγορία \mathcal{C} και \mathcal{D} στην \mathcal{K} .

Ορισμός 2.2.35. Οι συναρτητές από την κατηγορία $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$ στην \mathcal{K} ονομάζονται **αμφισυναρτητές** που είναι *contravariant* στην \mathcal{C} και *covariant* στην \mathcal{D} και οι συναρτητές από την κατηγορία $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}^{op}$ στην \mathcal{K} ονομάζονται **αμφισυναρτητές** που είναι *contravariant* στην \mathcal{C} και στην \mathcal{D} .

Ας δούμε τώρα κάποια παραδείγματα συναρτητών.

Παράδειγμα 2.2.36. (1) Έστω \mathcal{D} μια υποκατηγορία της κατηγορίας \mathcal{C} . Τότε ορίζουμε ένα συναρτητή F από την \mathcal{D} στην \mathcal{C} ο οποίος απεικονίζει κάθε αντικείμενο της \mathcal{D} στο ίδιο ακριβώς αντικείμενο της \mathcal{C} και κάθε μορφισμός της \mathcal{D} στον ίδιο μορφισμό στην \mathcal{C} . Ο συναρτητής αυτός καλείται **συναρτητής έγκλεισης**. Αν $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ τότε ο συναρτητής καλείται **ταυτοτικός συναρτητής** και γράφουμε $1_{\mathcal{C}}$.

(2) Έστω οι κατηγορίες $R\text{-Mod}$ και $\text{Mod-}R$ των αριστερών και δεξιών προτύπων αντίστοιχα πάνω απ τον τυχαίο δακτύλιο R . Έστω ακόμη M ένα αριστερό R -πρότυπο και έστω

$$M^* = \text{Hom}_R(M, R)$$

των ομομορφισμών από το M στον δακτύλιο R , τον οποίο τώρα τον θεωρούμε σαν αριστερό R -πρότυπο. Το σύνολο M^* τώρα γίνεται δεξιό R -πρότυπο αφού για κάθε $x, y \in M$, $r \in R$ έχουμε :

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(rx) = rf(x)$$

και για $f, g \in M^*$, $s \in R$ έχουμε

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fs)(x) = f(x)s.$$



Έτσι το M^* θεωρείται τώρα δεξιό R -πρότυπο και έχουμε την απεικόνιση από το αριστερό R -πρότυπο M στο δεξιό R -πρότυπο M^* . Δηλαδή την απεικόνιση

$$M \rightarrow M^*$$

που στέλνει τα αντικείμενα $\text{ob } R\text{-Mod}$ στα $\text{ob Mod-}R$. Έστω τώρα $M, N \in R\text{-Mod}$ και $L : M \rightarrow N$ ένας μορφισμός R -προτύπων. Έχουμε την απεικόνιση $L^* : M^* \rightarrow N^*$ που ορίζεται $L^* : g \rightarrow gL$ και η σύνθεση των g και L είναι :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{L} & N \\ gL \downarrow & & \swarrow g \\ & & R \end{array}$$

Τώρα αν η ακολουθία

$$M_1 \xrightarrow{L_1} M_2 \xrightarrow{L_2} M_3$$

ανήκει στην $R\text{-Mod}$ και $g \in M_3^*$ τότε

$$(L_2 L_1)^*(g) = g L_2 L_1 = (g L_2) L_1 = L_1^* L_2^*(g)$$

Άρα $(L_2 L_1)^* = L_1^* L_2^*$. Ακόμη επαληθεύεται και η συνθήκη $(1_M)^* = 1_{M^*}$. Έτσι αν $F : M \rightarrow M^*$, $L \rightarrow L^*$ η απεικόνιση F ορίζει έναν contravariant συναρτητή, τον **δυσικό** συναρτητή D από την $R\text{-Mod}$ στην $\text{Mod-}R$. Παρόμοια ορίζεται και ο συναρτητής από την $\text{Mod-}R$ στην $R\text{-Mod}$.

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του φυσικού μετασχηματισμού μεταξύ συναρτητών.

Ορισμός 2.2.37. Έστω \mathcal{C}, \mathcal{D} δυο κατηγορίες και έστω $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ δυο συναρτητές. Ορίζουμε έναν **φυσικό μετασχηματισμό** Ψ από τον συναρτητή F στον F' να είναι μια απεικόνιση που απεικονίζει σε κάθε αντικείμενο X της \mathcal{C} έναν μορφισμό $\Psi_X \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, F'X)$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\Psi_X} & F'X \\ F(f) \downarrow & & \downarrow F'(f) \\ FY & \xrightarrow{\Psi_Y} & F'Y \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Αν κάθε Ψ_X είναι ισομορφισμός, τότε ο Ψ καλείται **φυσικός ισομορφισμός**.

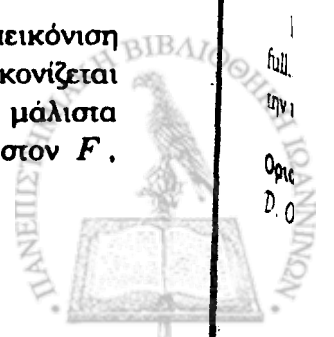
Ορισμός 2.2.38. Έστω \mathcal{C}, \mathcal{D} δυο preadditive κατηγορίες. Τότε ο συναρτητής $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ καλείται **προσθετικός (additive)** αν

$$F(\alpha + \alpha') = F(\alpha) + F(\alpha')$$

για $\alpha, \alpha' : A \rightarrow A'$ όπου $A, A' \in \text{ob } \mathcal{C}$.

Παρατήρηση 2.2.39. (1) Έστω $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ένας συναρτητής. Τότε η απεικόνιση $1_F : F \rightarrow F$ με την ιδιότητα : Κάθε αντικείμενο $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ απεικονίζεται στο $1_{FX} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FX)$ είναι φυσικός μετασχηματισμός και μάλιστα αν Ψ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός από τον συναρτητή F στον F , τότε

$$\Psi 1_F = \Psi = 1_F \Psi$$



- (2) Έστω $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ δύο συναρτητές και έστω Ψ ένας φυσικός ισομορφισμός μεταξύ των F και G . Τότε $\Psi_X : FX \rightarrow GX$ είναι ισομορφισμός για κάθε $X \in \text{ob } \mathcal{C}$. Άρα θα υπάρχει και ο ισομορφισμός $\Psi_X^{-1} : GX \rightarrow FX$ και προφανώς $X \rightarrow \Psi_X^{-1}$ είναι φυσικός ισομορφισμός του G στο F . Αντίστροφα αν Ψ είναι φυσικός μετασχηματισμός από τον F στον G και Φ είναι φυσικός μετασχηματισμός από τον G στον F με $\Psi\Phi = 1_G$ και $\Phi\Psi = 1_F$ τότε ο Ψ είναι φυσικός ισομορφισμός με $\Psi^{-1} = \Phi$.
- (3) Έστω $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ένας συναρτητής και Ψ ένας φυσικός ισομορφισμός του F και του $1_{\mathcal{C}}$ συναρτητή. Τότε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Psi_X} & FX \\ f \downarrow & & \downarrow F(f) \\ Y & \xrightarrow{\Psi_Y} & FY \end{array}$$

είναι μεταθετικό και ισχύει $F(f) = \Psi_Y f \Psi_X^{-1}$. Άρα η απεικόνιση

$$\text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(FX, FY), \quad f \mapsto F(f)$$

είναι ισομορφισμός.

Θα δούμε τώρα ποτε λέμε οτι δύο κατηγορίες είναι ισοδύναμες. Ας ξεκινήσουμε με τον ορισμό για το ποτε δύο κατηγορίες είναι ισόμορφες.

Ορισμός 2.2.40. Έστω \mathcal{C}, \mathcal{D} δυο κατηγορίες θα λέμε οτι οι κατηγορίες \mathcal{C} και \mathcal{D} είναι **ισόμορφες** αν υπάρχει ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ και ένας συναρτητής $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ τέτοιου ώστε

$$GF = 1_{\mathcal{C}} \text{ και } FG = 1_{\mathcal{D}}$$

Ορισμός 2.2.41. Έστω \mathcal{C}, \mathcal{D} δυο κατηγορίες θα λέμε οτι οι κατηγορίες \mathcal{C} και \mathcal{D} είναι **ισοδύναμες** αν υπάρχει ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ και ένας συναρτητής $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ τέτοιου ώστε

$$GF \simeq 1_{\mathcal{C}} \text{ και } FG \simeq 1_{\mathcal{D}}$$

και ο συναρτητής F θα λέγεται **ισοδυναμία** μεταξύ κατηγοριών. Ακόμη θα ισχύει $F^{-1} = G$ και ο G θα καλείται ο **αντίστροφος** του F .

Ορισμός 2.2.42. Ένας *contravariant* συναρτητής $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι **ισοδυναμία** μεταξύ κατηγοριών αν ο *covariant* συναρτητής $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι ισοδυναμία μεταξύ κατηγοριών.

Ορισμός 2.2.43. Ένας *contravariant* συναρτητής $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ που είναι ισοδυναμία μεταξύ κατηγοριών καλείται **δυσκότητα (duality)**.

Πριν μιλήσουμε για τον συναρτητή Hom θα δώσουμε τους ορισμούς του *full*, *faithfull* και *dense* συναρτητή καθώς και ένα σημαντικό θεώρημα σχετικό με την ισοδυναμία μεταξύ κατηγοριών.

Ορισμός 2.2.44. Έστω \mathcal{C}, \mathcal{D} δυο κατηγορίες και έστω ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Ο συναρτητής F καλείται **πιστός (faithfull)** αν ο μορφισμός

$$F_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$$



είναι μονομορφισμός για κάθε $(X, Y) \in \text{ob } \mathcal{C}$.

Ο συναρτητής F καλείται **πλήρης (full)** αν ο μορφισμός

$$F_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$$

είναι επιμορφισμός για κάθε $(X, Y) \in \text{ob } \mathcal{C}$.

Ορισμός 2.2.45. Έστω \mathcal{C}, \mathcal{D} δυο κατηγορίες και έστω ένας συναρτητής

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

Ο συναρτητής F καλείται **πυκνός (dense)** αν για κάθε αντικείμενο M της κατηγορίας \mathcal{D} υπάρχει ένα αντικείμενο C της κατηγορίας \mathcal{C} τέτοιο ώστε

$$F(C) \simeq M$$

Θεώρημα 2.2.46. Ένας covariant συναρτητής $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ μεταξύ κατηγοριών είναι ισοδυναμία αν και μόνον αν είναι full, faithful και dense.

Έστω \mathcal{C} μια κατηγορία. Θα ορίσουμε τον συναρτητή Hom από την κατηγορία \mathcal{C} στην Set και θα μελετήσουμε τον δυικό συναρτητή $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K})$ από την κατηγορία $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$ στην $\text{Rep}(Q^{op}, \mathbb{K})$ όπου \mathbb{K} σώμα, Q μια φαρέτρα, Q^{op} η δυική της και $\text{Rep}(Q^{op}, \mathbb{K})$ η κατηγορία που έχει ως αντικείμενα τις αναπαραστάσεις της φαρέτρας Q^{op} . Ξεκινάμε σταθεροποιώντας ένα αντικείμενο X στην \mathcal{C} .

Ορισμός 2.2.47. Ο συναρτητής $\text{Hom}(X, -)$ από την κατηγορία \mathcal{C} στην Set ονομάζεται ο (covariant) Hom **συναρτητής** που καθορίζεται από το αντικείμενο X της \mathcal{C} και έχει τις ιδιότητες :

1. $\text{Hom}(X, -)Y = \text{Hom}(X, Y)$
2. $\text{Hom}(X, -)(g)$, όπου $g : Y \rightarrow Y'$, είναι η απεικόνιση

$$\text{Hom}(X, g) : \kappa \mapsto g\kappa$$

του $\text{Hom}(X, Y)$ στο $\text{Hom}(X', Y')$.

Αντίστοιχα αν σταθεροποιήσουμε ένα αντικείμενο Y στην \mathcal{C} μπορούμε να ορίσουμε αλλιώς τον συναρτητή Hom .

Ορισμός 2.2.48. Ο συναρτητής $\text{Hom}(-, Y)$ από την κατηγορία \mathcal{C} στην Set ονομάζεται ο (contravariant) Hom **συναρτητής** που καθορίζεται από το αντικείμενο Y της \mathcal{C} και έχει τις ιδιότητες :

1. $\text{Hom}(-, Y)X = \text{Hom}(X, Y)$
2. $\text{Hom}(-, Y)(f)$, όπου $f : X \rightarrow X'$, είναι η απεικόνιση

$$\text{Hom}(f, Y) : \kappa \mapsto \kappa f$$

του $\text{Hom}(X, Y)$ στο $\text{Hom}(X', Y')$.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τον συναρτητή Hom από την κατηγορία $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$ στην $\text{Rep}(Q^{op}, \mathbb{K})$. Έστω \mathbb{K} σώμα, Q μια φαρέτρα και Q^{op} η δυική της.

2

Ε

ζ

π

ε

ο

α

π

μ

λ

ζ

η

θ

ο

π

ε

ς

Ορισμός 2.2.49. Ο συναρτητής $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K})$ από την κατηγορία $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$ στην $\text{Rep}(Q^{op}, \mathbb{K})$ ονομάζεται **δυνικός διανυσματικός χώρος**, συμβολίζουμε με $D = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K})$ και έχουμε

$$D : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(Q^{op}, \mathbb{K})$$

με τις ιδιότητες

1. Για κάθε αναπαράσταση X της Q να ισχύει

$$(DX)_i = D(X_i) \text{ και } (DX)_\alpha = D(X_\alpha)$$

για κάθε $i \in Q_0$, $\alpha \in Q_1$.

2. Για κάθε μορφισμό $\phi : X \rightarrow Y$, όπου X, Y αναπαραστάσεις της Q να ισχύει

$$(D\phi)_i = D(\phi_i)$$

για κάθε $i \in Q_0$.

Αναφέρουμε ξανά το λήμμα (1.3.7) ως ένα κάλο παράδειγμα και αποτέλεσμα του παραπάνω ορισμού

Λήμμα 2.2.50. Έστω $X \in \text{Rep}(Q, \mathbb{K})$ και $Y \in \text{Rep}(Q^{op}, \mathbb{K})$. Τότε υπάρχει μονομορφισμός

$$\varepsilon_X : X \rightarrow D^2 X$$

με τύπο $\varepsilon_X(x)(\phi) = \phi(x)$ για $x \in X$ και $\phi \in DX$, ο οποίος επάγει κανονικό ισομορφισμό

$$\text{Hom}(Y, DX) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X, DY).$$

$$\phi : Y \rightarrow DX \longrightarrow (D\phi) \circ \varepsilon_X$$

2.3 Δακτύλιοι του Artin

Έστω Λ δακτύλιος και $\{M_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια Λ -πρότυπων. Ως $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ορίζουμε το ευθύ άθροισμα των $\{M_i\}_{i \in I}$ R -πρότυπων. Ορίσαμε στη προηγούμενη παράγραφο το ημιαπλό Λ -πρότυπο ένα Λ -πρότυπο το M το οποίο γράφεται ως ευθύ άθροισμα από απλά πρότυπα.

Ορισμός 2.3.1. Ένας δακτύλιος Λ καλείται **ημιαπλός δακτύλιος** αν και μόνον αν ο Λ είναι ημιαπλό Λ -πρότυπο.

Παρατήρηση 2.3.2. Λέμε αλλιώς ότι ένα πρότυπο M είναι ημιαπλό αν και μόνον αν κάθε υποπρότυπο του M είναι ευθύς αθροιστέος του M .

Συνεχίζουμε την παράγραφο με σκοπό να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το θεώρημα Jordan-Hölder. Πρώτα όμως χρειάζεται να δώσουμε τους ορισμούς σημαντικών εννοιών.

Ορισμός 2.3.3. Έστω ένα αριστερό Λ -πρότυπο M . Θα λέμε ότι το M είναι **πεπερασμένου μήκους** αν υπάρχει πεπερασμένη αλυσίδα (filtration) υποπρότυπων τέτοια ώστε

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n = 0$$



όπου τα Λ -πρότυπα πηλικά M_i/M_{i+1} είναι είτε μηδενικά είτε απλά για κάθε $i = 0, \dots, n-1$.

Η πεπερασμένη αλυσίδα υποπροτύπων F του M καλείται **γενικευμένη συνθετική σειρά** και τα μη-μηδενικά R -πρότυπα πηλικά M_i/M_{i+1} **συνθετικοί παράγοντες της αλυσίδας F** .

Αν κανένα Λ -πρότυπο πηλικο M_i/M_{i+1} δεν είναι μηδέν για $i = 1, \dots, n-1$ τότε η αλυσίδα F καλείται **συνθετική σειρά του M** .

Ορισμός 2.3.4. Έστω ένα απλό Λ -πρότυπο S . Ορίζουμε με $m_S^F(M)$ τον αριθμό των συνθετικών παραγόντων της F που είναι ισομορφικά με το S .

Ορίζουμε με $l_F(M)$ το άθροισμα $\sum m_S^F(M)$, που θεωρείται πάνω από όλα τα απλά Λ -πρότυπα.

Ορίζουμε το **μήκος** $l(M)$ του M το ελάχιστο $l_F(M)$ για τη συνθετική σειρά F του M και $m_S(M)$ να είναι το ελάχιστο του $m_S^F(M)$. Ακόμη, θεωρούμε τη σύμβαση $l(0) = 0$.

Ας δούμε τώρα σε μια παρατήρηση, μια ιδιότητα για τις ακριβείς ακολουθίες, που θα μας βοηθήσει στην παρακάτω πρόταση αλλά και στο θεώρημα των Jordan-Hölder.

Παρατήρηση 2.3.5. Έστω η ακριβής ακολουθία αριστερών Λ -προτύπων

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

και F η γενικευμένη συνθετική σειρά $B = B_0 \supset B_1 \supset \dots \supset B_n = 0$ του B . Αυτή η αλυσίδα επάγει μια F' αλυσίδα του A να είναι :

$$A = f^{-1}(B) \supset f^{-1}(B_1) \supset \dots \supset f^{-1}(B_n) = 0$$

και μια F'' αλυσίδα του C να είναι :

$$C = g(B) \supset g(B_1) \supset \dots \supset g(B_n) = 0$$

Θα γράφουμε $f^{-1}(B_i) = A_i$ και $g(B_i) = C_i$.

Πρόταση 2.3.6. Ισχύουν τα παρακάτω :

(a) Οι αλυσίδες F' του A και F'' του C είναι γενικευμένες συνθετικές σειρές.

(b) Για κάθε απλό πρότυπο S ισχύει

$$m_S^{F'}(A) + m_S^{F''}(C) = m_S^F(B)$$

(c) $l_{F'}(A) + l_{F''}(C) = l_F(B)$

Απόδειξη. Για κάθε $i = 0, \dots, n-1$ έχουμε τις ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow A_i \longrightarrow B_i \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$$



και έτσι έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_{i+1} & \longrightarrow & B_{i+1} & \longrightarrow & C_{i+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_i & \longrightarrow & B_i & \longrightarrow & C_i \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_i/A_{i+1} & \longrightarrow & B_i/B_{i+1} & \longrightarrow & C_i/C_{i+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Άρα αν $B_i/B_{i+1} = 0$ τότε $A_i/A_{i+1} = 0 = C_i/C_{i+1}$ ενώ αν B_i/B_{i+1} είναι απλό R -πρότυπο τότε είτε

$$A_i/A_{i+1} \simeq B_i/B_{i+1} \text{ και } C_i/C_{i+1} = 0$$

είτε

$$C_i/C_{i+1} \simeq B_i/B_{i+1} \text{ και } A_i/A_{i+1} = 0$$

Έτσι τα (a),(b),(c) επαληθεύονται εύκολα. □

Θεώρημα 2.3.7. (Jordan-Hölder) Έστω B ένα Λ -πρότυπο πεπερασμένου μήκους και F, G δύο συνθετικές σειρές του B . Τότε για κάθε απλό Λ -πρότυπο S έχουμε

$$m_S^F(B) = m_S^G(B) = m_S(B) \text{ και } \text{ara } l_F(B) = l_G(B) = l(B).$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή στο $l(B)$. Ο ισχυρισμός προφανώς ισχύει για $l(B) \leq 1$. Έστω ότι ισχύει για $l(B) > 1$. Τότε από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι

$$l(A) + l(B/A) \leq l_F(B)$$

και άρα $l(A) < l(B)$, $l(B/A) < l(B)$, όπου $l(A) \neq 0$ και $l(B/A) \neq 0$

Έστω F, G δύο συνθετικές σειρές του B και έστω F', G' οι αλυσίδες που επάγονται στο A από τις F, G και έστω F'', G'' οι αλυσίδες που επάγονται στο B/A . Από την υπόθεση της επαγωγής για κάθε απλό Λ -πρότυπο S έχουμε

$$m_S^{F'}(A) = m_S^{G'}(A) \text{ και } m_S^{F''}(B/A) = m_S^{G''}(B/A)$$

Όμως από την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$m_S^F(B) = m_S^{F'}(A) + m_S^{F''}(B/A)$$

Άρα

$$m_S^F(B) = m_S^G(B) \text{ και } \text{ara } l_F(B) = l_G(B).$$



□

Παρατήρηση 2.3.8. Έστω μια ακριβής ακολουθία απο αριστερά Λ -πρότυπα

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Αν F' είναι μια γενικευμένη συνθετική σειρά $A = A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_s = 0$ του A και F'' είναι μια γενικευμένη συνθετική σειρά $C = C_0 \supset C_1 \supset \dots \supset C_t = 0$ του C , τότε έχουμε μια γενικευμένη συνθετική σειρά $B = B_0 \supset g^{-1}(C_1) \supset \dots \supset g^{-1}(C_{t-1}) \supset f(A) \supset f(A_1) \supset \dots \supset f(A_s) = 0$.

Πόρισμα 2.3.9. Έστω μια ακριβής ακολουθία απο αριστερά Λ -πρότυπα

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

όπου τα A, C έχουν πεπερασμένο μήκος. Τότε το B έχει πεπερασμένο μήκος και $l(A) + l(C) = l(B)$.

Απόδειξη. Έστω A υποπρότυπο του B . Αν $A = A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_r = 0$ είναι μια γενικευμένη συνθετική σειρά του A και $B/A = B/A_0 \supset B/A_1 \supset \dots \supset B/A_s = 0$ είναι μια γενικευμένη συνθετική σειρά του B/A τότε έχουμε μια γενικευμένη συνθετική σειρά $B = B_0 \supset g^{-1}(B/A_1) \supset \dots \supset g^{-1}(B/A_{s-1}) \supset f(A) \supset f(A_1) \supset \dots \supset f(A_r) = 0$ του B . Άρα $l(B) = r + sl(A) + l(B/A)$ και έτσι το B έχει πεπερασμένο μήκος. \square

Παρατήρηση 2.3.10. Ένα ημιαπλό πρότυπο πεπερασμένου μήκους είναι ορισμένο κατά μοναδικό τρόπο απο τους συνθετικούς παράγοντες που το αποτελούν αλλά αυτό δεν συμβαίνει γενικά με τα πρότυπα και τις συνθετικές σειρές. Για παράδειγμα αν μελετήσουμε ένα πρότυπο πεπερασμένου μήκους B και το άθροισμα $\oplus m_S(B)S$ το οποίο θεωρείται πάνω απο όλα τα μη-ισόμορφα απλά Λ -πρότυπα S , θα δούμε οτι έχουν τους ίδιους συνθετικούς παράγοντες. Άρα όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα Λ -πρότυπα ορίζονται απο τους συνθετικούς παράγοντες αυτών αν και μόνον αν ο Λ είναι ημιαπλός δακτύλιος.

Πρόταση 2.3.11. Έστω M ένα Λ -πρότυπο πεπερασμένου μήκους και ένας Λ -ομομορφισμός $f: M \rightarrow M$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :

1. Ο f είναι ισομορφισμός.
2. Ο f είναι μονομορφισμός.
3. Ο f είναι επιμορφισμός.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση απο το γεγονός οτι $l(f(A)) + l(A/f(A)) = l(A)$. \square

Ορισμός 2.3.12. Έστω Λ δακτύλιος. Ορίζουμε με $\text{Mod-}\Lambda$ την κατηγορία των αριστερών Λ -προτύπων. Μια υποκατηγορία \mathcal{C} της $\text{Mod-}\Lambda$ καλείται **κλειστή ως προς επεκτάσεις (closed under extensions)** αν B είναι αντικείμενο της κατηγορίας \mathcal{C} για κάθε ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

με A, C αντικείμενα της \mathcal{C} . Συμβολίζουμε την κατηγορία των προτύπων πεπερασμένου μήκους με $f. l. \Lambda$.



Πρόταση 2.3.13. (a) Η κατηγορία $f.l.\Lambda$ είναι η μικρότερη υποκατηγορία της $\text{Mod-}\Lambda$ η οποία είναι κλειστή ως προς επεκτάσεις και περιέχει τα απλά πρότυπα

(b) Ένα Λ -πρότυπο M είναι πεπερασμένου μήκους αν και μόνον αν είναι Artinian και Noetherian ταυτόχρονα.

Απόδειξη. (a). Η κατηγορία $f.l.\Lambda$ η οποία περιέχει τα απλά πρότυπα είναι κλειστή ως προς επεκτάσεις λόγω του πορίσματος (2.3.8). Ακόμη είναι προφανές ότι κάθε υποκατηγορία της $\text{Mod-}\Lambda$ η οποία είναι κλειστή ως προς επεκτάσεις και περιέχει τα απλά πρότυπα θα περιέχει και την υποκατηγορία $f.l.\Lambda$.

(b). Κάθε πρότυπο πεπερασμένου μήκους είναι Artinian και Noetherian αφού τα Artinian και Noetherian πρότυπα είναι κλειστά ως προς επεκτάσεις και τα απλά πρότυπα είναι Artinian και Noetherian ταυτόχρονα. Αντίστροφα έστω B ένα πρότυπο το οποίο είναι Artinian και Noetherian ταυτόχρονα. Τότε πρόφανώς και κάθε υποπρότυπο και πρότυπο-πηλίκου του B είναι Artinian και Noetherian. Τώρα αφού το B είναι Noetherian θα υπάρχει ένα υποπρότυπο A του B το οποίο θεωρούμε ότι θα είναι το μεγαλύτερο υποπρότυπο του B πεπερασμένου μήκους. Αν $A \neq B$ τότε το πρότυπο-πηλίκου B/A θα είναι Artinian και έχει ένα απλό υποπρότυπο C . Έστω τώρα A' ένα υποπρότυπο του B με $A \subset A' \subset B$ και $A'/A \simeq C$. Τότε το A' είναι πεπερασμένου μήκους. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού υποθέσαμε ότι το A είναι το μεγαλύτερο υποπρότυπο του B πεπερασμένου μήκους. Έτσι $A = B$ και το B είναι πεπερασμένου μήκους. \square

Πρόταση 2.3.14. Έστω ένα ημιαπλό Λ -πρότυπο B . Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. Το B είναι πεπερασμένου μήκους.
2. Το B είναι Noetherian.
3. Το B είναι Artinian.

Θα συνεχίσουμε δίνοντας τους ορισμούς των δεξιά και αριστερά ελάχιστων minimal μορφισμών μεταξύ προτύπων πεπερασμένου μήκους. Σταθεροποιούμε ένα δακτύλιο Λ και έστω ένα Λ -πρότυπο C .

Θεωρούμε την κατηγορία $\text{Mod-}\Lambda/C$ της οποίας τα αντικείμενα είναι Λ -μορφισμοί $f : B \rightarrow C$ και οι μορφισμοί είναι

$$g : f \rightarrow f'$$

απο τον μορφισμό $f : B \rightarrow C$ στον μορφισμό $f' : B' \rightarrow C$. Δηλαδή Λ -μορφισμοί

$$g : B \rightarrow B'$$

τέτοιιοι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \\ g \downarrow & \nearrow f' & \\ B' & & \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Ο μορφισμός $g : f \rightarrow f'$ είναι ισομορφισμός στην κατηγορία $\text{Mod-}\Lambda/C$ αν και μόνον αν ο μορφισμός $g : B \rightarrow B'$ είναι ισομορφισμός στην κατηγορία $\text{Mod-}\Lambda$.



Ορισμός 2.3.15. Λέμε ότι ο Λ -μορφισμός $f : B \rightarrow C$ είναι **δεξιά ελάχιστος (minimal)** αν κάθε μορφισμός $g : f \rightarrow f$ είναι αυτομορφισμός.

Παρατήρηση 2.3.16. Μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των αντικειμένων της κατηγορίας $\text{Mod-}\Lambda/C$ ως εξής :

$$f \sim f' \text{ αν } \text{Hom}(f, f') \neq 0 \text{ και } \text{Hom}(f', f) \neq 0$$

Πρόταση 2.3.17. Έστω Λ δακτύλιος και έστω C ένα Λ -πρότυπο. Κάθε κλάση ισοδυναμίας στην $\text{Mod-}\Lambda/C$ που περιέχει έναν μορφισμό $f : B \rightarrow C$, όπου B Λ -πρότυπο πεπερασμένου μήκους, περιέχει έναν δεξιό ελάχιστο μορφισμό ο οποίος είναι μοναδικός μέχρι ισομορφισμό.

Απόδειξη. Διαλέγουμε ένα Λ -μορφισμό $f : B \rightarrow C$ στην κλάση ισοδυναμίας και έστω $l(B)$ το ελάχιστο μήκος του B . Έστω επίσης ένας μορφισμός $g : f \rightarrow f$ στην κατηγορία $\text{Mod-}\Lambda/C$. Τότε έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow & \nearrow & \uparrow f \\ g(B) & \xrightarrow{f|_{g(B)}} & B \end{array}$$

και άρα $g(B) = B$ αφού το $l(B)$ είναι το ελάχιστο μήκος του B . Τότε ο μορφισμός $g : B \rightarrow B$ είναι ισομορφισμός και έτσι ο μορφισμός $f : B \rightarrow C$ είναι δεξιά ελάχιστος μορφισμός.

Έστω ότι υπάρχει ένας άλλος μορφισμός $f' : B' \rightarrow C$ που είναι ισοδύναμος με τον $f : B \rightarrow C$. Τότε έχουμε και τους μορφισμούς $g : f \rightarrow f'$ και $h : f' \rightarrow f$. Όμως οι f, f' είναι δεξιά ελάχιστοι που σημαίνει ότι gh και hg είναι ισομορφισμοί. Άρα οι g και h είναι ισομορφισμοί και έτσι ο $f : B \rightarrow C$ όπου B πεπερασμένου μήκους, είναι δεξιά ελάχιστος μορφισμός μοναδικός μέχρι ισομορφισμό. \square

Ορισμός 2.3.18. Έστω $f : B \rightarrow C$ μορφισμός και B ένα πρότυπο πεπερασμένου μήκους. Τότε οι μοναδικοί μέχρι ισομορφισμό στην $\text{Mod-}\Lambda/C$, δεξιά ελάχιστοι μορφισμοί στην κλάση ισοδυναμίας της κατηγορίας $\text{Mod-}\Lambda/C$ της f καλούνται **δεξιά ελάχιστες εκδοχές (right minimal versions)** του f .

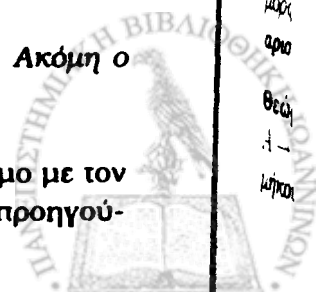
Θεώρημα 2.3.19. Έστω Λ δακτύλιος και έστω C ένα Λ -πρότυπο. Έστω $g : X \rightarrow C$ ένα αντικείμενο στην κατηγορία $\text{Mod-}\Lambda/C$ με X πρότυπο πεπερασμένου μήκους. Τότε το πρότυπο X αναλύεται ως εξής :

$$X = X' \oplus X''$$

με $g|_{X'} : X' \rightarrow C$ είναι δεξιά ελάχιστος μορφισμός και $g|_{X''} = 0$. Ακόμη ο μορφισμός $g|_{X'}$ είναι μια δεξιά ελάχιστη εκδοχή του g .

Απόδειξη. Διαλέγουμε ένα μορφισμό $f : B \rightarrow C$ ελάχιστο και ισοδύναμο με τον μορφισμό $g : X \rightarrow C$ αφού μας δίνεται αυτή η δυνατότητα λόγω της προηγού-

είν
Ορ
μι
αι
Ορ
μη
μορ
φο
θεώ
μήκο



μενης πρότασης. Τότε έχουμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{f} & C \\
 \downarrow s & & \uparrow \\
 X & \xrightarrow{g} & C \\
 \downarrow t & & \uparrow \\
 B & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

το οποίο είναι μεταθετικό. Τότε όμως $f = fts$. Έτσι ο ts είναι ισομορφισμός και άρα

$$X = \text{Im } s \oplus \text{Ker } t$$

όπου $\text{Im } s$ η εικόνα του s και $\text{Ker } t$ ο πυρήνας του t . Ακόμη ο μορφισμός

$$g|_{\text{Im } s} : \text{Im } s \rightarrow C$$

είναι δεξιά ελάχιστος και $g|_{\text{Ker } t} = 0$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο $g|_{\text{Im } s}$ είναι στην ίδια ισοδύναμη κλάση όπως ο g στην $\text{Mod-}\Lambda/C$. \square

Πόρισμα 2.3.20. Έστω μορφισμός $f : B \rightarrow C$ και B πρότυπο πεπερασμένου μήκους. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

1. Ο f είναι δεξιά ελάχιστος μορφισμός.
2. Αν B' είναι μη-μηδενικός προσθετέος του B , τότε $f|_{B'} \neq 0$.

Σταθεροποιώντας και πάλι ένα δακτύλιο Λ θεωρούμε ένα Λ -πρότυπο A και την κατηγορία $\text{Mod-}\Lambda/A$ της οποίας τα αντικείμενα είναι Λ -μορφισμοί $f : A \rightarrow B$ και οι μορφισμοί $g : f \rightarrow f'$ από τον $f : A \rightarrow B$ στον $f' : A \rightarrow B'$ είναι Λ -μορφισμοί $g : B \rightarrow B'$ τέτοιοι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow f' & \searrow g & \\
 B' & &
 \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Δηλαδή $gf = f'$.

Ορισμός 2.3.21. Λέμε ότι ο Λ -μορφισμός $f : A \rightarrow B$ είναι **αριστερά ελάχιστος (minimal)** αν κάθε μορφισμός $g : B \rightarrow B'$ με την ιδιότητα $gf = f$ είναι αυτομορφισμός.

Ορισμός 2.3.22. Έστω μορφισμός $f : A \rightarrow B$ και B ένα πρότυπο πεπερασμένου μήκους. Τότε οι μοναδικοί μέχρι ισομορφισμό στην $\text{Mod-}\Lambda/A$, αριστερά ελάχιστοι μορφισμοί στην κλάση ισοδυναμίας της κατηγορίας $\text{Mod-}\Lambda/A$ της f καλούνται **αριστερά ελάχιστες εκδοχές (left minimal versions)** του f .

Θεώρημα 2.3.23. Έστω Λ δακτύλιος και έστω A ένα Λ -πρότυπο. Έστω $f : A \rightarrow Y$ ένα αντικείμενο στην κατηγορία $\text{Mod-}\Lambda/A$ με Y πρότυπο πεπερασμένου μήκους. Τότε το πρότυπο Y αναλύεται ως εξής :

$$Y = Y' \oplus Y''$$



με $p'f : A \rightarrow Y'$ να είναι αριστερά ελάχιστος μορφισμός και $p''f : A \rightarrow Y'' = 0$, όπου $p' : Y \rightarrow Y'$ και $p'' : Y \rightarrow Y''$ είναι οι προβολές. Ακόμη ο μορφισμός $p'f$ είναι μια αριστερά ελάχιστη εκδοχή του f .

Συνεχίζουμε την παράγραφο δίνοντας τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες του ριζικού ενός δακτυλίου καθώς και των προτύπων αριστερών Artinian δακτυλίων. Μας ενδιαφέρουν οι δακτύλιοι Λ των οποίων όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα Λ -πρότυπα έχουν πεπερασμένο μήκος.

Ορισμός 2.3.24. Έστω Λ δακτύλιος με μονάδα. Το ριζικό $\text{Rad } \Lambda$ του Λ είναι η τομή όλων των αριστερών μέγιστων (ή δεξιών μέγιστων) ιδεωδών του Λ , δηλαδή είναι το σύνολο

$$\text{Rad } \Lambda = \bigcap \{ M \mid M \text{ είναι αριστερό μέγιστο ιδεώδες του } \Lambda \}$$

Παρατήρηση 2.3.25. Θα συμβολίζουμε το ριζικό $\text{Rad } \Lambda$ με τ_Λ ή με τ . Σημειώνουμε ότι το ριζικό ενός δακτυλίου, εφόσον είναι η τομή όλων των μέγιστων αριστερών ιδεωδών του Λ είναι και αυτό ιδεώδες.

Λήμμα 2.3.26. (Nakayama's lemma) Έστω α ένα αριστερό ιδεώδες ενός δακτυλίου Λ . Το α περιέχεται στο ριζικό τ αν και μόνου αν

$$\alpha M = M \Rightarrow M = 0$$

όπου M είναι πεπερασμένα παραγόμενο Λ -πρότυπο.

Θεώρημα 2.3.27. Έστω Λ ένας αριστερός δακτύλιος του Artin. Τότε ισχύουν τα παρακάτω :

1. Το ριζικό τ του Λ είναι μηδενοδύναμο.
2. Ο Λ/τ είναι ημιαπλός δακτύλιος.
3. Ένα Λ -πρότυπο A είναι ημιαπλό αν και μόνου αν $\tau A = 0$
4. Υπάρχει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός μη-ισομορφικών απλών Λ -προτύπων.
5. Ο δακτύλιος Λ είναι αριστερός Noetherian.

Απόδειξη. 1. Αφού ο Λ είναι αριστερός δακτύλιος του Artin και

$$\Lambda \supset \tau \supset \tau^2 \supset \dots \supset \tau^n \supset \dots$$

είναι μια φθίνουσα ακολουθία από αριστερά ιδεώδη υπάρχει θετικός ακέραιος n έτσι ώστε $\tau^n = \tau^{n+1}$. Έστω $\tau^n \neq 0$. Τότε $\tau^{n+1} = \tau^n \tau = \tau^n \neq 0$ και έτσι η κλάση F όλων των αριστερών ιδεωδών α με $\tau^n \alpha \neq 0$ είναι μη κενή. Διαλέγουμε ένα αριστερό ιδεώδες $\alpha \in \Lambda$ το οποίο όμως έχει την ιδιότητα ότι είναι ελάχιστο στο F . Τότε υπάρχει κάποιο $x \in \alpha$ έτσι ώστε $\tau^n x \neq 0$ και επομένως $\tau^n(\Lambda x) \neq 0$. Επειδή το α είναι ελάχιστο έχουμε ότι $\alpha = \Lambda x$, και άρα το α είναι πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό ιδεώδες. Ακόμα $0 \neq \tau^n \alpha = \tau^{n+1} \alpha = \tau^n \tau \alpha$. Έτσι $\tau \alpha \in F$ και άρα $\alpha = \tau \alpha$. Αυτό όμως είναι άτοπο λόγω του λήμματος του Nakayama και άρα $\tau^n = 0$.

τ
 εχ
 Πι
 υπο
 το ρι
 ιδεώ
 είναι
 ήλιο
 Α + 1
 Πρώτ
 ιδεώδ
 είναι

2. Έστω I ένα ιδεώδες του Λ που περιέχει το τ έτσι ώστε I/τ είναι μηδενοδύναμο στο Λ/τ . Τότε υπάρχει ένας ακέραιος t έτσι ώστε $I^t \subset \tau$. Αφού $\tau^n = 0$, έχουμε ότι $I^s = 0$ όπου $s = nt$. Έστω m ένα μέγιστο αριστερό ιδεώδες στο Λ και έστω η φυσική απεικόνιση $\pi : \Lambda \rightarrow \Lambda/m$. Αν $I \not\subseteq m$, τότε $\pi(I) \neq 0$ και άρα $\pi(I) = \Lambda/m$ αφού το Λ/m είναι απλό Λ -πρότυπο. Τότε έχουμε ότι $\pi(I^2) = I\pi(I) = I(\Lambda/m) = \Lambda/m$ και άρα $0 = \pi(I^s) = \Lambda/m$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $I \subset m$ και άρα $I \subset \tau$ ώστε $I/\tau = 0$ στο Λ/τ . Αφού ο Λ/τ δεν έχει μη-μηδενικά μηδενοδύναμα ιδεώδη και είναι αριστερός Artinian γιατί ο Λ είναι αριστερός Artinian έχουμε ότι ο Λ/τ είναι ημιαπλός δακτύλιος.
3. Αν A είναι ημιαπλό Λ -πρότυπο με $\tau A = 0$ και έτσι το A είναι ένα Λ/τ -πρότυπο και άρα ένα ημιαπλό Λ/τ -πρότυπο. Συνεπώς το A είναι ημιαπλό Λ -πρότυπο. Αντίστροφα από τον ορισμό του ριζικού τ έχουμε ότι αν A είναι ένα ημιαπλό Λ -πρότυπο τότε $\tau A = 0$.
4. Εφόσον υπάρχει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός μη-ισομορφικών Λ/τ -προτύπων και κάθε απλό Λ -πρότυπο είναι Λ/τ -πρότυπο, τότε υπάρχει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός μη-ισομορφικών απλών Λ -προτύπων.
5. Αφού ο δακτύλιος Λ είναι αριστερός Artinian και λόγω του (i) το ριζικό τ του Λ είναι μηδενοδύναμο έχουμε ότι ο Λ δακτύλιος έχει μια πεπερασμένη αλυσίδα

$$\Lambda \supset \tau \supset \tau^2 \supset \dots \supset \tau^n \supset \dots$$

Γράφουμε $\Lambda = \tau^0$. Τότε το πηλίκο τ^i/τ^{i+1} είναι ημιαπλό Λ -πρότυπο για $i = 0, \dots, n-1$ και είναι Artinian αφού ο Λ δακτύλιος είναι Artinian. Άρα από την πρόταση (2.3.13.) το τ^i/τ^{i+1} είναι Noetherian και έτσι ο Λ δακτύλιος είναι αριστερός Noetherian. □

Ως αποτέλεσμα του προηγούμενου θεωρήματος είναι το παρακάτω πόρισμα για την περιγραφή των δακτυλίων όπου όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα έχουν πεπερασμένο μήκος.

Πόρισμα 2.3.28. Έστω Λ ένας δακτύλιος, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

1. Κάθε πεπερασμένο παραγόμενο Λ -πρότυπο έχει πεπερασμένο μήκος.
2. Ο Λ δακτύλιος είναι αριστερός Artinian.
3. Το ριζικό του Λ είναι μηδενοδύναμο και τ^i/τ^{i+1} είναι πεπερασμένα παραγόμενα ημιαπλά πρότυπα για κάθε $i \geq 0$.

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας μια πρόταση που μας δίνει ένα κριτήριο για να υπολογίζουμε το ριζικό ενός δακτυλίου. Γενικά είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το ριζικό ενός αριστερού Artinian δακτυλίου Λ βρίσκοντας τα μέγιστα αριστερά ιδεώδη του. Η επόμενη πρόταση θα μας διευκολύνει δίνοντας ένα κριτήριο που είναι πιο εύκολο όταν αυτό εφαρμόζεται. Πριν αποδείξουμε την πρόταση θα θεωρήσουμε ότι αν A και B είναι υποπρότυπα ενός προτύπου C θα συμβολίζουμε με $A + B$ το υποπρότυπο του C το οποίο παράγεται από το A και B .

Πρόταση 2.3.29. Έστω Λ ένας αριστερός δακτύλιος του Artin και α ένα ιδεώδες του Λ έτσι ώστε το α να είναι μηδενοδύναμο και ο δακτύλιος Λ/α να είναι ημιαπλός. Τότε έχουμε ότι $\alpha = \tau$.



Απόδειξη. Έστω α ένα μηδενοδύναμο ιδεώδες και ο ημιαπλός δακτύλιος Λ/α . Για να δείξουμε ότι $\alpha \subset \tau$. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλαδή ότι υπάρχει ένα μέγιστο ιδεώδες $m \in \Lambda$ με $\alpha \not\subset m$. Τότε $\alpha + m = \Lambda$ όπου $\alpha + m$ συμβολίζει το μικρότερο αριστερό ιδεώδες που περιέχει το α και m . Άρα $\alpha^2 + \alpha m = \alpha$, ώστε $\alpha^2 + m = \Lambda$. Αν συνεχίσουμε με αυτόν τον τρόπο θα προκύψει ότι

$$\alpha^n + m = \Lambda \text{ για κάθε } n$$

Αυτό όμως είναι άτοπο αφού το α είναι μηδενοδύναμο. Άρα $\alpha \subset \tau$ και $\alpha \subset \tau$. Προφανώς το ριζικό του Λ/α είναι ίσο με τ/α και έτσι $\tau = \alpha$ αφού ο δακτύλιος Λ/α είναι ημιαπλός. \square

Για τους αριστερούς δακτύλιους του Artin σημαντικό ρόλο παίζει και το ριζικό ενός προτύπου.

Ορισμός 2.3.30. Το *ριζικό* $\text{Rad } A$ του Λ -προτύπου A πάνω από ένα δακτύλιο Λ είναι η τομή των μέγιστων υποπροτύπων του. Θα πούμε ότι ένα υποπρότυπο B του Λ -προτύπου A είναι *μικρό* στο A αν έχει την ιδιότητα: Αν ισχύει $B + X = A$ για ένα υποπρότυπο X του A , να συνεπάγεται ότι $X = A$.

Λήμμα 2.3.31. Έστω A ένα πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο πάνω από ένα δακτύλιο Λ . Τότε ένα υποπρότυπο B του A είναι μικρό αν και μόνον αν $B \subset \text{Rad } A$.

Απόδειξη. Έστω ότι $B \subset \text{Rad } A$ και έστω X ένα υποπρότυπο του A με $B + X = A$. Αφού το A είναι πεπερασμένα παραγόμενο κάθε κανονικό υποπρότυπο του A περιέχεται σε ένα μέγιστο υποπρότυπο και αφού το B περιέχεται σε όλα τα μέγιστα υποπρότυπα του A , έχουμε ότι $X = A$.

Αντίστροφα έστω ότι B ένα υποπρότυπο του A το οποίο όμως δεν περιέχεται στο $\text{Rad } A$ και έστω X ένα μέγιστο υποπρότυπο του A που δεν περιέχει το B . Τότε το B δεν είναι μικρό στο A αφού $B + X = A$, αυτό όμως είναι άτοπο αφού $X \neq A$. \square

Στην επόμενη πρόταση θα δώσουμε μια καλή περιγραφή του ριζικού ενός προτύπου πάνω από αριστερούς δακτυλίους του Artin.

Πρόταση 2.3.32. Έστω A ένα πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο πάνω από ένα αριστερό δακτύλιο του Artin έστω Λ . Τότε

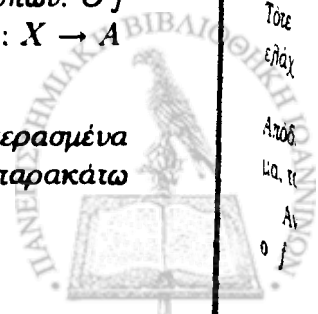
$$\text{Rad } A = \tau A$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι $\tau A \subset \text{Rad } A$. Υποθέτουμε ότι για ένα υποπρότυπο X του A ισχύει $\tau A + X = A$. Τότε $\tau^n A + X = A$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε λόγω προηγούμενου λήμματος το τ είναι μηδενοδύναμο στο $\text{Rad } A$ και $X = A$. Τώρα αφού το $A/\tau A$ είναι ημιαπλό Λ -πρότυπο έπεται ότι $\text{Rad}(A/\tau A) = 0$. Όμως $\text{Rad}(A/\tau A) = \text{Rad}(A)/\tau A$. Έπεται λοιπόν ότι $\text{Rad}(A)/\tau A = 0$ και έτσι $\text{Rad } A \subset \tau A$. Δηλαδή $\text{Rad } A = \tau A$. \square

Ορισμός 2.3.33. Έστω $f : A \rightarrow B$ ένας επιμορφισμός μεταξύ Λ -προτύπων. Ο f θα καλείται *ουσιαστικός (essential) επιμορφισμός* αν ένας μορφισμός $g : X \rightarrow A$ είναι επιμορφισμός όταν $fg : X \rightarrow B$ είναι επιμορφισμός.

