

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΔΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΣΤΗΝ Ε

Μετάβαση από την
Αριθμητική στην
Άλγεβρα: Η
διδασκαλία των
Συναρτήσεων

Μεταπτυχιακή φοιτήτρια:

Τραπεζοφρχίου Ελένη, ΑΜ 55

Επιβλέπουσα καθηγήτρια:

Ευγενία Κολέζα

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008



Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή	4
1.1 Αφορμή για την εργασία	4
1.2 Στόχοι της εργασίας	5
1.3 Μέρη της εργασίας	6
2. Τα Μαθηματικά στην εκπαίδευση	8
2.1 Τα Μαθηματικά στην εκπαιδευτική διαδικασία	8
2.2 Σκοποί και στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών	9
2.3 Βασικές αρχές για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών	12
2.3.1 Θεωρίες μάθησης	12
2.3.2 Μοντέλα διδασκαλίας των Μαθηματικών	14
2.4 Το ΕΠΠΣ στα μαθηματικά – στόχοι	18
2.5 Ρεαλιστικά Μαθηματικά	19
2.5.1 Η θεωρία επιπέδων του Van Hiele	21
2.5.2 Η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal	22
2.5.3 Η προοδευτική μαθηματικοποίηση	23
3. Ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών	26
3.1 Ιστορία των Μαθηματικών	26
3.2 Ιστορία της Άλγεβρας	28
3.3 Πως βοηθά η ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία της Άλγεβρας	31
4. Διδασκαλία και εκμάθηση των Μαθηματικών	33
4.1 Στοιχεία μιας επιτυχημένης διδασκαλίας των Μαθηματικών	33
4.2 Στόχοι της Μαθηματικής εκπαίδευσης στο Δημοτικό	35
4.3 Διδακτικό περιεχόμενο των νέων βιβλίων του Δημοτικού	36
4.4 Στόχοι της Μαθηματικής εκπαίδευσης στο Γυμνάσιο	37
4.5 Διδακτικό περιεχόμενο των νέων βιβλίων του Γυμνασίου	38
4.6 Σύγχρονες προσεγγίσεις για τη διδασκαλία των Μαθηματικών	42
4.6.1 Επικοινωνισμός και Μαθηματικά	42
4.6.2 Νέες τεχνολογίες στα Μαθηματικά	43
4.6.3 Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία	46
4.6.4 Διαθεματικότητα	47
4.6.5 Αξιοποίηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων	48
5. Διδασκαλία και εκμάθηση της Άλγεβρας	49
5.1 Μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα	49
5.2 Η Άλγεβρα από τη σκοπιά της Γεωμετρίας	50
5.3 Δυσκολίες στην εκμάθηση της Άλγεβρας	51

5.4	Τα λάθη των μαθητών στην Άλγεβρα	52
5.4.1	Κατηγορίες λαθών	52
5.4.2	Λάθη στην Άλγεβρα	53
6.	Διδασκαλία των Συναρτήσεων	55
6.1	Η Συνάρτηση στα σχολικά εγχειρίδια	55
6.2	Ορισμοί της Συνάρτησης	55
6.3	Εξισώσεις και Συναρτήσεις	56
6.4	Η έννοια της συνάρτησης και δυσκολίες κατανόησης	58
6.5	Η έννοια της συνάρτησης στην ΣΤ Δημοτικού	60
6.6	Η έννοια της συνάρτησης στο Γυμνάσιο	62
6.7	Η διδασκαλία των Συναρτήσεων με τη βοήθεια εκπαιδευτικών λογισμικών	66
6.8	Η διδασκαλία των συναρτήσεων με τη βοήθεια του μοντέλου Van Hiele	66
7.	Δραστηριότητες από τη διδασκαλία των Συναρτήσεων	68
7.1	Σχέδια μαθήματος	68
7.2	Ενδεικτικές δραστηριότητες	77
7.3	Δραστηριότητες του PISA	86
7.3.1	Τι είναι το PISA	86
7.3.2	Ασκήσεις του PISA στις Συναρτήσεις	87
8.	Συμπεράσματα – Επίλογος	103
9.	Βιβλιογραφία	105



1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Αφορμή για την εργασία

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται έντονο ενδιαφέρον των μαθηματικών, ιδιαίτερα μέσω των αναλυτικών προγραμμάτων, στην ανάπτυξη γνώσεων και δεξιοτήτων τόσο στην άλγεβρα όσο και στη γεωμετρία. Η παρουσία νέων τεχνολογιών στην εκπαιδευτική διαδικασία συμβάλλει όλο και πιο πολύ στο ενδιαφέρον αυτό καθώς σύμφωνα με έρευνες επιφέρει μεγαλύτερα οφέλη απ' αυτά της παραδοσιακής διδασκαλίας.

Η Άλγεβρα θεωρείται αρκετά δύσκολο κομμάτι στα Μαθηματικά τόσο στο παρελθόν όσο και στο παρόν. Ιστορικές μελέτες για την ανάπτυξη της Άλγεβρας στον 20^ο αιώνα δείχνουν ότι ο τρόπος διδασκαλίας της Άλγεβρας στην Β' βάρθμια εκπαίδευση δεν έχει αλλάξει ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια.

Είναι γενικά παραδεκτό ότι βασικές δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων οφείλονται σε διαφορές που παρουσιάζονται κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο μεταξύ απλής αριθμητικής και Άλγεβρας. Η ύλη των μαθηματικών του Γυμνασίου αποτελεί συνέχεια της αντίστοιχης του Δημοτικού στα πλαίσια της εννιάχρονης υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Στην Α' Γυμνασίου αρκετές έννοιες χρησιμοποιούνται με διαφορετική μορφή γεγονός που δημιουργεί δυσκολίες στην αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων από τους μαθητές. Εξάλλου η ύλη των μαθηματικών της Α' Γυμνασίου περιλαμβάνει πολλούς ορισμούς αυστηρά διατυπωμένους με επαγωγικό τρόπο και χρησιμοποιούνται με τη μορφή κανόνων αφού δεν μπορούν να αποδειχθούν με το γνωστικό υπόβαθρο που διαθέτουν οι μαθητές στην τάξη αυτή.



Επιπλέον με τη συγγραφή των νέων βιβλίων μαθηματικών τόσο του Δημοτικού όσο και του Γυμνασίου γίνονται αλλαγές στην διδακτέα ύλη και στην σειρά διδασκαλίας των γνωστικών αντικειμένων που δημιουργούν νέες απαιτήσεις στους εκπαιδευτικούς και στους μαθητές.

Τέλος υπάρχουν έρευνες που υποστηρίζουν ότι η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά στην διδασκαλία και εκμάθηση μαθηματικών εννοιών και αποτελεί αξιόλογο διδακτικό εργαλείο. Οι παραπάνω λόγοι στάθηκαν αφορμή για να γραφτεί αυτή η εργασία.

1.2 Στόχοι της εργασίας

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει στοιχεία που αφορούν την Άλγεβρα και ιδιαίτερα την διδασκαλία των Συναρτήσεων καθώς και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη μετάβασή τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Παρουσιάζονται επίσης στοιχεία για τα νέα βιβλία των Μαθηματικών Δημοτικού και Γυμνασίου και συγκρίσεις που δίνουν μια σαφή εικόνα για την νέα δομή των μαθηματικών. Επιπλέον γίνεται αναφορά σε ιστορικά στοιχεία και στοιχεία διδακτικής των Μαθηματικών που μπορούν να συμβάλουν θετικά στη μαθηματική εκπαίδευση. Τέλος προτείνονται κάποια ενδεικτικά σχέδια μαθήματος και δραστηριότητες που θα βοηθήσουν τον αναγνώστη να τα αξιοποιήσει στην εκπαιδευτική διαδικασία και αναφέρονται παραδείγματα ασκήσεων από έρευνες.

1.3 Μέρη της εργασίας

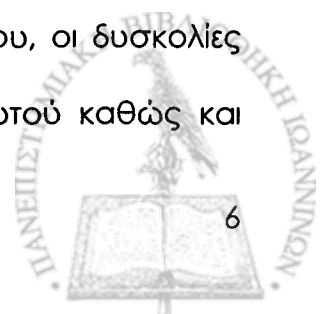
Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας παραθέτονται στοιχεία διαφόρων θεωριών που συμβάλλουν στη διατύπωση σύγχρονων τάσεων στη Διδακτική των Μαθηματικών καθώς και κάποιες βασικές αρχές για τη διδασκαλία των Μαθηματικών και ιδιαίτερα για τη διδασκαλία των Συναρτήσεων στην ΣΤ τάξη του Δημοτικού και στις τάξεις του Γυμνασίου, όπως αυτές παρουσιάζονται στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ). Επιπλέον γίνεται αναφορά στα Ρεαλιστικά μαθηματικά και σε κάποιες θεωρίες εκπροσώπων τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια ιστορικά στοιχεία που αφορούν τόσο την Άλγεβρα, όσο και τα μαθηματικά γενικότερα. Τα στοιχεία αυτά οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η διαμόρφωση της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι αποτέλεσμα τόσο κοινωνικών, πολιτικών, οικονομικών και πολιτισμικών συνθηκών, όσο και παιδαγωγικών και επιστημονικών συνθηκών που ισχύουν κάθε φορά.

Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στους στόχους και σε στοιχεία της μαθηματικής εκπαίδευσης τόσο στο Δημοτικό σχολείο όσο και στο Γυμνάσιο. Παράλληλα παρουσιάζονται σύγχρονες τάσεις στην εκπαίδευση που επηρεάζουν άλλοτε θετικά κι άλλοτε αρνητικά την πορεία της.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναφέρονται στοιχεία πιο συγκεκριμένα από τη διδασκαλία της Άλγεβρας καθώς και λάθη και δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη μετάβασή τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο οπότε γίνεται και το πέρασμα από την απλή αριθμητική στην Άλγεβρα.

Στο κεφάλαιο έξι παρουσιάζονται τα περιεχόμενα από τα κεφάλαια των Συναρτήσεων όπως αυτά διδάσκονται στα βιβλία του Δημοτικού και του Γυμνασίου, οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού καθώς και



προτάσεις για τη διδασκαλία των Συναρτήσεων με τη βοήθεια εκπαιδευτικών λογισμικών.

Τέλος παρουσιάζονται επιλεκτικά σενάρια διδασκαλίας και ενδεικτικές δραστηριότητες που αναλύονται και σχολιάζονται έτσι ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν σε πραγματικές τάξεις. Επιπλέον γίνεται αναφορά σε ασκήσεις που δόθηκαν στους μαθητές στο πρόγραμμα PISA, οι σωστές απαντήσεις και πιθανά λάθη που αντιμετώπισαν οι μαθητές.



2. ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

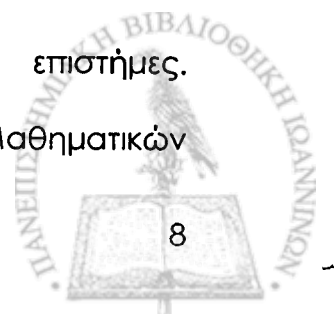
2.1 Τα μαθηματικά στην εκπαίδευση

Τα μαθηματικά στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχουν πρωτεύοντα ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία και για τον λόγο αυτό διδάσκονται τουλάχιστον τέσσερις ώρες εβδομαδιαίως. Πολύ συχνά οι μαθητές αναρωτιούνται γιατί πρέπει να μαθαίνουν μαθηματικά. Την απάντηση σ' αυτό το ερώτημα δίνει το γεγονός ότι τα μαθηματικά βρίσκονται δίπλα μας, σε καθετί που μας περιβάλλει, που παρατηρούμε, που χρησιμοποιούμε. Επιπλέον είναι η τελειότερη γλώσσα που βασίζεται στη λογική και στην απόδειξη και όχι απλά μια σειρά από σύμβολα, τύπους και αριθμούς.

Αν αναλογιστούμε τα πιο στοιχειώδη μαθηματικά, τις αριθμητικές πράξεις, η χρησιμότητά τους είναι άμεσα αντιληπτή στις καθημερινές μας συναλλαγές. Επίσης, τα γεωμετρικά σχήματα και στερεά έχουν ιδιότητες τις οποίες εκμεταλλεύονται διάφορες κατασκευές του περιβάλλοντος για να έχουν λειτουργικότητα και ευχρηστία. Ένας άλλος κλάδος των μαθηματικών, η Στατιστική, έχει τη δυνατότητα να ομαδοποιεί και να βγάζει συμπεράσματα από μεγάλους όγκους δεδομένων.

Τα μαθηματικά δίνουν τη δυνατότητα σε κάποιον να οργανώνει τις σκέψεις του, να βγάζει σωστές αποφάσεις σε προβλήματα κάνοντας λογικές σκέψεις και συνειρμούς. Δεν είναι τυχαίο λοιπόν που σε όλα τα εκπαιδευτικά συστήματα των κοινωνιών, ανεξάρτητα από κοινωνικοοικονομικές συνθήκες τα μαθηματικά παίζουν σημαντικό ρόλο.

Σημαντική είναι και η συμβολή των μαθηματικών στις άλλες επιστήμες. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της αλληλεπίδρασης Φυσικής και Μαθηματικών



αφού η μία επιστήμη βασιζόταν και συνεχίζει να βασίζεται στην εξέλιξη της άλλης. Όπως ισχυρίστηκε κάποιος μαθηματικός – φιλόσοφος: « δεν υπάρχει ερώτηση που να μην μπορεί να αναχθεί σε ζήτημα αριθμών».

2.2 Σκοποί και στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών

Από τα πιο συνηθισμένα ερωτήματα που θέτουν οι μαθητές στους καθηγητές τους είναι «Γιατί μαθαίνουμε Μαθηματικά;» και «Πού θα μας χρησιμεύσουν;» Οι απαντήσεις που δίνονται συνήθως είναι «Επειδή είναι χρήσιμα» και « Σε όλους τους τομείς της ζωής», αντίστοιχα. Αν ρωτήσουμε, όμως, τους μαθητές, θα διαπιστώσουμε πως κανένας δεν έχει μείνει ικανοποιημένος με τις παραπάνω απαντήσεις. Πράγματι, θα μπορούσε να πει κάποιος πως τα Μαθηματικά δεν είναι και τόσο χρήσιμα, αφού οι περισσότεροι άνθρωποι χρειάζονται μόνο τις τέσσερις πράξεις για τους καθημερινούς λογαριασμούς και τους υπολογισμούς τους. Το ερώτημα που δημιουργείται είναι γιατί μαθαίνουμε όλα αυτά τα Μαθηματικά, τα οποία ελάχιστοι άνθρωποι χρησιμοποιούν στο επάγγελμά τους.

Πριν απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα πρέπει να διευκρινιστεί πια είναι η διαφορά μεταξύ των εννοιών «σκοπός» και «στόχος». Οι στόχοι είναι επιδιώξεις περισσότερο συγκεκριμένες από αυτές που περιγράφονται ως σκοποί. Αυτό σημαίνει πως η πραγματοποίηση ενός σκοπού επιτυγχάνεται με την υλοποίηση μιας σειράς στόχων.

Είναι παραδεκτό ότι τα Μαθηματικά εκπαιδεύουν και βελτιώνουν τη διανοητική ικανότητα του ανθρώπου. Παράλληλα, μέσα από την κατάλληλη διδασκαλία είναι σε θέση να αναπτύξουν δεξιότητες, τεχνικές και στρατηγικές που είναι απαραίτητες για την αντιμετώπιση κάποιων προβληματικών καταστάσεων.



Έτσι, αφού η Μαθηματική εκπαίδευση βοηθάει τον άνθρωπο σε διάφορες δραστηριότητες, σίγουρα ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται εξαρτάται από διάφορες κοινωνικο - πολιτισμικές συνθήκες. Με βάση αυτές τις συνθήκες, καθορίζονται και οι σκοποί της διδασκαλίας των Μαθηματικών, οι οποίοι διακρίνονται σε τρεις γενικές κατηγορίες (Τουμάσης 2000):

1. **Πρακτικοί σκοποί:** στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται σκοποί και απόκτηση δεξιοτήτων και ικανοτήτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν άμεσα ή έμμεσα στην ζωή του ατόμου και της κοινωνίας.

Για να επιτευχθούν αυτοί οι σκοποί θα πρέπει να υλοποιηθούν οι παρακάτω στόχοι:

- Οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν τις βασικές αλγεβρικές πράξεις και να εξασκηθούν σε υπολογισμούς.
- Θα πρέπει να μάθουν να σχεδιάζουν γεωμετρικά σχήματα, ώστε να μπορούν να αναπαραστήσουν γραφικά το χώρο που μας περιβάλλει.
- Είναι απαραίτητο να αποκτήσουν την ικανότητα ερμηνείας των γραφικών παραστάσεων.
- Οι μαθητές θα πρέπει, επίσης, να αποκτήσουν έναν επιστημονικό τρόπο σκέψης και αντιμετώπισης πραγματικών καταστάσεων, αναπτύσσοντας την κρίση τους, τη φαντασία, αλλά και την ικανότητα αξιολόγησης. Αυτό επιτυγχάνεται επιλύοντας προβλήματα τα οποία αντικατοπτρίζουν πραγματικές προβληματικές καταστάσεις. Μέσω αυτών των προβλημάτων οι μαθητές χρησιμοποιούν την κρίση τους, την φαντασία, την μνήμη και άλλες διανοητικές λειτουργίες, αξιολογούν τα αποτελέσματα και μαθαίνουν έτσι να χειρίζονται και άλλες προβληματικές καταστάσεις της καθημερινής τους ζωής.

2. **Μορφωτικοί σκοποί:** στην κατηγορία αυτή ανήκουν σκοποί που σχετίζονται με τη διανοητική καλλιέργεια του ατόμου όπως η ανάπτυξη της ικανότητας για ακριβή σκέψη, η ικανότητα ανάπτυξης κρίσης και λογικής σκέψης, η γενική ικανότητα για αφαίρεση και γενίκευση κλπ. Η επίτευξη αυτών των σκοπών απαιτεί την υλοποίηση των παρακάτω στόχων:

- Την εκμάθηση και σωστή χρήση της αυστηρά δομημένης γλώσσας των Μαθηματικών, προκειμένου να αποκτήσουν οι μαθητές θετικές διανοητικές στάσεις ζωής, όπως ακρίβεια, σαφήνεια, πειθαρχία, κ.ά..
- Η μέθοδος διδασκαλίας του μαθηματικού αντικειμένου δεν θα πρέπει να προσφέρει έτοιμη γνώση, αλλά να βοηθάει τους μαθητές να την ανακαλύψουν μόνοι τους. Έτσι, τα παιδιά, μέσω της παρατήρησης, της εξερεύνησης, της ανίχνευσης των νόμων και κανόνων που διέπουν τα Μαθηματικά και της αναγνώρισης κοινών σχέσεων σε διαφορετικά πεδία τους θα αναπτύξουν ικανότητες καθαρής λογικής σκέψης, θα διαμορφώσουν σωστή κρίση και θα μάθουν να αναγνωρίζουν λογικές σχέσεις μεταξύ ανεξάρτητων γεγονότων.

3. **Πολιτισμικοί σκοποί:** η κατηγορία αυτή περιέχει ηθικούς, αισθητικούς, πνευματικούς σκοπούς, οι οποίοι βοηθούν στην αναγνώριση της αξίας των Μαθηματικών ως πολιτισμικού αγαθού και στην δημιουργία του αισθήματος αρμονίας και τελειότητας. Οι στόχοι μέσω των οποίων πραγματοποιούνται αυτοί οι σκοποί είναι οι ακόλουθοι:

- Οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν γνώση της ιστορικής εξέλιξης των Μαθηματικών, ώστε να συνειδητοποιήσουν την ευρύτητα και τη δυναμική τους, καθώς και το ρόλο που αυτά έχουν παίξει στη διαμόρφωση της κοινωνίας.



- Είναι, τέλος, απαραίτητο, να δοθεί έμφαση στα μαθήματα της Γεωμετρίας, της Τριγωνομετρίας και της Στερεομετρίας, προκειμένου να αναγνωρίσουν τα παιδιά της ομορφιά, την αρμονία και τη συμμετρία των σχημάτων της φύσης.

Από τα παραπάνω διαπιστώνει κανείς πως η μαθηματική εκπαίδευση είναι απαραίτητη για την ολοκλήρωση και την εξέλιξη του ατόμου. Η αξία της, δηλαδή, τόσο για τον ίδιο τον άνθρωπο, όσο και για την κοινωνία είναι πολύ μεγάλη. Για το λόγο αυτό τα Μαθηματικά αποτελούν και θα συνεχίσουν να αποτελούν ένα από τα βασικότερα μέρη της εκπαίδευσης κάθε χώρας.

2.3 Βασικές αρχές για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών

2.3.1 Θεωρίες μάθησης

Μερικές δεκαετίες πριν, διαπιστώθηκε ότι στη μαθηματική έρευνα σημαντικό ρόλο παίζει η συμβολή της Ψυχολογίας καθώς η συνεργασία μαθηματικών και ψυχολόγων μπορεί να επιφέρει σημαντικά αποτελέσματα στη μαθηματική εκπαίδευση, αφού μπορεί να δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα όπως: με ποιον τρόπο σκέφτονται οι άνθρωποι στα μαθηματικά, πως αναπτύσσεται η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών κ.α.

Την δεκαετία του '80 αναζητήθηκαν θεωρίες με βάση τις οποίες θα μπορούσαν να εξηγηθούν οι δυσκολίες μάθησης των μαθηματικών εννοιών και οι τρόποι με τους οποίους τα άτομα κατανοούν τις μαθηματικές δομές . Διατυπώθηκαν έτσι κάποιες θεωρίες λαμβάνοντας υπόψη τόσο τη δομή του γνωστικού αντικείμενου όσο και τις θεωρητικές αρχές της γνώσης και της μάθησης, οι οποίες επέδρασαν σημαντικά

στην παιδαγωγική των μαθηματικών. Κάποιες απ' αυτές αναφέρονται παρακάτω (Κολέζα 2000, Τουμάσης 2000):

1. Η θεωρία των δεσμών

Θεμελιωτής της υπήρξε ο Edward Thorndike, ένας ψυχολόγος ο οποίος στήριξε την τεχνική της πρακτικής και της εξάσκησης. Σύμφωνα με αυτή, η πρακτική και η εξάσκηση βοηθούν στην επίτευξη της τελειότητας και στην καλλιέργεια της ταχύτητας και ακρίβειας, τα οποία είναι κριτήρια για την ανάπτυξη υπολογιστικών ικανοτήτων.

Ο Thorndike μεταξύ άλλων, υποστήριξε ότι η ανθρώπινη συμπεριφορά μπορεί να αναλυθεί με τη βοήθεια ερεθισμάτων και αντιδράσεων, όπου όταν ένα ερέθισμα ακολουθείται από μια ανταμοιβή, τότε σχηματίζεται ένας δεσμός. Οι δεσμοί θα πρέπει να καθορίζονται από τον δάσκαλο και στη συνέχεια ο μαθητής να κάνει την πρακτική.

2. Η αναπτυξιακή θεωρία του Piaget

Η βασική αρχή του Piaget είναι ότι το κλειδί της γνωστικής ανάπτυξης και της ερμηνείας των εμφανιζόμενων διανοητικών εμποδίων στη σκέψη του παιδιού, βρίσκεται στη φύση της αλληλεπίδρασης μεταξύ του ατόμου και του περιβάλλοντός του. Σύμφωνα με τον Piaget υπάρχουν κάποια στάδια νοητικής ανάπτυξης του παιδιού: **το αισθησιοκινητικό στάδιο** όπου τα παιδιά αρχίζουν να χρησιμοποιούν τις αισθήσεις τους (0-2 χρόνια), **το προεγνοιολογικό στάδιο** όπου το παιδί αρχίζει να σχηματίζει στοιχειώδεις έννοιες και να ταξινομεί τα αντικείμενα με βάση τις ιδιότητές τους, (2-7 χρόνια), **το στάδιο των συγκεκριμένων λειτουργιών** όπου το παιδί διαμορφώνει την ικανότητα να σχηματίζει συνομοταξίες πραγμάτων και αρχίζει να ελέγχει τη σκέψη του συνειδητοποιώντας την αλληλουχία των λειτουργιών που λαμβάνουν χώρα στο μυαλό του (7-13 χρόνια) και τέλος **το στάδιο των τυπικών λειτουργιών** που αναπτύσσεται η αφαιρετική ικανότητα σκέψης (13 χρόνια και πάνω).

3. Η μάθηση μέσω ανακάλυψης

Διατυπώθηκε από τον Bruner, ο οποίος ισχυρίζεται ότι η μάθηση των μαθηματικών ξεκινάει με ένα σύνολο φυσικών ενεργειών όπου οι μαθηματικές δομές πηγάζουν από τον χειρισμό πραγματικών καταστάσεων. Αυτές οι ενέργειες αναπαριστώνται με τη μορφή εικόνων. Με τη βοήθεια συμβολικής έκφρασης μπορεί κάποιος να καταλήξει στις τυπικές ιδιότητες των αντικειμένων που εμπλέκονται σε μια κατάσταση. Μέσα από μια τέτοια διαδικασία νοητικής ανάπτυξης, αναπτύσσει κανείς τρία είδη γνωστικής αναπαράστασης: την πραξιακή (αντιστοιχεί στο αισθησιοκινητικό στάδιο του Piaget), την εικονιστική (αντίστοιχο με το προεγνωσιολογικό στάδιο του Piaget) και τη συμβολική (αντίστοιχη με τη λειτουργική σκέψη του Piaget).

4. Η θεωρία της επεξεργασίας των πληροφοριών

Σύμφωνα με το μοντέλο επεξεργασίας των πληροφοριών, όλη η ανθρώπινη συμπεριφορά θεωρείται ως το αποτέλεσμα του μυαλού κατά τη διάρκεια επεξεργασίας δεδομένων, τα οποία προέρχονται από το εσωτερικό ή το εξωτερικό περιβάλλον. Το μυαλό επεξεργάζεται την πληροφορία που δέχεται μέσω μιας σειράς από μνήμες, οι οποίες έχουν διαφορετικές χωρητικότητες και υπόκεινται σε διαφορετικούς περιορισμούς. Όλες αυτές οι μνήμες μαζί, συνιστούν το σύστημα επεξεργασίας των πληροφοριών.

