

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
& ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΓΑΥΡΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΒΗΤΑ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ
ΜΙΑ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2011



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000340929



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
& ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΓΑΥΡΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΒΗΤΑ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ
ΜΙΑ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2011



... ΜΗΝΙΑΙΑ ...

... ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΝ ...

... ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΝ ...

... ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΝ ...

... ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΝ ...

... ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΝ ...



Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα, που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΚΡΙΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Κωνσταντίνος Ζωγράφος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (Επιβλέπων).

Μαρία Κατέρη, Αν. Καθηγήτρια του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Απόστολος Μπατσίδης, Λέκτορας του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.



Στους γονείς μου, στους αδερφούς μου
και στην αδερφή μου.



ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κατά τη διάρκεια της φοίτησής μου στο Τμήμα Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για τη λήψη του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στον κλάδο Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς όσους συνέβαλαν στην εκπόνηση και ολοκλήρωση αυτής της διατριβής.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Κωνσταντίνο Ζωγράφο, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, ο οποίος πρόθυμα δέχτηκε να αναλάβει την επίβλεψη και πρότεινε το θέμα της διατριβής. Τον ευχαριστώ θερμότατα για την επιστημονική του υποστήριξη, τις συμβουλές του, τις υποδείξεις του και τη βεβαιότητα που είχε ότι θα τα καταφέρω.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής κρίσης, τον κ. Απόστολο Μπατσίδα, Λέκτορα του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και την κ. Μαρία Κατέρη, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για το χρόνο που αφιέρωσαν στην ανάγνωση και αξιολόγηση της διατριβής. Τους είμαι ευγνώμων για τα σχόλια και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους και ιδίως προς τον κ. Απόστολο Μπατσίδα για τις ουσιώδεις παρεμβάσεις του στην εργασία μου. Η βοήθειά του υπήρξε υπερπολύτιμη.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους υπόλοιπους διδάσκοντες του Τομέα Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για τη συνεργασία μας κατά τη διάρκεια της παράδοσης των μαθημάτων.



Θα ήμουν αχάριστος αν δεν ευχαριστούσα όλους τους υπόλοιπους που απαρτίζουν τον Τομέα Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας. Συγκεκριμένα, τους διδάκτορες, τους υποψηφίους διδάκτορες, τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του Τομέα και τους γραμματείς για τη βοήθεια και την εξυπηρέτηση που μου πρόσφεραν κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Θα ήταν αδύνατο να μην ευχαριστήσω τον Βασίλη Παππά, υποψήφιο διδάκτορα του Τομέα Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για την ανιδιοτελή και άμεση βοήθεια που μου προσέφερε κάθε φορά που τη ζητούσα καθώς επίσης και τον πολύ καλό μου φίλο Παναγιώτη Ιωσηφίδη για την ψυχολογική υποστήριξη που μου πρόσφερε κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Τέλος, περισσότερο από όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω τον πατέρα μου Οδυσσέα και τη μητέρα μου Ελένη για την ηθική και την υλική συμπαράσταση που αφειδώς μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια. Επίσης, αισθάνομαι υποχρεωμένος να ευχαριστήσω τους αδερφούς μου Στέλιο και Κώστα και την αδερφή μου Μαρία.



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- 1.1 Ιστορική αναδρομή..... 1
- 1.2 Σκοπός της μεταπτυχιακής διατριβής και περίληψή της..... 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΒΗΤΑ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

- 2.1 Εισαγωγή 3
- 2.2 Η Κατανομή και οι ιδιότητές της 4
- 2.3 Η Κατανομή και η μέθοδος της μέγιστης εντροπίας..... 18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΙΔΙΚΕΣ ΒΗΤΑ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

- 3.1 Εισαγωγή 27
- 3.2 Βήτα-Κανονική Κατανομή 27



3.3	Βήτα-Γενικευμένη-Ημικανονική Κατανομή	39
3.4	Βήτα-Εκθετική Κατανομή και Εκθετικώς-Εκθετική Κατανομή.....	58
3.5	Βήτα-Γενικευμένη-Εκθετική Κατανομή	79
3.6	Βήτα-Weibull Κατανομή.....	90
3.7	Βήτα-Pareto Κατανομή	98

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΒΗΤΑ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

4.1	Εισαγωγή	113
4.2	Εναλλακτική μέθοδος των ροπών	114
4.3	Βήτα-Κανονική Κατανομή (ΒΚΚ).....	116
4.3.1	Εκτίμηση των παραμέτρων της ΒΚΚ.....	116
4.3.2	Πίνακας πληροφορίας του Fisher της ΒΚΚ	118
4.4	Βήτα-Γενικευμένη-Ημικανονική Κατανομή (ΒΓΗΚ).....	121
4.4.1	Εκτίμηση των παραμέτρων της ΒΓΗΚ	121
4.4.2	Πίνακας πληροφορίας του Fisher της ΒΓΗΚ.....	123
4.5	Βήτα-Εκθετική Κατανομή (ΒΕΚ)	126
4.5.1	Εκτίμηση των παραμέτρων της ΒΕΚ	126



4.5.2 Πίνακας πληροφορίας του Fisher της ΒΕΚ.....	129
4.6 Εκθετικώς-Εκθετική Κατανομή (ΕΕΚ).....	131
4.6.1 Εκτίμηση των παραμέτρων της ΕΕΚ	131
4.6.2 Πίνακας πληροφορίας του Fisher της ΕΕΚ.....	133
4.7 Βήτα-Γενικευμένη-Εκθετική Κατανομή (ΒΓΕΚ)	134
4.7.1 Εκτίμηση των παραμέτρων της ΒΓΕΚ.....	134
4.7.2 Πίνακας πληροφορίας του Fisher της ΒΓΕΚ	136
4.8 Βήτα-Weibull Κατανομή (ΒWΚ).....	139
4.8.1 Εκτίμηση των παραμέτρων της ΒWΚ.....	139
4.8.2 Πίνακας πληροφορίας του Fisher της ΒWΚ	141
4.9 Βήτα-Pareto Κατανομή (ΒΡΚ)	143
4.9.1 Εκτίμηση των παραμέτρων της ΒΡΚ	143
4.9.2 Πίνακας πληροφορίας του Fisher της ΒΡΚ.....	146
ΕΠΙΛΟΓΟΣ	149
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	151



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ιστορική αναδρομή

Με τον όρο Βήτα παραγόμενη κατανομή αναφερόμαστε σε μια οικογένεια κατανομών η οποία προκύπτει από σύζευξη μιας άλλης στοιχειώδους κατανομής.

Μια ειδική περίπτωση της Βήτα παραγόμενης κατανομής πρωτοεισήχθη από τους Eugene *et al.* (2002). Όμως, ο Jones (2004) ήταν αυτός που, ουσιαστικά, όρισε την οικογένεια των Βήτα παραγόμενων κατανομών. Έκτοτε, πολλοί ήταν αυτοί που ασχολήθηκαν και συνεχίζουν να ασχολούνται με το συγκεκριμένο ερευνητικό πεδίο και όρισαν νέες μονοδιάστατες Βήτα παραγόμενες κατανομές. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους Nadarajah and Kotz (2006) που όρισαν και μελέτησαν την Βήτα-Εκθετική Κατανομή και τους Akinsete *et al.* (2008) που όρισαν και μελέτησαν την Βήτα-Pareto Κατανομή.

Κύριο γνώρισμα των κατανομών που προέκυψαν είναι η χρησιμότητά τους στη μοντελοποίηση δεδομένων καθώς διαθέτουν καλή προσαρμοστικότητα.

1.2 Σκοπός της μεταπτυχιακής διατριβής και περίληψή της

Σκοπός αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής είναι μια παρουσίαση και κριτική ανασκόπηση των μονοδιάστατων Βήτα παραγόμενων κατανομών, των ιδιοτήτων και των χαρακτηριστικών τους, όπως αυτές εισάγονται και



μελετώνται στη βιβλιογραφία την τελευταία δεκαετία. Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στο λεπτομερή προσδιορισμό των χαρακτηριστικών των κατανομών αυτών, π.χ. των ροπών, της εντροπίας καθώς και του πίνακα πληροφορίας του Fisher των ειδικών Βήτα παραγόμενων κατανομών. Στο πλαίσιο αυτό, στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται και μελετάται η μονοδιάστατη Βήτα παραγόμενη κατανομή. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται και μελετώνται οι ειδικές περιπτώσεις της Βήτα παραγόμενης κατανομής. Η εκτίμηση των παραμέτρων των ειδικών Βήτα παραγόμενων κατανομών αποτελεί αντικείμενο μελέτης του Κεφαλαίου 4. Για την εκτίμηση των παραμέτρων εφαρμόζονται οι μέθοδοι της μέγιστης πιθανοφάνειας, των ροπών καθώς και μια εναλλακτική μέθοδος των ροπών, η οποία εισήχθη και προτάθηκε από τους Zografos and Balakrishnan (2009). Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται για μερικές ειδικές περιπτώσεις των Βήτα παραγόμενων κατανομών. Τέλος, στο ίδιο Κεφάλαιο, δίνεται ο πίνακας πληροφορίας του Fisher για καθεμία κατανομή. Η διατριβή ολοκληρώνεται με τον Επίλογο και τη Βιβλιογραφία.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΒΗΤΑ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

2.1 Εισαγωγή

Η εισαγωγή νέων κατανομών ή οικογενειών κατανομών, με την ελπίδα ότι οι νέες κατανομές θα μοντελοποιούν κάποια τυχαία φαινόμενα καλύτερα από τις υπάρχουσες κατανομές, είναι συνήθης στη στατιστική και στις πιθανότητες. Στο πλαίσιο αυτό, τα τελευταία χρόνια το ενδιαφέρον των ερευνητών μεταξύ άλλων έχει επικεντρωθεί στον ορισμό και τη μελέτη νέων μονοδιάστατων οικογενειών κατανομών, οι οποίες προκύπτουν από σύζευξη άλλων, στοιχειωδέστερων κατανομών. Οι κατανομές αυτές αποτελούν γενίκευση γνωστών κατανομών και είναι ιδιαίτερες χρήσιμες για τη μοντελοποίηση δεδομένων, καθώς διαθέτουν καλή προσαρμοστικότητα. Επιπλέον, μπορούν να γενικευτούν σε πολυμεταβλητές κατανομές και έτσι μπορούν να φανούν χρήσιμες σε πλήθος περίπλοκων προβλημάτων.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μονοδιάστατη Βήτα παραγόμενη κατανομή (ΒΠΚ). Εν συνεχεία, παρουσιάζονται οι τρόποι προσομοίωσης δεδομένων από αυτήν, δίνονται εκφράσεις για τη μέση τιμή, τη διακύμανση και τις ροπές αυτής. Τέλος, παρουσιάζεται η εντροπία του Shannon καθώς και η μέθοδος της μέγιστης εντροπίας.



2.2 Η Κατανομή και οι ιδιότητές της

Παρότι μια ειδική περίπτωση της ΒΠΚ εισήχθη στη βιβλιογραφία από τους Eugene *et al.* (2002), ο Jones (2004) ήταν αυτός που, ουσιαστικά, όρισε την οικογένεια των ΒΠΚ δίνοντας με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.1 [Jones (2004)]

Έστω μία συνεχής αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) $F(\cdot)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f(\cdot)$. Τότε η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X ακολουθεί την ΒΠΚ με παραμέτρους a και b αν η σ.π.π. της δίνεται από τη σχέση:

$$g_F^{(B)}(x; a, b) = \frac{1}{B(a, b)} f(x) (F(x))^{a-1} (1 - F(x))^{b-1}, \quad (2.2.1)$$

όπου $x \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ και $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$ είναι η συνάρτηση βήτα.

Όταν η τ.μ. X ακολουθεί την ΒΠΚ τότε αυτό θα συμβολίζεται $X \sim g_F^{(B)}(x; a, b)$ ή $X \sim ΒΠΚ(a, b)$. Η κατανομή $F(\cdot)$ ονομάζεται γεννήτορας ή γεννήτρια κατανομή. Εύκολα προκύπτει ότι, όταν ισχύει $a = b = 1$, τότε η σ.π.π. της ΒΠΚ είναι η πυκνότητα του γεννήτορα, δηλαδή ισχύει ότι: $g_F^{(B)}(\cdot; 1, 1) = f(\cdot)$. Επιπρόσθετα, η ΒΠΚ, για $a = i$ και $b = n + 1 - i$, δίνει την σ.π.π. του i -οστού διατεταγμένου στατιστικού $X_{i:n}$ ενός τ.δ. μεγέθους n και επομένως αποτελεί γενίκευσή της.

Στην Πρόταση που ακολουθεί δίνεται η α.σ.κ. της τ.μ. X , η οποία ακολουθεί την $ΒΠΚ(a, b)$.



Πρόταση 2.2.1

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την ΒΠΚ(a, b). Τότε η α.σ.κ. της τ.μ. X ορίζεται από τη σχέση:

$$G_F^{(B)}(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{F(x)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = I_{F(x)}(a, b), \quad (2.2.2)$$

όπου $I_{F(x)}(a, b)$ συμβολίζει τον μη-πλήρη λόγο συναρτήσεων βήτα (incomplete beta function ratio).

Απόδειξη

Η α.σ.κ. της ΒΠΚ(a, b) δίνεται από τη σχέση:

$$G_F^{(B)}(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_{-\infty}^x f(t) (F(t))^{a-1} (1-F(t))^{b-1} dt.$$

Θέτοντας $F(t) = y$, όπου $0 < y < 1$, προκύπτει:

$$G_F^{(B)}(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{F(x)} y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy.$$

Επομένως προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα. ■

Εκφράσεις της $G_F^{(B)}(x)$

Στο εδάφιο αυτό θα δοθούν μαθηματικές εκφράσεις της α.σ.κ. της ΒΠΚ υπό μορφή σειράς, για την περίπτωση που μία εκ των δύο παραμέτρων a, b ανήκει στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς και η άλλη στους θετικούς



ακεραίους.

Έστω $F_X(x)$ η α.σ.κ. μιας τ.μ. X και έστω $\overline{F_X(x)} = 1 - F_X(x)$ η αντίστοιχη συνάρτηση επιβίωσης. Τότε $\forall n \in R^+$ το ανάπτυγμα της διωνυμικής σειράς του Νεύτωνα δίνει:

$$1 = \left(F_X(x) + \overline{F_X(x)} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (F_X(x))^k (\overline{F_X(x)})^{n-k}. \quad (2.2.3)$$

Σύμφωνα με τους Rohatgi and Saleh (1988), εάν $n \in Z^+$ τότε η ανωτέρω σειρά έχει νόημα για $k \leq n$ και ως εκ τούτου εκφράζεται σαν ένα πεπερασμένο άθροισμα $n+1$ το πλήθος όρων. Επομένως, για $n \in R^+$ και $i \in Z^+$, με $i < n$, θα έχουμε για την α.σ.κ., $F_{X_{i:n}}(x)$, του i -οστού διατεταγμένου στατιστικού $X_{i:n}$:

$$F_{X_{i:n}}(x) = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} (F_X(x))^k (\overline{F_X(x)})^{n-k}, \quad (2.2.4)$$

$$F_{X_{i:n}}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{i-1} \binom{n}{k} (F_X(x))^k (\overline{F_X(x)})^{n-k}, \quad (2.2.5)$$

$$1 - F_{X_{i:n}}(x) = \overline{F_{X_{i:n}}} = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{n}{k} (F_X(x))^k (\overline{F_X(x)})^{n-k}. \quad (2.2.6)$$

Από τους σχέσεις (2.2.3) και (2.2.6) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} F_{X_{i:n}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (F_X(x))^k (\overline{F_X(x)})^{n-k} - \sum_{k=0}^{i-1} \binom{n}{k} (F_X(x))^k (\overline{F_X(x)})^{n-k} \\ &= \sum_{k=i}^{\infty} \binom{n}{k} (F_X(x))^k (\overline{F_X(x)})^{n-k}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$



Η σχέση (2.2.7) δείχνει ότι η $F_{X_{i:n}}(x)$ είναι η α.σ.κ. του i -οστού διατεταγμένου στατιστικού $X_{i:n}$ ενός τ.δ. μεγέθους n , όπου $n \in R^+$.

Κατά αντίστοιχο τρόπο και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.2.3), (2.2.5), (2.2.6) και (2.2.7) η α.σ.κ. της ΒΠΚ γράφεται ως εξής:

$$G_F^{(B)}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{a-1} \binom{a+b-1}{k} (F(x))^k (1-F(x))^{a+b-1-k}, \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} G_F^{(B)}(x) &= 1 - \overline{G_F^{(B)}(x)} \\ &= \sum_{k=a}^{\infty} \binom{a+b-1}{k} (F(x))^k (1-F(x))^{a+b-1-k}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Πρέπει να διευκρινιστεί το γεγονός ότι οι σχέσεις (2.2.8) και (2.2.9) συμφωνούν με τις σχέσεις (2.2.5) και (2.2.7), αντίστοιχα.

Είναι πλέον προφανές ότι η σχέση (2.2.9) αποτελεί μια έκφραση της α.σ.κ. της ΒΠΚ, υπό μορφή σειράς, όπου η παράμετρος $a \in Z^+$ και η παράμετρος $b \in R^+$, υπό την προϋπόθεση ότι ο συνδυασμός $\binom{a+b-1}{k}$ παριστάνεται σε όρους Γάμμα συναρτήσεων [βλ. Jones (2004)].

Από τη σχέση (2.2.4) και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι ισχύει $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ προκύπτει και μια άλλη μαθηματική έκφραση (υπό μορφή σειράς) για την $F_{X_{i:n}}(x)$. Αυτή είναι η εξής:



$$\begin{aligned}
F_{X_{in}}(x) &= \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} (F_X(x))^k (\overline{F_X(x)})^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{k+i} (F_X(x))^{k+i} (\overline{F_X(x)})^{n-k-i} \\
&= \binom{n}{i} (F_X(x))^i (\overline{F_X(x)})^{n-i} + \dots + \binom{n}{n} (F_X(x))^n (\overline{F_X(x)})^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{n-k} (F_X(x))^{n-k} (\overline{F_X(x)})^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{k} (F_X(x))^{n-k} (\overline{F_X(x)})^k.
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Επιπλέον, η σχέση (2.2.3) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\begin{aligned}
1 &= (F_X(x) + \overline{F_X(x)})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (F_X(x))^k (\overline{F_X(x)})^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} (F_X(x))^0 (\overline{F_X(x)})^n + \dots + \binom{n}{n} (F_X(x))^n (\overline{F_X(x)})^0 \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} (F_X(x))^{n-k} (\overline{F_X(x)})^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (F_X(x))^{n-k} (\overline{F_X(x)})^k.
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Από τις σχέσεις (2.2.10) και (2.2.11) προκύπτει το εξής:

$$\begin{aligned}
\overline{F_{X_{in}}}(x) &= 1 - F_{X_{in}}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (F_X(x))^{n-k} (\overline{F_X(x)})^k - \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{k} (F_X(x))^{n-k} (\overline{F_X(x)})^k
\end{aligned}$$



$$= \sum_{k=n-i+1}^{\infty} \binom{n}{k} (F_X(x))^{n-k} (\overline{F_X(x)})^k. \quad (2.2.12)$$

Δηλαδή,

$$F_{X_{in}}(x) = 1 - \sum_{k=n-i+1}^{\infty} \binom{n}{k} (F_X(x))^{n-k} (\overline{F_X(x)})^k. \quad (2.2.13)$$

Για $a=i$ και $b=n+1-i$ και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.2.10) και (2.2.13) προκύπτει ότι η α.σ.κ της ΒΠΚ γράφεται ως εξής:

$$G_F^{(B)}(x) = \sum_{k=0}^{b-1} \binom{a+b-1}{k} (F(x))^{a+b-1-k} (1-F(x))^k, \quad (2.2.14)$$

$$G_F^{(B)}(x) = 1 - \sum_{k=b}^{\infty} \binom{a+b-1}{k} (F(x))^{a+b-1-k} (1-F(x))^k. \quad (2.2.15)$$

Από τη σχέση (2.2.15) συμπεραίνεται ότι η α.σ.κ. της ΒΠΚ μπορεί να εκφραστεί υπό μορφή σειράς με την παράμετρο $a \in R^+$ και την παράμετρο $b \in Z^+$, υπό την προϋπόθεση ότι ο συνδυασμός $\binom{a+b-1}{k}$ παριστάνεται σε όρους Γάμμα συναρτήσεων [βλ. Jones (2004)].

Δημιουργία της ΒΠΚ

Στη βιβλιογραφία έχουν δοθεί δύο τρόποι δημιουργίας της οικογένειας των ΒΠΚ [βλ. Jones (2004)]. Ο πρώτος τρόπος υποδεικνύει ότι η ΒΠΚ αποτελεί, ουσιαστικά, ένα μετασχηματισμό μιας τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή Βήτα(a, b) και ο δεύτερος ότι αποτελεί γενίκευση της κατανομής των διατεταγμένων στατιστικών. Οι τρόποι αυτοί εισαγωγής της ΒΠΚ παρουσιάζονται στη συνέχεια.



Πρόταση 2.2.2

Έστω Y μια τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή Βήτα(a, b). Τότε η τ.μ. $X = F^{-1}(Y)$ ακολουθεί την ΒΠΚ(a, b) με γεννήτρια την $F(\cdot)$.

Απόδειξη

Θα προσδιοριστεί η κατανομή της τ.μ. X με τη μέθοδο μετασχηματισμού της α.σ.κ. Είναι τότε:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(F^{-1}(Y) \leq x) = P(Y \leq F(x)) = F_Y(F(x)).$$

Όμως, εφ'όσον $Y \sim B(a, b)$, θα ισχύει:

$$\begin{aligned} F_Y(F(x)) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{F(x)} y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy = \frac{1}{B(a, b)} B_{F(x)}(a, b) \\ &= I_{F(x)}(a, b) = G_F^{(B)}(x), \end{aligned}$$

όπου $B_{F(x)}(a, b)$ συμβολίζει την μη-πλήρη συνάρτηση βήτα (incomplete beta function). Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη και την Πρόταση 2.2.1 προκύπτει ότι η α.σ.κ. της τ.μ. X είναι η α.σ.κ. της ΒΠΚ(a, b) γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο. ■

Από την παραπάνω Πρόταση προκύπτει ότι αν κάποιος θέλει να δημιουργήσει ένα τυχαίο δείγμα (τ.δ.) X_1, \dots, X_n , από μια ΒΠΚ με γεννήτρια $F(\cdot)$ αρκεί να δημιουργήσει ένα τ.δ. Y_1, \dots, Y_n , από την κατανομή Βήτα(a, b) και να υπολογίσει τις τιμές $X_i = F^{-1}(Y_i)$, $i = 1, \dots, n$.



Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η ΒΠΚ αποτελεί γενίκευση της κατανομής των διατεταγμένων στατιστικών που προκύπτει από ένα τ.δ. μιας κατανομής με α.σ.κ. $F(\cdot)$. Για λόγους πληρότητας, στο παρακάτω θεώρημα, το οποίο παρατίθεται χωρίς απόδειξη, δίνεται η σ.π.π. του i -οστού διατεταγμένου στατιστικού $X_{i:n}$ ενός τ.δ. μεγέθους n .

Θεώρημα 2.2.1 [Casella and Berger (1990)]

Έστω X_1, \dots, X_n , ένα τ.δ. μεγέθους n από έναν πληθυσμό με σ.π.π. $f(\cdot)$ και α.σ.κ. $F(\cdot)$ και έστω $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ τα αντίστοιχα διατεταγμένα στατιστικά. Τότε η σ.π.π. της τ.μ. $X_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, δίνεται από τη σχέση:

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f(x) (F(x))^{i-1} (1-F(x))^{n-i}, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (2.2.16)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.2.1) και το γεγονός ότι η σταθερά $\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}$ γράφεται και ως $\frac{1}{B(i, n+1-i)}$ συμπεραίνουμε ότι η ΒΠΚ για $a=i$ και $b=n+1-i$ δίνει την παραπάνω σ.π.π. και ως εκ τούτου αποτελεί γενίκευσή της.

Αυτό σημαίνει ότι αν $a, b \in N$ και X_1, \dots, X_n , είναι ένα τ.δ. μεγέθους $n = a + b - 1$ από την κατανομή με σ.π.π. $f(x)$ και α.σ.κ. $F(x)$ τότε η a -οστή παρατήρηση είναι μια τυχαία παρατήρηση από την ΒΠΚ (a, b) , υπό την προϋπόθεση ότι $a \in N$ και $b \in N$.

Πρέπει να σημειωθεί το γεγονός ότι στο Θεώρημα 2.2.1 τα $i, n \in N$, δηλαδή ανήκουν στο σύνολο των φυσικών αριθμών, ενώ στον Ορισμό 2.2.1 έχουμε ότι $a, b \in (0, \infty)$, δηλαδή ανήκουν στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς.



Μέση τιμή, διακύμανση και ροπές της ΒΠΚ

Στην παράγραφο αυτή δίνονται η μέση τιμή, η διακύμανση και οι ροπές της ΒΠΚ.

Έστω X μια τ.μ. τέτοια ώστε $X \sim g_F^{(B)}(x; a, b)$. Τότε η μέση τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$EX = \frac{1}{B(a, b)} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) (F(x))^{a-1} (1-F(x))^{b-1} dx. \quad (2.2.17)$$

Η διακύμανση δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \text{Var}X &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) (F(x))^{a-1} (1-F(x))^{b-1} dx \\ &\quad - \left[\frac{1}{B(a, b)} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) (F(x))^{a-1} (1-F(x))^{b-1} dx \right]^2. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Η k -τάξης ροπή περί το μηδέν, $k \in Z$, δίνεται από τη σχέση:

$$EX^k = \frac{1}{B(a, b)} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) (F(x))^{a-1} (1-F(x))^{b-1} dx. \quad (2.2.19)$$

Όμως, από την Πρόταση 2.2.2, ισχύει ότι:

$$X = F^{-1}(Y) \sim g_F^{(B)}(x; a, b) \Leftrightarrow Y = F(X) \sim \text{Βήτα}(a, b).$$

Κατά συνέπεια θέτοντας $y = F(x)$ έπεται ότι $x = F^{-1}(y)$ και $dy/dx = f(x)$. Επομένως προκύπτει:



$$EX^k = E(F^{-1}(Y))^k = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 (F^{-1}(y))^k y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy. \quad (2.2.20)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά και επομένως δεν μπορούν να υπολογιστούν, γενικά, οι ροπές αναλυτικά. Όμως, για μερικές ειδικές ΒΠΚ που αντιστοιχούν σε ειδικές γεννήτριες $F(\cdot)$ είναι δυνατόν να προκύψουν σε αναλυτική μορφή οι ροπές της ΒΠΚ.

Συμμετρία της ΒΠΚ

Όταν η γεννήτρια κατανομή $F(\cdot)$ ικανοποιεί κατάλληλη σχέση τότε με τον καθορισμό των παραμέτρων a και b ελέγχεται η συμμετρία της $g_F^{(B)}$. Πιο συγκεκριμένα, αν $a=b$ και $F(x)=1-F(-x)$, αποδεικνύεται ότι η ΒΠΚ είναι συμμετρική. Οντως,

$$\begin{aligned} g_F^{(B)}(x; a, b) &= g_F^{(B)}(x; a, a) = \frac{1}{B(a, a)} f(x) (F(x))^{a-1} (1-F(x))^{a-1} \\ &= \frac{1}{B(a, a)} f(-x) (1-F(-x))^{a-1} [1-(1-F(-x))]^{a-1} \\ &= \frac{1}{B(a, a)} f(-x) [F(-x)]^{a-1} (1-F(-x))^{a-1} \\ &= g_F^{(B)}(-x; a, a), \end{aligned}$$

καθώς όταν $F(x)=1-F(-x)$ τότε εύκολα προκύπτει ότι $f(x)=f(-x)$.

ΒΠΚ με παραμέτρους θέσης και κλίμακας

Προηγουμένως παρουσιάστηκε η ΒΠΚ η οποία ορίστηκε από τη σχέση (2.2.1) και θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως τυποποιημένη ΒΠΚ. Ο ορισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί έτσι ώστε η ΒΠΚ να εξαρτάται από



παραμέτρους θέσης (location) και κλίμακας (scale).

Η εισαγωγή παραμέτρων θέσης και κλίμακας σε μια σ.π.π. είναι μια τεχνική για την κατασκευή μιας νέας οικογένειας σ.π.π., η οποία είναι χρήσιμη για τη μοντελοποίηση δεδομένων.

Έστω η τ.μ. Z η οποία ακολουθεί τη $BPK(a,b)$ με πυκνότητα που δίνεται από τη σχέση:

$$f_Z(z) = \frac{1}{B(a,b)} f(z) (F(z))^{a-1} (1-F(z))^{b-1}, \quad z \in R, a, b > 0.$$

Επιπλέον, έστω $Y = \mu + \sigma Z$, όπου $\mu \in R, \sigma > 0$, μια τ.μ. που ορίζεται από τον παραπάνω γραμμικό μετασχηματισμό θέσης και κλίμακας της τ.μ. Z . Τότε, άμεσα προκύπτει ότι η τ.μ. Z ακολουθεί την ίδια κατανομή με τη μεταβλητή $\frac{Y-\mu}{\sigma}$. Επομένως, η σ.π.π. της τ.μ. Y δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_Z\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \left| \frac{1}{\sigma} \right| \\ &= \frac{1}{\sigma B(a,b)} f\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \left(F\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right)^{a-1} \left(1-F\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right)^{b-1}, \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

όπου $y \in R, \mu \in R, a, b, \sigma > 0$.

Επίσης η α.σ.κ. $G_F^{(B)}(\cdot)$ της τ.μ. Y με σ.π.π. της μορφής (2.2.21) δίνεται από τη σχέση:

$$G_F^{(B)}(y) = I_{F\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}(a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{F\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)} z^{a-1} (1-z)^{b-1} dz. \quad (2.2.22)$$

Εύκολα προκύπτει ότι η μέση τιμή και η διακύμανση της τ.μ. Y είναι:



$$E(Y) = E(\mu + \sigma Z) = \mu + \sigma \mu_{G_F^{(b)}(z)} \quad \text{και} \quad Var(Y) = Var(\mu + \sigma Z) = \sigma^2 \sigma_{G_F^{(b)}(z)}^2,$$

αντίστοιχα, όπου $\mu_{G_F^{(b)}(z)}$ και $\sigma_{G_F^{(b)}(z)}^2$ είναι η μέση τιμή και η διακύμανση, αντίστοιχα, της τ.μ. Z που ακολουθεί τυποποιημένη ΒΠΚ.

Σχέσεις μεταξύ της ΒΠΚ και άλλων κατανομών

Η επόμενη Πρόταση διατυπώνει σχέσεις που ισχύουν μεταξύ μιας τ.μ. που ακολουθεί ΒΠΚ και τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν κάποιες άλλες κλασικές κατανομές.

Πρόταση 2.2.3

Έστω Z, W ανεξάρτητες τ.μ. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα για την τ.μ. X :

$$(α) \quad X = F^{-1}\left(\frac{Z}{Z+W}\right) \sim ΒΠΚ(a, b), \quad \text{όπου} \quad Z \sim \text{Γάμμα}\left(a, \frac{1}{\theta}\right) \quad \text{και}$$

$$W \sim \text{Γάμμα}\left(b, \frac{1}{\theta}\right).$$

$$(β) \quad X = F^{-1}\left(\frac{Z}{Z+W}\right) \sim ΒΠΚ(a, b), \quad \text{όπου} \quad Z \sim X_{2a}^2 \quad \text{και} \quad W \sim X_{2b}^2.$$

$$(γ) \quad \text{Αν } a, b \in \mathbb{N} \text{ τότε } X = F^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^a \ln Z_i}{\sum_{i=1}^a \ln Z_i + \sum_{j=1}^b \ln W_j}\right) \sim ΒΠΚ(a, b), \quad \text{όπου}$$

$Z_i \sim \text{Βήτα}(\theta, 1), i = 1, \dots, a$, και $W_j \sim \text{Βήτα}(\theta, 1), j = 1, \dots, b$, με Z_1, \dots, Z_a και W_1, \dots, W_b ανεξάρτητες μεταξύ τους τ.μ.

$$(δ) \quad X = F^{-1}\left(\frac{aZ}{aZ+b}\right) \sim ΒΠΚ(a, b), \quad \text{όπου} \quad Z \sim F_{2a, 2b}.$$



Απόδειξη

Λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 2.2.2, σύμφωνα με την οποία εάν Y είναι μια τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή $Bήτα(a,b)$ τότε η τ.μ. $X = F^{-1}(Y)$ ακολουθεί την $BΠΚ(a,b)$ με γεννήτρια την $F(\cdot)$, αρκεί να αποδειχτεί ότι η τ.μ. $Y = \frac{Z}{Z+W}$, για τις περιπτώσεις (α) και (β), η τ.μ.

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^a \ln Z_i}{\sum_{i=1}^a \ln Z_i + \sum_{j=1}^b \ln W_j} \text{ για την περίπτωση (γ) και η τ.μ. } Y = \frac{aZ}{aZ+b} \text{ για την}$$

περίπτωση (δ) ακολουθεί, αντίστοιχα, την $Bήτα(a,b)$. Η απόδειξη αυτών ακολουθεί:

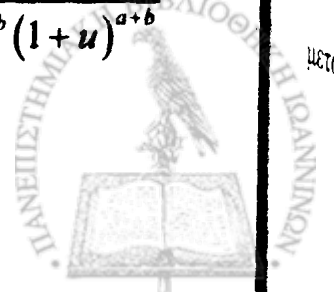
(α) Έστω $Z \sim \text{Γάμμα}\left(a, \frac{1}{\theta}\right)$ και $W \sim \text{Γάμμα}\left(b, \frac{1}{\theta}\right)$ ανεξάρτητες τ.μ.

Θεωρούμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$Y = \frac{Z}{Z+W} = \frac{1}{1 + \frac{W}{Z}} = \frac{1}{1+U}, \text{ όπου } U = \frac{W}{Z}.$$

Αρχικά θα βρεθεί η σ.π.π. της τ.μ. U . Σύμφωνα με γνωστή θεωρία που αφορά την κατανομή πηλίκου ανεξάρτητων τ.μ. [βλ. Κούτρας (2005), σελ. 158], ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} |z| f_W(uz) f_Z(z) dz = \int_0^{\infty} z \frac{\theta^b}{\Gamma(b)} (uz)^{b-1} e^{-\theta uz} \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} z^{a-1} e^{-\theta z} dz \\ &= \frac{\theta^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{b-1} \int_0^{\infty} z^{a+b-1} e^{-[\theta(1+u)]z} dz = \frac{\theta^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{b-1} \frac{\Gamma(a+b)}{\theta^{a+b} (1+u)^{a+b}} \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{B(a,b)} \frac{u^{b-1}}{(1+u)^{a+b}}, u \geq 0.$$

Επομένως η σ.π.π. της τ.μ. $Y = \frac{1}{1+U}$ θα είναι η εξής:

$$f_Y(y) = f_U\left(\frac{1}{y}-1\right) \left| \frac{du}{dy} \right| = \frac{1}{B(a,b)} \frac{\left(\frac{1}{y}-1\right)^{b-1}}{\left(\frac{1}{y}\right)^{a+b}} \left| -\frac{1}{y^2} \right| = \frac{1}{B(a,b)} y^{a-1} (1-y)^{b-1},$$

όπου $0 \leq y \leq 1$. Άρα $Y \sim B(a,b)$.

(β) Είναι γνωστό ότι $Z \sim X_{2a}^2 \equiv \text{Γάμμα}(a,2)$ και $W \sim X_{2b}^2 \equiv \text{Γάμμα}(b,2)$. Επομένως το συμπέρασμα προκύπτει ως ειδική περίπτωση της (α) για $\theta = 1/2$.

(γ) Έστω Z η τ.μ. με σ.π.π. $f_Z(z) = \theta z^{\theta-1}, 0 \leq z \leq 1$, δηλαδή $Z \sim \text{Βήτα}(\theta,1)$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $Y = -\ln Z$, όπου $0 \leq Z \leq 1$. Τότε ισχύει:

$$f_Y(y) = f_Z(e^{-y}) \left| \frac{dz}{dy} \right| = \theta e^{-\theta y}, y \geq 0.$$

Άρα $Y \sim \text{Εκθετική}(\theta) \equiv \text{Γάμμα}\left(1, \frac{1}{\theta}\right)$. Λαμβάνοντας υπόψη αυτή την ιδιότητα προκύπτει ότι αν οι τ.μ. Z_1, \dots, Z_a και W_1, \dots, W_b είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, όπου $Z_i \sim \text{Βήτα}\left(1, \frac{1}{\theta}\right), i = 1, \dots, a$, και $W_j \sim \text{Βήτα}\left(1, \frac{1}{\theta}\right)$,



$j = 1, \dots, b$, τότε οι τ.μ. $-\sum_{i=1}^a \ln Z_i$ και $-\sum_{j=1}^b \ln W_j$ ακολουθούν, αντίστοιχα, τις κατανομές $\Gamma\left(a, \frac{1}{\theta}\right)$ και $\Gamma\left(b, \frac{1}{\theta}\right)$. Κατά συνέπεια, λαμβάνοντας

υπόψη την περίπτωση (α) προκύπτει ότι η τ.μ. $Y = \frac{\sum_{i=1}^a \ln Z_i}{\sum_{i=1}^a \ln Z_i + \sum_{j=1}^b \ln W_j}$

ακολουθεί την κατανομή $B\eta\tau\alpha(a, b)$.

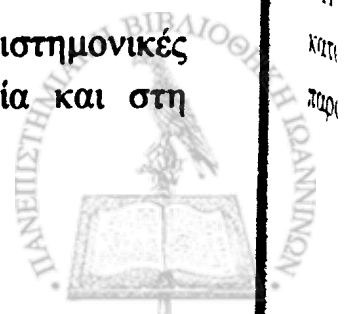
(δ) Θεωρούμε το μετασχηματισμό: $Y = \frac{aZ}{aZ + b}$, όπου Z τ.μ. τέτοια ώστε $Z \sim F_{2a, 2b}$. Επομένως η σ.π.π. της τ.μ. Y θα είναι η εξής:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_Z\left(\frac{yb}{a(1-y)}\right) \left| \frac{dz}{dy} \right| \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{a}{b}\right)^a \frac{\left(\frac{yb}{a(1-y)}\right)^{a-1}}{\left(1 + \frac{a}{b} \frac{yb}{a(1-y)}\right)^{a+b}} \frac{b}{a} \frac{1}{(1-y)^2} \\ &= \frac{1}{B(a,b)} y^{a-1} (1-y)^{b-1}, \quad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

Άρα $Y \sim B(a, b)$. ■

2.3 Η Κατανομή και η μέθοδος της μέγιστης εντροπίας

Η εντροπία παίζει σημαντικό ρόλο σε διάφορες επιστημονικές περιοχές, όπως για παράδειγμα στη φυσική, στην οικονομία και στη



στατιστική. Στη στατιστική μηχανική θεωρείται ως ένα μέτρο της αταξίας ενός φυσικού συστήματος.

Έστω X μια συνεχής τ.μ. με σ.π.π. την $f(\cdot)$. Η εντροπία του Shannon (1948) ορίζεται από τη σχέση:

$$H_{Sh}(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x) dx. \quad (2.3.1)$$

Στην πρόσφατη εργασία τους οι Zografos and Balakrishnan (2009) ασχολήθηκαν με τη μέθοδο της μέγιστης εντροπίας για την αναγνώριση του κατάλληλου πιθανοθεωρητικού μοντέλου στην κλάση των ΒΠΚ.

Η μέθοδος της μέγιστης εντροπίας πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Jaynes (1957) ως μια γενική μέθοδος στατιστικής συμπερασματολογίας και έχει εφαρμοστεί σε διάφορα επιστημονικά πεδία. Σύμφωνα με αυτήν αν υπάρχει μια κλάση από σ.π.π. τέτοια ώστε:

$$\mathcal{F} = \{f(x) : E_f [T_i(X)] = a_i, i = 0, 1, \dots, m\},$$

όπου οι T_i είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις αντίστοιχα ως προς την f και ισχύει ότι $T_0(X) = a_0 = 1$, τότε προτείνεται το μοντέλο το οποίο μεγιστοποιεί την εντροπία του Shannon, υπό τους περιορισμούς της κλάσης \mathcal{F} , ως το πλέον κατάλληλο για να περιγράψει το σύνολο των δεδομένων.

Επομένως η κατανομή της μέγιστης εντροπίας f^{ME} της κλάσης \mathcal{F} προκύπτει ως λύση του ακόλουθου προβλήματος μεγιστοποίησης:

$$f^{ME}(x) = \arg \max_{f \in \mathcal{F}} H_{Sh}(f).$$

Οι Zografos and Balakrishnan (2009) με σκοπό το χαρακτηρισμό της ΒΠΚ μέσω της μεθόδου της μέγιστης εντροπίας παραθέτουν, αρχικά, κατάλληλους περιορισμούς στην κλάση της \mathcal{F} . Οι περιορισμοί αυτοί παρατίθενται στο λήμμα που ακολουθεί.



Λήμμα 2.3.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)]

Αν $g_F^{(b)}$ είναι η σ.π.π. της ΒΠΚ με γεννήτορα την $F(\cdot)$ και αντίστοιχη σ.π.π. την $f(\cdot)$, τότε ισχύει ότι:

- (α) $E_{g_F^{(b)}}[\ln F(x)] = \Psi(a) - \Psi(a+b),$
 (β) $E_{g_F^{(b)}}[\ln(1-F(x))] = \Psi(b) - \Psi(a+b),$
 (γ) $E_{g_F^{(b)}}[\ln f(X)] = E_Y[\ln(f(F^{-1}(Y)))] ,$

όπου $Y \sim \text{Βήτα}(a, b)$ και Ψ είναι η συνάρτηση δίγαμμα, η οποία ορίζεται από τη σχέση: $\Psi(c) = \frac{d}{dc} \ln \Gamma(c), c \in R^+.$

Απόδειξη

(α) Ισχύει ότι:

$$E_{g_F^{(b)}}[\ln F(x)] = \frac{1}{B(a, b)} \int_{-\infty}^{\infty} (\ln F(x)) f(x) (F(x))^{a-1} (1-F(x))^{b-1} dx.$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $y = F(x)$. Είναι τότε:

$$E_{g_F^{(b)}}[\ln F(X)] = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 (\ln y) y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy. \quad (2.3.2)$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:



$$\frac{\partial}{\partial a} B(a, b) = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^1 y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy = \int_0^1 (\ln y) y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy. \quad (2.3.3)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial a} B(a, b) = \frac{\partial}{\partial a} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \left[\frac{\partial}{\partial a} \Gamma(a) - \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)} \frac{\partial}{\partial a} \Gamma(a+b) \right].$$

Όμως,

$$\Psi(c) = \frac{\partial}{\partial c} \ln \Gamma(c) = \frac{1}{\Gamma(c)} \frac{\partial}{\partial c} \Gamma(c) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial c} \Gamma(c) = \Gamma(c) \Psi(c).$$

Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} B(a, b) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \left[\Gamma(a) \Psi(a) - \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)} \Gamma(a+b) \Psi(a+b) \right] \\ &= B(a, b) (\Psi(a) - \Psi(a+b)). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.3.2), (2.3.3) και (2.3.4) προκύπτει το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα.

(β) Ισχύει ότι:

$$E_{g_F^{(b)}} [\ln(1-F(x))] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1-F(x)) f(x) (F(x))^{a-1} (1-F(x))^{b-1} dx}{B(a, b)}.$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $y = 1 - F(x)$. Είναι τότε:



$$E_{g_F^{(b)}} [\ln(1 - F(x))] = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 (\ln y) (1 - y)^{a-1} y^{b-1} dy. \quad (2.3.5)$$

Με ακριβώς τον ίδιο συλλογισμό, όπως στην περίπτωση (α), προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial}{\partial b} B(b, a) = \int_0^1 (\ln y) y^{b-1} (1 - y)^{a-1} dy \quad (2.3.6)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial b} B(b, a) = B(b, a) (\Psi(b) - \Psi(a + b)). \quad (2.3.7)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.3.5), (2.3.6), (2.3.7) και το γεγονός ότι $B(a, b) = B(b, a)$ προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

(γ) Ισχύει ότι:

$$E_{g_F^{(b)}} [\ln F(x)] = \frac{1}{B(a, b)} \int_{-\infty}^{\infty} (\ln F(x)) f(x) (F(x))^{a-1} (1 - F(x))^{b-1} dx.$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $y = F(x)$. Τότε ισχύει ότι: $x = F^{-1}(y)$ και $dy/dx = f(x)$. Επομένως προκύπτει:

$$\begin{aligned} E_{g_F^{(b)}} [\ln F(x)] &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 (\ln f(F^{-1}(y))) y^{a-1} (1 - y)^{b-1} dy \\ &= E_Y [\ln f(F^{-1}(y))], \end{aligned}$$

όπου $Y \sim B\eta\tau\alpha(a, b)$.



Από την επόμενη Πρόταση προκύπτει ότι η ΒΠΚ έχει μέγιστη εντροπία στην κλάση όλων των α.σ.κ. η οποία ορίζεται από τους περιορισμούς που παρατίθενται εκεί.

Πρόταση 2.3.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)]

Η σ.π.π. $g_F^{(B)}$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$g_F^{(B)} = \arg \max_h H_{Sh}(h),$$

υπό τους περιορισμούς:

(α) $E_h[\ln F(X)] = \Psi(a) - \Psi(a+b),$

(β) $E_h[\ln(1 - F(X))] = \Psi(b) - \Psi(a+b),$

(γ) $E_h[\ln f(X)] = E_Y[\ln(f(F^{-1}(Y)))]$, όπου $Y \sim \text{Βήτα}(a, b)$.

Απόδειξη

Έστω h μια πυκνότητα που ικανοποιεί τους ανωτέρω περιορισμούς. Τότε από την απόκλιση (divergence) Kullback-Leibler μεταξύ των πυκνοτήτων h και $g_F^{(B)}$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} 0 \leq D(h, g_F^{(B)}) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \ln \left(\frac{h(x)}{g_F^{(B)}(x)} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \ln h(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \ln g_F^{(B)}(x) dx \\ &= -H_{Sh}(h) - \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \ln g_F^{(B)}(x) dx. \end{aligned}$$

(2.3.8)



Όμως, χρησιμοποιώντας τους περιορισμούς (α), (β) και (γ) της Πρότασης 2.3.1 προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \ln g_F^{(B)}(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \ln \left[\frac{1}{B(a,b)} f(x) (F(x))^{a-1} (1-F(x))^{b-1} \right] dx \\
 &= -\ln B(a,b) + E_h [\ln f(x)] + (a-1) E_h [\ln F(x)] \\
 &\quad + (b-1) E_h [\ln(1-F(x))] \\
 &= -\ln B(a,b) + E_h [\ln f(X)] \\
 &\quad + (a-1)(\Psi(a) - \Psi(a+b)) \\
 &\quad + (b-1)(\Psi(b) - \Psi(a+b)). \tag{2.3.9}
 \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
 -H_{Sh}(g_F^{(B)}) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_F^{(B)}(x) \ln g_F^{(B)}(x) dx \\
 &= -\ln B(a,b) + E_{g_F^{(B)}} [\ln f(X)] + (a-1)(\Psi(a) - \Psi(a+b)) \\
 &\quad + (b-1)(\Psi(b) - \Psi(a+b)) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \ln g_F^{(B)}(x) dx. \tag{2.3.10}
 \end{aligned}$$

Επομένως η σχέση (2.3.9) τώρα γίνεται:

$$0 \leq -H_{Sh}(h) + H_{Sh}(g_F^{(B)}) \Rightarrow H_{Sh}(h) \leq H_{Sh}(g_F^{(B)}). \tag{2.3.11}$$

Η ισότητα στη σχέση (2.3.11) ισχύει αν-ν $D(h, g_F^{(B)}) = 0$, δηλαδή αν-ν $h = g_F^{(B)}$. ■



Τα ενδιάμεσα βήματα στην απόδειξη της Πρότασης 2.3.1 δίνουν την παρακάτω έκφραση της εντροπίας του Shannon για την πυκνότητα της ΒΠΚ.

Πόρισμα 2.3.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)]

Η εντροπία του Shannon για την πυκνότητα της ΒΠΚ έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} H_{Sh}(g_F^{(B)}) &= \ln B(a, b) - E_Y [\ln f(F^{-1}(Y))] \\ &\quad - (a-1)(\Psi(a) - \Psi(a+b)) \\ &\quad - (b-1)(\Psi(b) - \Psi(a+b)), \end{aligned}$$

όπου $Y \sim \text{Βήτα}(a, b)$.

Απόδειξη

Το Πόρισμα αποδεικνύεται κατόπιν χρήσης των σχέσεων (2.3.9), (2.3.10) και του περιορισμού (γ) της Πρότασης 2.3.1. ■



ΕΙΔΙΚΕΣ ΒΗΤΑ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται με ευσύνοπτο τρόπο διάφορες μονοδιάστατες Βήτα παραγόμενες κατανομές, οι οποίες δημιουργούνται με την εισαγωγή της α.σ.κ. μιας γνωστής συνεχούς κατανομής στη θέση της γεννήτριας κατανομής $F(\cdot)$ στη σχέση (2.2.1). Επιπρόσθετα, θα παρουσιαστούν οι βασικές τους ιδιότητες και θα αναφερθούν οι κυριότερες εφαρμογές αυτών των κατανομών.

3.2 Βήτα-Κανονική Κατανομή

Η Βήτα-Κανονική Κατανομή (ΒΚΚ) πρωτοεισήχθη στη βιβλιογραφία από τους Eugene *et al.* (2002) και προκύπτει όταν η γεννήτρια κατανομή $F(\cdot)$ στη σχέση (2.2.1) είναι η α.σ.κ. $\Phi(\cdot)$ της τυπικής Κανονικής κατανομής. Αυτή η κατανομή χαρακτηρίζεται για την εξαιρετική προσαρμογή στη μοντελοποίηση δεδομένων τόσο από συμμετρικές όσο και από λοξές κατανομές. Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός της ΒΚΚ με παραμέτρους θέσης και κλίμακας μ και σ , αντίστοιχα.

Ορισμός 3.2.1 [Eugene *et al.* (2002)]

Έστω $\Phi(\cdot)$ η α.σ.κ. της τυπικής Κανονικής κατανομής με σ.π.π. την $\phi(\cdot)$. Τότε η τ.μ. X ακολουθεί τη ΒΚΚ με παραμέτρους a, b, μ και σ αν η σ.π.π. της δίνεται από τη σχέση:



$$g_{\phi}^{(BN)}(x; a, b, \mu, \sigma) = \frac{\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma B(a, b)} \left(\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{a-1} \left(1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{b-1}, \quad (3.2.1)$$

όπου $x \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ και $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$ είναι η πλήρης συνάρτηση βήτα.

Η ΒΚΚ της σχέσης (3.2.1) προκύπτει όταν στη σχέση (2.2.21), στη θέση του γεννήτορα $F(\cdot)$, εισαχθεί η α.σ.κ. της τυπικής Κανονικής κατανομής. Όταν η τ.μ. X ακολουθεί την ΒΚΚ τότε αυτό θα συμβολίζεται $X \sim g_{\phi}^{(BN)}(x; a, b, \mu, \sigma)$ ή $X \sim BKK(a, b, \mu, \sigma)$. Στην περίπτωση που $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$ τότε λέμε ότι έχουμε την τυποποιημένη ΒΚΚ.

Λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 2.2.1, εύκολα προσδιορίζεται στην Πρόταση που ακολουθεί η α.σ.κ. της ΒΚΚ.

Πρόταση 3.2.1

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BKK(a, b, \mu, \sigma)$. Τότε η α.σ.κ. της τ.μ. X ορίζεται από τη σχέση:

$$G_{\phi}^{(BN)}(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt. \quad (3.2.2)$$

Παρατήρηση 3.2.1

Με βάση την Πρόταση 2.2.2 προκύπτει ότι αν κάποιος θέλει να δημιουργήσει ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από μια τυποποιημένη ΒΚΚ με παραμέτρους a, b, μ και σ , δηλαδή μια ΒΠΚ με γεννήτρια $\Phi(\cdot)$, αρκεί να



δημιουργήσει ένα τ.δ. Y_1, \dots, Y_n , από την Βήτα(a, b) και να υπολογίσει τις τιμές $X_i = \Phi^{-1}(Y_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Παρατήρηση 3.2.2

Από τον Ορισμό 3.2.1 προκύπτουν άμεσα οι ακόλουθες ιδιότητες.

1) Για $a = b = \sigma = 1$ και $\mu = 0$, η σ.π.π. της ΒΚΚ ταυτίζεται με τη σ.π.π. του γεννήτορα. Δηλαδή ισχύει ότι: $g_{\Phi}^{(BN)}(\cdot; 1, 1, 0, 1) = \varphi(\cdot)$.

2) Όταν $a, b \in N$, με $a = i$ και $b = n + 1 - i$, τότε προκύπτει ότι η σ.π.π. της ΒΚΚ είναι η σ.π.π. του a -οστού διατεταγμένου στατιστικού της Κανονικής κατανομής.

Επιπλέον, σύμφωνα με την εργασία των Eugene *et al.* (2002), ισχύουν τα ακόλουθα:

1) Η ΒΚΚ είναι λοξή δεξιά όταν $a > b$. Ο βαθμός της δεξιάς λοξότητας αυξάνεται καθώς η παράμετρος a αυξάνεται.

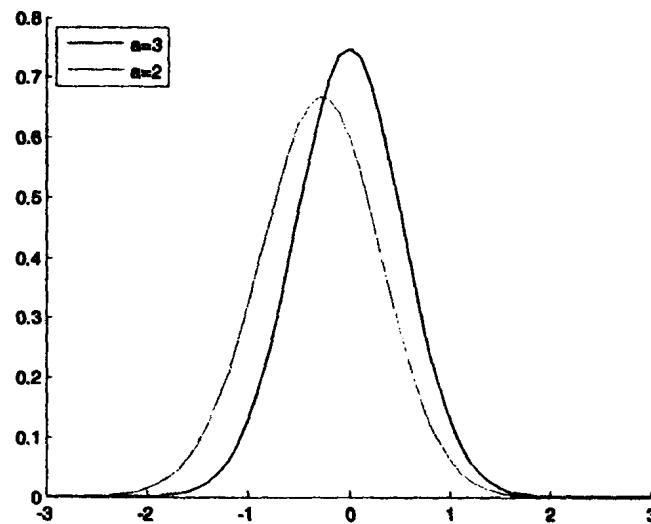
2) Η ΒΚΚ είναι λοξή αριστερά όταν $a < b$. Ο βαθμός της αριστερής λοξότητας αυξάνεται καθώς η παράμετρος b μειώνεται.

3) Η ΒΚΚ είναι συμμετρική και πλατύκυρτη όταν $a < 1$, $b < 1$ και $a = b$. Καθώς οι παράμετροι a και b μειώνονται (μέχρι να γίνει δικόρυφη η κατανομή) τόσο βαρύτερες γίνονται οι ουρές της ΒΚΚ.

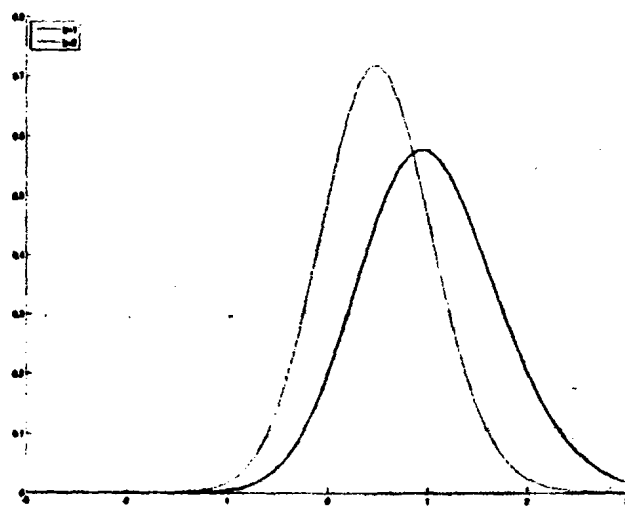
4) Η ΒΚΚ είναι λεπτόκυρτη όταν $a > 1$ και $b > 1$. Καθώς οι παράμετροι a και b αυξάνονται τόσο μεγαλώνει η κορυφή της ΒΚΚ.



Στα σχήματα που ακολουθούν δίνεται η σ.π.π. της ΒΚΚ για επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων a, b στην ειδική περίπτωση της τυποποιημένης ΒΚΚ. Ειδικότερα, στο Σχήμα 1 ισχύουν οι περιπτώσεις 2) και 4) και στο Σχήμα 2 ισχύουν οι περιπτώσεις 1) και 4).



Σχήμα 1: Σ.π.π. της τυποποιημένης Βήτα-Κανονικής Κατανομής όταν $b = 3$.



Σχήμα 2: Σ.π.π. της τυποποιημένης Βήτα-Κανονικής Κατανομής όταν $a = 4$.



Μέση τιμή, διακύμανση και ροπές της ΒΚΚ

Η ΒΚΚ πρωτομελετήθηκε στην εργασία των Eugene *et al.* (2002), οι οποίοι μεταξύ άλλων υπολόγισαν σε κλειστή μορφή τη μέση τιμή της ΒΚΚ για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων a και b . Οι Gupta and Nadarajah (2004) υπολόγισαν μια πιο γενική έκφραση για την k -τάξης ροπή της ΒΚΚ για κάθε $a, b \in Z^+$. Επιπλέον, θεώρησαν ειδικές περιπτώσεις των a και b οι οποίες περιλαμβάνουν αυτές των Eugene *et al.* (2002). Εκτός του γεγονότος ότι τα αποτελέσματά τους είναι πιο γενικά, η απόδειξή τους είναι ευκολότερη. Πριν δοθεί το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας των Gupta and Nadarajah (2004), που αφορά την k -τάξης ροπή μιας τ.μ. $X \sim BK\zeta(a, b, \mu, \sigma)$, με $a, b \in Z^+$, θα δοθεί ένα αποτέλεσμα σε μορφή Λήμματος που χρησιμοποιείται στην απόδειξή του.

Λήμμα 3.2.1 [Gupta and Nadarajah (2004)]

Ισχύουν τα εξής για το διωνυμικό ανάπτυγμα:

α) Για $n \geq 0$ και $x > 0$ ισχύει:

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{(-1)^r x^{r+1}}{r+1} = \frac{1 - (1-x)^{n+1}}{n+1}. \quad (3.2.3)$$

β) Για $a, b \in Z^+$ ισχύει:

$$\sum_{r=0}^{b-1} \frac{(-1)^r}{a+r} \binom{b-1}{r} = B(a, b). \quad (3.2.4)$$



Απόδειξη

α) Από το διωνυμικό ανάπτυγμα παίρνουμε:

$$(1-x)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r x^r. \quad (3.2.5)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη ως προς x προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

β) Από το διωνυμικό ανάπτυγμα παίρνουμε:

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \sum_{r=0}^{b-1} (-1)^r \binom{b-1}{r} x^{a+r-1}. \quad (3.2.6)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη, ως προς x από το 0 έως το 1, προκύπτει το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα. ■

Θεώρημα 3.2.1 [Gupta and Nadarajah (2004)]

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BKK(a, b, \mu, \sigma)$. Τότε για $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ισχύει:

$$EX^k = \mu^k + \frac{\mu^k}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{b-1} (-1)^j \binom{b-1}{j} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^i \times \left[\sum_{r=0}^{a+j-1} (-1)^r \binom{a+j-1}{r} I_{i,r} + (-1)^i I_{i, a+j-1} \right], \quad (3.2.7)$$

$$\text{όπου } I_{i,r} = \int_0^{\infty} z^i \varphi(z) (1 - \Phi(z))^r dz. \quad (3.2.8)$$



Απόδειξη

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $b \in \mathbb{Z}^+$ προκύπτει, από την (3.2.1), ότι η πυκνότητα της $BKK(a, b, \mu, \sigma)$ γράφεται και ως εξής:

$$g_{\Phi}^{(BN)}(x; a, b, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma B(a, b)} \sum_{j=0}^{b-1} (-1)^j \binom{b-1}{j} h_j(x),$$

όπου $h_j(x) = \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \left(\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{a+j-1}$, λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει:

$$\left(1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{b-1} = \sum_{j=0}^{b-1} (-1)^j \binom{b-1}{j} \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Επομένως,

$$EX^k = \frac{1}{\sigma B(a, b)} \sum_{j=0}^{b-1} (-1)^j \binom{b-1}{j} \int_{-\infty}^{\infty} x^k h_j(x) dx. \quad (3.2.9)$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της διωνυμικής σειράς του Νεύτωνα προκύπτει:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^k h_j(x) dx &= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z)^k \varphi(z) (\Phi(z))^{a+j-1} dz \\ &= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \mu^{k-i} (\sigma z)^i \varphi(z) (\Phi(z))^{a+j-1} dz \\ &= \sigma \mu^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^i \int_{-\infty}^{\infty} z^i \varphi(z) (\Phi(z))^{a+j-1} dz. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Η ολοκληρωτέα ποσότητα της προηγούμενης σχέσης γράφεται και ως εξής:



$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} z^i \varphi(z) (\Phi(z))^{a+j-1} dz = \\
& = \int_0^{\infty} z^i \varphi(z) (\Phi(z))^{a+j-1} dz + \int_{-\infty}^0 z^i \varphi(z) (\Phi(z))^{a+j-1} dz \\
& = \int_0^{\infty} z^i \varphi(z) (\Phi(z))^{a+j-1} dz + \int_{\infty}^0 (-z)^i \varphi(-z) (\Phi(-z))^{a+j-1} d(-z) \\
& = \int_0^{\infty} z^i \varphi(z) (1 - \Phi(-z))^{a+j-1} dz + (-1)^i \int_0^{\infty} z^i \varphi(z) (1 - \Phi(z))^{a+j-1} dz.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα στο πρώτο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης προκύπτει ότι:

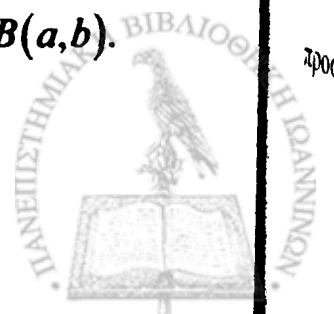
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} z^i \varphi(z) (\Phi(z))^{a+j-1} dz &= \int_0^{\infty} z^i \varphi(z) \sum_{r=0}^{a+j-1} \binom{a+j-1}{r} (-\Phi(-z))^r dz \\
&+ (-1)^i \int_0^{\infty} z^i \varphi(z) (1 - \Phi(z))^{a+j-1} dz \\
&= \sum_{r=0}^{a+j-1} (-1)^r \binom{a+j-1}{r} I_{i,r} + (-1)^i I_{i,a+j-1}. \quad (3.2.11)
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.2.9), (3.2.10) και (3.2.11) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
EX^k &= \frac{\mu^k}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} (-1)^j \binom{b-1}{j} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^i \\
&\times \left[\sum_{r=0}^{a+j-1} (-1)^r \binom{a+j-1}{r} I_{i,r} + (-1)^i I_{i,a+j-1} \right]. \quad (3.2.12)
\end{aligned}$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του θεωρήματος απομένει να δείξουμε ότι ο όρος που αντιστοιχεί για $i=0$ ισούται με μ^k . Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\sum_{j=0}^{b-1} (-1)^j \binom{b-1}{j} \left[\sum_{r=0}^{a+j-1} (-1)^r \binom{a+j-1}{r} I_{0,r} + (-1)^0 I_{0,a+j-1} \right] = B(a,b).$$



Ισχύει ότι:

$$I_{0,k} = \int_0^{\infty} \varphi(z)(1-\Phi(z))^k dz = - \left[\frac{(1-\Phi(z))^{k+1}}{k+1} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2^{k+1}(k+1)}. \quad (3.2.13)$$

Επιπλέον,

$$\sum_{r=0}^{a+j-1} (-1)^r \binom{a+j-1}{r} I_{0,r} + (-1)^0 I_{0,a+j-1} = \sum_{r=0}^{a+j-1} \frac{(-1)^r}{2^{r+1}(r+1)} \binom{a+j-1}{r} + \frac{1}{2^{a+j}(a+j)}. \quad (3.2.14)$$

Εφαρμόζοντας το α) από το Λήμμα 3.2.1 [Gupta and Nadarajah (2004)], για $n = a + j - 1$ και $x = \frac{1}{2}$, η σχέση (3.2.14) γίνεται:

$$\sum_{r=0}^{a+j-1} \frac{(-1)^r}{2^{r+1}(r+1)} \binom{a+j-1}{r} + \frac{1}{2^{a+j}(a+j)} = \frac{1 - (1/2)^{a+j}}{a+j} + \frac{1}{2^{a+j}(a+j)} = \frac{1}{a+j}.$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη το β) από το Λήμμα 3.2.1 [Gupta and Nadarajah (2004)] ο όρος που αντιστοιχεί στο $i = 0$ γίνεται:

$$\sum_{j=0}^{b-1} \frac{(-1)^j}{a+j} \binom{b-1}{j} = B(a,b).$$

Επομένως, όταν $i = 0$, το άθροισμα των σειρών στον τύπο (3.2.12) δίνει μ^k και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί. ■

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Θεώρημα είναι εφικτός ο προσδιορισμός της μέσης τιμής της ΒΚΚ [βλ. Gupta and Nadarajah (2004)].



Θεώρημα 3.2.2 [Gupta and Nadarajah (2004)]

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BKK(a, b, \mu, \sigma)$. Τότε για $a, b \in Z^+$ ισχύει:

$$EX = \mu + \frac{\sigma}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{b-1} \left[\sum_{r=0}^{a+j-2} \frac{(-1)^{j+r}}{r+1} \binom{b-1}{j} \binom{a+j-1}{r} \delta_{r+1} + \frac{(-1)^{a-1} - (-1)^j}{a+j} \binom{b-1}{j} \delta_{a+j} \right], \quad (3.2.15)$$

$$\text{όπου } \delta_r = \int_0^{\infty} (1 - \Phi(z))^r dz. \quad (3.2.16)$$

Απόδειξη

Για $k=1$ η σχέση (3.2.7) γίνεται:

$$EX = \mu + \frac{\sigma}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{b-1} (-1)^j \binom{b-1}{j} \times \left[\sum_{r=0}^{a+j-1} (-1)^r \binom{a+j-1}{r} I_{1,r} + (-1) I_{1,a+j-1} \right].$$

Όμως,

$$I_{1,r} = \int_0^{\infty} z \varphi(z) (1 - \Phi(z))^r dr \\ = \left[-\frac{z}{r+1} (1 - \Phi(z))^{r+1} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{r+1} \int_0^{\infty} (1 - \Phi(z))^{r+1} dz = \frac{\delta_{r+1}}{r+1}.$$

Επομένως,



$$\begin{aligned}
EX &= \mu + \frac{\sigma}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \left[\sum_{r=0}^{a+j-1} \frac{(-1)^{j+r}}{r+1} \binom{b-1}{j} \binom{a+j-1}{r} \delta_{r+1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-1)^{j+1}}{a+j} \binom{b-1}{j} \delta_{a+j} \right] \\
&= \mu + \frac{\sigma}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \left[\sum_{r=0}^{a+j-2} \frac{(-1)^{j+r}}{r+1} \binom{b-1}{j} \binom{a+j-1}{r} \delta_{r+1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-1)^{a+2j-1}}{a+j} \binom{b-1}{j} \delta_{a+j} + \frac{(-1)^{j+1}}{a+j} \binom{b-1}{j} \delta_{a+j} \right] \\
&= \mu + \frac{\sigma}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \left[\sum_{r=0}^{a+j-2} \frac{(-1)^{j+r}}{r+1} \binom{b-1}{j} \binom{a+j-1}{r} \delta_{r+1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-1)^{a-1} - (-1)^j}{a+j} \binom{b-1}{j} \delta_{a+j} \right].
\end{aligned}$$

Εύκολα προκύπτει, λαμβάνοντας υπόψη τα Θεωρήματα 3.2.1 και 3.2.2 [Gupta and Nadarajah (2004)] ότι η διακύμανση δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
VarX &= EX^2 - (EX)^2 \\
&= \mu^2 + \frac{\mu^2}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} (-1)^j \binom{b-1}{j} \sum_{i=1}^2 \binom{2}{i} \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^i \\
&\quad \times \left[\sum_{r=0}^{a+j-1} (-1)^r \binom{a+j-1}{r} I_{i,r} + (-1)^i I_{i,a+j-1} \right] \\
&\quad - \left\{ \mu + \frac{\sigma}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \left[\sum_{r=0}^{a+j-2} \frac{(-1)^{j+r}}{r+1} \binom{b-1}{j} \binom{a+j-1}{r} \delta_{r+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(-1)^{a-1} - (-1)^j}{a+j} \binom{b-1}{j} \delta_{a+j} \right] \right\}^2.
\end{aligned}$$



Συμμετρία της ΒΚΚ

Στην εργασία τους οι Eugene *et al.* (2002) εξετάζουν πότε η ΒΚΚ είναι συμμετρική γύρω από την παράμετρο μ .

