



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ, ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
& ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ:
ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ-ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ.
ΜΙΑ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΚΑΙ ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ.

ΑΡΕΤΗ ΑΓΓΕΛΙΚΗ ΒΕΡΟΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2010



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000348923





ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ, ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
& ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ:
ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ-ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ.
ΜΙΑ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΚΑΙ ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ.

ΑΡΕΤΗ ΑΓΓΕΛΙΚΗ ΒΕΡΟΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2010



1

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ
ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΑΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ
ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΑΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ
ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΑΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ
ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΑΝΑΡΤΗΣΕΩΣ



Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα, που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΚΡΙΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Κωνσταντίνος Ζωγράφος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Σωτήριος Λουκάς, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Απόστολος Μπατσίδης, Λέκτορας του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (Επιβλέπων).



*Αφιερώνεται
στη μνήμη του πατέρα μου Χαράλαμπου
και της γιαγιάς μου Αγγελίνας.*



ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διατριβή πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του τελευταίου έτους φοίτησής μου στο Τμήμα Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για την απόκτηση μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης στον κλάδο «Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα», με μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής τους κ.κ. Κωνσταντίνο Ζωγράφο και Σωτήριο Λουκά, Καθηγητές του Τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και Απόστολο Μπατσίδη, Λέκτορα του Τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Ως θέμα έχει την παρουσίαση των κυριότερων ειδικών ελλειπτικών κατανομών, καθώς και την ανασκόπηση μεθόδων της Πολυμεταβλητής Ανάλυσης, που αφορούν την εκτίμηση σε σημείο των παραμέτρων θέσης και κλίμακας μιας ελλειπτικής κατανομής και το στατιστικό έλεγχο υποθέσεων που διατυπώνονται μέσω των παραμέτρων αυτών.

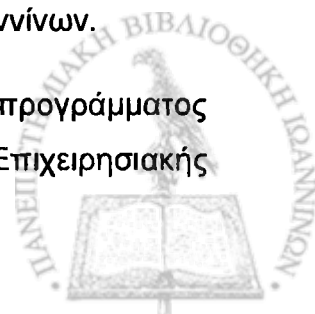
Εκμεταλλεούμενη τη θέση αυτή, επιθυμώ να εκφράσω την ευγνωμοσύνη και τις ευχαριστίες μου σε όσους συνέβαλαν στην πραγματοποίηση αυτής της διατριβής.

Ευχαριστώ θερμά τον Επιβλέποντά μου κ. Απόστολο Μπατσίδη, ο οποίος πρότεινε το θέμα της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής. Η καθοδήγησή του, η ηθική υποστήριξη και το αμέριστο ενδιαφέρον που επέδειξε, συνέβαλαν καθοριστικά στην περάτωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Θα ήθελα επίσης, να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τους κ.κ. Κωνσταντίνο Ζωγράφο και Σωτήριο Λουκά, για τη συμμετοχή τους στην Τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή, για το χρόνο που αφιέρωσαν για την κρίση της διατριβής καθώς και για τις χρήσιμες και εύστοχες παρατηρήσεις τους.

Ειλικρινείς είναι οι ευχαριστίες μου προς όλους τους διδάσκοντες του Τομέα «Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας», για την πολύτιμη βοήθειά τους όλα αυτά τα χρόνια, αλλά και προς όλους τους διδάσκοντες του Τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ακόμη, ευχαριστώ όλους τους συναδέλφους μου του προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τομέα «Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Επιχειρησιακής



Έρευνας» του Τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για τη συνεργασία μας.

Τέλος, περισσότερο από όλους, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη μητέρα μου Αθανασία και τον αδερφό μου Κώστα που με στήριξαν πνευματικά, συναισθηματικά, ηθικά και οικονομικά όλα αυτά τα χρόνια. Χωρίς τη βοήθειά τους, την ενθάρρυνσή τους και την προτροπή τους, δε θα τα είχα καταφέρει έως τώρα.

Βερονίκη Αρετή Αγγελική

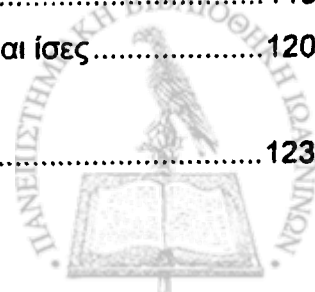
Ιωάννινα, Φεβρουάριος 2010.



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος.....	05
Κεφάλαιο 1	
Εισαγωγή.....	07
1.1 Ελλειπτική Οικογένεια Κατανομών	07
1.2 Ειδικές Ελλειπτικές Κατανομές	12
1.2.1 Πολυδιάστατη Κανονική Κατανομή	13
1.2.2 Πολυδιάστατη Ομοιόμορφη Κατανομή.....	14
1.2.3 Συμμετρική Κατανομή Pearson Τύπου II	17
1.2.4 Συμμετρική Κατανομή Pearson Τύπου VII	19
1.2.4.1 Πολυδιάστατη t Κατανομή	20
1.2.4.2 Cauchy Κατανομή	23
1.2.5 Γενικευμένη Πολυδιάστατη t Κατανομή.....	25
1.2.6 Συμμετρική Κατανομή Τύπου Kotz.....	28
1.2.6.1 Πολυδιάστατη Laplace Κατανομή.....	31
1.2.6.2 Πολυδιάστατη Εκθετική Κατανομή	32
1.2.7 Γενικευμένη Πολυδιάστατη Slash Κατανομή.....	34
1.2.7.1 Πολυδιάστατη Slash Κατανομή	38
1.2.8 Γενικευμένη Πολυδιάστατη Τροποποιημένη Bessel Κατανομή.....	39
1.2.8.1 Πολυδιάστατη Bessel Κατανομή	42
1.2.9 Πολυδιάστατη Γενικευμένη Υπερβολική Κατανομή.....	44
1.2.10 Πολυδιάστατη Sub-Gaussian α -stable Κατανομή	46
1.2.11 Μίξη Κλίμακας Κανονικών Κατανομών	47
1.2.12 Πολυδιάστατη Logistic Κατανομή.....	48
1.3 Εφαρμογές των Ελλειπτικών Κατανομών	49
Κεφάλαιο 2	
Εκτιμητική.....	51
2.1 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας των μ και Σ	51
2.1.1 Ασυσχέτιστες Παρατηρήσεις	53
2.1.1.1 Ε.Μ.Π. παραμέτρων Ειδικών Ελλειπτικών Κατανομών.....	58
2.1.2 Ανεξάρτητες Παρατηρήσεις.....	62

2.1.2.1	Ε.Μ.Π. παραμέτρων Ειδικών Ελλειπτικών Κατανομών	65
2.2	Ιδιότητες των Ε.Μ.Π.	71
2.2.1	Αμεροληψία.....	71
2.2.2	Στατιστική Επάρκεια	74
2.2.3	Πληρότητα.....	75
2.2.4	Συνέπεια	76
2.2.5	Κατανομή των Ε.Μ.Π.	78
Κεφάλαιο 3		
Έλεγχοι Υποθέσεων.....		81
3.1	Ένας Πληθυσμός	81
3.1.1	Έλεγχος ότι η παράμετρος θέσης ισούται με δοθέν διάνυσμα.....	83
3.1.2	Έλεγχος ότι η παράμετρος κλίμακας ισούται με δοθέντα πίνακα.....	86
3.1.3	Έλεγχος ότι η παράμετρος κλίμακας ισούται με δοθέντα πίνακα και η παράμετρος θέσης ισούται με δοθέν διάνυσμα	89
3.1.4	Έλεγχος ασυσχέτιστου μεταξύ συνόλων μεταβλητών	90
3.1.5	Τεστ Σφαιρικότητας.....	95
3.1.6	Έλεγχος ότι η παράμετρος θέσης ισούται με δοθέν διάνυσμα και η παράμετρος κλίμακας είναι ανάλογη ενός δοθέντα πίνακα	98
3.2	Έλεγχοι Υποθέσεων για παραμέτρους από δύο ή και περισσότερους πληθυσμούς.....	101
3.2.1	Έλεγχος ότι οι παράμετροι θέσης των πληθυσμών είναι ίσες.....	103
3.2.2	Έλεγχος ότι οι παράμετροι κλίμακας των πληθυσμών είναι ίσες.....	106
3.2.3	Έλεγχος ότι οι παράμετροι θέσης είναι ίσες και οι παράμετροι κλίμακας είναι ίσες.....	111
Κεφάλαιο 4		
Αριθμητικό Παράδειγμα		115
4.1	Η παράμετρος θέσης ισούται με δοθέν διάνυσμα	116
4.2	Έλεγχος ασυσχέτιστου μεταξύ δύο μεταβλητών	116
4.3	Τεστ Σφαιρικότητας.....	117
4.4	Έλεγχος ότι η παράμετρος θέσης ισούται με δοθέν διάνυσμα και η παράμετρος κλίμακας είναι ανάλογη ενός δοθέντα πίνακα.....	119
4.5	Έλεγχος ότι οι παράμετροι θέσης των δύο πληθυσμών είναι ίσες.....	120
Παράρτημα Α		123



65
71
71
4
5
6
3

Παράρτημα Β.....	129
Abstract of the MSc Dissertation	135
Βιβλιογραφία.....	137



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

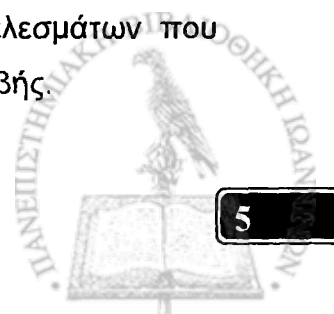
Στη μεταπτυχιακή αυτή διατριβή μελετώνται οι ελλειπτικές κατανομές, οι οποίες αποτελούν γενίκευση της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής. Αρχικά, παρουσιάζονται οι ειδικές ελλειπτικές κατανομές που εμφανίζονται πιο συχνά στη βιβλιογραφία, ενώ απώτερος σκοπός είναι η παρουσίαση των κυριότερων αποτελεσμάτων, που είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία της κλασικής στατιστικής, για την εκτίμηση σε σημείο των άγνωστων παραμέτρων θέσης και κλίμακας της ελλειπτικής κατανομής, καθώς επίσης και για ελέγχους υποθέσεων που διατυπώνονται μέσω αυτών των παραμέτρων.

Ειδικότερα, η διατριβή αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Στο **Κεφάλαιο 1 (Εισαγωγή)** παρουσιάζεται η οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών, καθώς και οι ειδικές ελλειπτικές κατανομές που εμφανίζονται πιο συχνά στη βιβλιογραφία και σε πρακτικές εφαρμογές.

Στο **Κεφάλαιο 2 (Εκτιμητική)** παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν την εκτίμηση σε σημείο για τις παραμέτρους θέσης και κλίμακας της ελλειπτικής κατανομής και τη μελέτη των ιδιοτήτων των εκτιμητών αυτών. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν την εύρεση των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π.) των άγνωστων παραμέτρων θέσης και κλίμακας ελλειπτικής κατανομής, καθώς και συναρτήσεων αυτών, όπως είναι για παράδειγμα ο συντελεστής συσχέτισης. Επιπλέον, διερευνώνται οι ιδιότητες των Ε.Μ.Π., όπως είναι η αμεροληψία (unbiasedness), η επάρκεια (sufficiency), η πληρότητα (completeness), και η συνέπεια (consistency). Επισημαίνεται ότι οι Ε.Μ.Π. προσδιορίζονται υπό δύο δειγματοληπτικά σχήματα. Ειδικότερα, υπό την υπόθεση ότι οι n το πλήθος διαθέσιμες παρατηρήσεις από έναν ελλειπτικό πληθυσμό είναι ασυσχέτιστες ή ανεξάρτητες, αντίστοιχα.

Στο **Κεφάλαιο 3 (Έλεγχοι Υποθέσεων)** κατασκευάζονται στατιστικά τεστ με τη μέθοδο του πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών, για τον έλεγχο υποθέσεων που διατυπώνονται μέσω των παραμέτρων θέσης και κλίμακας, ενός ή περισσότερων πληθυσμών, που περιγράφονται από μία κατανομή της ελλειπτικής οικογένειας κατανομών και διαφοροποιούνται ως προς τις παραμέτρους θέσης ή και κλίμακας της κατανομής αυτής.

Στο **Κεφάλαιο 4 (Αριθμητικά Παραδείγματα)** εφαρμόζονται μερικές από τις διαδικασίες εκτίμησης και ελέγχου, που αναπτύχθηκαν στα Κεφάλαια 2 και 3, σε αριθμητικά παραδείγματα με απώτερο στόχο, τη διευκρίνιση των θεωρητικών αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής.



Στα Παραρτήματα **A** και **B** παρατίθενται τα αρχεία της MatLab που δημιουργήθηκαν στα πλαίσια των Κεφαλαίων 1 και 4 της διατριβής, αντίστοιχα. Ειδικότερα, παραθέτουμε τον τρόπο με τον οποίο δημιουργήθηκαν οι γραφικές παραστάσεις του Κεφαλαίου 1 και τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιήθηκαν οι υπολογισμοί για τον έλεγχο υποθέσεων του Κεφαλαίου 4, αντίστοιχα.

Τέλος, η διατριβή ολοκληρώνεται με την περίληψή της στα Αγγλικά (**Abstract of MSc Dissertation**) και τη **Βιβλιογραφία**.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Η επιστημονική έρευνα είναι μία προσπάθεια επεξήγησης κοινωνικών και φυσικών φαινομένων, για τον καθορισμό και την εξέταση των οποίων απαιτείται η συλλογή και η ανάλυση δεδομένων. Η πολυπλοκότητα των περισσότερων φαινομένων απαιτεί την ταυτόχρονη μελέτη πολλών και διαφορετικών μεταβλητών. Ο κλάδος της Στατιστικής που ασχολείται, μεταξύ άλλων, με τη διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ μεταβλητών, τη θεωρία πολυδιάστατων κατανομών, καθώς και με την ανάλυση δεδομένων σε περισσότερες από μία μεταβλητές, είναι η Πολυμεταβλητή Ανάλυση.

Αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής είναι η ανασκόπηση μεθόδων της Πολυμεταβλητής Ανάλυσης, όταν τα διαθέσιμα δεδομένα από έναν ή περισσότερους πληθυσμούς, περιγράφονται από μία ελλειπτική κατανομή. Στο πλαίσιο αυτό, σε αυτό το πρώτο εισαγωγικό κεφάλαιο, παρουσιάζεται η οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών καθώς και μέλη της οικογένειας αυτής που εμφανίζονται πιο συχνά στη βιβλιογραφία.

1.1 Ελλειπτική Οικογένεια Κατανομών

Το μοντέλο στο οποίο στηρίζεται η Κλασική Πολυμεταβλητή Ανάλυση είναι αυτό της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής. Αυτό συμβαίνει γιατί οι περισσότερες πολυδιάστατες μεταβλητές είναι, ή τείνουν να είναι, κανονικώς καταμεμημένες. Στην κλασική βιβλιογραφία λαμβάνεται ως προϋπόθεση ότι τα τυχαία δείγματα προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις τυχαίων φαινομένων, όπως αποδεικνύεται από εμπειρικές έρευνες (βλέπε, μεταξύ άλλων, Blattberg and Gonedes (1974)), που η κανονική κατανομή αδυνατεί να μοντελοποιήσει σε ικανοποιητικό βαθμό. Για παράδειγμα, στις οικονομικές και ασφαλιστικές επιστήμες, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται σε μεταβλητές με σημαντική πιθανότητα, όχι μόνο στο κέντρο, αλλά και στα άκρα, στις «ουρές» της κατανομής. Ειδικότερα, οι Kelejian and Prucha (1985) ισχυρίζονται ότι η κανονική κατανομή αποτυγχάνει να μοντελοποιήσει, μεταξύ άλλων, π.χ. δεδομένα οικονομικού περιεχομένου ή της αγοράς, λόγω των υπερβολικά μικρών ουρών της (short-tails). Επιπλέον, πολλές φορές τα δεδομένα είναι εξαρτημένα και ασυσχέτιστα ή η κατανομή των δεδομένων έχει πιο παχιές ουρές (heavier tails) από αυτές της κανονικής κατανομής. Το ερώτημα είναι πώς αντιμετωπίζονται τέτοιες περιπτώσεις.

Με στόχο να περιγραφούν ικανοποιητικά τέτοια φαινόμενα, που υπακούν στη συμμετρία, τις τελευταίες δεκαετίες έχει αναπτυχθεί μία ευπροσάρμοστη και γενικότερη κλάση πολυδιάστατων μοντέλων που καλύπτει την πολυδιάστατη κανονική κατανομή. Αυτή η γενικότερη κλάση που παρέχει εναλλακτικά πολυδιάστατα μοντέλα κατανομών για την ανάλυση πολυδιάστατων συμμετρικών δεδομένων, αποτελεί τις ελλειπτικές κατανομές. Παρόλο που η χρήση των ελλειπτικών κατανομών γνωρίζει ουσιαστικά εξέλιξη τη δεκαετία του 1970-1980, οι πρώτες μελέτες από ερευνητές, παρουσιάστηκαν αρκετά νωρίτερα. Ο Chmielewski (1981) κάνοντας μία ανασκόπηση των δημοσιεύσεων στο πλαίσιο των ελλειπτικών κατανομών που εμφανίστηκαν πριν το 1980, αναφέρει τις δημοσιεύσεις των Maxwell (1860), Bartlett (1934), Hartman and Wintner (1940) και Lord (1954) ως τις πιο σημαντικές. Όμως, η εργασία του Kelker (1970) στην οποία δίνονται οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των σφαιρικών και ελλειπτικών κατανομών, κάτω από κάποιες προϋποθέσεις, και αναπτύσσονται κάποιες ιδιότητες των κατανομών αυτών, ήταν αυτή που αποτέλεσε το κίνητρο για την εκτενέστερη έρευνα των κατανομών αυτών. Επόμενη σημαντική δημοσίευση, αποτελεί αυτή των Cambanis *et al.* (1981), στην οποία αποδεικνύεται το Θεώρημα της στοχαστικής αναπαράστασης για την ελλειπτική οικογένεια κατανομών, το οποίο θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα.

Πλήθος ερευνητικών δημοσιεύσεων έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία για τις ελλειπτικές κατανομές (βλέπε, μεταξύ άλλων, Kelker (1970), Chu (1973), Cambanis *et al.* (1981), Chmielewski (1981), Koutras (1987) και Cacoulos and Koutras (1984, 1985)), ενώ οι μονογραφίες των Fang and Zhang (1990), Fang *et al.* (1990), Gupta and Varga (1993) αποτελούν τις κυριότερες αναφορές. Τέλος, θα ήταν παράλειψή μας στο σημείο αυτό να μην αναφέρουμε και τη διατριβή της Μανδράκη (2005). Στη διατριβή αυτή, αρχικά παρουσιάζονται τα διαθέσιμα αποτελέσματα στη βιβλιογραφία που αφορούν τους ορισμούς των ελλειπτικών κατανομών και αναφέρονται οι περιθώριες κατανομές, οι ροπές, οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, οι δεσμευμένες κατανομές αυτών, καθώς και βασικοί χαρακτηρισμοί των ελλειπτικών κατανομών. Επιπρόσθετα, παρουσιάζονται για κάποιες ειδικές ελλειπτικές κατανομές οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, οι περιθώριες κατανομές, οι ροπές και οι δεσμευμένες κατανομές τους. Τέλος, μελετάται ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των δεσμευμένων κατανομών και το γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης του οποίου τα σφάλματα ακολουθούν ελλειπτική κατανομή, και παρατίθενται κάποια μέτρα όπως η εντροπία του Shannon και η αμοιβαία πληροφορία.

Παρατηρείται, όπως θα δούμε και στην επόμενη παράγραφο, πως γραφικά οι κατανομές που ανήκουν στην οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών δε διαφέρουν πολύ από το γράφημα της κανονικής, ενώ ανήκουν στην οικογένεια αυτή, τόσο πλατύκυρτες (long-tailed) όσο και λεπτόκυρτες (short-tailed) κατανομές. Το γεγονός αυτό επιτρέπει τη

μοντελοποίηση πλήθους πραγματικών φαινομένων στα οποία υπάρχει συμμετρία. Για παράδειγμα, οι Blattberg and Gonedes (1974) δίνουν ιδιαίτερη έμφαση για τη χρήση των κατανομών αυτών, σε περιπτώσεις όπως η μοντελοποίηση τιμών (αποδόσεων) επισφαλών κεφαλαίων. Η υιοθέτηση αυτών των κατανομών και η ερευνητική δραστηριότητα που εμφανίστηκε στη βιβλιογραφία στο πλαίσιο αυτό, είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός νέου κλάδου, του κλάδου της Γενικευμένης Πολυμεταβλητής Ανάλυσης (Generalized Multivariate Analysis).

Στη βιβλιογραφία έχουν παρουσιαστεί, μεταξύ άλλων, (βλέπε Fang and Zhang (1990)) οι ακόλουθοι ορισμοί της οικογένειας των ελλειπτικών κατανομών. Σε όσα ακολουθούν με R^p συμβολίζεται ο Ευκλείδειος χώρος διάστασης p , με \mathbf{a}^t το ανάστροφο διάνυσμα του \mathbf{a} , με \mathbf{A}^t ο ανάστροφος του πίνακα \mathbf{A} , και τέλος με \mathbf{A}^{-1} ο αντίστροφος του πίνακα \mathbf{A} .

Ορισμός 1.1.1. Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα \mathbf{X} λέμε ότι ακολουθεί ελλειπτική (συμμετρική) κατανομή (elliptically symmetric distribution) με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, $\boldsymbol{\mu}$ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και $\boldsymbol{\Sigma}$ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση $\psi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega})$ είναι της μορφής

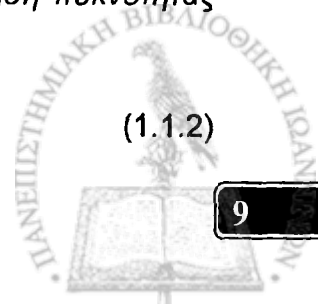
$$\psi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega}) = e^{i\boldsymbol{\omega}^t \boldsymbol{\mu}} \varphi(\boldsymbol{\omega}^t \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}), \quad (1.1.1)$$

με $\boldsymbol{\omega}$ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και $\varphi(\cdot)$ μία πραγματική συνάρτηση, η οποία καλείται γεννήτορας της χαρακτηριστικής συνάρτησης. Θα συμβολίζεται τότε $\mathbf{X} \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \varphi)$. Στην ειδική περίπτωση που $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_p$ και $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_p$, όπου $\mathbf{0}_p$ είναι το p -διάστατο μηδενικό διάνυσμα και \mathbf{I}_p ο ταυτοτικός πίνακας τάξης p , το τυχαίο διάνυσμα \mathbf{X} ακολουθεί σφαιρική κατανομή (spherical distribution) και γράφεται ότι $\mathbf{X} \sim S_p(\varphi)$. \square

Όταν υπάρχει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του \mathbf{X} τότε έχουμε τον ακόλουθο ισοδύναμο ορισμό.

Ορισμός 1.1.2. Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα \mathbf{X} ακολουθεί ελλειπτική (συμμετρική) κατανομή με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, $\boldsymbol{\mu}$ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και $\boldsymbol{\Sigma}$ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, με $\boldsymbol{\Sigma}$ ένα θετικά ορισμένο πίνακα τάξης p , αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς (σ. π. π.) του, εφόσον υπάρχει, είναι της ακόλουθης μορφής

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} g_p \left[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right], \quad (1.1.2)$$



με $g_p(\cdot)$ κάποια μη αρνητική συνάρτηση, η οποία καλείται γεννήτορας της σ. π. π. (p.d.f. generator) και καθορίζει σε ποια κατανομή ανήκει το \mathbf{X} . Θα συμβολίζεται τότε $\mathbf{X} \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g_p)$. Στην ειδική περίπτωση που $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_p$ και $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_p$, το \mathbf{X} ακολουθεί σφαιρική κατανομή (spherical distribution) και γράφεται ότι $\mathbf{X} \sim S_p(g_p)$. □

Από τη μορφή της πυκνότητας της ελλειπτικής κατανομής, μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί πως παραμένει σταθερή πάνω σε κάθε ελλειψοειδές της μορφής

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \alpha, \alpha > 0\}.$$

Παρατήρηση 1.1.1. Ορίζοντας την απόσταση δύο σημείων \mathbf{x} και \mathbf{y} του χώρου \mathbb{R}^p , ως

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left((\mathbf{x} - \mathbf{y})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right)^{\frac{1}{2}},$$

παρατηρείται ότι, γεωμετρικά, η ελλειπτική κατανομή παρουσιάζει συμμετρία γύρω από το $\boldsymbol{\mu}$, δικαιολογώντας έτσι, την ονομασία της οικογένειας αυτής (ελλειπτική συμμετρική οικογένεια κατανομών), που χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία. Στην περίπτωση που η παράμετρος κλίμακας ταυτίζεται με τον ταυτοτικό πίνακα, \mathbf{I}_p , οδηγούμαστε στη συνήθη ευκλείδεια απόσταση $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, δηλαδή στη σφαιρική συμμετρία.

Λήμμα 1.1.1. (βλέπε, μεταξύ άλλων, Fang and Zhang (1990, σελ. 71)) Κάθε μη αρνητική συνάρτηση $h_p(\cdot)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $0 < \int_0^\infty u^{\frac{p}{2}-1} h_p(u) du < \infty$ μπορεί να ορίσει μία κατανομή, που ανήκει στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών με μία σταθερά κανονικοποίησης C_p , η οποία θα δίνεται από τη σχέση

$$C_p = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}} \int_0^\infty u^{\frac{p}{2}-1} h_p(u^2) du} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}} \int_0^\infty u^{\frac{p}{2}-1} h_p(u) du}. \quad (1.1.3)$$

Τότε προκύπτει ότι ο γεννήτορας $g_p(\cdot)$ συνδέεται με τη συνάρτηση $h_p(\cdot)$ με τη σχέση

$$g_p(\cdot) = C_p h_p(\cdot).$$

Απόδειξη. (βλέπε Anderson (1984), Landsman and Valdez (2003)) Καθώς η συνάρτηση της σχέσης (1.1.2) είναι σ. π. π. πρέπει το ολοκλήρωμά της στο πεδίο ορισμού της να είναι ίσο



με τη μονάδα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu = \mathbf{0}$ και $\Sigma = I_p$.

Επομένως, προκύπτει ότι

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} C_p h_p(\mathbf{x}'\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό από το ορθογώνιο σύστημα στις πολικές συντεταγμένες,

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta_1 \\ x_2 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ x_3 &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ x_{p-1} &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{p-2} \sin \theta_{p-1} \\ x_p &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{p-2} \cos \theta_{p-1} \end{aligned}$$

όπου $-\frac{\pi}{2} < \theta_k < \frac{\pi}{2}$, για $k = 1, 2, \dots, p-2$, $-\pi < \theta_{p-1} \leq \pi$ και $r > 0$, προκύπτει ότι

$$1 = C_p \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} r^{p-1} \cos^{p-2} \theta_1 \cos^{p-3} \theta_2 \dots \cos \theta_{p-2} h_p(r^2) d\theta_1 \dots d\theta_{p-1} dr$$

$$\text{ή} \quad 1 = C_p \prod_{k=1}^{p-2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{p-(k+1)} \theta_k d\theta_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_{p-1} \cdot \int_0^{\infty} r^{p-1} h_p(r^2) dr, \quad (1.1.4)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι

$$\mathbf{x}'\mathbf{x} = \sum_{k=1}^p x_k^2 = r^2,$$

ενώ προκύπτει (βλέπε, για παράδειγμα, Muirhead (1982)) ότι η απόλυτη τιμή της Ιακωβιανής Ορίζουσας του μετασχηματισμού, είναι

$$|J| = \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_p)}{\partial(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-1}, r)} \right| = r^{p-1} \cos^{p-2} \theta_1 \cos^{p-3} \theta_2 \dots \cos \theta_{p-2}.$$

Επιπλέον, καθώς η συνάρτηση του συνημίτονου ($\cos x$) είναι άρτια, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{p-k-1} \theta_k d\theta_k &= 2 \int_{-\pi/2}^0 \cos^{p-k-1} \theta_k d\theta_k \stackrel{u=\cos^2 \theta_k}{=} 2 \int_0^1 \frac{u^{\frac{p-k}{2}}}{2u\sqrt{1-u}} du = \int_0^1 u^{\frac{p-k}{2}-1} (1-u)^{\frac{1}{2}-1} du = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{p-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-k+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(p-k)\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(p-k+1)\right)}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, ισχύει ότι



$$\int_0^{\infty} r^{p-1} h_p(r^2) dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{\frac{p-1}{2}} h_p(u) du.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1.1.4), προκύπτει

$$\begin{aligned} 1 &= C_p \prod_{k=1}^{p-2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(p-k)\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(p-k+1)\right)} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{\frac{p-1}{2}} h_p(u) du = \\ &= C_p \pi^{\frac{p-2}{2}+1} \prod_{k=1}^{p-2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(p-k)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(p-k+1)\right)} \cdot \int_0^{\infty} u^{\frac{p-1}{2}} h_p(u) du. \end{aligned}$$

Υστερα από αλγεβρικές πράξεις έχουμε ότι

$$1 = C_p \pi^{\frac{p}{2}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \int_0^{\infty} u^{\frac{p-1}{2}} h_p(u) du. \quad (1.1.5)$$

Αρα,

$$C_p = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}} \int_0^{\infty} u^{\frac{p-1}{2}} h_p(u) du}. \quad \square$$

Διαπιστώνεται ότι στην ειδική περίπτωση που η $g_p(\cdot)$, του Ορισμού 1.1.2, έχει τη μορφή

$$g_p(u) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \exp\left(-\frac{u}{2}\right), \quad u \geq 0,$$

τότε η κατανομή ανάγεται στην πολυδιάστατη κανονική κατανομή, όπως θα δούμε αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

Εκτός της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής, η ελλειπτική οικογένεια κατανομών περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις την πολυδιάστατη t κατανομή, τις κατανομές Pearson τύπου II και VII, την πολυδιάστατη κατανομή τύπου Kotz κ.ά. Οι σημαντικότερες από αυτές παρουσιάζονται, εν συντομία, στην επόμενη παράγραφο.

1.2 Ειδικές Ελλειπτικές Κατανομές

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται οι ειδικές ελλειπτικές κατανομές που εμφανίζονται πιο συχνά στη βιβλιογραφία. Για καθεμία από αυτές δίνεται ο γεννήτορας της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (σ. π. π.), η σ. π. π. και οι ειδικές περιπτώσεις

κατανομών που προκύπτουν. Επιπλέον, όπου είναι εφικτό δίνεται η γραφική παράσταση της πυκνότητας διδιάστατων τυχαίων μεταβλητών από αυτές τις κατανομές, για ειδικές τιμές των παραμέτρων τους. Οι γραφικές αυτές παραστάσεις έγιναν κάνοντας χρήση γνωστών συναρτήσεων της MatLab και δημιουργώντας κατάλληλους κάθε φορά κώδικες, οι οποίοι παρατίθενται στο Παράρτημα Α.

Για λόγους πληρότητας, η παράθεση θα ξεκινήσει με την πολυδιάστατη κανονική κατανομή.

1.2.1 Πολυδιάστατη Κανονική Κατανομή

Ορισμός 1.2.1. (Muirhead (1982)) Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g_p)$ ακολουθεί p -διάστατη κανονική κατανομή, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής

$$g_p(u) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \exp\left(-\frac{u}{2}\right), \quad u \geq 0. \quad (1.2.1.a)$$

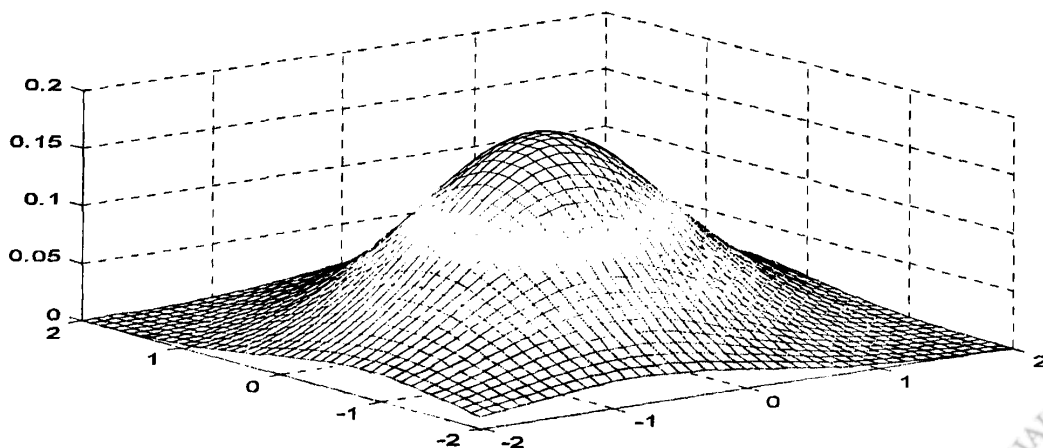
Τότε η σ. π. π. δίνεται από τη σχέση

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right). \quad (1.2.1.b)$$

Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. \square

Στην Εικόνα 1 δίνεται η γραφική παράσταση της σ. π. π. της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^t$, για τιμές $-2 < x_1 < 2$ και $-2 < x_2 < 2$, στην ειδική περίπτωση που

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \boldsymbol{\mu} = (0, 0)^t.$$



Εικόνα 1: Πολυδιάστατη Κανονική Κατανομή

1.2.2 Πολυδιάστατη Ομοιόμορφη Κατανομή

Η συμμετρική και πλατύκυρτη πολυδιάστατη Ομοιόμορφη κατανομή ορισμένη στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας, παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας των σφαιρικών και συμμετρικών ελλειπτικών κατανομών, λόγω του Θεωρήματος της στοχαστικής αναπαράστασης, το οποίο για λόγους πληρότητας παρατίθεται στη συνέχεια. Επιπλέον, η κατανομή αυτή χρησιμοποιείται, μεταξύ άλλων, στην ανάλυση δεδομένων κατεύθυνσης (directional data) (βλέπε Fang *et al.* (1990, σελ. 74-75)).

Ορισμός 1.2.2. (Fang *et al.* (1990), Gomez *et al.* (2003)) Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{g}_p)$ ακολουθεί p -διάστατη ομοιόμορφη κατανομή, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής

$$\mathbf{g}_p(\mathbf{u}) = \frac{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} I_{[0,1]}(u), \quad (1.2.2.\alpha)$$

όπου $I_{[0,1]}$ είναι η δείκτρια συνάρτηση, που ορίζεται ως εξής

$$I_{[0,1]}(u) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 \leq u \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιού} \end{cases}.$$

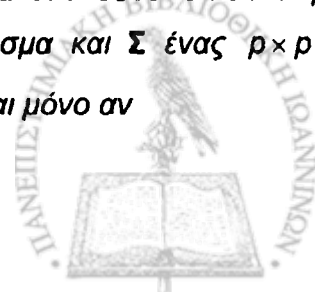
Τότε η σ. π. π. δίνεται από τη σχέση

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} I_{[0,1]}(S), \quad (1.2.2.\beta)$$

όπου $S = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $\mathbf{X} \sim U^{(p)}$. \square

Στη συνέχεια παραθέτουμε το Θεώρημα της στοχαστικής αναπαράστασης που διαδραματίζει κυρίαρχο ρόλο στη βιβλιογραφία των ελλειπτικών κατανομών. Μεταξύ άλλων, το Θεώρημα αυτό μας δίνει και έναν τρόπο γέννησης τυχαίων αριθμών από ελλειπτική κατανομή. Σε όσα ακολουθούν όταν δύο p -διάστατα τυχαία διανύσματα \mathbf{X} και \mathbf{Y} ακολουθούν την ίδια κατανομή θα γράφουμε $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{Y}$.

Θεώρημα 1.2.1 (Cambanis *et al.* (1981)) Ένα p -διάστατο διάνυσμα ακολουθεί ελλειπτική κατανομή με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, $\boldsymbol{\mu}$ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και $\boldsymbol{\Sigma}$ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, με τη βαθμίδα του πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}$ να είναι ίση με p αν και μόνο αν



$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}'\mathbf{R}\mathbf{U}^{(p)},$$

όπου $\mathbf{A}_{k \times p}$ είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \boldsymbol{\Sigma}$, $\mathbf{U}^{(p)}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή ορισμένη στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του \mathbf{R}^p , και R είναι μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη του $\mathbf{U}^{(p)}$. Επιπλέον, αν $h(\cdot)$ είναι η σ. π. π. της τυχαίας μεταβλητής R και $f(\cdot)$ η σ. π. π. του τυχαίου διανύσματος \mathbf{X} , τότε αυτές συνδέονται με τη σχέση

$$h(r) = \frac{2}{\int_0^{\infty} t^{\frac{p}{2}-1} f(t) dt} r^{p-1} f(r^2) I_{(0,\infty)}(r).$$

Απόδειξη. Βασιζόμενοι στην εργασία των Cambanis *et al.* (1981), αρχικά θα αποδειχθεί το ευθύ τμήμα του παραπάνω Θεωρήματος. Η απόδειξη του στηρίζεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα του Schoenberg (1938). Αν Φ_p , $p \geq 1$, είναι η κλάση όλων των συναρτήσεων $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, που είναι τέτοιες ώστε $\varphi(\|\mathbf{t}\|^2) = \varphi(t_1^2, t_2^2, \dots, t_p^2)$, όπου $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^p$, να είναι μία χαρακτηριστική συνάρτηση, τότε $\varphi \in \Phi_p$ αν και μόνο αν (βλέπε, μεταξύ άλλων, Fang *et al.* (1990))

$$\varphi(u) = \int_0^{\infty} \Omega_p(ur^2) dF(r), \quad u \geq 0,$$

όπου $F(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής r στο $[0, \infty)$ και $\Omega_p(\|\mathbf{t}\|^2)$, με $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^p$, η χαρακτηριστική συνάρτηση του p -διάστατου τυχαίου διανύσματος $\mathbf{U}^{(p)}$, που ακολουθεί Ομοιόμορφη κατανομή ορισμένη στην επιφάνεια της p -διάστατης μοναδιαίας σφαίρας.

Στη συνέχεια, θα υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση του $\mathbf{Y} = \mathbf{R}\mathbf{U}^{(p)}$. Προκύπτει τότε, καθώς η τυχαία μεταβλητή R είναι μη αρνητική και ανεξάρτητη του $\mathbf{U}^{(p)}$, ότι

$$\varphi_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\omega}) = E(e^{i\boldsymbol{\omega}'\mathbf{Y}}) = E(e^{i\boldsymbol{\omega}'\mathbf{R}\mathbf{U}^{(p)}}) = \Psi_{\mathbf{U}^{(p)}}(\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}) = \int_0^{\infty} \Omega_p(r^2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2) dF(r) \stackrel{\text{Schoenberg (1938)}}{=} \varphi(\|\boldsymbol{\omega}\|^2).$$

Επομένως, η $\varphi(\|\boldsymbol{\omega}\|^2)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του $\mathbf{R}\mathbf{U}^{(p)}$ και $\varphi \in \Phi_p$, δηλαδή η φ ανήκει στην κλάση των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των σφαιρικών κατανομών. Εύκολα τότε, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\psi_X(\omega) &= E\left(e^{i\omega'X}\right) = E\left(e^{i\omega'(\mu + A'R U^{(p)})}\right) = E\left(e^{i\omega'\mu} e^{i\omega'A'R U^{(p)}}\right) = e^{i\omega'\mu} E\left(e^{i\omega'A'R U^{(p)}}\right) = \\ &= e^{i\omega'\mu} \varphi_{R U^{(p)}}(A\omega) = e^{i\omega'\mu} \varphi_Y(A\omega) = e^{i\omega'\mu} \varphi(\|A\omega\|^2) = e^{i\omega'\mu} \varphi((A\omega)'(A\omega)) = \\ &= e^{i\omega'\mu} \varphi(\omega'A'A\omega) = e^{i\omega'\mu} \varphi(\omega'\Sigma\omega).\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον Ορισμό 1.1.1 προκύπτει ότι $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, \varphi)$.

Για το αντίστροφο τμήμα της απόδειξης, παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $(A')^{-1}(X - \mu)$, όπου $A'A = \Sigma$, έχει χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\begin{aligned}\psi_{(A')^{-1}(X-\mu)}(\omega) &= E\left(e^{i\omega'(A')^{-1}(X-\mu)}\right) = E\left(e^{i\omega'(A')^{-1}X} e^{-i\omega'\mu}\right) = e^{-i\omega'\mu} E\left(e^{i(A^{-1}\omega)'X}\right) = \\ &= e^{-i\omega'\mu} \psi_X(A^{-1}\omega) \stackrel{(1.1.1)}{=} e^{-i\omega'\mu} e^{i\omega'\mu} \varphi\left((A^{-1}\omega)'\Sigma(A^{-1}\omega)\right) = \\ &= \varphi\left(\omega'(A^{-1})'\Sigma A^{-1}\omega\right).\end{aligned}$$

Όμως, καθώς $A'A = \Sigma$ προκύπτει ότι

$$\psi_{(A')^{-1}(X-\mu)}(\omega) = \varphi(\omega'\omega) = \varphi(\|\omega\|^2), \quad \omega \in \mathbb{R}^p.$$

Συνεπώς, η $\varphi \in \Phi_p$ και από το αποτέλεσμα του Schoenberg (1938) προκύπτει

$$(A')^{-1}(X - \mu) \stackrel{d}{=} Y \stackrel{d}{=} R U^{(p)} \quad \text{ή} \quad X \stackrel{d}{=} \mu + A'R U^{(p)}.$$

Έχουμε ήδη δείξει ότι το τυχαίο διάνυσμα $Y \stackrel{d}{=} R U^{(p)}$, με $R \geq 0$ και ανεξάρτητο του $U^{(p)}$, ακολουθεί σφαιρική κατανομή, δηλαδή $Y \sim S_p(\varphi)$. Από το Θεώρημα 2.5.5 των Fang and Zhang (1990, σελ.59) συνεπάγεται ότι αν $Y \stackrel{d}{=} R U^{(p)} \sim S_p(\varphi)$, τότε το τυχαίο διάνυσμα Y έχει σ. π. π. την $f(\cdot)$ αν και μόνο αν η τυχαία μεταβλητή R έχει σ. π. π. την $h(\cdot)$ και συνδέονται με τη σχέση

$$h(r) = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} r^{p-1} f(r^2). \quad (1.2.2.\gamma)$$

Όμως, από τη σχέση (1.1.5) προκύπτει ότι αν $f_p(u) = C_p g_p(u)$ τότε

$$1 = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{p}{2}-1} f(t) dt$$

και επομένως η σχέση (1.2.2.γ), γίνεται

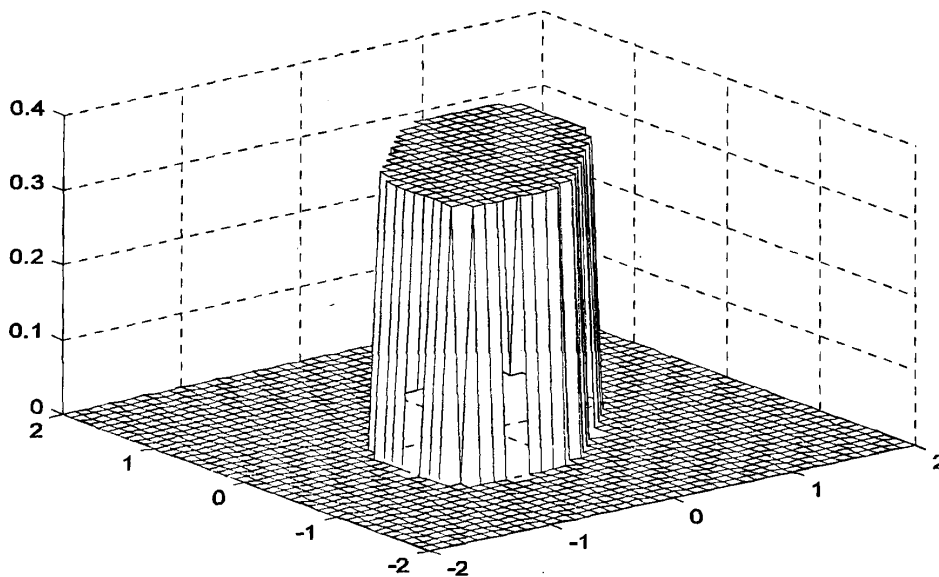


$$h(r) = \frac{2}{\int_0^{\infty} t^{p-1} f(t) dt} r^{p-1} f(r^2) I_{(0,\infty)}(r). \quad \square$$

Παρατήρηση 1.2.1. Πλήθος γενικεύσεων της ομοιόμορφης κατανομής έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία. Μία από αυτές είναι εκείνη των Cambanis *et al.* (1981) και πρόκειται για την L-Norm ομοιόμορφη κατανομή. Η κατανομή αυτή χρησιμοποιήθηκε από τους Box and Tiao (1962) για την ανάλυση δεδομένων που έχουν να κάνουν με τη γονιμοποίηση (βλέπε Song and Gupta (1997)).

Στην Εικόνα 2 δίνεται η γραφική παράσταση της σ. π. π. της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^t$, για τιμές $-2 < x_1 < 2$ και $-2 < x_2 < 2$, στην ειδική περίπτωση που

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \mu = (0, 0)^t.$$



Εικόνα 2: Πολυδιάστατη Ομοιόμορφη Κατανομή

1.2.3 Συμμετρική Κατανομή Pearson Τύπου II

Η συμμετρική κατανομή Pearson τύπου II εισήχθη από τον Kotz (1975), ενώ η πρώτη λεπτομερής παρουσίασή της έγινε από τον Johnson (1987), σύμφωνα με τους Sarr *et al.* (2009). Εφαρμόζεται σε πολλούς τομείς, όπως στη μοντελοποίηση αναλογιών στα συστατικά μιγμάτων, στις αναλογίες ποικιλιών για καταναλωτικά αγαθά, στην εκλογή υποψηφίων, ενώ

είναι χρήσιμη ως εκ των προτέρων κατανομή (prior distribution) στην Μπεϋζιανή Στατιστική (βλέπε Nadarajah (2006a)).

Ορισμός 1.2.3. Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g_p)$ ακολουθεί p -διάστατη Pearson τύπου II κατανομή, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής

$$g_p(u) = \frac{\pi^{-\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2} + m + 1\right)}{\Gamma(m+1)} (1-u)^m, \quad (1.2.3.a)$$

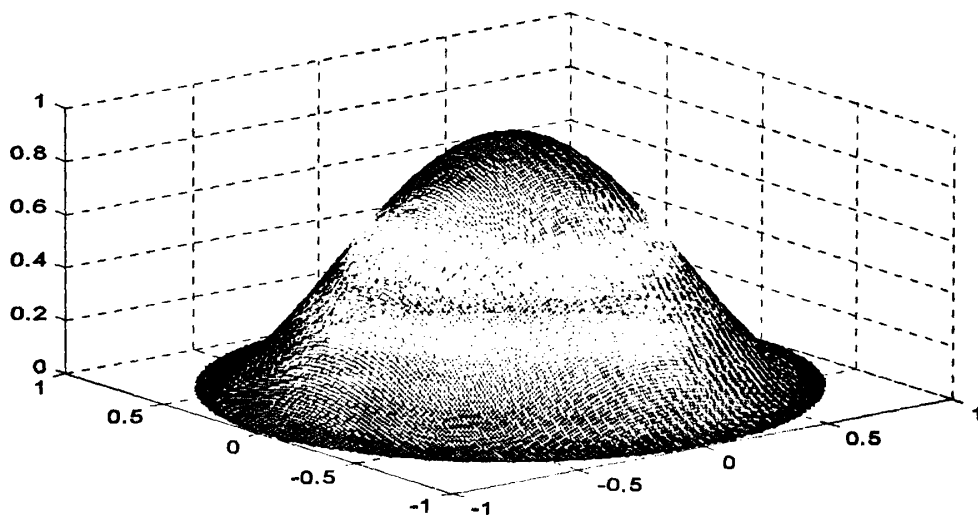
όπου $m > -1$ και $0 \leq u \leq 1$.