2.3.2 Μοντέλα διδασκαλίας των μαθηματικών

Τα μοντέλα διδασκαλίας και εκμάθησης των Μαθηματικών διακρίνονται σε δυο κύριες κατηγορίες (Τουμάσης 2000):

Τα δασκαλοκεντρικά μοντέλα: Επίκεντρο της τάξης είναι ο δάσκαλος και αυτά που λέει. Η διδασκαλία στηρίζεται ολοκληρωτικά σ' αυτόν. Η βασική διδακτική τεχνική που χρησιμοποιείται είναι η **Αφηγηματική προσέγγιση**. Το βασικό χαρακτηριστικό της Αφηγηματικής προσέγγισης είναι ότι ο δάσκαλος διηγείται ή περιγράφει ή δίνει πληροφορίες στους μαθητές οι οποίοι παραμένουν παθητικοί θεατές. Με τη μέθοδο αυτή οι μαθητές συναντούν συνήθως δυσκολίες καθώς ο ρυθμός διδασκαλίας είναι ίδιος για όλους τους μαθητές και το μόνο που επιτυγχάνεται είναι η κάλυψη μεγάλου όγκου ύλης. Με τις καινούριες εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις και τις νέες θεωρίες μάθησης όπου συνιστάται η ενεργή συμμετοχή του μαθητή στην απόκτηση γνώσης, η αφηγηματική προσέγγιση αμφισβητείται. Βέβαια παρά το γεγονός ότι η αφηγηματική μορφή διδασκαλίας των Μαθηματικών αντιτίθεται στις σύγχρονες θεωρίες μάθησης, αφού περιορίζει την αυτενέργεια του μαθητή, σε ορισμένες περιπτώσεις η χρησιμοποίησή της είναι αναπόφευκτη. Έτσι, η εισαγωγή στο μάθημα, η ανακεφαλαίωσή του, στοιχεία σχετικά με την ιστορία των Μαθηματικών, πληροφορίες γύρω από τις εφαρμογές τους, κ.ά. είναι μερικές από τις περιπτώσεις, στις οποίες η αφήγηση είναι πολύ αποτελεσματική.

Τα μαθητοκεντρικά μοντέλα: Επίκεντρο της διδασκαλίας είναι ο μαθητής. Ο δάσκαλος απλά διευκολύνει τη μάθηση οργανώνοντας δραστηριότητες και καταστάσεις μέσα από τις οποίες ο μαθητής κατασκευάζει τη γνώση, συμμετέχοντας ενεργά στη διαδικασία της μάθησης. Βασικό μοντέλο αυτής της διδασκαλίας είναι η **Ανακαλυπτική προσέγγιση**. Βασικό χαρακτηριστικό της προσέγγισης αυτής είναι ότι ο δάσκαλος λειτουργεί απλά ως σύμβουλος και αφήνει τους μαθητές να αυτενεργούν. Ο δάσκαλος χρησιμοποιώντας ερωτήσεις και δραστηριότητες καθοδηγεί τους μαθητές στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Η ανακαλυπτική προσέγγιση, είτε είναι ελεύθερη, είτε καθοδηγούμενη, ακολουθεί πάντα τα ακόλουθα πέντε βήματα:

(α) Καθορισμός προβλήματος



(β) Συγκέντρωση δεδομένων στοιχείων και ανάλυσή τους

(γ) Σχηματισμός υπόθεσης

(δ) Έλεγχος ισχύος της υπόθεσης

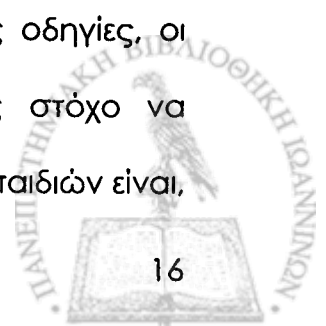
(ε) Τελικό συμπέρασμα

Η διδασκαλία με τη μορφή της καθοδηγούμενης ανακάλυψης έχει ένα πλήθος πλεονεκτημάτων για τους μαθητές. Ο σχεδιασμός της, όμως, και η πραγματοποίησή της, παρουσιάζουν αρκετές δυσκολίες για τον καθηγητή, ο οποίος πρέπει να αποφασίζει αρχικά σχετικά με το βαθμό επέμβασής του και καθοδήγησης των παιδιών. Πρέπει να βρίσκει τρόπους να ελέγχει τις υποθέσεις που κάνουν οι μαθητές του, να ανακεφαλαιώνει κάθε φορά όσα έχουν ειπωθεί μέχρι κάποια ορισμένη στιγμή και να μην επιμένει στη φραστική διατύπωση των διαφόρων ανακαλύψεων, ειδικά στις μικρότερες τάξεις, κ.ά.

Κάνοντας, λοιπόν, το σχεδιασμό της διδασκαλίας μιας ενότητας Μαθηματικών και λαμβάνοντας υπόψη του τα παραπάνω στοιχεία ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα να ακολουθήσει κάποια από τις ακόλουθες μορφές καθοδηγούμενης ανακάλυψης:

1. Δειγματική μορφή: Σε αυτή τη μορφή διδασκαλίας, ο καθηγητής επιδεικνύει μια διαδικασία, η οποία αποτελεί υπόδειγμα κάποιας δεξιότητας ή πρότυπο ενός φαινομένου. Ο μαθητής παρατηρεί και προσπαθεί να αναπτύξει την ανάλογη ικανότητα πραγματοποίησης αυτής της διαδικασίας. Η δειγματική διδασκαλία περιλαμβάνει εποπτικά μέσα, εργαστηριακό εξοπλισμό, χρήση γεωμετρικών οργάνων, κ.ά..

2. Διδασκαλία με φύλλα εργασίας: Τα φύλλα εργασίας είναι γραπτές οδηγίες, οι οποίες δίνονται από τον καθηγητή στους μαθητές και έχουν ως στόχο να κατευθύνουν τις ενέργειες και γενικά τις εργασίες τους. Η συμμετοχή των παιδιών είναι,



φυσικά, ενεργητική και γίνεται με γραπτό τρόπο. Έτσι, επιτυγχάνεται οικονομία χρόνου και οργάνωση των μαθημάτων.

3. Εργαστηριακές προσεγγίσεις: Η διδασκαλία μέσω εργαστηριακών προσεγγίσεων συμβάλλει στην ανάπτυξη της αυτενέργειας και της δημιουργικότητας του μαθητή. Η ενασχόληση του παιδιού με τα κατάλληλα εκπαιδευτικά μέσα και ο πειραματισμός του με αυτά, του προσφέρουν την ευκαιρία να αναδιοργανώσει και να τροποποιήσει τις προηγούμενες γνώσεις και να κατασκευάσει με πολύ ενδιαφέρον την καινούργια. Η εργαστηριακή μορφή διδασκαλίας συνιστάται και εφαρμόζεται κυρίως στις μικρότερες τάξεις, όπου τα παιδιά βρίσκονται στο στάδιο των συγκεκριμένων συλλογισμών και χρειάζονται συγκεκριμένες πράξεις και δραστηριότητες για να μάθουν. Για την επιτυχία της μορφής αυτής, είναι απαραίτητο να γίνεται σωστή οργάνωση του μαθήματος από τον καθηγητή, η οποία συνίσταται στην εξασφάλιση αρκετών υλικών για όλους, στην ενθάρρυνση της συνεργασίας μεταξύ των μαθητών, στη συνεχή παρακολούθηση της εργασίας τους, στην επιβράβευση της πρωτοβουλίας, της φαντασίας, της πρωτοτυπίας τους, κ.ά..

4. Συνεργατική μάθηση: Σύμφωνα με αυτή τη μορφή καθοδηγούμενης ανακάλυψης, ο καθηγητής χωρίζει την τάξη σε ομάδες των 4-5 παιδιών, οι οποίες αναλαμβάνουν να διερευνήσουν κάποιο θέμα ή να επιλύσουν κάποιο πρόβλημα σε ορισμένο χρονικό διάστημα. Η προσέγγιση αυτή αναπτύσσει στα παιδιά την κριτική σκέψη, τους μαθαίνει να συνεργάζονται, να αλληλοβοηθούνται και να επικοινωνούν. Φυσικά, είναι δυνατό να δημιουργηθούν ανταγωνιστικές σχέσεις μεταξύ των διάφορων ομάδων και να προκληθούν προβλήματα. Τα πλεονεκτήματα, όμως, της συνεργατικής μάθησης είναι πολύ περισσότερα και αξίζει να προσπαθήσει ο καθηγητής να οργανώσει μια τέτοιου είδους διδασκαλία.

5. Διδασκαλία με ερωτήσεις: Οι ερωτήσεις αποτελούν ένα από τα πιο διαδεδομένα μέσα διδασκαλίας των Μαθηματικών. Έχουν ποικίλες εφαρμογές, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούνται για να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, να τους ενθαρρύνουν να εξερευνήσουν, να εισάγουν ένα νέο θέμα διδασκαλίας, να βοηθήσουν στη συνειδητοποίηση και εμπέδωση των διαφόρων μαθηματικών εννοιών και τεχνικών, να διαγνώσουν, να αξιολογήσουν, κ.λ.π.. Οι ερωτήσεις, δηλαδή, μπορεί να έχουν ως σκοπό την απλή εξάσκηση της μνήμης, την εξήγηση κάποιων καταστάσεων, την ανάλυση της γνώσης, την έρευνα, κ.ά.. Ανάλογα με το προς μάθηση αντικείμενο, ο καθηγητής θα πρέπει να υποβάλλει και σχετικές με αυτό ερωτήσεις. Οι κατάλληλες ερωτήσεις μπορούν να προωθήσουν αποτελεσματικά τη μάθηση και να βοηθήσουν τα παιδιά να αποκτήσουν πολύ ευκολότερα τις νέες γνώσεις.

2.4 Το ΔΕΠΠΣ στα Μαθηματικά – στόχοι

Σύμφωνα με το Ενιαίο πλαίσιο προγράμματος σπουδών οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης εστιάζονται σε 7 βασικούς άξονες (ΔΕΠΠΣ): την μαθηματική διάσταση, τη γλωσσική διάσταση, την εφαρμοσιμότητα και πρακτική χρήση, τη μεθοδολογική διάσταση, τη δυναμική διάσταση και τέλος τη διάσταση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά.

Οι άξονες αυτοί για τους μαθητές στοχεύουν μεταξύ άλλων στο:

- Να μπορούν να διατυπώνουν προβλήματα με αφορμή καθημερινές ή μαθηματικές καταστάσεις
- Να κατανοούν τη σύνταξη και το λεξιλόγιο της Μαθηματικής γλώσσας
- Να συσχετίζουν πραγματικές καταστάσεις με μαθηματικές έννοιες

- Να σχεδιάζουν και να επεξεργάζονται Μαθηματικά μοντέλα για την αντιμετώπιση προβλημάτων
- Να γνωρίζουν την ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών εργαλείων
- Να επισημαίνουν, να αξιολογούν και να διορθώνουν τα λάθη τους και
- Να δουλεύουν σε ένα πλούσια δομημένο μαθηματικό περιβάλλον όπου θα υπάρχει χώρος για πρωτοβουλία, εφευρετικότητα και νοητική πρόκληση.

Από την πλευρά των εκπαιδευτικών η οργάνωση της διδασκαλίας πρέπει να ακολουθεί τα εξής στάδια:

- Σχεδιασμός των στόχων οι οποίοι πρέπει να επιτευχθούν μέσω της διδασκαλίας
- Καταγραφή των παρατηρήσιμων συμπεριφορών τις οποίες πρέπει να παρουσιάσουν οι μαθητές για να διαπιστωθεί ότι οι στόχοι έχουν επιτευχθεί
- Προετοιμασία της διδασκαλίας με τη συλλογή κάθε πληροφορίας γύρω από τη σχέση των μαθητών με τους επιδιωκόμενους στόχους.
- Συγκρότηση ενός οριστικού καταλόγου στόχων
- Σχεδιασμός και πραγματοποίηση διδακτικού υλικού που θα βοηθήσει στην επίτευξη των στόχων
- Αξιολόγηση του τελικού αποτελέσματος.

2.5 Ρεαλιστικά Μαθηματικά

Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (PME) είναι μία θεωρία διδασκαλίας και μάθησης στην μαθηματική εκπαίδευση και είναι η απάντηση των Ολλανδών στην ανάγκη για αναθεώρηση της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η αναθεώρηση αυτή ξεκίνησε στις αρχές της δεκαετίας του '70 όταν διαμορφώθηκαν και άρχισαν να υλοποιούνται οι πρώτες ιδέες της ρεαλιστικής μαθηματικής διδασκαλίας.



Η θεμελίωση της ΡΜΕ βασίστηκε στις αντιλήψεις του Freudenthal περί μαθηματικών και μαθηματικής εκπαίδευσης, οπότε και δημιουργήθηκε το Ινστιτούτο για την Ανάπτυξη της Μαθηματικής εκπαίδευσης (IOWO) που σήμερα ονομάζεται «Ινστιτούτο Freudenthal». Η φιλοσοφική θεώρηση του Freudenthal είναι ότι τα μαθηματικά είναι *μιά ανθρώπινη δραστηριότητα* και επομένως για να αποτελούν ανθρώπινη αξία πρέπει:

- να συνδέονται με την πραγματικό
- να είναι κοντά στα παιδιά
- να έχουν σχέση με την κοινωνία

Κατά συνέπεια και η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να εστιάζει στα μαθηματικά όχι ως ένα κλειστό σύστημα, αλλά ως μία δραστηριότητα κατά την διαδικασία της μαθηματικοποίησης.

Σύμφωνα με τις αρχές διδασκαλίας της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης θα πρέπει να συμβαίνουν τα εξής:

1. Εκκίνηση διδασκαλίας από συγκεκριμένα πλαίσια
2. Οικοδόμηση της γνώσης πάνω στην άτυπη γνώση των παιδιών
3. Καθοδηγούμενη επανεφεύρεση των μαθηματικών εννοιών και δομών.
4. Ποικιλία στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων συνδυασμένη με την άτυπη γνώση των μαθητών.
5. Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία
6. Αλληλεπίδραση στην τάξη
7. Ο καθηγητής δεν διδάσκει επιδεικνύοντας, αλλά παροτρύνοντας τους μαθητές να φτάσουν στις δικές τους λύσεις.

Οι βασικές αρχές που καθορίζουν το πλαίσιο διδασκαλίας της ΡΜΕ είναι (Κολέζα 2000):

- Η θεωρία επιπέδων του Van Hiele



- Η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal
- Η προοδευτική μαθηματικοποίηση

2.5.1 Η θεωρία επιπέδων του Van Hiele

Ο Van Hiele διακρίνει τρία επίπεδα στη διαδικασία μάθησης. Σε κάθε επίπεδο η σκέψη του παιδιού οργανώνεται διαφορετικά και τα αντικείμενα της μαθηματικής σκέψης αναπαριστούν διαφορετικά πράγματα. (Κολέζα 2000).

- Στο πρώτο επίπεδο τα αντικείμενα της μαθηματικής σκέψης εμπεριέχονται σε οπτικά μοντέλα, σχήματα και με τα οποία έρχεται σε επαφή ο μαθητής.
- Στο δεύτερο επίπεδο αντικείμενο της έρευνας αποτελούν οι σχέσεις μεταξύ αριθμών και σχημάτων με αποτέλεσμα να δημιουργούνται οι ιδιότητες που τα χαρακτηρίζουν.
- Στο τρίτο επίπεδο οι σχέσεις από μόνες τους αποτελούν αντικείμενο σκέψης. Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των σχέσεων είναι πια γνωστά και έτσι είναι δυνατόν η μία να προκύπτει από τις προηγούμενες.

Τα όρια μεταξύ των τριών επιπέδων στις διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών είναι αυστηρά καθορισμένα. Το τρίτο επίπεδο του αριθμητικού συστήματος αποτελεί την στέρεα βάση για το πρώτο επίπεδο της άλγεβρας. Σύμφωνα με την πορεία διδασκαλίας που προτείνει ο Van Hiele η μετάβαση των μαθητών από το ένα επίπεδο στο επόμενο γίνεται σε πέντε φάσεις:

Φάση πληροφοριών: ο μαθητής εξοικειώνεται με το θέμα

Φάση εξερεύνησης: έρχεται σε επαφή, μέσω συγκεκριμένων δραστηριοτήτων με σχετικές μαθηματικές δομές

Φάση έκφρασης – ανάλυσης: ο μαθητής αναπτύσσει τα κατάλληλα γλωσσικά μέσα για να περιγράψει και να εκφράσει σχέσεις και δομές

Φάση ελεύθερου προσανατολισμού: ελεύθερη εξερεύνηση σε όλο το πεδίο του θέματος με χρήση μέσων οργάνωσης που διαθέτει ο μαθητής

Φάση ολοκλήρωσης: Ενσωμάτωση του προϊόντος μάθησης στο σύνολο γνώσεων και ικανοτήτων που διαθέτει ο μαθητής.

Ωστόσο με τη διατύπωση της θεωρίας του Van Hiele παραμένουν αναπάντητα δυο βασικά ερωτήματα: Πως γίνεται η φαινομενολογική εξερεύνηση στο πρώτο επίπεδο; Ποιες διδακτικές ενέργειες πρέπει να γίνουν ώστε οι μαθητές να ανέβουν από το ένα επίπεδο στο άλλο; Την απάντηση στο πρώτο ερώτημα προσεγγίζει η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal και στο δεύτερο η προοδευτική μαθηματικοποίηση της ομάδας Wiskobas.

2.5.2 Η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal

Σύμφωνα με τον Freudenthal φαινομενολογία μιας μαθηματικής έννοιας, μιας μαθηματικής δομής ή ιδέας είναι η περιγραφή της σχέσης του μαθηματικού αντικείμενου με τα φαινόμενα που οργανώνει. Επιπλέον μας δείχνει από την οργάνωση ποιών φαινομένων δημιουργήθηκε το μαθηματικό αντικείμενο και σε ποια μπορεί να επεκταθεί.

Το διδακτικό συμπέρασμα της ρεαλιστικής εκπαίδευσης του Freudenthal είναι σε γενικές γραμμές (Κολέζα 2000): να φέρουμε τους μαθητές σε επαφή με εκείνα τα φαινόμενα, για τα οποία οι μαθηματικές έννοιες και δομές αποτελούν τα οργανωτικά εργαλεία, με στόχο να διαμορφώσουν μόνοι τους αυτά τα εργαλεία σε μια διαδικασία



επανα-ανακάλυψης και να μάθουν να τα χειρίζονται στα πλαίσια ευρύτερων μαθησιακών/διδασκικών στόχων.

Επιπλέον ο Freudenthal δεν ξεχωρίζει τα επίπεδα στη διαδικασία μάθησης με τον τρόπο που το κάνει ο Van Hiele. Κατά την άποψή του δεν υπάρχει αυστηρός διαχωρισμός των επιπέδων αλλά μία πρόοδος χωρίς περιορισμούς σε μικρο-επίπεδα που δεν είναι σαφώς οριοθετημένα μεταξύ τους.

ξ

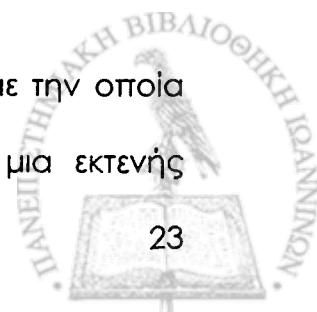
2.5.3 Προοδευτική μαθηματικοποίηση

Η μαθηματικοποίηση είναι μια δραστηριότητα οργάνωσης και δόμησης στην οποία ο μαθητής χρησιμοποιώντας την γνώση που έχει αποκτήσει και τις ικανότητες που διαθέτει, ανακαλύπτει άγνωστες για αυτόν μέχρι τώρα σχέσεις, συνδέσεις και δομές. Η μαθηματικοποίηση διακρίνεται σε οριζόντια και κατακόρυφη. Στην οριζόντια μαθηματικοποίηση μια κατάσταση προβληματισμού μετασχηματίζεται έτσι ώστε να μπορεί να προσεγγισθεί με μαθηματικό τρόπο. Το πραγματικό πρόβλημα, διατυπωμένο σε ένα πλαίσιο, μοντελοποιείται και ο μαθητής μεταφέρεται από τον κόσμο των αισθήσεων στον κόσμο των συμβόλων. Στην κατακόρυφη μαθηματικοποίηση ο μαθητής εργάζεται μέσα στο μαθηματικό σύστημα. Έχει ήδη μετασχηματίσει το πραγματικό πρόβλημα σε μαθηματικό, το οποίο στη συνέχεια επεξεργάζεται με μαθηματικά μέσα, δηλαδή σχέσεις, σύμβολα, κανόνες, τύπους.

Η προοδευτική μαθηματικοποίηση (οριζόντια και κατακόρυφη) πραγματοποιείται βασιζόμενη σε πέντε διδακτικές – μαθησιακές αρχές:

1. Αρχή της φαινομενολογικής εξερεύνησης

Στηρίζεται στη διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal σύμφωνα με την οποία κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας ενός καινούριου θέματος γίνεται μια εκτενής



φαινομενολογική εξερεύνηση. Οι μαθηματικές έννοιες πρέπει να εξερευνηθούν από όσο το δυνατό περισσότερες οπτικές γωνίες, ώστε να σχηματιστεί για αυτή μια ευρεία αντίληψη.

2. Αρχή της γεφύρωσης των επιπέδων με χρήση εργαλείων

Από πολύ νωρίς στη μαθησιακή διαδικασία ο μαθητής πρέπει να διαθέτει εργαλεία όπως μοντέλα, διαγράμματα, σχήματα και σύμβολα. Η χρήση αυτών των εργαλείων θα του επιτρέψει να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ συγκεκριμένου και αφηρημένου και να περάσει από την άτυπη και διαισθητική γνώση του πρώτου επιπέδου, στον αναστοχασμό και τη συστηματική γνώση του τρίτου επιπέδου.

3. Αρχή της αυτοδυναμίας

Οι δραστηριότητες κάθε μαθητή διαφέρουν ως προς τον τρόπο σκέψης και επίλυσης. Έτσι τους δίνεται το ερέθισμα να δημιουργούν συσχετισμούς, να αναστοχάζονται την πορεία που έχουν ακολουθήσει και να κάνουν προβλέψεις. Αυτή η διαδικασία οδηγεί στην αναβάθμιση του επιπέδου της μαθησιακής πορείας.

4. Αρχή της αλληλεπίδρασης

Η μάθηση είναι μια κοινωνική και όχι ατομική δραστηριότητα. Λαμβάνει χώρα μέσα στην κοινωνία και επομένως όχι μόνο επηρεάζεται αλλά και καθοδηγείται από το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο. Κατά την διάρκεια της αλληλεπιδραστικής διδασκαλίας η ατομική εργασία συνδυάζεται με τη συζήτηση στην τάξη, τη βοήθεια συμμαθητών και εκπαιδευτικού.

5. Αρχή της συνύφανσης

Οι μαθησιακές πορείες, όπου είναι δυνατόν, πρέπει να συνδέονται και να σχετίζονται μεταξύ τους. Ο καθηγητής όταν ξεκινά την διδασκαλία ενός καινούριου θέματος οφείλει να έχει κατά νου όλες τις συνδέσεις και σχέσεις του θέματος με άλλες θεματικές περιοχές. Η αλληλοπλοκή των θεμάτων βασίζεται στη φαινομενολογική αρχή σύμφωνα με την οποία, τα φαινόμενα σπανίως φανερώνουν στον μαθητή μία μόνο έννοια ή δομή.

3. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

3.1 Ιστορία των Μαθηματικών

Η Μαθηματική επιστήμη γεννήθηκε μέσα από τις προσπάθειες των ανθρώπων να κατανοήσουν και να εξηγήσουν τα γεγονότα που διαδραματίζονται στον κόσμο. Στην πορεία της εξέλιξής τους εμφανίστηκαν εμπόδια και αντιθέσεις που επηρέασαν πολλούς τομείς της ανθρώπινης ζωής όπως τη θρησκεία, την πολιτική και την επιστήμη γενικότερα (Τουμάσης 2000).

Μια αναδρομή στο παρελθόν των μαθηματικών θα βοηθήσει τον αναγνώστη να συνειδητοποιήσει ότι τα μαθηματικά έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της σημερινής πραγματικότητας.

Η ιδέα της αρίθμησης υπήρχε από τους πρωτόγονους λαούς ως μέσο για να διεκπεραιώσουν τις καθημερινές εμπορικές τους συναλλαγές. Με τα μαθηματικά ως επιστήμη ασχολήθηκαν για πρώτη φορά οι Αιγύπτιοι, οι οποίοι ήταν αναγκασμένοι να επινοούν τρόπους για να οριοθετούν τη γη τους μετά από κάθε πλημμύρα του ποταμού Νείλου και για να κατασκευάζουν τα τεράστια οικοδομήματά τους. Ακολούθησαν οι Βαβυλώνιοι, σε ντοκουμέντα των οποίων περιγράφεται η επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις β' βαθμού.

Στην αρχαία Ελλάδα εισήγαγαν τη μαθηματική σκέψη ο Πλάτωνας, ο Αριστοτέλης, ο Πυθαγόρας, ο Ευκλείδης και άλλοι μεγάλοι στοχαστές, οι οποίοι διαπίστωσαν ότι ο κόσμος είναι σχεδιασμένος αρμονικά με μαθηματικό τρόπο. Το βασικό χαρακτηριστικό των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών ήταν η έννοια της απόδειξης. Η απόδειξη κατάφερε να μετατρέψει τις προτάσεις των Ανατολικών χωρών σε ολοκληρωμένη μαθηματική επιστημονική γνώση. Χαρακτηριστικό των Ελλήνων



μαθηματικών ήταν ότι κανένας απ' αυτούς, εκτός από τον Αρχιμήδη, δεν προσπαθούσε να εξηγήσει στους μαθητές του τη διαδικασία της μαθηματικής ανακάλυψης. Ένα άλλο γνώρισμα των αρχαίων Ελλήνων ήταν η αίσθησή τους για την απλότητα και την αρμονία. Έτσι με την απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος και την εμφάνιση των άρρητων αριθμών δημιουργήθηκε ρήγμα στο χώρο των μαθηματικών.

Την εποχή της Αναγέννησης οι Έλληνες μαθηματικοί κατάφεραν να βάλουν τα θεμέλια της αυστηρής μαθηματικής επιστήμης. Κατά την περίοδο του Μεσαίωνα τα μαθηματικά ζουν την ηρωική τους εποχή καθώς κατασκευάζονται λαμπρά οικοδομήματα που απαιτούν εξειδικευμένες γνώσεις μηχανικής και μαθηματικών.

Κατά τον 17^ο αιώνα δημιουργούνται πολλά διλήματα σχετικά με το ρόλο του Θεού στη δημιουργία του σύμπαντος. Παρά την αβεβαιότητα γύρω από την ερμηνεία της φύσης σε συνάρτηση με τα μαθηματικά, την περίοδο αυτή γίνονται μεγάλα βήματα στην οργάνωση της μαθηματικής επιστήμης με την προσπάθεια αλγεβροποίησης της γεωμετρίας και την εμφάνιση του Απειροστικού λογισμού.