Λήμμα 3.2.2 [Eugene *et al.* (2002)]

Όταν $a = b$ η ΒΚΚ είναι συμμετρική γύρω από την παράμετρο μ .

Απόδειξη

Έστω $P(x) = \frac{1}{B(a,b)} \varphi(x) (\Phi(x))^{a-1} (1-\Phi(x))^{b-1}$. Τότε, όταν $a = b$,

ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} P(\mu-x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}B(a,a)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} (\Phi(\mu-x))^{a-1} (1-\Phi(\mu-x))^{a-1} \\ &= \frac{\Gamma(2a)}{\sigma\sqrt{2\pi}\Gamma(a)\Gamma(a)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} (1-\Phi(\mu+x))^{a-1} [1-(1-\Phi(\mu+x))]^{a-1} \\ &= \frac{\Gamma(2a)}{\sigma\sqrt{2\pi}\Gamma(a)\Gamma(a)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} (\Phi(\mu+x))^{a-1} [1-\Phi(\mu+x)]^{a-1} \\ &= P(\mu+x) \end{aligned}$$

Παρατήρηση 3.2.3

Το ανωτέρω αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο αφού σύμφωνα με την παράγραφο που αφορά τη συμμετρία της ΒΠΚ [βλ. Κεφ. 2, σελ. 13] η τυποποιημένη ΒΠΚ είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν αν $a = b$ και $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.



3.3 Βήτα-Γενικευμένη-Ημικανονική Κατανομή

Η Βήτα-Γενικευμένη-Ημικανονική Κατανομή (ΒΓΗΚ) πρωτοεισήχθη πρόσφατα στη βιβλιογραφία από τους Pescim *et al.* (2010). Αυτή η κατανομή περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις την Ημικανονική Κατανομή (ΗΚ) και την Γενικευμένη Ημικανονική Κατανομή (ΓΗΚ) [βλ. Cooray and Ananda (2008)]. Εν αντιθέσει με την ΓΗΚ, την ΗΚ, την Weibull και την Βήτα-Weibull Κατανομή (BWK), η οποία θα παρουσιαστεί σε επόμενη παράγραφο, η ΒΓΗΚ χαρακτηρίζεται για την προσαρμοστικότητά της επί θετικών δεδομένων.

Σύμφωνα με την εργασία των Pescim *et al.* (2010) και το σύγγραμμα των Beer and Johnston (1992) η κόπωση είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η θραύση σε ένα υλικό εμφανίζεται κατόπιν επαναλαμβανόμενων φορτίσεων. Τα στατιστικά μοντέλα μας επιτρέπουν να προσεγγίσουμε και να μελετήσουμε την τυχαία κύμανση του χρόνου θραύσης των εκτιθεμένων υλικών. Οι πιο δημοφιλείς κατανομές για την περιγραφή της διαδικασίας της διάρκειας ζωής έως την κόπωση των υλικών είναι η ΗΚ και η κατανομή των Birnbaum-Saunders (BS). Η ΗΚ και η BS είναι μια επιλογή για τη μοντελοποίηση μονότονων ρυθμών κινδύνου (monotone hazard rates) εξαιτίας της λοξότητάς τους. Παρ'όλα αυτά, δε δίνουν μια λογική παραμετρική προσαρμογή όταν εφαρμόζονται για τη μοντελοποίηση μη μονότονων ρυθμών αποτυχίας. Για την υπέρβαση αυτής της αδυναμίας θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν πιο ευπροσάρμοστες κατανομές, οι οποίες, δυστυχώς, έχουν πέντε ή και περισσότερες παραμέτρους. Τέλος, για την επίλυση του προβλήματος έχει προταθεί η Γενικευμένη-Birnbaum-Saunders [βλ. Diaz-Garcia and Leiva (2005)] και η ΓΗΚ.

Σ'αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί διεξοδικά η ΒΓΗΚ. Αυτή η κατανομή είναι χρήσιμη διότι έχει την ικανότητα να προσαρμόζει λοξά δεδομένα. Η ευελιξία της να προσαρμόζει όλες τις μορφές της συνάρτησης κινδύνου την καθιστά απαραίτητο μοντέλο για την επίλυση πλήθους προβλημάτων στην ανάλυση επιβίωσης. Πέραν τούτου έχει τη δυνατότητα να μοντελοποιεί ρυθμούς αποτυχίας σχήματος «μπανιέρας» (bathtub shaped failure rates).



Προτού προχωρήσουμε στην αναλυτική παρουσίαση της ΒΓΗΚ θα δώσουμε επιγραμματικά τις ΓΗΚ και ΗΚ.

Στην πρόσφατη εργασία τους οι Cooray and Ananda (2008) όρισαν την σ.π.π. της ΓΗΚ ως εξής:

$$g^{(GHN)}(x; c, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{c}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^c e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2c}}, \quad x > 0, c, \theta > 0. \quad (3.3.1)$$

Η α.σ.κ. της ΓΗΚ ορίζεται ως εξής:

$$G^{(GHN)}(x) = 2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right] - 1 = \operatorname{erf}\left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^c}{\sqrt{2}}\right], \quad (3.3.2)$$

όπου $\Phi(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right] \right\}$, με $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Η ΗΚ, ως ειδική περίπτωση της ΓΗΚ, προκύπτει όταν στη σχέση (3.3.2) θέσουμε $c = 1$. Είναι τότε:

$$g^{(HN)}(x; 1, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, \quad x > 0, \theta > 0. \quad (3.3.3)$$

Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός της ΒΓΗΚ όπως αυτός πρωτοπαρουσιάστηκε στην εργασία των Pescim *et al.* (2010).



Ορισμός 3.3.1 [Pescim *et al.* (2010)]

Η τ.μ. X ακολουθεί την τυποποιημένη ΒΓΗΚ με παραμέτρους a, b, c και θ αν η σ.π.π. της δίνεται από τη σχέση:

$$g^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{c}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^c e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2c}}}{B(a, b)} 2^{b-1} \left\{ 2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right] - 1 \right\}^{a-1} \times \left\{ 1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right] \right\}^{b-1}, \quad x > 0, a, b, c, \theta > 0. \quad (3.3.4)$$

Η ΒΓΗΚ της σχέσης (3.3.4) προκύπτει όταν στη σχέση (2.2.1), στη θέση του γεννήτορα $F(\cdot)$, εισαχθεί η α.σ.κ. της ΓΗΚ με παραμέτρους c και θ . Όταν η τ.μ. X ακολουθεί την ΒΓΗΚ τότε αυτό θα συμβολίζεται $X \sim g^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta)$ ή $X \sim ΒΓΗΚ(a, b, c, \theta)$.

Λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 2.2.1 εύκολα προσδιορίζεται στην Πρόταση που ακολουθεί η α.σ.κ. της ΒΚΚ.

Πρόταση 3.3.1

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την ΒΓΗΚ (a, b, c, θ) . Τότε η α.σ.κ. της τ.μ. X ορίζεται από τη σχέση:

$$G^{(BGHN)}(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right]-1} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = I_{2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right]-1}(a, b). \quad (3.3.5)$$

Παρατήρηση 3.3.1

Με βάση την Πρόταση 2.2.2 προκύπτει ότι αν κάποιος θέλει να δημιουργήσει ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από μια τυποποιημένη ΒΓΗΚ με



παραμέτρους a, b, c και θ , δηλαδή μια ΒΠΚ με γεννήτρια $G^{(GHN)}(x) = 2\Phi\left[(x/\theta)^c\right] - 1$, αρκεί να δημιουργήσει ένα τ.δ. Y_1, \dots, Y_n , από την Βήτα(a, b) και να υπολογίσει τις τιμές $X_i = G^{(GHN)^{-1}}(Y_i)$, $i = 1, \dots, n$. Άρα, αρκεί να υπολογίσει τις λύσεις των μη γραμμικών εξισώσεων $(X_i/\theta)^c = \Phi^{-1}\left(\frac{Y_i + 1}{2}\right)$.

Παρατήρηση 3.3.2

Από τον Ορισμό 3.3.1 προκύπτουν άμεσα οι ακόλουθες ιδιότητες.

1) Όταν $a = b = 1$, τότε η σ.π.π. της ΒΓΗΚ ταυτίζεται με τη σ.π.π. της ΓΗΚ. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$g^{(BGHN)}(x; 1, 1, c, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{c}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^c e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2c}}, \quad x, c, \theta > 0.$$

2) Όταν $c = 1$, τότε η σ.π.π. της ΒΓΗΚ ταυτίζεται με τη σ.π.π. της Βήτα-Ημικανονικής κατανομής (ΒΗΚ). Δηλαδή ισχύει ότι:

$$g^{(BGHN)}(x; a, b, 1, \theta) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2}}{B(a, b)} 2^{b-1} \left\{ 2\Phi\left(\frac{x}{\theta}\right) - 1 \right\}^{a-1} \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x}{\theta}\right) \right\}^{b-1},$$

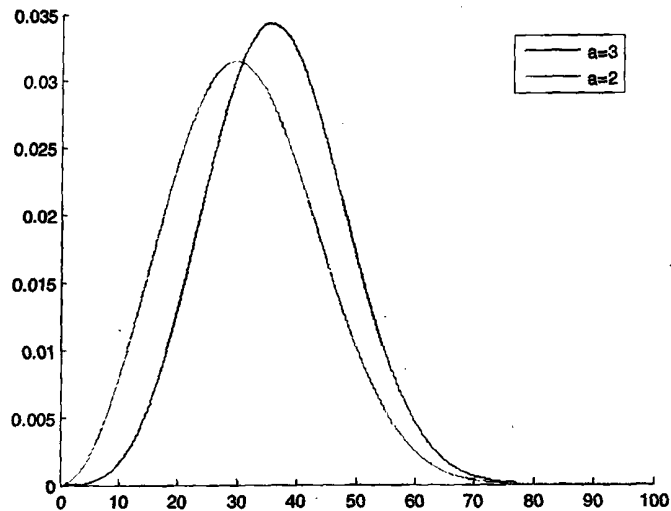
$x, a, b, \theta > 0$.

3) Όταν $a = b = 1$ και $c = 1$, τότε η σ.π.π. της ΒΓΗΚ ταυτίζεται με τη σ.π.π.

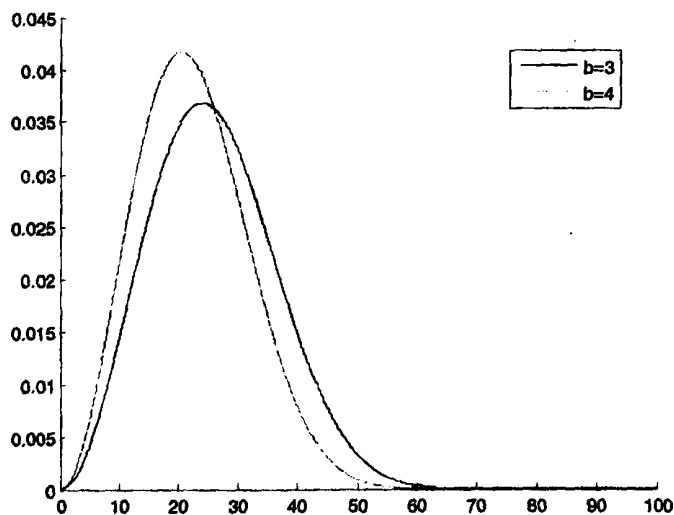
της ΗΚ. Δηλαδή ισχύει ότι: $g^{(BGHN)}(x; 1, 1, 1, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2}$, $x, \theta > 0$.



Στα σχήματα που ακολουθούν δίνεται η σ.π.π. της τυποποιημένης ΒΓΗΚ για επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων a, b .



Σχήμα 3: Σ.π.π. της τυποποιημένης Βήτα-Γενικευμένης-Ημικανονικής Κατανομής όταν $c = 1.5, b = 2$ και $\theta = 40$.



Σχήμα 4: Σ.π.π. της τυποποιημένης Βήτα-Γενικευμένης-Ημικανονικής Κατανομής όταν $c = 1.5, a = 2$ και $\theta = 40$.



Εκφράσεις της $G^{(BGHN)}(x)$ και της $g^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta)$

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιαστούν μαθηματικές εκφράσεις της α.σ.κ. και της πυκνότητας της ΒΓΗΚ υπό μορφή σειράς [βλ. Pescim *et al.* (2010)].

Σύμφωνα με την εργασία των Nadarajah and Kotz (2004) αν $|z| < 1$ και $b > 0$, όπου $b \in R - Z$, ισχύει ότι:

$$(1-z)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j!} z^j. \quad (3.3.6)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (3.3.6) στην α.σ.κ. της ΒΓΗΚ, όπως αυτή προσδιορίστηκε στη σχέση (3.3.5), για $b \in R^+ - Z^+$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} G^{(BGHN)}(x) &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{2\Phi[(x/\theta)^c]-1} t^{a-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j!} t^j dt \\ &= \frac{\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left\{ 2\Phi[(x/\theta)^c] - 1 \right\}^{a+j}}{\Gamma(b-j) j! (a+j)}. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Όταν $a \in Z^+$ η σχέση (3.3.7) εκφράζει την α.σ.κ. της ΒΓΗΚ σε άπειρους όρους της α.σ.κ. της ΓΗΚ. Διαφορετικά αν, $a \in R^+ - Z^+$, τότε λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.3.6) και το γεγονός ότι $2\Phi[(x/\theta)^c] - 1 = G^{(GHN)}(x) = \left[1 - (1 - G^{(GHN)}(x))^r \right]$, η σχέση (3.3.7) γράφεται ως εξής:

$$G^{(BGHN)}(x) = \frac{\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j,r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+r} \Gamma(a+j+1)}{\Gamma(b-j) j! (a+j) \Gamma(a+j+1-r) r!} \left(1 - G^{(GHN)}(x) \right)^r.$$



$$\text{Όμως, } 1 - G^{(GHN)}(x) = 1 - \left\{ 2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right] - 1 \right\} = 2 \left\{ 1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right] \right\}.$$

Άρα,

$$G^{(BGHN)}(x) = \frac{\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j,r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+r} \Gamma(a+j+1) 2^r \left\{ 1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right] \right\}^r}{\Gamma(b-j) j! (a+j) \Gamma(a+j+1-r)}.$$

Όμως από τη σχέση (3.2.5) προκύπτει ότι:

$$\left\{ 1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right] \right\}^r = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^s \left\{ \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right] \right\}^s.$$

Επομένως,

$$G^{(BGHN)}(x) = \frac{\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j,r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^r \frac{(-1)^{j+r+s} 2^r \Gamma(a+j+1)}{\Gamma(b-j) j! (a+j) \Gamma(a+j+1-r)} \times \binom{r}{s} \left\{ \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right] \right\}^s. \quad (3.3.8)$$

Η σχέση (3.3.8) δείχνει ότι για $a, b \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Z}^+$ η α.σ.κ. της ΒΓΗΚ εκφράζεται ως άπειρο άθροισμα δυνάμεων της α.σ.κ. της $N(0,1)$.

Εφαρμόζοντας τη σχέση (3.2.3) στην α.σ.κ. της ΒΓΗΚ, για $b \in \mathbb{Z}^+$, προκύπτει:

$$G^{(BGHN)}(x) = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \binom{b-1}{j} \frac{(-1)^j}{a+j} \left\{ 2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right] - 1 \right\}^{a+j}. \quad (3.3.9)$$



Από τη σχέση (3.3.9), για $a = b = 1$ προκύπτει η α.σ.κ. της ΓΗΚ και για $a = b = c = 1$ η α.σ.κ. της ΗΚ.

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (3.3.6) και (3.2.3) και εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια μέθοδο με αυτή που χρησιμοποιήθηκε για την ανάδειξη της σχέσης (3.3.8) προκύπτει:

$$G^{(BGHN)}(x) = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^r \frac{(-1)^{j+r+s} 2^r \Gamma(a+j+1)}{(a+j)\Gamma(a+j+1-r)r!} \times \binom{b-1}{j} \binom{r}{s} \left\{ \Phi \left[(x/\theta)^c \right] \right\}^s. \quad (3.3.10)$$

Συνοψίζοντας, οι σχέσεις (3.3.8), (3.3.9) και (3.3.10) είναι εκφράσεις της α.σ.κ. της ΒΓΗΚ υπό μορφή σειράς.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (3.3.7) προκύπτει:

$$g^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta) = \frac{\Gamma(b)}{B(a,b)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{c}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^c e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2c}} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \left\{ 2\Phi \left[(x/\theta)^c \right] \right\}^{a+j-1}.$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (3.3.6) και (3.2.3) και εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία με αυτήν που εφαρμόστηκε για την ανάδειξη της σχέσης (3.3.8) προκύπτει:

$$g^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{c}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^c e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2c}}}{B(a,b)} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k w_{j,k,l}(a,b) \times \left\{ \Phi \left[(x/\theta)^c \right] \right\}^l, \quad (3.3.11)$$



$$\text{όπου } w_{j,k,l}(a,b) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(a+j)(-1)^{j+k+l}}{\Gamma(b-j)\Gamma(a+j-k)k!j!} 2^k \binom{k}{l}.$$

Αντικαθιστώντας την $\Phi[(x/\theta)^c]$ με τη συνάρτηση σφάλματος στη σχέση (3.3.11) και εφαρμόζοντας το διωνυμικό ανάπτυγμα προκύπτει:

$$g^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{c}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^c e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2c}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) \times \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{(x/\theta)^c}{\sqrt{2}} \right] \right\}^p, \quad (3.3.12)$$

$$\text{όπου } t_{j,k,l,p}(a,b) = \frac{w_{j,k,l}(a,b)(-1)^p \binom{l}{p}}{B(a,b)2^l}.$$

Συνοψίζοντας, οι σχέσεις (3.3.11) και (3.3.12) αποτελούν εκφράσεις της πυκνότητας της ΒΓΗΚ υπό μορφή σειράς.

Μέση τιμή, διακύμανση και ροπές της ΒΓΗΚ

Αντικείμενο μελέτης σε αυτήν την παράγραφο είναι η n -τάξης ροπή της ΒΓΗΚ και, ως απόρροια αυτής, η μέση τιμή και η διακύμανσή της.

Θεώρημα 3.3.1 [Pescim *et al.* (2010)]

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την ΒΓΗΚ(a, b, c, θ). Τότε η n -τάξης ροπή της ΒΓΗΚ δίνεται από τη σχέση:

$$EX^n = \theta^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) I\left(\frac{n}{c}, p\right), \quad (3.3.13)$$



$$\text{όπου } p + \frac{n}{c} \in \mathbb{R}, t_{j,k,l,p}(a,b) = \frac{w_{j,k,l}(a,b)(-1)^p \binom{l}{p}}{B(a,b)2^l},$$

$$w_{j,k,l}(a,b) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(a+j)(-1)^{j+k+l}}{\Gamma(b-j)\Gamma(a+j-k)k!j!} 2^k \binom{k}{l} \text{ και}$$

$$I\left(\frac{n}{c}, p\right) = \pi^{-\frac{p}{2}} 2^{p+\frac{n}{2c}-\frac{1}{2}} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\dots+m_p} \Gamma\left(m_1+\dots+m_p + \frac{p+\frac{n}{c}+1}{2}\right)}{\left(m_1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(m_p + \frac{1}{2}\right) m_1! \dots m_p!}.$$

Απόδειξη

Η n -τάξης ροπή της ΒΓΗΚ δίνεται από τη σχέση:
 $EX^n = \int_0^\infty x^n g^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta) dx$. Επομένως, όταν $b \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Z}^+$, τότε λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.3.12) προκύπτει:

$$EX^n = c \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) \times \int_0^\infty x^{n-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^c e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2c}} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{(x/\theta)^c}{\sqrt{2}} \right] \right\}^p dx. \quad (3.3.14)$$

Κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού $u = \left(\frac{x}{\theta}\right)^c$ η σχέση (3.3.14)

αποκτάει την εξής μορφή:

$$EX^n = \theta^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) \int_0^\infty u^{\frac{n}{c}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) \right]^p du.$$



Όμως, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η συνάρτηση σφάλματος

παριστάνεται και ως εξής: $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)m!}$ [βλ. Nadarajah

(2008)], έπεται ότι η n -τάξης ροπή της ΒΓΗΚ γίνεται:

$$EX^n = \theta^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^p$$

$$\times \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\dots+m_p}}{2^{m_1+\dots+m_p+\frac{p}{2}} (2m_1+1)\dots(2m_p+1)m_1!\dots m_p!}$$

$$\times \int_0^{\infty} u^{2(m_1+\dots+m_p)+p+\frac{n}{c}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Διαμέσου του μετασχηματισμού $u^2 = x$ το ολοκλήρωμα στην τελευταία σχέση υπολογίζεται και ισούται με:

$$\int_0^{\infty} u^{2(m_1+\dots+m_p)+p+\frac{n}{c}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2^{m_1+\dots+m_p+\frac{p}{2}+\frac{n}{2c}-\frac{1}{2}} \Gamma\left(m_1+\dots+m_p+\frac{p+\frac{n}{c}+1}{2}\right).$$

Κατά συνέπεια η n -τάξης ροπή της ΒΓΗΚ ισούται με:

$$EX^n = \theta^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) I\left(\frac{n}{c}, p\right), \quad (3.3.15)$$

όπου $p + \frac{n}{c} \in R$ και



$$I\left(\frac{n}{c}, p\right) = \pi^{-\frac{p}{2}} 2^{p+\frac{n}{2c}-\frac{1}{2}} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\dots+m_p} \Gamma\left(m_1+\dots+m_p+p+\frac{n}{c}+1\right)}{\left(m_1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(m_p+\frac{1}{2}\right)m_1!\dots m_p!}. \quad \blacksquare$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Θεώρημα, εύκολα, προκύπτει ότι η μέση τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$EX = \theta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) I\left(\frac{1}{c}, p\right). \quad (3.3.16)$$

Τέλος, η διακύμανση δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \text{Var}X &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= \theta^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) I\left(\frac{2}{c}, p\right) \\ &\quad - \left[\theta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) I\left(\frac{1}{c}, p\right) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

Σε αυτήν την παράγραφο θα δοθεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση (ργ.σ.) της ΒΓΗΚ.

Θεώρημα 3.3.2 [Pescim *et al.* (2010)]

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BΓΗΚ(a,b,c,\theta)$. Τότε η ροπογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:



$$M_X(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) \pi^{-\frac{p}{2}} 2^{p+\frac{r}{2c}-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\theta^r s^r}{r!} I\left(\frac{r}{c}, p\right), \quad (3.3.18)$$

$$\text{όπου } p + \frac{r}{c} \in \mathbb{R}, t_{j,k,l,p}(a,b) = \frac{w_{j,k,l}(a,b)(-1)^p \binom{l}{p}}{B(a,b)2^l},$$

$$w_{j,k,l}(a,b) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(a+j)(-1)^{j+k+l}}{\Gamma(b-j)\Gamma(a+j-k)k!j!} 2^k \binom{k}{l} \text{ και}$$

$$I\left(\frac{r}{c}, p\right) = \pi^{-\frac{p}{2}} 2^{p+\frac{r}{2c}-\frac{1}{2}} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\dots+m_p} \Gamma\left(m_1+\dots+m_p + \frac{p+\frac{r}{c}+1}{2}\right)}{\left(m_1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(m_p + \frac{1}{2}\right) m_1! \dots m_p!}.$$

Απόδειξη

Η ργ.σ. της ΒΓΗΚ δίνεται από τη σχέση:

$$M_X(s) = E(e^{sX}) = \int_0^{\infty} e^{sx} g^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta) dx. \quad \text{Επομένως, όταν}$$

$b \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Z}^+$, τότε λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.3.12) προκύπτει:

$$M_X(s) = c \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) \int_0^{\infty} e^{sx} \frac{1}{x} \left(\frac{x}{\theta}\right)^c e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2c}} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{(x/\theta)^c}{\sqrt{2}} \right] \right\}^p dx.$$

Όμως, επειδή ισχύει $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(sx)^r}{r!} = e^{sx}$, προκύπτει:

$$M_X(s) = c \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r}{r!}$$



$$\times \int_0^{\infty} x^{r-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^c e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2c}} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{(x/\theta)^c}{\sqrt{2}} \right] \right\}^p dx.$$

Διαμέσου του μετασχηματισμού $u = \left(\frac{x}{\theta}\right)^c$ το ολοκλήρωμα στην τελευταία σχέση υπολογίζεται και, επομένως, η ργ.σ. ισούται με:

$$M_X(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\theta^r s^r}{r!} \int_0^{\infty} u^{\frac{r}{c}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) \right]^p du.$$

Με ανάλογο τρόπο με αυτόν της απόδειξης του Θεωρήματος 3.3.1 προκύπτει ότι η ργ.σ. της ΒΓΗΚ δίνεται από τη σχέση:

$$M_X(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{p=0}^l t_{j,k,l,p}(a,b) \pi^{-\frac{p}{2}} 2^{p+\frac{r}{2c}-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\theta^r s^r}{r!} I\left(\frac{r}{c}, p\right). \quad \blacksquare$$

Ροπές των διατεταγμένων στατιστικών της ΒΓΗΚ

Οι ροπές των διατεταγμένων στατιστικών κατέχουν σημαντικό ρόλο στον έλεγχο ποιότητας και αξιοπιστίας. Η συμβολή τους έγκειται στο γεγονός ότι ο στατιστικός τις χρειάζεται για να προβλέψει το χρόνο καταστροφής ενός αντικειμένου βασιζόμενος στο χρόνο καταστροφής ενός μικρού δείγματος ίδιων αντικειμένων στο παρελθόν. Για το λόγο αυτό οι Pescim *et al.* (2010) επικέντρωσαν το ενδιαφέρον τους στην εύρεση των ροπών των διατεταγμένων στατιστικών της ΒΓΗΚ.

Σε αυτήν την παράγραφο θα δοθούν δύο εκφράσεις των ροπών των διατεταγμένων στατιστικών της ΒΓΗΚ, προερχόμενες από την εργασία των Pescim *et al.* (2010).

Έστω X_1, \dots, X_n , ένα τ.δ. μεγέθους n από την ΒΓΗΚ. Τότε η σ.π.π. της τ.μ. $X_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, δίνεται από τη σχέση:



$$g_{i:n}^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta) = \frac{1}{B(i, n+1-i)} g^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta) \left(G^{(BGHN)}(x) \right)^{i-1} \\ \times \left(1 - G^{(BGHN)}(x) \right)^{n-i}.$$

Επομένως,

$$g_{i:n}^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta) = \frac{g^{(GHN)}(x; c, \theta)}{B(i, n+1-i)B(a, b)} \left(G^{(GHN)}(x) \right)^{a-1} \left(1 - G^{(GHN)}(x) \right)^{b-1} \\ \times \left(G^{(BGHN)}(x) \right)^{i-1} \left(1 - G^{(BGHN)}(x) \right)^{n-i}.$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (3.2.5) προκύπτει:

$$g_{i:n}^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta) = \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n-i}{k} \left(G^{(BGHN)}(x) \right)^{i+k-1} \frac{g^{(GHN)}(x; c, \theta)}{B(i, n+1-i)B(a, b)} \\ \times \left(G^{(GHN)}(x) \right)^{a-1} \left(1 - G^{(GHN)}(x) \right)^{b-1}.$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (3.3.1), (3.3.2) και (3.3.7) προκύπτει:

$$g_{i:n}^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta) = \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k \binom{n-i}{k} \Gamma(b)^{i+k-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{c}{x} \right) \left(\frac{x}{\theta} \right)^c e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\theta} \right)^{2c}} 2^{b-1}}{B(a, b)^{i+k} B(i, n+i-1)} \\ \times \left\{ 2\Phi \left[\left(\frac{x}{\theta} \right)^c \right] - 1 \right\}^{a(i+k)-1} \left\{ 1 - \Phi \left[\left(\frac{x}{\theta} \right)^c \right] \right\}^{b-1} \\ \times \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left\{ 2\Phi \left[\left(\frac{x}{\theta} \right)^c \right] - 1 \right\}^j}{\Gamma(b-j) j! (a+j)} \right]^{i+k-1}. \quad (3.3.19)$$

Θεωρούμε την έκφραση:



$$A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left\{ 2\Phi \left[(x/\theta)^c \right] - 1 \right\}^j}{\Gamma(b-j) j! (a+j)}.$$

Κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού: $u = \left(\frac{x}{\theta} \right)^c$, της σχέσης (3.3.2) και της έκφρασης της συνάρτησης σφάλματος υπό μορφή σειράς προκύπτει:

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m u^{2m+1}}{2^{m+\frac{1}{2}} (2m+1)m!} \right]}{\Gamma(b-j) j! (a+j)}.$$

Επομένως,

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\dots+m_j} u^{2(m_1+\dots+m_j)}}{2^{m_1+\dots+m_j+\frac{1}{2}} (2m_1+1)\dots(2m_j+1)m_1!\dots m_j!} \right]}{\Gamma(b-j) j! (a+j)} u^j.$$

Με χρήση της ταυτότητας $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,n} x^k$, [βλ. Gradshteyn and Ryzhik (2000)], για

$$a_k = \frac{(-1)^k \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\dots+m_k} u^{2(m_1+\dots+m_k)}}{2^{m_1+\dots+m_k+\frac{k}{2}} (2m_1+1)\dots(2m_k+1)m_1!\dots m_k!} \right]}{\Gamma(b-k) k! (a+k)},$$



$c_{0,n} = a_0^n$ και $c_{k,n} = \frac{1}{ka_0} \sum_{l=1}^k (nl - k + l) a_l c_{k-l,n}$, $\forall k \in N$, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 g_{i:n}^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta) &= \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k \binom{n-i}{k} \Gamma(b)^{i+k-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{c}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^c e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2c}} 2^{b-1}}{B(a, b)^{i+k} B(i, n+i-1)} \\
 &\quad \times \left\{ 2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right] - 1 \right\}^{a(i+k)-1} \left\{ 1 - \Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right] \right\}^{b-1} \\
 &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} c_{j, i+k-1} \left\{ 2\Phi\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right] - 1 \right\}^j \\
 &= \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{n-i}{k} \Gamma(b)^{i+k-1} B[a(i+k) + j, b] d_{i,j,k}}{B(a, b)^{i+k} B(i, n+i-1)} \\
 &\quad \times g^{(BGHN)}(x; a(i+k) + j, b, c, \theta), \tag{3.3.20}
 \end{aligned}$$

όπου $g^{(BGHN)}(x; a(i+k) + j, b, c, \theta)$ είναι η σ.π.π. της $BΓΗΚ(a(i+k) + j, b, c, \theta)$ και οι σταθερές $d_{i,j,k}$ προκύπτουν αναδρομικά από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$d_{i,0,k} = \left(\frac{1}{a\Gamma(b)} \right)^{i+k-1} \quad \text{και} \quad d_{i,j,k} = \frac{a\Gamma(b)}{j} \sum_{l=1}^j \frac{(-1)^l [l(i+k) - j]}{\Gamma(b-l)(a+l)l!} c_{j-l, i+k-1},$$

$j \geq 1$.

Κατά συνέπεια η πυκνότητα της ΒΓΗΚ των διατεταγμένων στατιστικών είναι μια άπειρη σειρά πυκνοτήτων της $BΓΗΚ(a(i+k) + j, b, c, \theta)$. Επομένως, οι ροπές των διατεταγμένων στατιστικών της ΒΓΗΚ υπολογίζονται απευθείας από τη σχέση (3.3.13).



Παρατήρηση 3.3.3

Η σχέση (3.3.20) ισχύει ακόμα και στην περίπτωση όπου η παράμετρος $b \in Z^+$ με τη μόνη διαφορά ότι η σειρά αθροίζει ως το $j = (b-1)(i+k-1)$.

Μια εναλλακτική μαθηματική έκφραση για την πυκνότητα των διατεταγμένων στατιστικών της ΒΓΗΚ προκύπτει από την ταυτότητα:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right)^k = \sum_{\{m_1, \dots, m_k\}=0}^{\infty} a_{m_1} \dots a_{m_k}, \quad k \in Z^+.$$

Διαμέσου αυτής της ταυτότητας, όταν $b \in R^+ - Z^+$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} g_{i:n}^{(BGHN)}(x; a, b, c, \theta) &= \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{i+k-1}=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{n-i}{k} \Gamma(b)^{i+k-1}}{B(a, b)^{i+k} B(i, n+1-i)} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{c}{x} \right) \left(\frac{x}{\theta} \right)^c e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\theta} \right)^{2c}} 2^{b-1} \\ &\quad \times \left\{ 2\Phi \left[(x/\theta)^c \right] - 1 \right\}^{a(i+k)-1} \left\{ 1 - \Phi \left[(x/\theta)^c \right] \right\}^{b-1} \\ &\quad \times \frac{(-1)^{\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j} \left\{ 2\Phi \left[(x/\theta)^c \right] - 1 \right\}^{\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j}}{\prod_{j=1}^{i+k-1} \Gamma(b - m_j) m_j! (a + m_j)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{i+k-1}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j} \binom{n-i}{k} \Gamma(b)^{i+k-1}}{B(a, b)^{i+k} B(n+1-i)} \\ &\quad \times \frac{B \left[a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b \right]}{\prod_{j=1}^{i+k-1} \Gamma(b - m_j) m_j! (a + m_j)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{c}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^c e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{2c}} 2^{b-1}}{B\left[a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b\right]} \\
& \times \left\{2\Phi\left[(x/\theta)^c\right] - 1\right\}^{\left[a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j\right]-1} \left\{1 - \Phi\left[(x/\theta)^c\right]\right\}^{b-1} \\
& = \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{i+k-1}=0}^{\infty} \delta_{i,k} \\
& \quad \times g^{(BGHN)}\left(x; a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b, c, \theta\right), \quad (3.3.21)
\end{aligned}$$

όπου $g^{(BGHN)}\left(x; a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b, c, \theta\right)$ είναι η σ.π.π. της

$BGHK\left(a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b, c, \theta\right)$ και

$$\delta_{i,k} = \frac{(-1)^{k + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j} \binom{n-i}{k} B\left(a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b\right) \Gamma(b)^{i+k-1}}{B(a,b)^{i+k} B(i, n+1-i) \prod_{j=1}^{i+k-1} \Gamma(b-m_j) m_j! (a+m_j)} \quad \text{είναι σταθερές οι}$$

οποίες υπολογίζονται, εύκολα, για δοθέντα i, n, k και m_1, \dots, m_{i+k-1} . Η σχέση (3.3.21) επεκτείνεται σε όλες τις $(i+k)$ -πλειάδες τιμών των $\{k, m_1, \dots, m_{i+k-1}\}$ των μη αρνητικών ακεραίων και εύκολα προγραμματίζεται σε υπολογιστή. Όταν $b \in \mathbb{Z}^+$, τότε η σχέση (3.3.21) ισχύει ακόμα αλλά τα m_1, \dots, m_{i+k-1} κυμαίνονται από το 0 έως το $b-1$.