Τότε, υπό αυτούς τους περιορισμούς, η σ. π. π. δίνεται από τη σχέση

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\pi^{-\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2} + m + 1\right)}{\Gamma(m+1)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left(1 - (\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\right)^m, \quad (1.2.3.b)$$

Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $X \sim MPII_p(\mu, \Sigma)$. □

Στην Εικόνα 3 δίνεται η γραφική παράσταση της πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $X = (X_1, X_2)'$, για τιμές $-1 < x_1 < 1$ και $-1 < x_2 < 1$, στην ειδική περίπτωση που $m = 2$, $\Sigma = I_2$ και $\mu = (0, 0)'$.



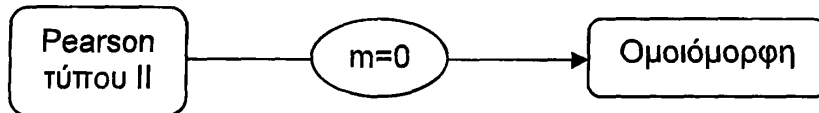
Εικόνα 3: Πολυδιάστατη Συμμετρική Κατανομή Pearson τύπου II

Έχει διαπιστωθεί ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του m τόσο περισσότερο η πολυδιάστατη κατανομή Pearson τύπου II συγκλίνει στην πολυδιάστατη κανονική (βλέπε Johnson (1987, σελ. 114)), ενώ η σχέση (1.2.3.a) για $m = 0$ ανάγεται στην (1.2.2.a) της

πολυδιάστατης ομοιόμορφης, καθώς τότε, χρησιμοποιώντας τη γενική σχέση $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, είναι

$$g_p(u) = \frac{\pi^{-\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right)}{\Gamma(1)} (1-u)^0 = \pi^{-\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right) = \pi^{-\frac{p}{2}} \frac{p}{2} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right).$$

Σχηματικά δηλαδή,



1.2.4 Συμμετρική Κατανομή Pearson Τύπου VII

Ο όρος Pearson τύπου VII χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τους McGraw and Wagner (1968), ενώ η κατανομή αυτή χρησιμεύει ως μοντέλο για τη μελέτη δεδομένων που η κανονική κατανομή αδυνατεί να μοντελοποιήσει. Για το λόγο αυτό, όπως αναφέρουν οι Nadarajah and Kotz (2006), η πολυδιάστατη κατανομή Pearson VII έχει διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στη μελέτη των πολυδιάστατων δεδομένων τόσο στον χώρο της Μπεϋζιανής ανάλυσης (Bayesian Analysis), όσο και σε τομείς όπως η Ανάλυση κατά Συστάδες (Cluster Analysis), η Διαχωριστική Ανάλυση (Discriminant analysis), η Πολυμεταβλητή Παλινδρόμηση (Multivariate Regression) και αλλού.

Ορισμός 1.2.4. (Fang et al. (1990)) Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g_p)$ ακολουθεί p -διάστατη συμμετρική κατανομή Pearson τύπου VII, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής

$$g_p(u) = \frac{(\pi m)^{-\frac{p}{2}} \Gamma(N)}{\Gamma\left(N - \frac{p}{2}\right)} \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-N}, \tag{1.2.4.α}$$

όπου $u \geq 0$, $N > \frac{p}{2}$ και $m > 0$.

Τότε, υπό αυτούς τους περιορισμούς, η σ. π. π. δίνεται από τη σχέση

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{(\pi m)^{-\frac{p}{2}} \Gamma(N)}{\Gamma\left(N - \frac{p}{2}\right)} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{m} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)^{-N}. \tag{1.2.4.β}$$

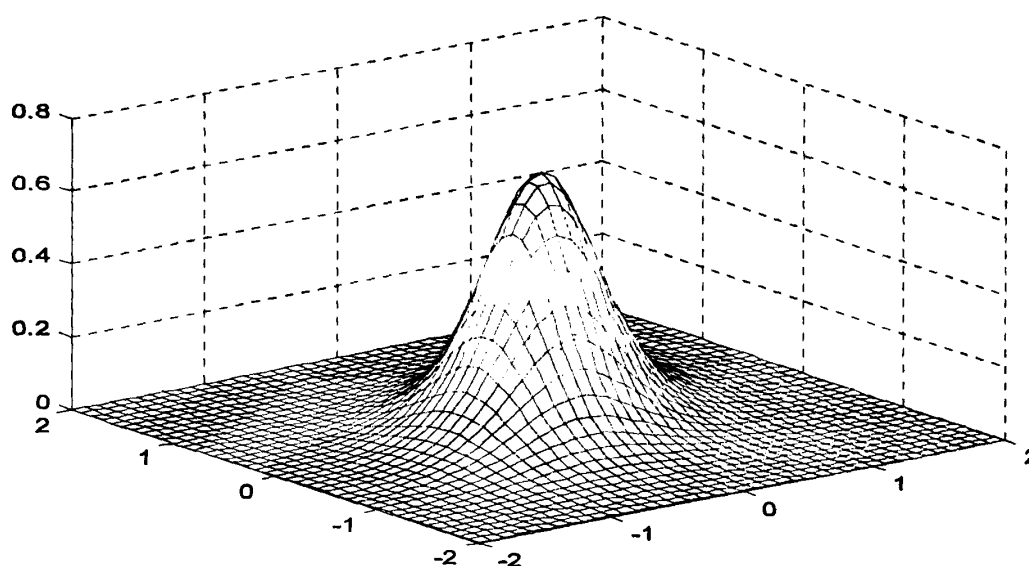
Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $\mathbf{X} \sim MPVII_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. □



Ειδικές περιπτώσεις της πολυδιάστατης συμμετρικής Pearson τύπου VII αποτελούν η πολυδιάστατη t κατανομή με m βαθμούς ελευθερίας (όταν $N=(p+m)/2$) καθώς και η πολυδιάστατη Cauchy κατανομή (όταν $m=1$ και $N=(p+1)/2$), όπως θα δούμε αναλυτικότερα στις παραγράφους που ακολουθούν.

Στην Εικόνα 4 δίνεται η γραφική παράσταση της πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $X=(X_1, X_2)'$, για τιμές $-2 < x_1 < 2$ και $-2 < x_2 < 2$, στην ειδική περίπτωση που

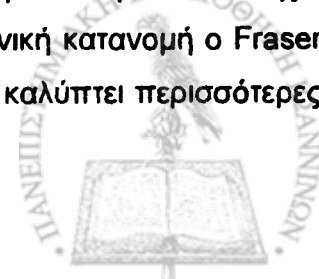
$$m=2, N=5, \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \mu = (0,0)'$$



Εικόνα 4: Πολυδιάστατη Κατανομή Pearson τύπου VII

1.2.4.1 Πολυδιάστατη t Κατανομή

Η πολυδιάστατη t κατανομή ανήκει στην οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών και αυτό που κυρίως τη διαφοροποιεί από την κανονική κατανομή είναι οι βαθμοί ελευθερίας (ή αλλιώς ή παράμετρος σχήματος). Όταν οι βαθμοί ελευθερίας είναι πολύ μεγάλοι, η t κατανομή ταυτίζεται με την κανονική. Αυτό επιτρέπει στα αποτελέσματα του μοντέλου της t κατανομής να είναι έγκυρα και για την κανονική περίπτωση, όταν η παράμετρος σχήματος είναι πολύ μεγάλη, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει. Την καταλληλότητα του μοντέλου της t κατανομής εξέτασε και πρότεινε ως καλύτερη επιλογή από την κανονική κατανομή ο Fraser (1979). Ο Zellner (1976) επιβεβαιώνει την υπόθεση ότι η t κατανομή καλύπτει περισσότερες



περιπτώσεις από ότι η κανονική κατανομή, σκέψη που ασπάζεται και ο Anderson (1992) λέγοντας πως η t κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί επιτυχώς τόσο σε εξαρτημένες όσο και σε ασυσχέτιστες μεταβλητές. Για περισσότερες λεπτομέρειες για αυτήν την κατανομή, παραπέμπουμε στη μονογραφία των Kotz and Nadarajah (2004), όπου περικλείονται τα κυριότερα αποτελέσματα της ερευνητικής δραστηριότητας για την πολυδιάστατη t κατανομή, καθώς και οι διάφορες παραλλαγές και τροποποιήσεις αυτής.

Ορισμός 1.2.4.1. (Fang *et al.* (1990)) Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g_p)$ ακολουθεί πολυδιάστατη t κατανομή, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής

$$g_p(u) = \frac{(\pi m)^{-\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-\frac{p+m}{2}}, \quad (1.2.4.1.\alpha)$$

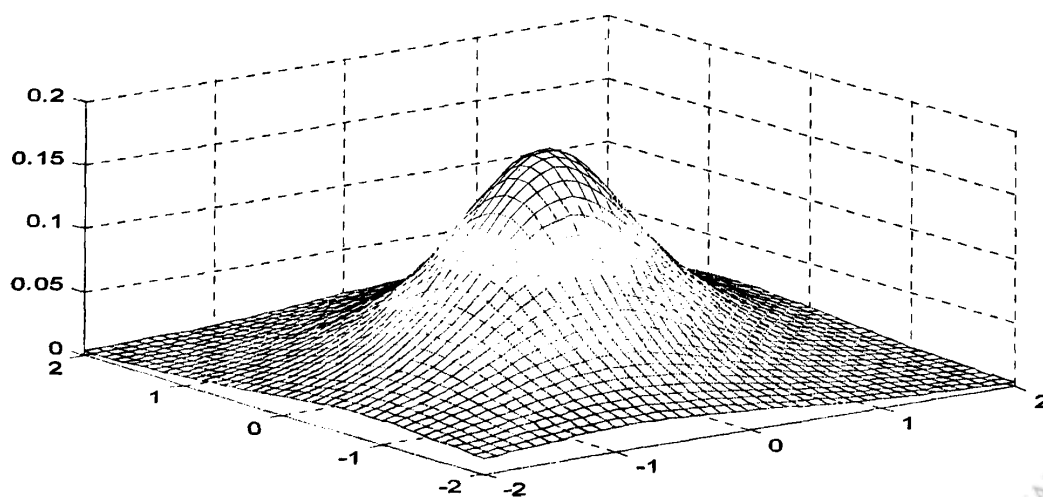
όπου $u \geq 0$ και $m > 0$. Τότε, υπό αυτούς τους περιορισμούς, η σ. π. π. δίνεται από τη σχέση:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{(\pi m)^{-\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{m}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)^{-\frac{p+m}{2}}. \quad (1.2.4.1.\beta)$$

Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $\mathbf{X} \sim Mt_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, m)$, όπου m οι βαθμοί ελευθερίας (β. ε.). \square

Στην Εικόνα 5 δίνεται η γραφική παράσταση της πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$, για τιμές $-2 < x_1 < 2$ και $-2 < x_2 < 2$, στην ειδική περίπτωση που

$$m = 2, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\mu} = (0, 0)'$$



Εικόνα 5: Πολυδιάστατη t κατανομή

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι η σχέση (1.2.4.1.β) προκύπτει από τη σχέση (1.2.4.β) για την ειδική περίπτωση που $N = (p + m)/2$. Επομένως, η πολυδιάστατη t κατανομή είναι ειδική περίπτωση της Pearson τύπου VII. Ακόμη, στην περίπτωση που $m \rightarrow \infty$ από τη σχέση (1.2.4.1.β) της πολυδιάστατης t κατανομής, οδηγούμαστε στη σ. π. π. της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής.

Πρόταση 1.2.4.1. Η σ. π. π. της πολυδιάστατης t κατανομής με m βαθμούς ελευθερίας ανάγεται στη σ. π. π. της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής, όταν $m \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Από την (1.2.4.1.β) για $m \rightarrow \infty$, πρέπει να υπολογιστεί το ακόλουθο όριο

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}\right)}{(\pi m)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{m} u\right)^{-\frac{p+m}{2}} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \pi^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}\right) \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-\frac{p+m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) m^{\frac{p}{2}}}. \end{aligned} \quad (1.2.4.1.γ)$$

Από τη σχέση (6.1.39) των Abramowitz and Stegun (1972, σελ. 257) έχουμε ότι

$$\Gamma(az + b) \sim \sqrt{2\pi} e^{-az} (az)^{az+b-\frac{1}{2}}, \quad |\arg z| < \pi, a > 0. \quad (1.2.4.1.δ)$$

Επομένως, με άμεση εφαρμογή της σχέσης (1.2.4.1.δ) προκύπτει ότι

$$\Gamma\left(\frac{p+m}{2}\right) \sim \sqrt{2\pi} e^{-\frac{m}{2}} \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m+p}{2} - \frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \sim \sqrt{2\pi} e^{-\frac{m}{2}} \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2} - \frac{1}{2}}.$$

Επομένως,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \sim \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{m}{2}} \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m+p}{2} - \frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{m}{2}} \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2} - \frac{1}{2}}} = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Άρα από την (1.2.4.1.γ) με χρήση των παραπάνω προκύπτει

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, m) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-\frac{p+m}{2}}.$$

Όμως,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-\frac{p+m}{2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-\frac{m}{2}} = e^{-\frac{u}{2}}.$$



Άρα,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, m) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{2}}. \square$$

Η πολυδιάστατη t κατανομή, λόγω του πλήθους των εφαρμογών της, είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη ελλειπτική κατανομή. Θέλοντας οι ερευνητές να την καταστήσουν ακόμη πιο ελκυστική, πρότειναν κάποιες επεκτάσεις αυτής. Μία από αυτές, ίσως η κυριότερη, καθώς περικλείει κάποιες από τις υπόλοιπες επεκτάσεις-γενικεύσεις, παρουσιάζεται στην παράγραφο 1.2.5 και είναι η γενικευμένη πολυδιάστατη t κατανομή.

1.2.4.2 Cauchy Κατανομή

Η Cauchy κατανομή έχει την ιδιότητα των παχιών ουρών (heavy-tails) και συνήθως εφαρμόζεται σε «robustness studies». Επιπλέον, χρησιμοποιείται για την κατασκευή παραδειγμάτων ως εξαίρεση στον κανόνα (counterexamples) (βλέπε Berry *et al.* (1996)).

Ορισμός 1.2.4.2. (Fang *et al.* (1990)) Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g_p)$ ακολουθεί Cauchy κατανομή, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής

$$g_p(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{p+1}{2}}} (1+u)^{-\frac{p+1}{2}}, u \geq 0. \quad (1.2.4.2.a)$$

Τότε η σ. π. π. δίνεται από τη σχέση

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{p+1}{2}}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)^{-\frac{p+1}{2}}. \quad (1.2.4.2.b)$$

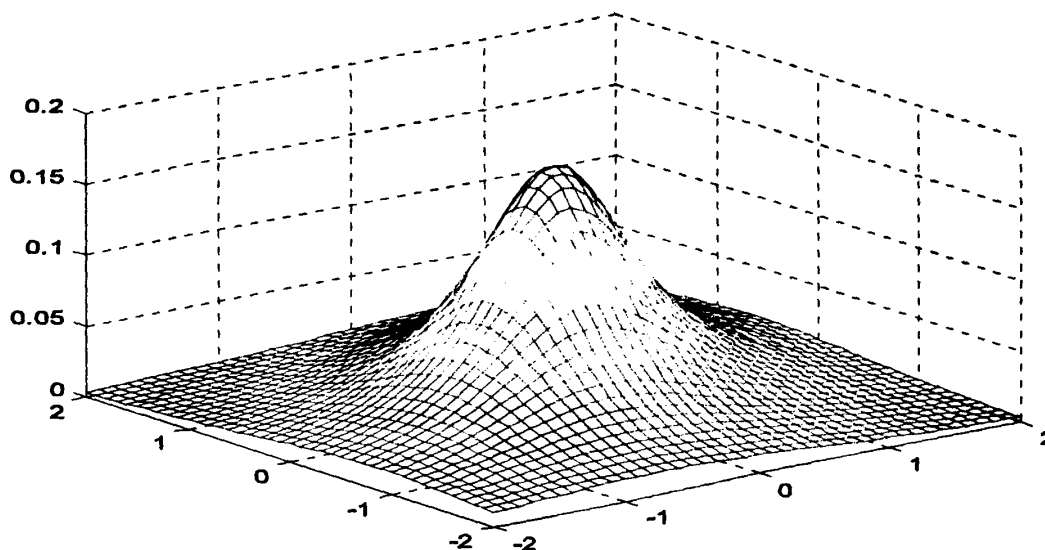
Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $\mathbf{X} \sim MC_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. \square

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι η πολυδιάστατη Cauchy είναι ειδική περίπτωση τόσο της Pearson τύπου VII όσο και της πολυδιάστατης t κατανομής. Ειδικότερα, η σχέση (1.2.4.2.b) είναι ειδική περίπτωση των (1.2.4.1.b) και (1.2.4.1.b) για $(N, m) = \left(\frac{p+1}{2}, 1\right)$ και $m = 1$

αντίστοιχα, λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

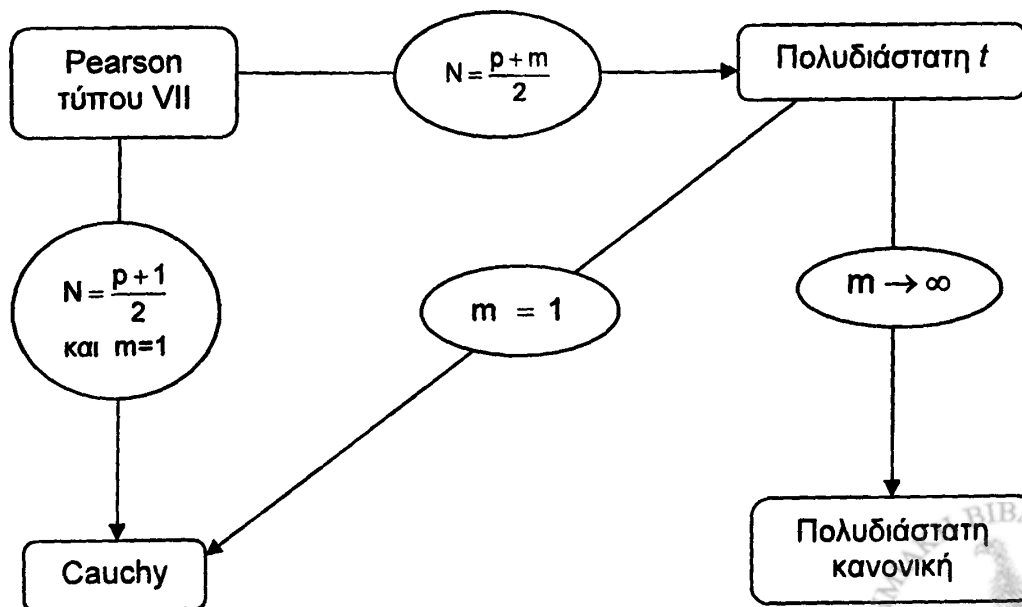
Στην Εικόνα 6 δίνεται η γραφική παράσταση της πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $X = (X_1, X_2)^t$, για τιμές $-2 < x_1 < 2$ και $-2 < x_2 < 2$, στην ειδική περίπτωση που

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \mu = (0,0)^t.$$



Εικόνα 6: Πολυδιάστατη Cauchy Κατανομή

Συνοψίζοντας, προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα, στο οποίο απεικονίζεται η σύνδεση των ακόλουθων κατανομών: της συμμετρικής κατανομής Pearson τύπου VII, της πολυδιάστατης t κατανομής, της Cauchy και της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής.



1.2.5 Γενικευμένη Πολυδιάστατη t Κατανομή

Ο Arslan (2004) πρότεινε μία γενίκευση της πολυδιάστατης t κατανομής, που αποσκοπούσε σε πιο ευρείες εφαρμογές και μελέτησε τις ιδιότητες των κατανομών που ανήκουν σε αυτό το υποσύνολο των ελλειπτικών κατανομών. Στη γενικευμένη αυτή οικογένεια πολυδιάστατων t κατανομών, όπως θα δούμε αναλυτικά, παρατήρησε ότι ανήκουν, μεταξύ άλλων, ως ειδικές περιπτώσεις η κλασική πολυδιάστατη t κατανομή, η πολυδιάστατη κανονική, καθώς και προγενέστερες γενικεύσεις της πολυδιάστατης t , όπως αυτή των Arellano-Valle and Bolfarine (1995).

Ορισμός 1.2.5. (Arslan (2004)) Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g_p)$ ακολουθεί γενικευμένη πολυδιάστατη t κατανομή, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής

$$g_p(u) = \frac{\beta \Gamma\left(q + \frac{p}{2\beta}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) q^q \lambda^{-\frac{p}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma(q) \Gamma\left(\frac{p}{2\beta}\right) \left(q + \left(\frac{u}{\lambda}\right)^\beta\right)^{q + \frac{p}{2\beta}}}, \quad (1.2.5.a)$$

όπου $u \geq 0$, $q > 0$.

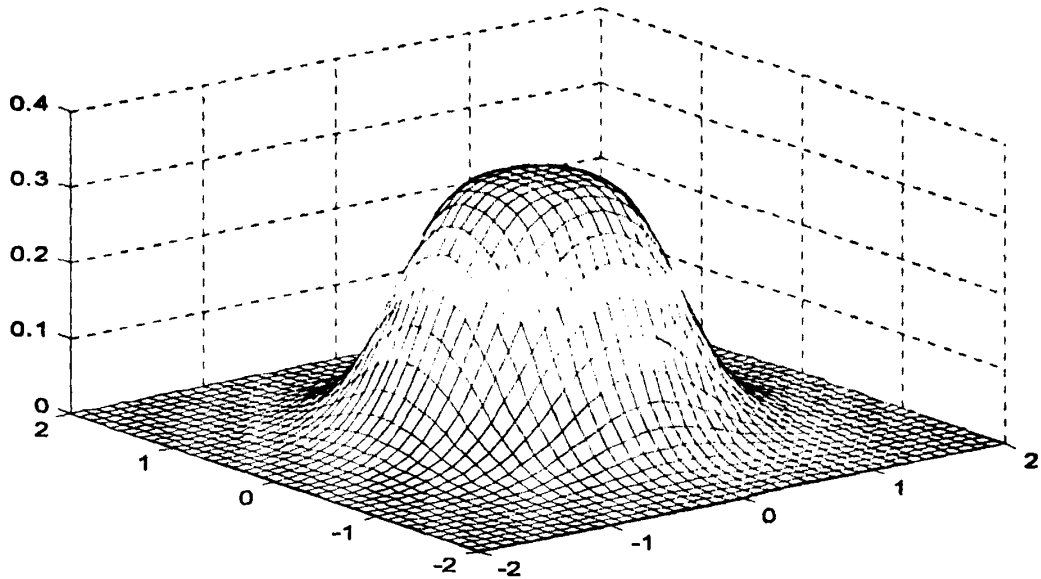
Τότε, υπό αυτούς τους περιορισμούς, η σ. π. π. δίνεται από τη σχέση

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \lambda, \beta, q) = \frac{\beta \Gamma\left(q + \frac{p}{2\beta}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) q^q \lambda^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma(q) \Gamma\left(\frac{p}{2\beta}\right) \left(q + \left(\frac{1}{\lambda} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)^\beta\right)^{q + \frac{p}{2\beta}}}. \quad (1.2.5.b)$$

Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $\mathbf{X} \sim MGT_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \lambda, \beta, q)$. \square

Στην οικογένεια των γενικευμένων πολυδιάστατων t κατανομών ανήκουν μεταξύ άλλων, όπως θα δούμε αναλυτικά στη συνέχεια, ως ειδικές περιπτώσεις η πολυδιάστατη κανονική κατανομή, η πολυδιάστατη t κατανομή, καθώς και η πολυδιάστατη Ομοιόμορφη κατανομή.

Στην Εικόνα 7 δίνεται η γραφική παράσταση της πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^t$, για τιμές $-2 < x_1 < 2$ και $-2 < x_2 < 2$, στην ειδική περίπτωση που $\lambda = 1$, $\beta = 2$, $q = 2$, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_2$ και $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)^t$.



Εικόνα 7: Γενικευμένη πολυδιάστατη t κατανομή

Πρόταση 1.2.5.1. Η σ. π. π. της γενικευμένης πολυδιάστατης t κατανομής με παραμέτρους θέσης και κλίμακας μ και $2\Sigma_1$, αντίστοιχα, και παραμέτρους $\lambda=1$ και $\beta=1$, όταν $q \rightarrow \infty$ ανάγεται στη σ. π. π. της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ και Σ_1 , αντίστοιχα.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε δηλαδή, ότι στην περίπτωση της γενικευμένης πολυδιάστατης t με σ. π. π. που δίνεται από τη σχέση (1.2.5.β) με μ , $\Sigma=2\Sigma_1$, $\beta=1$, $\lambda=1$ και $q \rightarrow \infty$ προκύπτει η σ. π. π. της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής με παραμέτρους θέσης και κλίμακας μ και Σ_1 , αντίστοιχα. Είναι τότε από τη σχέση (1.2.5.β), για $u = (\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)$,

$$f(\mathbf{x}; \mu, 2\Sigma_1, 1, 1, q) = \frac{\Gamma\left(q + \frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma(q) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} |2\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} \frac{q^q}{\left(q + \frac{u}{2}\right)^{q + \frac{p}{2}}}.$$

Εύκολα προκύπτει ότι

$$f(\mathbf{x}; \mu, 2\Sigma_1, 1, 1, q) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(q + \frac{p}{2}\right)}{\Gamma(q)} \frac{q^q}{\left(q + \frac{u}{2}\right)^{q + \frac{p}{2}}}.$$

Επομένως, αρκεί να υπολογιστεί το όριο



$$\lim_{q \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}; \mu, 2\Sigma_1, 1, 1, q) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(q + \frac{p}{2}\right)}{\Gamma(q)} \frac{q^q}{\left(q + \frac{u}{2}\right)^{q + \frac{p}{2}}}. \quad (1.2.5.\gamma)$$

Από τη σχέση (1.2.4.1.δ) άμεσα προκύπτει

$$\Gamma\left(q + \frac{p}{2}\right) \sim \sqrt{2\pi} e^{-q} q^{q + \frac{p}{2} - \frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad \Gamma(q) \sim \sqrt{2\pi} e^{-q} q^{q - \frac{1}{2}}.$$

Άρα από την (1.2.5.γ) με χρήση των παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}; \mu, 2\Sigma_1, 1, 1, q) &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q^q q^{\frac{p}{2}}}{\left(q + \frac{u}{2}\right)^{q + \frac{p}{2}}} = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q^{q + \frac{p}{2}}}{q^{q + \frac{p}{2}} \left(1 + \frac{u}{2q}\right)^{q + \frac{p}{2}}} = \\ &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{u}{2q}\right)^{q + \frac{p}{2}}}. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{u}{2q}\right)^{-\left(q + \frac{p}{2}\right)} = e^{-\frac{u}{2}}.$$

Άρα,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}; \mu, 2\Sigma_1, 1, 1, q) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{2}}.$$

Επομένως, προέκυψε (βλέπε σχέση (1.2.1.β)) η σ. π. π. της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής με παραμέτρους θέσης και κλίμακας μ και Σ_1 , αντίστοιχα. \square

Παρατήρηση 1.2.2. Ακολουθώντας την αποδεικτική διαδικασία της προηγούμενης πρότασης, από τη σχέση (1.2.5.β) για $\lambda = 2$, $\beta = 1$ και $\Sigma = \Sigma_1$ προκύπτει η σχέση (1.2.1.β), δηλαδή η σ. π. π. της $N_p(\mu, \Sigma)$.

Πρόταση 1.2.5.2. Η σ. π. π. της γενικευμένης πολυδιάστατης t κατανομής με παραμέτρους θέσης και κλίμακας μ και $2\Sigma_1$, αντίστοιχα, και παραμέτρους $\lambda = 1$ και $\beta = 1$, όταν $q = \frac{m}{2}$ ανάγεται στη σ. π. π. της πολυδιάστατης t κατανομής με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ και Σ_1 , αντίστοιχα, και m βαθμούς ελευθερίας.

Απόδειξη. Θα δείξουμε δηλαδή, ότι στην περίπτωση της γενικευμένης πολυδιάστατης t με σ.

π. π. που δίνεται από τη σχέση (1.2.5.β) με μ , $\Sigma = 2\Sigma_1$, $\beta = 1$, $\lambda = 1$ και $q = \frac{m}{2}$ προκύπτει η σ.

π. π. της κλασικής πολυδιάστατης t κατανομής με παραμέτρους θέσης και κλίμακας μ και Σ_1 , αντίστοιχα και m βαθμούς ελευθερίας. Είναι τότε από τη σχέση (1.2.5.β), για $u = (x - \mu)' \Sigma_1^{-1} (x - \mu)$,

$$f\left(x; \mu, 2\Sigma_1, 1, 1, \frac{m}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} |2\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\frac{m}{2} + \frac{u}{2}\right)^{\frac{m+p}{2}}} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+p}{2}\right) \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} 2^{-\frac{p}{2}} |\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m+p}{2}} \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{\frac{m+p}{2}}}$$

ή

$$f\left(x; \mu, 2\Sigma_1, 1, 1, \frac{m}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} (\pi m)^{\frac{p}{2}} |\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-\frac{m+p}{2}}.$$

Επομένως, προέκυψε η σχέση (1.2.4.1.β) της κλασικής πολυδιάστατης t κατανομής, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας μ και Σ_1 , αντίστοιχα και m βαθμούς ελευθερίας. \square

Πρόταση 1.2.5.3. Η σ. π. π. της γενικευμένης πολυδιάστατης t κατανομής με παραμέτρους θέσης και κλίμακας μ και Σ , αντίστοιχα, και παράμετρο $\lambda = 1$, ανάγεται στη σ. π. π. της πολυδιάστατης ομοιόμορφης κατανομής, όταν $\beta \rightarrow \infty$.

Η απόδειξη γίνεται με ανάλογο τρόπο όπως αυτή των προηγούμενων δύο προτάσεων.

1.2.6 Συμμετρική Κατανομή Τύπου Kotz

Η συμμετρική κατανομή τύπου Kotz εισήχθη από τον Kotz (1975) ως μία γενίκευση της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής. Είναι μία ειδική περίπτωση της ελλειπτικής οικογένειας κατανομών με χαρακτηριστικό της γνώρισμα τις παχιές της ουρές (heavy-tails) και χρησιμεύει στη μοντελοποίηση δεδομένων τα οποία η πολυδιάστατη κανονική δε δύναται να μοντελοποιήσει με επιτυχία. Πιο συγκεκριμένα, φαίνεται να έχει εφαρμογές (βλέπε, μεταξύ άλλων, Nadarajah (2003)) στη Μπεϋζιανή Στατιστική και σε άλλους τομείς όπως η οικολογία, τα οικονομικά μαθηματικά (mathematical finance), η διαχωριστική ανάλυση, οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις (repeated measurements) και η επεξεργασία σήματος (signal processing).



Ορισμός 1.2.6. (Fang et al. (1990)) Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \sim EC_p(\mu, \Sigma, g_p)$ ακολουθεί πολυδιάστατη συμμετρική κατανομή τύπου Kotz, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής

$$g_p(u) = \frac{s\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)r^{\frac{2N+p-2}{2s}}}{\pi^{\frac{p}{2}}\Gamma\left(\frac{2N+p-2}{2s}\right)}u^{N-1}\exp(-ru^s), \quad (1.2.6.a)$$

όπου $r > 0, s > 0, 2N+p > 2, u \geq 0$.

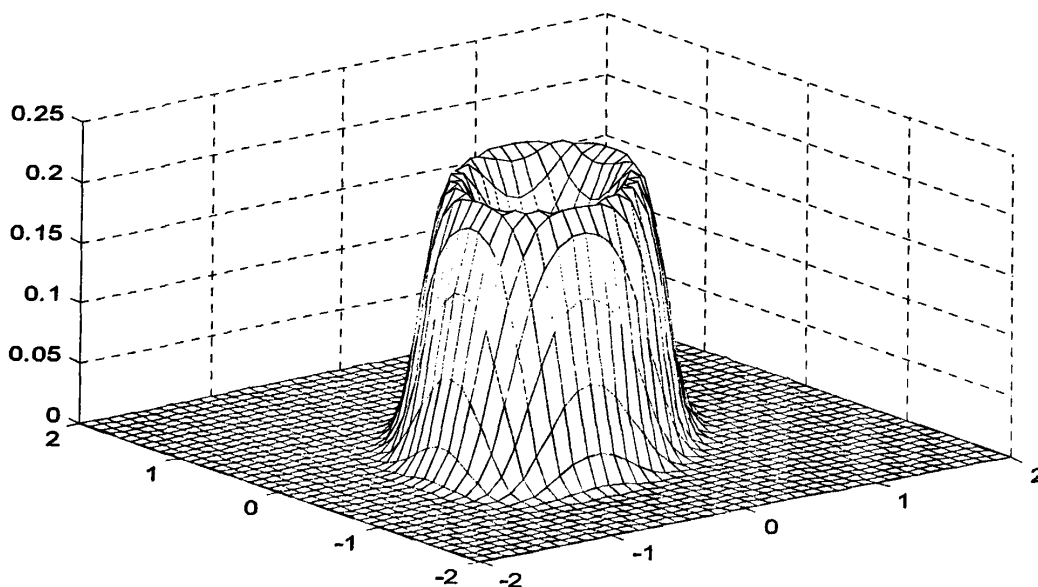
Τότε, υπό αυτούς τους περιορισμούς, η σ. π. δίνεται από τη σχέση

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{s\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)r^{\frac{2N+p-2}{2s}}}{\pi^{\frac{p}{2}}\Gamma\left(\frac{2N+p-2}{2s}\right)}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\left((\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right)^{N-1}\exp\left(-r\left[(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right]^s\right). \quad (1.2.6.b)$$

Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $\mathbf{X} \sim Kz_p(\mu, \Sigma, r, N, s)$. \square

Στην Εικόνα 8 δίνεται η γραφική παράσταση της πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$, για τιμές $-2 < x_1 < 2$ και $-2 < x_2 < 2$, στην ειδική περίπτωση που

$$r=1.5, N=1.5, s=3, \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \mu = (0,0)'$$



Εικόνα 8: Συμμετρική κατανομή τύπου Kotz

Ειδικές περιπτώσεις της συμμετρικής κατανομής τύπου Kotz αποτελούν μεταξύ άλλων η πολυδιάστατη κανονική, όταν $N = s = 1$ και $r = \frac{1}{2}$, η Laplace και η εκθετική κατανομή (βλέπε και επόμενες παραγράφους 1.2.6.1 και 1.2.6.2).

Πρόταση 1.2.6. Η σ. π. π. της πολυδιάστατης γενικευμένης t κατανομής όταν $q \rightarrow \infty$ ανάγεται στη σ. π. π. της συμμετρικής κατανομής τύπου Kotz με παραμέτρους $s = \beta$, $r = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^\beta$ και $N = 1$.

Απόδειξη. Είναι τότε από τη σχέση (1.2.5.β), για $u = (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)$,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} f(x; \mu, \Sigma, \lambda, \beta, q) = \frac{\beta \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \lambda^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2\beta}\right)} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(q + \frac{p}{2\beta}\right)}{\Gamma(q)} \frac{q^q}{\left(q + (u/\lambda)^\beta\right)^{q + \frac{p}{2\beta}}}. \quad (1.2.6.γ)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.2.4.1.δ) προκύπτει

$$\Gamma\left(q + \frac{p}{2\beta}\right) \sim \sqrt{2\pi} e^{-q} q^{q + \frac{p}{2\beta} - \frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad \Gamma(q) \sim \sqrt{2\pi} e^{-q} q^{q - \frac{1}{2}}.$$

Αρα από την (1.2.6.γ) με χρήση των παραπάνω είναι

$$\lim_{q \rightarrow \infty} f(x; \mu, \Sigma, \lambda, \beta, q) = \frac{\beta \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \lambda^{-\frac{p}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2\beta}\right)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q^{\frac{p}{2\beta}}}{q^{q + \frac{p}{2\beta}} \left(1 + \frac{\left(\frac{u}{\lambda}\right)^\beta}{q}\right)^{q + \frac{p}{2\beta}}}.$$

Συνεπώς,

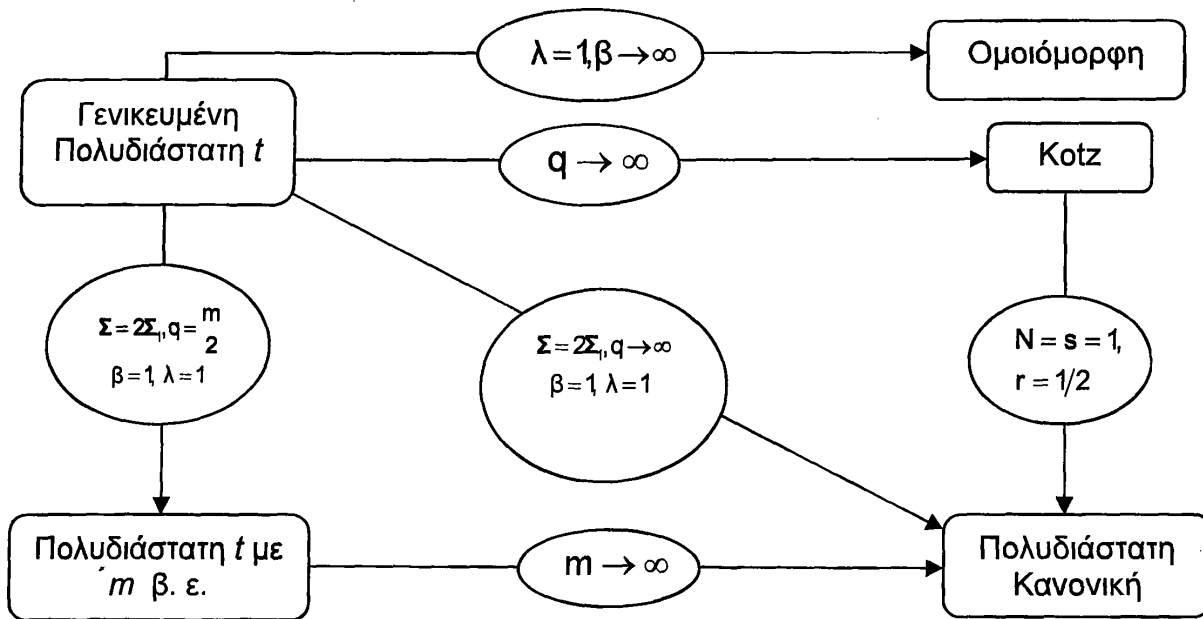
$$\lim_{q \rightarrow \infty} f(x; \mu, \Sigma, \lambda, \beta, q) = \frac{\beta \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \lambda^{-\frac{p}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2\beta}\right)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \lim_{q \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\left(\frac{u}{\lambda}\right)^\beta}{q}\right)^{-\left(q + \frac{p}{2\beta}\right)}$$

ή

$$\lim_{q \rightarrow \infty} f(x; \mu, \Sigma, \lambda, \beta, q) = \frac{\beta \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \lambda^{-\frac{p}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2\beta}\right)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{u}{\lambda}\right)^\beta}.$$

Επομένως, προέκυψε η σχέση (1.2.6.β) της Kotz κατανομής για $s = \beta$, $r = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^\beta$ και $N = 1$. □

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των παραγράφων 1.2.5 και 1.2.6 προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα, στο οποίο απεικονίζεται η σύνδεση των ακόλουθων κατανομών: της γενικευμένης πολυδιάστατης t κατανομής, της πολυδιάστατης t κατανομής, της συμμετρικής κατανομής τύπου Kotz, της πολυδιάστατης ομοιόμορφης κατανομής και της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής.



1.2.6.1 Πολυδιάστατη Laplace Κατανομή

Ένα μέλος της οικογένειας των ελλειπτικών κατανομών είναι και η πολυδιάστατη Laplace κατανομή, όπως αυτή ορίζεται στη συνέχεια. Η πολυδιάστατη Laplace κατανομή είναι ευρέως διαδεδομένη στην επεξεργασία του λόγου (speech processing) και σε «radar polarimetry», με κύριο χαρακτηριστικό τις παχιές της ουρές (βλέπε Eltoft et al. (2006)). Στη βιβλιογραφία έχουν παρουσιαστεί διάφοροι ορισμοί της πολυδιάστατης Laplace. Ο ακόλουθος ορισμός είναι αυτός που προκύπτει ως ειδική περίπτωση της πολυδιάστατης Kotz κατανομής για $N=r=1$ και $s=1/2$.

Ορισμός 1.2.6.1. Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g_p)$ ακολουθεί πολυδιάστατη Laplace κατανομή, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής

$$g_p(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}\Gamma(p)} \exp(-\|u\|), \quad (1.2.6.1.a)$$



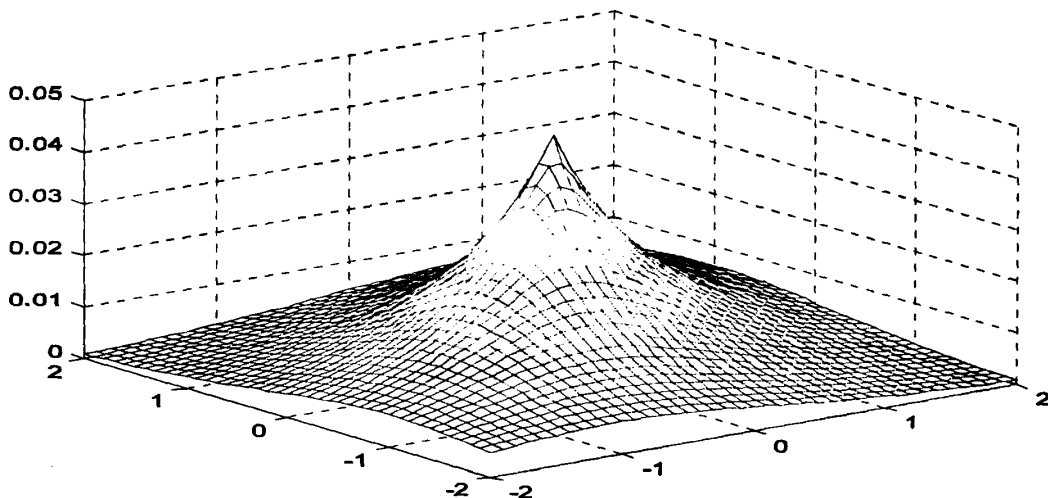
όπου $u \geq 0$ και $\|u\| = \sqrt{u'u}$. Τότε η σ. π. π. δίνεται από τη σχέση

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}\Gamma(p)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}))^{\frac{1}{2}}\right). \quad (1.2.6.1.\beta)$$

Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $X - La_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. □

Στην Εικόνα 9 δίνεται η γραφική παράσταση της πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$, για τιμές $-2 < x_1 < 2$ και $-2 < x_2 < 2$, στην ειδική περίπτωση που

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \boldsymbol{\mu} = (0, 0)'$$



Εικόνα 9: Πολυδιάστατη Laplace Κατανομή

1.2.6.2 Πολυδιάστατη Εκθετική Κατανομή

Η πολυδιάστατη Εκθετική κατανομή είναι χρήσιμη στη μοντελοποίηση επαναλαμβανόμενων μετρήσεων (repeated measurements), αφού μπορεί και συνδυάζει ελαφριές και παχιές ουρές, ενώ με αυτόν τον τρόπο μπορεί να γίνει έλεγχος για την αντοχή π.χ. υλικών (βλέπε Lindsey (1999)). Οι Gomez *et al.* (1998) ισχυρίζονται ότι εισάγουν την πολυδιάστατη εκθετική κατανομή. Όμως, αυτή η κατανομή όπως θα διαπιστωθεί έπειτα, και όπως οι Gomez *et al.* (2001, σελ. 991) παραδέχονται, δεν είναι τίποτε άλλο παρά μία ειδική περίπτωση της Kotz κατανομής (βλέπε και Kotz and Nadarajah (2001)).



Ορισμός 1.2.6.2. Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g_p)$ ακολουθεί πολυδιάστατη εκθετική κατανομή, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής

$$g_p(u) = \frac{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}}\Gamma\left(1+\frac{p}{2s}\right)2^{1+\frac{p}{2s}}}\exp\left(-\frac{1}{2}u^s\right), \quad (1.2.6.2.\alpha)$$

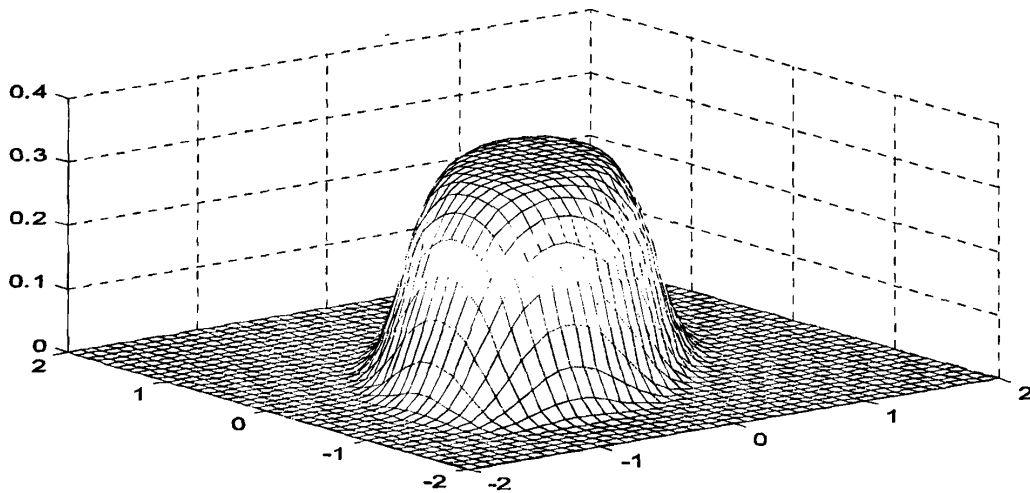
όπου $s > 0, u \geq 0$.

Τότε, υπό αυτούς τους περιορισμούς, η σ. π. π. δίνεται από τη σχέση

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}}\Gamma\left(1+\frac{p}{2s}\right)2^{1+\frac{p}{2s}}}\left|\boldsymbol{\Sigma}\right|^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}\right)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}\right)\right]^s\right). \quad (1.2.6.2.\beta)$$

Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $\mathbf{X} \sim PE_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, s)$. \square

Στην Εικόνα 10 δίνεται η γραφική παράσταση της πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$, για τιμές $-2 < x_1 < 2$ και $-2 < x_2 < 2$, στην ειδική περίπτωση που $s = 3$, $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)'$.



Εικόνα 10: Πολυδιάστατη Εκθετική Κατανομή

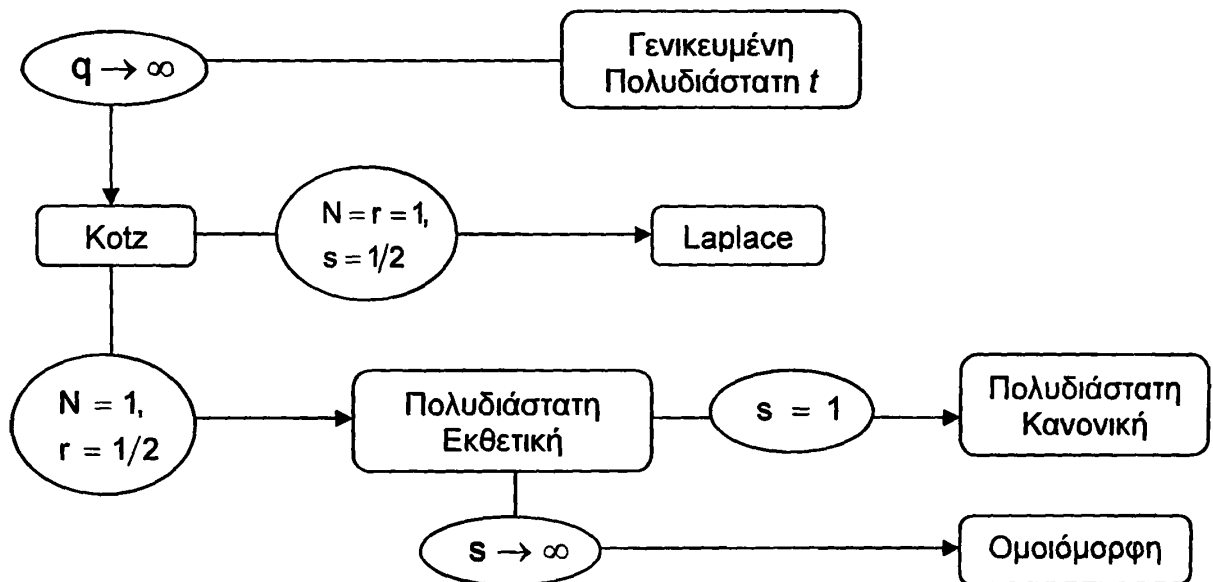
Πρόταση 1.2.6.2. α) Αποδεικνύεται ύστερα από αλγεβρικές πράξεις ότι η σ. π. π. της πολυδιάστατης Εκθετικής κατανομής με παραμέτρους $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ και s , αποτελεί ειδική περίπτωση της συμμετρικής κατανομής τύπου Kotz με παραμέτρους $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$, $r = 1/2$, $N = 1$ και s .