Πόρισμα 2.3.34. Έστω $f : A \rightarrow B$ ένας επιμορφισμός μεταξύ πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων πάνω από ένα αριστερό δακτύλιο του Artin. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

δ
α
ει
ω
πε
ορ
φο
...
βαο
Πρό
της
Τότε
ελάχισ
Απόδ
κα. τι
Αι
ο /



1. Ο f είναι essential επιμορφισμός.
2. $\text{Ker } f \subset \tau A$.
3. Ο επαγόμενος επιμορφισμός

$$A/\tau A \rightarrow B/\tau B$$

είναι ισομορφισμός.

Πρόταση 2.3.35. Έστω Λ ένας αριστερός δακτύλιος του Artin. Αν A είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο Λ -πρότυπο και $f : A \rightarrow B$ είναι essential επιμορφισμός, τότε ο f είναι δεξιά ελάχιστος.

Απόδειξη. Από την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι $\text{Ker } f \subset \tau A$ και έτσι κανένας μη-μηδενικός αθροιστέος A' του A μπορεί να περιέχεται στο $\text{Ker } f$. Άρα από το θεώρημα (2.3.18.) ο f είναι δεξιά ελάχιστος. \square

Ορισμός 2.3.36. Έστω A ένα πεπερασμένου μήκους πρότυπο πάνω από ένα αριστερό δακτύλιο του Artin Λ . Ο μικρότερος ακέραιος i τέτοιος ώστε $\tau^i A = 0$ καλείται το **ριζικό μήκος (radical length)** του A και συμβολίζεται με $rl(A)$.

Η ακολουθία

$$0 \subset \tau^{i-1} A \subset \dots \subset \tau A \subset A$$

καλείται η **ριζικό σειρά (radical series)** του A . Κάποιες φορές το ριζικό μήκος του A καλείται το **μήκος του Loewy** του A .

Θα δώσουμε τώρα τη δομή των προβολικών προτύπων πάνω από αριστερούς δακτύλιους του Artin και τη σύνδεση του με τα απλά πρότυπα. Γιαυτό θα θεωρήσουμε ότι όλοι οι δακτύλιοι που θα δουλεύουμε θα είναι αριστεροί Artinian και επιπλέον θα δουλεύουμε με την κατηγορία $\text{Mod-}\Lambda$ των πεπερασμένα παραγόμενων αριστερών Λ -προτύπων.

Έστω λοιπόν Λ ένας αριστερός δακτύλιος του Artin και A ένα Artin Λ -πρότυπο.

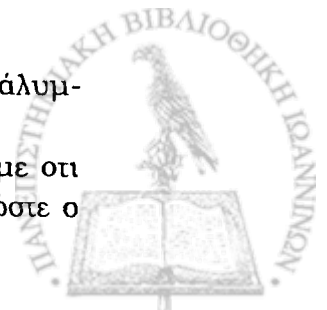
Ορισμός 2.3.37. Έστω Λ ένας αριστερός δακτύλιος του Artin και ένα Artin Λ -πρότυπο A . Ένα **προβολικό κάλυμμα** του A είναι ένας essential επιμορφισμός $f : P \rightarrow A$ όπου P είναι προβολικό Λ -πρότυπο.

Η ύπαρξη των προβολικών καλυμμάτων για ένα αντικείμενο A της $\text{Mod-}\Lambda$ βασίζεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.3.38. Έστω Λ ένας αριστερός δακτύλιος του Artin, A ένα αντικείμενο της $\text{Mod-}\Lambda$ και έστω $f : P \rightarrow A$ ένας επιμορφισμός με P προβολικό Λ -πρότυπο. Τότε ο $f : P \rightarrow A$ είναι ένα προβολικό κάλυμμα αν και μόνον αν ο f είναι δεξιά ελάχιστος.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από προηγούμενη πρόταση ότι αν f είναι προβολικό κάλυμμα, τότε ο $f : P \rightarrow A$ θα είναι δεξιά ελάχιστος.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο f είναι δεξιά ελάχιστος και θα δείξουμε ότι ο f είναι προβολικό κάλυμμα. Έστω μορφισμός $g : C \rightarrow P$ τέτοιος ώστε ο



$fg : C \rightarrow A$ να είναι επιμορφισμός. Αφού το P είναι προβολικό Λ -πρότυπο και ο $fg : C \rightarrow A$ είναι επιμορφισμός τότε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow s & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{fg} & A \\ \downarrow g & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Τώρα επειδή ο f είναι δεξιά ελάχιστος συνεπάγεται ότι ο gs είναι ισομορφισμός και άρα ο g είναι επιμορφισμός. Άρα ο μορφισμός $f : P \rightarrow A$ είναι ένα προβολικό κάλυμμα. \square

Ως άμεση συνέπεια της πρότασης ακολουθεί το παρακάτω θεώρημα για την ύπαρξη και μοναδικότητα των προβολικών καλυμμάτων.

Θεώρημα 2.3.39. Έστω Λ ένας αριστερός δακτύλιος του Artin και A ένα αντικείμενο της $\text{Mod-}\Lambda$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω :

1. Υπάρχει ένα προβολικό κάλυμμα $f : P \rightarrow A$ στην $\text{Mod-}\Lambda$.
2. Κάθε δύο προβολικά καλύμματα $f_1 : P_1 \rightarrow A$ και $f_2 : P_2 \rightarrow A$ είναι ισόμορφα στην $\text{Mod-}\Lambda$.

Πρόταση 2.3.40. 1. Έστω ένα προβολικό Λ -πρότυπο P . Ένας επιμορφισμός $f : P \rightarrow A$ είναι ένα προβολικό κάλυμμα αν και μόνον αν ο επαγόμενος επιμορφισμός

$$P/\tau P \rightarrow A/\tau A$$

είναι ισομορφισμός.

2. Έστω $\{f_i : P_i \rightarrow A_i, i \in I\}$ μία άπειρη οικογένεια από επιμορφισμούς, όπου τα $P_i, i \in I$ είναι προβολικά Λ -πρότυπα. Τότε ο επαγόμενος επιμορφισμός

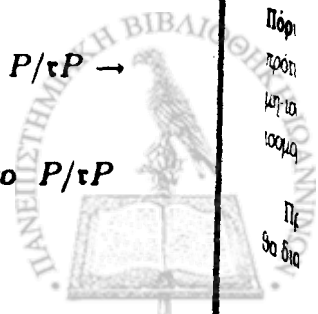
$$\bigoplus_{i \in I} P_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i$$

είναι προβολικό κάλυμμα αν και μόνον αν κάθε $f_i : P_i \rightarrow A_i$ είναι προβολικό κάλυμμα.

Παρατήρηση 2.3.41. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(\Lambda)$ την full υποκατηγορία των προβολικών προτύπων της $\text{Mod-}\Lambda$.

Θεώρημα 2.3.42. 1. Για κάθε πρότυπο P στην $\mathcal{P}(\Lambda)$ ο φυσικός επιμορφισμός $P \rightarrow P/\tau P$ είναι προβολικό κάλυμμα.

2. Αν P και Q ανήκουν στην $\mathcal{P}(\Lambda)$, τότε $P \simeq Q$ αν και μόνον αν $P/\tau P \rightarrow Q/\tau Q$.
3. Το P πρότυπο στην $\mathcal{P}(\Lambda)$ είναι μη-αναλύσιμο αν και μόνον αν το $P/\tau P$ είναι απλό.



4. Έστω P πρότυπο στην $\mathcal{P}(\Lambda)$ και

$$P = \bigoplus_{i \in I}^n P_i \simeq \bigoplus_{j \in I}^m Q_j$$

όπου τα P_i και Q_j είναι μη-αναλύσιμα πρότυπα. Τότε $m = n$ και υπάρχει μια μετάθεση σ του $\{1, 2, \dots, n\}$ έτσι ώστε

$$P_i \simeq Q_{\sigma(i)}$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Απόδειξη. 1. Το αποτέλεσμα είναι άμεσο από την πρόταση (2.3.39).

2. Είναι αποτέλεσμα του θεωρήματος (2.3.38) και της πρότασης (2.3.39).

3. Αν το $P/\tau P$ είναι απλό τότε προφανώς το P πρότυπο είναι μη-αναλύσιμο. Έστω τώρα ότι το P πρότυπο είναι μη-αναλύσιμο. Έστω ότι το $P/\tau P$ δεν είναι απλό και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αφού το $P/\tau P$ δεν είναι απλό τότε

$$P/\tau P \simeq U \oplus V$$

με U και V μη-μηδενικά ημιαπλά πρότυπα. Έστω $P(U) \rightarrow U$ και $P(V) \rightarrow V$ είναι προβολικά καλύμματα. Τότε λόγω του (ii) έχουμε ότι $P \simeq P(U) \oplus P(V)$ και άρα το P δεν είναι μη-αναλύσιμο. Άτοπο. Άρα το $P/\tau P$ είναι απλό.

4. Υποθέτουμε ότι

$$P = \bigoplus_{i \in I}^n P_i \simeq \bigoplus_{j \in I}^m Q_j$$

όπου τα P_i και Q_j είναι μη-αναλύσιμα πρότυπα. Τότε

$$P/\tau P = \bigoplus_{i \in I}^n P_i/\tau P_i \simeq \bigoplus_{j \in I}^m Q_j/\tau Q_j$$

όπου τα $P_i/\tau P_i$ και $Q_j/\tau Q_j$ είναι απλά πρότυπα. Τότε $n = m$ και άρα θα υπάρχει μια μετάθεση σ του $\{1, 2, \dots, n\}$ έτσι ώστε

$$P_i/\tau P_i \simeq Q_{\sigma(i)}/\tau Q_{\sigma(i)}$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε λόγω του (ii) έχουμε ότι

$$P_i \simeq Q_{\sigma(i)}$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

□

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος είναι το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 2.3.43. Έστω S_1, \dots, S_n ένα σύνολο από μη-ισομορφικά απλά Λ -πρότυπα. Τότε τα προβολικά τους καλύμματα P_1, \dots, P_n είναι ένα σύνολο από μη-ισομορφικά μη-αναλύσιμα προβολικά Λ -πρότυπα. Επιπλέον κάθε P_i είναι ισομορφικό με έναν αδροιστέο του Λ σαν αριστερό Λ -πρότυπο.

Πριν δώσουμε τις επόμενες προτάσεις για την δομή των προβολικών προτύπων θα διατυπώσουμε τον ορισμό του τοπικού δακτυλίου.



Ορισμός 2.3.44. Ένας δακτύλιος Λ ονομάζεται **τοπικός (local)** αν τα στοιχεία του Λ που είναι μη-αντιστρέψιμα αποτελούν ένα ιδεώδες του Λ .

Πρόταση 2.3.45. Έστω Λ είναι τοπικός δακτύλιος. Τότε τα 0 και 1 είναι τα μοναδικά ταυτοδύναμα στοιχεία του.

Απόδειξη. Έστω ένα ταυτοδύναμο στοιχείο e το οποίο είναι αντιστρέψιμο. Τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο $f \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $ef = 1$ και άρα $e = eef = ef = 1$. Άρα αν e είναι ταυτοδύναμο στοιχείο διαφορετικό από τα 0, 1 τότε τα e και $1 - e$ δεν είναι μονάδες. Όμως το άθροισμα τους είναι μονάδα και έτσι ο δακτύλιος δεν είναι τοπικός. Άρα τα 0 και 1 είναι τα μοναδικά ταυτοδύναμα στοιχεία του. \square

Πρόταση 2.3.46. Έστω ένα προβολικό πρότυπο P πάνω από ένα αριστερό δακτύλιο του Artin Λ . Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

1. Το Λ -πρότυπο P είναι μη-αναλύσιμο.
2. Το τP είναι το μοναδικό μέγιστο υποπρότυπο του P .
3. Ο δακτύλιος $\text{End}_\Lambda(P)$ είναι τοπικός.

Απόδειξη. (i) \Rightarrow (ii) Γνωρίζουμε ότι αν το P είναι μη-αναλύσιμο, τότε το $P/\tau P$ είναι απλό Λ -πρότυπο. Τότε το τP είναι μέγιστο υποπρότυπο του P και άρα το τP είναι το μοναδικό μέγιστο υποπρότυπο αφού το τP είναι η τομή των μέγιστων υποπρωτύπων.

(ii) \Rightarrow (iii) Έστω $f \in \text{End}_\Lambda(P)$. Αφού το τP είναι το μοναδικό μέγιστο υποπρότυπο του P έχουμε ότι $\text{Im } f \not\subseteq \tau P$ αν και μόνον αν $f : P \rightarrow P$ είναι επί. Όμως αν η $f : P \rightarrow P$ είναι επί θα είναι και ισομορφισμός. Άρα η f στον $\text{End}_\Lambda(P)$ είναι μονάδα αν και μόνον αν $\text{Im } f \not\subseteq \tau P$. Άρα τα στοιχεία του $\text{End}_\Lambda(P)$ που είναι διάφορα της μονάδας είναι τα $f \in \text{End}_\Lambda(P)$ τέτοια ώστε $\text{Im } f \subseteq \tau P$ και άρα φτιάχνουν ένα ιδεώδες στον $\text{End}_\Lambda(P)$. Από τον ορισμό λοιπόν του τοπικού δακτυλίου βγάζουμε το συμπέρασμα.

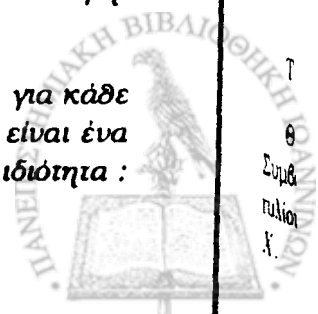
(iii) \Rightarrow (i) Άμεση συνέπεια της πρότασης (2.3.44). \square

Θα δείξουμε τώρα με την παρακάτω πρόταση πως μπορούμε να βρούμε τα μη-αναλύσιμα προβολικά πρότυπα χρησιμοποιώντας ταυτοδύναμα στοιχεία. Πρώτα όμως θα δώσουμε κάποιους ορισμούς που θα μας χρειαστούν.

Ορισμός 2.3.47. Ένα σύνολο από ταυτοδύναμα στοιχεία $\{e_1, \dots, e_n\}$ σε ένα δακτύλιο Λ ονομάζεται **ορθογώνιο** αν $e_i e_j = 0$ για $i \neq j$. Ένα μη-μηδενικό ταυτοδύναμο στοιχείο e ονομάζεται **primitive** αν το e δεν μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δυο μη-μηδενικών ορθογώνιων ταυτοδύναμων στοιχείων.

Πρόταση 2.3.48. Έστω Λ ένας αριστερός δακτύλιος του Artin και e ένα μη-μηδενικό ταυτοδύναμο στοιχείο του Λ .

1. Υποθέτουμε ότι $\Lambda e = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ με $P_i \neq 0$ και έστω $e_i \in P_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ έτσι ώστε $e = e_1 + \dots + e_n$. Τότε το $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι ένα σύνολο από μη-μηδενικά ορθογώνια ταυτοδύναμα στοιχεία με την ιδιότητα : $\Lambda e_i = P_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.



2. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι ένα σύνολο από μη-μηδενικά ορθογώνια ταυτοδύναμα στοιχεία τέτοια ώστε $e = e_1 + \dots + e_n$. Τότε το Λe_i είναι ένα υποπρότυπο του Λe για κάθε $i = 1, \dots, n$ και

$$\Lambda e = \Lambda e_1 \oplus \dots \oplus \Lambda e_n$$

3. Το στοιχείο $e \in \Lambda$ είναι primitive ταυτοδύναμο αν και μόνον αν το Λe είναι ένα μη-αναλύσιμο προβολικό Λ -πρότυπο.
4. Το ταυτοδύναμο στοιχείο 1 μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα primitive ορθογώνιων ταυτοδύναμων στοιχείων.

Απόδειξη. 1. Αφού $e \in \Lambda$ υπάρχουν μοναδικά στοιχεία $e_i \in P_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ έτσι ώστε $e = e_1 + \dots + e_n$. Έστω $x \in \Lambda e$ και άρα $x = \lambda e$, τότε

$$xe = (\lambda e)e = \lambda e^2 = \lambda e = x$$

Έστω ότι $x_i \in P_i$ για κάποιο i . Τότε

$$x_i = x_i e_1 + \dots + x_i e_i + \dots + x_i e_n$$

Αφού $x_j e_j \in P_j$ για κάθε $j = 1, \dots, n$ και υπάρχει μοναδικός τρόπος γραφής του x_i σαν άθροισμα στοιχείων του P_j συνεπάγεται ότι $x_i e_j = 0$ για κάθε $i \neq j$ και $x_i e_i = x_i$. Άρα $\Lambda e_i = P_i$ και επειδή $P_i \neq 0$ συνεπάγεται ότι $e_i \neq 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Επίσης δείξαμε ότι $e_i e_j = 0$ αν $i \neq j$ και άρα το $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι ένα σύνολο από μη-μηδενικά ορθογώνια ταυτοδύναμα στοιχεία με την ιδιότητα : $\Lambda e_i = P_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

2. Γνωρίζουμε ότι $e_i e_j = 0$ για $i \neq j$. Τότε

$$e_i e = e_i e_1 + \dots + e_i e_i + \dots + e_i e_n = e_i^2 = e_i$$

Άρα κάθε $e_i \in \Lambda e$ και έτσι $\Lambda e_i \subset \Lambda e$. Θα δείξουμε τώρα ότι κάθε $x_i \in \Lambda e$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο σαν άθροισμα $x_1 + \dots + x_n$ όπου $x_i \in \Lambda e_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Όμως κάθε στοιχείο στο Λe_i μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα, άρα αρκεί να δείξουμε ότι αν $x_1 + \dots + x_n = 0$ τότε $x_i = 0$ για κάθε i με $x_i \in \Lambda e_i$.

Έτσι υποθέτουμε ότι $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ με $\lambda_i \in \Lambda$. Τότε

$$\lambda_1 e_1 e_i + \dots + \lambda_i e_i e_i + \dots + \lambda_n e_n e_i = 0$$

Άφου $e_i e_j = 0$ για κάθε $i \neq j$ έπεται ότι

$$0 = \lambda_i e_i e_i = \lambda_i e_i^2 = \lambda_i e_i$$

Άρα $\lambda_i e_i = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Τα (iii) και (iv) αποδεικνύονται εύκολα λόγω των (i) και (ii). □

Θα κλείσουμε την παράγραφο με κάποια στοιχεία ομολογιακής άλγεβρας. Συμβολίζουμε με $\text{l. gl. dim } \Lambda$ την **ολική (global) διάσταση** ενός αριστερού δακτυλίου του Artin Λ και με $\text{rd}_\Lambda X$ την **προβολική διάσταση** για ένα Λ -πρότυπο X .



Πρόταση 2.3.49. Έστω τ το ριζικό ενός αριστερού δακτύλιου του Artin Λ . Τότε

$$\text{l. gl. dim } \Lambda = \text{pd}_\Lambda(\Lambda/\tau)$$

Ορισμός 2.3.50. Έστω Λ δακτύλιος. Ο Λ καλείται **αριστερά κληρονομικός (left hereditary)** αν όλα τα αριστερά του ιδεώδη είναι προβολικά.

Ένας αριστερός δακτύλιος του Artin Λ καλείται **κληρονομικός (hereditary)** αν ο δακτύλιος Λ είναι αριστερά κληρονομικός.

Ακολουθεί ένα σημαντικό πόρισμα της πρότασης, το οποίο θα διατυπώσουμε χωρίς απόδειξη, για κληρονομικούς αριστερούς δακτύλιους του Artin και κλείνουμε αυτή την παράγραφο.

Πόρισμα 2.3.51. Για έναν αριστερό δακτύλιο του Artin Λ . Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

1. Ο δακτύλιος Λ είναι κληρονομικός.
2. Το τ είναι ένα προβολικό Λ -πρότυπο.
3. $H \text{ pd}_\Lambda(\Lambda/\tau) \leq 1$.
4. $H \text{ l. gl. dim } \Lambda \leq 1$.

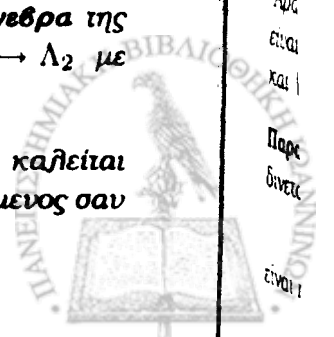
2.4 Άλγεβρες του Artin

Σε αυτή την παράγραφο θα μιλήσουμε για άλγεβρες του Artin και για τα πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα τους. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των Artin αλγεβρών σε αντίθεση με τους αριστερούς δακτύλιους του Artin είναι ότι οι δακτύλιοι ενδομορφισμών End των πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων είναι άλγεβρες του Artin. Έτσι μπορούμε να μετατρέπουμε προβλήματα που περιέχουν μόνο ένα πεπερασμένο αριθμό προτύπων πάνω από μια άλγεβρα του Artin σε προβλήματα που περιέχουν πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα πάνω από μια άλγεβρα του Artin. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται projectivization και διευκρινίζεται κυρίως με το θεώρημα Krull-Schmidt το οποίο θα αποδείξουμε. Ξεκινάμε σταθεροποιώντας έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο του Artin και συμβολίζουμε με $\text{mod-}\Lambda$ την κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων αριστερών Λ -προτύπων, όπου Λ είναι μια R -άλγεβρα.

Ορισμός 2.4.1. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος του Artin. Μια R -άλγεβρα Λ είναι ένας δακτύλιος με ένα μορφισμό δακτύλιων $\phi : R \rightarrow \Lambda$ του οποίου η εικόνα είναι στο κέντρο του Λ . Δηλαδή $\text{Im } \phi \subseteq \mathbf{Z}(\Lambda)$. Για μια R -άλγεβρα με $\phi : R \rightarrow \Lambda$ θα γράφουμε $r\lambda$ αντι $\phi(r)\lambda$ με $r \in R$ και $\lambda \in \Lambda$.

Ορισμός 2.4.2. Έστω δυο R -άλγεβρες Λ_1, Λ_2 με μορφισμούς δακτύλιων $\phi_1 : R \rightarrow \Lambda_1$ και $\phi_2 : R \rightarrow \Lambda_2$. Τότε η άλγεβρα Λ_1 είναι μια R -υποάλγεβρα της Λ_2 αν ο Λ_1 είναι υποδακτύλιος του Λ_2 μέσω της απεικόνισης $i : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ με $i\phi_1 = \phi_2$.

Ορισμός 2.4.3. Έστω μια R -άλγεβρα Λ . Τότε η R -άλγεβρα Λ καλείται **Artin R -άλγεβρα** ή **Artin άλγεβρα** αν ο Λ είναι πεπερασμένα παραγόμενος σαν R -πρότυπο.



Παρατήρηση 2.4.4. Είναι προφανές ότι μια Artin R -άλγεβρα Λ είναι αριστερός και δεξιός δακτύλιος του Artin. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι το κέντρο $Z(\Lambda)$ μιάς Artin R -άλγεβρας Λ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος του Artin και ότι μια Artin R -άλγεβρα Λ είναι μια $Z(\Lambda)$ -άλγεβρα.

Παρατήρηση 2.4.5. Είναι προφανές ότι αν Λ είναι μια Artin R -άλγεβρα μέσω του μορφισμού δακτυλίων $\phi : R \rightarrow \Lambda$, τότε ο ίδιος ο μορφισμός δακτυλίων $R \rightarrow \Lambda^{op}$ κάνει το Λ^{op} μια Artin R -άλγεβρα.

Θα δώσουμε τώρα ένα τρόπο για να συσχετίσουμε καινούργιες Artin άλγεβρες όταν γνωρίζουμε μια Artin άλγεβρα.

Ορισμός 2.4.6. Αν A και B ανήκουν στην $\text{mod-}\Lambda$ για μια Artin R -άλγεβρα Λ , τότε τα A και B θα ανήκουν και στην $\text{mod-}R$. Για $r \in R$ και $f \in \text{Hom}_R(A, B)$ έχουμε ότι

$$f(r\alpha) = rf(\alpha)$$

για κάθε $\alpha \in A$.

Ορίζουμε το rf με την ιδιότητα $(rf)(\alpha) = rf(\alpha)$ για $\alpha \in A$. Τότε το $\text{Hom}_R(A, B)$ είναι ένα R -πρότυπο και ισχύει

$$\text{Hom}_\Lambda(A, B) \subset \text{Hom}_R(A, B)$$

αλλά είναι και υποομάδα του. Θα δείξουμε ότι το $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$ είναι R -πρότυπο. Απο τον ορισμό της Artin R -άλγεβρας Λ έχουμε ότι η εικόνα του R είναι στο κέντρο του Λ και άρα

$$(rf)(\lambda\alpha) = r(f(\lambda\alpha)) = r(\lambda f(\alpha)) = \lambda rf(\alpha) = \lambda((rf)(\alpha))$$

για $\lambda \in \Lambda$ και $f \in \text{Hom}_\Lambda(A, B)$. Άρα το $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$ είναι ένα R -πρότυπο $\text{Hom}_R(A, B)$. Άρα το $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$ θα το θεωρούμε σαν R -πρότυπο. Για A να ανήκει στην $\text{mod-}\Lambda$ ορίζουμε για $r \in R$ μια απεικόνιση $\phi(r) : A \rightarrow A$ με $\phi(r)(\alpha) = r\alpha$ για $\alpha \in A$. Αφού η εικόνα του R είναι στο κέντρο του Λ

$$\phi(r)(\lambda\alpha) = r(\lambda\alpha) = \lambda(r\alpha) = \lambda\phi(r)(\alpha)$$

για $\lambda \in \Lambda$. Έτσι προκύπτει η απεικόνιση

$$\phi : R \rightarrow \text{End}_\Lambda(A) \subset \text{End}_R(A)$$

η οποία είναι μορφισμός δακτυλίων. Για $g \in \text{End}_R(A)$, $r \in R$ και $\alpha \in A$, έχουμε ότι

$$(\phi(r)g)(\alpha) = r(g(\alpha)) = g(r\alpha) = (g\phi(r))(\alpha)$$

και άρα

$$\text{Im } \phi \subset Z(\text{End}_R(A)) \cap \text{End}_\Lambda(A) \subset Z(\text{End}_\Lambda(A))$$

Άρα ορίσαμε τις R -άλγεβρες $\text{End}_R(A)$ και $\text{End}_\Lambda(A)$ και μάλλον η $\text{End}_\Lambda(A)$ είναι R -υποάλγεβρα του $\text{End}_R(A)$. Όμοια μπορούμε να ορισούμε και τις $\text{End}_R(B)$ και $\text{End}_\Lambda(B)$ ως R -άλγεβρες.

Παρατήρηση 2.4.7. Σημειώνουμε ότι η δομή R -πρότυπου του $\text{End}_R(A)$ που δίνεται από την

$$\phi : R \rightarrow \text{End}_R(A)$$

είναι η ίδια με τη δομή του R -πρότυπου $\text{Hom}_R(A, B)$ με $A = B$.



Πρόταση 2.4.8. Έστω μια Artin R -άλγεβρα Λ . Τότε :

1. Αν A και B ανήκουν στην $\text{mod-}\Lambda$, τότε το $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R -υποπρότυπο του $\text{Hom}_R(A, B)$.
2. Αν A είναι αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$, τότε ο $\text{End}_\Lambda(A)$ είναι μια Artin R -άλγεβρα η οποία είναι R -υποάλγεβρα της Artin R -άλγεβρας $\text{End}_R(A)$.

Απόδειξη. 1. Έστω A και B αντικείμενα της $\text{mod-}\Lambda$. Αφού το A ανήκει στην $\text{mod-}\Lambda$, τότε $A \in \text{mod-}R$ και άρα έχουμε ένα επιμορφισμό από το $nR \rightarrow A$, για κάποιο $n > 0$, όπου με nR συμβολίζουμε το άθροισμα του R n -φορές. Άρα έχουμε ένα μονομορφισμό

$$\text{Hom}_R(A, B) \rightarrow \text{Hom}_R(nR, B) \rightarrow nB$$

Αφού ο R είναι Noetherian και nB είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο έχουμε ότι το υποπρότυπο $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$ του $\text{Hom}_R(A, B)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο.

2. Από τον ορισμό είδαμε ότι η $\text{End}_\Lambda(A)$ είναι R -υποάλγεβρα του $\text{End}_R(A)$ και από το (i) έχουμε ότι τα $\text{End}_\Lambda(A)$ και $\text{End}_R(A)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενα R -πρότυπα και άρα είναι Artin R -άλγεβρες. □

Ορισμός 2.4.9. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος του Artin. Μια preadditive κατηγορία \mathcal{C} καλείται R -κατηγορία αν κάθε $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ είναι ένα R -πρότυπο και ο μορφισμός

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

είναι διγραμμικός (R -bilinear).

Ορισμός 2.4.10. Έστω ένας προσθετικός συναρτητής $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ όπου \mathcal{C} και \mathcal{D} είναι R -κατηγορίες. Τότε ο F καλείται R -συναρτητής αν οι επαγόμενοι μορφισμοί, όπως παραπάνω είναι R -ομομορφισμοί.

Συνεχίζουμε με δεδομένο ότι όλες οι κατηγορίες που θα αναφέρουμε είναι R -κατηγορίες και όλοι οι συναρτητές R -συναρτητές, όπου R αντιμεταθετικός δακτύλιος του Artin.

Παρατήρηση 2.4.11. Είδαμε ότι όταν η Λ είναι μια Artin R -άλγεβρα τότε το $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$ είναι ένα R -πρότυπο, όπου τα A και B είναι αντικείμενα της $\text{mod-}\Lambda$. Για $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow C$ μορφισμούς της $\text{mod-}\Lambda$ και για $r \in R$ έχουμε

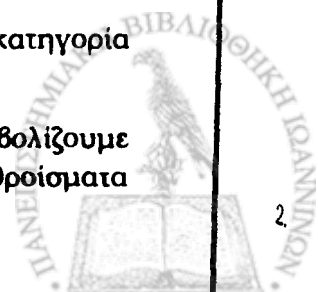
$$(g(rf))(\alpha) = g(rf(\alpha)) = rg(f(\alpha)) = ((rg)f)(\alpha)$$

για κάθε $\alpha \in A$. Άρα ο μορφισμός σύνθεση

$$\text{Hom}_\Lambda(A, B) \times \text{Hom}_\Lambda(B, C) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, C)$$

είναι διγραμμικός (R -bilinear). Άρα αφού η Λ είναι προσθετική κατηγορία έπεται ότι θα είναι προσθετική R -κατηγορία.

Παρατήρηση 2.4.12. Αν A ανήκει στην $\text{mod-}\Lambda$, τότε με $\text{add } A$ θα συμβολίζουμε την full υποκατηγορία της $\text{mod-}\Lambda$ με αντικείμενα τα πεπερασμένα άθροισματα από αντίγραφα του A . Επιπλέον η $\text{add } A$ είναι R -κατηγορία.



Θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα R -συναρτητή.

Παράδειγμα 2.4.13. Έστω A ένα αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$. Γνωρίζουμε ότι οι $\text{End}_\Lambda(A)$ και $\text{End}_\Lambda(A)^{op}$ είναι Artin R -άλγεβρες. Τότε το A είναι ένα $\text{End}_\Lambda(A)$ -πρότυπο για $\alpha \in A$ και $f \in \text{End}_\Lambda(A)$ με $f\alpha = f(\alpha)$ και έτσι το A είναι δεξιό $\text{End}_\Lambda(A)^{op}$ -πρότυπο. Έστω X αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$. Τότε $\text{Hom}_\Lambda(A, X)$ έχει τη δόμη προτύπου πάνω από το $\text{End}_\Lambda(A)^{op}$ ως εξής: Για $t \in \text{End}_\Lambda(A)^{op}$ και $f \in \text{Hom}_\Lambda(A, X)$ ορίζουμε το $(tf)(\alpha) = f(t(\alpha))$ για $\alpha \in A$. Γνωρίζουμε επίσης ότι το $\text{Hom}_\Lambda(A, X)$ είναι αντικείμενο της $\text{mod-}R$ και άρα είναι αντικείμενο της $\text{mod-End}_\Lambda(A)^{op}$. Τότε ο συναρτητής

$$\text{Hom}_\Lambda(A, -) : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-End}_\Lambda(A)^{op}$$

είναι ένας R -συναρτητής.

Ορισμός 2.4.14. Ένα αντικείμενο P στην R -κατηγορία \mathcal{C} καλείται **προβολικό** αν για κάθε επιμορφισμό $g : B \rightarrow C$ και μορφισμό $h : P \rightarrow C$ υπάρχει ένας μορφισμός $s : P \rightarrow B$ έτσι ώστε $gs = h$. Διαγραμματικά:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ s \uparrow & & \nearrow h \\ P & & \end{array}$$

το διάγραμμα είναι μεταθετικό.

Ορισμός 2.4.15. Ένα αντικείμενο I στην R -κατηγορία \mathcal{C} καλείται **injective** αν για κάθε μονομορφισμό $g : B \rightarrow C$ και μορφισμό $h : B \rightarrow I$ υπάρχει ένας μορφισμός $s : C \rightarrow I$ έτσι ώστε $sg = h$. Διαγραμματικά:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ h \downarrow & & \searrow s \\ I & & \end{array}$$

το διάγραμμα είναι μεταθετικό.

Παρατήρηση 2.4.16. Στην περίπτωση που η κατηγορία \mathcal{C} είναι η κατηγορία $\text{Mod-}\Lambda$, για κάποια R -άλγεβρα Λ , οι παραπάνω ορισμοί συμπίπτουν με τους ορισμούς από τη θεωρία προτύπων.

Πρόταση 2.4.17. Έστω $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ένας R -συναρτητής που είναι ισοδυναμία R -κατηγοριών.

1. Ένας μορφισμός $g : B \rightarrow C$ στην R -κατηγορία \mathcal{C} είναι επιμορφισμός (αντ. μονομορφισμός) αν και μόνον αν

$$F(g) : F(B) \rightarrow F(C)$$

είναι επιμορφισμός (αντ. μονομορφισμός) στην \mathcal{D} .

2. Ένα αντικείμενο C στην R -κατηγορία \mathcal{C} είναι προβολικό (αντ. injective) αν και μόνον αν το $F(C)$ είναι προβολικό (αντ. injective) στην \mathcal{D} .



Θα δούμε τώρα πως αν μεταφερθούμε απο μια Artin R -άλγεβρα Λ στην άλγεβρα ενδομορφισμών $\Gamma = \text{End}_{\Lambda}(A)^{op}$, όπου A είναι αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$, αναγάγουμε προβλήματα που αφορούν το πρότυπο A σε προβλήματα που αφορούν προβολικά πρότυπα. Όλοι οι δακτύλιοι που θα αναφέρουμε θα είναι Artin άλγεβρες. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το θεώρημα Krull-Schmidt.

Ορισμός 2.4.18. Έστω A αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$. Ορίζουμε τον R -συναρτητή :

$$e_A = \text{Hom}_{\Lambda}(A, -) : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Gamma$$

και τον καλούμε *συναρτητή εκτίμησης του A* . Ο e_A είναι αριστερά ακριβής συναρτητής που αντιμετατίθεται με πεπερασμένα αθροίσματα.

Πρόταση 2.4.19. Έστω A αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$, όπου Λ μια Artin R -άλγεβρα. Τότε ο συναρτητής εκτίμησης

$$e_A : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Gamma$$

έχει τις παρακάτω ιδιότητες :

1. Ο $e_A : \text{Hom}_{\Lambda}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(e_A(Z), e_A(X))$ είναι ένας ισομορφισμός για κάθε Z αντικείμενο της $\text{add } A$ και X αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$.
2. Αν X είναι αντικείμενο της $\text{add } A$ κάθε $e_A(X)$ είναι αντικείμενο της $\mathcal{P}(\Gamma)$.
3. Ο συναρτητής

$$e_A|_{\text{add } A} : \text{add } A \rightarrow \mathcal{P}(\Gamma)$$

είναι μια ισοδυναμία R -κατηγοριών.

Απόδειξη. 1. Εύκολα προκύπτει ότι ο συναρτητής

$$e_A : \text{Hom}_{\Lambda}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(e_A(Z), e_A(X))$$

είναι ισομορφισμός λόγω της προσθετικότητας του συναρτητή εκτίμησης e_A .

2. Αφού $e_A(A) \simeq \Gamma$ συνεπάγεται ότι για κάθε θετικό ακέραιο n έχουμε ότι $e_A(nA) \simeq n\Gamma$. Αφού ο e_A αντιμετατίθεται με αθροίσματα έχουμε ότι το $e_A(X)$ είναι αντικείμενο της $\mathcal{P}(\Gamma)$ για κάθε αντικείμενο X της $\text{Add } A$.
3. Λόγω του (i) έχουμε ότι ο $e_A|_{\text{add } A}$ είναι full και faithful. Αρκεί να δείξουμε ότι ο συναρτητής είναι dense. Έστω ένα πρότυπο P αντικείμενο της $\mathcal{P}(\Gamma)$. Τότε για κάποιο n έχουμε

$$P \oplus Q = n\Gamma$$

Άρα υπάρχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο $f \in \text{End}_{\Gamma}(n\Gamma)$ έτσι ώστε $P = \text{Ker } f$.

Άρα υπάρχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο $u \in \text{End}_{\Lambda}(nA)$ έτσι ώστε $e_A(u) = f$. Τότε $\text{Ker } u$ αντικείμενο της $\text{add } A$ και αφού ο e_A είναι αριστερά ακριβής συναρτητής έχουμε

$$e_A(\text{Ker } u) \simeq P$$

Θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τώρα το σημαντικό θεώρημα των Krull-Schmidt που μας δίνει πληροφορίες για το πότε ένα πρότυπο A της κατηγορίας $\text{mod-}\Lambda$ είναι μη-αναλύσιμο καθώς και πληροφορίες αναφορικά με τη μοναδικότητα ανάλυσης.



Θεώρημα 2.4.20. (Krull-Schmidt)

1. Ένα πρότυπο A στην κατηγορία $\text{mod-}\Lambda$, όπου Λ μια Artin R -άλγεβρα είναι μη-αναλύσιμο αν και μόνον αν ο $\text{End}_\Lambda(A)$ είναι τοπικός δακτύλιος.
2. Έστω $\{A_i\}_{i \in I}$ και $\{B_j\}_{j \in J}$ δυο πεπερασμένες οικογένειες απο πεπερασμένα παραγόμενα μη-αναλύσιμα Λ -πρότυπα. Αν

$$\bigoplus_{i \in I} A_i \simeq \bigoplus_{j \in J} B_j$$

τότε υπάρχει μια bijection απεικόνιση $\sigma : I \rightarrow J$ τέτοια ώστε

$$A_i \simeq B_{\sigma(i)}$$

για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. 1. Έστω A αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$ και έστω $\Gamma = \text{End}_\Lambda(A)^{op}$. Αφού ο συναρτητής e_A επάγει μια ισοδυναμία

$$\text{add } A \rightarrow \mathcal{P}(\Gamma)$$

έπεται ότι το A είναι μη-αναλύσιμο αν και μόνον αν το $e_A(A)$ είναι μη-αναλύσιμο προβολικό Γ -πρότυπο. Όμως είδαμε ότι αν το $e_A(A)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο πάνω από μια Artin άλγεβρα Γ τότε είναι και μη-αναλύσιμο αν και μόνον αν ο δακτύλιος $\text{End}_\Gamma(e_A(A))$ είναι τοπικός. Αλλά ο συναρτητής

$$e_A : \text{End}_\Lambda(A) \rightarrow \text{End}_\Gamma(e_A(A))$$

είναι ισομορφισμός, άρα το A είναι μη-αναλύσιμο αν και μόνο αν ο δακτύλιος $\text{End}_\Lambda(A)$ είναι τοπικός.

2. Έστω $C = \bigoplus_{i \in I} A_i$. Τότε το C είναι πεπερασμένα παραγόμενο Λ -πρότυπο και A_i, B_j είναι αντικείμενα της $\text{add } C$ για κάθε $i \in I$ και $j \in J$. Έστω $\Gamma = \text{End}_\Lambda(C)^{op}$ και έστω

$$e_C : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Gamma$$

να είναι ο συναρτητής εκτίμησης. Αφού ο e_C επάγει μια ισοδυναμία $\text{add } C \rightarrow \mathcal{P}(\Gamma)$ τότε από το θεώρημα (2.3.41) για τα προβολικά πρότυπα έχουμε το συμπέρασμα. □

Πρόταση 2.4.21. Έστω A αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$, όπου Λ μια Artin άλγεβρα και έστω ένας μορφισμός $f : X \rightarrow Y$ στην $\text{add } A$. Τότε ο μορφισμός f είναι δεξιά ελάχιστος αν και μόνον αν ο επαγόμενος μορφισμός

$$\text{Hom}_\Lambda(A, X) \rightarrow \text{Im}(\text{Hom}_\Lambda(A, f))$$

είναι ένα προβολικό κάλυμμα στην κατηγορία $\text{mod-End}_\Lambda(A)^{op}$.



Απόδειξη. Έστω $\Gamma = \text{End}_\Lambda(A)^{\text{op}}$ και έστω ο συναρτητής εκτίμησης $e_A : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Gamma$. Αφού ο $e_A : \text{add } A \rightarrow \mathcal{P}(\Gamma)$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών, τότε απο τον ορισμό του δεξιά ελάχιστου μορφοισμού συνεπάγεται οτι ο $f : X \rightarrow Y$ είναι δεξιά ελάχιστος αν και μόνον αν ο μορφοισμός

$$\text{Hom}_\Lambda(A, f) : \text{Hom}_\Lambda(A, X) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, Y)$$

είναι δεξιά ελάχιστος. Όμως ο μορφοισμός $\text{Hom}_\Lambda(A, f)$ είναι δεξιά ελάχιστος αν και μόνον αν ο επαγόμενος μορφοισμός

$$\text{Hom}_\Lambda(A, X) \rightarrow \text{Im}(\text{Hom}_\Lambda(A, f))$$

είναι ένα προβολικό κάλυμμα. □

Πόρισμα 2.4.22. Έστω $\{f_i : A_i \rightarrow B_i\}_{i \in I}$ μια πεπερασμένη οικογένεια απο μορφοισμούς στην $\text{mod-}\Lambda$, όπου Λ μια Artin άλγεβρα. Τότε

$$\bigoplus_{i \in I} f_i : \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$$

είναι δεξιά ελάχιστος μορφοισμός αν και μόνον αν κάθε μορφοισμός $f_i : A_i \rightarrow B_i$ είναι δεξιά ελάχιστος.

Απόδειξη. Έστω ένα πεπερασμένα παραγόμενο Λ -πρότυπο A τέτοιο ώστε τα A_i και B_i να είναι αντικείμενα της $\text{add } A$ για κάθε $i \in I$. Έστω ακόμη ο συναρτητής εκτίμησης

$$e_A : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Gamma$$

Είδαμε οτι

$$\bigoplus_{i \in I} f_i : \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$$

είναι δεξιά ελάχιστος μορφοισμός αν και μόνον αν

$$e_A(\bigoplus_{i \in I} f_i) : e_A(\bigoplus_{i \in I} A_i) \rightarrow \text{Im } e_A(\bigoplus_{i \in I} f_i)$$

είναι ένα προβολικό κάλυμμα.

Ακόμη είδαμε οτι το $e_A(\bigoplus_{i \in I} f_i)$ είναι προβολικό κάλυμμα αν και μόνον αν κάθε $e_A(f_i)$ είναι προβολικό κάλυμμα. Άρα κάθε $f_i : A_i \rightarrow B_i$ είναι δεξιά ελάχιστος αν και μόνον αν

$$\bigoplus_{i \in I} f_i : \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$$

είναι δεξιά ελάχιστος μορφοισμός. □

Ορισμός 2.4.23. Έστω μια Artin άλγεβρα Λ . Η Artin άλγεβρα Λ καλείται **βασική Artin άλγεβρα** αν τα πρότυπα πάνω απο την Λ έχουν την ιδιότητα :

Αν $\Lambda = \bigoplus_{i \in I} P_i$ με P_i μη-αναλυσιμα προβολικά πρότυπα, τότε

$$P_i \neq P_j$$

για $i \neq j$.



Παράδειγμα 2.4.24. Έστω Λ μια Artin άλγεβρα με $\Lambda = \bigoplus_{i \in I}^m n_i P_i$, όπου $n_i > 0$ και τα P_i είναι μη-αναλύσιμα προβολικά πρότυπα με $P = \bigoplus_{i \in I}^m P_i$. Θεωρούμε ακόμη $\Gamma = \text{End}_{\Lambda}(A)^{\text{op}}$ και έστω ο συναρτητής εκτίμησης

$$e_P : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Gamma$$

Τότε $e_P(P) = \Gamma$ και η διάσταση του P μας δίνει

$$\Gamma = \bigoplus_{i \in I}^m e_P(P_i)$$

όπου τα P_i είναι μη-ισομορφικά μη-αναλύσιμα προβολικά Γ -πρότυπα. Άρα Γ είναι μια βασική Artin άλγεβρα που καλείται **εξασθενημένη φόρμα** της Λ .

Ορισμός 2.4.25. Έστω ένα Λ -πρότυπο A . Μια **προβολική παράσταση** του A είναι μια ακριβής ακολουθία

$$P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} A \longrightarrow 0$$

όπου τα P_1, P_0 είναι προβολικά πρότυπα.

Ορισμός 2.4.26. Μια προβολική παράσταση

$$P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} A \longrightarrow 0$$

του A καλείται **ελάχιστη προβολική παράσταση** αν $f_0 : P_0 \rightarrow A$ και $f_1 : P_1 \rightarrow \text{Ker } f_0$ είναι προβολικά καλύμματα.

Παρατήρηση 2.4.27. Έστω ένα προβολικό πρότυπο P . Τότε συμβολίζουμε με $\text{mod-}P$ την full υποκατηγορία της $\text{mod-}\Lambda$ που έχει ως αντικείμενα όλα τα αντικείμενα A της $\text{mod-}\Lambda$ που έχουν προβολικές αναπαραστάσεις

$$P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

όπου τα P_1, P_0 είναι αντικείμενα της $\text{add } P$.

Πρόταση 2.4.28. Έστω P ένα προβολικό Λ -πρότυπο και έστω $\Gamma = \text{End}_{\Lambda}(P)^{\text{op}}$. Τότε ο περιορισμός

$$e_P|_{\text{mod-}P} : \text{mod-}P \rightarrow \text{mod-}\Gamma$$

του συναρτητή εκτίμησης $e_P : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Gamma$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο συναρτητής $e_P|_{\text{mod-}P}$ είναι full, faithful και dense. Θα δείξουμε πρώτα ότι είναι dense. Έστω ένα Γ -πρότυπο X και έστω

$$Q_1 \xrightarrow{f} Q_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

μια προβολική Γ -παράσταση του X . Τότε υπάρχουν P_i αντικείμενα της $\text{add } P$ έτσι ώστε $e_P(P_i) \simeq Q_i$ για $i = 0, 1$. Άρα υπάρχει ένας ισομορφισμός $g : P_1 \rightarrow P_0$ στην $\text{add } P$ έτσι ώστε το διαγράμμα

$$\begin{array}{ccc} e_P(P_1) & \xrightarrow{e_P(g)} & e_P(P_0) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ Q_1 & \xrightarrow{f} & Q_0 \end{array}$$



είναι μεταθετικό. Αφού το P είναι προβολικό και ο συναρτητής e_P είναι ακριβής, τότε

$$e_P(\text{Coker } g) \simeq \text{Coker } f = X$$

Άρα ο συναρτητής $e_P|_{\text{mod-}P}$ είναι dense.

Τώρα θα δείξουμε ότι ο $e_P|_{\text{mod-}P}$ είναι full και faithful. Έστω A και B αντικείμενα της $\text{mod-}P$ και έστω $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$ είναι μια προβολική παράσταση του A , τότε έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα από ακριβείς ακολουθίες:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_\Lambda(A, B) & \longrightarrow & \text{Hom}_\Lambda(P_0, B) & \longrightarrow & \text{Hom}_\Lambda(P_1, B) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_\Gamma(e_P(A), e_P(B)) & \longrightarrow & \text{Hom}_\Gamma(e_P(P_0), e_P(B)) & \longrightarrow & \text{Hom}_\Gamma(e_P(P_1), e_P(B)) \end{array}$$

Αφού τα P_i είναι αντικείμενα της $\text{add } P$, έχουμε ότι

$$\text{Hom}_\Lambda(P_0, B) \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(e_P(P_0), e_P(B))$$

και

$$\text{Hom}_\Lambda(P_1, B) \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(e_P(P_1), e_P(B))$$

είναι ισομορφισμοί. Άρα

$$e_P : \text{Hom}_\Lambda(A, B) \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(e_P(A), e_P(B))$$

είναι ισομορφισμός για κάθε A, B αντικείμενα της $\text{mod-}P$. Άρα ο $e_P|_{\text{mod-}P}$ είναι full και faithful. \square

Πόρισμα 2.4.29. Έστω $\{P_1, \dots, P_n\}$ ένα σύνολο από μη-ισομορφικά μη-αναλύσιμα προβολικά Λ -πρότυπα. Έστω ακόμη $P = \bigoplus_{i=1}^n P_i$ και $\Gamma = \text{End}_\Lambda(P)^{\text{op}}$. Τότε ο συναρτητής $e_P : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Gamma$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών.

