ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
& ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

29
ΜΠΛΕ

ΠΟΛΥΖΩΗ ΑΣΗΜΙΝΑ - ΙΩΑΝΝΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BASU
ΚΑΙ
ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2005

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε το Ακαδημαϊκό έτος 2005 στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Κοσμά Φερεντίνου.

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΚΡΙΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Φερεντίνος Κοσμάς
Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών,
Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)

Καρακώστας Κωνσταντίνος
Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών,
Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Παπαχρήστος Σωτήριος
Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Οργάνωσης και Διαχείρισης
Αγροτικών Εκμεταλλεύσεων, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Στη μητέρα μου Ευαγγελία

Θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες στον κ. Κοσμά Φερεντίνο, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών, του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για την υπόδειξη του θέματος της παρούσας διατριβής, την πολύτιμη βοήθειά του και το χρόνο που αφιέρωσε, σε όλη την προσπάθεια συγγραφής της.

Ευχαριστώ επίσης, τους κ. Κωνσταντίνο Καρακώστα και κ. Σωτήριο Παπαχρήστο, που αποτέλεσαν τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, για τις σημαντικές παρατηρήσεις τους, καθώς και το σύνολο των μελών του Τομέα Πιθανοτήτων Στατιστικής και Επιχειρησιακών Ερευνών, για τη συνεργασία μας κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω την κ. Θεοδώρα Δημητρακοπούλου, υποψήφια Διδάκτορα του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για τη βοήθεια της, κατά τη διάρκεια συγγραφής της παρούσας διατριβής.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στους γονείς μου Νίκο και Ευαγγελία, στον αδερφό μου Μάνθο και στη γιαγιά μου Ασημίνα, που με στήριξαν πνευματικά και υλικά καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, ευχαριστώ τους φίλους μου, που με στήριξαν και μου συμπαραστάθηκαν σε όλη την πορεία για την επίτευξη αυτού του στόχου.

Πολυζώη
Ασημίνα – Ιωάννα
Ιωάννινα 2005

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

Εφαρμογές του θεωρήματος του Basu

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΤΜΗΣΕΩΝ

τ. μ.	τυχαία μεταβλητή
τ. δ.	τυχαίο δείγμα
σ. π.	συνάρτηση πιθανότητας
σ. π. π.	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
α. σ. κ.	αθροιστική συνάρτηση κατανομής
Α. Ο. Ε. Δ.	Αμερόληπτος Ομοιόμορφα Ελάχιστης Διακύμανσης
Ε. Μ. Π.	Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας
κ. π.	κρίσιμη περιοχή

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το θέμα της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής είναι το θεώρημα του Basu, οι Παραλλαγές του και οι εφαρμογές του σε διάφορους τομείς της Στατιστικής Συμπερασματολογίας.

Η διατριβή αποτελείται από τρία κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο, δίνονται βασικές έννοιες και ορισμοί που είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι για την καλύτερη κατανόηση όσων αναφέρονται στα επόμενα κεφάλαια. Γίνεται αναφορά στη Στατιστική επάρκεια και στην πληρότητα των στατιστικών συναρτήσεων και δίνεται ο τρόπος απόδειξής τους μέσω θεωρημάτων και παραδειγμάτων. Ακολουθεί μία μελέτη των εννοιών αυτών σε κατανομές που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια με αποτέλεσμα την διεξαγωγή συμπερασμάτων που διευκολύνουν την απόδειξή τους. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η ancillarity που αποτελεί απαραίτητη γνώση για την κατανόηση και εφαρμογή του θεωρήματος του Basu. Επίσης, γίνεται λόγος για Αμερόληπτους Ομοιόμορφα Ελάχιστης Διακύμανσης (Α. Ο. Ε. Δ.) εκτιμητές και Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Ε. Μ. Π.) και δίνονται ορισμοί και τρόποι εύρεσής τους σε κάθε περίπτωση. Τέλος, γίνεται αναφορά στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων και παρατίθενται βασικά στοιχεία της θεωρίας που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές του τρίτου κεφαλαίου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζεται το θεώρημα του Basu, δίνεται η απόδειξή του και κάποια παραδείγματα ώστε να φανεί η χρησιμότητά του. Στη συνέχεια γίνεται μία μελέτη, εξετάζοντας διάφορα ερωτήματα, με σκοπό τη διατύπωση πιθανών παραλλαγών του θεωρήματος.

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται κάποιες εφαρμογές σε διάφορους τομείς της Στατιστικής, μέσω των οποίων αναδεικνύεται η χρησιμότητα του θεωρήματος του Basu. Αναφέρονται παραδείγματα στη θεωρία κατανομών, στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων με σκοπό τον προσδιορισμό της ακριβούς κατανομής του $-2\ln(\lambda)$, όπου λ ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών και δίνονται κάποιοι τρόποι εύρεσης Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητών με τη χρήση του θεωρήματος, οι οποίοι διευκολύνουν τους υπολογισμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{o}

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο, δίνονται βασικές έννοιες και ορισμοί που είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι για την καλύτερη κατανόηση όσων αναφέρονται στα επόμενα κεφάλαια. Επίσης παρατίθενται ενδεικτικά παραδείγματα, τα οποία θα διευκολύνουν τον τρόπο κατανόησης των εννοιών αυτών.

1.1 <u>Στατιστική Επάρκεια</u>

Η έννοια της επάρκειας είναι θεμελιώδους σημασίας στη Στατιστική Συμπερασματολογία. Χαρακτηρίζει εκείνες τις στατιστικές συναρτήσεις ή εκτιμητές παραμέτρων, που έχουν την ιδιότητα να περιλαμβάνουν όλες τις πληροφορίες σχετικά με τις προς εκτίμηση παραμέτρους οι οποίες περιέχονται στο αρχικό δείγμα. Επίσης, χρησιμοποιείται με σκοπό τη σύμπτυξη των δειγματικών δεδομένων, χωρίς να χάνεται, αν είναι δυνατόν, πληροφορία για την συγκεκριμένη παράμετρο του άγνωστου πληθυσμού, που περιέχεται στο αρχικό δείγμα.

Στην συνέχεια δίνονται ορισμοί του επαρκούς στατιστικού, τρόποι εύρεσης τέτοιων στατιστικών, καθώς και παραδείγματα ώστε να γίνει καλύτερα αντιληπτή η έννοια της επάρκειας.

<u>Ορισμός 1.1</u>

Έστω το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ με σ. π. π. $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ ή σ. π. $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, όπου $\boldsymbol{\Theta}$ ο παραμετρικός χώρος και $\mathbf{T} = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ μια στατιστική συνάρτηση του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}$. Λέμε ότι η $\mathbf{T}$ είναι στατιστικά **επαρκής** (sufficient) για την παράμετρο **θ**, αν η υπό συνθήκη κατανομή του **X**|T = **t** δεν εξαρτάται από το **θ**, για όλες τις τιμές του **t** για τις οποίες ορίζεται η δεσμευμένη κατανομή.

Ορισμός 1.2

Ένα στατιστικό T λέγεται **ελάχιστο επαρκές** (minimal sufficient), αν είναι συνάρτηση οποιουδήποτε άλλου επαρκούς στατιστικού, δηλ. $T = k_t(t(X_1, X_2, \ldots, X_n))$, όπου $t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ οποιοδήποτε άλλο επαρκές στατιστικό.

Ορισμός 1.3

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με σ. π. π. $f(\mathbf{x}, \theta)$ ή σ. π. $p(\mathbf{x}, \theta)$, $\theta \in \Theta$, όπου Θ ο παραμετρικός χώρος. Μια στατιστική συνάρτηση $T = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι **επαρκής** για το θ, εάν και μόνον εάν για κάθε άλλη στατιστική συνάρτηση $U = U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ η κατανομή του $U|T$ είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ.

Για την εύρεση επαρκών στατιστικών βασικό εργαλείο αποτελεί το **Παραγοντικό Θεώρημα των Neyman – Fisher**, που δίνεται στη συνέχεια.

Θεώρημα 1.1 : Παραγοντικό Θεώρημα των Neyman – Fisher

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με σ. π. π. $f(\mathbf{x}, \theta)$ ή σ. π. $p(\mathbf{x}, \theta)$, $\theta \in \Theta$, όπου Θ ο παραμετρικός χώρος. Μια στατιστική συνάρτηση $T = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι επαρκής για την παράμετρο θ, εάν και μόνον εάν η σ. π. π. $f(\mathbf{x}, \theta)$ ή σ. π. $p(\mathbf{x}, \theta)$ του δείγματος μπορεί να γραφεί υπό την μορφή :

$$f(\mathbf{x}, \theta) = g(T(\mathbf{x}), \theta) \cdot h(\mathbf{x})$$

ή

$$p(\mathbf{x}, \theta) = g(T(\mathbf{x}), \theta) \cdot h(\mathbf{x})$$

αντίστοιχα $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\forall\, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, όπου $g(T(\mathbf{x}),\theta)$ είναι μία συνάρτηση που εξαρτάται από το $\mathbf{x}$ μέσω της **T** και $h(\mathbf{x})$ είναι μία άλλη συνάρτηση του $\mathbf{x}$ ανεξάρτητη της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την απόδειξη του θεωρήματος, βλέπε : Casella, G. and Berger, R.L. (1990), σελ. 250. / Ferguson, T.S. (1967), σελ.115.

Ακολουθεί μία σημαντική και ιδιαίτερα χρήσιμη παρατήρηση που αφορά στην έννοια της επάρκειας.

<u>**Παρατήρηση 1.1**</u>

- Αν $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ επαρκής στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο $\boldsymbol{\theta}$ και $\varphi(\boldsymbol{\theta})$ μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του $\boldsymbol{\theta}$, τότε $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ επαρκής στατιστική συνάρτηση για τη $\varphi(\boldsymbol{\theta})$.
- Αν $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ επαρκής στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο $\boldsymbol{\theta}$ και $\mathbf{T}^*(\mathbf{x})$ μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, τότε $\mathbf{T}^*(\mathbf{x})$ επαρκής για την παράμετρο $\boldsymbol{\theta}$.
- Η διάσταση του στατιστικού $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από τη διάσταση της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$.

* Οι έννοιες στατιστικό και στατιστική συνάρτηση, είναι ισοδύναμες.

Θα διευκρινίσουμε τα παραπάνω με παραδείγματα μέσω των οποίων φαίνεται η χρησιμότητα του παραπάνω θεωρήματος.

Παράδειγμα 1.1

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή Poisson με παράμετρο θ. Να βρεθεί ένα επαρκές στατιστικό για την παράμετρο θ.

Είναι : $p(x, \theta) = \dfrac{e^{-\theta} \cdot \theta^x}{x!}, \ x = 0, 1, 2, \ldots \ , \ \theta \geq 0.$

Βάσει του Παραγοντικού Θεωρήματος των Neyman – Fisher (θεώρημα 1.1), έχουμε :

$$p(\mathbf{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^{x}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} = g\,(\mathbf{T}(\mathbf{x}), \theta) \cdot h(\mathbf{x})$$

όπου $g(\mathbf{T}(\mathbf{x}), \theta) = g(\sum_{i=1}^{n} x_i, \theta) = e^{-n\theta} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ και $h(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$.

Άρα : $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ επαρκές στατιστικό για την παράμετρο θ και επίσης το

στατιστικό $\mathbf{T}^*(\mathbf{X}) = \overline{X} = \dfrac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκές για την παράμετρο θ.

(Βάσει της παρατήρησης 1.1)

■

Παράδειγμα 1.2

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Ομοιόμορφη κατανομή $U(0,\theta)$. Να βρεθεί ένα επαρκές στατιστικό για την παράμετρο θ.

Είναι : $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}, 0 \leq x \leq \theta$.

Βάσει του Παραγοντικού Θεωρήματος των Neyman – Fisher (Θεώρημα 1.1), έχουμε :

$$f(\mathbf{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I_{[0,\theta]}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \cdot I_{[0,\theta]}(x_{(n)}) \cdot I_{[0,x_{(n)}]}(x_{(1)})$$

$$= g(\mathbf{T}(\mathbf{x}), \theta) \cdot h(\mathbf{x}),$$

όπου $g(\mathbf{T}(\mathbf{x}), \theta) = g(X_{(n)}, \theta) = \frac{1}{\theta^n} \cdot I_{[0,\theta]}(x_{(n)})$ και $h(\mathbf{x}) = I_{[0,x_{(n)}]}(x_{(1)})$.

Άρα : $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = X_{(n)} = \max_i (X_i)$ επαρκές στατιστικό για την παράμετρο θ.

■

1.2 Πληρότητα

Ορισμός 1.4

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με σ. π. π. $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ ή σ. π. $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, όπου $\boldsymbol{\Theta}$ ο παραμετρικός χώρος. Μια στατιστική συνάρτηση $\mathbf{T} = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι **πλήρης** (complete) εάν και μόνον εάν για κάθε συνάρτηση $h(\mathbf{T})$ του $\mathbf{T}$ ισχύει :

$$E[h(\mathbf{T})] = 0 \Rightarrow h(\mathbf{t}) = 0, \forall\, \mathbf{t}.$$

Με άλλα λόγια, ένα στατιστικό **T** = T(X_1, X_2, ..., X_n) λέγεται πλήρες, εάν και μόνον εάν για κάθε πραγματική συνάρτηση h(**T**) του **T** ισχύει :

$$E_\theta[h(\mathbf{T})] = 0 \;\; \forall\, \theta \in \Theta \Rightarrow P_\theta[h(\mathbf{T}) = 0] = 1 \;\; \forall\, \theta \in \Theta.$$

Δηλαδή, το στατιστικό **T** είναι πλήρες εάν και μόνον εάν ο μόνος αμερόληπτος εκτιμητής του μηδενός, ο οποίος είναι συνάρτηση του **T**, είναι ο εκτιμητής 0 με πιθανότητα 1.

Ορισμός 1.5

Ένα στατιστικό **T** = T(X_1, X_2, ..., X_n) λέγεται **πλήρες φραγμένο** (boundedly complete) αν η ίδια συνέπεια ισχύει μόνο για όλες τις φραγμένες συναρτήσεις h(**T**) του **T**.

Η πληρότητα συνεπάγεται τη φραγμένη πληρότητα. Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα, γεγονός που αποδεικνύεται με το παράδειγμα 1.3 που ακολουθεί. (Βλέπε : Ferguson, T.S. (1967), σελ.137)

Αξίζει να σημειωθεί ότι χωρίς την επάρκεια, η ιδιότητα της πληρότητας από μόνη της έχει πολύ μικρή αξία.

Στη συνέχεια, δίνεται ο τρόπος ελέγχου της πληρότητας στην περίπτωση των διακριτών και των συνεχών τ. μ., καθώς και ορισμένα παραδείγματα.

Στην περίπτωση των διακριτών τ. μ. ένα μέσο απόδειξης της πληρότητας αποτελεί το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.2

Αν η σειρά απείρων όρων : $\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \dots$

συγκλίνει προς το μηδέν για όλες τις τιμές του z σε ένα δοσμένο διάστημα, τότε : $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0$.

Αντίστοιχα, στην περίπτωση των συνεχών τ. μ. για την εύρεση της πληρότητας ιδιαίτερα χρήσιμος είναι **ο τύπος του Leibnitz** :

Αν f(x, θ), α(θ), b(θ) διαφορίσιμες συναρτήσεις ως προς θ, τότε :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int_{\alpha(\theta)}^{b(\theta)} f(x,\theta)\,dx\right) = \int_{\alpha(\theta)}^{b(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} f(x,\theta)\,dx + f(b(\theta),\theta)\cdot\frac{\partial b(\theta)}{\partial\theta} - f(\alpha(\theta),\theta)\cdot\frac{\partial\alpha(\theta)}{\partial\theta}}$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον τύπο του Leibnitz, βλέπε : Casella, G. and Berger, R.L. (1990), σελ. 69.

Η πληρότητα ή μη αποδεικνύεται και με άλλους τρόπους, όπως για παράδειγμα με μετασχηματισμούς Laplace και με αντιπαραδείγματα.

Στη συνέχεια δίνεται ένας ορισμός, που βοηθάει στην απόδειξη της πληρότητας με τη βοήθεια των Laplace μετασχηματισμών.

Ορισμός 1.6

Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ μία τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f ορίζεται να είναι η συνάρτηση

$$L\big(f(t)\big) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\,dt.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται μονοσήμαντα, γι' αυτό

$$L\left(f\left(t\right)\right) = 0 \Rightarrow f(t) = 0.$$

Ακολουθούν παραδείγματα για την απόδειξη ή μη της πληρότητας.

<u>**Παράδειγμα 1.3**</u>

Έστω X τ. μ. με διακριτή κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας :

$$p(x, \theta) = \begin{cases} \theta, & \text{αν } x = -1 \\ (1-\theta)^2 \cdot \theta^x, & \text{αν } x = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \quad \text{όπου } 0 < \theta < 1.$$

Θα δειχθεί ότι το X είναι πλήρως φραγμένο στατιστικό, αλλά δεν είναι πλήρες.

Βάσει του ορισμού 1.4 και δεδομένου ότι η σ. π. του X είναι η

$$p(x, \theta) = \begin{cases} \theta, & \text{αν } x = -1 \\ (1-\theta)^2 \cdot \theta^x, & \text{αν } x = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \quad \text{όπου } 0 < \theta < 1,$$

η αναμενόμενη τιμή μιας αυθαίρετης συνάρτησης h(x), $\forall\ 0<\theta<1$, υπολογίζεται ως εξής, στη διακριτή περίπτωση :

$$E[h(x)] = \sum_{x=-1}^{\infty} h(x) \cdot p(x, \theta)$$

$$= \theta h(-1) + (1-\theta)^2 \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \theta^x \cdot h(x)$$

$$= \theta h(-1) + (1-2\theta+\theta^2) \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \theta^x \cdot h(x)$$

$$= \theta h(-1) + \sum_{x=0}^{\infty} (\theta^x - 2\theta^{x+1} + \theta^{x+2}) \cdot h(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta h(-1) + h(0) - 2\theta h(0) + \theta^2 h(0) + \theta h(1) - 2\theta^2 h(1) + \theta^3 h(1) + \ldots \\
&= h(0) + \theta\big(h(-1) - 2h(0) + h(1)\big) + \theta^2\big(h(0) - 2h(1) + h(2)\big) + \\
&\quad + \theta^3\big(h(1) - 2h(2) + h(3)\big) + \ldots \qquad (1.2.1)
\end{aligned}
$$

Επομένως, βάσει του θεωρήματος 1.2 θα είναι :

$$
E[h(x)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} h(0) = 0 \\ h(-1) - 2h(0) + h(1) = 0 \\ h(0) - 2h(1) + h(2) = 0 \\ h(1) - 2h(2) + h(3) = 0 \\ h(2) - 2h(3) + h(4) = 0 \\ \quad \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(0) = 0 \\ h(-1) = -h(1) \\ h(2) = 2h(1) \\ h(3) = 3h(1) \\ h(4) = 4h(1) \\ \quad \vdots \end{cases} \qquad (1.2.2)
$$

Αν η συνάρτηση h είναι φραγμένη τότε θα πρέπει : $h(1) = 0$.
Οπότε από το σύστημα εξισώσεων (1.2.2) προκύπτει ότι :
$h(x) = 0, \ \forall\, x = -1, 0, 1, 2, \ldots$
Επομένως το X είναι πλήρως φραγμένο στατιστικό, βάσει του ορισμού 1.5.

Αν η συνάρτηση h έχει τη μορφή : $h(x) = x, \ \forall\, x$, τότε μέσω της (1.2.1) έχουμε ότι $E[X] = 0$, ενώ $h(x) \neq 0$, γεγονός που συνεπάγεται ότι το X δεν είναι πλήρες στατιστικό.

■

Στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώνεται ότι <u>η φραγμένη πληρότητα, δε συνεπάγεται την πληρότητα.</u>

Ακολουθεί ένα παράδειγμα απόδειξης της πληρότητας στη διακριτή περίπτωση και ένα στη συνεχή περίπτωση.

Παράδειγμα 1.4

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή Poisson με παράμετρο θ. Να δειχθεί ότι : $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι μία πλήρης στατιστική συνάρτηση.

Είναι : $p(x, \theta) = \dfrac{e^{-\theta} \cdot \theta^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots\ , \theta \geq 0.$

Βάσει του Ορισμού 1.4 και δεδομένου ότι η σ. π. π. του T είναι :

$p(t) = \dfrac{e^{-n\theta} \cdot (n\theta)^t}{t!}, t = 0, 1, 2, \ldots$ (αφού : $x_i \sim \mathbf{P}(\theta) \Rightarrow t = \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \mathbf{P}(n\theta)$),

έχουμε ότι :

$$E[h(T)] = 0 \Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} h(t) \cdot \frac{e^{-n\theta} \cdot (n\theta)}{t!} = 0$$

$$\Rightarrow e^{-n\theta} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} h(t) \cdot \frac{(n\theta)^t}{t!} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} h(t) \cdot \frac{(n\theta)^t}{t!} = 0$$

$$\Rightarrow h(0) + h(1) \cdot \frac{(n\theta)^1}{1!} + h(2) \cdot \frac{(n\theta)^2}{2!} + \ldots = 0 \ \forall \theta \in \Theta$$

$$\overset{\text{Θεωρημα 1.2}}{\Rightarrow} h(0) = h(1) = h(2) = \ldots = 0 \text{ ή } h(t) = 0 \ \forall t.$$

Άρα η $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι πλήρης στατιστική συνάρτηση.

■

Παράδειγμα 1.5

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Ομοιόμορφη κατανομή $U(0,\theta)$. Να δειχθεί ότι : $T(X) = X_{(n)} = \max_i (X_i)$ είναι μία πλήρης στατιστική συνάρτηση.

Είναι : $f(x, \theta) = \dfrac{1}{\theta}$, $0 \leq x \leq \theta$.

Η κατανομή του μεγίστου διατεταγμένου στατιστικού δίνεται από τον τύπο $f_T(t) = n \cdot f(t) \cdot [F(t)]^{n-1}$, όπου f η σ. π. π. του πληθυσμού και F η α. σ. κ.

Δηλαδή : $f(t) = \dfrac{1}{\theta}$, $0 \leq x \leq \theta$ και $F(t) = P(T \leq t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{\theta}\,dt = \frac{t}{\theta}$.

Οπότε η κατανομή του στατιστικού $T(X) = X_{(n)}$ είναι η εξής :

$$f_T(t) = n \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} \Rightarrow f_T(t) = \frac{n \cdot t^{n-1}}{\theta^n},\ 0 \leq t \leq \theta.$$

Βάσει του Ορισμού 1.4 έχουμε :

$$E[h(T)] = 0 \Rightarrow \int_0^\theta h(t) \cdot f_T(t)\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta h(t) \cdot \frac{n \cdot t^{n-1}}{\theta^n}\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta h(t) \cdot t^{n-1}\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta h(t) \cdot t^{n-1}\,dt = 0 \xrightarrow[\text{Leibnitz}]{\text{Τυπος}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta} \int_0^\theta h(t) \cdot t^{n-1}\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(h(t)\cdot t^{n-1}\right)dt + h(\theta)\cdot\theta^{n-1}\cdot 1 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow 0 + h(\theta)\cdot\theta^{n-1} - 0 = 0$$

$$\Rightarrow h(\theta) = 0,\ \forall\,\theta\in\Theta$$

και επειδή : $0 \le t \le \theta$ θα είναι : $h(t) = 0\ \forall t$.

Άρα η $T(X) = X_{(n)} = \max\limits_{i}(X_i)$ είναι πλήρης στατιστική συνάρτηση.

■

Στο επόμενο παράδειγμα, για την απόδειξη της πληρότητας γίνεται χρήση των Laplace μετασχηματισμών.

<u>Παράδειγμα 1.6</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Εκθετική κατανομή $Exp(\theta)$. Να δειχθεί ότι το στατιστικό $T(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ είναι πλήρες.

Είναι : $f(x,\theta) = \theta e^{-\theta x},\ \theta > 0,\ x \ge 0$.

Εφόσον $X_i \sim Exp(\theta) \equiv G\left(1,\frac{1}{\theta}\right)$, θα είναι $T(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim G\left(n,\frac{1}{\theta}\right)$.

Άρα $f_T(t) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\cdot t^{n-1}\cdot e^{-\theta t},\ t > 0$.

Βάσει του Ορισμού 1.4 έχουμε :

$$E[h(T)] = 0 \Rightarrow \int_0^{\theta} h(t)\cdot f_T(t)\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta h(t)\cdot\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\cdot t^{n-1}\cdot e^{-\theta t}\,dt=0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta h(t)\cdot t^{n-1}\cdot e^{-\theta t}\,dt=0 \quad \text{(βάσει του ορισμού 1.6)}$$

$$\Rightarrow L\left(h(t)t^{n-1}\right)=0$$

$$\Rightarrow h(t)t^{n-1}=0,\ \forall t>0 \text{ και επειδή } t\neq 0$$

$$\Rightarrow h(t)=0,\ \forall t>0.$$

Επομένως το στατιστικό $T(X)=\sum_{i=1}^{n}X_i$ είναι πλήρες.

■

Ένα παράδειγμα μη ύπαρξης πληρότητας παρουσιάζεται στο 2° Κεφάλαιο (Παράδειγμα 2.5), στην προσπάθεια ελέγχου μιας πιθανής παραλλαγής του θεωρήματος του Basu. Η μη ύπαρξη πληρότητας στο συγκεκριμένο παράδειγμα, όπως θα δούμε, αποδεικνύεται με τη βοήθεια αντιπαραδείγματος.

1.3 Επάρκεια και Πληρότητα στην Εκθετική Οικογένεια Κατανομών

Έστω $c(\theta)$, $Q(\theta)$ πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται στον παραμετρικό χώρο $\Theta\subseteq\mathbb{R}$, $h(x)$ και $T(x)$ πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται στον $\mathbb{R}^n$ και ένα σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}^n$, τότε η οικογένεια κατανομών που ορίζεται από τη σχέση :

$$f(x,\theta) = c(\theta)\cdot e^{Q(\theta)\cdot T(x)}\cdot h(x)\cdot I_A(x) \qquad (1.3.1)$$

ονομάζεται **εκθετική οικογένεια κατανομών** (one – parameter exponential family), όπου $I_A(x)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A και το σύνολο A είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου θ. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι συναρτήσεις c, h, Q και T δεν ορίζονται μονοσήμαντα.

Αν $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\kappa)'$ και υπάρχουν πραγματικές συναρτήσεις $Q_1(\boldsymbol{\theta})$, $Q_2(\boldsymbol{\theta})$, ..., $Q_\kappa(\boldsymbol{\theta})$, $c(\boldsymbol{\theta})$ στον παραμετρικό χώρο $\Theta \subseteq \mathbb{R}^n$, $h(x)$ και $T_1(x)$, $T_2(x)$, ..., $T_\kappa(x)$ στον $\mathbb{R}^n$, τότε η οικογένεια κατανομών που ορίζεται από τη σχέση :

$$f(x,\boldsymbol{\theta}) = c(\boldsymbol{\theta})\cdot e^{\sum_{j=1}^{k} Q_j(\boldsymbol{\theta})\cdot T(x)}\cdot h(x)\cdot I_A(x) \qquad (1.3.2)$$

ονομάζεται **k – παραμετρική εκθετική οικογένεια κατανομών** (k – parameter exponential family).

Είναι προφανές ότι από τη σχέση (1.3.2) για **θ** μονοδιάστατο προκύπτει η σχέση (1.3.1).

Ακολουθεί ένα θεώρημα η σπουδαιότητα του οποίου θα φανεί στη συνέχεια.

<u>Θεώρημα 1.3</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή την (1.3.2), τότε αν :

$$T^* = \left(\sum_{i=1}^{n} T_1(x_i), \sum_{i=1}^{n} T_2(x_i), \ldots, \sum_{i=1}^{n} T_\kappa(x_i)\right), \ n \geq \kappa$$

έχουμε ότι :

1. T^* επαρκής για την παράμετρο **θ**.
2. T^* πλήρης στατιστική συνάρτηση.
3. Η κατανομή του T^* ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.2).

Η απόδειξη του θεωρήματος 1.3 ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής και δεν κρίνεται αναγκαίο να καταγραφεί. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε : Lehmann, E.L. (1986), σελ. 56. / Rohatgi, V. (1976), σελ. 347. / Hogg, R. and Graig, A. (1974), σελ. 232. / Casella, G. and Berger, R.L. (1990), σελ. 112 – 115. / Lehmann, E.L. (1959), σελ. 50 – 54. / Lehmann, E.L. (1986), 2nd Edition, σελ. 56 – 60.

<u>Πόρισμα 1.1</u>

Αν το τ. δ. είναι από έναν πληθυσμό με κατανομή την (1.3.1), τότε το :

$T^{*} = \sum_{i=1}^{n} T(x_i)$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο θ.

Συμπεραίνουμε ότι αν μια κατανομή ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.1) και (1.3.2), μπορούμε να βρούμε απ' ευθείας ένα πλήρες και επαρκές στατιστικό βάσει του πορίσματος 1.1 και του θεωρήματος 1.3, αντίστοιχα.

Στη συνέχεια δίνονται παραδείγματα κατανομών που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.1) και (1.3.2), στα οποία εφαρμόζονται όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Παράδειγμα 1.7

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή Poisson με παράμετρο θ. Να δειχτεί ότι το στατιστικό $T^* = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο θ.

Είναι : $p(x, \theta) = \dfrac{e^{-\theta} \cdot \theta^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \ldots \;, \; \theta \geq 0.$

Η Poisson ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.1) με $c(\theta) = e^{-\theta}$, $Q(\theta) = \ln(\theta)$, $T(x) = x$, $h(x) = \dfrac{1}{x!}$.

Βάσει του Πορίσματος 1.1 το $T^* = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι πλήρες και επαρκές στατιστικό για την παράμετρο θ.

■

Παράδειγμα 1.8 (Με δυο παραμέτρους)

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κανονική κατανομή $N(\theta_1, \theta_2)$. Να δειχτεί ότι το στατιστικό $T^* = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)'$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)'$.

Είναι : $f(x, \theta_1, \theta_2) = \left(\dfrac{1}{2\pi\theta_2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2}}$,

όπου : $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \theta_1 < \infty$, $\theta_2 > 0$.