β) Η σ. π. π. της πολυδιάστατης Εκθετικής κατανομής με παραμέτρους μ , Σ και $s = 1$ ανάγεται στη σ. π. π. πολυδιάστατη κανονική κατανομή, καθώς τότε είναι ισοδύναμη και με τη σ. π. π. της συμμετρικής κατανομής τύπου Kotz για $N = s = 1$ και $r = 1/2$.

γ) Η σ. π. π. της πολυδιάστατης Εκθετικής κατανομής με παραμέτρους μ , Σ και $s \rightarrow \infty$ ανάγεται στην πολυδιάστατη ομοιόμορφη κατανομή. Πράγματι,

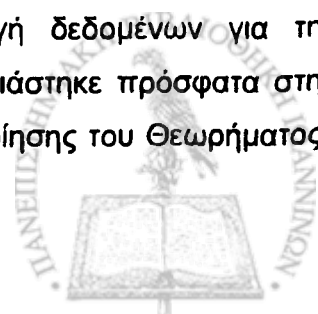
$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho \Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right)}{\pi^{\frac{\rho}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{\rho}{2s}\right) 2^{1 + \frac{\rho}{2s}}} \exp\left(-\frac{1}{2} u^s\right) = \frac{\rho \Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right)}{2 \pi^{\frac{\rho}{2}}} I_{[0,1]}(u) \cdot \square$$

Συνοψίζοντας, προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα, στο οποίο απεικονίζεται η σύνδεση της γενικευμένης πολυδιάστατης t κατανομής, της συμμετρικής κατανομής τύπου Kotz, της πολυδιάστατης Laplace κατανομής, της πολυδιάστατης Εκθετικής κατανομής, της πολυδιάστατης ομοιόμορφης κατανομής και της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής.



1.2.7 Γενικευμένη Πολυδιάστατη Slash Κατανομή

Η γενικευμένη πολυδιάστατη Slash (generalized multivariate Slash) αποτελεί γενίκευση της πολυδιάστατης Slash κατανομής έχοντας πιο παχιές ουρές από αυτήν. Αποτέλεσμα αυτής της ιδιότητας είναι η καλύτερη προσαρμογή δεδομένων για τη μοντελοποίηση οικονομικών δεδομένων. Η κατανομή αυτή παρουσιάστηκε πρόσφατα στη βιβλιογραφία από τους Arslan and Genç (2009) μέσω μιας τροποποίησης του Θεωρήματος



στοχαστικής αναπαράστασης και είναι ουσιαστικά μία μίξη κλίμακας Kotz κατανομών, όπως παρατηρείται στον ορισμό που ακολουθεί.

Ορισμός 1.2.7. (Arslan and Genc (2009)) Θεωρούμε ότι ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ ακολουθεί γενικευμένη πολυδιάστατη Slash κατανομή με παραμέτρους θέσης και κλίμακας $\boldsymbol{\mu}$ και $\boldsymbol{\Sigma}$ αντίστοιχα, όπου $\boldsymbol{\mu}$ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και $\boldsymbol{\Sigma}$ ένας $p \times p$ θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας, και παράμετρο ουράς $q > 0$, αν $\mathbf{X} = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{Y} U^{-1/q} + \boldsymbol{\mu}$, όπου $\mathbf{Y} \sim Kz_p(0, \mathbf{I}_p, N, r, s)$ ανεξάρτητο του $U \sim U(0, 1)$. Τότε η σ. π. π. του τυχαίου διανύσματος \mathbf{X} δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, q) = \begin{cases} \frac{q \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) r^{-\frac{q}{2s}}}{2\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{2N+p-2}{2s}\right)} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \gamma\left[\frac{2(N-1)+q+p}{2s}, ru^s\right] \frac{1}{u^{\frac{q+p}{2}}}, & \mathbf{x} \neq \boldsymbol{\mu} \\ \frac{qsr^{\frac{p}{2s}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}} (q+p) \Gamma\left(\frac{p}{2s}\right)} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}, & \mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}, N=1 \\ 0, & \mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}, N > 1 \\ \infty, & \mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}, N < 1, \end{cases} \quad (1.2.7.a)$$

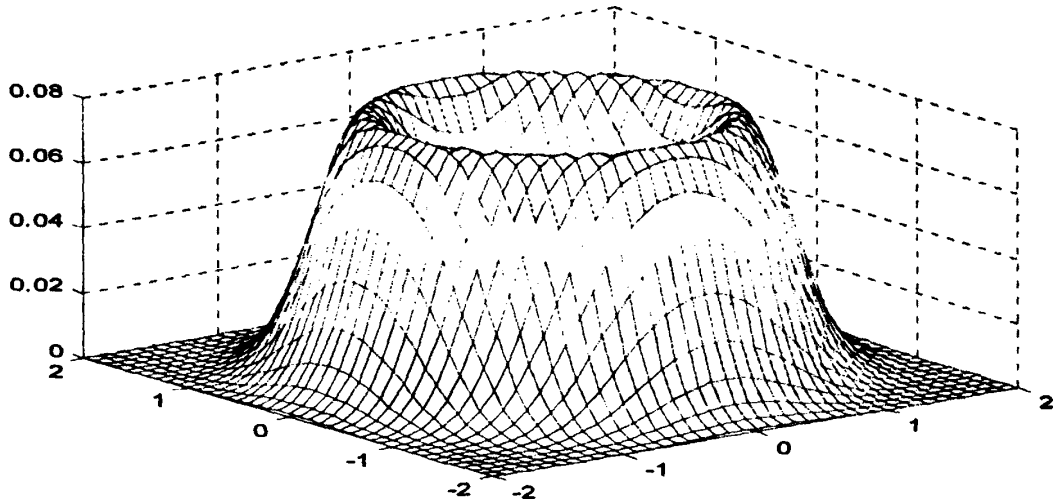
όπου $u = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \geq 0$ και $\gamma(\alpha, z) = \int_0^z t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\alpha+k}}{k! (\alpha+k)}$, είναι η ατελής γάμμα

συνάρτηση (incomplete gamma function), με $q > 0$, $r > 0$, $s > 0$ και $N > \frac{2-p}{2}$. Στην

περίπτωση αυτή συμβολίζεται $\mathbf{X} \sim \text{GSL}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, q)$. \square

Η γενικευμένη πολυδιάστατη Slash κατανομή περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις την πολυδιάστατη Slash κατανομή (βλέπε 1.2.7.1 παράγραφο), την πολυδιάστατη κανονική, την Εκθετική κατανομή και τη Laplace κατανομή.

Στην Εικόνα 11 δίνεται η γραφική παράσταση της πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^t$, για τιμές $-2 < x_1 < 2$ και $-2 < x_2 < 2$, στην ειδική περίπτωση που $r = 2$, $N = 1.5$, $q = s = 1$, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_2$ και $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)^t$.



Εικόνα 11: Γενικευμένη Πολυδιάστατη Slash κατανομή

Πρόταση 1.2.7.1. Η σ. π. π. της γενικευμένης πολυδιάστατης Slash κατανομής με παραμέτρους $\mu, \Sigma, N=1, s$ και $r=1/2$, όταν $q \rightarrow \infty$ ανάγεται στη σ. π. π. της πολυδιάστατης Εκθετικής κατανομής με παραμέτρους μ, Σ και s .

Απόδειξη. Θα αποδειχθεί ότι αν στην (1.2.7.α) της γενικευμένης Slash κατανομής, τεθεί $N=1, r=1/2$ και $q \rightarrow \infty$, προκύπτει η (1.2.6.2.β) της Εκθετικής κατανομής. Επομένως, πρέπει να υπολογιστεί το ακόλουθο όριο

$$\lim_{q \rightarrow \infty} f\left(\mathbf{x}; \mu, \Sigma, q, N=1, s, r=\frac{1}{2}\right) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q}{2s}}}{2\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2s}\right)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \frac{\gamma\left[\frac{q+p}{2s}, \frac{1}{2}u^s\right]}{u^{\frac{q+p}{2}}}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.5.33) των Abramowitz and Stegun (1972, σελ. 263), σύμφωνα με την οποία

$$\gamma(a, z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{a+n}}{(a+n)n!}, \text{ όταν } n \rightarrow \infty, \quad (1.2.7.\beta)$$

προκύπτει ότι για $q \rightarrow \infty$ ισχύει ότι $\gamma\left[\frac{q+p}{2s}, \frac{1}{2}u^s\right] \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{u^s}{2}\right)^{\frac{q+p}{2s}+n}}{\left(\frac{q+p}{2s}+n\right)n!}$.

Άρα,



$$\gamma\left[\frac{q+p}{2s}, \frac{1}{2}u^s\right] \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{u^s}{2}\right)^{\frac{q+p}{2s}+n}}{\left(\frac{q+p}{2s}+n\right)n! \left(u^s\right)^{\frac{q+p}{2s}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{u^s}{2}\right)^n}{\left(\frac{q+p}{2s}+n\right)n! 2^{\frac{q+p}{2s}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{u^s}{2}\right)^n 2s}{n! 2^{\frac{q+p}{2s}} (q+p+2sn)}$$

Οπότε το ζητούμενο όριο είναι

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} f\left(\mathbf{x}; \mu, \Sigma, q, N=1, s, r=\frac{1}{2}\right) &= \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{q}{2s}}}{2\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2s}\right)} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{u^s}{2}\right)^n 2s}{n! 2^{\frac{q+p}{2s}} (q+p+2sn)} = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2s}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2s}+1\right)}{\frac{p}{2s}}}{\pi^{\frac{p}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2s}+1\right)}{\frac{p}{2s}} 2^{\frac{p}{2s}}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{u^s}{2}\right)^n}{n!} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q}{(q+p+2sn)}. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbf{R}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\lim_{q \rightarrow \infty} f\left(\mathbf{x}; \mu, \Sigma, q, N=1, s, r=\frac{1}{2}\right) = \frac{p \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2s}+1\right) 2^{\frac{p}{2s}+1}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{u^s}{2}\right). \quad \square$$

Πρόταση 1.2.7.2. α) Η σ. π. π. της γενικευμένης πολυδιάστατης Slash κατανομής με παραμέτρους μ , Σ , $N=1$, $s=1$ και $r=1/2$ όταν $q \rightarrow \infty$ ανάγεται στη σ. π. π. της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής με παραμέτρους μ , Σ και s , καθώς τότε είναι ισοδύναμη με τη σ. π. π. της πολυδιάστατης Εκθετικής κατανομής με παραμέτρους μ , Σ και $s=1$.

β) Επιπλέον, η σ. π. π. της γενικευμένης πολυδιάστατης Slash κατανομής με παραμέτρους μ , Σ , $N=1$, και $r=1/2$ ανάγεται στη σ. π. π. της πολυδιάστατης ομοιόμορφης κατανομής, όταν $s \rightarrow \infty$ και $q \rightarrow \infty$, καθώς τότε είναι ισοδύναμη με τη σ. π. π. της πολυδιάστατης Εκθετικής κατανομής με παραμέτρους μ , Σ , όταν $s \rightarrow \infty$.

1.2.7.1 Πολυδιάστατη Slash Κατανομή

Οι Wang and Genton (2006), παρακινούμενοι από τους Lange and Sinsheimer (1993), όρισαν την πολυδιάστατη Slash κατανομή ως κατανομή του πηλίκου $Z/U^{\frac{1}{q}}$, όπου $Z \sim N_p(0, I)$ και η U ανεξάρτητη της Z και ομοιομόρφως κατανεμημένη, με στόχο τη μοντελοποίηση ακραίων καταστάσεων και τη χρήση της σε μελέτες προσομοίωσης (simulation studies) (βλέπε μεταξύ άλλων Wang and Genton (2006)).

Ορισμός 1.2.7.1. (Wang and Genton (2006)) Θεωρούμε ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $X \in \mathbb{R}^p$ που ακολουθεί πολυδιάστατη Slash κατανομή με παραμέτρους θέσης και κλίμακας μ και Σ αντίστοιχα, όπου μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας, και παράμετρο ουράς $q > 0$. Εάν $X = \Sigma^{1/2} Y U^{-1/q} + \mu$, όπου $Y \sim N_p(0, I_p)$ ανεξάρτητο του $U \sim U(0, 1)$. Τότε η σ. π. π. του τυχαίου διανύσματος X δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$f_x(x; \mu, \Sigma, q) = \begin{cases} \frac{q 2^{\frac{q+p}{2}-1} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \gamma\left[\frac{q+p}{2}, \frac{1}{2}u\right]}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} u^{\frac{q+p}{2}}}, & \mathbf{x} \neq \mu \\ \frac{q}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} (q+p)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}, & \mathbf{x} = \mu, \end{cases} \quad (1.2.7.1.a)$$

όπου $u = (\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \geq 0$ και $\gamma(\alpha, z) = \int_0^z t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\alpha+k}}{k! (\alpha+k)}$ η ατελής γάμμα συνάρτηση (incomplete gamma function). Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $X \sim SL_p(\mu, \Sigma, q)$. □

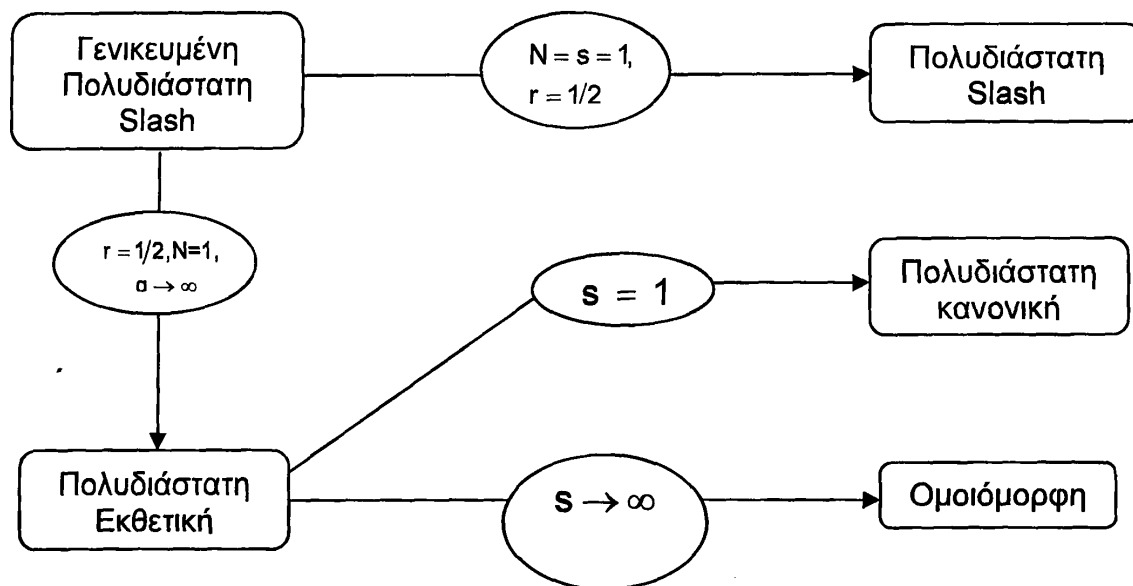
Γίνεται αντιληπτό ότι η διαφοροποίηση της γενικευμένης πολυδιάστατης Slash κατανομής έγκειται στον ορισμό της μέσω της αναπαράστασης $X = \Sigma^{1/2} Y U^{-1/q}$, όπου το $Y \sim Kz_p(0, I_p, N, r, s)$ κι όχι $Y \sim N_p(0, I_p)$.

Επιπλέον, από τους ορισμούς από τους Ορισμούς 1.2.7 και 1.2.7.1, λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη ότι η πολυδιάστατη κανονική κατανομή προκύπτει από τη συμμετρική κατανομή τύπου Kotz για $N = s = 1$ και $r = 1/2$, προκύπτει η ακόλουθη πρόταση.



Πρόταση 1.2.7.3. Η πολυδιάστατη Slash κατανομή (1.2.7.1.α) είναι ειδική περίπτωση της γενικευμένης πολυδιάστατης Slash κατανομής (1.2.7.α) για $N=1, s=1, r=1/2$. Αυτό προκύπτει εύκολα \square

Συνοψίζοντας, προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα, στο οποίο απεικονίζεται η σύνδεση της γενικευμένης πολυδιάστατης Slash κατανομής, της πολυδιάστατης Slash κατανομής, της πολυδιάστατης ομοιόμορφης κατανομής, της πολυδιάστατης Εκθετικής κατανομής και της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής.



1.2.8 Γενικευμένη Πολυδιάστατη Τροποποιημένη Bessel Κατανομή

Η γενικευμένη πολυδιάστατη τροποποιημένη Bessel (generalized multivariate modified Bessel) κατανομή είναι μία πιο γενική ελλειπτική κατανομή και περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις την πολυδιάστατη κανονική κατανομή και την πολυδιάστατη t κατανομή (βλέπε Thabane and Drekić (2003)). Εφαρμογές αυτής παρουσιάζονται σε ποικίλους τομείς, όπως για παράδειγμα σε δεδομένα αποθεμάτων αγοράς (stock market data), διύλισης και ποιότητας ελέγχου αυτών (filtering and quality control data), και στην ανάλυση τυχαίων σημάτων (analysis of random signals).

Ορισμός 1.2.8. (Thabane and Drekić (2003)) Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g_p)$ ακολουθεί γενικευμένη πολυδιάστατη τροποποιημένη Bessel κατανομή, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής

$$g_p(u) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{p}{4}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} K_\alpha(\sqrt{\lambda\psi})} \left(1 + \frac{1}{\psi}u\right)^{\frac{2\alpha-p}{4}} K_{\frac{2\alpha-p}{2}}\left(\sqrt{\lambda\psi\left(1 + \frac{1}{\psi}u\right)}\right), \quad (1.2.8.a)$$

όπου $K_\alpha(\cdot)$ η συνάρτηση Bessel 3^{ου} είδους που είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0, \quad (1.2.8.β)$$

με τις παραμέτρους να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\psi > 0, \lambda \geq 0 \text{ για } \alpha < 0,$$

$$\psi > 0, \lambda > 0 \text{ για } \alpha = 0,$$

και

$$\psi \geq 0, \lambda > 0 \text{ για } \alpha > 0.$$

Τότε η σ. π. π. δίνεται από τη σχέση

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{p}{4}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} K_\alpha(\sqrt{\lambda\psi})} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{\psi}u\right)^{\frac{2\alpha-p}{4}} K_{\frac{2\alpha-p}{2}}\left(\sqrt{\lambda\psi\left(1 + \frac{1}{\psi}u\right)}\right), \quad (1.2.8.γ)$$

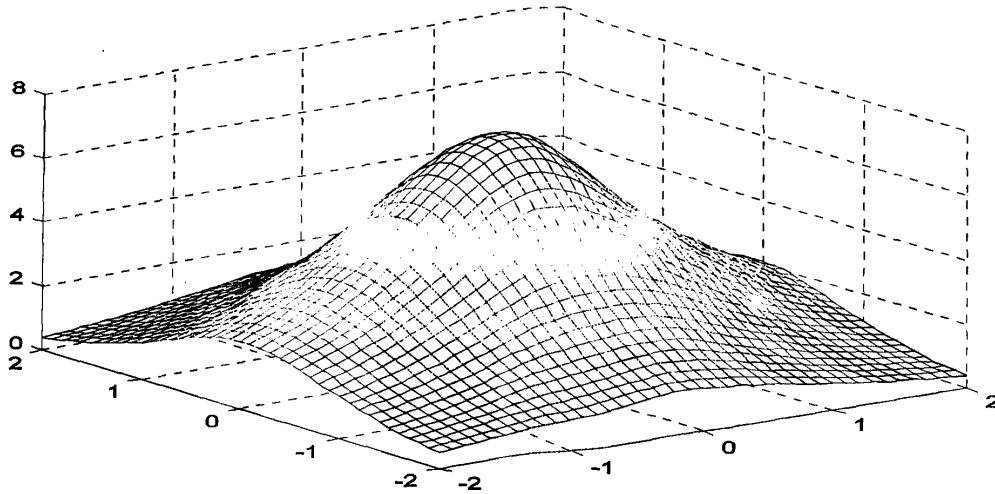
όπου $u = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \geq 0$. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $X \sim \text{GMMBD}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \psi, \lambda, \alpha)$.

□

Πλήθος ελλειπτικών κατανομών προκύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις της γενικευμένης πολυδιάστατης τροποποιημένης Bessel κατανομής. Ειδικότερα, όταν $\Sigma = I_p$,

$\psi > 0$, $\lambda > 0$ και $\alpha > \frac{p}{2}$ προκύπτει η πολυδιάστατη τροποποιημένη Bessel που προτάθηκε από τους Bhattacharya and Saxena (1989).

Στην Εικόνα 12 δίνεται η γραφική παράσταση της πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $X = (X_1, X_2)^t$, για τιμές $-2 < x_1 < 2$ και $-2 < x_2 < 2$, στην ειδική περίπτωση που $\psi = 1$, $\lambda = 1$, $\alpha = -1$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)^t$.



Εικόνα 12: Γενικευμένη πολυδιάστατη τροποποιημένη Bessel

Πρόταση 1.2.8. Η σ. π. π. της γενικευμένης πολυδιάστατης τροποποιημένης Bessel κατανομής με παραμέτρους $\mu, \Sigma, \psi = m, \lambda = 0$ και $\alpha = -\left(N - \frac{p}{2}\right)$, με $N > \frac{p}{2}$ ανάγεται στη σ. π. π. της συμμετρικής κατανομής Pearson τύπου VII με παραμέτρους μ, Σ και m .

Απόδειξη. Θα αποδειχθεί ότι στην περίπτωση της γενικευμένης πολυδιάστατης τροποποιημένης Bessel κατανομής με σ. π. π. που δίνεται από τη σχέση (1.2.8.γ) με $\mu, \Sigma, \lambda = 0, N > \frac{p}{2}$ και $\alpha = -\left(N - \frac{p}{2}\right)$ προκύπτει η σ. π. π. της συμμετρικής κατανομής Pearson τύπου VII. Είναι από τη σχέση (1.2.8.γ)

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \left((2\pi)^{\frac{p}{2}} K_{-\left(N - \frac{p}{2}\right)}(\sqrt{\lambda\psi}) \right)^{-1} \left(\frac{\lambda}{\psi} \right)^{\frac{p}{4}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{\psi} \mathbf{u} \right)^{\frac{N}{2}} K_N \left(\sqrt{\lambda\psi \left(1 + \frac{1}{\psi} \mathbf{u} \right)} \right).$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $K_{-v}(z) = K_v(z)$ (βλέπε, μεταξύ άλλων, Thabane and Haq (2003)) προκύπτει ότι:

$$K_{-N} \left(\sqrt{\lambda\psi \left(1 + \frac{1}{\psi} \mathbf{u} \right)} \right) = K_N \left(\sqrt{\lambda\psi \left(1 + \frac{1}{\psi} \mathbf{u} \right)} \right) \text{ και } K_{-\left(N - \frac{p}{2}\right)}(\sqrt{\lambda\psi}) = K_{N - \frac{p}{2}}(\sqrt{\lambda\psi}).$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (9.6.9) των Abramowitz and Stegun (1972, p. 375)

$$K_v(z) \sim \frac{1}{2} \Gamma(v) \left(\frac{1}{2} z \right)^{-v}, \quad z \rightarrow 0, v > 0, \tag{1.2.8.δ}$$

για $\psi \rightarrow 0$ προκύπτει ότι



$$K_N \left(\sqrt{\lambda \psi \left(1 + \frac{1}{\psi} u \right)} \right) \sim \frac{1}{2} \Gamma(N) \left(\frac{1}{2} \right)^{-N} \left(\lambda \psi \left(1 + \frac{1}{\psi} u \right) \right)^{\frac{N}{2}},$$

και

$$K_{N-\frac{p}{2}}(\sqrt{\lambda \psi}) \sim \frac{1}{2} \Gamma\left(N - \frac{p}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{-N+\frac{p}{2}} (\lambda \psi)^{\frac{N-p}{2+4}}.$$

Άρα η σ. π. π. γίνεται

$$\begin{aligned} f_x(\mathbf{x}) &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{p}{4}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \frac{1}{2} \Gamma\left(N - \frac{p}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{-N+\frac{p}{2}} (\lambda \psi)^{\frac{N-p}{2+4}}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{\psi} u\right)^{\frac{N}{2}} \frac{1}{2} \Gamma(N) \left(\frac{1}{2}\right)^{-N} \left(\lambda \psi \left(1 + \frac{1}{\psi} u\right)\right)^{\frac{N}{2}} = \\ &= \frac{\Gamma(N)}{(\psi \pi)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(N - \frac{p}{2}\right)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{\psi} u\right)^{-N}. \end{aligned}$$

Άρα προέκυψε η σ. π. π. της συμμετρικής κατανομής Pearson τύπου VII (βλέπε σχέση (1.2.4.β)) με παραμέτρους μ, Σ, ψ, N . □

Από την Pearson τύπου VII για $N = \frac{p+m}{2}$ έχουμε δει στην ενότητα 1.2.4.1 ότι προκύπτει η πολυδιάστατη t κατανομή. Επομένως,

$$\text{GMMBD}_p \left(\mu, \Sigma, \psi = m, \lambda = 0, \alpha = -\frac{m}{2}, N = \frac{p+m}{2} \right) \equiv \text{Mt}_p(\mu, \Sigma, m),$$

αφού τότε $\alpha = -\left(N - \frac{p}{2}\right) = -\left(\frac{p+m}{2} - \frac{p}{2}\right) = -\frac{m}{2}$. Επιπλέον, λόγω της σχέσης της πολυδιάστατης t κατανομής με την Cauchy κατανομή προκύπτει ότι:

$$\text{GMMBD}_p \left(\mu, \Sigma, \psi = 1, \lambda = 0, \alpha = -\frac{1}{2}, N = \frac{p+1}{2} \right) \equiv \text{MC}_p(\mu, \Sigma).$$

1.2.8.1 Πολυδιάστατη Bessel Κατανομή

Ορισμός 1.2.8.1. (Fang *et al.* (1990)) Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\mu, \Sigma, g_p)$, λέμε ότι ακολουθεί πολυδιάστατη Bessel κατανομή, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής

$$g_p(u) = \frac{1}{2^{\alpha+p-1} \pi^{\frac{p}{2}} b^p \Gamma\left(\alpha + \frac{p}{2}\right)} \left(\frac{1}{b} u^{\frac{1}{2}}\right)^{\alpha} K_{\alpha}\left(\frac{1}{b} u^{\frac{1}{2}}\right), \quad (1.2.8.1.a)$$



όπου $\alpha > -\frac{p}{2}$, $b > 0$, $u \geq 0$.

Τότε, υπό αυτές τις συνθήκες, η σ. π. π. δίνεται από τη σχέση

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2^{\alpha+p-1} \pi^{\frac{p}{2}} b^p \Gamma\left(\alpha + \frac{p}{2}\right)} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{b} u^{\frac{1}{2}}\right)^{\alpha} K_{\alpha}\left(\frac{1}{b} u^{\frac{1}{2}}\right), \quad (1.2.8.1.\beta)$$

όπου $u = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $\mathbf{X} \sim \text{Bessel}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, b, \alpha)$. □

Η πολυδιάστατη Bessel κατανομή όπως αυτή ορίστηκε στον Ορισμό 1.2.8.1, αποτελεί ειδική περίπτωση της γενικευμένης πολυδιάστατης τροποποιημένης Bessel κατανομής. Ειδικότερα, η πολυδιάστατη Bessel κατανομή προκύπτει από τη γενικευμένη πολυδιάστατη τροποποιημένη Bessel για $\psi = 0$, $\lambda > 0$ και $\alpha > 0$.

Πρόταση 1.2.8.1. Η σ. π. π. της γενικευμένης πολυδιάστατης τροποποιημένης Bessel κατανομής με παραμέτρους $\boldsymbol{\mu}$, Σ , $\psi = 0$, λ και α ανάγεται στη σ. π. π. της πολυδιάστατης Bessel κατανομής με παραμέτρους $\boldsymbol{\mu}$, Σ , $b = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ και $\frac{2\alpha-p}{2}$.

Απόδειξη. Από τη σ. π. π. της γενικευμένης πολυδιάστατης τροποποιημένης Bessel (1.2.8.β) για $\psi = 0$ η συνάρτηση Bessel 3^{ου} είδους γίνεται

$$K_{\frac{2\alpha-p}{2}}\left(\sqrt{\lambda\psi\left(1+\frac{1}{\psi}u\right)}\right) = K_{\frac{2\alpha-p}{2}}(\sqrt{\lambda u}), \quad \text{ενώ από τη σχέση (1.2.8.δ) έχουμε ότι}$$

$$K_{\alpha}(\sqrt{\lambda\psi}) \sim \frac{1}{2} \Gamma(\alpha) \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} (\lambda\psi)^{-\frac{\alpha}{2}}. \quad \text{Συνεπώς, η σ. π. π. (1.2.8.γ) γίνεται}$$

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\lambda^{\frac{p}{4}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \frac{1}{2} \Gamma(\alpha) \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} \lambda^{\frac{\alpha}{2}}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \frac{\left(1+\frac{1}{\psi}u\right)^{\frac{2\alpha-p}{4}}}{\psi^{\frac{p-\alpha}{2}}} K_{\frac{2\alpha-p}{2}}(\sqrt{\lambda u}),$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) &= \frac{\lambda^{\frac{p+\alpha}{4}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} 2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{2\alpha-p}{4}} \left(1+\frac{1}{\psi}u\right)^{\frac{2\alpha-p}{4}} K_{\frac{2\alpha-p}{2}}(\sqrt{\lambda u}) = \\ &= \frac{\lambda^{\frac{p+\alpha}{4}}}{\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma(\alpha) 2^{\frac{p+\alpha-1}{2}}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} (\psi+u)^{\frac{2\alpha-p}{4}} K_{\frac{2\alpha-p}{2}}(\sqrt{\lambda u}). \end{aligned}$$

Επομένως, για $\psi = 0$ είναι

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\lambda^{\frac{p}{2} + \frac{\alpha}{2}}}{\pi^2 \Gamma(\alpha) 2^{\frac{p}{2} + \alpha - 1}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{2\alpha-p}{4}} K_{\frac{2\alpha-p}{2}}(\sqrt{\lambda u}) = \frac{\lambda^{\frac{2\alpha+p}{4}} u^{\frac{2\alpha-p}{4}}}{\pi^2 \Gamma(\alpha) 2^{\frac{p+2\alpha-2}{2}}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} K_{\frac{2\alpha-p}{2}}(\sqrt{\lambda u}).$$

Η τελευταία σχέση δεν είναι τίποτε άλλο παρά η $Bessel_p\left(\mu, \Sigma, \lambda^{\frac{1}{2}}, \frac{2\alpha-p}{2}\right)$. Πράγματι από τη σχέση (1.2.8.1.β) είναι

$$\begin{aligned} f_x(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2^{\frac{2\alpha-p}{2} + p - 1} \pi^2 \left(\lambda^{\frac{1}{2}}\right)^p \Gamma\left(\frac{2\alpha-p}{2} + \frac{p}{2}\right)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} u^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2\alpha-p}{2}} K_{\frac{2\alpha-p}{2}}\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} u^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= \frac{\lambda^{\frac{2\alpha+p}{4}} u^{\frac{2\alpha-p}{4}}}{2^{\frac{p+2\alpha-2}{2}} \pi^2 \Gamma(\alpha)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} K_{\frac{2\alpha-p}{2}}(\sqrt{\lambda u}). \quad \square \end{aligned}$$

1.2.9 Πολυδιάστατη Γενικευμένη Υπερβολική Κατανομή

Η πολυδιάστατη γενικευμένη Υπερβολική κατανομή εισήχθη από τον Barndoff-Nielsen (1977) και εφαρμόζεται σε πολλά επιστημονικά πεδία. Χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή στοχαστικών διαδικασιών σε καταστάσεις αναταραχής (turbulence) από τους Barndoff-Nielsen *et al.* (1989), ενώ ο Eberlein (2001) προτείνει τη χρήση της για τη διαχείριση οικονομικών κρίσεων (βλέπε Protasson (2004)). Οι Eberlein and Keller (1995) έδειξαν πως η Υπερβολική κατανομή μπορεί να μοντελοποιήσει τα αποθέματα και τα καθημερινά έσοδα μιας επιχείρησης (βλέπε Barndoff-Nielsen (1997)). Η γενικευμένη Υπερβολική κατανομή αντικαθιστά την κανονική κατανομή λόγω των παχιών ουρών της (fat tails) κι έτσι μπορεί να δώσει πιο ακριβή αποτελέσματα. Κατανομές όπως για παράδειγμα η t κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας και η κανονική κατανομή αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της.

Ορισμός 1.2.9. (Schmidt *et al.* (2006)) Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \sim EC_p(\mu, \Sigma, g_p)$ ακολουθεί πολυδιάστατη γενικευμένη υπερβολική κατανομή, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής

$$g_p(u) = \frac{(\lambda\psi)^{-\frac{\alpha}{2}} \psi^{\frac{p}{2}} K_{\frac{\alpha-p}{2}}(\sqrt{\psi(\lambda+u)})}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} K_{\alpha}(\sqrt{\lambda\psi}) \left(\sqrt{\psi(\lambda+u)}\right)^{\frac{p}{2}-\alpha}}, u \geq 0, \quad (1.2.9.a)$$



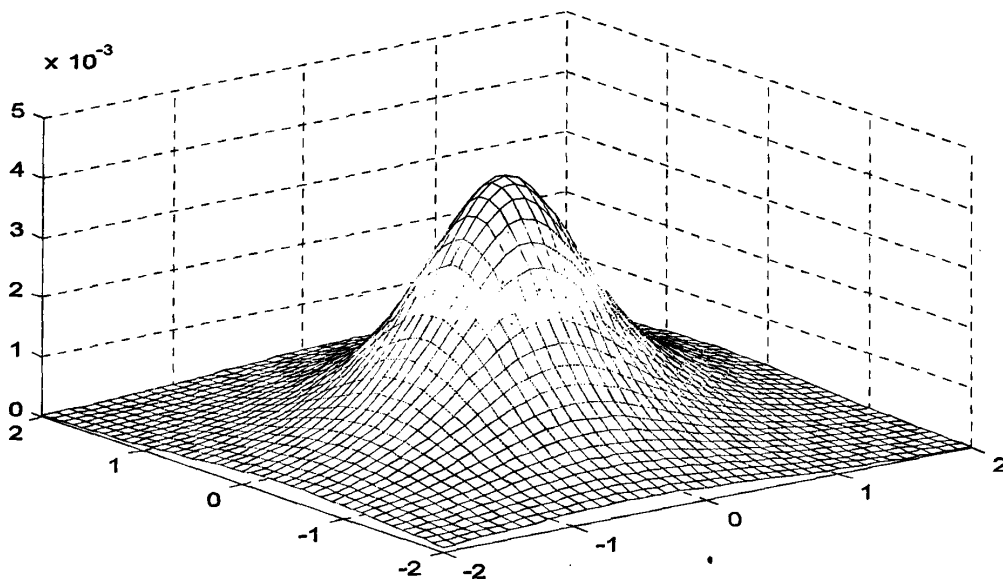
όπου $K_\alpha(\cdot)$ η συνάρτηση Bessel 3^{ου} είδους όπως αυτή ορίστηκε ως λύση της σχέσης (1.2.8.β).

Τότε η σ. π. π. δίνεται από τη σχέση

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{(\lambda\psi)^{\frac{\alpha}{2}} \psi^{\frac{p}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} K_\alpha(\sqrt{\lambda\psi})} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \frac{K_{\frac{\alpha-p}{2}}\left(\sqrt{\psi(\lambda + (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}))}\right)}{\left(\sqrt{\psi(\lambda + (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}))}\right)^{\frac{p-\alpha}{2}}}. \quad (1.2.9.\beta)$$

Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $\mathbf{X} \sim \text{MGH}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \psi, \lambda, \alpha)$. □

Στην Εικόνα 13 δίνεται η γραφική παράσταση της πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^t$, για τιμές $-2 < x_1 < 2$ και $-2 < x_2 < 2$, στην ειδική περίπτωση που $\psi = 1$, $\lambda = 1$, $\alpha = -1$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)^t$.



Εικόνα 13: Πολυδιάστατη Γενικευμένη Υπερβολική Κατανομή

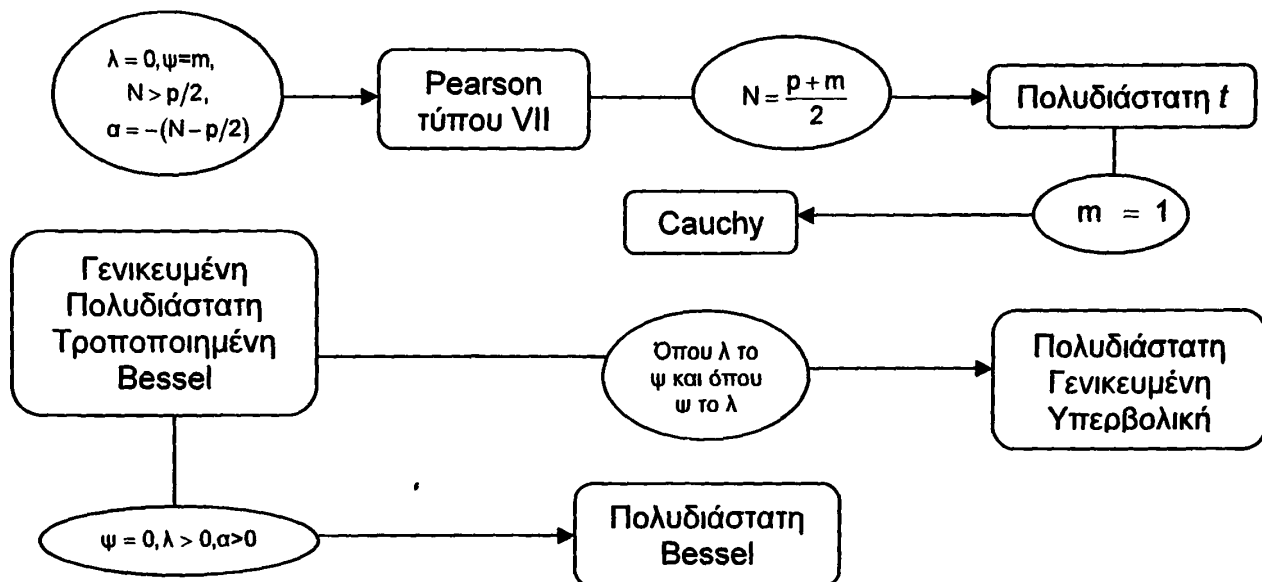
Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι $\text{MGH}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \psi, \lambda, \alpha) \equiv \text{GMMBD}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \lambda, \psi, \alpha)$, αφού από τη σχέση (1.2.8.β) της γενικευμένης πολυδιάστατης τροποποιημένης Bessel κατανομής, προκύπτει ότι

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\left(\frac{\psi}{\lambda}\right)^{\frac{p}{4}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} K_\alpha(\sqrt{\lambda\psi})} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{\lambda} u\right)^{\frac{2\alpha-p}{4}} K_{\frac{2\alpha-p}{2}}\left(\sqrt{\lambda\psi\left(1 + \frac{1}{\lambda} u\right)}\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\psi^{\frac{p}{4}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \lambda^{\frac{p}{4}} \left(1 + \frac{1}{\lambda} u\right)^{\frac{p-2\alpha}{4}} K_{\alpha}(\sqrt{\lambda\psi})} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} K_{\frac{2\alpha-p}{2}}(\sqrt{\psi(\lambda+u)}) = \\
 &= \frac{\psi^{\frac{p}{4}} \lambda^{\frac{p-2\alpha}{4}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \lambda^{\frac{p}{4}} (\lambda+u)^{\frac{p-\alpha}{4}} K_{\alpha}(\sqrt{\lambda\psi})} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} K_{\frac{2\alpha-p}{2}}(\sqrt{\psi(\lambda+u)}) = \\
 &= \frac{(\lambda\psi)^{-\frac{\alpha}{2}} \psi^{\frac{p}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} K_{\alpha}(\sqrt{\lambda\psi})} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \frac{K_{\frac{\alpha-p}{2}}(\sqrt{\psi(\lambda+u)})}{(\sqrt{\psi(\lambda+u)})^{\frac{p-\alpha}{2}}}.
 \end{aligned}$$

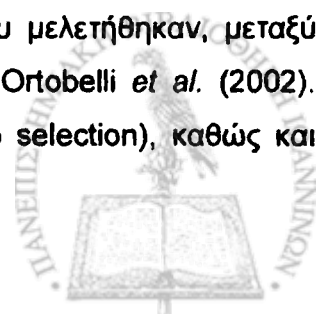
Άρα, προέκυψε η σ. π. π. της γενικευμένης υπερβολικής κατανομής (1.2.9.β), $MGH_p(\mu, \Sigma, \psi, \lambda, \alpha)$.

Συνοψίζοντας, προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα, στο οποίο απεικονίζεται η σύνδεση των κατανομών γενικευμένη πολυδιάστατη τροποποιημένη Bessel κατανομή, συμμετρική κατανομή Pearson τύπου VII, πολυδιάστατη t κατανομή, Cauchy κατανομή, πολυδιάστατη γενικευμένη Υπερβολική κατανομή, και πολυδιάστατη Bessel κατανομή.



1.2.10 Πολυδιάστατη Sub-Gaussian α -stable Κατανομή

Η Sub-Gaussian α -stable κατανομή είναι μία ειδική περίπτωση τόσο των ελλειπτικών κατανομών όσο και της εκτεταμένης κλάσης stable κατανομών που μελετήθηκαν, μεταξύ άλλων, από τους Rachev and Mittnik (2000), όπως αναφέρουν οι Ortobelli *et al.* (2002). Εφαρμόζεται, μεταξύ άλλων, για την εκλογή χαρτοφύλακα (portfolio selection), καθώς και στην επεξεργασία σήματος (signal processing).



Ορισμός 1.2.10. (Frahm et al. (2003)) Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$ ακολουθεί Sub-Gaussian α -stable, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, $\boldsymbol{\mu}$ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και $\boldsymbol{\Sigma}$ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ ένας θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας, αν η χαρακτηριστική συνάρτηση $\psi(\mathbf{t})$ του \mathbf{X} , δίνεται από τη σχέση

$$\psi(\mathbf{t}) = \exp(it^T \boldsymbol{\mu}) \exp\left(-\left(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right), \text{ όπου } 0 < \alpha \leq 2, \text{ με } \alpha \text{ την παράμετρο σχήματος (shape parameter).}$$

Τότε η σ. π. π. με τη βοήθεια του πολυδιάστατου Fourier μετασχηματισμού είναι της μορφής

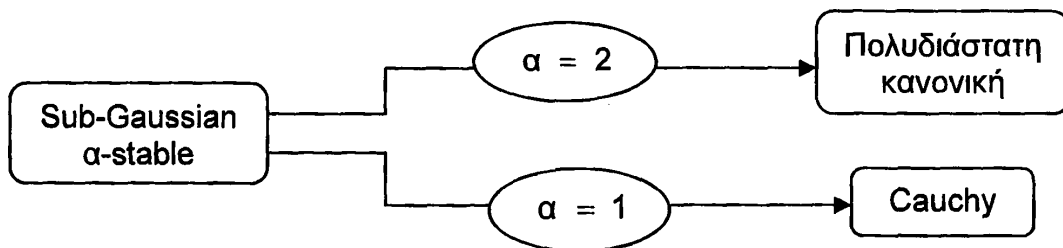
$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{R}^p} \exp\left(-\left(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right) \cos(\mathbf{t}^T \mathbf{x}) d\mathbf{t}, \quad 0 < \alpha \leq 2. \quad (1.2.10.a)$$

Κλειστή μορφή της σ. π. π. αυτών δεν είναι διαθέσιμη παρά μόνο για ειδικές περιπτώσεις. Ειδικότερα, για $\alpha = 2$ προκύπτει η χαρακτηριστική συνάρτηση της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής, αφού (βλέπε Tsihrintzis and Nikias (1997))

$$\psi(\mathbf{t}) = \exp(it^T \boldsymbol{\mu}) \exp\left(-\left(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}\right)\right) = \exp\left(it^T \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}\right),$$

ενώ για $\alpha = 1$ προκύπτει η χαρακτηριστική συνάρτηση της Cauchy κατανομής, αφού

$$\psi(\mathbf{t}) = \exp(it^T \boldsymbol{\mu}) \exp\left(-\left(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \exp\left(it^T \boldsymbol{\mu} - \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}}\right) = \exp(it^T \boldsymbol{\mu} - g|\mathbf{t}|).$$



1.2.11 Μίξη Κλίμακας Κανονικών Κατανομών

Η μίξη κλίμακας κανονικών κατανομών είναι μία πολύ σημαντική κλάση της οικογένειας των ελλειπτικών κατανομών, αφού έχει το γνώρισμα να υιοθετεί ιδιότητες της πολυδιάστατης κανονικής. Όπως αναφέρουν οι Buckley et al. (2008), βρίσκει εφαρμογή σε

πολλούς τομείς όπως στην προσομοίωση μεθόδων στην Μπεϋζιανή ανάλυση και στη θεωρία του χαρτοφύλακα (portfolio theory).

Ορισμός 1.2.11. (Koutras (1992)) Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^t$, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, $\boldsymbol{\mu}$ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και $\boldsymbol{\Sigma}$ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας, ακολουθεί μίξη κλίμακας κανονικών κατανομών (scale mixture of normal distributions), εάν η σ. π. π. του δίνεται από τη σχέση

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} t^{-p} \exp\left(-\frac{1}{2} t^{-2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right) dG(t), \quad (1.2.11.a)$$

όπου $G(t)$ είναι μία αθροιστική συνάρτησης κατανομής, τέτοια ώστε $G(0)=0$. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $\mathbf{X} \sim \text{SMN}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, G)$. □

Η οικογένεια των μίξεων κλίμακας κανονικών κατανομών παρότι δεν καλύπτει ολόκληρο το φάσμα των ελλειπτικών κατανομών είναι αρκετά μεγάλη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι με κατάλληλες επιλογές της α. σ. κ., $G(\cdot)$, προκύπτουν ειδικές ελλειπτικές κατανομές, όπως η Pearson τύπου VII, η πολυδιάστατη t και Cauchy, η πολυδιάστατη Laplace κ.ά. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε, μεταξύ άλλων, στους Koutras (1992) και Gomez *et al.* (2006).

1.2.12 Πολυδιάστατη Logistic Κατανομή

Οι Pearl and Reed (1920) με τη χρήση της Logistic κατανομής μελέτησαν την ανάπτυξη πληθυσμών (population growth), ενώ ο Plackett (1959) σε συνδυασμό με τα λογοκριμένα δεδομένα τη χρησιμοποίησε για την ανάλυση δεδομένων ζωής (analysis of life test data). Επιπλέον, οι Berkson and Hodges (1960) χρησιμοποίησαν την κατανομή αυτή ως μοντέλο για τη βιολογική ανάλυση (bioassay), καθώς και σε άλλα πειράματα όπως την κβαντική αντίδραση (quantal response). Ειδικότερα, ο Dubey (1969) απέδειξε πως η Logistic κατανομή είναι μία σύνθεση της εκθετικής κατανομής, γεγονός που βοηθά στον ορισμό της πολυδιάστατης logistic κατανομής (βλέπε Henrick and Bovas (1973)).