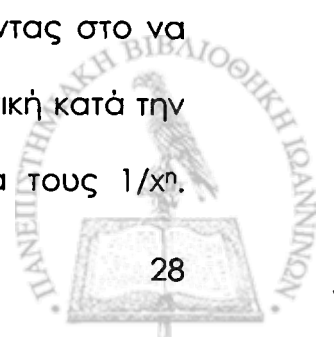
Ο χρυσός αιώνας των μαθηματικών αποδείχθηκε ο 19^{ος} αιώνας όπου, παράλληλα με την αρχή της βιομηχανικής περιόδου, αναπτύχθηκαν νέες μαθηματικές θεωρίες σχετικά με τους αλγορίθμους, τις συναρτήσεις, τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία κα. Η έννοια της συνάρτησης για παράδειγμα, την οποία σήμερα οι μαθητές αντιλαμβάνονται σαν μια εξίσωση που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές, διαπέρασε όλους τους κλάδους των μαθηματικών και θεωρήθηκε σαν μια ενοποιητική, κεντρική ιδέα για την παραπέρα ανάπτυξη των μαθηματικών.

3.2 Η ιστορία της Άλγεβρας

Η λέξη ΑΛΓΕΒΡΑ προέρχεται από τη λατινική Algebra η οποία με τη σειρά της προέρχεται από την αραβική λέξη al-jabr. Η αραβική λέξη πρωτοεμφανίζεται στο γραμμένο γύρω στα 825- έργο του μεγάλου άραβα μαθηματικού al-Khwārizmī «Hisāb al-jabr w' al- muḡābalaḥ» ένας τίτλος που σε ελεύθερη απόδοση είναι « Επιστήμη της συνένωσης και της αντίθεσης» και η λέξη al-jabr ήταν για πολλά χρόνια συνώνυμο του «επιστήμη των εξισώσεων». Το αραβικό κείμενο έγινε γνωστό στην Ευρώπη από λατινικές μεταφράσεις. Από τη λέξη al-jabr γεννήθηκε ο λατινικός όρος Algebra που αποδόθηκε στα ελληνικά με το «Άλγεβρα». Το 1857 βρέθηκε μια λατινική μετάφραση που άρχιζε με το « Έχει πει ο Αλγορίθμι . . .». το όνομα δηλαδή του αλ – Χουαρίσμι έγινε Αλγορίθμι και από την παράφραση αυτή γεννήθηκε και η λέξη ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ που σημαίνει «μια τυπική διαδικασία υπολογισμού με συγκεκριμένο τρόπο» .

Το βιβλίο του **al-Khwarizmi** δεν χρησιμοποιεί τον σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό ούτε και εξισώσεις. Τα πάντα είναι γραμμένα με λέξεις. Διαπραγματεύεται κυρίως εξισώσεις. Μελετά έξι διαφορετικούς τύπους εξισώσεων. Ωστόσο τα ισλαμικά μαθηματικά δεν ασχολούνται με αρνητικούς αριθμούς. Στη δευτεροβάθμια λόγου χάρη εξίσωση οι αρνητικές ρίζες αγνοούνται. Το ίδιο όμως βιβλίο περιέχει και κανόνες Αριθμητικής που διαμορφώθηκαν με τα ινδικά πρότυπα για την εκτέλεση πράξεων με ινδικά ψηφία . Αναφέρεται επίσης σε τετραγωνικές και κυβικές ρίζες, σε κλάσματα και στη μέθοδο των τριών.

Ο Abu Bakr al-Karaji συνέχισε την εργασία του **al-Khwarizmi** εστιάζοντας στο να εφαρμόσει τις τεχνικές της Αριθμητικής στην Άλγεβρα. Ανέπτυξε μια τεχνική κατά την οποία έδωσε όνομα στις νιοστές δυνάμεις x^n και στα αντίστροφα τους $1/x^n$.



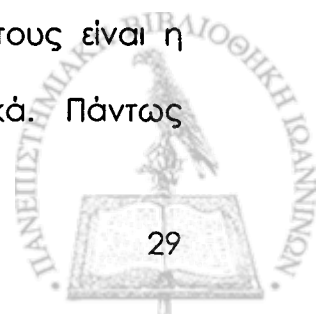
Μπορούσε έτσι να εργαστεί σε πράξεις – πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση – στα πολυώνυμα.

Παρόλο που ο όρος Άλγεβρα δημιουργήθηκε κατά τον Μεσαίωνα πολλές «αλγεβρικές» έννοιες είχαν κάνει την εμφάνισή τους πολύ νωρίτερα. Ο Ευκλείδης ασχολείται με δευτεροβάθμιες αλγεβρικές εξισώσεις όπου αναπαριστά τους αριθμούς με ευθύγραμμα τμήματα.

Οι αλγεβρικές ταυτότητες όπως η $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ παρουσιάζονται με γεωμετρική μορφή και οι πρωτοβάθμιες – γραμμικές – εξισώσεις λύνονται με γεωμετρικές κατασκευές. Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις ανάγονταν σε γεωμετρικό ισοδύναμο μιας από τις μορφές η οποία στη συνέχεια λυνόταν με την εφαρμογή των ήδη θεμελιωμένων θεωρημάτων εμβαδού. Αν και η μέθοδος δεν ήταν πολύ διαφορετική από εκείνη των Βαβυλωνίων, η «ελληνική» αυτή μέθοδος μπορούσε να οδηγήσει σε άρρητους αριθμούς. Η δευτεροβάθμια εξίσωση θεμελιώθηκε για τη λύση προβλημάτων και ειδικά εκείνων που εμπεριέχουν το πυθαγόρειο θεώρημα.

Αρκετούς αιώνες αργότερα στην Αλεξάνδρεια του 3^{ου} μ.Χ. αιώνα ο Διόφαντος με το βιβλίο του **Αριθμητικά** παρουσίασε μια όχι γεωμετρική Άλγεβρα στην οποία εντυπωσιάζει η απουσία γενικών μεθόδων και η επινόηση έξυπνων τεχνασμάτων για τη λύση 130 προβλημάτων. Το άλλο στοιχείο που χαρακτηρίζει το έργο του είναι τα πρώτα βήματα προς τον αλγεβρικό συμβολισμό. Δεν χρησιμοποιεί βέβαια γράμματα, χρησιμοποιεί όμως συντομογραφίες ενώ μέχρι την εποχή εκείνη η Άλγεβρα ήταν μόνο ρητορική. Το έργο του το ανακάλυψαν οι Ευρωπαίοι 1200 χρόνια μετά.

Στην Κίνα, τα «εννέα κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης» ήταν μία καταγραφή των εξελίξεων στα πρώιμα κινεζικά μαθηματικά. Ο κύριος όμως στόχος τους είναι η παρουσίαση γνώσεων αστρονομίας και όχι ειδικά τα μαθηματικά. Πάντως

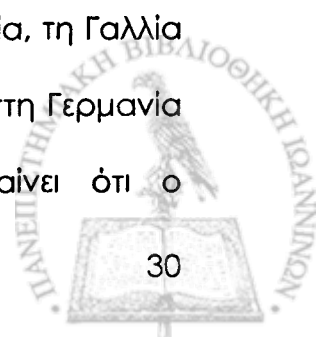


παρουσιάζονται συστήματα πρωτοβάθμιων εξισώσεων στο κεφάλαιο 8. Η μέθοδος λέγεται «fang cheng» και οδηγεί στη λύση γραμμικών εξισώσεων. Η πρόσθεση και η αφαίρεση η οποία συμπεριλαμβάνει και αρνητικούς αριθμούς μνημονεύεται στο ίδιο αυτό βιβλίο στο οποίο γίνεται λόγος και για την «εξαγωγή» της τετραγωνικής και της κυβικής ρίζας με μέθοδο η οποία θυμίζει τη σύγχρονη.

Κατά την Αναγέννηση οι θεμελιωτές της Άλγεβρας ήταν οι Άραβες, οι οποίοι ανέπτυξαν το σημερινό αριθμητικό σύστημα και εισήγαγαν νέους συμβολισμούς και κανόνες για τις πράξεις με τους άρρητους αριθμούς. Την περίοδο αυτή η ανάπτυξη του εμπορίου ήταν ταχύτερη και οι έμποροι είχαν ανάγκη από κάποια καινούρια βελτιωμένα μαθηματικά. Οι περισσότεροι μαθηματικοί στηρίζονταν αρχικά μόνο στα κείμενα των Αράβων αλλά αργότερα και στην Ελληνική «γεωμετρική» Άλγεβρα

Τον 14^ο και 15^ο αιώνα οι Ιταλοί δίδασκαν τους εμπόρους τις ινδοαραβικές τεχνικές για τη λύση προβλημάτων, και αναπτύσσοντας και προεκτείνοντας τις ισλαμικές μεθόδους - έγραφαν κείμενα τα οποία δημιούργησαν τη βάση για παραπέρα ανάπτυξη. Οι Ιταλοί εισήγαγαν τον ΑΛΓΕΒΡΙΚΟ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟ ο οποίος δεν υπήρχε στην ισλαμική Άλγεβρα. Ωστόσο τα πράγματα άλλαζαν πολύ αργά και ο σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός δεν καθιερώθηκε παρά μόνο κατά τον 17^ο αιώνα. Οι Ιταλοί ανέπτυξαν επίσης τη μελέτη της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ενώ αναζητούσαν και τεχνικές για τη λύση τρίτου και τετάρτου βαθμού. Ο Maestro Dardi da Pisa εργάστηκε στις εξισώσεις τετάρτου βαθμού τις περισσότερες από τις οποίες τις ανήγαγε σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Ο Piero della Francesca επιδόθηκε στη λύση εξισώσεων πέμπτου και έκτου βαθμού

Τον 16^ο αιώνα ιδιαίτερη άνθιση στα μαθηματικά παρατηρείται στην Αγγλία, τη Γαλλία και τη Γερμανία. Ο Nicolas Chuquet στη Γαλλία και ο Christoff Rudolff στη Γερμανία ανέπτυξαν συστήματα εκθετικού συμβολισμού. Rudolff επισημαίνει ότι ο

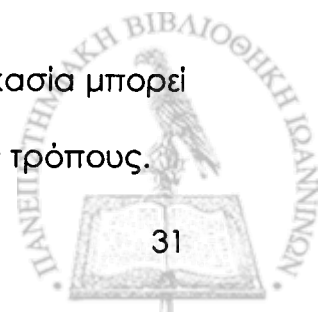


πολλαπλασιασμός των δυνάμεων αντιστοιχεί στην πρόσθεση των εκθετών. Ο Rudolff ήταν και ο πρώτος που θα εισάγει το σύμβολο $\sqrt{\quad}$ για την τετραγωνική ρίζα επειδή μοιάζει με το πεζό r , αρχικό της λέξης radix ριζικό. Στο βιβλίο του *Die Coss*, το 1526, ασχολείται με τη λύση αλγεβρικών εξισώσεων. Ερευνά τη λύση εξισώσεων τρίτου και μεγαλύτερου βαθμού αλλά τα καταφέρνει μόνο για εξισώσεις που μπορούν και ανάγονται σε δευτεροβάθμιες. Για τη λύση της δευτεροβάθμιας χρησιμοποιεί μια γενική μέθοδο που μοιάζει με τη σύγχρονη αλλά αδιαφορεί τις ρίζες που είναι αρνητικοί αριθμοί ή μηδέν. Στην Αγγλία παρουσιάζεται η εργασία του **Robert Recorde** ο οποίος έχει επηρεαστεί από τους Γερμανούς. Στο σημαντικότερο έργο του κάνει για πρώτη φορά την εμφάνισή του το σύμβολο «ίσον» (=) για την ισότητα δύο αλγεβρικών ποσοτήτων

Στην εποχή μας η λεγόμενη «κλασική» Άλγεβρα ασχολείται με «συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα», με πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς, με πολυώνυμα και με ειδικές ομάδες μετασχηματισμών. Η μοντέρνα Άλγεβρα αντικατέστησε τα μαθηματικά αυτά αντικείμενα με στοιχεία ενός συνόλου για τα οποία η σχέση μεταξύ τους αποσαφηνίζεται με αξιώματα. Η μοντέρνα αυτή Άλγεβρα μελετά σύνολα εφοδιασμένα με ένα ή περισσότερους τελεστές των οποίων οι ιδιότητες απορρέουν από αξιώματα. Η νέα Άλγεβρα χαρακτηρίζεται από υψηλό βαθμό αφαίρεσης, σαφήνεια και γενικότητα. Οι μαθηματικοί χώροι που σχετίζονται μαζί της εμπεριέχουν διανυσματικούς χώρους, θεωρία αριθμών και ομάδων.

3.3 Πως βοηθά η ιστορία των Μαθηματικών στην διδασκαλία της Άλγεβρας

Η προσαρμογή της ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία μπορεί να είναι ωφέλιμη για μαθητές, εκπαιδευτικούς, ερευνητές με διαφορετικούς τρόπους.



Οι μαθητές μπορούν να βιώσουν το μάθημα των Μαθηματικών σαν ένα σώμα γνώσεων που αλλάζει συνεχώς με την επίδραση των ανθρώπων . Επιπλέον η ιστορία των μαθηματικών ενισχύει τους δεσμούς ανάμεσα σε Μαθηματικά θέματα και σε πρακτικά θέματα από την καθημερινή ζωή γεγονός που εμβαθύνει την κατανόηση των μαθητών.

Παράλληλα η ιστορία των Μαθηματικών παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να κατανόησουν καλύτερα τι είναι τα Μαθηματικά, να αποκτήσουν δεξιότητες για την επίλυση προβλημάτων και να εξοικειωθούν με την αντίληψη των συμβόλων και των μεταβλητών. Όταν ο εκπαιδευτικός έχει κατανοήσει τις αλλαγές των Μαθηματικών κατά καιρούς αυτό επιδρά στον τρόπο που τα διδάσκει ο καθηγητής και στον τρόπο που τα κατανοούν οι μαθητές.

Τέλος η ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει τους ερευνητές να αναζητούν τρόπους και μεθόδους διδασκαλίας που ταιριάζουν σε μαθηματικά προβλήματα καθώς και τρόπους αξιολόγησης της δουλειάς των μαθητών.

4. ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΕΚΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

4.1 Στοιχεία μιας επιτυχημένης διδασκαλίας των Μαθηματικών

Η διδασκαλία των Μαθηματικών, για να είναι επιτυχημένη, θα πρέπει να περιλαμβάνει τα ακόλουθα στοιχεία:

- i. **Παρουσίαση από τον καθηγητή:** Η παρουσίαση της κάθε ενότητας και του κάθε θέματος από τον καθηγητή είναι απαραίτητο συστατικό της διδασκαλίας. Κι αυτό, γιατί τα βιβλία και γενικότερα τα συγγράμματα, που δίνονται στους μαθητές, περιέχουν μεν τις απαραίτητες για αυτούς γνώσεις, αλλά δε λειτουργούν ως πρότυπο ζωντανής σκέψης, όπως γίνεται με την περίπτωση των καθηγητών. Η ζωντανή παρουσίαση οποιουδήποτε αντικειμένου, εξάλλου, είναι γνωστό πως εντυπώνει τις νέες γνώσεις αποτελεσματικότερα στο μυαλό του παιδιού.
- ii. **Συζήτηση μεταξύ καθηγητή και μαθητών και μεταξύ μαθητών:** Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, οι νέες θεωρίες μάθησης δίνουν έμφαση στην ενεργητική συμμετοχή του παιδιού στη μαθησιακή διαδικασία. Το παλαιότερο σχήμα του πομπού-καθηγητή και δέκτη-μαθητή έχει αποδειχθεί μη αποτελεσματικό. Έτσι, ο διάλογος, η συνεργασία, η αντιπαράθεση και γενικότερα η ελευθερία έκφρασης των μαθητών είναι απαραίτητα στοιχεία της επιτυχούς διδασκαλίας.
- iii. **Πρακτική άσκηση:** Είναι γενικά αποδεκτό, πως η θεωρία από μόνη της δεν αρκεί για να μάθει κάποιος Μαθηματικά. Χρειάζεται πρακτική άσκηση, εφαρμογή, δηλαδή, της θεωρίας στην επίλυση προβληματικών καταστάσεων.

Το παιδί πρέπει να «κάνει» Μαθηματικά, προκειμένου να κατανοήσει το νέο αντικείμενο και να το διατηρήσει στη μνήμη του για πολύ περισσότερο χρόνο.

- iv. **Επίλυση προβλημάτων που προσομοιάζουν σε πραγματικές προβληματικές καταστάσεις:** Η δημιουργία των Μαθηματικών έγινε, όπως είδαμε και σε προηγούμενη ενότητα, για την αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινής ζωής, τα οποία είχαν να κάνουν με την κατανόηση της φύσης, την προσαρμογή του ανθρώπου στο γύρω περιβάλλον του, κ.ά.. Η διδασκαλία των Μαθηματικών, επομένως, θα πρέπει να παρουσιάζει προβλήματα μέσα από τη ζωή, ώστε να δίνει κίνητρο στους μαθητές να ασχοληθούν με αυτά και να μπορέσουν αργότερα να ανταπεξέλθουν σε αρκετές δυσκολίες.
- v. **Εξερευνητική εργασία:** Σύμφωνα με τις σύγχρονες θεωρίες μάθησης, η γνώση δε μεταδίδεται από έναν πομπό σε ένα δέκτη, αλλά κατασκευάζεται. Τα Μαθηματικά, εξάλλου, δεν αποτελούν έμπνευση κάποιου προσώπου, αλλά έχουν κατασκευαστεί. Αυτό σημαίνει πως το βασικό χαρακτηριστικό τους είναι η εξερεύνηση. Είναι εύλογο, λοιπόν, η εξερεύνηση να αποτελεί και το βασικό χαρακτηριστικό της διδασκαλίας. Η ερευνητική εργασία δίνει την ευκαιρία στο μαθητή να πάρει πρωτοβουλία και να αυτενεργήσει. Μόνο έτσι θα κατακτήσει για πάντα το μαθηματικό αντικείμενο.
- vi. **Παρακίνηση των μαθητών:** Είναι γενικά αποδεκτό, πως για να μάθει κάποιος Μαθηματικά, πρέπει πρώτα από όλα να το θέλει ο ίδιος και όχι να του επιβάλλεται. Αρχική, λοιπόν, αποστολή του καθηγητή είναι να κινητοποιήσει το ενδιαφέρον των μαθητών του. Για να γίνει κάτι τέτοιο, πρέπει ο ίδιος να αγαπάει τη δουλειά του και να έχει ενθουσιασμό για αυτό που διδάσκει. Μόνο έτσι θα μπορέσει τους μεταδώσει θετικές στάσεις για τα Μαθηματικά. Εκτός, όμως, από αυτά, ο καθηγητής μπορεί να κινητοποιήσει το ενδιαφέρον των παιδιών

μέσα από την παρουσίαση προβληματικών καταστάσεων, οι οποίες έχουν άμεση σχέση με τις εμπειρίες και γενικά το περιβάλλον τους. Έτσι, είναι δυνατό οι μαθητές να συμμετέχουν με δική τους πρωτοβουλία στη μαθησιακή διαδικασία.

4.2 Στόχοι της Μαθηματικής εκπαίδευσης στο Δημοτικό

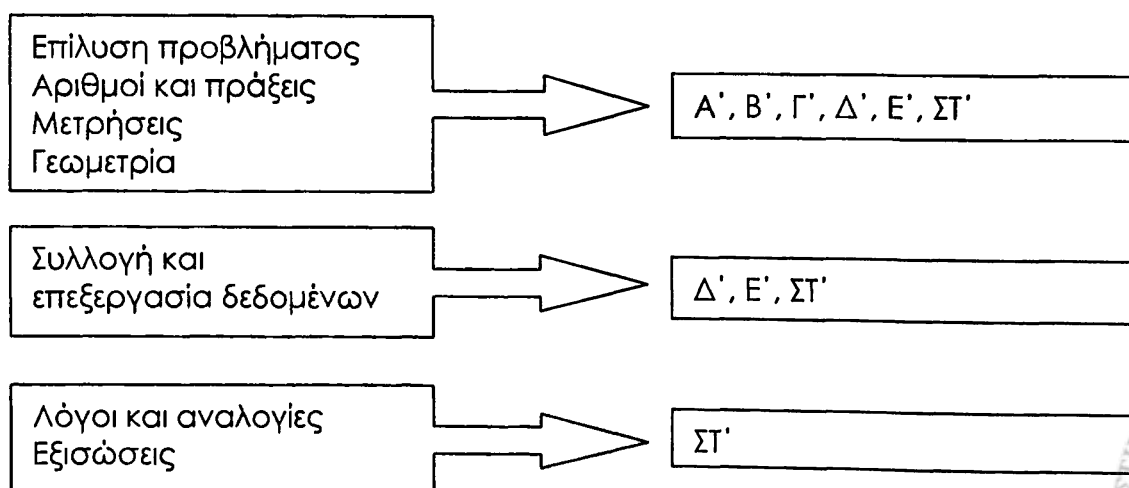
Βασικός σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης στο Δημοτικό σχολείο είναι η απόκτηση μαθηματικής σκέψης και η καλλιέργεια του μαθηματικού εγγραμματισμού, της ικανότητας δηλαδή του μαθητή να εφαρμόζει μαθηματικές γνώσεις, μεθόδους και διαδικασίες σε προβλήματα της καθημερινής ζωής. Η συμβολή των Μαθηματικών έγκειται στο γεγονός ότι, πέραν της χρησιμότητάς τους στην καθημερινή ζωή, οι διαδικασίες επαγωγικών, απαγωγικών και αναλυτικών συλλογισμών που καλλιεργεί η μαθηματική εκπαίδευση ασκούν το μαθητή στη μεθοδική σκέψη και τη λογική τεκμηρίωση, την ανάλυση, τη σύνθεση, την αφαίρεση, τη γενίκευση, την κριτική σκέψη και τη δημιουργική φαντασία, μέσα από την επινόηση εναλλακτικών στρατηγικών δράσης κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Ο ανωτέρω σκοπός εξειδικεύεται σε συγκεκριμένους στόχους. Έτσι, τα νέα Α.Π.Σ. των Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο έχουν στόχο:

- Την οικοδόμηση βασικών μαθηματικών εννοιών, γνώσεων και διαδικασιών
- Τη μάθηση του τρόπου επαναδόμησης και επαναδιατύπωσης ενός προβλήματος από μια εξωμαθηματική περιοχή, σε μαθηματικό πρόβλημα
- Τη χρήση μαθηματικών εργαλείων (π.χ. μαθηματικών μοντέλων και μεθόδων) για τη λύση προβλημάτων

- Μια συνολική θεώρηση της δομής των Μαθηματικών και των διασυνδέσεων μεταξύ διαφόρων περιοχών των Μαθηματικών και μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων γνωστικών αντικειμένων
- Την καλλιέργεια δεξιοτήτων που αφορούν τη συναισθηματική και ψυχοκινητική περιοχή της προσωπικότητας των παιδιών
- Την ανάπτυξη μεταγνωστικών ικανοτήτων εκ μέρους των μαθητών μέσα από τον έλεγχο και τη διαχείριση της μάθησής τους στο πλαίσιο επίτευξης των διαδικαστικών στόχων
- Την καλλιέργεια μιας θετικής στάσης για τα Μαθηματικά.

4.3 Διδακτικό Περιεχόμενο των νέων Βιβλίων του Δημοτικού Σχολείου

Οι άξονες περιεχομένου πάνω στους οποίους δομείται και αναπτύσσεται η διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό είναι επτά. Απ' αυτούς, η 'Επίλυση προβλήματος', οι 'Αριθμοί και πράξεις', οι 'Μετρήσεις' και η 'Γεωμετρία' εισάγονται από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, η 'Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων' εισάγεται στην Δ' τάξη, ενώ οι 'Λόγοι και αναλογίες' και οι 'Εξισώσεις' εισάγονται στην ΣΤ' τάξη.



Παράλληλα εισάγονται και κάποια καινούργια στοιχεία, όπως:

- Η έννοια του μοτίβου, που βοηθά τους μαθητές στην ανακάλυψη μαθηματικών σχέσεων με ένα παιγνιώδη τρόπο, προσιτό στα παιδιά
- Γίνεται μια πρώτη προσέγγιση των δεκαδικών, διαισθητική αρχικά, (ως εικόνα κυρίως) από τους μαθητές στην Τρίτη τάξη – αντί της Τετάρτης – συμβάλλοντας έτσι στην κατανόηση και τη χρήση του ευρώ (νέας νομισματικής μονάδας)
- Η νέα προσέγγιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών απομακρύνεται από τη θεωρία συνόλων και την εκμάθηση αλγορίθμων, και προσανατολίζεται στην κατανόηση και την κατασκευή λογικών συλλογισμών.

Όσον αφορά την ανάπτυξη του περιεχομένου στα νέα βιβλία, καταβλήθηκε προσπάθεια περιορισμού της ύλης μέσω ορθολογικότερης κατανομής, της αποφυγής των επικαλύψεων και των άσκοπων επαναλήψεων, αλλά και της διαθεματικότητας.

Παράλληλα, διασφαλίσθηκαν η συνοχή και η συνέχεια της ύλης από τάξη σε τάξη και κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.

4.4 Στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης στο Γυμνάσιο

Κατά τη μετάβαση των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο ο στόχος των σχολικών εγχειριδίων επικεντρώνεται στα εξής (ΔΕΠΠΣ):

α) να εμπεδωθεί καλύτερα και να συμπληρωθεί η ύλη που διδάχθηκε στο Δημοτικό σχολείο, ώστε οι μαθητές να εφοδιαστούν με όλες τις μαθηματικές γνώσεις που είναι απαραίτητες για τη ζωή και την περαιτέρω εκπαίδευση,

β) να εμπλουτιστούν οι εμπειρίες τους με εφαρμογές από την καθημερινή ζωή, την τεχνολογία και τις άλλες εφαρμοσμένες επιστήμες, ώστε να αναπτυχθεί μια θετική στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά,

γ) να εισαχθούν οι μαθητές στην αποδεικτική διαδικασία και να συνειδητοποιήσουν ότι αυτό αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για την επαλήθευση γενικών νόμων.

4.5 Διδακτικό περιεχόμενο των νέων βιβλίων του Γυμνασίου

Τα νέα βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου γράφτηκαν με βάση το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ), τα περιεχόμενα του οποίου διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες: 1. Άξονες γνωστικού περιεχομένου, 2. Γενικοί στόχοι (γνώσεις, δεξιότητες, στάσεις και αξίες), 3. Ενδεικτικές θεμελιώδεις έννοιες διαθεματικής προσέγγισης.

Τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα σε σύγκριση με τα παλιά παρουσιάζουν καινοτομίες που εστιάζονται στους όρους «διαθεματικότητα» και «ενεργητική προσέγγιση της γνώσης». Με τον όρο «διαθεματικότητα» εννοείται η κατάλληλη οργάνωση της διδακτέας ύλης κάθε γνωστικού αντικείμενου με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται η επεξεργασία θεμάτων από πολλές οπτικές γωνίες. Αυτή η προσέγγιση, σύμφωνα με τους συντάκτες των νέων Αναλυτικών Προγραμμάτων, δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να συγκροτήσει ένα ενιαίο σύνολο γνώσεων και δεξιοτήτων που του επιτρέπει να διαμορφώνει προσωπική άποψη για θέματα των επιστημών τα οποία σχετίζονται μεταξύ τους, καθώς και με ζητήματα της καθημερινής ζωής.

Με τον όρο «ενεργητική προσέγγιση της γνώσης» εννοείται μια μέθοδος διδασκαλίας που απαιτεί κυρίως τη δραστηριοποίηση του μαθητή. Αυτή δίνει έμφαση κυρίως στη

χρήση δραστηριοτήτων διερεύνησης και ανακάλυψης που έχουν στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές να σκέπτονται, να χειρίζονται πολύπλοκες έννοιες, να ερευνούν και να φτάνουν οι ίδιοι στη γνώση.

Όπως αναφέρεται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ) «Αναφορικά με τη διδακτική προσέγγιση του βιβλίου θα πρέπει να καλλιεργεί την ανάπτυξη ερευνητικού πνεύματος στο μαθητή και να υιοθετεί όπου και όσο είναι δυνατόν το ανακαλυπτικό μοντέλο μάθησης. Θα πρέπει επίσης να είναι ανοικτό σε διαφορετικούς τρόπους χρήσης ώστε να ενθαρρύνει τον εκπαιδευτικό να αναπροσαρμόζει τη διδασκαλία του ανάλογα με τις ανάγκες και τις ιδιαιτερότητες της τάξης του».

Σε ότι αφορά τα νέα διδακτικά βιβλία, υπάρχει σε αντίθεση με το παρελθόν ξεχωριστό βιβλίο για τον εκπαιδευτικό ενώ παράλληλα η ύλη διακρίνεται για πρώτη φορά στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο σε Αριθμητική - Άλγεβρα από τη μια πλευρά και Γεωμετρία από την άλλη, τα οποία διδάσκονται παράλληλα.

Οι διαφορές που εντοπίζονται στα βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου αναφέρονται συνοπτικά στους παρακάτω πίνακες:

Α' Γυμνασίου	
ΝΕΟ ΒΙΒΛΙΟ	ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΒΙΒΛΙΟ
ΑΛΓΕΒΡΑ <ul style="list-style-type: none">• Οι φυσικοί αριθμοί• Τα κλάσματα• Δεκαδικοί αριθμοί• Εξισώσεις και προβλήματα• Ποσοστά• Ανάλογα ποσά – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά• Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί	<ul style="list-style-type: none">• Οι φυσικοί και δεκαδικοί αριθμοί• Μετρήσεις μεγεθών• Τα κλάσματα• Ανάλογα ποσά• Βασικές γεωμετρικές έννοιες• Οι γωνίες• Ευθύγραμμα σχήματα

<p>ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ</p> <ul style="list-style-type: none"> • Βασικές γεωμετρικές έννοιες • Συμμετρία • Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια 	<ul style="list-style-type: none"> • Οι ρητοί αριθμοί
Β' Γυμνασίου	
ΝΕΟ ΒΙΒΛΙΟ	ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΒΙΒΛΙΟ
<p>ΜΕΡΟΣ Α'</p> <ul style="list-style-type: none"> • Εξισώσεις – Ανισώσεις • Πραγματικοί αριθμοί • Η έννοια της συνάρτησης • Περιγραφική στατιστική <p>ΜΕΡΟΣ Β'</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα 2. Τριγωνομετρία – Διανύσματα 3. Μέτρηση κύκλου 4. Γεωμετρικά στερεά – Μέτρηση στερεών 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Οι ρητοί αριθμοί 2. Εξισώσεις – Ανισώσεις 3. Οι πραγματικοί αριθμοί 4. Τριγωνομετρία 5. Συναρτήσεις 6. Στατιστική 7. Συμμετρικά σχήματα 8. Μέτρηση κύκλου 9. Μέτρηση στερεών

Γ' Γυμνασίου	
ΝΕΟ ΒΙΒΛΙΟ	ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΒΙΒΛΙΟ
<p>ΑΛΓΕΒΡΑ</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Αλγεβρικές παραστάσεις 2. Εξισώσεις – Ανισώσεις 3. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων 4. Συναρτήσεις 5. Πιθανότητες 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Οι πραγματικοί αριθμοί 2. Αλγεβρικές παραστάσεις 3. Εξισώσεις 4. Συναρτήσεις 5. Στατιστική 6. Ισότητα – Ομοιότητα σχημάτων 7. Τριγωνομετρία

<p>ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ</p> <p>1. Γεωμετρία</p> <p>2. Τριγωνομετρία</p>	<p>8. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων και ανισώσεων</p> <p>9. Διανύσματα</p> <p>10. Η σφαίρα</p>
--	--

Τα προβλήματα διδασκαλίας που αναμένεται να προκύψουν στην πράξη από τα νέα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου θα οφείλονται στην αλληλεπίδραση μιας σειράς παραμέτρων, όπως:

- Η ανάγκη εφαρμογής των καινοτομιών που προαναφέρθηκαν.
- Η διατήρηση του όγκου της ύλης (και συμπίεσης σε μικρότερο αριθμό σελίδων) χωρίς αύξηση των ωρών διδασκαλίας του μαθήματος.
- Η μεταφορά της ύλης ορισμένων κεφαλαίων σε μικρότερες τάξεις με μείωση των αντίστοιχων ωρών διδασκαλίας.
- Η μεταφορά ύλης από τα Μαθηματικά του Λυκείου σε ορισμένα κεφάλαια, ιδιαίτερα στην Άλγεβρα της Γ' Γυμνασίου.

Τα προβλήματα διδασκαλίας που αναμένεται να προκύψουν στην πράξη από τα νέα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου θα οφείλονται στην αλληλεπίδραση μιας σειράς παραμέτρων, όπως:

- Η ανάγκη εφαρμογής των καινοτομιών που προαναφέρθηκαν.
- Η διατήρηση του όγκου της ύλης (και συμπίεσης σε μικρότερο αριθμό σελίδων) χωρίς αύξηση των ωρών διδασκαλίας του μαθήματος.
- Η μεταφορά της ύλης ορισμένων κεφαλαίων σε μικρότερες τάξεις με μείωση των αντίστοιχων ωρών διδασκαλίας.

- Η μεταφορά ύλης από τα Μαθηματικά του Λυκείου σε ορισμένα κεφάλαια, ιδιαίτερα στην Άλγεβρα της Γ' Γυμνασίου.

4.6 Σύγχρονες προσεγγίσεις για τη διδασκαλία των Μαθηματικών

4.6.1 Εποικοδομισμός και Μαθηματικά

Ο εποικοδομισμός εμφανίστηκε σαν μια θεωρία της επιστήμης η οποία επεξεργάζεται και δίνει απαντήσεις στο ερώτημα πως μπορούμε να φτάσουμε στη βέβαιη γνώση. Έτσι εντοπίζονται κάποιες βασικές θέσεις του εποικοδομισμού η κυριότερη εκ των οποίων είναι ότι ο άνθρωπος κατασκευάζει τη γνώση και δεν τη δέχεται παθητικά. Σε ότι αφορά τα Μαθηματικά η θεωρία του εποικοδομισμού περιλαμβάνει τρεις ακόμα ιδέες:

- Οι μαθητές επινοούν προσωπικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων. Οι μέθοδοι αυτές βασίζονται στις προηγούμενες μαθηματικές τους γνώσεις.
- Η μάθηση συντελείται μέσα από την επίλυση Μαθηματικών προβλημάτων. Οι μαθητές ανάλογα με τη μαθηματική τους ωριμότητα και το στάδιο της νοητικής τους ανάπτυξης προσπαθούν να επιλύσουν τα προβλήματα που τους προσελκύουν ενεργοποιώντας έτσι τη διαδικασία της μάθησης.
- Ο ρόλος της κοινωνικής ομάδας για τη μάθηση είναι καθοριστικός. Η διαφορά των ιδεών και των απόψεων των μελών μιας ομάδας προκαλεί αστάθεια με αποτέλεσμα να γίνεται αναδιοργάνωση της προηγούμενης γνώσης και κατάκτηση της νέας μέσα σε κλίμα επικοινωνίας και συνεργασίας.

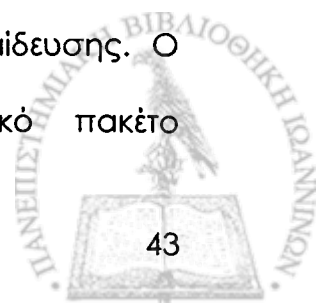
Πιο αναλυτικά, η έρευνα έχει δείξει ότι για να κατακτήσει ο μαθητής τη νέα γνώση πρέπει να την ενσωματώσει στην προηγούμενη γνώση. Για να αντικαταστήσει ή να συμπληρώσει τα γνωστικά του σχήματα ο μαθητής πρέπει να διαπιστώσει την

ανεπάρκειά του σε γνωστικά σχήματα για την επίλυση ενός προβλήματος που καλείται να αντιμετωπίσει. Έτσι, ο έλεγχος της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών είναι το πρώτο βήμα κάθε διδακτικής ενότητας, δραστηριότητα που αναδεικνύει και τυχόν λανθασμένες πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τη διδασκόμενα νοητικά σχήματα. Στα πλαίσια αυτά, η διαχείριση του λάθους είναι καθοριστικής σημασίας στην οικοδόμηση της νέας γνώσης, καθώς προϋπάρχουσες λανθασμένες πεποιθήσεις εμποδίζουν τη μάθηση.

Η μάθηση, σύμφωνα με τις νέες παιδαγωγικές αντιλήψεις, είναι μια κατασκευαστική δραστηριότητα, όπου ο μαθητής έχει ένα δυναμικό ρόλο στην κατάκτηση της γνώσης του, σε αντίθεση με την παθητική αντίληψη όπου η γνώση μεταβιβάζεται στο μαθητή από το δάσκαλο. Έχει αποδειχθεί ότι ο μαθητής δραστηριοποιείται περισσότερο όταν οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες είναι δανεισμένες από την καθημερινότητά του. Η αντίληψη που έχει υιοθετηθεί στα νέα διδακτικά εγχειρίδια απαιτεί μια βιωματική προσέγγιση της γνώσης κατά την οποία ο μαθητής ανακαλύπτει τη γνώση μέσα από διαδικασίες περιπλάνησης κατά τις οποίες κατανοεί το φυσικό περιβάλλον με την παρατήρηση, περιγραφή και μέτρηση, κατανόηση του κόσμου των αριθμών και των μαθηματικών πράξεων, και αναζήτηση λύσεων σε προβλήματα της καθημερινής του ζωής. Για μια αποδοτική διδασκαλία τα παιδιά συμμετέχουν ενεργά στη μάθησή τους.

4.6.2 Νέες Τεχνολογίες στα Μαθηματικά

Η ανάπτυξη της τεχνολογίας έχει διευρύνει τους τομείς εφαρμογής των μαθηματικών, σε περιοχές όπως Οικονομία, Βιολογία, Ιατρική, Κοινωνιολογία, κ.α. Γι' αυτό, σύμφωνα με το νέο πρόγραμμα σπουδών, η εξοικείωση των μαθητών με τους υπολογιστές αποτελεί ένα από τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ο υπολογιστής συμπληρώνει τη διδασκαλία, αφού κάθε διδακτικό πακέτο



συμπληρώνεται από το ανάλογο λογισμικό. Παρόλα αυτά στο χώρο της παιδείας, η χρήση του υπολογιστή αντιμετωπίζεται με αρκετό σκεπτικισμό και επιφυλακτικότητα. Αυτό οφείλεται, κυρίως, στο γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν πειστεί για τις δυνατότητες της νέας τεχνολογίας.

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές έχουν εισαχθεί από καιρό στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση διαφόρων χωρών του κόσμου (κυρίως της Δύσης και της Άμερικής). Αρχικά, χρησιμοποιήθηκαν ως μέσο διδασκαλίας του μαθήματος της Πληροφορικής και ως απαραίτητο εργαλείο για τη διοίκηση των σχολείων. Με την πάροδο του χρόνου, όμως, οι διάφορες έρευνες και η εμπειρία έδειξαν πως οι υπολογιστές μπορούν κάλλιστα να χρησιμοποιηθούν στη διδασκαλία των Μαθηματικών αφού παρέχουν πολλές δυνατότητες όπως:

- i. Προσαρμόζονται στους προσωπικούς ρυθμούς μάθησης του κάθε παιδιού, δίνοντάς του, έτσι, την ευκαιρία να κατανοήσει καλύτερα κάποιες έννοιες και να καλύψει τυχόν κενά που έχει.
- ii. Προσφέρουν αμοιβαία επικοινωνία μαθητή- μηχανής. Ο μαθητής καλείται να σκεφτεί και να απαντήσει και ο υπολογιστής καλείται να τον επιβραβεύσει ή να το διορθώσει και να του υποδείξει την ορθή απάντηση.
- iii. Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές παρέχουν, επίσης, τη δυνατότητα στους μαθητές να δημιουργούν γραφικές παραστάσεις και να τις μετατοπίζουν πάνω στην οθόνη διατυπώνοντας και ελέγχοντας, έτσι, τις διάφορες υποθέσεις πολύ ευκολότερα.
- iv. Μετασχηματίζουν τους αριθμούς και τις διάφορες μαθηματικές σχέσεις, από αφηρημένα και ψυχρά σύμβολα, σε εικόνα, ήχο, κίνηση, χρώμα.



- v. Βοηθούν στη μελέτη της Γεωμετρίας και των Συναρτήσεων, θέματα των Μαθηματικών, τα οποία απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή και ακρίβεια και στα οποία ο σωστός σχεδιασμός και η εποπτεία παίζουν πολύ μεγάλο ρόλο.
- vi. Προσφέρονται για μαθητές, οι οποίοι είναι ιδιαίτερα δραστήριοι μέσα στην τάξη, δεν παρακολουθούν τον καθηγητή, δυσκολεύονται στο διάβασμα και γενικά δεν ανταποκρίνονται στο σύνηθες μοντέλο διδασκαλίας.
- vii. Διαθέτουν αντικειμενικότητα, συνέπεια, προσαρμοστικότητα, υπομονή, πληρότητα στην παρουσίαση του αντικειμένου και ευελιξία.
- viii. Παρέχουν τη δυνατότητα του πειραματισμού και της δοκιμής, βοηθώντας, έτσι το μαθητή να μάθει από τα ίδια του λάθη.
- ix. Καταρρίπτουν το μύθο της αυθεντίας του καθηγητή και δίνουν τον έλεγχο της όλης διαδικασίας στα παιδιά.
- x. Δίνουν τη δυνατότητα ανάλυσης, σύνθεσης και αξιολόγησης.
- xi. Συμβάλλουν στη δημιουργία θετικών στάσεων των μαθητών για τα Μαθηματικά.

Παρά τις παραπάνω δυνατότητες, όμως, που παρέχουν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές στην εκπαίδευση, παρουσιάζουν και αρκετά μειονεκτήματα. Αυτά είναι τα ακόλουθα:

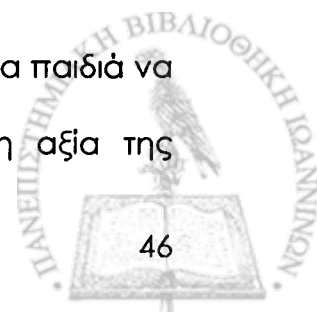
- i. Η χρήση Η/Υ περιορίζει τη μάθηση σε μηχανικά βήματα και την αποξενώνει από τον ανθρώπινο παράγοντα.
- ii. Οι υπολογιστές απαιτούν την ανάλογη υποδομή, η οποία είναι αρκετά δαπανηρή, ενώ και η αγορά τους έχει υψηλό κόστος.

- iii. Απαιτούν γνώσεις χρήσης Η/Υ.
- iv. Προϋποθέτουν αρκετά καλή γνώση Αγγλικών.
- v. Απαιτούν διαρκή ενημέρωση σχετικά με τις νέες κυκλοφορίες στην αγορά εκπαιδευτικού λογισμικού και τη βέλτιστη επιλογή αυτών.
- vi. Δεν μπορούν να σκέφτονται, να κάνουν λογικές κρίσεις, να καταλαβαίνουν τη γλώσσα, τις ικανότητες και την εμπειρία που έχει ο κάθε μαθητής.

Αν λάβουμε υπόψη τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα από τη χρήση των Η/Υ στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών, θα διαπιστώσουμε πως το όφελος για την εκπαίδευση από μια τέτοια δραστηριότητα είναι πολύ μεγάλο. Ο Η/Υ αποτελεί ένα πολύ αξιόλογο διδακτικό μέσο. Προσαρμόζεται στις ιδιαιτερότητες του κάθε μαθητή, παρακινεί τα παιδιά να ανακαλύψουν τη γνώση, συμβάλλει άμεσα στην ταχύτερη επίλυση των προβλημάτων και κάνει το μάθημα των Μαθηματικών πιο διασκεδαστικό, πιο ευχάριστο και πιο ενδιαφέρον. Η χρήση του θα πρέπει, όμως, να γίνεται μέσα σε λογικά πλαίσια, τα οποία δεν θα επιτρέπουν την αλλοίωση του παιδαγωγικού σκοπού της εκπαίδευσης. Ο Η/Υ δεν πρέπει με κανέναν τρόπο να αντικαταστήσει τον καθηγητή. Ο Η/Υ αποτελεί απλά ένα εργαλείο, ένα μέσο που μπορεί να βελτιώσει τη μαθησιακή διαδικασία. Ο καθηγητής είναι το μόνο πρόσωπο, που μπορεί να κάνει αυτή τη διαδικασία αποτελεσματική και πλήρη, όχι μόνο από γνώσεις και εμπειρίες, αλλά και από συναισθήματα και ψυχική ολοκλήρωση.

4.6.3 Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία

Η ομαδική εργασία αποτελεί μια αποτελεσματική τακτική για να ωθηθούν τα παιδιά να συμμετάσχουν ενεργά στα Μαθηματικά, χωρίς να παραγνωρίζεται η αξία της



ατομικής ή της εταιρικής εργασίας. Στο πλαίσιο της ομάδας τα παιδιά θα μπορέσουν να αναπτύξουν τις διαπροσωπικές δεξιότητες της συνεργασίας, της επικοινωνίας, της υπευθυνότητας ενώ μειώνεται το άγχος της επίδοσής τους. Πέρα όμως από τα οφέλη που έχει στην ανάπτυξη των κοινωνικών δεξιοτήτων των μαθητών, η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία δρα ενισχυτικά στη διαδικασία της μάθησης αφού προσφέρει ευκαιρίες για ανταλλαγή ιδεών, για πολυτροπική προσέγγιση του διδασκόμενου αντικείμενου, για διατύπωση απόψεων, για αναστοχασμό των αντιλήψεών τους, για υπεράσπιση και αντίκρουση ισχυρισμών.

4.6.4 Η διαθεματικότητα

Διαθεματικότητα είναι ο τρόπος οργάνωσης του Αναλυτικού Προγράμματος που καταργεί ως πλαίσια επιλογής και οργάνωσης της σχολικής γνώσης τα διακριτά μαθήματα και αντιμετωπίζει τη γνώση ως ενιαία ολότητα, την οποία προσεγγίζει μέσα από τη συλλογική διερεύνηση θεμάτων και προβληματικών καταστάσεων. Τα νέα αναλυτικά προγράμματα χαρακτηρίζονται διαθεματικά, αν και ο σωστός χαρακτηρισμός θα ήταν διεπιστημονικά, αφού διατηρούν τα διακριτά διδακτικά αντικείμενα. Η διαθεματικότητα, ως νέο στοιχείο υλοποιείται με την ανάπτυξη σχεδίων εργασίας, με την εφαρμογή διαθεματικών δραστηριοτήτων και με την αξιοποίηση των διαθεματικών εννοιών. Η Διαθεματικότητα δεν είναι μέθοδος διδασκαλίας, αλλά τρόπος για να οργανώσει ο δάσκαλος τα υλικά και τα αντικείμενα μάθησης, ώστε να τα επεξεργαστεί κάτω από την ομπρέλα της διαθεματικότητας με τρόπο ενιαίο και συνολικό, αποφεύγοντας τον κατακερματισμό τους σε πολλά μικρά αντικείμενα. Άλλωστε, ο κατακερματισμός της γνώσης στα διάφορα μαθήματα δεν είναι σωστός, σύμφωνα με τα σημερινά δεδομένα.

4.6.5 Αξιοποίηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων

Λέγοντας αναπαράσταση εννοούμε τον τρόπο με τον οποίο ο εξωτερικός κόσμος των αντικειμένων και των γεγονότων δημιουργείται στον ανθρώπινο νου. Σύμφωνα με τον Bruner, η διδακτική πράξη οφείλει να διέρχεται από τρεις διαφορετικές μορφές αναπαράστασης: πραξιακή – εικονιστική – συμβολική. Η **πραξιακή αναπαράσταση** μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος πρακτικής νοημοσύνης, στο οποίο τον κύριο ρόλο διαδραματίζει η αναπαράσταση σε επίπεδο σωματικό. Η **εικονιστική αναπαράσταση** χρησιμοποιείται όταν χρησιμοποιούμε τη φαντασία μας για να αναπαραστήσουμε κάτι. Τέλος η **συμβολική αναπαράσταση** χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να αναπαραστήσουμε ιδέες και αφαιρέσεις. Τα σύμβολα της λογικής και των μαθηματικών είναι παραδείγματα συμβολικών συστημάτων. Έτσι, παρέχοντας τη δυνατότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων των μαθηματικών ιδεών (πραγματικές καταστάσεις, εικόνες, προφορική γλώσσα, γραπτός συμβολισμός) υποβοηθούμε την κατανόηση των μαθηματικών ιδεών.

5. ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΕΚΜΑΘΗΣΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

5.1 Μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα

Κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο γίνεται και η μετάβαση από την απλή Αριθμητική στην Άλγεβρα. Οι δυσκολίες που συναντώνται κατά την εκμάθηση των πρώτων στοιχείων της Άλγεβρας οφείλονται σε κάποιες διαφοροποιήσεις των εννοιών αυτών σχετικές με τους στόχους και τη χρήση τους. Μερικές διαφορές μεταξύ Αριθμητικής και Άλγεβρας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα (Barbara Ann 2002):

Αριθμητική	Άλγεβρα
Γενικός στόχος: να βρεις μια αριθμητική λύση	Γενικός στόχος: να γενικεύσεις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων
Γενίκευση συγκεκριμένων Μαθηματικών καταστάσεων	Γενίκευση σχέσεων μεταξύ αριθμών
Πίνακας ως υπολογιστικό εργαλείο	Πίνακας ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων
Χειρισμός αριθμών	Χειρισμός μεταβλητών
Γράμματα ως ταμπέλες σχημάτων	Γράμματα ως μεταβλητές ή άγνωστοι
Το «(=)» υποδηλώνει αποτέλεσμα	Το «(=)» υποδηλώνει ισότητα
Πράξεις με γνωστές ποσότητες	Πράξεις με άγνωστους
Οι άγνωστοι ως σημείο κατάληξης	Οι άγνωστοι ως σημείο εκκίνησης
Γραμμικές εξισώσεις με έναν άγνωστο	Συστήματα εξισώσεων με πολλούς αγνώστους

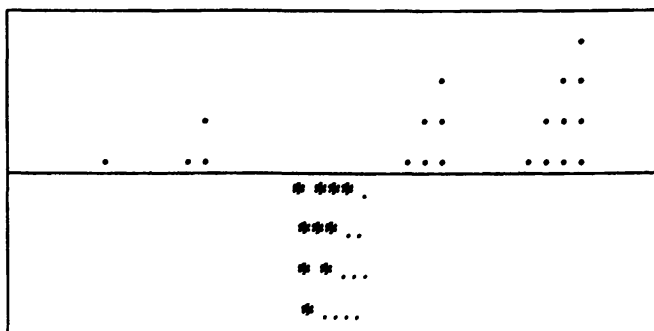
Μερικές δεκαετίες πριν ο Freudental παρατήρησε ότι οι διαφορές μεταξύ Αριθμητικής και Άλγεβρας μπορούν να δημιουργήσουν δυσκολίες στην κατανόηση των

εισαγωγικών στοιχείων της Άλγεβρας. Συμπέρανε ότι η δυσκολία της Άλγεβρικής γλώσσας συχνά υποτιμάται και ισχυρίστηκε ότι: «Η σύνταξη της αποτελείται από τεράστιο αριθμό κανόνων». Αναφέρει επίσης μεταξύ άλλων ότι: «Στην Αριθμητική $3+4$ είναι ένα πρόβλημα. Πρέπει να μεταφραστεί ως: πρόσθεσε τον αριθμό 3 στο 4. Στην Αριθμητική $3+4$ σημαίνει 7. Στην Άλγεβρα παραστάσεις της μορφής $a+b$ δεν μπορούν να μεταφραστούν σαν πρόβλημα.»

Η επίλυση εξισώσεων στην Αριθμητική κατευθύνεται προς την εύρεση αριθμητικών λύσεων σε ειδικές καταστάσεις. Το αντικείμενο της Άλγεβρας από την άλλη πλευρά είναι να ανακαλύπτει και να εκφράζει τη γενικότητα της μεθόδου.

5.2 Η Άλγεβρα από τη σκοπιά της Γεωμετρίας

Η γεωμετρία βοηθά πολλές φορές στην αντιμετώπιση αλγεβρικών προβλημάτων με πιο κατανοητό τρόπο. Ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Barbara Ann 2002).



Προσθέτοντας τις κουκίδες στην πάνω γραμμή παίρνουμε σταδιακά τα αποτελέσματα 1, 3, 6 και 10. Το ερώτημα που μπορεί να δημιουργηθεί είναι πως μπορεί να δημιουργηθεί ο τύπος για το άθροισμα N κουκίδων. Από την δεύτερη γραμμή παρατηρείται ότι $N = \frac{1}{2} * 5 * 4 = 10$ για το τριγωνικό σχήμα με τις τέσσερις

κουκίδες στην βάση. Ανάλογα διαπιστώνεται ότι για n κουκίδες βάσης το αντίστοιχο άθροισμα είναι $N = \frac{1}{2} n(n+1)$. Όπως φαίνεται από αυτό το παράδειγμα, οι γεωμετρικές φιγούρες μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να γενικεύσουν σχέσεις με αριθμούς. Έτσι διαπιστώνεται ότι αυτό το είδος δραστηριοτήτων ταιριάζει σε αριθμητικές – γεωμετρικές προσεγγίσεις της Άλγεβρας.