Η κατανομή $N(\theta_1, \theta_2)$ ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.2) με $\kappa = 2$. Έχουμε :

$$f(x, \theta_1, \theta_2) = \left(\frac{1}{2\pi\theta_2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\theta_2} + \frac{\theta_1 \cdot x}{\theta_2} - \frac{\theta_1^2}{2\theta_2}} = \left(\frac{1}{2\pi\theta_2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\theta_1^2}{2\theta_2}} \cdot e^{\frac{\theta_1}{\theta_2}x - \frac{1}{2\theta_2}x^2}$$

όπου : $c(\boldsymbol{\theta}) = c(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{1}{2\pi\theta_2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\theta_1^2}{2\theta_2}}$, $Q_1(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\theta_1}{\theta_2}$, $Q_2(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2\theta_2}$,

$T_1(x) = x$, $T_2(x) = x^2$, $h(x) = 1$.

Βάσει του θεωρήματος 1.3 το στατιστικό $T^* = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)'$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)'$.

■

<u>**Παράδειγμα 1.9**</u> (Με k – παραμέτρους)

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με πολυωνυμική κατανομή $M(n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Να βρεθεί πλήρες και επαρκές στατιστικό για την παράμετρο $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)'$.

Είναι : $f(x, \underset{\sim}{\theta}) = \frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \ldots \cdot x_k!} \cdot \theta_1^{x_1} \cdot \theta_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot \theta_k^{x_k}$, όπου :

$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)'$, $\theta_i > 0$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, k$ και $\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$

& $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)'$, $x_i \geq 0$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, k$ και $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$.

Για $c(\theta) = (1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1})^n$, $Q(\theta) = \ln\left(\dfrac{\theta_j}{1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1}}\right)$,

$\forall j = 1,2,\ldots,k-1$, $T_j(\mathbf{x}) = x_j$, $\forall j = 1, 2, \ldots, k$ και $h(\mathbf{x}) = \dfrac{n!}{x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_k!}$,

η κατανομή $M(n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.2) με k – παραμέτρους.

Πράγματι :

$$f(x,\underset{\sim}{\theta}) = c(\underset{\sim}{\theta})\cdot e^{\sum_{j=1}^{k} Q_j(\underset{\sim}{\theta})\cdot T(x)}\cdot h(x)$$

$$= (1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1})^n \cdot e^{\sum_{j=1}^{k}\ln\left(\frac{\theta_j}{1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1}}\right)\cdot x_j}\cdot\frac{n!}{x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_k!}$$

$$= (1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1})^n\cdot$$

$$\cdot\, e^{\ln\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1}}\right)\cdot x_1+\ln\left(\frac{\theta_2}{1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1}}\right)\cdot x_2+\ldots+\ln\left(\frac{\theta_k}{1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1}}\right)\cdot x_k}\cdot\frac{n!}{x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_k!}$$

$$= \frac{n!}{x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_k!}\cdot(1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1})^n\cdot\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1}}\right)^{x_1}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\theta_2}{1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1}}\right)^{x_2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\theta_k}{1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1}}\right)^{x_k}$$

$$= \frac{n!}{x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_k!}\cdot(1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1})^n\cdot$$

$$\cdot\frac{\theta_1^{x_1}\cdot\theta_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot\theta_k^{x_k}}{(1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1})^{x_1}\cdot\ldots\cdot(1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1})^{x_k}}$$

$$= \frac{n!}{x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_k!}\cdot(1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1})^n\cdot\frac{\theta_1^{x_1}\cdot\theta_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot\theta_k^{x_k}}{(1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1})^{x_1+x_2+\ldots+x_k}}$$

$$= \frac{n!}{x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_k!}\cdot\cancel{(1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1})^n}\cdot\frac{\theta_1^{x_1}\cdot\theta_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot\theta_k^{x_k}}{\cancel{(1-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_{k-1})^n}}$$

$$= \frac{n!}{x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_k!}\cdot\theta_1^{x_1}\cdot\theta_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot\theta_k^{x_k}.$$

Επομένως, βάσει του θεωρήματος 1.3 το στατιστικό :

$T^* = (T_1(\mathbf{x}),T_2(\mathbf{x}), \ldots, T_k(\mathbf{x}))' = (X_1, X_2, \ldots, X_k)'$, είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)'$.

■

Μέσω των παραπάνω παραδειγμάτων, διαπιστώνεται η χρησιμότητα του θεωρήματος 1.3 σε περιπτώσεις κατανομών που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια, για την εύρεση πλήρων και επαρκών στατιστικών.

Το θεώρημα αυτό αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο, ειδικά για την εύρεση της πληρότητας, η οποία αρκετές φορές στην πράξη είναι δύσκολο να αποδειχθεί.

1.4 Ancillarity

Η ancillarity είναι μια έννοια ιδιαίτερης σημασίας στη Στατιστική και αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση και εφαρμογή του θεωρήματος του Basu.

<u>Ορισμός 1.7</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με σ. π. π. $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ ή σ. π. $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, όπου $\boldsymbol{\Theta}$ ο παραμετρικός χώρος. Ένα στατιστικό $\mathbf{U} = U(X)$ λέγεται **ancillary** αν η κατανομή του δεν εξαρτάται από την παράμετρο θ, $\forall\, \theta \in \Theta$.

Στη συνέχεια δίνονται παραδείγματα, με τη βοήθεια των οποίων η έννοια θα γίνει περισσότερο κατανοητή και θα φανεί ο τρόπος με τον οποίο μπορεί ν' αποδειχθεί.

<u>Παράδειγμα 1.10</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Εκθετική κατανομή Exp(θ). Να δειχθεί ότι το στατιστικό : $T = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ είναι ancillary.

Είναι : $f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}$, $\theta > 0$, $x \geq 0$.

Ζητείται η κατανομή του στατιστικού : $T = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$.

Θεωρούμε το μετασχηματισμό : $W = X_1 + X_2$ & $T = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$.

Παίρνοντας τις τιμές $w = x_1 + x_2$ & $t = \dfrac{x_1}{x_1 + x_2}$ και λύνοντας ως προς x_1 και x_2, έχουμε $x_1 = w \cdot t$ και $x_2 = w - w \cdot t$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του συστήματος αυτού είναι :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_1}{\partial w} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & t \\ -w & 1-t \end{vmatrix} = w\cdot(1-t) - t\cdot(-w) = w - w\cdot t + t\cdot w = w.$$

Λόγω ανεξαρτησίας (λόγω τυχαίου δείγματος), η από κοινού κατανομή των x_1, x_2 είναι : $f(x_1, x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2) = \theta^2 \cdot e^{-\theta\cdot(x_1+x_2)}$, $x_1, x_2 \geq 0$, $\theta>0$.

Βάσει του γνωστού θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών, έχουμε :

$f(t, w) = \theta^2 \cdot e^{-\theta\cdot w} \cdot |J| = \theta^2 \cdot e^{-\theta\cdot w} \cdot |w| = \theta^2 \cdot w \cdot e^{-\theta\cdot w}$, $w>0$.

Επομένως η περιθώρια κατανομή του στατιστικού $T = \dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ είναι :

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \theta^2 \cdot w \cdot e^{-\theta\cdot w}\, dw = \int_0^{+\infty} \theta\cdot w \cdot \left(-e^{-\theta\cdot w}\right)' dw$$

$$= \theta\cdot w\cdot \left(-e^{-\theta\cdot w}\Big|_{w=0}^{+\infty}\right)' + \theta\cdot \int_0^{+\infty} e^{-\theta\cdot w}\, dw$$

$$= \left(-e^{-\theta\cdot w}\Big|_{w=0}^{+\infty}\right) = (0+1) = 1 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow f(t) = 1$, $0<t<1$.

Δηλαδή η σ. π. π. του T είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ.

Άρα το στατιστικό $T = \dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ είναι ancillary.

Παράδειγμα 1.11

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Ομοιόμορφη κατανομή $U(0, \theta)$. Να δειχθεί ότι το στατιστικό : $T = \dfrac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$ είναι ancillary.

Είναι : $f(x, \theta) = \dfrac{1}{\theta}$, $0 \le x \le \theta$.

Ζητείται η κατανομή του στατιστικού : $T = \dfrac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$.

Θεωρούμε το μετασχηματισμό : $W = X_{(n)}$ & $T = \dfrac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$.

Παίρνοντας τις τιμές $w = x_{(n)}$ & $t = \dfrac{x_{(1)}}{x_{(n)}}$ και λύνοντας ως προς $x_{(1)}$ και $x_{(n)}$, έχουμε $x_{(1)} = w \cdot t$ και $x_{(n)} = w$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του συστήματος αυτού είναι :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_{(1)}}{\partial t} & \dfrac{\partial x_{(1)}}{\partial w} \\ \dfrac{\partial x_{(n)}}{\partial t} & \dfrac{\partial x_{(n)}}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w \cdot 1 - 0 \cdot t = w .$$

Η από κοινού κατανομή των διατεταγμένων στατιστικών $X_{(1)}$, $X_{(n)}$ δίνεται από τον τύπο :

$$f(x_{(1)}, x_{(n)}) = n \cdot (n-1) \cdot \left[F(x_{(n)}) - F(x_{(1)}) \right]^{n-2} \cdot f(x_{(n)}) \cdot f(x_{(1)})$$

όπου F η α. σ. κ. του πληθυσμού.

Είναι : $F(x) = P(X \le x) = \int_0^x \frac{1}{\theta} dx = \frac{x}{\theta}$.

Οπότε $f(x_{(1)}, x_{(n)}) = n \cdot (n-1) \cdot \left[\frac{x_{(n)}}{\theta} - \frac{x_{(1)}}{\theta} \right]^{n-2} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta}$

$$= \frac{n(n-1)}{\theta^n} \left[x_{(n)} - x_{(1)} \right]^{n-2}, \text{ με } 0 \le x_{(1)} < x_{(n)} \le \theta.$$

Βάσει του γνωστού θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών έχουμε :

$$f(t, w) = \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot (w - w \cdot t)^{n-2} \cdot |w| = \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot w^{n-1} \cdot (1-t)^{n-2}$$

με $0 \le w \le \theta, 0 \le t \le 1$.

Επομένως η περιθώρια κατανομή του στατιστικού $T = \frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$ είναι :

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^\theta \frac{n \cdot (n-1)}{\theta^n} \cdot w^{n-1} \cdot (1-t)^{n-2} \, dw \\ &= \frac{n \cdot (n-1)}{\theta^n} \cdot (1-t)^{n-2} \cdot \left(\frac{w^n}{n} \Big|_{w=0}^{\theta} \right) \\ &= \frac{\cancel{n} \cdot (n-1)}{\cancel{\theta^n}} \cdot (1-t)^{n-2} \cdot \frac{\cancel{\theta^n}}{\cancel{n}} \\ &= (n-1) \cdot (1-t)^{n-2}, \quad 0 \le t \le 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή η σ. π. π. του T είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ.

Άρα το στατιστικό $T = \frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$ είναι ancillary.

Παράδειγμα 1.12 (Γενίκευση του παραδείγματος 1.11)

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Ομοιόμορφη κατανομή $U(0, \theta)$. Να δειχθεί ότι το στατιστικό : $T = \dfrac{X_{(r)}}{X_{(n)}}$ όπου $1 \leq r \leq n$, είναι ancillary.

Είναι : $f(x, \theta) = \dfrac{1}{\theta}$, $0 \leq x \leq \theta$.

Ζητείται η κατανομή του στατιστικού : $T = \dfrac{X_{(r)}}{X_{(n)}}$.

Θεωρούμε το μετασχηματισμό : $W = X_{(n)}$ & $T = \dfrac{X_{(r)}}{X_{(n)}}$.

Παίρνοντας τις τιμές $w = x_{(n)}$ & $t = \dfrac{x_{(r)}}{x_{(n)}}$ και λύνοντας ως προς $x_{(r)}$ και $x_{(n)}$, έχουμε $x_{(r)} = w \cdot t$ και $x_{(n)} = w$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του συστήματος αυτού είναι :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_{(r)}}{\partial t} & \dfrac{\partial x_{(r)}}{\partial w} \\ \dfrac{\partial x_{(n)}}{\partial t} & \dfrac{\partial x_{(n)}}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w \cdot 1 - 0 \cdot t = w .$$

Η σ. π. π. των διατεταγμένων στατιστικών $X_{(r)}, X_{(s)}$ δίνεται από την σχέση :

$$f\left(x_{(r)}, x_{(s)}\right) = \frac{n!}{(r-1)! \cdot (s-r-1)! \cdot (n-s)!} \cdot$$
$$\cdot \left[F(x_{(r)})\right]^{r-1} \cdot \left[F(x_{(s)}) - F(x_{(r)})\right]^{s-r-1} \cdot \left[1 - F(x_{(s)})\right]^{n-s} \cdot f(x_{(r)}) \cdot f(x_{(s)})$$

με $1 \leq r < s \leq n$ και F την α. σ. κ. του πληθυσμού.

Για $s = n$ προκύπτει η από κοινού κατανομή των στατιστικών $X_{(r)}, X_{(n)}$. Έτσι έχουμε :

$$f(x_{(r)},x_{(n)})=\frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!}\cdot\left[F(x_{(r)})\right]^{r-1}\cdot\left[F(x_{(n)})-F(x_{(r)})\right]^{n-r-1}\cdot f(x_{(r)})\cdot f(x_{(n)}).$$

Η α. σ. κ. είναι η εξής : $F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\theta}dx = \frac{x}{\theta}$. Οπότε :

$$f(x_{(r)}, x_{(n)}) = \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r-1)!}\cdot\left[\frac{x_{(r)}}{\theta}\right]^{r-1}\cdot\left[\frac{x_{(n)}}{\theta}-\frac{x_{(r)}}{\theta}\right]^{n-r-1}\cdot\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{\theta}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r-1)!}\cdot\frac{1}{\theta^n}\cdot\left[x_{(r)}\right]^{r-1}\cdot\left[x_{(n)}-x_{(r)}\right]^{n-r-1}$$

με $0 \leq x_{(r)} < x_{(n)} \leq \theta$.

Βάσει του γνωστού θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών έχουμε :

$$f(t, w) = \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r-1)!}\cdot\frac{1}{\theta^n}\cdot(w\cdot t)^{r-1}\cdot(w-w\cdot t)^{n-r-1}\cdot|w|$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r-1)!}\cdot\frac{1}{\theta^n}\cdot w^{r-1}\cdot t^{r-1}\cdot(w\cdot(1-t))^{n-r-1}\cdot w$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r-1)!}\cdot\frac{1}{\theta^n}\cdot w^{r-1}\cdot t^{r-1}\cdot w^{n-r-1}\cdot(1-t)^{n-r-1}\cdot w$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r-1)!}\cdot\frac{1}{\theta^n}\cdot w^{\cancel{r}-1+n-\cancel{r}-\cancel{1}+\cancel{1}}\cdot t^{r-1}\cdot(1-t)^{n-r-1}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r-1)!}\cdot\frac{1}{\theta^n}\cdot w^{n-1}\cdot t^{r-1}\cdot(1-t)^{n-r-1}$$

με $0 \leq w \leq \theta, 0 \leq t \leq 1$.

Επομένως η περιθώρια κατανομή του στατιστικού $T = \dfrac{X_{(r)}}{X_{(n)}}$ είναι :

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^{\theta} \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r-1)!}\cdot\frac{1}{\theta^n}\cdot w^{n-1}\cdot t^{r-1}\cdot(1-t)^{n-r-1}\,dw \\
&= \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r-1)!}\cdot\frac{1}{\theta^n}\cdot t^{r-1}\cdot(1-t)^{n-r-1}\cdot\int_0^{\theta} w^{n-1}\,dw \\
&= \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r-1)!}\cdot\frac{1}{\theta^n}\cdot t^{r-1}\cdot(1-t)^{n-r-1}\cdot\left(\left.\frac{w^n}{n}\right|_{w=0}^{\theta}\right) \\
&= \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r-1)!}\cdot\frac{1}{\cancel{\theta^n}}\cdot t^{r-1}\cdot(1-t)^{n-r-1}\cdot\frac{\cancel{\theta^n}}{n} \\
&= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot(n-r-1)!}\cdot t^{r-1}\cdot(1-t)^{n-r-1}\ , 0\le t\le 1.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή : $T \sim Beta(r, n-r)$.

Επομένως η σ. π. π. του T είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ.

Άρα το στατιστικό $T = \dfrac{X_{(r)}}{X_{(n)}}$ είναι ancillary.

■

Παρατήρηση 1.2

Στο παράδειγμα 1.12 αποδείχθηκε ότι η κατανομή του στατιστικού $T = \dfrac{X_{(r)}}{X_{(n)}}$ με $1 \le r \le n$, είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ. Δεδομένου ότι άθροισμα ανεξάρτητων της παραμέτρου κατανομών, είναι μία ανεξάρτητη της παραμέτρου κατανομή, συμπεραίνουμε ότι το στατιστικό :

$$T^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{(i)}}{X_{(n)}} \left(= \underbrace{\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}} + \frac{X_{(2)}}{X_{(n)}} + \ldots + \frac{X_{(n-1)}}{X_{(n)}} + \frac{X_{(n)}}{X_{(n)}}}_{\text{αθροισμα ανεξαρτητων του } \theta \text{ κατανομων}} \right)$$

είναι ancillary, αφού η κατανομή του είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ.

1.5 Αμερόληπτοι Ομοιόμορφα Ελάχιστης Διακύμανσης Εκτιμητές (Α. Ο. Ε. Δ.)

Στην παράγραφο αυτή γίνεται αναφορά στους Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητές. Δίνονται ορισμοί και τρόποι εύρεσης τους.

Ορισμός 1.8

Ένας εκτιμητής $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ μιας παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ λέγεται **αμερόληπτος ομοιόμορφα ελάχιστης διακύμανσης** (Α. Ο. Ε. Δ.), εάν είναι αμερόληπτος και έχει την ελάχιστη διακύμανση μεταξύ όλων των αμερόληπτων εκτιμητών $\forall \theta \in \boldsymbol{\Theta}$, όπου $\boldsymbol{\Theta}$ ο παραμετρικός χώρος.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι εύρεσης Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητών. Στη συνέχεια δίνεται η ανισότητα Cramer – Rao και τα θεωρήματα των Rao – Blackwell και Lehmann – Scheffé, που δίνουν έναν τρόπο εύρεσης Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητών, ενώ στο 3ο Κεφάλαιο παρουσιάζεται μία διαφορετική προσέγγιση με τη βοήθεια του θεωρήματος του Basu, η οποία διευκολύνει την εύρεση τέτοιων εκτιμητών.

Πριν διατυπωθούν τα θεωρήματα που προαναφέρθηκαν, παρουσιάζονται οι συνθήκες κανονικότητας ή ομαλότητας οι οποίες αποτελούν απαραίτητη προϋπόθεση για την ισχύ της ανισότητας Cramer – Rao.

__Συνθήκες Κανονικότητας__ (ή ομαλότητας)

- Ο παραμετρικός χώρος **Θ** είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο (διάστημα) του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Επίσης, μπορεί να είναι το $\mathbb{R}$ ή το (α, ∞).
- Η σ. π. π. $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ ή σ. π. $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, είναι θετική σε ένα σύνολο D των $\mathbf{x}$ το οποίο είναι ανεξάρτητο του $\boldsymbol{\theta}$.
- $\forall\, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ και $\forall\, \mathbf{x} \in D$ υπάρχει η $\dfrac{\partial f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ ή η $\dfrac{\partial p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$, εκτός πιθανόν σε μερικά $\mathbf{x} \in N \subset D$ με $P(\mathbf{x} \in N) = 0$, $\forall\, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$.
- $I_{\mathbf{x}}^{F}(\boldsymbol{\theta}) > 0$, $\forall\, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$
- Η ποσότητα $\int \ldots \int_{D} f(x_1, \theta) \ldots f(x_n, \theta)\, dx_1 \ldots dx_n$ ή $\sum \ldots \sum_{D} p(x_1, \theta) \ldots p(x_n, \theta)$ μπορεί να παραγωγιστεί υπό το ολοκλήρωμα ή υπό το άθροισμα.
- Η ποσότητα $\int \ldots \int_{D} T(x_1, x_2, \ldots, x_n) f(x_1, \theta) \ldots f(x_n, \theta)\, dx_1 \ldots dx_n$ ή $\sum \ldots \sum_{D} T(x_1, x_2, \ldots, x_n) p(x_1, \theta) \ldots p(x_n, \theta)$ μπορεί να παραγωγιστεί υπό το ολοκλήρωμα ή υπό το άθροισμα.

* Η ποσότητα $I_{\mathbf{x}}^{F}(\boldsymbol{\theta})$ λέγεται **μέτρο πληροφορίας του Fisher** που περιέχεται στο X για την παράμετρο $\boldsymbol{\theta}$.

Αν το $\boldsymbol{\theta}$ είναι μονοδιάστατη παράμετρος, τότε το μέτρο πληροφορίας του Fisher ορίζεται ως εξής :

$$I_x^F(\theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ln f(x,\theta)\right)\right)^2 \text{ ή } I_x^F(\theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ln p(x,\theta)\right)\right)^2.$$

Αν το $\boldsymbol{\theta}$ είναι k – διάστατη παράμετρος, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)'$, η αντίστοιχη ποσότητα λέγεται πίνακας πληροφορίας του Fisher και ορίζεται ως εξής :

$$I_{\mathbf{x}}^F(\boldsymbol{\theta}) = \left(\left(E\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\ln f(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\ln f(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})\right)\right]\right)\right)_{k\times k}$$

όπου $((\ ))_{k\times k}$ συμβολίζει $k\times k$ πίνακα. Ο ορισμός στη διακριτή περίπτωση είναι ανάλογος.

Θεώρημα 1.3 : Ανισότητα Cramer – Rao

Εάν $E(T(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \theta + b(\theta)$ και ισχύουν οι συνθήκες κανονικότητας, τότε $Var(T) \geq \dfrac{[1+b'(\theta)]^2}{nI_x^F(\theta)}$.

Για την εύρεση Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητών, η Ανισότητα Cramer – Rao, χρησιμοποιείται ως εξής : αρχικά, βρίσκουμε το κάτω φράγμα για τις διακυμάνσεις όλων των αμερόληπτων εκτιμητών και στη συνέχεια ζητάμε έναν αμερόληπτο εκτιμητή του οποίου η διακύμανση να συμπίπτει με το κάτω φράγμα της ανισότητας. Αν αυτό επιτευχθεί τότε ο εκτιμητής αυτός είναι Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής.

Παρατήρηση 1.3

Το ίσον στην ανισότητα Cramer – Rao επιτυγχάνεται εάν και μόνον εάν :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)\right) = K(\theta,n)\cdot\left[U-g(\theta)\right].$$

Τότε ο U είναι Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της g(θ) με $Var(U) = \left|\frac{g'(\theta)}{K(\theta,n)}\right|$.

Παρατήρηση 1.4

Το ίσον στην ανισότητα Cramer – Rao επιτυγχάνεται εάν και μόνον εάν η κατανομή της τ. μ. X ανήκει στην Εκθετική Οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.1).

Στην αναζήτηση Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητών με την ανισότητα Cramer – Rao περιοριζόμαστε σε κατανομές που ανήκουν στην Εκθετική Οικογένεια και μπορούμε να εκτιμήσουμε συναρτήσεις της μορφής μ(θ) = E(T(x)) ή γραμμικές συναρτήσεις αυτών, όπου T(x) το στατιστικό που υπεισέρχεται στη μορφή (1.3.1) της εκθετικής οικογένειας κατανομών.

Για την εύρεση Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητών σε κατανομές που το πεδίο ορισμού τους εξαρτάται από την παράμετρο θ εργαζόμαστε διαφορετικά, εφόσον δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις για να χρησιμοποιηθεί η ανισότητα Cramer – Rao.

<u>Θεώρημα 1.4</u> : **Rao – Blackwell**

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με σ. π. π. $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ ή σ. π. $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, όπου $\boldsymbol{\Theta}$ ο παραμετρικός χώρος και $T = T(T_1(X), T_2(X), \ldots, T_\kappa(X))$ μία επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\boldsymbol{\theta}$. Έστω ακόμη, $U = U(X)$ μία αμερόληπτη συνάρτηση του $\boldsymbol{\theta}$. Τότε η στατιστική συνάρτηση $U^* = E(U \mid T)$ είναι αμερόληπτη του $\boldsymbol{\theta}$ με $Var(U^*) \geq Var(U)$ $\forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$.

Το θεώρημα 1.4 μας βοηθάει να βρούμε έναν καλύτερο εκτιμητή (από πλευράς διακύμανσης) κάποιας ποσότητας $g(\theta)$ και συχνά, σε συνδυασμό με το θεώρημα των Lehmann – Scheffe΄, που δίνεται παρακάτω (θεώρημα 1.5), οδηγεί στην εύρεση Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητών.

<u>Θεώρημα 1.5</u> : **Lehmann – Scheffe΄**

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με σ. π. π. $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ ή σ. π. $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, όπου $\boldsymbol{\Theta}$ ο παραμετρικός χώρος. Έστω επίσης T μία πλήρης και επαρκής στατιστική συνάρτηση και $U = U(T)$ μία αμερόληπτη στατιστική συνάρτηση του $g(\boldsymbol{\theta})$ η οποία είναι συνάρτηση του πλήρους και επαρκούς T. Τότε ο U είναι Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής του $g(\boldsymbol{\theta})$.

Οι αποδείξεις των παραπάνω θεωρημάτων, δεν κρίνεται αναγκαίο να αναφερθούν στα πλαίσια της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Casella, G. and Berger, R.L. (1990), σελ. 308 – 344. / Mood, A.M., Graybill, F.A. and Boes, D.C. (1974), σελ. 315 – 331. / Παπαϊωάννου, Τ. και Φερεντίνος, Κ. (2000), 2η Έκδοση, Κεφάλαιο 1. / Κολυβά – Μαχαίρα, Φ. (1998), σελ. 64 – 74, 84 – 102.

Για να μην ξεφύγουμε από το σκοπό της παρούσας διατριβής, θα περιοριστούμε στις εφαρμογές του $3^{ου}$ Κεφαλαίου, σχετικά με τους Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητές και το θεώρημα του Basu. Για το σκοπό αυτό αναφέρονται ενδεικτικά παραδείγματα.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζεται ο τρόπος εύρεσης ενός Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητή με τη βοήθεια της ανισότητας Cramer – Rao.

Παράδειγμα 1.13

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή Bernoulli $B(1, \theta)$. Να βρεθεί Α .Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της παραμέτρου θ.

Είναι : $p(x, \theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, x = 0, 1, \ 0 \le \theta \le 1$.

Παρατηρούμε ότι $E(\bar{X}) = \theta$, δηλαδή ο $\bar{X}$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής της θ με διακύμανση $Var(\bar{X}) = \dfrac{\theta(1-\theta)}{n}$.

Εφόσον ικανοποιούνται οι συνθήκες κανονικότητας, αρκεί να υπολογίσουμε το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramer – Rao και να το συγκρίνουμε με τη διακύμανση του $\bar{X}$.

Είναι : $I_x^F(\theta) = E\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\ln p(x, \theta)\right)\right)^2$

$$= E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ln\left(\theta^x(1-\theta)^{1-x}\right)\right)\right)^2$$

$$= E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(x\ln\theta + (1-x)\ln(1-\theta))\right)^2$$

$$= E\left(\frac{x}{\theta}-\frac{1-x}{1-\theta}\right)^2$$

$$= E\left(\frac{x^2}{\theta^2}-2\frac{x}{\theta}\cdot\frac{(1-x)}{(1-\theta)}+\frac{(1-x)^2}{(1-\theta)^2}\right)$$

$$= \frac{E\left(x^2\right)}{\theta^2}-2\frac{E\left(x(1-x)\right)}{\theta(1-\theta)}+\frac{E\left((1-x)^2\right)}{(1-\theta)^2}$$

όπου $E\left(x^2\right)= Var\left(x\right)+\left(E(x)\right)^2=\theta(1-\theta)+\theta^2=\theta,$

$$E\left(x(1-x)\right)=E\left(x-x^2\right)=E(x)-E\left(x^2\right)=\theta-\theta=0 \text{ και}$$

$$E\left((1-x)^2\right)=E\left(1-2x+x^2\right)=1-2E(x)+E\left(x^2\right)=1-2\theta+\theta=1-\theta.$$

Άρα $I_x^F(\theta) = \frac{\cancel{\theta}}{\theta^{\cancel{2}}}-0+\frac{\cancel{(1-\theta)}}{(1-\theta)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{\theta}+\frac{1}{1-\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}.$

Επομένως το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramer – Rao ισούται με

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{nI_x^F(\theta)}=\frac{1}{n\frac{1}{\theta(1-\theta)}}=\frac{\theta(1-\theta)}{n}=Var(\overline{X}).$$

Άρα το στατιστικό $\overline{X}$ είναι Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της παραμέτρου θ.

■

Ακολουθεί ένα γενικό παράδειγμα για την εύρεση Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητών σε κατανομές που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.1).

Παράδειγμα 1.14

Έστω X_1, X_2, ..., X_n τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta)=c(\theta)\cdot e^{Q(\theta)\cdot T(x)}\cdot h(x)\cdot I_A(x)$, όπου A ανεξάρτητο του θ. Θα δειχτεί ότι το στατιστικό $T^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T(x_i)$ είναι Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $E(T(x)) = -\frac{c'(\theta)}{c(\theta)Q'(\theta)}$.

Βάσει της Παρατήρησης 1.3 έχουμε :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}c(\theta)e^{Q(\theta)T(x_i)}h(x_i)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left(c^n(\theta)e^{Q(\theta)\sum_{i=1}^{n}T(x_i)}\prod_{i=1}^{n}h(x_i)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(n\ln\left(c(\theta)\right)+Q(\theta)\sum_{i=1}^{n}T(x_i)+\ln\left(\prod_{i=1}^{n}h(x_i)\right)\right)$$

$$= n\frac{c'(\theta)}{c(\theta)}+Q'(\theta)\sum_{i=1}^{n}T(x_i)$$

$$= nQ'(\theta)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T(x_i)-\left(-\frac{c'(\theta)}{c(\theta)Q'(\theta)}\right)\right)$$

όπου $K(\theta, n) = nQ'(\theta)$, $U = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T(x_i)$ και $E(T(x)) = -\frac{c'(\theta)}{c(\theta)Q'(\theta)}$.

Άρα ο $U = T^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T(x_i)$ είναι Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της E(T(x)).

[Βλέπε : Ferentinos, K. (1984)]

Στο παράδειγμα που ακολουθεί γίνεται χρήση του θεωρήματος του Lehmann – Scheffé.

Παράδειγμα 1.15

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή $f(x, \theta_1, \theta_2) = \dfrac{g(x)}{h(\theta_1,\theta_2)}$, $\theta_1 \le x \le \theta_2$. Να βρεθεί Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $h(\theta_1,\theta_2)$.

