

Βασικές Μετρήσεις
Ηλεκτρομαγνητισμού

ΤΟΜΟΣ Ι



Παναγιώτη Α. Ἀσημακοπούλου
καθηγητοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων

Βασικές Μετρήσεις

Ηλεκτρομαγνητισμού

ΤΟΜΟΣ Ι

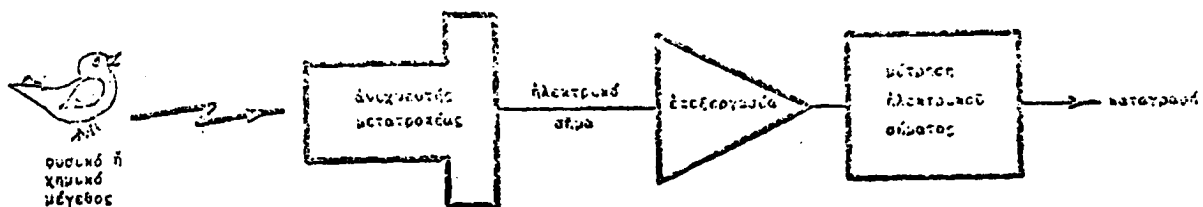


Ἰωάννινα 1979



εισαγωγή

Σχεδόν κάθε μέτρηση στη σύγχρονη έρευνα καί τεχνολογία ανάγεται τελικά στη μέτρηση ενός ηλεκτρικού φυσικού μεγέθους. Σέ πολύ λίγες περιπτώσεις (ή μέτρηση τής θερμοκρασίας μέ θερμόμετρο στήλης υδραργύρου έρχεται άμέσως στό μυαλό) πραγματοποιεΐται μέτρηση χωρίς νά παρεμβληθεΐ κάποια έννοια ή όργανο άπό τό πεδίο του ηλεκτρομαγνητισμού. Άκριβεΐς μετρήσεις θερμοκρασίας ανάγονται συνήθως στη μέτρηση τής διαφορής δυναμικού πού αναπτύσσεται στα άκρα ενός θερμοζεύγους· μέτρηση του φωτισμού ανάγεται στη μέτρηση του ηλεκτρικού ρεύματος πού δημιουργεΐ ένα φωτοστοιχεΐο· ή κινητική ενέργεια των προϊόντων μιās πυρηνικής αντίδράσεως μπορεί νά προσδιοριστεΐ άπό τό ηλεκτρικό φορτίο ίονισμού πού δημιουργεΐται σέ κάποιο υλικό μέσο. Παραδείγματα κατά τά όποΐα ή μέτρηση ενός φυσικού ή χημικού μεγέθους ανάγεται στη μέτρηση ενός ηλεκτρικού μεγέθους μπορεί νά αναφέρει κανείς πάμπολα. Σέ γενικές γραμμές μπορούμε νά περιγράψουμε τή διεργασία των περισσότερων σύγχρονων μετρήσεων σύμφωνα μέ τό έπόμενο διάγραμμα

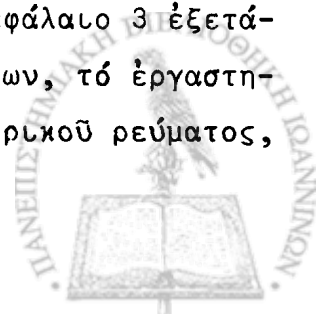


Άν καί μερικά άπό τά στάδια είναι δυνατόν νά παρακαμφθοΐν, μετρήσεις αρχίζουν συνήθως μέ τήν άνίχνευση καί μετατροπή του φυσικού μεγέθους πού πρόκειται νά προσδιοριστεΐ σέ ηλεκτρικό σήμα. Τό φωτοστοιχεΐο, τό θερμοζεύγος, τό πιεζοηλεκτρικό στοιχεΐο, είναι μερικά γνώριμα παραδείγματα μετατροπέων. Μέ τόν όρο ηλεκτρικό σήμα θά έννοήσουμε κάθε ηλεκτρική ποσότητα ή μεταβολή ηλεκτρικής ποσότητας πού περιέχει πληροφορία. Σέ πολλές περιπτώσεις τό ηλεκτρικό σήμα πού παράγεται άπό

τόν μετατροπέα είναι αρκετά ασθενές ή γενικώτερα δύσχρηστο ώστε να χρειάζεται κάποια επεξεργασία. Το στάδιο αυτό καλύπτει ο μεγάλος χώρος της έπιστήμης της ήλεκτρονικής. Το παρόν βιβλίο ασχολείται με το τελευταίο στάδιο της διεργασίας όπου το επεξεργασμένο πλέον ηλεκτρικό σήμα παραδίδει την πληροφορία που μεταφέρει με τη μέτρηση ενός βασικού ηλεκτρικού μεγέθους.

Όπως κάθε εκπαιδευτικό σύγγραμμα το βιβλίο αυτό γράφηκε έχοντας κατά νου ένα συγκεκριμένο ακροατήριο και συγκεκριμένους στόχους. Απευθύνεται κατ' αρχάς σε φοιτητές του δεύτερου ή τρίτου έτους πτυχιακών σπουδών, οι οποίοι έχουν παρακολουθήσει ή παρακολουθούν ταυτόχρονα το βασικό μάθημα 'Ηλεκτρομαγνητισμού, όπως διδάσκεται σήμερα στις 'Ελληνικές Πανεπιστημιακές και Πολυτεχνικές Σχολές. Μια σύντομη αλλά πλήρης ανασκόπηση της 'Ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας δύνεται σε τρία κεφάλαια. Το Κεφάλαιο 2 του πρώτου τόμου περιέχει όλα τα καθαρά ηλεκτρικά φαινόμενα ενώ τα Κεφάλαια 7 και 8 του δεύτερου τόμου καλύπτουν αντίστοιχα μαγνητικά φαινόμενα και φαινόμενα έπαγωγής. Η παρακολούθηση των κεφαλαίων αυτών απαιτεί όρισμένες γνώσεις στο διαφορικό και άνυσματικό λογισμό. Οι λόγοι που με όδήγησαν στο να συμπεριλάβω τα "θεωρητικά" αυτά κεφάλαια σε ένα "έργαστηριακό" βιβλίο ήσαν δύο: 'Αφενός είχα διακρίνει ένα κενό στην 'Ελληνική βιβλιογραφία που δημιουργούσε ή έλλειψη ενός σύγχρονου συγγράμματος Κλασικού 'Ηλεκτρομαγνητισμού. Τουτό διορθώθηκε πρόσφατα με την εξαίρετη έκδοση της σειράς Berkeley από το ΕΜΠ. Κατά δεύτερο λόγο θεώρησα χρήσιμο για τον άναγνώστη να διαθέτει συγκεντρωμένες όλες τις έννοιες, έξισώσεις και όρισμούς των φυσικών μεγεθών που χρησιμοποιούνται στο υπόλοιπο κείμενο. Θεώρησα άκόμη χρήσιμο να συμπεριλάβω τρία έπικουρικά κεφάλαια. Το Κεφάλαιο 1 περιλαμβάνει στοιχεΐα από τη στατιστική άνάλυση που κατά τη γνώμη μου απαιτούνται για τον χειρισμό των πειραματικών δεδομένων. Τα Κεφάλαια 4 και 9 περιλαμβάνουν στοιχεΐα από τη θεωρία άναλύσεως κυκλωμάτων συνεχούς και έναλλασσομένου ρεύματος.

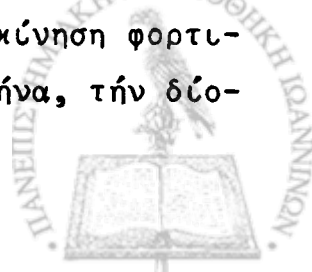
Τά καθαρά "έργαστηριακά" κεφάλαια του βιβλίου, που προαπαιτούν πολύ λιγώτερες γνώσεις από το φοιτητή, συγκεντρώνουν την προσοχή τους στις βασικές μετρήσεις ήλεκτρομαγνητισμού. Το Κεφάλαιο 3 έξετάζει διεξοδικά το βασικότερο όργανο ήλεκτρικών μετρήσεων, το έργαστηριακό άμπερόμετρο, και τη χρήση του στη μέτρηση ήλεκτρικού ρεύματος,



δυναμικοῦ καί ἀντιστάσεως. Οὐσιαστικά τό ὕδριο ὄργανο, στήν πιό ἐκλεπτισμένη του μορφή, ὡς γαλβανόμετρο D'Arsonval ἢ βαλιστικό γαλβανόμετρο, μελετᾶται διεξοδικώτερα στό Κεφάλαιο 5. Ἡ ἐκτεταμένη αὐτή μελέτη τοῦ ὄργάνου κινητοῦ πλαισίου ἔγινε σκόπιμα. Παρόλη τήν ἐπιδρομή τῶν ψηφιακῶν ὀργάνων στή σύγχρονη τεχνολογία, δέν πιστεύω ὅτι, τουλάχιστον στό προβλεπόμενο μέλλον, τά ὄργανα ἀποκλίσεως θά ἐκλείψουν. Ὅπως τό ψηφιακό χρονόμετρο δέν πρόκειται νά ἀντικαταστήσει τό κοινό ρολοῦ τοῦ τούχου μέ ὠροδείκτη καί λεπτοδείκτη, δέν μπορῶ νά φαντασῶ ἕνα πίνακα ἐλέγχου σταθμοῦ παραγωγῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ἢ ἕνα θάλαμο διακυβερνήσεως ἀεροσκάφους μέ ἀποκλειστικά ψηφιακές ἐνδείξεις. Καί τοῦτο λόγω τῆς ἀνθρώπινης δυνατότητας ἢ ἀδυναμίας ἀντιλήψεως. Στίς περισσότερες περιπτώσεις ἡ πληροφορία πού ἀπαιτεῖται ἀπό ἕνα ὄργανο ἐλέγχου εἶναι πληροφορία τάξης μεγέθους. Ὁ ἄνθρωπος ἔχει τή δυνατότητα νά ἐξάγει μιᾶ τέτοια πληροφορία ἀπό ἕνα ὄργανο ἀποκλίσεως σχεδόν ὑποσυνείδητα μέ μιᾶ ἀπλή ματιά. Σέ ἕνα πίνακα ἐλέγχου μέ 50 ὄργανα ἀποκλίσεως, τό ὄργανο μέ τόν "δείκτη στό κόκκινο" γίνεται εὐκόλα ἀντιληπτό. Ἀντίθετα, ἕνα ψηφιακό ὄργανο ἀπαιτεῖ ἰδιαίτερη προσοχή καί συνειδητή ἀνάγνωση τῆς πληροφορίας. Ἡ διεξοδική ἐπομένως μελέτη τοῦ ὄργάνου κινητοῦ πλαισίου σέ ἕνα ἐργαστηριακό μάθημα ἠλεκτρομαγνητισμοῦ πιστεύω ὅτι εἶναι ἐπιβεβλημένη.

Μιά ἰδιαίτερα χρήσιμη μέθοδος πού βρίσκει μεγάλη ἐκμετάλευση στό χῶρο τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ, ἡ μέθοδος μηδενισμοῦ, ἐξετάζεται ἐπίσης διεξοδικά μέ ἀπαρχή τό Κεφάλαιο 6. Ἡ διαπίστωση ὅτι "τό μηδέν μπορεῖ νά μετρηθεῖ μέ μεγαλύτερη ἀκρίβεια ἀπό ὅποιοδήποτε ἄλλο ἀριθμό" εἶναι βέβαια πολύ παλιά. Βρίσκει τήν πρώτη της ἐφαρμογή στήν ἐπινόηση τοῦ ζυγοῦ γιά τή μέτρηση μάζας. Ἡ μέθοδος ὅμως βρίσκει τή μεγαλύτερη ἀξιοποίησή της στό χῶρο τῆς τεχνολογίας τοῦ ἠλεκτρισμοῦ. Γέφυρες συνεχοῦς ρεύματος καί ποτενσιομετρικές διατάξεις ἐξετάζονται στό Κεφάλαιο 6. Μέθοδοι μηδενισμοῦ στό ἐναλλασσόμενο ρεῦμα καί ἡ μέτρηση χωρητικότητας, συντελεστῶν αὐτεπαγωγῆς καί συχνότητας, μελετοῦνται στά Κεφάλαια 11 καί 12.

Τό Κεφάλαιο 13 ξεφεύγει λίγο ἀπό τόν "κλασσικό" χῶρο τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν μετρήσεων καί εἰσδύει στά χωράφια τῆς παλαιότερα θεωρούμενης ἠλεκτρονικῆς. Στό κεφάλαιο αὐτό ἐξετάζεται ἡ κίνηση φορτισμένων σωματίων στό κενό μέ ἐφαρμογές τόν καθοδικό σωλήνα, τήν δίο-



δη καί τήν τρίοδη λυχνία. Θεώρησα άπαραίτητο νά συμπεριλάβω τά θέματα αυτά, άφενός έπειδή έμπεδώνουν βασικές έννοιες πού καλύπτει τό αντίστοιχο θεωρητικό μάθημα του ήλεκτρομαγνητισμοϋ. Άφετέρου ό καθοδικός παλμογράφος άποτελεϊ σήμερα ένα όργανο του Έργαστηρίου Ηλεκτρομαγνητικων Μετρήσεων έξίσου βασικό όσο καί τό γαλαβανόμετρο. Άπό τήν άλλη πλευρά πιστεύω ότι ή μελέτη των δύο βασικών λυχνιών στό μάθημα αυτό θά προετοιμάσει καλύτερα τό φοιτητή καί θά έλαφρύνει τήν ήδη βεβαρυμένη ύλη στό έργαστηριακό μάθημα τής ηλεκτρονικής.

Τό τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου άποσκοπεϊ στή σύνδεση των ηλεκτρικών μετρήσεων μέ άλλους χώρους τής έπιστήμης διαμέσου τής μελέτης των μετατροπών. Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται μιá γεύση στό φοιτητή για τίς δυνατότητες ποσοτικής εκτιμήσεως φυσικών μεγεθών από τό χώρο τής όπτικής, τής άκουστικής, τής χημείας ή τής βιολογίας μέ τή χρησιμοποίηση των τεχνικών καί όργάνων πού έμαθε νά χειρίζεται κατά τή διάρκεια του μαθήματος.

Τά Πειράματα πού παρεμβάλλονται στό κυρίως κείμενο έχουν σχεδιαστεί μέ σκοπό τήν έμπέδωση των βασικών έννοιων του ήλεκτρομαγνητισμοϋ, καί τήν έξουκίωση του φοιτητή μέ τίς αρχές μεθόδων μετρήσεως, όπως πραγματοποιούνται σήμερα στό έρευνητικό εργαστήριο καί στή βιομηχανία. Οι οδηγίες πού παρέχονται σέ κάθε πείραμα είναι αρκετές ώστε ό φοιτητής νά συγκεντρώσει τά όργανα καί νά τό εκτελέσει χωρίς βοήθεια από τό διδακτικό προσωπικό. Τά όργανα καί έξαρτήματα πού άπαιτοϋνται για κάθε πείραμα δύνονται ακόμη συγκεντρωτικά στό Παράρτημα Β.

Για καθαρά τεχνικούς λόγους τό βιβλίο εκδίδεται σέ δύο τόμους. Κάθε τόμος καλύπτει ύλη πού μπορεϊ νά καλυφθεϊ άνετα σέ ένα άκαδημαϊκό έξάμηνο (8-10 έργαστηριακές εβδομάδες). Τά 35 συνολικά πειράματα πού περιέχει ό πρώτος τόμος παρέχουν αρκετή εύελξηία στόν διδάσκοντα ώστε νά διαμορφώσει τό έργαστηριακό πρόγραμμα του έξαμήνου σύμφωνα μέ τή χροιά πού θέλει νά δώσει στό μάθημα, τό επίπεδο των διδασκομένων ή τά όργανα πού διαθέτει τό εργαστήριο. Ένδεικτικά δίνεται τό έξαμηνιαίο έργαστηριακό πρόγραμμα πού εκτελέστηκε στό Πανεπιστήμιο Ίωαννίνων κατά τό άκαδημαϊκό έτος 1978-1979



Έργαστηριακή εβδομάδα	Πείραμα
1	2-1(β), 2-1(γ), 2-2(α)
2	3-1, 3-2, 3-3
3	3-4, 3-5, 3-6
4	5-1, 5-2
5	5-5, 5-6, 5-7
6	5-8, 5-9, 5-11
7	6-1, 6-2
8	6-5, 6-6
9	6-7, 6-8

Στή διαμόρφωση καί έλεγχο τών πειραμάτων μέ βοήθησαν ούσιαστικά ή βοηθός τής ΣΤ Έδρας φυσικῆς δις Ἀθηνᾶ Πάκου καί ὁ παρασκευαστής κ. Κων/νος Ἀλεξανδρίδης, τούς ὁποίους εὐχαριστῶ θερμά. Ἡ ἀφογή ἐμφάνιση τοῦ δακτυλογραφημένου κειμένου ὀφείλεται στήν κα Ροζίτα Ράκτη.

Τό βιβλίό αὐτό δέν θά εἶχε γραφεῖ ἄν τά τελευταῖα δύο χρόνια δέν εἶχα κλέψει ἕνα μεγάλο μέρος τοῦ χρόνου πού δικαιοματικά ἀνήκει στήν οἰκογένειά μου. Γιά τό λόγο αὐτό τό ἀφιερώνω μέ ἀγάπη στήν κόρη μου Ἀννα.

Π. Α. Α.

Ἰωάννινα, Ἰούλιος 1979



Περιεχομενα

Είσαγωγή	1
Περιεχόμενα	vi
1. Μέτρηση και Πειραματικό Σφάλμα	1
1-1. 'Ακρίβεια, Πιστότητα και Πειραματικό Σφάλμα	3
1-2. Σημαντικά Ψηφία	10
1-3. 'Η Στατιστική Κατανομή	15
1-4. Στατιστικές Παράμετροι του Θεωρητικού Πληθυσμού	19
1-5. 'Εκτίμηση των Στατιστικών Παραμέτρων	25
1-6. 'Η Διωνυμη Κατανομή	28
1-7. 'Η Κατανομή Poisson	36
1-8. 'Η Κατανομή Gauss ή Κανονική Κατανομή	41
1-9. Μετάδοση του Πειραματικού Σφάλματος	46
1-10. 'Εκτίμηση του Μέσου και του Πειραματικού Σφάλματος	52
1-11. 'Η Μέτρηση ενός Φυσικού Μεγέθους	59
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	67
2. 'Ηλεκτρικά Φαινόμενα	71
2-1. 'Ο Νόμος του Coulomb	73
2-2. Το 'Ηλεκτρικό Πεδίο	77
2-3. Ροή του 'Ηλεκτρικού Πεδίου και ο Νόμος του Gauss	81
2-4. 'Ηλεκτροστατική 'Ενέργεια Στατικών Φορτίων	83
2-5. 'Η Συνάρτηση Δυναμικού	87
2-6. 'Αλληλεπίδραση 'Ελεύθερων Στατικών Φορτίων	92



2-7. Ίσοδυναμικές Ήπιφάνειες καί Δυναμικές Γραμμές	97
2-8. Άγωγοί καί Μονωτές	103
2-9. Άγωγοί σέ Ήλεκτροστατικά Συστήματα	105
2-10. Τό Ήλεκτροστατικό Πεδίο Ήλεύθερων Φορτίων. Οί έξισώσεις Poisson καί Laplace. Ήριακές συνθήκες	111
2-11. Ήλεκτροστατικά Εΐδωλα	116
2-12. Διηλεκτρικά Ύλικά	123
2-13. Ήλεκτρική Μετατόπιση, Ήλεκτρική Ήπιδεκτικότη- τητα καί Διηλεκτρική Σταθερά	130
2-14. Ήριακές Συνθήκες καί ή Ήξίσωση Poisson σέ Διηλεκτρικά	135
2-15. Ήνέργεια τοϋ Ήλεκτροστατικοϋ Πεδίου	151
2-16. Τό Ήλεκτρικό Ρεϋμα	156
2-17. Άγωγιμότητα, Άντίσταση καί ό Νόμος τοϋ Ohm	164
2-18. Ή Ήμική Άντίσταση	175
3. Βασικές Μετρήσεις Συνεχοϋς Ρεύματος	186
3-1. Τό Ήργαστηριακό Άμπερόμετρο	187
3-2. Τό Ήργαστηριακό Βολτόμετρο	197
3-3. Μέτρηση Άντιστάσεως	199
3-4. Ήλεκτρεγερτική Δύναμη καί Διαφορά Δυναμικοϋ	204
3-5. Τό Ήλεκτρικό Στοιχείο	209
3-6. Ήφέλιμη Ήσχή Ήλεκτρικοϋ Στοιχείοϋ	221
3-7. Μέτρηση ΗΕΔ Ήλεκτρικοϋ Στοιχείοϋ	223
3-8. Τό Ήργαστηριακό Ήμόμετρο	225
3-9. Τό Ήργαστηριακό Πολύμετρο	232
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	234
4. Κυκλώματα Συνεχοϋς Ρεύματος	238
4-1. Βασικές Άρχές	239
4-2. Ή Ήδανική ΗΕΔ	241
4-3. Οί Νόμοι τοϋ Kirchhoff	245
4-4. Ρεϋμα Βρόχου	255



4-5. Τό θεώρημα τῆς Ἐπαλληλίας	259
4-6. Ἴσοδύναμη ΗΕΔ καί Ἴσοδύναμη Ἀντίσταση	263
4-7. Τό θεώρημα τοῦ Thévenin	267
4-8. Τό θεώρημα τοῦ Norton	271
4-9. Μετασχηματισμός Τριγώνου σέ Ἀστέρα	273
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	278
5. Τό Γαλβανόμετρο D' Arsonval	284
5-1. Εὐαισθησία τοῦ Γαλβανομέτρου	287
5-2. Ἡ Κίνηση τοῦ Γαλβανομέτρου	290
5-3. Διακλάδωση τοῦ Γαλβανομέτρου	301
5-4. Προστασία τοῦ Γαλβανομέτρου	308
5-5. Τό Γαλβανόμετρο D' Arsonval ὡς Ἀμπερόμετρο, Βολτόμετρο καί Ὡμόμετρο	314
5-6. Τό Βαλλιστικό Γαλβανόμετρο	321
5-7. Μέτρηση Ἀντιστάσεως μέ τό Βαλλιστικό Γαλβανόμετρο	329
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	340
6. ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΜΗΔΕΝΙΑΜΟΥ	345
6-1. Ἡ Γέφυρα Wheatstone	348
6-2. Πειραματικό Σφάλμα στή Μέτρηση Ἀντιστάσεως	352
6-3. Μέτρηση Πολύ Μικρῶν Ἀντιστάσεων. Ἡ Διπλή Γέφυρα Kelvin	357
6-4. Πρότυπα Στοιχεῖα	365
6-5. Ποτενσιόμετρα	369
6-6. Βαθμονόμηση Ὀργάνων	376
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	381
Παράρτημα Α	389
Παράρτημα Β	392



ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

μετρηση

και πειραματικο βφαημα

Τό αποτέλεσμα κάθε μετρήσεως εκφράζεται από ένα ζεύγος αριθμών (x, σ). Ο πρώτος αριθμός προέρχεται από την απλή σύγκριση του φυσικού μεγέθους που θέλουμε να μετρήσουμε με τη μονάδα μετρήσεως που έχουμε επιλέξει για αυτό τό μέγεθος. Ο δεύτερος δίνει ένα μέτρο για την ποιότητα της μετρήσεως. Η πληροφορία που περιέχει ο δεύτερος αυτός αριθμός σ, που θα ονομάσουμε πειραματικό σφάλμα, είναι εξίσου σημαντική με την πληροφορία που περιέχει ο πρώτος. Δέν έχει π.χ. νόημα να αναφέρουμε απλώς ότι η μάζα του ηλεκτρονίου μετρήθηκε σε κάποιο πείραμα και βρέθηκε ίση με 9.1×10^{-28} gr. Ο επιστήμονας που δέχεται την πληροφορία αυτή θέλει να ξέρει σε ποιό βαθμό μπορεί να εμπιστευθεί την τιμή αυτή και να τη χρησιμοποιήσει σε μετέπειτα υπολογισμούς. Ποιά είναι π.χ. η πιθανότητα ώστε η "πραγματική" τιμή της μάζας του ηλεκτρονίου να είναι 9.3×10^{-28} gr. ή 8.9×10^{-28} gr. Την ποιοτική αυτή πληροφορία περιέχει τό πειραματικό σφάλμα σ που συνήθως συνοδεύει τό αριθμητικό αποτέλεσμα της μετρήσεως x στο συμβολισμό



$$x \pm \sigma. \quad (1.1)$$

Αν και μπορούμε να δοῦμε τήν ἔννοια τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος ἀπό διάφορες ἰσοδύναμες ὀπτικές γωνίες, ἡ ἀπαψη πού υἱοθετεῖται συνήθως βασίζεται στή διασπορά τῶν τιμῶν x πού προκύπτουν ἀπό μιά σειρά ὁμοίων μετρήσεων τοῦ συγκεκριμένου φυσικοῦ μεγέθους. Ἡ διεργασία αὐτή μπορεῖ νά διευκρινιστεῖ καλύτερα μέ ἕνα πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 1-1. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλετε νά μετρήσετε τό μήκος l ἑνός νήματος χρησιμοποιώντας τό νόμο τοῦ ἀπλοῦ ἐκκρεμοῦς

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.2)$$

ὅπου $g = 981 \text{ cm/sec}^2$ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας καί T ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς. Δημιουργεῖστε ἕνα ἐκκρεμές δένοντας ἕνα βαρῦδι στό ἕνα ἄκρο τοῦ νήματος καί ἀναρτώντας τό ἄλλο ἄκρο σέ ἕνα σταθερό σημεῖο. Χρονομετρεῖστε τήν περίοδο τοῦ ἐκκρεμοῦς γιά μικρές ταλαντώσεις (ἴσως βρῆτε πῶς εὔκολο νά χρονομετρήσετε 10 ἢ 20 περιόδους καί νά διαιρέσετε τό ἀποτέλεσμα μέ τόν ἀριθμό τῶν περιόδων). Ἐπαναλάβετε τή μέτρηση τουλάχιστον 30 φορές καταγράφοντας τά ἀποτελέσματα σέ κατάλληλο πύνακα. Γιά κάθε μέτρηση τῆς περιόδου ὑπολογίστε τώρα τό ἀντίστοιχο μήκος τοῦ νήματος, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (1.2), ἀπό τήν ἔκφραση

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}. \quad (1.3)$$

Ἀποδώστε τά ἀποτελέσματά σας σέ γραφική παράσταση ὑπό μορφή ἱστογράμματος. Προσδιορίστε τή μέση τιμή (μέσον ὄρο) τῶν μετρήσεων σας καί σημειώστε την στό ἱστόγραμμα. Γύρω ἀπό τή μέση αὐτή τιμή προσδιορίστε τήν περιοχή πού περιέχει τά 50 % τῶν μετρήσεων. Μέ ἄλλα λόγια προσδιορίστε τόν ἀριθμό σ_l ἔτσι ὥστε, ἂν l εἶναι ἡ μέση τιμή τῶν ἀποτελεσμάτων σας, τά 50 % τῶν μετρήσεων βρίσκονται μεταξύ τῶν τιμῶν $l - \sigma_l$ καί $l + \sigma_l$.



Ἡ τελευταία διαδικασία περιέχει μιὰ μέθοδο γιὰ τὴν ἐξαγωγή τῶν δύο ἀριθμῶν τῆς ἐξ. (1.1). Ἡ μέση τιμὴ \bar{x} εἶναι ὁ πλέον ἀντιπροσωπευτικός ἀριθμὸς πού μπορούμε νὰ δώσουμε γιὰ τὸ μήκος τοῦ νήματος ἐνῶ ὁ ἀριθμὸς σ_x ἀντικατοπτρίζει τὴν ποιότητα τῆς μετρήσεως. Εἶναι πολὺ πιθανὸ ὅτι ἂν ἐπαναλάβουμε τὴ μέτρηση μιὰ ἀκόμη φορά τὸ ἀποτέλεσμα θὰ ἔχει διάφορη τιμὴ ἀπὸ τὴ μέση τιμὴ \bar{x} . Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ σ_x πού προσδιορίσαμε μὲ τὴν προηγούμενη διαδικασία θὰ μπορούσαμε νὰ ποῦμε ὅτι ἡ νέα μέτρηση ἔχει πιθανότητα 50 % νὰ βρεῖται μεταξὺ τῶν τιμῶν $\bar{x} - \sigma_x$ καὶ $\bar{x} + \sigma_x$.

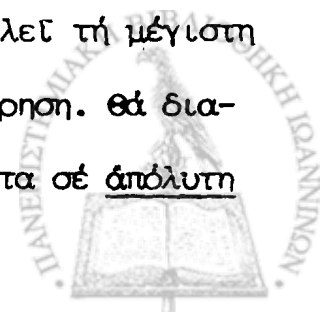
Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ θὰ κάνουμε μιὰ γρήγορη ἀνασκόπηση γύρω ἀπὸ τὶς μεθόδους προσδιορισμοῦ τῶν τιμῶν τῆς ἐξ. (1.1) πού χαρακτηρίζουν κἀθε μέτρηση. Οἱ τιμές αὐτές μπορεῖ νὰ προέρχονται ἀπὸ μιὰ σειρά μετρήσεων ἢ ἀπὸ μιὰ μοναδική μέτρηση. Ἄν καὶ ἀρκετές φορές θὰ παραβλέψουμε τὴ μαθηματικὴ αὐστηρότητα θὰ ἐπιμείνουμε ἀρκετὰ στὴν ἀκριβὴ στατιστικὴ ἔννοια κἀθε παραμέτρου.

1-1 Ἀκρίβεια, Πιστότητα καὶ Πειραματικὸ Σφάλμα

Στὴν Ἑλληνικὴ γλῶσσα ἡ λέξη ἀκρίβεια χρησιμοποιεῖται χωρὶς διάκριση γιὰ τὴν ἀπόδοση δύο διαφορετικῶν ἐννοιῶν. Λέμε π.χ. ὅτι ἓνας ἐργαστηριακὸς ζυγὸς μετράει μάζα "μὲ ἀκρίβεια χιλιοστοῦ τοῦ γραμμαρίου". Ἄλλοτε πάλι ρωτᾶμε ποιά εἶναι ἡ "ἀκριβὴς ὥρα". Μὲ λίγη σκέψη γίνεται φανερό ὅτι ἡ ιδιότητα τῆς μετρήσεως στὴν ὁποία ἀναφέρεται καθεμιὰ ἀπὸ τὶς δύο παραπάνω φράσεις εἶναι διαφορετικὴ. Στὴν πρώτη περίπτωση ἡ λέξη "ἀκρίβεια" ἀναφέρεται στὴ διακριτικὴ ικανότητα τῆς μετρήσεως, δηλαδή στὸ πόσο στενά εἶναι τὰ ὅρια μέσα στὰ ὁποῖα μπορεῖ νὰ προσδιοριστεῖ ἡ τιμὴ τοῦ μεγέθους πού μετράται. Στὴ

δεύτερη, ή ίδια λέξη αναφέρεται στην πιστότητα τής μετρήσεως, δηλαδή στο πόσο κοντά στην "πραγματική" τιμή του μεγέθους που μετράται βρίσκεται ή τιμή που προσδιορίζει ή μέτρηση. Στη συνέχεια θά χρησιμοποιήσουμε τόν όρο ακρίβεια αποκλειστικά μέ τήν πρώτη του έννοια καί θά εισάγουμε τόν όρο πιστότητα για τή δεύτερη. Ίσως είναι χρησιμο να τονιστεί ότι οι δύο ιδιότητες είναι γενικά ανεξάρτητες. Μιά μέτρηση μπορεί να είναι ακριβής αλλά ή τιμή που προσδιορίζει να βρίσκεται μακριά από τήν πραγματική τιμή του μεγέθους που μετράται. Γυρίζοντας στο παράδειγμα του ζυγού, είναι φανερό ότι ή ακρίβεια του ζυγού είναι ανεξάρτητη από τό πόσο "αστό" είναι τό αποτέλεσμα τής ζυγήσεως. Αν π.χ. χρησιμοποιηθούν ελαττωματικά σταθμά, τό αποτέλεσμα μπορεί πάλι να δοθεί μέ ακρίβεια χιλιοστού του γραμμαρίου αλλά ή τιμή τής μάζας που θά προσδιορίσει ή μέτρηση βρίσκεται μακριά από τήν "πραγματική" μάζα του αντικειμένου. Τό αντίθετο μπορεί να συμβεί στο δεύτερο παράδειγμα. Αν τό ρολόϊ που μετράει τό χρόνο δέν διαθέτει δευτερολεπτοδείκτη, μπορεί να δείχνει τήν "πραγματική" ώρα, αλλά μέ πενιχρή ακρίβεια μέσα στα όρια του ενός πρώτου λεπτού. Ο αναγνώστης έχει ίσως διακρίνει ότι ή ακρίβεια μιās μετρήσεως αφορά κυρίως στή δεύτερη παράμετρο τής έξ. (1.1) ενώ ή πιστότητα αντανακλάται τόσο στή πρώτη όσο καί στή δεύτερη. Τή στενή αυτή σχέση θά εξετάσουμε στή συνέχεια.

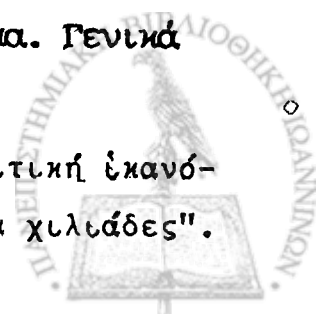
Έπιστρέφοντας στο θέμα τής ορολογίας, θά περιορίσουμε τόν όρο διακριτική ικανότητα αποκλειστικά στήν αξιολόγηση οργάνων μετρήσεως. Μέ τόν τρόπο αυτό για μία μοναδική μέτρηση που πραγματοποιείται από ένα συγκεκριμένο όργανο, ή διακριτική ικανότητα αποτελεί τή μέγιστη ακρίβεια μέ τήν οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί ή μέτρηση. θά διακρίνουμε ακόμη τήν ακρίβεια καί τή διακριτική ικανότητα σέ απόλυτη



καί σχετική. Ἡ ἀπόλυτη ἀκρίβεια μιᾶς μετρήσεως (ἢ ἀπόλυτη διακριτική ικανότητα ἑνός ὄργάνου) ἐκφράζεται στίς ἴδιες μονάδες πού χρησιμοποιοῦνται γιά τό μέγεθος πού μετροῦνται (στήν περίπτωση τῆς ζυγῆσεως σέ gr). Ἡ σχετική ἀκρίβεια ἐκφράζει τήν ἴδια ἰδιότητα σέ ποσοστιαῖες μονάδες σέ σχέση μέ τήν ἀπόλυτη τιμή πού προσδιορίζει ἡ μέτρηση. Ὁ ζυγός πού μπορεῖ νά προσδιορίσει τή μάζα ἑνός ἀντικειμένου 10 gr μέ ἀπόλυτη διακριτική ικανότητα 0.001 gr διαθέτει σχετική διακριτική ικανότητα[†] 10^{-4} ἢ 0.01 %.

Εἶναι βέβαιο ὅτι καμμιά μέτρηση δέν μπορεῖ νά πραγματοποιηθεῖ μέ ἀπόλυτη πιστότητα ἢ ἀπόλυτη ἀκρίβεια. Κάθε μέτρηση περιέχει ἀφάλματα παρόλη τήν προσοχή καί τόν κόπο πού μπορεῖ νά ἔχουν καταβληθεῖ γιά τή διεξαγωγή τῆς. Ἐξ ὀρισμοῦ ἡ μέτρηση συνεπάγεται σύγκριση πρὸς ἕνα πρότυπο καί, ὅπως στό παράδειγμα τοῦ ζυγοῦ πού ἀναφέρθηκε προηγουμένως, τό πρότυπο μπορεῖ νά ἀποτελέσει πηγή ἀφάλματος. Ἀφάλματα ἀκόμη μπορεῖ νά διεισδύσουν κατά τή διεργασία τῆς συγκρίσεως εἴτε ἀπό τόν παρατηρητή εἴτε ἀπό τό περιβάλλον. Πολλά ἀπό τά ἀφάλματα αὐτά εἶναι δυνατὸν νά ἐξαλειφθοῦν ἀν καταβληθεῖ ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος, προσοχή καί δαπάνη. Ἡ ἀξιολόγηση βέβαια τῆς προσπάθειας καί δαπάνης πού πρέπει νά καταβληθεῖ γιά μιὰ συγκεκριμένη μέτρηση εἶναι ἄλλο θέμα. Ὁ ἔλεγχος τῶν διαστάσεων ἑνός ἐμβόλου μηχανῆς ἐσωτερικῆς καύσεως ἀπαιτεῖ κατά τήν παραγωγή χρησιμοποίηση μικρομετρικῶν μεθόδων καί ὀπτικῶν διατάξεων. Ἀντίθετα ἡ μέτρηση τῶν διαστάσεων ἑνός τραπεζιοῦ μέ σκοπὸ νά ἀγοραστεῖ ἕνα τραπεζομάντηλο πού θά τό καλύπτει μπορεῖ νά γίνει κάλλιστα μέ ἕνα κοινὸ χάρακα. Γενικά

[†] Συχνά, ἰδίως σέ κύκλους μηχανικῶν, ἡ σχετική διακριτική ικανότητα ἐκφράζεται ὡς κλάσμα μέ τή φράση "ἕνα στά δέκα χιλιάδες".



μιά μέτρηση δέν μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ ὡς "καλή" ἢ "κακή" μέ μόνο κριτήριο τήν πιστότητα καί τήν ἀκρίβεια, ἀλλά μέ ἐπιπλέον κριτήριο τήν ἱκανοποίηση τοῦ σκοποῦ γιά τόν ὁποῖο ἔγινε ἡ μέτρηση σέ σχέση μέ τήν προσπάθεια καί δαπάνη πού καταβλήθηκε.

Εἶναι ἀρκετά χρήσιμο νά ταξινομήσουμε τά διάφορα εἶδη σφαλμάτων πού μπορεῖ νά ἀνακύψουν σέ μιά μέτρηση. Μέ βάση τήν προέλευση καί τήν εὐκολία μέ τήν ὁποία μποροῦμε νά τά ἐξαλείψουμε εἶναι δυνατόν νά κατατάξουμε τά πειραματικά σφάλματα σέ τρεῖς μεγάλες κατηγορίες:

1. Ἀπαράδεικτα σφάλματα
2. Συστηματικά σφάλματα
3. Τυχαῖα σφάλματα.

Στήν πρώτη κατηγορία ἀνήκουν τά σφάλματα πού ὀφείλονται σέ ἔλλειψη προσοχῆς ἀπό μέρος τοῦ παρατηρητή, σέ λαθασμένο χειρισμό τῶν ὀργάνων μετρήσεως ἢ σέ ἀνώμαλες συνθήκες τοῦ περιβάλλοντος. Τά σφάλματα αὐτά καλύπτουν ὅλο τό φάσμα ἀπό λαθασμένη ἀνάγνωση τῆς ἐνδείξεως ἑνός ὀργάνου, λάθη κατά τή διεξαγωγή ἀριθμητικῶν πράξεων μέχρι κάποια ἀνώμαλη πτώση στό δύνκτιο τῆς πόλης. Εὐτυχῶς παρόμοια σφάλματα δίνουν συνήθως ἀποτελέσματα πού ἀπέχουν πολύ ἀπό τήν ἀναμενόμενη τιμή καί ἡ παρουσία τους εἶναι εὐκολο νά ἐντοπιστεῖ. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ μόνη θεραπεία εἶναι ἡ ἐπανάληψη τῆς μετρήσεως.

Στή δεύτερη κατηγορία ἀνήκουν τά σφάλματα πού κατά κύριο λόγο ἐπηρεάζουν τήν πιστότητα μιᾶς μετρήσεως χωρίς νά μεταβάλουν αἰσθητά τήν ἀκρίβεια. Τά συστηματικά σφάλματα μποροῦν νά γίνουν περισσότερο κατανοητά ἂν τά ὑποδιαιρέσουμε σέ τρεῖς μικρότερες κατηγορίες ἀνάλογα μέ τήν προέλευσή τους.

- α. Σφάλματα τῶν ὀργάνων μετρήσεως, εἶναι ἐκεῖνα πού προέρχονται



από κακή λειτουργία ή κακή βαθμονόμηση τών όργάνων. Ήδη αναφέρθηκε ή περίπτωση ενός ζυγού μέ έλαττωματικά σταθμά. Σέ ήλεκτρικές μετρήσεις, ή έξασθένηση του ήλεκτρικού στοιχείου ενός όργάνου μετρήσεως ή ή πτώση τής τάσης του δικτύου είναι δυνατόν νά δώσουν ένδείξεις του όργάνου πού υπολείπονται από τήν πραγματική τιμή του μεγέθους.

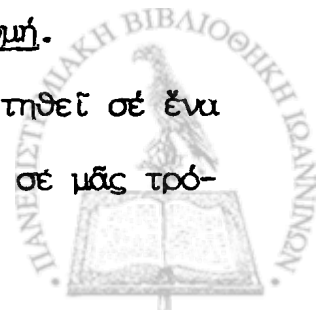
- β. Σφάλματα πού όφείλονται σέ έξωτερικές συνθήκες, είναι μιá δεύτερη κατηγορία συστηματικών σφαλμάτων πού αναφέρεται στήν επίδραση του περιβάλλοντος τής μετρήσεως. Τά σφάλματα αυτά μπορεί νά όφείλονται στήν επίδραση τής θερμοκρασίας, τής ύγρασίας, τής βαρομετρικής πιέσεως ή του μαγνητικού πεδίου τής γής πάνω στά όργανα μετρήσεως ή στό μέγεθος πού μετράται. Ός προφανές παράδειγμα τής κατηγορίας αυτής μπορεί νά αναφερθεί ή μέτρηση μήκους σέ θερμοκρασία περιβάλλοντος 35°C μέ ένα μεταλλικό χάρακα ό όποιος έχει βαθμονομηθεί σέ θερμοκρασία 25°C .
- γ. Σφάλματα παρατηρήσεως, είναι τέλος μιá τρίτη κατηγορία συστηματικών σφαλμάτων πού όφείλονται στον άνθρωπινω παράγοντα. Είναι δυνατόν ένας παρατηρητής νά έχει τήν τάση νά διαβάσει τήν ένδειξη ενός όργάνου λίγο ψηλότερα ή λίγο χαμηλότερα. Σέ μετρήσεις χρόνου ένας άλλος νευρικός παρατηρητής μπορεί νά αναμένει τό γεγονός καί νά σταματά τό χρονόμετρο λίγο νωρίτερα. Όρισμένα είδη μετρήσεων είναι περισσότερο εύαίσθητα στον άνθρωπινω παράγοντα από άλλα. Στίς περιπτώσεις αυτές, ή έκταση του συστηματικού σφάλματος μπορεί νά έκτιμηθεί αν διάφοροι παρατηρητές έπαναλάβουν άνεξάρτητα τήν παρατήρηση καί συγκριθούν τά αποτελέσματα.



Τά συστηματικά σφάλματα δέν είναι πάντα εύκολο νά αναγνωριστούν στα αποτελέσματα μιᾶς μετρήσεως καί ἡ στατιστική ἀνάλυση πολύ λίγο βοηθάει στήν ἀποκατάστασή τους. Κύριο χαρακτηριστικό τῆς γενικῆς αὐτῆς κατηγορίας σφαλμάτων είναι ὅτι τό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως μετατοπίζεται συνήθως συστηματικά πρὸς ὑψηλότερες ἢ χαμηλότερες τιμές. Στίς περιπτώσεις αὐτές ὅπου ἡ πηγή τοῦ σφάλματος είναι γνωστή, τό σφάλμα μπορεῖ νά ἀποκατασταθεῖ μέ κατάλληλη διόρθωση τοῦ αποτελέσματος. Σέ ἄλλες περιπτώσεις ἡ ἀβεβαιότητα πού προέρχεται ἀπό τυχόν συστηματικά σφάλματα μπορεῖ νά συμπεριληφθεῖ μέ κατάλληλη αὔξηση τοῦ ὅλου πειραματικοῦ σφάλματος σ τῆς ἐξ. (1.1).

Στήν τελευταία γενική κατηγορία σφαλμάτων, μέ τήν ὁποία θά ἀσχοληθοῦμε κατά κύριο λόγο στό κεφάλαιο αὐτό, θά κατατάξουμε τά τυχαῖα σφάλματα. Μέ τόν ὄρο αὐτό ἐννοοῦμε τά σφάλματα πού ὀφείλονται σέ ἀγνωστους παράγοντες. Μποροῦμε νά τά θεωρήσουμε ὡς τό σφάλμα πού παραμένει ἀφοῦ μέ ἀρκετή προσοχή καί προσπάθεια ἐξαλείψουμε ὅλα τά ἀπαράδεκτα καί συστηματικά σφάλματα. Τουλάχιστον ἐμπειρικά ξέρουμε ὅτι τέτοια σφάλματα ὑπάρχουν σέ κάθε μέτρηση. Ὅσο καί ἂν καταβληθεῖ π.χ. προσπάθεια στό πείραμα 1-1 γιά τήν ἐξάλειψη τῶν σφαλμάτων παρατηρήσεως (πού στήν περίπτωση αὐτή ἀποτελοῦν τήν κυριώτερη πηγή συστηματικῶν σφαλμάτων) εἶναι ἐξαιρετικά ἀπίθανο δύο διαδοχικές χρονομετρήσεις τῆς περιόδου τοῦ ἐκκενροῦς νά δώσουν ἀκριβῶς τήν ἴδια τιμή. Παρόλα αὐτά τό σφάλμα πού παραμένει μετά τήν ἐξάλειψη ὅλων τῶν σφαλμάτων μέ γνωστή προέλευση ἐμφανίζει μιᾶ χαρακτηριστική συμπεριφορά: Οἱ τιμές πού προκύπτουν ἀπό ἕνα ἀριθμό ὁμοίων μετρήσεων συσπρέφονται γύρω ἀπό μιᾶ κεντρική τιμή μέ μιᾶ χαρακτηριστική κατανομή.

Ἡ προέλευση τῆς κατανομῆς αὐτῆς θά πρέπει νά ἀναζητηθεῖ σέ ἕνα πλῆθος ἀπό αἷτια πού ἐπιηρεάζουν τή μέτρηση κατά ἀγνωστο σέ μᾶς τρό-



πο. Είναι δυνατό μερικά από τὰ αίτια αυτά νά είναι τὰ ίδια μέ εκείνα πού αναφέραμε στις δύο προηγούμενες κατηγορίες σφαλμάτων. Ό τρόπος όμως μέ τόν όποιο έπηρεάζουν τή μέτρηση δέν είναι προφανής. Καθένα από τὰ αίτια αυτά συνεισφέρει ένα μικρό σφάλμα μέ αποτέλεσμα ή τιμή στην όποία καταλήγει ή μέτρηση νά διαφέρει από τήν πραγματική τιμή του μεγέθους. "Αν ή διακριτική ικανότητα των όργάνων μας είναι αρκετά καλή περιμένουμε ότι ή απόκλιση μεταξύ τής πραγματικής τιμής από τό αποτέλεσμα τής μετρήσεως θά είναι τίς περισσότερες φορές μικρή. "Αν τὰ πολυάριθμα αίτια πού έπηρεάζουν τή μέτρηση δρούν ανεξάρτητα (καί δέν έχουμε κανένα λόγο νά πιστεύουμε ότι συνομοτούν μέ σκοπό νά δώσουν λάθος αποτέλεσμα) κάθε έπιμέρους σφάλμα έχει τήν ίδια πιθανότητα νά έπηρεάσει τό αποτέλεσμα κατά μιά θετική ή άρνητική τιμή. Στις περισσότερες έπομένως περιπτώσεις προβλέπουμε μιά άλληλοεξουδετέρωση των έπιμέρους σφαλμάτων μέ αποτέλεσμα τό όλικό τυχαίο σφάλμα νά είναι μικρό.

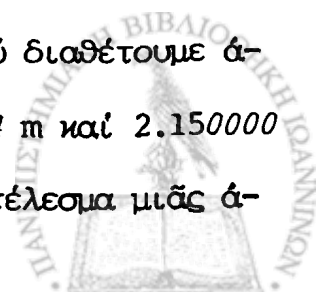
Ή φύση των τυχαίων σφαλμάτων πού περιγράφουμε ύπαγορεύει τήν ποσοτική τους άνάλυση διαμέσου τής θεωρίας των πιθανοτήτων. Είναι βέβαιο ότι οι φυσικές διεργασίες πού υπεισέρχονται σέ μιά μέτρηση δέν ταυτίζονται άπαραίτητα μέ τίς άπλές προϋποθέσεις πού όδηγούν στις γνωστές κατανομές των καθαρά τυχαίων γεγονότων τής μαθηματικής θεωρίας πιθανοτήτων. Παρόλα αυτά, στις περισσότερες περιπτώσεις ή αντίστοιχία είναι αρκετά καλή ώστε οι μαθηματικές έκφράσεις νά δίνουν μέ καλή προσέγγιση τίς παραμέτρους τής έξ. (1.1). Στή συνέχεια θά χρησιμοποιήσουμε τή στατιστική άνάλυση για τό χειρισμό των τυχαίων σφαλμάτων άφού προηγουμένως έχουμε βεβαιωθεί ότι έχουν άποκατασταθεί όλα τὰ συστηματικά σφάλματα.



1-2 Σημαντικά Ψηφία

Ἡ ἀκρίβεια μιᾶς μετρήσεως ἀνταναικᾶται κατὰ κύριο λόγο στό πλῆθος τῶν ψηφίων πού περιέχονται στό ἀποτέλεσμα. Εἶναι φανερό ὅτι μιᾶ μέτρηση πού προσδιορίζει τό μήκος τοῦ νήματος στό Πείραμα 1-1 ὡς 2.15 m εἶναι λιγώτερο ἀκριβῆς ἀπό μιᾶ μέτρηση πού τό προσδιορίζει ὡς 2.153 m. Στήν πρώτη περίπτωση τό ἀποτέλεσμα δηλώνει ὅτι ἡ μέτρηση δέν ἔχει τή δυνατότητα νά προσδιορίσει τό μήκος σέ στενώτερα ὅρια ἀπό 1 cm. Τό πραγματικό μήκος τοῦ νήματος μπορεῖ κάλλιστα νά βρίσκεται μεταξύ τῶν ὁρίων 2.151 m καί 2.159 m. Ἀντίθετα στή δεύτερη περίπτωση ἡ μέτρηση προσδιορίζει τό μήκος τοῦ νήματος μέσα σέ ὅρια τοῦ 1 mm, τό ἀποτέλεσμα ὅμως δηλώνει ὅτι ἀδυνατεῖ νά τό προσδιορίσει μέσα σέ στενώτερα ὅρια - π.χ. μέ ἀκρίβεια 0.1 mm.

Γενικά στό ἀποτέλεσμα μιᾶς μετρήσεως, ἡ ἐμπιστοσύνη σέ καθένα ἀπό τά ψηφία φθίνει σταδιακά καθώς προχωροῦμε ἀπό τά ἀριστερά πρὸς τά δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ. Στήν προηγούμενη π.χ. μέτρηση πού ἔδωσε ὡς ἀποτέλεσμα τόν ἀριθμό 2.15 m, εἴμαστε ἀρκετά βέβαιοι γιά τό ψηφίο "2". Μέ ἄλλα λόγια εἴμαστε αἰγυροὶ ὅτι τό νῆμα εἶναι μεγαλύτερο ἀπό 1 m καί μικρότερο ἀπό 3 m. Λιγώτερο βέβαιο συγκριτικά, ἀλλά ἀκόμη ἀρκετά ἀξιόπιστο εἶναι τό ψηφίο "1". Ὅπως ἀναφέρεται τό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως θεωροῦμε μᾶλλον ἀπίθανο ὅτι τό πραγματικό μήκος τοῦ νήματος εἶναι μικρότερο ἀπό 2.0 m ἢ μεγαλύτερο ἀπό 2.2 m. Στό ψηφίο "5" τρέφουμε συγκριτικά τή μικρότερη ἐμπιστοσύνη. Εἶναι δυνατόν (ἂν ὄχι πιθανόν) τό πραγματικό μήκος τοῦ νήματος νά εἶναι 2.16 m, 2.17 m ἢ 2.14 m. Πέρα ἀπό τό ψηφίο "5", ὁποιοδήποτε ψηφίο καί ἂν προσθέσουμε δέν ἔχει καμμιά φυσική σημασία. Μέ τίς πληροφορίες πού διαθέτουμε ἀπό τή συγκεκριμένη μέτρηση οἱ ἀριθμοὶ 2.151 m, 2.15304 m καί 2.150000 m ἔχουν τήν ἴδια πιθανότητα νά ἀντιπροσωπεύουν τό ἀποτέλεσμα μιᾶς ἀ-



κριβέστερης μελλοντικής μετρήσεως. Μπορούμε να συνοψίσουμε την όρο-
λογία και τους συμβατικούς κανόνες γύρω από τα σημαντικά ψηφία του
αποτελέσματος μιᾶς μετρήσεως ὡς ἑξῆς:

1. Τό ἀριστερότερο μὴ μηδενικό ψηφίο, πού θά ὀνομάσουμε πλέον
σημαντικό ψηφίο, εἶναι τό περισσότερο ἀξιόπιστο ψηφίο τοῦ ἀ-
ποτελέσματος.
2. Ἐάν ὁ ἀριθμός εἶναι ἀκέραιος, τό δεξιότερο μὴ μηδενικό ψη-
φίο, πού σέ ἀντιδιαστολή θά ὀνομάσουμε λιγώτερο ἢ τελευταῖο
σημαντικό ψηφίο, περιέχει τή μεγαλύτερη ἀβεβαιότητα.
3. Ἐάν ὁ ἀριθμός εἶναι δεκαδικός, τό δεξιότερο ψηφίο εἶναι τό
λιγώτερο σημαντικό, ἀκόμη καί ὅταν εἶναι τό ψηφίο "0".
4. Ὅλα τά ψηφία μεταξύ τοῦ πλέον σημαντικοῦ καί λιγώτερο σημαν-
τικοῦ θεωροῦνται σημαντικά ψηφία, μέ σταδιακά αὐξανόμενη ἀ-
ξιοπιστία ἀπό τά δεξιά πρὸς τά ἀριστερά.

Πρέπει νά σημειωθεῖ ὅτι τό πλήθος τῶν σημαντικῶν ψηφίων ἑνός ἀ-
ριθμητικοῦ αποτελέσματος εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τή θέση τῆς ὑποδιαστο-
λῆς. Π.χ. οἱ ἀριθμοί

3214 3214000 3.214 2010. 20.10 0.002010

ἔχουν ὅλοι τέσσερα[†] σημαντικά ψηφία.

[†] Σύμφωνα μέ τόν πρῶτο κανόνα ὁ ἀριθμός 3214000 θεωρεῖται ὅτι ἔ-
χει τέσσερα σημαντικά ψηφία ἐνῶ ὁ ἴδιος ἀριθμός μέ μιᾶ ὑποδια-
στολή στό δεξιό μέρος (γραμμένος ὡς 3214000.) λογίζεται μέ ἑπτὰ
σημαντικά ψηφία. Στήν πράξη, γιά νά ἀποφευχθοῦν λάθη ἀπό τήν πα-
ράλειψη τῆς ὑποδιαστολῆς, πολύ μεγάλοι ἀκέραιοι ἀριθμοί, πού πε-
ριέχουν ἕνα ἀριθμὸ μὴ σημαντικῶν μηδενικῶν ἀπλῶς γιά τή συμπλή-
ρωση τῆς σωστῆς τάξης μεγέθους, συνηθίζεται νά γράφονται ὡς δε-
καδικοὶ πολλαπλασιασμένοι μέ τήν κατάλληλη δύναμη τοῦ δέκα. Ὁ
ἀριθμός 3214000 μπορεῖ π.χ. νά γραφεῖ ὡς 3.214×10^6 , μέ πολύ
μικρὴ πιθανότητα λάθους στόν προσδιορισμὸ τῶν σημαντικῶν ψηφίων.

Ἡ στατιστική σημασία τοῦ τελευταίου σημαντικοῦ ψηφίου δέν εἶναι ἀπόλυτα καθορισμένη καί ὁ βαθμός ἀξιολογίας του ἐξαρτᾶται ἀπό πολλούς παράγοντες. Σέ μιὰ μέτρηση ἡλεκτρικοῦ ρεύματος π.χ. μέ ἀμπερόμετρο τό ὁποῖο διαθέτει διαβαθμίσεις κατά 1 mA, ἕνας προσεκτικός παρατηρητής μπορεῖ νά ἐκτιμήσει τήν θέση τῆς ἐνδείξεως μεταξὺ δύο διαδοχικῶν διαβαθμίσεων καί νά προσδιορίσει τό τελευταῖο σημαντικό ψηφίο πού ἀναφέρεται σέ μονάδες τοῦ 0.1 mA. Ἐνας λιγώτερο προσεκτικός παρατηρητής, ἢ ἕνας παρατηρητής μέ λιγώτερο διαθέσιμο χρόνο εἶναι ἐνδεχόμενο νά στρογγυλέψει τήν ἐνδειξη στήν πλησιέστερη διαβάθμιση τοῦ ὄργανου μέ ἀποτέλεσμα ἡ μέτρησή του νά δώσει ἕνα λιγώτερο σημαντικό ψηφίο ἀπό τήν προηγούμενη. Συνιστᾶται πάντως σέ κάθε μέτρηση τό ἀποτέλεσμα νά δίνεται μέ ὅσο τό δυνατόν περισσότερα σημαντικά ψηφία, ἔστω καί ἂν ἡ ἀβεβαιότητα στό τελευταῖο σημαντικό ψηφίο εἶναι τῆς τάξεως τῶν τριῶν ἢ τεσσάρων μονάδων. Ὅπως θά δοῦμε, ἡ πρακτική αὐτή βοηθάει στήν ἐκτίμηση τῶν σημαντικῶν ψηφίων μετά τή διεξαγωγή ἀριθμητικῶν πράξεων.

Ἡ συμπεριφορά τῶν σημαντικῶν ψηφίων κατά τή διεξαγωγή πράξεων μπορεῖ νά διερευνηθεῖ καλύτερα μέ τή βοήθεια ἑνός παραδείγματος. Ἐστω ὅτι οἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν μετρηθεῖ ὡς

$$\text{Μήκος} \quad L = 10.77 \quad \text{cm}$$

$$\text{Πλάτος} \quad W = 8.212 \quad \text{cm}$$

$$\text{Πάχος} \quad T = 3.55 \quad \text{cm}$$

Ἄν μέ βάση τίς μετρήσεις αὐτές θελήσουμε νά προσδιορίσουμε τόν ὄγκο τοῦ παραλληλεπιπέδου ἕνας ἀπλός πολλαπλασιασμός δίνει

$$V = L \cdot W \cdot T = 313.9735020 \quad \text{cm}^3$$



Είναι άμέσως φανερό ότι όλα τὰ ψηφία του αποτελέσματος στήν έξ.

(1.4) δέν είναι σημαντικά. Άν π.χ. τό τελευταίο σημαντικό ψηφίο στό μήκος έχει πιθανή άβεβαιότητα δύο μονάδες, ώτε τό πραγματικό μήκος του παραλληλεπιπέδου νά είναι $L = 10.79$ cm τότε ό όγκος του είναι

$$V = L \cdot W \cdot T = 314.5565540 \text{ cm}^3 \quad (1.5)$$

Κατά τόν ίδιο τρόπο, λαμβάνοντας υπόψη τήν άβεβαιότητα στό τελευταίο σημαντικό ψηφίο τών υπόλοιπων διαστάσεων του παραλληλεπιπέδου, ό άναγνώστης μπορεί νά πειστεί ότι μόνο τὰ τρία πρώτα ψηφία του άποτελέσματος (1.4) είναι σημαντικά. Λόγω τής σχετικής ασάφειας στον όρισμό του λιγώτερο σημαντικού ψηφίου, ό αντίστοιχος κανόνας πού διέπει τά συμπεριφορά τών σημαντικών ψηφίων κατά τόν πολλαπλασιασμό ή τή διαίρεση δέν είναι απόλυτα αύστηρός. Γενικά,

κατά τόν πολλαπλασιασμό ή διαίρεση αριθμών πού προέρχονται από μετρήσεις, τό τελικό αποτέλεσμα έχει τόσα σημαντικά ψηφία, όσα ό λιγώτερο άκριβής αριθμός. Σέ όρισμένες περιπτώσεις μπορεί νά έχει ένα περισσότερο.

Ό άναγνώστης μπορεί εύκολα νά βρει παραδείγματα όπου ίσχύει ή τελευταία περίπτωση.

Κατά τήν πρόσθεση ή άφαίρεση ή συμπεριφορά τών σημαντικών ψηφίων είναι τελείως διαφορετική. Η κατάσταση μπορεί νά διερευνηθεί πάλι μέ τή βοήθεια ενός παραδείγματος: Έστω ότι σέ θερμοκρασία 20°C τό μήκος μιός μεταλλικής ράβδου έχει μετρηθεί ως 126.73 cm. Μέ άκριβείς όπτικές μεθόδους προσδιορίζεται στή συνέχεια ότι μέχρι τή θερμοκρασία 100°C τό μήκος τής ράβδου αύξήθηκε κατά 0.2168 cm. Πόσο

είναι τό όλικό μήκος τής ράβδου στους 100°C ;

Τό συνολικό μήκος μπορεί νά βρεθεῖ μέ μιá άπλή πρόσθεση τών δύο άριθμών

126.73

0.2168

126.9468

(1.6)

Άπό τή διάταξη τής πράξης γίνεται άμέσως φανερό ότι πέρα άπό τό δεύτερο δεκαδικό τοῦ άποτελέσματος τά ψηφία παύουν νά εἶναι σημαντικά.

Μποροῦμε έπομένως νά διατυπώσουμε τό γενικό κανόνα:

Κατά τήν πρόσθεση ή άφαίρεση άριθμών πού προέρχονται άπό μετρήσεις, άν σέ μιá στήλη έστω και ένα ψηφίο δέν εἶναι σημαντικό, τότε τό αντίστοιχο ψηφίο τοῦ άποτελέσματος δέν εἶναι σημαντικό.

Σύμφωνα μέ τόν τελευταῖο κανόνα, στό άποτέλεσμα (1.6) τά δύο τελευταῖα ψηφία δέν εἶναι σημαντικά και πρέπει νά παραληφθοῦν. Γενικά όταν μή σημαντικά ψηφία παραλείπονται άπό ένα άριθμητικό άποτέλεσμα τό τελευταῖο ψηφίο πού παραμένει πρέπει νά στρογγυλεύεται ώστε νά διατηρεῖται ή καλύτερη δυνατή άκρίβεια. Κατά τή διαδικασία αὐτή τά ψηφία πού πρόκειται νά παραληφθοῦν θεωροῦνται ως ένα δεκαδικό κλάσμα μικρότερο τής μονάδας { π.χ. τό δεκαδικό κλάσμα 0.68 στήν περίπτωση τοῦ άποτελέσματος (1.6) }.

Τότε

1. Άν τό κλάσμα εἶναι μεγαλύτερο τοῦ 0.5, αύξεῖστε τό λιγώτερο σημαντικό ψηφίο πού παραμένει κατά μιá μονάδα.
2. Άν τό κλάσμα εἶναι μικρότερο τοῦ 0.5, άφήστε τό λιγώτερο σημαντικό ψηφίο πού παραμένει ως έχει.



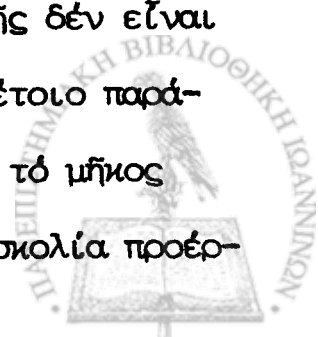
3. "Αν τό κλάσμα είναι ίσο μέ 0.5, αύξεΐστε τό λιγώτερο σημαντικό ψηφίο πού παραμένει κατά μία μονάδα μόνο αν αυτό είναι περιττός αριθμός.

Σύμφωνα μέ τήν πρακτική αυτή ή τιμή του τελικού αποτελέσματος διαφέρει από τόν αρχικό αριθμό λιγώτερο από μισή μονάδα του τελευταίου σημαντικού ψηφίου, ενώ ο κανόνας (3) αποτρέπει ένδεχόμενο συστηματικό σφάλμα υπερεκτιμήσεως.

1-3 'Η Στατιστική Κατανομή

"Όπως είδαμε στό Πείραμα 1-1, αν κάνουμε μία σειρά N μετρήσεων x_i , $i = 1, \dots, N$ ενός φυσικού μεγέθους x , θά καταλήξουμε σέ μία κατανομή τών τιμών πού πιστεύουμε ότι συσσωρεύονται γύρω από κάποια "πραγματική" τιμή του μεγέθους. Από τήν κατανομή πού προκύπτει περιμένουμε ότι θά έξάγουμε άφενός τήν "πραγματική" τιμή του μεγέθους πού μετράμε καί άφετέρου κάποια πληροφορία για τήν ποιότητα τής μετρήσεως. Π.χ., ως προς τή δεύτερη πληροφορία θά θέλαμε νά ξέρουμε ποιά είναι ή πιθανότητα ώστε μία μεμονωμένη μελλοντική επανάληψη τής μετρήσεως νά αποκλίνει κατά ένα όρισμένο ποσό από τήν "πραγματική" τιμή.

Εύθός έξαρχής πρέπει νά αναγνωρίσουμε ότι ή προηγούμενη διεργασία περιέχει δύο σημαντικές δυσκολίες. 'Η πρώτη αναφέρεται στή νεφελώδη έννοια τής "πραγματικής" τιμής. Μέ λίγη σκέψη μπορούμε νά βρούμε παραδείγματα όπου ή έννοια τής "πραγματικής" τιμής δέν είναι καν δυνατόν νά όριστεΐ. "Ήδη τό Πείραμα 1-1 δίνει ένα τέτοιο παράδειγμα όπου, αν θεωρήσουμε τό νήμα στό άτομικό επίπεδο, τό μήκος του δέν μπορεί νά όριστεΐ ούτε θεωρητικά. 'Η δεύτερη δυσκολία προέρ-



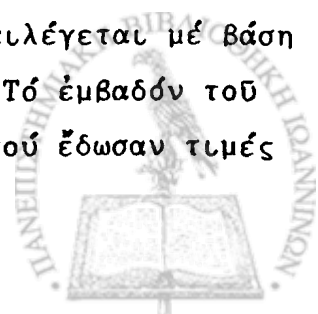
χεται από το πεπερασμένο πλήθος των μετρήσεων που είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε. "Αν επαναλάβουμε το Πείραμα 1-1 ή νέα κατανομή των μετρήσεων που θα προκύψει θα διαφέρει λίγο ή πολύ από την προηγούμενη. Ποιά από τις δύο κατανομές θα χρησιμοποιήσουμε έπομένως για την εξαγωγή της "πραγματικής" τιμής;

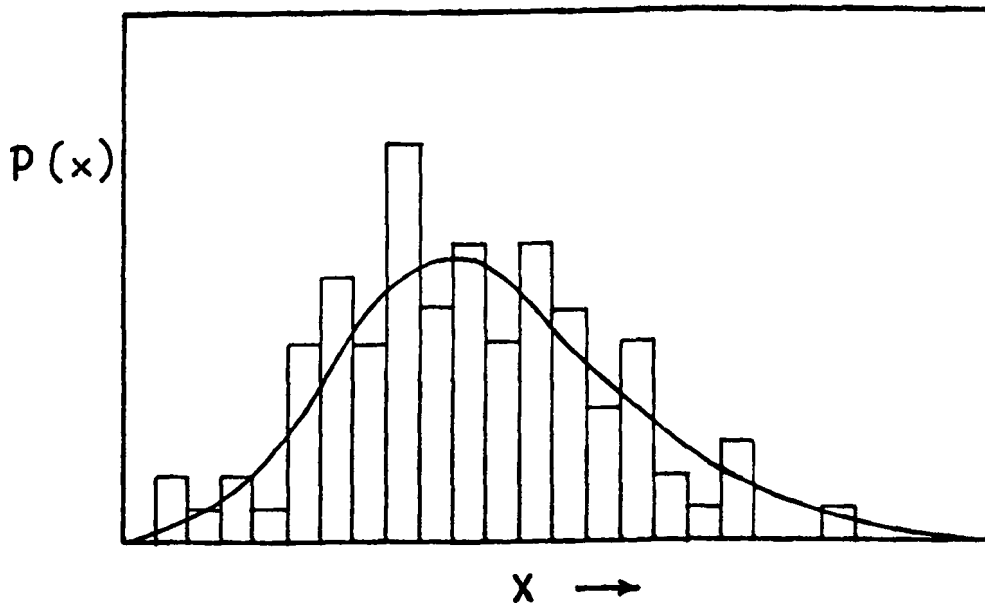
Θά ξεπεράσουμε τις δυό παραπάνω δυσκολίες με μιá αúθαίρετη, αλλά λογική, παραδοχή. Θά υιοθετήσουμε την άποψη ότι τό αποτέλεσμα ενός άπειρου άριθμού μετρήσεων είναι μιá και μοναδική κατανομή που χαρακτηρίζει άφενός τό μέγεθος που μετράμε και άφετέρου τά όργανα, τή μέθοδο και γενικά τις συνθήκες της μετρήσεως. Τήν κατανομή αúτη θά όνομάσουμε θεωρητικό πληθυσμό. Σύμφωνα με την άποψη αúτη τό αποτέλεσμα ενός ρεαλιστικού πειράματος με πεπερασμένο άριθμό μετρήσεως καταλήγει σέ ένα δείγμα του θεωρητικού πληθυσμού που τείνει προς την κατανομή του θεωρητικού πληθυσμού όσο αúξάνει ό άριθμός των μετρήσεων. Συμβολικά, αν $P(x)$ είναι ή συνάρτηση που άποδίδει τό θεωρητικό πληθυσμό και $f_N(x)$ είναι ή συνάρτηση του δείγματος κατανομής N μετρήσεων, μπορούμε να γράψουμε

$$P(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} [f_N(x)] . \quad (1.7)$$

Η τελευταία σχέση οδηγεί σέ μιá άλλη εξίσου σημαντική έρμηνεία. Τό σχήμα 1-1 περιέχει τά αποτελέσματα ενός υποθετικού πειράματος N μετρήσεων υπό μορφή ιστογράμματος[†] και τόν αντίστοιχο θεωρητικό πλη-

[†] Η κατανομή των μετρήσεων ενός πειράματος δύνεται πάντοτε υπό μορφή ιστογράμματος όπου τό εύρος κάθε ίστου έπιλέγεται με βάση τή διακριτική ικανότητα των όργάνων μετρήσεως. Τό έμβαδόν του ίστου αντιπροσωπεύει τόν άριθμό των μετρήσεων που έδωσαν τιμές μέσα στήν περιοχή που καλύπτει τό εύρος του.





ΣΧΗΜΑ 1-1. θεωρητικός πληθυσμός (συνεχής γραμμή) και δείγμα κατανομής από πείραμα N μετρήσεων.

θυσμό που για τό σκοπό του παραδείγματος θά θεωρήσουμε ως γνωστό. Σύμφωνα με την έξ. (1.7), αν συνεχίσουμε νά παίρνουμε μετρήσεις, τό ιστόγραμμα του σχήματος θά τείνει πρός τή συνεχή καμπύλη του θεωρητικού πληθυσμού. Για νά κατανοήσουμε τή διαδικασία αυτή του όριου είναι χρήσιμο νά δοϋμε και τόν θεωρητικό πληθυσμό ως ένα ιστόγραμμα με άπειροστό εύρος κάθε ιστοϋ dx . Τό έμβαδόν κάθε ιστοϋ στο θεωρητικό πληθυσμό είναι τότε $P(x)dx$. Η ποσότητα αυτή αντιπροσωπεύει τό πλήθος τών μετρήσεων που σε ένα ιδεώδες πείραμα με άπειρες μετρήσεις θά δώσουν αριθμητικό αποτέλεσμα σε μία περιοχή με εύρος dx γύρω από τήν τιμή x . Όσο δηλαδή βελτιώνουμε τό πείραμά μας με αύξηση του αριθμού τών μετρήσεων και τής διακριτικής ικανότητας τών όργάνων περιμένουμε ότι τό πλήθος τών μετρήσεων κάθε ιστοϋ θά τείνει πρός τήν ποσότητα $P(x)dx$. Για ένα πεπερασμένο αριθμό μετρήσεων, τό πλήθος τών τιμών γύρω από τό σημείο x μπορεί νά υπερβαίνει ή νά υπολείπεται από τήν ποσότητα αυτή. Είναι όμως λογικό νά περιμένουμε ότι ή πιο πιθανή τιμή του πληθυσμού

τῶν μετρήσεων στό σημεῖο x δίνεται ἀπό τήν ποσότητα $P(x)dx$. Δέν, χρειάζεται παρά ἕνα ἀκόμη λογικό βήμα γιά νά καταλήξουμε στή στατιστική ἐρμηνεία τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Ἀντιστρέφοντας τό τελευταῖο συμπέρασμα γίνεται τάρα φανερό ὅτι ἡ ποσότητα $P(x)dx$ εἶναι ἀνάλογη πρός τήν πιθανότητα πού ἔχει μιά μεμονωμένη μέτρηση νά δώσει ἀριθμητικό ἀποτέλεσμα μέσα στό διάστημα dx γύρω ἀπό τήν τιμή x . Ἡ ποσότητα μάλιστα αὕτη μπορεῖ εὐκόλα νά μετατραπεῖ σέ ἀπόλυτη πιθανότητα ἂν διαιρεθεῖ μέ τόν ὀλικό ἀριθμό N_0 τῶν μετρήσεων στήν κατανομή, πού δίνεται μέ μιά ἀπλή ὀλοκλήρωση ὡς

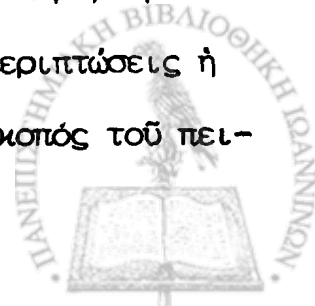
$$N_0 \doteq \int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx. \quad (1.8)$$

Ἡ διαδικασία αὕτη εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἐπιβολή τῆς συνθήκης

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1 \quad (1.9)$$

στή συνάρτηση $P(x)$ πού περιγράφει τό θεωρητικό πληθυσμό.

Μποροῦμε τάρα νά συναψίσουμε τό πρόβλημα πού ἐμφανίζεται σέ κάθε μέτρηση ὡς ἑξῆς: Πιστεύουμε ὅτι γιά τό συγκεκριμένο πείραμα ὑπάρχει ἕνας θεωρητικός πληθυσμός $P(x)$ πού χαρακτηρίζει τό φυσικό μέγεθος πού μετράται ἀπό τό πείραμα. Φυσικά ἡ κατανομή $P(x)$ δέν εἶναι γνωστή — γι'αυτό ἑξῆς γίνεται καί τό πείραμα. Ἡ ἄγνοια τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ μπορεῖ νά βρισκεται σέ δύο διαφορετικά ἐπίπεδα. Στή χειρότερη περίπτωση εἶναι δυνατόν νά ἀγνοοῦμε τελείως τόσο τή συναρτησιακή μορφή τῆς κατανομῆς $P(x)$ ὅσο καί τήν τιμή τῶν παραμέτρων πού ὑπεισέρχονται στή συνάρτηση. Στίς περισσότερες ὅμως περιπτώσεις ἡ συνάρτηση $P(x)$ εἶναι γνωστή {βλ. παράγραφο 1-7} καί σκοπός τοῦ πει-



ράματος είναι ο προσδιορισμός των σταθερών παραμέτρων που υπεισέρχονται στη συνάρτηση. Κατά τη διεξαγωγή του πειράματος με ένα πεπερασμένο αριθμό μετρήσεων καταλήγουμε σε ένα δείγμα κατανομής με τη βοήθεια του οποίου θα πρέπει να κάνουμε μια όσο το δυνατόν καλύτερη εκτίμηση των παραμέτρων του θεωρητικού πληθυσμού. Σύμφωνα με τη γενική παραδοχή της έξ. (1.7) περιμένουμε ότι η εκτίμηση αυτή θα είναι τόσο καλύτερη όσο ο αριθμός των επιμέρους μετρήσεων είναι μεγαλύτερος. Σε μαθηματικό συμβολισμό μπορούμε να γράψουμε για κάθε παράμετρο της συναρτήσεως $P(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Παράμετρος του} \\ \text{θεωρητικού πληθυσμού} \end{array} \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \begin{array}{l} \text{Παράμετρος του} \\ \text{δείγματος κατανομής} \end{array} \right\} \quad (1.10)$$

Την παραπάνω διεργασία θα εξετάσουμε στο υπόλοιπο του κεφαλαίου αφού προηγουμένως ορίσουμε τις παραμέτρους που χαρακτηρίζουν το θεωρητικό πληθυσμό $P(x)$. Ακολουθώντας την καθιερωμένη πρακτική θα χρησιμοποιήσουμε γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου για το συμβολισμό των παραμέτρων του θεωρητικού πληθυσμού και λατινικά γράμματα για τις αντίστοιχες πειραματικές εκτιμήσεις που προκύπτουν από το δείγμα κατανομής.

1-4 Στατιστικές Παράμετροι του Θεωρητικού Πληθυσμού

Όλες οι παράμετροι που χαρακτηρίζουν το θεωρητικό πληθυσμό μπορούν να οριστούν διαμέσου της έξ. (1.10). Η σημαντικότερη ίσως παράμετρος είναι ο μέσος που ήδη χρησιμοποιήσαμε στο Πείραμα 1-1 για την απόδοση της "πραγματικής" τιμής του νήματος. Ο μέσος του θεωρητικού πληθυσμού ορίζεται ως



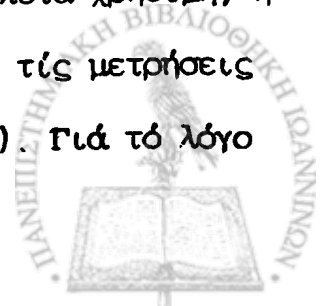
$$\mu \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right] \quad (1.11)$$

όπου x_i , $i = 1, \dots, N$ είναι τὰ ἀποτελέσματα N μετρήσεων τοῦ φυσικοῦ μεγέθους x . Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (1.11), ὁ μέσος, πού στή βιβλιογραφία ἀπαντᾶται καί μέ ἐναλλακτική ὀνομασία κεντροειδές, εἶναι τό ὄριο πρὸς τό ὁποῖο τείνει ἡ μέση τιμή τῶν ἀποτελεσμάτων μέ αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ N τῶν μετρήσεων.

Ἡ διάμεσος $\mu_{1/2}$ τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ εἶναι μιά δεύτερη παράμετρος πού ὀρίζεται ὡς ἡ τιμή ἐκείνη ἀπό τήν ὁποία, στό ὄριο τοῦ ἀπειρου ἀριθμοῦ μετρήσεων, τὰ μισά ἀποτελέσματα δίνουν μικρότερη τιμή ἐνῶ τὰ ἄλλα μισά μεγαλύτερη. Ἐναλλακτικά, σύμφωνα μέ τή δεύτερη ἐρμηνεία πού δώσαμε στό θεωρητικό πληθυσμό, μπορούμε νά ὀρίσουμε τή διάμεσο ὡς τήν τιμή $x = \mu_{1/2}$ γιά τήν ὁποία μιά μεμονωμένη μέτρηση ἔχει 50 % πιθανότητα νά δώσει ἀποτέλεσμα $x_i < \mu_{1/2}$ καί 50 % νά δώσει ἀποτέλεσμα $x_i > \mu_{1/2}$. Ὁλοκληρώνοντας ὡς πρὸς τήν πιθανότητα $P(x)dx$ μπορούμε νά ὀρίσουμε τή διάμεσο μέ τή σχέση

$$\int_{-\infty}^{\mu_{1/2}} P(x) dx = \int_{\mu_{1/2}}^{\infty} P(x) dx = 0.5 \quad (1.12)$$

καθόσον τό ὀλοκλήρωμα $\int P(x)dx$ ἀντιπροσωπεύει τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας κάτω ἀπό τήν καμπύλη $P(x)$, εἶναι φανερό ὅτι μιά κάθετη γραμμὴ στό σημεῖο $x = \mu_{1/2}$ χωρίζει τό ἐμβαδόν τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ σέ δύο ἴσα μέρη. Ἄν καί ἡ ἐννοια τῆς διαμέσου εἶναι ἀρκετά χρήσιμη, ἡ παράμετρος αὐτή δέν εἶναι δυνατόν νά ὀριστεῖ μέ βάση τίς μετρήσεις ἑνός δείγματος κατανομῆς ὅπως ὁ μέσος στήν ἐξ. (1.11). Γιά τό λόγο



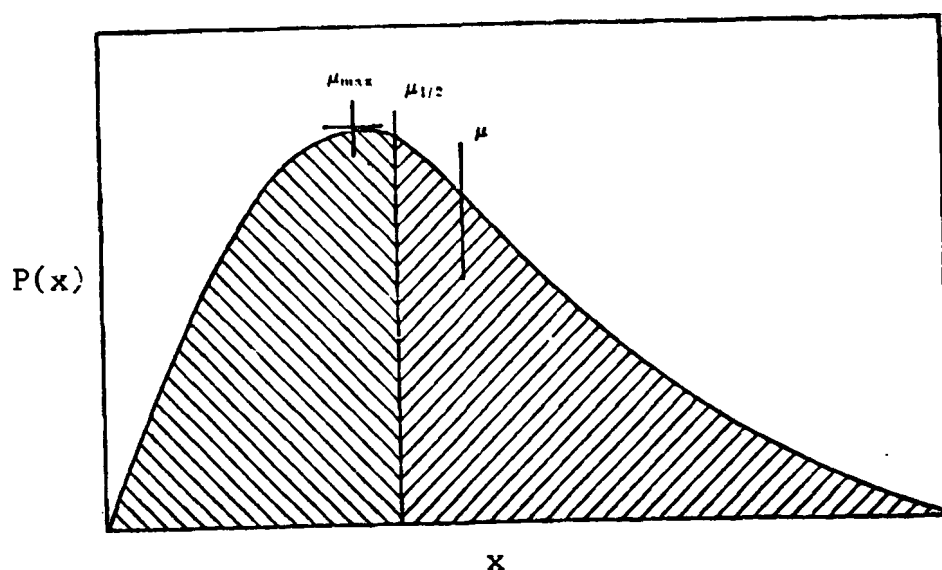
αυτό ή διάμεσος βρίσκει περιορισμένη χρήση στη στατιστική ανάλυση.

Ἡ πλέον πιθανή τιμή μ_{\max} τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ εἶναι ἡ τιμὴ ἐκείνη τοῦ φυσικοῦ μεγέθους x γιὰ τὴν ὁποία ἡ συνάρτηση $P(x)$ γίνεται μέγιστη

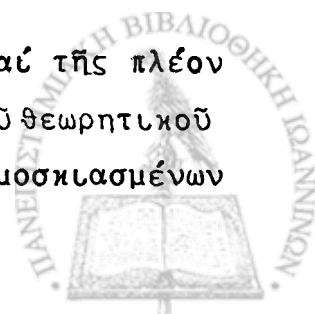
$$P(\mu_{\max}) \geq P(x \neq \mu_{\max}). \quad (1.13)$$

Ὅπως ἐκφράζει καὶ ἡ ὀνομασία της, ἡ τιμὴ $x = \mu_{\max}$ ἔχει τὴ μεγαλύτερη πιθανότητα νὰ ἐμφανιστεῖ ὡς ἀποτέλεσμα μιᾶς μεμονωμένης μετρήσεως.

Ἡ σχέση μεταξύ τοῦ μέσου μ , τῆς διαμέσου $\mu_{1/2}$ καὶ τῆς πλέον πιθανῆς τιμῆς μ_{\max} δίνεται στὴν ἀσυμμετρικὴ κατανομὴ τοῦ σχήματος 1-2. Γενικά γιὰ μιὰ ἀσυμμετρικὴ κατανομὴ ἡ διάμεσος βρίσκεται μεταξύ τοῦ μέσου καὶ τῆς πλέον πιθανῆς τιμῆς. Γιὰ μιὰ συμμετρικὴ κατανομὴ, ὅπως



ΣΧΗΜΑ 1-2. Σχέση μεταξύ τοῦ μέσου μ , τῆς διαμέσου $\mu_{1/2}$ καὶ τῆς πλέον πιθανῆς τιμῆς μ_{\max} γιὰ ἀσυμμετρικὴ κατανομὴ τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο διαφορετικὰ γραμμοσκιασμένων ἐπιφανειῶν εἶναι ἴσα.



προκύπτει από τούς αντίστοιχους ορισμούς, οι τρεις παράμετροι συμπίπτουν. Στην περίπτωση αυτή οποιαδήποτε παράμετρος μπορεί να ταυτιστεί με την "πραγματική" τιμή του φυσικού μεγέθους x . Αντίθετα, για ένα ασυμμετρικό θεωρητικό πληθυσμό ή επιλογή της παραμέτρου που θα αναφερθεί ως η "πραγματική" τιμή βρίσκεται στη διακριτική ευχαιρία του παρατηρητή, αφού προηγουμένως εξετάσει τούς λόγους που προκαλούν την ασυμμετρία στην κατανομή. Γενικά, τό περισσότερο που μπορούμε να πούμε για τόν μέσο μ είναι ότι είναι μιά παράμετρος που χαρακτηρίζει τόν θεωρητικό πληθυσμό, έχει τίς ίδιες μονάδες με την "πραγματική" τιμή και συμβατικά, αν δέν υπαγορεύουν τό αντίθετο εί-δικοί λόγοι, θα θεωρηθεί ως η καλύτερη εκτίμηση που μπορούμε να κά-νουμε για την "πραγματική" τιμή.

Για την απόδοση της ποιότητας της μετρήσεως μπορούμε να ορίσου-με μιά άλλη σειρά παραμέτρων του θεωρητικού πληθυσμού. Η απόκλιση d_i μιās μετρήσεως x_i από τόν μέσο μ του θεωρητικού πληθυσμού ορίζε-ται ως

$$d_i \equiv x_i - \mu. \quad (1.14)$$

Συμβατικά η απόκλιση ορίζεται πάντα σέ σχέση με τόν μέσο και όχι σέ σχέση με τή διάμεσο ή την πλέον πιθανή τιμή για εύκολία στους υπο-λογισμούς. Αν η παράμετρος μ ταυτιστεί με την "πραγματική" τιμή του μεγέθους x , τότε η ποσότητα d_i αντιπροσωπεύει τό "πραγματικό" σφάλμα στη συγκεκριμένη μέτρηση i .

Ο τόν ορισμό της έξ. (1.11), η μέση απόκλιση \bar{d} σέ ένα άπει-
 ό μετρήσεων μηδενίζεται



$$\bar{d} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \right] - \mu = 0. \quad (1.15)$$

Γιά τó λόγο αυτό ή μέση απόκλιση α ορίζεται ως ή μέση τιμή τών απόλυτων τιμών τών αποκλίσεων, ήτοι

$$\alpha \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \mu| \right]. \quad (1.16)$$

Ή μέση απόκλιση αποτελεί ένα μέτρο τής διασποράς τών μετρήσεων γύρω από τόν μέσο μ . Παρόλα αυτά ή απόλυτη τιμή στην έξ. (1.16) κάνει τόν ύπολογισμό της αρκετά δυσχερή καί για τó λόγο αυτό ή χρήση τής παραμέτρου α στή στατιστική ανάλυση είναι αρκετά περιορισμένη.

Μιά άλλη παράμετρος πού μπορεί εύκολα νά ύπολογιστεί καί πού άποδίδει έξίσου καλά τή διασπορά τού θεωρητικού πληθυσμού είναι ή τυπική απόκλιση σ . Ή ποσότητα σ^2 , πού στή βιβλιογραφία άπαντάται μέ τήν όνομασία διακύμανση, ορίζεται ως τó όριο τής μέσης τιμής τών τετραγώνων τών αποκλίσεων από τόν μέσο μ τού θεωρητικού πληθυσμού, ήτοι

$$\sigma^2 \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right] - \mu^2. \quad (1.17)$$

Ή τυπική απόκλιση σ ορίζεται ως ή τετραγωνική ρίζα τής διακυμάνσεως.

Ή διακύμανση σ^2 καί ή τυπική απόκλιση σ χαρακτηρίζουν τήν άβειβαιότητα στην πειραματική προσπάθεια για τόν προσδιορισμό τής "πραγματικής" τιμής τού μεγέθους x . Μπορούμε νά δούμε τίς παραμέτρους αυτές σέ δύο επίπεδα λογικής άφαιρέσεως. Κατ'άρχήν ενδιαφέρει ή σχέση τής τυπικής απόκλισεως σ καί τής έκτιμής του μέσου μ πού προκύπτει ά-

πό τά πειραματικά δεδομένα. Όπως θά δοῦμε στή συνέχεια γιά ἕνα πείραμα μέ πεπερασμένο ἀριθμό μετρήσεων, ἡ ἀβεβαιότητα στόν προσδιορισμό τοῦ μέσου εἶναι ἀνάλογη πρός τήν τυπική ἀπόκλιση τῆς κατανομῆς. Ἡ τυπική ἀπόκλιση δίνει ἐπομένως ἕνα μέτρο τῆς ἀβεβαιότητας στόν προσδιορισμό τοῦ μέσου κάτω ἀπό τίς συνθήκες τοῦ συγκεκριμένου πειράματος.

Ἀπό τήν ἄλλη πλευρά ἀκόμη καί ἂν ὁ μέσος μ καί ἡ "πραγματική" τιμή (μέ ὁποιοδήποτε ἀνεξάρτητο τρόπο τήν ὀρίσουμε) δέν ταυτίζονται, ἡ διαφορά τους πρέπει νά βρίσκεται μέσα στά ὅρια τῆς ἀβεβαιότητας πού ἀνταναιλά ὁ θεωρητικός πληθυσμός. Μέ τήν ἔννοια αὐτή ἡ τυπική ἀπόκλιση ἀποτελεῖ ἕνα ἀκόμη μέτρο τῆς διαφορᾶς μεταξύ τῆς παραμέτρου μ πού χαρακτηρίζει τή θεωρητική κατανομή $P(x)$ καί τῆς "πραγματικῆς" τιμῆς.

Ὁ ὀρισμός τῶν παραμέτρων πού δώσαμε προηγουμένως στηρίζεται στήν ὀριακή ταύτιση τῶν παραμέτρων τοῦ δείγματος κατανομῆς μέ τίς παραμέτρους τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (1.10). Ἄν ὁ θεωρητικός πληθυσμός εἶναι γνωστός τότε οἱ στατιστικές παράμετροι μποροῦν νά ὀριστοῦν διαμέσου τῆς συναρτήσεως $P(x)$. Ἄν ἡ συνάρτηση $P(x)$ εἶναι συνεχῆς καί ικανοποιεῖ τή συνθήκη τῆς ἐξ. (1.9) τότε ὁ μέσος μ δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x) dx \quad (1.18)$$

πού θά ἀναγνωριστεῖ ὡς ὁ γενικός ὀρισμός τοῦ κέντρου βάρους μιᾶς μεταβλητῆς μέ πιθανότητα κατανομῆς $P(x)$. Κατά τόν ἴδιο τρόπο ἡ διακύμανση παίρνει τή μορφή



$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x) dx - \mu^2 \quad (1.19)$$

1-5 Έκτιμηση τῶν Στατιστικῶν Παραμέτρων

Στὴν πράξη, ἡ ἔξαγωγή κάθε πληροφορίας γιὰ τὸ μέγεθος πού μετράται γίνεται μέ βάση ἕνα δεῖγμα κατανομῆς τὸ ὁποῖο περιέχει ἕνα πεπερασμένο πλῆθος N μετρήσεων μέ ἀριθμητικό ἀποτέλεσμα $x_i, i=1, \dots, N$. Ἀπό τὸ δεῖγμα αὐτό θά πρέπει ὁ παρατηρητής νά ἐκτιμῆσει τήν "πραγματική" τιμή τοῦ μεγέθους καί γενικά τίς παραμέτρους τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ.

Γιὰ ἕνα πεπερασμένο πλῆθος N μετρήσεων ἡ καλύτερη ἐκτίμηση τοῦ μέσου μ δίνεται ἀπό τόν μέσο ὄρο \bar{x} τῶν μετρήσεων

$$\mu \approx \bar{x} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (1.20)$$

Στὴν παράγραφο 1-11 θά δικαιολογήσουμε τήν ἐξ. (1.20) μέ βάση τή συγκεκριμένη κατανομή Gauss. Πρὸς τὸ παρόν θά ἀρκεστοῦμε στή διαίσθηση καί στήν παρατήρηση ὅτι ἡ ἐξ. (1.20) συμπίπτει μέ τόν ὀρισμό τῆς ἐξ. (1.11) γιὰ ἕνα πεπερασμένο ὄρισμό μετρήσεων.

Μέ τήν παραπάνω ἐκτίμηση τοῦ μέσου, τὸ ἀθροισμα τῶν ἀποκλίσεων $d_i = x_i - \bar{x}$ μηδενίζεται αὐτόματα. Παρόλα αὐτά ἡ μέση ἀπόκλιση α πού ὀρίσαμε στήν ἐξ. (1.16) δέν παίρνει ἀπαραίτητα τήν ἐλάχιστη τιμή. Ἀντίθετα μπορούμε νά δείξουμε ὅτι μέ τήν ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (1.20) τὸ ἀθροισμα τῶν τετραγῶνων τῶν ἀποκλίσεων γίνεται ἐλάχιστο. Στὴν ἰδιότητα αὐτή στηρίζεται καί ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγῶνων πού

θά χρησιμοποιήσουμε άργότερα.

Τό άθροισμα τών τετραγώνων τών άποκλίσεων από μιá τιμή x

$$\sum_{i=1}^N (x_i - x)^2$$

γίνεται ελάχιστο άν ικανοποιείται ή σχέση

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{i=1}^N (x_i - x)^2 \right] = 0. \quad (1.21)$$

Αναπτύσσοντας τό άθροισμα τής έξ. (1.21) μπορούμε νά γράψουμε

$$\sum_{i=1}^N (x_i - x)^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2x \sum_{i=1}^N x_i + Nx^2$$

πού μέ άπλή διαφόριση δίνει

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{i=1}^N (x_i - x)^2 \right] = 2 \sum_{i=1}^N x_i + 2Nx. \quad (1.22)$$

Σύγκριση τής έξ. (1.22) μέ τόν όρισμό τής έξ. (1.20) πιστοποιεί άμέσως ότι ή έξ. (1.21) ικανοποιείται άν οι άποκλίσεις ληφθούν σέ σχέση μέ τό σημείο $x = \bar{x}$.

Σέ άναλογία μέ τήν έξ. (1.20), ή έκτίμηση τής τυπικής άποκλίσεως σ μπορεί νά γίνει μέ παράληψη του όριου $N \rightarrow \infty$ στην έξ. (1.17), ήτοι

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \mu^2 \quad (1.23)$$

Η σχέση αυτή παρουσιάζει τό μειονέκτημα ότι προϋποθέτει τή γνώση του μέσου μ , ενώ στή διάθεση του παρατηρητή βρίσκεται μόνο ή έκτίμη-



ση \bar{x} τῆς ἐξ. (1.20). Εἶναι μεγάλος ὁ πειρασμός νά αντικαταστήσουμε στήν ἐξ. (1.23) τήν ἐκτίμηση $\mu = \bar{x}$ καί νά δεχτοῦμε τό ἀποτέλεσμα ὡς τήν καλύτερη ἐκτίμηση γιά τή διακυμάνση τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Ὅπως ὅμως μπορούμε νά δοῦμε μέ λίγη σκέψη ἡ διεργασία αὐτή θά δώσει ἀποτέλεσμα μικρότερο ἀπό τήν ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (1.23). Τοῦτο ἀφείλεται στό γεγονός ὅτι στήν ἐπιλογή τῆς ἐκτιμῆσεως $\mu = \bar{x}$ ὀδηγηθήκαμε μέ βάση τή συνθήκη τῆς ἐξ. (1.21) πού ἐπιρεάζει (συγκεκριμένα κάνει ἐλάχιστο) τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων στόν ὀρισμό τῆς διακυμάνσεως. Μέ τόν τρόπο αὐτό μετά τήν ἐκτίμηση τοῦ μέσου ἔχουμε πλέον μειώσει τούς βαθμούς ἐλευθερίας τῶν ὑπολογισμῶν μας. Μέ τόν ὄρο "βαθμοί ἐλευθερίας" θά ἐννοήσουμε τό πλήθος τῶν ἀνεξάρτητων παρατηρήσεων πού ἔχουμε στή διάθεσή μας γιά τήν ἐξαγωγή μιᾶς συγκεκριμένης πληροφορίας. Στήν ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (1.20) οἱ ἀνεξάρτητες παρατηρήσεις εἶναι N καί ὁ ἀριθμός αὐτός χρησιμοποιεῖται γιά τόν ὑπολογισμό τῆς μέσης τιμῆς. Μετά ὅμως ἀπό τήν ἐπιβολή τῆς συνθήκης (1.21) οἱ βαθμοί ἐλευθερίας περιορίζονται σέ $N-1$. Μποροῦμε ἐπομένως νά ἀντισταθμίσουμε τήν ὑποεκτίμηση πού συνεπάγεται ἡ ἐξ. (1.21) ἄν χρησιμοποιήσουμε στόν παρανομαστή τῆς ἐξ. (1.23) τό πλήθος τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας, ἥτοι

$$\sigma^2 = s^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (1.24)$$

θά ὀνομάσουμε τήν παράμετρο s πού ὀρίζεται στήν τελευταία σχέση πειραματική τυπική ἀπόκλιση.

Τά παραπάνω ἐπιχειρήματα δέν ὑποκρίνονται ὅτι δικαιολογοῦν ἀπόλυτα τήν ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (1.24). Ὁ ἀναγκώστης πού ἐπιμένει στή μαθηματική αὐστηρότητα μπορεῖ νά βρεῖ τήν ἀπόδειξη τῆς ἐξ. (1.24) σέ

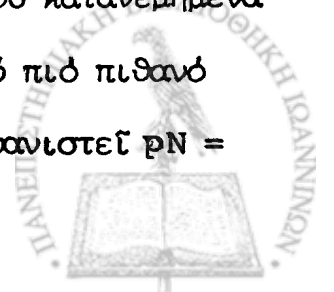
πλέον προχωρημένα συγράμματα Στατιστικής 'Αναλύσεως. Θα προσπαθήσουμε όμως να δικαιολογήσουμε την έκφραση της πειραματικής τυπικής απόκλισεως θεωρώντας την άκρια περίπτωση $N=1$, δηλαδή την περίπτωση ενός πειράματος με μία μοναδική μέτρηση x_1 . Από την έξ. (1.20) η καλύτερη εκτίμηση του μέσου δίνεται από την ίδια τη μέτρηση

$$\mu \approx \bar{x} = x_1. \quad (1.25)$$

Αν προσπαθήσουμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την εκτίμηση αυτή στην έξ. (1.23) η τυπική απόκλιση μηδενίζεται έξ ορισμού. Το άτοπο αυτό αποτέλεσμα διορθώνεται με την έξ. (1.24) όπου για την άκρια περίπτωση $N=1$ τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής μηδενίζονται και η πειραματική μέση απόκλιση παίρνει άπροσδιόριστη τιμή. Αυτό βέβαια είναι και το αποτέλεσμα που περιμέναμε καθόσον από μία και μόνη μέτρηση δέν είναι δυνατόν να εξάγουμε δύο πληροφορίες.

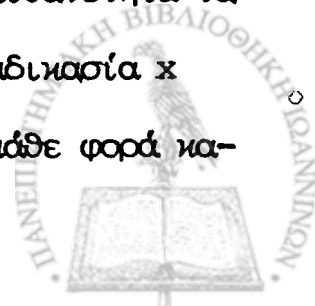
1-6 'Η Διάνυμη Κατανομή

Σέ πολλές περιπτώσεις με φυσικό ενδιαφέρον η συνάρτηση του θεωρητικού πληθυσμού είναι γνωστή από τό μηχανισμό του φαινομένου που μελετάται. Ας θεωρήσουμε ως πρώτο παράδειγμα την κατανομή που αναμένεται σέ ένα τυχερό παιχνίδι που παίζεται με δύο ζάρια. Κατ'άρχήν κάθε ζάρι έχει την ίδια πιθανότητα $p = \frac{1}{6}$ να φέρει οποιοδήποτε αριθμό από τό 1 ως τό 6. Τοῦτο σημαίνει ότι αν ένα ζάρι ριχτεί πολλές φορές τό πιο πιθανό είναι ότι τά αποτελέσματα θα είναι εξίσου κατανεμημένα στους έξη αριθμούς. Αν μās ενδιαφέρει ο αριθμός 6, τό πιο πιθανό είναι ότι μετά από N προσπάθειες ο αριθμός αυτός θα έμφανιστεί $pN =$



$\frac{1}{6}$ N φορές. Για δύο ζάρια που ρίχνονται ταυτόχρονα οι δυνατοί συνδιασμοί είναι $6^2 = 36$. Τοῦτο συμβαίνει διότι ἕνας συγκεκριμένος ἀριθμὸς τοῦ πρώτου ζαριοῦ μπορεῖ νά συνδιαστεῖ μέ οποιοδήποτε ἀπό τούς ἔξη ἀριθμούς τοῦ δεύτερου. Ἡ πιθανότητα τώρα ὥστε ἕνα ἀπό τά ζάρια (ἀλλά ὄχι καί τά δύο) νά καταλήξει στόν ἀριθμὸ 6 μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀν ἀπαριθμηθοῦν οἱ 36 δυνατοί συνδιασμοί καί διαχωριστοῦν οἱ συνδιασμοί ἐκεῖνοι πού περιέχουν ἕνα 6. Μέ λίγη προσοχή καί σύστημα μπορεῖ νά βρεῖ κανεῖς ὅτι οἱ δυνατοί συνδιασμοί εἶναι 10. Ἡ πιθανότητα ἐπομένως νά ἐμφανιστεῖ ἕνα (καί μόνον ἕνα) 6 εἶναι $\frac{10}{36}$. Ἡ πιθανότητα βέβαια γιά "ἑξάρες", πού ἀποτελεῖ ἕνα μοναδικό συνδιασμό ἀπό τούς 36 δυνατούς εἶναι μόνο $\frac{1}{36}$.

Μποροῦμε νά γενικεύσουμε τήν προηγούμενη διερεύνηση στήν περίπτωση n ζαριῶν μέ 6^n δυνατούς συνδιασμούς. Ἡ πιθανότητα ὥστε νά ἐμφανιστεῖ ἕνας συγκεκριμένος συνδιασμός εἶναι τώρα $\frac{1}{6^n} = \left(\frac{1}{6}\right)^n$. Ἡ γενίκευση τῆς προηγούμενης διερευνήσεως τίθεται μέ τήν ἐρώτηση: Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα ὅτι ὁ συνδιασμός θά περιέχει x ζάρια μέ τόν ἀριθμὸ 6; Για νά ἀπαντήσουμε στό ἐρώτημα αὐτό θά πρέπει πάλι νά ἀπαριθμήσουμε ὅλες τίς δυνατές καταστάσεις καί νά μετρήσουμε ἐκεῖνες πού περιέχουν x ἑξάρια. Ἄς ἐξετάσουμε ἕνα ἕνα ζάρι σέ μιὰ τυχαία κατάσταση n ζαριῶν. Διαλέγοντας ἕνα ζάρι στήν τύχη, ἡ πιθανότητα ὥστε τό ζάρι αὐτό νά ἔχει φέρει τόν ἀριθμὸ 6 εἶναι $p = \frac{1}{6}$. Ἐπειδή ὁμοῦ ἀκριβῶς διαλέξαμε στήν τύχη ἕνα ἀπό τά n ζάρια, ἡ πιθανότητα νά βροῦμε τόν ἀριθμὸ 6 εἶναι $n \cdot \frac{1}{6}$. Κατά τόν ἴδιο τρόπο, διαλέγοντας τυχαῖα ἕνα δεύτερο ζάρι ἀπό τά ὑπόλοιπα $n - 1$ ζάρια, ἡ πιθανότητα νά βροῦμε τόν ἀριθμὸ 6 εἶναι $(n - 1) \cdot \frac{1}{6}$. Συνεχίζοντας τήν διαδικασίαν x φορές εἶναι εὐκόλο νά δοῦμε ὅτι ἡ πιθανότητα μειώνεται κάθε φορά κατὰ τήν ἀκολουθία



$$n \frac{1}{6}, (n-1) \frac{1}{6}, \dots, (n-x+2) \frac{1}{6}, (n-x+1) \frac{1}{6} \quad (1.26)$$

μέχρις ότου ή τελευταία τυχαία έπιλογή γίνει από τά $(n-x+1)$ έναπομένοντα ζάρια. Ή πιθανότητα τώρα ώστε σε μία σειρά x έπιλογών από n ζάρια νά βρεθεί όλες τίς φορές ο αριθμός 6 δίνεται από τό γινόμενο τής ακολουθίας

$$P(x, n, \frac{1}{6}) = n(n-1)\dots(n-x+1) \left(\frac{1}{6}\right)^x = \frac{n!}{(n-x)!} \left(\frac{1}{6}\right)^x \quad (1.27)$$

όπου τό παραγοντικό $n!$ όρίζεται ως

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n \quad (1.28\alpha)$$

καί

$$0! = 1 \quad (1.28\beta)$$

Ή έξ. (1.27) έκφράζει τό γεγονός ότι για n ζάρια υπάρχουν $\frac{n!}{(n-x)!}$ καταστάσεις μέ x έξάρια. Ή προηγούμενη όμως μέτρηση περιέχει μία υπερεκτίμηση τών καταστάσεων, πού άφείλεται στη διαδικασία πού ακολουθήσαμε. Ο άναγνώστης μπορεί νά πειστεί μέ τό απλό παράδειγμα τών δύο ζαριών ότι ή σταδιακή μέτρηση καταλήγει $\frac{2!}{0!} = 2$ καταστάσεις μέ "έξάρεις" — ενώ στην πραγματικότητα υπάρχει μία. Καί τούτο διότι στη σταδιακή άπαρίθμηση δέν λάβαμε υπόψη μας ότι από τά x πρώτα έξάρια πού μετρήσαμε δέν έχει σημασία από πού ζάρι άρχίζουμε τή μέτρηση. Οποιοσδήποτε συνδιασμός — καί οί δυνατοί συνδιασμοί είναι $x!$ τό πλήθος — καταλήγει στην ίδια κατάσταση. Για νά διορθώσουμε έπομένως τήν υπερε-

κτίμηση πού εισάγει η μέθοδος της απαριθμήσεως τών καταστάσεων θα πρέπει να διαιρέσουμε την έκφραση της έξ. (1.27) με τον παράγοντα εκφυλισμοῦ $x!$

Υπάρχει μιὰ δεύτερη διόρθωση πού πρέπει να επιφέρουμε στην έξ. (1.27) ὥστε να εξασφαλίζεται ὅτι ἡ κατάσταση τήν ὁποία αντιπροσωπεύει περιέχει x καί μόνο x ἑξάρια. Θα πρέπει δηλαδή να εξασφαλίσουμε ὅτι στην κατάσταση αὐτή x ζάρια ἐκφρανίζουν τόν ἀριθμό 6 καί $n-x$ ζάρια ὁποιοδήποτε ἀριθμό ἐκτός ἀπό τό 6. Ἡ πιθανότητα ὥστε ἕνα ζάρι να φέρει κάποιο ἀριθμό πλὴν τοῦ 6 εἶναι

$$q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

ἔνῳ ἡ πιθανότητα ὥστε $n-x$ ζάρια να φέρουν διάφορους ἀριθμούς πλὴν τοῦ 6 δίνεται ἀπό τό γινόμενο τών ἐπιμέρους πιθανοτήτων

$$q^{n-x} = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-x} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-x}.$$

Εἴμαστε τώρα σέ θέση να γράψουμε τήν πιθανότητα ὥστε μιὰ ζαριά με n ζάρια, x ἀπό αὐτά να ἐκφρανίσουν τόν ἀριθμό 6. Ἡ πιθανότητα αὐτή δίνεται ἀπό τή σχέση

$$P(x, n, \frac{1}{6}) = \frac{n!}{x! (n-x)!} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-x}$$

Γενικεύοντας τό ἀποτέλεσμα αὐτό καί χρησιμοποιώντας τόν καθιερωμένο συμβολισμό

$$\binom{n}{x} \equiv \frac{n!}{x! (n-x)!}$$



μπορούμε να γράψουμε την έκφραση

$$P_B(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \quad (1.30)$$

πού δίνει την πιθανότητα ώστε σε ένα σύνολο n αντικειμένων x από αυτά να βρεθούν σε μία κατάσταση με επιμέρους πιθανότητα p .

Η κατανομή ως προς την μεταβλητή x που εκφράζει η έξ. (1.30) είναι γνωστή ως διώνυμη κατανομή από τη στενή σχέση που εμφανίζει προς το γνωστό ανάπτυγμα διωνύμου στην άλγεβρα

$$(p + q)^n = \sum_{x=0}^n \left[\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \right] \quad (1.31)$$

Ο κτός όρος του διωνύμου ανάπτυγματος αντιστοιχεί στην πιθανότητα $P_B(x, n, p)$ αν $q = 1 - p$. Η έξ. (1.31) μπορεί μάλιστα να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της εκφράσεως στην έξ. (1.30). Αν η ποσότητα $P_B(x, n, p)$ εκφράζει την πιθανότητα για τη συγκεκριμένη κατάσταση, τότε το άθροισμα των πιθανοτήτων για όλες τις δυνατές καταστάσεις από $x = 0$ έως $x = n$ πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα. Πράγματι, από την έξ. (1.31)

$$\sum_{x=0}^n \left[\binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \right] = (p + 1 - p)^n = 1.$$

Οι στατιστικές παράμετροι της διώνυμης κατανομής μπορούν να βρεθούν με την βοήθεια των έξ. (1.18) και (1.19). Για άσυνεχη κατανομή τα ολοκληρώματα των εξισώσεων αυτών μεταπίπτουν σε άθροισμα που καλύπτει τις δυνατές τιμές της μεταβλητής x . Ο μέσος μ και η τυπική απόκλιση σ της διώνυμης κατανομής δίνονται αντίστοιχα από τις εκφράσεις



$$\mu = \sum_{x=0}^n x P_B(x, n, p) = \sum_{x=0}^n \left[x \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \right] = np \quad (1.32)$$

και

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^n (x-\mu)^2 P_B(x, n, p) = \sum_{x=0}^n \left[(x-\mu)^2 \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \right] = np(1-p). \quad (1.33)$$

Ἡ ἐπιβεβαίωση τῶν ἀπλῶν ἀποτελεσμάτων $\mu = np$ καὶ $\sigma^2 = np(1-p)$ στὰ ὁποῖα καταλήγουν οἱ παραπάνω ἐκφράσεις ἀκρίνεται στὶς Ἀσκήσεις στὸ τέλος τοῦ κεφαλαίου.

Παρατηρεῖται ὅτι ἡ διώνυμη κατανομὴ εἶναι συμμετρικὴ μόνο ἂν

$$q = (1-p) = p = \frac{1}{2}. \quad (1.34)$$

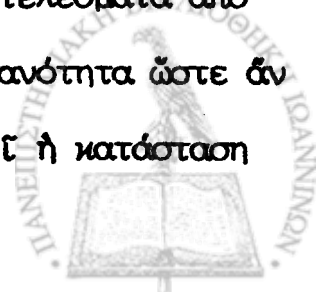
Στὴν εἰδικὴ αὕτῃ περίπτωση ὁ μέσος μ δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση

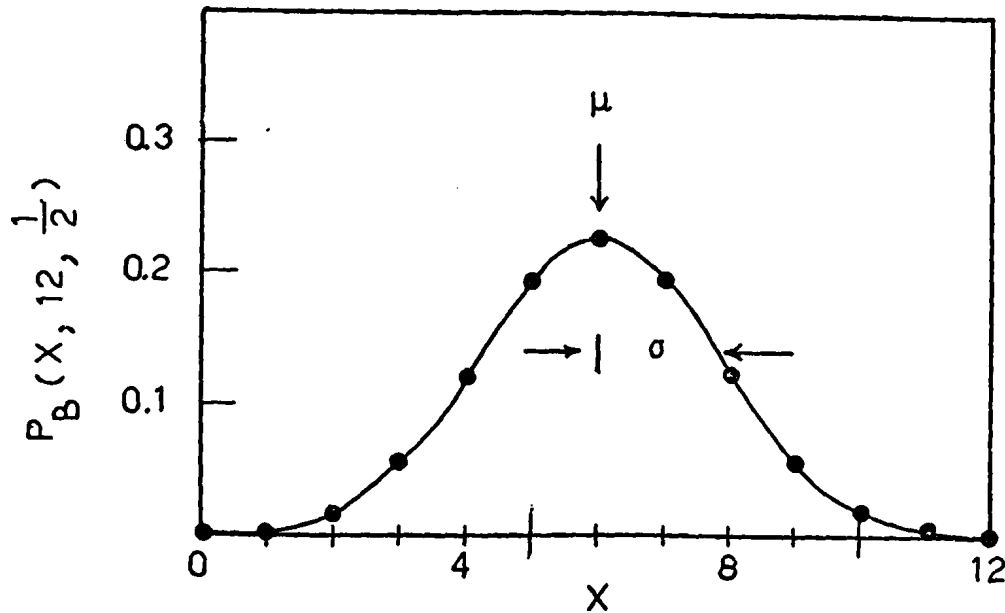
$$\mu = \frac{n}{2} \quad (1.35\alpha)$$

ἐνῶ ἡ διακύμανση εἶναι ἴση μὲ τὸ μισό τοῦ μέσου

$$\sigma^2 = \frac{n}{4} = \frac{\mu}{2}. \quad (1.35\beta)$$

Δύο χαρακτηριστικὰ παραδείγματα τῆς διώνυμης κατανομῆς δίνονται στὰ σχήματα 1-3 καὶ 1-4. Τὸ πρῶτο παράδειγμα περιέχει τὰ ἀποτελέσματα ἀπὸ ἓνα παιχνίδι "κορῶνα - γράμματα" μὲ 12 νομίσματα. Ἡ πιθανότητα ὥστε ἂν πετάξουμε ταυτόχρονα 12 νομίσματα στὸν ἀέρα νὰ ἐμφανιστεῖ ἡ κατάσταση





ΣΧΗΜΑ 1-3. Ἡ συμμετρικὴ κατανομὴ $P_B(x, n, p)$ γιὰ $n = 12$ καὶ $p = \frac{1}{2}$. Ὁ μέσος καὶ ἡ τυπικὴ ἀπόκλιση εἶναι ἀντίστοιχα $\mu = 6$ καὶ $\sigma (= \sqrt{3}) = 1.73$.

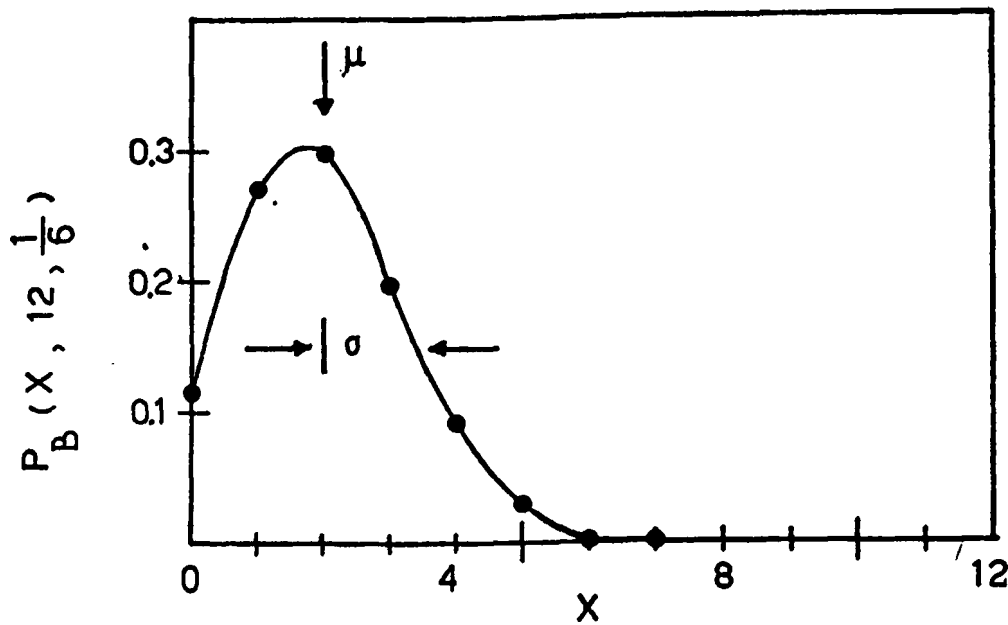
μέ x νομίσματα στὴν κατάσταση "γράμματα" (καὶ $12-x$ νομίσματα στὴν κατάσταση "κορώνα") δίνεται ἀπὸ τὴ διώνυμη κατανομὴ $P_B(x, 12, \frac{1}{2})$ πού περιέχεται στό σχῆμα 1-3 ὡς συνάρτηση τοῦ ἀριθμοῦ x . Ἡ κατανομὴ βέβαια εἶναι ἀσυνεχῆς καὶ μόνο τὰ σημεῖα πού ἀντιστοιχοῦν στίς ἀκέραιες τιμές $x = 0, 1, \dots, 12$ ἔχουν φυσικὴ σημασία. Ἡ συνεχῆς καμπύλη τῆς γραφικῆς παραστάσεως ἀποδίδει ἀπλῶς τὴ συμπεριφορὰ τῆς διώνυμης κατανομῆς γιὰ μεγάλες τιμές τοῦ n . Ἡ κατανομὴ εἶναι συμμετρικὴ καθόσον ικανοποιεῖται ἡ συνθήκη τῆς ἐξ. (1.34). Ὁ μέσος μ καὶ ἡ τυπικὴ ἀπόκλιση σ πού σημειώνονται στὴ γραφικὴ παράσταση μπορεῖ νὰ ὑπολογιστοῦν ἀντίστοιχα ἀπὸ τίς ἐξ. (1.32) καὶ (1.33) ὡς

$$\mu = 12 \left(\frac{1}{2} \right) = 6$$

καὶ

$$\sigma = \sqrt{12 \left(\frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \right)} = \sqrt{3} \approx 1.73.$$





ΣΧΗΜΑ 1-4. Ἡ διώνυμη κατανομή $P_B(x, n, p)$ γιὰ $n = 12$ καὶ $p = \frac{1}{6}$. Ὁ μέσος καὶ ἡ τυπικὴ ἀπόκλιση εἶναι ἀντίστοιχα $\mu = 2$ καὶ $\sigma = 1.29$.

Τὸ σχῆμα 1-4 περιγράφει τὴ συχνότητα μὲ τὴν ὁποία ἐμφανίζονται x ἔξαιρα σὲ μιά ζαριά μὲ 12 ζάρια. Ἡ πιθανότητα περιγράφεται ἀπὸ τὴ διώνυμη κατανομή

$$P_B(x, 12, \frac{1}{6}) = \frac{12!}{x!(12-x)!} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{12-x} \quad (1.36)$$

πού δίνεται στὴ γραφικὴ παράσταση τοῦ σχήματος ὡς μιά συνεχῆς καμπύλη διαμέσου διακριτῶν σημείων. Ὁ μέσος καὶ ἡ τυπικὴ ἀπόκλιση εἶναι ἀντίστοιχα

$$\mu = 12 \left(\frac{1}{6}\right) = 2$$

καὶ

$$\sigma = \sqrt{12 \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)} = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1.29$$



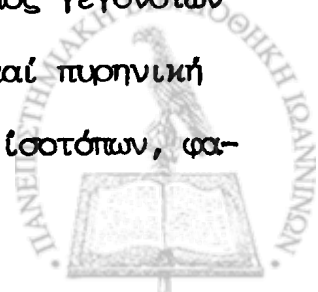
Ἡ κατανομή εἶναι ἀσύμμετρο ὡς πρὸς τὸν μέσο ἢ ὡς πρὸς ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο. Ἡ πλέον πιθανή τιμὴ μὲ φυσικὴ ἔννοια εἶναι ἡ τιμὴ $x=2$ ὅταν καὶ ἡ συνεχὴς καμπύλη γίνεται μέγιστη στὸ διάστημα $1 < x < 2$.

1-7 Ἡ Κατανομή Poisson

Ἡ διώνυμη κατανομή βρίσκει μικρὴ πρακτικὴ ἐφαρμογὴ ἔξω ἀπὸ τὸ ὄριο τῶν τυχερῶν παιχνιδιῶν. Γιά μεγάλο ἀριθμὸ n τῶν ἐπιμέρους καταστάσεων, ἡ ἐξ. (1.30) ἀπαιτεῖ τὸν ὑπολογισμὸ μεγάλων παραγοντικῶν ποὺ κάνει τὸ χειρισμὸ τῆς κατανομῆς δυσχερῆ. Ἡ χρησιμότητα τῆς διώνυμης κατανομῆς ὀφείλεται στὸ γεγονός ὅτι ἐξάγεται κατὰ ἀπλό τρόπο ἀπὸ τὶς θεμελιώδεις ἀρχές τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων, ἐνῶ ταυτόχρονα γιά μεγάλες τιμές τῶν παραμέτρων τῆς καὶ κάτω ἀπὸ συνθήκες ποὺ συχνά ἀπαντῶνται στὶς μετρήσεις τῆς φυσικῆς, ὁδηγεῖ σὲ ἀπλές συναρτήσεις κατανομῆς. Ἡ πρώτη προσέγγιση τῆς συναρτήσεως (1.30) ποὺ θὰ ἐξετάσουμε εἶναι ἡ περίπτωση κατὰ τὴν ὁποία τὸ μέγιστο τῆς κατανομῆς εἶναι μικρὸ σὲ σχέση μὲ τὶς δυνατὲς τιμές n τῆς μεταβλητῆς x . Στὸ ὄριο αὐτὸ ἡ ἐπιμέρους πιθανότητα κάθε καταστάσεως p εἶναι πολὺ μικρὴ ἐνῶ ὁ μέσος $\mu = np$ παραμένει πεπερασμένος λόγω τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ τῶν ἐπιμέρους καταστάσεων n , ἥτοι

$$p \ll 1, \quad \mu = np \ll n. \quad (1.37)$$

Οἱ συνθήκες αὐτὲς ἱκανοποιοῦνται γιά μιὰ μεγάλη κατηγορία φυσικῶν φαινομένων, κυρίως σὲ πειράματα ὅπου μετράται ὁ ἀριθμὸς γεγονότων ἀνά μονάδα χρόνου. Πειράματα σκεδάσεως στὴν ἀτομικὴ καὶ πυρηνικὴ φυσικὴ, μέτρηση τοῦ ρυθμοῦ ἀποδιεγέρσεως ραδιενεργῶν ἰσοτόπων, φα-



σματοσκοπικές παρατηρήσεις ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, είναι μερικά παραδείγματα μετρήσεων όπου ικανοποιούνται οι συνθήκες της έξ. (1.37). Στα πειράματα αυτά οι παράμετροι p και n είναι συνήθως άγνωστες ενώ μπορεί να εξαχθεί από τα δεδομένα ο μέσος μ ή τουλάχιστον η εκτίμησή του $\mu = \bar{x}$. Η προσέγγιση της διώνυμης κατανομής για τις συνθήκες της έξ. (1.37), γνωστή ως κατανομή Poisson, δίνει μια απλή έκφραση για το θεωρητικό πληθυσμό ως συνάρτηση της μεταβλητής x και του μέσου $\mu = np$.

Η διώνυμη κατανομή της έξ. (1.30) μπορεί να γραφεί ως

$$P_B(x, n, p) = \frac{1}{x!} \frac{n!}{(n-x)!} p^x (1-p)^{-x} (1-p)^n. \quad (1.38)$$

Κάτω από τις συνθήκες της έξ. (1.37), ο δεύτερος όρος της έκφρασης αυτής

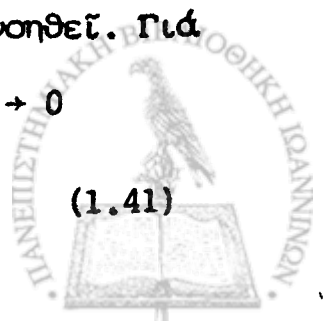
$$\frac{n!}{(n-x)!} = n (n-1) (n-2) \dots (n-x+1) \quad (1.39)$$

μπορεί να θεωρηθεί ως το γινόμενο x αριθμών που (καθόσον $x \ll n$) ο καθένας τους είναι περίπου ίσος με τον αριθμό n . Για μεγάλες έπομένως τιμές του n το όριο του όρου αυτού είναι n^x . Ο τέταρτος όρος δίνει την προσέγγιση

$$(1-p)^{-x} \approx 1 + px \quad (1.40)$$

μέ ασυμπτωτικό όριο τη μονάδα και έπομένως μπορεί να άγνοηθεί. Για τον τελευταίο όρο τέλος μπορούμε να γράψουμε στο όριο $p \rightarrow 0$

$$\lim_{p \rightarrow 0} (1-p)^n = \lim_{p \rightarrow 0} \left[(1-p)^{1/p} \right]^\mu = \left(\frac{1}{e} \right)^\mu = e^{-\mu} \quad (1.41)$$



Συγκεντρώνοντας τώρα όλες τις παραπάνω προσεγγίσεις βρίσκουμε ότι στο όριο $p \rightarrow 0$ ή διώνυμη κατανομή $P_B(x, n, p)$ τείνει ασυμπτωτικά προς την κατανομή Poisson $P_P(x, \mu)$, ήτοι

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_B(x, n, p) = P_P(x, \mu) \equiv \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \quad (1.42)$$

όπου $\mu = np$.

Όπως και η διώνυμη κατανομή, η κατανομή Poisson δεν είναι συμμετρική ως προς το σημείο $x = \mu$ ή κάποιο άλλο σημείο. Η πιθανότητα $P_P(x, \mu)$ παρουσιάζει ένα μέγιστο κοντά στην τιμή $x \approx \mu$ και φθίνει για $x \gg \mu$. Παρόλα αυτά παραμένει πεπερασμένη για $x = 0$. Για $x < 0$ η κατανομή Poisson δεν ορίζεται.

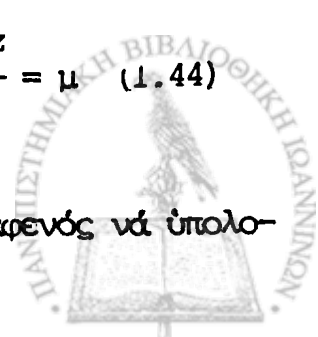
Παρατηρείται ότι η προσέγγιση της έξ. (1.42) διατηρεί τη σωστή κανονικοποίηση της κατανομής. Μέ άλλα λόγια η συνάρτηση $P_P(x, \mu)$ ικανοποιεί τη συνθήκη της έξ. (1.9) όπως μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί από τη γνωστή ταυτότητα

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} = e^{\mu}. \quad (1.43)$$

Από τη διεργασία της προσεγγίσεως περιμένουμε ακόμη ότι ο μέσος της κατανομής $P_P(x, \mu)$ θα είναι ο ίδιος με τον μέσο της αντίστοιχης διώνυμης κατανομής, ήτοι η παράμετρος μ . Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον όρισμό της έξ. (1.18)

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left[x \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \right] = \mu e^{-\mu} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!} = \mu e^{-\mu} \sum_{z=1}^{\infty} \frac{\mu^z}{z!} = \mu \quad (1.44)$$

Η τυπική απόκλιση της κατανομής Poisson μπορεί άφρονός να υπολο-



γίσιτε από τό όριο τής δικαιωάνσεως τής αντίστοιχης διώνυμης κατανομής στό όριο $p \rightarrow 0$. Από τήν έξ. (1.33)

$$\sigma^2 = \lim_{p \rightarrow 0} [np(1-p)] = \mu. \quad (1.45)$$

Έναλλακτικά μπορούμε νά χρησιμοποιήσουμε άπευθείας τόν όρισμό τής έξ. (1.19)

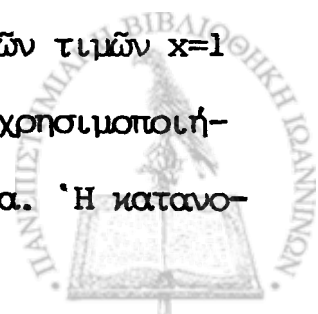
$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} \left[(x-\mu)^2 \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \right] = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} - \mu^2.$$

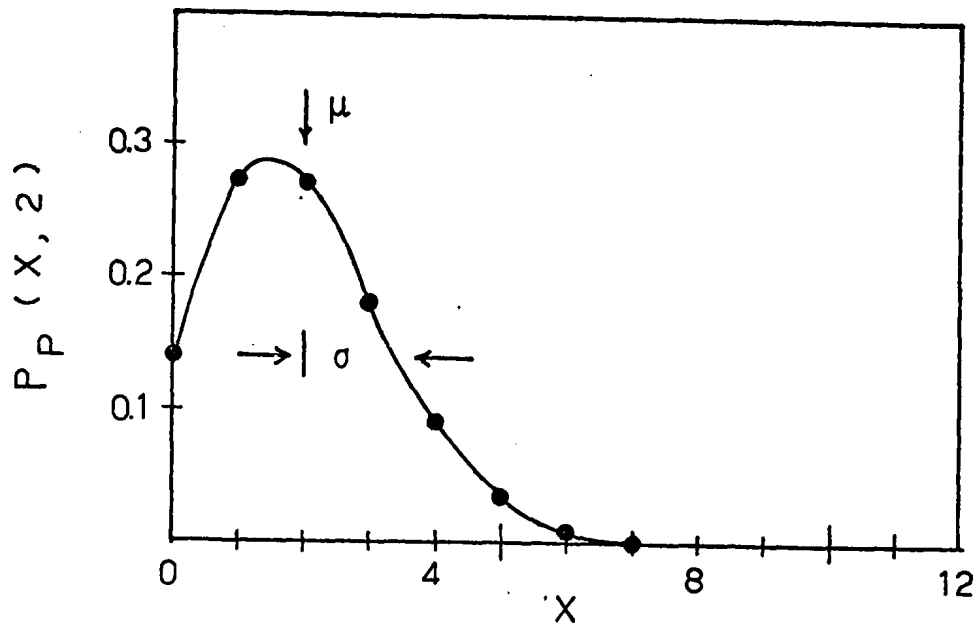
Παρατηρώντας ότι ό πρώτος όρος του άθροίσματος (γιά $x = 0$) μηδενίζεται μπορούμε νά γράψουμε

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} - \mu^2 = \mu \sum_{z=0}^{\infty} (z+1)^2 \frac{\mu^z}{(z+1)!} e^{-\mu} - \mu^2 \\ &= \mu \sum_{z=0}^{\infty} z \frac{\mu^z}{z!} e^{-\mu} + \mu^2 = \mu \end{aligned} \quad (1.46)$$

Στήν κατανομή Poisson έπομένως ή τυπική απόκλιση είναι ίση μέ τήν τετραγωνική ρίζα του μέσου.

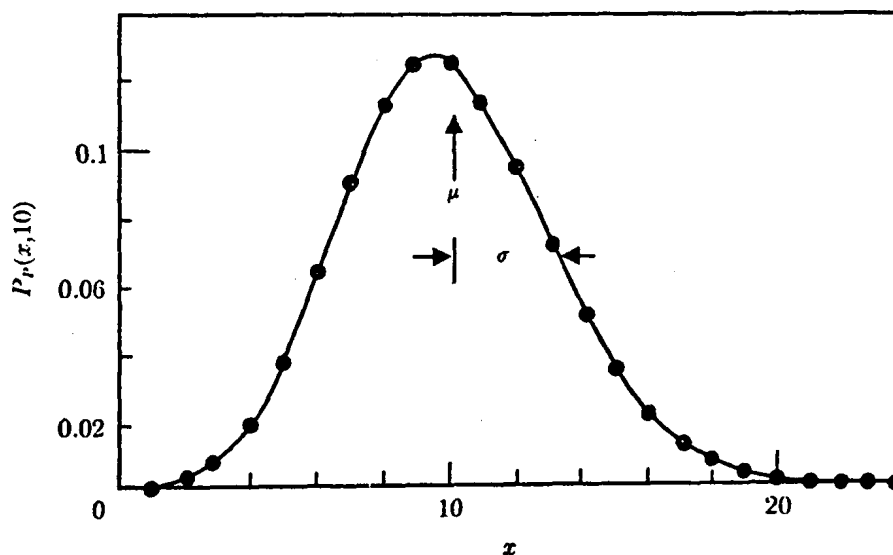
Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα τής κατανομής Poisson δίνονται στά σχήματα 1-5 καί 1-6. Στό πρώτο παράδειγμα όπου έχει χρησιμοποιηθεί ό ίδιος μέσος μέ τόν μέσο τής διώνυμης κατανομής στό σχήμα 1-4, ή κατανομή έμφανίζει χαρακτηριστική άσυμμετρία, ενώ ό μέσος απέχει άρκετά από τήν πλέον πιθανή τιμή πού βρίσκεται μεταξύ των τιμών $x=1$ καί $x=2$. Γιά τήν ειδική μάλιστα τιμή του μέσου $\mu=2$ πού χρησιμοποιήθηκε οι τιμές $x=1$ καί $x=2$ έμφανίζουν τήν ίδια πιθανότητα. Ή κατανο-



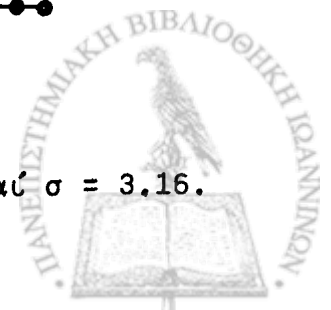


ΣΧΗΜΑ 1-5. Η κατανομή Poisson $P_P(x, \mu)$ για $\mu = 1.67$ και $\sigma = 1.29$.

Η κατανομή Poisson $P_P(x, 2)$ του σχήματος 1-5 παρουσιάζει εξαιρετική ομοιότητα με τη διώνυμη κατανομή $P_B(x, 12, \frac{1}{6})$ του σχήματος 1-4 που δείχνει ότι η επίμερος πιθανότητα p δεν είναι απαραίτητο να είναι πολύ μικρή ώστε να ισχύει η προσέγγιση της έξ. (1.42).



ΣΧΗΜΑ 1-6. Η κατανομή Poisson $P_P(x, \mu)$ για $\mu = 10$ και $\sigma = 3.16$.



Στό παράδειγμα του σχήματος 1-6 όπου ο μέσος είναι αρκετά μεγαλύτερος της μονάδας ή κατανομή είναι περισσότερο συμμετρική ενώ η τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\mu}$ αρκετά μικρότερη από την τιμή του μέσου. Οι ιδιότητες αυτές, δηλαδή αύξηση της συμμετρίας της κατανομής και βελτίωση της ακρίβειας της μετρήσεως καθώς αυξάνει η τιμή του μέσου είναι χαρακτηριστικές της κατανομής Poisson.

1-8 Η Κατανομή Gauss ή Κανονική Κατανομή

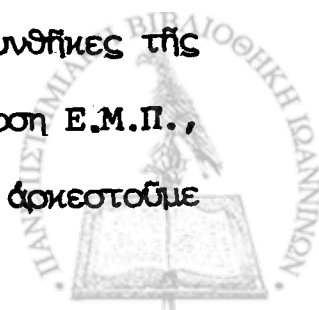
ΙΧΞΛ

Η πιο χρήσιμη κατανομή για την στατιστική ανάλυση δεδομένων είναι η κατανομή Gauss ή κανονική κατανομή. Όπως και η κατανομή Poisson που μόλις εξετάσαμε αποτελεί προσέγγιση της διώνυμης κατανομής στην ειδική περίπτωση όπου ο αριθμός n των επιμέρους καταστάσεων τείνει προς το άπειρο ενώ ταυτόχρονα η πιθανότητα np πραγματοποίησης καθεμιάς είναι μεγάλη, ήτοι

$$n \rightarrow \infty, \quad np \gg 1. \quad (1.47)$$

Η μεγάλη χρησιμότητα της κανονικής κατανομής οφείλεται στο γεγονός ότι έχει αποδειχτεί πειραματικά ότι αποδίδει αρκετά πιστά το θεωρητικό πληθυσμό των μετρήσεων στις περισσότερες περιπτώσεις. Επιπλέον έχει αποδειχτεί ότι αποδίδει την κατανομή των εκτιμήσεων των στατιστικών παραμέτρων για τους περισσότερους θεωρητικούς πληθυσμούς.

Υπάρχουν πολλοί μαθηματικοί τρόποι για να καταλήξει κανείς στην κατανομή Gauss με άπαρχή τη διώνυμη κατανομή και τις συνθήκες της εξ. (1.47) {βλέπε π.χ. F. Reif, Στατιστική Φυσική, Έκδοση Ε.Μ.Π., 1978, Παράρτημα Π.1}. Στα πλαίσια του βιβλίου αυτού θα αρκεστούμε



στην παράθεση της τελικής έκφρασης

$$P_G(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (1.48)$$

όπου ο σταθερός παράγοντας $[\sigma \sqrt{2\pi}]^{-1}$ εξασφαλίζει τη σωστή κανονικοποίηση της έξ. (1.9).

Η κατανομή Gauss $P_G(x, \mu, \sigma)$ δίνεται στη γραφική παράσταση του σχήματος 1-7 ως συνάρτηση της απόκλισης από τον μέσο $(x-\mu)$. Είναι μία συνεχής συμμετρική κατανομή όπου ο μέσος μ , ή διάμεσος $\mu_{1/2}$ και η πλέον πιθανή τιμή μ_{\max} συμπίπτουν. Για $x = \mu = \mu_{1/2} = \mu_{\max}$ η κατανομή παίρνει τη μέγιστη τιμή

$$P_G(\mu, \mu, \sigma) \approx \frac{0.4}{\sigma} \quad (1.49)$$

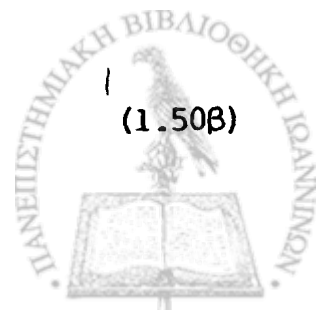
Η πιθανότητα ώστε μία μέτρηση να δώσει αποτέλεσμα μέσα σε ένα διάστημα dx γύρω από την τιμή x είναι ίση με $P_G(x, \mu, \sigma) dx$. Ο μέσος μ και η τυπική απόκλιση σ είναι πράγματι οι αντίστοιχες ποσότητες που περιέχονται με τα ίδια σύμβολα στην αναλυτική έκφραση της έξ. (1.48).