Ορισμός 1.2.12. (Landsman and Valdez (2003)) Ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g_p)$, λέμε ότι ακολουθεί πολυδιάστατη Logistic κατανομή, αν έχει γεννήτορα πυκνότητας της μορφής



$$g_p(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \left(\int_0^\infty x^{\frac{p}{2}-1} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx \right)^{-1} \frac{e^{-\frac{1}{2}u}}{\left(1+e^{-\frac{1}{2}u}\right)^2}, u \geq 0. \quad (1.2.12.a)$$

Τότε η σ. π. π. δίνεται από τη σχέση

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \left(\int_0^\infty x^{\frac{p}{2}-1} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx \right)^{-1} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)}{\left(1 + \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)\right)^2}. \quad (1.2.12.β)$$

Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται $\mathbf{X} \sim ML_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. □

1.3 Εφαρμογές των Ελλειπτικών Κατανομών

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην προηγούμενη παράγραφο, οι ελλειπτικές κατανομές χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν και να περιγράψουν φαινόμενα τα οποία η πολυδιάστατη κανονική κατανομή αποτυγχάνει να περιγράψει σε ικανοποιητικό βαθμό. Πολλοί συγγραφείς, όπως οι Eberlein and Keller (1995), Fama (1965), Frahm *et al.* (2003) ισχυρίζονται πως η κανονική κατανομή δεν μπορεί να εφαρμοστεί στον κλάδο των οικονομικών (βλέπε Frahm (2004)). Το γεγονός ότι η οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις τόσο πλατύκυρτες όσο και λεπτόκυρτες κατανομές, καθιστά δυνατή την εφαρμογή των ελλειπτικών κατανομών σε πλήθος πραγματικών προβλημάτων στα οικονομικά και σε διάφορα επιστημονικά πεδία. Στο πλαίσιο αυτό, σ' αυτήν την παράγραφο παρατίθενται κάποιες πρόσθετες εφαρμογές των κυριότερων ελλειπτικών κατανομών που έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία.

Από πρακτικής άποψης, η οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών φαίνεται ιδιαίτερα χρήσιμη εκτός από τον κλάδο της στατιστικής, σε αυτόν της οικονομετρίας και των χρηματοοικονομικών. Παρέχει, για παράδειγμα, τη δυνατότητα μοντελοποίησης παρατηρήσεων που αφορούν το ρυθμό απόδοσης κοινών χρηματιστηριακών μετοχών ή γενικότερα οικονομικών δεδομένων. Το πλεονέκτημα της χρήσης των ελλειπτικών πολυδιάστατων κατανομών είναι οι ελλειψοειδείς επιφάνειες, όπως η πολυδιάστατη κανονική και η πολυδιάστατη t κατανομή, όπου ο πίνακας συσχέτισης περιγράφει ικανοποιητικά τη δομή εξάρτησης από το ρίσκο (βλέπε Buckley *et al.* (2008)). Οι πλατύκυρτες κατανομές όπως η t και οι slash κατανομές είναι πολύ δημοφιλείς στη στατιστική ανάλυση, αφού μπορούν να παραχθούν ως μίξη κλίμακας κανονικών κατανομών. Σύμφωνα με τους

Embrechts *et al.* (2002), οι ελλειπτικές κατανομές αποτελούν ένα σημαντικό παράγοντα όχι μόνο για τη διαχείριση ρίσκων, αλλά και για τις αναλογιστικές επιστήμες. Για παράδειγμα, οι Owen and Rabinovitch (1983) μελετούν τον αντίκτυπο αυτής της οικογένειας στη θεωρία χαρτοφυλακίου (portfolio theory). Γενικότερα, οι ελλειπτικές κατανομές έχουν χρησιμοποιηθεί, μεταξύ άλλων, σε προβλήματα βολών (Laurent (1974)), ποιοτικού ελέγχου (quality control, Chu (1973)), ανάλυσης τυχαιών σημάτων (analysis of random signals, McGraw and Wagner (1968)) και επικοινωνιών (Goldman (1974)).

Από το 1990, η ελλειπτική κατανομή τύπου Kotz προσέλκυσε πολλές εφαρμογές σε πολλά πεδία, όπως στη Μπεϋζιανή στατιστική (Bayesian statistics) (Arellano-Valle *et al.* (2002)), στη διαχωριστική ανάλυση (discriminant analysis) (Cacoullos and Koutras (1985, 1997), Koutras (1987)), στα μαθηματικά οικονομικά (mathematical finance) (Bingham and Kiesel (2002)) και στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις (repeated measurements) (Lindsey (1999)). Επιπλέον, η σπουδαιότητα της ελλειπτικής κατανομής Pearson τύπου VII είναι φανερή τόσο στην κλασική όσο και στην Μπεϋζιανή στατιστική (βλέπε Nadarajah (2006b)). Εξαιτίας των ρεαλιστικών ουρών της έχει επιφέρει καινοτομίες σε πεδία όπως η ανάλυση κατά συστάδες, η διαχωριστική ανάλυση, τα ελλιπή σύνολα δεδομένων (missing data), η πολλαπλή παλινδρόμηση (multiple regression), η βελτιστοποίηση χαρτοφύλακα (portfolio optimization) και η αναγνώριση ομιλίας (speech recognition), όπου για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στους Johnson (1987), Fang *et al.* (1990) και Kotz and Nadarajah (2004). Η πολυδιάστατη t κατανομή από την άλλη, επιτρέπει τη μοντελοποίηση τυχαιών φαινομένων που εμπεριέχουν υψηλή πιθανότητα στα άκρα και αποτελεί χρήσιμο μοντέλο για τις οικονομικές και για τις ασφαλιστικές επιστήμες. Για παράδειγμα, οι Sutradhar and Ali (1986) τη χρησιμοποίησαν για την επίλυση χρηματοοικονομικών προβλημάτων.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εκτιμητική

Μέχρι τώρα αναφέρθηκαν οι κυριότερες κατανομές που ανήκουν στην ελλειπτική οικογένεια κατανομών. Αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού είναι η εκτιμητική για τις παραμέτρους θέσης και κλίμακας της ελλειπτικής κατανομής $EC_p(\mu, \Sigma, g_p)$ και η μελέτη των ιδιοτήτων των εκτιμητών αυτών. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που αφορούν:

- την εύρεση των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π.) των άγνωστων παραμέτρων θέσης και κλίμακας ελλειπτικής κατανομής, καθώς και συναρτήσεων αυτών, όπως είναι για παράδειγμα ο συντελεστής συσχέτισης, και
- τις ιδιότητες των Ε.Μ.Π., όπως είναι η αμεροληψία (unbiasedness), η επάρκεια (sufficiency), η πληρότητα (completeness), και η συνέπεια (consistency).

2.1. Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας των μ και Σ

Στην παράγραφο αυτή θα προσδιοριστούν οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θέσης και κλίμακας μ και Σ αντίστοιχα μιας ελλειπτικής κατανομής με σ. π. π. που δίνεται από τη σχέση:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} g_p \left[(\mathbf{x} - \mu)^t \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right].$$

Στο πλαίσιο αυτό στη στατιστική βιβλιογραφία έχουν εμφανιστεί δύο δειγματοληπτικά σχήματα, υπό τα οποία προσδιορίζονται οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων. Στη συνέχεια, παρατίθενται τα δύο αυτά δειγματοληπτικά σχήματα, επισημαίνοντας κάποιες διαφορές τους, τα όποια πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματά τους.

I. Θεωρούμε n το πλήθος p -διάστατες παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots, X_n , τέτοιες ώστε $X_i \sim EC_p(\mu, \Sigma, g_p)$, $i=1, 2, \dots, n$, και έστω \mathbf{X} ο $n \times p$ τυχαίος πίνακας $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις X_i , $i=1, 2, \dots, n$, είναι ασυσχέτιστες και ότι ο \mathbf{X} έχει πυκνότητα. Τότε (βλέπε, μεταξύ άλλων, Anderson *et al.* (1986)) η σ. π. π. του είναι της μορφής

$$|\Sigma|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \right]. \quad (2.1.1)$$

Η σχέση (2.1.1) δεν είναι τίποτε άλλο παρά η από κοινού ελλειπτική κατανομή των $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας $\boldsymbol{\mu}_n^t$ και $\Sigma \otimes I_n$, αντίστοιχα, όπου $\boldsymbol{e}_n^t = (1, 1, \dots, 1)$ το n -διάστατο διάνυσμα με όλες τις συνιστώσες μονάδα, I_n ο ταυτοτικός πίνακας τάξης n και με \otimes συμβολίζουμε το γινόμενο Kronecker των αντίστοιχων πινάκων. Συνεπώς, η σχέση (2.1.1) μπορεί να θεωρηθεί ως μία ελλειπτική κατανομή, με τις ιδιότητες των ελλειπτικών μοντέλων να ισχύουν. Τέλος, μπορεί να θεωρηθεί και ως η συνάρτηση πιθανοφάνειας των $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, με $\mathbf{X}_i \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, g_p)$ και \mathbf{X}_i ασυσχέτιστες παρατηρήσεις.

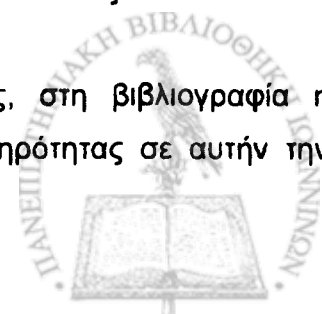
II. Έστω n το πλήθος p -διάστατες ανεξάρτητες παρατηρήσεις $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, τέτοιες ώστε $\mathbf{X}_i \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, g_p)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας των πραγματοποιήσεων $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, του \mathbf{X} από τον ελλειπτικό πληθυσμό $EC_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, g_p)$, δίνεται από τη σχέση

$$|\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n g_p \left[(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \right]. \quad (2.1.2)$$

Ίσως εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι οι σχέσεις (2.1.1) και (2.1.2) ταυτίζονται μόνο στην ειδική περίπτωση της δειγματοληψίας από πολυδιάστατο κανονικό πληθυσμό $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Παρότι ίσως φαίνεται μη συνηθισμένη η υιοθέτηση ότι οι p -διάστατες παρατηρήσεις είναι ασυσχέτιστες και όχι ανεξάρτητες, οι Kelejian and Prucha (1985) ισχυρίζονται ότι για τη μοντελοποίηση φαινομένων με παχιές ουρές η παραπάνω μοντελοποίηση είναι προτιμότερη. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στους Nadarajah and Kotz (2005) και στις αναφορές αυτών.

Παρόλα αυτά στη βιβλιογραφία έχει εμφανιστεί, πριν μία δεκαετία περίπου, ένα άρθρο, μία ερευνητική εργασία των Breusch *et al.* (1997), που κάνει έντονη κριτική στην υιοθέτηση του ασυσχέτιστου των παρατηρήσεων από t πληθυσμό με m βαθμούς ελευθερίας. Οι Breusch *et al.* (1997) ισχυρίζονται ότι το μοντέλο αυτό δεν προσφέρει ουσιαστική διαφοροποίηση ούτε στη μοντελοποίηση ούτε στην εκτιμητική σε σύγκριση με το αντίστοιχο υπό την πολυδιάστατη κανονική κατανομή. Μετέπειτα στην εργασία των Kowalski *et al.* (1999), παρουσιάζεται μία συγκριτική μελέτη των δύο μοντέλων I και II, στην ειδική περίπτωση της δειγματοληψίας από t πληθυσμό, όπου υποστηρίζεται πως οι ουσιαστικές διαφορές τους φαίνεται να μην έχουν διερευνηθεί ακόμη.

Παρόλες τις παραπάνω διαφορετικές απόψεις και κριτικές, στη βιβλιογραφία η υιοθέτηση του μοντέλου I κατέχει εξέχουσα θέση. Για λόγους πληρότητας σε αυτήν την



παράγραφο θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα για την εύρεση των Ε.Μ.Π. υπό την υιοθέτηση και των δύο δειγματοληπτικών σχημάτων.

2.1.1. Ασυσχέτιστες Παρατηρήσεις

Πριν προχωρήσουμε στην εύρεση των Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θέσης και κλίμακας, μ και Σ αντίστοιχα, της ελλειπτικής κατανομής, υπό το δειγματοληπτικό πλαίσιο του μοντέλου I θα παραθέσουμε ένα Λήμμα, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για την εύρεση των Ε.Μ.Π.

Λήμμα 2.1.1. (Fang and Zhang (1990, σελ. 129)) Έστω $h_p(\cdot)$ είναι μία μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε η $C_p h_p(\mathbf{x}'\mathbf{x})$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ να είναι σ. π. π. στον \mathbb{R}^p για κάποια σταθερά C_p . Τότε η συνάρτηση

$$f(x) \equiv x^{\frac{p}{2}} h_p(x), \quad x \geq 0,$$

λαμβάνει μέγιστο σε κάποιο πεπερασμένο σημείο $x_0 > 0$. Επιπλέον, αν η συνάρτηση $h_p(\cdot)$ είναι διαφορίσιμη, τότε το σημείο στο οποίο λαμβάνει μέγιστο η $f(\cdot)$ προκύπτει από την επίλυση της

$$h_p'(x) + \frac{p}{2x} h_p(x) = 0.$$

Απόδειξη. Καθώς η συνάρτηση $C_p h_p(\mathbf{x}'\mathbf{x})$ είναι σ. π. π., πρέπει το ολοκλήρωμά της στο πεδίο ορισμού της, να είναι ίσο με τη μονάδα. Επομένως,

$$\int_{\mathbb{R}^p} C_p h_p(\mathbf{x}'\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad \text{ή} \quad \int_{\mathbb{R}^p} h_p(\mathbf{x}'\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{C_p}.$$

Τότε λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.1.3), προκύπτει ότι

$$\int_{\mathbb{R}^p} h_p(\mathbf{x}'\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \int_0^\infty u^{\frac{p}{2}-1} h_p(u) du.$$

Λόγω της μονοτονίας της $h_p(\cdot)$, προκύπτει ότι $x \leq u \leq 2x \Rightarrow h_p(2x) \leq h_p(u) \leq h_p(x)$.

Επειδή, η $h_p(\cdot)$ φθίνουσα και συνεχής, εύκολα προκύπτει ότι

$$h_p(2x) x^{\frac{p}{2}} \leq x^{\frac{p}{2}-1} \int_x^{2x} h_p(u) du \leq h_p(x) x^{\frac{p}{2}}.$$

Είναι $u \in [x, 2x]$, δηλαδή $u^{\frac{p-1}{2}} \geq x^{\frac{p-1}{2}}$, και αφού $h_p(u) \geq 0$, προκύπτει ότι

$$0 \leq x^{\frac{p-1}{2}} \int_x^{2x} h_p(u) du \leq \int_x^{2x} u^{\frac{p-1}{2}} h_p(u) du.$$

Έχουμε δηλαδή, την ανίσωση

$$2^{\frac{p}{2}} (2x)^{\frac{p}{2}} h_p(2x) = x^{\frac{p}{2}} h_p(2x) \leq x^{\frac{p-1}{2}} \int_x^{2x} h_p(u) du \leq \int_x^{2x} u^{\frac{p-1}{2}} h_p(u) du.$$

Καθώς όταν το $x \rightarrow \infty$ είναι $\int_x^{2x} u^{\frac{p-1}{2}} h_p(u) du \rightarrow 0$, τότε $f(x) = x^{\frac{p}{2}} h_p(x) \rightarrow 0$. Επιπλέον,

$f(0) = 0$ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$, τότε προκύπτει ότι η $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο σε κάποιο πεπερασμένο σημείο x_0 .

Εάν τώρα η συνάρτηση $h_p(\cdot)$ είναι διαφορίσιμη, τότε η $f(\cdot)$ λαμβάνει μέγιστο εκεί που η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται. Είναι

$$f'(x) = \left(x^{\frac{p}{2}} h_p(x) \right)' = \frac{p}{2} x^{\frac{p-1}{2}} h_p(x) + x^{\frac{p}{2}} h_p'(x) = x^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p}{2x} h_p(x) + h_p'(x) \right).$$

Επομένως το x_0 προκύπτει ως λύση της

$$f'(x_0) = 0 \text{ ή } x_0^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p}{2x_0} h_p(x_0) + h_p'(x_0) \right) = 0, \text{ με } x_0 > 0,$$

δηλαδή, το x_0 ικανοποιεί τη σχέση

$$h_p'(x_0) + \frac{p}{2x_0} h_p(x_0) = 0. \quad \square \quad (2.1.3)$$

Ένα άλλο αποτέλεσμα που είναι απαραίτητο στην απόδειξη που θα ακολουθήσει για την εύρεση των Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θέσης και κλίμακας ελλειπτικής κατανομής, μ και Σ αντίστοιχα, είναι η ανισότητα του αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, η οποία για λόγους πληρότητας διατυπώνεται στην παρατήρηση που ακολουθεί.

Παρατήρηση 2.1.1. Για οποιαδήποτε δύο p -διάστατα διανύσματα $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)^t$ και

$b = (b_1, b_2, \dots, b_p)^t$, με $a_i \geq 0$, $b_i > 0$ και $\sum_{i=1}^p b_i = 1$, ισχύει ότι

$$\prod_{i=1}^p a_i^{b_i} \leq \sum_{i=1}^p a_i b_i, \quad (2.1.4)$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $a_1 = a_2 = \dots = a_p$.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί, προσδιορίζονται σε κλειστή, αναλυτική μορφή οι Ε.Μ.Π. των μ και Σ , υπό το δειγματοληπτικό σχήμα I.

Θεώρημα 2.1.1. (βλέπε, μεταξύ άλλων, Fang and Zhang (1990, σελ. 129)) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , n το πλήθος, με $n > p$, ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις του $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, δηλαδή από έναν ελλειπτικό πληθυσμό με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ πίνακας,, αντίστοιχα, όπου Σ θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Υποθέτοντας επιπλέον ότι ο γεννήτορας $g(\cdot)$ της σ. π. π. είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, οι Ε.Μ.Π. των μ και Σ θα είναι αντίστοιχα

$$(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}) = (\bar{X}, \lambda_{\max}(g) \cdot S),$$

όπου

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \tag{2.1.5}$$

και

$$S = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t, \tag{2.1.6}$$

ενώ με $\lambda_{\max}(g)$ συμβολίζεται το σημείο που λαμβάνει μέγιστο ως προς λ η συνάρτηση

$$\lambda^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left(\frac{p}{\lambda} \right), \text{ δηλαδή } \lambda = \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}} \lambda^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left(\frac{p}{\lambda} \right).$$

Απόδειξη. Έστω n το πλήθος ασυσχέτιστες p -διάστατες παρατηρήσεις, X_1, X_2, \dots, X_n , τέτοιες ώστε $X_i \sim EC_p(\mu, \Sigma, g_p)$, $i = 1, 2, \dots, n$, και X ο $n \times p$ τυχαίος πίνακας $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$, ο οποίος και έχει πυκνότητα. Τότε (βλέπε Anderson *et al.* (1986), Gupta and Varga (1993)) η σ. π. π. του X και επομένως η συνάρτηση πιθανοφάνειας των X_1, X_2, \dots, X_n , θα είναι της μορφής

$$L(\mu, \Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^t \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right]. \tag{2.1.7}$$

Χρησιμοποιώντας ότι

$$(X_i - \mu)^t \Sigma^{-1} (X_i - \mu) = \operatorname{tr} \left(\Sigma^{-1} (X_i - \mu)(X_i - \mu)^t \right),$$

η (2.1.7) γράφεται

$$L(\mu, \Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\operatorname{tr} (\Sigma^{-1} A) \right],$$



όπου $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})'$ και με $\text{tr}(\cdot)$ συμβολίζουμε το ίχνος του αντίστοιχου πίνακα.

Υστερα από απλές αλγεβρικές πράξεις, προκύπτει ότι

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} + n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})'$$

όπου $\bar{\mathbf{X}}$ και \mathbf{S} προσδιορίστηκαν στις σχέσεις (2.1.5) και (2.1.6) αντίστοιχα. Επομένως, η συνάρτηση πιθανοφάνειας γίνεται

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left[\mathbf{S} + n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})' \right] \right) \right]. \quad (2.1.8)$$

Για να βρούμε τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των $\boldsymbol{\mu}$ και $\boldsymbol{\Sigma}$, αρκεί να μεγιστοποιήσουμε την $L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ως προς $\boldsymbol{\mu}$ και $\boldsymbol{\Sigma}$. Από την υπόθεση του Θεωρήματος έχουμε ότι η συνάρτηση $g(\cdot)$ είναι μη αύξουσα και συνεχής. Επομένως, η $L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ως συνάρτηση του $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ και για κάθε θετικά ορισμένο πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}$ θα λαμβάνει μέγιστο εκεί που ελαχιστοποιείται ως προς $\boldsymbol{\mu}$ ο όρος $\text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left[\mathbf{S} + n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})' \right] \right)$. Άρα ισοδύναμα εκεί που ελαχιστοποιείται η ποσότητα $(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})'$. Συνεπώς, ο Ε.Μ.Π. του $\boldsymbol{\mu}$ θα είναι $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{X}}$.

Περαιτέρω για την εύρεση του Ε.Μ.Π. του πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}$, αρκεί να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση που προκύπτει αν θέσουμε στην (2.1.8) όπου $\boldsymbol{\mu}$ τον Ε.Μ.Π. του, δηλαδή $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{X}}$. Αρκεί, επομένως, να βρεθεί το μέγιστο της $L(\bar{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\Sigma})$ ως προς $\boldsymbol{\Sigma}$, δηλαδή,

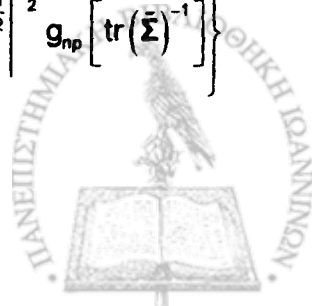
$$\max_{\boldsymbol{\Sigma}} L(\bar{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\Sigma}) = \max_{\boldsymbol{\Sigma}} \left\{ |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}) \right] \right\}. \quad (2.1.9)$$

Από το Λήμμα 4.1.1 των Fang and Zhang (1990, σελ. 128) όταν $n > p$ (βλέπε υπόθεση Θεωρήματος) προκύπτει ότι ο πίνακας \mathbf{S} είναι θετικά ορισμένος με πιθανότητα ένα. Επομένως, υπάρχει ένας μη ιδιάζων (nonsingular) πίνακας, ο οποίος συμβολίζεται $\mathbf{S}^{1/2}$, τέτοιος ώστε $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{S}^{1/2}$. Τότε, λόγω της ιδιότητας $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$, είναι

$$\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}) = \text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{S}^{1/2} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{S}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{1/2} \right) = \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}),$$

όπου $(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}})^{-1} = \mathbf{S}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{1/2}$. Άρα, η (2.1.9) γίνεται

$$\max_{\boldsymbol{\Sigma}} L(\bar{\mathbf{X}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}) = \max_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} \left\{ \left| \mathbf{S}^{1/2} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{S}^{1/2} \right|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}})^{-1} \right] \right\} = \max_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} \left\{ \left| \mathbf{S}^{1/2} \right|^{-\frac{n}{2}} \left| \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \right|^{-\frac{n}{2}} \left| \mathbf{S}^{1/2} \right|^{\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}})^{-1} \right] \right\}$$



ή ισοδύναμα
$$\max_{\tilde{\Sigma}} L(\bar{\mathbf{X}}, \tilde{\Sigma}) = \max_{\tilde{\Sigma}} \left\{ |\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}} |\tilde{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr}(\tilde{\Sigma})^{-1} \right] \right\}. \quad (2.1.10)$$

Έστω τώρα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ οι ιδιοτιμές του πίνακα $(\tilde{\Sigma})^{-1}$, τέτοιες ώστε $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$. Τότε καθώς

$$\text{tr}(\tilde{\Sigma})^{-1} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \quad \text{και} \quad |\tilde{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} = \left| (\tilde{\Sigma})^{-1} \right|^{\frac{n}{2}} = \left(\prod_{i=1}^p \lambda_i \right)^{\frac{n}{2}},$$

αρκεί να μεγιστοποιηθεί η

$$|\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{i=1}^p \lambda_i \right)^{\frac{n}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^p \lambda_i \right].$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα του αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου (βλέπε σχέση (2.1.4),

Παρατήρηση 2.1.1) για $\alpha_i = \lambda_i$ και $b_i = \frac{1}{p}$ (αφού $\sum_{i=1}^p b_i = \sum_{i=1}^p \frac{1}{p} = 1$), έχουμε

$$\prod_{i=1}^p \lambda_i^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{1}{p} = \bar{\lambda}^{-1}.$$

Επομένως,

$$\max_{\tilde{\Sigma}} L(\bar{\mathbf{X}}, \tilde{\Sigma}) = \max_{\lambda_i} \left\{ |\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{i=1}^p \lambda_i^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{np}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^p \lambda_i \right] \right\} \leq \max_{\bar{\lambda}} \left\{ |\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}} (\bar{\lambda}^{-1})^{\frac{np}{2}} g_{np} \left[p\bar{\lambda}^{-1} \right] \right\},$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p$.

Καθώς έχουμε υποθέσει ότι η $g(\cdot)$ είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε $C_p g(\mathbf{x}'\mathbf{x})$ να είναι σ. π. π. στον \mathbb{R}^p , αφού $g(\cdot)$ γεννήτορας, προκύπτει άμεσα από το

Λήμμα 2.1.1 ότι η συνάρτηση $(\bar{\lambda}^{-1})^{\frac{np}{2}} g_{np} \left[p\bar{\lambda}^{-1} \right]$ λαμβάνει μέγιστο ως προς $\bar{\lambda}$ σε ένα σημείο,

έστω $\lambda_{\max}(g)$. Επομένως,

$$\max L(\bar{\mathbf{X}}, \tilde{\Sigma}) \leq \left\{ |\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}} (\lambda_{\max}(g))^{\frac{np}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(g)} \right] \right\}$$

ή
$$\max L(\bar{\mathbf{X}}, \tilde{\Sigma}) \leq \left\{ |\mathbf{S} \lambda_{\max}(g)|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(g)} \right] \right\}.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι το μέγιστο ως προς Σ λαμβάνεται στο $\lambda_{\max}(g) \mathbf{S}$, δηλαδή ο Ε.Μ.Π. του Σ θα είναι ο $\hat{\Sigma} = \lambda_{\max}(g) \mathbf{S}$ και η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι τότε

$$\max_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma) = L(\bar{X}, S) = \lambda_{\max}(g)^{-\frac{np}{2}} |S|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(g)} \right]. \quad (2.1.11)$$

Παρατήρηση 2.1.2. Παρατηρείται πως ο Ε.Μ.Π. του μέσου διανύσματος της ελλειπτικής οικογένειας κατανομών ταυτίζεται με τον αντίστοιχο της κανονικής κατανομής, παραμένοντας αναλλοίωτος σε όλη την κλάση των κατανομών αυτών.

2.1.1.1. Ε.Μ.Π. παραμέτρων Ειδικών Ελλειπτικών Κατανομών

Σε αυτήν την παράγραφο παρατίθενται κάποιες εφαρμογές του Θεωρήματος 2.1.1 και προσδιορίζονται οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων ειδικών ελλειπτικών κατανομών. Από το Θεώρημα 2.1.1 έχουμε ότι $(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}) = (\bar{X}, \lambda_{\max}(g)S)$, όπου $\lambda_{\max}(g)$ το σημείο στο οποίο λαμβάνει μέγιστο η συνάρτηση $\lambda^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left(\frac{p}{\lambda} \right)$. Ακολούθως, θα προσδιοριστεί το σημείο $\lambda_{\max}(g)$ για ειδικές περιπτώσεις ελλειπτικών κατανομών.

Πολυδιάστατη Κανονική Κατανομή

Στην ειδική περίπτωση της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής, η συνάρτηση του γεννήτορα, $g_p(u) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} e^{-\frac{u}{2}}$ (βλέπε σχέση (1.2.1.α)), είναι φθίνουσα συνάρτηση, αφού $\frac{\partial}{\partial u} \left((2\pi)^{-\frac{p}{2}} e^{-\frac{u}{2}} \right) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{u}{2}} < 0$. Τότε προκύπτει ότι $\lambda_{\max}(g)$ είναι το σημείο εκείνο όπου μεγιστοποιείται ως προς λ η συνάρτηση $\lambda^{-\frac{np}{2}} (2\pi)^{-\frac{np}{2}} e^{-\frac{p}{2\lambda}}$. Άρα, το μέγιστο δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\lambda^{-\frac{np}{2}} e^{-\frac{p}{2\lambda}} \right) = 0.$$

Δηλαδή,
$$-\frac{np}{2} \lambda^{-\frac{np}{2}-1} e^{-\frac{p}{2\lambda}} + \lambda^{-\frac{np}{2}} \left(-\left(-\frac{p}{2\lambda^2} \right) \right) e^{-\frac{p}{2\lambda}} = 0.$$

Ύστερα από αλγεβρικές πράξεις, προκύπτει ότι $\lambda_{\max}(g) = \frac{1}{n}$. Οπότε κάνοντας χρήση του παραπάνω Θεωρήματος, έχουμε ότι οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής είναι $\hat{\mu} = \bar{X}$ και $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$.



Συμμετρική Κατανομή Pearson τύπου II

Στην περίπτωση της συμμετρικής κατανομής Pearson τύπου II, καθώς ο γεννήτορας πυκνότητας δίνεται από τη συνάρτηση $g_p(u) = C_p(1-u)^m$, $m > -1$, $0 \leq u \leq 1$, (βλέπε σχέση (1.2.3.α)), ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.1.1. Επομένως, για την εύρεση του $\lambda_{\max}(g)$ μεγιστοποιούμε ως προς λ τη συνάρτηση $\lambda^{-\frac{np}{2}} C_p \left(1 - \frac{p}{\lambda}\right)^m$. Άρα, το μέγιστο δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\lambda^{-\frac{np}{2}} \left(1 - \frac{p}{\lambda}\right)^m \right) = 0.$$

Δηλαδή,

$$-\frac{np}{2} \lambda^{-\frac{np}{2}-1} \left(1 - \frac{p}{\lambda}\right)^m + \lambda^{-\frac{np}{2}} m \left(1 - \frac{p}{\lambda}\right)^{m-1} \frac{p}{\lambda^2} = 0.$$

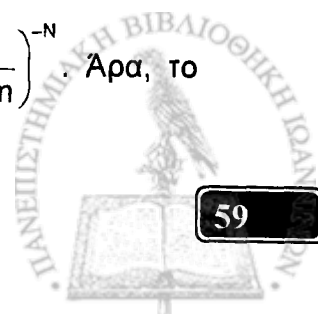
Υστερα από αλγεβρικές πράξεις, προκύπτει ότι $\lambda_{\max}(g) = \frac{2m+np}{n}$. Συνεπώς, οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων της συμμετρικής κατανομής Pearson τύπου II είναι $\hat{\mu} = \bar{X}$ και $\hat{\Sigma} = \frac{2m+np}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$.

Πολυδιάστατη Ομοιόμορφη Κατανομή

Η πολυδιάστατη Ομοιόμορφη κατανομή ως ειδική περίπτωση της Pearson τύπου II για $m=0$, έχει $\lambda_{\max}(g) = p$ και επομένως οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων της είναι οι $\hat{\mu} = \bar{X}$ και $\hat{\Sigma} = p \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$.

Συμμετρική Κατανομή Pearson τύπου VII

Στην περίπτωση της συμμετρικής κατανομής Pearson τύπου VII, καθώς ο γεννήτορας πυκνότητας δίνεται από τη συνάρτηση $g_p(u) = C_p \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-N}$, $m > 0$, $N > \frac{p}{2}$, (βλέπε σχέση (1.2.4.α)), ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.1.1. Επομένως, για την εύρεση του $\lambda_{\max}(g)$ μεγιστοποιούμε ως προς λ τη συνάρτηση $\lambda^{-\frac{np}{2}} C_p \left(1 + \frac{p}{\lambda m}\right)^{-N}$. Άρα, το μέγιστο δίνεται από τη σχέση



$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\lambda^{-\frac{np}{2}} \left(1 + \frac{p}{\lambda m} \right)^{-N} \right) = 0.$$

Δηλαδή,
$$-\frac{np}{2} \lambda^{-\frac{np}{2}-1} \left(1 + \frac{p}{\lambda m} \right)^{-N} + \lambda^{-\frac{np}{2}} (-N) \left(1 + \frac{p}{\lambda m} \right)^{-N-1} \left(-\frac{p}{\lambda^2 m} \right) = 0.$$

Ύστερα από αλγεβρικές πράξεις, προκύπτει ότι $\lambda_{\max}(g) = \frac{2N - np}{nm}$. Συνεπώς, οι Ε.Μ.Π. των

παραμέτρων της συμμετρικής κατανομής Pearson τύπου VII είναι $\hat{\mu} = \bar{X}$ και

$$\hat{\Sigma} = \frac{2N - np}{nm} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t.$$

Πολυδιάστατη t Κατανομή

Άμεσα από την Pearson τύπου VII για $N = \frac{np + m}{2}$, προκύπτει ότι $\lambda_{\max}(g) = \frac{1}{n}$ και τότε

οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων της πολυδιάστατης t κατανομής προκύπτουν να είναι $\hat{\mu} = \bar{X}$ και

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t.$$

Συμμετρική Κατανομή τύπου Kotz

Στην περίπτωση της συμμετρικής κατανομής τύπου Kotz, καθώς ο γεννήτορας πυκνότητας δίνεται από τη συνάρτηση $g_p(u) = C_p(u)^{N-1} \exp(-ru^s)$, $r, s > 0$, $2N + p > 2$, (βλέπε σχέση (1.2.6.α)), ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.1.1. Επομένως, για την εύρεση του $\lambda_{\max}(g)$ μεγιστοποιούμε ως προς λ τη συνάρτηση

$\lambda^{-\frac{np}{2}} C_p \left(\frac{p}{\lambda} \right)^{N-1} \exp \left(-r \left(\frac{p}{\lambda} \right)^s \right)$. Άρα, το μέγιστο δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\lambda^{-\frac{np}{2}} \left(\frac{p}{\lambda} \right)^{N-1} \exp \left(-r \left(\frac{p}{\lambda} \right)^s \right) \right) = 0.$$

Δηλαδή,



$$-\frac{\eta p}{2} \lambda^{\frac{\eta p}{2}-1} \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{N-1} e^{-r\left(\frac{p}{\lambda}\right)^s} + \lambda^{\frac{\eta p}{2}} (N-1) \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{N-2} \left(-\frac{p}{\lambda^2}\right) e^{-r\left(\frac{p}{\lambda}\right)^s} + \lambda^{\frac{\eta p}{2}} \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{N-1} e^{-r\left(\frac{p}{\lambda}\right)^s} \left(-rs \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{s-1} \left(-\frac{p}{\lambda^2}\right)\right) = 0.$$

Εύκολα προκύπτει ότι $\lambda_{\max}(g) = p \left(\frac{2rs}{\eta p + 2(N-1)}\right)^{\frac{1}{s}}$. Συνεπώς, οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων της συμμετρικής κατανομής τύπου Kotz είναι

$$\hat{\mu} = \bar{X} \text{ και } \hat{\Sigma} = p \left(\frac{2rs}{\eta p + 2(N-1)}\right)^{\frac{1}{s}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t.$$

Πολυδιάστατη Εκθετική Κατανομή

Γνωρίζοντας ότι από την πολυδιάστατη συμμετρική κατανομή τύπου Kotz για $N=1$, $r=1/2$ προκύπτει η πολυδιάστατη εκθετική κατανομή, είναι $\lambda_{\max}(g) = p \left(\frac{s}{\eta p}\right)^{\frac{1}{s}}$ και επομένως οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων της προκύπτουν να είναι $\hat{\mu} = \bar{X}$ και $\hat{\Sigma} = p \left(\frac{s}{\eta p}\right)^{\frac{1}{s}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$.

Πολυδιάστατη Laplace Κατανομή

Άμεσα, από την πολυδιάστατη συμμετρική κατανομή τύπου Kotz για $N=r=1$, $s=1/2$ προκύπτει η πολυδιάστατη Laplace κατανομή. Επομένως, είναι $\lambda_{\max}(g) = \frac{1}{n^2 p}$ και οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων της προκύπτουν να είναι $\hat{\mu} = \bar{X}$ και $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n^2 p} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$.

Στον επόμενο Πίνακα, δίνονται συνοπτικά το σημείο $\lambda_{\max}(g)$ και οι Ε.Μ.Π., υπό το μοντέλο I, για ορισμένες ειδικές περιπτώσεις των ελλειπτικών κατανομών.

Πίνακας 1: Ε.Μ.Π. ($\hat{\mu}, \hat{\Sigma}$) ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ. ΜΟΝΤΕΛΟ Ι.

Κατανομή	$\lambda_{\max}(g)$	Ε.Μ.Π. ($\hat{\mu}, \hat{\Sigma}$)
$N_p(\mu, \Sigma)$	$\frac{1}{n}$	$\left(\bar{X}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$
$Mt_p(\mu, \Sigma, m)$	$\frac{1}{n}$	$\left(\bar{X}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$
$MPII_p(\mu, \Sigma)$	$\frac{2m + np}{n}$	$\left(\bar{X}, \frac{2m + np}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$
$MPVII_p(\mu, \Sigma)$	$\frac{2N - np}{nm}$	$\left(\bar{X}, \frac{2N - np}{nm} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$
$Kz_p(\mu, \Sigma, r, N, s)$	$p \left(\frac{2rs}{np + 2(N-1)} \right)^{\frac{1}{s}}$	$\left(\bar{X}, p \left(\frac{2rs}{np + 2(N-1)} \right)^{\frac{1}{s}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$
$U^{(p)}$	p	$\left(\bar{X}, p \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$
$La_p(\mu, \Sigma)$	$\frac{1}{n^2 p}$	$\left(\bar{X}, \frac{1}{n^2 p} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$
$PE_p(\mu, \Sigma, s)$	$p \left(\frac{s}{np} \right)^{\frac{1}{s}}$	$\left(\bar{X}, p \left(\frac{s}{np} \right)^{\frac{1}{s}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$

2.1.2. Ανεξάρτητες Παρατηρήσεις

Υπό αυτό το δειγματοληπτικό σχήμα, θεωρούμε n το πλήθος ανεξάρτητες p -διάστατες παρατηρήσεις, X_1, X_2, \dots, X_n , τέτοιες ώστε $X_i \sim EC_p(\mu, \Sigma, g_p)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση πιθανοφάνειας των X_1, X_2, \dots, X_n , δίνεται από τη σχέση (2.1.2), δηλαδή

$$L(\mu, \Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n g_p \left[(X_i - \mu)' \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right]. \quad (2.1.12)$$

Στο επόμενο Θεώρημα υπό αυτό το δειγματοληπτικό πλαίσιο, προσδιορίζονται οι αντίστοιχοι εκτιμητές.



Θεώρημα 2.1.2. (βλέπε, μεταξύ άλλων, Anderson (1992)) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , n ανεξάρτητες πραγματοποιήσεις του $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g_p)$ με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ πίνακας,, όπου Σ θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας των πραγματοποιήσεων X_1, X_2, \dots, X_n , του X , δίνεται από τη σχέση (2.1.12). Οι Ε.Μ.Π. των μ και Σ θα προκύπτουν, αντίστοιχα, από τις σχέσεις

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{g'_p \left[(X_i - \hat{\mu})' \hat{\Sigma}^{-1} (X_i - \hat{\mu}) \right]}{g_p \left[(X_i - \hat{\mu})' \hat{\Sigma}^{-1} (X_i - \hat{\mu}) \right]} X_i}{\sum_{i=1}^n \frac{g'_p \left[(X_i - \hat{\mu})' \hat{\Sigma}^{-1} (X_i - \hat{\mu}) \right]}{g_p \left[(X_i - \hat{\mu})' \hat{\Sigma}^{-1} (X_i - \hat{\mu}) \right]}} \quad (2.1.13)$$

και

$$\hat{\Sigma} = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g'_p \left[(X_i - \hat{\mu})' \hat{\Sigma}^{-1} (X_i - \hat{\mu}) \right]}{g_p \left[(X_i - \hat{\mu})' \hat{\Sigma}^{-1} (X_i - \hat{\mu}) \right]} (X_i - \hat{\mu})(X_i - \hat{\mu})'. \quad (2.1.14)$$

Απόδειξη. Έστω n το πλήθος ανεξάρτητες p -διάστατες παρατηρήσεις, X_1, X_2, \dots, X_n , τέτοιες ώστε $X_i \sim EC_p(\mu, \Sigma, g_p)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας θα δίνεται από τη (2.1.12). Η μεγιστοποίηση αυτής είναι ισοδύναμη με τη μεγιστοποίηση του λογαρίθμου της. Επομένως αρκεί να μεγιστοποιηθεί η

$$\log L(\mu, \Sigma) = -\frac{n}{2} \log |\Sigma| + \sum_{i=1}^n \log g_p \left[(X_i - \mu)' \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right].$$

Για την εύρεση του εκτιμητή της παραμέτρου θέσης, μηδενίζουμε τη μερική παράγωγο της $\log L(\mu, \Sigma)$ ως προς μ , από όπου έχουμε

$$\frac{\partial \log L(\mu, \Sigma)}{\partial \mu} = 0$$

ή

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{g_p \left[(X_i - \mu)' \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right]} g'_p \left[(X_i - \mu)' \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right] (-2\Sigma^{-1} (X_i - \mu)) = 0.$$

Ισοδύναμα προκύπτει

$$\sum_{i=1}^n \frac{g'_p \left[(X_i - \mu)' \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right]}{g_p \left[(X_i - \mu)' \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right]} (X_i - \mu) = 0$$

$$\eta \quad \sum_{i=1}^n \frac{g_p' \left[(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \right]}{g_p \left[(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \right]} \mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu} \sum_{i=1}^n \frac{g_p' \left[(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \right]}{g_p \left[(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \right]} = 0.$$

Από τη σχέση αυτή συνεπάγεται ότι

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{g_p' \left[(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \right]}{g_p \left[(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \right]} \mathbf{X}_i}{\sum_{i=1}^n \frac{g_p' \left[(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \right]}{g_p \left[(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \right]}}.$$

Επιπλέον, είναι

$$\log L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) = -\frac{n}{2} \log |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}| + \sum_{i=1}^n \log g_p \left[(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \right].$$

Επομένως, για την εύρεση του εκτιμητή της παραμέτρου κλίμακας, μηδενίζουμε τη μερική παράγωγο της $\log L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}^{-1})$ ως προς $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$, λαμβάνοντας υπόψη (βλέπε Harville (1997), Κεφ.

15) ότι

$$\frac{\partial \log |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^{-1}} = \left((\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1} \right)' = \boldsymbol{\Sigma}$$

και

$$\frac{\partial (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^{-1}} = \frac{\partial \text{tr} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})'}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^{-1}} = (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})'.$$

Αρα θέτοντας:

$$\frac{\partial \log L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}^{-1})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^{-1}} = 0,$$

έχουμε ότι

$$\frac{n}{2} \boldsymbol{\Sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{g_p' \left[(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \right]}{g_p \left[(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \right]} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' = 0.$$

Από όπου προκύπτει ότι

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g_p' \left[(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \right]}{g_p \left[(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \right]} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}) (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'.$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις οι εξισώσεις (2.1.13) και (2.1.14) δεν μπορούν να υπολογιστούν εύκολα και έτσι η λύση βρίσκεται αριθμητικά ή χρησιμεύουν για την εφαρμογή του EM αλγόριθμου. □

2.1.2.1. Ε.Μ.Π. παραμέτρων Ειδικών Ελλειπτικών Κατανομών

Σε αυτήν την παράγραφο παρατίθενται κάποιες εφαρμογές του Θεωρήματος 2.1.2, σε κάποιες κατανομές που αναφέρθηκαν στην ενότητα 1.2. Σε όσα ακολουθούν είναι

$$\hat{u}_i = (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}).$$

Πολυδιάστατη Κανονική Κατανομή

Στην ειδική περίπτωση της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής, η συνάρτηση του γεννήτορα και η παράγωγος αυτής, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$g_p(u) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} e^{-\frac{u}{2}} \text{ και } \frac{\partial}{\partial u} \left((2\pi)^{-\frac{p}{2}} e^{-\frac{u}{2}} \right) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{u}{2}}.$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (2.1.13) και (2.1.14) προκύπτουν οι Ε.Μ.Π. για το μοντέλο II, δηλαδή

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{g'_p[\hat{u}_i]}{g_p[\hat{u}_i]} \mathbf{X}_i}{\sum_{i=1}^n \frac{g'_p[\hat{u}_i]}{g_p[\hat{u}_i]}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{u_i}{2}}}{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} e^{-\frac{u_i}{2}}} \mathbf{X}_i}{\sum_{i=1}^n \frac{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{u_i}{2}}}{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} e^{-\frac{u_i}{2}}}} = \frac{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i}{-n \frac{1}{2}} = \bar{\mathbf{X}}$$

και

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\Sigma}} &= -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g'_p[\hat{u}_i]}{g_p[\hat{u}_i]} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})' = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{u_i}{2}}}{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} e^{-\frac{u_i}{2}}} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})'. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 2.1.3. Παρατηρούμε πως στην περίπτωση της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής οι Ε.Μ.Π. των μοντέλων I και II ταυτίζονται. Το γεγονός αυτό ήταν αναμενόμενο, καθώς σε αυτήν την περίπτωση οι p -διάστατες παρατηρήσεις $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, είναι ανεξάρτητες αν και μόνον αν είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους.

Συμμετρική Κατανομή Pearson τύπου II

Στην περίπτωση της συμμετρικής κατανομής Pearson τύπου II, η συνάρτηση του γεννήτορα και η παράγωγος αυτής, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$g_p(u) = C_p (1-u)^m, \quad m > -1, \quad 0 \leq u \leq 1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial u} (C_p (1-u)^m) = -C_p m (1-u)^{m-1}.$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (2.1.13) και (2.1.14) προκύπτουν οι Ε.Μ.Π. για το μοντέλο II

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{g'_p[\hat{u}_i]}{g_p[\hat{u}_i]} \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n \frac{g'_p[\hat{u}_i]}{g_p[\hat{u}_i]}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{-C_p m (1-\hat{u}_i)^{m-1}}{C_p (1-\hat{u}_i)^m} \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n \frac{-C_p m (1-\hat{u}_i)^{m-1}}{C_p (1-\hat{u}_i)^m}} = \frac{\sum_{i=1}^n (1-\hat{u}_i)^{-1} \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n (1-\hat{u}_i)^{-1}}$$

και

$$\hat{\Sigma} = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g'_p[\hat{u}_i]}{g_p[\hat{u}_i]} (\mathbf{x}_i - \hat{\mu})(\mathbf{x}_i - \hat{\mu})^t = \frac{2m}{n} \sum_{i=1}^n (1-\hat{u}_i)^{-1} (\mathbf{x}_i - \hat{\mu})(\mathbf{x}_i - \hat{\mu})^t.$$

Συμμετρική Κατανομή Pearson τύπου VII

Στην περίπτωση της συμμετρικής κατανομής Pearson τύπου VII, η συνάρτηση του γεννήτορα και η παράγωγος αυτής, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$g_p(u) = C_p \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-N}, \quad m > 0, \quad N > \frac{p}{2}, \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(C_p \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-N} \right) = -C_p N \frac{1}{m} \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-N-1}.$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (2.1.13) και (2.1.14) προκύπτουν οι Ε.Μ.Π. για το μοντέλο II

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{g'_p[\hat{u}_i]}{g_p[\hat{u}_i]} \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n \frac{g'_p[\hat{u}_i]}{g_p[\hat{u}_i]}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{-C_p N \frac{1}{m} \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-N-1}}{C_p \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-N}} \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n \frac{-C_p N \frac{1}{m} \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-N-1}}{C_p \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-N}}} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1} \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1}}$$

και

$$\hat{\Sigma} = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g'_p[\hat{u}_i]}{g_p[\hat{u}_i]} (\mathbf{x}_i - \hat{\mu})(\mathbf{x}_i - \hat{\mu})^t = \frac{2N}{nm} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1} (\mathbf{x}_i - \hat{\mu})(\mathbf{x}_i - \hat{\mu})^t.$$



Πολυδιάστατη t Κατανομή

Γνωρίζοντας ότι από την πολυδιάστατη συμμετρική κατανομή Pearson τύπου VII για $N = \frac{p+m}{2}$ προκύπτει η πολυδιάστατη t κατανομή, τότε οι Ε.Μ.Π. της προκύπτουν να είναι

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1} \mathbf{X}_i}{\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1}} \text{ και } \hat{\Sigma} = \frac{p+m}{nm} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1} (\mathbf{X}_i - \hat{\mu})(\mathbf{X}_i - \hat{\mu})^t.$$

Συμμετρική Κατανομή τύπου Kotz

Στην περίπτωση της συμμετρικής κατανομής τύπου Kotz, η συνάρτηση του γεννήτορα και η παράγωγος αυτής, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$g_p(u) = C_p(u)^{N-1} \exp(-ru^s), \quad r, s > 0, \quad 2N+p > 2,$$

και
$$\frac{\partial}{\partial u} (C_p(u)^{N-1} \exp(-ru^s)) = C_p(u)^{N-2} \exp(-ru^s) (N-1-rsu^s).$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (2.1.13) και (2.1.14) προκύπτουν οι Ε.Μ.Π. για το μοντέλο II

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{g'_p[\hat{u}_i]}{g_p[\hat{u}_i]} \mathbf{X}_i}{\sum_{i=1}^n \frac{g'_p[\hat{u}_i]}{g_p[\hat{u}_i]}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{C_p(\hat{u}_i)^{N-2} \exp(-r\hat{u}_i^s) (N-1-rs\hat{u}_i^s)}{C_p(\hat{u}_i)^{N-1} \exp(-r\hat{u}_i^s)} \mathbf{X}_i}{\sum_{i=1}^n \frac{C_p(\hat{u}_i)^{N-2} \exp(-r\hat{u}_i^s) (N-1-rs\hat{u}_i^s)}{C_p(\hat{u}_i)^{N-1} \exp(-r\hat{u}_i^s)}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(N-1-rs\hat{u}_i^s)}{\hat{u}_i} \mathbf{X}_i}{\sum_{i=1}^n \frac{(N-1-rs\hat{u}_i^s)}{\hat{u}_i}}$$

και

$$\hat{\Sigma} = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g'_p[\hat{u}_i]}{g_p[\hat{u}_i]} (\mathbf{X}_i - \hat{\mu})(\mathbf{X}_i - \hat{\mu})^t = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(N-1-rs\hat{u}_i^s)}{\hat{u}_i} (\mathbf{X}_i - \hat{\mu})(\mathbf{X}_i - \hat{\mu})^t.$$

Πολυδιάστατη Εκθετική Κατανομή

Γνωρίζοντας ότι από την πολυδιάστατη συμμετρική κατανομή τύπου Kotz για $N=1, r=1/2$ προκύπτει η πολυδιάστατη εκθετική κατανομή, τότε οι Ε.Μ.Π. της προκύπτουν να είναι



$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\sum_{i=1}^n s \hat{u}_i^{s-1} \mathbf{X}_i}{\sum_{i=1}^n s \hat{u}_i^{s-1}} \text{ και } \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s \hat{u}_i^{s-1} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'.$$

Πολυδιάστατη Laplace Κατανομή

Άμεσα, από την πολυδιάστατη συμμετρική κατανομή τύπου Kotz για $N = r = 1$, $s = 1/2$ προκύπτει η πολυδιάστατη Laplace κατανομή. Επομένως, οι Ε.Μ.Π. προκύπτουν να είναι

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{-1/2} \mathbf{X}_i}{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{-1/2}} \text{ και } \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{-1/2} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'.$$

Στον επόμενο Πίνακα, δίνονται συνοπτικά οι Ε.Μ.Π., υπό το μοντέλο II, για ειδικές περιπτώσεις των ελλειπτικών κατανομών, υπό το συμβολισμό $\hat{u}_i = (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})$.