Το πεδίο ορισμού της σ. π. π. εξαρτάται από τις παραμέτρους θ_1 και θ_2. Επομένως θα εργαστούμε σύμφωνα με το θεώρημα 1.5, εφόσον δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Cramer – Rao (δεν ισχύουν οι συνθήκες κανονικότητας).

Είναι : $f(x, \theta_1, \theta_2) = \dfrac{g(x)}{h(\theta_1,\theta_2)}$, $\theta_1 \le x \le \theta_2$.

Έχουμε ότι :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \theta_1, \theta_2)\, dx = 1 \Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{g(x)}{h(\theta_1, \theta_2)}\, dx = 1 \Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(x)\, dx = h(\theta_1, \theta_2). \qquad (1.5.1)$$

$$\text{και } F(x) = P(X \le x) = \int_{\theta_1}^{x} f(x, \theta_1, \theta_2)\, dx = \int_{\theta_1}^{x} \frac{g(x)}{h(\theta_1, \theta_2)}\, dx$$

$$= \frac{\int_{\theta_1}^{x} g(x)\, dx}{h(\theta_1, \theta_2)} = \frac{h(\theta_1, x)}{h(\theta_1, \theta_2)}.$$

Επάρκεια :

Βάσει του Παραγοντικού Θεωρήματος των Neyman – Fisher (Θεώρημα 1.1), έχουμε :

$$f(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_1,\theta_2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{g(x_i)}{h(\theta_1,\theta_2)} = \frac{1}{h^n(\theta_1,\theta_2)} \cdot \prod_{i=1}^{n} g(x_i)\cdot I\left(x_{(1)},x_{(n)}\right)$$

$$= g(T,\boldsymbol{\theta})\cdot h(\mathbf{x}), \text{ όπου } T=\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)' \text{ και } h(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i).$$

Άρα το στατιστικό $T = \left(X_{(1)},X_{(n)}\right)'$ είναι επαρκές για την παράμετρο $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)'$, επομένως και για την $h(\theta_1,\theta_2)$ (βάσει της Παρατήρησης 1.1).

Πληρότητα :

Έστω $T_1 = X_{(1)}$ και $T_2 = X_{(n)}$. Η από κοινού κατανομή των διατεταγμένων στατιστικών T_1 και T_2 δίνεται από τη σχέση :

$$f(x_{(1)},x_{(n)}) = n\cdot(n-1)\cdot\left[F(x_{(n)})-F(x_{(1)})\right]^{n-2}\cdot f(x_{(n)})\cdot f(x_{(1)})$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot\frac{\left[h(\theta_1,t_2)-h(\theta_1,t_1)\right]^{n-2}\cdot g(t_1)\cdot g(t_2)}{h^n(\theta_1,\theta_2)}$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot\frac{h^{n-2}(t_1,t_2)\cdot g(t_1)\cdot g(t_2)}{h^n(\theta_1,\theta_2)},\ \theta_1 \le t_1 < t_2 \le \theta_2.$$

Βάσει του ορισμού 1.4 είναι :

$$E\left(h^*(t_1,t_2)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\int_{\theta_1}^{t_2} f(t_1,t_2)\cdot h^*(t_1,t_2)\ dt_1\right)dt_2 = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\int_{\theta_1}^{t_2} n\cdot(n-1)\cdot\frac{h^{n-2}(t_1,t_2)\cdot g(t_1)\cdot g(t_2)}{h^n(\theta_1,\theta_2)}\cdot h^*(t_1,t_2)\ dt_1\right)dt_2 = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(t_2)\left(\underbrace{\int_{\theta_1}^{t_2} h^{n-2}(t_1,t_2)\cdot g(t_1)\cdot h^*(t_1,t_2)\ dt_1}_{K(\theta_1,t_2)}\right)dt_2 = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(t_2)K(\theta_1,t_2)\,dt_2 = 0$$ (Παραγωγίζοντας ως προς θ_2 και βάσει του τύπου του Leibnitz)

$$\Rightarrow g(\theta_2)K(\theta_1,\theta_2) = 0$$

$$\Rightarrow K(\theta_1,\theta_2) = 0.$$

Άρα : $\int_{\theta_1}^{\theta_2} h^{n-2}(t_1,\theta_2)\cdot g(t_1)\cdot h^*(t_1,\theta_2)\ dt_1 = 0$ (Παραγωγίζοντας ως προς θ_1 και βάσει του τύπου του Leibnitz)

$$\Rightarrow h^{n-2}(\theta_1,\theta_2)\cdot g(\theta_1)\cdot h^*(\theta_1,\theta_2) = 0 \Rightarrow h^*(\theta_1,\theta_2) = 0\ \forall\, \theta_1, \theta_2.$$

Και επειδή $\theta_1 \le t_1 < t_2 \le \theta_2$, θα είναι : $h^*(t_1,t_2) = 0\ \forall\, t_1, t_2$.

Επομένως το στατιστικό $T = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)'$ είναι πλήρες.

Αρκεί να βρεθεί ένας αμερόληπτος εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $h(\theta_1,\theta_2)$ που να είναι συνάρτηση του πλήρους και επαρκούς $T = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)'$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα 1.5 θα είναι Α. Ο. Ε. Δ. της $h(\theta_1,\theta_2)$. Δηλαδή αρκεί να βρεθεί ένας $U = U(t_1, t_2)$ τέτοιος ώστε :

$$E\left(U(t_1,t_2)\right)=h(\theta_1,\theta_2)$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\int_{\theta_1}^{t_2} U(t_1,t_2)\cdot f(t_1,t_2)\ dt_1\right)dt_2=h(\theta_1,\theta_2)$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(t_2)\left(\underbrace{\int_{\theta_1}^{t_2} h^{n-2}(t_1,t_2)\cdot g(t_1)\cdot U\left(t_1,t_2\right)\ dt_1}_{K(\theta_1,t_2)}\right)dt_2=\frac{h^{n+1}(\theta_1,\theta_2)}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(t_2)K(\theta_1,t_2)\,dt_2=\frac{h^{n+1}(\theta_1,\theta_2)}{n(n-1)}$$ (Παραγωγίζοντας ως προς θ_2 και βάσει του τύπου του Leibnitz)

$$\Rightarrow\ g(\theta_2)K(\theta_1,\theta_2)=\frac{(n+1)h^n(\theta_1,\theta_2)}{n(n-1)}\cdot\frac{\partial h(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2} \qquad (1.5.2)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1.5.1) ως προς θ_2 και εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibnitz προκύπτει ότι $\frac{\partial h(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}=g(\theta_2)$.

Έτσι από την (1.5.2) προκύπτει ότι :

$$K(\theta_1,\theta_2)=\frac{(n+1)h^n(\theta_1,\theta_2)}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} h^{n-2}(t_1,\theta_2)\cdot g(t_1)\cdot U\left(t_1,\theta_2\right)\ dt_1=\frac{(n+1)h^n(\theta_1,\theta_2)}{n(n-1)}$$ (Παραγωγίζοντας ως προς θ_1 και βάσει του τύπου του Leibnitz)

$$\Rightarrow -\ h^{n-2}(\theta_1,\theta_2)\cdot g(\theta_1)\cdot U\left(\theta_1,\theta_2\right)=\frac{\cancel{n}(n+1)h^{n-1}(\theta_1,\theta_2)}{\cancel{n}(n-1)}\cdot\frac{\partial h(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1} \qquad (1.5.3)$$

Όμοια παραγωγίζοντας τη σχέση (1.5.1) ως προς θ_1 και εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibnitz προκύπτει ότι $\frac{\partial h(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_2} = -g(\theta_1)$.

Έτσι από την (1.5.3) προκύπτει ότι :

$U(\theta_1,\theta_2) = \frac{(n+1)}{(n-1)} h(\theta_1,\theta_2)$.

Επομένως ο $U = U(T_1,T_2) = \frac{(n+1)}{(n-1)} h(T_1,T_2)$, όπου $T_1 = X_{(1)}$ και $T_2 = X_{(n)}$, είναι Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $h(\theta_1,\theta_2)$ βάσει του Θεωρήματος 1.5.

[Βλέπε : Karakostas, K. (1985) / Bar Lev, S. and Boukai, B. (1985)]

■

Στα παραδείγματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια, γίνεται ένας συνδυασμός των θεωρημάτων 1.4 και 1.5, για την εύρεση Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητών.

Παράδειγμα 1.16

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή Poisson με παράμετρο θ. Να βρεθεί Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $e^{-\theta}$.

Είναι : $p(x,\theta) = \frac{e^{-\theta}\cdot\theta^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, $\theta \geq 0$.

Στο παράδειγμα 1.1 αποδείχθηκε ότι το στατιστικό $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκές για την παράμετρο θ, άρα και για την $P(x_1 = 0) = e^{-\theta}$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.1. Επίσης στο παράδειγμα 1.4 αποδείχθηκε ότι το στατιστικό αυτό είναι πλήρες. Αρκεί, λοιπόν, βάσει του θεωρήματος 1.5 να βρεθεί ένας αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta) = e^{-\theta}$ που να είναι συνάρτηση του πλήρους και επαρκούς T(X).

Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση : $Y = \begin{cases} 1, & x_1 = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$.

Είναι : $E(Y) = 1 \cdot P(x_1 = 0) + 0 \cdot P(x>0) = P(x_1 = 0) = e^{-\theta}$.

Άρα ο Y αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta) = e^{-\theta}$.

Σύμφωνα με τα θεωρήματα 1.4 και 1.5 ο $U = E(Y|T)$ θα είναι Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta) = e^{-\theta}$, ως αμερόληπτος της g(θ) και συνάρτηση του πλήρους και επαρκούς T(X).

Επομένως : $U = E(Y|T) = 1 \cdot P(Y = 1 \mid T = t) + 0 \cdot P(Y = 0 \mid T = t)$

$$= P(x_1 = 0 \mid T = \sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{P(x_1 = 0, T = \sum_{i=2}^{n} x_i)}{P\left(T = \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}$$

$$\overset{\substack{\text{λογω} \\ \text{ανεξαρτησιας τ.δ}}}{=} \frac{P(x_1 = 0) P\left(T = \sum_{i=2}^{n} x_i\right)}{P\left(T = \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}$$

$$= \frac{e^{-\theta} e^{-(n-1)\theta} [(n-1)\theta]^t \cancel{t!}}{\cancel{t!} e^{-n\theta} [n\theta]^t} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^t = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^t.$$

Άρα ο $U(T) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{T}$, όπου $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $g(\theta) = e^{-\theta}$.

■

Παράδειγμα 1.17

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Εκθετική κατανομή $Exp(\lambda)$. Να βρεθεί Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $P(x_1 \geq \kappa)$.

Είναι : $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, \lambda > 0$.

Η $Exp(\lambda)$ ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της (1.3.1) με $c(\lambda) = \lambda$, $Q(\lambda) = -\lambda$, $T(x) = x$. Επομένως, βάσει του Πορίσματος 1.1, το στατιστικό $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο λ.

Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση : $Y = \begin{cases} 1, & x_1 \geq \kappa \\ 0, & x_1 < \kappa. \end{cases}$

Είναι : $E(Y) = 1 \cdot P(x_1 \geq \kappa) + 0 \cdot P(x_1 < \kappa) = P(x_1 \geq \kappa) = \int_{\kappa}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x_1}\, dx_1$

$$= -e^{-\lambda x_1}\Big|_{\kappa}^{\infty} = e^{-\lambda\kappa} = g(\lambda).$$

Άρα ο Y αμερόληπτος εκτιμητής της $P(x_1 \geq \kappa) = e^{-\lambda\kappa} = g(\lambda)$.

Σύμφωνα με τα θεωρήματα 1.4 και 1.5 ο $U = E(Y|T)$ θα είναι Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $g(\lambda) = e^{-\lambda\kappa}$, ως αμερόληπτος της $g(\lambda)$ και συνάρτηση του πλήρους και επαρκούς $T(X)$.

Επομένως : $U = E(Y|T) = 1 \cdot P(Y = 1 \mid T = t) + 0 \cdot P(Y = 0 \mid T = t)$

$$= P(x_1 \geq \kappa \mid T = \sum_{i=1}^{n} x_i).$$

Είναι : $$f(x_1 \mid T = \sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{f(x_1, T - x_1 = \sum_{i=2}^{n} x_i)}{f(T = \sum_{i=1}^{n} x_i)}$$

$$\overset{\substack{\lambda o\gamma\omega \\ \alpha\nu\varepsilon\xi.\ \tau.\delta.}}{=} \frac{\lambda e^{-\lambda x_1} \dfrac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)} (t - x_1)^{n-2} e^{-\lambda(t - x_1)}}{\dfrac{\lambda^{n}}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t}}$$

$$= (n-1) \frac{(t - x_1)^{n-2}}{t^{n-1}} .$$

Έτσι $$U = P(x_1 \geq \kappa \mid T = \sum_{i=1}^{n} x_i) = \int_{\kappa}^{t} f(x_1|T)\, dx_1 = \int_{\kappa}^{t} (n-1) \frac{(t - x_1)^{n-2}}{t^{n-1}}\, dx_1$$

$$= -\frac{(t - x_1)^{n-1}}{t^{n-1}} \Bigg|_{\kappa}^{t} = \left(\frac{t-\kappa}{t}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{\kappa}{t}\right)^{n-1}, \ t > k \text{ όπου } T = \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Άρα ο $U(T) = \left(1 - \dfrac{\kappa}{t}\right)^{n-1}$, $t > k$ όπου $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $P(x_1 \geq \kappa)$.

■

1.6 Μέγιστη Πιθανοφάνεια και Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Ε. Μ. Π.)

Στην παράγραφο αυτή δίνεται ένας τρόπος εύρεσης εκτιμητών με βάση την αρχή της πιθανοφάνειας, με σκοπό την καλύτερη κατανόηση των εφαρμογών που αναφέρονται στο 3^{o} Κεφάλαιο.

Ορισμός 1.9

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με σ. π. π. $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ ή σ. π. $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, όπου $\boldsymbol{\Theta}$ ο παραμετρικός χώρος. Η συνάρτηση

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \boldsymbol{\theta}) \text{ ή } L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \boldsymbol{\theta})$$

ονομάζεται **συνάρτηση πιθανοφάνειας**.

Ορισμός 1.10

Έστω $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας ενός τ. δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ο εκτιμητής $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ λέγεται **εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας** (Ε. Μ. Π.) της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$, εάν $L(\hat{\theta}|\mathbf{x}) = \max\limits_{\theta \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$.

Όπως προκύπτει από τον ορισμό 1.9 για να βρεθεί Ε. Μ. Π. κάποιας παραμέτρου, αρκεί να μεγιστοποιήσουμε ως προς την παράμετρο αυτή τη συνάρτηση πιθανοφάνειας. Στην πράξη, αντί να μεγιστοποιήσουμε την $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$, μεγιστοποιούμε την $\ln L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$, όπου ln ο φυσικός λογάριθμος, γιατί το μέγιστο λαμβάνεται στο ίδιο σημείο. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, σε περιπτώσεις που <u>το πεδίο ορισμού της σ. π. π. f(x) εξαρτάται από την παράμετρο θ, βρίσκουμε τον Ε. Μ. Π. εξετάζοντας τη μονοτονία της $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$</u>.

Ακολουθούν δύο θεωρήματα με τα οποία δίνονται βασικές ιδιότητες των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας. Η απόδειξη των θεωρημάτων παραλείπεται και δίνεται έμφαση στην εφαρμογή αυτών με παραδείγματα. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί κανείς να δει στους Casella, G. and Berger, R.L. (1990), σελ. 289 – 297. / Mood, A.M., Graybill, F.A. and Boes, D.C. (1974), σελ. 276 – 286. / Κολυβά – Μαχαίρα, Φ. (1998), σελ. 169 – 181.

<u>Θεώρημα 1.6</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με σ. π. π. $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ ή σ. π. $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^r$, $r \geq 1$, $\boldsymbol{\Theta}$ ο παραμετρικός χώρος και έστω $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \ldots, T_r)'$ με $T_j = T_j(x)$, $j = 1, \ldots, r$ μια επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)'$. Αν $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_r)'$ είναι ο μονοσήμαντα ορισμένος Ε. Μ. Π. της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$, τότε ο $\hat{\theta}$ είναι μία συνάρτηση μόνο του επαρκούς $\mathbf{T}$.

<u>Θεώρημα 1.7</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με σ. π. π. $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ ή σ. π. $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^\kappa$ και $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_\kappa)'$ ο Ε. Μ. Π. του $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\kappa)'$, όπου $\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_j(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Αν $\varphi(\boldsymbol{\theta}) = (\varphi_1(\boldsymbol{\theta}), \varphi_2(\boldsymbol{\theta}), \ldots, \varphi_r(\boldsymbol{\theta}))'$, $1 \leq r \leq \kappa$ ένας μετασχηματισμός του παραμετρικού χώρου $\boldsymbol{\Theta}$, τότε ο Ε. Μ. Π. της $\varphi(\boldsymbol{\theta})$ είναι $\hat{\varphi}(\boldsymbol{\theta}) = (\varphi_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \varphi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \ldots, \varphi_r(\hat{\boldsymbol{\theta}}))'$, όπου $\varphi_j(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_\kappa)'$ είναι ο Ε. Μ. Π. της $\varphi_j(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\kappa)'$, $j = 1, \ldots, r$.

Όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως σχετικά με τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας κάποιας παραμέτρου, διευκρινίζονται στη συνέχεια με παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.18

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή Poisson με παράμετρο θ. Να βρεθεί ο Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ.

Είναι : $p(x,\theta)=\dfrac{e^{-\theta}\cdot\theta^{x}}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, $\theta\geq 0$.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι η εξής :

$$L(\theta|\mathbf{x})=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\theta}\cdot\theta^{x_i}}{x_i!}=\frac{e^{-n\theta}\cdot\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!},\ \theta\geq 0.$$

Η $L(\theta|\mathbf{x})$ παίρνει το μέγιστο στο ίδιο σημείο με την $\ln L(\theta|\mathbf{x})$. Παίρνοντας, λοιπόν, το φυσικό λογάριθμο της $L(\theta|\mathbf{x})$, έχουμε :

$$\ln L(\theta|\mathbf{x})=-n\theta+\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln\theta-\ln\prod_{i=1}^{n}x_i!$$

Παραγωγίζοντας ως προς την παράμετρο θ και έπειτα μηδενίζοντάς την, έχουμε :

$$\frac{\partial\ln L(\theta|\mathbf{x})}{\partial\theta}=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}$$

$$\frac{\partial\ln L(\theta|\mathbf{x})}{\partial\theta}=0\Rightarrow -n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}=0\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}=n\Rightarrow\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\Rightarrow\theta=\overline{x}.$$

Είναι $\left.\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta|\mathbf{x})}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\hat\theta} = \left.-\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}\right|_{\hat\theta=\bar{x}} = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} < 0.$

Άρα η $\ln L(\theta|\mathbf{x})$ και επομένως η $L(\theta|\mathbf{x})$ παίρνει το μέγιστο στο $\theta = \bar{x}$, δηλαδή ο Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ είναι ο $\hat\theta = \bar{X}$.

■

<u>**Παράδειγμα 1.19**</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\frac{1}{\theta}$, $Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$. Να βρεθεί ο Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ.

Είναι : $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}$, $\theta>0$, $x \geq 0$.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι η εξής :

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta}\cdot e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}},\ \theta>0.$$

Από τη σχέση αυτή έχουμε :

$\ln L(\theta|\mathbf{x}) = -n\cdot\ln\theta - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}$ και $\dfrac{\partial \ln L(\theta|\mathbf{x})}{\partial\theta} = -\dfrac{n}{\theta} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}$, από την οποία προκύπτει :

$$\frac{\partial \ln L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} = \frac{n}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow \theta = \overline{x}.$$

Είναι $\left.\frac{\partial^2 \ln L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = \left.\frac{n}{\theta^2} - 2\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^3}\right|_{\hat{\theta}=\overline{x}} = -\frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} < 0.$

Άρα η $\ln L(\theta|\mathbf{x})$ και επομένως η $L(\theta|\mathbf{x})$ παίρνει το μέγιστο στο $\theta = \overline{x}$.

Επομένως ο Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ είναι ο $\hat{\theta} = \overline{X}$.

■

Το παράδειγμα που ακολουθεί αφορά σε μία γενικής μορφής κατανομή, που το πεδίο ορισμού της εξαρτάται από την παράμετρο που θέλουμε να εκτιμήσουμε.

<u>Παράδειγμα 1.20</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή :

(i) $f(x, \theta) = \frac{g(x)}{h(\theta)}$, $\alpha \le x \le \theta$, α σταθερά.

(ii) $f(x, \theta) = \frac{g(x)}{h(\theta)}$, $\theta \le x \le b$, b σταθερά.

όπου g, h, μη αρνητικές συναρτήσεις.

Να βρεθούν οι Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ σε κάθε περίπτωση.

(i) Είναι $f(x,\theta)=\dfrac{g(x)}{h(\theta)},\ \alpha\le x\le\theta$.

Έχουμε ότι $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\theta)\,dx=1 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\theta}\frac{g(x)}{h(\theta)}\,dx=1 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\theta} g(x)\,dx=h(\theta).$ (1.6.1)

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι η εξής :

$$L(\theta|\mathbf{x})=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{g(x_i)}{h(\theta)}I_{[\alpha,\theta]}(x_i)=\frac{1}{h^n(\theta)}\prod_{i=1}^{n} g(x_i)I_{[\alpha,\theta]}(x_i).$$

Το πεδίο ορισμού εξαρτάται από την παράμετρο θ, επομένως ο Ε. Μ. Π. της θ θα βρεθεί εξετάζοντας τη μονοτονία της $L(\theta|\mathbf{x})$.

Είναι $\displaystyle\frac{\partial L(\theta|\mathbf{x})}{\partial\theta}=-n\frac{h'(\theta)}{h^{n+1}(\theta)}\prod_{i=1}^{n} g(x_i),\ \alpha\le x_i\le\theta.$ (1.6.2)

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1.6.1) ως προς θ και εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibnitz προκύπτει ότι $h'(\theta)=g(\theta)$. Έτσι από τη σχέση (1.6.2) έχουμε ότι :

$$\frac{\partial L(\theta|\mathbf{x})}{\partial\theta}=-n\frac{h'(\theta)}{h^{n+1}(\theta)}\prod_{i=1}^{n} g(x_i)=-n\frac{g(\theta)}{h^{n+1}(\theta)}\prod_{i=1}^{n} g(x_i)\le 0,$$

αφού $g(\theta), h(\theta)\ge 0$.

Οπότε η $L(\theta|\mathbf{x})$ είναι φθίνουσα ως προς θ, άρα θα πάρει το μέγιστο στο κάτω σημείο του πεδίου ορισμού της, δηλαδή στο $\theta = X_{(n)} = \max_i (X_i)$, αφού $\alpha < X_{(1)} < \ldots < X_{(n)} < \theta < \infty$.

Επομένως $\hat{\theta} = X_{(n)} = \max_i (X_i)$ ο Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ.

(ii) Είναι $f(x, \theta) = \dfrac{g(x)}{h(\theta)}$, $\theta \le x \le b$.

Έχουμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \theta)\, dx = 1 \Rightarrow \int_{\theta}^{b} \dfrac{g(x)}{h(\theta)}\, dx = 1 \Rightarrow \int_{\theta}^{b} g(x)\, dx = h(\theta)$. (1.6.3)

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι η εξής :

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{g(x_i)}{h(\theta)} I_{[\theta, b]}(x_i) = \frac{1}{h^n(\theta)} \prod_{i=1}^{n} g(x_i) I_{[\theta, b]}(x_i).$$

Όμοια για να βρούμε τον Ε. Μ. Π. εξετάζουμε τη μονοτονία της $L(\theta|\mathbf{x})$.

Είναι $\dfrac{\partial L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta} = -n \dfrac{h'(\theta)}{h^{n+1}(\theta)} \prod_{i=1}^{n} g(x_i)$, $\theta \le x_i \le b$. (1.6.4)

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1.6.3) ως προς θ και εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibnitz προκύπτει ότι $h'(\theta) = -g(\theta)$. Έτσι από τη σχέση (1.6.4) έχουμε ότι

$$\frac{\partial L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta} = -n \frac{h'(\theta)}{h^{n+1}(\theta)} \prod_{i=1}^{n} g(x_i) = n \frac{g(\theta)}{h^{n+1}(\theta)} \prod_{i=1}^{n} g(x_i) \ge 0,$$

αφού $g(\theta), h(\theta) \ge 0$.

Οπότε η $L(\theta|\mathbf{x})$ είναι αύξουσα ως προς θ, άρα θα πάρει το μέγιστο στο πάνω σημείο του πεδίου ορισμού της, δηλαδή στο $\theta = X_{(1)} = \min_i (X_i)$, αφού $\theta < X_{(1)} < \ldots < X_{(n)} < b < \infty$.

Επομένως $\hat{\theta} = X_{(1)} = \min_i (X_i)$, ο Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ.

■

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε οποιαδήποτε κατανομή της μορφής (i) και (ii) του παραδείγματος 1.20. Το παράδειγμα που ακολουθεί το επιβεβαιώνει αυτό.

Παράδειγμα 1.21

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Ομοιόμορφη κατανομή $U(0, \theta)$. Να βρεθεί ο Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ.

Είναι : $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 \leq x \leq \theta$.

Για $g(x) = 1$, $\forall x$ και $h(\theta) = \theta$ (μη αρνητικές) και με $\alpha = 0$, η Ομοιόμορφη Κατανομή $U(0, \theta)$ έχει σ. π. π. της μορφής (i) του παραδείγματος 1.20. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα που προέκυψε ο Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ θα είναι ο $\hat{\theta} = X_{(n)} = \max_i (X_i)$.

■

Ακολουθεί ένα επίσης πολύ γενικό παράδειγμα που αφορά στην εύρεση του Ε. Μ. Π. κάποιας παραμέτρου τα αποτελέσματα του οποίου μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε κατανομές που έχουν τη συγκεκριμένη μορφή σ. π. π. που αναφέρεται.

Παράδειγμα 1.22

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή :

$$f(x, \theta) = \frac{g(x)}{h(\theta)}, \ \alpha(\theta) \leq x \leq b(\theta),$$

όπου g(x) και h(θ) μη αρνητικές συναρτήσεις.

Να βρεθεί ο Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ.

Έχουμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\theta)\, dx = 1 \Rightarrow \int_{\alpha(\theta)}^{b(\theta)} \frac{g(x)}{h(\theta)}\, dx = 1$

$$\Rightarrow \int_{\alpha(\theta)}^{b(\theta)} g(x)\, dx = h(\theta). \qquad (1.6.5)$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι η εξής :

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{g(x_i)}{h(\theta)} I_{[\alpha(\theta),\, b(\theta)]}(x_i) = \frac{1}{h^n(\theta)} \prod_{i=1}^{n} g(x_i) I_{[\alpha(\theta),\, b(\theta)]}(x_i).$$

Το πεδίο ορισμού εξαρτάται από την παράμετρο θ, επομένως ο Ε. Μ. Π. της θ θα βρεθεί εξετάζοντας τη μονοτονία της L(θ|**x**).

Είναι $\frac{\partial L(\theta|\mathbf{x})}{\partial\theta} = -n\frac{h'(\theta)}{h^{n+1}(\theta)} \prod_{i=1}^{n} g(x_i),\ \alpha(\theta) \le x_i \le b(\theta).$ (1.6.6)

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1.6.5) ως προς θ και εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibnitz προκύπτει ότι :

$$h'(\theta) = g(b(\theta)) \cdot b'(\theta) - g(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta). \qquad (1.6.7)$$

Έτσι από τις σχέσεις (1.6.6) και (1.6.7) έχουμε ότι :

$$\frac{\partial L(\theta|\mathbf{x})}{\partial\theta} = -n\frac{h'(\theta)}{h^{n+1}(\theta)} \prod_{i=1}^{n} g(x_i)$$

$$= -n\frac{\left(g(b(\theta)) \cdot b'(\theta) - g(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta)\right)}{h^{n+1}(\theta)} \prod_{i=1}^{n} g(x_i), \qquad (1.6.8)$$

όπου g(x) και h(θ) μη αρνητικές συναρτήσεις, $\forall$ x.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Αν α(θ) αύξουσα συνάρτηση ως προς θ και b(θ) φθίνουσα, δηλαδή :

$\alpha(\theta) \geq 0$ και $b(\theta) \leq 0$, τότε, δεδομένου ότι οι συναρτήσεις g(x) και h(θ) είναι μη αρνητικές, από τη σχέση (1.6.7) προκύπτει ότι $h'(\theta) \leq 0$ και από τη σχέση (1.6.8) ότι $\dfrac{\partial L(\theta|\mathbf{x})}{\partial\theta} \geq 0$. Οπότε η $L(\theta|\mathbf{x})$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς θ. Είναι : $X_{(1)} \geq \alpha(\theta) \overset{\alpha\uparrow}{\Rightarrow} \theta \leq \alpha^{-1}(X_{(1)})$

και $X_{(n)} \leq b(\theta) \overset{b\downarrow}{\Rightarrow} \theta \leq b^{-1}(X_{(n)})$.

Επομένως η $L(\theta|\mathbf{x})$ μεγιστοποιείται για $\hat{\theta} = \min\left\{\alpha^{-1}\left(X_{(1)}\right), b^{-1}\left(X_{(n)}\right)\right\}$.

- Αν α(θ) φθίνουσα συνάρτηση ως προς θ και b(θ) αύξουσα, δηλαδή :

$\alpha(\theta) \leq 0$ και $b(\theta) \geq 0$, τότε, δεδομένου ότι οι συναρτήσεις g(x) και h(θ) είναι μη αρνητικές, από τη σχέση (1.6.7) προκύπτει ότι $h'(\theta) \geq 0$ και από τη σχέση (1.6.8) ότι $\dfrac{\partial L(\theta|\mathbf{x})}{\partial\theta} \leq 0$. Οπότε η $L(\theta|\mathbf{x})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς θ. Είναι : $X_{(1)} \geq \alpha(\theta) \overset{\alpha\downarrow}{\Rightarrow} \theta \geq \alpha^{-1}(X_{(1)})$

και $X_{(n)} \leq b(\theta) \overset{b\uparrow}{\Rightarrow} \theta \geq b^{-1}(X_{(n)})$.

Επομένως η $L(\theta|\mathbf{x})$ μεγιστοποιείται για $\hat{\theta} = \max\left\{\alpha^{-1}\left(X_{(1)}\right), b^{-1}\left(X_{(n)}\right)\right\}$.

- Αν οι συναρτήσεις α(θ) και b(θ) έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε δεν μπορούμε ν' αποφανθούμε για το είδος της μονοτονίας της $L(\theta|\mathbf{x})$ και επομένως να προσδιορίσουμε τον Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ.