Η r -τάξης ροπή του i -οστού διατεταγμένου στατιστικού της ΒΓΗΚ ενός τ.δ. μεγέθους n , όταν $b \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Z}^+$, προέρχεται από τη σχέση (3.3.20) και ισούται με:



$$EX_{i:n}^r = \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{n-i}{k} \Gamma(b)^{i+k-1} B(a(i+k)+j, b) d_{i,j,k}}{B(a,b)^{i+k} B(i, n+1-i)} EX_{i,j,k}^r, \quad (3.3.22)$$

όπου $X_{i,j,k} \sim \text{ΒΓΗΚ}(a(i+k)+j, b, c, \theta)$. Στην περίπτωση που $b \in Z^+$, τότε πάλι ισχύει η σχέση (3.3.22) με τη διαφορά ότι η σειρά αθροίζει ως το $j = b - 1$.

Κατά αντίστοιχο τρόπο, προκύπτει ότι από τη σχέση (3.3.21) η r -τάξης ροπή του i -οστού διατεταγμένου στατιστικού της ΒΓΗΚ ενός τ.δ. μεγέθους n , όταν $b \in R^+ - Z^+$ ισούται με:

$$EX_{i:n}^r = \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{i+k-1}=0}^{\infty} \delta_{i,k} EX_{i,k}^r, \quad (3.3.23)$$

όπου $X_{i,k} \sim \text{ΒΓΗΚ}\left(a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b, c, \theta\right)$. Στην περίπτωση που $b \in Z^+$,

τότε πάλι ισχύει η σχέση (3.3.23) με τη διαφορά ότι η σειρά ως προς j των m_1, \dots, m_{i+k-1} , αθροίζει ως το $b - 1$.

Συνοψίζοντας, οι σχέσεις (3.3.22) και (3.3.23) είναι αυτές που δίνουν τις r -τάξης ροπές των διατεταγμένων στατιστικών της ΒΓΗΚ.

3.4 Βήτα-Εκθετική Κατανομή και Εκθετικώς-Εκθετική Κατανομή

Η Εκθετική κατανομή ίσως είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη κατανομή σε προβλήματα αξιοπιστίας (reliability). Με σκοπό την προσαρμογή ακόμα περισσότερων πραγματικών τυχαίων φαινομένων έχουν εισαχθεί στη βιβλιογραφία πλήθος γενικεύσεών της. Αντικείμενο μελέτης σε αυτήν την παράγραφο αποτελεί η Βήτα-Εκθετική Κατανομή (ΒΕΚ), η οποία εισήχθη στη βιβλιογραφία από τους Nadarajah and Kotz (2006) και



αποτελεί γενίκευση της Εκθετικής κατανομής. Στο πλαίσιο αυτό, θα μελετηθεί η BEK και θα δοθούν εκφράσεις για τη ροπογεννήτρια συνάρτηση, τη χαρακτηριστική συνάρτηση, τις ροπές, τη λοξότητα, την κύρτωση, τη μέση απόκλιση από τη μέση τιμή και τη διάμεσο, την εντροπία του Renyi, την εντροπία του Shannon και, τέλος, την κατανομή των αθροισμάτων και του λόγου δύο ανεξάρτητων τ.μ. που ακολουθούν την BEK.

Ορισμός 3.4.1 [Nadarajah and Kotz (2006)]

Η τ.μ. X ακολουθεί την BEK με παραμέτρους a, b, λ αν η σ.π. της δίνεται από τη σχέση:

$$g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) = \frac{\lambda}{B(a, b)} e^{-bx} (1 - e^{-\lambda x})^{a-1}, \quad x, a, b, \lambda > 0. \quad (3.4.1)$$

Η BEK της σχέσης (3.4.1) προκύπτει όταν στη σχέση (2.2.1), στη θέση του γεννήτορα $F(\cdot)$, εισαχθεί η α.σ.κ. της Εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ . Όταν η τ.μ. X ακολουθεί την BEK τότε αυτό θα συμβολίζεται $X \sim g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda)$ ή $X \sim BEK(a, b, \lambda)$.

Στην Πρόταση που ακολουθεί δίνεται, χωρίς απόδειξη, η α.σ.κ. της τ.μ. X που ακολουθεί την $BEK(a, b, \lambda)$.

Πρόταση 3.4.1

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BEK(a, b, \lambda)$. Τότε η α.σ.κ. της τ.μ. X ορίζεται από τη σχέση:

$$G_F^{(BE)}(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{1-e^{-\lambda x}} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = I_{1-e^{-\lambda x}}(a, b). \quad (3.4.2)$$



Παρατήρηση 3.4.1

Με βάση την Πρόταση 2.2.2 προκύπτει ότι αν κάποιος θέλει να δημιουργήσει ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από μια ΒΕΚ με παραμέτρους a, b και λ , δηλαδή μια ΒΠΚ με γεννήτρια $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, αρκεί να δημιουργήσει ένα τ.δ. Y_1, \dots, Y_n , από την Βήτα(a, b) και να υπολογίσει τις τιμές

$$X_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Παρατήρηση 3.4.2

Από τον Ορισμό 3.4.1 προκύπτουν άμεσα οι ακόλουθες ιδιότητες.

1) Για $b=1$ η σ.π.π. της ΒΕΚ ταυτίζεται με τη σ.π.π. της ΕΕΚ, η οποία εισήχθη και μελετήθηκε από τους Gupta and Kundu (2000) και θα παρουσιαστεί αναλυτικότερα σε υποπαράγραφο που θα ακολουθήσει.

Δηλαδή ισχύει ότι:

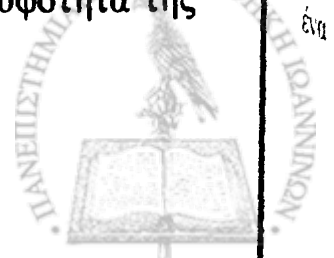
$$g_F^{(BE)}(x; a, 1, \lambda) = \frac{\lambda}{B(a, 1)} e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{a-1} = a\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{a-1}, \quad x, a, \lambda > 0.$$

2) Για $a=1$ η σ.π.π. της ΒΕΚ ταυτίζεται με τη σ.π.π. της Εκθετικής με παράμετρο $b\lambda$. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$g_F^{(BE)}(x; 1, b, \lambda) = b\lambda e^{-b\lambda x}, \quad x, b, \lambda > 0.$$

Σχήμα και κορυφότητα της ΒΕΚ

Σε αυτήν την παράγραφο, λαμβάνοντας υπόψη την εργασία των Nadarajah and Kotz (2006), θα εξεταστεί το σχήμα και η κορυφότητα της



BEK. Για λόγους ευκολίας θα εξεταστεί η συμπεριφορά του φυσικού λογάριθμου της πυκνότητας της BEK και μετά θα εξαχθούν συμπεράσματα για την πυκνότητα της BEK.

Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της $\ln g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda)$ είναι οι εξής:

$$\frac{d \ln g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda)}{dx} = \frac{(a-1)\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}} - b\lambda \quad (3.4.5)$$

και

$$\frac{d^2 \ln g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda)}{dx^2} = \frac{(1-a)\lambda^2 e^{-\lambda x}}{(1-e^{-\lambda x})^2}. \quad (3.4.6)$$

Επομένως, όταν $a < 1$, τότε καθώς $(\ln g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda))'' > 0$ προκύπτει ότι η $(\ln g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda))'$ είναι αύξουσα συνάρτηση. Επιπλέον, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda))' = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda))' = -b\lambda$. Επομένως, η πρώτη παράγωγος του λογαρίθμου της πυκνότητας της BEK παραμένει αρνητική σε όλο το πεδίο ορισμού του x και κατά συνέπεια ο λογάριθμος της πυκνότητας της BEK είναι μια φθίνουσα συνάρτηση. Άρα και η σ.π.π. της BEK είναι μια φθίνουσα συνάρτηση.

Από την άλλη μεριά, όταν $a > 1$, τότε καθώς $(\ln g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda))'' < 0$ προκύπτει ότι η $(\ln g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda))'$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Επιπλέον, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda))' = \infty$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda))' = -b\lambda$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι η πυκνότητα της BEK είναι αύξουσα μέχρι ένα σημείο x_0 και από εκείνο το σημείο και μετά είναι φθίνουσα. Αυτό



σημαίνει ότι η $g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda)$ είναι μονοκόρυφη στο σημείο $x = x_0$, όπου το σημείο $x = x_0$ είναι η ρίζα της εξίσωσης:

$$\frac{(a-1)\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda x}} = b\lambda.$$

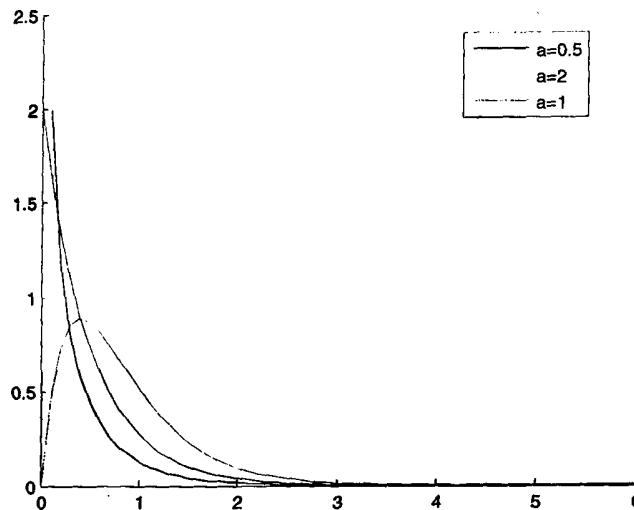
Τέλος, όταν $a=1$, τότε καθώς $(g_F^{(BE)}(x; 1, b, \lambda))' = -(b\lambda)^2 e^{-b\lambda x} < 0$ προκύπτει ότι η $g_F^{(BE)}(x; 1, b, \lambda)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.

Παρατήρηση 3.4.3

Το σχήμα της BEK εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την παράμετρο a . Αυτό φαίνεται από τους τύπους (3.4.5) και (3.4.6). Το γεγονός αυτό, λαμβάνοντας υπόψη την Παρατήρηση 3.4.2, ίσως οδηγεί στο συμπέρασμα, όπως επισημαίνουν οι Nadarajah and Kotz (2006), ότι θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει την EEK, η οποία είναι ειδική περίπτωση της BEK για $b=1$, χωρίς να χάσει μεγάλο μέρος της προσαρμογής των δεδομένων.

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η σ.π.π. της BEK για επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων a, b και λ . Όντως, προκύπτει ότι όταν $a = 0.5 < 1$ η σ.π.π. της BEK είναι μια φθίνουσα συνάρτηση. Όταν $a = 2 > 1$, όντως υπάρχει ένα σημείο x_0 τέτοιο ώστε μέχρι εκείνο η σ.π.π. της BEK να είναι αύξουσα και μετά να είναι φθίνουσα. Τέλος, όταν $a = 1$ πράγματι η σ.π.π. της BEK είναι φθίνουσα.





Σχήμα 5: Σ.π.π. της Βήτα-Εκθετικής Κατανομής όταν $b = 2$ και $\lambda = 1$.

Ροπογεννήτρια συνάρτηση και χαρακτηριστική συνάρτηση της ΒΕΚ

Σε αυτήν την παράγραφο, λαμβάνοντας υπόψη την εργασία των Nadarajah and Kotz (2006), θα δοθεί η ργ.σ. της ΒΕΚ καθώς επίσης και η χαρακτηριστική της συνάρτηση (χ.σ.).

Έστω X μια τ.μ. η οποία ακολουθεί την $BEK(a, b, \lambda)$. Τότε η ργ.σ. της ΒΕΚ δίνεται από τη σχέση:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \frac{\lambda}{B(a, b)} \int_0^{\infty} e^{(t-b\lambda)x} (1 - e^{-\lambda x})^{a-1} dx.$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $y = e^{-\lambda x}$ προκύπτει:



$$M_X(t) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 y^{b-t/\lambda-1} (1-y)^{a-1} dy = \frac{B(b-t/\lambda, a)}{B(a,b)}. \quad (3.4.7)$$

Επιπλέον, με παρόμοιο τρόπο προκύπτει η χ.σ.:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \frac{B(b-it/\lambda, a)}{B(a,b)}, \quad (3.4.8)$$

όπου $i = \sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα.

Μέση τιμή, διακύμανση, λοξότητα, κύρτωση και ροπές της ΒΕΚ

Έχοντας υπολογίσει την ργ.σ. καθώς και τη χ.σ. οι Nadarajah and Kotz (2006) προχώρησαν στον προσδιορισμό της μέση τιμής, της διακύμανσης, της λοξότητας, της κύρτωσης και των ροπών της ΒΕΚ. Στην παράγραφο αυτή θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα αυτά.

Η k -τάξης ροπή της ΒΕΚ είναι η k -οστή παράγωγος της ργ.σ. στο σημείο $t=0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} EX^k &= \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{d^k}{dt^k} \frac{B(b-t/\lambda, a)}{B(a,b)} \Big|_{t=0} = \frac{(-1)^k}{\lambda^k B(a,b)} \frac{d^k}{dt^k} B(b-t/\lambda, a) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{(-1)^k}{\lambda^k B(a,b)} \frac{d^k}{dp^k} B(1+p-a, a) \Big|_{p=a+b-1}. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Επομένως, οι τέσσερις πρώτες ροπές της ΒΕΚ προκύπτει ότι είναι οι εξής:

$$EX = \frac{\Psi(a+b) - \Psi(b)}{\lambda}, \quad (3.4.10)$$



$$EX^2 = \frac{\Psi'(b) - \Psi'(a+b) + \Psi^2(b) - 2\Psi(b)\Psi(a+b) + \Psi^2(a+b)}{\lambda^2}, \quad (3.4.11)$$

$$EX^3 = -\frac{\Psi''(b) - \Psi''(a+b) + 3\Psi(b)\Psi'(b) - 3\Psi(a+b)\Psi'(b) - 3\Psi(b)\Psi'(a+b) + 3\Psi(a+b)\Psi'(a+b) + \Psi^3(b) - 3\Psi^2(b)\Psi(a+b) + 3\Psi(b)\Psi^2(a+b) - \Psi^3(a+b)}{\lambda^3}, \quad (3.4.12)$$

$$EX^4 = \frac{\Psi'''(b) - \Psi'''(a+b) + 4\Psi(b)\Psi''(b) - 4\Psi(a+b)\Psi''(b) - 4\Psi(b)\Psi''(a+b) + 4\Psi(a+b)\Psi''(a+b) + 3(\Psi'(b))^2 - 6\Psi'(b)\Psi'(a+b) + 3(\Psi'(a+b))^2 + 6\Psi^2(b)\Psi'(b) - 12\Psi(b)\Psi(a+b)\Psi'(b) + 6\Psi^2(a+b)\Psi'(b) - 6\Psi^2(b)\Psi'(a+b) + 12\Psi(b)\Psi(a+b)\Psi'(a+b) - 6\Psi^2(a+b)\Psi'(a+b) + \Psi^4(b) - 4\Psi^3(b)\Psi(a+b) + 6\Psi^2(b)\Psi^2(a+b) - 4\Psi(b)\Psi^3(a+b) + \Psi^4(a+b)}{\lambda^4}. \quad (3.4.13)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις τέσσερις πρώτες ροπές της ΒΕΚ θα υπολογιστεί η διακύμανση, η λοξότητα και η κύρτωση. Η διακύμανση δίνεται από τη σχέση:

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{\Psi'(b) - \Psi'(a+b)}{\lambda^2}. \quad (3.4.14)$$



Η λοξότητα γ_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma_1 = \frac{\beta_3}{\sigma^3} = \frac{\Psi''(a+b) - \Psi''(b)}{[\Psi'(b) - \Psi'(a+b)]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.4.15)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } \beta_3 &= E(X - EX)^3 = EX^3 - (EX)^3 + 3(EX)^2 EX - 3(EX)EX^2 \\ &= \frac{\Psi''(a+b) - \Psi''(b)}{\lambda^3}. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Η κύρτωση γ_2 δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \gamma_2 = \frac{\beta_4}{\sigma^2} &= \frac{3[\Psi'(b)]^2 - 6\Psi'(b)\Psi'(a+b) + 3[\Psi'(a+b)]^2}{[\Psi'(b) - \Psi'(a+b)]^2} \\ &+ \frac{\Psi'''(b) - \Psi'''(a+b)}{[\Psi'(b) - \Psi'(a+b)]^2}, \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

όπου

$$\begin{aligned} \beta_4 &= E(X - EX)^4 = EX^4 + (EX)^4 - 4EX^3(EX) - 4EX(EX)^3 + 6EX^2(EX)^2 \\ &= \frac{3[\Psi'(b)]^2 - 6\Psi'(b)\Psi'(a+b) + 3[\Psi'(a+b)]^2}{\lambda^4} \\ &+ \frac{\Psi'''(b) - \Psi'''(a+b)}{\lambda^4}. \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Παρατήρηση 3.4.4

Τόσο η λοξότητα όσο και η κύρτωση εξαρτώνται αποκλειστικά από τις παραμέτρους a και b .



Μέση απόλυτη απόκλιση από τη μέση τιμή και τη διάμεσο

Η μέση απόλυτη απόκλιση από τη μέση τιμή και τη διάμεσο, αντίστοιχα, υπάγονται στις λεγόμενες παραμέτρους διασποράς και σκοπός τους είναι να δώσουν μια εικόνα του πως είναι κατανομημένες οι πιθανότητες στις διάφορες τιμές της τ.μ. Στην εργασία τους οι Nadarajah and Kotz (2006) δίνουν κάποιες μαθηματικές εκφράσεις για την μέση απόλυτη απόκλιση από τη μέση τιμή και τη διάμεσο όταν η τ.μ. $X \sim BEK(a, b, \lambda)$.

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BEK(a, b, \lambda)$. Τότε η μέση απόλυτη απόκλιση από τη μέση τιμή και τη διάμεσο ορίζονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$\delta_1(X) = \int_0^{\infty} |x - \mu| g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx$$

και

$$\delta_2(X) = \int_0^{\infty} |x - M| g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx,$$

όπου $\mu = EX$ και M είναι η διάμεσος. Προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \delta_1(X) &= \int_0^{\mu} (\mu - x) g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx + \int_{\mu}^{\infty} (x - \mu) g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx \\ &= \int_0^{\mu} (\mu - x) g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx + \int_{\mu}^{\infty} x g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx \\ &\quad - \mu \int_{\mu}^{\infty} g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx \\ &= \int_0^{\mu} (\mu - x) g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx + \int_0^{\infty} x g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx \\ &\quad - \int_0^{\mu} x g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx - \mu \int_0^{\infty} g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \mu \int_0^\mu g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx \\
& = 2 \int_0^\mu (\mu - x) g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx \\
& = 2 \left[\mu G_F^{(BE)}(\mu) - \int_0^\mu x g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx \right] \tag{3.4.19}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\delta_2(X) & = \int_0^M (M - x) g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx + \int_M^\infty (x - M) g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx \\
& = M \int_0^M g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx - \int_0^M x g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx \\
& \quad + \int_M^\infty x g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx - M \int_M^\infty g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx \\
& = M \left[G_F^{(BE)}(M) - G_F^{(BE)}(0) \right] - \int_0^M x g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx \\
& \quad + \int_M^\infty x g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx - M \left[G_F^{(BE)}(\infty) - G_F^{(BE)}(M) \right] \\
& = 2M G_F^{(BE)}(M) - M - \int_0^M x g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx + \int_M^\infty x g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx \\
& = EX + 2M G_F^{(BE)}(M) - M - 2 \int_0^M x g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx. \tag{3.4.20}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σειρά: $(1+x)^a = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-j+1)j!} x^j$, όπου

$|x| < 1$ και $a \in R^+ - Z^+$, προκύπτει ότι τα ολοκληρώματα στις σχέσεις (3.4.19) και (3.4.20) υπολογίζονται ως εξής, για $m = \mu, M$:

$$\begin{aligned}
\int_0^m x g_F^{(BE)}(x; a, b, \lambda) dx & = \frac{\lambda}{B(a, b)} \int_0^m x e^{-bx} (1 - e^{-\lambda x})^{a-1} dx \\
& = \frac{\lambda}{B(a, b)} \int_0^m x e^{-bx} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-i)i!} (-1)^i e^{-i\lambda x} dx
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda \Gamma(a)}{B(a,b)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\Gamma(a-i) i!} \int_0^m x e^{-(b+i)\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda \Gamma(a)}{B(a,b)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\Gamma(a-i)} \left[-\frac{m e^{-(b+i)\lambda m}}{\lambda(b+i)} + \frac{1 - e^{-(b+i)\lambda m}}{\lambda^2 (b+i)^2} \right] \\
&= \frac{\Gamma(a)}{\lambda B(a,b)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \left\{ 1 - [1 + (b+i)\lambda m] e^{-(b+i)\lambda m} \right\}}{\Gamma(a-i)(b+i)^2 i!}.
\end{aligned}$$

Επομένως, η μέση απόλυτη απόκλιση από τη μέση τιμή είναι:

$$\begin{aligned}
\delta_1(X) = 2 \left[\mu I_{1-e^{-\lambda \mu}}(a,b) - \frac{\Gamma(a)}{\lambda B(a,b)} \right. \\
\left. \times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \left\{ 1 - [1 + (b+i)\lambda \mu] e^{-(b+i)\lambda \mu} \right\}}{\Gamma(a-i)(b+i)^2 i!} \right]. \quad (3.4.21)
\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι η μέση απόλυτη απόκλιση από τη διάμεσο είναι:

$$\begin{aligned}
\delta_2(X) = \frac{\Psi(a+b) - \Psi(b)}{\lambda} + 2M I_{1-e^{-\lambda M}}(a,b) - M \\
- \frac{2\Gamma(a)}{\lambda B(a,b)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \left\{ 1 - [1 + (b+i)\lambda M] e^{-(b+i)\lambda M} \right\}}{\Gamma(a-i)(b+i)^2 i!}. \quad (3.4.22)
\end{aligned}$$

Εντροπία του Renyi και του Shannon

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των Nadarajah and Kotz (2006) που αφορούν την εντροπία του Renyi και του Shannon.

Η εντροπία είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας και επιπλέον δίνει χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τη μορφή (shape) της κατανομής.



Έστω X μια συνεχής τ.μ. με σ.π.π. την $f(\cdot)$. Η εντροπία του Renyi ορίζεται από τη σχέση: $H_R(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma} \ln \left[\int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^\gamma dx \right]$, όπου $\gamma \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

Επομένως η εντροπία του Renyi για την BEK είναι η εξής:

$$H_R(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma} \ln \left[\left(\frac{\lambda}{B(a,b)} \right)^\gamma \int_0^\infty e^{-\gamma b \lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\gamma(a-1)} dx \right].$$

Κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού $y = e^{-\lambda x}$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} H_R(\gamma) &= \frac{1}{1-\gamma} \ln \left[\frac{\lambda^{\gamma-1} \int_0^1 y^{\gamma b-1} (1-y)^{\gamma(a-1)} dy}{B(a,b)^\gamma} \right] = \frac{1}{1-\gamma} \ln \left[\frac{\lambda^{\gamma-1} B(\gamma b, \gamma(a-1)+1)}{B(a,b)^\gamma} \right] \\ &= -\ln \lambda + \frac{1}{1-\gamma} \ln \left[\frac{B(\gamma(a-1)+1, \gamma b)}{B(a,b)^\gamma} \right]. \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

Η εντροπία του Shannon, η οποία για μια τ.μ. X με σ.π.π. $f(\cdot)$ ορίζεται από τη σχέση $E[-\ln f(x)]$ και είναι ειδική περίπτωση της εντροπίας του Renyi, για $\gamma \rightarrow 1$. Παίρνοντας το όριο για $\gamma \rightarrow 1$ από τη σχέση (3.4.23) εμφανίζεται απροσδιοριστία της μορφής $(\infty 0)$ και ως εκ τούτου χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L'Hospital προκύπτει:

$$\begin{aligned} H_{Sh} \left(g_F^{(BE)} \right) &= -\ln \lambda + \ln B(a,b) + (a+b-1)\Psi(a+b) - (a-1)\Psi(a) \\ &\quad - b\Psi(b). \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

Εναλλακτικά, η εντροπία του Shannon για την BEK μπορεί να βρεθεί με εφαρμογή του Πορίσματος 2.3.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)]. Δηλαδή, προκύπτει ότι:



$$H_{Sh}(g_F^{(BE)}) = \ln B(a, b) - (a-1)(\Psi(a) - \Psi(a+b)) - (b-1)(\Psi(b) - \Psi(a+b)) - E_Y \left[\ln(f(F^{-1}(Y))) \right], \quad (3.4.25)$$

όπου $Y \sim B\eta\tau\alpha(a, b)$, $F(\cdot)$ και $f(\cdot)$ η α.σ.κ. και η σ.π.π. της Εκθετικής με παράμετρο λ , αντίστοιχα.

Όμως, με χρήση του Λήμματος 2.3.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] προκύπτει:

$$\begin{aligned} E_Y \left[\ln(f(F^{-1}(Y))) \right] &= E_{g_F^{(BE)}} \left[\ln f(X) \right] = E_{g_F^{(BE)}} \left[\ln(\lambda e^{-\lambda x}) \right] \\ &= \ln \lambda + E_{g_F^{(BE)}} \left[\ln(1 - (1 - e^{-\lambda x})) \right] \\ &= \ln \lambda + \Psi(b) - \Psi(a+b). \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.4.26) στη σχέση (3.4.25) προκύπτει το αποτέλεσμα της σχέσης (3.4.24).

Άθροισμα και πηλίκο δύο ισόνομων τ.μ. της BEK

Σε αυτήν την παράγραφο θα μελετηθεί η συνέλιξη δύο ισόνομων τ.μ. με BEK καθώς επίσης και η κατανομή του πηλίκου αυτών των τ.μ. σύμφωνα με την εργασία των Nadarajah and Kotz (2006). Το κύριο ερέθισμα των Nadarajah and Kotz (2006) για αυτήν τη διερεύνηση είναι ότι το άθροισμα και το πηλίκο δύο ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν την Εκθετική κατανομή δίνουν την Γάμμα κατανομή και την F κατανομή, αντίστοιχα.

Έστω X_1 και X_2 δύο ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν, αντίστοιχα, την $BEK(a_1, b_1, \lambda_1)$ και την $BEK(a_2, b_2, \lambda_2)$. Ορίζουμε R και W δύο τ.μ.



τέτοιες ώστε $R = X_1 + X_2$ και $W = \frac{X_1}{X_2}$. Τότε η σ.π.π. της τ.μ. R είναι η εξής:

$$\begin{aligned} g_R(r) &= \int_0^r g_F^{(BE)}(x_1; a_1, b_1, \lambda_1) g_F^{(BE)}(r - x_1; a_2, b_2, \lambda_2) dx_1 \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-b_2 \lambda_2 r}}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)} \int_0^r e^{(b_2 \lambda_2 - b_1 \lambda_1) x_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{a_1 - 1} (1 - e^{-\lambda_2 (r - x_1)})^{a_2 - 1} dx_1 \\ &= k \int_0^r e^{(b_2 \lambda_2 - b_1 \lambda_1) x_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{a_1 - 1} (1 - e^{-\lambda_2 (r - x_1)})^{a_2 - 1} dx_1, \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

όπου η σταθερά k είναι: $k = \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-b_2 \lambda_2 r}}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)}$.

Χρησιμοποιώντας τη σειρά: $(1+x)^a = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-j+1) j!} x^j$, όπου

$|x| < 1$ και $a \in R^+ - Z^+$, η σχέση (3.4.27) αποκτάει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} g_R(r) &= k \int_0^r e^{(b_2 \lambda_2 - b_1 \lambda_1) x_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{a_1 - 1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_2 - i) i!} (-1)^i e^{-\lambda_2 (r - x_1) i} dx_1 \\ &= k \Gamma(a_2) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i e^{-i \lambda_2 r}}{\Gamma(a_2 - i) i!} I(i, r), \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

όπου

$$I(i, r) = \int_0^r e^{(\lambda_2 i + b_2 \lambda_2 - b_1 \lambda_1) x_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{a_1 - 1} dx_1 = \frac{1}{\lambda_1} \int_{e^{-\lambda_1 r}}^1 y^{\lambda_1^{-1} (\lambda_2 i + b_2 \lambda_2 - b_1 \lambda_1)} (1 - y)^{a_1 - 1} dy.$$

Με χρήση του μετασχηματισμού $1 - y = z$ το ανωτέρω ολοκλήρωμα γίνεται:



$$\begin{aligned}
 I(i, r) &= \frac{1}{\lambda_1} \int_0^{1-e^{-\lambda_1 r}} z^{a_1-1} (1-z)^{b_1 - \frac{\lambda_2(b_2+i)}{\lambda_1} + 1} dz \\
 &= \frac{1}{\lambda_1} B_{1-e^{-\lambda_1 r}} \left(a_1, b_1 - \frac{\lambda_2(b_2+i)}{\lambda_1} + 1 \right), \quad (3.4.29)
 \end{aligned}$$

όπου $B_{1-e^{-\lambda_1 r}} \left(a_1, b_1 - \frac{\lambda_2(b_2+i)}{\lambda_1} + 1 \right)$ είναι η μη πλήρης συνάρτηση βήτα, η οποία ορίζεται ως εξής: $B_y(a, b) = \int_0^y t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$, $t, y \in [0, 1]$, $a, b > 0$.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.4.28) και (3.4.29) προκύπτει ότι η σ.π.π. της τ.μ. R είναι ένα άπειρο άθροισμα από μη πλήρεις βήτα συναρτήσεις και έχει την εξής μορφή:

$$g_R(r) = \frac{k\Gamma(a_2)}{\lambda_1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i e^{-i\lambda_2 r}}{\Gamma(a_2 - i) i!} B_{1-e^{-\lambda_1 r}} \left(a_1, b_1 - \frac{\lambda_2(b_2+i)}{\lambda_1} + 1 \right). \quad (3.4.30)$$

Η σ.π.π. της τ.μ. W , σύμφωνα με γνωστή θεωρία που αφορά την κατανομή πηλίκου ανεξάρτητων τ.μ. [βλ. Κούτρας (2005), σελ. 158], δίνεται από την εξής σχέση:

$$\begin{aligned}
 g_W(w) &= \int_0^{\infty} x_2 g_F^{(BE)}(wx_2; a_1, b_1, \lambda_1) g_F^{(BE)}(x_2; a_2, b_2, \lambda_2) dx_2 \\
 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)} \int_0^{\infty} x_2 e^{-(b_1 \lambda_1 w + b_2 \lambda_2) x_2} (1 - e^{-\lambda_1 w x_2})^{a_1-1} (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{a_2-1} dx_2 \\
 &= \ell \int_0^{\infty} x_2 e^{-(b_1 \lambda_1 w + b_2 \lambda_2) x_2} (1 - e^{-\lambda_1 w x_2})^{a_1-1} (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{a_2-1} dx_2, \quad (3.4.31)
 \end{aligned}$$

όπου η σταθερά ℓ είναι: $\ell = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)}$.



Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία με αυτήν που εφαρμόστηκε για την εύρεση της σ.π.π. του αθροίσματος των δύο τ.μ. X_1 και X_2 προκύπτει

ότι η πυκνότητα της τ.μ. W είναι η εξής: $g_W(w) = \ell \Gamma(a_2) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i J(i)}{\Gamma(a_2 - i) i!}$,

όπου $J(i) = \int_0^{\infty} x_2 e^{-(b_1 \lambda_1 w + b_2 \lambda_2 + i \lambda_2) x_2} (1 - e^{-\lambda_1 x_2})^{a_1 - 1} dx_2$.

Το ολοκλήρωμα $J(i)$ είναι κατ'ουσίαν η μέση τιμή μιας τ.μ., η οποία ακολουθεί την ΒΕΚ με παραμέτρους $a_1, b_1 + \frac{(b_2 + i) \lambda_2}{\lambda_1 w}$ και $\lambda_1 w$. Κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα $J(i)$ με χρήση της σχέσης (3.4.10) τώρα γράφεται:

$$J(i) = \frac{B\left(a_1, b_1 + \frac{(b_2 + i) \lambda_2}{\lambda_1 w}\right)}{\lambda_1 w} \left[\frac{\Psi\left(a_1 + b_1 + \frac{(b_2 + i) \lambda_2}{\lambda_1 w}\right) - \Psi\left(b_1 + \frac{(b_2 + i) \lambda_2}{\lambda_1 w}\right)}{\lambda_1 w} \right].$$

Επομένως, η σ.π.π. της τ.μ. W γίνεται:

$$g_W(w) = \frac{\ell \Gamma(a_2)}{(\lambda_1 w)^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i B\left(a_1, b_1 + \frac{(b_2 + i) \lambda_2}{\lambda_1 w}\right)}{\Gamma(a_2 - i) i!} \times \left[\Psi\left(a_1 + b_1 + \frac{(b_2 + i) \lambda_2}{\lambda_1 w}\right) - \Psi\left(b_1 + \frac{(b_2 + i) \lambda_2}{\lambda_1 w}\right) \right]. \quad (3.4.32)$$

Εκθετικώς-Εκθετική Κατανομή

Σε αυτήν την παράγραφο θα γίνει μια παρουσίαση της Εκθετικώς-Εκθετικής Κατανομής (ΕΕΚ). Όπως έχει ήδη αναφερθεί η ΕΕΚ αποτελεί



ειδική περίπτωση της BEK, για $b=1$. Αυτή η κατανομή πρωτοπαρουσιάστηκε στην εργασία των Gupta and Kundu (2001). Κύριο ερέθισμα για την παρουσίασή της είναι το γεγονός ότι αποτελεί ειδική περίπτωση της BEK για $b=1$ [βλ. Nadarajah and Kotz (2006)], και ως εκ τούτου συνάγεται το συμπέρασμα ότι θα έχει ίδια συμπεριφορά με την BEK, καθώς σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.4.3, το σχήμα της BEK δεν εξαρτάται από την παράμετρο b .