Όπως μπορεί να επιβεβαιωθεί από τους όρισμούς των έξ. (1.18) και (1.19)

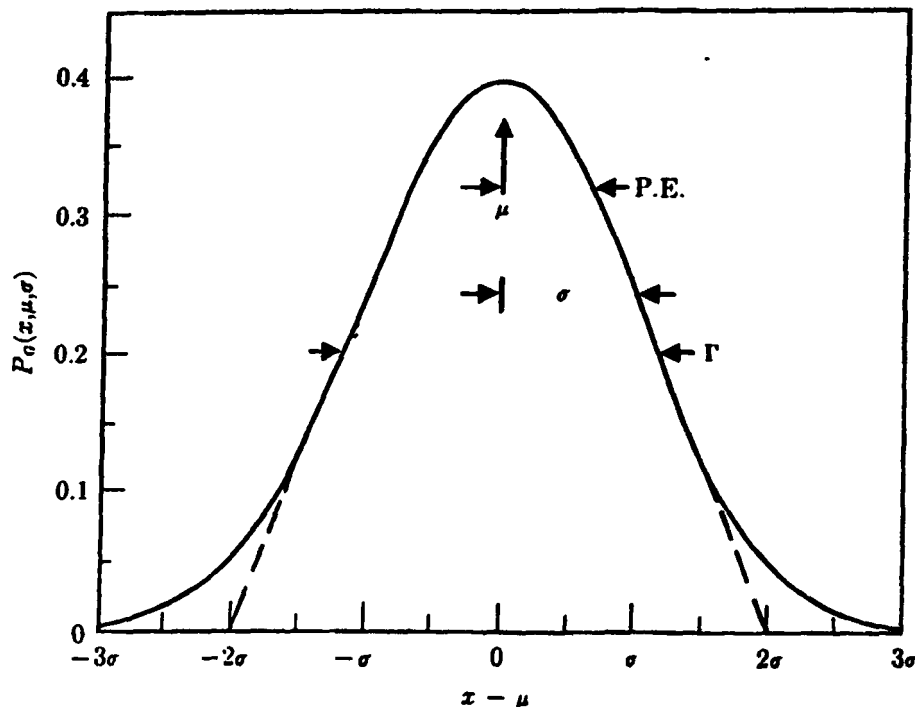
$$\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx = \mu \quad (1.50a)$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx = \sigma^2$$



(1.50b)



ΣΧΗΜΑ 1-7. Ἡ κατανομή Gauss $P_G(x, \mu, \sigma)$ ὡς συνάρτηση τῆς ἀποκλίσεως ἀπὸ τὸν μέσο $(x - \mu)$. Ὁ ὀριζόντιος ἄξονας τῆς γραφικῆς παραστάσεως εἶναι βαθμονομημένος σέ μονάδες ἴσες πρὸς τὴν τυπικὴ ἀπόκλιση σ .

Ἄν καὶ ἡ τυπικὴ ἀπόκλιση σ ὀρίζει πλήρως τὴν ἔκταση τῆς κατανομῆς, συνήθως ὀρίζεται μιά ἐναλλακτικὴ παράμετρος γιὰ τὴν περιγραφή τῆς περιοχῆς ὅπου ἡ πιθανότητα εἶναι σημαντικὴ. Τὸ πλήρες εὖρος στό μισό τοῦ μέγιστου Γ , ὅπως ἀποκαλεῖται ἡ παράμετρος αὐτή, ὀρίζεται ὡς ἡ ἔκταση τῆς μεταβλητῆς x μεταξύ τῶν δύο τιμῶν ὅπου ἡ συνάρτηση $P_G(x, \mu, \sigma)$ γίνεται τὸ μισό τῆς μέγιστης τιμῆς $P_G(\mu, \mu, \sigma)$, ἥτοι μεταξύ τῶν σημείων ποὺ ὀρίζονται ἀπὸ τὴ σχέση

$$P_G\left(\mu \pm \frac{1}{2} \Gamma, \mu, \sigma\right) = \frac{1}{2} P_G(\mu, \mu, \sigma) \quad (1.51)$$

Ἀπὸ τὴν τελευταία σχέση εἶναι εὐκόλο νὰ δείξουμε ὅτι

$$\Gamma = 2.354 \sigma . .$$



(1.52)

Καθόσον η ποσότητα $P_G(x, \mu, \sigma) dx$ εκφράζει την πιθανότητα ώστε μια μέτρηση να δώσει αποτέλεσμα στο διάστημα dx γύρω από την τιμή x , το ολοκλήρωμα

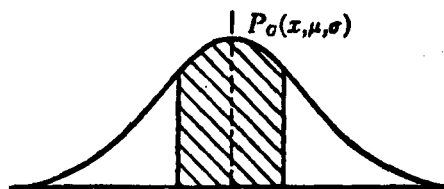
$$A = \int_{x_1}^{x_2} P_G(x, \mu, \sigma) dx \quad (1.53)$$

εκφράζει την πιθανότητα ώστε μια μέτρηση να δώσει αποτέλεσμα στο διάστημα μεταξύ των τιμών x_1 και x_2 . Συνήθως η ολοκληρωμένη πιθανότητα Gauss ορίζεται ώστε τα σημεία x_1 και x_2 να είναι συμμετρικά ως προς τον μέσο μ ενώ η μεταβλητή x μετράται σε μονάδες της τυπικής απόκλισης σ . Στο συμβολισμό αυτό, η πιθανότητα ώστε μια μέτρηση να έχει απόκλιση από τον μέσο μικρότερη από $|x-\mu| = z\sigma$ δίνεται από την έκφραση

$$A_G(z, \mu, \sigma) = \int_{\mu-z\sigma}^{\mu+z\sigma} P_G(x, \mu, \sigma) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad (1.53)$$

Ο υπολογισμός του τελευταίου ολοκληρώματος δεν είναι δυνατόν να γίνει αναλυτικά. Συνήθως ο υπολογισμός της ολοκληρωμένης πιθανότητας Gauss γίνεται με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή αφού προηγουμένως το ολοκλήρωμα της έξ. (1.53) αναπτυχθεί σε σειρά. Τα αποτελέσματα ενός παρόμοιου υπολογισμού δίνονται στον Πίνακα 1-1 για τιμές της μεταβλητής z από 0.00 έως 3.00 σε βήματα 0.01 και για τιμές του z από 3.0 έως 5.9 σε βήματα 0.1. οι τιμές που περιέχονται στον πίνακα αντιπροσωπεύουν την αντίστοιχη γραμμοσκιασμένη περιοχή του σχήματος. Είναι αξιο να σημειωθεί ότι η πιθανότητα μειώνεται στα 50 % για απόκλιση περίπου $\frac{2}{3} \sigma$. Απόκλιση μιας τυπικής απόκλισης έχει πιθανότητα μικρότερη από 32 %, δύο τυπικών αποκλίσεων μικρότερη από 5 % και τριών

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-1. Όλοκληρωμένη πιθανότητα Gauss $A_G(z, \mu, \sigma)$ ως προς την απόκλιση προς τον μέσο σε μονάδες τυπικής απόκλισης $z = |x - \mu| / \sigma$ {P.R. Bevington, Data Reduction and Error Analysis in the Physical Sciences, McGraw-Hill, 1969}.



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0	.00798	.01596	.02393	.03191	.03988	.04784	.05581	.06376	.07171
0.1	.07966	.08759	.09552	.10343	.11134	.11924	.12712	.13499	.14285	.15069
0.2	.15852	.16633	.17413	.18191	.18967	.19741	.20514	.21284	.22052	.22818
0.3	.23582	.24344	.25103	.25860	.26614	.27366	.28115	.28862	.29605	.30346
0.4	.31084	.31819	.32551	.33280	.34006	.34729	.35448	.36164	.36877	.37587
0.5	.38292	.38995	.39694	.40389	.41080	.41768	.42452	.43132	.43809	.44481
0.6	.45149	.45814	.46474	.47131	.47783	.48431	.49075	.49714	.50350	.50981
0.7	.51607	.52230	.52847	.53461	.54070	.54674	.55274	.55870	.56461	.57047
0.8	.57629	.58206	.58778	.59346	.59909	.60467	.61021	.61570	.62114	.62653
0.9	.63188	.63718	.64243	.64763	.65278	.65789	.66294	.66795	.67291	.67783
1.0	.68269	.68750	.69227	.69699	.70166	.70628	.71085	.71538	.71985	.72428
1.1	.72866	.73300	.73728	.74152	.74571	.74985	.75395	.75799	.76199	.76595
1.2	.76985	.77371	.77753	.78130	.78502	.78869	.79232	.79591	.79945	.80294
1.3	.80639	.80980	.81316	.81647	.81975	.82298	.82616	.82930	.83240	.83546
1.4	.83848	.84145	.84438	.84727	.85012	.85293	.85570	.85845	.86112	.86377
1.5	.86638	.86895	.87148	.87397	.87643	.87885	.88123	.88358	.88588	.88816
1.6	.89039	.89259	.89476	.89689	.89898	.90105	.90308	.90507	.90703	.90896
1.7	.91086	.91272	.91456	.91636	.91813	.91987	.92158	.92326	.92491	.92654
1.8	.92813	.92969	.93123	.93274	.93422	.93568	.93711	.93851	.93988	.94123
1.9	.94256	.94386	.94513	.94638	.94761	.94882	.95000	.95115	.95229	.95340
2.0	.95449	.95556	.95661	.95764	.95864	.95963	.96059	.96154	.96247	.96338
2.1	.96426	.96513	.96599	.96682	.96764	.96844	.96922	.96999	.97074	.97147
2.2	.97219	.97289	.97358	.97425	.97490	.97555	.97617	.97679	.97739	.97797
2.3	.97855	.97911	.97965	.98019	.98071	.98122	.98172	.98221	.98268	.98315
2.4	.98360	.98404	.98446	.98489	.98531	.98571	.98610	.98648	.98686	.98722
2.5	.98758	.98792	.98826	.98859	.98891	.98922	.98953	.98983	.99012	.99040
2.6	.99067	.99094	.99120	.99146	.99171	.99195	.99218	.99241	.99264	.99285
2.7	.99306	.99327	.99347	.99366	.99385	.99404	.99422	.99439	.99456	.99473
2.8	.99489	.99504	.99520	.99534	.99549	.99563	.99576	.99589	.99602	.99615
2.9	.99627	.99638	.99650	.99661	.99672	.99682	.99692	.99702	.99712	.99721
	.00		.10		.20		.30		.40	
3.0	.9973002		.9980648		.9986257		.99903315		.99932614	
3.5	.99953474		.99968178		.99978440		.99985530		.999903805	
4.0	.999936656		.999958684		.999973308		.999982920		.999989174	
4.5	.9999932043		.9999957748		.9999973982		.9999984132		.9999990449	
5.0	.99999942657		.99999966024		.99999980061		.99999988410		.99999993327	
5.5	.99999996193		.99999997847		.99999998793		.99999999328		.99999999627	



τυπικών αποκλίσεων μικρότερη από 1 %. Μέ άλλα λόγια σέ ένα πείραμα μέ μεγάλο άριθμό μετρήσεων περιμένουμε ότι τά 68 % τών σημείων θά απέχουν από τόν μέσο λιγώτερο από μιά τυπική απόκλιση, τά 95 % λιγώτερο από δύο καί τά 99 % λιγώτερο από τρεῖς τυπικές αποκλίσεις.

Μέ τή βοήθεια τοῦ Πίνακα 1-1 μπορούμε νά όρίσουμε μιά τελευταία παράμετρο πού συμβατικά αναφέρεται στή βιβλιογραφία γιά τήν άπόδοση μετρήσεων πού όκολουθοῦν τήν κανονική κατανομή. Τό πιθανό σφάλμα (Π.Σ.) όρίζεται ως ή τιμή τής μεταβλητής $x = z\sigma$ γιά τήν όποία ή ολοκληρωμένη πιθανότητα παίρνει τήν τιμή 0.5, ήτοι ή τιμή x γιά τήν όποία

$$A_G(z, \mu, \sigma) = 0.5 \quad (1.54)$$

Άπό τόν Πίνακα 1-2 ή σχέση μεταξύ τοῦ Π.Σ. καί τής τυπικής απόκλισης μπορεί νά προσδιοριστεῖ ως

$$\text{Π.Σ.} = 0.6745 \sigma = 0.2865 \Gamma. \quad (1.55)$$

1-9 Μετάδοση τοῦ Πειραματικοῦ Σφάλματος

Σπάνια τό άποτέλεσμα μιᾶς μετρήσεως άποτελεῖ καί τό τέλος τής πειραματικῆς προσπάθειας. Συνήθως, στόχος τοῦ πειράματος εἶναι ό προσδιορισμός μιᾶς ποσότητας πού γιά τόν ύπολογισμό της άπαιτεῖται ή γνώση περισσοτέρων από ένα φυσικῶν μεγεθών. Ὡς πολύ άπλό παράδειγμα μπορούμε νά θεωρήσουμε τόν όγκο ενός όρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, όπου χρειάζεται νά μετρήσουμε ανεξάρτητα τίς τρεῖς του διαστάσεις. Καθεμιά επιμέρους μέτρηση καταλήγει σέ μιά έκτίμηση τής "πραγματικῆς" τιμῆς τοῦ αντίστοιχου φυσικοῦ μεγέθους καί σέ μιά έκτίμηση τής άβεβαιότητας στόν προσδιορισμό τής "πραγματικῆς" τιμῆς. Άπό τίς πληροφορίες

αυτές και σύμφωνα με κάποια φυσική σχέση θα πρέπει να υπολογίσουμε την "πραγματική" τιμή του σύνθετου μεγέθους και την άβεβαιότητα του αποτελέσματος. Είναι επομένως ενδιαφέρον να εξετάσουμε τη μετάδοση της άβεβαιότητας μιας πειραματικής μετρήσεως στο τελικό αποτέλεσμα κατά την εκτέλεση μαθηματικών πράξεων με τιμές άλλων φυσικών μεγεθών που προέρχονται από μετρήσεις.

Ας θεωρήσουμε τη γενική περίπτωση όπου ζητείται η τιμή της ποσότητας z , η οποία είναι συνάρτηση n μεταβλητών x_k , $k = 1, \dots, n$

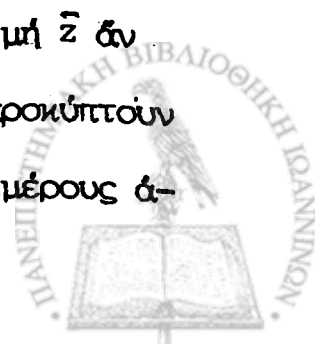
$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.56)$$

Θα θεωρήσουμε άοιμη ότι η τιμή των μεταβλητών x_k είναι γνωστή ως \bar{x}_k από N_k ανεξάρτητες μετρήσεις για κάθε μεταβλητή, με αντίστοιχη άβεβαιότητα σ_k . Για καθεμιά δηλαδή μεταβλητή x_k έχουμε στη διάθεσή μας N_k μετρήσεις που θα συμβολίσουμε ως x_{ki} , $i = 1, \dots, N_k$. Η ποσότητα σ_k μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις παραμέτρους που έχουμε ορίσει ως τώρα, ήτοι η τυπική απόκλιση, τό πιθανό σφάλμα ή η τυπική απόκλιση στον προσδιορισμό του μέσου. Ποιά είναι η άβεβαιότητα στον υπολογισμό της ποσότητας z διαμέσου της συναρτήσεως $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$;

Αν και σε ειδικές περιπτώσεις μπορεί να μην είναι άκριβες, θα θεωρήσουμε ότι η πλέον πιθανή τιμή για την ποσότητα z είναι η τιμή

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n). \quad (1.57)$$

Θεωρητικά θα μπορούσαμε να βρούμε την άβεβαιότητα στην τιμή \bar{z} αν δημιουργούσαμε μια μεγάλη κατανομή από τις τιμές z_i που προκύπτουν για όλους τους $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$ συνδιασμούς των επιμέρους αποτελεσμάτων x_{ki} , ήτοι



$$z_i = f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}) \quad (1.58)$$

Για ένα μεγάλο αριθμό μετρήσεων ο μέσος της κατανομής αυτής συμπιέπει με την εκτίμηση της έξ. (1.57), ενώ η τυπική απόκλιση σ_z δίνεται από την έξ. (1.17)

$$\sigma_z^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i - \bar{z})^2 \right]. \quad (1.59)$$

Αν παραδεχτούμε ότι η απόκλιση $z_i - \bar{z}$ καθορίζεται από τις επιμέρους εκτιμήσεις της έξ. (1.58) είναι μικρή, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Taylor και να γράψουμε σε πρώτη προσέγγιση

$$z_i - \bar{z} = \sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_k) \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (1.60)$$

όπου η μερική παράγωγος δηλώνει διακρίση ως προς την μεταβλητή x_k με όλες τις άλλες μεταβλητές σταθερές στην αντίστοιχη μέση τιμή. Συνδιάζοντας τις έξ. (1.59) και (1.60) μπορούμε να εκφράσουμε την αβεβαιότητα σ_z ως συνάρτηση των τυπικών αποκλίσεων σ_i των μεταβλητών x_i

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_k) \frac{\partial f}{\partial x_k} \right]^2 \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_k)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{\substack{k, \ell=1 \\ k \neq \ell}}^n (x_{ki} - \bar{x}_k) (x_{\ell i} - \bar{x}_\ell) \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_\ell} \right) \right] \right\} \quad (1.61) \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος της τελευταίας έκφρασης μπορεί να γραφεί με τη βοή-



θεια του όρισμού της έξ. (1.17) ως

$$\sum_{k=1}^n \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{ki} - \bar{x}_k)^2 \right] \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \quad (1.62)$$

Ο δεύτερος όρος της έξ. (1.61) περιέχει τό άθροισμα γινομένων τών άποκλίσεων δύο διαφορετικών μεγεθών για δύο άνεξάρτητες μετρήσεις.

Αν πράγματι οι μετρήσεις είναι άνεξάρτητες τότε κατά μέσον όρο περιμένουμε ότι θετικές άποκλίσεις θά συνεισφέρουν τόσο συχνά όσο και άρνητικές άποκλίσεις. Στο όριο έπομένως $N \rightarrow \infty$ περιμένουμε ότι ο δεύτερος όρος της έξ (1.61) μηδενίζεται. Για η έπομένως άνεξάρτητες μετρήσεις πού προσδιορίζουν τις η μεταβλητές της συναρτήσεως $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ή άβεβαιότητα στην τιμή της έξ. (1.57) δίνεται από τή σχέση

$$\sigma_z^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \quad (1.63)$$

Η έξ. (1.63) αποτελεί μιά από τις σημαντικότερες σχέσεις της στατιστικής ανάλυσεως. θά έχουμε τήν εύκαιρία νά τήν χρησιμοποιήσουμε αρκετές φορές στή συνέχεια. Στο στάδιο αυτό θά έξετάσουμε τήν έφαρμογή της σέ όρισμένες άπλές συναρτήσεις πού προκύπτουν συχνά στή στατιστική ανάλυση.

Αν ή ποσότητα z προέρχεται από τό άθροισμα (ή τή διαφορά) δύο μεγεθών x και y

$$z = \alpha x + \beta y \quad (1.64)$$

όπου α και β είναι σταθεροί συντελεστές, τότε οι μερικές παράγωγοι της έξ. (1.63) δίνουν



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \beta.$$

Ἡ ἐξ. (1.63) παίρνει ἐπομένως τὴ μορφή

$$\sigma_z^2 = \alpha^2 \sigma_x^2 + \beta^2 \sigma_y^2 \quad (1.65)$$

ἢ

$$\sigma_z = \sqrt{\alpha^2 \sigma_x^2 + \beta^2 \sigma_y^2}. \quad (1.66)$$

Κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο, ἂν z προέρχεται ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμό δύο μεγεθῶν

$$z = \alpha xy \quad (1.67)$$

οἱ μερικὲς παράγωγοι γίνονται

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \alpha x$$

καί ἡ ἐξ. (1.63) παίρνει τὴν εἰδικὴ μορφή

$$\sigma_z^2 = \alpha^2 y^2 \sigma_x^2 + \alpha^2 x^2 \sigma_y^2 \quad (1.68)$$

πού μπορεῖ νὰ ἀποδοθεῖ μέ τὴν περισσότερο συμμετρικὴ σχέση

$$\frac{\sigma_z^2}{z^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}. \quad (1.69)$$

Οἱ ἐξ. (1.65) καί (1.69) μποροῦν νὰ γενικευθοῦν κατὰ προφανή τρόπο στὴν περίπτωσι ἀθροίσματος ἢ γινομένου πολλῶν μεταβλητῶν. Οἱ



αντίστοιχες γενικές εκφράσεις της άβεβαιότητας σ_z δίνονται στις πρώτες δύο σειρές του Πίνακα 1-2. Ο ίδιος πίνακας περιέχει ακόμη τις αντίστοιχες εκφράσεις της άβεβαιότητας για μερικές συνήθεις συναρτήσεις, που μπορούν να επαληθευτούν εύκολα με τη βοήθεια της Εξ. (1.63).

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-2: Άβεβαιότητα σ_z στον προσδιορισμό της κοσότητας $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ από n ανεξάρτητες μετρήσεις των μεταβλητών x_k με αντίστοιχη άβεβαιότητα σ_k για συνήθεις μαθηματικές συναρτήσεις.

Συνάρτηση	Άβεβαιότητα
Άθροισμα	
$z = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$	$\sigma_z^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \sigma_k^2$
Γινόμενο	
$z = \alpha \prod_{i=1}^n x_k$	$\frac{\sigma_z}{z} = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{x_k}$
Δύναμη	
$z = \alpha x^\beta$	$\frac{\sigma_z}{z} = \beta \frac{\sigma_x}{x}$
Εκθετική συνάρτηση	
$z = \alpha e^{\beta x}$	$\frac{\sigma_z}{z} = \beta \sigma_x$
Λογάριθμος	
$z = \alpha \ln(\beta x)$	$\sigma_z = \alpha \frac{\sigma_x}{x}$



1-10 Έκτίμηση του Μέσου και του Πειραματικού Σφάλματος

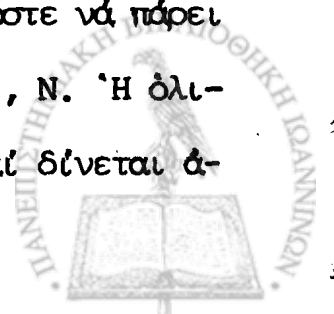
Στήν παράγραφο i-6 δεχτήκαμε χωρίς απόδειξη ότι η καλύτερη εκτίμηση για τον μέσο του θεωρητικού πληθυσμού δίνεται από τη μέση τιμή των μετρήσεων x_i . Η δικαιολόγηση της παραδοχής αυτής στηρίζεται στην κατανομή Gauss. Γενικά περιμένουμε ότι ο θεωρητικός πληθυσμός θα είναι είτε κατανομή Gauss είτε κατανομή Poisson. Στα περισσότερα όμως φυσικά φαινόμενα όπου ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι συνθήκες των έξ. (1.37) και (1.47) οι δύο κατανομές συμπίπτουν και μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $P_G(x, \mu, \sigma)$ για την απόδοση του θεωρητικού πληθυσμού. Θα θεωρήσουμε δηλαδή ότι η πιθανότητα ώστε μια μέτρηση του μεγέθους x να δώσει την τιμή x_i είναι $P_i dx_i$, όπου

$$P_i = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (1.70)$$

Γενικά η τιμή του μέσου μ στη συνάρτηση της έξ. (1.70) δέν είναι γνωστή. Εκείνο που έχει στη διάθεσή του ο παρατηρητής είναι μια σειρά από N μετρήσεις x_i , $i = 1, \dots, N$ και μια εκτίμηση του μέσου μ' που προέρχεται από τα πειραματικά του δεδομένα. Ο παρατηρητής μπορεί επομένως να εκτιμήσει την πιθανότητα για ένα αποτέλεσμα με τιμή x_i σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$P_i = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (1.71)$$

Και επέκταση μπορεί να εκτιμήσει την ολική πιθανότητα ώστε να πάρει σε ένα πείραμα τις συγκεκριμένες N τιμές x_i , $i = 1, \dots, N$. Η ολική αυτή πιθανότητα είναι συνάρτηση της παραμέτρου μ' και δίνεται από το γινόμενο των επιμέρους πιθανοτήτων της έξ. (1.71)



ή

$$\mu' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \equiv \bar{x} \quad (1.75)$$

πού με τόν τρόπο αυτό δικαιολογεῖ τήν προηγούμενη ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (1.20).

Ἡ ἀνάλυση πού ὁδηγεῖ στό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (1.75) περιέχει μιᾶ ἐπιπλέον σιωπηρή παραδοχή πού εἶναι ἐνδεχόμενο νά μήν ἀληθεύει σέ ὁρισμένες περιπτώσεις. Κατά τή δημιουργία τῆς πιθανότητας $P(\mu')$ χρησιμοποιήσαμε τήν ἴδια μέση ἀπόκλιση γιά ὅλα τά δεδομένα x_i . Μέ ἄλλα λόγια δεχτήκαμε ὅτι ὅλα τά δεδομένα προέρχονται ἀπό τόν ἴδιο θεωρητικό πληθυσμό. Παρόλα αὐτά σέ πολλές περιπτώσεις συμβαίνει ἕνα μέρος τῶν δεδομένων νά ἔχει ληφθεῖ μέ διαφορετική ἀκρίβεια ἀπό τά ὑπόλοιπα. Ἄν οἱ παρατηρήσεις π.χ. ἔχουν γίνει μέ ὄργανο ἠλεκτρονικῶν μετρήσεων εἶναι δυνατόν μέρος τῶν μετρήσεων νά ἔχει γίνει μέ διαφορετική κλίμακα τοῦ ὄργανου καί ἐπομένως μέ αὐξημένη ἢ μειωμένη ἀκρίβεια. Μποροῦμε νά συμπεριλάβουμε τά δεδομένα αὐτά στό πείραμά μας ἂν θεωρήσουμε ὅτι προέρχονται ἀπό διαφορετικό θεωρητικό πληθυσμό μέ τόν ἴδιο μέσο ἀλλά διαφορετική τυπική ἀπόκλιση.

Γενικά, θεωρώντας διαφορετική ἀβεβαιότητα σ_i γιά κάθε ἐπιμέρους τιμή x_i μποροῦμε νά γράψουμε τήν πιθανότητα $P(\mu')$ τῆς ἐξ. (1.72) ὡς

$$P(\mu') = \left[\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i} \right)^2 \right]. \quad (1.76)$$

Χρησιμοποιώντας τήν ἀρχή τῆς μέγιστης πιθανότητας ἢ συνθήκη πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἐξ. (1.47) δίνει τώρα

$$\frac{\partial}{\partial \mu'} \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \mu'} \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i} \right)^2$$



$$= 2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i^2} \right) = 0 \quad (1.78)$$

$$\eta \quad \mu' = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (1.79)$$

όπου η συνεισφορά κάθε σημείου x_i των δεδομένων στην εκτίμηση του μέσου είναι αντίστροφα ανάλογη προς τη διακύμανσή του σ_i^2 .

Η ποσότητα της έξ. (1.75) ή (1.79) είναι η καλύτερη εκτίμηση που μπορεί να κάνει ο παρατηρητής για την "πραγματική" τιμή του φυσικού μεγέθους που μετράει με βάση τα δεδομένα του πειράματος. Ποιά όμως είναι η άβεβαιότητα στην εκτίμηση αυτή; Με άλλα λόγια, ποιά ποσότητα μπορεί να αναφέρει ο παρατηρητής, η οποία να χαρακτηρίζει την απόκλιση του μέσου από την "πραγματική" τιμή;

Η έξ. (1.63) παρέχει τη σχέση που δίνει την άβεβαιότητα στον προσδιορισμό του μέσου από τις επίμερους άβεβαιότητες, σε κάθε μέτρηση του πειράματος. "Αν καθένα από τα N δεδομένα του πειράματος έχει ληφθεί με αντίστοιχη τυπική απόκλιση σ_i , η τυπική απόκλιση στον προσδιορισμό του μέσου σ_μ δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_\mu^2 = \sum_{i=1}^N \left[\sigma_i^2 \left(\frac{\partial \mu'}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (1.80)$$

Στην απλή περίπτωση της έξ. (1.75) όπου όλα τα δεδομένα ανήκουν στον ίδιο θεωρητικό πληθυσμό με τυπική απόκλιση $\sigma = \sigma_i$, η παράγωγος της έξ. (1.80) δίνει



$$\frac{\partial \mu'}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right] = \frac{1}{N} \quad (1.81)$$

καί ἡ τυπική ἀπόκλιση στὸν προσδιορισμὸ τοῦ μέσου εἶναι

$$\sigma_{\mu'}^2 = \sum_{i=1}^N \left[\sigma^2 \left(\frac{1}{N} \right)^2 \right] = \frac{\sigma^2}{N}. \quad (1.82)$$

Ἄν ἡ ἀκρίβεια κάθε ἐπιμέρους μετρήσεως εἶναι διαφορετική, ἡ ἐκτίμηση τοῦ μέσου δίνεται ἀπὸ τὴν ἐξ. (1.79) καί ἡ ἀντίστοιχη παράγωγος τῆς ἐξ. (1.80) παίρνει τὴ μορφή

$$\frac{\partial \mu'}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}.$$

Ἀντικατάσταση τῆς παραγώγου στὴν ἐξ. (1.80) δίνει τὴ γενική ἔκφραση γιὰ τὴν τυπική ἀπόκλιση τῆς ἐκτιμήσεως τοῦ μέσου

$$\sigma_{\mu'}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (1.83)$$

Ἡ ἀβεβαιότητα σ_{μ} τῆς ἐξ. (1.82) ἢ (1.83) εἶναι συνήθως ἡ ποσότητα πού ἀναφέρεται σὲ κάθε μέτρηση ὡς τὸ πειραματικὸ σφάλμα τῆς μετρήσεως. Ἡ στατιστικὴ τῆς ἔννοια ἐξάγεται ἀπὸ τὴ μέθοδο τῆς προηγούμενης ἀναλύσεως: Ἡ ποσότητα σ_{μ} εἶναι ἡ τυπική ἀπόκλιση τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ πού ἀκολουθοῦν οἱ ἐκτιμήσεις τῆς "πραγματικῆς" τιμῆς τοῦ

φυσικού μεγέθους πού μετράται, αν τό πείραμα τών N μετρήσεων έπαναληφθεϊ πολλές φορές. Σύμφωνα μέ τήν έρμηνεία πού δώσαμε στήν παράγραφο 1-9, ή έκτίμηση μ' έχει πιθανότητα 68 % νά διαφέρει από τήν "πραγματική" τιμή κατά μιá ποσότητα μικρότερη από σ_{μ} .

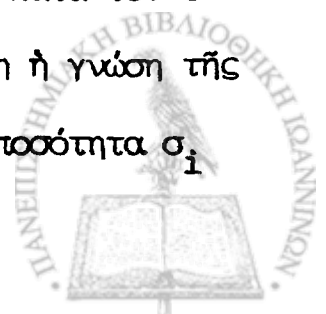
Ή έξ. (1.82) δίνει τό πειραματικό σφάλμα σ_{μ} σέ σχέση μέ τήν τυπική απόκλιση σ του θεωρητικού πληθυσμού τών δεδομένων. Όπως είδαμε στήν παράγραφο 1-6, ή καλύτερη έκτίμηση πού μπορούμε νά κάνουμε για τήν παράμετρο σ μέ βάση τά δεδομένα του πειράματος είναι

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu')^2} \quad (1.84)$$

Συνδιάζοντας έπομένως τήν τελευταία σχέση μέ τίς έξ. (1.75) και (1.82) μπορούμε νά γράψουμε για τό πειραματικό σφάλμα

$$\sigma_{\mu} \approx s_{\mu} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (1.85)$$

Ή τελευταία σχέση έπιτρέπει τόν υπολογισμό του πειραματικού σφάλματος αποκλειστικά από τά δεδομένα του πειράματος. Ή διαδικασία αυτή δέν είναι δυνατή στήν περίπτωση δεδομένων πού έχουν ληφθεϊ μέ διαφορετική άφιβεια. Όπως δείχνουν οι έξ. (1.79) και (1.83) για τήν έκτίμηση του μέσου και του πειραματικού σφάλματος είναι άπαραίτητη ή γνώση τής έπιμέρους άβεβαιότητας σ_i κάθε μετρήσεως. Ή τυπική απόκλιση σ_i κάθε μετρήσεως μπορεί νά είναι γνωστή από προηγούμενα πειράματα. Παρόλα αυτά μπορούμε νά παρατηρήσουμε ότι κατά τόν υπολογισμό του μέσου στήν έξ. (1.79) δέν είναι άπαραίτητη ή γνώση τής άπόλυτης έπιμέρους άβεβαιότητας κάθε σημείου. "Αν κάθε ποσότητα σ_i πολλαπλασιαστεί μέ ένα σταθερό παράγοντα α



$$\sigma_i' = \alpha \sigma_i$$

ή αριθμητική τιμή του μέσου μένει αμετάβλητη. Είναι δυνατόν επομένως να υπολογίσουμε τον μέσο μιας σειράς δεδομένων x_i , $i = 1, \dots, N$ που έχουν ληφθεί με διαφορετική ακρίβεια αν είναι γνωστή ή σχετική άβεβαιότητα κάθε σημείου. Μπορούμε ακόμη να μετασχηματίσουμε την έξ. (1.83) ώστε να περιέχει την ίδια δυνατότητα.

Για το σκοπό αυτό θα ορίσουμε τη μέση διακύμανση $\bar{\sigma}^2$ των σημείων x_i με την προφανή σχέση

$$\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}{N} \quad (1.86)$$

Η ποσότητα

$$\frac{\frac{1}{\sigma_i'^2}}{\frac{1}{\bar{\sigma}^2}} = \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_i^2} \quad (1.87)$$

μπορεί τώρα να ληφθεί ως τό μέτρο της σχετικής συνεισφοράς κάθε σημείου x_i στην ολική άβεβαιότητα της εκτιμήσεως του μέσου. Ως καλύτερη εκτίμηση της ποσότητας αυτής θα γράψουμε, σε αναλογία με την έξ. (1.85), την έκφραση

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_i^2} (x_i - \mu')^2 = \frac{N}{N-1} \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} (x_i - \mu')^2}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (1.88)$$



Μέ τη βοήθεια τῆς ἐξ. (1.82), ἡ ἔκφραση αὐτή δίνει γιὰ τὴν τυπικὴ ἀπόκλιση τοῦ μέσου

$$\sigma_{\mu} = s_{\mu} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i} (x_i - \mu')^2}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i}}} \quad (1.89)$$

πού ἀφενὸς μπορεῖ νὰ ὑπολογιστεῖ ἀπὸ τὰ δεδομένα x_i ἐνῶ ἀφετέρου, ὅπως καὶ ἡ ἐξ. (1.79), ἐξαρτᾶται μόνο ἀπὸ τὴ σχετικὴ ἀκρίβεια τῶν ἐπιμέρους μετρήσεων.

1-11 Ἡ Μέτρηση ἑνὸς Φυσικοῦ Μεγέθους

Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ προσπαθήσαμε νὰ συγκεντρώσουμε ὅλες τὶς ἀπαραίτητες ἔννοιες καὶ μεθόδους πού θὰ μᾶς ἐπιτρέψουν νὰ ἐξάγουμε τὶς περισσότερες δυνατὲς πληροφορίες ἀπὸ τὴ μέτρηση ἑνὸς φυσικοῦ μεγέθους. Εἶναι χρήσιμο νὰ κλείσουμε τὸ κεφάλαιο μὲ μιὰ σύντομη ἀνοικεφαλαίωση τῶν βασικῶν ἐνοιῶν πού ὑπεισέρχονται στὴν ἀνάλυση τῶν δεδομένων. Θὰ συγκεντρώσουμε ἀκόμη ὅλες τὶς χρήσιμες σχέσεις γιὰ τὴν ἐκτίμηση τῶν στατιστικῶν παραμέτρων οἱ ὁποῖες περιέχουν τὶς πληροφορίες πού ἀναζητᾶ ἡ μέτρηση.

Μέτρηση εἶναι ἐξ ὀρισμοῦ ἡ διεργασία κατὰ τὴν ὁποία ἓνα φυσικὸ μέγεθος συγκρίνεται πρὸς μιὰ μονάδα πού ἔχει ἐπιλεγεῖ γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτό. Ἡ σύγκριση μπορεῖ νὰ γίνῃ εἴτε ἀπευθεῖας (π.χ. μέτρηση μήκους) ἢ συνηθέστερα μὲ τὴ βοήθεια ὀργάνων, δηλαδὴ συσκευῶν πού ἀπὸ προηγούμενη σύγκριση μὲ τὴ μονάδα μετρήσεως παρέχουν τὸ ἀποτέλεσμα σὲ κατάλληλη κλίμακα. Γιὰ τὴν προκαταρκτικὴ σύγκριση τοῦ ὀργάνου μὲ τὴ μονά-

δα μετρήσεως και τή δημιουργία τής κλίμακας χρησιμοποιήσαμε τόν ορο βαθμονόμηση.

Καμμιά μέτρηση δέν μπορεί νά πραγματοποιηθεῖ μέ απόλυτη ακρίβεια. Κατά τή διεξαγωγή τής μετρήσεως υπεισέρχονται σφάλματα πού στήν παράγραφο 1-1 κατατάξαμε σέ τρεῖς μεγάλες κατηγορίες: ἀπαράδεκτα, συστηματικά και τυχαία. Ἐάν και οἱ δύο πρώτες κατηγορίες περιέχουν σφάλματα πού πολλές φορές ἐπιηρεάζουν ἢ καταστρέφουν μιὰ μέτρηση ἢ ἐπανόρθωσή τους εἶναι εἴτε πολύ ἀπλή εἴτε ἀδύνατη. Γιά τό λόγο αὐτό στό υπόλοιπο τοῦ κεφαλαίου ἀσχοληθήκαμε μέ τά τυχαία σφάλματα πού ἀφείλονται σέ ἕνα μεγάλο ἀριθμό παραγόντων ἔξω ἀπό τόν ἔλεγχο τοῦ παρατηρητή.

Σέ ἕνα τυπικό πείραμα ἐπιστημονικῆς μετρήσεως θεωρήσαμε ὅτι, μετά τή διεξαγωγή τοῦ πειράματος, ὁ παρατηρητής διαθέτει N τιμές τοῦ φυσικοῦ μεγέθους x πού προέρχονται ἀπό ἰσάριθμες μεμονωμένες μετρήσεις. Οἱ μετρήσεις αὐτές x_i , $i = 1, \dots, N$ ἀποτελοῦν ἕνα δεῖγμα $f_N(x)$ τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ $P(x)$ πού χαρακτηρίζει τό φυσικό μέγεθος και τίς συνθήκες τοῦ πειράματος. Γιά ἕνα μεγάλο ἀριθμό μετρήσεων ἢ κατανομή $f_N(x)$ τείνει πρός τόν θεωρητικό πληθυσμό, ἥτοι

$$P(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x). \quad (1.7)$$

Σύμφωνα μέ τή σχέση αὐτή οἱ ἐκτιμήσεις τῶν στατιστικῶν παραμέτρων πού ἐξάγονται ἀπό τό δεῖγμα κατανομῆς τείνουν πρός τίς ἀντίστοιχες παραμέτρους τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Ἐτσι ὀρίσαμε τόν μέσο μ τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ ὡς τό ὄριο τῆς μέσης τιμῆς τῶν δεδομένων

$$\mu \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right]$$

(1.11)



Στις περισσότερες περιπτώσεις η παράμετρος αυτή λαμβάνεται ως η "πραγματική" τιμή του φυσικού μεγέθους που μετράται. Η άσφαιβεια τής μετρήσεως εκφράζεται από τή διακύμανση σ^2 που ορίζεται ως τό όριο του άθροίσματος τών τετραγώνων τών αποκλίσεων από τόν μέσο

$$\sigma^2 \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \right] \quad (1.17)$$

ή τήν τυπική απόκλιση σ .

"Αν ό θεωρητικός πληθυσμός ικανοποιεί τή συνθήκη

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1 \quad (1.19)$$

τότε ή ποσότητα $P(x) dx$ εκφράζει τήν πιθανότητα, ώστε μιá μεμονωμένη μέτρηση νά δώσει άποτέλεσμα μέσα στό διάστημα dx γύρω από τήν τιμή x . Μέ τήν έρμηνεία αυτή μπορέσαμε νά εκφράσουμε τόν μέσο καί τήν τυπική απόκλιση ως συναρτήσεις του θεωρητικού πληθυσμού

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x) dx \quad (1.18)$$

καί

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P(x) dx. \quad (1.19)$$

"Αν ή συναρτησιακή μορφή του θεωρητικού πληθυσμού δέν είναι γνωστή, ή καλύτερη εκτίμηση τών στατιστικών παραμέτρων δίνεται από τίσ εκφράσεις

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1.20)$$



και

$$\sigma^2 = s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.24)$$

όπου s είναι η πειραματική τυπική απόκλιση.

Στή συνέχεια του κεφαλαίου εξετάσαμε τη διώνυμη κατανομή

$$P_B(x, n, p) = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \quad (1.30)$$

πού εκφράζει την πιθανότητα ώστε, σε ένα σύνολο n αντικειμένων, x από αυτά να βρεθούν σε μία κατάσταση με επιμέρους πιθανότητα p . Με τη βοήθεια των έξ. (1.18) και (1.19) μπορέσαμε άκόμη να υπολογίσουμε τις στατιστικές παραμέτρους πού χαρακτηρίζουν τη διώνυμη κατανομή

$$\mu = np$$

$$\text{και } \sigma^2 = np(1-p). \quad (1.33)$$

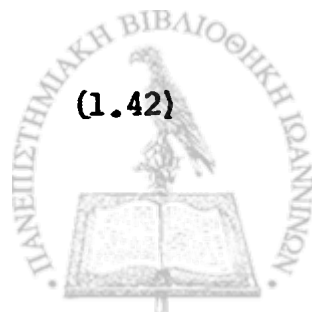
Η διώνυμη κατανομή δίνει απλές και χρήσιμες προσεγγίσεις για άσυμπτωτικές τιμές των παραμέτρων της και κάτω από συνθήκες πού συχνά ικανοποιούνται σε πειραματικές μετρήσεις. Για

$$p \ll 1, \quad \mu = np \ll n \quad (1.37)$$

η διώνυμη κατανομή τείνει προς την κατανομή Poisson

$$P_p(x, \mu) \equiv \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \quad (1.42)$$

μέ μέσο μ και τυπική απόκλιση



$$\sigma = \sqrt{\mu} \quad (1.46)$$

Ἡ κατανομή Poisson εἶναι χρήσιμη σέ πειράματα μετρήσεως γεγονότων ἀνά μονάδα χρόνου, ὅπως συνήθως συμβαίνει στήν ἀτομική καί πυρηνική φυσική. Εἶναι μιὰ ἀσυμμετρική κατανομή μέ αὐξανόμενη συμμετρία στό ὄριο $\mu \gg 1$. Στό ὄριο αὐτό, ἦτοι

$$n \rightarrow \infty, \quad np \gg 1 \quad (1.47)$$

συμπίπτει μέ μιὰ ἄλλη προσέγγιση τῆς δυνάμης κατανομῆς, τήν κατανομή Gauss ἢ κανονική κατανομή

$$P_G(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (1.48)$$

Ὁ μέσος μ καί ἡ τυπική ἀπόκλιση σ τῆς κατανομῆς συμπίπτουν μέ τίς ἀντίστοιχες μεταβλητές τῆς συναρτήσεως. Δύο ἄλλες παράμετροι πού συχνά χρησιμοποιοῦνται γιά τήν ἀπόδοση τῆς διασπορῆς τῶν πειραματικῶν μετρήσεων εἶναι τό πλήρες εὔρος στό μισό τοῦ μέγιστου

$$\Gamma = 2.354 \sigma \quad (1.52)$$

καί τό πιθανό σφάλμα

$$\text{Π.Σ.} = 0.6745 \sigma = 0.2865 \Gamma. \quad (1.55)$$

Ἡ συνάρτηση

$$A_G(z, \mu, \sigma) = \int_{\mu - z\sigma}^{\mu + z\sigma} P_G(x, \mu, \sigma) dx \quad (1.53)$$



πού ονομάσαμε ολοκληρωμένη πιθανότητα εκφράζει την πιθανότητα ώστε μια μέτρηση να δώσει αποτέλεσμα με απόκλιση από τον μέσο μικρότερη από την ποσότητα $z\sigma$. Η αριθμητική τιμή της συναρτήσεως $A_G(z, \mu, \sigma)$ δίνεται στον Πίνακα 1-1 ως συνάρτηση της τυπικής αποκλίσεως σ . Σε πολλές περιπτώσεις ο Πίνακας 1-1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανακάλυψη έσφαλμένων μετρήσεων. Αν π.χ. σε ένα δείγμα κατανομής με $N = 50$, ένα από τα σημεία αποκλίνει περισσότερο από 3σ από τον μέσο, είναι πολύ πιθανό ότι το σημείο αυτό αντιπροσωπεύει κάποιο απρόβλεπτο σφάλμα και μπορεί να παραληφθεί από τα δεδομένα.

Σε μια μέτρηση περιμένουμε ότι ο θεωρητικός πληθυσμός εκφράζεται είτε από τη συνάρτηση Poisson είτε από τη συνάρτηση Gauss. Για τις συνθήκες πολλών πειραματικών μετρήσεων στη φυσική οι δύο κατανομές συμπίπτουν. Στις περισσότερες επομένως πειραματικές μετρήσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κανονική κατανομή για την περιγραφή του θεωρητικού πληθυσμού. Με τη διαπίστωση αυτή και την αρχή της μέγιστης πιθανότητας δικαιολογήσαμε την εκτίμηση του μέσου από ένα δείγμα κατανομής με N δεδομένα

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (1.20)$$

Για άνιση άβεβαιότητα των δεδομένων ή αντίστοιχη εκτίμηση παίρνει τη μορφή

$$\mu \approx \mu' = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (1.79)$$



Τό πειραματικό σφάλμα πού συνήθως αναφέρεται † σέ μιá μέτρηση εἶναι ἡ τυπική απόκλιση στόν προσδιορισμό τοῦ μέσου σ_{μ}

$$\sigma_{\mu} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (1.82)$$

στήν περίπτωση ὅπου ὅλα τὰ δεδομένα ἔχουν ληφθεῖ μέ τήν ἴδια ἀκριβεία. Στήν ἀντίθετη περίπτωση

$$\sigma_{\mu}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (1.83)$$

Ἀπό τήν ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (1.24) γιά τήν τυπική απόκλιση μπορούμε νά ὑπολογίσουμε τήν ποσότητα σ_{μ} τῆς ἐξ. (1.82) ἀπό τὰ πειραματικά δεδομένα ὡς

$$\sigma_{\mu} = s_{\mu} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (1.85)$$

Ἡ ἀντίστοιχη ἔκφραση στήν περίπτωση ἀνίσης ἀκριβείας τῶν δεδομένων εἶναι

† Πολλοί ἐρευνητές χρησιμοποιοῦν τό πιθανό σφάλμα πού ὀρίζεται στήν ἐξ. (1.55) γιά τήν ἀπόδοση τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος, ἥτοι

$$(\text{Π.Σ.})_{\mu} = 0.6745 \sigma_{\mu}$$

Ἡ πρακτική αὐτή ἐμφανίζει τό πλεονέκτημα ὅτι ἡ στατιστική ἔννοια τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος εἶναι ἀπλούστερη (50 % πιθανότητα ἀποκλίσεως ἀπό τήν "πραγματική" τιμή). Ἐξάλλου, ἐπειδή $(\text{Π.Σ.})_{\mu} < \sigma_{\mu}$, ἡ μέτρηση δείχνει ἐκ πρώτης ὄψεως ἀκριβέστερη!

Καθόσον ἡ πρακτική αὐτή δέν εἶναι ἔννοια στή βιβλιογραφία ἡ ἐπιλογή τοῦ ἐρευνητή πρέπει πάντα νά ἐλέγχεται πρὶν ἀπό τήν χρησιμοποίηση τῶν ἀποτελεσμάτων μιᾶς πειραματικῆς μετρήσεως.

$$\sigma_{\mu} = s_{\mu} \approx \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i} (x_i - \mu')^2}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (1.89)$$

όπου η έκτιμηση του μέσου μ' δίνεται από την έξ. (1.79). Παρατηρείται ότι τόσο στην έξ. (1.79) όσο και στην έξ. (1.89) είναι απαραίτητη μόνο η γνώση της σχετικής ακρίβειας σ_i' των δεδομένων.

Οι έξ. (1.83) και (1.89) δίνουν δύο εναλλακτικές εκτιμήσεις του πειραματικού σφάλματος σ_{μ} . Στην πράξη, για ένα πεπερασμένο αριθμό N μετρήσεων, οι δύο αυτές εκτιμήσεις δεν συμπίπτουν αν και η διαφορά τους είναι συνήθως μικρή. Η πρακτική που ακολουθείται από πολλούς επιστήμονες είναι ο υπολογισμός του πειραματικού σφάλματος και από τις δύο εκφράσεις και η υιοθέτηση του αποτελέσματος με τη μεγαλύτερη αριθμητική τιμή.

Το αποτέλεσμα κάθε πειραματικής μετρήσεως αναφέρεται με δύο παραμέτρους ως

$$x \pm \sigma \quad (1.1)$$

όπου x αντιπροσωπεύει την καλύτερη δυνατή έκτιμηση της "πραγματικής" τιμής (συνήθως με τον μέσο της κατανομής) και σ την ακρίβεια της μετρήσεως (μέ τη μέση απόκλιση από τον μέσο σ_{μ} ή το πιθανό σφάλμα (Π.Σ.) $_{\mu}$). Μια έως περιττή παρατήρηση είναι ότι το μέγεθος του πειραματικού σφάλματος σ προσδιορίζει και το πλήθος των σημαντικών ψηφίων στην τιμή x . Συνήθως το πειραματικό σφάλμα περιέχει ένα ή το πολύ δύο σημαντικά ψηφία, ενώ τα σημαντικά ψηφία του αριθμού x προσδιορίζονται από το δεύτερο κανόνα της παραγράφου 1-3 σε σχέση με την πράξη που περιέ-

χεται στην έξ. (1.1). Δέν έχει π.χ. έννοιά νά αναφέρουμε τό αποτέλεσμα μιᾶς μετρήσεως ὡς 17.31564 ± 0.5 .

Ἡ στατιστική έννοια τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος μπορεῖ νά διατηρηθεῖ κατά τήν ἐκτέλεση ἀριθμητικῶν πράξεων μεταξύ ἀποτελεσμάτων πειραματικῶν μετρήσεων. Ὅπως εἶδαμε στήν παράγραφο 1-10 ἄν ἕνα φυσικό μέγεθος z ἐκφράζεται ἀπό τήν συνάρτηση

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.56)$$

ὅπου ἡ ἀριθμητική τιμή τῶν μεταβλητῶν x_k προέρχεται ἀπό n ἀνεξάρτητα πειράματα, τότε ὁ μέσος τοῦ μεγέθους z εἶναι

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (1.57)$$

καί ἡ ἀβεβαιότητα σ_z δίνεται ἀπό τήν ἐπιμέρους ἀβεβαιότητα σ_k τῶν μεταβλητῶν x_k σύμφωνα μέ τή σχέση

$$\sigma_z^2 = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \quad (1.62)$$

ὅπου ἡ τιμή τῆς παραγώγου $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ ὑπολογίζεται γιά $x_k = \bar{x}_k$. Μερικά παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῆς έξ. (1.62) δίνονται στόν Πίνακα 1-2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1-1. Πόσα σημαντικά ψηφία ἔχουν οἱ ἐπόμενοι ἀριθμοί

(α) 532.39

(β) 6200

(γ) 5.60×10^7

(δ) 20

(ε) 3.000

(στ) 7×10^{-3}

(ζ) 0.001

(η) 920×10^3

(θ) 8.32



1-2. Στρογγυλέψτε τούς επόμενους αριθμούς σε δύο σημαντικά ψηφία

(α) 7.045	(β) 99.5	(γ) 1.07
(δ) 9.999	(ε) 1.25	(στ) 5.6695
(ζ) 6.449	(η) 1.11	(θ) 1.352

1-3. Τρεις αντίστροφες 52.3 Ω, 0.616 Ω και 5.23 Ω συνδέονται σε σειρά. Προσδιορίστε την ολική αντίσταση. Αν η ολική αντίσταση διαρρέεται από ρεύμα 1.75 A προσδιορίστε την ισχύ IR^2 που καταναλώνεται.

1-4. Η βαθμολογία σαράντα φοιτητών που παρακολούθησαν ένα μάθημα του Δ' έτους ήταν

4.9	6.9	7.4	9.0
8.0	6.9	8.6	8.4
8.4	5.3	7.8	5.9
7.3	5.5	5.5	5.6
8.9	7.7	6.6	6.2
7.8	8.2	6.0	5.3
7.8	8.1	6.8	8.3
9.2	7.6	9.2	8.1
5.6	7.9	8.7	6.5
8.5	8.3	8.6	8.1

(α) Προσδιορίστε τον μέσο, τη διάμεσο και την πλέον πιθανή τιμή της κατανομής βαθμών.

(β) Υπολογίστε την τυπική απόκλιση της κατανομής

1-5. Η πιθανότητα ώστε ένα δέσμιο ηλεκτρόνιο να βρυσκείται σε απόσταση r από τον πυρήνα του ατόμου του υδρογόνου είναι

$$P(r) = cr^2 e^{-\frac{2r}{R}}$$

• όπου R μία σταθερά.

(α) Προσδιορίστε τη σταθερά c .

(β) Υπολογίστε τη μέση ακτίνα της τροχιάς του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου και την τυπική απόκλιση.

1-6. Επαληθεύστε το τελευταίο σκέλος στην εξ. (1.17), ήτοι ότι

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right] - \mu^2$$



- 1-7. Υπολογίστε τη διώνυμη κατανομή για $n = 6$, $p = \frac{1}{2}$ και τύς ακέραιες τιμές $0 < x < 6$. Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της κατανομής και σημειώστε τόν μέσο και τήν τυπική απόκλιση.
- 1-8. Επαναλάβετε τήν προηγούμενη άσκηση για τήν κατανομή Poisson.
- 1-9. Αποδείξτε ότι στήν κατανομή Poisson αν ο μέσος μ είναι ακέραιος, τότε ή πιθανότητα για $x = \mu$ είναι ίση μέ τήν πιθανότητα για $x = \mu - 1$.
- 1-10. Ποιά είναι ή πιθανότητα κατά τήν κατανομή Gauss ώστε να μετρηθεῖ μιὰ τιμή μέ απόκλιση $d = |x - \mu|$ όταν
 (α) $d = \sigma$
 (β) $d = \text{Π.Σ.}$
 (γ) $d = \frac{1}{2} \Gamma$
- 1-11. Σέ ἕνα πείραμα μέ 10 000 μετρήσεις πόσα σημεῖα θά περιμένατε να αποκλίνουν από τόν μέσο περισσότερο από 2σ , 3σ , $3(\text{Π.Σ.})$ καί Γ .
- 1-12. Επαληθεύστε τήν ἐξ. (1.32).
- 1-13. Επαληθεύστε τήν ἐξ. (1.33).
- 1-14. Προσδιορίστε τήν ἀβεβαιότητα σ_z στήν τιμή τοῦ z αν οἱ τιμές τῶν μεταβλητῶν x καί y προέρχονται ἀπό ἀνεξάρτητες μετρήσεις μέ ἀντίστοιχη ἀβεβαιότητα σ_x καί σ_y στίς ἐπόμενες περιπτώσεις
 (α) $z = a^{\beta x}$ (β) $z = ax^2$
 (β) $z = \frac{1}{2}(x+y)$ (δ) $z = \frac{1}{2}(x-y)$
 (ε) $z = x^2 + y^2$ (στ) $z = \frac{1}{2x}$
- 1-15. Αν ή διάμετρος ενός στρογγυλοῦ τραπεζιοῦ είναι γνωστή μέ ἀκρίβεια 1 %, μέ πόση ἀκρίβεια είναι γνωστή ή ἐπιφάνειά του; θά βελτιωνόταν ή ἀκρίβεια αν γνωρίζουμε τήν ἀκτίνα μέ ἀκρίβεια 1 %;
- 1-16. Μιὰ ἠλεκτρική συσκευή διαρρέεται ἀπό ρεῦμα 6.6 A σέ διαφορά δυναμικοῦ 218.3 V. Οἱ τιμές αὐτές ἔχουν μετρηθεῖ μέ ἀντίστοιχο πιθανό σφάλμα 0.05 A καί 0.2 V. Προσδιορίστε τήν

Ίσχή πού καταναλώνει ή συσκευή σέ Watt καί τό πιθανό σφάλμα.

1-17. Μιά αντίσταση R μέ τιμή περίπου 20 Ω διαρρέεται από ρεύμα του οποίου ή τιμή ἔχει μετρηθεῖ ὡς $I = 12.24 \pm 0.03$ A. Μέ πόση ἀκρίβεια πρέπει νά μετρηθεῖ ή αντίσταση R ὥστε τό πειραματικό σφάλμα στήν ἰσχή πού καταναλώνεται νά μήν ὑπερβαίνει περισσότερο ἀπό 10 % τό πειραματικό σφάλμα πού προκύπτει μόνο ἀπό τήν ἀβεβαιότητα στήν τιμή του ρεύματος;

1-18. Οἱ τιμές δύο ἀντιστάσεων ἔχουν μετρηθεῖ ὡς

$$R_1 = 62.31 \pm 0.04 \Omega$$

$$R_2 = 125.12 \pm 0.12 \Omega$$

Ποιά ή τιμή τῆς ὀλικῆς ἀντιστάσεως ἂν οἱ δύο ἀντιστάσεις συνδεθοῦν σέ σειρά; Ποιά ή αντίσταση ἂν συνδεθοῦν παράλληλα;

1-19. Τριάντα διαφορετικές μετρήσεις μιᾶς ἀντιστάσεως ἔδωσαν τίς τιμές

1.65	2.69	2.44
2.00	1.79	1.75
1.94	1.62	1.69
2.13	1.45	2.06
1.79	2.05	1.79
2.11	1.50	2.01
1.92	1.21	1.79
2.48	2.55	1.69
2.50	2.05	2.26
2.05	1.82	1.97

Οἱ μετρήσεις στήν τρίτη στήλη ἔχουν ληφθεῖ μέ διπλάσια ἀκρίβεια ($\frac{1}{2}$ σ) ἀπό τίς προηγούμενες. Προσδιορίστε τόν μέσο, τήν τυπική ἀπόκλιση καί τήν τυπική ἀπόκλιση του μέσου.



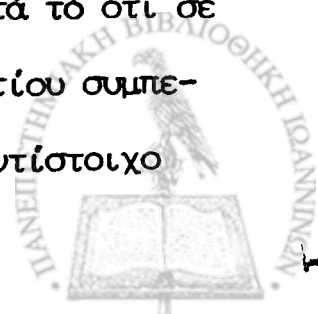
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ηλεκτρικά φαινόμενα

Ο ηλεκτρομαγνητισμός εξετάζει τὰ φυσικά φαινόμενα πού δημιουργούνται από τήν αλληλεπίδραση ηλεκτρικῶν φορτίων. Γνωρίζουμε σήμερα ότι τό ηλεκτρικό φορτίο εἶναι μιά ιδιότητα τῶν στοιχειωδῶν σωματίων τῆς ὕλης. Ἐμφανίζεται μέ δυνάμεις πού ἀναπτύσσονται μεταξύ σωματίων τὰ ὁποῖα ἔχουν αὐτή τήν ιδιότητα. Ὑπάρχουν δύο εἶδη φορτίων στή φύση πού παραδοσιακά ὀνομάζουμε θετικό καί ἀρνητικό. Ἀπό τὰ δύο σταθερά στοιχειώδη σωματῖα τῆς ὕλης, τό πρωτόνιο φέρει πάντα μιά σταθερή ποσότητα e θετικοῦ φορτίου καί τό ἠλεκτρόνιο ἴση ποσότητα ἀρνητικοῦ φορτίου. Σέ μονάδες πού θά ὀριστοῦν ἀργότερα, τό φορτίο τοῦ πρωτονίου εἶναι

$$e = 4.803 \times 10^{-10} \text{ ΗΣΜ-φ} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C.} \quad (2.1)$$

Ἡ ὀρολογία θετικό καί ἀρνητικό φορτίο εἶναι ἐπιτυχής κατά τό ὅτι σέ ὅλες τίς σχέσεις τοῦ ηλεκτρομαγνητισμοῦ, τὰ δύο εἶδη φορτίου συμπεριφέρονται ὡς ἀλγεβρικές βαθμωτές ποσότητες μέ πρόσημο ἀντίστοιχο



πρός τήν όνομασία τους.

Τά πρωτόνια άλληλεπιδροϋν μέ ούδετερόνια καί δημιουργοϋν τόν άτομικό πυρήνα. Τό ούδετερόνιο εΐναι ένα τρίτο στοιχειώδες σωματίο, σταθερό μόνο στό έσωτερικό τοϋ πυρήνα, μέ ίση περίπου μάζα προς τό πρωτόνιο. Δέν φέρει ήλεκτρικό φορτίο καί ή άλληλεπίδρασή του μέ τό πρωτόνιο εΐναι τελείως διάφορη από τήν ήλεκτρομαγνητική άλληλεπίδραση. Γύρω από τόν πυρήνα περιφέρεται ένας αριθμός ήλεκτρονίων, ίσος μέ τόν αριθμό τών πρωτονίων. Έτσι, τό συγκρότημα πού δημιουργεΐται, τό άτομο, έμφανίζεται στή συνήθη του κατάσταση μέ μηδενικό όλικό φορτίο. Κατ'έπέκταση ή ύλη, πού συγκροτεΐται από άτομα (ή συμπλέγματα ατόμων, τά μόρια) έμφανίζεται συνήθως άφόρτιστη. Περίσια ή έλλειμα ήλεκτρονίων δημιουργεΐ τό ήλεκτρικό φορτίο τής μακροσκοπικής ύλης.

Μέχρι σήμερα δέν έχει παρατηρηθεΐ στή φύση ήλεκτρικό φορτίο μέ τιμή μικρότερη από e . Έτσι, κάθε φορτίο τής μακροσκοπικής ύλης εΐναι ένα άκέραιο πολλαπλάσιο Ne (όπου N ένας τεράστιος αριθμός) τοϋ στοιχειώδους φορτίου e . Στή διαπίστωση αύτή αναφερόμαστε μέ τόν όρο κβάντωση τοϋ ήλεκτρικοϋ φορτίου. Παρόλο ότι συνεισφέρει στήν κατανόηση πολλών ιδιοτήτων τής μακροσκοπικής ύλης, ή κβάντωση τοϋ ήλεκτρικοϋ φορτίου παΐζει περιορισμένο ρόλο στήν ανάπτυξη τής κλασικής ήλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Αντίθετα, μιά δεύτερη ιδιότητα τοϋ φορτίου, πού θά όνομάσουμε νόμο ή άρχή διατηρήσεως τοϋ ήλεκτρικοϋ φορτίου στηρίζει ένα μεγάλο μέρος τής θεωρίας τοϋ ήλεκτρομαγνητισμοϋ. Κατά τήν άρχή αύτή σέ ένα άπομονωμένο σύστημα τό ποσό τοϋ ήλεκτρικοϋ φορτίου παραμένει σταθερό. Αν καί στή φύση έμφανίζονται συχνά φαινόμενα καταστροφής ή γενέσεως στοιχειωδών σωματίων, οι διεργασίες αυτές πραγματοποιοϋνται πάντα σέ ζεύγη σωματίων μέ ίσο καί αντίθε-

το ηλεκτρικό φορτίο, έτσι ώστε το άλγεβρικό άθροισμα του φορτίου να παραμένει σταθερό. Από πειραματική άποψη, η αρχή διατηρήσεως του φορτίου είναι σήμερα ένας από τους καλύτερα επαληθευμένους νόμους της φύσης.

2-1 Ο Νόμος του Coulomb

Η ιδιότητα του ηλεκτρικού φορτίου εμφανίζεται με την αλληλεπίδραση μεταξύ υλικών σωμάτων που φέρουν φορτίο. Για δύο στατικά σημειακά φορτία πρώτος ο Coulomb διατύπωσε το νόμο ότι η δύναμη μεταξύ τους είναι ανάλογη προς το γινόμενο των φορτίων και αντίστροφα ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασεως που τά χωρίζει, ήτοι

$$\underline{F}_{2 \leftarrow 1} \propto \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} \quad (2.2)$$

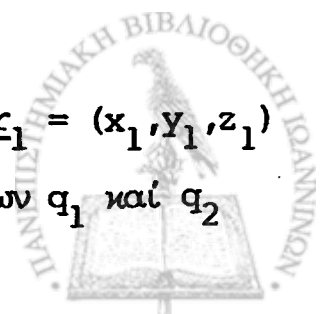
όπου $\underline{F}_{2 \leftarrow 1}$ είναι η δύναμη που αναπτύσσεται στο φορτίο q_2 λόγω της ύπαρξεως του φορτίου q_1 και

$$r_{21} = |\underline{r}_2 - \underline{r}_1| = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2} \quad (2.3)$$

ενώ \hat{r}_{21} είναι το μοναδιαίο άνυσμα κατά τη διεύθυνση $\underline{r}_2 - \underline{r}_1$

$$\hat{r}_{21} = \frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|} \quad (2.4)$$

Στή γεωμετρία που απεικονίζει το σχήμα 2-1, τα άνυσματα $\underline{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $\underline{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ορίζουν αντίστοιχα τη θέση των φορτίων q_1 και q_2



σέ κάποιο σύστημα συντεταγμένων μέ ἀρχή τῶν συντεταγμένων O .

Ἀπό τή μορφή τῆς ἐξ. (2.2) ὀρισμένες ιδιότητες εἶναι ἀμέσως ἐμφανεῖς.

(α) Ἡ δύναμη μεταξύ φορτίων ἔχει διεύθυνση κατά τόν ἄξονα πού συνδέει τά δύο φορτία.

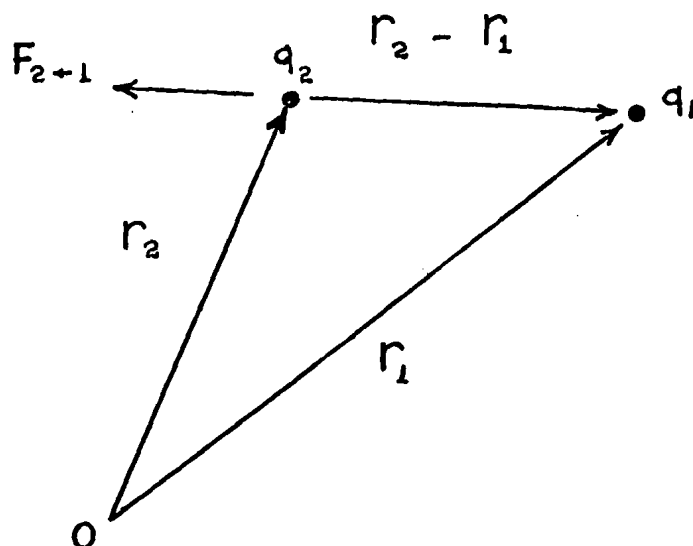
(β) Ὁμώνυμα φορτία ἀπωθοῦνται καί ἑτερόνυμα ἔλκονται.

(γ) Ἡ δύναμη $F_{2 \leftarrow 1}$ εἶναι Νευτώνια, ἥτοι

$$\underline{F}_{2 \leftarrow 1} = - \underline{F}_{1 \rightarrow 2} \quad (2.5)$$

Ἡ ἀναλογία πού ἐκφράζει ὁ νόμος τοῦ Coulomb στήν ἐξ. (2.2) μπορεῖ νά μεταβληθεῖ σέ ἰσότητα ἂν ὀριστεῖ ἡ μονάδα τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου. Στό σύστημα C.G.S. ἡ ἀναλογία (2.2) μεταβάλλεται ἐξ ὀρισμοῦ σέ ἰσότητα καί ἡ ἐξίσωση πού προκύπτει χρησιμοποιεῖται γιά τόν ὀρισμό τοῦ φορτίου. Στό σύστημα αὐτό

$$F_{2 \leftarrow 1} = \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} = \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \underline{r}_{21} \quad (2.6)$$



ΣΧΗΜΑ 2-1. Ἀλληλεπίδραση δύο στατικῶν φορτίων q_1 καί q_2 . O εἶναι ἡ ἀρχή συντεταγμένων.



ένω τό φορτίο μετριέται σέ ήλεκτροστατικές μονάδες φορτίου (ΗΣΜ-φ). Μεταξύ δύο φορτίων $q = 1$ ΗΣΜ-φ πού βρίσκονται σέ απόσταση $r_{21} = 1$ απ έξασκεΐται δύναμη $F_{2+1} = 1 \text{ dyn}$. Στο Διεθές Σύστημα SI (παλαιό MKSA), όπου τό ήλεκτρικό φορτίο ορίζεται ανεξάρτητα[†] ως τό Coulomb (C), ή έξ. (2.2) μπορεί νά μεταβληθεΐ σέ ισότητα διαμέσου ενός συντελεστή αναλογίας. Παραδοσιακά ή έξ. (2.2) γράφεται στό σύστημα SI ως

$$F_{2+1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \quad (2.7)$$

όπου ή σταθερά ϵ_0 , πού ονομάζεται διαπερατότητα στό κενό, έχει τήν τιμή

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \quad (2.8)$$

ή

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{ C}^{-2} \quad (2.9)$$

* Η σύνδεση μεταξύ των δύο μονάδων δίνεται από τή σχέση

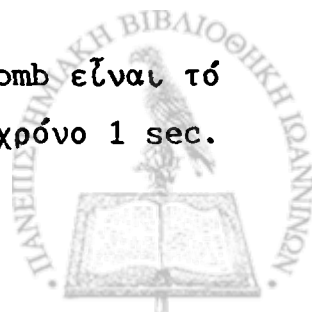
$$1 \text{ C} = \frac{c}{10} \text{ ΗΣΜ-φ} \quad (2.10)$$

όπου c είναι ή ταχύτητα του φωτός σέ μονάδες του συστήματος CGS

[†] Βασική μονάδα του ήλεκτρομαγνητισμού στό σύστημα SI είναι τό Ampère (A) πού μετρά ήλεκτρικό ρεύμα {βλ. έξ. (2.149)}. Η μονάδα φορτίου ορίζεται από τή σχέση

$$q = I \cdot t$$

όπου I τό ήλεκτρικό ρεύμα καί t ό χρόνος. Ένα Coulomb είναι τό όλικό φορτίο πού αντιπροσωπεύει ροή ρεύματος 1A σέ χρόνο 1 sec.



$$c = 2.997\ 925 \times 10^{10} \text{ cm. sec}^{-1}. \quad (2.11)$$

Όπως προκύπτει από τη σύγκριση των έξ. (2.6) και (2.7), ο νόμος του Coulomb όχι μόνο εκφράζεται σε διαφορετικές μονάδες, αλλά και με διαφορετική μορφή στα συστήματα CGS και SI. Η διαφορά αυτή παρακολουθεί όλες τις σχέσεις του ηλεκτρομαγνητισμού που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια. Αν και στις εφαρμογές του ηλεκτρομαγνητισμού που θα εξετάσουμε στα επόμενα κεφάλαια θα χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά μονάδες του συστήματος SI θα δώσουμε για πληρότητα και τις αντίστοιχες εκφράσεις στο σύστημα CGS. Όπου είναι έφικτό θα χρησιμοποιήσουμε άγγύλες για τό διαχωρισμό των επιπλέον παραγόντων που απαιτούνται για τη μετατροπή μιᾶς σχέσεως από τό σύστημα CGS στό σύστημα SI. Έτσι, θα γράψουμε π.χ. τό νόμο του Coulomb ως

$$F_{2+1} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} F_{21} \quad (2.12)$$

όπου παράλειψη των παραγόντων που περιέχονται στις άγγύλες μετατρέπει τη σχέση στό σύστημα CGS.

Μιά σημαντική ιδιότητα της ηλεκτροστατικής αλληλεπιδράσεως που εξάγεται από την πειραματική παρατήρηση είναι γνωστή ως αρχή της επαλληλίας. Έχει δηλαδή επαληθευτεί πειραματικά ότι η δύναμη που έξασκεΐται μεταξύ δύο φορτίων δέν μεταβάλλεται άν στη γειτονία των δύο αυτών φορτίων υπάρχουν και άλλα ηλεκτρικά φορτία. Από την παρατήρηση αυτή έπεται ότι η όλική δύναμη που έξασκεΐται σε ένα φορτίο είναι ίση με τό άνυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που έξασκοΐν όλα τά φορτία που συνυπάρχουν στό γύρω χώρο. Στο συμβολισμό της έξ. (2.12),

$$\begin{aligned}
 \underline{F}_{0 \leftarrow 1, 2, \dots, n} &= \sum_{k=1}^n \underline{F}_{0 \leftarrow k} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \sum_{k=1}^n \frac{q_0 q_k}{r_{k0}^3} \underline{r}_{k0} \\
 &= \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] q_0 \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_{k0}^3} \underline{r}_{k0} \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

Ἡ ἐξ. (2.13) ἀναφέρεται στὴν ἀλληλεπίδραση μεταξὺ τοῦ φορτίου q_0 καὶ n φορτίων q_k , $k = 1, \dots, n$, στό χῶρο. Μὲ τὴν εἰσαγωγή τῆς ἐννοιας τῆς πυκνότητας φορτίου $\rho(\underline{r})$, δηλαδή τοῦ φορτίου ἀνά μονάδα ὄγκου σὲ μιά συνεχή κατανομή φορτίου

$$\rho(\underline{r}) \equiv \frac{dq(\underline{r})}{d^3r} \quad (2.14)$$

ὅπου $d^3r = dx dy dz$ εἶναι τὸ στοιχεῖο τοῦ ὄγκου, μποροῦμε νὰ γενικεύσουμε τὴν ἀρχὴ τῆς ἐπαλληλίας πού ἐκφράζει ἡ ἐξ. (2.13). Ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖ μιά κατανομή φορτίου στό φορτίο q_0 εἶναι

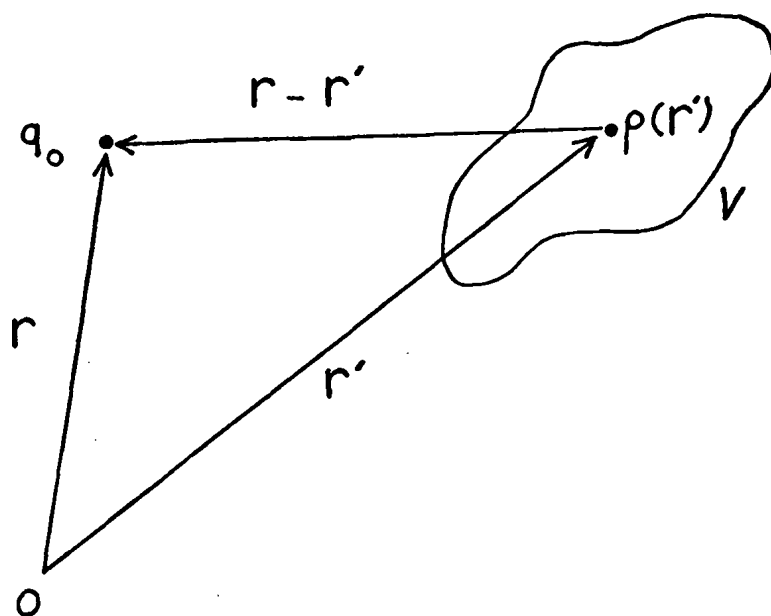
$$\underline{F}_{0 \leftarrow \rho(\underline{r})} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] q_0 \int_V \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r}_1 - \underline{r}') d^3r' \quad (2.15)$$

ὅπου τὸ ὀλοκλήρωμα ἐτείνεται στό χῶρο V πού καταλαμβάνει ἡ κατανομή φορτίου $\rho(\underline{r})$. Ἡ γεωμετρία τῆς ἐξ. (2.15) δίνεται στό σχῆμα 2-2.

2-2 Τὸ Ἠλεκτρικὸ Πεδίο

Οἱ ἐξ. (2.13) καὶ (2.15) ἐκφράζουν τὸ γεγονός ὅτι ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖται σὲ ἓνα φορτίο q_0 ἀπὸ μιά κατανομή (συνεχὴ ἢ ἀσυνεχὴ) φορτίων στό χῶρο εἶναι ἀνάλογη πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ φορτίου q_0 . Μπο-





ΣΧΗΜΑ 2-2. Άλληλεπίδραση του φορτίου q_0 με την κατανομή φορτίου $\rho(\underline{r})$.

ρούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση αυτή για να ορίσουμε ένα νέο άνυσμα

$$\underline{E}(\underline{r}) \equiv \frac{\underline{F}_0(\underline{r})}{q_0} \quad (2.16)$$

όπου η δύναμη $F_0(\underline{r})$ δίνεται από την έξ. (2.13) ή (2.15). Το ηλεκτρικό πεδίο $\underline{E}(\underline{r})$ μετρά την ιδιότητα που αποκτά ο χώρος με την ύπαρξη των n φορτίων q_k , $k = 1, \dots, n$ στις θέσεις \underline{r}_k ή με την ύπαρξη της συνεχούς κατανομής φορτίου $\rho(\underline{r})$ στην περιοχή του χώρου V . Η ιδιότητα αυτή εκφράζεται από την έξ. (2.16): αν στο σημείο \underline{r} του χώρου τοποθετηθεί τό φορτίο q_0 , θά δεχτεί μιá δύναμη

$$\underline{F}_0 = q_0 \underline{E}(\underline{r}).$$



Ἡ συνάρτηση $\underline{E}(\underline{r})$ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου "χαρτογραφεῖ" τὸ χῶρο καὶ μὲ τὴ βοήθεια τῆς ἐξ. (2.17) προβλέπει τὴ συμπεριφορὰ κάθε φορτίου ποῦ θὰ εἰσαχθεῖ στό χῶρο αὐτό. Ἡ ἀνισωματική συνάρτηση $\underline{E}(\underline{r})$ μπορεῖ νά γραφεῖ ἀμέσως ἀπὸ τίς ἐξ. (2.13) καὶ (2.15). Γενικά

$$\underline{E}(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \sum_k \frac{q_k}{|\underline{r}-\underline{r}_k|^3} (\underline{r}-\underline{r}_k) + \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_V \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} (\underline{r}-\underline{r}') d^3 r' \quad (2.18)$$

ὅπου τὸ ἄθροισμα ἐκτείνεται σέ ὅλα τὰ διάκριτα φορτία q_k ποῦ ὑπάρχουν στό χῶρο καὶ ἡ ὀλοκλήρωση σέ κάθε συνεχὴ κατανομὴ φορτίου.

Στό σύστημα CGS τὸ ἠλεκτρικὸ πεδίο μετράται σέ dyn/ΗΣΜ-φ. Ἡ ἀντίστοιχη μονάδα στό σύστημα SI εἶναι τὸ N / C. Στό τελευταῖο σύστημα μονάδων ἡ μονάδα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου συχνά ἐκφράζεται καὶ διαμέσου τῆς μονάδας τοῦ δυναμικοῦ (βλ. παράγραφο 2-5) ὡς Volt ἀνά μέτρο (V/m). Ἡ σύνδεση τῶν μονάδων δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$1 \text{ V/m} = 1 \text{ N/C} = \frac{10^6}{c} \text{ dyn/ΗΣΜ-φ} . \quad (2.19)$$

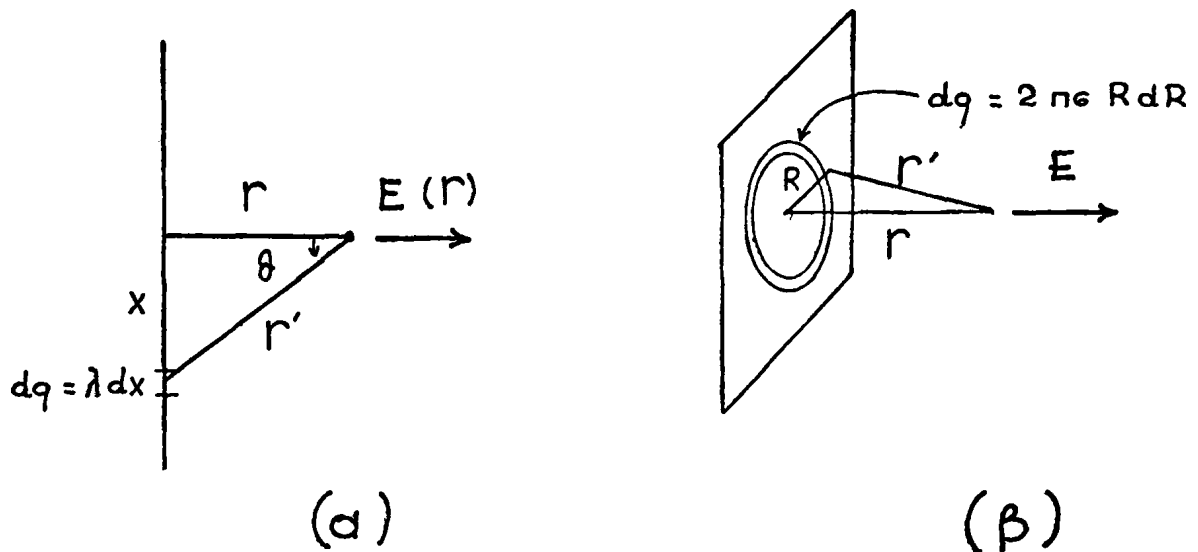
Ἡ ἐξ. (2.18) μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιὰ τὸν ὑπολογισμό τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ποῦ δημιουργεῖ μιὰ συγκεκριμένη διάταξη φορτίων. Τὸ ἠλεκτρικὸ πεδίο π.χ. ἑνὸς μοναδικοῦ σημειακοῦ φορτίου q μπορεῖ νά γραφεῖ ἀμέσως ὡς

$$\underline{E}(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (2.20)$$

ὅπου γιὰ ἀπλοῦστευση τῆς ἐκφράσεως ἡ θέση τοῦ σημειακοῦ φορτίου q ἐχει ληφθεῖ ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων. Ἡ διεύθυνση τοῦ μοναδιαίου ἀ-



νύσματος \hat{r} είναι ακτινική. Σε μερικές ακόμη περιπτώσεις όπου η διάταξη των φορτίων παρουσιάζει ιδιαίτερη συμμετρία το ηλεκτρικό πεδίο $\underline{E}(\underline{r})$ μπορεί να υπολογιστεί με άμεση εφαρμογή της έξ. (2.18). Δύο παραδείγματα συνεχούς κατανομής δίνονται στο σχήμα 2-3. Για μια συνεχή γραμμική κατανομή φορτίου λ (σέ αναλογία με την έξ. (2.14) $\lambda \equiv dq/dx$) με άπειρες διαστάσεις που εικονίζεται στο σχήμα 2-3(α), το ολοκλήρωμα της έξ. (2.18) δίνει



ΣΧΗΜΑ 2-3. Δύο άπλες συνεχείς κατανομές φορτίου.

(α) Σταθερή γραμμική κατανομή λ με άπειρες διαστάσεις. Από τη συμμετρία της κατανομής, το πεδίο είναι ακτινικό με ένταση

$$E(r) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{r'^2} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dx}{x^2 + r^2} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{2\lambda}{r}$$

(β) Σταθερή επίπεδη επιφανειακή κατανομή σ με άπειρες διαστάσεις. Το πεδίο είναι κάθετο προς την επιφάνεια με ένταση

$$E(r) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_0^{\infty} \frac{2\pi\sigma R dR}{R^2 + r^2} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 2\pi\sigma$$

ανεξάρτητη από την απόσταση r του σημείου από το επίπεδο.

$$\underline{E}(r) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{2\lambda}{r} \hat{r} \quad (2.21)$$

όπου r είναι η απόσταση του σημείου από την κατανομή και το μοναδιαίο άνωσμα \hat{r} έχει διεύθυνση ακτινική. Για τη σταθερή επιφανειακή κατανομή σ σε ένα επίπεδο με άπειρες διαστάσεις, ολοκλήρωση της έξ. (2.18) δίνει ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ανεξάρτητη από την απόσταση

$$\underline{E}(r) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 2\pi\sigma \hat{r} \quad (2.22)$$

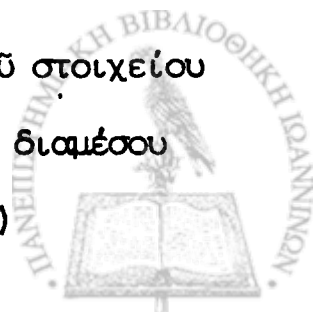
όπου το μοναδιαίο άνωσμα \hat{r} είναι κάθετο προς το επίπεδο της κατανομής σ . Πέρα όμως από μερικές απλές περιπτώσεις, ο υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου διαμέσου της έξ. (2.18) είναι άσχετά δυσχερές. Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε εναλλακτικές μεθόδους για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου.

2-3 Ροή του Ηλεκτρικού Πεδίου και ο Νόμος του Gauss

Θά θεωρήσουμε μιά κλειστή επιφάνεια S στο χώρο και ένα στοιχείο $d\mathbf{a}$ της επιφανείας, όπου $d\mathbf{a}$ είναι ένα άνωσμα με μέγεθος ανάλογο προς το έμβαδόν da , διεύθυνση κάθετη προς την επιφάνεια και φορά προς το έξωτερικό της επιφανείας. Το έσωτερικό γινόμενο

$$d\Phi = \underline{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.23)$$

ορίζεται τότε ως η ροή του ηλεκτρικού πεδίου διαμέσου του στοιχείου της επιφανείας $d\mathbf{a}$, ενώ η όλική ροή του ηλεκτρικού πεδίου διαμέσου της επιφανείας S δίνεται από το ολοκλήρωμα της έξ. (2.23)



$$\Phi = \oint_S \underline{E} \cdot d\underline{\alpha} . \quad (2.24)$$

Χρησιμοποιώντας τή συναρτησιακή μορφή τής έξ. (2.18) πού προβλέπει ό-
τι ή ένταση του ήλεκτρικού πεδίου σέ ένα σημείο του χώρου είναι αντί-
στροφα ανάλογη πρós τό τετράγωνο τής απόστασεως του σημείου από τό
φορτίο πού δημιουργεί τό πεδίο, μπορούμε νά αποδείξουμε μιá σημαντι-
κή ιδιότητα του ήλεκτρικού πεδίου, γνωστή ως νόμο του Gauss: 'Η όλι-
κή ροή του ήλεκτρικού πεδίου σέ μιá κλειστή έπιφάνεια είναι ανάλογη
πρós τό όλικό φορτίο $q_{\acute{\epsilon}\sigma\omega\tau}$ πού περικλείει ή έπιφάνεια καί ανεξάρτη-
τη από τήν ύπαρξη φορτίων στον έξωτερικό χώρο, ήτοι

$$\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{\alpha} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi q_{\acute{\epsilon}\sigma\omega\tau} . \quad (2.25)$$

Ό νόμος του Gauss, πού όπως αναφέραμε είναι άμεσο αποτέλεσμα τής
έξαρτήσεως $\frac{1}{r^2}$ στο νόμο του Coulomb, είναι διπλά χρήσιμος. Άφενός
μπορεί νά χρησιμοποιηθεϊ ως τό αντίστροφο του νόμου του Coulomb για
τόν προσδιορισμό τής κατανομής φορτίου πού δημιουργεί ένα πεδίο, ό-
ταν τό πεδίο είναι γνωστό. Άφετέρου ή έξ. (2.25) αποδεικνύεται ένα
ίσχυρό εργαλείο στην επίλυση ήλεκτροστατικών προβλημάτων.

Τό φορτίο πού περικλείεται από τήν έπιφάνεια S μπορεί νά αποδο-
θεϊ από μιá πυκνότητα φορτίου $\rho(\underline{r})$

$$q_{\acute{\epsilon}\sigma\omega\tau} = \int_V \rho(\underline{r}) d^3r$$

όπου ή ολοκλήρωση εκτείνεται στον όγκο V πού περιβάλλεται από τήν έ-
πιφάνεια S. Ό νόμος του Gauss παίρνει έπομένως τή μορφή



$$\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{a} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi \int_V \rho(\underline{r}) d^3r . \quad (2.26)$$

Τό επιφανειακό ολοκλήρωμα τῆς τελευταίας σχέσης μπορεί νά μετατραπεί σέ ολοκλήρωμα ὄγκου ἂν χρησιμοποιήσουμε τό θεώρημα τοῦ Green

$$\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{a} = \int_V \nabla \cdot \underline{E} d^3r . \quad (2.27)$$

Συγκρίνοντας τίς ἐξ. (2.26) καί (2.27) μπορούμε ἐπιμένως νά γράψουμε

$$\int_V \nabla \cdot \underline{E} d^3r = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi \int_V \rho(\underline{r}) d^3r$$

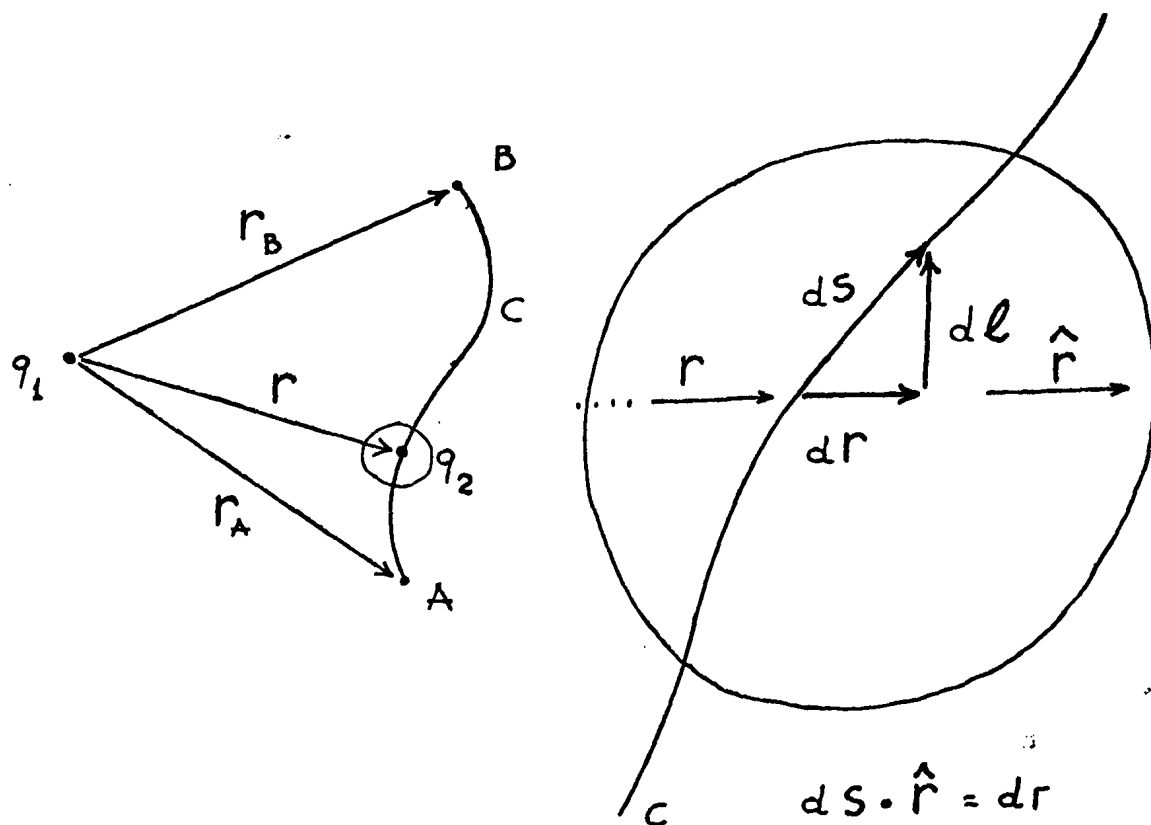
ἢ σέ διαφορική μορφή

$$\nabla \cdot \underline{E} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi\rho . \quad (2.28)$$

Θά ἀναφερθοῦμε στό μέλλον στήν τελευταία σχέση μέ τήν ὀνομασία διαφορική μορφή τοῦ νόμου τοῦ Gauss.

2-4 Ἡλεκτροστατική Ἐνέργεια Στατικῶν Φορτίων

Ὁ νόμος τοῦ Coulomb στήν ἐξ. (2.12) ἐκφράζει τή δύναμη πού ἐξασκεῖται στό φορτίο q_2 σέ ἕνα ἠλεκτροστατικό σύστημα πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο μόνο φορτία q_1 καί q_2 . Ἐστω ὅτι θέλουμε νά μετακινήσουμε τό φορτίο q_2 κατά τή διαδρομή C , πού εἰκονίζεται στό σχῆμα 2-4, ἀπό τό σημεῖο A στό σημεῖο B . Γιά τή μετακίνηση αὐτή μέ σταθερή ταχύτητα



ΣΧΗΜΑ 2-4. Μετακίνηση του φορτίου q_2 κατά τη διαδρομή C μεταξύ των σημείων A και B . Το στοιχείο της διαδρομής ds μπορεί να αναλυθεί στις συνιστώσες dr και dl , όπου dr είναι το στοιχειώδες άνυσμα κατά τη διεύθυνση \hat{r} και dl κάθετο προς το μοναδιαίο άνυσμα \hat{r} . Όπως δείχνει η μεγένθυση στο δεξιό μέρος του σχήματος

$$ds \cdot \hat{r} = dr.$$

θα πρέπει να καταβάλουμε μια δύναμη ίση και αντίθετη προς τη δύναμη Coulomb που εξασκείται στο φορτίο q_2

$$\underline{F}_{\text{έξωτ}} = - \underline{F}_{\text{2+1}}.$$

Τό έργο επομένως που καταναλώνεται στο φορτίο q_2 είναι



$$W(A \rightarrow B) = \int_C \underline{F}_{\text{έξωτ}} \cdot d\underline{s} = - \int_C \underline{F}_{2 \leftarrow 1} \cdot d\underline{s} = - \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] q_1 q_2 \int_C \frac{\hat{r} \cdot d\underline{s}}{r^2} \quad (2.29)$$

όπου $d\underline{s}$ είναι τό στοιχείο μήκους κατά τή διαδρομή C καί όπου \hat{r} άρχή τών συντεταγμένων έχει ληφθεῖ ἡ θέση τοῦ φορτίου q_1 .

Ἡ προβολή τοῦ στοιχείου $d\underline{s}$ στό μοναδιαῖο άνωσμα \hat{r} είναι $\hat{r} \cdot d\underline{s} = dr$ καί ἡ έξ. (2.29) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\begin{aligned} W(A \rightarrow B) &= - \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] q_1 q_2 \int_C \frac{dr}{r^2} = - \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] q_1 q_2 \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} \\ &= \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Πολλά σημαντικά συμπεράσματα έξάγονται άπό τή μορφή τῆς έξ. (2.30).

Κατ'άρχήν, τό έργο πού ὑπολογήσαμε δέν έξαρτάται άπό τή διαδρομή πού άκολουθήθηκε γιά τή μετακίνηση τοῦ φορτίου q_2 άλλα μόνο άπό τά άκ-
ραῖα σημεῖα A καί B . Μέ άλλα λόγια ἡ δύναμη Coulomb είναι διατηρητι-
κή. Εἰδικότερα, γιά μιά κλειστή διαδρομή, όπου τό άρχικό καί τελικό
σημεῖο συμπίπτουν, μπορούμε νά γράψουμε

$$\oint \underline{F}_{2 \leftarrow 1} \cdot d\underline{s} = 0. \quad (2.31)$$

Ἐξάλλου, ἡ έξ. (2.30) μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ έργου πού καταναλώθηκε κατά τή συγκρότηση τοῦ συστήματος τών δύο φορτίων σέ μιά άπόσταση r . Ἄν θεωρήσουμε ὅτι τό σύστημα δημιουργή-
θηκε μέ σταδιακή προσέγγιση τών δύο φορτίων άπό άπειρη μεταξύ τους
άπόσταση, ἡ έξ. (2.30) δίνει σέ προφανή συμβολισμό



$$W \equiv W(\infty \rightarrow r_{12}) = \left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{q_1 q_2}{r_{12}} . \quad (2.32)$$

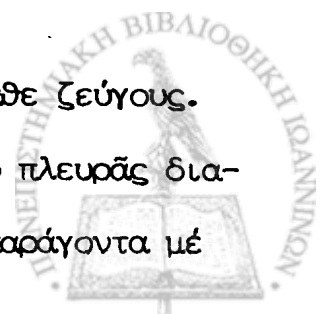
Ἡ ποσότητα W , πού στή βιβλιογραφία ἀπαντᾶται καί μέ τό γενικώτερο ὄρο ἐνέργεια συνδέσεως, ἀντιπροσωπεύει τό ἔργο πού καταναλώθηκε γιά τή δημιουργία τοῦ συστήματος καί τό ὁποῖο βρίσκεται πλέον "ἀποθηκευμένο" στό σύστημα. Παρατηρεῖται ὅτι ἂν τά φορτία εἶναι ὁμώνυμα, ἡ ἐνέργεια W εἶναι θετική. Καταβλήθηκε δηλαδή μιά θετική ποσότητα ἔργου γιά τή δημιουργία τοῦ συστήματος καί ἡ ὅλική του ἐνέργεια στήν τελική κατάσταση εἶναι ὑψηλότερη ἀπό ὅτι στήν ἀρχική. Ἔτσι τό σύστημα μπορεῖ αὐθόρμητα νά ἀποβάλει τό ποσό αὐτό ἐνεργείας καί νά μεταπέσει στήν ἀρχική του κατάσταση. Ἀντίθετα, ἂν τά φορτία q_1 καί q_2 εἶναι ἑτερόνυμα, $W < 0$, πού σημαίνει ὅτι κατά τή συγκρότηση τοῦ συστήματος ἀποδόθηκε ἔργο στό περιβάλλον. Γιά τό διαχωρισμό τοῦ συστήματος θά πρέπει τώρα νά καταναλωθεῖ ἴσο ἔργο στό σύστημα. Ἡ ἀνάλυση αὐτή τῆς ἐξ. (2.32) θά ἀναγνωριστεῖ ἀπό τόν ἀναγνώστη ὡς ἰσοδύναμη μέ τή γνωστή φράση: ὁμώνυμα φορτία ἀπωθοῦνται καί ἑτερόνυμα ἔλκονται.

Χρησιμοποιώντας τήν ἀρχή τῆς ἐπαλληλίας μποροῦμε νά γενικεύσουμε τήν ἐξ. (2.32) γιά τόν ὑπολογισμό τῆς ἠλεκτροστατικής ἐνεργείας n φορτίων q_k , $k = 1, \dots, n$. Ἡ ὅλική ἠλεκτροστατική ἐνέργεια δίνεται ἀπό τήν ἐνέργεια κάθε ζεύγους φορτίων, ἥτοι

$$W = \left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{q_j q_k}{r_{jk}} \quad (2.33)$$

τόν παράγοντα $\frac{1}{2}$ ἀποφεύγεται ἡ διπλή μέτρηση κάθε ζεύγους.

ἠλεκτροστατική ἐνέργεια τῆς ἐξ. (2.33), πού ἀπό πλευρᾶς διαπολεῖται ἀπό τό νόμο τοῦ Coulomb κατά ἕνα παράγοντα μέ



διαστάσεις μήκους στον παρονομαστή, μετριέται σε erg στο σύστημα CGS και σε joule (J) στο σύστημα SI. Υπενθυμίζεται ότι

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} . \quad (2.34)$$

2-5 Η Συνάρτηση Δυναμικού

Στήν έξ. (2.29) θεωρήσαμε τό έργο $W(A \rightarrow B)$ πού καταναλώνεται γιά τή μετακίνηση ενός φορτίου q_2 στή γειτονία ενός άλλου στατικού φορτίου q_1 . Χρησιμοποιώντας τήν άρχή τής έπαλληλίας είναι εύκολο νά γενικεύσουμε τήν έξ. (2.29) στήν περίπτωση όπου ένα φορτίο q μετακινείται στή γειτονία οποιασδήποτε διατάξεως φορτίων. Τό έργο πού καταναλώνεται στό φορτίο q είναι τότε

$$W(A \rightarrow B) = - \int_A^B \underline{F} \cdot d\underline{s} = - q \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{s} \quad (2.35)$$

όπου \underline{F} είναι ή ήλεκτροστατική δύναμη πού δέχεται τό φορτίο q και \underline{E} τό ήλεκτρικό πεδίο πού δημιουργεί ή διάταξη τών υπόλοιπων φορτίων στό χώρο. Τά όρια A και B του ολοκληρώματος τονίζουν τό γεγονός ότι ή έκφραση έξαρτάται από τά τερματικά σημεία A και B και όχι από τή συγκεκριμένη διαδρομή πού ακολουθήθηκε κατά τή μετακίνηση του φορτίου q . Η ποσότητα

$$\varphi_{AB} \equiv \frac{W(A \rightarrow B)}{q} = - \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{s} \quad (2.36)$$

έξαρτάται αποκλειστικά από τήν κατανομή τών φορτίων πού δημιουργούν τό πεδίο \underline{E} και από τά δύο σημεία A και B. Αντιπροσωπεύει τό έργο



ανά μονάδα φορτίου πού πρέπει νά καταναλωθεῖ γιά τήν κίνηση ἑνός θετικού φορτίου ἀπό τό σημεῖο A στό σημεῖο B. Εἶναι ἐπιμένως μιά μονοσήμαντη συνάρτηση πού, ὅπως καί τό ἠλεκτρικό πεδίο, μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή "χαρτογράφηση" τοῦ χώρου ὡς πρός τήν ιδιότητα πού δημιουργήσε ἡ συγκεκριμένη διάταξη φορτίων.

Ἡ συνάρτηση φ_{AB} , πού θά ὀνομάσουμε διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων A καί B παρέχει ἕνα ἐναλλακτικό τρόπο περιγραφῆς τῶν ἠλεκτροστατικών φαινομένων. Ἄν συμφωνήσουμε στήν ἐπιλογή ἑνός συγκεκριμένου σημείου A, τό ολοκλήρωμα τῆς ἐξ. (2.36) χαρακτηρίζει μονοσήμαντα κάθε σημεῖο B τοῦ χώρου. Ἄν θεωρήσουμε τό σημεῖο B στή θέση \underline{x} , μποροῦμε νά τονίσουμε τήν ιδιότητα αὐτή μέ τό συμβολισμό $\varphi_A(\underline{x})$ γιά τή συνάρτηση τῆς ἐξ. (2.36) τήν ὁποία μετά τήν ἐπιλογή τοῦ σημείου ἀναφορᾶς θά ὀνομάσουμε δυναμικό τοῦ σημείου \underline{x}

$$\varphi_A(\underline{x}) \equiv - \int_A^{\underline{x}} \underline{E} \cdot d\underline{s} \quad (2.37)$$

Ἡ τελευταία σχέση μᾶς παρέχει τή δυνατότητα νά ὑπολογίσουμε τό δυναμικό ἑνός σημείου σέ σχέση μέ κάποιο σημεῖο ἀναφορᾶς A ἄν εἶναι γνωστή ἡ συνάρτηση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου $\underline{E}(\underline{x})$. Ἡ ἀντίστροφη διεργασία εἶναι δυνατή ἄν γράψουμε τήν ἐξ. (2.37) σέ διαφορική μορφή

$$d\varphi = - \underline{E} \cdot d\underline{s} \quad (2.38)$$

ὅπου $d\varphi$ εἶναι τό πλήρες διαφορικό τῆς συναρτήσεως φ

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \nabla \varphi \cdot d\underline{s} \quad (2.39)$$



Σύμφωνα μέ τόν καθιερωμένο συμβολισμό τοῦ ἀνυσματικοῦ λογισμοῦ ἔχουμε χρησιμοποιήσει τήν κλίση $\nabla\varphi$ τῆς συναρτήσεως φ , πού ὀρίζεται ὡς τό ἀνυσμα

$$\nabla\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{k} \quad (2.40)$$

ὅπου \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} εἶναι ἀντίστοιχα τά μοναδιαῖα ἀνύσματα κατά τούς ἄξονες x , y , z . Σύγκριση τῶν ἐξ. (2.38) καί (2.39) δίνει τή σχέση

$$\underline{E} = - \nabla\varphi \quad (2.41)$$

πού ἐπιτρέπει τόν ὑπολογισμό τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἀπό τή συνάρτηση δυναμικοῦ.

Ὁ ἀναγνώστης ἴσως παρατήρησε ὅτι στό συμβολισμό τοῦ διαφορικοῦ $d\varphi$ καί τῆς κλίσης $\nabla\varphi$ ἔχει παραληφθεῖ ὁ δείκτης A πού ὀρίζει τό σημεῖο ἀναφορᾶς τοῦ δυναμικοῦ. Ἡ παράλειψη αὐτή εἶναι σκόπιμη καθόσον οἱ δύο αὐτές ποσότητες εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπό τή συγκεκριμένη ἐπιλογή τοῦ σημείου ἀναφορᾶς. Ὅπως μπορεῖ νά ἐπαληθευτεῖ ἀπό τήν ἐξ. (2.37), μεταβολή τοῦ σημείου ἀναφορᾶς ἀπό τό σημεῖο A στό σημεῖο A' συνεπάγεται τό μετασχηματισμό

$$\varphi_A(\underline{r}) \rightarrow \varphi_{A'}(\underline{r}) = \varphi_A(\underline{r}) + \varphi_A(\underline{r}_{A'}) \quad (2.42)$$

δηλαδή, τή μεταβολή τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ κατά τή σταθερή ποσότητα $\varphi_A(\underline{r}_{A'})$. Διαφόριση ἐπομένως τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ δίνει

$$d\varphi_{A'} = d\varphi_A \equiv d\varphi \quad (2.43a)$$



και

$$\nabla_{\mathbf{A}'} \varphi = \nabla_{\mathbf{A}} \varphi \equiv \nabla \varphi \quad (2.43\beta)$$

ήτοι, συνάρτηση ανεξάρτητη από τό σημείο αναφοράς του δυναμικού. Τοῦτο βέβαια εἶναι καί κάτι πού ἀναμένεται, καθόσον ὁποιαδήποτε περιγραφή τῆς ἠλεκτροστατικῆς διατάξεως πρέπει νά ὀδηγεῖ σέ μονοσήμαντο ἠλεκτρικό πεδίο.

Ἡ ἐξ. (2.41) πού συνδέει τό ἠλεκτρικό πεδίο μέ τό ἠλεκτρικό δυναμικό ὀδηγεῖ σέ μιᾶ ἀκόμη σπουδαία σχέση τῆς ἠλεκτροστατικῆς. Ὁ ἀναγνώστης ἴσως θά γνωρίζει ἀπό τόν ἀνυσματικό λογισμό τήν ταυτότητα

$$\nabla_{\mathbf{A}} (\nabla f) = 0. \quad (2.44)$$

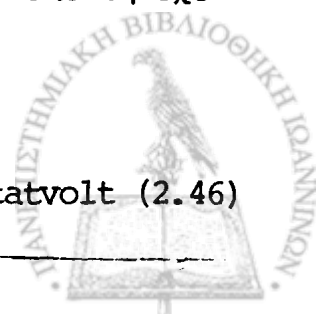
Ἀπό τή σχέση αὐτή ἔπεται ὅτι σέ κάθε σημείο τοῦ χώρου ὁ στροβιλισμός τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μηδενίζεται

$$\nabla_{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{E}} = 0. \quad (2.45)$$

θά ἔχουμε τήν εὐκαιρία ἀργότερα νά ἐπανεξετάσουμε τήν ἐξίσωση αὐτή τῆς ἠλεκτροστατικῆς.

Ἐξ ὀρισμοῦ, ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ μετρεῖ ἐνέργεια ἀνά μονάδα φορτίου. Στό σύστημα CGS ὡς μονάδα δυναμικοῦ χρησιμοποιεῖται τό erg/ΗΣΜ-φ πού συνήθως ἀναφέρεται μέ τήν ὀνομασία statvolt. Στό σύστημα SI, ἡ ἀντίστοιχη μονάδα εἶναι τό volt (V) πού ὀρίζεται ὡς joule/coulomb. Ἡ σύνδεση τῶν μονάδων στά δύο συστήματα παρέχεται ἀπό τή σχέση

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C} = \frac{10^8}{c} \text{ erg/ΗΣΜ-φ} = \frac{10^8}{c} \text{ statvolt} \approx \frac{1}{300} \text{ statvolt} \quad (2.46)$$



Σύμφωνα με τον όρισμό της έξ. (2.36), η συνάρτηση δυναμικού σε ένα σημείο \underline{r} μπορεί να βρεθεί αν είναι γνωστή η ηλεκτροστατική ενέργεια που απαιτείται για τη μεταφορά ενός φορτίου q από το σημείο αναφοράς ως το σημείο \underline{r} . Με τον τρόπο αυτό μπορούμε άμεσα να γράψουμε το δυναμικό ενός σημειακού φορτίου από την έξ. (2.30) ως

$$\varphi_A(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (2.47)$$

όπου σε προφανή συμβολισμό έχουμε αντικαταστήσει $q = q_1$ και $r = r_B$.

Η τελευταία έκφραση απλουστεύεται σημαντικά αν επιλέξουμε ως σημείο αναφοράς ένα σημείο σε άπειρη απόσταση. Με την επιλογή αυτή το δυναμικό ενός σημειακού φορτίου είναι

$$\varphi(r) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{q}{r} \quad (2.48)$$

όπου, σύμφωνα με την καθιερωμένη πρακτική,[†] έχουμε παραλείψει το δείκτη $A = \infty$ στο συμβολισμό της συναρτήσεως.

Η συνάρτηση της έξ. (2.48) μπορεί να γενικευτεί με τη βοήθεια της αρχής της έπαλληλίας για την έκφραση της συναρτήσεως δυναμικού ενός συνόλου σημειακών φορτίων q_k , $k = 1, \dots, n$, ή γενικώτερα μιās κατανομής φορτίου που περιγράφεται από την πυκνότητα $\rho(\underline{r})$. Στη γεωμετρία του σχήματος 2-2

[†] Η επιλογή ενός σημείου αναφοράς σε άπειρη απόσταση είναι έφυσική (καί θα ακολουθηθεί στη συνέχεια) σε ηλεκτροστατικά συστήματα όπου η κατανομή φορτίου δέν εκτείνεται στο άπειρο. Δύο παραδείγματα όπου παρόμοια επιλογή δέν είναι δυνατή δίνονται στο σχήμα 2-3.

$$\varphi(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \sum_k \frac{q_k}{|\underline{r} - \underline{r}_k|} + \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_V \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3r' \quad (2.49)$$

Ἡ τελευταία ἔκφραση μπορεῖ νά συγκριθεῖ μέ τήν ἀντίστοιχη ἔκφραση τῆς ἐξ. (2.18) γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου $\underline{E}(\underline{r})$. Οἱ δύο συναρτήσεις συνδέονται διαμέσου τῆς ἐξ. (2.41), ὅπως μπορεῖ νά ἐπαληθευτεῖ ἀναλυτικά.

2-6 Ἀλληλεπίδραση Ἐλεύθερων Στατικῶν Φορτίων

Τά ἠλεκτροστατικά φαινόμενα γίνονται ἀντιληπτά ἀπό τίς δυνάμεις πού ἀναπτύσσονται μεταξύ φορτισμένων σωμάτων καί ὁ νόμος τοῦ Coulomb εἶναι κατ'ἀρχήν ἡ μόνη σχέση πού χρειάζεται γιά τήν επίλυση κάθε ἠλεκτροστατικοῦ προβλήματος. Μέ τήν ἴδια ἔννοια, οἱ μόνες σχέσεις πού χρειάζονται στήν Κλασσική Μηχανική εἶναι οἱ τρεῖς νόμοι τοῦ Νεύτωνα. Παρόλα αὐτά τόσο στή Μηχανική ὅσο καί στόν ἠλεκτρομαγνητισμό βρήκαμε χρήσιμη τήν εἰσαγωγή νέων ἐννοιῶν (ὅπως ἡ ἐνέργεια στή Μηχανική) καί παράγωγων σχέσεων πού αὐξάνουν τήν ἀναλυτική καί ἐποπτική μας ἱκανότητα.

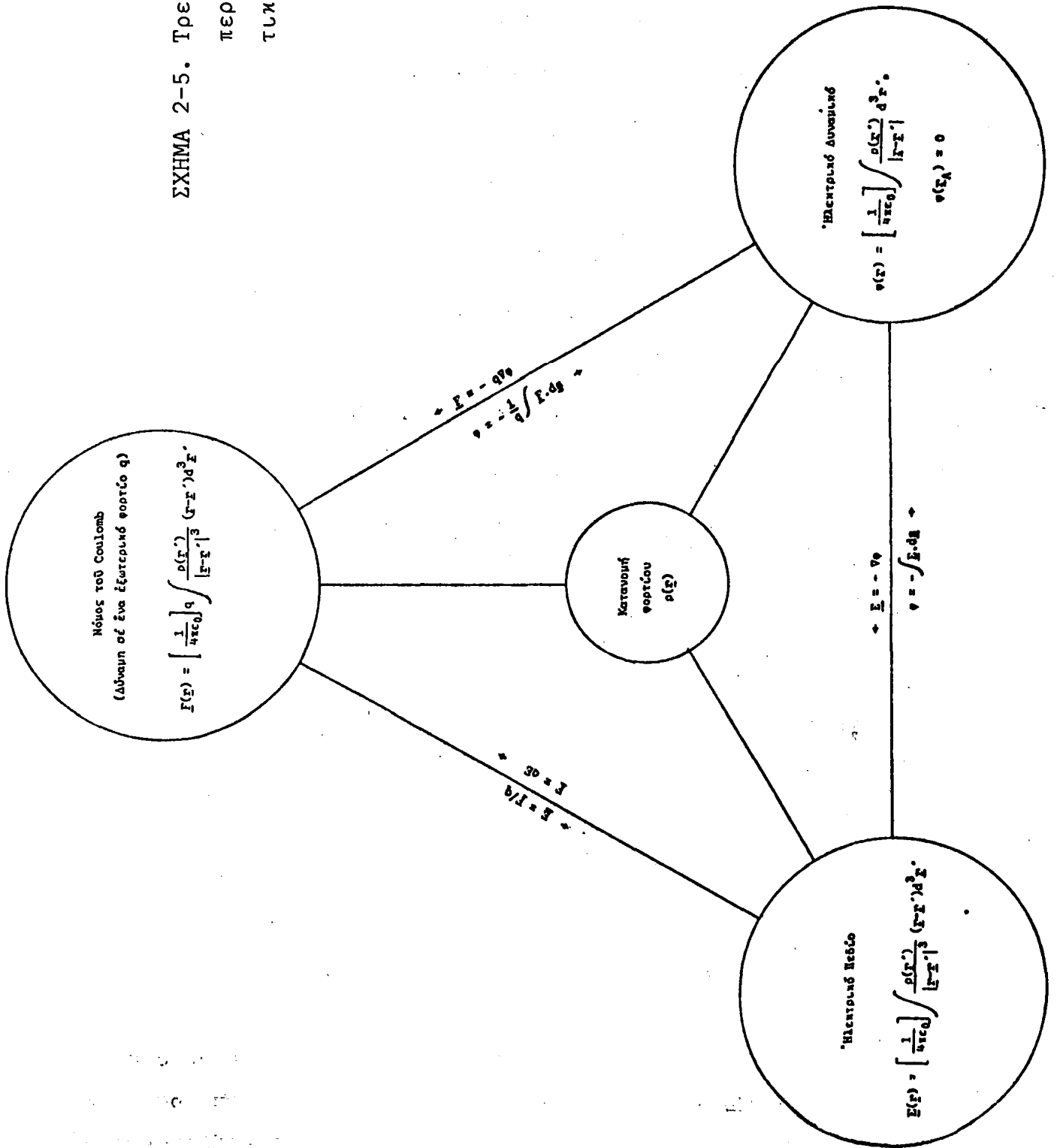
Γιά τήν περιγραφή τῆς ἀλληλεπιδράσεως ἐλεύθερων στατικῶν φορτίων ἔχουμε μέχρι τώρα εἰσάγει δύο νέα μεγέθη, τό ἠλεκτρικό πεδίο $\underline{E}(\underline{r})$ καί τό δυναμικό $\varphi(\underline{r})$. Καθένα ἀπό τά δύο αὐτά μεγέθη παρέχει τίς ἴδιες πληροφορίες πού ἐξάγονται ἀπό τό νόμο τοῦ Coulomb, ἐξετάζοντας ἕνα συγκεκριμένο ἠλεκτροστατικό φαινόμενο ἀπό διάφορη ὀπτική γωνία. Μέ τήν εἰσαγωγή τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἡ ἔκφραση μετατοπίζεται ἀπό τήν κατανομή φορτίου, πού στό νόμο τοῦ Coulomb ἀποτελεῖ τήν πηγή τῆς ἠλεκτροστατικῆς δυνάμεως, στήν ἰδιότητα πού ἀποκτᾶ ὁ χῶρος μέ τήν ὁ-

παρξη τής συγκεκριμένης κατανομής. Ἡ ιδιότητα αὐτή μετράται μέ τήν άνυσματική συνάρτηση $\underline{E}(\underline{r})$ καί διαμέσου τής συναρτήσεως αὐτής μπορεί νά περιγραφεῖ πλήρως τό ήλεκτροστατικό φαινόμενο. Σέ ἕνα δεύτερο επίπεδο λογικῆς άφαιρέσεως ή έμφραση μετατοπίζεται άπό τό ήλεκτρικό πεδίο $\underline{E}(\underline{r})$, πού άκόμη στηρίζεται στήν έννοια τής δυνάμεως, στήν ενεργειακή άποψη τοῦ φαινομένου, ή όποία έκφράζεται μέ τή συνάρτηση δυναμικοῦ $\varphi(\underline{r})$. Ὡς μονόμετρο μέγεθος, ή τελευταία συνάρτηση είναι περισσότερο εύχρηστη άπό τό άνυσμα $\underline{E}(\underline{r})$. Παρόλα αὐτά ή πληροφορία πού περιέχεται στους τρεῖς άριθμούς τής συναρτήσεως $\underline{E}(\underline{r})$ (στῖς τρεῖς συνιστώσες τοῦ πεδίου $E_x(\underline{r}), E_y(\underline{r}), E_z(\underline{r})$) δέν είναι δυνατόν νά έκφραστεῖ μέ ἕνα καί μόνο άριθμό $\varphi(\underline{r})$. Ὅπως καί κατά τήν είσαγωγή τής ενεργείας στήν Κλασσική Μηχανική, βρήκαμε ότι είναι άπαραίτητο νά συμπληρώσουμε τή συνάρτηση δυναμικοῦ μέ τόν όρισμό ενός σημείου αναφορῆς.

Τό σχήμα 2-5 δίνει διαγραμματικά τούς τρεῖς έναλλακτικούς τρόπους περιγραφῆς τῶν ήλεκτροστατικῶν φαινομένων καί τίς σχέσεις διασυνδέσεως πού άναπτύξαμε στῖς προηγούμενες παραγράφους. Ὅπως δείχνει τό σχήμα, γιά μιá συγκεκριμένη κατανομή[†] φορτίου $\rho(\underline{r})$ είναι δυ-

[†] Γιά σύμπτυξη τοῦ συμβολισμοῦ θά θεωρήσουμε στή συνέχεια ότι ή συνάρτηση $\rho(\underline{r})$ πού όρίζεται σέ όλο τό χῶρο περιγράφει τόσο μιá έκτεταμένη κατανομή φορτίου όσο καί μεμονωμένα σημειακά φορτία. θά θεωρήσουμε δηλαδή ότι ο πρώτος όρος τῶν έξ. (2.18) καί (2.47) περιέχεται στό δεύτερο. Γιά ἕνα έλεύθερο φορτίο q_k μέ περιορισμένες διαστάσεις ή συνάρτηση $\rho(\underline{r})$ μπορεί νά ληφθεῖ ως μιá συνάρτηση μέ σημαντική τιμή στήν άμεση γειτονία τοῦ σημείου \underline{r}_k πού καθορίζει τή θέση τοῦ σημειακοῦ φορτίου καί $\rho(\underline{r}) = 0$ στόν υπόλοιπο χῶρο. Ἀκόμη καί γιά σημειακό φορτίο, όρισμένο μέ μαθηματική άυστηρότητα, ή πυκνότητα $\rho(\underline{r})$ μπορεί νά άποδοθεῖ άπό τή συνάρτηση δέλτα $\delta(\underline{r} - \underline{r}_k)$ {ή συνάρτηση δέλτα όρίζεται συνή-

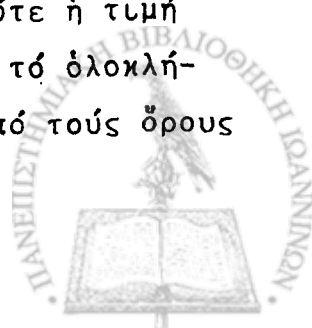
ΣΧΗΜΑ 2-5. Τρεις éναλλακτικές μέθοδοι περιγραφής της ηλεκτροστατικής áλληλεπιδράσεως.



νατόν νά υπολογιστεῖ ἡ δύναμη Coulomb $\underline{F}(\underline{r})$ πού θά δεχτεῖ ἕνα φορτίο q στό σημεῖο \underline{r} {έξ. (2.15)}, τό ἠλεκτρικό πεδίο $\underline{E}(\underline{r})$ {έξ. (2.18)} καί ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ $\varphi(\underline{r})$ {έξ. (2.49)}. Στήν τελευταία περίπτωση, ὅπως ἤδη ἀναφέραμε, εἶναι ἀκόμα ἀπαραίτητη ἡ πληροφορία $\varphi(\underline{r}_A)=C$, δηλαδή ὁ προσδιορισμός τῆς τιμῆς τοῦ δυναμικοῦ στό σημεῖο ἀναφορᾶς A . Οἱ σχέσεις πού συνδέουν τίς τρεῖς συναρτήσεις δίνονται ἐπίσης διαγραμματικά στό σχῆμα 2-5.

Γιά μιά συγκεκριμένη κατανομή φορτίου, ἡ επίλυση τοῦ ἠλεκτροστατικού προβλήματος μπορεῖ νά γίνεῖ ἰσοδύναμα διαμέσου ὁποιασδήποτε ἀπό τίς τρεῖς συναρτήσεις μέ τή χρησιμοποίηση τῶν ἐκφράσεων πού περιέχονται στό σχῆμα 2-5 ἢ μέ τήν ἐκμετάλευση κάποιας συμμετρίας τῆς διατάξεως πού ἐπιτρέπει τήν ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Gauss. Οἱ ὑπόλοιπες συναρτήσεις καί ἰδιαίτερα ἡ δύναμη σέ κάθε φορτίο τῆς κατανομῆς, πού ἐπιτρέπει τήν πειραματική ἐπαλήθευση, μποροῦν νά υπολογιστοῦν μέ τίς σχέσεις πού συνδέουν τά διάφορα μεγέθη στό σχῆμα 2-5. Ὁ Πίνακας 2-1 περιέχει τίς συναρτήσεις $\underline{E}(\underline{r})$ καί $\varphi(\underline{r})$ γιά ὀρισμένες ἀπλές διατάξεις φορτίου.

θως σέ συγγράμματα Κβαντομηχανικῆς, βλέπε π.χ. P.A.M. Dirac, Quantum Mechanics, Fourth Edition, Oxford Univ. Press, 1958, σελ. 58). Ἐάν $\rho(\underline{r})$ περιγράφει σημειακό φορτίο, τότε ἡ τιμή της εἶναι σημαντική μόνο γιά $\underline{r} - \underline{r}' \approx \underline{r} - \underline{r}_k$ καί τό ὀλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (2.18) ἢ (2.47) μεταπίπτει σέ ἕνα ἀπό τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος στίς ἀντίστοιχες ἐκφράσεις.



ΠΙΝΑΚΑΣ 2-1: Τό ηλεκτρικό πεδίο $\underline{E}(\underline{r})$ καί ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ $\varphi(\underline{r})$ γιά μερικές τυπικές διατάξεις στατικῶν φορτίων. Ὅπου δέν ἀναφέρεται ἡ τιμὴ τοῦ δυναμικοῦ στό σημείο ἀναφορᾶς ἔχει ληφθεῖ $\varphi(\infty) = 0$.

Κατανομή φορτίου	Ἡλεκτρικό Πεδίο	Ἡλεκτρικό Δυναμικό
Σημειακό φορτίο q στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων.	$\underline{E}(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{q}{r^2} \hat{r}$	$\varphi(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{q}{r}$
Ἡλεκτρικό δῦπλο $p = qd$ Δύο φορτία $q, -q$ σέ ἀπόσταση d . Γιά $r \gg d$.	$\underline{E}(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{3\hat{r}(\underline{p} \cdot \hat{r}) - \underline{p}}{r^3}$	$\varphi(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{\underline{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$
Εὐθύγραμμη κατανομή φορτίου μέ ἄπειρες διαστάσεις καί γραμμική πυκνότητα λ .	$\underline{E}(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{2\lambda}{r} \hat{r}$ ὅπου r ἡ ἀπόσταση ἀπό τήν κατανομή	$\varphi(\underline{r}) = - \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 2\lambda \ln\left(\frac{r}{a}\right)$ ὅπου a ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου ἀναφορᾶς ἀπό τήν κατανομή
Ἐπίπεδη κατανομή φορτίου μέ ἄπειρες διαστάσεις καί ἐπιφανειακή πυκνότητα σ .	$\underline{E}(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 2\pi\sigma$	$\varphi(\underline{r}) = - \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 2\pi\sigma r$ ὅπου r ἡ κάθετη ἀπόσταση ἀπό τό ἐπίπεδο.
Ὁμοιόμορφα φορτισμένος δίσκος μέ ὄλικο φορτίο q καί ἀκτίνα a . Οἱ συναρτήσεις δύνονται γιά σημεία στόν ἄξονα τοῦ δίσκου.	$E(z) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \times \frac{2q}{a^2} \left(\sqrt{z^2 + a^2} - z \right)$	$\varphi(z) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \times \left(\frac{2q}{a^2} \left(1 - \frac{ z }{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \right)$
Ὁμοιόμορφα φορτισμένη σφαῖρα μέ ἀκτίνα R καί ὄλικο φορτίο q .	$E(r) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{q}{r^2} \hat{r}$ $= \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] q \frac{r}{R^3} \hat{r}$	$\varphi(r) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{q}{r}, \quad r > R$ $= \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{q}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right),$ $r \leq R$
		ὅπου r ἡ ἀπόσταση ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας.

2-7 'Ισοδυναμικές Έπιφάνειες και Δυναμικές Γραμμές

Στήν προηγούμενη ανάλυση, ή συνεισφορά του πεδίου και του δυναμικού στήν κατανόηση τῶν ἠλεκτροστατικῶν φαινομένων, ἀναφέρθηκε ὡς "χαρτογράφηση" τῆς ιδιότητος πού ἀποικτᾶ ὁ χῶρος ἀπό τήν παρουσία μιᾶς κατανομηῆς φορτίου $\rho(\underline{r})$. Μποροῦμε πράγματι νά ἀποδώσουμε τήν ιδιότητα αὐτή διαγραμματικά ἄν δανειστοῦμε μερικές ἔννοιες ἀπό τή γεωγραφική χαρτογράφηση. Σέ ἀναλογία μέ τίς ἰσοϋμεῖς καμπύλες σέ ἕνα τοπογραφικό χάρτη θά ὀρίσουμε τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες στό χῶρο. Ὡς ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια ὀρίζεται ἡ γεωμετρική ἐπιφάνεια γιά τήν ὁποία ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ παίρνει μιᾶ συγκεκριμένη τιμή α , ἤτοι

$$\varphi(\underline{r}) = \alpha. \quad (2.50)$$

Παράλληλα, σέ ἀναλογία μέ τίς γραμμές πού σέ ἕνα γεωγραφικό χάρτη ἀποδίδουν τή διεύθυνση μέγιστης κλίσης τοῦ ἐδάφους, θά ὀρίσουμε τίς δυναμικές γραμμές. Ἄν καί οἱ δυναμικές γραμμές δέν ἀποδίδουν τή ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, εἶναι εὐκόλο νά δείξουμε ἀπό τήν ἐξ. (2.41) ὅτι ἡ διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος $\underline{E}(\underline{r})$ εἶναι κατά τήν ἐφαπτομένη τῆς δυναμικῆς γραμμῆς πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο \underline{r} .

Εἶναι δυνατόν νά ἀναπτύξουμε μιᾶ ἀρκετά ἐκτεταμένη θεωρία γύρω ἀπό τήν ἀπεικόνιση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καί δυναμικοῦ, πού στό ἐργαστήριο καί στή βιομηχανία χρησιμοποιεῖται ἀπό κατασκευαστές ἠλεκτροστατικῶν συστημάτων. Στά πλαίσια αὐτά θά ἀρκεστοῦμε στήν ἀπαρίθμηση ὀρισμένων ιδιοτήτων πού διέπουν τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες καί τίς δυναμικές γραμμές. Στή συνέχεια θά ἐξετάσουμε πειραματικά μερικά ἀπλά παραδείγματα κατανομηῆς φορτίου.

1. Οἱ δυναμικές γραμμές εἶναι κάθετες πρὸς τίς ἰσοδυναμικές ἐ-



πιφάνειες, όπως προκύπτει από την έξ. (2.41).

2. Μιά ισοδυναμική επιφάνεια δέν τέμνει τόν έαυτό της έκτός από σημεία στά όποια τό ήλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται ή είναι άπροσδιόριστο. Καθόσον άν τοῦτο συνέβαινε, στό σημείο τομής θά μπορούσαμε νά φέρουμε δύο καθέτους καί έπομένως δύο διαφορετικές τιμές τοῦ ήλεκτρικοῦ πεδίου.
3. Ίσοδυναμικές επιφάνειες, πού χαρακτηρίζονται από διαφορετική τιμή τοῦ δυναμικοῦ, δέν τέμνονται, καθόσον τό ήλεκτρικό δυναμικό ορίζεται μονοσήμαντα.
4. "Αν ορίσουμε τή μέση τιμή τοῦ πεδίου $\langle E \rangle$ ως

$$\langle E \rangle \equiv \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} E \, ds \quad (2.51)$$

όπου ή ολοκλήρωση ακολουθεῖ τή διαδρομή μιᾶς δυναμικῆς γραμμῆς μεταξύ τῶν σημείων s_1 καί s_2 , ὁ ορισμός τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ

$$\varphi(s_2) - \varphi(s_1) = - \int_{s_1}^{s_2} E \, ds$$

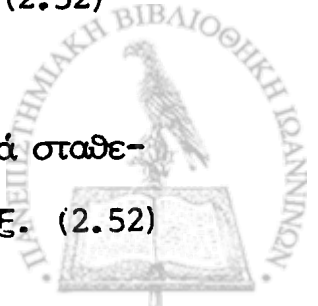
δίνει

$$\langle E \rangle (s_1 - s_2) = \varphi(s_2) - \varphi(s_1)$$

ή

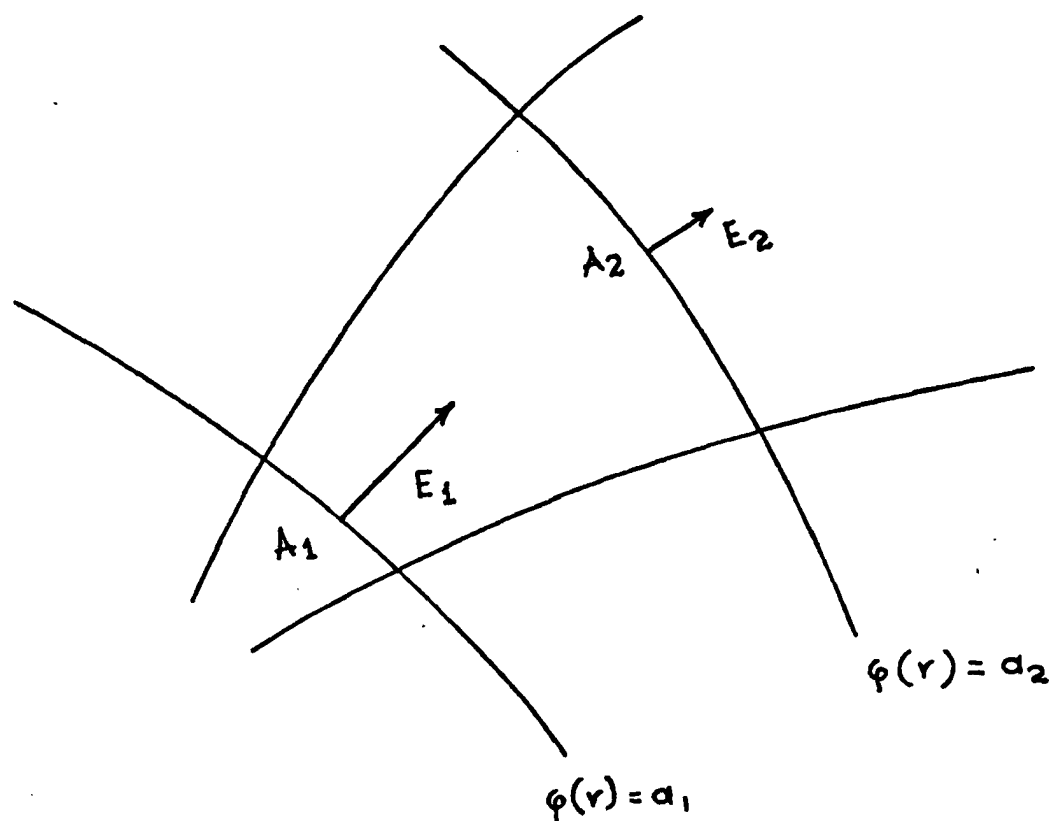
$$s_1 - s_2 = \frac{\varphi(s_2) - \varphi(s_1)}{\langle E \rangle} \quad (2.52)$$

"Αν έπομένως οἱ ισοδυναμικές επιφάνειες χαρακτηοῦν κατά σταθερά βήματα τοῦ δυναμικοῦ $\Delta\varphi = \varphi(s_2) - \varphi(s_1)$, από την έξ. (2.52)



προκύπτει ότι η απόσταση μεταξύ ισοδυναμικών επιφανειών είναι αντίστροφα ανάλογη προς τη μέση τιμή του ηλεκτρικού πεδίου. Με άλλα λόγια, σε περιοχές όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι ισχυρό έχουμε συνσυστοιχισμό ισοδυναμικών επιφανειών ενώ σε περιοχές όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι αδύνατο οι ισοδυναμικές επιφάνειες απαντώνται κατά άραιά διαστήματα.

5. "Αν ως κώνο δυναμικών γραμμών ορίσουμε μία περιοχή του χώρου που περικλείεται από δυναμικές γραμμές, ο λόγος των έμβαδών A_1 και A_2 που ορίζει η τιμή του κώνου με δύο ισοδυναμικές επιφάνειες είναι αντίστροφα ανάλογος προς τη μέση τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στη γειτονία της αντίστοιχης ισοδυναμικής επιφάνειας, ήτοι



ΣΧΗΜΑ 2-6. Τομή κώνου δυναμικών γραμμών με δύο ισοδυναμικές επιφάνειες $\varphi(\underline{r}) = \alpha_1$ και $\varphi(\underline{r}) = \alpha_2$.



$$\frac{\langle E_2 \rangle}{\langle E_1 \rangle} = \frac{A_1}{A_2} \quad (2.53)$$

Ἡ ιδιότητα αὐτή, πού δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 2-6, μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ἀπό τή θεώρηση τῆς ροῆς $\int \underline{E} \cdot d\underline{a}$ στίς δύο τομές τοῦ κώνου μέ τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες.

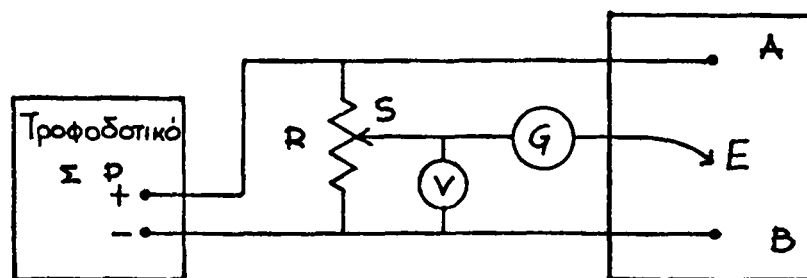
Ὁ πειραματικός προσδιορισμός τῶν ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν καί τῶν δυναμικῶν γραμμῶν στόν τρισδιάστατο χῶρο γύρω ἀπό μιά κατανομή φορτίου δέν εἶναι πολύ εὐκολός. Παρόλα αὐτά ἀποδεικνύεται ὅτι, ἄν ὁ χῶρος γύρω ἀπό ἕνα σύστημα ἀγωγῶν {βλέπε παρ. 2-8} πού διατηροῦνται σέ διάφορες τιμές δυναμικοῦ, διαπερνᾶται ἀπό ἕνα ἀγώγιμο ὑλικό, οἱ ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες ἔχουν τό ἴδιο σχῆμα μέ τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες γύρω ἀπό μιά κατανομή φορτίων μέ τήν ἴδια γεωμετρία στόν κενό χῶρο. Ἐπιπλέον ἡ διεύθυνση τοῦ ρεύματος μέσα στό ἀγώγιμο ὑλικό εἶναι κάθετη πρός τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες καί ἐπομένως ἐμφανίζει τό ἴδιο σχῆμα μέ τίς δυναμικές γραμμές στόν κενό χῶρο. Στήν ἐπόμενη σειρά πειραμάτων θά ἐκμεταλευτοῦμε τήν ιδιότητα αὐτή γιά νά μελετήσουμε τή γεωμετρία τῶν δυναμικῶν γραμμῶν καί ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν σέ ἀπλές κατανομές φορτίου. Ἀναγκαστικά θά ἐργαστοῦμε σέ δύο διαστάσεις, δηλαδή θά θεωρήσουμε μιά διάταξη φορτίων σέ ἕνα ἐπίπεδο καί μιά τομή τοῦ χῶρου πού περνᾶ ἀπό ὅλα τά φορτία.

ΠΕΙΡΑΜΑ 2-1. Ὡς ἀγώγιμο ὑλικό πού θά παραστήσει τόν κενό χῶρο θά χρησιμοποιήσουμε εἰδικό χαρτί πού ἔχει ἐμποτιστεῖ μέ ἄνθρακα. Ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀγώγιμου χαρτιοῦ εἶναι περίπου 100 κΩ. Ἡ κατανομή φορτίου μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ μέ τοποθέτηση ἀγωγῶν διαφόρων σχημάτων πάνω στό χαρτί ἢ μέ σχεδιασμό τῆς κατανομῆς ἄν διατίθεται πέννα μέ μεταλλική μελάνη. Μεταξύ τῶν ἀγωγῶν πού ἐφεξῆς θά ἀναφέρονται ὡς ἠλεκτρόδια, μπορεῖ νά ἀναπτυχθεῖ διαφορά δυνα-

μικροῦ μέ τή βοήθεια ἠλεκτρικοῦ στοιχείου ἢ τροφοδοτικοῦ συνεχοῦς ρεύματος (ΣΡ). Ὁ προσδιορισμός τώρα τοῦ δυναμικοῦ σέ κάθε σημεῖο τοῦ χαρτιοῦ σέ σχέση μέ τό δυναμικό ἑνός ἠλεκτροδίου (ἢ ὁποιοῦδήποτε ἄλλου σημείου ἀναφορᾶς) μπορεῖ νά γίνεῖ μέ ἕνα βολτόμετρο μέ μεγάλη ἐσωτερική ἀντίσταση. Κατάλληλο γιά τό σκοπό αὐτό εἶναι ἕνα κοινό ἠλεκτρονικό βολτόμετρο (VTVM) μέ ἐσωτερική ἀντίσταση μεγαλύτερη ἀπό 10 ΜΩ.