[Βλέπε : Huzurbazar, V. (1955)]

■

Το παράδειγμα που ακολουθεί δίνει έμφαση στη σημασία του θεωρήματος 1.6. Όπως θα δούμε ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας δεν ορίζεται κατ' ανάγκη μονοσήμαντα.

Παράδειγμα 1.23

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Ομοιόμορφη κατανομή $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$. Να βρεθεί ένας Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ.

Είναι : $f(x, \theta) = 1 \; , \theta - \frac{1}{2} \leq x \leq \theta + \frac{1}{2}$.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι η εξής :

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}]}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}]}(x_i)$$

$$= I_{[\theta-\frac{1}{2}, x_{(n)}]}(x_{(1)}) \cdot I_{[x_{(1)}, \theta+\frac{1}{2}]}(x_{(n)}).$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\theta|\mathbf{x})$ είναι ίση με τη μονάδα εάν και μόνον εάν, όλα τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ βρίσκονται εντός του διαστήματος $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$, το οποίο αληθεύει εάν και μόνον εάν : $\theta - \frac{1}{2} \le x_{(1)}$ και $x_{(n)} \le \theta + \frac{1}{2}$ ή διαφορετικά : $x_{(n)} - \frac{1}{2} \le \theta \le x_{(1)} + \frac{1}{2}$.

Επομένως : $L(\theta|\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \forall\theta \in \left[x_{(n)} - \frac{1}{2}, x_{(1)} + \frac{1}{2} \right]. \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon. \end{cases}$

Άρα κάθε στατιστικό με τιμή $\hat{\theta}$ που ικανοποιεί την ανισότητα :

$x_{(n)} - \frac{1}{2} \le \hat{\theta} \le x_{(1)} + \frac{1}{2}$ είναι Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ.

Συμπεραίνουμε ότι οι Ε. Μ. Π. δεν ορίζονται κατ' ανάγκη μονοσήμαντα. Βάσει του θεωρήματος 1.1 αποδεικνύεται ότι το στατιστικό T= $(X_{(1)}, X_{(n)})'$ είναι επαρκές για την παράμετρο θ. Υπάρχουν περισσότεροι από έναν Ε. Μ. Π.. Παρατηρούμε ότι ο Ε. Μ. Π. : $(\cos^2 X_1)\left(X_{(n)} - \frac{1}{2}\right) + (\sin^2 X_1)\left(X_{(1)} + \frac{1}{2}\right)$ δεν εξαρτάται μόνο από την επαρκή στατιστική συνάρτηση $(X_{(1)}, X_{(n)})'$, αλλά και από το X_1 και αυτό γιατί δεν ορίζεται μονοσήμαντα όπως απαιτεί το θεώρημα 1.6.

■

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, φαίνεται η χρησιμότητα του θεωρήματος 1.7.

Παράδειγμα 1.24

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, με μ, σ^2 άγνωστες παραμέτρους. Να βρεθούν οι Ε. Μ. Π. των παραμέτρων μ, σ^2 και $\mu^2 + \sigma^2$.

Είναι : $f(x, \mu, \sigma^2) = \left(\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,

όπου : $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι η εξής :

$$L(\mu, \sigma^2 | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0.$$

Παίρνοντας το φυσικό λογάριθμο της $L(\mu, \sigma^2 | \mathbf{x})$, έχουμε :

$$\ln L(\mu, \sigma^2 | \mathbf{x}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς τις παραμέτρους μ και σ^2, έχουμε :

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2 | \mathbf{x})}{\partial \mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)}{2\sigma^2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\hat{\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{x}.$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = \frac{n}{2\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 .$$

Και επειδή $\hat{\mu} = \overline{x}$ είναι $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$.

Για να δείξουμε ότι οι λύσεις $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$ που βρέθηκαν πράγματι μεγιστοποιούν τη συνάρτηση πιθανοφάνειας, δηλαδή είναι Ε. Μ. Π. των παραμέτρων μ, σ^2 αντίστοιχα, αρκεί να δειχτεί ότι :

(i) $\left.\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial \mu^2}\right|_{\mu=\hat{\mu}} < 0$ ή $\left.\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial (\sigma^2)^2}\right|_{\sigma^2=\hat{\sigma}^2} < 0.$

(ii) Η Ιακωβιανή ορίζουσα $\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial \mu \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial \mu \partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial (\sigma^2)^2} \end{vmatrix}\right|_{\mu=\hat{\mu},\sigma^2=\hat{\sigma}^2} > 0.$

Είναι : $\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2}$, $\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial \mu \partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ και

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial (\sigma^2)^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 .$$

Πράγματι : (i) $\left.\dfrac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial\mu^2}\right|_{\mu=\hat{\mu}} = -\dfrac{n}{\sigma^2} < 0$ και

(ii) $$\left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial\mu^2} & \dfrac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial\mu\partial\sigma^2} \\ \dfrac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial\mu\partial\sigma^2} & \dfrac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})}{\partial(\sigma^2)^2} \end{vmatrix}\right|_{\mu=\hat{\mu},\sigma^2=\hat{\sigma}^2}$$

$$= \left.\begin{vmatrix} -\dfrac{n}{\sigma^2} & -\dfrac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) \\ -\dfrac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) & \dfrac{n}{2\sigma^4}-\dfrac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \end{vmatrix}\right|_{\mu=\hat{\mu},\sigma^2=\hat{\sigma}^2}$$

$$= \left. -\frac{n}{2\sigma^6}+\frac{1}{\sigma^8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-\frac{1}{\sigma^8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right|_{\mu=\hat{\mu},\,\sigma^2=\hat{\sigma}^2}$$

$$= \left.\frac{1}{\sigma^6}\left(-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right)\right|_{\mu=\hat{\mu},\,\sigma^2=\hat{\sigma}^2}$$

$$= \left(-\frac{n^2}{2}+\frac{n^2}{\cancel{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}\cancel{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}-\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\cancelto{0}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})}\right)$$

$$= \frac{1}{\hat{\sigma}^6}\left(-\frac{n^2}{2}+n^2\right) = \frac{n^2}{2\hat{\sigma}^6} > 0.$$

Όπως είδαμε οι προϋποθέσεις για να μεγιστοποιείται η $L(\mu,\sigma^2|\mathbf{x})$ ικανοποιούνται.

Επομένως οι Ε. Μ. Π. των παραμέτρων μ, σ^2 αντίστοιχα είναι οι $\hat{\mu}=\overline{x}$ και $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$.

Βάσει του θεωρήματος 1.7, ο Ε. Μ. Π. της $\varphi(\mu,\sigma^2)=\mu^2+\sigma^2$ είναι ο εξής :

$$\hat{\varphi}(\mu,\sigma^2)=\varphi(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)=\hat{\mu}^2+\hat{\sigma}^2=\overline{x}^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.$$

■

1.7 Έλεγχος στατιστικών υποθέσεων

Ο έλεγχος στατιστικών υποθέσεων είναι από τα πλέον βασικά θέματα της Μαθηματικής Στατιστικής. Στην παράγραφο αυτή δίνονται βασικά στοιχεία της θεωρίας που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές του 3ου Κεφαλαίου.

Στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων, όπως είναι γνωστό, σκοπός είναι ν' αποφασίσουμε αν η αρχική μας υπόθεση, η μηδενική, όπως αυτή σχηματίζεται κάθε φορά από τα στατιστικά δεδομένα που μελετάμε, έναντι κάποιας εναλλακτικής, γίνεται αποδεκτή ή όχι.

Κάθε πρόβλημα ελέγχου στατιστικών υποθέσεων έχει ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά. Το δειγματικό χώρο S των αποτελεσμάτων του πειράματος, ο οποίος διαιρείται σε δύο περιοχές, την κρίσιμη περιοχή (κ. π.) C και την S – C, οι οποίες διαμορφώνονται από το στατιστικό τεστ που κατασκευάζουμε.

Έχουμε απόρριψη της H_0 αν το $x \in C$, με αντίθετη απόφαση αν το $x \in S - C$, όπου x τα αριθμητικά δεδομένα που παρατηρήθηκαν.

Στη συνέχεια παρατίθενται βασικοί ορισμοί μέσω των οποίων θα φανεί ο τρόπος κατασκευής ενός στατιστικού τεστ.

__Ορισμός 1.11__

Σφάλμα Τύπου Ι, λέγεται το σφάλμα το οποίο γίνεται όταν απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση στην περίπτωση που είναι αληθινή.

Η πιθανότητα του Σφάλματος Τύπου Ι λέγεται **μέγεθος του Σφάλματος Τύπου Ι** και συμβολίζεται με α. Δηλαδή :

$\alpha = P(\text{Απορ. της } H_0 \mid H_0 \text{ αληθής}) = P(x \in C \mid H_0 \text{ αληθής})$.

Σφάλμα Τύπου ΙΙ, λέγεται το σφάλμα το οποίο γίνεται όταν αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση στην περίπτωση που δεν είναι αληθινή.

Η πιθανότητα του σφάλματος αυτού λέγεται **μέγεθος του Σφάλματος Τύπου ΙΙ** και συμβολίζεται με β. Δηλαδή :

$\beta = P(\text{Αποδ. της } H_0 \mid H_0 \text{ ψευδής}) = P(x \in S - C \mid H_0 \text{ ψευδής})$.

Το α λέγεται **επίπεδο σημαντικότητας** του στατιστικού τεστ.

__Ορισμός 1.12__

Έστω ένα στατιστικό τεστ μιας απλής ή σύνθετης μηδενικής υπόθεσης, έναντι μιας απλής εναλλακτικής με επίπεδο σημαντικότητας α. Έστω επίσης ότι η ισχύς αυτού $\gamma = 1 - \beta$ είναι η μέγιστη από όλα τα άλλα στατιστικά τεστ του ίδιου επιπέδου σημαντικότητας. Τότε το στατιστικό αυτό τεστ της μέγιστης ισχύος λέγεται **ισχυρότατο τεστ** (Ι).

Έστω ένα στατιστικό τεστ μιας απλής ή σύνθετης μηδενικής υπόθεσης, έναντι μιας σύνθετης εναλλακτικής με επίπεδο σημαντικότητας α. Έστω επίσης ότι για κάθε $\theta \in H_\alpha$ η ισχύς αυτού $\gamma(\theta) = 1 - \beta(\theta)$ είναι η μεγαλύτερη ή ίση της ισχύος κάθε άλλου τεστ της ίδιας H_0 έναντι του ίδιου H_α με το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας. Τότε το στατιστικό αυτό τεστ της μέγιστης ισχύος λέγεται **ομοιόμορφα ισχυρότατο τεστ** (Ο. Ι).

Η αρχή των Neyman – Pearson με τα Ι και τα Ο. Ι. τεστ είναι μία από τις πλέον διαδεδομένες αρχές αξιολόγησης και κατασκευής στατιστικών τεστ. (Βλέπε : Casella, G. and Berger, R.L. (1990), σελ. 365 – 678. / Ferguson, T.S. (1967), σελ. 198 – 224. / Mood, A.M., Graybill, F.A. and Boes, D.C. (1974), σελ. 409 – 414. / Παπαϊωάννου, Τ. και Φερεντίνος, Κ. (2000), $2^η$ Έκδοση, σελ. 117 – 130.)

Εδώ το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στο γενικευμένο πηλίκο ή λόγο πιθανοφάνειας, στο οποίο γίνεται αναφορά στο $3^ο$ Κεφάλαιο.

Ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών αποτελεί μία ανεξάρτητη και γενική αρχή κατασκευής στατιστικών τεστ η οποία μπορεί να εφαρμοστεί για στατιστικές υποθέσεις οποιασδήποτε μορφής.

Ας θεωρήσουμε την παραμετρική περίπτωση με $H_0 : \theta \in \Theta_0$ και $H_\alpha : \theta \in \Theta_\alpha$, $\Theta_0, \Theta_\alpha \in \boldsymbol{\Theta}$, όπου $\boldsymbol{\Theta}$ ο παραμετρικός χώρος. Ο **γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών** ορίζεται από τη σχέση :

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\theta \in \Theta_0} f(x, \theta)}{\max\limits_{\theta \in \boldsymbol{\Theta}} f(x, \theta)},$$

όπου $f(x, \theta)$ η σ. π. π. (ή σ. π.) της τ. μ. $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Δεδομένου ότι $\Theta_0 \subset \boldsymbol{\Theta}$, έχουμε την ιδιότητα ότι $0 \le \lambda \le 1$.

Το τεστ πηλίκου πιθανοφάνειας επιπέδου σημαντικότητας α, απορρίπτει την H_0 όταν $\lambda \le \kappa$, όπου το κ προσδιορίζεται από τις σχέσεις :

$P(\lambda \le \kappa \mid \Theta_0) = \alpha$, αν $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, δηλαδή η H_0 είναι απλή.

και $P(\lambda \le \kappa \mid \Theta_0) \le \alpha$, $\forall\, \theta \in \Theta_0$, με ισότητα για ένα τουλάχιστον $\theta \in \Theta_0$, δηλαδή αν η H_0 είναι σύνθετη.

Επομένως η κ. π. του τεστ πηλίκου πιθανοφάνειας είναι $\{x : \lambda \le \kappa\}$.

Το τεστ στηρίζεται στη γνώση της ακριβούς κατανομής του λ, όταν ισχύει η H_0. Η ακριβής κατανομή της στατιστικής συνάρτησης λ είναι συνήθως πολύπλοκη. Συχνά, αντί αυτής, χρησιμοποιείται η προσεγγιστική κατανομή της, που δίνεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.8

Εάν ο παραμετρικός χώρος **Θ** είναι διάστασης r, δηλαδή αποτελείται από r παραμέτρους και s είναι ο αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων οι οποίες καθορίζονται από την H_0 : $\theta \in \Theta_0$, τότε κάτω από τις συνθήκες κανονικότητας, για μεγάλες τιμές του n η τ. μ. $-2\ln\lambda \overset{\text{προσ.}}{\sim} X^2_{r-s}$ όταν αληθεύει η H_0.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα ώστε να γίνει κατανοητή η διαδικασία κατασκευής ενός στατιστικού τεστ με το γενικευμένο λόγο πιθανοφάνειας.

<u>Παράδειγμα 1.25</u> (Ακριβές τεστ του λόγου πιθανοφάνειας)

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, με μ, σ^2 άγνωστες παραμέτρους. Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση $H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι της εναλλακτικής $H_\alpha : \mu \neq \mu_0$.

Είναι : $f(x,\mu,\sigma^2) = \left(\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,

όπου : $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι η εξής :

$$L(\mu|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

<u>Υπό την H_0</u> : $\mu = \mu_0$ έχουμε : $\mu = \mu_0$ και $\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$.

<u>Υπό την H_α</u> : $\mu \neq \mu_0$ έχουμε : $\hat{\mu} = \bar{x}$ και $\hat{\sigma}_\alpha^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, όπως βρέθηκε στο παράδειγμα 1.24.

Σύμφωνα με το τεστ του πηλίκου πιθανοφάνειας έχουμε :

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\theta\in\Theta_0} f(x,\theta)}{\max\limits_{\theta\in\Theta_\alpha} f(x,\theta)} = \frac{\left(\dfrac{1}{2\pi\hat{\sigma}_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\hat{\sigma}_0^2}}}{\left(\dfrac{1}{2\pi\hat{\sigma}_\alpha^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2\hat{\sigma}_\alpha^2}}} = \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_\alpha^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{\cancel{e^{\frac{n}{2}}}}{\cancel{e^{\frac{n}{2}}}}$$

$$= \left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{1 + \frac{n(\overline{x} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n-1}}\right)^{\frac{n}{2}},$$

όπου $t = \dfrac{(\overline{x} - \mu_0)}{s/\sqrt{n}}$ και $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Επομένως : $\lambda \leq \kappa \Rightarrow \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n-1}}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \kappa \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{t^2}{n-1}} \leq \kappa^{\frac{2}{n}} = \kappa^*$

$$\Rightarrow t^2 \geq \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)(n-1) \Rightarrow |t| \geq \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)(n-1)} = c$$

$$\Rightarrow |t| \geq c$$

όπου το c προσδιορίζεται από τη σχέση $P(|t| \geq c \mid H_0 \text{ αληθής}) = \alpha$.

Όμως $t = \dfrac{(\overline{x} - \mu_0)}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, όταν ισχύει η H_0. Άρα $c = t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$ και έτσι η κ. π.

για το συγκεκριμένο έλεγχο είναι $|t| \geq t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$. ■

<u>Παράδειγμα 1.26</u> (Ασυμπτωτικό τεστ του λόγου πιθανοφάνειας)

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή Poisson με παράμετρο m_1 και $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή Poisson με παράμετρο m_2. Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση $H_0 : m_1 = m_2$ έναντι της εναλλακτικής $H_\alpha : m_1 \neq m_2$.

(Τα τυχαία δείγματα είναι ανεξάρτητα.)

Είναι : $p(x, m) = \dfrac{e^{-m} \cdot m^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots \ , \ m \geq 0.$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας (λόγω ανεξαρτησίας των δειγμάτων) είναι η εξής :

$$L = L(m_1, m_2 \,|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L_1(m_1 \,|\mathbf{x})\, L_2(m_2 \,|\mathbf{y})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p(x_i, m_1) \cdot \prod_{i=1}^{n} p(y_i, m_2)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-m_1} \cdot m_1^{x_i}}{x_i!} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-m_2} \cdot m_2^{y_i}}{y_i!}$$

$$= \frac{e^{-nm_1} \cdot m_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \cdot \frac{e^{-nm_2} \cdot m_2^{\sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!}$$

$$= \frac{e^{-n(m_1+m_2)} \cdot m_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot m_2^{\sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i! \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i!},$$

όπου $L_1(m_1 \,|\mathbf{x})$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας του τ. δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ και $L_2(m_2 \,|\mathbf{y})$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας του τ. δ. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

Υπό την H_0 : $m_1 = m_2 = m$ έχουμε :

$$L(m|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{-2nm} \cdot m^{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i! \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i!}.$$

Παίρνοντας το φυσικό λογάριθμο της $L(m|\mathbf{x}, \mathbf{y})$, έχουμε :

$$\ln L(m|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2nm + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\right)\ln(m) - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right) - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} y_i!\right)$$

Παραγωγίζοντας ως προς την παράμετρο m και έπειτα μηδενίζοντάς την, έχουμε :

$$\frac{\partial \ln L(m|\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial m} = -2n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}{\hat{m}} = 0 \Rightarrow \hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}{2n}.$$

Είναι $\left.\frac{\partial^2 \ln L(m|\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial m^2}\right|_{m=\hat{m}} = \left. -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}{m^2}\right|_{m=\hat{m}} < 0.$

Άρα υπό την H_0 ο Ε. Μ. Π. της παραμέτρου m είναι ο $\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i}{2n}$

$$\Rightarrow \hat{m} = \frac{\overline{X} + \overline{Y}}{2n}.$$

Υπό την H_a : $m_1 \neq m_2$ έχουμε :

$$L = L(m_1, m_2|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{-n(m_1+m_2)} \cdot m_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot m_2^{\sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i! \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i!}.$$

Παίρνοντας το φυσικό λογάριθμο της L έχουμε :

$$\ln L = \ln L(m_1, m_2 \,|\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$$

$$= -n(m_1+m_2)+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(m_1)+\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\ln(m_2)-\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)-\ln\left(\prod_{i=1}^{n} y_i!\right).$$

Παραγωγίζοντας ως προς τις παραμέτρους m_1 και m_2 αντίστοιχα και έπειτα μηδενίζοντας αυτές, έχουμε :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m_1} = -n+\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{m_1} = 0 \Rightarrow \hat{m}_1 = \bar{x}.$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m_2} = -n+\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{m_2} = 0 \Rightarrow \hat{m}_2 = \bar{y}.$$

Για να μεγιστοποιούν οι $\hat{m}_1$ και $\hat{m}_2$ την L θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής προϋποθέσεις :

(i) $\left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m_1^{\,2}}\right|_{m_1=\hat{m}_1} < 0$ ή $\left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m_2^{\,2}}\right|_{m_2=\hat{m}_2} < 0.$

(ii) Η Ιακωβιανή ορίζουσα $\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial m_1^{\,2}} & \frac{\partial \ln L}{\partial m_1 \partial m_2} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial m_1 \partial m_2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial m_2^{\,2}} \end{vmatrix}\right|_{m_1=\hat{m}_1, m_2=\hat{m}_2} > 0.$

Πράγματι : (i) $\left.\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial m_1^2}\right|_{m_1=\hat{m}_1} = \left.-\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{m_1^2}\right|_{m_1=\hat{m}_1} < 0$ και

(ii) $$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial m_1^2} & \dfrac{\partial \ln L}{\partial m_1 \partial m_2} \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial m_1 \partial m_2} & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial m_2^2} \end{matrix} \right\|_{m_1=\hat{m}_1, m_2=\hat{m}_2} = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{m_1^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{m_2^2} \end{matrix} \right\|_{m_1=\hat{m}_1, m_2=\hat{m}_2}$$

$$= \left.\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{m_1^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{m_2^2}\right|_{m_1=\hat{m}_1, m_2=\hat{m}_2} = \frac{n\cancel{\overline{x}}}{\overline{x}^{\cancel{2}}} \cdot \frac{n\cancel{\overline{y}}}{\overline{y}^{\cancel{2}}} = \frac{n^2}{\overline{x} \cdot \overline{y}} > 0.$$

Επομένως υπό την H_α οι Ε. Μ. Π. των παραμέτρων m_1 και m_2 αντίστοιχα, είναι οι $\hat{m}_1 = \overline{X}$ και $\hat{m}_2 = \overline{Y}$.

Σύμφωνα με το τεστ του πηλίκου πιθανοφάνειας έχουμε :

$$\lambda = \frac{\max\limits_{H_0} L}{\max\limits_{H_\alpha} L} = \frac{\dfrac{\cancel{e^{-2n\left(\frac{\overline{x}+\overline{y}}{2}\right)}} \cdot \left(\dfrac{\overline{x}+\overline{y}}{2}\right)^{n(\overline{x}+\overline{y})}}{\cancel{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \cdot \cancel{\prod_{i=1}^{n} y_i!}}}{\dfrac{\cancel{e^{-n(\overline{x}+\overline{y})}} \cdot \overline{x}^{n\overline{x}} \cdot \overline{y}^{n\overline{y}}}{\cancel{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \cdot \cancel{\prod_{i=1}^{n} y_i!}}} = \frac{\left(\dfrac{\overline{x}+\overline{y}}{2}\right)^{n(\overline{x}+\overline{y})}}{\overline{x}^{n\overline{x}} \cdot \overline{y}^{n\overline{y}}} \leq \kappa \qquad (1.7.1)$$

όπου η σταθερά κ προσδιορίζεται από τη σχέση $\alpha = P(\lambda \leq \kappa \mid H_0 \text{ αληθής})$.

Για να προσδιοριστεί η σταθερά κ, είναι απαραίτητη η γνώση της κατανομής του λ, η οποία είναι δύσκολο να βρεθεί. Επομένως εργαζόμαστε βάσει του θεωρήματος 1.8 και έχουμε ότι η ποσότητα $-2\ln\lambda \overset{\text{προσ.}}{\sim} X_1^2$, όταν αληθεύει η H_0 (αφού $r = 2$ και $s = 1$).

Άρα : $P(-2\ln\lambda \geq c \mid H_0$ αληθής$) = \alpha$, με $c = X_{1,\alpha}^2$ και κ. π. $-2\ln\lambda \geq X_{1,\alpha}^2$.

Δηλαδή, για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0 : m_1 = m_2$ έναντι της εναλλακτικής $H_\alpha : m_1 \neq m_2$, χρησιμοποιούμε το ασυμπτωτικό τεστ πηλίκου πιθανοφάνειας επιπέδου σημαντικότητας α :

$-2\ln\lambda \overset{\text{προσ.}}{\sim} X_1^2$ με κ. π. $-2\ln\lambda \geq X_{1,\alpha}^2$, όπου λ δίνεται από τη σχέση (1.7.1).

■

Στο 3^ο Κεφάλαιο με τη βοήθεια του θεωρήματος του Basu, όπως θα δούμε (Παράδειγμα 3.9), μπορεί να βρεθεί η ακριβής κατανομή της ποσότητας $-2\ln\lambda$, υπό την μηδενική υπόθεση, όπου λ ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2$^{\text{Ο}}$

Το Θεώρημα του Basu και οι Παραλλαγές του

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το θεώρημα του Basu, όπως και κάποιες παραλλαγές αυτού, καταδεικνύοντας τη χρησιμότητά του σε πάρα πολλές εφαρμογές της Στατιστικής, ένα μέρος των οποίων θα δοθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Το θεώρημα του Basu είναι ένα από τα πιο ουσιώδη αποτελέσματα της κλασικής στατιστικής. Δεν υπάρχουν αρκετά απλά αποτελέσματα στη στατιστική των οποίων η δημοσιότητα να έχει σταθεί στο πέρασμα του χρόνου. Το συγκεκριμένο θεώρημα αποτελεί καθαρά εξαίρεση. Δε μένει μόνο δημοφιλές πενήντα χρόνια μετά την διατύπωσή του, αλλά προκαλεί μέχρι και σήμερα, το έντονο ενδιαφέρον λόγω της χρησιμότητας και της απλότητάς του [Ghosh, M. (2002)].

Από τη μια πλευρά το θεώρημα του Basu εμφανίζεται ως καθαρό τεχνικό αποτέλεσμα, και είναι δυνατόν, η τεχνική αυτή άποψη του θεωρήματος να οδηγεί σε ποικίλες εφαρμογές. Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα έχει τις δικές του εννοιολογικές αξίες. Όπως σημειώνεται από τον ίδιο το Basu, το θεώρημα δείχνει τη σχέση μεταξύ **επάρκειας**, **πληρότητας**, **ancillarity** και **ανεξαρτησίας**, έννοιες οι οποίες προηγουμένως είχαν διακριθεί ως μη σχετικές μεταξύ τους και οδηγεί διαδοχικά σε βαθύτερη κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των εννοιών αυτών. Το θεώρημα δεν είναι σημαντικό μόνο αυτό καθεαυτό, αλλά και ιδιαίτερα χρήσιμο σ' ένα μεγάλο πλήθος εφαρμογών.

Πιο συγκεκριμένα, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιείται στη θεωρία κατανομών, στην εκτιμητική, στην εύρεση Α. Ο. Ε. Δ. (UMVUE) εκτιμητών και στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται το θεώρημα με την απόδειξή του και ακολούθως κάποιες παραλλαγές αυτού.

2.2 Το Θεώρημα του Basu

Στην παράγραφο αυτή, παρουσιάζεται το θεώρημα του Basu, καθώς και μερικά παραδείγματα μέσω των οποίων φαίνεται η χρησιμότητά του.

Θεώρημα 2.1 : Θεώρημα Basu

Αν T ένα πλήρες και επαρκές στατιστικό και U ένα ancillary στατιστικό, τότε τα U και T είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Απόδειξη :

Η απόδειξη δίνεται για την απαριθμητή περίπτωση. Για τη συνεχή περίπτωση η απόδειξη είναι όμοια με τη διαφορά ότι στη θέση του αθροίσματος έχουμε ολοκλήρωμα.

Είναι $g(T) = P(U|T)$ (2.1)

επειδή τα U και T δεν εξαρτώνται από την παράμετρο ως στατιστικά και το T είναι επαρκές. Είναι :

$$E[g(T)] = \sum_{t} g(T=t)P(T=t)$$

$$= \sum_{t} P(U|T=t)P(T=t)$$

$$= \sum_{t} P(U,T)$$

$$= P(U).$$

Άρα $E[g(T)] = P(U) \Rightarrow E[g(T) - P(U)] = 0.$ (2.2)

Το T είναι πλήρες στατιστικό και η κατανομή του U ανεξάρτητη της παραμέτρου.

Λόγω πληρότητας λοιπόν, από (2.2)$\Rightarrow g(T) - P(U) = 0 \Rightarrow g(t) = P(U)$.

Επομένως από την (2.1) έχουμε ότι : $P(U|T) = P(U)$, γεγονός που αποδεικνύει ότι τα U και T είναι ανεξάρτητα στατιστικά.

■

Το θεώρημα του Basu είναι ιδιαίτερα χρήσιμο γιατί βοηθάει στην απόδειξη της ανεξαρτησίας δύο στατιστικών (πολύ χρήσιμη στην εφαρμογή της Μαθηματικής Στατιστικής), χωρίς να απαιτεί την εύρεση της από κοινού κατανομής των στατιστικών αυτών.

Στη συνέχεια, παρατίθενται παραδείγματα στα οποία αποδεικνύεται η ανεξαρτησία δύο στατιστικών με τη βοήθεια του θεωρήματος του Basu, που διαφορετικά θα ήταν πολύ δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να αποδειχθεί.

<u>Παράδειγμα 2.1</u>

Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες τ. μ. από έναν πληθυσμό με κανονική κατανομή $N(\mu, 1)$. Θα δειχθεί με τη βοήθεια του θεωρήματος του Basu ότι τα στατιστικά $T = X_1 + X_2$ και $V = X_1 - X_2$ είναι ανεξάρτητα.

Είναι : $f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$.

Αφού X_1, X_2 ανεξάρτητες τ. μ. θα είναι :

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2}{2}}.$$

<u>Επάρκεια</u> :

Βάσει του Παραγοντικού θεωρήματος των Neyman – Fisher (θεώρημα 1.1) έχουμε :

$$f(x_1, x_2, \mu) = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{(x_1^2-2\mu x_1+\mu^2+x_2^2-2\mu x_2+\mu^2)}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{2}} \cdot e^{-\left(\mu^2-\mu(x_1+x_2)\right)}$$

$$= g(x_1+x_2, \mu) \cdot h(x)$$

όπου $g(x_1+x_2, \mu) = e^{-\left(\mu^2-\mu(x_1+x_2)\right)}$ και $h(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{2}}$.

Άρα το στατιστικό $T = X_1 + X_2$ είναι επαρκές για την παράμετρο μ.

<u>Πληρότητα</u> :

Η κατανομή N(μ, 1) ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.1) με :

$$c(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2}},\ Q_1(\mu) = \mu,\ T_1(x) = x,\ Q_2(\mu) = -1,\ T_2(x) = x^2,\ h(x) = 1.$$

Βάσει του Πορίσματος 1.1 το στατιστικό $T = X_1 + X_2$ είναι πλήρες.

Ancillarity του στατιστικού $V = X_1 - X_2$.