Ορισμός 3.4.2 [Gupta and Kundu (2001)]

Η τ.μ. X ακολουθεί την EEK με παραμέτρους a και λ αν η σ.π.π. της δίνεται από τη σχέση:

$$g_F^{(EE)}(x; a, \lambda) = a\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{a-1}, \quad x, a, \lambda > 0. \quad (3.4.33)$$

Η EEK της σχέσης (3.4.33) προκύπτει όταν στη σχέση (2.2.1), στη θέση του γεννήτορα $F(\cdot)$, εισαχθεί η α.σ.κ. της Εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ και συγχρόνως η παράμετρος b ισούται με τη μονάδα. Όταν η τ.μ. X ακολουθεί την EEK τότε αυτό θα συμβολίζεται $X \sim g_F^{(EE)}(x; a, \lambda)$ ή $X \sim EEK(a, \lambda)$. Άμεσα προκύπτει ότι $X \sim EEK(a, \lambda) \equiv BEK(a, 1, \lambda)$.

Στην Πρόταση που ακολουθεί δίνεται, χωρίς απόδειξη, η α.σ.κ. της τ.μ. X που ακολουθεί την $EEK(a, \lambda)$.

Πρόταση 3.4.2

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $EEK(a, \lambda)$. Τότε η α.σ.κ. της τ.μ. X ορίζεται από τη σχέση:

$$G_F^{(EE)}(x) = G_{a, \lambda}^{(EE)}(x) = (1 - e^{-\lambda x})^a. \quad (3.4.34)$$



Παρατήρηση 3.4.5

Με βάση την Πρόταση 2.2.2 προκύπτει ότι αν κάποιος θέλει να δημιουργήσει ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από μια ΕΕΚ με παραμέτρους a και λ , δηλαδή μια ΒΠΚ με $b=1$ και με γεννήτρια $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, αρκεί να δημιουργήσει ένα τ.δ. Y_1, \dots, Y_n , από την Βήτα($a, 1$) και να υπολογίσει τις

$$\text{τιμές } X_i = F^{-1}(Y_i) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y_i), i = 1, \dots, n.$$

Παρατήρηση 3.4.6

Από τον Ορισμό 3.4.2 προκύπτει άμεσα ότι:

1) Για $a=1$ η σ.π.π. της ΕΕΚ ταυτίζεται με τη σ.π.π. της Εκθετικής με παράμετρο λ . Δηλαδή ισχύει ότι: $g_F^{(EE)}(x; 1, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x, \lambda > 0$.

Σχήμα και κορυφότητα της ΕΕΚ

Σε αυτήν την παράγραφο θα μελετηθεί το σχήμα και η κορυφότητα της ΕΕΚ.

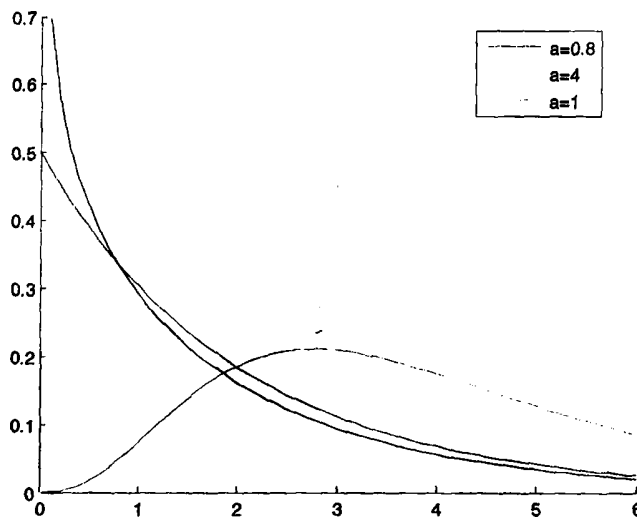
Με την ίδια μεθοδολογία που εφαρμόστηκε στην περίπτωση της ΒΕΚ προκύπτει ότι όταν $a < 1$ τότε η πυκνότητα της ΕΕΚ είναι φθίνουσα συνάρτηση, ενώ όταν $a > 1$ τότε η πυκνότητα της ΕΕΚ είναι αύξουσα μέχρι ένα σημείο x_0 και από εκείνο το σημείο και μετά είναι φθίνουσα. Αυτό σημαίνει ότι η $g_F^{(EE)}(x; a, \lambda)$ είναι μονοκόρυφη στο σημείο $x = x_0$, όπου το

σημείο $x = x_0$ είναι η ρίζα της εξίσωσης: $\frac{(a-1)\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda x}} = \lambda$.



Τέλος, όταν $a=1$, τότε καθώς $(g_F^{(BE)}(x;1,\lambda))' = -\lambda^2 e^{-\lambda x} < 0$ προκύπτει ότι η $g_F^{(BE)}(x;1,\lambda)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η σ.π.π. της ΕΕΚ για επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων a και λ . Όντως, προκύπτει ότι όταν $a=0.8 < 1$ η σ.π.π. της ΕΕΚ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση. Όταν $a=4 > 1$, όντως υπάρχει ένα σημείο x_0 τέτοιο ώστε μέχρι εκείνο η σ.π.π. της ΕΕΚ να είναι αύξουσα και μετά να είναι φθίνουσα. Τέλος, όταν $a=1$ πράγματι η σ.π.π. της ΕΕΚ είναι φθίνουσα.



Σχήμα 6: Σ.π.π. της Εκθετικώς-Εκθετικής Κατανομής όταν $\lambda = 0.5$.

Ροπογεννήτρια συνάρτηση και χαρακτηριστική συνάρτηση της ΕΕΚ

Εφαρμόζοντας, για $b=1$, τις σχέσεις της ργ.σ. και της χ.σ. της ΒΕΚ προκύπτει ότι η ργ.σ. και η χ.σ. της ΕΕΚ είναι, αντίστοιχα, οι εξής:



$$M_X(t) = aB\left(a, 1 - \frac{t}{\lambda}\right) = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(1-t/\lambda)}{\Gamma(a+1-t/\lambda)} \quad (3.4.35)$$

και

$$\varphi_X(t) = aB\left(a, 1 - \frac{it}{\lambda}\right) = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(1-it/\lambda)}{\Gamma(a+1-it/\lambda)}, \quad (3.4.36)$$

όπου $i = \sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα.

Μέση τιμή, διακύμανση και ροπές της EEK

Στην παράγραφο αυτή δίνονται η μέση τιμή, η διακύμανση και οι ροπές της EEK κατόπιν εφαρμογής των αντίστοιχων σχέσεων από την εργασία των Nadarajah and Kotz (2006).

Κατά συνέπεια με εφαρμογή, για $b=1$, της σχέσης (3.4.9) προκύπτει ότι η k -τάξης ροπή της EEK δίνεται από την εξής σχέση:

$$EX^k = \frac{a(-1)^k}{\lambda^k} \frac{d^k}{dp^k} B(a, 1+p-a) \Big|_{p=a}. \quad (3.4.37)$$

Εύκολα τότε προκύπτει ότι η μέση τιμή και η διακύμανση δίνονται κατόπιν εφαρμογής, για $b=1$, των σχέσεων (3.4.10) και (3.4.14) από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$EX = \frac{\Psi(a+1) - \Psi(1)}{\lambda} \quad (3.4.38)$$

και



H

H

3.5

βιβλ.

μετα

την 2

$$\text{Var}X = \frac{\Psi'(1) - \Psi'(a+1)}{\lambda^2}, \quad (3.4.39)$$

αντίστοιχα.

Εντροπία του Renyi και του Shannon

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιαστούν οι εντροπίες του Renyi και του Shannon κατόπιν εφαρμογής, για $b=1$, των σχέσεων (3.4.23) και (3.4.24).

Η εντροπία του Renyi δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} H_R(\gamma) &= -\ln \lambda + \frac{1}{1-\gamma} \ln \left[\frac{B(\gamma(a-1)+1, \gamma)}{(B(a,1))^\gamma} \right] = -\ln \lambda + \frac{1}{1-\gamma} \ln \frac{B(\gamma(a-1)+1, \gamma)}{a^{-\gamma}} \\ &= -\ln \lambda + \frac{\gamma}{1-\gamma} \ln a + \frac{1}{1-\gamma} \ln B(\gamma(a-1)+1, \gamma). \end{aligned} \quad (3.4.40)$$

Η εντροπία του Shannon δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} H_{Sh}(g_F^{(EE)}) &= -\ln \lambda + \ln B(a,1) + a\Psi(a+1) - (a-1)\Psi(a) - \Psi(1) \\ &= -\ln \lambda - \ln a + \Psi(a+1) - (a-1)\Psi(a) - \Psi(1). \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

3.5 Βήτα-Γενικευμένη-Εκθετική Κατανομή

Η Βήτα-Γενικευμένη-Εκθετική Κατανομή (ΒΓΕΚ) εισήχθη στη βιβλιογραφία από τους Barreto-Souza *et al.* (2010). Αυτή η κατανομή έχει μεταξύ άλλων ως ειδικές περιπτώσεις την ΒΕΚ, την ΕΕΚ, την Εκθετική και την Διπλά-Γενικευμένη-Εκθετική Κατανομή (ΔΓΕΚ).



Ορισμός 3.5.1 [Barreto-Souza *et al.* (2010)]

Η τ.μ. X ακολουθεί την ΒΓΕΚ με παραμέτρους a, b, c και λ αν η σ.π.π. της δίνεται από τη σχέση:

$$g_F^{(BGE)}(x; a, b, c, \lambda) = \frac{c\lambda}{B(a, b)} e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{ca-1} \left[1 - (1 - e^{-\lambda x})^c \right]^{b-1}, \quad (3.5.1)$$

όπου $x, a, b, c, \lambda > 0$.

Η ΒΓΕΚ της σχέσης (3.5.1) προκύπτει όταν στη σχέση (2.2.1), στη θέση του γεννήτορα $F(\cdot)$, εισαχθεί η α.σ.κ. της ΕΕΚ με παραμέτρους c και λ . Όταν η τ.μ. X ακολουθεί την ΒΓΕΚ τότε αυτό θα συμβολίζεται $X \sim g_F^{(BGE)}(x; a, b, c, \lambda)$ ή $X \sim BΓΕΚ(a, b, c, \lambda)$.

Στην Πρόταση που ακολουθεί δίνεται, χωρίς απόδειξη, η α.σ.κ. της τ.μ. X που ακολουθεί την $BΓΕΚ(a, b, c, \lambda)$.

Πρόταση 3.5.1

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BΓΕΚ(a, b, c, \lambda)$. Τότε η α.σ.κ. της τ.μ. X ορίζεται από τη σχέση:

$$G_F^{(BGE)}(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{(1-e^{-\lambda x})^c} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = I_{(1-e^{-\lambda x})^c}(a, b). \quad (3.5.2)$$

Παρατήρηση 3.5.1

Με βάση την Πρόταση 2.2.2 προκύπτει ότι αν κάποιος θέλει να δημιουργήσει ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από μια ΒΓΕΚ με παραμέτρους a, b, c και



λ , δηλαδή μια ΒΠΚ με γεννήτρια $G_F^{(GE)}(x) = (1 - e^{-\lambda x})^c$, αρκεί να δημιουργήσει ένα τ.δ. Y_1, \dots, Y_n , από την Βήτα(a, b) και να υπολογίσει τις τιμές $X_i = G_F^{(EE)^{-1}}(Y_i) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y_i^{1/c}), i = 1, \dots, n$.

Παρατήρηση 3.5.2

Από τον Ορισμό 3.5.1 προκύπτουν άμεσα οι ακόλουθες ιδιότητες.

1) Για $c=1$, η σ.π.π. της ΒΓΕΚ ταυτίζεται με τη σ.π.π. της ΒΕΚ. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$g_F^{(BGE)}(x; a, b, 1, \lambda) = \frac{\lambda}{B(a, b)} e^{-bx} (1 - e^{-\lambda x})^{a-1}, a, b, \lambda > 0.$$

2) Για $a=b=1$, η σ.π.π. της ΒΓΕΚ ταυτίζεται με τη σ.π.π. της ΕΕΚ. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$g_F^{(BGE)}(x; 1, 1, c, \lambda) = c\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{c-1}, c, \lambda > 0.$$

3) Για $a=b=c=1$, η σ.π.π. της ΒΓΕΚ ταυτίζεται με τη σ.π.π. της Εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ . Δηλαδή ισχύει ότι:

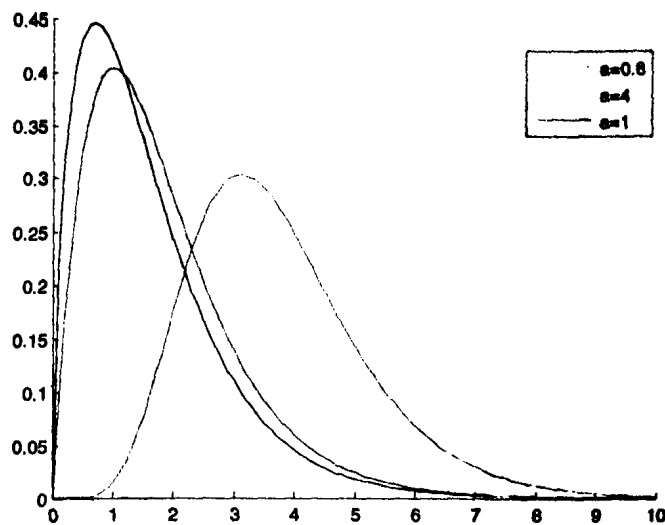
$$g_F^{(BGE)}(x; 1, 1, 1, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0.$$

4) Για $a=1$, η σ.π.π. της ΒΓΕΚ ταυτίζεται με τη σ.π.π. της ΔΓΕΚ (Διπλά-Γενικευμένη-Εκθετική κατανομή). Δηλαδή ισχύει ότι:

$$g_F^{(BGE)}(x; 1, b, c, \lambda) = bc\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{c-1} \left[1 - (1 - e^{-\lambda x})^c \right]^{b-1}, x, b, c, \lambda > 0.$$



Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η σ.π.π. της ΒΓΕΚ για επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων a, b, c και λ .



Σχήμα 7: Σ.π.π. της Βήτα-Γενικευμένης-Εκθετικής Κατανομής όταν $b = 2, c = 2$ και $\lambda = 0.5$.

Εκφράσεις της $G_F^{(BGE)}(x)$ και της $g_F^{(BGE)}(x; a, b, c, \lambda)$

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιαστούν οι κυριότερες μαθηματικές εκφράσεις της α.σ.κ. και της πυκνότητας της ΒΓΕΚ υπό μορφή σειράς [βλ. Barreto-Souza *et al.* (2010)]. Σύμφωνα με την ανωτέρω εργασία εάν $|t| < 1$

και $b \in R^+ - Z^+$, τότε με χρήση της σειράς $(1-t)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j!} t^j$ και

λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.5.2) η α.σ.κ. της ΒΓΕΚ γράφεται:

$$G_F^{(BGE)}(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{(1-e^{-\lambda x})^c} t^{a-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)(-1)^j}{\Gamma(b-j) j!} t^j dt$$



$$= \frac{\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (1-e^{-\lambda x})^{c(a+j)}}{\Gamma(b-j)(a+j)j!} = \sum_{j=0}^{\infty} w_j G_{c(a+j),\lambda}^{(EE)}(x), \quad (3.5.3)$$

όπου $w_j = \frac{\Gamma(a+b)(-1)^j}{\Gamma(a)\Gamma(b-j)(a+j)j!}$ και $G_{c(a+j),\lambda}^{(EE)}(x)$ είναι η α.σ.κ. της ΕΕΚ με παραμέτρους $c(a+j)$ και λ .

Από τη σχέση (3.5.3) προκύπτει ότι η α.σ.κ. της ΒΓΕΚ μπορεί να εκφραστεί ως ένα άπειρο άθροισμα α.σ.κ. της ΕΕΚ. Όταν $b \in \mathbb{Z}^+$ τότε πάλι ισχύουν τα παραπάνω με τη μόνη διαφορά ότι η σειρά αθροίζει ως το $j = b - 1$. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη την Παρατήρηση 3.5.2, προκύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις η α.σ.κ. της ΒΕΚ, της ΕΕΚ, της Εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ και της ΔΓΕΚ.

Παραγωγίζοντας ως προς x τη σχέση (3.5.3) προκύπτει:

$$g_F^{(BGE)}(x; a, b, c, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j g^{(EE)}(x; c(a+j), \lambda). \quad (3.5.4)$$

Η σχέση (3.5.4) δείχνει ότι η σ.π.π. της ΒΓΕΚ εκφράζεται ως μία άπειρη σειρά σ.π.π. της ΕΕΚ, η οποία σειρά, όταν $b \in \mathbb{Z}^+$, αθροίζει ως το $j = b - 1$. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη την Παρατήρηση 3.5.2, προκύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις η σ.π.π. της ΒΕΚ, της ΕΕΚ, της Εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ και της ΔΓΕΚ.

Τέλος, όταν $b \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Z}^+$, η πυκνότητα της ΒΓΕΚ μπορεί να εκφραστεί και ως εξής:

$$g_F^{(BGE)}(x; a, b, c, \lambda) = \frac{c\lambda}{B(a,b)} e^{-\lambda x} G_{ca-1,\lambda}^{(EE)}(x) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} G_{cj,\lambda}^{(EE)}(x). \quad (3.5.5)$$



Επισημαίνεται ότι, όταν $b \in \mathbb{Z}^+$ τότε η ανωτέρω σειρά αθροίζει ως το $j = b - 1$.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των διατεταγμένων στατιστικών της ΒΓΕΚ

Σε αυτήν την παράγραφο θα δοθεί η πυκνότητα του i -οστού διατεταγμένου στατιστικού $X_{i:n}$, όπου $1 \leq i \leq n$, ενός τ.δ. μεγέθους n από την ΒΓΕΚ [βλ. Barreto-Souza *et al.* (2010)].

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} g_{in}^{(BGE)}(x; a, b, c, \lambda) &= \frac{1}{B(i, n+1-i)} g_F^{(BGE)}(x; a, b, c, \lambda) \left(G_F^{(BGE)}(x)\right)^{i-1} \\ &\quad \times \left(1 - G_F^{(BGE)}(x)\right)^{n-i} \\ &= \frac{g_F^{(BGE)}(x; a, b, c, \lambda) \left(G_F^{(BGE)}(x)\right)^{i-1}}{B(i, n+1-i)} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-1)^k \left(G_F^{(BGE)}(x)\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k \binom{n-i}{k} g_F^{(BGE)}(x; a, b, c, \lambda)}{B(i, n+1-i)} \left(G_F^{(BGE)}(x)\right)^{i+k-1}. \end{aligned}$$

Όμως, με χρήση της σχέσης (3.5.3) προκύπτει:

$$\left(G_F^{(BGE)}(x)\right)^{i+k-1} = \left(\frac{\Gamma(b)}{B(a, b)}\right)^{i+k-1} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (1 - e^{-\lambda x})^{c(a+j)}}{\Gamma(b-j) j! (a+j)} \right]^{i+k-1}. \quad (3.5.6)$$



Επιπλέον με χρήση της σειράς $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)^k = \sum_{\{m_1, \dots, m_k\}=0}^{\infty} a_{m_1} \dots a_{m_k}$, όπου $k \in \mathbb{Z}^+$, η σχέση (3.5.6) τώρα γίνεται:

$$\begin{aligned} \left(G_F^{(BGE)}(x)\right)^{i+k-1} &= \left(\frac{\Gamma(b)}{B(a,b)}\right)^{i+k-1} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} (1-e^{-\lambda x})^{c(a+j-1)}}{\Gamma(b-j+1)(j-1)!(a+j-1)} \right]^{i+k-1} \\ &= \left(\frac{\Gamma(b)}{B(a,b)}\right)^{i+k-1} \sum_{\{m_1, \dots, m_{i+k-1}\}}^{\infty} \frac{(-1)^{\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j} (1-e^{-\lambda x})^{c\left(a(i+k-1)+\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j\right)}}{\prod_{j=1}^{i+k-1} \Gamma(b-m_j) m_j (a+m_j)}. \end{aligned}$$

Επομένως, η πυκνότητα του i -οστού διατεταγμένου στατιστικού $X_{i:n}$ της ΒΓΕΚ, για $b \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Z}^+$ και $b \in \mathbb{Z}^+$, γίνεται αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} g_{i:n}^{(BGE)}(x; a, b, c, \lambda) &= \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{i+k-1}=0}^{\infty} \delta_{i,k} \\ &\quad \times g_F^{(BGE)}\left(x; a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b, c, \lambda\right) \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

και

$$\begin{aligned} g_{i:n}^{(BGE)}(x; a, b, c, \lambda) &= \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{m_1=0}^{b-1} \dots \sum_{m_{i+k-1}=0}^{b-1} \delta_{i,k} \\ &\quad \times g_F^{(BGE)}\left(x; a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b, c, \lambda\right), \end{aligned} \quad (3.5.8)$$



όπου
$$\delta_{i,k} = \frac{(-1)^{k+\sum_{j=1}^{i+k-1} m_j} \binom{n-i}{k} B\left(a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b\right) \Gamma(b)^{i+k-1}}{B(i, n+1-i) B(a, b) \prod_{j=1}^{i+k-1} \Gamma(b-m_j) m_j! (a+m_j)}$$
 και

$$g_F^{(BGE)}\left(x; a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b, c, \lambda\right)$$
 είναι η σ.π.π. της
$$BΓΕΚ\left(a(i+k) + \sum_{j=1}^{i+k-1} m_j, b, c, \lambda\right).$$

Ροπογεννήτρια συνάρτηση και χαρακτηριστική συνάρτηση της ΒΓΕΚ

Σε αυτήν την παράγραφο θα δοθεί η ργ.σ. της ΒΓΕΚ καθώς επίσης και η χ.σ. της.

Έστω X μια τ.μ. η οποία ακολουθεί την $BΓΕΚ(a, b, c, \lambda)$. Τότε η ργ.σ. της ΒΓΕΚ δίνεται από τη σχέση:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \frac{c\lambda}{B(a, b)} \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} (1-e^{-\lambda x})^{ca-1} \left[1 - (1-e^{-\lambda x})^c\right]^{b-1} dx.$$

Όταν $b \in R^+ - Z^+$ και $|t| < 1$, τότε χρησιμοποιώντας τη σειρά

$$(1-t)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j!} t^j$$
 προκύπτει ότι η ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$M_X(t) = \frac{c\lambda \Gamma(b)}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j) j!} \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} (1-e^{-\lambda x})^{c(a+j)-1} dx.$$

Με χρήση του μετασχηματισμού $y = e^{-\lambda x}$ προκύπτει:



$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \frac{c\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^1 y^{-t/\lambda} (1-y)^{c(a+j)-1} dy \\
&= \frac{c\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} B(1-t/\lambda, c(a+j)), \tag{3.5.9}
\end{aligned}$$

όπου $t < \lambda$.

Φυσικά, όταν $b \in \mathbb{Z}^+$ η σχέση (3.5.9) πάλι ισχύει με τη μόνη διαφορά ότι η σειρά αθροίζει ως το $j = b - 1$.

Η σχέση (3.5.9) αποτελεί γενίκευση των σχέσεων (3.4.7) και (3.4.35), δηλαδή των ργ.σ της ΒΕΚ και της ΕΕΚ αντίστοιχα. Πράγματι, όταν $c = 1$ τότε προκύπτει η ργ.σ. της ΒΕΚ. Δηλαδή θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \frac{\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} B(a+j, 1-t/\lambda) \\
&= \frac{\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^1 y^{a+j-1} (1-y)^{1-t/\lambda-1} dy \\
&= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 y^{a-1} (1-y)^{1-t/\lambda-1} (1-y)^{b-1} dy \\
&= \frac{B(a, b-t/\lambda)}{B(a,b)}.
\end{aligned}$$

Τέλος, όταν ισχύει $a = b = 1$ προκύπτει η ργ.σ. της ΕΕΚ. Πράγματι προκύπτει: $M_X(t) = cB(1-t/\lambda, c)$.

Η χ.σ. δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \frac{c\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} B(1-it/\lambda, c(a+j)). \tag{3.5.10}$$



Με ακριβώς την ίδια μεθοδολογία όπως και πρωτύτερα για $a=1$ προκύπτει η χ .σ. της ΒΕΚ, δηλαδή η $\varphi_X(t) = \frac{B(b-it/\lambda, a)}{B(a, b)}$ και για $a=b=1$ προκύπτει η χ .σ. της ΕΕΚ, δηλαδή η $\varphi_X(t) = cB(c, 1-it/\lambda)$.

Μέση τιμή, διακύμανση και ροπές της ΒΓΕΚ

Στην παράγραφο αυτή δίνονται η μέση τιμή, η διακύμανση και οι ροπές της ΒΓΕΚ κατόπιν χρήσης της ργ.σ.

Η k -τάξης ροπή της ΒΓΕΚ είναι η k -οστή παράγωγος της ργ.σ. στο σημείο $t=0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} EX^k &= \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{c\Gamma(b)}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^1 y^{-t/\lambda} (1-y)^{c(a+j)-1} dy \Big|_{t=0} \\ &= \frac{c\Gamma(b)}{\lambda^k B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k}}{\Gamma(b-j)j!} \frac{d^k}{dt^k} B(1-t/\lambda, c(a+j)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{c\Gamma(b)}{\lambda^k B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k}}{\Gamma(b-j)j!} \frac{d^k}{dp^k} B(p, c(a+j)) \Big|_{p=1}. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Επομένως για $k=1$ προκύπτει ότι η μέση τιμή της ΒΓΕΚ δίνεται από τη σχέση:

$$EX = \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j [\Psi(c(a+j)+1) - \Psi(1)]}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}. \quad (3.5.12)$$

Επιπλέον, η διακύμανση δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Var}X = EX^2 - (EX)^2$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^2 \Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left\{ [\Psi(c(a+j)+1) - \Psi(1)]^2 + \Psi'(1) - \Psi'(c(a+j)+1) \right\}}{\Gamma(b-j) j! (a+j)} \\
&\quad - \left\{ \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda \Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j [\Psi(c(a+j)+1) - \Psi(1)]}{\Gamma(b-j) j! (a+j)} \right\}^2. \quad (3.5.13)
\end{aligned}$$

Εντροπία του Shannon

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιαστεί η εντροπία του Shannon. Με βάση το Πόρισμα 2.3.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] προκύπτει ότι η εντροπία του Shannon για την ΒΓΕΚ δίνεται από:

$$\begin{aligned}
H_{Sh}(g_F^{(BGE)}) &= \ln B(a, b) - (a-1)(\Psi(a) - \Psi(a+b)) \\
&\quad - (b-1)(\Psi(b) - \Psi(a+b)) - E_Y \left[\ln(f(F^{-1}(Y))) \right]. \quad (3.5.14)
\end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
E_Y \left[\ln(f(F^{-1}(Y))) \right] &= E_{g_F^{(BGE)}} \left[\ln g_F^{(GE)}(x; c, \lambda) \right] \\
&= E_{g_F^{(BGE)}} \left[\ln \left[c \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{c-1} \right] \right] \\
&= \ln(c\lambda) - \lambda E_{g_F^{(BGE)}} [X] + \left(1 - \frac{1}{c}\right) E_{g_F^{(BGE)}} \left[\ln(1 - e^{-\lambda x})^c \right].
\end{aligned}$$

Με χρήση της σχέσης (3.5.12) και του Λήμματος 2.3.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] προκύπτει:

$$E_Y \left[\ln(f(F^{-1}(Y))) \right] = \ln(c\lambda) - \frac{\Gamma(b)}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j [\Psi(c(a+j)+1) - \Psi(1)]}{\Gamma(b-j) j! (a+j)}$$



$$+\left(1-\frac{1}{c}\right)(\Psi(a)-\Psi(a+b)). \quad (3.5.15)$$

Κατά συνέπεια με αντικατάσταση της (3.5.15) στην (3.5.14) η εντροπία του Shannon τώρα γίνεται:

$$\begin{aligned} H_{Sh}(g_F^{(BGE)}) &= \ln B(a,b) - \ln(c\lambda) - (b-1)(\Psi(b) - \Psi(a+b)) \\ &+ \frac{\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j [\Psi(c(a+j)+1) - \Psi(1)]}{\Gamma(b-j)j!(a+j)} \\ &+ \left(\frac{1}{c} - c\right)(\Psi(a) - \Psi(a+b)), \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

σχέση η οποία ταυτίζεται με αυτήν των Barreto-Souza *et al.* (2010).

3.6 Βήτα-Weibull Κατανομή

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιαστεί η Βήτα-Weibull Κατανομή (BWK). Αυτή η κατανομή πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Famoye *et al.* (2005) και ορίστηκε, από τον Zografos (2008), ως μια κατανομή που μεγιστοποιεί την εντροπία του Shannon υπό κατάλληλους περιορισμούς.

Η Weibull κατανομή έχει αποδειχθεί ότι είναι πολύ σημαντική και έχει ευρύ πλαίσιο εφαρμογών στη μοντελοποίηση και ανάλυση διαφόρων συστημάτων με μονότονο ρυθμό αποτυχίας [βλ. Zografos (2008)]. Ως εκ τούτου η BWK αναμένεται να είναι πολύ σημαντική για την θεωρία αξιοπιστίας και την ανάλυση επιβίωσης εξαιτίας της προσαρμοστικότητάς της.



Ορισμός 3.6.1 [Famoye *et al.* (2005)]

Η τ.μ. X ακολουθεί την BWK με παραμέτρους a, b, c και θ αν η σ.π.π. της δίνεται από τη σχέση:

$$g_F^{(BW)}(x; a, b, c, \theta) = \frac{c}{\theta^c B(a, b)} x^{c-1} e^{-b(x/\theta)^c} \left(1 - e^{-(x/\theta)^c}\right)^{a-1}, \quad x, a, b, c, \theta > 0. \quad (3.6.1)$$

Η BWK της σχέσης (3.6.1) προκύπτει όταν στη σχέση (2.2.1), στη θέση του γεννήτορα $F(\cdot)$, εισαχθεί η α.σ.κ της Weibull κατανομής με παραμέτρους c και θ . Όταν η τ.μ. X ακολουθεί την BWK τότε αυτό θα συμβολίζεται $X \sim g_F^{(BW)}(x; a, b, c, \theta)$ ή $BWK(a, b, c, \theta)$.

Στην Πρόταση που ακολουθεί δίνεται, χωρίς απόδειξη, η α.σ.κ. της τ.μ. X που ακολουθεί την $BWK(a, b, c, \theta)$.

Πρόταση 3.6.1

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BWK(a, b, c, \theta)$. Τότε η α.σ.κ. της τ.μ. X ορίζεται από τη σχέση:

$$G_F^{(BW)}(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{1 - e^{-(x/\theta)^c}} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = I_{1 - e^{-(x/\theta)^c}}(a, b). \quad (3.6.2)$$

Παρατήρηση 3.6.1

Με βάση την Πρόταση 2.2.2 προκύπτει ότι αν κάποιος θέλει να δημιουργήσει ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από μια BWK με παραμέτρους a, b, c και θ , δηλαδή μια ΒΠΚ με γεννήτρια $F(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^c}$, αρκεί να



δημιουργήσει ένα τ.δ. Y_1, \dots, Y_n , από την Βήτα(a, b) και να υπολογίσει τις τιμές $X_i = \theta \sqrt{-\ln(1 - Y_i)}$, $i = 1, \dots, n$.

Παρατήρηση 3.6.2

Από τον Ορισμό 3.6.1 προκύπτουν άμεσα οι ακόλουθες ιδιότητες.

1) Για $c = 1$, η σ.π.π. της BWK ταυτίζεται με τη σ.π.π. της $BEK\left(a, b, \frac{1}{\theta}\right)$.

Δηλαδή ισχύει ότι:

$$g_F^{(BW)}(x; a, b, 1, \theta) = \frac{1}{\theta B(a, b)} e^{-b(x/\theta)} (1 - e^{-x/\theta})^{a-1}, \quad x, a, b, \theta > 0.$$

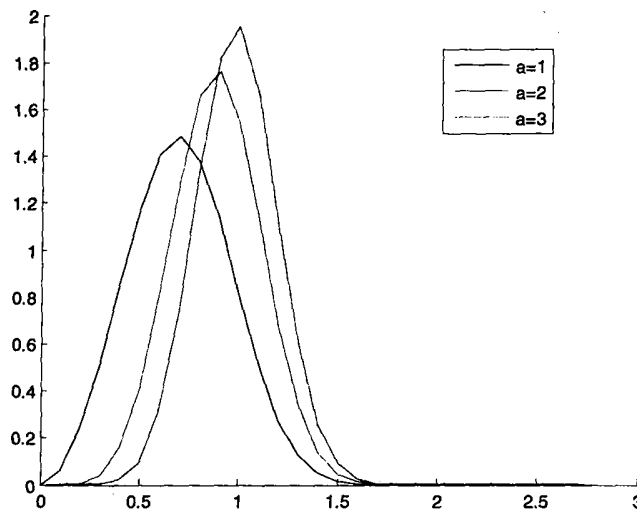
2) Για $b = c = 1$, η σ.π.π. της BWK ταυτίζεται με τη σ.π.π. της $EEK\left(a, \frac{1}{\theta}\right)$.

Δηλαδή ισχύει ότι:

$$g_F^{(BW)}(x; a, 1, 1, \theta) = \frac{1}{\theta B(a, 1)} e^{x/\theta} (1 - e^{-(x/\theta)})^{a-1} = \frac{a}{\theta} e^{-x/\theta} (1 - e^{-x/\theta})^{a-1}, \quad a, \theta > 0.$$

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η σ.π.π. της BWK για επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων a, b, c και θ .