Ἐναλλακτικά τό δυναμικό σέ ἕνα σημεῖο τοῦ χαρτιοῦ μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μέ τή διάταξη μηδενισμοῦ τοῦ σχήματος 2-7 πού ἔχει σχεδιαστεῖ γιά τήν εἰδική περίπτωση δύο σημειακῶν ἠλεκτροδίων A καί B. Τό τροφοδοτικό ΣΡ διατηρεῖ μιά σταθερή διαφορά δυναμικοῦ U μεταξύ τῶν σημείων A καί B καί στά ἄκρα τοῦ ροοστάτη R. Ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῆς κινητῆς ἐπαφῆς S καί τοῦ ἠλεκτροδίου B μετρεῖται μέ τό βολτόμετρο V καί μέ μετακίνηση τῆς ἐπαφῆς S μπορεῖ νά πάρει ὁποιαδήποτε τιμή μεταξύ 0 καί U. Τό σημεῖο S συνδέεται ἀκόμη διαμέσου ἑνός εὐαίσθητου γαλβανόμετρου G μέ ἕνα εὐκαμπτο ἀκροδέκτη E πού μπορεῖ νά ἔρθει σέ ἐπαφή μέ ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ ἀγωγίμου χαρτιοῦ. Ἄν τό δυναμικό τοῦ σημείου E ὡς πρός τό ἠλεκτρόδιο B εἶναι διάφορο ἀπό τήν ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου V, μεταξύ τῶν σημείων S καί E θά διέλθει ρεῦμα καί τό γαλβανόμετρο θά ἀποκλίνει. Ἀντίθετα, τό γαλβανόμετρο μηδενίζεται ἄν τό σημεῖο E βρίσκεται σέ δυναμικό ἴσο μέ τήν ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου.

— Μέ τή βοήθεια ἑνός ἠλεκτρονικοῦ βολτομέτρου ἢ τῆς διατάξεως στό σχῆμα 2-7 προσδιορίστε τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες γιά τίς

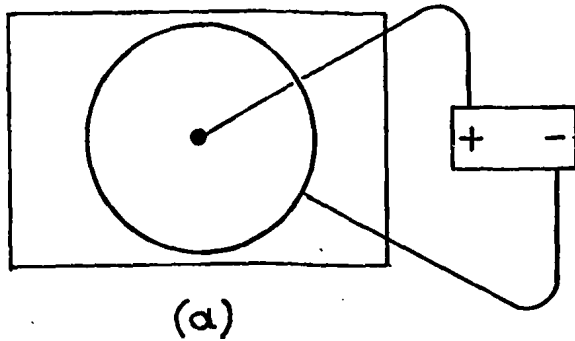


ΣΧΗΜΑ 2-7. Διάταξη μηδενισμοῦ γιά τόν προσδιορισμό διαφοράς δυναμικοῦ στό Πείραμα 2-1.

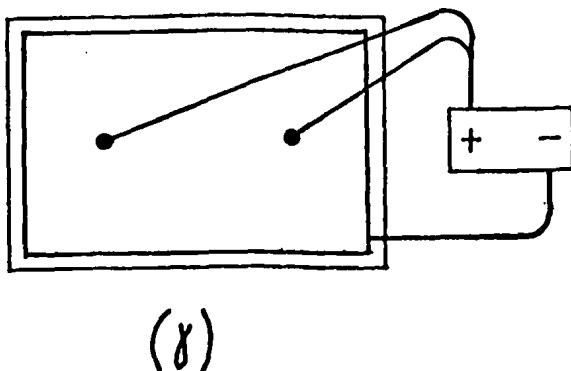
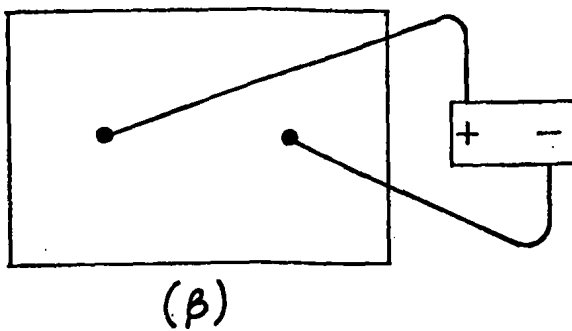


τρεις κατανομές φορτίου που δίνονται στο σχήμα 2-8. Σε κάθε διάταξη, τό κιβώτιο $\boxed{+ -}$ αντιπροσωπεύει ηλεκτρικό στοιχείο ή τροφοδοτικό ΣΡ με διαφορά δυναμικού μεταξύ ηλεκτροδίων περίπου $U=3V$. Κινώντας τόν άκροδέκτη του ηλεκτρονικού βολτομέτρου ή τόν άκροδέκτη E του σχήματος 2-7 πάνω στο χαρτί προσδιορίστε αρκετά σημεία με δυναμικό $V=0.1 U$ και σημειώστε τα με ένα λευκό μολύβι. Ένωστε όλα τά σημεία ώστε νά σχηματιστεῖ μιá συνεχής ίσοδυναμική γραμμή. Επαναλάβετε τήν εργασία για τόν προσδιορισμό τῶν ίσοδυναμικῶν γραμμῶν με δυναμικό $0.2 U, 0.3 U, κ.λ.π.$

— Χαράξτε τῖς δυναμικές γραμμές, δηλαδή καμπύλες κάθετες πρὸς τῖς ίσοδυναμικές γραμμές που προσδιορίσατε.



ΣΧΗΜΑ 2-8. Τρεις διατάξεις ηλεκτροδίων για τή μελέτη του ηλεκτρικού πεδίου στο Πείραμα 2-1.



— Επιλέξτε μιὰ ἀκτινική διεύθυνση μεταξύ τῶν ἠλεκτροδίων στό σχῆμα 2-8(α) καί μετρεῖστε τό δυναμικό κατά μήκος τῆς ἀκτίνας σέ διαστήματα 1 cm. Προσδιορίστε τήν ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἀπό τήν προσεγγιστική σχέση

$$E_x = - \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

καί ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τήν ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ὡς συνάρτηση τῆς ἀποστάσεως ἀπό τό κεντρικό ἠλεκτρόδιο.

— Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά τήν εὐθεία πού συνδέει τά δύο ἠλεκτρόδια στά σχήματα 2-8(β) καί 2-8(γ).

— Ποιές κατανομές φορτίου ἀντιπροσωπεύουν οἱ διατάξεις ἠλεκτροδίων στό σχῆμα 2-8; Τί ἐπίδραση ἔχει ἡ περιορισμένη ἔκταση τοῦ ἀγώγιμου ὑλικοῦ στή διαμόρφωση τοῦ πεδίου;

2-8 Ἀγωγοί καί Μονωτές

Ὡς τώρα μελετήσαμε φορτία (σημειωτά ἢ συνεχεῖς κατανομές) πού κατά κάποιο τρόπο βρίσκονται τοποθετημένα σέ σταθερές θέσεις μέσα στόν κενό χῶρο. Στήν πράξη, μιὰ ποσότητα φορτίου, πού ὅπως εἶδαμε προέρχεται ἀπό ἔλλειμα ἢ περίσσεια ἠλεκτρονίων, ἀναφέρεται σέ ἓνα ὑλικό σῶμα, τό ὁποῖο μπορεῖ νά περιβάλλεται ἀπό ὕλη (ἀτμοσφαιρικό ἀέρα, νερό, κ.λ.π.), ἐνῶ ταυτόχρονα ἄλλα ὑλικά σάματα μέ διάφορα μέγεθη καί σχήματα, φορτισμένα ἢ μή, μπορεῖ νά βρίσκονται στή γειτονία του. Ἡ ὕπαρξη φορτίου ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή δημιουργία ἠλεκτρικοῦ πεδίου στό χῶρο, τό ὁποῖο μέ τή σειρά του ἐξασκεῖ δυνάμεις στά στοιχειώδη φορτία τῆς ὕλης πού περιβάλλουν τό φορτίο. Ἄν τά φορτία αὐτά μποροῦν νά κινηθοῦν (ἄν, σέ ἀτομική κλίμακα, τά ἠλεκτρόνια δέν εἶναι δεσμευμένα σέ ἓνα ἄτομο) θά ἀλλάξουν θέση ἐνῶ ταυτόχρονα μέ τήν ἀνακατανομή τῶν στοιχειωδῶν φορτίων στήν ὕλη θά δημιουργηθοῦν νέα πε-

δία στο χώρο. Ἡ ἀνακατάταξη τῶν φορτίων θά συνεχιστεῖ μέχρις ὅτου τό σύστημα καταλήξει σέ κατάσταση ἰσορροπίας, δηλαδή μέχρις ὅτου ἡ ὀλική δύναμη σέ κάθε φορτίο μηδενιστεῖ. Μιά ἐπιμέκως σημαντική ἰδιότητα πού ἐνδιαφέρει στή διαμόρφωση τῆς καταστάσεως ἰσορροπίας, εἶναι ἡ δυνατότητα ἢ μή τῶν στοιχειωδῶν φορτίων νά μετατοπίζονται στό ἐσωτερικό τῶν ὑλικῶν σωμάτων.

Ὡς πρός τήν ἰδιότητα αὐτή τά ὑλικά πού ἀπαντοῦμε στή φύση καλύπτουν ὄλο τό φάσμα μεταξύ δύο ἀκραίων περιπτώσεων. Στό ἕνα ἄκρο διακρίνουμε τούς ἀγωγούς, δηλαδή ὑλικά στό ἐσωτερικό τῶν ὁποίων τά φορτία εἶναι ἐλεύθερα νά κινηθοῦν ὑπό τήν ἐπίδραση ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Στό ἄλλο ἄκρο βρίσκονται οἱ μονωτές ἢ διηλεκτρικά ὑλικά μέ τήν ἀντίθετη συμπεριφορά. Μεταξύ τῶν δύο ἄκρων βρίσκονται ὄλα τά ρεαλιστικά ὑλικά μέσα στά ὁποῖα τό ἠλεκτρικό φορτίο μπορεῖ νά κινηθεῖ μέ μικρή ἢ μεγάλη δυσκολία. Στήν παράγραφο 2-17, θά μελετήσουμε τή ροή φορτίων μέσα σέ ἕνα ὑλικό καί θά ὀρίσουμε τό φυσικό μέγεθος πού χαρακτηρίζει τό ὑλικό ὡς πρός αὐτή τήν ἰδιότητα. Πρός τό παρόν θά διαχωρίσουμε τήν ὕλη σέ δύο μεγάλες κατηγορίες, σέ ἀγωγούς καί μονωτές, ὅπου κάθε κατηγορία λίγο πολύ προσεγγίζει τήν ἀντίστοιχη ἔννοια τῆς ἀπόλυτης ἐλευθερίας ἢ ἀπόλυτης δεσμεύσεως στή μετακίνηση φορτίου. Καθόσον θά ἀσχοληθοῦμε μέ τό ἠλεκτροστατικό πρόβλημα, δηλαδή μέ τήν τελική κατάσταση ἰσορροπίας τῶν φορτίων, ἡ εὐκολία μέ τήν ὁποία κινοῦνται τά φορτία μέσα στό ὑλικό δέν ἐνδιαφέρει καί πολύ. Μπορεῖ ἡ μεταβατική περίοδος νά διαρκέσει λίγο ἢ πολύ χρόνο, ἀλλά, ἄν τά φορτία δέν εἶναι ἀπόλυτα δεσμευμένα γύρω ἀπό μιά συγκεκριμένη θέση, τό σύστημα θά καταλήξει σέ μιά καί μοναδική κατάσταση ἰσορροπίας.

Στή συνέχεια θά ἐξετάσουμε τή διαμόρφωση τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου ὅταν πέρα ἀπό μιά συγκεκριμένη κατανομή φορτίου ὁ χώρος περιέ-



χει άγωγούς και διηλεκτρικά υλικά.

2-9 Άγωγοί σε Ηλεκτροστατικά Συστήματα

Έξ ορισμού, άγωγός είναι ένα σώμα στο έσωτερικό του οποίου υπάρχουν στοιχειώδη ήλεκτρικά φορτία, ελεύθερα να μετακινούνται υπό την επίδραση του ήλεκτροστατικού πεδίου. Από τόν ορισμό αυτό έπεται ότι στο έσωτερικό ενός άγωγού τό ήλεκτροστατικό πεδίο μηδενίζεται, όπως μπορεί να αποδειχτεί εύκολα με έπαγωγή σε άτοπο άποτέλεσμα. Αν στο έσωτερικό του άγωγού υπήρχε πεδίο, στοιχειώδη φορτισμένα σώματα θα έκινούντο και τό σύστημα δέν θα ήταν στατικό. Εκείνο έπομένως πού περιμένουμε να συμβεί στο έσωτερικό ενός άγωγού κατά τή μεταβατική περίοδο, άμέσως μετά τή τοποθέτηση του άγωγού σε ένα έξωτερικό ήλεκτρικό πεδίο, είναι μία άνομοιοτανομή των στοιχειωδών φορτίων. Η τελική κατανομή φορτίου θα είναι τέτοια ώστε να δημιουργεί ένα ήλεκτρικό πεδίο πού στο έσωτερικό του άγωγού έξουδετερώνει άπόλυτα τό έξωτερικό ήλεκτρικό πεδίο.

Καθόσον τό ήλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται στο έσωτερικό ενός άγωγού, έπεται ότι στήν περιοχή αυτή τό δυναμικό είναι σταθερό. Είδικότερα ή έπιφάνεια ενός άγωγού είναι μία ίσοδυναμική έπιφάνεια. Μερικά άνόμοιο ενδιαφέροντα άποτελέσματα για τή συμπεριφορά των άγωγών στήν ήλεκτροστατική κατάσταση άπορρέουν άμέσως άπό τή βασική αυτή ιδιότητα.

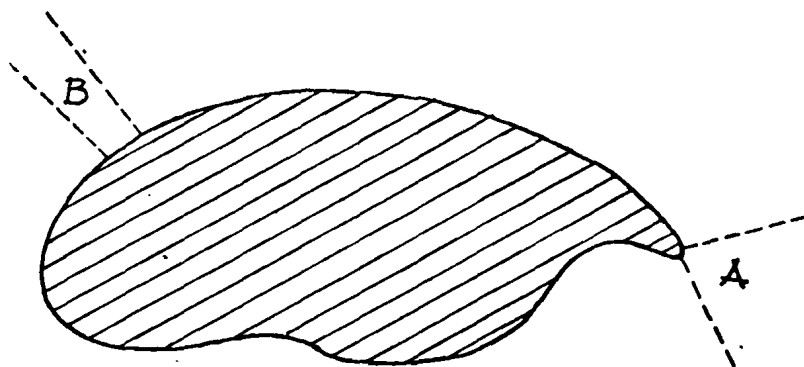
1. Στό χώρο πού περιλείεται άπό τήν έξωτερική έπιφάνεια ενός άγωγού, ή άπό μία έπιφάνεια, κάθε σημείο τής οποίας βρίσκεται μέσα σε άγωγήμο υλικό, τό όλικό φορτίο μηδενίζεται. Η βασική αυτή ιδιότητα είναι άμεσο άποτέλεσμα του νόμου του Gauss



$$\nabla \cdot \underline{E} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi\rho. \quad (2.28)$$

“Αν σέ κάθε σημείο του άγωγού τό ήλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται ή πυκνότητα ρ και τό φορτίο $q = \int_V \rho d^3r$ σέ οποιοδήποτε όγκο V στό έσωτερικό του άγωγού μηδενίζονται. Οποιαδήποτε έπομένως ποσότητα φορτίου διοχετευθεί στόν άγωγό θά συγκεντρωθεί στην έπιφάνειά του και στην ήλεκτροστατική κατάσταση θά έμφανιστεί ως έπιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

2. “Έξω από ένα άγωγό και κοντά στην έπιφάνειά του, τό ήλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο πρós την έπιφάνεια του άγωγού. Τοúτο βέβαια προέρχεται από τό γεγονός ότι ή έπιφάνεια του άγωγού είναι ίσοδυναμική έπιφάνεια. Ποιοτικά, ή ιδιότητα αυτή αποδίδεται στό σχήμα 2-9, όπου ή γραμμοσκιασμένη περιοχή αντιπροσωπεύει τό έσωτερικό ενός άγωγού, ενώ οι διακεκομμένες γραμμές τή διεύθυνση του πεδίου γύρω από δύο σημεία διαφορετικής καμπυλότητας τής έπιφανείας. Οι δύο κώνοι δυναμικών γραμμών πού έχουν σχεδιαστεί



ΣΧΗΜΑ 2-9. Φορά του ήλεκτρικού πεδίου κοντά στην έπιφάνεια ενός άγωγού σέ περιοχές μέ διάφορη καμπυλότητα.



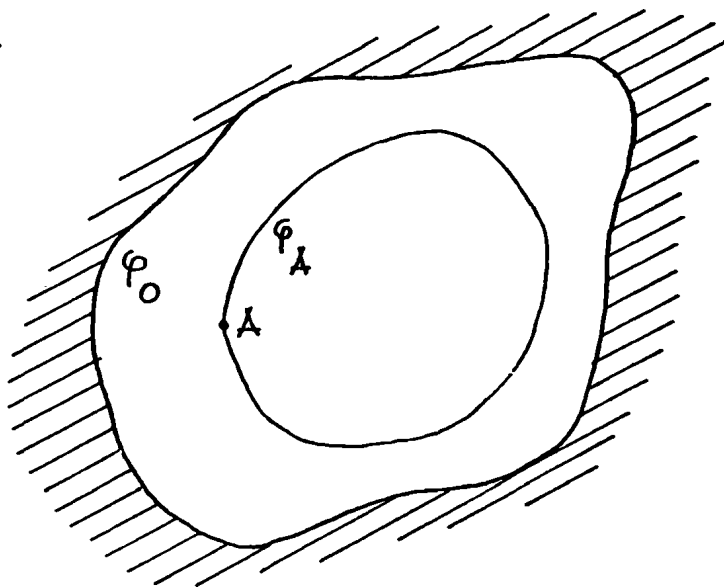
στά σημεία A και B αποκαλύπτουν ακόμη μία σημαντική συμπεριφορά του ηλεκτρικού πεδίου γύρω από ένα άγωγο. Λόγω της μεγάλης κυρτότητας της επιφανείας στο σημείο A, οι δυναμικές γραμμές έμφανίζονται στην επιφάνεια του άγωγού μεγάλη απόκλιση. Το αντίθετο συμβαίνει στο σημείο B όπου η μικρή κυρτότητα της επιφανείας προσδιορίζει σχεδόν παράλληλες δυναμικές γραμμές. Τώρα, σε αρκετά μεγάλη απόσταση, ο άγωγός έμφανίζεται ως σημειακό φορτίο με ακτινική διεύθυνση του πεδίου και ίσοτροπική ένταση E_0 . Από την εξ. (2.53) είναι φανερό ότι για να καταλήξουν ασυμπτωτικά στην ίδια ένταση E_0 οι δύο κώνοι δυναμικών γραμμών που αρχίζουν από τα σημεία A και B με αντίστοιχες εντάσεις E_A και E_B θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$E_A > E_B. \quad (2.54)$$

Αν και τα επιχειρήματα που οδηγούν στην τελευταία σχέση είναι μόνο ποιοτικά έπιτρέπουν την έξαγωγή του γενικού συμπεράσματος ότι στην περιοχή μεγάλης καμπυλότητας της επιφανείας άγωγού περιμένουμε έξαρση της εντάσεως του ηλεκτροστατικού πεδίου. Η ιδιότητα αυτή λαμβάνεται σοβαρά υπόψη κατά την κατασκευή ηλεκτροστατικών διατάξεων.

3. Σε μία κοιλότητα άγωγού που δεν υπάρχει περίσσεια ηλεκτρικού φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται. Αν έξω από τον άγωγο υπάρχει κάποιο ηλεκτρικό πεδίο, η κατανομή φορτίου που δημιουργείται στην επιφάνεια του άγωγού έκμηδενίζει το πεδίο τόσο στο έσωτερικό του άγωγού όσο και στο έξωτερικό της κοιλότητας. Μπορούμε να αποδείξουμε την ιδιότητα αυτή με τη βοήθεια του σχήμα-





ΣΧΗΜΑ 2-10. Μηδενισμός του ηλεκτρικού πεδίου στο έσωτερικό κοιλότητας άγωγου.

τος 2-10, όπου η γραμμοσκιασμένη περιοχή αντιπροσωπεύει τον άγωγο, ενώ φ_0 είναι τό δυναμικό τής έσωτερικής (ισοδυναμικής) του έπιφανείας. Έστω ότι κάποιο σημείο A στό έσωτερικό τής κοιλότητας βρίσκεται σέ διάφορο δυναμικό φ_A . Αν $\varphi_A \neq \varphi_0$, τότε υπάρχει μιá ισοδυναμική έπιφάνεια μέ δυναμικό φ_A πού δέν τέμνει τήν ισοδυναμική έπιφάνεια φ_0 και έπομένως βρίσκεται όλόκληρη στό έσωτερικό τής κοιλότητας. Μεταξύ τών δύο ισοδυναμικών έπιφανειών τό ηλεκτρικό πεδίο έχει μιá συγκεκριμένη διεύθυνση και έπομένως ή ροή $\int \underline{E} \cdot d\underline{a}$ κάποια μή μηδενική τιμή. Από τό νόμο του Gauss τουτο συνεπάγεται τήν ύπαρξη ενός φορτίου q στό έσωτερικό τής ισοδυναμικής έπιφανείας φ_A , πού είναι αντίθετο πρός τήν άρχική υπόθεση.

Στήν ιδιότητα πού μόλις έξετάσαμε στηρίζεται ή άρχή τής ηλεκτρικής θωρακίσεως, δηλαδή στή δημιουργία χώρων μέσα στό έργαστήριο πού είναι άπαλλαγμένοι από ηλεκτρικό πεδίο.

4. Ή πυκνότητα φορτίου στήν έπιφάνεια ενός άγωγού είναι άνάλο-



γη προς την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κοντά στην επιφάνεια.

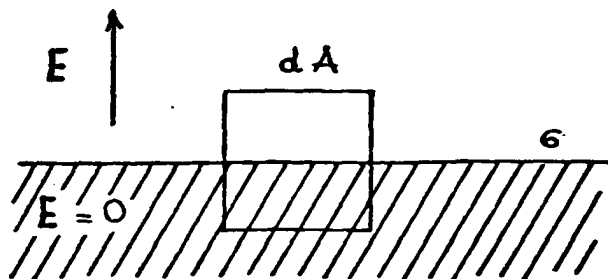
Ἡ ιδιότητα αὐτή μπορεῖ εὐκόλα νά ἀποδειχθεῖ ἀπὸ τὸ νόμο τοῦ Gauss πού ταυτόχρονα παρέχει τὸ συντελεστή ἀναλογίας. Παρατηρώντας σέ μεγένθυση τὴν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ, ὅπως στὸ σχῆμα 2-11, μποροῦμε νά θεωρήσουμε ἓνα μικρὸ κύλινδρο μὲ ἄξονα κάθετο πρὸς τὴν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ καὶ διατομὴ dA . Ὅπως ἔχουμε ἤδη δεῖ, τὸ ηλεκτρικὸ πεδίο μηδενίζεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ ἀγωγοῦ ἐνῶ κοντὰ στὴν (ισοδυναμικὴ) ἐπιφάνεια εἶναι κάθετο πρὸς αὐτή. Ἡ ὀλικὴ ἐπομένως ροὴ τοῦ ηλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι $E dA$ ἐνῶ τὸ φορτίο πού περιέχεται στὸν κύλινδρο σdA , ὅπου σ ἡ ἐπιφανειακὴ πυκνότητα φορτίου στὸν ἀγωγό. Ἀπὸ τὸ νόμο τοῦ Gauss

$$E dA = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi\sigma dA$$

ἢ

$$\sigma = \left[4\pi\epsilon_0 \right] \frac{1}{4\pi} E \quad (2.55)$$

πού ἐκφράζει τὴν ἀναλογία τῆς ἐντάσεως τοῦ ηλεκτρικοῦ πεδίου ἔξω ἀπὸ τὸν ἀγωγό στὴν ἄμεση γειτονία τῆς ἐπιφανειακῆς πυκνότητας σ .



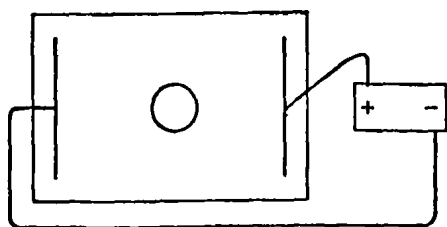
· ΣΧΗΜΑ 2-11. Ἐπιφάνεια Gauss γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τῆς ἐντάσεως τοῦ ηλεκτρικοῦ πεδίου κοντὰ στὴν ἐπιφάνεια ἀγωγοῦ.



Οι ιδιότητες των αγωγών που μελετήσαμε εξετάζονται στο επόμενο πείραμα.

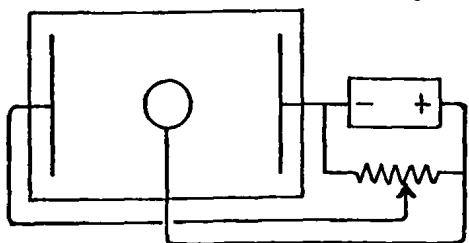
ΠΕΙΡΑΜΑ 2-2. Προτού σχεδιάσετε τό κυκλικό ηλεκτρόδιο στο σχήμα 2-12(α) χαρτογραφίστε τό ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ή διαφορά δυναμικού στά δύο εύθύγραμμα ηλεκτρόδια.

— Σχεδιάστε τό κυκλικό ηλεκτρόδιο καί προσδιορίστε τίσ νέες ισοδυναμικές καί δυναμικές γραμμές. Χρησιμοποιώντας τίσ ιδιότητες των αγωγών σχολιάστε τήν παραμόρφωση του πεδίου από τήν ύπαρξη του κυκλικού άγωγού. Ποιά ή τιμή του δυναμικού στην έπιφάνεια του κυκλικού άγωγού καί ποιά ή τιμή του στην έσωτερική έπιφάνεια;
— Χρησιμοποιείστε ένα ρεοστάτη μέ όλική άντίσταση περίπου 5 kΩ για νά καθορίσετε τήν τιμή του δυναμικού στον κυκλικό άγωγό του σχήματος 2-12(β), σέ σχέση μέ τήν τιμή δυναμικού στά δύο εύθύ-

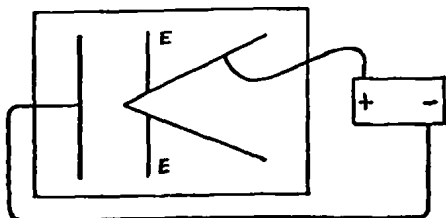


(α)

ΣΧΗΜΑ 2-12. Διατάξεις ηλεκτροδίων για τή μελέτη τής συμπεριφοράς άγωγών σέ ήλεκτρικό πεδίο.



(β)



(γ)



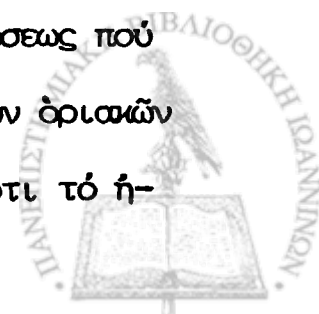
γραμμα ηλεκτρόδια. Χαρτογραφίστε τό ηλεκτρικό πεδίο καί συγκρίνετε τά αποτελέσματά σας μέ τά αποτελέσματα τῆς προηγούμενης διατάξεως.

— Προτοῦ σχεδιάσετε τά δύο εὐθύγραμμα ηλεκτρόδια μέ τήν ἔνδειξη "E" χαρτογραφίστε τό ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ τοῦ εὐθύγραμμου καί τοῦ τριγωνικοῦ ηλεκτροδίου. Προσθέστε τά δύο ηλεκτρόδια "E" καί ἐπαναλάβετε τήν ἐργασία. Σχολιάστε τά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τίς ιδιότητες τῶν ἀγωγῶν.

2-10 Τό Ἠλεκτροστατικό Πεδίο Ἐλεύθερων Φορτίων. Οἱ Ἐξισώσεις Poisson καί Laplace. Ὁριακές Συνθήκες

Στήν παράγραφο 2-6 εἶδαμε ὅτι ἂν ἡ κατανομή φορτίου $\rho(\underline{r})$ εἶναι γνωστή τότε τό πεδίο $\underline{E}(\underline{r})$ ἢ τό δυναμικό $\varphi(\underline{r})$ μποροῦν νά ὑπολογιστοῦν, τουλάχιστον κατ'ἀρχήν, μέ μιὰ ὀλακλήρωση. Στήν πράξη τό ἠλεκτροστατικό πρόβλημα δέν εἶναι τόσο ἀπλό. Ἡ διάταξη πού θεωροῦμε μπορεῖ, πέρα ἀπό μιὰ συγκεκριμένη κατανομή φορτίου, νά περιέχει ἀγωγούς σέ ὀρισμένο σταθερό δυναμικό ἢ μέ καθορισμένο ὀλικό φορτίο. Ἐνας ἀπό τοὺς ἀγνώστους στήν περίπτωση αὐτή εἶναι ἡ ἐπιφανειακή κατανομή φορτίου στοὺς ἀγωγούς, πού μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μόνο μετά τήν επίλυση τοῦ ὄλου προβλήματος. Στήν περίπτωση ἐπιμένως αὐτή τά ὀλοκληρώματα τῶν ἐξ. (2.18) καί (2.49) δέν μποροῦν νά ὑπολογιστοῦν.

Ἡ μαθηματική διαδικασία πού ἐπιτρέπει τόν ὑπολογισμό τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου στήν περίπτωση ὅπου ἡ κατανομή φορτίου δέν εἶναι ἐξαρχῆς γνωστή συνίσταται στήν επίλυση μιᾶς διαφορικῆς ἐξισώσεως πού ικανοποιεῖ τό ηλεκτρικό πεδίο μέ ταυτόχρονη ικανοποίηση τῶν ὀριακῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος. Ἦδη στήν παράγραφο 2-3 εἶδαμε ὅτι τό ἡ-



ηλεκτρικό πεδίο ικανοποιεί την εξίσωση

$$\nabla \cdot \underline{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi\rho. \quad (2.56)$$

Χρησιμοποιώντας αντίση την εξ. (2.41) πού συνδέει τό ηλεκτρικό πεδίο μέ τό δυναμικό

$$\underline{E} = - \nabla\phi \quad (2.41)$$

μπορούμε νά γράψουμε την αντίστοιχη εξίσωση, γνωστή ως εξίσωση Poisson, πού ικανοποιεί ή συνάρτηση δυναμικού

$$\nabla^2\phi \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = - \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi\rho \quad (2.57)$$

Είδικότερα, στόν ελεύθερο χώρο όπου ή κατανομή φορτίου μηδενίζεται, ή εξίσωση Poisson παίρνει τή μορφή

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (2.58)$$

γνωστή ως εξίσωση Laplace. Τό πρόβλημα επομένως ανάγεται στην εύρεση τής συναρτήσεως $\phi(\underline{r})$ πού ικανοποιεί την εξ. (2.57) ή (2.58) καί ταυτόχρονα τίς όριακές συνθήκες πού έχουν δοθεϊ για τήν έπιφάνεια τών άγωγών του συτήματος.

Οι όριακές συνθήκες του προβλήματος μπορεί νά καθορίζουν τό δυναμικό στην έπιφάνεια κάθε άγωγού. Άν οι συνθήκες αυτές συμπληρωθούν από την άπαιτήση μηδενισμού του δυναμικού σε μιά έπιφάνεια πού περιβάλλει τό σύστημα σε άπειρη άπόσταση, τότε ή τιμή τής συναρτήσεως δυναμικού έχει καθοριστεί στό σύνολο τών έπιφανειών πού περιβάλλουν

τόν κενό χώρο. Θα ονομάσουμε τις συνθήκες του τύπου αυτού συνθήκες Dirichlet. Έναλλακτικά οι όριακές συνθήκες μπορεί να καθορίζουν το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια κάθε άγωγού. Από τις έξ. (2.41) και (2.55)

$$\underline{E} = - \nabla\varphi = - \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi \sigma. \quad (2.59)$$

Οι συνθήκες αυτές, που θα ονομάσουμε συνθήκες Neumann, ισοδυναμούν με τον προσδιορισμό της κλίσης του δυναμικού ή της πυκνότητας φορτίου στην επιφάνεια κάθε άγωγού. Τέλος οι όριακές συνθήκες μπορεί να καθορίζουν το όλικό φορτίο σε κάθε άγωγό, που από την προηγούμενη σχέση δίνεται ως

$$Q = \int_S \sigma \, d\alpha = - \left[4\pi\epsilon_0 \right] \frac{1}{4\pi} \int_S \nabla\varphi \cdot d\alpha \quad (2.60)$$

όπου S η επιφάνεια του άγωγού.

Μπορεί τώρα να διατυπωθεί η εξαιρετικά ενδιαφέρουσα ερώτηση:

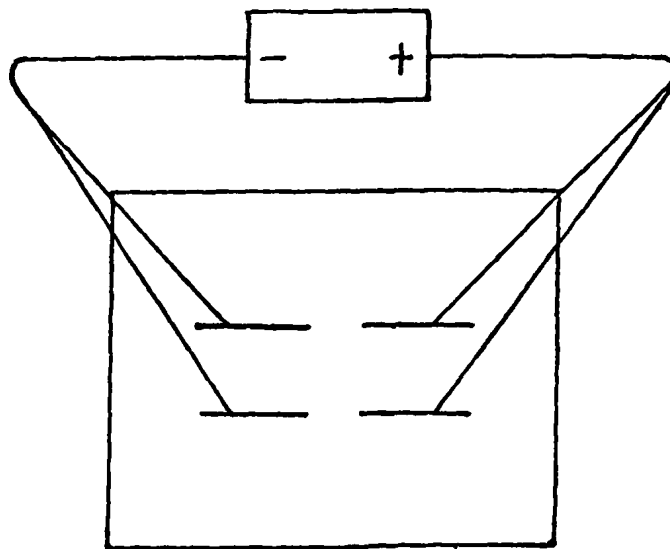
Ποιές είναι οι απαραίτητες συνθήκες ώστε η εξίσωση Poisson να οδηγήσει σε μία μοναδική λύση για το δυναμικό; Το αποτέλεσμα της μαθηματικής ανάλυσης, που παρουσιάζεται σε πλέον προχωρημένα συγγράμματα και δεν θα αναπτυχθεί στα πλαίσια του κεφαλαίου αυτού, συμπίπτει με αυτό που περιμένουμε από φυσική διαίσθηση. Για κάθε άγωγό του συστήματος, πέρα από τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά, οι όριακές συνθήκες πρέπει να καθορίζουν ένα από τα τρία μεγέθη: το δυναμικό του άγωγού, το όλικό του φορτίο, ή το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο της επιφανείας του. (Ο έξαρχής προσδιορισμός δύο ή και των τριών μεγεθών για ένα άγωγό του συστήματος μπορεί να είναι είτε περιττός είτε

άσυμβίβαστος). Οι όριακές αυτές συνθήκες είναι ικανές να οδηγήσουν με την επίλυση της εξίσωσης Poisson σε μία μονοσήμαντη συνάρτηση δυναμικού, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία κάθε άγωγού μπορούν να βρεθούν διαμέσου των έξ. (2.59) και (2.60).

Γενικές μέθοδοι επίλυσης της εξίσωσης Poisson ή Laplace δίνονται στα περισσότερα συγγράμματα μαθηματικής Φυσικής. Σε πολλές περιπτώσεις, όπου το σύστημα παρουσιάζει συμμετρία ως προς ένα σημείο ή άξονα, οι εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν σε λιγότερες από τρεις διαστάσεις. Στη σύντομη ανασκόπηση της ηλεκτροστατικής που διατρέχουμε στο Κεφάλαιο αυτό δεν θα εξετάσουμε τις μαθηματικές αυτές μεθόδους.

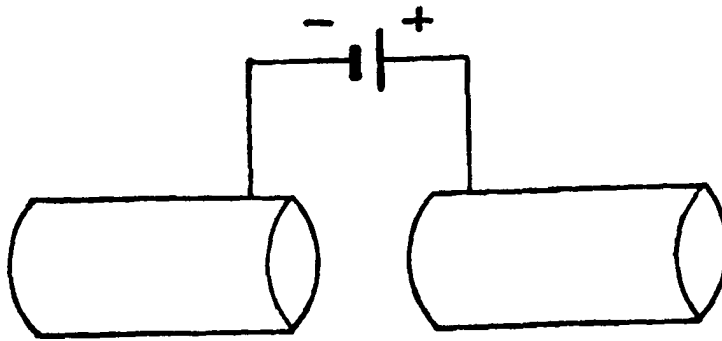
Η ποιοτική συμπεριφορά του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί συχνά να προσδιοριστεί πειραματικά με τη μέθοδο που αναπτύξαμε στα μέχρι τώρα πειράματα. Μια εφαρμογή της μεθόδου αυτής για την επίλυση ενός σημαντικού προβλήματος όριακών συνθηκών θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

ΠΕΙΡΑΜΑ 2-3. Συνδέστε τό τροφοδοτικό ΣΡ με τά τέσσερα εύθύγραμμα ηλεκτρόδια που περιέχονται στή διάταξη του σχήματος 2-13.



ΣΧΗΜΑ 2-13. Προσδιορισμός των δυναμικών γραμμών σε διάταξη ηλεκτροστατικού φακού.





ΣΧΗΜΑ 2-14. Διάταξη ηλεκτροστατικού φακού με δύο κυλινδρικά ηλεκτρόδια.

Προσδιορίστε τις ισοδυναμικές επιφάνειες και χαράξτε τις δυναμικές γραμμές γύρω από το κέντρο της διατάξεως.

— Η διάταξη των ηλεκτροδίων του σχήματος 2-13 μπορεί να θεωρηθεί ως τομή του ηλεκτροστατικού φακού που δίνεται στο σχήμα 2-14. Παρόμοιες διατάξεις χρησιμοποιούνται σε ηλεκτρονικά μικροσκόπια και επιταχυντές φορτισμένων σωματίων. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του πειράματος περιγράψτε πώς η παράλληλη δέσμη ηλεκτρονίων, που στο σχήμα 2-14 διέρχεται από τα δύο κυλινδρικά ηλεκτρόδια, εστιάζεται στο κέντρο της διατάξεως.

Μία εναλλακτική μέθοδο, που μας επιτρέπει να βρούμε λύσεις της εξισώσεως Poisson χωρίς να επιλύσουμε την διαφορική εξίσωση, θα παρουσιάσουμε στην επόμενη παράγραφο. Αν και μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα σχετικά περιορισμένο αριθμό ηλεκτροστατικών διατάξεων, έμκα-νίζει αρκετό ενδιαφέρον και χρησιμότητα.



2-11 Ἡλεκτροστατικά Εἶδωλα

Τό δυναμικό πού δημιουργεῖ μιὰ ἠλεκτροστατική διάταξη σταθερῶν φορτίων καί ἀγωγῶν τοποθετημένων στό κενό χῶρο μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{x}) &= \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_V \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^3r' + \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_{S_C} \frac{\sigma(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^2r' \\ &= \varphi_1(\underline{x}) + \varphi_2(\underline{x})\end{aligned}\quad (2.61)$$

ὅπου $\rho(\underline{x})$ εἶναι ἡ σταθερή πυκνότητα φορτίου στόν κενό χῶρο V καί $\sigma(\underline{x})$ ἡ ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου στήν ἐπιφάνεια S_C κάθε ἀγωγῶ. Ὅπως ἤδη τονίσαμε, ἄν οἱ ὁριακές συνθήκες τοῦ προβλήματος δέν εἶναι συνθήκες Neumann τότε ἡ συνάρτηση $\sigma(\underline{x})$ ἀποτελεῖ ἓνα ἀπό τοὺς ἀγνώστους πού μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μόνο μετά τήν ἐπίλυση τῆς ἐξίσωσης Poisson γιά τό δυναμικό. Ἔτσι τό δεύτερο ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (2.61) δέν εἶναι δυνατόν νά ὑπολογιστεῖ. Ὑπάρχουν ὅμως περιπτώσεις ὅπου οἱ ἐπιφάνειες S_C τῶν ἀγωγῶν εἶναι ἀρκετά ἀπλές ὥστε νά τίς ἀναγνωρίζουμε ὡς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες κάποιας διατάξεως σταθερῶν φορτίων. Εἰδικότερα, ἄν ἀπομακρύνουμε ὅλους τοὺς ἀγωγούς ἀπό τό σύστημα εἶναι δυνατόν νά γνωρίζουμε μιὰ κατανομή σταθερῶν φορτίων $\rho_i(\underline{x})$ στό χῶρο πού καταλάμβαναν οἱ ἀγωγοί τέτοια ὥστε, οἱ κατανομές $\rho(\underline{x})$ καί $\rho_i(\underline{x})$ νά δημιουργοῦν ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες ὅμοιες μέ τίς ἐπιφάνειες τῶν ἀγωγῶν τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος. Ἄν ἐπιπλέον εἶναι δυνατόν νά ἐπιλέξουμε τό ἀπόλυτο μέγεθος τῆς ὑποθετικῆς κατανομῆς $\rho_i(\underline{x})$ ἔτσι ὥστε, ὄχι μόνο οἱ ἐπιφάνειες τῶν ἀγωγῶν νά εἶναι ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες, ἀλλά καί νά ἐκφραζοῦν τίς σωστές ὁριακές συνθήκες, τό πρόβλημα ἔχει οὐσιαστικά λυθεῖ. Ἀπό τή μοναδικότητα τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ, τό δυναμικό πού δημιουργεῖ ἡ κατανομή $\rho(\underline{x})$

καί ἡ ὑποθετική κατανομή $\rho_i(\underline{r})$ στό χῶρο V , ταυτίζεται μέ τή λύση τῆς ἐξισώσεως Poisson πού ικανοποιεῖ τίς ὀριακές συνθήκες στήν ἐπιφάνεια κάθε ἀγωγού τῆς διατάξεως. Ἀναλυτικά, στό χῶρο V , τό δυναμικό $\varphi_2(\underline{r})$ δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\varphi_2(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_{V_i} \frac{\rho_i(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r' \quad (2.62)$$

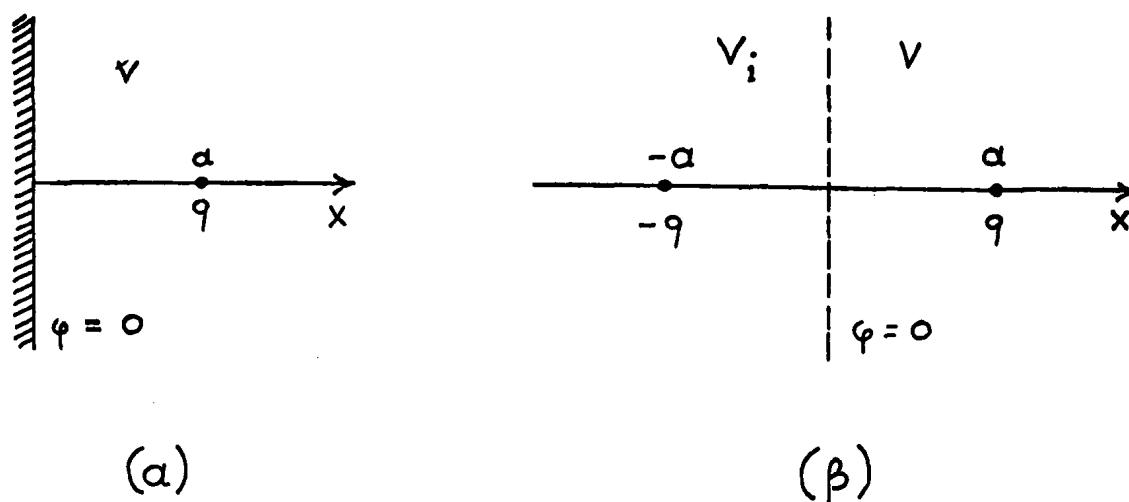
ὅπου ἡ ὀλοκλήρωση ἐπεκτείνεται στό χῶρο V_i πού καταλαμβάνουν οἱ ἀγωγοί τοῦ συστήματος.

Ἕνα ἀπλό παράδειγμα τῆς μεθόδου πού μόλις περιγράψαμε δίνεται στό σχῆμα 2-15 πού ἀναλύει τή διάταξη ἑνός σημειακοῦ φορτίου q σέ ἀπόσταση a ἀπό ἕνα γειωμένο ἐπίπεδο ἀγωγό μέ ἄπειρες διαστάσεις. Γιά σαφήνεια, τό φορτίο q ἔχει τοποθετηθεῖ στόν ἄξονα x καί σέ ἀπόσταση a ἀπό τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων, ἐνῶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγού βρίσκεται στό ἐπίπεδο yz . Δέν χρειάζεται μεγάλη πείρα μέ ἠλεκτροστατικά προβλήματα ὥστε νά γνωρίζει κανεῖς ὅτι μιά ἐπίπεδη ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια μέ μηδενικό δυναμικό, ὅπως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγού στό σχῆμα 2-15(α), μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ ἀπό τό ἀρχικό φορτίο q καί ἕνα ὑποθετικό φορτίο $-q$ πάνω στόν ἄξονα x καί στή θέση $x=-a$. Τό δυναμικό στήν περιοχή V μπορεῖ ἐπομένως νά γραφεῖ ἀμέσως ὡς

$$\varphi(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \left(\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad (2.63)$$

Χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (2.59) μπορούμε τώρα ἀπό τή λύση τοῦ προβλήματος νά ὑπολογίσουμε τήν πυκνότητα φορτίου στήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγού ὡς





ΣΧΗΜΑ 2-15(α) Σημειακό φορτίο q σε απόσταση a από ένα γειωμένο άγωγο με άπειρες διαστάσεις. (β) Αντικατάσταση του άγωγου με τό υποθετικό φορτίο $-q$.

$$\sigma = - \left[4\pi\epsilon_0 \right] \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \frac{q a}{2\pi(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.64)$$

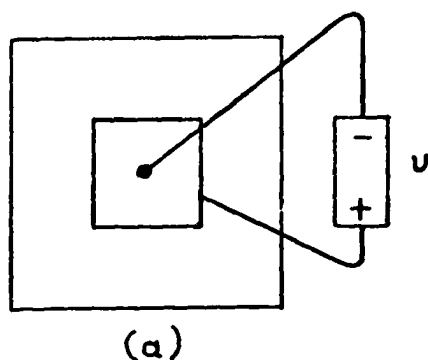
Ή λίγο πιο περίπλοκη διάταξη που θα εξετάσουμε στο επόμενο πείραμα βασίζεται στην ίδια άρχή.

ΠΕΙΡΑΜΑ 2-4. Προσδιορίστε τύς ισοδυναμικές και δυναμικές γραμμές στη διάταξη ήλεκτροδύων του σχήματος 2-16(α). Ή διάταξη άπεικονύζει ένα σημειακό άρνητικό φορτίο στο κέντρο μιās κοιλότητας γειωμένου άγωγου, ή οποία έχει τετράγωνη διατομή και άπειρη έκταση ως προς τή διάσταση που είναι κάθετη προς τό σχήμα. Χρησιμοποιεΐστε διαφορά δυναμικού μεταξύ τών ήλεκτροδύων $3V$.

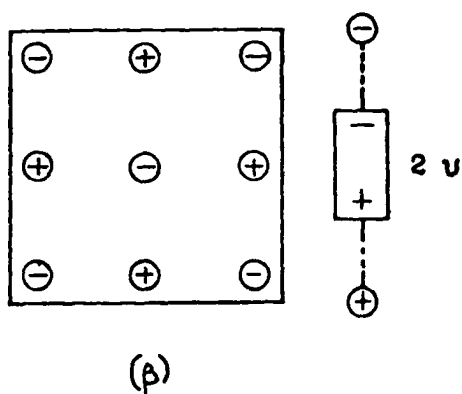
προσδιορίστε τύς ισοδυναμικές και δυναμικές γραμμές στη διάταξη των σημειακών φορτίων του σχήματος 2-16(β) και στο χώρο

πού καταλάμβανε προηγουμένως ή κοιλότητα. Τά σημειακά φορτία πού συμβολίζονται ως \oplus συνδέονται μέ τόν θετικό καί τά φορτία πού συμβολίζονται μέ \ominus μέ τόν άρνητικό άκροδέκτη τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ ή τοῦ ηλεκτρικοῦ στοιχείου. Χρησιμοποιεῖστε διαφορά δυναμικοῦ $2U \approx 6V$.

— Ἐρμηνεῦστε τά ἀποτελέσματα σας διαμέσου τῆς μεθόδου τῶν ηλεκτροστατικῶν εἰδώλων. Γιατί χρειάστηκε νά χρησιμοποιήσετε διπλάσια διαφορά δυναμικοῦ στή δεύτερη διάταξη ηλεκτροδίων;



ΣΧΗΜΑ 2-16(α) Σημειακό φορτίο στό ἐσωτερικό κοιλότητας γειωμένου άγωγού. (β) Ἴσοδύναμη διάταξη ηλεκτροστατικῶν εἰδώλων.



Διατάξεις πού περιέχουν σφαιρικές ἐπιφάνειες άγωγῶν μποροῦν νά ἀναλυθοῦν κατά παρόμοιο τρόπο. Κατ'ἀρχήν γνωρίζουμε ὅτι ἕνα σημειακό φορτίο, ή οποιαδήποτε σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου, δημιουργεῖ σφαιρικές ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες. Μιά σφαιρική ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια μέ δυναμικό ἴσο μέ τό μηδέν μπορεῖ ἀκόμη νά δημιουργηθεῖ ἀπό δύο ἑτεράνυμα φορτία q_1 καί $-q_2$ ($q_1 > q_2 > 0$). Για νά δείξουμε τήν ἰδιότητα αὐτή καί ταυτόχρονα νά προσδιορίσουμε τίς διαστάσεις τῆς ἰσοδυναμικῆς αὐτῆς ἐπιφάνειας θά θεωρήσουμε ἕνα σημείο της πού απέχει ἀπό τά δύο φορτία ἀποστάσεις r_1 καί r_2 . Τό δυναμικό στό σημείο αὐτό δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$\varphi = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right) = 0 \quad (2.65)$$

πού οδηγεί στη σχέση

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{q_1}{q_2} \quad (2.66)$$

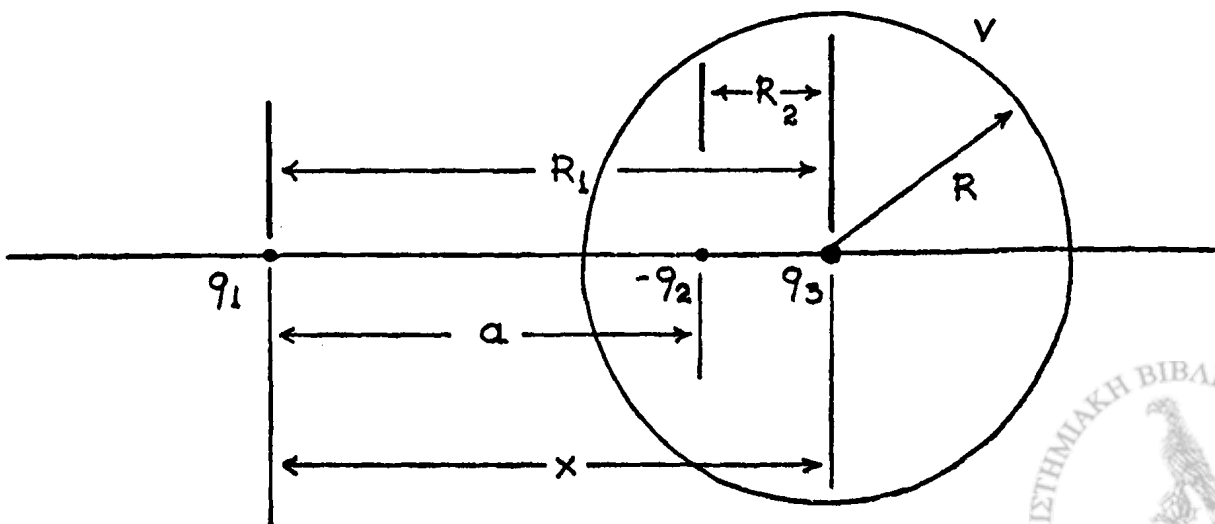
Ἡ ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια μέ μηδενικό δυναμικό πού δημιουργοῦν τά δύο φορτία εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων πού ἀπέχουν ἀπό τίς θέσεις τῶν φορτίων ἀποστάσεις μέ σταθερό λόγο q_1/q_2 . Ὁ γεωμετρικός αὐτός τόπος, γνωστός στή γεωμετρία ὡς "σφαῖρα τοῦ Ἀπολλωνίου" εἶναι μιὰ σφαῖρα μέ κέντρο

$$R = \frac{q_1 q_2}{q_1^2 - q_2^2} a \quad (2.67\alpha)$$

ὅπου a ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο φορτίων. Τό κέντρο τῆς σφαίρας βρίσκεται πάνω στήν εὐθεῖα πού ἐνώνει τά δύο φορτία καί σέ ἀπόσταση R_1 ἀπό τό φορτίο q_1

$$R_1 = \frac{q_1^2}{q_1^2 - q_2^2} a \quad (2.67\beta)$$

Ἡ γεωμετρία τοῦ προβλήματος δίνεται στό σχῆμα 2-17.



ΣΧΗΜΑ 2-17. Σφαιρική ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια τριῶν φορτίων.

Ο συνδιασμός των δύο παραπάνω απλών κατανομών μαζί επιτρέπει πάλι να δημιουργήσουμε σφαιρικές ισοδυναμικές επιφάνειες με οποιαδήποτε τιμή του δυναμικού και επομένως να επιλύσουμε προβλήματα ηλεκτροστατικών διατάξεων που περιέχουν σφαιρικούς αγωγούς σε σταθερό δυναμικό. Η συνάρτηση δυναμικού π.χ. που δημιουργείται από ένα φορτίο q_1 σε απόσταση R_1 από το κέντρο ενός σφαιρικού αγωγού με ακτίνα R και δυναμικό V , αποδίδεται από μία ισοδύναμη διάταξη τριών σημειακών φορτίων: το αρχικό φορτίο q_1 και δύο υποθετικά φορτία q_2, q_3 , όπου το φορτίο q_2 έχει τιμή

$$q_2 = -\frac{R}{R_1} q_1 \quad (2.68a)$$

και βρίσκεται πάνω στην εύθεια που ενώνει το κέντρο του σφαιρικού αγωγού με το φορτίο q_1 , σε απόσταση

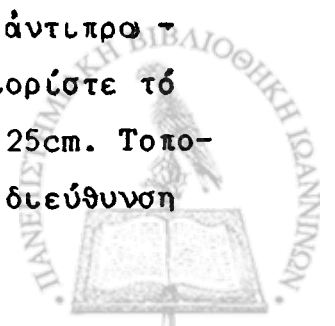
$$R_2 = \frac{R^2}{R_1} \quad (2.68b)$$

από το κέντρο του αγωγού. Το φορτίο q_3 βρίσκεται στο κέντρο του αγωγού και έχει τιμή

$$q_3 = \left[4\pi\epsilon_0 \right] RV \quad (2.69)$$

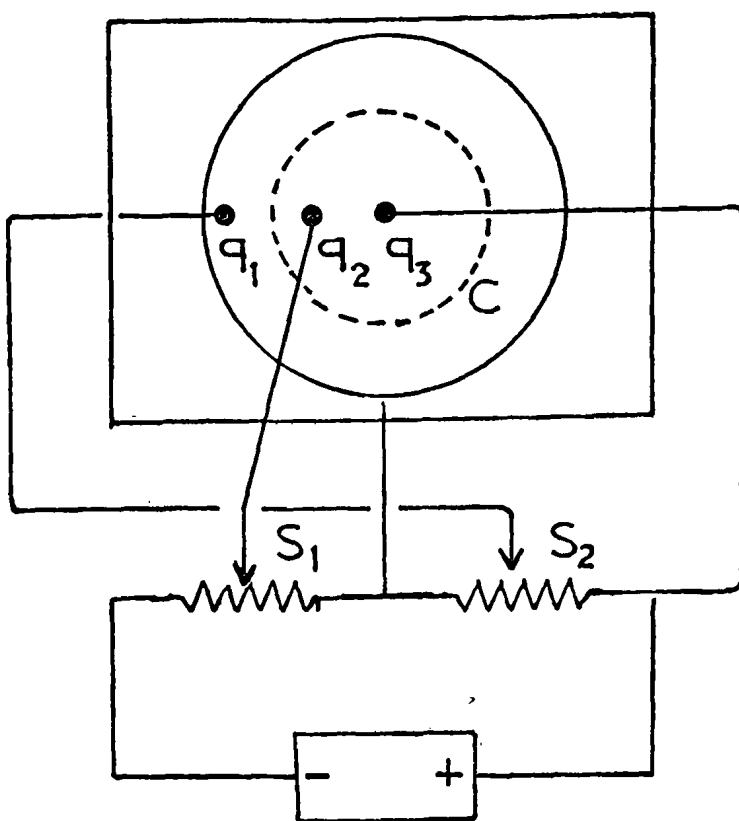
Οι έξ. (2.68) μπορούν εύκολα να εξαχθούν από τις έξ. (2.67) και τη γεωμετρία του σχήματος 2-15. Η έξ. (2.69) προέρχεται από την απαίτηση διατηρήσεως δυναμικού V στην επιφάνεια του αγωγού.

ΠΕΙΡΑΜΑ 2-5 Στή διάταξη του σχήματος 2-18 συνδέστε αρχικά το σημειακό ηλεκτρόδιο q_3 και το κυκλικό ηλεκτρόδιο που αντιπροσωπεύει το δυναμικό σε άπειρη απόσταση $V_0 = 0$. Προσδιορίστε το δυναμικό V ενός ισοδυναμικού κύκλου C με ακτίνα $R=4.25\text{cm}$. Τοποθετήστε τα δύο ηλεκτρόδια q_1 και q_2 σε μία ακτινική διεύθυνση



... από κατάλληλες αποστάσεις ρ_1 και ρ_2 από τό κεντρικό ηλεκτρόδιο ὥστε νά ἱκανοποιεῖται ἡ ἐξ. (2.68β). Προσδιορίστε τή θέση τῆς ἐπαφῆς S_2 ὥστε ὁ κύκλος C νά παραμείνει ἰσοδυναμική γραμμή μέ τό ὕδω δυναμικό V .

— Χαρτογραφίστε τό ἠλεκτρικό πεδίο στό χῶρο ἔξω ἀπό τόν ἰσοδυναμικό κύκλο C . Ἀναλύστε καί σχολιάστε τά ἀποτελέσματα σας στά πλαίσια τῆς μεθόδου τῶν ἠλεκτροστατικῶν εἰδώλων. Ποιό ἠλεκτροστατικό πρόβλημα ἔχετε ἐπιλύσει;



ΣΧΗΜΑ 2-18. Διάταξη ἠλεκτροδίων στό πείραμα 2-5

Ἡ μέθοδος πού περιγράψαμε μέ τά δύο προηγούμενα παραδείγματα ἀναφέρεται παραδοσιακά ὡς μέθοδος τῶν ἠλεκτροστατικῶν εἰδώλων. Ἡ ὀνομασία αὐτή προέρχεται ἀπό τό γεγονός ὅτι σέ ὀρισμένες ἀπλές περιπτώσεις τό φανταστικό φορτίο πού, γιά τόν προσδιορισμό τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μπορεῖ νά ἀντικαταστήσει τόν ἄγωγό, εἶναι τό κατοπτρικό εἶδωλο τοῦ πραγματικοῦ φορτίου ὡς πρὸς τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἄγωγου.

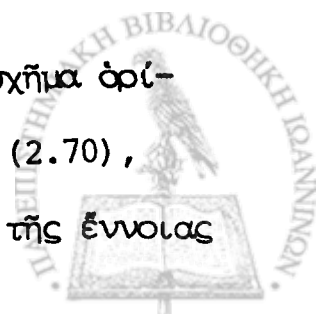
Παρόλη όμως τήν απλότητα και κομψότητα τής μεθόδου, η έκταση της επίλυσης ρεαλιστικών προβλημάτων είναι άρκετά περιορισμένη.

2-12 Διηλεκτρικά Ύλικά

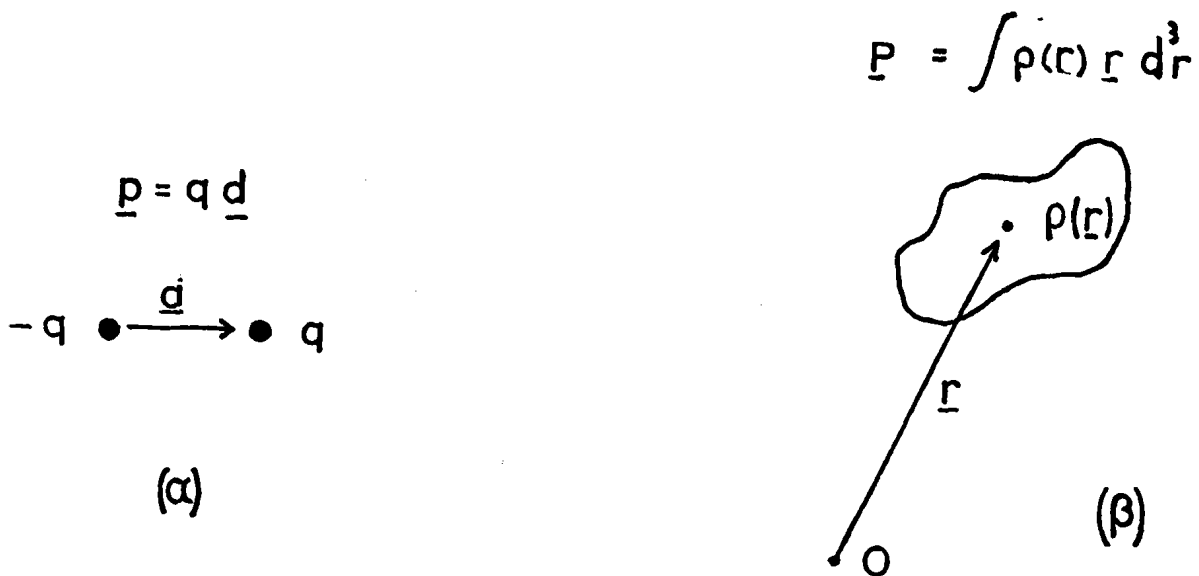
Θά στρέψουμε τώρα τήν προσοχή μας στη δεύτερη κατηγορία υλικών, τούς μονωτές, και τήν επίδρασή τους στη διαμόρφωση του ηλεκτρικού πεδίου. Στα υλικά αυτά θα αναφερθούμε και μέ τόν όρο διηλεκτρικά όταν εξέτάζουμε τή συμπεριφορά τους μέσα σέ ένα ηλεκτρικό πεδίο. Ένα διηλεκτρικό σώμα μπορεί νά συνεισφέρει στό ηλεκτρικό πεδίο κατά δύο τρόπους. Άφενός μπορεί νά έμφανίζει περίσσια ή έλλειμα ηλεκτρονίων, νά συμβάλλει δηλαδή στη διαμόρφωση του πεδίου μέ μιά μικροσκοπική κατανομή φορτίου $\rho(\underline{r})$. Άφετέρου, και ή ιδιότητα αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ένδιαφέρον, μπορεί νά δημιουργήσει ηλεκτρικό πεδίο ακόμη και όταν τό όλικό του φορτίο μηδενίζεται. Η δυνατότητα αυτή προέρχεται από τό γεγονός ότι τά στοιχειώδη συστήματα πού δημιουργούν τό υλικό (άτομα, μόρια ή μονάδες κρυσταλλικής δομής), άν και άφορτιστα, συγκροτούνται από στοιχειώδη σωματρία πού φέρουν ήλεκτρικό φορτίο. Ήδη στόν Πίνακα 2-1 τής παραγράφου 2-6 είδαμε ένα απλό παράδειγμα συστήματος μέ όλικό φορτίο μηδέν πού δημιουργεί ήλεκτρικό πεδίο: τό ηλεκτρικό δίπολο πού χαρακτηρίσαμε μέ τό άνυσμα τής διπολικής ροπής

$$\underline{p} = q \underline{d} \quad (2.70)$$

Η απλή αυτή διάταξη δίνεται στό σχήμα 2-19 (α). Στο ίδιο σχήμα όρίζονται και τά μεγέθη πού υπεισέρχονται στόν όρισμό τής έξ. (2.70), ενώ τό σχήμα 2-19 (β) περιέχει διαγραμματικά τή γενίκευση τής έννοιας



του ηλεκτρικού διπόλου σε μία οποιαδήποτε κατανομή φορτίου $\rho(\underline{r})$.



ΣΧΗΜΑ 2-19.(α) Άπλη κατανομή ηλεκτρικού διπόλου δύο φορτίων q και $-q$ σε σχετική απόσταση d . (β) Όρισμός της διπολικής ροπής κατανομής φορτίου $\rho(\underline{r})$.

Θά ορίσουμε την ηλεκτρική διπολική ροπή μιας κατανομής $\rho(\underline{r})$ με τη σχέση

$$\underline{p} = \int \rho(\underline{r}) \underline{r} d^3r \quad (2.71)$$

πού όπως είναι εύκολο να αποδειχτεί μεταπίπτει στην έξ. (2.70) για την απλή κατανομή φορτίου του σχήματος 2-19(α).

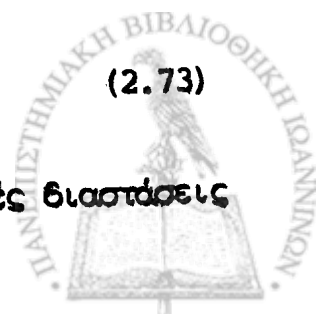
Τό ηλεκτρικό πεδίο ή έναλλακτικά τό δυναμικό πού δημιουργεί ένα ηλεκτρικό δίπολο δίνονται στον Πίνακα 2-1

$$\underline{E}(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{3\hat{r}(\underline{p} \cdot \hat{r}) - \underline{p}}{r^3} \quad (2.72)$$

και

$$\varphi(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{\underline{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (2.73)$$

για αποστάσεις r μεγάλες σε σχέση με τις χαρακτηριστικές διαστάσεις



του διπόλου. Όπως δείχνουν οι έξ. (2.72) και (2.73) το πεδίο και δυναμικό που δημιουργεί η ηλεκτρική διπολική ροπή p φθίνει κατά μία δύναμη της απόστασης r γρηγορότερα από το πεδίο και δυναμικό που δημιουργεί το όλικό φορτίο της κατανομής

$$q = \int \rho(\underline{r}) d^3r \quad (2.74)$$

Τό διπολικό πεδίο και δυναμικό αποκτούν έπομένως ένδιαφέρον στην περίπτωση όπου τό όλικό φορτίο της κατανομής $\rho(\underline{r})$ μηδενίζεται. Στην περίπτωση μάλιστα αυτή μπορούμε νά αποδείξουμε δύο σημαντικές ιδιότητες της ηλεκτρικής διπολικής ροπής που όρίζεται στην έξ. (2.71)

1. Αν τό όλικό φορτίο της κατανομής μηδενίζεται, τό άνυσμα p της έξ. (2.71) είναι ανεξάρτητο από την έπιλογή της άρχής τών συντεταγμένων.
2. Αν ένα σύστημα φορτίων συγκροτείται από N μικρότερα συστήματα, τό καθένα μέ διπολική ροπή $p_k, k = 1, 2, \dots, N$, τότε η όλική διπολική ροπή του συστήματος δίνεται από τό άνυσματικό άθροισμα τών έπιμέρους ροπών

$$p = \sum_{k=1}^N p_k \quad (2.75)$$

θά έχει γίνει πλέον φανερός, τουλάχιστον στίς γενικές του γραμμές, ό μηχανισμός μέ τόν όποίο ένα άφόρτιστο διηλεκτρικό ύλικό μπορεί νά δημιουργήσει ηλεκτρικό πεδίο. Κάθε μόριο του ύλικού, αν και ηλεκτρικά σúdeτερο, μπορεί νά διαθέτει μία πεπερασμένη ηλεκτρική διπολική ροπή p_k (ό τρόπος δημιουργίας της άσυμμετρίας στην κατανομή φορτίου που δημιουργεί τη διπολική ροπή θά μς άπασχολήσει άργότερα). Αν τό άθροισμα της έξ. (2.75), που έκτείνεται ρέ όλα τά μόρια του ύλι-

κού, είναι επίσης πεπερασμένο, σύμφωνα με την εξ. (2.72) θα δημιουργήσει ένα μακροσκοπικό ηλεκτρικό πεδίο.

Μπορούμε να συνδέσουμε τη μακροσκοπική έννοια του πεδίου με τη μικροσκοπική εικόνα της ηλεκτρικής διπολικής ροπής κάθε μορίου αν σε αναλογία με τη συνάρτηση πυκνότητας φορτίου $\rho(\underline{r})$ (έλεύθερο φορτίο ανά μονάδα όγκου) ορίσουμε την άνυσματική συνάρτηση $\underline{P}(\underline{r})$ που περιγράφει την ηλεκτρική διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου του υλικού

$$\underline{P}(\underline{r}) \equiv \frac{d\underline{p}}{d^3r} \quad (2.76)$$

Η ηλεκτρική πόλωση, όπως θα ονομάσουμε την άνυσματική συνάρτηση $\underline{P}(\underline{r})$, θα περιγράφει το διηλεκτρικό υλικό ως πηγή του διπολικού ή-λεκτρικού πεδίου, αν στη διακρόσηση της εξ. (2.76) λάβουμε πρόνοια ώστε το στοιχείο του όγκου d^3r να είναι άφενός μακροσκοπικά άπειροελάχιστο, ενώ αφετέρου να περιέχει ακόμη ένα μεγάλο αριθμό μορίων του υλικού. Στο όριο αυτό, η ηλεκτρική διπολική ροπή που εκφραίνεται το στοιχείο του όγκου είναι

$$d\underline{p} = \underline{P} d^3r = \sum_{k=1}^N \underline{p}_k \quad (2.77)$$

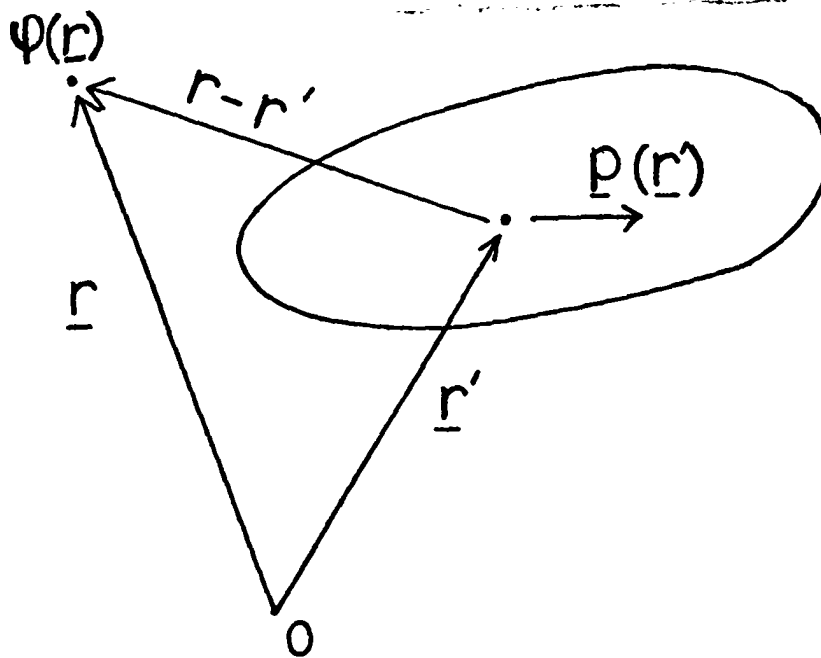
όπου ο μεγάλος αριθμός N των μορίων εξασφαλίζει ότι στατιστικές διακυμάνσεις στον ορισμό της εξ. (2.76) μπορούν να θεωρηθούν ως άμελητες.

Η συνεισφορά της ηλεκτρικής διπολικής ροπής της εξ. (2.77) στο ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται τώρα στην εξ. (2.73) ως

$$d\phi(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{\underline{P}(\underline{r}') \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} d^3r'$$

ενώ το όλικό δυναμικό μπορεί να βρεθεί από την ολοκλήρωση της τελευταίας έκφρασης στον όγκο V του διηλεκτρικού υλικού





ΣΧΗΜΑ 2-20. Τό ηλεκτρικό δυναμικό πού δημιουργεῖται ἀπό τήν πόλωση $\underline{P}(\underline{r}')$ διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ.

$$\varphi(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_V \frac{\underline{P}(\underline{r}') \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} d^3r' \quad (2.78)$$

Ἡ γεωμετρία τῆς ἐξ. (2.78) δίνεται στό σχῆμα 2-20. Ἀνάλογη ἔκφραση μπορούμε νά γράψουμε γιά τό ηλεκτρικό πεδίο $\underline{E}(\underline{r})$.

Παρατηρεῖται ὅτι ἀπό τόν ὀρισμό τῆς ἐξ. (2.76) ἡ μονάδα τῆς ἠλεκτρικῆς πολώσεως εἶναι γιά μέν τό σύστημα CGS τό ΗΣΜ-φ/σμ² ἐνώ γιά τό σύστημα SI τό C/μ². Ἡ σύνδεση τῶν δύο μονάδων δίνεται ἀπό τή σχέση

$$1 \text{ C}/\mu^2 = 10^{-5} \text{ c ΗΣΜ } -\varphi/\sigma\mu^2 \quad (2.79)$$

Μέ ἕνα μαθηματικό μετασχηματισμό μπορούμε νά γράψουμε τήν ἐξ.

(2.78) σέ μιά ἐναλλακτική μορφή πού θά μάς ἐπιτρέψει τή θέωρηση τοῦ δυναμικοῦ ἑνός ἀφόρτιστου διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ ἀπό μιά ἄλλη ὄψη.



για τη λήνη αυτό θα χρειαστούμε την ταυτότητα

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) = \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \quad (2.80)$$

όπου

$$\nabla' \equiv \frac{\partial}{\partial x'} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y'} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z'} \hat{k} \quad (2.81)$$

είναι ο διαφορικός τελεστής που επιδρά μόνο στο άνωσμο \underline{r}' . Η έξ.

(2.80) μπορεί εύκολα να έπαληθευτεί αναλυτικά. Η έξ. (2.78) μπορεί

έπομένως να γραφεϊ ως

$$\varphi(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_V \underline{P}(\underline{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) d^3r' \quad (2.82)$$

Χρησιμοποιώντας ακόμη την ταυτότητα για διαφορίση γινομένου

$$\nabla' \cdot \left(\frac{\underline{P}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \cdot \underline{P}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \underline{P}(\underline{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad (2.83)$$

μπορούμε να γράψουμε την έξ. (2.82) ως

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{r}) &= \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\underline{P}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) d^3r' - \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_V \frac{\nabla' \cdot \underline{P}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r' \\ &= \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \oint_S \frac{\underline{P}(\underline{r}') \cdot d\underline{a}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_V \frac{\nabla' \cdot \underline{P}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r' \end{aligned} \quad (2.84)$$

όπου στο τελευταίο σκέλος της έξ. (2.84) τό πρώτο ολοκλήρωμα μετασχηματίστηκε σε έπιφανειακό ολοκλήρωμα στην έπιφάνεια του διηλεκτρικού υλικού S με χρησιμοποίηση του θεωρήματος του Green {βλ. έξ. (2.27)}. Συγκρίνοντας με την έξ. (2.49) μπορούμε να αναγνωρίσουμε τό δυναμικό της έξ. (2.84) ως τό δυναμικό που δημιουργεί μία έπιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_p στην έπιφάνεια S και μία τρισδιάστατη πυκνότητα φορ-

τίου ρ_p κατανομημένη στο χώρο V , αν

$$\sigma_p = \underline{P} \cdot \hat{n} \quad (2.85\alpha)$$

και

$$\rho_p = -\nabla \cdot \underline{P} \quad (2.85\beta)$$

όπου \hat{n} είναι το μοναδιαίο άνωσμα, κάθετο προς την επιφάνεια S .

Μέ άλλα λόγια, για την επίλυση του ηλεκτροστατικού προβλήματος, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το διηλεκτρικό υλικό με τις δύο κατανομές φορτίου των έξ. (2.85). Τα φορτία αυτά θα ονομάσουμε δέσμια φορτία σε αντιδιαστολή με τα ελεύθερα φορτία που θεωρήσαμε ως τώρα και που δημιουργούνται κατά τη μεταφορά ελεύθερων στοιχειωδών σωματίων.

Η σχέση μεταξύ των δέσμιων φορτίων και της ηλεκτρικής πολώσεως του υλικού μπορεί να εξαχθεί και από καθαρά γεωμετρική θεώρηση του φαινομένου. Αν η πόλωση των μορίων μέσα στο υλικό δένει να είναι ομοιομορφη, η πυκνότητα ρ_p αντιπροσωπεύει το τοπικό φορτίο που περισεύει από την άτελή έξουδετέρωση των άκρων γειτονικών διπόλων, ενώ η επιφανειακή πυκνότητα σ_p αντανακλά την περίσσεια φορτίου από την έλλειψη ικανού αριθμού γειτόνων για τα δίπολα που βρίσκονται στην επιφάνεια.

Τό δέσμιο φορτίο σε ένα διηλεκτρικό υλικό είναι φυσικά τό ολόκληρωμα της πυκνότητας ρ_p και σ_p . Όπως περιμένουμε από τό μηχανισμό που περιγράψαμε τό ολικό δέσμιο φορτίο σε ένα διηλεκτρικό υλικό είναι ίσο με τό μηδέν. Πράγματι, από τις έξ. (2.85)

$$\begin{aligned} q_p &= \oint_S \sigma_p \, da + \int_V \rho_p \, d^3r \\ &= \oint_S \underline{P} \cdot \hat{n} \, da - \int_V \nabla \cdot \underline{P} \, d^3r \end{aligned}$$



πού από τό θεώρημα τοῦ Green δίνει

$$q_p = 0$$

2-13 Ἡλεκτρική Μετατόπιση, Ἡλεκτρική Ἐπιδεικτικότητα καί Διηλεκτρική Σταθερά.

Ὅπως εἶδαμε παραπάνω τό ἠλεκτροστατικό πεδίο μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ σέ κάθε σημεῖο τοῦ συστήματος (ἀνεξάρτητα ἂν τό σημεῖο βρίσκεται μέσα σέ διηλεκτρικό ὑλικό ἢ στόν κενό χῶρο) ἂν θεωρήσουμε τά ἐλεύθερα φορτία καί τά δέσμια φορτία πού ἀντιπροσωπεύουν τά διηλεκτρικά σώματα. Εἰδικώτερα, μπορούμε νά γράψουμε τό νόμο τοῦ Gauss {βλ. ἐξ. (2.25)} ὡς

$$\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{a} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi (q + q_p) \quad (2.87)$$

ὅπου q καί q_p εἶναι ἀντίστοιχα τό ὀλικό ἐλεύθερο καί δέσμιο φορτίο πού περιβάλλονται ἀπό τήν κλειστή ἐπιφάνεια S . Ἡ ἀντίστοιχη διαφορική ἐξίσωση {βλ. ἐξ. (2.28)} εἶναι

$$\nabla \cdot \underline{E} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi (\rho + \rho_p) \quad (2.88)$$

ὅπου σέ προφανή συμβολισμό ρ καί ρ_p εἶναι ἀντίστοιχα ἡ πυκνότητα ἐλευθέρου καί δέσμιου φορτίου.

Χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (2.85) μπορούμε νά ξαναγράψουμε τήν ἐξ.

(2.88) ὡς

$$\nabla \cdot \left(\left[\epsilon_0 \right] \underline{E} + \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi \underline{P} \right) = \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi \rho. \quad (2.89)$$

Ἡ τελευταία σχέση ὁδηγεῖ στόν ὀρισμό μιᾶς νέας μακροσκοπικῆς συναρτήσεως, πού θά ὀνομάσουμε ἠλεκτρική μετατόπιση



$$\underline{D} \equiv \left[\epsilon_0 \right] \underline{E} + \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi \underline{P} \quad (2.90)$$

μέ τη βοήθεια της οποίας η έξ. (2.89) παίρνει την ιδιαίτερη απλή μορφή

$$\nabla \cdot \underline{D} = \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi \rho. \quad (2.91)$$

Ἡ ολοκληρωμένη μορφή τοῦ νόμου τοῦ Gauss μπορεῖ ἐπίσης νά γραφεῖ ἀποκλειστικά διαμέσου τῆς ἠλεκτρικῆς μετατόπισως \underline{D} καί τοῦ ἐλευθέρου φορτίου ὡς

$$\oint_S \underline{D} \cdot d\underline{a} = \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi q \quad (2.92)$$

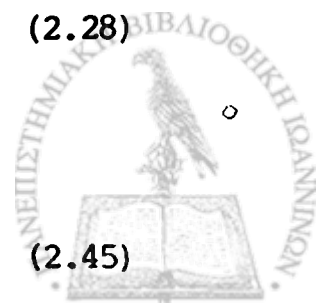
ὅπου q εἶναι τό ὅλικο ἐλεύθερο φορτίο πού περικλείει ἡ ἐπιφάνεια S .

Ἡ χρησιμότητα τοῦ ἀνυσματικοῦ πεδίου \underline{D} ἀπαρρέει ἀπό τό γεγονός ὅτι συνδέεται κατὰ ἀπλό τρόπο μέ τό ἐλεύθερο φορτίο πού συνήθως λαμβάνεται ὡς ἡ πρωταρχική πηγή τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου. Παρόλα αὐτά τά δύο ἀνύσματα \underline{E} καί \underline{D} διαφέρουν δραστικά. Τό μακροσκοπικό πεδίο \underline{E} ἀντιπροσωπεύει τή μέση τιμή τοῦ μικροσκοπικοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἐνῶ ἡ μετατόπιση \underline{D} ὀρίζεται ὡς μιὰ καθαρά μακροσκοπική ιδιότητα τοῦ χώρου. Γιά ἕνα μικροσκοπικό παρατηρητή, οἱ ἔννοιες τῆς πολώσεως τοῦ δέσμιου φορτίου καί τῆς ἠλεκτροστατικῆς μετατόπισως παύουν νά ἔχουν φυσικό νόημα. Ἀκόμη καί στή μακροσκοπική εἰκόνα τῶν ἠλεκτροστατικῶν φαινομένων τό ἀνυσμα \underline{E} εἶναι ἡ μόνη ποσότητα πού μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μονοσήμαντα ἀπό τή γνώση τοῦ ἐλευθέρου φορτίου ρ . Καί τοῦτο διότι πέρα ἀπό τή σχέση

$$\nabla \cdot \underline{E} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi\rho \quad (2.28)$$

τό ἀνυσμα τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου ικανοποιεῖ τή συνθήκη

$$\nabla \wedge \underline{E} = 0$$



Ἡ ἀντίστοιχη σχέση $\nabla \cdot \underline{D} = 0$ δέν ἀληθεύει γενικά, μέ ἀποτέλεσμα ὁ προσδιορισμός τῆς ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως νά μὴν εἶναι γενικά δυνατός ἀπό τήν ἐξ. (2.91) καί τήν κατανομή ἐλεύθερου φορτίου στό σύστημα. Γιά τό μονοσήμαντο προσδιορισμό τοῦ ἀνύσματος \underline{D} εἶναι ἀπαραίτητη κάποια συμπληρωματική γνώση ὅπως οἱ ὀριακές συνθήκες στίς ἐπιφάνειες τῶν διηλεκτρικῶν σωμάτων. Οἱ ὀριακές συνθήκες τοῦ ἀνύσματος \underline{D} , πού συνδέονται μέ τήν πόλωση καί τά δέσμια φορτία εἶναι βεβαίως καθαρά μακροσκοπικές ἔννοιες.

Μέχρι τώρα περιγράψαμε τό μακροσκοπικό πεδίο σέ ἕνα ἠλεκτροστατικό σύστημα πού περιέχει διηλεκτρικά ὑλικά χωρίς νά ἐξετάσουμε τή σχέση μεταξύ τῆς πολώσεως τοῦ ὑλικοῦ καί τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Γενικά περιμένουμε ὅτι ἡ πόλωση \underline{P} θά μηδενίζεται ἀν τό ὑλικό βρίσκεται σέ ἕνα χῶρο ἐλεύθερο ἀπό ἠλεκτροστατικό πεδίο. Καί τοῦτο διότι εἴτε τά μόρια τοῦ ὑλικοῦ ἀποτελοῦνται ἀπό μιά συμμετρική κατανομή φορτίου μέ ἠλεκτρική διπολική ροπή $\underline{p}_k = 0$, εἴτε διαθέτουν μιά πεπερασμένη διπολική ροπή μέ τό ἀνυσμα \underline{p}_k κατανεμημένο σέ τυχαῖες διευθύνσεις. Ἡ παρουσία ἑνός ἐξωτερικοῦ πεδίου $\underline{E} \neq 0$ περιμένουμε ὅτι θά ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν αὔξηση τοῦ ἀνύσματος \underline{P} πρὸς τή διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος \underline{E} . Σέ γενικές γραμμές, περιμένουμε ὅτι σέ μόρια μέ διπολική ροπή $\underline{p}_k = 0$, τό ἠλεκτρικό πεδίο θά δημιουργήσει πεπερασμένη διπολική ροπή μέ διαχωρισμό τοῦ κέντρου βάρους τῆς κατανομῆς θετικοῦ καί ἀρνητικοῦ φορτίου. Σέ μόρια μέ διπολική ροπή $\underline{p}_k \neq 0$ περιμένουμε, πέρα ἀπό τήν αὔξηση τοῦ ἀνύσματος \underline{p}_k , εὐθυγράμμιση τῆς διπολικῆς ροπῆς πρὸς τή διεύθυνση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Πειραματικά ἀποδεικνύεται ὅτι τά περισσότερα διηλεκτρικά ὑλικά[†] συμπεριφέρονται σύμφωνα μέ

[†] θά ἀγνοήσουμε μιά μικρή κατηγορία ὑλικῶν γνωστά ὡς ἠλεκτρί-



τίς παραπάνω προσδοκίες μας. 'Επιπλέον ή πλειονότητα τών ύλικών αὐτῶν ἐμφανίζει ήλεκτρική ίσοτροπία. Μέ τόν ὄρο αὐτό ἐννοοῦμε ὅτι οἱ ήλεκτρικές ιδιότητες τοῦ ύλικοῦ εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπό τή διεύθυνση τοῦ ήλεκτρικοῦ πεδίου. Για ίσοτροπικά ύλικά, ὅπου καμιά εἰδική διεύθυνση δέν εἶναι προτιμητέα, ἔπεται τώρα ἀπό τόν ὀρισμό τῆς ἐξ. (2.90) ὅτι ή ήλεκτρική μετατόπιση \underline{D} καί τό ήλεκτρικό πεδίο \underline{E} θά ἔχουν ἐπίσης τήν ἴδια φορά. Για ίσοτροπικά ύλικά μπορούμε ἐπομένως νά γράψουμε τή σχέση μεταξύ τῶν ἀνυσμάτων \underline{P} , \underline{D} καί \underline{E} σέ κάθε σημείο τοῦ διηλεκτρικοῦ ὡς

$$\underline{P} = \chi_e(\underline{E}) \underline{E} \quad (2.93)$$

$$\underline{D} = \epsilon(\underline{E}) \underline{E} \quad (2.94)$$

ὅπου ὁ συντελεστής $\chi_e(\underline{E})$ ὀνομάζεται ή ήλεκτρική ἐπιδεκτικότητα τοῦ ύλικοῦ καί ὁ συντελεστής $\epsilon(\underline{E})$ ή διηλεκτρική σταθερά ή διαπερατότητα τοῦ ύλικοῦ. Γενικά, ὅπως ὑποδηλώνει ὁ συμβολισμός, οἱ συντελεστές χ_e καί ϵ εἶναι συναρτήσεις τῆς ἐντάσεως τοῦ ήλεκτρικοῦ πεδίου. Στήν πράξη, γιά τήν πλειονότητα τῶν διηλεκτρικῶν ύλικῶν καί λογικές τιμές τοῦ ήλεκτρικοῦ πεδίου, οἱ συντελεστές τῶν ἐξ. (2.93) καί (2.94) ἀποδεικνύονται ἀνεξάρτητοι ἀπό τήν ἐνταση τοῦ ήλεκτρικοῦ πεδίου. Μποροῦμε ἐπομένως νά γράψουμε

$$\underline{P} = \chi_e \underline{E} \quad (2.95)$$

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E} \quad (2.96)$$

ὅπου χ_e καί ϵ εἶναι δύο σταθερές πού χαρακτηρίζουν τό ίσοτροπικό

τες, πού μέ κατάλληλη προπαρασκευή ἐμφανίζουν πόλωση ἀκόμη καί γιά μηδενικό ήλεκτρικό πεδίο



υλικό. Θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο γραμμικά διηλεκτρικά για να αναφερθούμε σε υλικά που ικανοποιούν τις εξ. (2.95) και (2.96). Αν επιπλέον οι συντελεστές χ_e και ϵ είναι ανεξάρτητοι από τη θέση μέσα στο διηλεκτρικό, όπως παρατηρείται πραγματικά για μία μεγάλη κατηγορία υλικών, θα ονομάσουμε το υλικό όμογενές.

Ο όρισμός της ηλεκτρικής μετατόπισης στην εξ. (2.90) μάς επιτρέπει τη σύνδεση της ηλεκτρικής επιδεικτικότητας με τη διηλεκτρική σταθερά. Αντικαθιστώντας τις εξ. (2.93) και (2.94) στην εξ. (2.90)

$$\epsilon(\mathbf{E}) = \left[\epsilon_0 \right] + \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi\chi_e(\mathbf{E}) \quad (2.97)$$

Παρατηρείται ότι στον κενό χώρο όπου η πόλωση είναι πάντα $\underline{P} = 0$ και επομένως $\chi_e = 0$, η διηλεκτρική σταθερά ταυτίζεται στο σύστημα SI με τη σταθερά ϵ_0 . Από το γεγονός αυτό απορρέει και η ονομασία "διηλεκτρική σταθερά στο κενό" ή "διαπερατότητα στο κενό" που δώσαμε στη σταθερά ϵ_0 .

Στο σύστημα CGS οι σταθερές ϵ και χ_e είναι αδιάστατα μεγέθη ενώ στο σύστημα SI οι μονάδες τους ταυτίζονται με τις μονάδες της σταθεράς ϵ_0 , ήτοι $C^2 N^{-1} m^{-2}$. Στο τελευταίο σύστημα μονάδων είναι χρήσιμο να ορίσουμε ένα αδιάστατο συντελεστή, ως το λόγο της διηλεκτρικής σταθεράς ενός υλικού προς τη διηλεκτρική σταθερά στον κενό χώρο, ήτοι

$$K_e \equiv \frac{\epsilon(\mathbf{E})}{\epsilon_0} \quad (2.98)$$

Ο συντελεστής K_e , που στο σύστημα SI θα ονομάσουμε είδικη διηλεκτρική σταθερά ή είδικη διαπερατότητα, μπορεί να συνδεθεί με την ηλεκτρική επιδεικτικότητα διαμέσου της εξ. (2.97)

$$K_e = 1 + \frac{\chi_e(\mathbf{E})}{\epsilon_0} \quad (2.99)$$



όπου φυσικά η σχέση δρίζεται μόνο για τό σύστημα SI. Ό αναγνώστης μπορεί εύκολα νά δείξει ότι οι αριθμητικές τιμές τών συντελεστών $\epsilon(E)$ καί $\chi_e(E)$ στά δύο συστήματα μονάδων ικανοποιούν τίς σχέσεις

$$\left. K_e \right|_{SI} = \left. \epsilon(E) \right|_{CGS} \quad (2.98\alpha)$$

$$\left. \frac{\chi_e(E)}{\epsilon_0} \right|_{SI} = \left. 4\pi\chi_e(E) \right|_{CGS} \quad (2.98\beta)$$

Αν καί στίς προηγούμενες σχέσεις οι συντελεστές $\epsilon(E)$ καί $\chi_e(E)$ έχουν γραφεί γενικά ως συναρτήσεις τής έντάσεως τοῦ ηλεκτρικοῦ πεδίου, ἡ πλειονότητα τών διηλεκτρικῶν ὑλικῶν πού συναντᾶμε στό ἐργαστήριο καί τή βιομηχανία εἶναι ἰσοτροπικά, ὁμογενή καί γραμμικά. Στή συνέχεια θά ἐγκαταλείψουμε τό συμβολισμό $\epsilon(E)$ καί $\chi_e(E)$ καί θά χρησιμοποιήσουμε τούς ἀντίστοιχους συντελεστές μέ τήν ἔννοια τών ἐξ. (2.95) καί (2.96). Ό Πίνακας 2-2 περιέχει χαμηκτηριστικές τιμές τής διαπερατότητας ϵ για ὀρισμένα τυπικά διηλεκτρικά ὑλικά.

2-14 Ὀριακές Συνθήκες καί ἡ Ἐξίσωση Poisson σέ Διηλεκτρικά

Τά δέσμια φορτία σ_p καί ρ_p τών ἐξ. (2.85) περιγράφουν πλήρως τήν ὕπαρξη διηλεκτρικῶν σωμάτων στό χῶρο. Τό ηλεκτροστατικό δυναμικό π.χ ἑνός συστήματος πού περιέχει ἐλεύθερα φορτία καί διηλεκτρικά μπορεί νά γραφεί κατ'ἀρχήν ὡς

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{r}) = & \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_V \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r' + \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_{V_p} \frac{\rho_p(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r' \\ & + \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \int_{S_p} \frac{\sigma_p(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^2r' \end{aligned}$$



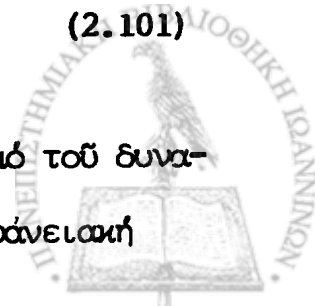
ΠΙΝΑΚΑΣ 2-2 Διηλεκτρική σταθερά ϵ στο σύστημα CGS (κατά άριθμητική τιμή ἴση με τήν εἰδική διηλεκτρική σταθερά K_e τοῦ συστήματος MKSA) γιά διάφορα διηλεκτρικά ὑλικά.

Διηλεκτρικό	Συνθήκες	ϵ_{CGS} ἢ $(K_e)_{MKSA}$
Ἀτμοσφαιρικός ἀέρας	0°C, 1 atm	1.00059
Νερό, H ₂ O	ἀτμός, 110°C, 1 atm	1.0046'
	ὑγρό, 20°C	80.37
Ἀμμωνία, NH ₃	ἀέριο, 25°C	16.9
	ὑγρό, -77°C	25
Ἵδραζίνη, N ₂ H ₄	ὑγρό, 20°C	52.9
Αἰθανόλη, C ₂ H ₆ O	ὑγρό, 25°C	24.30
Σύνηθες λάδι		
μετασχηματιστή	ὑγρό, 20°C	2.25
Χλωριοῦχο νάτριο, NaCl	στερεό, 20°C	6.12
Ναφθαλίνη	στερεό, 20°C	2.52
Νάϋλον	στερεό, 20°C	3,5
Πορσελάνη	στερεό, 20°C	6.0-8.0
Παραφίνη	στερεό, 20°C	2.0-2.5

ὅπου V εἶναι ὅλος ὁ χῶρος ὅπου ἐκτείνεται ἡ κατανομή $\rho(\underline{r})$ ἐλεύθερου φορτίου ἐνῶ V_p καί S_p εἶναι ἀντίστοιχα ὁ ὄγκος καί ἡ ἐπιφάνεια τῶν διηλεκτρικῶν σωμάτων. Ἡ ἀντίστοιχη διαφορική ἐξίσωση πού διέπει τό δυναμικό $\phi(\underline{r})$ μπορεῖ ἐπίσης νά γραφεῖ ἀμέσως ὡς ἐπέκταση τῆς ἐξισώσεως Poisson ἀν στήν πυκνότητα ἐλεύθερου φορτίου συμπεριλάβουμε καί τήν πυκνότητα δέσμιου φορτίου, ἦτοι

$$\nabla^2 \phi = - \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi(\rho + \rho_p) \quad (2.101)$$

Ἡ χρησιμότητα τῶν ἐξ. (2.100) καί (2.101) στόν ὑπολογισμό τοῦ δυναμικοῦ εἶναι ἀρκετά περιορισμένη. Σέ ἀναλογία μέ τήν ἐπιφανειακή



πυκνότητα φορτίου σέ συστήματα πού περιέχουν άγωγούς, οί πυκνότητες δέσμιου φορτίου σ_p καί ρ_p περιλαμβάνονται στους άγνώστους τών έξισώσεων καί μπορούν νά προσδιοριστούν μόνο μετά τήν πλήρη επίλυση τοῦ ηλεκτροστατικοῦ προβλήματος. Ἔτσι, στήν περίπτωση τών άγωγῶν χρειάστηκε νά συμπληρώσουμε τήν έξίσωση Poisson μέ όριακές συνθήκες πού προσδιορίζουν τό δυναμικό ἢ τό πεδίο στή διαχωριστική ἐπιφάνεια μεταξύ άγωγῶν καί κενοῦ χώρου. Μιά τέτοια όριακή συνθήκη δίνεται στήν έξ. (2.55) όπου τό ηλεκτρικό πεδίο άμέσως έξω από ἕνα άγωγό συνδέεται μέ τήν ἐπιφανειακή πυκνότητα ἐλεύθερου φορτίου. Ὑπενθυμίζοντας ὅτι τό ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται στό ἐσωτερικό ἑνός άγωγοῦ, ἐνῶ εἶναι κάθετο πρὸς τήν ἐπιφάνεια άμέσως έξω από τόν άγωγό, μπορούμε νά δοῦμε τήν έξ. (2.55) ὡς μιá áσυνέχεια τοῦ ηλεκτρικοῦ πεδίου καθώς διαβαίνουμε τή μακροσκοπική áσυνέχεια πού ἀντιπροσωπεύει ἡ διαχωριστική ἐπιφάνεια μεταξύ άγωγοῦ καί κενοῦ χώρου. Εἰδικώτερα ἀν θεωρήσουμε τήν κάθετη καί παράλληλη συνιστώσα τοῦ ηλεκτρικοῦ πεδίου σέ ἕνα σημεῖο τῆς ἐπιφανείας τοῦ άγωγοῦ

$$\underline{E} = \underline{E}_\perp + \underline{E}_\parallel \quad (2.102)$$

ἡ έξ. (2.55) προβλέπει μιá áσυνέχεια ὡς πρὸς τή συνιστώσα \underline{E}_\perp

$$(E_\perp)_{\xi\omega} - (E_\perp)_{\mu\epsilon\sigma\alpha} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi\sigma \quad (2.103\alpha)$$

Ἀντίθετα ἡ παράλληλη συνιστώσα ἐμφανίζεται συνεχῆς

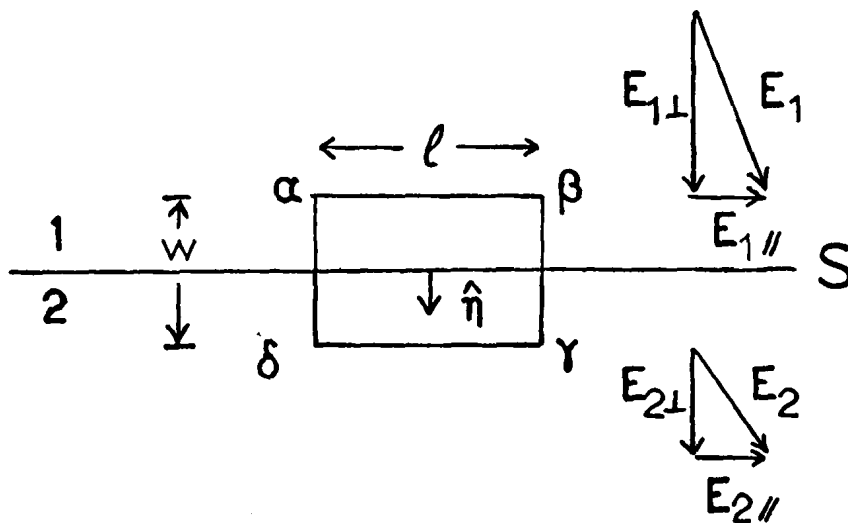
$$(E_\parallel)_{\xi\omega} - (E_\parallel)_{\mu\epsilon\sigma\alpha} = 0 \quad (2.103\beta)$$

καθόσον καθεμία μηδενίζεται ἀνεξάρτητα.

Γιά τήν επίλυση τοῦ ηλεκτροστατικοῦ προβλήματος σέ διηλεκτρικά ὑλικά εἶναι χρήσιμο νά ἐξετάσουμε τήν συμπεριφορά τών ἀνυσμάτων \underline{E} , \underline{D} καί \underline{P} σέ ἀνάλογες διαχωριστικές ἐπιφάνειες μεταξύ διηλεκτρι-



κοῦ ὑλικοῦ καί κενοῦ χώρου ἢ γενικότερα μεταξὺ δύο διηλεκτρικῶν ὑλικῶν. Θά πραγματοποιήσουμε τὴ διερεύνηση αὐτὴ ἀπὸ τὴν καθαρά μακροσκοπικὴ ὄψιν ὅπου, ἀφενὸς ἡ πόλωση \underline{P} καί ἡ μετατόπιση \underline{D} ἔχουν νόημα, ἐνῶ ἀφετέρου ἡ διαχωριστικὴ ἐπιφάνεια μεταξὺ ὑλικῶν μπορεῖ νὰ ὀριστεῖ γεωμετρικά χωρὶς νὰ ληφθεῖ ὑπόψη ἡ μοριακὴ δομὴ τῆς ὑλης. Ἔτσι τὸ ἠλεκτρικὸ πεδίο \underline{E} πού θά θεωρήσουμε στὴ συνέχεια εἶναι τὸ μακροσκοπικὸ πεδίο, δηλαδή ἡ μέση τιμὴ τοῦ μακροσκοπικοῦ πεδίου σὲ ἓνα μακροσκοπικὰ ἀπειροελάχιστο ὄγκο d^3r . Μὲ τὴν παρατήρηση αὐτὴ, θά ἐξετάσουμε τὴ συμπεριφορὰ τοῦ ἀνύσματος \underline{E} στὴ γειτονία τῆς ἐπιφάνειας S μεταξὺ τῶν δύο ὑλικῶν 1 καί 2 πού εἰκονίζονται στὸ σχῆμα 2-21. Τὸ σχῆμα περιέχει ἓνα ἀρκετὰ μικρὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας ὥστε στὴν περιοχὴ πού εἰκονίζεται ἡ ἐπιφάνεια νὰ μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ ὡς ἐπίπεδο. Ὁλοκληρώνοντας τὸ ἠλεκτρικὸ πεδίο κατὰ μῆκος τῆς ὀρθογώνιας διαδρομῆς αβγδ παίρνουμε τὴ σχέση



ΣΧΗΜΑ 2-21. Διαδρομὴ ὀρθογωνίου παραλληλογράμου στὴ διαχωριστικὴ ἐπιφάνεια μεταξὺ δύο διηλεκτρικῶν ὑλικῶν.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \underline{E} \cdot d\underline{\ell} + \int_{\beta}^{\gamma} \underline{E} \cdot d\underline{\ell} + \int_{\gamma}^{\delta} \underline{E} \cdot d\underline{\ell} + \int_{\delta}^{\alpha} \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = \oint \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = 0 \quad (2.104)$$

Οι διαστάσεις l και w της διαδρομής που εικονίζονται στο σχήμα έχουν ήδη λειφθεῖ με άπειροελάχιστο μήκος. Ἄν θεωρήσουμε τό ὄριο $w \rightarrow 0$ τά ολοκληρώματα κατά μήκος τῶν διαδρομῶν $\alpha\beta$ καί $\gamma\delta$ τείνουν ἐπίσης πρὸς τό μηδέν. Στίς δύο ὑπόλοιπες διαδρομές μέ μήκος l μπορούμε ἀκόμη νά θεωρήσουμε ὅτι τό πεδίο παραμένει σταθερό. Ἡ ἐξ. (2.104) μπορεῖ ἐπομένως νά γραφεῖ ὡς

$$E_{1\parallel} l - E_{2\parallel} l = 0$$

ἢ

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \quad (2.105)$$

Μέ ἄλλα λόγια, στή διαχωριστική ἐπιφάνεια μεταξὺ δύο ὑλικῶν ἡ παράλληλη συνιστώσα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι συνεχής. Ἡ ἐξ. (2.105) μπορεῖ νά γραφεῖ μέ ἀπευθείας ἡχορηγοποίηση τοῦ ἀνύσματος \underline{E} ὡς

$$(\underline{E}_1 - \underline{E}_2) \wedge \hat{n} = 0 \quad (2.106)$$

ὅπου \hat{n} εἶναι τό μοναδιαῖο ἀνυσμα, κάθετο πρὸς τήν ἐπιφάνεια μεταξὺ τῶν δύο ὑλικῶν καί μέ φορά ἀπὸ τό ὑλικό 1 πρὸς τό ὑλικό 2.

Ἡ συμπεριφορά τῆς κάθετης συνιστώσας τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ τήν ἴδια μέθοδο πού ὡδήγησε στήν ἐξ. (2.55) διαμέσου μιᾶς ἐπιφανείας Gauss ἀνάλογης πρὸς αὐτή τοῦ σχήματος 2-11. Τό ἀποτέλεσμα εἶναι μιᾶ ἀσυνέχεια ἀνάλογη πρὸς αὐτή τῆς ἐξ. (2.103α)

$$E_{2\perp} - E_{1\perp} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi(\sigma + \sigma_p)$$



ή

$$(\underline{E}_2 - \underline{E}_1) \cdot \hat{n} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] 4\pi(\sigma + \sigma_p) \quad (2.107)$$

όπου στην περίπτωση αυτή η επιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου συνεισφέρει επίσης στην ασυνέχεια.

Κατά τελείως ανάλογο τρόπο μπορούμε να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της ηλεκτρικής μετατοπίσεως \underline{D} . Χρησιμοποιώντας την έξ. (2.92) και μία επιφάνεια Gauss ανάλογη προς αυτή του σχήματος 2-11 μπορούμε να δείξουμε την όριακή συνθήκη

$$(\underline{D}_2 - \underline{D}_1) \cdot \hat{n} = \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi \sigma \quad (2.108)$$

Παρατηρείται ότι καθώς, σε αντίθεση με το ηλεκτρικό πεδίο, η μετατόπιση δεν είναι γενικά αστρόβιλο ανυσματικό πεδίο (δεν ισχύει δηλαδή πάντα $\nabla \wedge \underline{D} = 0$ ή, ισοδύναμα $\oint \underline{D} \cdot d\underline{\ell} = 0$) η μέθοδος που οδήγησε στην όριακή συνθήκη της έξ. (2.106) δεν είναι εδώ εφαρμόσιμη. Όριακή συνθήκη για τη συμπεριφορά της παράλληλης συνιστώσας της ηλεκτρικής μετατοπίσεως δεν μπορεί γενικά να προβλεφθεί.

Τέλος μπορούμε να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της πόλωσεως \underline{P} στα όρια μεταξύ δύο ηλεκτρικών υλικών. Σύμφωνα με την έξ. (2.85α) η πόλωση \underline{P}_1 στο υλικό 1 συνεισφέρει επιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου ίση με $\underline{P}_1 \cdot \hat{n}$ ενώ η πόλωση \underline{P}_2 στο υλικό 2 επιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου ίση με $-\underline{P}_2 \cdot \hat{n}$. Η ολική επιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου είναι επομένως

$$\sigma_p = \underline{P}_1 \cdot \hat{n} - \underline{P}_2 \cdot \hat{n}$$

που οδηγεί στην όριακή συνθήκη

$$(\underline{P}_2 - \underline{P}_1) \cdot \hat{n} = -\sigma_p \quad (2.109)$$



Παρατηρείται ότι οι έξ. (2.107), (2.108) και (2.109) είναι συνεπείς με τον όρισμό της έξ. (2.90)

$$\underline{D} = \left[\epsilon_0 \right] \underline{E} + \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi \underline{P} \quad (2.90)$$

Οι όριακές συνθήκες των άνωσμάτων \underline{E} , \underline{D} και \underline{P} μπορούν να μετατραπούν σε όριακές συνθήκες του δυναμικού. Χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ πεδίου και δυναμικού

$$\underline{E} = - \nabla \varphi \quad (2.41)$$

και τη γεωμετρική σχέση

$$\nabla \varphi \cdot \hat{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (2.110)$$

η έξ. (2.107) οδηγεί στην όριακή συνθήκη

$$- \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right|_{r_s} + \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right|_{r_s} = \left[\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \right] 4\pi (\sigma + \sigma_p) \quad (2.111)$$

Στην τελευταία σχέση φ_1 και φ_2 είναι οι συναρτήσεις δυναμικού αντίστοιχα στα υλικά 1 και 2, ενώ η τιμή της παραγώγου προς την κάθετη διεύθυνση \hat{n} λαμβάνεται στο σημείο r_s της έπιφανείας.

Μιά ειδικότερη αλλά πολύ πλιό χρήσιμη όριακή συνθήκη για τό δυναμικό μπορεί να έξαχθεϊ από την έξ. (2.108) στην περίπτωση όπου τά διηλεκτρικά 1 και 2 είναι ιστροπικά. Αν ϵ_1 και ϵ_2 είναι οι αντίστοιχες διηλεκτρικές σταθερές των δύο υλικών, η έξ. (2.108) μπορεί να γραφεϊ ως

$$(\epsilon_2 \underline{E}_2 - \epsilon_1 \underline{E}_1) \cdot \hat{n} = \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi \sigma \quad (2.112)$$

ή ως συνάρτηση του δυναμικού

$$-\epsilon_2 \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right|_{r_s} + \epsilon_1 \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right|_{r_s} = \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi \sigma \quad (2.113)$$



Καθόσον οι έξ. (2.111) και (2.113) περιγράφουν τή συμπεριφορά τής κάθετης παραγωγού του δυναμικού σέ ένα σημείο πρέπει νά είναι ισοδύναμες. Πράγματι από τόν όρισμό τής έξ. (2.90) και τήν έξ. (2.85α) μπορούμε εύκολα νά δείξουμε ότι οι τελευταίες δύο όριακές συνθήκες περιγράφουν τό ίδιο φυσικό φαινόμενο από διάφορη όπτική γωνία. Στήν έξ. (2.111) ή διαχωριστική έπιφάνεια άντιπροσωπεύεται από τήν έπιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου σ_p ενώ στήν έξ. (2.113) από τήν άσυνεχή μεταβολή τής τιμής τής διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$.

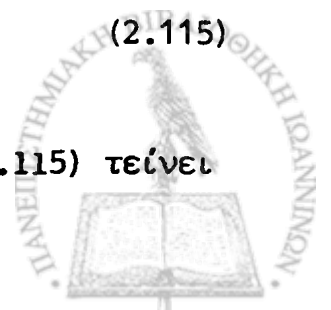
Ή όριακή συνθήκη (2.111) ή (2.113) είναι άνεξάρτητη από τήν έπιλογή τής αυθαίρετης σταθεράς πού πάντα υπεισέρχεται στόν όρισμό τής συναρτήσεως δυναμικού. Άν, όπως είναι φυσικό, έπιλέξουμε τό ίδιο σημείο αναφοράς για τόν όρισμό του δυναμικού στά ύλικά 1 και 2, μπορούμε νά δείξουμε μιá άνιόμη όριακή συνθήκη για τή συνάρτηση $\varphi(\underline{r})$

$$\varphi_1(\underline{r}_s) = \varphi_2(\underline{r}_s) \quad (2.114)$$

όπου \underline{r}_s είναι όποιοδήποτε σημείο τής έπιφανείας μεταξύ των ύλικών. Μέ άλλα λόγια ή συνάρτηση δυναμικού είναι συνεχής στή διαχωριστική έπιφάνεια δύο διηλεκτρικών. Ή έξ. (2.114) μπορεί νά άποδειχτεί άν θεωρήσουμε τό γραμμικό ολοκλήρωμα $\int_{r_1}^{r_2} \underline{E} \cdot d\underline{l}$ μεταξύ δύο σημείων r_1 και r_2 άντίστοιχα στά ύλικά 1 και 2, κατά μιá διαδρομή πού τέμνει τήν έπιφάνεια στό σημείο r_s . Ή διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων r_1 και r_2 είναι

$$\varphi_2(\underline{r}_2) - \varphi_1(\underline{r}_1) = - \int_{r_1}^{r_2} \underline{E} \cdot d\underline{l} \quad (2.115)$$

Στό όριο $r_1 \rightarrow r_s$ και $r_2 \rightarrow r_s$ τό ολοκλήρωμα τής έξ. (2.115) τείνει πρός τό μηδέν και ή έξ. (2.114) έπαληθεύεται.



Οι όριακές συνθήκες των έξ. (2.114) και (2.111) ή (2.113) συμπληρώνουν τή διαφορική έξίσωση πού διέπει τό δυναμικό. Θα θεωρήσουμε τήν πλέον συνήθη περίπτωση ίσοτροπικού ύλικού πού διέπεται από τή σχέση

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E} \quad (2.96)$$

όπου ή διηλεκτρική σταθερά μπορεί νά έξαρτάται από τίς συντεταγμένες.

Στήν περίπτωση αυτή ή έξ. (2.91) μπορεί νά γραφεϊ ώς

$$\nabla \cdot (\epsilon \underline{E}) = \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi\rho \quad (2.116)$$

ή, χρησιμοποιώντας τήν έξ. (2.41)

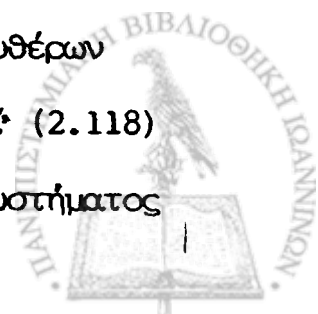
$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla\phi) = - \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi\rho \quad (2.117)$$

‘Η τελευταία έξίσωση, πού μπορούμε νά ονομάσουμε γενικευμένη έξίσωση

Poisson, είναι ίσως χρήσιμο νά ξαναγραφεί στήν πιο αναλυτική μορφή, ώς μερική διαφορική έξίσωση,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) = - \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi\rho \quad (2.118)$$

Μπορούμε τώρα, όπως και στήν παράγραφο 2-10 νά θέσουμε πάλι τό έξαιρετικά ένδιαφέρον έρώτημα: Ποιές είναι οι αναγκαϊες και ικανές συνθήκες ώστε ή γενικευμένη έξίσωση Poisson (2.118) νά οδηγεί σέ ένα μονοσήμαντο προσδιορισμό τής συναρτήσεως δυναμικού $\phi(\underline{r})$. ‘Η απάντηση, πού και στήν περίπτωση αυτή δέν θα αποδείξουμε μέ μαθηματική αώστηρότητα, συμπίπτει μέ τή φυσική διαίσθηση μέ οδηγό τίς όριακές συνθήκες των έξ. (2.113) και (2.114). Για ένα σύστημα έλευθέρων φορτίων, άγωγών και ίσοτροπικών διηλεκτρικών ύλικών, ή έξ. (2.118) προσδιορίζεται μονοσήμαντα άν πέρα από τή γεωμετρία του συστήματος



πού περιλαμβάνει τίς συναρτήσεις κατανομής ελεύθερου φορτίου $\rho(\underline{r})$ και τής διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon(\underline{r})$ σε όλα τα διηλεκτρικά υλικά, προσδιορίζεται άρχικά

1. Τό δυναμικό ή τό όλικό φορτίο κάθε άγωγού. "Αν προσδιορίζεται άρχικά τό δυναμικό έστω και ενός άγωγού, ή αúθαιρετη σταθερά του δυναμικού άπορρέει μονοσήμαντα από τή λύση τής έξ. (2.118)
2. "Η κατανομή ελεύθερου φορτίου στην έπιφάνεια κάθε διηλεκτρικού σώματος.

Μετά τήν επίλυση του ήλεκτροστατικού προβλήματος τά χαρακτηριστικά ήλεκτρικά μεγέθη του συστήματος μπορούν να βρεθούν διαμέσου των όριακών συνθηκών και τής γνωστής πλέον συναρτήσεως δυναμικού. Π.χ. στη διαχωριστική έπιφάνεια μεταξύ άγωγού και διηλεκτρικού υλικού ή έπιφανειακή πυκνότητα φορτίου δίνεται από τήν όριακή συνθήκη τής έξ. (2.113)

$$\sigma = - \left[4\pi \right] \frac{1}{4\pi} \epsilon \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{r_c} \quad (2.119)$$

όπου r_c είναι σημείο τής έπιφανείας του άγωγού και ή φορά του μοναδιαίου άνύσματος \hat{n} προς τό διηλεκτρικό υλικό μέ διαπερατότητα ϵ . Τό όλικό φορτίο στην έπιφάνεια S_c του άγωγού είναι

$$q = \int_{S_c} \sigma \, da = - \left[4\pi \right] \frac{1}{4\pi} \int_{S_c} \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, da \quad (2.120)$$

όπου ή διαπερατότητα ϵ έχει παραμείνει μέσα στο ολοκλήρωμα καθόσον γενικά μπορεί να έξαρτάται από τίς συντεταγμένες. Στην περίπτωση όμογενοϋς υλικού, όπου ο συντελεστής ϵ είναι μιά σταθερά, μπορεί να βγει έξω από τό ολοκλήρωμα και ή έξ. (2.120) μπορεί να γραφεί ως



$$q = - \left[4\pi \right] \frac{1}{4\pi} \epsilon \int_{S_c} \frac{\partial \varphi}{\partial n} da. \quad (2.121)$$

Γιά τή σημαντική αὐτή κατηγορία διηλεκτρικῶν ὑλικῶν ἢ γενικευμένη ἐξίσωση Poisson τῆς ἐξ. (2.117) ἢ (2.118) μπορεῖ ἐπίσης νά γραφεῖ στήν ἀπλούστερη μορφή

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \left[\frac{1}{4\pi} \right] \frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (2.122)$$

Λόγω τῆς μεγάλης ἐφαρμογῆς τῆς τελευταίας σχέσεως ὁ ὅρος " ἐξίσωση Poisson" συνήθως ἀναφέρεται στήν ἐξ. (2.122).

Θά τελειώσουμε τήν ἀνασκόπηση τῆς συμπεριφορᾶς διηλεκτρικῶν ὑλικῶν μέ τή θεώρηση μιᾶς εἰδικῆς κατηγορίας συστημάτων στά ὁποῖα ὁ χειρισμός τοῦ διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ δέν ἐμφανίζει καμιᾶ δυσκολία. Τά συστήματα αὐτά εἶναι ἠλεκτροστατικές διατάξεις ὅπου ἓνα καί μόνο ἰσοτροπικό, γραμμικό καί ὁμογενές ὑλικό καλύπτει ὅλο τό χῶρο. Τό διηλεκτρικό ὑλικό μπορεῖ νά ἐκτείνεται στό ἄπειρο ἢ, ἐν πάσει περιπτώσει, οἱ διαστάσεις του νά εἶναι ἀρκετά μεγάλες ὥστε ἡ ἐπίδραση τῆς ἐπιφανειακῆς πυκνότητας δέσμιου φορτίου νά εἶναι ἀμελητέα στήν περιοχή ὅπου τό σύστημα παρουσιάζει ἐνδιαφέρον. Παρόμοια συμπεριφορά ἐμφανίζουν ἠλεκτροστατικά συστήματα πού περιλαμβάνονται τελείως ἀπό ἐπιφάνεια ἀγωγοῦ ἐνῶ τό διηλεκτρικό ὑλικό καλύπτει ὅλο τό χῶρο στό ἐσωτερικό τῆς ἐπιφανείας. Τά εἰδικά αὐτά συστήματα ἐμφανίζονται ἀρκετά συχνά στό ἐργαστήριο καί στή φύση ὥστε νά δικαιολογοῦν ἰδιαίτερη προσοχή. Στήν πράξη ὅλα τά πειράματα ἠλεκτροστατικῆς πού διεξάγονται στό ἐργαστήριο ἀνήκουν στήν κατηγορία αὐτή, ὅπου ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀέρας εἶναι τό διηλεκτρικό ὑλικό πού καλύπτει



όλο τό χώρο.

Μέ τίς παραπάνω προϋποθέσεις ή διαπερατότητα ϵ είναι μιά σταθερά άνεξάρτητη από τίς συντεταγμένες καί ή έξίσωση Poisson παίρνει τήν άπλή μορφή τής έξ. (2.122). Η διαφορική αύτή έξίσωση ταυτίζεται μέ τήν αντίστοιχη έξίσωση Poisson στό κενό { βλ. έξ. (2.57) } γιά ένα ήλεκτροστατικό σύστημα μέ τήν ίδια γεωμετρία αλλά πικνότητα φορτίου μειωμένη κατά τό λόγο $[\epsilon_0]/\epsilon$. Κατά τόν ίδιο τρόπο ή όριακή συνθήκη τής έξ. (2.19) είναι ή ίδια γιά τό αντίστοιχο σύστημα στό κενό αλλά έπιφανειακή πικνότητα έλεύθερου φορτίου μειωμένη κατά τόν ίδιο λόγο $[\epsilon_0]/\epsilon$, ένώ ή όριακή συνθήκη τής έξ. (2.114) είναι άνεξάρτητη από τήν ύπαρξη τοϋ διηλεκτρικοϋ. Από τίς παρατηρήσεις αυτές έπιεται ότι ή λύση τοϋ συστήματος, τοϋ όποίου όλος ό χώρος καλύπτεται από ένα ίσοτροπικό, γραμμικό καί όμογενές διηλεκτρικό ύλικό, ταυτίζεται μέ τή λύση τοϋ ίδιου συστήματος στό κενό άν όλα τά έλεύθερα φορτία μειωθοϋν κατά τό λόγο $[\epsilon_0]/\epsilon$.

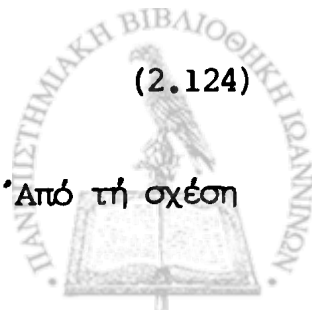
Ός απλό παράδειγμα συστήματος τής είδικής κατηγορίας πού μελετάμαι θά θεωρήσουμε ένα φορτίο q στό έσωτερικό ενός ίσοτροπικοϋ, γραμμικοϋ καί όμογενοϋς διηλεκτρικοϋ μέ διαπερατότητα ϵ . Χρησιμοποιώντας τό αποτέλεσμα τής έξ. (2.48) μπορούμε νά γράψουμε τό δυναμικό τοϋ φορτίου q ώς

$$\varphi(r) = \left[\frac{1}{4\pi} \right] \frac{q}{\epsilon r} \quad (2.123)$$

ένω από τήν έξ. (2.20) τό ήλεκτρικό πεδίο δίνεται από τήν έκφραση

$$\underline{E}(r) = \left[\frac{1}{4\pi} \right] \frac{q}{\epsilon r^3} \underline{r} \quad (2.124)$$

Η γενίκευση τών έξ. (2.49) καί (2.18) είναι προφανής. Από τή σχέση



$\underline{D} = \epsilon \underline{E}$ μπορούμε να γράψουμε ακόμη την ηλεκτρική μετατόπιση ως

$$\underline{D} = \left[\frac{1}{4\pi} \right] \frac{q}{r^3} \underline{r} \quad (2.125)$$

Οι έξ. (2.123)-(2.125) βρίσκουν τόσο εύρεία εφαρμογή ώστε πολλές φορές ή περιορισμένη τους εφαρμογή στο ειδικό σύστημα ενός ιστροπικού, γραμμικού και όμογενοϋς διηλεκτρικού υλικού παραβλέπεται. Στα πλαίσια αυτά είναι ίσως ακόμη χρήσιμο να έπιστήσουμε την προσοχή του αναγνώστη στον περιορισμένο χαρακτήρα τής "έξαγωγής" τής έξ. (2.125) (καί έπομένως τών έξ. (2.124) καί (2.123)) από την έξ. (2.92). Η έξ. (2.125) δέν άπορρέει από τή σχέση

$$\oint_S \underline{D} \cdot d\underline{a} = \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi q \quad (2.92)$$

παρά μόνο στην περίπτωση σφαιρικής συμμετρίας γύρω από τό φορτίο q , όπως στην ειδική περίπτωση πού θεωρήσαμε παραπάνω. Άν καί ή έξ. (2.92) ίσχύει γενικά, όπως ήδη αναφέραμε, τό άνυσμα \underline{D} δέν είναι πάντα άστρόβιλο καί ύπάρχει ένα άπειρο πλήθος συναρτήσεων για τό ήλεκτρικό πεδίο ενός σημειακού φορτίου πού μπορεί να τήν ικανοποιούν.

Όπως καί στο ύπόλοιπο κεφάλαιο, κατά τή μελέτη τής συμπεριφοράς τών διηλεκτρικών υλικών χρησιμοποιήσαμε τή σύμβαση τών άγκυλών για τήν ένιαία έκφραση τών έξισώσεων στα δύο συστήματα μονάδων. Η πρακτική αυτή συσκοτίζει λίγο τήν απλότητα καί κομψότητα τών έξισώσεων. Για τό λόγο αυτό οι κυριώτερες σχέσεις τών παραγράφων 2-13 2-14 καί 2-15 συναφίζονται στον Πίνακα 2-3 σε ξεχωριστή μορφή για τά δύο συστήματα μονάδων.



ΠΙΝΑΚΑΣ 2-3: Βασικές σχέσεις και όρισμοί σε ηλεκτροστατικά συστήματα διηλεκτρικών υλικών στα συστήματα μονάδων CGS και SI.

	CGS	SI
ή πόλωση ή διπολική ροπή (α δγκου) κολώσεως	$\underline{P} \equiv \frac{d\underline{p}}{d^3r}$	
	$\varphi(\underline{r}) = \int_V \frac{\underline{P}(\underline{r}') \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}{ \underline{r} - \underline{r}' ^3} d^3r'$	$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\underline{P}(\underline{r}') \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}{ \underline{r} - \underline{r}' ^3} d^3r'$
	$= \int_S \frac{\underline{P}(\underline{r}') \cdot d\underline{\alpha}}{ \underline{r} - \underline{r}' ^3} - \int_V \frac{\nabla' \cdot \underline{P}(\underline{r}')}{ \underline{r} - \underline{r}' ^3} d^3r'$	$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\underline{P}(\underline{r}') \cdot d\underline{\alpha}}{ \underline{r} - \underline{r}' ^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla' \cdot \underline{P}(\underline{r}')}{ \underline{r} - \underline{r}' ^3} d^3r'$
α δέσμιου	$\sigma_p = \underline{P} \cdot \hat{n}$ $\rho_p = -\nabla \cdot \underline{P}$	
ύ Gauss: λοκληρώματος	$\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{\alpha} = 4\pi(q + q_p)$	$\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{\alpha} = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q_p)$
ική μορφή	$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi(\rho + \rho_p)$	$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p)$
ική μετατόπιση	$\underline{D} \equiv \underline{E} + 4\pi\underline{P}$	$\underline{D} \equiv \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$



Νόμος του Gauss για την
 ηλεκτρική μετατόκιση:
 - μορφή ολοκληρώματος
 - διαφορική μορφή

$$\oint_S \underline{D} \cdot d\vec{\alpha} = 4\pi q$$

$$\nabla \cdot \underline{D} = 4\pi \rho$$

Ηλεκτρική επικεκτικότητα
 Διηλεκτρική σταθερά
 ή διαπερατότητα

$$\underline{P} = \chi_e (\underline{E}) \underline{E}$$

$$\underline{D} = \epsilon (\underline{E}) \underline{E}$$

Σύνδεση χ_e και ϵ

$$\epsilon = 1 + 4\pi \chi_e$$

Εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -4\pi(\rho + \rho_p)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}(\rho + \rho_p)$$

Όριακές συνθήκες:
 -ηλεκτρικό πεδίο

$$(\underline{E}_1 - \underline{E}_2) \cdot \hat{n} = 0$$

$$(\underline{E}_2 - \underline{E}_1) \cdot \hat{n} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma + \sigma_p)$$

-ηλεκτρική μετατόκιση

$$(\underline{D}_2 - \underline{D}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi \sigma$$

$$(\underline{D}_2 - \underline{D}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

-ηλεκτρική πόλωση

$$(\underline{P}_2 - \underline{P}_1) \cdot \hat{n} = -\sigma_p$$

-δυναμικό (ίσοτροπικά

$$-\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{r_S} + \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{r_S} = 4\pi\sigma \Big|_{r_S}$$

$$-\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{r_S} + \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{r_S} = \sigma$$

$$\varphi_1(r_S) = \varphi_2(r_S)$$

ύλικά)

Γενική μένη εξίσωση

Poisson (ίσοτροπικά

ύλικά)

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\rho$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -4\pi\rho$$

'Εξίσωση Poisson για

όμογενές, ίσοτροπικό

διηλεκτρικό ύλικο

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho$$

'Επιφανειακή πυκνότητα

ελεύθερου φορτίου στην

έπιφάνεια αγωγού

$$\sigma = \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{r_C}$$

$$\sigma = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{r_C}$$

'Ολικό ελεύθερο

φορτίο αγωγού

$$q = -\epsilon \int_{S_C} \frac{\partial \varphi}{\partial n} da$$

$$q = -\frac{\epsilon}{4\pi} \int_{S_C} \frac{\partial \varphi}{\partial n} da$$

Εύδικη περίπτωση ελεύθε-

ρου φορτίου σε ίσοτροπι-

κό, γραμμικό και όμογενές

διηλεκτρικό ύλικο με α-

κείρη έκταση:

$$\varphi(r) = \frac{q}{\epsilon r}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}$$

- ηλεκτρικό πεδίο

$$\underline{E}(r) = \frac{q}{\epsilon r^3} \underline{r}$$

$$\underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^3} \underline{r}$$

- ηλεκτρική μετατόπιση

$$\underline{D}(r) = \frac{q}{r^3} \underline{r}$$

$$\underline{D}(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^3} \underline{r}$$

2-15 Ένέργεια του Ηλεκτροστατικού Πεδίου

Στήν παράγραφο 2-4 εξετάσαμε την ενέργεια συνδέσεως πού περι-
κλείεται σέ ένα σύστημα έλευθερων στατικῶν φορτίων. θεωρώντας τό
έργο πού καταναλώνεται κατά τή συγκρότηση τοῦ συστήματος μέ στα-
διακή μεταφορά έλευθερων φορτίων, τά ὁποῖα άντλοῦμε ἀπό μιά άνε-
ξάντλητη πηγή σέ άπειρη άπόσταση, κατάλήξαμε στήν έκφραση

$$W = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{q_j q_k}{|\underline{r}_k - \underline{r}_j|} \quad (2.33)$$

πού μέ τίς μετέπειτα γνώσεις μας μπορούμε νά γράψουμε στήν ίσοδύνα-
μη μορφή

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n q_j \varphi_{-j}(\underline{r}_j). \quad (2.126)$$

Στήν τελευταία σχέση

$$\varphi_{-j}(\underline{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{q_k}{|\underline{r}_k - \underline{r}|} \quad (2.127)$$

είναι τό δυναμικό πού δημιουργοῦν ὅλα τά φορτία πλὴν τοῦ φορτίου q_j .

Οἱ ἐξ. (2.33) καί (2.126) μπορούν εὔκολα νά γενικευτοῦν στήν πε-
ρίπτωση συνεχούς κατανομῆς έλευθερου φορτίου πού αντιπροσωπεύεται
ἀπό τή συνάρτηση τῆς πυκνότητας $\rho(\underline{r})$. Μεταβάλλοντας τό διπλό άθροι-
σμα στήν ἐξ. (2.13) σέ διπλό ὀλοκλήρωμα μπορούμε νά γράψουμε τήν
ήλεκτροστατική ενέργεια ὡς

$$W = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{1}{2} \iint_V \frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3r d^3r' \quad (2.128)$$



ή σέ αντίστοιχία μέ τήν έξ. (2.126) {βλ. έξ. (2.49)} ώς

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\underline{r}) \varphi(\underline{r}) d^3 r \quad (2.129)$$

όπου ή ολοκλήρωση στίς δύο τελευταίες έκφράσεις καλύπτει άρκετό χώ-
ρο V ώστε νά περιλαμβάνει όλη τήν κατανομή φορτίου. Οί έξ. (2.126)
καί (2.129) έκφράζουν τήν ήλεκτροστατική ενέργεια τοῦ συστήματος μέ
έκφραση στήν κατανομή τοῦ φορτίου καί τήν άλληλεπίδραση μεταξύ τών
στοιχειωδών φορτίων μέ τίς δυνάμεις Coulomb. Έναλλακτικά μπορούμε
νά μεταθέσουμε τήν έκφραση στό ήλεκτρικό πεδίο καί νά έξάγουμε μιá
ίσοδύναμη έκφραση τής ενέργειας ώς συνάρτηση τοῦ άνύσματος \underline{E} .

Χρησιμοποιώντας τήν έξίσωση Poisson για τό σκοπό αυτό, ή έξ. (2.129)
μπορεῖ νά γραφεῖ ώς

$$W = - \left[4\pi\epsilon_0 \right] \frac{1}{8\pi} \int_V \varphi \nabla^2 \varphi d^3 r \quad (2.130)$$

Ή τελευταία σχέση μπορεῖ νά πάρει μιá πλέον χρήσιμη μορφή
άν χρησιμοποιήσουμε τό θεώρημα τοῦ Green τής έξ. (2.27)

$$\oint_S \underline{G} \cdot d\underline{\alpha} = \int_V \nabla \cdot \underline{G} d^3 r. \quad (2.27)$$

Γιά τό άνυσμα

$$\underline{G} = \varphi \nabla \varphi$$



ἡ ἐξ. (2.27) παίρνει τὴ μορφή

$$\oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot d\underline{\alpha} = \int_V \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) d^3r \quad (2.131)$$

Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τὴν ταυτότητα τοῦ ἀνυσματικοῦ διαφορικοῦ λογι-
σμοῦ

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g \quad (2.132)$$

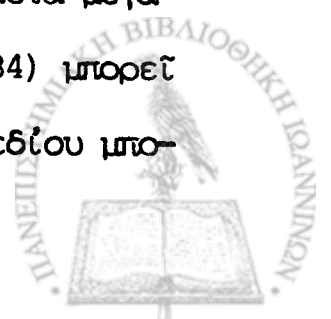
μποροῦμε νὰ γράψουμε τὴν ἐξ. (2.131) ὡς

$$\oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot d\underline{\alpha} = \int_V |\nabla \varphi|^2 d^3r + \int_V \varphi \nabla^2 \varphi d^3r \quad (2.133)$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (2.130) μπορεῖ ἐπομένως νὰ γραφεῖ ὡς

$$\begin{aligned} W &= [4\pi\epsilon_0] \frac{1}{8\pi} \int_V |\nabla^2 \varphi|^2 d^3r - [4\pi\epsilon_0] \frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot d\underline{\alpha} \\ &= [4\pi\epsilon_0] \frac{1}{8\pi} \int_V |\underline{E}|^2 d^3r + [4\pi\epsilon_0] \frac{1}{8\pi} \int_S \varphi \underline{E} \cdot d\underline{\alpha} \quad (2.134) \end{aligned}$$

ὅπου στὸ τελευταῖο σκέλος τῆς ἐξ. (2.134) ἔχει χρησιμοποιηθεῖ ἡ σύν-
δεση ἠλεκτρικοῦ πεδίου καὶ δυναμικοῦ $\underline{E} = -\nabla\varphi$. Στὴν τελευταία ἔκφρα-
ση τὸ πρῶτο ὁλοκλήρωμα καλύπτει τὸ χῶρο V ὅπου τὸ ἠλεκτρικὸ πεδίο
ἔχει πεπερασμένη τιμὴ ἐνῶ τὸ δεύτερο τὴν ἐπιφάνεια S ποὺ περιβάλλει
τὸ σύστημα. Καθόσον τὸ δυναμικὸ φ φθίνει τουλάχιστον ὡς πρὸς τὴν
πρῶτη δύναμη τῆς ἀποστάσεως ἐνῶ τὸ πεδίο \underline{E} τουλάχιστον ὡς πρὸς τὸ
τετράγωνο τῆς ἀποστάσεως εἶναι εὐκόλο νὰ δοῦμε ὅτι γιὰ ἀρκετά μεγά-
λη ἔκταση τοῦ χῶρου V τὸ δεύτερο ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (2.134) μπορεῖ
νὰ θεωρηθεῖ ὡς ἀμελητέο. Ἡ ἠλεκτροστατική ἐνέργεια τοῦ πεδίου μπο-



ρεϊ έπομένως νά έκφραστεί αποκλειστικά ως συνάρτηση του ήλεκτρικού πεδίου ως

$$W = \left[4\pi\epsilon_0 \right] \frac{1}{8\pi} \int_V |\underline{E}|^2 d^3r \quad (2.135)$$

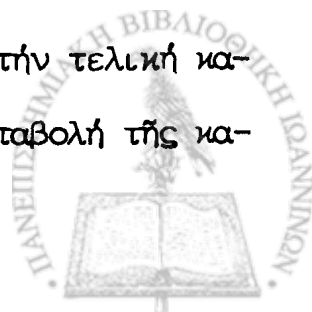
Ή τελευταία σχέση οδηγεί στην έννοια της πυκνότητας ένεργειας

$$w = \left[4\pi\epsilon_0 \right] \frac{1}{8\pi} |\underline{E}|^2 \quad (2.136)$$

πού μπορούμε νά θεωρήσουμε ως αποθηκευμένη στό ήλεκτρικό πεδίο, χωρίς πλέον άναφορά στην κατανομή φορτίου.

Έξαι βέβαιο ότι οι έξ. (2.129) καί (2.135) δέν είναι δυνατόν νά μεταφερθοῦν άτόφιες σέ πλέον πολύπλοκα συστήματα πού, μεταξύ άλλων, περιέχουν διηλεκτρικά ύλικά. Για τήν έξαγωγή τών παραπάνω σχέσεων θεωρήσαμε τή σταδιακή συγκέντρωση τών φορτίων από πολύ μεγάλη άπόσταση καί ύπολογίσαμε τό έργο πού καταναλώνεται κατά τήν άλληλεπίδραση τών φορτίων πού προσιομίζονται μέ τά ήδη ύπάρχοντα φορτία στό χώρο. Τό όλικό έργο πού καταναλώνεται μέ τή διεργασία αύτή δί-νεται έναλλακτικά από τίς έξ. (2.129) καί (2.135). Άν τό σύστημα περιέχει διηλεκτρικά ύλικά τό έργο πού καταναλώνεται δέν άφορά μόνο στή μεταφορά έλεύθερων φορτίων από τό άπειρο άλλα καί στή δημιουργία πολώσεως του ύλικού. Άν $\rho(\underline{r})$ είναι ή τελική κατανομή φορτίου, $\underline{E}(\underline{r})$ καί $\varphi(\underline{r})$ αντίστοιχα τό μακροσκοπικό ήλεκτρικό πεδίο καί δυναμικό, δέν είναι έκ πρώτης όψεως προφανές ότι οι έξ. (2.129) καί (2.135) αντίπροσωπεύουν καί στην περίπτωση αύτή τό όλικό έργο για τή δημιουργία τής τελικής καταστάσεως.

