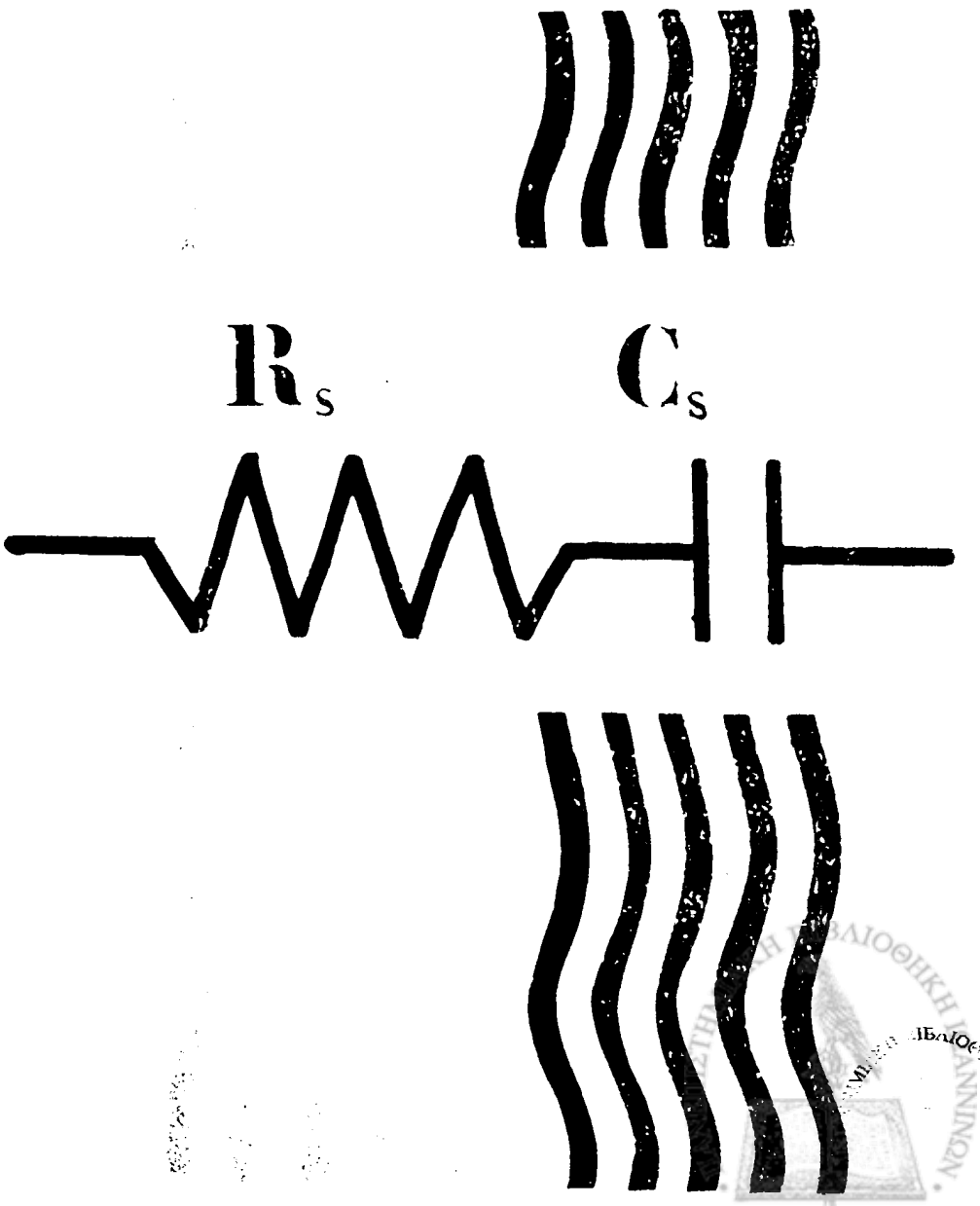
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Α. ΑΣΗΜΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

Ηλεκτρομαγνητική θεωρια και πρακτικη



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
026000038431

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΗ

Παναγιώτη Α. Ἀσημακόπουλου

Τό σύγγραμμα τοῦ καθηγητῆ Π. Ἀσημακόπουλου *Ἠλεκτρομαγνητική Θεωρία καί Πρακτική* πραγματεύεται τά φαινόμενα στό χῶρο τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ μέ ἔμφαση τόσο στή θεωρητική ἐμπέδωση ἑνός αὐτόνομου λογικοῦ οἰκοδομήματος δσο καί στήν ἐργαστηριακή πρακτική. Ὁ διπλός αὐτός προσανατολισμός ἐπιτρέπει τήν παράλληλη καί σέ ἐνιαῖο πλαίσιο κάλυψη τῶν ἀντίστοιχων θεωρητικῶν καί ἐργαστηριακῶν μαθημάτων στήν ἀνώτατη προπτυχιακή ἐκπαίδευση.

Ἡ ἐπαγωγική διεργασία πού ἀκολουθεῖται στή θεωρία τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ ἀποκλίνει σημαντικά ἀπό τήν παραδοσιακή μέθοδο παρουσιάσεως τοῦ θέματος. Ὡς θεμελιῶδες πειραματικό ἀποτέλεσμα εἰσάγεται ὁ «γενικευμένος» νόμος τοῦ Coulomb πού περιγράφει τή δύναμη μεταξύ δύο κινούμενων σημειακῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων. Μέ τή βοήθεια τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαλληλίας ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἐκφράσεως αὐτῆς ὁδηγεῖ στόν ὁρισμό τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἐνῶ ὁ δεύτερος στόν ὁρισμό τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἔτσι ἠλεκτρικά καί μαγνητικά φαινόμενα εἰσάγονται κατά τελείως παράλληλο τρόπο ἐνῶ ἡ στενή σύνδεση τῶν δύο πεδίων γίνεται ἐμφανής εὐθύς ἐξαρχῆς. Ἡ ἴδια διεργασία ἀκολουθεῖται γιά τήν εἰσαγωγή τῶν ἀντίστοιχων συναρτήσεων βαθμωτοῦ καί ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ. Ἡ σύνδεση ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου διερευνᾶται ἀκόμη μέ κάποια λεπτομέρεια στά πλαίσια τῆς εἰδικῆς θεωρίας τῆς σχετικότητας. Ἡ ἀτομική δομή καί στοιχεῖα τῆς κβαντικῆς θεωρίας χρησιμοποιοῦνται σέ δύο ξεχωριστά κεφάλαια γιά τή μελέτη τῶν ἠλεκτρικῶν καί μαγνητικῶν ἰδιοτήτων τῆς ὕλης. Ἡ ἠλεκτρική μετατόπιση **D**(**r**) καί τό πεδίο μαγνητίσεως **H**(**r**) πού εἰσάγονται γιά τό σκοπό αὐτό συνδέονται στό τελευταῖο κεφάλαιο, μέσω τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell, σέ μιά ὁλοκληρωμένη θεωρία τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ.

Στά ἐργαστηριακά κεφάλαια τοῦ συγγράμματος περιγράφονται τά σημαντικότερα δργανα καί μέθοδοι στή σύγχρονη τεχνολογία τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ. Ἰδιαίτερη ἔμφαση δίνεται σέ μεθόδους μετρήσεως ἠλεκτρικῶν καί μαγνητικῶν μεγεθῶν δπως ἐφαρμόζονται σήμερα στό ἐρευνητικό ἐργαστήριο καί στή βιομηχανία. Δύο ἀνεξάρτητα κεφάλαια εἶναι ἐπιπλέον ἀφιερωμένα στίς μεθόδους ἀναλύσεως κυκλωμάτων συνεχοῦς καί ἐναλλασσόμενου ρεύματος.

Τά 81 πειράματα πού συμπληρώνουν τό κυρίως κείμενο ἔχουν διαμορφωθεῖ μέ στόχο τήν ἐμπέδωση τῶν βασικῶν ἐννοιῶν τῆς θεωρίας καί τῶν μεθόδων πού χρησιμοποιοῦνται σήμερα στήν πρακτική τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ. Ὁ ἐκτενής κατάλογος τῶν πειραμάτων παρέχει τή δυνατότητα συγκροτήσεως ἑνός πλήρους ἐργαστηριακοῦ μαθήματος δύο ἐξαμήνων μέ σημαντική εὐελιξία ὡς πρός τή χροιά τοῦ μαθήματος, τά διαθέσιμα ὀργανα ἤ τό ἐπίπεδο τῶν διδασκομένων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δ Ω Ρ Ε Α
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ηλεκτρομαγνητικη θεωρια και πρακτικη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αρ. εισ.: 364 2004

Παναγιώτη Α. Ἀσημακόπουλου
καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων

ηλεκτρομαγνητικη θεωρια και πρακτικη

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1993

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Στην Αννα
με αγαπη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

εισαγωγη

Σέ πολύ λίγους κλάδους τῆς φυσικῆς τό θεωρητικό οἰκοδόμημα ἐμφανίζει τή λογική καί αἰσθητική συνέπεια πού ἀπαντᾶται στό χῶρο τῶν μακροσκοπικῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν φαινομένων. Εἶναι πράγματι ἐκπληκτικό ὅτι μέ ἀπαρχή μιά καί μόνο πειραματικά προσδιορισμένη σχέση, τόν «γενικευμένο» νόμο τοῦ Coulomb, πού περιγράφει τή δύναμη μεταξύ δύο κινούμενων σημειακῶν φορτίων καί μερικές ἐπίσης πειραματικά ἐξακριβωμένες γενικές ἀρχές σχετικά μέ τή συμπεριφορά τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου, εἶναι δυνατόν νά δημιουργηθεῖ μιά ὁλοκληρωμένη θεωρία πού περιγράφει σέ ἑνιαῖο πλαίσιο μιά τέτοια πληθώρα φαινομένων ἀπό τό στατικό ἠλεκτρισμό ὡς τό μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου ἀγωγοῦ καί ἀπό τό ὁρατό φῶς ὡς τήν ἀσύρματη τηλεπικοινωνία. Ἡ ἁπλή αὐτή συγκρότηση τοῦ θεωρητικοῦ σκελετοῦ δέν ἦταν πάντα ἐμφανής. Ὅπως, σύμφωνα μέ τό παλιό ρητό, ἡ Ρώμη δέν κτίστηκε μέσα σέ μιά μέρα, ἔτσι καί τό οἰκοδόμημα τῆς Κλασσικῆς Ἠλεκτρομαγνητικῆς Θεωρίας χρειάστηκε δυό περίπου αἰῶνες προσπάθεια καί ἐπιμονή. Στά διάφορα στάδια συγκροτήσεως τῆς θεωρίας πολλά φαινόμενα, πού σήμερα γνωρίζουμε ὅτι ἀποτελοῦν ἁπλά πορίσματα τῆς βασικῆς ἀλληλεπιδράσεως δύο φορτίων, ἐντάχθηκαν ὡς ἀνεξάρτητες πειραματικές παρατηρήσεις μέ μικρή συνοχή πρός τό ὅλο οἰκοδόμημα. Χαρακτηριστικά παραδείγματα στήν κατηγορία αὐτή εἶναι μιά πληθώρα «νόμων», ὅπως ὁ νόμος τοῦ Ampère, ὁ νόμος τῶν Biot καί Savart ἤ ὁ νόμος τοῦ Lenz. Ἡ ἴδια ἡ ἐνιαία φύση τῶν ἠλεκτρικῶν καί μαγνητικῶν φαινομένων ἀναγνω-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ρίστηκε πλήρως μόνο μετά τή διατύπωση τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell, οἱ ὁποῖες ἐπιπλέον ὁδήγησαν καί στό σημαντικότερο ἴσως ἀποτέλεσμα τῆς ὁλοκληρωμένης θεωρίας: τήν ἀνάδειξη τῆς ἡλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας.

Ἡ ἐξέλιξη τῆς φυσικῆς κατά τό πρῶτο ἥμισυ τοῦ εἰκοστοῦ αἰώνα ὄχι μόνο δέν ἀνέτρεψε τήν Κλασσική Ἠλεκτρομαγνητική Θεωρία ἀλλά τῆς προσέδωσε νέες διαστάσεις καί διαύγεια. Τό ἴδιο τό ἡλεκτρικό φορτίο ἀναδείχθηκε ὡς μιά ἀπό τίς βασικές ἰδιότητες τῶν δομικῶν λίθων τῆς ὕλης, ἐνῶ ἡ μή ἀνεύρεση στόν ὑποατομικό κόσμο ἄλλου εἴδους φορτίου (π.χ. τοῦ κατά καιρούς πιθανολογούμενου «μαγνητικοῦ») ἀπέδωσε ὅλα τά μαγνητικά φαινόμενα ἀποκλειστικά στήν κίνηση τοῦ ἡλεκτρικοῦ φορτίου. Παράλληλα ἡ Εἰδική Θεωρία τῆς Σχετικότητας ἔρριξε νέο φῶς στή διασύνδεση ἡλεκτρικῶν καί μαγνητικῶν φαινομένων μέσω τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός. Εἶναι τουλάχιστον παράδοξο ὅτι ἡ λογική διαύγεια καί οἰκονομία τῆς Κλασσικῆς Ἠλεκτρομαγνητικῆς Θεωρίας δέν ἀντικατοπτρίζεται πλήρως στά περισσότερα ἐκπαιδευτικά συγγράμματα πού πραγματεύονται τό θέμα. Στήν συντριπτική πλειοψηφία τῶν συγγραμμάτων πού γνωρίζω ὁ συγγραφέας δείχνει σχεδόν πάντα μιά τάση γιά προσήλωση στήν τεθλασμένη ὁδό τῆς ἱστορικῆς ἐξελίξεως, ἡ ὁποία συχνά ἐπισκιάζει μᾶλλον παρά ἀναδεικνύει τή συνοχή καί συνέπεια τοῦ οἰκοδομήματος. Ἠλεκτροστατικά φαινόμενα ἀναπτύσσονται παραδοσιακά μέ ἀπαρχή τήν ἱστορικά καθιερωμένη ἔκφραση τοῦ Coulomb γιά τήν ἀλληλεπίδραση δύο στατικῶν σημειακῶν φορτίων, πού μέ τή βοήθεια τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαλληλίας ὁδηγεῖ στίς ἔννοιες τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου καί δυναμικοῦ. Κατά τήν ἴδια παραδοσιακή πρακτική μαγνητικά φαινόμενα εἰσάγονται στή συνέχεια μέ κάποιον ἐκ πρώτης ὄψεως εὐριστικό ὁρισμό τῆς συναρτήσεως μαγνητικοῦ πεδίου $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Στίς περισσότερες περιπτώσεις δέν διευκρινίζεται ἄν τοῦτο εἶναι ἀποτέλεσμα πειραματικῆς παρατηρήσεως ἤ ἀποτελεῖ πρόταση πού ἀναμένει τή λογική της δικαίωση στά πορίσματα τῆς θεωρίας. Καί στίς δύο περιπτώσεις ὁ παραδοσιακός αὐτός χειρισμός τοῦ θέματος ἐμφανίζει σημαντικές ἀδυναμίες. Κατ' ἀρχήν εἶναι πολύ δύσκολο, ἄν ὄχι ἀδύνατο, νά διαμορφωθεῖ πείραμα πού ἐπιβεβαιώνει ἄμεσα τή συνάρτηση μαγνητικοῦ πεδίου χωρίς λογικά κυκλικούς ὁρισμούς καί ἀναφορά στό φυσικό μέγεθος τῆς δυνάμεως. Ἡ ἐναλλακτική ἄποψη τῆς μετέπειτα δικαιώσεως ἐξάλλου παρουσιάζει τήν ἀδυναμία ὅτι ἡ ἐπαλήθευση τῆς προτάσεως ἑτεροχρονίζεται σημαντικά μέχρι τή δυνατότητα ὑπολογισμοῦ ρεαλιστικῶν μαγνητικῶν πεδίων καί οὐσιαστικά μέχρι τή διατύπωση, ἐπίλυση καί ἔλεγχο τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ ἐπαγωγική διεργασία πού ἀκολουθεῖται κατά τήν ἀνάπτυξη τῆς Κλασσικῆς Ἠλεκτρομαγνητικῆς Θεωρίας στό παρόν σύγγραμμα ἀποκλίνει ριζικά ἀπό τήν ἱστορική ἐξέλιξη καί παραδοσιακή πρακτική. Τό ὅλο λογικό οἰκοδόμημα θεμελιώνεται μέ τήν πειραματικά παρατηρούμενη δύναμη $F_{2\to 1}$ πού ἐξασκεῖ ἕνα κινούμενο φορτίο q_1 πρός ἕνα δεύτερο κινούμενο φορτίο q_2

$$\mathbf{F}_{1-2} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} + k_m \frac{q_1 q_2 \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{21})}{r_{21}^3} \qquad \text{(E.1)}$$

ὅπου $\mathbf{u}_1$ καί $\mathbf{u}_2$ εἶναι οἱ στιγμιαῖες ταχύτητες τῶν δύο φορτίων, $r_{21} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ ἡ μεταξύ τους ἀπόσταση καί k_e, k_m δύο σταθερές (πού ἐξαρτῶνται ἀπό τίς μονάδες μετρήσεως) μέ πειραματικά παρατηρούμενο σταθερό λόγο

$$\frac{k_m}{k_e} = \frac{1}{c^2} \qquad \text{(E.2)}$$

Ἡ τελευταία πειραματική σχέση εἰσάγει ἐξ ὑπαρχῆς στή θεωρία τήν ταχύτητα τοῦ φωτός c. Ἄν καί ἱστορικά ἡ προηγούμενη σχέση δέν ἔχει προκύψει ἀπό συγκεκριμένο πείραμα εἶναι εὔκολο νά περιγράψουμε τήν πειραματική διαδικασία πού θά ὁδηγοῦσε στό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (E.1). Σύμφωνα μέ τήν πρακτική πού ἀκολουθεῖται σήμερα στήν ἔρευνα στοιχειωδῶν σωματίων τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (E.1) θά μποροῦσε π.χ. νά ἐπιβεβαιωθεῖ ἤ νά ἐξαχθεῖ ἀπό πειράματα σκεδάσεως δύο φορτισμένων σωματίων. Μέ ἀπαρχή τό Κεφάλαιο 2 ἡ ἐξ. (E.1) χρησιμοποιεῖται γιά τή μελέτη ἠλεκτροστατικῶν φαινομένων ὅπου συνεισφέρει μόνο ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἐκφράσεως. Μέ τή βοήθεια τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαλληλίας εἰσάγεται τό ἠλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ καί σέ ἕνα δεύτερο βῆμα λογικῆς ἀφαιρέσεως ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ $\varphi(\mathbf{r})$. Ἠλεκτροστατικά φαινόμενα πού προέρχονται ἀπό τήν πόλωση τῆς ὕλης μελετῶνται στό Κεφάλαιο 3, ὅπου ἐπιπλέον εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς ἐνεργείας τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου.

Ἡ συνεισφορά τοῦ δεύτερου ὅρου τῆς ἐξ. (E.1) μελετᾶται στό Κεφάλαιο 9. Μέ χρησιμοποίηση καί πάλι τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαλληλίας ὁ ὅρος αὐτός ὁδηγεῖ στόν ὁρισμό τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ἐνῶ ἡ ὅλη ἔκφραση μεταπίπτει στή γνωστή δύναμη Lorentz. Ὁ χειρισμός αὐτός παρουσιάζει τό σημαντικό πλεονέκτημα ὅτι εὐθύς ἐξ ἀρχῆς ἀναδεικνύεται ἡ κοινή προέλευση τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου ἐνῶ ἠλεκτρικά καί μαγνητικά φαινόμενα ἀναπτύσσονται κατά τελείως παράλληλο τρόπο. Ἡ στενή σύνδεση τῶν δύο πεδίων ἀναλύεται διεξοδικότερα στό τέλος τοῦ Κεφαλαίου 9 στά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

πλαίσια τῆς Εἰδικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας. Τέλος, ἡ ἴδια διασύνδεση ἀποκτᾶ νέες διαστάσεις μέ τήν εἰσαγωγή χρονικά μεταβαλλόμενων μαγνητικῶν πεδίων καί τή μελέτη ἐπαγωγικῶν φαινομένων στό Κεφάλαιο 11.