Είναι $X_1 \sim N(\mu, 1)$ και $X_2 \sim N(\mu, 1)$, οπότε $X_1 - X_2 \sim N(0, 2)$.

Δηλαδή, η κατανομή του $V = X_1 - X_2$ είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου μ.

Άρα το στατιστικό $V = X_1 - X_2$ είναι ancillary.

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα του Basu τα στατιστικά $T = X_1 + X_2$ και $V = X_1 - X_2$ είναι ανεξάρτητα.

■

Παράδειγμα 2.2

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Ομοιόμορφη κατανομή $U(0,\theta)$. Να δειχθεί ότι τα στατιστικά $\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$ και $X_{(n)}$ είναι ανεξάρτητα.

Στα παραδείγματα 1.2 και 1.5 αποδείχθηκε αντίστοιχα, ότι το στατιστικό $X_{(n)}$ είναι επαρκές για την παράμετρο θ και πλήρης στατιστική συνάρτηση.

Επίσης, στο παράδειγμα 1.11 αποδείχθηκε ότι το στατιστικό $\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$ είναι ancillary. Εφόσον ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Basu (θεώρημα 2.1), προκύπτει ότι τα στατιστικά $\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$ και $X_{(n)}$ είναι ανεξάρτητα.

■

Παράδειγμα 2.3

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Ομοιόμορφη κατανομή $U(0,\theta)$. Να δειχθεί ότι τα στατιστικά $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_{(i)}}{X_{(n)}}$ και $X_{(n)}$ είναι ανεξάρτητα.

Στα παραδείγματα 1.2 και 1.5 αποδείχθηκε αντίστοιχα, ότι το στατιστικό $X_{(n)}$ είναι επαρκές για την παράμετρο θ και πλήρης στατιστική συνάρτηση.

Επίσης, στην παρατήρηση 1.2 του 1ου Κεφαλαίου, αποδείχθηκε ότι το στατιστικό $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_{(i)}}{X_{(n)}}$ είναι ancillary. Επομένως βάσει του θεωρήματος του Basu (θεώρημα 2.1), προκύπτει ότι τα στατιστικά $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_{(i)}}{X_{(n)}}$ και $X_{(n)}$ είναι ανεξάρτητα.

■

Από τα παραπάνω παραδείγματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η ανεξαρτησία δύο ή περισσότερων στατιστικών, που αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στη Στατιστική, μπορεί να αποδειχθεί με τη χρήση του θεωρήματος του Basu (θεώρημα 2.1), εφαρμόζοντας τις μέχρι τώρα γνωστές έννοιες : επάρκεια, πληρότητα και ancillarity.

Περισσότερα, σχετικά με τις εφαρμογές του θεωρήματος, αναφέρονται στο 3° Κεφάλαιο.

2.3 Παραλλαγές του θεωρήματος του Basu

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να σκεφτούμε πιθανές παραλλαγές του θεωρήματος του Basu (θεώρημα 2.1), συνδυάζοντας τις έννοιες που υπεισέρχονται σ' αυτό. Στη συνέχεια, γίνεται μία μελέτη, διατυπώνοντας διάφορα ερωτήματα που μπορούν να θεωρηθούν ως πιθανές παραλλαγές του θεωρήματος και των οποίων η εγκυρότητα θα φανεί, στα πλαίσια μιας προσπάθειας απόδειξής τους, με τη χρήση διαφόρων μέσων και κυρίως του αντιπαραδείγματος.

- **1° Ερώτημα** :

•Αν T ένα πλήρως φραγμένο και επαρκές στατιστικό και U ένα στατιστικό με κατανομή ανεξάρτητη του T, $\forall\theta \in \mathbf{\Theta}$, τότε το U είναι ancillary ?

Το παράδειγμα που παρουσιάζεται στη συνέχεια, όπως θα διαπιστωθεί, δίνει αρνητική απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα.

Παράδειγμα 2.4

Έστω X μια τ. μ. από έναν πληθυσμό με κατανομή U[θ, θ+1), όπου $\theta \in \mathbf{\Theta} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Το στατιστικό X έχει σ. π. π. :

$$f(x) = I_{[[x]=\theta]} = \begin{cases} 1, & [x] = \theta \\ 0, & [x] \neq \theta \end{cases},$$

όπου $[x]$ το ακέραιο μέρος του x, δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του x.

Θα δειχθεί ότι το στατιστικό T = [X] είναι επαρκές για τη παράμετρο θ, πλήρης στατιστική συνάρτηση, ανεξάρτητο του X και ότι το X δεν είναι ancillary.

<u>Επάρκεια</u> :

Από το Παραγοντικό θεώρημα των Neyman – Fisher (θεώρημα 1.1) έχουμε :

$f(x) = I_{[[x]=\theta]} = g([x], \theta) \cdot h(x)$, όπου $g(T, \theta) = g([X], \theta) = I_{[[x]=\theta]}$ και $h(x) = 1$.

Άρα το στατιστικό T = [X] επαρκές για την παράμετρο θ.

<u>Πληρότητα</u> :

Βάσει του Ορισμού 1.4 έχουμε :

$$\begin{aligned} E\left(h[x]\right) = 0 &\Rightarrow \sum_{\theta\in\Theta} \int_{\theta}^{\theta+1} h[x] \cdot 1\, dx = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{\theta\in\Theta} \int_{\theta}^{\theta+1} h[x]\, dx = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{\theta\in\Theta} h[x] \int_{\theta}^{\theta+1} 1\, dx = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{\theta\in\Theta} h[x] \left[x\Big|_{\theta}^{\theta+1} \right] = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{\theta\in\Theta} h[x] \left(\cancel{\theta} + 1 - \cancel{\theta} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{\theta \in \Theta} h[x] = 0$$
$$\Rightarrow h[\theta] = 0, \forall \theta \in \Theta$$
$$\Rightarrow h[x] = 0, \;\; \theta \leq x \leq \theta + 1.$$

Άρα το στατιστικό T = [X] πλήρες και επομένως πλήρως φραγμένο, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο 1° Κεφάλαιο.

<u>Ανεξαρτησία</u> :

Είναι προφανές ότι :

$f([X] \mid X) = f([X])$, όπου $\theta \leq x \leq \theta+1$, $\theta \in \Theta \equiv \mathbb{Z}$.

Άρα το στατιστικό T = [X] ανεξάρτητο του X.

Όμώς η κατανομή του X :

$$f(x) = I_{[[x]=\theta]} = \begin{cases} 1, & [x] = \theta \\ 0, & [x] \neq \theta \end{cases}$$

<u>δεν</u> είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ, δηλαδή, το X δεν είναι ancillary.

■

Το παράδειγμα 2.4 δίνει την απάντηση στο 1° Ερώτημα. Με τη βοήθεια αυτού μπορεί να διατυπωθεί η 1η Παραλλαγή του θεωρήματος του Basu, αν θεωρήσουμε ως T = [X] και ως U = X.

⟶ **<u>1η Παραλλαγή</u>** :

Αν T ένα πλήρως φραγμένο και επαρκές στατιστικό και U ένα στατιστικό με κατανομή ανεξάρτητη του T, $\forall \theta \in \Theta$, τότε το U <u>δεν</u> είναι ancillary.

Παρατήρηση 2.1

Από διάφορες μελέτες που έχουν γίνει στο συγκεκριμένο θέμα, έχει διαπιστωθεί ότι :

Αν T ένα επαρκές στατιστικό για την αντίστοιχη παράμετρο, τότε ένα στατιστικό U με κατανομή ανεξάρτητη του T είναι ancillary, εάν και μόνον εάν δεν υπάρχει κάποιο splitting set, όπως αυτό περιγράφεται από τη σχέση :

$$P_\theta(X_0) = \begin{cases} 1, & \theta \in \Theta \\ 0, & \theta \in \Theta - \Theta_0 \end{cases} ,$$

όπου X_0 ένα μη κενό υποσύνολο του X και Θ_0, επίσης, ένα μη κενό υποσύνολο του **Θ**.

Περισσότερες πληροφορίες για όσα αναφέρονται στην Παρατήρηση 2.1, μπορεί κανείς να βρει στους Koehn, U. and Thomas, D. L. (1975).

■

Στη συνέχεια, διατυπώνεται ένα 2^{o} Ερώτημα που αποτελεί μία εναλλακτική προσέγγιση μιας πιθανής αντιστροφής του θεωρήματος του Basu.

- **2^{o} Ερώτημα** :

Η ανεξαρτησία ενός ancillary στατιστικού U και ενός επαρκούς στατιστικού T, συνεπάγεται τη φραγμένη πληρότητα του T ?

Η απάντηση είναι επίσης αρνητική, όπως προκύπτει από το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.5

Έστω $X_1, X_2, \dots ,X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Ομοιόμορφη κατανομή $U(\theta,\theta+1)$. Θα δειχθεί ότι το στατιστικό $T = (X_{(1)}, X_{(n)})'$ είναι επαρκές για την παράμετρο θ, δεν είναι πλήρες, καθώς και ότι το στατιστικό $U = X_{(n)} - X_{(1)}$ είναι ancillary και ανεξάρτητο του T.

Είναι : $f(x, \theta) = 1,\ \theta \le x \le \theta+1$.

<u>Επάρκεια</u> :

Από το Παραγοντικό θεώρημα των Neyman – Fisher (θεώρημα 1.1), έχουμε :

$$f(x_1, x_2, \dots,x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)\cdot I_{[\theta,\theta+1]}(x_i) = I_{[\theta,\theta+1]}\left(x_{(1)},x_{(n)}\right)$$

$$= g(T, \theta)\cdot h(x),$$

όπου $g(T, \theta) = I_{[\theta,\theta+1]}\left(x_{(1)},x_{(n)}\right)$ και $h(x) = 1$.

Άρα το στατιστικό $T = (X_{(1)}, X_{(n)})'$ είναι επαρκές για τη παράμετρο θ.

<u>Πληρότητα</u> :

Το στατιστικό $T = (X_{(1)}, X_{(n)})'$ δεν είναι πλήρες.

Πράγματι·

Η σ. π. π. του ελαχίστου διατεταγμένου στατιστικού $X_{(1)}$ δίνεται από τη σχέση :

$$g(x_{(1)}) = n\cdot f(x_{(1)})\cdot[1-F(x_{(1)})]^{n-1}, \theta \le x_{(1)} \le \theta+1,$$

όπου f η σ. π. π. του πληθυσμού και F η α. σ. κ. του πληθυσμού με τύπο:

$$F(x) = \int_{\theta}^{x} 1 \ dx = x - \theta\,,\ \theta \le x \le \theta + 1\,.$$

Επομένως :

$$g(x_{(1)}) = n \cdot f(x_{(1)}) \cdot [1 - F(x_{(1)})]^{n-1}$$

$$= n \cdot 1 \cdot [1 - x_{(1)} + \theta]^{n-1}$$

$$= n \cdot [1 + \theta - x_{(1)}]^{n-1},\ \theta \le x_{(1)} \le \theta + 1\,.$$

Είναι :

$$E(x_{(1)}) = \int_{\theta}^{\theta+1} x_{(1)} \cdot g(x_{(1)}) \ dx_{(1)}$$

$$= \int_{\theta}^{\theta+1} x_{(1)} \cdot n \cdot [1 + \theta - x_{(1)}]^{n-1} \ dx_{(1)}$$

$$= -\int_{\theta}^{\theta+1} x_{(1)} \cdot \left[(1 + \theta - x_{(1)})^{n}\right]' \ dx_{(1)}$$

$$= -x_{(1)} \cdot (1 + \theta - x_{(1)})^{n} \Big|_{x_{(1)}=\theta}^{\theta+1} + \int_{\theta}^{\theta+1} (1 + \theta - x_{(1)})^{n} \ dx_{(1)}$$

$$= \theta + \left(-\frac{(1 + \theta - x_{(1)})^{n+1}}{n+1} \Bigg|_{x_{(1)}=\theta}^{\theta+1} \right)$$

$$= \theta + \frac{1}{n+1}.$$

Δηλαδή : $E(x_{(1)}) = \theta + \dfrac{1}{n+1}.$

Η σ. π. π. του μεγίστου διατεταγμένου στατιστικού $X_{(n)}$ δίνεται από τη σχέση :

$$g(x_{(n)}) = n \cdot f(x_{(n)}) \cdot [F(x_{(n)})]^{n-1}, \theta \le x_{(n)} \le \theta + 1$$

όπου f η σ. π. π. του πληθυσμού και F η α. σ. κ. του πληθυσμού με τύπο:

$$F(x) = \int_{\theta}^{x} 1 \ dx = x - \theta \, , \ \theta \leq x \leq \theta + 1 .$$

Επομένως :

$$g(x_{(n)}) = n \cdot f(x_{(n)}) \cdot [F(x_{(n)})]^{n-1}$$

$$= n \cdot 1 \cdot [x_{(n)} - \theta]^{n-1} = n \cdot [x_{(n)} - \theta]^{n-1} , \theta \leq x_{(n)} \leq \theta + 1 .$$

Είναι :

$$E(x_{(n)}) = \int_{\theta}^{\theta+1} x_{(n)} \cdot g(x_{(n)}) \ dx_{(n)}$$

$$= \int_{\theta}^{\theta+1} x_{(n)} \cdot n \cdot [x_{(n)} - \theta]^{n-1} \ dx_{(n)}$$

$$= \int_{\theta}^{\theta+1} x_{(n)} \cdot \left[(x_{(n)} - \theta)^{n} \right]' \ dx_{(n)}$$

$$= x_{(n)} \cdot (x_{(n)} - \theta)^{n} \Big|_{x_{(n)}=\theta}^{\theta+1} - \int_{\theta}^{\theta+1} (x_{(n)} - \theta)^{n} \ dx_{(n)}$$

$$= \theta + 1 - \left(\frac{(x_{(n)} - \theta)^{n+1}}{n+1} \Bigg|_{x_{(n)}=\theta}^{\theta+1} \right)$$

$$= \theta + 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \theta + \frac{n + \cancel{1} - \cancel{1}}{n+1}$$

$$= \theta + \frac{n}{n+1} .$$

Δηλαδή : $E(x_{(n)}) = \theta + \dfrac{n}{n+1}$.

Έστω $h(x_{(1)}, x_{(n)}) = x_{(n)} - x_{(1)} - \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}$

$$= x_{(n)} - x_{(1)} - \frac{n-1}{n+1} .$$

Οπότε θα είναι :

$$E\left(h(x_{(1)}, x_{(n)})\right) = E\left(x_{(n)} - x_{(1)} - \frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$= E\left(x_{(n)}\right) - E\left(x_{(1)}\right) - \frac{n-1}{n+1}$$

$$= \cancel{\theta} + \frac{n}{n+1} - \cancel{\theta} - \frac{1}{n+1} - \frac{n-1}{n+1}$$

$$= \frac{n-1}{n+1} - \frac{n-1}{n+1}$$

$$= 0.$$

Όμως $h(x_{(1)}, x_{(n)}) \neq 0, \ \forall x_{(1)}, x_{(n)}$.

Άρα το στατιστικό $T = (X_{(1)}, X_{(n)})'$ <u>δεν</u> είναι πλήρες.

<u>Ancillarity</u> του στατιστικού $U = X_{(n)} - X_{(1)}$.

Ζητείται η κατανομή του στατιστικού $U = X_{(n)} - X_{(1)}$.

Θεωρούμε το μετασχηματισμό : $W = X_{(1)}$ & $U = X_{(n)} - X_{(1)}$.

Παίρνοντας τις τιμές $w = x_{(1)}$ & $u = x_{(n)} - x_{(1)}$ και λύνοντας ως προς $x_{(1)}$ και $x_{(n)}$ έχουμε $x_{(1)} = w$ και $x_{(n)} = w + u$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του συστήματος αυτού είναι :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{(1)}}{\partial w} & \frac{\partial x_{(1)}}{\partial u} \\ \frac{\partial x_{(n)}}{\partial w} & \frac{\partial x_{(n)}}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Η από κοινού κατανομή των διατεταγμένων στατιστικών $X_{(1)}$, $X_{(n)}$ δίνεται από τον τύπο :

$$f(x_{(1)}, x_{(n)}) = n\cdot(n-1)\cdot\left[F(x_{(n)}) - F(x_{(1)})\right]^{n-2}\cdot f(x_{(n)})\cdot f(x_{(1)}),$$

με $\theta \le x_{(1)} < \ldots < x_{(n)} \le \theta+1$ όπου f η σ. π. π. του πληθυσμού και F την α. σ. κ. του πληθυσμού.

Οπότε :

$$\begin{aligned} f(x_{(1)}, x_{(n)}) &= n\cdot(n-1)\cdot\left[F(x_{(n)}) - F(x_{(1)})\right]^{n-2}\cdot f(x_{(n)})\cdot f(x_{(1)}) \\ &= n\cdot(n-1)\cdot\left[x_{(n)} - \cancel{\theta} - x_{(1)} + \cancel{\theta}\right]^{n-2}\cdot 1\cdot 1 \\ &= n\cdot(n-1)\cdot\left[x_{(n)} - x_{(1)}\right]^{n-2}. \end{aligned}$$

Βάσει του γνωστού θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών έχουμε :

$$\begin{aligned} f(u, w) &= n\cdot(n-1)\cdot\left(\cancel{w} + u - \cancel{w}\right)^{n-2}\cdot|1| \\ &= n\cdot(n-1)\cdot u^{n-2},\ 0 \le u \le 1,\ \theta \le w \le \theta+1. \end{aligned}$$

Επομένως η περιθώρια κατανομή του στατιστικού $U = X_{(n)} - X_{(1)}$ είναι :

$$\begin{aligned} f(u) &= \int_{\theta}^{\theta+1} n\cdot(n-1)\cdot u^{n-2}\ dw \\ &= n\cdot(n-1)\cdot u^{n-2},\ 0 \le u \le 1. \end{aligned}$$

Άρα το στατιστικό $U = X_{(n)} - X_{(1)}$ είναι ancillary, αφού η κατανομή του είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ.

Ανεξαρτησία :

Είναι προφανές ότι :

$f(U \mid T) = f(U)$ όπου $\theta \leq x \leq \theta+1$.

Άρα το στατιστικό U ανεξάρτητο του T.

■

Με βάση τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το συγκεκριμένο παράδειγμα, μπορεί να διατυπωθεί η 2η Παραλλαγή.

→ **2η Παραλλαγή** :

Η ανεξαρτησία ενός ancillary στατιστικού U και ενός επαρκούς στατιστικού T, δεν συνεπάγεται την πληρότητα του T (επομένως και τη φραγμένη πληρότητα του T).

Σύμφωνα με τον Lehmann, E. L. (1981), η 2η Παραλλαγή του θεωρήματος του Basu, δεν έχει ιδιαίτερο νόημα, γιατί η ancillarity είναι μία ιδιότητα που αφορά σε ολόκληρη την κατανομή του στατιστικού, ενώ η πληρότητα μία ιδιότητα που σχετίζεται μόνο με τη μέση τιμή μιας συνάρτησής του. Πιθανές εκδοχές μιας σωστής αντιστροφής του θεωρήματος μπορούν να προκύψουν, κατά το Lehmann, αντικαθιστώντας την ancillarity με την αντίστοιχη 1ης τάξης ancillarity ή την πληρότητα με μία συνθήκη που αντικατοπτρίζει ολόκληρη την κατανομή.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, το Θεώρημα του Basu συνεπάγεται την ανεξαρτησία δύο στατιστικών T και U, όταν το T είναι πλήρως φραγμένο και επαρκές και το U ancillary.

Από την $1^{η}$ Παραλλαγή, συμπεραίνουμε ότι αν ένα στατιστικό είναι ανεξάρτητο ώς προς την κατανομή από ένα πλήρες και επαρκές στατιστικό, δεν είναι κατ' ανάγκη ancillary. Επίσης, από την $2^{η}$ Παραλλαγή προκύπτει ότι η ανεξαρτησία ενός επαρκούς στατιστικού T και ενός ancillary στατιστικού U, δεν συνεπάγεται την φραγμένη πληρότητα του T.

Όπως και προηγουμένως επισημάνθηκε, το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά (Rohatghi and Saleh, (2001)). Δηλαδή, ένα στατιστικό T το οποίο είναι ανεξάρτητο από κάθε ancillary στατιστικό δεν είναι κατ' ανάγκη πλήρες και επαρκές.

Σύμφωνα με τον Basu (1982), αν θεωρήσουμε τις προτάσεις :

(a) T επαρκές στατιστικό.

(b) U ancillary στατιστικό.

(c) T και U ανεξάρτητα μεταξύ τους.

τότε κάτω από ορισμένες συνθήκες :

- (a) και (b) $\Rightarrow$ (c).
- (a) και (c) $\Rightarrow$ (b).
- Αν (T, U) από κοινού επαρκές, τότε (b) και (c) $\Rightarrow$ (a).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{O}

Εφαρμογές του θεωρήματος του Basu

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται κάποιες εφαρμογές σε διάφορους τομείς της Στατιστικής, μέσω των οποίων αναδεικνύεται η χρησιμότητα του θεωρήματος του Basu. Αναφέρονται παραδείγματα στη θεωρία κατανομών από τα οποία εξάγονται σημαντικά αποτελέσματα με τη βοήθεια του θεωρήματος. Στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων, το θεώρημα αποτελεί σημαντικό εργαλείο για τον προσδιορισμό της ακριβούς κατανομής του $-2\ln\lambda$ υπό τη μηδενική υπόθεση, όπου λ ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών. Επίσης, παρουσιάζονται κάποιοι τρόποι εύρεσης Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητών με τη χρήση του θεωρήματος, οι οποίοι διευκολύνουν τους υπολογισμούς.

3.1 <u>Εφαρμογές στη Θεωρία Κατανομών</u>

Στην παράγραφο αυτή, παρατίθενται παραδείγματα τα οποία με τη χρήση του θεωρήματος του Basu οδηγούν σε σημαντικά συμπεράσματα.

Αρχικά, παρουσιάζεται (Παράδειγμα 3.1) ένα πολύ σημαντικό και χρήσιμο αποτέλεσμα που αποδεικνύεται με τη βοήθεια του θεωρήματος, πολύ πιο απλά από ότι σε άλλες αποδείξεις.

Παράδειγμα 3.1

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Θα δειχθεί ότι ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ και η δειγματική διακύμανση S^2 είναι ανεξάρτητες ποσότητες.

Είναι : $f(x, \mu, \sigma^2) = \left(\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

όπου : $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$.

Η κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.2) με κ = 2 και $c(\mu, \sigma^2) = \left(\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$, $Q_1(\underset{\sim}{\theta}) = \dfrac{\mu}{\sigma^2}$, $Q_2(\underset{\sim}{\theta}) = -\dfrac{1}{2\sigma^2}$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = x^2$, $h(x) = 1$, όπως αποδείχθηκε στο παράδειγμα 1.8.

Βάσει του θεωρήματος 1.3, το στατιστικό $T^* = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)'$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο $(\mu, \sigma^2)'$.

Αυτό σε συνδυασμό με την Παρατήρηση 1.1 του 1ου Κεφαλαίου, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το $\overline{X}$ είναι πλήρες και επαρκές στατιστικό για την παράμετρο μ.

Αποδεικνύεται στη συνέχεια ότι το στατιστικό S^2 είναι ancillary.

Είναι γνωστό ότι όταν έχουμε ένα τ. δ. από κανονική κατανομή ισχύει ότι :

$$\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1} \equiv G\left(\frac{n-1}{2}, 2\right).$$

Έστω : $Y = \dfrac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2}$. (3.1.1)

Τότε η σ. π. π. του Y είναι η εξής :

$$f(\psi) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\psi^{\frac{n-1}{2}-1}\cdot e^{-\frac{\psi}{2}},\ \psi > 0.$$

Αν $\alpha = \dfrac{n-1}{2}$, τότε η σ. π. π. γράφεται ως εξής : $f(\psi) = \dfrac{1}{2^\alpha\cdot\Gamma(\alpha)}\cdot\psi^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{\psi}{2}}$.

Από την σχέση (3.1.1) έχουμε $S^2 = \dfrac{\sigma^2}{n-1}Y$ και για τις αντίστοιχες τιμές αυτών $s^2 = \dfrac{\sigma^2}{n-1}\psi$.

Βάσει του γνωστού θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών έχουμε :

$$ds^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}d\psi.$$

Επομένως :

$$\begin{aligned}
f\left(s^2\right) &= \frac{1}{2^\alpha\cdot\Gamma(\alpha)}\cdot\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right)^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}}\cdot\left|\frac{d\psi}{ds^2}\right| \\
&= \frac{1}{2^\alpha\cdot\Gamma(\alpha)}\cdot\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right)^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{n-1}{\sigma^2} \\
&= \frac{1}{2^\alpha\cdot\Gamma(\alpha)}\cdot\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right)^{\alpha}\cdot\cancel{\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)^{-1}}\cdot\left(s^2\right)^{-1}\cdot\cancel{\frac{n-1}{\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2\sigma^2}{n-1}\right)^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \left(s^2\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{\frac{s^2}{2\sigma^2}}{n-1}}, s^2 > 0.$$

Δηλαδή $S^2 \sim G\left(\frac{n-1}{2}, \frac{2\sigma^2}{n-1}\right)$.

Επομένως, το στατιστικό S^2 είναι ancillary.

Βάσει του θεωρήματος 2.1 (θεώρημα Basu), συμπεραίνουμε ότι τα στατιστικά $\bar{X}$ και S^2 είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

■

Το συμπέρασμα που προκύπτει από το παράδειγμα αυτό είναι πολύ σημαντικό και μπορεί να γενικευτεί στην πολυδιάστατη κανονική κατανομή όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα 3.2</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητα και ισόνομα τυχαία διανύσματα από έναν πληθυσμό με πολυδιάστατη κανονική κατανομή $N_m(\mu, \Sigma)$, όπου $n>m+1$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ και Σ θετικά ορισμένος ($\Sigma>0$).

Ορίζεται να είναι :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{και}$$

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(X_i - \bar{X}\right)^t = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i X_i^t - n\bar{X}\bar{X}^t\right),$$

$$\text{όπου } X = \begin{pmatrix} X_1^t \\ X_2^t \\ \vdots \\ X_i^t \\ \vdots \\ X_n^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1j} & \cdots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2j} & \cdots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{i1} & X_{i2} & \cdots & X_{ij} & \cdots & X_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nj} & \cdots & X_{nm} \end{pmatrix}.$$

Για οποιονδήποτε σταθερό πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων Σ είναι :

$\bar{X}$ πλήρες και επαρκές για το $\boldsymbol{\mu}$ και **S** ancillary, γεγονός που αποδεικνύει μέσω του θεωρήματος 2.1, την ανεξαρτησία των $\bar{X}$ και **S** $\forall\, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ και $\forall$ $\Sigma>0$.

Πράγματι, το στατιστικό $\bar{X} \sim N_m(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ είναι πλήρες και επαρκές για το $\boldsymbol{\mu}$ και το στατιστικό $\mathbf{S} \sim \mathbf{W}_m(n-1, \frac{1}{n-1}\Sigma)$, όπου W_m η m – διάστατη κατανομή Wishart (βλέπε Παρατήρηση 3.1), ανεξάρτητη της παραμέτρου μ. Άρα το **S** είναι ancillary.
[Βλέπε : Ghosh, M. (1996)]

Έτσι, βάσει του θεωρήματος του Basu προκύπτει ότι τα στατιστικά $\bar{X}$ και **S** είναι ανεξάρτητα.

■

Παρατήρηση 3.1

Έστω $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα με $Z_i \sim N_m(\mu_i, \Sigma)$ $\forall$ i=1, …, n. Η κατανομή του τυχαίου πίνακα $W = \sum_{i=1}^{n} Z_i Z_i^t$ λέγεται m – διάστατη Wishart με n βαθμούς ελευθερίας και παραμέτρους Σ και $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mu_i^t$.

Συμβολικά : $W \sim W_m(n, \Sigma, \Delta)$.

Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με Wishart κατανομές μπορεί κανείς να βρει στους : Anderson, T.W. (1984), σελ. 245 – 257 / Mardia, K.V., Kent, J.T. and Bibby, J.M. (1979), σελ. 66 – 73, 80 – 85.

Ακολουθεί άλλο ένα παράδειγμα που επιβεβαιώνει τη σημαντικότητα του θεωρήματος του Basu, με τη χρήση του οποίου αποδεικνύεται η ανεξαρτησία δύο στατιστικών, η οποία διαφορετικά θα ήταν δύσκολο ν' αποδειχθεί.

Παράδειγμα 3.3

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή $f(x, \theta) = e^{-(x-\theta)}, 0 \le \theta \le x$. Να αποδειχτεί ότι τα στατιστικά $X_{(1)}$ και S^2 είναι ανεξάρτητα.

Είναι $f(x, \theta) = e^{-(x-\theta)}, 0 \le \theta \le x$.

Επάρκεια :

Από το Παραγοντικό θεώρημα των Neyman – Fisher (θεώρημα 1.1) έχουμε :

$$f(\mathbf{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x_i) = e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)} I_{[\theta, x_{(n)})}(x_{(1)}) I_{[x_{(1)},\infty)}(x_{(n)})$$

$$= g(X_{(1)}, \theta)\cdot h(\mathbf{x}),$$

όπου $g(T, \theta) = g(X_{(1)}, \theta) = e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)} I_{[\theta, x_{(n)})}(x_{(1)})$ και $h(\mathbf{x}) = I_{[x_{(1)},\infty)}(x_{(n)})$.

Άρα το στατιστικό $T = X_{(1)} = \min_i (X_i)$ είναι επαρκές για την παράμετρο θ.

Πληρότητα :

Η κατανομή του ελαχίστου διατεταγμένου στατιστικού δίνεται από τον τύπο $f_T(t) = n\cdot f(t)\cdot[1-F(t)]^{n-1}$, όπου f η σ. π. π. του πληθυσμού και F η α. σ. κ.

Δηλαδή $f(t) = e^{-(t-\theta)}, t \geq \theta$ και

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{\theta}^{t} e^{-(t-\theta)}\,dt = -e^{-(t-\theta)}\Big|_{t}^{\theta} = 1 - e^{-(t-\theta)},\ t \geq \theta.$$

Οπότε η κατανομή του στατιστικού $T = X_{(1)}$ είναι η εξής :

$$f_T(t) = n\cdot f(t)\cdot[1-F(t)]^{n-1}$$

$$\Rightarrow f_T(t) = n\cdot e^{-(t-\theta)}\left[\cancel{1} - \cancel{1} + e^{-(t-\theta)}\right]^{n-1}$$

$$\Rightarrow f_T(t) = n\cdot e^{-n(t-\theta)}, t \geq \theta.$$

Βάσει του Ορισμού 1.4 έχουμε :

$$E[h(T)] = 0 \Rightarrow \int_{\theta}^{\infty} h(t)\cdot f_T(t)\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\theta}^{\infty} h(t)\cdot n\cdot e^{-n(t-\theta)}\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\theta}^{\infty} h(t)\cdot e^{-n(t-\theta)}\,dt = 0. \tag{3.1.2}$$

Θέτουμε $n(t-\theta)=\lambda\omega, \lambda\in\mathbb{R}$ και έχουμε : $t=\frac{\lambda}{n}\omega+\theta$ και $dt=\frac{\lambda}{n}d\omega$.