Γιά τόν ύπολογισμό τής ένεργείας πού περιέχεται στην τελική κατάσταση θά θεωρήσουμε τό έργο δίν πού συνεπάγεται ή μεταβολή τής κα-



τανομής φορτίου κατά μια άπειροελάχιστη ποσότητα $\delta\rho$ με αντίστοιχη μεταφορά φορτίου από άπειρη απόσταση σε κάποιο στάδιο δημιουργίας του συστήματος. Το έργο που απαιτείται για τη μεταβολή αυτή είναι

$$\delta W = \int \delta\rho(\underline{r}) \varphi(\underline{r}) d^3r \quad (2.137)$$

όπου $\varphi(\underline{r})$ είναι το δυναμικό που δημιουργεί ή ήδη υπάρχουσα κατανομή $\rho(\underline{r})$. Με τη σχέση της έξ. (2.91)

$$\nabla \cdot \underline{D} = \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi\rho \quad (2.91)$$

μπορούμε να συνδέσουμε τη μεταβολή της πυκνότητας φορτίου $\delta\rho$ και τη μεταβολή της ηλεκτρικής μετατόπισης $\delta\underline{D}$

$$\delta\rho = \left[4\pi \right] \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot (\delta\underline{D}) \quad (2.138)$$

Η μεταβολή της ενέργειας του συστήματος στην έξ. (2.137) είναι επομένως

$$\delta W = \left[4\pi \right] \frac{1}{4\pi} \int \varphi \nabla \cdot \delta\underline{D} d^3r. \quad (2.139)$$

Όπως και κατά την εξαγωγή της έξ. (2.135) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Green { βλ. έξ. (2.131) } για να μετατρέψουμε την έξ. (2.139) σε ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα με άμελητά συνεισφορά και στο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \delta W &= - \left[4\pi \right] \frac{1}{4\pi} \int \nabla\varphi \cdot \delta\underline{D} d^3r \\ &= \left[4\pi \right] \frac{1}{4\pi} \int \underline{E} \cdot \delta\underline{D} d^3r \end{aligned} \quad (2.140)$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε πάλι η σχέση $\underline{E} = -\nabla\varphi$. Η ολική τώρα ενέργεια του συστήματος μπορεί να βρεθεί με ολοκλήρωση της έξ. (2.140) από την αρχική τιμή $D=0$ ως την τελική τιμή της ή-



λεκτρικής μετατοπίσεως D , ήτοι

$$W = \int_0^D \delta w = \left[4\pi \right] \frac{1}{4\pi} \int d^3 r \int_0^D \underline{E} \cdot \delta \underline{D} \quad (2.141)$$

Γιά να πραγματοποιήσουμε την ολοκλήρωση της έξ.(2.141) θα πρέπει να δεχτούμε καποια συναρτησιακή σχέση μεταξύ των άνωσμάτων \underline{E} και \underline{D} . Στην περίπτωση όπου το διηλεκτρικό υλικό είναι γραμμικό ισχύει η σχέση:

$$\underline{E} \cdot \delta \underline{D} = \frac{1}{2} \delta (\underline{E} \cdot \underline{D}) \quad (2.142)$$

και το τελευταίο ολοκλήρωμα της έξ.(2.141) μπορεί να μεταβληθεί σε πλήρες διαφορικό με αποτέλεσμα

$$W = \left[4\pi \right] \frac{1}{8\pi} \int \underline{E} \cdot \underline{D} d^3 r \quad (2.143)$$

Τό τελευταίο αποτέλεσμα μετατρέπεται στην έκφραση της έξ.(2.129) αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις $\underline{E} = -\nabla\varphi$ και $\nabla \cdot \underline{D} = \left[1/4\pi \right] 4\pi\rho$. Με άλλα λόγια η έξ.(2.129) εκφράζει σωστά την ενέργεια ενός συστήματος που περιέχει διηλεκτρικά υλικά αλλά μόνο στην περίπτωση όπου τα διηλεκτρικά είναι γραμμικά. Στην αντίθετη περίπτωση η ενέργεια του συστήματος πρέπει να υπολογιστεί από την έξ.(2.141) αφού προηγουμένως προσδιοριστεί η εξάρτηση της ηλεκτρικής μετατοπίσεως από τό ηλεκτρικό πεδίο.

2-16 Τό 'Ηλεκτρικό Ρεύμα

Τό ηλεκτρικό ρεύμα ορίζεται ως η ποσότητα φορτίου που διασχίζει μία συγκεκριμένη επιφάνεια S ανά μονάδα χρόνου, ήτοι,



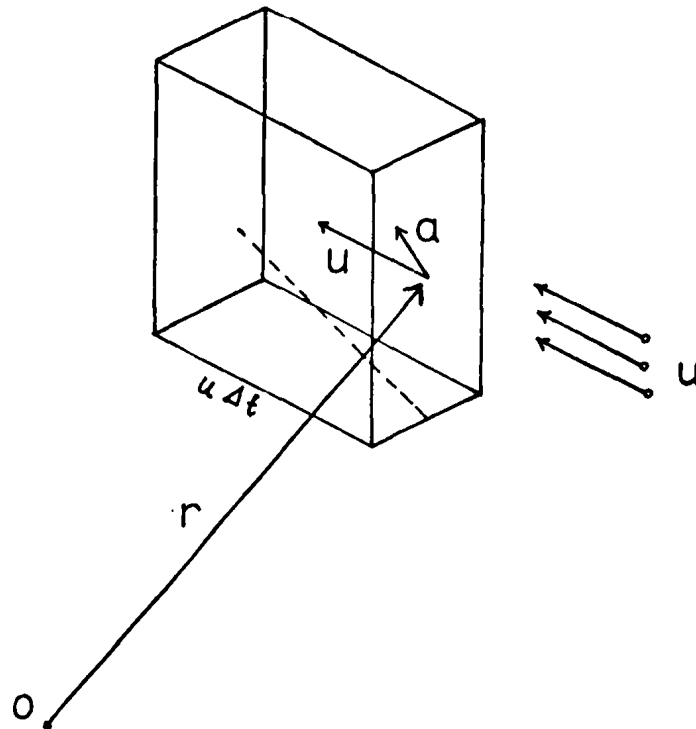
$$I \equiv \frac{dq}{dt} \quad (2.144)$$

Όπως πάντα θα θεωρήσουμε τό μακροσκοπικό όριο $dq \rightarrow 0$, όπου ή άπειροελάχιστη ποσότητα dq περιέχει άκόμη ένα μεγάλο άριθμό στοιχειωδών φορτίων.

Αν και ό όρισμός τής έξ.(2.144) είναι άνεξάρτητος από τό μηχανισμό μεταφοράς του φορτίου (τό ρεύμα I μπορεί νά αναφέρεται σέ ροή φορτίου μέσα σέ ένα κυλινδρικό άγωγό, στή δέσμη ενός έπιταχυντή, σέ ένα κεραυνό ή στή μεταφορά φορτίων κατά τήν ήλεκτρόλυση), έξαρτάται από τή γεωμετρία και προσανατολισμό τής έπιφανείας S . Είναι άρκετά χρήσιμο έπομένως νά όρίσουμε ένα μέγεθος πού θα περιγράφει τήν κίνηση του φορτίου σέ κάθε σημείο του χώρου άνεξάρτητα από οποιαδήποτε γεωμετρία του μέσου παρατηρήσεως. Για τό σκοπό αυτό είναι σκόπιμο νά έπιστρέψουμε στή μικροσκοπική άποψη και νά δοϋμε τό ρεύμα ως κίνηση φορτισμένων στοιχειωδών σωματίων. Θα θεωρήσουμε, όπως δείχνει τό σχήμα 2-22, ένα μικρό στοιχείο του χώρου γύρω από τό σημείο \underline{x} όπου ή πωκνότητα των στοιχειωδών σωματίων μέ φορτίο q είναι $n(\underline{x})$ (σωματρία ανά κυβικό έκατοστόμετρο) και ή ταχύτητα του $\underline{u}(\underline{x})$. Τα σωματρία πού διασχίζουν σέ χρόνο Δt μία μικρή έπίπεδη όρθογώνια έπιφάνεια \underline{a} (όπου τό άνυσμα \underline{a} είναι κάθετο πρós τήν έπιφάνεια και τό μήκος του μετρά τό έμβαδόν τής έπιφανείας) περιέχεται στό πλάγιο παραλληλεπίπεδο μέ βάση \underline{a} και άκμή παράλληλη πρós τήν ταχύτητα \underline{u} ίση πρós $\underline{u}\Delta t$. Ό όγκος του παραλληλεπίπεδου είναι ίσος μέ τό έσωτερικό γινόμενο $\underline{a} \cdot \underline{u} \Delta t$ και έπομένως ό άριθμός N των σωματίων μέσα στό παραλληλεπίπεδο

$$N = n \underline{a} \cdot \underline{u} \Delta t.$$





ΣΧΗΜΑ 2-22. Τά σωματρία μέ ταχύτητα \underline{u} πού διέρχονται από τήν έπιφάνεια \underline{a} σέ χρόνο Δt περιέχονται στό πλάγιο παραλληλεπίπεδο μέ βάση τήν έπιφάνεια \underline{a} καί άκμή μήκους $u \Delta t$ παράλληλη πρός τήν ταχύτητα \underline{u} . Τό ύψος τοῦ παραλληλεπιπέδου πού σημειώνεται μέ διακεκομένη γραμμή ἔχει μήκος $\underline{a} \cdot \underline{u} \Delta t$.

Τό όλικό φορτίο πού πέρασε από τήν έπιφάνεια \underline{a} σέ χρόνο Δt εἶναι ἴσο μέ $q n \underline{a} \cdot \underline{u} \Delta t$. Σύμφωνα μέ τόν όρισμό τῆς έξ. (2.144) μπορούμε τώρα νά γράψουμε τό ρεύμα $I(\underline{a})$ διαμέσου τῆς έπιφανείας \underline{a} ώς

$$I(\underline{a}) = \frac{q n \underline{a} \cdot \underline{u} \Delta t}{\Delta t} = n q \underline{a} \cdot \underline{u}. \quad (2.145)$$

Ἡ έξ. (2.145) μπορεῖ νά γενικευτεῖ εύκολα στήν περίπτωση όπου διάφορα είδη σωματιών, μέ διαφορετικό φορτίο ἢ διαφορετική ταχύτητα, συνεισφέρουν στό ρεύμα διαμέσου τῆς έπιφανείας \underline{a} . Ἄν q_k εἶναι τό φορτίο τῶν σωματιών τῆς κατηγορίας k (ήλεκτρόνια, πρωτόνια, θετικά Ἴόντα) καί $n_{\ell}^{(k)}$ εἶναι ἡ πυκνότητα τῶν σωματιών τῆς κατηγορίας k μέ ταχύτητα $\underline{u}_{\ell}^{(k)}$ στή γειτονία τοῦ σημείου \underline{r} , τό όλικό ρεύμα $I(\underline{a})$ εἶναι



$$\underline{I}(\underline{a}) = \sum_k q_k \sum_\ell n_\ell^{(k)} \underline{a} \cdot \underline{u}_\ell^{(k)} = \underline{a} \cdot \sum_k q_k \sum_\ell n_\ell^{(k)} \underline{u}_\ell^{(k)} \quad (2.146)$$

όπου τό άθροισμα στό δείκτη k έκτείνεται σέ όλες τίς κατηγορίες σωματίων καί τό άθροισμα στό δείκτη ℓ σέ όλες τίς ταχύτητες τών σωματίων κάθε κατηγορίας. Τό άνυσμα

$$\underline{J}(\underline{r}) \equiv \sum_k q_k \sum_\ell n_\ell^{(k)}(\underline{r}) \underline{u}_\ell^{(k)}(\underline{r}) \quad (2.147)$$

πού χαρακτηρίζει τό ρεύμα γιά όποιοδήποτε έπιφάνεια γύρω από τό σημείο \underline{r} θά ονομάσουμε πυκνότητα ρεύματος στό σημείο \underline{r} . Άν τό άνυσμα $\underline{J}(\underline{r})$ είναι γνωστό ώς συνάρτηση τών συντεταγμένων, τό όλικό ρεύμα πού διαρρέει μιά έπιφάνεια S μπορεί νά βρεθεΐ από τό ολοκλήρωμα

$$\underline{I} = \int_S \underline{J} \cdot d\underline{a}. \quad (2.148)$$

Οι μονάδες του ήλεκτρικού ρεύματος, όπως ορίστηκε στην έξ. (2.144)

είναι τό ΗΣΜ-φ/sec στό σύστημα CGS καί τό C/sec στό σύστημα SI

Ή τελευταία μονάδα είναι γνωστή μέ την όνομασία ampere (A). Οι δύο μονάδες συνδέονται μέ τή σχέση της έξ. (2.10)

$$1 \text{ A} = \frac{c}{10} \text{ ΗΣΜ-φ} \cdot \text{sec}^{-1} \quad (2.149)$$

Στή λογική σειρά πού ακολουθήσαμε κατά την ανάπτυξη τών ήλεκτρικών φαινομένων θεωρήσαμε ως βασική μονάδα τό coulomb καί παράγωγη τό ampere. Όπως ήδη αναφέραμε στην παράγραφο 2-1 καί θα δοϋμε μέ λεπτομέρια άργότερα, στην πράξη ή μονάδα του ρεύματος καθιερώνεται πειραματικά στό σύστημα SI καί ή μονάδα φορτίου ορίζεται μέ βάση



τό απρ̀̀ere.

Ὡς μονάδα τῆς πυκνότητας ρεύματος στό σύστημα CGS θά ὀρίσουμε τό $\text{HSM} \cdot \text{φ} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$. Στό σύστημα SI ἄν θέλουμε νά εἶμαστε συνεπείς, θά πρέπει νά ἐπιλέξουμε τό απρ̀̀ere ὀνά m^2 . Συνήθως στήν πράξη ἐπιλέγεται ὡς μονάδα τοῦ συστήματος SI τό $\text{A} \cdot \text{cm}^{-2}$ πού συνδέεται μέ τήν ἀντίστοιχη μονάδα τοῦ συστήματος CGS διαμέσου τοῦ συντελεστή τῶν ἔξ. (2.10) καί (2.149).

Εἶναι χρήσιμο νά ἐξετάσουμε τή γενική μορφή τῆς πυκνότητας ρεύματος στήν ἔξ. (2.147) σέ μιά ρεαλιστική περίπτωση ροῆς φορτίου, ὅπως σέ ἕνα μεταλλικό ἄγωγό, ὅπου οἱ φορεῖς τοῦ στοιχειώδους φορτίου ἀνήκουν σέ μιά μοναδική κατηγορία. Στή μεταλλική δομή τά ἄτομα βρίσκονται διατεταγμένα σέ σταθερές θέσεις ἑνός κρυσταλλικοῦ πλέγματος[†] ἐνώ ἕνας μικρός ἀριθμός ἠλεκτρονίων ἀνά ἄτομο (συνήθως ἕνα ἢ δύο) εἶναι "ἐλεύθερα" νά μετακινουῦνται ἀπό ἄτομο σέ ἄτομο. Στό πρότυπο αὐτό μοναδικοί φορεῖς τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου εἶναι τά "ἐλεύθερα" ἠλεκτρόνια μέ φορτίο $-e$ καί ἄν παραλείψουμε τόν δείκτη k στήν ἔξ. (2.147) μπορούμε νά γράψουμε τήν πυκνότητα ρεύματος ὡς

$$\underline{J} = -e \sum_{\ell} n_{\ell} \underline{u}_{\ell} . \quad (2.150)$$

Τό ἀνυσματικό ὄθροισμα τῆς ἔξ. (2.150) ἐκτείνεται σέ ὅλα τά ἠλεκτρόνια πού ἔχουν διαχωριστεῖ σέ ℓ κατηγορίες μέ κριτήριο τήν ταχύτητα \underline{u}_{ℓ} , ἐνώ κάθε κατηγορία χαρακτηρίζεται ἀπό τήν πυκνότητα τῶν ἠλεκτρονίων n_{ℓ} (ἠλεκτρόνια μέ ταχύτητα \underline{u}_{ℓ} ἀνά μονάδα ὄγκου). Στήν ἠλεκτροστατική κατάσταση, ὅπου μόνη κίνηση εἶναι ἡ θερμική, δέν ὑπάρχει

[†] Ἐνα σύνηθες μεταλλικό σῶμα μπορεῖ νά ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα μεγάλο ἀριθμό μικροκρυστάλλων σέ τυχαῖο προσανατολισμό.



καμιά προτιμητέα διεύθυνση για το άνωσμα \underline{u}_ℓ και το άθροισμα της έξ. (2.150) μηδενίζεται. "Αν αντίθετα δημιουργηθεί ένα ηλεκτρικό πεδίο \underline{E} στο έσωτερικό του άγωγού, θα άσκηθεί δύναμη $-e\underline{E}$ σε κάθε "έλεύθερο" ηλεκτρόνιο και ή μέση τιμή της ταχύτητας κάθε ηλεκτρονίου θα πάρει μιá πεπερασμένη τιμή προς την προτιμητέα διεύθυνση που δημιουργεί το άνωσμα \underline{E} . "Αν N_e είναι ο όλικός άριθμός των "έλεύθερων" ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου μπορούμε να όρίσουμε τη μέση ταχύτητα τους ως

$$\langle \underline{u} \rangle \equiv \frac{1}{N_e} \sum_{\ell} n_{\ell} \underline{u}_{\ell} . \quad (2.151)$$

Η πυκνότητα ρεύματος της έξ. (2.150) παίρνει έπομένως την άπλή μορφή

$$\underline{J} = -e N_e \langle \underline{u} \rangle . \quad (2.152)$$

Είναι άρκετά ένδιαφέρον να έξετάσουμε το μέγεθος της μέσης ταχύτητας $\langle \underline{u} \rangle$ των ηλεκτρονίων που δημιουργεί την πυκνότητα ρεύματος στην έξ.

(2.152) για συνήθη ρεύματα σε άγωγούς. Για ένα χάλκινο σύρμα με διατομή $S=1 \text{ mm}^2$ που διαρρέεται από ρεύμα $I=1\text{A}$, ή πυκνότητα ρεύματος είναι

$$J = \frac{I}{S} = 100 \text{ A.cm}^{-2} . \quad (2.153)$$

Καθόσον ο χαλκός διαθέτει ένα "έλεύθερο" ηλεκτρόνιο κατά άτομο, ή πυκνότητα των φορέων του φορτίου N_e ταυτίζεται με την πυκνότητα των ατόμων του χαλκού. Η τελευταία ποσότητα δίνεται από τη σχέση

$$N_e = \frac{N_o}{V_o} \quad (2.154)$$

όπου $N_o = 6.02 \times 10^{23}$ είναι ο άριθμός του Ανογαδρό και V_o ο όγκος ενός



γραμμομορίου ($m=63g$) χαλκού. Από την τιμή της πυκνότητας μάζας του χαλκού $\rho_m = 9g/cm^3$ μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο V_0 ως

$$V_0 = \frac{m}{\rho_m} = \frac{63}{9} = 7 \text{ cm}^3$$

και στη συνέχεια την πυκνότητα "ελεύθερων" ηλεκτρονίων

$$N_e = \frac{N_0}{V_0} = \frac{6.02 \times 10^{23}}{7} = 0.86 \times 10^{23} \text{ cm}^{-3}. \quad (2.154)$$

Η μέση ταχύτητα των ηλεκτρονίων προς τη διεύθυνση της πυκνότητας ρεύματος είναι επομένως

$$u_E \equiv \langle u \rangle = \frac{J}{N_e e} = \frac{10^2}{0.86 \times 10^{23} \cdot 1.602 \times 10^{-19}} = 7.3 \times 10^{-3} \text{ cm/sec} \quad (2.155)$$

Μιά πράγματι εξαιρετικά μικρή ταχύτητα.

Τό αποτέλεσμα της εξ. (2.155) γίνεται ακόμη πιο έντυπωσιμό αν υπολογίσουμε τό μέγεθος της ταχύτητας u_θ που εκτελούν στην πραγματικότητα τά ηλεκτρόνια. Η μέση κινητική ενέργεια της τυχαίας θερμικής κίνησης κάθε ηλεκτρονίου είναι της τάξης του kT , όπου $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ είναι ή σταθερά του Boltzmann και T ή απόλυτη θερμοκρασία του άγωγού. Για θερμοκρασία δωματίου ($T \approx 300^\circ\text{K}$) ή μέση κινητική ενέργεια του ελεύθερου ηλεκτρονίου είναι

$$T_e = \frac{1}{2} m_e u_\theta^2 = kT = 4.14 \times 10^{-21} \text{ J}$$

και ή ταχύτητα u_e (ή μάζα του ηλεκτρονίου είναι $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$)

$$u_\theta = 9.5 \times 10^6 \text{ cm/sec}. \quad (2.156)$$

Η μέση ταχύτητα μέ την οποία οί φορεΐς του φορτίου κινούνται κατά τή φορά του ρεύματος είναι, για συνήθη ρεύματα του εργαστηρίου, δέκα τάξεις μεγέθους μικρότερη από τήν ταχύτητα της τυχαίας θερμικής

τους κινήσεως. Όπως θα δούμε στην έπομένη παραγράφο, στην άξιωση μείωτη αυτή σχέση μεγέθους άφείλεται ο νόμος του Ohm.

Μιά σημαντική σχέση μεταξύ τής πυκνότητας ρεύματος \underline{J} και τής πυκνότητας φορτίου ρ μπορεί να έξαχθει από την άρχή διατηρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου που αναφέραμε στην είσαγωγή του κεφαλαίου.

Άς θεωρήσουμε σε μιά όρισμένη στιγμή t τό όλικό ρεύμα τής έξ.

(2.148) για μιά κλειστή έπιφάνεια S

$$I(t) = \oint_S \underline{J} \cdot d\underline{\alpha} . \quad (2.157)$$

Σέ κάθε σημείο τής έπιφάνειας S τό έσωτερικό γινόμενο $\underline{J} \cdot d\underline{\alpha}$ μπορεί να είναι μιά θετική ή άρνητική ποσότητα. Από την έξ. (2.152), $\underline{J} \cdot d\underline{\alpha} > 0$ σημαίνει ότι στο σημείο αυτό μιά θετική ποσότητα φορτίου είσρέει στο χώρο V που περιβάλλει η έπιφάνεια S ή μιά άρνητική ποσότητα φορτίου φεύγει από τό χώρο. Τό αντίθετο συμβαίνει σε σημεία τής έπιφάνειας S όπου $\underline{J} \cdot d\underline{\alpha} < 0$. Η ολοκλήρωση έπομένως τής ποσότητας $\underline{J} \cdot d\underline{\alpha}$ δίνει τό ρυθμό με τον όποιο θετικό ή άρνητικό φορτίο είσρέει ή έγκαταλείπει τό χώρο V . Αν μέσα στο χώρο V δέν δημιουργείται ή καταστρέφεται φορτίο, ο ρυθμός διελεύσεως του φορτίου από την έπιφάνεια S πρέπει να είναι ίσος με τό ρυθμό αύξομειώσεως του όλικου φορτίου $\int_V \rho(\underline{r}) d^3r$ μέσα στο χώρο που περιβάλλει η έπιφάνεια. Μπορούμε να έκφράσουμε τή σχέση αυτή ως

$$\oint_S \underline{J} \cdot d\underline{\alpha} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho(\underline{r}) d^3r \quad (2.158)$$

ή χρησιμοποιώντας τό θεώρημα του Green

$$\oint_S \underline{J} \cdot d\underline{\alpha} = \int_V \nabla \cdot \underline{J} d^3r \quad (2.159)$$



ὡς

$$\int_V \nabla \cdot \underline{J} \, d^3r = - \frac{d}{dt} \int_V \rho \, d^3r. \quad (2.160)$$

Τώρα, για την εξαγωγή της εξ. (2.160) ή επιφάνεια S και ο αντίστοιχος όγκος V επιλεγήσαν τελείως αυθαίρετα. Θεωρώντας επομένως ένα απειροελάχιστο όγκο V γύρω από ένα σημείο του χώρου μπορούμε να απαλλαγούμε από τα ολοκληρώματα και να γράψουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\nabla \cdot \underline{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ή

$$\nabla \cdot \underline{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.161)$$

όπου η μερική παράγωγος της πυκνότητας φορτίου ως προς το χρόνο τονίζει το γεγονός ότι η ποσότητα ρ είναι επίσης συνάρτηση των συντεταγμένων.

Οι εξ. (2.160) και (2.161) αποτελούν την μαθηματική έκφραση της αρχής διατηρήσεως του φορτίου. Σε ένα σημείο του χώρου δέν μπορεί να υπάρξει μετακίνηση φορτίου χωρίς αντίστοιχη μεταβολή της πυκνότητας φορτίου στο σημείο αυτό. Όπως θά δοῦμε στο Κεφάλαιο 4, η εξ. (2.161) δημιουργεί τη θεωρητική βάση για την ανάπτυξη μεθόδων ανάλυσεως κυκλωμάτων.

2-17 Ἀγωγιμότητα, Ἀντίσταση καί ὁ Νόμος τοῦ Ohm

Μιά από τις πρώτες πειραματικές ανακαλύψεις γύρω από τη ροή του ηλεκτρικού φορτίου ήταν ότι τό ρεύμα πού ρέει από ένα σημείο ενός ὑ-



λικού προς ένα άλλο είναι ανάλογο προς τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων αυτών. Ἡ διαπίστωση αὐτή, γνωστή ὡς νόμος τοῦ Ohm, διατυπώνεται μέ τήν ἄπλή σχέση

$$I = RV \quad (2.162)$$

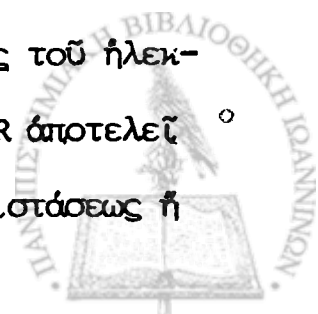
ὅπου ὁ συντελεστής ἀναλογίας R χαρακτηρίζει τό ὑλικό, τήν ἐπιλογή τῶν σημείων μέ διαφορά δυναμικού V καί γενικά τή γεωμετρία τοῦ αἵματος πού διαρρέεται ἀπό τό ρεῦμα I . Γιά σταθερή θερμοκρασία, ὁ συντελεστής R , πού θά ὀνομάσουμε ἀντίσταση τοῦ αἵματος γιά τά συγκεκριμένα ὄργανα, εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τή διαφορά δυναμικού V . Στό σύστημα CGS ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς ἀντιστάσεως προσδιορίζεται ἀπό τήν ἐξ. (2.162) ὡς

$$\frac{\text{HSM} - \varphi}{\text{sec. statvolt}} = \frac{(\text{HSM} - \varphi)^2}{\text{sec. dyn. cm}} = \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \quad (2.163)$$

Στή μονάδα αὐτή, μέ διαστάσεις ταχύτητας, πού βρίσκει πολύ μικρή ἐφαρμογή, δέν δίνεται ιδιαίτερο ὄνομα. Ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς ἀντιστάσεως πού συνήθως χρησιμοποιεῖται ὀρίζεται στό σύστημα SI μέ τήν ὀνομασία ohm καί τό συμβολισμό Ω . Ἀπό τήν ἐξ. (2.162)

$$1 \text{ ohm} = \frac{1 \text{ ampère}}{1 \text{ volt}} \quad (2.164)$$

Στά ἐπόμενα Κεφάλαια ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστάσεως καί ὁ νόμος τοῦ Ohm θά παίξουν κεντρικό ρόλο στήν ἐξέταση τῆς τεχνολογίας τοῦ ἠλεκτρισμοῦ. Γιά τόν ἠλεκτρολόγο μηχανικό ἡ ἄπλή σχέση $V = IR$ ἀποτελεῖ τήν ἀπαρχή κάθε ὑπολογισμοῦ γιά τόν προσδιορισμό τῆς ἀντιστάσεως ἢ



του ρεύματος σε κάθε επιμέρους στοιχείο ενός κυκλώματος. Για τον φυσικό από την άλλη πλευρά, η εμπειρική σχέση της έξ. (2.162) αντανακλά μια αξιοσημείωτη ιδιότητα της ύλης που καλεϊται να έξηγήσει.

Γενικά ως ηλεκτρικό ρεύμα μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε συστηματική μεταφορά φορτίου. Η μηχανική μεταφορά φορτίου με τον ιμάντα της διατάξεως Van de Graaff, η ροή ηλεκτρονίων στον καθοδικό σωλήνα της τηλεοράσεως ή η κίνηση θετικών και αρνητικών ιόντων σε ένα ηλεκτρολυτικό διάλυμα είναι μερικές μορφές ηλεκτρικού ρεύματος. Ο μηχανισμός που δημιουργεί τη ροή φορτίου σε κάθε περίπτωση ποικίλει. Στη συντριπτική πλειοψηφία όμως των ρευμάτων που θα μάς άπασχολήσουν στη συνέχεια η ροή φορτίου δημιουργείται από τη δύναμη που άσκει τό ηλεκτρικό πεδίο στά στοιχειώδη φορτία. Θεωρώντας τό μηχανισμό αυτό σε ένα στερεό όμογενές υλικό για δύο γειτονικά σημεία μέσα στό υλικό, η εμπειρική παρατήρηση της έξ. (2.162) οδηγεί στό συμπέρασμα ότι η πυκνότητα ρεύματος \underline{J} είναι ανάλογη προς τό ηλεκτρικό πεδίο \underline{E} . Μπορούμε έπομένως σε κάθε σημείο του υλικού να συνδέσουμε τά δύο άνύσματα με τη σχέση

$$\underline{J} = g\underline{E} \quad (2.165)$$

όπου η σταθερά g χαρακτηρίζει τό υλικό.

Από φυσικής άπόψεως η άγωγιμότητα g που όρίζεται στην έξ. (2.165) προαφέρεται περισσότερο για τη διερεύνηση του φαινομένου που έκφράζει ό νόμος του Ohm από ότι η αντίσταση R της έξ. (2.162) που μεταξύ άλλων έξαρτάται από τη γεωμετρία του υλικού άματος. Αντίθετα, σε πρακτικές έφαρμογές όπου ένδιαφέρει τό όλικό ρεύμα ή η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων ενός κυκλώματος, η αντίσταση R είναι τό κα-

θοριστικό μέγεθος. Μπορούμε πάντως νά συνδέσουμε τίς δύο ποσότητες (πού έτσι κι άλλιώς περιγράφουν τό ίδιο φαινόμενο) άν θεωρήσουμε μιá απλή γεωμετρία. Άν τό σχήμα του ύλικού πού διαρρέεται από ρεύμα έχει σταθερή διατομή (όπως π.χ. ένα σύνηθες σύρμα) ή όλική αντίσταση είναι ανάλογη πρός τό μήκος του l και αντίστροφα ανάλογη πρός τήν εγκάρσια διατομή s . Βεβαίως εξαρτάται και από τή φύση του ύλικού. Ή εμπειρική σχέση πού έπαληθεύεται πειραματικά γιά μιá μεγάλη κατηγορία ύλικών είναι

$$R = \rho \frac{l}{s} \quad (2.166)$$

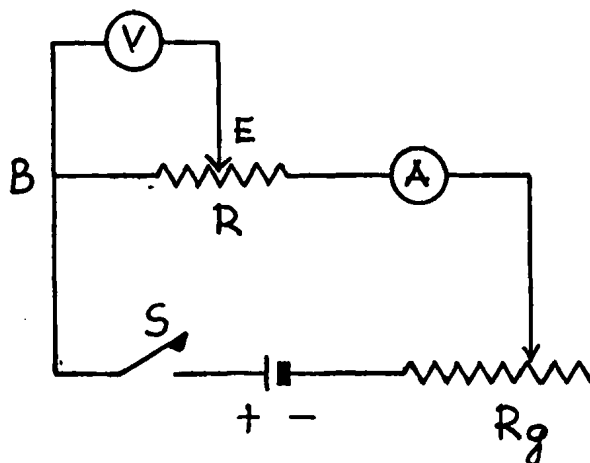
όπου ή είδική αντίσταση ρ χαρακτηρίζει τό ύλικό άνεξάρτητα από τή γεωμετρία. Τή σχέση αυτή θά έπαληθεύσουμε στό επόμενο Πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 2-6. Συνδέστε τό κύκλωμα πού δίνεται στό σχήμα 2-23. Ής αντίσταση R χρησιμοποιεΐστε μιá μεταλλική χορδή μέ διατομή s . Σημειώστε τή διατομή τής χορδής και τό ύλικό από τό όποιο είναι κατασκευασμένη. Συνδέστε τό βολτόμετρο V μέ τό ένα άκρο τής χορδής B . Ή έπαφή E μπορεί νά κινεΐται κατά μήκος τής χορδής. Κλειστε τό διακόπτη S και μέ τή ρυθμιστική αντίσταση R_g ρυθμίστε τήν ένταση του ρεύματος νά πάρει κάποια τιμή (έπιτρεπτή γιά τό άμερόμετρο A). Σημειώστε σέ κατάλληλο πίνακα τήν ένδειξη V του βολτόμετρου, I του άμπερόμετρου και τό μήκος l τής χορδής μεταξύ των σημείων B και E . Στήν τελευταία στήλη του πίνακα ύπολογίστε από τό νόμο του Ohm τήν αντίσταση R του μήκους l τής χορδής. Έπαναλάβετε τή μέτρηση γιά 10 τουλάχιστον διάφορες θέσεις τής έπαφής E κατά μήκος τής χορδής.

— Έπαναλάβετε τίς παραπάνω μετρήσεις γιά χορδές κατασκευασμένες από τό ίδιο ύλικό αλλά διάφορη διατομή.

— Αποδώστε σέ μιá γραφική παράσταση τή μεταβολή τής αντίστασης R ως πρός τό μήκος l τής χορδής γιά καθεμιá από τίς προηγούμενες





ΣΧΗΜΑ 2-23. Διάταξη για τόν προσδιορισμό τῆς εἰδικῆς ἀντίστασῆς ρ στό Πείραμα 2-6.

χορδές. Προσαρμόστε μιὰ εὐθεία γραμμὴ στὰ πειραματικά δεδομένα πού ἀντιστοιχοῦν σέ κάθε χορδή. Σημειώστε στό ἄκρο κάθε εὐθείας τό ἔμβαδόν τῆς διατομῆς s τῆς ἀντίστοιχης χορδῆς. Ἀπό τή γραφική παράσταση προσδιορίστε γιά κάθε χορδή τή σταθερά k στή σχέση

$$R = k\ell \quad (2.167)$$

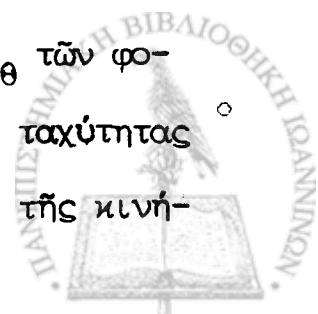
πού συνδέει τήν ἀντίσταση μέ τό μήκος ἑνός γραμμικοῦ ἀγωγοῦ.
— Χρησιμοποιώντας τά προηγούμενα ἀποτελέσματα ἀποδώστε σέ μιὰ δεύτερη γραφική παράσταση τή μεταβολή τοῦ συντελεστή k ὡς πρὸς τό ἀντίστροφο τῆς διατομῆς τοῦ ἀγωγοῦ s^{-1} . Προσαρμόστε μιὰ εὐθεία στὰ πειραματικά δεδομένα καί ἀπό τήν κλίση τῆς εὐθείας προσδιορίστε τήν εἰδική ἀντίσταση ρ τοῦ ὑλικοῦ ἀπό τό ὅποιο εἶναι κατασκευασμένες οἱ χορδές πού μελετήσατε. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμά σας μέ τιμές πού δύνονται στή βιβλιογραφία.

Μέσα στήν πληθώρα τῶν φυσικῶν μεγεθῶν πού ὀρίζονται στούς διάφορους κλάδους τῆς ἐπιστήμης ἡ εἰδική ἀντίσταση τῶν ὑλικῶν πού ἀπαντοῦμε στή φύση ἢ στό ἐργαστήριο κατέχει ἴσως τό ρεκόρ σέ φάσμα ἀριθμητικῶν τιμῶν. Μεταξύ τοῦ καλύτερου μονωτικοῦ ὑλικοῦ καί τοῦ καλύτερου ἀγωγοῦ σέ κανονική θερμοκρασία, ἡ παράμετρος ρ τῆς ἐξ. (2.166) μεταβά-

λεται κατά 30 περίπου τάξεις μεγέθους. "Αν και ο διαχωρισμός δεν είναι απόλυτος, πρακτικά διακρίνουμε τὰ υλικά σε τρεις μεγάλες κατηγορίες. Σε αγωγούς με ειδική αντίσταση στην περιοχή 10^{-3} έως 10^{-6} Ω.σμ, σε ήμιαγωγούς στην περιοχή 10^{-2} έως 10^9 Ω.σμ και σε μονωτές στην περιοχή 10^{10} έως 10^{22} Ω.σμ. Η ειδική αντίσταση για μερικά συνήθη υλικά δίνεται στον Πίνακα 2-4.

Η έξ. (2.165) είναι μιά εμπειρική σχέση με προέλευση την πειραματική παρατήρηση σε μιά μεγάλη κατηγορία υλικών. Συνδέει τή ροή του ελεύθερου φορτίου σε ένα σημείο του υλικού με την τιμή και διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο αυτό. Ήδη στην προηγούμενη πρόταση ο παρατηρητικός αναγκώστης θά διέκρινε μιά παραδοξολογία. "Ο όρος " ελεύθερο φορτίο " συνεπάγεται, σύμφωνα με τό δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, επιτάχυνση ανάλογη προς τή δύναμη. Παρόλα αυτά, η έξ. (2.165) συνδέει με μιά απλή αναλογία τή δύναμη $\underline{F} = q\underline{E}$ πάνω στο " ελεύθερο φορτίο " q με την ταχύτητα $\underline{v} = q^{-1}\underline{J}$ και όχι με την επιτάχυνση. "Αν επομένως σε ένα υλικό ικανοποιείται ο νόμος του Ohm τούτο σημαίνει ότι οι φορείς του φορτίου δεν είναι απόλυτα ελεύθεροι νά κινηθούν. Στην κίνηση πού προκαλεί τό ηλεκτρικό πεδίο αντιτίθεται μιά δύναμη πού θυμίζει έντονα τίς δυνάμεις τριβής.

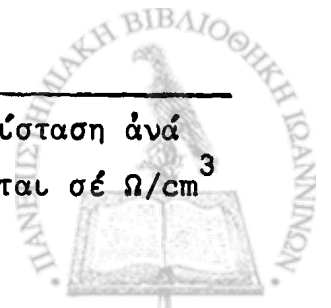
Δέν θά αποτολμήσουμε έδω την ποσοτική ανάλυση του νόμου του Ohm. Η πλήρης εξήγηση του φαινομένου καθώς και ο υπολογισμός της αγωγιμότητας g μπορούν νά γίνουν μόνο στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας. Ποιοτικά, μπορούμε νά αποδώσουμε τή συμπεριφορά πού εκφράζει η έξ. (2.165) στη μεγάλη διαφορά (κατά πολλές τάξεις μεγέθους για συνήθη ηλεκτρικά πεδία και θερμοκρασίες) μεταξύ της ταχύτητας u_g των φορέων πού οφείλεται στη θερμική τους κίνηση και της μέσης ταχύτητας u_E πού αποτελεί τή συνισταμένη της θερμικής κινήσεως και της κινή-

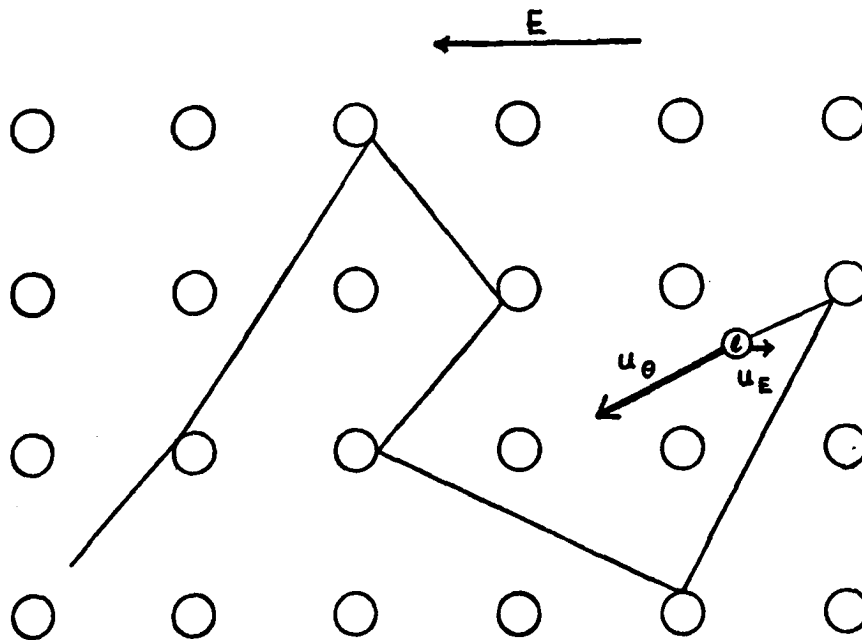


ΠΙΝΑΚΑΣ 2-4 Ειδική αντίσταση ρ διάφορων υλικών
σέ θερμοκρασία 22°C

Υλικό	ρ ($\Omega \cdot \text{cm}$)	Υλικό	ρ ($\Omega \cdot \text{cm}$)
Διηλεκτρικά (στερεά):		Άλατα σέ υγρή κατάσταση:	
παραφύνη	$>10^{18}$	χλωριούχο ασβέστιο (750°C)	0.862
θετόν	1×10^{17}	νιτρικός άργυρος (350°C)	0.820
ήλεκτρο	5×10^{16}	χλωριούχο νάτριο (750°C)	0.294
βακελίτης (διάφοροι τύποι)	$2 \times 10^7 - 2 \times 10^{16}$	Μέταλλα:	
quartz πρόσ κύριο άξονα	1×10^{14}	άνθρακας	3.5×10^{-3}
⊥ πρόσ κύριο άξονα	3×10^{16}	βισμούθιο	1.19×10^{-4}
μύκα	9×10^{15}	ύδράργυρος	9.58×10^{-5}
πορσελάνη	3×10^{14}	άντιμόνιο	4.17×10^{-5}
σχιστόλιθος	10^4	μπροϋτζος	
ύαλος	2×10^{13}	- (88%Cu, 12%Sn)	1.8×10^{-5}
ξύλο		- (89%Cu, 6%Sn, 4%Zn)	1.35×10^{-5}
- μαόνι	4×10^{13}	σίδηρος	1.0×10^{-5}
- λεύκη	5×10^{11}	λευκόχρυσος	1.0×10^{-5}
- πλάτανος	3×10^{10}	βολφράμιο	5.51×10^{-6}
λευκό μάρμαρο	10^{10}	άλουμίνιο	2.83×10^{-6}
γρανύτης	$10^7 - 10^9$	χρυσός	2.44×10^{-6}
		χακλός	1.7×10^{-6}
		άργυρος	1.47×10^{-6}
Διηλεκτρικά (υγρά[†]):			
πετρέλαιο	2×10^{16}		
παραφινέλαιο	1×10^{16}		
έλαιόλαδο	5×10^{12}		
άπεσταγμένο νερό	5×10^5		
αίθυλική άλκοόλη	3×10^5		

† Η ειδική αντίσταση στήν υγρή κατάσταση αναφέρεται ως αντίσταση ανά νόναδα όγκου. Οί τιμές πού περιέχονται στόν πίνακα δύνονται σέ Ω/cm^3





ΣΧΗΜΑ 2-24. Κίνηση ηλεκτρονίου στο έσωτερικό άγωγοῦ. Οἱ κύκλοι συμβολίζουν θετικά ἰόντα ἢ οὐδέτερα ἄτομα.

σεως πού δημιουργεῖ τό ηλεκτρικό πεδίο. Ἀπό τίς ἐξ. (2.155) καί (2.156)

$$u_E \approx 10^{-2} - 10^{-3} \ll u_\theta \approx 10^7 \text{ cm/sec.} \quad (2.168)$$

Ἄν υἱοθετήσουμε τό ἀπλό πρότυπο πού ὀδήγησε στό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (2.155), ἦτοι ἕνα συνεχές μέσο ὅπου φορεῖς τοῦ φορτίου εἶναι ἕνα ηλεκτρόνιο κατά ἄτομο, μπορούμε νά ἐξάγουμε ὀρισμένα γενικά συμπεράσματα γιά τή διακίνηση τοῦ φορτίου μέσα στήν ὕλη. Ἡ κίνηση ἑνός ηλεκτρονίου μέσα σέ ἕνα στερεό δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 2-24 μέ κύριο χαρακτηριστικό τίς συνεχεῖς καί τυχαῖες κρούσεις τοῦ ηλεκτρονίου μέ τά ἄτομα ἢ θετικά ἰόντα τοῦ ὕλικου. Γιά τήν τυπική μέση ἀπόσταση

$$\langle d \rangle \approx 10^{-7} \text{ cm} \quad (2.169)$$

μεταξύ ἀτόμων μέσα σέ ἕνα στερεό ἡ τιμή τῆς ταχύτητας u_θ προβλέπει ὅτι ὁ μέσος χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικῶν κρούσεων εἶναι, σέ προσέγγιση



τάξης μεγέθους,

$$\tau_e = \frac{\langle d \rangle}{u_\theta} \approx 10^{-14} \text{ sec} \quad (2.170)$$

Στό μικρό αυτό χρόνο τό ηλεκτρικό πεδίο έπενεργεί μέ μιά δύναμη $\underline{F} = -e\underline{E}$ πάνω στό ήλεκτρόνιο και μεταβάλει τήν όρμή του κατά τήν ποσότητα

$$m_e \underline{u}_e = -e\underline{E}\tau \quad (2.171)$$

“Αν N είναι ό άριθμός τών ήλεκτρονίων πού συνεισφέρουν στό ρεύμα, τότε ή μέση τιμή τής όρμης τους μπορεϊ νά γραφεί ως

$$m_e \langle \underline{u} \rangle \equiv m_e \underline{u}_E = \frac{1}{N} \sum_k (m_e \underline{u}_\theta^{(k)} - e\underline{E}\tau_k) \quad (2.172)$$

όπου τό άνυσμα $\underline{u}_\theta^{(k)}$ άντιπροσωπεύει τήν ταχύτητα ενός ήλεκτρονίου μετά τήν τελευταία του κρούση. Καθόσον οι ταχύτητες αυτές έχουν τελείως τυχαία διεύθυνση, ό πρώτος όρος στό άθροισμα τής έξ. (2.172) μηδενίζεται. Ό δεύτερος όρος είναι τό γινόμενο τής δυνάμεως $-e\underline{E}$ πού έξασκει τό ηλεκτρικό πεδίο στό ήλεκτρόνιο επί τό μέσο χρόνο

$$\tau_e \equiv \langle \tau \rangle = \frac{1}{N} \sum_k \tau_k \quad (2.173)$$

μεταξύ διαδοχικών κρούσεων. “Η μέση ταχύτητα μέ τήν όποία κινείται τό ήλεκτρόνιο είναι έπομένως

$$\underline{u}_E = \frac{-e\underline{E}}{m_e} \tau_e$$



Ἡ τελευταία σχέση ἀποδίδει τή συμπεριφορά πού περιγράφει ὁ νόμος τοῦ Ohm: ἡ ταχύτητα τῶν φορέων τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου μέσα στήν ὕλη εἶναι ἀνάλογη πρός τή δύναμη πού ἐξασκεῖ τό ἠλεκτρικό πεδίο. Μποροῦμε μάλιστα νά καταλήξουμε στήν ἐξ. (2.165) ἂν χρησιμοποιήσουμε τή σύνδεση μεταξύ πυκνότητας ρεύματος καί μέσης ταχύτητας τῶν ἠλεκτρονίων πού δίνεται στήν ἐξ. (2.152). Γιά τό πρότυπο πού ὁδηγεῖ στήν ἐξ. (2.174), ἡ πυκνότητα ρεύματος εἶναι

$$\underline{J} = - eN_e \underline{u}_E = \frac{e^2 N_e}{m_e} \tau_e \underline{E} \quad (2.175)$$

Συγκρίνοντας τή σχέση αὐτή μέ τήν ἐξ. (2.165) ἡ ἀγωγιμότητα ἀναγνωρίζεται ὡς

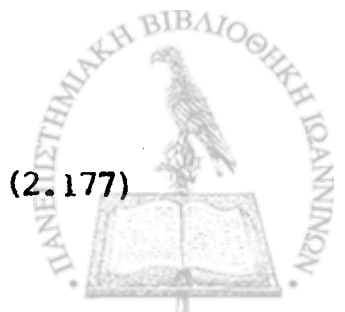
$$g = \frac{e^2 N_e}{m_e} \tau_e. \quad (2.176)$$

Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τήν ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (2.170) γιά τό μέσο χρόνο μεταξύ διαδοχικῶν κρούσεων τ_e , τήν τιμή τῆς πυκνότητας ἐλεύθερων ἠλεκτρονίων γιά τό χαλκό τῆς ἐξ. (2.154) καί τίς πειραματικές τιμές γιά τό φορτίο ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$) καί τή μάζα ($m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$) τοῦ ἠλεκτρονίου, ἡ ἐξ. (2.176) δίνει

$$g \approx 2 \times 10^7 \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

ἢ ἰσοδύναμα

$$\rho = 5 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} = 5 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm} \quad (2.177)$$



Παρόλη τήν απλοϊκότητα του προτύπου που χρησιμοποιήσαμε, η συμφωνία της έκτιμησης που προκύπτει στην έξ. (2.177) με την πειραματική τιμή της ειδικής αντίστασης του χαλκού στον Πίνακα 2-4 είναι εκπληκτική.

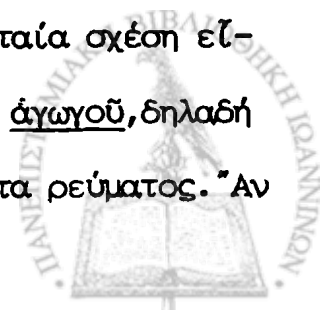
Οι δυνάμεις "τριβής" που αντιτίθενται στη ροή του φορτίου με σταθερή επιτάχυνση συνεπάγονται την κατανάλωση έργου. Στο απλό πρότυπο που θεωρήσαμε ως τώρα ο μηχανισμός καταναλώσεως έργου είναι προφανής. Σε κάθε σύγκρουση των φορέων του φορτίου με τα ιόντα ή τα άτομα του υλικού μεταφέρεται ενέργεια είτε από το ηλεκτρόνιο στο ιόν είτε αντίστροφα. Στη σταθερή κατάσταση ροής του ηλεκτρικού ρεύματος επομένως ένα μέρος της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων μεταβάλλεται σε τυχαία κινητική ενέργεια των ατόμων του υλικού, δηλαδή σε θερμότητα. "Αν $\underline{F} = -e\underline{E}$ είναι η δύναμη που εξασκεί το ηλεκτρικό πεδίο πάνω σε ένα ηλεκτρόνιο που κινείται με σταθερή ταχύτητα \underline{v} ο ρυθμός καταναλώσεως ενέργειας στο στοιχειώδη όγκο που περιέχει N_e ηλεκτρόνια πρέπει να είναι

$$p = \frac{dW}{dt} = N_e \underline{F} \cdot \underline{v} = -eN_e \underline{E} \cdot \underline{v} \quad (2.178)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση $\underline{j} = -eN_e \underline{v}$ για την πυκνότητα ρεύματος και το νόμο του Ohm στην έξ. (2.165), η ισχύς p μπορεί να γραφεί ως

$$p = -eN_e \left(\frac{1}{g} \underline{j} \right) \cdot \left(-\frac{1}{eN_e} \underline{j} \right) = \frac{1}{g} |\underline{j}|^2 = \rho |\underline{j}|^2 \quad (2.179)$$

όπου ρ είναι η ειδική αντίσταση του υλικού. Η τελευταία σχέση είναι περισσότερο γνωστή στην περίπτωση ενός γραμμικού αγωγού, δηλαδή ενός αγωγού με σταθερή διατομή s και σταθερή πυκνότητα ρεύματος. "Αν



l είναι τό μήκος του άγωγού και $I = Js$ τό όλικό ρεύμα, τότε ή όλική ίσχή πού καταναλώνεται στον άγωγό είναι

$$P = \int p d^3x = psl = \rho l s \frac{I^2}{s^2} = RI^2 \quad (2.180)$$

Στό τελευταίο σκέλος της έξ. (2.180) έχει χρησιμοποιηθει ή έξ.

(2.166). Χρησιμοποιώντας ακόμη τό νόμο του Ohm, ή έξ. (2.180) μπορεί νά γραφεί στις έναλλακτικές μορφές

$$P = RI^2 = VI = \frac{V^2}{R} \quad (2.181)$$

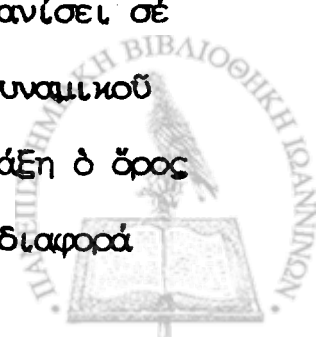
όπου V είναι ή διαφορά δυναμικού στά άκρα του άγωγού.

Στό σύστημα SI ή μονάδα πού μετρά τήν ίσχή είναι τό volt x ampère = volt x coulomb/sec = joule/sec \equiv watt. Μονάδα ίσχής στό σύστημα CGS είναι τό erg/sec, όπου

$$1 \text{ watt} = 10^7 \text{ erg/sec.} \quad (2.182)$$

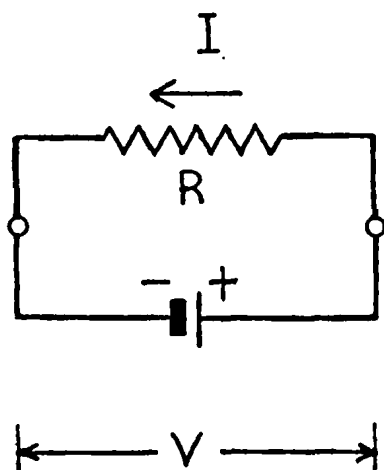
1-18 'Η Ωμική Αντίσταση

Ο νόμος του Ohm δίνεται διαγραμματικά στό σχήμα 2-25 όπου τό σύμβολο $\begin{array}{c} - \\ | \\ + \end{array}$ αντιπροσωπεύει ένα ηλεκτρικό στοιχείο και τό σύμβολο $\text{---}\text{~}\text{---}$ έναν άγωγό μέ αντίσταση R . Ός ηλεκτρικό στοιχείο θά θεωρήσουμε οποιαδήποτε συσκευή πού έχει τή δυνατότητα νά έμφανίσει σε δύο σημεία της μία διαφορά δυναμικού V . Η διαφορά αυτή δυναμικού μπορεί νά έπιτυγχάνεται μέ διάφορους μηχανισμούς. Στην πράξη ό όρος ηλεκτρικό στοιχείο διατηρείται μόνο για διατάξεις όπου ή διαφορά



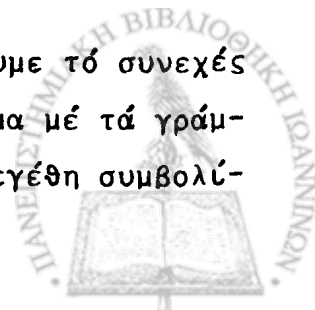
δυναμικοῦ δημιουργεῖται ἀπὸ χημικὲς ἀντιδράσεις τῶν ὑλικῶν πού ἀποτελοῦν τὸ στοιχεῖο. Ἄν καί θά ἀναφερθοῦμε σέ ὀρισμένες χαρακτηριστικὲς ιδιότητες τῶν ἠλεκτρικῶν στοιχείων στὰ δύο ἐπόμενα κεφάλαια θά ἔχουμε τὴν εὐκαιρία νά τὰ μελετήσουμε μὲ λεπτομέρεια στὸ Κεφάλαιο 3. Ἐναλλακτικὰ θά χρησιμοποιήσουμε ἐπανειλημμένα στὸ ἐργαστήριο συσκευές πού τροφοδοτοῦνται ἀπὸ τὸ δίκτυο τῆς πόλης καί εἶναι κατασκευασμένες ἔτσι ὥστε νά ἐμφανίζουσι σέ δύο ἀκροδέκτες τους μιὰ διαφορὰ δυναμικοῦ V . Στὶς περισσότερες συσκευές τοῦ τύπου αὐτοῦ, πού θά ὀνομάσουμε τροφοδοτικὰ συνεχοῦς ρεύματος (ΣΡ)[†] ἢ διαφορὰ δυναμικοῦ V πού ἀναπτύσσεται στοὺς δύο ἀκροδέκτες μπορεῖ νά ἐπιλεγεῖ μεταξὺ δύο ὀρίων πού καθορίζει ὁ κατασκευαστής, ἐνῶ ἡ τιμὴ V καί τὸ ρεῦμα πού παρέχεται στὸ ἐξωτερικὸ κύκλωμα δίνονται σέ ὄργανα τῆς συσκευῆς. Στὰ πλαίσια τοῦ βιβλίου αὐτοῦ, ἡ ἐσωτερικὴ κατασκευὴ τῶν τροφοδοτικῶν ΣΡ δέν θά μᾶς ἀπασχολήσει.

Ὁ ἀγωγὸς πού στὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος 2-25 παρεμβάλλει τὴν ἀντί-



ΣΧΗΜΑ 2-25. Διαγραμματικὴ παράσταση τοῦ νόμου τοῦ Ohm.

[†] Σύμφωνα μὲ τὴν καθιερωμένη πρακτικὴ θά συμβολίσουμε τὸ συνεχὲς ρεῦμα μὲ τὰ γράμματα ΣΡ καί τὸ ἐναλλασσόμενο ρεῦμα μὲ τὰ γράμματα ΕΡ. Στὴ διεθνή βιβλιογραφία τὰ ἀντίστοιχα μεγέθη συμβολίζονται μὲ τὰ γράμματα DC καί AC.



σταση R μεταξύ των άκροδεκτών του ηλεκτρικού στοιχείου μπορεί στήν πράξη νά πάρει πολλές μορφές. Ὁ ἐπιστήμονας ἢ ὁ τεχνικός ἔχει σήμερα στή διάθεσή του μιά μεγάλη ποικιλία ἀπό παθητικά στοιχεῖα πού κατασκευάζονται μέ μόνο σκοπό τήν παρεμβολή ἀντιστάσεως σέ ἕνα ηλεκτρικό κύκλωμα καί πού ἀναφέρονται μέ τή γενική ὀνομασία ἀντιστάσεις. Οἱ τυποποιημένες ἀντιστάσεις ποικίλουν ὡς πρός τό ὕλικό ἀπό τό ὁποῖο εἶναι κατασκευασμένες, τίς διαστάσεις καί τό σχῆμα. Γενικά χαρακτηρίζονται ἀπό κάποια ὀνομαστική τιμή τῆς ἀντιστάσεως πού παρεμβάλουν στή ροή τοῦ ρεύματος, τήν ἀκρίβεια (δηλαδή τήν ποσοστιαία πιθανή ἀπόκλιση τῆς πραγματικῆς ἀντιστάσεως ἀπό τήν ὀνομαστική τιμή) καί τή σταθερότητα τῆς ἀντιστάσεως ὡς πρός τίς μεταβολές τῶν συνθηκῶν τοῦ περιβάλλοντος (θερμοκρασία, ὑγρασία, κ.λ.π.).

Ἡ ἀπλούστερη μορφή ἀντιστάσεως εἶναι τό σύρμα ηλεκτρικοῦ ρεύματος πού ἀποτελεῖ ἀναπόσπαστο μέρος κάθε κυκλώματος. Χρησιμοποιεῖται συνήθως γιά τήν ἀλληλοσύνδεση τῶν παθητικῶν καί ἐνεργῶν στοιχείων ἑνός κυκλώματος ὅπου ἡ ἀντίσταση πού παρεμβάλει μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ἀμελητέα. Σέ μεγαλύτερη ποσότητα μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τήν κατασκευή ἄλλων στοιχείων ὅπως πηνία, μετασχηματιστές ἢ ρεοστάτες. Τά συνήθη σύρματα εἶναι κατασκευασμένα ἀπό χαλκό, ἕνα μέταλλο μέ μικρή εἰδική ἀντίσταση, μεγάλη εὐλυγισία καί σχετικῶς χαμηλό κόστος. Τό χάλκινο σύρμα συνήθως ἐπιμεταλλώνεται μέ ἄργυρο ἢ κασσίτερο γιά νά προφυλάσσεται ἀπό τήν ὀξείδωση καί νά διευκολύνει τή συγκόλληση μέ τούς ἀκροδέκτες στοιχείων τοῦ κυκλώματος. Πολλές φορές ἀνόμη περιβάλλεται ἀπό μονωτικό ὕλικό.

Ὅπως δείχνει ἡ ἐξ. (2.166), ἡ ἀντίσταση ἑνός σύρματος ἐξαρτᾶται ἀπό τό μήκος καί τή διατομή του. Στήν Ἑλλάδα κατασκευάζονται σήμερα χάλκινα σύρματα μέ διάφορες διατομές σύμφωνα τίς προδιαγραφές



της Ύπηρεσίας Προτυποποίησης του Υπουργείου Βιομηχανίας. Για σύρματα μέ μεγάλη διατομή ο χάλκινος άγωγός κατασκευάζεται από πολλά συνεστραμμένα σύρματα ή κλώνους μικρότερης διατομής. Τό σύρμα του τύπου αυτού, πού όνομάζεται πολύκλωνο, έμφανίζει μεγαλύτερη εύκαμψία και άντοχή. Όρισμένοι τύποι χάλκινων συρμάτων πού κατασκευάζονται και χρησιμοποιούνται σήμερα στην Ελλάδα δίνονται στον Πίνακα 2-5. Για πολλές πρακτικές εφαρμογές, κυρίως για τή σύνδεση ενός ηλεκτρικού έξαρτήματος ή ηλεκτρικής συσκευής μέ μιá απομακρισμένη πηγή ηλεκτρικού ρεύματος, κατασκευάζονται τυποποιημένες διατάξεις στις όποιες δύο ή περισσότερα, μεταξύ τους μοναμένα σύρματα, περιέχονται στό ίδιο περίβλημα. Η διαδεδομένη αυτή διάταξη είναι γνωστή μέ τόν όρο καλώδιο.

Ό πιο συνηθισμένος τύπος αντίστασεως πού χρησιμοποιειϊται για τήν κατασκευή ηλεκτρικών και ηλεκτρονικών κυκλωμάτων είναι κατασκευασμένος από λεπτούς κόκκους άνθρακα πού έχουν συμπιεστεί σέ ύψηλή θερμοκρασία ή έχουν άποτεθει ως λεπτό στρώμα πάνω σέ ένα υπόστρωμα από μονωτικό ύλικό. Αναφέρονται μέ τή γενική όνομασία άντιστάσεις άνθρακα και έχουν κυλινδρικό σχήμα μέ δύο άκροδέκτες κατά τόν άξονα του κυλίνδρου. Αν και έμφανίζουν τά πλεονεκτήματα του χαμηλού κόστους, μικρού μεγέθους και της άπουσίας χωρητικότητας και έπαγωγής, ή ακρίβεια της αριθμητικής τιμής της αντίστασεως πού παρεμβάλουν στό κύκλωμα είναι σχετικά περιορισμένη (5-10 % της όνομαστικής τιμής). Η μορφή των αντίστασεων άνθρακα, πού είναι γνωστή σέ όποιοδήποτε έχει ρίξει μιá ματιά στό έσωτερικό μιās ηλεκτρονικής συσκευής, δίνεται στό σχήμα 2-26. Η βιομηχανία κατασκευάζει σήμερα αντίστασεις άνθρακα σέ ένα μεγάλο εύρος τιμών (άπό 2.7 Ω έως $2.2 \times 10^7 \Omega$) και σέ διάφορα μεγέθη για αντίστοιχη κατανάλωση ίσχύς άπό $\frac{1}{8}$ watt έως 2 watt.

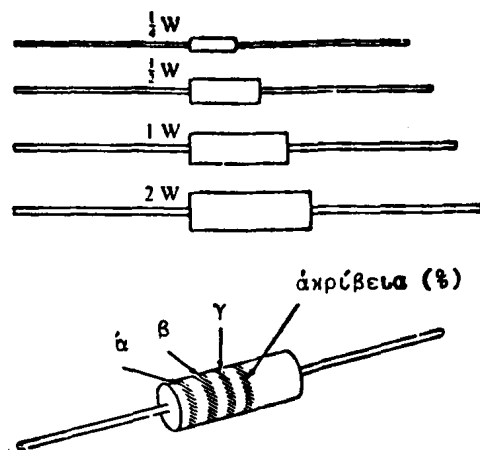
ΠΙΝΑΚΑΣ 2-5: Χαρακτηριστικά όρισμένων τύπων χάλκινων συρμάτων που κατασκευάζονται στην Ελλάδα.

Όνομαστική διατομή (mm ²)	Αριθμός κλώνων	Αντίσταση Ω / km	Μέγιστο έπιτρεπόμενο ρεύμα (A) [†]
1	1	17.8	18
1.5	1	11.9	22
2.5	1	7.14	31
4	1	4.46	41
6	1	2.97	54
10	1	1.785	70
16	1	1.122	96
16	7	1.130	96
25	7	0.742	128
35	19	0.525	153
50	19	0.364	197
70	19	0.271	234
95	19	0.192	287
120	37	0.153	336
150	37	0.122	383
185	37	0.099	435
240	61	0.078	515
300	61	0.063	596

[†] Το μέγιστο έπιτρεπόμενο ρεύμα δύναται για θερμοκρασία περιβάλλοντος 30 °C. Για ύψηλότερες θερμοκρασίας τά όρια έλαττώνονται αισθητά. Κατά τίς προδιαγραφές τίς Έλληνικης νομοθεσίας οί τιμές στήν τελευταία στήλη του πίνακα έλαττώνονται σύμφωνα μέ τήν αντίστοιχία

35 °C	85 %
40 °C	75 %
45 °C	65 %
50 °C	53 %
55 °C	38 %



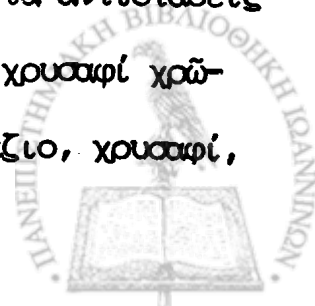


ΣΧΗΜΑ 2-26. Ἀντιστάσεις ἄνθρακα. Οἱ ἐνδείξεις α, β καὶ γ ἀντιστοιχοῦν στὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ τῆς ἐξ. (2.183), σύμφωνα μέ τή σύμβαση χρωμάτων στόν Πίνακα 2-6.

Ἡ ὀνομαστική τιμή τῆς ἀντιστάσεως καί ἡ ἀκρίβεια ἀναφέρεται συμβατικά μέ τέσσερες ἐγχρωμες λαρίδες στήν κυλινδρική ἐπιφάνεια τῆς ἀντιστάσεως, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 2-26. Οἱ τρεῖς πρώτες λαρίδες μποροῦν νά μεταφραστοῦν σέ ἓνα ἀριθμό μέ δύο σημαντικά ψηφία τῆς μορφῆς

$$R = \alpha \beta \underbrace{00 \dots 0}_{\gamma} \quad (2.183)$$

ὅπου τά ψηφία α, β καί τό πλήθος τῶν μηδενικῶν γ καθορίζονται ἀπό τήν ἀντιστοιχία πού δίνεται στόν Πίνακα 2-6. Παρατηρεῖται ὅτι ἡ ἀντιστοιχία τῶν ψηφίων 2 ἕως 7 ἀκολουθεῖ τή φυσική διαδοχή τῶν χρωμάτων τῆς ἴριδας. Ἔτσι μιά ἀντίσταση μέ διαδοχικές ζῶνες: κόκκινο, ἰώδες, κόκκινο ἔχει ὀνομαστική τιμή 2700 Ω ἢ 2.7 kΩ. Ἀντίσταση μέ ζῶνες χρωμάτων γαλάζιο, γκρί, μαῦρο ἔχει ὀνομαστική τιμή 68 Ω. Γιά ἀντιστάσεις μέ ὀνομαστική τιμή μεταξύ 1 καί 10 Ω ἡ τρίτη ζώνη ἔχει χρυσαφί χρώμα. Ἔτσι μιά ἀντίσταση μέ ζῶνες χρώματος πράσινο, γαλάζιο, χρυσαφί, ἔχει τιμή 5.6 Ω.



ΠΙΝΑΚΑΣ 2-6: Κώδικας χρωμάτων για τό συμβολισμό τῆς ὀνομαστικῆς τιμῆς ἀντιστάσεων.

0	Μαῦρο	5	Πράσινο
1	Καφέ	6	Γαλάζιο
2	Κόκκινο	7	Ίωδες
3	Πορτοκαλί	8	Γκρί
4	Κίτρινο	9	Λευκό

Ἡ τέταρτη κατά σειρά ζώνη στήν κυλινδρική ἐπιφάνεια μιᾶς ἀντιστάσεως ἀνθρακίκα δηλώνει τήν ἀκρίβεια στήν ὀνομαστική τιμή πού καθορίζεται ἀπό τίς τρεῖς πρώτες ζώνες. Ἀσημένια ζώνη δηλώνει ἀκρίβεια 10 % καί χρυσακιά ζώνη ἀκρίβεια 5 %. Ἄν ἡ ἀκρίβεια εἶναι καλύτερη ἀπό 5 %, τότε ἀναγράφεται στό περίβλημα τῆς ἀντιστάσεως.

Ἡ συνήθης ἀκρίβεια μέσα στά ὅρια τοῦ 10 % τῶν ἀντιστάσεων ἀνθρακίκα ἔχει ὀδηγήσει σέ μιᾶ ἐκ πρώτης ὄψεως παράξενη διαδοχή τιμῶν στίς ἀντιστάσεις πού παράγονται ἀπό τή βιομηχανία. Γιά κάθε τιμή τοῦ πλήθους γ τῶν μηδενικῶν στήν ἐξ. (2.183) τά δύο πρώτα σημαντικά ψηφία τῶν ἀντιστάσεων μπορεῖ νά εἶναι

10, 12, 15, 18, 22, 27, 33, 39, 47, 56, 68 ἢ 82.

Παρατηρεῖται ὅτι μέ τόν τρόπο αὐτό κάθε τιμή ἐπικαλύπτει τό ὅριο τοῦ 10 % πού καθορίζουν οἱ δύο γειτονικές τιμές. Γιά ἀντιστάσεις μέ ἀκρίβεια 5 % κατασκευάζονται ἐπιπλέον στοιχεῖα μέ σημαντικά ψηφία τῆς ὀνομαστικῆς τιμῆς

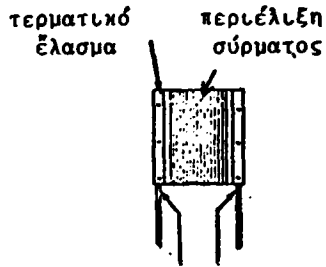
11, 13, 16, 20, 24, 30, 36, 43, 51, 62, 75 καί 91.



Ἡ απόκλιση τῆς πραγματικῆς τιμῆς τῆς ἀντιστάσεως ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν μπορεῖ νὰ ὀφείλεται σὲ πολλοὺς παράγοντες. Γιά ἀντιστάσεις μὲ μικρὴ ὀνομαστικὴ τιμὴ (μικρότερη ἀπὸ 10 Ω), ἡ ἀντίσταση τῶν συνδέσεων μὲ ἄλλα στοιχεῖα τοῦ κυκλώματος μπορεῖ νὰ αὐξήσῃ σημαντικὰ τὴν ὀλικὴν τιμὴν τῆς ἀντιστάσεως. Γιά μεγάλη ὀνομαστικὴν τιμὴν (μεγαλύτερη ἀπὸ 10 MΩ), διαρροὴ ρεύματος πάνω στὴν ἐπιφάνεια τοῦ στοιχείου μπορεῖ νὰ ἐλαττώσῃ κατὰ πολὺ τὴν ὀλικὴν ἀντίσταση. Τὸ φαινόμενο αὐτὸ γίνεται σημαντικό ἂν ἡ ὑγρασία τοῦ περιβάλλοντος εἶναι μεγάλη. Τὸ μεγαλύτερο ἴσως μειονέκτημα τῶν ἀντιστάσεων ἀνθρακὰ εἶναι ἡ σημαντικὴ ἐπίδραση τῆς θερμοκρασίας τοῦ περιβάλλοντος στὴν τιμὴν τῆς ἀντιστάσεως πού παρεμβάλουν. Γιά τὸ λόγο αὐτό, ἂν ἡ σταθερότητα τῆς ἀντιστάσεως εἶναι μιὰ ἀπὸ τίς κύριες ἀπαιτήσεις σὲ ἓνα συγκεκριμένο κύκλωμα, συνιστᾶται ἡ χρησιμοποίησις ἀντιστάσεως μὲ δυνατότητα καταναλώσεως ἐνεργείας πολὺ μεγαλύτερη ἀπὸ αὐτὴ πού ἀναμένεται κατὰ τὴν λειτουργία τοῦ κυκλώματος.

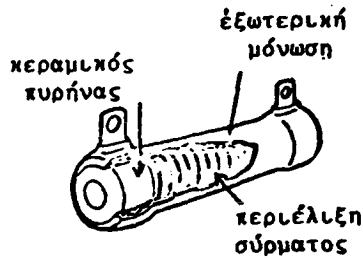
Μιὰ διαφορετικὴ κατηγορία ἀντιστάσεων παρασκευάζεται μὲ τὴν περιέλιξη σύρματος γύρω ἀπὸ ἓνα κύλινδρο ἀπὸ μονωτικὸ (συνήθως κεραμικὸ) ὑλικό. Οἱ ἀντιστάσεις σύρματος βρίσκουν ἐφαρμογὴν σὲ περιπτώσεις ὅπου ἀπαιτεῖται χαμηλὴ ἀντίσταση, μεγάλη ἀκρίβεια ἢ ὑψηλὴ κατανάλωση ἰσχύος. Μὲ μικρὴ ποσότητα σύρματος μικρῆς εἰδικῆς ἀντιστάσεως κατασκευάζονται ἀντιστάσεις μὲ μικρὴ ἀπόλυτη τιμὴ καὶ ὑψηλὴ ἀκρίβεια. Μὲ χρησιμοποίησις εἰδικῶν κραμάτων μὲ χαμηλὸ θερμικὸ συντελεστὴ κατασκευάζονται ἀντιστάσεις σύρματος μὲ ἀκρίβεια καλύπτουσα ἀπὸ 0.001 %.

Ἡ ἐνέργεια πού καταναλώνεται σὲ ἀντιστάσεις σύρματος εἶναι σὲ περιπτώσεις σημαντικὴ. Σὲ ἐφαρμογές ὅπου ἡ προβλεπόμενη κατανάλωση ἐνεργείας εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ 2 W χρησιμοποιοῦνται ἀντιστάσεις στίς ὁποῖες ἔχει χρησιμοποιηθεῖ μονωτικὸ ὑλικὸ ἀνθεκτικὸ

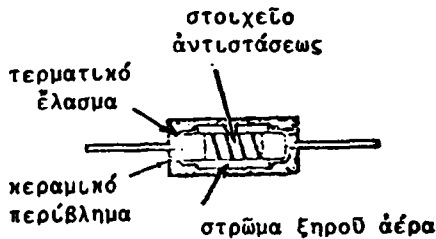


ἀκροδέκτες

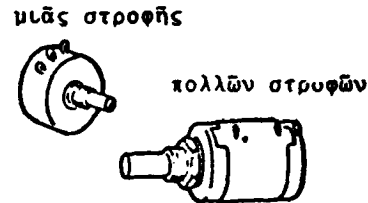
ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ



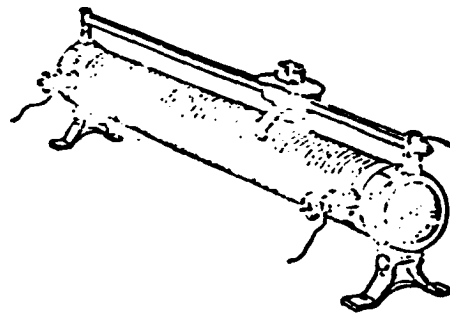
ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΙΣΧΗΣ



ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΜΕΤΑΛΛΙΚΗΣ ΤΑΙΝΙΑΣ



ΠΕΤΕΝΣΙΟΜΕΤΡΑ



ΡΟΣΕΤΑΤΗΣ

ΣΧΗΜΑ 2-27. Ἀντιστάσεις σύρματος, μεταλλικής ταινίας καὶ ρυθμιζόμενες ἀντιστάσεις.

σέ ὑψηλές θερμοκρασίες. Μερικά παραδείγματα ἀντιστάσεων σύρματος δίνονται στό σχῆμα 2-27.

Ἡ ἀνάπτυξη τῆς τεχνολογίας ἀποθέσεως λεπτῶν στρωμάτων μετάλλου σέ ὑπόστρωμα ἀπό μονωτικό ὕλικό ἔχει ὀδηγήσει στήν κατασκευή ἀντιστάσεων μεταλλικής ταινίας πού ἐμφανίζουν μεγάλη ἀκρίβεια, ικανοποιητική σταθερότητα ὡς πρός τή μεταβολή τῆς θερμοκρασίας καί σχετικά χαμηλό κόστος. Ἀντιστάσεις μεταλλικής ταινίας κατασκευάζονται μέ ἐξάχνωση στό κενό καί ἀπόθεση ἐνός λεπτοῦ στρώματος μετάλλου στήν ἐπιφάνεια μονωτικοῦ ὕλικου μέ χαμηλό συντελεστή θερμικῆς διαστολῆς.

Ἡ ἀντίσταση τοῦ στοιχείου πού δημιουργεῖται μπορεῖ νά αὐξηθεῖ μέ κατάλληλη μηχανική καί χημική λείανση. Μέ τόν τρόπο αὐτό κατασκευά-

ζονται σήμερα αντίστασεις με άκρίβεια που πλησιάζει τις καλύτερες αντίστασεις σύρματος. Οι αντίστασεις μεταλλικής ταινίας βρίσκουν τη μεγαλύτερη εφαρμογή στην κατασκευή αντιστάσεων ακριβείας με υψηλή τιμή ($R > 1 \text{ k}\Omega$) όπου το μεγάλο μήκος σύρματος που απαιτείται για την κατασκευή αντίστασης σύρματος κάνει το κόστος απαγορευτικό ενώ παράλληλα αυξάνει την επαγωγή που εισάγεται στο κύκλωμα. Ένα τυπικό στοιχείο αντίστασης μεταλλικής ταινίας δίνεται στο σχήμα 2-27.

Πολλές αντίστασεις σύρματος ή μεταλλικής ταινίας κατασκευάζονται έτσι ώστε να είναι δυνατή η επιλογή μέρους της όλης αντίστασης που μπορεί να παρεμβάλει το στοιχείο. Τα ηλεκτρικά αυτά εξαρτήματα που ονομάζονται ροοστάτες ή ποτενσιόμετρα έχουν συνήθως τρεις άκροδέκτες. Δύο από τους άκροδέκτες είναι συνδεδεμένοι με τα άκρα του στοιχείου και παρεμβάλουν στο κύκλωμα μία σταθερή αντίσταση που συνήθως αναγράφεται στο εξάρτημα. Ο τρίτος άκροδέκτης συνδέεται με μία κινητή επαφή και μπορεί να επιλέξει το μέρος της αντίστασης που βρίσκεται μεταξύ της κινητής επαφής και ενός από τα δύο άκρα του στοιχείου. Στα ηλεκτρικά εξαρτήματα του τύπου αυτού παρέχεται η δυνατότητα μεταβολής της τιμής μιας αντίστασης κατά συνεχή τρόπο. Μία άλλη κατηγορία μεταβλητών αντιστάσεων που χρησιμοποιείται στο εργαστήριο έχει τη δυνατότητα επιλογής της τιμής της αντίστασης κατά σταθερά βήματα. Συνήθως τα βήματα μεταβολής της αντίστασης είναι κατά δεκαπλάσια ή υποδεκαπλάσια του $0,1 \Omega$. Από την ιδιότητα αυτή και από τη συνήθη μορφή των εξαρτημάτων αυτών προέρχονται και η ονομασία δεκαδικό κιβώτιο αντίστασης.

Όπως ήδη αναφέραμε, κύριο χαρακτηριστικό της ποιότητας μιας αντιστάσεως είναι η σταθερότητα που εμφανίζει ως προς τη μεταβολή των συνθηκών του περιβάλλοντος. Πολλά κράματα μετάλλων έχουν δημιουργηθεί



για την εξυπηρέτηση της απαιτήσεως αυτής. Παρόλα αυτά είναι γνωστά σήμερα αρκετά υλικά που εμφανίζουν την αντίθετη ιδιότητα. Δηλαδή υλικά στα οποία η ηλεκτρική αντίσταση μεταβάλλεται δραστικά για μικρή σχετικά μεταβολή κάποιου άλλου φυσικού μεγέθους όπως η θερμοκρασία, το φως ή η μηχανική τάση στο υλικό. Αν η σχέση αυτή είναι μονοσήμαντη, τότε μέτρηση της αντιστάσεως μπορεί να αναχθεί σε μέτρηση του φυσικού μεγέθους από το οποίο εξαρτάται. Παρόμοια υλικά χρησιμοποιούνται για την κατασκευή μιας μεγάλης κατηγορίας ηλεκτρικών εξαρτημάτων, των μετατροπέων, που θα μελετήσουμε σε ιδιαίτερο κεφάλαιο.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

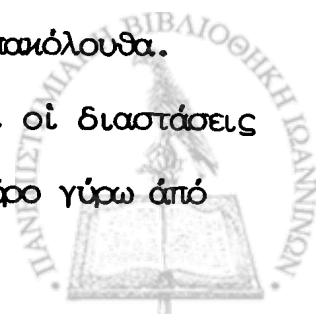
Βασικές μετρήσεις

συνεχούς ρεύματος

186

Ἡ μέτρηση ἑνός φυσικοῦ μεγέθους μπορεῖ νά πραγματοποιηθεῖ εἴτε μέ σύγκριση πρός ἕνα πρότυπο εἴτε ἀπό τή μεταβολή πού προξενεῖ σέ ἕνα ἄλλο φυσικό μέγεθος. Ἔτσι τό μήκος μετράται πάντοτε μέ σύγκριση πρός τό πρότυπο μέτρο ἢ κάποια ἄλλη κατάλληλη πρότυπη μονάδα μήκους. Ἀντίθετα ἡ θερμοκρασία μετράται μέ παρατήρηση τῆς μεταβολῆς τοῦ μήκους στήλης ὑδραργύρου. Στόν ἠλεκτρισμό ἀπ' εὐθείας συγκρίσεις μέ πρότυπες μονάδες φυσικῶν μεγεθῶν δέν εἶναι πάντοτε ἐφικτές. Ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων ἑνός ἀγωγοῦ μπορεῖ π.χ. νά προσδιοριστεῖ μέ σύγκριση πρός ἕνα πρότυπο στοιχεῖο διαμέσου τοῦ ποτενσιομέτρου ὅπως θά δοῦμε μέ λεπτομέρεια ἀργότερα. Στίς περισσότερες ὅμως περιπτώσεις ἡ μέτρηση ἑνός ἠλεκτρικοῦ μεγέθους πραγματοποιεῖται μέ παρατήρηση τῆς ἐπιδράσεως του σέ ἄλλα φυσικά μεγέθη.

Ἡ ροή ἠλεκτρικοῦ ρεύματος σέ ἕνα ἀγωγό ἔχει δύο ἐπαικόλουθα. Ἀφενός ὁ ἀγωγός θερμαίνεται καί ἐπομένως μεταβάλλονται οἱ διαστάσεις του. Ἀφετέρου δημιουργεῖται ἕνα μαγνητικό πεδίο στό χῶρο γύρω ἀπό

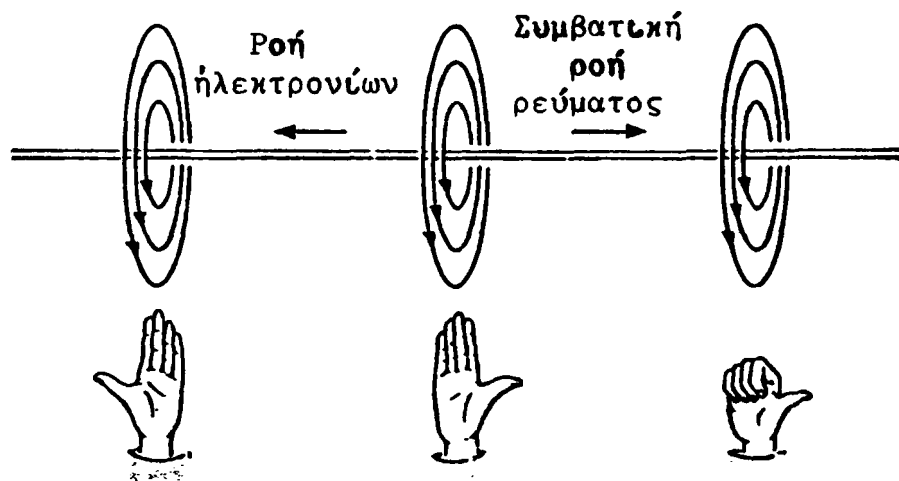


τόν άγωγό. Άν καί θερμικά άμπερόμετρα έχουν κατασκευαστεί στό παρελθόν, μετρήσεις ήλεκτρικού ρεύματος γίνονται στην πράξη άποκλειστικά μέ παρατήρηση του δημιουργούμενου μαγνητικού πεδίου.

3-1 Τό Έργαστηριακό Άμπερόμετρο

Τό έργαστηριακό άμπερόμετρο μετράει τό ρεύμα χρησιμοποιώντας τό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργείται κατά τή ροή φορτίου μέσα σέ ένα άγωγό. Η μαγνητική έπαγωγή πού δημιουργείται σέ άπόσταση a γύρω άπό ένα εύθύγραμμο άγωγό μέ μεγάλες διαστάσεις δίνεται άπό τή σχέση†

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (3.1)$$

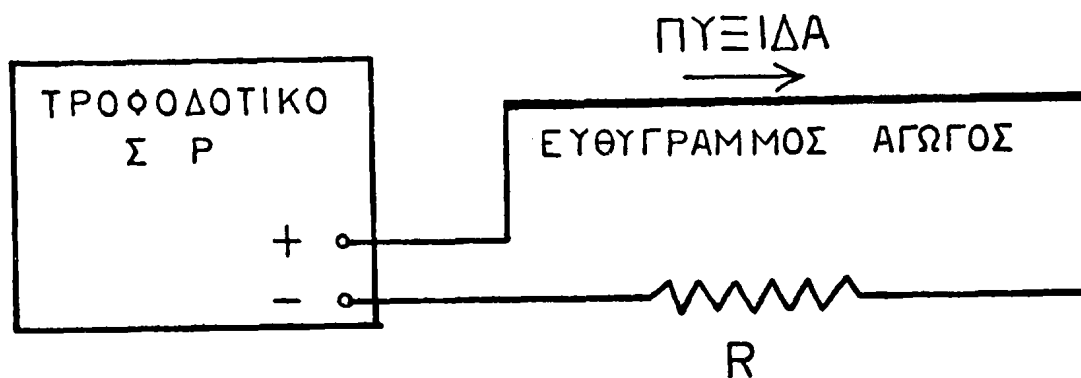


ΣΧΗΜΑ 3-1. Μαγνητικό πεδίο γύρω άπό εύθύγραμμο άγωγό πού διαρέεται άπό ρεύμα I . Στο κάτω μέρος του σχήματος δίνεται ο πρακτικός κανόνας για τόν προσδιορισμό τής φοράς του πεδίου

† Άν καί τά μαγνητικά φαινόμενα θά μελετηθοῦν διεξοδικά σέ ένα ιδιαίτερο κεφάλαιο, θά δανειστοῦμε πρὸς τό παρόν ὀρισμένες ἀπλές σχέσεις τοῦ μαγνητισμοῦ γνωστές ἀπὸ τή Βασική Φυσική. Ὅπως γίνεται σέ ὅλα τά κεφάλαια πού ἀναφέρονται σέ ἐφαρμογές τοῦ ηλεκτρομαγνητισμοῦ, θά γράψουμε τίς ἀπαραίτητες ἐκφράσεις στοῦ συστήματος SI.

Ἡ διεύθυνση καί φορά τοῦ ἀνύσματος \underline{B} δίνεται στό σχῆμα 3-1. Ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τήν ἐξ. (3.1), σέ μιά σταθερή ἀπόσταση a , ἡ ένταση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι ἀνάλογη πρός τό ρεῦμα I πού διαρρέει τόν ἀγωγό. Ἐνα πρόχειρο ἀμπερόμετρο πού χρησιμοποιεῖ τή σχέση αὐτή γιά τή μέτρηση τοῦ ρεύματος θά κατασκευάσουμε στό ἐπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 3-1. Στερεῶστε μιά κοινή μαγνητική πυξίδα πάνω ἀπό ἕνα εὐθύγραμμο ἀγωγό πού εἶναι συνδεδεμένος σέ σειρά μέ μιά μικρή ἀντίσταση ($\sim 5 - 10 \Omega$), ὅπως δείχνει τό σχῆμα 3-2. Ὡς εὐθύγραμμο ἀγωγό μπορεῖται νά χρησιμοποιήσετε ἕνα κοινό μονόκλωνο ἐπενδυμένο



ΣΧΗΜΑ 3-2. Πρόχειρο ἀμπερόμετρο μέ χρήση μαγνητικῆς πυξίδας

σύρμα. Προσανατολίστε τόν ἀγωγό μέ διεύθυνση Βορᾶ-Νοτο ὥστε ἡ βελόνα τῆς μαγνητικῆς πυξίδας νά εἶναι παράλληλη πρός τόν ἀγωγό. Συνδέστε τό κύκλωμα μέ ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ (μέ μεγίστη δυνατὴτητα τροφοδοσίας $\sim 25 \text{ V}$, $\sim 3 \text{ A}$). Αὐξάνοντας σταδιακά τό δυναμικό παρακολουθεῖστε τήν ἀπόκλιση τῆς μαγνητικῆς βελόνας. Καταγράψτε σέ κατάλληλο πύνακα τήν ἀπόκλιση τῆς βελόνας (σέ μοῦρες), τό δυναμικό καί τό ρεῦμα (ὅπως δύνονται ἀπό τά ὄργανα τοῦ τροφοδοτικοῦ)

Π Ρ Ο Σ Ο Χ Η: Μήν ὑπερβεῦτε τά ὄρια δυνατὴτητας παροχῆς ρεύματος τοῦ τροφοδοτικοῦ πού καθορίζει ὁ κατασκευαστής.

Γιά μιά συγκεκριμένη τιμή τοῦ ρεύματος I καί τοῦ δυναμικοῦ V ἡ μαγνητική βελόνα ἀποκλίνει κατά τή διεύθυνση τῆς συνισταμένης τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς γῆς καί τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού δημιουργεῖ ἡ ροή τοῦ ρεύματος. Ἄν θ εἶναι ἡ γωνία ἀποκλίσεως, ἀποδεῖξετε ὅτι

$$I = C_1 \tan \theta \quad (3.2\alpha)$$

καί

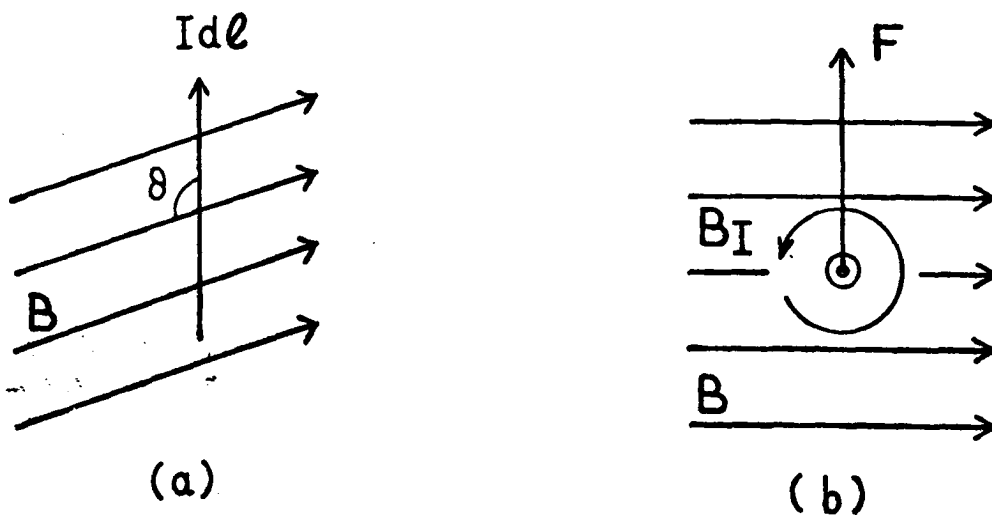
$$V = C_2 \tan \theta \quad (3.2\beta)$$

Προσδιορίστε τούς συντελεστές C_1 καί C_2 στίς έξ.(3.2).

Αποδόστε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τοῦ ρεύματος καί τοῦ δυναμικοῦ ὡς πρός τήν έφαπτομένη τῆς γωνίας ἀποκλίσεως χρησιμοποιώντας τίς προηγούμενες μετρήσεις καί έπαληθεύστε τίς έξ.

(3.2). Από τίς γραφικές παραστάσεις προσδιορίστε τίς πειραματικές σταθερές C_1 καί C_2 .

Στό άμπερόμετρο πού κατασκευάσαμε παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τή ροπή πού έξασκεῖ τό μαγνητικό πεδίο τοῦ ρεύματος πάνω σέ ένα μαγνητικό δίπολο. Τά συνήθη εργαστηριακά άμπερόμετρα μετροῦν τό ρεύμα προσδιορίζοντας τή ροπή πού έξασκεῖ ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο πάνω στόν άγωγό. Ὅπως είδαμε, γύρω άπό ένα στοιχείο ρεύματος $I d\ell$ (έναν άγωγός μήκους $d\ell$ πού διαρρέεται άπό ρεύμα I) δημιουργεῖται ένα κυκλικό μαγνητικό πεδίο B_I . Αν τό στοιχείο βρίσκεται μέσα σέ ένα έξωτερικό μαγνητικό πεδίο, ὅπως δείχνει τό σχήμα 3-3 τότε ἡ άλληλεπίδραση τοῦ



ΣΧΗΜΑ 3-3(α) Στοιχείο ρεύματος σέ έξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Ἡ διεύθυνση τοῦ ρεύματος δίνεται άπό τό βέλος.

(β) Κάτοψη τοῦ σχ.(α) Ἡ άλληλεπίδραση τοῦ έξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου B καί τοῦ πεδίου τοῦ ρεύματος B_I δημιουργοῦν τή δύναμη F πού έξασκεῖται πάνω στό στοιχείο.



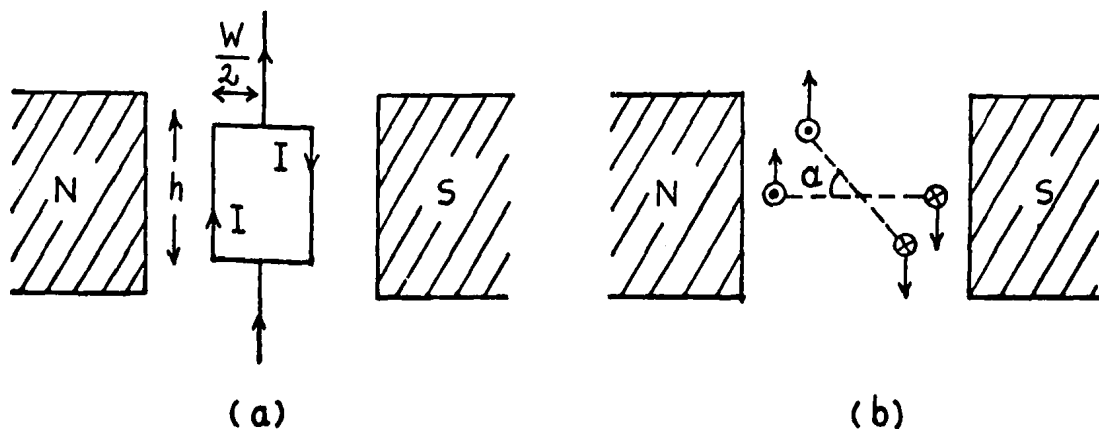
μαγνητικού πεδίου μέ τό έξωτερικό μαγνητικό πεδίου δημιουργεί μία δύναμη

$$F = BI \, dl \sin\theta \quad (3.3)$$

Σύμφωνα μέ τό σχήμα, ή φορά τής δυνάμεως είναι τέτοια ώστε νά προκαλεῖ μετατόπιση τοῦ στοιχείου ἀπό τήν περιοχή τοῦ ἰσχυρότερου πρὸς τήν περιοχή ἀσθενέστερου μαγνητικού πεδίου.

Ἡ ἐξ. (3.3) παρέχει τή βασική ἀρχή γιά τή μέτρηση τοῦ ρεύματος στά συνήθη ἐργαστηριακά ἀμπερόμετρα. Παρέχει δηλαδή τήν βασική ἀνάλογια μεταξύ ρεύματος καί δυνάμεως σέ ἕνα ἄγωγό. Καθόσον μέτρηση μικρῆς δυνάμεως μέ καλή ἀκρίβεια εἶναι δύσκολη, συνήθως ή μέτρηση πού συνεπάγεται ή ἐξ. (3.3) ἀνάγεται μέ μία κατάλληλη διάταξη σέ μέτρηση ροπῆς.

Ἐνα ἀπλό σύστημα πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ μέ τήν ἔννοια αὐτή ὡς ἀμπερόμετρο δίνεται στό σχήμα 3-4. Μέσα στό ὁμογενές μαγνητικό



ΣΧΗΜΑ 3-4(α) Ὁρθογώνιο πηνίο ἀναρτημένο μεταξύ τῶν πόλων σταθεροῦ μαγνήτη. (β) Κάτοψη τῆς διατάξεως καί φορά τῶν δυνάμεων πού ἀναπτύσσονται μέ τή ροή ρεύματος.

πεδίο μεταξύ των πόλων ενός σταθερού μαγνήτη έχει αναρτηθεί ένα ορθογώνιο πηνίο με N βρόχους. Σύμφωνα με τό σχήμα, τό ηλεκτρικό ρεύμα ανέρχεται στην άριστερή πλευρά καί κατέρχεται στή δεξιά. Στο σχήμα 3-4 (b) δίνεται ή διεύθυνση τών δυνάμεων πού προκαλεί ή ροή του ρεύματος. Οί δύο δυνάμεις δημιουργούν μιά ροπή πού τείνει νά περιστρέψει τό σύστημα δεξιόστροφα. "Αν τό πηνίο διατηρείται σέ θέση ίσορροπίας από ένα κυκλικό έλατήριο, θά περιστραφεί κατά μιά γωνία α μέχρις ότου ή ροπή πού δημιουργεί τό ρεύμα ίσοροπίσει τή στρέβλωση του έλατηρίου. Χρησιμοποιώντας τίς διαστάσεις του σχήματος 3-4 μπορούμε νά γράψουμε τή συνθήκη ίσορροπίας ως

$$2 N B I h \frac{W}{2} \cos \alpha = \tau \alpha \quad (3.4)$$

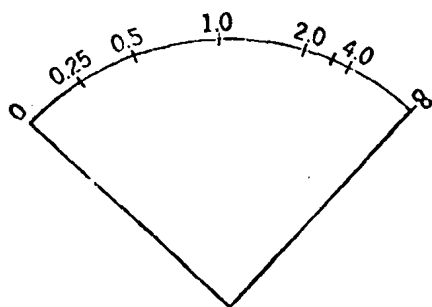
όπου τ είναι ή σταθερά του κυκλικού έλατηρίου (ροπή ανά μονάδα γωνίας). Στην έξ. (3.4), σύμφωνα με τήν έξ. (3.3), $N B I h$ είναι ή δύναμη σέ κάθε πλευρά του πηνίου καί $\frac{W}{2} \cos \alpha$ είναι ή κάθετη απόσταση πρós τόν άξονα περιστροφής. "Ο παράγοντας 2 προέρχεται από τό γεγονός ότι ή ροπή δημιουργείται από δύο ίσες δυνάμεις πού τείνουν νά περιστρέψουν τό πηνίο πρós τήν ίδια φορά. "Αν $A = Wh$ είναι ή έπιφάνεια του πηνίου ή έξ. (3.4) μπορεί νά γραφεί ως

$$I = \frac{\tau}{NBA} \frac{\alpha}{\cos \alpha} \quad (3.5)$$

πού συνδέει τό ρεύμα I με τή γωνία περιστροφής α .

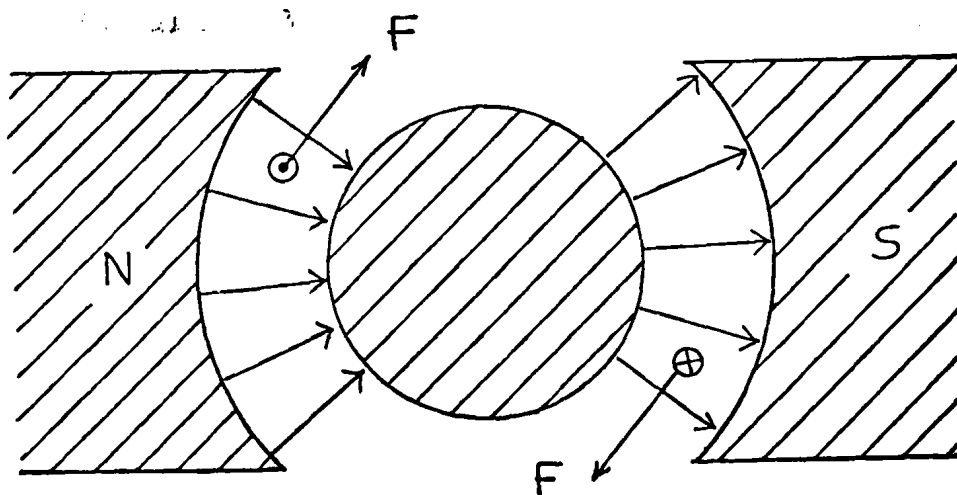
"Η διάταξη του σχήματος 3-4 μπορεί νά χρησιμοποιηθεί ως άμπερόμετρο αν προσαρμόσουμε ένα δείκτη πάνω στό πηνίο καί μιά κατάλληλη κλίμακα βαθμονομημένη άπευθείας σέ μονάδες ρεύματος. "Όπως όμως καί στην περίπτωση τής διατάξεως πού μελετήσαμε στό πείραμα 3-1, ή κλίμακα του άμπερομέτρου αυτού δέν μπορεί νά είναι γραμμική, καθόσον, σύμφωνα με τήν έξ. (3.5), τό ρεύμα δέν είναι ανάλογο πρós τή γωνία άποκλίσεως α , αλλά πρós τήν συνάρτηση $\alpha/\cos \alpha$. Μιά κατάλληλη

κλίμακα για τὸ ἀμπερόμετρο τοῦ σχήματος 3-4 δίνεται στὸ σχῆμα 3-5. Τὸ κυριότερο μειονέκτημα τῆς κλίμακας αὐτῆς εἶναι ὅτι ἡ εὐαισθησία τοῦ ὄργανου δέν εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴν τιμὴ τοῦ ρεύματος πού μετράει {βλ. Ἔσκηση 3-1}. Εἶναι πολὺ προτιμότερο νὰ κατασκευάσουμε ἓνα ὄργανο ὅπου τὸ ρεῦμα καὶ ἡ γωνία ἀποκλίσεως εἶναι εὐθέως ἀνάλογα μεγέθη. Ἡ ἀναλογία αὐτὴ ἐπιτυγχά-



ΣΧΗΜΑ 3-5 Κλίμακα ἀμπερομέτρου γιὰ τὴ διάταξη τοῦ σχήματος 3-4.

νεται μὲ τὴ γεωμετρία τοῦ σχήματος 3-6. Ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα οἱ πόλοι τοῦ μαγνήτη ἔχουν κατασκευαστεῖ μὲ κυλινδρικό σχῆμα ἐνῶ τὸ πηνίο ἔχει ἀναρτηθεῖ γύρω ἀπὸ ἓνα κύλινδρο σιδήρου. Ἡ γεωμετρία



ΣΧΗΜΑ 3-6 Ὁρθογώνιο πηνίο ἀναρτημένο σὲ ἀκτινικό μαγνητικό πεδίο. Οἱ δυνάμεις πού ἀναπτύσσονται κατὰ τὴ διέλευση ρεύματος εἶναι πάντοτε κάθετες πρὸς τὸ πεδίο καὶ ἡ ροπή ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴ γωνία ἀποκλίσεως.



αυτή δημιουργεί ακτινικό μαγνητικό πεδίο με επακόλουθο ή
ροπή

$$T = 2 N B I h \frac{W}{2} = N B I A \quad (3.6)$$

νά είναι ανεξάρτητη από τη γωνία αποκλίσεως α για κάθε θέση ίσορροπίας του πηνίου. Η εξ. (3.5) παίρνει επομένως τη μορφή

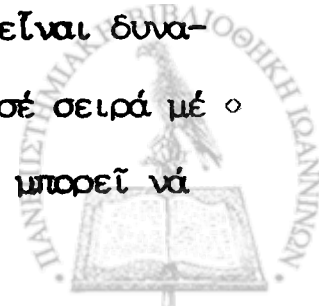
$$I = \frac{\tau}{N B A} \alpha \quad (3.7)$$

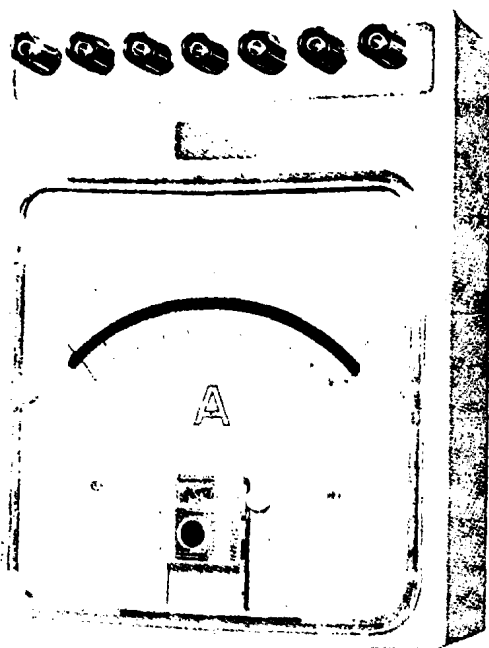
πού εμφανίζει την επιθυμητή αναλογία μεταξύ ρεύματος και γωνίας αποκλίσεως του πηνίου.

Η πλειονότητα των άμπερομέτρων που χρησιμοποιούμε σήμερα στο εργαστήριο για συνήθεις μετρήσεις ρεύματος βασίζεται στη διάταξη του σχήματος 3-6. Ένα τυπικό παράδειγμα εργαστηριακού άμπερομέτρου δίνεται στη φωτογραφία του σχήματος 3-7. Όπως δείχνει η φωτογραφία, τό άμπερόμετρο έχει κλίμακα άπευθείας βαθμονομημένη από τόν κατασκευαστή σέ μA , mA ή A , ανάλογα μέ τήν τάξη μεγέθους του ρεύματος πού προορίζεται νά μετρήσει.

Κατά τή μέτρηση ρεύματος τό άμπερόμετρο συνδέεται σέ σειρά ώστε τό ρεύμα νά διέρχεται από τό κινητό πηνίο. Για τήν έπιλογή του κατάλληλου άμπερομέτρου θά πρέπει νά προσεχθούν όρισμένα σημεία.

1. Τό ρεύμα πού πρόκειται νά μετρηθεί πρέπει νά είναι μικρότερο από τή μέγιστη ένδειξη τής κλίμακας. Υπέρβαση τής μέγιστης έπιτρεπτής τιμής του ρεύματος είναι δυνατόν νά στρεβλώσει τό δείκτη, νά καταστρέψει τήν άνάρτηση του πηνίου ή άκόμη νά κάψει τό πηνίο του όργάνου. Αν δέν είναι γνωστή ή τάξη μεγέθους του ρεύματος πού πρόκειται νά μετρηθεί, είναι δυνατόν νά χρησιμοποιηθεί ένας διακόπτης τηλεγραφητή σέ σειρά μέ τό άμπερόμετρο. Η τάξη του μεγέθους του ρεύματος μπορεί νά





(α)



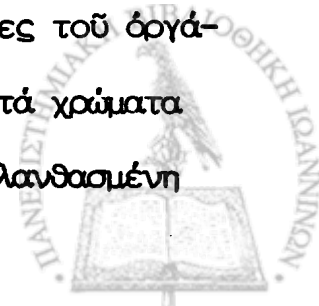
(β)

ΣΧΗΜΑ 3-7(α) Έργαστηριακό άμπερόμετρο.

(β) Διακόπτης τηλεγραφήτη για στιγμιαίο έλεγχο του ρεύματος.

έλεγχθει με ένα απλό κτύπημα του διακόπτη που αποκαθιστά τη ροή του ρεύματος για κλάσμα του δευτερολέπτου. Αν ο δείκτης του όργανου δεν αποκλίνει κατά πολύ τότε το ρεύμα βρίσκεται μέσα στα έπιτρεπτά όρια του άμπερομέτρου και ο διακόπτης μπορεί να διατηρηθεί κλειστός μέχρι να ίσορροπίσει ο δείκτης.

2. Τα περισσότερα άμπερόμετρα είναι μονής κατεύθυνσεως με τό σημείο ίσορροπίας του δείκτη όταν τό κύκλωμα είναι άνοικτό στό άκρο άριστερά της κλίμακας. Οι δύο άκροδέκτες του όργάνου φέρουν συνήθως τίς ένδείξεις (+) και (-) ή τά χρώματα κόκκινο (+) και μαύρο (-), ώστε να αποφεύγεται λαθασμένη



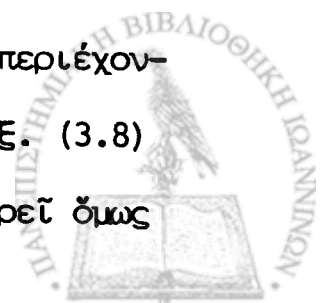
σύνδεση. Ἀντίστροφη σύνδεση του ὄργάνου μπορεῖ εὐκόλα νά προκαλέσει στρέβλωση τοῦ δείκτη ἢ καταστροφή τοῦ μηχανισμοῦ ἀναρτήσεως τοῦ πηνίου.

3. Ἡ ἑσωτερικὴ ἀντίσταση πού παρεμβάλλει τὸ κινητὸ πηνίο τοῦ ἀμπερομέτρου πρέπει νά εἶναι ἀμελητέα σέ σχέση μέ τίς ὑπολοιπές ἀντιστάσεις τοῦ κυκλώματος. Στήν ἀντίθεση περίπτωση ἡ παρεμβολή τοῦ ἀμπερομέτρου μεταβάλλει τὰ χαρακτηριστικά τοῦ κυκλώματος καί πρέπει νά ληφθεῖ ὑπόψη. Συνήθως ἡ ἑσωτερικὴ ἀντίσταση τοῦ ἀμπερομέτρου ἀναγράφεται ἀπὸ τὸν κατασκευαστὴ πάνω στό ὄργανο ἢ στό φυλλάδιο προδιαγραφῶν πού τὸ συνοδεύει.
4. Τὸ συνηθέστερο σφάλμα κατὰ τὴ μέτρηση ἠλεκτρικοῦ ρεύματος προέρχεται ἀπὸ τὴν παράλλαξη τοῦ δείκτη, ὡς πρὸς τὴν κλίμακα. Γιά τὸ λόγο αὐτὸ στὰ περισσότερα ἠλεκτρικὰ ὄργανα ὁ δείκτης κινεῖται πάνω σέ ἓνα ἐπίπεδο κάτοπτρο. Ἡ μέτρηση εἶναι ἀπαλλαγμένη ἀπὸ σφάλμα παραλλάξεως ἀν ἡ ἀνάγνωση τῆς ἐνδείξεως γίνεи ἀπὸ γωνία παρατηρήσεως γιὰ τὴν ὁποία ὁ δείκτης καλύπτει τὸ εἶδωλό του μέσα στό κάτοπτρο.

Τὸ ἀνώτατο ρεῦμα πού μπορεῖ νά διαρεύσει μέσα ἀπὸ τὸ ἀμπερόμετρο δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση {βλ. ἐξ. (3.7)}.

$$I_{\max} = \frac{\tau}{N B A} \alpha_{\max} \quad (3.8)$$

ὅπου α_{\max} εἶναι ἡ μεγίστη γωνία ἀποκλίσεως τοῦ δείκτη. Ἡ τιμὴ I_{\max} ἐξαρτᾶται προφανῶς ἀπὸ τίς φυσικὲς διαστάσεις τοῦ πηνίου, τὴν ἔνταση τοῦ σταθεροῦ μαγνητικοῦ πεδίου B καί τὴ σταθερά τ τοῦ ἐλατηρίου. Στίς συνήθεις διατάξεις τοῦ σχήματος 3-6 πού περιέχονται στὰ ἐργαστηριακὰ ἀμπερόμετρα ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ἐξ. (3.8) δέν ξεπερνᾷ τὰ μερικὰ μA . Τὸ μέγιστο ἐπιτρεπτό ρεῦμα μπορεῖ ὅμως



εύκολα νά αύξηθεῖ ἂν χρησιμοποιήσουμε ὡς ἄμπερόμετρο τή διάταξη τοῦ σχήματος 3-8, ὅπου μέ τήν παρεμβολή τῆς διακλαδώσεως R_S μόνο ἓνα μέρος τοῦ ὀλικοῦ ρεύματος διαρρέει τό πηνίο τοῦ ἄμπερομέτρου, θεωρώντας τήν πτώση δυναμικοῦ, μεταξύ τῶν σημείων Β καί Γ, τό ρεῦμα I πού διαρρέει τή διακλάδωση R_S δίνεται ἀπό τή σχέση

$$I_S = I_A \frac{r_A}{R_S} \quad (3.9)$$

ὅπου I_A καί r_A εἶναι ἀντίστοιχα τό ρεῦμα πού διαρρέει τό πηνίο καί ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου. Τό ὀλικό ρεῦμα I τοῦ ἄγωγου, στόν ὁποῖο ἔχει παρεμβληθεῖ ἡ διάταξη τοῦ σχήματος εἶναι

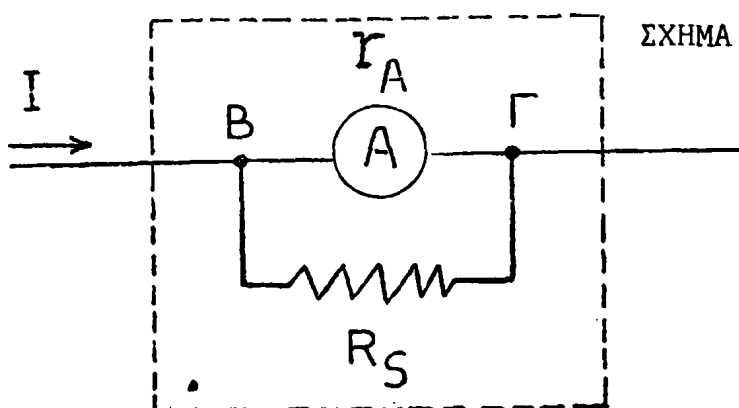
$$I = I_A + I_S = I_A \left(1 + \frac{r_A}{R_S} \right) \quad (3.10)$$

μέ ἀνώτατη ἐπιτρεπτή τιμή

$$I'_{\max} = I'_{\max} \left(1 + \frac{r_A}{R_S} \right) \quad (3.11)$$

Ἄν ἐπομένως ὡς ἄμπερόμετρο θεωρήσουμε τή διάταξη τοῦ σχήματος 3-8, τό ἀνώτατο ἐπιτρεπτό ρεῦμα (καί ἐπομένως ἡ κλίμακα τοῦ ὄργάνου) μπορεῖ νά ρυθμιστεῖ μέ κατάλληλη ἐπιλογή τῆς διακλαδώσεως R_S . Τά συνήθη ἐργαστηριακά ἄμπερόμετρα περιέχουν σειρά διακλαδώσεων πού μποροῦν νά ἐπιλεγοῦν μέ τή βοήθεια ἐνός ἐξωτερικοῦ διακόπτη.

Πρέπει νά σημειωθεῖ ὅτι ἡ προσθήκη τῆς διακλαδώσεως στό σχῆμα 3-8 μεταβάλλει τήν ὀλική ἀντίσταση πού παρεμβάλλει τό ἄμπερόμετρο



ΣΧΗΜΑ 3-8 Ρύθμιση τῆς κλίμακας ἄμπερομέτρου μέ παρεμβολή διακλαδώσεως R_S .



στό κύκλωμα. Ἡ ὀλική ἀντίσταση τοῦ ὄργάνου R_A εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν ἀντίσταση τοῦ πηνίου r_A καὶ δίνεται προφανῶς ἀπὸ τὴ σχέση

$$R_A = \frac{r_A R_S}{r_A + R_S} \quad (3.12)$$

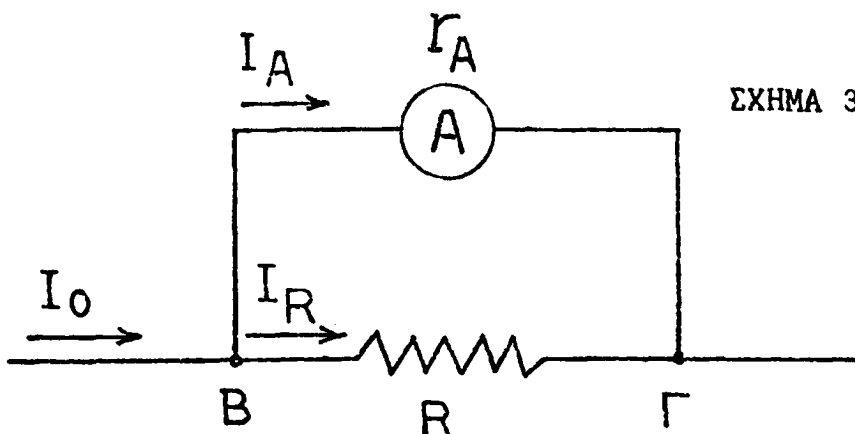
ὅπου R_S εἶναι ἡ ἀντίσταση τῆς διακλαδώσεως γιὰ τὴν ἐπιθυμητὴ κλίμακα. Στὰ ἐργαστηριακὰ ἀμπερόμετρα μὲ πολλαπλές κλίμακες ἡ ὀλική ἀντίσταση τοῦ ὄργάνου γιὰ κάθε κλίμακα ἀναγράφεται συνήθως ἀπὸ τὸν κατασκευαστὴ καὶ πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπόψη σὲ μετρήσεις μεγάλης ἀκριβείας.

3-2 Τὸ Ἐργαστηριακὸ Βολτόμετρο

Ἡ βασικὴ διάταξη τοῦ σχήματος 3-6 μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ γιὰ τὴ μέτρηση διαφοράς δυναμικοῦ διαμέσου τοῦ νόμου τοῦ Ohm. Ἄν ρεῦμα I διαρέει τὸ πηνίο τοῦ ὄργάνου, τότε ἡ διαφορά δυναμικοῦ στὰ δύο ἄκρα τοῦ πηνίου εἶναι

$$V = I_A r_A \quad (3.13)$$

ὅπου r_A εἶναι ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου. Μποροῦμε ἐπομένως νὰ προσδιορίσουμε τὴν πτώση δυναμικοῦ μεταξὺ δύο σημείων ἑνὸς κυκλώματος ἂν συνδέσουμε ἕνα ἀμπερόμετρο σύμφωνα μὲ τὴ διάταξη τοῦ σχήματος 3-9. Ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα, ἕνα μέρος τοῦ ὀλικοῦ ρεύματος I ποῦ

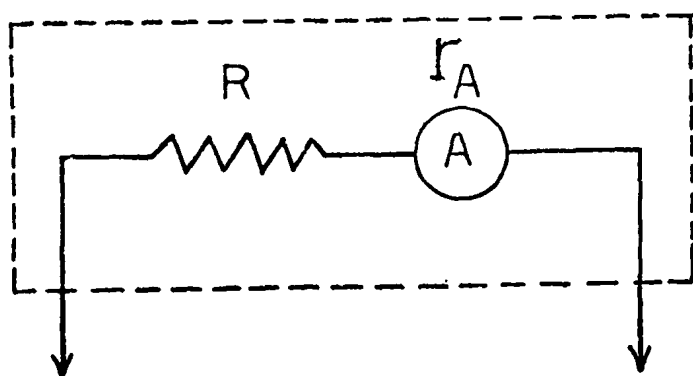


ΣΧΗΜΑ 3-9 Προσδιορισμὸς διαφοράς δυναμικοῦ μὲ τὴ διάταξη τοῦ σχήματος 3-6.



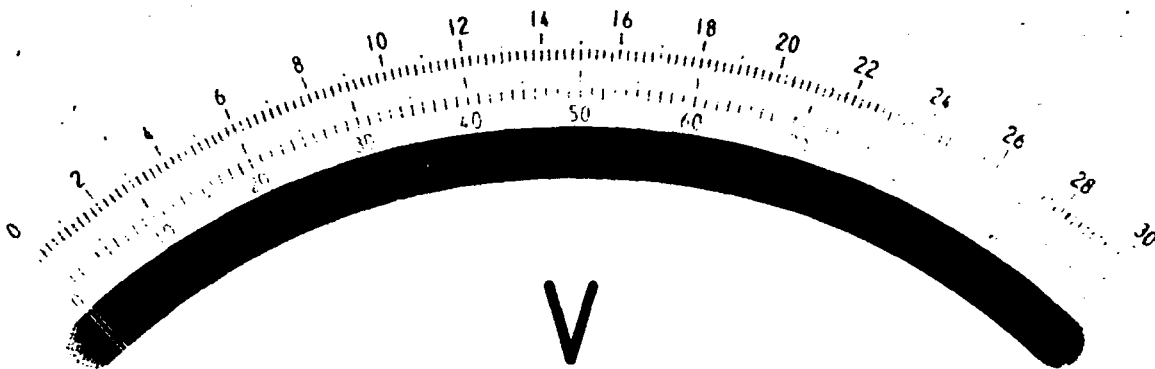
διαρέει τό κύκλωμα διοχετεύεται στόν κλάδο του άμπερομέτρου A καί διαμέσου τής έξ. (3.13) προσδιορίζει τή διαφορά δυναμικού μεταξύ τών σημείων B καί Γ.

Στήν πράξη, ή αντίσταση του πηνίου r_A είναι πολύ μικρή για άπευθείας χρήση στή διάταξη του σχήματος 3-9. Σέ αντιπαράθεση μέ τή διαγραμματική παράσταση του εργαστηριακού άμπερομέτρου στό σχήμα 3-8, τό εργαστηριακό βολτόμετρο περιέχει μιά μεγάλη αντίσταση R σέ σειρά μέ τήν αντίσταση r_A του πηνίου. Η διαγραμματική παράσταση του εργαστηριακού βολτομέτρου δίνεται στό σχήμα 3-10. Αν ή διάταξη του σχήματος συνδεθεϊ παράλληλα μεταξύ δύο σημείων ενός κυκλώματος τότε τό μικρό ρεύμα πού διαρέει τήν αντίσταση $R + r_A$ είναι ανάλογο τής διαφοράς δυναμικού καί ή κλίμακα του όργάνου μπορεί νά βαθμονομηθεϊ άπευθείας σέ volt (βλ. σχήμα 3-11). Τά συνήθη εργαστηριακά βολτόμετρα περιέχουν διάφορες αντιστάσεις πού μπορούν νά συνδεθοῦν σέ σειρά μέ τό πηνίο διαμέσου έξωτερικού διακόπτη, αύξάνοντας ή μειώνοντας έτσι τήν κλίμακα του όργάνου.



ΣΧΗΜΑ 3-10 Διάταξη εργαστηριακού βολτομέτρου.





ΣΧΗΜΑ 3-11 Τυπική κλίμακα εργαστηριακού βολτομέτρου.

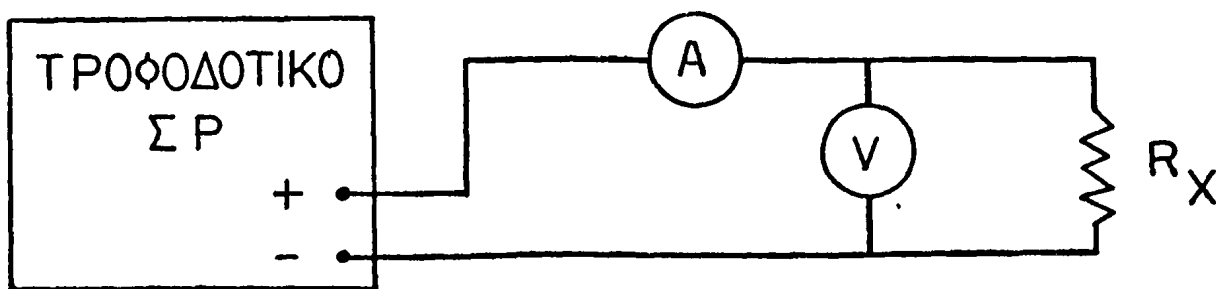
3-3 Μέτρηση Αντιστάσεως

Ἡ αντίσταση ἑνός ἀγωγοῦ μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ διαμέσου τοῦ νόμου τοῦ Ohm ἂν μετρηθοῦν ταυτόχρονα τό ρεῦμα διαμέσου τοῦ ἀγωγοῦ καί ἡ πτώση δυναμικοῦ στά ἄκρα του. Μιά διάταξη ἀμπερομέτρου καί βολτομέτρου πού ἐπιτρέπει τόν προσδιορισμό αὐτό δίνεται στό σχῆμα 3-12. Θά ὀνομάσουμε τή διάταξη αὐτή "κύκλωμα I".

ΠΕΙΡΑΜΑ 3-2. Συνδέστε τό κύκλωμα I τοῦ σχήματος 3-12. Στή θέση τῆς ἄγνωστης ἀντιστάσεως R_x χρησιμοποιεῖστε μιά ἀντίσταση R_1 μεταξύ 1 καί 100 $k\Omega$. Αὐξάνοντας σταδιακά τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ σημειώστε σέ κατάλληλο πῖνακα τίς ἐνδείξεις τοῦ ἀμπερομέτρου καί βολτομέτρου γιά πέντε τουλάχιστον ἐνδείξεις τῶν ὀργάνων.

Ἐπαναλάβετε τήν παραπάνω διαδικασία γιά μιά δεύτερη ἄγνωστη ἀντίσταση R_2 μεταξύ 1-10 Ω .





ΣΧΗΜΑ 3-12 Μέτρηση αντίστασης με βολτόμετρο και άμπερόμετρο.
Κύκλωμα I.

Χρησιμοποιώντας τά πειραματικά δεδομένα που συλλέξατε προσδιορίστε την τιμή των άγνωστων αντιστάσεων R_1 και R_2 με άπλή εφαρμογή του νόμου του Ohm

$$R_x = R_o = \frac{V}{I} \quad (3.14)$$

όπου V και I είναι οι ένδειξεις των οργάνων. Προσδιορίστε τις αντίστοιχες τιμές που προκύπτουν αν συνυπολογίσετε τις έσωτερικές αντιστάσεις των οργάνων. Υπολογίστε την επί τοις εκατό διαφορά μεταξύ των δύο προσδιορισμών.

Η άγνωστη αντίσταση R_x του κυκλώματος I μπορεί να προσδιοριστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια αν στο νόμο του Ohm συνυπολογίσουμε τό ρεύμα I_v που διαρέει τό βολτόμετρο. Στην περίπτωση αυτή

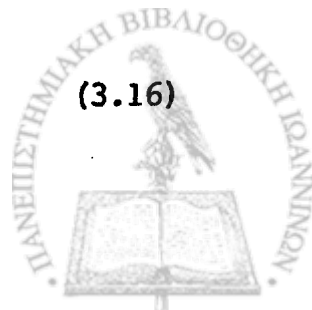
$$R_x = \frac{V}{I - I_v} \quad (3.15)$$

όπου τό ρεύμα I_v εξαρτάται από την αντίσταση R_v του βολτομέτρου

$$I_v = \frac{V}{R_v}$$

Η έξ. (3.15) μπορεί έπομένως να γραφεί ως

$$R_x = \frac{V}{I - \frac{V}{R_v}} = \frac{V}{I} \frac{1}{1 - \frac{V}{I} \frac{1}{R_v}} = R_o \frac{1}{1 - \frac{R_o}{R_v}} \quad (3.16)$$



όπου R_0 είναι η τιμή της αντίστασης που προκύπτει από την απλή εφαρμογή του νόμου του Ohm στην έξ. (3.14).

Η διόρθωση που συνεπάγεται η έξ. (3.16) είναι μικρή αν

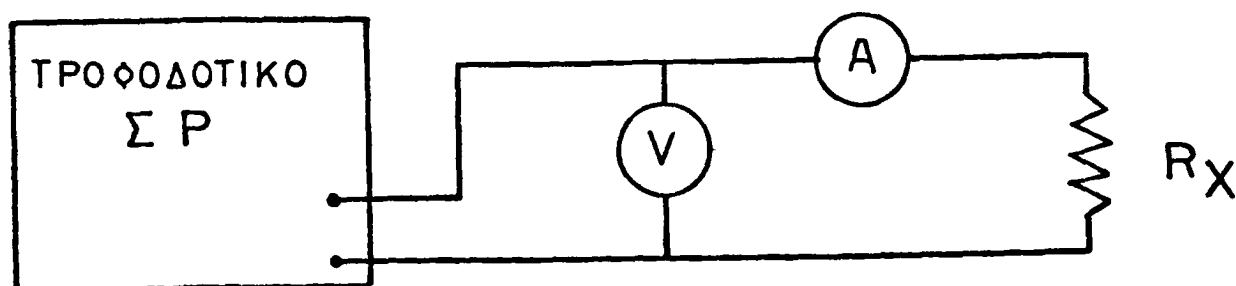
$$R_0 \approx R_x \ll R_V \quad (3.17)$$

τότε, μπορούμε να γράψουμε με καλή προσέγγιση

$$R_x = R_0 \frac{1}{1 - \frac{R_0}{R_V}} \approx R_0 \left(1 + \frac{R_0}{R_V}\right) \quad (3.8)$$

Στήν αντίθετη περίπτωση όπου η άγνωστη αντίσταση R_x είναι συγκρίσιμη με την αντίσταση R_V του βολτομέτρου, τό ρεύμα I_V αποτελεί ένα μεγάλο μέρος του όλικου ρεύματος I που μετράει τό άμπερόμετρο του σχήματος 3-12. Για παρόμοιες αντιστάσεις είναι προσαφορότερο να μετρήσουμε άπευθείας τό ρεύμα που διαρέει την αντίσταση R_V . Τό "κύκλωμα II" που πραγματοποιει τή μέτρηση αυτή δίνεται στό σχήμα 3-13.

ΠΕΙΡΑΜΑ 3-3 Συνδέστε τό κύκλωμα II του σχήματος 3-13. Έπαναλάβετε τή διαδικασία του πειράματος 3-2 για τίς ίδιες αντιστάσεις R_1 και R_2 στή θέση της άγνωστης αντίστασης R_x . Συγκρίνετε τά τελικά σας άποτελέσματα με τά αντίστοιχα άποτελέσματα του πειράματος 3-2 και σχολιάστε τίς τυχόν διαφορές.



ΣΧΗΜΑ 3-13 Μέτρηση αντίστασης με βολτόμετρο και άμπερόμετρο. Κύκλωμα II.



Ἡ ἀγνώστη ἀντίσταση R_X τοῦ κυκλώματος II μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μέ μεγαλύτερη ἀκρίβεια ἂν στό νόμο τοῦ Ohm συνυπολογίσουμε τήν ἀντίσταση R_A τοῦ ἀμπερομέτρου. Ἄν V καί I εἶναι οἱ ἐνδείξεις δυναμικοῦ καί ρεύματος τῶν ἀντιστοιχῶν ὀργάνων τότε, ὅπως προκύπτει ἀπό τό κύκλωμα

$$\frac{V}{I} = R_X + R_A \quad (3.19)$$

Ἡ ἀνάλογη σχέση πρός τήν ἐξ. (3.18) ἐπομένως εἶναι

$$R_X = \frac{V}{I} - R_A = R_O - R_A = R_O \left(1 - \frac{R_A}{R_O}\right) \quad (3.20)$$

ὅπου πάλι R_O εἶναι ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως πού προκύπτει ἀπό τήν ἀπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm στήν ἐξ. (3.14).

Ἡ διαίρεση πού συνεπάγεται ἡ ἐξ. (3.20) εἶναι μικρή ἂν

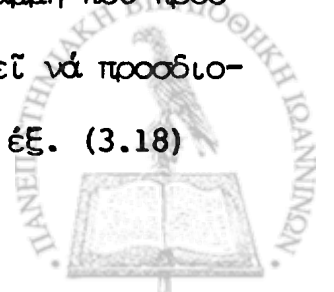
$$R_O \approx R_X \gg R_A \quad (3.21)$$

Ὅπως ἐπομένως προκύπτει ἀπό τίς συνθήκες τῶν ἐξ. (3.17) καί (3.21) τό κύκλωμα I ἐνδείκνυται γιά τόν προσδιορισμό μικρῶν ἀντιστάσεων σέ σχέση μέ τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ βολτομέτρου ἐνῶ τό κύκλωμα II γιά τόν προσδιορισμό μεγάλων ἀντιστάσεων σέ σχέση μέ τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ ἀμπερομέτρου. Γιά τά συνήθη ἐργαστηριακά ὄργανα ἠλεκτρικῶν μετρήσεων μέ τυπικές τιμές ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως

$$R_V \approx 10^5 \quad \Omega \quad (3.22\alpha)$$

$$R_A \approx 10^{-4} \quad \Omega \quad (3.22\beta)$$

καί οἱ δύο συνθήκες τῶν ἐξ. (3.17) καί (3.21) ικανοποιοῦνται γιά μιά μεγάλη περιοχὴ ἀντιστάσεων. Ποσοτικά, ἡ διαχωριστικὴ γραμμὴ πού προσδιορίζει τίς περιοχὲς ἐφαρμογῆς τῶν δύο κυκλωμάτων μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τή σύγκριση τῶν διορθώσεων πού προβλέπουν οἱ ἐξ. (3.18)



καί (3.20). Ἡ ἀπλή ἐκτίμηση τῆς ἀντιστάσεως $R_X = R_O = V/I$ περιέχει τὴν ἴδια ἀπόκλιση ἀπὸ τὴν πραγματικὴ τιμὴ ὅταν

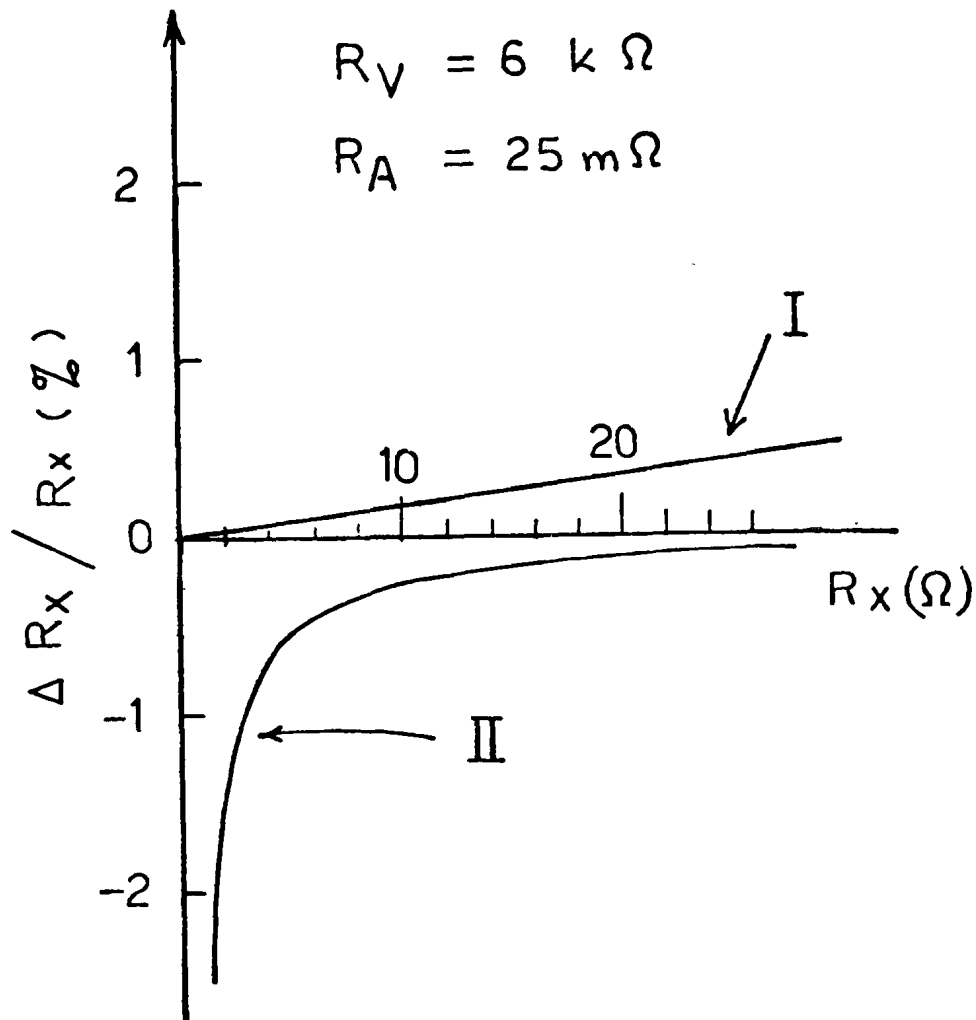
$$\frac{R_O}{R_V} = \frac{R_A}{R_O}$$

ἢ

$$R_O \approx R_X = \sqrt{R_A R_V} \quad (3.23)$$

Γιὰ ἀντιστάσεις μικρότερες ἀπὸ τὴν τιμὴ αὐτή, ἡ χρησιμοποίηση τῶν ἐνδείξεων V , I τοῦ κυκλώματος I στό νόμο τοῦ Ohm συνεπάγονται μικρότερο σφάλμα. Τό ἀντίθετο συμβαίνει γιὰ ἀντιστάσεις μεγαλύτερες ἀπὸ τὴν τιμὴ τῆς ἐξ. (3.23). Τό ποσοστιαῖο σφάλμα πού συνεπάγεται κάθε κύκλωμα δίνεται ὡς συνάρτηση τῆς ἀγνωστης ἀντιστάσεως στή γραφικὴ παράσταση τοῦ σχήματος 3-14. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τό σχῆμα, ἂν ἐπιλεγεῖ τό σωστό κύκλωμα, σύμφωνα μέ τὴ διαχωριστικὴ τιμὴ τῆς ἐξ. (3.23), τό σφάλμα πού συνεπάγεται ἡ ἀπλή ἐφαρμογὴ τοῦ νόμου τοῦ Ohm εἶναι μικρότερο τοῦ 1 %. Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρὰ ὑπάρχουν ἀρκετοὶ ἄλλοι παράγοντες πού εἶναι δυνατόν νά εἰσάγουν μεγαλύτερα σφάλματα στή μέτρηση μιᾶς ἀντιστάσεως. Ὅπως π.χ. θά δοῦμε ἀργότερα, μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας ἐνός χάλκινου ἀγωγοῦ κατὰ 5°C μεταβάλλει τὴν ἀντίστασή του κατὰ 2 % περίπου. Ἄν ἐπομένως κατὰ τὴ διεξαγωγὴ τῆς μετρήσεως ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀγωγοῦ δέν εἶναι γνωστὴ μέ ἀκρίβεια μεγαλύτερη ἀπὸ 5°C , δέν ἔχει νόημα ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἀντιστάσεως μέ ἀκρίβεια μεγαλύτερη τοῦ 1 % πού θά δόσει ἡ χρησιμοποίησις τῶν ἐξ. (3.18) ἢ (3.20).