Σχήμα 8: Σ.π.π. της Βήτα-Weibull Κατανομής όταν $b = 2, c = 3$ και $\theta = 1$.

Μέση τιμή, διακύμανση και ροπές της BWK

Αντικείμενο μελέτης αυτής της παραγράφου είναι η k -τάξης ροπή της BWK και, ως απόρροια αυτής, η μέση τιμή και η διακύμανσή της.

Θεώρημα 3.6.1 [Zografos (2008)]

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BWK(a, b, c, \theta)$. Τότε η k -τάξης ροπή της BWK δίνεται από τον τύπο:

$$EX^k = \frac{(-1)^m \theta^k}{B(a, b)} \frac{\partial^m}{\partial b^m} B(a, b), \text{ αν } k/c = m \text{ και } m \in \mathbb{Z}^+, \quad (3.6.3)$$

ενώ



$$EX^k = \frac{\theta^k \Gamma(k/c+1)}{B(a,b)} \left[b^{-(k/c+1)} + \sum_{r=1}^{\infty} v_r (b+r)^{-(k/c+1)} \right], \text{ αν } k/c \in R^+, \quad (3.6.4)$$

$$\text{όπου } v_r = (-1)^r \frac{a_1(a_1-1)\dots(a_1-r-1)}{r!}, \quad r=1,2,\dots, \text{ και } a_1 = a-1.$$

Απόδειξη

Η k -τάξης ροπή της BWK δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} EX^k &= \int_0^{\infty} x^k g_F^{(BW)}(x; a, b, c, \theta) dx \\ &= \frac{c}{\theta^c B(a,b)} \int_0^{\infty} x^{k+c-1} e^{-b(x/\theta)^c} \left(1 - e^{-(x/\theta)^c}\right)^{a-1} dx. \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Με χρήση του μετασχηματισμού $y = e^{-(x/\theta)^c}$ η σχέση (3.6.5) γίνεται:

$$EX^k = \frac{(-1)^{k/c} \theta^k}{B(a,b)} \int_0^1 (\ln y)^{k/c} y^{b-1} (1-y)^{a-1} dy. \quad (3.6.6)$$

Υποθέτοντας ότι $k/c = m \in Z^+$, και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι

$$\frac{\partial^m}{\partial b^m} B(b,a) = \int_0^1 (\ln y)^m y^{b-1} (1-y)^{a-1} dy, \text{ προκύπτει ότι η σχέση (3.6.6)}$$

γράφεται:

$$EX^k = \frac{(-1)^m \theta^k}{B(a,b)} \frac{\partial^m}{\partial b^m} B(a,b). \quad (3.6.7)$$



Εάν υποθέσουμε ότι $k/c \in \mathbb{R}^+$, τότε χρησιμοποιώντας ότι από το διωνυμικό

Θεώρημα [βλ. Choudhury (2005)] ισχύει ότι: $(1-y)^{a-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} v_r y^r$, όπου

$$v_r = (-1)^r \frac{a_1(a_1-1)\dots(a_1-r+1)}{r!}, \quad a_1 = a-1 \text{ και } r=1,2,\dots, \text{ η σχέση (3.6.6)}$$

γίνεται:

$$EX^k = \frac{(-1)^{k/c} \theta^k}{B(a,b)} \int_0^1 (\ln y)^{k/c} y^{b-1} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} v_r y^r \right) dy. \quad (3.6.8)$$

Με χρήση του μετασχηματισμού $y = e^{-z}$ η σχέση (3.6.8) γίνεται:

$$\begin{aligned} EX^k &= \frac{\theta^k}{B(a,b)} \int_0^{\infty} z^{k/c} e^{-bz} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} v_r e^{-rz} \right) dz \\ &= \frac{\theta^k}{B(a,b)} \left(\int_0^{\infty} z^{k/c} e^{-bz} dz + \sum_{r=1}^{\infty} v_r \int_0^{\infty} z^{k/c} e^{-(b+r)z} dz \right) \\ &= \frac{\theta^k}{B(a,b)} \left(\frac{\Gamma(k/c+1)}{b^{(k/c+1)}} + \sum_{r=1}^{\infty} v_r \frac{\Gamma(k/c+1)}{(b+r)^{k/c+1}} \right) \\ &= \frac{\theta^k \Gamma(k/c+1)}{B(a,b)} \left[b^{-(k/c+1)} + \sum_{r=1}^{\infty} v_r (b+r)^{-(k/c+1)} \right]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει ότι η μέση τιμή για $1/c \in \mathbb{Z}^+$ δίνεται από τη σχέση:

$$EX = \frac{(-1)^{1/c} \theta}{B(a,b)} \frac{\partial^{1/c}}{\partial b^{1/c}} B(a,b).$$



Όμως, όταν $1/c \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow c=1$ και επομένως και $m=1$, καθώς $m=k/c$ εξ ορισμού. Κατά συνέπεια η ανωτέρω σχέση γράφεται:

$$EX = \frac{(-1)\theta}{B(a,b)} \frac{\partial}{\partial b} B(a,b).$$

Αντίστοιχα, όταν $1/c \in \mathbb{R}^+$, η μέση τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$EX = \frac{\theta \Gamma((c+1)/c)}{B(a,b)} \left[b^{-(c+1)/c} + \sum_{r=1}^{\infty} \nu_r (b+r)^{-(c+1)/c} \right].$$

Όταν $1/c$ και $2/c \in \mathbb{Z}^+$ η διακύμανση δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \text{Var}X &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= \frac{(-1)^{2/c} \theta^2}{B(a,b)} \frac{\partial^{2/c}}{\partial b^{2/c}} B(a,b) - \left[\frac{(-1)\theta}{B(a,b)} \frac{\partial}{\partial b} B(a,b) \right]^2, \quad c = \{1, 2\} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \text{Var}X &= \frac{\theta^2 \Gamma((c+2)/c)}{B(a,b)} \left[b^{-(c+2)/c} + \sum_{r=1}^{\infty} \nu_r (b+r)^{-(c+2)/c} \right] \\ &\quad - \left\{ \frac{\theta \Gamma((c+1)/c)}{B(a,b)} \left[b^{-(c+1)/c} + \sum_{r=1}^{\infty} \nu_r (b+r)^{-(c+1)/c} \right] \right\}^2, \end{aligned}$$

αντίστοιχα, αν $1/c$ και $2/c \in \mathbb{R}^+$.



Εντροπία του Shannon

Με βάση το Πρόσχημα 2.3.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] προκύπτει ότι η εντροπία του Shannon για την BWK δίνεται από:

$$H_{Sh}(g_F^{(BW)}) = \ln B(a, b) - (a-1)(\Psi(a) - \Psi(a+b)) - (b-1)(\Psi(b) - \Psi(a+b)) - E_Y[\ln f(F^{-1}(Y))]. \quad (3.6.9)$$

Όμως,

$$\begin{aligned} E_Y[\ln f(F^{-1}(Y))] &= E_{g_F^{(BW)}}[\ln f(X)] = E_{g_F^{(BW)}}\left[\ln\left(\frac{c}{\theta^c} x^{c-1} e^{-(x/\theta)^c}\right)\right] \\ &= \ln \frac{c}{\theta^c} + (c-1) E_{g_F^{(BW)}}[\ln X] \\ &\quad + E_{g_F^{(BW)}}\left\{\ln\left[1 - \left(1 - e^{-(x/\theta)^c}\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, με χρήση του μετασχηματισμού $z = e^{-(x/\theta)^c}$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} E_{g_F^{(BW)}}[\ln X] &= \frac{c}{\theta^c B(a, b)} \int_0^\infty (\ln x) x^{c-1} e^{-b(x/\theta)^c} \left(1 - e^{-(x/\theta)^c}\right)^{a-1} dx \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 (\ln \theta + \ln(-\ln z)^{1/c}) z^{b-1} (1-z)^{a-1} dz \\ &= \ln \theta + \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 \ln(-\ln z)^{1/c} z^{b-1} (1-z)^{a-1} dz. \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

Με χρήση του μετασχηματισμού $z = 1 - y$ η σχέση (3.6.12) γίνεται:

$$E_{g_F^{(BW)}}[\ln X] = \ln \theta + \frac{1}{cB(a, b)} \int_0^1 \ln(-\ln(1-y)) y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy$$



$$= \ln \theta + \frac{1}{c} E_Y [\ln(-\ln(1-y))]. \quad (3.6.11)$$

Με χρήση του Λήμματος 2.3.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] προκύπτει:

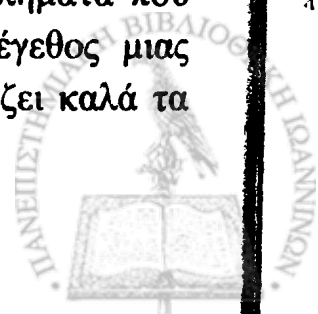
$$\begin{aligned} E_{g_F^{(BW)}} \left\{ \ln \left[1 - \left(1 - e^{-(x/\theta)^c} \right) \right] \right\} &= E_{g_F^{(BW)}} [\ln(1 - F(X))] \\ &= \Psi(b) - \Psi(a+b). \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

Με χρήση των σχέσεων (3.6.11) και (3.6.12) η εντροπία του Shannon γίνεται:

$$\begin{aligned} H_{Sh}(g_F^{(BW)}) &= \ln B(a,b) - (a-1)(\Psi(a) - \Psi(a+b)) \\ &\quad - (b-1)(\Psi(b) - \Psi(a+b)) - \ln \frac{c}{\theta^c} \\ &\quad - (c-1) \left\{ \ln \theta + \frac{1}{c} E_Y [\ln(-\ln(1-Y))] \right\} \\ &\quad - (\Psi(b) - \Psi(a+b)) \\ &= \ln \frac{\theta B(a,b)}{c} - (a-1)(\Psi(a) - \Psi(a+b)) - b(\Psi(b) - \Psi(a+b)) \\ &\quad + \frac{1-c}{c} E_Y [\ln(-\ln(1-Y))]. \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

3.7 Βήτα-Pareto Κατανομή

Η κατανομή Pareto είναι γνωστή στη βιβλιογραφία για την ικανότητά της να μοντελοποιεί κατανομές με βαριές ουρές οι οποίες είναι συνήθεις σε προβλήματα που αφορούν οικονομικά ζητήματα και σε προβλήματα που αφορούν το μέγεθος του πληθυσμού μιας πόλης και το μέγεθος μιας εταιρίας. Έχει βρεθεί επίσης ότι η κατανομή Pareto προσαρμόζει καλά τα



δεδομένα για βιολογικά, κοινωνικά και τεχνολογικά συστήματα [βλ. Newman (2005)]. Πρόσφατα, η κατανομή Pareto έχει εφαρμοστεί σε ομάδες δεδομένων που αφορούν σεισμούς, περιοχές καμένων δασών, περιοχές πετρελαίου και περιοχές φυσικού αερίου [βλ. Burroughs and Tebbens (2001)].

Πλήθος γενικεύσεων της κατανομής Pareto έχει εμφανιστεί στη βιβλιογραφία. Μια από αυτές, η Γενικευμένη-Pareto κατανομή, χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή στατιστικών συμπερασμάτων για την άνω ουρά μιας σ.π.π. [βλ. Pickands (1975)]. Επίσης, η Γενικευμένη-Pareto Κατανομή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μοντελοποίηση ακραίων τιμών εξαιτίας των μακριών ουρών της [βλ. Choulakian and Stephens (2001)].

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιαστεί η Βήτα-Pareto Κατανομή (BPK) [βλ. Akinsete *et al.* (2008)].

Ορισμός 3.7.1 [Akinsete *et al.* (2008)]

Η τ.μ. X ακολουθεί την BPK με παραμέτρους a, b, θ και k αν η σ.π.π. της δίνεται από τη σχέση:

$$g_F^{(BP)}(x; a, b, \theta, k) = \frac{k}{\theta B(a, b)} \left(1 - (x/\theta)^{-k}\right)^{a-1} (x/\theta)^{-kb-1}, \quad (3.7.1)$$

όπου $x \geq \theta$, $a, b, \theta, k > 0$.

Η BPK της σχέσης (3.7.1) προκύπτει όταν στη σχέση (2.2.1), στη θέση του γεννήτορα $F(\cdot)$, εισαχθεί η α.σ.κ. της Pareto με παραμέτρους θ και k . Όταν η τ.μ. X ακολουθεί την BPK τότε αυτό θα συμβολίζεται $X \sim g_F^{(BP)}(x; a, b, \theta, k)$ ή $X \sim BPK(a, b, \theta, k)$.

Στην Πρόταση που ακολουθεί δίνεται, χωρίς απόδειξη, η α.σ.κ. της τ.μ. X που ακολουθεί την $BPK(a, b, \theta, k)$.



Πρόταση 3.7.1

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BPK(a, b, \theta, k)$. Τότε η α.σ.κ. της τ.μ. X ορίζεται από τη σχέση:

$$G_F^{(BP)}(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{1-(x/\theta)^{-k}} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = I_{1-(x/\theta)^{-k}}(a, b). \quad (3.7.2)$$

Παρατήρηση 3.7.1

Με βάση την Πρόταση 2.2.2 προκύπτει ότι αν κάποιος θέλει να δημιουργήσει ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από μια BPK με παραμέτρους a, b, θ και k , δηλαδή μια BPK με γεννήτρια $F(x) = 1 - (x/\theta)^{-k}$, αρκεί να δημιουργήσει ένα τ.δ. Y_1, \dots, Y_n , από την $B\eta\tau a(a, b)$ και να υπολογίσει τις

$$\text{τιμές } X_i = \frac{\theta}{(1 - Y_i)^{1/k}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Παρατήρηση 3.7.2

Από τον Ορισμό 3.7.1 προκύπτουν άμεσα οι ακόλουθες ιδιότητες.

1) Για $a = 1$, η σ.π.π. της BPK ταυτίζεται με τη σ.π.π. της $Pareto(\theta, kb)$.

Δηλαδή ισχύει ότι:

$$g_F^{(BP)}(x; 1, b, \theta, k) = \frac{k}{\theta B(1, b)} (x/\theta)^{-kb-1} = \frac{kb\theta^{kb}}{x^{kb+1}}, \quad x \geq \theta, b, \theta, k > 0.$$

2) Για $a = b = 1$, η σ.π.π. της BPK ταυτίζεται με τη σ.π.π. της $Pareto(\theta, k)$.

Δηλαδή ισχύει ότι:



$$g_F^{(BP)}(x; 1, 1, \theta, k) = \frac{k}{\theta} (x/\theta)^{-k-1} = \frac{k\theta^k}{x^{k+1}}, \quad x \geq \theta, \theta, k > 0.$$

Σχήμα και κορυφότητα της ΒΡΚ

Σε αυτήν την παράγραφο θα εξεταστεί το σχήμα και η κορυφότητα της ΒΡΚ. Από την εργασία των Akinsete *et al.* (2008) προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 3.7.1 [Akinsete *et al.* (2008)]

Η ΒΡΚ είναι μονοκόρυφη στο σημείο x_0 . Όταν $0 < a \leq 1$ τότε $x_0 = \theta$,

$$\text{ενώ όταν } a \geq 1 \text{ τότε } x_0 = \theta \left(\frac{kb + 1 + k(a-1)}{kb + 1} \right)^{1/k}.$$

Απόδειξη

Παραγωγίζοντας την πυκνότητα της ΒΡΚ προκύπτει:

$$\begin{aligned} \left(g_F^{(BP)}(x; a, b, \theta, k) \right)' &= \frac{k}{\theta^2 B(a, b)} \left(1 - (x/\theta)^{-k} \right)^{a-2} (x/\theta)^{-kb-2} \\ &\quad \times \left\{ k(a-1)(x/\theta)^{-k} - (kb+1) \left(1 - (x/\theta)^{-k} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας την ανωτέρω σχέση με το μηδέν και λύνοντας ως προς x προκύπτουν τα εξής κρίσιμα σημεία. Από την πρώτη παρένθεση το σημείο $x_0 = \theta$, από την δεύτερη το σημείο $x_0 = 0$ (απορρίπτεται διότι $x \geq \theta > 0$)

και από την τρίτη παρένθεση το σημείο $x_0 = \theta \left(\frac{kb + 1 + k(a-1)}{kb + 1} \right)^{1/k}$.

Εφόσον ισχύει εξ'ορισμού $x \geq \theta$ απαιτείται τότε να ισχύει



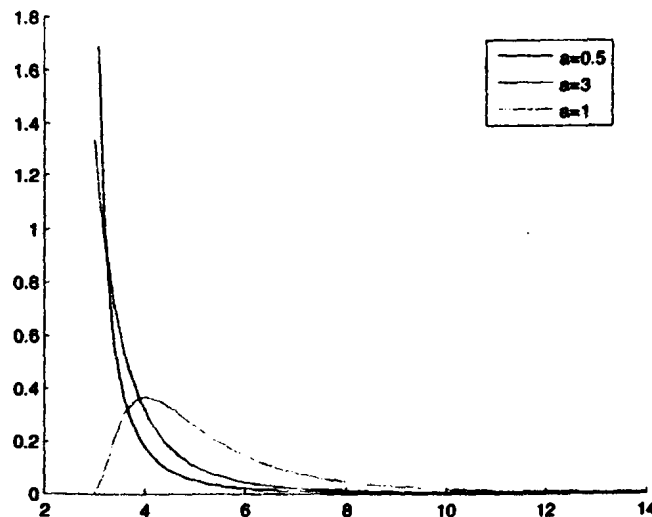
$\left(\frac{kb+1+k(a-1)}{kb+1}\right)^{1/k} \geq 1$ δηλαδή να ισχύει $a \geq 1$. Εάν ισχύει $a=1$ τότε το

κρίσιμο σημείο είναι το $x_0 = \theta$ όπως και στην περίπτωση της πρώτης παρένθεσης. Εάν ισχύει $0 < a < 1$ τότε προκύπτει ότι

$(g_F^{(BP)}(x; a, b, \theta, k))' < 0$ και κατά συνέπεια η BPK είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς x και λαμβάνει το μέγιστο στο σημείο $x_0 = \theta$. ■

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η σ.π.π. της BPK για επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων a, b, θ και k .

Από το Σχήμα 9 επιβεβαιώνεται ότι όντως για $0 < a < 1$ η σ.π.π. της BPK είναι φθίνουσα και λαμβάνει το μέγιστο στο σημείο $x_0 = 3$.



Σχήμα 9: Σ.π.π. της Βήτα-Pareto Κατανομής όταν $b = k = 2$ και $\theta = 3$.

Μέση τιμή, διακύμανση, λοξότητα, κύρτωση και ροπές της BPK

Στην παράγραφο αυτή δίνονται η μέση τιμή, η διακύμανση, η λοξότητα, η κύρτωση και οι ροπές της BPK σύμφωνα με την εργασία των Akinsete *et al.* (2008).

Για την εύρεση της r -τάξης ροπής της BPK πρώτα θα βρεθεί η r -τάξης ροπή της ποσότητας $\left(\frac{X}{\theta}\right)^r$ και έπειτα θα βρεθεί η ζητούμενη ροπή.

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BPK(a, b, \theta, k)$. Επομένως,

$$E\left(\frac{X}{\theta}\right)^r = \frac{k}{\theta B(a, b)} \int_{\theta}^{\infty} \left(1 - (x/\theta)^{-k}\right)^{a-1} (x/\theta)^{-kb+r-1} dx. \quad (3.7.3)$$

Με χρήση του μετασχηματισμού $y = (x/\theta)^{-k}$ το ολοκλήρωμα στη σχέση (3.7.3) γίνεται:

$$E\left(\frac{X}{\theta}\right)^r = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 (1-y)^{a-1} y^{b-r/k-1} dy = \frac{B(b-r/k, a)}{B(a, b)}.$$

Επομένως,

$$EX^r = \theta^r \frac{B(a, b-r/k)}{B(a, b)}, \quad b > r/k. \quad (3.7.4)$$

Εύκολα τότε προκύπτει ότι η μέση τιμή και η διακύμανση δίνονται από τις σχέσεις:



$$EX = \theta \frac{B(a, b-1/k)}{B(a, b)} = \theta \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b-1/k)}{\Gamma(a+b-1/k)}, \quad b > 1/k. \quad (3.7.5)$$

και

$$\begin{aligned} \text{Var}X &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= \theta^2 \left\{ \frac{B(a, b-2/k)}{B(a, b)} - \left[\frac{B(a, b-1/k)}{B(a, b)} \right]^2 \right\}, \quad b > 2/k, \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

αντίστοιχα.

Επιπλέον, η λοξότητα δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{E(X - EX)^3}{\sqrt{\text{Var}X}^3} = \\ &= \frac{B(a, b)^2 B(a, b-3/k) - 3B(a, b)B(a, b-1/k)B(a, b-2/k)}{\left[B(a, b)B(a, b-2/k) - B(a, b-1/k)^2 \right]^{3/2}} \\ &\quad + \frac{2B(a, b-1/k)^3}{\left[B(a, b)B(a, b-2/k) - B(a, b-1/k)^2 \right]^{3/2}}, \quad b > 3/k, \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

όπου

$$\begin{aligned} E(X - EX)^3 &= EX^3 - (EX)^3 + 3(EX)^2 EX - 3(EX)EX^2 \\ &= \theta^3 \left[\frac{B(a, b-3/k)}{B(a, b)} - \frac{3B(a, b-1/k)B(a, b-2/k)}{B(a, b)^2} + \frac{2B(a, b-1/k)}{B(a, b)^3} \right] \end{aligned}$$



Τέλος, η κέρτωση δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{E(X - EX)^4}{(\text{Var}X)^2} \\ &= \frac{T(B)}{\left[B(a,b)B(a,b-2/k) - B(a,b-1/k)^2 \right]^{3/2}}, \quad b > 4/k, \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

όπου

$$\begin{aligned} E(X - EX)^4 &= EX^4 + (EX)^4 - 4EX^3(EX) - 4EX(EX)^3 + 6EX^2(EX)^2 \\ &= \theta^4 \left[\frac{B(a,b-4/k)}{B(a,b)} - \frac{4B(a,b-3/k)B(a,b-1/k)}{B(a,b)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{6B(a,b-2/k)B(a,b-1/k)^2}{B(a,b)^3} - \frac{3B(a,b-1/k)^4}{B(a,b)^4} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{και } T(B) &= B(a,b)^3 B(a,b-4/k) - 4B(a,b)^2 B(a,b-3/k)B(a,b-1/k) \\ &\quad + 6B(a,b)B(a,b-2/k)B(a,b-1/k)^2 - 3B(a,b-1/k)^4. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 3.7.3

Τόσο η λοξότητα όσο και η κέρτωση εξαρτώνται αποκλειστικά από τις παραμέτρους a, b και k και είναι φθίνουσες συναρτήσεις των a, b και k .

Μέση απόλυτη απόκλιση από τη μέση τιμή και τη διάμεσο

Στην εργασία τους οι Akinsete *et al.* (2008) δίνουν μαθηματικές εκφράσεις για την μέση απόλυτη απόκλιση από τη μέση τιμή και τη διάμεσο.



Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BPk(a, b, \theta, k)$. Τότε η μέση απόλυτη απόκλιση από τη μέση τιμή και τη διάμεσο δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$\delta_1(X) = \int_{\theta}^{\infty} |x - \mu| g_F^{(BP)}(x; a, b, \theta, k) dx$$

και

$$\delta_2(X) = \int_{\theta}^{\infty} |x - M| g_F^{(BP)}(x; a, b, \theta, k) dx,$$

όπου $\mu = EX$ και M είναι η διάμεσος. Προκύπτει ότι:

$$\delta_1(X) = 2\mu G_F^{(BP)}(\mu) - 2 \int_{\theta}^{\mu} x g_F^{(BP)}(x; a, b, \theta, k) dx \quad (3.7.9)$$

και

$$\delta_2(X) = EX + 2MG_F^{(BP)}(M) - M - 2 \int_{\theta}^M x g_F^{(BP)}(x; a, b, \theta, k) dx. \quad (3.7.10)$$

Χρησιμοποιώντας τη σειρά: $(1+x)^a = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{a}{i} x^i$, όπου $|x| < 1$ και

$a \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Z}^+$, προκύπτει ότι τα ολοκληρώματα στις σχέσεις (3.7.9) και (3.7.10) υπολογίζονται ως εξής, για $m = \mu, M$:

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^m x g_F^{(BP)}(x; a, b, \theta, k) dx &= \frac{k}{\theta B(a, b)} \int_{\theta}^m x (x/\theta)^{-kb-1} \left(1 - (x/\theta)^{-k}\right)^{a-1} dx \\ &= \frac{k}{\theta B(a, b)} \int_{\theta}^m x (x/\theta)^{-kb-1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{a-1}{i} (-1)^i (x/\theta)^{-ki} dx \end{aligned}$$



$$= \frac{k\theta}{B(a,b)} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{a-1}{i} \frac{1 - (m/\theta)^{1-k(b+i)}}{k(b+i)-1}.$$

Επομένως, η μέση απόλυτη απόκλιση από τη μέση τιμή είναι:

$$\delta_1(X) = 2\mu I_{1-(\mu/\theta)^{-k}}(a,b) - \frac{2k\theta}{B(a,b)} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{a-1}{i} \frac{1 - (\mu/\theta)^{1-k(b+i)}}{k(b+i)-1}. \quad (3.7.11)$$

Η μέση απόλυτη απόκλιση από τη διάμεσο είναι:

$$\begin{aligned} \delta_2(X) = & \theta \frac{B(a,b-1/k)}{B(a,b)} + 2MI_{1-(M/\theta)^{-k}}(a,b) - M \\ & - \frac{2k\theta}{B(a,b)} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{a-1}{i} \frac{1 - (M/\theta)^{1-k(b+i)}}{k(b+i)-1}. \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

Σχέσεις μεταξύ της BPK και άλλων κατανομών

Στην παράγραφο αυτή θα δοθούν σχέσεις που συνδέουν την BPK με άλλες κατανομές. Στην εργασία τους οι Akinsete *et al.* (2008) παρουσίασαν τα παρακάτω Θεωρήματα και Πορίσματα.

Θεώρημα 3.7.1 [Akinsete *et al.* (2008)]

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την BPK $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta, k\right)$. Τότε η τ.μ.

$Y = (X/\theta)^{-k}$ ακολουθεί την κατανομή τόξου ημιτόνου με σ.π.π.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}, \quad 0 < y < 1.$$



Απόδειξη

Θεωρούμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό: $Y = (X/\theta)^{-k}$. Η σ.π.π. της τ.μ. Y δίνεται από:

$$f_Y(y) = g_F^{(BP)}\left(\frac{\theta}{y^{1/k}}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta, k\right) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{k}{\theta B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} (1-y)^{-1/2} y^{1/2+1/k} \frac{\theta}{k} y^{-1-1/k}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}, 0 < y < 1. \quad \blacksquare$$

Θεώρημα 3.7.2 [Akinsete *et al.* (2008)]

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BPK(a, b, \theta, k)$. Τότε η τ.μ. $Y = b \ln \frac{X}{\theta}$ ακολουθεί την λογαριθμική βήτα κατανομή με παραμέτρους a, k και $\frac{k}{b}$, και η σ.π.π. της δίνεται από τη σχέση

$$f_Y(y) = \frac{k}{bB(a, b)} \left(1 - e^{-(k/b)y}\right)^{a-1} e^{-ky}, 0 < y < \infty.$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό: $Y = b \ln \frac{X}{\theta}$. Η σ.π.π. της τ.μ. Y δίνεται από:



$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= g_F^{(BP)}(\theta e^{y/b}; a, b, \theta, k) \left| \frac{dx}{dy} \right| \\
 &= \frac{k}{\theta B(a, b)} \left(1 - \left(\frac{\theta e^{y/b}}{\theta} \right)^{-k} \right)^{a-1} \left(\frac{\theta e^{y/b}}{\theta} \right)^{-kb-1} \frac{\theta e^{y/b}}{b} \\
 &= \frac{k}{b B(a, b)} \left(1 - e^{-(k/b)y} \right)^{a-1} e^{-ky}, \quad 0 < y < \infty.
 \end{aligned}$$

Πόρισμα 3.7.1 [Akinsete *et al.* (2008)]

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BPK(1, b, \theta, k)$. Τότε η τ.μ. $Y = b \ln \frac{X}{\theta}$ ακολουθεί την $Εκθετική(k)$.

Απόδειξη

Θέτοντας $a = 1$ στην σ.π.π. της τ.μ. Y του προηγούμενου Θεωρήματος προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα. ■

Πόρισμα 3.7.2 [Akinsete *et al.* (2008)]

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $BPK(a, b, \theta, k)$. Τότε η σ.π.π. της τ.μ. $Y = b \ln \frac{X}{\theta}$, όταν $k = b$, είναι η πυκνότητα της $BWK(a, b, 1, 1)$ και επίσης είναι μια ολοκληρωτική αναπαράσταση της συνάρτησης βήτα.

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 3.7.2, όταν ισχύει $k = b$, προκύπτει ότι η πυκνότητα της τ.μ. Y είναι η πυκνότητα της $BWK(a, b, 1, 1)$, δηλαδή ισχύει ότι:



$f_Y(y) = \frac{1}{B(a,b)} (1 - e^{-y})^{a-1} e^{-by}, 0 < y < \infty$. Επίσης αυτή η πυκνότητα είναι μια ολοκληρωτική αναπαράσταση της συνάρτησης βήτα [βλ. Zwillinger and Kokoska (2000)] αφού

$$\frac{1}{B(p,q)} \int_0^\infty (1 - e^{-t})^{q-1} e^{-pt} dt = 1, \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0. \quad \blacksquare$$

Εντροπία του Renyi και του Shannon

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των Akinsete *et al.* (2008) που αφορούν την εντροπία του Renyi και του Shannon. Στη συνέχεια θα παρατεθεί και η εντροπία του Shannon με βάση το Πρόγραμμα 2.3.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)].

Έστω X μια τ.μ. τέτοια ώστε $X \sim BPK(a,b,\theta,k)$. Τότε η εντροπία του Renyi είναι η εξής:

$$\begin{aligned} H_R(\gamma) &= \frac{1}{1-\gamma} \ln \left[\int_\theta^\infty \left(g_F^{(BP)}(x; a, b, \theta, k) dx \right)^\gamma dx \right] \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \ln \left[\left(\frac{k}{\theta B(a,b)} \right)^\gamma \int_\theta^\infty \left(1 - (x/\theta)^{-k} \right)^{\gamma(a-1)} (x/\theta)^{-\gamma(kb+1)} dx \right]. \end{aligned}$$

Με χρήση του μετασχηματισμού $y = 1 - (x/\theta)^{-k}$ η ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} H_R(\gamma) &= \frac{1}{1-\gamma} \ln \left[\left(\frac{k}{\theta B(a,b)} \right)^\gamma \int_0^1 y^{\gamma(a-1)} \left(\frac{1}{(1-y)^{1/k}} \right)^{-\gamma(kb+1)} \frac{\theta}{k(1-y)^{1+1/k}} dy \right] \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \ln \left[\left(\frac{k}{\theta} \right)^{\gamma-1} \frac{1}{B(a,b)^\gamma} \int_0^1 y^{\gamma(a-1)} (1-y)^{\gamma(b+1/k)-1/k-1} dy \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-\gamma} \ln \left[\left(\frac{k}{\theta} \right)^{\gamma-1} \frac{B(\gamma(a-1)+1, \gamma(b+1/k)-1/k)}{B(a,b)^\gamma} \right] \\
&= -\ln \frac{k}{\theta} + \frac{1}{1-\gamma} \ln \left[\frac{B(\gamma(a-1)+1, \gamma(b+1/k)-1/k)}{B(a,b)^\gamma} \right].
\end{aligned}$$

Η εντροπία του Shannon, η οποία για μια τ.μ. X με σ.π.π. $f(\cdot)$ ορίζεται από τη σχέση $E[-\ln f(x)]$ και είναι ειδική περίπτωση της εντροπίας του Renyi, για $\gamma \rightarrow 1$. Παίρνοντας το όριο για $\gamma \rightarrow 1$ από την ανωτέρω σχέση εμφανίζεται απροσδιοριστία της μορφής $(\infty 0)$ και ως εκ τούτου χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L'Hospital προκύπτει:

$$\begin{aligned}
H_{Sh}(g_F^{(BP)}) &= -\ln \frac{k}{\theta} + \ln B(a,b) - (a-1)(\Psi(a) - \Psi(a+b)) \\
&\quad - \left(b + \frac{1}{k} \right) (\Psi(b) - \Psi(a+b)).
\end{aligned}$$

Με βάση το Πρόγραμμα 2.3.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] προκύπτει ότι η εντροπία του Shannon για την BPK δίνεται από:

$$\begin{aligned}
H_{Sh}(g_F^{(BP)}) &= \ln B(a,b) - (a-1)(\Psi(a) - \Psi(a+b)) \\
&\quad - (b-1)(\Psi(b) - \Psi(a+b)) - E_Y[\ln f(F^{-1}(Y))]. \quad (3.7.13)
\end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
E_Y[\ln f(F^{-1}(Y))] &= E_{g_F^{(BP)}}[\ln f(X)] = E_{g_F^{(BP)}} \left[\ln \frac{k\theta^k}{X^{k+1}} \right] \\
&= \ln k + k \ln \theta - (k+1) E_{g_F^{(BP)}}[\ln X].
\end{aligned}$$



Επιπλέον με χρήση του μετασχηματισμού $y = (x/\theta)^{-k}$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} E_{g_F^{(BP)}}[\ln X] &= \frac{k}{\theta B(a,b)} \int_{\theta}^{\infty} (\ln x) \left(1 - (x/\theta)^{-k}\right)^{a-1} (x/\theta)^{-kb-1} dx \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 \left(\ln \theta - \frac{1}{k} \ln y\right) (1-y)^{a-1} y^{b-1} dy \\ &= \ln \theta - \frac{1}{kB(a,b)} \frac{\partial}{\partial b} B(b,a) = \ln \theta - \frac{1}{k} (\Psi(b) - \Psi(a+b)). \quad (3.7.14) \end{aligned}$$

Με χρήση της σχέσης (3.7.15) η εντροπία του Shannon γίνεται:

$$\begin{aligned} H_{Sh}(g_F^{(BP)}) &= \ln B(a,b) - (a-1)(\Psi(a) - \Psi(a+b)) \\ &\quad - (b-1)(\Psi(b) - \Psi(a+b)) - \ln k - k \ln \theta \\ &\quad + (k+1) \left[\ln \theta - \frac{1}{k} (\Psi(b) - \Psi(a+b)) \right] \\ &= \ln B(a,b) - (a-1)(\Psi(a) - \Psi(a+b)) \\ &\quad - \left(b + \frac{1}{k}\right) (\Psi(b) - \Psi(a+b)) - \ln \frac{k}{\theta}. \quad (3.7.15) \end{aligned}$$



ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΒΗΤΑ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

4.1 Εισαγωγή

Αντικείμενο μελέτης αυτού του κεφαλαίου είναι η εκτίμηση των παραμέτρων των κυριότερων ειδικών Βήτα παραγόμενων κατανομών με τη μέθοδο των ροπών, της μέγιστης πιθανοφάνειας καθώς επίσης και με μια εναλλακτική μέθοδο των ροπών, η οποία πρόσφατα προτάθηκε στην εργασία των Zografos and Balakrishnan (2009). Η τελευταία αυτή μέθοδος θα παρουσιαστεί αναλυτικά στην αμέσως επόμενη παράγραφο. Τέλος, θα δοθεί και ο πίνακας πληροφορίας του Fisher για κάθε μία ειδική Βήτα παραγόμενη κατανομή. Ο πίνακας πληροφορίας του Fisher μίας Βήτα παραγόμενης κατανομής με σ.π.π. $g_F^{(B)}(x; \theta)$, όπου θ μια p -διάστατη άγνωστη παράμετρος, είναι ο $p \times p$ συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας $I(\theta) = \|I_{ij}\|$, όπου τα στοιχεία του δίνονται από τις σχέσεις

$$I_{ii} = -E \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} \ln \prod_{i=1}^n g_F^{(B)}(x_i; \theta) \right) \text{ και } I_{ij} = -E \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln \prod_{i=1}^n g_F^{(B)}(x_i; \theta) \right), \text{ με}$$

$i \neq j, i, j = 1, \dots, p$ και $(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{k} N_p(0, [I(\theta)]^{-1})$, όπου $\hat{\theta}$ είναι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου θ .