Οπότε η (3.1.2) γίνεται :

$$\int_{\theta}^{\infty} h(t)\cdot e^{-n(t-\theta)}\,dt = 0 \Rightarrow \int_{0}^{\infty}\frac{\lambda}{n}h(\frac{\lambda}{n}\omega+\theta)\cdot e^{-\lambda\omega}\,d\omega = 0 \Rightarrow \int_{0}^{\infty} h^{*}(\omega)\cdot e^{-\lambda\omega}\,d\omega = 0.$$

Το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{\infty} h^{*}(\omega)\cdot e^{-\lambda\omega}\,d\omega$ είναι ο Laplace μετασχηματισμός της $h^{*}(\omega)$, βάσει του ορισμού 1.6.

Επομένως $\int_{0}^{\infty} h^{*}(\omega)\cdot e^{-\lambda\omega}\,d\omega = 0 \Rightarrow L(h^{*}(\omega))=0 \Rightarrow h^{*}(\omega)=0$

$$\Rightarrow h(\frac{\lambda}{n}\omega+\theta)=0 \Rightarrow h(t)=0,\ \forall t\geq\theta.$$

Άρα το στατιστικό $T = X_{(1)}$ είναι πλήρες.

<u>Ancillarity</u> του S^2.

Η κατανομή του πληθυσμού είναι $f(x,\theta) = e^{-(x-\theta)}, 0\leq\theta\leq x$

και το στατιστικό S^2 ορίζεται ως εξής : $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$.

Θέτουμε $t_i = x_i - \theta$ και βάσει του γνωστού θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών έχουμε :

$$f(t_i) = e^{-t_i}\cdot\left|\frac{dt_i}{dx_i}\right| \Rightarrow f(t_i) = e^{-t_i},\ t_i > 0.$$

Επομένως $T_i \sim Exp(1) \equiv G(1, 1)$, ανεξάρτητη της παραμέτρου θ.

Είναι $t_i = x_i - \theta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta \Rightarrow \overline{t} = \overline{x} - \theta$.

Έτσι $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \Rightarrow S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i + \cancel{\theta} - \overline{t} + \cancel{\theta}\right)^2$

$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \overline{t}\right)^2$, με σ. π. π. ανεξάρτητη του θ, αφού $T_i \sim Exp(1)$.

Άρα το στατιστικό S^2 είναι ancillary.

Εφόσον ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Basu, τα στατιστικά $X_{(1)}$ και S^2 είναι ανεξάρτητα.

■

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, γίνεται λόγος για τετραγωνικές μορφές.

Παράδειγμα 3.4

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητα και ισόνομα τυχαία διανύσματα από έναν πληθυσμό με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$.
Έστω επίσης $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$. Θα δειχθεί ότι η τετραγωνική μορφή $\mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X}$ είναι ανεξάρτητη του $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, εάν και μόνον εάν $\mathbf{A1_n} = \mathbf{0}$, όπου

$\mathbf{1_n}$ είναι το n – διάστατο διάνυσμα στήλη με κάθε στοιχείο του ίσο με τη μονάδα, δηλαδή : $\mathbf{1_n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Είναι γνωστό ότι το στατιστικό $\overline{X}$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο μ, βάσει της παρατήρησης 1.1 και του πορίσματος 1.1 του1ου Κεφαλαίου.

Χρειαζόμαστε μία συνθήκη υπό την οποία η τετραγωνική μορφή $\mathbf{X^tAX}$ θα είναι ancillary.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε το διάνυσμα : $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mu\mathbf{1_n}$.

Είναι : $\mathbf{X^tAX} = (\mathbf{Y} + \mu\, \mathbf{1_n})^t\mathbf{A}(\mathbf{Y} + \mu\, \mathbf{1_n})$

$$= \mathbf{Y^tAY} + \mu\mathbf{Y^tA1_n} + \mu\mathbf{1_n}^t\mathbf{AY} + \mu^2\mathbf{1_n}^t\mathbf{A1_n}$$

$$= \mathbf{Y^tAY} + 2\mu\mathbf{Y^tA1_n} + \mu^2\mathbf{1_n}^t\mathbf{A1_n}$$

$$= \mathbf{Y^tAY} + 2\mu(\mathbf{A1_n})^t\mathbf{Y} + \mu^2(\mathbf{A1_n})\mathbf{1_n}^t, \qquad (3.1.3)$$

αφού $\mathbf{Y^tA1_n} = \mathbf{1_n}^t\mathbf{AY} = (\mathbf{A1_n})^t\mathbf{Y}$ και $\mathbf{1_n}^t\mathbf{A1_n} = (\mathbf{A1_n})\mathbf{1_n}^t$, ως 1×1 διανύσματα, δηλαδή στοιχεία.

Εφόσον $\mathbf{Y} \sim N(0, \sigma^2)$, δηλαδή ancillary για κάθε σταθερό σ^2, η τετραγωνική μορφή $\mathbf{X^tAX}$ από την (3.1.3) θα είναι ancillary εάν και μόνον εάν $\mathbf{A1_n} = \mathbf{0}$.

Επομένως η τετραγωνική μορφή $\mathbf{X^tAX}$ είναι ανεξάρτητη του $\overline{X}$, μέσω του θεωρήματος του Basu, εάν και μόνον εάν $\mathbf{A1_n} = \mathbf{0}$.

■

Το ακόλουθο παράδειγμα αναφέρεται σε μία τεχνική προσομοίωσης, γνωστή ως «Monte Carlo Swindles». Η τεχνική αυτή επιτρέπει σε έναν μικρό αριθμό επαναλήψεων να παράγουν στατιστική ακρίβεια τέτοιου επιπέδου, που θα περίμενε κανείς να παραγόταν από πολύ μεγαλύτερο αριθμό επαναλήψεων. Το θεώρημα του Basu χρησιμοποιείται για να αντλήσουμε τη βασική ανεξαρτησία που χρειάζεται, για να οριστεί η συγκεκριμένη μέθοδος.

Παράδειγμα 3.5 (Monte Carlo Swindles)

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε τη διακύμανση της δειγματικής διαμέσου M ενός τυχαίου δείγματος $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από έναν πληθυσμό με κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

Η πιο απλή προσέγγιση για την εύρεση του εκτιμητή της διακύμανσης της δειγματικής διαμέσου M είναι να πάρουμε N δείγματα μεγέθους n από τον πληθυσμό με $N(\mu, \sigma^2)$, να υπολογίσουμε τη διάμεσο για κάθε δείγμα, δηλαδή τα $M_1, M_2, \ldots, M_N$ και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τη δειγματική διακύμανση των διαμέσων αυτών.

Θα είναι : $\widehat{Var}(M) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(M_i - \overline{M}\right)^2$, δεδομένου ότι η δειγματική διακύμανση ενός τυχαίου δείγματος $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι :

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ και $\widehat{\sigma^2} = \widehat{Var}(x) = S^2$.

Η Monte Carlo Swindles προκειμένου να παράγει έναν πιο ακριβή εκτιμητή του Var(M), αντί να εκτιμήσει το Var(M), εκτιμά το $Var\left(M - \overline{X}\right)$

χρησιμοποιώντας Ν τυχαία δείγματα και προσθέτει σ' αυτό το $Var(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

Δηλαδή : $Var(M) = Var(M - \bar{X}) + Var(\bar{X})$. (3.1.4)

Η σχέση αυτή αποδεικνύεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Basu. Το στατιστικό $\bar{X}$ είναι πλήρες και επαρκές βάσει του πορίσματος 1.1, αφού η $N(\mu, \sigma^2)$ ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.1). Θεωρήσαμε ότι $M = median(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, δηλαδή η διάμεσος του τ. δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Οπότε : $M - \bar{X} = median(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$, δηλαδή η διάμεσος του τ. δ. $X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X}$.

Είναι : $\left.\begin{array}{l} X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \ \forall i=1,\ldots,n \\ \bar{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}) \end{array}\right\} \Rightarrow X_i - \bar{X} \sim N(0, \dfrac{n+1}{n} \cdot \sigma^2) \ \forall i=1,\ldots,n$.

Δηλαδή το στατιστικό $X_i - \bar{X}$ είναι ancillary $\forall i=1,\ldots,n$.

Επομένως η $median(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X}) = M - \bar{X}$ είναι επίσης ancillary ως συνάρτηση αυτού.

Οπότε βάσει του θεωρήματος του Basu, οι ποσότητες $\bar{X}$, $M - \bar{X}$ είναι ανεξάρτητες, αφού το στατιστικό $\bar{X}$ είναι πλήρες και επαρκές και το στατιστικό $M - \bar{X}$ ancillary.

$$\text{Έτσι : } Var(M) = Var\left[\left(M - \bar{X}\right) + \bar{X}\right] \overset{\substack{\text{λογω ανεξαρτησιας} \\ \text{των } \bar{X} \text{ και } M-\bar{X}}}{=} Var(M - \bar{X}) + Var(\bar{X})$$

$$= Var(M - \bar{X}) + \frac{\sigma^2}{n}.$$

Η εκτίμηση με τη μέθοδο αυτή είναι καλύτερη από την απλή προσέγγιση που αναφέρθηκε αρχικά, όπως προκύπτει από τη σύγκριση των διακυμάνσεων των εκτιμητών. Είναι : $Var(M) > Var\left(M-\overline{X}\right)$, βάσει της σχέσης (3.1.4) που αποδείχτηκε. Επομένως με την Monte Carlo Swindles έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια.

■

Το θεώρημα του Basu βοήθησε στην απόδειξη της ανεξαρτησίας των ποσοτήτων $\overline{X}$ και $M-\overline{X}$, χωρίς την οποία η συγκεκριμένη μεθοδολογία δεν θα μπορούσε να οριστεί, αφού όπως είδαμε αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την ισχύ της σχέσης (3.1.4).

Είναι σημαντικό ν' αναφερθούμε και σε **ροπές λόγων**, οι οποίες υπολογίζονται ευκολότερα με τη βοήθεια της ανεξαρτησίας που προκύπτει από το θεώρημα του Basu.

Όταν $\frac{X}{Y}$ και Y είναι ανεξάρτητες τ. μ. τότε : $E\left(\frac{X}{Y}\right)^{\kappa}=\frac{E\left(X^{\kappa}\right)}{E\left(Y^{\kappa}\right)}$, με την προϋπόθεση βέβαια ότι οι μέσες τιμές υπάρχουν.

Πράγματι εφόσον $\frac{X}{Y}$ και Y ανεξάρτητες τ. μ., θα είναι και $\left(\frac{X}{Y}\right)^{\kappa}, Y^{\kappa}$ ανεξάρτητες ποσότητες ως συναρτήσεις των $\frac{X}{Y}$ και Y αντίστοιχα. Έτσι :

$$E\left(X^{\kappa}\right)=E\left(\left(\frac{X}{Y}\right)^{\kappa}\cdot Y^{\kappa}\right)\overset{\text{λογω ανεξαρτησιας}}{=}E\left(\left(\frac{X}{Y}\right)^{\kappa}\right)\cdot E\left(Y^{\kappa}\right)$$

$$\Rightarrow E\left(\left(\frac{X}{Y}\right)^{\kappa}\right)=\frac{E\left(X^{\kappa}\right)}{E\left(Y^{\kappa}\right)}.$$

Για την ισχύ της σχέσης αυτής απαραίτητη προϋπόθεση είναι η ανεξαρτησία των $\frac{X}{Y}$ και Y η οποία μπορεί εύκολα ν' αποδειχτεί με τη βοήθεια του θεωρήματος του Basu, όπως φαίνεται και στα παραδείγματα που ακολουθούν.

<u>**Παράδειγμα 3.6**</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με ομοιόμορφη κατανομή U(0, θ). Να βρεθεί η $E\left(\frac{\bar{X}}{X_{(n)}}\right)$.

Αποδείχτηκε, (βλέπε παραδείγματα 1.2 και 1.5 του 1ου Κεφαλαίου) ότι το μέγιστο διατεταγμένο στατιστικό $X_{(n)}$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο θ. Επίσης, το στατιστικό $\frac{\bar{X}}{X_{(n)}}$ είναι ancillary ως άθροισμα ancillary στατιστικών. (Βλέπε Παρατήρηση 1.2 του 1ου Κεφαλαίου).

Επομένως από το θεώρημα του Basu εξασφαλίζεται η ανεξαρτησία των στατιστικών $\frac{\bar{X}}{X_{(n)}}$ και $X_{(n)}$.

Έτσι μπορεί να υπολογιστεί πιο απλά η $E\left(\frac{\bar{X}}{X_{(n)}}\right)$, βάσει της προηγούμενης θεωρίας, ως εξής :

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\bar{X}}{X_{(n)}} \cdot X_{(n)}\right) \underset{\text{των } \frac{\bar{X}}{X_{(n)}},\, X_{(n)}}{\overset{\text{λογω ανεξαρτησιας}}{=}} E\left(\frac{\bar{X}}{X_{(n)}}\right) E\left(X_{(n)}\right)$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{\bar{X}}{X_{(n)}}\right) = \frac{E(\bar{X})}{E(X_{(n)})} = \frac{\theta/2}{n\theta/_{n+1}} = \frac{n+1}{2n},$$

αφού $E(\bar{X}) = E(X_i) = \int_0^\theta x_i \cdot \frac{1}{\theta} dx_i = \int_0^\theta \frac{x_i}{\theta} dx_i = \left.\frac{x_i^2}{2}\right|_0^\theta = \frac{\theta^2}{2\theta} = \frac{\theta}{2}$

και $E(X_{(n)}) = \int_0^\theta x_{(n)} \cdot g(x_{(n)})\, dx_{(n)}$

$$= \int_0^\theta \frac{n \cdot x_{(n)}^{\ n}}{\theta^n} dx_{(n)} = \frac{n}{\theta^n} \cdot \left.\frac{x_{(n)}^{\ n+1}}{n+1}\right|_0^\theta = \frac{n \cdot \theta^{n+1}}{\theta^n \cdot (n+1)} = \frac{n\theta}{n+1}.$$

■

<u>Παράδειγμα 3.7</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Γάμμα κατανομή $G(\alpha, \beta)$, όπου α γνωστή και β άγνωστη παράμετρος. Θα δειχτεί ότι η $E(X_{(n)} | T) = T \cdot \frac{E(X_{(n)})}{E(T)}$, όπου $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Είναι : $f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}$, $x \geq 0$, $\alpha, \beta > 0$.

Η οικογένεια κατανομών $G(\alpha, \beta)$ είναι εκθετικής μορφής.

Μάλιστα για α γνωστό και β άγνωστο, είναι της μορφής (1.3.1) με :

$c(\beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$, $Q(\beta) = -\frac{1}{\beta}$, $T(x) = x$ και $h(x) = x^{\alpha-1}$.

Επομένως, βάσει του πορίσματος 1.1 το στατιστικό $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι πλήρες και επαρκές για την άγνωστη παράμετρο β.

Επίσης, το στατιστικό $V = \frac{X_{(n)}}{T}$, όπου $X_{(n)} = \max_i (X_i)$, είναι ancillary ως scale invariant σε μία scale παραμετρική οικογένεια όπως η G(α, β) (βλέπε Παρατηρήσεις 3.2 και 3.3).

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Basu, τα στατιστικά T και V είναι ανεξάρτητα.

$$\text{Έτσι}: E\left(X_{(n)} \mid T\right) = E\left(\frac{X_{(n)}}{T} \cdot T \mid T\right) = E\left(V \cdot T \mid T\right). \qquad (3.1.5)$$

$$\begin{aligned}
\text{Είναι } E\left(V \cdot T \mid T\right) &= \int_0^{+\infty} v \cdot t \cdot f(v|t)\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} v \cdot t \cdot \frac{f(v,t)}{f(t)}\, dt \\
&\overset{\text{λογω ανεξ. των V και T}}{=} \int_0^{+\infty} v \cdot t \cdot \frac{f(v)\cancel{f(t)}}{\cancel{f(t)}}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} v \cdot t \cdot f(v)\, dt \\
&= T \cdot E(V). \qquad (3.1.6)
\end{aligned}$$

$$\text{Επίσης}: E\left(\frac{X_{(n)}}{T} \cdot T\right) = E\left(X_{(n)}\right) \qquad (3.1.7)$$

$$\text{και } E\left(\frac{X_{(n)}}{T} \cdot T\right) = E\left(V \cdot T\right) = E(V)E(T). \qquad (3.1.8)$$

Από τις σχέσεις (3.1.7) και (3.1.8) έχουμε $E(V) = \frac{E\left(X_{(n)}\right)}{E(T)}$. (3.1.9)

Επομένως η σχέση (3.1.5) μέσω των (3.1.6) και (3.1.9) γίνεται

$$E\left(X_{(n)} \mid T\right) = T \cdot \frac{E\left(X_{(n)}\right)}{E(T)} \tag{3.1.10}$$

και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

■

<u>Παρατήρηση 3.2</u>

Ένας εκτιμητής $T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ λέγεται **scale – invariant** εάν και μόνον εάν $t(cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) = c \cdot t(x_1, x_2, \ldots, x_n), \forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n$ και $\forall\, c > 0$.

<u>Παρατήρηση 3.3</u>

Έστω $\{f(x, \theta), \theta > 0\}$ μια οικογένεια κατανομών με σ. π. π. $f(x, \theta)$. Η παράμετρος θ λέγεται **scale** παράμετρος, εάν και μόνον εάν η σ. π. π. $f(x, \theta)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\frac{1}{\theta} h\left(\frac{x}{\theta}\right)$, όπου h κάποια σ. π. π.

Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι η παράμετρος θ είναι **scale** παράμετρος για τη σ. π. π. $f(x, \theta)$ μιας τ. μ. X, εάν και μόνον εάν η κατανομή της ποσότητας $\frac{X}{\theta}$ είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ.

Περισσότερα σχετικά με scale – invariant εκτιμητές και scale παραμετρικές οικογένειες κατανομών, μπορεί κανείς να βρει στους : Mood, A.M., Graybill, F.A. and Boes, D.C. (1974), σελ. 336 – 338. / Lehmann, E.L. and Casella, G. (1998), σελ. 167 – 176. / Casella, G. and Berger, R.L. (1990), σελ. 118 – 119.

Το αποτέλεσμα που αποδείχτηκε στο παράδειγμα αυτό, με τη βοήθεια του θεωρήματος του Basu, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και στην εύρεση Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητή, αφού αυτός θα είναι συνάρτηση της $E\left(X_{(n)} \mid T\right)$ (βάσει του θεωρήματος των Rao – Blackwell). Οι υπολογισμοί στην περίπτωση αυτή διευκολύνονται πάρα πολύ, αφού για τον υπολογισμό της $E\left(X_{(n)} \mid T\right)$ χρειαζόμαστε μόνο τη $E\left(X_{(n)}\right)$ και τη E(T), σύμφωνα με τη σχέση (3.1.10).

3.2 Εφαρμογές στον Έλεγχο Στατιστικών Υποθέσεων

Σύμφωνα με τη μελέτη που έχει γίνει, υπάρχουν παραδείγματα στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων, στα οποία το θεώρημα του Basu βοηθά στην εύρεση της ακριβούς κατανομής της ποσότητας $-2\ln\lambda$, υπό τη μηδενική υπόθεση, όπου λ˙ ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών όπως ορίστηκε στο 1^{ο} Κεφάλαιο. Η διαπίστωση αυτή θα φανεί στα παραδείγματα που ακολουθούν και ιδιαίτερα στο παράδειγμα 3.9, που παρατίθεται στην πλήρη γενικότητά του.

Στο παράδειγμα που παρατίθεται στη συνέχεια, προσδιορίζεται η ακριβής κατανομή του στατιστικού $-2\ln\lambda(x)$.

Παράδειγμα 3.8

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή :

$f(x, \theta) = \dfrac{g(x)}{h(\theta)}$, $\alpha \le x \le \theta$, α σταθερά, όπου g, h, μη αρνητικές συναρτήσεις.

Ζητείται ο έλεγχος της υπόθεσης :

$H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής

$H_\alpha : \theta \neq \theta_0$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι :

$$\int_\alpha^\theta f(x,\theta)\,dx = 1 \Rightarrow \int_\alpha^\theta \frac{g(x)}{h(\theta)}\,dx = 1 \Rightarrow \int_\alpha^\theta g(x)\,dx = h(\theta). \tag{3.2.1}$$

Η α. σ. κ. του πληθυσμού είναι η εξής :

$$F(x) = P(X \le x) = \int_\alpha^x f(x,\theta)\,dx = \int_\alpha^x \frac{g(x)}{h(\theta)}\,dx = \frac{\int_\alpha^x g(x)\,dx}{h(\theta)} = \frac{h(x)}{h(\theta)}. \tag{3.2.2}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibnitz στη σχέση (3.2.1), έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_\alpha^\theta g(x)\,dx = h'(\theta) \Rightarrow g(\theta) = h'(\theta) \tag{3.2.3}$$

και επειδή $g(x)>0$, $\forall\, x>0$ θα είναι $h'(\theta) > 0$. (3.2.4)

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι η εξής :

$$L = L(\theta \mid \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{g(x_i)}{h(\theta)} = \frac{1}{h^n(\theta)} \prod_{i=1}^{n} g(x_i),\ \alpha \le x_i \le \theta,$$

$\forall\, i = 1, \ldots, n.$

<u>Υπό την H_0</u> : $\theta = \theta_0$ έχουμε :

$$L_0 = L(\theta_0 \mid \mathbf{x}) = \frac{1}{h^n(\theta_0)} \prod_{i=1}^{n} g(x_i),\ \alpha \le x_i \le \theta,\ \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

<u>Υπό την H_α</u> : $\theta \ne \theta_0$ έχουμε :

$$L_\alpha = L(\theta \mid \mathbf{x}) = \frac{1}{h^n(\theta)} \prod_{i=1}^{n} g(x_i),\ \alpha \le x_i \le \theta,\ \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Αφού το πεδίο ορισμού εξαρτάται από την παράμετρο θ, θα βρούμε τον Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ, εξετάζοντας τη μονοτονία της L_α.

$$\text{Έτσι } \frac{\partial L_\alpha}{\partial \theta} = \frac{\partial L(\theta \mid \mathbf{x})'}{\partial \theta} = -\frac{n}{h^{n+1}(\theta)} \cdot \prod_{i=1}^{n} g(x_i) \cdot h'(\theta)$$

$$= -\frac{n g(\theta)}{h^{n+1}(\theta)} \prod_{i=1}^{n} g(x_i) < 0 \text{ από τις σχέσεις (3.2.3), (3.2.4).}$$

Δηλαδή η L_α είναι φθίνουσα ως προς θ, επομένως παίρνει το μέγιστο στο κάτω σημείο του πεδίου ορισμού της.

Άρα ο $\hat{\theta} = X_{(n)}$ ο Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ.

Βάσει των προηγούμενων το τεστ του πηλίκου πιθανοφάνειας είναι το εξής :

$$\lambda(x) = \frac{\max_{\theta\in\Theta_0} L(\theta \mid x)}{\max_{\theta\in\Theta} L(\theta \mid x)} = \frac{\frac{1}{h^n(\theta_0)}\cancel{\prod_{i=1}^{n} g(x_i)}}{\frac{1}{h^n(\hat{\theta})}\cancel{\prod_{i=1}^{n} g(x_i)}} = \left(\frac{h(\hat{\theta})}{h(\theta_0)}\right)^n = \left(\frac{h(X_{(n)})}{h(\theta_0)}\right)^n. \quad (3.2.5)$$

Αν $Q = \frac{h(X_{(n)})}{h(\theta_0)}$, τότε $Q = F(X_{(n)})$ (από τη σχέση (3.2.2)) και γνωρίζουμε ότι $F(X) \sim U(0, 1)$ ως α. σ. κ. συνεχούς τ. μ.

Έστω $Y_{(1)} = F(X_{(1)})$, $Y_{(2)} = F(X_{(2)})$, ..., $Y_{(n)} = F(X_{(n)})$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή U(0, 1). Θέλουμε να βρούμε την κατανομή της $Y_n = F(X_{(n)}) = Q$.

Η σ. π. π. του πληθυσμού είναι $f(y) = 1,\ 0 \le y \le 1$ και

η α. σ. κ. η $F(y) = y,\ 0 \le y \le 1$.

Η σ. π. π. της κατανομής του μεγίστου διατεταγμένου στατιστικού δίνεται από τη σχέση $g(y_n) = nf(y_n)[F(y_n)]^{n-1} = n\, y_n^{\,n-1},\ 0 \le y_1 \le \ldots \le y_n \le 1$.

Επομένως $Y_n \sim \text{Beta}(n, 1) \Rightarrow Q \sim \text{Beta}(n, 1)$.

Από την σχέση (3.2.5) έχουμε ότι :

$\lambda(x) = q^n \Rightarrow q = \lambda^{\frac{1}{n}}(x)$.

Βάσει του γνωστού θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών προκύπτει ότι :

$$f(\lambda) = g(q)\cdot\left|\frac{dq}{d\lambda}\right| = \cancel{n}\cdot q^{n-1}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}\cdot\lambda^{\frac{1}{n}-1} = \lambda^{\frac{1}{n}(n-1)}\cdot\lambda^{\frac{1}{n}-1} = 1,\ 0 \le \lambda \le 1.$$

Άρα $\lambda(x) \sim U(0, 1)$.

Έτσι μπορούμε εύκολα να βρούμε την <u>ακριβή</u> κατανομή του στατιστικού $-2\ln\lambda(x)$, κάνοντας αλλαγή μεταβλητών.

Αν $-2\ln\lambda(x) = \omega$, τότε $\lambda(x) = e^{-\frac{\omega}{2}}$ και επομένως θα έχουμε :

$f(\omega) = 1 \cdot \left|\frac{d\lambda}{d\omega}\right| = \frac{1}{2}e^{-\frac{\omega}{2}}$, $\omega \geq 0$, η οποία είναι η σ. π. π. της X_2^2.

Άρα $-2\ln\lambda(x) \sim X_2^2$.

■

Ακολουθεί ένα γενικό παράδειγμα στο οποίο φαίνεται καθαρά η χρησιμότητα της ανεξαρτησίας στην εύρεση της ακριβούς κατανομής του στατιστικού $-2\ln\lambda(x)$.

<u>Παράδειγμα 3.9</u>

Έστω $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ ανεξάρτητα και ισόνομα τυχαία διανύσματα από έναν πληθυσμό με σ. π. π. την εξής :

$$f(x_i, \theta_i) = \frac{g(x_i)}{h(\theta_i)}, 0 \leq x_i \leq \theta_i, i = 1, \ldots, \kappa, \text{ με } h(x)>0, \ \forall x>0. \qquad (3.2.6)$$

Ζητείται ο έλεγχος της υπόθεσης :

$H_0 : \theta_1 = \ldots = \theta_\kappa$ έναντι της εναλλακτικής

H_α : όχι όλα τα θ_i ίσα μεταξύ τους.

$$\text{Συμβολίζουμε : } X = \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_i' \\ \vdots \\ X_\kappa' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1j} & \cdots & X_{1n_2} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2j} & \cdots & X_{2n_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{i1} & X_{i2} & \cdots & X_{ij} & \cdots & X_{in_i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{\kappa 1} & X_{\kappa 2} & \cdots & X_{\kappa j} & \cdots & X_{\kappa n_\kappa} \end{pmatrix},$$

όπου $X_i' = (X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in_i})$, $\forall\, i = 1, \ldots, \kappa$, ανεξάρτητες τ. μ.

Επίσης $T = \max(T_1, \ldots, T_\kappa)$, όπου $T_i \equiv T_i(X_i) = \max\limits_i (X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in_i})$,

$\forall\, i = 1, \ldots, \kappa$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι :

$$\int_0^{\theta_i} f(x_i,\theta_i)\ dx_i = 1 \Rightarrow \int_0^{\theta_i} \frac{g(x_i)}{h(\theta_i)}\ dx_i = 1 \Rightarrow \int_0^{\theta_i} g(x_i)\ dx_i = h(\theta_i). \tag{3.2.7}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibnitz στη σχέση (3.2.7) έχουμε :

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\int_0^{\theta_i} g(x_i)\ dx_i = h'(\theta_i) \Rightarrow g(\theta_i) = h'(\theta_i) \tag{3.2.8}$$

και επειδή $h(x)>0$, $\forall\, x>0$ θα είναι $g(\theta_i) > 0$, $\forall\ i = 1, \ldots, \kappa$. (3.2.9)

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι η εξής :

$$L = L(\theta_i \mid x_i) = \prod_{i=1}^{\kappa} f(x_i,\theta_i) = \prod_{i=1}^{\kappa} \frac{g(x_i)}{h(\theta_i)}$$

$$= \frac{\left[g(x_{11})\cdot\ldots\cdot g(x_{1n_1})\right]}{h^{n_1}(\theta_1)} \cdots \frac{\left[g(x_{\kappa 1})\cdot\ldots\cdot g(x_{\kappa n_\kappa})\right]}{h^{n_\kappa}(\theta_\kappa)}$$

$$= \frac{g^{n_1}(x_1)}{h^{n_1}(\theta_1)} \cdots \frac{g^{n_\kappa}(x_\kappa)}{h^{n_\kappa}(\theta_\kappa)}$$

$$= \prod_{i=1}^{\kappa} \left(\frac{g(x_i)}{h(\theta_i)} \right)^{n_i} .$$

<u>Υπό την H_0</u> : $\theta_1 = \ldots = \theta_\kappa \equiv \theta$ έχουμε :

$$L_0 = L(\theta \mid x_i) = \prod_{i=1}^{\kappa} \left(\frac{g(x_i)}{h(\theta)} \right)^{n_i} = \frac{\prod_{i=1}^{\kappa} g^{n_i}(x_i)}{h^{\sum_{i=1}^{\kappa} n_i}(\theta)} = \frac{\prod_{i=1}^{\kappa} g^{n_i}(x_i)}{h^{n}(\theta)}, \text{ όπου } \sum_{i=1}^{\kappa} n_i = n.$$

Αφού το πεδίο ορισμού της σ. π. π. εξαρτάται από την παράμετρο θ, θα βρούμε τον Ε. Μ. Π. εξετάζοντας την μονοτονία της L_0.