Απόδειξη. Επειδή $\text{add } P = \mathcal{P}(\Lambda)$ έπεται ότι $\text{mod-}P = \text{mod-}\Lambda$ και έτσι από την παραπάνω πρόταση ο συναρτητής $e_P : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Gamma$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών. \square

Πρόταση 2.4.30. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :

1. Η Λ είναι βασική.
2. Η Λ/τ είναι βασική.
3. $\Lambda/\tau \simeq \bigoplus_{i=1}^k D_i$, όπου D_i είναι δακτύλιοι διαίρεσης.
4. Η Λ^{op} είναι βασική.

Θα μελετήσουμε τώρα τη δεικνότητα του συναρτητή $D : \text{mod-}R \rightarrow \text{mod-}R$ όπου R μεταθετικός δακτύλιος του Artin.

Ορισμός 2.4.31. Έστω \mathcal{C}, \mathcal{D} δυο R -κατηγορίες και έστω ένας R -συναρτητής $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Ο συναρτητής F καλείται **δεικνότητα (duality)** αν ο συναρτητής

$$\bar{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$$

είναι μια ισοδυναμία R -κατηγοριών.



Ορισμός 2.4.32. Έστω Λ δακτύλιος και A, B δύο πρότυπα με $B \subset A$. Θα λέμε ότι το πρότυπο A είναι μια **ουσιαστική (essential) επέκταση** του B αν $X \cap B \neq 0$ για κάθε υποπρότυπο $X \neq 0$ του A .

Ορισμός 2.4.33. Έστω I ένα injective πρότυπο. Ένας μονομορφισμός $i : A \rightarrow I$ καλείται **injective περίβλημα (envelope)** του A αν το I είναι μια κύρια επέκταση του $i(A)$.

Παρατήρηση 2.4.34. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος του Artin. Τότε γνωρίζουμε ότι ο R έχει ένα πεπερασμένο αριθμό μη-ισομορφικών απλών προτύπων, έστω S_1, \dots, S_n . Έστω $I(S_i)$ το injective περίβλημα κάθε απλού προτύπου S_i και έστω $J = \bigoplus_{i=1}^n I(S_i)$. Τότε το J είναι το injective περίβλημα του $\bigoplus_{i=1}^n S_i$ και για κάθε A που ανήκει στην $\text{mod-}R$ υπάρχει ένας μονομορφισμός $A \rightarrow J'$, όπου J' είναι αντικείμενο της $\text{add } J$. Έχουμε λοιπόν ότι $S_i \simeq R/m_i$ είναι μέγιστα ιδεώδη του R , και τότε έχουμε τους R -ισομορφισμούς

$$\text{Hom}_R(S_i, S_i) \simeq \text{Hom}_R(R/m_i, S_i) \simeq \text{Hom}_R(R, S_i) \simeq S_i$$

Για $i \neq j$ έχουμε ότι

$$\text{Hom}_R(S_i, S_j) = 0$$

Θεώρημα 2.4.35. Έστω X αντικείμενα της $\text{mod-}R$. Τότε :

1. Το $\text{Hom}_R(X, J)$ είναι πεπερασμένου μήκους και

$$m_{S_i}(\text{Hom}_R(X, J)) = m_{S_i}(X)$$

για $i = 1, \dots, n$.

2. Ο φυσικός μορφισμός

$$X \rightarrow \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(X, J), J)$$

είναι ένας ισομορφισμός.

3. Ο contravariant R -συναρτητής $D : \text{mod-}R \rightarrow \text{mod-}R$, όπου $D = \text{Hom}_R(-, J)$ είναι μια duality.

Απόδειξη. 1. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο $l(X)$. Αν $X = 0$ δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Υποθέτουμε ότι $l(X) = 1$. Τότε $X \simeq S_j$ για κάποιο j . Όμως

$$\text{Hom}_R(S_j, J) \simeq \text{Hom}_R(S_j, \bigoplus_{i=1}^n S_i) \simeq \text{Hom}_R(S_j, S_j) \simeq S_j$$

Άρα

$$m_{S_i}(X) = m_{S_i}(\text{Hom}_R(X, J))$$

Έστω ότι για $l(A) > 1$ ισχύει και έστω

$$0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$$

μια ακριβής ακολουθία με $X'' \simeq S_j$ για κάποιο j . Τότε η ακολουθία

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(X'', J) \rightarrow \text{Hom}_R(X, J) \rightarrow \text{Hom}_R(X', J) \rightarrow 0$$

είναι ακριβής. Τότε από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι $m_{S_i}(\text{Hom}_R(X, J)) = m_{S_i}(X)$ για $i = 1, \dots, n$, αφού $l(X') < l(X)$ και $l(X'') < l(X)$.



2. Απο το (i) έχουμε ότι το R -πρότυπο X και το $\text{Hom}_R(\text{Hom}_R(X, J), J)$ έχουν το ίδιο μήκος. άρα αρκεί να δείξουμε ότι η

$$\phi : X \rightarrow \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(X, J), J)$$

είναι ένας μονομορφισμός αφού για κάθε $f \in \text{Hom}_R(X, J)$ και $x \in X$ έχουμε ότι $\phi(x)(f) = f(x)$ και αν υπάρχει μια $f : X \rightarrow J$ έτσι ώστε $f(x) \neq 0$ τότε και $\phi(x) \neq 0$. Έστω τώρα ένα $x \neq 0, x \in X$ και έστω Rx το υποπρότυπο του X που παράγεται από το x . Όμως λόγω του λήμματος του Nakayama έχουμε ότι

$$Rx/(\text{Rad } R)Rx \neq 0$$

και άρα υπάρχει μη-μηδενικός μορφισμός

$$Rx/(\text{Rad } R)Rx \rightarrow \bigoplus_{i \in I}^n S_i$$

Έτσι η επαγόμενη απεικόνιση $g : Rx \rightarrow J$ είναι διάφορη του μηδενός. Δηλαδή $g(x) \neq 0$. Αφού ο J είναι ένα προς ένα, μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μια απεικόνιση $f : X \rightarrow J$ η οποία δεν μηδενίζεται στο x . Όμως τότε η απεικόνιση

$$\phi : X \rightarrow \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(X, J), J)$$

είναι ένας ισομορφισμός.

3. Έπεται άμεσα λόγω του (ii). □

Πόρισμα 2.4.36. 1. J και R έχουν το ίδιο μήκος και $m_{S_i}(J) = m_{S_i}(R)$ για κάθε i .

2. $R \simeq \text{End}_R(J)$

Παρατήρηση 2.4.37. Θέλουμε να δείξουμε ότι η δεικνότητα του συναρτητή $D : \text{mod-}R \rightarrow \text{mod-}R$, όπου R μεταθετικός δακτύλιος του Artin επάγει ένα δεικό R -συναρτητή $D : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Lambda^{op}$, όπου Λ είναι μια Artin άλγεβρα. Θα δείξουμε ότι το R -πρότυπο $\text{Hom}_R(X, J)$, όπου X ένα πρότυπο της $\text{mod-}\Lambda$ έχει τη δόμη Λ^{op} -πρότυπου. Για $f \in \text{Hom}_R(X, J)$ και $\lambda \in \Lambda$ ορίζουμε $(f\lambda)(x) = f(\lambda x)$ για κάθε $x \in X$. Έτσι θεωρούμε το DX σαν Λ^{op} -πρότυπο για κάθε Λ -πρότυπο X . Αφού το $\text{Hom}_R(X, J)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο τότε είναι πεπερασμένα παραγόμενο Λ^{op} -πρότυπο. Αν $f : X \rightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\text{mod-}\Lambda$ τότε ο

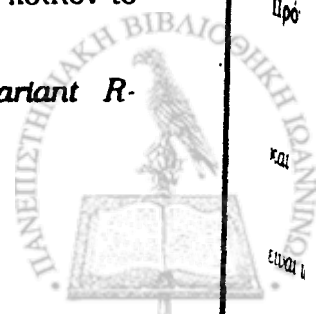
$$\text{Hom}_R(f, J) : \text{Hom}_R(Y, J) \rightarrow \text{Hom}_R(X, J)$$

είναι ένας μορφισμός της $\text{mod-}\Lambda^{op}$. Αυτό δείχνει ότι ο συναρτητής D επάγει έναν contravariant R -συναρτητή $D : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Lambda^{op}$. Ακολουθεί λοιπόν το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.38. Αν Λ είναι μια Artin R -άλγεβρα, τότε ο contravariant R -συναρτητής

$$D : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Lambda^{op}$$

είναι μια δεικνότητα.



Απόδειξη. Αν X είναι αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$ τότε απο τα παραπάνω έχουμε οτι το $\text{Hom}_R(X, J)$ ανήκει στην $\text{mod-}\Lambda^{\text{op}}$ και ομοίως το $\text{Hom}_R(\text{Hom}_R(X, J), J)$ ανήκει στην $\text{mod-}\Lambda$. Τότε ο φυσικός R -ισομορφισμός

$$\phi_X : X \rightarrow \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(X, J), J)$$

είναι Λ -ισομορφισμός.

Αν τώρα $\lambda \in \Lambda$ και $x \in X$ τότε έχουμε οτι

$$\phi(\lambda x)(f) = f(\lambda x) = (f\lambda)(x) = \phi(x)(f\lambda) = (\lambda\phi(x))(f)$$

για κάθε $f \in \text{Hom}_R(X, J)$ και άρα $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$. Άρα ο

$$\phi : 1_{\text{mod-}\Lambda} \rightarrow D^2$$

όπως και ο

$$\phi : 1_{\text{mod-}\Lambda^{\text{op}}} \rightarrow D^2$$

είναι ισομορφισμοί. Άρα έπεται οτι ο συναρτητής

$$D : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Lambda^{\text{op}}$$

είναι δυικότητα. □

Ορισμός 2.4.39. Για ένα αριστερό Artin δακτύλιο Λ θα λέμε οτι η κατηγορία $\text{mod-}\Lambda$ έχει **αρκετά προβολικά πρότυπα** αν για κάθε C αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$ υπάρχει ένας επιμορφισμός $f : P \rightarrow C$ στην $\text{mod-}\Lambda$ με P προβολικό Λ -πρότυπο.

Αντίστοιχα θα λέμε οτι η κατηγορία $\text{mod-}\Lambda$ έχει **αρκετά injective πρότυπα** αν για κάθε C αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$ υπάρχει ένας μονομορφισμός $g : C \rightarrow I$ στην $\text{mod-}\Lambda$ με I injective Λ -πρότυπο.

Πόρισμα 2.4.40. Για μια Artin R -άλγεβρα Λ η κατηγορία $\text{mod-}\Lambda$ έχει αρκετά injective πρότυπα.

Απόδειξη. Για C αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$ έχουμε έναν επιμορφισμό $h : P \rightarrow D(C)$ στην $\text{mod-}\Lambda^{\text{op}}$, όπου P προβολικό. Άρα έχουμε ένα μονομορφισμό

$$D(h) : D^2(C) \rightarrow D(P)$$

και συνεπώς το $D(P)$ είναι injective. Όμως το $D^2(C) \simeq C$ και έτσι έχουμε ένα μονομορφισμό

$$D(h) : C \rightarrow D(P)$$

,όπου $D(P)$ είναι injective. Άρα λόγω ορισμού η κατηγορία $\text{mod-}\Lambda$ έχει αρκετά injective πρότυπα. □

Πρόταση 2.4.41. Οι συναρτητές

$$\text{Hom}_R(-, J) : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Lambda^{\text{op}}$$

και

$$\text{Hom}_\Lambda(-, D\Lambda) : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Lambda^{\text{op}}$$

είναι ισομορφικοί.



Θα μελετήσουμε τώρα τη δομή των injective προτύπων στην κατηγορία $\text{mod-}\Lambda$, όπου Λ είναι Artin άλγεβρα.

Ορισμός 2.4.42. Για ένα πρότυπο A της κατηγορίας $\text{mod-}\Lambda$ ορίζουμε το **socle** του A να είναι το υποπρότυπο του A που παράγεται από όλα τα ημιαπλά υποπρότυπα του A και συμβολίζεται με $\text{Soc } A$.

Πρόταση 2.4.43. Για ένα πρότυπο A της $\text{mod-}\Lambda$, όπου Λ είναι Artin άλγεβρα, έχουμε τα παρακάτω :

1. Το πρότυπο $A = 0$ αν και μόνον αν $\text{Soc } A = 0$.
2. Το A είναι μία κύρια επέκταση του $\text{Soc } A$.
3. Η απεικόνιση $A \rightarrow I$ είναι ένα injective περίβλημα του A αν και μόνον αν ο επαγόμενος μορφισμός $\text{Soc } A \rightarrow I$ είναι ένα injective περίβλημα.
4. Ένα injective πρότυπο I στην $\text{mod-}\Lambda$ είναι μη-αναλύσιμο αν και μόνον αν το $\text{Soc } I$ είναι απλό.

Απόδειξη. 1. Αν $A = 0$ τότε $\text{Soc } A = 0$. Αντίστροφα, έστω A ένα μη-μηδενικό πρότυπο. Αφού το ριζικό τ Artin άλγεβρας Λ είναι μηδενοδύναμο υπάρχει ένας ακέραιος t ώστε $\tau^t A \neq 0$. Όμως το $\tau^t A$ είναι ημιαπλό πρότυπο και άρα $\text{Soc } A \neq 0$.

Τα (ii),(iii),(iv) είναι άμεσες συνέπειες του (i). □

Απο την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι ένας τρόπος για να περιγράψουμε το injective περίβλημα του προτύπου A είναι να περιγράψουμε το $\text{Soc } A$ και το injective περίβλημα των απλών προτύπων. Για να περιγράψουμε το injective περίβλημα των απλών προτύπων, θα εξετάσουμε για αρχή τη δυσκολία μεταξύ των αριστερών και δεξιών προβολικών προτύπων.

Παρατήρηση 2.4.44. Έστω A ένα Λ -πρότυπο. Τότε θεωρούμε την αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$ να είναι ένα Λ^{op} -πρότυπο αν ορίσουμε το $(f\lambda)(\alpha) = f(\alpha)\lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$, $f \in \text{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$ και $\alpha \in A$. Γνωρίζουμε ακόμη ότι αν A είναι πεπερασμένα παραγόμενο Λ -πρότυπο, τότε το $\text{Hom}_\Lambda(A, A) = A'$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο Λ^{op} -πρότυπο. Ακόμη αν $f : A \rightarrow B$ είναι μορφισμός Λ -προτύπων τότε το $\text{Hom}_\Lambda(f, \Lambda) : B' \rightarrow A'$ με $\text{Hom}_\Lambda(f, \Lambda)(g) = gf$ για κάθε $g \in B'$ είναι μορφισμός Λ^{op} -προτύπων και θα τον συμβολίζουμε με f' . Ο contravariant συναρτητής

$$T : \text{Hom}(-, \Lambda) : \text{mod-}\Lambda \rightarrow \text{mod-}\Lambda^{\text{op}}$$

που απεικονίζει το $A \rightarrow A'$ για κάθε αντικείμενο A της $\text{mod-}\Lambda$ και τον $f \mapsto f'$ για κάθε μορφισμό f στην $\text{mod-}\Lambda$ είναι ένας R -συναρτητής. Ορίζουμε τότε

$$\phi_A : A \rightarrow A''$$

με $\phi_A(\alpha)(f) = f(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in A$ και $f \in A'$ ο οποίος είναι Λ -μορφισμός.

Τώρα θα μελετήσουμε τι συμβαίνει με τον συναρτητή T στην κατηγορία $\mathcal{P}(\Lambda)$.

Λήμμα 2.4.45. 1. Η απεικόνιση

$$t : \Lambda \rightarrow \Lambda'$$

που ορίζεται με $t(\lambda)(x) = x\lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ και $x \in \Lambda$ είναι ένας Λ^{op} -ισομορφισμός.



2. Η απεικόνιση

$$\phi_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Lambda''$$

που ορίζεται όπως στο (i) είναι ένας Λ -ισομορφισμός.

Πρόταση 2.4.46. 1. Έστω Λ μια Artin άλγεβρα. Τότε για κάθε P που ανήκει στην $\mathcal{P}(\Lambda)$ έχουμε ότι το P' ανήκει στην $\mathcal{P}(\Lambda^{op})$.

2. Για κάθε P που ανήκει στην $\mathcal{P}(\Lambda)$ ο μορφισμός

$$\phi_P : P \rightarrow P''$$

είναι ένας ισομορφισμός.

3. Ο συναρτητής

$$\text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda)|_{\mathcal{P}(\Lambda)} : \mathcal{P}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{P}(\Lambda^{op})$$

είναι μια δυσκολία.

Απόδειξη. (i) Για $P = \Lambda$ από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι το P' ανήκει στην $\mathcal{P}(\Lambda^{op})$ και ότι

$$\phi_P : P \rightarrow P''$$

είναι ένας ισομορφισμός. Αφού το $\text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda)$ είναι ένας R -συναρτητής, τότε για κάποιο θετικό ακέραιο n και ο $\phi_n \Lambda$ θα είναι R -συναρτητής. Έστω P που ανήκει στην $\mathcal{P}(\Lambda)$, τότε υπάρχει κάποιο αντικείμενο Q της $\mathcal{P}(\Lambda)$ και κάποιος θετικός ακέραιος n έτσι ώστε $n\Lambda = P \oplus Q$. Άρα από την προσθετικότητα του συναρτητή $\text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda)$ συνεπάγονται τα (i) και (ii).

(iii) Από το (ii) έπεται ότι ο μορφισμός

$$\phi : 1|_{\mathcal{P}(\Lambda)} \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda^{op})|_{\mathcal{P}(\Lambda^{op})} \text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda)|_{\mathcal{P}(\Lambda)}$$

είναι ισομορφισμός, και επειδή ο μορφισμός

$$\psi : 1|_{\mathcal{P}(\Lambda^{op})} \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda)|_{\mathcal{P}(\Lambda)} \text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda^{op})|_{\mathcal{P}(\Lambda^{op})}$$

είναι ισομορφισμός συνεπάγεται ότι ο συναρτητής

$$\text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda)|_{\mathcal{P}(\Lambda)} : \mathcal{P}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{P}(\Lambda^{op})$$

είναι δυσκολία. □

Πρόταση 2.4.47. Έστω A και B αντικείμενα της $\text{mod-}\Lambda$, όπου Λ είναι Artin άλγεβρα.

1. Ο μορφισμός

$$\psi : \text{Hom}_\Lambda(A, \Lambda) \otimes_\Lambda B \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, B)$$

με $\psi(f \otimes b)(\alpha) = f(\alpha)(b)$ για κάθε $f \in \text{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$, $b \in B$ και $\alpha \in A$ είναι functorial στο A και B .



2. Αν A αντικείμενο της $\mathcal{P}(\Lambda)$, τότε ο μορφισμός

$$\psi : \text{Hom}_{\Lambda}(A, \Lambda) \otimes_{\Lambda} B \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(A, B)$$

είναι ισομορφισμός για κάθε B που ανήκει στην κατηγορία $\text{mod-}\Lambda$.

Λήμμα 2.4.48. Έστω $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$ η μοναδική ανάλυση ενός ημιαπλού δακτυλίου Δ σε γινόμενο απλών δακτυλίων Δ_i , $i = 1, \dots, n$. Έστω ακόμη

$$m_i = \prod_{i \neq j} \Delta_j$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$. Τότε :

1. Τα m_i είναι τα μοναδικά μέγιστα ιδεώδη του Δ .
2. Αν S είναι ένας απλός δακτύλιος, τότε ο μηδενιστής $\text{ann } S$ (annihilator) του S είναι το m_i για κάποιο i .
3. Δύο απλά Δ -πρότυπα S και T είναι ισομόμορφα αν και μόνου αν

$$\text{ann } S = \text{ann } T$$

4. Αν S είναι ένα απλό Δ -πρότυπο, τότε το $\text{Hom}_{\Delta}(S, \Delta)$ είναι ένα απλό Δ^{op} -πρότυπο και

$$\text{ann } S = \text{ann Hom}_{\Delta}(S, \Delta)$$

Πρόταση 2.4.49. Έστω A ένα ημιαπλό πρότυπο πάνω από μία Artin άλγεβρα Λ και έστω $P \rightarrow A$ ένα προβολικό του κάλυμμα στην $\text{mod-}\Lambda$. Τότε το $D(P')$ είναι ένα injective περίβλημα του A .

Απόδειξη. Έστω A ένα ημιαπλό πρότυπο πάνω από μία Artin άλγεβρα Λ και έστω $P \rightarrow A$ το προβολικό του κάλυμμα. Άρα το P είναι μη-αναλύσιμο και άρα το P' είναι μη-αναλύσιμο προβολικό Λ^{op} -πρότυπο. Έχουμε δει ότι

$$P'/\tau P' \simeq P' \otimes_{\Lambda} (\Lambda/\tau) = \text{Hom}_{\Lambda}(P, \Lambda/\tau) = \text{Hom}_{\Lambda/\tau}(P/\tau P, \Lambda/\tau)$$

Άρα

$$\text{ann}(P/\tau P) = \text{ann}(P'/\tau P')$$

και έτσι

$$A \simeq D(P'/\tau P')$$

Αφού

$$P' \rightarrow P'/\tau P'$$

είναι προβολικό κάλυμμα έπεται ότι

$$D(P'/\tau P') \rightarrow D(P')$$

είναι ένα injective περίβλημα.



Ορισμός 2.4.50. Έστω A αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$, όπου Λ είναι Artin άλγεβρα. Για $j > 1$ ορίζουμε με επαγωγή το

$$\text{Soc}^j A \subset A$$

να είναι η αντίστροφη εικόνα του

$$\text{Soc}(A/\text{Soc}^{j-1}A)$$

στο A .

Ο μικρότερος ακέραιος t με $\text{Soc}^t A = A$ καλείται **socle μήκος** του A και συμβολίζεται με $\text{sl}(A)$.

Επιπλέον η

$$0 \subset \text{Soc} A \subset \text{Soc}^2 A \subset \dots \subset \text{Soc}^{t-1} A \subset A$$

καλείται η **socle σειρά** του A .

Πρόταση 2.4.51. Έστω Λ Artin άλγεβρα και έστω A αντικείμενο της $\text{mod-}\Lambda$. Τότε

$$\text{rl}(A) = \text{sl}(A)$$



Κεφάλαιο 3

Η Άλγεβρα-Μονοπάτι και το Πρώτο Θεώρημα του Gabriel

3.1 Η Άλγεβρα-Μονοπάτι

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως η έννοια της φαρέτρας και της άλγεβρας-μονοπάτι, που θα μελετήσουμε παρακάτω, συνδέονται με πολύ φυσικό τρόπο με την tensor άλγεβρα ενός διπροτύπου πάνω από μια ημιαπλή \mathbb{K} -άλγεβρα. Οι αναπαραστάσεις μιας φαρέτρας με σχέσεις, αντιστοιχούν σε πρότυπα υπεράνω μιας άλγεβρας-πηλίκου της άλγεβρας-μονοπάτι. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε μια συγκεκριμένη περιγραφή προτύπων υπο όρους διανυσματικών χώρων μαζί με γραμμικούς μετασχηματισμούς. Αυτός είναι ένας αποτελεσματικός τρόπος περιγραφής απλών, προβολικών και injective προτύπων. Θα δείξουμε ότι κάθε πεπερασμένης διάστασης \mathbb{K} -άλγεβρα δίνεται από μια φαρέτρα με σχέσεις όταν το \mathbb{K} είναι άλγεβρικά κλειστό. Δώσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο τον ορισμό της φαρέτρας και της αναπαράστασης μιας φαρέτρας, οπότε μπορούμε να προχωρήσουμε σε παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 3.1.1. Έστω μια πεπερασμένη φαρέτρα $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$. Για ένα σώμα \mathbb{K} θεωρούμε τον \mathbb{K} -διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}Q$ με βάση τα μονοπάτια της φαρέτρας Q . Ο \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}Q$ έχει μια φυσική δομή \mathbb{K} -άλγεβρας. Για να το δούμε αυτό θα θεωρήσουμε μια γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{K}Q \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}Q)$$

Αρκεί να ορίσουμε το $f(p)$ για κάθε μονοπάτι $p \in Q$, δηλαδή είναι αρκετό να ορίσουμε το $f(p)(q)$ για κάθε μονοπάτι $q \in Q$, αφού τα μονοπάτια δημιουργούν μια βάση του $\mathbb{K}Q$ σαν \mathbb{K} -διανυσματικό χώρο. Για τα τετριμμένα μονοπάτια e_i ορίζουμε

$$f(e_i)(q) = \begin{cases} q, & \text{αν } t(q) = i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και για ένα βέλος $\alpha \in Q_1$ ορίζουμε

$$f(\alpha)(q) = \begin{cases} \alpha q, & \text{αν } t(q) = s(\alpha) \text{ και } q : \text{τετριμμένο μονοπάτι} \\ \alpha, & \text{αν } q = e_{s(\alpha)} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Αν $p = \xi_n \dots \xi_1$ είναι ένα τετριμμένο μονοπάτι στην φαρέτρα Q ορίζουμε

$$f(p) = f(\xi_n) \cdots f(\xi_1)$$

Για ένα στοιχείο

$$\sigma = \sum_{i=1}^t \xi_i p_i$$

που ανήκει στον $\mathbb{K}Q$ με $\xi_i \in \mathbb{K}$ και p_i ένα μονοπάτι για $i = 1, \dots, t$ τότε έχουμε ότι

$$f(\sigma) = \sum_{i=1}^t \xi_i f(p_i)$$

Παρατηρούμε ότι $f(\sum_{i \in Q_0} e_i) = 1$. Αν $\sigma = \sum_{i=1}^t \xi_i p_i \neq 0$ τότε $f(\sigma)(\sum_{i \in Q_0} e_i) = \sigma \neq 0$ έτσι ώστε $f(\sigma) \neq 0$. Άρα η f είναι μια ένα προς ένα απεικόνιση, έτσι ώστε η $f : \mathbb{K}Q \rightarrow \text{Im } f$ είναι ένας ισομορφισμός \mathbb{K} -διανυσματικών χώρων. Αφού $1 \in \text{Im } f$ και $f(p)f(p') = f(pp') \in \text{Im } f$ για μονοπάτια p και p' που ανήκουν στην φαρέτρα Q , τότε το $\text{Im } f$ είναι \mathbb{K} -υποάλγεβρα του $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}Q)$. Άρα η $\text{Im } f$ είναι μια \mathbb{K} -άλγεβρα και μέσω της f υπάρχει μια δομή \mathbb{K} -άλγεβρας στην $\mathbb{K}Q$, αν για μονοπάτια p και q της φαρέτρας Q ορίσουμε

$$(p)(q) = f^{-1}(f(p)f(q)) = \begin{cases} pq, & \text{αν } e(q) = s(p) \text{ και } p, q \text{ είναι} \\ & \text{μη-τετριμμένα μονοπάτια} \\ p, & \text{αν } q = e_{s(p)} \\ q, & \text{αν } p = e_{e(q)} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το ταυτοτικό στοιχείο της $\mathbb{K}Q$ άλγεβρας είναι το $\sum_{i \in Q_0} e_i$.

Ορισμός 3.1.2. Η \mathbb{K} -άλγεβρα $\mathbb{K}Q$ όπως ορίστηκε παραπάνω καλείται η **άλγεβρα-μονοπάτι** της φαρέτρας Q πάνω από το \mathbb{K} .

Πρόταση 3.1.3. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q μια πεπερασμένη φαρέτρα. Τότε η $\mathbb{K}Q$ είναι μια πεπερασμένης διάστασης \mathbb{K} -άλγεβρα αν και μόνον αν η Q δεν έχει προσανατολισμένους κύκλους.

Απόδειξη. Έστω ότι η Q έχει ένα προσανατολισμένο κύκλο μ . Τότε αν με $\mathbb{P}Q$ ορίσουμε το σύνολο όλων των μονοπατιών υπεράνω της Q , δηλαδή

$$\mathbb{P}Q(x, y) = \{\alpha \in \mathbb{P}Q \mid s(\alpha) = x, t(\alpha) = y\}$$

θα έχουμε

$$\mathbb{P}Q \supseteq \{\mu^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

που είναι ένα άπειρο σύνολο. Άρα $\dim \mathbb{K}Q = \infty$.

Αντίστροφα έστω $l = |Q_1|$ και έστω ότι η Q δεν έχει προσανατολισμένους κύκλους. Τότε τα μήκη όλων των μονοπατιών υπεράνω της Q είναι το πολύ l . Πραγματικά αν υπάρχει ένα μονοπάτι $\xi = \xi_n \cdots \xi_1$ με μήκος $n > l$. Τότε θα έχουμε $\xi_i = \xi_j$ για κάποιο $i < j$ και τότε για το μονοπάτι

$$\mu = \xi_{j-1} \cdots \xi_{i+1} \xi_i$$

θα έχουμε

$$s(\mu) = s(\xi_i) = s(\xi_j) = t(\xi_{j-1}) = t(\mu)$$



I
 T
 α
 Π
 Tot
 KQ
 Q
 (ξ)
 Παρ
 Tot
 KQ
 αλγ
 πολυ
 είναι

Δηλαδή το μ είναι προσανατολισμένος κύκλος. Άρα οδηγηθήκαμε σε άτοπο. Έτσι για κάθε $x \in Q_0$ ο αριθμός των μονοπατιών με τέλος την κορυφή x είναι το πολύ

$$\sum_{i=1}^l l^i$$

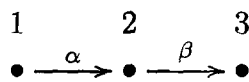
και άρα

$$|PQ| < |Q_0| \sum_{i=1}^l l^i < \infty$$

□

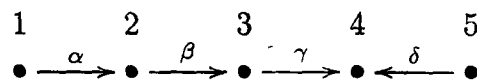
Συνεχίζουμε με κάποια παραδείγματα φαρετρών και της αντίστοιχης άλγεβρας-μονοπάτι αυτών.

Παράδειγμα 3.1.4. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα



Τότε το σύνολο $\{e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \beta\alpha\}$ είναι μια βάση για την άλγεβρα-μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ πάνω από το σώμα \mathbb{K} . Ο πολλαπλασιασμός των μονοπατιών στην φαρέτρα Q είναι $(e_1)(\alpha) = 0$, $(\alpha)(e_1) = \alpha$, $(\alpha)(\beta) = 0$ και $(\beta)(\alpha) = \beta\alpha$.

Παράδειγμα 3.1.5. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα



Τότε το σύνολο $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \beta\alpha, \gamma\beta, \gamma\beta\alpha\}$ είναι μια βάση για την άλγεβρα-μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ πάνω από το σώμα \mathbb{K} .

Παράδειγμα 3.1.6. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα



Τότε το σύνολο $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \beta\alpha\}$ είναι μια βάση για την άλγεβρα-μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ πάνω από το σώμα \mathbb{K} . Ο πολλαπλασιασμός των μονοπατιών στην φαρέτρα Q είναι $(\alpha)(\beta) = 0$, $(\gamma)(\gamma) = 0$, $(\gamma)(\beta) = 0$, $(e_3)(\beta) = (\beta)(e_2) = (\beta)$ και $(e_2)(\beta) = 0$.

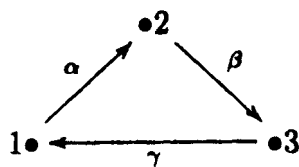
Παράδειγμα 3.1.7. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα



Τότε το σύνολο $\{e_1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^i, \dots\}$ είναι μια βάση για την άλγεβρα-μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ πάνω από το σώμα \mathbb{K} και $(\alpha^i)(\alpha^j) = \alpha^{i+j}$ για $i, j > 0$. Από τη βάση της άλγεβρας-μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ έχουμε ότι $\mathbb{K}Q \simeq \mathbb{K}[X]$, όπου $\mathbb{K}[X]$ είναι ο δακτύλιος πολυωνύμων μιας μεταβλητής της X πάνω από το σώμα \mathbb{K} . Ο ισομορφισμός είναι προφανής αν ταυτίσουμε τα στοιχεία α^i με X^i για $i > 0$.



Παράδειγμα 3.1.8. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα

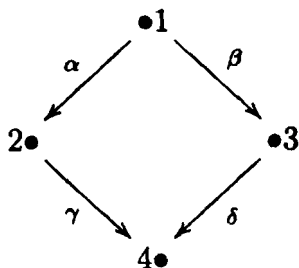


Έχουμε τότε ότι το σύνολο

$$\{p_1^i, p_2^i, p_3^i, \alpha p_1^i, \beta p_2^i, \gamma p_3^i, \beta \alpha p_1^i, \gamma \beta p_2^i, \alpha \gamma p_3^i \mid i \geq 0\}$$

είναι μια βάση για την άλγεβρα-μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ πάνω από το σώμα \mathbb{K} , όπου $p_1 = \gamma\beta\alpha, p_2 = \alpha\gamma\beta, p_3 = \beta\alpha\gamma$ και $p_i^0 = e_i$.

Παράδειγμα 3.1.9. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα



Τότε το σύνολο $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \gamma\alpha, \delta\beta\}$ είναι μια βάση για την άλγεβρα-μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ πάνω από το σώμα \mathbb{K} .

Ορισμός 3.1.10. Έστω Σ ένας δακτύλιος και V ένα Σ -διπρότυπο. Τότε με βάση το ζευγάρι $(\Sigma, {}_{\Sigma}V_{\Sigma})$ ορίζουμε τον **τανυστικό δακτύλιο** ως $T(\Sigma, V)$.

Αν ορίσουμε το **τανυστικό γινόμενο** του V n -φορές, δηλαδή το

$$V \otimes_{\Sigma} \cdots \otimes_{\Sigma} V$$

ως V^n , τότε ο

$$T(\Sigma, V) = \Sigma \oplus V \oplus V^2 \oplus \cdots \oplus V^i \oplus \cdots$$

ορίζεται σαν αβελιανή ομάδα. Γράφοντας $V^0 = \Sigma$, τότε με φυσικό τρόπο επάγεται ο πολλαπλασιασμός από τις Σ -διγραμμικές απεικονίσεις

$$V^i \times V^j \rightarrow V^{i+j}$$

για $i, j \geq 0$.

Λήμμα 3.1.11. Έστω Σ ένας δακτύλιος και V ένα Σ -διπρότυπο. Έστω Λ ένας δακτύλιος και $f : \Sigma \oplus V \rightarrow \Lambda$ μια απεικόνιση έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες

1. $f|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \Lambda$ είναι μορφισμός δακτυλίων.
2. Αν θεωρήσουμε του Λ σαν Σ -διπρότυπο μέσω της $f|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \Lambda$ τότε $f|_V : V \rightarrow \Lambda$ είναι μια απεικόνιση Σ -διπρότυπων.

Τότε υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός δακτυλίων $\tilde{f} : T(\Sigma, V) \rightarrow \Lambda$ έτσι ώστε

$$\tilde{f}|_{\Sigma \oplus V} = f$$



Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi : V \times V \rightarrow \Lambda$$

με τύπο

$$\phi(v_1, v_2) = f(v_1)f(v_2)$$

για $v_1, v_2 \in V$ Για $r \in \Sigma$ και επειδή η $f|_V : V \rightarrow \Lambda$ είναι μια απεικόνιση Σ -διπρότυπων τότε συνεπάγεται ότι

$$\phi(v_1r, v_2) = f(v_1r)f(v_2) = f(v_1)rf(v_2) = f(v_1)f(rv_2) = \phi(v_1, rv_2)$$

Άρα υπάρχει μοναδικός μορφισμός ομάδων

$$f_2 : V \otimes_{\Sigma} V \rightarrow \Lambda$$

έτσι ώστε

$$f_2(v_1 \otimes v_2) = f(v_1)f(v_2)$$

Αν θεωρήσουμε το $V \otimes_{\Sigma} V$ σαν Σ -διπρότυπο τότε η

$$f_2 : V \otimes_{\Sigma} V \rightarrow \Lambda$$

είναι απεικόνιση Σ -διπρότυπη. Με επαγωγή έχουμε μια μοναδική απεικόνιση Σ -διπρότυπων $f_n : V^n \rightarrow \Lambda$ με τύπο

$$f_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_1) \cdots f(v_n)$$

Τότε ορίζουμε

$$\tilde{f} : T(\Sigma, V) \rightarrow \Lambda, \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(w_n)$$

όπου $\sum_{n=0}^{\infty} w_n \in T(\Sigma, V)$ και $w_n \in V^n$. Τότε η \tilde{f} είναι μορφισμός δακτυλίων και είναι μοναδικά ορισμένη από την f . \square

Παρατήρηση 3.1.12. Για μια Artin R -άλγεβρα με έναν μορφισμό δακτυλίων $\phi : R \rightarrow \Sigma$ μελετάμε μόνο εκείνα τα Σ -διπρότυπα V έτσι ώστε $rv = vr$ για κάθε $r \in R$ και $v \in V$. Τότε ο μορφισμός δακτυλίων

$$\psi : R \rightarrow \Sigma \oplus V \oplus V^2 \oplus \cdots \oplus V^i \oplus \cdots$$

με

$$\psi(r) = (\phi(r), 0, \dots, 0, \dots)$$

για κάθε $r \in R$ έχει την εικόνα του στο κέντρο του $T(\Sigma, V)$, αφού ο R δρά κεντρικά στον Σ και V και άρα και στο V^i για κάθε $i = 1, \dots, n$ και θα έχουμε ότι $rv = vr$ για κάθε $r \in R$ και $v \in V^i$ για κάθε $i \geq 0$. Άρα ο μορφισμός δακτυλίων

$$\psi : R \rightarrow T(\Sigma, V)$$

κάνει τον $T(\Sigma, V)$ μια R -άλγεβρα.

Αν στο λήμμα (3.1.11) οι Σ και Λ είναι R -άλγεβρες και $f : \Sigma \oplus V \rightarrow \Lambda$ μια απεικόνιση έτσι ώστε $f|_{\Sigma}$ είναι ένας μορφισμός R -αλγεβρών, τότε ο μοναδικός μορφισμός δακτυλίων

$$\tilde{f} : T(\Sigma, V) \rightarrow \Lambda$$

έτσι ώστε $\tilde{f}|_{\Sigma \oplus V} = f$ είναι ένας μορφισμός R -αλγεβρών.



Ορισμός 3.1.13. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα. Για κάθε θετικό ακέραιο n θα συμβολίζουμε με

$$\prod_n(\mathbb{K})$$

την \mathbb{K} -άλγεβρα η οποία σαν δακτύλιος είναι το γινόμενο $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ n -φορές και έχει τη δομή της \mathbb{K} -άλγεβρας που δίνεται από τον μορφισμό δακτυλίων

$$\phi: \mathbb{K} \rightarrow \prod_n(\mathbb{K})$$

όπου $\phi(x) = (x, \dots, x)$ για κάθε $x \in \mathbb{K}$.

Έστω $\Sigma = \prod_n(\mathbb{K})$ και V ένα Σ -διπρότυπο που δρά κεντρικά, δηλαδή για κάθε $\alpha \in \mathbb{K}$ και $v \in V$ ισχύει $\alpha v = v\alpha$, και ας υποθέσουμε ότι το V είναι πεπερασμένης διάστασης πάνω από το \mathbb{K} . Τότε ο ταυσιτικός δακτύλιος $T(\Sigma, V)$ είναι μια \mathbb{K} -άλγεβρα. Σκοπός μας είναι να συνδέσουμε την έννοια μιας φαρέτρας $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ με την \mathbb{K} -άλγεβρα $T(\Sigma, V)$. Έστω $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ και έστω ε_i για κάθε $i = 1, \dots, n$ το ταυτοδύναμο στοιχείο του Σ όπου στην i -συντεταγμένη παίρνει την τιμή 1 και στις υπόλοιπες 0. Τότε $\varepsilon_j V \varepsilon_i$ είναι ένας \mathbb{K} -υπόχωρος του V και θα υπάρχουν τόσα βέλη όσο είναι η διάσταση

$$\dim_{\mathbb{K}} \varepsilon_j V \varepsilon_i$$

από το i στο j στην Q . Η φαρέτρα Q που ορίσαμε καλείται η **φαρέτρα της \mathbb{K} -άλγεβρας $T(\Sigma, V)$** .

Ορισμός 3.1.14. Για μια άλγεβρα-μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ θα συμβολίζουμε με J το ιδεώδες στην $\mathbb{K}Q$ που παράγεται από όλα τα βέλη της φαρέτρας Q .

Πρόταση 3.1.15. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και $\Sigma = \prod_n(\mathbb{K})$. Έστω ακόμη V ένα Σ -διπρότυπο πεπερασμένης διάστασης που δρά κεντρικά πάνω από το σώμα \mathbb{K} . Αν Q είναι η φαρέτρα της ταυσιτικής άλγεβρας $T(\Sigma, V)$, τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός \mathbb{K} -άλγεβρών

$$\phi: T(\Sigma, V) \rightarrow \mathbb{K}Q$$

έτσι ώστε

$$\phi\left(\bigoplus_{j \geq t} V^j\right) = J^t$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f: \Sigma \rightarrow \mathbb{K}Q$$

με τύπο

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i$$

για $\alpha_i \in \mathbb{K}$ η οποία είναι ομομορφισμός \mathbb{K} -άλγεβρών με εικόνα $\mathbb{K}Q_0$. Ακόμη έχουμε έναν \mathbb{K} -ισομορφισμό

$$f: V \rightarrow \mathbb{K}Q_1$$

που ορίζεται αν ορίσουμε μια ένα προς ένα απεικόνιση μεταξύ μιας βάσης που έχουμε διαλέξει για κάθε $\varepsilon_j V \varepsilon_i$ και του συνόλου των βελών από το i στο j .

Τότε το $\mathbb{K}Q_1$ είναι ένα Σ -υποπρότυπο του $\mathbb{K}Q$ και όταν το $\mathbb{K}Q$ το βλέπουμε σαν Σ -διπρότυπο μέσω του ισομορφισμού $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{K}Q_0$ τότε η απεικόνιση $f : V \rightarrow \mathbb{K}Q_1$ είναι ισομορφισμός Σ -διπροτύπων. Άρα απο το λήμμα (3.1.11.) έχουμε οτι υπάρχει ένας μορφοισμός δακτυλίων

$$\tilde{f} : T(\Sigma, V) \rightarrow \mathbb{K}Q$$

που επεκτείνει τον

$$f : \Sigma \oplus V \rightarrow \mathbb{K}Q$$

Επίσης ισχύει οτι η \tilde{f} είναι ένας επιμορφοισμός \mathbb{K} -αλγεβρών με

$$\tilde{f}\left(\bigoplus_{j \geq t} V^j\right) = J^t$$

Έχουμε τότε μια \mathbb{K} -βάση για το V^t που αποτελείται απο τα στοιχεία

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_t$$

όπου υπάρχει κάποιο μονοπάτι

$$\begin{array}{ccccccc} i_t & & i_{t-1} & & & & i_1 & & i_0 \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

στην φαρέτρα Q έτσι ώστε το V_j είναι μεταξύ των στοιχείων της βάσης που έχουμε επιλέξει στην $\varepsilon_{i_{j-1}} V \varepsilon_{i_j}$ για $j = 1, \dots, t$.

Τότε το $\tilde{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_t)$ είναι ένα μονοπάτι απο την i_t στην i_0 κορυφή και συγκεκριμένα στοιχεία της βάσης απεικονίζονται σε συγκεκριμένα μονοπάτια. Αυτό δείχνει οτι η f είναι ένα προς ένα και άρα η απεικόνιση $\phi = \tilde{f}$ είναι ισομορφισμός \mathbb{K} -αλγεβρών

$$\phi : T(\Sigma, V) \rightarrow \mathbb{K}Q$$

έτσι ώστε

$$\phi\left(\bigoplus_{j \geq t} V^j\right) = J^t$$

□

Θα μελετήσουμε τώρα τα μη-αναλύσιμα προβολικά πρότυπα για μια πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ πάνω απο το σώμα \mathbb{K} .

Παρατήρηση 3.1.16. Αφού η \mathbb{K} -άλγεβρα $\mathbb{K}Q$ είναι πεπερασμένης διάστασης τότε η Q δεν έχει προσανατολισμένους κύκλους. Τότε το ιδεώδες J που παράγεται απο τα βέλη της φαρέτρας είναι μηδενοδύναμο. Αν $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ είναι το σύνολο των κορυφών της φαρέτρας Q τότε

$$\mathbb{K}Q/J \simeq \mathbb{K}e_1 \times \cdots \times \mathbb{K}e_n$$

σαν \mathbb{K} -άλγεβρες. Αφού η $\mathbb{K}Q/J$ είναι ημιαπλή, έπεται οτι $J = \tau$, το ριζικό της $\Lambda = \mathbb{K}Q$. Άρα η Λ είναι βασική \mathbb{K} -άλγεβρα.

Γνωρίζουμε οτι υπάρχει μια ανάλυση του 1

$$1 = e_1 + \cdots + e_n$$



σε άθροισμα ορθογωνίων ταυτοδύναμων στοιχείων. Τότε

$$\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \dots \oplus \Lambda e_n$$

όπου Λe_i είναι προβολικό πρότυπο για $i = 1, \dots, n$ και επειδή $\Lambda e_i / \tau e_i$ έχει διάσταση 1 πάνω από το \mathbb{K} , το Λe_i είναι μη-αναλύσιμο για κάθε $i = 1, \dots, n$. Τα μονοπάτια p με $s(p) = i$ είναι μια \mathbb{K} -βάση για τα προβολικά μη-αναλύσιμα Λ -πρότυπα Λe_i .

Ορισμός 3.1.17. Μια κορυφή i της φαρέτρας Q καλείται **sink** αν δεν υπάρχει βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ με $s(\alpha) = i$, και **source** αν δεν υπάρχει βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ με $t(\alpha) = i$

Παρατήρηση 3.1.18. Από τον προηγούμενο ορισμό έχουμε ότι το Λe_i είναι απλό αν και μόνον αν η i είναι sink.

Προφανώς τα μη-τετριμμένα μονοπάτια p με $s(p) = i$ είναι η βάση του τe_i . Έστω $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ τα βέλη με $s(\alpha_j) = i$. Τότε κάθε μη-τετριμμένο μονοπάτι για το οποίο ισχύει ότι $s(p) = i$ είναι της μορφής $q\alpha_j$ για κάποιο j , όπου q είναι ένα μονοπάτι με $s(q) = e(\alpha_j)$. Άρα

$$\tau e_i = \bigoplus_{j=1}^t \Lambda e_{e(\alpha_j)} \alpha_j \simeq \bigoplus_{j=1}^t \Lambda e_{e(\alpha_j)}$$

και έτσι το τ είναι προβολικό Λ -πρότυπο. Άρα σαν συμπέρασμα έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.1.19. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q μια φαρέτρα χωρίς προσανατολισμένους κύκλους. Τότε η πεπερασμένης διάστασης \mathbb{K} -άλγεβρα $\mathbb{K}Q$ είναι κληρονομική.