Τό σημαντικό πόρισμα πού ἀπορρέει ἀπό τήν ἐξ. (Ε.1), ὅτι ὅλα τά γνωστά σήμερα μαγνητικά φαινόμενα προέρχονται ἀπό τήν κίνηση ἠλεκτρικοῦ φορτίου θεμελειώνεται στό Κεφάλαιο 12 μέ ἐκτενή ἀνάλυση τῆς μικροσκοπικῆς εἰκόνας τῆς ὕλης. Χρησιμοποιώντας ὁρισμένες βασικές ἔννοιες τῆς κβαντικῆς θεωρίας περιγράφονται μέ κάποια λεπτομέρεια τά φαινόμενα τοῦ παραμαγνητισμοῦ, διαμαγνητισμοῦ καί σιδηρομαγνητισμοῦ. Ἄν καί ἡ ἔμφαση μέχρι τό σημεῖο αὐτό βρίσκεται στή στενή ἀλληλοσύνδεση μεταξύ ἠλεκτρικῶν καί μαγνητικῶν φαινομένων ἡ μελέτη τῶν μαγνητικῶν ἰδιοτήτων τῆς ὕλης ἀναδεικνύει τήν ἀπουσία μιᾶς συμμετρίας πού, ἄν καί δέν ἐπιβεβαιώνεται ἀπό τό πείραμα, θά μποροῦσε νά ἀναμένει κανείς ἀπό τή φύση. Ὅπως περιγράφεται στήν εἰσαγωγή τοῦ Κεφαλαίου 12, ἀπό τό φυσικό κόσμο ἀπουσιάζει τό «μαγνητικό» φορτίο, τό ὁποῖο, σέ ἀναλογία μέ τό ἠλεκτρικό, θά μποροῦσε σέ μιά τελείως συμμετρική θεωρία νά δημιουργεῖ μαγνητικό πεδίο ὅταν βρίσκεται ἐν στάσει καί ἠλεκτρικό πεδίο ὅταν κινεῖται.

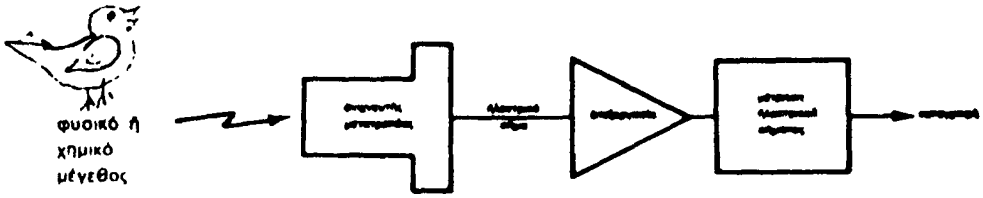
Ἡ ὁλοκλήρωση τῆς Κλασσικῆς Ἠλεκτρομαγνητικῆς Θεωρίας πραγματοποιεῖται στό Κεφάλαιο 16 μέ τήν εἰσαγωγή τοῦ ρεύματος μετατοπίσεως καί τή διατύπωση τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell. Ἄν καί ἀπό τό σημεῖο αὐτό ξεκινᾶ ἕνα ὁλόκληρο πεδίο τῆς φυσικῆς, ἰδιαίτερα μέ τήν ἐξερεύνηση τῶν ἐπιπτώσεων τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας, τό παρόν σύγγραμμα περιορίζεται στή διατύπωση καί διερεύνηση τῶν γενικῶν λύσεων γιά τό ἠλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο στίς ὁποῖες ὁδηγοῦν οἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell γιά ἕνα ἄπειρο ἤ ἡμιάπειρο ὑλικό μέσο. Τό σημεῖο αὐτό ἀποτελεῖ τήν ἀφετηρία ἑνός μεγάλου ἀριθμοῦ συγγραμμάτων στήν Ἑλληνική καί ξένη βιβλιογραφία μέ ἀντικείμενο τήν Ὀπτική καί γενικότερα τήν Κυματική.

Τό προηγούμενο πρόγραμμα παρουσιάσεως πιστεύω ὅτι συγκροτεῖ ἕνα πλῆρες θεωρητικό ὑπόβαθρο γιά τήν κατανόηση τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν φαινομένων, τουλάχιστον στό προπτυχιακό ἐπίπεδο. Ἡ ὕλη ὅμως πού ἀκολουθεῖ, ὅπως προδίδει καί ὁ γενικός τίτλος τοῦ βιβλίου, εἶναι ἰσότιμα κατανεμημένη μεταξύ θεωρίας καί πρακτικῆς τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ. Λόγω τῆς μεγάλης τους σημασίας στήν ἔρευνα, στή βιομηχανία, ἀλλά πολλές φορές καί στήν καθημερινή πρακτική, ἰδιαίτερη ἔμφαση δίνεται στή διεργασία τῶν ἠλεκτρικῶν μετρήσεων.

Εἶναι γεγονός, ὅτι ἡ πληθώρα τῶν μετρήσεων στή σύγχρονη ἔρευνα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί τεχνολογία όδηγεῖ τελικά στή μέτρηση ένός ήλεκτρικοῦ φυσικοῦ μεγέθους. Σέ πολύ λίγες περιπτώσεις (ή μέτρηση τῆς θερμοκρασίας μέ θερμόμετρο στήλης ὑδραργύρου ἔρχεται ἀμέσως στό νοῦ) πραγματοποιεῖται μέτρηση χωρίς νά παρεμβληθεῖ κάποια ἔννοια ἤ ὄργανο ἀπό τό πεδίο τοῦ ήλεκτρομαγνητισμοῦ. Ἀκριβεῖς μετρήσεις θερμοκρασίας ἀνάγονται συνήθως στή μέτρηση τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ πού ἀναπτύσσεται στά ἄκρα ένός θερμοζεύγους· μέτρηση τοῦ φωτισμοῦ ἀνάγεται στή μέτρηση τοῦ ήλεκτρικοῦ ρεύματος πού δημιουργεῖ ἕνα φωτοστοιχεῖο· ἡ κινητική ἐνέργεια τῶν προϊόντων μιᾶς πυρηνικῆς ἀντιδράσεως μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τό ήλεκτρικό φορτίο ἰονισμοῦ πού δημιουργεῖται σέ κάποιο ὑλικό μέσο. Παράδειγματα κατά τά ὁποῖα ἡ μέτρηση ένός φυσικοῦ ἤ χημικοῦ μεγέθους ἀνάγεται στή μέτρηση ένός ήλεκτρικοῦ μεγέθους μπορεῖ νά ἀναφέρει κανείς ἐσαεί. Σέ γενικές γραμμές μποροῦμε νά περιγράψουμε τή διεργασία τῶν περισσοτέρων σύγχρονων μετρήσεων σύμφωνα μέ τό ἑπόμενο διάγραμμα.



Ἄν καί μερικά ἀπό τά στάδια εἶναι δυνατόν νά παρακαμφθοῦν, μετρήσεις ἀρχίζουν συνήθως μέ τήν ἀνίχνευση καί μετατροπή τοῦ φυσικοῦ μεγέθους πού πρόκειται να προσδιοριστεῖ σέ **ήλεκτρικό σῆμα.** Τό φωτοστοιχεῖο, τό θερμοζεῦγος, τό πιεζοηλεκτρικό στοιχεῖο, εἶναι μερικά γνώριμα παραδείγματα **μετατροπέων.** Μέ τόν ὅρο *ήλεκτρικό σῆμα* θά ἐννοήσουμε κάθε ήλεκτρική ποσότητα ἤ μεταβολή ήλεκτρικῆς ποσότητας πού περιέχει πληροφορία. Σέ πολλές περιπτώσεις τό ήλεκτρικό σῆμα πού παράγεται ἀπό τόν μετατροπέα εἶναι ἀρκετά ἀσθενές ἤ γενικώτερα δύσχρηστο ὥστε νά χρειάζεται κάποια ἐπεξεργασία. Τό στάδιο αὐτό καλύπτει ὁ μεγάλος χῶρος τῆς ἐπιστήμης τῆς **ήλεκτρονικῆς.** Στό βιβλίο αὐτό θά ἀσχοληθοῦμε μέ τό τελευταῖο στάδιο τῆς διεργασίας ὅπου τό ἐπεξεργασμένο πλέον ήλεκτρικό σῆμα παραδίδει τήν πληροφορία πού μεταφέρει μέ τή μέτρηση ένός βασικοῦ ήλεκτρικοῦ μεγέθους. Τό Κεφάλαιο 5 ἐξετάζει διεξοδικά τό βασικότερο ὄργανο ήλεκτρικῶν μετρήσεων, τό ἐργαστηριακό ἀμπερόμετρο, καί τή χρήση του στή μέτρηση ήλεκτρικοῦ ρεύματος, δυναμικοῦ καί ἀντιστάσεως.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Οὐσιαστικά τό ἴδιο ὄργανο, στήν πιό ἐκλεπτυσμένη του μορφή, ὡς γαλβανόμετρο D'Arsonval ἤ βαλλιστικό γαλβανόμετρο, μελετᾶται διεξοδικότερα στό Κεφάλαιο 7. Ἡ ἐκτεταμένη αὐτή μελέτη τοῦ ὀργάνου κινητοῦ πλαισίου γίνεται σκόπιμα. Παρόλη τήν ἐπιδρομή τῶν ψηφιακῶν ὀργάνων στή σύγχρονη τεχνολογία, δέν πιστεύω ὅτι, τουλάχιστον στό προβλεπόμενο μέλλον, τά ὄργανα ἀποκλίσεως θά ἐκλείψουν. Ὅπως τό ψηφιακό χρονόμετρο δέν πρόκειται νά ἀντικαταστήσει το κοινό ρολόϊ τοῦ τοίχου μέ ὠροδείκτη καί λεπτοδείκτη, δέν μπορῶ νά φανταστῶ ἕνα πίνακα ἐλέγχου σταθμοῦ παραγωγῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ἤ ἕνα θάλαμο διακυβερνήσεως ἀεροσκάφους μέ ἀποκλειστικά ψηφιακές ἐνδείξεις. Καί τοῦτο λόγω τῆς ἀνθρώπινης δυνατότητας ἤ ἀδυναμίας ἀντιλήψεως. Στίς περισσότερες περιπτώσεις ἡ πληροφορία πού ἀπαιτεῖται ἀπό ἕνα ὄργανο ἐλέγχου εἶναι πληροφορία τάξης μεγέθους. Ὁ ἄνθρωπος ἔχει τή δυνατότητα νά ἐξάγει μιά τέτοια πληροφορία ἀπό ἕνα ὄργανο ἀποκλίσεως σχεδόν ὑποσυνείδητα μέ μιά ἁπλή ματιά. Σέ ἕνα πίνακα ἐλέγχου μέ 50 ὄργανα ἀποκλίσεως, τό ὄργανο μέ τόν «δείκτη στό κόκκινο» γίνεται εὔκολα ἀντιληπτό. Ἀντίθετα, ἕνα ψηφιακό ὄργανο ἀπαιτεῖ ἰδιαίτερη προσοχή καί συνειδητή ἀνάγνωση τῆς πληροφορίας. Ἡ διεξοδική ἑπομένως μελέτη τοῦ ὀργάνου κινητοῦ πλαισίου σέ ἕνα ἐργαστηριακό μάθημα ἠλεκτρομαγνητισμοῦ πιστεύω ὅτι εἶναι ἐπιβεβλημένη.

Μιά ἰδιαίτερα χρήσιμη μέθοδος πού βρίσκει μεγάλη ἐκμετάλευση στό χῶρο τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ, ἡ μέθοδος μηδενισμοῦ, ἐξετάζεται ἐπίσης διεξοδικά μέ ἀπαρχή τό Κεφάλαιο 8. Ἡ διαπίστωση ὅτι «τό μηδέν μπορεῖ νά μετρηθεῖ μέ μεγαλύτερη ἀκρίβεια ἀπό ὁποιοδήποτε ἄλλο ἀριθμό» εἶναι βέβαια πολύ παλιά. Βρίσκει τήν πρώτη της ἐφαρμογή στήν ἐπινόηση τοῦ ζυγοῦ γιά τή μέτρηση μάζας. Ἡ μέθοδος ὅμως βρίσκει τή μεγαλύτερη ἀξιοποίησή της στο χῶρο τῆς τεχνολογίας τοῦ ἠλεκτρισμοῦ. Γέφυρες συνεχοῦς ρεύματος καί ποτενσιομετρικές διατάξεις ἐξετάζονται στό Κεφάλαιο 8. Μέθοδοι μηδενισμοῦ στό ἐναλασσόμενο ρεῦμα καί ἡ μέτρηση χωρητικότητας, συντελεστῶν αὐτεπαγωγῆς, ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς καί συχνότητας, μελετῶνται στό Κεφάλαιο 15.

Τό Κεφάλαιο 10 ξεφεύγει λίγο ἀπό τόν «κλασσικό» χῶρο τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν μετρήσεων καί εἰσδύει στά χωράφια τῆς παλαιότερα θεωρούμενης ἠλεκτρονικῆς. Στό κεφάλαιο αὐτό ἐξετάζεται ἡ κίνηση φορτισμένων σωματίων στό κενό μέ ἐφαρμογές τόν καθοδικό σωλήνα, τήν δίοδη καί τήν τρίοδη λυχνία. Θεώρησα ἀπαραίτητο νά συμπεριλάβω τά θέματα αὐτά, ἀφενός ἐπειδή ἐμπεδώνουν βασικές ἔννοιες πού καλύπτει ἡ ἀντίστοιχη ὕλη τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ. Ἀφετέρου ὁ καθοδικός παλμογράφος ἀποτελεῖ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σήμερα ένα όργανο τοῦ Ἐργαστηρίου Ἠλεκτρομαγνητικῶν Μετρήσεων ἐξίσου βασικό ὅσο καί τό γαλβανόμετρο.

Καθώς ἡ ὕλη τοῦ βιβλίου μοιράζεται ἐξίσου μεταξύ θεωρίας καί πρακτικῆς τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ ἡ πρόκριση ἑνός συστήματος μονάδων γιά τή μέτρηση φυσικῶν μεγεθῶν καί τήν ἀναγραφή τῶν ἐξισώσεων δέν εἶναι προφανής. Συγγράμματα μέ ἔμφαση στή θεωρία χρησιμοποιοῦν παραδοσιακά τό σύστημα CGS Gauss ἐνῶ στήν τεχνολογία τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ τό Διεθνές Σύστημα (SI) βρίσκει σχεδόν καθολική ἀποδοχή. Γιά τίς ἀνάγκες τοῦ παρόντος συγγράμματος ἐπελέγη ἕνα μικτό σύστημα ὅπου κάθε σχέση γράφεται στό σύστημα CGS Gauss ἐνῶ οἱ ἐπιπλέον παράγοντες πού μετατρέπουν τή σχέση στό σύστημα SI τοποθετοῦνται σέ ἀγγύλες. Ἡ πρακτική αὐτή ἀκολουθεῖται στά καθαρῶς «θεωρητικά» κεφάλαια ἐνῶ σέ κεφάλαια πού ἀσχολοῦνται μέ μεθόδους μετρήσεως χρησιμοποιεῖται ἀποκλειστικά τό Διεθνές Σύστημα. Ὁρισμένα ἀκόμη συστήματα μονάδων μετρήσεων πού χρησιμοποιοῦνται στό χῶρο τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ περιγράφονται στό Παράρτημα Α.

Τά Πειράματα πού παρεμβάλλονται στό κυρίως κείμενο ἔχουν σχεδιαστεῖ μέ σκοπό τήν ἐμπέδωση τῶν βασικῶν ἐννοιῶν τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ, καί τήν ἐξοικείωση τοῦ φοιτητῆ μέ τίς μεθόδους μετρήσεως, ὅπως πραγματοποιοῦνται σήμερα στό ἐρευνητικό ἐργαστήριο καί στή βιομηχανία. Οἱ ὁδηγίες πού παρέχονται σέ κάθε πείραμα εἶναι ἀρκετές ὥστε ὁ φοιτητής νά συγκεντρώσει τά ὄργανα καί νά τό ἐκτελέσει χωρίς βοήθεια ἀπό τό διδακτικό προσωπικό. Τά ὄργανα καί ἐξαρτήματα πού ἀπαιτοῦνται γιά κάθε πείραμα δίνονται συγκεντρωτικά στό Παράρτημα Γ. Ἡ πειραματική μεθοδολογία συμπληρώνεται ἀκόμη ἀπό τρία ἐπικουρικά κεφάλαια. Τό Κεφάλαιο 1 περιλαμβάνει στοιχεῖα ἀπό τή στατιστική ἀνάλυση πού κατά τή γνώμη μου ἀπαιτοῦνται γιά τόν χειρισμό των δεδομένων. Τά Κεφάλαια 6 καί 14 περιλαμβάνουν στοιχεῖα ἀπό τή θεωρία ἀναλύσεως κυκλωμάτων συνεχοῦς καί ἐναλασσόμενου ρεύματος.

Ὅπως κάθε ἐκπαιδευτικό σύγγραμμα τό βιβλίο αὐτό γράφηκε ἔχοντας κατά νοῦ ἕνα συγκεκριμένο ἀκροατήριο καί συγκεκριμένους στόχους. Ἀπευθύνεται κατ' ἀρχάς σέ φοιτητές τοῦ δεύτερου ἤ τρίτου ἔτους πτυχιακῶν σπουδῶν, οἱ ὁποῖοι παρακολουθοῦν τά βασικά μαθήματα τοῦ Ἠλεκτρομαγνητισμοῦ, καί τῶν Ἐργαστηρίων Ἠλεκτρομαγνητισμοῦ, ὅπως διδάσκονται σήμερα στίς Ἑλληνικές Πανεπιστημιακές καί Πολυτεχνικές Σχολές. Ἡ ὕλη πού περιέχεται στίς ἑπόμενες σελίδες μπορεῖ νά καλύψει τό βασικό θεωρητικό μάθημα Ἠλεκτρομαγνητισμοῦ σέ δύο ἑξάμηνα, ἐνῶ τά 81 συ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

νολικά πειράματα παρέχουν άρκετή εύελιξία στόν διδάσκοντα ὥστε νά διαμορφώσει τό άντίστοιχο έργαστηριακό πρόγραμμα δύο έξαμήνων σύμφωνα μέ τή χροιά πού θέλει νά δώσει στό μάθημα, τό έπίπεδο τῶν διδασκομένων ἤ τά ὄργανα πού διαθέτει τό έργαστήριο.

Στή διαμόρφωση τῆς ὕλης καί Ιδιαίτερα τῶν πειραμάτων εἶχα πολλαπλή βοήθεια. Κατ' άρχήν ὑπῆρξε άνεκτίμητη ἡ άλληλεπίδραση μέ τούς φοιτητές τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων πού κατά τήν τελευταία έπταετία παρακολουθοῦν τό άντίστοιχο έργαστηριακό μάθημα. Θά ἤθελα νά εὐχαριστήσω τόν Δρα Νῖκο Μπατάκη γιά τή βοήθεια πού μοῦ παρέσχε κατά τή θεωρητική έπεξεργασία όρισμένων θεμάτων, Ιδιαίτερα στήν άνάλυση τῆς Παραγράφου 9-7. Ἐξαιρετικά έποικοδομητική ὑπῆρξη άκόμη ἡ συνεργασία κατά τή διαμόρφωση τῶν πειραμάτων μέ τή Δρα Ἀθηνᾶ Πάσκου καί τόν κ. Κώστα Ἰωαννίδη. Στήν ὑλοποίηση καί ἔλεγχο τῶν πειραμάτων στό έργαστήριο εἶχα τεχνική βοήθεια άπό τούς κ.κ. Κώστα Ἀλεξανδρίδη καί Νίκο Τάτση, τούς όποίους εὐχαριστῶ θερμά. Εὐχαριστίες τέλος έκφράζονται πρός τήν κα Ροζίτα Ἀλεξίου-Ράπτη, γιά τίς πολλαπλές δακτυλογραφήσεις καί έπαναδακτυλογραφήσεις τοῦ κειμένου στά διάφορα στάδια πρίν άπό τήν τελική του μορφή.

Τό βιβλίο αὐτό δέν θά εἶχε γραφεῖ ἄν τά τελευταῖα έπτά χρόνια δέν εἶχα κλέψει ἕνα μεγάλο μέρος τοῦ χρόνου πού δικαιωματικά άνήκει στήν οἰκογένειά μου. Γιά τό λόγο αὐτό τό άφιερώνω μέ άγάπη στήν κόρη μου Ἄννα.

Π.Α.Α.