Έτσι $\frac{\partial L_0}{\partial \theta} = \frac{\partial L(\theta \mid x_i)}{\partial \theta} = -n \frac{\prod_{i=1}^{\kappa} g^{n_i}(x_i)}{h^{n+1}(\theta)} h'(\theta) < 0$, από τις σχέσεις (3.2.7), (3.2.8), (3.2.9).

Άρα η L_0 είναι φθίνουσα ως προς θ, επομένως παίρνει το μέγιστο στο κάτω σημείο του πεδίου ορισμού της.

Έτσι ο $\hat{\theta} = T = \max(T_1, \ldots, T_\kappa)$ είναι ο Ε. Μ. Π. της παραμέτρου θ.

<u>Υπό την H_α</u> : όχι όλα τα θ_i ίσα μεταξύ τους, έχουμε :

$$L_\alpha = L(\theta_i \mid x_i) = \prod_{i=1}^{\kappa} \left(\frac{g(x_i)}{h(\theta_i)} \right)^{n_i} = \frac{\prod_{i=1}^{\kappa} g^{n_i}(x_i)}{h^{n_1}(\theta_1) \cdot \ldots \cdot h^{n_\kappa}(\theta_\kappa)}.$$

Όμοια για να βρούμε τον Ε. Μ. Π. των παραμέτρων θ_i, εξετάζουμε τη μονοτονία της L_α.

Έτσι $\frac{\partial L_a}{\partial \theta_i} = \frac{\partial L(\theta_i \mid x_i)}{\partial \theta_i} = \prod_{\omega=1}^{\kappa} g^{n_\omega}(x_\omega) \cdot \left(\frac{-n_i h'(\theta_i)}{h^{n_i+1}(\theta_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\kappa} h^{n_j}(\theta_j)} \right) < 0,$

$\forall\, i = 1, \ldots, \kappa$, από τις σχέσεις (3.2.7), (3.2.8), (3.2.9).

Άρα η L_a είναι φθίνουσα ως προς θ_i, επομένως παίρνει το μέγιστο στο κάτω σημείο του πεδίου ορισμού της.

Άρα οι $\hat{\theta}_i = T_i$ είναι οι Ε. Μ. Π. των παραμέτρων θ_i, $\forall\; i = 1, \ldots, \kappa$.

Επομένως βάσει των προηγούμενων, το τεστ του πηλίκου πιθανοφάνειας είναι το εξής :

$$\lambda(x) = \frac{\max\limits_{\theta \in \Theta_0} L(\theta \mid x_i)}{\max\limits_{\theta \in \Theta} L(\theta \mid x_i)}$$

$$= \frac{\frac{1}{h^n(\hat{\theta})} \cancel{\prod_{i=1}^{\kappa} g^{n_i}(x_i)}}{\frac{1}{h^{n_1}(\hat{\theta}_1) \cdot \ldots \cdot h^{n_\kappa}(\hat{\theta}_\kappa)} \cancel{\prod_{i=1}^{\kappa} g^{n_i}(x_i)}}$$

$$= \frac{h^{n_1}(\hat{\theta}_1) \cdot \ldots \cdot h^{n_\kappa}(\hat{\theta}_\kappa)}{h^n(\hat{\theta})}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{\kappa} h^{n_i}(\hat{\theta}_i)}{h^n(\hat{\theta})}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{\kappa} h^{n_i}(T_i)}{h^n(T)}, \text{ όπου } n = \sum_{i=1}^{\kappa} n_i .$$

Επομένως :

$$-2\ln\lambda(x) = -2\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^{\kappa} h^{n_i}(\hat{\theta}_i)}{h^{n}(\hat{\theta})}\right)$$

$$= -2\ln\left(\prod_{i=1}^{\kappa} h^{n_i}(\hat{\theta}_i)\right) + 2\ln\left(h^{n}(\hat{\theta})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\kappa}\left[-2\ln\left(h^{n_i}\left(\hat{\theta}_i\right)\right)\right] - \left[-2\ln\left(h^{n}\left(\hat{\theta}\right)\right)\right]. \qquad (3.2.10)$$

Προσθαφαιρούμε το $\sum_{i=1}^{\kappa} 2\ln\left(h^{n_i}(\theta)\right) = 2\ln\left(\prod_{i=1}^{\kappa} h^{n_i}(\theta)\right) = 2\ln h^{n}(\theta)$, οπότε η (3.2.10) γίνεται :

$$-2\ln\lambda(x) = \sum_{i=1}^{\kappa}\left[-2\ln\left(h^{n_i}\left(\hat{\theta}_i\right)\right)\right] - \left[-2\ln\left(h^{n}\left(\hat{\theta}\right)\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\kappa}\left[-2\ln\left(h^{n_i}\left(\hat{\theta}_i\right)\right) + 2\ln\left(h^{n_i}(\theta)\right)\right] - \left[-2\ln\left(h^{n}\left(\hat{\theta}\right)\right) + 2\ln\left(h^{n}(\theta)\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\kappa}\left[-2\left(\ln h^{n_i}\left(\hat{\theta}_i\right) + \ln h^{n_i}(\theta)\right)\right] - \left[-2\left(\ln h^{n}\left(\hat{\theta}\right) + 2\ln h^{n}(\theta)\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\kappa}\left[-2\ln\left(\frac{h^{n_i}\left(\hat{\theta}_i\right)}{h^{n_i}(\theta)}\right)\right] - \left[-2\ln\left(\frac{h^{n}\left(\hat{\theta}\right)}{h^{n}(\theta)}\right)\right], \qquad (3.2.11)$$

όπου θ η κοινή άγνωστη παράμετρος των θ_i υπό την H_0.

Η α. σ. κ., από τη σχέση (3.2.7), είναι η εξής :

$$F_{X_i}(x_i,\theta_i) = \int_0^{x_i}\frac{g(x_i)}{h(\theta_i)}\,dx_i = \frac{\int_0^{x_i} g(x_i)\,dx_i}{h(\theta_i)} = \frac{h(x_i)}{h(\theta_i)},\ 0 \le x_i \le \theta_i. \qquad (3.2.12)$$

Είναι $T_i \equiv T_i(X_i) = \max_i (X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in_i})$, $i = 1, \ldots, \kappa$, όπως συμβολίστηκε αρχικά.

Επειδή τα $X_1, X_2, \ldots, X_\kappa$ είναι ανεξάρτητα, προκύπτει ότι και τα στατιστικά $T_1, \ldots, T_\kappa$ είναι ανεξάρτητα με α. σ. κ. $F_{T_i}(t_i, \theta_i) = \dfrac{h^{n_i}(t_i)}{h^{n_i}(\theta_i)}$, $i = 1, \ldots, \kappa$, βάσει της σχέσης (3.2.12) και της γνωστής σχέσης $F_{X_{(n)}}(\cdot) = [F_X(\cdot)]^n$.

Υπό την H_0 οι $F_{T_i}(t_i, \theta) = \dfrac{h^{n_i}(T_i)}{h^{n_i}(\theta)}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ. μ. με ομοιόμορφη κατανομή $U(0, 1)$.

Κατά συνέπεια, υπό την H_0 είναι :

$$\sum_{i=1}^{\kappa}\left(-2\ln\left(\frac{h^{n_i}(T_i)}{h^{n_i}(\theta)} \right) \right) = -2\sum_{i=1}^{\kappa}\left(\ln\left(F_{T_i}(t_i, \theta) \right) \right) \sim X^2_{2\kappa} \tag{3.2.13}$$

[Βλέπε : Παπαϊωάννου, Τ. και Φερεντίνος, Κ. (2000), σελ.81 – 84].

Επίσης, η α. σ. κ. του T, υπό την H_0, είναι $F_T(t, \theta) = \dfrac{h^n(t)}{h^n(\theta)}$ και επομένως

$$F_T(t, \theta) = \frac{h^n(t)}{h^n(\theta)} \sim U(0, 1). \text{ Άρα } -2\ln\left(\frac{h^n(t)}{h^n(\theta)} \right) \sim X^2_2. \tag{3.2.14}$$

Μέχρι τώρα δε χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα του Basu. Για τη χρήση του παρατηρούμε ότι υπό την H_0, το στατιστικό $T = \max(T_1, \ldots, T_\kappa)$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο θ και το λ ancillary. Άρα και το στατιστικό $-2\ln\lambda(x)$ είναι ancillary.

Πράγματι, επειδή $\dfrac{h^{n_i}(T_i)}{h^{n_i}(\theta)} \sim U(0,1)$ και $\lambda(x) = \dfrac{\prod_{i=1}^{\kappa} h^{n_i}(T_i)}{h^{n}(T)}$, προκύπτει ότι η κατανομή του $\lambda(x)$ είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ.

Επίσης, από την $f(x_i, \theta_i) = \dfrac{g(x_i)}{h(\theta_i)}, 0 \le x_i \le \theta_i, \ \forall \theta_i, \ i = 1, \ldots, \kappa$, βάσει του Παραγοντικού Θεωρήματος των Neyman – Fisher και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Leibnitz για την απόδειξη της πληρότητας, προκύπτει ότι το στατιστικό $T_i = \max\limits_i (X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in_i})$, $i = 1, \ldots, \kappa$, είναι πλήρες και επαρκές $\forall \theta_i$. Επομένως και το στατιστικό $T = \max(T_1, \ldots, T_\kappa)$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο θ.

Έτσι από το θεώρημα του Basu το T είναι ανεξάρτητο του $\lambda(x)$, επομένως και του $-2\ln\lambda(x)$.

Από την (3.2.11) :

$$\sum_{i=1}^{\kappa}\left(-2\ln\left(\frac{h^{n_i}(T_i)}{h^{n_i}(\theta)}\right)\right) = (-2\ln\lambda) + \left(-2\ln\left(\frac{h^{n}(t)}{h^{n}(\theta)}\right)\right) \tag{3.2.15}$$

$$= \varphi_1(\lambda) + \varphi_2(t).$$

Οι δύο όροι της σχέσης (3.2.15) είναι ανεξάρτητοι, ως συναρτήσεις των ανεξάρτητων στατιστικών $\lambda(x)$ και T.

Τώρα από τις (3.2.11), (3.2.13) και (3.2.15) και το γνωστό αποτέλεσμα ότι αν W_1 και W_2 δύο στατιστικά ανεξάρτητα με $W_1 \sim X^2_m$ και $W_1 + W_2 \sim X^2_{m+n}$, τότε $W_2 \sim X^2_n$, προκύπτει ότι : $-2\ln\lambda \sim X^2_{2\kappa-2}$ υπό την H_0.

Πράγματι, εδώ έχουμε : $W_1 = -2\ln\lambda$, $W_2 = -2\ln\left(\dfrac{h^n(t)}{h^n(\theta)}\right) \sim X_2^2$ (από τη σχέση (3.2.14)) και $W_1 + W_2 = \sum_{i=1}^{\kappa}\left(-2\ln\left(\dfrac{h^{n_i}(T_i)}{h^{n_i}(\theta)}\right)\right) \sim X_{2\kappa}^2$ (από τη σχέση (3.2.13)). Επομένως, υπό την H_0 είναι $-2\ln\lambda \sim X_{2\kappa-2}^2$.

Το αποτέλεσμα που προκύπτει με τη βοήθεια του θεωρήματος του Basu είναι ακριβές και φυσικά διαφορετικό από εκείνο της ασυμπτωτικής κατανομής του $-2\ln\lambda$. Δηλαδή σ' ένα τυχαίο δείγμα με n παρατηρήσεις, κ άγνωστες παραμέτρους και μία υπό την H_0, οι βαθμοί ελευθερίας της ασυμπτωτικής κατανομής (βάσει του θεωρήματος 1.8), για $r = n - 1$ και $s = n - \kappa$, είναι : $(n - 1) - (n - \kappa) = \kappa - 1 \neq 2(\kappa - 1)$ και φυσικά μικρότεροι από την ακριβή κατανομή.

■

Το παράδειγμα που ακολουθεί δίνει ένα στατιστικό τεστ για τον έλεγχο μιας υπόθεσης. Το θεώρημα του Basu στο συγκεκριμένο παράδειγμα, βοηθάει στην απλοποίηση του στατιστικού αυτού τεστ.

<u>Παράδειγμα 3.10</u>

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$ όπου $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma>0$ άγνωστες παράμετροι.

Ορίζουμε : $T_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i$ και $T_2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

Αποδεικνύεται [Lehmann (1986), σελ. 191] ότι ένα ομοιόμορφα ισχυρότατο τεστ για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0 : \mu = 0$ έναντι της εναλλακτικής $H_\alpha : \mu \neq 0$ δίνεται από τη σχέση :

$$\varphi(T_1, T_2) = \begin{cases} 1, & \text{αν } T_1 < c_1(T_2) \text{ ή' } T_1 > c_2(T_2) \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

με (i) $E\left(\varphi(T_1, T_2) \mid T_2\right) = \alpha$ σχεδόν παντού (3.2.16)

και (ii) $Cov\left(T_1, \left(\varphi(T_1, T_2) \mid T_2\right)\right) = 0$ σχεδόν παντού. (3.2.17)

Η (3.2.16) μπορεί να εκφραστεί ως εξής :

$$E\left(\varphi(T_1, T_2) \mid T_2\right) = \alpha \Rightarrow P\left(T_1 < c_1(T_2) \text{ ή' } T_1 > c_2(T_2)\right) = \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(c_1(T_2) \leq T_1 \leq c_2(T_2) \mid T_2\right) = 1 - \alpha \text{ σχεδόν παντού.} \quad (3.2.18)$$

Το στατιστικό $(T_1, T_2)'$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο $(\mu, \sigma^2)'$ βάσει του θεωρήματος 1.3 (βλέπε παράδειγμα 1.8).

Έστω $U = \dfrac{T_1}{\sqrt{T_2}}$. Το στατιστικό U είναι ancillary.

Πράγματι : $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ και υπό την $H_0 : \mu = 0$ είναι $X_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Έτσι $X_i \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow \dfrac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1) \Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \Rightarrow \dfrac{T_1}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

και αφού $\dfrac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1) \Rightarrow \dfrac{X_i^2}{\sigma^2} \sim X_1^2 \Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sigma^2} \sim X_n^2 \Rightarrow \dfrac{T_2}{\sigma^2} \sim X_n^2$.

Επομένως το στατιστικό : $\dfrac{\dfrac{T_1}{\sigma\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{T_2}{\sigma^2} \Big/ n}} = \dfrac{\dfrac{T_1}{\cancel{\sigma\sqrt{n}}}}{\dfrac{\sqrt{T_2}}{\cancel{\sigma\sqrt{n}}}} = \dfrac{T_1}{\sqrt{T_2}} \overset{\text{υπό την } H_0}{\sim} t_n.$

Άρα το στατιστικό $U = \dfrac{T_1}{\sqrt{T_2}}$ είναι ancillary υπό την H_0.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Basu τα στατιστικά T_1 και $\dfrac{T_1}{\sqrt{T_2}}$ είναι ανεξάρτητα.

Με τη βοήθεια της ανεξαρτησίας των στατιστικών T_1 και $\dfrac{T_1}{\sqrt{T_2}}$, απλοποιούνται οι συνθήκες (i) και (ii), όπως παρατηρούμε στη συνέχεια.

Είναι $f(U|T_2) = f(U)$, λόγω ανεξαρτησίας, αφού το στατιστικό $U = \dfrac{T_1}{\sqrt{T_2}}$ είναι ancillary και το T_2 πλήρες και επαρκές. (3.2.19)

Έτσι η (3.2.16), μέσω της (3.2.18) γράφεται ως εξής :

$$P\left(c_1(T_2) \le T_1 \le c_2(T_2) \mid T_2\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{c_1(T_2)}{\sqrt{T_2}} \le \frac{T_1}{\sqrt{T_2}} \le \frac{c_2(T_2)}{\sqrt{T_2}} \mid T_2\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(d_1 \le U \le d_2 \mid T_2\right) = 1-\alpha$$

$$\overset{\text{από τη σχέση (3.2.19)}}{\Rightarrow} P\left(d_1 \le U \le d_2\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \int_{d_1}^{d_2} h(u)\,du = 1-\alpha, \tag{3.2.20}$$

όπου h η σ. π. π. του $U = \dfrac{T_1}{\sqrt{T_2}} \overset{\text{υπό την } H_0}{\sim} t_n$, (3.2.21)

για κάποιες σταθερές d_1, d_2 που δεν εξαρτώνται από τα δεδομένα.

Όμοια για την (3.2.17) προκύπτει ότι :

$$\operatorname{Cov}\big(T_1, (\varphi(T_1, T_2) \mid T_2)\big) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cov}\big(U, I_{[d_1,d_2]}(U)\big) = 0. \tag{3.2.22}$$

Είναι γνωστό ότι $\operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Καθώς $U \overset{\text{υπό την } H_0}{\sim} t_n$, θα είναι $E(U) = 0$.

Επομένως η σχέση (3.2.22) γράφεται ως εξής :

$$\operatorname{Cov}\big(U, I_{[d_1,d_2]}(U)\big) = 0$$

$$\Rightarrow E(U \cdot I_{[d_1,d_2]}(U)) = 0$$

$\Rightarrow \int_{d_1}^{d_2} uh(u)\,du = 0$, όπου h η σ. π. π. της στατιστικής συνάρτησης U. Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με την (3.2.20) οδηγούν στον υπολογισμό των σταθερών d_1 και d_2.

Έτσι, το θεώρημα του Basu απλοποιεί τους υπολογισμούς από την υπό συνθήκη κατανομή του T_1 δοθέντος του T_2, σε εκείνη με την περιθώρια κατανομή του στατιστικού U που είναι ancillary υπό την H_0.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι υπολογισμοί απλοποιούνται ακόμη περισσότερο, καθώς η περιθώρια κατανομή του U είναι "1 – 1" συνάρτηση με κατανομή t_n.

■

3.3 Εφαρμογές στην Εύρεση Α. Ο. Ε. Δ. Εκτιμητών

Στην παράγραφο αυτή γίνεται λόγος για εφαρμογή του θεωρήματος του Basu στην εύρεση Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητών. Με τη βοήθεια αυτού, αποδεικνύονται τα επόμενα θεωρήματα που διευκολύνουν τον τρόπο εύρεσης Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητών, από εκείνο που ήδη γνωρίζουμε με την ανισότητα Cramer – Rao ή το θεώρημα των Lehman – Scheffe΄.

Θεώρημα 3.1

Έστω X μία τ. μ. με α. σ. κ. $F_\theta(x)$, $\theta \in \Theta$. Έστω T ένα πλήρες και επαρκές στατιστικό για την παράμετρο θ και έστω V(x, t) μία συνάρτηση των x και t τέτοια ώστε :

(i) να είναι γνησίως αύξουσα ως προς x, για σταθερό t και

(ii) U = V(X, T) ancillary, με α. σ. κ. H(u).

Τότε ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $F_\theta(x)$ είναι ο H(V(x, T)).

Απόδειξη :

Έστω $T = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ένα πλήρες και επαρκές στατιστικό για την παράμετρο $\theta \in \Theta$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $Y = \begin{cases} 1, X \le x \\ 0, X > x \end{cases}$.

Τότε ο Y είναι αμερόληπτος εκτιμητής της $F_\theta(x) = P(X \le x)$, αφού
$E(Y) = 1 \cdot P(X \le x) + 0 \cdot P(X > x) = P(X \le x) = F_\theta(x)$.

Σύμφωνα με τα θεωρήματα των Rao – Blackwell (θεώρημα 1.4) και Lehmann – Scheffe΄ (θεώρημα 1.5), ο $U^* = E(Y|T)$ θα είναι Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $F_\theta(x) = P(X \le x)$, ως αμερόληπτος της $F_\theta(x)$ και συνάρτηση του πλήρους και επαρκούς T.

Επομένως :

$$\begin{aligned}
U^* = E(Y|T) &= 1 \cdot P(Y=1|T=t) + 0 \cdot P(Y=0|T=t) = P(X \le x|T=t) \\
&= P\big(V(X,T) \le V(x,T) \,|\, T=t\big) && \text{(αφού V γνησίως αύξουσα ως προς x, από (i))} \\
&= P\big(U \le V(x,T) \,|\, T=t\big) && \text{(αφού } U = V(X,T)\text{)} \\
&= P\big(U \le V(x,T)\big) && \text{(λόγω ανεξαρτησίας από θεώρημα Basu, αφού T πλήρες και επαρκές για την παράμετρο } \theta \text{ και U ancillary, από (ii))} \\
&= H(V(x,T)) && \text{(όπου H η α. σ. κ. του U)}
\end{aligned}$$

Άρα ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $F_\theta(x)$ είναι ο $H(V(x, T))$.

■

Στη συνέχεια, παρατίθενται παραδείγματα στα οποία εφαρμόζεται το προηγούμενο θεώρημα.

Παράδειγμα 3.11

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ όπου $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$.

Είναι $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ και $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Να βρεθεί ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $P(X \le x_1)$.

Το στατιστικό $T = \left(\bar{X}, S^2\right)'$ είναι πλήρες και επαρκές για το $(\mu, \sigma^2)'$, βάσει του θεωρήματος 1.3, αφού η $N(\mu, \sigma^2)$ ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.1).

Κατ' αρχήν, θα δειχτεί ότι το στατιστικό $U = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{X_1 - \bar{X}}{S}$ είναι ancillary.

Είναι : $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Έχουμε : $E(X_1 - \bar{X}) = 0$ και

$$\begin{aligned}
Var(X_1 - \bar{X}) &= Var\left(X_1 - \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) \\
&= Var\left(X_1 - \frac{X_1}{n} - \frac{X_2}{n} - \ldots - \frac{X_n}{n}\right) \\
&= Var\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_1 - \frac{X_2}{n} - \ldots - \frac{X_n}{n}\right) \\
&\overset{\substack{X_1, X_2, \ldots, X_n \\ \text{ανεξ. λογω τ. δ.}}}{=} Var\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_1\right) + Var\left(\frac{X_2}{n}\right) + \ldots + Var\left(\frac{X_n}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2 + \frac{n-1}{n^2}\sigma^2$$

$$= \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Επομένως, ως γραμμική συνάρτηση κανονικής κατανομής, θα είναι :

$$X_1 - \bar{X} \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2\right) \Rightarrow \frac{X_1 - \bar{X}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2}} \sim N(0, 1).$$

Επίσης, είναι γνωστό ότι $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$.

Άρα το στατιστικό $U = \dfrac{\frac{X_1 - \bar{X}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}\cancel{\sigma^2}}}}{\sqrt{\frac{\frac{\cancel{(n-1)}S^2}{\cancel{\sigma^2}}}{\cancel{(n-1)}}}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{X_1 - \bar{X}}{S} \sim t_{n-1}$.

Δηλαδή το στατιστικό $U = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{X_1 - \bar{X}}{S}$ είναι ancillary, αφού η κατανομή του είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου μ.

Επομένως, βάσει του θεωρήματος 3.1, ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $F_\theta(x_1) = P(X \le x_1)$ είναι ο $H\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{x_1 - \bar{X}}{S}\right)$, όπου H η α. σ. κ. της στατιστικής συνάρτησης $U = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{X_1 - \bar{X}}{S}$.

■

Παράδειγμα 3.12

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κανονική κατανομή $N(\mu, 1)$ όπου $\mu \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $P(X \leq x_1)$.

Το στατιστικό $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο μ, αφού η $N(\mu, 1)$ ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.1), βάσει του Πορίσματος 1.1. Είναι $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{T}{n}$, πλήρες και επαρκές για την παράμετρο μ, βάσει των ιδιοτήτων των πλήρων και επαρκών στατιστικών.

Επίσης, το στατιστικό $U = \dfrac{\sqrt{n}\left(X_1 - \overline{X}\right)}{\sqrt{n-1}}$ είναι ancillary και μάλιστα ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή $N(0, 1)$, όπως αποδείχθηκε στο παράδειγμα 3.11 (για $\sigma = 1$).

Επομένως, βάσει του θεωρήματος 3.1, ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $F_\theta(x_1) = P(X \leq x_1)$ είναι ο $\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}\left(x_1 - \overline{X}\right)}{\sqrt{n-1}}\right)$, όπου Φ η α. σ. κ. της τυπικής κανονικής $N(0, 1)$.

■

Παράδειγμα 3.13

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με κατανομή Weibull.

Είναι $f(x, \theta) = \frac{p}{\theta} \cdot x^{p-1} \cdot e^{-\frac{x^p}{\theta}}$, όπου $0<x<\infty$, $0<\theta<\infty$, θ άγνωστο και $p>0$ γνωστό. Να βρεθεί Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $P(X^p \le x_1^p)$.

Η $f(x, \theta) = \frac{p}{\theta} \cdot x^{p-1} \cdot e^{-\frac{x^p}{\theta}}$, $x > 0$, $\theta > 0$ άγνωστο και $p > 0$ γνωστό, ανήκει στην εκθετική οικογένεια της μορφής (1.3.1) με $c(\theta) = \frac{p}{\theta}$, $Q(\theta) = -\frac{1}{\theta}$, $T(x) = x^p$ και $h(x) = x^{p-1}$. Επομένως βάσει του Πορίσματος 1.1 το στατιστικό $T^* = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i^p$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο θ.

Θα δειχθεί ότι το στατιστικό $U = \frac{X_1^p}{T^*}$ είναι ancillary και μάλιστα ότι η κατανομή του είναι $U \sim Beta(1, n-1)$.

Είναι $f(x, \theta) = \frac{p}{\theta} \cdot x^{p-1} \cdot e^{-\frac{x^p}{\theta}}$, όπου $0<x<\infty$, $0<\theta<\infty$, θ άγνωστο και $p>0$ γνωστό.

Θέτουμε $Y = X^p$, οπότε για τις αντίστοιχες τιμές θα έχουμε :

$y = x^p \Rightarrow x = y^{\frac{1}{p}}$ και $dx = \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} dy$.

Άρα : $f(y) = \frac{p}{\theta} \cdot y^{\frac{p-1}{p}} \cdot e^{-\frac{y}{\theta}} \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| \Rightarrow f(y) = \frac{\cancel{p}}{\theta} \cdot \cancel{y^{\frac{p-1}{p}}} \cdot e^{-\frac{y}{\theta}} \cdot \frac{1}{\cancel{p}} \cancel{y^{\frac{1}{p}-1}}$

$$\Rightarrow f(y)=\frac{1}{\theta}\cdot e^{-\frac{y}{\theta}},\ x>0,\ \theta>0.$$

Δηλαδή η $Y=X^p \sim \operatorname{Exp}\left(\frac{1}{\theta}\right)\equiv G\,(1,\theta)$.

Για το τ. δ. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ έχουμε :

$f(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\dfrac{1}{\theta^n}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\theta}}$, $y_i>0,\ \theta>0$. Θέτουμε :

$$\begin{cases} T_1=\dfrac{y_1}{\sum_{i=1}^{n} y_i} \\ T_2=y_2 \\ \vdots \\ T_n=y_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\dfrac{T_1}{1-T_1}\sum_{i=2}^{n} T_i \\ y_2=T_2 \\ \vdots \\ y_n=T_n \end{cases},\ \text{όπου } 0<T_1<1,\ T_i>0, \forall i=2, \ldots, n.$$

Επομένως η από κοινού κατανομή των $T_1, T_2, \ldots, T_n$ είναι η εξής :

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n)=\frac{1}{\theta^n}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=2}^{n} t_i}{\theta(1-t_1)}}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\sum_{i=2}^{n} t_i\,,$$

$0<t_1<1,\ t_i>0, \forall i=2, \ldots, n$, αφού

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = y_1+y_2+\ldots+y_n=\frac{t_1}{1-t_1}\sum_{i=2}^{n} t_i+t_2+\ldots+t_n$$

$$=\frac{t_1}{1-t_1}\sum_{i=2}^{n} t_i+\sum_{i=2}^{n} t_i=\frac{t_1}{1-t_1}\sum_{i=2}^{n} t_i+\left(\frac{1-t_1}{1-t_1}\right)\sum_{i=2}^{n} t_i=\frac{\sum_{i=2}^{n} t_i}{1-t_1},$$

και η Ιακωβιανή ορίζουσα του παραπάνω συστήματος, είναι η εξής :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \frac{\partial y_1}{\partial t_3} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \frac{\partial y_2}{\partial t_3} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial t_1} & \frac{\partial y_n}{\partial t_2} & \frac{\partial y_n}{\partial t_3} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{(1-t_1)^2}\sum_{i=2}^{n} t_i & \frac{t_1}{1-t_1} & \frac{t_1}{1-t_1} & \cdots & \frac{t_1}{1-t_1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-t_1)^2}\sum_{i=2}^{n} t_i \, .$$

Έτσι η περιθώρια κατανομή του $T_1 = \frac{y_1}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$, είναι η εξής :

$$f(t_1) = \int_0^{\infty}\!\!\cdots\!\int_0^{\infty} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_2 \ldots dt_n$$

$$= \int_0^{\infty}\!\!\cdots\!\int_0^{\infty} \frac{1}{\theta^n} \cdot e^{-\frac{\sum_{i=2}^{n} t_i}{\theta(1-t_1)}} \cdot \frac{1}{(1-t_1)^2}\sum_{i=2}^{n} t_i \, dt_2 \ldots dt_n \, .$$

<u>Για n = 2</u> έχουμε :

$$f(t_1) = \frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\frac{t_2}{\theta(1-t_1)}} t_2 \, dt_2$$

$$= \frac{1}{\theta^2(1-t_1)^2}\theta(1-t_1) \underbrace{\int_0^\infty t_2 \frac{e^{-\frac{t_2}{\theta(1-t_1)}}}{\theta(1-t_1)} dt_2}_{E(T_2),\ \text{οπου } T_2\sim Exp\left(\frac{1}{\theta(1-t_1)}\right)}$$

$$= \frac{1}{\theta^2(1-t_1)^2}\theta^2(1-t_1)^2$$

$$= 1.$$

Άρα για n = 2, $T_1 \sim B(1, 1)$.