Σύμφωνα με έρευνες που έχουν γίνει, τα γεωμετρικά μοντέλα μπορεί να μην ταιριάζουν ιδιαίτερα στην επίλυση εξισώσεων με έναν άγνωστο. Το μειονέκτημα των γεωμετρικών μοντέλων είναι ότι κάποιες αλγεβρικές εκφράσεις δεν έχουν γεωμετρικές αναπαραστάσεις κι έτσι δημιουργούνται περιορισμοί.

Ένας επιπλέον λόγος για να μην χρησιμοποιούνται τα γεωμετρικά μοντέλα στην επίλυση εξισώσεων έγκειται στην ιστορία της Άλγεβρας. Μέχρι τον 16^ο αιώνα η Άλγεβρα υπήρχε ως μια εξελιγμένη μορφή επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων. Με εξαίρεση τον Διόφαντο και κάποιους άλλους τα αλγεβρικά προβλήματα επιλύονταν με φυσική γλώσσα. Ο συσχετισμός Άλγεβρας και Γεωμετρίας ήρθε με τον Descartes τον 17^ο αιώνα αλλά αναφερόταν σε προβλήματα πολύ υψηλότερου επιπέδου και όχι στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων.

5.3 Δυσκολίες στην εκμάθηση της Άλγεβρας

Όπως διαπιστώνουν οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί από την εμπειρία τους, οι μαθητές συναντούν μεγάλες δυσκολίες στην κατανόηση των αλγεβρικών εννοιών ιδιαίτερα στην πρώτη τους επαφή με την Άλγεβρα η οποία γίνεται στις πρώτες γυμνασιακές τάξεις. Οι δυσκολίες που εμποδίζουν τη βαθιά κατανόηση της Άλγεβρας πηγάζουν κυρίως από τις διαφορές της με την απλή αριθμητική και την εισαγωγή νέων συμβόλων. Οι μικροί μαθητές του Γυμνασίου, λόγω των παρανοήσεων ή της αργής



γνωστικής τους ανάπτυξης, μπορεί να μαθαίνουν κάποιους κανόνες αλλά συνήθως αποτυγχάνουν να συνδέσουν την Άλγεβρα με τις ευρύτερες μαθηματικές της εφαρμογές. (Τουμάσης 2000)

Η Άλγεβρα στο Γυμνάσιο ξεκινά με τις έννοιες των μεταβλητών, των αλγεβρικών παραστάσεων, πράξεων μεταξύ αλγεβρικών παραστάσεων, εξισώσεων με έναν άγνωστο, επίλυση εξισώσεων. Οι δυσκολίες κατανόησης αυτών των εννοιών επικεντρώνονται:

α) στην έννοια του « \equiv »,

β) στην κατανόηση των «γραμμάτων»,

γ) στην έννοια της αλγεβρικής παράστασης,

δ) στην έννοια της εξίσωσης,

ε) στην έννοια της Συνάρτησης και

στ) στην αφομοίωση κανόνων διαφορετικών από εκείνους που διδάσκονται στο Δημοτικό.

5.4 Τα λάθη των μαθητών στην Άλγεβρα

5.4.1 Κατηγορίες λαθών

Τα λάθη των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία μπορούν να διακριθούν σε κάποιες κατηγορίες ανάλογα με τις αιτίες που τα προκαλούν και τον τρόπο σκέψης στον οποίο αναφέρονται (Ράππη 2002). Σε ότι αφορά τον τρόπο σκέψης, τα λάθη μπορεί να χαρακτηρίζουν :



1. Την πορεία της σκέψης
2. Τα αποτελέσματα της σκέψης, που πολλές φορές δεν είναι αυτά που ο εκπαιδευτικός έχει προβλέψει
3. Τα καθολικά λάθη, που αφορούν την παραποίηση του συνολικού νοήματος μιας πρότασης
4. Τα μερικά λάθη, που αφορούν παρανόηση κάποιων στοιχείων της πρότασης

Όσον αφορά την αιτία προέλευσης των λαθών, αυτά διακρίνονται σε:

1. Λάθη διδακτικής προέλευσης, που αφορούν τον τρόπο διδασκαλίας που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός
2. Λάθη ψυχογενετικής προέλευσης, που εξαρτώνται από τον περιορισμό του αντικειμένου σε μια δοσμένη στιγμή της ανάπτυξής του
3. Λάθη ψυχολογικής προέλευσης, που παρουσιάζονται όταν η μάθηση έρχεται σε αντίθεση με τις αναπαραστάσεις που έχει ο μαθητής.

5.4.2 Λάθη στην Άλγεβρα

Στην κατανόηση της Άλγεβρας οι έννοιες της μεταβλητής και της εξίσωσης παίζουν καθοριστικό ρόλο. Η αποτυχία των μαθητών στο μάθημα αυτό οφείλεται συχνά σε παρανοήσεις γύρω από τις έννοιες αυτές. Μερικά παραδείγματα τέτοιων παρανοήσεων αναφέρονται παρακάτω (Τουμάσης 2000, Ράππη 2002):

- Οι μαθητές συγχέουν συχνά αριθμούς με μεταβλητές, πχ $3+3a=6a$
- Σε κλασματικές εξισώσεις δυσκολεύονται να χρησιμοποιούν σωστά τους παρονομαστές.
- Συγχέουν τα είδη των πράξεων, πχ $7a-a=7$



- Αγνοούν τη σειρά των πράξεων
- Δυσκολεύονται να κατανοήσουν συμβολισμούς συναρτήσεων όπως $f(a)$
- Μπερδεύουν τις ιδιότητες των δυνάμεων, πχ $a^2 \cdot a^3 = a^6$
- Κάνουν λάθη στην επιμεριστική ιδιότητα, πχ $4(a+b) = 4a+b$

Η συστηματική εμφάνιση αυτών των λαθών στη σχολική άλγεβρα πολλές φορές προβληματίζει τους εκπαιδευτικούς οι οποίοι παρατηρούν ότι παρά τις υποδείξεις τους τὰ λάθη αυτά επαναλαμβάνονται επίμονα. Ένας τρόπος που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να ξεπεράσουν αυτά τα προβλήματα είναι η συνεχής εξάσκησή τους σε αλγεβρικά παραδείγματα.

6. ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

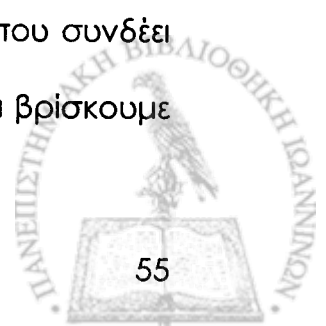
6.1 Η Συνάρτηση στα σχολικά εγχειρίδια

Μεταξύ των στόχων διδασκαλίας των Μαθηματικών αναφέρεται και η εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης τόσο στην πρωτοβάθμια, όσο και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Η έννοια της συνάρτησης στο Δημοτικό σχολείο αναφέρεται για πρώτη φορά στους μαθητές στην ΣΤ τάξη του Δημοτικού σχολείου στο κεφάλαιο που αφορά λόγους – αναλογίες – ανάλογα ποσά χωρίς όμως να γίνεται αναφορά στη σχέση συνάρτησης και ανάλογων – αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Στη βαθμίδα αυτή, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να διατυπώνουν και να εφαρμόζουν τις έννοιες του λόγου και της αναλογίας, να γνωρίζουν την έννοια του λόγου και της αναλογίας και τις ιδιότητες των αναλογιών και να μπορούν να λύνουν απλά προβλήματα ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών.

Στο Γυμνάσιο επιδιώκεται η εισαγωγή της έννοιας της Συνάρτησης με κατάλληλα παραδείγματα από την καθημερινή ζωή. Στην Α' τάξη ο στόχος είναι οι μαθητές να διακρίνουν τα ανάλογα και τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά και να επιλύουν βασικά προβλήματα εφαρμογών. Η κατανόηση των εννοιών γίνεται μέσα από παραδείγματα και αντιπαραδείγματα και με την κατασκευή πινάκων τιμών γίνονται γραφικές παραστάσεις.

Στην Β' τάξη γίνεται αναφορά στις συναρτήσεις που αναπαριστούν ευθεία και υπερβολή και οι μαθητές είναι σε θέση να βρίσκουν τη συνάρτηση που ενδεχομένως συνδέει δυο μεγέθη και γνωρίζουν ότι η συνάρτηση είναι μια διαδικασία που συνδέει δυο ποσά για τα οποία όταν γνωρίζουμε την τιμή του ενός, μπορούμε να βρούμε



και την τιμή του άλλου. Στην Γ' τάξη του Γυμνασίου αναλύονται μόνο συναρτήσεις 2^{ου} βαθμού που αναπαριστούν παραβολή.

6.2 Ορισμοί της Συνάρτησης

Η έννοια της Συνάρτησης στα σχολικά βιβλία έχει ιστορία περίπου 100 χρόνων. Από το τέλος του 19^{ου} μέχρι τα μέσα του 20^{ου} αιώνα η συνάρτηση θεωρούνταν σαν μια αλλαγή ή σαν μια μεταβλητή η οποία εξαρτάται από άλλες μεταβλητές ή σαν μια συσχέτιση η οποία εκφράζεται από έναν τύπο ο οποίος περιλαμβάνει μεταβλητές και σταθερές.

Κατά τη δεκαετία του '60 ο παραδοσιακός ορισμός αντικαταστάθηκε από έναν νέο, σύμφωνα με τον οποίο: μια συνάρτηση του συνόλου A στο B ορίζεται ως ένας ειδικός τύπος του υποσυνόλου του Καρτεσιανού Γινομένου $A \times B$. Ο ορισμός αυτός προκάλεσε δυσκολίες κατανόησης στους μαθητές γι' αυτό δυο δεκαετίες μετά αντικαταστάθηκε από άλλους που διατυπώνονται κατά καιρούς με διαφορετικό τρόπο. Αυτός που παρουσιάζεται στα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια είναι: Καλούμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A κάθε διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία σε κάθε στοιχείο x που ανήκει στο A (πρότυπο) αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό y (εικόνα του x). Ο αριθμός y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$, δηλαδή $y=f(x)$.

6.3 Εξισώσεις και Συναρτήσεις

Τόσο στο Δημοτικό σχολείο όσο και στο Γυμνάσιο το κεφάλαιο των Συναρτήσεων ή των ανάλογων ποσών έπεται του κεφαλαίου των εξισώσεων. Οι εξισώσεις και οι



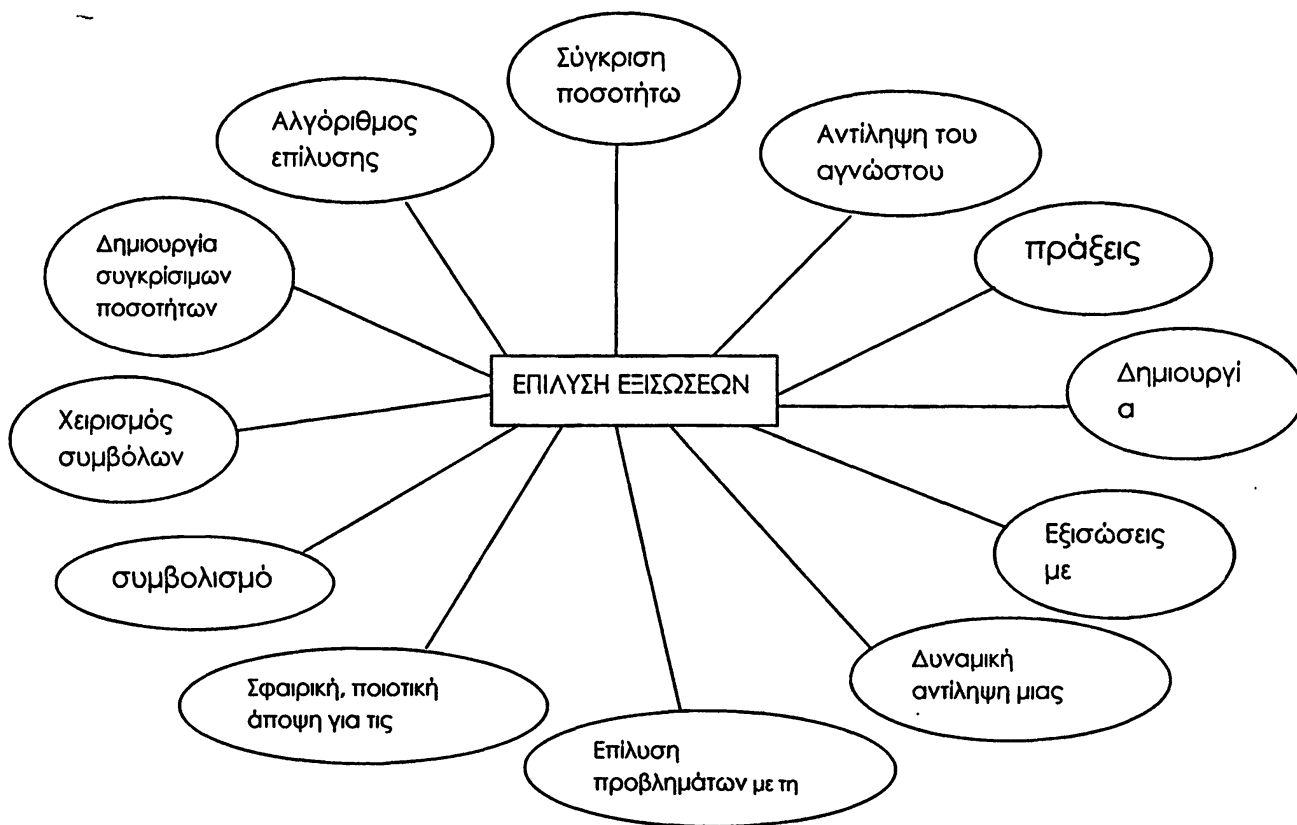
συναρτήσεις είναι δυο διαφορετικές ενότητες που συχνά συγχέουν οι μαθητές ή και ταυτίζουν.

Η εισαγωγή στην Άλγεβρα γίνεται στην Α Γυμνασίου όταν οι μαθητές αρχίζουν να χρησιμοποιούν τα γράμματα ως αφηρημένα αριθμητικά σύμβολα είτε για να γενικεύσουν ιδιότητες των αριθμών (πχ αντιμεταθετική, επιμεριστική) είτε ως άγνωστους για την επίλυση εξισώσεων (πχ $x-3=5$) ή για τον υπολογισμό τύπων (πχ $E=\beta \cdot u$). Στην Β' Γυμνασίου εισάγεται με συστηματικό τρόπο η επίλυση πρωτοβάθμιων εξισώσεων πιο πολύπλοκης μορφής, όπως $3x-2=2x+8$ και αργότερα εισάγονται και οι παρενθέσεις και τα κλάσματα σε εξισώσεις όπως: $3-2(x-4)=5x-8$ και $\frac{3(4-x)}{4} = x-3$ όπου πλέον η διαδικασία επίλυσης ακολουθεί συγκεκριμένα βήματα (απαλοιφή παρονομαστών, απαλοιφή παρενθέσεων, αναγωγή ομοίων όρων κλπ). Τέλος επιλύονται εξισώσεις που καταλήγουν στη μορφή $0x=0$ (ταυτότητα ή αόριστη) και της μορφής $0x=5$ (αδύνατη).

Για να λυθεί μια εξίσωση οποιασδήποτε μορφής είναι απαραίτητο ο μαθητής να γνωρίζει την έννοια της μεταβλητής, της αλγεβρικής παράστασης, την απλοποίηση των αλγεβρικών παραστάσεων, την έννοια της ισότητας και τις ιδιότητές της, ενώ είναι απαραίτητο να χειρίζεται με άνεση τις πράξεις των πραγματικών αριθμών. Αν δεν συμβαίνουν αυτές οι προϋποθέσεις ο μαθητής οδηγείται στην απομνημόνευση διαδικασιών και αλγορίθμων χάνοντας έτσι την ουσία της Άλγεβρας.

Μέχρι την Γ' Γυμνασίου ο μαθητής πρέπει να διακρίνει τη σημασία του « $=$ » και των γραμμάτων σε περιπτώσεις όπως: $6+3=9$, $6+3=4+5$, $a+\beta=\beta+a$, $\chi+3=5$, $\psi=3\chi+3$ (συνάρτηση) , $\psi=a\chi+3$. Πλέον διδάσκεται και η συνάρτηση αναλυτικά και ο εκπαιδευτικός οφείλει να διευκρινίσει τις διαφοροποιήσεις με την εξίσωση.

Οι ικανότητες που πρέπει να έχει ένας μαθητής κατά την επίλυση μιας εξίσωσης φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα (Barbara Ann 2002):



6.4 Η έννοια της συνάρτησης και δυσκολίες κατανόησης

Η συνάρτηση είναι μια από τις σημαντικότερες και δυσκολότερες έννοιες με την οποία έρχονται σε επαφή οι μαθητές κατά τη διάρκεια όλων των βαθμίδων της εκπαίδευσης. Για να κατανοήσουν την έννοια της Συνάρτησης οι μαθητές, ιδιαίτερα στο Γυμνάσιο

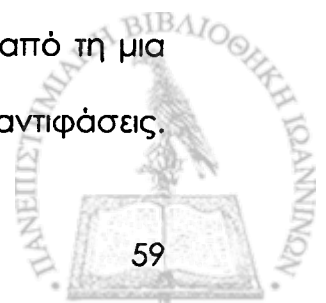
που η αναφορά στις συναρτήσεις είναι πιο εκτενής και ουσιαστική, θα πρέπει να αποκτήσουν δεξιότητες όπως:

- Ικανότητα για ταξινόμηση σχέσεων σε συναρτήσεις και σε μη – συναρτήσεις
- Ικανότητα να δίνουν οι μαθητές παραδείγματα συναρτήσεων και μη – συναρτήσεων
- Ικανότητα να καθορίζουν την εικόνα και διατεταγμένα ζεύγη για δοσμένες συναρτήσεις
- Ικανότητα να καθορίζουν ίσες συναρτήσεις
- Ικανότητα να καθορίζουν συναρτήσεις οι οποίες πληρούν κάποιες προϋποθέσεις
- Ικανότητα να βρίσκουν παραδείγματα συναρτήσεων οι οποίες πληρούν κάποιες προϋποθέσεις

Στην προσπάθεια προσέγγισης της συνάρτησης από τις παραπάνω πλευρές οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες, οι κυριότερες από τις οποίες είναι οι εξής:

- Δυσκολία αναγνώρισης μιας σχέσης ως συνάρτησης βάση του ορισμού
- Δυσκολία στη σύνδεση της ανεξάρτητης με την εξαρτημένη μεταβλητή καθώς και στη χρήση μιας συμβολικής γλώσσας για την παράσταση σχέσεων
- Δυσκολία στη μετάβαση από τη μια μορφή αναπαράστασης της έννοιας στην άλλη και το αντίστροφο, κάτι που οφείλεται κυρίως στον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας.

Για τους παραπάνω λόγους οι στόχοι της διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης δεν εστιάζονται μόνο στο να γίνει η έννοια πλήρως κατανοητή στους μαθητές αλλά περισσότερο στο να αναπτύξουν οι μαθητές την ικανότητα να περνούν από τη μια αναπαράσταση της έννοιας στην άλλη με συνέπεια και ακρίβεια, χωρίς αντιφάσεις.



Επιπλέον η διδασκαλία της έννοιας πρέπει να συμβάλλει στη μελέτη και κατανόηση του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλονται τα δυο μεγέθη που σχετίζονται μεταξύ τους καθώς και στην οργάνωση και παράσταση της σχέσης αυτής. Η καλλιέργεια της γνώσης αυτής θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τον κόσμο που τους περιβάλλει, ενός κόσμου γεμάτου από πολύπλοκα συστήματα αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών (φυσικά, κοινωνικά, οικονομικά κ.α)

6.5 Η έννοια της Συνάρτησης στην ΣΤ' Δημοτικού

Η έννοια της Συνάρτησης δεν αναφέρεται αυτούσια στο Δημοτικό, ωστόσο γίνεται εκτενής αναφορά στους λόγους και τις αναλογίες στην 3^η Θεματική ενότητα της ΣΤ τάξης. Η κεντρική μαθηματική έννοια της ενότητας αυτής είναι το πώς να μελετούν οι μαθητές ταυτόχρονα δυο ποσά που έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους και πώς να εκφράζουν αυτή τη σχέση (συνάρτηση).

Αν προσπαθούσαμε να φτιάξουμε ένα πλάνο για τους στόχους και τις ενδεικτικές δραστηριότητες για τα επιμέρους κεφάλαια αυτής της θεματικής ενότητας θα ήταν ως εξής:

Στ' τάξη Δημοτικού

Θεματική ενότητα 3^η

ΛΟΓΟΙ – ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

Στόχοι	Μάθημα
Οι μαθητές επιδιώκεται: να συγκρίνουν μεγέθη, να μελετούν τη σχέση δυο μεγεθών, να εκφράζουν τη σχέση δυο μεγεθών με λόγο, να αναγνωρίζουν τους	Λόγος δυο μεγεθών

<p>αντίστροφους λόγους. Οι μαθητές αναμένεται: να χρησιμοποιούν πολλαπλασιασμό και διαίρεση για να λύνουν προβλήματα λόγων, να αναπαριστούν λόγους με κλάσματα, δεκαδικούς και ακέραιους αριθμούς.</p>	
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να συγκρίνουν δυο λόγους, να αναγνωρίζουν την ισότητα δυο λόγων, να σχηματίζουν αναλογίες. Οι μαθητές αναμένεται: να οδηγηθούν στην έννοια της αναλογίας εκφράζοντας τη σχέση δυο ποσών με λόγο, να αποκτήσουν την ικανότητα να αναγνωρίζουν σχέση αναλογίας.</p>	<p>Από τους λόγους στις αναλογίες</p>
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να βρίσκουν τη σχέση των όρων αναλογίας, να υπολογίζουν τον άγνωστο όρο της αναλογίας. Οι μαθητές αναμένεται: να χρησιμοποιούν αναλογίες για να περιγράφουν ποσοτικές σχέσεις που έχουν να κάνουν με αριθμούς, γεωμετρικά σχήματα, μετρήσεις μεγεθών και πιθανότητες.</p>	<p>Αναλογίες</p>
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να μελετήσουν την έννοια του ποσού, να διακρίνουν τα ποσά από τις αντίστοιχες τιμές τους, να συγκρίνουν και να αναγνωρίζουν τα σταθερά και τα μεταβλητά ποσά Οι μαθητές αναμένεται: να εξασκηθούν στην αναγνώριση ποσών και της αντίστοιχης τιμής τους.</p>	<p>Σταθερά και μεταβλητά ποσά</p>
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να μελετήσουν την έννοια των ανάλογων ποσών, να συγκρίνουν ποσά, να αναγνωρίζουν τα ανάλογα ποσά. Οι μαθητές αναμένεται: να ελέγχουν κλάσματα και να διακρίνουν τα ισοδύναμα, να δημιουργούν μια σειρά από ίσους λόγους.</p>	<p>Ανάλογα ποσά</p>
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να διακρίνουν αν δυο ποσά είναι ανάλογα μεταξύ τους, να λύνουν προβλήματα με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα, να λύνουν προβλήματα με τη μέθοδο της αναλογίας. Οι μαθητές αναμένεται: να βρίσκουν τους ανάλογους αριθμούς στους αριθμούς που δίνονται από τα προβλήματα, να σχηματίζουν ίσους λόγους με ανάλογους</p>	<p>Λύνω προβλήματα με ανάλογα ποσά</p>

αριθμούς	
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να μελετήσουν την έννοια των αντίστροφων ποσών, να συγκρίνουν τα ποσά, να αναγνωρίζουν τα αντίστροφα ποσά.</p> <p>Οι μαθητές αναμένεται: να διακρίνουν αν δυο ποσά είναι ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα, να διαπιστώνουν ότι τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά είναι ίσα.</p>	Αντιστρόφως ανάλογα ή αντίστροφα ποσά
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να λύνουν τα προβλήματα των ανάλογων ποσών με την απλή μέθοδο των τριών.</p> <p>Οι μαθητές αναμένεται: να γνωρίσουν την απλή μέθοδο των τριών ως νέο και σύντομο τρόπο επίλυσης προβλημάτων με ανάλογα ποσά, να κάνουν την κατάταξη και να βρίσκουν τον άγνωστο του προβλήματος με την απλή μέθοδο των τριών.</p>	Η απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να λύνουν τα προβλήματα των αντίστροφων ποσών με την απλή μέθοδο των τριών.</p> <p>Οι μαθητές αναμένεται: να γνωρίσουν την απλή μέθοδο των τριών ως νέο και σύντομο τρόπο επίλυσης προβλημάτων με αντιστρόφως ανάλογα ποσά, να κάνουν την κατάταξη και να βρίσκουν τον άγνωστο του προβλήματος με την απλή μέθοδο των τριών.</p>	Η απλή μέθοδος των τριών στα αντίστροφα ποσά

6.6 Η έννοια της Συνάρτησης στο Γυμνάσιο

Στο Γυμνάσιο, η έννοια της Συνάρτησης αναφέρεται και στις τρεις τάξεις ξεκινώντας (για να γίνει πιο ομαλά η μετάβαση από το Δημοτικό) με τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά και καταλήγοντας στην Γ' τάξη σε συναρτήσεις δευτέρου βαθμού. Πιο αναλυτικά τα περιεχόμενα των αντίστοιχων κεφαλαίων φαίνονται παρακάτω:

Α' τάξη Γυμνασίου

Κεφάλαιο Α.6

ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Στόχοι	Μάθημα
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να χρησιμοποιούν και να τοποθετούν συντεταγμένες σε ορθοκανονικά συστήματα αξόνων.</p> <p>Οι μαθητές αναμένεται: να κατανοήσουν την διάταξη σημείων σε διαγράμματα και τη χρήση συντεταγμένων σε διάφορες εφαρμογές</p>	Παράσταση σημείων στο επίπεδο
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να βρίσκουν τους λόγους ευθυγράμμων τμημάτων και να χειρίζονται τις αναλογίες, να χρησιμοποιούν κλίμακες, να παρατηρούν παράλληλα περιπτώσεις κατά τις οποίες οι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι ή δεν είναι ίσοι.</p> <p>Οι μαθητές αναμένεται: να κατανοήσουν τους λόγους, τις κλίμακες και την ομοιότητα σχημάτων</p>	Λόγος δυο αριθμών - Αναλογία
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να συμπληρώνουν πίνακες ανάλογων ποσών, να συγκρίνουν ποσά, να υπολογίζουν το λόγο των ανάλογων ποσών, να χρησιμοποιούν ποσοστά σε προβλήματα</p> <p>Οι μαθητές αναμένεται: να αναγνωρίζουν τα ανάλογα ποσά, να χρησιμοποιούν ιδιότητες αναλογιών και ποσοστά.</p>	Ανάλογα ποσά –Ιδιότητες των ανάλογων ποσών
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να σχεδιάζουν γραφικές παραστάσεις σχέσεων αναλογίας, να χρησιμοποιούν γραφικές παραστάσεις για να βρίσκουν συντεταγμένες</p> <p>Οι μαθητές αναμένεται: να συνειδητοποιήσουν ότι τα ανάλογα ποσά αναπαριστώνται με διατεταγμένα ζεύγη σημείων που σχηματίζουν ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων</p>	Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να επιλύουν προβλήματα ανάλογων ποσών αριθμητικά και γραφικά, να αντιμετωπίζουν προβλήματα ανάλογων ποσών με ποσοστά κέρδους και έκπτωσης,</p> <p>Οι μαθητές αναμένεται: να αναπτύξουν δεξιότητες για την επίλυση προβλημάτων</p>	Προβλήματα αναλογιών

ανάλογων ποσών.	
Οι μαθητές επιδιώκεται: να χειρίζονται προβλήματα αντιστρόφως ανάλογων ποσών μέσα από παραδείγματα Οι μαθητές αναμένεται: να διακρίνουν τις περιπτώσεις ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών στα προβλήματα.	Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Β' τάξη Γυμνασίου

Κεφάλαιο 3^ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στόχοι	Μάθημα
Οι μαθητές επιδιώκεται: να εκφράζουν ένα μέγεθος ως συνάρτηση ενός άλλου, να συμπληρώνουν τον πίνακα τιμών μιας συνάρτησης. Οι μαθητές αναμένεται: να κατανοήσουν τον τρόπο που συσχετίζονται μεταβλητές για την δημιουργία πινάκων τιμών και γραφικών παραστάσεων.	Η έννοια της συνάρτησης
Οι μαθητές επιδιώκεται: να βρίσκουν τις συντεταγμένες σημείων και συμμετρικών τους, να σχεδιάζουν γραφικές παραστάσεις από τον πίνακα τιμών, να βρίσκουν την απόσταση δυο σημείων, να ελέγχουν αν ένα σημείο ανήκει ή όχι σε μια γραφική παράσταση. Οι μαθητές αναμένεται: να βρίσκουν αποστάσεις σημείων, συμμετρίες, να κατασκευάζουν και να ερμηνεύουν γραφικές παραστάσεις, ιδιαίτερα όταν αυτές αφορούν την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.	Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης
Οι μαθητές επιδιώκεται: να προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει τις τιμές δυο ανάλογων ποσών, να γνωρίζουν τις ιδιότητες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=ax$, να βρίσκουν την εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, όταν γνωρίζουν την κλίση της. Οι μαθητές αναμένεται: να κατανοήσουν τον σημαντικό ρόλο της $y=ax$ τόσο στα μαθηματικά όσο και στη μελέτη φυσικών φαινομένων.	Η συνάρτηση $y=ax$
Οι μαθητές επιδιώκεται: να γνωρίζουν ότι	Η συνάρτηση $y=ax+\beta$

<p>η γραφική παράσταση της $y=ax+\beta$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στην $y=ax$, να τη σχεδιάζουν και να βρίσκουν τα σημεία τομής με τους άξονες, να βρίσκουν την εξίσωση μιας ευθείας από στοιχεία της γραφικής παράστασης. Οι μαθητές αναμένεται: να κατανοήσουν τη σπουδαιότητα της συνάρτησης $y=ax+\beta$ τόσο στα μαθηματικά όσο και σε άλλες επιστήμες και στην καθημερινή ζωή.</p>	
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει αντιστρόφως ανάλογα ποσά, να γνωρίζουν το ρόλο του a και να μπορούν να τη σχεδιάζουν. Οι μαθητές αναμένεται: να αναγνωρίζουν άξονες, κέντρα συμμετρίας, ιδιότητες της συνάρτησης $y=a/x$</p>	<p>Η συνάρτηση $y=a/x$ – Η υπερβολή</p>

Γ' τάξη Γυμνασίου

Κεφάλαιο 4^ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στόχοι	Μάθημα
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax^2$, να προσδιορίζουν το συντελεστή a από στοιχεία της γραφικής παράστασης. Οι μαθητές αναμένεται: να κατανοήσουν τη σχέση του συντελεστή a με το σχήμα, να ερμηνεύουν στοιχεία της γραφικής παράστασης.</p>	<p>Η συνάρτηση $y=ax^2$, $a \neq 0$</p>
<p>Οι μαθητές επιδιώκεται: να σχεδιάζουν τη συνάρτηση $y=ax^2+\beta x+\gamma$, να προσδιορίζουν τη συνάρτηση από στοιχεία της γραφικής παράστασης. Να βρίσκουν τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της, άξονες συμμετρίας. Οι μαθητές αναμένεται: να ερμηνεύουν τη γραφική παράσταση, να γνωρίζουν ότι η παραβολή $y=ax^2+\beta x+\gamma$ είναι η παραβολή $y=ax^2$ μετατοπισμένη παράλληλα προς τους άξονες.</p>	<p>Η συνάρτηση $y=ax^2+\beta x+\gamma$, $a \neq 0$</p>

6.7 Η διδασκαλία των Συναρτήσεων με τη βοήθεια εκπαιδευτικών λογισμικών

Τα τελευταία χρόνια γίνονται σημαντικές έρευνες που έχουν στόχο να διερευνήσουν τα αποτελέσματα της χρήσης των σύγχρονων τεχνολογιών στο μάθημα των μαθηματικών. Οι εφαρμογές και οι δυνατότητες που προσφέρει η ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας και ειδικότερα η επιστήμη της πληροφορικής έχουν μπει και εδραιωθεί τόσο στην εκπαίδευση όσο και στην καθημερινή μας ζωή. Για το λόγο αυτό δημιουργούνται συνεχώς λογισμικά που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών.

Ιδιαίτερα χρήσιμα μπορεί να φανούν τέτοια εκπαιδευτικά εργαλεία στη διδασκαλία των Συναρτήσεων. Στο μάθημα αυτό τόσο στο Γυμνάσιο όσο και στο Δημοτικό σχολείο οι μαθητές χρειάζεται να σχεδιάζουν διαγράμματα, να υπολογίζουν σημεία των Συναρτήσεων κ.α.

Τα εκπαιδευτικά λογισμικά και κάποια προγράμματα των Windows (πχ. Excel) έχουν θετικά αποτελέσματα τόσο στην κατανόηση των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών όσο και στην τόνωση του ενδιαφέροντος των μαθητών για το μάθημα των μαθηματικών.

6.8 Διδασκαλία των Συναρτήσεων με τη βοήθεια των επιπέδων Van Hiele

Το μοντέλο van Hiele έχει χρησιμοποιηθεί και για την εκτίμηση της απόδοσης μαθητών σε θεματικές περιοχές της Γεωμετρίας όπου απαιτείται η γνώση Αλγεβρικών εννοιών. Κατ' επέκταση ίσως υπάρχει η δυνατότητα, η θεωρία van Hiele να εφαρμοστεί και στη διδασκαλία των Συναρτήσεων.

Αν προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε τα τρία επίπεδα Van Hiele για τη διδασκαλία των Συναρτήσεων που διδάσκονται στην Γ' Γυμνασίου θα έχουν την παρακάτω μορφή:

Στο πρώτο επίπεδο ο μαθητής θα μπορεί να αναγνωρίζει ότι η μορφή $y=ax+b$ είναι συνάρτηση, να συσχετίζει τον τύπο $y=ax^2+bx+c$ με τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να συνειδητοποιεί τις ομοιότητες και τις διαφορές μεταξύ διαφορετικών συναρτήσεων, να αναγνωρίζει το είδος της συνάρτησης που αντιστοιχεί σε μορφές από την καθημερινή ζωή, πχ στη μορφή ενός γεφυριού.

Σε δεύτερο επίπεδο ο μαθητής θα πρέπει να αναγνωρίζει τον τύπο της παραβολής, να περιγράφει και να προσδιορίζει το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας συνάρτησης, να μπορεί να κατασκευάζει τη γραφική παράσταση πχ μιας παραβολής, να κατανοεί ότι η παραβολή και η υπερβολή αποτελούν κατηγορίες των συναρτήσεων, να αναγνωρίζει ότι μια κίνηση μπορεί να περιγραφεί από μια συνάρτηση.

Τέλος στο τρίτο επίπεδο ο μαθητής πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίζει τις ομοιότητες και διαφορές παρόμοιων συναρτήσεων, να δίνει τον ορισμό της υπερβολής, παραβολής κλπ, να κατανοεί πως μεταβάλλεται και πως μετατοπίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax^2+bx+c$ για τις διάφορες τιμές των a , b , c , να είναι σε θέση να αναγνωρίζει σύνθετες συναρτήσεις, να κατανοεί τη σχέση του a της συνάρτησης $f(x)=ax^2+bx+c$ με τη μορφή της γραφικής παράστασης.

7. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

7.1 Σχέδια μαθήματος

1^ο Σχέδιο μαθήματος

Μάθημα: Άλγεβρα

Τάξη: Γ' Γυμνασίου

Ενότητα : Η συνάρτηση $f(x)=ax^2 +bx+y$. (Διάρκεια 4 διδακτικές ώρες)

1. Διδακτικός στόχος – σκοπός

- Οι μαθητές να κατασκευάζουν τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων της μορφής ax^2+bx+y με $a\neq 0$ και να μελετούν αυτές ως προς τη μονοτονία, και τα ακρότατα
- Να επιλύουν προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων
- Να επιλύουν γραφικά την εξίσωση ax^2+bx+y με $a\neq 0$.

2. Μέσα διδασκαλίας – υλικά – προϋποθέσεις

Το μάθημα μπορεί να γίνει σε εργαστήριο υπολογιστών με τη βοήθεια του λογισμικού Function Probe ή του Excel αλλά και στην τάξη με την βοήθεια απλών γεωμετρικών οργάνων. Εδώ θα γίνει μια διδακτική προσέγγιση για την τάξη.

3. Αναλυτική περιγραφή.

A. Παρουσίαση της ενότητας: Με γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x)=ax^2 + bx +y$

γράφεται και $f(x)=a(x+\beta/2a)^2-\Delta/4a$ (με $\kappa=-\beta/2a$ και $\mu=-\Delta/4a$), μελετάμε την $f(x)$

ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τη συμμετρία παίρνοντας με το γνωστό



τρόπο διάφορες τιμές για τις παραμέτρους α,κ,μ. Κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x)=x^2-3x+2$, $f(x)=x^2+6x-5$, $f(x)=x^2+4x+4$, $f(x)=x^2-3x+4$ και $f(x)=-2x^2+4x-3$ και από τα διαγράμματά τους βρίσκουμε τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κορυφή τον άξονα συμμετρίας των και τις ρίζες (όπου υπάρχουν)

Β. Φύλλο εργασίας

Η συνάρτηση $f(x)=ax^2+bx+c$, με $a \neq 0$

1. Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

α. μετατοπίσεις γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\varphi(x)+c$, με $c>0$ προκύπτει από ...
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\varphi(x)-c$, με $c>0$ προκύπτει από ...
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\varphi(x-c)$, με $c>0$ προκύπτει από ...
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\varphi(x+c)$, με $c>0$ προκύπτει από ...

β. Μελέτη της συνάρτησης $f(x)=ax^2+bx+c$ (1)

- Η γραφική παράσταση της (1) τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο ...
- Αν τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ τότε οι συντεταγμένες των σημείων τομής είναι ...
- Αν $a>0$ τότε:
 1. η συνάρτηση (1) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα ...
 2. είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα ...
 3. έχει ελάχιστο για $\chi=...$ και είναι το ...
- Αν $a<0$ τότε:
 4. η συνάρτηση (1) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα ...
 5. είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα ...
 6. έχει μέγιστο για $\chi=...$ και είναι το ...

γ. πίνακες μελέτης της (1)

Με βάση τα 1,2,3, και 4,5,6, να συμπληρωθούν οι πίνακες:

$$-\beta/2\alpha$$

Τιμές του x	$-\infty$	$+\infty$
Μονοτονία – ακρότατα της $f(x)$ $=ax^2+bx+c, a>0$		

$$-\Delta/4a$$

$$-\beta/2\alpha$$

Τιμές του x	$-\infty$	$+\infty$
Μονοτονία – ακρότατα της $f(x)$ $=ax^2+bx+c, a<0$		

$$-\Delta/4a$$

2. Να σημειώσετε το Σ αν είναι σωστή ή το Λ αν είναι λάθος σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις για τη συνάρτηση $f(x)=ax^2+bx+c$

- Αν $a>0$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$ Σ Λ
- Αν $a>0$ έχει ελάχιστο το $-\Delta/(4.a^2)$ Σ Λ
- Είναι γνήσια μονότονη στο \mathbb{R} Σ Λ
- Αν $a>0$ έχει ελάχιστο στο $-\beta/2.a$ Σ Λ
- Αν $a<0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\beta/2.a)$ Σ Λ



- Αν $a < 0$ και $\beta > 0$ είναι γνησίως μονότονη στο $(\beta/2.a, -\beta/2.a)$ Σ Λ
- Έχει κορυφή το σημείο $(-\Delta/4.a, -\beta/2.a)$ Σ Λ
- Ο άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία $\chi = -\beta/2.a$ Σ Λ

3. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

- Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$

A. έχει ελάχιστο στο 2 B. έχει ελάχιστο το 1

Γ. είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2, 2]$ Δ. κανένα από τα προηγούμενα

- Η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

A. έχει κορυφή το $(2, -1)$ B. είναι γν. αύξουσα στο $[-2, 2]$

Γ. δεν τέμνει τον άξονα $\chi' \chi$ Δ. δεν έχει μέγιστο

- Για τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με $a > 0$ και $\gamma < 0$

A. Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $\chi' \chi$ σε δύο σημεία

B. παρουσιάζει μέγιστο

Γ. Η κορυφή βρίσκεται πάνω από τον άξονα $\chi' \chi$

Δ. κανένα από τα προηγούμενα.

- Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2ax + a^2$, $a > 0$

A. είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, a+1)$

B. έχει ελάχιστο στο σημείο $(a, 0)$

Γ. Η γραφική της παράσταση έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον άξονα $\chi' \chi$

Δ. κανένα από τα προηγούμενα.

- Η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + ax - a^2$, $a > 0$



Α. είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, a/2)$


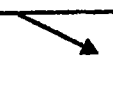
Β. Η γραφική της παράσταση έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$

Γ. Η κορυφή της βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

Δ. κανένα από τα προηγούμενα.

• Ο πίνακας

1

Τιμές του x	$-\infty$	$+\infty$
Μονοτονία - ακρότητα της $f(x)$		

7

αντιστοιχεί στη συνάρτηση

Α. $f(x) = -x^2 + 2x - 6$

Β. $f(x) = 2x^2 - 4x + 9$

Γ. $-x^2 + 2x + 6$

Δ. σε καμία από τις προηγούμενες

4. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία, τα ακρότητα και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις:

$f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^2 - 4$, $f(x) = (x - 2)^2$, $f(x) = (x + 3)^2$,

$f(x) = x^2 - 4x + 3$,

$f(x) = -x^2 + 6x - 5$,

$f(x) = x^2 + 2x + 4$

5. Να προσδιοριστεί η παραβολή $f(x)=ax^2+bx+c$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

α. όταν διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$, $\Gamma(3, 2)$

β. όταν τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο $A(0,2)$ και έχει κορυφή $K(1, -2)$

6. Να λυθούν γραφικά οι εξισώσεις

$$x^2-4x=0, \quad x^2-6x+7=0, \quad 2x^2+x-15=0$$

7. Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις

$$f(x)=x^2-4|x|+3, \quad f(x)=x^2-4|x-1|+1, \quad f(x)=(x-1)^2+2|x-1|+1$$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=kx^2+\lambda x+3$

α. Να βρείτε τα k και λ ώστε να έχει στη θέση $x=1$ τοπικό ακρότατο ίσο με -2

β. Τι είδους ακρότατο παρουσιάζει η συνάρτηση στη θέση $x=1$;

9. Σε ορθογώνιο τρίγωνο OAB ($O=90^\circ$) παίρνουμε στην OA σημείο M και φέρουμε

την MN παράλληλη στην OB . (το N επί της AB). Αν είναι $(OA)=4$, $(OB)=3$ και

$(OM)=x$, και $E(x)$ το εμβαδόν του τριγώνου BMN ,

α. Να αποδείξετε ότι: $(MN)=\frac{3(4-x)}{4}$, και $E(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x$

β. Να βρείτε τη θέση του M για την οποία το εμβαδόν $E(x)$ μεγιστοποιείται. Ποια

είναι η μέγιστη τιμή;

10. Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $2a$ ποιο είναι εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν;

11. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος

είναι $K(x)=\frac{1}{2}x^2-50x+\mu$ χιλιάδες Ευρώ. Το εργοστάσιο έχει τη δυνατότητα να



παράγει 60 μονάδες ημερησίως. Υπολογίστηκε ότι αν μια μέρα μείνει κλειστό το εργοστάσιο παθαίνει ζημιά 3 χιλ Ευρώ. Η είσπραξη από την πώληση x μονάδων είναι $E(x)=10-2x$ χιλ. Ευρώ. Να βρεθούν:

α. η τιμή του μ

β. η συνάρτηση κέρδους $P(x)$

γ. Η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου για την οποία έχει μέγιστο κέρδος.

Πόσες χιλιάδες Ευρώ είναι το μέγιστο κέρδος;

12. Ένας παραγωγός μήλων διαπίστωσε ότι τα μήλα στο κτήμα του ωρίμασαν και πρέπει να τα μαζέψει το αργότερο σε 6 εβδομάδες. Αντιμετωπίζει όμως το εξής πρόβλημα: Αν τα μαζέψει σήμερα κάθε δέντρο θα του αποδώσει 42 κιλά κατά μέσο όρο. Για κάθε εβδομάδα που περνάει εκτιμά ότι η απόδοση κάθε δέντρου θα μειώνεται κατά 1 κιλό (από το πέσιμο των μήλων στο έδαφος) ενώ η τιμή πώλησης θα αυξάνεται κατά 2 δρχ. το κιλό. Η σημερινή τιμή πώλησης είναι 80 δρχ το κιλό. Αν $E(x)$ είναι η είσπραξη από την πώληση σε x εβδομάδες από την ωρίμανση των μήλων

α. Να βρεθεί η $E(x)$

β. Μετά από πόσες εβδομάδες θα έχει τη μεγαλύτερη είσπραξη από κάθε μηλιά.

Ποια θα είναι η μεγαλύτερη αυτή είσπραξη;

2ο Σχέδιο μαθήματος

Μάθημα: Μαθηματικά

Τάξη: ΣΤ' Δημοτικού

Ενότητα : Ανάλογα – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά (μια διδακτική ώρα)



1. Διδακτικός στόχος – σκοπός

- να αναγνωρίζουν οι μαθητές τα ανάλογα ποσά, αντιστρόφως ανάλογα και ποσά που δεν έχουν σχέση μεταξύ τους.
- να συμπληρώνουν πίνακες αντιστρόφως ανάλογων ποσών.
- να λύνουν προβλήματα ευθέως ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών.

2. Μέσα διδασκαλίας – υλικά – προϋποθέσεις

Το μάθημα μπορεί να γίνει με τη βοήθεια διαφανειών, δραστηριοτήτων στο υπολογιστή, στον πίνακα, με φύλλα εργασίας

3. Αναλυτική περιγραφή.

A. Παρουσίαση της ενότητας

Πρέπει αρχικά να γίνει επανάληψη στους λόγους-αναλογίες και εισαγωγή στην αντίστροφη αναλογία. Παρουσιάζονται στους μαθητές καταστάσεις από την καθημερινή ζωή όπου χρησιμοποιούνται ανάλογα, και αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Γίνεται συζήτηση με ιδιαίτερη έμφαση στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Παραδείγματα

1) Το 1 κιλό μήλα κοστίζει 3€. Πόσο κοστίζουν τα πέντε κιλά;

2) Τα 3 κιλά πατάτες κοστίζουν 5€. Πόσο κοστίζουν τα 6 κιλά πατάτες;

3) Για να βαφτεί μια πολυκατοικία, εργάζονται 20 εργάτες για 10 μέρες. Σε πόσες μέρες θα μπορούσαν να βάψουν την ίδια πολυκατοικία 40 εργάτες δουλεύοντας με τον ίδιο ρυθμό;

Β. φύλλο εργασίας

Άσκηση 1^η (στόχος: να αναγνωρίζουν ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά)

Ποιο από τα παρακάτω προβλήματα λύνεται όπως η άσκηση 3 (εργάτες);

- Το χρώμα μιας φρεσκοβαμμένης πολυκατοικίας για να στεγνώσει χρειάζεται 25 λεπτά. Πόσα λεπτά χρειάζονται για να στεγνώσει το χρώμα τριών πολυκατοικιών;
- Τα 90 γρ. σοκολάτας έχουν 150 θερμίδες. Πόσες θερμίδες έχουν τα 30γρ.;
- Ο Μιχάλης είναι 10 χρονών κι έχει ύψος 1.30μ. Πόσο ύψος θα έχει όταν γίνει 20 χρονών;
- Στην αποθήκη της κατασκήνωσης υπάρχουν τρόφιμα που αρκούν να τρώνε 200 παιδιά για 5 μέρες. Για πόσες μέρες θα αρκούσαν τα τρόφιμα αν τα παιδιά στην κατασκήνωση ήταν 100;

Άσκηση 2^η (Στόχος: Να συμπληρώνουν πίνακες αντιστρόφως ανάλογων ποσών.)

- Σ' ένα εργοστάσιο, 6 ίδιες μηχανές τελειώνουν ένα έργο σε 20 ημέρες. Σε πόσες μέρες τελειώνουν το έργο 12 τέτοιες μηχανές, αν εργάζονται με τον ίδιο ρυθμό;
- Ο κύριος Γιώργος που είναι επιστάτης σε μια εταιρεία, μάς πληροφόρησε ότι χρειάζονταν 12 εργάτες για να τελειώσουν ένα έργο σε 8 ώρες. Πόσες ώρες χρειάζονται 6 εργάτες για να τελειώσουν το ίδιο έργο; Πόσο χρόνο χρειάζονται 48 εργάτες για να τελειώσουν το ίδιο έργο;

Άσκηση 3^η (στόχος: επίλυση σύνθετων προβλημάτων)

- Σε μια αυλή είναι στρωμένες 240 τετράγωνες πλάκες πλευράς 20 εκ. Πόσες τετράγωνες πλάκες πλευράς 40 εκ. θα χρειαστώ για να καλύψω την ίδια επιφάνεια;

- Ένας ξυλουργός για να φτιάξει 3 τραπέζια χρειάζεται 10 μέρες. Πόσες μέρες χρειάζεται για να φτιάξει 6 τραπέζια;

7.2 Ενδεικτικές δραστηριότητες

1^η δραστηριότητα

1. ΤΙΤΛΟΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Λογαριασμός τηλεφώνου

2. ΣΕΝΑΡΙΟ ΣΤΟ ΟΠΟΙΟ ΕΝΤΑΣΣΕΤΑΙ Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

A) Η ιδέα του σεναρίου:

Μια τηλεφωνική εταιρεία Α χρεώνει κάθε μήνα ένα σταθερό πάγιο και κάθε λεπτό ομιλίας χρεώνεται με ένα σταθερό ποσό, δηλαδή υπάρχει χρονοχρέωση. Μια άλλη τηλεφωνική εταιρεία Β δεν χρεώνει καθόλου πάγιο αλλά μόνο το κάθε λεπτό ομιλίας. Στο σενάριο (πρόβλημα) που ακολουθεί απαιτείται η κατασκευή και μελέτη των γραφικών παραστάσεων των δύο σχέσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων.

B) Περιγραφή της δραστηριότητας:

Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας Α χρεώνει στους πελάτες της μηνιαίο πάγιο 20€ και επιπλέον κάθε λεπτό ομιλίας 8 λεπτά του €. Μια δεύτερη τηλεφωνική εταιρεία χρεώνει μόνο το κάθε λεπτό ομιλίας προς 10 λεπτά.

1. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών για το κόστος του λογαριασμού για κάθε εταιρεία για χρόνο ομιλίας $t=1,2,3,\dots$ λεπτά μηνιαίως.
2. Να παραστήσετε με σημεία τα ζεύγη τιμών, από τους πίνακες, σε ένα σύστημα αξόνων και να βρείτε το είδος της γραμμής πάνω στην οποία ανήκουν.

3. Να βρείτε μία σχέση (συνάρτηση) η οποία να συνδέει τον χρόνο t με το ποσό του λογαριασμού και στις δυο περιπτώσεις
4. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο γραμμών. Ποια είναι η σημασία του σημείου αυτού για τον πελάτη;

3. ΕΝΤΑΞΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

- Τάξη: Β' Γυμνασίου.
- Γνωστικό αντικείμενο: Συναρτήσεις.
- Διδακτικές ενότητες: Η συνάρτηση $y=ax$. Η συνάρτηση $y=ax+\beta$

4. ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

A. Γενικό πλαίσιο στόχων

- i. Να μάθουν οι μαθητές τη διαδικασία: πινακοποίηση δεδομένων - αναπαράσταση σε ένα σύστημα συντεταγμένων - εκτίμηση της σχέσης που συνδέει τα ποσά που μεταβάλλονται.
- ii. Να μάθουν οι μαθητές να ερμηνεύουν Γεωμετρικά και Αλγεβρικά δεδομένα μέσα σε ένα πρόβλημα (Τα Μαθηματικά σαν εργαλείο).

B. Βασικοί στόχοι της δραστηριότητας

- i. Να μάθει ο μαθητής ότι μεταβολές στις οποίες όταν η μία μεταβλητή αυξάνεται κατά ίσα ποσά τότε και η άλλη αυξάνεται κατά ίσα ποσά, παρέχουν γραφικές παραστάσεις που είναι ευθείες.
- ii. Να μάθει ο μαθητής ότι μία ευθεία, που δεν είναι κάθετη στους άξονες, αποτελεί ένα απλό παράδειγμα γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης



αύξουσας ή φθίνουσας. Ο μαθητής θα συνδέσει την έννοια της αύξουσας συνάρτησης με μία γραφική παράσταση που "ανεβαίνει".