Ἰωάννινα, Ἰανουάριος 1984

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

περιεχομενα

Εἰσαγωγή i

Περιεχόμενα ix

Περιεχόμενα Ἐργαστηριακῶν Ἀσκήσεων xvi

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Μέτρηση καί Πειραματικό Σφάλμα 1

1-1. Ἀκρίβεια, Πιστότητα καί Πειραματικό Σφάλμα 3
1-2. Σημαντικά Ψηφία 7
1-3. Ἡ Στατιστική Κατανομή 11
1-4. Στατιστικές Παράμετροι τοῦ Θεωρητικοῦ Πληθυσμοῦ..... 14
1-5. Ἐκτίμηση τῶν Στατιστικῶν Παραμέτρων..... 18
1-6. Ἡ Διώνυμη Κατανομή..... 21
1-7. Ἡ Κατανομή Poisson..... 27
1-8. Ἡ Κατανομή Gauss ἤ Κανονική Κατανομή..... 31
1-9. Μετάδοση τοῦ Πειραματικοῦ Σφάλματος..... 35
1-10. Ἐκτίμηση τοῦ Μέσου καί τοῦ Πειραματικοῦ Σφάλματος.. 40
1-11. Ἡ Μέτρηση ἑνός Φυσικοῦ Μεγέθους..... 45
ΑΣΚΗΣΕΙΣ..... 52

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Ἠλεκτρικά Φαινόμενα 55

2-1. Ὁ Νόμος τοῦ Coulomb 56
2-2. Τό Ἠλεκτρικό Πεδίο 60
2-3. Ροή τοῦ Ἠλεκτρικοῦ Πεδίου καί ὁ Νόμος τοῦ Gauss 63
2-4. Ἠλεκτροστατική Ἐνέργεια Στατικῶν Φορτίων 64
2-5. Ἡ Συνάρτηση Δυναμικοῦ 67
2-6. Ἀλληλεπίδραση Ἐλεύθερων Στατικῶν Φορτίων 71
2-7. Ἰσοδυναμικές Ἐπιφάνειες καί Δυναμικές Γραμμές 75
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 80

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Ἠλεκτρικές Ἰδιότητες τῆς Ὕλης 83

3-1. Ἀγωγοί σέ Ἠλεκτροστατικά Συστήματα 84
3-2. Ἠλεκτροστατικό Πεδίο Ἐλεύθερων Φορτίων. Οἱ ἐξισώσεις Poisson καί Laplace. Συνοριακές Συνθῆκες.. 89
3-3. Ἠλεκτροστατικά Εἴδωλα 93
3-4. Διηλεκτρικά Ὑλικά 99
3-5. Ἠλεκτρική Μετατόπιση, Ἠλεκτρική Ἐπιδεκτικότητα καί Διηλεκτρική Σταθερά 105
3-6. Συνοριακές Συνθῆκες καί ἡ Ἐξίσωση Poisson σέ Διηλεκτρικά Ὑλικά 109
3-7. Ἐνέργεια τοῦ Ἠλεκτροστατικοῦ Πεδίου 122
3-8. Χωρητικότητα καί Πυκνωτές 126
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 129

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Ἠλεκτρικό Ρεῦμα 138

4-1. Πυκνότητα Ρεύματος 138
4-2. Ἡ Ἐξίσωση Συνεχείας 143
4-3. Ἀγωγιμότητα, Ἀντίσταση καί ὁ Νόμος τοῦ Ohm 145
4-4. Ἡ Ὡμική Ἀντίσταση 154
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 162

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Βασικές Μετρήσεις Συνεχοῦς Ρεύματος..... 165

5-1. Τό Ἐργαστηριακό Ἀμπερόμετρο..... 165
5-2. Τό Ἐργαστηριακό Βολτόμετρο..... 175
5-3. Μέτρηση Ἀντιστάσεως μέ Ἀμπερόμετρο καί Βολτόμετρο 176
5-4. Ἠλεκτρεγερτική Δύναμη καί Διαφορά Δυναμικοῦ..... 181
5-5. Ἠλεκτρικά Στοιχεῖα..... 184
5-6. Ὠφέλιμη Ἰσχή Ἠλεκτρικοῦ Στοιχείου..... 194
5-7. Μέτρηση ΗΕΔ Ἠλεκτρικοῦ Στοιχείου..... 195
5-8. Τό Ἐργαστηριακό Ὡμόμετρο..... 197
5-9. Τό Ἐργαστηριακό Πολύμετρο..... 203
ΑΣΚΗΣΕΙΣ..... 205

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. Κυκλώματα Συνεχοῦς Ρεύματος..... 208

6-1. Βασικές Ἀρχές..... 209
6-2. Ἰδανική ΗΕΔ..... 210
6-3. Οἱ Νόμοι τοῦ Kirchhoff..... 213
6-4. Ρεῦμα Βρόχου..... 221
6-5. Τό Θεώρημα τῆς Ἐπαλληλίας..... 224
6-6. Ἰσοδύναμη ΗΕΔ καί Ἰσοδύναμη Ἀντίσταση..... 227
6-7. Τό Θεώρημα τοῦ Thévenin..... 230
6-8. Τό Θεώρημα τοῦ Norton..... 233
6-9. Μετασχηματισμός Τριγώνου σέ Ἀστέρα..... 234
ΑΣΚΗΣΕΙΣ..... 238

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7. Τό Γαλβανόμετρο D'Arsonval..... 243

7-1. Εὐαισθησία τοῦ Γαλβανομέτρου..... 245
7-2. Κίνηση τοῦ Γαλβανομέτρου..... 248
7-3. Διακλάδωση τοῦ Γαλβανομέτρου..... 256
7-4. Προστασία τοῦ Γαλβανομέτρου..... 262
7-5. Τό Γαλβανόμετρο D'Arsonval ὡς Ἀμπερόμετρο, Βολτόμετρο καί Ὡμόμετρο..... 266
7-6. Τό Βαλλιστικό Γαλβανόμετρο..... 272
7-7. Μέτρηση Ἀντιστάσεως καί Χωρητικότητας μέ τό Βαλλιστικό Γαλβανόμετρο..... 279
ΑΣΚΗΣΕΙΣ..... 288

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Μετρήσεις Συνεχοῦς Ρεύματος μέ Μεθόδους Μηδενισμοῦ 292

8-1. Ἡ Γέφυρα Wheatstone 294
8-2. Πειραματικό Σφάλμα στή Μέτρηση Ἀντιστάσεως 298
8-3. Μέτρηση Πολύ Μικρῶν Ἀντιστάσεων. Ἡ Διπλή Γέφυρα Kelvin 302
8-4. Μέτρηση Χωρητικότητας μέ Μεθόδους Μηδενισμοῦ ΣΡ.. 308
8-5. Πρότυπα Ἠλεκτρικά Στοιχεῖα 313
8-6. Ποτενσιόμετρα 316
8-7. Βαθμονόμηση Ὀργάνων Ἀποκλίσεως 323
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 327

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9. Μαγνητικά Φαινόμενα 333

9-1. Ἀλληλεπίδραση δύο Κινούμενων Σημειακῶν Φορτίων..... 334
9-2. Μαγνητικό Πεδίο καί ἡ Δύναμη Lorentz 338
9-3. Διαφορικές Ἐξισώσεις τοῦ Μαγνητικοῦ Πεδίου καί ὁ Νόμος τοῦ Ampère 344
9-4. Ἀνυσματικό Δυναμικό 350
9-5. Μαγνητικό Πεδίο Κυκλώματος σέ Μεγάλες Ἀποστάσεις. Μαγνητική Διπολική Ροπή 355
9-6. Δύναμη καί Ροπή σέ Μαγνητικό Δίπολο 362
9-7. Ἠλεκτρικό καί Μαγνητικό Πεδίο. Θέμα Ἀπόψεως 367
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 375

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10. Κίνηση Ἠλεκτρικοῦ Φορτίου σέ Στατικό Ἠλεκτρομαγνητικό Πεδίο 379

10-1. Ἡ Καθοδική Λυχνία 381
10-2. Κίνηση Φορτισμένων Σωματίων σέ Ὁμογενές Στατικό Μαγνητικό Πεδίο 391
10-3. Κίνηση Φορτισμένων Σωματίων σέ Ὁμογενές Στατικό Ἠλεκτρικό καί Μαγνητικό Πεδίο 398
10-4. Ὁ Καθοδικός Παλμογράφος 405
10-5. Ἡ Δίοδη Λυχνία 420
10-6. Ἡ Τρίοδη Λυχνία 434

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

10-7. Ἠλεκτρική Ἀγωγιμότητα τῶν Στερεῶν σέ Μαγνητικό Πεδίο. Τό Φαινόμενο Hall 443
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 451

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11. Ἐπαγωγικά Φαινόμενα 454

11-1. Ὁ Νόμος τῆς Ἐπαγωγῆς 454
11-2. Μέτρηση τοῦ Μαγνητικοῦ Πεδίου μέ Βαλλιστικό Γαλβανόμετρο 461
11-3. ΗΕΔ καί ἡ Σύνδεση Ἠλεκτρικοῦ καί Μαγνητικοῦ Πεδίου 464
11-4. Ὁ Νόμος τοῦ Lenz 468
11-5. Αὐτεπαγωγή 470
11-6. Ἀμοιβαία Ἐπαγωγή 475
11-7. Ἐνέργεια τοῦ Μαγνητικοῦ Πεδίου 479
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 484

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12. Μαγνητικές Ἰδιότητες τῆς Ὕλης 488

12-1. Μαγνητική Διπολική Ροπή τῶν Δομικῶν Λίθων τῆς Ὕλης 492
12-2. Διαμαγνητισμός καί Παραμαγνητισμός 499
12-3. Μαγνήτιση καί τό Πεδίο Μαγνητίσεως 505
12-4. Μαγνητική Διαπερατότητα καί Μαγνητική Ἐπιδεκτικότητα 509
12-5. Σιδηρομαγνητισμός 514
12-6. Τό Μαγνητικό Κύκλωμα 531
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 537

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13. Μεταβατικά Ρεύματα 541

13-1. Τό Κύκλωμα R-C 543
13-2. Τό Κύκλωμα R-L 549
13-3. Τό Ἰδανικό Κύκλωμα C-L 552
13-4. Κύκλωμα R-C-L σέ Σειρά 554
13-5. Διακοπή τῆς Καταστάσεως Ἰσορροπίας σέ Κύκλωμα R-C-L 560
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 564

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14. Ἐναλλασσόμενο Ρεῦμα 568

14-1. Ἰδανικά Ἐξαρτήματα R, C, L στό EP 569
14-2. Ἰσχή EP 574
14-3. Ἀνυσματική Ἀναπαράσταση Μεγεθῶν EP 577
14-4. Ἀναπαράσταση Μεγεθῶν EP μέ Μιγαδικούς Ἀριθμούς... 584
14-5. Φίλτρα Συχνότητας 591
14-6. Ρεαλιστικά Ἐξαρτήματα στο EP 593
14-7. Ἀμοιβαία Ἐπαγωγή σέ Κυκλώματα EP. Μετασχηματιστές 603
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 615

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15. Βασικές Μετρήσεις Ἐναλλασσόμενου Ρεύματος .. 623

15-1. Τό Ἠλεκτροδυναμόμετρο 623
15-2. Μέτρηση Ἰσχῆς. Τό Βαττόμετρο 628
15-3. Γέφυρες EP 636
15-4. Μέτρηση Χωρητικότητας 639
15-5. Μέτρηση Αὐτεπαγωγῆς 648
15-6. Μέτρηση Ἀμοιβαίας Ἐπαγωγῆς 660
15-7. Μέτρηση Συχνότητας 665
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 669

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16. Οἱ Ἐξισώσεις τοῦ Maxwell 674

16-1. Ρεῦμα Μετατοπίσεως 675
16-2. Βαθμωτό καί Ἀνυσματικό Δυναμικό 678
16-3. Ἐπίπεδα Κύματα σέ Διηλεκτρικά Ὑλικά 682
16-4. Πόλωση τῶν Ἠλεκτρομαγνητικῶν Κυμάτων 687
16-5. Ροή Ἐνεργείας καί τό Ἄνυσμα Poynting 689
16-6. Ἠλεκτρομαγνητική Ἀκτινοβολία 693
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 697

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. Διαστάσεις Φυσικῶν Μεγεθῶν καί Μονάδες Μετρήσεως 701

Α-1. Θεμελιώδη Φυσικά Μεγέθη καί Συστήματα Μονάδων Μετρήσεως 702

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Α-2. Ἐπέκταση τῶν Συστημάτων CGS καί MKS στό Χῶρο τοῦ Ἠλεκτρομαγνητισμοῦ 704
Α-3. Μακροσκοπικά Πεδία 710
Α-4. Μετασχηματισμός Ἐξισώσεων καί Μονάδων 713
Α-5. Πρότυπα Μονάδων Μετρήσεως καί Ἀπόλυτες Μονάδες.. 714
Α-6. Τό Διεθνές Σύστημα Μονάδων Μετρήσεως (Système Internaitonal) 719

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. Ἡ Ἐργαστηριακή Ἔκθεση 732

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ. Ὄργανα καί Ἐξαρτήματα τοῦ Ἐργαστηρίου Ἠλεκτρικῶν καί Μαγνητικῶν Μετρήσεων..... 735

Εὐρετήριο..... 747

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

περιεχομενα εργαστηριακων ασκησεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 1

1-1. Ἐκτίμηση πειραματικοῦ σφάλματος 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 55

2-1. Ἠλεκτρικό πεδίο σημειακῶν φορτίων 77

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 83

3-1. Ἀγωγοί σέ ἠλεκτρικό πεδίο 88

3-2. Ἠλεκτρικό πεδίο ἠλεκτροστατικοῦ φακοῦ 92

3-3. Ἠλεκτροστατικά εἴδωλα σημειακοῦ φορτίου στό ἐσωτερικό κοιλότητας γειωμένου ἀγωγοῦ 95

3-4. Ἠλεκτροστατικά εἴδωλα σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ 98

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 138

4-1. Εἰδική ἀντίσταση μεταλλικοῦ ἀγωγοῦ 147

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 165

5-1. Ἕνα πρόχειρο ἀμπερόμετρο 166

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5-2. Μέτρηση μικρῆς άντιστάσεως μέ άμπερόμετρο καί βολτόμετρο 176
5-3. Μέτρηση μεγάλης άντιστάσεως μέ άμπερόμετρο καί βολτόμετρο 178
5-4. ΗΕΔ καί τερματικό δυναμικό ήλεκτρικοῦ στοιχείου 183
5-5. Ὠφέλιμη ἰσχή ήλεκτρικοῦ στοιχείου 195
5-6. Μέτρηση τῆς ΗΕΔ ήλεκτρικοῦ στοιχείου 197
5-7. Τό βασικό κύκλωμα ὠμομέτρου 199

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 243

7-1. Βαθμονόμηση καί εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου 247
7-2. Ἀντίσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως τοῦ γαλβανομέτρου 255
7-3. Ἡ διακλάδωση Ayrton 260
7-4. Εὐαισθησία γαλβανομέτρου μέ διακλάδωση Ayrton 261
7-5. Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval ὡς άμπερόμετρο 267
7-6. Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval ὡς βολτόμετρο 269
7-7. Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval ὡς ὠμόμετρο 271
7-8. Βαθμονόμηση καί εὐαισθησία τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου 277
7-9. Μέτρηση ὑψηλῆς άντιστάσεως μέ τό βαλλιστικό γαλβανόμετρο (Ι. Φόρτιση πυκνωτῆ) 282
7-10. Ἀντίσταση διαρροῆς μονωτικοῦ ὑλικοῦ σέ ὁμοαξονικό καλώδιο 283
7-11. Μέτρηση ὑψηλῆς άντιστάσεως μέ τό βαλλιστικό γαλβανόμετρο (ΙΙ. Ἐκφόρτιση πυκνωτῆ) 286
7-12. Μέτρηση χωρητικότητας μέ τό βαλλιστικό γαλβανόμετρο. 287

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 292

8-1. Ἡ γέφυρα Wheatstone 296
8-2. Θερμικός συντελεστής άντιστάσεως 301
8-3. Ἀντίσταση τεσσάρων άκροδεκτῶν 302
8-4. Ἡ γέφυρα Kelvin 306
8-5. Μέτρηση χωρητικότητας μέ γέφυρα ΣΡ 310
8-6. Μέτρηση χωρητικότητας μέ τή γέφυρα Gott 312
8-7. Τό βασικό κύκλωμα ποτενσιομέτρου 319
8-8. Μέτρηση τῆς ΗΕΔ θερμοζεύγους 320

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

8-9. Βαθμονόμηση βολτομέτρου 324
8-10. Βαθμονόμηση ἀμπερομέτρου 326

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 379

10-1. Τό ἠλεκτρονικό πυροβόλο καθοδικῆς λυχνίας 383
10-2. Ἡ καθοδική λυχνία 388
10-3. Κίνηση φορτισμένου σωματίου σέ μαγνητικό πεδίο 396
10-4. Μέτρηση τοῦ γήινου μαγνητικοῦ πεδίου μέ τήν καθοδική λυχνία 397
10-5. Μέτρηση τοῦ λόγου e/m μέ τήν καθοδική λυχνία 404
10-6. Ὁ καθοδικός παλμογράφος 409
10-7. Σχήματα Lissajous 417
10-8. Χαρακτηριστική καμπύλη διόδου στήν ὀθόνη τοῦ καθοδικοῦ παλμογράφου 419
10-9. Ἡ δίοδη λυχνία 425
10-10. Δίοδη λυχνία μέ κυλινδρική γεωμετρία. Ἡ συνθήκη μαγνητρονίου 432
10-11. Ἡ τρίοδη λυχνία 440
10-12. Τό ἠλεκτρονικό βολτόμετρο 442
10-13. Τό φαινόμενο Hall 447
10-14. Τό μαγνητόμετρο Hall 449

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 454

11-1. Ὁ νόμος τῆς ἐπαγωγῆς 456
11-2. Μέτρηση μαγνητικῆς ροῆς 463
11-3. Ἀμοιβαία ἐπαγωγή δύο πηνίων 477

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12 488

12-1. Μέτρηση τῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας στό κενό 511
12-2. Προσδιορισμός καμπύλης ὑστερήσεως μέ βαλλιστικό γαλβανόμετρο 516
12-3. Προσδιορισμός καμπύλης ὑστερήσεως μέ καθοδικό παλμογράφο 521
12-4. Μέτρηση τοῦ πεδίου ἀπομαγνητίσεως 525
12-5. Τό φαινόμενο Barkhausen 529

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 541

13-1. Κύκλωμα R-C μέ μεγάλη σταθερά χρόνου 547
13-2. Κύκλωμα R-C μέ μικρή σταθερά χρόνου 548
13-3. Κύκλωμα R-L 551
13-4. Κύκλωμα R-C-L σέ σειρά 558
13-5. Διακοπή κυκλώματος R-L 564

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14 568

14-1. Μέτρηση χωρητικῆς καί ἐπαγωγικῆς ἀντιστάσεως 573
14-2. Σύνθετη ἀντίσταση κυκλώματος R-C-L σέ σειρά 582
14-3. Σύνθετη ἀντίσταση κυκλώματος R-C-L σέ παράλληλη σύνδεση 590
14-4. Φίλτρα συχνότητας 592
14-5. Μετασχηματιστής μέ σιδηρομαγνητικό πυρήνα 611

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15 623

15-1. Ἀπόκριση τοῦ ἠλεκτροδυναμομέτρου στό ΣΡ 625
15-2. Βαθμονόμηση τοῦ ἠλεκτροδυναμομέτρου 627
15-3. Μέτρηση ἰσχῆς ΣΡ μέ τό ἠλεκτροδυναμόμετρο 630
15-4. Μέτρηση ἰσχῆς ΕΡ μέ τό ἠλεκτροδυναμόμετρο 635
15-5. Μέτρηση χωρητικότητας μέ τή γέφυρα Wien 641
15-6. Γείωση Wagner σέ γέφυρα Wien 643
15-7. Μέτρηση χωρητικότητας μέ τή γέφυρα Shering 646
15-8. Μέτρηση αὐτεπαγωγῆς μέ σύγκριση πρός πρότυπο ἐξάρτημα 649
15-9. Μέτρηση αὐτεπαγωγῆς μέ τή γέφυρα Hay 652
15-10. Μέτρηση αὐτεπαγωγῆς μέ τή γέφυρα Maxwell 655
15-11. Μέτρηση αὐτεπαγωγῆς μέ τή γέφυρα Anderson 658
15-12. Μέτρηση ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς μέ τή γέφυρα Carey Foster 664
15-13. Μέτρηση συχνότητας μέ τή γέφυρα Wien 667

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

μετρηση και πειραματικο σφαλμα

Τό άποτέλεσμα κάθε μετρήσεως έκφράζεται άπό ένα ζεῦγος άριθμῶν (x, σ). Ὁ πρῶτος άριθμός προέρχεται άπό τήν άπλή σύγκριση τοῦ φυσικοῦ μεγέθους πού θέλουμε νά μετρήσουμε μέ τή μονάδα μετρήσεως πού ἐχουμε ἐπιλέξει γι' αὐτό τό μέγεθος. Ὁ δεύτερος δίνει ένα μέτρο γιά τήν ποιότητα τῆς μετρήσεως. Ἡ πληροφορία πού περιέχει ὁ δεύτερος αὐτός άριθμός σ, πού θά όνομάσουμε **πειραματικό σφάλμα**, εἶναι ἐξίσου σημαντική μέ τήν πληροφορία πού περιέχει ὁ πρῶτος. Δέν ἔχει π.χ. νόημα νά άναφέρουμε άπλῶς ὅτι ἡ μάζα τοῦ ἠλεκτρονίου μετρήθηκε σέ κάποιο πείραμα καί βρέθηκε ἴση μέ 9.1×10^{-28} g. Ὁ ἐπιστήμονας πού δέχεται τήν πληροφορία θέλει νά ξέρει σέ ποιό βαθμό μπορεῖ νά ἐμπιστευθεῖ τήν τιμή αὐτή καί νά τή χρησιμοποιήσει σέ μετέπειτα ὑπολογισμούς. Ποιά εἶναι π.χ. ἡ πιθανότητα ὥστε ἡ «πραγματική» τιμή τῆς μάζας τοῦ ἠλεκτρονίου νά εἶναι 9.3×10^{-28} g ἤ 8.9×10^{-28} g; Τήν ποιοτική αὐτή πληροφορία περιέχει τό πειραματικό σφάλμα σ πού συνήθως συνοδεύει τό άριθμητικό άποτέλεσμα τῆς μετρήσεως x στό συμβολισμό

$$x \pm \sigma. \qquad (1.1)$$

Ἄν καί μποροῦμε νά δοῦμε τήν ἔννοια τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος άπό διάφορες ἰσοδύναμες ὀπτικές γωνίες, ἡ ἄποψη πού υἱοθετεῖται συνήθως βασίζεται στή διασπορά τῶν τιμῶν x πού προκύπτουν άπό μιά σειρά ὁμοιων μετρήσεων τοῦ συγκεκριμένου φυσικοῦ μεγέθους. Ἡ διεργασία αὐτή μπορεῖ νά διευκρινιστεῖ καλύτερα μέ ένα πείραμα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ 1-1 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλετε νά μετρήσετε τό μῆκος ℓ ἑνός νήματος χρησιμοποιώντας τό νόμο τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{1.2}$$

ὅπου $g = 981$ cm/sec^2 εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας καί T ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς. Δημιουργεῖστε ἕνα ἐκκρεμές δένοντας ἕνα βαρύδι στό ἕνα ἄκρο τοῦ νήματος καί ἀναρτώντας τό ἄλλο ἄκρο σέ ἕνα σταθερό σημεῖο. Χρονομετρεῖστε τήν περίοδο τοῦ ἐκκρεμοῦς γιά μικρές ταλαντώσεις (ἴσως βρῆτε πιό εὔκολο νά χρονομετρήσετε 10 ἤ 20 περιόδους καί νά διαιρέσετε τό ἀποτέλεσμα μέ τόν ἀριθμό τῶν περιόδων). Ἐπαναλάβετε τή μέτρηση τουλάχιστον 30 φορές καταγράφοντας τά ἀποτελέσματα σέ κατάλληλο πίνακα. Γιά κάθε μέτρηση τῆς περιόδου ὑπολογίστε τώρα τό ἀντίστοιχο μῆκος τοῦ νήματος, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (1.2) ἀπό τήν ἔκφραση

$$\ell = \frac{gT^2}{4\pi^2}. \tag{1.3}$$

Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματά σας σέ γραφική παράσταση ὑπό μορφή ἱστογράμματος. Προσδιορίστε τή μέση τιμή (μέσον ὅρο) τῶν μετρήσεών σας καί σημειῶστε την στό ἱστόγραμμα. Γύρω ἀπό τή μέση αὐτή τιμή προσδιορίστε τήν περιοχή πού περιέχει τά 50% τῶν μετρήσεων. Μέ ἄλλα λόγια προσδιορίστε τόν ἀριθμό σ_ℓ ἔτσι ὥστε, ἄν ℓ εἶναι ἡ μέση τιμή τῶν ἀποτελεσμάτων σας, τά 50% τῶν μετρήσεων βρίσκονται μεταξύ τῶν τιμῶν $\ell - \sigma_\ell$ καί $\ell + \sigma_\ell$.