Πίνακας 2: Ε.Μ.Π. ($\hat{\mu}, \hat{\Sigma}$) Ελλειπτικών Κατανομών. Μοντέλο II.

Κατανομή	$\frac{g'_p[\hat{u}_i]}{g_p[\hat{u}_i]}$	Ε.Μ.Π. ($\hat{\mu}, \hat{\Sigma}$)
$N_p(\mu, \Sigma)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\bar{X}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t \right)$
$Mt_p(\mu, \Sigma, m)$	$-\frac{p+m}{2m} \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1}$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1} X_i}{\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1}}, \frac{p+m}{nm} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1} (X_i - \hat{\mu})(X_i - \hat{\mu})^t \right)$
$MPII_p(\mu, \Sigma)$	$-m(1 - \hat{u}_i)^{-1}$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (1 - \hat{u}_i)^{-1} X_i}{\sum_{i=1}^n (1 - \hat{u}_i)^{-1}}, \frac{2m}{n} \sum_{i=1}^n (1 - \hat{u}_i)^{-1} (X_i - \hat{\mu})(X_i - \hat{\mu})^t \right)$
$MPVII_p(\mu, \Sigma)$	$-\frac{N}{m} \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1}$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1} X_i}{\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1}}, \frac{2N}{nm} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\hat{u}_i}{m}\right)^{-1} (X_i - \hat{\mu})(X_i - \hat{\mu})^t \right)$
$Kz_p(\mu, \Sigma, r, N, s)$	$(\hat{u}_i)^{-1} (N - 1 - rs\hat{u}_i^s)$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{(N - 1 - rs\hat{u}_i^s)}{\hat{u}_i} X_i}{\sum_{i=1}^n \frac{(N - 1 - rs\hat{u}_i^s)}{\hat{u}_i}}, -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(N - 1 - rs\hat{u}_i^s)}{\hat{u}_i} (X_i - \hat{\mu})(X_i - \hat{\mu})^t \right)$
$La_p(\mu, \Sigma)$	$-\frac{1}{2} \hat{u}_i^{-\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{-\frac{1}{2}} X_i}{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{-\frac{1}{2}}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{-\frac{1}{2}} (X_i - \hat{\mu})(X_i - \hat{\mu})^t \right)$
$PE_p(\mu, \Sigma, s)$	$-\frac{1}{2} s \hat{u}_i^{s-1}$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n s \hat{u}_i^{s-1} X_i}{\sum_{i=1}^n s \hat{u}_i^{s-1}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s \hat{u}_i^{s-1} (X_i - \hat{\mu})(X_i - \hat{\mu})^t \right)$

Έχοντας προσδιορίσει τους Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θέσης και κλίμακας ελλειπτικών κατανομών, λαμβάνοντας υπόψη την επόμενη παρατήρηση, προσδιορίζονται οι Ε.Μ.Π. συναρτήσεων των παραμέτρων αυτών.

Παρατήρηση 2.1.4. Θεωρούμε X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με σ. π. π. $f_x(x, \theta)$, όπου η σταθερά $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^t$ είναι άγνωστη με τιμές στον παραμετρικό χώρο Θ . Επιπλέον, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ συμβολίζεται με $\hat{\theta}$. Επιπλέον, αν $\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots, \hat{M}_k$ είναι οι Ε.Μ.Π. των M_1, M_2, \dots, M_k και $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ είναι 1-1 συναρτήσεις των M_1, M_2, \dots, M_k , τότε οι

$$\Phi_1(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots, \hat{M}_k), \Phi_2(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots, \hat{M}_k), \dots, \Phi_k(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots, \hat{M}_k),$$

είναι οι Ε.Μ.Π. των $\Phi_1(M_1, M_2, \dots, M_k), \Phi_2(M_1, M_2, \dots, M_k), \dots, \Phi_k(M_1, M_2, \dots, M_k)$. Ακόμη, αν οι εκτιμητές των M_1, M_2, \dots, M_k , είναι μοναδικοί, τότε και οι εκτιμητές των $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$, είναι μοναδικοί.

Στην περίπτωση που είναι διαθέσιμες η το πλήθος ασυσχέτιστες παρατηρήσεις, X_1, X_2, \dots, X_n , με $n > p$, από έναν πληθυσμό που ακολουθεί ελλειπτική κατανομή, $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, όπου $g(\cdot)$ ο γεννήτορας της σ. π. π., είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, λαμβάνοντας υπόψη το Θεώρημα 2.1.1 προκύπτει ότι οι Ε.Μ.Π. του συντελεστή συσχέτισης

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(X_{mi}, X_{mj})}{(\text{Var}(X_{mi})\text{Var}(X_{mj}))^{1/2}}, \quad m = 1, \dots, n, \quad i, j = 1, \dots, p,$$

και του πίνακα

$$\Sigma_{11.2} = (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}), \quad \text{όπου } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{s_{ij}}{(s_{ii}s_{jj})^{1/2}}, \quad \text{για } i \neq j \text{ και } i, j = 1, \dots, p$$

και

$$\hat{\Sigma}_{11.2} = \lambda_{\max}(g)(s_{11} - s_{12}s_{22}^{-1}s_{21}),$$

για $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ που ορίζεται από τη σχέση (2.1.6).



2.2. Ιδιότητες των Ε.Μ.Π.

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται κάποιες ιδιότητες των \bar{X} και $\lambda_{\max}(g) \cdot S$, δηλαδή των Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θέσης και κλίμακας, αντίστοιχα, που αναφέρθηκαν ή προσδιορίστηκαν προηγουμένως για το μοντέλο I (ασυσχέτιστες παρατηρήσεις), καθώς όσο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, δεν υπάρχουν αντίστοιχες μελέτες για τους εκτιμητές υπό το μοντέλο II, λόγω του ότι αυτοί δεν προσδιορίζονται σε κλειστή μορφή.

Στο πλαίσιο αυτό, θα ασχοληθούμε με ιδιότητες όπως είναι η αμεροληψία, η επάρκεια, η πληρότητα και η συνέπεια των εκτιμητών, καθώς επίσης θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που αφορούν την από κοινού κατανομή και τις περιθώριες κατανομές των Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θέσης και κλίμακας αντίστοιχα, ελλειπτικών κατανομών.

2.2.1. Αμεροληψία

Η αρχή ή το κριτήριο της αμεροληψίας (unbiasedness), στηρίζεται στην έννοια της μέσης τιμής της εκτιμήτριας. Δηλαδή, αρκεί η μέση τιμή του εκτιμητή να ισούται, για κάθε τιμή του θ , με την παραμετρική συνάρτηση $h(\theta)$, η οποία καλείται εκτιμήσιμη συνάρτηση. Η ιδιότητα της αμεροληψίας διατυπώνεται στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.2.1. (βλέπε, μεταξύ άλλων, Παπαϊωάννου και Φερεντίνος (2000, ενότητα 1.3)). Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , ένα τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με σ. π. π. $f_x(X, \theta)$, όπου το σύνολο των δυνατών τιμών της παραμέτρου $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^t$ είναι ο παραμετρικός χώρος Θ . Αν η στατιστική συνάρτηση $t(X_1, \dots, X_n)$, είναι ο εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $h(\theta)$ με πεδίο ορισμού Θ και τιμές στο χώρο \mathbf{R}^n , $1 \leq n \leq k$, τότε η $t(X_1, \dots, X_n)$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής της $h(\theta)$, αν

$$E(t(X_1, \dots, X_n)) = h(\theta), \text{ για κάθε } \theta \in \Theta,$$

όπου E η αναμενόμενη τιμή υπό την παράμετρο θ . \square

Στη συνέχεια αντικείμενο αυτής της υποενότητας είναι ο προσδιορισμός των αμερόληπτων εκτιμητών των παραμέτρων θέσης και κλίμακας ελλειπτικής κατανομής. Πριν προχωρήσουμε στο κύριο αποτέλεσμα αυτής της υποενότητας θα δοθούν σε μορφή θεωρήματος δύο βασικές ιδιότητες των ελλειπτικών κατανομών: η πρώτη ιδιότητα σχετίζεται με την πληθυσμιακή μέση τιμή και τον πληθυσμιακό πίνακα διακυμάνσεων-

συνδιακυμάνσεων, ενώ η δεύτερη με την κατανομή γραμμικού συνδυασμού διανύσματος ελλειπτικής κατανομής.

Θεώρημα 2.2.1. α) (βλέπε, μεταξύ άλλων, Fang *et al.* (1990, σελ. 43)) Έστω $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, \varphi)$ και $E(R^2) < \infty$, όπου φ ο γεννήτορας της χαρακτηριστικής συνάρτησης του τυχαίου διανύσματος X και $R \geq 0$ είναι η τυχαία μεταβλητή, όπως αυτή ορίστηκε στο Θεώρημα 1.2.1, τότε

$$E(X) = \mu,$$

και

$$\text{Cov}(X) = \frac{E(R^2)}{\text{rank}(\Sigma)} = -2\varphi'(0)\Sigma,$$

όπου $\varphi'(0)$ η παράγωγος της φ στο μηδέν.

β) Θεωρούμε ένα τυχαίο διάνυσμα τέτοιο ώστε $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, όπου Σ θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Επιπλέον αν θεωρήσουμε τον πίνακα $B_{p \times n}$ και το διάνυσμα $Y_{n \times 1}$, τότε ισχύει

$$Y + B'X \sim EC_n(B'\mu + \gamma, B'\Sigma B, g). \square$$

Στο επόμενο Θεώρημα προσδιορίζονται οι αμερόληπτοι εκτιμητές των παραμέτρων θέσης και κλίμακας, μ και Σ , αντίστοιχα, όταν είναι διαθέσιμες n το πλήθος ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις του $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, με πεπερασμένη 2^{ns} τάξης ροπή.

Θεώρημα 2.2.2. (βλέπε, μεταξύ άλλων, Fang and Zhang (1990, σελ. 138)) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , n το πλήθος ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις του $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, με πεπερασμένη 2^{ns} τάξης ροπή και παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, όπου Σ θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Υποθέτοντας, επιπλέον, ότι ο γεννήτορας $g(\cdot)$ της σ. π. π. είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση και ότι η συνάρτηση $\varphi(\cdot)$ είναι ο γεννήτορας της χαρακτηριστικής συνάρτησης, τότε οι εκτιμητές

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

και

$$[2(1-n)\lambda_{\max}^{-1}(g)\varphi'(0)]^{-1} \hat{\Sigma} = [2(1-n)\varphi'(0)]^{-1} S,$$



είναι αμερόληπτοι εκτιμητές των μ και Σ αντίστοιχα.

Απόδειξη. Για τον έλεγχο αμεροληψίας του Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θέσης, είναι

$$E(\bar{\mathbf{X}}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(\mathbf{X}_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

Θεωρούμε στη συνέχεια το μετασχηματισμό $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n)^t = \Gamma \mathbf{X}$, με $\Gamma \in O(n)$, όπου $O(n)$ το σύνολο των ορθογώνιων πινάκων, και επιπλέον υποθέτουμε ότι η $n^{\text{οστή}}$ γραμμή του Γ είναι της μορφής $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Τότε συμβολίζοντας με $\mathbf{e}_n^t = (1, 1, \dots, 1)$ το n -διάστατο διάνυσμα με όλες τις συνιστώσες του ίσες με τη μονάδα και λαμβάνοντας υπόψη ότι όταν $\Gamma \in O(n)$, τότε ισχύει $\Gamma^t = \Gamma^{-1}$ και το γινόμενο των στηλών ή γραμμών του είναι ίσο με το μηδέν, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^t \stackrel{d}{=} (\mathbf{X} - \mathbf{e}_n \bar{\mathbf{X}}^t)^t (\mathbf{X} - \mathbf{e}_n \bar{\mathbf{X}}^t) \stackrel{d}{=} \mathbf{X}^t \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^t \right) \mathbf{X} \stackrel{d}{=} \\ &\stackrel{d}{=} (\Gamma^t \mathbf{Z})^t \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^t \right) \Gamma^t \mathbf{Z} \stackrel{d}{=} \mathbf{Z}^t \Gamma \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^t \right) \Gamma^t \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^t \Gamma \Gamma^t \mathbf{Z} - \mathbf{Z}^t \Gamma \frac{1}{n} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^t \Gamma^t \mathbf{Z} \stackrel{d}{=} \\ &\stackrel{d}{=} \mathbf{Z}^t \mathbf{Z} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \mathbf{z}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^t \\ \mathbf{z}_2^t \\ \dots \\ \mathbf{z}_n^t \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^t - \mathbf{z}_n \mathbf{z}_n^t = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^t. \end{aligned}$$

Επομένως λαμβάνοντας υπόψη και το Θεώρημα 2.3.1.β) προκύπτει ότι

$$E(\mathbf{S}) = E\left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^t\right) = \sum_{i=1}^{n-1} E(\mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^t) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Var}(\mathbf{z}_i) = (n-1)(-2\varphi'(0)\Sigma).$$

Άρα, είναι

$$E\left(\frac{1}{(1-n)2\varphi'(0)} \mathbf{S}\right) = \Sigma$$

και ο $\frac{1}{(1-n)2\varphi'(0)} \mathbf{S}$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του Σ , και καθώς $\hat{\Sigma} = \lambda_{\max} \mathbf{S}$, προκύπτει το ζητούμενο. \square

Στον Πίνακα που ακολουθεί, με εφαρμογή του παραπάνω Θεωρήματος, παρουσιάζονται οι αμερόληπτοι εκτιμητές των παραμέτρων, κάποιων ειδικών ελλειπτικών κατανομών που αναφέρθηκαν στην ενότητα 1.2.



Πίνακας 3: Αμερόληψία

Κατανομή	Ε.Μ.Π. ($\hat{\mu}, \hat{\Sigma}$)	Αμερόληπτοι Εκτιμητές
$N_p(\mu, \Sigma)$	$\left(\bar{X}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$	$\left(\bar{X}, \frac{1}{n-1} S \right)$
$Mt_p(\mu, \Sigma, m)$	$\left(\bar{X}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$	$\left(\bar{X}, \frac{m}{(n-1)(p+m)} S \right)$
$MPII_p(\mu, \Sigma)$	$\left(\bar{X}, \frac{2m+np}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$	$\left(\bar{X}, \frac{1}{2(n-1)m} S \right)$
$MPVII_p(\mu, \Sigma)$	$\left(\bar{X}, \frac{2N-np}{nm} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$	$\left(\bar{X}, \frac{m}{2N(n-1)} S \right)$
$Kz_p(\mu, \Sigma, r, N, s)$	$\left(\bar{X}, p \left(\frac{2rs}{np+2(N-1)} \right)^{\frac{1}{s}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$	$\left(\bar{X}, \left[\frac{r^{-1/s}(n-1)\Gamma\left(\frac{2N+p}{2s}\right)}{p\Gamma\left(\frac{2N+p-2}{2s}\right)} \right]^{-1} S \right)$
$La_p(\mu, \Sigma)$	$\left(\bar{X}, \frac{1}{n^2 p} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$	$\left(\bar{X}, \left[\frac{(n-1)\Gamma(2+p)}{p\Gamma(2+p-2)} \right]^{-1} S \right)$
$PE_p(\mu, \Sigma, s)$	$\left(\bar{X}, p \left(\frac{s}{np} \right)^{\frac{1}{s}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \right)$	$\left(\bar{X}, \left[\frac{2^{1/s}(n-1)\Gamma\left(\frac{2+p}{2s}\right)}{p\Gamma\left(\frac{2+p-2}{2s}\right)} \right]^{-1} S \right)$

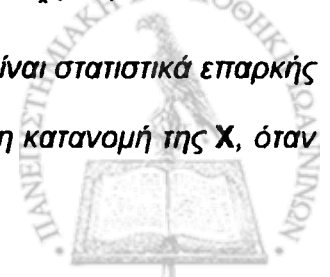
2.2.2. Στατιστική Επάρκεια

Η έννοια της επάρκειας είναι θεμελιώδους σημασίας και χαρακτηρίζει τις στατιστικές συναρτήσεις ή εκτιμητές παραμέτρων, που έχουν την ιδιότητα να περιλαμβάνουν όλες τις πληροφορίες. Η ιδιότητα της επάρκειας, παρουσιάζεται στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.2.2. (βλέπε, μεταξύ άλλων, Παπαϊωάννου και Φερεντίνος (2000, ενότητα 1.6))

Έστω το τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ με σ. π. π. $f_x(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$ και

$T = (T_1(X), \dots, T_p(X))'$ μία στατιστική συνάρτηση της τ. μ. X . Τότε η T είναι στατιστικά επαρκής για το θ ή την οικογένεια κατανομών που ορίζει το θ , εάν η δεσμευμένη κατανομή της X , όταν



δοθεί $T = t$, είναι ανεξάρτητη του θ , για όλες τις τιμές του t για τις οποίες ορίζεται η δεσμευμένη κατανομή. \square

Εναλλακτικά, αντί του ορισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση επαρκών στατιστικών συναρτήσεων το Παραγοντικό Θεώρημα των Neyman-Fisher, το οποίο διατυπώνεται στο παρακάτω Θεώρημα, για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στους Halmos and Savage (1949).

Θεώρημα 2.2.3. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , η παρατηρήσεις από έναν πληθυσμό με σ. π. π. $f_x(\mathbf{x}, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Μία στατιστική συνάρτηση $T = T(X_1, \dots, X_n) = (T_1(\mathbf{x}), \dots, T_n(\mathbf{x}))^t$ είναι επαρκής για την παράμετρο θ , εάν και μόνο εάν η σ. π. π. του δείγματος μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$f(\mathbf{x}, \theta) = h(T(\mathbf{X}), \theta) p(\mathbf{x}), \text{ για κάθε } \theta \in \Theta \text{ και } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $h(T(\mathbf{X}), \theta)$ είναι μία συνάρτηση που εξαρτάται από το \mathbf{X} μόνο μέσω της T και $p(\mathbf{x})$ είναι μία άλλη συνάρτηση του \mathbf{X} ανεξάρτητη της θ . \square

Σύμφωνα με το Παραγοντικό Θεώρημα των Neyman-Fisher, όταν οι n το πλήθος παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots, X_n , προέρχονται από ελλειπτικό πληθυσμό, $\mathbf{X} \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, με πυκνότητα

$$|\Sigma|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr} \left(\Sigma^{-1} \left[\mathbf{S} + n(\bar{\mathbf{X}} - \mu)(\bar{\mathbf{X}} - \mu)^t \right] \right) \right],$$

το επαρκές στατιστικό της παραμέτρου $\theta = (\mu, \Sigma)$, για $p(\mathbf{x}) = 1$, είναι το $T(\mathbf{X}) = (\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{S})$.

Παρατήρηση 2.2.1. Επιπρόσθετα, εύκολα αποδεικνύεται ότι αν η παράμετρος θέσης μ είναι γνωστή, τότε το επαρκές στατιστικό για την παράμετρο κλίμακας Σ , είναι το στατιστικό $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)(X_i - \mu)^t$, ενώ όταν η παράμετρος κλίμακας είναι γνωστή, το επαρκές στατιστικό για την παράμετρο θέσης είναι το $\bar{\mathbf{X}}$, μόνο για την περίπτωση της δειγματοληψίας από κανονικό πληθυσμό.

2.2.3. Πληρότητα

Μία άλλη χρήσιμη ιδιότητα ενός εκτιμητή είναι αυτή της πληρότητας, που αναφέρεται σε οικογένεια κατανομών. Ακολουθώς, δίνεται ο ορισμός αυτής.



Ορισμός 2.2.3. (βλέπε, μεταξύ άλλων, Παπαϊωάννου και Φερεντίνος (2000, ενότητα 1.8))
 Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , η το πλήθος παρατηρήσεις από έναν πληθυσμό με σ. π. π. $f_x(\mathbf{x}, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Μία στατιστική συνάρτηση $T = (T_1(\mathbf{x}), \dots, T_n(\mathbf{x}))'$ ή ακριβέστερα η οικογένεια κατανομών της T είναι πλήρης, εάν και μόνο εάν για κάθε συνάρτηση $h(T)$ του T μόνο, η σχέση $E[h(T)] = 0$, για κάθε $\theta \in \Theta$, συνεπάγεται ότι $h(\mathbf{t}) = 0$ για κάθε \mathbf{t} , εκτός πιθανόν από τα σημεία για τα οποία η πιθανότητα είναι μηδέν για κάθε $\theta \in \Theta$. Εάν ακόμη, η $T(\mathbf{X})$ είναι και επαρκής, τότε καλείται πλήρης και επαρκής στατιστική συνάρτηση. \square

Για την ιδιότητα της πληρότητας στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις προέρχονται από ελλειπτικό πληθυσμό, παραθέτουμε το επόμενο Θεώρημα, για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στους Fang and Zhang (1990, παράγραφο 4.3.3).

Θεώρημα 2.2.4. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , η το πλήθος ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις του $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, όπου Σ θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Τότε αν η οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών ορίζεται

$$\mathcal{F} = \left\{ |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} g \left[(\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right] g(\mathbf{x}'\mathbf{x}) : \text{πυκνότητα και } \mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma > \mathbf{0} \right\},$$

το στατιστικό (\bar{X}, S) είναι πλήρες και επαρκές για την οικογένεια \mathcal{F} . \square

2.2.4. Συνέπεια

Η ιδιότητα της συνέπειας είναι μία ασυμπτωτική ιδιότητα, που εκφράζει την προσεγγιστικότητα των εκτιμητριών και παραμέτρων. Στη συνέχεια, δίνεται ο ορισμός ενός συνεπούς εκτιμητή, καθώς και ένα χρήσιμο Θεώρημα, στο οποίο δίνονται επαρκείς συνθήκες, έτσι ώστε ένας εκτιμητής T_n , να είναι συνεπής.

Ορισμός 2.2.4. (βλέπε, μεταξύ άλλων, Παπαϊωάννου και Φερεντίνος (2000, ενότητα 1.9))
 Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , η παρατηρήσεις από έναν πληθυσμό με σ. π. π. $f_x(\mathbf{x}, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Ο εκτιμητής T_n της παραμετρικής συνάρτησης $h(\theta)$ είναι ασθενικά συνεπής εάν, για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει



$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(h(\theta) - \varepsilon < T_n < h(\theta) + \varepsilon) = 1, \text{ για κάθε } \theta \in \Theta,$$

ενώ ο εκτιμητής T_n είναι ισχυρά συνεπής εάν

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = h(\theta)\right) = 1, \text{ για κάθε } \theta \in \Theta. \square$$

Στο επόμενο Θεώρημα δίνονται επαρκείς συνθήκες ώστε ο εκτιμητής T_n να είναι συνεπής.

Θεώρημα 2.2.5. Έστω η στατιστική συνάρτηση T_n ο εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $h(\theta)$. Εάν ο T_n είναι αμερόληπτος εκτιμητής της $h(\theta)$ και $\text{Var}T_n \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$, τότε ο T_n είναι συνεπής εκτιμητής της $h(\theta)$. Το συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση που ο T_n είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος εκτιμητής, δηλαδή για $n \rightarrow \infty$ είναι $E(T_n) \rightarrow h(\theta)$. \square

Με τη βοήθεια των παραπάνω, εξετάζονται οι εκτιμητές $T_n^{(1)} = \bar{X}_n$ και $T_n^{(2)} = \frac{1}{n} S_n$ ως προς τη συνέπειά τους για τις παραμέτρους θέσης και κλίμακας, αντίστοιχα.

Θεωρούμε τον πίνακα $X_n = (X_1, \dots, X_n)^t$, τέτοιο ώστε $X_n \stackrel{d}{=} e_{n \times 1} \mu_{1 \times p}^t + Y_n A_{p \times p}$, με $n = p + 1, p + 2, \dots$, όπου ο $Y_n = (Y_1, \dots, Y_n)^t$ είναι τέτοιος ώστε $Y_i \sim N_p(\mathbf{0}, I_p)$, $i = 1, \dots, n$, και είναι ανεξάρτητος του πίνακα $A_{p \times p}$, για τον οποίο ισχύει ότι $A^t A = \Sigma$. Αν επιπλέον, η παράμετρος θέσης και κλίμακας είναι σταθερές, τότε:

$$T_n^{(1)} = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{d}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A^t Y_i + \mu) = A^t \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right] + \mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu,$$

αφού όταν $n \rightarrow \infty$, με εφαρμογή του ισχυρού νόμου των μεγάλων αριθμών, προκύπτει ότι $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \mathbf{0}$. Επομένως, $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1$ και ο εκτιμητής $T_n^{(1)} = \bar{X}_n$ είναι ισχυρά συνεπής για την παράμετρο θέσης.

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη συνέπεια του δειγματικού πίνακα διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων για την παράμετρο κλίμακας, όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\mu = \mathbf{0}$. Επομένως ο πίνακας $X_n = (X_1, \dots, X_n)^t$, είναι τέτοιος ώστε $X_n \stackrel{d}{=} Y_n A_{p \times p}$. Άρα, καθώς ισχύει ότι

$$S = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t \stackrel{d}{=} (X - e_n \bar{X}^t)^t (X - e_n \bar{X}^t) \stackrel{d}{=} X^t \left(I_n - \frac{1}{n} e_n e_n^t \right) X$$

είναι

$$\begin{aligned} T_n^{(2)} &= \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} X_n' \left(I_n - \frac{1}{n} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n' \right) X_n = \frac{1}{n} A' Y_n' \left(I_n - \frac{1}{n} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n' \right) Y_n A = \frac{1}{n} A' \left(Y_n' Y_n - Y_n' \frac{1}{n} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n' Y_n \right) A = \\ &= \frac{1}{n} A' \left(\sum_{i=1}^n Y_i Y_i' - Y_n Y_n' \right) A = A' \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i Y_i' \right) A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A' A = \Sigma, \end{aligned}$$

αφού όταν $n \rightarrow \infty$, με εφαρμογή του ισχυρού νόμου των μεγάλων αριθμών, είναι $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i Y_i' \rightarrow I_p$. Επομένως, $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n = \Sigma\right) = 1$ και ο εκτιμητής $T_n^{(2)} = \frac{1}{n} S_n$ είναι ισχυρά συνεπής για την παράμετρο κλίμακας. Σε όσα προηγήθηκαν, σημειώνουμε ότι η σύγκλιση πινάκων εννοείται ως προς κάθε στοιχείο. □

2.2.5. Κατανομή των Ε.Μ.Π.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί προσδιορίζεται η από κοινού κατανομή των \bar{X} και S (βλέπε, μεταξύ άλλων, Fang and Zhang (1990, ενότητα 4.2) και Anderson and Fang (1990, σελ. 201)).

Θεώρημα 2.2.6. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , n το πλήθος, με $n > p$, ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις του $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, όπου Σ θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Υποθέτοντας, επιπλέον, ότι ο γεννήτορας $g(\cdot)$ της σ. π. π. είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, τότε η από κοινού κατανομή των $\bar{X} \in \mathbb{R}^p$ και $S > 0$, δίνεται από τη σχέση

$$\frac{n^{\frac{p}{2}} \pi^{\frac{1}{2}(n-1)p}}{\Gamma_p\left[\frac{n-1}{2}\right]} |S|^{\frac{1}{2}(n-p)-1} |\Sigma|^{\frac{n}{2}} g\left(\text{tr} \Sigma^{-1} S + n(\bar{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu)\right),$$

όπου $\Gamma_p\left[\frac{n}{2}\right] = \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{n-i+1}{2}\right)$ είναι η ονομαζόμενη πολυδιάστατη Γάμμα συνάρτηση. □

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Θεώρημα, αποδεικνύεται ότι οι περιθώριες κατανομές των \bar{X} και S προσδιορίζονται όπως διατυπώνεται στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.7. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , n το πλήθος, με $n > p$, ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις του $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας



$p \times p$ πίνακας,, αντίστοιχα, όπου Σ θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Υποθέτοντας, επιπλέον, ότι ο γεννήτορας $g(\cdot)$ της σ. π. π. είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, τότε για τις περιθώριες κατανομές των $\bar{X} \in \mathbb{R}^p$ και $S > 0$, είναι

i) $\bar{X} = \mu + n^{-1/2} R^* \Sigma^{1/2} u^{(p)}$, όπου R^* ανεξάρτητο του $u^{(p)}$, τέτοιο ώστε $R^* \stackrel{d}{=} R b_{p/2, (n-1)p/2}$, με $b_{p/2, (n-1)p/2}$ ανεξάρτητη της $R > 0$, όπου η τυχαία μεταβλητή R έχει κατανομή

$$\frac{2\pi^{\frac{np}{2}}}{\Gamma\left[\frac{np}{2}\right]} r^{np-1} g(r), \quad r > 0,$$

ii) Ο $p \times p$ πίνακας S έχει πυκνότητα

$$\frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left[\frac{p}{2}\right] \Gamma_p\left[\frac{n-1}{2}\right]} |S|^{\frac{1}{2}(n-p)-1} |\Sigma|^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty r^{p-1} g(r^2 + \text{tr} \Sigma^{-1} S) dr. \quad \square$$

Όσον αφορά την ιδιότητα της ανεξαρτησίας των \bar{X} και S είναι μία ιδιότητα που ικανοποιείται μόνο στην περίπτωση της κανονικής κατανομής, και παρατίθεται στο επόμενο Θεώρημα, για μια απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε μεταξύ άλλων στο σύγγραμμα Fang and Zhang (1990, σελ. 137).

Θεώρημα 2.2.8. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , n το πλήθος, με $n > p$, ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις του $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, όπου Σ θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Τότε τα \bar{X} και S είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν το X ακολουθεί πολυδιάστατη κανονική κατανομή. \square

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Έλεγχοι Υποθέσεων

Στο κεφάλαιο αυτό κατασκευάζονται στατιστικά τεστ με τη μέθοδο του πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών, για τον έλεγχο υποθέσεων που διατυπώνονται μέσω των παραμέτρων θέσης και κλίμακας, ενός ή περισσότερων πληθυσμών που περιγράφονται από μία κατανομή της ελλειπτικής οικογένειας κατανομών. Οι έλεγχοι αυτοί γίνονται υπό το δειγματοληπτικό πλαίσιο του μοντέλου I (ασυσχέτιστες παρατηρήσεις) που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και αυτό γιατί υπό το μοντέλο II παραμένει ένα ανοικτό πρόβλημα προς διερεύνηση. Στο πλαίσιο αυτό, στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται οι κυριότεροι έλεγχοι στην ειδική περίπτωση του ενός πληθυσμού, ενώ το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τον έλεγχο υποθέσεων που διατυπώνονται μέσω των παραμέτρων θέσης και κλίμακας δύο ή περισσότερων πληθυσμών. Τέλος, επισημαίνεται ότι στο Κεφάλαιο 4 υλοποιούνται κάποιοι από αυτούς τους ελέγχους σε ένα γνωστό σύνολο δεδομένων της Γενικευμένης Πολυμεταβλητής Ανάλυσης.

3.1 Ένας πληθυσμός

Έστω n το πλήθος p -διάστατα τυχαία διανύσματα, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, τέτοια ώστε $n > p$ και $\mathbf{X}_i \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g)$, $i = 1, 2, \dots, n$, με τις παραμέτρους θέσης και κλίμακες άγνωστες. Περαιτέρω, θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις \mathbf{X}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, είναι ασυσχέτιστες και η από κοινού κατανομή τους είναι επίσης ελλειπτική κατανομή και συνεχής, και δίνεται από τη σχέση

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \right]. \quad (3.1.1)$$

Στο πλαίσιο αυτό θέλουμε να ελέγξουμε μηδενικές υποθέσεις της μορφής

$$H_0 : (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \in \omega$$

έναντι εναλλακτικών υποθέσεων της μορφής

$$H_a : (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{p \times p} - \omega,$$

όπου $\omega = \omega_1 \times \omega_2$, με ω_1 και ω_2 υποσύνολα του \mathbf{R}^p και $\mathbf{R}^{p \times p}$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\mathbf{0}_p \in \omega_1$ και $\mathbf{I}_p \in \omega_2$. Η μεθοδολογία που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή των στατιστικών τεστ είναι ο λόγος των μέγιστων πιθανοφανειών. Η χρήση της μεθόδου αυτής είναι συχνή λόγω

των καλών ιδιοτήτων του λόγου των μέγιστων πιθανοφαινιών, ο οποίος για υποθέσεις της παραπάνω μορφής δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{\sup_{\mu \in \omega_1, \Sigma \in \omega_2} L(\mu, \Sigma)}{\sup_{\mu \in R^p, \Sigma \in R^{p \times p}} L(\mu, \Sigma)},$$

όπου η $L(\mu, \Sigma)$ είναι η συνάρτηση πιθανοφάνειας των X_1, X_2, \dots, X_n , όπως δίνεται από τη σχέση (3.1.1) και το $\sup_{\mu \in \omega_1, \Sigma \in \omega_2} L$ συμβολίζει το supremum της L υπό τη μηδενική υπόθεση, ενώ

το $\sup_{\mu \in R^p, \Sigma \in R^{p \times p}} L$ συμβολίζει το supremum της L χωρίς κανένα περιορισμό στις παραμέτρους.

Επιπλέον, η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης H_0 καθορίζεται από μικρές τιμές του λόγου λ . Συνεπώς, η κρίσιμη περιοχή διαμορφώνεται έτσι ώστε $\lambda \leq \lambda_\alpha$, με λ_α κατάλληλη σταθερά που καθορίζεται από την πιθανότητα του Σφάλματος τύπου I, δηλαδή $P(\lambda \leq \lambda_\alpha | H_0 \text{ αληθής}) = \alpha$, με α το επίπεδο σημαντικότητας.

Με την παραπάνω μεθοδολογία, σε αυτήν την ενότητα κατασκευάζονται τεστ για τον έλεγχο των ακόλουθων υποθέσεων:

- Η παράμετρος θέσης να είναι ίση με δοθέν διάνυσμα.
- Η παράμετρος κλίμακας να είναι ίση με δοθέντα πίνακα.
- Οι παράμετροι θέσης και κλίμακας να είναι ταυτόχρονα ίσες με δοθέν διάνυσμα και δοθέντα πίνακα αντίστοιχα.
- Η υπόθεση του ασυσχέτιστου k ($k \geq 2$) συνόλων μεταβλητών, οι οποίες από κοινού ακολουθούν ελλειπτική κατανομή.
- Ο έλεγχος της σφαιρικότητας, δηλαδή ο έλεγχος ότι η παράμετρος κλίμακας είναι ανάλογη ενός δοθέντα πίνακα.
- Η παράμετρος θέσης να είναι ίση με δοθέν διάνυσμα και η παράμετρος κλίμακας είναι ανάλογη ενός δοθέντα πίνακα.

Στη συνέχεια, θα δοθούν κάποια χρήσιμα αποτελέσματα (βλέπε, μεταξύ άλλων, Fang and Zhang (1990), Fang *et al.* (1990)) για τη μελέτη της κατανομής ενός στατιστικού στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Σε όσα ακολουθούν, όταν δύο p -διάστατα τυχαία διανύσματα X και Y ακολουθούν την ίδια κατανομή θα γράφουμε $X \stackrel{d}{=} Y$.



Πρόταση 3.1.1. (βλέπε Fang and Zhang (1990, p.154)) Θεωρούμε ότι το $t(\mathbf{X})$ είναι ένα στατιστικό για τον έλεγχο της $H_0: (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \in \omega$ έναντι της $H_a: (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{p \times p} - \omega$, όπου $\omega = \omega_1 \times \omega_2$, με ω_1 και ω_2 υποσύνολα του \mathbf{R}^p και $\mathbf{R}^{p \times p}$ αντίστοιχα. Τότε η κατανομή του στατιστικού $t(\mathbf{X})$ παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών αν και μόνο αν

- i) $t(a\mathbf{X}) \stackrel{d}{=} t(\mathbf{X})$, για κάθε σταθερά $a > 0$, και υποθέτοντας πως το p -διάστατο μηδενικό διάνυσμα ανήκει στο σύνολο ω_1 και πως ο ταυτοτικός πίνακας τάξης p ανήκει στο σύνολο ω_2 , δηλαδή $\mathbf{0}_p \in \omega_1$ και $\mathbf{I}_p \in \omega_2$ αντίστοιχα, και
- ii) $t(\mathbf{X} + \mathbf{M}) \stackrel{d}{=} t(\mathbf{X})$, για κάθε πίνακα $\mathbf{M}_{p \times n} = \boldsymbol{\mu}_{p \times 1} (1, 1, \dots, 1)_{1 \times n}$, με $\boldsymbol{\mu} \in \omega_1$. \square

3.1.1 Έλεγχος ότι η παράμετρος θέσης ισούται με δοθέν διάνυσμα

Θέλουμε να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$$

έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης

$$H_a: \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0,$$

όπου $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbf{R}^p$ ένα γνωστό διάνυσμα.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας σε όσα ακολουθούν θεωρούμε ότι $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}_p$, όπου $\mathbf{0}_p$ το p -διάστατο μηδενικό διάνυσμα. Αυτό είναι εφικτό, καθώς αν $\boldsymbol{\mu}_0 \neq \mathbf{0}_p$ τότε αντικαθίστανται οι παρατηρήσεις $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, με τις $\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_0, \dots, \mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu}_0$, καθώς και αυτές θα προέρχονται από πληθυσμό με ελλειπτική κατανομή, με γεννήτορα της ίδιας συναρτησιακής μορφής και μέσο διάνυσμα το $\mathbf{0}_p$.

Η μέθοδος του πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών, στηρίζεται στο λόγο

$$\lambda_1 = \frac{\sup_{H_0} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}{\sup_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})} = \frac{\sup_{\boldsymbol{\Sigma}} L(\mathbf{0}_p, \boldsymbol{\Sigma})}{\sup_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}. \quad (3.1.2)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1 και από τη σχέση (2.1.11) προκύπτει ότι

$$\sup_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right].$$



Στη συνέχεια, υπό τη μηδενική υπόθεση H_0 , δοθέντος ότι το μέσο διάνυσμα είναι ίσο με $\mathbf{0}_p$ και από τη σχέση (3.1.1), είναι

$$L(\mathbf{0}_p, \Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr} \Sigma^{-1} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i' \right\} \right] = |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr} \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{A}_0 \right],$$

όπου $\mathbf{A}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i'$.

Έτσι, με παρόμοιο τρόπο με το Θεώρημα 2.1.1, προκύπτει ότι

$$\max_{\Sigma > 0} L(\mathbf{0}_p, \Sigma) = \lambda_{\max}(g)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{A}_0|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(g)} \right],$$

όπου η ποσότητα $\lambda_{\max}(g)$ ορίζεται στο Θεώρημα 2.1.1.

Επομένως, ο λόγος των πιθανοφανεσιών από τις σχέσεις (3.1.2) και (2.1.11), είναι

$$\lambda_1 = \frac{\sup_{\mu = \mathbf{0}_p, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma)}{\sup_{\mu, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma)} = \frac{\lambda_{\max}(g)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{A}_0|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(g)} \right]}{\lambda_{\max}(g)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(g)} \right]} = \frac{|\mathbf{A}_0|^{-\frac{n}{2}}}{|\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}}},$$

όπου $\bar{\mathbf{X}}$ και \mathbf{S} δίνονται από τις σχέσεις (2.1.5) και (2.1.6) αντίστοιχα. Καθώς $\mathbf{A}_0 = \mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}'$, προκύπτει ότι

$$\lambda_1 = \frac{|\mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}'|^{-\frac{n}{2}}}{|\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}}} = \frac{|\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}} [1 + n\bar{\mathbf{X}}' \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{X}}]^{-\frac{n}{2}}}{|\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}}} = [1 + n\bar{\mathbf{X}}' \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{X}}]^{-\frac{n}{2}}$$

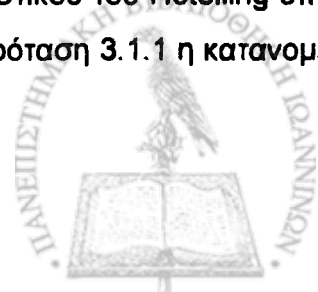
ή
$$\lambda_1 = \left[1 + \frac{n}{n-1} \bar{\mathbf{X}}' \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{X}} \right]^{-\frac{n}{2}}, \tag{3.1.3}$$

με $\mathbf{A} = \frac{1}{(n-1)} \mathbf{S}$.

Παρατηρούμε ότι η λ_1 είναι φθίνουσα συνάρτηση του $n\bar{\mathbf{X}}' \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{X}}$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το στατιστικό $n\bar{\mathbf{X}}' \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{X}}$ (γνωστό ως στατιστικό του Hotelling) για τον έλεγχο της $H_0 : \mu = \mathbf{0}_p$, με κρίσιμη περιοχή την

$$n\bar{\mathbf{X}}' \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{X}} \geq \lambda_\alpha,$$

όπου λ_α μία σταθερά, η οποία εξαρτάται από το επίπεδο σημαντικότητας α . Για τον καθορισμό της απαιτείται ο προσδιορισμός της κατανομής του στατιστικού του Hotelling υπό την H_0 στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.1 η κατανομή



του $T^2 = n\bar{\mathbf{X}}^t \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{X}}$ στατιστικού παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών, αφού $\mathbf{0}_p \in \omega_1$ και $\mathbf{I}_p \in \omega_2$, και επιπλέον ισχύει ότι

$$\begin{aligned} T^2(\alpha\mathbf{X}) &= n \left(\frac{\sum_{i=1}^n \alpha\mathbf{X}_i}{n} \right)^t \left((n-1) \sum_{i=1}^n (\alpha\mathbf{X}_i - \alpha\bar{\mathbf{X}})(\alpha\mathbf{X}_i - \alpha\bar{\mathbf{X}})^t \right)^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \alpha\mathbf{X}_i}{n} \right) = \\ &= n\alpha\bar{\mathbf{X}}^t \left((n-1) \sum_{i=1}^n \alpha(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})\alpha(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^t \right)^{-1} \alpha\bar{\mathbf{X}} = \\ &= n\alpha^2\bar{\mathbf{X}}^t (\alpha^2)^{-1} \left((n-1) \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^t \right)^{-1} \bar{\mathbf{X}} = n\bar{\mathbf{X}}^t \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{X}} = T^2(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Καθώς η κατανομή του στατιστικού $n\bar{\mathbf{X}}^t \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{X}}$ για τον έλεγχο της $H_0: \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_p$ παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών, υπό τη μηδενική υπόθεση, αρκεί να προσδιορισθεί για ένα μέλος αυτών. Επομένως, αρκεί να προσδιορισθεί για την ειδική περίπτωση της δειγματοληψίας από πολυδιάστατο κανονικό πληθυσμό. Ο προσδιορισμός αυτός είναι το αντικείμενο μελέτης του επόμενου Θεωρήματος, για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε, μεταξύ άλλων, στο σύγγραμμα του Muirhead (1982), σελ. 98.

Θεώρημα 3.1.1. Έστω $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, με

$n > p$ και $T^2 = n\bar{\mathbf{X}}^t \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{X}}$, όπου $\bar{\mathbf{X}}$ ο δειγματικός μέσος και $\mathbf{A} = \frac{1}{n-1} \mathbf{S}$ ο δειγματικός πίνακας

διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων. Τότε

$$\frac{n-p}{(n-1)p} T^2 \sim F_{p, (n-p)}(\delta), \text{ όπου } \delta = n\boldsymbol{\mu}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu},$$

δηλαδή ακολουθεί μη κεντρική F κατανομή με p και $n-p$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη εκκεντρότητας δ . Υπό τη μηδενική υπόθεση $H_0: \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_p$, προφανώς ακολουθεί κεντρική F κατανομή με p και $n-p$ βαθμούς ελευθερίας. \square

Ανακεφαλαιώνοντας, προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα, για τον έλεγχο της $H_0: \boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}_p$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a: \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}_p$, στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών.