Παρατήρηση 3.1.20. Για μια πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ με $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ έχουμε ότι τα μη-αναλύσιμα injective $\mathbb{K}Q$ -πρότυπα είναι μέχρι ισομορφισμού της μορφής

$$Q_i = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(e_i(\mathbb{K}Q), \mathbb{K})$$

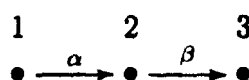
για $i = 1, \dots, n$. Προφανώς τα μονοπάτια p με $e(p) = i$ είναι μια \mathbb{K} -βάση για τα προβολικά $(\mathbb{K}Q)^{op}$ -πρότυπα $e_i(\mathbb{K}Q)$. Επειδή θέλουμε μια \mathbb{K} -βάση για τα Q_i τότε την δυική βάση που περιέχει τα στοιχεία p^* , όπου p^* είναι τα μονοπάτια p με $e(p) = i$. Για ένα στοιχείο της βάσης p^* και ένα μονοπάτι q της φαρέτρας Q έχουμε ότι

$$(qp^*)(u) = p^*(uq)$$

όταν u είναι ένα μονοπάτι με $e(u) = i$. Άρα

$$qp^* = \begin{cases} u^*, & \text{αν } p = uq \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παράδειγμα 3.1.21. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα



Το
Σ
i
και
Το i
β-β
Q
του
και
Θε
και το
αναπα

Τότε το $(\mathbb{K}Q)e_1$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_1, \alpha, \beta\alpha\}$, το $(\mathbb{K}Q)e_2$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_2, \beta\}$ και το $(\mathbb{K}Q)e_3$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_3\}$. Τότε

$$\tau e_1 = (\mathbb{K}Q)\alpha = (\mathbb{K}Q)e_2\alpha \simeq (\mathbb{K}Q)e_2$$

$$\tau e_2 = (\mathbb{K}Q)\beta = (\mathbb{K}Q)e_3\beta \simeq (\mathbb{K}Q)e_3$$

και

$$\tau e_3 = 0$$

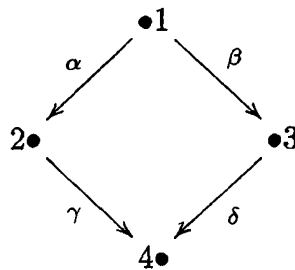
Το προβολικό $(\mathbb{K}Q)^{op}$ -πρότυπο $e_1(\mathbb{K}Q)$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_1\}$ και έτσι το $\{e_1^*\}$ είναι \mathbb{K} -βάση για το αντίστοιχο injective $\mathbb{K}Q$ -πρότυπο Q_1 . Επίσης το injective $\mathbb{K}Q$ -πρότυπο Q_2 έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_2^*, \alpha^*\}$ και το Q_3 έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_3^*, \beta^*, (\beta\alpha)^*\}$. Η δράση του Λ στο Q_3 υπολογίζεται από τις πράξεις

$$e_3\beta^* = 0, \quad e_2\beta^* = \beta^*, \quad \alpha(\beta\alpha)^* = \beta^*$$

και

$$\beta\beta^* = e_3^*$$

Παράδειγμα 3.1.22. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα



Τότε το $(\mathbb{K}Q)e_1$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_1, \alpha, \beta, \gamma\alpha, \delta\beta\}$, το $(\mathbb{K}Q)e_2$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_2, \gamma\}$, το $(\mathbb{K}Q)e_3$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_3, \delta\}$ και το $(\mathbb{K}Q)e_4$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_4\}$. Τότε

$$\tau e_1 \simeq (\mathbb{K}Q)e_2 \oplus (\mathbb{K}Q)e_3$$

$$\tau e_2 \simeq (\mathbb{K}Q)e_4 \simeq \tau e_3$$

και

$$\tau e_4 = 0$$

Το injective $\mathbb{K}Q$ -πρότυπο Q_1 έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_1^*\}$, το Q_2 έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_2^*, \alpha^*\}$, το Q_3 έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_3^*, \beta^*\}$ και το $\mathbb{K}Q$ -πρότυπο Q_4 έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{e_4^*, \gamma^*, \delta^*, (\gamma\alpha)^*, (\delta\beta)^*\}$. Η δράση του Λ στο πρότυπο Q_4 υπολογίζεται από τις πράξεις

$$\alpha(\gamma\alpha)^* = \gamma^*$$

και

$$\beta(\gamma\alpha)^* = 0$$

Θα μελετήσουμε τη σύνδεση μεταξύ προτύπων πάνω από μια άλγεβρα μονοπάτι και των αναπαραστάσεων φαριετών. Ορίσαμε στο πρώτο κεφάλαιο την έννοια της αναπαραστάσης φαριέτρας.



Παρατήρηση 3.1.23. Έστω M ένα πρότυπο πάνω από την άλγεβρα μονοπάτι $\mathbb{K}Q$. Τότε $M = \bigoplus_{i \in Q_0} e_i M$ είναι μια ανάλυση του προτύπου σε πεπερασμένο άθροισμα διανυσματικών χώρων πάνω από το σώμα \mathbb{K} . Αν $\alpha : i \rightarrow j$ είναι ένα βέλος, τότε αν πολλαπλασιάσουμε από δεξιά με α επάγεται μια \mathbb{K} -γραμμική απεικόνιση

$$e_i M \rightarrow e_j M$$

Θα συνεχίσουμε τώρα εισάγοντας μια νέα κατηγορία, την $f.d.(\mathbb{K}Q)$ η οποία συμβολίζει την **κατηγορία των $\mathbb{K}Q$ -προτύπων πεπερασμένης διάστασης**. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι οι κατηγορίες $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$ και $f.d.(\mathbb{K}Q)$ είναι ισοδύναμες. Θα ορίσουμε λοιπόν συναρτητές

$$F : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow f.d.(\mathbb{K}Q)$$

και

$$H : f.d.(\mathbb{K}Q) \rightarrow \text{Rep}(Q, \mathbb{K})$$

και θα δείξουμε ότι ορίζουν μια ισοδυναμία

$$\text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \xrightarrow{\sim} f.d.(\mathbb{K}Q)$$

Παρατήρηση 3.1.24. Έστω (V, f) ένα αντικείμενο της $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$, όπου $V = \{V_i \mid i \in Q_0\}$ σύνολο διανυσματικών χώρων και $f = (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$ \mathbb{K} -γραμμικές απεικονίσεις $f_\alpha : V_i \rightarrow V_j$ για κάθε βέλος $\alpha : i \rightarrow j$. Ισχυριζόμαστε ότι οι αναπαραστάσεις είναι πεπερασμένης διάστασης, δηλαδή κάθε V_i έχει πεπερασμένη διάσταση πάνω από το σώμα \mathbb{K} .

Ορισμός 3.1.25. Έστω (V, f) ένα αντικείμενο της $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$. Τότε ορίζουμε το $F(V, f)$ να είναι το

$$\bigoplus_{i \in Q_0} V_i$$

σαν ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος. Για κάθε βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ έχουμε μια \mathbb{K} -γραμμική απεικόνιση $f_\alpha : V_i \rightarrow V_j$. Αν

$$\pi_i : F(V, f) \rightarrow V_i$$

είναι η προβολή και

$$i_i : V_i \rightarrow F(V, f)$$

είναι η έγκλιση τότε επάγεται η απεικόνιση

$$\tilde{f}_\alpha = i_j f_\alpha \pi_i : F(V, f) \rightarrow F(V, f)$$

Για ένα τετριμμένο μονοπάτι e_i έχουμε

$$\tilde{f}_{e_i} = i_i f_{e_i} \pi_i : F(V, f) \rightarrow F(V, f)$$

όπου $f_{e_i} = 1_{V_i} : V_i \rightarrow V_i$

Τότε η

$$\tilde{f} : \mathbb{K}Q_0 \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(F(V, f))$$

είναι μια \mathbb{K} -άλγεβρα απεικόνιση και

$$\tilde{f} : \mathbb{K}Q_1 \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(F(V, f))$$



είναι ένας $\mathbb{K}Q_0$ μορφοισμός διπροτύπων. Άρα υπάρχει μοναδικός \mathbb{K} -άλγεβρας μορφοισμός

$$\tilde{f} : \mathbb{K}Q \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(F(V, f))$$

που επεκτείνει την \tilde{f} και άρα το $F(V, f)$ γίνεται ένα $\mathbb{K}Q$ -πρότυπο. Έστω τώρα $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ ένας μορφοισμός στην $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$. Τότε έχουμε μια \mathbb{K} -γραμμική απεικόνιση $h_i : V_i \rightarrow V'_i$ για κάθε $i \in Q_0$ και άρα έχουμε μια επαγόμενη απεικόνιση διανυσματικών χώρων

$$\tilde{h} : F(V, f) \rightarrow F(V', f')$$

Για κάθε βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ που ανήκει Q_1 έχουμε

$$h_j f_\alpha = f'_\alpha h_i : V_i \rightarrow V'_j$$

Άρα $\tilde{h} f_\alpha = \tilde{f}'_\alpha \tilde{h}$ και άρα για κάθε $\sigma \in \mathbb{K}Q$ έχουμε ότι

$$\tilde{h} \tilde{f}_\sigma = \tilde{f}'_\sigma \tilde{h}$$

Δηλαδή το $\tilde{h}(\sigma v) = \tilde{f}'_\sigma \tilde{h}(v)$ για $v \in F(V, f)$ και άρα η $\tilde{h} : F(V, f) \rightarrow F(V', f')$ είναι $\mathbb{K}Q$ -απεικόνιση. Τότε ορίζουμε το $F(h) = \tilde{h}$ και άρα εύκολα αποδεικνύεται ότι ο

$$F : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{f.d.}(\mathbb{K}Q)$$

είναι \mathbb{K} -συναρτητής.

Έστω M ένα αντικείμενο στην $\text{f.d.}(\mathbb{K}Q)$. Αφού $1 = e_1 + \dots + e_n$ είναι ένα άθροισμα από ορθογώνια ταυτοδύναμα στην $\mathbb{K}Q$, τότε έχουμε ένα άθροισμα από διανυσματικούς χώρους $M = \bigoplus_{i \in Q_0} e_i M$. Για κάθε $\sigma \in \mathbb{K}Q$ έχουμε μια απεικόνιση

$$\tilde{f}_\sigma : M \rightarrow M$$

που ορίζεται

$$\tilde{f}_\sigma(m) = \sigma m$$

Αν $\alpha : i \rightarrow j$ είναι ένα βέλος στην Q έχουμε ότι

$$\alpha(e_i M) = e_j \alpha M \subset e_j M$$

και έτσι το α επάγει μια \mathbb{K} -γραμμική απεικόνιση

$$f_\alpha : e_i M \rightarrow e_j M$$

Ορίζουμε την αναπαράσταση $H(M)$ που δίνεται από τους \mathbb{K} -διανυσματικούς χώρους $e_i M$ για κάθε $i \in Q_0$ μαζί με τις απεικονίσεις f_α για κάθε $\alpha \in Q_1$. Αν $h : B \rightarrow M$ είναι ένας μορφοισμός στην $\text{f.d.}(\mathbb{K}Q)$, τότε $h(e_i B) \subset e_i h(B) \subset e_i M$ και άρα παίρνουμε μια \mathbb{K} -γραμμική απεικόνιση $h_i : e_i B \rightarrow e_i M$. Για κάθε βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ έχουμε ότι $\alpha h(b) = h(\alpha b)$ για $b \in B$ και άρα $\alpha h_i(b) = h_j(\alpha b)$ για $b \in e_i B$. Δηλαδή έχουμε

$$f'_\alpha h_i(b) = h_j f_\alpha(b)$$

και έτσι αν ορίσουμε το $H(h) = \{h_i\}$ συνεπάγεται ότι η

$$H(h) : H(B) \rightarrow H(M)$$

είναι μια απεικόνιση στην $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$. Τώρα είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι ο $H : \text{f.d.}(\mathbb{K}Q) \rightarrow \text{Rep}(Q, \mathbb{K})$ είναι \mathbb{K} -συναρτητής.



Θεώρημα 3.1.26. Έστω ένα σώμα \mathbb{K} και μια πεπερασμένη φαρέτρα Q . Τότε οι συναρτητές

$$F : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{f. d.}(\mathbb{K}Q)$$

και

$$H : \text{f. d.}(\mathbb{K}Q) \rightarrow \text{Rep}(Q, \mathbb{K})$$

είναι αντίστροφες ισοδυναμίες \mathbb{K} -κατηγοριών.

Απόδειξη. Έστω (V, f) ένα αντικείμενο της $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$. Τότε $F(V, f) = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ και

$$e_i F(V, f) = \widetilde{f}_{e_i}(F(V, f)) = i_i(V_i)$$

. Αν $\alpha : i \rightarrow j$ είναι ένα βέλος στην Q η γραμμική απεικόνιση $f_\alpha : V_i \rightarrow V_j$ επάγει μια \mathbb{K} -γραμμική απεικόνιση

$$f_\alpha : F(V, f) \rightarrow F(V, f)$$

Ο περιορισμός του f_α στο $i_i(V_i)$ δίνει μια \mathbb{K} -γραμμική απεικόνιση

$$f'_\alpha : i_i(V_i) \rightarrow i_j(V_j)$$

Για κάθε βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{i_i} & i_i(V_i) \\ f_\alpha \downarrow & & \downarrow f'_\alpha \\ V_j & \xrightarrow{i_j} & i_j(V_j) \end{array}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε ότι ο $HF(V, f)$ είναι η αναπαράσταση που δίνεται από τη συλλογή $\{i_i(V_i)\}$ τότε ο μορφισμός $i = \{i_i\}$ δίνει ένα ισομορφισμό

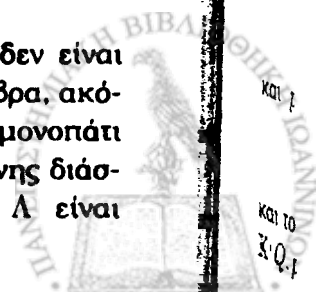
$$i : (V, f) \rightarrow HF(V, f)$$

που είναι ισομορφισμός συναρτητών από τον $1_{\text{Rep}(Q, \mathbb{K})}$ στον $HF(V, f)$. Έστω τώρα B και M αντικείμενα της κατηγορίας $\text{f. d.}(\mathbb{K}Q)$ και $f : B \rightarrow M$ μια $\mathbb{K}Q$ -απεικόνιση. Τότε έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & M \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \bigoplus_{i \in Q_0} e_i B & \xrightarrow{f_1 \oplus \dots \oplus f_n} & \bigoplus_{i \in Q_0} e_i M \end{array}$$

όπου $f_i : e_i B \rightarrow e_i M$ είναι οι περιορισμοί των απεικονίσεων. Άρα έχουμε έναν ισομορφισμό συναρτητών από το $1_{\text{f. d.}(\mathbb{K}Q)}$ στον FH . \square

Αφού υπάρχουν πεπερασμένης διάστασης \mathbb{K} -άλγεβρες οι οποίες δεν είναι κληρονομικές, δεν είναι κάθε πεπερασμένης διάστασης, βασική \mathbb{K} -άλγεβρα, ακόμα και αν το \mathbb{K} είναι αλγεβρικά κλειστό, ισομορφική με την άλγεβρα μονοπάτι μιας φαρέτρας. Θα δούμε όμως ότι αν Λ είναι μια βασική πεπερασμένης διάστασης \mathbb{K} -άλγεβρα πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα \mathbb{K} , τότε η Λ είναι



ένα πηλίκο απο μια άλγεβρα μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ μιας φαρέτρας Q με πεπερασμένη διάσταση. Έτσι η κατηγορία $\text{mod-}\Lambda$ είναι πλήρης (full) υποκατηγορία της $f.d.(\mathbb{K}Q)$ και έτσι είναι ισοδύναμη με κάποια υποκατηγορία της $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$. Για την περιγραφή αυτής της υποκατηγορίας θα χρειαστεί να δώσουμε τον ορισμό της σχέσης σε μια φαρέτρα.

Ορισμός 3.1.27. Μια σχέση σ σε μια φαρέτρα Q πάνω απο ένα σώμα \mathbb{K} είναι ένας \mathbb{K} -γραμμικός συνδυασμός των μονοπατιών $\sigma = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n$ με $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $e(p_1) = \dots = e(p_n)$ και $s(p_1) = \dots = s(p_n)$

Ισχυριζόμαστε οτι το μήκος $l(p_i)$ για κάθε μονοπάτι p_i , όπου με μήκος εννοούμε τον αριθμό των βελών σε κάθε μονοπάτι, είναι το πολύ 2.

Ορισμός 3.1.28. Αν $p = \{\sigma_t \mid t \in T\}$ είναι ένα σύνολο απο σχέσεις στην φαρέτρα Q πάνω απο το σώμα \mathbb{K} , τότε το ζεύγος (Q, p) καλείται η **φαρέτρα με σχέσεις** πάνω απο το \mathbb{K} .

Παρατήρηση 3.1.29. Για τη φαρέτρα με σχέσεις (Q, p) θεωρούμε την \mathbb{K} -άλγεβρα

$$\mathbb{K}(Q, p) = \mathbb{K}Q / \langle p \rangle$$

όπου με $\langle p \rangle$ συμβολίζουμε το ιδεώδες στο $\mathbb{K}Q$ που παράγεται απο το σύνολο των σχέσεων p . Ισχυριζόμαστε οτι $\langle p \rangle \subset J^2$ όπου J είναι το ιδεώδες του $\mathbb{K}Q$ που παράγεται απο όλα τα βέλη στη φαρέτρα Q . Κυρίως ενδιαφερόμαστε για τις άλγεβρες $\mathbb{K}(Q, p)$ όπου ισχύει οτι

$$J^t \subset \langle p \rangle \subset J^2$$

για κάποιο ακέραιο t . Αυτό συμβαίνει γιατί τέτοιες άλγεβρες $\mathbb{K}(Q, p)$ είναι πεπερασμένης διάστασης.

Θα συμβολίζουμε με \bar{x} , όπου $x \in \mathbb{K}Q$, το αντίστοιχο στοιχείο στην $\mathbb{K}Q / \langle p \rangle$.

Πρόταση 3.1.30. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και (Q, p) μια φαρέτρα με σχέσεις πάνω απο το \mathbb{K} . Ισχυριζόμαστε οτι $J^t \subset \langle p \rangle \subset J^2$ για κάποιο ακέραιο t . Τότε η εικόνα \bar{J} του J στην $\mathbb{K}(Q, p)$ είναι το $\text{Rad } \mathbb{K}(Q, p)$.

Απόδειξη. Έχουμε οτι $\bar{J}^t = 0$ και

$$\mathbb{K}(Q, p) / \bar{J} \simeq \prod_n (\mathbb{K})$$

όπου n ο αριθμός των κορυφών της φαρέτρας Q . Σημειώνουμε οτι το $\mathbb{K}(Q, p) / \bar{J}$ είναι ημιαπλό. Τότε $\bar{J} = \text{Rad } \mathbb{K}(Q, p)$ \square

Παρατήρηση 3.1.31. Σημειώνουμε οτι η $\mathbb{K}(Q, p)$ μπορεί να είναι πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα χωρίς το \bar{J} να είναι το ριζικό.

Παράδειγμα 3.1.32. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα, Q η φαρέτρα



και $p = \{\alpha^3 - \alpha^2\}$. Τότε

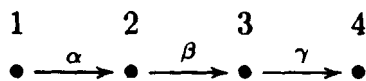
$$\mathbb{K}(Q, p) = \mathbb{K}Q / \langle \alpha^3 - \alpha^2 \rangle \simeq \mathbb{K}[X] / (X^3 - X^2) \simeq \mathbb{K}[X] / (X^2) \times \mathbb{K}$$

και το \bar{J} έχει μια \mathbb{K} -βάση, την $\{\bar{\alpha}, \bar{\alpha}^2\}$. Όμως το $\bar{\alpha}$ δεν ανήκει στο ριζικό του $\mathbb{K}(Q, p)$.



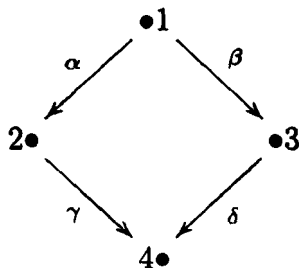
Παρατήρηση 3.1.33. Θέλουμε τώρα να περιγράψουμε τα μη-αναλύσιμα προβολικά Λ -πρότυπα όταν $\Lambda = \mathbb{K}(Q, p)$ για μια φαρέτρα με σχέσεις (Q, p) με $J' \subset \langle p \rangle$ για κάποιο ακέραιο t . Έχουμε ότι $1 = \sum_{i \in Q_0} \bar{e}_i$ είναι μια ανάλυση του 1 σε άθροισμα ορθογώνιων ταυτοδύναμων στοιχείων και $\Lambda = \bigoplus_{i \in Q_0} \Lambda \bar{e}_i$. Το $\Lambda \bar{e}_i$ είναι προβολικό κάλυμμα των απλών προτύπων σε σχέση με την κορυφή i και άρα είναι μη-αναλύσιμο. Αφού τα στοιχεία $\bar{p} \in \Lambda$, όπου p είναι ένα μονοπάτι με $s(p) = i$, παράγουν το $\Lambda \bar{e}_i$ σαν \mathbb{K} -διανυσματικό χώρο μπορούμε να βρίσκουμε πάντα μια \mathbb{K} -βάση για το $\Lambda \bar{e}_i$ με στοιχεία τα \bar{p} όπου p είναι ένα μονοπάτι με $s(p) = i$.

Παράδειγμα 3.1.34. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα



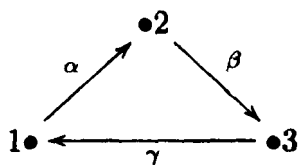
Έστω το σύνολο με τις σχέσεις $p = \{\beta\alpha, \gamma\beta\}$ για την Q πάνω από το \mathbb{K} . Τότε το $\{\beta\alpha, \gamma\beta, \gamma\beta\alpha\}$ είναι μια \mathbb{K} -βάση για το ιδεώδες $\langle p \rangle$ και το $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\}$ είναι μια \mathbb{K} -βάση για την $\Lambda = \mathbb{K}(Q, p)$. Το πρότυπο $\Lambda \bar{e}_1$ έχει \mathbb{K} -βάση το $\{\bar{e}_1, \bar{\alpha}\}$, το $\Lambda \bar{e}_2$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{\bar{e}_2, \bar{\beta}\}$, το $\Lambda \bar{e}_3$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{\bar{e}_3, \bar{\gamma}\}$ και το $\Lambda \bar{e}_4$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{\bar{e}_4\}$.

Παράδειγμα 3.1.35. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα



Έστω το σύνολο με τις σχέσεις $p = \{\gamma\alpha - \delta\beta\}$ στην Q πάνω από το \mathbb{K} . Τότε για $\Lambda = \mathbb{K}(Q, p)$ έχουμε ότι το πρότυπο $\Lambda \bar{e}_1$ έχει \mathbb{K} -βάση το $\{\bar{e}_1, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\alpha\}$, το $\Lambda \bar{e}_2$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{\bar{e}_2, \bar{\gamma}\}$, το $\Lambda \bar{e}_3$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{\bar{e}_3, \bar{\delta}\}$ και το $\Lambda \bar{e}_4$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{\bar{e}_4\}$.

Παράδειγμα 3.1.36. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα



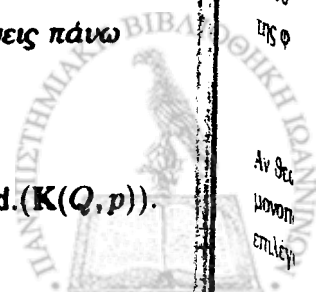
Έστω το σύνολο με τις σχέσεις $p = \{\beta\alpha, \gamma\beta, \alpha\gamma\}$ στην Q πάνω από το \mathbb{K} . Τότε η $\Lambda = \mathbb{K}(Q, p)$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\}$. Έχουμε ακόμη ότι το πρότυπο $\Lambda \bar{e}_1$ έχει \mathbb{K} -βάση το $\{\bar{e}_1, \bar{\alpha}\}$, το $\Lambda \bar{e}_2$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{\bar{e}_2, \bar{\beta}\}$ και το $\Lambda \bar{e}_3$ έχει \mathbb{K} -βάση το σύνολο $\{\bar{e}_3, \bar{\gamma}\}$.

Πρόταση 3.1.37. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και (Q, p) μια φαρέτρα με σχέσεις πάνω από το \mathbb{K} . Τότε ο συναρτητής

$$F : \text{Rep}((Q, p), \mathbb{K}) \rightarrow \text{f. d.}(\mathbb{K}(Q, p))$$

επάγει μια ισοδυναμία \mathbb{K} -κατηγοριών μεταξύ της $\text{Rep}((Q, p), \mathbb{K})$ και της $\text{f. d.}(\mathbb{K}(Q, p))$.

Παρ
για
κορ
απλ
Παρ
όπου
της φ
Αν θε
μονο
επιλέγ



Απόδειξη. Αν (V, f) ένα αντικείμενο της $\text{Rep}((Q, p), \mathbb{K})$ τότε από τον ορισμό της κατηγορίας αυτής έχουμε ότι η απεικόνιση $f_\sigma = 0$ για κάθε σχέση σ που ανήκει στο σύνολο p . Άρα $\sigma F(V, f) = 0$ και άρα το $F(V, f)$ είναι $\mathbb{K}(Q, p)$ -πρότυπο.

Αντίστροφα αν το $F(V, f)$ είναι $\mathbb{K}(Q, p)$ -πρότυπο τότε $\sigma F(V, f) = 0$ για κάθε σχέση σ που ανήκει στο σύνολο p και άρα $f_\sigma = 0$ για κάθε σ που ανήκει στο σύνολο p . Άρα (V, f) είναι αντικείμενο της $\text{Rep}((Q, p), \mathbb{K})$ και άρα ο συναρτητής

$$F : \text{Rep}((Q, p), \mathbb{K}) \rightarrow \text{f. d.}(\mathbb{K}Q)$$

επάγει μια ισοδυναμία \mathbb{K} -κατηγοριών μεταξύ των $\text{Rep}((Q, p), \mathbb{K})$ και $\text{f. d.}(\mathbb{K}(Q, p))$. \square

Παρατήρηση 3.1.38. Αν $J^t \subset \langle p \rangle \subset J^2$ για κάποιο ακέραιο t , τότε

$$\text{f. d.}(\mathbb{K}Q) = \text{Mod-}\mathbb{K}(Q, p)$$

και άρα ο συναρτητής

$$F : \text{Rep}((Q, p), \mathbb{K}) \rightarrow \text{Mod-}(\mathbb{K}(Q, p))$$

είναι ισοδυναμία κατηγοριών.

Πόρισμα 3.1.39. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και (Q, p) μια φαρέτρα με σχέσεις πάνω από το \mathbb{K} με $J^t \subset \langle p \rangle \subset J^2$ για κάποιο ακέραιο t . Έστω ο συναρτητής

$$F : \text{Rep}((Q, p), \mathbb{K}) \rightarrow \text{Mod-}(\mathbb{K}(Q, p))$$

που είναι ισοδυναμία κατηγοριών. Τότε

1. Ένα αντικείμενο (V, f) της $\text{Rep}((Q, p), \mathbb{K})$ είναι προβολικό (αντ. injective, απλό, μη-αναλύσιμο) αν και μόνον αν το $F(V, f)$ είναι προβολικό (αντ. injective, απλό, μη-αναλύσιμο) στην $\text{Mod-}(\mathbb{K}(Q, p))$.

2. Μια ακολουθία

$$(U, f) \longrightarrow (V, g) \longrightarrow (W, h)$$

στην $\text{Rep}((Q, p), \mathbb{K})$ είναι ακριβής αν και μόνον αν η ακολουθία

$$F(U, f) \longrightarrow F(V, g) \longrightarrow F(W, h)$$

είναι ακριβής στην $\text{Mod-}(\mathbb{K}(Q, p))$.

Παρατήρηση 3.1.40. Μελετήσαμε τα απλά αντικείμενα S_i στην $\text{Rep}((Q, p), \mathbb{K})$ για κάθε $i \in Q_0$ τα οποία είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με το σύνολο των κορυφών Q_0 και άρα με τα απλά $\mathbb{K}(Q, p)$ -πρότυπα. Άρα δεν υπάρχουν άλλες απλές αναπαραστάσεις της φαρέτρας με σχέσεις (Q, p) .

Παρατήρηση 3.1.41. Έστω $P_i = \Lambda \bar{e}_i$ ένα μη-αναλύσιμο προβολικό Λ -πρότυπο, όπου $\Lambda = \mathbb{K}(Q, p)$ και έστω $(V, f) = H(P_i)$ να είναι η αντίστοιχη αναπαράσταση της φαρέτρας (Q, p) . Τότε από τον ορισμό θα έχουμε

$$V(j) = e_j P_i$$

Αν θεωρήσουμε μια \mathbb{K} -βάση για το P_i με στοιχεία $\bar{p} \in \Lambda$, όπου p είναι ένα μονοπάτι με $s(p) = i$, τότε θα πάρουμε μια \mathbb{K} -βάση για το $V(j)$ με το να επιλέγουμε τα στοιχεία της βάσης \bar{p} με $e(p) = j$.



Αν $\alpha : i' \rightarrow j'$ είναι ένα βέλος, τότε έχουμε την απεικόνιση

$$f_\alpha : V(i') \rightarrow V(j') , \bar{p} \mapsto \alpha \bar{p}$$

όταν $e(p) = i'$.

Παρατήρηση 3.1.42. Παρατηρούμε ότι για την δυική φαρέτρα με σχέσεις μιας φαρέτρας με σχέσεις (Q, p) ισχύει ότι $\mathbb{K}(Q, p)^{op} \simeq \mathbb{K}(Q^{op}, p^{op})$. Τώρα για την πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα $\Lambda = \mathbb{K}(Q, p)$ έχουμε έναν ισομορφισμό

$$(\Lambda \bar{e}_i)^* = \text{Hom}_\Lambda(\Lambda \bar{e}_i, \Lambda) \simeq \bar{e}_i \Lambda = \Lambda^{op} \bar{e}_i^{op}$$

με

$$g : \Lambda \bar{e}_i \rightarrow \Lambda$$

στο $g(\bar{e}_i)$.

Έστω (V, f) ένα αντικείμενο της $\text{Rep}((Q, p), \mathbb{K})$, τότε θέλουμε να περιγράψουμε την αναπαράσταση της (Q^{op}, p^{op}) που είναι ισοδύναμη με το $\mathbb{K}(Q, p)^{op}$ -πρότυπο $DF(V, f)$. Την αναπαράσταση αυτή θα τη συμβολίζουμε με $(D(V), D(f))$. Αν θεωρήσουμε την $(D(V), D(f))$ σαν \mathbb{K} -διανυσματικό χώρο τότε

$$DF(V, f) = D\left(\bigoplus_{i \in Q_0} V(i)\right) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{i \in Q_0} V(i), \mathbb{K}\right)$$

Για την κορυφή i ο διανυσματικός χώρος $D(V)(i)$ είναι

$$e_i^{op} DF(V, f) = D(e_i^{op} F(V, f)) = D(V)(i) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V(i), \mathbb{K})$$

όπου ταυτίζουμε το $e_i F(V, f)$ με τον $V(i)$. Αυτό περιγράφει τον διανυσματικό χώρο της δυικής αναπαράστασης σαν δυικό χώρο σε κάθε κορυφή. Έστω ένα βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ και η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση $f_\alpha : V(i) \rightarrow V(j)$. Αν χρησιμοποιήσουμε τη δυικότητα υπεράνω του σώματος έχουμε την απεικόνιση

$$D(f_\alpha) : D(V(i)) \rightarrow D(V(j))$$

με

$$D(f_\alpha)(t)(u) = t(f_\alpha(u))$$

για $t \in D(V(j))$ και $u \in V(i)$. Έστω τώρα

$$D(f)_{\alpha^{op}} = D(f_\alpha)$$

Τότε αν (V, f) είναι ένα αντικείμενο της $\text{Rep}((Q, p), \mathbb{K})$, το $(D(V), D(f))$ είναι ένα αντικείμενο της $\text{Rep}((Q^{op}, p^{op}), \mathbb{K})$ και ακόμη

$$DF(V, f) \simeq F(D(V), D(f))$$

Συνεχίζουμε τώρα ερμηνεύοντας την δυικότητα για τις απλές, προβολικές και injective αναπαραστάσεις. Αν (S_i, f) είναι απλή αναπαράσταση στην κατηγορία $\text{Rep}((Q, p), \mathbb{K})$ τότε γνωρίζουμε ότι $S_i(j) = 0$ για $i \neq j$, $S_i(i)$ είναι ένας μονοδιάστατος διανυσματικός χώρος και $f_\alpha = 0$ για κάθε βέλος α . Άρα αν προμηθευτούμε τον δυικό χώρο $D(S_i(i))$ για κάθε κορυφή i στην φαρέτρα Q^{op} τότε $(D(S_i), D(f))$ που είναι μονοδιάστατος και όλες οι απεικονίσεις είναι μηδέν.

Έστω τώρα μια προβολική αναπαράσταση (V, f) στην $\text{Rep}((Q, p), \mathbb{K})$. Για κάθε κορυφή i στην φαρέτρα Q έχουμε τους διανυσματικούς χώρους $V(i)$ και τους μορφοισμούς f_α για κάθε βέλος α . Τότε παίρνουμε $(D(V), D(f))$ με $D(V)(i) = D(V(i))$ για κάθε κορυφή i στην φαρέτρα Q^{op} και $D(f)_{\alpha^{op}} = D(f_\alpha)$ για κάθε βέλος α^{op} στην φαρέτρα Q^{op} . Όμως η (V, f) είναι μια προβολική αναπαράσταση αν το $F(V, f)$ είναι $\mathbb{K}(Q, p)$ -πρότυπο. Άρα το $DF(V, f)$ είναι ένα injective $\mathbb{K}(Q, p)^{op}$ -πρότυπο. Όμως

$$\mathbb{K}(Q, p)^{op} = \mathbb{K}(Q^{op}, p^{op})$$

Άρα το $(D(V), D(f))$ είναι μια injective αναπαράσταση της $\mathbb{K}(Q^{op}, p^{op})$. Αντίστροφα αν ξεκινήσουμε με προβολικές αναπαραστάσεις στην $\mathbb{K}(Q^{op}, p^{op})$ τότε απο τις δυικές αυτών παίρνουμε injective αναπαραστάσεις στην $\text{Rep}((Q, p), \mathbb{K})$.

Παρατήρηση 3.1.43. Απο την Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε οτι αν $f : V \rightarrow W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ \mathbb{K} -διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης που αναπαριστάται απο ένα πίνακα M σε σχέση με τις βάσεις B και C των V και W αντίστοιχα τότε χρησιμοποιώντας τη δυική βάση B^* του DV και την δυική βάση C^* του W τότε ο πίνακας αναπαράστασης Df ως προς τις βάσεις είναι ο μεταθέτης, οπως καλείται, του πίνακα M .

Παρατήρηση 3.1.44. Η δυικότητα

$$()^* : \mathcal{P}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{P}(\Lambda^{op})$$

μεταξύ προβολικών αριστερών και προβολικών δεξιών Λ -πρωτύπων επάγει μια δυικότητα μεταξύ των προβολικών αναπαραστάσεων της φαρέτρας (Q, p) και των προβολικών αναπαραστάσεων της (Q^{op}, p^{op}) που τη συμβολίζουμε με $()^*$. όταν $J^t \subset \langle p \rangle \subset J^2$ για κάποιο ακέραιο t . Δηλαδή αν P_i είναι μια μη-αναλύσιμη προβολική αναπαράσταση σε σχέση με την κορυφή i της φαρέτρας Q , τότε το P_i^* είναι η προβολική αναπαράσταση της φαρέτρας (Q^{op}, p^{op}) σε αντιστοιχία με το i .

Παρατήρηση 3.1.45. Έστω μια αναπαράσταση (V, f) στην $\text{Rep}((Q, p), \mathbb{K})$ θέλουμε να μελετήσουμε τώρα τις υποαναπαραστάσεις $\tau(V, f) = (U, f')$ της (V, f) που αντιστοιχούν στο $\mathbb{K}(Q, p)$ -πρότυπο $\tau F(V, f)$ και $\text{Soc}(V, f) = (W, f'')$ της (V, f) που αντιστοιχεί στο $\mathbb{K}(Q, p)$ -πρότυπο $F(V, f)$. Αφού το τ παράγεται απο τα βέλη της φαρέτρας, τότε ο υπόχωρος που παράγεται απο τις εικόνες των απεικονίσεων f_α στο $V(i)$ είναι ο

$$U(i) = \sum_{e(\alpha)=i} f_\alpha(V(s(\alpha)))$$

Τώρα για κάθε βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ έστω $f'_\alpha = f_\alpha|_{U(i)}$ η οποία είναι μια \mathbb{K} -γραμμική απεικόνιση απο το $U(i)$ με εικόνα το $U(j)$. Ακόμη έχουμε

$$W(i) = \bigcap_{s(\alpha)=i} \text{Ker } f_\alpha$$

που περιέχει όλα τα στοιχεία που πάνε στο μηδέν απο το $V(i)$ μέσω των απεικονίσεων f_α . Τέλος για κάθε βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ έχουμε οτι

$$f_\alpha(W(i)) = 0$$

και άρα υποθέτουμε οτι $f''_\alpha = 0$.



Παράδειγμα 3.1.46. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet & \xrightarrow{\beta} & \bullet & \xrightarrow{\gamma} & \bullet \end{array}$$

Τότε Q^{op} είναι η φαρέτρα

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \bullet & \xleftarrow{\alpha^{op}} & \bullet & \xleftarrow{\beta^{op}} & \bullet & \xleftarrow{\gamma^{op}} & \bullet \end{array}$$

Το προβολικό $\mathbb{K}Q$ -πρότυπο $P_1 = \Lambda e_1$ με \mathbb{K} -βάση $\{e_1, \alpha, \beta\alpha, \gamma\beta\alpha\}$ αντιστοιχεί στην αναπαράσταση

$$\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$

και το P_1^* αντιστοιχεί στην αναπαράσταση

$$\mathbb{K} \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow 0$$

της Q^{op} . Το προβολικό $\mathbb{K}Q$ -πρότυπο $P_2 = \Lambda e_2$ με \mathbb{K} -βάση $\{e_2, \beta, \gamma\beta\}$ αντιστοιχεί στην αναπαράσταση

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$

και το P_2^* αντιστοιχεί στη αναπαράσταση

$$\mathbb{K} \xleftarrow{1} \mathbb{K} \longleftarrow 0 \longleftarrow 0$$

της Q^{op} . Τότε το injective $\mathbb{K}Q$ -πρότυπο $I_1 = D(P_1^*)$ αντιστοιχεί στην αναπαράσταση

$$\mathbb{K} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

και $I_2 = D(P_2^*)$ αντιστοιχεί στην αναπαράσταση

$$\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

της Q . Ας θεωρήσουμε τη σχέση $p = \{\gamma\beta\}$ στην φαρέτρα Q . Τότε το προβολικό $\mathbb{K}(Q, p)$ -πρότυπο $\Lambda \bar{e}_2$ με \mathbb{K} -βάση $\{e_2, \beta\}$ αντιστοιχεί στην αναπαράσταση

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

Η αναπαράσταση που αντιστοιχεί στο $\mathbb{K}(Q, p)^{op}$ -πρότυπο $(\Lambda \bar{e}_2)^*$ είναι

$$\mathbb{K} \xleftarrow{1} \mathbb{K} \longleftarrow 0 \longleftarrow 0$$

Η αναπαράσταση τέλος που αντιστοιχεί στο $\mathbb{K}(Q, p)$ -πρότυπο $\Lambda \bar{e}_4$ είναι

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{K}$$

και η αναπαράσταση που αντιστοιχεί στο injective πρότυπο I_4 είναι

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$



Παράδειγμα 3.1.47. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και Q η φαρέτρα

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \\ & \xleftarrow{\beta} & \end{array}$$

Τότε η δυική φαρέτρα Q^{op} είναι η

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \bullet & \xleftarrow{\alpha^{op}} & \bullet \\ & \xrightarrow{\beta^{op}} & \end{array}$$

Έστω η αναπαράσταση (V, f)

$$\mathbb{K} \xrightleftharpoons[\alpha]{1} \mathbb{K}$$

της Q , όπου ο $V(1)$ έχει \mathbb{K} -βάση $\{u\}$, $V(2)$ έχει \mathbb{K} -βάση $\{v\}$ και $f_\alpha(u) = v$ και $f_\beta(u) = \alpha v$ με $\alpha \in \mathbb{K}$. Έστω $\{u^*\}$ και $\{v^*\}$ οι δυικές βάσεις για τους $DV(1) = V(1)^*$ και $DV(2) = V(2)^*$ αντίστοιχα. Αν γράψουμε $D(V, f) = (DV, Df)$, τότε

$$(Df)_{\alpha^{op}}(v^*)(u) = v^*(f_\alpha(u)) = v^*(v) = 1$$

και άρα

$$(Df)_{\alpha^{op}}(v^*) = u^*$$

και

$$(Df)_{\alpha^{op}} = f_\alpha^*$$

Ακόμη έχουμε

$$(Df)_{\beta^{op}}(v^*)(u) = v^*(f_\beta(u)) = v^*(\alpha v) = \alpha$$

και άρα

$$(Df)_{\beta^{op}}(v^*) = \alpha u^*$$

Άρα η $D(V, f)$ είναι η αναπαράσταση

$$\mathbb{K} \xrightleftharpoons[\alpha]{1} \mathbb{K}$$

της Q^{op} . Το προβολικό $\mathbb{K}Q$ -πρότυπο $P_1 = \Lambda e_1$ με \mathbb{K} -βάση $\{e_1, \alpha, \beta\}$ αντιστοιχεί στην αναπαράσταση

$$\mathbb{K} \xrightarrow[f_\beta]{f_\alpha} \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$$

όπου $f_\alpha(b) = (b, 0)$ και $f_\beta(b) = (0, b)$ για $b \in \mathbb{K}$. Το προβολικό $\mathbb{K}Q$ -πρότυπο P_2 με \mathbb{K} -βάση $\{e_2\}$ αντιστοιχεί στην αναπαράσταση

$$0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}$$

Το προβολικό $\mathbb{K}Q^{op}$ -πρότυπο P_1^* αντιστοιχεί στη αναπαράσταση

$$\mathbb{K} \xleftarrow{\quad} 0$$



της Q^{op} . Το προβολικό KQ^{op} -πρότυπο P_2^* αντιστοιχεί στη αναπαράσταση

$$K \oplus K \xrightleftharpoons[g_{\beta^{op}}]{g_{\alpha^{op}}} K$$

όπου $g_{\alpha^{op}}(c) = (c, 0)$ και $g_{\beta^{op}}(c) = (0, c)$ για $c \in K$. Το injective KQ -πρότυπο $I_1 = D(P_1^*)$ αντιστοιχεί στην αναπαράσταση

$$K \rightrightarrows 0$$

και $I_2 = D(P_2^*)$ αντιστοιχεί στην αναπαράσταση

$$K \oplus K \xrightleftharpoons[f_{\beta}]{f_{\alpha}} K$$

όπου $f_{\alpha}(b, c) = b$ και $f_{\beta}(b, c) = c$ για $b, c \in K$.

Έστω (V, f) να είναι αναπαράσταση

$$K \oplus K \oplus K \xrightleftharpoons[f_{\beta}]{f_{\alpha}} K \oplus K$$

όπου

$$f_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$f_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ως προς τις κανονικές βάσεις για $K \oplus K \oplus K$ και $K \oplus K$. Τότε $D(V, f) = (DV, Df)$ είναι η αναπαράσταση

$$K \oplus K \oplus K \xrightleftharpoons[(Df)_{\beta^{op}}]{(Df)_{\alpha^{op}}} K \oplus K$$

όπου $D(nK)$ ταυτοποιείται με nK μέσω των δυικών βάσεων, όπου

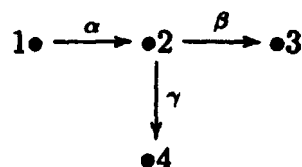
$$(Df)_{\alpha^{op}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$(Df)_{\beta^{op}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ως προς τις κανονικές βάσεις.

Παράδειγμα 3.1.48. Έστω K ένα σώμα και Q η φαρέτρα



και (V, f) αναπαράσταση

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{f_\alpha} & \mathbb{K} \oplus \mathbb{K} & \xrightarrow{f_\beta} & \mathbb{K} \\ & & \downarrow f_\gamma & & \\ & & \mathbb{K} & & \end{array}$$

όπου $f_\alpha(a) = (a, 0)$, $f_\beta(a, b) = b$ και $f_\gamma(a, b) = a - b$ για $a, b \in \mathbb{K}$. Αν $\tau(V, f) = (U, f')$, τότε $U(1) = 0$ αφού κανένα μη-τετριμμένο μονοπάτι δεν καταλήγει στην κορυφή 1, $U(2) = \text{Im } f_\alpha = \mathbb{K} \oplus 0$, $U(3) = \mathbb{K}$ και $U(4) = \mathbb{K}$. Άρα η υποαναπαράσταση $\tau(V, f)$ είναι η αναπαράσταση

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{K} & \xrightarrow{g_\beta} & \mathbb{K} \\ & & \downarrow g_\gamma & & \\ & & \mathbb{K} & & \end{array}$$

όπου $g_\gamma = 1$ και $g_\beta = 0$. Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε την υποαναπαράσταση $\text{Soc}(V, f) = (W, f'')$. Αν χρησιμοποιήσουμε ότι

$$\text{Soc } F(V, f) = \{v \in \bigoplus_{i=1}^n V(i) \mid \tau v = 0\}$$

τότε έχουμε ότι

$$W(3) = \mathbb{K} = W(4)$$

αφού κανένα βέλος δεν ξεκινάει από την κορυφή 3 ή την 4. Ακόμη

$$W(2) = \text{Ker } f_\beta \cap \text{Ker } f_\gamma = 0$$

και

$$W(1) = \text{Ker } f_\alpha = 0$$

Ορισμός 3.1.49. Μια άλγεβρα Λ πεπερασμένης διάστασης πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} καλείται **στοιχειώδης (elementary)** αν

$$\Lambda/\tau \simeq \prod_n (\mathbb{K})$$

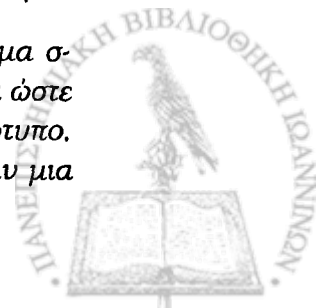
για κάποιο n σαν \mathbb{K} -άλγεβρες.

Ορισμός 3.1.50. Έστω Λ μια στοιχειώδης \mathbb{K} -άλγεβρα. Τότε η φάρετρα της ταυνοτικής άλγεβρας $T = (\Lambda/\tau, \tau/\tau^2)$ καλείται **φάρετρα** της Λ .

Ας διατυπώσουμε τώρα το πρώτο θεώρημα του Gabriel.

Θεώρημα 3.1.51. Έστω Λ μια πεπερασμένης διάστασης στοιχειώδης \mathbb{K} -άλγεβρα.

1. Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ ένα σύνολο από primitive ορθογώνια ταυτοδύναμα στοιχεία στην Λ , και $\{r_1, \dots, r_t\}$ ένα σύνολο από στοιχεία του τ τέτοια ώστε οι εικόνες $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_t$ στην τ/τ^2 να παράγουν το τ/τ^2 σαν ένα Λ/τ -πρότυπο. Τότε το σύνολο $\{e_1, \dots, e_n, r_1, \dots, r_t\}$ παράγει την άλγεβρα Λ σαν μια \mathbb{K} -άλγεβρα.



2. Υπάρχει επιμορφισμός δακτυλίων

$$\tilde{f} : T(\Lambda/\tau, \tau/\tau^2) \rightarrow \Lambda$$

με

$$\bigoplus_{j \geq \text{rl}(\Lambda)} (\tau/\tau^2)^j \subset \text{Ker } \tilde{f} \subset \bigoplus_{j \geq 2} (\tau/\tau^2)^j$$

3. Η \mathbb{K} -άλγεβρα $\Lambda \simeq \mathbb{K}(Q, p)$ με $J^s \subset \langle p \rangle \subset J^2$ για κάποιο s , όπου Q είναι η φαρέτρα της Λ και p ένα σύνολο από σχέσεις της φαρέτρας Q πάνω από το σώμα \mathbb{K} .
4. Αν $\Lambda \simeq \mathbb{K}(Q, p)$ με $J^t \subset \langle p \rangle \subset J^2$ για κάποιο t , τότε η Q είναι η φαρέτρα της Λ .

Απόδειξη. 1. Θα το αποδείξουμε με επάγωγή στο $\text{rl}(\Lambda)$. Για $\text{rl}(\Lambda) = 1$ έχουμε $\Lambda \simeq \prod_n(\mathbb{K})$ και έτσι η άλγεβρα Λ παράγεται σαν \mathbb{K} -άλγεβρα από τα ταυτοδύναμα στοιχεία e_i για $i = 1, \dots, n$. Για $\text{rl}(\Lambda) = 2$ το αποτέλεσμα είναι προφανές από την υπόθεση λόγω του ορισμού των r_1, \dots, r_t . Έστω τώρα ότι η υπόθεση ισχύει για $\text{rl}(\Lambda) = m \geq 2$ και έστω ότι $\text{rl}(\Lambda) = m + 1$. Έστω A η \mathbb{K} -υποάλγεβρα της Λ που παράγεται από τα $e_1, \dots, e_n, r_1, \dots, r_t$ και έστω ακόμη $x \in \Lambda$. Με επάγωγή υποθέτουμε ότι έχουμε

$$A/(A \cap \tau^m) = \Lambda/\tau^m$$

Άρα υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $x - y \in \tau^m$ και για αυτό θα υπάρχουν $\alpha_i \in \tau^{m-1}$ και $\beta_i \in \tau$ τέτοια ώστε

$$x - y = \sum_{i=1}^s \alpha_i \beta_i$$

Πάλι με επάγωγή υποθέτουμε ότι έχουμε $\alpha_i = a_i + a'_i$ με $a_i \in A \cap \tau^m$ και $a'_i \in \tau^m$ και $\beta_i = b_i + b'_i$ με $b_i \in A \cap \tau$ και $b'_i \in \tau^m$. Τότε

$$\alpha_i \beta_i = a_i b_i$$

για κάθε $i = 1, \dots, s$ με $x - y \in A$. Αφού $y \in A$ θα έχουμε ότι και το $x \in A$, οπότε αποδείχθηκε ο ισχυρισμός.

2. Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ ένα σύνολο από primitive ορθογώνια ταυτοδύναμα στοιχεία στην Λ . Ορίζουμε με \bar{e}_i την εικόνα του e_i στην Λ/τ . Για κάθε ζεύγος ακεραίων i, j με $1 \leq i, j \leq n$ διαλέγουμε στοιχεία $\{y_s\}$ στο τ , τέτοια ώστε αν \bar{y}_s είναι η εικόνα του $\{y_s\}$ στο τ/τ^2 , τότε $\{\bar{y}_s\}$ είναι μια \mathbb{K} -βάση για το $\bar{e}_j(\tau/\tau^2)\bar{e}_i$. Ορίζουμε τώρα

$$f : (\Lambda/\tau) \oplus (\tau/\tau^2) \rightarrow \Lambda$$

με $f(\bar{e}_i) = e_i$ για $i = 1, \dots, n$ και $f(\bar{y}_s) = y_s$ για κάθε y_s στο τ . Τότε ο περιορισμός

$$f|_{\Lambda/\tau} : \Lambda/\tau \rightarrow f(\Lambda/\tau)$$

είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων και

$$f|_{\tau/\tau^2} : \tau/\tau^2 \rightarrow f(\tau/\tau^2)$$



είναι ισομορφισμός Λ/τ -διπροτύπων. Τότε υπάρχει ο ισομορφισμός δακτυλίων

$$\tilde{f}: T(\Lambda/\tau, \tau/\tau^2) \rightarrow \Lambda$$

τέτοιος ώστε $\tilde{f}|_{\Lambda/\tau} \oplus (\tau/\tau^2) = f$. Προκύπτει από το (i) ότι ο \tilde{f} είναι επιμορφισμός δακτυλίων. Αφού

$$\tilde{f}((\tau/\tau^2)^j) \subset \tau^j \subset \tau^2$$

για $j \geq 2$ και

$$\tilde{f}|_{\Lambda/\tau} \oplus (\tau/\tau^2) : \Lambda/\tau \oplus (\tau/\tau^2) \rightarrow \Lambda$$

είναι μονομορφισμός, με εικόνα που τέμνει το τ^2 τριτοκλάσμα, προκύπτει ότι

$$\text{Ker } \tilde{f} \subset \bigoplus_{j \geq 2} (\tau/\tau^2)^j$$

Αφού $\tilde{f}((\tau/\tau^2)^j) = 0$ για $j \geq \text{rl}(\Lambda)$ έχουμε ότι

$$\bigoplus_{j \geq \text{rl}(\Lambda)} (\tau/\tau^2)^j \subset \text{Ker } \tilde{f}$$

3. Έστω Q η φαρέτρα της $T(\Lambda/\tau, \tau/\tau^2)$. Από το (ii) έχουμε ότι υπάρχει ένας επιμορφισμός \mathbb{K} -αλγεβρών

$$\tilde{f}: T(\Lambda/\tau, \tau/\tau^2) \rightarrow \Lambda$$

με

$$\bigoplus_{j \geq \text{rl}(\Lambda)} (\tau/\tau^2)^j \subset \text{Ker } \tilde{f} \subset \bigoplus_{j \geq 2} (\tau/\tau^2)^j$$

Αφού από την πρόταση (1.3.15.) υπάρχει ένας ισομορφισμός \mathbb{K} -αλγεβρών

$$\phi: T(\Lambda/\tau, \tau/\tau^2) \rightarrow \mathbb{K}Q$$

έτσι ώστε

$$\phi((\tau/\tau^2)^j) = J^n$$

έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\tilde{f}\phi^{-1}: \mathbb{K}Q \rightarrow \Lambda$$

είναι ένας επιμορφισμός \mathbb{K} -αλγεβρών, όπου ο πυρήνας $I = \text{Ker}(\tilde{f}\phi^{-1})$ έχει την ιδιότητα

$$J^s \subset I \subset J^2$$

για κάποιο ακέραιο s . Τότε το I είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ιδεώδες στην $\mathbb{K}Q$ και I/J^s είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ιδεώδες στην Artin άλγεβρα $\mathbb{K}Q/J^s$. Για κάθε σ γεννήτορα του ιδεώδους I , γράφουμε

$$\sigma = \sum_{1 \leq i, j \leq m} e_j \sigma e_i$$

και αντικαθιστούμε το σ με $e_j \sigma e_i$ για $1 \leq i, j \leq m$. Αυτές οι σχέσεις μας δίνουν ένα πεπερασμένο σύνολο από σχέσεις p της φαρέτρας Q , με $I = \langle p \rangle$.



4. Αν $\Lambda \simeq \mathbb{K}(Q, p)$ με $J^t \subset \langle p \rangle \subset J^2$ για κάποιο t , τότε απο το (ii) έχουμε ότι $\Lambda/\tau^2 \simeq \mathbb{K}Q/J^2$ είναι \mathbb{K} -άλγεβρες. Άρα είναι εύκολο να δούμε ότι η φαρέτρα Q είναι η φαρέτρα της $\mathbb{K}Q/J^2$ και άρα της Λ/τ^2 . Έτσι η Q είναι η φαρέτρα της Λ .

□

Πόρισμα 3.1.52. Έστω Λ μια πεπερασμένης διάστασης βασική άλγεβρα πάνω απο ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα \mathbb{K} .

1. Η Λ είναι μια στοιχειώδης \mathbb{K} -άλγεβρα.
2. Η Λ είναι ισομορφη με την $\mathbb{K}(Q, p)$, όπου η Q είναι η φαρέτρα της Λ .

Απόδειξη. 1. Για να δείξουμε ότι η Λ είναι μια στοιχειώδης \mathbb{K} -άλγεβρα, αρκεί να δείξουμε ότι οι ημιαπλές βασικές άλγεβρες πάνω απο το αλγεβρικά κλειστό σώμα \mathbb{K} είναι στοιχειώδεις. Έστω λοιπόν ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα \mathbb{K} και Σ μια ημιαπλή βασική \mathbb{K} -άλγεβρα. Τότε

$$\Sigma = \mathbb{K}_1 \times \dots \times \mathbb{K}_n$$

όπου \mathbb{K}_i είναι δακτύλιοι διαίρεσης. Έστω η i -στή προβολή

$$\pi_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{K}_i$$

και έστω η έγκλειση

$$\phi : \mathbb{K} \rightarrow \Sigma$$

που κάνει την Σ μια \mathbb{K} -άλγεβρα. Τότε η απεικόνιση

$$\pi_i \phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}_i$$

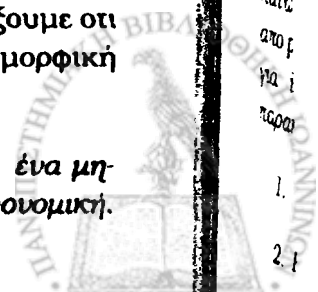
επεκτείνει τον \mathbb{K}_i ένα δακτύλιο διαίρεσης πεπερασμένης διάστασης στο \mathbb{K} . Αλλά το ότι το σώμα \mathbb{K} είναι αλγεβρικά κλειστό σημαίνει ότι η απεικόνιση $\pi_i \phi$ είναι ισομορφισμός. Τώρα αν δούμε κάθε \mathbb{K}_i μέσω του \mathbb{K} και του ισομορφισμού $\pi_i \phi$ έχουμε ότι η Σ είναι ισομορφική με το $\prod_n(\mathbb{K})$ σαν \mathbb{K} -άλγεβρα.

2. Είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος (3.1.15.)

□

Παρατήρηση 3.1.53. Σημειώνουμε ότι αν η Λ είναι μια στοιχειώδης \mathbb{K} -άλγεβρα και η Λ είναι ισομορφική με την $\mathbb{K}(Q, p)$, τότε η Q είναι, μέχρι ισομορφισμού, ορισμένη απο την Λ . Σημειώνουμε επίσης ότι το σύνολο p και το ιδεώδες $\langle p \rangle$ στην $\mathbb{K}Q$ δεν ορίζονται απο την Λ . Είδαμε ότι η άλγεβρα μονοπάτι $\mathbb{K}Q$ μιας φαρέτρας χωρίς προσανατολισμένους κύκλους πάνω απο ένα σώμα \mathbb{K} είναι κληρονομική. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα (3.1.15.) μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε στοιχειώδης κληρονομική άλγεβρα πάνω απο ένα σώμα \mathbb{K} είναι ισομορφική με μια άλγεβρα μονοπάτι $\mathbb{K}Q$.

Λήμμα 3.1.54. Έστω Λ μια κληρονομική Artin άλγεβρα και έστω a ένα μη-μηδενικό ιδεώδες της Λ που περιέχεται στο τ^2 . Τότε η Λ/a δεν είναι κληρονομική.



Απόδειξη. Έστω Λ μια κληρονομική Artin άλγεβρα και έστω $a \in \tau^2$ ένα μη-μηδενικό ιδεώδες της. Έστω η ακριβής ακολουθία Λ/a -προτύπων

$$0 \longrightarrow a/(\alpha\tau) \longrightarrow \tau/(\alpha\tau) \longrightarrow \tau/a \longrightarrow 0$$

Αφού το τ είναι ένα προβολικό Λ -πρότυπο έχουμε ότι το $\tau/(\alpha\tau)$ είναι ένα προβολικό Λ/a -πρότυπο. Επίσης το ότι $a \neq 0$ σημαίνει ότι και το $a/(\alpha\tau) \neq 0$ από το λήμμα του Nakayama και έτσι $\tau/(\alpha\tau) \not\cong \tau/a$. Αφού τώρα $a \in \tau^2$ έχουμε ότι $a/(\alpha\tau) \subset \tau_{\Lambda/a}(\tau/(\alpha\tau))$ και έτσι η απεικόνιση

$$\tau/(\alpha\tau) \rightarrow \tau/a$$

είναι ένα προβολικό κάλυμμα το οποίο δεν είναι ισομορφισμός. Άρα το τ/a δεν είναι προβολικό Λ/a -πρότυπο και άρα η Λ/a δεν είναι κληρονομική. \square

Λήμμα 3.1.55. Έστω Λ μια κληρονομική Artin άλγεβρα και έστω $f : P \rightarrow Q$ ένας μη-μηδενικός μορφισμός στην mod- Λ με P και Q μη-αναλύσιμα Λ -πρότυπα και Q προβολικό πρότυπο. Τότε ο μορφισμός f είναι μονομορφισμός και το P προβολικό πρότυπο.

Απόδειξη. Αφού ο μορφισμός f είναι μη-μηδενικός η εικόνα $\text{Im } f$ είναι μη-μηδενικό υποπρότυπο του Q . Επίσης αφού το Q είναι προβολικό και η Λ κληρονομική έπεται ότι και η εικόνα $\text{Im } f$ θα είναι προβολικό υποπρότυπο. Άρα ο μορφισμός $f : P \rightarrow \text{Im } f$ είναι split επιμορφισμός. Άρα ο $f : P \rightarrow \text{Im } f$ είναι ισομορφισμός και έτσι το P είναι μη-αναλύσιμο. Έτσι ο μορφισμός f είναι μονομορφισμός και το P προβολικό πρότυπο. \square

Πρόταση 3.1.56. Έστω Λ μια πεπερασμένης διάστασης κληρονομική άλγεβρα πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} . Τότε η φαρέτρα Q της Λ δεν έχει προσανατολισμένους κύκλους και η Λ είναι ισόμορφη με την $\mathbb{K}Q$.

Απόδειξη. Έστω ένα βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ στην φαρέτρα Q της Λ , τότε και το $e_j(\tau/\tau^2)e_i$ είναι μη-μηδενικό, όπου i και j είναι κορυφές που αντιστοιχούν στα e_i και e_j . Τότε το $e_j\tau e_i$ είναι μη-μηδενικό και ένα μη-μηδενικό στοιχείο $x \in e_j\tau e_i$ δίνει με πολλαπλασιασμό από δεξιά έναν μη-μηδενικό Λ -ομομορφισμό από το $P_j = \Lambda e_j$ στο $P_i = \Lambda e_i$ που είναι μονομορφισμός αλλά όχι ισομορφισμός. Άρα ένας προσανατολισμένος κύκλος σε μια φαρέτρα υφίσταται σε μια ακολουθία μονομορφισμών από κάποιο P_i στο P_i . Αφού λοιπόν αυτό είναι αδύνατο, η φαρέτρα Q της Λ δεν έχει προσανατολισμένους κύκλους. Αφού η Λ είναι στοιχειώδης, τότε $\Lambda \cong \mathbb{K}Q/\langle p \rangle$, όπου $\langle p \rangle \subset J^2$. Επίσης αφού η Λ είναι κληρονομική, τότε το $\langle p \rangle$ θα είναι μηδέν και άρα Λ είναι ισόμορφη με την $\mathbb{K}Q$. \square

Πρόταση 3.1.57. Έστω Λ μια πεπερασμένης διάστασης κληρονομική άλγεβρα πάνω από ένα αθιγεβρικά κλειστό σώμα \mathbb{K} και $1 = e_1 + \dots + e_n$ μια ανάλυση του 1 από primitive ορθογώνια ταυτοδύναμα στοιχεία. Έστω $P_i = \Lambda e_i$ και $S_i = P_i/\tau P_i$ για $i = 1, \dots, n$. Τότε για ένα δοσμένο ζεύγος αριθμών $i, j \in \{1, \dots, n\}$ τα παρακάτω συμπίπτουν :

1. $\dim_{\mathbb{K}}(e_j\tau/\tau^2 e_i)$
2. Η πολλαπλότητα των απλών προτύπων S_i στο $\tau P_i/\tau^2 P_i$



3. Η πολλαπλότητα των P_j στο P , όπου

$$P \longrightarrow P_i \longrightarrow S_i \longrightarrow 0$$

είναι μια ελάχιστη προβολική παράσταση του S_i .

4. $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ext}_{\Lambda}^1(S_i, S_j)$

Απόδειξη. Για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \tau P_i \longrightarrow P_i \longrightarrow S_i \longrightarrow 0$$

όπου $P_i \rightarrow S_i$ είναι ένα προβολικό κάλυμμα. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\text{Hom}_{\Lambda}(\cdot, S_j)$ βλέπουμε ότι η ακριβής ακολουθία γίνεται

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(S_i, S_j) \longrightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(P_i, S_j) \xrightarrow{h} \text{Hom}_{\Lambda}(\tau P_i, S_j) \longrightarrow \text{Ext}_{\Lambda}^1(S_i, S_j) \longrightarrow 0$$

Αφού ο h πρέπει να είναι ο μηδενικός θα έχουμε ότι

$$\text{Hom}_{\Lambda}(\tau P_i, S_j) \simeq \text{Ext}_{\Lambda}^1(S_i, S_j)$$

Αλλά τώρα έχουμε

$$\text{Hom}_{\Lambda}(\tau P_i, S_j) = \text{Hom}_{\Lambda}(\tau P_i / \tau^2 P_i, S_j)$$

και

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\Lambda}(S_p, S_q) = 1$$

αν $p = q$ και

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\Lambda}(S_p, S_q) = 0$$

αν $p \neq q$. Άρα

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Ext}_{\Lambda}^1(S_i, S_j) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\Lambda}(\tau P_i, S_j) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\Lambda}(\tau P_i / \tau^2 P_i, S_j)$$

Όμως ο τελευταίος αριθμός είναι η πολλαπλότητα του S_j αν το δούμε σαν έναν αθροιστέο του $\tau P_i / \tau^2 P_i$ που και αυτό είναι η πολλαπλότητα του P_j αν το δούμε σαν έναν αθροιστέο του προβολικού καλύμματος P του $\tau P_i / \tau^2 P_i$. Όμως το προβολικό κάλυμμα του $\tau P_i / \tau^2 P_i$ είναι το ίδιο με το προβολικό κάλυμμα του τP_i . Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\Lambda}(\tau P_i / \tau^2 P_i, S_j) &= \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\Lambda/\tau}(\tau P_i / \tau^2 P_i, S_j) = \\ &= \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\Lambda/\tau}(S_j, \tau P_i / \tau^2 P_i) = \\ &= \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\Lambda}(P_j, \tau P_i / \tau^2 P_i) \end{aligned}$$

Αλλά έχουμε

$$\text{Hom}_{\Lambda}(P_j, \tau^m P_i) \simeq e_j \tau^m e_i$$

και άρα

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\Lambda/\tau}(\tau P_i / \tau^2 P_i, S_j) = \dim_{\mathbb{K}}(e_j \tau / \tau^2 e_i)$$



Ορισμός 3.1.58. Έστω Λ μια Artin άλγεβρα και έστω μια φαρέτρα Q . Ορίζουμε τη φαρέτρα με περισσότερα απο ένα βέλη απο μια κορυφή i σε μια κορυφή j , και σε κάθε βέλος ένα διατεταγμένο ζεύγος θεικών ακεραίων, ως την **εκτιμημένη (valued) φαρέτρα**. Γράφουμε ένα βέλος απο την κορυφή i στην κορυφή j αν $\text{Ext}_{\Lambda}^1(S_i, S_j) \neq 0$ και ορίζουμε για αυτό το βέλος το ζεύγος ακεραίων

$$(\dim_{\text{End}_{\Lambda}(S_j)} \text{Ext}_{\Lambda}^1(S_i, S_j), \dim_{\text{End}_{\Lambda}(S_i)^{\text{op}}} \text{Ext}_{\Lambda}^1(S_i, S_j))$$

Όταν η Λ είναι στοιχειώδης μπορούμε να αντικαταστήσουμε m το πλήθος βέλη απο την i στην κορυφή j με ένα βέλος με εκτίμηση (m, m) .

Πρόταση 3.1.59. Έστω Λ μια Artin R -άλγεβρα.

(1) Έστω $P_1 \rightarrow S_1$ και $P_2 \rightarrow S_2$ προβολικά καλύμματα των απλών προτύπων S_1 και S_2 αντίστοιχα. Τότε οι παρακάτω αριθμοί είναι ίδιοι.

1. $\dim_{\text{End}_{\Lambda}(S_2)} \text{Ext}_{\Lambda}^1(S_1, S_2)$.
2. $l_R(\text{Ext}_{\Lambda}^1(S_1, S_2)) / l_R(\text{Ext}_{\Lambda}^1(S_2))$.
3. Η πολυπλοκότητα των απλών προτύπων S_2 αν το δούμε σαν έναν αθροιστέο του $\tau P_1 / \tau^2 P_1$.
4. Η πολυπλοκότητα του P_2 αν το δούμε σαν έναν αθροιστέο του προβολικού καλύμματος τP_1 .

(2) Έστω $S_1 \rightarrow I_1$ και $S_2 \rightarrow I_2$ injective περιβλήματα των απλών προτύπων S_1 και S_2 αντίστοιχα. Τότε οι παρακάτω αριθμοί είναι ίδιοι.

1. $\dim_{\text{End}_{\Lambda}(S_1)^{\text{op}}} \text{Ext}_{\Lambda}^1(S_1, S_2)$.
2. Η πολυπλοκότητα του I_1 αν το δούμε σαν έναν αθροιστέο του injective περιβλήματος του $I_2 / \text{Soc } I_2$.

Παρατήρηση 3.1.60. Παρατηρούμε οτι η εκτιμημένη φαρέτρα της δυικής άλγεβρας της Λ είναι η δυική φαρέτρα της εκτιμημένης φαρέτρας αλλά οι εκτιμήσεις είναι οι ίδιες. Αυτό είναι φανερό αφού $\text{Ext}_{\Lambda}^1(S_i, S_j) \neq 0$ αν και μόνον αν $\text{Ext}_{\Lambda^{\text{op}}}^1(DS_i, DS_j) \neq 0$ και

$$\dim_{\text{End}_{\Lambda}(S_i)^{\text{op}}} \text{Ext}_{\Lambda}^1(S_i, S_j) = \dim_{\text{End}_{\Lambda}(DS_i)} \text{Ext}_{\Lambda^{\text{op}}}^1(DS_i, DS_j)$$

Παράδειγμα 3.1.61. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και έστω

$$T_3(\mathbb{K}) = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 & 0 \\ \mathbb{K} & \mathbb{K} & 0 \\ \mathbb{K} & \mathbb{K} & \mathbb{K} \end{pmatrix}$$

η \mathbb{K} -υποάλγεβρα της άλγεβρας $M_3(\mathbb{K})$ των 3×3 πινάκων, πάνω απο το σώμα \mathbb{K} , που περιέχει όλους τους 3×3 πίνακες όπου όλα τα στοιχεία εκτός απο την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Έστω I το ιδεώδες που περιέχει τους πίνακες της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



116 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΑΛΓΕΒΡΑ-ΜΟΝΟΠΑΤΙ ΚΑΙ ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ GABRIEL

για $\alpha \in \mathbb{K}$. Έστω ακόμη $\Lambda = T_3(\mathbb{K})/I$ και έστω

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I,$$

και

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\tau(\Lambda e_1) \simeq \Lambda e_2 / \tau(\Lambda e_2), \quad \tau(\Lambda e_2) \simeq \Lambda e_3$$

και

$$\tau(\Lambda e_3) = 0$$

Άρα η φαρέτρα Q είναι

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & 2 & & 3 \\ & \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet & \xrightarrow{\beta} & \bullet \end{array}$$

και $\Lambda \simeq \mathbb{K}(Q, p)$, όπου $p = \{\beta\}$.

Παράδειγμα 3.1.62. Έστω \mathbb{R} το σύνολο των πραγματικών αριθμών και \mathbb{C} το σύνολο των μιγαδικών αριθμών και έστω

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

η R -υποάλγεβρα των 2×2 πινάκων πάνω απο το \mathbb{C} . Έστω

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Όταν γράφουμε

$$\begin{array}{ccc} i & & j \\ & \xrightarrow{(a,b)} & \bullet \end{array}$$

όπου με το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) εννοούμε το βέλος $\alpha : i \rightarrow j$, έχουμε την εκτιμώμενη φαρέτρα

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ & \xrightarrow{(2,1)} & \bullet \end{array}$$



Κεφάλαιο 4

Συναρτητές Ανάκλασης

4.1 Κληρονομικές Άλγεβρες

Σε αυτή τη παράγραφο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τις κληρονομικές άλγεβρες. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι οι κληρονομικές άλγεβρες συμπίπτουν με τις άλγεβρες μονοπάτια πεπερασμένων φαριτρών χωρίς προσανατολισμένους κύκλους. Έστω λοιπόν A μια άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα \mathbb{K} .

Ορισμός 4.1.1. Η άλγεβρα A καλείται *δεξιά κληρονομική* αν κάθε δεξιό ιδεώδες της A είναι προβολικό A -πρότυπο.

Παράδειγμα 4.1.2. Έστω A η κλάση των ημιαπλών αλγεβρών υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Τότε κάθε δεξιό (αντ. αριστερό) πρότυπο πάνω από μια ημιαπλή άλγεβρα είναι προβολικό. Άρα και κάθε δεξιό (αντ. αριστερό) ιδεώδες της άλγεβρας A . Συνεπώς κάθε άλγεβρα η οποία ανήκει στην κλάση των ημιαπλών αλγεβρών είναι δεξιά (αντ. αριστερά) κληρονομική.

Παράδειγμα 4.1.3. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ \mathbb{K} & \mathbb{K} \end{pmatrix}$$

η άλγεβρα των 2×2 πινάκων. Τότε αν

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι τα ταυτοδύναμα στοιχεία, τα δεξιά ιδεώδη είναι τα $e_1 A$ και $e_2 A$ με

$$e_2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{K} & 0 \end{pmatrix} \simeq e_1 A$$

όπου

$$e_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Τα e_1A, e_2A είναι προβολικά A -πρότυπα, αφού είναι ευθείς αθροιστέοι της A . Άρα η άλγεβρα A είναι δεξιά κληρονομική, αφού αναλύεται μοναδικά ως εξής :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ \mathbb{K} & \mathbb{K} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{K} & \mathbb{K} \end{pmatrix}$$

και τα $\begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{K} & \mathbb{K} \end{pmatrix}$ είναι προβολικά A -πρότυπα.

Θεώρημα 4.1.4. Έστω A μια δεξιά κληρονομική άλγεβρα. Τότε κάθε υποπρότυπο ενός ελεύθερου A -προτύπου είναι ισόμορφο με ένα ευθύ άθροισμα δεξιών ιδεωδών της A .

Απόδειξη. Έστω L ένα ελεύθερο A -πρότυπο με βάση $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ και M ένα υποπρότυπο του L . Θέλουμε να δείξουμε ότι το M είναι ισόμορφο με ένα ευθύ άθροισμα δεξιών ιδεωδών της A . Έστω για κάθε $\lambda \in \Lambda$ έχουμε $L_\lambda = \bigoplus_{\mu < \lambda} (e_\mu A)$. Τότε $L_0 = 0$ και

$$L_{\lambda+1} = \bigoplus_{\mu < \lambda} (e_\mu A) = L_\lambda \oplus e_\lambda A$$

Έστω τώρα $x \in M \cap L_{\lambda+1}$ τότε το x γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $x = y + e_\lambda \alpha$ όπου $y \in L_\lambda$ και $\alpha \in A$. Ορίζουμε τώρα έναν ομομορφισμό A -προτύπων

$$f_\lambda : M \cap L_{\lambda+1} \rightarrow A, \quad x \mapsto \alpha$$

Έτσι επάγεται μια σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \cap L_\lambda \longrightarrow M \cap L_{\lambda+1} \xrightarrow{f_\lambda} \text{Im } f_\lambda \longrightarrow 0$$

Επειδή όμως η $\text{Im } f_\lambda$ είναι δεξιό ιδεώδες της A είναι και προβολικό A -πρότυπο. Συνεπώς η ακολουθία διασπάται και έτσι υπάρχει ένα υποπρότυπο N_λ του $M \cap L_{\lambda+1}$ το οποίο είναι ισόμορφο με την $\text{Im } f_\lambda$ και τέτοιο ώστε

$$M \cap L_{\lambda+1} = (M \cap L_\lambda) \oplus N_\lambda$$

Τέλος αρκεί να δείξουμε ότι $M \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$. Θα δείξουμε ότι το M είναι ισόμορφο με το υποπρότυπο $N = \sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$. Επειδή το L είναι ισόμορφο με την ένωση μιας αύξουσας αλυσίδας υποπροτύπων $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ για κάθε $x \in \Lambda$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda \in \Lambda$ τέτοιος ώστε $x \in L_{\lambda+1}$. Έστω $\lambda = \mu_x$. Αν $N \subsetneq M$ τότε υπάρχει ένα $x \in M$ αλλά $x \notin N$.

Έστω μ το τελευταίο μ_x με $x \in M$ και $x \notin N$ και έστω $y \in M$ αλλά όχι στο N με $\mu = \mu_y$. Τότε

$$y \in M \cap L_{\mu+1}$$

Άρα

$$y = u + v, \quad u \in M \cap L_\mu, \quad v \in N_\mu$$

Τότε $u = y - v$ και το u δεν ανήκει στο N (διαφορετικά $y \in N$ που είναι άτοπο).

Όμως το ότι $u \in M \cap L_\mu$ σημαίνει ότι $\mu_u < \mu$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού υποθέσαμε ότι το μ είναι ελάχιστο. Άρα

$$M = \sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$$



Μένει να δείξουμε ότι το άθροισμα $\sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ είναι ευθύ. Έστω ότι

$$x_1 + \cdots + x_n = 0$$

με $x_i \in N_{\lambda_i}$ όπου υποθέτουμε ότι $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. Τότε

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} = -x_n \in (M \cap L_{\lambda_n}) \cap N_{\lambda_n} = 0$$

Άρα $x_n = 0$. Με επαγωγή λοιπόν $x_i = 0$ για κάθε i . □

Πόρισμα 4.1.5. Έστω A μια δεξιά κληρονομική άλγεβρα. Τότε κάθε υποπρότυπο ενός προβολικού A -προτύπου είναι προβολικό.

Απόδειξη. Πραγματικά κάθε προβολικό πρότυπο είναι ισόμορφο με ένα ευθύ άθροισμα ελεύθερων προτύπων. □

Το θεώρημα που ακολουθεί χαρακτηρίζει τις δεξιά κληρονομικές άλγεβρες.

Θεώρημα 4.1.6. Έστω A μια άλγεβρα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. Η A είναι δεξιά κληρονομική άλγεβρα.
2. Η ολική διάσταση της A είναι το πολύ 1.
3. Κάθε υποπρότυπο ενός προβολικού δεξιού A -προτύπου είναι προβολικό.
4. Κάθε υποπρότυπο ενός πεπερασμένα παραγόμενου προβολικού A -προτύπου είναι προβολικό.
5. Το ριζικό κάθε μη-αναλύσιμου πεπερασμένα παραγόμενου προβολικού A -προτύπου είναι προβολικό.

Απόδειξη. Δείξαμε ότι το (i) είναι ισοδύναμο με το (iii). Τώρα θα δείξουμε ότι το (ii) είναι ισοδύναμο με το (iii). Αν η ολική διάσταση της A είναι το πολύ 1 και M_A είναι υποπρότυπο του προβολικού προτύπου P_A τότε η σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow P/M \longrightarrow 0$$

έχει $\text{rd}(P/M) \leq 1$. Άρα το M είναι προβολικό.

Αντίστροφα αν κάθε υποπρότυπο έστω N προβολικού προτύπου είναι προβολικό τότε υπάρχει ένα προβολικό πρότυπο P_A και ένας επιμορφισμός

$$f : P \rightarrow N$$

Επειδή ο $\text{Ker } f$ είναι υποπρότυπο του P_A θα είναι και προβολικό υποπρότυπο του P_A . Άρα η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \text{Ker } f \longrightarrow P \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

συνεπάγεται ότι $\text{rd } N \leq 1$ και έτσι

$$\text{gl. dim } A \leq 1$$

Προφανώς το (iii) συνεπάγεται το (iv) και το (iv) συνεπάγεται το (i) επειδή η A άλγεβρα είναι πεπερασμένα παραγόμενη σαν A -πρότυπο. Θα δείξουμε τώρα



οτι το (iv) συνεπάγεται το (v). Έστω P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό A -πρότυπο και M ένα υποπρότυπο του P . Θα αποδείξουμε οτι το M είναι προβολικό με επαγωγή στην $d = \dim_{\mathbb{K}} P$. Αν $d = 1$ προφανές. Έστω $d > 1$ και έστω οτι η υπόθεση ισχύει για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό A -πρότυπο με διάσταση μικρότερη της d . Τότε το P μπορεί να γραφτεί σαν $P = P_1 \oplus P_2$, όπου το P_1 είναι μη-αναλύσιμο και το P_2 πιθανόν μηδέν. Έστω η προβολή $\pi : P \rightarrow P_1$. Αν $\pi(M) = P_1$ τότε η σύνθεση της έγκλεισης $i : M \rightarrow P$ με την προβολή π , είναι επιμορφισμός και άρα διασπάται αφού το P_1 είναι προβολικό A -πρότυπο. Άρα

$$M \simeq P_1 \oplus M'$$

όπου $M' \simeq M \cap P_2 \subseteq P_2$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} P_2 < d$ σημαίνει οτι το M' είναι προβολικό A -πρότυπο και έτσι και το M είναι προβολικό A -πρότυπο.

Αν $\pi(M) \neq P_1$ τότε

$$M \subseteq (\text{Rad } P_1) \oplus P_2$$

όπου $\text{Rad } P_1$ είναι προβολικό A -πρότυπο απο την υπόθεση. Τότε

$$\dim_{\mathbb{K}}((\text{Rad } P_1) \oplus P_2) = d - 1$$

επειδή $\text{Rad } P_1$ είναι μέγιστο υποπρότυπο του P_1 τότε και πάλι το M είναι προβολικό A -πρότυπο. □

Πόρισμα 4.1.7. Έστω A μια κληρονομική άλγεβρα.

1. Κάθε μη μηδενικός A -ομομορφισμός μεταξύ προβολικών A -προτύπων είναι μονομορφισμός.
2. Αν P είναι ένα προβολικό A -πρότυπο τότε $\text{End}_A P \simeq \mathbb{K}$.

Απόδειξη. 1. Έστω $f : P \rightarrow P'$ ένας μη μηδενικός ομομορφισμός μεταξύ των μη-αναλύσιμων προβολικών A -προτύπων P, P' . Επειδή $\text{Im } f \subseteq P'$ είναι προβολικό, η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \text{Ker } f \longrightarrow P \longrightarrow \text{Im } f \longrightarrow 0$$

είναι διασπασίμη και έτσι

$$P \simeq \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$$

Τότε $\text{Im } f \neq 0$, $\text{Ker } f = 0$ και ο f είναι μονομορφισμός αφού το P είναι μη-αναλύσιμο.

2. Είναι άμεση συνέπεια του (i). □

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι το τελικό συμπέρασμα και θα το διατυπώσουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.1.8. 1. Έστω Q μια πεπερασμένη φαρέτρα χωρίς προσανατολισμένους κύκλους και έστω Q_A η φαρέτρα της άλγεβρας A . Τότε η άλγεβρα $A = \mathbb{K}Q$ είναι κληρονομική και η φαρέτρα Q_A της άλγεβρας A είναι η Q .

2. Έστω A μια βασική κληρονομική άλγεβρα και $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι ένα σύνολο από primitive ορθογώνια ταυτοδύναμα στοιχεία του A . Τότε

(a) Η φαρέτρα Q_A της άλγεβρας A είναι πεπερασμένη χωρίς προσανατολισμένους κύκλους.

(b) Υπάρχει ισομορφισμός

$$A \simeq \mathbb{K}Q_A$$

Τέλος θα διατυπώσουμε τον ορισμό της κληρονομικής Artin άλγεβρας και θα μελετήσουμε αναλυτικά ένα παράδειγμα.

Ορισμός 4.1.9. Έστω R ένας μεταθετικός κληρονομικός δακτύλιος του Artin. Δηλαδή ο R είναι μεταθετικός δακτύλιος του Artin και επιπλέον κάθε ιδεώδες του R είναι προβολικό πρότυπο. Τότε η R -άλγεβρα Λ καλείται **κληρονομική Artin R -άλγεβρα** αν ο Λ είναι πεπερασμένα παραγόμενος σαν R -πρότυπο.

Παράδειγμα 4.1.10. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα. Θεωρούμε τον δακτύλιο πινάκων

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{K} \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \right\}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι ο Λ είναι πεπερασμένης διάστασης κληρονομική Artin άλγεβρα. Αρκεί να δείξουμε ότι το ριζικό $\text{Rad } \Lambda$ είναι προβολικό Λ -πρότυπο. Ο Λ είναι πεπερασμένης διάστασης άφου

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \right\} = \\ &= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \right\} \end{aligned}$$

Έστω τώρα το πηλίκο

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{K} \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{K} \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix} \simeq \mathbb{K} \times \mathbb{K}$$

Άρα το πηλίκο

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{K} \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ημιαπλό και έτσι

$$\text{Rad } \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbb{K} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ας δούμε τώρα τα μη-αναλύσιμα προβολικά και απλά Λ -πρότυπα της Λ . Έχουμε ότι

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{K} \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \mathbb{K} \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbb{K} \\ \mathbb{K} \end{pmatrix}$$

Επειδή λοιπόν τα

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \end{pmatrix} \mid \kappa \in \mathbb{K} \right\}$$



και

$$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\}$$

είναι ευθείες αθροιστέοι του Λ , είναι προβολικά Λ -πρότυπα και προφανώς μη-αναλύσιμα. Άρα το

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K} \\ 0 \end{pmatrix}$$

είναι προβολικό Λ -πρότυπο και τελικά το $\text{Rad } \Lambda$ είναι προβολικό Λ -πρότυπο. Έτσι η Λ είναι πεπερασμένης διάστασης κληρονομική Artin άλγεβρα.

Ας μελετήσουμε τώρα τα απλά Λ -πρότυπα του Λ . Γνωρίζουμε ότι

$$\text{Rad } P_1 = \tau P_1$$

και

$$\text{Rad } P_2 = \tau P_2$$

Δηλαδή

$$\text{Rad } P_2 = \tau P_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{K} \\ \mathbb{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{K} \\ 0 \end{pmatrix} = P_1$$

και άρα το απλό Λ -πρότυπο S_2 είναι

$$S_2 = P_2 / \tau P_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{K} \\ \mathbb{K} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \mathbb{K} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{K} \end{pmatrix}$$

Ακόμη το απλό Λ -πρότυπο S_1 είναι

$$S_1 = P_1 / \tau P_1 = P_1$$

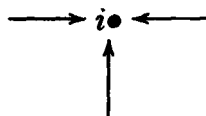
αφού $\tau P_1 = 0$.

4.2 Συναρτητές Ανάκλασης

Έστω $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ μια πεπερασμένη φαρέτρα χωρίς προσανατολισμένους κύκλους, με $n = |Q_0|$.

Ορισμός 4.2.1. Η φαρέτρα Q καλείται *συνεκτική* αν δύο τυχούσες κορυφές αυτής συνδέονται με μια ακμή.

Ορισμός 4.2.2. Έστω Q μια φαρέτρα και i μια κορυφή της Q . Η i καλείται *sink* αν δεν υπάρχει βέλος στην Q το οποίο ξεκινάει από την i .



Ορισμός 4.2.3. Έστω Q μια φαρέτρα και i μια κορυφή της Q . Η i καλείται *source* αν δεν υπάρχει βέλος στην Q το οποίο καταλήγει στην i .



0
δε

Απ
σου

1

2

Παρι
αρο

Παρό

Τοι
σι
σι



Ορισμός 4.2.4. Έστω Q μια φαρέτρα. Για κάθε $i \in Q_0$ ορίζουμε την φαρέτρα $\sigma_i Q = (Q_0, Q'_1, s', t')$, που προκύπτει από την Q , αν κάθε βέλος $\alpha \in Q_1$ που ξεκινά ή καταλήγει στην κορυφή i αλληλλάξει φορά.

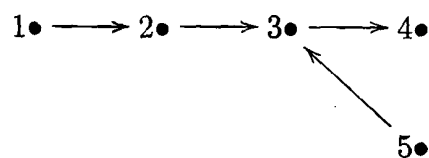
Δηλαδή για ένα τέτοιο βέλος $\alpha \in Q_1$ υπάρχει μια απεικόνιση

$$Q_1 \rightarrow Q'_1, \alpha \mapsto \alpha'$$

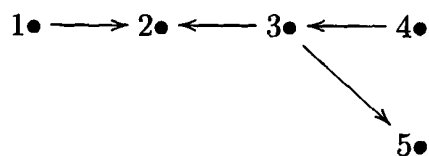
με τις ιδιότητες :

1. Αν $s(\alpha) \neq \alpha$ και $t(\alpha) \neq \alpha$ τότε $s'(\alpha') = s(\alpha)$ και $t'(\alpha') = t(\alpha)$.
2. Αν $s(\alpha) = \alpha$ ή $t(\alpha) = \alpha$ τότε $s'(\alpha') = t(\alpha)$ και $t'(\alpha') = s(\alpha)$.

Παράδειγμα 4.2.5. Έστω Q η φαρέτρα :



Τότε η $\sigma_3 Q$ φαρέτρα θα είναι



Ορισμός 4.2.6. Μια διάταξη κορυφών i_1, \dots, i_n της Q καλείται **αποδεκτή διάταξη sinks** αν

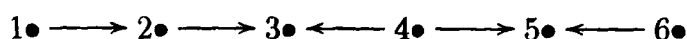
1. i_1 είναι sink για την φαρέτρα Q και,
2. i_p για κάθε p η κορυφή i_p είναι sink για την φαρέτρα $\sigma_{i_{p-1}} \cdots \sigma_{i_1} Q$ για κάθε $2 \leq p \leq n$.

Αντιστοίχα μια διάταξη κορυφών i_1, \dots, i_n της Q καλείται **αποδεκτή διάταξη sources** αν

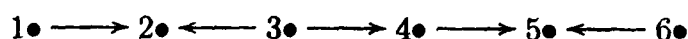
1. i_1 είναι source για την φαρέτρα Q και,
2. i_p για κάθε p η κορυφή i_p είναι source για την φαρέτρα $\sigma_{i_{p-1}} \cdots \sigma_{i_1} Q$ για κάθε $2 \leq p \leq n$.

Παρατήρηση 4.2.7. Παρατηρούμε ότι αν i_1, \dots, i_n είναι μια αποδεκτή διάταξη από sinks, τότε η διάταξη i_n, \dots, i_1 είναι μια αποδεκτή διάταξη από sources.

Παράδειγμα 4.2.8. Έστω Q η φαρέτρα :



Τότε οι κορυφές 3, 5 είναι sinks ενώ οι κορυφές 1, 4, 6 είναι sources. Η φαρέτρα $\sigma_3 Q$ είναι :



με τις κορυφές 2, 5 sinks. Η φαρέτρα $\sigma_5 Q$ είναι :

$$1 \bullet \longrightarrow 2 \bullet \longrightarrow 3 \bullet \longleftarrow 4 \bullet \longleftarrow 5 \bullet \longrightarrow 6 \bullet$$

με τις κορυφές 3, 6 sinks. Ξεκινώντας από την κορυφή 3 και την φαρέτρα $\sigma_3 Q$ παρατηρούμε ότι η κορυφή 2 είναι sink. Διαλέγουμε λοιπόν την κορυφή 2 και έχουμε τότε την φαρέτρα $\sigma_2 \sigma_3 Q$ η οποία είναι :

$$1 \bullet \longleftarrow 2 \bullet \longrightarrow 3 \bullet \longrightarrow 4 \bullet \longrightarrow 5 \bullet \longleftarrow 6 \bullet$$

με την κορυφή 1 να είναι sink. Τότε η φαρέτρα $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 Q$ είναι :

$$1 \bullet \longrightarrow 2 \bullet \longrightarrow 3 \bullet \longrightarrow 4 \bullet \longrightarrow 5 \bullet \longleftarrow 6 \bullet$$

με την κορυφή 5 να είναι sink. Άρα η φαρέτρα $\sigma_5 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 Q$ είναι :

$$1 \bullet \longrightarrow 2 \bullet \longrightarrow 3 \bullet \longrightarrow 4 \bullet \longleftarrow 5 \bullet \longrightarrow 6 \bullet$$

με τις κορυφές 4, 6 sinks. Διαλέγουμε την κορυφή 4 και προχωράμε στην φαρέτρα $\sigma_4 \sigma_5 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 Q$ η οποία είναι :

$$1 \bullet \longrightarrow 2 \bullet \longrightarrow 3 \bullet \longleftarrow 4 \bullet \longrightarrow 5 \bullet \longrightarrow 6 \bullet$$

με την κορυφή 6 να είναι sink. Άρα η φαρέτρα $\sigma_6 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 Q$ είναι :

$$1 \bullet \longrightarrow 2 \bullet \longrightarrow 3 \bullet \longleftarrow 4 \bullet \longrightarrow 5 \bullet \longleftarrow 6 \bullet$$

Παρατηρούμε τότε ότι

$$\sigma_6 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 Q = Q$$

και η διάταξη 3, 2, 1, 5, 4, 6 που διαλέξαμε είναι μια αποδεκτή διάταξη sinks. Ακόμη και οι διατάξεις 5, 3, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 4, 2, 1, 6, 5, 3, 2, 4, 1, 6 κ.ο.κ είναι αποδεκτές διατάξεις από sinks.

Λήμμα 4.2.9. Έστω Q μια πεπερασμένη φαρέτρα χωρίς προσανατολισμένους κύκλους, με $n = |Q_0|$.

1. Αν για $1 \leq p \leq n$ η κορυφή i_p είναι sink για την Q , τότε η κορυφή i_{p-1} είναι source για την φαρέτρα $\sigma_{i_p} \cdots \sigma_{i_1} Q$.
2. Αν για $1 \leq p \leq n$ η κορυφή i_p είναι source για την Q , τότε η κορυφή i_{p+1} είναι sink για την φαρέτρα $\sigma_{i_p} \cdots \sigma_{i_n} Q$.
3. $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_n} Q = Q = \sigma_{i_n} \cdots \sigma_{i_1} Q$.

Απόδειξη. Για τα (i), (ii) μια προφανής επαγωγή στο p μας δίνει το αποτέλεσμα. Για το (iii) παρατηρούμε ότι κάθε βέλος στην φαρέτρα αλλάζει προσανατολισμό ακριβώς δύο φορές. \square

Λήμμα 4.2.10. Έστω Q μια φαρέτρα. Τότε υπάρχει μια αποδεκτή διάταξη κορυφών (sinks ή sources) της Q αν και μόνον αν η Q δεν έχει προσανατολισμένους κύκλους.

Απόδειξη. Έστω i_1, \dots, i_n μια αποδεκτή διάταξη κορυφών (sinks ή sources) της Q . Τότε η απεικόνιση $i_p \mapsto p$ δίνει μια διάταξη κορυφών της Q . Άρα η Q δεν έχει προσανατολισμένους κύκλους.

Αντίστροφα έστω Q μια φαρέτρα χωρίς προσανατολισμένους κύκλους. Θα δείξουμε με επαγωγή στο πλήθος των κορυφών της Q ότι υπάρχει μια μι-α αποδεκτή διάταξη κορυφών. Έστω i_n η κορυφή που ξεκινά ένα μονοπάτι μεγιστου μήκους. Τότε η i_n είναι source. Αν παραλείψουμε την i_n απο το μονοπάτι, τότε η i_1, \dots, i_{n-1} θα είναι μια αποδεκτή διάταξη κορυφών και άρα η i_1, \dots, i_n θα είναι μια αποδεκτή διάταξη κορυφών (sinks ή sources) της Q . \square

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του πίνακα Cartan, ο οποίος προκύπτει απο τις διαστάσεις των μη αναλύσιμων προβολικών (ή injective) A -πρότυπων, όπου A μια πεπερασμένης διάστασης \mathbb{K} -άλγεβρα. Δείξαμε στα προηγούμενα ότι

$$A \cong \mathbb{K}Q/\mathcal{J}$$

όπου Q είναι μια πεπερασμένη φαρέτρα και \mathcal{J} ένα ιδεώδες της $\mathbb{K}Q$. Υποθέτουμε ακόμα ότι οι κορυφές της φαρέτρας Q είναι διατεταγμένες $\{1, \dots, n\}$ και με e_i συμβολίζουμε τα primitive ταυτοδύναμα στοιχεία της A για $i \in Q_0$ με

$$P(i) = e_i A$$

το αντίστοιχο μη αναλύσιμο προβολικό A -πρότυπο.

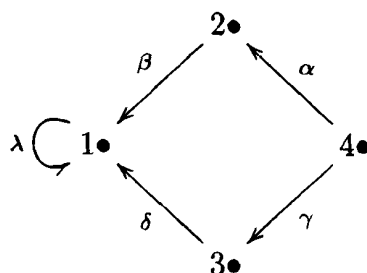
Ορισμός 4.2.11. Έστω $A \cong \mathbb{K}Q/\mathcal{J}$ μια \mathbb{K} -άλγεβρα και M ένα πρότυπο της κατηγορίας $\text{Mod-}A$. Ορίζουμε το **διάνυσμα διάστασης** του M να είναι το διάνυσμα $\dim M$ στον \mathbb{Z}^n με τύπο

$$\dim M = \begin{bmatrix} \dim_{\mathbb{K}} M e_1 \\ \vdots \\ \dim_{\mathbb{K}} M e_n \end{bmatrix} = [\dim_{\mathbb{K}} M e_1 \quad \dots \quad \dim_{\mathbb{K}} M e_n]^t$$

όπου e_1, \dots, e_n είναι τα primitive ορθογώνια ταυτοδύναμα στοιχεία της A που αντιστοιχούν στις κορυφές $1, \dots, n$ της Q .

Παρατήρηση 4.2.12. Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα διάστασης $\dim M$ δεν εξαρτάται απο την επιλογή του συνόλου των primitive ορθογωνίων ταυτοδύναμων στοιχείων e_1, \dots, e_n της A .