Ἡ τελευταία διαδικασία περιέχει μιά μέθοδο γιά τήν ἐξαγωγή τῶν δύο ἀριθμῶν τῆς ἐξ. (1.1). Ἡ μέση τιμή ℓ εἶναι ὁ πλέον ἀντιπροσωπευτικός ἀριθμός πού μποροῦμε νά δώσουμε γιά τό μῆκος τοῦ νήματος ἐνῶ ὁ ἀριθμός σ_ℓ ἀντικατοπτρίζει τήν ποιότητα τῆς μετρήσεως. Εἶναι πολύ πιθανό ὅτι ἄν ἐπαναλάβουμε τή μέτρηση μιά ἀκόμη φορά τό ἀποτέλεσμα θά ἔχει διάφορη τιμή ἀπό τή μέση τιμή ℓ. Ἀπό τόν ἀριθμό ὅμως σ_ℓ πού προσδιορίσαμε μέ τήν προηγούμενη διαδικασία θά μπορούσαμε νά ποῦμε ὅτι ἡ νέα μέτρηση ἔχει πιθανότητα 50% νά βρίσκεται μεταξύ τῶν τιμῶν $\ell - \sigma_\ell$ καί $\ell + \sigma_\ell$.

Στό κεφάλαιο αὐτό θά κάνουμε μιά γρήγορη ἀνασκόπιση γύρω ἀπό τίς μεθόδους προσδιορισμοῦ τῶν τιμῶν τῆς ἐξ. (1.1) πού χαρακτηρίζουν κάθε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μέτρηση. Οἱ τιμές αὐτές μπορεῖ νά προέρχονται ἀπό μιά σειρά μετρήσεων ἤ ἀπό μιά μοναδική μέτρηση. Ἄν καί ἀρκετές φορές θά παραβλέψουμε τή μαθηματική αὐστηρότητα θά ἐπιμείνουμε ἀρκετά στήν ἀκριβή στατιστική ἔννοια κάθε παραμέτρου.

1-1 Ἀκρίβεια, Πιστότητα καί Πειραματικό Σφάλμα

Στήν Ἑλληνική γλῶσσα ἡ λέξη **ἀκρίβεια** χρησιμοποιεῖται χωρίς διάκριση γιά τήν ἀπόδοση δύο διαφορετικῶν ἐννοιῶν. Λέμε π.χ. ὅτι ἕνας ἐργαστηριακός ζυγός μετράει μάζα *μέ ἀκρίβεια χιλιοστοῦ τοῦ γραμμαρίου*. Ἄλλοτε πάλι ρωτᾶμε ποιά εἶναι ἡ *ἀκριβής ὥρα*. Μέ λίγη σκέψη γίνεται φανερό ὅτι ἡ ἰδιότητα τῆς μετρήσεως στήν ὁποία ἀναφέρεται καθεμιά ἀπό τίς δύο παραπάνω φράσεις εἶναι διαφορετική. Στήν πρώτη περίπτωση ἡ λέξη *ἀκρίβεια* ἀναφέρεται στή **διακριτική ἱκανότητα** τῆς μετρήσεως, δηλαδή στό πόσο στενά εἶναι τά ὅρια μέσα στά ὁποῖα μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἡ τιμή τοῦ μεγέθους πού μετρᾶται. Στή δεύτερη, ἡ ἴδια λέξη ἀναφέρεται στήν **πιστότητα** τῆς μετρήσεως, δηλαδή στό πόσο κοντά στήν «πραγματική» τιμή τοῦ μεγέθους πού μετρᾶται βρίσκεται ἡ τιμή πού προσδιορίζει ἡ μέτρηση. Στή συνέχεια θά χρησιμοποιήσουμε τόν ὅρο **ἀκρίβεια** ἀποκλειστικά μέ τήν πρώτη του ἔννοια καί θά εἰσάγουμε τόν ὅρο **πιστότητα** γιά τή δεύτερη. Ἴσως εἶναι χρήσιμο νά τονιστεῖ ὅτι οἱ δύο ἰδιότητες εἶναι γενικά ἀνεξάρτητες. Μιά μέτρηση μπορεῖ νά εἶναι ἀκριβής ἀλλά ἡ τιμή πού προσδιορίζει νά βρίσκεται μακριά ἀπό τήν «πραγματική» τιμή τοῦ μεγέθους πού μετρᾶται. Γυρίζοντας στό παράδειγμα τοῦ ζυγοῦ, εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἀκρίβεια τοῦ ζυγοῦ εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό πόσο «σωστό» εἶναι τό ἀποτέλεσμα τῆς ζυγήσεως. Ἄν π.χ. χρησιμοποιηθοῦν ἐλαττωματικά σταθμά, τό ἀποτέλεσμα μπορεῖ πάλι νά δοθεῖ μέ ἀκρίβεια χιλιοστοῦ τοῦ γραμμαρίου ἀλλά ἡ τιμή τῆς μάζας πού θά προσδιορίσει ἡ μέτρηση βρίσκεται μακρυά ἀπό τήν «πραγματική» μάζα τοῦ ἀντικειμένου. Τό ἀντίθετο μπορεῖ νά συμβεῖ στό δεύτερο παράδειγμα. Ἄν τό ρολόϊ πού μετράει τό χρόνο δέν διαθέτει δευτερολεπτοδείκτη, μπορεῖ νά δείχνει τήν «πραγματική» ὥρα, ἀλλά μέ πενιχρή ἀκρίβεια μέσα στά ὅρια τοῦ ἑνός πρώτου λεπτοῦ. Ὁ ἀναγνώστης ἔχει ἴσως διακρίνει ὅτι ἡ ἀκρίβεια μιᾶς μετρήσεως ἀφορᾶ κυρίως στή δεύτερη παράμετρο τῆς ἐξ. (1.1) ἐνῶ ἡ πιστότητα ἀντανακλᾶται τόσο στήν πρώτη ὅσο καί στή δεύτερη. Τή στενή αὐτή σχέση θά ἐξετάσουμε στή συνέχεια.

Ἐπιστρέφοντας στό θέμα τῆς ὁρολογίας, θά περιορίσουμε τόν ὅρο **διακριτική ἱκανότητα** ἀποκλειστικά στήν ἀξιολόγιση ὀργάνων μετρήσεως. Μέ τόν τρόπο αὐτό γιά μιά μοναδική μέτρηση πού πραγματοποιεῖται ἀπό ἕ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

να συγκεκριμένο όργανο, ή διακριτική Ικανότητα άποτελεῖ τή μέγιστη άκρίβεια μέ τήν όποία μπορεῖ νά πραγματοποιηθεῖ ή μέτρηση. Θά διακρίνουμε άκόμη τήν άκρίβεια καί τή διακριτική Ικανότητα σέ **άπόλυτη** καί **σχετική**. Ή **άπόλυτη άκρίβεια** μιᾶς μετρήσεως (ή **άπόλυτη διακριτική Ικανότητα** ένός όργάνου) έκφράζεται στίς ἴδιες μονάδες πού χρησιμοποιοῦνται γιά τό μέγεθος πού μετρᾶται (στήν περίπτωση τῆς ζυγήσεως σέ g). Ή **σχετική άκρίβεια** έκφράζει τήν ἴδια ἰδιότητα σέ ποσοστιαῖες μονάδες σέ σχέση μέ τήν άπόλυτη τιμή πού προσδιορίζει ή μέτρηση. Ό ζυγός πού μπορεῖ νά προσδιορίσει τή μάζα ένός άντικειμένου 10 g μέ άπόλυτη διακριτική Ικανότητα 0.001 g διαθέτει σχετική διακριτική Ικανότητα† 10^{-4} ή 0.01%.

Εἶναι βέβαιο ὅτι καμμιά μέτρηση δέν μπορεῖ νά πραγματοποιηθεῖ μέ άπόλυτη πιστότητα ἤ άπόλυτη άκρίβεια. Κάθε μέτρηση περιέχει σφάλματα παρόλη τήν προσοχή καί τόν κόπο πού μπορεῖ νά ἔχουν καταβληθεῖ γιά τή διεξαγωγή της. Ἐξ όρισμοῦ ή μέτρηση συνεπάγεται σύγκριση πρός ἕνα πρότυπο καί, ὅπως στό παράδειγμα τοῦ ζυγοῦ πού άναφέρθηκε προηγουμένως, τό πρότυπο μπορεῖ νά άποτελέσει πηγή σφάλματος. Σφάλματα άκόμη μπορεῖ νά διεισδύσουν κατά τή διεργασία τῆς συγκρίσεως εἴτε άπό τόν παρατηρητή εἴτε άπό τό περιβάλλον. Πολλά άπό τά σφάλματα αὐτά εἶναι δυνατόν νά έξαλειφθοῦν ἄν καταβληθεῖ ό άπαιτούμενος χρόνος, προσοχή καί δαπάνη. Ή άξιολόγιση βέβαια τῆς προσπάθειας καί δαπάνης πού πρέπει νά καταβληθεῖ γιά μιά συγκεκριμένη μέτρηση εἶναι ἄλλο θέμα. Ό ἔλεγχος τῶν διαστάσεων ένός ἐμβόλου μηχανῆς ἐσωτερικῆς καύσεως άπαιτεῖ κατά τήν παραγωγή χρησιμοποίηση μικρομετρικῶν μεθόδων καί όπτικῶν διατάξεων. Ἀντίθετα ή μέτρηση τῶν διαστάσεων ένός τραπεζιοῦ μέ σκοπό νά άγοραστεῖ ἕνα τραπεζομάντηλο πού θά τό καλύπτει μπορεῖ νά γίνει κάλιστα μέ ἕνα κοινό χάρακα. Γενικά μιά μέτρηση δέν μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ ὡς «καλή» μέ μόνο κριτήριο τήν πιστότητα καί τήν άκρίβεια, άλλά μέ ἐπιπλέον κριτήριο τήν Ικανοποίηση τοῦ σκοποῦ γιά τόν όποῖο ἔγινε ή μέτρηση σέ σχέση μέ τήν προσπάθεια καί δαπάνη πού καταβλήθηκε.

Εἶναι άρκετά χρήσιμο νά ταξινομήσουμε τά διάφορα εἴδη σφαλμάτων πού μπορεῖ νά άνακύψουν σέ μιά μέτρηση. Μέ βάση τήν προέλευση καί τήν εὐκολία μέ τήν όποία μποροῦν νά έξαλειφθοῦν εἶναι δυνατόν νά κατατάξουμε τά πειραματικά σφάλματα σέ τρεῖς μεγάλες κατηγορίες:

---

† Συχνά, ἰδίως σέ κύκλους μηχανικῶν, ή σχετική διακριτική Ικανότητα έκφράζεται ὡς κλάσμα μέ τή φράση «ἕνα στά δέκα χιλιάδες».

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1. **Ἀπαράδεκτα σφάλματα**
2. **Συστηματικά σφάλματα**
3. **Τυχαῖα σφάλματα.**

Στήν πρώτη κατηγορία ἀνήκουν τά σφάλματα πού ὀφείλονται σέ ἔλλειψη προσοχῆς ἀπό μέρους τοῦ παρατηρητῆ, σέ λανθασμένο χειρισμό τῶν ὀργάνων μετρήσεως ἤ σέ ἀνώμαλες συνθῆκες τοῦ περιβάλλοντος. Τά σφάλματα αὐτά καλύπτουν ὅλο τό φάσμα ἀπό λανθασμένη ἀνάγνωση τῆς ἐνδείξεως ἑνός ὀργάνου, λάθη κατά τή διεξαγωγή ἀριθμητικῶν πράξεων μέχρι κάποια ἀνώμαλη πτώση στό δίκτυο τῆς πόλης. Εὐτυχῶς παρόμοια σφάλματα δίνουν συνήθως ἀποτελέσματα πού ἀπέχουν πολύ ἀπό τήν ἀναμενόμενη τιμή καί ἡ παρουσία τους εἶναι εὔκολο νά ἐντοπιστεῖ. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ μόνη θεραπεία εἶναι ἡ ἐπανάληψη τῆς μετρήσεως.

Στή δεύτερη κατηγορία ἀνήκουν τά σφάλματα πού κατά κύριο λόγο ἐπηρεάζουν τήν πιστότητα μιᾶς μετρήσεως χωρίς νά μεταβάλουν αἰσθητά τήν ἀκρίβεια. Τά συστηματικά σφάλματα μποροῦν νά γίνουν περισσότερο κατανοητά ἄν τά ὑποδιαιρέσουμε σέ τρεῖς μικρότερες κατηγορίες ἀνάλογα μέ τήν προέλευσή τους.

α. **Σφάλματα τῶν ὀργάνων μετρήσεως,** εἶναι ἐκεῖνα πού προέρχονται ἀπό κακή λειτουργία ἤ κακή βαθμονόμηση τῶν ὀργάνων. Ἤδη ἀναφέρθηκε ἡ περίπτωση ἑνός ζυγοῦ μέ ἐλαττωματικά σταθμά. Σέ ἠλεκτρικές μετρήσεις, ἡ ἐξασθένηση τοῦ ἠλεκτρικοῦ στοιχείου ἑνός ὀργάνου μετρήσεως, ἤ ἡ πτώση τῆς τάσης τοῦ δικτύου εἶναι δυνατόν νά δώσουν ἐνδείξεις τοῦ ὀργάνου πού ὑπολείπονται ἀπό τήν πραγματική τιμή τοῦ μεγέθους.

β. **Σφάλματα πού ὀφείλονται σέ ἐξωτερικές συνθῆκες,** εἶναι μιά δεύτερη κατηγορία συστηματικῶν σφαλμάτων πού ἀναφέρεται στήν ἐπίδραση τοῦ περιβάλλοντος τῆς μετρήσεως. Τά σφάλματα αὐτά μπορεῖ νά ὀφείλονται στήν ἐπίδραση τῆς θερμοκρασίας, τῆς ὑγρασίας, τῆς βαρομετρικῆς πιέσεως ἤ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς γῆς πάνω στά ὄργανα μετρήσεως ἤ στό μέγεθος πού μετρᾶται. Ὡς προφανές παράδειγμα τῆς κατηγορίας αὐτῆς μπορεῖ νά ἀναφερθεῖ ἡ μέτρηση μήκους σέ θερμοκρασία περιβάλλοντος 35 °C μέ ἕνα μεταλλικό χάρακα ὁ ὁποῖος ἔχει βαθμονομηθεῖ σέ θερμοκρασία 25 °C.

γ. **Σφάλματα παρατηρήσεως,** εἶναι τέλος μιά τρίτη κατηγορία συστηματικῶν σφαλμάτων πού ὀφείλονται στόν ἀνθρώπινο παράγοντα. Εἶναι δυνατόν ἕνας παρατηρητής νά ἔχει τήν τάση νά διαβάζει τήν ἔνδειξη ἑνός ὀργάνου λίγο ψηλότερα ἤ λίγο χαμηλότερα. Σέ μετρήσεις χρόνου ἕνας ἄλλος νευρικός παρατηρητής μπορεῖ νά ἀναμένει τό γεγονός καί νά σταματᾶ τό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χρονόμετρο λίγο νωρίτερα. Ὡρισμένα εἴδη μετρήσεων εἶναι περισσότερο εὐαίσθητα στόν ἀνθρώπινο παράγοντα ἀπό ἄλλα. Στίς περιπτώσεις αὐτές, ἡ ἔκταση τοῦ συστηματικοῦ σφάλματος μπορεῖ νά ἐκτιμηθεῖ ἄν διάφοροι παρατηρητές ἐπαναλάβουν ἀνεξάρτητα τήν παρατήρηση καί συγκριθοῦν τά ἀποτελέσματα.

Τά συστηματικά σφάλματα δέν εἶναι πάντα εὔκολο νά ἀναγνωριστοῦν στά ἀποτελέσματα μιᾶς μετρήσεως καί ἡ στατιστική ἀνάλυση πολύ λίγο βοηθάει στήν ἀποκατάστασή τους. Κύριο χαρακτηριστικό τῆς γενικῆς αὐτῆς κατηγορίας σφαλμάτων εἶναι ὅτι τό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως μετατοπίζεται συνήθως συστηματικά πρός ὑψηλότερες ἤ χαμηλότερες τιμές. Στίς περιπτώσεις αὐτές ὅπου ἡ πηγή τοῦ σφάλματος εἶναι γνωστή, τό σφάλμα μπορεῖ νά ἀποκατασταθεῖ μέ κατάλληλη διόρθωση τοῦ ἀποτελέσματος. Σέ ἄλλες περιπτώσεις ἡ ἀβεβαιότητα πού προέρχεται ἀπό τυχόν συστηματικά σφάλματα μπορεῖ νά συμπεριληφθεῖ μέ κατάλληλη αὔξηση τοῦ ὅλου πειραματικοῦ σφάλματος σ τῆς ἐξ. (1.1).