4.2 Εναλλακτική μέθοδος των ροπών

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί μια εναλλακτική μέθοδος των ροπών, η οποία προτάθηκε στην εργασία των Zografos and Balakrishnan (2009), για την εκτίμηση των παραμέτρων της ΒΠΚ, οι οποίες δημιουργούνται από μια παραμετρική γεννήτρια συνάρτηση $F(\cdot)$. Στο πλαίσιο αυτό, υποθέτουμε ότι ο γεννήτορας της ΒΠΚ εμπεριέχει μια p -διάστατη άγνωστη παράμετρο θ , όπου $\theta \in R^p$. Σε όσα ακολουθούν ο γεννήτορας θα συμβολίζεται με $F_\theta(\cdot)$ και η σ.π.π. της ΒΠΚ με $g_{F_\theta}^{(B)}(\cdot)$. Για την εκτίμηση της παραμέτρου θ , με την κλασική μέθοδο των ροπών, εξισώνονται οι θεωρητικές ροπές με τις αντίστοιχες δειγματικές. Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτει προσδιορίζονται οι εκτιμητές των άγνωστων παραμέτρων με τη μέθοδο των ροπών. Επομένως, για την εφαρμογή της μεθοδολογίας αυτής απαιτείται κλειστός τύπος για τις θεωρητικές κεντρικές ροπές της $g_{F_\theta}^{(B)}(\cdot)$, ο οποίος είναι ιδιαίτερα δύσκολος έως και αδύνατος να βρεθεί. Όμως, από το Λήμμα 2.3.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] προκύπτουν αναλυτικοί τύποι για τις αναμενόμενες τιμές ορισμένων συναρτήσεων του γεννήτορα $F_\theta(\cdot)$. Κατά αντίστοιχο τρόπο στο Λήμμα που ακολουθεί, και το οποίο παρατίθεται χωρίς απόδειξη, δίνονται οι αναμενόμενες τιμές, ως προς την $g_{F_\theta}^{(B)}(\cdot)$, ορισμένων συναρτήσεων του γεννήτορα $F_\theta(\cdot)$.



Λήμμα 4.2.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)]

Για $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad E_{g_{F_\theta}^{(B)}} \left[(F_\theta(x))^k \right] &= \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)} \\
 (\beta) \quad E_{g_{F_\theta}^{(B)}} \left[\ln(F_\theta(x))^k \right] &= \frac{1}{B(a,b)} \frac{d^k}{da^k} B(a,b) \\
 (\gamma) \quad E_{g_{F_\theta}^{(B)}} \left[(1-F_\theta(x))^k \right] &= \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)\Gamma(a+b+k)} \\
 (\delta) \quad E_{g_{F_\theta}^{(B)}} \left[\ln(1-F_\theta(x))^k \right] &= \frac{1}{B(a,b)} \frac{d^k}{db^k} B(a,b).
 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την εργασία των Zografos and Balakrishnan (2009) το Λήμμα 4.2.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] είναι απαραίτητο για την ανάπτυξη της εναλλακτικής μεθόδου των ροπών, η οποία εφαρμόζεται για την εκτίμηση της παραμέτρου θ της οικογένειας $g_{F_\theta}^{(B)}(\cdot)$. Κινούμενοι σε αυτό το πλαίσιο θεωρούν οι παραπάνω συγγραφείς ότι υπάρχει διαθέσιμο ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n από την $g_{F_\theta}^{(B)}(\cdot)$, όπου χωρίς περιορισμό της γενικότητας, οι παράμετροι a και b είναι γνωστές. Τότε για την εκτίμηση της παραμέτρου θ εξισώνονται οι θεωρητικές γενικευμένες ροπές του Λήμματος 4.2.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] με τις αντίστοιχες δειγματικές ροπές. Δηλαδή, για $k = 1, 2, \dots, p$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(F_\theta(X_i))^k \right] &= \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)}, \\
 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(\ln F_\theta(X_i))^k \right] &= \frac{1}{B(a,b)} \frac{d^k}{da^k} B(a,b),
 \end{aligned}$$



$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(1 - F_{\theta}(X_i))^k \right] = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)\Gamma(a+b+k)},$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(\ln(1 - F_{\theta}(X_i)))^k \right] = \frac{1}{B(a,b)} \frac{d^k}{db^k} B(a,b).$$

Από την επίλυση του ανωτέρου συστήματος εξισώσεων, ως προς τις άγνωστες παραμέτρους, προκύπτει ο εκτιμητής της παραμέτρου θ ο οποίος θα ονομάζεται εναλλακτικός ροποεκτιμητής (alternative moment estimator) και θα συμβολίζεται $\hat{\theta}^{AME}$.

Τέλος, το Λήμμα 4.2.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] παρέχει μεγάλη δυνατότητα για την κατασκευή κατάλληλων εξισώσεων, οι οποίες εξαρτώνται από τη μορφή του εκάστοτε γεννήτορα $F_{\theta}(\cdot)$.

4.3 Βήτα-Κανονική Κατανομή

4.3.1 Εκτίμηση των παραμέτρων της ΒΚΚ

Μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας

Στην εργασία τους οι Eugene *et al.* (2002) εφαρμόζουν τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας για την εύρεση των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π.) των παραμέτρων της ΒΚΚ. Για την εύρεση των Ε.Μ.Π. απαιτείται η μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας ως προς τις άγνωστες παραμέτρους.

Έστω ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από την $BKK(a, b, \mu, \sigma)$, όπου $\mu \in R$, $a, b, \sigma \in R^+$ και a, b, μ, σ άγνωστες παράμετροι. Τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:



$$L(a, b, \mu, \sigma | \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{B(a, b)} \right)^n \frac{1}{\sigma^n (\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \left[\prod_{i=1}^n \Phi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{a-1} \\ \times \left[\prod_{i=1}^n \left(1 - \Phi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right) \right]^{b-1}. \quad (4.3.1)$$

Λογαριθμίζοντας τη σχέση (4.3.1) και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \text{ προκύπτει:}$$

$$\ln L(a, b, \mu, \sigma | \mathbf{x}) = n \ln \Gamma(a+b) - n \ln \Gamma(a) - n \ln \Gamma(b) - n \ln \sigma \\ - \frac{n}{2} \ln(2\pi) + \sum_{i=1}^n \left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} + (a-1) \ln \Phi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right. \\ \left. + (b-1) \ln \left(1 - \Phi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right) \right]. \quad (4.3.2)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (4.3.2) ως προς a, b, μ και σ προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln L(a, b, \mu, \sigma | \mathbf{x}) = n\Psi(a+b) - n\Psi(a) + \sum_{i=1}^n \ln \Phi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right), \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \ln L(a, b, \mu, \sigma | \mathbf{x}) = n\Psi(a+b) - n\Psi(b) + \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - \Phi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right), \quad (4.3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln L(a, b, \mu, \sigma | \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{(x_i - \mu)}{\sigma^2} + \frac{(1-a)\varphi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)}{\sigma \Phi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)} \right]$$



$$\left. + \frac{(b-1)\varphi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left(1 - \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right], \quad (4.3.5)$$

όπου $\varphi(\cdot)$ η σ.π.π. της $N(0,1)$, και

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \ln L(a, b, \mu, \sigma | \mathbf{x}) = & -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} + \frac{(1-a)\varphi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)(x_i - \mu)}{\sigma^2 \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)} \right. \\ & \left. + \frac{(b-1)\varphi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)(x_i - \mu)}{\sigma^2 \left(1 - \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Οι σχέσεις (4.3.3), (4.3.4), (4.3.5) και (4.3.6) εξισώνονται με το μηδέν και από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων που προκύπτει βρίσκονται οι Ε.Μ.Π. των αγνώστων παραμέτρων.

Η επίλυση αυτή μπορεί να επιτευχθεί με αριθμητικές μεθόδους όπως ο αλγόριθμος Newton-Raphson.

Σημειώνεται ότι η εναλλακτική μέθοδος των ροπών δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην ΒΚΚ διότι η γεννήτρια κατανομή δεν είναι σε κλειστή μορφή.

4.3.2 Πίνακας πληροφορίας του Fisher της ΒΚΚ

Ο πίνακας πληροφορίας του Fisher για την ΒΚΚ, όσο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, δεν υπάρχει στη βασική βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για αυτήν την κατανομή.



Ο πίνακας πληροφορίας του Fisher για την $BKK(a, b, \mu, \sigma)$, όπου $\mu \in R$ και $a, b, \sigma \in R^+$, είναι ένας 4×4 συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας που αποτελείται από τα εξής στοιχεία:

$$I_{11} = n\Psi'(a) - n\Psi'(a+b), I_{12} = -n\Psi'(a+b), I_{13} = E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\varphi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma\Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)} \right\},$$

$$I_{14} = E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)\varphi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma^2\Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)} \right\}, I_{22} = n\Psi'(b) - n\Psi'(a+b),$$

$$I_{23} = -E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\varphi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left(1 - \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right\}, I_{24} = -E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)\varphi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma^2\left(1 - \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right\},$$

$$I_{33} = \frac{n}{\sigma^2} + E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(1-a) \left[\Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \varphi'\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \varphi^2\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \right]}{\left[\sigma\Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \right]^2} \right\}$$

$$+ E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(b-1) \left[\left(1 - \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \varphi'\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \varphi^2\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \right]}{\left[\sigma\left(1 - \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right]^2} \right\},$$

$$I_{34} = E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{2(x_i - \mu)}{\sigma^3} + \sum_{i=1}^n \frac{(1-a) \left[\Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \varphi'\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \right]}{\left[\sigma\Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \right]^2} \right\}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \frac{(1-a)\varphi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\left[\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right]}{\left[\sigma\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right]^2} \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{(b-1)\left(1-\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right)\varphi'\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)}{\left[\sigma\left(1-\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right)\right]^2} \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{(b-1)\varphi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right) + \varphi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right]}{\left[\sigma\left(1-\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right)\right]^2} \Bigg\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{44} = & -\frac{n}{\sigma^2} + E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{3(x_i-\mu)^2}{\sigma^4} + \sum_{i=1}^n \frac{(1-a)\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\varphi'\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)(x_i-\mu)^2}{\left[\sigma^2\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right]^2} \right. \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{(1-a)\varphi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)(x_i-\mu)\left[2\sigma\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)(x_i-\mu)\right]}{\left[\sigma^2\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right]^2} \\
& \left. + \sum_{i=1}^n \frac{(b-1)\left(1-\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right)\varphi'\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)(x_i-\mu)^2}{\left[\sigma^2\left(1-\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right)\right]^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{(b-1) \varphi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) (x_i - \mu) \left[2\sigma \left(1 - \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) + \varphi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) (x_i - \mu) \right]}{\left[\sigma^2 \left(1 - \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right]^2},$$

$$\text{με } \varphi'\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) = -\frac{x_i - \mu}{\sigma} \varphi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right).$$

4.4 Βήτα-Γενικευμένη-Ημικανονική Κατανομή

4.4.1 Εκτίμηση των παραμέτρων της ΒΓΗΚ

Μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας

Αντικείμενο μελέτης αυτής της παραγράφου είναι η εύρεση των Ε.Μ.Π. των παραμέτρων της ΒΓΗΚ, σύμφωνα με την εργασία των Pescim *et al.* (2010). Για την εύρεση των Ε.Μ.Π. απαιτείται η μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας ως προς τις άγνωστες παραμέτρους.

Έστω ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από την ΒΓΗΚ (a, b, c, θ) , όπου $a, b, c, \theta \in R^+$ άγνωστες παράμετροι. Τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L(a, b, c, \theta | \mathbf{x}) = \left(\frac{\sqrt{2} 2^{b-1} c}{B(a, b)} \right)^n \frac{1}{\theta^{nc}} \frac{\prod_{i=1}^n x_i^c}{\prod_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{1}{2\theta^{2c}} \sum_{i=1}^n x_i^{2c}} \left\{ \prod_{i=1}^n \left[2\Phi\left[(x_i/\theta)^c\right] - 1 \right] \right\}^{a-1} \\ \times \left\{ \prod_{i=1}^n \left[1 - \Phi\left[(x_i/\theta)^c\right] \right] \right\}^{b-1}. \quad (4.4.1)$$



Λογαριθμίζοντας τη σχέση (4.4.1) και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \text{ προκύπτει:}$$

$$\begin{aligned} \ln L(a,b,c,\theta|\mathbf{x}) = & n \ln \sqrt{\frac{2}{\pi}} + n \ln c + n(b-1) \ln 2 + n \ln \Gamma(a+b) - n \ln \Gamma(a) \\ & - n \ln \Gamma(b) - nc \ln \theta + c \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{1}{2\theta^{2c}} \sum_{i=1}^n x_i^{2c} \\ & + (a-1) \sum_{i=1}^n \ln \left[2\Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] - 1 \right] \\ & + (b-1) \sum_{i=1}^n \ln \left[1 - \Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (4.4.2) ως προς a, b, c και θ προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln L(a,b,c,\theta|\mathbf{x}) = n\Psi(a+b) - n\Psi(a) + \sum_{i=1}^n \ln \left[2\Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] - 1 \right], \quad (4.4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} \ln L(a,b,c,\theta|\mathbf{x}) = & n\Psi(a+b) - n\Psi(b) + n \ln 2 \\ & + \sum_{i=1}^n \ln \left[1 - \Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] \right], \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c} \ln L(a,b,c,\theta|\mathbf{x}) = & \frac{n}{c} - n \ln \theta + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^{2c} \ln \frac{x_i}{\theta} \\ & + (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{2\varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^c \ln \frac{x_i}{\theta}}{2\Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] - 1} \\ & + (1-b) \sum_{i=1}^n \frac{\varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^c \ln \frac{x_i}{\theta}}{1 - \Phi \left[(x_i/\theta)^c \right]}, \end{aligned} \quad (4.4.5)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(a, b, c, \theta | \mathbf{x}) = & -\frac{nc}{\theta} + \frac{c}{\theta^{2c+1}} \sum_{i=1}^n x_i^{2c} + \frac{2c(1-a)}{\theta^{c+1}} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi[(x_i/\theta)^c] x_i^c}{2\Phi[(x_i/\theta)^c] - 1} \\ & + \frac{c(b-1)}{\theta^{c+1}} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi[(x_i/\theta)^c] x_i^c}{1 - \Phi[(x_i/\theta)^c]}, \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

οι οποίες εξισώνονται με το μηδέν και από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτει προσδιορίζονται οι Ε.Μ.Π. των αγνώστων παραμέτρων.

Η επίλυση αυτή μπορεί να επιτευχθεί με αριθμητικές μεθόδους όπως ο αλγόριθμος Newton-Raphson.

Σημειώνεται ότι η εναλλακτική μέθοδος των ροπών δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην ΒΓΗΚ διότι η γεννήτρια κατανομή δεν είναι σε κλειστή μορφή.

4.4.2 Πίνακας πληροφορίας του Fisher της ΒΓΗΚ

Σε αυτήν την παράγραφο θα δοθούν τα στοιχεία του πίνακα πληροφορίας του Fisher.

Ο πίνακας πληροφορίας του Fisher για την ΒΓΗΚ (a, b, c, θ) , όπου $a, b, c, \theta \in R^+$, θα είναι ο 4×4 συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας και θα αποτελείται από τα εξής στοιχεία:

$$\begin{aligned} I_{11} &= n\Psi'(a) - n\Psi'(a+b), \quad I_{12} = -n\Psi'(a+b), \\ I_{13} &= -E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{2\varphi[(x_i/\theta)^c] \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln \frac{x_i}{\theta}}{2\Phi[(x_i/\theta)^c] - 1} \right\}, \quad I_{14} = E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{2cx_i^c \varphi[(x_i/\theta)^c]}{\theta^{c+1} [2\Phi[(x_i/\theta)^c] - 1]} \right\}, \end{aligned}$$



$$I_{22} = n\Psi'(b) - n\Psi'(a+b), I_{23} = E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^c \ln \frac{x_i}{\theta}}{1 - \Phi \left[(x_i/\theta)^c \right]} \right\},$$

$$I_{24} = -E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\frac{cx_i^c}{\theta^{c+1}} \varphi \left[(x_i/\theta)^c \right]}{1 - \Phi \left[(x_i/\theta)^c \right]} \right\},$$

$$I_{33} = \frac{n}{c^2} - n \ln \theta + \sum_{i=1}^n \ln x_i + E \left\{ 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^{2c} \ln^2 \frac{x_i}{\theta} \right\}$$

$$-E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\left\{ 2\varphi' \left[(x_i/\theta)^c \right] \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^{2c} \ln^2 \frac{x_i}{\theta} \right\}}{\left[2\Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] - 1 \right]} \right\}$$

$$-E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{2\varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^c \ln^2 \frac{x_i}{\theta}}{\left[2\Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] - 1 \right]} \right\}$$

$$+E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{4 \left\{ \varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] \right\}^2 \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^{2c} \ln^2 \frac{x_i}{\theta}}{\left[2\Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] - 1 \right]^2} \right\}$$

$$-E \left\{ (1-b) \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\theta} \right)^c \ln \left(\frac{x_i}{\theta} \right) \left\{ \varphi' \left[(x_i/\theta)^c \right] \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^c \ln \frac{x_i}{\theta} + \varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] \ln \frac{x_i}{\theta} \right\}}{1 - \Phi \left[(x_i/\theta)^c \right]} \right\}$$



$$\begin{aligned}
& -E \left\{ (1-b) \sum_{i=1}^n \frac{\left\{ \varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] \right\}^2 \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^{2c} \ln^2 \frac{x_i}{\theta}}{\left[1 - \Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] \right]^2} \right\}, \\
I_{34} &= \frac{n}{\theta} - E \left\{ \frac{1-2c \ln \theta}{\theta^{2c+1}} \sum_{i=1}^n x_i^{2c} \right\} - E \left\{ \frac{2c}{\theta^{2c+1}} \sum_{i=1}^n x_i^{2c} \ln x_i \right\} \\
& + E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{2cx_i^{2c}}{\theta^{2c+1}} \varphi' \left[(x_i/\theta)^c \right] \ln \frac{x_i}{\theta} + \frac{2x_i^c}{\theta^{c+1}} \varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] \left\{ c \ln \frac{x_i}{\theta} + 1 \right\}}{2\Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] - 1} \right\} \\
& - E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{4cx_i^{2c}}{\theta^{2c+1}} \left\{ \varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] \right\}^2 \ln \frac{x_i}{\theta}}{\left[2\Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] - 1 \right]^2} \right\} \\
& + E \left\{ (1-b) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{cx_i^{2c}}{\theta^{2c+1}} \varphi' \left[(x_i/\theta)^c \right] \ln \frac{x_i}{\theta} + \frac{x_i^c}{\theta^{c+1}} \varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] \left\{ c \ln \frac{x_i}{\theta} + 1 \right\}}{1 - \Phi \left[(x_i/\theta)^c \right]} \right\} \\
& + E \left\{ (1-b) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{cx_i^{2c}}{\theta^{2c+1}} \left\{ \varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] \right\}^2 \ln \frac{x_i}{\theta}}{\left[1 - \Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] \right]^2} \right\}, \\
I_{44} &= -\frac{nc}{\theta^2} + E \left\{ \frac{(2c+1)c}{\theta^{2(c+1)}} \sum_{i=1}^n x_i^{2c} \right\} + E \left\{ \frac{2(1-a)(c+1)c}{\theta^{c+2}} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] x_i^c}{2\Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] - 1} \right\} \\
& + E \left\{ \frac{2c(1-a)}{\theta^{c+1}} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{cx_i^{2c}}{\theta^{c+1}} \varphi' \left[(x_i/\theta)^c \right]}{2\Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] - 1} \right\} - E \left\{ \frac{2c(1-a)}{\theta^{c+1}} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{2cx_i^{2c}}{\theta^{c+1}} \left\{ \varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] \right\}^2}{\left[2\Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] - 1 \right]^2} \right\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +E \left\{ \frac{c(c+1)(b-1)}{\theta^{c+2}} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] x_i^c}{1 - \Phi \left[(x_i/\theta)^c \right]} \right\} + E \left\{ \frac{c(b-1)}{\theta^{c+1}} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{cx_i^{2c}}{\theta^{c+1}} \varphi' \left[(x_i/\theta)^c \right]}{1 - \Phi \left[(x_i/\theta)^c \right]} \right\} \\
& +E \left\{ \frac{c(b-1)}{\theta^{c+1}} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{cx_i^{2c}}{\theta^{c+1}} \left\{ \varphi \left[(x_i/\theta)^c \right] \right\}^2}{\left[1 - \Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] \right]^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 4.4.1

Στην εργασία τους οι Pescim *et al.* (2010) δίνουν τα στοιχεία του πίνακα πληροφορίας του Fisher για την ΒΓΗΚ με έναν εναλλακτικό και ισοδύναμο τρόπο. Ο τρόπος αυτός προκύπτει αν στα ολοκληρώματα, μέσω των οποίων υπολογίζονται οι αναμενόμενες τιμές, προβούμε στο μετασχηματισμό $V = 2\Phi \left[(x_i/\theta)^c \right] - 1$.

4.5 Βήτα-Εκθετική Κατανομή

4.5.1 Εκτίμηση των παραμέτρων της ΒΕΚ

Μέθοδος των ροπών

Σε αυτήν την παράγραφο θα γίνει η εκτίμηση των παραμέτρων της ΒΕΚ με τη μέθοδο των ροπών, σύμφωνα με την εργασία των Nadarajah and Kotz (2006).

Έστω ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από την $ΒΕΚ(a, b, \lambda)$, όπου $a, b, \lambda \in R^+$ και a, b, λ άγνωστες παράμετροι.

Με τη μέθοδο των ροπών εξισώνονται οι θεωρητικές ροπές με τις αντίστοιχες δειγματικές ροπές. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.4.10), (3.4.14) και (3.4.16) προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:



$$\frac{\Psi(a+b) - \Psi(b)}{\lambda} = s_1, \quad (4.5.1)$$

$$\frac{\Psi'(b) - \Psi'(a+b)}{\lambda^2} = s_2 \quad (4.5.2)$$

και

$$\frac{\Psi''(a+b) - \Psi''(b)}{\lambda^3} = s_3. \quad (4.5.3)$$

Συνδυάζοντας τη σχέση (4.5.1) με τη (4.5.2) και τη σχέση (4.5.1) με τη (4.5.3) προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\frac{\Psi'(b) - \Psi'(a+b)}{(\Psi(b) - \Psi(a+b))^2} = \frac{s_2}{s_1^2} \quad \text{και} \quad \frac{\Psi''(b) - \Psi''(a+b)}{(\Psi(b) - \Psi(a+b))^3} = \frac{s_3}{s_1^3},$$

οι οποίες λύνονται ταυτόχρονα και δίνουν εκτίμηση για τις παραμέτρους a και b . Η εκτίμηση για την παράμετρο λ δίνεται έπειτα, άμεσα, από τη σχέση (4.5.1). Παρατηρούμε ότι για $a=1$ η σχέση (4.5.1) δίνει $\hat{\lambda} = \frac{1}{bs_1}$ ο οποίος είναι ο συνήθης εκτιμητής της παραμέτρου λ για το εκθετικό μοντέλο.

Μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας

Στην παράγραφο αυτή, σύμφωνα με την εργασία των Nadarajah and Kotz (2006), παρουσιάζεται η εκτίμηση των παραμέτρων της BEK με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Για την εύρεση των Ε.Μ.Π. απαιτείται η μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας ως προς τις άγνωστες παραμέτρους.



Έστω ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από την $BEK(a, b, \lambda)$, όπου $a, b, \lambda \in R^+$ και a, b, λ άγνωστες παράμετροι. Τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι η εξής:

$$L(a, b, \lambda | \mathbf{x}) = \left(\frac{\lambda}{B(a, b)} \right)^n e^{-b\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda x_i})^{a-1}. \quad (4.5.4)$$

Λογαριθμίζοντας τη συνάρτηση πιθανοφάνειας προκύπτει:

$$\ln L(a, b, \lambda | \mathbf{x}) = n \ln \lambda - n \ln B(a, b) - b\lambda \sum_{i=1}^n x_i + (a-1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i}). \quad (4.5.5)$$

Παραγωγίζοντας την ανωτέρω σχέση ως προς a, b και λ προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln L(a, b, \lambda | \mathbf{x}) = -n\psi(a) + n\psi(a+b) + \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i}), \quad (4.5.6)$$

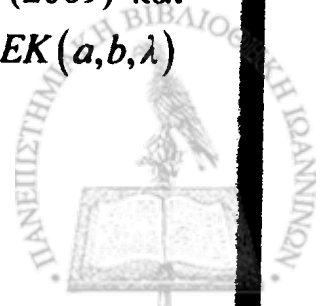
$$\frac{\partial}{\partial b} \ln L(a, b, \lambda | \mathbf{x}) = -n\psi(b) + n\psi(a+b) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4.5.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(a, b, \lambda | \mathbf{x}) = \frac{n}{\lambda} - b \sum_{i=1}^n x_i + (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}}. \quad (4.5.8)$$

Οι σχέσεις (4.5.6), (4.5.7) και (4.5.8) εξισώνονται με το μηδέν και λύνονται ταυτόχρονα ως προς a, b και λ . Η επίλυση αυτή μπορεί να επιτευχθεί με αριθμητικές μεθόδους.

Εναλλακτική μέθοδος των ροπών

Σύμφωνα με την εργασία των Zografos and Balakrishnan (2009) και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η γεννήτρια κατανομή της $BEK(a, b, \lambda)$



είναι η $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ προκύπτει ότι για την εκτίμηση της παραμέτρου λ πρέπει να εξισωθεί η θεωρητική κεντρική ροπή του Λήμματος 4.2.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] με την αντίστοιχη δειγματική ροπή, θεωρώντας τις παραμέτρους a, b γνωστές. Επομένως,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(1 - F(X_i))] = \frac{1}{B(a, b)} \frac{d}{db} B(a, b).$$

Όμως,
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(1 - F(X_i))] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln e^{-\lambda x_i}] = -\lambda \bar{X} \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{B(a, b)} \frac{d}{db} B(a, b) = \Psi(b) - \Psi(a + b).$$

Κατά συνέπεια $\hat{\lambda}^{AME} = \frac{1}{\bar{X}} (\Psi(a + b) - \Psi(b))$, όπου a, b γνωστά.

4.5.2 Πίνακας πληροφορίας του Fisher της ΒΕΚ

Σύμφωνα με την εργασία των Nadarajah and Kotz (2006) ο πίνακας πληροφορίας του Fisher για την $BEK(a, b, \lambda)$, όπου $a, b, \lambda \in R^+$, θα είναι ο 3×3 συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας και θα αποτελείται από τα εξής στοιχεία:

$$I_{11} = n\Psi'(a) - n\Psi'(a + b), \quad I_{12} = -n\Psi'(a + b),$$

$$I_{13} = -E \left(\frac{\partial^2}{\partial a \partial \lambda} \ln L(a, b, \lambda | \mathbf{x}) \right) = -E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} \right\}.$$

Όμως, ισχύει ότι:



$$\begin{aligned} -E\left(x_1 e^{-\lambda x_1} (1 - e^{-\lambda x_1})^{-1}\right) &= -\frac{\lambda}{B(a,b)} \int_0^\infty x_1 e^{-(b+1)\lambda x_1} (1 - e^{-\lambda x_1})^{(a-1)-1} dx_1 \\ &= -\frac{\lambda}{B(a,b)} \frac{B(a-1, b+1)}{\lambda} EX, \end{aligned}$$

όπου $a > 1$ και $X \sim BEK(a-1, b+1, \lambda)$. Κατά συνέπεια με χρήση της σχέσης (3.4.10) προκύπτει:

$$-E\left(x_1 e^{-\lambda x_1} (1 - e^{-\lambda x_1})^{-1}\right) = -\frac{b}{(a-1)\lambda} (\Psi(a+b) - \Psi(b+1)).$$

Επομένως, για $a > 1$

$$I_{13} = -\frac{nb}{(a-1)\lambda} (\Psi(a+b) - \Psi(b+1)).$$

Επιπλέον,

$$I_{22} = n\Psi'(b) - n\Psi'(a+b), \quad I_{23} = E\left\{\sum_{i=1}^n x_i\right\} = \frac{n}{\lambda} (\Psi(a+b) - \Psi(b))$$

και

$$\begin{aligned} I_{33} &= -E\left\{\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L(a, b, \lambda | \mathbf{x})\right\} = E\left\{\frac{n}{\lambda^2} + (a-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 e^{-\lambda x_i} (1 - e^{-\lambda x_i})^{-2}\right\} \\ &= \frac{n}{\lambda^2} + (a-1)n \frac{\lambda}{B(a,b)} \frac{B(a-2, b+1)}{\lambda} EX^2, \end{aligned}$$

όπου $X \sim BEK(a-2, b+1, \lambda)$, υπό την προϋπόθεση ότι $a > 2$. Άρα,



$$I_{33} = \frac{n}{\lambda^2} \left\{ 1 + \frac{b(a+b-1)}{a-2} \left[\Psi'(b+1) - \Psi'(a+b-1) + \Psi^2(b+1) - 2\Psi(b+1)\Psi(a+b-1) + \Psi^2(a+b-1) \right] \right\},$$

υπό την προϋπόθεση $a > 2$.

Επομένως, έχουν βρεθεί τα στοιχεία του πίνακα πληροφορίας του Fisher.

4.6 Εκθετικώς-Εκθετική Κατανομή

4.6.1 Εκτίμηση των παραμέτρων της ΕΕΚ

Μέθοδος των ροπών

Αντικείμενο μελέτης αυτής της παραγράφου είναι η εκτίμηση των παραμέτρων της ΕΕΚ με τη μέθοδο των ροπών. Η ΕΕΚ είναι ειδική περίπτωση της ΒΕΚ και ως εκ τούτου θα χρησιμοποιηθούν οι αντίστοιχες σχέσεις της ΒΕΚ.

Έστω ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από την $ΕΕΚ(a, \lambda)$, όπου $a, \lambda \in R^+$ και a, λ άγνωστες παράμετροι.

Με τη μέθοδο των ροπών εξισώνονται οι θεωρητικές ροπές με τις αντίστοιχες δειγματικές ροπές. Επομένως, κατόπιν εφαρμογής, για $b=1$, των σχέσεων (4.5.1) και (4.5.2) προκύπτει ότι:

$$\frac{\Psi(a+1) - \Psi(1)}{\lambda} = s_1 \quad (4.6.1)$$

και

$$\frac{\Psi'(1) - \Psi'(a+1)}{\lambda^2} = s_2. \quad (4.6.2)$$



Συνδυάζοντας τη σχέση (4.6.1) με τη (4.6.2) προκύπτει η εξής εξίσωση:

$$\frac{\Psi'(1) - \Psi'(a+1)}{(\Psi(1) - \Psi(a+1))^2} = \frac{s_2}{s_1^2}.$$

Η επίλυση αυτής της εξίσωσης δίνει την εκτίμηση για την παράμετρο a . Η εκτίμηση για την παράμετρο λ δίνεται έπειτα, άμεσα, από τη σχέση (4.6.1).

Μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας

Αντικείμενο μελέτης αυτής της παραγράφου είναι η εύρεση των Ε.Μ.Π. των παραμέτρων της ΕΕΚ. Για την εύρεση των Ε.Μ.Π. απαιτείται η μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας ως προς τις άγνωστες παραμέτρους. Οι Gupta and Kundu (2001) στην εργασία τους βρίσκουν τους Ε.Μ.Π. της ΕΕΚ με το συνήθη τρόπο. Όμως, επειδή η ΕΕΚ είναι ειδική περίπτωση της ΒΕΚ θα χρησιμοποιηθούν οι αντίστοιχες σχέσεις της ΒΕΚ.

Έστω ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από την $ΕΕΚ(a, \lambda)$, όπου $a, \lambda \in R^+$ και a, λ άγνωστες παράμετροι. Κατόπιν εφαρμογής για $b=1$, των σχέσεων (4.5.6) και (4.5.8) προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \ln L(a, \lambda | \mathbf{x}) &= -n\Psi(a) + n\Psi(a+1) + \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i}) \\ &= -\frac{n}{\Gamma(a)} \frac{d}{da} \Gamma(a) + \frac{n}{a\Gamma(a)} \frac{d}{da} [a\Gamma(a)] + \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i}) \\ &= \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i}), \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(a, \lambda | \mathbf{x}) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i + (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}}, \quad (4.6.3)$$



οι οποίες εξισώνονται με το μηδέν και λύνονται ταυτόχρονα ως προς a και λ . Η επίλυση αυτή μπορεί να επιτευχθεί με αριθμητικές μεθόδους.