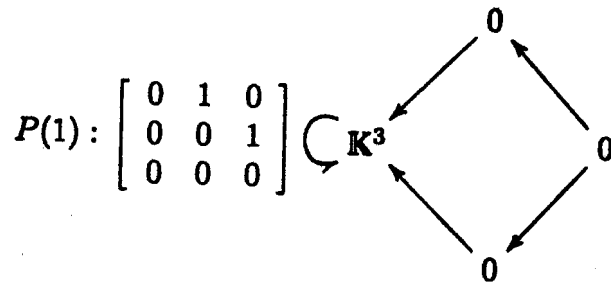
Παράδειγμα 4.2.13. Έστω Q η φαρέτρα :



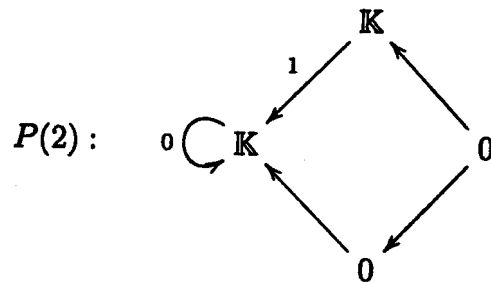
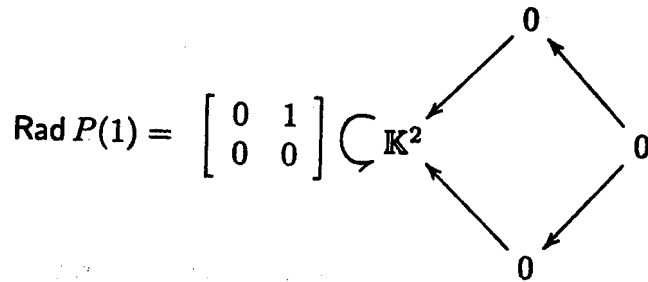
με $\alpha\beta = \gamma\delta$, $\beta\lambda = 0$ και $\lambda^3 = 0$. Τότε τα μη αναλύσιμα προβολικά $\mathbb{K}Q$ -



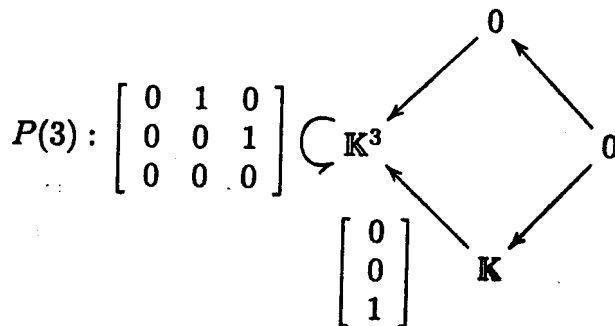
πρότυπα είναι



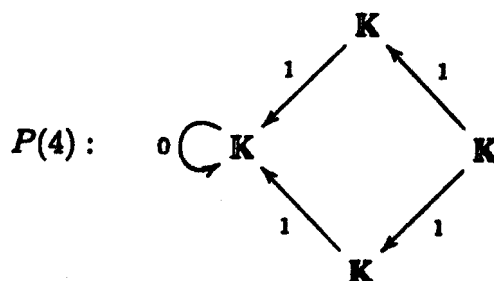
με



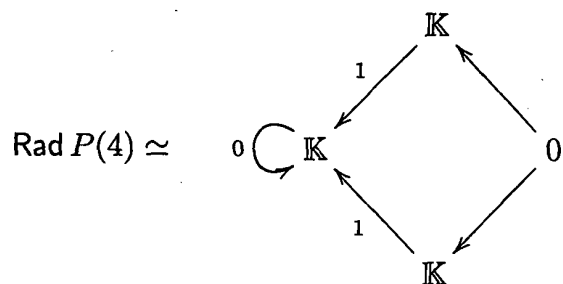
με $\text{Rad } P(2) \simeq S(1)$



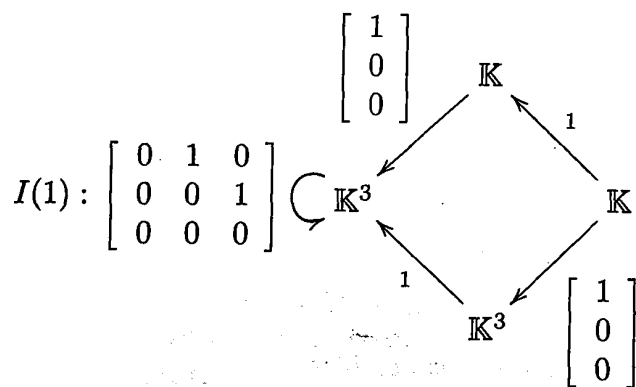
με $\text{Rad } P(3) \simeq P(1)$ και



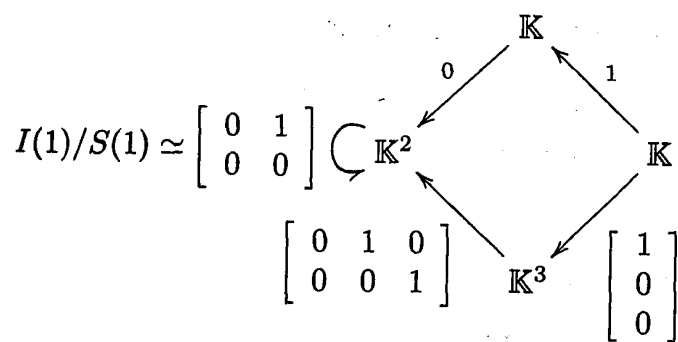
με



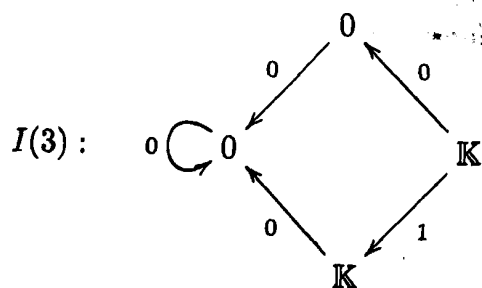
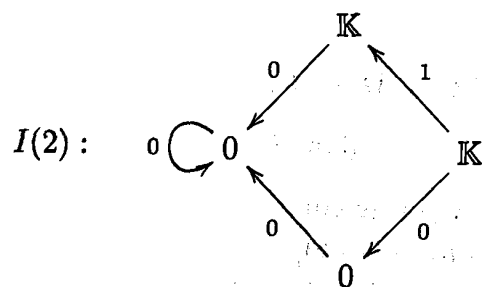
Ενώ τα μη αναλύσιμα injective $\mathbb{K}Q$ -πρότυπα είναι



με



με $I(2)/S(2) \simeq S(4)$



με $I(3)/S(3) \simeq S(4)$ και $I(4) = S(4)$ με $I(4)/S(4) = 0$. Άρα οι διαστάσεις των προβολικών και injective $\mathbb{K}Q$ -προτύπων είναι :

$$\dim P(1) = [3 \ 0 \ 0 \ 0]^t$$

$$\dim P(2) = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^t$$

$$\dim P(3) = [3 \ 0 \ 1 \ 0]^t$$

$$\dim P(4) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^t$$

και

$$\dim I(1) = [3 \ 1 \ 3 \ 1]^t$$

$$\dim I(2) = [0 \ 1 \ 0 \ 1]^t$$

$$\dim I(3) = [0 \ 0 \ 1 \ 1]^t$$

$$\dim I(4) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^t$$

Λήμμα 4.2.14. Έστω $A \cong \mathbb{K}Q/\mathcal{J}$, όπου Q είναι μια πεπερασμένη φαρέτρα και \mathcal{J} ένα ιδεώδες της $\mathbb{K}Q$. Έστω ακόμη

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

μια ακριβής ακολουθία A -προτύπων. Τότε

$$\dim M = \dim L + \dim N$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\text{Hom}_A(P(i), -)$ στην ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

θα πάρουμε την ακριβή ακολουθία \mathbb{K} -διανυσματικών χώρων

$$0 \rightarrow Le_i \rightarrow Me_i \rightarrow Ne_i \rightarrow 0$$

Τότε όμως $\dim_{\mathbb{K}} Me_i = \dim_{\mathbb{K}} Le_i + \dim_{\mathbb{K}} Ne_i$ για κάθε $i \in Q_0$. Άρα

$$\dim M = \dim L + \dim N$$

□

Παρατήρηση 4.2.15. Έστω M, N δύο πρότυπα με $M \simeq N$. Τότε

$$\dim M = \dim N$$

Απο τις διαστάσεις των μη-αναλύσιμων προβολικών (ή injective) A -προτύπων προκύπτει ένας τετραγωνικός πίνακας με ακέραιους συντελεστές. Αυτός ο πίνακας καλείται Cartan πίνακας της άλγεβρας A .

Ορισμός 4.2.16. Έστω A μια βασική πεπερασμένης διάστασης \mathbb{K} -άλγεβρα με ένα σύνολο απο primitive ορθογώνια ταυτοδύναμα στοιχεία $\{e_1, \dots, e_n\}$. Τότε ορίζουμε τον Cartan πίνακα της A ο οποίος είναι ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας

$$C_A = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Z})$$

όπου $c_{ij} = \dim_{\mathbb{K}} e_i A e_j$ για $i, j = 1, \dots, n$.



Παρατήρηση 4.2.17. Αν C'_A είναι ένας άλλος Cartan πίνακας της A ως προς ένα άλλο σύνολο απο primitive ορθογώνια ταυτοδύναμα στοιχεία $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ της A , τότε ο C'_A προκύπτει απο τον C_A Cartan πίνακα μέσω μετάθεσης των σειρών και στηλών του C_A και άρα οι C_A και C'_A είναι \mathbb{Z} -συζυγείς.

Πρόταση 4.2.18. Έστω C_A ο Cartan πίνακας της βασικής \mathbb{K} -άλγεβρας $A \simeq \mathbb{K}Q/\mathcal{J}$. Τότε

1. Η i -οστή στήλη του C_A είναι η $\dim P(i)$.
2. Η i -οστή γραμμή του C_A είναι η $[\dim I(i)]^t$.
3. $\dim P(i) = C_A \dim S(i)$.
4. $\dim I(i) = C_A^t \dim S(i)$.

Απόδειξη. 1. Το ότι η i -οστή στήλη του C_A είναι η $\dim P(i)$ προκύπτει απο την ισότητα

$$e_i A e_j = P(i) e_j$$

για κάθε i, j .

2. Το ότι η i -οστή γραμμή του C_A είναι η $[\dim I(i)]^t$ προκύπτει απο τον ορισμό και απο τις ισότητες

$$\dim_{\mathbb{K}} I(i) e_j = \dim_{\mathbb{K}} e_j A e_i = c_{ij}$$

για κάθε i, j .

Οι ισότητες (iii), (iv) προκύπτουν απο τα (i), (ii) και το γεγονός ότι οι

$$\dim S(1), \dots, \dim S(n)$$

είναι βάση για την αβελιανή ομάδα \mathbb{Z}^n , όπου $n = |Q_0|$. □

Παράδειγμα 4.2.19. Έστω η Kronecker άλγεβρα

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ \mathbb{K}^2 & \mathbb{K} \end{pmatrix}$$

Η A έχει Cartan πίνακα

$$C_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πρίν δώσουμε τον ορισμό για τους συναρτητές ανάκλασης θα ορίσουμε μια διγραμμική μορφή η οποία θα αποτελέσει ένα σημαντικό εργαλείο. Έστω Q μια πεπερασμένη συνεκτική και χωρίς προσανατολισμένους κύκλους φαρέτρα με $n = |Q_0|$. Έστω ακόμη $\{e_1, \dots, e_n\}$ η κανονική βάση του \mathbb{Z}^n .

Ορισμός 4.2.20. Η διγραμμική μορφή

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$$

με τύπο

$$\langle x, y \rangle_Q = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} y_{t(\alpha)}$$



καλείται Euler form για τη φαρέτρα Q .

Ορίζουμε τώρα

$$(x, y) = \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$$

και λαμβάνουμε στον \mathbb{Z}^n χώρο μια συμμετρική διγραμμική μορφή με τύπο

$$(x, y) = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in Q_1} (x_{s(\alpha)} y_{t(\alpha)} + x_{t(\alpha)} y_{s(\alpha)})$$

Ορισμός 4.2.21. Έστω Q μια πεπερασμένη χωρίς προσανατολισμένους κύκλους φαρέτρα. Για κάθε κορυφή $i \in Q_0$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\sigma_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$$

με τύπο

$$\sigma_i(x) = x - \frac{2(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$

όπου e_i το μοναδιαίο διάνυσμα της κανονικής βάσης του \mathbb{Z}^n . Η απεικόνιση σ_i καλείται ανάκλαση ως προς στην κορυφή i . Επιπλέον μπορούμε να γράψουμε

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} x_j, & j \neq i \\ -x_i + \sum_{k \sim i} x_k, & j = i \end{cases}$$

Παρατήρηση 4.2.22. Παρατηρούμε ότι οι απεικονίσεις σ_i είναι αυτομορφισμοί τάξης 2 διατηρώντας τη διγραμμική μορφή $(-, -)$.

Παρατήρηση 4.2.23. Για το σύνολο \mathbb{Z}^n χρησιμοποιούμε τη μερική διάταξη

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i$$

για κάθε i .

Παράδειγμα 4.2.24. Έστω Q η φαρέτρα

$$1 \bullet \xrightarrow{\alpha} 2 \bullet \xrightarrow{\beta} 3 \bullet \xrightarrow{\gamma} 4 \bullet$$

και έστω X μια αναπαράσταση αυτής

$$X_1 \xrightarrow{f_\alpha} X_2 \xrightarrow{f_\beta} X_3 \xrightarrow{f_\gamma} X_4$$

Τότε η απεικόνιση ανάκλασης

$$\sigma_i : \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}^4$$

έχει τύπο

$$\sigma_i(x) = x - \frac{2(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$

για κάθε $i = 1, 2, 3, 4$ και $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4$. Άρα για $i = 1$ έχουμε

$$\sigma_1(x) = x - \frac{2(x, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = x - (x, e_1) e_1$$



όπου

$$(x, e_1) = \langle x, e_1 \rangle + \langle e_1, x \rangle = x_1 - 0 + x_1 - x_2 = 2x_1 - x_2$$

Άρα

$$\sigma_1(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4) - (2x_1 - x_2)e_1 = (x_2 - x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Έτσι με παρόμοιους υπολογισμούς βρίσκουμε ότι η απεικόνιση ανάκλασης

$$\sigma_i : \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}^4$$

έχει τύπο

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} (x_2 - x_1, x_2, x_3, x_4), & i = 1 \\ (x_1, x_3 - x_2, x_3, x_4), & i = 2 \\ (x_1, x_2, x_4 - x_3, x_4), & i = 3 \\ (x_1, x_2, x_3, -x_4), & i = 4 \end{cases}$$

αφού $(e_i, e_i) = 2$ για κάθε e_i διάνυσμα της κανονικής βάσης του \mathbb{Z}^4 .

Ας μελετήσουμε τώρα τους συναρτητές ανάκλασης και τους συναρτητές Coxeter. Έστω λοιπόν Q μια φαρέτρα χωρίς προσανατολισμένους κύκλους, X, X' δύο αναπαραστάσεις της Q και $\phi : X \rightarrow X'$ ένας μορφισμός μεταξύ αυτών.

Ορισμός 4.2.25. Έστω i μια sink κορυφή της φαρέτρας Q . Ορίζουμε τον συναρτητή

$$S_i^+ : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(\sigma_i Q, \mathbb{K})$$

μεταξύ των κατηγοριών με αντικείμενα πεπερασμένης διάστασης αναπαραστάσεις των φαριρών $Q, \sigma_i Q$ αντίστοιχα.

Για ένα αντικείμενο $X = (X_i, X_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ της κατηγορίας $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$ ορίζουμε ένα αντικείμενο

$$S_i^+ X = (Y_i, Y_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

της κατηγορίας $\text{Rep}(\sigma_i Q, \mathbb{K})$, όπου

1. Για τις κορυφές $j \in Q_0$

$$(S_i^+ X)_j = Y_j = X_j$$

αν $j \neq i$ και

$$(S_i^+ X)_i = \text{Ker } \xi$$

όπου ξ είναι η απεικόνιση

$$\xi : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha) = i}} X_{s(\alpha)} \rightarrow X_i$$

για $j = i$

2. Για τα βέλη $\alpha \in Q_1$

$$(S_i^+ X)_\alpha = Y_\alpha = X_\alpha$$

αν $t(\alpha) \neq i$ και

$$(S_i^+ X)_\alpha = Y_\alpha : Y_i \rightarrow X_{s(\alpha)} = Y_{s(\alpha)}$$



είναι η απεικόνιση έγκλεισης

$$\xi : Y_i \rightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)}$$

αν $t(\alpha) = i$.

Για ένα μορφισμό

$$\phi = (\phi_i)_{i \in Q_0} : X \rightarrow X'$$

της κατηγορίας $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$, όπου

$$X = (X_i, X_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}, \quad X' = (X'_i, X'_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

αναπαραστάσεις της φαρέτρας, ορίζουμε την απεικόνιση

$$S_i^+ \phi = \psi = (\psi_i)_{i \in Q_0} : S_i^+ X \rightarrow S_i^+ X'$$

στην κατηγορία $\text{Rep}(\sigma_i Q, \mathbb{K})$ ως εξής :

$$\psi_j = \phi_j, \text{ για } j \neq i$$

και

$$\psi_i : Y_i \rightarrow Y'_i, \text{ για } j = i$$

ο περιορισμός του μορφισμού

$$(\phi_{s(\alpha)}) : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \rightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X'_{s(\alpha)}$$

Δηλαδή η ψ_i είναι ο \mathbb{K} -μορφισμός που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταδετικό.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_i & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} & \longrightarrow & X_i \\ & & \downarrow \psi_i & & \downarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \phi_{s(\alpha)} & & \downarrow \phi_i \\ 0 & \longrightarrow & Y'_i & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X'_{s(\alpha)} & \longrightarrow & X'_i \end{array}$$

Ορισμός 4.2.26. Έστω i μια source κορυφή της φαρέτρας Q . Ορίζουμε τον συναρτητή

$$S_i^- : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(\sigma_i Q, \mathbb{K})$$

μεταξύ των κατηγοριών με αντικείμενα πεπερασμένης διάστασης αναπαραστάσεις των φαρετρών $Q, \sigma_i Q$ αντίστοιχα.

Για ένα αντικείμενο $X = (X_i, X_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ της κατηγορίας $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$ ορίζουμε ένα αντικείμενο

$$S_i^- X = (Y_i, Y_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

της κατηγορίας $\text{Rep}(\sigma_i Q, \mathbb{K})$, όπου



1. Για τις κορυφές $j \in Q_0$

$$(S_i^- X)_j = Y_j = X_j$$

αν $j \neq i$ και

$$(S_i^- X)_i = \text{Coker } \xi$$

όπου ξ είναι ο μορφισμός

$$\xi : X_i \rightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)}$$

για $j = i$.

2. Για τα βέλη $\alpha \in Q_1$

$$(S_i^- X)_\alpha = Y_\alpha = X_\alpha$$

αν $s(\alpha) \neq i$ και

$$(S_i^- X)_\alpha = Y_\alpha : Y_{t(\alpha)} = X_{t(\alpha)} \rightarrow Y_i$$

είναι ο περιορισμός $\hat{\xi}|_{X_{t(\alpha)}}$ της κανονικής απεικόνισης

$$\hat{\xi} : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)} \rightarrow Y_i$$

αν $s(\alpha) = i$.

Για ένα μορφισμό

$$\phi = (\phi_i)_{i \in Q_0} : X \rightarrow X'$$

της κατηγορίας $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$, όπου

$$X = (X_i, X_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}, X' = (X'_i, X'_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

αναπαραστάσεις της φαρέτρας, ορίζουμε την απεικόνιση

$$S_i^- \phi = \psi = (\psi_i)_{i \in Q_0} : S_i^- X \rightarrow S_i^- X'$$

στην κατηγορία $\text{Rep}(\sigma_i Q, \mathbb{K})$ ως εξής :

$$\psi_j = \phi_j, \text{ για } j \neq i$$

και

$$\psi_i : Y_i \rightarrow Y'_i, \text{ για } j = i$$

είναι η απεικόνιση που επάγεται από την

$$(\phi_{t(\alpha)}) : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)} \rightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} X'_{t(\alpha)}$$

Δηλαδή η ψ_i είναι η \mathbb{K} -γραμμική απεικόνιση που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccccccc} X_i & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)} & \longrightarrow & Y_i & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \phi_i & & \downarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} \phi_{t(\alpha)} & & \downarrow \psi_i & & \\ X'_i & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} X'_{t(\alpha)} & \longrightarrow & Y'_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$



Οι απεικονίσεις $S_i^+ X, S_i^- X$ καλούνται **συναρτητές ανάκλασης**.

Ορισμός 4.2.27. Έστω i μια sink κορυφή της φαρέτρας Q . Ορίζουμε την απεικόνιση

$$i_i X : S_i^- S_i^+ X \rightarrow X$$

ως εξής :

Για μια κορυφή $j \neq i$ ισχύει

$$(i_i X)_j = 1_{X_j}$$

και για $j = i$ έχουμε

$$(i_i X)_i = (S_i^- S_i^+ X)_i = \text{Coker } \xi \simeq \text{Im } \xi \rightarrow X_i$$

όπου

$$Y_i \xrightarrow{\xi} \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \xrightarrow{\xi} X_i$$

Η απεικόνιση $i_i X$ είναι ένας φυσικός μονομορφισμός.

Ορισμός 4.2.28. Έστω i μια source κορυφή της φαρέτρας Q . Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\pi_i X : X \rightarrow S_i^+ S_i^- X$$

ως εξής :

Για μια κορυφή $j \neq i$ ισχύει

$$(\pi_i X)_j = 1_{X_j}$$

και για $j = i$ έχουμε

$$(\pi_i X)_i = (S_i^+ S_i^- X)_i$$

όπου

$$X_i \rightarrow \text{Im } \xi \simeq \text{Ker } \hat{\xi} = (S_i^+ S_i^- X)_i$$

με

$$X_i \xrightarrow{\xi} \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)} \xrightarrow{\hat{\xi}} Y_i$$

Η απεικόνιση $\pi_i X$ είναι ένας φυσικός επιμορφισμός.

Πόρισμα 4.2.29. Οι απεικονίσεις S_i^+ και S_i^- είναι συναρτητές με

$$S_i^\pm 1_X = 1_{S_i^\pm X}$$

για κάθε αναπαράσταση X και για δύο μορφοισμούς

$$\phi : X \rightarrow Y$$

και

$$\psi : Y \rightarrow Z$$

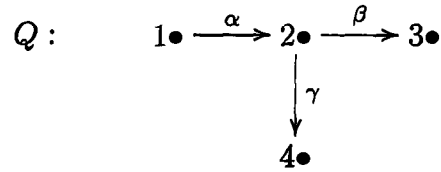
ισχύει

$$S_i^\pm(\psi\phi) = (S_i^\pm(\psi))(S_i^\pm(\phi))$$

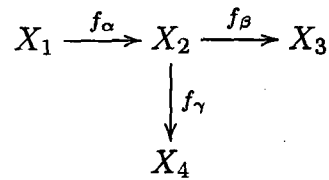


Απόδειξη. Είναι προφανής η απόδειξη αν λάβουμε υπόψη τον ορισμό των S_i^+ , S_i^- και τη μεταθετικότητα των διαγραμμάτων. \square

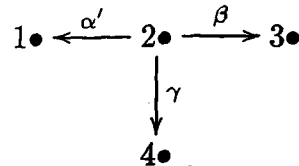
Παράδειγμα 4.2.30. Έστω η φαρέτρα



η οποία έχει source κορυφή την κορυφή 1 και sinks τις 3, 4. Έστω ακόμη X μια αναπαράσταση της Q



Θα μελετήσουμε τώρα για κάθε κορυφή ξεχωριστά τις αναπαραστάσεις $S_i^+ X$ και $S_i^- X$. Ας ξεκινήσουμε με τη source κορυφή $i = 1$. Η φαρέτρα $\sigma_1 Q$ τότε είναι :



Ορίζουμε λοιπόν τον συναρτητή

$$S_1^- : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(\sigma_1 Q, \mathbb{K})$$

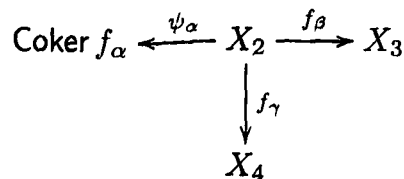
με τύπο

$$(S_1^- X)_j = X_j$$

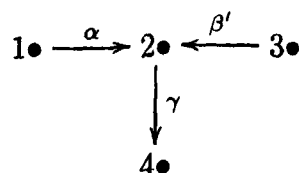
για κάθε $j = 2, 3, 4$ και

$$(S_1^- X)_1 = \text{Coker}(X_1 \xrightarrow{f_\alpha} X_2) = \text{Coker } f_\alpha$$

Τότε η αναπαράσταση $S_1^- X$ είναι :



Για την sink κορυφή $i = 3$ η φαρέτρα σ_3 είναι :



Ορίζουμε λοιπόν τον συναρτητή

$$S_3^+ : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(\sigma_3 Q, \mathbb{K})$$

με τύπο

$$(S_3^+ X)_j = X_j$$

για κάθε $j = 1, 2, 4$ και

$$(S_3^+ X)_3 = \text{Ker}(X_2 \xrightarrow{f_\beta} X_3) = \text{Ker } f_\beta$$

Τότε η αναπαράσταση $S_3^+ X$ είναι :

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_\beta} & X_2 \xleftarrow{\phi_\beta} \text{Ker } f_\beta \\ & & \downarrow f_\gamma \\ & & X_4 \end{array}$$

Παρόμοια και για την sink κορυφή $i = 4$ θα έχουμε την αναπαράσταση $S_4^+ X$ η οποία είναι :

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{f_\alpha} & X_2 & \xrightarrow{f_\beta} & X_3 \\ & & \uparrow \phi_\gamma & & \\ & & \text{Ker } f_\gamma & & \end{array}$$

Λήμμα 4.2.31. Έστω X, X' αναπαραστάσεις της Q και i μια κορυφή της. Τότε

1. $S_i^\pm(X \oplus X') = S_i^\pm X \oplus S_i^\pm X'$.
2. $X = (S_i^- S_i^+ X) \oplus \text{Coker } i_i X$ και $X = (S_i^+ S_i^- X) \oplus \text{Ker } \pi_i X$.
3. Αν $\text{Coker } i_i X = 0$ τότε $\dim S_i^+ X = \sigma_i(\dim X)$.
4. Αν $\text{Ker } \pi_i X = 0$ τότε $\dim S_i^- X = \sigma_i(\dim X)$.

Απόδειξη. 1. Γνωρίζουμε ότι το ευθύ άθροισμα $X \oplus X'$ αναπαραστάσεων X, X' είναι αναπαράσταση, η οποία χαρακτηρίζεται από μορφισμούς

$$i_X : X \rightarrow X \oplus X', \quad i_{X'} : X' \rightarrow X \oplus X'$$

και

$$\pi_X : X \oplus X' \rightarrow X, \quad \pi_{X'} : X \oplus X' \rightarrow X'$$

με τις ιδιότητες

$$\pi_X i_X = 1_Q, \quad \pi_{X'} i_{X'} = 1_{Q'}$$

και

$$i_X \pi_X + i_{X'} \pi_{X'} = 1_{X \oplus X'}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον συναρτητή ανάκλασης, ο οποίος είναι προσθετικός συναρτητής αφού

$$S_i^\pm(\phi + \psi) = S_i^\pm(\phi) + S_i^\pm(\psi)$$



για κάθε ζεύγος απο παράλληλους μορφοισμούς $\phi, \psi : X \rightarrow X'$, επάγεται ευθύ άθροισμα αναπαραστάσεων αυτή τη φορά στην κατηγορία $\text{Rep}(\sigma_i Q, \mathbb{K})$ μαζί με μορφοισμούς

$$i_{S_i^\pm X} : S_i^\pm X \rightarrow S_i^\pm(X \oplus X'), \quad i_{S_i^\pm X'} : S_i^\pm X' \rightarrow S_i^\pm(X \oplus X')$$

και

$$\pi_{S_i^\pm X} : S_i^\pm(X \oplus X') \rightarrow S_i^\pm X, \quad \pi_{S_i^\pm X'} : S_i^\pm(X \oplus X') \rightarrow S_i^\pm X'$$

με τις ιδιότητες

$$\pi_{S_i^\pm X} i_{S_i^\pm X} = 1_{S_i^\pm X}, \quad \pi_{S_i^\pm X'} i_{S_i^\pm X'} = 1_{S_i^\pm X'}$$

και

$$i_{S_i^\pm X} \pi_{S_i^\pm X} + i_{S_i^\pm X'} \pi_{S_i^\pm X'} = 1_{S_i^\pm(X \oplus X')}$$

2. Απο τον ορισμό του μονομορφοισμού $i_i X : S_i^- S_i^+ X \rightarrow X$ επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow S_i^- S_i^+ X \longrightarrow X \longrightarrow \text{Coker } i_i X \longrightarrow 0$$

Τότε η κανονική απεικόνιση

$$p'_i : X_i \rightarrow \text{Coker } \xi$$

για κάθε κορυφή i μαζί με την απεικόνιση

$$p_i : \text{Coker } \xi \rightarrow X_i$$

έχει την ιδιότητα

$$p'_i p_i = 1_{\text{Coker } \xi}$$

Άρα για όλες τις κορυφές i θεωρούμε το μορφοισμό

$$p : \text{Coker } i_i X \rightarrow X$$

αν για $j \neq i$ έχουμε $p_j = 0$. Τότε οι μορφοισμοί

$$i_i X : S_i^- S_i^+ X \rightarrow X$$

και

$$p : \text{Coker } i_i X \rightarrow X$$

επάγουν το ευθύ άθροισμα της X . Δηλαδή η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow S_i^- S_i^+ X \longrightarrow X \longrightarrow \text{Coker } i_i X \longrightarrow 0$$

διασπάται και έτσι

$$X = (S_i^- S_i^+ X) \oplus \text{Coker } i_i X$$

Η απόδειξη για το $X = (S_i^+ S_i^- X) \oplus \text{Coker } \pi_i X$ είναι ανάλογη.



3. Γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση ανάκλασης σ_i έχει τύπο

$$\sigma_i(\dim X) = \dim X - \frac{2(\dim X, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$

και μάλιστα $(e_i, e_i) = 2\langle e_i, e_i \rangle = 2$. Άρα

$$\sigma_i(\dim X) = \dim X - (\dim X, e_i)e_i$$

Άρκει λοιπόν να βρούμε το

$$(\dim X, e_i) = \langle \dim X, e_i \rangle + \langle e_i, \dim X \rangle$$

Έχουμε τότε

$$\langle \dim X, e_i \rangle = \dim X_i$$

και

$$\langle e_i, \dim X \rangle = \dim X_i - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \dim X_{s(\alpha)}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \sigma_i(\dim X) &= \dim X - (\dim X_i + \dim X_i - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \dim X_{s(\alpha)})e_i = \\ &= \dim X - (2 \dim X_i - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \dim X_{s(\alpha)})e_i \end{aligned}$$

Αν τώρα $\text{Coker } i_i X = 0$ τότε επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \text{Ker } X_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \dim X_{s(\alpha)} \xrightarrow{X_\alpha} X_i \longrightarrow 0$$

η οποία διασπάται και έτσι

$$\dim \text{Ker } X_\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \dim X_{s(\alpha)} + \dim X_i$$

Άρα

$$\dim(S_i^- X)_i = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \dim X_{s(\alpha)} + \dim X_i$$

Συνεπώς

$$\dim S_i^- X = \sigma_i(\dim X)$$

4. Η απόδειξη είναι παρόμοια. □

Παράδειγμα 4.2.32. Έστω η φαρέτρα του προηγούμενου παραδείγματος

$$Q: \quad \begin{array}{ccccc} 1 \bullet & \xrightarrow{\alpha} & 2 \bullet & \xrightarrow{\beta} & 3 \bullet \\ & & \downarrow \gamma & & \\ & & 4 \bullet & & \end{array}$$



η οποία έχει source κορυφή την κορυφή 1 και sinks τις 3,4. Έστω ακόμη X μια αναπαράσταση της Q

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{f_\alpha} & X_2 & \xrightarrow{f_\beta} & X_3 \\ & & \downarrow f_\gamma & & \\ & & X_4 & & \end{array}$$

Τότε είδαμε ότι η αναπαράσταση $S_1^- X$ είναι :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Coker } f_\alpha & \xleftarrow{\psi_\alpha} & X_2 & \xrightarrow{f_\beta} & X_3 \\ & & \downarrow f_\gamma & & \\ & & X_4 & & \end{array}$$

Θέλω τώρα να βρώ την αναπαράσταση $S_1^+ S_1^- X$. Ορίζω λοιπόν την απεικόνιση

$$S_1^+ : \text{Rep}(\sigma_1 Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(Q, \mathbb{K})$$

με τύπο

$$(S_1^+ S_1^- X)_j = (S_1^+(S_1^- X))_j = (S_1^- X)_j = X_j$$

για κάθε $j = 2, 3, 4$ και

$$\begin{aligned} (S_1^+ S_1^- X)_1 &= (S_1^+(S_1^- X))_1 = \\ &= \text{Ker}(X_2 \xrightarrow{\psi_\alpha} \text{Coker } f_\alpha) = \text{Ker } \psi_\alpha = \text{Im } f_\alpha \end{aligned}$$

Άρα η αναπαράσταση $S_1^+ S_1^- X$ είναι η :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Im } f_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & X_2 & \xrightarrow{f_\beta} & X_3 \\ & & \downarrow f_\gamma & & \\ & & X_4 & & \end{array}$$

Υπάρχει λοιπόν ένας επιμορφισμός

$$\pi_1 X : X \rightarrow S_1^+ S_1^- X$$

με τύπο

$$(\pi_1 X)_j = 1_{X_j}$$

για κάθε $j = 2, 3, 4$ και

$$(\pi_1 X)_1 : X_1 \rightarrow \text{Im } f_\alpha \simeq \text{Ker } \psi_\alpha = S_1^+ S_1^- X$$

Αν τώρα $\text{Ker } \pi_i X = 0$, τότε η απεικόνιση f_α είναι μονομορφισμός. Θα δείξουμε λοιπόν ότι για την κορυφή $i = 1$ αν $\text{Ker } \pi_i X = 0$ τότε

$$\dim S_i^- X = \sigma_i(\dim X)$$



όπου είδαμε ότι η διγραμμική μορφή

$$\langle -, - \rangle : \mathbf{Z}^4 \times \mathbf{Z}^4 \rightarrow \mathbf{Z}$$

έχει τύπο

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} y_{t(\alpha)}$$

και

$$\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$$

και η απεικόνιση ανάκλασης σ_i είναι

$$\sigma_i : \mathbf{Z}^4 \rightarrow \mathbf{Z}^4$$

με τύπο

$$\sigma_i(x) = x - \frac{2(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$

όπου e_i το μοναδιαίο διάνυσμα της κανονικής βάσης του \mathbf{Z}^4 .

Έχουμε λοιπόν

$$\underline{\dim} S_i^- X = (\dim \operatorname{Coker} f_\alpha, \dim X_2, \dim X_3, \dim X_4)$$

όμως όταν $\operatorname{Ker} f_\alpha = 0$ επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_\alpha} X_2 \longrightarrow \operatorname{Coker} f_\alpha \longrightarrow 0$$

η οποία διασπάται και έτσι

$$\dim X_2 = \dim X_1 + \dim \operatorname{Coker} f_\alpha$$

Άρα

$$\dim \operatorname{Coker} f_\alpha = \dim X_1 - \dim X_2$$

Έτσι

$$\underline{\dim} S_i^- X = (\dim X_1 - \dim X_2, \dim X_2, \dim X_3, \dim X_4)$$

Έχουμε λοιπόν

$$\sigma_1(\underline{\dim} X) = \underline{\dim} X - \frac{2(\underline{\dim} X, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1$$

Άρα αρκεί να βρούμε τα $(\underline{\dim} X, e_1)$ και (e_1, e_1) . Έχουμε

$$(\underline{\dim} X, e_1) = \langle \underline{\dim} X, e_1 \rangle + \langle e_1, \underline{\dim} X \rangle = 2 \dim X_1 - \dim X_2$$

και

$$(e_1, e_1) = 2\langle e_1, e_1 \rangle = 2$$

Άρα

$$\begin{aligned} \sigma_1(\underline{\dim} X) &= \underline{\dim} X - (\underline{\dim} X, e_1) e_1 = \\ &= \underline{\dim} X - (2 \dim X_1 - \dim X_2) e_1 = \\ &= (\dim X_1, \dim X_2, \dim X_3, \dim X_4) - (2 \dim X_1 - \dim X_2, 0, 0, 0) = \\ &= (\dim X_2 - \dim X_1, \dim X_2, \dim X_3, \dim X_4) = \underline{\dim} S_i^- X \end{aligned}$$



Παρατήρηση 4.2.33. Παρατηρούμε ότι οι αναπαράστασης $\text{Coker } i_i X$ και $\text{Ker } \pi_i X$ ορίζονται μοναδικά σε κάθε κορυφή i . Μπορούν λοιπόν να θεωρηθούν ευθέα αθροίσματα από αντίγραφα απλών αναπαράστασεων $S(i)$.

Πρόταση 4.2.34. Έστω Q μια φαρέτρα και X μια μη-αναλύσιμη αναπαράσταση της Q . Τότε

1. Έστω $i \in Q_0$ μια sink κορυφή. Τότε είτε $\dim X_i = 1$, $\dim X_j = 0$ για $j \neq i$ είτε η απεικόνιση

$$X_\alpha : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \rightarrow X_i$$

είναι επιμορφισμός.

2. Έστω $i \in Q_0$ μια source κορυφή. Τότε είτε $\dim X_i = 1$, $\dim X_j = 0$ για $j \neq i$ είτε η απεικόνιση

$$X'_\alpha : X_i \rightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)}$$

είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη. 1. Έστω V το συμπλήρωμα της $\text{Im } X_\alpha$. Τότε $X = V \oplus X'$. Επειδή η αναπαράσταση X είναι μη-αναλύσιμη, ένας από τους δύο άθροιστέους θα είναι μηδέν.

Αν $V = 0$, τότε η X_α είναι προφανώς επιμορφισμός. Αν $X' = 0$, τότε αναγκαστικά για το συμπλήρωμα θα ισχύει $\dim X_i = 1$, $\dim X_j = 0$ για $j \neq i$. Διαφορετικά το V θα γραφόταν σαν ευθύ άθροισμα μη-αναλύσιμων που είναι άτοπο εφόσον η X είναι μη-αναλύσιμη.

2. Η απόδειξη είναι ανάλογη. □

Πρόταση 4.2.35. Έστω Q μια φαρέτρα και X μια αναπαράσταση της Q . Τότε

1. Αν η απεικόνιση

$$X_\alpha : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \rightarrow X_i$$

είναι επιμορφισμός, τότε $S_i^- S_i^+ X = X$.

2. Αν η απεικόνιση

$$X'_\alpha : X_i \rightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)}$$

είναι μονομορφισμός, τότε $S_i^+ S_i^- X = X$.

Απόδειξη. 1. Θα το αποδείξουμε για τον i -οστό χώρο. Έστω ο επιμορφισμός

$$X_\alpha : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \rightarrow X_i$$



και έστω $K = \text{Ker } X_\alpha$. Τότε εφαρμόζοντας τον συναρτητή S_i^+ ο χώρος X_i είναι ισόμορφος με τον πυρήνα του επιμορφισμού και επιπλέον έστω

$$X'_\alpha : K \rightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον συναρτητή S_i^- ο χώρος K γίνεται

$$K' = \left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \right) / \text{Im } X'_\alpha$$

με $\text{Im } X'_\alpha = K$ και απο το θεώρημα ισομορφισμού έχουμε οτι

$$K' = \left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \right) / \text{Ker } X_\alpha = \text{Im } X'_\alpha$$

Επειδή όμως η απεικόνιση X_α είναι επιμορφισμός θα συνεπάγεται οτι $K' = X_i$.

2. Η απόδειξη είναι δυικά ανάλογη με την πρώτη. □

Πρόταση 4.2.36. Έστω Q μια φαρέτρα και X μια μη-αναλύσιμη αναπαράσταση της Q . Τότε οι αναπαραστάσεις $S_i^+ X$ και $S_i^- X$ είναι είτε μη-αναλύσιμες είτε μηδέν.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρόταση για την $S_i^+ X$ αναπαράσταση, αφού η απόδειξη για την $S_i^- X$ είναι δυικά ανάλογη. Απο την πρόταση (4.2.25) έχουμε οτι είτε $\dim X_i = 1$, $\dim X_j = 0$ για $j \neq i$ είτε η απεικόνιση

$$X_\alpha : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \rightarrow X_i$$

είναι επιμορφισμός. Αν $\dim X_i = 1$, $\dim X_j = 0$ για $j \neq i$ τότε

$$S_i^+ X = 0$$

Έστω λοιπόν X_α επιμορφισμός και έστω $S_i^+ X$ αναλύσιμη αναπαράσταση με

$$S_i^+ X = X_1 \oplus X_2$$

όπου $X_1, X_2 \neq 0$. Όμως απο την προηγούμενη πρόταση γνωρίζουμε οτι $S_i^+ S_i^- X_1 = X_1$ και $S_i^+ S_i^- X_2 = X_2$ και ιδιαίτερα $S_i^- X_1 \neq 0$, $S_i^- X_2 \neq 0$. Άρα

$$X = S_i^- S_i^+ X = S_i^- X_1 \oplus S_i^- X_2$$

Αυτό όμως είναι άτοπο λόγω υπόθεσης. Άρα η $S_i^+ X$ είναι μη-αναλύσιμη. □

Πρόταση 4.2.37. Έστω Q μια φαρέτρα και X μια αναπαράσταση της Q . Έστω ακόμη $i \in Q_0$ μια sink κορυφή της Q και ο επιμορφισμός

$$X_\alpha : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \rightarrow X_i$$

Τότε

$$\dim S_i^+ X = \sigma_i(\dim X)$$



Απόδειξη. Έστω $i \in Q_0$ μια sink κορυφή της Q και έστω ο επιμορφισμός

$$X_\alpha : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \rightarrow X_i$$

Τότε

$$\dim \text{Ker } X_\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \dim X_{s(\alpha)} - \dim X_i$$

Άρα

$$(\dim S_i^+ X - \dim X)_i = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \dim X_{s(\alpha)} - 2 \dim X_i = -(\dim X, e_i)$$

και

$$(\dim S_i^+ X - \dim X)_j = 0$$

για $j \neq i$. Δηλαδή θα έχουμε

$$\dim S_i^+ X - \dim X = -(\dim X, e_i)e_i$$

και έτσι

$$\dim S_i^+ X = \dim X - (\dim X, e_i)e_i = \sigma_i(\dim X)$$

□

Συνοψίζοντας λοιπόν τις παραπάνω προτάσεις ακολουθεί ένα πόρισμα για τις ιδιότητες των συναρτητών ανάκλασης $S_i^+ X$ και $S_i^- X$.

Πόρισμα 4.2.38. Έστω Q μια πεπερασμένη, συνεκτική και χωρίς προσανατολισμένους κύκλους φαρέτρα. Τότε αν $i \in Q_0$ μια sink κορυφή της Q οι συναρτητές ανάκλασης έχουν τις παρακάτω ιδιότητες :

(1) Αν X μια μη-αναλύσιμη αναπαράσταση της Q στην κατηγορία $\text{Rep}(Q, \mathbb{K})$ τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :

1. $S_i^+ X \neq 0$
2. $X \not\cong S(i)$
3. $\sigma_i(\dim X) > 0$

(2) Αν X' μια μη-αναλύσιμη αναπαράσταση της Q στην κατηγορία $\text{Rep}(\sigma_i Q, \mathbb{K})$ τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :

1. $S_i^- X \neq 0$
2. $X' \not\cong S(i)$
3. $\sigma_i(\dim X') > 0$

Παράδειγμα 4.2.39. Έστω η φαρέτρα

$$Q : \quad 1 \bullet \xrightarrow{\alpha} 2 \bullet$$

και έστω η αναπαράσταση αυτής

$$X : \quad \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$



η οποία είναι μη-αναλύσιμη. Όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα οι απλές αναπαράστασεις της Q είναι

$$S(1) : \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

και

$$S(2) : 0 \longrightarrow \mathbb{K}$$

Προφανώς $X \not\cong S(1)$ και $X \not\cong S(2)$. Ας μελετήσουμε τώρα την αναπαράσταση $S_2^+ X$.

Θεωρούμε λοιπόν τον συναρτητή

$$S_2^+ : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(\sigma_2 Q, \mathbb{K})$$

με τύπο

$$(S_2^+ X)_1 = \mathbb{K}$$

και

$$(S_2^+ X)_2 = \text{Ker}(\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}) = 0$$

Άρα η αναπαράσταση $S_2^+ X$ είναι

$$\mathbb{K} \xleftarrow{0} 0$$

και έτσι $S_2^+ X = S(2)$.

Προφανώς η $S_2^+ X$ είναι μη-αναλύσιμη και $S_2^+ X \neq 0$.

Επιπλέον

$$\sigma_2(\underline{\dim} X) = \underline{\dim} X - \frac{2(\underline{\dim} X, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 = \underline{\dim} X - (\underline{\dim} X, e_2) e_2$$

με

$$(\underline{\dim} X, e_2) = \langle \underline{\dim} X, e_2 \rangle + \langle e_2, \underline{\dim} X \rangle = \langle (1, 1), (0, 1) \rangle + \langle (0, 1) + (1, 1) \rangle = 1$$

Άρα

$$\sigma_2(\underline{\dim} X) = (1, 1) - 1e_2 = (1, 0) = e_1 > 0$$

Ακόμη $\underline{\dim} S_2^+ X = (1, 0)$ άρα $\underline{\dim} S_2^+ X = \sigma_2(\underline{\dim} X)$.

Ας εφαρμόσουμε τώρα τον συναρτητή

$$S_2^- : \text{Rep}(\sigma_2 Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(Q, \mathbb{K})$$

με τύπο

$$(S_2^- S_2^+ X)_1 = S_2^- (S_2^+ X)_1 = \mathbb{K}$$

και

$$(S_2^- S_2^+ X)_2 = S_2^- (S_2^+ X)_2 = \text{Coker}(0 \longrightarrow \mathbb{K}) = \mathbb{K}$$

Άρα η αναπαράσταση $S_2^- S_2^+ X$ είναι

$$\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$

και έτσι

$$S_2^- S_2^+ X \simeq X$$



Θεώρημα 4.2.40. Οι συναρτητές S_i^+, S_i^- επάγουν αμοιβαία αντίστροφες 1-1 και επί απεικονίσεις μεταξύ μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων της Q και μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων της $\sigma_i Q$ με εξαίρεση την απλή αναπαράσταση $S(i)$ στην κορυφή i η οποία μηδενίζεται από αυτούς τους συναρτητές.

Επιπλέον

$$\dim S_i^\pm X = \sigma_i(\dim X)$$

για κάθε μη-αναλύσιμη αναπαράσταση X μη ισομορφική με την $S(i)$.

Ορισμός 4.2.41. Έστω Q μια φαρέτρα χωρίς προσανατολισμένους κύκλους και έστω i_1, \dots, i_n μια αποδεκτή διάταξη κορυφών της. Ορίζουμε τότε τον συναρτητή Coxeter, ως προς τη διάταξη, τον συναρτητή :

$$C^+ = S_{i_n}^+ \cdots S_{i_1}^+ : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(Q, \mathbb{K})$$

και ακόμη ορίζουμε

$$C^- = S_{i_1}^- \cdots S_{i_n}^- : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(Q, \mathbb{K})$$

Επιπλέον για $r \in \mathbb{Z}$ γράφουμε

$$C^r = \begin{cases} (C^+)^r, & r > 0 \\ 1, & r = 0 \\ (C^-)^{-r}, & r < 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 4.2.42. Έστω η φαρέτρα

$$Q : \quad 1 \bullet \xrightarrow{\alpha} 2 \bullet \xrightarrow{\beta} 3 \bullet$$

και έστω η αναπαράσταση αυτής

$$X : \quad X_1 \xrightarrow{f_\alpha} X_2 \xrightarrow{f_\beta} X_3$$

Η φαρέτρα Q δεν έχει προσανατολισμένους κύκλους και μια αποδεκτή διάταξη κορυφών αυτής είναι η 3, 2, 1. Τότε ο συναρτητής Coxeter C^- είναι

$$C^- = S_3^- S_2^- S_1^- : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(Q, \mathbb{K})$$

Ας βρούμε λοιπόν τον τύπο του συναρτητή Coxeter C^- . Έστω ο συναρτητής

$$S_1^- : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(\sigma_1 Q, \mathbb{K})$$

με τύπο

$$(S_1^- X)_j = X_j$$

για $j = 2, 3$ και

$$(S_1^- X)_1 = \text{Coker}(X_1 \xrightarrow{f_\alpha} X_2) = \text{Coker } f_\alpha$$

Άρα η αναπαράσταση $S_1^- X$ είναι

$$\text{Coker } f_\alpha \xleftarrow{\psi_\alpha} X_2 \xrightarrow{f_\beta} X_3$$



Εφαρμόζουμε τώρα τον συναρτητή

$$S_2^- : \text{Rep}(\sigma_1 Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(\sigma_2 \sigma_1 Q, \mathbb{K})$$

με τύπο

$$(S_2^- S_1^- X)_j = (S_2^- (S_1^- X))_j = (S_1^- X)_j$$

για $j = 1, 3$ και

$$(S_2^- S_1^- X)_2 = (S_2^- (S_1^- X))_2 = \text{Coker } \xi$$

όπου

$$\xi : X_2 \rightarrow \text{Coker } f_\alpha \oplus X_3$$

Άρα η αναπαράσταση $S_2^- S_1^- X$ είναι

$$\text{Coker } f_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} \text{Coker } \xi \xleftarrow{\phi_\beta} X_3$$

Τέλος εφαρμόζουμε τον συναρτητή

$$S_3^- : \text{Rep}(\sigma_2 \sigma_1 Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(Q, \mathbb{K})$$

με τύπο

$$(S_3^- S_2^- S_1^- X)_j = (S_3^- (S_2^- S_1^- X))_j = (S_2^- S_1^- X)_j$$

για $j = 1, 2$ και

$$(S_3^- S_2^- S_1^- X)_2 = (S_3^- (S_2^- S_1^- X))_2 = \text{Coker}(X_3 \longrightarrow \text{Coker } \xi) = \text{Coker } \phi_\beta$$

Άρα η αναπαράσταση $S_3^- S_2^- S_1^- X$ είναι

$$\text{Coker } f_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} \text{Coker } \xi \xrightarrow{\phi'_\beta} \text{Coker } \phi_\beta$$

και ο συναρτητής Coxeter C^- είναι

$$C^- = S_3^- S_2^- S_1^- : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(Q, \mathbb{K})$$

με τύπο

$$C^- X = S_3^- S_2^- S_1^- X$$

Λήμμα 4.2.43. Οι συναρτητές C^+, C^- δεν εξαρτώνται από την επιλογή της διάταξης κορυφών της Q .