Στήν τελευταία γενική κατηγορία σφαλμάτων, μέ τήν ὁποία θά ἀσχοληθοῦμε κατά κύριο λόγο στό κεφάλαιο αὐτό, θά κατατάξουμε τά τυχαῖα σφάλματα. Μέ τόν ὅρο αὐτό ἐννοοῦμε τά σφάλματα πού ὀφείλονται σέ ἄγνωστους παράγοντες. Μποροῦμε νά τά θεωρήσουμε ὡς τό σφάλμα πού παραμένει ἀφοῦ μέ ἀρκετή προσοχή καί προσπάθεια ἐξαλείψουμε ὅλα τά ἀπαράδεκτα καί συστηματικά σφάλματα. Τοὐλάχιστον ἐμπειρικά ξέρουμε ὅτι τέτοια σφάλματα ὑπάρχουν σέ κάθε μέτρηση. Ὅσο καί ἄν καταβληθεῖ π.χ. προσπάθεια στό Πείραμα 1-1 γιά τήν ἐξάλειψη τῶν σφαλμάτων παρατηρήσεως (πού στήν περίπτωση αὐτή ἀποτελοῦν τήν κυριώτερη πηγή συστηματικῶν σφαλμάτων) εἶναι ἐξαιρετικά ἀπίθανο δύο διαδοχικές χρονομετρήσεις τῆς περιόδου τοῦ ἐκκρεμοῦς νά δώσουν ἀκριβῶς τήν ἴδια τιμή. Παρόλα αὐτά τό σφάλμα πού παραμένει μετά τήν ἐξάλειψη ὅλων τῶν σφαλμάτων μέ γνωστή προέλευση ἐμφανίζει μιά χαρακτηριστική συμπεριφορά: Οἱ τιμές πού προκύπτουν ἀπό ἕνα ἀριθμό ὅμοιων μετρήσεων συσσωρεύονται γύρω ἀπό μιά κεντρική τιμή μέ μιά χαρακτηριστική **κατανομή.**

Ἡ προέλευση τῆς κατανομῆς αὐτῆς θά πρέπει νά ἀναζητηθεῖ σέ ἕνα πλῆθος ἀπό αἴτια πού ἐπηρεάζουν τή μέτρηση κατά ἄγνωστο σέ μᾶς τρόπο. Εἶναι δυνατό μερικά ἀπό τά αἴτια αὐτά νά εἶναι τά ἴδια μέ ἐκεῖνα πού ἀναφέραμε στίς δύο προηγούμενες κατηγορίες σφαλμάτων. Ὁ τρόπος ὅμως μέ τόν ὁποῖο ἐπηρεάζουν τή μέτρηση δέν εἶναι προφανής. Καθένα ἀπό τά αἴτια αὐτά συνεισφέρει ἕνα μικρό σφάλμα μέ ἀποτέλεσμα ἡ τιμή στήν ὁποία καταλήγει ἡ μέτρηση νά διαφέρει ἀπό τήν πραγματική τιμή τοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μεγέθους. Ἄν ἡ διακριτική ἱκανότητα τῶν ὀργάνων μας εἶναι ἀρκετά καλή περιμένουμε ὅτι ἡ ἀπόκλιση μεταξύ τῆς πραγματικῆς τιμῆς ἀπό τό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως θά εἶναι τίς περισσότερες φορές μικρή. Ἄν τά πολυάριθμα αἴτια πού ἐπηρεάζουν τή μέτρηση δροῦν ἀνεξάρτητα (καί δέν ἔχουμε κανένα λόγο νά πιστεύουμε ὅτι συνομοτοῦν μέ σκοπό νά δώσουν λάθος ἀποτέλεσμα) κάθε ἐπιμέρους σφάλμα ἔχει τήν ἴδια πιθανότητα νά ἐπηρεάσει τό ἀποτέλεσμα κατά μιά θετική ἤ ἀρνητική τιμή. Στίς περισσότερες ἑπομένως περιπτώσεις προβλέπουμε μιά ἀλληλοεξουδετέρωση τῶν ἐπιμέρους σφαλμάτων μέ ἀποτέλεσμα τό ὁλικό τυχαῖο σφάλμα νά εἶναι μικρό.

Ἡ φύση τῶν τυχαίων σφαλμάτων πού περιγράψαμε ὑπαγορεύει τήν ποσοτική τους ἀνάλυση μέσω τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων. Εἶναι βέβαιο ὅτι οἱ φυσικές διεργασίες πού ὑπεισέρχονται σέ μιά μέτρηση δέν ταυτίζονται ἀπαραίτητα μέ τίς ἁπλές προϋποθέσεις πού ὁδηγοῦν στίς γνωστές κατανομές τῶν καθαρά τυχαίων γεγονότων τῆς μαθηματικῆς θεωρίας πιθανοτήτων. Παρόλα αὐτά, στίς περισσότερες περιπτώσεις ἡ ἀντιστοιχία εἶναι ἀρκετά καλή ὥστε οἱ μαθηματικές ἐκφράσεις νά δίνουν μέ καλή προσέγγιση τίς παραμέτρους τῆς ἐξ. (1.1). Στή συνέχεια θά χρησιμοποιήσουμε τή στατιστική ἀνάλυση γιά τό χειρισμό τῶν τυχαίων σφαλμάτων ἀφοῦ προηγουμένως ἔχουμε βεβαιωθεῖ ὅτι ἔχουν ἀποκατασταθεῖ ὅλα τά συστηματικά σφάλματα.

1-2 Σημαντικά Ψηφία

Ἡ ἀκρίβεια μιᾶς μετρήσεως ἀντανακλᾶται κατά κύριο λόγο στό πλῆθος τῶν ψηφίων πού περιέχονται στό ἀποτέλεσμα. Εἶναι φανερό ὅτι μιά μέτρηση πού προσδιορίζει τό μῆκος τοῦ νήματος στό Πείραμα 1-1 ὡς 2.15 m εἶναι λιγώτερο ἀκριβής ἀπό μιά μέτρηση πού τό προσδιορίζει ὡς 2.153 m. Στήν πρώτη περίπτωση τό ἀποτέλεσμα δηλώνει ὅτι ἡ μέτρηση δέν ἔχει τή δυνατότητα νά προσδιορίσει τό μῆκος σέ στενώτερα ὅρια ἀπό 1 cm. Τό πραγματικό μῆκος τοῦ νήματος μπορεῖ κάλλιστα νά βρίσκεται μεταξύ τῶν ὁρίων 2.151 m καί 2.159 m. Ἀντίθετα στή δεύτερη περίπτωση ἡ μέτρηση προσδιορίζει τό μῆκος τοῦ νήματος μέσα σέ ὅρια τοῦ 1 mm, τό ἀποτέλεσμα ὅμως δηλώνει ὅτι ἀδυνατεῖ νά τό προσδιορίσει μέσα σέ στενώτερα ὅρια — π.χ. μέ ἀκρίβεια 0.1 mm.

Γενικά στό ἀποτέλεσμα μιᾶς μετρήσεως, ἡ ἐμπιστοσύνη σέ καθένα ἀπό τά ψηφία φθήνει σταδιακά καθώς προχωροῦμε ἀπό τά ἀριστερά πρός τά δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ. Στήν προηγούμενη π.χ. μέτρηση πού ἔδωσε ὡς ἀποτέλεσμα τόν ἀριθμό 2.15 m, εἴμαστε ἀρκετά βέβαιοι γιά τό ψηφίο «2». Μέ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἄλλα λόγια εἴμαστε σίγουροι ὅτι τό νῆμα εἶναι μεγαλύτερο ἀπό 1 m καί μικρότερο ἀπό 3 m. Λιγώτερο βέβαιο συγκριτικά, ἀλλά ἀκόμη ἀρκετά ἀξιόπιστο εἶναι τό ψηφίο «1». Ὅπως ἀναφέρεται τό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως θεωροῦμε μᾶλλον ἀπίθανο ὅτι τό πραγματικό μῆκος τοῦ νήματος εἶναι μικρότερο ἀπό 2.0 m ἤ μεγαλύτερο ἀπό 2.2 m. Στό ψηφίο «5» τρέφουμε συγκριτικά τή μικρότερη ἐμπιστοσύνη. Εἶναι δυνατόν (ἄν ὄχι πιθανόν) τό πραγματικό μῆκος τοῦ νήματος νά εἶναι 2.16 m, 2.17 m ἤ 2.14 m. Πέρα ἀπό τό ψηφίο «5», ὁποιοδήποτε ψηφίο καί ἄν προσθέσουμε δέν ἔχει καμμιά φυσική σημασία. Μέ τίς πληροφορίες πού διαθέτουμε ἀπό τή συγκεκριμένη μέτρηση οἱ ἀριθμοί 2.15*1* m, 2.15*304* m καί 2.15*0000* m ἔχουν τήν ἴδια πιθανότητα νά ἀντιπροσωπεύουν τό ἀποτέλεσμα μιᾶς ἀκριβέστερης μελλοντικῆς μετρήσεως. Μποροῦμε νά συνοψίσουμε τήν ὁρολογία καί τούς συμβατικούς κανόνες γύρω ἀπό **τά σημαντικά ψηφία** τοῦ ἀποτελέσματος μιᾶς μετρήσεως ὡς ἑξῆς:

1. Τό ἀριστερότερο μή μηδενικό ψηφίο, πού θά ὀνομάσουμε **πλέον σημαντικό ψηφίο,** εἶναι τό περισσότερο ἀξιόπιστο ψηφίο τοῦ ἀποτελέσματος.
2. Ἐάν ὁ ἀριθμός εἶναι ἀκέραιος, τό δεξιότερο μή μηδενικό ψηφίο, πού σέ ἀντιδιαστολή θά ὀνομάσουμε **λιγώτερο ἤ τελευταῖο σημαντικό ψηφίο,** περιέχει τή μεγαλύτερη ἀβεβαιότητα.
3. Ἐάν ὁ ἀριθμός εἶναι δεκαδικός, τό δεξιότερο ψηφίο εἶναι τό λιγώτερο σημαντικό, ἀκόμη καί ὅταν εἶναι τό ψηφίο «0».
4. Ὅλα τά ψηφία μεταξύ τοῦ πλέον σημαντικοῦ καί λιγώτερο σημαντικοῦ θεωροῦνται **σημαντικά ψηφία,** μέ σταδιακά αὐξανόμενη ἀξιοπιστία ἀπό τά δεξιά πρός τά ἀριστερά.

Πρέπει νά σημειωθεῖ ὅτι τό πλῆθος τῶν σημαντικῶν ψηφίων ἑνός ἀριθμητικοῦ ἀποτελέσματος εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τή θέση τῆς ὑποδιαστολῆς. Π.χ. οἱ ἀριθμοί

3214 3214000 3.214 2010. 20.10 0.002010

ἔχουν ὅλοι τέσσερα† σημαντικά ψηφία.

---

† Σύμφωνα μέ τόν πρῶτο κανόνα ὁ ἀριθμός 3214000 θεωρεῖται ὅτι ἔχει τέσσερα σημαντικά ψηφία ἐνῶ ὁ ἴδιος ἀριθμός μέ μιά ὑποδιαστολή στό δεξιό μέρος (γραμμένος ὡς 3214000.) λογίζεται μέ ἑπτά σημαντικά ψηφία. Στήν πράξη, γιά νά ἀποφευχθοῦν λάθη ἀπό τήν παράλειψη τῆς ὑποδιαστολῆς, πολύ μεγάλοι ἀκέραιοι ἀριθμοί, πού περιέχουν ἕνα ἀριθμό μή σημαντικῶν μηδενικῶν ἁπλῶς γιά τή συμπλήρωση τῆς σωστῆς τάξης μεγέθους, συνηθίζεται νά γράφονται ὡς δεκαδικοί πολλαπλασιασμένοι μέ τήν κατάλληλη δύναμη τοῦ δέκα. Ὁ ἀριθμός 3214000 μπορεῖ π.χ. νά γραφεῖ ὡς 3.214×10^6, μέ πολύ μικρή πιθανότητα λάθους στόν προσδιορισμό τῶν σημαντικῶν ψηφίων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ στατιστική σημασία τοῦ τελευταίου σημαντικοῦ ψηφίου δέν εἶναι ἀπόλυτα καθορισμένη καί ὁ βαθμός ἀξιοπιστίας του ἐξαρτᾶται ἀπό πολλούς παράγοντες. Σέ μιά μέτρηση ἠλεκτρικοῦ ρεύματος π.χ. μέ ἀμπερόμετρο τό ὁποῖο διαθέτει διαβαθμίσεις κατά 1 mA, ἕνας προσεκτικός παρατηρητής μπορεῖ νά ἐκτιμήσει τήν θέση τῆς ἐνδείξεως μεταξύ δύο διαδοχικῶν διαβαθμήσεων καί νά προσδιορίσει τό τελευταῖο σημαντικό ψηφίο πού ἀναφέρεται σέ μονάδες τοῦ 0.1 mA. Ἕνας λιγώτερο προσεκτικός παρατηρητής, ἤ ἕνας παρατηρητής μέ λιγώτερο διαθέσιμο χρόνο, εἶναι ἐνδεχόμενο νά στρογγυλέψει τήν ἔνδειξη στήν πλησιέστερη διαβάθμηση τοῦ ὀργάνου μέ ἀποτέλεσμα ἡ μέτρησή του νά δώσει ἕνα λιγώτερο σημαντικό ψηφίο ἀπό τήν προηγούμενη. Συνιστᾶται πάντως σέ κάθε μέτρηση τό ἀποτέλεσμα νά δίνεται μέ ὅσο τό δυνατόν περισσότερα σημαντικά ψηφία, ἔστω καί ἄν ἡ ἀβεβαιότητα στό τελευταῖο σημαντικό ψηφίο εἶναι τῆς τάξης τῶν τριῶν ἤ τεσσάρων μονάδων. Ὅπως θά δοῦμε, ἡ πρακτική αὐτή βοηθάει στήν ἐκτίμηση τῶν σημαντικῶν ψηφίων μετά τή διεξαγωγή ἀριθμητικῶν πράξεων.

Ἡ συμπεριφορά τῶν σημαντικῶν ψηφίων κατά τή διεξαγωγή πράξεων μπορεῖ νά διερευνηθεῖ καλύτερα μέ τή βοήθεια ἑνός παραδείγματος. Ἔστω ὅτι οἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου ἔχουν μετρηθεῖ ὡς

Μῆκος: $L = 10.77$ cm

Πλάτος: $W = 8.212$ cm

Πάχος: $T = 3.55$ cm

Ἄν μέ βάση τίς μετρήσεις αὐτές θελήσουμε νά προσδιορίσουμε τόν ὄγκο τοῦ παραλληλεπιπέδου ἕνας ἁπλός πολλαπλασιασμός δίνει

$$V = L \cdot W \cdot T = 313.9735020 \text{ cm}^3 \qquad (1.4)$$

Εἶναι ἀμέσως φανερό ὅτι ὅλα τά ψηφία τοῦ ἀποτελέσματος στήν ἐξ. (1.4) δέν εἶναι σημαντικά. Ἄν π.χ. τό τελευταῖο σημαντικό ψηφίο στό μῆκος ἔχει πιθανή ἀβεβαιότητα δύο μονάδες, ὥστε τό πραγματικό μῆκος τοῦ παραλληλεπιπέδου νά εἶναι $L = 10.79$ cm τότε ὁ ὄγκος του εἶναι

$$V = L \cdot W \cdot T = 314.5565540 \text{ cm}^3 \ . \qquad (1.5)$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο, λαμβάνοντας ὑπόψη τήν ἀβεβαιότητα στό τελευταῖο σημαντικό ψηφίο τῶν ὑπόλοιπων διαστάσεων τοῦ παραλληλεπιπέδου, ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά πειστεῖ ὅτι μόνο τά τρία πρῶτα ψηφία τοῦ ἀποτελέσματος (1.4) εἶναι σημαντικά. Λόγω τῆς σχετικῆς ἀσάφειας στόν ὁρισμό τοῦ λιγώτερο σημαντικοῦ ψηφίου, ὁ ἀντίστοιχος κανόνας πού διέπει τή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

συμπεριφορά τῶν σημαντικῶν ψηφίων κατά τόν πολλαπλασιασμό ἤ τή διαίρεση δέν εἶναι ἀπόλυτα αὐστηρός. Γενικά,

κατά τόν πολλαπλασιασμό ἤ διαίρεση ἀριθμῶν πού προέρχονται ἀπό μετρήσεις, τό τελικό ἀποτέλεσμα ἔχει τόσα σημαντικά ψηφία, ὅσα ὁ λιγώτερο ἀκριβής ἀριθμός. Σέ ὁρισμένες περιπτώσεις μπορεῖ νά ἔχει ἕνα περισσότερο.

Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά βρεῖ παραδείγματα ὅπου ἰσχύει ἡ τελευταία περίπτωση.

Κατά τήν πρόσθεση ἤ ἀφαίρεση ἡ συμπεριφορά τῶν σημαντικῶν ψηφίων εἶναι τελείως διαφορετική. Ἡ κατάσταση μπορεῖ νά διερευνηθεῖ πάλι μέ τή βοήθεια ἑνός παραδείγματος: Ἔστω ὅτι σέ θερμοκρασία 20 °C τό μῆκος μιᾶς μεταλλικῆς ράβδου ἔχει μετρηθεῖ ὡς 126.73 cm. Μέ ἀκριβεῖς ὀπτικές μεθόδους προσδιορίζεται στή συνέχεια ὅτι μέχρι τή θερμοκρασία 100 °C τό μῆκος τῆς ράβδου αὐξήθηκε κατά 0.2168 cm. Πόσο εἶναι τό ὁλικό μῆκος τῆς ράβδου στούς 100 °C;

Τό συνολικό μῆκος μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ μιά ἁπλή πρόσθεση τῶν δύο ἀριθμῶν

$$\begin{array}{r} 126.73 \\ +\ 0.2168 \\ \hline 126.9468 \end{array} \qquad (1.6)$$

Ἀπό τή διάταξη τῆς πράξης γίνεται ἀμέσως φανερό ὅτι πέρα ἀπό τό δεύτερο δεκαδικό τοῦ ἀποτελέσματος τά ψηφία παύουν νά εἶναι σημαντικά. Μποροῦμε ἑπομένως νά διατυπώσουμε τό γενικό κανόνα:

Κατά τήν πρόσθεση ἤ ἀφαίρεση ἀριθμῶν πού προέρχονται ἀπό μετρήσεις, ἄν σέ μιά στήλη ἔστω καί ἕνα ψηφίο δέν εἶναι σημαντικό, τότε τό ἀντίστοιχο ψηφίο τοῦ ἀποτελέσματος δέν εἶναι σημαντικό.

Σύμφωνα μέ τόν τελευταῖο κανόνα, στό ἀποτέλεσμα (1.6) τά δύο τελευταῖα ψηφία δέν εἶναι σημαντικά καί πρέπει νά παραληφθοῦν. Γενικά ὅταν μή σημαντικά ψηφία παραλείπονται ἀπό ἕνα ἀριθμητικό ἀποτέλεσμα τό τελευταῖο ψηφίο πού παραμένει πρέπει νά στρογγυλεύεται ὥστε νά διατηρεῖται ἡ καλύτερη δυνατή ἀκρίβεια. Κατά τή διαδικασία αὐτή τά ψηφία πού πρόκειται νά παραληφθοῦν θεωροῦνται ὡς ἕνα δεκαδικό κλάσμα μικρότερο τῆς μονάδας (π.χ. τό δεκαδικό κλάσμα 0.68 στήν περίπτωση τοῦ ἀποτελέσματος (1.6)). Τότε:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1. Ἄν τό κλάσμα εἶναι μεγαλύτερο τοῦ 0.5, αὐξεῖστε τό λιγώτερο σημαντικό ψηφίο πού παραμένει κατά μιά μονάδα.
2. Ἄν τό κλάσμα εἶναι μικρότερο τοῦ 0.5, ἀφῆστε τό λιγώτερο σημαντικό ψηφίο πού παραμένει ὡς ἔχει.
3. Ἄν τό κλάσμα εἶναι ἴσο μέ 0.5, αὐξεῖστε τό λιγώτερο σημαντικό ψηφίο πού παραμένει κατά μία μονάδα μόνο ἄν αὐτό εἶναι περιττός ἀριθμός.

Σύμφωνα μέ τήν πρακτική αὐτή ἡ τιμή τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος διαφέρει ἀπό τόν ἀρχικό ἀριθμό λιγώτερο ἀπό μισή μονάδα τοῦ τελευταίου σημαντικοῦ ψηφίου, ἐνῶ ὁ κανόνας (3) ἀποτρέπει ἐνδεχόμενο συστηματικό σφάλμα ὑπερεκτιμήσεως.

1-3 Ἡ Στατιστική Κατανομή

Ὅπως εἴδαμε στό Πείραμα 1-1, ἄν κάνουμε μιά σειρά N μετρήσεων x_i, $i = 1,...,N$ ἑνός φυσικοῦ μεγέθους x, θά καταλήξουμε σέ μιά κατανομή τῶν τιμῶν πού πιστεύουμε ὅτι συσωρεύονται γύρω ἀπό κάποια «πραγματική» τιμή τοῦ μεγέθους. Ἀπό τήν κατανομή πού προκύπτει περιμένουμε ὅτι θά ἐξάγουμε ἀφενός τήν «πραγματική» τιμή τοῦ μεγέθους πού μετρᾶμε καί ἀφετέρου κάποια πληροφορία γιά τήν ποιότητα τῆς μετρήσεως. Π.χ., ὡς πρός τή δεύτερη πληροφορία θά θέλαμε νά ξέρουμε ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα ὥστε μιά μεμονωμένη μελλοντική ἐπανάληψη τῆς μετρήσεως νά ἀποκλίνει κατά ἕνα ὁρισμένο ποσό ἀπό τήν «πραγματική» τιμή.