Εναλλακτική μέθοδος των ροπών

Σύμφωνα με την εργασία των Zografos and Balakrishnan (2009) και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η γεννήτρια κατανομή της $EEK(a, \lambda)$ είναι η $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ προκύπτει ότι για την εκτίμηση της παραμέτρου λ πρέπει να εξισωθεί η θεωρητική κεντρική ροπή του Λήμματος 4.2.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] με την αντίστοιχη δειγματική ροπή, θεωρώντας την παράμετρο a γνωστή. Επομένως, για $b = 1$, προκύπτει ότι:

$$\hat{\lambda}^{AME} = \frac{1}{X} (\Psi(a+1) - \Psi(1)),$$

όπου a γνωστό.

4.6.2 Πίνακας πληροφορίας του Fisher της EEK

Από τα στοιχεία του πίνακα πληροφορίας του Fisher για την BEK προκύπτουν τα στοιχεία του πίνακα πληροφορίας του Fisher για την EEK. Ειδικότερα, τα στοιχεία I_{11}, I_{13} και I_{33} της BEK, για $b = 1$, δίνουν τον πίνακα πληροφορίας του Fisher για την $EEK(a, \lambda)$, όπου $a, \lambda \in R^+$.

$$I_{11} = n\Psi'(a) - n\Psi'(a+1) = n \frac{d}{da} \left[\frac{\frac{d}{da} \Gamma(a)}{\Gamma(a)} \right] - n \frac{d}{da} \left[\frac{1}{a} + \frac{\frac{d}{da} \Gamma(a)}{\Gamma(a)} \right] = \frac{n}{a^2},$$

$$I_{12} = \frac{n}{(a-1)\lambda} (\Psi(a+1) - \Psi(2)), \quad a > 1,$$



$$I_{22} = \frac{n}{\lambda^2} \left\{ 1 + \frac{a}{a-2} [\Psi'(2) - \Psi'(a) + \Psi^2(2) - 2\Psi(2)\Psi(a) + \Psi^2(a)] \right\}, a > 2.$$

4.7 Βήτα-Γενικευμένη-Εκθετική Κατανομή

4.7.1 Εκτίμηση των παραμέτρων της ΒΓΕΚ

Μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας

Έστω ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από την ΒΓΕΚ(a, b, c, λ), όπου $a, b, c, \lambda \in R^+$ και a, b, c, λ άγνωστες παράμετροι. Τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L(a, b, c, \lambda | \mathbf{x}) = \left(\frac{c\lambda}{B(a, b)} \right)^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \left\{ \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda x_i}) \right\}^{ca-1} \left\{ \prod_{i=1}^n [1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c] \right\}^{b-1}$$

Λογαριθμίζοντας την ανωτέρω σχέση και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \text{ προκύπτει:}$$

$$\begin{aligned} \ln L(a, b, c, \lambda | \mathbf{x}) &= n \ln(c\lambda) + n \ln \Gamma(a+b) - n \ln \Gamma(a) - n \ln \Gamma(b) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i \\ &\quad + (ca-1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i}) + (b-1) \sum_{i=1}^n \ln [1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c]. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την ανωτέρω σχέση ως προς a, b, c και λ προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln L(a, b, c, \lambda | \mathbf{x}) = n\Psi(a+b) - n\Psi(a) + c \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i}),$$



$$\frac{\partial}{\partial b} \ln L(a, b, c, \lambda | \mathbf{x}) = n\Psi(a+b) - n\Psi(b) + \sum_{i=1}^n \ln \left[1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \ln L(a, b, c, \lambda | \mathbf{x}) = \frac{n}{c} + a \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i}) - (b-1) \sum_{i=1}^n \frac{(1 - e^{-\lambda x_i})^c \ln(1 - e^{-\lambda x_i})}{1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(a, b, c, \lambda | \mathbf{x}) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i + (ca-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{(1 - e^{-\lambda x_i})} \\ &\quad - (b-1) \sum_{i=1}^n \frac{c(1 - e^{-\lambda x_i})^{c-1} x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c}, \end{aligned}$$

οι οποίες εξισώνονται με το μηδέν και από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτει προσδιορίζονται οι Ε.Μ.Π. των αγνώστων παραμέτρων. Η επίλυση αυτή μπορεί να επιτευχθεί με αριθμητικές μεθόδους.

Εναλλακτική μέθοδος των ροπών

Σύμφωνα με την εργασία των Zografos and Balakrishnan (2009) και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η γεννήτρια κατανομή της $BΓΕΚ(a, b, c, \lambda)$ είναι η $G_F^{(EE)}(x) = (1 - e^{-\lambda x})^c$, δηλαδή η α.σ.κ. της $ΕΕΚ(c, \lambda)$, προκύπτει ότι για την εκτίμηση των παραμέτρων c και λ πρέπει να εξισωθούν οι θεωρητικές κεντρικές ροπές του Λήμματος 4.2.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] με τις αντίστοιχες δειγματικές ροπές, θεωρώντας τις παραμέτρους a, b γνωστές. Επομένως, προκύπτει το σύστημα εξισώσεων:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln F(X_i)] = \frac{1}{B(a, b)} \frac{d}{da} B(a, b)$$

και



$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln F(X_i)]^2 = \frac{1}{B(a,b)} \frac{d^2}{da^2} B(a,b).$$

Όμως,
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln F(X_i)] = \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i})$$
 και

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln F(X_i)]^2 = \frac{c^2}{n} \sum_{i=1}^n \ln^2(1 - e^{-\lambda x_i}).$$

Επίσης,
$$\frac{1}{B(a,b)} \frac{d}{da} B(a,b) = \Psi(a) - \Psi(a+b)$$
 και

$$\frac{1}{B(a,b)} \frac{d^2}{da^2} B(a,b) = (\Psi(a) - \Psi(a+b))^2 + \Psi'(a) - \Psi'(a+b).$$

Κατά συνέπεια από την αριθμητική επίλυση του συστήματος προκύπτουν οι εναλλακτικοί ροποεκτιμητές \hat{c}^{AME} και $\hat{\lambda}^{AME}$.

4.7.2 Πίνακας πληροφορίας του Fisher της ΒΓΕΚ

Σε αυτήν την παράγραφο θα δοθούν τα στοιχεία του πίνακα πληροφορίας του Fisher.

Ο πίνακας πληροφορίας του Fisher για την ΒΓΕΚ(a, b, c, λ), όπου $a, b, c, \lambda \in R^+$, θα είναι ο 4×4 συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας και θα αποτελείται από τα εξής στοιχεία:



$$I_{11} = n\Psi'(a) - n\Psi'(a+b), I_{12} = -n\Psi'(a+b), I_{13} = -E\left\{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i})\right\}.$$

Όμως, χωρίς περιορισμό της γενικότητας ισχύει ότι:

$$-E\{\ln(1 - e^{-\lambda x})\} = \frac{c\lambda \int_0^{\infty} \ln(1 - e^{-\lambda x}) e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{ca-1} [1 - (1 - e^{-\lambda x})^c]^{b-1} dx}{B(a, b)}.$$

Με χρήση του μετασχηματισμού $(1 - e^{-\lambda x})^c = y$ το ανωτέρω ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} & -\frac{c\lambda}{B(a, b)} \int_0^1 (\ln y^{1/c}) (1 - y^{1/c}) (y^{1/c})^{ca-1} (1 - y)^{b-1} \frac{1}{c\lambda (y^{1/c})^{c-1} (1 - y^{1/c})} dy = \\ & = -\frac{1}{cB(a, b)} \int_0^1 (\ln y) y^{a-1} (1 - y)^{b-1} dy = -\frac{1}{cB(a, b)} \frac{\partial}{\partial a} B(a, b) = \\ & = -\frac{1}{cB(a, b)} B(a, b) (\Psi(a) - \Psi(a+b)) = \frac{\Psi(a+b) - \Psi(a)}{c}. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } I_{13} = \frac{n(\Psi(a+b) - \Psi(a))}{c}.$$

$$I_{14} = -E\left\{\sum_{i=1}^n \frac{cx_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}}\right\}, I_{22} = n\Psi'(b) - n\Psi'(a+b),$$

$$I_{23} = E\left\{\sum_{i=1}^n \frac{(1 - e^{-\lambda x_i})^c \ln(1 - e^{-\lambda x_i})}{1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c}\right\}, I_{24} = E\left\{\sum_{i=1}^n \frac{c(1 - e^{-\lambda x_i})^{c-1} x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c}\right\},$$

$$I_{33} = \frac{n}{c^2} + E\left\{(b-1) \sum_{i=1}^n \frac{(1 - e^{-\lambda x_i})^c \ln^2(1 - e^{-\lambda x_i})}{[1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c]^2}\right\},$$



$$\begin{aligned}
I_{34} = & -E \left\{ a \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} \right\} + E \left\{ (b-1) \sum_{i=1}^n \frac{c(1 - e^{-\lambda x_i})^{c-1} x_i e^{-\lambda x_i} \ln(1 - e^{-\lambda x_i})}{1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c} \right\} \\
& + E \left\{ (b-1) \sum_{i=1}^n \frac{(1 - e^{-\lambda x_i})^{c-1} x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c} \right\} \\
& + E \left\{ (b-1) \sum_{i=1}^n \frac{c(1 - e^{-\lambda x_i})^{2c-1} x_i e^{-\lambda x_i} \ln(1 - e^{-\lambda x_i})}{[1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c]^2} \right\}. \\
I_{44} = & \frac{n}{\lambda^2} + E \left\{ (ca-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-\lambda x_i}}{(1 - e^{-\lambda x_i})^2} \right\} \\
& + E \left\{ (b-1) \sum_{i=1}^n \frac{c(c-1) x_i^2 e^{-2\lambda x_i} (1 - e^{-\lambda x_i})^{c-2}}{1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c} \right\} \\
& - E \left\{ (b-1) \sum_{i=1}^n \frac{c x_i^2 e^{-\lambda x_i} (1 - e^{-\lambda x_i})^{c-1}}{1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c} \right\} \\
& + E \left\{ (b-1) \sum_{i=1}^n \frac{c^2 x_i^2 e^{-2\lambda x_i} (1 - e^{-\lambda x_i})^{2(c-1)}}{[1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^c]^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 4.7.1

Στην εργασία τους οι Barreto-Souza *et al.* (2008) δίνουν τα στοιχεία του πίνακα πληροφορίας του Fisher για την ΒΓΕΚ με έναν εναλλακτικό και ισοδύναμο τρόπο. Ο τρόπος αυτός προκύπτει αν στα ολοκληρώματα, μέσω των οποίων υπολογίζονται οι αναμενόμενες τιμές, προβούμε στο μετασχηματισμό $V = (1 - e^{-\lambda x})^c$.



4.8 Βήτα-Weibull Κατανομή

4.8.1 Εκτίμηση των παραμέτρων της BWK

Μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας

Στην εργασία τους οι Cordeiro *et al.* (2008) εφαρμόζουν τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας για την εύρεση των Ε.Μ.Π. των παραμέτρων της BWK. Για την εύρεση των Ε.Μ.Π. απαιτείται η μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας ως προς τις άγνωστες παραμέτρους.

Έστω ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από την $BWK(a, b, c, \theta)$, όπου $a, b, c, \theta \in R^+$ και a, b, c, θ άγνωστες παράμετροι. Τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L(a, b, c, \theta | \mathbf{x}) = \left(\frac{c}{\theta^c B(a, b)} \right)^n \prod_{i=1}^n x_i^{c-1} e^{-b \sum_{i=1}^n (x_i/\theta)^c} \prod_{i=1}^n \left(1 - e^{-(x_i/\theta)^c} \right)^{a-1}. \quad (4.8.1)$$

Λογαριθμίζοντας τη σχέση (4.8.1) και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \text{ προκύπτει:}$$

$$\begin{aligned} \ln L(a, b, c, \theta | \mathbf{x}) &= n \ln c - nc \ln \theta - n \ln \Gamma(a) - n \ln \Gamma(b) + n \ln \Gamma(a+b) \\ &+ (c-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - b \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^c + (a-1) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - e^{-(x_i/\theta)^c} \right). \end{aligned}$$



Λογαριθμίζοντας την ανωτέρω σχέση ως προς a, b, c και θ προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln L(a, b, c, \theta | \mathbf{x}) = -n\Psi(a) + n\Psi(a+b) + \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(x_i/\theta)^c}),$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \ln L(a, b, c, \theta | \mathbf{x}) = -n\Psi(b) + n\Psi(a+b) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c} \ln L(a, b, c, \theta | \mathbf{x}) &= \frac{n}{c} - n \ln \theta + \sum_{i=1}^n \ln x_i - b \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln \frac{x_i}{\theta} \\ &\quad + (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c e^{-(x_i/\theta)^c} \ln \frac{x_i}{\theta}}{\left(1 - e^{-(x_i/\theta)^c}\right)}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(a, b, c, \theta | \mathbf{x}) = -\frac{nc}{\theta} + b \sum_{i=1}^n \frac{cx_i^c}{\theta^{c+1}} - (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{cx_i^c}{\theta^{c+1}} e^{-(x_i/\theta)^c}}{1 - e^{-(x_i/\theta)^c}},$$

οι οποίες εξισώνονται με το μηδέν και από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτει προσδιορίζονται οι Ε.Μ.Π. των αγνώστων παραμέτρων. Η επίλυση αυτή μπορεί να επιτευχθεί με αριθμητικές μεθόδους.

Εναλλακτική μέθοδος των ροπών

Σύμφωνα με την εργασία των Zografos and Balakrishnan (2009) και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η γεννήτρια κατανομή της $BWK(a, b, c, \theta)$ είναι η $F(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^c}$ προκύπτει ότι για την εκτίμηση των παραμέτρων c και θ πρέπει να εξισωθούν οι θεωρητικές κεντρικές ροπές του Λήμματος 4.2.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] με τις αντίστοιχες δειγματικές ροπές, θεωρώντας τις παραμέτρους a, b γνωστές. Επομένως, προκύπτει το σύστημα εξισώσεων:



$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(1 - F(X_i))] = \frac{1}{B(a,b)} \frac{d}{db} B(a,b)$$

και

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(1 - F(X_i))]^2 = \frac{1}{B(a,b)} \frac{d^2}{db^2} B(a,b).$$

Όμως,
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(1 - F(X_i))] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln e^{-(x_i/\theta)^c} = -\frac{1}{n\theta^c} \sum_{i=1}^n x_i^c \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(1 - F(X_i))]^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln e^{-(x_i/\theta)^c}]^2 = \frac{1}{n\theta^{2c}} \sum_{i=1}^n x_i^{2c}.$$

Επίσης,
$$\frac{1}{B(a,b)} \frac{d}{db} B(a,b) = \Psi(b) - \Psi(a+b) \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{B(a,b)} \frac{d^2}{db^2} B(a,b) = (\Psi(b) - \Psi(a+b))^2 + \Psi'(b) - \Psi'(a+b).$$

Κατά συνέπεια από την επίλυση του συστήματος προκύπτουν οι εναλλακτικοί ροποεκτιμητές \hat{c}^{AME} και $\hat{\theta}^{AME}$.

4.8.2 Πίνακας πληροφορίας του Fisher της BWK

Σε αυτήν την παράγραφο θα δοθούν τα στοιχεία του πίνακα πληροφορίας του Fisher.

Επομένως, ο πίνακας πληροφορίας του Fisher για την $BWK(a,b,c,\theta)$, όπου $a,b,c,\theta \in R^+$, θα είναι ο 4×4 συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας και θα αποτελείται από τα εξής στοιχεία:



$$I_{11} = n\Psi'(a) - n\Psi'(a+b), I_{12} = -n\Psi'(a+b),$$

$$I_{13} = -E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c e^{-(x_i/\theta)^c} \ln \frac{x_i}{\theta}}{1 - e^{-(x_i/\theta)^c}} \right\}, I_{14} = E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\frac{cx_i^c}{\theta^{c+1}} e^{-(x_i/\theta)^c}}{1 - e^{-(x_i/\theta)^c}} \right\},$$

$$I_{22} = n\Psi'(b) - n\Psi'(a+b), I_{23} = E \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln \frac{x_i}{\theta} \right\}, I_{24} = -E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{cx_i^c}{\theta^{c+1}} \right\},$$

$$I_{33} = \frac{n}{c^2} + E \left\{ b \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln^2 \frac{x_i}{\theta} \right\} - E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c e^{-(x_i/\theta)^c} \ln^2 \frac{x_i}{\theta}}{(1 - e^{-(x_i/\theta)^c})} \right\}$$

$$+ E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{2c} e^{-(x_i/\theta)^c} \ln^2 \frac{x_i}{\theta}}{(1 - e^{-(x_i/\theta)^c})} \right\}$$

$$+ E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{2c} e^{-2(x_i/\theta)^c} \ln^2 \frac{x_i}{\theta}}{(1 - e^{-(x_i/\theta)^c})^2} \right\},$$

$$I_{34} = \frac{n}{\theta} - E \left\{ b \sum_{i=1}^n \frac{x_i^c}{\theta^{c+1}} \left(c \ln \frac{x_i}{\theta} + 1 \right) \right\} + E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{cx_i^c}{\theta^{c+1}} e^{-(x_i/\theta)^c} \ln \frac{x_i}{\theta}}{(1 - e^{-(x_i/\theta)^c})} \right\}$$

$$- E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{cx_i^c}{\theta^{c+1}} \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c e^{-(x_i/\theta)^c} \ln \frac{x_i}{\theta}}{(1 - e^{-(x_i/\theta)^c})} \right\} + E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{\theta} \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c e^{-(x_i/\theta)^c}}{(1 - e^{-(x_i/\theta)^c})} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{cx_i^c \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c e^{-2(x_i/\theta)^c} \ln \frac{x_i}{\theta}}{\left[1 - e^{-(x_i/\theta)^c}\right]^2} \right\}, \\
 I_{44} = & -\frac{nc}{\theta^2} + E \left\{ b \sum_{i=1}^n \frac{(c+1)cx_i^c}{\theta^{c+2}} \right\} - E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{(c+1)cx_i^c e^{-(x_i/\theta)^c}}{1 - e^{-(x_i/\theta)^c}} \right\} \\
 & + E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{c^2 x_i^{2c} e^{-(x_i/\theta)^c}}{1 - e^{-(x_i/\theta)^c}} \right\} + E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{c^2 x_i^{2c} e^{-2(x_i/\theta)^c}}{\left[1 - e^{-(x_i/\theta)^c}\right]^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Παρατήρηση 4.8.1

Στην εργασία τους οι Cordeiro *et al.* (2008) δίνουν τα στοιχεία του πίνακα πληροφορίας του Fisher για την BWK, με παραμέτρους a, b, c και $\lambda = 1/\theta$, με έναν εναλλακτικό και ισοδύναμο τρόπο. Ο τρόπος αυτός προκύπτει αν στα ολοκληρώματα, μέσω των οποίων υπολογίζονται οι αναμενόμενες τιμές, προβούμε στο μετασχηματισμό $(x/\theta)^c = y$.

4.9 Βήτα-Pareto Κατανομή

4.9.1 Εκτίμηση των παραμέτρων της BPK

Μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας

Στην εργασία τους οι Akinsete *et al.* (2008) εφαρμόζουν τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας για την εύρεση των Ε.Μ.Π. των παραμέτρων της BPK. Για την εύρεση των Ε.Μ.Π. απαιτείται η μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας ως προς τις άγνωστες παραμέτρους.



Έστω ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n , από την $BPK(a, b, \theta, k)$, όπου $a, b, \theta, k \in R^+$ και a, b, θ, k άγνωστες παράμετροι. Τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L(a, b, \theta, k | \mathbf{x}) = \frac{k^n}{\theta^n B(a, b)} \prod_{i=1}^n \left(1 - (x_i/\theta)^{-k}\right)^{a-1} (x_i/\theta)^{-kb-1}. \quad (4.9.1)$$

Λογαριθμίζοντας τη σχέση (4.9.1) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} \ln L(a, b, \theta, k | \mathbf{x}) &= n \ln k - n \ln \theta + n (\ln \Gamma(a+b) - \ln \Gamma(a) - \ln \Gamma(b)) \\ &\quad + (a-1) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - (x_i/\theta)^{-k}\right) - (kb+1) \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\theta}. \end{aligned} \quad (4.9.2)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (4.9.2) ως προς a, b, θ και k προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln L(a, b, \theta, k | \mathbf{x}) = n \Psi(a+b) - n \Psi(a) + \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - (x_i/\theta)^{-k}\right), \quad (4.9.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \ln L(a, b, \theta, k | \mathbf{x}) = n \Psi(a+b) - n \Psi(b) - k \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\theta}, \quad (4.9.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(a, b, \theta, k | \mathbf{x}) = -\frac{n}{\theta} - (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{k \frac{1}{\theta} (x_i/\theta)^{-k}}{1 - (x_i/\theta)^{-k}} + \frac{n(kb+1)}{\theta}, \quad (4.9.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} \ln L(a, b, \theta, k | \mathbf{x}) &= \frac{n}{k} + \sum_{i=1}^n \left[(a-1) \frac{(x_i/\theta)^{-k}}{1 - (x_i/\theta)^{-k}} - b \right] \ln \frac{x_i}{\theta} \\ &= \frac{n}{k} + \sum_{i=1}^n \left[(a-1) \frac{1}{(x_i/\theta)^k - 1} - b \right] \ln \frac{x_i}{\theta} \end{aligned}$$



$$= \frac{n}{k} - \sum_{i=1}^n \left[(a-1) \left[1 - (x_i/\theta)^k \right]^{-1} + b \right] \ln \frac{x_i}{\theta}. \quad (4.9.6)$$

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta}$ της παραμέτρου θ είναι το πρώτο διατεταγμένο στατιστικό $x_{(1)}$, αφού $x \geq \theta$. Οι Ε.Μ.Π. \hat{a} , \hat{b} και \hat{k} των παραμέτρων a, b και k , αντίστοιχα, προκύπτουν λύνοντας επαναληπτικά τις εξισώσεις (4.9.3), (4.9.4) και (4.9.6). Οι αρχικοί εκτιμητές των παραμέτρων a, b και k προδιορίζονται ως εξής. Προσαρμόζουμε την κατανομή Pareto στα δεδομένα. Ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι ο $\bar{\theta} = x_{(1)}$ και ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου k είναι ο $\bar{k} = n \left[\sum_{i=1}^n \ln(x_i/\theta) \right]^{-1}$.

Χρησιμοποιώντας τα $\bar{\theta}$ και \bar{k} μετασχηματίζουμε τα δεδομένα σε δεδομένα βήτα κατανομής και μετά προσδιορίζουμε τους Ε.Μ.Π. των παραμέτρων a και b , δηλαδή των παραμέτρων μιας βήτα κατανομής. Οι αρχικοί εκτιμητές της ΒΡΚ είναι οι Ε.Μ.Π. των a και b και ο εκτιμητής της παραμέτρου \bar{k} .

Εναλλακτική μέθοδος των ροπών

Σύμφωνα με την εργασία των Zografos and Balakrishnan (2009) και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η γεννήτρια κατανομή της ΒΡΚ (a, b, θ, k) είναι η $F(x) = 1 - (x/\theta)^{-k}$ προκύπτει ότι για την εκτίμηση των παραμέτρων θ και k πρέπει να εξισωθούν οι θεωρητικές κεντρικές ροπές του Λήμματος 4.2.1 [Zografos and Balakrishnan (2009)] με τις αντίστοιχες δειγματικές ροπές, θεωρώντας τις παραμέτρους a, b γνωστές. Επομένως, προκύπτει το σύστημα εξισώσεων:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\ln(1 - F(X_i)) \right] = \frac{1}{B(a, b)} \frac{d}{db} B(a, b)$$

και



$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(1-F(X_i))]^2 = \frac{1}{B(a,b)} \frac{d^2}{db^2} B(a,b).$$

Όμως, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1-F(X_i)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i/\theta)^{-k} = k \ln \theta - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$ και

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(1-F(X_i))]^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(x_i/\theta)^{-k}]^2 = \frac{k^2}{n} \sum_{i=1}^n (\ln \theta - \ln X_i)^2.$$

Επίσης, $\frac{1}{B(a,b)} \frac{d}{db} B(a,b) = \Psi(b) - \Psi(a+b)$ και

$$\frac{1}{B(a,b)} \frac{d^2}{db^2} B(a,b) = (\Psi(b) - \Psi(a+b))^2 + \Psi'(b) - \Psi'(a+b).$$

Κατά συνέπεια από την επίλυση του συστήματος προκύπτουν οι εναλλακτικοί ροποεκτιμητές $\hat{\theta}^{AME}$ και \hat{k}^{AME} .

4.9.2 Πίνακας πληροφορίας του Fisher της BPK

Σύμφωνα με την εργασία των Akinsete *et al.* (2008) ο πίνακας πληροφορίας του Fisher για την BPK(a, b, θ, k), όπου $a, b, \theta, k \in R^+$, θα αποτελείται από τα εξής στοιχεία:

$$I_{11} = n\Psi'(a) - n\Psi'(a+b), I_{12} = -n\Psi'(a+b), I_{13} = E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{k \frac{1}{\theta} (x_i/\theta)^{-k}}{1 - (x_i/\theta)^{-k}} \right\},$$

$$I_{14} = -E \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(x_i/\theta)^{-k} \ln \frac{x_i}{\theta}}{1 - (x_i/\theta)^{-k}} \right\}, I_{22} = n\Psi'(b) - n\Psi'(a+b), I_{23} = -\frac{nk}{\theta},$$



$$I_{24} = E \left\{ \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\theta} \right\},$$

$$I_{33} = -\frac{n}{\theta^2} + E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{k}{\theta^2} (x_i/\theta)^{-k} (k-1)}{1 - (x_i/\theta)^{-k}} \right\} + E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\left[\frac{k}{\theta} (x_i/\theta)^{-k} \right]^2}{\left[1 - (x_i/\theta)^{-k} \right]^2} \right\} \\ + \frac{n(kb+1)}{\theta^2},$$

$$I_{34} = E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{\theta} (x_i/\theta)^{-k} \left(1 - k \ln \frac{x_i}{\theta} \right)}{1 - (x_i/\theta)^{-k}} \right\} - E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{k \frac{1}{\theta} (x_i/\theta)^{-2k} \ln \frac{x_i}{\theta}}{\left[1 - (x_i/\theta)^{-k} \right]^2} \right\} \\ - \frac{nb}{\theta},$$

$$I_{44} = \frac{n}{k^2} + E \left\{ (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{(x_i/\theta)^{-k} \ln^2 \frac{x_i}{\theta}}{\left[1 - (x_i/\theta)^{-k} \right]^2} \right\}.$$



ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Μέσα στα περιορισμένα πλαίσια μίας μεταπτυχιακής διατριβής έγινε μία προσπάθεια να μελετηθούν οι Βήτα παραγόμενες κατανομές (ΒΠΚ). Αρχικά, έγινε μία ιστορική αναδρομή και παρουσιάστηκε η διάρθρωση της μεταπτυχιακής διατριβής στο Κεφάλαιο 1. Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 2, μελετήθηκε και παρουσιάστηκε η ΒΠΚ, όπως εισήχθη από τον Jones (2004), ως σύζευξη άλλων στοιχειωδέστερων κατανομών. Επιπλέον, παρουσιάστηκαν σχέσεις μεταξύ της ΒΠΚ και άλλων κατανομών, αναφέρθηκαν τρόποι προσομοίωσης δεδομένων από αυτήν, δόθηκαν εκφράσεις για τη μέση τιμή, τη διακύμανση, τις ροπές αυτής καθώς και την εντροπία του Shannon. Έπειτα, στο Κεφάλαιο 3, έγινε μία ανασκόπηση των κυριότερων ειδικών μονοδιάστατων ΒΠΚ, που εισήχθησαν στη βιβλιογραφία ως ειδικές περιπτώσεις της οικογένειας των ΒΠΚ που παρουσιάστηκε από τον Jones (2004). Επισημαίνουμε ότι στην παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή μελετήσαμε κάποιες ειδικές ΒΠΚ, τις κυριότερες. Υπάρχουν και άλλες και συνεχώς εισάγονται νέες με σκοπό την μοντελοποίηση δεδομένων που οι υπάρχουσες στοιχειωδέστερες κατανομές αδυνατούν να μοντελοποιήσουν ικανοποιητικά. Τέλος, στο Κεφάλαιο 4, το ενδιαφέρον μας επικεντρώθηκε στην εκτίμηση των παραμέτρων των κυριότερων ειδικών ΒΠΚ με τη μέθοδο των ροπών, με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας καθώς επίσης και με μια εναλλακτική μέθοδο των ροπών, η οποία πρόσφατα προτάθηκε από τους Zografos and Balakrishnan (2009). Επιπλέον, δόθηκε και ο πίνακας πληροφορίας του Fisher για κάθε μία ειδική ΒΠΚ, ο οποίος χρησιμεύει για τις ασυμπτωτικές ιδιότητες των εκτιμητών. Στο σημείο αυτό θέλουμε να επισημάνουμε ότι παραμένουν αναπάντητα ερωτήματα τόσο στην εκτιμητική όσο και στον έλεγχο υποθέσεων στα πλαίσια των ΒΠΚ.

Εν κατακλείδι, οι ΒΠΚ αν και εισήχθησαν σχετικά πρόσφατα στη βιβλιογραφία έχουν κεντρίσει το ενδιαφέρον των ερευνητών. Συνεχώς παρουσιάζονται νέες ΒΠΚ με σκοπό την εφαρμογή τους σε πλήθος πραγματικών τυχαίων φαινομένων. Στη διατριβή αυτή έγινε μια προσπάθεια παρουσίασης των κυριότερων, μέχρι την ώρα συγγραφής, αποτελεσμάτων.

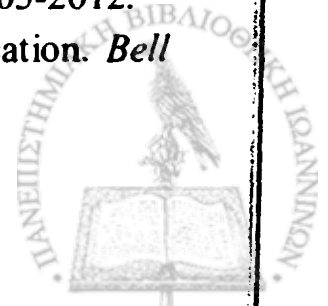


ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Akinsete, A., Famoye, F. and Lee C. (2008). The beta Pareto distribution. *Statistics*, Vol. **42**, No **6**, 547-563.
2. Barreto-Souza, W., Santos, A.H.S. and Cordeiro, G. (2010). The beta generalized exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. **80**, No **2**, 159-172.
3. Beer, F.P. and Johnston, E.R.JR. (2003). *Μηχανική των Υλικών. Τόμος Α*. Εκδόσεις Τζιόλα.
4. Burroughs, S.M. and Tebbens, S.F. (2001). Upper-truncated power law distributions. *Fractals*, **9**(2), 209-222.
5. Casella, G. and Berger, R.L. (1990). *Statistical Inference*. Duxbury Press, An Imprint of Wadsworth Company, Belmont, California.
6. Choulakian, V. and Stephens, M.A. (2001). Goodness-of-fit for the generalized Pareto distribution. *Technometrics*, **43**(4), 478-484
7. Choudhury, A. (2005). A simple derivation of moments of the exponentiated Weibull distribution. *Metrika*, **62**, 17-22.
8. Cooray, K. and Ananda, M.M.A. (2008). A generalization of the half-normal distribution with applications to lifetime data. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. **37**, Issue **9**, 1323-1337.
9. Cordeiro, G.M., Simas, A.B. and Stosic, B.D. (2008). Explicit expressions for moments of the beta weibull distribution. *Preprint: arXiv: 0809.1860v1*.
10. Diaz-Garcia, J.A. and Leiva, V. (2005). A new family of life distributions based on elliptically contoured distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 1512-1513.
11. Eugene, N., Lee, C. and Famoye F. (2002). Beta normal distribution and its applications. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **31**(4), 497-512.
12. Famoye, F., Lee, C. and Olumolade, O. (2005). The beta Weibull distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, **4**(2), 121-136



13. Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (2000). *Table of integrals, series and products*. Academic Press, San Diego.
14. Gupta, A.K. and Nadarajah, S. (2004). On the moments of the beta normal distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 33, No. 1, 1-13.
15. Gupta, R.D. and Kundu, D. (2001). Exponentiated exponential family: An alternative to gamma and weibull distributions. *Biometrical Journal*, 43, 117-130.
16. Jaynes, E.T. (1957). Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.*, 106, 620-630.
17. Jones, M.C. (2004). Families of distributions arising from distributions of order statistics. *Sosiedad de Estadistica e Investigacion Operativa Test*, Vol. 13, No. 1, 1-43.
18. Κούτρας, Μ. (2005). *Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές, Μέρος II*. Εκδόσεις Σταμούλη.
19. Lee, C., Famoye, F. and Olumolade, O. (2007). Beta Weibull distribution: Some properties and applications to censored data. *Journal of Modern Statistical Methods*, No. 1, 173-186.
20. Nadarajah, S. (2008). Explicit expressions for moments of order statistics. *Statistics and Probability Letters*, 78, 196-205.
21. Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006). The beta exponential distribution. *Reliability Engineering and System Safety*, 91, 689-697.
22. Newman, M.E.J. (2005). Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. *Contemp. Phys.*, 46(5), 323-351.
23. Pescim, R.R., Demetrio, C.G.B., Cordeiro, G.M., Ortega, E.M.M. and Urbano, M.R. (2010). The beta generalized half normal distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, 54, 945-957.
24. Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *Ann. Statist.* 3(1), 119-131
25. Rohatgi, V.K. and Saleh, A.K.Md.E. (1988). A class of distributions connected to order statistics with nonintegral sample size. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 17(6), 2005-2012.
26. Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Tech. J.*, 27, 379-432.



27. Zografos, K. and Balakrishnan, N. (2009). On families of beta and generalized gamma generated distributions and associated inference. *Statistical Methodology* 6, 344-362.
28. Zografos, K. (2008). On some beta generated distributions and their maximum entropy characterization: The beta Weibull distribution. *Advances in Inequalities from Probability Theory and Statistics*, 203-223.
29. Zwillinger, D. and Kokoska, S. (2000). *Standard Probability and Statistic Tables and Formulae*. Chapman & Hall/CRC, Florida.