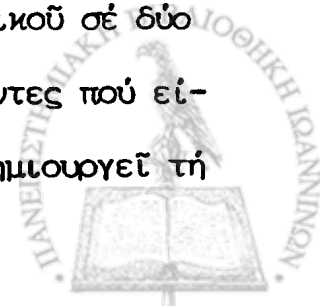




ΣΧΗΜΑ 3-14 Έπί τοῖς ἑκατό σφάλμα στὸν προσδιορισμὸ ἀντιστάσεως μὲ ἀπλή ἐφαρμογὴ τοῦ νόμου τοῦ Ohm διαμέσου τῶν ἐνδείξεων τῶν ὀργάνων στὰ κυκλώματα I καὶ II. Οἱ ἐσωτερικὲς ἀντιστάσεις τῶν ὀργάνων ἀναγράφονται στὸ σχῆμα. Τὸ ἐπί τοῖς ἑκατό σφάλμα εἶναι περίπου ἴσο καὶ στὶς δύο μεθόδους γιὰ $R_x = \sqrt{R_A R_V} \approx 12 \Omega$.

3-4 Ἡλεκτρεγερτικὴ Δύναμη καὶ Διαφορά Δυναμικοῦ

Ὡς τώρα θεωρήσαμε ὅτι ἡ ροὴ τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος σὲ ἓνα κύκλωμα προκαλεῖται ἀπὸ τὴν ὕπαρξη μιᾶς διαφορᾶς δυναμικοῦ σὲ δύο σημεῖα τοῦ κυκλώματος, χωρὶς νὰ ἐξετάσουμε τοὺς παράγοντες πού εἰσάγουν οἱ χαρακτηριστικὲς ιδιότητες τῆς συσκευῆς πού δημιουργεῖ τὴ



διαφορά αυτή του δυναμικού. Ἡ ἀπλούστερη "πηγή" διαφορᾶς δυναμικοῦ εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸ στοιχεῖο (τὸ ὁποῖο εἶναι γνωστὸ καὶ μέ τὴν κακὴν στὰ Ἑλληνικά γενική ὀνομασία "μπαταρία"). Ἄν καὶ ἀργότερα θὰ ἀσχοληθοῦμε εἰδικότερα μέ τὴν κατασκευὴ τῶν ἠλεκτρικῶν στοιχείων, θὰ τὰ θεωρήσουμε πρὸς τὸ παρὸν ἀπλῶς ὡς διατάξεις, οἱ ὁποῖες διαμέσου χημικῶν ἀντιδράσεων προκαλοῦν τὴν κίνηση ἠλεκτρικῶν φορτίων.

Ἡ λειτουργία ἑνὸς ἠλεκτρικοῦ στοιχείου μέσα σέ ἕνα κύκλωμα γίνεται περισσότερο κατανοητὴ ἂν ἀνατρέξουμε στὴ βασικὴ ἀρχὴ τῆς διατήρησης τῆς ἐνεργείας. Εἶναι βέβαιο ὅτι κάθε ἠλεκτρικὸ φαινόμενο μπορεῖ νὰ ἐξηγηθεῖ κάτω ἀπὸ αὐτὸ τὸ πρίσμα. Ὁ νόμος τοῦ Ohm π.χ. ἐκφράζει τὸ ἔργο πού πρέπει νὰ καταβληθεῖ γιὰ νὰ περάσει ἕνα φορτίο μέσα ἀπὸ ἕνα ἄγωγό. Μικροσκοπικά, τὸ ἔργο καταναλώνεται στὴν ὑπερνίκηση τῶν δυνάμεων ἔλξεως μεταξὺ τῶν ἠλεκτρονίων καὶ τῶν ἀτομικῶν πυρήνων πού ἀποτελοῦν ἀδρανῆ κέντρα ἔλξεως μέσα στὴν ὕλη τοῦ ἀγωγοῦ. Τὸ ἔργο πού ἀπαιτεῖται γιὰ τὴ ροὴ τοῦ φορτίου παράγεται ἀπὸ τὴν ἐνέργεια πού ἐκλύεται κατὰ τὶς χημικὲς ἀντιδράσεις μέσα στοῦ στοιχείου. Ἡ διατήρηση τῆς ἐνεργείας μπορεῖ νὰ ἐκφραστεῖ στὴν περίπτωσι αὐτὴ μέ τὴ σχέση

$$E_{\chi} = E_{\Sigma} + E_R \quad (3.24)$$

ὅπου E_{χ} εἶναι ἡ ἐνέργεια πού ἐκλύεται κατὰ τὴ χημικὴ ἀντίδραση, E_{Σ} ἡ ἐνέργεια πού καταναλώνεται γιὰ τὴ μεταφορὰ φορτίων στοῦ ἑσωτερικοῦ τοῦ στοιχείου μέχρι τοὺς πόλους του καὶ E_R ἡ ἐνέργεια πού καταναλώνεται στοῦ ὑπόλοιπο κύκλωμα γιὰ τὴ ροὴ τοῦ ρεύματος. Προφανῶς ἡ "ἠφέλιμη" ἐνέργεια πού μποροῦμε νὰ πάρουμε ἀπὸ τὸ στοιχεῖο εἶναι ἡ τελευταία ποσότητα E_R .

Ἡ ἐξ. (3.24) μπορεῖ νὰ μεταφραστεῖ σέ σχέση δυναμικοῦ ἂν διαι-



ρέσουμε και τὰ δύο μέλη μέ ἓνα στοιχειῶδες φορτίο q πού πραγματοποιεῖ ἓνα πλήρη κύκλο μέσα στό κύκλωμα. Ἡ ἀντίστοιχη σχέση δυναμικοῦ εἶναι

$$U = U_{\Sigma} + V \quad (3.25)$$

ὅπου

$$U = \frac{E_X}{q}, \quad U_{\Sigma} = \frac{E_{\Sigma}}{q}, \quad V = \frac{E_R}{q}. \quad (3.26)$$

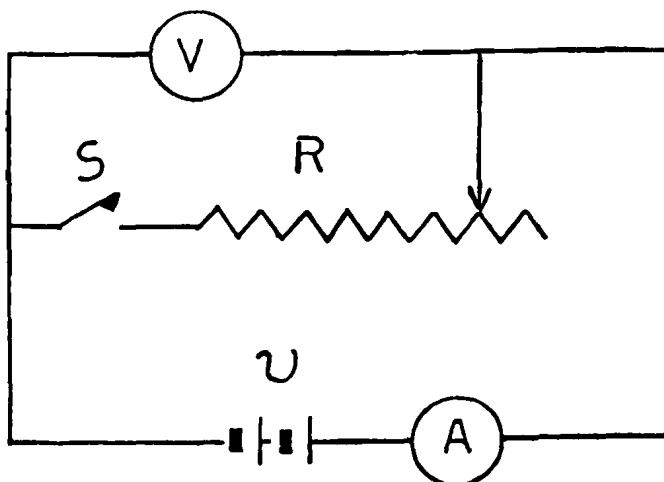
Τό δυναμικό U , πού ἐκφράζει τή μέγιστη διαφορά δυναμικοῦ πού μπορεῖ νά ἀναπτυχθεῖ στους πόλους ἑνός στοιχείου, ἔχει καθιερωθεῖ μέ τήν ὀνομασία ἠλεκτρεγερτική δύναμη (HEΔ), ἐνῶ τό "ἄφέλιμο δυναμικό" $V = RI$ προέρχεται ἀπό τό ἔργο πού καταναλώνεται στό ἐξωτερικό κύκλωμα. Χρησιμοποιώντας τό νόμο τοῦ Ohm μπορούμε νά ὀρίσουμε μιὰ ἰσοδύναμη ἑσωτερική ἀντίσταση τοῦ στοιχείου r γιά τό ρεῦμα I πού διαρέει τό κύκλωμα, διαμέσου τῆς σχέσεως

$$U_{\Sigma} = Ir \quad (3.27)$$

καί νά γράψουμε τό ἄφέλιμο δυναμικό ὑπό τή μορφή

$$V = U - Ir \quad (3.28)$$

Ἡ τελευταία ποσότητα πού ἀπαντᾷ μέ διάφορες ὀνομασίες ὅπως "τερμα-



ΣΧΗΜΑ 3-15 Μελέτη διαθέσιμης HEΔ καί προσδιορισμός ἑσωτερικῆς ἀντιστάσεως ἠλεκτρικοῦ στοιχείου



τικό δυναμικό", "διαθέσιμη ΗΕΔ" ή "τερματική ΗΕΔ", μπορεί να μελετηθεί με το κύκλωμα του σχήματος 3-15.

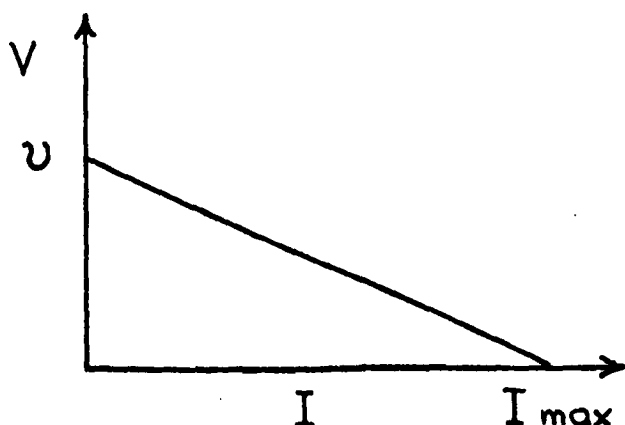
ΠΕΙΡΑΜΑ 3-4. Συνδέστε το κύκλωμα του σχήματος 3-15. Η όλική αντίσταση του ροοστάτη πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από την έσωτερική αντίσταση του βολτομέτρου. Μεταβάλλοντας το ροοστάτη R σημειώστε σε κατάλληλο πίνακα τις ένδείξεις του άμπερομέτρου και του βολτομέτρου, τόσο όταν ο διακόπτης S είναι κλειστός όσο και όταν ο διακόπτης είναι άνοιχτός.

Αποδώστε σε γραφική παράσταση τη μεταβολή του τερματικού δυναμικού V στά άκρα του στοιχείου ως προς την ένδειξη του άμπερομέτρου I . Προσαρμόστε την καλύτερη εύθεια γραμμή στά δεδομένα σας και προσδιορίστε την ΗΕΔ του στοιχείου, τό μέγιστο ρεύμα πού μπορεί να αποδώσει και την έσωτερική του αντίσταση.

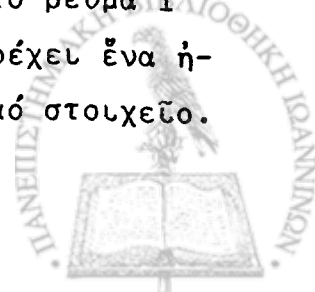
Η γραμμική εξάρτηση του διαθέσιμου δυναμικού ενός στοιχείου από τό ρεύμα δίνεται στη γραφική παράσταση του σχήματος 3-16. Η εύθεια γραμμή πού αντιπροσωπεύει την έξ. (3.28) μπορεί να χαρακτηϊ με βάση τά δεδομένα του προηγουμένου πειράματος και προσδιορίζει πλήρως τις χαρακτηριστικές ιδιότητες του στοιχείου. Η τομή της εύθειας με τόν κάθετο άξονα ($I = 0$) προσδιορίζει την ΗΕΔ του στοιχείου, καθόσον η έξ. (3.28) παίρνει τη μορφή

$$V = U. \quad (3.29)$$

Αντίθετα, η τομή της εύθειας με τόν όριζόντιο άξονα ($V = 0$) προσ-



ΣΧΗΜΑ 3-16 Έξάρτηση του διαθέσιμου δυναμικού V από τό ρεύμα I πού παρέχει ένα ηλεκτρικό στοιχείο.



διορίζει τη μέγιστη τιμή του ρεύματος που μπορεί να προσφέρει το στοιχείο στο έξωτερικό κύκλωμα. Για $V = 0$, η έξ. (3.28) δίνει

$$0 = U - I_{\max} r$$

ή

$$I_{\max} = \frac{U}{r} \quad (3.30)$$

Η τελευταία ποσότητα απαντάται στη βιβλιογραφία και ως ρεύμα βραχυκυκλώσεως. Τέλος, η κλίση της εύθειας του σχήματος 3-16, που μπορεί να προσδιοριστεί από δύο σημεία (V_1, I_1) και (V_2, I_2) δίνει την έσωτερική αντίσταση του στοιχείου

$$r = \frac{V_1 - V_2}{I_2 - I_1} \quad (3.31)$$

όπως είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί από την έξ. (3.28).

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν ο προσδιορισμός της χαρακτηριστικής εύθειας του στοιχείου στο σχήμα 3-16 γίνει διαμέσου του κυκλώματος που δίνεται στο σχήμα 3-15, η αντίσταση r των έξ. (3.30) και (3.31) συμπεριλαμβάνει την αντίσταση R_A του άμπερομέτρου. Στην περίπτωση αυτή η έσωτερική αντίσταση του στοιχείου R_C δίνεται από τη σχέση

$$R_C = r - R_A = \frac{V_1 - V_2}{I_2 - I_1} - R_A \quad (3.32)$$

ένω το ρεύμα βραχυκυκλώσεως από τη σχέση

$$I_{\max} = \frac{U}{R_C} = \frac{U}{r - R_A} \quad (3.33)$$

Η ποιότητα ενός ηλεκτρικού στοιχείου συνδέεται στενά με την έσωτερική του αντίσταση. Όπως δείχνει η έξ. (3.28), όσο μικρότερη η έσωτερική αντίσταση του στοιχείου τόσο μεγαλύτερο το ωφέλιμο δυναμικό που εξυπηρετεί το έξωτερικό κύκλωμα, ενώ, για μία περιορισμένη περιοχή ρεύματος, η διαφορά δυναμικού που προσφέρουν στο κύκλωμα μπορεί να θεωρηθεί σταθερή.

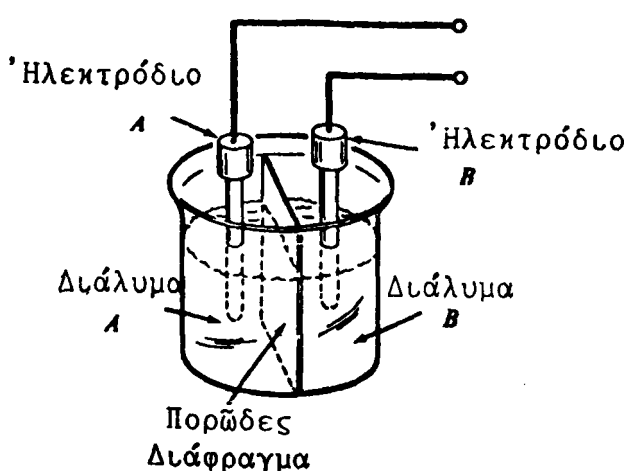


3-5 Τό 'Ηλεκτρικό Στοιχείο

Όπως ήδη αναφέρθηκε, με τή γενική ονομασία ήλεκτρικό ή ήλεκτροχημικό στοιχείο χαρακτηρίζουμε κάθε διάταξη πού διαμέσου χημικών αντιδράσεων μπορεί νά δημιουργήσει διαφορά δυναμικού στά άκρα δύο άκροδεκτών. Για νά δημιουργηθεῖ ἡ διαφορά δυναμικού θά πρέπει οἱ χημικές αντιδράσεις νά δημιουργοῦν σέ καθένα ἀπό τούς άκροδέκτες διαφορετική συγκέντρωση φορτίου. Ἀνάλογα μέ τό ἔλλειμα ἢ περίσσια ἡλεκτρονίων πού θά ἐμφανιστεῖ θά χαρακτηρίσουμε ἀντίστοιχα τούς άκροδέκτες τοῦ στοιχείου ὡς θετικό καί άρνητικό ἡλεκτρόδιο.

Τό σχῆμα 3-17 περιέχει μιά χαρακτηριστική διάταξη ἡλεκτροχημικοῦ στοιχείου. Καθένα ἀπό τά ἡλεκτρόδια εἶναι δυνατόν νά ἀποτελεῖται ἀπό διαφορετικό μέταλλο ἐνῶ τά δύο διαλύματα A καί B πού περιβάλλουν τά ἀντίστοιχα ἡλεκτρόδια μπορεί νά ἔχουν διαφορετική χημική σύσταση. Στήν τελευταία περίπτωση μιά πορώδης μεμβράνη διαχωρίζει τά δύο διαλύματα. Ἡ διαχωριστική μεμβράνη ἐπιτρέπει τήν ἐπικοινωνία μεταξύ διαλύματος A καί διαλύματος B ἀλλά ἡ διαπήδηση εἶναι ἀμετά μικρή ὥστε ἡ ἀνάμιξη τῶν δύο διαλυμάτων νά μήν εἶναι σημαντική.

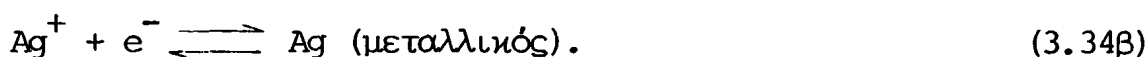
Ἡ λειτουργία τοῦ ἡλεκτρικοῦ στοιχείου μπορεί νά γίνει πλέον κατανοητή μέ ἕνα συγκεκριμένο παράδειγμα. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ἡλεκτρικό



ΣΧΗΜΑ 3-17. Χαρακτηριστική διάταξη ἡλεκτροχημικοῦ στοιχείου.

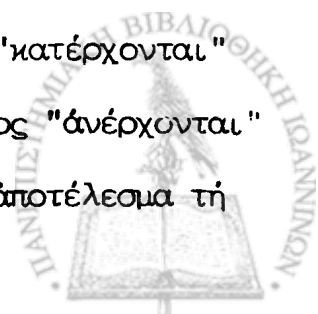


στοιχείο όπου τό ηλεκτρόδιο Α εἶναι κατασκευασμένο ἀπό μεταλλικό κάδμιο σέ διάλυμα θειϊκοῦ καδμίου καί τό ηλεκτρόδιο Β ἀπό ἄργυρο σέ διάλυμα νιτρικοῦ ἄργύρου. Στά δύο διαλύματα κυκλοφοροῦν θετικά καί ἀρνητικά ἰόντα, Cd^{++} καί SO_4^{--} στό διάλυμα Α καί Ag^+ καί NO_3^- στό διάλυμα Β. Οἱ χημικές ἀντιδράσεις πού συμβαίνουν στήν ἐπιφάνεια κάθε ηλεκτροδίου εἶναι



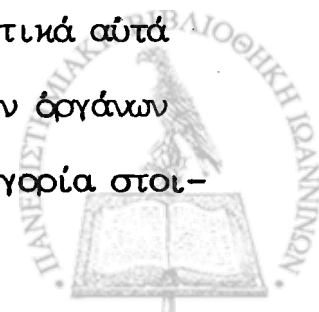
Ὅπως δείχνει ὁ συμβολισμός καθεμιά ἀπό τίς ἀντιδράσεις εἶναι ἀμφίδρομη. Φορά τῆς ἀντιδράσεως πρὸς τά δεξιά ἀντιπροσώπεύει διαδικασία κατά τήν ὁποία μεταλλικά ἰόντα τοῦ διαλύματος συλλαμβάνουν ἠλεκτρόνια ἀπό τό ηλεκτρόδιο καί μεταπίπτουν σέ οὐδέτερα ἄτομα. Τοῦτο ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή συσάρευση θετικοῦ φορτίου στό ηλεκτρόδιο. Κατά τήν ἀντίστροφη φορά τῆς ἀντιδράσεως, οὐδέτερα ἄτομα τοῦ ηλεκτροδίου ἐγκαταλείπουν ἠλεκτρόνια καί μεταβάλλονται σέ μεταλλικά ἰόντα τοῦ διαλύματος. Θά ὀνομάσουμε τή μετάβαση τῶν ἀντιδράσεων πρὸς τά δεξιά ἀναγωγή καί τή μετάβαση πρὸς τά δεξιά ὀξειδωση. Παράλληλα θά ἀναφεροῦμε στό ηλεκτρόδιο ὅπου ἡ ἀναγωγή τῶν μεταλλικῶν ἰόντων πραγματοποιεῖται μέ μεγαλύτερο ρυθμό ἀπό τήν ὀξειδωση τῶν ἀτόμων του μέ τόν ὄρο κάθοδος, ἐνῶ στό ηλεκτρόδιο ὅπου ἡ ὀξειδωση εἶναι ταχύτερη ἀπό τήν ἀναγωγή μέ τόν ὄρο ἄνοδος.

Στή διεργασία πού περιγράφουμε ἄτομα τῆς καθόδου "κατέρχονται" ὡς μεταλλικά ἰόντα στό διάλυμα ἐνῶ ἰόντα τοῦ διαλύματος "ἀνέρχονται" ὡς οὐδέτερα ἄτομα μετάλλου στήν ἄνοδο. Τοῦτο ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή



συσσώρευση άρνητικοῦ φορτίου στήν κάθοδο (περίσσεια ήλεκτρονίων) καί θετικοῦ φορτίου στήν άνοδο (έλλειμα ήλεκτρονίων), δηλαδή τήν άνάπτυξη μιᾶς διαφοράς δυναμικοῦ μεταξύ τῶν δύο ήλεκτροδίων. Στή συγκριμένη περίπτωση τῶν έξ. (3.34), ἡ άναγωγή τοῦ άργύρου πραγματοποιεῖται μέ πολύ ταχύτερο ρυθμό άπό τήν άναγωγή τοῦ καδμίου. Έτσι, άν τά δύο διαλύματα πού περιβάλουν τά ήλεκτρόδια έχουν τήν ἴδια συγκέντρωση μεταλλικῶν ἰόντων, τό ήλεκτρόδιο τοῦ άργύρου έμφανίζει μεγαλύτερο έλλειμα ήλεκτρονίων άπό τό ήλεκτρόδιο τοῦ καδμίου καί άποτελεῖ τήν άνοδο τοῦ στοιχείου. Για συγκέντρωση μεταλλικῶν ἰόντων 1 mole/lit στά δύο διαλύματα, ἡ διαφορά δυναμικοῦ πού άναπτύσσεται μεταξύ τῶν δύο ήλεκτροδίων εἶναι περίπου 1.2 V.

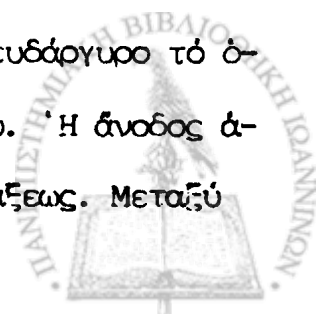
“Αν καί ἡ βιομηχανία παρέχει σήμερα πολλούς τύπους τροφοδοτικῶν ΣΡ για χρήση στό εργαστήριο, τό ήλεκτρικό στοιχεῖο βρίσκει εύρεία έφαρμογή ἰδίως σέ τροφοδοσία φορητῶν συσκευῶν. Ἡλεκτρικά στοιχεῖα χρησιμοποιοῦνται ακόμα αποκλειστικά σέ άπαικρυσμένες περιοχές, ὅπως στό διάστημα, σέ ὑποβρύχιες έρευνες ἢ σέ ὄρυχεῖα, ὅπου ήλεκτρική τροφοδοσία τῶν συσκευῶν άπό κεντρική παροχή δέν εἶναι διαθέσιμη. Για πολλές έφαρμογές τό ήλεκτρικό στοιχεῖο εἶναι οἰκονομικότερο άπό τροφοδοτικό ΣΡ μέ συγκρίσιμη σταθερότητα ένῶ παράλληλα εἶναι άπαλλαγμένο άπό άνεπιθύμητες συχνότητες “θορύβου” τῆς γραμμῆς τροφοδοσίας. Για τό λόγο αυτό παρέχεται σήμερα άπό τή βιομηχανία μιᾶ μεγάλη σειρά τυποποιημένων ήλεκτρικῶν στοιχείων μέ διάφορα χαρακτηριστικά δυναμικοῦ, σταθερότητας ἢ δυνατότητας ἰσχύς. Τά περισσότερα στοιχεῖα κατασκευάζονται μέ έμφαση στήν παρεχόμενη ἰσχή, στή σταθερότητα τοῦ ρεύματος καί στή μεγάλη διάρκεια ζωῆς, καθόσον τά χαρακτηριστικά αυτά εἶναι ἐκεῖνα πού ὀδηγοῦν συνήθως στήν ὀμαλή λειτουργία τῶν ὀργάνων πού τροφοδοτοῦνται άπό ήλεκτρικά στοιχεῖα. Μιά μικρή κατηγορία στοι-

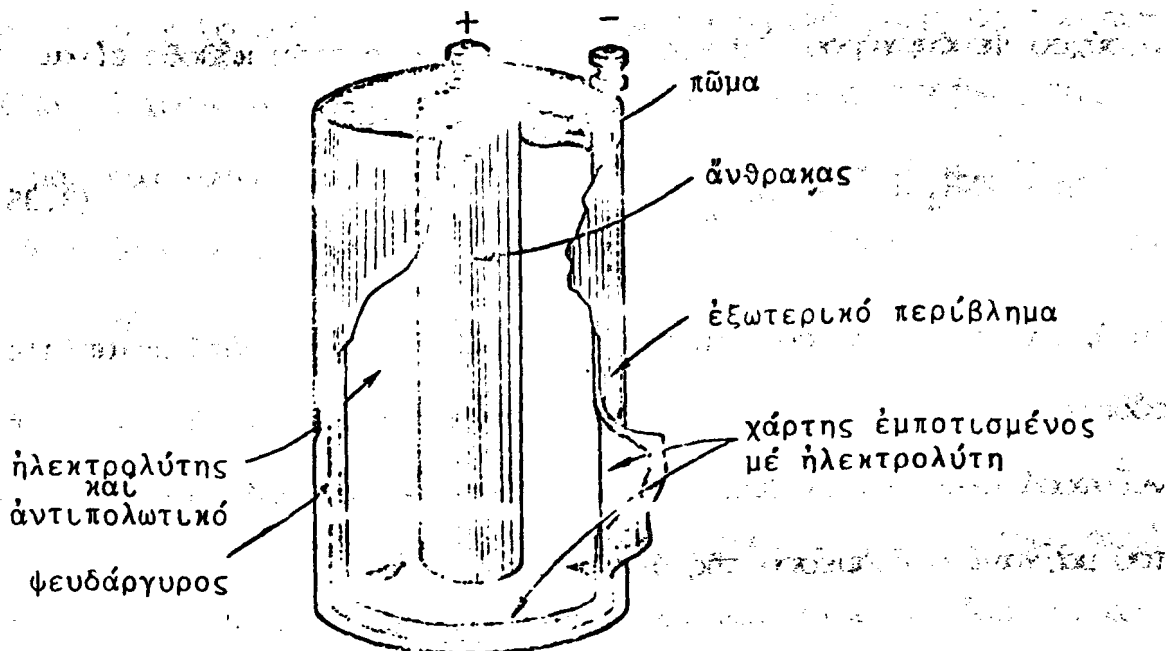


χειών κατασκευάζεται με ειδική μέριμνα ὥστε ἡ ΗΕΔ πού δημιουργεῖται στά δύο ἠλεκτρόδια νά ἔχει σαφῶς καθορισμένη τιμή. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται συνήθως σέ βάρος τοῦ ρεύματος πού μπορεῖ νά ἀντληθεῖ ἀπό τό στοιχεῖο. Μέ τήν κατηγορία αὐτή τῶν προτύπων στοιχείων θά ἀσχοληθοῦμε εἰδικώτερα στό Κεφάλαιο 6.

Ἡ ΗΕΔ πού ἀναπτύσσουν τά περισσότερα στοιχεῖα δέν ξεπερνᾶ τά 2 V. Γιά ἐφαρμογές ὅπου ἀπαιτεῖται μεγαλύτερη διαφορά δυναμικοῦ πολλά στοιχεῖα μποροῦν νά συνδεθοῦν σέ σειρά καί νά δημιουργήσουν μιά συστοιχία ἢ μπαταρία. Ἡλεκτρικά στοιχεῖα συνδέονται ἀκόμη παράλληλα μέ σκοπό τήν αὔξηση τῆς δυνατότητας παροχῆς ρεύματος. Πολλά ἀπό τά στοιχεῖα πού χρησιμοποιοῦνται σήμερα εἶναι "μιάς χρήσης" καί ἡ ἀνάπτυξη ΗΕΔ παύει μετά ἀπό ἕνα ὀρισμένο χρόνο ζωῆς. Γιά ἄλλους συνδιασμούς ἠλεκτροδίων καί ἠλεκτρολύτη οἱ χημικές ἀντιδράσεις εἶναι ἀντιστρεπτές καί τό στοιχεῖο μπορεῖ νά ἐπανέλθει στήν ἀρχική του κατάσταση μέ διοχέτευση ἀντίστροφου ρεύματος. Τήν τελευταία κατηγορία ἠλεκτρικῶν στοιχείων ὀνομάζουμε συσσωρευτές. Γιά πολλά χρόνια ὑπῆρχαν σέ κοινή χρήση μόνο δύο εἶδη στοιχείων: τό στοιχεῖο Leclanché καί ὁ συσσωρευτής μολύβδου. Σήμερα παρασκευάζονται ἀπό τή βιομηχανία ἀρκετοί τύποι στοιχείων μέ χαρακτηριστικά ΗΕΔ καί δυνατότητας ρεύματος πού ἐπιτρέπουν τήν χρησιμοποίησή τους σέ ἕνα εὐρύ φάσμα ἐφαρμογῶν. Μερικούς ἀπό τοὺς συνηθέστερους τύπους ἠλεκτρικῶν στοιχείων θά περιγράψουμε μέ συντομία στή συνέχεια.

Τό στοιχεῖο Leclanché εἶναι ἀκόμη τό πλέον διαδεδομένο ἀπό τά λεγόμενα ξηρά στοιχεῖα. Ἡ κατασκευή τοῦ στοιχείου δίνεται στό σχῆμα 3-18. Ἡ ἠλεκτρολύτης περιέχεται σέ ἕνα δοχεῖο ἀπό ψευδάργυρο τό ὁποῖο ἀποτελεῖ ταυτόχρονα καί τήν κάθοδο τοῦ στοιχείου. Ἡ ἀνοδος ἀποτελεῖται ἀπό μιά ράβδο ἀνθρακα στό κέντρο τῆς διατάξεως. Μεταξύ





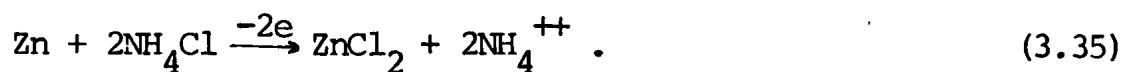
ΣΧΗΜΑ 3-18. Τό ξηρό στοιχείο Leclanché.

των δύο ηλεκτροδίων υπάρχει ή ήλεκτρολύτης υπό μοαρή χλωριούχου αμμωνίου (NH_4Cl) έμποτισμένου σέ ύγροσκοπικό ύλικό. Ό ήλεκτρολύτης περιέχει ακόμη ποσότητα ύπεροξειδίου του μαγγανίου (MnO_2), τό όποιο δρᾷ ὡς αντίπολωτικό.[†] Κατά τή λειτουργία του στοιχείου, άτομα ψευδαργύρου τής καθόδου έγκαταλείπουν δύο ήλεκτρόνια καί εισέρχονται

[†] Μέ τόν γενικό όρο πόλωση αποδύδουμε τήν έπιβράδυνση τής χημικής αντίδράσεως πού δημιουργεῖ τήν ΗΕΔ λόγω έπικαλύψεως ενός ηλεκτροδίου από τό ύδρογόνο πού αποδεσμεύεται κατά τήν αντίδραση. Τό φαινόμενο μπορεῖ νά εξαλειφθεῖ μέ τήν παρουσία μιᾶς χημικής ένώσεως πού εἶναι πλούσια σέ όξυγόνο ὅπως τό νιτρικό όξύ (HNO_3) ἢ τό ύπεροξείδιο του μαγγανίου (MnO_2). Οἱ ούσιες πού χρησιμοποιοῦνται σέ ήλεκτρικά στοιχεῖα γιά τό σκοπό αυτό ὀνομάζονται αντιπολωτικά.



στόν ηλεκτρολύτη υπό μορφή χλωριούχου ψευδαργύρου, αμίνης ή όξυχλωριούχου ψευδαργύρου. Η κυριώτερη αντίδραση στην κάθοδο είναι



Η άμμωνιακή ρίζα που δημιουργείται με τόν τρόπο αυτό μεταπίπτει σε ούδέτερη άμμωνία έλευθερώνοντας ίόντα ύδρογόνου, τά όποια με τή συνεισφορά ηλεκτρονίων από τήν άνοδο δεσμεύονται από τό υπεροξειδίο του μαγγανίου διαμέσου τής αντίδράσεως



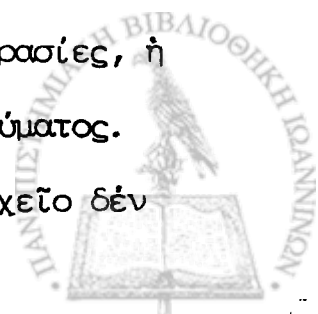
Οι χημικές αντιδράσεις (3.35) και (3.36) δημιουργούν ΗΕΔ μεταξύ 1.5 και 1.6 V. Μεγαλύτερη ΗΕΔ μπορεί νά δημιουργηθεί με σύνδεση ενός άριθμού στοιχείων Leclanché σε σειρά. Για τήν έξοικονόμηση χώρου πολλοί κατασκευαστές παράγουν τυποποιημένες συστοιχίες Leclanché σε διάταξεις που δημιουργούνται με διαδοχικές περιοχές άνθρακα, ηλεκτρολύτη και ψευδαργύρου. Οι συνήθεις συστοιχίες ξηρών στοιχείων Leclanché που παράγονται από τή βιομηχανία έχουν όνομαστική ΗΕΔ 1.5, 3, 4.5, 6, 7.5, 22.5, 45, 67.5 και 90 V.

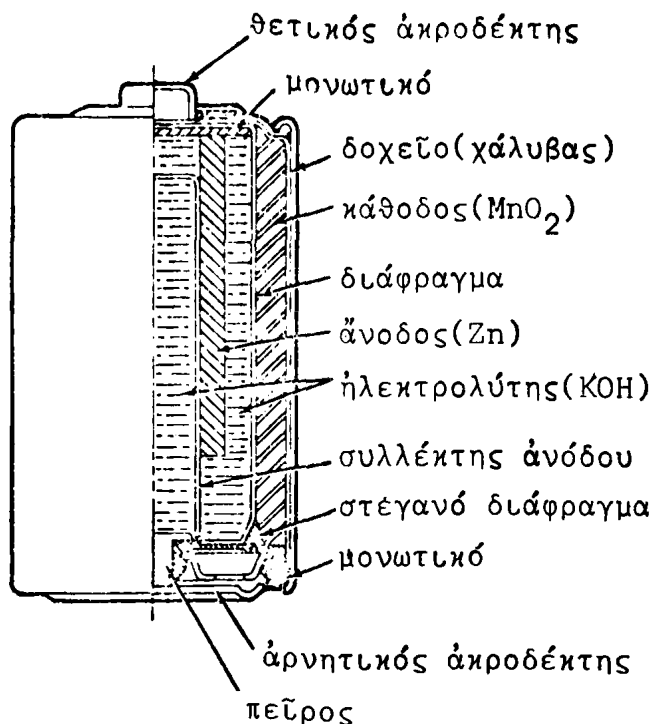
Τό στοιχείο Leclanché, είναι τό πιο διαδεδομένο από τά ηλεκτρικά στοιχεία μιās χρήσης. Ο χρόνος ζωής του (ό χρόνος κατά τόν όποιο μπορεί νά αναπτύξει χρήσιμη ΗΕΔ) έξαρτάται από πολλούς παράγοντες, μεταξύ τών όποιων ό χρόνος αποθηκείσεως πριν από τή χρησιμοποίησή του, ή θερμοκρασία περιβάλλοντος κατά τήν αποθήκευση, ό ρυθμός έκφορτίσεως, τό πλήθος και ή διάρκεια τών περιόδων άδρανείσε μετά τήν πρώτη χρήση και ή θερμοκρασία περιβάλλοντος κατά τή διάρκεια τροφο-

δοσίας του έξωτερικού κυκλώματος. Ακόμη και πριν από την πρώτη χρήση το στοιχείο Leclanché εκφορτίζεται έσωτερικά, γεγονός που περιορίζει το χρόνο αποθηκείσεως. Στις κλιματολογικές συνθήκες της χώρας μας ένα τυπικό στοιχείο Leclanché μπορεί να αποθηκευτεί για περίοδο ενός έτους. Ύψηλότερες θερμοκρασίες περιβάλλοντος μειώνουν σημαντικά τον έπιτρεπτό χρόνο αποθηκείσεως.

Σύγχρονα στοιχεΐα Leclanché έχουν μέσο χρόνο ζωής μεταξύ 10 και 24 ώρων συνεχούς λειτουργίας. Η ΗΕΔ του στοιχείου μειώνεται κατά συνεχή τρόπο καθόλη τη διάρκεια της χρήσης του. Το μειονέκτημα αυτό κάνει άιατάλληλο για τροφοδοσία ηλεκτρονικών συσκευών όπου οι απαιτήσεις δυναμικού είναι σχετικά άυστηρές. Ένα δεύτερο μειονέκτημα είναι η σταδιακή μείωση της άντοχής του περιβλήματος με τη διάλυση ψευδαργύρου στο ηλεκτρολυτικό διάλυμα. Ο κίνδυνος θραύσης του περιβλήματος έπιτείνεται με τη δημιουργία στο έσωτερικό του στοιχείου φυσαλίδων ύδρογόνου. Για τό λόγο αυτό συσκευές που χρησιμοποιούσιν στοιχεΐα Leclanché δέν πρέπει ποτέ να αποθηκεύονται με τά στοιχεΐα τροφοδοσίας τους έγκατεστημένα.

Παρόμοια σε κατασκευή με τά στοιχεΐα Leclanché είναι τά άλκαλικά στοιχεΐα. Οι χημικές άντιδράσεις στα δύο ηλεκτρόδια είναι ούσιαστικά οι ίδιες ένώ ο ηλεκτρολύτης είναι ίσχυρά βασικός. Τά άλκαλικά στοιχεΐα διαφέρουν συνήθως στη γεωμετρία των ηλεκτροδίων. Η τυπική διάταξη δίνεται στο σχήμα 3-19. Με τη γεωμετρία αυτή τά άλκαλικά στοιχεΐα παρέχουν περίπου διπλάσια ίσχή ένώ ο έπιτρεπτός χρόνος αποθηκείσεως αύξάνει σημαντικά. Μερικά ακόμη πλεονεκτήματα των άλκαλικών στοιχείων είναι η δυνατότητα λειτουργίας σε χαμηλές θερμοκρασίες, η μικρή έσωτερική αντίσταση και η σταθερότητα στην παροχή ρεύματος. Με τετραπλάσιο περίπου κόστος κατασκευής, τό άλκαλικό στοιχείο δέν

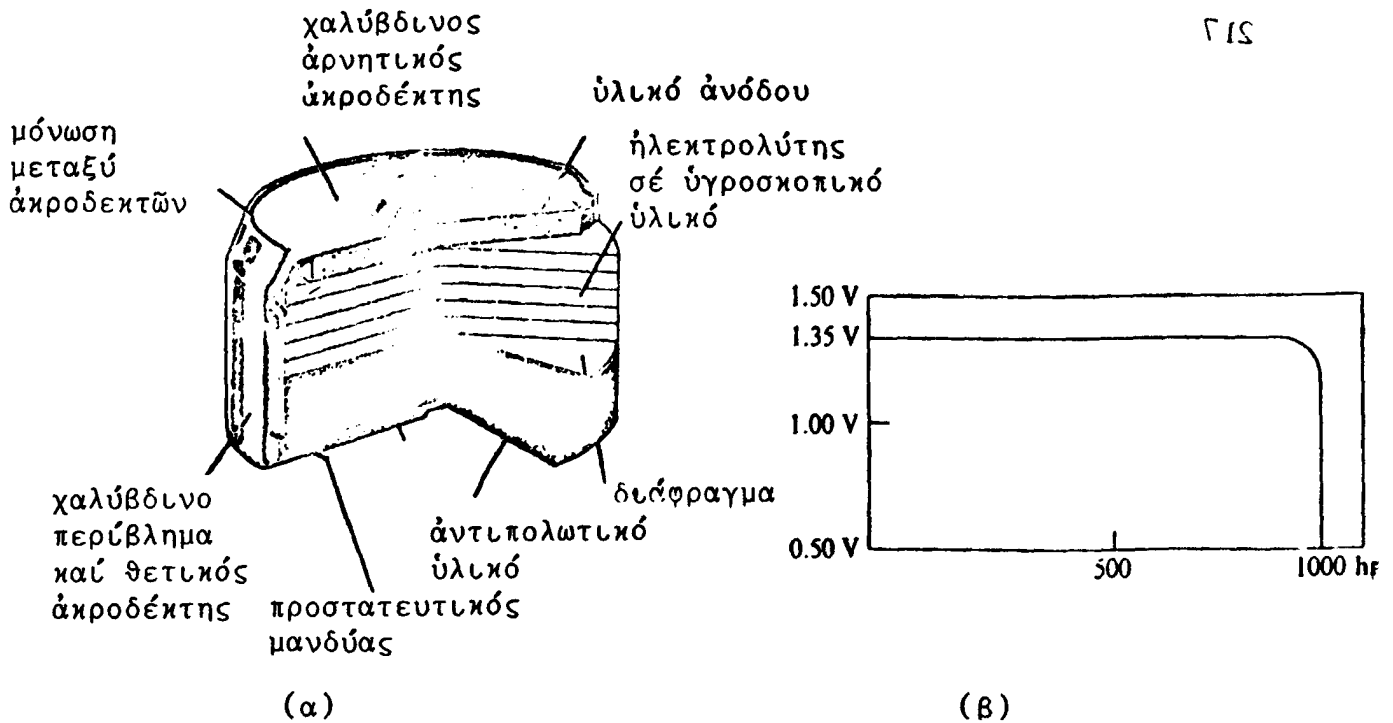




ΣΧΗΜΑ 3-19. Άλκαλικό στοιχεῖο.

πρόκειται νά αντικαταστήσει τελείως τό στοιχεῖο Leclanché. Ὁ μέγανος του ὅμως χρόνος ζωῆς καί ἀποθηκεύσεως συνιστοῦν τή χρησιμοποίησή του σέ συσκευές πού απαιτοῦν σημαντική ἰσχύ ἢ πού προορίζονται γιά χρήση άμεσης ἀνάγκης.

Μιά τρίτη κατηγορία ήλεκτροικῶν στοιχείων, τό στοιχεῖο ὑδραργύρου, περιγράφεται στό σχῆμα 3-20 (α). Ἡ άνοδος ἀποτελεῖται ἀπό ψευδάργυρο ἐνῶ ἡ κάθοδος ἀπό συνδιασμό άνθρακα καί ὀξειδίου τοῦ ὑδραργύρου. Κατά τήν ἐκφόρτιση τοῦ στοιχείου ὁ ψευδάργυρος ὀξειδώνεται σέ ZnO ἐγκαταλείποντας δύο ήλεκτρόνια ἀνά άτομο ἐνῶ τό ὀξείδιο τοῦ ὑδραργύρου ἀνάγεται σέ ὑδράργυρο παίρνοντας ἀπό τόν άνθρακα δύο ήλεκτρόνια ἀνά μόριο HgO . Μέ τόν τρόπο αὐτό δημιουργεῖται σταθερή διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν ήλεκτροδίων 1.35 V. Τό στοιχεῖο ὑδραργύρου ἔχει συγκρίσιμες ιδιότητες μέ τό άλκαλικό στοιχεῖο ὅσον ἀφορᾷ τή δυνατότητα τροφοδοσίας καί τήν ἐσωτερική αντίσταση. Τό μέγανλο πλεονέκτημα τοῦ στοιχείου εἶναι ἡ ἐξαιρετικά σταθερή διαφορά δυ-



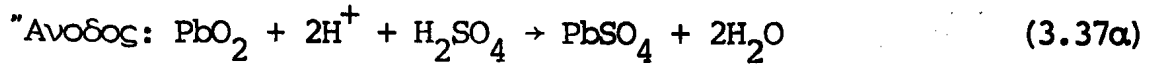
ΣΧΗΜΑ 3-20. Τό ήλεκτρικό στοιχείο ύδραργύρου. (α) Διατομή του στοιχείου. (β) Καμπύλη έκφορτίσεως.

ναμικοῦ πού διατηρεῖται μέχρι σχεδόν τήν πλήρη έκφόρτιση. Ἡ ιδιότητα αὐτή ἀποδίδεται μέ τήν καμπύλη τοῦ σχήματος 3-20 (β) καί ἀρεῖται στό γεγονός ὅτι ὁ ήλεκτρολύτης δέν μεταβάλλει χημική σύσταση κατά τήν έκφόρτιση. Λόγω τῆς ιδιότητος αὐτῆς, σέ πολλές ἐφαρμογές ὅπου οἱ ἀπαιτήσεις ἀκριβείας δέν εἶναι πολύ αὔστηρές, στοιχεῖα ύδραργύρου μπορεῖ νά χρησιμοποιηθοῦν ὡς πρότυπα ΗΕΔ. Τό κόστος κατασκευῆς τοῦ στοιχείου ύδραργύρου εἶναι περίπου πενταπλάσιο ἀπό τό κόστος ἀλκαλικοῦ στοιχείου μέ συγκρίσιμα χαρακτηριστικά. Παρόλα αὐτά, σέ σύγχρονες ήλεκτρομαγνητικές συσκευές, ὅπου οἱ ἀπαιτήσεις γιά σταθερή ΗΕΔ εἶναι αὔστηρές, ἡ χρησιμοποίηση στοιχείων ύδραργύρου μπορεῖ νά ἀποτελεῖ τήν πλέον οἰκονομική λύση.

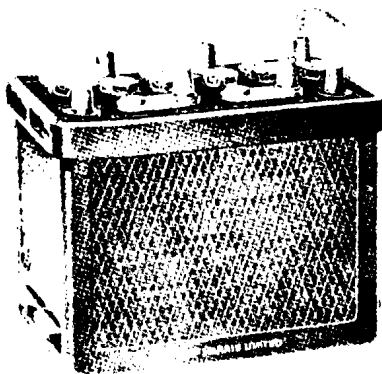
Ἐπί πλέον, ὁ πιό γνωστός τύπος συσσωρευτή, ἡ κοινή "μπαταρία τοῦ αὐτοκινήτου", εἶναι τό στοιχείο μολύβδου - ὀξέως. Ἀποτελεῖται ἀπό δύο ήλεκτρόδια μολύβδου (κάθοδος) καί ὀξειδίου τοῦ μολύβδου (ἀνοδος) σέ διάλυμα θειικοῦ ὀξέως. Κατά τήν έκφόρτιση, ὁ μολύβδος μετατρέπεται σέ ἀδιάλυτο θειϊ-



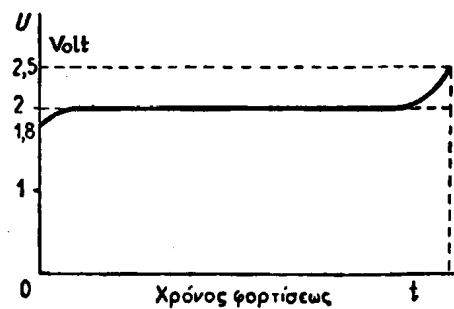
κό μόλυβδο έγκαταλείποντας στην κάθοδο δύο ηλεκτρόνια ανά μόριο $PbSO_4$, ενώ το οξείδιο του μολύβδου ανάγεται σε $PbSO_4$ παίρνοντας από την άνοδο δύο ηλεκτρόνια ανά μόριο. Οι αντιδράσεις που συμβαίνουν κατά την εκφόρτιση είναι,



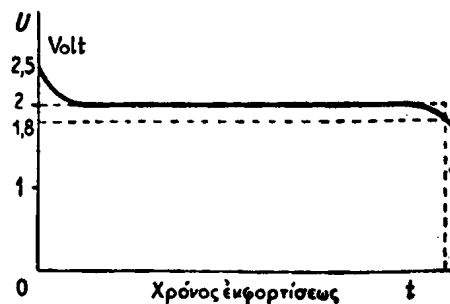
Η συνήθης μορφή μιας συστοιχίας συσσωρευτών μολύβδου δίνεται στο σχήμα 3-21 (α). Το σχήμα 3-21 (β) περιέχει επίσης την τυπική κα-



(α)

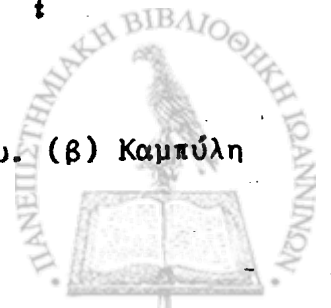


(β)



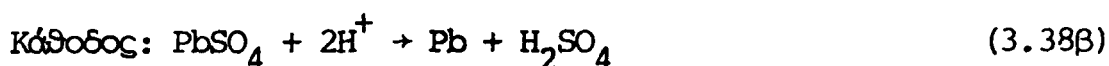
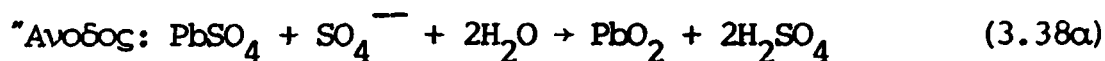
(γ)

ΣΧΗΜΑ 3-21. (α) Τυπική συστοιχία συσσωρευτών μολύβδου. (β) Καμπύλη φορτίσεως. (γ) Καμπύλη εκφόρτισεως.



μπύλη έκφορτίσεως. Ένας νέος συσσωρευτής αναπτύσσει αρχικά ΗΕΔ περίπου 2.4 V, αλλά πολύ γρήγορα κατά την έκφόρτιση ή διαφορά δυναμικού μειώνεται στα επίπεδα των 2 V όπου παραμένει για αρκετό χρόνο. Κατά το τέλος του χρόνου ζωής του στοιχείου ή πτώση της διαφοράς δυναμικού είναι ραγδαία.

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα στοιχεία μιᾶς χρήσης πού εξετάσαμε, ο συσσωρευτής μολύβδου μπορεί να επανέλθει στην αρχική του μορφή αν διαμέσου του ηλεκτρολύτη διοχετευθεί αντίστροφο ρεύμα. Οι αντιδράσεις πού συμβαίνουν κατά τη διεργασία αυτή, πού ονομάζεται φόρτιση, είναι



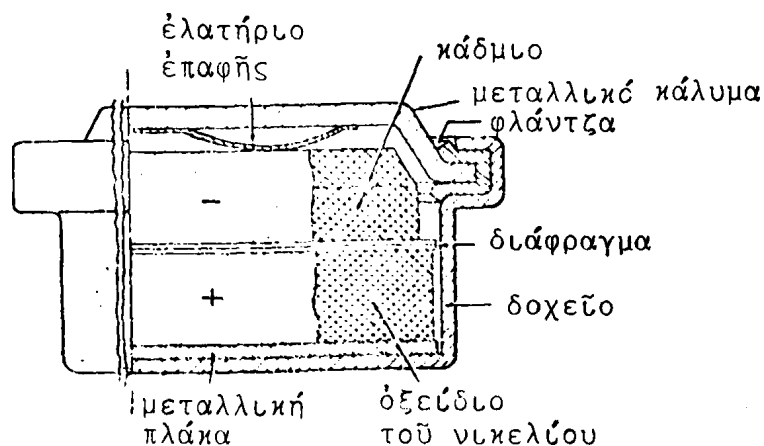
Όπως δείχνει η σύγκριση των έξ. (3.37) και (3.38) κατά τη φόρτιση ο συσσωρευτής μολύβδου επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση.

Η ΗΕΔ του στοιχείου εξάλλου κατά τη φόρτιση, πού αποδίδεται από την καμπύλη του σχήματος 3-21 (γ), εμφανίζει αντίστροφη συμπεριφορά από την εξέλιξη της ΗΕΔ κατά την έκφόρτιση.

Η έσωτερική αντίσταση του συσσωρευτή μολύβδου είναι εξαιρετικά μικρή ώστε να μπορεί να θεωρηθεί άμελητέα στις περισσότερες περιπτώσεις. Για πολλές εφαρμογές ή δυνατότητα παροχής ύψηλου ρεύματος για μεγάλο χρόνο κάνει τό συσσωρευτή μολύβδου μιὰ από τίς οικονομικότερες πηγές ηλεκτρικής ίσχύς. Παρόλα αυτά ή συνήθης συστοιχία μολύβδου είναι βαριά και όγκώδης και άπαιτεϊ συχνή συντήρηση για άποδοτική λειτουργία.



Τά τελευταία χρόνια έχει διαδοθεί άρκετά η χρήση του συσσωρευτή νικελίου - καδμίου, ιδιαίτερα του αραγισμένου τύπου. Ἡ τελευταία μονάδα είναι ένα τελείως αραγισμένο εξάρτημα πού δέν απαιτεῖ καμμιά συντήρηση ἐκτός ἀπό τήν περιοδική φόρτιση. Μιά τυπική διάταξη τοῦ στοιχείου δίνεται στό σχῆμα 3-22. Κατά τήν ἐκφόρτιση τό κάδμιο τῆς καθόδου ὀξειδώνεται ἐνώ στήν ἀνοδο τοῦ στοιχείου ὀξείδιο τοῦ νικελίου ἀνάγεται σέ χαμηλότερη κατάσταση ὀξειδώσεως. Ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου εἶναι 1.3 V. Κατά τή διοχέτευση ἀντίστροφου ρεύματος τό ὀξείδιο τοῦ νικελίου ἐπανοξειδώνεται στήν ἀνώτερη κατάσταση ὀξειδώσεως ἐνώ τό ὀξείδιο τοῦ καδμίου ἀνάγεται σέ μεταλλικό κάδμιο. Ὁ συσσωρευτής νικελίου - καδμίου ἔχει τό σημαντικό πλεονέκτημα ὅτι μπορεῖ νά παρέχει ὑψηλό ρεῦμα χωρίς σημαντική μείωση τοῦ δυναμικοῦ. Μπορεῖ νά ἀποθηκευτεῖ γιά μεγάλο χρονικό διάστημα χωρίς νά ἐκφορτιστεῖ. Βιομηχανικοί συσσωρευτές νικελίου - καδμίου παρασκευάζονται σέ ἕνα μεγάλο φάσμα ΗΕΔ καί σέ διάφορα μεγέθη ὥστε νά μποροῦν νά ἀντικαταστήσουν τά συμβατικά στοιχεῖα μιᾶς χρήσης. Τό κυριώτερο μειο-



ΣΧΗΜΑ 3-22. Τυπικός συσσωρευτής νικελίου - καδμίου.



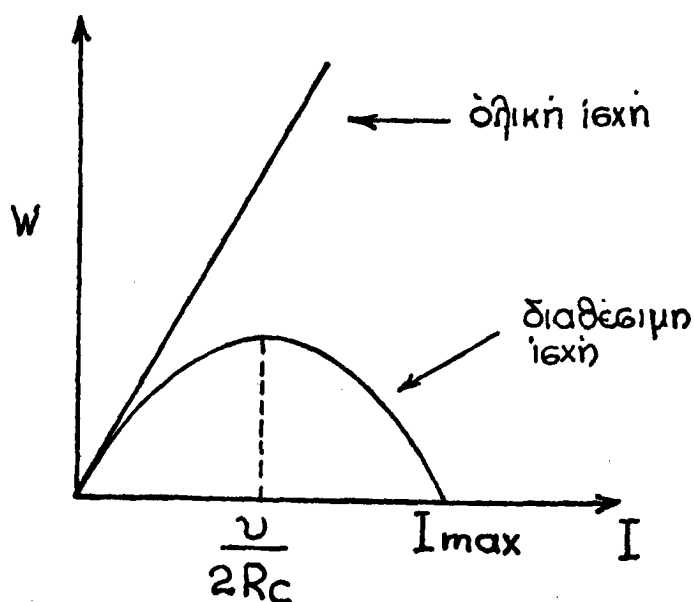
νέκτημα είναι τό μεγάλο κόστος (τουλάχιστον 25 φορές μεγαλύτερο από τό στοιχείο Leclanché) ενώ ταυτόχρονα έκφράζονται φόβοι γιά μόλυνση του περιβάλλοντος από κάδμιο πού μπορεί νά έπιφέρει ή έκτεταμένη χρήση του στοιχείου.

3-6 'Ωφέλιμη 'Ισχή 'Ηλεκτρικού Στοιχείου

'Η ισχή πού καταναλώνεται στό έξωτερικό κύκλωμα ενός στοιχείου είναι, σύμφωνα μέ τήν έξ. (3.28)

$$W = VI = UI - I^2 R_c. \quad (3.39)$$

'Ο πρώτος όρος στό δεξιό σκέλος τής έξ. (3.39) αντιπροσωπεύει τήν όλική ισχή πού παράγεται από χημικές αντίδράσεις ενώ ο δεύτερος τήν ισχή πού καταναλώνεται στό έσωτερικό του στοιχείου. 'Η έξάρτηση τών όρων αύτων από τό ρεύμα πού διαρέει τό κύκλωμα δίνεται στή γραφική παράσταση του σχήματος 3-17. 'Η όλική ισχή UI πού παρέχουν οι χημικές αντίδράσεις αύξάνει γραμμικά. 'Η δραστικότερη όμως αύξηση τής ισχής πού καταναλώνεται στό έσωτερικό του στοιχείου έχει ως αποτέ-



ΣΧΗΜΑ 3-23 Έξάρτηση τής παρεχομένης ισχής ήλεκτρικού στοιχείου ως προς τό ρεύμα του κυκλώματος.



λεσμα μετά από μια όρισμένη τιμή του ρεύματος τή σταδιακή μείωση τής ισχύς, τήν όποία διαθέτει για τήν παραγωγή άφρέλιμου έργου στό έξωτερικό κύκλωμα. Έτσι για τιμές του ρεύματος πού πλησιάζουν τό ρεϋμα βραχυκυκλώσεως, τό μεγαλύτερο μέρος τής ένεργείας χάνεται μέσα στό στοιχείο.

ΠΕΙΡΑΜΑ 3-5. Μέ βάση τά πειραματικά δεδομένα καί τά άποτελέσματα του πειράματος 3-4 άποδόστε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τής ισχύς πού καταναλώνεται στήν αντίσταση R ώς πρός τό ρεϋμα. Προσδιορίστε τό ρεϋμα για τό όποιο ή ισχύ ή είναι μέγιστη καί συγκρίνετε τό άποτέλεσμά σας μέ τήν πρόβλεψη τής έξ. (3.36). Για τήν τιμή αύτή του ρεύματος I συγκρίνετε τήν αντίσταση $R = V/I$ πού προσδιορίζουν οι ένδείξεις των όργάνων σας μέ τήν έσωτερική αντίσταση του στοιχείου R_c πού μετρήσατε στό Πείραμα 3-4.

Ό προσδιορισμός του ρεύματος για κατανάλωση τής μέγιστης δυνατής ισχύς στό κύκλωμα μπορεί νά γίνει μέ τή βοήθεια τής έξ. (3.39).

Η συνθήκη για τό μέγιστο τής συναρτήσεως W είναι

$$\frac{dW}{dI} = 0 \quad (3.40)$$

ή

$$U - 2IR_c = 0$$

πού συνεπάγεται ρεϋμα

$$I = \frac{U}{2R_c} \quad (3.41)$$

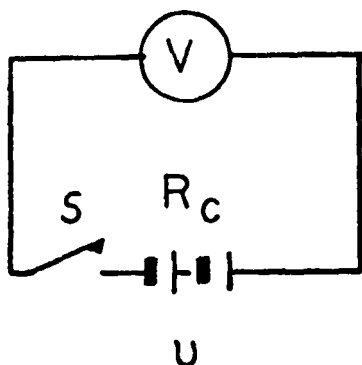
Καθόσον για τήν κατάσταση αύτή ή όλική αντίσταση του κυκλώματος είναι $2R_c$ ή έξωτερική αντίσταση πρέπει νά είναι ίση μέ R_c . Μέ άλλα λόγια, ή έξ. (3.41) προσδιορίζει ότι τό στοιχείο παρέχει τή μέγιστη δυνατή άφρέλιμη ισχύ όταν ή έξωτερική αντίσταση του κυκλώματος είναι

ΐση με την έσωτερική αντίσταση του στοιχείου.

3-7 Μέτρηση ΗΕΔ Ηλεκτρικού Στοιχείου

Εΐναι φανερό ότι για όποιαδήποτε τιμή της έξωτερικής αντίστα-
σεως η διαφορά δυναμικού στους πόλους ενός στοιχείου εΐναι πάντα
μικρότερη από την ΗΕΔ. Για τό λόγο αυτό δέν εΐναι δυνατόν νά προσ-
διορίσουμε την ΗΕΔ με άπλή χρήση ενός βολτομέτρου όπως δείχνει τό
σχήμα 3-24. Εΐδικότερα, αν U εΐναι η ΗΕΔ του στοιχείου, τό ρεύμα I
πού διαρέει τό κύκλωμα εΐναι

$$I = \frac{U}{R_V + R_C}$$



ΣΧΗΜΑ 3-24 Μέτρηση της διαφοράς
δυναμικού στους πόλους
ήλεκτρικού στοιχείου.

όπου R_V και R_C αντίστοιχα οι αντίστασεις του βολτομέτρου και του
στοιχείου. Τό δυναμικό έπομένως πού μετράει τό βολτόμετρο εΐναι

$$V = IR_V = U - IR_C. \quad (3.42)$$

Άν εΐναι γνωστή η έσωτερική αντίσταση του στοιχείου, η ΗΕΔ μπορεί
νά υπολογιστεί από την έξ. (3.42) ως

$$U = V + IR_C = V + \frac{R_C}{R_V} V. \quad (3.43)$$



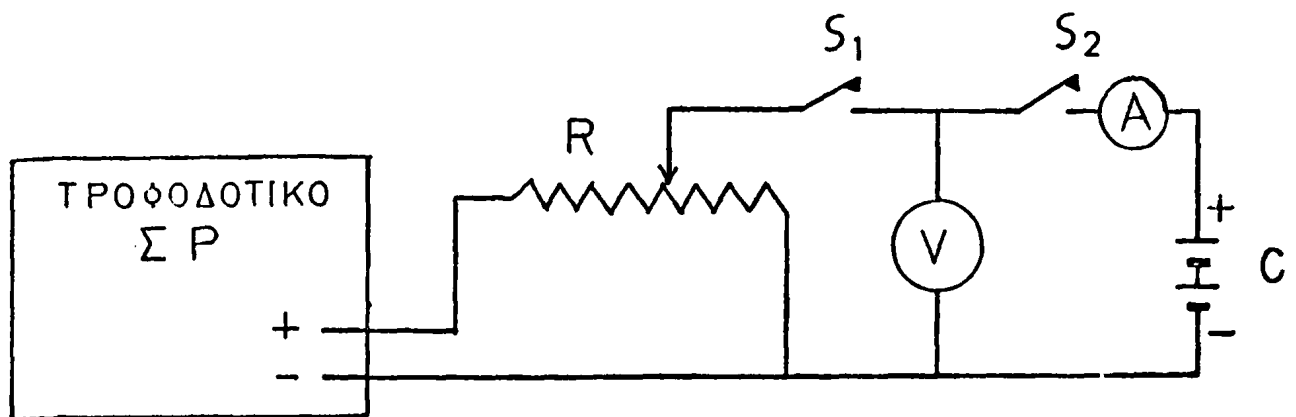
Όπως δείχνει η τελευταία σχέση, στις συνήθεις περιπτώσεις όπου

$$R_C \ll R_V \quad (3.44)$$

η ένδειξη του βολτομέτρου V βρίσκεται πολύ κοντά στην τιμή της ΗΕΔ.

Η συνθήκη όμως της έξ. (3.44) πρέπει να εξακριβώνεται για τον προσδιορισμό της ΗΕΔ ενός στοιχείου διαμέσου της απλής διατάξεως του σχήματος 3-24.

Μιά διάταξη που επιτρέπει ένα περισσότερο ακριβή προσδιορισμό της ΗΕΔ ενός στοιχείου δίνεται στο σχήμα 3-25.



ΣΧΗΜΑ 3-25 Μέτρηση ΗΕΔ ηλεκτρικού στοιχείου.

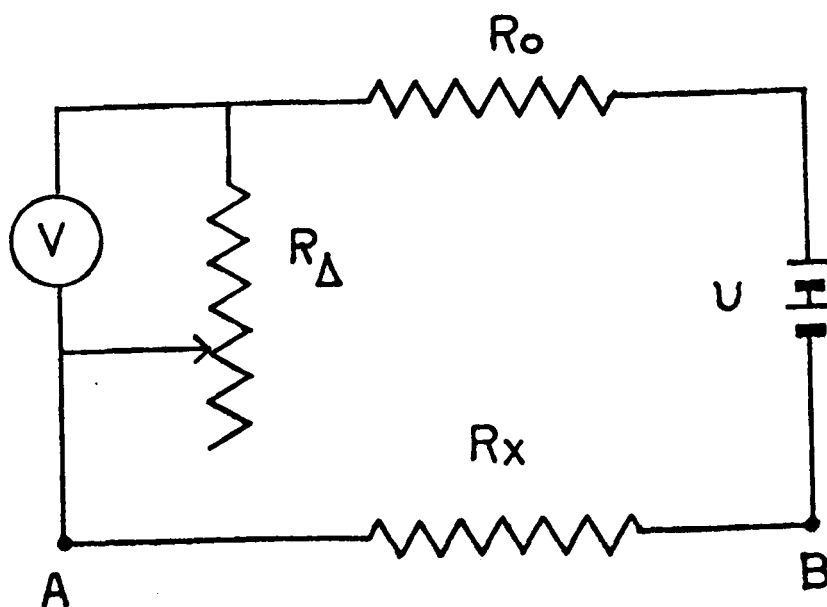
ΠΕΙΡΑΜΑ 3-6. Μετρήστε την πώση δυναμικού στους πόλους του ηλεκτρικού στοιχείου C που χρησιμοποίησατε στο Πείραμα 3-4 με τη διάταξη του σχήματος 3-24.

Συνδέστε το κύκλωμα του σχήματος 3-25 χρησιμοποιώντας το ίδιο ηλεκτρικό στοιχείο C . Με τον διακόπτη S_2 άνοιχτό, κλείστε τον διακόπτη S_1 και ρυθμίστε την τάση του τροφοδοτικού ΣP ώστε η ένδειξη του βολτομέτρου να είναι ίση με το δυναμικό που μετρήσατε προηγουμένως στους πόλους του στοιχείου. Κλείστε τον διακόπτη S_2 . Η ένδειξη του αμπερομέτρου πρέπει να είναι τώρα κοντά στο μηδέν. Ρυθμίστε τον ρεοστάτη R ώστε η ένδειξη του αμπερομέτρου να μηδενιστεί τελείως. Άνοιξτε τον διακόπτη S_2 . Η ένδειξη του βολτομέτρου δίνει τώρα την ΗΕΔ του στοιχείου C . Συγκρίνετε το αποτέλεσμα

μέ τήν προηγούμενη μέτρηση διαμέσου τῆς διατάξεως πού δύναται στό σχῆμα 3-24 καί μέ τήν τιμή τῆς ΗΕΔ πού προσδιορίσατε στό Πείραμα 3-4. Ἐξηγεῖστε τή λειτουργία τοῦ κυκλώματος πού δύναται στό σχῆμα 3-25.

3-8 Τό Ἐργαστηριακό Ὠμόμετρο

Ἄν σέ ἓνα κύκλωμα εἶναι γνωστή ἡ ΗΕΔ καί ἓνα μέρος τῆς ὀλικῆς ἀντιστάσεως, τότε ἡ μέτρηση τοῦ δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς γνωστῆς ἀντιστάσεως μπορεῖ νά προσδιορίσει τήν υπόλοιπη ἀγνωστη ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος. Ἡ διαπίστωση αὐτή πού ἀποτελεῖ τήν ἀρχή λειτουργίας τοῦ ἐργαστηριακοῦ Ὠμομέτρου, μπορεῖ νά ἐξαχθεῖ ἀπό τό κύκλωμα τοῦ



ΣΧΗΜΑ 3-26 Ἀρχή λειτουργίας τοῦ ἐργαστηριακοῦ Ὠμομέτρου.

σχήματος 3-26, στό ὁποῖο ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου U καί οἱ ἀντιστάσεις R_0 καί R_{Δ} εἶναι γνωστές. Ἄν V εἶναι ἡ πῶση δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς (μικρῆς) ἀντιστάσεως R_{Δ} τό ρεῦμα I πού διαρρέει τό κύκλωμα δίνεται



από τή σχέση †

$$I = \frac{V}{R_{\Delta}} = \frac{U}{R_O + R_{\Delta} + R_C + R_X} \quad (3.45)$$

όπου R_C είναι ή έσωτερική αντίσταση του στοιχείου. Ή άγνωστη αντίσταση R_X είναι

$$R_X = R_{\Delta} U \frac{1}{V} - R \quad (3.46)$$

όπου R είναι τό σύνολο τών γνωστών αντιστάσεων του κυκλώματος

$$R = R_O + R_{\Delta} + R_C. \quad (3.47)$$

Ήν α είναι ή γωνία απόκλισης του βολτομέτρου γιά δυναμικό V μέ σταθερά αναλογίας k , ήτοι

$$V = k \alpha, \quad (3.48)$$

ή έξ. (3.46) μπορεί νά γραφεί ώς

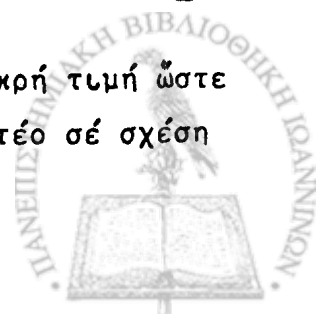
$$R_X = \frac{R_{\Delta} U}{k} \frac{1}{\alpha} - R. \quad (3.49)$$

Ή τελευταία σχέση μπορεί νά χρησιμοποιηθεί γιά τή βαθμονόμηση του βολτομέτρου άπευθείας σέ μονάδες αντίστασης. Σύμφωνα μέ τή σχέση αύτή ή απόκλιση του όργάνου μεταβάλλεται αντίστροφα πρός τήν τιμή τής αντίστασης R_X . Γιά άπειρη αντίσταση μεταξύ τών σημείων A και B (άνοικτό κύκλωμα) ή απόκλιση προβλέπεται μηδενική ένω γιά $R_X = 0$ (άπλή έπαφή τών σημείων A και B) ή απόκλιση είναι

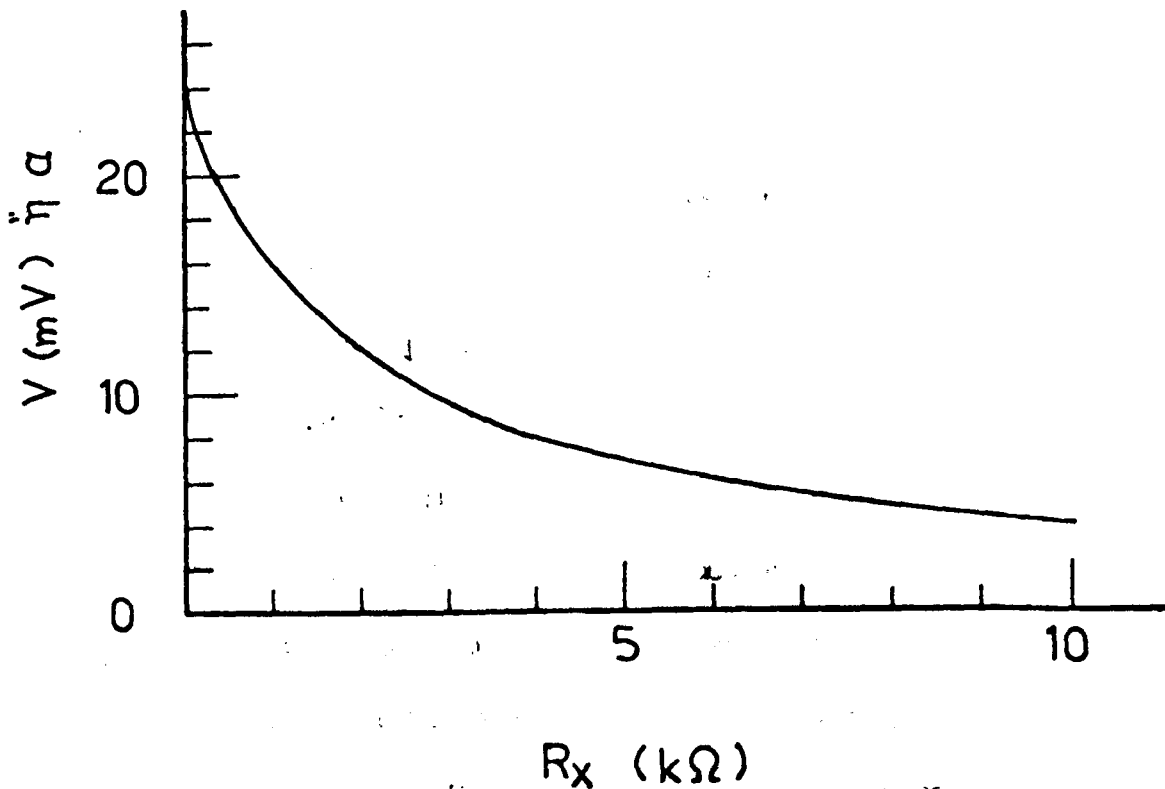
$$\alpha = \frac{R_{\Delta} U}{R k}. \quad (3.50)$$

Ή τιμή αύτή τής απόκλισης μπορεί νά γίνει ίση μέ τή μέγιστη δυνατή απόκλιση του όργάνου μέ κατάλληλη μεταβολή τής διακλώσεως R_{Δ} .

† Θά θεωρήσουμε ότι ή διακλώση R_{Δ} έχει αρκετά μικρή τιμή ώστε τό ρεύμα διαμέσου του βολτομέτρου νά είναι άμελητέο σέ σχέση μέ τό όλικό ρεύμα I .



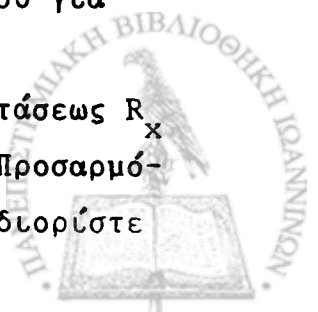
Μεταξύ των άκραιών τιμών $R_x = 0$ και $R_x = \infty$, η απόκλιση του όργάνου δίνεται στη γραφική παράσταση του σχήματος 3-27.



ΣΧΗΜΑ 3-27 'Απόκλιση α του βολτομέτρου στο κύκλωμα του σχήματος 3-20 ως συνάρτηση της αντίστασης R_x .

ΠΕΙΡΑΜΑ 3-7. Συνδέστε το κύκλωμα του "ώμομέτρου" που δίνεται στο σχήμα 3-26. Χρησιμοποιείτε ένα στοιχείο μέ ΗΕΔ 6 Volt, αντίσταση R_0 της τάξεως των 2000 Ω , ένα ροοστάτη R_Δ με όλική αντίσταση περίπου 10 Ω και ένα βολτόμετρο με μέγιστη ένδειξη 30 mV. Ένωστε τα δύο σημεία A και B και ρυθμίστε το ροοστάτη R_Δ ώστε η ένδειξη του βολτομέτρου να είναι μέγιστη ($V = 30$ mV). Συνδέστε ένα κιβώτιο αντιστάσεων μεταξύ των σημείων A και B του κυκλώματος. Σε κατάλληλο πίνακα σημειώστε την ένδειξη του βολτομέτρου για διάφορες τιμές της αντίστασης R_x .

Αποδώστε σε γραφική παράσταση τη μεταβολή της αντίστασης R_x ως προς το αντίστροφο της ένδειξης του βολτομέτρου $\frac{1}{V}$. Προσαρμόζοντας την καλύτερη εύθεια γραμμή στα δεδομένα σας προσδιορίστε



τούς συντελεστές C_1 και C_2 στη σχέση της έξ. (3.46)

$$R_x = C_1 \frac{1}{V} - C_2 \quad (3.51)$$

και χαράξετε σε νέα γραφική παράσταση μία καμπύλη βαθμονόμησης ανάλογη προς τό σχήμα 3-27.

Όπως εξάγεται από τά προηγούμενα, ή κλίμακα του ώμομέτρου διαφέρει κατά πολύ από τίς κλίμακες τών όργάνων ήλεκτρικών μετρήσεων πού μελετήσαμε ως τώρα. Τό "0" της κλίμακας βρίσκεται στό δεξιό μέρος και στό σημείο μέγιστης απόκλισης του δείκτη, ενώ τό άκρο άριστερό μέρος της κλίμακας αντιστοιχεί σε άπειρη αντίσταση. Μεταξύ τών δύο άκραίων ένδειξεων ή κλίμακα δέν είναι γραμμική, μέ σταδιακή αύξηση της πυκνότητας τών ένδειξεων στό άριστερό μέρος της κλίμακας. Για τό λόγο αυτό ή εύαισθησία του όργάνου είναι συνάρτηση της αντίστασης πού μετράει και, από την έξ. (3.49), δίνεται από τή σχέση

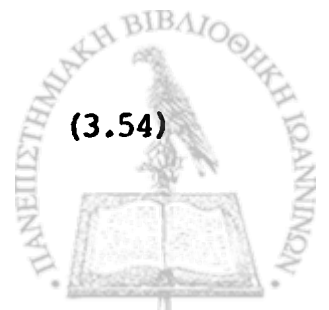
$$\frac{da}{dR_x} = - \frac{R_{\Delta} U}{k(R+R_x)^2} \quad (3.52)$$

όπου τό άρνητικό σημείο αποδίδει τή μείωση της απόκλισης Δa με αντίστοιχη αύξηση της αντίστασης ΔR_x . Συγκεκριμένα μπορούμε από την τελευταία έκφραση νά γράψουμε τή διαφορά απόκλισης Δa σε σχέση με τή μεταβολή της αντίστασης ΔR_x ως

$$\Delta a = - \frac{R_{\Delta} U}{k(R+R_x)^2} \Delta R_x \quad (3.53)$$

Χρησιμοποιώντας έπομένως την έξ. (3.50) ή ποσοστιαία απόκλιση του ώμομέτρου ως προς τή μέγιστη απόκλιση είναι

$$\frac{\Delta a}{a_{\max}} = - \frac{R}{(R+R_x)^2} \Delta R_x = \frac{R R_x}{(R+R_x)^2} \frac{\Delta R_x}{R_x} \quad (3.54)$$



ή, αντίστροφα

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{(R+R_x)^2}{R R_x} \frac{\Delta \alpha}{\alpha_{\max}} \quad (3.55)$$

Ἡ τελευταία σχέση δίνει τὴν ποσοστιαία εὐαισθησία τοῦ ὤμομέτρου σὲ σχέση μὲ τὴν ποσοστιαία εὐαισθησία τοῦ βολτομέτρου. Γιά ἕνα τυπικό σύγχρονο βολτόμετρο μὲ εὐαισθησία 0.2 % τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως, ἡ ποσοστιαία εὐαισθησία τοῦ ὤμομέτρου πού κατασκευάστηκε στό Πείραμα 3-7, δίνεται στό σχῆμα 3-28 ὡς συνάρτηση τῆς ἀντιστάσεως R_x .

Ἡ μεγαλύτερη εὐαισθησία μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπὸ τὴ συνθήκη

$$\frac{d}{dR_x} \left(\frac{\Delta R_x}{R_x} \right) = 0$$

πού δίνει τὴν ἀπλή σχέση

$$R_{x,m} = R_0 + R_\Delta + R_C \quad (3.56)$$

Μέ ἄλλα λόγια ἡ εὐαισθησία γίνεται μέγιστη ὅταν ἡ ἀντίσταση πού μετῶται εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐσωτερικὴ ἀντίσταση τοῦ ὤμομέτρου. Ἐξάλλου γιά $R_x = R$ ἡ ἀπόκλιση τοῦ ὄργανου εἶναι ἀπὸ τίς ἐξ. (3.49) καί (3.50)

$$\alpha = \frac{UR_\Delta}{k(R+R_x)} = \frac{1}{2} \frac{UR_\Delta}{kR} = \frac{1}{2} \alpha_{\max} \quad (3.57)$$

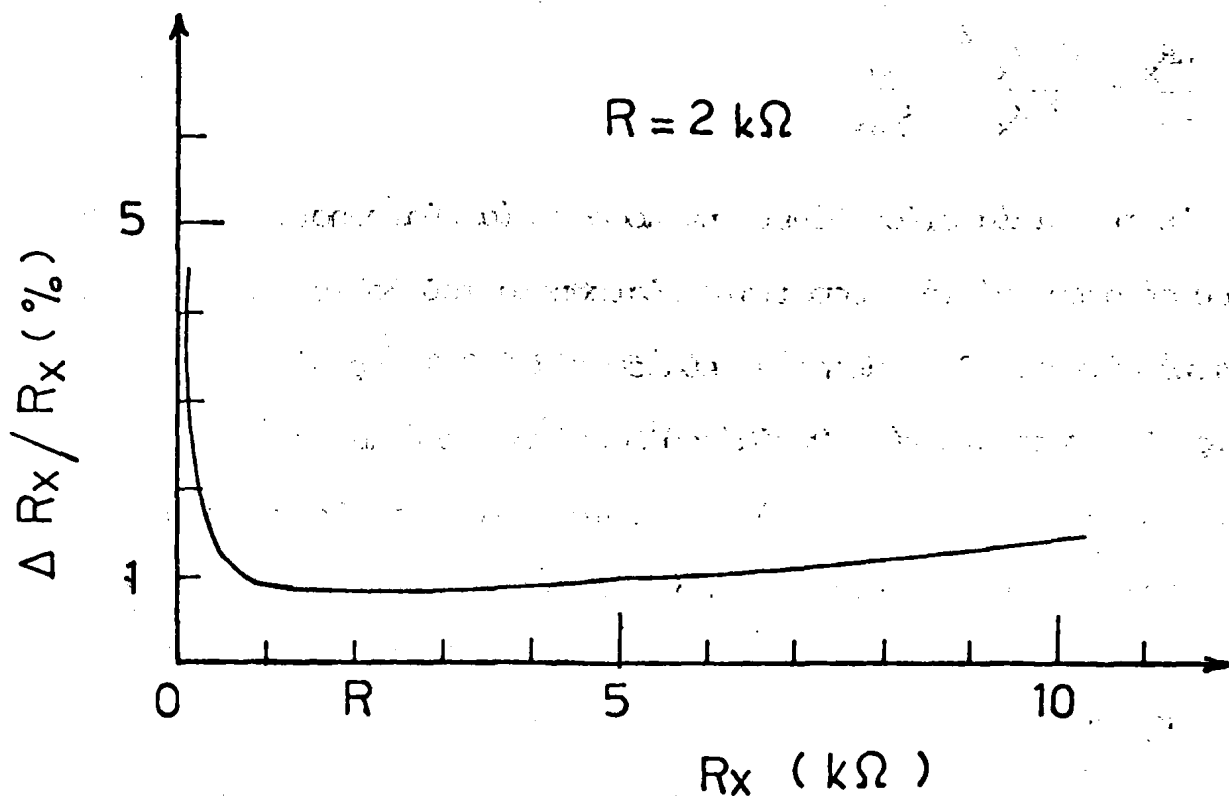
δηλαδή, τὸ μισό τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως.

Στὴν πράξη ἡ ἀντίσταση $R_{x,m}$, πού θά ὀνομάσουμε ἀντίσταση μέσης ἀποκλίσεως, καθορίζει καί τὴν περιοχὴ χρησιμότητας τοῦ ὄργανου. Ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 3-28, γιά $R_{x,m} = 2k\Omega$ ἡ ποσοστιαία εὐαισθησία τοῦ ὤμομέτρου γίνεται μικρότερη ἀπὸ 1 % στὴν περιοχὴ

$$0.8 \text{ k}\Omega \leq R_x \leq 5.5 \text{ k}\Omega$$

ὅπου τὸ ὄργανο μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ μὲ ἀνεκτὴ ἀκρίβεια. Ὅπως





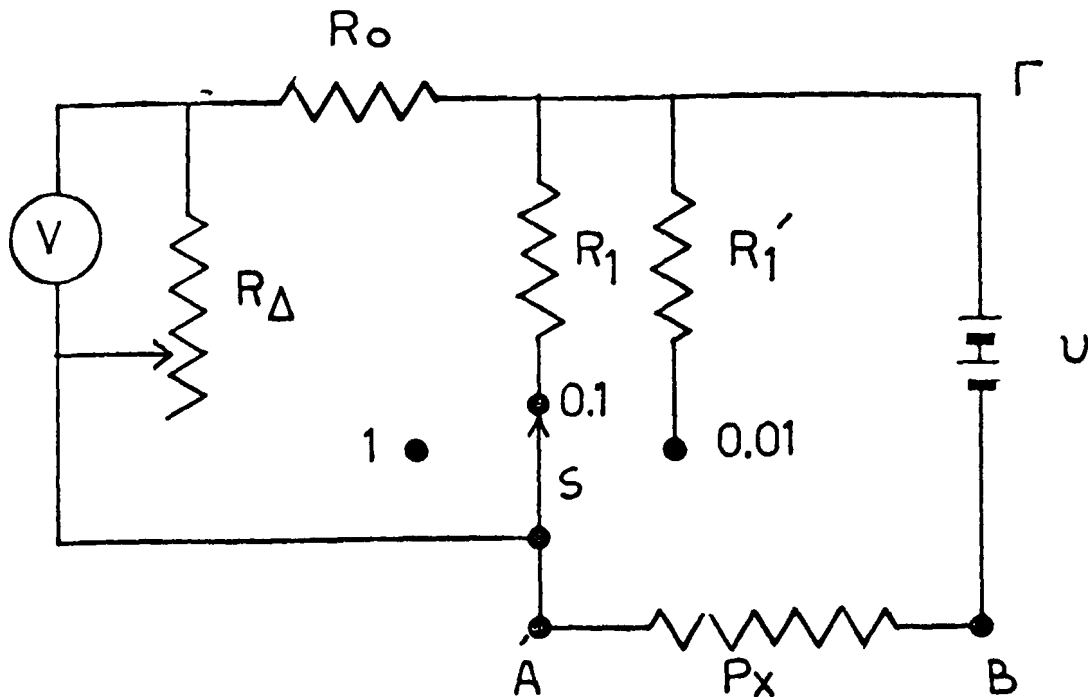
ΣΧΗΜΑ 3-28 'Επί τοῖς ἑκατό εὐαίσθησιὰ τοῦ ὠμομέτρου τοῦ σχήματος 3-26 γιὰ $R_0 = 1980 \Omega$, $R_\Delta = 10 \Omega$ καὶ εὐαίσθησιὰ βολτομέτρου $\Delta V = 0.002 V_{\max}$.

εἶναι φανερό ἀπὸ τὴν ἐξ. (3.56), ἡ ἀντίσταση μέσης ἀποκλίσεως μπορεῖ νὰ ἐπιλεγεῖ με ἀντίστοιχη ἐπιλογή τῆς ἀντιστάσεως R_0 στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 3-26. Μιά ἐναλλακτικὴ λύση δίνεται στό σχῆμα 3-29 με τὴν προσθήκη τῆς διακλαδώσεως R_1 πού ἐπιτρέπει τὴ χρήση τῆς διατάξεως σέ πολλαπλάσια κλίμακα. Ἄν ἡ διακλάδωση R_1 ἐπιλεγεῖ με τιμὴ

$$R_1 = \frac{1}{9} (R_0 + R_\Delta)$$

τότε (στὴν προσέγγιση $R_\Delta \ll R_V$) ἡ ἀντίσταση μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Γ εἶναι

$$R_E = \frac{R_1 (R_O + R_\Delta)}{R_1 + R_O + R_\Delta} = \frac{9}{10} R_1 = \frac{1}{10} (R_O + R_\Delta) \quad (3.58)$$



ΣΧΗΜΑ 3-29 Έργαστηριακό ώμόμετρο με διακλαδώσεις για ύποδεκαπλασιασμό της κλίμακας του όργάνου.

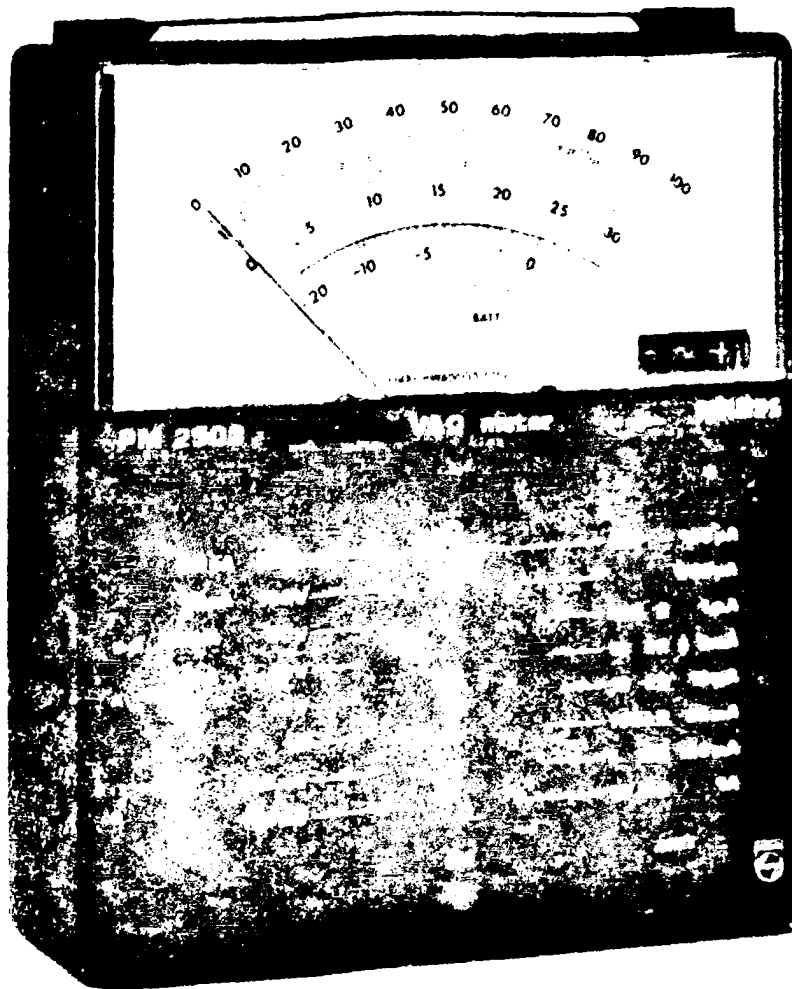
Μέ άλλα λόγια, η έσωτερική αντίσταση του ώμομέτρου ύποδεκαπλασιάζεται ενώ ταυτόχρονα ύποδεκαπλασιάζεται τό ρεύμα πού διέρχεται από τή διακλάδωση R_Δ (καί έπομένως τό δυναμικό στά άκρα της). Για μιά συγκεκριμένη αντίσταση R_X ή ένδειξη του ώμομέτρου είναι δεκαπλάσια στή θέση 1 του διακόπτη S από ότι είναι στή θέση 0.1. Άντίστροφα, ή ένδειξη του όργάνου είναι ή ίδια για μιά αντίσταση R_X όταν ο διακόπτης S βρίσκεται στή θέση 1 καί για μιά αντίσταση $10 R_X$ όταν ο διακόπτης S βρίσκεται στή θέση 0.1. Η διάταξη έπομένως αυτή μās έπιτρέπει τή μέτρηση ενός μεγάλου εύρους αντιστάσεων με τήν ίδια κλίμακα καί άπλό πολλαπλασιασμό τής ένδείξεως με τόν αντίστοιχο



συντελεστή του διακόπτη S . Όπως δείχνει τό σχήμα 3-29 μπορούμε κατά τόν ίδιο τρόπο νά προσθέσουμε καί άλλες διακλαδώσεις μέ υποδεκαπλάσιους συντελεστές 0.01, 0.001 κ.λ.π. Πρέπει νά σημειωθεί πάντως ὅτι μέ τή βαθμιαία αὐτή ἐλάττωση τῆς τιμῆς τῆς διακλαδώσεως $R_γ$ τό ρεῦμα διαμέσου τῆς ἄγνωστης ἀντιστάσεως αὐξάνει δραστικά καί μπορεῖ νά φτάσει σέ ἀνεπίτρεπτα ὅρια γιά ὀρισμένες ἐφαρμογές. Στίς περιπτώσεις αὐτές ἡ ἐπέκταση τῆς κλίμακας τοῦ ὤμομέτρου μπορεῖ νά γίνει μέ ταυτόχρονη μεταβολή τῆς διακλαδώσεως $R_γ$ καί τῆς ἀντιστάσεως $R_ο$.

3-9 Τό Ἐργαστηριακό Πολύμετρο

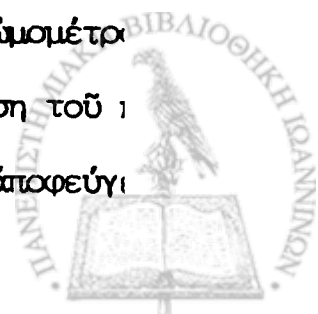
Όπως εἶδαμε στό κεφάλαιο αὐτό, τά βασικά ὄργανα ἠλεκτρικῶν μετρήσεων ΣΡ ἀποτελοῦν παραλλαγές τοῦ ίδίου ὄργάνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχή λειτουργίας δίνεται διαγραμματικά στό σχήμα 3-6. Τό ὄργανο αὐτό μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς ἀμπερόμετρο, βολτόμετρο ἢ ὤμόμετρο μέ προσθήκη τοῦ κατάλληλου κυκλώματος καί χάραξη ἀντίστοιχης κλίμακας. Γιά τό λόγο αὐτό πολλοί κατασκευαστές προσφέρουν ὄργανα πού μποροῦν ἐναλλακτικά νά χρησιμοποιηθοῦν γιά τά τρία παραπάνω εἶδη μετρήσεως. Στά ἐργαστηριακά πολυμέτρα, ἡ ἐπιλογή τῆς μορφῆς τοῦ ὄργάνου (ἀμπερόμετρο - ὤμόμετρο - βολτόμετρο) γίνεται μέ κεντρικό διακόπτη, ὁ ὁποῖος ταυτόχρονα ἐπιλέγει καί τήν ἐπιθυμητή κλίμακα. Ἐνας χαρακτηριστικός τύπος πολυμέτρου δίνεται στό σχήμα 3-30. Στό ἐσωτερικό τοῦ πολυμέτρου περιέχονται τά κυκλώματα πού ἀπαιτοῦνται γιά κάθε ἐναλλακτική χρήση καθώς καί ἠλεκτρικό στοιχεῖο γιά τό κύκλωμα τοῦ ὤμομέτρου. Ἡ ἐξωτερική ρύθμιση τῆς διακλαδώσεως $R_Δ$ πού φαίνεται στό σχήμα 3-30 χρησιμοποιεῖται γιά τό μηδενισμό τῆς κλίμακας τοῦ ὤμομέ-



ΣΧΗΜΑ 3-30 Χαρακτηριστικός τύπος εργαστηριακού πολυμέτρου.

τρου όταν βραχυκυκλωθούν οι δύο άκροδέκτες του όργανου.

Τό εργαστηριακό πολύμετρο είναι ίσως τό πιό χρήσιμο όργανο τριών μετρήσεων ΣΡ στις περιπτώσεις όπου οι απαιτήσεις ακριβείας δέν είναι πολύ άυστηρές. Όπως καί για τά υπόλοιπα είδικά όργανα λεκτριών μετρήσεων πρέπει νά χρησιμοποιειται μέ προσοχή ιδιαίτεστήν έπιλογή τής κατάλληλης κλίμακας πριν από τή σύνδεση των άκροδεικτών του σε κύκλωμα πού περιέχει ΗΕΔ. Είδικά ως προς τή χρήση για μέτρηση αντίστασεως πρέπει περιοδικά νά έλέγχεται ή ΗΕΔ του στοιχείου πού περιέχει. Ύπενθυμιζεται ότι τό ήλεκτρικό στοιχείο χρησιμοποιειται από τό όργανο μόνο κατά τή χρήση του ως άμομετρο. Για τό λόγο αυτό δέν πρέπει ποτέ νά εγκαταλείπεται μέ θέση του τριτικού διακόπτη σε κλίμακα μετρήσεως αντίστασεως για νά αποφεύγι



ή άσκηση φθορά του στοιχείου που μπορεί να προκληθεί από τυχαία βραχυκύκλωση των άμπεροδεικτών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 3-1. Χρησιμοποιώντας την έξ. (3.5) προσδιορίστε την εύαισθησία dI/da του άμπερομέτρου που δίνεται στο σχήμα 3-4. Αποδώστε σε γραφική παράσταση την εύαισθησία ως συνάρτηση της γωνίας απόκλισεως και σχολιάστε το αποτέλεσμα.
- 3-2. Η αντίσταση του πηνίου ενός άμπερομέτρου είναι 10 Ω. Το άμπερόμετρο παρουσιάζει μέγιστη απόκλιση όταν διαμέσου του πηνίου διέρχεται ρεύμα 1 mA. Πώς μπορεί να μεταβληθεί το όργανο αυτό σε άμπερόμετρο με μέγιστη ένδειξη 10 mA;
- 3-3. Ένα βολτόμετρο με κλίμακα 0-10 Volt έχει κατασκευαστεί από ένα άμπερόμετρο με έσωτερική αντίσταση 20 Ω και μιά αντίσταση 9980 Ω σε σειρά με την έσωτερική αντίσταση του όργάνου. Υπολογίστε την τιμή της αντιστάσεως που πρέπει να συνδεθεί παράλληλα με το άμπερόμετρο για να μετατρέψει τη διάταξη σε βολτόμετρο κλίμακας 1-50 Volt. Ποιά είναι η όλική αντίσταση της διατάξεως πριν και μετά τη μετατροπή;
- 3-4. Για το βολτόμετρο με κλίμακα 0-10 Volt του προηγούμενου προβλήματος υπολογίστε την αντίσταση που πρέπει να συνδεθεί σε σειρά για να μετατρέψει τη διάταξη σε βολτόμετρο κλίμακας 1-50 Volt. Ποιά είναι η όλική αντίσταση της διατάξεως μετά τη μετατροπή. Σχολιάστε τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των δύο μεθόδων για την αύξηση της κλίμακας του βολτομέτρου.
- 3-5. Μιά αντίσταση παρουσιάζει πτώση δυναμικού 50 mV για ρεύμα 300 A. Η αντίσταση πρόκειται να χρησιμοποιηθεί ως διακλάδωση ενός άμπερομέτρου με αντίσταση πηνίου 25 Ω, το οποίο παρουσιάζει μέγιστη απόκλιση για διέλευση ρεύματος 5 mA. Προσδιορίστε την κλίμακα του άμπερομέτρου με τη διακλάδωση και την όλική αντίσταση της διατάξεως.
- 3-6. Ένα άμπερόμετρο παρουσιάζει μέγιστη απόκλιση για ρεύμα 1A.

Τό πηνίο τοῦ ἀμπερομέτρου παρουσιάζει βλάβη καί πρέπει νά ἀντικατασταθεῖ. Ἐάν τό νέο πηνίο ἔχει 50 % περισσότερους βρόχους, 5 % μεγαλύτερη ἐπιφάνεια καί σταθερά ἐλατηρίου κατά 30 % μικρότερη, ποιά εἶναι ἡ κλίμακα τοῦ νέου ὀργάνου;

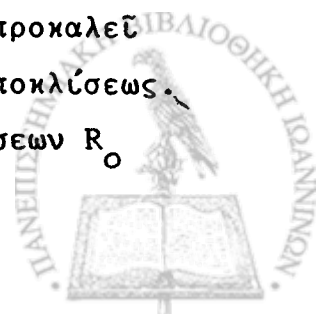
- 3-7. Ἡ τιμή μιᾶς ἄγνωστης ἀντιστάσεως προσδιορίζεται ἐναλλακτικά μέ τά δύο κυκλώματα πού δύνονται στά σχήματα 3-12 καί 3-13. Οἱ ἐσωτερικές ἀντιστάσεις τῶν ὀργάνων εἶναι $R_A = 10^{-4} \Omega$ καί $R_V = 500 \text{ k}\Omega$. Γιά ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου $V = 50 \text{ Volt}$, τά ἀντίστοιχα ρεύματα μετρήθηκαν ὡς

$$\text{κύκλωμα I : } I = 350 \mu\text{A}$$

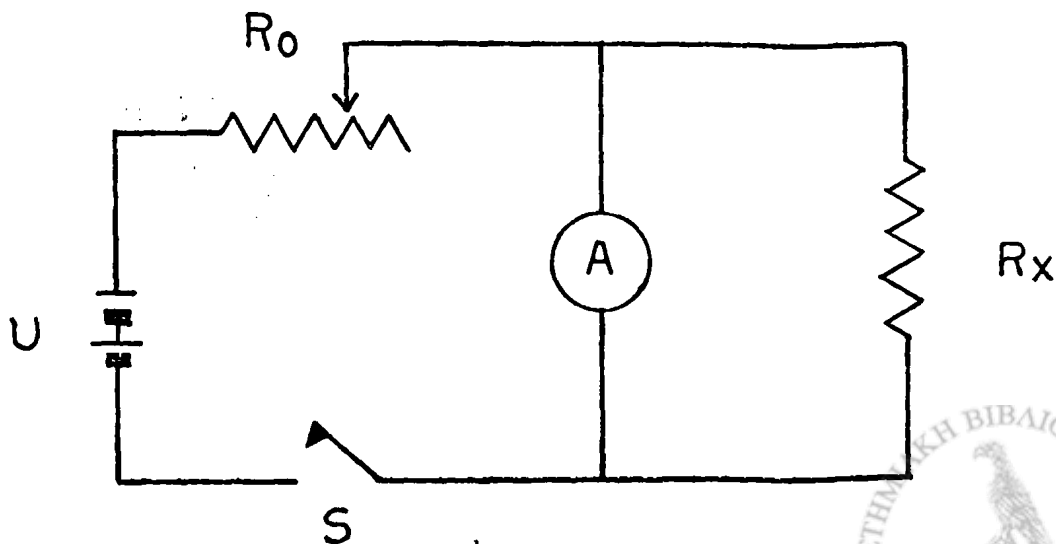
$$\text{κύκλωμα II : } I = 250 \mu\text{A}.$$

Προσδιορίστε τήν τιμή τῆς ἄγνωστης ἀντιστάσεως ἀπό τίς παραπάνω ἐνδείξεις χρησιμοποιώντας τή σωστή ἔκφραση γιά κάθε κύκλωμα. Πόσο εἶναι τό ἐπί τοῦς ἑκατό σφάλμα πού θά κάνατε σέ κάθε περίπτωση ἄν χρησιμοποιούσατε ἀπλῶς τό νόμο τοῦ Ohm $R = V/I$;

- 3-8. Ἐνα βολτόμετρο μέ ἐσωτερική ἀντίσταση 20Ω χρησιμοποιεῖται γιά τή μέτρηση τοῦ δυναμικοῦ στά ἄκρα μιᾶς ἀντιστάσεως 1Ω . Πόση εἶναι ἡ τιμή τοῦ δυναμικοῦ πού μετράει τό βολτόμετρο σέ σχέση μέ τήν πτώση δυναμικοῦ πρὶν ἀπό τή σύνδεση τοῦ ὀργάνου;
- 3-9. Ἡ πτώση δυναμικοῦ στά ἄκρα ἑνός ἠλεκτρικοῦ στοιχείου προσδιορίζεται ὡς 1.23 V μέ ἀπευθείας μέτρηση μέ ἕνα βολτόμετρο ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 100Ω . Ἐνα δεύτερο βολτόμετρο μέ ἐσωτερική ἀντίσταση 30Ω μετράει 0.63 V . Ποιά εἶναι ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου;
- 3-10. Ἐνα ἠλεκτρικό στοιχεῖο ἔχει ΗΕΔ 20 V καί ἐσωτερική ἀντίσταση 5Ω . Ὑπολογίστε τήν ἰσχύ πού καταναλώνεται στό ἐξωτερικό κύκλωμα ὅταν συνδεθεῖ σέ κυκλώματα μέ ὀλική ἀντίσταση στό διάστημα $0 - 50 \Omega$. Δόστε τά ἀποτελέσματά σας σέ γραφική παράσταση.
- 3-11. Ὡς ἔνδειξη τῆς χρήσιμης περιοχῆς μετρήσεως ἑνός ὤμομέτρου μπόρεῖ νά ληφθεῖ ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως $R_{1/2}$ πού προκαλεῖ ἀπόκλιση τοῦ ὀργάνου ἔση μέ τή μισή τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως. Ὑπολογίστε τήν τιμή αὐτή ὡς συνάρτηση τῶν ἀντιστάσεων R_0 καί R_A τοῦ σχήματος 3-20.



- 3-12. Για άκριβη βαθμονόμηση του ωμομέτρου του σχήματος 3-20 πολλές φορές απαιτείται να συνυπολογιστεί και η έσωτερική αντίσταση R_V του βολτομέτρου. Υποδείξτε πώς μεταβάλλονται οι αντίστοιχες εξισώσεις και συζητήστε το όριο στο οποίο η διόρθωση αυτή είναι άμελητά.
- 3-13. Για την κατασκευή ενός ωμομέτρου σύμφωνα με το κύκλωμα του σχήματος 3-20 διαθέτουμε ένα στοιχείο 3 V και βολτόμετρο με έσωτερική αντίσταση 50 Ω . Η μέγιστη απόκλιση του βολτομέτρου προκαλείται για διαφορά δυναμικού 25 mV. Αν θέλουμε η μέση απόκλιση του ωμομέτρου να είναι $R_{1/2} = 5 \text{ k}\Omega$, υπολογίστε
- Τις αντιστάσεις R_0 και R_Δ
 - Για την παραπάνω αντίσταση R_0 , τὰ όρια της μεταβλητής διακλαδώσεως R_Δ ώστε να είναι δυνατός ο μηδενισμός του όργανου, αν τό στοιχείο παρουσιάζει μεταβολή μεταξύ 2.70 - 3.10 V.
 - Η ακρίβεια του βολτομέτρου είναι 0.5 % της μέγιστης αποκλίσεως. Μέ πόση ακρίβεια μπορεί να μετρηθεί μία αντίσταση πού προκαλεί 30 %, 50 % και 80 % απόκλιση;
- 3-14. Είναι δυνατό να κατασκευάσουμε ένα ωμόμετρο με τό "0" στό άριστερό άκρο και τό " ∞ " στό δεξιό άκρο της κλίμακας σύμφωνα με τό παρακάτω διάγραμμα.



Περιγράψτε τή λειτουργία του κυκλώματος.

α) Ποιά πρέπει να είναι ή τιμή τής μεταβλητής αντίστασης R_0 ώστε ή απόκλιση του όργάνου να είναι μέγιστη;

β) Δόστε μιá έκφραση για τό ρεύμα που διαρέει τό άμπερόμετρο ως συνάρτηση τής άγνωστης αντίστασης R_x μεταξύ τών άκρων Β και Γ. Κατασκευάστε τήν αντίστοιχη γραφική παράσταση βαθμονομήσεως του ώμομέτρου.

γ) Δειξτε ότι ή μέση απόκλιση του όργάνου αντίστοιχει σε αντίσταση

$$R_x = \frac{R_1 R_A}{R_1 + R_A}$$

δ) Σχολιάστε τό ώμόμετρο αυτό σε σύγκριση μέ τό ώμόμετρο του σχήματος 3-20. Γιατί είναι άπαραίτητος ό διακόπτης S στο παραπάνω κύκλωμα;



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

κυκλώματα

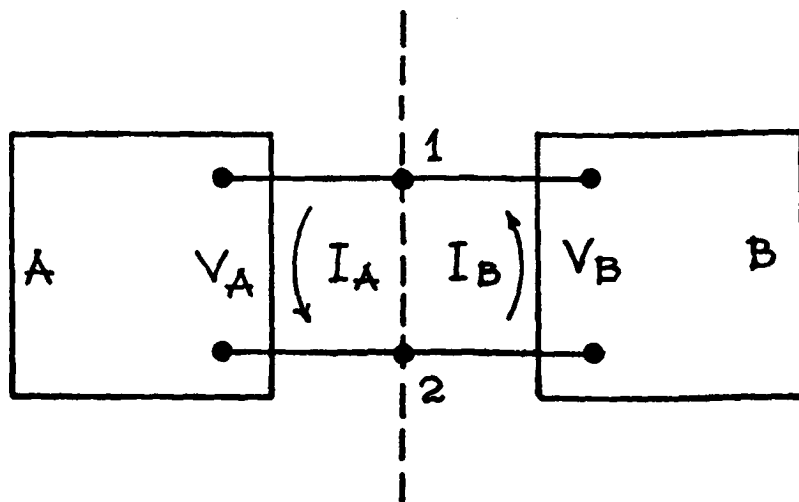
δυνεχους ρευματος

Ἡ πλήρης κατανόηση τῆς λειτουργίας ἑνός κυκλώματος ἀπαιτεῖ τόν προσδιορισμό τοῦ ρεύματος πού διαρρέει κάθε στοιχεῖο του καί τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ μεταξύ ὁποιασδήποτε σημείων τῆς διατάξεως. Γιά ἀπλά κυκλώματα ἡ ἀνάλυση αὐτή μπορεῖ νά γίνει ἀποκλειστικά μέ χρήση τοῦ νόμου τοῦ Ohm. Πολλά τέτοια παραδείγματα ἀναλύσεως ἀπλῶν κυκλωμάτων εἶδαμε στό προηγούμενο κεφάλαιο. Στά πλαίσια αὐτά μιὰ ἐξαιρετικά χρήσιμη ἔννοια εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ ἰσοδύναμου κυκλώματος. Μέ τόν ὄρο αὐτό ἐννοοῦμε ἕνα δεύτερο (συνήθως ἀπλούστερο) κύκλωμα πού στά ἄκρα του ἐμφανίζεται ἡ ἴδια διαφορά δυναμικοῦ καί ἡ ἴδια ροή ρεύματος μέ τό ἀρχικό κύκλωμα. Μέ ἀπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm μποροῦμε π.χ. νά δείξουμε ὅτι δύο ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 σέ σειρά εἶναι ἰσοδύναμες μέ μιὰ ἀντίσταση $R = R_1 + R_2$. Κατά τόν ἴδιο τρόπο οἱ δύο αὐτές ἀντιστάσεις σέ παράλληλη σύνδεση εἶναι ἰσοδύναμες μέ μιὰ ἀντίσταση $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$. Ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα, ὁποιοδήποτε μέρος ἑνός κυκλώματος πού περιέχει ἀντιστάσεις καί πηγές ΗΕΔ μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό ἕνα ἰσοδύναμο κύκλωμα πού περιέχει μιὰ πηγή ΗΕΔ καί μιὰ ἀντίσταση σέ

σειρά. Ἡ ἀναγωγή ὅμως αὐτή δέν εἶναι πάντα δυνατή μέ ἀπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm. Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἐξετάσουμε τίς κυριώτερες μαθηματικές μεθόδους πού ἔχουν ἀναπτυχθεῖ γιά τό μετασχηματισμό κυκλωμάτων σέ ἀπλούστερες ἰσοδύναμες διατάξεις. Ἄν καί θά ἀναφερθοῦμε ἀποκλειστικά σέ κυκλώματα ΣΡ, πολλές ἀπό τίς τεχνικές πού θά ἀναπτύξουμε μποροῦν νά μεταφερθοῦν ἀποφίτες στήν ἀνάλυση κυκλωμάτων ΕΡ.

4-1 Βασικές Ἀρχές

Εἶναι χρήσιμο νά θεμελιώσουμε τήν ἀνάπτυξη τῆς μεθοδολογίας γιά τήν ἀνάλυση κυκλωμάτων μέ τή θεώρηση τῆς πιό ἀπλῆς συνδεσμολογίας πού δίνεται στό σχῆμα 4-1. Τό ἀπλό αὐτό κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπό δύο στοιχεῖα πού, γιά χάρη γενικότητας, ἔχουν παρασταθεῖ ὡς δύο κιβώτια.



ΣΧΗΜΑ 4-1. Ἀπλό κύκλωμα μέ δύο στοιχεῖα.



Τώρα, αν V_A και V_B είναι η πτώση δυναμικοῦ στά διαρα τῶν ἀντίστοι-
χων κυκλωμάτων και I_A και I_B τὰ ἀντίστοιχα ρεύματα πού τὰ διαρρέουν,
δέν χρειάζεται πολὺ σκέψη γιὰ νά γράψει κανεῖς τίς δύο βασικές σχέ-
σεις

$$V_A = V_B \quad (4.1)$$

$$I_A = I_B \quad (4.2)$$

Παρόλλο ὅτι οἱ δύο αὐτές σχέσεις μποροῦν νά θεωρηθοῦν ἐκ πρώτης ὄψεως
"αὐταπόδεικτες" εἶναι χρήσιμο νά ἐξετάσουμε μέ κάποια λεπτομέρεια τήν
προέλευσή τους. Ἡ ἐξ. (4.1) εἶναι ἀμεση ἀπόρροια τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συ-
ναρτήσεως δυναμικοῦ

$$\Delta\varphi_{12} \equiv - \int_1^2 \underline{E} \cdot d\underline{l} \quad (4.3)$$

ὅπου $\underline{E}(\underline{r})$ εἶναι τό ἠλεκτρικό πεδίο και $d\underline{l}$ τό στοιχειῶδες προσανατο-
λισμένο μήκος πάνω σέ κάποια καμπύλη πού ἐνώνει τὰ σημεῖα 1 και 2.
Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό αὐτό, ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων
στό χῶρο εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό δρόμο πού θά ἀκολουθήσουμε γιὰ τήν
ὀλοκλήρωση και ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τὰ τεματικά σημεῖα 1 και 2. Ἔτσι
ἂν διασκόψουμε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 4-1 στά σημεῖα 1 και 2, ἡ δια-
φορά δυναμικοῦ ἔχει τήν ἴδια τιμή ἂν ὑπολογιστεῖ διαμέσου τοῦ κυκλώ-
ματος A ἢ τοῦ κυκλώματος B

$$V_A = V_B = \Delta\varphi_{12} \quad (4.4)$$

Ἡ ἐξ. (4.2) εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς ἀρχῆς διατηρήσεως τοῦ φορτίου
πού ἐκφράζεται ἀπό τήν ἐξ. (2.1) ὡς



$$\int_S \underline{J} \cdot d\underline{a} + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r = 0. \quad (4.5)$$

Σύμφωνα με τη σχέση αυτή, η ολική ροή της πυκνότητας ρεύματος \underline{J} σε μια κλειστή επιφάνεια S είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής του φορτίου μέσα στον όγκο V τον οποίο περιβάλλει. Στην περίπτωση του σχήματος 4-1, αν μια κλειστή επιφάνεια S που περιβάλλει το κύκλωμα A , τέμνει τη σύνδεση των δύο κυκλωμάτων στα σημεία 1 και 2, η ολική ροή ρεύματος παίρνει την απλή μορφή

$$\int_S \underline{J} \cdot d\underline{a} = I_A - I_B \quad (4.6)$$

όπου I_A και I_B είναι αντίστοιχα τα ρεύματα που εισέρχονται και εξέρχονται στο κύκλωμα A . Αν επιπλέον παραδεχτούμε ότι το ολικό φορτίο στο έσωτερικό του κυκλώματος A δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, η αρχή διατηρήσεως του φορτίου, με τη βοήθεια της έξ. (4.6), οδηγεί στην έξ. (4.2).

Οι δύο βασικές αρχές που εκφράζονται από τις έξ. (4.1) και (4.2) αναφέρονται συνήθως ως αρχή της μοναδικότητας διαφορικής δυναμικού και αρχή της συνέχειας. Στις δύο αυτές αρχές στηρίζεται η όλη διαδικασία της ανάλυσης κυκλωμάτων. Οι εξισώσεις που θα γράψουμε στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού, όσοδήποτε πολύπλοκες, αποτελούν σε τελευταία ανάλυση εφαρμογή των έξ. (4.1) και (4.2).

4-2 Η Ιδανική ΗΕΔ

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο η διαφορά δυναμικού που α-



ναπτύσσεται στα άκρα ενός ηλεκτρικού στοιχείου εξαρτάται από το ρεύμα I που διαρρέει το εξωτερικό κύκλωμα και την έσωτερική αντίσταση r του στοιχείου. Αν U είναι η ΗΕΔ του στοιχείου ή διαφορά δυναμικού V στους πόλους του δίνεται από την εξ. (3.28)

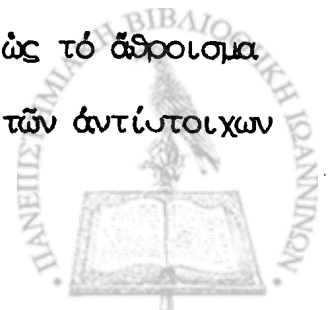
$$V = U - Ir. \quad (4.7)$$

Μιά χρήσιμη έννοια κατά την ανάλυση κυκλωμάτων είναι η έννοια της ιδανικής ΗΕΔ, δηλαδή ενός ηλεκτρικού στοιχείου με μηδενική έσωτερική αντίσταση. Η έννοια αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη κατά την επίλυση προβλημάτων στα οποία ζητείται η ολική αντίσταση μεταξύ δύο σημείων ενός κυκλώματος. Ο τύπος αυτός των προβλημάτων μπορεί να λυθεί αν αγνοηθεί το υπόλοιπο κύκλωμα και αν θεωρηθεί ότι στα συγκεκριμένα άκρα συνδέεται μία ιδανική ΗΕΔ. Καθόσον, σύμφωνα με την εξ. (4.7), στα άκρα του ιδεατού αυτού στοιχείου με μηδενική έσωτερική αντίσταση, αναπτύσσεται διαφορά δυναμικού ίση με την ΗΕΔ, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι ίσο με

$$I = \frac{U}{R} \quad (4.8)$$

όπου R η ολική αντίσταση.

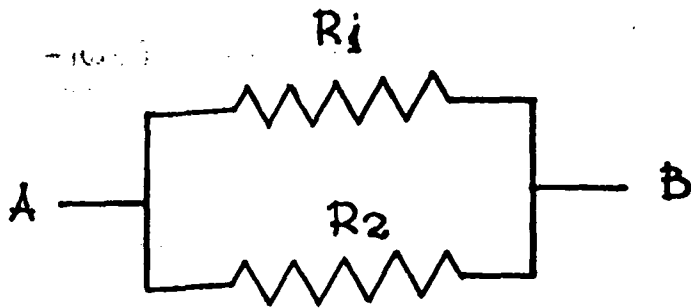
Ός πρώτη εφαρμογή της προηγούμενης μεθόδου θα υπολογίσουμε την ισοδύναμη αντίσταση R δύο στοιχείων ενός κυκλώματος στις έναλλακτικές συνδέσεις του σχήματος 4-2. Στο σχήμα 4-2(α), τα δύο στοιχεία, που για απλούστευση δίνονται ως δύο αντιστάσεις R_1 και R_2 , συνδέονται σέ σειρά. Αν στα ελεύθερα άκρα της διατάξεως συνδεθεί μία ιδανική ΗΕΔ, η ολική πτώση δυναμικού μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα των επιμέρους διαφορών δυναμικού V_1 και V_2 στα άκρα των αντίστοιχων αντιστάσεων R_1 και R_2 , ήτοι





$$R_{AB} = R_1 + R_2$$

(a)



$$R_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

(b)

ΣΧΗΜΑ 4-2. Έναλλακτική σύνδεση δύο αντιστάσεων. (a) σέ σειρά, (b) παράλληλα.

$$U = V_1 + V_2 \quad (4.9)$$

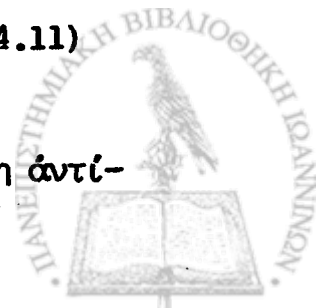
Από την άρχή της συνεχείας, οι δύο αντιστάσεις διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I και η έξ. (4.9) μπορεί να γραφεί ως

$$U = I R_1 + I R_2 = I (R_1 + R_2). \quad (4.10)$$

Σύγκριση της τελευταίας σχέσης με την έξ. (4.8) προσδιορίζει την ισοδύναμη αντίσταση για σύνδεση σέ σειρά ως

$$R = R_1 + R_2. \quad (4.11)$$

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε την ισοδύναμη αντί-



σταση στην παράλληλη σύνδεση του σχήματος 4-2(b). Η πτώση δυναμικού στα κοινά άκρα των δύο αντιστάσεων είναι

$$U = I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad (4.12)$$

όπου I_1 και I_2 είναι τα ρεύματα στις αντίστοιχες αντιστάσεις. Το άθροισμά τους είναι ίσο με το όλικό ρεύμα I που δημιουργεί η ιδανική ΗΕΔ U , ήτοι

$$I = \frac{U}{R} = I_1 + I_2 \quad (4.13)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των ρευμάτων I_1 και I_2 της έξ. (4.12) στην τελευταία σχέση, το όλικό ρεύμα παίρνει τη μορφή

$$I = \frac{U}{R} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.14)$$

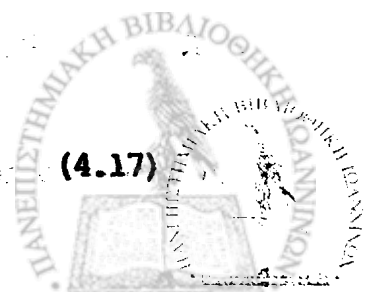
πού δίνει τη σύνδεση μεταξύ των αντιστάσεων R_1 και R_2 και της ισοδύναμης αντίστασης R

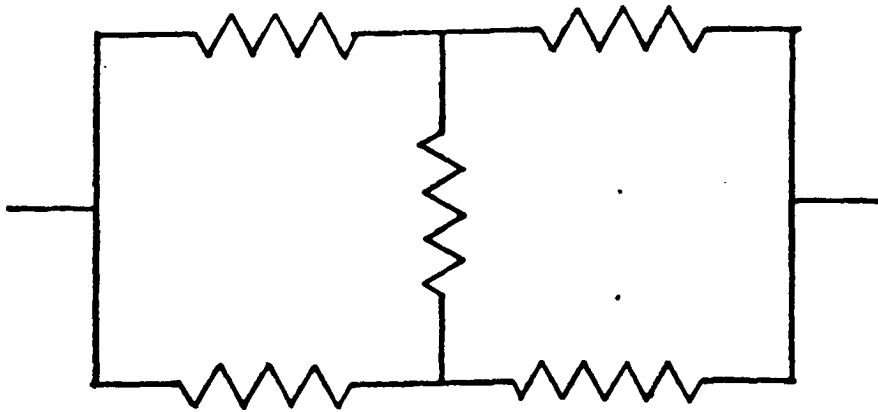
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (4.15)$$

$$\eta \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (4.16)$$

Οι έξ. (4.11) και (4.15) μπορούν εύκολα να γενικευτούν για μεγαλύτερο αριθμό αντιστάσεων που συνδέονται σε σειρά ή παράλληλα. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αν οι αντιστάσεις R_1, R_2, \dots, R_N συνδεθούν σε σειρά, η ισοδύναμη αντίσταση δίνεται από τη σχέση

$$R = \sum_{k=1}^N R_k \quad (4.17)$$





ΣΧΗΜΑ 4-3. Άπλό παράδειγμα κυκλώματος με σύνδεση αντιστάσεων που δέν μπορεί νά χαρακτηριστεί ούτε παράλληλη ούτε σέ σειρά.

Ἡ αντίστοιχη ἔκφραση γιά παράλληλη σύνδεση εἶναι

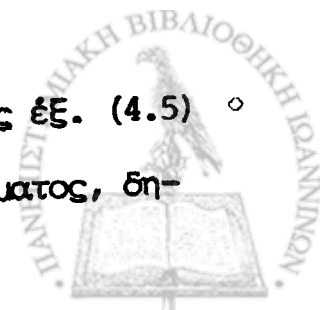
$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k} . \quad (4.18)$$

Πολλά κυκλώματα μπορούν νά ἐπιλυθοῦν τουλάχιστον κατ'ἀρχήν μέ τήν ἀναγνώριση τῶν ἐπιμέρους στοιχείων τους πού εἶναι συνδεδεμένα σέ σειρά ἢ παράλληλα καί μέ χρήση τῶν ἐξ. (4.17) καί (4.18). Ὑπάρχουν ὅμως κυκλώματα ὅπου ἡ σύνδεση δέν εἶναι ούτε παράλληλη ούτε σέ σειρά. Ἐνα ἀπλό παράδειγμα τοῦ τύπου αὐτοῦ τῶν κυκλωμάτων δίνεται στό σχῆμα 4-3. Γιά τέτοια κυκλώματα θά πρέπει ἐπομένως νά ἀναπτύξουμε γενικώτερες μεθόδους.

4-3 Οἱ Νόμοι τοῦ Kirchhoff

Ἡ γενίκευση τῶν δύο βασικῶν ἀρχῶν πού ἀναφέραμε στήν ἀρχή τοῦ κεφαλαίου καί ἡ ἐφαρμογή τους γιά τήν ἐπίλυση κυκλωμάτων ὁδηγεῖ σέ δύο σχέσεις πού εἶναι γνωστές ὡς νόμοι τοῦ Kirchhoff.

Ἡ πρώτη ἀπό τίς σχέσεις αὐτές εἶναι ἀμεση ἐφαρμογή τῆς ἐξ. (4.5) καί ἀφορᾷ τή διατήρηση τοῦ φορτίου σέ κάθε κόμβο τοῦ κυκλώματος, δη-



λαδή σε κάθε σημείο στο οποίο καταλήγουν περισσότεροι από δύο άγωγοί. Αν στους κόμβους του κυκλώματος δέν δημιουργείται ή χάνεται φορτίο τότε

1. Τό άλγεβρικό άθροισμα τών ρευμάτων πού καταλήγουν σε ένα κόμβο είναι ίσο μέ τό μηδέν.

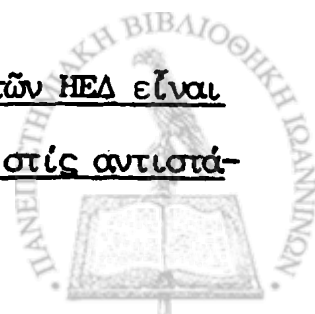
Σέ μαθηματική έκφραση

$$\sum_{k=1}^S I_k = 0 \quad (4.19)$$

όπου στην τελευταία σχέση τά διάφορα ρεύματα έχουν ληφθεϊ ως άλγεβρικές ποσότητες. Σύμφωνα μέ την άρχή διατηρήσεως του φορτίου θά επιλέξουμε ως θετικές ποσότητες ρεύματα πού καταλήγουν στον κόμβο και ως άρνητικές ποσότητες ρεύματα πού αναχωρούν από τον κόμβο.

Ο δεύτερος νόμος του Kirchhoff συνδέει την πτώση δυναμικού RI πού προκαλεί ή ροή του ρεύματος και την ΗΕΔ πού δημιουργεί τό ρεύμα σε κάθε βρόχο, δηλαδή σε κάθε κλειστή διαδρομή πού διαγράφεται από τά στοιχεία του κυκλώματος. Σύμφωνα μέ την άρχή μοναδικότητας του δυναμικού ή διαφορά δυναμικού πού δημιουργείται από τίς ΗΕΔ πρέπει νά είναι ίση μέ την όλική πτώση δυναμικού στις αντίστοιχες του βρόχου. Ποσοτικά μπορούμε νά διατυπώσουμε την άρχή αυτή μέ τό δεύτερο νόμο του Kirchhoff.

2. Σέ ένα βρόχο του κυκλώματος τό άλγεβρικό άθροισμα τών ΗΕΔ είναι ίσο μέ τό άλγεβρικό άθροισμα τών πτώσεων δυναμικού RI στις αντίστοι-



σεις τού βρόχου.

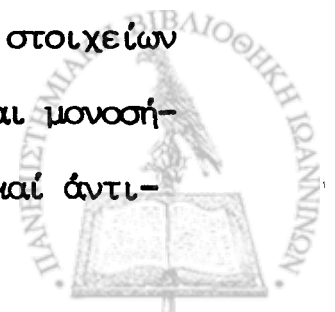
Στό νόμο αυτό, πού μπορεί νά έκφραστεῖ μαθηματικά ὡς

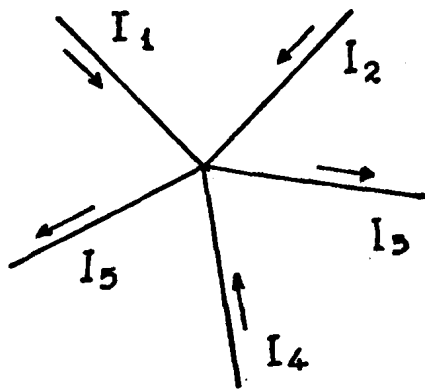
$$\sum_{k=1}^n U_k = \sum_{\ell=1}^p R_{\ell} I_{\ell} , \quad (4.20)$$

θά ἐπιλέξουμε τό άλγεβρικό πρόσημο σύμκωνα μέ τή συμβατική φορά τού ρεύματος, κατά τήν ὁποία στό ἐξωτερικό κύκλωμα ἑνός ἠλεκτρικοῦ στοιχείου τό ρεῦμα ρέει ἀπό τό θετικό πρὸς τόν ἀρνητικό πόλο. Ἐτσι ἂν διανύσουμε τό βρόχο κατά μιὰ συγκεκριμένη φορά, π.χ. τή δεξιόστραση, θετικές ΗΕΔ δημιουργοῦνται ἀπὸ ἠλεκτρικά στοιχεῖα στά ὁποῖα ὁ ἀρνητικός πόλος ἀπαντᾶται πρῖν ἀπὸ τό θετικό. Κατά τόν ἴδιο τρόπο θετική πτώση δυναμικοῦ δημιουργεῖται ἀπὸ ρεῦμα πού ρέει σύμκωνα μέ τή συμβατική ροή.

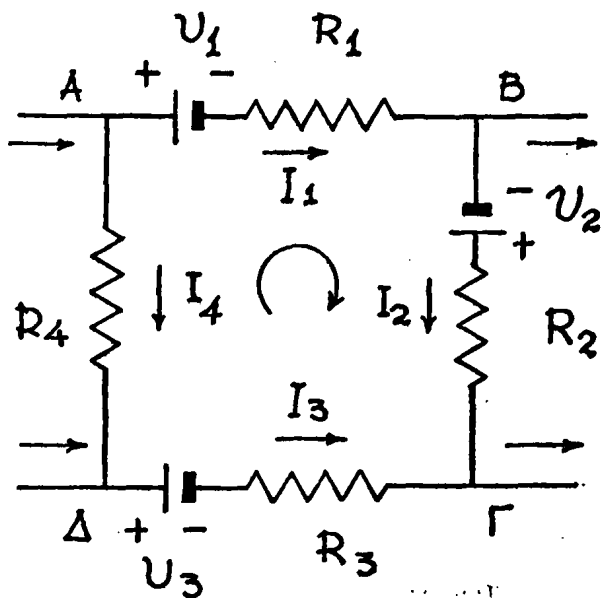
Οἱ δύο νόμοι τοῦ Kirchhoff δίνονται διαγραμματικά στά σχήματα 4-4. Τό σχῆμα 4-4(α) ἐκφράζει τήν ἐξ. (4.19) σέ ἕνα κόμβο μέ 5 κλάδους. Στό σχῆμα 4-4(β) ἔχει ἀπομονωθεῖ ἕνας βρόχος τοῦ κυκλώματος μέ 4 κλάδους. Σύμκωνα μέ τή δεξιόστραση διαδρομῆ καί γιὰ τή φορά τῶν ρευμάτων πού ἔχει σχεδιαστεῖ μέ τά ἀντίστοιχα βέλη, ἄμεση ἐφαρμογή τῆς ἐξ. (4.20) καταλήγει στή σχέση πού περιέχεται στό σχῆμα.

Ἐνάλυση ἢ ἐπίλυση ἑνός κυκλώματος διαμέσου τῶν δύο νόμων τοῦ Kirchhoff σημαίνει ὅτι ὁρισμένες ἀπὸ τίς ποσότητες πού περιέχονται στίς ἐξ. (4.19) καί (4.20) εἶναι ἀγνωστες. Στήν πράξη οἱ ἀγνωστοί μπορεί νά εἶναι ὁποιοσδήποτε συνδιασμός ΗΕΔ, ἀντιστάσεων ἢ ρευμάτων πού μποροῦν νά βρεθοῦν ἂν ὁ ἀριθμός τῶν ὑπόλοιπων γνωστῶν στοιχείων τοῦ κυκλώματος εἶναι ικανοποιητικός ὥστε νά προσδιορίζονται μονοσήμαντα. Στήν πιό συνήθη κατηγορία προβλημάτων ὅλες οἱ ΗΕΔ καί ἀντι-





$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$$



$$\begin{aligned} & -U_1 + U_2 + U_3 \\ & = I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_4 R_4 \end{aligned}$$

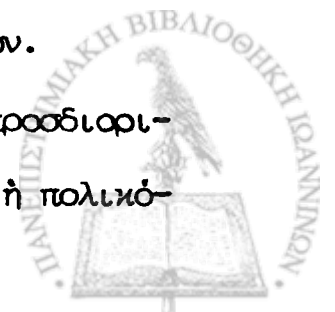
ΣΧΗΜΑ 4-4. Έφαρμογή τών νόμων του Kirchhoff. (α) Πρώτος νόμος του Kirchhoff σε κόμβο με 5 κλάδους. (β) Δεύτερος νόμος του Kirchhoff σε βρόχο κυκλώματος.

στάσεις είναι γνωστές και ζητούνται τά ρεύματα σε κάθε κλάδο του κυκλώματος. Αυτή είναι και η κατηγορία προβλημάτων που κατ'έξοχήν αναφέρεται ως "ανάλυση κυκλώματος". Παρόλα αυτά υπάρχουν περιπτώσεις, ιδίως στη σχεδίαση κυκλωμάτων για ένα ορισμένο σκοπό, όπου ορισμένα από τα ρεύματα προσδιορίζονται άρχικά, και ζητούνται οι ΗΕΔ ή οι άν-

τιστάσεις που χρειάζονται για να τα δημιουργήσουν. Ένα τέτοιο πρόβλημα απαντήσαμε στην κατασκευή άμοιτρού με πολλαπλή κλίμακα (βλ. σχήμα 3-23) όπου χρειάστηκε να προσδιορίσουμε την τιμή της αντίστασης R_1 ώστε το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_Δ να εκπληρώνει μία συγκεκριμένη συνθήκη.

Κατά την κατάστρωση των εξισώσεων του Kirchhoff το πρόβλημα που εμφανίζεται εκ πρώτης όψεως είναι ο προσδιορισμός της φοράς του ρεύματος σε κάθε κλάδο του κυκλώματος. Είναι βέβαιο ότι σε πολλούς κλάδους του κυκλώματος η φορά του ρεύματος είναι προφανής. Πώς όμως μπορεί να προσδιοριστεί το άλγεβρικό πρόσημο του ρεύματος στον κλάδο ενός πολύπλοκου κυκλώματος που περιέχει ένα μεγάλο αριθμό από αντιστάσεις και αντιμαχόμενες ΗΕΔ; Η απάντηση βρίσκεται ακριβώς στην άλγεβρική ιδιότητα που δώσαμε στο ρεύμα. Με τον τρόπο αυτό ο προσδιορισμός της φοράς του ρεύματος κατά την κατάστρωση των εξισώσεων δεν έχει ουσιαστική σημασία. Σε κάθε κλάδο του κυκλώματος όπου το ρεύμα είναι άγνωστο μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα μία συγκεκριμένη φορά και να την ονομάσουμε θετική. Η διαδικασία αυτή διευκολύνεται σημαντικά με τη χρησιμοποίηση ενός βέλους, όπως στα σχήματα 4-4. Η πραγματική φορά (και τιμή) κάθε ρεύματος θα προέλθει τώρα από την επίλυση των εξ. (4.19) και (4.20) που έχουν καταστρωθεί με βάση την αυθαίρετη αυτή επιλογή. Ρεύματα που προσδιορίζονται από τη λύση των εξισώσεων του Kirchhoff με θετική τιμή έχουν πράγματι τη φορά που σημειώνεται από τα βέλη του αρχικού σχήματος. Αντίστροφα ρεύματα με αρνητική τιμή έχουν πραγματική φορά αντίθετη απ'αυτή που έχει επιλεγεί για την κατάστρωση των εξισώσεων.

Η ίδια διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό μιας άγνωστης ΗΕΔ. Κατά την κατάστρωση των εξισώσεων η πολικό-



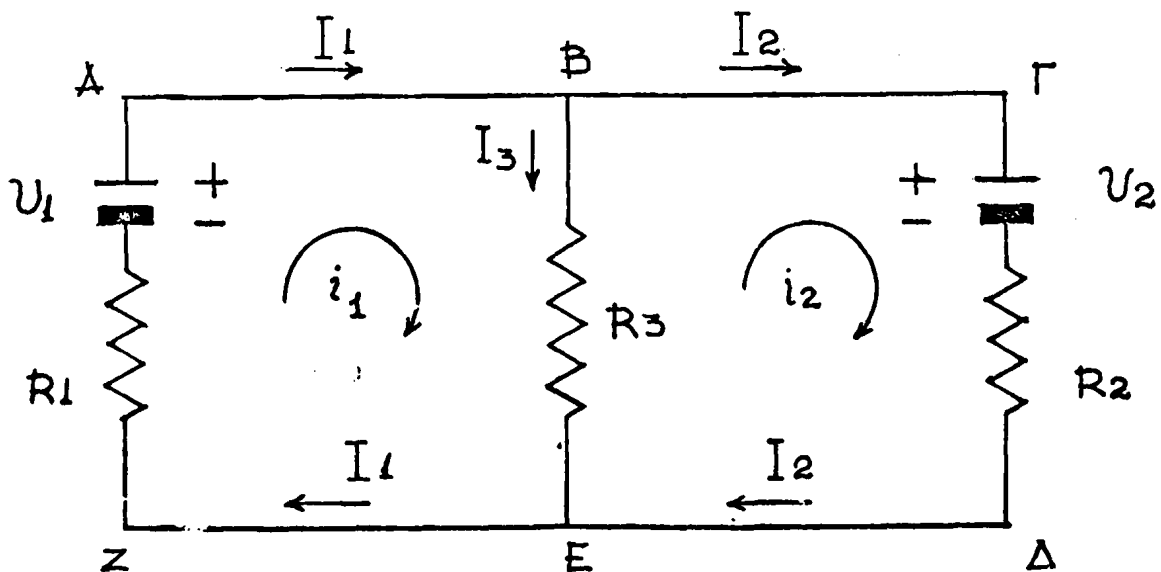
τητα του άγνωστου ηλεκτρικού στοιχείου μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα, ενώ η πραγματική διάταξη των πόλων του θα προσδιοριστεί από την αλγεβρική τιμή της ΗΕΔ που θα προκύψει ως λύση.