Εὐθύς ἐξαρχῆς πρέπει νά ἀναγνωρίσουμε ὅτι ἡ προηγούμενη διεργασία περιέχει δύο σημαντικές δυσκολίες. Ἡ πρώτη ἀναφέρεται στή νεφελώδη ἔννοια τῆς «πραγματικῆς» τιμῆς. Μέ λίγη σκέψη μποροῦμε νά βροῦμε παραδείγματα ὅπου ἡ ἔννοια τῆς «πραγματικῆς» τιμῆς δέν εἶναι κάν δυνατόν νά ὁριστεῖ. Ἤδη τό Πείραμα 1-1 δίνει ἕνα τέτοιο παράδειγμα ὅπου, ἄν θεωρήσουμε τό νῆμα στό ἀτομικό ἐπίπεδο, τό μῆκος του δέν μπορεῖ νά ὁριστεῖ οὔτε θεωρητικά. Ἡ δεύτερη δυσκολία προέρχεται ἀπό τό *πεπερασμένο πλῆθος τῶν μετρήσεων* πού εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νά κάνουμε. Ἄν ἐπαναλάβουμε τό Πείραμα 1-1 ἡ νέα κατανομή τῶν μετρήσεων πού θά προκύψει θά διαφέρει λίγο ἤ πολύ ἀπό τήν προηγούμενη. Ποιά ἀπό τίς δύο κατανομές θά χρησιμοποιήσουμε ἑπομένως γιά τήν ἐξαγωγή τῆς «πραγματικῆς» τιμῆς;

Θά ξεπεράσουμε τίς δυό παραπάνω δυσκολίες μέ μιά αὐθαίρετη, ἀλλά λογική, παραδοχή. Θά υἱοθετήσουμε τήν ἄποψη ὅτι *τό ἀποτέλεσμα ἑνός ἄπειρου ἀριθμοῦ μετρήσεων εἶναι μιά καί μοναδική κατανομή πού χαρακτη-*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

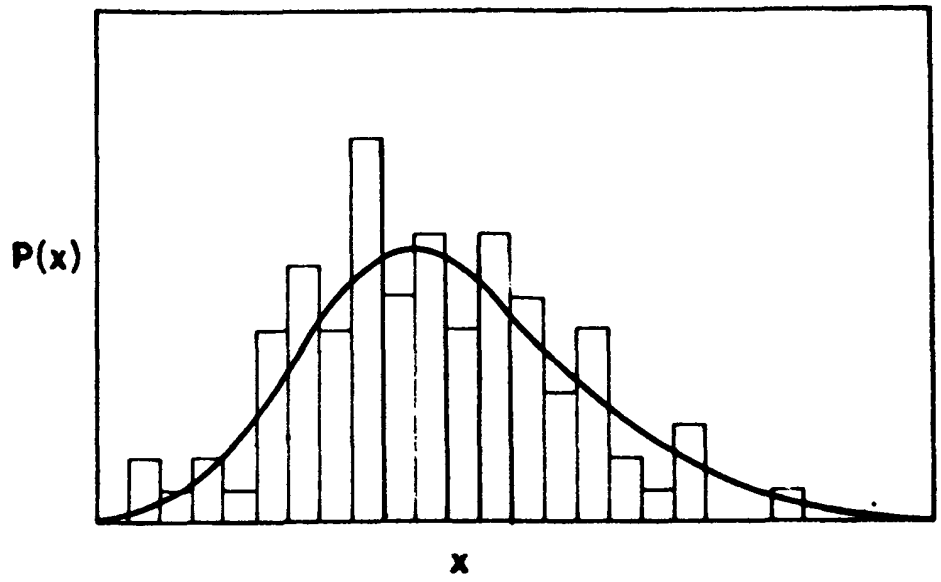
ρίζει άφενός τό μέγεθος πού μετρᾶμε καί άφετέρου τά ὄργανα, τή μέθοδο καί γενικά τίς συνθῆκες τῆς μετρήσεως. Τήν κατανομή αὐτή θά ὀνομάσουμε **θεωρητικό πληθυσμό.** Σύμφωνα μέ τήν ἄποψη αὐτή τό ἀποτέλεσμα ἑνός ρεαλιστικοῦ πειράματος μέ πεπερασμένο ἀριθμό μετρήσεως καταλήγει σέ ἕνα **δεῖγμα τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ** πού τείνει πρός τήν κατανομή τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ ὅσο αὐξάνει ὁ ἀριθμός τῶν μετρήσεων. Συμβολικά, ἄν P(x) εἶναι ἡ συνάρτηση πού ἀποδίδει τό θεωρητικό πληθυσμό καί $f_N(x)$ εἶναι ἡ συνάρτηση τοῦ δείγματος κατανομῆς N μετρήσεων, μποροῦμε νά γράψουμε

$$P(x) = \lim_{N\to\infty} \left[f_N(x)\right] . \tag{1.7}$$

Ἡ τελευταία σχέση ὁδηγεῖ σέ μιά ἄλλη ἐξίσου σημαντική ἑρμηνεία. Τό σχῆμα 1-1 περιέχει τά ἀποτελέσματα ἑνός ὑποθετικοῦ πειράματος N μετρήσεων ὑπό μορφή ἱστογράμματος† καί τόν ἀντίστοιχο θεωρητικό πληθυσμό πού γιά τό σκοπό τοῦ παραδείγματος θά θεωρήσουμε ὡς γνωστό. Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (1.7), ἄν συνεχίσουμε νά παίρνουμε μετρήσεις, τό ἱστόγραμμα τοῦ σχήματος θά τείνει πρός τή συνεχῆ καμπύλη τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Γιά νά κατανοήσουμε τή διαδικασία αὐτή τοῦ ὁρίου εἶναι χρήσιμο νά δοῦμε καί τόν θεωρητικό πληθυσμό ὡς ἕνα ἱστόγραμμα μέ ἀπειρωστό εὖρος κάθε ἱστοῦ dx. Τό ἐμβαδόν κάθε ἱστοῦ στό θεωρητικό πληθυσμό εἶναι τότε P(x)dx. Ἡ ποσότητα αὐτή ἀντιπροσωπεύει τό πλῆθος τῶν μετρήσεων πού σέ ἕνα ἰδεῶδες πείραμα μέ ἄπειρες μετρήσεις θά δώσουν ἀριθμητικό ἀποτέλεσμα σέ μιά περιοχή μέ εὖρος dx γύρω ἀπό τήν τιμή x. Ὅσο δηλαδή βελτιώνουμε τό πείραμά μας μέ αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μετρήσεων καί τῆς διακριτικῆς ἱκανότητας τῶν ὀργάνων περιμένουμε ὅτι τό πλῆθος τῶν μετρήσεων κάθε ἱστοῦ θά τείνει πρός τήν ποσότητα P(x)dx. Γιά ἕνα πεπερασμένο ἀριθμό μετρήσεων, τό πλῆθος τῶν τιμῶν γύρω ἀπό τό σημεῖο x μπορεῖ νά ὑπερβαίνει ἤ νά ὑπολείπεται ἀπό τήν ποσότητα αὐτή. Εἶναι ὅμως λογικό νά περιμένουμε ὅτι ἡ πιό πιθανή τιμή τοῦ πληθυσμοῦ τῶν μετρήσεων στό σημεῖο x δίνεται ἀπό τήν ποσότητα P(x)dx. Δέν χρειάζεται παρά ἕνα ἀκόμη λογικό βῆμα γιά νά καταλήξουμε στή στατιστική ἑρμηνεία τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Ἀντιστρέφοντας τό τελευταῖο

† Ἡ κατανομή τῶν μετρήσεων ἑνός πειράματος δίνεται πάντοτε ὑπό μορφή ἱστογράμματος ὅπου τό εὖρος κάθε ἱστοῦ ἐπιλέγεται μέ βάση τή διακριτική ἱκανότητα τῶν ὀργάνων μετρήσεως. Τό ἐμβαδόν τοῦ ἱστοῦ ἀντιπροσωπεύει τόν ἀριθμό τῶν μετρήσεων πού ἔδωσαν τιμές μέσα στήν περιοχή πού καλύπτει τό εὖρος του.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 1-1 Θεωρητικός πληθυσμός (συνεχής γραμμή) καί δεῖγμα κατανομῆς ἀπό πείραμα N μετρήσεων.

συμπέρασμα γίνεται τώρα φανερό ὅτι *ἡ ποσότητα P(x)dx εἶναι ἀνάλογη πρός τήν πιθανότητα πού ἔχει μιά μεμονωμένη μέτρηση νά δώσει ἀριθμητικό ἀποτέλεσμα μέσα στό διάστημα dx γύρω ἀπό τήν τιμή x.* Ἡ ποσότητα μάλιστα αὐτή μπορεῖ εὔκολα νά μετατραπεῖ σέ ἀπόλυτη πιθανότητα ἄν διαιρεθεῖ μέ τόν ὁλικό ἀριθμό N_0 τῶν μετρήσεων στήν κατανομή, πού δίνεται μέ μιά ἁπλή ὁλοκλήρωση ὡς

$$N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx \ . \qquad (1.8)$$

Ἡ διαδικασία αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἐπιβολή τῆς συνθήκης

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1 \qquad (1.9)$$

στή συνάρτηση P(x) πού περιγράφει τό θεωρητικό πληθυσμό.

Μποροῦμε τώρα νά συνοψίσουμε τό πρόβλημα πού ἐμφανίζεται σέ κάθε μέτρηση ὡς ἑξῆς: Πιστεύουμε ὅτι γιά τό συγκεκριμένο πείραμα ὑπάρχει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ένας θεωρητικός πληθυσμός P(x) πού χαρακτηρίζει τό φυσικό μέγεθος πού μετρᾶται ἀπό τό πείραμα. Φυσικά ἡ κατανομή P(x) δέν εἶναι γνωστή — γιαυτό ἐξάλλου γίνεται καί τό πείραμα. Ἡ ἄγνοια τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ μπορεῖ νά βρίσκεται σέ δύο διαφορετικά ἐπίπεδα. Στή χειρότερη περίπτωση εἶναι δυνατόν νά ἀγνοοῦμε τελείως τόσο τή συναρτησιακή μορφή τῆς κατανομῆς P(x) ὅσο καί τήν τιμή τῶν παραμέτρων πού ὑπεισέρχονται στή συνάρτηση. Στίς περισσότερες ὅμως περιπτώσεις ἡ συνάρτηση P(x) εἶναι γνωστή {βλ. Παράγραφο 1-7} καί σκοπός τοῦ πειράματος εἶναι ὁ προσδιορισμός τῶν σταθερῶν παραμέτρων πού ὑπεισέρχονται στή συνάρτηση. Κατά τή διεξαγωγή τοῦ πειράματος μέ ἕνα πεπερασμένο ἀριθμό μετρήσεων καταλήγουμε σέ ἕνα δεῖγμα κατανομῆς μέ τή βοήθεια τοῦ ὁποίου θά πρέπει νά κάνουμε μιά ὅσο τό δυνατόν καλύτερη ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Σύμφωνα μέ τή γενική παραδοχή τῆς ἐξ. (1.7) περιμένουμε ὅτι ἡ ἐκτίμηση αὐτή θά εἶναι τόσο καλύτερη ὅσο ὁ ἀριθμός τῶν ἐπιμέρους μετρήσεων εἶναι μεγαλύτερος. Σέ μαθηματικό συμβολισμό μποροῦμε νά γράψουμε γιά κάθε παράμετρο τῆς συναρτήσεως P(x)

$$\left[\begin{array}{l}\text{Παράμετρος τοῦ}\\ \text{θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ}\end{array}\right] = \lim_{N\to\infty}\left[\begin{array}{l}\text{Παράμετρος τοῦ}\\ \text{δείγματος κατανομῆς}\end{array}\right]. \qquad (1.10)$$

Τήν παραπάνω διεργασία θά ἐξετάσουμε στό ὑπόλοιπο τοῦ κεφαλαίου ἀφοῦ προηγουμένως ὁρίσουμε τίς παραμέτρους πού χαρακτηρίζουν τό θεωρητικό πληθυσμό P(x). Ἀκολουθώντας τήν καθιερωμένη πρακτική θά χρησιμοποιήσουμε γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου γιά τό συμβολισμό τῶν παραμέτρων τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ καί λατινικά γράμματα γιά τίς ἀντίστοιχες πειραματικές ἐκτιμήσεις πού προκύπτουν ἀπό τό δεῖγμα κατανομῆς.

1-4 Στατιστικές Παράμετροι τοῦ Θεωρητικοῦ Πληθυσμοῦ

Ὅλες οἱ παράμετροι πού χαρακτηρίζουν τό θεωρητικό πληθυσμό μποροῦν νά ὁριστοῦν διαμέσου τῆς ἐξ. (1.10). Ἡ σημαντικότερη ἴσως παράμετρος εἶναι ὁ **μέσος** πού ἤδη χρησιμοποιήσαμε στό Πείραμα 1-1 γιά τήν ἀπόδοση τῆς «πραγματικῆς» τιμῆς τοῦ νήματος. Ὁ μέσος τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ ὁρίζεται ὡς

$$\mu \equiv \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right] \qquad (1.11)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου x_i, $i = 1,...,N$ εἶναι τά ἀποτελέσματα N μετρήσεων τοῦ φυσικοῦ μεγέθους x. Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (1.11), ὁ μέσος, πού στή βιβλιογραφία ἀπαντᾶται καί μέ τήν ἐναλλακτική ὀνομασία **κεντροειδές**, εἶναι τό ὅριο πρός τό ὁποῖο τείνει ἡ μέση τιμή τῶν ἀποτελεσμάτων μέ αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ N τῶν μετρήσεων.

Ἡ **διάμεσος** $\mu_{1/2}$ τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ εἶναι μιά δεύτερη παράμετρος πού ὁρίζεται ὡς ἡ τιμή ἐκείνη ἀπό τήν ὁποία, στό ὅριο τοῦ ἄπειρου ἀριθμοῦ μετρήσεων, τά μισά ἀποτελέσματα δίνουν μικρότερη τιμή ἐνῶ τά ἄλλα μισά μεγαλύτερη. Ἐναλλακτικά, σύμφωνα μέ τή δεύτερη ἑρμηνεία πού δώσαμε στό θεωρητικό πληθυσμό, μποροῦμε νά ὁρίσουμε τή διάμεσο ὡς τήν τιμή $x = \mu_{1/2}$ γιά τήν ὁποία μιά μεμονωμένη μέτρηση ἔχε 50 % πιθανότητα νά δώσει ἀποτέλεσμα $x_i < \mu_{1/2}$ καί 50 % νά δώσει ἀποτέλεσμα $x_i > \mu_{1/2}$. Ὁλοκληρώνοντας ὡς πρός τήν πιθανότητα $P(x)dx$ μποροῦμε νά ὁρίσουμε τή διάμεσο μέ τή σχέση

$$\int_{-\infty}^{\mu_{1/2}} P(x)dx = \int_{\mu_{1/2}}^{\infty} P(x)dx = 0.5 \qquad (1.12)$$

Καθόσον τό ὁλοκλήρωμα $\int P(x)dx$ ἀντιπροσωπεύει τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας κάτω ἀπό τήν καμπύλη $P(x)$, εἶναι φανερό ὅτι μιά κάθετη γραμμή στό σημεῖο $x = \mu_{1/2}$ χωρίζει τό ἐμβαδόν τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ σέ δύο ἴσα μέρη. Ἄν καί ἡ ἔννοια τῆς διαμέσου εἶναι ἀρκετά χρήσιμη, ἡ παράμετρος αὐτή δέν εἶναι δυνατόν νά ὁριστεῖ μέ βάση τίς μετρήσεις ἑνός δείγματος κατανομῆς ὅπως ὁ μέσος στήν ἐξ. (1.11). Γιά τό λόγο αὐτό ἡ διάμεσος βρίσκει περιορισμένη χρήση στή στατιστική ἀνάλυση.

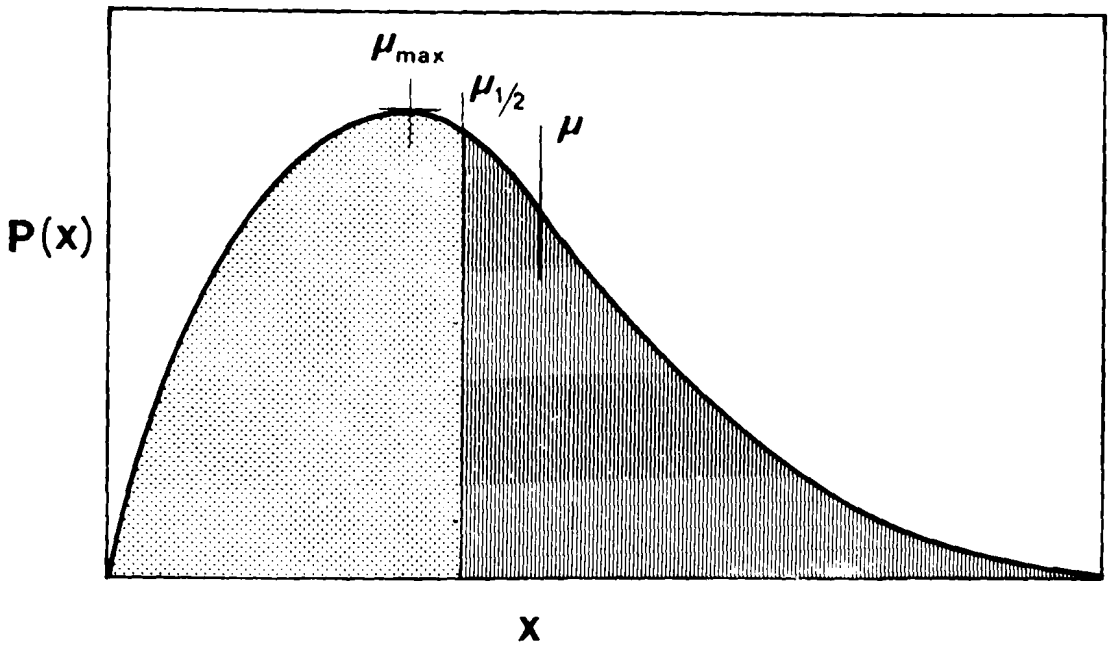
Ἡ **πλέον πιθανή τιμή** μ_{max} τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ εἶναι ἡ τιμή ἐκείνη τοῦ φυσικοῦ μεγέθους x γιά τήν ὁποία ἡ συνάρτηση $P(x)$ γίνεται μέγιστη, ἤτοι

$$P(\mu_{max}) \geqslant P(x \neq \mu_{max}). \qquad (1.13)$$

Ὅπως ἐκφράζει καί ἡ ὀνομασία της, ἡ τιμή $x = \mu_{max}$ ἔχει τή μεγαλύτερη πιθανότητα νά ἐμφανιστεῖ ὡς ἀποτέλεσμα μιᾶς μεμονωμένης μετρήσεως.

Ἡ σχέση μεταξύ τοῦ μέσου μ, τῆς διαμέσου $\mu_{1/2}$ καί τῆς πλέον πιθανῆς τιμῆς μ_{max} δίνεται στήν ἀσυμμετρική κατανομή τοῦ σχήματος 1-2. Γενικά γιά μιά ἀσυμμετρική κατανομή ἡ διάμεσος βρίσκεται μεταξύ τοῦ μέσου καί τῆς πλέον πιθανῆς τιμῆς. Γιά μιά συμμετρική κατανομή, ὅπως προκύπτει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 1-2 Σχέση μεταξύ τοῦ μέσου μ, τῆς διαμέσου $\mu_{1/2}$ καί τῆς πλέον πιθανῆς τιμῆς μ_{max} γιά ἀσυμμετρική κατανομή τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Τό ἐμβαδόν τῶν δύο διαφορετικά γραμμοσκιασμένων ἐπιφανειῶν εἶναι ἴσο.

ἀπό τούς ἀντίστοιχους ὁρισμούς, οἱ τρεῖς παράμετροι συμπίπτουν. Στήν περίπτωση αὐτή ὁποιαδήποτε παράμετρος μπορεῖ νά ταυτιστεῖ μέ τήν «πραγματική» τιμή τοῦ φυσικοῦ μεγέθους x. Ἀντίθετα, γιά ἕνα ἀσυμμετρικό θεωρητικό πληθυσμό ἡ ἐπιλογή τῆς παραμέτρου πού θά ἀναφερθεῖ ὡς ἡ «πραγματική» τιμή βρίσκεται στή διακριτική εὐχαίρεια τοῦ παρατηρητῆ, ἀφοῦ προηγουμένως ἐξετάσει τούς λόγους πού προκαλοῦν τήν ἀσυμμετρία στήν κατανομή. Γενικά, τό περισσότερο πού μποροῦμε νά ποῦμε γιά τόν μέσο μ εἶναι ὅτι εἶναι μιά παράμετρος πού χαρακτηρίζει τόν θεωρητικό πληθυσμό, ἔχει τίς ἴδιες μονάδες μέ τήν «πραγματική» τιμή καί συμβατικά, ἄν δέν ὑπαγορεύουν τό ἀντίθετο εἰδικοί λόγοι, θά θεωρηθεῖ ὡς ἡ καλύτερη ἐκτίμηση πού μποροῦμε νά κάνουμε γιά τήν «πραγματική» τιμή.