Θεώρημα 3.1.2. (βλέπε, μεταξύ άλλων, Fang and Zhang (1990)) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , η τε πλήθος, με $n > p$, ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις του $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, όπου Σ θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Υποθέτοντας επιπλέον ότι ο γεννήτορας $g(\cdot)$ της σ. π. π. είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, το στατιστικό πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης, $H_0: \mu_0 = \mathbf{0}_p$, έναντι της εναλλακτικής $H_a: \mu \neq \mathbf{0}_p$, είναι

$$\lambda_1 = \left[1 + n \bar{X}' S^{-1} \bar{X} \right]^{-\frac{n}{2}} = \left[1 + \frac{n}{n-1} \bar{X}' A^{-1} \bar{X} \right]^{-\frac{n}{2}},$$

όπου $A = \frac{1}{n-1} S$ και οι ποσότητες \bar{X} και S ορίζονται από τις σχέσεις (2.1.5) και (2.1.6) αντίστοιχα. Επιπλέον, το στατιστικό λ_1 ταυτίζεται με αυτό του αντίστοιχου ελέγχου στο δειγματοληπτικό πλαίσιο της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής και η κατανομή του, υπό τη μηδενική υπόθεση, παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Επιπλέον, προσδιορίζεται ότι

$$\frac{T^2}{n-1} \frac{n-p}{p} \sim F_{p, (n-p)},$$

όπου $T^2 = n \bar{X}' A^{-1} \bar{X}$. Επομένως, απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση $H_0: \mu_0 = \mathbf{0}_p$, όταν $T^2 \geq \frac{p(n-1)}{n-p} F_{p, (n-p), \alpha}$, όπου $F_{p, (n-p), \alpha}$ μία σταθερά, η οποία εξαρτάται από το επίπεδο σημαντικότητας α και προσδιορίζεται από τον πίνακα της F κατανομής με p και $n-p$ βαθμούς ελευθερίας. \square

3.1.2 Έλεγχος ότι η παράμετρος κλίμακας ισούται με δοθέντα πίνακα

Θέλουμε να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση

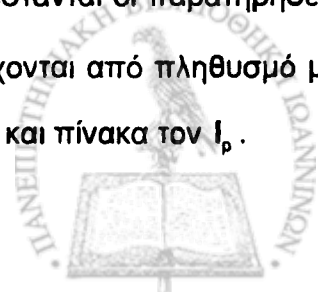
$$H_0: \Sigma = \Sigma_0$$

έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης

$$H_a: \Sigma \neq \Sigma_0,$$

όπου Σ_0 ένας γνωστός και θετικά ορισμένος πίνακας.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας σε όσα ακολουθούν θεωρούμε ότι $\Sigma_0 = I_p$, με I_p τον ταυτοτικό πίνακα. Αυτό είναι εφικτό, καθώς αν $\Sigma_0 \neq I_p$, τότε αντικαθίστανται οι παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots, X_n με τις $\Sigma_0^{-1/2} X_1, \Sigma_0^{-1/2} X_2, \dots, \Sigma_0^{-1/2} X_n$, καθώς και αυτές προέρχονται από πληθυσμό με ελλειπτική κατανομή, με γεννήτορα της ίδιας συναρτησιακής μορφής και πίνακα τον I_p .



Το τεστ πηλίκου μέγιστων πιθανοφαινιών, για τον προαναφερθέντα έλεγχο, στηρίζεται στο λόγο

$$\lambda_2 = \frac{\sup_{H_0} L(\mu, \Sigma)}{\sup_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma)} = \frac{\sup_{\mu} L(\mu, I_p)}{\sup_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma)}. \quad (3.1.4)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1 και από τη σχέση (2.1.11) προκύπτει ότι

$$\sup_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma) = \lambda_{\max}(g)^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(g)} \right].$$

Στη συνέχεια, υπό την μηδενική υπόθεση H_0 , δοθέντος ότι η παράμετρος κλίμακας είναι ο ταυτοτικός πίνακας I_p και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.1.1) είναι

$$L(\mu, I_p) = g_{np} \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \mu)^t (\mathbf{X}_i - \mu) \right].$$

Έτσι, μεγιστοποιώντας τη συνάρτηση πιθανοφάνειας υπό την H_0 , προκύπτει

$$\max_{\mu} L(\mu, I_p) = g_{np} [\text{tr}(\mathbf{S})].$$

Επομένως, ο λόγος των πιθανοφαινιών, από τη σχέση (3.1.4) είναι

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma = I_p > 0} L(\mu, \Sigma)}{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma)} = \frac{g_{np} [\text{tr}(\mathbf{S})]}{\lambda_{\max}(g)^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(g)} \right]} \\ &= \lambda_{\max}(g)^{\frac{np}{2}} g_{np}^{-1} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(g)} \right] g_{np} [\text{tr}(\mathbf{S})] |\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Παρατηρούμε ότι το στατιστικό λ_2 δεν είναι ίδιο για ολόκληρη την κλάση των ελλειπτικών κατανομών, αλλά εξαρτάται από το γεννήτορα της σ. π. π. $g_{np}(\cdot)$, καθώς και από την ποσότητα $\lambda_{\max}(g)$. Στον Πίνακα 4 που ακολουθεί, δίνονται τόσο η ποσότητα $\lambda_{\max}(g)$ όσο και ο γεννήτορας $g_{np}(\cdot)$ για ειδικές περιπτώσεις των ελλειπτικών κατανομών.

Ανακεφαλαιώνοντας, προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα, για τον έλεγχο της $H_0 : \Sigma = I_p$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a : \Sigma \neq I_p$, στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών.

Θεώρημα 3.1.3. (βλέπε, μεταξύ άλλων, Gupta and Varga (1993)) Έστω $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, η το πλήθος, με $n > p$, ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις του $\mathbf{X} \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, με παραμέτρους

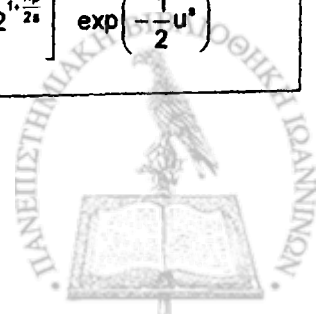
θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, όπου λ θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Υποθέτοντας επιπλέον ότι ο γεννήτορας $g(\cdot)$ της σ. π. π είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, το στατιστικό πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης, $H_0 : \Sigma = I_p$, έναντι της εναλλακτικής $H_a : \Sigma \neq I_p$, είναι

$$\lambda_2 = \lambda_{\max}(g) \frac{np}{2} g_{np}^{-1} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(g)} \right] g_{np} [\text{tr}(\mathbf{S})] \|\mathbf{S}\|_2^{\frac{n}{2}},$$

όπου η ποσότητα \mathbf{S} ορίζεται από τη σχέση (2.1.6). Η κατανομή του στατιστικού λ_2 υπό τη μηδενική υπόθεση εξαρτάται από το γεννήτορα της σ. π. π. $g_{np}(\cdot)$ καθώς και από το $\lambda_{\max}(g)$, και δεν παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. \square

Πίνακας 4: $\lambda_{\max}(g)$ και $g_{np}(u)$ ελλειπτικών κατανομών.

Κατανομή	$\lambda_{\max}(g)$	$g_{np}(u)$
$N_p(\mu, \Sigma)$	$\frac{1}{n}$	$(2\pi)^{-\frac{np}{2}} \exp\left(-\frac{u}{2}\right)$
$Mt_p(\mu, \Sigma, m)$	$\frac{1}{n}$	$(\pi m)^{-\frac{np}{2}} \Gamma\left(\frac{np+m}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^{-1} \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-\frac{np+m}{2}}$
$MPII_p(\mu, \Sigma)$	$\frac{2m+np}{n}$	$\pi^{-\frac{np}{2}} \Gamma\left(\frac{np}{2} + m + 1\right) \left[\Gamma(m+1)\right]^{-1} (1-u)^m$
$MPVII_p(\mu, \Sigma)$	$\frac{2N-np}{nm}$	$(\pi m)^{-\frac{np}{2}} \Gamma(N) \left[\Gamma\left(N - \frac{np}{2}\right)\right]^{-1} \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-N}$
$Kz_p(\mu, \Sigma, r, N, s)$	$p \left(\frac{2rs}{np + 2(N-1)}\right)^{\frac{1}{s}}$	$s \Gamma\left(\frac{np}{2}\right) r^{\frac{2N+np-2}{2s}} \left[\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{2N+np-2}{2s}\right)\right]^{-1} u^{N-1} \exp(-ru^s)$
$MC_p(\mu, \Sigma)$	$\frac{1}{n}$	$\Gamma\left(\frac{np+1}{2}\right) \pi^{-\frac{np+1}{2}} (1+u)^{-\frac{np+1}{2}}$
$La_p(\mu, \Sigma)$	$\frac{1}{n^2 p}$	$\Gamma\left(\frac{np}{2}\right) \left[2\pi^{\frac{np}{2}} \Gamma(np)\right]^{-1} \exp(-\ u\)$
$PE_p(\mu, \Sigma, s)$	$p \left(\frac{s}{np}\right)^{\frac{1}{s}}$	$np \Gamma\left(\frac{np}{2}\right) \left[\pi^{\frac{np}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{np}{2s}\right) 2^{\frac{np}{2s}}\right]^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}u^s\right)$



3.1.3 Έλεγχος ότι η παράμετρος κλίμακας ισούται με δοθέντα πίνακα και η παράμετρος θέσης ισούται με δοθέν διάνυσμα

Θέλουμε να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \text{ και } \mu = \mu_0$$

έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a : \Sigma \neq \Sigma_0 \text{ ή } \mu \neq \mu_0,$

όπου $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$ ένα γνωστό διάνυσμα και Σ_0 ένας γνωστός και θετικά ορισμένος πίνακας.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, με παρόμοιο σκεπτικό όπως πρωτίτερα, σε όσα ακολουθούν θεωρούμε ότι $\Sigma_0 = I_p$ και $\mu_0 = \mathbf{0}_p$, όπου I_p ο ταυτοτικός πίνακας και $\mathbf{0}_p$ το p -διάστατο μηδενικό διάνυσμα.

Το τεστ πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών, για τον προαναφερθέντα έλεγχο, στηρίζεται στο λόγο

$$\lambda_3 = \frac{\sup_{H_0} L(\mu, \Sigma)}{\sup_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma)} = \frac{L(\mathbf{0}_p, I_p)}{\sup_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma)}. \quad (3.1.6)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1 και από τη σχέση (2.1.11) προκύπτει ότι

$$\sup_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma) = \lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right].$$

Στη συνέχεια, υπό την μηδενική υπόθεση H_0 , από τη σχέση (3.1.1) και δοθέντος ότι η παράμετρος κλίμακας είναι ίση με I_p και η παράμετρος θέσης είναι ίση με $\mathbf{0}_p$, είναι

$$L(\mathbf{0}_p, I_p) = g_{np} \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i' \mathbf{x}_i \right].$$

Επομένως, ο λόγος πιθανοφανειών από τη σχέση (3.1.6), γίνεται

$$\lambda_3 = \frac{L(\mathbf{0}_p, I_p)}{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma)} = \frac{g_{np} \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i' \mathbf{x}_i \right]}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right]}. \quad (3.1.7)$$

Παρατηρούμε πως το στατιστικό (3.1.7) για τον έλεγχο της υπό μελέτη μηδενικής υπόθεσης, εξαρτάται από το γεννήτορα της σ. π. π., $g_{np}(\cdot)$ και το σημείο $\lambda_{\max}(\mathbf{g})$. Επομένως, δεν είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε το στατιστικό τεστ πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών σε όλη την κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Παρόλα αυτά το στατιστικό μπορεί να δοθεί

για ειδικές περιπτώσεις των ελλειπτικών κατανομών, καθώς στον Πίνακα 4 προσδιορίζοντα τόσο ο γεννήτορας $g_{np}(\cdot)$ όσο και το σημείο $\lambda_{\max}(g)$.

Ανακεφαλαιώνοντας, προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα, για τον έλεγχο της $H_0: \Sigma = I_p$ και $\mu = 0_p$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a: \Sigma \neq I_p$ ή $\mu \neq 0_p$, στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών.

Θεώρημα 3.1.4. (βλέπε, μεταξύ άλλων, Gupta and Varga (1993)) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , n το πλήθος, με $n > p$, ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις του $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, όπου Σ θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Υποθέτοντας επιπλέον ότι ο γεννήτορας $g(\cdot)$ της σ. π. π. είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, το στατιστικό πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης, $H_0: \Sigma = I_p$ και $\mu = 0_p$, έναντι της εναλλακτικής $H_a: \Sigma \neq I_p$ ή $\mu \neq 0_p$, είναι

$$\lambda_3 = \frac{g_{np} \left[\sum_{i=1}^n X_i' X_i \right]}{\lambda_{\max}(g)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(g)} \right]},$$

όπου η ποσότητα \mathbf{S} ορίζεται από τη σχέση (2.1.6). Η κατανομή του στατιστικού λ_3 υπό τη μηδενική υπόθεση εξαρτάται από το γεννήτορα της σ. π. π. $g_{np}(\cdot)$ καθώς και από το $\lambda_{\max}(g)$, και δεν παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. \square

3.1.4 Έλεγχος ασυσχέτιστου μεταξύ συνόλων μεταβλητών

Θεωρούμε ένα p -διάστατο τυχαίο διάνυσμα $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g_p)$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μορφής (1.1.2), και άγνωστες παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ και Σ αντίστοιχα, όπου Σ ένας θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το X διαμερίζεται σε k σύνολα μεταβλητών ως $X = (X_1', X_2', \dots, X_k')'$, όπου X_i είναι p_i -διάστατο τυχαίο διάνυσμα, $i = 1, 2, \dots, k$, με $\sum_{i=1}^k p_i = p$. Θεωρούμε ακόμη, ότι οι παράμετροι μ και Σ διαμερίζονται αντίστοιχα με το διαμερισμό του τυχαίου διανύσματος X , όπως φαίνεται παρακάτω



$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_k \end{pmatrix} \text{ και } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \dots & \Sigma_{1k} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \dots & \Sigma_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma_{k1} & \Sigma_{2k} & \dots & \Sigma_{kk} \end{pmatrix}.$$

Για τον προσδιορισμό του τεστ πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών για τον έλεγχο του ασυσχέτιστου των υποδιανυσμάτων $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k$, η μηδενική υπόθεση μορφοποιείται στην

$$H_0 : \Sigma_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, k,$$

έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης

$$H_a : \exists i \in (1, 2, \dots, k) \text{ τέτοιο ώστε } \Sigma_{ij} \neq 0, \text{ για } i \neq j, \text{ με } i, j = 1, 2, \dots, k.$$

Ισοδύναμα, ο παραπάνω έλεγχος ανάγεται στον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$$

έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης

$$H_a : \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0,$$

όπου $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \text{diag}(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \dots, \Sigma_{kk})$, άγνωστος block διαγώνιος πίνακας. Τότε $\boldsymbol{\Sigma}_0 > 0$ αν και μόνο αν $\Sigma_{11} > 0, \Sigma_{22} > 0, \dots, \Sigma_{kk} > 0$.

Το τεστ πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών, για τον προαναφερθέντα έλεγχο, στηρίζεται στο λόγο

$$\lambda_4 = \frac{\sup_{H_0} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}{\sup_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})} = \frac{\sup_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0)}{\sup_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}. \quad (3.1.8)$$

Η πιθανοφάνεια υπό την H_0 , σύμφωνα με τη σχέση (2.1.8) είναι

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0) = \left(\text{diag}(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \dots, \Sigma_{kk}) \right)^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \left[\mathbf{S} + n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})^t \right] \right) \right].$$

Καθώς η ορίζουσα ενός διαγώνιου πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του, προκύπτει

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0) = \left(\prod_{l=1}^k |\Sigma_{ll}| \right)^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \left[\mathbf{S} + n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})^t \right] \right) \right],$$

όπου ο πίνακας \mathbf{S} διαμερίζεται ως εξής

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \dots & \mathbf{S}_{1k} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \dots & \mathbf{S}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{S}_{k1} & \mathbf{S}_{2k} & \dots & \mathbf{S}_{kk} \end{pmatrix}. \quad (3.1.9)$$

Στη συνέχεια, υπό την H_0 , μεγιστοποιούμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας. Είναι



$$\begin{aligned} \max_{\mu, \Sigma - \Sigma_0 > 0} L(\mu, \Sigma_0) &= \max_{\Sigma_0 > 0} L(\bar{X}, \Sigma_0) = \left(\prod_{i=1}^k |\Sigma_{ii}| \right)^{\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr}(\Sigma_0^{-1} \mathbf{S}) \right] = \\ &= \left(\prod_{i=1}^k |\Sigma_{ii}| \right)^{\frac{n}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \text{tr}(\Sigma_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ii}) \right] \end{aligned}$$

ή

$$\max_{\Sigma_0 > 0} L(\bar{X}, \Sigma_0) = \left(\prod_{i=1}^k |\Sigma_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ii}| \right)^{\frac{n}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \text{tr}(\Sigma_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ii}) \right] \left(\prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_{ii}| \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Έστω λ_{ij} οι ιδιοτιμές των $\Sigma_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ii}$, τότε ισχύουν

$$\text{tr} \sum_{i=1}^k \Sigma_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ii} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{p_i} \lambda_{ij} \quad \text{και} \quad \left(\prod_{i=1}^k |\Sigma_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ii}| \right)^{\frac{n}{2}} = \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} \lambda_{ij} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Επομένως, αρκεί να μεγιστοποιηθεί η $\left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} \lambda_{ij} \right)^{\frac{n}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{p_i} \lambda_{ij} \right] \left(\prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_{ii}| \right)^{\frac{n}{2}}$.

Εφαρμόζοντας την ανισότητα του αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου (βλέπε σχέση (2.1.4)), έχουμε

$$\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} \lambda_{ij}^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{p_i} \frac{1}{p} \lambda_{ij} = \bar{\lambda}^{-1}.$$

Αρα η συνάρτηση πιθανοφάνειας γίνεται

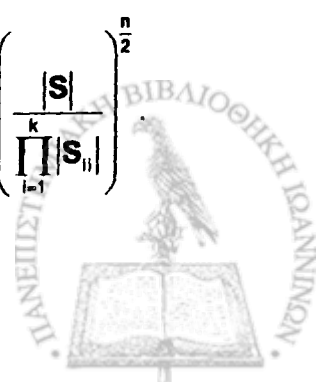
$$\begin{aligned} \max_{\Sigma_0 > 0} L(\bar{X}, \Sigma_0) &= \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} \lambda_{ij}^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{np}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{p_i} \lambda_{ij} \right] \left(\prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_{ii}| \right)^{\frac{n}{2}} \leq \\ &\leq \left(\bar{\lambda}^{-1} \right)^{\frac{np}{2}} g_{np} \left[p \bar{\lambda}^{-1} \right] \left(\prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_{ii}| \right)^{\frac{n}{2}} \leq \\ &\stackrel{\text{Λήμμα 2.1.1}}{\leq} \lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right] \left(\prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_{ii}| \right)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, σύμφωνα με τη σχέση (2.1.11), έχουμε

$$\max_{\mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma) = \lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right].$$

Επομένως, ο λόγος πιθανοφανειών από τη σχέση (3.1.8), γίνεται

$$\lambda_4 = \frac{\sup_{\mu, \Sigma - \Sigma_0 > 0} L(\mu, \Sigma)}{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma)} = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right] \left(\prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_{ii}| \right)^{\frac{n}{2}}}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{S}|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right]} = \left(\frac{|\mathbf{S}|}{\prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_{ii}|} \right)^{\frac{n}{2}}$$



Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται αν $\lambda_4 < \lambda_{4,\alpha}$, όπου $\lambda_{4,\alpha}$ είναι μία σταθερά τέτοια ώστε ο έλεγχος να είναι επιπέδου σημαντικότητας α . Για τον καθορισμό της σταθεράς $\lambda_{4,\alpha}$ απαιτείται ο προσδιορισμός της κατανομής του λ_4 , υπό την H_0 , στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

- το στατιστικό λ_4 ταυτίζεται με το στατιστικό για τον αντίστοιχο έλεγχο στην περίπτωση της δειγματοληψίας από κανονικό πληθυσμό (βλέπε, μεταξύ άλλων, Anderson (1984, Θεώρημα 9.2.1, σελ. 379)).
- Επιπλέον, υπό τη μηδενική υπόθεση, πληρούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης

3.1.1. Όντως αν $T(\mathbf{X}) = \left(\frac{|\mathbf{S}|}{\prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_{ii}|} \right)^{\frac{n}{2}}$ προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες του πίνακα

διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων ότι: $T(\alpha\mathbf{X}) \stackrel{d}{=} T(\mathbf{X})$ και $T(\mathbf{X}) \stackrel{d}{=} T(\mathbf{X} + \mathbf{M})$.

Επομένως από την Πρόταση 3.1.1 προκύπτει ότι η κατανομή του στατιστικού λ_4 , υπό την H_0 , παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Αυτό σημαίνει ότι αρκεί να προσδιορισθεί για ένα μέλος αυτής της οικογένειας. Αρκεί να προσδιορισθεί για την ειδική περίπτωση της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής.

Στο επόμενο Θεώρημα (βλέπε, για παράδειγμα, Anderson (1984, υποενότητα 9.3) και Siotani *et al.* (1985, σελ. 360)), παρατίθενται κάποια αποτελέσματα που αφορούν κυρίως την ασυμπτωτική κατανομή του στατιστικού $\lambda_4^{2/n}$ υπό την H_0 , στο δειγματοληπτικό πλαίσιο της $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, καθώς η ακριβής κατανομή αυτού είναι αρκετά πολύπλοκη (βλέπε Mathai and Katiyar (1979)).

Θεώρημα 3.1.5. Έστω $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, με

$n > p$ και $\lambda_4^{2/n} = \frac{|\mathbf{S}|}{\prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_{ii}|}$, όπου ο \mathbf{S} ορίζεται από τη σχέση (2.1.6) και \mathbf{S}_{ii} η διαμέριση του

πίνακα \mathbf{S} σύμφωνα με τη σχέση (3.1.9). Τότε το στατιστικό $\lambda_4^{2/n}$ κατανέμεται σύμφωνα με το

γινόμενο $\prod_{i=2}^k \prod_{j=1}^{p_i} \beta_{ij}$, όπου τα β_{ij} είναι ανεξάρτητα με κατανομή την βήτα, η οποία ορίζεται

$$B\left(\frac{1}{2}(N - \bar{p}_i + 1 - j), \frac{1}{2}\bar{p}_i\right),$$

όπου $N = n - 1$ και $\bar{p}_i = p_i + \dots + p_{i-1}$, για $i = 2, \dots, k$, $j = 1, \dots, p_i$.

Επιπλέον, υπό τη μηδενική υπόθεση $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$, όπου $\Sigma_0 = \text{diag}(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \dots, \Sigma_{kk})$, άγνωστος block διαγώνιος πίνακας, και για μεγάλες τιμές του n , το στατιστικό $W = -2\rho \cdot \log \lambda_4$, για

$$\rho = 1 - \frac{1}{n} \left(\frac{3}{2} + \frac{p^3 - \sum p_i^3}{3(p^2 - \sum p_i^2)} \right), \text{ ακολουθεί ασυμπτωτικά } \chi^2 \text{ κατανομή με } m \text{ βαθμούς}$$

ελευθερίας, όπου $m = \frac{1}{2} \left(p^2 - \sum_{i=1}^k p_i^2 \right)$. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, απορρίπτεται η

$H_0 : \Sigma = \text{diag}(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \dots, \Sigma_{kk})$, όταν $W \geq \chi_{m,\alpha}^2$. Επιπλέον, για τον υπολογισμό των κρίσιμων πιθανοτήτων (*p-values*) χρησιμοποιείται η σχέση

$$P[W \geq c] = P[\chi_m^2 \geq c] + \omega \gamma^{-2} (P[\chi_{m+4}^2 \geq c] - P[\chi_m^2 \geq c]) + O(n^{-3}),$$

όπου

$$\gamma = \rho n$$

$$\text{και } \omega = \frac{1}{48} \left[(p^4 - \sum p_i^4) + 6(p^3 - \sum p_i^3) + 11(p^2 - \sum p_i^2) \right] - \frac{1}{4} n^2 (1 - \rho)^2,$$

ενώ με $O(n^{-3})$ συμβολίζουμε τους υπόλοιπους όρους που παραλείπονται. \square

Ανακεφαλαιώνοντας, προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα, για τον έλεγχο της $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a : \Sigma \neq \Sigma_0$, όπου $\Sigma_0 = \text{diag}(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \dots, \Sigma_{kk})$, άγνωστος block διαγώνιος πίνακας, στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών.

Θεώρημα 3.1.6. (βλέπε, μεταξύ άλλων, Gurta and Varga (1993)) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , n το πλήθος, με $n > p$, ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις του $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, όπου Σ θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το X διαμερίζεται σε k σύνολα μεταβλητών ως $X = (X_1^t, X_2^t, \dots, X_k^t)^t$, όπου X_i είναι p_i -διάστατο τυχαίο διάνυσμα, $i = 1, 2, \dots, k$, με $\sum_{i=1}^k p_i = p$. Υποθέτοντας ακόμη, ότι ο γεννήτορας $g(\cdot)$ της σ. π. π. είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, το στατιστικό πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης, $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$, έναντι της εναλλακτικής $H_a : \Sigma \neq \Sigma_0$, όπου $\Sigma_0 = \text{diag}(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \dots, \Sigma_{kk})$, άγνωστος block διαγώνιος πίνακας, είναι



$$\lambda_4 = \left(\frac{|\mathbf{S}|}{\prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_{ii}|} \right)^{\frac{n}{2}},$$

όπου η ποσότητα \mathbf{S} ορίζεται από τη σχέση (2.1.6) και διαμερίζεται όπως δίνεται στη σχέση (3.1.9). Επιπλέον, το στατιστικό λ_4 είναι ίδιο με το αντίστοιχο για τον έλεγχο στο δειγματοληπτικό πλαίσιο της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής και η κατανομή του, υπό τη μηδενική υπόθεση, παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών και ο έλεγχος γίνεται με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 3.1.5. \square

3.1.5 Τεστ σφαιρικότητας

Στην παρούσα παράγραφο θα μελετηθεί ο έλεγχος της σφαιρικότητας (test of sphericity), δηλαδή της μηδενικής υπόθεσης

$$H_0 : \Sigma = \alpha \Sigma_0$$

έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a : \Sigma \neq \alpha \Sigma_0$,

όπου Σ_0 γνωστός και θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p , με $\alpha > 0$, μία άγνωστη ποσότητα.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ο έλεγχος μπορεί να αναχθεί στον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης

$$H_0 : \Sigma = \alpha I_p$$

έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a : \Sigma \neq \alpha I_p$, όπου I_p ο ταυτοτικός πίνακας τάξης p .

Το τεστ πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών, για τον προαναφερθέντα έλεγχο, στηρίζεται στο λόγο

$$\lambda_5 = \frac{\sup_{H_0} L(\mu, \Sigma)}{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma)} = \frac{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, \alpha > 0} L(\mu, \alpha I_p)}{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma)}. \quad (3.1.10)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1 και από τη σχέση (2.1.11) προκύπτει ότι

$$\sup_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma) = \lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}} \mathbf{g}_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right].$$

Στη συνέχεια, υπό την H_0 και σύμφωνα με τη σχέση (2.1.8), είναι

$$L(\mu, \alpha I_p) = |\alpha I_p|^{-\frac{n}{2}} \mathbf{g}_{np} \left[\text{tr} \left((\alpha I_p)^{-1} \left[\mathbf{S} + n(\bar{\mathbf{X}} - \mu)(\bar{\mathbf{X}} - \mu)^t \right] \right) \right].$$

Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \max_{\mu \in \mathbb{R}^p, \alpha > 0} L(\mu, \alpha I_p) &= \max_{\alpha > 0} L(\bar{X}, \alpha I_p) = \max_{\alpha > 0} |\alpha I_p|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr} \left((\alpha I_p)^{-1} \mathbf{S} \right) \right] = \max_{\alpha > 0} \alpha^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left[\text{tr} \frac{1}{\alpha} \mathbf{S} \right] = \\ &= \max_{\alpha > 0} \alpha^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left[p \left(\text{tr} \frac{1}{\alpha p} \mathbf{S} \right) \right]. \end{aligned}$$

Με στόχο να οδηγηθούμε σε μία συνάρτηση παρόμοια με αυτή της αποδεικτικής διαδικασίας του Θεωρήματος 2.1.1, θέτουμε όπου $\text{tr} \frac{\mathbf{S}}{\alpha p} = \lambda^{-1}$, δηλαδή θέτουμε $\alpha = \lambda \text{tr} \frac{\mathbf{S}}{p}$. Επομένως είναι

$$\begin{aligned} \max_{\mu \in \mathbb{R}^p, \alpha > 0} L(\mu, \alpha I_p) &= \max_{\lambda > 0} \lambda^{-\frac{np}{2}} \left[\text{tr} \frac{1}{p} \mathbf{S} \right]^{-\frac{np}{2}} g_{np} [p\lambda^{-1}] = \\ &\stackrel{\text{Λήμμα 2.1.1}}{=} \lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} \left[\text{tr} \frac{1}{p} \mathbf{S} \right]^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right]. \end{aligned}$$

Επομένως, ο λόγος πιθανοφανειών από τη σχέση (3.1.10), γίνεται

$$\lambda_5 = \frac{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, \alpha > 0} L(\mu, \alpha I_p)}{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma)} = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} \left[\text{tr} \frac{1}{p} \mathbf{S} \right]^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right]}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right]} = \frac{|\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}}}{\left[\text{tr} \frac{1}{p} \mathbf{S} \right]^{\frac{np}{2}}}.$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται αν $\lambda_5 < \lambda_{5,\alpha}$, όπου $\lambda_{5,\alpha}$ είναι μία σταθερά τέτοια ώστε ο έλεγχος να είναι επιπέδου σημαντικότητας α . Για τον καθορισμό της σταθεράς $\lambda_{5,\alpha}$ απαιτείται ο προσδιορισμός της κατανομής του λ_5 , υπό την H_0 , στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

- το στατιστικό λ_5 ταυτίζεται με το στατιστικό για τον αντίστοιχο έλεγχο στην περίπτωση της δειγματοληψίας από κανονικό πληθυσμό (βλέπε, μεταξύ άλλων, Anderson (1984, σελ. 428)).
- Επιπλέον, υπό τη μηδενική υπόθεση, πληρούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης

3.1.1. Όντως αν $T(\mathbf{X}) = |\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}} / \left[\text{tr} \frac{1}{p} \mathbf{S} \right]^{\frac{np}{2}}$ προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες του πίνακα

διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων ότι: $T(\alpha \mathbf{X}) \stackrel{d}{=} T(\mathbf{X})$ και $T(\mathbf{X}) \stackrel{d}{=} T(\mathbf{X} + \mathbf{M})$.

Επομένως, από την Πρόταση 3.1.1 προκύπτει ότι η κατανομή του στατιστικού λ_5 , υπό την H_0 , παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Αυτό σημαίνει



ότι αρκεί να προσδιορισθεί για ένα μέλος αυτής της οικογένειας. Άρα, αρκεί να προσδιορισθεί για την ειδική περίπτωση της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής.

Στο επόμενο Θεώρημα (βλέπε, για παράδειγμα, Muirhead (1982, ενότητα 8.3)), παρατίθενται κάποια αποτελέσματα που κυρίως αφορούν την ασυμπτωτική κατανομή του στατιστικού λ_5 υπό την H_0 , στο δειγματοληπτικό πλαίσιο της $N_p(\mu, \Sigma)$, καθώς η ακριβής κατανομή του είναι αρκετά πολύπλοκη.

Θεώρημα 3.1.7. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό $N_p(\mu, \Sigma)$, με

$n > p$ και $\lambda_5^{2/n} = \frac{|S|}{\left[\text{tr} \frac{1}{p} S\right]^p}$, όπου ο πίνακας S ορίζεται από τη σχέση (2.1.6). Όταν η μηδενική

υπόθεση, $H_0: \Sigma = \alpha I_p$, είναι αληθής, το στατιστικό $W = -2 \frac{n-1}{n} p \cdot \log \lambda_5$, για μεγάλες τιμές του

$\gamma = p(n-1)$, ακολουθεί ασυμπτωτικά χ^2 κατανομή με m βαθμούς ελευθερίας, όπου

$m = \frac{1}{2}(p+2)(p-1)$. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, απορρίπτεται η $H_0: \Sigma = \alpha I_p$, όταν

$W \geq \chi_{m,\alpha}^2$. Επιπλέον, για τον υπολογισμό των κρίσιμων πιθανοτήτων (*p-values*)

χρησιμοποιείται η σχέση

$$P[W \geq z] = P[\chi_m^2 \geq z] + k\gamma^{-2} (P[\chi_{m+4}^2 \geq z] - P[\chi_m^2 \geq z]) + O(\gamma^{-3}),$$

όπου

$$\rho = 1 - \frac{2p^2 + p + 2}{6p(n-1)},$$

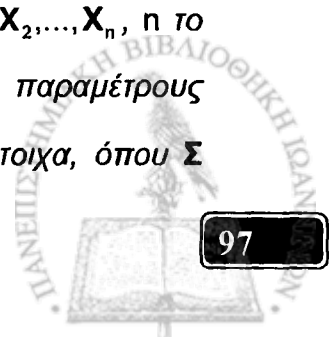
$$k = ((n-1)\rho)^2 \omega = \gamma^2 \omega,$$

και

$$\omega = \frac{(p-1)(p-2)(p+2)(2p^3 + 6p^2 + 3p + 2)}{288p^2(n-1)^2 p^2}. \quad \square$$

Ανακεφαλαιώνοντας, προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα, για τον έλεγχο της $H_0: \Sigma = \alpha I_p$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a: \Sigma \neq \alpha I_p$, στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών.

Θεώρημα 3.1.8. (βλέπε, μεταξύ άλλων, Gupta and Varga (1993)) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , n το πλήθος, με $n > p$, ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις του $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, όπου Σ



θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Υποθέτοντας επιπλέον ότι ο γεννήτορας $g(\cdot)$ της σ . π. π είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, το στατιστικό πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης, $H_0 : \Sigma = \alpha I_p$, έναντι της εναλλακτικής $H_a : \Sigma \neq \alpha I_p$, είναι

$$\lambda_5 = \frac{|\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}}}{\left[\text{tr} \frac{1}{p} \mathbf{S} \right]^{\frac{np}{2}}},$$

όπου η ποσότητα \mathbf{S} ορίζεται από τη σχέση (2.1.6). Επιπλέον, το στατιστικό λ_5 είναι το ίδιο για τον αντίστοιχο έλεγχο στο δειγματοληπτικό πλαίσιο της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής και η κατανομή του, υπό τη μηδενική υπόθεση, παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών και ο έλεγχος γίνεται με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 3.1.7. \square

3.1.6 Έλεγχος ότι η παράμετρος θέσης ισούται με δοθέν διάνυσμα και η παράμετρος κλίμακας είναι ανάλογη ενός δοθέντα πίνακα

Θέλουμε να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση

$$H_0 : \Sigma = \alpha \Sigma_0 \text{ και } \mu = \mu_0$$

έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a : \Sigma \neq \alpha \Sigma_0 \text{ ή } \mu \neq \mu_0$.

όπου $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$ ένα γνωστό διάνυσμα και Σ_0 γνωστός και θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p , με $\alpha > 0$, μία άγνωστη ποσότητα.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, με παρόμοιο σκεπτικό όπως πρωτύτερα, σε όσα ακολουθούν θεωρούμε ότι $\Sigma_0 = I_p$ και $\mu_0 = \mathbf{0}_p$.

Το τεστ πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών, για τον προαναφερθέντα έλεγχο, στηρίζεται στο λόγο

$$\lambda_6 = \frac{\sup_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma)}{\sup_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma)} = \frac{L(\mathbf{0}_p, \alpha I_p)}{\sup_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma)}. \quad (3.1.11)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1 και από τη σχέση (2.1.11) προκύπτει ότι

$$\sup_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma) = \lambda_{\max}(g)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(g)} \right].$$

Στη συνέχεια, υπό την H_0 και σύμφωνα με τη σχέση (2.1.8), είναι

$$L(\mathbf{0}_p, \alpha I_p) = \alpha^{\frac{np}{2}} g_{np} \left[\frac{1}{\alpha} \text{tr}(\mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}^t) \right].$$



Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \max_{\alpha > 0} L(\mathbf{0}_p, \alpha I_p) &= \max_{\alpha > 0} \left\{ \alpha^{-\frac{np}{2}} |I_p|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{1}{\alpha} \text{tr}(\mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}^t) \right] \right\} = \max_{\alpha > 0} \alpha^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left[\text{tr} \frac{1}{\alpha} (\mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}^t) \right] = \\ &= \max_{\alpha > 0} \alpha^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left[p \left(\text{tr} \frac{1}{\alpha p} (\mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}^t) \right) \right]. \end{aligned}$$

Με στόχο να οδηγηθούμε σε μία συνάρτηση παρόμοια με αυτή της αποδεικτικής διαδικασίας του Θεωρήματος 2.1.1, θέτουμε όπου $\text{tr} \frac{\mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}^t}{\alpha p} = \lambda^{-1}$, δηλαδή θέτουμε $\alpha = \lambda \text{tr} \frac{\mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}^t}{p}$.

Επομένως, είναι

$$\begin{aligned} \max_{\alpha > 0} L(\mathbf{0}_p, \alpha I_p) &= \max_{\lambda > 0} \lambda^{-\frac{np}{2}} \left[\text{tr} \frac{\mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}^t}{p} \right]^{-\frac{np}{2}} g_{np} [p\lambda^{-1}] = \\ &\stackrel{\text{Λήμμα 2.1.1}}{=} \lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} \left[\text{tr} \frac{\mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}^t}{p} \right]^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right]. \end{aligned}$$

Επομένως, ο λόγος πιθανοφαινιών από τη σχέση (3.1.11), γίνεται

$$\lambda_{\delta} = \frac{\sup_{\alpha > 0} L(\mathbf{0}_p, \alpha I_p)}{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma)} = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} \left[\text{tr} \frac{\mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}^t}{p} \right]^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right]}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right]} = \frac{|\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}}}{\left[\text{tr} \frac{\mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}^t}{p} \right]^{-\frac{np}{2}}}.$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται αν $\lambda_{\delta} < \lambda_{\delta, \alpha}$, όπου $\lambda_{\delta, \alpha}$ είναι μία σταθερά τέτοια ώστε ο έλεγχος να είναι επιπέδου σημαντικότητας α . Για τον καθορισμό της σταθεράς $\lambda_{\delta, \alpha}$ απαιτείται ο προσδιορισμός της κατανομής του λ_{δ} , υπό την H_0 , στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

- το στατιστικό λ_{δ} ταυτίζεται με το στατιστικό για τον αντίστοιχο έλεγχο στην περίπτωση της δειγματοληψίας από κανονικό πληθυσμό (βλέπε, μεταξύ άλλων, Srivastava (2002, σελ. 494)).

- Επιπλέον, υπό τη μηδενική υπόθεση, πληρούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης

3.1.1. Οντως αν $T(\mathbf{X}) = |\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}} / \left[\text{tr} \frac{\mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}^t}{p} \right]^{-\frac{np}{2}}$ προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες του πίνακα

διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων: ότι $T(\alpha\mathbf{X}) = T(\mathbf{X})$ και $T(\mathbf{X}) = T(\mathbf{X} + \mathbf{M})$.



Επομένως, από την Πρόταση 3.1.1 προκύπτει ότι η κατανομή του στατιστικού λ_6 υπό την H_0 , παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Αυτό σημαίνει ότι αρκεί να προσδιορισθεί για ένα μέλος αυτής της οικογένειας. Αρκεί επομένως, να προσδιορισθεί για την ειδική περίπτωση της δειγματοληψίας από πολυδιάστατο κανονικό πληθυσμό.

Για μία γενική μορφή της ακριβούς κατανομής του παραπάνω στατιστικού, παραπέμπουμε στην πρόσφατη εργασία των Thomas and Thannippara (2008, Θεώρημα 2.3, σελ. 1389). Στο επόμενο Θεώρημα (βλέπε, για παράδειγμα, Khatri and Srivastava (1973) και Srivastava (2002, ενότητα 13.10)) παρατίθενται κάποια αποτελέσματα που αφορούν την ασυμπτωτική κατανομή του στατιστικού λ_6 υπό την H_0 , στο δειγματοληπτικό πλαίσιο της $N_p(\mu, \Sigma)$.

Θεώρημα 3.1.9. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό $N_p(\mu, \Sigma)$, με

$n > p$ και $\lambda_6^{2/n} = \frac{|S|}{\left[\frac{\text{tr} \{S + n\bar{X}\bar{X}^t\}}{p} \right]^p}$, όπου ο S ορίζεται από τη σχέση (2.1.6). Τότε το στατιστικό

$W = - \left[n - \frac{(2p^2 + 9p + 11)}{6(p+3)} \right] \log \lambda_6$, για μεγάλες τιμές του n , έχει ασυμπτωτικά χ^2 κατανομή με

m βαθμούς ελευθερίας, όπου $m = \frac{1}{2}p(p+3) - 1$. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση,

απορρίπτεται η $H_0 : \Sigma = \alpha I_p$ και $\mu = 0_p$, όταν $W \geq \chi_{m, \alpha}^2$. Επιπλέον, για τον υπολογισμό των κρίσιμων πιθανοτήτων (p -values) χρησιμοποιείται η σχέση $P[W \geq z] = P[\chi_m^2 \geq z]$. □

Ανακεφαλαιώνοντας, προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα, για τον έλεγχο της $H_0 : \Sigma = \alpha I_p$ και $\mu = 0_p$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a : \Sigma \neq \alpha I_p$ ή $\mu \neq 0_p$, όπου $\alpha > 0$ μία άγνωστη ποσότητα, στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών.

Θεώρημα 3.1.10. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n , n το πλήθος με $n > p$, ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις του $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g_p)$, με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, μ ένα $p \times 1$ διάνυσμα και Σ ένας $p \times p$ πίνακας, αντίστοιχα, όπου Σ θετικά ορισμένος πίνακας τάξης p . Υποθέτοντας επιπλέον ότι ο γεννήτορας $g(\cdot)$ της σ. π. π. είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, το στατιστικό



πηλίκου μέγιστων πιθανοφαινιών για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης, $H_0: \Sigma = \alpha I_p$ και $\mu_0 = \mathbf{0}_p$, έναντι της εναλλακτικής $H_a: \Sigma \neq \alpha I_p$ ή $\mu_0 \neq \mathbf{0}_p$, είναι

$$\lambda_6 = \frac{|\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}}}{\left[\text{tr} \frac{\mathbf{S} + n\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{X}}^t}{p} \right]^{\frac{np}{2}}},$$

όπου η ποσότητα \mathbf{S} ορίζεται από τη σχέση (2.1.6). Επιπλέον, το στατιστικό λ_6 ταυτίζεται με αυτό για τον αντίστοιχο έλεγχο στο δειγματοληπτικό πλαίσιο της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής και η κατανομή του, υπό τη μηδενική υπόθεση, παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Τέλος, ο έλεγχος γίνεται με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 3.1.9. \square

3.2 Έλεγχοι Υποθέσεων για παραμέτρους από δύο ή και περισσότερους πληθυσμούς

Στην ενότητα αυτή κατασκευάζονται στατιστικά τεστ με τη μέθοδο του πηλίκου μέγιστων πιθανοφαινιών, για τον έλεγχο υποθέσεων που διατυπώνονται μέσω των παραμέτρων θέσης και κλίμακας δύο ή περισσότερων πληθυσμών που περιγράφονται από μία κατανομή της ελλειπτικής οικογένειας κατανομών. Οι έλεγχοι αυτοί, γίνονται υπό το δειγματοληπτικό πλαίσιο του μοντέλου I (ασυσχέτιστες παρατηρήσεις) που παρουσιάστηκε στο δεύτερο κεφάλαιο.

Ειδικότερα, θεωρούμε την περίπτωση που οι παρατηρήσεις προέρχονται από k πληθυσμούς, καθένας εκ των οποίων είναι p -διάστατος με παραμέτρους θέσης $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ και κλίμακας $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$, αντίστοιχα, με Σ_i θετικά ορισμένους πίνακες τάξης p . Το μέγεθος του $i^{\text{οστού}}$ δείγματος είναι n_i , με $n_i > p, i=1, \dots, k$ και $n = n_1 + \dots + n_k$. Δηλαδή, έχουμε $\mathbf{X}_1^{(i)}, \mathbf{X}_2^{(i)}, \dots, \mathbf{X}_{n_i}^{(i)}$ p -διάστατα τυχαία διανύσματα τα οποία ακολουθούν ελλειπτική κατανομή, $\mathbf{X}_j^{(i)} \sim EC_{np}(\mu_i, \Sigma_i, g)$, $j=1, \dots, n_i, i=1, \dots, k$. Περαιτέρω, υποθέτουμε πως οι παρατηρήσεις είναι ασυσχέτιστες και πως η από κοινού κατανομή τους είναι επίσης ελλειπτική κατανομή και συνεχής. Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, έχουμε

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^{(1)} \\ \dots \\ \mathbf{X}_{n_1}^{(1)} \\ \mathbf{X}_1^{(2)} \\ \dots \\ \mathbf{X}_{n_2}^{(2)} \\ \dots \\ \mathbf{X}_1^{(k)} \\ \dots \\ \mathbf{X}_{n_k}^{(k)} \end{pmatrix} = \mathbf{E} \mathbf{C}_{np} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{n_1} \otimes \boldsymbol{\mu}_1 \\ \mathbf{e}_{n_2} \otimes \boldsymbol{\mu}_2 \\ \dots \\ \mathbf{e}_{n_k} \otimes \boldsymbol{\mu}_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_1 & & & \\ & \mathbf{I}_{n_2} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \mathbf{I}_{n_k} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_k \end{pmatrix}, \mathbf{g}_{np} \right),$$

όπου \mathbf{e}_{n_i} το n_i -διάστατο διάνυσμα, για $i=1, \dots, k$ με όλες τις συνιστώσες μονάδα, \mathbf{I}_{n_i} ο ταυτοτικός πίνακας τάξης n_i , $i=1, \dots, k$, και με \otimes συμβολίζουμε το γινόμενο Kronecker των αντίστοιχων πινάκων.

Επομένως, η από κοινού κατανομή θα είναι της μορφής

$$f(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^k |\boldsymbol{\Sigma}_i|^{-\frac{n_i}{2}} \mathbf{g}_{np} \left[\sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^{n_j} (\mathbf{X}_j^{(l)} - \boldsymbol{\mu}_j)' \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{X}_j^{(l)} - \boldsymbol{\mu}_j) \right]. \quad (3.2.1)$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{X}_j^{(l)} - \boldsymbol{\mu}_i)' \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{X}_j^{(l)} - \boldsymbol{\mu}_i) &= \sum_{j=1}^{n_i} \text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{X}_j^{(l)} - \boldsymbol{\mu}_i) (\mathbf{X}_j^{(l)} - \boldsymbol{\mu}_i)' \right) = \text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{X}_j^{(l)} - \boldsymbol{\mu}_i) (\mathbf{X}_j^{(l)} - \boldsymbol{\mu}_i)' \right) = \\ &= \text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \left(\mathbf{S}_i + n_i (\bar{\mathbf{X}}^{(l)} - \boldsymbol{\mu}_i) (\bar{\mathbf{X}}^{(l)} - \boldsymbol{\mu}_i)' \right) \right), \end{aligned}$$

όπου

$$\bar{\mathbf{X}}^{(l)} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{X}_j^{(l)} \quad (3.2.2)$$

και
$$\mathbf{S}_i = \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{X}_j^{(l)} - \bar{\mathbf{X}}^{(l)}) (\mathbf{X}_j^{(l)} - \bar{\mathbf{X}}^{(l)})', \text{ με } i=1, \dots, k. \quad (3.2.3)$$

Επομένως, η από κοινού κατανομή γίνεται

$$f(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^k |\boldsymbol{\Sigma}_i|^{-\frac{n_i}{2}} \mathbf{g}_{np} \left[\sum_{l=1}^k \text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \left(\mathbf{S}_i + n_i (\bar{\mathbf{X}}^{(l)} - \boldsymbol{\mu}_i) (\bar{\mathbf{X}}^{(l)} - \boldsymbol{\mu}_i)' \right) \right) \right]. \quad (3.2.4)$$

Στο δειγματοληπτικό αυτό πλαίσιο και με τη μεθοδολογία του πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών κατασκευάζονται τεστ για τον έλεγχο των ακόλουθων υποθέσεων:

- Οι παράμετροι θέσης των k , $k \geq 2$, πληθυσμών ταυτίζονται, υπό την προϋπόθεση ότι οι k παράμετροι κλίμακας ταυτίζονται.
- Οι παράμετροι κλίμακας των k , $k \geq 2$, πληθυσμών ταυτίζονται.



- Οι παράμετροι θέσης και κλίμακας, αντίστοιχα, των k , $k \geq 2$, πληθυσμών ταυτίζονται μεταξύ τους.

3.2.1 Έλεγχος ότι οι παράμετροι θέσης των πληθυσμών είναι ίσες

Θέλουμε να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

έναντι της εναλλακτικής: $H_a : \exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$ τέτοιο ώστε $\mu_i \neq \mu_j$, $i, j = 1, 2, \dots, k$, υποθέτοντας ότι $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k = \Sigma$, όπου μ_i και Σ , $i = 1, 2, \dots, k$, είναι άγνωστοι παράμετροι.