Ας εξετάσουμε την εφαρμογή των νόμων του Kirchhoff με το απλό παράδειγμα του σχήματος 4-5. Το κύκλωμα που δίνεται στο σχήμα περιέχει δύο κόμβους στα σημεία Β και Ε και τρεις βρόχους ΑΒΕΖΑ, ΒΓΔΕΒ και ΑΒΓΔΕΖΑ. Για τη φορά των ρευμάτων που έχει σημειωθεί στο σχήμα ο πρώτος νόμος του Kirchhoff οδηγεί στις εξισώσεις

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (4.21\alpha)$$

$$I_2 + I_3 - I_1 = 0. \quad (4.21\beta)$$

Εξάλλου για τους τρεις βρόχους του κυκλώματος, ο δεύτερος νόμος δίνει τις σχέσεις



ΣΧΗΜΑ 4-5. Απλό κύκλωμα με δύο κόμβους και τρεις βρόχους.



$$\text{ABEZA} : U_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3 \quad (4.22\alpha)$$

$$\text{BΓΔΕΒ} : -U_2 = I_2 R_2 - I_3 R_3 \quad (4.22\beta)$$

$$\text{ΑΒΓΔΕΖΑ} : U_1 - U_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2. \quad (4.22\gamma)$$

Είναι άμεσα φανερό ότι οι πέντε παραπάνω εξισώσεις δέν είναι όλες ανεξάρτητες. Οι έξ. (4.21) συνδέονται μέ απλή αλλαγή του προσήμου ενώ ή έξ. (4.22γ) έπεται από τίς έξ. (4.22α) και (4.22β) μέ πρόσθεση κατά μέλη. Ή περίσια αυτή τών εξισώσεων δέν είναι βέβαια χαρακτηριστικό του είδικου κυκλώματος πού δίνεται στό σχήμα 4-5. Γενικά ο αριθμός τών εξισώσεων πού προκύπτει από τούς δύο νόμους του Kirchhoff για κάθε κόμβο και κάθε δυνατό βρόχο ενός κυκλώματος είναι πολύ μεγαλύτερος από τόν αριθμό τών άγνωστων. Παράλληλα, όπως προκύπτει και από τό προηγούμενο απλό παράδειγμα, όλες οι εξισώσεις δέν είναι ανεξάρτητες. Είναι επομένως ενδιαφέρον νά διερευνήσουμε μέ κάποια λεπτομέρεια πόσες ανεξάρτητες εξισώσεις περιμένουμε από τήν εφαρμογή τών δύο νόμων του Kirchhoff σέ ένα τυχόν κύκλωμα.

Γιά ένα κύκλωμα μέ n κόμβους, μπορούμε κατ'άρχήν νά γράψουμε n εξισώσεις σέ εφαρμογή του πρώτου νόμου. Τώρα, ο πρώτος νόμος του Kirchhoff είναι ή μαθηματική έκφραση τής άρχής ότι σέ κάθε κόμβο του κυκλώματος (ή γενικότερα σέ κάθε σημείο) δέν παρουσιάζεται συσσώρευση φορτίου. Καθόσον τό φορτίο πού κυκλοφορεί μέσα στό κύκλωμα είναι σταθερό, έπεται ότι αν ή άρχή αυτή διατυπωθεϊ για $n-1$ κόμβους τότε ικανοποιεϊται αυτόματα και για τόν τελευταίο. Μέ άλλα λόγια, σέ ένα κύκλωμα μέ n κόμβους μπορούμε νά γράψουμε $n-1$ ανεξάρτητες εξισώσεις πού άπορρέουν από τόν πρώτο νόμο του Kirchhoff.



Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνεξάρτητων ἐξισώσεων πού θά προκύψουν ἀπὸ τὸ δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν στοιχειωδῶν βρόχων τοῦ κυκλώματος. Μὲ τὸν τελευταῖο ὄρο, ἐννοοῦμε ἓνα βρόχο, ὁποῖος δέν περιλαμβάνει ἄλλους μικρότερους βρόχους. Εἶναι ἀμέσως φανερό ὅτι ἂν ἓνα κύκλωμα περιέχει β στοιχειώδεις βρόχους, ὅλες οἱ ἀντίστοιχες ἐξισώσεις πού προκύπτουν ἀπὸ τὸν δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff εἶναι ἀνεξάρτητες. Ἐπιπλέον, ἂν ἔχουν γραφεῖ οἱ ἐξισώσεις γιὰ ὅλους τοὺς στοιχειώδεις βρόχους, κάθε ἄλλη ἐξίσωση τοῦ δευτέρου νόμου πού θά προκύψει ἀπὸ τὴ θεώρηση τοῦ ἀντίστοιχου (μὴ στοιχειώδη) βρόχου δέν πρόκειται νὰ εἶναι ἀνεξάρτητη. Ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 4-5, ἡ ἐξίσωση τοῦ δευτέρου νόμου γιὰ τὸ περίγραμμα δύο γειτονικῶν βρόχων, προκύπτει μὲ ἀφαίρεση κατὰ μέλη τῶν ἀντίστοιχων ἐξισώσεων γιὰ κάθε στοιχειώδη βρόχο. Στὸ ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε ἂν θεωρήσουμε τρεῖς ἢ περισσότερους γειτονικούς βρόχους. Τὸ γεγονός αὐτὸ βέβαια εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς γραμμικότητος τῶν ἐξ. (4.20). Ἐπομένως, σέ ἓνα κύκλωμα μὲ β στοιχειώδεις βρόχους μπορούμε νὰ γράψουμε β ἀνεξάρτητες ἐξισώσεις πού ἀπορρέουν ἀπὸ τὸ δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff.

Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω, τὸ πλῆθος N τῶν ἀνεξάρτητων ἐξισώσεων πού προκύπτουν ἀπὸ τοὺς νόμους τοῦ Kirchhoff γιὰ ἓνα κύκλωμα μὲ n κόμβους καὶ β στοιχειώδεις βρόχους εἶναι

$$N = \beta + n - 1. \quad (4.23)$$

Αὐτὸς βέβαια εἶναι καὶ ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν ἀγνωστων στοιχείων ἑνὸς κυκλώματος πού μπορούμε νὰ προσδιορίσουμε. Στὴν πράξη, γιὰ ἓνα συγκεκριμένο κύκλωμα, εἶναι πολὺ πιὸ εὐκόλο νὰ μετρήσουμε τοὺς κόμβους καὶ τοὺς κλάδους ἑνὸς κυκλώματος παρά τοὺς στοιχειώδεις βρόχους.

Είναι επομένως χρήσιμο να εκφράσουμε την ποσότητα της έξ. (4.23) ανεξάρτητα από τον αριθμό β.

Σύμφωνα με ένα πόρισμα της Γεωμετρίας, που θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη[†], τα χαρακτηριστικά μεγέθη β και κ ενός κυκλώματος συνδέονται με το πλήθος των κλάδων του α διαμέσου της σχέσης

$$\kappa + \beta - \alpha = 1 \quad (4.25)$$

Σε συνδιασμό με την έξ. (4.23) η σχέση αυτή δίνει το απλό αποτέλεσμα

$$N = \alpha \quad (4.26)$$

δηλαδή οτι το πλήθος των εξισώσεων που προκύπτει από την εφαρμογή των δύο νόμων του Kirchhoff είναι ίσο με το πλήθος των κλάδων του κυκλώματος. Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με την φυσική διαίσθηση. "Αν σε ένα κύκλωμα με α κλάδους δοθούν όλα τα στοιχεία

[†] Η έξ. (4.25) είναι άμεσο αποτέλεσμα του γενικού θεωρήματος της Γεωμετρίας σύμφωνα με το όποιο το πλήθος των έδρων ε, των άκμών α και των κορυφών κ ενός στερεοῦ πολυέδρου συνδέονται με τη σχέση

$$\kappa + \epsilon - \alpha = 2 \quad (4.24)$$

Εάν παραληφθεῖ μιὰ ἔδρα του πολυέδρου καὶ ἡ ὑπόλοιπη ἐπιφάνεια μετασχηματιστεῖ τοπολογικὰ σὲ ἐπίπεδο σχῆμα, οἱ κορυφές μετασχηματίζονται σὲ κόμβους, οἱ ἀκμές σὲ κλάδους καὶ οἱ ἔδρες σὲ στοιχειώδεις βρόχους του κυκλώματος. Τό πλήθος των τελευταίων είναι

$$\beta = \alpha - 1$$

καὶ ἡ έξ. (4.24) ὀδηγεῖ στήν έξ. (4.25)!



(άντιστάσεις και ΗΕΔ) τότε οι ανεξάρτητες εξισώσεις που προσφέρουν οι νόμοι του Kirchhoff έπαρκούν για τον προσδιορισμό του ρεύματος σε κάθε κλάδο. Αντίστροφα, αν δοθούν τά ρεύματα σε n ($n < a$) κλάδους, τό πρόβλημα έχει μονοσήμαντη λύση μόνο αν τό πλήθος τών άγνωστων στοιχείων είναι ίσο μέ $a - n$.

Είναι ίσως χρήσιμο νά άνακεφαλαιώσουμε τήν διεργασία για τήν επίλυση κυκλωμάτων διαμέσου τών νόμων του Kirchhoff. Υπό μορφή συνταγής, ή διεργασία αύτή μπορεί νά διατυπωθεϊ μέ τά έξής διάκριτα βήματα:

1. Προσδιορίστε τό πλήθος n τών κόμβων και τό πλήθος a τών κλάδων του κυκλώματος.
2. Καθορίστε τή φορά τών ρευμάτων σε κάθε κλάδο του κυκλώματος. Ο συμβολισμός τής φοράς του ρεύματος μπορεί νά γίνει μέ βέλη, όπως στό παράδειγμα του σχήματος 4-5. Σε κλάδους όπου ή φορά δέν είναι γνωστή ή προφανής, μπορεί νά σημειωθεϊ αύθαίρετα.
3. Σε κλάδους του κυκλώματος όπου υπάρχουν περισσότερες από μία άντιστάσεις και ΗΕΔ προσδιορίστε τήν όλική άντίσταση και όλική ΗΕΔ του κλάδου.
4. Σημειώστε τήν πολικότητα όλων τών ΗΕΔ. Επιλέξτε αύθαίρετα τήν πολικότητα τών άγνωστων ΗΕΔ.
5. Γράψτε τίς εξισώσεις του πρώτου νόμου για $n-1$ κόμβους του κυκλώματος.
6. Γράψτε $a - n + 1$ εξισώσεις του δεύτερου νόμου. Βεβαιωθεϊτε ότι οι εξισώσεις αυτές είναι ανεξάρτητες. Αν και ή συνθήκη



αυτή μπορεί να εξασφαλιστεί με την επιλογή αποκλειστικά στοιχειωδών βρόχων, σε πολλές εφαρμογές το σύστημα των εξισώσεων είναι απλούστερο αν συμπεριληφθούν και μεγαλύτεροι βρόχοι. Στην περίπτωση αυτή ένα κριτήριο για την ανεξαρτησία των εξισώσεων του δεύτερου νόμου είναι η συμμετοχή κάθε κλάδου σε τουλάχιστον μία εξίσωση.

7. Επιλύστε το σύστημα των εξισώσεων.
8. Διορθώστε τη φορά των άγνωστων ρευμάτων και την πολικότητα των άγνωστων ΗΕΔ για τις αντίστοιχες λύσεις που προκύπτουν με άρνητική τιμή.
9. Επαληθεύστε τις λύσεις σας χρησιμοποιώντας τις αριθμητικές τιμές που προκύπτουν για το κόμβο που παραλείψατε στις εξισώσεις του πρώτου νόμου ή για βρόχους που δεν θεωρήσατε στις εξισώσεις του δεύτερου.

4-4 Ρεύμα Βρόχου

Η επίλυση ενός κυκλώματος διαμέσου των νόμων του Kirchhoff μπορεί να απλοποιηθεί σε ορισμένες περιπτώσεις με την εισαγωγή νέων μεταβλητών. Μια μέθοδος της κατηγορίας αυτής είναι η εισαγωγή ενός αριθμού ρευμάτων i_v που θεωρούνται ότι διαρρέουν ανεξάρτητα και κατά συγκεκριμένη φορά ένα αντίστοιχο αριθμό βρόχων του κυκλώματος. Κάθε ρεύμα βρόχου ορίζεται με σταθερή τιμή i_v καθόλη την κλειστή διαδρομή του αντίστοιχου βρόχου ενώ το πραγματικό ρεύμα σε κάθε κλάδο δίνεται από το άλγεβρικό άθροισμα όλων των ρευμάτων βρόχων που τον διαρρέουν.

Είναι βέβαιο ότι η εισαγωγή νέων μεταβλητών απαιτεί αντίστοιχη



αύξηση τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος καί ἐπομένως ἐκ πρώτης ὄψεως μπορεῖ νά φανεῖ ὅτι περιπλέκει τό πρόβλημα. Ὅπως εἶδαμε στήν προηγούμενη παράγραφο τό πλήθος τῶν ἀνεξάρτητων ἐξισώσεων πού μπορούμε νά γράψουμε μέ βάση τό δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff εἶναι ἴσο μέ τό πλήθος β τῶν στοιχειωδῶν βρόχων τοῦ κυκλώματος. Ἄν τώρα γιά κάθε στοιχειώδη βρόχο εἰσάγουμε ἕνα ρεῦμα βρόχου i_ν (β νέες μεταβλητές) μπορούμε νά γράψουμε ἕνα ἀριθμό α ἐπιπλέον ἀνεξάρτητων σχέσεων

$$I_\mu = \sum_\nu i_\nu \quad (4.27)$$

πού συνδέουν τά πραγματικά ρεύματα I_μ κάθε κλάδου μέ τά νοητά ρεύματα βρόχων πού διαρρέουν τό συγκεκριμένο κλάδο. Ὁ συνολικός ἐπομένως ἀριθμός τῶν ἀνεξάρτητων ἐξισώσεων πού μπορούμε νά γράψουμε γιά τό κύκλωμα χρησιμοποιώντας τόν δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff καί τίς σχέσεις τῆς ἐξ. (4.27) εἶναι $\alpha + \beta$. Αὐτό ὅμως εἶναι καί τό πλήθος τῶν ἀγνώστων μετά τήν εἰσαγωγή τῶν β ρευμάτων βρόχων. Τό πλεονέκτημα ἐπομένως τῆς μεθόδου ἀφείλεται στό γεγονός ὅτι μέ τήν εἰσαγωγή τῶν ρευμάτων βρόχων μπορούμε νά ἐπιλύσουμε τό κύκλωμα χρησιμοποιώντας ἀποκλειστικά τόν δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff καί τίς ἀπλές σχέσεις τῆς ἐξ. (4.27). Στό ἀποτέλεσμα αὐτό μπορεῖ νά ὀδηγηθεῖ κανεῖς καί ἀπό φυσική διαίσθηση. Ἄπό τόν τρόπο ὀρισμοῦ τους, τά ρεύματα βρόχων ικανοποιοῦν τήν ἀρχή διατηρήσεως τοῦ φορτίου καθώς καί τή συνθήκη ὅτι σέ κανένα σημεῖο τοῦ κυκλώματος δέν πραγματοποιεῖται συσσώρευση φορτίου. Αὐτές ὅμως εἶναι ἀκριβῶς οἱ συνθήκες πού ἐκφράζουν οἱ ἐξισώσεις τοῦ πρώτου νόμου τοῦ Kirchhoff.

Ὅπως προκύπτει ἀπό τά προηγούμενα, γιά τήν συμπλήρωση τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου νόμου τοῦ Kirchhoff πρέπει νά ὀριστοῦν β ρεύ-



ματα βρόχων. Ἡ πιό προφανής ἐπιλογή εἶναι ὁ καθορισμός ἑνός ρεύματος γιὰ κάθε στοιχειώδη βρόχο τοῦ κυκλώματος. Ἡ ἐπιλογή ὅμως αὐτή δέν εἶναι ἀπαραίτητη. Σέ πολλές περιπτώσεις οἱ ἐξισώσεις τοῦ δεύτερου νόμου μπορεῖ νά εἶναι ἀπλούστερες ἂν γιὰ καθορισμό τῶν νέων μεταβλητῶν ἐπιλεγοῦν καί μὴ στοιχειώδεις βρόχοι. Ὅπως καί προηγουμένως ἔνα χρήσιμο κριτήριο γιὰ τὴν ἐξασφάλιση μιᾶς πλήρους σειρᾶς μεταβλητῶν εἶναι ἡ συμμετοχή κάθε κλάδου τοῦ κυκλώματος σέ ἕνα τουλάχιστον βρόχο.

Ὡς παράδειγμα τῆς μεθόδου τοῦ ρεύματος βρόχου θά θεωρήσουμε πάλι τό ἀπλό κύκλωμα τοῦ σχήματος 4-5. Μὲ τὴν εἰσαγωγή τῶν δύο μεταβλητῶν i_1 καί i_2 πού ἀντιπροσωπεύουν τὰ ρεύματα στοὺς βρόχους ABEZA καί BΓΔΕΒ μποροῦμε νά γράψουμε τίς ἐξισώσεις τοῦ δεύτερου νόμου ὡς

$$U_1 = i_1 R_1 + i_1 R_3 - i_2 R_3 \quad (4.28\alpha)$$

$$-U_2 = i_2 R_3 + i_2 R_2 - i_1 R_3 \quad (4.28\beta)$$

πού ὀδηγοῦν ἀμέσως στίς λύσεις

$$i_1 = \frac{(R_2 + R_3) U_1 - R_3 U_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (4.29\alpha)$$

$$i_2 = \frac{R_3 U_1 - (R_1 + R_3) U_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (4.29\beta)$$

Τὰ πραγματικά ρεύματα στοὺς τρεῖς κλάδους τοῦ κυκλώματος δίνονται τώρα ἀπὸ τίς σχέσεις



$$I_1 = i_1 \quad (4.30\alpha)$$

$$I_2 = i_2 \quad (4.30\beta)$$

$$I_3 = i_1 - i_2 \quad (4.30\gamma)$$

ή

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3) U_1 - R_3 U_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (4.31\alpha)$$

$$I_2 = \frac{R_3 U_1 - (R_1 + R_3) U_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (4.31\beta)$$

$$I_3 = \frac{R_2 U_1 + R_1 U_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (4.31\gamma)$$

Δίνοντας συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές στις γνωστές παραμέτρους του προηγούμενου κυκλώματος ως θεωρήσουμε

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega \quad (4.32\alpha)$$

και

$$U_1 = 12 \text{ V}, \quad U_2 = 9 \text{ V} . \quad (4.32\beta)$$

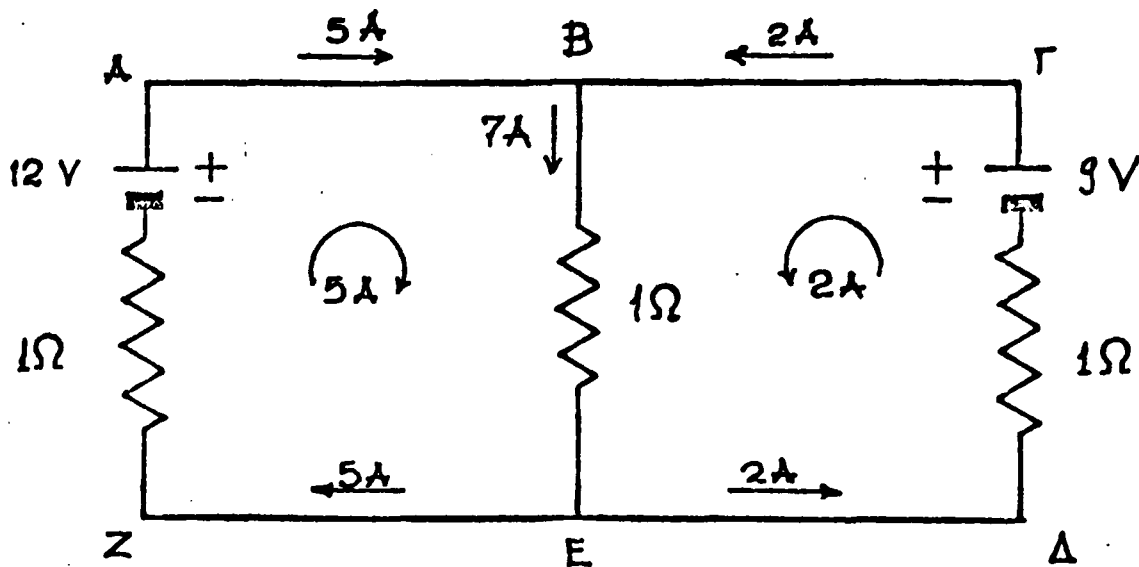
Για τις τιμές αυτές οι έξ. (4.29) έως (4.31) δίνουν

$$i_1 = 5 \text{ A}, \quad i_2 = -2 \text{ A} \quad (4.33)$$

και

$$I_1 = 5 \text{ A}, \quad I_2 = -2 \text{ A}, \quad I_3 = 7 \text{ A} \quad (4.34)$$





ΣΧΗΜΑ 4-6. Πραγματικά ρεύματα και ρεύματα βρόχων στο κύκλωμα του σχήματος 4-5 για τις αριθμητικές τιμές των έξ. (4.32).

Ἡ πραγματική φορά τῶν ρευμάτων τοῦ ἀριθμητικοῦ παραδείγματος δίνεται στοῦ σχήμα 4-6.

4-5 Τό θεώρημα τῆς Ἐπαλληλίας

Οἱ ἐξισώσεις τοῦ Kirchhoff (4.19) καί (4.20) συγκροτοῦν ἓνα σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων μέ α ἀγνώστους {βλ. ἐξ. (4.26)}. Ἄν οἱ ἀγνώστες παράμετροι τοῦ κυκλώματος εἶναι τά ρεύματα σέ κάθε κλάδο, ἡ λύση τοῦ συστήματος θά ἔχει τή γενική μορφή

$$I_k = \sum_{\ell=1}^n G_{k\ell} U_{\ell}, \quad k = 1, \dots, a \quad (4.35)$$

ὅπου n εἶναι τό πλήθος τῶν ΗΕΔ U_{ℓ} . Στήν τελευταία σχέση οἱ σταθεροί



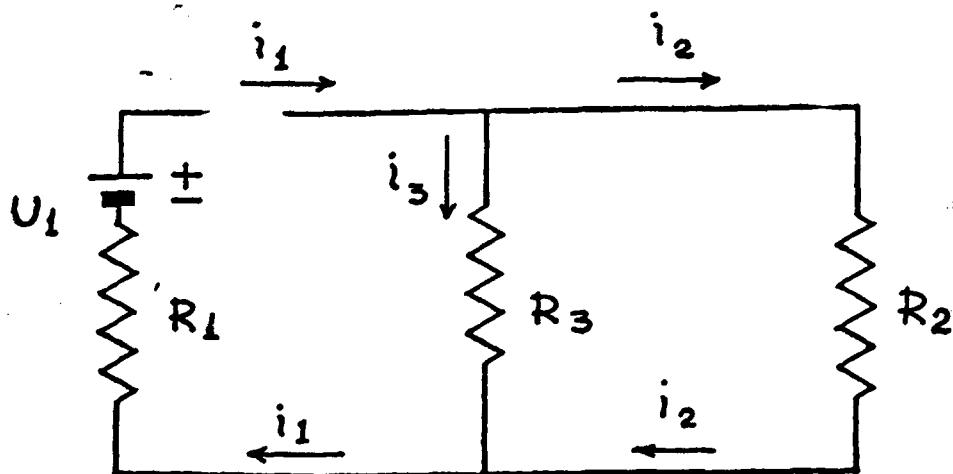
συντελεστές G_{kl} ($k = 1, \dots, \alpha$, $l = 1, \dots, n$) είναι αποκλειστικά συναρτήσεις των αντίστασεων του κυκλώματος, ενώ οι διαστάσεις τους, όπως μπορεί να επιβεβαιωθεί εύκολα από το νόμο του Ohm, είναι διαστάσεις αντίστροφης αντίστασης.

Η γενική μορφή των έξ. (4.35) οφείλεται στο γεγονός ότι οι νόμοι του Kirchhoff οδηγούν σε αποκλειστικά γραμμικές εξισώσεις όπου οι συντελεστές των ρευμάτων είναι άθροισμα αντίστασεων ή η μονάδα, ενώ οι ΗΕΔ εμφανίζονται σε γραμμικούς όρους με συντελεστή τη μονάδα. Ένα παράδειγμα των έξ. (4.35) είδαμε στην επίλυση του απλού κυκλώματος που δίνεται στο σχήμα 4-5 { βλ. έξ. (4.31)}.

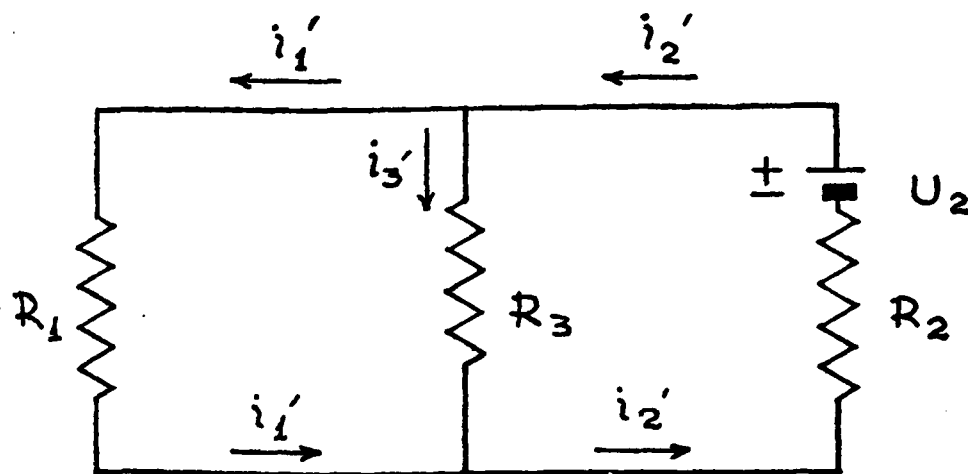
Η φυσική έρμηνεία που μπορεί να δοθεί στις έξ. (4.35) είναι ότι σε ένα συγκεκριμένο κλάδο του κυκλώματος ή συνεισφορά κάθε ΗΕΔ σε ρεύμα είναι ανεξάρτητη από τη συνεισφορά των άλλων ΗΕΔ, ενώ το όλο ρεύμα δημιουργείται από το άλγεβρικό άθροισμα των επίμερους ρευμάτων που δημιουργεί ανεξάρτητα κάθε ΗΕΔ. Η έρμηνεία αυτή της έξ. (4.35), που απαντάται με την όνομασία θεώρημα της έπιλληλίας, διευκολύνει συχνά την ανάλυση κυκλωμάτων. Σύμφωνα με την έρμηνεία της έξ. (4.35) το ρεύμα που συνεισφέρει σε ένα συγκεκριμένο κλάδο ή ΗΕΔ U_l είναι το ρεύμα που διαρρέει τόν κλάδο σε ένα όμοιο κύκλωμα όπου όλες οι υπόλοιπες ΗΕΔ έχουν αντικατασταθεί με την έσωτερική τους αντίσταση. Ο προσδιορισμός έπιμένως του πραγματικού ρεύματος στον κλάδο ανάγεται στο σταδιακό προσδιορισμό των ρευμάτων που τόν διαρρέουν αν θεωρήσουμε διαδοχικά την έπιενέργεια καθεμιās ΗΕΔ σε παρόμοια κύκλωματα όπου οι υπόλοιπες ΗΕΔ έχουν αντικατασταθεί με την έσωτερική τους αντίσταση.

Ός παράδειγμα έφαρμογής της μεθόδου που περιγράψαμε θά θεωρήσουμε για μιá ακόμη φορά τό κύκλωμα του σχήματος 4-5. Τά δύο κύκλωματα





(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 4-7. Ανάλυση του κυκλώματος 4-5 με εφαρμογή του θεωρήματος της έπαλληλίας.

Όπου η δράση των δύο ΗΕΔ U_1 και U_2 μπορεί να μελετηθεί ανεξάρτητα δίνονται αντίστοιχα στα σχήματα 4-7 (α) και 4-7 (β). Αν για χάρη απλότητας θεωρήσουμε την εσωτερική αντίσταση των δύο ΗΕΔ ως άμελητά, τότε το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_1 στο σχήμα 4-7 (α) δίνεται από απλή εφαρμογή του νόμου του Ohm ως

$$i_1 = \frac{U_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{(R_2 + R_3) U_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (4.36)$$



Τά ρεύματα στους δύο άλλους κλάδους διαμοιράζονται σύμφωνα με τη σχέση

$$i_2 R_2 = i_3 R_3 \quad (4.37)$$

ένω, από τον πρώτο νόμο του Kirchhoff, συνδέονται με τη σχέση

$$i_1 = i_2 + i_3. \quad (4.38)$$

Από τις σχέσεις αυτές είναι εύκολο να δείξουμε ότι τά ρεύματα στις αντίστοιχες R_2 και R_3 είναι

$$i_2 = \frac{R_3 U_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (4.39)$$

$$i_3 = \frac{R_2 U_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}. \quad (4.40)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο τά ρεύματα που διαρρέουν τους κλάδους του κυκλώματος στο σχήμα 4-7 (β) είναι

$$i_1' = \frac{R_3 U_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (4.41\alpha)$$

$$i_2' = \frac{(R_1 + R_3) U_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (4.41\beta)$$

$$i_3' = \frac{R_1 U_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}. \quad (4.41\gamma)$$

Τά πραγματικά ρεύματα στο άρχικό κύκλωμα του σχήματος 4-5 δίνονται τώρα από το θεώρημα της έπαλληλίας ως



$$I_1 = i_1 - i_1' = \frac{(R_2 + R_3)U_1 - R_3U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \quad (4.42\alpha)$$

$$I_2 = i_2' - i_2 = \frac{R_3U_1 - (R_1 + R_3)U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \quad (4.42\beta)$$

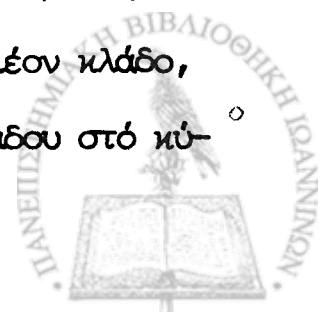
$$I_3 = i_3 + i_3' = \frac{R_2U_1 + R_1U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \quad (4.42\gamma)$$

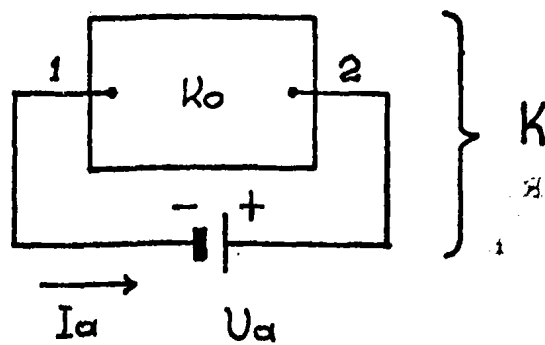
όπου ως θετική φορά του ρεύματος έχει ληφθεί ή δεξιόστροφη. Όπως περιμένουμε οι έξ. (4.42) ταυτίζονται με τις λύσεις των έξ. (4.31) που έδωσε ή μέθοδος των ρευμάτων βρόχου.

4-6 Ίσοδύναμη ΗΕΔ και Ίσοδύναμη Αντίσταση

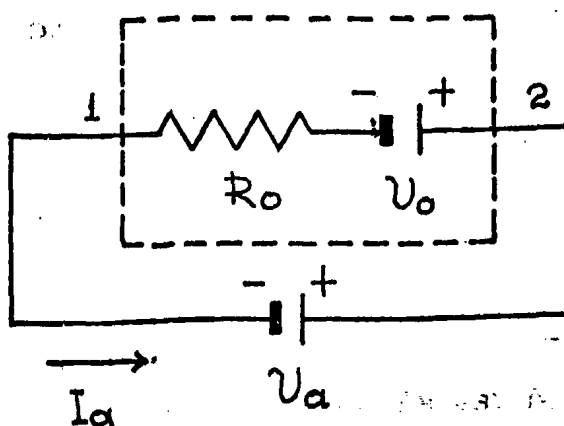
Χρησιμοποιώντας τή γενική μορφή των λύσεων στις έξ. (4.35) που συνεπάγεται τό θεώρημα τής έπαλληλίας μπορούμε νά δείξουμε τώρα τή βασική άρχή που αναφέραμε στην είσαγωγή του κεφαλαίου: Δύο συγκεκριμένα άκρα ενός κυκλώματος που περιέχει αντίστασεις και πηγές ΗΕΔ μπορούν νά θεωρηθούν ως τά άκρα ενός κλάδου που περιέχει μιά αντίσταση και μιά πηγή ΗΕΔ. Χρησιμοποιώντας άόχη τήν έννοια τής ιδανικής ΗΕΔ μπορούμε νά προσδιορίσουμε διαδικαστικά τήν τιμή τής ίσοδύναμης ΗΕΔ και ίσοδύναμης αντίστάσεως που αντικαθιστούν τό άρχικό κύκλωμα.

Άς θεωρήσουμε τό κύκλωμα K_0 - που για χάρη γενικότητας παριστάνεται με ένα κιβώτιο στό σχήμα 4-8(α) - και τά δύο συγκεκριμένα άκρα του κύκλωματος 1 και 2. Άν μεταξύ των άκρων αυτών συνδέσουμε τήν ιδανική ΗΕΔ U_a δημιουργείται τό νέο κύκλωμα K με ένα έπιπλέον κλάδο, που θά όνομάσουμε κλάδο a . Τό ρεύμα I_a του νέου αυτού κλάδου στό κύκλωμα K μπορεί νά γραφεί σύμφωνα με τήν έξ. (4.35) ως





(α)



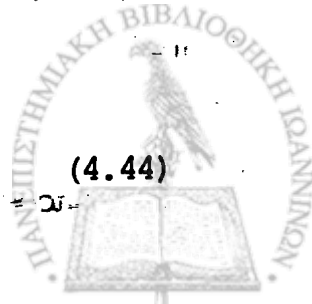
(β)

ΣΧΗΜΑ 4-8. Διαδικασία αντικατάστασης του κυκλώματος K_0 με το ισοδύναμο κύκλωμα μιας αντίστασης και μιας ΗΕΔ σε σειρά.

$$I_a = \sum_{\ell=1}^n G_{a\ell} U_{\ell} + G_{aa} U_a \quad (4.43)$$

Στην τελευταία σχέση οι n ΗΕΔ U_{ℓ} είναι οι ΗΕΔ που περιέχονται στο αρχικό κύκλωμα K_0 ενώ οι συντελεστές αγωγιμότητας $G_{a\ell}$ αναφέρονται στο κύκλωμα K . Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι η εξ. (4.43) παίρνει τη μορφή

$$I_a = G_{aa} U_a \quad (4.44)$$



άν όλες οι ΗΕΔ του κυκλώματος K_0 μηδενιστούν. Δηλαδή, ο συντελεστής αγωγιμότητας G_{aa} του κλάδου a μπορεί να προσδιοριστεί από το κύκλωμα που προκύπτει από το άρχικό κύκλωμα K_0 αν αγνοήσουμε όλες τις ΗΕΔ.

Ο πρώτος όρος της έξ. (4.43) αντιπροσωπεύει το ρεύμα στον κλάδο a για ιδανική ΗΕΔ $U_a = 0$. Με άλλα λόγια είναι το ρεύμα με το οποίο τροφοδοτείται ο κλάδος από το κύκλωμα K_0 για απλή βραχυκύκλωση των άκρων 1 και 2. Το ρεύμα αυτό, που θα ονομάσουμε ρεύμα βραχυκύκλωσης,

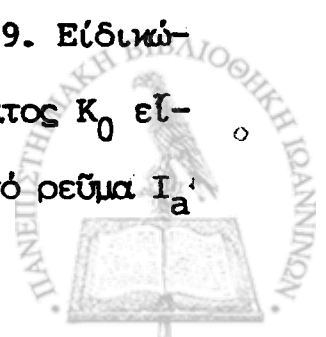
$$I_s \equiv \sum_{\ell=1}^n G_{a\ell} U_{\ell} \quad (4.45)$$

είναι μία χαρακτηριστική σταθερά του άρχικού κυκλώματος K_0 και μπορεί να προσδιοριστεί με οποιαδήποτε από τις μεθόδους ανάλυσης κυκλωμάτων που αναπτύξαμε ως τώρα. Με τον προσδιορισμό του ρεύματος βραχυκύκλωσης I_s , η έξ. (4.43) παίρνει τώρα τη μορφή

$$I_a = I_s + G_{aa} U_a. \quad (4.46)$$

Αν επιπλέον ο προσανατολισμός της ιδανικής ΗΕΔ έχει επιλεγεί κατά τρόπο ώστε η παρουσία της στο κύκλωμα να συνεισφέρει θετικά στο ρεύμα I_s , ο συντελεστής αγωγιμότητας G_{aa} στην έξ. (4.46) είναι θετική ποσότητα.

Η επέκταση του κυκλώματος K_0 στο κύκλωμα K θυμίζει τον προσδιορισμό της ΗΕΔ C στην πειραματική διάταξη του σχήματος 3-19. Ειδικότερα, η ΗΕΔ που αναπτύσσεται στα άκρα 1 και 2 του κυκλώματος K_0 είναι ίση και αντίθετη προς την ιδανική ΗΕΔ που μηδενίζει το ρεύμα I_a .



στον έξωτερικό κλάδο a του κυκλώματος K . Για $I_a = 0$, ή έξ. (4.46) προσδιορίζει την τιμή της ιδανικής ΗΕΔ U_a ως

$$U_{a0} = - \frac{I_s}{G_{aa}} \cdot \quad (4.47)$$

Ἡ ισοδύναμη ΗΕΔ του κυκλώματος K_0 μπορεί επομένως να οριστεί ως

$$U_0 \equiv - U_{a0} = \frac{I_s}{G_{aa}} \cdot \quad (4.48)$$

Μέ τον τελευταίο ορισμό ή έξ. (4.46) παίρνει τη μορφή

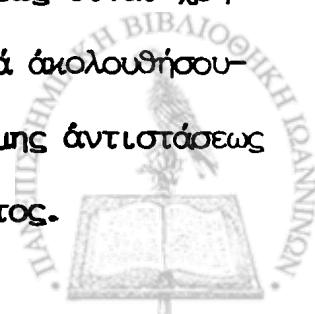
$$I_a = (U_0 + U_a) G_{aa} \quad (4.49)$$

πού άμέσως αναγνωρίζεται ως ο νόμος του Ohm. Ἡ έρμηνεία της έξ. (4.49) δίνεται στο σχήμα 4-8(β). Καθόσον ή ιδανική ΗΕΔ έχει μηδενική αντίσταση, ή αντίσταση

$$R_0 \equiv \frac{1}{G_{aa}} \quad (4.50)$$

είναι ίση με την αντίσταση που παρεμβάλει τό κύκλωμα K_0 μεταξύ των άκρων 1 και 2. Θα ονομάσουμε την ποσότητα που ορίζει ή έξ. (4.50) ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος K_0 .

Ἡ παραπάνω διαδικασία ορίζει την ισοδύναμη ΗΕΔ και ισοδύναμη αντίσταση που παρεμβάλει ένα κύκλωμα μεταξύ δύο συγκεκριμένων άκρων του. Ἐπιπλέον όμως προσδιορίζει και τη μέθοδο ύπολογισμοῦ των δύο αὐτῶν χαρακτηριστικῶν σταθερῶν U_0 και R_0 ενός κυκλώματος. Ἴσως είναι χρήσιμο να συνοψίσουμε τά διάκριτα βήματα που θα πρέπει να ακολουθήσουμε για τόν προσδιορισμό της ισοδύναμης ΗΕΔ και ισοδύναμης αντίστασεως που αντιστοιχοῦν σε δύο συγκεκριμένα άκρα ενός κυκλώματος.



1. Η ισοδύναμη αντίσταση R_0 μπορεί να βρεθεί αν αντικαταστήσουμε όλες τις ΗΕΔ του κυκλώματος με τις έσωτερικές τους αντιστάσεις - ή τις αγνοήσουμε τελείως στην περίπτωση όπου η έσωτερική αντίσταση είναι άμελητά.
2. Βραχυκυκλώνοντας τα δύο άκρα του κυκλώματος μπορούμε να υπολογίσουμε το ρεύμα βραχυκυκλώσεως I_S με κατάλληλη ανάλυση του κυκλώματος που προκύπτει.
3. Σύμφωνα με την εξ. (4.48) η ισοδύναμη ΗΕΔ δίνεται τώρα από τη σχέση

$$U_0 = I_S R_0. \quad (4.51)$$

4-7 Τό θεώρημα του Thévenin

Η διαδικασία της προηγούμενης παραγράφου οδηγεί σε ένα εξαιρετικά χρήσιμο πόρισμα για την ανάλυση κυκλωμάτων. Στην πιο απλή του μορφή, τό πόρισμα αυτό, γνωστό ως θεώρημα του Thévenin, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Σέ οποιοδήποτε κύκλωμα, ένα μέρος του κυκλώματος μεταξύ δύο σημείων A και B μπορεί να αντικατασταθεί από μιά αντίσταση R_0 και μιά ΗΕΔ U_0 σέ σειρά, χωρίς να μεταβληθεί τό ρεύμα στους κλάδους του υπόλοιπου κυκλώματος.

Η απόδειξη του θεωρήματος του Thévenin είναι άμεσα επακόλουθο του θεωρήματος της επαλληλίας. Είναι άοιμη φανερό ότι η αντίσταση R_0 και η ΗΕΔ U_0 είναι αντίστοιχα η ισοδύναμη αντίσταση και η ισοδύναμη ΗΕΔ του επιμέρους κυκλώματος με άκρα A και B που μελετήσαμε στην

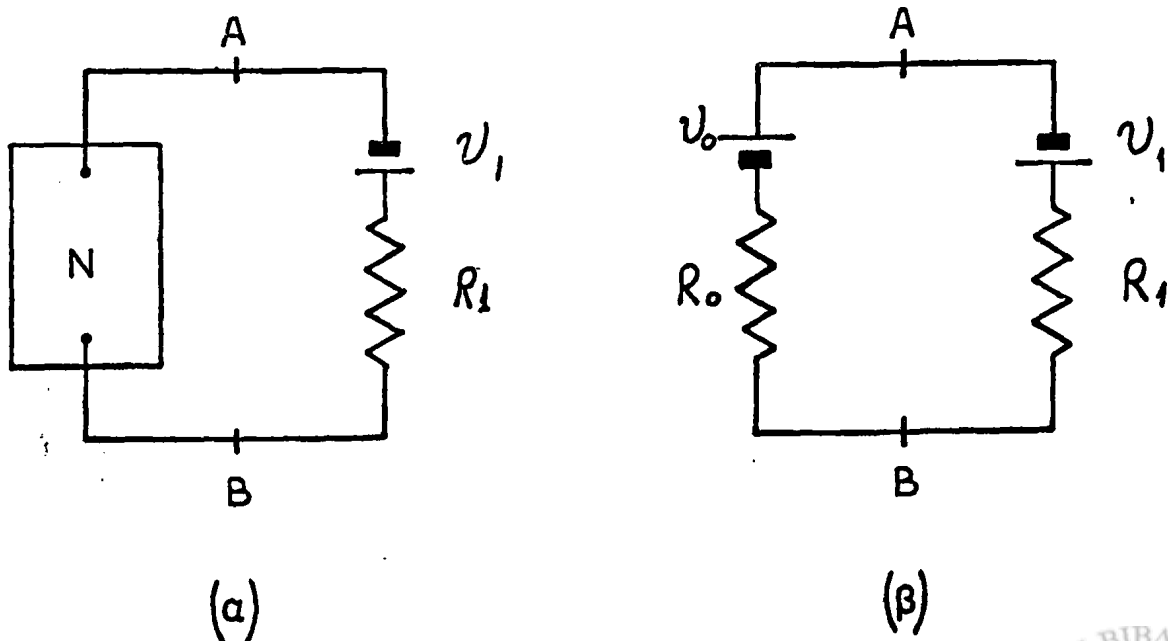


προηγούμενη παράγραφο.

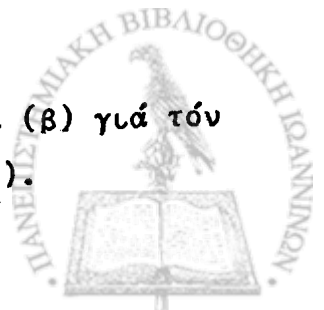
Μιά συνήθης εφαρμογή του θεωρήματος του Thévenin περιγράφεται στο σχήμα 4-9. Αν σκοπός της ανάλυσης είναι ο προσδιορισμός του ρεύματος σε ένα συγκεκριμένο κλάδο του κυκλώματος που περιέχει τα στοιχεία (U_1, R_1) , τότε το υπόλοιπο κύκλωμα N , το οποίο στο σχήμα 4-9 (α) συμβολίζεται ως κιβώτιο, μπορεί να αντικατασταθεί με τον ισοδύναμο κλάδο (U_0, R_0) . Το ρεύμα I_1 στον κλάδο (U_1, R_1) δίνεται τότε από απλή εφαρμογή του νόμου του Ohm στο ισοδύναμο κύκλωμα του σχήματος 4-9 (β)

$$I_1 = \frac{U_0 + U_1}{R_0 + R_1} \quad (4.52)$$

Υπενθυμίζεται ότι στην τελευταία σχέση οι ΗΕΔ U_0 και U_1 είναι θετικές ή αρνητικές ποσότητες ανάλογα με την επιλογή της φοράς του ρεύματος και της φοράς της ισοδύναμης ΗΕΔ U_0 που προκύπτει από την ανά-



ΣΧΗΜΑ 4-9. Αναγωγή κυκλώματος (α) σε ισοδύναμο κύκλωμα (β) για τον προσδιορισμό του ρεύματος στον κλάδο (U_1, R_1) .



λυση του κυκλώματος N.

Αν και για τον προσδιορισμό της ισοδύναμης ΗΕΔ μπορεί να ακολουθηθεί η διαδικασία που περιγράψαμε στο τέλος της παραγράφου 4-6, σε πολλές εφαρμογές η τιμή U_0 μπορεί πιο εύκολα να προσδιοριστεί από την πτώση δυναμικού στα άκρα A και B του αντίστοιχου κυκλώματος που προκύπτει με παράληψη του κλάδου στον οποίο ζητείται το ρεύμα. Τη μέθοδο αυτή θα ακολουθήσουμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος του Thévenin που δίνεται διαγραμματικά στο σχήμα 4-10.

Όπως θα δούμε αργότερα, το κύκλωμα του σχήματος 4-10(α), γνωστό, ως γέφυρα Wheatstone, βρίσκει εύρεία εφαρμογή στην ακριβή μέτρηση αντιστάσεων. Κατά την εφαρμογή αυτή συνήθως ζητείται ο προσδιορισμός του ρεύματος I_5 που διαρρέει την αντίσταση R_5 . Παρατηρείται ότι το άκικο κύκλωμα περιέχει έξη κλάδους, όποτε ανάλυση του κυκλώματος με εφαρμογή των νόμων του Kirchhoff απαιτεί την επίλυση ενός συστήματος με έξη εξισώσεις. Για την εφαρμογή του θεωρήματος του Thévenin θα θεωρήσουμε το άνοικτο κύκλωμα του σχήματος 4-10(β) με άκρα A και B που συμπίπτουν με τα άκρα της αντίστασης R_5 .

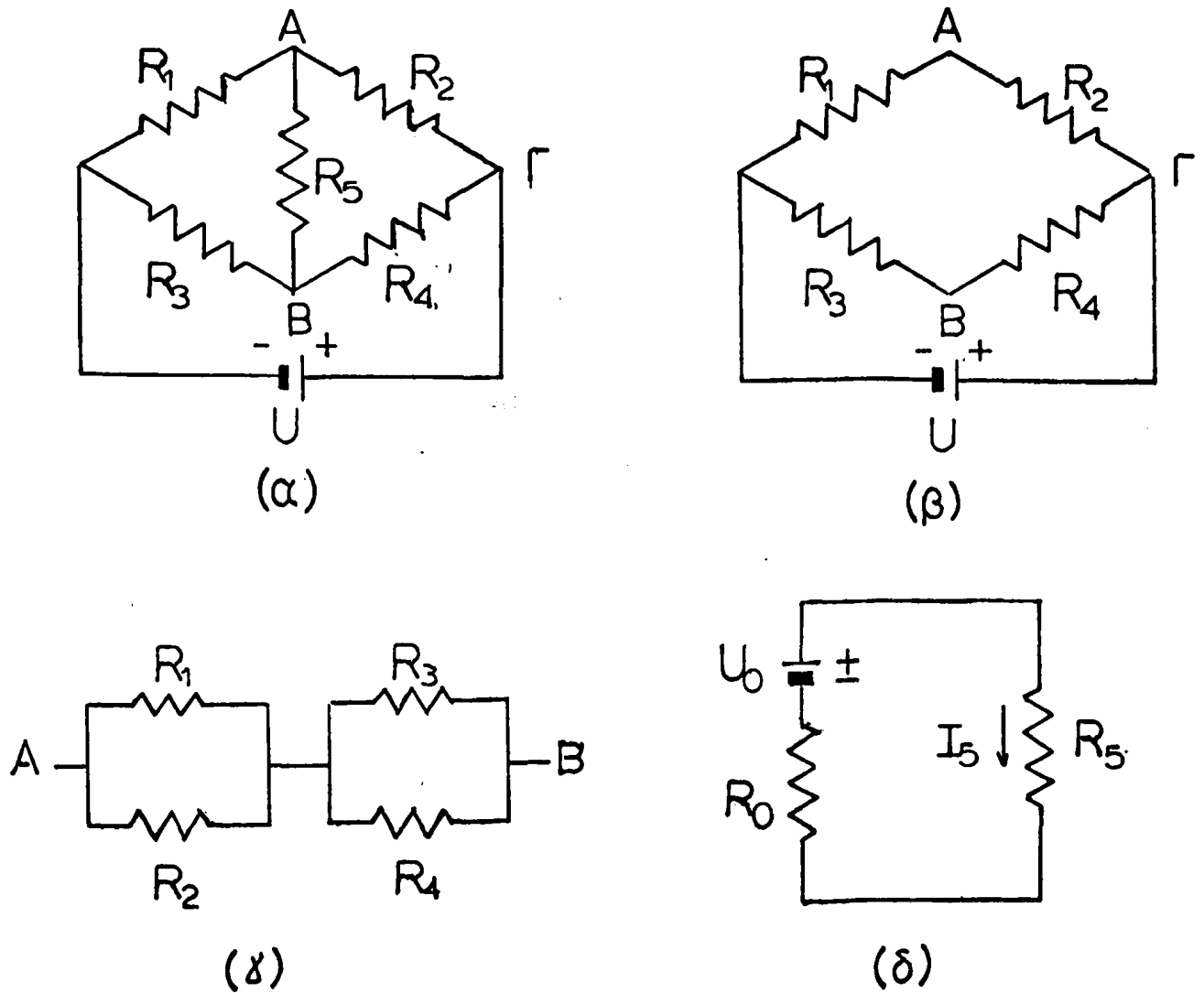
Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B του κυκλώματος 4-10(β) μπορεί να βρεθεί εύκολα αν θεωρήσουμε τα ρεύματα I_A και I_B που διαρρέουν αντίστοιχα τους κλάδους που περιέχουν τα σημεία A και B. Από το νόμο του Ohm

$$U = I_A (R_1 + R_2) = I_B (R_3 + R_4).$$

(4.53)

Η ισοδύναμη ΗΕΔ είναι επομένως





ΣΧΗΜΑ 4-10. (α) 'Η γέφυρα Wheatstone. (β) 'Ανοικτό κύκλωμα για τόν προσδιορισμό τοῦ ρεύματος στόν κλάδο R_5 . (γ) Παθητικό κύκλωμα μεταξύ τῶν σημείων A καί B τῆς γέφυρας wheatstone για ἀμελητέα ἑσωτερική ἀντίσταση τῆς ΗΕΔ U. (δ) 'Ισοδύναμο κύκλωμα τῆς γέφυρας Wheatstone.

$$U_0 = I_A R_1 - I_B R_3 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U - \frac{R_3}{R_3 + R_4} U. \quad (4.54)$$

“Αν ἡ ἑσωτερική ἀντίσταση τῆς ΗΕΔ U θεωρηθεῖ ὡς ἀμελητέα, τό παθητικό κύκλωμα πού προκύπτει για τόν προσδιορισμό τῆς ἰσοδύναμης ἀντιστάσεως μεταξύ τῶν σημείων A καί B δίνεται στό σχῆμα 4-10(γ) πού

όδηγεί στην έκφραση

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \quad (4.55)$$

Τό ρεύμα στην αντίσταση R_5 μπορεί τώρα να βρεθεί από τό ισοδύναμο κύκλωμα του σχήματος 4-10(δ)

$$I_5 = \frac{U_0}{R_0 + R_5} \quad (4.56)$$

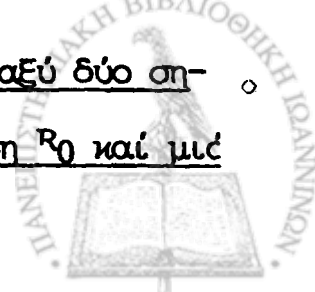
Χρησιμοποιώντας τις έξ. (4.54) και (4.55) μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση ως συνάρτηση των στοιχείων του άρχικου κυκλώματος ως

$$I_5 = \frac{\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R_5} U. \quad (4.57)$$

4-8 Τό θεώρημα του Norton

Σύμφωνα μέ την έξ. (4.51), ή ισοδύναμη ΗΕΔ U_0 συνδέεται διαμέσου του νόμου του Ohm μέ την ισοδύναμη αντίσταση R_0 και τό ρεύμα βραχυκυκλώσεως I_S . Μεταθέτοντας έπιμένως την έκφραση από την ισοδύναμη ΗΕΔ στό ρεύμα πού παρέχεται από τό ισοδύναμο κύκλωμα μπορούμε να διαμορφώσουμε μιά έναλλακτική μορφή του προηγούμενου θεωρήματος.

Σέ οποιοδήποτε κύκλωμα, ένα μέρος του κυκλώματος μεταξύ δύο σημείων A και B μπορεί να αντικατασταθεί από μιά αντίσταση R_0 και μιά

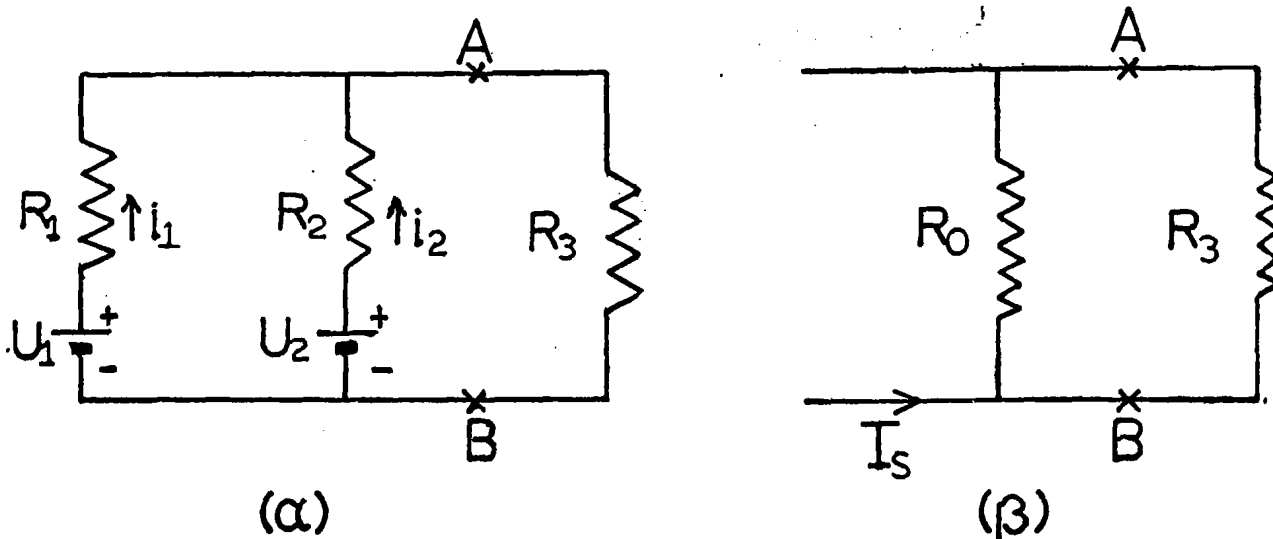


γεννήτρια ρεύματος, χωρίς να μεταβληθεί το ρεύμα στους κλάδους του υπόλοιπου κυκλώματος.

Υπό τη μορφή αυτή το θεώρημα είναι γνωστό ως θεώρημα του Norton. Η αντίσταση R_0 που αναφέρεται στο θεώρημα είναι προφανώς ή ισοδύναμη αντίσταση που εμφανίζει στα άκρα A και B το αντίστοιχο παθητικό κύκλωμα. Το ρεύμα της ισοδύναμης γεννήτριας είναι το ρεύμα βραχυκυκλώσεως I_S που θεωρήσαμε στην παράγραφο 4-6.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος του Norton δίνεται στο σχήμα 4-11. Αν διακόψουμε το κύκλωμα στα σημεία A και B, το παθητικό κύκλωμα που δημιουργείται με την παράλληλη των πηγών ΗΕΔ στο αριστερό μέρος εμφανίζει την ισοδύναμη αντίσταση.

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (4.58)$$



ΣΧΗΜΑ 4-11. Έφαρμογή του θεωρήματος του Norton. (α) Το ρεύμα βραχυκυκλώσεως I_S βρίσκεται με διακοπή του κυκλώματος στα σημεία A και B και άπλη σύνδεση των άκρων. (β) Το ισοδύναμο κύκλωμα κατά το θεώρημα του Norton.

Τό ρεύμα βραχυκυκλώσεως που ρέει στον κλάδο AB μπορεί να προσδιοριστεί αν τα δύο άκρα συνδεθούν με ένα άγωγο με μηδενική αντίσταση. Χρησιμοποιώντας δύο ρεύματα βρόχων για τους βρόχους που ορίζει ο άγωγός AB με καθένα από τους κλάδους (R_1, U_1) και (R_2, U_2)

$$i_1 = \frac{U_1}{R_1} \quad \text{και} \quad i_2 = \frac{U_2}{R_2} \quad (4.59)$$

Τό ρεύμα βραχυκυκλώσεως εκφράζεται τώρα ως

$$I_S = i_1 + i_2 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} \quad (4.60)$$

Τό ισοδύναμο κύκλωμα της διατάξεως 4-11 (α) κατά τό θεώρημα του Norton δίνεται στο σχήμα 4-11 (β). Από τό κύκλωμα αυτό τό ρεύμα στον κλάδο R_3 δίνεται από την έκφραση

$$I_3 = \frac{R_0}{R_0 + R_3} I_S \quad (4.61)$$

4-9 Μετασχηματισμός Τριγώνου σε Άστέρα

Σέ πολλές περιπτώσεις ή ανάλυση ενός κυκλώματος διευκολύνεται σημαντικά αν μιά διάταξη τριών αντιστάσεων σε σχήμα τριγώνου μετασχηματιστεί σε μιά ισοδύναμη διάταξη τριών αντιστάσεων σε σχήμα άστέρα. Μέ τόν μετασχηματισμό αυτό που δίνεται διαγραμματικά στο σχήμα 4-12, ένας στοιχειώδης βρόχος του κυκλώματος αντικαθίσταται από ένα κόμβο. Τοῦτο έχει ως αποτέλεσμα την αντικατάσταση μιᾶς ἐξίσωσης του δεύτερου νόμου του Kirchhoff από μιά ἐξίσωση του πρώτου



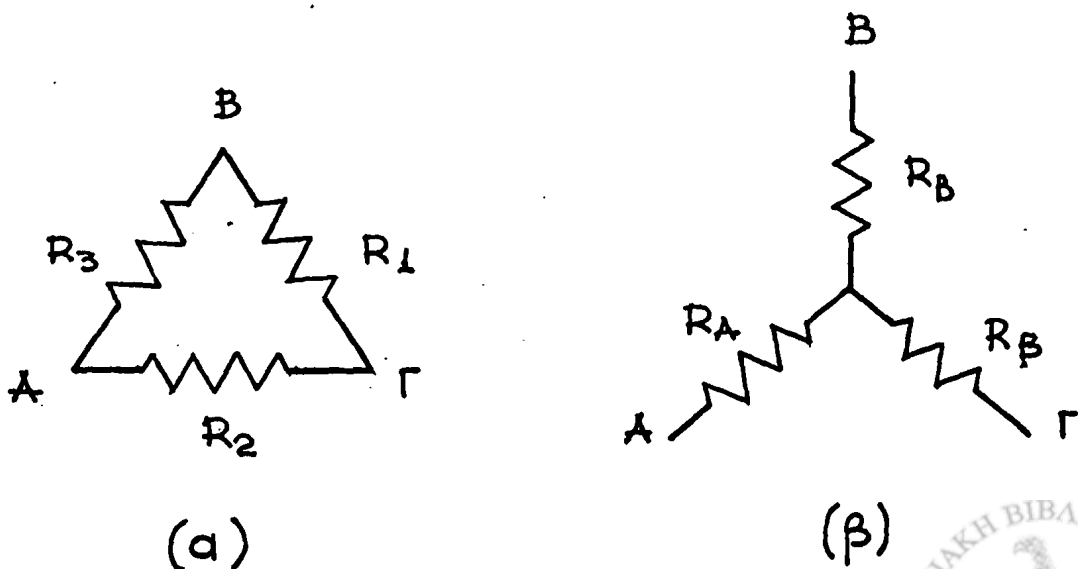
νόμου με επακόλουθη απλοποίηση του συστήματος εξισώσεων που προσδιορίζουν τη λύση του κυκλώματος .

Οι δύο διατάξεις του σχήματος 4-12 είναι ισοδύναμες αν αντικατάσταση της μιᾶς από την ἄλλη δέν προκαλεῖ καμμιά μεταβολή στα ρεύματα του υπόλοιπου κυκλώματος. Εἰδικώτερα τὰ ρεύματα πού εισέρχονται ἢ ἐξέρχονται ἀπὸ τὸ τρίγωνο στὰ σημεῖα A, B καὶ Γ πρέπει νὰ εἶναι τὰ ἴδια μέ τὰ ἀντίστοιχα ρεύματα στὰ σημεῖα A, B καὶ Γ τοῦ ἀστέρα. Ἡ σχέση αὐτή μπορεῖ νὰ ικανοποιηθεῖ ἂν θεωρήσουμε τὴν ισοδύναμη ἀντίσταση μεταξύ δύο ἀντίστοιχων ἄκρων κάθε διατάξεως.

Ἡ ἀντίσταση R_{AB} μεταξύ τῶν ἄκρων A καὶ B τοῦ τριγώνου μπορεῖ νὰ γραφεῖ ἀμέσως ἀπὸ τὴν ἐξ. (4.15) ὡς

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} \quad (4.62a)$$

Στὴ διάταξη ἀστέρα ἡ ἀντίστοιχη ἀντίσταση μεταξύ τῶν ἄκρων A καὶ B δημιουργεῖται ἀπὸ τὶς ἀντιστάσεις R_A καὶ R_B σὲ σειρά



ΣΧΗΜΑ 4-12. Μετασχηματισμός τριγώνου σέ ἀστέρα.



$$R_{AB} = R_A + R_B \quad (4.62\beta)$$

Ἡ ἰσοδυναμία τῶν δύο διατάξεων ὁδηγεῖ ἐπομένως στή σχέση

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_A + R_B} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} \quad (4.63\alpha)$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο, θεωρώντας τά ὑπόλοιπα ἄκρα τῶν δύο διατάξεων, μπορούμε νά δείξουμε τίς ἀνάλογες σχέσεις

$$\frac{1}{R_{A\Gamma}} = \frac{1}{R_A + R_\Gamma} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3} \quad (4.63\beta)$$

$$\frac{1}{R_{B\Gamma}} = \frac{1}{R_B + R_\Gamma} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} \quad (4.63\gamma)$$

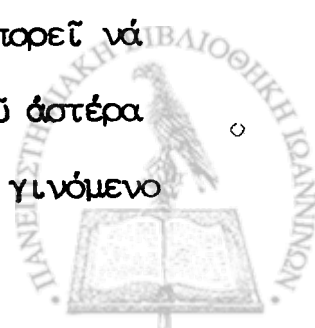
Τό σύστημα τῶν ἐξ. (4.63) μπορεῖ τώρα νά προσδιορίσει τίς τιμές τῶν ἀντιστάσεων πού συγκροτοῦν τόν ἀστέρα ὡς συνάρτηση τῶν ἀντιστάσεων τοῦ ἰσοδύναμου τριγώνου. Ἡ λύση τοῦ συστήματος εἶναι

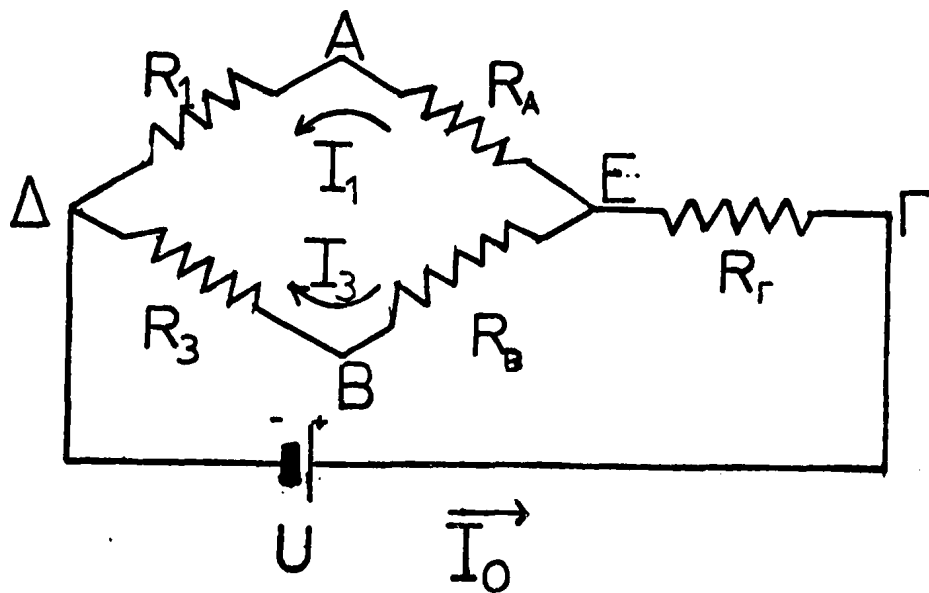
$$R_A = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (4.64\alpha)$$

$$R_B = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (4.64\beta)$$

$$R_\Gamma = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (4.64\gamma)$$

Οἱ ἐξ. (4.64) ἐκφραρίζουν μιά ἀπλή σχέση συμμετρίας πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά εὐκόλη ἀπομνημόνευση: Ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀστέρα πού καταλήγει σέ ἓνα συγκεκριμένο ἄκρο εἶναι ἴση πρὸς τό γινόμενο





ΣΧΗΜΑ 4-13. Ίσοδύναμο κύκλωμα τῆς γέφυρας Wheatstone μέ ἀντικατάσταση τριγώνου ἀπό ἀστέρα.

τῶν ἀντιστάσεων πού καταλήγουν στό ἴδιο σημείο τοῦ ἰσοδύναμου τριγώνου, διαιρεμένο μέ τό ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀντιστάσεων τοῦ τριγώνου.

Ὡς παράδειγμα τῆς μεθόδου θά θεωρήσουμε πάλι τή γέφυρα Wheatstone τοῦ σχήματος 4-10 (α). Ἡ ἀντικατάσταση τοῦ τριγώνου ABΓ μέ ἀστέρα ὀδηγεῖ στό ἰσοδύναμο κύκλωμα τοῦ σχήματος 4-13, ὅπου οἱ ἀντιστάσεις πού καταλήγουν στά σημεῖα A, B καί Γ δίνονται ἀπό τίς σχέσεις

$$R_A = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} \quad (4.65\alpha)$$

$$R_B = \frac{R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} \quad (4.65\beta)$$

$$R_\Gamma = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4 + R_5} \quad (4.65\gamma)$$

Μέ ἀπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm μπορεῖ τώρα νά προσδιοριστεῖ

τό ολικό ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο της ΗΕΔ U ως

$$I_0 = \frac{U}{R_\Gamma + \frac{(R_1 + R_A)(R_3 + R_B)}{R_1 + R_3 + R_A + R_B}} \quad (4.67)$$

Τά ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις R_1 και R_3 μπορούν να βρεθούν από την πτώση δυναμικού μεταξύ των σημείων Δ και E

$$I_1(R_1 + R_A) = I_3(R_3 + R_B) = U - I_0 R_\Gamma \quad (4.68)$$

όπου η έσωτερική αντίσταση της ΗΕΔ U έχει πάλι θεωρηθεί ως άμελητά. Χρησιμοποιώντας την έξ. (4.67) στην έξ. (4.68) είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$I_1 = \frac{(R_3 + R_B) U}{(R_1 + R_A)(R_3 + R_B) + (R_1 + R_3 + R_A + R_B) R_\Gamma} \quad (4.69\alpha)$$

$$I_3 = \frac{(R_1 + R_A) U}{(R_1 + R_A)(R_3 + R_B) + (R_1 + R_3 + R_A + R_B) R_\Gamma} \quad (4.69\beta)$$

Η πτώση δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B είναι

$$\begin{aligned} V_{AB} &= I_3 R_3 - I_1 R_1 = \\ &= \frac{R_3 R_A - R_1 R_B}{(R_1 + R_A)(R_3 + R_B) + (R_1 + R_3 + R_A + R_B) R_\Gamma} \quad (4.70) \end{aligned}$$

και επομένως τό ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_5 του άρχιου κλάματος δίνεται από την έκφραση

$$I_5 = \frac{V_{AB}}{R_5} \quad (4.71)$$



Χρησιμοποιώντας τις έξ. (4.70) και (4.65) είναι δυνατόν να δείξουμε ότι οι έξ. (4.71) και (4.57) ταυτίζονται - αν και ο άλγεβρικός μετασχηματισμός είναι αρκετά επίπονος. Στην πράξη η τελική σχέση της έξ. (4.71), αν γραφεί ως συνάρτηση των αντιστάσεων του άρχεικού κυκλώματος, έχει περιορισμένη χρησιμότητα. Η διαδικασία που ακολουθείται συνήθως είναι η σταδιακή επίλυση του κυκλώματος με προσδιορισμό της αριθμητικής τιμής των αντιστάσεων ή ρευμάτων σε κάθε βήμα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα π.χ. είναι προτιμότερο να προσδιορίσουμε σταδιακά τις αριθμητικές τιμές των αντιστάσεων του ισοδύναμου άστρα R_A , R_B και R_T , του όλικου ρεύματος I_0 , των ρευμάτων I_A και I_B στους δύο κλάδους και τελικά του ρεύματος I_5 .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4-1. Μιά αντίσταση ακριβείας R_1 μπορεί να συνδεθεί παράλληλα με μία μεγαλύτερη αντίσταση R_2 ώστε να δημιουργηθεί μία αντίσταση ακριβείας R με τιμή λίγο μικρότερη από την αντίσταση R_1 .

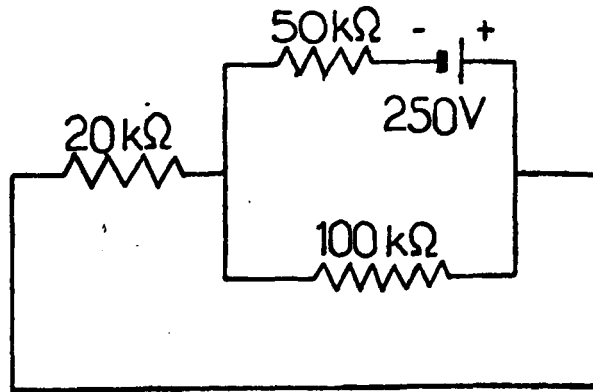
α. Δεξτε ότι τό ποσοστιαίο σφάλμα dR/R , που συνεισφέρει η αντίσταση R_2 με ποσοστιαίο σφάλμα dR_2/R_2 , δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dR}{R} = \frac{R}{R_2} \frac{dR_2}{R_2}$$

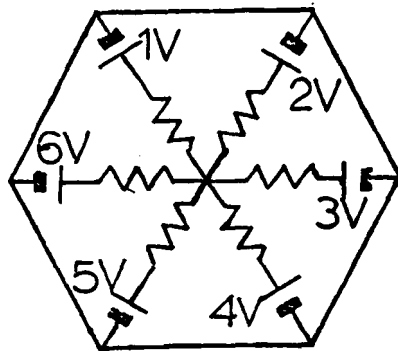
β. Αν $R_1 = 100.00 \Omega$ με ακρίβεια 0.01 % , ποιά πρέπει να είναι η ακρίβεια της αντιστάσεως R_2 ώστε η αντίσταση R να έχει τιμή 99.00 Ω με ακρίβεια 0.02 %;



4-2. Προσδιορίστε τό ρεύμα σέ κάθε κλάδο τοῦ κυκλώματος

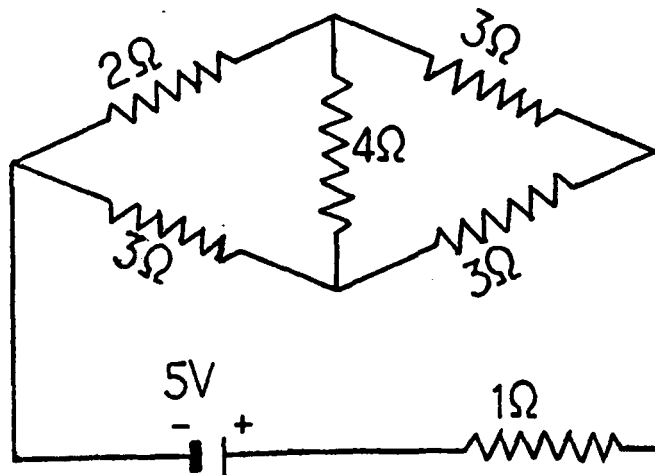


4-3. Χρησιμοποιεῖστε τό θεώρημα τῆς ἐπαλληλίας γιά νά προσδιορίσετε τό ρεύμα σέ κάθε κλάδο τοῦ κυκλώματος



ὅπου καθεμιά ἀπό τίς ἀντιστάσεις ἔχει τιμή 5Ω .

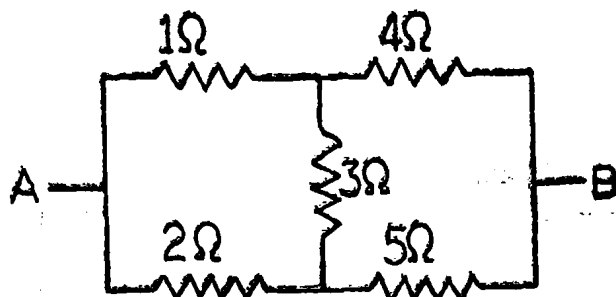
4-4. Χρησιμοποιώντας τό θεώρημα τοῦ Thēvenin ὑπολογίστε τό ρεύμα σέ κάθε κλάδο τοῦ κυκλώματος



4-5. Ἐπιλύστε τό κύκλωμα τῆς ἀσκῆσεως 4-4 χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό τριγώνου σέ ἀστέρα.

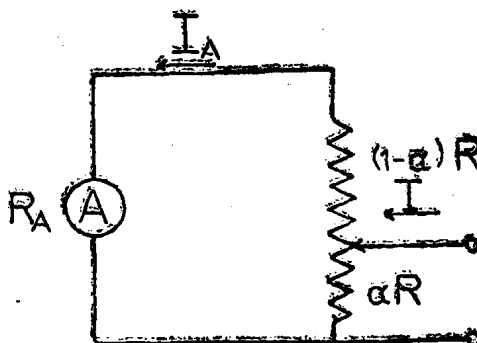
4-6. Προσδιορίστε τήν ὀλική ἀντίσταση μεταξύ τῶν ἄκρων A καί B τοῦ κυκλώματος





χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό τριγώνου σε άστέρα.

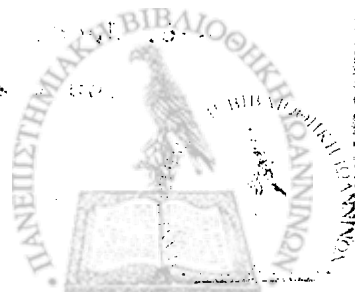
- 4-7. Προσδιορίστε τις σχέσεις που δίνουν τις αντιστάσεις R_1, R_2 και R_3 του τριγώνου του σχήματος 4-12 ως συνάρτηση των αντιστάσεων R_A, R_B και R_T του ισοδύναμου άστέρα. Χρησιμοποιείτε τις σχέσεις αυτές για να προσδιορίσετε την ολική αντίσταση μεταξύ των άκρων A και B στο κύκλωμα της άσκησης 4-6, αντικαθιστώντας ένα άστέρα με ένα τρίγωνο.
- 4-8. Η διακλάδωση Αyrτον χρησιμοποιείται συχνά για τη μεταβολή της κλίμακας αμπερομέτρου. Σύμφωνα με το κύκλωμα



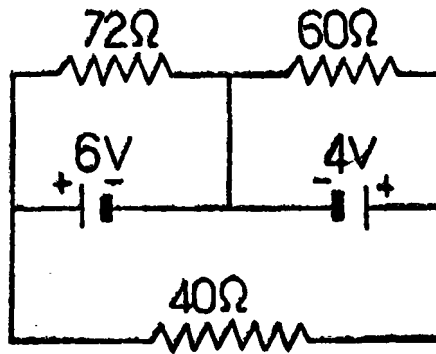
η διακλάδωση Αyrτον δημιουργείται με διχοτέυση του ρεύματος I σε μια επαφή της παράλληλης αντίστασης R που δρίζει το ποσοστό a της ολικής τιμής. Δείξτε ότι το ρεύμα I_A που διαρρέει το αμπερόμετρο συνδέεται με το ολικό ρεύμα I διαμέσου της έκφρασης

$$I_A = \frac{aR}{R + R_A} I$$

όπου R_A είναι η εσωτερική αντίσταση του αμπερομέτρου.



4-9. Προσδιορίστε τὰ ρεύματα στους κλάδους πού πριέχουν στοιχεία ΗΕΔ στο κύκλωμα

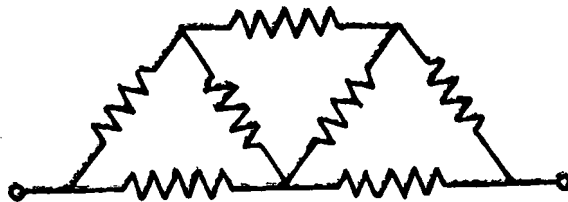


4-10. Προσδιορίστε έμπειρικά, σχεδιάζοντας έναλλακτικά κυκλώματα, τόν έλάχιστο άριθμό κλάδων πού μπορεί νά διαθέτει ένα κύκλωμα μέ 2,3,4,5 και 6 κόμβους.

(Άπάντηση: $n_{\min} = \frac{3}{2} \alpha$, α άρτιος,

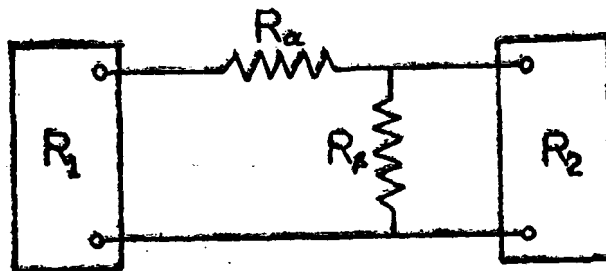
$n_{\min} = \frac{3}{2} \alpha + \frac{1}{2}$, α περιττός).

4-11. Προσδιορίστε τήν όλική αντίσταση μεταξύ των δύο άκρων του κυκλώματος



άν καθεμιά από τς έπτά αντίστάσεις έχει τιμή 10 Ω.

4-12. Δεξτε ότι άν δύο συσκευές μέ έσωτερική αντίσταση R_1 και R_2 συνδεθούν διαμέσου του κυκλώματος πού δημιουργούν οι δύο αντίστάσεις R_a και R_b του σχήματος

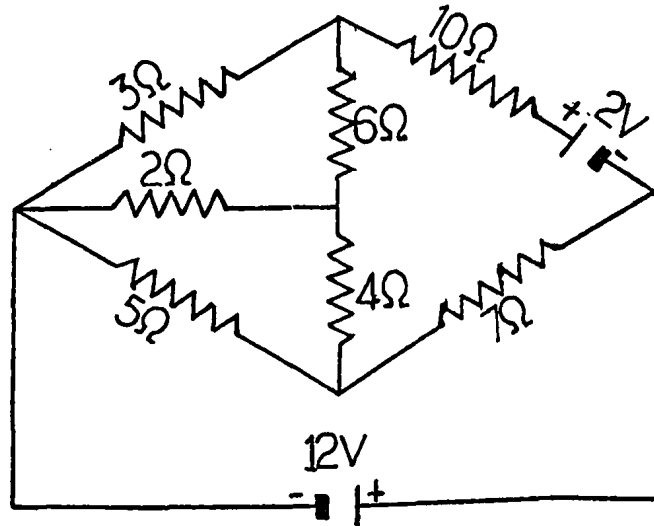


τότε ή έσωτερική και έξωτερική αντίσταση στα άκρα κάθε συσκευής γίνονται ίσες άν $R_1 > R_2$ και $R_a = R_1 \sqrt{1 - \frac{R_2}{R_1}}$,

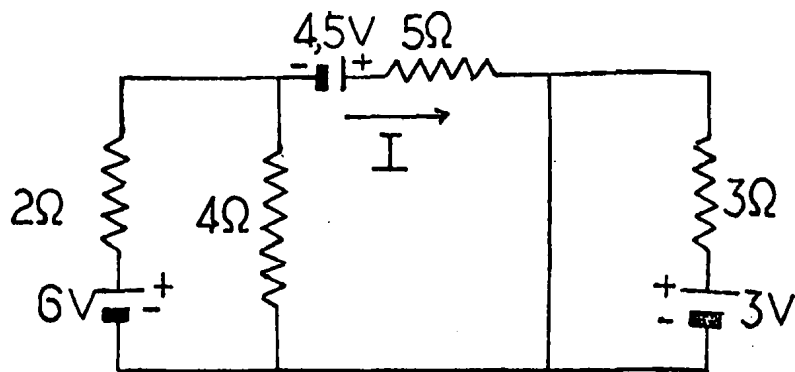


$$R_B = \frac{R_2}{\sqrt{1 - \frac{R_2}{R_1}}}$$

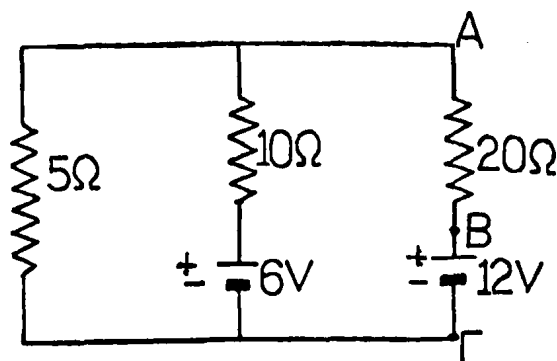
4-13. Προσδιορίστε τὰ ρεύματα σέ ὅλους τούς κλάδους τοῦ κυκλώματος



4-14. Χρησιμοποιεῖστε τό θεώρημα τοῦ Thévenin γιά νά ὑπολογίσετε τό ρεῦμα I στό κύκλωμα

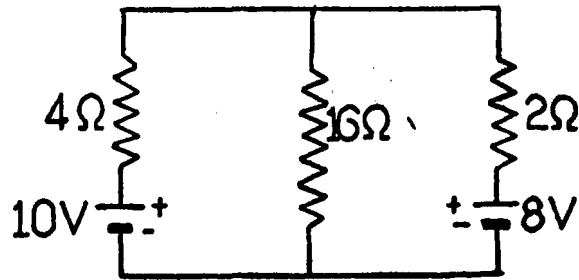


4-15. Χρησιμοποιεῖστε τό θεώρημα τοῦ Thévenin γιά νά προσδιορίσετε τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀντίσταση μέ τιμή 20Ω στό κύκλωμα

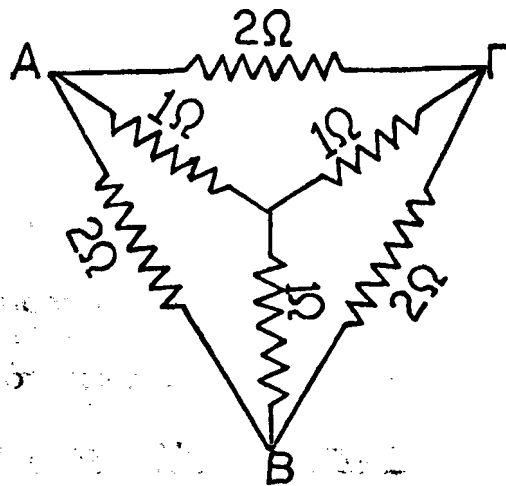


- α) διακόπτοντας τό κύκλωμα στά σημεία Α καί Β,
β) διακόπτοντας τό κύκλωμα στά σημεία Α καί Γ.

4-16. Χρησιμοποιείστε τό θεώρημα του Norton για νά προσδιορίσετε τό ρεύμα στην αντίσταση των 16Ω .



4-17. Προσδιορίστε τήν όλική αντίσταση μεταξύ των σημείων ΑΒ, ΑΓ καί ΒΓ στό κύκλωμα.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

το γαλβανομετρο d'arsonval

Ἡ ἀρχὴ λειτουργίας τοῦ ἐργαστηριακοῦ ἀμπερομέτρου καί γενικώτε-
ρα τοῦ ὄργάνου κινητοῦ πλαισίου μελετήθηκε μέ λεπτομέρεια στό κεφά-
λαιο 3. Ὅπως δείχνει τό σχῆμα 3-6 καί ἡ ἐξ. (3.7), ἓνα κινητό πηνίο
ἀναρτημένο σέ ἓνα ἀκτινικό μαγνητικό πεδίο περιστρέφεται κατά μία
γωνία θ ἀνάλογη πρὸς τό ρεῦμα I πού διαρρέει τό πηνίο. Τό γαλβανόμε-
τρο καί εἰδικότερα τό γαλβανόμετρο D'Arsonval πού θά μελετήσουμε στό
κεφάλαιο αὐτό βασίζεται στήν ἴδια ἀρχὴ λειτουργίας. Ἡ κυριότερη δια-
φορὰ του ἀπὸ τό ἐργαστηριακὸ ἀμπερόμετρο βρίσκεται στό μηχανισμό ἀ-
ναρτήσεως τοῦ κινητοῦ πηνίου. Τό πηνίο τοῦ ἐργαστηριακοῦ ἀμπερομέτρου
στηρίζεται σέ ἓνα λεπτό μεταλλικὸ ἄξονα ἐνῶ ἡ δύναμη ἐπαναφορᾶς δη-
μιουργεῖται ἀπὸ ἓνα σπειροειδές ἐλατήριο προσαρμοσμένο στὸν ἄξονα. Ἡ
διάταξη αὐτὴ δημιουργεῖ ἓνα σταθερὸ καί σχετικὰ ἀνθεκτικὸ ὄργανο με-
τρήσεως μέ ἀντίστοιχη ὅμως μείωση τῆς εὐαισθησίας. Στό γαλβανόμετρο
D'Arsonval ἡ ἀνάρτηση τοῦ κινητοῦ πηνίου γίνεται μέ μιὰ λεπτὴ μεταλ-
λικὴ ταινία, συνήθως ἀπὸ χρυσό. Ἡ μεταλλικὴ ταινία ἀφενὸς ἐπιτρέπει
τὴν κίνηση τοῦ πηνίου κατὰ τὸν ἄξονα τοῦ ἀκτινικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου



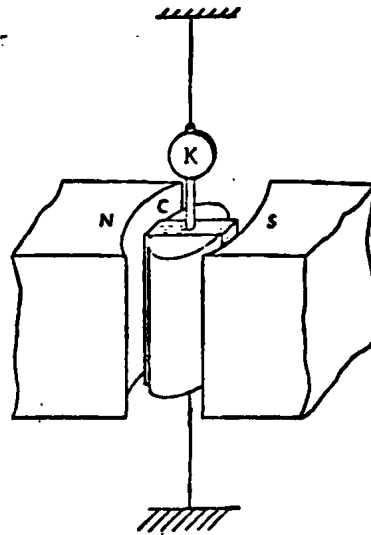
ένω άρετέρου δημιουργεί ροπή ανάλογη προς τή γωνία άποκλίσεως πού τείνει νά έπαναφέρει τό πηνίο στή θέση ίσορροπίας.

Ή συνήθης διάταξη του γαλβανομέτρου D'Arsonval δίνεται στο σχήμα 5-1. Όπως δείχνει τό σχήμα, στο άνω μέρος του πηνίου βρίσκεται σταθερά προσαρμοσμένο ένα μικρό κάτοπτρο πού άκολουθεϊ τήν κίνηση του πηνίου. Σέ ένα εύαίσθητο γαλβανόμετρο τό κάτοπτρο παίζει ρόλο άνάλογο προς τόν δείκτη του εργαστηριακού άμπερομέτρου. Δύο έναλλακτικές μέθοδοι, πού χρησιμοποιούνται συχνά για τή μετατροπή τής γωνίας άποκλίσεως του πηνίου σε γραμμική κλίμακα διαμέσου του κατόπτρου, περιγράφονται στο σχήμα 5-2. Στή διάταξη του σχήματος 5-2(α) ένα μικρό τηλεσκόπιο παρακολουθεϊ στο κάτοπτρο K τό είδωλο μιās κυκλικής κλίμακας πού συνήθως είναι βαθμονομημένη σε έκατοστόμετρα και χιλιοστόμετρα. Ή κλίμακα καλύπτει ένα τόξο κύκλου μέ κέντρο τό κάτοπτρο και ακτίνα D. Τό τηλεσκόπιο έχει ρυθμιστεϊ έτσι ώστε τό κάθετο νήμα συμπίπτει μέ τήν ένδειξη 0 τής κλίμακας όταν τό πηνίο δέν διαρρέεται από ρεύμα. Τότε τό σημείο P, του οποίου τό είδωλο συμπίπτει μέ τό νήμα του τηλεσκοπίου όταν τό πηνίο διαρρέεται από ρεύμα I, απέχει από τό σημείο 0 άπόσταση

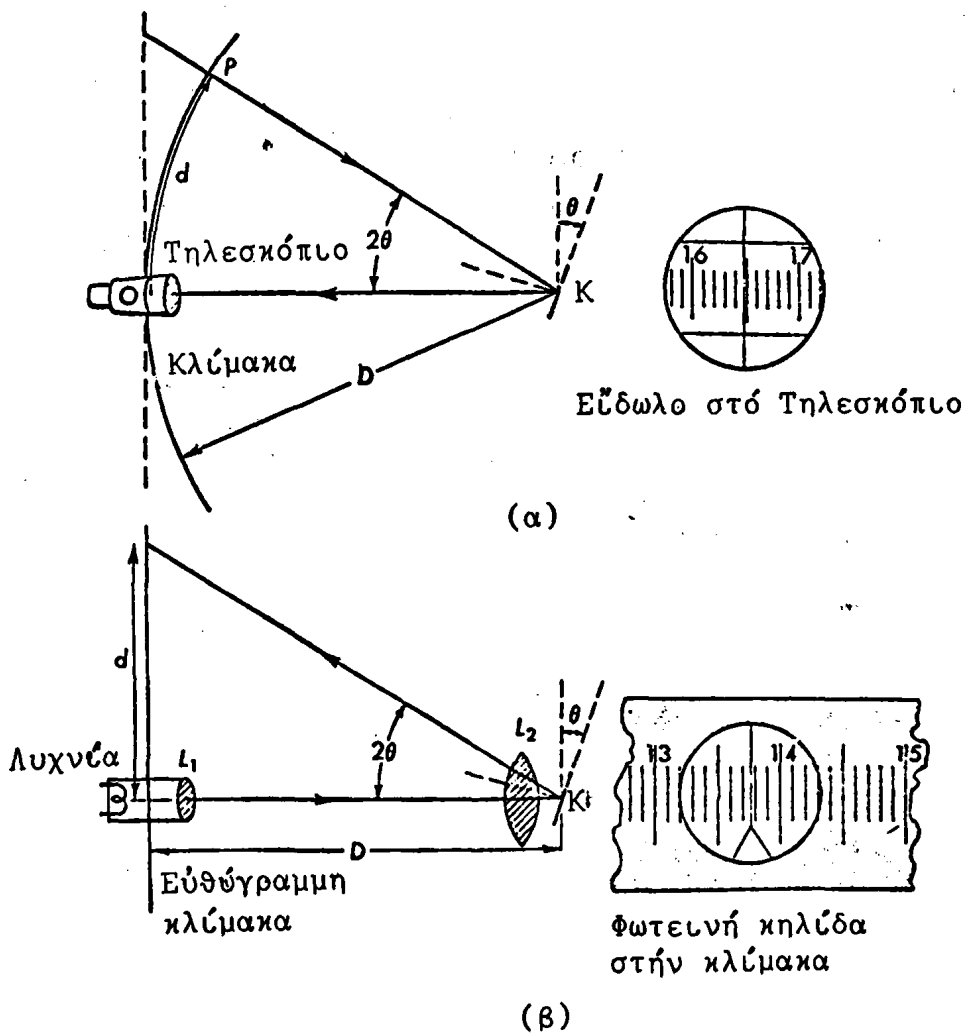
$$d = 2\theta D = \frac{2}{T} NBAID \quad (5.1)$$

όπου στο τελευταίο σμέλος τής έξ. (5.1) έχει χρησιμοποιηθεϊ ή έξ. (3.7).

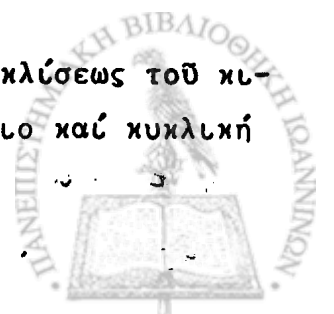
Ή διάταξη του σχήματος 5-2(β) χρησιμοποιεϊ μία λυχνία φωτισμού και ένα σύστημα φακών L_1, L_2 . Ο φακός L_1 πού περιέχει μιá κάθετη γραμμή έστιάζει τή δέση στο κάτοπτρο του γαλβανομέτρου ένω ο φακός L_2 μέ έστιακή άπόσταση $D/2$ δημιουργεϊ τό είδωλο του φακού L_1 , μετά τήν άνάκλιση από τό κάτοπτρο K, στην εύθύγραμμη (συνήθως, διαφανή)



ΣΧΗΜΑ 5-1. Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval.



ΣΧΗΜΑ 5-2. Όπτικές διατάξεις για την ανάγνωση της αποκλίσεως του κινητού πηνίου στο γαλβανόμετρο. (α) Τηλεσκόπιο και κυκλική κλίμακα. (β) Λυχνία και εύθύγραμμη κλίμακα.



κλίμακα. Από τή γεωμετρία του σχήματος, ή απόκλιση d που αντιστοιχεί στην έξ. (5.1), δίνεται τώρα από τή σχέση

$$d = D \tan 2\theta = D \tan \left(\frac{2}{\tau} NBAI \right). \quad (5.2)$$

Γιά μικρές αποκλίσεις του πηνίου όπου ισχύει ή προσέγγιση $\tan \theta \approx \theta$, οι δύο εκφράσεις συμπίπτουν.

5-1 Εύαισθησία του Γαλβανομέτρου

Κατά γενική πρακτική στις διατάξεις του σχήματος 5-2 χρησιμοποιείται απόσταση κλίμακας - γαλβανομέτρου $D = 1 \text{ m}$. Η εύαισθησία του γαλβανομέτρου ως προς τό ρεύμα S_I ορίζεται από τήν έκφραση

$$S_I \equiv 1000 \frac{d}{DI} = 2000 \frac{NBA}{\tau} \quad (5.3)$$

καί έχει διαστάσεις αντίστροφου ρεύματος. Παρόλα αυτά, στή συνήθη γεωμετρία μέ απόσταση $D = 1 \text{ m}$, ο παράγοντας 1000 που έχει συμπεριληφθεῖ στον όρισμό επιτρέπει τήν ἑρμηνεία τῆς ποσότητας S_I ως τήν απόκλιση d σέ mm που προκαλεῖ ρεύμα 1A. Γιά τό λόγο αὐτό πολλές φορές ή εύαισθησία ως προς τό ρεύμα ἀναφέρεται σέ "χιλιοστόμετρα ἀνά ἀμπέρε".

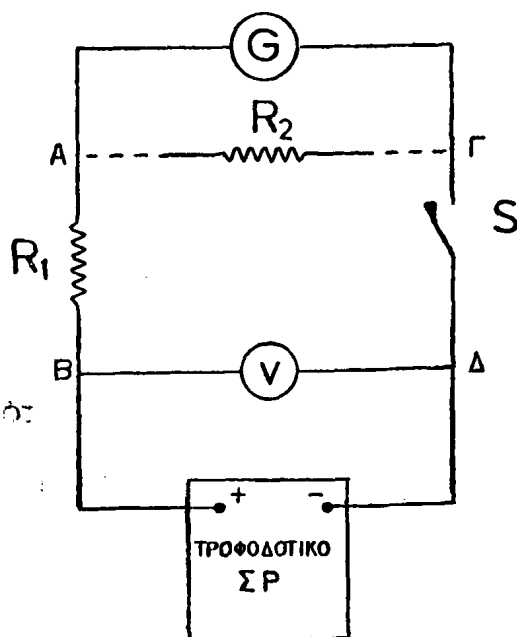
Σέ πολλές ἐφαρμογές του γαλβανομέτρου εἶναι χρησιμότερο νά γνωρίζουμε τήν απόκλιση γιά μιά συγκεκριμένη διαφορά δυναμικοῦ παρά γιά ἕνα συγκεκριμένο ρεύμα. Ἄν στους ἀποδέκτες του γαλβανομέτρου δημιουργηθεῖ διαφορά δυναμικοῦ V καί ή ἀντίσταση του κινητοῦ πηνίου εἶναι R_g , τότε θά διαρεύσει ρεύμα $I = V/R_g$. Ἡ ποσότητα που αντιστοιχεί στην έξ. (5.3) καί που μπορούμε νά ὀνομάσουμε εύαισθησία του γαλ-

Βαινομέτρου ως προς τό δυναμικό δίνεται από τή σχέση

$$S_V \equiv 1000 \frac{d}{DV} = 1000 \frac{d}{DIR} = 2000 \frac{NBA}{\tau R_g} = \frac{S_I}{R_g} \quad (5.4)$$

καί μετράται σέ V^{-1} ή σέ χιλιοστόμετρα ανά volt για τή συνήθη γεωμετρία μέ απόσταση κλίμακας - γαλβανομέτρου $D = 1$ m. Τήν αντίσταση R_g καί τήν εύαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου θά προσδιορίσουμε στό ἐπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-1. Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-3. Ἡ αντίσταση R_1 εἶναι μιὰ σταθερή αντίσταση τῆς τάξης τῶν μερικῶν MΩ. Τό βολτόμετρο V μετρά τή διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως $R_1 + R_g$, ὅπου R_g εἶναι ἡ ἐσωτερική αντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου. — Μέ δυναμικό $V \approx 0$ κλεῖστε τό διακόπτη S. Αὔξετε τό δυναμι-

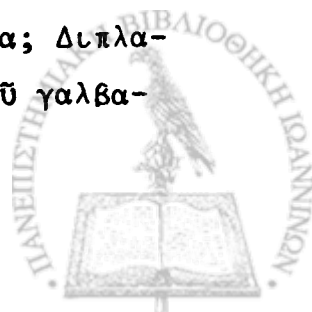


ΣΧΗΜΑ 5-3. Κύκλωμα για τόν προσδιορισμό τῆς εύαισθησίας γαλβανομέτρου. Ἡ παράλληλη αντίσταση R_2 μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ σέ δεύτερο στάδιο για τή μέτρηση τῆς ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως τοῦ ὄργάνου ὅπως περιγράφεται στό Πείραμα 5-1.

κό του τροφοδοτικού ΣΡ στην τιμή 1 V. Θά χρειαστεῖ νά περιμένετε ἕως γιά λίγο χρόνο ὥστε τό γαλβανόμετρο νά ἰσορροπίσει στην τελική του ἀπόκλιση. Τό γαλβανόμετρο εἶναι ἕνα ἐξαιρετικά εὐαίσθητο ὄργανο καί ὁποιοσδήποτε κραδασμός προκαλεῖ ταλαντώσεις. Ἰδιαίτερα ὁ τοῦχος στόν ὁποῖο εἶναι ἀναρτημένο πρέπει νά εἶναι ἐλεύθερος ἀπό κραδασμούς (μὴν ἀκουμπᾶτε στόν τοῦχο ὅταν παίρνετε μετρήσεις!). Πάντως γιά τήν ἀνάγνωση τῆς ἀποκλίσεως εἶναι δυνατόν νά ἐκμεταλευτοῦμε τό γεγονός ὅτι τό πλάτος τῶν ταλαντώσεων τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι συμμετρικό γύρω ἀπό τή θέση τελικῆς ἀποκλίσεως. Παρατηρώντας ἐπομένως δύο διαδοχικά μέγιστα τῆς ταλάντωσης μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τή θέση τῆς τελικῆς ἀποκλίσεως. Ἐκτιμεῖστε μέ προσοχή τό πειραματικό σφάλμα στην ἀνάγνωση τοῦ δυναμικοῦ, τῆς ἀποκλίσεως τοῦ γαλβανομέτρου (σέ mm) καί στην τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_1 .

— Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία αὐξάνοντας σταδιακά τό δυναμικό τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ κατά 1 V. Σέ κατάλληλο πῖνακα καταγράψτε τό δυναμικό V καί τήν ἀντίστοιχη ἀπόκλιση, σημειώνοντας καί τά ἀντίστοιχα σφάλματα στίς μετρήσεις. Συνεχίστε νά παίρνετε μετρήσεις μέχρι ὀλική ἀπόκλιση 20 cm περίπου. Σέ μιᾶ τρίτη στήλη τοῦ πῖνακα ὑπολογίστε τό ρεῦμα (καί τό ἀντίστοιχο σφάλμα) πού διαρρέει τό γαλβανόμετρο γιά κάθε μέτρηση. Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό ρεῦμα. Γιά κάθε σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως σημειῶστε μέ μιᾶ ὀριζόντια γραμμή τό σφάλμα στόν προσδιορισμό τοῦ ρεύματος καί μέ μιᾶ κατακόρυφη γραμμή τό σφάλμα στή μέτρηση τῆς ἀποκλίσεως. Προσαρμόστε στά δεδομένα τήν καλύτερη εὐθεία καί ἀπό τήν κλίση προσδιορίστε τήν εὐαίσθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό ρεῦμα.

— Ρυθμίστε τό δυναμικό V ὥστε τό γαλβανόμετρο νά ἀποκλίνει κατά 15 cm περίπου. Συνδέστε παράλληλα πρός τό γαλβανόμετρο τό κιβώτιο ἀντιστάσεως R_2 καί ρυθμίστε τήν τιμή του ὥστε ἡ ἔνδειξη τοῦ γαλβανομέτρου νά εἶναι ἡ μισή ἀπό τήν προηγούμενη. Ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_2 εἶναι τώρα ἕση μέ τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ ὀργάνου R_g . Ἀποδείξτε ὅτι τοῦτο ἀληθεύει. Μέ πόση ἀκρίβεια; Διπλασιάστε τό δυναμικό V καί παρατηρεῖστε τή νέα ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Σχολιάστε τό ἀποτεῖλεσμα.



— Από τὰ προηγούμενα αποτελέσματα προσδιορίστε τὴν εὐαισθησία S_V τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρὸς τὸ δυναμικό.

5-2 Ἡ Κίνηση τοῦ Γαλβανομέτρου

Τὸ γαλβανόμετρο D'Arsonval εἶναι ἓνας λεπτὸς μηχανισμὸς μὲ ἀρκε-
τὰ πολὺπλοκὴ ἀλληλεπίδραση μηχανικῶν καὶ ἠλεκτρομαγνητικῶν φαινομέ-
νων. Ἡ λειτουργία του περιλαμβάνει μεταβατικὲς καταστάσεις πού ἐν-
διαφέρουν ὅσο καὶ ἡ κατάσταση ἰσορροπίας. Ὁ χρόνος π.χ. πού ἀπαιτεῖ-
ται γιὰ νὰ φτάσει τὸ γαλβανόμετρο στὴν κατάσταση ἰσορροπίας ἐνδιαφέ-
ρει ἐξίσου μὲ τὸ μέγεθος τῆς ὀλικῆς ἀποκλίσεως. Ἡ ἐξίσωση πού διέπει
τὴν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου μπορεῖ νὰ βρεθεῖ ἀπὸ τὴ θεώρηση τοῦ συ-
νόλου τῶν ροπῶν πού ἀναπτύσσονται στὸ κινητὸ πηνίο. Ἡ ροπή πού δη-
μιουργεῖ τὸ ἠλεκτρικὸ ρεῦμα I ἔχει ἤδη ἐξεταστεῖ στὴν παράγραφο 3-1
καὶ δίνεται ἀπὸ τὴν ἔκφραση

$$T = NBAI$$

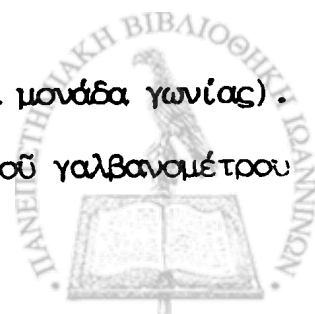
(5.5)

ὅπου B εἶναι ἡ ἔνταση τοῦ ἀκτινικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, N τὸ πλῆθος τῶν
βρόχων τοῦ πηνίου καὶ A τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κάθε βρόχου. Στὴ
ροπή αὐτὴ ἀντιτίθεται ἡ στρέψη τῆς ταινίας ἀναρτήσεως μὲ ροπή ἀνάλο-
γη πρὸς τὴ γωνία περιστροφῆς

$$T_1 = - \tau \theta$$

(5.6)

ὅπου τ εἶναι ἡ σταθερὰ στρέψεως τῆς ταινίας (ροπή ἀνά μονάδα γωνίας).
Γιὰ τὴν περισσότερη ρεαλιστικὴ ἀπόδοση τῆς κινήσεως τοῦ γαλβανομέτρου



θά πρέπει ακόμη νά συμπεριλάβουμε μιὰ ροπή τριβῆς πού δημιουργεῖ ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀέρας. Ὅπως κάθε ἀντίδραση τριβῆς θά θεωρήσουμε ὅτι ἡ τελευταία ροπή εἶναι ἀνάλογη πρὸς τὴν ταχύτητα (σέ περίπτωση στρέψης, πρὸς τὴ γωνιακὴ ταχύτητα) καὶ θά γράψουμε

$$T_2 = - r_0 \frac{d\theta}{dt} \quad (5.7)$$

ὅπου r_0 εἶναι μιὰ σταθερά, πού θά ὀνομάσουμε σταθερά ἀποσβέσεως. Τέλος, γιὰ τὴν ἀπόδοση τῆς κινήσεως τοῦ πηνίου, θά πρέπει ἀκόμη νά ἐξετάσουμε τὴν ἐπίδραση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος μέ τό ὁποῖο ἔχει συνδεθεῖ τό γαλβανόμετρο. Κατά τὴν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου μέ γωνιακὴ ταχύτητα $\frac{d\theta}{dt}$, ἡ μεταβολὴ τῆς ροῆς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου διαμέσου τοῦ πηνίου δημιουργεῖ μιὰ ΗΕΔ, ἡ ὁποία σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Faraday {βλ. κεφάλαιο 10} δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$U = - \frac{d\Phi}{dt} = - NBA \frac{d\theta}{dt} . \quad (5.8)$$

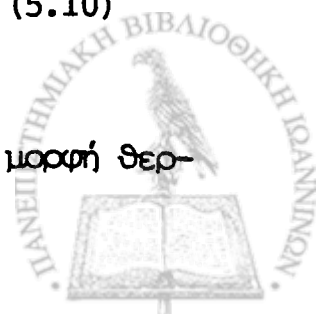
Ἄν R_g εἶναι ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου καὶ R_d ἡ ἀντίσταση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος τότε τό ρεῦμα πού θά διαρεύσει στό κύκλωμα εἶναι

$$I = \frac{U}{R_g + R_d} \quad (5.9)$$

ἐνῶ ἡ κατανάλωση ἰσχύος

$$P = \frac{U^2}{R_g + R_d} = \frac{N^2 B^2 A^2}{R_g + R_d} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 . \quad (5.10)$$

Ἡ τελευταία ἰσχύ, πού τελικὰ ἐγκαταλείπει τό σύστημα ὑπὸ μορφή θερ-



μότητας, τροφοδοτείται από την κινητική ενέργεια του πηνίου. Με άλλα λόγια η επαγωγική ΗΕΔ της έξ. (5.8) δημιουργεί στο πηνίο μία ροπή τριβής που σε αναλογία με την έξ. (5.7) θα γράψουμε ως

$$T_3 = - r_d \frac{d\theta}{dt} \quad (5.11)$$

μέ καταπόλωση μηχανικής ίσχύς

$$P = - T \frac{d\theta}{dt} = r_d \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2. \quad (5.12)$$

Έξισώνοντας τις έξ. (5.10) και (5.12) μπορούμε να προσδιορίσουμε το συντελεστή αποσβέσεως που δημιουργεί η επαγωγική ΗΕΔ ως

$$r_d = \frac{N^2 B^2 A^2}{R_g + R_d}$$

Η έξισωση που διέπει την κίνηση του γαλβανομέτρου μπορεί τώρα να γραφεί ως

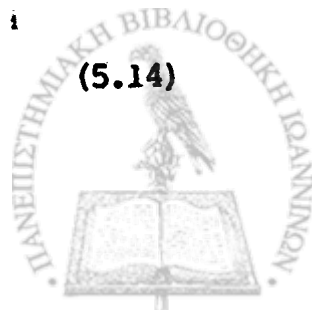
$$M \frac{d^2\theta}{dt^2} = T + T_1 + T_2 + T_3 = NBAI - \tau\theta - r_0 \frac{d\theta}{dt} - r_d \frac{d\theta}{dt}$$

ή

$$M \frac{d^2\theta}{dt^2} + r \frac{d\theta}{dt} + \tau\theta = NBAI \quad (5.13)$$

όπου M είναι η ροπή αδρανείας του κινητού πηνίου και

$$r = r_0 + r_d = r_0 + \frac{N^2 B^2 A^2}{R_g + R_d}, \quad (5.14)$$



Παρατηρείται ότι η κατάσταση ισορροπίας ($\frac{d\theta}{dt} = 0$) που προβλέπει η Εξ. (5.13) ταυτίζεται με τη συνθήκη της Εξ. (3.7) για την τελική απόκλιση θ_F του άμπερομέτρου

$$\theta_F = \frac{NBAI}{\tau} .$$

Η Εξ. (5.13) μπορεί να μεταβληθεί σε ομογενή διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού με μετασχηματισμό της μεταβλητής ως

$$M \frac{d^2\alpha}{dt^2} + r \frac{d\alpha}{dt} + \tau\alpha = 0 \quad (5.15)$$

όπου

$$\alpha \equiv \theta - \theta_F . \quad (5.16)$$

Οι λύσεις της Εξ. (5.15) είναι γνωστές από το πρόβλημα του άρμονικού ταλαντωτή. Μιά ειδική λύση είναι η συνάρτηση

$$\alpha = e^{pt} \quad (5.17)$$

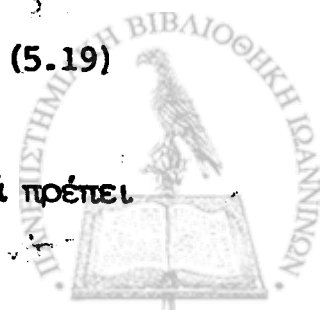
πού με αντικατάσταση των παραγώγων

$$\frac{d\alpha}{dt} = pe^{pt} , \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = p^2 e^{pt} \quad (5.18)$$

δίνει τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί ο εκθέτης p

$$Mp^2 + rp + \tau = 0. \quad (5.19)$$

Για να ικανοποιείται επομένως η διαφορική εξίσωση (5.15) θα πρέπει



ὁ ἐκθέτης p νά ἔχει τιμή

$$p_{\pm} = -\frac{r}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2M}\right)^2 - \frac{\tau}{M}}. \quad (5.20)$$

ὅπου ὁ δείκτης $+$ ἢ $-$ ἀναφέρεται ἀντίστοιχα στό ἐναλλακτικό πρόσημο τοῦ δευτέρου ὄρου.

Ἡ μορφή τῶν λύσεων τῆς ἐξ. (5.15) ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τῶν ἀριθμῶν p_{\pm} στήν ἐξ. (5.20). Γιά τή διερεύνηση τῶν λύσεων εἶναι χρήσιμο νά ὀρίσουμε τίς ποσότητες

$$\gamma \equiv \frac{r}{2M} \quad (5.21\alpha)$$

πού θά ὀνομάσουμε ἀνηγμένο συντελεστή ἀποσβέσεως τοῦ γαλβανομέτρου καί

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{\tau}{M}}. \quad (5.21\beta)$$

θά ἀναφερθοῦμε στήν ποσότητα $\omega_0/2\pi$ μέ τόν ὄρο φυσική συχνότητα τοῦ γαλβανομέτρου. Εἶναι ἀκόμη χρήσιμο νά ὀρίσουμε τήν ποσότητα

$$\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (5.21\gamma)$$

Μέ τή βοήθεια τῶν ὀρισμῶν στίς ἐξ. (5.21) θά διακρίνουμε τρεῖς περιπτώσεις

(α) $\gamma < \omega_0$.

Στήν περίπτωση αὕτη ὁ ἐκθέτης τῆς ἐξ. (5.17) εἶναι μιγαδικός ἀ-



ριθμός

$$P_{\pm} = -\gamma \pm i\omega. \quad (5.22)$$

Καθόσον οι συναρτήσεις $\alpha = e^{P_+t}$ και $\alpha = e^{P_-t}$ αποτελούν δύο ανεξάρτητες ειδικές λύσεις, η γενική λύση της έξ. (5.15) μπορεί να γραφεί ως

$$\alpha = C_1 e^{-\gamma t + i\omega t} + C_2 e^{-\gamma t - i\omega t} = e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \quad (5.23)$$

όπου C_1 και C_2 είναι δύο αδιάφοροι μιγαδικοί αριθμοί.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι για να είναι πραγματικός αριθμός η γενική λύση της έξ. (5.23), οι συντελεστές C_1 και C_2 πρέπει να είναι μιγαδικοί συζυγείς. Γράφοντας

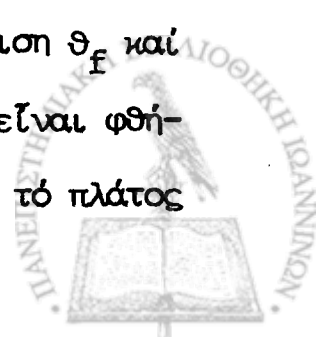
$$C_1 = \frac{1}{2} A e^{i\varphi}, \quad C_2 = \frac{1}{2} A e^{-i\varphi} \quad (5.24)$$

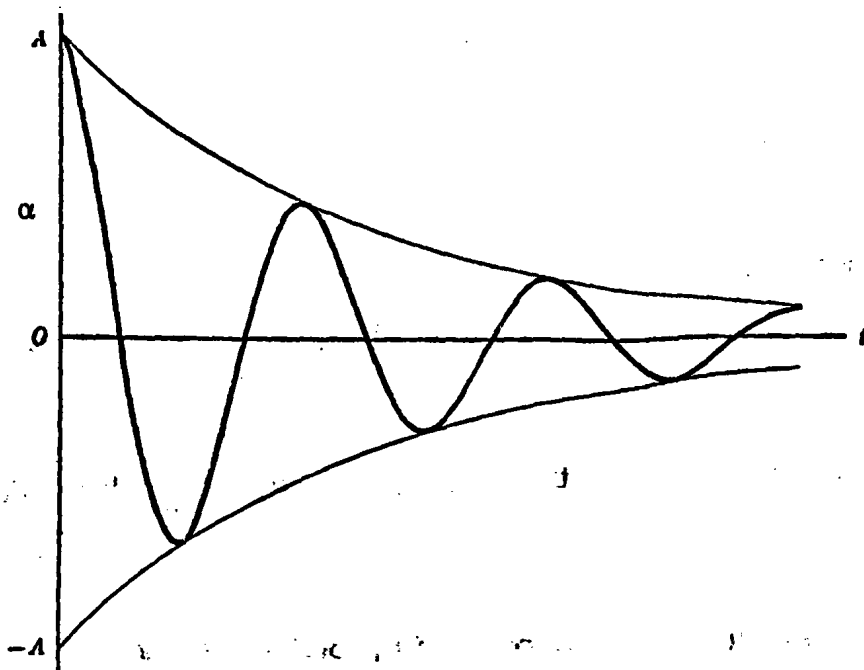
η έξ. (5.23) μετασχηματίζεται στη μορφή

$$\alpha = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.25)$$

όπου οι σταθερές A και φ μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες.

Η λύση της έξ. (5.25) δίνεται στην γραφική παράσταση του σχήματος 5-4, όπου σύμφωνα με την έξ. (5.16), ο κάθετος άξονας αντιπροσωπεύει τη διαφορά της στιγμιαίας αποκλίσεως θ από την τελική απόκλιση θ_f και ο οριζόντιος άξονας τό χρόνο. Η κίνηση του γαλβανόμετρου είναι φθίνουσα ταλάντωση γύρω από τη θέση τελικής αποκλίσεως θ_f ενώ τό πλάτος





ΣΧΗΜΑ 5-4. Κίνηση του γαλβανομέτρου για $\gamma^2 > \omega_0^2$. Η λεπτή καμπύλη περιγράφει τη μείωση του πλάτους της ταλαντώσεως.

της ταλαντώσεως μειώνεται ασυμπτωτικά σύμφωνα με τη συνάρτηση $Ae^{-\gamma t}$.

(b) $\gamma > \omega_0$.

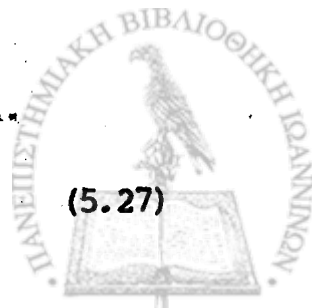
Οι δύο λύσεις της έξ. (5.19) είναι άρνητικοί πραγματικοί αριθμοί

$$P_- = -\gamma_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (5.26a)$$

$$P_+ = -\gamma_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (5.26b)$$

και η γενική λύση

$$a = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \quad (5.27)$$



Οι δύο όροι στην τελευταία έκφραση φθίνουν έκθετικά (ο πρώτος πιο γρήγορα από το δεύτερο), ενώ οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες.

$$(c) \quad \gamma = \omega_0$$

Στήν περίπτωση αυτή οι δύο λύσεις της ΕΞ. (5.19) εκφυλίζονται σε μία

$$p = -\gamma \quad (5.28)$$

και μία ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης (5.15) είναι

$$a = e^{-\gamma t} \quad (5.29)$$

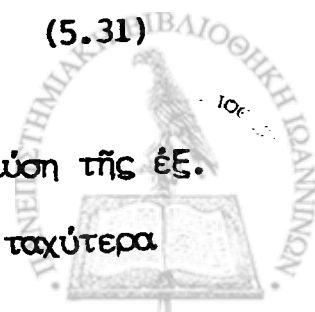
Όπως είναι εύκολο να αποδειχτεί με απευθείας αντικατάσταση, για την ειδική περίπτωση $\omega_0 = \gamma$, μία δεύτερη ειδική λύση μπορεί να δημιουργηθεί αν πολλαπλασιάσουμε τη συνάρτηση της ΕΞ. (5.29) με το χρόνο. Η γενική επομένως λύση της διαφορικής εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως

$$a = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t} \quad (5.30)$$

Η τελευταία συνάρτηση φθίνει με ρυθμό ένδιάμεσο μεταξύ των δύο όρων της ΕΞ. (5.27), καθώςον από τις ΕΞ. (5.26)

$$\gamma_1 > \gamma > \gamma_2 \quad (5.31)$$

Αν εξαιρέσουμε επομένως την ειδική περίπτωση $C_2 = 0$ στη λύση της ΕΞ. (5.27) ή λύση της διαφορικής εξίσωσης (5.15) μηδενίζεται ταχύτερα

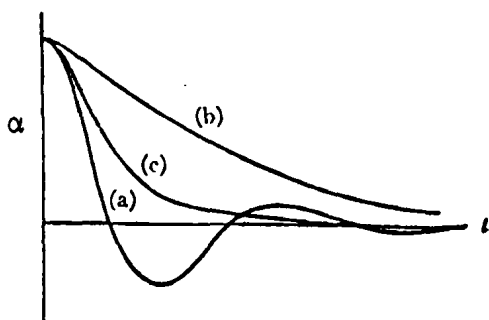


γιά τή συνθήκη $\gamma = \omega_0$, ήτοι γιά

$$r = 2 \sqrt{M} . \quad (5.32)$$

Οι λύσεις τῆς ἐξ. (5.15) στίς τρεῖς περιπτώσεις πού διερευνήσαμε συγκρίνονται στή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 5-5. Γιά ἓνα συγκεκριμένο ἀνηγμένο συντελεστή ἀποσβέσεως γ ἢ μιὰ συγκεκριμένη φυσική συχνότητα ω_0 ἡ τελική κατάσταση ἐπιτυγχάνεται στό μικρότερο δυνατό χρόνο γιά $\omega_0 = \gamma$. Θά ὀνομάσουμε τή συνθήκη αὐτή, συνθήκη κρίσιμης ἀποσβέσεως. Γιά $\omega_0 < \gamma$ τό γαλβανόμετρο ἀντιδρᾷ μέ κωρότητα καί ἡ τελική ἔνδειξη ἐπιτυγχάνεται μετά ἀπό ἄρκετό χρόνο. Στήν περίπτωση αὐτή τό σύστημα βρίσκεται σέ κατάσταση ὑπερκρίσιμης ἀποσβέσεως. Ἡ κατάσταση ὑποκρίσιμης ἀποσβέσεως, στήν ὁποία ικανοποιεῖται ἡ ἀντίστροφη συνθήκη $\omega_0 > \gamma$, περιγράφεται ἀπό τή καμπύλη (α) τοῦ σχήματος 5-5. Τό σύστημα ταλαντοῦται γύρω ἀπό τήν τελική ἔνδειξη, στήν ὁποία ἰσορροπεῖ ἀσυμπτωτικά καί σέ χρόνο μεγαλύτερο ἀπό τό χρόνο τῆς κρίσιμης ἀποσβέσεως.

Ἡ κατάσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως, πού συνήθως θεωρεῖται ἡ ἐπιθυμητή γιά τή λειτουργία τοῦ γαλβανομέτρου, ἐπιτυγχάνεται ὅταν ικανο-



ΣΧΗΜΑ 5-5. Κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου γιά τίς συνθήκες

(a) $\gamma < \omega_0$

(b) $\gamma > \omega_0$

(c) $\gamma = \omega_0$.



ποιείται ή συνθήκη

$$\gamma = \omega_0$$

ή ισοδύναμα

$$r = 2 \sqrt{\tau M} . \quad (5.32)$$

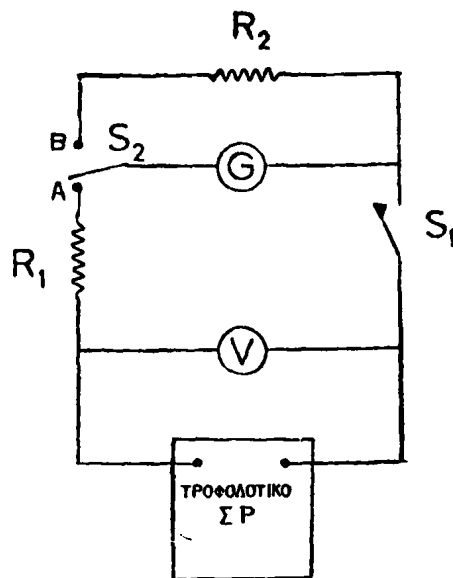
Χρησιμοποιώντας την έξ. (5.14), ή τελευταία συνθήκη μπορεί να γραφεί ως

$$r = r_0 + \frac{N^2 B^2 A^2}{R_g + R_d} = 2 \sqrt{\tau M} \quad (5.33)$$

ή

$$R_d = \frac{N^2 B^2 A^2}{2 \sqrt{\tau M} - r_0} - R_g \quad (5.34)$$

όπου όλοι οι παράγοντες στο δεξιό μέρος της έξ. (5.34) εξαρτώνται αποκλειστικά από την κατασκευή του όργανου. Για να είναι επομένως δυνατή ή κατάσταση κρίσιμης αποσβέσεως θά πρέπει άρκενός ή αντίσταση τριβής πού δημιουργεί ο άτμοσφαιρικός άερας να είναι μικρή ώστε ο παρονομαστής του κλάσματος στην έξ. (5.34) να αντιπροσωπεύει θετική ποσότητα ($r_0 < 2 \sqrt{\tau M}$). Άφετέρου ή αντίσταση του πηνίου πρέπει να είναι άρκετά μικρή ώστε ή όλη έκφραση να έχει θετική τιμή. Στην αντίθετη περίπτωση ή έξωτερική αντίσταση είναι πάντα μεγαλύτερη από την ποσότητα της έξ. (5.34) και τό γαλβανόμετρο βρίσκεται πάντα στην κατάσταση υπερκρίσιμης αποσβέσεως. Στα συνήθη εύαίσθητα γαλβανόμετρα ή ποσότητα πού όρίζεται στην έξ. (5.34) είναι θετικός άριθμός και ο χειριστής του όργανου καλεϊται να ρυθμίσει την αντίσταση του έξωτερικού



ΣΧΗΜΑ 5-6. Κύκλωμα για τόν προσδιορισμό τής αντίστασης κρίσιμης άποσβέσεως (CDRX) στό Πείραμα 5-2.

κυκλώματος ώστε νά ισχύει ή συνθήκη κρίσιμης άποσβέσεως τής έξ. (5.34). Για τό λόγο αυτό πολλοί κατασκευαστές γαλβανομέτρων αναγράφουν στό περίβλημα του όργάνου τήν τιμή τής άντιστάσεως κρίσιμης άποσβέσεως, ή όποία συνήθως συμβολίζεται μέ τά γράμματα CDRX (άπό τόν άγγλικό όρο *critical damping resistance external*). Άν δέν είναι γνωστή, ή αντίσταση CDRX μπορεί νά προσδιοριστεί πειραματικά.

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-2. Συνδέστε τό κύκλωμα του σχήματος 5-6. Όπως καί στό Πείραμα 5-1 ή αντίσταση R_1 έχει τιμή μερικῶν ΜΩ. Η αντίσταση R_2 είναι ένα κιβώτιο αντίστασεως.

— Κλείστε τόν διακόπτη S_2 στή θέση Α. Κλείστε τόν διακόπτη S_1 καί ρυθμίστε τό δυναμικό του τροφοδοτικού ΣΡ ώστε τό γαλβανόμετρο νά αποκλίνει κατά 20 cm περίπου. Μέ $R_2 = \infty$ (άπόσυνδέστε τό ένα άκρο τής αντίστασεως R_2) μεταβάλετε γρήγορα τή θέση του διακόπτη S_2 άπό τή θέση Α στή θέση Β καί παρατηρεΐστε τήν ταλάντωση του γαλβανομέτρου μέχρις ότου σταματήσει νά κινεΐται. Αποδώστε σέ γραφική παράσταση, παρόμοια πρός τό σχήμα 5-4, τήν ταλάντωση ως συνάρτηση του χρόνου. Η διεργασία αυτή διευκολύνεται αν μετρήσετε κατ'άρχας τό χρόνο μιᾶς περιόδου (για μεγαλύτερη ακρίβεια

μετρεῖστε τὸ χρόνο 10 ταλαντώσεων καὶ διαιρέστε διὰ τοῦ 10).
 Στὴ συνέχεια μετρεῖστε καὶ καταγράψτε σὲ κατάλληλο πῖνακα τὴς
 διαδοχικὲς ἀκραῖες τιμὲς τῶν ταλαντώσεων.

— Ἐπαναλάβετε τὴν προηγούμενη ἐργασία γιὰ $R_2 = 0$. Ἀποδώστε
 τὴν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου στὴν ἴδια γραφικὴ παράσταση.

— Ἐπαναλάβετε τὴν προηγούμενη ἐργασία αὐξάνοντας σταδιακὰ
 τὴν τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως R_2 μέχρις ὅτου προσδιορίσετε τὴν ἀντί-
 σταση κρίσιμης ἀποσβέσεως. Ἀποδώστε τὴν κίνηση τοῦ γαλβανομέ-
 τρου στὴν προηγούμενη γραφικὴ παράσταση γιὰ τὴν τιμὴ $R_2 = CDRX$.

Στὸ προηγούμενο πείραμα ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου
 ἦταν κατὰ πολὺ μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν κρίσιμη ἀντίσταση ἀποσβέσεως τῆς
 ἔξ. (5.34). Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸ χρειάστηκε ἡ σύνδεση μιᾶς παράλληλης
 ἀντιστάσεως, ἢ διαιλαδώσεως, γιὰ τὴν ἐξάλειψη τῶν ταλαντώσεων τοῦ
 ὄργανου. Αὐτὴ εἶναι συνήθως καὶ ἡ κατάσταση ποὺ ἀπαντᾶται στίς
 περισσότερες ἐφαρμογὲς καὶ ἡ ἀντιμετώπισή της θά μελετηθεῖ μέ μεγα-
 λύτερη λεπτομέρεια στὴν ἐπόμενη παράγραφο. Τὸ τίμημα ποὺ συνεπάγεται
 ἡ σύνδεση τῆς διαιλαδώσεως εἶναι μιὰ σχετικὴ μείωση τῆς εὐαισθησίας
 τοῦ ὄργανου ὡς πρὸς τὸ ρεῦμα. Στὴν ἀντίθετη περίπτωσι ὅπου ἡ ἐξωτε-
 ρικὴ ἀντίσταση ὑπολείπεται ἀπὸ τὴν ποσότητα τῆς ἔξ. (5.34), ἡ κωρό-
 τητα τοῦ ὄργανου μπορεῖ νὰ ἐξαληκθεῖ μέ σύνδεση κατάλληλης ἀντιστά-
 σεως σὲ σειρά μέ τὸ γαλβανόμετρο. Τὸ τίμημα στὴν περίπτωσι αὐτὴ εἶ-
 ναι μείωση τῆς εὐαισθησίας ὡς πρὸς τὸ δυναμικόν.

5-3 Διαιλάδωσι τοῦ Γαλβανομέτρου

Ὅπως εἶδαμε στὴν Παράγραφο 3-1, ἂν τὸ ρεῦμα ποὺ πρόκειται νὰ
 μετρηθεῖ ἀπὸ ἓνα ἀμπερόμετρο (ἢ γαλβανόμετρο) ἔχει ὑψηλὴ τιμὴ, ἢ



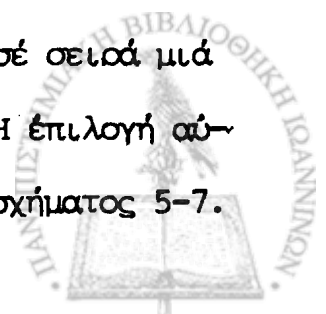
κλίμακα του όργανου μπορεί να επεκταθεί με παράλληλη σύνδεση μιας διακλαδώσεως. Σύμφωνα με την έξ. (3.10) αν I είναι τό όλικό ρεύμα στο έξωτερικό κύκλωμα και R_g, R_s αντίστοιχα οι αντιστάσεις του γαλβανόμετρου και της διακλαδώσεως, τότε τό ρεύμα πού διοχετεύεται στο γαλβανόμετρο είναι

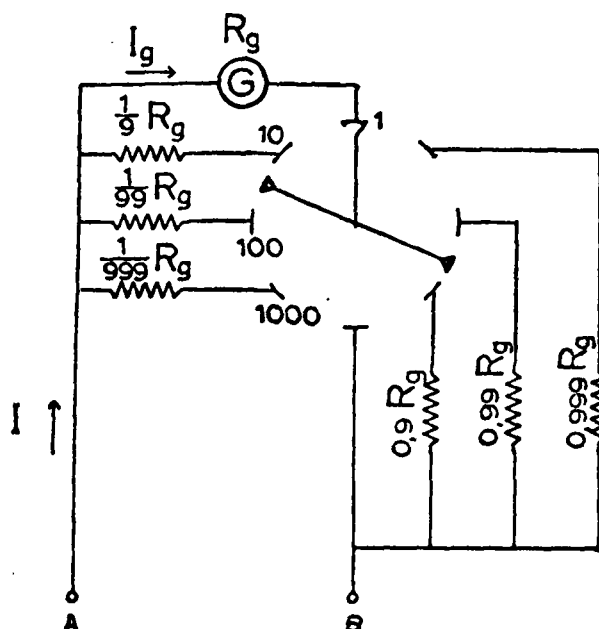
$$I_g = I \frac{R_s}{R_g + R_s} \quad (5.35)$$

Αντίστροφα, ή σχέση

$$I = I_g \frac{R_g + R_s}{R_s} \quad (5.36)$$

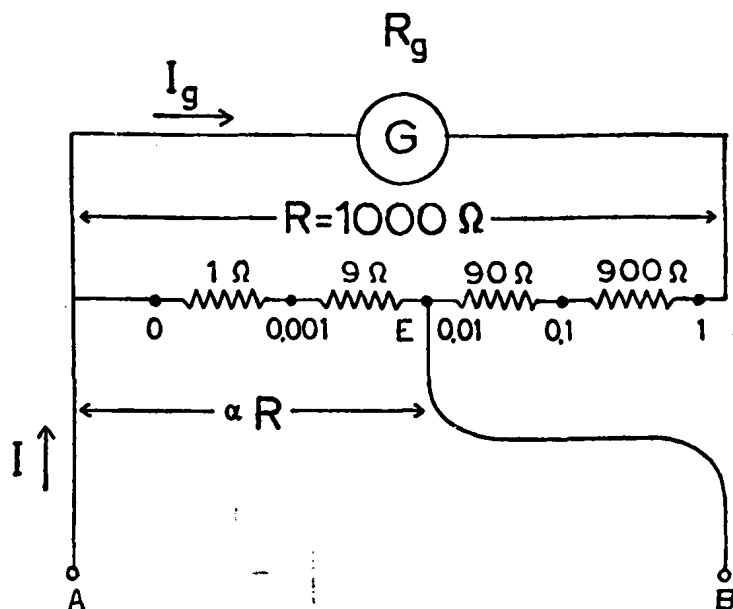
μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την άναγωγή του ρεύματος I_g πού μετράται από τό όργανο σε ρεύμα I πού διαρρέει τό έξωτερικό κύκλωμα. Στην περίπτωση αυτή ή άναγωγή γίνεται εύκολότερα αν ή διακλάδωση R_s επιλεγεί ως $\frac{1}{9} R_g, \frac{1}{99} R_g, \frac{1}{999} R_g, \kappa.λ.π.$, ώστε ο λόγος $(R_g + R_s)/R_s$ να πάρει την τιμή αντίστοιχα 10, 100, 1000, κ.λ.π. Μιά διάταξη πού επιτρέπει την επίλογή δεκαπλάσιας, εκατονταπλάσιας, κ.λ.π. κλίμακας για τό γαλβανόμετρο δίνεται στο σχήμα 5-7. Πρατηρείται ότι με την παρεμβολή της διακλαδώσεως ή όλική αντίσταση του έξωτερικού κυκλώματος, μπορεί να μειωθεί αίσθητά. Αν στα άκρα A και B της διατάξεως του σχήματος 5-7 αναπτύσσεται σταθερή διαφορά δυναμικού, ή παρεμβολή μιας διακλαδώσεως μπορεί επομένως να μεταβάλει τό όλικό ρεύμα I του έξωτερικού κυκλώματος. Η μεταβολή αυτή μπορεί να διορθωθεί αν ταυτόχρονα με τή σύνδεση της διακλαδώσεως παρεμβληθεί σε σειρά μία αντίσταση ίση προς $0.9 R_g, 0.99 R_g, 0.999 R_g, \kappa.λ.π.$ Η επίλογή αυτή γίνεται αυτόματα με τόν διακόπτη S στη διάταξη του σχήματος 5-7.





ΣΧΗΜΑ 5-7. Διάταξη έπιλογής διακλαδώσεων γαλβανομέτρου. Για τίς τιμές τών αντίστασεων πού περιέχονται στή διάταξη, ή αντίστοιχη έπαφή του διακόπτη S υποδεκαπλασιάζει, υποεκατονταπλασιάζει, κ.λ.π. τό ρεύμα πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο.

Είναι φανερό ότι διατάξεις διακλαδώσεως όπως αυτή του σχήματος 5-7 μπορούν να χρησιμοποιηθούν με ένα και μόνο γαλβανόμετρο με έσωτερική αντίσταση ίση προς την τιμή R_g . Αν στό σχήμα 5-7 αντικαταστήσουμε τό γαλβανόμετρο G με άλλο διαφορετικής έσωτερικής αντίστασεως, οι απλές σχέσεις υποδεκαπλασιασμού της κλίμακας δέν ισχύουν. Μιά διάταξη διακλαδώσεων πού έπιτρέπει την άναγωγή του ρεύματος I_g στό ρεύμα του έξωτερικού κυκλώματος I, άνεξάρτητα από την έσωτερική αντίσταση του γαλβανομέτρου, θά ήταν κατά πολύ προτιμότερη. Την ιδιότητα αυτή έμφανίζει ή διακλάδωση Αyrτton πού μελετήσαμε στην Άσκηση 4-8 και πού δίνεται διαγραμματικά στό σχήμα 5-8. Μιά μόνιμη διακλάδωση R, πού στό παράδειγμα του σχήματος έχει ληφθει ίση προς 1000 Ω, τοποθετείται παράλληλα προς την έσωτερική αντίσταση R_g του γαλβανομέτρου. Για τή σύνδεση του έξωτερικού κυκλώματος έπιλέγεται



ΣΧΗΜΑ 5-8. Διακλάδωση Ayrton.