Γιά τήν ἀπόδοση τῆς ποιότητας τῆς μετρήσεως μποροῦμε νά ὁρίσουμε μιά ἄλλη σειρά παραμέτρων τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Ἡ **ἀπόκλιση** d_i μιᾶς μετρήσεως x_i ἀπό τόν μέσο μ τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ ὁρίζεται ὡς

$$d_i \equiv x_i - \mu . \qquad (1.14)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συμβατικά ἡ ἀπόκλιση ὁρίζεται πάντα σέ σχέση μέ τόν μέσο καί ὄχι σέ σχέση μέ τή διάμεσο ἤ τήν πλέον πιθανή τιμή γιά εὐκολία στούς ὑπολογισμούς. Ἄν ἡ παράμετρος μ ταυτιστεῖ μέ τήν «πραγματική» τιμή τοῦ μεγέθους x, τότε η ποσότητα d_i ἀντιπροσωπεύει τό «πραγματικό» σφάλμα στή συγκεκριμένη μέτρηση i.

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (1.11), ἡ μέση ἀπόκλιση d σέ ἕνα ἄπειρο ἀριθμό μετρήσεων μηδενίζεται

$$d = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)\right] = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right] - \mu = 0. \qquad (1.15)$$

Γιά τό λόγο αὐτό ἡ **μέση ἀπόκλιση** α ὁρίζεται ὡς ἡ μέση τιμή τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν ἀποκλίσεων, ἤτοι

$$a \equiv \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i-\mu|\right] \qquad (1.16)$$

Ἡ μέση ἀπόκλιση ἀποτελεῖ ἕνα μέτρο τῆς διασποράς τῶν μετρήσεων γύρω ἀπό τόν μέσο μ. Παρόλα αὐτά ἡ ἀπόλυτη τιμή στήν ἐξ. (1.16) κάνει τόν ὑπολογισμό της ἀρκετά δυσχερῆ καί γιά τό λόγο αὐτό ἡ χρήση τῆς παραμέτρου α στή στατιστική ἀνάλυση εἶναι ἀρκετά περιορισμένη.

Μιά ἄλλη παράμετρος πού μπορεῖ εὔκολα νά ὑπολογιστεῖ καί πού ἀποδίδει ἐξίσου καλά τή διασπορά τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ εἶναι ἡ **τυπική ἀπόκλιση** σ. Ἡ ποσότητα σ^2, πού στή βιβλιογραφία ἀπαντᾶται μέ τήν ὀνομασία **διακύμανση**, ὁρίζεται ὡς τό ὅριο τῆς μέσης τιμῆς τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων ἀπό τόν μέσο μ τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ, ἤτοι

$$\sigma^2 \equiv \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2\right] = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right] - \mu^2 \qquad (1.17)$$

Ἡ τυπική ἀπόκλιση σ ὁρίζεται ὡς ἡ τετραγωνική ρίζα τῆς διακυμάνσεως.

Ἡ διακύμανση σ^2 καί ἡ τυπική ἀπόκλιση σ χαρακτηρίζουν τήν ἀβεβαιότητα στήν πειραματική προσπάθεια γιά τόν προσδιορισμό τῆς «πραγματι-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κῆς» τιμῆς τοῦ μεγέθους x. Μποροῦμε νά δοῦμε τίς παραμέτρους αὐτές σέ δύο ἐπίπεδα λογικῆς ἀφαιρέσεως. Κατ' ἀρχήν ἐνδιαφέρει ἡ σχέση τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως σ καί τῆς ἐκτιμήσεως τοῦ μέσου μ πού προκύπτει ἀπό τά πειραματικά δεδομένα. Ὅπως θά δοῦμε στή συνέχεια γιά ἕνα πείραμα μέ πεπερασμένο ἀριθμό μετρήσεων, ἡ ἀβεβαιότητα στόν προσδιορισμό τοῦ μέσου εἶναι ἀνάλογη πρός τήν τυπική ἀπόκλιση τῆς κατανομῆς. Ἡ τυπική ἀπόκλιση δίνει ἑπομένως ἕνα μέτρο τῆς ἀβεβαιότητας στόν προσδιορισμό τοῦ μέσου κάτω ἀπό τίς συνθῆκες τοῦ συγκεκριμένου πειράματος. Ἀπό τήν ἄλλη πλευρά ἀκόμη καί ἄν ὁ μέσος μ καί ἡ «πραγματική» τιμή (μέ ὁποιοδήποτε ἀνεξάρτητο τρόπο τήν ὁρίσουμε) δέν ταυτίζονται, ἡ διαφορά τους πρέπει νά βρίσκεται μέσα στά ὅρια τῆς ἀβεβαιότητας πού ἀντανακλᾶ ὁ θεωρητικός πληθυσμός. Μέ τήν ἔννοια αὐτή ἡ τυπική ἀπόκλιση ἀποτελεῖ ἕνα ἀκόμη μέτρο τῆς διαφορᾶς μεταξύ τῆς παραμέτρου μ πού χαρακτηρίζει τή θεωρητική κατανομή P(x) καί τῆς «πραγματικῆς» τιμῆς.

Ὁ ὁρισμός τῶν παραμέτρων πού δώσαμε προηγουμένως στηρίζεται, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (1.10), στήν ὁριακή ταύτιση τῶν παραμέτρων τοῦ δείγματος κατανομῆς μέ τίς παραμέτρους τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Ἄν ὁ θεωρητικός πληθυσμός εἶναι γνωστός, τότε οἱ στατιστικές παράμετροι μποροῦν νά ὁριστοῦν διαμέσου τῆς συναρτήσεως P(x). Ἄν ἡ συνάρτηση P(x) εἶναι συνεχής καί ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη τῆς ἐξ. (1.9), τότε ὁ μέσος μ δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx \qquad (1.18)$$

πού θά ἀναγνωριστεῖ ὡς ὁ γενικός ὁρισμός τοῦ κέντρου βάρους μιᾶς μεταβλητῆς μέ πιθανότητα κατανομῆς P(x). Κατά τόν ἴδιο τρόπο ἡ διακύμανση παίρνει τή μορφή

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x)dx - \mu^2 \ . \qquad (1.19)$$

1-5 Ἐκτίμηση τῶν Στατιστικῶν Παραμέτρων

Στήν πράξη, ἡ ἐξαγωγή κάθε πληροφορίας γιά τό μέγεθος πού μετρᾶται γίνεται μέ βάση ἕνα δεῖγμα κατανομῆς τό ὁποῖο περιέχει ἕνα πεπερασμένο πλῆθος N μετρήσεων μέ ἀριθμητικό ἀποτέλεσμα x_i, $i = 1,...,N$. Ἀπό τό δεῖγμα αὐτό θά πρέπει ὁ παρατηρητής νά ἐκτιμήσει τήν «πραγματική» τιμή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τοῦ μεγέθους καί γενικά τίς παραμέτρους τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ.

Γιά ἕνα πεπερασμένο πλῆθος N μετρήσεων ἡ καλύτερη ἐκτίμηση τοῦ μέσου μ δίνεται ἀπό τόν μέσο ὅρο $\bar{x}$ τῶν μετρήσεων

$$\mu \simeq \bar{x} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \ . \tag{1.20}$$

Στήν Παράγραφο 1-11 θά δικαιολογήσουμε τήν ἐξ. (1.20) μέ βάση τή συγκεκριμένη κατανομή Gauss. Πρός τό παρόν θά ἀρκεστοῦμε στή διαίσθηση καί στήν παρατήρηση ὅτι ἡ ἐξ. (1.20) συμπίπτει μέ τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (1.11) γιά ἕνα πεπερασμένο ἀριθμό μετρήσεων.

Μέ τήν παραπάνω ἐκτίμηση τοῦ μέσου, τό ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεων $d_i = x_i - \bar{x}$ μηδενίζεται αὐτόματα. Παρόλα αὐτά ἡ μέση ἀπόκλιση a πού ὁρίσαμε στήν ἐξ. (1.16) δέν παίρνει ἀπαραίτητα τήν ἐλάχιστη τιμή. Ἀντίθετα μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι *μέ τήν ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (1.20) τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων γίνεται ἐλάχιστο.* Στήν ἰδιότητα αὐτή στηρίζεται καί ἡ *μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων* πού θά χρησιμοποιήσουμε ἀργότερα.

Τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων ἀπό μιά τιμή x

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2$$

γίνεται ἐλάχιστο ἄν ἱκανοποιεῖται ἡ σχέση .

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 \right] = 0 \ . \tag{1.21}$$

Ἀναπτύσσοντας τό ἄθροισμα τῆς ἐξ. (1.21) μποροῦμε νά γράψουμε

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2x \sum_{i=1}^{N} x_i + Nx^2$$

πού μέ ἁπλή διαφόριση δίνει

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 \right] = 2 \sum_{i=1}^{N} x_i + 2Nx \ . \tag{1.22}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σύγκριση τῆς ἐξ. (1.22) μέ τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (1.20) πιστοποιεῖ ἀμέσως ὅτι ἡ ἐξ. (1.21) ἱκανοποιεῖται ἄν οἱ ἀποκλίσεις ληφθοῦν σέ σχέση μέ τό σημεῖο $x = \bar{x}$.

Σέ ἀναλογία μέ τήν ἐξ. (1.20), ἡ ἐκτίμηση τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως σ μπορεῖ νά γίνει μέ παράληψη τοῦ ὁρίου $N \to \infty$ στήν ἐξ. (1.17), ἤτοι

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \mu^2 \qquad (1.23)$$

Ἡ σχέση αὐτή παρουσιάζει τό μειονέκτημα ὅτι προϋποθέτει τή γνώση τοῦ μέσου μ, ἐνῶ στή διάθεση τοῦ παρατηρητῆ βρίσκεται μόνο ἡ ἐκτίμηση $\bar{x}$ τῆς ἐξ. (1.20). Εἶναι μεγάλος ὁ πειρασμός νά ἀντικαταστήσουμε στήν ἐξ. (1.23) τήν ἐκτίμηση $\mu = \bar{x}$ καί νά δεχτοῦμε τό ἀποτέλεσμα ὡς τήν καλύτερη ἐκτίμηση γιά τή διακύμανση τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Ὅπως ὅμως μποροῦμε νά δοῦμε μέ λίγη σκέψη ἡ διεργασία αὐτή θά δώσει ἀποτέλεσμα μικρότερο ἀπό τήν ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (1.23). Τοῦτο ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι στήν ἐπιλογή τῆς ἐκτιμήσεως $\mu = \bar{x}$ ὁδηγηθήκαμε μέ βάση τή συνθήκη τῆς ἐξ. (1.21) πού ἐπηρεάζει (συγκεκριμένα κάνει ἐλάχιστο) τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων στόν ὁρισμό τῆς διακυμάνσεως. Μέ τόν τρόπο αὐτό μετά τήν ἐκτίμηση τοῦ μέσου ἔχουμε πλέον μειώσει τούς **βαθμούς ἐλευθερίας** τῶν ὑπολογισμῶν μας. Μέ τόν ὅρο «βαθμοί ἐλευθερίας» θά ἐννοήσουμε τό πλῆθος τῶν ἀνεξάρτητων παρατηρήσεων πού ἔχουμε στή διάθεσή μας γιά τήν ἐξαγωγή μιᾶς συγκεκριμένης πληροφορίας. Στήν ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (1.20) οἱ ἀνεξάρτητες παρατηρήσεις εἶναι N καί ὁ ἀριθμός αὐτός χρησιμοποιεῖται γιά τόν ὑπολογισμό τῆς μέσης τιμῆς. Μετά ὅμως ἀπό τήν ἐπιβολή τῆς συνθήκης (1.21) οἱ βαθμοί ἐλευθερίας περιορίζονται σέ N−1. Μποροῦμε ἑπομένως νά ἀντισταθμίσουμε τήν ὑποεκτίμηση πού συνεπάγεται ἡ ἐξ. (1.21) ἄν χρησιμοποιήσουμε στόν παρονομαστή τῆς ἐξ. (1.23) τό πλῆθος τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας, ἤτοι

$$\sigma^2 \simeq s^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \ . \qquad (1.24)$$

Θά ὀνομάσουμε τήν παράμετρο s πού ὁρίζεται στήν τελευταία σχέση **πειραματική τυπική ἀπόκλιση.**

Τά παραπάνω ἐπιχειρήματα δέν ὑποκρίνονται ὅτι δικαιολογοῦν ἀπόλυτα τήν ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (1.24). Ὁ ἀναγνώστης πού ἐπιμένει στή μαθηματική

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αὐστηρότητα μπορεῖ νά βρεῖ τήν ἀπόδειξη τῆς ἐξ. (1.24) σέ πλέον προχωρημένα συγγράμματα Στατιστικῆς Ἀναλύσεως. Θά προσπαθήσουμε ὅμως νά δικαιολογήσουμε τήν ἔκφραση τῆς πειραματικῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως θεωρώντας τήν ἀκραία περίπτωση N=1, δηλαδή τήν περίπτωση ἑνός πειράματος μέ μιά μοναδική μέτρηση x_1. Ἀπό τήν ἐξ. (1.20) ἡ καλύτερη ἐκτίμηση τοῦ μέσου δίνεται ἀπό τήν ἴδια τή μέτρηση

$$\mu \simeq \bar{x} = x_1 \ . \tag{1.25}$$

Ἄν προσπαθήσουμε τώρα νά χρησιμοποιήσουμε τήν ἐκτίμηση αὐτή στήν ἐξ. (1.23) ἡ τυπική ἀπόκλιση μηδενίζεται ἐξ ὁρισμοῦ. Τό ἄτοπο αὐτό ἀποτέλεσμα διορθώνεται μέ τήν ἐξ. (1.24) ὅπου γιά τήν ἀκραία περίπτωση N=1 τόσο ὁ ἀριθμητής ὅσο καί ὁ παρονομαστής μηδενίζονται καί ἡ πειραματική μέση ἀπόκλιση παίρνει ἀπροσδιόριστη τιμή. Αὐτό βέβαια εἶναι τό ἀποτέλεσμα πού περιμέναμε καθόσον ἀπό μιά καί μόνη μέτρηση δέν εἶναι δυνατόν νά ἐξάγουμε δύο πληροφορίες.

1-6 Ἡ Διώνυμη Κατανομή

Σέ πολλές περιπτώσεις μέ φυσικό ἐνδιαφέρον ἡ συνάρτηση τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ εἶναι γνωστή ἀπό τό μηχανισμό τοῦ φαινομένου πού μελετᾶται. Ἄς θεωρήσουμε ὡς πρῶτο παράδειγμα τήν κατανομή πού ἀναμένεται σέ ἕνα τυχερό παιχνίδι πού παίζεται μέ δύο ζάρια. Κατ' ἀρχήν κάθε ζάρι ἔχει τήν ἴδια πιθανότητα $p = 1/6$ νά φέρει ὁποιοδήποτε ἀριθμό ἀπό τό 1 ὡς τό 6. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἄν ἕνα ζάρι ριχτεῖ πολλές φορές τό πιό πιθανό εἶναι ὅτι τά ἀποτελέσματα θά εἶναι ἐξίσου κατανεμημένα στούς ἕξη ἀριθμούς. Ἄν μᾶς ἐνδιαφέρει ὁ ἀριθμός 6, τό πιό πιθανό εἶναι ὅτι μετά ἀπό N προσπάθειες ὁ ἀριθμός αὐτός θά ἐμφανιστεῖ $pN = (1/6)\,N$ φορές. Γιά δύο ζάρια πού ρίχνονται ταυτόχρονα οἱ δυνατοί συνδιασμοί εἶναι $6^2 = 36$. Τοῦτο συμβαίνει διότι ἕνας συγκεκριμένος ἀριθμός τοῦ πρώτου ζαριοῦ μπορεῖ νά συνδιαστεῖ μέ ὁποιοδήποτε ἀπό τούς ἕξη ἀριθμούς τοῦ δευτέρου. Ἡ πιθανότητα τώρα ὥστε ἕνα ἀπό τά ζάρια (ἀλλά ὄχι καί τά δύο) νά καταλήξει στόν ἀριθμό 6 μπορεῖ νά βρεθεῖ ἄν ἀπαριθμηθοῦν οἱ 36 δυνατοί συνδιασμοί καί διαχωριστοῦν οἱ συνδιασμοί ἐκεῖνοι που περιέχουν ἕνα 6. Μέ λίγη προσοχή καί σύστημα μπορεῖ νά βρεῖ κανείς ὅτι οἱ δυνατοί συνδιασμοί εἶναι 10. Ἡ πιθανότητα ἑπομένως νά ἐμφανιστεῖ ἕνα (καί μόνον ἕνα) 6 εἶναι 10/36. Ἡ πιθανότητα βέβαια γιά «ἑξάρες», πού ἀποτελεῖ ἕνα μοναδικό συνδιασμό ἀπό τούς 36 δυνατούς εἶναι μόνο 1/36.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μποροῦμε νά γενικεύσουμε τήν προηγούμενη διερεύνηση στήν περίπτωση n ζαριῶν μέ 6^n δυνατούς συνδιασμούς. Ἡ πιθανότητα ὥστε νά ἐμφανιστεῖ ἕνας συγκεκριμένος συνδιασμός εἶναι τώρα $1/6^n = (1/6)^n$. Ἡ γενίκευση τῆς προηγούμενης διερευνήσεως τίθεται μέ τήν ἐρώτηση: *Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα ὅτι ὁ συνδιασμός θά περιέχει x ζάρια μέ τόν ἀριθμό 6;* Γιά νά ἀπαντήσουμε στό ἐρώτημα αὐτό θά πρέπει πάλι νά ἀπαριθμήσουμε ὅλες τίς δυνατές καταστάσεις καί νά μετρήσουμε ἐκεῖνες πού περιέχουν x ἐξάρια. Ἄς ἐξετάσουμε ἕνα ἕνα ζάρι σέ μιά τυχαία κατάσταση n ζαριῶν. Διαλέγοντας ἕνα ζάρι στήν τύχη, ἡ πιθανότητα ὥστε τό ζάρι αὐτό νά ἔχει φέρει τόν ἀριθμό 6 εἶναι $p = 1/6$. Ἐπειδή ὅμως ἀκριβῶς διαλέξαμε στήν τύχη ἕνα ἀπό τά n ζάρια, ἡ πιθανότητα νά βροῦμε τόν ἀριθμό 6 εἶναι $n \cdot 1/6$. Κατά τόν ἴδιο τρόπο, διαλέγοντας τυχαῖα ἕνα δεύτερο ζάρι ἀπό τά ὑπόλοιπα $n-1$ ζάρια, ἡ πιθανότητα νά βροῦμε τόν ἀριθμό 6 εἶναι $(n-1) \cdot 1/6$. Συνεχίζοντας τή διαδικασία x φορές εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι ἡ πιθανότητα μειώνεται κάθε φορά κατά τήν ἀκολουθία

$$n\,\frac{1}{6}\,,\ (n-1)\,\frac{1}{6}\,,\ \ldots,\ (n-x+2)\,\frac{1}{6}\,,\ (n-x+1)\,\frac{1}{6} \qquad (1.26)$$

μέχρις ὅτου ἡ τελευταία τυχαία ἐπιλογή γίνει ἀπό τά $(n-x+1)$ ἐνυπομένοντα ζάρια. Ἡ πιθανότητα τώρα ὥστε σέ μιά σειρά x ἐπιλογῶν ἀπό n ζάρια νά βρεθεῖ ὅλες τίς φορές ὁ ἀριθμός 6 δίνεται ἀπό τό γινόμενο τῆς ἀκολουθίας

$$P\left(x,\ n,\ \frac{1}{6}\right) = n(n-1)\ldots(n-x+1)\left(\frac{1}{6}\right)^x = \frac{n!}{(n-x)!}\left(\frac{1}{6}\right)^x \qquad (1.27)$$

ὅπου τό *παραγοντικό* $n!$ ὁρίζεται ὡς

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \qquad (1.28\alpha)$$

καί

$$0! = 1 \qquad (1.28\beta)$$

Ἡ ἐξ. (1.27) ἐκφράζει τό γεγονός ὅτι γιά n ζάρια ὑπάρχουν $n!/(n-x)!$ καταστάσεις μέ x ἐξάρια. Ἡ προηγούμενη ὅμως μέτρηση περιέχει μιά ὑπερεκτίμηση τῶν καταστάσεων, πού ὀφείλεται στή διαδικασία πού ἀκολουθήσαμε. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά πειστεῖ μέ τό ἁπλό παράδειγμα τῶν δύο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ζαριῶν ὅπου ἡ σταδιακή μέτρηση καταλήγει 2!/0! = 2 καταστάσεις μέ «ἑξάρες» – ἐνῶ στήν πραγματικότητα ὑπάρχει μία. Καί τοῦτο διότι στή σταδιακή ἀπαρίθμηση δέν λάβαμε ὑπόψη μας ὅτι ἀπό τά x πρῶτα ἑξάρια πού μετρήσαμε δέν ἔχει σημασία ἀπό πιό ζάρι ἀρχίζουμε τή μέτρηση. Ὁποιοσδήποτε συνδιασμός – καί οἱ δυνατοί συνδιασμοί εἶναι x! τό πλῆθος – καταλήγει στήν ἴδια κατάσταση. Γιά νά διορθώσουμε ἑπομένως τήν ὑπερεκτίμηση πού εἰσάγει ἡ μέθοδος τῆς ἀπαριθμήσεως τῶν καταστάσεων θά πρέπει νά διαιρέσουμε τήν ἔκφραση τῆς ἐξ. (1.27) μέ τόν *παράγοντα ἐκφυλισμοῦ* x!