Γ. Υπο - στόχοι

- i. Να μπορεί ο μαθητής να βρίσκει τη σχέση που συνδέει δύο ποσά, μέσα από τον πίνακα, όταν σε ίσες αυξήσεις (ή ελαττώσεις) του ενός αντιστοιχούν ίσες αυξήσεις (ή ελαττώσεις) του άλλου και ιδιαίτερα όταν τα ποσά είναι ανάλογα.
- ii. Να συνδέσουν την αμβλεία γωνία με την έννοια της φθίνουσας και την οξεία γωνία με την έννοια της αύξουσας συνάρτησης όταν αυτή έχει γραφική παράσταση μία ευθεία.
- iii. Να συνδέσουν τον συντελεστή α του x , στη σχέση $y = \alpha \cdot x + \beta$ που συνδέει τα ποσά x και y , με τη γωνία της ευθείας και άξονα $x'x$, άρα και με την έννοια της αύξουσας ή φθίνουσας συνάρτησης.
- iv. Να βρίσκουν Γεωμετρικά και Αλγεβρικά το κοινό σημείο δύο ευθειών και να αναγνωρίζουν τη σημασία του μέσα σε ένα πρόβλημα ή γενικότερα μέσα σε ένα πλαίσιο δεδομένων.

5. ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

- i. Ο μαθητής θα μπορεί, μέσα από ένα πίνακα μεταβολών να βρίσκει αν η γραφική παράσταση μίας σχέσης είναι ευθεία και να βρίσκει την εξίσωσή της όταν η ευθεία δεν περνά από την αρχή των αξόνων.
- ii. Θα μπορεί ο μαθητής να αναγνωρίζει σαν αύξουσα ή φθίνουσα μία συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$ ανάλογα με τα α και συγχρόνως θα γνωρίζει ότι η γραφική της παράσταση είναι ευθεία.

- iii. Θα έχει τη δυνατότητα ο μαθητής να βρίσκει τη χρήση της γραφικής παράστασης, το είδος της γωνίας (οξεία - αμβλεία), που σχηματίζει η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$ με τον άξονα x' .
- iv. Θα μπορεί ο μαθητής να βρίσκει το κοινό σημείο δύο ευθειών μέσα από τη λύση ενός συστήματος.

6. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Για την συγκεκριμένη δραστηριότητα το προβλεπόμενο διδακτικό μοντέλο είναι αυτό της διερευνητικής συνεργατικής μάθησης:

α) Οι μαθητές είναι χωρισμένοι σε ομάδες των δύο ή τριών ατόμων και κάθε μαθητής μέσα στην ομάδα έχει συγκεκριμένο ρόλο π.χ. ένας πληκτρολογεί, άλλος καταγράφει και άλλος ελέγχει και μεταφέρει τα αποτελέσματα των άλλων ομάδων. Ο ρόλος κάθε μαθητή δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος. Μετά το τέλος της διδακτικής ώρας ή μετά την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων που είναι ενταγμένες σε ένα σενάριο εναλλάσσονται οι ρόλοι και μάλιστα καλύτερη εφαρμογή του μοντέλου διδασκαλίας έχουμε όταν οι μαθητές αλλάξουν ομάδες.

β) Ο Καθηγητής συμβουλεύει, απευθύνει κατάλληλες ερωτήσεις στις ομάδες και διαχειρίζεται τον χρόνο ώστε να μην υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ των σταδίων επεξεργασίας των διαφόρων ομάδων.

γ) Κάθε ομάδα ανακοινώνει ή συγκρίνει τα αποτελέσματά της με άλλες ομάδες ώστε οι ομάδες να αποφασίσουν ότι τα κοινά τους ευρήματα είναι σωστά.

δ) Για να ληφθεί μία απόφαση μέσα σε μία ομάδα θα πρέπει να υπάρξει ομοφωνία. σε περίπτωση όμως σοβαρής διαφωνίας ενός εκ των τριών ο διαφωνών περιγράφει

την άποψη του σε ένα μικρό κείμενο το οποίο καταχωρείται σαν υπόμνημα με το φύλλο αξιολόγησης στο τέλος.

7. ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Θα χρησιμοποιηθεί το πρόγραμμα Microsoft Excel των Windows που είναι κατάλληλο για μελέτη γραφικών παραστάσεων.

8. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Ο καθηγητής κατά την έναρξη της διδασκαλίας δίνει στους μαθητές το παρακάτω φύλλο εργασίας.

Φύλλο εργασίας (Για τον Μαθητή).

Λογαριασμός του τηλεφώνου

Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας Α χρεώνει στους πελάτες της μηνιαίο πάγιο 20€ και επιπλέον κάθε λεπτό ομιλίας 8 λεπτά του €. Μια δεύτερη τηλεφωνική εταιρεία χρεώνει μόνο το κάθε λεπτό ομιλίας προς 10 λεπτά.

1) Να συμπληρώσετε τους πίνακες τιμών:

A : Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών

Χρόνος t (σε λεπτά)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Λογαριασμός εταιρείας A											

B : Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών

Χρόνος t (σε λεπτά)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Λογαριασμός εταιρείας B											

2) Όταν αυξάνει ο χρόνος t τι παρατηρείτε για τις τιμές των λογαριασμών; Ποια σχέση συνδέει τον χρόνο t με το ποσό του λογαριασμού για κάθε εταιρεία;

3) Χρησιμοποιώντας το Excel να εισάγετε τους παραπάνω πίνακες A, B στον Η/Υ.

4) Δημιουργήστε δύο σύνολα σημείων με βάση αυτούς τους δύο πίνακες.

5) Δημιουργήστε δύο γραμμές, μία για κάθε σύνολο σημείων, που περνούν από τα σημεία. Συγκρίνετε τους τύπους που προέκυψαν στην οθόνη με αυτούς που έχετε υπολογίσει στο 2ο ερώτημα.

6) Με βάση τα αποτελέσματα, τα οποία έχετε εξάγει στα προηγούμενα ερωτήματα, να περιγράψετε κριτήρια μέσω των οποίων μπορούμε να αποφανθούμε ότι μία σχέση της μορφής $y = ax$ και $y = ax + b$ έχει την ιδιότητα όταν αυξάνεται το x τότε αυξάνεται (ή ελαττώνεται) το y χωρίς πλέον τη χρήση των πινάκων.

7) Να υπολογίσετε το κοινό σημείο των δύο ευθειών. Ποια είναι η σημασία του σημείου για τον πελάτη;

Οι φάσεις της δραστηριότητας :

Φ1) Αφού ο καθηγητής προμηθεύσει σε κάθε ομάδα ένα φύλλο εργασίας ζητά να γίνει συμπλήρωση του πίνακα A από ένα μέλος και του B από ένα άλλο μέλος της κάθε ομάδας και στη συνέχεια να εξηγήσει ο καθένας το σκεπτικό με βάση το οποίο



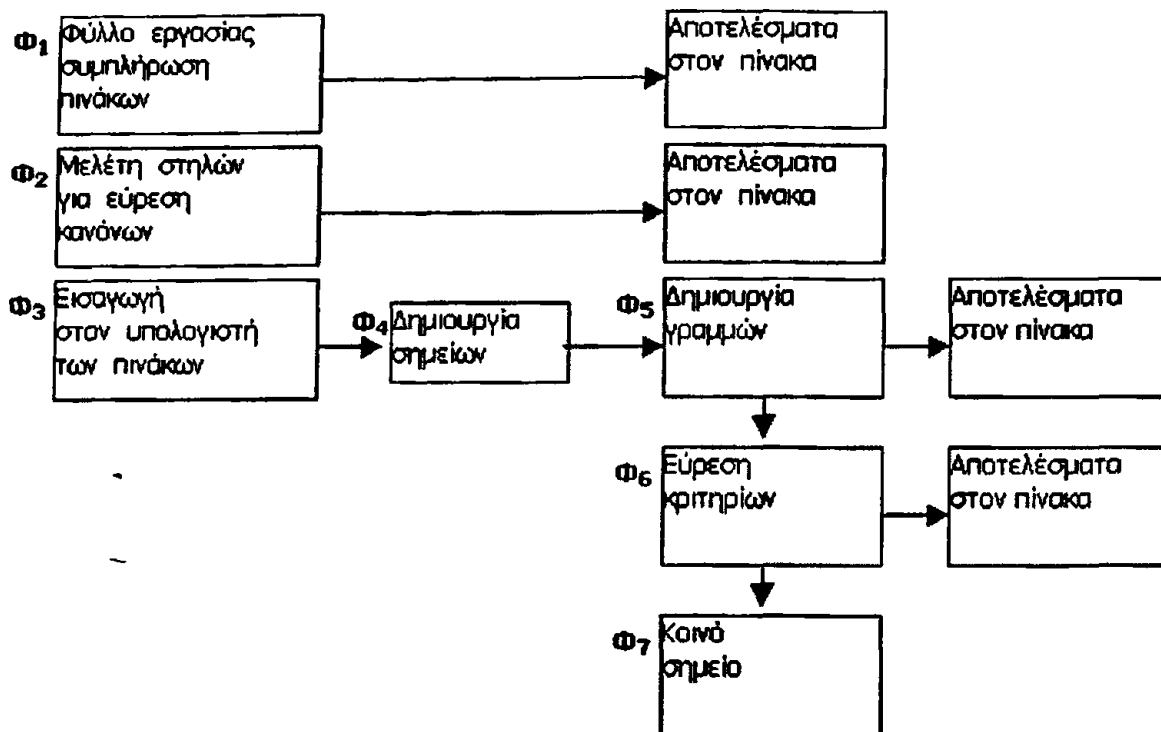
έγινε η συμπλήρωση. Αμέσως μετά ζητά από μία ομάδα, η οποία έχει συμπληρώσει σωστά τους πίνακες, να ανακοινώσει τα αποτελέσματα τα οποία καταγράφονται και στον πίνακα.

Φ2) Ο καθηγητής ζητά από τους μαθητές να σκεφτούν πάνω στον τρόπο που συμπλήρωσαν τους πίνακες ώστε να φτάσουν μόνοι τους, αν είναι δυνατόν, στο συμπέρασμα ότι στον πρώτο πίνακα ο κανόνας ήταν $y = 20x+8$ ενώ στον δεύτερο $y=10x$. Στην περίπτωση που οι ομάδες δεν καταφέρουν να φτάσουν σε κάποια από τις δυο σχέσεις ο καθηγητής αναβάλλει την δραστηριότητα αυτή λέγοντας στους μαθητές ότι αυτό θα γίνει μέσω του υπολογιστή.

Φ3) Φ4) Φ5) Γίνεται εισαγωγή των δεδομένων στον υπολογιστή από τον υπεύθυνο για την εργασία αυτή σε κάθε ομάδα. Στο τέλος κάθε φάσης ο καθηγητής σημειώνει στον πίνακα της αίθουσας την εικόνα που θα πρέπει να έχει κάθε οθόνη.

Φ6) Εδώ οι μαθητές συζητούν για τα κριτήρια που έχουν προκύψει ώστε να καταλήξουν στη συσχέτιση των γραφικών παραστάσεων.

Φ7) Το κοινό σημείο των δύο ευθειών ζητείται να προσδιοριστεί από το γράφημα. Εδώ ο καθηγητής καλεί τις ομάδες να σκεφτούν και άλλον τρόπο, εκτός του γραφήματος, για τον υπολογισμό του σημείου τομής. Η παρατήρηση ότι στο κοινό σημείο ο λογαριασμός είναι ο ίδιος και για τις δυο εταιρείες οδηγεί στη λύση ενός συστήματος. Σχηματικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι φάσεις για την υλοποίηση της δραστηριότητας είναι οι παρακάτω:



9. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Η αξιολόγηση των μαθητών αλλά και της όλης δραστηριότητας θα γίνει μέσα από ένα φύλλο αξιολόγησης μέσα από το οποίο θα έχει τη δυνατότητα ο διδάσκων να ελέγξει αν η όλη διαδικασία απέδωσε τα αναμενόμενα αποτελέσματα

Φύλλο αξιολόγησης.

Ερώτηση 1η (5 μονάδες)

Ποιοι από τους παρακάτω πίνακες μεταβολών παριστάνουν ποσά x και y των οποίων η σχέση έχει γραφική παράσταση μία ευθεία.

x	y
-----	-----

x	y
-----	-----

x	y
-----	-----

x	y
-----	-----

x	y
-----	-----

1	-1
2	2
3	-3
4	4
5	-5
6	6

1	3
3	9
5	15
7	21
9	27
11	33

-1	1/2
-2	1
-3	3/2
-4	2
-5	5/2
-6	3

1	-1
2	0
3	1
4	2
5	3
6	4

-1	-2
1	2
2	4
3	6
4	8

α) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας χωρίς τη βοήθεια του Η/Υ (3 μονάδες).

β) Να ελέγξετε την ορθότητα της απάντησής σας μέσω του υπολογιστή. Να εξηγήσετε, εφ' όσον τα αποτελέσματα στον Η/Υ συμφωνούν με αυτά της ερώτησης

α), την ορθότητα των απαντήσεων που έχετε δώσει στο α) (2 μονάδες).

Ερώτηση 2η (5 μονάδες)

Σε όσους από τους παραπάνω πίνακες η σχέση μεταξύ των x και y έχει γραφική παράσταση με ευθεία να δώσετε τη σχέση που συνδέει τα x και τα y .

α) Χωρίς τη χρήση του υπολογιστή (1 μονάδα για κάθε πίνακα).

β) Με τη χρήση του υπολογιστή (2 μονάδες).

Ερώτηση 3η (5 μονάδες)

Ποιες από τις σχέσεις της 2ης ερώτησης είναι αύξουσες συναρτήσεις και ποιες φθίνουσες; Ποιες διέρχονται από την αρχή των αξόνων και ποιες όχι;

α) Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας χωρίς τη χρήση υπολογιστή(3 μονάδες).

β) Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις με τη χρήση του υπολογιστή(2 μονάδες).

Ερώτηση 4η (5 μονάδες)

Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων που είναι ευθείες.

α) Χωρίς τη χρήση υπολογιστή (3 μονάδες).

β) Με τη χρήση του υπολογιστή (2 μονάδες).

7.3 Δραστηριότητες του PISA

7.3.1 Τι είναι το PISA

Το πρόγραμμα PISA (Programme for International Student Assessment) είναι μία από τις μεγάλες εκπαιδευτικές έρευνες που διοργανώνει ο ΟΟΣΑ (Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης) με τη συμμετοχή πολλών χωρών από ολόκληρο τον κόσμο. Στόχος της συγκεκριμένης έρευνας είναι να διερευνηθεί η ικανότητα των δεκαπεντάχρονων μαθητών στο χειρισμό προβλημάτων που σχετίζονται με τα Μαθηματικά, τη Γλώσσα και τις Φυσικές Επιστήμες.

Ο διαγωνισμός PISA στις φυσικές επιστήμες αξιολογεί την ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί την επιστημονική γνώση, να βγάζει συμπεράσματα τα οποία να βασίζονται στην επιστήμη, έτσι ώστε να κατανοεί τον φυσικό κόσμο που το περιβάλλει και να συμβάλει στη λήψη των αποφάσεων για τις αλλαγές που η ανθρώπινη δραστηριότητα επιφέρει σε αυτό. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 400.000 15χρονους μαθητές στις 30 χώρες του ΟΟΣΑ και σε 27 ακόμα χώρες. Η Ελλάδα συμμετείχε με 192



σχολεία και 4.800 μαθητές.

Η Ελλάδα είναι κάτω από το μέσο όρο και στις τρεις κατηγορίες, επιστήμη, κατανόηση κειμένου, και μαθηματικά. Οι επιδόσεις των 15χρονων Ελλήνων μαθητών στον εκπαιδευτικό διαγωνισμό PISA του (ΟΟΣΑ), που πραγματοποιήθηκε το 2006 κατέταξαν την Ελλάδα στην 38η θέση στον τομέα των φυσικών επιστημών - εκεί όπου έδωσε βάρος ο περυσινός διαγωνισμός. Μάλιστα, η χώρα μας οπισθοχώρησε σε σχέση με την κατάταξή της στους διαγωνισμούς του 2000 και του 2003. Η Ελλάδα στον τομέα των φυσικών επιστημών κατετάγη 38η σε σύνολο 57 χωρών που συμμετείχαν. Ο διαγωνισμός γίνεται κάθε τρία χρόνια, με αρχή το 2000. Το 2003 η Ελλάδα ήταν στην 30η θέση σε σύνολο 40 χωρών, ενώ στον διαγωνισμό του 2000 στην 25η θέση σε σύνολο 31 χωρών.

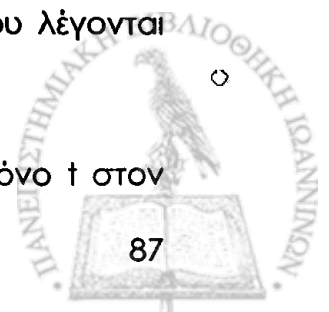
7.3.2 Ασκήσεις του PISA στις Συναρτήσεις

Οι παρακάτω ασκήσεις αποτελούν μέρος αυτών που δόθηκαν από το PISA στους μαθητές, το Δεκέμβρη του 2006 για το μάθημα των Μαθηματικών. Από αυτές επιλέχθηκαν εκείνες που αφορούν εξισώσεις, συναρτήσεις, λόγους, αναλογίες. Μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι αυτές αποτελούν το μεγαλύτερο μέρος του συνόλου των μαθηματικών ασκήσεων, γεγονός που φανερώνει την αξία των ενοτήτων αυτών για τη διδακτική διαδικασία.

1^η άσκηση: λειχήνες

Αποτέλεσμα της ζέστης είναι ότι ο πάγος από κάποια βράχια λιώνει. Δώδεκα χρόνια μετά το λιώσιμο του πάγου αναπτύσσονται πάνω στα βράχια φυτά που λέγονται λειχήνες, σε κυκλικό σχήμα.

Η σχέση ανάμεσα στη διάμετρο d αυτού του κύκλου σε mm και τον χρόνο t στον



οποίο δημιουργείται η λειχήνα από όταν ο πάγος εξαφανίζεται, δίνεται από τη συνάρτηση: $d = 7.0 \times \sqrt{t - 12}$ για $t \geq 12$

Ερώτηση 1^η

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω συνάρτηση να υπολογίσετε τη διάμετρο της λειχήνας 16 χρόνια μετά την εξαφάνιση του πάγου.

Στόχος 1^{ης} ερώτησης

Να εξεταστεί αν οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν τη συνάρτηση για να υπολογίσουν μια αριθμητική τιμή.

Σωστή απάντηση

$$d = 7.0 \times \sqrt{16 - 12} = 14\text{mm}$$

Πιθανά λάθη

A) $d = 7.0 \times \sqrt{16 - 12} = 16$ (σωστό σκεπτικό, λάθος αποτέλεσμα)

B) $d = 7.0 \times \sqrt{16 - 12} = 7\sqrt{4}$ (ελλιπής απάντηση)

Ερώτηση 2^η

Η Άννα μέτρησε τη διάμετρο από κάποια λειχήνα και τη βρήκε 35mm. Πόσα χρόνια πριν είχε εξαφανιστεί ο πάγος σ' αυτό το σημείο;

Στόχος 2^{ης} ερώτησης

Να εξεταστεί αν οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν τη συνάρτηση για να υπολογίσουν μια αριθμητική τιμή



Σωστή απάντηση

$$35 = 7 \times \sqrt{t - 12}$$

$$5 = \sqrt{t - 12}$$

$$25 = t - 12$$

$$t = 37 \text{ χρόνια}$$

Πιθανά λάθη

A) $35/7=5$

$$5^2=25$$

$25+12=37$ (σωστή απάντηση, λάθος αλγεβρική αναπαράσταση)

B) $35=7 \times \sqrt{t - 12}$

$$35^2=7^2 \times t - 12 \text{ (έλλειψη παρενθέσεων)}$$

$$49t=1237$$

$$t=25$$

Γ) $35=7 \times \sqrt{t - 12}$

$$5=\sqrt{t - 12}$$

$$25=t^2-12^2 \text{ (λάθος ιδιότητες δυνάμεων)}$$

$$t=13$$

Δ) $35=7 \times \sqrt{t - 12}$

$$5=\sqrt{t - 12}$$

$$5=\sqrt{t}-\sqrt{12} \text{ (λάθος ιδιότητες ριζών)}$$

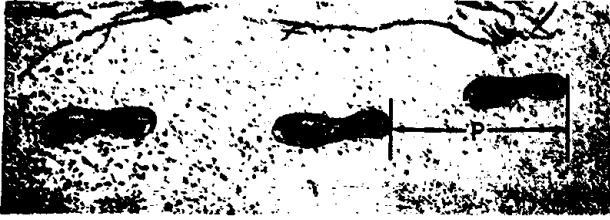
Ε) $35=7 \times \sqrt{t - 12}$

$$28=\sqrt{t - 12}$$

$$784=t-12 \text{ (λάθος σειρά πράξεων)}$$

$$t=796$$

2^η άσκηση: περπάτημα



Η παραπάνω εικόνα δείχνει τις πατημασιές ενός άντρα που περπατάει. Με P συμβολίζεται η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών βημάτων. Για τους άντρες ο τύπος $n/P=140$ δίνει τη σχέση μεταξύ του αριθμού βημάτων ανά λεπτό n και του μήκους του βήματος P .

Ερώτηση 1^η

Αν η σχέση αυτή εφαρμόζεται στο περπάτημα του Γιάννη και ο Γιάννης κάνει 70 βήματα ανά λεπτό ποια είναι η απόσταση μεταξύ δυο βημάτων του Γιάννη;

Σωστή απάντηση

$$70/P=140$$

$$70=140 P$$

$$P=1/2 \mu.$$

Πιθανά λάθη

$$A) 70/P=140$$

$$70=140 P$$

$P=2$ (σωστή διαδικασία, λάθος τελευταία πράξη)

Ερώτηση 2^η

Ο Πέτρος ξέρει ότι το βήμα του έχει μήκος 0.80 μέτρα. Υπολογίστε την ταχύτητα του Πέτρου σε μέτρα ανά λεπτό και σε χιλιόμετρα ανά ώρα.

Σωστή απάντηση

$$n=140 \times 0.80=112$$

Ανά λεπτό περπατάει $112 \times 0.80=89.6$ μέτρα

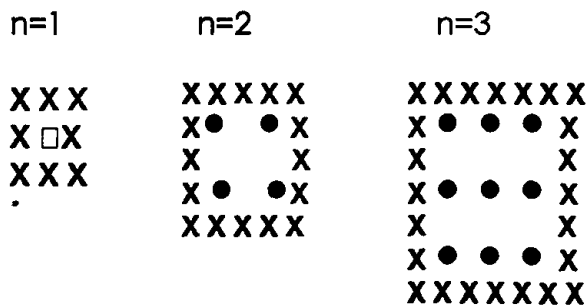
Η ταχύτητά του είναι 89.6 m/min ή 5.38 km/h

Πιθανά λάθη

Αφορούν είτε την πράξη με δεκαδικούς ή την λανθασμένη απάντηση 112 m/min

3^η άσκηση: μήλα

Ένας αγρότης φυτεύει μηλιές σε ένα τετράγωνο χωράφι. Για να προστατέψει τις μηλιές από τον αέρα φυτεύει γύρω-γύρω κωνοφόρα δέντρα. Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα από τις μηλιές και τα κωνοφόρα ανάλογα με τις σειρές η των μηλιών.



X=κωνοφόρα

□=μηλιές

Ερώτηση 1^η

Συμπληρώστε τον πίνακα:

n	Μηλιές	Κωνοφόρα
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

Στόχος 1^{ης} ερώτησης

Υπολογισμός συνάρτησης από δεδομένες σχέσεις αριθμών.

Σωστή απάντηση

n	Μηλιές	Κωνοφόρα
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

Πιθανά λάθη

Να δοθούν λανθασμένοι αριθμοί από τη δυσκολία εντοπισμού της συνάρτησης.

Ερώτηση 2^η

Οι παρακάτω τύποι δίνουν τους αριθμούς μηλιών και κωνοφόρων όπου n οι σειρές των μηλιών

$$\text{Μηλιές} = n^2$$

$$\text{Κωνοφόρα} = 8n$$

Υπάρχει μια τιμή του n για την οποία οι μηλιές είναι ίσες με τα κωνοφόρα. Μπορείτε να τη βρείτε; (το πρόβλημα οδηγείται σε επίλυση εξίσωσης)

Σωστή απάντηση

$$n^2 = 8n$$

$$n^2 - 8n = 0$$

$$n(n - 8) = 0$$

$$n = 0 \text{ ή } n = 8$$

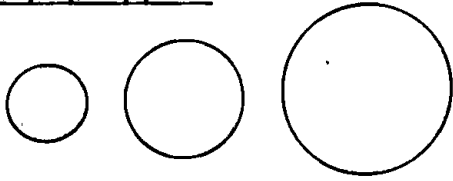
Πιθανά λάθη

A) $n = 0$ και $n = 8$

B) $n = 0$

Γ) $n^2 = 8$

4^η άσκηση: κέρματα



Οι ερευνητές έχουν βρει ότι το ιδανικό νόμισμα ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

- Η διάμετρος των κερμάτων δεν μπορεί να είναι μικρότερη από 15mm και ούτε μεγαλύτερη από 45mm.
- Με δεδομένο ένα νόμισμα η διάμετρος του επόμενου πρέπει να είναι τουλάχιστον 30% μεγαλύτερη.
- Η μηχανή που κόβει νομίσματα μπορεί να φτιάξει μόνο με ακέραιο αριθμό διαμέτρου. (πχ 17mm επιτρέπεται, 17.3mm δεν επιτρέπεται)

Ερώτηση 1^η

Ζητείται να σχεδιάσετε μια σειρά από κέρματα που ικανοποιούν τις παραπάνω απαιτήσεις. Ξεκινήστε από ένα κέρμα διαμέτρου 15mm και η σειρά να περιέχει όσα πιο πολλά νομίσματα γίνεται. Ποιες θα είναι οι διαμέτροι των κερμάτων σας;

Στόχος 1^{ης} ερώτησης

Κατανόηση και χρήση πολύπλοκων πληροφοριών για να γίνουν υπολογισμοί.