μέ τήν κινητή έπαφή E ένα μέρος αR ($0 < \alpha \leq 1$) τής όλης διακλαδώσεως R , ενώ ή υπόλοιπη αντίσταση $(1 - \alpha)R$ παραμένει σέ σειρά μέ τό γαλβανόμετρο. Σύμφωνα μέ τό αποτέλεσμα τής Άσκήσεως 4-8, τό ρεύμα I του έξωτερικού κυκλώματος συνδέεται μέ τό ρεύμα I_g πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο μέ τή σχέση

$$I_g = \alpha \frac{R}{R + R_g} I = \alpha \beta I \quad (5.37)$$

όπου

$$\beta = \frac{R}{R + R_g} \quad (5.38)$$

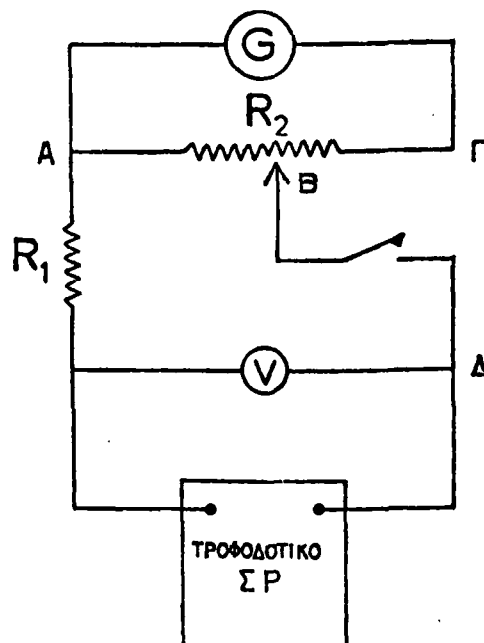
είναι τό ποσοστό του ρεύματος πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο για άπευθείας σύνδεση του έξωτερικού κυκλώματος στά άκρα τής όλικής διακλαδώσεως R . Η τελευταία ποσότητα είναι βέβαια συνάρτηση τής έσωτερικής αντίστασεως του γαλβανομέτρου. Σύμφωνα όμως μέ τήν έξ. (5.37) τό ρεύμα I_g είναι πάντα τό ίδιο ποσοστό του ρεύματος βI πού έξαρτάται αποκλειστικά από τή θέση τής έπαφής E. Μέ άλλα λόγια οι ένδεί-

Ξεις 0.001, 0.01, 0.1, κ.λ.π. στο παράδειγμα του σχήματος 5-8 ισχύουν για οποιοδήποτε όργανο χρησιμοποιηθεί με τη διάταξη. Τα πλεονεκτήματα της διακλάδωσης Ayrton ως προς την απλή διακλάδωση γίνονται περισσότερο έμφανη στο επόμενο Πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-3. Έπανασυνδέστε το κύκλωμα του σχήματος 5-3 χρησιμοποιώντας την ίδια τιμή της αντίστασης R_1 . Επιλέξτε το δυναμικό V του τροφοδοτικού ΣΡ ώστε η απόκλιση του γαλβανόμετρου να είναι περίπου 20 cm. Συνδέστε την αντίσταση R_2 με τιμή δεκαπλάσια από την εσωτερική αντίσταση του γαλβανόμετρου R_g και μετρήσατε στο Πείραμα 5-1. Σημειώστε τη νέα απόκλιση του όργανου.

— Ελαττώνοντας σταδιακά την τιμή της αντίστασης R_2 καταγράψτε σε κατάλληλο πίνακα την απόκλιση του γαλβανόμετρου ως συνάρτηση της απλής διακλάδωσης R_2 . Πάρτε τουλάχιστον 20 μετρήσεις στο διάστημα $0.2 R_g < R_2 < 10 R_g$. Αποδώστε τα αποτελέσματα του πίνακα σε γραφική παράσταση με κατακόρυφο άξονα την απόκλιση και οριζόντιο την τιμή της απλής διακλάδωσης R_2 . Προσαρμόστε την καλύτερη καμπύλη στα δεδομένα σας και σχολιάστε το αποτέλεσμα.

— Συνδέστε το κύκλωμα του σχήματος 5-9. Η αντίσταση $R_2 = 1000 \Omega$ είναι ένα κιβώτιο αντίστασης με ένδιάμεση κινητή επαφή ενώ τα



ΣΧΗΜΑ 5-9. Μελέτη της απόκλισης του γαλβανόμετρου με διακλάδωση Ayrton.



υπόλοιπα εξαρτήματα του κυκλώματος είναι όπως και στην προηγούμενη εργασία. Τοποθετείστε την κινητή επαφή της διακλαδώσεως R_2 στο σημείο Γ και ρυθμίστε το δυναμικό V ώστε η απόκλιση του γαλβανομέτρου να είναι περίπου 20 cm. Μετατοπίστε την κινητή επαφή της διακλαδώσεως $Ayrton$ και σε κατάλληλο πίνακα καταγράψτε την απόκλιση του γαλβανομέτρου ως συνάρτηση της αντίστασης που παρεμβάλεται μεταξύ των σημείων A και B . Αποδώστε τα δεδομένα σε γραφική παράσταση και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την αντίστοιχη καμπύλη για την απλή διακλάδωση.

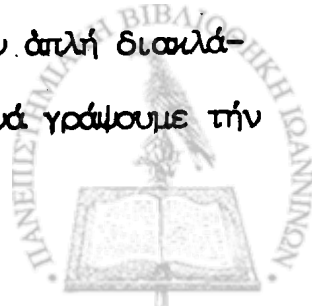
Με την προσθήκη διακλαδώσεως είναι δυνατόν να επεκτείνουμε την κλίμακα του γαλβανομέτρου, εις βάρος όμως της εύαισθησίας. Για απόσταση κλίμακας - γαλβανομέτρου $D = 1$ m, σύμφωνα με τον ορισμό της έξ. (5.3), η εύαισθησία ως προς το ρεύμα δίνεται από τη σχέση

$$S_I I_g = d \quad (5.39)$$

όπου I_g είναι το ρεύμα που διαρρέει το γαλβανόμετρο, d είναι η απόκλιση σε mm και η εύαισθησία S_I μετράται σε mm ανά ampère. Αν τώρα θεωρήσουμε το συγκρότημα του γαλβανομέτρου και της διακλαδώσεως ως ένα ενιαίο όργανο, η εύαισθησία του νέου όργανου μπορεί ανάλογα να οριστεί ως

$$S_I' I = d \quad (5.40)$$

όπου I είναι το όλικό ρεύμα που διοχετεύεται στο συνδυασμό διακλαδώσεως - γαλβανομέτρου από το εξωτερικό κύκλωμα. Για την απλή διακλάδωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έξ. (5.36) και να γράψουμε την έξ. (5.40) ως



$$S_I' \frac{R_g + R_s}{R_s} I_g = d \quad (5.41)$$

από την οποία έπεται ότι

$$S_I' = \frac{R_s}{R_g + R_s} S_I \cdot \quad (5.42)$$

Παρατηρείται ότι, σύμφωνα με την τελευταία σχέση, η προσθήκη μιας απλής διακλαδώσεως έχει πάντα ως αποτέλεσμα τη μείωση της εύαισθησίας. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η σύνδεση μιας διακλαδώσεως *Ayrton* έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της εύαισθησίας σύμφωνα με τη σχέση

$$S_I' = \alpha \frac{R}{R + R_g} S_I \cdot \quad (5.43)$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-4. Συνδέστε τό κύκλωμα του σχήματος 5-3. Για $R_2 = \frac{1}{9} R_g$, θεωρήστε ως "γαλβανόμετρο" τό κύκλωμα μεταξύ των σημείων A και Δ. Έπαναλάβετε τη διαδικασία του Πειράματος 5-1 και προσδιορίστε την εύαισθησία του όργανου ως προς τό ρεύμα. Συγκρίνετε τά αποτελέσματά σας με την πρόβλεψη της έξ. (5.42).

— Συνδέστε τό κύκλωμα του σχήματος 5-9. Για $R_2 = 1000 \Omega$, θεωρήστε ως "γαλβανόμετρο" τό κύκλωμα μεταξύ των σημείων A και Δ. Έπαναλάβετε τη διαδικασία του Πειράματος 5-1 και για τρεις διάφορες θέσεις της έπαφης B προσδιορίστε την εύαισθησία του όργανου ως προς τό ρεύμα. Συγκρίνετε τά αποτελέσματά σας με την πρόβλεψη της έξ. (5.43).



5-4 Προστασία του Γαλβανομέτρου

Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval στηρίζεται σέ ένα έξαιρετικά λεπτό καί εύαίσθητο μηχανισμό πού μπορεί εύκολα νά υποστεί βλάβη ή νά καταστραφεί τελείως. Ὁ χειρισμός του ἐπομένως πρέπει νά γίνεται μέ μεγάλη προσοχή καί πάντα μέσα στά ὅρια πού προσδιορίζει ὁ κατασκευαστής. Δύο εἶναι κυρίως οἱ παράγοντες πού μπορεί νά προξενήσουν βλάβη στό μηχανισμό τοῦ γαλβανομέτρου: μηχανικοί κραδασμοί καί ὑπερβολικό ἠλεκτρικό ρεῦμα.

Μηχανικοί κραδασμοί μπορεί νά προξενήσουν μεγάλες ταλαντώσεις πού εἶναι δυνατόν νά στρεβλώσουν ἢ νά ἀποκόψουν τήν ταινία ἀναρτήσεως τοῦ πηνίου. Ἐξάλλου συνεχεῖς ταλαντώσεις μπορούν νά μεταβάλουν τό συντελεστή στρέψεως τ ἢ ἀκόμη καί νά καταστρέψουν τό μηχανισμό στηρίξεως τοῦ πηνίου λόγω κοπώσεως τοῦ μετάλλου τῆς λεπτῆς ταινίας ἀναρτήσεως. Γιά τό λόγο αὐτό πολλοί κατασκευαστές προφυλάσσουν τό γαλβανόμετρο ὡς πρός τίς συνεχεῖς ταλαντώσεις μέ εἰδικό μηχανισμό γιά τήν ἀκινητοποίηση τοῦ πηνίου ἰδίως κατά τήν μεταφορά. Στά περισσότερα γαλβανόμετρα ἡ ἀκινητοποίηση τοῦ πηνίου μπορεί νά γίνει μέ ἔξωτερικό διακόπτη. Ὁ διακόπτης πρέπει νά βροῖσεται πάντα στή θέση μηχανικῆς ἀσφαλίσεως ὅταν δέν ἐκτελοῦνται μετρήσεις. Ἀντίστροφα, δέν πρέπει νά διοχετεύεται ἠλεκτρικό ρεῦμα στό πηνίο τοῦ γαλβανομέτρου ὅταν ἡ μηχανισμός ἀναρτήσεως εἶναι ἀσφαλισμένος.

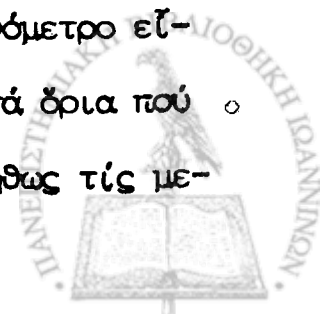
Ταλαντώσεις πού προκαλοῦνται ἀπό μηχανικούς κραδασμούς μπορούν νά ἐπηρεάσουν σημαντικά τήν ἀκρίβεια καθῶς καί τό χρόνο πού ἀπαιτεῖται γιά μιὰ μέτρηση. Γιά τό λόγο αὐτό, κατά τήν ἐκτέλεση μετρήσεων, τό γαλβανόμετρο πρέπει νά βροῖσεται στηριγμένο σταθερά σέ κατακόρυφη ἢ ὀριζόντια ἐπιφάνεια ἀπαλλαγμένη ἀπό κραδασμούς. Σταθερή στήριξη τοῦ ὄργανου σέ ένα συμπαγή τοῖχο δημιουργεῖ συνήθως ἱκανοποιητι-

κές συνθήκες εργασίας. Ταλαντώσεις του γαλβανόμετρου κατά την έκτε-
 λεση μετρήσεων μπορεί ακόμη να δημιουργηθούν, όπως είδαμε στις προη-
 γούμενες παραγράφους, όταν η αντίσταση του έξωτερικού κυκλώματος εί-
 ναι αρκετά μεγάλη ώστε να δημιουργεί κατάσταση υπεγκρίσιμης αποσβέσεως.
 Η κατάσταση αυτή απαντάται στην πράξη στις περισσότερες μετρήσεις
 και μπορεί να διορθωθεί εύκολα με τη σύνδεση μιας απλής διακλαδώσεως
 με αντίσταση ίση ή μικρότερη προς την αντίσταση κρίσιμης αποσβέσεως.
 Αντίθετα αν η ολική αντίσταση R_E του έξωτερικού κυκλώματος είναι μι-
 κρότερη από την αντίσταση κρίσιμης αποσβέσεως ($CDRX$), τότε ο χρόνος
 ισορροπήσεως του όργανου στην τελική ένδειξη αυξάνει σημαντικά, η έ-
 πιθυμητή κατάσταση κρίσιμης αποσβέσεως μπορεί να επιτευχθεί με παρεμ-
 βολή σε σειρά μιας αντιστάσεως με τιμή

$$R = CDRX - R_E . \quad (5.44)$$

Παρατηρείται πάντως ότι μείωση της έξωτερικής αντιστάσεως του γαλβα-
 νομέτρου έχει ως αποτέλεσμα αύξηση της αδρανεΐας του. Η ιδιότητα αυ-
 τή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ασφάλιση του όργανου από ελεύθε-
 ρες ταλαντώσεις που προκαλούν μηχανικοί κραδασμοί όταν δεν χρησιμο-
 ποιείται για μέτρηση. Η άριστη κατάσταση υπεγκρίσιμης αποσβέσεως
 ($R_E \ll CDRX$) μπορεί εύκολα να δημιουργηθεί βραχυκυκλώνοντας τους
 δύο άκροδέκτες του όργανου με ένα σύρμα. Αν τό γαλβανόμετρο δέν δια-
 θέτει διάταξη μηχανικής ασφαλίσσεως, οι άκροδέκτες του πρέπει να εί-
 ναι πάντα βραχυκυκλωμένοι κατά την αποθήκευση ή μεταφορά του όργανου.

Ο πιο εύκολος τρόπος να καταστρέψει κανείς ένα γαλβανόμετρο εί-
 ναι να τό τροφοδοτήσει με ηλεκτρικό ρεύμα μεγαλύτερο από τά όρια που
 καθορίζει ο κατασκευαστής. Τά όρια αυτά δέν ξεπερνούν συνήθως τίς με-

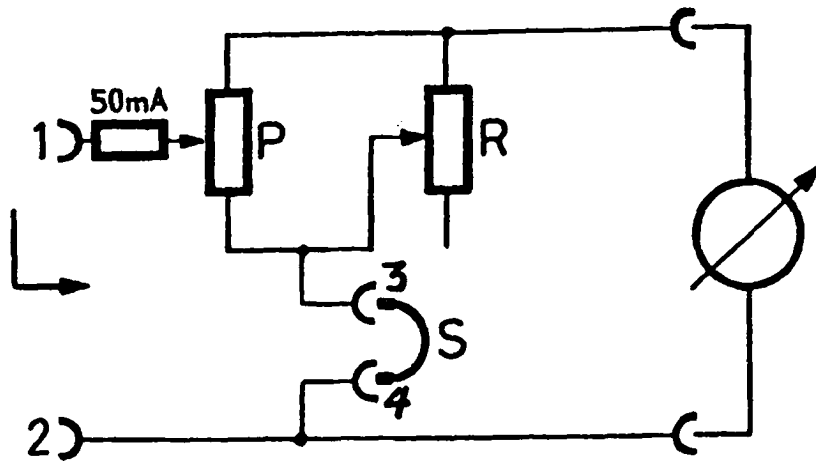


ρικές δεκάδες μA . Μέ παρόμοια βάρβαρη μεταχείριση πολλά εύαισθητα (καί άκριβά) γαλβανόμετρα έχουν πάρει στό παρελθόν τό δρόμο πρός τόν κάλαθο τών άχρήστων. Καί τοῦτο παρόλο ότι ή προστασία τοῦ όργάνου ώς πρός τό υπερβολικό ρεύμα εἶναι έξαιρετικά απλή. Για σταθερή διαφορά δυναμικοῦ, παρεμβολή σέ σειρά μιᾶς αντίστασεως μέ μεγάλη τιμή μπορεί νά μειώσει τό ρεύμα πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο σέ έπιτρεπτά επίπεδα. “Αν τό ρεύμα πού πρόκειται νά διοχετευθεῖ στό γαλβανόμετρο δέν εἶναι γνωστό, συνιστάται πάντα ή σύνδεση τοῦ όργάνου μέ μιᾶ μεγάλη αντίσταση (τῆς τάξης τών μερικῶν $M\Omega$) σέ σειρά. “Οπως ἤδη εἶδαμε προηγουμένως τοῦτο θά έχει ώς αποτέλεσμα τή μείωση τῆς εύαισθησίας τοῦ γαλβανομέτρου (καί πιθανόν μεταβολή τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τό έξωτερικό κύκλωμα). “Αν ή προστατευτική αντίσταση ἔχει τή δυνατότητα ρυθμίσεως, ή τιμή της μπορεί στή συνέχεια νά μειωθεί προσεκτικά μέχρις ότου έπιτευχθεῖ ή καλύτερη κατάσταση λειτουργίας: μέγιστη εύαισθησία τῆς διατάξεως καί ρεύμα μέσα στά όρια τοῦ γαλβανομέτρου.

Πολλοί κατασκευαστές γαλβανομέτρων διαθέτουν, ένασματομένες στό όργανο ή ώς ξεχωριστό έξάρτημα, διατάξεις πού περιλαμβάνουν όλους τούς παραπάνω παράγοντες προστασίας. Μιά τυπική διάταξη πού χρησιμοποιεῖται από τήν εταιρία LEYBOLD - HERAEUS δίνεται στό σχήμα 5-10. Τό σύμβολο θ^7 τοῦ σχήματος αποδίδει τό γαλβανόμετρο ενώ οἱ άεροδέκτες 1 καί 2 συνδέονται μέ τό έξωτερικό κύκλωμα. “Η λειτουργία τοῦ κυκλώματος καλύπτει δύο διάφορες περιπτώσεις.

1. Για έξωτερική αντίσταση μεγαλύτερη από τήν αντίσταση κρίσιμης άποσβέσεως οἱ άεροδέκτες 3 καί 4 εἶναι βραχυκυκλωμένοι. Στην περίπτωση αὐτή ή διάταξη τών αντίστασεων P καί R ίσοδυναμεῖ μέ μιᾶ διακλάδωση $Ayrton$. Τό ποσοστό τῆς αντίστασεως R πού παρεμβάλεται





ΣΧΗΜΑ 5-10. Κύκλωμα προστασίας γαλβανομέτρου της έκαιρείας LEYBOLD-HERAEUS.

παράλληλα με τό γαλβανόμετρο μπορεί νά έπιλεγεί ίση πρός τήν αντίσταση CDRX τοῦ γαλβανομέτρου. Τό ποτενσιόμετρο P ρυθμίζει τήν αντίσταση πού παρεμβάλεται σέ σειρά μέ τό γαλβανόμετρο καί έπομένως τήν εύαισθησία τοῦ όργάνου. Για τή μέτρηση ενός άγνωστου ρεύματος ή έπαρή τοῦ ποτενσιόμετρου P τοποθετείται πλησιέστερα πρός τόν άκροδέκτη 3. Μέ τή ρύθμιση αὐτή σχεδόν όλο τό ρεύμα τοῦ έξωτερικοῦ κυκλώματος διοχετεύεται στή βραχυκύκλωση S. Μεταθέτοντας σταδιακά τήν έπαρή τοῦ ποτενσιόμετρου P, μέρος τοῦ ρεύματος διαρρέει τό γαλβανόμετρο μέ αντίστοιχη αύξηση τής εύαισθησίας τής διατάξεως.

2. Για έξωτερική αντίσταση μικρότερη από τήν αντίσταση κρίσιμης άποσβέσεως οι άκροδέκτες 3 καί 4 άποσυνδέονται. Μέ τόν τρόπο αὐτό ή μεταβλητή αντίσταση R καί τό ποτενσιόμετρο P δημιουργοῦν μιá αντίσταση R_s σέ σειρά μέ τό γαλβανόμετρο. "Αν αP εἶναι ή τιμή τής αντίστάσεως μεταξύ τών σημείων 1 καί 3 τοῦ κυκλώματος,



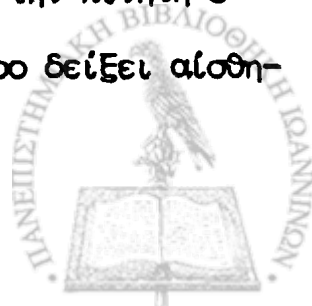
τότε

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{\alpha P + R} + \frac{1}{(1-\alpha)P} \quad (5.45)$$

Μεταβάλλοντας τή θέση τής κινητής έπαφής του ποτενσιόμετρου μπορούμε νά επιτύχουμε τιμή τής αντίστασεως R_s στήν έξ. (5.45) ίση μέ τήν τιμή R τής έξ. (5.44) και έπομένως κατάσταση κρίσιμης άποσβέσεως.

Όπως δείχνει τό σχήμα 5-10, γιά μεγαλύτερη προστασία ή διάταξη περιλαμβάνει μιá ασφάλεια πού διακόπτει τό κύκλωμα γιά ρεύμα μεγαλύτερο άπό 50 mA. Στή συνέχεια θά χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές τό γαλβανόμετρο γιά τή μέτρηση ήλεκτρικού ρεύματος αλλά άκόμη και ως άνιχνευτή γιά τήν ύπαρξη ή μή ρεύματος σέ κάποιο σημείο του κυκλώματος. Γιά τήν προστασία του όργάνου (άλλά και του φοιτητή άπό τήν όργή του διδασκατικού προσωπικού) θά χρησιμοποιεΐται πάντοτε ένα κύκλωμα προστασίας παρόμοιο προς τό κύκλωμα του σχήματος 5-10. Γιά τή ρύθμιση του κυκλώματος μπορεί νά ακολουθηθοΐν τά έπόμενα βήματα πού δίνονται υπό μορφή συνταγής.

1. Βραχυκυκλώστε τούς άμφοδέκτες 3 και 4 και τοποθετεΐστε τήν κινητή έπαφή του ποτενσιόμετρου P στό σημείο έλάχιστης εύαισθησίας (πλησιέστερα προς τόν άμφοδέκτη 3).
2. Συνδέστε τό έξωτερικό κύκλωμα. Ή απόκλιση του γαλβανομέτρου πρέπει νά εΐναι σχεδόν ίση μέ τό μηδέν. Μεταθέστε τήν κινητή έπαφή του ποτενσιόμετρου μέχρις ότου τό γαλβανομετρο δείξει αΐσθητή απόκλιση.



3. Διακόψτε τήν έπαρκή μέ τό έξωτερικό κύκλωμα καί παρατηρεΐστε τήν έπιστραφή τοϋ γαλβανομέτρου στή θέση ίσορροπίας. Ρυθμίστε τήν αντίσταση R ώστε όταν διακόπτεται τό έξωτερικό κύκλωμα ή έπιστραφή τοϋ όργάνου στή θέση ίσορροπίας νά έκφρανίζει κρίσιμη άπόσβεση. Στην κατάσταση αύτή τό γαλβανόμετρο επανέρχεται στή θέση ίσορροπίας (ή, ίσοδύναμα, κατά τή μέτρηση, στή θέση τελικής άποκλίσεως) στόν ελάχιστο χρόνο. Παρόλα αύτά, στήν πράξη, αποδεικνύεται προτιμότερο νά ρυθμιστεΐ ή αντίσταση R γιά κατάσταση μικρής υποκρίσιμης άποσβέσεως ώστε τό όργανο νά έκφρανίσει μικρή ταλάντωση πρός τήν αντίθετη πλευρά (π.χ. 1 % τής άρχικής άποκλίσεως) καί νά βεβαιωθεΐ ό παρατηρητής ότι ή θέση ίσορροπίας (ή τελικής άποκλίσεως) έχει έπιτευχθεΐ.

4. Συνδέστε τό έξωτερικό κύκλωμα καί μεταθέστε τήν κινητή έπαρκή τοϋ ποτενσιομέτρου P μέχρις ότου ή άπόκλιση τοϋ γαλβανομέτρου φτάσει τά έπιτρεπτά όρια. "Αν μέ τή διαδικασία αύτή ή κινητή έπαρκή τοϋ ποτενσιομέτρου έξαντλήσει τά όρια τής αντίστάσεως P, ή εύαισθησία τής διατάξεως συμπίπτει μέ τήν εύαισθησία τοϋ γαλβανομέτρου πού προσδιορίσατε στό Πείραμα 5-1. Στην αντίθετη περίπτωση επαναλάβετε τή διαδικασία τοϋ Πειράματος 5-1 καί προσδιορίστε τήν εύαισθησία τής διατάξεως.

5. "Αν κατά τήν επανασύνδεση τοϋ έξωτερικοϋ κυκλώματος, τό όργανο κινεΐται μέ μεγάλη κωρότητα, σημαίνει ότι ή αντίσταση τοϋ έξωτερικοϋ κυκλώματος είναι μικρότερη από τήν αντίσταση κρίσιμης άποσβέσεως τοϋ γαλβανομέτρου. "Αποσυνδέστε τούς άκροδέκτες 3 καί 4 καί άρχίζοντας από τό σημείο ελάχιστης εύαισθησίας ρυθμίστε τό ποτενσιόμετρο F ώστε τό όργανο νά έκφρανίζει κρίσιμη



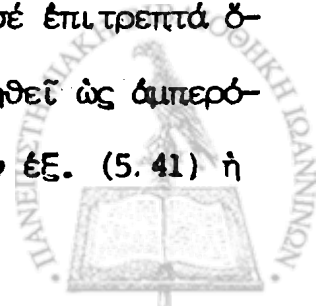
απόσβεση. Προσδιορίστε τήν εύαισθησία τής διατάξεως.

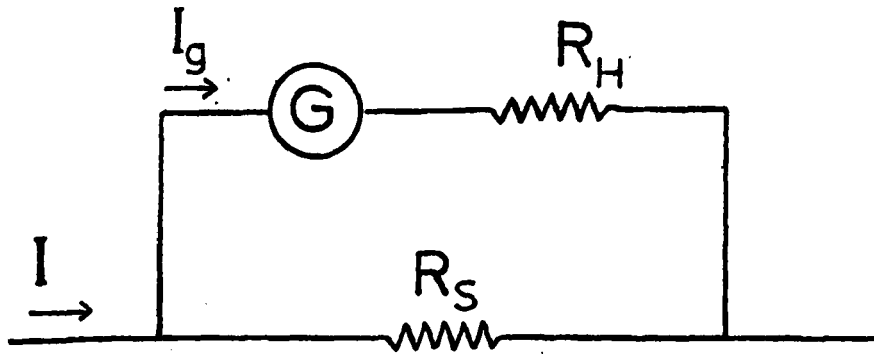
5-5 Τό Γαλβανόμετρο D'Arsonval ως 'Αμπερόμετρο, Βολτόμετρο καί 'Ωμό-
μετρο

Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval χρησιμοποιεῖται συνήθως ὡς ἀνιχνευτής ρεύματος, δηλαδή γιά νά διαπιστωθεῖ ἡ ὕπαρξη ἢ ἀπουσία ρεύματος σέ κάποιο σημεῖο τοῦ κυκλώματος. Παρόλα αὐτά ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέ-
τρου μπορεῖ νά βαθμονομηθεῖ εὐκόλα σέ ἀπρὸς καί τό ὄργανο νά χρησι-
μοποιηθεῖ ἀπευθείας ὡς ἓνα ἐξαιρετικά εύαισθητο ἀμπερόμετρο. Γιά τή
μέτρηση τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος τό κύκλωμα θά πρέπει νά διακοπεῖ σέ
κάποιο σημεῖο καί τό γαλβανόμετρο νά παρεμβληθεῖ σέ σειρά. Σέ είδι-
κές περιπτώσεις ὅπου εἶναι γνωστό ὅτι τό ρεῦμα τοῦ κυκλώματος βρίσκε-
ται μέσα στά ὄρια τοῦ γαλβανομέτρου, τό ὄργανο μπορεῖ νά παρεμβληθεῖ
χωρίς ἄλλη διαδικασία. Στίς περισσότερες ὅμως ἐφαρμογές ὅπου τό ρεῦ-
μα πού πρόκειται νά μετρηθεῖ ὑπερβαίνει τίς μερικές δεκάδες μA , τό
γαλβανόμετρο θά πρέπει νά προστατευθεῖ μέ μιᾶ διακλάδωση μικρῆς ἀντι-
στάσεως καί ἐνδεχομένως μέ μιᾶ μεγάλη ἀντίσταση σέ σειρά. Στή διάτα-
ξη τοῦ σχήματος 5-11 τό μεγαλύτερο μέρος τοῦ ρεύματος διοχετεύεται
στήν ἀντίσταση R_S ἐνῶ ἓνα μικρό ποσοστό

$$I_g = \frac{R_S}{R_H + R_g + R_S} I \quad (5.46)$$

διαρρέει τόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου. Μέ κατάλληλη ἐπιλογή τῶν ἀντι-
στάσεων R_S καί R_H ὥστε τό ρεῦμα I_g νά βρίσκεται μέσα σέ ἐπιτρεπτά ὄ-
ρια, ἡ διάταξη τοῦ σχήματος 5-11 μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς ἀμπερό-
μετρο γιά ὁποιαδήποτε περιοχὴ ρεύματος. Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (5.41) ἡ





ΣΧΗΜΑ 5-11. Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval ως άμπερόμετρο.

εύαισθησία τής διατάξεως ως προς τό ρεύμα δίνεται από τή σχέση

$$S_I' = \frac{R_S}{R_H + R_g + R_S} S_I \quad (5.47)$$

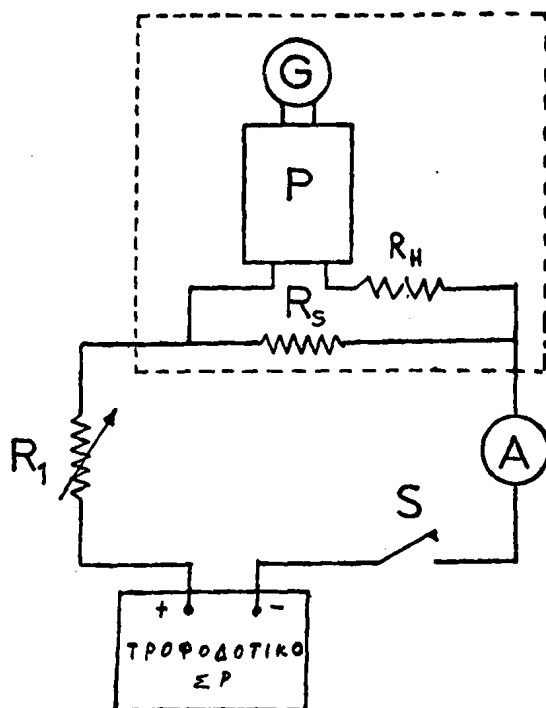
όπου S_I είναι ή εύαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου.

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-5. Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-12. Ὡς διακλάδωση R_S χρησιμοποιεῖστε μιά σταθερή αντίσταση 10 Ω. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη μιά σταθερή αντίσταση $R_H = 500 \text{ k}\Omega$, ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεως R_1 καί ἕνα άμπερόμετρο A. Τό κιβώτιο P ἀντιπροσωπεύει τό κύκλωμα προστασίας τοῦ σχήματος 5-10.

— Ρυθμίστε τό κιβώτιο ἀντιστάσεως στήν τιμή $R_1 = 50 \text{ }\Omega$ καί τό κύκλωμα προστασίας τοῦ γαλβανομέτρου στό σημεῖο ἐλάχιστης εύαισθησίας. Ρυθμίστε τό τροφοδοτικό ΣΡ γιά δυναμικό περίπου 0.5 V. Κλεῖστε τό διακόπτη S. Ἄν ή ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου είναι μικρότερη ἀπό 1 cm, ἀυξεῖστε τήν εύαισθησία τοῦ κυκλώματος προστασίας ὥστε ή ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου νά είναι 1 cm. Ἡ διάταξη πού βρῖσκεται μέσα στό πλαίσιο μέ τή διακεκομμένη γραμμή στό σχήμα 5-12, μπορεῖ τώρα νά θεωρηθεῖ ὡς ἕνα εύαίσθητο άμπερόμετρο.

— Σέ κατάλληλο πύνακα σημειῶστε τήν ένδειξη τοῦ άμπερομέτρου A καί τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Αύξεῖστε σταδιακά τήν τάση τοῦ





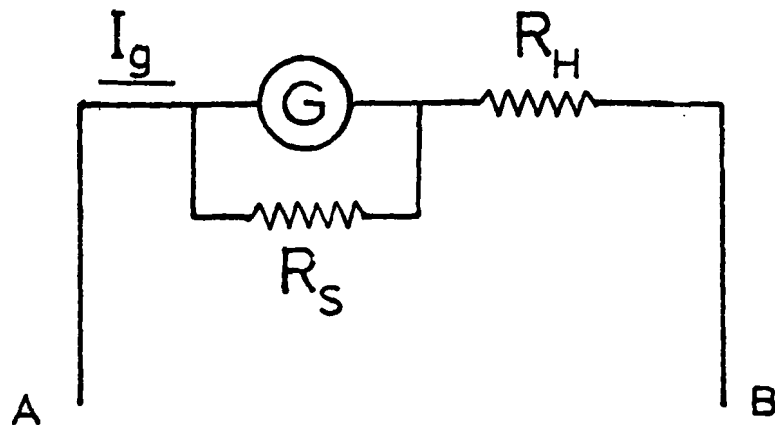
ΣΧΗΜΑ 5-12. Βαθμονόμηση διατάξεως άμπερομέτρου στο Πείραμα 5-12.

τροφοδοτικού καί πάρτε αρκετές μετρήσεις μέχρις ότου τό γαλβανόμετρο αποκλίνει περίπου 20 cm. Αποδώστε σέ γραφική παράσταση τήν απόκλιση του γαλβανομέτρου ως προς τό ρεύμα του έξωτερικού κυκλώματος καί προσαρμόστε τήν καλύτερη εύθεία στά δεδομένα σας. Από τήν κλίση τής εύθείας προσδιορίστε τήν εύαισθησία του άμπερομέτρου πού κατασκευάσατε.

— Άνοίξτε τό διακόπτη S, αντικαταστεύστε τήν διακλάδωση R_S μέ μιá νέα αντίσταση $R_S = 15\Omega$ καί έπαναλάβετε τήν προηγούμενη έργασία. Αποδώστε τά πειραματικά δεδομένα στήν ίδια γραφική παράσταση.

— Ποιά είναι ή διακριτική ικανότητα {βλ. Παράγραφο 1-1} του άμπερομέτρου πού κατασκευάσατε; Ποιά ή διακριτική ικανότητα του άμπερομέτρου A πού χρησιμοποιήσατε για τή βαθμονόμηση στο σχήμα 5-12; Σχολιάστε τό αποτέλεσμα.

Παρατηρείται ότι ή αντίσταση πού παρεμβάλει στο κύκλωμα ή διατάξη άμπερομέτρου του σχήματος 5-11 είναι περίπου ίση μέ τήν αντίσταση R_S . Για διακλαδώσεις στην περιοχή $R_S = 1\Omega$ ή παρεμβολή του άμπερομέτρου συνήθως δέν αλλοιώνει τά χαρακτηριστικά του έξωτερικού



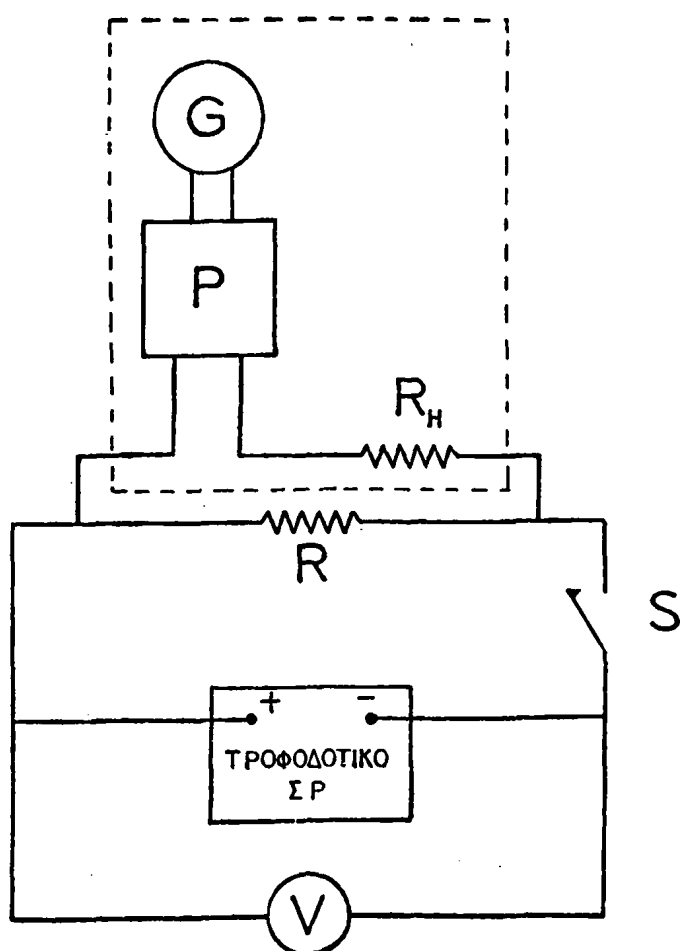
ΣΧΗΜΑ 5-13. Τό γαλβανόμετρο D'Arsonvai ως βολτόμετρο.

κυκλώματος.

Στήν παράγραφο 3-2 μελετήσαμε τήν κατασκευή ενός βολτομέτρου μέ βάση τό εργαστηριακό αμπερόμετρο. Μέ μιά ανάλογη διάταξη, πού δίνεται στό σχήμα 5-13, μπορούμε νά κατασκευάσουμε ένα έξαιρετικά εύαισθητο βολτόμετρο χρησιμοποιώντας τό γαλβανόμετρο D'Arsonvai. Ἡ διάταξη συνδέεται παράλληλα πρός τό κύκλωμα, σέ δύο σημεία A καί B, γιά τά ὁποῖα ζητεῖται ἡ διαφορά δυναμικοῦ. Ἡ αντίσταση R_H πού βρίσκεται σέ σειρά μέ τό γαλβανόμετρο ἔχει ἀρκετά ὑψηλή τιμή (στήν περιοχή τῶν $\kappa\omega$ ἢ καί $M\Omega$). Μέ τόν τρόπο αὐτό τό ρεῦμα I_g πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο εἶναι ἀρκετά μικρό ὥστε νά μήν ἀλλοιώνει τά χαρακτηριστικά τοῦ ἔξωτερικοῦ κυκλώματος. Χρησιμοποιώντας ἀκόμη μιά διακλάδωση R_S μέ αντίσταση μικρότερη ἀπό τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου, ἡ διάταξη μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς βολτόμετρο σέ μιά μεγάλη περιοχὴ δυναμικοῦ.

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-6. Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-14 πού μετρά τή διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα μιᾶς ἀντιστάσεως $R = 500 \Omega$. Ἡ ἀντίσταση R_H εἶναι τῆς τάξης τῶν μερικῶν $M\Omega$.





ΣΧΗΜΑ 5-14. Βαθμονόμηση διατάξεως βολτομέτρου στό Πείραμα 5-6.

— Ρυθμίστε τό κύκλωμα προστασίας γιά ελάχιστη εύαισθησία, κλειψτε τό διακόπτη S καί άνεβάστε τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣP σέ 0.5 V . Ρυθμίστε τήν εύαισθησία τοῦ κυκλώματος προστασίας μέχρις ὅτου τό γαλβανόμετρο ἀποκλίνει κατά περίπου 1 cm . Ἡ διάταξη πού βρίσκεται μέσα στό πλαίσιο μέ τή διακεκομμένη γραμμή στό σχῆμα 5-14, μπορεῖ τώρα νά θεωρηθεῖ ὡς ἕνα εύαίσθητο βολτόμετρο.

— Σέ κατάλληλο πύνακα σημειώστε τήν ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου V καί τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Αὐξεῖστε σταδιακά τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ καί πάρτε ἀρκετές μετρήσεις μέχρις ὅτου τό γαλβανόμετρο ἀποκλίνει περίπου 20 cm . Ἀποδώστε σέ γραφική παράσταση τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό δυναμικό στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R καί προσαρμόστε τήν καλύτερη εὐθεία στά δεδο-

μένα σας. Ἀπό τήν κλίση τῆς εὐθείας προσδιορίστε τήν εὐαισθησία τοῦ βολτομέτρου πού κατασκευάσατε.

— Ποιά ἡ διακριτική ἰκανότητα τοῦ βολτομέτρου πού κατασκευάσατε; Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τή διακριτική ἰκανότητα τοῦ βολτομέτρου V πού χρησιμοποιήσατε γιά τή βαθμονόμηση τῆς διατάξεως καί σχολιάστε τό ἀποτέλεσμα.

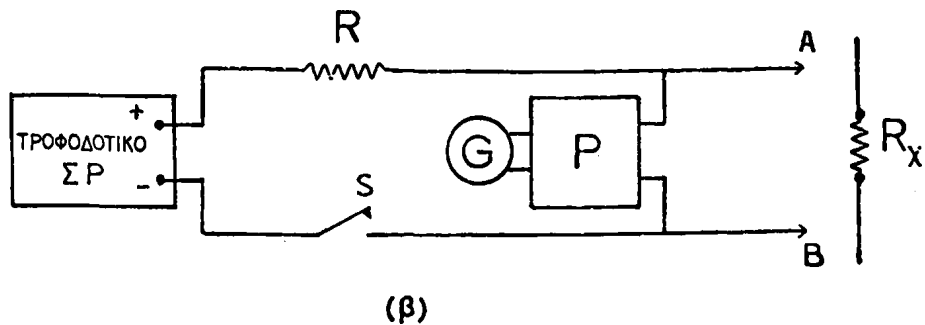
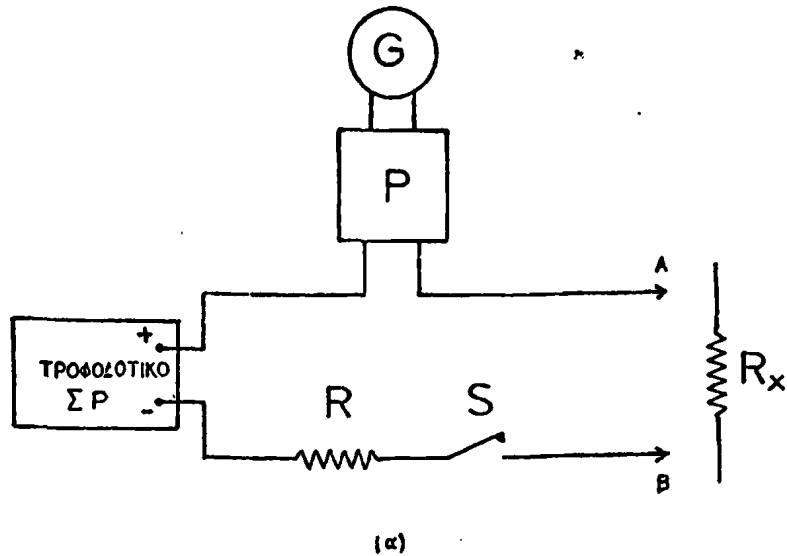
— Ἀποσυνδέστε τό τροφοδοτικό ΣP , τό βολτόμετρο V καί τήν ἀντίσταση R . Χρησιμοποιώντας τή διάταξη βολτομέτρου πού κατασκευάσατε καί τήν καμπύλη βαθμονομήσεως, μετρεῖστε τό δυναμικό τριῶν ἠλεκτρικῶν στοιχείων πού θά σᾶς δοθοῦν. Μετρεῖστε πάλι τό δυναμικό τῶν στοιχείων μέ τό βολτόμετρο V . Συγκρίνετε τά ἀποτελέσματα τῶν δύο μετρήσεων καί σχολιάστε τίς τυχόν διαφορές.

Ὅπως καί τό ἐργαστηριακό ἀμπερόμετρο πού ἐξετάσαμε στό Κεφάλαιο 3, τό γαλβανόμετρο D'Arsonval μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ μέ κατάλληλη βαθμονόμηση ὡς ὠμόμετρο. Στό ἐπόμενο Πείραμα θά μελετήσουμε δύο ἐναλλακτικές διατάξεις πού ἐξυπηρετοῦν τήν ἐφαρμογή αὐτή σέ διάφορες περιοχές ἀντιστάσεως.

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-7. Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-15(α). Χρησιμοποιεῖστε ἀντίσταση $R \approx 500 \text{ k}\Omega$ καί τάση 2 V . Καθόσον τό κύκλωμα πρόκειται νά λειτουργήσῃ μέ ἐξωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀντίσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως, οἱ ἀκροδέκτες 3 καί 4 τοῦ κυκλώματος προστασίας {βλ. σχῆμα 5-10} πρέπει νά εἶναι βραχυκυκλωμένοι.

— Μέ τό κύκλωμα προστασίας στή θέση ἐλάχιστης εὐαισθησίας, βραχυκυκλώστε τούς ἀκροδέκτες A καί B ($R_x = 0$). Κλεῖστε τόν διακόπτη S καί ρυθμίστε τήν εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὥστε νά δείχνει ἀπόκλιση 20 cm .

— Συνδέστε ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεως μεταξύ τῶν σημείων A καί B καί σέ κατάλληλο πύνακα σημειώστε τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου ὡς συνάρτηση τῆς ἀντιστάσεως R_x . Πάρτε ἀρκετές μετρήσεις ὥστε νά καλύψετε τήν περιοχή $0.2 R \leq R_x \leq 4 R$. Ἀποδώστε τά ἀποτελέσματά σας σέ γραφική παράσταση καί χαράξτε τήν καμπύλη βαθμονομήσεως



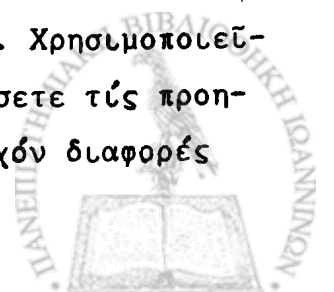
ΣΧΗΜΑ 5-15. Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval σέ διάταξη ώμομέτρου για μέτρηση (α) μεγάλης αντίστασης (β) μικρής αντίστασης.

τοῦ ώμομέτρου.

— Χρησιμοποιεῖστε τό ώμόμετρο πού κατασκευάσατε για νά μετρήσετε τίς "ἄγνωστες" ἀντίστασεις πού θά σᾶς δοθοῦν. Προσδιορίστε μέ προσοχή τό σφάλμα κάθε μετρήσεως.

— Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-15(β) χωρίς νά μεταβάλετε τήν ἀντίσταση R, τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ καί τή ρύθμιση τῆς εὐαισθησίας στό κύκλωμα προστασίας ἀπό τήν προηγούμενη ἐργασία. Κλεῖστε τόν διακόπτη S. Τό γαλβανόμετρο πρέπει νά ἀποκλίνει τώρα 20 cm.

— Συνδέστε ἕνα κιβώτιο ἀντίστασης στους ἀκροδέκτες A καί B καί ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία βαθμονομήσεως. Χρησιμοποιεῖστε τό ώμόμετρο τοῦ σχήματος 5-15(β) για νά μετρήσετε τίς προηγούμενες "ἄγνωστες" ἀντίστασεις. Σχολιάστε τίς τυχόν διαφορές καί τήν ἀκρίβεια κάθε μετρήσεως.



— Ποιές οί κύριες διαφορές τῶν δύο ὠμομέτρων πού κατασκευάσατε; Ποιά ἡ περιολή ἀντιστάσεως ὅπου τό καθένα βρίσκει ἐφαρμογή; Πῶς μπορεῖτε νά ἐπεκτείνετε τήν περιολή ἐφαρμογῆς τοῦ πρώτου ὠμομέτρου σέ μεγαλύτερες τιμές ἀντιστάσεως καί τοῦ δευτέρου σέ μικρότερες τιμές ἀντιστάσεως;

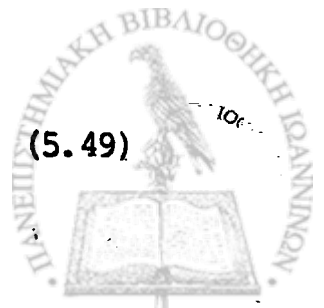
5-6 Τό Βαλλιστικό Γαλβανόμετρο

Στίς ἐφαρμογές τοῦ γαλβανομέτρου D'Arsonval πού μελετήσαμε ὡς τώρα, ἐνδιέφερε ἡ κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου καί ἡ τελική ἀπόκλιση κατά τή διέλευση ἐνός σταθεροῦ ρεύματος I . Μιά ἐξίσου ἐνδιαφέρουσα καί σημαντική ἐφαρμογή τοῦ γαλβανομέτρου, εἶναι ἡ μέτρηση τοῦ ὀλικοῦ φορτίου σέ ἕνα παλμό ἠλεκτρικοῦ ρεύματος μικρῆς χρονικῆς διαρκείας. Ἄς υποθέσουμε ὅτι μέ κάποια διεργασία στό ἐξωτερικό κύκλωμα (ἐκφόρτιση ἐνός πυκνωτή ἢ μιά στιγμιαία μεταβολή μαγνητικῆς ροῆς) ἕνα ρεῦμα $I(t)$ διοχετεύεται στό πηνίο τοῦ γαλβανομέτρου γιά μιά μικρή χρονική περίοδο T , μετά τήν ὁποία τό ρεῦμα μηδενίζεται καί πάλι. Κατά τή χρονική περίοδο T ἡ ἐξίσωση πού διέπει τήν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου δίνεται ἀπό τήν ἐξ. (5.13), ὅπου στήν περίπτωση αὐτή ὁ συντελεστής ἀποσβέσεως ἀφείλεται μόνο στήν τριβή πού δημιουργεῖ ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀέρας

$$M \frac{d^2\theta}{dt^2} + r_0 \frac{d\theta}{dt} + \tau\theta = NBAI. \quad (5.48)$$

Ὁλοκληρώνοντας ὡς πρός τό χρόνο στό διάστημα $(0, T)$, ἡ τελευταία σχέση παίρνει τή μορφή

$$M \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0}^T + r_0 \left. \theta \right|_{t=0}^T + \tau \int_0^T \theta dt = NBA \int_0^T I dt \quad (5.49)$$



Αν τό γαλβανόμετρο βρίσκειται άρχικά (κατά τή χρονική στιγμή $t = 0$ σέ κατάσταση ήρεμίας, ο πρώτος όρος τής έξ. (5.49) είναι άνάλογος πρός τή γωνιακή ταχύτητα ω_T τοϋ γαλβανομέτρου κατά τή χρονική στιγμή $t = T$

$$M \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0}^T = M\omega_T . \quad (5.50)$$

Ο δεύτερος όρος έκφράζει τήν όλική γωνιακή απόκλιση κατά τή χρονική στιγμή $t = T$. Αν ή διάρκεια τοϋ παλμοϋ είναι μικρή μπορούμε νά γράψουμε τόν όρο άποσβέσεως ώς

$$r_0 \theta \left|_{t=0}^T = r_0 \langle \frac{d\theta}{dt} \rangle T \quad (5.51)$$

όπου $\langle \frac{d\theta}{dt} \rangle$ είναι ή μέση γωνιακή ταχύτητα στό διάστημα $(0, T)$. Είναι φανερό ότι τό όριο τής έξ. (5.51) καθώς ή διάρκεια τοϋ παλμοϋ γίνεται μικρή, τείνει πρός τό μηδέν. Κατά τόν ίδιο τρόπο μπορεί νά θεωρηθεϊ άμελητέος και ο τρίτος όρος τής έξ. (5.49). Ο όρος αυτός μπορεί στήν ίδια προσέγγιση νά γραφεί ώς τό γινόμενο τής μέσης απόκλίσεως $\langle \theta \rangle$ επί τό χρόνο T , ήτοι

$$\tau \int_0^T \theta dt = \tau \langle \theta \rangle T. \quad (5.52)$$

Τέλος, τό ολοκλήρωμα τοϋ ρεύματος στό δεξιό μέρος τής έξ. (5.49), δίνει τό όλικό φορτίο q πού διέρευσε στό κινητό πηνίο τοϋ όργάνου κατά τό μικρό χρονικό διάστημα $(0, T)$.

$$NBA \int_0^T Idt = NBAq$$



Παραλείποντας τούς άμελητέους σέ πρώτη προσέγγιση όρους τής έξ.

(5.49) μπορούμε έπομένως νά γράψουμε τήν έξίσωση πού διέπει τήν κίνηση τού γαλβανομέτρου ώς

$$M\omega_T = NBAq. \quad (5.54)$$

Ή συμπεριφορά πού προβλέπει ή τελευταία σχέση είναι έξαιρετικά άπλή: Μετά τή διέλευση ενός παλμοϋ μέ μικρή χρονική διάρκεια, τό γαλβανόμετρο άποικτᾶ άρχική γωνιακή ταχύτητα ω_T , ανάλογη πρός τό όλικό φορτίο πού διέρευσε στό πηνίο. Στή συνέχεια ή κίνηση τού γαλβανομέτρου διέπεται άπό τήν έξ. (5.13) για τήν είδική περίπτωση $I = 0$

$$M \frac{d^2\theta}{dt^2} + r \frac{d\theta}{dt} + \tau\theta = 0 \quad (5.55)$$

μέ λύσεις πού μπορούν νά βρεθοϋν σύμφωνα μέ τή διερεύνηση τής Παραγράφου 5-2. Μετά άπό άρκετό χρόνο τό γαλβανόμετρο θά έπανέλθει στή θέση $\theta = 0$ είτε μέ ταλάντωση γύρω άπό τό σημείο ίσορροπίας είτε μέ τήν έκθετική συμπεριφορά τής υπερκρίσιμης άποσβέσεως. Όπως και προηγουμένως ή συμπεριφορά τού γαλβανομέτρου θά προσδιοριστεί άπό τήν τιμή τής όλικής άντιστάσεως τού έξωτερικοϋ κυκλώματος.

Άν και μπορούμε νά προσδιορίσουμε τά χαρακτηριστικά τής κινήσεως, όπως τήν περίοδο τής ταλαντώσεως ή τό πλάτος τής μέγιστης άποκλίσεως, άπό τήν άναλυτική μορφή τών λύσεων είναι κατά πολύ άπλούστερο για τό σκοπό αυτό νά θεωρήσουμε τή μηχανική ένέργεια πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο άπό τό βραχύ παλμό στό χρονικό διάστημα $(0, T)$. Σύμφωνα μέ τήν έξ. (5.54) κατά τό χρόνο $t = T$ τό γαλβανόμετρο διαθέτει κινητική ένέργεια



$$\frac{1}{2} M \omega_T^2 = \frac{(NBA)^2}{2M} q^2. \quad (5.56)$$

Καθώς τό πηνίο τοῦ γαλβανομέτρου περιστρέφεται, ὁ μηχανισμός ἀναρτήσεως ἐξασκεῖ μιά ροπή ἀνάλογη πρὸς τή γωνία ἀποκλίσεως πού συνεχῶς μειώνει τή γωνιακή ταχύτητα. Ἡ μέγιστη ἀπόκλιση ϑ_m ἐπιτυγχάνεται ὅταν ὅλη ἡ κινητική ἐνέργεια μετατραπεῖ σέ δυναμική ἐνέργεια στρέψεως τοῦ μηχανισμοῦ ἀναρτήσεως. Ἄν οἱ δυνάμεις τριβῆς εἶναι μικρές, μπορούμε νά ὑπολογίσουμε τή δυναμική ἐνέργεια πού ἔχει ἀποθηκευτεῖ στό μηχανισμό ἀναρτήσεως, θεωρώντας τό ἔργο πού καταναλώθηκε κατά τήν κίνηση γιά τήν ὑπερνίκηση τῆς ροπῆς στρέψεως. Ἐξισώνοντας τίς δύο ποσότητες μπορούμε νά γράψουμε

$$\frac{1}{2} M \omega_T^2 = \int_0^{\vartheta_m} \tau \vartheta d\vartheta \quad (5.57)$$

ἢ

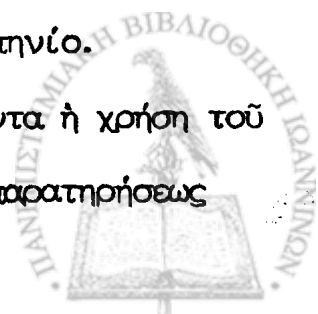
$$\frac{(NBA)^2}{2M} q^2 = \frac{\tau \vartheta_m^2}{2}.$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση ἡ μέγιστη γωνία ἀποκλίσεως μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\vartheta_m = \frac{NBA}{\sqrt{\tau M}} q \quad (5.58)$$

ἦτοι ἀνάλογη πρὸς τό ὅλικό φορτίο q πού διέρευσε στό πηνίο.

Στήν ἀναλογία τῆς ἐξ. (5.58) στηρίζεται σχεδόν πάντα ἡ χρήση τοῦ βαλιστικοῦ γαλβανομέτρου. Χρησιμοποιώντας τή διάταξη παρατηρήσεως



πού περιγράφεται στο σχήμα 5-2, ή μέγιστη γωνιακή απόκλιση ϑ_m και έπομένως τό φορτίο q πού διέρευσε στό πηνίο μπορεί νά μετατραπει σε γραμμική απόκλιση διαμέσου τής έξ. (5.1)

$$d_m = 2\vartheta_m D \quad (5.59)$$

όπου D είναι ή απόσταση τής γραμμικής κλίμακας από τό γαλβανόμετρο και d_m ή μέγιστη απόκλιση. Η εύαισθησία του βαλιστικού γαλβανομέτρου ως προς τό φορτίο S_q μπορεί νά όριστεί σε αναλογία με τις έξ. (5.3) και (5.4) ως

$$S_q \equiv 1000 \frac{d_m}{Dq} = 2000 \frac{NBA}{\sqrt{tM}} \quad (5.60)$$

μέ διαστάσεις αντίστραφου φορτίου. Για τή συνήθη απόσταση $D = 1 \text{ m}$ μπορεί άνόμη νά έκφραστεί σε χιλιοστόμετρα ανά σουλμπ. Χρησιμοποιώντας άνόμη τις έξ. (5.3) και (5.21β) μπορούμε νά γράψουμε

$$S_q = S_I \sqrt{\frac{t}{M}} = S_I \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} S_I \quad (5.61)$$

όπου $T_0 = 2\pi/\omega_0$ είναι ή φυσική περίοδος ταλαντώσεως του γαλβανομέτρου.

Σύμφωνα με τήν έξ. (5.61), ή εύαισθησία του γαλβανομέτρου ως προς τό φορτίο είναι άνάλογη προς τήν αντίστοιχη εύαισθησία ως προς τό ρεύμα και αντίστραφα άνάλογη προς τήν περίοδο έλεύθερης ταλαντώσεως. Γαλβανόμετρα πού προορίζονται κυρίως για βαλιστική χρήση συνήθως κατασκευάζονται με πηνίο μεγάλης διατομής A , ώστε νά αύξάνει σημαντικά ή ροπή άδρανείας. Τοϋτο έχει ως αποτέλεσμα αύξηση τής φυσικής περιόδου T_0 , έτσι ώστε ο χρόνος κατά τόν όποιο διοχετεύεται τό φορτίο στο

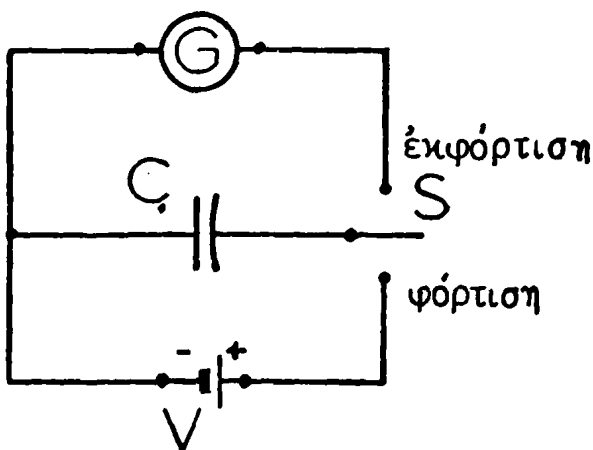
γαλβανόμετρο να είναι πράγματι αμελητέος σε σχέση με το χρόνο της ελεύθερης κινήσεως που ακολουθεί. Από την έξ. (5.61), η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται έκ πρώτης όψεως μείωση της ευαισθησίας S_q , η οποία όμως αντισταθμίζεται από την αύξηση της ευαισθησίας ως προς το ρεύμα S_I που σύμφωνα με την έξ. (5.3) είναι ανάλογη προς τη διατομή A του πηνίου.

Ένας σχετικά βραχύς παλμός ρεύματος μπορεί να δημιουργηθεί σε ένα κύκλωμα με την εκφόρτιση ενός πυκνωτή που αρχικά έχει φορτιστεί σε κάποιο δυναμικό U . Η βασική διάταξη για τη διαδικασία αυτή δίνεται διαγραμματικά στο σχήμα 5-16. Με τον διακόπτη S στη θέση φορτίσεως ο πυκνωτής της διατάξεως, με χωρητικότητα C , αποθηκεύει φορτίο

$$q = CU. \quad (5.62)$$

Αν ο διακόπτης S μετατοπιστεί στη θέση εκφόρτισεως, το φορτίο αυτό θα διοχετευθεί στο πηνίο του βαλυστικού γαλβανομέτρου, το οποίο θα κινηθεί με μέγιστη απόκλιση κατά την πρώτη ταλάντωση

$$d_m = qS_q \quad (5.63)$$



ΣΧΗΜΑ 5-16. Απλή διάταξη δημιουργίας παλμού ρεύματος με εκφόρτιση πυκνωτή.

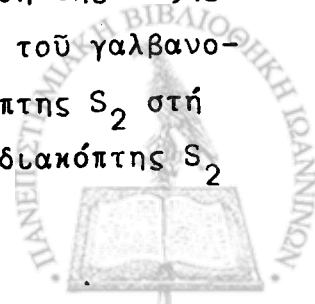


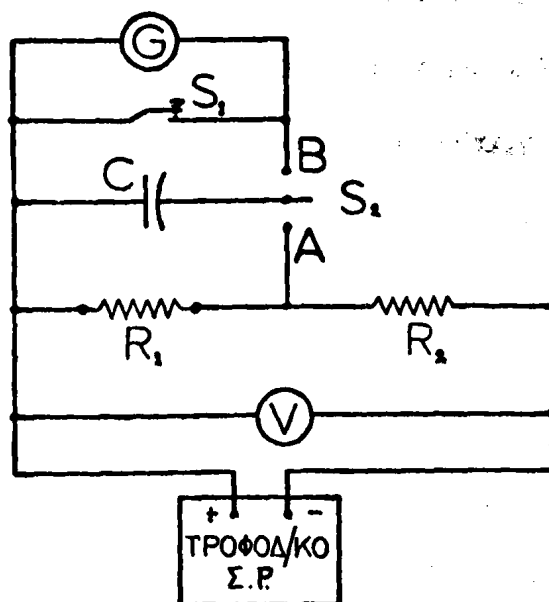
όπου η έξ. (5.60) έχει γραφεί για τή συνήθη απόσταση κλίμακας-γαλβανομέτρου $D = 1$ m. Απαλείφοντας τό φορτίο q από τίς δύο τελευταίες σχέσεις μπορούμε νά γράψουμε

$$d_m = S \frac{CU}{q} \quad (5.64)$$

Όπως θά δοῦμε αργότερα ή τελευταία έξίσωση μπορεί νά χρησιμοποιηθεί κατά δύο τρόπους. Μέ παρατήρηση τής μέγιστης απόκλισεως d_m μπορεί νά μετρηθεί ή χωρητικότητα του πυκνωτή τής διατάξεως αν είναι γνωστό τό δυναμικό φορτίσεως U . Αντίστροφα, χρησιμοποιώντας πυκνωτή γνωστής χωρητικότητας C μπορούμε νά προσδιορίσουμε τή διαφορά δυναμικού πού δημιουργείται σέ δύο σημεία ενός κυκλώματος. Καί στίς δύο περιπτώσεις όμως είναι απαραίτητη ή γνώση τής εύαισθησίας S_q του βαλυστικού γαλβανομέτρου ως πρός τό φορτίο.

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-8. Συνδέστε τό κύκλωμα του σχήματος 5-17. Οί αντίστασεις R_1 καί R_2 είναι ένα κιβώτιο αντίστασεως μέ ένδιάμεση έπαφή καί όλική αντίσταση $R_1 + R_2 = 1$ kΩ ένω ο πυκνωτής C έχει γνωστή χωρητικότητα τής τάξης των 0.5 μ F. Ο διακόπτης τηλεγραφητή S_1 παρέχει τή δυνατότητα γρήγορης έπαναφορās του γαλβανομέτρου στή θέση ίσορροπίας μετά τήν ανάγνωση τής πρώτης μέγιστης απόκλισεως. — Μέ τιμές των αντίστασεων $R_1 = 1$ kΩ καί $R_2 = 0$ ρυθμίστε τό τροφοδοτικό ΣΡ για δυναμικό 1 V. Κλείστε τόν διακόπτη στή θέση Α καί περιμένετε μερικά δευτερόλεπτα. Σημειώστε τή θέση ίσορροπίας του γαλβανομέτρου. Μετατοπίστε τόν διακόπτη S_2 στή θέση Β καί παρατηρήστε τήν πρώτη μέγιστη απόκλιση d_m . Αν ή απόκλιση d_m από τή θέση ίσορροπίας είναι μικρότερη από 20 cm αύξεύστε τό δυναμικό του τροφοδοτικού ΣΡ ώστε νά έπιτύχετε μέγιστη απόκλιση τής τάξης των 20 cm. Μελετεύστε μέ προσοχή τή μέγιστη απόκλιση του γαλβανομέτρου ως συνάρτηση του χρόνου πού παραμένει ο διακόπτης S_2 στή θέση φορτίσεως Α. Βεβαιωθείτε ότι σέ κάθε μέτρηση ο διακόπτης S_2





ΣΧΗΜΑ 5-17. Κύκλωμα για τή βαθμονόμηση καί προσδιορισμό τής εύαισθησίας βαλλιστικού γαλβανομέτρου.

παραμένει στη θέση Α αρκετό χρόνο ώστε νά φορτιστεῖ πλήρως ὁ πυκνωτής. Μετά ἀπό κάθε μέτρηση χρησιμοποιεῖτε τόν διακόπτη τηλεγραφήτῃ S_1 γιά συντόμευση τοῦ χρόνου ἐπαναφορᾶς τοῦ γαλβανομέτρου στη θέση ἰσορροπίας.

— Διατηρώντας τό ἄθροισμα $R_1 + R_2$ σταθερό καί ἴσο πρὸς $1 \text{ k}\Omega$, μεταβάλετε τήν ἀντίσταση R_1 καί σέ κατάλληλο πύνακα καταγράψτε τή μέγιστη ἀπόκλιση γιά ἀρκετές τιμές τῆς ἀντιστάσεως R_1 . Τό φορτίο πού ἀποθηκεύεται στόν πυκνωτή δύναται προφανῶς ἀπό τή σχέση

$$q = CV \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (5.65)$$

ὅπου V εἶναι ἡ ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου. Σέ κάθε μέτρηση σημειώστε τόσο τή μέγιστη ἀπόκλιση ὅσο καί τή θέση ἰσορροπίας τοῦ γαλβανομέτρου στήν κατάσταση ἡρεμίας. Ἀντιστρέψτε τήν πολικότητα τοῦ τροφοδοτικοῦ καί ἐπαναλάβετε τίς μετρήσεις γιά τίς ἴδιες τιμές τῆς ἀντιστάσεως R_1 . Παίρνοντας τό μέσο ὄρο τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως γιά κάθε τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_1 ἐξαλείψετε μέ τόν τρόπο αὐτό σφάλματα πού προέρχονται ἀπό θερμική ΗΕΔ, βολταϊκά ρεύματα, κ.λ.π.

— 'Αποδώστε σέ γραφική παράσταση τή μέγιστη απόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρὸς τό φορτίο πού διέρευσε τό πηνίο γιά κάθε τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως R_1 , σημειώνοντας τό πειραματικό σφάλμα γιά κάθε σημεῖο τῶν δεδομένων. Προσαρμόστε τήν καλύτερη εὐθεία στά πειραματικά δεδομένα καί ὑπολογίστε ἀπό τήν κλίση τῆς εὐθείας τήν εὐαισθησία S_q τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρὸς τό φορτίο. Ἄν τά δεδομένα σας ἀποκλίνουν ἀρκετά ἀπό τή γραμμικότητα πού προβλέπει ἡ ἐξ. (5.64), σχολιάστε τό ἀποτέλεσμα.

— Ἄντικαταστεῖστε τόν πυκνωτή C μέ ἓνα ἀπο τοὺς πυκνωτές ἄγνωστης χωρητικότητας πού θά σᾶς δοθοῦν. Ρυθμίστε τήν ἀντίσταση R_1 ὥστε κατά τή μετάβαση τοῦ διακόπτη S_2 ἀπό τή θέση A στή θέση B τό γαλβανόμετρο νά ἐμφανίζει μέγιστη απόκλιση μεγαλύτερη ἀπό 10 cm. Χρησιμοποιώντας τήν προηγούμενη καμπύλη βαθμονομήσεως ὑπολογίστε τήν ἄγνωστη χωρητικότητα τοῦ πυκνωτή. Ἐπαναλάβετε τήν ἐργασία γιά ὄλους τοὺς πυκνωτές ἄγνωστης χωρητικότητας πού θά σᾶς δοθοῦν.

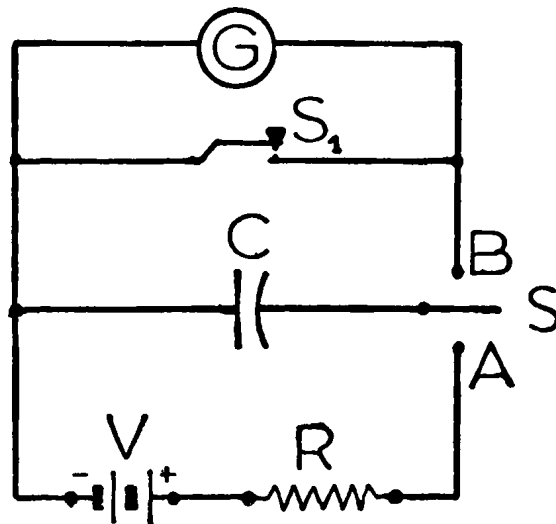
5-7 Μέτρηση Ἀντιστάσεως μέ τό Βαλιστικό Γαλβανόμετρο

Τό βαλιστικό γαλβανόμετρο βρίσκει μιά σημαντική ἐφαρμογή στή μέτρηση ἀντιστάσεων πού ξεπερνοῦν τίς μερικές δεκάδες $M\Omega$. Στήν περιοχὴ αὐτὴ ἀπευθείας μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως μέ ὠμόμετρο δίνει πενιχρά ἀποτελέσματα καθὼς τὸ ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀντίσταση γιά τή διαφορά δυναμικοῦ πού ἀναπτύσσουν τά συνήθη ἠλεκτρικά στοιχεῖα εἶναι ἐξαιρετικά μικρό. Ἀκόμη ὅμως καί στήν περίπτωση ὅπου τὸ ρεῦμα i διαμέσου τῆς ἀντιστάσεως εἶναι πολύ μικρό ὥστε νά διεγείρει ἓνα εὐαίσθητο γαλβανόμετρο, εἶναι δυνατόν νά μετρηθεῖ τό ὅλικό φορτίο

$$q = \int_0^t i dt'$$

πού διέρευσε στήν ἀντίσταση μέσα στό χρόνο t . Μιά διάταξη πού ἐπιτρέ-





ΣΧΗΜΑ 5-18. Διάταξη για τή μέτρηση ύψηλης αντίστασης.

πει τήν παρατήρηση αὐτή δίνεται στό σχῆμα 5-18, ὅπου R ἀντιπροσωπεύει μιὰ ἀντίσταση τῆς τάξης τῶν $10^7 - 10^8 \Omega$. Ἄν ὁ διακόπτης S κλείσει στή θέση A ἕνα μικρό ρεῦμα θά διαρεύσει στήν ἀντίσταση R καί θά ἀρχίσει ἡ φόρτιση τοῦ πυκνωτή C. Μετά ἀπό ἕνα χρονικό διάστημα t , τό φορτίο πού ἔχει συσσωρευτεῖ στόν πυκνωτή εἶναι

$$q = CV \quad (5.67)$$

ὅπου C ἡ χωρητικότητα καί V τό δυναμικό στάθμα τοῦ πυκνωτή. Κατά τή χρονική αὐτή στιγμή, τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀντίσταση R εἶναι

$$i = \frac{U - V}{R} = \frac{U - \frac{q}{C}}{R} \quad (5.68)$$

Ἡ ἐξίσωση ἐπομένως πού διέπει τή συσώρευση φορτίου στόν πυκνωτή εἶναι

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U - \frac{q}{C}}{R}$$



ή

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{U}{R}. \quad (5.69)$$

Η γενική λύση της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης μπορεί να βρεθεί με άμεση ολοκλήρωση ή με άλλες μεθόδους ως

$$q(t) = UC - Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.70)$$

όπου η σταθερά A καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα όπου αρχικά (σε χρόνο $t=0$) ο πυκνωτής είναι άφορτιστος ($q(0) = 0$) η εξ. (5.70) δίνει

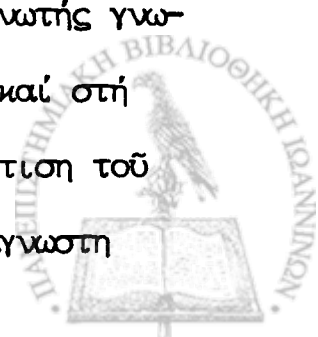
$$0 = UC - A$$

ή

$$q(t) = UC(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (5.71)$$

Παρατηρείται ότι η ποσότητα $Q = UC$ αντιπροσωπεύει το ολικό φορτίο που μπορεί να συσσωρευτεί στον πυκνωτή ή ΗΕΔ του στοιχείου. Μπορεί π.χ. να προσδιοριστεί πειραματικά αν φορτίσουμε τον πυκνωτή επί ένα μεγάλο χρονικό διάστημα και στη συνέχεια διοχετεύσουμε το φορτίο στο βαλιστικό γαλβανόμετρο μεταθέτοντας το διακόπτη S από τη θέση A στη θέση B .

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (5.69) στην εξ. (5.71) υπαγορεύει τη μέθοδο προσδιορισμού της αντίστασης R . Αν ο πυκνωτής γνωστής χωρητικότητας C φορτιστεί για ένα χρονικό διάστημα t και στη συνέχεια μετρηθεί το φορτίο $q(t)$ που συσσωρεύτηκε (μέ έμφόρτιση του πυκνωτή στο κύκλωμα του βαλιστικού γαλβανόμετρου) ή μόνη άγνωστη



παράμετρος πού παραμένει στην έξ. (5.71) είναι ή αντίσταση R. Η σχέση αυτή μπορεί νά γραφεί σέ μιά πλέον εύχρηστη μορφή αν θεωρήσουμε τήν αντίστοιχη λογαριθμική σχέση. Γράφοντας

$$Q = UC \quad (5.72)$$

γιά τό όλικό φορτίο πού μπορεί νά συσσωρεύσει ή ΗΕΔ τοῦ κυκλώματος στόν πυκνωτή, ή έξ. (5.71) μπορεί νά μετασχηματιστεί στην έκφραση

$$\ln \frac{Q}{Q - q(t)} = \frac{t}{RC} \quad (5.73)$$

ή

$$\log \frac{Q}{Q - q(t)} = \log \frac{D}{D - d} = \frac{t}{2.303 RC} \quad (5.74)$$

Στήν τελευταία σχέση D είναι ή απόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου γιά πλήρη φόρτιση τοῦ πυκνωτή καί d ή απόκλιση γιά χρόνο φορτίσεως t. Ὁ συντελεστής 2.303 προέρχεται ἀπό τή μετατροπή φυσικῶν σέ δεκαδικούς λογαρίθμους.

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-9. Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-18. Ὡς στοιχεῖο χρησιμοποιεῖστε ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη ἕνα πυκνωτή μέ χωρητικότητα τῆς τάξης τῶν 5 μF καί τήν ἄγνωστη ἀντίσταση R πού θά σᾶς δοθεῖ. Βραχυκυκλώστε τά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R ὥστε μέ τόν διακόπτη S στή θέση A ὁ πυκνωτής νά συνδέεται ἀπευθείας μέ τό τροφοδοτικό ΣΡ. Ἀναπτύξτε διαφορά δυναμικοῦ 1 V στό τροφοδοτικό ΣΡ καί φορτίστε τόν πυκνωτή κλείνοντας τόν διακόπτη S στή θέση A. Μεταθέστε τόν διακόπτη S στή θέση B καί παρατηρεῖστε τή μέγιστη ἀπόκλιση D τοῦ γαλβανομέτρου. Ρυθμίστε τό δυναμικό τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ ὥστε ή ἀπόκλιση νά εἶναι περίπου 20 cm.

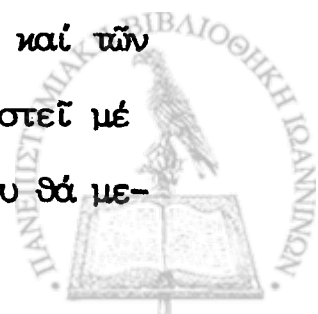
Μετά τήν παρατήρηση τῆς πρώτης μέγιστης ἀποκλίσεως, ὁ διακόπτης τηλεγραφητή S_1 μπορεῖ νά χρησιμοποιεῖται γιά τήν γρήγορη ἐπαναφορά τοῦ γαλβανομέτρου στή θέση ἰσορροπίας. Σημειώστε τή θέση ἰσορροπίας καί τή μέγιστη ἀπόκλιση. Ἀντιστρέψτε τήν πολικότητα τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ, σημειώστε τή νέα θέση ἰσορροπίας (μὴν προσπαθήσετε νά μετακινήσετε τήν κλίμακα) καί ἐπαναλαμβάνοντας τή διαδικασία φορτίσεως - ἐκφορτίσεως σημειώστε τή νέα μέγιστη ἀπόκλιση πρὸς τήν ἀντίθετη πλευρά τῆς κλίμακας. Παύροντας τὸ μέσο ὄρο τῶν δύο μετρήσεων ἐλαττώνετε συστηματικὰ σφάλματα πού τυχόν ὑπεισέρχονται στὺς μετρήσεις σας ἀπὸ θερμικὲς ΗΕΔ, βολταϊκά φαινόμενα, κ.λ.π.

— Ἀποσυνδέστε τὸ βραχυκύκλωμα ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R. Φορτίστε τὸν πυκνωτὴ (κλείνοντας τὸν διακόπτη S στή θέση A) γιά ἓνα χρονικὸ διάστημα $t=30$ sec. Μεταθέστε τὸν διακόπτη S στή θέση B καί παρατηρεῖστε τή μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Σέ κατάλληλο πύνακα σημειώστε τὸ χρόνο φορτίσεως τοῦ πυκνωτῆ, τή θέση ἰσορροπίας καί τή θέση μέγιστης ἀποκλίσεως. Ἐπαναλάβετε τήν ἐργασία γιά πέντε ἕως δέκα διάφορους χρόνους φορτίσεως ὥστε νά καλυφθεῖ ἡ περιοχὴ τῆς κλίμακας μεταξύ 5 καί 20 cm.

— Ἀντιστρέψτε τήν πολικότητα τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ καί ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά τοὺς ἴδιους χρόνους φορτίσεως τοῦ πυκνωτῆ. Ὑπολογίστε τὸν μέσο ὄρο τῆς ὀλικῆς ἀποκλίσεως d γιά κάθε χρόνο φορτίσεως ἀπὸ τὺς δύο ἀντίστοιχες μετρήσεις.

— Ἀποδώστε τὰ ἀποτελέσματα σας σέ γραφικὴ παράσταση μέ κατακόρυφο ἄξονα τήν ποσότητα $\log \frac{D}{D-d}$ καί ὀριζόντιο ἄξονα τὸ χρόνο φορτίσεως t . Χρησιμοποιεῖστε ἡμιλογαριθμικὸ χαρτί. Προσαρμόστε τήν καλύτερη εὐθεῖα στὰ δεδομένα σας καί ἀπὸ τήν κλίση τῆς εὐθείας ὑπολογίστε τήν τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως R σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (5.74).

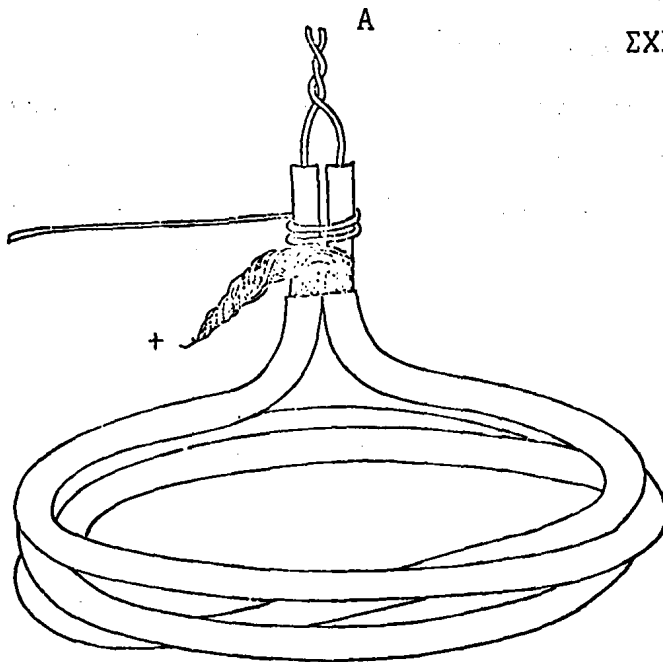
Ἡ μέθοδος τοῦ προηγουμένου πειράματος βρίσκει ἀρκετὲς ἐφαρμογὲς στή βιομηχανία γιά τὸν ἔλεγχο τῶν ἠλεκτρικῶν ἰδιοτήτων ὑλικῶν καί διατάξεων. Ἡ μόνωση μεταξύ τῶν καλωδίων ἠλεκτρικοῦ ρεύματος καί τῶν σωληνώσεων ὑδρεύσεως σέ ἓνα κτίριο, μπορεῖ π.χ. νά προσδιοριστεῖ μέ βαλιστικὸ γαλβανόμετρο. Μιά συγκεκριμένη ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου θά με-



Λετήσουμε στό ἐπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-10. Χρησιμοποιεῖστε τήν προηγούμενη μέθοδο γιά νά προσδιορίσετε τήν ἀντίσταση μεταξύ τοῦ κεντρικοῦ ἀγωγοῦ καί τῆς θωρακίσεως σέ ἕνα ὁμοαξονικό καλωδίο. Καθόσον ἡ ἀντίσταση πού πρόκειται νά μετρήσετε εἶναι ἀρκετά ὑψηλή θά πρέπει νά λάβετε εἰδικά μέτρα ὥστε τό φορτίο πού συσσωρεύεται στόν πυκνωτή τοῦ σχήματος 5-18 νά προέρχεται πράγματι ἀπό τό ρεῦμα πού διαρρέει τό μονωτικό ὑλικό μεταξύ κεντρικοῦ ἀγωγοῦ καί θωρακίσεως. Εἶναι π.χ. δυνατόν ἕνα μέρος τοῦ φορτίου νά διαρεύσει στήν ἐπιφάνεια τοῦ μονωτικοῦ ὑλικοῦ.

— Σημειῶστε τό μήκος τοῦ ὁμοαξονικοῦ καλωδίου πού σᾶς δόθηκε. Ἀπογυμνώστε ἕνα μήκος περίπου 10 cm σέ κάθε ἄκρο τοῦ καλωδίου ἀπό τό ἐξωτερικό περίβλημα καί τή θωράκιση. Συνδέστε μεταξύ τους τά δύο ἄκρα τοῦ κεντρικοῦ ἀγωγοῦ καί τά δύο ἄκρα τῆς θωρακίσεως ὅπως δείχνει τό σχῆμα 5-19. Γιά μεγαλύτερη προστασία περιτυλίξτε ἕνα γυμνό χάλκινο σύρμα γύρω ἀπό τό μονωτικό ὑλικό στό διάστημα μεταξύ τῶν δύο ἄκρων τοῦ κεντρικοῦ ἀγωγοῦ καί τῶν δύο ἄκρων τῆς θωρακίσεως. Τό προστατευτικό αὐτό σύρμα πού συνδέεται μέ τόν ἀρνητικό πόλο τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ παρεμποδίζει τή διαρροή φορτίου στήν ἐπιφάνεια τοῦ μονωτικοῦ ὑλικοῦ.



ΣΧΗΜΑ 5-19. Προπαρασκευή ὁμοαξονικοῦ καλωδίου γιά μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως τοῦ μονωτικοῦ ὑλικοῦ μεταξύ κεντρικοῦ ἀγωγοῦ καί θωρακίσεως. Οἱ ἐνδείξεις τοῦ σχήματος +, -, A ἀναφέρονται στό ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ σχήματος 5-18.

— Συνδέστε τήν αντίσταση πού δημιουργεῖ τό μονωτικό τοῦ ὁμοαξονικοῦ καλωδίου τοῦ σχήματος 5-19 στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-18 καί ἐπαναλάβετε τή διαδικασία τοῦ Πειράματος 5-9. Χρησιμοποιεῖστε πυκνωτή μέ χωρητικότητα 0.1 - 0.5 μF καί δυναμικό μεταξύ 20 καί 30 V. Ρυθμίστε τό δυναμικό ἔτσι ὥστε γιά πλήρη φόρτιση τοῦ πυκνωτή τό βαλιστικό γαλβανόμετρο νά ἀποκλίνει κατά τήν ἐκφόρτιση περίπου 20 cm.

— Προσδιορίστε τήν αντίσταση τοῦ μονωτικοῦ ὑλικοῦ ἀνά μέτρο ὁμοαξονικοῦ καλωδίου καί συγκρίνετε μέ τίς προδιαγραφές τοῦ κατασκευαστή.

Κατά τήν προηγούμενη μέθοδο ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως προσδιορίστηκε ἀπό τό χρόνο φορτίσεως — ἢ μερικής φορτίσεως — τοῦ πυκνωτή. Ἐναλλακτικά μποροῦμε νά μετρήσουμε τό ἴδιο μέγεθος στήν ἀντίστροφη διεργασία, δηλαδή κατά τήν ἐκφόρτιση ἑνός πυκνωτή μέ γνωστή χωρητικότητα διαμέσου μιᾶς ἀγνωστής ἀντιστάσεως μέ ὑψηλή τιμή. Ἐνα κύκλωμα πού ἐπιτρέπει τή διεργασία αὐτή δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 5-20. Μέ τό διακόπτη S στή θέση φορτίσεως A τό φορτίο πού ἀποθηκεύεται (μέσα σέ πολύ μικρό χρόνο) στόν πυκνωτή C εἶναι

$$q = CU \quad (5.75)$$

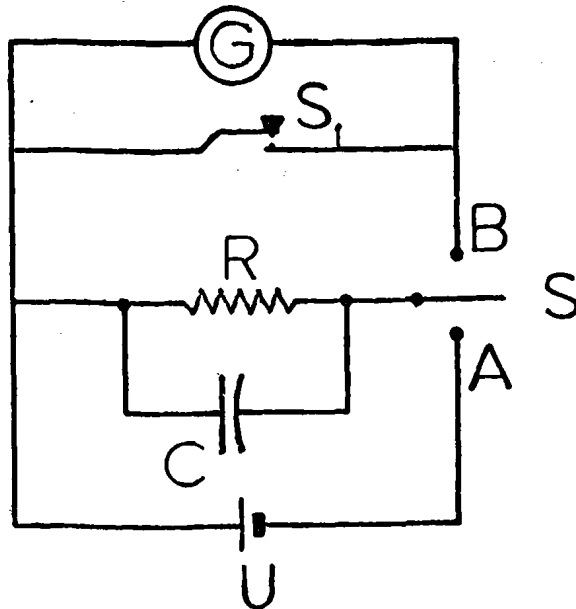
ὅπου U ἡ ΗΕΔ τοῦ ἠλεκτρικοῦ στοιχείου. Ἀποσυνδέοντας τό διακόπτη S ἀπό τή θέση A ἀρχίζει ἡ ἐκφόρτιση τοῦ πυκνωτή διαμέσου τῆς ἀντιστάσεως R. Τό ρεῦμα πού θά διαρεύσει στήν ἀντίσταση R εἶναι

$$i = \frac{V}{R} \quad (5.76)$$

ὅπου

$$V = \frac{q(t)}{C} \quad (5.77)$$





ΣΧΗΜΑ 5-20. Διάταξη για τή μέτρηση ύψηλης αντίστασης μέ έκφορτιση πυκνωτή γνωστής χωρητικότητας.

είναι τό δυναμικό πού δημιουργεί στά άκρα τοῦ πυκνωτή τό φορτίο $q(t)$ πού ἔχει παραμείνει μετά ἀπό χρόνο έκφορτίσεως t . Μποροῦμε ἐπομένως νά γράψουμε τήν ἐξίσωση πού διέπει τήν μείωση τοῦ φορτίου ὡς

$$i = - \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} = \frac{q}{RC} \quad (5.78)$$

μέ λύσεις

$$q(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.79)$$

ὅπου ἡ σταθερά A προσδιορίζεται ἀπό τίς ἀρχικές συνθήκες. Ἄν σέ χρόνο $t=0$ ὁ πυκνωτής εἶναι πλήρως φορτισμένος εἶναι εὐκολο νά δείξουμε ὅτι

$$A = Q = UC$$



ὁπότε ἡ ἔξ. (5.79) παίρνει τή μορφή

$$q(t) = UCe^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.80)$$

Ὅπως καί προηγουμένως ἡ τελευταία σχέση μπορεί νά μετατραπῆ σέ σχετική απόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου d ὡς πρός τήν πλήρη απόκλιση D (γιά χρόνο ἐκφορτίσεως $t=0$). Σέ ἀναλογία μέ τήν ἔξ. (5.74) μπορούμε νά γράψουμε

$$\log \frac{D}{d} = \log \frac{D}{d} = \frac{t}{2.303 RC} \quad (5.81)$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-11. Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-20. Ὡς ἠλεκτρικό στοιχεῖο χρησιμοποιεῖστε ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη ἕνα πυκνωτή μέ χωρητικότητα τῆς τάξης τῶν 5 μF καί τήν ἀγνωστη ἀντίσταση πού θά σᾶς δοθεῖ. Ἀναπτύξτε διαφορά δυναμικοῦ 1 V στό τροφοδοτικό ΣΡ καί φορτίστε τόν πυκνωτή κλείνοντας τόν διακόπτη S στή θέση A. Μεταθέστε τόν διακόπτη S στή θέση B καί παρατηρεῖστε τή μέγιστη απόκλιση D τοῦ γαλβανομέτρου. Ρυθμίστε τό δυναμικό τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ ὥστε ἡ μέγιστη απόκλιση D νά εἶναι περίπου 20 cm. Σημειώστε τή θέση ἰσορροπίας καί τή θέση μέγιστης ἀποκλίσεως. Ἡ μεταφορά τοῦ διακόπτη S ἀπό τή θέση A στή θέση B πρέπει νά γίνεται μέ ἀρκετά γρήγορη κίνηση ὥστε τό φορτίο πού θά διαρεύσει διαμέσου τῆς ἀντιστάσεως R στό μικρό χρονικό διάστημα πού θά παραμείνει ἀνοικτό τό κύκλωμα νά εἶναι ἀμελητέο. Καθόσον ἡ τιμή τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως D θά χρησιμοποιηθεῖ στή συνέχεια ὡς σημεῖο ἀναφορᾶς, ἐπαναλάβετε τή μέτρηση μερικές φορές καί ὑπολογίστε τόν μέσο ὄρο τῶν τιμῶν πού θά προκύψουν. Μετά ἀπό κάθε παρατήρηση τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως, ὁ διακόπτης τηλεγραφητής S_1 μπορεί νά χρησιμοποιεῖται γιά τή γρήγορη ἐπαναφορά τοῦ γαλβανομέτρου στή θέση ἰσορροπίας. Ἀντιστρέψτε τήν πολικότητα τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ, σημειώστε τή νέα θέση ἰσορροπίας (μὴν προσπαθήσετε νά μετακινήσετε τήν κλιμακὰ) καί μέ ἰσάριθμες μετρήσεις

προσδιορίστε τή μέγιστη απόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου πρὸς τήν ἀντίθετη πλευρά τῆς κλίμακας γιά πλήρη ἐκφόρτιση τοῦ πυκνωτή. Παίρνοντας τό μέσο ὄρο τῶν δύο ἀποτελεσμάτων ἐλαττώνετε συστηματικά σφάλματα πού τυχόν ὑπεισέρχονται στίς μετρήσεις σας ἀπό θερμικές ΗΕΔ, βολταϊκά φαινόμενα, κ.λ.π.

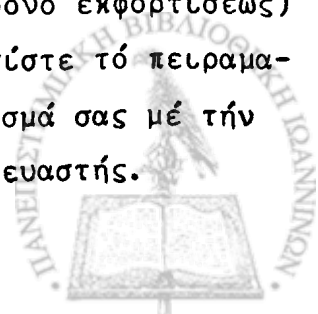
— Φορτίστε τόν πυκνωτή (κλείνοντας τόν διακόπτη S στή θέση Α) καί στή συνέχεια διακόψτε τό κύκλωμα γιά ἕνα χρονικό διάστημα $t = 30 \text{ sec.}$ Κλεῖστε τόν διακόπτη στή θέση Β καί παρατηρεῖστε τή μέγιστη απόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Σέ κατάλληλο πύνακα σημειώστε τό χρόνο ἐκφορτίσεως τοῦ πυκνωτή, τή θέση ἰσορροπίας τοῦ γαλβανομέτρου καί τή θέση μέγιστης ἀποκλίσεως. Ἐπαναλάβετε τή διεργασία γιά πέντε ἕως δέκα διάφορους χρόνους ἐκφορτίσεως τοῦ πυκνωτή ὥστε νά καλυφθεῖ ἡ περιοχή τῆς κλίμακας μεταξύ 5 καί 20 cm.

— Ἀντιστρέψτε τήν πολικότητα τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ καί ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά τούς ἴδιους χρόνους ἐκφορτίσεως τοῦ πυκνωτή. Ὑπολογίστε τό μέσο ὄρο τῆς ὀλικῆς ἀποκλίσεως d γιά κάθε χρόνο ἐκφορτίσεως ἀπό τίς δύο ἀντίστοιχες μετρήσεις.

— Ἀποδώστε τά ἀποτελέσματά σας σέ γραφική παράσταση μέ κατακόρυφο ἄξονα τήν ποσότητα $\log \frac{D}{d}$ καί ὀριζόντιο ἄξονα τό χρόνο ἐκφορτίσεως t . Χρησιμοποιεῖστε ἡμιλογαριθμικό χαρτί. Προσαρμόστε τήν καλύτερη εὐθεία στά δεδομένα σας καί ἀπό τήν κλίση τῆς εὐθείας ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (5.81).

Τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-20 μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως ἠλεκτρικῶν ἐξαρτημάτων ἢ διατάξεων πού ἐμφανίζουν τόσο (ὑψηλή) ἀντίσταση ὅσο καί χωρητικότητα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-12. Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-20 χρησιμοποιώντας τόν πυκνωτή πού θά σᾶς δοθεῖ γιά τό συνδιασμό CR τῆς διατάξεως. Ἐπαναλάβετε τό πρῶτο μέρος τοῦ Πειράματος 5-11 καί ἀπό τή μέγιστη απόκλιση D τοῦ γαλβανομέτρου (γιά ἀμελητέο χρόνο ἐκφορτίσεως) προσδιορίστε τή χωρητικότητα τοῦ πυκνωτή. Ὑπολογίστε τό πειραματικό σφάλμα στή μέτρηση καί συγκρίνετε τό ἀποτέλεμά σας μέ τήν τιμή καί τό πειραματικό σφάλμα πού δύνει ὁ κατασκευαστής.



— 'Επαναλάβετε τό δεύτερο μέρος τοῦ Πειράματος 5-11 καί ἀπό τή μεταβολή τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως d τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό χρόνο ἐκφορτίσεως t ὑπολογίστε τήν ἀντίσταση R τοῦ πυκνωτή. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμά σας μέ τίς προδιαγραφές τοῦ κατασκευαστή.

Κατά τήν ἐφαρμογή τῶν μεθόδων πού περιγράψαμε γιά τή μέτρηση ὑψηλῶν ἀντιστάσεων στήν πράξη, ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως R πού προσδιορίζεται συνήθως σέ μιᾶ πρώτη μέτρηση εἶναι ἀρκετά μικρότερη ἀπό τήν πραγματική. Τοῦτο ἀφείλεται στήν ἀπορρόφηση φορτίου ἀπό τό διηλεκτρικό ὑλικό πού κατά τή μέτρηση ἐμφανίζεται ὡς διαρροή φορτίου διαμέσου τῆς ἀντιστάσεως. Ἡ πραγματική τιμή τῆς ἀντιστάσεως προκύπτει μετά ἀπό φόρτιση τοῦ ὑλικοῦ γιά ἀρκετές ὥρες ἢ σέ μερικές περιπτώσεις ἡμέρες. Γιά ἀκριβή προσδιορισμό τῆς ἀντιστάσεως συνιστᾶται ἡ ἐπανάληψη τῆς μετρήσεως σέ τακτά χρονικά διαστήματα καί ἡ παρακολούθηση τοῦ ἀποτελέσματος σέ γραφική παράσταση μέ ὀριζόντιο ἄξονα τό χρόνο πού πραγματοποιήθηκε ἡ μέτρηση καί κάθετο ἄξονα τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως πού προέκυψε ἀπό τή μέτρηση. Ἡ μέθοδος πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά μιᾶ γρήγορη ἐκτίμηση τῆς ἀντιστάσεως R καί πού ἐξαλείφει, τουλάχιστον μερικά, τό φαινόμενο τῆς ἀπορροφήσεως φορτίου, προέρχεται ἀπό τή μορφή τῆς ἐξ. (5.81). Θεωρώντας δύο διαδοχικές μετρήσεις τοῦ Πειράματος 5-11 ἢ 5-12 γιά διάφορους χρόνους ἐκφορτίσεως τοῦ πυκνωτή, ἡ ἐξ. (5.81) δίνει

$$\log \frac{D}{d_2} - \log \frac{D}{d_1} = \frac{t_2 - t_1}{2.303 RC}$$

ἢ

$$R = \frac{t_2 - t_1}{2.303 C \log(d_1/d_2)}$$

(5.82)



Ἄν καί ἡ τελευταία σχέση παρέχει μιὰ πρώτη ἐκτίμηση τῆς ἀντιστάσεως, ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὐκολά νά δείξει ὅτι τό πειραματικό σφάλμα πού συνεπάγεται εἶναι σημαντικό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 5-1. α. Ἡ σταθερά στρέψεως τ τοῦ μηχανισμοῦ ἀναρτήσεως ἑνός γαλβανομέτρου εἶναι $30 \text{ dyn.cm.rad}^{-1}$. Ὑπολογίστε τήν ἐνέργεια πού ἀποθηκεύεται στό μηχανισμό ἄν τό πηνίο περιστραφεῖ κατά 28° .
- β. Ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ πηνίου M εἶναι 2.5 gr.cm^2 . Ἄν ἡ ἀπόσβεση εἶναι ἀμελητέα, ὑπολογίστε τή γωνιακή ταχύτητα κατά τήν ἐπαναφορά τοῦ γαλβανομέτρου ὅταν διέρχεται ἀπό τή θέση ἰσοροπίας.
- γ. Γιά ἀμελητέα ἀπόσβεση ὑπολογίστε τήν περίοδο ταλαντώσεως.
- 5-2. Ἡ κλίμακα ἑνός γαλβανομέτρου ἔχει τοποθετηθεῖ 45 cm ἀπό τό κάτοπτρο. Τό πηνίο ἔχει περιστραφεῖ κατά 15° . Πόση εἶναι ἡ ἀπόκλιση τῆς φωτεινῆς κηλίδας πάνω στήν κλίμακα ἀπό τή θέση ἰσοροπίας;
- 5-3. Ἡ εὐαίσθησία σέ μεγα-Ωμ γαλβανομέτρου ὀρίζεται ὡς ἡ ἀντίσταση (σέ $M\Omega$) πού ἄν τοποθετηθεῖ σέ σειρά μέ τό πηνίο προκαλεῖ ἀπόκλιση 1 mm (γιά ἀπόσταση κλίμακας - κατόπτρου $D=1 \text{ m}$) ἄν ἀναπτυχθεῖ διαφορά δυναμικοῦ 1 V . Ἡ εὐαίσθησία ὡς πρὸς τό ρεῦμα ἑνός γαλβανομέτρου εἶναι 10^8 mm/A . Ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου εἶναι $R_g=280 \Omega$.
- α. Ὑπολογίστε τήν εὐαίσθησία ὡς πρὸς τό δυναμικό καί τήν εὐαίσθησία σέ μεγα-Ωμ.
- β. Πόση εἶναι ἡ ἀπόκλιση ἀπό τή θέση ἰσοροπίας ἄν διοχετευθεῖ ρεῦμα $0.5 \mu\text{A}$ καί ἡ κλίμακα τοποθετηθεῖ σέ ἀπόσταση 45 cm ἀπό τό κάτοπτρο;
- γ. Μιὰ ἀντίσταση 75Ω συνδέεται παράλληλα πρὸς τό γαλβανόμετρο. Ὑπολογίστε τή νέα εὐαίσθησία τῆς διατάξεως ὡς πρὸς τό ρεῦμα (γιά ἀπόσταση κλίμακας - κατόπτρου $D=1 \text{ m}$), τή νέα εὐαίσθησία ὡς πρὸς τό δυναμικό καί τή νέα εὐαίσθησία σέ μεγα-Ωμ.
- 5-4. Στό διπλάνο κύκλωμα $U = 1.5 \text{ V}$, $R_1 = 1 \Omega$ καί $R_2 = 7500 \Omega$. Ὄταν ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς ἀντιστάσεως R_3 εἶναι 350Ω , τό γαλβανόμε-

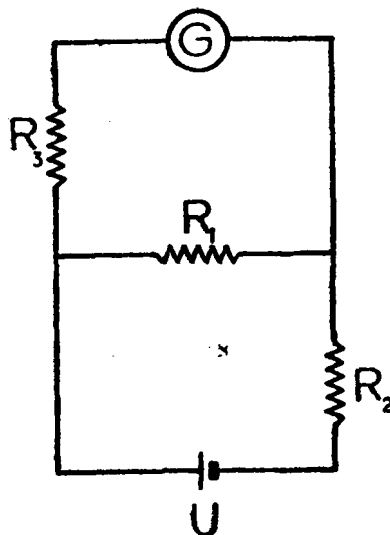
τρο αποκλίνει κατά 14.5 cm.
Γιά τιμή $R_3 = 1080 \Omega$ ή αντίστοιχη απόκλιση είναι 5.0 cm.

α. Προσδιορίστε την εσωτερική αντίσταση του γαλβανόμετρου.

β. Υπολογίστε την ευαισθησία του γαλβανόμετρου ως προς τό ρεύμα.

γ. Υπολογίστε την τιμή της

αντιστάσεως R_3 που θα προκαλέσει απόκλιση 7.0 cm.



5-5. Στο κύκλωμα του προηγούμενου προβλήματος τό γαλβανόμετρο έχει ευαισθησία 2000 mA και εσωτερική αντίσταση 600 Ω . Τά υπόλοιπα γνωστά στοιχεία του κυκλώματος είναι $R_1 = 1 \Omega$, $R_3 = 900 \Omega$ και $U = 1.5 \text{ V}$.

α. Υπολογίστε την τιμή της αντιστάσεως R_2 ώστε ή απόκλιση του γαλβανόμετρου νά είναι 15 cm.

β. Αν για την τιμή αυτή της αντιστάσεως R_2 αποσυνδεθεί ή αντίσταση R_1 , πόσο είναι τό ρεύμα που διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο;

5-6. Ένα γαλβανόμετρο έχει ευαισθησία ως προς τό ρεύμα 10^8 mm/A και εσωτερική αντίσταση 200 Ω . Τό πηνίο του γαλβανόμετρου αντικαθίσταται από ένα άλλο κατασκευασμένο από τό ίδιο άγωγιμο ύλικό, ίσο έμβαδόν βρόχων και ίσο όλικό βάρος. Τό σύρμα που έχει χρησιμοποιηθεί όμως για την κατασκευή του νέου πηνίου έχει διπλάσια διάμετρο διατομής από ότι στό προηγούμενο. Υπολογίστε τή νέα εσωτερική αντίσταση του γαλβανόμετρου και τή νέα ευαισθησία (ως προς τό ρεύμα, τό δυναμικό και σε μεγα- Ω m).

5-7. Υποθέστε ότι ή όλική διατομή του άγωγού στό πηνίο ενός γαλβανόμετρου καθορίζεται από τής προδιαγραφές του όργάνου αλλά ό κατασκευαστής μπορεί νά μεταβάλλει τόν αριθμό τών βρόχων χρησιμοποιώντας σύρμα ανάλογου διαμετρήματος. Δείξτε ότι ή εσωτερική αντίσταση του γαλβανόμετρου είναι ανάλογη προς τό τεράγωνο του αριθμού τών βρόχων.

5-8. Χρησιμοποιώντας τό αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκίσεως δείξτε



ὅτι μέ τῖς ἴδιες προϋποθέσεις ἡ γωνιακή ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι ἀνάλογη πρὸς τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τῆς ἰσχύος πού καταναλώνεται στὸ πηνίο.

- 5-9. Μέ τῖς προϋποθέσεις τῆς ἀσκήσεως 5-7 δεῦξτε ὅτι ὁ συντελεστὴς ἀποσβέσεως πού δημιουργεῖται ἀπὸ ἐπαγωγικά ρεύματα κατὰ τὴν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου γιὰ μιὰ συγκεκριμένη ἀντίσταση τοῦ ἔξωτερικοῦ κυκλώματος, αὐξάνει μονοτονικά πρὸς μιὰ ἀσυμπτωτικὴ σταθερά καθὼς αὐξάνει ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου.
- 5-10. Δεῦξτε ὅτι ἡ περίοδος ταλαντώσεως τοῦ γαλβανομέτρου γιὰ μηδενική ἀπόσβεση εἶναι

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{\tau}}$$

- 5-11. Δεῦξτε ὅτι ἡ περίοδος ταλαντώσεως στὴν ὑποκρίσιμη κατάσταση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι

$$T = T_0 \frac{r_c}{\sqrt{r_c^2 - r^2}}$$

ὅπου $r_c = 2\sqrt{\tau M}$ εἶναι ὁ συντελεστὴς κρίσιμης ἀποσβέσεως. Σχολιάστε τὴν προηγούμενη ἔκφραση γιὰ τὴν κατάσταση ὑπερκρίσιμης ἀποσβέσεως.

- 5-12. Δεῦξτε ὅτι στὴν κατάσταση ὑποκρίσιμης ἀποσβέσεως ὁ λόγος τῶν διαδοχικῶν μέγιστων ταλαντώσεων εἶναι

$$\exp\left(-\frac{rT}{4M}\right) = \exp\left(\frac{-\pi r}{\sqrt{r_c^2 - r^2}}\right)$$

- 5-13. Ὑπολογίστε τὸ λόγος τοῦ συντελεστή κρίσιμης ἀποσβέσεως πρὸς τὸ συντελεστὴ ἀποσβέσεως πού δημιουργεῖ πρῶτο πλάτος μέγιστης ἀποκλίσεως κατὰ 10^{-3} φορές μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν τελικὴ ἀπόκλιση.
- 5-14. Ὑπολογίστε τὸ λόγος τῆς περιόδου T στὴν ταλάντωση τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως πρὸς τὴν περίοδο T_0 τῆς ταλαντώσεως μέ μηδενική ἀπόσβεση.
- 5-15. Δεῦξτε ὅτι στὴ διάταξη τοῦ σχήματος 5-7 ἡ ὅλική ἀντίσταση μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴ θέση τοῦ διακόπτη ἐπιλογῆς.
- 5-16. Ἐπαληθεῦστε τὴν ἐξ. (5.43).



- 5-17. Ένα γαλβανόμετρο έχει έσωτερική αντίσταση $R_g = 50 \Omega$ και αντίσταση κρίσιμης άποσβέσεως $CDRX = 500 \Omega$. Όταν χρησιμοποιεῖται χωρίς διακλάδωση αποκλίνει κατά 12 cm για ρεύμα 0.6 μA . Μιά διακλάδωση Ayrton με όλική αντίσταση 500 Ω και ένδιάμεσες έπαφές στα 5 Ω και 50 Ω από τό άριστερό μέρος τής διατάξεως του σχήματος 5-8 συνδέεται παράλληλα προς τό γαλβανόμετρο. Υπολογίστε τήν εύαισθησία του γαλβανομέτρου ως προς τό ρεύμα
- χωρίς διακλάδωση
 - μέ τή διακλάδωση Ayrton και σύνδεση του έξωτερικού κυκλώματος για μέγιστη εύαισθησία.
 - μέ τή διακλάδωση Ayrton και σύνδεση στις ένδιάμεσες έπαφές.
- 5-18. Ένα γαλβανόμετρο με εύαισθησία 10^8 mm/A, έσωτερική αντίσταση $R_g = 30 \Omega$ και αντίσταση κρίσιμης άποσβέσεως $CDRX = 300 \Omega$ προστατεύεται από τό κύκλωμα του σχήματος 5-10 μέ τούς άκροδέκτες 3 και 4 του κυκλώματος βραχυκυκλωμένους. Τό ποτενσιόμετρο R έχει ρυθμιστεῖ στην αντίσταση $CDRX$. Έκφραστε τήν εύαισθησία τής διατάξεως ως προς τό ρεύμα ως συνάρτηση του ποσοστού α τής αντίστασεως P που παρεμβάλεται μεταξύ τής κινητής έπαφής και του άκροδέκτη 3. Μεταβάλλοντας τήν παράμετρο α , αποδώστε τήν εύαισθησία τής διατάξεως σε γραφική παράσταση.
- 5-19. Ένας πυκνωτής με χωρητικότητα 0.2 μF φορτίζεται σε δυναμικό 10 V. Ο πυκνωτής εκφορτίζεται χωρίς καθυστέρηση διαμέσου ενός βαλιστικού γαλβανομέτρου, στο όποιο παρατηρεῖται μέγιστη απόκλιση 20 cm. Η διεργασία έπαναλαμβάνεται μέ τή διαφορά ότι τό κύκλωμα παραμένει άνοικτό για 25 sec προτου εκφορτιστεῖ ο πυκνωτής. Η νέα μέγιστη απόκλιση του βαλιστικού γαλβανομέτρου εῖναι 17.5 cm. Υπολογίστε τήν αντίσταση του πυκνωτή.
- 5-20. Στη διάταξη τής προηγούμενης άσκήσεως μιá ωμική αντίσταση συνδέεται παράλληλα προς τον πυκνωτή. Η διεργασία έπαναλαμβάνεται και ή μέγιστη απόκλιση του γαλβανομέτρου που παρατηρεῖται για καθυστέρηση 25 sec μεταξύ φορτίσεως και εκφορτίσεως εῖναι 16.5 cm. Υπολογίστε τήν τιμή τής αντίστασεως που συνδέθηκε παράλληλα μέ τον πυκνωτή.
- 5-21. Ένας ιδανικός πυκνωτής με χωρητικότητα 0.01 μF φορτίζεται σε δυναμικό 2 V διαμέσου μιās αντίστασεως σε σειρά. Μετά από χρό-



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

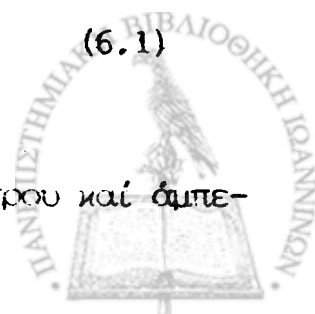
ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΔΥΝΕΧΟΥΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΜΗΔΕΝΙΣΜΟΥ

Όλες οι μετρήσεις που θεωρήσαμε ως τώρα βασίζονται στην ένδειξη που παρέχει ή απόκλιση ενός κινητού συστήματος. Μετρήσεις του τύπου αυτού παρέχουν άμεσα το αποτέλεσμα με απλή ανάγνωση της ένδειξης στην κλίμακα του όργανου. Η ακρίβεια όμως του αποτελέσματος είναι δυνατόν να περιορίζεται σημαντικά από την εύαισθησία του όργανου που είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε ενώ η πιστότητα εξαρτάται κατά κρίσιμο τρόπο από τη διαδικασία βαθμονόμησης που έχει προηγηθεί.

Είναι ίσως χρήσιμο να μελετήσουμε τους περιορισμούς αυτούς με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε την μέτρηση μιας αντίστασης R_x με το "κύκλωμα II" του σχήματος 3-13. Λαμβάνοντας υπόψη την εσωτερική αντίσταση του αμπερομέτρου R_A , η τιμή της άγνωστης αντίστασης δίνεται από την εξ. (3.20) ως

$$R_x = \frac{V}{I} - R_A \quad (6.1)$$

όπου V και I είναι οι αντίστοιχες ένδειξεις του βολτομέτρου και αμπε-



ρομέτρου. Τό σφάλμα σ_x που συνεπάγεται η μέτρηση μπορεί να εκτιμηθεί από τη γενική έκφραση της έξ. (1.63). Στη συγκεκριμένη περίπτωση

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial R_x}{\partial V} \right)^2 \sigma_V^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial I} \right)^2 \sigma_I^2 = \frac{1}{I^2} \sigma_V^2 + \frac{V^2}{I^4} \sigma_I^2 \quad (6.2)$$

όπου σ_V και σ_I είναι τὰ σφάλματα στις ένδείξεις των δύο οργάνων. Αν δεχτούμε (σέ πολύ καλή προσέγγιση) ότι η έσωτερική αντίσταση του άμπερομέτρου R_A είναι άμελητέα σέ σχέση μέ τό λόγο V/I , μπορούμε να γράψουμε τήν έξ. (6.2) στήν πλέον συμμετρική μορφή

$$\frac{\sigma_x^2}{R_x^2} = \frac{\sigma_V^2}{V^2} + \frac{\sigma_I^2}{I^2} \quad (6.3)$$

πού ταυτόχρονα έκφράζει τό σχετικό σφάλμα στόν προσδιορισμό τής άγνωστης αντίστασεως ως συνάρτηση των σχετικών σφαλμάτων των οργάνων. Για τυπικά έργαστηριακά όργανα μέ σχετικό σφάλμα τής τάξεως του 0.02 (2%), τό αντίστοιχο σφάλμα στήν τιμή τής αντίστασεως πού παρέχει η προηγούμενη μέτρηση, σύμφωνα μέ τήν έξ. (6.3), είναι τής τάξεως του 0.03 (3%). Μέ άλλα λόγια, μιá άγνωστη αντίσταση στήν περιοχή του 1 k Ω δέν μπορεί να μετρηθεί μέ μεγαλύτερη ακρίβεια από $\pm 30 \Omega$.

Γενικά κάθε μέτρηση πού στηρίζεται σέ ένδείξεις άποκλίσεως οργάνων συνεπάγεται ένα συγκεκριμένο σχετικό σφάλμα, έτσι ώστε η άπόλυτη ακρίβεια τής μετρήσεως να περιορίζεται από τήν τάξη μεγέθους του άποτελέσματος. Αντίθετα, μετρήσεις μέ διατάξεις μηδενισμού δέν έμφανίζουν παράμοιους περιορισμούς ως προς τό απόλυτο σφάλμα. Μέ τόν όρο "διατάξη μηδενισμού" θά έννοήσουμε κάθε ήλεκτρικό κύκλωμα του οποίου τὰ στοιχεΐα μπορούν να ρυθμιστούν έτσι ώστε η διαφορά

δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων του νά μηδενιστεῖ. Ἄν ἓνα ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ κυκλώματος (HEΔ, ἀντίσταση, πυκνωτής, κ.λ.π.) εἶναι ἀγνωστο, τότε ἡ τιμή του μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τή σχέση πού τό συνδέει μέ τά λοιπά (γνωστά) στοιχεῖα κατὰ τή συνθήκη μηδενισμοῦ. Γιά κύκλωμα συνεχοῦς ρεύματος, ἡ ὕπαρξη ἢ μή διαφορᾶς δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων του μπορεῖ νά διαπιστωθεῖ μέ ἀπευθείας σύνδεση ἐνός εὐαίσθητου ἀμπερομέτρου. Γιά τό σκοπό αὐτό τό γαλβανόμετρο D' Arsonval πού μελετήσαμε στό προηγούμενο κεφάλαιο ἔχει, στίς περισσότερες ἐφαρμογές, ἰδανικές ἰδιότητες.

Τά πλεονεκτήματα τῆς μεθόδου μηδενισμοῦ σέ μιὰ μέτρηση εἶναι προφανή. Κατ' ἀρχήν, σέ ἀντίθεση μέ μετρήσεις πού στηρίζονται σέ ἀνάγνωση τῆς ἀποκλίσεως ὀργάνου, ὅπου ἡ τάξη μεγέθους τοῦ ρεύματος περιορίζει τήν περιοχὴ τῆς κλίμακας καί ἐπομένως τήν ἀπόλυτη ἀκρίβεια, ἡ παρατήρηση τῆς ροῆς ἢ μή ρεύματος μπορεῖ νά γίνεῖ μέ τήν πλήρη εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου. Ἐξάλλου, καθόσον ἡ ἀπόκριση πού ἀπαιτεῖται ἀπό τό ὄργανο εἶναι τοῦ τύπου "ναί" ἢ "ὄχι", ἡ ἀκρίβεια τῆς μετρήσεως δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή γραμμικότητα τῆς ἐνδείξεως ἢ τή βαθμολόγηση.

Ἡ προηγούμενη διαπίστωση, πού μπορεῖ νά ἀποδοθεῖ μέ τή φράση ὅτι "τό μηδέν μπορεῖ νά μετρηθεῖ μέ μεγαλύτερη ἀκρίβεια ἀπό ὁποιοδήποτε ἄλλο ἀριθμό", ἔχει ὀδηγήσει στήν ἐπιινόηση πολλῶν κυκλωμάτων πού ἐκμεταλεύονται τή μέθοδο μηδενισμοῦ γιά τή μέτρηση ἠλεκτρικῶν μεγεθῶν. Θά ἀναφερθοῦμε σέ κυκλώματα τοῦ τύπου αὐτοῦ μέ τή γενική ὀνομασία γέφυρα καί στήν κατάσταση μηδενισμοῦ μέ τόν ὄρο κατάσταση ἰσορροπίας.



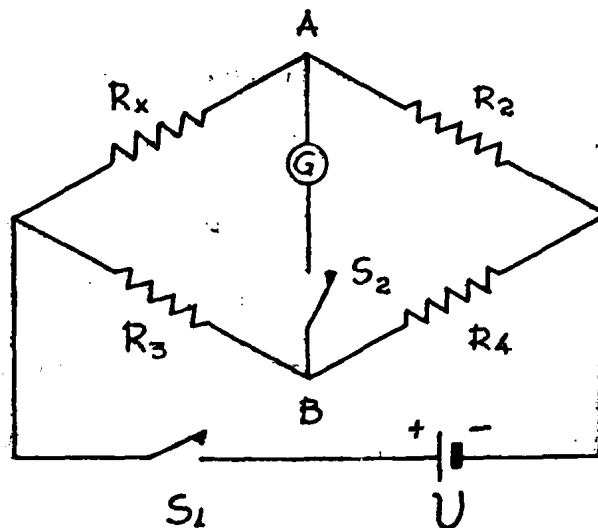
6-1 Ἡ Γέφυρα Wheatstone

Τό ἀπλούστερο κύκλωμα μηδενισμοῦ καί ταυτόχρονα ἕνα ἀπό τά χρησιμότερα εἶναι ἡ γέφυρα Wheatstone πού ἐπινοήθηκε ἀπό τόν S.H. Christie τό 1833 καί διαδόθηκε σέ εὐρεία κλίμακα λίγο ἀργότερα ἀπό τόν Charles Wheatstone. Ἡ γέφυρα Wheatstone, πού δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 6-1, εἶναι ἕνα κύκλωμα μέ ἕξ κλάδους ἀπό τοὺς ὁποίους ὁ πρῶτος περιέχει ΗΕΔ, ὁ δεύτερος ἕνα γαλβανόμετρο καί οἱ ἄλλοι τέσσερις ὠμικές ἀντιστάσεις. Ἡ κατάσταση ἰσορροπίας τῆς γέφυρας ἐπιτυγχάνεται ὅταν τό ρεῦμα I_g στόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου μηδενιστεῖ. Στήν κατάσταση αὐτή ὅλο τό ρεῦμα I_x πού διαρρέει τήν ἀντίσταση R_x διοχετεύεται στήν ἀντίσταση R_2 καί ὅλο τό ρεῦμα I_3 τῆς ἀντιστάσεως R_3 στήν ἀντίσταση R_4 , ἥτοι

$$I_2 = I_x \quad (6.4\alpha)$$

καί

$$I_4 = I_3 \quad (6.4\beta)$$



ΣΧΗΜΑ 6-1. Ἡ γέφυρα Wheatstone.



Ἐξάλλου τὰ σημεῖα A καὶ B βρίσκονται σὸ ἴδιο δυναμικὸ ὅποτε

$$I_x R_x = I_3 R_3 \quad (6.5\alpha)$$

καὶ

$$I_2 R_2 = I_4 R_4 \quad (6.5\beta)$$

Ἀπαλείφοντας τὰ ρεύματα ἀπὸ τῆς ἐξ. (6.4) καὶ (6.5) μποροῦμε τώρα εὐκόλα νὰ καταλήξουμε στὴ σχέση πού συνδέει τῆς ἀντιστάσεις τοῦ κυκλώματος στὴν κατάσταση ἰσορροπίας

$$\frac{R_x}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (6.6)$$

Ἄν ἐπομένως οἱ τρεῖς ἀπὸ τῆς ἀντιστάσεις τῆς γέφυρας R_1 , R_2 καὶ R_3 εἶναι γνωστὲς, ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως R_x μπορεῖ νὰ προσδιοριστεῖ ἀπὸ τὴν τελευταία σχέση.

Ἡ ἐξ. (6.6) πού καθορίζει τὴν κατάσταση ἰσορροπίας τῆς γέφυρας εἶναι ἀνεξάρτητη τόσο ἀπὸ τὴν ΗΕΔ τοῦ ἠλεκτρικοῦ στοιχείου ὅσο καὶ ἀπὸ τὴν ἐσωτερικὴ ἀντίσταση R_g τοῦ γαλβανομέτρου. Τοῦτο φυσικά δὲν ἰσχύει γιὰ ὁποιαδήποτε ἄλλη κατάσταση τῆς γέφυρας κατὰ τὴν ὁποία ἓνα μὴ μηδενικὸ ρεῦμα I_g διαρρέει τὸν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου. Στὴ γενικὴ κατάσταση λειτουργίας του τὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-1 ἔχει ἤδη ἀναλυθεῖ μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Thévenin στὴν Παράγραφο 4-7, καὶ μὲ μετασχηματισμὸ τριγώνου σὲ ἀστέρα στὴν Παράγραφο 4-9. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀνάλυση κατὰ τὴν πρώτη μέθοδο, τὸ ἔξωτερικὸ κύκλωμα τοῦ γαλβανομέτρου μπορεῖ νὰ ἀντικατασταθεῖ {βλ. σχῆμα 4-10} ἀπὸ μιὰ ἰσοδύναμη ΗΕΔ

$$U_0^* = \left[\frac{R_x}{R_x + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right] U \quad (6.7)$$



καί μιá ίσοδύναμη αντίσταση

$$R_0 = \frac{R_x R_2}{R_x + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \quad (6.8)$$

Τό ρεύμα επομένως πού διαρρέει τόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι

$$I_g = \frac{U_0}{R_0 + R_g} = \frac{\frac{R_x}{R_x + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}}{\frac{R_x R_2}{R_x + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R_g} U \quad (6.9)$$

Παρατηρεῖται ὅτι γιά τήν κατάσταση ἰσοροπίας τῆς γέφυρας ὅπου $I_g = 0$ ἡ τελευταία σχέση ὁδηγεῖ στή συνθήκη τῆς ἐξ. (6.6).

Ἡ ἀκρίβεια τῆς γέφυρας Wheatstone στή μέτρηση ἀντιστάσεως ἐξαρτᾶται ἀπό πολλούς παράγοντες, ὅπως ἡ ἀκρίβεια τῶν ἐπιμέρους γνωστῶν ἀντιστάσεων, ἡ σταθερότητα καθεμιᾶς ὡς πρός μεταβολές τῆς θερμοκρασίας πού προκαλεῖ ἡ κατανάλωση ἰσχύος καί ἡ εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό ρεύμα. Σύμφωνα μέ τήν ἀνάλυση τῆς Παραγράφου 3-6 ἡ μέγιστη ἀφέλιμη ἰσχύ πού καταναλώνεται στόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου ἀπό τήν ἰσοδύναμη ΗΕΔ U_0 ἐπιτυγχάνεται γιά ἑσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου R_g ἴση πρός τήν ἰσοδύναμη ἀντίσταση R_0 . Ἡ προσαρμογή αὐτή τῆς ποσότητας R_0 στήν ἐξ. (6.8) πρός τήν ἑσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου

$$R_g = \frac{R_x R_2}{R_x + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \quad (6.10)$$

θεωρεῖται συνήθως ἡ ἐπιθυμητή κατάσταση λειτουργίας τῆς γέφυρας Wheatstone.



ΠΕΙΡΑΜΑ 6-1. Μετρεΐστε μέ ένα ώμόμετρο πήν άγνωστη αντίσταση R_x πού σās δόθηκε. Έκτιμεΐστε τό πειραματικό σφάλμα στή μέτρηση.

— Συνδέστε τό κύκλωμα τής γέφυρας Wheatstone πού δύνεται στό σχήμα 6-1. Ός αντίσταση R_2 χρησιμοποιεΐστε ένα δεκαδικό κιβώτιο αντίστασεως. Για τό συνδιασμό τών αντίστασεων $R_3 + R_4$ χρησιμοποιεΐστε μιá αντίσταση μέ ένδιάμεση βαθμονομημένη κινητή έπαφή. Χρησιμοποιεΐστε άκόμη ένα ήλεκτρικό στοιχεΐο μέ ΗΕΔ περίπου 3 V ή ένα τροφοδοτικό ΣΡ. Συνδέστε τό γαλβανόμετρο διαμέσου του κυκλώματος προστασίας του καί ένός διακόπτη τηλεγραφητή S_2 .

— Έπιλέξτε τήν τιμή τής αντίστασεως $R_2 \approx R_x$ καί τό λόγο $R_3/R_4 = 1$.

Ύπολογΐστε τά ρεύματα πού διαρρέουν κάθε κλάδο τής γέφυρας όταν ό διακόπτης S_2 εΐναι άνοικτός καί αν χρειαστεΐ μειώστε τήν ΗΕΔ U ώστε τά ρεύματα νά βρίσκονται μέσα στά έπιτρεπτά όρια πού καθορίζει ό κατασκευαστής για καθεμιá από τίς αντίστασεις.

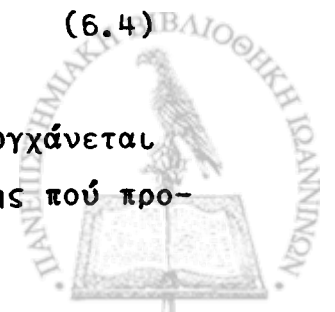
— Κλεΐστε τό διακόπτη S_1 . Μέ τό κύκλωμα προστασίας του γαλβανομέτρου στό σημείο ελάχιστης εύαισθησίας κλεΐστε τόν διακόπτη S_2 . Αύξεΐστε τήν εύαισθησία του γαλβανομέτρου μέχρϊς ότου δείξει κάποια απόκλιση. Ρυθμίστε τήν αντίσταση R_2 ώστε νά άποκατασταθεΐ ή ίσορροπία του όργάνου. Συνεχΐστε τή διαδικασία, αύξάνοντας σταδιακά τήν εύαισθησία του κυκλώματος προστασίας καί ρυθμίζοντας τήν αντίσταση R_2 , ώστε νά έπιτύχετε κατάσταση ίσορροπίας για μέγιστη εύαισθησία του γαλβανομέτρου. Αν τό κιβώτιο αντίστασεων R_2 δέν διαθέτει άρκετά μικρές ύποδιαιρέσεις, πραγματοποιεΐστε τήν τελική ρύθμιση μέ μετατόπιση τής κινητής έπαφής μεταξύ τών αντίστασεων R_3 καί R_4 . Ύπολογΐστε τήν τιμή τής αντίστασεως R_x από τήν έξ. (6.6).

— Μεταβάλετε τήν αντίσταση R_2 κατά μικρά βήματα καί καταγράψτε τήν απόκλιση του γαλβανομέτρου d για άρκετές τιμές μικρότερες ή μεγαλύτερες από τήν τιμή $R_{20} = R_x$. Αποδώστε τά άποτελέσματα σε γραφική παράσταση, μέ τετμημένη τήν απόκλιση d του γαλβανομέτρου καί τεταγμένη τήν απόκλιση

$$\Delta R = |R_2 - R_{20}|$$

(6.4)

όπου R_{20} ή τιμή τής αντίστασεως R_2 για τήν όποία έπιτυγχάνεται ή κατάσταση ίσορροπίας. Σχολιαστε τή μορφή τής καμπύλης πού προ-



κύπτει. Είναι ή σχέση τών δύο μεγεθών γραμμική; Είναι συμμετρική γύρω από τήν τιμή $\Delta R = 0$; Από τήν κλίση τής καμπύλης κοντά στή θέση ίσορροπίας ύπολογίστε τήν εύαισθησία τής διατάξεως

$$S_R \equiv \frac{d}{\Delta R} \quad (6.12)$$

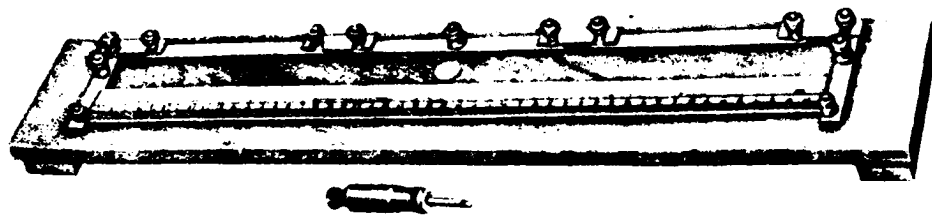
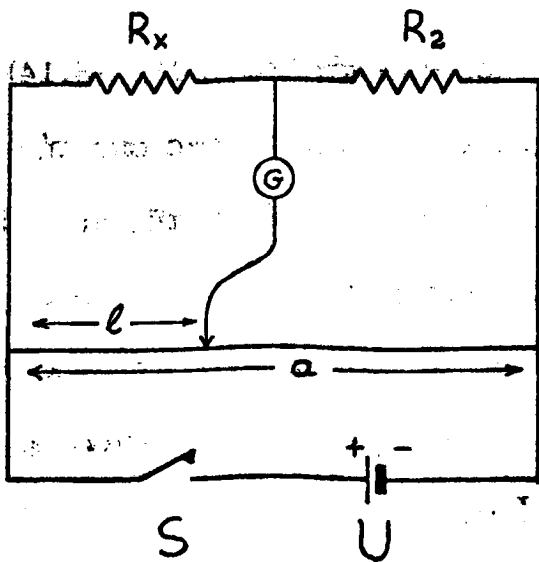
Από τήν τελευταία ποσότητα καί τήν ελάχιστη απόκλιση του γαλβανόμετρου από τή θέση ίσορροπίας πού μπορείτε νά παρατηρήσετε εκτιμεύστε τό πειραματικό σφάλμα στή μέτρηση τής αντίστασεως R_x . — Λόγω τής μεγάλης εύαισθησίας τής γέφυρας Wheatstone όποιαδήποτε τυχαία ΗΕΔ στους κλάδους του κυκλώματος (από θερμικά ή βολταϊκά φαινόμενα) μπορεί νά επηρεάσει τή συνθήκη ίσορροπίας. Για νά εξαλείψετε παρόμοια φαινόμενα αντιστρέψτε τούς πόλους του ήλεκτρικού στοιχείου U (άν χρησιμοποιείτε τροφοδοτικό ΣΡ, αντιστρέψτε τούς πόλους χωρίς νά πειράξετε τή ρύθμιση του δυναμικού) καί επαναλάβετε τήν προηγούμενη διαδικασία. Υπολογίστε τόν μέσο όρο τών δύο μετρήσεων καί τό πειραματικό σφάλμα από τίς σχέσεις τής Παραγράφου 1-12.

— Επαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία για λόγο τών αντιστάσεων $R_3/R_4 = 0.25$ καί $R_3/R_4 = 1/3$ καί $R_3/R_4 = 3$.

— Προσδιορίστε τήν τιμή τής αντίστασεως R_x καί τό πειραματικό σφάλμα από όλες τίς προηγούμενες μετρήσεις. Συγκρίνετε τό τελικό αποτέλεσμα μέ τήν τιμή πού έδωσε ή μέτρηση μέ τό ώμόμετρο.

6-2 Πειραματικό Σφάλμα στή Μέτρηση Αντίστασεως

Στό προηγούμενο πείραμα ή γέφυρα Wheatstone χρησιμοποιήθηκε στήν πλέον συνήθη της μορφή, όπου ο ένας κλάδος (των γνωστών αντιστάσεων R_3 καί R_4) αποτελείται από ένα γραμμικό άγωγό, ενώ ή συνθήκη ίσορροπίας προσδιορίζεται από τή θέση τής κινητής έπαφής πάνω σε μιά κλίμακα. Άν όπως δείχνει τό σχήμα 6-2, α είναι τό όλικό μήκος του γραμμικού άγωγού καί l ή άπόσταση τής κινητής έπαφής από τό ένα άκρο του



(α)

(β)

ΣΧΗΜΑ 6-2. (α) Σχηματική διάταξη και (β) συνηθής εργαστηριακός τύπος γέφυρας Wheatstone με γραμμικό άγωγο και κινητή επαφή.

τότε σύμφωνα με την έξ. (2.166) η τιμή των αντιστάσεων R_3 και R_4 είναι

$$R_3 = \rho \frac{l}{S} \quad (6.13a)$$

$$R_4 = \rho \frac{a-l}{S} \quad (6.13b)$$

όπου ρ είναι η ειδική αντίσταση και S η διατομή του άγωγου. Στην περίπτωση επόμεως αυτή η συνθήκη ισορροπίας της έξ. (6.6) παίρνει τη μορφή

$$R_x = R_2 \frac{l}{a-l} \quad (6.14)$$



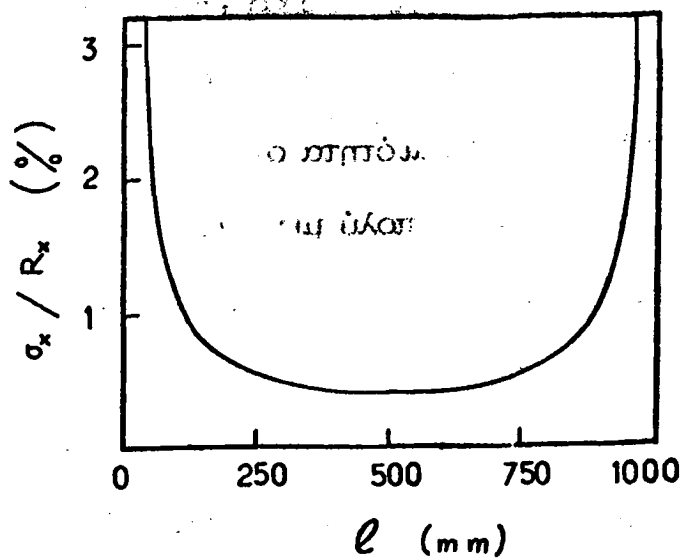
Στήν πράξη, τό πειραματικό σφάλμα πού συνεπάγεται η έξ. (6.14) στή μέτρηση τής αντίστασως R_X προέρχεται κατά κύριο λόγο από τήν άβεβαιότητα μέ τήν όποία μπορεί νά προσδιοριστεί η θέση τής κινητής έπαφής πάνω στό γραμμικό άγωγό. Μέ τή βοήθεια τής έξ. (1.63) μπορούμε εύκολα νά δείξουμε ότι άν σ_ℓ είναι τό σφάλμα στόν προσδιορισμό του μήκους ℓ , τότε η άβεβαιότητα σ_X στήν τιμή τής αντίστασως R_X πού προκύπτει από τήν έξ. (6.14) είναι

$$\sigma_X = R_2 \frac{\alpha}{(\alpha - \ell)^2} \sigma_\ell = \frac{\alpha}{(\alpha - \ell)\ell} R_X \sigma_\ell . \quad (6.15)$$

Από τήν τελευταία σχέση έπιεται ότι τό σχετικό σφάλμα στή μέτρηση είναι

$$\frac{\sigma_X}{R_X} = \frac{\alpha}{(\alpha - \ell)} \frac{\sigma_\ell}{\ell} . \quad (6.16)$$

Αν η αντίσταση R_2 έπιλεγεί περίπου ίση προς τήν άγνωστη αντίσταση R_X , ώστε ο λόγος R_3/R_4 νά μή διαφέρει πολύ από τή μονάδα, τό σχετικό σφάλμα πού συνεπάγεται η έξ. (6.16) είναι αρκετά μικρό. Για συνήθεις διατάξεις μέ όλικό μήκος του άγωγού $R_3 + R_4$ ίσο μέ 1 m και διακριτική ικανότητα στή θέση τής κινητής έπαφής περίπου 1 mm, τό σχετικό σφάλμα σ_X/R_X δέν ξεπερνά τό 0.003 (0.3%). Όπως δείχνει τό σχήμα 6-3 τό πειραματικό σφάλμα γίνεται σημαντικό μόνο για συνθήκη ίσοροπίας πού άπαιτεί τήν τοποθέτηση τής κινητής έπαφής κοντά στα άκρα του γραμμικού άγωγού. Όπως ήδη αναφέρθηκε, η κατάσταση αυτή μπορεί νά άποφευχθεί μέ κατάλληλη έπιλογή τής αντίστασως R_2 . Η μέγιστη ακρίβεια έπιτυγχάνεται στό σημείο όπου η μεταβλητή ℓ παίρνει τιμή



ΣΧΗΜΑ 6-3. Σχετικό σφάλμα σ_x / R_x κατά τη μέτρηση αντίστασης με τη γέφυρα Wheatstone του σχήματος 6-2 ως συνάρτηση της θέσεως l της κινητής έπαφης στο γραμμικό άγωγο. Για τόν ύπολογισμό της γραφικής παραστάσεως έχει ληφθεί όλικό μήκος του άγωγοῦ $\alpha = 1 \text{ m}$ καί διακριτική ικανότητα στή θέση της κινητής έπαφης $\sigma_l = 1 \text{ mm}$.

ώστε η πρώτη παράγωγος του σχετικού σφάλματος να μηδενίζεται

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{\sigma_x}{R_x} \right) = \frac{2l - \alpha}{(\alpha - l)^2 l^2} = 0$$

ή

$$l = \frac{\alpha}{2}. \quad (6.18)$$

Μέ άλλα λόγια η ακρίβεια της μετρήσεως είναι μέγιστη όταν η κινητή έπαφή βρίσκεται στο μέσον του άγωγοῦ καί ο λόγος τῶν ἀντιστάσεων R_3/R_4 είναι μονάδα. Στην περίπτωση αὐτή τό σχετικό σφάλμα στή μέτρηση της ἀντιστάσεως είναι διπλάσιο ἀπό τό σχετικό σφάλμα στόν προσδιορισμό

τῆς θέσης τῆς κινητῆς ἐπαφῆς.