Το τεστ πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών, για τον προαναφερθέντα έλεγχο, στηρίζεται στο λόγο

$$\lambda_T = \frac{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma > 0} L(\mu, \dots, \mu, \Sigma)}{\sup_{\mu_i \in \mathbb{R}^p, i=1, 2, \dots, k, \Sigma > 0} L(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \Sigma)} \quad (3.2.5)$$

Η πιθανοφάνεια σύμφωνα με τη σχέση (3.2.4) ορίζεται

$$\begin{aligned} L(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \Sigma) &= \prod_{i=1}^k |\Sigma|^{-\frac{n_i}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \text{tr} \left(\Sigma^{-1} \left(\mathbf{s}_i + n_i (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_i) (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_i)^t \right) \right) \right] = \\ &= |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr} \Sigma^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^k n_i (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_i) (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_i)^t \right) \right]. \end{aligned}$$

Ακολουθώντας την αποδεικτική διαδικασία του Θεωρήματος 2.1.1 προκύπτει

$$\begin{aligned} \max_{\substack{\mu_i \in \mathbb{R}^p, i=1, \dots, k, \\ \Sigma > 0}} L(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \Sigma) &= \max_{\Sigma > 0} L(\bar{\mathbf{X}}^{(1)}, \bar{\mathbf{X}}^{(2)}, \dots, \bar{\mathbf{X}}^{(k)}, \Sigma) = \max_{\Sigma > 0} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \text{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{s}_i) \right] = \\ &= \max_{\Sigma > 0} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr}(\Sigma^{-1} (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \dots + \mathbf{s}_k)) \right] \stackrel{\text{Θεώρημα 2.1.1}}{=} \\ &= \lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \dots + \mathbf{s}_k|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right]. \end{aligned}$$

Υπό τη μηδενική υπόθεση, η πιθανοφάνεια γίνεται

$$\begin{aligned} L(\mu, \dots, \mu, \Sigma) &= |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \text{tr} \left(\Sigma^{-1} \left(\mathbf{s}_i + n_i (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu) (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu)^t \right) \right) \right] = \\ &= |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\text{tr} \left(\Sigma^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^k n_i (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu) (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu)^t \right) \right) \right] \end{aligned}$$

και παρατηρώντας ότι

$$\sum_{i=1}^k n_i (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu) (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu)^t = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \bar{\mathbf{X}}) (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \bar{\mathbf{X}})^t + n (\bar{\mathbf{X}} - \mu) (\bar{\mathbf{X}} - \mu)^t,$$



όπου

$$\bar{\mathbf{X}} = \sum_{l=1}^k \frac{n_l}{n} \bar{\mathbf{X}}^{(l)}, \quad (3.2.6)$$

με $\sum_{l=1}^k n_l = n$, προκύπτει με παρόμοιο τρόπο ότι

$$\max_{\mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma > 0} L(\mu, \dots, \mu, \Sigma) = \lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} \left| \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k + \sum_{l=1}^k n_l (\bar{\mathbf{X}}^{(l)} - \bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{X}}^{(l)} - \bar{\mathbf{X}})' \right|^{\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right].$$

Επομένως, από τη σχέση (3.2.5), προκύπτει

$$\lambda_7 = \frac{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma > 0} L(\mu, \dots, \mu, \Sigma)}{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, l=1,2,\dots,k, \Sigma > 0} L(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \Sigma)} = \left(\frac{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k|}{\left| \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k + \sum_{l=1}^k n_l (\bar{\mathbf{X}}^{(l)} - \bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{X}}^{(l)} - \bar{\mathbf{X}})' \right|} \right)^{n/2}.$$

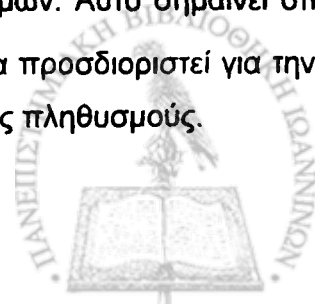
Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται αν $\lambda_7 < \lambda_{7,\alpha}$, όπου $\lambda_{7,\alpha}$ είναι μία σταθερά τέτοια ώστε ο έλεγχος να είναι επιπέδου σημαντικότητας α . Για τον καθορισμό της σταθεράς $\lambda_{7,\alpha}$ απαιτείται ο προσδιορισμός της κατανομής του λ_7 , υπό την H_0 στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

- το στατιστικό λ_7 ταυτίζεται με το στατιστικό για τον αντίστοιχο έλεγχο στην περίπτωση της δειγματοληψίας από κανονικούς πληθυσμούς, $N_p(\mu_i, \Sigma)$, $i=1, \dots, k, k \geq 2$ (βλέπε, μεταξύ άλλων, Siotani *et al.* (1985, σελ. 242)).
- Επιπλέον, υπό τη μηδενική υπόθεση, πληρούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης

3.1.1. Όντως αν $T(\mathbf{X}) = \left(\frac{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k|}{\left| \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k + \sum_{l=1}^k n_l (\bar{\mathbf{X}}^{(l)} - \bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{X}}^{(l)} - \bar{\mathbf{X}})' \right|} \right)^{n/2}$ προκύπτει άμεσα

από τις ιδιότητες του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων ότι: $T(\alpha \mathbf{X}) \stackrel{d}{=} T(\mathbf{X})$ και $T(\mathbf{X}) \stackrel{d}{=} T(\mathbf{X} + \mathbf{M})$.

Επομένως, από την Πρόταση 3.1.1 προκύπτει ότι η κατανομή του στατιστικού λ_7 , υπό την H_0 , παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Αυτό σημαίνει ότι αρκεί να προσδιορισθεί για ένα μέλος αυτής της οικογένειας. Αρκεί να προσδιοριστεί για την ειδική περίπτωση της δειγματοληψίας από πολυδιάστατους κανονικούς πληθυσμούς.



Στο επόμενο Θεώρημα (βλέπε, για παράδειγμα, Siotani *et al.* (1985, Θεωρήματα 6.3.2 και 6.3.4)) παρατίθενται κάποια αποτελέσματα που αφορούν την ασυμπτωτική κατανομή του στατιστικού $\lambda_7^{2/n}$ υπό την H_0 , στο δειγματοληπτικό πλαίσιο της $N_p(\mu_i, \Sigma_i)$, $i = 1, \dots, k$, καθώς η ακριβής κατανομή του είναι αρκετά πολύπλοκη.

Θεώρημα 3.2.1. Έστω $X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_{n_i}^{(i)}$, με $n_i > p$, τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό

$$N_p(\mu_i, \Sigma_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad \text{και} \quad \lambda_7^{2/n} = \frac{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k|}{\left| \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k + \sum_{i=1}^k n_i (\bar{X}^{(i)} - \bar{X})(\bar{X}^{(i)} - \bar{X})^t \right|}, \quad \text{όπου οι ποσότητες}$$

\mathbf{S}_i , $\bar{X}^{(i)}$ και \bar{X} ορίζονται στις σχέσεις (3.2.3), (3.2.2) και (3.2.6), αντίστοιχα. Τότε το στατιστικό

$\lambda_7^{2/n}$ κατανέμεται σύμφωνα με το γινόμενο $\prod_{j=1}^p \beta_j$, όπου τα β_j είναι ανεξάρτητα με κατανομή την

βήτα, η οποία ορίζεται

$$B\left(\frac{1}{2}(N+1-j), \frac{1}{2}m\right),$$

όπου $N = N_1 + \dots + N_k$, με $N_i = n_i - 1$, για $i = 1, \dots, k$, και $m = k - 1 \geq p$, $j = 1, \dots, p$.

Επιπλέον, υπό τη μηδενική υπόθεση και για μεγάλες τιμές των n_i , $i = 1, \dots, k$, το στατιστικό

$W = -\left(N - \frac{1}{2}(p+1-m)\right) \cdot \log \lambda_7^{2/n}$ ακολουθεί ασυμπτωτικά χ^2 κατανομή με f βαθμούς

ελευθερίας, όπου $f = pm$. Επομένως, στην περίπτωση αυτή, απορρίπτεται η

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$, όταν $W \geq \chi_{f, \alpha}^2$. Επιπλέον, για τον υπολογισμό των κρίσιμων

πιθανοτήτων (*p-values*) χρησιμοποιείται η σχέση

$$\begin{aligned} P[W \geq c] &= P[\chi_f^2 \geq c] + \omega_1 \gamma^{-2} (P[\chi_{f+4}^2 \geq c] - P[\chi_f^2 \geq c]) \\ &\quad + \gamma^{-4} \left(\omega_2 + \frac{1}{2} \omega_1^2 \right) (P[\chi_{f+8}^2 \geq c] - P[\chi_f^2 \geq c]) \\ &\quad - \omega_1^2 (P[\chi_{f+4}^2 \geq c] - P[\chi_f^2 \geq c]) + O(\gamma^{-5}), \end{aligned}$$

όπου

$$\gamma = \rho N,$$

$$\rho = 1 - \frac{1}{N} \left(\frac{1}{2}(p+1-m) \right),$$

$$\omega_1 = \frac{1}{48} f(p^2 + m^2 - 5),$$

και

$$\omega_2 = \frac{1}{1920} f[3p^4 + 3m^4 + 10p^2m^2 - 50(p^2 + m^2) + 159]. \quad \square$$



Ανακεφαλαιώνοντας, στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών, υπό την υπόθεση της ισότητας των παραμέτρων θέσης $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$, προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα, για τον έλεγχο της $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a : \exists i \in (1, 2, \dots, k)$ τέτοιο ώστε $\mu_i \neq \mu_j, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k$.

Θεώρημα 3.2.2. Έστω $X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_{n_i}^{(i)}$, n_i το πλήθος, με $n_i > p, i = 1, \dots, k$, ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις των $X_j^{(i)} \sim EC_{n_i p}(\mu_i, \Sigma_i, g)$, $j = 1, \dots, n_i, i = 1, \dots, k$, με παραμέτρους θέσης $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ και κλίμακας $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$, αντίστοιχα, όπου Σ_i θετικά ορισμένοι πίνακες τάξης p . Υποθέτοντας επιπλέον ότι ο γεννήτορας $g(\cdot)$ της σ. π. π. είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, το στατιστικό πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης, $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$, είναι

$$\lambda_7 = \left(\frac{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k|}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k + \sum_{i=1}^k n_i (\bar{X}^{(i)} - \bar{X})(\bar{X}^{(i)} - \bar{X})'|} \right)^{n/2}$$

όπου οι ποσότητες $\bar{X}^{(i)}$, \mathbf{S}_i και \bar{X} ορίζονται στις σχέσεις (3.2.2), (3.2.3) και (3.2.6), αντίστοιχα. Επιπλέον, το στατιστικό λ_7 ταυτίζεται με το αντίστοιχο στο δειγματοληπτικό πλαίσιο της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής, και η κατανομή του, υπό τη μηδενική υπόθεση, παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών και ο έλεγχος πραγματοποιείται λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 3.2.1. □

3.2.2 Έλεγχος ότι οι παράμετροι κλίμακας των πληθυσμών είναι ίσες

Θέλουμε να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση

$$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$$

έναντι της εναλλακτικής: $H_a : \exists i \in (1, 2, \dots, k)$ τέτοιο ώστε $\Sigma_i \neq \Sigma_j$, για $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k$, όπου μ_i και $\Sigma_i, i = 1, 2, \dots, k$, είναι άγνωστοι παράμετροι.

Το τεστ πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών, για τον προηγούμενο έλεγχο, στηρίζεται στο λόγο

$$\lambda_8 = \frac{\sup_{\substack{\mu_i \in \mathbb{R}^p, i=1, 2, \dots, k, \\ \Sigma > 0}} L(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \Sigma, \Sigma, \dots, \Sigma)}{\sup_{\substack{\mu_i \in \mathbb{R}^p, \Sigma > 0, \\ i=1, 2, \dots, k}} L(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k)} \quad (3.2.7)$$



Η συνάρτηση πιθανοφάνειας σύμφωνα με τη σχέση (3.2.4) ορίζεται

$$L(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k) = \prod_{i=1}^k |\Sigma_i|^{-\frac{n_i}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \text{tr} \left(\Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{s}_i + n_i (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_i) (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_i)^t \right) \right) \right],$$

όπου $\bar{\mathbf{X}}^{(i)} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{X}_j^{(i)}$ και $\mathbf{s}_i = \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{X}_j^{(i)} - \bar{\mathbf{X}}^{(i)}) (\mathbf{X}_j^{(i)} - \bar{\mathbf{X}}^{(i)})^t$, με $i = 1, \dots, k$.

Υπό τη μηδενική υπόθεση, η πιθανοφάνεια γίνεται

$$L(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \Sigma) = \prod_{i=1}^k |\Sigma|^{-\frac{n_i}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \text{tr} \left(\Sigma^{-1} \left(\mathbf{s}_i + n_i (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_i) (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_i)^t \right) \right) \right].$$

Από τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, προκύπτει ότι

$$\max_{\substack{\mu_i \in \mathbb{R}^p, i=1, \dots, k, \\ \Sigma > 0}} L(\mu_1, \dots, \mu_k, \Sigma) = \lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \dots + \mathbf{s}_k|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right].$$

Επιπλέον, είναι

$$\begin{aligned} \max_{\substack{\mu_i \in \mathbb{R}^p, \\ \Sigma_i > 0, \\ i=1, \dots, k}} L(\mu_1, \dots, \mu_k, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k) &= \max_{\substack{\mu_i \in \mathbb{R}^p, \Sigma_i > 0, \\ i=1, \dots, k}} \prod_{i=1}^k |\Sigma_i|^{-\frac{n_i}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \text{tr} \left(\Sigma_i^{-1} \left(\mathbf{s}_i + n_i (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_i) (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_i)^t \right) \right) \right] = \\ &= \max_{\Sigma_i > 0} L(\bar{\mathbf{X}}^{(1)}, \dots, \bar{\mathbf{X}}^{(k)}, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k) = \max_{\Sigma_i > 0} \prod_{i=1}^k |\Sigma_i|^{-\frac{n_i}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \text{tr}(\Sigma_i^{-1} \mathbf{s}_i) \right]. \end{aligned}$$

Θέτοντας όπου $\tilde{\Sigma}_i = \mathbf{s}_i^{-\frac{1}{2}} \Sigma_i \mathbf{s}_i^{-\frac{1}{2}}$ προκύπτει ισοδύναμα ότι πρέπει να μεγιστοποιηθεί η

$$\max_{\Sigma_i > 0} \prod_{i=1}^k |\mathbf{s}_i^{\frac{1}{2}} \tilde{\Sigma}_i \mathbf{s}_i^{\frac{1}{2}}|^{-\frac{n_i}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \text{tr}(\tilde{\Sigma}_i^{-1}) \right] = \max_{\tilde{\Sigma}_i > 0} \prod_{i=1}^k |\mathbf{s}_i|^{-\frac{n_i}{2}} |\tilde{\Sigma}_i|^{-\frac{n_i}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \text{tr}(\tilde{\Sigma}_i^{-1}) \right].$$

Αν είναι $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{ip}$ οι ιδιοτιμές του $\tilde{\Sigma}_i$, $i=1, 2, \dots, k$, τότε

$$|\tilde{\Sigma}_i|^{-\frac{n_i}{2}} = \left(\prod_{j=1}^p \left(\frac{1}{\lambda_{ij}} \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{np}{2}} \quad \text{και} \quad \text{tr}(\tilde{\Sigma}_i^{-1}) = \sum_{j=1}^p \frac{1}{\lambda_{ij}}.$$

Επομένως, έχουμε

$$\max_{\substack{\mu_i \in \mathbb{R}^p, \Sigma_i > 0, \\ i=1, \dots, k}} L(\mu_1, \dots, \mu_k, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k) = \max_{\lambda_{ij} > 0} \prod_{i=1}^k |\mathbf{s}_i|^{-\frac{n_i}{2}} \prod_{i=1}^k \left(\prod_{j=1}^p \left(\frac{1}{\lambda_{ij}} \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{np}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^p \frac{1}{\lambda_{ij}} \right] \leq$$



$$\text{Παρατήρηση 2.1.1} \leq \max_{\lambda_{ij} > 0} \prod_{i=1}^k |\mathbf{s}_i|^{-\frac{n_i}{2}} \prod_{i=1}^k \left(\frac{\sum_{j=1}^p \frac{1}{\lambda_{ij}}}{p} \right)^{\frac{n_i p}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^p \frac{1}{\lambda_{ij}} \right].$$

Η ισότητα επιτυγχάνεται όταν $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \dots = \lambda_{1p} = \lambda_1$. Συνεπώς, τότε έχουμε

$$\max_{\substack{\mu_i \in \mathbb{R}^p, \Sigma_i > 0, \\ i=1, \dots, k}} L(\mu_1, \dots, \mu_k, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k) = \max_{\lambda_{ij} > 0} \prod_{i=1}^k |\mathbf{s}_i|^{-\frac{n_i}{2}} \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{\lambda_i} \right)^{\frac{n_i p}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \frac{p}{\lambda_i} \right] = L^*.$$

Λύνοντας την εξίσωση $\frac{\partial L^*}{\partial \lambda_i} = 0$, $i = 1, \dots, k$, προκύπτει η σχέση

$$\lambda_i = \frac{-2g'_{np} \left[\sum_{i=1}^k \frac{p}{\lambda_i} \right]}{n_i g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \frac{p}{\lambda_i} \right]},$$

από την οποία συνεπάγεται ότι: $\frac{\lambda_i}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_i}$, $i = 1, \dots, k$.

Αν θέσουμε $\lambda_i n_i = \lambda n$, τότε ισχύει ότι $\lambda_i = \lambda \frac{n}{n_i}$, αφού $\lambda \frac{n}{n_i} = \frac{n}{n_i} \lambda_i \frac{n_i}{n} = \lambda_i \frac{n_i}{n} = \lambda_i$.

Άρα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\begin{aligned} \max_{\substack{\mu_i \in \mathbb{R}^p, \Sigma_i > 0, \\ i=1, \dots, k}} L(\mu_1, \dots, \mu_k, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k) &= \max_{\lambda > 0} \prod_{i=1}^k |\mathbf{s}_i|^{-\frac{n_i}{2}} \prod_{i=1}^k \left(\frac{n_i}{n \lambda} \right)^{\frac{n_i p}{2}} g_{np} \left[\sum_{i=1}^k \frac{p n_i}{n \lambda} \right]^{\sum_{i=1}^k n_i = n} \\ &= \max_{\lambda > 0} \prod_{i=1}^k |\mathbf{s}_i|^{-\frac{n_i}{2}} \prod_{i=1}^k \left(\frac{n_i}{n} \right)^{\frac{n_i p}{2}} \lambda^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda} \right]. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\max_{\substack{\mu_i \in \mathbb{R}^p, \Sigma_i > 0, \\ i=1, \dots, k}} L(\mu_1, \dots, \mu_k, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k) = \prod_{i=1}^k |\mathbf{s}_i|^{-\frac{n_i}{2}} \prod_{i=1}^k \left(\frac{n_i}{n} \right)^{\frac{n_i p}{2}} \lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right]. \quad (3.2.8)$$

Επομένως, ο λόγος πιθανοφαινιών από τη σχέση (3.2.7), γίνεται

$$\lambda_B = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \dots + \mathbf{s}_k|^{-\frac{n}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right]}{\prod_{i=1}^k |\mathbf{s}_i|^{-\frac{n_i}{2}} \prod_{i=1}^k \left(\frac{n_i}{n} \right)^{\frac{n_i p}{2}} \lambda_{\max}(\mathbf{g})^{-\frac{np}{2}} g_{np} \left[\frac{p}{\lambda_{\max}(\mathbf{g})} \right]} = \frac{\prod_{i=1}^k |\mathbf{s}_i|^{\frac{n_i}{2}} \prod_{i=1}^k \left(\frac{n_i}{n} \right)^{\frac{n_i p}{2}}}{|\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \dots + \mathbf{s}_k|^{\frac{n}{2}}}$$

ή ισοδύναμα



$$\lambda_B = \frac{n^{\frac{np}{2}} \prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_i|^{\frac{n_i}{2}}}{\prod_{i=1}^k n_i^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k|^{\frac{n}{2}}}$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται αν $\lambda_B < \lambda_{B,\alpha}$, όπου $\lambda_{B,\alpha}$ είναι μία σταθερά τέτοια ώστε ο έλεγχος να είναι επιπέδου σημαντικότητας α . Για τον καθορισμό της σταθεράς $\lambda_{B,\alpha}$ απαιτείται ο προσδιορισμός της κατανομής του λ_B , υπό την H_0 στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

- το στατιστικό λ_B ταυτίζεται με το στατιστικό για τον αντίστοιχο έλεγχο στην περίπτωση της δειγματοληψίας από κανονικό πληθυσμό (βλέπε, μεταξύ άλλων, Anderson (1984, Ενότητα 10.2).
- Επιπλέον, υπό τη μηδενική υπόθεση, πληρούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης

3.1.1. Όντως αν $T(\mathbf{X}) = \frac{\prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_i|^{\frac{n_i}{2}} \prod_{i=1}^k \left(\frac{n_i}{n}\right)^{-\frac{np}{2}}}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k|^{\frac{n}{2}}}$ προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες του πίνακα

διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων ότι: $T(\alpha\mathbf{X}) = T(\mathbf{X})$ και $T(\mathbf{X}) = T(\mathbf{X} + \mathbf{M})$.

Επομένως, από την Πρόταση 3.1.1 προκύπτει ότι η κατανομή του στατιστικού λ_B , υπό την H_0 , παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Αυτό σημαίνει ότι αρκεί να προσδιορισθεί για ένα μέλος αυτής της οικογένειας. Αρκεί να προσδιορισθεί για την ειδική περίπτωση της δειγματοληψίας από πολυδιάστατους κανονικούς πληθυσμούς.

Ο προσδιορισμός αυτός είναι αρκετά πολύπλοκος ακόμη και για την ειδική περίπτωση της δειγματοληψίας από κανονικούς πληθυσμούς. Στο Θεώρημα που ακολουθεί (βλέπε Siotani *et al.* (1985, ενότητα 8.3)) παρατίθενται κάποια αποτελέσματα που αφορούν την κατανομή ενός τροποποιημένου στατιστικού, που προτάθηκε από τον Bartlett (1937) για τον παραπάνω έλεγχο, στο δειγματοληπτικό πλαίσιο της $N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$, $i = 1, \dots, k$.

Θεώρημα 3.2.3. Έστω $\mathbf{X}_1^{(i)}, \mathbf{X}_2^{(i)}, \dots, \mathbf{X}_{n_i}^{(i)}$, με $n_i > p$, τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό

$N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$, $i = 1, \dots, k$, $\boldsymbol{\Sigma}_i > 0$. Θεωρούμε το στατιστικό $\lambda_B^* = \frac{\prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_i|^{\frac{N_i}{2}} \prod_{i=1}^k \left(\frac{N_i}{N}\right)^{-\frac{Np}{2}}}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k|^{\frac{N}{2}}}$, όπου



$N_i = n_i - 1$, $N = n - k$, $S_i = \sum_{j=1}^{n_i} (X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)})(X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)})'$ και οι ποσότητες $\bar{X}^{(i)}$ ορίζονται από τη σχέση (3.2.2), με $i = 1, \dots, k$. Όταν η μηδενική υπόθεση, $H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$, είναι αληθής, το

στατιστικό $W = -2\rho \cdot \log \lambda_8$, για $n \rightarrow \infty$ τέτοιο ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \equiv \lim r_i > 0$ και για

$\rho = 1 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i} - 1 \right) \frac{2\rho^2 + 3\rho - 1}{6(k-1)(\rho+1)}$, με $r_i = \frac{N_i}{N}$, $i = 1, \dots, k$, έχει ασυμπτωτικά χ^2 κατανομή με m

βαθμούς ελευθερίας, όπου $m = \frac{1}{2}(k-1)\rho(\rho+1)$. Επομένως, απορρίπτεται η

$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$, όταν $W \geq \chi_{m,\alpha}^2$. Επιπλέον, για τον υπολογισμό των κρίσιμων πιθανοτήτων (p -values) χρησιμοποιείται η σχέση

$$P[W \geq c] = P[\chi_m^2 \geq c] + \omega \gamma^{-2} (P[\chi_{m+4}^2 \geq c] - P[\chi_m^2 \geq c]) + O(N^{-3}),$$

όπου

$$\gamma = \rho N,$$

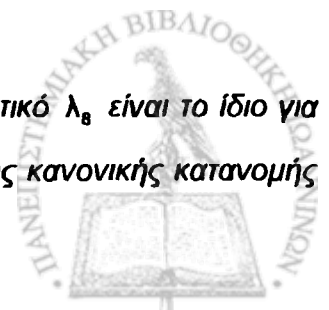
$$\text{και } \omega = \frac{1}{48} \rho(\rho+1) \left[(\rho-1)(\rho+2) \left(\sum_{i=1}^k r_i^{-2} - 1 \right) - 6(k-1)N^2(1-\rho)^2 \right]. \square$$

Ανακεφαλαιώνοντας, προκύπτει στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών το ακόλουθο Θεώρημα, για τον έλεγχο της $H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a : \exists i \in (1, 2, \dots, k)$ τέτοιο ώστε $\Sigma_i \neq \Sigma_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, k$.

Θεώρημα 3.2.4. Έστω $X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_{n_i}^{(i)}$, n_i το πλήθος με $n_i > \rho$, $i = 1, \dots, k$, ασυσχέτιστες πραγματοποιήσεις των $X_j^{(i)} \sim EC_{n,\rho}(\mu_i, \Sigma_i, g)$, $j = 1, \dots, n_i$, $i = 1, \dots, k$, με παραμέτρους θέσης $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ και κλίμακας $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$, αντίστοιχα, όπου Σ_i θετικά ορισμένοι πίνακες τάξης ρ . Υποθέτοντας επιπλέον ότι ο γεννήτορας $g(\cdot)$ της σ. π. π. είναι μη αύξουσα και συνεχής συνάρτηση, το στατιστικό ηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης, $H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$, είναι

$$\lambda_8 = \frac{\prod_{i=1}^k |S_i|^{-\frac{n_i}{2}} \prod_{i=1}^k \left(\frac{n_i}{n} \right)^{-\frac{n_i \rho}{2}}}{|S_1 + S_2 + \dots + S_k|^{-\frac{n}{2}}},$$

όπου οι πίνακες S_i ορίζονται στη σχέση (3.2.3). Επιπλέον, το στατιστικό λ_8 είναι το ίδιο για τον αντίστοιχο έλεγχο στο δειγματοληπτικό πλαίσιο της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής



και η κατανομή του, υπό τη μηδενική υπόθεση, παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Η κατανομή μιας τροποποιημένης μορφής του λ_8 προσδιορίζεται στο Θεώρημα 3.2.3 και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της $H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$. \square

3.2.3 Έλεγχος ότι οι παράμετροι θέσης είναι ίσες και οι παράμετροι κλίμακας είναι ίσες

Θέλουμε να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \text{ και } \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$$

έναντι της εναλλακτικής $H_a : \exists i \in (1, 2, \dots, k)$ τέτοιο ώστε $\mu_i \neq \mu_j$ ή $\Sigma_i \neq \Sigma_j$, $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k$, όπου μ_i και Σ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, είναι άγνωστοι παράμετροι.

Το τεστ πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών, για τον προηγούμενο έλεγχο, στηρίζεται στο λόγο

$$\lambda_9 = \frac{\sup_{\mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma > 0} L(\mu, \mu, \dots, \mu, \Sigma, \Sigma, \dots, \Sigma)}{\sup_{\substack{\mu_i \in \mathbb{R}^p, \Sigma_i > 0, \\ i=1, 2, \dots, k}} L(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k)} \quad (3.2.9)$$

Από το Λήμμα 10.3.1 του Anderson (1984), προκύπτει ως το γινόμενο των στατιστικών για τον έλεγχο της

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

έναντι της εναλλακτικής: $H_a : \exists i \in (1, 2, \dots, k)$ τέτοιο ώστε $\mu_i \neq \mu_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, k$, υποθέτοντας επιπλέον ότι $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k = \Sigma$, όπου μ_i και Σ , $i = 1, 2, \dots, k$, είναι άγνωστοι παράμετροι, και της

$$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$$

έναντι της εναλλακτικής: $H_a : \exists i \in (1, 2, \dots, k)$ τέτοιο ώστε $\Sigma_i \neq \Sigma_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, k$, όπου μ_i και Σ_i , $i = 1, 2, \dots, k$ είναι άγνωστοι παράμετροι.

Έτσι άμεσα προκύπτει ότι:

$$\lambda_9 = \lambda_7 \lambda_8 = \left(\frac{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k|}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k + \sum_{i=1}^k n_i (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \bar{\mathbf{X}})'|} \right)^{n/2} \frac{\prod_{i=1}^k |\mathbf{s}_i|^{n_i/2} \prod_{i=1}^k \left(\frac{n_i}{n} \right)^{-\frac{n_i p}{2}}}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k|^{n/2}}$$

Επομένως, ο λόγος πιθανοφανειών γίνεται



$$\lambda_{\theta} = \frac{\prod_{l=1}^k |\mathbf{S}_l|^{\frac{n_l}{2}} \prod_{l=1}^k \left(\frac{n_l}{n}\right)^{-\frac{n_l p}{2}}}{|\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}}} = \frac{\prod_{l=1}^k |\mathbf{S}_l|^{\frac{n_l}{2}}}{|\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}}} \frac{n^{\frac{np}{2}}}{\prod_{l=1}^k n_l^{\frac{np}{2}}},$$

με
$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k + \sum_{l=1}^k n_l (\bar{\mathbf{X}}^{(l)} - \bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{X}}^{(l)} - \bar{\mathbf{X}})^t, \quad (3.210)$$

όπου οι ποσότητες $\bar{\mathbf{X}}^{(l)}$, \mathbf{S}_l και $\bar{\mathbf{X}}$ ορίζονται στις σχέσεις (3.2.2), (3.2.3) και (3.2.6), αντίστοιχα.

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται αν $\lambda_{\theta} < \lambda_{\theta, \alpha}$, όπου $\lambda_{\theta, \alpha}$ είναι μία σταθερά τέτοια ώστε ο έλεγχος να είναι επιπέδου σημαντικότητας α . Για τον καθορισμό της σταθεράς $\lambda_{\theta, \alpha}$ απαιτείται ο προσδιορισμός της κατανομής του λ_{θ} , υπό την H_0 , στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

- το στατιστικό λ_{θ} ταυτίζεται με το στατιστικό για τον αντίστοιχο έλεγχο στην περίπτωση της δειγματοληψίας από κανονικό πληθυσμό (βλέπε, μεταξύ άλλων, Anderson (1984, Ενότητα 10.3).
- Επιπλέον, υπό τη μηδενική υπόθεση, πληρούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης

3.1.1. Οντως αν
$$T(\mathbf{X}) = \frac{\prod_{l=1}^k |\mathbf{S}_l|^{\frac{n_l}{2}}}{|\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}}} \frac{n^{\frac{np}{2}}}{\prod_{l=1}^k n_l^{\frac{np}{2}}}$$
 προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες του πίνακα

διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων ότι: $T(\alpha\mathbf{X}) \stackrel{d}{=} T(\mathbf{X})$ και $T(\mathbf{X}) \stackrel{d}{=} T(\mathbf{X} + \mathbf{M})$.

Επομένως, από την Πρόταση 3.1.1 προκύπτει ότι η κατανομή του στατιστικού λ_{θ} , υπό την H_0 , παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Αυτό σημαίνει ότι αρκεί να προσδιορισθεί για ένα μέλος αυτής της οικογένειας. Αρκεί να προσδιορισθεί για την ειδική περίπτωση της δειγματοληψίας από πολυδιάστατους κανονικούς πληθυσμούς.

Στο επόμενο Θεώρημα (βλέπε Srivastava (2002, ενότητα 13.11)) παρατίθενται κάποια αποτελέσματα που κυρίως αφορούν την ασυμπτωτική κατανομή του στατιστικού λ_{θ} υπό την H_0 , στο δειγματοληπτικό πλαίσιο της $N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$, $i = 1, \dots, k$, καθώς η ακριβής κατανομή είναι αρκετά πολύπλοκη. Για περισσότερη διερεύνηση, οι Anderson (1984, ενότητα 10.3) και Siotani *et al.* (1985, ενότητα 8.4) παραθέτουν αποτελέσματα που αφορούν την κατανομή μιας τροποποιημένης μορφής του λ_{θ} .



Θεώρημα 3.2.5. Έστω $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_{n_1}^{(1)}$, με $n_i > p$, τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό

$$N_p(\mu_i, \Sigma_i), \quad i=1, \dots, k, \quad \Sigma_i > 0, \quad \text{και} \quad \lambda_9 = \frac{\prod_{i=1}^k |\mathbf{S}_i|^{\frac{n_i}{2}}}{|\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^k n_i^{\frac{np}{2}}}, \quad \text{όπου } \mathbf{S}_i \text{ και } \mathbf{S} \text{ ορίζονται από τις}$$

σχέσεις (3.2.3) και (3.2.10), με $n = \sum_{i=1}^k n_i$. Όταν η μηδενική υπόθεση, $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ και

$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$, είναι αληθής, το στατιστικό $W = -2 \frac{\gamma}{n} \cdot \log \lambda_9$, με $\gamma = n - 2p$, για μεγάλες

τιμές του n , υπό την προϋπόθεση ότι όταν $n \rightarrow \infty$, το $r_i = \frac{n_i}{n}$, για $i=1, \dots, k$, παραμένει

σταθερό, έχει ασυμπτωτικά χ^2 κατανομή με m βαθμούς ελευθερίας, όπου

$m = \frac{1}{2}(k-1)p(p+3)$. Επομένως, απορρίπτεται η $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ και $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$,

όταν $W \geq \chi_{m,\alpha}^2$. Επιπλέον, για τον υπολογισμό των κρίσιμων πιθανοτήτων (*p-values*) χρησιμοποιείται η σχέση

$$P[W \geq c] = P[\chi_m^2 \geq c] + \omega \gamma^{-2} (P[\chi_{m+4}^2 \geq c] - P[\chi_m^2 \geq c]) + O(\gamma^{-3}),$$

όπου

$$\rho = \frac{2p^2 + 9p + 11}{12(k-1)(p+3)} \left(\sum_{i=1}^k r_i^{-1} - 1 \right),$$

$$\text{και} \quad \omega = \frac{(p+3)}{48} \left[p(p+1)(p+2) \left(\sum_{i=1}^k r_i^{-2} - 1 \right) - \frac{24(k-1)(2p-1)}{p} \rho^2 \right]. \quad \square$$

Ανακεφαλαιώνοντας, προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα, για τον έλεγχο της $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ και $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a: \exists i \in (1, 2, \dots, k)$ τέτοιο ώστε $\mu_i \neq \mu_j$ ή $\Sigma_i \neq \Sigma_j$, $i \neq j, i, j=1, 2, \dots, k$, στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών.

Θεώρημα 3.2.6. Έστω $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_{n_1}^{(1)}$, n_i το πλήθος, με $n_i > p$, $i=1, \dots, k$, ασυσχέτιστες

πραγματοποιήσεις των $X_j^{(i)} \sim EC_{n,p}(\mu_i, \Sigma_i, g)$, $j=1, \dots, n_i$, $i=1, \dots, k$, με παραμέτρους θέσης

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ και κλίμακας $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$, αντίστοιχα, όπου Σ_i θετικά ορισμένοι πίνακες τάξης p .

Υποθέτοντας επιπλέον ότι ο γεννήτορας $g(\cdot)$ της σ. π. π. είναι μη αύξουσα και συνεχής

συνάρτηση, το στατιστικό πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης, $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ και $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$, είναι

$$\lambda_{\theta} = \frac{\prod_{l=1}^k |S_l|^{\frac{n_l}{2}} \prod_{l=1}^k \left(\frac{n_l}{n}\right)^{\frac{np}{2}}}{|S|^{\frac{n}{2}}},$$

όπου οι ποσότητες S και S_l ορίζονται από τις σχέσεις (3.2.10) και (3.2.3), αντίστοιχα. Επιπλέον, το στατιστικό λ_{θ} ταυτίζεται με αυτό για τον αντίστοιχο έλεγχο στο δειγματοληπτικό πλαίσιο της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής και η κατανομή του, υπό τη μηδενική υπόθεση, παραμένει αναλλοίωτη στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών. Ο έλεγχος πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 3.2.5. \square

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αριθμητικό Παράδειγμα

Στο κεφάλαιο αυτό θα εφαρμοστούν μερικές από τις διαδικασίες εκτίμησης και ελέγχου, που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα δύο κεφάλαια, σε ένα αριθμητικό παράδειγμα με απώτερο σκοπό, τη διευκρίνιση των θεωρητικών αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής. Στο πλαίσιο αυτό, θα εφαρμόσουμε τους περισσότερους στατιστικούς ελέγχους που αναφέρθηκαν, σε ένα σύνολο δεδομένων που πρωτοπαρουσιάστηκε σε μία εργασία στο περιοδικό *Biometrics* εν έτη 1962 (βλέπε Lubischew (1962, σελ. 461)). Πρόκειται για δεδομένα που αφορούν μετρήσεις σε πλήθος τυχαίων μεταβλητών. Η μελέτη μας θα περιοριστεί σε δύο από αυτές. Ειδικότερα, η ανάλυση στηρίζεται στις τυχαίες μεταβλητές που περιγράφουν το μήκος, σε χιλιοστά, του κεράτινου καλύμματος φτερού εντόμου (*elytra*) και το μήκος σε εκατομμυριοστά του μέτρου (*microns*) της δευτερεύουσας κεραίας του (*second antennal joint*). Υπό αυτό τον περιορισμό, είναι διαθέσιμες 19 και 20, αντίστοιχα, διδιάστατες παρατηρήσεις που αφορούν μετρήσεις από τους πληθυσμούς *Haltica oleracea* και *Haltica carduorum*, αντίστοιχα. Επισημαίνεται ότι το ίδιο σύνολο δεδομένων, το οποίο ουσιαστικά παρατίθεται στο Παράρτημα Β, έχει χρησιμοποιηθεί από τον Sutradhar (1990), ο οποίος με μεθόδους της περιγραφικής στατιστικής ισχυρίστηκε ότι μπορούν να θεωρηθούν οι παραπάνω παρατηρήσεις ως ασυσχέτιστες παρατηρήσεις που προέρχονται από έναν πολυδιάστατο t πληθυσμό.

Στο πλαίσιο αυτό θα εφαρμοστούν οι παρακάτω έλεγχοι:

- Έλεγχος ότι η παράμετρος θέσης του 1^{ου} πληθυσμού είναι ίση με δοθέν διάνυσμα.
- Έλεγχος ασυσχέτιστου των δύο μεταβλητών, με βάση τα δεδομένα του 1^{ου} πληθυσμού.
- Έλεγχος σφαιρικότητας, δηλαδή ο έλεγχος ότι η παράμετρος κλίμακας του 1^{ου} πληθυσμού είναι ανάλογη ενός δοθέντα πίνακα.
- Έλεγχος ότι η παράμετρος θέσης του 1^{ου} πληθυσμού είναι ίση με δοθέν διάνυσμα και η παράμετρος κλίμακας του 1^{ου} πληθυσμού είναι ανάλογη ενός δοθέντα πίνακα.
- Έλεγχος ότι οι παράμετροι θέσης των δύο πληθυσμών ταυτίζονται, υπό την προϋπόθεση ότι οι δύο παράμετροι κλίμακας των δύο πληθυσμών ταυτίζονται.

4.1. Η παράμετρος θέσης ισούται με δοθέν διάνυσμα

Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε αν τα δεδομένα της ποικιλίας *Haltica oleraceae* προέρχονται από ένα διδιάστατο ελλειπτικό πληθυσμό με την παράμετρο θέσης να είναι ίση με ένα δοθέν διάνυσμα, έστω το $\mu_0 = (265, 138)^t$.

Με σκοπό την εφαρμογή της διαδικασίας ελέγχου που περιγράφηκε στην ενότητα 3.1.1 αντικαθίστανται οι παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots, X_{19} , με τις $X_1 - \mu_0, X_2 - \mu_0, \dots, X_{19} - \mu_0$ και κατά αυτό τον τρόπο αναγόμεσθε στον έλεγχο της $H_0 : \mu = \theta_2$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a : \mu \neq \theta_2$, με $\theta_2 = (0, 0)^t$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2 απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση όταν

$$T^2 = n\bar{X}'A^{-1}\bar{X} \geq \frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,(n-p),\alpha}$$

όπου $F_{p,(n-p),\alpha}$ μία σταθερά, η οποία εξαρτάται από το επίπεδο σημαντικότητας α και προσδιορίζεται από τον πίνακα της F κατανομής με p και $n-p$ βαθμούς ελευθερίας.

Αρχικά, για τα τροποποιημένα δεδομένα, υπολογίζουμε με τη βοήθεια της MatLab την τιμή της στατιστικής συνάρτησης. Προκύπτει ότι

$$T^2 = n\bar{X}'A^{-1}\bar{X} = 19 * \begin{pmatrix} 2.0526 \\ -0.6316 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 345.3860 & 75.9795 \\ 75.9795 & 66.3567 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2.0526 \\ -0.6316 \end{pmatrix} = 0.6808.$$

Επιπλέον είναι

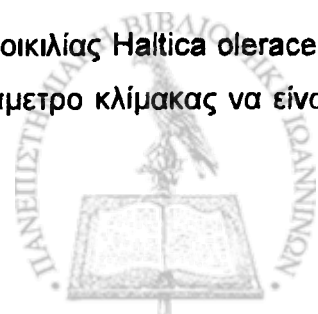
$$\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,(n-p),\alpha} = \frac{2 * 18}{19-2} F_{2,17,0.05} = \frac{36}{17} 3.5915 = 7.6056,$$

και επομένως η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται, καθώς $T^2 < F_{2,17,0.05}$.

Άρα, τα δεδομένα της ποικιλίας *Haltica oleracea* μπορούν να προέρχονται από ένα διδιάστατο ελλειπτικό πληθυσμό με παράμετρο θέσης $\mu = (265, 138)^t$. Επιπλέον, η κρίσιμη πιθανότητα υπολογίζεται ότι είναι p -τιμή=0.7294. Ο τρόπος υπολογισμού της p -τιμής δίνεται στο Παράρτημα Β.

4.2 Έλεγχος ασυσχέτιστου των δύο μεταβλητών

Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε αν τα δεδομένα της ποικιλίας *Haltica oleracea* προέρχονται από ένα διδιάστατο ελλειπτικό πληθυσμό με την παράμετρο κλίμακας να είναι



τέτοια ώστε $\Sigma_{12} = 0$. Επομένως, θέλουμε να εξετάσουμε αν συσχετίζονται ή όχι, το μήκος του κεράτινου καλύμματος φτερού εντόμου και το μήκος της δευτερεύουσας κεραίας του.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.6 το στατιστικό τεστ πηλίκου πιθανοφανειών που

χρησιμοποιείται για τον παραπάνω έλεγχο είναι το $\lambda_4 = \left(\frac{|S|}{\prod_{i=1}^2 |S_{ii}|} \right)^{\frac{n}{2}}$. Με τη βοήθεια της

MatLab υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης. Προκύπτει ότι

$$\lambda_4 = \left(\frac{\left| 10^3 \begin{pmatrix} 6.2169 & 1.3676 \\ 1.3676 & 1.1944 \end{pmatrix} \right|}{\left| 10^3 * 6.2169 \right| * \left| 10^3 * 1.1944 \right|} \right)^{\frac{19}{2}} = 0.0635.$$

Παρότι το μέγεθος του δείγματος δεν είναι αρκετά μεγάλο, για λόγους εφαρμογής του Θεωρήματος 3.1.6 θα συνεχίσουμε με τη χρήση της ασυμπτωτικής κατανομής. Είναι $W = -2\rho \cdot \log \lambda_4$, με $\rho = 1 - \frac{1}{n} \left(\frac{3}{2} + \frac{p^3 - \sum p_i^3}{3(p^2 - \sum p_i^2)} \right) = 0.8684$.

Αρα, $W = -2\rho \cdot \log \lambda_4 = -2 * 0.8684 * (-2.7569) = 4.7883$. Το στατιστικό W ακολουθεί, υπό την H_0 , ασυμπτωτικά χ^2 κατανομή με m βαθμούς ελευθερίας, όπου $m = \frac{1}{2} \left(p^2 - \sum_{i=1}^2 p_i^2 \right) = 1$. Προκύπτει τότε ότι $\chi_{1,0.05}^2 = 3.8415$ και καθώς $W > \chi_{1,0.05}^2$, απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση.

Επομένως, τα δεδομένα της ποικιλίας *Haltica oleracea* δεν μπορούν να προέρχονται από ένα διδιάστατο ελλειπτικό πληθυσμό με την παράμετρο κλίμακας να είναι τέτοια ώστε $\Sigma_{12} = 0$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας και την κρίσιμη πιθανότητα όπως αυτή υπολογίζεται σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.5 (p -τιμή=0.0286<0.05, ο τρόπος υπολογισμού της οποίας δίνεται στο Παράρτημα Β).

4.3 Τεστ σφαιρικότητας

Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε αν τα δεδομένα της ποικιλίας *Haltica oleracea* προέρχονται από ένα διδιάστατο ελλειπτικό πληθυσμό με την παράμετρο κλίμακας να είναι

ανάλογη ενός δοθέντα πίνακα, δηλαδή θα εξετάσουμε την $H_0: \Sigma = \alpha \Sigma_0$ έναντι τη

$$H_a: \Sigma \neq \alpha \Sigma_0, \text{ όπου για παράδειγμα } \Sigma_0 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Θέλοντας να εφαρμοστεί η διαδικασία ελέγχου που περιγράφηκε στην ενότητα 3.1.5 αντικαθίστανται οι παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots, X_{19} , με τις $\Sigma_0^{-1/2} X_1, \Sigma_0^{-1/2} X_2, \dots, \Sigma_0^{-1/2} X_{19}$, όπου

$$\Sigma_0^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0.2381 & -0.1429 \\ -0.1429 & 0.2857 \end{pmatrix}, \text{ και κατά αυτόν τον τρόπο αναγόμαστε στον έλεγχο της}$$

$H_0: \Sigma = \alpha I_2$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a: \Sigma \neq \alpha I_2$, όπου I_2 ο ταυτοτικός πίνακας τάξης 2.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.8 το στατιστικό τεστ πηλίκου πιθανοφανειών που

χρησιμοποιείται για τον παραπάνω έλεγχο είναι το $\lambda_5 = \frac{|\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}}}{\left[\text{tr} \frac{1}{p} \mathbf{S} \right]^{\frac{np}{2}}}$. Με τη βοήθεια της

MatLab υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης για τα τροποποιημένα δεδομένα.

Προκύπτει ότι

$$\lambda_5 = \frac{\left(\left| 10^3 \begin{pmatrix} 1.1878 & -0.1550 \\ -0.1550 & 0.2429 \end{pmatrix} \right|^{\frac{19}{2}} \right)}{\left(\text{tr} \frac{1}{2} 10^3 \begin{pmatrix} 1.1878 & -0.1550 \\ -0.1550 & 0.2429 \end{pmatrix} \right)^{\frac{19}{2}}} = 0.0019.$$

Παρότι το μέγεθος του δείγματος δεν είναι αρκετά μεγάλο, για λόγους εφαρμογής του

Θεωρήματος 3.1.8 θα συνεχίσουμε με τη χρήση της ασυμπτωτικής κατανομής. Είναι

$$W = -2\rho \frac{n-1}{n} \cdot \log \lambda_5, \text{ με } \rho = 1 - \frac{2p^2 + p + 2}{6p(n-1)} = 0.9444.$$

$$\text{Άρα, } W = -2\rho \frac{n-1}{n} \cdot \log \lambda_5 = -2 * 0.9444 * \frac{18}{19} * (-6.2687) = 11.2177, \text{ όπου το}$$

στατιστικό W ακολουθεί, υπό την H_0 , ασυμπτωτικά χ^2 κατανομή με m βαθμούς ελευθερίας,

όπου $m = \frac{1}{2}(p+2)(p-1) = 2$. Προκύπτει τότε ότι $\chi_{2,0.05}^2 = 5.9915$ και καθώς $W > \chi_{2,0.05}^2$, η

μηδενική υπόθεση απορρίπτεται.