<u>Για n = 3</u> έχουμε :

$$f(t_1) = \frac{1}{\theta^3}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{t_2+t_3}{\theta(1-t_1)}}(t_2+t_3)\, dt_2 dt_3$$

$$= \frac{1}{\theta^3}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\frac{t_3}{\theta(1-t_1)}}\left[\int_0^\infty\left(t_2 e^{-\frac{t_2}{\theta(1-t_1)}} + t_3 e^{-\frac{t_2}{\theta(1-t_1)}}\right)dt_2\right]dt_3$$

$$= \frac{1}{\theta^3}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\frac{t_3}{\theta(1-t_1)}}\left[\theta(1-t_1)\cdot \underbrace{\int_0^\infty t_2 \frac{e^{-\frac{t_2}{\theta(1-t_1)}}}{\theta(1-t_1)}dt_2}_{E(T_2),\ \text{οπου } T_2\sim Exp\left(\frac{1}{\theta(1-t_1)}\right)} + t_3\int_0^\infty e^{-\frac{t_2}{\theta(1-t_1)}}\, dt_2\right]dt_3$$

$$=\frac{1}{\theta^3}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\frac{t_3}{\theta(1-t_1)}}\left[[\theta(1-t_1)]^2+t_3\cdot\underbrace{\theta(1-t_1)}_{\text{αφου }\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t_2}{\theta(1-t_1)}}}{\theta(1-t_1)}dt_2=1,\text{ ως σ. π. π.}}\right]dt_3$$

$$=\frac{1}{\theta^3}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\cdot\left[[\theta(1-t_1)]^3\underbrace{\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{t_3}{\theta(1-t_1)}}}{\theta(1-t_1)}dt_3}_{\text{σ. π. π. της } T_3\sim Exp\left(\frac{1}{\theta(1-t_1)}\right)}+[\theta(1-t_1)]^2\underbrace{\int_0^\infty t_3\frac{e^{-\frac{t_3}{\theta(1-t_1)}}}{\theta(1-t_1)}dt_3}_{E(T_3)\text{ της } T_3\sim Exp\left(\frac{1}{\theta(1-t_1)}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{\theta^3}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\left[[\theta(1-t_1)]^3+[\theta(1-t_1)]^3\right]$$

$$=\frac{2[\theta(1-t_1)]^3}{\theta^3(1-t_1)^2}$$

$$=2(1-t_1).$$

Άρα για $n=3$, $T_1\sim B(1,2)$. .

<u>Για $n=4$</u> έχουμε :

$$f(t_1)=\frac{1}{\theta^4}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{t_2+t_3+t_4}{\theta(1-t_1)}}(t_2+t_3+t_4)\,dt_2dt_3dt_4$$

$$=\frac{1}{\theta^4}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{t_3+t_4}{\theta(1-t_1)}}\left[\int_0^\infty t_2e^{-\frac{t_2}{\theta(1-t_1)}}dt_2+(t_3+t_4)\int_0^\infty e^{-\frac{t_2}{\theta(1-t_1)}}dt_2\right]dt_3dt_4$$

$$=\frac{1}{\theta^4}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{t_3+t_4}{\theta(1-t_1)}}\left[\theta(1-t_1)\int_0^\infty t_2\frac{e^{-\frac{t_2}{\theta(1-t_1)}}}{\theta(1-t_1)}dt_2+(t_3+t_4)\theta(1-t_1)\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{t_2}{\theta(1-t_1)}}}{\theta(1-t_1)}dt_2\right]dt_3dt_4$$

$$=\frac{1}{\theta^4}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{t_3+t_4}{\theta(1-t_1)}}\left[[\theta(1-t_1)]^2+(t_3+t_4)\theta(1-t_1)\right]dt_3dt_4$$

$$=\frac{1}{\theta^4}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\frac{t_4}{\theta(1-t_1)}}\left[[\theta(1-t_1)]^3\underbrace{\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{t_3}{\theta(1-t_1)}}}{\theta(1-t_1)}dt_3}_{=1,\ \text{ως σ. π. π. της } T_3}+[\theta(1-t_1)]^2\underbrace{\int_0^\infty t_3\frac{e^{-\frac{t_3}{\theta(1-t_1)}}}{\theta(1-t_1)}dt_3}_{E(T_3),\ \text{οπου } T_3\sim Exp\left(\frac{1}{\theta(1-t_1)}\right)}\right.$$

$$\left.+t_4[\theta(1-t_1)]^2\underbrace{\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{t_3}{\theta(1-t_1)}}}{\theta(1-t_1)}dt_3}_{=1,\ \text{ως σ. π. π. της } T_3}\right]dt_4$$

$$=\frac{1}{\theta^4}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\frac{t_4}{\theta(1-t_1)}}\left[[\theta(1-t_1)]^3+[\theta(1-t_1)]^3+t_4[\theta(1-t_1)]^2\right]dt_4$$

$$=\frac{1}{\theta^4}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\frac{t_4}{\theta(1-t_1)}}\left[2[\theta(1-t_1)]^3+t_4[\theta(1-t_1)]^2\right]dt_4$$

$$= \frac{1}{\theta^4} \cdot \frac{1}{(1-t_1)^2} \left[2[\theta(1-t_1)]^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t_4}{\theta(1-t_1)}}}{\theta(1-t_1)} dt_4}_{=1,\ \text{ως σ. π. π. της } T_4} + [\theta(1-t_1)]^3 \underbrace{\int_0^\infty t_4 \frac{e^{-\frac{t_4}{\theta(1-t_1)}}}{\theta(1-t_1)} dt_4}_{E(T_4) \text{ οπου } T_4 \sim Exp\left(\frac{1}{\theta(1-t_1)}\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{\theta^4} \cdot \frac{1}{(1-t_1)^2} \left[2[\theta(1-t_1)]^4 + [\theta(1-t_1)]^4 \right]$$

$$= \frac{3[\theta(1-t_1)]^4}{\theta^4 (1-t_1)^2}$$

$$= 3(1-t_1)^2.$$

Άρα για $n = 4$, $T_1 \sim B(1, 3)$.

Για $n = 5$ έχουμε :

$$f(t_1) = \frac{1}{\theta^5} \cdot \frac{1}{(1-t_1)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{t_2+t_3+t_4+t_5}{\theta(1-t_1)}} (t_2+t_3+t_4+t_5)\, dt_2 dt_3 dt_4 dt_5$$

$$= \frac{1}{\theta^5} \cdot \frac{1}{(1-t_1)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{t_3+t_4+t_5}{\theta(1-t_1)}} \left[\int_0^\infty e^{-\frac{t_2}{\theta(1-t_1)}} (t_2+t_3+t_4+t_5)\, dt_2 \right] dt_3 dt_4 dt_5$$

$$= \frac{1}{\theta^5} \cdot \frac{1}{(1-t_1)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{t_3+t_4+t_5}{\theta(1-t_1)}} \left[[\theta(1-t_1)]^2 + (t_3+t_4+t_5)\theta(1-t_1) \right] dt_3 dt_4 dt_5$$

$$= \frac{1}{\theta^5} \cdot \frac{1}{(1-t_1)^2} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{t_4+t_5}{\theta(1-t_1)}} \left[\int_0^\infty e^{-\frac{t_3}{\theta(1-t_1)}} \left[[\theta(1-t_1)]^2 + (t_3+t_4+t_5)\theta(1-t_1) \right] dt_3 \right] dt_4 dt_5$$

$$=\frac{1}{\theta^5}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{t_4+t_5}{\theta(1-t_1)}}\left[\underbrace{[\theta(1-t_1)]^3+[\theta(1-t_1)]^3}_{2[\theta(1-t_1)]^3}+(t_4+t_5)[\theta(1-t_1)]^2\right]dt_4dt_5$$

$$=\frac{1}{\theta^5}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{t_5}{\theta(1-t_1)}}\left[\int_0^\infty e^{-\frac{t_4}{\theta(1-t_1)}}\left[2[\theta(1-t_1)]^3+(t_4+t_5)[\theta(1-t_1)]^2\right]dt_4\right]dt_5$$

$$=\frac{1}{\theta^5}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\frac{t_5}{\theta(1-t_1)}}\left[\underbrace{2[\theta(1-t_1)]^4+[\theta(1-t_1)]^4}_{3[\theta(1-t_1)]^4}+t_5[\theta(1-t_1)]^3\right]dt_5$$

$$=\frac{1}{\theta^5}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\frac{t_5}{\theta(1-t_1)}}\left[3[\theta(1-t_1)]^4+t_5[\theta(1-t_1)]^3\right]dt_5$$

$$=\frac{1}{\theta^5}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\left[3[\theta(1-t_1)]^5+[\theta(1-t_1)]^5\right]$$

$$=\frac{4[\theta(1-t_1)]^5}{\theta^5(1-t_1)^2}$$

$$=4(1-t_1)^3.$$

Άρα για $n=5$, $T_1 \sim B(1,4)$.

Συνοψίζοντας, από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι :

N	Αριθμός Ολοκληρώσεων	Αποτελέσματα Ολοκληρώσεων
2	$1^η$	$[\theta(1-t_1)]^2$
3	$1^η$ $2^η$	$[\theta(1-t_1)]^2 + t_3\theta(1-t_1)$ $2[\theta(1-t_1)]^3$
4	$1^η$ $2^η$ $3^η$	$[\theta(1-t_1)]^2 + (t_3+t_4)\theta(1-t_1)$ $2[\theta(1-t_1)]^3 + t_4[\theta(1-t_1)]^2$ $3[\theta(1-t_1)]^4$
5	$1^η$ $2^η$ $3^η$ $4^η$	$[\theta(1-t_1)]^2 + (t_3+t_4+t_5)\theta(1-t_1)$ $2[\theta(1-t_1)]^3 + (t_4+t_5)[\theta(1-t_1)]^2$ $3[\theta(1-t_1)]^4 + t_5[\theta(1-t_1)]^3$ $4[\theta(1-t_1)]^5$

Επομένως για n έχουμε:

	Αριθμός Ολοκληρώσεων	Αποτελέσματα Ολοκληρώσεων
N	$1^η$ $2^η$ $3^η$ $\vdots$ $n-1$	$[\theta(1-t_1)]^2 + (t_3+\ldots+t_n)\theta(1-t_1)$ $2[\theta(1-t_1)]^3 + (t_4+\ldots+t_n)[\theta(1-t_1)]^2$ $3[\theta(1-t_1)]^4 + (t_5+\ldots+t_n)[\theta(1-t_1)]^3$ $\vdots$ $(n-1)[\theta(1-t_1)]^n$

Άρα η περιθώρια κατανομή του $T_1 = \dfrac{y_1}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$, έχει ως εξής :

$$f(t_1) = \frac{1}{\theta^n (1-t_1)^2}(n-1)[\theta(1-t_1)]^n$$

$$\Rightarrow f(t_1) = (n-1)(1-t_1)^{n-2},\ 0 < t_1 < 1.$$

Δηλαδή $T_1 = \dfrac{y_1}{\sum_{i=1}^{n} y_i} \sim B(1, n-1)$.

Άρα το στατιστικό $U = \dfrac{X_1^p}{T^*} = \dfrac{X_1^p}{\sum_{i=1}^{n} X_i^p} = \dfrac{Y_1}{\sum_{i=1}^{n} Y_i} \sim B(1, n-1)$, είναι ancillary,

αφού η κατανομή του είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ.

Επομένως, βάσει του θεωρήματος 3.1, ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $F_\theta(x_1)$ $= P(X \le x_1) = P(X^p \le x_1^p)$ είναι ο $H\left(\dfrac{x_1^p}{T^*}\right)$, όπου H η α. σ. κ. του $U = \dfrac{X_1^p}{T^*}$.

Είναι : $H(u) = \int_0^u (n-1)(1-u)^{n-2}\,du = -(1-u)^{n-1}\Big|_0^u = 1-(1-u)^{n-1},\ 0 < u < 1.$

Άρα $H\left(\dfrac{x_1^p}{T^*}\right) = 1-\left(1-\dfrac{x_1^p}{T^*}\right)^{n-1}$, $x_1^p < T$, είναι ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $P(X^p \le x_1^p)$.

■

Θεώρημα 3.2

Έστω $h(X)$ ένας αμερόληπτος εκτιμητής της συνάρτησης $g(\theta)$ της παραμέτρου θ. Έστω επίσης, $h(X) = W(T, U)$, όπου T ένα πλήρες και επαρκές στατιστικό για την παράμετρο θ και U ένα ancillary στατιστικό. Τότε ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $g(\theta)$ δίνεται από την $g^*(T) = E_u(W(T, U))$.

Απόδειξη :

Ο $h(X)$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής της συνάρτησης $g(\theta)$ της παραμέτρου θ, δηλαδή : $E(h(X)) = g(\theta) \Rightarrow E(W(T, U)) = g(\theta)$ και επίσης συνάρτηση του πλήρους και επαρκούς T.

Επομένως από τα θεωρήματα των Rao – Blackwell (θεώρημα 1.4) και Lehmann – Scheffe΄ (θεώρημα 1.5), ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της $g(\theta)$ δίνεται από την σχέση :

$$\begin{aligned} E[h(X) \mid T = t] &= E[W(T, U) \mid T = t] && \text{(αφού } h(X) = W(T, U)) \\ &= E_u[W(T, U)] && \text{(λόγω ανεξαρτησίας από θεώρημα Basu, αφού } T \text{ πλήρες και επαρκές} \\ & && \text{για την παράμετρο και } U \text{ ancillary)} \\ &= g^*(T). \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 3.4

Το θεώρημα αυτό δε χρειάζεται την ύπαρξη μιας φθίνουσας ως προς z συνάρτησης $V(z, t)$. Η έλλειψη της μονοτονίας απλοποιεί ακόμη περισσότερο την εφαρμογή του θεωρήματος.

Το συγκεκριμένο θεώρημα απαιτεί έναν αμερόληπτο εκτιμητή συνάρτηση του πλήρους και επαρκούς στατιστικού και του ancillary στατιστικού.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα, στο οποίο εφαρμόζεται το παραπάνω θεώρημα για την εύρεση Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητή μιας παραμετρικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 3.14

Έστω X_1, X_2 τ. δ. από έναν πληθυσμό με Εκθετική κατανομή Exp(θ). Να βρεθεί ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της παραμέτρου $\frac{1}{\theta}$, με τη βοήθεια του θεωρήματος 3.2.

Είναι : $f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}$,$\theta > 0,\ x \geq 0$.

Εφόσον η Exp(θ) ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.1), το στατιστικό $T = X_1 + X_2$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο θ, επομένως και για την $\frac{1}{\theta}$.

Επίσης, στο παράδειγμα 1.10, αποδείχτηκε ότι το στατιστικό U = $\frac{X_1}{X_1 + X_2}$ είναι ancillary και μάλιστα $U \sim U(0, 1)$.

Έχουμε : $E[h(X)] = E[W(T, U)] = E(T \cdot U) = E(X_1) = \frac{1}{\theta}$.

Άρα, βάσει του θεωρήματος 3.2, ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $\frac{1}{\theta}$, είναι ο :

$$g^*(T) = E_u[W(T, U)] = E_u(T \cdot U) = T \cdot E_u(U) = T \cdot \frac{1}{2} = \frac{T}{2},$$

αφού $U \sim U(0, 1)$ και $E_u(U) = \int_0^1 u\,du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$.

■

<u>Παράδειγμα 3.15</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ. δ. από έναν πληθυσμό με Εκθετική κατανομή $Exp(\theta)$. Να βρεθεί ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της παραμέτρου $\frac{1}{\theta}$, με τη βοήθεια του θεωρήματος 3.2.

Είναι : $f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}, \theta > 0,\ x \geq 0$.

Εφόσον $X_i \sim Exp(\theta) \equiv G\left(1, \frac{1}{\theta}\right)$, θα είναι $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G\left(n, \frac{1}{\theta}\right)$.

Το στατιστικό $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι πλήρες και επαρκές για την παράμετρο θ, επομένως και για την $\frac{1}{\theta}$, αφού η $G\left(n, \frac{1}{\theta}\right)$ ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.1), βάσει του πορίσματος 1.1.

Πράγματι, είναι $f_T(t,\, \theta) = \dfrac{\theta^n}{\Gamma(n)} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\theta t}$, $t \geq 0$, επομένως η $G\left(n, \dfrac{1}{\theta}\right)$ ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών της μορφής (1.3.1) με :

$c(\theta) = \dfrac{\theta^n}{\Gamma(n)}$, $Q(\theta) = -\,\theta$, $T(t) = t$ και $h(t) = t^{n-1}$.

Επίσης, το στατιστικό $U = \dfrac{X_1}{T} \sim \text{Beta}(\alpha = 1,\ \beta = n - 1)$, δηλαδή η κατανομή του είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ, επομένως είναι ancillary.

Πράγματι, $X_i \sim \text{Exp}(\theta) \equiv G\left(1, \dfrac{1}{\theta}\right), \forall i = 1, \ldots, n$, άρα η από κοινού κατανομή των $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \theta^n \cdot e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$, $x_i > 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$, $\theta > 0$. Θέτουμε :

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{x_1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \\ T_2 = x_2 \\ \vdots \\ T_n = x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{T_1}{1 - T_1} \sum_{i=2}^{n} T_i \\ x_2 = T_2 \\ \vdots \\ x_n = T_n \end{cases}, \text{ όπου } 0 < T_1 < 1,\ T_i > 0, \forall i = 2, \ldots, n.$$

Επομένως η από κοινού κατανομή των $T_1, T_2, \ldots, T_n$ είναι η εξής :

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \theta^n \cdot e^{-\theta \frac{\sum_{i=2}^{n} t_i}{(1-t_1)}} \cdot \frac{1}{(1-t_1)^2} \sum_{i=2}^{n} t_i\,,$$

$0 < t_1 < 1,\ t_i > 0, \forall i = 2, \ldots, n$, αφού

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{t_1}{1-t_1}\sum_{i=2}^{n} t_i + t_2 + \ldots + t_n$$

$$= \frac{t_1}{1-t_1}\sum_{i=2}^{n} t_i + \sum_{i=2}^{n} t_i = \frac{t_1}{1-t_1}\sum_{i=2}^{n} t_i + \left(\frac{1-t_1}{1-t_1}\right)\sum_{i=2}^{n} t_i = \frac{\sum_{i=2}^{n} t_i}{1-t_1},$$

και η Ιακωβιανή ορίζουσα του παραπάνω συστήματος, είναι η εξής :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \frac{\partial x_n}{\partial t_3} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{(1-t_1)^2}\sum_{i=2}^{n} t_i & \frac{t_1}{1-t_1} & \frac{t_1}{1-t_1} & \cdots & \frac{t_1}{1-t_1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-t_1)^2}\sum_{i=2}^{n} t_i .$$

Έτσι η περιθώρια κατανομή του $T_1 = \frac{y_1}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$, είναι η εξής :

$$f(t_1)=\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)\,dt_2\ldots dt_n$$

$$=\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty}\theta^n\cdot e^{-\theta\frac{\sum_{i=2}^{n}t_i}{(1-t_1)}}\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\sum_{i=2}^{n}t_i\,dt_2\ldots dt_n\,.$$

Για n = 2 έχουμε :

$$f(t_1)=\theta^2\cdot\frac{1}{(1-t_1)^2}\int_0^{\infty}e^{-\theta\frac{t_2}{(1-t_1)}}t_2\,dt_2$$

$$=\frac{\theta^2}{(1-t_1)^2}\frac{(1-t_1)}{\theta}\underbrace{\int_0^{\infty}t_2\theta\frac{e^{-\theta\frac{t_2}{(1-t_1)}}}{(1-t_1)}dt_2}_{E(T_2),\ \text{οπου}\ T_2\sim Exp\left(\frac{\theta}{(1-t_1)}\right)}$$

$$=\frac{\theta^2}{(1-t_1)^2}\frac{(1-t_1)^2}{\theta^2}$$

$$=1.$$

Άρα για n = 2, $T_1 \sim B(1, 1)$.

Για n = 3 έχουμε :

$$f(t_1)=\frac{\theta^3}{(1-t_1)^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\theta\frac{t_2+t_3}{(1-t_1)}}(t_2+t_3)\,dt_2dt_3$$

$$=\frac{\theta^3}{(1-t_1)^2}\int_0^{\infty}e^{-\theta\frac{t_3}{(1-t_1)}}\left[\int_0^{\infty}\left(t_2e^{-\theta\frac{t_2}{(1-t_1)}}+t_3e^{-\theta\frac{t_2}{(1-t_1)}}\right)dt_2\right]dt_3$$

$$= \frac{\theta^3}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\theta\frac{t_3}{(1-t_1)}}\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\cdot\underbrace{\int_0^\infty t_2\theta\frac{e^{-\theta\frac{t_2}{(1-t_1)}}}{(1-t_1)}dt_2}_{E(T_2),\ \text{οπου}\ T_2\sim Exp\left(\frac{\theta}{(1-t_1)}\right)} + t_3\int_0^\infty e^{-\theta\frac{t_2}{(1-t_1)}}dt_2\right]dt_3$$

$$= \frac{\theta^3}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\theta\frac{t_3}{(1-t_1)}}\left[\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^2 + t_3\cdot\underbrace{\frac{(1-t_1)}{\theta}}_{\text{αφου}\ \int_0^\infty \theta\frac{e^{-\theta\frac{t_2}{(1-t_1)}}}{(1-t_1)}dt_2=1,\ \text{ως σ. π. π.}}\right]dt_3$$

$$= \frac{\theta^3}{(1-t_1)^2}\left[\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^3\underbrace{\int_0^\infty \theta\frac{e^{-\theta\frac{t_3}{(1-t_1)}}}{(1-t_1)}dt_3}_{\text{σ. π. π. της}\ T_3\sim Exp\left(\frac{\theta}{(1-t_1)}\right)} + \left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^2\underbrace{\int_0^\infty t_3\theta\frac{e^{-\theta\frac{t_3}{(1-t_1)}}}{(1-t_1)}dt_3}_{E(T_3)\ \text{της}\ T_3\sim Exp\left(\frac{\theta}{(1-t_1)}\right)}\right]$$

$$= \frac{\theta^3}{(1-t_1)^2}\left[\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^3 + \left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^3\right]$$

$$= \frac{2\theta^3(1-t_1)^3}{\theta^3(1-t_1)^2}$$

$$= 2(1-t_1).$$

Άρα για $n = 3$, $T_1 \sim B(1, 2)$.

<u>Για n = 4</u> έχουμε :

$$f(t_1) = \frac{\theta^4}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\theta\frac{t_2+t_3+t_4}{(1-t_1)}}(t_2+t_3+t_4)\,dt_2dt_3dt_4$$

$$=\frac{\theta^4}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\theta\frac{t_3+t_4}{(1-t_1)}}\left[\int_0^\infty t_2 e^{-\theta\frac{t_2}{(1-t_1)}}\,dt_2+(t_3+t_4)\int_0^\infty e^{-\theta\frac{t_2}{(1-t_1)}}\,dt_2\right]dt_3dt_4$$

$$=\frac{\theta^4}{(1-t_1)^2}\cdots$$

$$\cdot\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\theta\frac{t_3+t_4}{(1-t_1)}}\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\int_0^\infty t_2\theta\frac{e^{-\theta\frac{t_2}{(1-t_1)}}}{(1-t_1)}\,dt_2+(t_3+t_4)\frac{(1-t_1)}{\theta}\int_0^\infty\theta\frac{e^{-\theta\frac{t_2}{(1-t_1)}}}{(1-t_1)}\,dt_2\right]dt_3dt_4$$

$$=\frac{\theta^4}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\theta\frac{t_3+t_4}{(1-t_1)}}\left[\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^2+(t_3+t_4)\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]dt_3dt_4$$

$$=\frac{\theta^4}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\theta\frac{t_4}{(1-t_1)}}\left[\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^3\underbrace{\int_0^\infty\theta\frac{e^{-\theta\frac{t_3}{(1-t_1)}}}{(1-t_1)}\,dt_3}_{=1,\ \text{ως σ. π. π. της } T_3}+\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^2\underbrace{\int_0^\infty t_3\theta\frac{e^{-\theta\frac{t_3}{(1-t_1)}}}{(1-t_1)}\,dt_3}_{E(T_3),\ \text{οπου } T_3\sim Exp\left(\frac{\theta}{(1-t_1)}\right)}\right.$$

$$\left.+\,t_4\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^2\underbrace{\int_0^\infty\theta\frac{e^{-\theta\frac{t_3}{(1-t_1)}}}{(1-t_1)}\,dt_3}_{=1,\ \text{ως σ. π. π. της } T_3}\right]dt_4$$

$$=\frac{\theta^4}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\theta\frac{t_4}{(1-t_1)}}\left[\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^3+\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^3+t_4\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^2\right]dt_4$$

$$=\frac{\theta^4}{(1-t_1)^2}\int_0^\infty e^{-\theta\frac{t_4}{(1-t_1)}}\left[2\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^3+t_4\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^2\right]dt_4$$

$$= \frac{\theta^4}{(1-t_1)^2}\left[2\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^4 \underbrace{\int_0^\infty \theta \frac{e^{-\theta\frac{t_4}{(1-t_1)}}}{(1-t_1)} dt_4}_{=1,\ \text{ως σ. π. π. της } T_4} + \left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^3 \underbrace{\int_0^\infty t_4 \theta \frac{e^{-\theta\frac{t_4}{(1-t_1)}}}{(1-t_1)} dt_4}_{E(T_4)\ \text{οπου}\ T_4 \sim Exp\left(\frac{\theta}{(1-t_1)}\right)} \right]$$

$$= \frac{\theta^4}{(1-t_1)^2}\left[2\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^4 + \left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^4 \right]$$

$$= \frac{3\theta^4(1-t_1)^4}{\theta^4(1-t_1)^2}$$

$$= 3(1-t_1)^2.$$

Άρα για $n = 4$, $T_1 \sim B(1, 3)$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω (όπως στο παράδειγμα 3.13), προκύπτει η περιθώρια κατανομή του $T_1 = \frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$, ως εξής :

$$f(t_1) = \frac{\theta^n}{(1-t_1)^2}(n-1)\left[\frac{(1-t_1)}{\theta}\right]^n$$

$$\Rightarrow f(t_1) = (n-1)(1-t_1)^{n-2},\ 0 < t_1 < 1.$$

Δηλαδή το στατιστικό $T_1 = \frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \sim B(1, n-1)$.

Άρα το στατιστικό $U = \dfrac{X_1}{T} = \dfrac{X_1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \sim Beta(\alpha = 1,\ \beta = n - 1)$, είναι ancillary, αφού η κατανομή του είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ.

Έχουμε :
$$\begin{aligned} E[h(X)] &= E[W(T, U)] \\ &= E(T \cdot U) \\ &= E(X_1) \\ &= \frac{1}{\theta}. \end{aligned}$$

Άρα, βάσει του θεωρήματος 3.2, ο Α. Ο. Ε. Δ. εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $\frac{1}{\theta}$, είναι ο :

$$g^*(T) = E_u[W(T, U)] = E_u(T \cdot U) = T \cdot E_u(U) = T \cdot \frac{1}{n} = \frac{T}{n},$$

αφού $U \sim B(\alpha = 1, \beta = n - 1)$ και $E_u(U) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} = \dfrac{1}{n}$.

■

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΑ

Κολυβά – Μαχαίρα, Φ. (1998). *Μαθηματική Στατιστική : Τόμος I, Εκτιμητική*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Κουνιά, Σ., Μπαγιάτη, Κ. και Μωυσιάδη, Χ. (1985). *Ασκήσεις Πιθανοτήτων : Με ανασκόπηση θεωρίας και λύσεις*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Παπαϊωάννου, Τ. (1997). *Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα.

Παπαϊωάννου, Τ. (2000). *Εισαγωγή στις Πιθανότητες*. Τεύχος Α. Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα.

Παπαϊωάννου, Τ. και Φερεντίνος, Κ. (2000). *Μαθηματική Στατιστική : Εκτιμητική – Έλεγχος Υποθέσεων – Εφαρμογές*. 2^{η} Έκδοση, Εκδόσεις Σταμούλη Α.Ε., Αθήνα.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΑ

Anderson, T.W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. 2^{nd} Edition, John Wiley, New York.

Bar Lev, S. and **Boukai, B.** (1985). Minimum variance unbiased estimation for Families of distributions involving two truncation parameters. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **12**, 379 – 384.

Basu, D. (1955). On Statistics Independent of a complete sufficient statistic. *Sankhyā*, **15**, 377 – 380.

Basu, D. (1958). On Statistics Independent of a complete sufficient statistic. *Sankhyā*, **20**, 223 – 226.

Basu, D. (1964). Recovery of ancillary information. *Sankhyā*, *Series A*, **26**, 3 – 16.

Basu, D. (1982). In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, **VI**, Kotz, S. and Johnson, N.L., eds.,Wiley, New York, 193 – 196.

Boos, D.D. and Hughes – Oliver, J.M. (1998). Applications of Basu's Theorem. *American Statistician*, **52**, 218 – 221.

Casella, G. and Berger, R.L. (1990). *Statistical Inference*, Wadsworth, Inc., Belmont, California.

Cramer, E., Kamps, U. and Schenk, N. (2002). On the Joint completeness of Independent statistics. (Abstract). *Statstics & decisions*, **20**, 269 – 277.

Ferentinos, K. (1984). Note of the use of the Cramer – Rao inequality for finding uniformly minimum variance unbiased estimators. *Metron*, **XLII** (1 – 2), 177 – 131.

Ferguson, T.S. (1967). *Mathematical Statistics : A Decision Theoretic Approach*, Academic Press, New York.

Ghosh, M. (1996). Wishart Distribution via Induction. *American Statistician*, **50**, 243 – 246.

Ghosh, M. (2002). Basu's Theorem with applications. *Sankhyā* , *Series A*, **64**, 509 – 531.

Hogg, R.V. (1953). Testing the equality of means of rectangular populations. (Abstract). *Annals of the Institute Statistical Mathematics*, **24**, 691.

Hogg, R. and Graig, A. (1978). *Introduction to Mathematical Statistics*. 4th Edition, Macmillan Publishing Co., Inc.

Huzurbazar, V. (1955). Confidence Intervals for the Parameter of a Distribution Admitting a Sufficient Statistic When the Range Depends on the Parameter. *Journal of Royal Statistical Society*, **55**, 144 – 147.

Karakostas, K.X. (1985). On minimum variance unbiased estimators. *American Statistician*, **39**, 303 – 305.

Koehn, U. and Thomas, D.L. (1975). On statistics independent of a sufficient statistic : Basu's Lemma. *American Statistician*, **29**, 40 – 42.

Lehmann, E.L. (1959). *Testing Statistical Hypotheses*. John Wiley, New York.

Lehmann, E.L. (1981). An Interpretation of completeness and Basu's Theorem. *American Statistician*, **76**, 335 – 340.

Lehmann, E.L. (1986). *Testing Statistical Hypothesis*. 2nd Edition, John Wiley, New York.

Lehmann, E.L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*. 2nd Edition, Springer – Verlag, New York.

Mardia, K.V., Kent, J.T. and Bibby, J.M. (1979). *Multivariate Analysis*. Academic Press, New York.

Mood, A.M., Graybill, F.A. and Boes, D.C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. 3rd Edition, McGraw – Hill Book Company, New York.

Rohatgi, V.K. (1976). *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. John Wiley, New York.

Rohatgi, V.K. and Saleh, E. (2001). *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. 2nd Edition, John Wiley, New York.