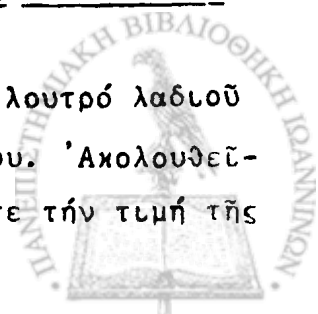
Ἡ ἀκρίβεια πού παρέχει ἡ ἀπλή γέφυρα Wheatstone στή μέτρηση ἀντιστάσεων γιά μιὰ μεγάλη περιοχὴ τιμῶν ικανοποιεῖ τίς ἀπαιτήσεις στίς περισσότερες ἐφαρμογές. Ἡ ἀβεβαιότητα στήν τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως R_2 συνήθως συνεισφέρει σφάλμα κατὰ πολὺ μικρότερο ἀπὸ τὴν ποσότητα τῆς ἐξ. (6.15) ἐνῶ συστηματικὰ σφάλματα πού μποροῦν νὰ ὑπεισέλθουν ἀπὸ θερμικὴ ΗΕΔ ἢ ἄλλα τυχαῖα ἠλεκτρικὰ φαινόμενα μποροῦν νὰ ἐξαληρθοῦν μέ τὴ διαδικασία ἀναστροφῆς τῶν πόλων τοῦ στοιχείου πού περιγράφηκε στό Πείραμα 6-1. Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρὰ συστηματικὰ σφάλματα πού προ-καλοῦνται ἀπὸ τίς συνθῆκες τοῦ περιβάλλοντος μποροῦν νὰ ἐπιηρεάσουν κατὰ πολὺ δραστηκότερο τρόπο τὴ μέτρηση. Μεταβολὴ π.χ. τῆς θερμοκρασίας τοῦ περιβάλλοντος κατὰ 1°C μπορεῖ νὰ ἐπιφέρει διακυμάνσεις στήν τιμὴ μιᾶς ἀντιστάσεως μέχρι 0.5 %. Γιά τὴ διάταξη τοῦ σχήματος 6-2 ἡ μεταβολὴ αὐτὴ εἶναι ὑπερδιπλάσια ἀπὸ τὸ πειραματικὸ σφάλμα. Εἶναι ἐπιμέλως δυνατόν νὰ ἐκμεταλευτοῦμε τὴν εὐαισθησία τῆς γέφυρας Wheatstone γιά τὴ μελέτη τῆς θερμικῆς συμπεριφορᾶς μιᾶς ἀντιστάσεως. Ἡ διεργασία αὐτὴ περιγράφεται στό ἐπόμενο Πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 6-2. Γιά πολλὰ μέταλλα, σέ μιὰ περιορισμένη περιοχὴ θερμοκρασιῶν, ἡ ἀντίσταση ἐμφανίζει γραμμικὴ ἐξάρτηση ὡς πρὸς τὴ θερμοκρασία, ἥτοι

$$R = R_0 [1 + \alpha(t - t_0)] \quad (6.19)$$

ὅπου R_0 εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως σέ θερμοκρασία t_0 , R ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως σέ θερμοκρασία t καὶ α ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως πού χαρακτηρίζει τὸ μέταλλο.

— Βυθίστε τὴν ἀντίσταση πού θὰ σᾶς δοθεῖ σέ ἓνα λουτρό λαδιού καὶ μετρεῖστε μέ ἓνα θερμόμετρο τὴ θερμοκρασία του. Ἀκολουθεῖστε τὴ διαδικασία τοῦ Πειράματος 6-1 καὶ μετρεῖστε τὴν τιμὴ τῆς



Άγνωστης αντίστασης σέ θερμοκρασία δωματίου.

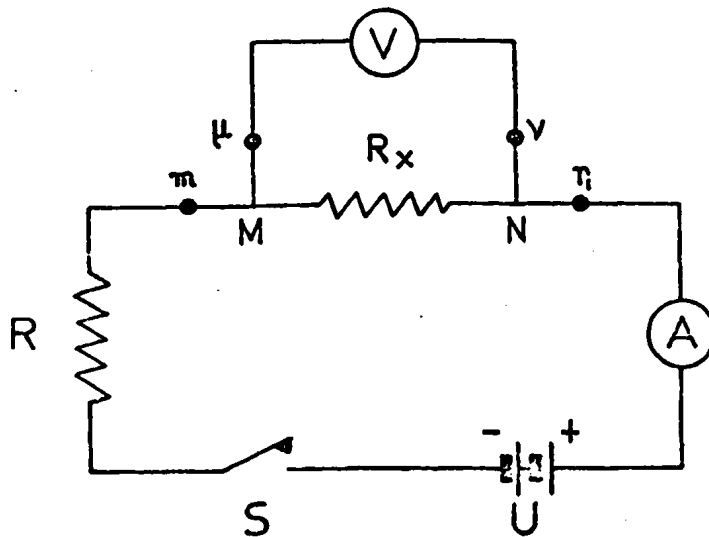
— Τοποθετείστε ένα άναμένο λύχνο Bunsen κάτω από τό λουτρό λαδιού. Καθώς ή θερμοκρασία τής αντίστασης αύξάνει θά παρατηρήσετε απόκλιση του γαλβανόμετρου. Μεταβάλετε τή θέση τής κινητής έπαφής μεταξύ τών αντίστασεων R_3 καί R_4 (βλ. σχήμα 6-2) ώστε νά διατηρεΐται ή ίσορροπία τής γέφυρας. Σέ κατάλληλο κύνακα καταγράψτε τή θερμοκρασία τής αντίστασης ανά 5 °C καί τήν αντίστοιχη θέση τής κινητής έπαφής για τήν όποία ίσορροπεΐ ή γέφυρα μέχρι περίπου 30 °C πάνω από τή θερμοκρασία δωματίου. Άναδεύετε τό λάδι κατά τακτικά διαστήματα, ώστε νά έπιτύχετε όμοιόμορφη θερμοκρασία. Σβύστε τό λύχνο καί έπαναλάβετε τς μετρήσεις κατά τήν έπαναφορά του λουτροΐ στή θερμοκρασία δωματίου. — Άποδώστε τά πειραματικά δεδομένα σέ γραφική παράσταση μέ τεταγμένη τήν αντίσταση καί τετμημένη τή θερμοκρασία. Προσαρμόστε στα δεδομένα τήν καλύτερη εύθεια καί από τήν κλίση τής εύθειας προσδιορίστε τόν θερμικό συντελεστή του μετάλλου. Συγκρίνετε τό άποτέλεσμα μέ τήν αντίστοιχη τιμή που δίνεται στή βιβλιογραφία καί σχολιάστε τήν ακρίβεια τής μετρήσεώς σας.

6-3 Μέτρηση Πολύ Μικρών Άντιστάσεων. Ή Διπλή Γέφυρα Kelvin

Ή ακρίβεια τής γέφυρας Wheatstone περιορίζεται σημαντικά κατά τή μέτρηση πολύ μικρών αντίστασεων ($R_x \leq 0.1 \Omega$) όπου ή αντίσταση τών συρμάτων ή τών σημείων έπαφής γίνεται συγκρίσιμη προς τήν τιμή τής άγνωστης αντίστασης. Γενικώτερα ή σύνδεση ενός έξαρτήματος σέ ένα κύκλωμα γίνεται προβληματική όταν ή χαρακτηριστική του αντίσταση είναι συγκρίσιμη μέ τς αντιστάσεις τών σημείων έπαφής ή τών άγωγών που τό συνδέουν μέ άλλα έξαρτήματα ή όργανα του κυκλώματος. Μιά μέθοδος για τήν έξάλειψη τής δυσκολίας αυτής περιγράφεται στο έπόμενο Πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 6-3. Συνδέστε τό κύκλωμα του σχήματος 6-4. Ής πηγή ΗΕΔ χρησιμοποιεΐστε ήλεκτρικό στοιχειο ή τροφοδοτικό ΣΡ. Ήπιλέξτε





ΣΧΗΜΑ 6-4. Μέτρηση πολύ μικρής αντίστασης με βολτόμετρο και άμπερομέτρο.

τήν ΗΕΔ U και τήν αντίσταση R ώστε τό ρεύμα πού διαρρέει τό άμπερομέτρο A νά πάρει κάποια τιμή μέσα στά έπιτρεπτά όρια για κάθε έξάρτημα τοῦ κυκλώματος. Μεταξύ τῶν σημείων π και π' συνδέστε ένα γραμμικό άγωγό (π.χ. μιá λεπτή μεταλλική ράβδο).

— Συνδέστε ένα εύάλσθητο βολτόμετρο σέ δύο σημεία M και N τοῦ γραμμικοῦ άγωγοῦ. Κλεῦστε τόν διακόπτη S . Από τίς ένδείξεις τοῦ άμπερομέτρου A και τοῦ βολτομέτρου V υπολογίστε τήν αντίσταση τοῦ γραμμικοῦ άγωγοῦ μεταξύ τῶν σημείων M και N . Προσδιορίστε τό πειραματικό σφάλμα στή μέτρηση.

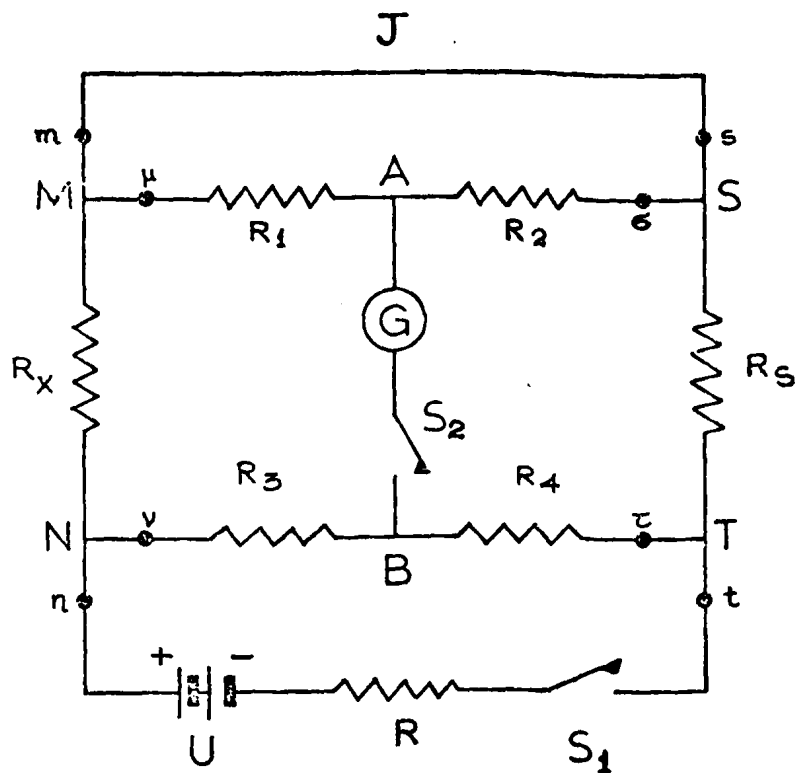
Ὁ γραμμικός άγωγός πού χρησιμοποιήθηκε στό προηγούμενο Πείραμα μπορεί νά διατηρηθεῖ ως έξάρτημα μέ γνωστή αντίσταση άν τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-4 διακοπεῖ στά σημεία π , π' , μ και ν . Μέ τήν προϋπόθεση ότι σέ μιá νέα σύνδεση οἱ άμφοδέκτες π και π' θά χρησιμοποιηθοῦν για τή διοχέτευση ρεύματος ενώ οἱ άμφοδέκτες μ και ν για τόν καθορισμό διακροῦς δυναμικοῦ, δέν άνακύπτει πλέον τό πρόβλημα τῆς αντίστασης πού παρεμβάλουν τά σημεία έπαφῆς ἢ οἱ άγωγοί πού συνδέουν τό έ-

ξάρτημα μέ τό υπόλοιπο κύκλωμα. Πράγματι, οί έπαφές m καί n άνήκουν στό κύκλωμα πού περιέχει τήν ΗΕΔ καί ή αντίστασή τους μπορεί νά θεωρηθεΐ άμελητέα σέ σύγκριση μέ τήν αντίσταση του έξωτερικού κυκλώματος (στήν περίπτωση του σχήματος 6-4, τήν αντίσταση R). Παράλληλα, τά σημεία έπαφής M, N, μ καί ν άνήκουν στό κύκλωμα του βολτομέτρου καί ή αντίσταση πού παρεμβάλουν μπορεί νά θεωρηθεΐ άμελητέα σέ σύγκριση μέ τή (συνήθως μεγάλη) έσωτερική αντίσταση του όργάνου. Πολλοί κατασκευαστές παράγουν παρόμοια έξαρτήματα μικρής αντίστασης μέ τή γενική όνομασία άντιστάσεις τεσσάρων άκροδεκτών, τά όποια διαθέτουν δύο άκροδέκτες ρεύματος καί δύο άκροδέκτες δυναμικού. Τά έξαρτήματα αυτά, όπου ή τιμή της αντίστασης έχει προσδιοριστεί από τον κατασκευαστή μέ αρκετά μεγάλη άκρίβεια, χρησιμοποιούνται συνήθως ως πρότυπα για τή μέτρηση μικρών αντίστασεων μέ μεθόδους μηδενισμού.

Στίς περισσότερες έφαρμογές τό κύκλωμα του σχήματος 6-4, πού μπορεί νά αναγνωριστεί ως τό "κύκλωμα I" της Παραγράφου 3-3 (βλ. σχήμα 3-12), οδηγεί σέ προσδιορισμό της αντίστασης μέ ικανοποιητική άκρίβεια. Όπως δείχνει ή γραφική παράσταση του σχήματος 3-14, άκόμη καί άπλή έφαρμογή του νόμου του Ohm μέ βάση τίς ένδείξεις των όργάνων, οδηγεί σέ έκτίμηση της αντίστασης μέ σχετικό σφάλμα μικρότερο του 1 %. Σέ έφαρμογές, όπου οί άπαιτήσεις άκριβείας είναι αστηρότερες, μικρές άντιστάσεις μπορούν νά μετρηθούν μέ μεθόδους μηδενισμού. Τό κύκλωμα μηδενισμού πού χρησιμοποιείται συνήθως έχει έπινοηθεΐ από τον λόρδο Kelvin καί άπαντάται στή βιβλιογραφία μέ τήν όνομασία διπλή γέφυρα Kelvin ή άπλώς γέφυρα Kelvin.

Όπως δείχνει τό σχήμα 6-5, ή γέφυρα Kelvin άποτελεΐ παραλλαγή της γέφυρας Wheatstone στην όποία ή (μικρή) άγνωστη αντίσταση R_x μέ





ΣΧΗΜΑ 6-5. 'Η διπλή γέφυρα Kelvin.

ἀνδροδέκτες ρεύματος m , n καί ἀνδροδέκτες δυναμικοῦ μ , ν συγκρίνεται πρὸς τὴν πρότυπη ἀντίσταση R_S με ἀντιστοιχοῦς ἀνδροδέκτες s, t καί σ, τ . Οἱ ἀντιστάσεις R_X καί R_S συνδέονται στὰ σημεῖα m καί s διαμέσου ἑνὸς ἀγωγοῦ J ἀμελητέας ἀντιστάσεως καί σὲ συνδιασμό με τὶς ἀντιστάσεις R_3 καί R_4 δημιουργοῦν τοὺς τέσσερις κλάδους τῆς γέφυρας Wheatstone. Στὴν ἀπλή γέφυρα Wheatstone τὸ γαλβανόμετρο συνδέεται μετὰξὺ τοῦ σημείου B καί τοῦ κοινοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν ἀντιστάσεων R_X καί R_S . Γιά πολὺ μικρὲς ἀντιστάσεις, ὅπως στὴν περίπτωση τοῦ σχήματος 6-5, τὸ σημεῖο αὐτὸ δέν εἶναι πλήρως καθορισμένο, καθόσον οἱ ἐπαφές m καί s μπορεῖ νά παρεμβάλουν ἀντίσταση συγκρίσιμη πρὸς τὶς τιμές R_X καί R_S . 'Η δυσκολία αὐτὴ μπορεῖ νά παρακαμφθεῖ με τὴν παράλληλη σύνδεση τοῦ συνδιασμοῦ τῶν ἀντιστάσεων $R_1 + R_2$ ἔτσι ὥστε τὸ σημεῖο A νά πάρει ὁποιαδήποτε ἐπιθυμητὴ τιμὴ δυναμικοῦ. Με τὴ συνδεσμολογία τοῦ σχήματος 6-5 οἱ ἀντιστάσεις τῶν σημείων ἐπαφῆς m καί n δέν ἐπηρεάζουν τὴ συνθήκη ἰσορροπίας ἐνῶ τὰ ὑ-

πόλοιπα σημεία έπαφής παρεμβάλουν άμελητέα αντίσταση σε σχέση με τις αντιστάσεις R_1, R_2, R_3 και R_4 .

Η συνθήκη ίσορροπίας της γέφυρας Kelvin μπορεί να έξαχθει αν συγκρίνουμε την πτώση δυναμικού στον κλάδο TB και στον κλάδο TSA.

Αν V_{TN} είναι η διαφορά δυναμικού που αναπτύσσει η ΗΕΔ μεταξύ των σημείων T και N, η πτώση δυναμικού στον κλάδο TB είναι

$$V_{TB} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_{TN} \quad (6.20)$$

Στην κατάσταση ίσορροπίας της γέφυρας, τό ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο του γαλβανομέτρου μηδενίζεται και τό ρεύμα I που διατρέχει την αντίσταση R_s είναι ίσο μέ τό ρεύμα που διατρέχει την άγνωστη αντίσταση R_x . Τό ρεύμα I δίνεται από τή σχέση

$$V_{TN} = I \left[R_s + \frac{(R_1 + R_2)R_J}{R_1 + R_2 + R_J} + R_x \right] \quad (6.21)$$

όπου R_J είναι η αντίσταση του άγωγού J και των σημείων έπαφής m και s. Η έξ. (6.20) μπορεί έπομένως να γραφεί ως

$$V_{TB} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} I \left[R_s + \frac{(R_1 + R_2)R_J}{R_1 + R_2 + R_J} + R_x \right]. \quad (6.22)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$V_{TSA} = I \left[R_s + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{(R_1 + R_2)R_J}{R_1 + R_2 + R_J} \right]. \quad (6.23)$$



Στήν κατάσταση ισορροπίας πού θεωρούμε, όπου τό δυναμικό τῶν σημείων A καί B ταυτίζεται, οἱ δύο τελευταῖες σχέσεις δίνουν τή συνθήκη ισορροπίας

$$\frac{R_4}{R_3 + R_4} \left[R_s + \frac{(R_1 + R_2)R_J}{R_1 + R_2 + R_J} + R_x \right] = R_s + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{(R_1 + R_2)R_J}{R_1 + R_2 + R_J}$$

ἢ

$$R_x = R_s \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_2 R_J}{R_1 + R_2 + R_J} \left[\frac{R_3}{R_4} - \frac{R_1}{R_2} \right]. \quad (6.24)$$

Ἡ συνθήκη ισορροπίας τῆς γέφυρας Kelvin γίνεται κατά πολύ ἀπλούστερη ἂν ἐπιλεγεῖ ἡ σχέση τῶν ἀντιστάσεων

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \quad (6.25)$$

Στήν περίπτωση αὐτή συμπίπτει μέ τή συνθήκη γιά ισορροπία τῆς γέφυρας Wheatstone, ἦτοι

$$R_x = R_s \frac{R_3}{R_4}. \quad (6.26)$$

Ἡ σχέση τῆς ἐξ. (6.25) ἐπιλέγεται συνήθως ὡς ἡ συνθήκη λειτουργίας τῆς γέφυρας Kelvin καί ἡ ἀγνωστη ἀντίσταση προσδιορίζεται ἀπό τήν ἐξ. (6.26). Ἡ γενικώτερη ὅμως σχέση τῆς ἐξ. (6.24) εἶναι χρήσιμη στήν ἐκτίμηση τοῦ σφάλματος πού ὑπεισέρχεται λόγω ἀποκλίσεως ἀπό τήν ἐξίσωση τῶν λόγων R_1/R_2 καί R_3/R_4 πού καθορίζει ἡ ἐξ. (6.25). Τό σφάλμα αὐτό εἶναι ἀνάλογο πρὸς τήν ὅλική ἀντίσταση τοῦ κλάδου $MnJsS$.

ΠΕΙΡΑΜΑ 6-4. Μέ σκοπό τήν ἀκριβέστερη μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως πού προσδιορίζατε στό Πείραμα 6-3, συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-5. Χρησιμοποιεῖστε μιὰ πρότυπη ἀντίσταση R_S μέ τιμή ὅσο τό δυνατόν πλησιέστερα στό ἀποτέλεσμα τοῦ Πειράματος 6-3. Μεταξύ τῶν σημείων ν καί τ συνδέστε ἕνα ρεοστάτη μέ ἐνδιάμεση ἐπαφή A καί μεταξύ τῶν σημείων μ καί σ ἕνα ἄγωγό μέ ἐνδιάμεση βαθμονομημένη ἐπαφή. Συνδέστε ἀκόμη τά σημεῖα m καί s μέ ἕνα ἀπλό σύρμα J . Χρησιμοποιεῖστε ἕνα διακόπτη S_1 στόν κλάδο τῆς $HE\Delta$ καί ἕνα διακόπτη τηλεγραφητή S_2 στόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου. Ἡ ἀντίσταση R (πού μπορεῖ νά εἶναι μεταβλητή) χρησιμοποιεῖται γιά τόν περιορισμό τοῦ ρεύματος σέ ἐπιτρεπτά ἐπίπεδα στήν περίπτωση ὅπου ἡ $HE\Delta$ U προέρχεται ἀπό ἠλεκτρικό στοιχεῖο καί μπορεῖ νά παραληφθεῖ ἄν χρησιμοποιεῖται ρυθμιζόμενο τροφοδοτικό ΣΡ.

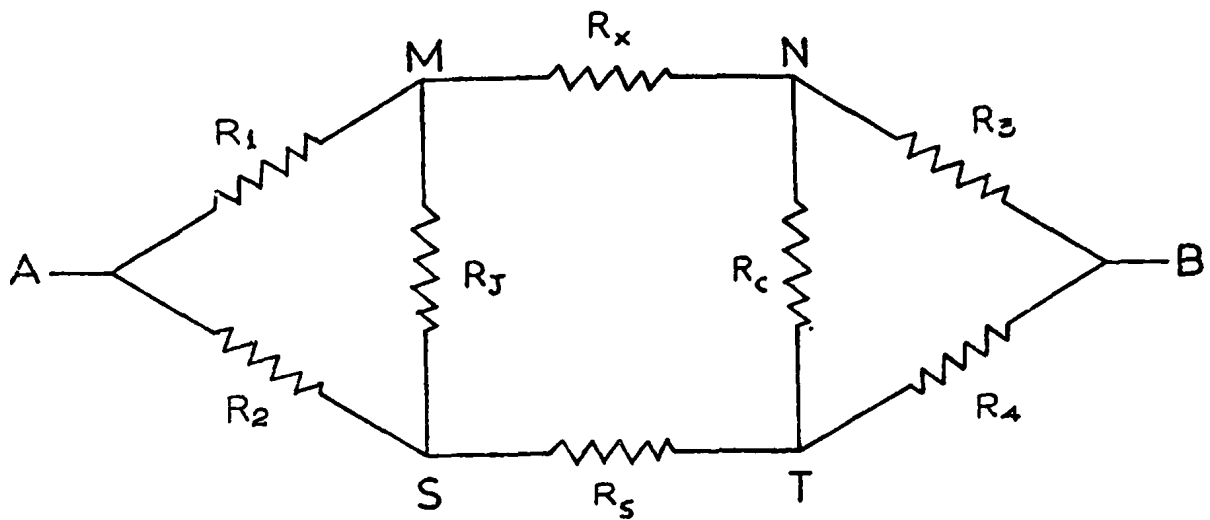
— Ἀποσυνδέστε τόν ἄγωγό J . Τό κύκλωμα τώρα εἶναι μιὰ γέφυρα Wheatstone πού ἰσορροπεῖ ἄν ἱκανοποιεῖται ἡ σχέση

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1 + R_x}{R_2 + R_S} \quad (6.27)$$

Ρυθμίστε τήν κινητή ἐπαφή A ἔτσι ὥστε $R_1/R_2 = 1$ καί τήν κινητή ἐπαφή B τοῦ ρεοστάτη ὥστε νά ἰσορροπήσει ἡ γέφυρα Wheatstone. Ἐπανασυνδέστε τόν ἄγωγό J καί ἐλέγξτε ἄν ἰσορροπεῖ ἡ γέφυρα Kelvin. Σέ κάθε στάδιο τῆς ἐργασίας ἀρχίστε μέ τό προστατευτικό κύκλωμα τοῦ γαλβανομέτρου ρυθμισμένο γιά ἐλάχιστη εὐαισθησία καί αὐξεῖστε σταδιακά τήν εὐαισθησία του μέχρις ὅτου παρατηρήσετε κάποια ἀπόκλιση.

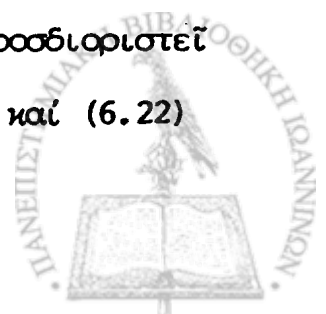
— Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία μέχρις ὅτου ἰσορροπεῖ τόσο ἡ γέφυρα Wheatstone (τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-5 χωρίς τόν ἄγωγό J) ὅσο καί ἡ γέφυρα Kelvin. Ἀπό τήν ἐξ. (6.26) ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_x . Ἐκτιμεῖστε τήν ἀβεβαιότητα στό λόγο R_1/R_2 καί τό πειραματικό σφάλμα πού συνεπάγεται στήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_x . Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τό πειραματικό σφάλμα στό Πείραμα 6-3.





ΣΧΗΜΑ 6-6. Έξωτερικό κύκλωμα αντίστασεων στα άκρα του γαλβανομέτρου της γέφυρας Kelvin.

Όπως και στην περίπτωση της γέφυρας Wheatstone ή ισοδύναμη ΗΕΔ και η ισοδύναμη αντίσταση στο έξωτερικό κύκλωμα του γαλβανομέτρου της γέφυρας Kelvin μπορούν να υπολογιστούν με τις μεθόδους του Κεφαλαίου 4. Παραλείποντας την αντίσταση R του σχήματος 6-5 στον κλάδο της ΗΕΔ μπορούμε να αποδώσουμε το έξωτερικό κύκλωμα αντίστασεων του γαλβανομέτρου σύμφωνα με το σχήμα 6-6. Η ολική αντίσταση μεταξύ των σημείων A και B μπορεί να βρεθεί με δύο μετασχηματισμούς τριγώνου σε άστέρα. Παρόλα αυτά στην πράξη οι αντιστάσεις R_J , R_S , R_X και η έσωτερική αντίσταση του στοιχείου R_C έχουν αμελητέα τιμή σε σχέση με τις αντιστάσεις R_1 , R_2 , R_3 και R_4 . Στην προσέγγιση αυτή το κύκλωμα είναι ισοδύναμο με το κύκλωμα του σχήματος 4-10(γ), ήτοι δύο ζεύγη παράλληλων αντιστάσεων σε σειρά. Ο υπολογισμός της ισοδύναμης ΗΕΔ που αναπτύσσεται μεταξύ των σημείων A και B μπορεί να προσδιοριστεί στις ίδιες γενικές γραμμές που οδήγησαν στις εξ. (6.21) και (6.22) (βλ. Άσκηση 6-10).

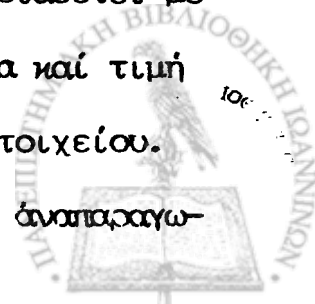


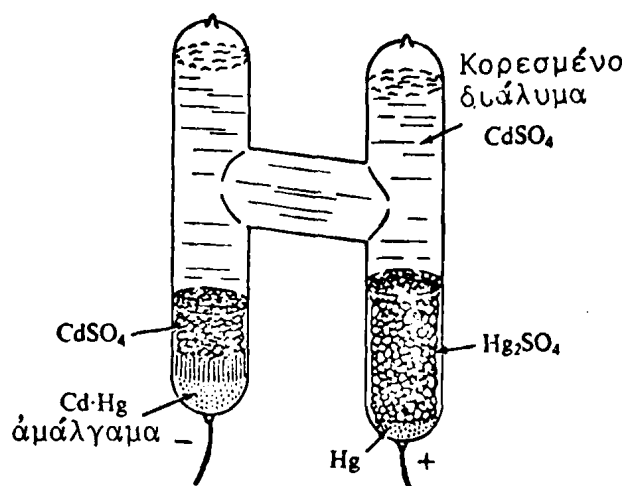
6-4 Πρότυπα Στοιχεία

Στό Πείραμα 3-6 χρησιμοποιήσαμε μιά μέθοδο μηδενισμού για τόν προσδιορισμό τής ΗΕΔ ενός ηλεκτρικού στοιχείου. Ή μέτρηση όμως στηρίχτηκε κατά κύριο λόγο στην ένδειξη ενός βολτομέτρου και έπομένως στή βαθμονόμηση του όργάνου που αναγκαστικά είχε προηγηθεί. Όπως θά δοῦμε στήν επόμενη παράγραφο, μιά άγνωστη ΗΕΔ μπορεί νά προσδιοριστεί μέ μεγάλη ακρίβεια χρησιμοποιώντας μεθόδους μηδενισμού που είναι άπαλλαγμένες από τά συνήθη σφάλματα τών όργάνων άποκλίσεως. Κατά τίς μεθόδους αυτές ή άγνωστη ΗΕΔ συγκρίνεται άπευθείας μέ μιά πρότυπη διάταξη, τής οποίας ή ΗΕΔ είναι γνωστή μέ μεγάλη ακρίβεια. Προτού έπομένως μελετήσουμε τίς μεθόδους αυτές είναι χρήσιμο νά έξετάσουμε τίς πρότυπες ΗΕΔ που διαθέτουμε σήμερα στό έργαστήριο.

Ή ανάγκη για ένα ακριβές πρότυπο ΗΕΔ αναγνωρίστηκε αρκετά νωρίς στήν ιστορία του ηλεκτρομαγνητισμού. Όπως είδαμε στήν Παράγραφο 3-5, ή ΗΕΔ ενός στοιχείου έξαρτάται από τή σύσταση τῶν ηλεκτροδίων και του ηλεκτρολύτη. Αναμένεται έπομένως ότι ένας συγκεκριμένος συνδιασμός συστατικῶν θά αποδώσει μιά όρισμένη ΗΕΔ που μπορεί νά θεωρηθεί ως πρότυπη μονάδα. Στα πρώτα χρόνια τής τεχνολογίας του ηλεκτρισμού τό στοιχείο Daniel, μέ ηλεκτρόδια από χαλκό και ψευδάργυρο και αντίστοιχα διαλύματα CuSO_4 και ZnSO_4 , χρησιμοποιήθηκε ως πρότυπη ΗΕΔ αλλά λόγω τών σημαντικῶν του μειωνεκτημάτων (μικρός χρόνος ζωής και αστάθεια ΗΕΔ) γρήγορα έγκαταλείφθηκε.

Γιά νά αποτελέσει πρότυπο αναφοράς ΗΕΔ ένα στοιχείο πρέπει νά έμπληρώνει όρισμένες άπαιτήσεις. Μεταξύ άλλων πρέπει νά διαθέτει μεγάλο χρόνο ζωής, μικρή μεταβολή τής ΗΕΔ μέ τή θερμοκρασία και τιμή τής ΗΕΔ όσο τό δυνατόν ανεξάρτητη από τή γεωμετρία του στοιχείου. Ή τελευταία ιδιότητα είναι άπαραίτητη για τή δυνατότητα άναπαραγω-





ΣΧΗΜΑ 6-7. Τό πρότυπο στοιχείο Weston.

γής του στοιχείου (καί επομένως της πρότυπης ΗΕΔ) από ανεξάρτητους έρευνητές. Η διάταξη που ικανοποιεί όλες τις προηγούμενες απαιτήσεις καί που τελικά υιοθετήθηκε τό 1908 από τό Διεθνές Ήλεκτρικό Συνέδριο του Λονδίνου ως τό πρότυπο αναφοράς ΗΕΔ είναι τό στοιχείο καδμίου καί κατασκεύασε ο Edward Weston τό 1892. Η ΗΕΔ που αναπτύσσεται μέ αξιοσημείωτη επαναληπτικότητα μεταξύ των ήλεκτροδίων της διατάξεως σε θερμοκρασία δωματίου είναι 1,0183 V. Από τό 1910, τό διεθνές volt ορίζεται ως τό 1/1.0183 της ΗΕΔ του λεγόμενου κανονικού (κορεσμένου) στοιχείου Weston σε 20 °C.

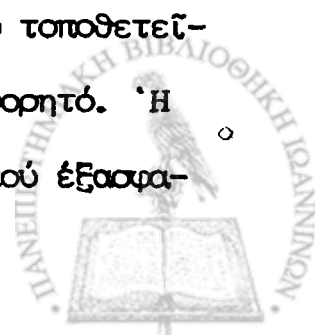
Τό στοιχείο Weston κατασκευάζεται συνήθως σε γυάλινο δοχείο σχήματος Η, όπως περιγράφεται διαγραμματικά στό σχήμα 6-7. Τό θετικό ήλεκτρόδιο αποτελείται από υδράργυρο μέ επικάλυψη Hg_2SO_4 , τό οποίο δρα ως αντιπολωτικό. Τό άρνητικό ήλεκτρόδιο είναι άμάλγαμα καδμίου ένω ως ήλεκτρολύτης χρησιμοποιείται θειϊκό κάδμιο. Στο κανονικό ή κορεσμένο στοιχείο Weston τό διάλυμα περιέχει ένα πλεόνασμα κρυστάλλων $CdSO_4$ ώστε νά είναι κορεσμένο σε θερμοκρασία δωματίου. Τό στοιχείο αυτό αποτελεί τό βασικό πρότυπο ΗΕΔ καί χρησιμοποιείται από τά διάφορα Έθνικά Ίνστιτούτα Προτυποποίησης για τόν καθορισμό της μονά-

δαις μετρήσεως δυναμικοῦ. Ἐμφανίζει σχετικά μεγάλη μεταβολή τῆς ΗΕΔ μέ ἀντίστοιχη μεταβολή τῆς θερμοκρασίας καί γιά τό λόγο αὐτό διατηρεῖται σέ ἐλεγχόμενο περιβάλλον (συνήθως σέ λουτρό λαδιοῦ) μέ καθορισμό τῆς θερμοκρασίας στά ὅρια τοῦ ± 0.01 °C. Στήν πραγματικότητα ἡ μεταβολή τῆς θερμοκρασίας ἐπηρεάζει διαφορετικά τά δύο ἠλεκτρόδια μέ ἀντίστοιχους συντελεστές $0.31 \text{ mV}/^\circ\text{C}$ στό θετικό ἠλεκτρόδιο καί $-0.35 \text{ mV}/^\circ\text{C}$ στό ἀρνητικό. Ἡ ἐμπειρική συνάρτηση πού ἔχει υἱοθετηθεῖ ἀπό τό 1911 γιά τήν ἀπόδοση τῆς ΗΕΔ τοῦ στοιχείου Weston σέ θερμοκρασία t σέ σχέση μέ τήν ΗΕΔ σέ θερμοκρασία 20 °C εἶναι

$$U_t = U_{20} - 10^{-6} [40.6(t-20) + 0.95(t-20)^2 - 0.01(t-20)^3]. \quad (6.28\alpha)$$

$$\text{ὅπου } U_{20} = 1.01830 \text{ V}. \quad (6.28\beta)$$

Λόγω τῆς μεγάλης εὐαισθησίας πού ἐμφανίζει τό κορεσμένο στοιχεῖο Weston ὡς πρός τή θερμοκρασία, σπάνια χρησιμοποιεῖται ὡς πρότυπο ἀναφορᾶς σέ μετρήσεις στό ἐργαστήριον. Τό σύνηθες ἐργαστηριακό πρότυπο ΗΕΔ δημιουργεῖται μέ μικρές τροποποιήσεις τοῦ κανονικοῦ στοιχείου Weston πού ὀδηγοῦν σέ μικρή μείωση τῆς ἀκρίβειας στήν ΗΕΔ ἀλλά σημαντική βελτίωση στήν εὐελξησία τοῦ στοιχείου. Ἡ σημαντικότερη τροποποίηση στό ἀκόρεστο στοιχεῖο Weston ἀφορᾶ στήν περιεκτικότητα τοῦ ἠλεκτρολύτη σέ CdSO_4 , ἡ ὁποία ρυθμίζεται ἔτσι ὥστε τό διάλυμα νά εἶναι κορεσμένο στους 4 °C καί ἐπομένως ἀκόρεστο στή συνήθη θερμοκρασία ἐσωματίου. Ἐπιπλέον στά δύο ἄνω μέρη τοῦ γυάλινου δοχείου τοποθετεῖται ἀπό τόν κατασκευαστή πῶμα ὥστε τό στοιχεῖο νά εἶναι φορητό. Ἡ ὅλη διάταξη τοποθετεῖται συνήθως σέ περίβλημα ἀπό χαλκό πού ἐξασφαλίζει ὁμοιόμορφη θερμοκρασία.



Ἀκόρεστα στοιχεῖα Weston ἐμφανίζουσιν ὑψηλότερη ΗΕΔ ἀπὸ τὴν τιμὴ τῆς ἔξ. (6.28) ἐνῶ ἡ σταθερότητά της ὡς πρὸς τὸ χρόνο εἶναι συγκριτικὰ μειωμένη. Οἱ κατασκευαστές στοιχείων Weston συνήθως βαθμονομοῦν ἀκόρεστα στοιχεῖα ὡς πρὸς κανονικὰ πρότυπα καὶ ἀναγράφουν στὸ περίβλημα τὴν ΗΕΔ γιὰ μιὰ ὀρισμένη θερμοκρασία περιβάλλοντος. Νέα ἀκόρεστα στοιχεῖα κειμένονται μεταξύ 1.0190 καὶ 1.0194 V μέ μείωση τῆς ΗΕΔ κατὰ περίπου 0.004 % ἀνά ἔτος. Ἀντίθετα, ὁ θερμικός συντελεστὴς τοῦ ἀκόρεστου στοιχείου εἶναι ἀρκετὰ μικρὸς (περίπου 10 $\mu\text{V}/^\circ\text{C}$) γεγονός πού ἐπιτρέπει τὴν χρησιμοποίησή του χωρὶς αὐστηρὸ ἔλεγχο τῆς θερμοκρασίας περιβάλλοντος. Ὁ μέσος χρόνος ζωῆς ἐνός ἀκόρεστου στοιχείου Weston, πού, μεταξύ ἄλλων, ἐξαρτᾶται καὶ ἀπὸ τὴ μεταχείριση τοῦ στοιχείου, κειμένεται μεταξύ 10 καὶ 20 ἐτῶν.

Ὁ κυριώτερος περιορισμὸς στὴν χρησιμοποίησιν ἐνός πρότυπου στοιχείου ἀφορᾷ στὸ ρεῦμα. Ρεύματα μεγαλύτερα ἀπὸ 0.1 mA δέν πρέπει ποτέ νὰ ἀντλοῦνται ἀπὸ τὸ πρότυπο στοιχεῖο. Τὸ συνηθισμένον ρεῦμα λειτουργίας τοῦ στοιχείου Weston εἶναι τῆς τάξεως τῶν 10 μA καὶ τοῦτο γιὰ μικρὰ χρονικὰ διαστήματα. Ὑψηλότερο ρεῦμα μπορεῖ νὰ μεταβάλλει μόνιμα ἢ γιὰ ἀρκετὸ χρονικὸ διάστημα τὴν ΗΕΔ τοῦ στοιχείου κατὰ μιὰ ἀπροσδιόριστη ποσότητα. Στοιχεῖα στὰ ὁποῖα οἱ ἀεροδέκτες ἔχουν βραχυκυκλωθεῖ κατὰ λάθος, ἔστω καὶ γιὰ μικρὸ χρονικὸ διάστημα, πρέπει νὰ θεωροῦνται ἀχρηστα ὡς πρότυπα ΗΕΔ.

Ἡ ΗΕΔ ἐνός πρότυπου στοιχείου πρέπει νὰ ἐλέγχεται περιοδικὰ σὲ σύγκριση μέ μιὰ ἄλλη γνωστὴ πρότυπη ΗΕΔ χρησιμοποιώντας μεθόδους μηδενισμοῦ πού περιγράφονται στὴν συνέχεια. Οὐδέποτε πρέπει νὰ ἐλέγχεται μέ ἀπλὴ σύνδεση ἐνός βολταμέτρου. Τὸ ρεῦμα πού ἀπαιτεῖται γιὰ ἐνδειξη τοῦ ὄργανου εἶναι συνήθως μεγάλο καὶ μπορεῖ νὰ καταστρέψει τὸ στοιχεῖο. Ἐξάλλου ἡ μέτρηση τῆς ΗΕΔ μέ βολτάμετρο δέν ἔχει νόη-

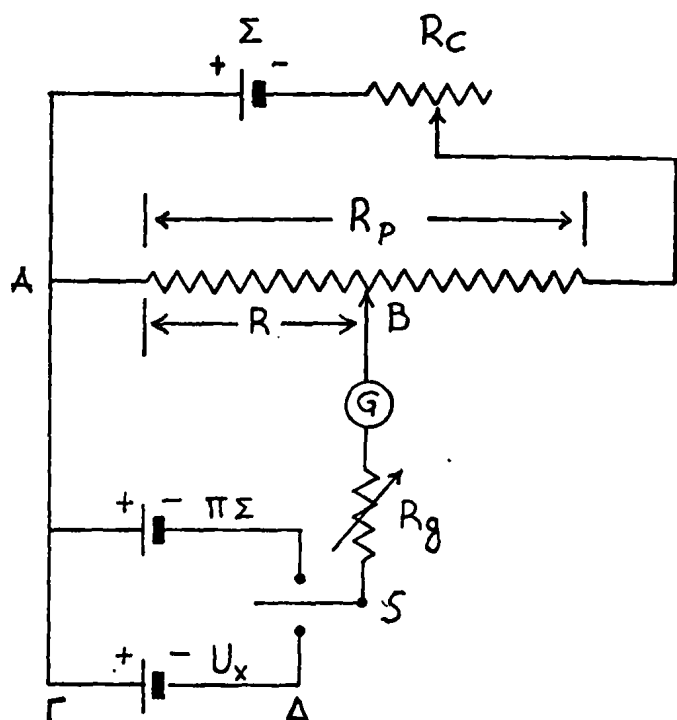
μα λόγω τής μεγάλης έσωτερικής αντίστασως του στοιχείου (μεταξύ 100 και 500 Ω , ανάλογα με τίσ διαστάσεις και τήν ηλικία).

Τό ακόρεστο στοιχείο Weston είναι ένα έξαιρετικά λεπτό και χρήσιμο έξάρτημα σέ κάθε έργαστήριο ήλεκτρικων μετρήσεων. Όπως κάθε όργανο ακριβείας απαιτεϊ προσεκτική μεταχείρηση. Τά μέτρα προφυλάξεως πού συνιστοϋν οι περισσότεροι κατασκευαστές μποροϋν νά συναψιστοϋν σέ μερικές απλές οδηγίες.

1. Τό στοιχείο δέν πρέπει νά εκτίθεται σέ θερμοκρασίες χαμηλότερες από 4 $^{\circ}\text{C}$ και υψηλότερες από 40 $^{\circ}\text{C}$. Πρέπει ακόμη νά αποφεύγονται απότομες μεταβολές στή θερμοκρασία περιβάλλοντος.
2. Όλα τά μέρη του στοιχείου πρέπει νά διατηροϋνται στήν ίδια θερμοκρασία.
3. Ουδέποτε πρέπει νά άντλεϊται ρεύμα μεγαλύτερο από 100 μA .
4. Ή ΗΕΔ του στοιχείου πρέπει νά ελέγχεται κάθε ένα ή δύο έτη.

6-5 Ποτενσιόμετρα

Τό ποτενσιόμετρο είναι μιá άλλη διάταξη μηδενισμού πού χρησιμοποιεϊται συχνά στό έργαστήριο για τήν ακριβή μέτρηση διαφορής δυναμικού. Τό βασικό κύκλωμα του ποτενσιόμετρου δίνεται διαγραμματικά στό σχήμα 6-8. Ή λειτουργία του γίνεται εύκολα κατανοητή άν θεωρήσουμε ότι τό κύκλωμα αποτελείται από δύο βρόχους με κοινό κλάδο τήν αντίσταση R μεταξύ του σημείου Α και τής κινητής έπαφής Β. Ο βρόχος τροφοδοσίας του ποτενσιόμετρου περιλαμβάνει τό στοιχείο Σ , τό ροοστάτη R_c και τήν αντίσταση ακριβείας R_p . Ο βρόχος του γαλβανόμετρου περιλαμβάνει τό ποσοστό R τής αντίστασως R_p , τό γαλβανάμετρο G , τή ρυθμιζόμενη αντίσταση προστάσις R_q και διαμέσου του διακόπτη S ,



ΣΧΗΜΑ 6-8. Βασικό κύκλωμα ποτενσιομέτρου.

μπορεί να κλείσει με το πρότυπο στοιχείο $\Pi\Sigma$ ή το στοιχείο με άγνωστη ΗΕΔ U_x .

Η τιμή του ρεύματος I που διατρέχει τον βρόχο τροφοδοσίας μπορεί να προσδιοριστεί με κατάλληλη ρύθμιση του ροοστάτη R_C και είναι ανεξάρτητη από τη θέση του διακόπτη S ή της κινητής έπαρής B . Με τον τρόπο αυτό η κινητή έπαρής καθορίζει μια συγκεκριμένη πώση δυναμικού IR μεταξύ των σημείων A και B . Αν τώρα ο διακόπτης S κλείσει προς το πρότυπο στοιχείο με ΗΕΔ U_π , το ρεύμα που θα διατρέξει τον κλάδο του γαλβανομέτρου θα έχει φορά που εξαρτάται από το σχετικό μέγεθος της ΗΕΔ U_π και της πώσης δυναμικού IR . Το ρεύμα του γαλβανομέτρου μπορεί να μηδενιστεί αν, με μετακίνηση της έπαρής B , επιλεγεί η αντίσταση R_π έτσι ώστε

$$IR_\pi = U_\pi.$$

Αν στή συνέχεια ὁ διακόπτης S μετακινήθῃ στή θέση συνδέσεως τοῦ ἡλεκτρικοῦ στοιχείου μέ ἀγνωστὴ ΗΕΔ U_x , τὸ γαλβανόμετρο μπορεῖ νά ἰσορροπήσῃ μέ μετακίνηση τῆς ἐπικραῆς B ἔτσι ὥστε ἡ ἀντίσταση R_x πού ἐπιλέγεται νά ικανοποιεῖ τή σχέση

$$IR_x = U_x \quad (6.30)$$

Καθόσον κατὰ τήν κατάσταση ἰσορροπίας δέν κυκλοφορεῖ ρεῦμα στό βρόχο τοῦ γαλβανομέτρου, τὸ ρεῦμα I τοῦ βρόχου τροφοδοσίας πού ὑπεισέρχεται στίς ἐξ. (6.29) καί (6.30) παραμένει τὸ ἴδιο. Ἀπό τίς δύο τελευταῖες ἐξισώσεις μποροῦμε ἐπομένως νά γράψουμε

$$\frac{U_x}{U_\pi} = \frac{R_x}{R_\pi} \quad (6.31)$$

Μέ ἄλλα λόγια, μποροῦμε μέ τὸ κύκλωμα τοῦ ποτενσιόμετρου νά ἀνάγουμε τή σύγκριση δύο δυναμικῶν στή σύγκριση δύο ἀντιστάσεων – μιά σύγκριση πού μπορεῖ νά πραγματοποιηθῇ μέ μεγάλη ἀκρίβεια.

Ἐργαστηριακά ποτενσιόμετρα, ἂν καί οὐσιαστικά ἀποτελοῦν παραλλαγὴ τοῦ βασικοῦ κυκλώματος στό σχῆμα 6-8, μπορεῖ νά πάρουν ἀριετὰ πολύπλοκη μορφή ὡς πρὸς τή διάταξη τῶν ἀντιστάσεων ὥστε νά παρέχεται εὐελιξία στή μέτρηση ἑνὸς μεγάλου φάσματος διαφορᾶς δυναμικοῦ. Ὅρισμένες ἀπαιτήσεις πού πρέπει νά ικανοποιεῖ τὸ κύκλωμα τοῦ ποτενσιόμετρου εἶναι προφανεῖς. Κατ'ἀρχάς τὸ ρεῦμα I πρέπει νά παραμένει σταθερὸ καθόλη τή διάρκεια τῆς μετρήσεως ὥστε νά εἶναι δυνατὴ ἡ ἐξαγωγή τῆς ἀναλογίας (6.31) ἀπὸ τίς ἐξ. (6.29) καί (6.30). Ἡ ἀπαιτήσιον αὐτὴ συνήθως ικανοποιεῖται ἀπὸ ἕνα συσσωρευτὴ μολύβδου ἢ ἕνα σύγχρονο τροφοδοτικὸ ΣΡ. Ἐξόλλου ἡ ἀντίσταση R_p , στήν ὁποία βασίζεται

ή άναγωγή του δυναμικού, πρέπει νά διαθέτει άρκετές διαβαθμίσεις για τήν άκριβή άνάγνωση τής άντιστάσεως R μεταξύ των σημείων A και B .

Ώς άντίσταση R_p μπορεί νά χρησιμοποιηθεῖ είτε γραμμικός άγωγός με διαβαθμίσεις μήκους, είτε συνδιασμός δύο δεκαδικών κιβωτίων άντιστάσεως. Στην πρώτη περίπτωση, όπως και στή γέφυρα Wheatstone, ο λόγος των άντιστάσεων R_x/R_π μπορεί νά άναχθεῖ σε λόγο άποστάσεων κατά μήκος του γραμμικού άγωγού.

Σύμφωνα με τήν έξ. (6.31), μιά άγνωστη διαφορά δυναμικού V μπορεί νά ύπολογιστεῖ από τή σχέση

$$V = \frac{U_\pi}{R_\pi} R \quad (6.32)$$

όπου R είναι ή άντίσταση πού έπιλέγει ή κινητή έπαφή του ποτενσιόμετρου για ίσορρόπιση τής διατάξεως, ενώ ο λόγος U_π/R_π είναι ίσος με τό ρεύμα πού κυκλοφορεῖ στό βρόχο τροφοδοσίας. Η άναγωγή έπομένως τής άντιστάσεως R σε ένδειξη δυναμικού μπορεί νά άπλοποιηθεῖ σημαντικά άν ρυθμίσουμε τό ρεύμα του βρόχου τροφοδοσίας ώστε ο παράγοντας U_π/R_π νά πάρει άπλή τιμή (π.χ. ίση με τή μονάδα). Τοῦτο μπορεί νά γίνει εύκολα με κατάλληλη ρύθμιση του ροοστάτη R_c . Τή διαδικασία αὐτή θά ακολουθήσουμε στό έπόμενο Πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 6-5. Συνδέστε τό κύκλωμα του σχήματος 6-8. Στο κύκλωμα τροφοδοσίας χρησιμοποιεῖστε ένα συσσωρευτή μολύβδου Σ με δυναμικό περίπου 4.5 V ή τροφοδοτικό ΣΡ. Ώς άντίσταση R_p χρησιμοποιεῖστε ένα γραμμικό άγωγό με κλίμακα μήκους ή δύο δεκαδικά κιβώτια άντιστάσεων. Η μεταβλητή άντίσταση R_g έχει τοποθετηθεῖ με σκοπό τήν προστασία τόσο του γαλβανομέτρου όσο και του προτύπου στοιχείου. Σε κάθε άπόπειρα ίσορροπήσεως του ποτενσιόμετρου αρχίζετε πάντα με τή μέγιστη τιμή τής άντιστάσεως R_g (περίπου 20 kΩ) και

μειώνετε σταδιακά τήν τιμή της καθώς πλησιάζετε τό σημείο ἰσορροπίας.

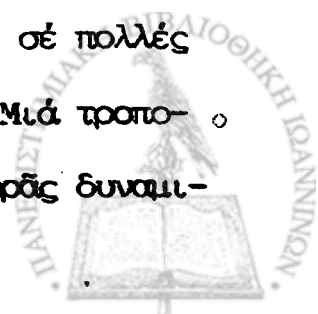
— Μέ τόν διακόπτη S ἀνοικτό, συνδέστε τήν κινητή ἐπαφή B σέ ἕνα σημείο τῆς ἀντιστάσεως R_p ὥστε ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως R νά εἶναι ἀπλό πολλαπλάσιο τῆς ΗΕΔ τοῦ πρότυπου στοιχείου. Ἐάν π.χ. χρησιμοποιεῖτε γραμμικό ἄγωγό καί πρότυπο στοιχεῖο Weston μέ ΗΕΔ = 1.0190 V, τοποθετεῖτε τήν ἐπαφή B σέ ἀπόσταση 101.9 cm ἀπό τό σημείο A . Συνδέστε μεταξύ τῶν σημείων A καί B ἕνα βολτόμετρο μέ μεγάλη ἐσωτερική ἀντίσταση καί προσδιορίστε τή διαφορά δυναμικοῦ. Ρυθμίστε τόν ροοστάτη R_c ὥστε ἡ διαφορά δυναμικοῦ νά βρίσκεται ὅσο τό δυνατόν πλησιέστερα πρὸς τήν ΗΕΔ τοῦ πρότυπου στοιχείου. Ἀποσυνδέστε τό βολτόμετρο.

— Μέ μέγιστη τιμή τῆς ἀντιστάσεως προστασίας R_g κλεῖστε τόν διακόπτη S πρὸς τό πρότυπο στοιχεῖο. Ἐλαττώνοντας σταδιακά τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_g ρυθμίστε τόν ροοστάτη R_c στό κύκλωμα τροφοδοσίας μέχρις ὅτου ἰσορροπήσει πλήρως τό γαλβανόμετρο. Ποιά εἶναι ἡ τιμή τοῦ λόγου U_π / R_π στήν ἐξ. (6.32) πού ἐπιτρέπει τή μετατροπή ἀντιστάσεως σέ διαφορά δυναμικοῦ;

— Ἐπαναφέρετε τήν ἀντίσταση προστασίας R_g στή μέγιστη τιμή καί κλεῖστε τόν διακόπτη S πρὸς τήν ἄγνωστη ΗΕΔ U_x . Μετακινεῖστε τήν ἐπαφή B καί ἰσορροπεῖστε τό γαλβανόμετρο ἐλαττώνοντας σταδιακά τήν ἀντίσταση προστασίας R_g . Ἀπό τή θέση τῆς κινητῆς ἐπαφῆς B προσδιορίστε τήν ΗΕΔ τοῦ στοιχείου U_x . Ἐκτιμεῖστε τό πειραματικό σφάλμα στήν τιμή U_x .

— Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία καί μετρεῖστε τήν ΗΕΔ ὁλων τῶν στοιχείων πού θά σᾶς δοθοῦν.

Ποτενσιόμετρα σπάνια χρησιμοποιοῦνται γιά μετρήσεις διαφορᾶς δυναμικοῦ μεγαλύτερης ἀπό μερικά Volt. Ἡ ἀκριβεία πού ἀπαιτεῖται σέ μετρήσεις ὑψηλῆς τάσης στίς περισσότερες ἐφαρμογές ἱκανοποιεῖται ἀπό βολτόμετρα μέ μεγάλη ἐσωτερική ἀντίσταση. Ἀντίθετα, σέ πολλές ἐφαρμογές ἀπαιτεῖται ἡ ἀκριβῆς μέτρηση πολύ μικρῶν ΗΕΔ. Μιά τροποποίηση τοῦ ποτενσιόμετρο πού ἐπιτρέπει τή μέτρηση διαφορᾶς δυναμι-



κοῦ τῆς τάξεως τοῦ 10^{-3} V θά μελετήσουμε σιό ἐπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 6-6. Ἐάν συγκολήσουμε τά ἄκρα δύο ἀγωγῶν ἀπό διαφορετικό μέταλλο, σιό σημεῖο ἐπαφῆς συνήθως ἀναπτύσσεται μιὰ διαφορὰ δυναμικοῦ, ἡ ὁποία, μεταξύ ἄλλων, ἐξαρτᾶται ἀπό τή θερμοκρασία περιβάλλοντος. Ἐάν οἱ δύο ἀγωγοί ἀποτελοῦν κλειστό κύκλωμα, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 6-9 καί τά δύο σημεῖα ἐπαφῆς βρίσκονται στήν ἴδια θερμοκρασία, τό ρεῦμα πού διαρρέει τό κύκλωμα μηδενίζεται, καθόσον οἱ δύο ΗΕΔ στά σημεῖα ἐπαφῆς εἶναι ἴσες καί ἀντίθετες.

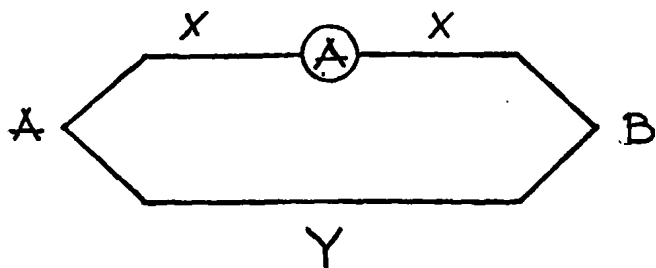
Ἐάντιθέτα, Ἐάν ἡ θερμοκρασία τῶν δύο σημείων ἐπαφῆς διαφέρει, μιὰ ἀπό τίς ΗΕΔ θά ὑπερσχύσει καί ἕνα συγκεκριμένο ρεῦμα θά διαρρεύσει σιό κύκλωμα. Ἡ διάταξη αὐτή ἀποτελεῖ τή βάση τοῦ θερμοζεύγους πού χρησιμοποιεῖται σέ πολλές ἐφαρμογές γιὰ τή μέτρηση θερμοκρασιῶν.

— Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-10. Ἡ ἀντίσταση R_p τοῦ ποτενσιομέτρου ἔχει ἐδῶ ἀντικατασταθεῖ ἀπό τό συνδιασμό τῶν ἀντιστάσεων R_1 καί R_2 ὅπου τό ἐξάρτημα R_1 εἶναι ἕνας γραμμικός ἀγωγός μέ συνολική ἀντίσταση περίπου 10Ω καί R_2 εἶναι ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων. Ἐξάλλου, σιόν κλάδο τῆς "ἄγνωστης" ΗΕΔ ἔχει τοποθετηθεῖ ἕνα θερμοζεύγος.

— Συνδέστε τό βρόχο τοῦ γαλβανομέτρου σιὰ σημεῖα A καί Γ ὅπως δείχνει ἡ διακεκομένη γραμμὴ τοῦ σχήματος 6-10. Ἐπιλέξτε σιό κιβώτιο ἀντιστάσεως τήν τιμὴ R_2 ὥστε νά ἰσχύει ἡ σχέση

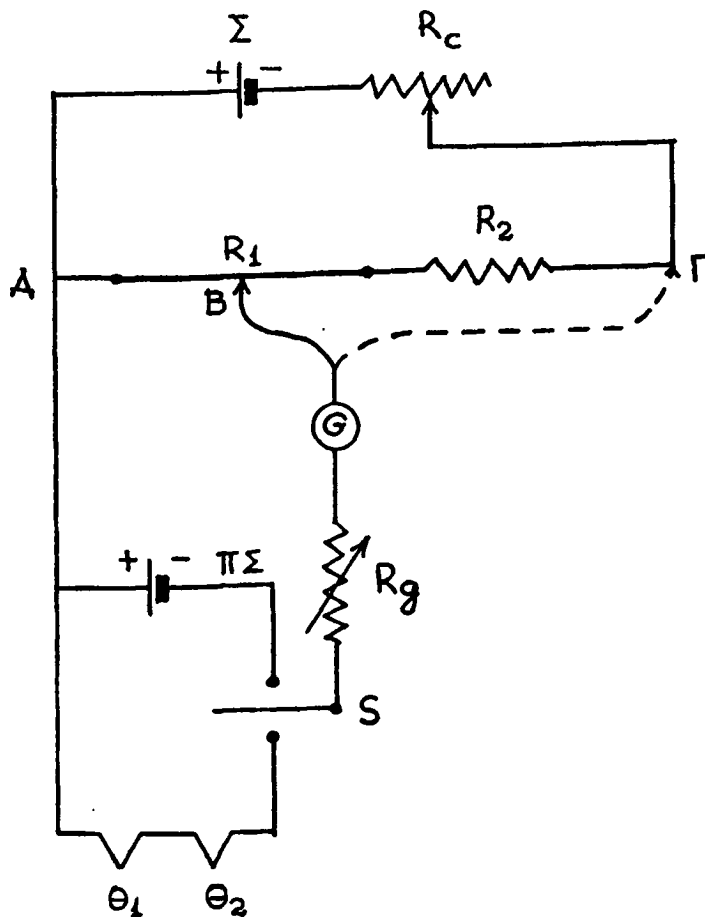
$$R_1 + R_2 = 10^3 U \quad (6.33)$$

ὅπου U εἶναι ἡ ΗΕΔ τοῦ πρότυπου στοιχείου. Μέ ἕνα βολτόμετρο ὑψη-



ΣΧΗΜΑ 6-9. θερμοτοιχεῖο.

Δύο ἀγωγοί ἀπό διαφορετικά μέταλλα X καί Y ἔχουν συγκολληθεῖ σιὰ σημεῖα A καί B.

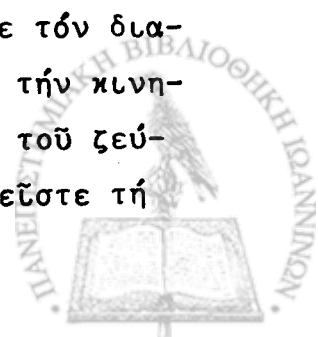


ΣΧΗΜΑ 6-10. Ποτενσιομετρική διάταξη για τόν προσδιορισμό θερμοηλεκτρικής ΗΕΔ.

λῆς ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως μετρεῖστε τή διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων Α καί Γ καί ρυθμίστε τό ροοστάτη R_c ὥστε, μέσα στά ὅρια ἀκριβείας τοῦ βολτομέτρου, ἡ διαφορά αὐτή δυναμικοῦ νά εἶναι ἴση πρός τήν ΗΕΔ τοῦ πρότυπου στοιχείου.

— Κλεῖστε τόν διακόπτη S πρός τόν κλάδο τοῦ πρότυπου στοιχείου. Ἐλαττώνοντας σταδιακά τήν τιμή τῆς προστατευτικῆς ἀντιστάσεως R_g ρυθμίστε τόν ροοστάτη R_c ὥστε νά ἰσορροπήσει πλήρως τό γαλβανόμετρο. Ἀπό τήν ἐξ. (6.33) καί τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_1 ὑπολογίστε τή διαφορά δυναμικοῦ ἀνά μονάδα μήκους τῆς κλίμακας τοῦ γραμμικοῦ ἀγωγοῦ.

— Συνδέστε τό βρόχο τοῦ γαλβανομέτρου μεταξύ τοῦ ἑνός ἄκρου Α καί τῆς κινητῆς ἐπαφῆς Β τοῦ γραμμικοῦ ἀγωγοῦ R_1 . Κλεῖστε τόν διακόπτη S πρός τόν κλάδο τοῦ θερμοζεύγους καί μετακινώντας τήν κινητή ἐπαφή Β ἰσορροπεῖστε τό γαλβανόμετρο ὅταν τό ἕνα ἄκρο τοῦ ζεύγους εἶναι βυθισμένο σέ νερό θερμοκρασίας δωματίου (μετρεῖστε τή



θερμοκρασία του νερού με ένα θερμόμετρο) και τό άλλο άκρο σέ:

- α. Μίγμα νερού και πάγου
- β. Μίγμα άλκοόλης και ξηροϋ πάγου
- γ. ΄Υγρό άζωτο.

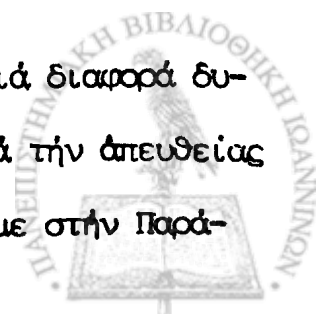
Προσδιορίστε τήν ΗΕΔ πού άναπτύσσεται στό θερμοζεϋγος στίς τρεις προηγούμενες διαφορές θερμοκρασιών.

— Έκτιμεΐστε τήν ύπαρξη τυχαίων ΗΕΔ έπαναλαμβάνοντας τήν προηγούμενη έργασία με τά δύο άκρα του θερμοζεϋγους βυθισμένα σέ νερό θερμοκρασίας δωματίου. Μετρεΐστε τήν ΗΕΔ του θερμοζεϋγους για όλους τους άλλους συνδιασμούς θερμοκρασιών. Συγκρίνετε τά άποτελέσματα σας με τιμές πού δίνονται στή βιβλιογραφία.

Τό βασικό κύκλωμα μηδενισμού του σχήματος 6-8 αποτέλεσε για πολλά χρόνια τή μόνη μέθοδο για τή άκριβή μέτρηση διαφοράς δυναμικού. Πολλές παραλλαγές του βασικού κυκλώματος έχουν κατασκευαστεί στό παρελθόν από τή βιομηχανία ως αυτόνομες συσκευές μετρήσεως με στόχο τήν εύληξία και τήν πρακτικότητα {βλέπε π.χ. Άσκήσεις 6-18 και 6-23}. Διάφορες παραλλαγές βιομηχανικών ποτενσιομέτρων περιγράφονται σέ παλαιότερα συγγράμματα. Μιά σημαντική βελτίωση των ποτενσιομέτρων κατά τά τελευταία χρόνια είναι ή είσαγωγή ήλεκτρονικών κυκλωμάτων με τά όποια έπιτυγχάνεται ή αυτόματη ίσορρόπηση τής διατάξεως. Παρόμοιες συσκευές επέκτεινουν τή χρησιμότητα των κυκλωμάτων μηδενισμού με τήν έξάλειψη τής άχαρης και χρονοβόρας διαδικασίας ίσορροπήσεως του κυκλώματος. ΄Η περιγραφή όμως των αυτόματων ποτενσιομέτρων ξεφεύγει από τά όρια του παρόντος βιβλίου.

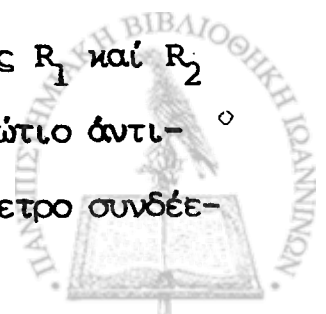
6-6 Βαθμονόμηση ΄Οργάνων ΄Αποκλίσεως

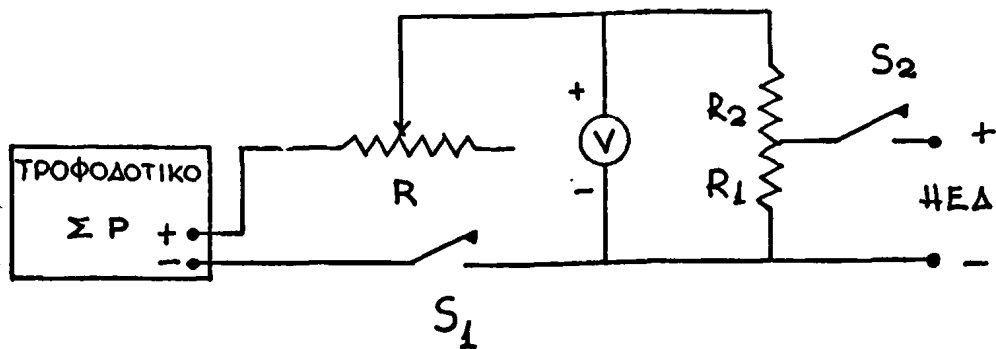
΄Ως διάταξη πού προσδιορίζει με μεγάλη άκρίβεια μία διαφορά δυναμικού, τό ποτενσιομετρο μπορεί νά χρησιμοποιηθεΐ για τήν άπευθείας βαθμονόμηση του έργαστηριακού βολτομέτρου. *Όπως είδαμε στήν Παρά-



γραφο 3-2 (βλ. σχήμα 3-10), τό εργαστηριακό βολτόμετρο αποτελείται από ένα όργανο κινητού πλαισίου καί μία μεγάλη αντίσταση σέ σειρά, ενώ ο δείκτης του όργάνου κινεΐται σέ κλίμακα μέ διαβαθμήσεις δυναμικού. Η βαθμονόμηση του όργάνου πραγματοποιεΐται άρχικά από τόν κατασκευαστή μέ σύγκριση τής ένδείξεως πρός τήν ένδειξη προτύπων όργάνων ή μέ τήν ποτενσιομετρική μέθοδο πού θά μελετήσουμε στή συνέχεια. Κατασκευαστές αναφέρουν άκόμη στό περίβλημα του όργάνου ή στό φυλλάδιο πού τό συνοδεΐει τό όλικό σφάλμα στήν ένδειξη, συνήθως υπό μορφή ποσοστιαίου σφάλματος τής μέγιστης ένδείξεως. Μέ τήν πάροδο του χρόνου καί τή συνεχή χρήση του βολτομέτρου, τόσο ή πιστότητα όσο καί ή άκρίβεια τής ένδείξεως εΐναι δυνατόν νά έλαττωθούν λόγω φθοράς του μηχανισμού άναρτήσεως του πηνίου, μειώσεως του συντελεστή στρέψεως του έλατηρίου, ή μεταβολής του μαγνητικού πεδίου. Για τό λόγο αυτό ή βαθμονόμηση του εργαστηριακού βολτομέτρου πρέπει περιοδικά νά έλέγχεται. Συνήθη εργαστηριακά βολτόμετρα μέ άκρίβεια 0.5 % έως 1 % μπορούν νά έλεγχθούν μέ άπευθείας σύγκριση πρός πρότυπα βολτόμετρα πού διαθέτουν άκρίβεια 0.1 % έως 0.2 %. Τά τελευταΐα μπορούν νά βαθμοναμηθούν μέ τή βοήθεια ενός ποτενσιομέτρου.

Βολτόμετρα μέ μέγιστη ένδειξη κλίμακας μέχρι 1.5 V μπορούν νά βαθμονομηθούν μέ άπευθείας σύγκριση πρός τή διαφορά δυναμικού πού μετρά τό ποτενσιόμετρο. Για βολτόμετρα μέ μεγαλύτερη κλίμακα ή σύγκριση μπορεί νά γίνει διαμέσου ενός κιβωτίου αντίστράσεως μέ ένδιάμεση έπαφή, όπως δίνεται διαγραμματικά στό σχήμα 6-11. Καθόσον τό ρεύμα πού διοχετεύεται στό ποτενσιόμετρο κατά τήν κατάσταση ίσοροπίας μηδενίζεται, τό ίδιο ρεύμα διαρρέει τΐς αντίστάσεις R_1 καί R_2 στίς όποΐες διαχωρίζεται από τήν ένδιάμεση έπαφή τό κιβώτιο αντίστράσεως. Η διαφορά δυναμικού V_{π} πού μετρά τό ποτενσιόμετρο συνδέε-





ΣΧΗΜΑ 6-11. Διάταξη για τή βαθμονόμηση βολτομέτρου.

ται έπομένως προς τή διαφορά δυναμικού V στά άκρα του βολτομέτρου μέ τήν άπλή σχέση

$$V = \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_{\pi} \quad (6.34)$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 6-7. Συνδέστε τό κύκλωμα του σχήματος 6-11. Οί άκροδέκτες μέ τήν ένδειξη ΗΕΔ μπορούν νά συνδεθοϋν εϋτε στους άντίστοιχους άκροδέκτες έργαστηριακού ποτενσιομέτρου εϋτε στους άκροδέκτες Γ καϋ Δ του κυκλώματος ποτενσιομέτρου στο σχήμα 6-8. Μέ τόν διακόπτη S_1 άνοικτό έλέγξτε τή μηδενική ένδειξη του βολτομέτρου καϋ διορθώστε τή θέση του δείκτη. Χρησιμοποιώντας τήν έξ. (6.34) έπιλέξτε τύς άντιστάσεις R_1 καϋ R_2 για $V_{\pi} = 1.5 \text{ volt}$ καϋ V ἴσο μέ τήν μέγιστη ένδειξη τής κλίμακας του βολτομέτρου.

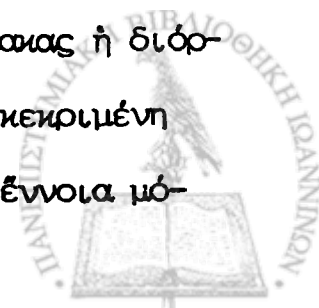
— Έπιλέξτε μιá χαρακτηριστική ένδειξη στην κλίμακα του βολτομέτρου στο $1/5$ περίπου τής μέγιστης ένδείξεως. Ρυθμίστε τήν τάση του τροφοδοτικού ΣΡ καϋ τόν ροοστάτη R ὥστε ὁ δείκτης του βολτομέτρου νά ανέλθει στην ένδειξη αϋτή. Κλειστε τόν διακόπτη S_2 καϋ μέ τό

ποτενσιόμετρο προσδιορίστε τή διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς ἀντι-στάσεως R_1 . Μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (6.34) ὑπολογίστε τήν πραγματική διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ βολτομέτρου.

— Ἡ πιστότητα τοῦ βολτομέτρου μπορεῖ νά ἐξαρτᾶται ἀπό τόν τρόπο διεξαγωγῆς τῆς μετρήσεως. Ἰδιαίτερα, εἶναι δυνατόν, γιά μιᾶ συγκεκριμένη διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ βολτομέτρου, ἡ ἔνδειξη στήν ὁποία θά καταλήξει τό ὄργανο μέ σταδιακή αὔξηση τοῦ δυναμικοῦ ἀπό μικρότερες τιμές νά διαφέρει ἀπό τήν ἔνδειξη στήν ὁποία θά καταλήξει μέ σταδιακή μείωση τοῦ δυναμικοῦ ἀπό μεγαλύτερες τιμές. Πραγματοποιεῖστε τήν προηγούμενη ἐργασία μέ δύο διαφορετικούς τρόπους προσεγγίζοντας τή χαρακτηριστική ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου πού ἐπιλέξατε ἀπό μικρότερες καί ἀπό μεγαλύτερες τιμές τοῦ δυναμικοῦ. Σέ κατάλληλο πῖνακα καταγράψτε τήν ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου καί τήν πραγματική τιμή τοῦ δυναμικοῦ στά ἄκρα του σέ καθεμιᾶ ἀπό τίς δύο περιπτώσεις, ἥτοι ὅταν ἡ τιμή αὐτή προσεγγίζεται ἀπό μικρότερες ἢ ἀπό μεγαλύτερες τιμές δυναμικοῦ.

— Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά 5 ἢ 6 χαρακτηριστικές ἐνδείξεις σέ ὅλο τό εὖρος τῆς κλίμακας τοῦ βολτομέτρου. Γιά κάθε χαρακτηριστική ἔνδειξη ὑπολογίστε τή διόρθωση τῆς ἐνδείξεως, ἥτοι τή διαφορά μεταξύ τῆς ἐνδείξεως τοῦ ὀργάνου καί τῆς πραγματικῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ στά ἄκρα του. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἡ διόρθωση ἀποτελεῖ τήν ποσότητα πού πρέπει νά προστεθεῖ στήν ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου ὥστε νά δώσει τήν πραγματική διαφορά δυναμικοῦ πού μετρεῖ τό βολτόμετρο. Ἀποδώστε σέ γραφική παράσταση τή διόρθωση ὡς πρός τήν ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου γιά τά χαρακτηριστικά σημεῖα πού μετρήσατε. Ἄν ἡ διόρθωση διαφέρει γιά προσέγγιση τῆς ἐνδείξεως ἀπό μεγαλύτερες ἢ μικρότερες τιμές, ἀποδώστε τά πραγματικά σημεῖα μέ διαφορετικό σύμβολο γιά κάθε περίπτωση.

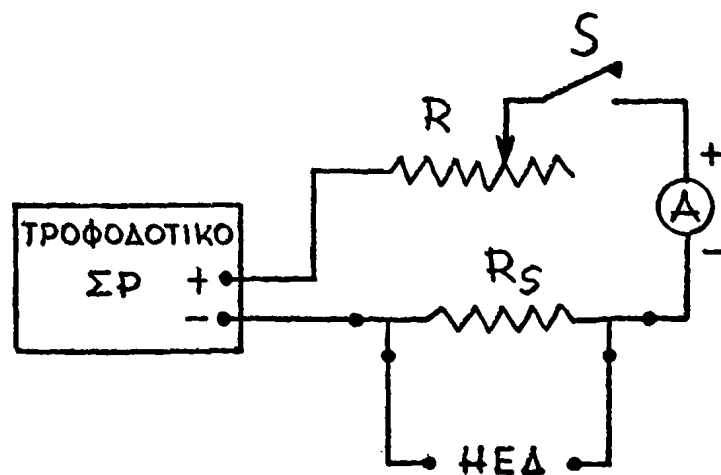
Ἄν καί συμβατικά ἡ γραφική παράσταση πού κατασκευάστηκε στό προηγούμενο Πείραμα ἀναφέρεται ὡς καμπύλη διορθώσεως, δέν ὑπάρχει κανένας λόγος νά περιμένουμε ὅτι σέ ὅλη τήν ἔκταση τῆς κλίμακας ἡ διόρθωση συνδέεται πρός τήν ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου μέ κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση. Στήν πραγματικότητα, ἡ διόρθωση ἔχει ποσοτική ἔννοια μό-



νο στά σημεία όπου προσδιορίστηκε πειραματικά. Για τó λόγο αυτό ή καμπύλη διορθώσεως ενός βολτομέτρου αποδίδεται συνήθως μέ τά πειραματικά προσδιορισμένα σημεία καί μιά τεθλασμένη γραμμή πού τά συνδέει μέ εύθύγραμια τμήματα.

Τó ποτενσιόμετρο μπορεί νά χρησιμοποιηθεῖ μέ παρόμοια διαδικασία για τόν έλεγχο τής βαθμονομήσεως του εργαστηριακού αμπερομέτρου. Τó πραγματικό ρεύμα πού διαρρέει τó αμπερόμετρο για μιά συγκεκριμένη ένδειξη μπορεί νά προσδιοριστεί από τή μέτρηση τής διαφοράς δυναμικού στά άκρα μιās αντίστασης, ή οποία βρίσκεται σέ σειρά μέ τó αμπερόμετρο. Τó κύκλωμα πού μπορεί νά χρησιμοποιηθεῖ για τή διεργασία αυτή δίνεται στό σχήμα 6-12.

ΠΕΙΡΑΜΑ 6-8. Συνδέστε τó κύκλωμα του σχήματος 6-12. Οἱ άκροδέκτες μέ τήν ένδειξη ΗΕΔ μπορούν νά συνδεθοῦν εἴτε στους αντίστοιχους άκροδέκτες εργαστηριακού ποτενσιομέτρου εἴτε στους άκροδέκτες Γ καί Δ του κυκλώματος ποτενσιομέτρου στό σχήμα 6-8. Μέ τόν διακόπτη S άνοιχτό έλέξτε τή μηδενική ένδειξη του αμπερομέτρου καί διορθώστε τή θέση του δείκτη άν χρειαστεῖ. Ἡ αντίσταση R_S εἶναι



ΣΧΗΜΑ 6-12. Διάταξη για τή βαθμονόμηση αμπερομέτρου.



μιά πρότυπη αντίσταση τεσσάρων ακροδεκτών.

— Επιλέξτε τό δυναμικό τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ καί τή θέση τῆς κινητῆς ἐπαφῆς τοῦ ροοστάτη R ὥστε ὁ δείκτης τοῦ ἀμπερομέτρου νά ἰσορροπήσει στή μέγιστη ἐνδειξη τῆς κλίμακας, ἐνῶ ταυτόχρονα νά ἱκανοποιοῦνται ὅσο τό δυνατόν καλύτερα οἱ ἐπόμενες συνθήκες:

α. Ἡ πῶση δυναμικοῦ στήν πρότυπη αντίσταση R_S νά εἶναι μεταξύ 0.5 καί 1 V.

β. Τό ρεῦμα πού διαρρέει τό κύκλωμα νά μήν ὑπερβαίνει τίς προδιαγραφές τοῦ κατασκευαστή.

— Συνδέστε τό ποτενσιόμετρο στους ἀκροδέκτες μέ τήν ἐνδειξη ΗΕΔ καί μετρεῖστε τή διαφορά δυναμικοῦ V_S στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_S . Καθόσον τό ρεῦμα πού διοχετεύεται στό ποτενσιόμετρο κατά τήν κατάσταση ἰσορροπίας μηδενίζεται, τό ἴδιο ρεῦμα διαρρέει τήν ἀντίσταση R_S καί τό ἀμπερόμετρο. Ὑπολογίστε τό πραγματικό ρεῦμα $I = V_S / R_S$ πού διαρρέει τό ἀμπερόμετρο καί τήν ἀντίστοιχη διορθωση, ἥτοι τή διαφορά μεταξύ τῆς ἐνδείξεως τοῦ ὀργάνου καί τῆς πραγματικῆς τιμῆς τοῦ ρεύματος I_S .

— Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά 5 ἕως 6 χαρακτηριστικές ἐνδείξεις σέ ὅλη τήν κλίμακα τοῦ ἀμπερομέτρου. Σέ κάθε περίπτωση ἐπαναλάβετε τήν ἐργασία γιά προσέγγιση τῆς ἐνδείξεως ἀπό μικρότερες ἢ μεγαλύτερες τιμές. Ἀποδώστε σέ γραφική παράσταση τήν ἀντίστοιχη καμπύλη διορθώσεως.

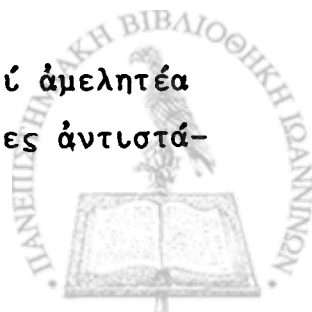
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6-1. Μιά ἀντίσταση περίπου 1000 Ω πρόκειται νά μετρηθεῖ μέ μιᾶ γέφυρα Wheatstone. Ἡ ἀντίσταση τῶν κλάδων R_3 καί R_4 (βλ. σχῆμα 6-1) εἶναι γνωστή μέ μεγάλη ἀκρίβεια ὡς 1000 Ω. Ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι 50 Ω, ἐνῶ ἀπαιτεῖται ρεῦμα 0.05 μΑ γιά ἀπόκλιση 1 mm ἀπό τή θέση ἰσορροπίας του. Τό ἠλεκτρικό στοιχεῖο τῆς γέφυρας ἔχει ΗΕΔ 4 V καί ἀμελητέα ἐσωτερική ἀντίσταση. Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ διαφορά μεταξύ τῆς ἀντιστάσεως R_2 καί ἄγνωστης ἀντιστάσεως ὥστε νά παρατηρηθεῖ ἀπόκλιση κατά 1 mm;

- 6-2. Έπαναλάβετε τήν προηγούμενη άσκηση για άγνωστη αντίσταση περίπου 100 Ω.
- 6-3. Η "άγνωστη" αντίσταση πού μετράται μέ μιá γέφυρα Wheatstone έχει πραγματική τιμή 351.6 Ω. Οί κλάδοι R_3 καί R_4 έχουν όνομαστική τιμή 1000 Ω αλλά στήν πραγματικότητα οί τιμές τους είναι $R_3 = 999.1$ Ω καί $R_4 = 1001.6$ Ω.
- α. Υπολογίστε τήν τιμή τής άγνωστης αντιστάσεως πού θά προκύψει από τή μέτρηση αν ή αντίσταση R_2 έχει δυνατότητα μεταβολής κατά βήματα 0.1 Ω.
- β. Υπολογίστε τήν τιμή πού θά προκύψει από τή μέτρηση αν έναλλαγοϋν οί αντιστάσεις R_3 καί R_4 .
- γ. Συγκρίνετε τή μέση τιμή τών δύο μετρήσεων μέ τήν πραγματική τιμή τής άγνωστης αντιστάσεως.
- 6-4. Οί κλάδοι μιáς γέφυρας Wheatstone είναι $R_x = 300$ Ω, $R_2 = 600$ Ω, $R_3 = 380$ Ω καί $R_4 = 750$ Ω. Τό ήλεκτρικό στοιχείο τής γέφυρας έχει ΗΕΔ = 2 V καί άμελητέα έσωτερική αντίσταση.
- Η έσωτερική αντίσταση καί εύαισθησία τοϋ γαλβανόμετρου είναι αντίστοιχα 60 Ω καί 0.05 $\mu\text{A}/\text{mm}$. Στόν κλάδο τοϋ γαλβανόμετρου έχει έπιπλέον προστεθεϊ μιá απλή διακλάδωση μέ αντίσταση 40 Ω. Ποιά ή απόκλιση τοϋ γαλβανόμετρου;
- 6-5. Οί κλάδοι μιáς γέφυρας Wheatstone είναι $R_3 = R_4 = 1000$ Ω. Η άγνωστη αντίσταση έχει προσδιοριστεϊ μέ ένα ώμόμετρο ως περίπου 500 Ω. Τό ήλεκτρικό στοιχείο τής γέφυρας έχει ΗΕΔ 1.5 V καί άμελητέα έσωτερική αντίσταση. Τό γαλβανόμετρο, μέ έσωτερική αντίσταση 50 Ω καί εύαισθησία 0.005 $\mu\text{A}/\text{mm}$, προστατεύεται από μιá διακλάδωση Ayrton (βλ. σχήμα 5-8) μέ ένδιάμεσα σημεία έπαφής πού έπιλέγουν σχετική εύαισθησία 0.001, 0.01, 0.1 καί 1.
- α. Μέ τή διακλάδωση Ayrton στό σημείο μέγιστης εύαισθησίας πόση πρέπει νά είναι ή ποσοστιαία διαφορά μεταξύ τής αντιστάσεως R_2 καί τής άγνωστης αντιστάσεως ώστε τό γαλβανόμετρο νά αποκλίνει κατά 1 mm;
- β. Αν ή αντίσταση R_2 είναι κατά 20 % μικρότερη από τήν τιμή πού απαιτεϊται για ίσορρόπηση τής γέφυρας καί ή διακλάδωση Ayrton στήν έπαφή 0.001, ποιά ή απόκλιση τοϋ γαλβανόμετρου;
- 6-6. Μιá γέφυρα Wheatstone λειτουργεί μέ ήλεκτρικό στοιχείο ΗΕΔ 2 V

καί γαλβανόμετρο μέ εύαισθησία $0.5 \mu\text{A}/\text{mm}$. Ἡ ἀντίσταση R_2 ἔχει σταθερή τιμή $1 \text{ k}\Omega$. Ποιά ἀκρίβεια ἀναμένεται στή μέτρηση ἀντιστάσεων 10Ω , $1 \text{ k}\Omega$, $10 \text{ k}\Omega$ καί $1 \text{ M}\Omega$;

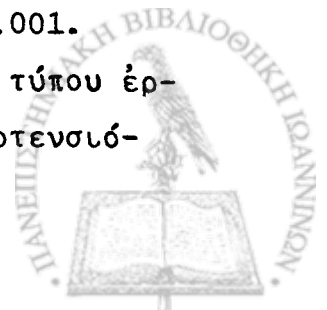
- 6-7. Τρεῖς κλάδοι μιᾶς γέφυρας Wheatstone περιέχουν ἀντιστάσεις 100.0Ω ἐνῶ ὁ τέταρτος ἀντίσταση 100.1Ω . Στή μιᾶ διαγώνιο τῆς γέφυρας συνδέεται γαλβανόμετρο μέ ἐσωτερική ἀντίσταση 50Ω καί εύαισθησία $0.05 \mu\text{A}/\text{mm}$. Στήν ἄλλη διαγώνιο συνδέεται ἡλεκτρικό στοιχεῖο μέ ΗΕΔ 3 V σέ σειρά μέ ἀντίσταση 200Ω . Ποιά ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου;
- 6-8. Τό σφάλμα στήν τιμή τῶν ἀντιστάσεων μιᾶς γέφυρας Wheatstone εἶναι $\pm 0.05 \%$ ἐνῶ τό σφάλμα στήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_2 , $\pm 0.1 \%$. Μέ τιμές τῶν ἀντιστάσεων $R_3 = R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, ἡ τιμή τῆς ἄγνωστης ἀντιστάσεως προσδιορίζεται ὡς 2324Ω . Ποιό τό πειραματικό σφάλμα στό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως;
- 6-9. Μιά ἀπλή γέφυρα Wheatstone χρησιμοποιεῖται γιά μέτρηση ἀντιστάσεων στήν περιοχή τῶν $\text{M}\Omega$. Οἱ ἀντιστάσεις R_3 καί R_4 μποροῦν νά πάρουν τῖς τιμές 1Ω , 10Ω , 100Ω , $1 \text{ k}\Omega$, καί $10 \text{ k}\Omega$ ἐνῶ ἡ ἀντίσταση R_2 μπορεῖ νά πάρει συνεχεῖς τιμές μέχρι $10 \text{ k}\Omega$. Τό ἡλεκτρικό στοιχεῖο τῆς γέφυρας ἔχει ΗΕΔ 10 V καί ἀμελητέα ἐσωτερική ἀντίσταση. Γιά τή συνθήκη $R_3 = R_4$
- Ποιά εἶναι ἡ μέγιστη τιμή ἀντιστάσεως πού μπορεῖ νά μετρηθεῖ μέ τή γέφυρα;
 - Τό γαλβανόμετρο ἔχει ἐσωτερική ἀντίσταση 25Ω καί εύαισθησία $0.005 \mu\text{A}/\text{mm}$. Πόση μεταβολή στήν τιμή τῆς μέγιστης ἄγνωστης ἀντιστάσεως πού μπορεῖ νά μετρήσει ἡ γέφυρα θά προκαλέσει ἀπόκλιση 1 mm ;
 - Ἄν τό γαλβανόμετρο ἀντικατασταθεῖ μέ ἕνα δεύτερο μέ ἐσωτερική ἀντίσταση 550Ω καί εύαισθησία $0.0005 \mu\text{A}/\text{mm}$ πῶς μεταβάλεται ἡ ἀπάντηση στήν προηγούμενη ἐρώτηση;
- 6-10. Θεωρεῖστε τό ἐξωτερικό κύκλωμα τοῦ γαλβανομέτρου στή διπλή γέφυρα Kelvin. Ὑπολογίστε τήν ἰσοδύναμη ΗΕΔ καί ἰσοδύναμη ἀντίσταση (βλ. σχῆμα 6-5)
- Γιά ΗΕΔ τοῦ ἡλεκτρικοῦ στοιχείου ἴση μέ 1.5 V καί ἀμελητέα ἐσωτερική ἀντίσταση, $R_3 = R_4 = 100 \Omega$ καί ἀμελητέες ἀντιστάσεις R_J , R_S καί R_X .

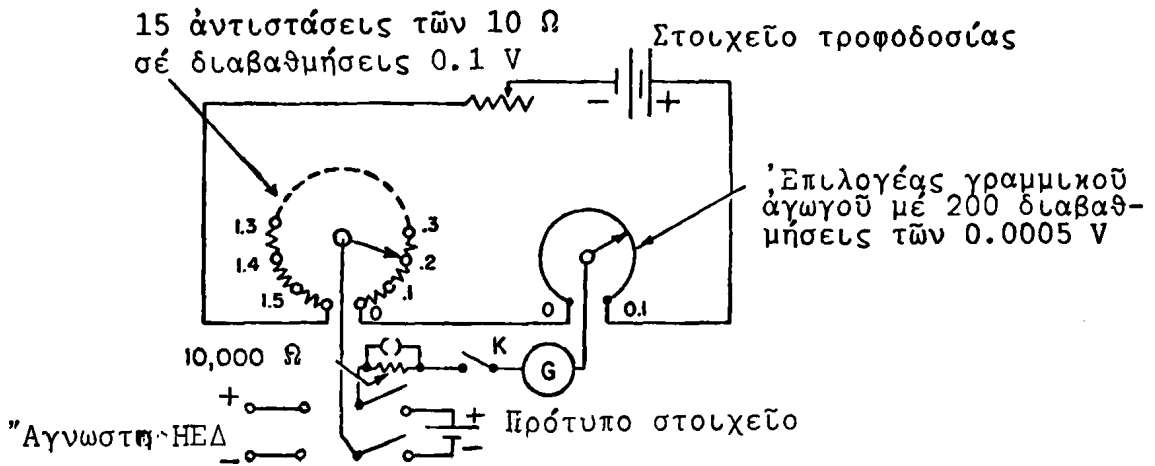


β. Για τις προηγούμενες τιμές και $R_J = 0.1 \Omega$, $R_S = 0.100 \Omega$ και $R_x = 0.101 \Omega$.

- 6-11. 'Η γέφυρα Kelvin του σχήματος 6-5 ίσορροπεύ με τιμές των αντίστανσεων $R_S = 0.003770 \Omega$, $R_1 = 100.00 \Omega$, $R_2 = 1000.0 \Omega$, $R_3 = 99.92 \Omega$, $R_4 = 1000.6 \Omega$ και $R_J = 0.1 \Omega$. 'Υπολογίστε την τιμή της άγνωστης αντίστασης R_x .
- 6-12. Σε μία γέφυρα Kelvin οι αντίστανσεις R_3 και R_4 έχουν τιμή $1 \text{ k}\Omega$. 'Η πρότυπη αντίσταση R_S είναι 0.1000Ω και η άγνωστη αντίσταση R_x είναι 0.1002Ω . Το γαλβανόμετρο έχει έσωτερική αντίσταση 500Ω και εύαισθησία $0.005 \mu\text{A}/\text{mm}$. Το ηλεκτρικό στοιχείο έχει ΗΕΔ 2 V και άμελητέα έσωτερική αντίσταση. 'Αμελητέα επίσης μπορεί να θεωρηθεί η αντίσταση R_J .
- α. Ποιά η απόκλιση του γαλβανομέτρου;
- β. 'Από την προηγούμενη απάντηση εκτιμείστε την ποσοστιαία διαφορά στην τιμή της άγνωστης αντίστασης που προκαλεί απόκλιση του γαλβανομέτρου 1 mm .
- 6-13. Μία γέφυρα Kelvin με αντίστανσεις $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ και $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$ μετρά μία "άγνωστη" αντίσταση με τιμή 0.0997Ω . Το ηλεκτρικό στοιχείο έχει ΗΕΔ 2.16 V και έσωτερική αντίσταση $300 \mu\Omega$. 'Η αντίσταση R_J είναι $10 \text{ m}\Omega$, ενώ το γαλβανόμετρο έχει έσωτερική αντίσταση 100Ω και εύαισθησία $0.005 \mu\text{A}/\text{mm}$. Προσδιορίστε την απόκλιση του γαλβανομέτρου.
- 6-14. Μία διπλή γέφυρα Kelvin κατασκευάζεται με αντίστανσεις $R_3 = R_4 = 100 \Omega$. 'Η πρότυπη αντίσταση είναι 0.100Ω και η "άγνωστη" αντίσταση 0.101Ω . 'Η αντίσταση του ζυγού είναι $R_J = 0.1 \Omega$. Το γαλβανόμετρο έχει έσωτερική αντίσταση 25Ω και εύαισθησία $0.05 \mu\text{A}/\text{mm}$, ενώ η έσωτερική αντίσταση του στοιχείου μπορεί να θεωρηθεί άμελητέα. Το ρεύμα που διαρρέει την πρότυπη αντίσταση είναι 10 A . Προσδιορίστε την απόκλιση του γαλβανομέτρου.
- 6-15. 'Η αντίσταση ενός χάλκινου πηνίου μετράται με μία γέφυρα Wheatstone και το αποτέλεσμα αναφέρεται ως 263.8Ω . 'Η θερμοκρασία του περιβάλλοντος κατά τη μέτρηση είναι περίπου 20°C . Με πόση ακρίβεια πρέπει να είναι γνωστή η θερμοκρασία του περιβάλλοντος ώστε όλα τα ψηφία του αποτελέσματος να θεωρούνται σημαντικά; ('Ο θερμικός συντελεστής αντίστασης του χαλκού στην περιοχή των 20°C είναι $\alpha = 0.00393/^\circ\text{C}$).

- 6-16. Ένα άκóρεστο στοιχεΐο Weston Έχει ΗΕΔ 1.01910 V καΐ έσωτερικη αντίσταση 250 Ω.
- Αν συνδέσετε Ένα βολτόμετρο με έσωτερικη αντίσταση 500 Ω άπευθείας στους πόλους του στοιχείου, ποιá θά εΐναι ή ένδειξη του όργάνου; Πόσο ρεΐμα θά άντλήσετε άπό τό στοιχεΐο;
 - Πόσο ρεΐμα θά κυκλοφορήσει άν βραχυκυκλώσετε τό στοιχεΐο;
 - Πόση πρέπει νά εΐναι ή έλάχιστη αντίσταση του έξωτερικού κυκλώματος του στοιχείου ώστε τό ρεΐμα νά μήν ύπερβαΐνει τά 100 μΑ;
- 6-17. Η αντίσταση R_p του άπλου ποτενσιομέτρου πού δύνεται στό σχήμα 6-8 εΐναι Ένας γραμμικός άγωγός με όλικό μήκος 200 cm καΐ αντίσταση 100 Ω. Ο βρόχος τροφοδοσίας περιέχει ήλεκτρικό στοιχεΐο με ΗΕΔ 4 V καΐ άμελητέα έσωτερικη αντίσταση. Η έσωτερικη αντίσταση του γαλβανομέτρου εΐναι 50 Ω. Τό πρότυπο στοιχεΐο Έχει ΗΕΔ 1.018 V καΐ έσωτερικη αντίσταση 200 Ω. Για τό λόγο αυτό, ό ροοστάτης του βρόχου τροφοδοσίας ρυθμΐζεται Έτσι ώστε τό πρότυπο στοιχεΐο νά ίσορροπεΐ με τήν κινητή έπαφή του γραμμικού άγωγού σε άπόσταση 101.8 cm άπό τό Ένα άκρο.
- Προσδιορίστε τό ρεΐμα πού κυκλοφορεΐ στό βρόχο τροφοδοσίας καΐ τήν αντίσταση του ροοστάτη.
 - Για τόν προσδιορισμό του σημείου ίσορροπίας ή προστατευτικη αντίσταση του γαλβανομέτρου R_g μηδενΐζεται. Στη συνέχεια, άπό έσφαλμένο χειρισμό, ή σύνδεση του πρότυπου στοιχείου άντιστρέφεται. Ύπολογΐστε τό ρεΐμα πού θά διαρρεύσει τόν κλάδο του προτύπου στοιχείου. Σχολιαΐστε τΐς έπιπτώσεις του άτυχήματος.
 - Ποιá ή τιμή της προστατευτικης άντιστάσεως πού θά περιόριζε τό ρεΐμα στά 10 μΑ;
 - Αν για προστασία του γαλβανομέτρου χρησιμοποιήσουμε διακλάδωση Ayrton με όλικη αντίσταση 500 Ω (άντί για αντίσταση σε σειρά), ύπολογΐστε τό ρεΐμα πού θά διαρρεύσει στον κλάδο του πρότυπου στοιχείου κατά τό προηγούμενο άτύχημα για ρύθμιση της διακλαδώσεως στό σημείο έπαφης 0.001.
- 6-18. Στο έπόμενο διάγραμμα δύνεται τό κύκλωμα ένός άπλου τύπου έργαστηριακού ποτενσιομέτρου, γνωστοΐ ως "φουιτητικό ποτενσιόμετρο".





Στό φοιτητικό ποτενσιόμετρο ή αντίσταση R_p δημιουργείται με 15 σταθερές αντιστάσεις των 10Ω και ένα γραμμικό άγωγό (σε σχήμα πηνίου) με 200 διαβαθμίσεις. Ο ροοστάτης χρησιμοποιείται για βαθμονόμηση του ποτενσιόμετρου με σύγκριση προς την ΗΕΔ του πρότυπου στοιχείου.

Σέ ένα ποτενσιόμετρο του τύπου αυτού, ή αντίσταση μεταξύ των διαβαθμίσεων 0 και 0.1 V αντί της ονομαστικής τιμής 10.0Ω είναι 10.1Ω . Τό ποτενσιόμετρο βαθμονομεύεται με ένα πρότυπο στοιχείο ΗΕΔ = 1.0191 V και στή συνέχεια χρησιμοποιείται για τή μέτρηση μιᾶς άγνωστης διαφορᾶς δυναμικοῦ, ή όποία προσδιορίζεται ὡς 0.2153 V . Ποιά ή πραγματική τιμή τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ πού μετρήθηκε; Ὑπολογίστε τό σχετικό σφάλμα στή μέτρηση.

- 6-19. Τό ποτενσιόμετρο τῆς προηγούμενης άσκήσεως βαθμονομεύεται με ένα πρότυπο στοιχείο ΗΕΔ = 1.0192 V . Ὁ ροοστάτης τοῦ βρόχου τροφοδοσίας μπορεῖ νά ρυθμιστεῖ συνεχῶς μεταξύ 0 καί 100Ω .
- Πόση πρέπει νά εἶναι ή ΗΕΔ τοῦ ἠλεκτρικοῦ στοιχείου στό βρόχο τροφοδοσίας;
 - Λόγω ἐσφαλμένου χειρισμοῦ ένα μεγάλο ρεῦμα διοχετεύεται στό πρότυπο στοιχείο καί στή συνέχεια ή ΗΕΔ μεταβάλεται σέ 1.0000 V . Ποιό θά εἶναι τό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως ἑνός δυναμικοῦ 0.750 V ἄν ὁ χειριστής δέν ἀντιληφθεῖ τήν πτώση τῆς ΗΕΔ τοῦ πρότυπου στοιχείου;
- 6-20. Ἐνα φοιτητικό ποτενσιόμετρο (βλ. Ἄσκηση 6-18) ἔχει ένα ἐπιλογέα με 15 βήματα των 10Ω με αντίστοιχες ἐνδείξεις κατά 0.1 V καί ένα ἐπιλογέα γραμμικοῦ άγωγού με συνολική ἐνδειξη

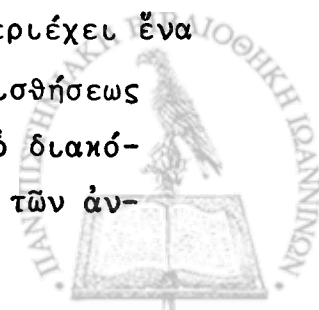
δυναμικοῦ 0.11 V . Τό ἠλεκτρικό στοιχεῖο στό βρόχο τροφοδοσίας ἔχει ΗΕΔ 3 V καί ἐσωτερική ἀντίσταση 0.1Ω . Ἡ ΗΕΔ τοῦ πρότυπου στοιχείου εἶναι 1.0186 V καί ἡ ἐσωτερική του ἀντίσταση 250Ω . Τό γαλβανόμετρο παρεμβάλει ἀντίσταση 50Ω καί ἡ εὐαισθησία του εἶναι $0.05 \mu\text{A}/\text{mm}$. Μετά τή βαθμονόμηση τοῦ ποτενσιομέτρου καί τούς ἐπιλογεῖς ρυθμισμένους σέ ἔνδειξη 0.600 V , ὁ διακόπτης συνδέεται στόν κλάδο τοῦ πρότυπου στοιχείου.

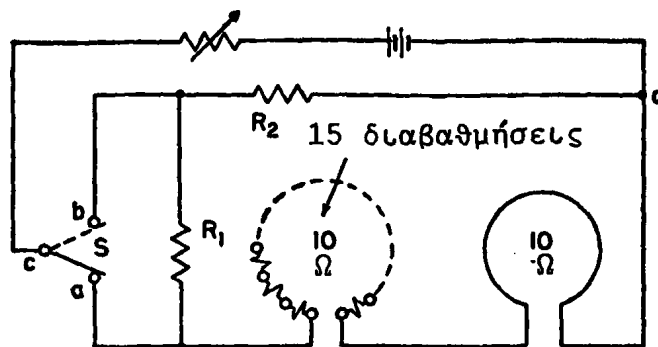
- α. Ὑπολογίστε τό ρεῦμα στόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου, ἂν ἡ προστατευτική ἀντίσταση ἔχει προηγουμένως μηδενιστεῖ.
- β. Ὑπολογίστε τήν προστατευτική ἀντίσταση πού πρέπει νά τοποθετηθεῖ σέ σειρά μέ τό γαλβανόμετρο ὥστε ἡ ἀπόκλιση τοῦ ὄργάνου νά μὴν ὑπερβαίνει τά 50 mm .

6-21. Γιά τή βαθμονόμηση ἑνός βολτομέτρου μέ κλίμακα $0-150 \text{ V}$ διατίθεται ἓνα ποτενσιόμετρο μέ ἀκρίβεια $\pm 0.0001 \text{ V}$ καί ἓνα κιβώτιο ἀντιστάσεως, στό ὁποῖο ἡ κινητή ἐπαφή μπορεῖ νά ἐπιλέξει δύο ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 μέ ἀκρίβεια στό λόγο $R_1/R_2 \pm 0.05 \%$. Κατά τή διεργασία τοῦ Πειράματος 6-7 προσδιορίζεται ὅτι ὅταν ἡ ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου εἶναι 80 V , τό ποτενσιόμετρο μετρά 0.8025 V . Ὑπολογίστε τό σφάλμα σέ volt καί ὡς σχετικό σφάλμα τῆς κλίμακας τοῦ βολτομέτρου. Προσδιορίστε τήν ἀβεβαιότητα στή διόρθωση, θεωρώντας ὅτι τό γαλβανόμετρο ἔχει ἱκανή εὐαισθησία ὥστε ὅλα τά ψηφία τοῦ ἀποτελέσματος νά εἶναι σημαντικά.

- 6-22. Τό φοιτητικό ποτενσιόμετρο πού περιγράφεται στήν Ἀσκηση 6-18 διαθέτει ΗΕΔ στό βρόχο τροφοδοσίας 3 V καί πρότυπο στοιχεῖο μέ ΗΕΔ $= 1.0181 \text{ V}$ καί ἐσωτερική ἀντίσταση 250Ω . Τό γαλβανόμετρο τοῦ ποτενσιομέτρου ἔχει ἐσωτερική ἀντίσταση 50Ω .
- α. Σέ ποιά περιοχή δυναμικοῦ ἐμφανίζει τό ποτενσιόμετρο τή μεγαλύτερη εὐαισθησία;
 - β. Ποιά εὐαισθησία πρέπει νά ἔχει τό γαλβανόμετρο ὥστε νά ἀποκλίνει κατά 1 mm ἀνά διαβάθμιση τοῦ ἐπιλογέα στόν γραμμικό ἀγωγό;

6-23. Τό ποτενσιόμετρο πού δίνεται στό ἐπόμενο κύκλωμα περιέχει ἓνα ἐπιλογέα μέ 15 βήματα τῶν 10Ω καί ἓνα ἐπιλογέα ὀλισθήσεως σέ γραμμικό ἀγωγό συνολικῆς ἀντιστάσεως 10Ω . Ἄν ὁ διακόπτης S τοποθετηθεῖ στήν ἐπαφή a , τό ρεῦμα διαμέσου τῶν ἀν-



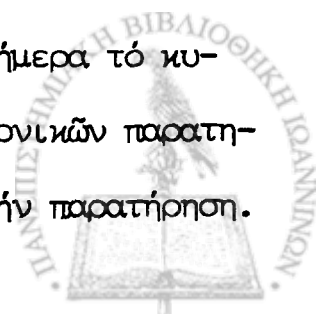


τιστάσεων των έπιλογέων πρέπει να είναι 10 mA. Για τη θέση του διακόπτη S στη θέση b το αντίστοιχο ρεύμα πρέπει να είναι 1 mA. Προσδιορίστε τις τιμές των αντιστάσεων R_1 και R_2 ώστε να ικανοποιούνται οι προηγούμενες συνθήκες ενώ ταυτόχρονα ή διαφορά δυναμικού και το όλικό ρεύμα μεταξύ των σημείων c και d να παραμένει το ίδιο για τις δύο θέσεις του διακόπτη S.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

η εργαστηριακή έκθεση

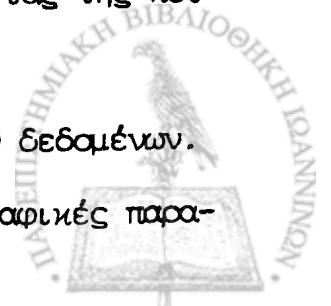
Ένα μεγάλο μέρος τῆς προσπάθειας πού καταβάλλει ὁ φοιτητής σέ κάθε εργαστηριακό μάθημα καταναλώνεται στή σύνταξη Ἑργαστηριακῶν Ἐκθέσεων, ἐνῶ ἕνα μεγάλο μέρος τοῦ βαθμοῦ πού θά πάρει προέρχεται ἀπό τήν ἀξιολόγηση τῶν ἐκθέσεων πού θά συντάξει κατά τή διάρκεια τοῦ ἔτους. Τοῦτο δέν εἶναι τυχαῖο γεγονός. Ἡ Ἑργαστηριακή Ἐκθεση ἀντανακλά τίς γνώσεις τοῦ φοιτητή πάνω στό ἀντικείμενο πού μελέτησε, τήν ἐφαρμογή αωστής μεθοδολογίας κατά τήν ἐκτέλεση τῆς εργαστηριακῆς ἀσκήσεως καί τή δυνατότητα ἑφαγωγῆς συμπερασμάτων ἀπό τήν παρατήρηση ἑνός φαινομένου. Ἡ ἀσκηση ὅμως στή σύνταξη μιᾶς αωστής Ἑργαστηριακῆς Ἐκθέσεως ἀποβλέπει σέ πολύ εὐρύτερο στόχο. Οἱ Ἐκθέσεις πού θά κληθεῖ νά συντάξει ὁ φοιτητής κατά τή διάρκεια τοῦ μαθήματος δέ θά διαφέρουν καί πολύ ἀπό παρόμοιες Ἐκθέσεις πού θά χρειαστεῖ νά συντάξει ἢ νά ἀξιολογήσει στή μεταπτυχιακή του καριέρα. Ἡ Ἑργαστηριακή Ἐκθεση καί γενικότερα ἡ Ἐπιστημονική Ἑργασία ἀποτελεῖ σήμερα τό κυριότερο μέσο ἐπικοινωνίας ἐπιστημονικῆς γνώσης, ἐπιστημονικῶν παρατηρήσεων καί ἐπιστημονικῶν πορισμάτων πού ἐξάγονται ἀπό τήν παρατήρηση.



Έτσι, ένα από τὰ ἐφόδια πού πρέπει νά αποκομίσει ὁ φοιτητής ἀπό τήν πανεπιστημιακή του θητεία εἶναι ἡ δυνατότητα καί εὐχέρεια συντάξεως μιᾶς ἀρτίας Ἑργαστηριακῆς Ἐκθέσεως.

Ἄν καί ὑπάρχει ἀρκετή εὐεληξία στή σύνταξη τῆς Ἐπιστημονικῆς Ἐκθέσεως παραθέτουμε παρακάτω ἐνδεικτικά τή μορφή τοῦ "κλασσικοῦ τύπου". Ὁ φοιτητής ἐνθαρρύνεται στήν ἀνάπτυξη πρωτοβουλίας καί φαντασίας γιά τήν καλύτερη ἀπόδοση τοῦ ἀντικειμένου πού πραγματεύεται. Ὅλα ὅμως τὰ παρακάτω σημεῖα θά πρέπει νά περιέχονται κατὰ κάποιο τρόπο σέ μιᾶ ὁλοκληρωμένη Ἑργαστηριακή Ἐκθεση.

1. Ἐξώφυλλο καί Τίτλος. Τό ὄνομα τοῦ φοιτητή, τοῦ συνεργάτη, ὁ τίτλος καί ἀριθμός τῆς ἀσκήσεως, ἡμερομηνία διεξαγωγῆς τῆς ἀσκήσεως καί ἡμερομηνία παραδόσεως.
2. Περίληψη. Σύντομη περίληψη (περίπου 150 λέξεις) τῆς Ἑργαστηριακῆς Ἐκθέσεως. Ἡ περίληψη πρέπει νά μεταφέρει στόν ἀναγνώστη τῆς ἐκθέσεως τό ἀντικείμενο τῆς μελέτης, τόν τρόπο διεξαγωγῆς τοῦ πειράματος καί τὰ συμπεράσματα πού προέκυψαν.
3. Εἰσαγωγή. Σύντομη περιγραφή τοῦ ἀντικειμένου πού πραγματεύεται ἡ ἀσκηση. Ἀντικειμενικός σκοπός τῆς ἀσκήσεως.
4. Θεωρία. Ἀνάπτυξη τοῦ θεωρητικοῦ ὑποβάθρου τῆς ἀσκήσεως καί ἀπόδειξη τῶν ἐξισώσεων πού χρησιμοποιοῦνται γιά τήν ἐξαγωγή ἀποτελεσμάτων.
5. Πειραματική Διάταξη. Περιγραφή ὅλων τῶν ὀργάνων πού χρησιμοποιήθηκαν μέ σύντομη ἐπεξήγηση τῆς λειτουργίας κάθε ὀργάνου. Γενική συνδεσμολογία τῶν ὀργάνων καί ἐπεξήγηση τῆς λειτουργίας τῆς πειραματικῆς διατάξεως. Περιγραφή λήψεως τῶν δεδομένων.
6. Ἀνάλυση τῶν Δεδομένων. Ὑπολογισμοί καί ἀνάλυση τῶν δεδομένων. Τό μέρος αὐτό περιλαμβάνει ὅλους τοὺς πίνακες καί γραφικῆς παρα-



στάσεις που προκύπτουν από τις μετρήσεις. Περιέχει ακόμη ανάλυση των θεωρητικών προσεγγίσεων και πειραματικών παραγόντων που επηρεάζουν τα αποτελέσματα καθώς και εκτίμηση των πειραματικών σφαλμάτων. Ίδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στις γραφικές παραστάσεις. Κάθε γραφική παράσταση πρέπει να περιέχει υπότιτλο, σωστά βαθμονομημένους άξονες και να απεικονίζει την έκταση του πειραματικού σφάλματος που συνδέεται με κάθε πειραματική μέτρηση.

7. Συμπεράσματα. Γενικά συμπεράσματα από το πείραμα και σύγκριση με θεωρητικές προβλέψεις. Τό μέρος αυτό μπορεί να περιέχει υποδείξεις για τη βελτίωση της ακριβείας των μετρήσεων και γενικότερα του πειράματος.
8. Βιβλιογραφία. Όλη η σχετική βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε με παραπομπές από τό κείμενο της έκθέσεως.
9. Παράρτημα με σημειώσεις που κρατήθηκαν κατά τη διεξαγωγή της άσκησης. Στο παράρτημα αυτό πρέπει να συμπεριλαμβάνονται όλα τα δεδομένα που ελήφθησαν στο εργαστήριο (ή φωτοαντίγραφο αν τό πρωτότυπο συμπεριλαμβάνεται στην Έκθεση συνεργάτη). Τά πρωτότυπα των δεδομένων πρέπει να είναι πλήρη και μέ επαρκείς πληροφορίες για τη σύνταξη της Έργαστηριακής Έκθέσεως. Ο φοιτητής θά πρέπει να βεβαιωθεί ότι θά μπορούσε να συντάξει Έκθεση και να καταλήξει σέ παρόμοια συμπεράσματα από τά πρωτότυπα των μετρήσεων που περιέχονται στό Παράρτημα χωρίς να χρειαστεί επανάληψη του πειράματος.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

οργανα και εξαρτηματα

εργαστηριακου

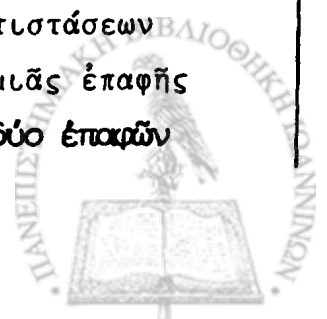
ηλεκτρομαγνητισμου

Στις επόμενες σελίδες έχουν συγκεντρωθεί τα 33 πειράματα που περιέχονται στο κυρίως κείμενο, καθώς και τα όργανα που απαιτούνται για την εκτέλεση καθενός. Για κάθε εξάρτημα ή όργανο δίνεται ακόμη ένδεικτικά η τάξη μεγέθους ή η περιοχή της κλίμακας. Πολλά από τα όργανα χρησιμοποιούνται σε περισσότερα από ένα πειράματα. Με μαύρους χαρακτήρες σημειώνονται στο πείραμα όπου απαιτώνται για πρώτη φορά.

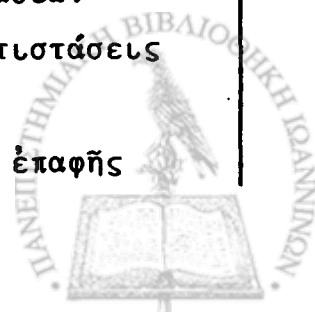


Πείραμα	Άντικείμενο Πειράματος	Όργανα
2-1	Πεδίο σημειακών φορτίων	<ul style="list-style-type: none"> - Αγώγιμο χαρτί και πένα με μεταλλική μελάνη - Τροφοδοτικό ΣΡ - Ηλεκτρονικό βολτόμετρο <li style="text-align: center;">η Κύκλωμα μηδενισμού (βλ. σχήμα 2-7) πού συγκροτείται από - Ροοστάτη ($R_{ολ} = 10 \text{ k}\Omega$) - Βολτόμετρο (κλίμακα 0-5V) - Γαλβανόμετρο (εύαισθησία $\sim 1 \mu\text{A/div}$)
2-2	Πεδίο συστημάτων άγωγών	
2-3	Ήλεκτροστατικός φακός	
2-4	Εξώδωλα επίπεδων άγωγών	
2-5	Εξώδωλα σφαιρικών άγωγών	
2-6	Προσδιορισμός ειδικής αντίστασης	<ul style="list-style-type: none"> - Σειρά μεταλλικών χορδών από τό ίδιο υλικό, με διαφορετικές διατομές - Τροφοδοτικό ΣΡ - Βολτόμετρο (κλίμακα 0-5V) - Άμπερόμετρο (κλίμακα 0-1A)
3-1	Στοιχειώδες άμπερόμετρο ΣΡ	<ul style="list-style-type: none"> - Ευθύγραμμος άγωγός - Άντίσταση $R \approx 10 \Omega$ - Πυξίδα - Τροφοδοτικό ΣΡ
3-2	Μέτρηση αντίστασης με	<ul style="list-style-type: none"> - "Άγνωστη αντίσταση" $R \approx 1 \text{ k}\Omega$ - "Άγνωστη αντίσταση" $R \approx 1-10 \Omega$ - Τροφοδοτικό ΣΡ - Βολτόμετρο (κλίμακα 0-50mA) - Άμπερόμετρο (κλίμακα 0-3A)
3-3	άμπερόμετρο και βολτόμετρο	

3-4	ΗΕΔ καί διαθέσιμο δυναμικό ηλεκτρικού στοιχείου	<ul style="list-style-type: none"> - Ροοστάτης ($R_{0λ} \approx 10 \Omega$) - Ήλεκτρικό στοιχείο (3-6V) - Βολτόμετρο (κλίμακα 0-6V)
3-5	Διαθέσιμη ίσχή καί έσωτερική αντίσταση στοιχείου	<ul style="list-style-type: none"> - Άμπερόμετρο (κλίμακα 0-6A) - Διακόπτης μιᾶς έπαφῆς¹
3-6	Μέτρηση ΗΕΔ στοιχείου	<ul style="list-style-type: none"> - Ήλεκτρικό στοιχείο (3-6V) - Τροφοδοτικό ΣΡ (0-15V) - Ροοστάτης ($R_{0λ} \approx 0.1000 \Omega$) - Βολτόμετρο (κλίμακα 0-6V) - Δύο διακόπτες μιᾶς έπαφῆς
3-7	Κύκλωμα ώμομέτρου	<ul style="list-style-type: none"> - Τροφοδοτικό ΣΡ - Άντίσταση $R \approx 1 \text{ k}\Omega$ - Βολτόμετρο (κλίμακα 0-30mV) - Κιβώτιο αντίστασεων ($R_{0λ} \approx 2 \text{ k}\Omega$)
5-1	Μέτρηση εύαισθησίας καί έσωτερικῆς αντίστασεως γαλβανομέτρου	<ul style="list-style-type: none"> - Γαλβανόμετρο d'Arsonval - Άντίσταση $R \approx 3 \text{ M}\Omega$ - Τροφοδοτικό ΣΡ - Βολτόμετρο (κλίμακα 0-6V) - Κιβώτιο αντίστασεων - Διακόπτης μιᾶς έπαφῆς
5-2	Προσδιορισμός αντίστασεως κρίσιμης άποσβέσεως γαλβανομέτρου	<ul style="list-style-type: none"> - Γαλβανόμετρο d'Arsonval - Άντίσταση $R \approx 3 \text{ M}\Omega$ - Τροφοδοτικό ΣΡ - Βολτόμετρο (κλίμακα 0-6V) - Κιβώτιο αντίστασεων - Διακόπτης μιᾶς έπαφῆς - Διακόπτης δύο έπαφῶν



5-3	Διακλάδωση του γαλβανόμετρου	<ul style="list-style-type: none"> - Γαλβανόμετρο d'Arsonval - Άντίσταση $R \approx 3 \text{ M}\Omega$
5-4	Εύαισθησία γαλβανόμετρου με διακλάδωση	<ul style="list-style-type: none"> - Τροφοδοτικό ΣΡ - Βολτόμετρο (κλίμακα 0-6V) - Κιβώτιο αντιστάσεων με ένδιάμεση επαφή ή δύο κιβώτια αντιστάσεων - Διακόπτης μιᾶς επαφῆς
5-5	Τό γαλβανόμετρο ως ἀμπερόμετρο	<ul style="list-style-type: none"> - Γαλβανόμετρο d'Arsonval - Κύκλωμα προστασίας - Τροφοδοτικό ΣΡ - Άντίσταση $R \approx 500 \text{ k}\Omega$ - Άντίσταση $R \approx 1-10 \Omega$ - Κιβώτιο αντιστάσεων - Άμπερόμετρο (κλίμακα 0-3A) - Διακόπτης μιᾶς επαφῆς
5-6	Τό γαλβανόμετρο ως βολτόμετρο	<ul style="list-style-type: none"> - Γαλβανόμετρο d'Arsonval - Κύκλωμα προστασίας - Τροφοδοτικό ΣΡ - Άντίσταση $R \approx 3 \text{ M}\Omega$ - Άντίσταση $R \approx 500 \Omega$ - Βολτόμετρο (κλίμακα 0-6V) - Διακόπτης μιᾶς επαφῆς
5-7	Τό γαλβανόμετρο ως ὠμόμετρο	<ul style="list-style-type: none"> - Γαλβανόμετρο d'Arsonval - Κύκλωμα προστασίας - Τροφοδοτικό ΣΡ - Άντίσταση $R \approx 500 \Omega$ - Κιβώτιο αντιστάσεων - "Άγνωστες" αντιστάσεις 1-1000 Ω - Διακόπτης μιᾶς επαφῆς



5-8	Βαλλιστικό γαλβανόμετρο	<ul style="list-style-type: none"> - Βαλλιστικό γαλβανόμετρο² - Τροφοδοτικό ΣΡ - Κιβώτιο αντιστάσεων με έν- διάμεση έπαφή - Πυκνωτής $C \approx 0.5 \mu F$ - Βολτόμετρο (κλίμακα 0-6V) - Διακόπτης δύο έπαφών - Διακόπτης τηλεγραφητή
5- 9	Μέτρηση αντιστάσεως με	<ul style="list-style-type: none"> - Βαλλιστικό γαλβανόμετρο² - Τροφοδοτικό ΣΡ - "Αγνωστη" αντίσταση $R =$ $1-10 M\Omega$ - Πυκνωτής $C = 0.5-5 \mu F$ - Διακόπτης δύο έπαφών - Διακόπτης τηλεγραφητή
5-10	βαλλιστικό γαλβανόμετρο	
5-11		
5-12		
6-1	Ή γέφυρα Wheatstone	<ul style="list-style-type: none"> - Τροφοδοτικό ΣΡ - Κιβώτιο αντιστάσεων - Γραμμικός άγωγός με κλί- μακα μήκους - "Αγνωστη" αντίσταση - Γαλβανόμετρο - Διακόπτης μιᾶς έπαφής
6-2	Μέτρηση θερμικοῦ συν- τελεστή αντιστάσεως μέ τή γέφυρα Wheatsto- ne	<ul style="list-style-type: none"> - Ή γέφυρα Wheatstone τοῦ Πειράματος 6-1 - Πηνίο αντιστάσεως $R \approx 5 \Omega$ ἀπό σίδηρο βυθισμένο σέ λουτρό λαδιού - Λύχνος Bunsen - Θερμόμετρο



6-3	'Αντίσταση τεσσάρων άκροδεκτών	<ul style="list-style-type: none"> - Τροφοδοτικό ΣΡ - 'Αντίσταση $R \approx 1 \text{ k}\Omega$ - Λεπτή μεταλλική ράβδος - 'Αμπερόμετρο (κλίμακα 0-50mA) Βολτόμετρο (κλίμακα 0-50mV) Διακόπτης μιᾶς έπαφής
6-4	'Η γέφυρα Kelvin	<ul style="list-style-type: none"> - Τροφοδοτικό ΣΡ - Ροοστάτης ($R_{0\lambda} \approx 100 \Omega$) - Γραμμικός άγωγός μέ κλίμακα μήκους - Πρότυπη αντίσταση τεσσάρων άκροδεκτών - "Άγνωστη" αντίσταση τεσσάρων άκροδεκτών - Γαλβανόμετρο - Διακόπτης μιᾶς έπαφής
6-5	Ποτενσιόμετρο	<ul style="list-style-type: none"> - Τροφοδοτικό ΣΡ - Πρότυπο στοιχειό - 'Ηλεκτρικό στοιχειό μέ "άγνωστη" ΗΕΔ $\approx 1.5\text{V}$ - Γραμμικός άγωγός μέ κλίμακα μήκους - Δύο ροοστάτες $R = 1-20 \text{ k}\Omega$ - Γαλβανόμετρο - Διακόπτης δύο έπαφών
6-6	ΗΕΔ θερμοστοιχείου	<ul style="list-style-type: none"> - 'Η διάταξη του Πειράματος 6-5 ή εργαστηριακό ποτενσιόμετρο - Θερμοστοιχείο - Μύγμα νερού και πάγου - Μύγμα αλκοόλης και ξηρού πάγου - 'Υγρό άζωτο



6-7	Βαθμονόμηση βολτομέ- τρου	<ul style="list-style-type: none"> - Τροφοδοτικό ΣΡ - Ροοστάτης ($R_{ολ} \approx 500 \Omega$) - Κιβώτιο αντίστασεων μέ ένδιάμεση έπαφή - Βολτόμετρο (κλίμακα 0-10V) - Δύο διακόπτες μιᾶς έπαφῆς - Έργαστηριακό ποτενσιόμε- τρο
6-8	Βαθμονόμηση ἄμπερομέ- τρου	<ul style="list-style-type: none"> - Τροφοδοτικό ΣΡ - Ροοστάτης - Αντίσταση τεσσάρων ἄκρο- δεκτῶν - Ἄμπερόμετρο - Διακόπτης μιᾶς έπαφῆς - Έργαστηριακό ποτενσιόμε- τρο

1) ἡ διακόπτης τηλεγραφετή.

2) Πολλά γαλβανόμετρα D' Arsonval μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν ἐναλλακτι-
κά καί ὡς βαλιστικά γαλβανόμετρα.



ευρετήριο

Τό άλφαβητικό εύρετήριο περιέχει τούς κυριώτερους όρους καί έννοιες όπου άρχικά όρίζονται καί όπου μετέπειτα αναλύονται ή χρησιμοποιούνται σέ κάποια έκταση. Για τήν κατάταξη όνομάτων καί όρων μέ λατινικούς χαρακτήρες άκολουθεΐται ή άντιστοιχία πού έχει υίοθετήσει ό ΟΤΕ, ήτοι

B, V, W	στό Β	C, Q	στό Κ	D	στό Δ
G	στό Γ	H	στό Χ	J	στό Ζ
		X	στό Ξ	U	στό Υ

Τά γράμματα πού άκολουθοΐν όρισμένους άριθμούς σελίδων συμβολίζου

- ff: καί σελίδες πού άκολουθοΐν
α: άπαντάται σέ άσκηση
π: άπαντάται σέ κείμενο πειράματος
σ: άπαντάται σέ υπότιτλο σχήματος

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| άγωγιμότητα, 166, 173 | άνοδος, 210 |
| άγωγός, 103 ff, 169 | άντιπολωτικό, 213 |
| — γραμμικός, 174, 352, 353, | άντίσταση, 165, 177 |
| άκρίβεια, 3, 4 | — άνθρακα, 178, 181 |
| — άπόλυτη, 5, 346 | — δεκαδικό κιβώτιο, 184 |
| — σχετική, 5, 346 | — είδική, 167, 170 |
| ampère, 159 | — θερμικός συντελεστής, 356 π |
| άμπερόμετρο, 187 ff, 314 | — ίσοδύναμη, 263, 266 |
| — έργαστηριακό, 187 ff | — ίσχυς, 182 |
| — έσωτερική άντίσταση, 195 | — κρίσιμης άποσβέσεως, 300, 301 τ |
| — ρύθμιση κλίμακας, 196 | — μέσης άποκλίσεως, 229 |
| άναγωγή, 210 | — μεταλλικής ταινίας, 183 |



- σύρματος, 182
- τεσσάρων άκροδεκτών, 359, 380 π
- ώμική, 175 ff
- άπόσβεση
 - κρίσιμη, 298
 - σταθερά, 291
 - συντελεστής, 294
 - ύπερκρίσιμη, 298
 - ύποκρίσιμη, 298
- άρχή
 - έπαλληλίας, 76
 - μέγιστης πιθανότητας, 53, 64
 - μοναδικότητας διαφοράς δυναμικοῦ, 241
 - συνεχείας, 241
- άτομικός πυρήνας, 72
- άτομο, 72
- Ayrton, βλ. διακλάδωση

- βαθμονόμηση, 60, 345
 - άμπερομέτρου, 380 π
 - βολτομέτρου, 378 π
 - όργάνων άποκλίσεως 376 ff
- βαθμός έλευθερίας, 27
- watt, 175
- Weston, Edward, 366
- volt, 90
- volt, διεθνές, 366
- βολτόμετρο, 197 ff, 317
 - έργαστηριακό, 197 ff
- βρόχος, 246
 - τροφοδοσίας, 369
 - γαλβανομέτρου, 369
- Wheatstone, βλ. γέφυρα
- Wheatstone, Charles, 348
- γαλβανόμετρο, 101, 285
 - βαλλιστικό, 321 ff
 - D'Arsonval, 285
 - έσωτερική αντίσταση, 291, 300 π
 - εύαισθησία ως προς τό δυναμικό, 288, 290 π
 - εύαισθησία σέ μέγα-ωμ, 340 α
 - εύαισθησία ως προς τό ρεῦμα, 287, 289 π, 306, 307 π
 - εύαισθησία ως προς τό φορτίο, 325
 - κίνηση, 290 ff
 - προστασία, 308 ff
 - φυσική συχνότητα, 294
 - ως άμπερόμετρο, 314, 315 π, 315 σ
 - ως βολτόμετρο, 317, 317 σ, 318 π
 - ως ώμόμετρο, 319, 320 π
- Gauss, βλ. νόμος του, κατανομή γέφυρα, 347
 - εύαισθησία, 352 π
 - Kelvin, 359, 363 π
 - Wheatstone, 269, 348 ff, 351 π
 - Wheatstone, μέ γραμμικό άγωγό, 325 π, 353 σ
- D'Arsonval, βλ. γαλβανόμετρο
- διακλάδωση, 301 ff
 - Ayrton, 280 α, 303
- διακριτική ικανότητα, 3, 4, 316 π
 - άπόλυτη, 5
 - σχετική, 5
- διακύμανση, 23
 - μέση, 58
- διάμεσος, 20
- διαπερατότητα, 133, 149
 - είδική, 134



- στό κενό, 75, 146
- διάταξη μηδενισμού, 346
- διηλεκτρικά ύλικά, 104, 123
- διηλεκτρική σταθερά, 133, 149
- είδική, 134, 149
- διόρθωση, 379 π
- διπολική ροπή, 123, 124
- δύπολο, βλ. ήλεκτρικό δύπολο
- Dirichlet, βλ. όριακές συνθήκες
- διώνυμη κατανομή, βλ. κατανομή
- δυναμικές γραμμές, 97 ff
- κώνος δυναμικών γραμμών, 99
- δυναμικό, 87
- διαφορά, 88
- πολώσεως, 127, 148
- τερματικό, 206

- ένέργεια
- ήλεκτροστατική, 84 ff
- ήλεκτροστατικού πεδίου, 151 ff
- πυκνότητα, 154
- συνδέσεως, 86
- έξίωση
- Laplace, 112
- Poisson, 112
- Poisson, γενικευμένη, 143, 149
- Poisson, σέ διηλεκτρικά, 135 ff
- έπαγωγή, βλ. μαγνητική έπαγωγή
- έπιδεκτικότητα, βλ. ήλεκτρική
- έπιδεκτικότητα

- ήλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ), 206, 223
- διαθέσιμη, 207
- ιδανική, 242
- ίσοδύναμη
- τερματική, 207
- ήλεκτρική έπιδεκτικότητα, 133, 149
- ήλεκτρική μετατόπιση, 130, 148
- ήλεκτρική πόλωση, 126
- ήλεκτρικό δύπολο, 123
- ήλεκτρικό πεδίο, 78 ff
- έλεύθερων φορτίων, 111
- στήν έπιφάνεια άγωγού, 106
- στό έσωτερικό άγωγού, 105
- ροή, 81
- ήλεκτρικό ρεύμα, 156 ff, 186
- βραχυκυκλώσεως, 208, 265
- βρόχου, 255
- πυκνότητα, 159
- ήλεκτρικό στοιχείο, 175, 205, 209 ff
- άκόρεστο, 367
- άλκαλικό, 215
- Weston, 366
- Daniel, 365
- έσωτερική αντίσταση, 206, 222
- ισχή, 221 ff
- κανονικό, 366
- κορεσμένο, 366
- Leclanché, 212
- μολύβδου-όξέως, 217
- νικελίου-καδμίου, 220
- ξηρό, 212
- πρότυπο, 365 ff
- ύδραργύρου, 216
- ήλεκτρικό φορτίο, 71
- άρνητικό, 71
- δέσμιο, 129, 148
- διατήρηση, 72
- έλεύθερο, 92, 129, 169
- θετικό, 71



- κβάντωση, 72
 — πυκνότητα, 77
 — στό έσωτερικό άγωγοϋ, 105
 ήλεκτροδίο, 100, 209, 365
 ήλεκτρολύτης, 210, 365
 ήλεκτρόνιο, 71
 ήλεκτροστατικά εΐδωλα, 116 ff, 122
 ήλεκτροστατική μονάδα φορτίου, 75
 ήλεκτροστατικός φακός, 115
 ήλεκτροχημικό στοιχεΐο, βλ. ήλεκ-
 τρικό στοιχεΐο
 ήμιαγωγός, 169
- θερμικός συντελεστής άντιστά-
 σεως, 356 π
 θερμοζεϋγος 374 π
 θεώρημα
 — έπαλληλίας, 260
 — Norton, 271
 — Thēvenin, 267
 θεωρητικός πληθυσμός, 16, 60
 — δεϋγμα, 16, 60
- ίσοδυναμικές έπιφάνειες, 97
 ίσοτροπία, 133
 ίστόγραμμα, 16
- κάθοδος, 210
 καλώδιο, 178
 καμπύλη διορθώσεως, 379, 381 π
 κατανομή, 8
 — Gauss, 41 ff, 63
 — διώνυμη, 28 ff, 32, 62
 — ήλεκτρικοϋ φορτίου, 93
 — κανονική, βλ. Gauss
- Poisson, 36 ff, 62
 — στατιστική 15 ff
 Kelvin, λόρδος, 359
 Kelvin, βλ. γέφυρα
 κεντροειδές, 20
 Kirchhoff, βλ. νόμοι
 κλίση, 89
 κόμβος, 245
 Coulomb, βλ. νόμος
 coulomb (μονάδα), 75
 κύκλωμα, 238
 — ίσοδύναμο, 238, 264 σ
 Christie, S.H., 348
- Laplace, βλ. έξίσωση
 Leclanchē, βλ. στοιχεΐο
 Leybold-Heraeus, 310, 311 σ
- μαγνητική έπαγωγή, 187
 μαγνητικό πεδίο. 187
 — άκτινικό, 192
 μέση άπόκλιση, 23
 μέσος, 19, 25, 60
 — στή διώνυμη κατανομή, 33
 — στήν κατανομή Poisson, 39
 μετασχηματισμός τριγώνου σέ
 άστέρα, 273 ff
 μετατόπιση, βλ. ήλεκτρική
 μετατόπιση
 μετατροπέας, 185
 μπαταρία, βλ. συστοιχία
 μονωτής, 103 ff, 169
 μόριο, 72



- Neumann, βλ. όριακές συνθήκες νόμος του
 — Gauss, 82
 — Gauss, διαφορική μορφή, 83, 148
 — Kirchhoff, 245 ff
 — Coulomb, 73 ff
 — Ohm, 165
 Norton, βλ. θεώρημα του
- όλοκληρωμένη πιθανότητα
 Gauss, 44-46, 64
 όξειδωση, 210
 όργανο κινητού πλαισίου, 284
 όριακές συνθήκες, 112, 149
 — άπαραίτητες, 113
 — Dirichlet, 113
 — Neumann, 113
 — σέ διηλεκτρικά, 135 ff
 ούδετερόνιο, 72
 Ohm, βλ. νόμος του
- πειραματικό σφάλμα, βλ. σφάλμα
 πεδίο, βλ. ήλεκτρικό πεδίο,
 μαγνητικό πεδίο
 πιστότητα, 4, 345
 πιθανό σφάλμα, 46, 63
 πλέον πιθανή τιμή, 21
 πλήρες εύρος στό μισό του
 μεγίστου, 43, 63
 πόλωση, βλ. ήλεκτρική πόλωση
 πόλωση ήλεκτρικού στοιχείου, 213
 πολύμετρο, 232
 ποτενσιόμετρο, 184, 369, 372 π, 387 α
 — φοιτητικό, 385 α, 386 α
 πρωτόνιο, 71
- πυκνότητα φορτίου, 77
 — στην έπιφάνεια άγωγοῦ, 108
- ρεῦμα, βλ. ήλεκτρικό ρεῦμα
 ροή ήλεκτρικού πεδίου, 81
 ροοστάτης, 184
- σημαντικά ψηφία, 10-15, 66
 — κατά την πρόσθεση καί
 άφαίρεση, 14
 — κατά τόν πολλαπλασιασμό
 καί διαίρεση, 13
 σταθερά άποσβέσεως, 291
 statvolt, 90
 στατιστική κατανομή, βλ. κατανομή
 στοιχείο, βλ. ήλεκτρικό στοιχείο
 σφαίρα του 'Απολλωνίου, 120
 σφάλμα, 6-9
 — άπαράδεκτα, 6
 — κατηγορίες, 6
 — μετάδοση 46 ff, 67
 — στή μέτρηση άντιστασεως, 204 σ
 — παραλλάξεως, 195
 — παρατηρήσεως, 7
 — πειραματικό, 1, 65
 — πιθανό, 46
 — τυχαῖο, 6, 8
 σύρμα, 177, 179
 συσσωρευτής, 212
 συστοιχία, 205, 212
- τροφοδοτικό ΣΡ, 76
 τυπική άπόκλιση, 23, 26, 61
 — διώνυμης κατανομής, 33
 — κατανομής Gauss, 42