Απόδειξη. Παρατηρούμε καταρχήν ότι

$$S_i^+ S_j^+ = S_j^+ S_i^+$$

αν i, j είναι sinks ως προς κάποιο προσανατολισμό και αν οι δύο κορυφές δεν συνδέονται με ένα βέλος. Έστω τώρα δύο διατάξεις κορυφών της Q

$$i_1, \dots, i_n$$

και

$$i'_1, \dots, i'_n$$



Έστω ότι $i_1 = i'_m$. Τότε i'_1, \dots, i'_{m-1} δεν συνδέεται με την κορυφή i_1 με ένα βέλος και έτσι

$$S_{i'_m}^+ \cdots S_{i'_1}^+ = S_{i'_{m-1}}^+ \cdots S_{i'_1}^+ S_{i_1}^+$$

Αν θεωρήσουμε παρόμοιες υποθέσεις και για τις υπόλοιπες κορυφές i_2, i_3, \dots θα έχουμε

$$S_{i'_n}^+ \cdots S_{i'_1}^+ = S_{i'_n}^+ \cdots S_{i'_1}^+$$

□

Θεωρούμε για τα επόμενα ότι η φαρέτρα Q έχει σύνολο κορυφών $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ και $1, \dots, n$ είναι μια αποδεκτή διάταξη κορυφών της.

Λήμμα 4.2.44. Έστω i μια κορυφή της φαρέτρας Q . Τότε

1. $\dim P(i) = \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}(e_i)$ και $\dim I(i) = \sigma_n \cdots \sigma_{i+1}(e_i)$.
2. $P(i) \simeq S_1^- \cdots S_{i-1}^- S(i)$ και $I(i) \simeq S_n^+ \cdots S_{i+1}^+ S(i)$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το λήμμα μόνο για το $P(i)$, αφού η απόδειξη για το $I(i)$ είναι ανάλογη.

1. Για $0 \leq l < i$ και με επαγωγή στο i έχουμε ότι

$$\sigma_{i-l} \cdots \sigma_{i-1}(e_i) = \sum_{j=0}^l |Q(i, i-j)| e_{i-j}$$

στον \mathbb{Z}^n . Για $l = i - 1$ έχουμε ότι

$$\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}(e_i) = \dim P(i)$$

αφού δεν υπάρχουν μονοπάτια από την κορυφή i στην j για $j > 1$.

2. Με επαγωγή και πάλι για $0 \leq l < i$ από τη σχέση

$$\sigma_{i-l} \cdots \sigma_{i-1}(e_i) = \sum_{j=0}^l |Q(i, i-j)| e_{i-j}$$

έχουμε ότι

$$\dim S_l^+ \cdots S_1^+ P(i) = \sigma_{l+l} \cdots \sigma_{i-1}(e_i)$$

όμως

$$S_{i+1}^+ \cdots S_1^+ P(i) \simeq S(i)$$

και έτσι

$$P(i) \simeq S_1^- \cdots S_{i-1}^- S(i)$$

□

Παράδειγμα 4.2.45. Έστω η φαρέτρα

$$Q: \quad 1 \bullet \xrightarrow{\alpha} 2 \bullet \xrightarrow{\beta} 3 \bullet$$



και μια αποδεκτή διάταξη κορυφών αυτής 3, 2, 1. Μελετήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο τις προβολικές και injective αναπαραστάσεις της Q οπότε για τις κορυφές 1, 3 έχουμε :

$$P(1) : \quad \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$P(3) : \quad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$I(1) : \quad \mathbb{K} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

$$I(3) : \quad \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

Οπότε έχουμε $\underline{\dim} P(1) = (1, 1, 1)$, $\underline{\dim} P(3) = (0, 0, 1)$, $\underline{\dim} I(1) = (1, 0, 0)$ και $\underline{\dim} I(3) = (1, 1, 1)$. Θα βρούμε τώρα την απεικόνιση ανάκλασης

$$\sigma_1 \sigma_2 : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$$

Έχουμε

$$\sigma_2 : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$$

με τύπο

$$\sigma_2(e_3) = e_3 - \frac{2(e_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 = e_3 - (e_3, e_2) e_2$$

όπου $(e_3, e_2) = \langle e_3, e_2 \rangle + \langle e_2, e_3 \rangle = -1$. Άρα

$$\sigma_2(e_3) = (0, 1, 1)$$

Αν εφαρμόσουμε τώρα την ανάκλαση

$$\sigma_1 : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$$

θα έχουμε

$$\sigma_1(\sigma_2(e_3)) = \sigma_1(0, 1, 1) = (0, 1, 1) - \frac{2((0, 1, 1), e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = (0, 1, 1) - ((0, 1, 1), e_1) e_1$$

όπου $((0, 1, 1), e_2) = \langle (0, 1, 1), e_2 \rangle + \langle e_2, (0, 1, 1) \rangle = -1$ Άρα

$$\sigma_1 \sigma_2(e_3) = \sigma_1(\sigma_2(e_3)) = (1, 1, 1)$$

Συνεπώς

$$\underline{\dim} I(3) = (1, 1, 1) = \sigma_1 \sigma_2(e_3)$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι

$$\underline{\dim} P(3) = (0, 0, 1) = e_3$$

$$\underline{\dim} I(1) = (1, 0, 0) = e_1$$

Επιπλέον παρατηρούμε ότι $P(3) \simeq S(3)$ και $I(1) \simeq S(1)$.

Έστω τώρα ο συναρτητής

$$\sigma_2 : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$$

με τύπο

$$\sigma_2(e_1) = e_1 - \frac{2(e_1, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 = e_1 - (e_1, e_2) e_2$$



όπου $(e_1, e_2) = \langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_2, e_1 \rangle = -1$. και

$$\sigma_3 : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$$

Θα έχουμε

$$\sigma_3(\sigma_2(e_1)) = \sigma_3(1, 1, 0) = (1, 1, 0) - \frac{2\langle (1, 1, 0), e_3 \rangle}{\langle e_3, e_3 \rangle} e_3 = (1, 1, 0) - \langle (1, 1, 0), e_3 \rangle e_3$$

όπου $\langle (1, 1, 0), e_3 \rangle = \langle (1, 1, 0), e_3 \rangle + \langle e_3, (1, 1, 0) \rangle = -1$ Άρα

$$\sigma_3\sigma_2(e_1) = \sigma_3(\sigma_2(e_1)) = (1, 1, 1)$$

Συνεπώς

$$\dim P(3) = (1, 1, 1) = \sigma_3\sigma_2(e_1)$$

Πρόταση 4.2.46. Έστω Q μια φαρέτρα και X μια μη-αναθύσιμη αναπαράσταση της Q . Τότε

1. $C^+X = 0$ αν και μόνον αν $X \simeq P(i)$ για κάποια κορυφή i .
2. $C^-X = 0$ αν και μόνον αν $X \simeq I(i)$ για κάποια κορυφή i .

Απόδειξη. 1. Απο το λήμμα (4.2.33) έχουμε ότι

$$P(i) \simeq S_1^- \cdots S_{i-1}^- S(i)$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε τον συναρτητή ανάκλασης C^+ θα έχουμε

$$\begin{aligned} C^+P(i) &= S_n^+ \cdots S_1^+ S_1^- \cdots S_{i-1}^- S(i) = \\ &= S_n^+ \cdots S_{i-1}^+ S(i) = 0 \end{aligned}$$

Αντίστροφα αν $C^+X = 0$ θα έχουμε

$$X \simeq S_1^- \cdots S_{i-1}^- S(i)$$

για κάποια κορυφή i . Τότε $X \simeq P(i)$.

2. Πάλι απο το λήμμα (4.2.33) έχουμε ότι

$$I(i) \simeq S_n^+ \cdots S_{i+1}^+ S(i)$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε τον συναρτητή ανάκλασης C^- θα έχουμε

$$\begin{aligned} C^-I(i) &= S_1^- \cdots S_n^- S_n^+ \cdots S_{i+1}^+ S(i) = \\ &= S_1^- \cdots S_i^- S(i) = 0 \end{aligned}$$

Αντίστροφα αν $C^-X = 0$ θα έχουμε

$$X \simeq S_n^+ \cdots S_{i+1}^+ S(i)$$

για κάποια κορυφή i . Τότε $X \simeq I(i)$.



Θα μιλήσουμε τώρα για ένα ακόμη εργαλείο που θα χρειαστούμε, τις preprojective και preinjective αναπαραστάσεις. Πιο συγκεκριμένα θα μιλήσουμε για τρεις κλάσεις αναπαραστάσεων. Για αυτό τον λόγο θεωρούμε μια φαρέτρα χωρίς προσανατολισμένους κύκλους, έστω Q , και X μια μη-αναλύσιμη αναπαράσταση της Q .

Ορισμός 4.2.47. Η αναπαράσταση X καλείται *προπροβολική (preprojective)* αν $X \simeq C^r P(i)$ για κάποιο $r \leq 0$ και κάποια κορυφή i .

Ορισμός 4.2.48. Η αναπαράσταση X καλείται *προεμβολική (preinjective)* αν $X \simeq C^r I(i)$ για κάποιο $r \geq 0$ και κάποια κορυφή i .

Ορισμός 4.2.49. Η αναπαράσταση X καλείται *regular* αν $C^r X \neq 0$ για $r \in \mathbb{Z}$.

Παρατήρηση 4.2.50. Μια άμεση συνέπεια της πρότασης (4.2.34.) είναι ότι η αναπαράσταση X είναι preprojective αν και μόνον αν $C^r X = 0$ για κάποιο $r > 0$ και είναι preinjective αν και μόνον αν $C^r X = 0$ για κάποιο $r < 0$.

Παρατήρηση 4.2.51. Μια μη-αναλύσιμη αναπαράσταση X της φαρέτρας Q είναι preprojective ή preinjective ή regular.

Πρόταση 4.2.52. Έστω Q μια φαρέτρα και X, Y δύο μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις της με την X να είναι preprojective ή preinjective. Τότε $X \simeq Y$ αν και μόνον αν $\dim X = \dim Y$.

Επιπλέον

1. Ο ισομορφισμός $C^r P(i) \simeq C^s P(j) \neq 0$ συνεπάγεται ότι $i = j$ και $r = s$.
2. Ο ισομορφισμός $C^r I(i) \simeq C^s I(j) \neq 0$ συνεπάγεται ότι $i = j$ και $r = s$.

Απόδειξη. Έστω $X \simeq Y$ και X να είναι preprojective. Δηλαδή

$$X \simeq C^r P(i) \simeq Y$$

Άρα

$$X \simeq C^r S_1^- \cdots S_{i-1}^- S(i) \simeq C^r P(i) \simeq Y$$

Αν εφαρμόσουμε τους συναρτητές ανάκλασης θα έχουμε

$$S_{i-1}^+ \cdots S_1^+ C^{-r}(X) \simeq S(i) \simeq S_{i-1}^+ \cdots S_1^+ C^{-r}(Y)$$

και αν εφαρμόσουμε για ακόμη μια φορά τους συναρτητές ανάκλασης θα έχουμε τελικά

$$\dim X = (\sigma_n \cdots \sigma_1)^r \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}(e_i) = \dim Y$$

αφού $\dim S_i^+ X = \sigma_i(\dim X)$.

Αντίστροφα έστω $\dim X = \dim Y$ και X να είναι preprojective με

$$X \simeq C^r P(i)$$

Τότε

$$\dim X = (\sigma_n \cdots \sigma_1)^r \dim P(i)$$

Δηλαδή

$$\dim Y = (\sigma_n \cdots \sigma_1)^r \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}(e_i)$$



με

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} -d_{ij}, & i \neq j \\ 2 - 2d_{ii}, & i = j \end{cases}$$

όπου e_i είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της κανονικής βάσης του \mathbb{Z}^n στην i κορυφή και για $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ μια τετραγωνική μορφή

$$q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$$

με τύπο

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \leq j} d_{ij} x_i x_j$$

Παρατήρηση 4.3.2. Το γράφημα Γ η συμμετρική μορφή $(-, -)$ και η τετραγωνική μορφή q καθορίζονται μεταξύ τους αφού παρατηρούμε ότι

$$(x, x) = 2q(x)$$

και

$$(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$$

Παρατήρηση 4.3.3. Ας θυμηθούμε την Euler form που μελετήσαμε νωρίτερα. Έστω Q μια φαρέτρα με $n = |Q_0|$. Ορίζουμε για $x, y \in \mathbb{Z}^n$ τη διγραμμική μορφή

$$\langle -, - \rangle_Q : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$$

με τύπο

$$\langle x, y \rangle_Q = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} y_{t(\alpha)}$$

η οποία καλείται Euler form. Ισχύει τότε

$$q_Q(x) = \langle x, x \rangle_Q$$

και

$$(x, y)_Q = \langle x, y \rangle_Q + \langle y, x \rangle_Q$$

Ορισμός 4.3.4. Το ριζικό της τετραγωνικής μορφής q ορίζεται το σύνολο

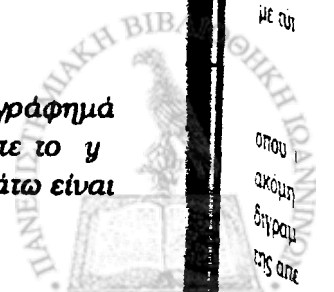
$$\text{Rad}(q) = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid (x, -) = 0\}$$

Ορισμός 4.3.5. Ένα στοιχείο $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ καλείται *ειλικρινές* (sincere) αν $x_i \neq 0$ για κάθε i . Γράφουμε $x \geq 0$ αν $x_i \geq 0$ για κάθε i και $x > 0$ αν $x \geq 0$ και $x_i \neq 0$ για κάθε i .

Ορισμός 4.3.6. Έστω $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ μια τετραγωνική μορφή. Τότε

1. Η q είναι θετικά ορισμένη αν $q(x) > 0$ για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathbb{Z}^n$.
2. Η q είναι θετικά ημι-ορισμένη αν $q(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{Z}^n$.

Λήμμα 4.3.7. Έστω Q μια συνεκτική φαρέτρα και Γ το συνεκτικό γράφημά της. Έστω $y \in \mathbb{Z}^n$ ένα θετικό μη μηδενικό στοιχείο στο $\text{Rad}(q)$. Τότε το y είναι ειλικρινές και q είναι θετικά ημι-ορισμένη. Για $x \in \mathbb{Z}^n$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.



1. $q(x) = 0$.
2. $x \in \mathbb{Q}y$.
3. $x \in \text{Rad}(q)$.

Απόδειξη. Απο την υπόθεση έχουμε ότι

$$0 = (e_i, y) = (2 - 2d_{ii})y_i - \sum_{j \neq i} d_{ij}y_j$$

για $1 \leq i \leq n$. Αν $y_i = 0$ τότε

$$\sum_{j \neq i} d_{ij}y_j = 0$$

και επειδή $q_{ij} \geq 0$ για κάθε i, j και $y \geq 0$ έχουμε ότι $y_j = 0$ όταν $q_{ij} > 0$. Άρα $y = 0$ αφού το Γ είναι συνεκτικό. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού το y είναι ειλικρινές στοιχείο.

Ο παρακάτω υπολογισμός δείχνει ότι η τετραγωνική μορφή q είναι θετικά ημι-ορισμένη. Δηλαδή $q(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_i (2 - 2d_{ii})y_i \frac{1}{2y_i} x_i^2 - \sum_{i < j} d_{ij} x_i x_j = \\ &= \sum_{i \neq j} d_{ij} \frac{y_j}{2y_i} x_i^2 - \sum_{i < j} d_{ij} x_i x_j = \\ &= \sum_{i < j} d_{ij} \frac{y_j}{2y_i} x_i^2 - \sum_{i < j} d_{ij} x_i x_j + \sum_{i < j} d_{ij} \frac{y_i}{2y_j} x_j^2 = \\ &= \sum_{i < j} d_{ij} \frac{y_i y_j}{2} \left(\frac{x_i}{y_i} - \frac{x_j}{y_j} \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) \Rightarrow (ii) Αν $q(x) = 0$ τότε $\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j}$ όταν $q_{ij} > 0$. Άρα $x \in \mathbb{Q}y$ αφού το γράφημα Γ είναι συνεκτικό.

(ii) \Rightarrow (iii) Αν $x \in \mathbb{Q}y$ τότε $x \in \text{Rad}(q)$ αφού το $y \in \text{Rad}(q)$.

(iii) \Rightarrow (i) Αν $x \in \text{Rad}(q)$ τότε $q(x) = 0$.

□

Θα διατυπώσουμε τώρα τον ορισμό του συστήματος ριζών και του πίνακα Cartan του συστήματος ριζών. Οι πίνακες Cartan θα μας χρειαστούν γιατί μπορούμε να συνδυάσουμε κάθε ένα τέτοιο πίνακα με ένα διάγραμμα Dynkin. Ας θυμηθούμε τώρα τις απεικονίσεις ανάκλασης

$$\sigma_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$$

με τύπο

$$\sigma_i(x) = x - \frac{2(x_i, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$

όπου e_i είναι το i -οστό μοναδιαίο διάνυσμα της κανονικής βάσης του \mathbb{Z}^n . Έστω ακόμη $V \simeq \mathbb{Z}^n$ μια αβελιανή ομάδα εφοδιασμένη με ένα θετικό συμμετρικό διγραμμικό γινόμενο της μορφής $(-, -)$. Επίσης χρησιμοποιούμε τον περιορισμό της απεικόνισης ανάκλασης $\sigma_i|_V$.



Ορισμός 4.3.8. Ένα σύστημα ριζών είναι ένα υποσύνολο $K \subset V \simeq \mathbb{Z}^n$ έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω :

1. Το K είναι πεπερασμένο, παράγει τον V και $0 \notin K$.
2. Αν $x \in K$ τότε $\mathbb{Z}x \cap K = \{\pm x\}$.
3. Αν $x \in K$ τότε $\sigma_i K = K$.
4. Αν $x, y \in K$ τότε $\frac{2(x,y)}{(y,y)}y \in \mathbb{Z}$.

Ορισμός 4.3.9. Η ομάδα που παράγεται από όλες τις απεικονίσεις ανακλάσεις $\sigma_i, i \in K$ ονομάζεται ομάδα **Weyl**. Η ομάδα Weyl είναι πεπερασμένη αφού όπως είδαμε μεταδέτει το K , και το K είναι πεπερασμένο και παράγει το V .

Ορισμός 4.3.10. Ένα υποσύνολο $\Pi \subset K$ ονομάζεται **βάση** αν

1. Το Π είναι μιά βάση του διανυσματικού χώρου V .
2. Για κάθε $k \in K$ έχουμε ότι

$$k = \sum_{x \in \Pi} \lambda_x x$$

όπου λ_x είναι όλοι θετικοί ή αρνητικοί ακέραιοι.

Ορισμός 4.3.11. Έστω μια βάση Π του συστήματος ριζών K . Τότε τα στοιχεία του K καλούνται **απλές ρίζες**. Αν $k \in K$ είναι ένας θετικός συνδυασμός απλών ριζών τότε το k καλείται **θετική ρίζα**. Αλλιώς αν $k \in K$ είναι αρνητικός συνδυασμός απλών ριζών τότε το k καλείται **αρνητική ρίζα**. Το σύνολο των θετικών ριζών συμβολίζεται με Δ^+ , των αρνητικών ριζών με Δ^- και γράφουμε

$$\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$$

με

$$\Delta = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid q(x) \leq 1\}$$

Ένα μη μηδενικό στοιχείο του συνόλου Δ καλείται **ρίζα**. Η ρίζα x της φάρεφρας Q καλείται **πραγματική** αν $q(x) = 1$. Διαφορετικά αν $q(x) = 0$ η ρίζα x της Q καλείται **φανταστική ρίζα**. Το σύνολο των πραγματικών ριζών συμβολίζεται με Δ^{re} και των φανταστικών Δ^{im} .

Ορισμός 4.3.12. Έστω K ένα σύστημα ριζών και $\Pi \subset K$ μια βάση. Έστω ακόμη $\Pi = \{x_1, \dots, x_n\}$. Τότε ο πίνακας

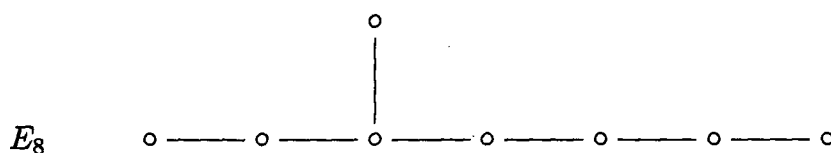
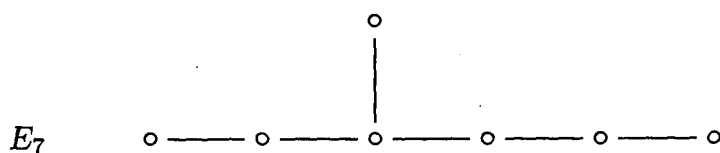
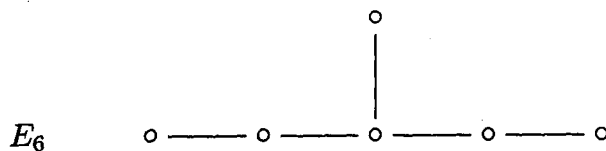
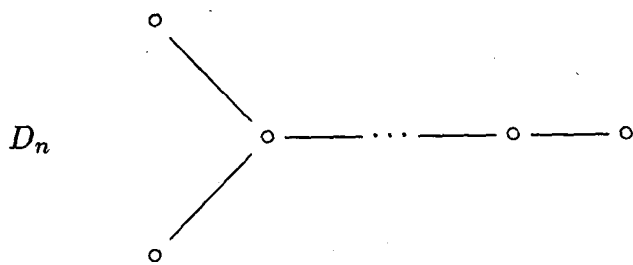
$$C = ([x_i, x_j])_{i,j}^n$$

καλείται **πίνακας Cartan** του συστήματος ριζών K .

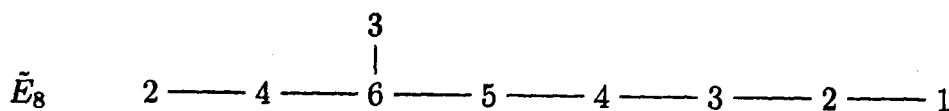
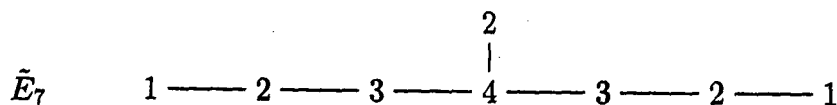
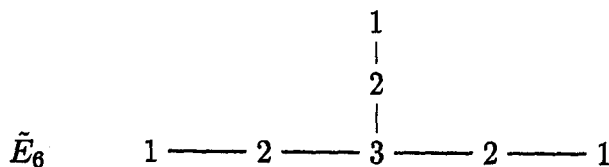
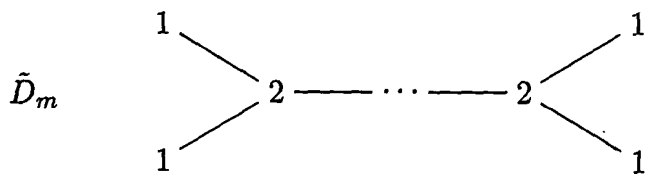
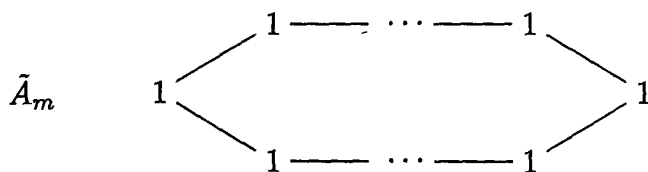
Ας δούμε τώρα ποια είναι τα Dynkin και Euclidean διαγράμματα. Τα Dynkin διαγράμματα με n κορυφές είναι :

$$A_n \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ$$





Ενώ τα Euclidean διαγράμματα με $n = m + 1$ κορυφές είναι :



Κάθε κορυφή i γράφεται με την τιμή δ_i ενός διανύσματος $\delta \in \mathbb{Z}^n$. Ακόμη $m \geq 0$ για \tilde{A}_m και $m \geq 4$ για \tilde{D}_m .



Θεώρημα 4.3.13. Έστω Γ ένα συνεκικό γράφημα και q η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Τότε

1. Το Γ είναι ένα Dynkin διάγραμμα αν και μόνον αν η q είναι θετικά ορισμένη.
2. Το Γ είναι ένα Euclidean διάγραμμα αν και μόνον αν η q είναι θετικά ημι-ορισμένη και όχι θετικά ορισμένη. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ένα μοναδικό θετικό διάνυσμα $\delta \in \mathbb{Z}^n$ με $\text{Rad } q = \mathbb{Z}\delta$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί σε τρία βήματα.

Βήμα 1. Απο το λήμμα (4.3.7) προκύπτει ότι $\delta \in \text{Rad } q$. Αν το Γ δεν έχει κύκλους ή πολλαπλές ακμές πρέπει να εξετάσουμε ότι για κάθε κορυφή i έχουμε

$$2\delta_i = \sum_j \delta_j$$

Πραγματικά

$$0 = (e_i, \delta) = 2\delta_i - \sum_{\substack{j=1 \\ d_{ij} \neq 0}}^n \delta_j$$

για $1 \leq i \leq n$. Επειδή για κάποιο $\delta_i = 1$ έχουμε $\text{Rad } q = \mathbb{Q}\delta \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\delta$.

Βήμα 2. Κάθε Dynkin διάγραμμα Γ με n κορυφές μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα πλήρες υποδιάγραμμα ενός Euclidean διαγράμματος $\tilde{\Gamma}$ με $n+1$ κορυφές. Έχουμε ότι $q_{\tilde{\Gamma}}(x) > 0$ για κάθε μη ελικρινές στοιχείο $x \in \mathbb{Z}^{n+1}$, αφού τα στοιχεία x με $q_{\tilde{\Gamma}}(x) = 0$ είναι πολλαπλάσια των ελικρινών στοιχείων δ . Άρα η q_{Γ} είναι θετικά ορισμένη. (Η μορφή q_{Γ} προκύπτει από την $q_{\tilde{\Gamma}}$ μέσω του περιορισμού στο γράφημα Γ του γραφήματος $\tilde{\Gamma}$).

Βήμα 3. Έστω τώρα ένα γράφημα Γ το οποίο δεν είναι Dynkin ούτε Euclidean. Τότε το Γ περιέχει ένα υπογράφημα $\tilde{\Gamma}$ το οποίο είναι Euclidean. Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα διάστασης του $\tilde{\Gamma}$ μπορεί να θεωρηθεί διάνυσμα διάστασης του Γ . Αυτό γίνεται με ένθεση στο διάνυσμα μηδενικών συνιστωσών και το πλήθος όσες και οι επιπλέον κορυφές του γραφήματος Γ . Έστω $\delta \in \text{Rad } q_{\tilde{\Gamma}}$. Αν $x = \delta$ με $x \in \mathbb{Z}^n$ τότε $q_{\Gamma}(x) < 0$. Διαφορετικά αν i είναι μια κορυφή του Γ που δεν είναι κορυφή στο $\tilde{\Gamma}$ αλλά συνδέεται με το $\tilde{\Gamma}$ με μια άκρη τότε η σχέση $x = 2\delta + e_i$ συνεπάγεται $q_{\Gamma}(x) < 0$.

□

Πρόταση 4.3.14. Έστω Γ ένα γράφημα το οποίο είναι Dynkin ή Euclidean. Τότε

1. Κάθε e_i είναι ρίζα.
2. Αν $x \in \Delta$ και $y \in \text{Rad } q$ τότε $-x, x + y \in \Delta$.
3. Κάθε ρίζα είναι θετική ή αρνητική.
4. Αν Γ είναι Euclidean τότε $\Delta / \text{Rad } q$ είναι πεπερασμένο.
5. Αν Γ είναι Dynkin τότε Δ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη. 1. Έχουμε $q(e_i) = 1$ άρα e_i είναι ρίζα.

Δη
Ελα
τοτεΑπο
καθηη
ματιΟρισ
και εί
αυτομ

με επι

Ο απο

Στο
τον αριθ

2. Έστω x ρίζα και $y \in \text{Rad } q$. Τότε

$$q(x+y) = q(y) + q(x) + (y, x) = q(x)$$

και

$$q(y-x) = q(y) + q(x) - (y, x)$$

Άρα $-x$ και $x+y$ ανήκουν στο Δ . Αν $y=0$ έχουμε ότι $q(-x) = q(x)$.

3. Έστω x μια ρίζα η οποία γράφεται $x = x^+ - x^-$ όπου $x^+, x^- \geq 0$ και οι x^+, x^- έχουν ξένα support. Δηλαδή οι $q(x^+)$ και $q(x^-)$ δεν μηδενίζουν ταυτόχρονα. Τότε $(x^+ - x^-) \leq 0$ και

$$1 \geq q(x) = q(x^+) + q(x^-) - (x^+ - x^-) \geq q(x^+) + q(x^-) \geq 0$$

Άρα $q(x^+) = 0$ ή $q(x^-) = 0$. Δηλαδή ένα από τα $x^+ - x^-$ είναι ειλικρινές αν υποθέσουμε ότι και τα δύο διανύσματα είναι μη μηδενικά. Αυτό όμως είναι άτοπο και έτσι η ρίζα x είναι θετική ή αρνητική.

4. Έστω e μια κορυφή. Αν x είναι μια ρίζα με $x_e = 0$ τότε $\delta - x$ και $\delta + x$ είναι θετικά στην e κορυφή. Και τα δύο διανύσματα είναι ρίζες λόγω του (ii) και μάλιστα θετικές λόγω του (iii). Άρα το σύνολο

$$\{x \in \Delta | x_e = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z}^n | -\delta \leq x \leq \delta\}$$

είναι πεπερασμένο. Αν $x \in \Delta$ τότε $x - x_e \delta \in \{x \in \Delta | x_e = 0\}$.

5. Έστω Γ ένα Dynkin διάγραμμα. Τότε υπάρχει ένα Euclidean διάγραμμα $\tilde{\Gamma}$ που προκύπτει από το Γ διαγράφοντας κάποια κορυφή e . Μια ρίζα του $\tilde{\Gamma}$ γραφήματος μπορεί να περιγράψει μια ρίζα x του Γ γραφήματος με $x_e = 0$. Άρα λόγω του (iv) αποδείξαμε το συμπέρασμα. \square

Λήμμα 4.3.15. Έστω Q μια φαρέτρα της οποίας το γράφημα είναι Dynkin ή Euclidean διάγραμμα. Αν x είναι μια θετική ρίζα και $\sigma_i(x)$ είναι μια μη θετική, τότε $x = e_i$.

Απόδειξη. Η ρίζα $\sigma_i(x)$ είναι μη θετική λόγω υπόθεσης και άρα αρνητική. Για κάθε κορυφή $j \neq i$ έχουμε $(\sigma_i(x))_j = x_j$ και άρα $x_j = 0$. Άρα $x = e_i$. \square

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο μελετώντας ακόμη ένα εργαλείο, τον μετασχηματισμό Coxeter.

Ορισμός 4.3.16. Έστω Q μια φαρέτρα χωρίς προσανατολισμένους κύκλους και έστω i_1, \dots, i_n μια αποδεκτή διάταξη κορυφών της Q . Ορίζουμε τότε τον αυτομορφισμό

$$c : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$$

με τύπο

$$c(x) = \sigma_{i_n} \cdots \sigma_{i_1}(x)$$

Ο αυτομορφισμός c καλείται **μετασχηματισμός Coxeter**.

Στο επόμενο λήμμα δείχνουμε ότι ο μετασχηματισμός c δεν εξαρτάται από τον αριθμό των κορυφών.



Λήμμα 4.3.17. 1. $c(\dim P(i)) = -\dim I(i)$ για κάθε κορυφή i .

2. Τα σύνολα $\{\dim P(i) | i \in Q_0\}$ και $\{\dim I(i) | i \in Q_0\}$ περιγράφουν δύο βάσεις του \mathbb{Z}^n .

Απόδειξη. 1. Έστω $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ το σύνολο των κορυφών της φαρέτρας Q . Τότε

$$\dim P(i) = \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}(e_i)$$

και αν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό c θα έχουμε

$$\begin{aligned} c(\dim P(i)) &= c\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}(e_i) = \sigma_1 \cdots \sigma_i(e_i) = \\ &= -\sigma_n \cdots \sigma_{i+1}(e_i) = -\dim I(i) \end{aligned}$$

2. Γνωρίζουμε ότι

$$e_i = \dim P(i) - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} \dim P(t(\alpha)) = \dim I(i) - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \dim I(s(\alpha))$$

□

Λήμμα 4.3.18. Έστω $x, y \in \mathbb{Z}^n$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω :

1. $\langle \dim P(i), x \rangle = x_i = \langle x, \dim I(i) \rangle$ για κάθε κορυφή i .

2. $\langle x, y \rangle = -\langle y, c(x) \rangle = \langle c(x), c(y) \rangle$.

Απόδειξη. 1.

2. Για $x = \dim P(j)$ όπου j διατρέχει όλες τις κορυφές έχουμε ότι

$$\langle \dim P(j), y \rangle = \langle y, \dim I(j) \rangle$$

λόγω του (1) και άρα

$$\langle \dim P(j), j \rangle = \langle y, \dim I(j) \rangle = \langle y, -c(\dim P(j)) \rangle$$

λόγω της προηγούμενης πρότασης.

□

Λήμμα 4.3.19. Έστω $x \in \mathbb{Z}^n$. Τότε $c(x) = x$ αν και μόνον αν $x \in \text{Rad } q$.

Απόδειξη. Αν

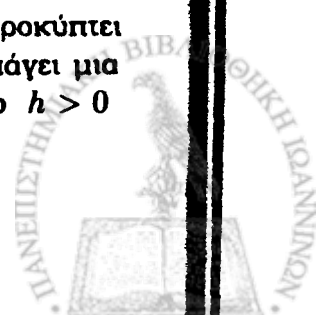
$$c(x)x \Leftrightarrow x_i = c(x)_i = (\sigma_i(x))_i$$

για όλες τις κορυφές i . Έτσι $(x, e_i) = 0$ για όλες τις κορυφές i και άρα $(x, -) = 0$. □

Μέχρι το τέλος της παραγράφου θα θεωρήσουμε ότι το γράφημα που προκύπτει από την φαρέτρα Q είναι Dynkin ή Euclidean. Η απεικόνιση c επάγει μια μετάθεση του πεπερασμένου συνόλου $\Delta / \text{Rad } q$. Άρα η c^h για κάποιο $h > 0$ απεικόνιση είναι

$$c^h = 1_{\mathbb{Z}^n / \text{Rad } q}$$

αφού το $e_i \in \Delta$ για κάθε i .



Λήμμα 4.3.20. Έστω Q μια φαρέτρα της οποίας το γράφημα είναι Dynkin. Έστω ακόμη $x \in \mathbb{Z}^n$. Τότε υπάρχει $r \geq 0$ τέτοιο ώστε το $c^r(x)$ είναι μη θετικό.

Απόδειξη. Το διάνυσμα

$$y = \sum_{r=0}^{h-1} c^r(x)$$

ορίζεται από τον μετασχηματισμό c . Άρα $y = 0$ λόγω του προηγούμενου λήμματος. Άρα το $c^r(x)$ είναι μη θετικό για κάποιο $r \geq 0$. \square

Λήμμα 4.3.21. Έστω Q μια φαρέτρα της οποίας το γράφημα είναι Euclidean και έστω $x \in \mathbb{Z}^n$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. Αν $c^r(x) > 0$ για όλα τα $r \in \mathbb{Z}$, τότε $c^h(x) = x$.
2. Αν $c^h(x) = x$, τότε $\langle \delta, x \rangle = 0$.

Απόδειξη. 1. Έστω $c^h(x) = x + v$ για κάποιο μη μηδενικό $v \in \text{Rad } q$. Με επαγωγή προκύπτει ότι

$$c^{lh}(x) = x + lv$$

για κάθε $l \in \mathbb{Z}$. Έτσι για κάποιο r έχουμε ότι $c^r(x)$ είναι μη θετικό αφού το διάνυσμα v είναι ειλικρινές και θετικό ή αρνητικό.

2. Το διάνυσμα

$$y = \sum_{r=0}^{h-1} c^r(x)$$

ορίζεται από τον μετασχηματισμό c και άρα $y \in \mathbb{Z}\delta$. Όμως

$$0 = \langle \delta, y \rangle = \sum_{r=0}^{h-1} \langle \delta, c^r(x) \rangle = h \langle \delta, x \rangle$$

αφού ο c διατηρεί την Euler form. Άρα $\langle \delta, x \rangle = 0$. \square



Κεφάλαιο 5

Το Θεώρημα του Gabriel

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε ότι οι φαρέτρες των οποίων το υποκείμενο διάγραμμα είναι Dynkin, έχουν πεπερασμένες πολλές μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις. Αντίστροφα θα δείξουμε ότι κάθε φαρέτρα με πεπερασμένο πλήθος μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων έχει σαν υποκείμενο γράφημα ένα διάγραμμα Dynkin. Θα ξεκινήσουμε μελετώντας φαρέτρες οι οποίες έχουν υποκείμενο διάγραμμα A_1, A_2, A_3 αλλά και D_4 για να δείξουμε την αυξανόμενη πολυπλοκότητα των αποδείξεων χρησιμοποιώντας Γράμμικη Άλγεβρα. Σταθεροποιούμε από τώρα και μέχρι το τέλος του κεφαλαίου ένα σώμα \mathbb{K} .

5.1 Μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις των A_1, A_2, A_3 και D_4

Πριν ξεκινήσουμε σημειώνουμε ότι για να περιγράψουμε μια απεικόνιση από ένα διανυσματικό χώρο διάστασης 1 στον μηδενικό χώρο χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbb{K} \longrightarrow 0$, ενώ για να περιγράψουμε μια απεικόνιση από τον μηδενικό χώρο σε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης 1, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $0 \longrightarrow \mathbb{K}$. Ανάλογα για να περιγράψουμε ισομορφισμό μεταξύ διανυσματικών χώρων διάστασης 1 χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$. Σε αυτά τα διαγράμματα ο χώρος \mathbb{K} συμβολίζει τον χώρο διάστασης 1 και οι απεικονίσεις είναι κανονικές.

Σχόλιο 5.1.1. Στα παραδείγματα θα δείξουμε ότι οι φαρέτρες τύπου A_1, A_2, A_3 και D_4 αναλύονται σε μη-ισόμορφες αναπαραστάσεις οι οποίες με τη σειρά τους θα είναι ευθέα αθροίσματα από μη-ισόμορφες, μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις. Θα δούμε λοιπόν ότι υπάρχει αναλυτική περιγραφή των κλάσεων ισομορφίας των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων για κάθε φαρέτρα.

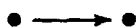
Ας ξεκινήσουμε με το διάγραμμα A_1 .

Παράδειγμα 5.1.2. Η φαρέτρα A_1 αποτελείται από μια κορυφή και δεν έχει ακμές. Άρα μια τυχούσα αναπαράσταση της A_1 αποτελείται από τον διανυσματικό χώρο \mathbb{K} και άρα είναι η μόνη μη-αναλύσιμη αναπαράσταση της.

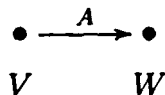
Συνεχίζουμε με το διάγραμμα A_2 .



Παράδειγμα 5.1.3. Η φαρέτρα A_2 αποτελείται από δύο κορυφές που συνδέονται από ένα βέλος. Δηλαδή



Μια αναπαράσταση της φαρέτρας αποτελείται από δύο διανυσματικούς χώρους V, W και μια γραμμική απεικόνιση $A : V \rightarrow W$. Δηλαδή



Για να αναλύσουμε αυτή την αναπαράσταση, θεωρούμε το συμπλήρωμα V' του $\text{Ker } A$ στον V χώρο και το συμπλήρωμα W' της $\text{Im } A$ στον W . Τότε η αναπαράσταση αναλύεται ως εξής :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{A} & \bullet \\ V & & W \end{array} = \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{0} & \bullet \\ \text{Ker } A & & 0 \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\tilde{A}} & \bullet \\ V' & & \text{Im } A \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{0} & \bullet \\ 0 & & W' \end{array} \right)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι αναπαραστάσεις της παραπάνω ανάλυσης είναι προφανώς μη ισόμορφες και μάλιστα ο πρώτος αθροιστέος είναι το ευθύ άθροισμα από $\dim \text{Ker } A = r$ αντίγραφα της μη-αναλύσιμης αναπαράστασης $\mathbb{K} \longrightarrow 0$, ο δεύτερος αθροιστέος είναι το ευθύ άθροισμα από $\dim \text{Im } A = \dim V' = s$ αντίγραφα της μη-αναλύσιμης $\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$ και ο τρίτος αθροιστέος είναι το ευθύ άθροισμα από $\dim W' = l$ αντίγραφα της $0 \longrightarrow \mathbb{K}$. Άρα η φαρέτρα A_2 έχει τρεις μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις

$$\mathbb{K} \longrightarrow 0, \quad \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \quad \text{και} \quad 0 \longrightarrow \mathbb{K}$$

Ας δούμε τώρα το διάγραμμα A_3 .

Παράδειγμα 5.1.4. Η φαρέτρα A_3 αποτελείται από 3 κορυφές και 2 βέλη που τις συνδέει. Άρα έχουμε να διαλέξουμε μεταξύ των προσανατολισμών :



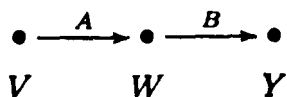
ή



Ας μελετήσουμε πρώτα τον προσανατολισμό



Μια αναπαράσταση της φαρέτρας είναι της μορφής :



Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα διασπούμε πρώτα

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{0} & \bullet & \xrightarrow{0} & \bullet \\ \text{Ker } A & & 0 & & 0 \end{array}$$

Αυτή λοιπόν η αναπαράσταση είναι το ευθύ άθροισμα απο $\dim \text{Ker } A = r$ αντίγραφα της μη-αναλύσιμης αναπαράστασης $\mathbb{K} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$. Έστω τώρα το συμπλήρωμα Y' της $\text{Im } B$ στον Y . Άρα διασπούμε ξανά και έχουμε την αναπαράσταση

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{0} & \bullet & \xrightarrow{0} & \bullet \\ 0 & & 0 & & Y' \end{array}$$

η οποία είναι το ευθύ άθροισμα απο $\dim Y' = s$ αντίγραφα της μη-αναλύσιμης αναπαράστασης

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{K}$$

Δηλαδή οδηγούμαστε στην αναπαράσταση

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{A} & \bullet & \xrightarrow{B} & \bullet \\ V & & W & & Y \end{array}$$

όπου η απεικόνιση A είναι μονομορφισμός και η B είναι επιμορφισμός. Έστω τώρα $X = \text{Ker } BA$ και το συμπλήρωμα X' του X εντός του Y . Έστω ακόμα το συμπλήρωμα W' του $A(X)$ εντός του W και τέτοιο ώστε $A(X') \subset W'$. Τότε η ανάλυση της αναπαράστασης είναι :

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{A} & \bullet & \xrightarrow{B} & \bullet \\ V & & W & & Y \end{array} = \left(\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{A} & \bullet & \xrightarrow{B} & \bullet \\ X & & A(X) & & 0 \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{A} & \bullet & \xrightarrow{B} & \bullet \\ X' & & W' & & Y \end{array} \right)$$

ο πρώτος αθροιστέος είναι το ευθύ άθροισμα της μη-αναλύσιμης αναπαράστασης

$$\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

Ο δεύτερος αθροιστέος αποτελείται απο την απεικόνιση A η οποία είναι μονομορφισμός, απο την απεικόνιση B η οποία είναι επιμορφισμός και επιπλέον

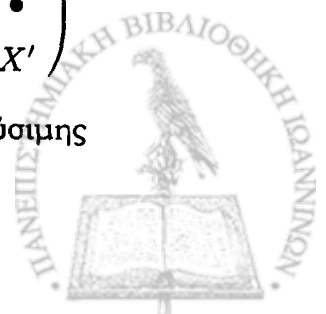
$$\text{Ker } BA = 0$$

Για να απλοποιήσουμε την αναπαράσταση θεωρούμε $V = X'$ και $W = W'$. Έστω τώρα $X = \text{Im } BA$ και έστω το συμπλήρωμα X' του X εντός του Y . Επιπλέον έστω $W' = B^{-1}(X')$. Τότε W' είναι το συμπλήρωμα του $A(V)$ εντός του W . Άρα επάγεται η ανάλυση

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{A} & \bullet & \xrightarrow{B} & \bullet \\ V & & W & & Y \end{array} = \left(\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\tilde{A}} & \bullet & \xrightarrow{\tilde{B}} & \bullet \\ V & & A(V) & & X \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{ccccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet & \xrightarrow{B} & \bullet \\ 0 & & W' & & X' \end{array} \right)$$

Σε αυτή την ανάλυση ο πρώτος αθροιστέος είναι το ευθύ άθροισμα της μη-αναλύσιμης αναπαράστασης

$$\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$



Αν τώρα στον δεύτερο αθροιστέο διασπάσουμε στον πυρήνα του B , τότε η αναπαράσταση που θα προκύψει θα είναι το ευθύ άθροισμα των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$

και

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

Άρα η φαρέτρα A_3 με προσανατολισμό

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

έχει 6 μη αναλύσιμες αναπαραστάσεις :

$$\mathbb{K} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

$$\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}, \quad 0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$$

Ας μελετήσουμε τώρα τον προσανατολισμό

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

Μια αναπαράσταση της φαρέτρας είναι της μορφής :

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{A} & \bullet & \xleftarrow{B} & \bullet \\ V & & W & & Y \end{array}$$

Έχουμε λοιπόν την αναπαράσταση

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{0} & \bullet & \xleftarrow{0} & \bullet \\ \text{Ker } A & & 0 & & 0 \end{array}$$

η οποία είναι το ευθύ άθροισμα απο $\dim \text{Ker } A = r$ αντίγραφα της μη-αναλύσιμης αναπαράστασης

$$\mathbb{K} \longrightarrow 0 \longleftarrow 0$$

και την αναπαράσταση

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{0} & \bullet & \xleftarrow{0} & \bullet \\ 0 & & 0 & & \text{Ker } B \end{array}$$

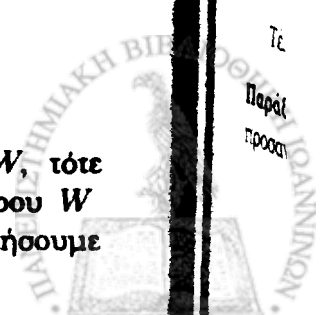
η οποία είναι το ευθύ άθροισμα απο $\dim \text{Ker } B = s$ αντίγραφα της μη-αναλύσιμης αναπαράστασης

$$0 \longrightarrow 0 \longleftarrow \mathbb{K}$$

Δηλαδή έχουμε την αναπαράσταση

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{A} & \bullet & \xleftarrow{B} & \bullet \\ V & & W & & Y \end{array}$$

όπου A, B είναι μονομορφισμοί. Αν V και Y είναι υπόχωροι του W , τότε μελετούμε το πρόβλημα ταξινόμησης ζευγών υποχώρων ενός δοσμένου χώρου W μέχρι ισομορφισμό (Το πρόβλημα των ζευγών υποχώρων). Για να μελετήσουμε



λοιπόν αυτό το πρόβλημα θεωρούμε το συμπλήρωμα W' του $V \cap Y$ στον W , και έστω $V' = W' \cap V$ και $Y' = W' \cap Y$. Τότε η ανάλυση της αναπαράστασης είναι

$$\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \xleftarrow{\quad} \bullet \\ V \qquad W \qquad Y \end{array} = \left(\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{A} \bullet \xleftarrow{B} \bullet \\ V' \qquad W' \qquad Y' \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \xleftarrow{\sim} \bullet \\ V \cap Y \quad V \cap Y \quad V \cap Y \end{array} \right)$$

Ο δεύτερος αθροιστέος είναι το ευθύ άθροισμα της μη-αναλύσιμης αναπαράστασης

$$\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xleftarrow{1} \mathbb{K}$$

Άρα αρκεί αναλύσουμε τον πρώτο αθροιστέο. Έστω λοιπόν $V = V'$, $W = W'$ $Y = Y'$ και $V \cap Y = 0$.