Επομένως, τα δεδομένα της ποικιλίας *Haltica orolacea* δεν μπορούν να προέρχονται από ένα διδιάστατο πληθυσμό με την παράμετρο κλίμακας να είναι ανάλογη του πίνακα



$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας και την κρίσιμη πιθανότητα όπως αυτή υπολογίζεται σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.8 (p -τιμή=0.0037<0.05, ο τρόπος υπολογισμού της οποίας δίνεται στο Παράρτημα Β).

4.4 Έλεγχος ότι η παράμετρος θέσης ισούται με δοθέν διάνυσμα και η παράμετρος κλίμακας είναι ανάλογη ενός δοθέντα πίνακα

Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε αν τα δεδομένα της ποικιλίας *Haltica oleracea* προέρχονται από ένα διδιάστατο ελλειπτικό πληθυσμό με την παράμετρο θέσης να είναι ίση με ένα δοθέν διάνυσμα, έστω το $\mu_0 = (265, 138)^t$ και με την παράμετρο κλίμακας να είναι ανάλογη ενός δοθέντα πίνακα, που είναι τέτοιος ώστε $\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Θέλοντας να εφαρμοστεί η διαδικασία ελέγχου που περιγράφηκε στην ενότητα 3.1.6 αντικαθίστανται οι παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots, X_{19} , με τις $\Sigma_0^{-1/2}(X_1 - \mu_0), \Sigma_0^{-1/2}(X_2 - \mu_0), \dots, \Sigma_0^{-1/2}(X_{19} - \mu_0)$, όπου $\Sigma_0^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0.2381 & -0.1429 \\ -0.1429 & 0.2857 \end{pmatrix}$, και κατά αυτόν τον τρόπο αναγόμαστε στον έλεγχο της $H_0: \Sigma = \alpha I_2$ και $\mu = \mathbf{0}_2$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_a: \Sigma \neq \alpha I_2$ ή $\mu \neq \mathbf{0}_2$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.10 το στατιστικό τεστ πηλίκου πιθανοφανειών που χρησιμοποιείται για τον παραπάνω έλεγχο είναι το $\lambda_6 = \frac{|\mathbf{S}|^{\frac{n}{2}}}{\left[\frac{\text{tr} \mathbf{S} + n\bar{X}\bar{X}^t}{p} \right]^{\frac{np}{2}}}$. Με τη βοήθεια της

MatLab υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης για τα τροποποιημένα δεδομένα. Προκύπτει ότι

$$\lambda_6 = \frac{\left| 10^3 \begin{pmatrix} 1.1878 & -0.1550 \\ -0.1550 & 0.2429 \end{pmatrix} \right|^{\frac{19}{2}}}{\left(\text{tr} \frac{1}{2} \left(10^3 \begin{pmatrix} 1.1878 & -0.1550 \\ -0.1550 & 0.2429 \end{pmatrix} + 19 \begin{pmatrix} 1.0479 & \\ -0.6240 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0479 \\ -0.6240 \end{pmatrix}^t \right) \right)^{\frac{19}{2}}} = 0.0013.$$

Παρότι το μέγεθος του δείγματος δεν είναι αρκετά μεγάλο, για λόγους εφαρμογής του Θεωρήματος 3.1.10 θα συνεχίσουμε με τη χρήση της ασυμπτωτικής κατανομής. Είναι

$$W = - \left[n - \frac{(2p^2 + 9p + 11)}{6(p+3)} \right] \cdot \log \lambda_0.$$

Επομένως, $W = - \left[n - \frac{(2p^2 + 9p + 11)}{6(p+3)} \right] \cdot \log \lambda_0 = - \left[19 - \frac{37}{30} \right] \cdot (-6.6404) = 117.9778$ και

ακολουθεί, υπό την H_0 , ασυμπτωτικά χ^2 κατανομή με m βαθμούς ελευθερίας, όπου $m = \frac{1}{2}p(p+3) - 1 = 4$. Προκύπτει τότε ότι $\chi_{4,0.05}^2 = 9.4877$ και καθώς $W > \chi_{4,0.05}^2$, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται.

Επομένως, τα δεδομένα της ποικιλίας *Haltica oleracea* δεν μπορούν να προέρχονται από ένα διδιάστατο ελλειπτικό πληθυσμό με παράμετρο θέσης την $\mu = (265, 138)^t$ και παράμετρο κλίμακας ανάλογη του πίνακα $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας και την κρίσιμη πιθανότητα όπως αυτή υπολογίζεται σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.10 (p -τιμή < 0.05 , ο τρόπος υπολογισμού της οποίας δίνεται στο Παράρτημα Β).

4.5 Έλεγχος ότι οι παράμετροι θέσης των δύο πληθυσμών είναι ίσες

Στην παρούσα ενότητα θα εξεταστεί αν τα δεδομένα των ποικιλιών *Haltica oleracea* και *Haltica carduorum* προέρχονται από δύο διδιάστατους ελλειπτικούς πληθυσμούς με τις παραμέτρους θέσης τους να είναι ίσοι, υπό την προϋπόθεση ότι παράμετροι κλίμακας ταυτίζονται.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 το στατιστικό τεστ πηλίκου πιθανοφανειών που χρησιμοποιείται για τον παραπάνω έλεγχο είναι το

$$\lambda_7 = \left(\frac{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|}{\left| \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \sum_{i=1}^2 n_i (\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \bar{\mathbf{X}})^t \right|} \right)^{n/2}.$$

Με τη βοήθεια της MatLab υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης. Προκύπτει ότι

$$\lambda_7 = \left(\frac{\left| 10^3 \begin{pmatrix} 6.2169 & 1.3676 \\ 1.3676 & 1.1944 \end{pmatrix} + 10^3 \begin{pmatrix} 7.3912 & 3.1418 \\ 3.1418 & 3.1832 \end{pmatrix} \right|}{\left| 10^3 \begin{pmatrix} 6.2169 & 1.3676 \\ 1.3676 & 1.1944 \end{pmatrix} + 10^3 \begin{pmatrix} 7.3912 & 3.1418 \\ 3.1418 & 3.1832 \end{pmatrix} + \mathbf{B} \right|} \right)^{39/2} = 10^{-6} \cdot 4.1771,$$

όπου

$$\begin{aligned}
 B &= 19 \left(\begin{pmatrix} 267.0526 \\ 137.3684 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 279.2308 \\ 147.5385 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 267.0526 \\ 137.3684 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 279.2308 \\ 147.5385 \end{pmatrix} \right)^t + \\
 &+ 20 \left(\begin{pmatrix} 290.8 \\ 157.2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 279.2308 \\ 147.5385 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 290.8 \\ 157.2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 279.2308 \\ 147.5385 \end{pmatrix} \right)^t = \\
 &= 10^3 \begin{pmatrix} 5.4948 & 4.5887 \\ 4.5887 & 3.8321 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Παρότι το μέγεθος του δείγματος δεν είναι αρκετά μεγάλο, για λόγους εφαρμογής του Θεωρήματος 3.2.2 θα συνεχίσουμε με τη χρήση της ασυμπτωτικής κατανομής. Είναι:

$$W = - \left(N - \frac{1}{2}(p+1-m) \right) \cdot \log \lambda_7^{2/n}.$$

Άρα, $W = - \left(N - \frac{1}{2}(p+1-m) \right) \cdot \log \lambda_7^{2/n} = 22.8663$ και ακολουθεί, υπό την H_0 , ασυμπτωτικά χ^2 κατανομή με f βαθμούς ελευθερίας, όπου $f = pm = 2$, και $m = k - 1 = 2 - 1 = 1$. Προκύπτει τότε ότι $\chi_{2,0.05}^2 = 3.8415$ και καθώς $W > \chi_{2,0.05}^2$, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται.

Επομένως, τα δεδομένα των ποικιλιών *Haltica orolacea* και *Haltica carduorum* δεν μπορούν να προέρχονται από δύο διδιάστατους ελλειπτικούς πληθυσμούς με τις παραμέτρους θέσης τους να ταυτίζονται. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας και την κρίσιμη πιθανότητα όπως αυτή υπολογίζεται σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 (p -τιμή < 0.05 , ο τρόπος υπολογισμού της οποίας δίνεται στο Παράρτημα Β).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Στο Παράρτημα Α, παρατίθενται οι πηγαίοι κώδικες (m_files) που χρησιμοποιήθηκαν για την γραφική παράσταση των πυκνοτήτων διδιάστατων τυχαίων μεταβλητών των ειδικών ελλειπτικών κατανομών που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 1.2 του Κεφαλαίου 1, για ειδικές τιμές των παραμέτρων τους. Οι γραφικές αυτές παραστάσεις έγιναν κάνοντας χρήση γνωστών συναρτήσεων της MatLab και δημιουργώντας κατάλληλους κάθε φορά κώδικες Οι ρουτίνες οι οποίες δημιουργήθηκαν, είναι οι ακόλουθες:

Γραφική Παράσταση Παραγράφου 1.2.1: «Διδιάστατη Κανονική κατανομή»

```
% Δώσε το εύρος της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, με βήμα 0.1.%  
[x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);  
% Υπολόγισε τη σ.π.π.%  
s=[1 0.4;0.4 1];  
r=0.4;  
f=(1/(2*pi))*(det(s)^(-1/2))*exp(-(x1.^2-2*r*x1.*x2+x2.^2)/(2*(1-r^2)));  
% Δώσε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. %  
mesh(x1,x2,f)
```

Γραφική Παράσταση Παραγράφου 1.2.3: «Διδιάστατη Pearson τύπου II κατανομή»

```
% Δώσε το εύρος της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, με βήμα 0.01.%  
[x1,x2]=meshgrid(-1:.01:1,-1:.01:1);  
% Υπολόγισε τη σ.π.π., σύμφωνα με τον περιορισμό 0<=u<=1%  
p=2;  
m=2;  
s=[1 0;0 1];  
index=x1.^2+x2.^2<=1;  
cp=gamma((p/2)+m+1)/(gamma(m+1)*pi);  
par=1-(x1.^2+x2.^2);  
f=cp*(det(s)^(-1/2))*(par.^m);  
f(~index)=NaN;  
% Δώσε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. %  
mesh(x1,x2,f)
```

Γραφική Παράσταση Παραγράφου 1.2.4: «Διδιάστατη Pearson τύπου VII κατανομή»

```
% Δώσε το εύρος της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, με βήμα 0.1.%  
[x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);  
% Υπολόγισε τη σ.π.π.%  
p=2;  
m=2;  
N=5;  
s=[1 0.4;0.4 1];  
r=0.4;  
cp=gamma(N)/(gamma(N-(p/2))*(pi*m));  
par=1+(x1.^2-2*r*x1.*x2+x2.^2)/(m*(1-r^2));
```



```
f=cp*(det(s)^(-1/2))*(par.^(-N));
% Δώσε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. %
mesh(x1,x2,f)
```

Γραφική Παράσταση Παραγράφου 1.2.4.1: «Διδιάστατη t κατανομή»

```
% Δώσε το εύρος της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, με βήμα 0.1.%
[x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);
% Υπολόγισε τη σ.π.π.%
p=2;
m=2;
s=[1 0.4;0.4 1];
r=0.4;
cp=gamma((p+m)/2)/(gamma(m/2)*(pi*m));
par=1+(x1.^2-2*r*x1.*x2+x2.^2)/(m*(1-r^2));
f=cp*(det(s)^(-1/2))*(par.^(-(p+m)/2));
% Δώσε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. %
mesh(x1,x2,f)
```

Γραφική Παράσταση Παραγράφου 1.2.4.2: «Διδιάστατη Cauchy κατανομή»

```
% Δώσε το εύρος της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, με βήμα 0.1.%
[x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);
% Υπολόγισε τη σ.π.π.%
p=2;
s=[1 0.4;0.4 1];
r=0.4;
cp=gamma((p+1)/2)/pi^((p+1)/2);
par=1+(x1.^2-2*r*x1.*x2+x2.^2)/(1-r^2);
f=cp*(det(s)^(-1/2))*(par.^(-(p+1)/2));
% Δώσε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. %
mesh(x1,x2,f)
```

Γραφική Παράσταση Παραγράφου 1.2.5: «Γενικευμένη Διδιάστατη t κατανομή»

```
% Δώσε το εύρος της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, με βήμα 0.1.%
[x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);
% Υπολόγισε τη σ.π.π.%
p=2;
b=2;
q=2;
l=1;
s=[1 0;0 1];
r=0;
cp=b*gamma(p/2)*gamma(q+(p/(2*b)))*q^q/(gamma(p/(2*b))*gamma(q)*(pi));
u=(x1.^2-2*r*x1.*x2+x2.^2)/(l*(1-r^2));
f=cp*(det(s)^(-1/2))/(l*(u.^b+q).^(q+(p/(2*b))));
% Δώσε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. %
mesh(x1,x2,f)
```



Γραφική Παράσταση Παραγράφου 1.2.6: «Διδιάστατη Kotz κατανομή»

```
% Δώσε το εύρος της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, με βήμα 0.1.%
[x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);
% Υπολόγισε τη σ.π.π.%
p=2;
s=3;
r=1.5;
N=1.5;
sigma=[1 0.4;0.4 1];
q=0.4;
cp=(s*gamma(p/2)*q^((2*N+p-2)/(2*s)))/(gamma((2*N+p-2)/(2*s))*(pi^(p/2)));
u=(x1.^2-2*q*x1.*x2+x2.^2)/(1-q^2);
f=cp*(det(sigma)^(-1/2))*(u.^(N-1)).*exp(-r*(u.^s));
% Δώσε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. %
mesh(x1,x2,f)
```

Γραφική Παράσταση Παραγράφου 1.2.6.1: «Διδιάστατη Laplace κατανομή»¹

```
% Δώσε το εύρος της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, με βήμα 0.1.%
[x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);
% Υπολόγισε τη σ.π.π.%
p=2;
s=1/2;
r=1;
N=1;
sigma=[1 0.5;0.5 1];
q=0.5;
cp=(s*gamma(p/2)*q^((2*N+p-2)/(2*s)))/(gamma((2*N+p-2)/(2*s))*(pi^(p/2)));
u=(x1.^2-2*q*x1.*x2+x2.^2)/(1-q^2);
f=cp*(det(sigma)^(-1/2))*(u.^(N-1)).*exp(-r*(u.^s));
% Δώσε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. %
mesh(x1,x2,f)
```

Γραφική Παράσταση Παραγράφου 1.2.6.2: «Διδιάστατη Εκθετική κατανομή»

```
% Δώσε το εύρος της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, με βήμα 0.1.%
[x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);
% Υπολόγισε τη σ.π.π.%
p=2;
s=3;
sigma=[1 0.5;0.5 1];
q=0.5;
cp=(p*gamma(p/2))/(gamma(1+p/(2*s))*(pi^(p/2))*2^(1+p/(2*s)));
u=(x1.^2-2*q*x1.*x2+x2.^2)/(1-q^2);
f=cp*(det(sigma)^(-1/2))*exp(-(u.^s)/2);
% Δώσε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. %
mesh(x1,x2,f)
```

¹ Δημιουργήθηκε ως ειδική περίπτωση της Kotz για $s = 1/2$, $N = 1$ και $r = 1$.

Γραφική Παράσταση Παραγράφου 1.2.7: «Γενικευμένη Διδιάστατη Slash κατανομή»

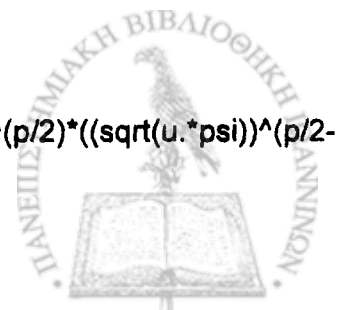
```
% Δώσε το εύρος της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, με βήμα 0.1.%
[x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);
% Υπολόγισε τη σ.π.π.%
p=2;
s=1;
d=1;
r=2;
N=1.5;
sigma=[1 0;0 1];
q=0;
u=(x1.^2-2*q*x1.*x2+x2.^2)/(1-q^2);
g=gammainc(((2*(N-1)+d+p)/(2*s)),r*(u.^s));
cp=(d*gamma(p/2)*r^(-d/(2*s)))/(2*gamma((2*N+p-2)/(2*s))*(pi^(p/2)));
f=cp*(det(sigma)^(-1/2))*g./(u.^(-(p+d)/2));
% Δώσε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. %
mesh(x1,x2,f)
```

Γραφική Παράσταση Παραγράφου 1.2.8: «Γενικευμένη Διδιάστατη Τροποποιημένη Bessel κατανομή»

```
% Δώσε το εύρος της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, με βήμα 0.1.%
[x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);
% Υπολόγισε τη σ.π.π.%
p=2;
psi=1;
lamda=1;
a=-1;
sigma=[1 0.4;0.4 1];
r=0.4;
u=1+(x1.^2-2*r*x1.*x2+x2.^2)/psi*(1-r^2);
cp=((lamda/psi)^(p/4).*besselk((2*a-
p)/2,sqrt(u.*lamda.*psi)))/((2*pi)^(p/2)*besselk(a,sqrt(lamda*psi)));
f=cp*(det(sigma)^(-1/2))*(u.^((2*a-p)/4));
% Δώσε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. %
mesh(x1,x2,f)
```

Γραφική Παράσταση Παραγράφου 1.2.9 «Γενικευμένη Διδιάστατη Υπερβολική κατανομή»

```
% Δώσε το εύρος της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, με βήμα 0.1.%
[x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);
% Υπολόγισε τη σ.π.π.%
p=2;
psi=1;
lamda=1;
a=-1;
sigma=[1 0.4;0.4 1];
r=0.4;
u=lamda+(x1.^2-2*r*x1.*x2+x2.^2)/(1-r^2);
cp=((lamda*psi)^(-a/2).*psi^(p/2)*besselk(a-p/2,sqrt(u.*psi)))/((2*pi)^(p/2)*((sqrt(u.*psi))^(p/2-
a))*besselk(a,sqrt(lamda*psi)));
```



f=cp*(det(sigma)^(-1/2));
 % Δώσε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. %
 mesh(x1,x2,f)

... (faint text describing the context of the code, possibly related to a mathematical model or simulation)

Αρχικός Παιχνιδιάρης 4.1: επί το ελαττωτέρω, είναι η πρώτη με σειρά 5 ανακρίσεις

Δείχνει τον πίνακα των δεδομένων

- 1245 157;
- 1307 132;
- 1389 141;
- 1415 142;
- 1517 128;
- 1552 147;
- 1741 138;
- 1761 138;
- 181 137;
- 175 137;
- 192 128;
- 213 141;
- 252 121;
- 233 133;
- 234 134;
- 277 130;
- 267 136;
- 235 145;
- 141 141;

... (faint text describing the data and the initial player's strategy, including a list of numbers and a reference to a game)



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Στο Παράρτημα Β, παρατίθενται οι πηγαίοι κώδικες (m_files) που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση των ελέγχων που έγιναν στις παραγράφους του Κεφαλαίου 4, με τη βοήθεια του πακέτου της MatLab. Οι ρουτίνες οι οποίες δημιουργήθηκαν, είναι οι ακόλουθες και παρατίθενται ανά παράγραφο με κάποια βοηθητικά, για το χρήστη, σχόλια:

Έλεγχος Παραγράφου 4.1: «Η παράμετρος θέσης ισούται με δοθέν διάνυσμα»

```
% Δώσε τον πίνακα των δεδομένων
x= [245 137;
    260 132;
    276 141;
    299 142;
    239 128;
    262 147;
    278 136;
    255 128;
    244 128;
    276 146;
    242 128;
    263 147;
    252 121;
    283 138;
    294 138;
    277 150;
    287 136;
    255 146;
    287 141];

% Υπολόγισε το μέγεθος του δείγματος και τη διάσταση %
[n p]= size (x);
% Μετασχηματισμός των δεδομένων έτσι ώστε ο έλεγχος να ανάγεται στον έλεγχο της  $\mu=0_2$ 
x1=x-ones (n,p)*diag ([265 138]);
% Εύρεση μέσου δειγματικού διανύσματος και του δειγματικού πίνακα
% διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων που αντιστοιχεί σε κανονικό πληθυσμό
mean (x1)'; cov (x1);
% Υπολογισμός των στατιστικών για τη διενέργεια του ελέγχου
tsquare=n*mean (x1)*inv (cov (x1))*mean (x1)'
statistiko=(tsquare/(n-1))*((n-p)/p)
% Υπολογισμός της κρίσιμης πιθανότητας
pvalue=1-fcdf (statistiko,p,n-p)
if pvalue<0.05 disp ('Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
else disp ('Δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
end
% Εναλλακτικά υπολογισμός του  $F_{p, n-p, \alpha}$  και σύγκριση με τιμή στατιστικού
krisimitimi=finv (0.95,p,n-p)
if statistiko>=krisimitimi disp ('Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
else disp ('Δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
end
```

Έλεγχος Παραγράφου 4.2: «Έλεγχος ασυσχέτιστου των δύο μεταβλητών»

% Δώσε τον πίνακα των δεδομένων

```
x= [245 137;
    260 132;
    276 141;
    299 142;
    239 128;
    262 147;
    278 136;
    255 128;
    244 128;
    276 146;
    242 128;
    263 147;
    252 121;
    283 138;
    294 138;
    277 150;
    287 136;
    255 146;
    287 141];
```

% Υπολόγισε το μέγεθος του δείγματος και τη διάσταση %

```
[n p]= size (x);
```

% Εύρεση μέσου δειγματικού διανύσματος και τον πίνακα S υπό το δικό μας

% φορμαλισμό δηλ. αυτό που είναι (n-1) επί τον πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων

% που αντιστοιχεί σε κανονικό πληθυσμό

```
mean (x)';s=(n-1)*cov (x);
```

```
s11=s(1,1);
```

```
s22=s(2,2);
```

% Υπολογισμός του στατιστικού για τη διενέργεια του ελέγχου

```
l4=(det (s)/(det (s11)*det (s22)))^(n/2)
```

% Υπολογισμός του ρ και του στατιστικού W

```
p1=1;
```

```
p2=1;
```

```
r=1-(1/n)*((3/2)+((p^3-p1^3-p2^3)/(3*(p^2-p1^2-p2^2))))
```

```
logl4=log(l4)
```

```
w=-2*r*log(l4)
```

%οι βαθμοί ελευθερίας είναι

```
m=(1/2)*(p^2-p1^2-p2^2)
```

% Υπολογισμός της κρίσιμης πιθανότητας

```
omega=(1/48)*((p^4-p1^4-p2^4)+6*(p^3-p1^3-p2^3)+11*(p^2-p1^2-p2^2))-(1/4)*n^2*(1-r)^2
```

```
g=r*n
```

```
rvalue=1-chi2cdf (w,m)+omega*g^(-2)*(1-chi2cdf (w,m+4)-1+chi2cdf (w,m))
```

```
if rvalue<0.05 disp ('Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
```

```
else disp ('Δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
```

```
end
```

% Εναλλακτικά υπολογισμός του χ^2 με m β.ε. και 0.05 το επίπεδο σημαντικότητας

%και σύγκριση με τιμή στατιστικού

```
krisimitimi=chi2inv (0.95,m)
```

```
if w>=krisimitimi disp ('Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
```

```
else disp ('Δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
```

```
end
```



Έλεγχος Παραγράφου 4.3: «Τεστ Σφαιρικότητας»

% Δώσε τον πίνακα των δεδομένων

```
x= [245 137;
    260 132;
    276 141;
    299 142;
    239 128;
    262 147;
    278 136;
    255 128;
    244 128;
    276 146;
    242 128;
    263 147;
    252 121;
    283 138;
    294 138;
    277 150;
    287 136;
    255 146;
    287 141];
```

% Υπολόγισε το μέγεθος του δείγματος και τη διάσταση %

```
[n p]= size (x);
```

% Μετασχηματισμός των δεδομένων έτσι ώστε ο έλεγχος να ανάγεται στον έλεγχο

```
της  $\Sigma = \alpha \cdot I_2$  %
```

```
s0=[6 3;3 5];
```

```
x1=((s0^(-1/2))*x)';
```

% Εύρεση μέσου δειγματικού διανύσματος και του δειγματικού πίνακα

% διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων που αντιστοιχεί σε κανονικό πληθυσμό

```
mean (x1)';s=(n-1)*cov (x1);
```

% Υπολογισμός του στατιστικού για τη διενέργεια του ελέγχου

```
l5=det (s)^(n/2)/((trace ((1/p)*s))^(n*p/2))
```

% Υπολογισμός του ρ και του στατιστικού W

```
r=1-((( $\rho^2$ )*2+p+2)/(6*p*(n-1)))
```

```
logl5=log(l5)
```

```
w=-2*((n-1)/n)*r*log(l5)
```

%οι βαθμοί ελευθερίας είναι

```
m=(1/2)*(p+2)*(p-1)
```

% Υπολογισμός της κρίσιμης πιθανότητας

```
omega=((p-1)*(p-2)*(p+2)*(2*( $\rho^3$ )+6*( $\rho^2$ )+3*p+2))/(288*( $\rho^2$ )*((n-1)^2)*(r^2))
```

```
g=r*(n-1)
```

```
k=(g^2)*omega
```

```
pvalue=1-chi2cdf (w,m)+k*g^(-2)*(1-chi2cdf (w,m+4)-1+chi2cdf (w,m))
```

```
if pvalue<0.05 disp ('Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
```

```
else disp ('Δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
```

```
end
```

% Εναλλακτικά υπολογισμός του χ^2 με m β.ε. και 0.05 το επίπεδο σημαντικότητας

%και σύγκριση με τιμή στατιστικού

```
krisimitimi=chi2inv (0.95,m)
```

```
if w>=krisimitimi disp ('Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
```

```
else disp ('Δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
```

```
end
```

Έλεγχος Παραγράφου 4.4: «Έλεγχος ότι η παράμετρος θέσης ισούται με δοθέν διάνυσμα και η παράμετρος κλίμακας είναι ανάλογη ενός δοθέντα πίνακα»

% Δώσε τον πίνακα των δεδομένων

```
x= [245 137;
    260 132;
    276 141;
    299 142;
    239 128;
    262 147;
    278 136;
    255 128;
    244 128;
    276 146;
    242 128;
    263 147;
    252 121;
    283 138;
    294 138;
    277 150;
    287 136;
    255 146;
    287 141];
```

% Υπολόγισε το μέγεθος του δείγματος και τη διάσταση %

```
[n p]= size (x);
```

% Μετασχηματισμός των δεδομένων έτσι ώστε ο έλεγχος να ανάγεται στον έλεγχο της $\mu=0$ και $\Sigma=\alpha \cdot I_2$ %

```
s0=[6 3;3 5];
```

```
x2=x-ones (n,p)*diag ([265 138]);
```

```
x1=((s0^(-1/2))*x2)';
```

% Εύρεση μέσου δειγματικού διανύσματος και του δειγματικού πίνακα

% διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων που αντιστοιχεί σε κανονικό πληθυσμό

```
mean (x1)';
```

```
s=(n1-1)*cov (x1);
```

% Υπολογισμός του στατιστικού για τη διενέργεια του ελέγχου

```
l6=det(s)^(n1/2)/((trace ((1/p)*(s+n1*mean(x1)'*mean(x1))))^(n1*p/2))
```

% Υπολογισμός του στατιστικού W

```
logl6=log(l6)
```

```
w=-((n-((2*p^2+9*p+11)/(6*(p+3))))*log(l6)
```

%οι βαθμοί ελευθερίας είναι

```
m=(1/2)*p*(p+3)-1
```

% Υπολογισμός της κρίσιμης πιθανότητας

```
rvalue=1-chi2cdf(w,m)
```

```
if rvalue<0.05 disp ('Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
```

```
else disp ('Δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
```

```
end
```

% Εναλλακτικά υπολογισμός του χ^2 με m β.ε. και 0.05 το επίπεδο σημαντικότητας

%και σύγκριση με τιμή στατιστικού

```
krisimitimi=chi2inv(0.95,m)
```

```
if w>=krisimitimi disp ('Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
```

```
else disp ('Δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
```

```
end
```



Έλεγχος Παραγράφου 4.5: «Έλεγχος ότι οι παράμετροι θέσης των δύο πληθυσμών είναι ίσες»

% Δώσε τους πίνακες των δεδομένων

x1=[245 137;
260 132;
276 141;
299 142;
239 128;
262 147;
278 136;
255 128;
244 128;
276 146;
242 128;
263 147;
252 121;
283 138;
294 138;
277 150;
287 136;
255 146;
287 141];

x2= [305 184;
237 133;
300 166;
273 162;
297 163;
308 160;
301 166;
308 141;
286 146;
299 171;
317 166;
312 166;
285 141;
287 162;
265 147;
308 157;
276 154;
278 149;
271 140;
303 170];

% Υπολόγισε το μέγεθος των δειγμάτων και τη διάσταση %

[n1 p]= size (x1);

[n2 p]= size (x2);

% Εύρεση μέσου δειγματικού διανύσματος και του πίνακα S υπό το δικό μας φορμαλισμό

n=n1+n2;

meanx1=mean(x1);

meanx2=mean(x2);

meanx=(n1*mean(x1)+n2*mean(x2))/n;

s1=(n1-1)*cov (x1);



```

s2=(n2-1)*cov(x2);
% Υπολογισμός του στατιστικού για τη διενέργεια του ελέγχου
vita=n1*(mean(x1)-meanx)*(mean(x1)-meanx)+n2*(mean(x2)-meanx)*(mean(x2)-meanx)
l7=((det(s1+s2))/(det(s1+s2+vita)))^(n/2)
% Υπολογισμός του ρ και του στατιστικού W
N1=n1-1;
N2=n2-1;
N=N1+N2;
k=2;
m=k-1;
w=-((N-(1/2)*(p+1-m))*log(l7^(2/n)))
r=1-(((1/N)*(1/2)*(p+1-m)))
%οι βαθμοί ελευθερίας είναι
f=p*m
% Υπολογισμός της κρίσιμης πιθανότητας
g=r*N;
w1=(1/48)*f*((p^2)+(m^2)-5)
w2=(1/1920)*f*(3*(p^4)+3*(m^4)+10*(p^2)*(m^2)-50*((p^2)+(m^2))+159)
a1=chi2cdf(w,f)+w1*(g^(-2))*(chi2cdf(w,f+4)-chi2cdf(w,f));
a2=(g^(-4))*(w2+(1/2)*w1^2)*(chi2cdf(w,f+8)-chi2cdf(w,f));
a3=(w1^2)*(chi2cdf(w,f+4)-chi2cdf(w,f));
pvalue=1-(a1+a2-a3)
if pvalue<0.05 disp('Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
else disp('Δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
end
% Εναλλακτικά υπολογισμός του Χ^2 με m β.ε. και 0.05 το επίπεδο σημαντικότητας
%και σύγκριση με τιμή στατιστικού
krisimitimi=chi2inv(0.95,m)
if w>=krisimitimi disp('Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
else disp('Δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση')
end

```



ABSTRACT OF THE MSc DISSERTATION

Title: Multivariate Elliptically Contoured Distributions: Estimation-Testing Hypothesis. A Review and an Application.

This MSc thesis is concerned, in the context of Multivariate Analysis, with aspects of Elliptical Distributions. In this framework, our main aim in this dissertation is to review the available results in the literature. The present dissertation consists of four chapters, two appendices and the bibliography. We briefly present the subject-matter of each one in the sequel.

Chapter 1 (Introduction), explains the importance of elliptical distributions. We present the most popular distributions in bibliography, which are applied in practical applications.

In **Chapter 2 (Estimation)**, point estimation is reviewed for the mean vector and scale matrix of elliptically contoured family of distributions, and their functions, such as correlation coefficients, based on two sampling schemes. Furthermore, we discuss some properties of the maximum likelihood estimators (MLE's), such as unbiasedness, sufficiency, completeness and consistency.

In **Chapter 3 (Hypothesis Testing)**, hypothesis testing is reviewed for the parameters of elliptically contoured distributions of one or more populations. Using the likelihood ratio method, testing means and scale matrices of the elliptic distributions, are investigated. In particular, for the case of one population the following hypotheses are tested:

- a mean vector is equal to a given vector,
- a scale matrix is equal to a given matrix,
- a mean vector and scale matrix are equal to a given vector and matrix, respectively,
- the lack of correlation between sets of variables,
- the sphericity test and
- a mean vector is equal to a given vector and a scale matrix is proportional to a given matrix, are presented.

Moreover, for the case of two or more populations, the equality of means, the equality of scale matrices and the equality of means and scale matrices are tested.

In **Chapter 4 (Numerical Example)**, five illustrative examples with data from multivariate t distribution are presented. The purpose of these examples is to exemplify the main results of the previous two chapters.

In **Appendices A** and **B** the **m_files** created in Matlab are presented which were used in Chapters 1 and 4 of the dissertation, respectively.

Finally, the **Bibliography**, on which the dissertation was based, is provided.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York.

Anderson, T. W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. New York, Wiley.

Anderson, T. W. (1992). Nonnormal Multivariate Distributions: Inference based on Elliptically Contoured Distributions. *Technical Report*, No. 28. Department of Statistics, Stanford University.

Anderson, T. W., Fang, K. T. and Hsu, H. (1986). Maximum-likelihood estimators and likelihood-ratio criteria for multivariate elliptically contoured distributions. *The Canadian Journal of Statistics*, **14**, 55-59.

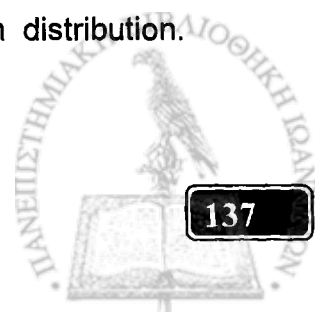
Anderson, T. W. and Fang, K. T. (1990). Inference in Multivariate Elliptically Contoured Distributions based on Maximum Likelihood, in *Statistical Inference in Elliptically Contoured and Related Distributions* (Fang, K. T. and Anderson T. W., Eds.), 201-216. New York: Allerton Press.

Arellano-Valle, R. B. and Bolfarine, H. (1995). On some characterizations of the t distribution, *Statistics and Probability Letters*, **25**, 79-85.

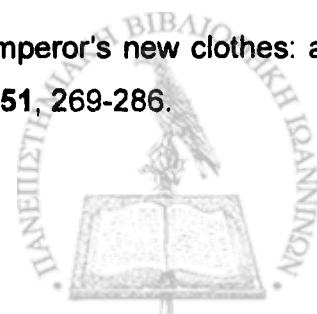
Arellano-Valle, R. B., Iglesias, P. and Vidal, I. (2002). Bayesian inference for elliptical linear models: Conjugate analysis and model comparison. *Research Report*. Facultad de Matematicas, Pontificia Universidad Catolica de Chile.

Arslan, O. (2004). Family of multivariate generalized t distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **89**, 329-337.

Arslan, O. and Genc, A. (2009). A generalization of the multivariate slash distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 1164-1170.



- Bardoff-Nielsen E.** (1977). Exponentially decreasing distributions for the logarithm of the particle size. *Mathematical and Physical Sciences*, **353**, 401-419.
- Bardoff-Nielsen E.** (1997). Normal Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modeling. *The Scandinavian Journal of Statistics*, **24**, 1-13.
- Bardoff-Nielsen E., Jensen J.L. and Sorensen M.** (1989). Wind shear and hyperbolic distributions. *Boundary-Layer Meteorology*, **49**, 417-431.
- Bartlett, M. S.** (1934). The vector representation of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **30**, 327-340.
- Bartlett, M. S.** (1937). Properties of sufficiency and statistical tests. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **160**, 268-282.
- Berkson, J. and Hodges, J. L. Jr.** (1960). A minimax estimator for the logistic function. *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.*, **4**, 77-86.
- Berry, D. A., Chaloner, K. and Geweke, J.** (1996). *Bayesian Analysis in Statistics and Econometrics: Essays in Honor of Arnold Zellner*. Wiley, New York.
- Bhattacharya, S. K. and Saxena, A. K.** (1989). Multivariate modified Bessel distribution. *Estadística*, **41**, 1-11.
- Bingham, N. H. and Kiesel, R.** (2002). Semi-parametric modelling in finance: Theoretical foundations. *Quantitative Finance*, **2**, 241-250.
- Blattberg, R. C. and Gonedes, N. J.** (1974). A comparison of the stable and Student distributions as statistical models for stock prices. *Journal of Business*, **47**, 244-280.
- Box, G. E. P. and Tiao, G. C.** (1962). A further look at robustness via Bayes' s theorem. *Biometrika*, **49**, 419-432.
- Breusch, T. S., Robertson, J. C. and Welsh, A. H.** (1997). The emperor's new clothes: a critique of the multivariate t regression model. *Statistica Neerlandica*, **51**, 269-286.



Buckley, I., Saunders, D. and Seco, L. (2008). Portfolio optimization when asset returns have the Gaussian mixture distribution. *European Journal of Operational Research*, **185**, 1434-1461.

Cacoullos, T., Koutras, M. (1984). Quadratic forms in spherical random variables: generalized noncentral χ^2 -distribution. *Naval Res. Logist. Quart.*, **31**, 447-461.

Cacoullos, T., Koutras, M. (1985). Minimum-distance discrimination for spherical distributions, in *Statistical theory and data analysis* (Matusita K., Ed.), North-Holland, 91-102.

Cacoullos, T. and Koutras, M. (1997). On the performance of minimum-distance classification rules for Kotz-type elliptical distributions, in *Advances in the Theory and Practice of Statistics: A Volume in Honor of Samuel Kotz* (Johnson, N. L. and Balakrishnan, N., Eds.), 209–224. Wiley, New York.

Cambanis, S., Huang, S. and Simons, G. (1981). On the theory of elliptically contoured distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **11**, 368-385.

Chmielewski, M. A. (1981). Elliptically Symmetric Distributions: A review and Bibliography. *International Statistical Review*, **49**, 67-74.

Chu, K. (1973). Estimation and Decision for Linear Systems with Elliptical Random Processes. *IEEE Trans. on Automat. Control Short Papers*, **18**, 499-505.

Dubey, D. S. (1969). A new derivation of the logistic distribution. *Naval Res. Logist. Quart.*, **16**, 37–40.

Eberlein, E. (2001). Recent advances in more realistic risk management: The hyperbolic model. *Financial Times*, **2**, 56–72.

Eberlein, E. and Keller, U. (1995). Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli*, **1**, 281–299.

Eltoft, T., Kim, T. and Lee, T. W. (2006). On the multivariate Laplace Distribution. *IEEE Signal Processing Letters*, **13**, 300-303.



Embrechts, P., McNeil, A. and Straumann, D. (2002). Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and pitfalls, in *Risk Management: Value at Risk and beyond* (Dempster, M. and Moffatt, H. K., Eds.), 176-223. Cambridge University Press.

Fama, E. F. (1965). The behavior of stock market prices. *Journal of Business*, **38**, 34-105.

Fang, K. T., Kotz, S., and Ng, K. W. (1990). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman and Hall, London, New York.

Fang, K. T. and Zhang, Y. T. (1990). *Generalized Multivariate Analysis*. Science Press Beijing and Springer-Verlag, Berlin.

Frahm, G., Junker, M. and Szimayer, A. (2003). Elliptical copulas: applicability and limitations. *Statistics and Probability Letters*, **63**, 275-286.

Frahm, G. (2004). *Generalized Elliptical Distributions: Theory and Applications*. PhD Thesis, University of Cologne, Faculty of Management, Economics, and Social Sciences, Department of Statistics, Germany. Retrievable from <http://kups.ub.uni-koeln.de/volltexte/2004/1319> .

Fraser, D. A. S. (1979). *Inference and Linear Models*. McGraw-Hill, New York.

Goldman, J. (1974). Statistical properties of a sum of sinusoidal and Gaussian noise and its generalization to higher dimensions. *Bell System Tech. J.*, **53**, 557-580.

Gomez, E., Gomez-Villegas, M. A. and Marin, J. M. (1998). A multivariate generalization of the power exponential family of distributions. *Communications in Statistics- Theory and Methods*, **27**, 589-600.

Gomez, E., Gomez-Villegas, M. A. and Marin, J. M. (2001). Response to Letter to the Editor. *Communications in Statistics- Theory and Methods*, **30**, 989-992.

Gomez, E., Gomez-Villegas, M. A. and Marin, J. M. (2003). A survey on continuous elliptical vector distributions. *Revista Matematica Complutense*, **16**, 345-361.



- Gomez-Sanchez-Manzano, E., Gomez-Villegas, M. A. and Marin, J. M.** (2006). Sequences of elliptical distributions and mixtures of normal distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **97**, 295-310.
- Gupta, A. K., and Varga, T.** (1993). *Elliptically Contoured Models in Statistics*. Kluwer Academic Publishers.
- Halmos, P. L., and Savage, L. J.** (1949). Application of Randon-Nikodym Theorem of the theory of sufficient statistics. *Ann. Math. Statist.*, **20**, 225-241.
- Hartman, P., and Wintner, A.** (1940). On the spherical approach to the normal distribution law. *American Journal of Mathematics*, **62**, 759-779.
- Harville, D. A.** (1997). *Matrix algebra from a statistician's perspective*. Springer, New York.
- Henrick, J. M. and Bovas, A.** (1973). Multivariate Logistic Distributions. *The Annals of Statistics*, **1**, 588-590.
- Johnson, M. E.** (1987). *Multivariate Statistical Simulation*. JohnWiley, New York.
- Kelejian, H. H. and Prucha, I. R.** (1985). Independent or uncorrelated disturbances in linear regression: an illustration of the difference. *Economic Letters*, **19**, 35-38.
- Kelker, D.** (1970). Distribution theory of spherical distributions and a location-scale parameter generalization. *Sankya Series A*, **32**, 419-438.
- Khatri, C. G. and Srivastava, M. S.** (1973). On the non-null distribution of likelihood ratio criteria for covariance matrices. *Ann. Inst. Stat. Math*, **25**, 345-354.
- Kotz, S.** (1975). Multivariate Distributions at a cross-road, in (Patil, G. P., Kotz, S. and Ord, J. K., Eds.), *Statistical Distributions in Scientific Work*, Vol. 1, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 247-270.
- Kotz, S. and Nadarajah, S.** (2001). Letter to the Editor. *Communication in Statistics Theory and Methods*, **30**, 987-992.

Kotz, S. and Nadarajah, S. (2004). *Multivariate t Distributions and Their Applications*. Cambridge University Press.

Koutras, M. (1987). On the performance of the linear discriminant function for spherical distributions. *J. Multivariate Anal.*, **22**, 1-12.

Koutras, M. (1992). Minimum distance discrimination rules and success rates for elliptical normal mixtures. *Statistics and Probability Letters*, **13**, 259-268.

Kowalski, J., Mendoza-Blanco, J. R., Tu, X. F. and Gleser, L. J. (1999). On the difference in inference and prediction between the joint and independent t -error models for seemingly unrelated regressions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **28**, 2119-2140.

Landsman, Z. and Valdez, E. A. (2003). Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions. *North American Actuarial Journal*, **7**, 55-71.

Lange, K. and Sinsheimer, J. S. (1993). Normal / Independent distributions and their applications in robust regression. *Journal of Computational Graphics and Statistics*, **2**, 175-198.

Laurent, A. G. (1974). The Intersection of Random Spheres and the Noncentral Radial Error Distribution for Spherical Models. *The Annals of Statistics*, **2**, 182-189.

Lindsey, J. K. (1999). Multivariate Elliptically Contoured Distributions for Repeated Measurements. *Biometrics*, **55**, 1277-1280.

Lord, R. D. (1954). The use of Hankel transform in statistics. I. General theory and examples. *Biometrika*, **41**, 44-45.

Lubischew, A. A. (1962). On the use of discriminant functions in taxonomy. *Biometrics*, **18**, 455-477.

Μανδράκη, Α. (2005). Σφαιρικές ελλειπτικές κατανομές: Μία ανασκόπηση. *Μεταπτυχιακή Διατριβή*. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών.



Mathai, A. M. and Katiyar, R. S. (1979). Exact percentage points for testing independence. *Biometrika*, **66**, 353-356.

Maxwell, J. C. (1860). Illustration of the dynamical theory of gases - Part I. On the motions and collisions of perfectly elastic bodies. *Taylor's Philosophical Magazine*, **19**, 19-32.

McGraw, D. K. and Wagner, J. F. (1968). Elliptically symmetric distributions. *I.E.E.E. Transactions on Information Theory*, **14**, 110-120.

Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. John Wiley & Sons, New York.

Nadarajah, S. (2003). The Kotz-type distribution with applications. *Statistics*, **37**, 341-358.

Nadarajah, S. (2006a). Fisher information for the elliptically symmetric Pearson distributions. *Applied Mathematics and Computation*, **178**, 195-206.

Nadarajah, S. (2006b). On the ratio X/Y for some Elliptically Symmetric Distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **97**, 342-358.

Nadarajah, S. and Kotz, S. (2005). Sampling distributions associated with the multivariate t distribution. *Statistica Neerlandica*, **39**, 214-234.

Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006). On the product XY for the Elliptically Symmetric Pearson Type VII distribution. *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, **106**, 149-162.

Owen, J. and Rabinovitch, R. (1983). On the Class of Elliptical Distributions and their Applications to the Theory of Portfolio Choice. *The Journal of Finance*, **38**, 745-752.

Ortobelli, S., Huber, I. and Schwartz, E. (2002). Portfolio selection with stable distributed returns. *Mathematical Methods of Operations Research*, **55**, 265-300.

Παπαϊωάννου, Τ. και Φερεντίνος, Κ. (2000). *Μαθηματική Στατιστική: Εκτιμητική-Έλεγχος Υποθέσεων-Εφαρμογές*, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

Pearl, R. and Reed, L. J. (1920). On the rate of growth of the population of the United States since 1970 and its mathematical representation. *Proc. Nat. Acad.*, **6**, 275-288.

Plackett, R. L. (1959). The analysis of life test data. *Ann. Math. Statist.*, **30**, 9-19.

Protassov, R. S. (2004). EM-based maximum likelihood parameter estimation for multivariate generalized hyperbolic distributions with fixed λ . *Statistics and Computing*, **14**, 67-77.

Rachev, S. and Mitnik, S. (2000). *Stable Paretian Models in Finance*. Chichester, John Wiley and Sons.

Sarr, A., Gupta, A.K. and Joarder, A.H. (2009). Estimation of the precision matrix of multivariate Pearson type II model. *Metrika*, **69**, 31-44.

Schmidt, R., Hrycej, T. and Stutzle, E. (2006). Multivariate distribution models with generalized hyperbolic margins. *Computational statistics and data analysis*, **50**, 2065-2096.

Schoenberg, I. J. (1938). Metric spaces and completely monotone functions. *The Annals of Mathematics*, **39**, 811-841.

Siotani, M., Hayakawa, T. and Fujikoshi, Y. (1985). *Modern Multivariate Statistical Analysis: A Graduate Course and Handbook*. American Sciences Press.

Song, D. and Gupta, A. K. (1997). L_p -Norm Uniform Distribution. *American Mathematical Society*, **125**, 595-601.

Srivastava, M.S. (2002). *Methods of Multivariate Statistics*. John Wiley & Sons.

Sutradhar, B. C. and Ali, M. M. (1986). Estimation of the parameters of a regression model with a multivariate t error variable. *Commun. Statist. Theor. Meth.*, **15**, 429-450.

Sutradhar, B.C. (1990). Discrimination of observations into one of two t populations. *Biometrics*, **46**, 827-835.



- Thabane, L. and Drekcic, S.** (2003). Hypothesis testing for the generalized multivariate modified Bessel model. *Journal of Multivariate Analysis*, **86**, 360-374.
- Thabane, L. and Haq, M. S.** (2003). The generalized multivariate modified Bessel distribution and its Bayesian applications. *Journal of Statistical Sciences*, **12**, 173-175.
- Thomas, S. and Thannippara, A.** (2008). Distribution of the Λ -Criterion for Sphericity Test and its connection to a Generalized Dirichlet Model. *Com. Stat. Simulation and Computation*, **37**, 1385-1395.
- Tsihrintzis, G. A. and Nikias, C. L.** (1997). Data-Adaptive Algorithms for Signal Detection in Sub-Gaussian Impulsive Interference. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **45**, 1873-1874.
- Wang, J. and Genton, M. G.** (2006). The multivariate skew-slash distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 209-220.
- Zellner, A.** (1976). Bayesian and non-Bayesian analysis of the regression model with multivariate Student-*t* error term. *Journal of American Statistical Association*, **66**, 601-616.