Σωστή απάντηση

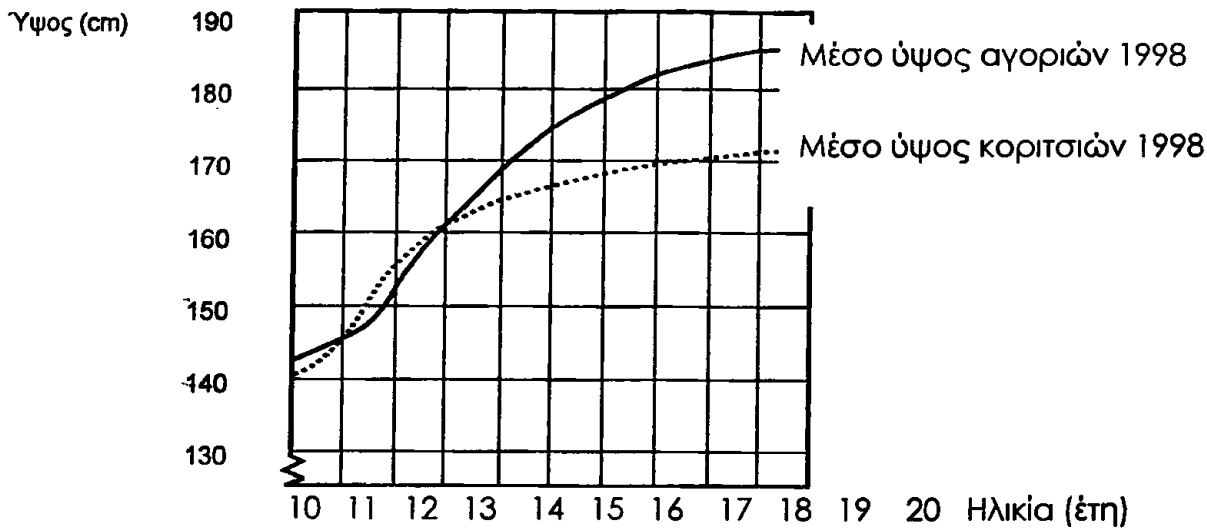
15-20-26-34-45

Πιθανά λάθη

Να δοθούν απαντήσεις που δεν ικανοποιούν όλα τα κριτήρια.

5^η άσκηση: Μεγαλώνοντας

Το 1998 το μέσο ύψος αγοριών και κοριτσιών στην Νορβηγία φαίνεται στο παρακάτω γράφημα:



Ερώτηση 1^η

Από το 1980 το μέσο ύψος των 20χρονων κοριτσιών έχει αυξηθεί κατά 2.3 cm και έχει φτάσει στα 170.6 cm. Ποιο ήταν το μέσο ύψος ενός 20χρονου κοριτσιού το 1980;

Ερώτηση 2^η

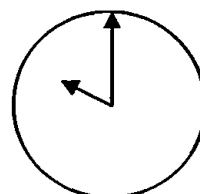
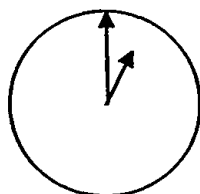
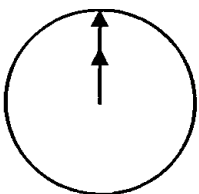
Σύμφωνα με το γράφημα, κατά τη διάρκεια ποιάς περιόδου της ζωής τους τα κορίτσια είναι ψηλότερα από τα αγόρια της ίδιας ηλικίας;

Πιθανά λάθη

Λανθασμένη ανάγνωση του διαγράμματος

6^η άσκηση

Ο Μαρκ από το Σύνδεϋ και ο Χανς από το Βερολίνο επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω internet. Για να βρουν την ιδανική ώρα για να επικοινωνούν, ο Μαρκ κοιτάξε σε έναν χάρτη με τις ώρες του κόσμου.



Γκρίνουιτς 12 τα μεσάνυχτα
10:00 πμ

Βερολίνο 1:00 πμ

Σύδνεϋ

Ερώτηση 1η

Όταν στο Σύδνεϋ είναι 7:00 πμ τι ώρα είναι στο Βερολίνο;

Στόχος ερώτησης

Να εξεταστεί αν μπορούν οι μαθητές να κατανοήσουν τη συναρτησιακή σχέση μεταξύ δυο μεταβλητών

2η ερώτηση

Ο Μαρκ και ο Χανς δεν μπορούν να κάνουν chat μεταξύ 9:00πμ και 4:30μμ της τοπικής τους ώρας μιας και πηγαίνουν σχολείο. Επίσης δεν μπορούν από τις 11:00 μμ μέχρι τις 7:00 πμ

γιατί κοιμούνται. Πότε θα ήταν μια καλή ώρα για να συνομιλήσουν; Συμπληρώστε τον πίνακα.

Μέρος	Ώρα
Σύδνεϋ	
Βερολίνο	

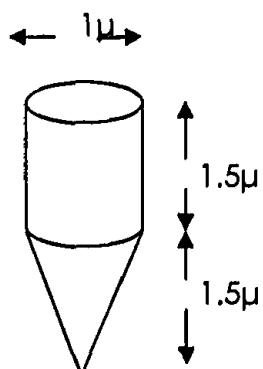
Σωστή απάντηση

Οποιαδήποτε ικανοποιεί τις 9 ώρες διαφορά και είναι μέσα στα επιτρεπτά διαστήματα.

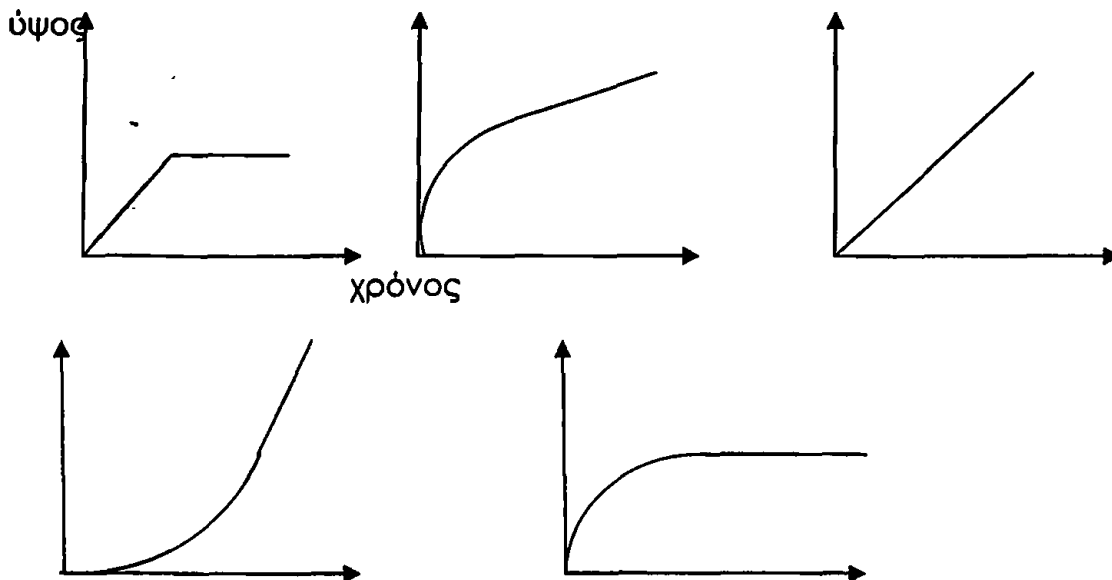
7η άσκηση: αντλία νερού

1η ερώτηση

Μια αντλία νερού έχει σχήμα και διαστάσεις όπως φαίνονται στο σχήμα. Στην αρχή είναι άδεια και στη συνέχεια γεμίζει με νερό με $1\text{lt}/\text{sec}$.



Ποια από τις επόμενες γραφικές παραστάσεις δείχνει πως μεταβάλλεται το ύψος του νερού σε συνάρτηση με το χρόνο;



Στόχος ερώτησης

Η αναγνώριση συνάρτησης και γραφικής παράστασης από δεδομένα αριθμητικά.

Σωστή απάντηση

Η δεύτερη

8^η άσκηση: πληρωμή ανάλογα με το εμβαδό

Οι ένοικοι μιας πολυκατοικίας αποφασίζουν να αγοράσουν από κοινού την πολυκατοικία στην οποία μένουν. Θα βάλουν όλοι μαζί χρήματα ανάλογα με το εμβαδό του διαμερίσματος του καθενός. Για παράδειγμα ένας κάτοικος που μένει σε διαμέρισμα που καλύπτει το $\frac{1}{5}$ της συνολικής επιφάνειας της πολυκατοικίας θα πληρώσει το $\frac{1}{5}$ του συνολικού κόστους της πολυκατοικίας.

Ερώτηση 1^η

Επιλέξτε σωστό ή λάθος για τις παρακάτω προτάσεις:

- Κάποιος που μένει στο μεγαλύτερο διαμέρισμα θα πληρώσει περισσότερα χρήματα για κάθε τμ του διαμερισμάτος του από κάποιον που μένει σε μικρότερο διαμέρισμα.
- Αν γνωρίζουμε τα εμβαδά δυο διαμερισμάτων και την τιμή του ενός εκ των δύο μπορούμε να υπολογίσουμε και την τιμή του άλλου.
- Αν γνωρίζουμε την τιμή του κτιρίου και το ποσό που θα πληρώσει κάθε ιδιοκτήτης τότε μπορούμε να υπολογίσουμε και το συνολικό εμβαδόν των διαμερισμάτων.
- Αν η συνολική τιμή του κτιρίου μειωθεί κατά 10%, τότε κάθε ιδιοκτήτης θα πληρώσει 10% λιγότερο.

Στόχος 1^{ης} ερώτησης

Να εξεταστεί αν κατέχουν οι μαθητές την έννοια των ανάλογων ποσών και τις ιδιότητες των αναλογιών.

Σωστή απάντηση

Λ, Σ, Λ, Σ

Ερώτηση 2^η

Σε μια πολυκατοικία με τρία διαμερίσματα , το μεγαλύτερο διαμέρισμα 1 έχει εμβαδό 95τμ. Τα διαμερίσματα 2 και 3 είναι αντίστοιχα 85τμ και 70τμ. Η τιμή της πολυκατοικίας είναι 300000 zeds. Πόσο πρέπει να πληρώσει ο ιδιοκτήτης του διαμερισματος 2;

Στόχος 2^{ης} ερώτησης

Μερισμός σε μέρη ανάλογα

Σωστή απάντηση

$300000:250=1200zeds$ για κάθε τμ. Άρα το διαμέρισμα 2 θα κοστίζει $1200 \times 85=102000zeds$.



Πιθανά λάθη

Ελλιπείς ή λανθασμένες απαντήσεις.

9^η άσκηση: Σεισμός

Ένα ντοκιμαντέρ ασχολήθηκε με το πόσο συχνά γίνονται σεισμοί και με το αν αυτοί μπορούν να είναι προβλέψιμοι. Ένας γεωλόγος ισχυρίστηκε ότι «Στα επόμενα 20 χρόνια η πιθανότητα να συμβεί ένας σεισμός στην πόλη Zed είναι $2/3$ ». Ποια από τις επόμενες προτάσεις αντιπροσωπεύει τον ισχυρισμό του γεωλόγου;

A) $2/3 \times 20 = 13.3$, μέσα σε 13 με 14 χρόνια από τώρα θα γίνει σεισμός στην πόλη Zed.

B) Το $2/3$ είναι μεγαλύτερο από το $1/2$ άρα είναι σίγουρο ότι τα επόμενα 20 χρόνια θα γίνει σεισμός στην πόλη Zed.

Γ) Η πιθανότητα να γίνει σεισμός στην πόλη Zed τα επόμενα 20 χρόνια είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να μη γίνει.

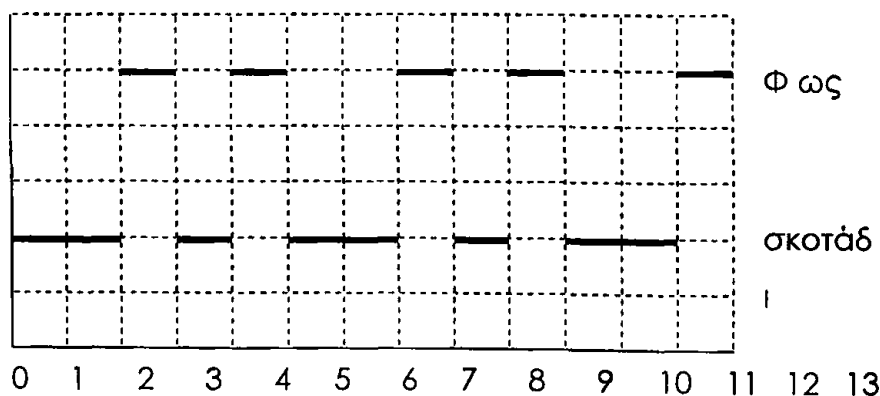
Δ) Δεν μπορούμε να αποφανθούμε τι θα γίνει γιατί κανένας δεν μπορεί να είναι σίγουρος πότε θα συμβεί ένας σεισμός.

Σωστή απάντηση

Γ

9^η ερώτηση: Ο φάρος

Ένας φάρος αναβοσβήνει ανά συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα με ειδικό μηχανισμό. Κάθε φάρος έχει το δικό του μηχανισμό. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται ο ρυθμός που αναβοσβήνει ένας συγκεκριμένος φάρος.



Ερώτηση 1^η

Ποια από τις παρακάτω θα μπορούσε να είναι η χρονική περίοδος στην οποία αναβοσβήνει ο φάρος;

A) 2 sec B) 3 sec Γ) 5 sec Δ) 12 sec

Σωστή απάντηση

Γ

Ερώτηση 2^η

Για πόσα δευτερόλεπτα σε διάρκεια ενός λεπτού είναι αναμμένος ο φάρος;

A) 4 sec B) 12 sec Γ) 20 sec Δ) 24 sec

Σωστή απάντηση

Δ

10^η ερώτηση: Χτύποι καρδιάς

Για λόγους υγείας οι άνθρωποι πρέπει να σταματούν για λίγο κάποιες δραστηριότητες προκειμένου οι χτύποι της καρδιάς τους να επανέρχονται σε καλό επίπεδο. Για πολλά χρόνια η σχέση μεταξύ των μέγιστων χτύπων της καρδιάς και της ηλικίας ενός ατόμου δίνονταν από τη συνάρτηση: $M=220-A$, όπου M οι μέγιστοι χτύποι και A η ηλικία του ατόμου. Πρόσφατες έρευνες δείχνουν ότι αυτή η συνάρτηση ισχύει διαφορετικά: $M=208-(0.7 \times A)$.

Ερώτηση 1^η

Ένα άρθρο εφημερίδας αναφέρει: «Το αποτέλεσμα χρήσης της νέας συνάρτησης έναντι της παλιάς είναι ότι οι μέγιστοι χτύποι της καρδιάς για τους νέους ανθρώπους μειώνονται ενώ για τους μεγαλύτερους σε ηλικία αυξάνονται.» Από ποια ηλικία οι μέγιστοι χτύποι αυξάνονται ως αποτέλεσμα της νέας συνάρτησης;

Στόχος 1^{ης} ερώτησης

Αξιολόγηση της ικανότητας να συσχετίζουν έννοιες

Σωστή απάντηση



$220 - A = 208 - 0.7 \times A$ με αποτέλεσμα 40, έτσι άνθρωποι πάνω από τα 40 θα έχουν υψηλότερους μέγιστους χτύπους καρδιάς σύμφωνα με την καινούρια συνάρτηση.

Ερώτηση 2^η

Η συνάρτηση $M = 208 - (0.7 \times A)$ χρησιμοποιείται επίσης για να δείξει πότε η φυσική άσκηση είναι αποτελεσματική. Έρευνες έχουν δείξει ότι η φυσική άσκηση είναι πιο αποτελεσματική όταν οι χτύποι της καρδιάς είναι στο 80% των μέγιστων επιτρεπτών χτύπων της καρδιάς. Γράψτε την συνάρτηση υπολογισμού των χτύπων της καρδιάς που αποδίδουν την πιο αποτελεσματική φυσική κατάσταση.

Σωστή απάντηση

$$M = 166 - 0.56 \times A$$

$$M = 166 - 0.6 \times A$$

$$M = 166 - 0.56 \times A$$

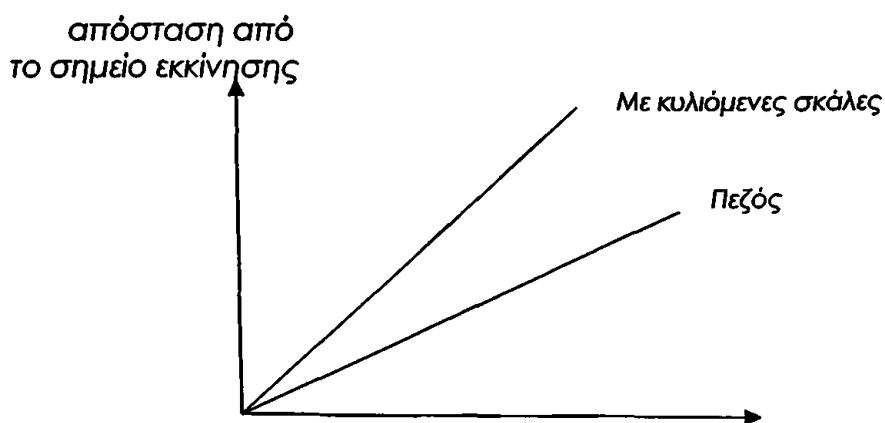
$$M = 166 - 0.6 \times A$$

$$M = (208 - 0.7A) \times 0.8.$$

11^η ερώτηση: Κυλιόμενες σκάλες

Ερώτηση 1^η

Η παρακάτω γραφική παράσταση απεικονίζει τη σύγκριση μεταξύ της κίνησης με τις κυλιόμενες σκάλες και της κίνησης ενός πεζού δίπλα στην κυλιόμενη σκάλα.

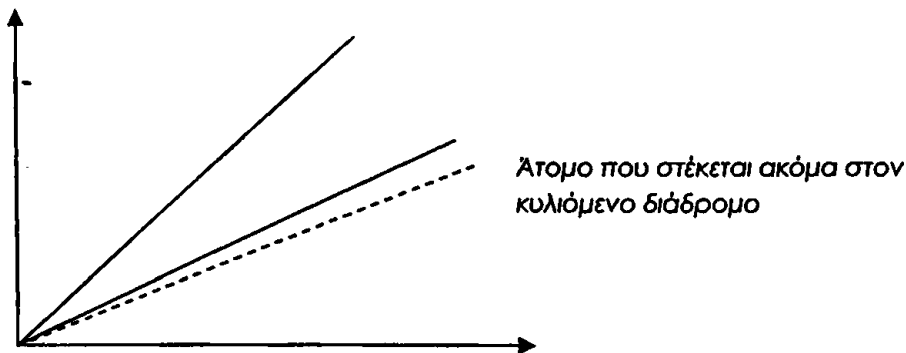


χρόνος

Ερώτηση 1^η

Αν υποθέσουμε ότι, στην ανωτέρω γραφική παράσταση, ο ρυθμός περπατήματος είναι σχεδόν ίδιος και για τα δύο άτομα, προσθέστε μια γραμμή στη γραφική παράσταση που θα αντιπροσώπευε την απόσταση συναρτήσει του χρόνου για ένα άτομο που στέκεται ακόμα στην κυλιόμενη σκάλα.

Σωστή απάντηση



12^η άσκηση: Το καλύτερο αυτοκίνητο

Ερώτηση 1^η

Ένα περιοδικό αυτοκινήτων χρησιμοποιεί ένα σύστημα εκτίμησης για να αξιολογήσει τα νέα αυτοκίνητα, και δίνει το βραβείο «του αυτοκινήτου του έτους» στο αυτοκίνητο με το υψηλότερο συνολικό αποτέλεσμα. Πέντε νέα αυτοκίνητα αξιολογούνται, και οι εκτιμήσεις τους παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Αυτοκίνητο	Χαρακτηριστικά ασφάλειας (S)	Αποδοτικότητα καυσίμων (F)	Εξωτερική εμφάνιση (E)	Εσωτερικά χαρακτηριστικά (T)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
ΚΚ	3	2	3	2

Η βαθμολογία μεταφράζεται ως εξής:

3 πόντοι = Άριστα

2 πόντοι = καλά

1 πόντος = μέτρια

Ερώτηση 1^η

Για να υπολογίσει το συνολικό σκορ για κάθε αυτοκίνητο, το περιοδικό χρησιμοποιεί τον ακόλουθο κανόνα: $\text{Σύνολο} = (3 \times S) + F + E + T$. Υπολογίστε το συνολικό σκορ για το αυτοκίνητο «Ca».

Σωστή απάντηση

15

Ερώτηση 2^η

Ο κατασκευαστής του αυτοκινήτου «Ca» σκέφτηκε ότι ο κανόνας για το συνολικό αποτέλεσμα ήταν άδικος. Γράψτε κάτω έναν κανόνα για το συνολικό αποτέλεσμα έτσι ώστε το αυτοκίνητο «Ca» να είναι ο νικητής. Ο κανόνας σας πρέπει να περιλάβει και τις τέσσερις από τις μεταβλητές, και πρέπει να γράψετε κάτω τον κανόνα σας με να συμπληρώσετε τους θετικούς αριθμούς στα τέσσερα διαστήματα στην παρακάτω συνάρτηση.

σύνολο = \times S + \times F + \times E + \times T.

8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η έννοια της Συνάρτησης αποτελούσε και αποτελεί μια από τις δυσκολότερες έννοιες που διδάσκονται ιδιαίτερα στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Έχει διαπιστωθεί από έρευνες ότι οι μαθητές του Γυμνασίου δυσκολεύονται να διατυπώσουν έναν σαφή ορισμό για τη Συνάρτηση, συγχέουν εξισώσεις με συναρτήσεις, δυσκολεύονται με την ποικιλία αναπαραστάσεων που συνδέονται με την έννοια της Συνάρτησης. Ένας παράγοντας που συμβάλλει στο γεγονός αυτό είναι ότι κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, οπότε γίνεται και η μετάβαση από την αριθμητική στην Άλγεβρα, οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με νέες έννοιες, σύμβολα και ορισμούς που δυσκολεύουν την κατανόηση τέτοιων εννοιών.

Βέβαια με την ένταξη των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην εκπαιδευτική διαδικασία γίνεται μια προσπάθεια με τη βοήθεια κατάλληλων εκπαιδευτικών λογισμικών ο μαθητής να αναπτύξει νοητά και γνωστικά σχήματα ώστε οι μαθηματικές έννοιες και ειδικότερα η έννοια της συνάρτησης μέσω των πολλών μορφών αναπαραστάσεων, να γίνουν βίωμα και να ενσωματωθούν στο μαθητή αναγνωρίζοντας και κατανοώντας τις διαδικασίες που ακολουθούνται.

Σε ότι αφορά τον τρόπο διδασκαλίας, παρόλο που τα παραδοσιακά μοντέλα διδασκαλίας θεωρούνται ξεπερασμένα, ωστόσο δεν απορρίπτονται γιατί υποστηρίζονται από κάποιες ενότητες των σχολικών εγχειριδίων. Παράλληλα χρησιμοποιούνται στην διδακτική διαδικασία οι αρχές της Ρεαλιστικής Εκπαίδευσης, οι οποίες συμφωνούν κατά ένα μεγάλο μέρος με τους σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως αυτοί προσδιορίζονται από το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών. Ενθαρρύνεται η ενεργή συμμετοχή του μαθητή στην

οικοδόμηση της γνώσης και τονίζεται η σημασία της δραστηριότητας στη μαθησιακή διαδικασία.

Αναλύοντας και συγκρίνοντας τα σχολικά εγχειρίδια ως προς τον τρόπο που παρουσιάζουν τις μαθηματικές ιδέες, την διδακτική πρακτική που υποστηρίζουν και το είδος των ασκήσεων που περιέχουν συμπεραίνουμε ότι η διδακτέα ύλη τόσο των παλαιών όσο και των νέων βιβλίων, με κάποιες διαφοροποιήσεις, είναι διαμορφωμένη με τέτοιο τρόπο ώστε η διδασκαλία των συναρτήσεων να γίνεται στο σημείο όπου οι μικροί μαθητές έχουν τις προαπαιτούμενες γνώσεις για να τις κατανοήσουν και επαναλαμβάνεται η διαδικασία αυτή σε όλες τις τάξεις του Γυμνασίου με την προσθήκη κάθε φορά κάποιων νέων στοιχείων.

Η χρήση της ιστορίας σαν διδακτικό εργαλείο, τόσο στην Άλγεβρα όσο και στα μαθηματικά γενικότερα, στο Δημοτικό σχολείο μπορεί να προκαλέσει προσωπική συμμετοχή των μαθητών στο μάθημα αλλά και σύγχυση πολλές φορές, ενώ στο Γυμνάσιο οι μαθητές ανταποκρίνονται πιο θετικά καθώς μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα από την καθημερινή ζωή.

9. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κολέζα Ευγενία: 2000, Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών, εκδ. Leader Books

Κολέζα Ευγενία: 2000, Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, εκδ. Leader Books

Τουμάσης Μπάμπης: 2000, Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών, εκδ. Gutenberg

Πατρώνης Τάσος, Σπανός Δημήτρης: 2000, Σύγχρονες Θεωρίες και έρευνες στη Μαθηματική παιδεία, εκδ. Γ. Α. Πνευματικού

Ραβάνης Κώστας: 2003, Εισαγωγή στην Διδακτική των Φυσικών Επιστημών, εκδ. Νέων Τεχνολογιών

Ράπη Μαρία: 2002, Τα λάθη των μαθητών και ο ρόλος τους στη διαδικασία της Μάθησης, εκδ. Gutenberg

Peter Lloyd (μετ: Ευαγγελία Γαλανάκη): 1998, Γνωστική και Γλωσσική Ανάπτυξη, εκδ. Ελληνικά Γράμματα

Πρακτικά ΣΤ' Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής επιστήμης και Παιδείας

Πρακτικά 3ου και 4ου Συνεδρίου ΕΤΠΕ, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πρακτικά 3ου Συνεδρίου, ΤΠΕ στην εκπαίδευση, Σύρος

Σχολικά Εγχειρίδια Μαθηματικών και βιβλία το καθηγητή των τάξεων ΣΤ' Δημοτικού, Α', Β', Γ' Γυμνασίου (νέες και παλιές εκδόσεις)

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ), Παιδαγωγικό
Ινστιτούτο

Barbara Ann van Ameron: 2002, Reinvention of Early Algebra, Developmental
research on the transition from Arithmetic to Algebra

Ιστοσελίδες

<http://www.oecd.org/dataoecd/14/10/38709418.pdf>

<http://users.otenet.gr/~givla1/Wellcomepage.htm>

<http://www.kee.gr>

<http://users.sch.gr/kassetas/ed0math5Alg.htm>

<http://www.pi-schools.gr>

http://athena.pi.ac.cy/nea_didaktika_paketa2/mathematics/index.php?dir

<http://www.epyna.gr/modules.php?name=News&file=article&sid=1372>

http://www.schools.ac.cy/klimakio/Themata/Mathimatika/neo_yliko_dec07.htm

[http://www.epyna.gr/modules.php?name=News&file=categories&op=newindex&c
atid=12](http://www.epyna.gr/modules.php?name=News&file=categories&op=newindex&c
atid=12)

<http://www.atozteacherstuff.com/>

http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_mathaiou.pdf

<http://www.plefsis.gr/sxedio.htm>