Επιπλέον έστω το συμπλήρωμα W' του $V \oplus Y$ στον W . Τότε

$$\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \xleftarrow{\quad} \bullet \\ V \qquad W' \qquad Y \end{array} = \left(\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{A} \bullet \xleftarrow{B} \bullet \\ V \qquad V \cap Y \qquad Y \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \xleftarrow{\quad} \bullet \\ 0 \qquad W' \qquad 0 \end{array} \right)$$

Ο δεύτερος αθροιστέος είναι το ευθύ άθροισμα απο $\dim W' = l$ αντίγραφα της μη-αναλύσιμης αναπαράστασης

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longleftarrow 0$$

Ο πρώτος αθροιστέος αναλύεται ως εξής :

$$\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \xleftarrow{\quad} \bullet \\ V \qquad W \qquad Y \end{array} = \left(\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \xleftarrow{\quad} \bullet \\ V \qquad V \qquad 0 \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \xleftarrow{\sim} \bullet \\ 0 \qquad Y \qquad Y \end{array} \right)$$

και οι αθροιστέοι είναι ευθέα άθροισματα των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων $\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \longleftarrow 0$ και $0 \longrightarrow \mathbb{K} \xleftarrow{1} \mathbb{K}$ αντίστοιχα. Άρα οι μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις της A_3 με προσανατολισμό

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

είναι, όπως και πριν :

$$\mathbb{K} \longrightarrow 0 \longleftarrow 0, \quad 0 \longrightarrow 0 \longleftarrow \mathbb{K}, \quad \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \longleftarrow 0$$

$$\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xleftarrow{1} \mathbb{K}, \quad 0 \longrightarrow \mathbb{K} \longleftarrow 0, \quad 0 \longrightarrow \mathbb{K} \xleftarrow{1} \mathbb{K}$$

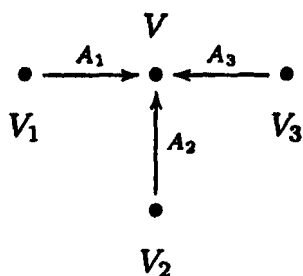
Τέλος θα μελετήσουμε τις μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις της φαρέτρας D_4 .

Παράδειγμα 5.1.5. Για το παράδειγμα της φαρέτρας D_4 ας διαλέξουμε τον προσανατολισμό

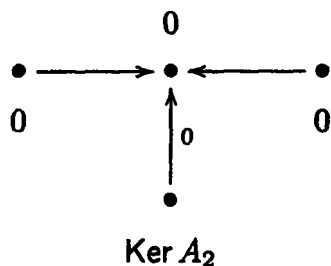
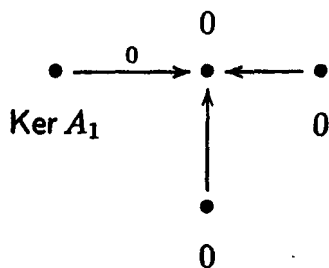
$$\begin{array}{c} \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet \\ \uparrow \\ \bullet \end{array}$$



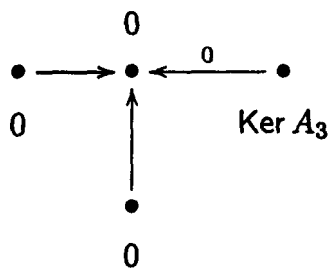
Άρα έστω μια αναπαράσταση αυτής :



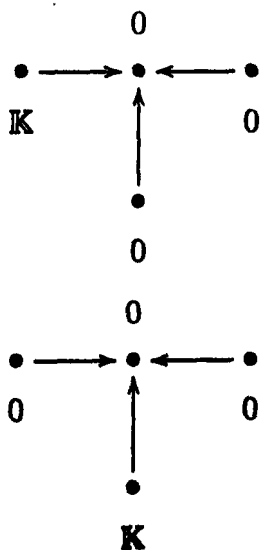
Πρώτα λοιπόν διασπούμε τους πυρήνες των απεικονίσεων A_1, A_2, A_3 . Δηλαδή μετά τη διάσπαση έχουμε τις αναπαράστάσεις



και



Αυτές οι αναπαραστάσεις είναι ευθέα αθροίσματα των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων

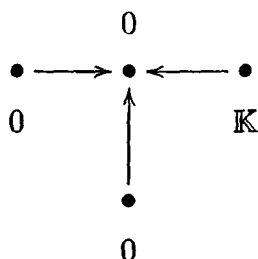


ο
τε
μ
π
μ
μ
μ

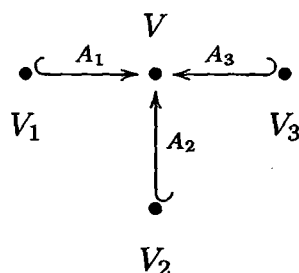
ώστε
έστω
 $i=1$



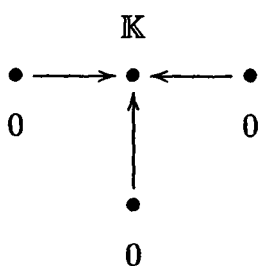
και



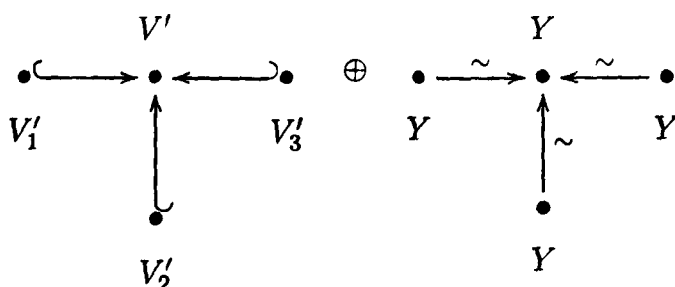
αντίστοιχα. Άρα οδηγούμαστε στην αναπαράσταση



όπου οι απεικονίσεις A_1, A_2, A_3 είναι μονομορφισμοί. Όπως και πριν μελετούμε το πρόβλημα ταξινόμησης τριάδας υποχώρων ενός δοσμένου χώρου V μέχρι ισομορφισμό (Το πρόβλημα των **τριάδας υποχώρων**). Αρκεί δηλαδή να προσδιορίσουμε τους χώρους V_1, V_2, V_3 σε σχέση με τον V . Το επόμενο βήμα λοιπόν είναι να διασπάσουμε την αναπαράσταση σε ένα ευθύ άθροισμα της μη-αναλύσιμης αναπαράστασης



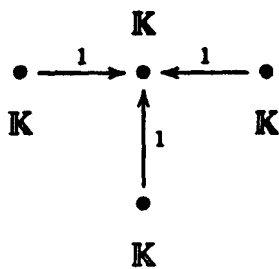
ώστε να οδηγηθούμε στη σχέση $V_1 + V_2 + V_3 = V$. Έστω $Y = V_1 \cap V_2 \cap V_3$ και έστω το συμπλήρωμα V' του Y στον V . Επιπλέον θεωρούμε $V'_i = V' \cap V_i$ για $i = 1, 2, 3$. Τότε η αναπαράσταση αναλύεται σε :



Ο δεύτερος αθροιστέος είναι το ευθύ άθροισμα της μη-αναλύσιμης αναπαράσ-



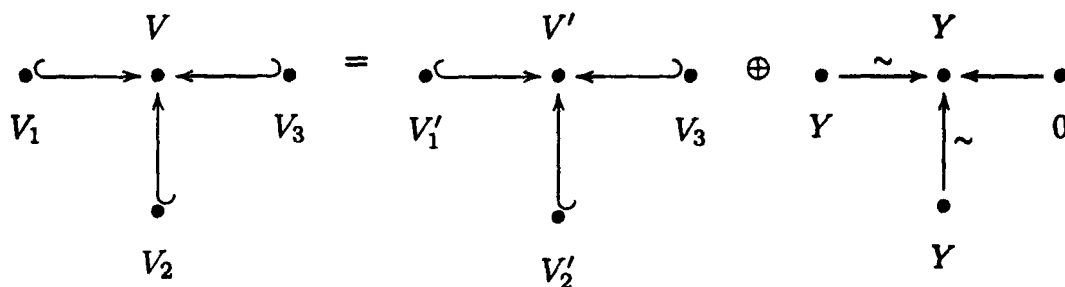
τασης



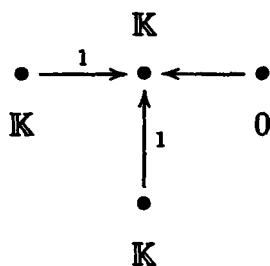
Για τον πρώτο αθροιστέο τώρα θεωρούμε $V'_i = V_i$ και έχουμε

$$V = V_1 + V_2 + V_3, \quad V_1 \cap V_2 \cap V_3 = 0$$

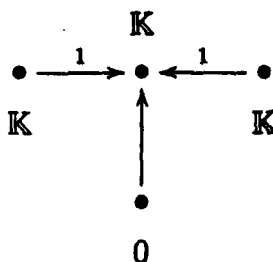
Έστω ακόμη $Y = V_1 \cap V_2$, το συμπλήρωμα V' του Y στον V τέτοιο ώστε $V_3 \subset V'$ και $V'_1 = V' \cap V_1, V'_2 = V' \cap V_2$. Άρα έχουμε την ανάλυση



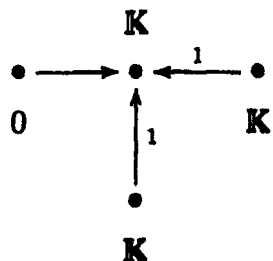
Ο δεύτερος αθροιστέος της παραπάνω ανάλυσης είναι το ευθύ άθροισμα απο $\dim Y = l$ αντίγραφα της μη-αναλύσιμης αναπαράστασης



Τώρα ισχύει όμως ότι $V_1 \cap V_2 = 0$. Συνεπώς μπορούμε να διασπάσουμε σε αναπαράστασεις της μορφής



και



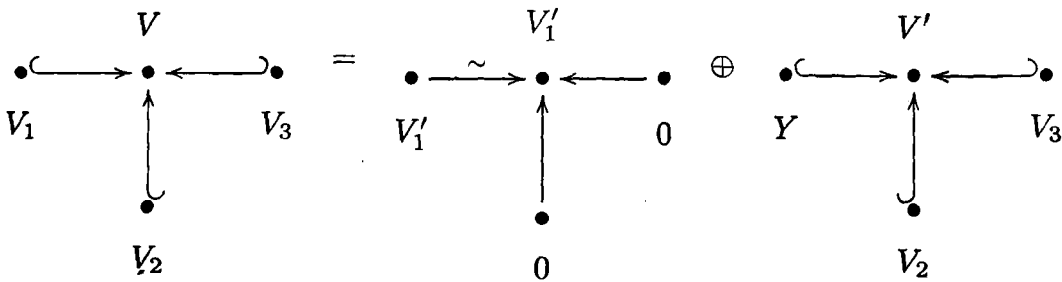
όπου θα ισχύει τότε

$$V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_3 = V_1 \cap V_3 = 0$$

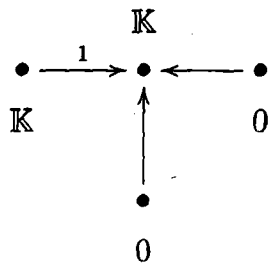
Αν $V_1 \not\subseteq V_2 \oplus V_3$ θεωρούμε

$$Y = V_1 \cap (V_2 \oplus V_3)$$

Έστω τώρα το συμπλήρωμα V'_1 του Y στον V_1 . Αφού λοιπόν $V'_1 \cap (V_2 \oplus V_3) = 0$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα συμπλήρωμα V' του V'_1 στον V που να περιέχει το $V_2 \oplus V_3$. Αυτό τότε μας οδηγεί στην παρακάτω ανάλυση

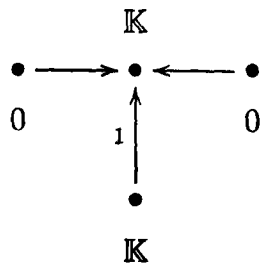


Ο πρώτος αθροιστέος είναι το ευθύ άθροισμα της μη-αναλύσιμης αναπαράστασης

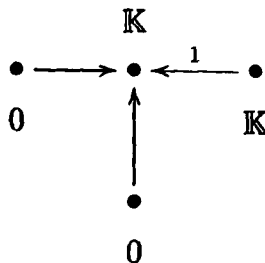


Αν τώρα διασπάσουμε, θα έχουμε $V_1 \subseteq V_2 \oplus V_3$.

Παρόμοια μπορούμε να διασπάσουμε τον δεύτερο αθροιστέο της παραπάνω ανάλυσης και να οδηγηθούμε σε αναπαράστασεις οι οποίες θα είναι ευθέα αθροίσματα των μη-αναλύσιμων αναπαράστασεων



και



και να ισχύουν τα παρακάτω :



1. $V = V_1 + V_2 + V_3$
2. $V_1 \cap V_2 = 0, V_1 \cap V_3 = 0, V_2 \cap V_3 = 0$
3. $V_1 \subseteq V_2 \oplus V_3, V_2 \subseteq V_1 \oplus V_3, V_3 \subseteq V_1 \oplus V_2$

Αλλά τότε

$$V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_3 = V_2 \oplus V_3 = V$$

και έτσι

$$\dim V_1 = \dim V_2 = \dim V_3 = n$$

άρα

$$\dim V = 2n$$

Επειδή $V_3 \subseteq V_1 \oplus V_2$ τότε για $x \in V_3$ θα έχουμε $x = (x_1, x_2), x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$. Ορίζουμε τότε τις προβολές

$$B_1 : V_3 \rightarrow V_1, (x_1, x_2) \mapsto x_1$$

$$B_2 : V_3 \rightarrow V_2, (x_1, x_2) \mapsto x_2$$

Όμως $V_3 \not\subseteq V_1, V_3 \not\subseteq V_2$. Άρα οι προβολές B_1, B_2 θα είναι μονομορφισμοί και άρα ισομορφισμοί. Τότε ορίζουμε τον ισομορφισμό

$$A : B_2 B_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$$

Έστω τώρα e_1, \dots, e_n μια βάση του V_1 . Τότε

$$V_1 = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}e_n$$

$$V_2 = \mathbb{K}Ae_1 \oplus \mathbb{K}Ae_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}Ae_n$$

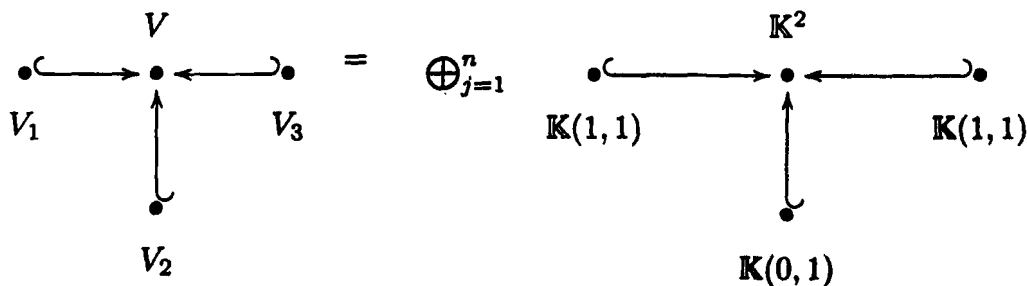
και

$$V_3 = \mathbb{K}(e_1 + Ae_1) \oplus \mathbb{K}(e_2 + Ae_2) \oplus \dots \oplus \mathbb{K}(e_n + Ae_n)$$

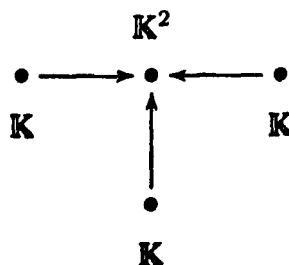
Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τον V_3 ως γράφημα του ισομορφισμού

$$A : V_1 \rightarrow V_2$$

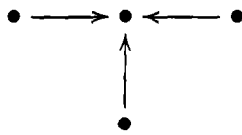
Έτσι θα έχουμε την παρακάτω ανάλυση



Αυτές οι αναπαραστάσεις αντιστοιχούν στη μη-αναλύσιμη αναπαράσταση



Άρα η φαρέτρα D_4 με τον προσανατολισμό



έχει δώδεκα μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις. Αν τώρα επιλέξουμε ένα άλλο προσανατολισμό θα δούμε ότι και πάλι θα έχει δώδεκα μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο αριθμός των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό των βελών, και το θεώρημα του Gabriel που θα ακολουθήσει θα γενικεύσει αυτή την παρατήρηση.

5.2 Το θεώρημα του Gabriel για τις φαρέτρες τύπου Dynkin

Θεώρημα 5.2.1. Έστω Q μια φαρέτρα της οποίας το υποκείμενο γράφημα είναι Dynkin διάγραμμα. Τότε η απεικόνιση

$$X \mapsto \dim X$$

επάγει μια 1-1 και επί απεικόνιση μεταξύ των κλάσεων ισομορφίας των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων της Q και των θετικών ριζών που αντιστοιχούν στο διάγραμμα της Q . Ιδιαίτερα υπάρχουν μόνο πεπερασμένες πολλές κλάσεις ισομορφισμών μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων.

Απόδειξη. Διαλέγουμε λοιπόν μια αποδεκτή διάταξη κορυφών i_1, \dots, i_n της Q . Έστω X μια μη-αναλύσιμη αναπαράσταση της Q με διάνυσμα διάστασης

$$x = \dim X$$

Έστω ακόμη

$$\tau = \sigma_{i_s} \cdots \sigma_{i_1} (\sigma_{i_n} \cdots \sigma_{i_1})^r$$

η ανάκλαση με κατάλληλη επιλογή των σ_{i_k} τέτοια ώστε το $\tau(x)$ να είναι μη θετικό. Η επιλογή αυτή υφίσταται λόγω λήμματος (4.3.20.). Αν εφαρμόσουμε τώρα τον συναρτητή ανάκλασης

$$S_i^+ : \text{Rep}(Q, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Rep}(\sigma_i Q, \mathbb{K})$$

και έχουμε

$$S_{i_{s-1}}^+ \cdots S_{i_1}^+ (S_{i_n}^+ \cdots S_{i_1}^+)^r X \simeq S(i_s)$$

και έτσι

$$X \simeq (S_{i_1}^- \cdots S_{i_n}^-)^r S_{i_1}^- \cdots S_{i_{s-1}}^- S(i_s)$$

Άρα λοιπόν

$$\dim X = (\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_n})^r \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{s-1}}(e_{i_s})$$

είναι θετική ρίζα. Για μια άλλη μη-αναλύσιμη αναπαράσταση X' της Q με $\dim X' = \dim X$ η σχέση

$$X \simeq (S_{i_1}^- \cdots S_{i_n}^-)^r S_{i_1}^- \cdots S_{i_{s-1}}^- S(i_s)$$



συνεπάγει ότι $X' \simeq X$.

Έστω τώρα x μια θετική ρίζα. Έστω

$$\tau = \sigma_{i_s} \cdots \sigma_{i_1} (\sigma_{i_n} \cdots \sigma_{i_1})^r$$

η ανάκλαση με κατάλληλη επιλογή των σ_{i_k} τέτοια ώστε το $\tau(x)$ να είναι μη θετικό, η οποία και πάλι υφίσταται λόγω του λήμματος (4.3.20.). Από το λήμμα (4.3.15) συμπεραίνουμε ότι

$$\sigma_{i_{s-1}} \cdots \sigma_{i_1} (\sigma_{i_n} \cdots \sigma_{i_1})^r (x) = e_{i_s}$$

Έστω

$$X = (S_{i_1}^- \cdots S_{i_n}^-)^r S_{i_1}^- \cdots S_{i_{s-1}}^- S_{i_s}$$

Εφαρμόζοντας ξανά τους συναρτητές ανάκλασης βλέπουμε ότι η αναπαράσταση X είναι μη-αναλύσιμη με

$$\dim X = (\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_n})^r \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{s-1}} (e_{i_s}) = X$$

Υπάρχουν λοιπόν πεπερασμένες πολλές κλάσεις ισομορφισμών μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων αφού ο αριθμός των ριζών είναι πεπερασμένος. \square

Παρατήρηση 5.2.2. Η απόδειξη του θεωρήματος δείχνει ότι για μια φαρέτρα της οποίας το υποκείμενο γράφημα είναι Dynkin, όλες οι μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις είναι preprojective και preinjective.

Παρατήρηση 5.2.3. Έστω Γ ένα γράφημα χωρίς προσανατολισμένους κύκλους. Τότε η αντίστοιχη ομάδα Weyl, $W(\Gamma)$ είναι η ομάδα των αυτομορφισμών του \mathbb{Z}^n , η οποία παράγεται από τις ανακλάσεις σ_i . Αν Γ είναι ένα Dynkin διάγραμμα, τότε οι ρίζες είναι τα διανύσματα της μορφής $\tau(e_i)$ με $\tau \in W(\Gamma)$ και $1 \leq i \leq n$. Προφανώς κάθε $\tau(e_i)$ είναι ρίζα αφού η ανάκλαση σ_i διατηρεί την τετραγωνική μορφή q_Q .

Αντίστροφα έστω $q_Q(x) = 1$. Τότε η υπόθεση που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του θεωρήματος (5.2.1.) δείχνει ότι X είναι της μορφής $\tau(e_i)$.

Ορισμός 5.2.4. Έστω Q μια φαρέτρα της οποίας το υποκείμενο γράφημα είναι Euclidean διάγραμμα. Έστω ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{Z}^n$. Τότε ορίζουμε το **defect** του διανύσματος $x \in \mathbb{Z}^n$ και το συμβολίζουμε με ∂X να είναι ο αριθμός

$$\partial X = \langle \delta, x \rangle = -\langle x, \delta \rangle$$

Το defect μιας αναπαράστασης X της Q είναι

$$\partial X = \partial \dim X$$

Πρόταση 5.2.5. Έστω X μια μη-αναλύσιμη αναπαράσταση. Τότε

1. Η X είναι preprojective αν και μόνον αν $\partial X < 0$.
2. Η X είναι preinjective αν και μόνον αν $\partial X > 0$.
3. Η X είναι regular αν και μόνον αν $\partial X = 0$.



5.3. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ GABRIEL ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΑΡΕΤΡΕΣ ΤΥΠΟΥ EUCLIDEAN173

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε αναπαράσταση X με $C^r X \neq 0$ έχουμε

$$\dim C^r X = c^r(\dim X)$$

Έστω τώρα $X = C^r P(i)$ μια preprojective αναπαράσταση. Τότε

$$\partial X = -\langle c^r(\dim P(i)), \delta \rangle = -\langle \dim P(i), \delta \rangle = -\delta_i < 0$$

Αν $X = C^r I(i)$ μια preinjective αναπαράσταση. Τότε

$$\partial X = \langle \delta, c^r(\dim I(i)) \rangle = \langle \delta, \dim I(i) \rangle = \delta_i > 0$$

Αν X μια regular αναπαράσταση με $C^r X \neq 0$ τότε λόγω του λήμματος (4.3.21.) θα έχουμε $\langle \delta, x \rangle = 0$ και άρα $\partial X = 0$ \square

5.3 Το θεώρημα του Gabriel για τις φαρέτρες τύπου Euclidean

Θεώρημα 5.3.1. Έστω Q μια φαρέτρα χωρίς προσανατολισμένους κύκλους και έστω ότι το υποκείμενο γράφημα αυτής είναι Euclidean διάγραμμα με n κορυφές. Τότε η απεικόνιση

$$X \mapsto \dim X$$

επάγει μια 1-1 και επί απεικόνιση μεταξύ των κλάσεων ισομορφίας των μη αναλύσιμων preprojective ή preinjective αναπαραστάσεων της Q και των θετικών ριζών με μη μηδενικό defect που αντιστοιχούν στο διάγραμμα της Q . Οι μη αναλύσιμες preprojective και preinjective σχηματίζουν $2n$ αριθμήσιμες σειρές $\{C^{-r}P(i)\}$ και $\{C^r I(i)\}$ από ζεύγη μη ισομορφων αναπαραστάσεων.

Απόδειξη. Διαλέγουμε μια αποδεκτή διάταξη κορυφών i_1, \dots, i_n της Q . Έστω ότι X είναι μια μη-αναλύσιμη αναπαράσταση της Q με διάνυσμα διάστασης $x = \dim X$. Έστω $X \simeq C^r P(i_s)$ preprojective αναπαράσταση. Γνωρίζουμε ότι

$$\dim P(i_s) = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{s-1}}(e_{i_s})$$

και άρα

$$x = c^r \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{s-1}}(e_{i_s})$$

Αυτό το x είναι θετική ρίζα και $\partial x < 0$ αφού υποθέσαμε ότι η X είναι preprojective αναπαράσταση. Παρόμοια δουλεύουμε αν η X preinjective αναπαράσταση. Η απεικόνιση

$$X \mapsto \dim X$$

είναι μονομορφισμός λόγω της πρότασης (4.2.51.).

Έστω τώρα x μια θετική ρίζα με $\partial x \neq 0$. Γνωρίζουμε από το λήμμα (4.3.21.) ότι $c^t(x)$ είναι μη θετική για κάποιο $t \in \mathbb{Z}$.

Έστω $t > 0$. Τότε υπάρχουν $1 \leq s \leq n$ και $r \geq 0$ τέτοια ώστε

$$\tau = \sigma_{i_s} \cdots \sigma_{i_1}(\sigma_{i_n} \cdots \sigma_{i_1})^r$$

είναι η ανάκλαση με κατάλληλη επιλογή των σ_{i_k} τέτοια ώστε το $\tau(x)$ είναι μη θετικό. Τότε

$$\sigma_{i_{s-1}} \cdots \sigma_{i_1}(\sigma_{i_n} \cdots \sigma_{i_1})^r(x) = e_{i_s}$$



Έστω

$$X = (S_{i_1}^- \cdots S_{i_n}^-)^r S_{i_1}^- \cdots S_{i_{s-1}}^- S(i_s)$$

Αν εφαρμόσουμε τους συναρτητές ανάκλασης και το λήμμα (4.2.36.) τότε έχουμε ότι η αναπαράσταση X είναι μη-αναλύσιμη και

$$\dim X = (\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_n})^r \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{s-1}}(e_{i_s}) = x$$

Επιπλέον η X είναι preprojective αφού

$$X \simeq C^{-r} P(i_s)$$

λόγω του λήμματος (4.2.43.).

Έστω $t < 0$. Τότε παρόμοια η X θα είναι preinjective με

$$\dim X = x$$

Τέλος το ότι οι μη-αναλύσιμες preprojective και preinjective σχηματίζουν $2n$ αριθμήσιμες σειρές $\{C^{-r} P(i)\}$ και $\{C^r I(i)\}$ από ζεύγη μη ισομορφών αναπαραστάσεων προκύπτει από την πρόταση (4.2.51). Μένει να δείξουμε ότι $C^{-r} P(i) \neq 0$ και $C^r I(i) \neq 0$ για όλα τα $r \geq 0$.

Από την πρόταση (4.2.45.) έχουμε ότι αν $C^{-r} P(i) = 0$ τότε η $P(i)$ είναι preinjective. Όμως οι preprojective και preinjective αναπαραστάσεις έχουν διαφορετικό defect, λόγω της πρότασης (5.2.5.). Άρα οδηγηθήκαμε σε άτοπο. Δουλεύουμε παρόμοια για την $C^r I(i)$. \square

Πρόταση 5.3.2. Έστω Q μια Euclidean φαρέτρα \tilde{A}_n με $n \geq 0$. Τότε υπάρχουν άπειρες πολυπλές κλάσεις ισομορφίας μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων.

Απόδειξη. Έστω μια Euclidean φαρέτρα Q με τυχόντα προσανατολισμό. Ειδικότερα έστω ότι η φαρέτρα Q περιέχει ένα προσανατολισμένο κύκλο. Σταθεροποιούμε τώρα ένα βέλος α_0 . Έστω για κάθε $p \geq 1$ η αναπαράσταση

$$X = X(p) = (X_i, X_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

της Q η οποία ορίζεται ως εξής: Για κάθε κορυφή i

$$X_i = \mathbb{K}^p$$

και

$$X_{\alpha_0} = J(p, 0) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

το Jordan block μήκους p και με ιδιοτιμή 0 και

$$X_\alpha = 1_{\mathbb{K}^p}$$

για κάθε βέλος $\alpha \neq \alpha_0$.

Τότε ο δακτύλιος

$$\text{End}(X(p)) \simeq \mathbb{K}[t]/(t^p)$$

είναι τοπικός και έτσι λόγω λήμματος (2.1.22.) και της παρατήρησης (2.1.23.) η αναπαράσταση $X(p)$ είναι μη-αναλύσιμη. \square

5.3. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ GABRIEL ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΑΡΕΤΡΕΣ ΤΥΠΟΥ EUCLIDEAN 175

Παρατήρηση 5.3.3. Έστω Q μια Euclidean φαρέτρα. Τότε υπάρχει μια αναλυτική περιγραφή όλων των regular μη-αναλύσιμων αναπαράστασεων της Q .

Ας δούμε για παράδειγμα την φαρέτρα του Kronecker, έστω Q , πάνω από το αλγεβρικά κλειστό σώμα \mathbb{K} . Δηλαδή η Q είναι :

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

Τότε οι regular μη-αναλύσιμες αναπαράστασεις $R(n, \lambda)$ παραμετρώνται από ακέραιους $n \geq 1$ και σημεία $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$ της προβολικής γραμμής $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Για παράδειγμα έχουμε την αναπαράσταση $R(n, \lambda)$

$$\mathbb{K}^n \begin{array}{c} \xrightarrow{J(n, \lambda_0)} \\ \xrightarrow{1} \end{array} \mathbb{K}^n$$

για $\lambda = (\lambda_0 : 1)$, όπου $J(n, \lambda_0)$ είναι το Jordan block μήκους n με ιδιοτιμή λ_0 .

Παράδειγμα 5.3.4. Έστω η φαρέτρα του Kronecker, Q

$$1 \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \bullet 2$$

πάνω από το αλγεβρικά κλειστό σώμα \mathbb{K} . Θα δείξουμε ότι η αναπαράσταση $R(p, 0)$

$$\mathbb{K}^3 \begin{array}{c} \xrightarrow{J(3,0)} \\ \xrightarrow{1} \end{array} \mathbb{K}^3$$

όπου 1 η ταυτοτική απεικόνιση και

$$J(3, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

το 3×3 μηδενικό Jordan block, είναι μη-αναλύσιμη. Αυτό θαδειχθεί χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο δακτύλιος $\text{End } R(p, 0)$ είναι τοπικός. Έστω λοιπόν ο ενδομορφισμός

$$f : R(p, 0) \rightarrow R(p, 0)$$

ο οποίος δίνεται από ένα ζεύγος 3×3 πινάκων (f_1, f_2) . Τότε θα ισχύει

$$f_1 1 = 1 f_2$$

και

$$f_1 J(3, 0) = J(3, 0) f_2$$

Από την πρώτη σχέση έχουμε

$$f_1 = f_2$$

και αν

$$f_1 = f_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$



τότε απο τη δεύτερη σχέση θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

Άρα θα έχουμε $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_3 = 0$, $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \alpha$ και $\beta_1 = \gamma_2 = \beta$. Αν λοιπόν $\gamma_1 = \gamma$ τότε

$$f_1 = f_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Συνεπώς δείξαμε ότι

$$\text{End } R(p, 0) \simeq \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \right\}$$

Τώρα το ιδεώδες

$$\mathcal{J} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \end{bmatrix} \mid \beta, \gamma \in \mathbb{K} \right\}$$

του $\text{End } R(p, 0)$ έχει την ιδιότητα $\mathcal{J}^3 = 0$. Το \mathcal{J} είναι μέγιστο ιδεώδες του $\text{End } R(p, 0)$ αφού

$$(\text{End } R(p, 0)) / \mathcal{J} \simeq \mathbb{K}$$

Τότε $\mathcal{J} = \text{Rad}(\text{End } R(p, 0))$ και $\text{End } R(p, 0)$ είναι τοπικοί. Άρα η αναπαράσταση $R(p, 0)$ είναι μη-αναλύσιμη.

5.4 Το θεώρημα του Gabriel

Τώρα λοιπόν είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το θεώρημα του Gabriel.

Θεώρημα 5.4.1. Έστω Q μια συνεκτική φαρέτρα. Τότε υπάρχουν μόνο πεπερασμένες πολλές κλάσεις ισομορφίας μη-αναλυσιμων αναπαραστάσεων αν και μόνον αν το υποκείμενο γράφημα της φαρέτρας είναι Dynkin διάγραμμα.

Απόδειξη. Έστω Q μια συνεκτική φαρέτρα. Αν η Q είναι τύπου Dynkin τότε λόγω του θεωρήματος (5.2.1.) η Q έχει πεπερασμένες πολλές κλάσεις ισομορφίας μη-αναλυσιμων αναπαραστάσεων.

Αν η Q δεν είναι τύπου Dynkin τότε θα υπάρχει μια υποφαρέτρα Q' της Q της οποίας το υποκείμενο γράφημα θα είναι Euclidean διάγραμμα και τότε λόγω του θεωρήματος (5.3.1.) και της πρότασης (5.3.2.) θα έχει άπειρες κλάσεις ισομορφίας μη-αναλυσιμων αναπαραστάσεων.

Όμως κάθε αναπαράσταση της X της Q' μπορεί να επεκταθεί σε μια αναπαράσταση της Q αν υποθέσουμε ότι $X_i = 0$ και $X_\alpha = 0$ για κάθε

κορυφή $i \in Q_0$ και για κάθε βέλος $\alpha \in Q_1$ που δεν ανήκουν στην Q' . Άρα μέσω της επέκτασης, η Q θα έχει άπειρες κλάσεις ισομορφίας μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων. \square

Παρατήρηση 5.4.2. Υπάρχουν δύο τύποι φαρετρών που κατηγοριοποιούνται ανάλογα την περίπτωση.

1. Ο πρώτος τύπος είναι φαρέτρα πεπερασμένου τύπου αναπαράστασης που περιέχει μια **πεπερασμένη** λίστα μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων με αναλυτική περιγραφή, όπως στην περίπτωση των γραμμικών φαρετρών.
2. Ο δεύτερος τύπος είναι φαρέτρα άπειρου τύπου που περιέχει μια **άπειρη** λίστα μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων. Αυτού του τύπου φαρέτρα τώρα χωρίζεται σε δύο κατηγορίες
 1. Στην κατηγορία **tame** που περιέχει μια **άπειρη** λίστα μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων αλλά ταξινομημένες με κάποιο τρόπο και
 2. Στην κατηγορία **wild** που περιέχει μια **άπειρη** λίστα μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων χωρίς ταξινόμηση.

Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα. Σταθεροποιούμε τον χώρο \mathbb{Z}^n και θεωρούμε ότι οι φαρέτρες που χρησιμοποιούμε είναι τύπου A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 .

Σχόλιο 5.4.3. Στο σημείο αυτό ας θυμηθούμε ότι μια ρίζα

$$\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$$

καλείται θετική αν $k_i \geq 0$ για κάθε i και αρνητική αλλιώς. Επίσης

Παράδειγμα 5.4.4. Έστω Q η φαρέτρα τύπου A_{n-1} . Τότε ο χώρος $L = \mathbb{Z}^{n-1}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν υποομάδα του χώρου \mathbb{Z}^n αν η L περιέχει όλα τα διανύσματα (x_1, \dots, x_n) τέτοια ώστε

$$\sum_i x_i = 0$$

Τώρα τα διανύσματα

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, -1, 0, \dots, 0) \\ \alpha_2 &= (0, 1, -1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \alpha_n &= (0, \dots, 0, 1, -1) \end{aligned}$$

αποτελούν βάση για τον L . Επιπλέον το εσωτερικό γινόμενο

$$(x, y) = \sum_i x_i y_i$$

στον \mathbb{Z}^n επεκτείνεται στο εσωτερικό γινόμενο

$$B(x, y) = x^T A_Q y$$

στον L , όπου A_Q είναι ο πίνακας Cartan.



Η επέκταση αυτή υφίσταται αφού για τα διανύσματα της βάσης, τα εσωτερικά γινόμενα έχουν τις ιδιότητες:

$$(\alpha_i, \alpha_i) = 2$$

και

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} -1, & i, j \text{ προσκείμενες} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Αυτό σημαίνει ότι διανύσματα της μορφής

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j-1}$$

και

$$(0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = -(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j-1})$$

είναι ρίζες του L . Άρα ο αριθμός των θετικών ριζών του L είναι

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Παρατήρηση 5.4.5. Ο παρακάτω πίνακας δίνει το πλήθος των θετικών ριζών για κάθε Dynkin διάγραμμα

A_n	$\frac{n(n+1)}{2}$	θετικές ρίζες
D_n	$n(n-1)$	θετικές ρίζες
E_6	36	θετικές ρίζες
E_7	63	θετικές ρίζες
E_8	120	θετικές ρίζες

Πόρισμα 5.4.6. Αφού λοιπόν υπάρχει μια $1-1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ των θετικών ριζών και των μη ισόμορφων μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων μιας φαρέτρας, το πλήθος των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων των διαγραμμάτων Dynkin δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα

A_n	$\frac{n(n+1)}{2}$	μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις
D_n	$n(n-1)$	μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις
E_6	36	μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις
E_7	63	μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις
E_8	120	μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις

Παρατήρηση 5.4.7. Δεδομένου ότι κάθε αναπαράσταση έχει μοναδική ανάλυση, μέχρι ισομορφισμό, σε μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις και ότι κάθε μορφισμός μπορεί να περιγραφεί ως πίνακας μεταξύ μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων, αναρωτιέται κανείς ότι αυτό που μένει να καταλάβουμε είναι, ποιές μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις και ποιοί μορφισμοί μεταξύ αυτών υπάρχουν για δοσμένη φαρέτρα Q . Αυτό είναι το πρόβλημα ταξινόμησης. Θα λύσουμε εν μέρει αυτό το πρόβλημα αναλύοντας το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.4.8. Έστω η φαρέτρα Q

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \xrightarrow{\alpha_1} & \bullet & \xrightarrow{\alpha_2} & \bullet & \longrightarrow \dots \longrightarrow & \bullet & \xrightarrow{\alpha_{n-2}} & \bullet & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & \bullet \\ 1 & & 2 & & 3 & & n-2 & & n-1 & & n \end{array}$$

Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να βρούμε το σύνολο των κλάσεων ισομορφίας των μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων της Q . Έστω τότε V μια μη-αναλύσιμη αναπαράσταση αυτής.

Αν $V(\alpha_i)$ δεν είναι μονομορφισμός τότε $V(j) = 0$ για $j > i$. Έστω πρώτα ότι

$$V(\alpha_1), \dots, V(\alpha_{i-1})$$

είναι μονομορφισμοί αλλά $V(\alpha_i)$ δεν είναι. Τότε

$$W(i) = \text{Ker } V(\alpha_i)$$

και επαγωγικά

$$W(j) = V(\alpha_j)^{-1}(W(j+1))$$

για $j = i-1, i-2, \dots, 1$.

Έστω $S(1)$ το ευθύ συμπλήρωμα του $W(1)$ στην $V(1)$. Δηλαδή ένας υπόχωρος του $V(1)$ τέτοιος ώστε το $V(1)$ να είναι το ευθύ άθροισμα του $W(1)$ και του $S(1)$. Επαγωγικά λοιπόν για $j = 1, \dots, i-1$ ορίζουμε $S(j+1)$ το ευθύ συμπλήρωμα του $W(j+1)$ τέτοιο ώστε

$$V(\alpha_j)(S(j)) \subseteq S(j+1)$$

Αυτό μπορεί να συμβεί αφού ο $V(\alpha_j)$ είναι μονομορφισμός και

$$V(\alpha_j)(S(j)) \cap W(j+1) = 0$$

Άρα η V αναλύεται στο $W \oplus V'$ με

$$W = W(1) \longrightarrow \dots \longrightarrow W(i) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0$$

και

$$V' = S(1) \longrightarrow \dots \longrightarrow S(i) \longrightarrow V(i+1) \longrightarrow \dots \longrightarrow V(n)$$

Αφού η V είναι μη-αναλύσιμη και $W(i) \neq 0$ ο αθροιστέος V' πρέπει να είναι μηδέν.

Αν $V(\alpha_j)$ δεν είναι επιμορφισμός τότε $V(h) = 0$ για όλα τα $h \leq j$. Παρόμοια λοιπόν αποδεικνύεται όπως προηγούμενα.

Άρα η αναπαράσταση V είναι ισόμορφη με την

$$[j, i] : 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{1} \mathbb{K} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0$$

όπου το πρώτο \mathbb{K} εμφανίζεται στη θέση $1 \leq j$ και το τελευταίο στη θέση $i \leq n$. Αν όλες οι απεικονίσεις $V(\alpha_h)$ με $1 \leq h \leq n$ είναι μονομορφισμοί τότε $i = n$. Αλλιώς η i θα ήταν η μικρότερη κορυφή ώστε ο $V(\alpha_i)$ να μην ήταν μονομορφισμός.

Αν όλες οι απεικονίσεις $V(\alpha_h)$ με $1 \leq h < i$ είναι επιμορφισμοί τότε $j = 1$. Αλλιώς έστω $j \leq i$ η μεγαλύτερη κορυφή ώστε $V(\alpha_{i-j})$ να μην ήταν



επιμορφισμός. Άρα όλες οι απεικονίσεις $V(\alpha_h)$ με $j \leq h < i$ είναι 1-1 και επί και θα έχουμε $V(h) = 0$ για $h < j$ και $h > i$. Άρα η αναπαράσταση V είναι ισόμορφη με την

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{K}^d \xrightarrow{1_d} \cdots \xrightarrow{1_d} \mathbb{K}^d \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0$$

όπου 1_d είναι ο ταυτοτικός $d \times d$ πίνακας. Άρα η αναπαράσταση V είναι ισόμορφη με το ευθύ άθροισμα απο d αντίγραφα της αναπαράστασης $[j, i]$ και αφού η V είναι μη-αναλύσιμη θα έχουμε $d = 1$.

Ας μελετήσουμε τώρα τις αναπαραστάσεις $[j, i]$. Έστω ότι η αναπαράσταση $V := [j, i]$ αναλύεται σε

$$V = W \oplus W'$$

με $W \neq 0$ και $W' \neq 0$. Τότε $\dim_{\mathbb{K}} V \geq 2$ και άρα $j < i$. Έστω ότι για την αναπαράσταση W ισχύει ότι $W(j) \simeq \mathbb{K}$ και έστω $h \geq j$ η μικρότερη κορυφή ώστε $W(h) = 0$. Αφού $W' \neq 0$ θα πρέπει $h < i$ και $W'(h) \simeq \mathbb{K}$. Άρα έχουμε

$$(W \oplus W')(\alpha_{h-1}) = 0$$

που έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $V(\alpha_{h-1}) = 1_{\mathbb{K}}$.

Προφανώς η αναπαράσταση $V = [j, i]$ είναι ισόμορφη με την $V' = [j', i']$ αν και μόνον αν $i = i'$ και $j = j'$. Αυτό γιατί εύκολα μπορούμε να βρούμε μια κορυφή h τέτοια ώστε

$$\dim_{\mathbb{K}} V(h) \neq \dim_{\mathbb{K}} V'(h)$$

στην περίπτωση που $(j, i) \neq (j', i')$.

Άρα βρήκαμε μια πλήρη λίστα μη-ισόμορφων κατά ζεύγη μη-αναλύσιμων αναπαραστάσεων. Για την φαρέτρα Q λοιπόν υπάρχουν

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

μη ισόμορφες, μη-αναλύσιμες αναπαραστάσεις και άρα η Q είναι φαρέτρα πεπερασμένου τύπου αναπαράστασης.



Βιβλιογραφία

- [1] H. Krause. Representations of Quivers via Reflection Functors. *Universität Paderborn, Germany, 2007.*
- [2] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras.* Cambridge University Press, Cambridge., 1997.
- [3] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras.* Springer, 2007.
- [4] M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko. *Algebras, Rings and Modules, Volume 2.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [5] C. M. Ringel, J. Schröer. *Representation Theory of Algebras I: Modules.* Universität Bielefeld, Universität Bonn, 2009.
- [6] H. Derksen, J. Weyman. *Quiver representations.* Notices of the AMS, Volume 52, Number 2, 2005.
- [7] I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, and V. A. Ponomarev. *Coxeter Functors and Gabriel's Theorem.* *Uspehi Math. Nauk* 28, no. 2, English translation: *Russian Math. Surveys* 28, no. 2 , 1973.
- [8] M. Barot. Representations of Quivers. *Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy, 2006.*
- [9] P. Etingof, O. Golberg, S. Hensel, T. Liu, A. Schwendner, E. Udovina and D. Vaintrob. Introduction to representation theory. *Clay Mathematics Institute, 2009.*
- [10] Peter Gabriel, Andrei V. Roiter. *Representations of Finite Dimensional Algebras.* Springer.
- [11] W. Crawley-Boevey. *Representations of Quivers, Preprojective Algebras and Deformations of Quotient Singularities.* University of Leeds, UK.
- [12] W. Hodges. *Rings and Modules.* based on notes of Prof. S. Donkin and Dr I. Chiswell, 2004.
- [13] M. Auslander and I. Reiten. *Representation theory of artin algebras IV. Invariants given by almost split sequences.* *Comm. in Algebra* 5, 1977.
- [14] P. Gabriel. *Unzerlegbare Darstellungen I.* *Manuscripta Math.* 6, 1972.



- [15] P. Gabriel. *Indecomposable representations II*. Symposia Mathematica 11, 1973.
- [16] P. Gabriel. *Auslander-Reiten sequences and representation finite algebras*. Lect. Notes Math, Springer-Verlag, 1980.
- [17] C. M. Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms*. Lect. Notes Math. 1099, Springer-Verlag, 1984.
- [18] P. Donovan and M. R. Freislich. *The Representation Theory of Finite Graphs and Associated Algebras*. Carleton Math. Lecture Notes 5, Carleton University, Ottawa, 1973.
- [19] V. Dlab and C. M. Ringel. *Indecomposable representations of graphs and algebras*. Memoirs Amer. Math. Soc. 6, no. 173, 1976.
- [20] Ju. A. Drozd. *Tame and wild matrix problems*. Representations and Quadratic Forms, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, translated in: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 128, (1986), 1979.
- [21] V. G. Kac. *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*. Invent. Math. 56, no. 1, 1980.
- [22] V. G. Kac. *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory II*. J. Algebra 78, no. 1, 1982.
- [23] V. G. Kac. *Root systems, representations of quivers and invariant theory*. Invariant Theory, Proc. 1st 1982 Sess. C.I.M.E., Montecatini/Italy, Lecture Notes in Math. 996, Springer, 1983.
- [24] A. D. King. *Moduli of representations of finitedimensional algebras*. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 45, no. 180, 1994.
- [25] H. Kraft and Ch. Riedtmann. *Geometry of representations of quivers, Representations of Algebras (Durham, 1985)*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 116, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [26] L. A. Nazarova. *Representations of quivers of infinite type*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 37, 1973.
- [27] C. M. Ringel. *Hall algebras and quantum groups*. Invent. Math. 101, no. 3, 1990.
- [28] A. Schofield. *General representations of quivers*. Proc. London Math. Soc. (3) 65, 1992.
- [29] A. Schofield. *Birational classification of moduli spaces of vector bundles over \mathbb{P}^2* . Indag. Math. (N.S.) 12, no. 3, 2001.