Ὑπάρχει μιά δεύτερη διόρθωση πού πρέπει νά ἐπιφέρουμε στήν ἐξ. (1.27) ὥστε νά ἐξασφαλίζεται ὅτι ἡ κατάσταση τήν ὁποία ἀντιπροσωπεύει περιέχει x καί μόνο x ἑξάρια. Θά πρέπει δηλαδή νά ἐξασφαλίσουμε ὅτι στήν κατάσταση αὐτή x ζάρια ἐμφανίζουν τόν ἀριθμό 6 *καί* n–x *ζάρια ὁποιοδήποτε ἀριθμό ἐκτός ἀπό τό 6.* Ἡ πιθανότητα ὥστε ἕνα ζάρι νά φέρει κάποιο ἀριθμό πλήν τοῦ 6 εἶναι

$$q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

ἐνῶ ἡ πιθανότητα ὥστε n–x ζάρια νά φέρουν διάφορους ἀριθμούς πλήν τοῦ 6 δίνεται ἀπό τό γινόμενο τῶν ἐπιμέρους πιθανοτήτων

$$q^{n-x} = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-x} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-x} .$$

Εἴμαστε τώρα σέ θέση νά γράψουμε τήν πιθανότητα ὥστε σέ μιά ζαριά μέ n ζάρια, x ἀπό αὐτά νά ἐμφανίσουν τόν ἀριθμό 6. Ἡ πιθανότητα αὐτή δίνεται ἀπό τή σχέση

$$P\left(x, n, \frac{1}{6}\right) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-x} .$$

Γενικεύοντας τό ἀποτέλεσμα αὐτό καί χρησιμοποιώντας τόν καθιερωμένο συμβολισμό

$$\binom{n}{x} \equiv \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \qquad (1.29)$$



μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἔκφραση

$$P_B(x,n,p) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} \tag{1.30}$$

πού δίνει τήν πιθανότητα ὥστε σέ ἕνα σύνολο n ἀντικειμένων x ἀπό αὐτά νά βρεθοῦν σέ μιά κατάσταση μέ ἐπιμέρους πιθανότητα p.

Ἡ κατανομή ὡς πρός τήν μεταβλητή x πού ἐκφράζει ἡ ἐξ. (1.30) εἶναι γνωστή ὡς **διώνυμη κατανομή** ἀπό τή στενή σχέση πού ἐμφανίζει πρός τό γνωστό ἀνάπτυγμα διωνύμου στήν ἄλγεβρα

$$(p + q)^n = \sum_{x=0}^{n} \left[\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \right] \quad . \tag{1.31}$$

Ὁ χτός ὅρος τοῦ διώνυμου ἀναπτύγματος ἀντιστοιχεῖ στήν πιθανότητα $P_B(x,n,p)$ ἄν $q = 1 - p$. Ἡ ἐξ. (1.31) μπορεῖ μάλιστα νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τόν ἔλεγχο τῆς ἐκφράσεως στήν ἐξ. (1.30). Ἄν ἡ ποσότητα $P_B(x,n,p)$ ἐκφράζει τήν πιθανότητα γιά τή συγκεκριμένη κατάσταση, τότε το ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων γιά ὅλες τίς δυνατές καταστάσεις ἀπό $x = 0$ ἕως $x = n$ πρέπει νά εἶναι ἴσο μέ τή μονάδα. Πράγματι, ἀπό τήν ἐξ. (1.31)

$$\sum_{x=1}^{N} \left[\binom{n}{x} p^x(1 - p)^{n-x} \right] = (p + 1 - p)^n = 1 \ .$$

Οἱ στατιστικές παράμετροι τῆς διώνυμης κατανομῆς μποροῦν νά βρεθοῦν μέ τή βοήθεια τῶν ἐξ. (1.18) καί (1.19). Γιά ἀσυνεχῆ κατανομή τά ὁλοκληρώματα τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν μεταπίπτουν σέ ἄθροισμα πού καλύπτει τίς δυνατές τιμές τῆς μεταβλητῆς x. Ὁ μέσος μ καί ἡ τυπική ἀπόκλιση σ τῆς διώνυμης κατανομῆς δίνονται ἀντίστοιχα ἀπό τίς ἐκφράσεις

$$\mu = \sum_{x=0}^{n} x\, P_B(x,n,p) = \sum_{x=0}^{n} \left[x \frac{n!}{x!\ (n-x)!} p^x(1-p)^{n-x} \right] = np \tag{1.32}$$

καί

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{n} (x-\mu)^2\, P_B(x,n,p)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \left[(x-\mu)^2 \frac{n!}{x!\ (n-x)!} p^x(1-p)^{n-x} \right] = np(1-p) \ . \tag{1.33}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ ἐπιβεβαίωση τῶν ἁπλῶν ἀποτελεσμάτων $\mu = np$ καί $\sigma^2 = np(1-p)$ στά ὁποῖα καταλήγουν οἱ παραπάνω ἐκφράσεις ἀφίνεται στίς Ἀσκήσεις στό τέλος τοῦ κεφαλαίου.

Παρατηρεῖται ὅτι ἡ διώνυμη κατανομή εἶναι συμμετρική μόνο ἄν

$$q = (1-p) = p = \frac{1}{2} \quad . \tag{1.34}$$

Στήν εἰδική αὐτή περίπτωση ὁ μέσος μ δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\mu = \frac{n}{2} \tag{1.35α}$$

ἐνῶ ἡ διακύμανση εἶναι ἴση μέ τό μισό τοῦ μέσου

$$\sigma^2 = \frac{n}{4} = \frac{\mu}{2} \quad . \tag{1.35β}$$

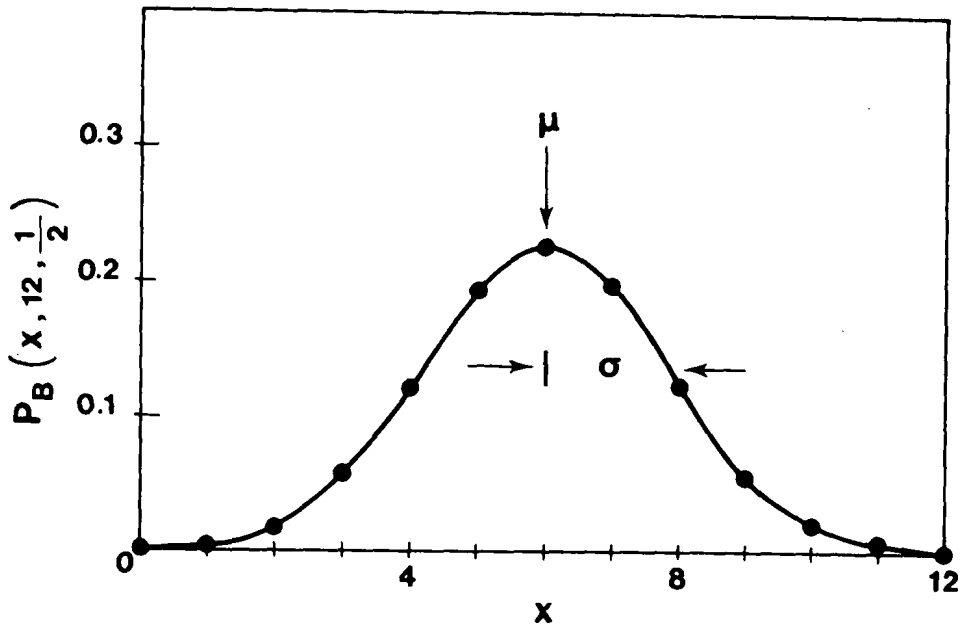
Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα τῆς διώνυμης κατανομῆς δίνονται στά σχήματα 1-3 καί 1-4. Τό πρῶτο παράδειγμα περιέχει τά ἀποτελέσματα ἀπό ἕνα παιχνίδι «κορώνα - γράμματα» μέ 12 νομίσματα. Ἡ πιθανότητα ὥστε ἄν πετάξουμε ταυτόχρονα 12 νομίσματα στόν ἀέρα νά ἐμφανιστεῖ ἡ κατάσταση μέ x νομίσματα στήν κατάσταση «γράμματα» (καί 12-x νομίσματα στήν κατάσταση «κορώνα») δίνεται ἀπό τή διώνυμη κατανομή $P_B(x, 12, \frac{1}{2})$ πού περιέχεται στό σχῆμα 1-3 ὡς συνάρτηση τοῦ ἀριθμοῦ x. Ἡ κατανομή βέβαια εἶναι ἀσυνεχής καί μόνο τά σημεῖα πού ἀντιστοιχοῦν στίς ἀκέραιες τιμές $x = 0,1,\ldots,12$ ἔχουν φυσική σημασία. Ἡ συνεχής καμπύλη τῆς γραφικῆς παραστάσεως ἀποδίδει ἁπλῶς τή συμπεριφορά τῆς διώνυμης κατανομῆς γιά μεγάλες τιμές τοῦ n. Ἡ κατανομή εἶναι συμμετρική καθόσον ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη τῆς ἐξ. (1.34). Ὁ μέσος μ καί ἡ τυπική ἀπόκλιση σ πού σημειώνονται στή γραφική παράσταση μπορεῖ νά ὑπολογιστοῦν ἀντίστοιχα ἀπό τίς ἐξ. (1.32) καί (1.33) ὡς

$$\mu = 12 \left(\tfrac{1}{2}\right) = 6$$

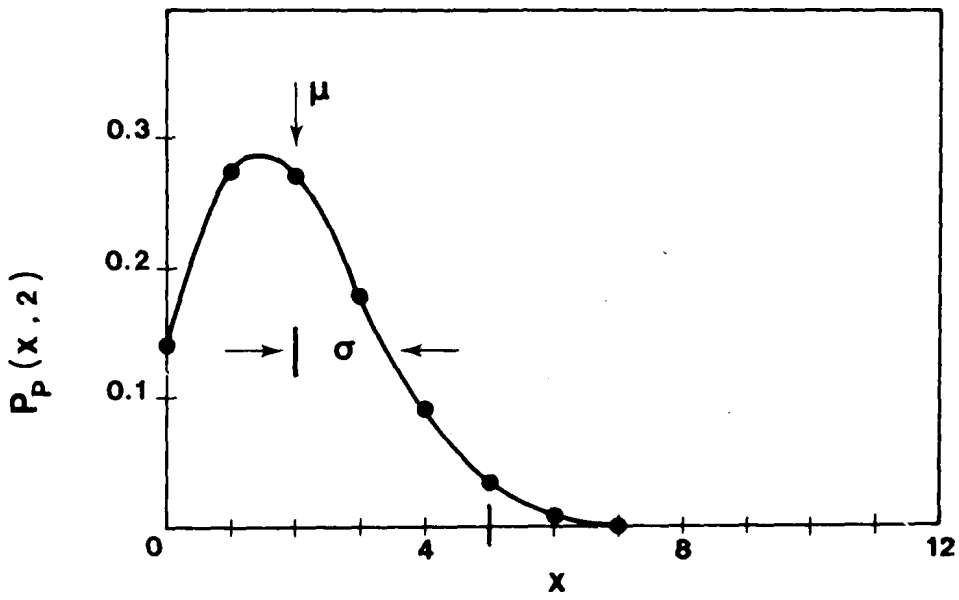
καί

$$\sigma = \sqrt{12 \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)} = \sqrt{3} \simeq 1.73.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 1-3 Ἡ συμμετρική κατανομή $P_B(x,n,p)$ γιά $n = 12$ καί $p = \frac{1}{2}$. Ὁ μέσος καί ἡ τυπική ἀπόκλιση εἶναι ἀντίστοιχα $\mu = 6$ καί $\sigma\ (= \sqrt{3}) = 1.73$.



ΣΧΗΜΑ 1-4 Ἡ διώνυμη κατανομή $P_B(x,n,p)$ γιά $n = 12$ καί $p = 1/6$. Ὁ μέσος καί ἡ τυπική ἀπόκλιση εἶναι ἀντίστοιχα $\mu = 2$ καί $\sigma = 1.29$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τό σχῆμα 1-4 περιγράφει τή συχνότητα μέ τήν ὁποία ἐμφανίζονται x ἑξάρια σέ μιά ζαριά μέ 12 ζάρια. Ἡ πιθανότητα περιγράφεται ἀπό τή διώνυμη κατανομή

$$P_B\left(x,12,\frac{1}{6}\right) = \frac{12!}{x!\,(12-x)!}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{12-x} \qquad (1.36)$$

πού δίνεται στή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος ὡς μιά συνεχής καμπύλη διαμέσου διακριτῶν σημείων. Ὁ μέσος καί ἡ τυπική ἀπόκλιση εἶναι ἀντίστοιχα

$$\mu = 12\left(\frac{1}{6}\right) = 2$$

καί

$$\sigma = \sqrt{12\,\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)} = \sqrt{\frac{5}{3}} \simeq 1.29\ .$$

Ἡ κατανομή εἶναι ἀσύμμετρη ὡς πρός τόν μέσο ἤ ὡς πρός ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο. Ἡ πλέον πιθανή τιμή μέ φυσική ἔννοια εἶναι ἡ τιμή x=2 ἄν καί ἡ συνεχής καμπύλη γίνεται μέγιστη στό διάστημα $1 < x < 2$.

1-7. Ἡ Κατανομή Poisson

Ἡ διώνυμη κατανομή βρίσκει μικρή πρακτική ἐφαρμογή ἔξω ἀπό τό χῶρο τῶν τυχερῶν παιχνιδιῶν. Γιά μεγάλο ἀριθμό n τῶν ἐπιμέρους καταστάσεων, ἡ ἐξ. (1.30) ἀπαιτεῖ τόν ὑπολογισμό μεγάλων παραγοντικῶν πού κάνει τό χειρισμό τῆς κατανομῆς δυσχερή. Ἡ χρησιμότητα τῆς διώνυμης κατανομῆς ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι ἐξάγεται κατά ἁπλό τρόπο ἀπό τίς θεμελιώδεις ἀρχές τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων, ἐνῶ ταυτόχρονα γιά μεγάλες τιμές τῶν παραμέτρων της καί κάτω ἀπό συνθῆκες πού συχνά ἀπαντῶνται στίς μετρήσεις τῆς φυσικῆς, ὁδηγεῖ σέ ἁπλές συναρτήσεις κατανομῆς. Ἡ πρώτη προσέγγιση τῆς συναρτήσεως (1.30) πού θά ἐξετάσουμε εἶναι ἡ περίπτωση κατά τήν ὁποία τό μέγιστο τῆς κατανομῆς εἶναι μικρό σέ σχέση μέ τίς δυνατές τιμές n τῆς μεταβλητῆς x. Στό ὅριο αὐτό ἡ ἐπιμέρους πιθανότητα κάθε καταστάσεως p εἶναι πολύ μικρή ἐνῶ ὁ μέσος $\mu = np$ παραμένει πεπερασμένος λόγω τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ τῶν ἐπιμέρους καταστάσεων n, ἤτοι

$$p << 1, \quad \mu = np << n\ . \qquad (1.37)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οί συνθῆκες αὐτές Ικανοποιοῦνται γιά μιά μεγάλη κατηγορία φυσικῶν φαινομένων, κυρίως σέ πειράματα ὅπου μετρᾶται ὁ ἀριθμός γεγονότων ἀνά μονάδα χρόνου. Πειράματα σκεδάσεως στήν ἀτομική καί πυρηνική φυσική, μέτρηση τοῦ ρυθμοῦ ἀποδιεγέρσεως ραδιενεργῶν Ισοτόπων, φασματοσκοπικές παρατηρήσεις ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας, εἶναι μερικά παραδείγματα μετρήσεων ὅπου Ικανοποιοῦνται οἱ συνθῆκες τῆς ἐξ. (1.37). Στά πειράματα αὐτά οἱ παράμετροι p καί n εἶναι συνήθως ἄγνωστες ἐνῶ μπορεῖ νά ἐξαχθεῖ ἀπό τά δεδομένα ὁ μέσος μ ἤ τουλάχιστον ἡ ἐκτίμησή του $\mu = \bar{x}$. Ἡ προσέγγιση τῆς διώνυμης κατανομῆς γιά τίς συνθῆκες τῆς ἐξ. (1.37), γνωστή ὡς **κατανομή Poisson,** δίνει μιά ἁπλή ἔκφραση γιά τό θεωρητικό πληθυσμό ὡς συνάρτηση τῆς μεταβλητῆς x καί τοῦ μέσου $\mu = np$.

Ἡ διώνυμη κατανομή τῆς ἐξ. (1.30) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$P_B(x,n,p) = \frac{1}{x!}\,\frac{n!}{(n-x)!}\,p^x(1-p)^{-x}(1-p)^n \ . \tag{1.38}$$

Κάτω ἀπό τίς συνθῆκες τῆς ἐξ. (1.37), ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ἐκφράσεως αὐτῆς

$$\frac{n!}{(n-x)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1) \tag{1.39}$$

μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς τό γινόμενο x ἀριθμῶν πού (καθόσον $x << n$) ὁ καθένας τους εἶναι περίπου ἴσος μέ τόν ἀριθμό n. Γιά μεγάλες ἐπομένως τιμές τοῦ n τό ὅριο τοῦ ὅρου αὐτοῦ εἶναι n^x. Ὁ τέταρτος ὅρος δίνει τήν προσέγγιση

$$(1-p)^{-x} \simeq 1 + px \tag{1.40}$$

μέ ἀσυμπτωτικό ὅριο τή μονάδα καί ἐπομένως μπορεῖ νά ἀγνοηθεῖ. Γιά τόν τελευταῖο ὅρο τέλος μποροῦμε νά γράψουμε στό ὅριο $p \to 0$

$$\lim_{p\to 0}(1-p)^n = \lim_{p\to 0}\left[\,(1-p)^{1/p}\,\right]^{\mu} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\mu} = e^{-\mu}. \tag{1.41}$$

Συγκεντρώνοντας τώρα ὅλες τίς παραπάνω προσεγγίσεις βρίσκουμε ὅτι στό ὅριο $p \to 0$ ἡ διώνυμη κατανομή $P_B(x,n,p)$ τείνει ἀσυμπτωτικά πρός τήν κατανομή Poisson $P_P(x,\mu)$ ἤτοι

$$\lim_{p\to 0} P_B(x,n,p) = P_P(x,\mu) \equiv \frac{\mu^x}{x!}\,e^{-\mu} \tag{1.42}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου $\mu = np$.

Ὅπως καί ἡ διώνυμη κατανομή, ἡ κατανομή Poisson δέν εἶναι συμμετρική ὡς πρός τό σημεῖο $x = \mu$ ἤ κάποιο ἄλλο σημεῖο. Ἡ πιθανότητα $P_P(x,\mu)$ παρουσιάζει ἕνα μέγιστο κοντά στήν τιμή $x \simeq \mu$ καί φθίνει γιά $x >> \mu$. Παρόλα αὐτά παραμένει πεπερασμένη γιά $x = 0$. Γιά $x < 0$ ἡ κατανομή Poisson δέν ὁρίζεται.

Παρατηρεῖται ὅτι ἡ προσέγγιση τῆς ἐξ. (1.42) διατηρεῖ τή σωστή κανονικοποίηση τῆς κατανομῆς. Μέ ἄλλα λόγια ἡ συνάρτηση $P_P(x,\mu)$ ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη τῆς ἐξ. (1.9), ὅπως μπορεῖ εὔκολα νά ἐπιβεβαιωθεῖ ἀπό τήν γνωστή ταυτότητα

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} = e^{\mu} \ . \tag{1.43}$$

Ἀπό τή διεργασία τῆς προσεγγίσεως περιμένουμε ἀκόμη ὅτι ὁ μέσος τῆς κατανομῆς $P_P(x,\mu)$ θά εἶναι ὁ ἴδιος μέ τόν μέσο τῆς ἀντίστοιχης διώνυμης κατανομῆς, ἤτοι ἡ παράμετρος μ. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (1.18)

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left[x \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \right] = \mu e^{-\mu} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \mu e^{-\mu} \sum_{z=1}^{\infty} \frac{\mu^z}{z!} = \mu \ . \tag{1.44}$$

Ἡ τυπική ἀπόκλιση τῆς κατανομῆς Poisson μπορεῖ ἀφενός νά ὑπολογιστεῖ ἀπό τό ὅριο τῆς διακυμάνσεως τῆς ἀντίστοιχης διώνυμης κατανομῆς στό ὅριο $p \to 0$. Ἀπό τήν ἐξ. (1.33)

$$\sigma^2 = \lim_{p \to 0} \left[np(1-p) \right] = \mu \ . \tag{1.45}$$

Ἐναλλακτικά μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε ἀπευθείας τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (1.19)

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} \left[(x-\mu)^2 \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \right] = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} - \mu^2 \ .$$

Παρατηρώντας ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος (γιά $x = 0$) μηδενίζεται μποροῦμε νά γράψουμε

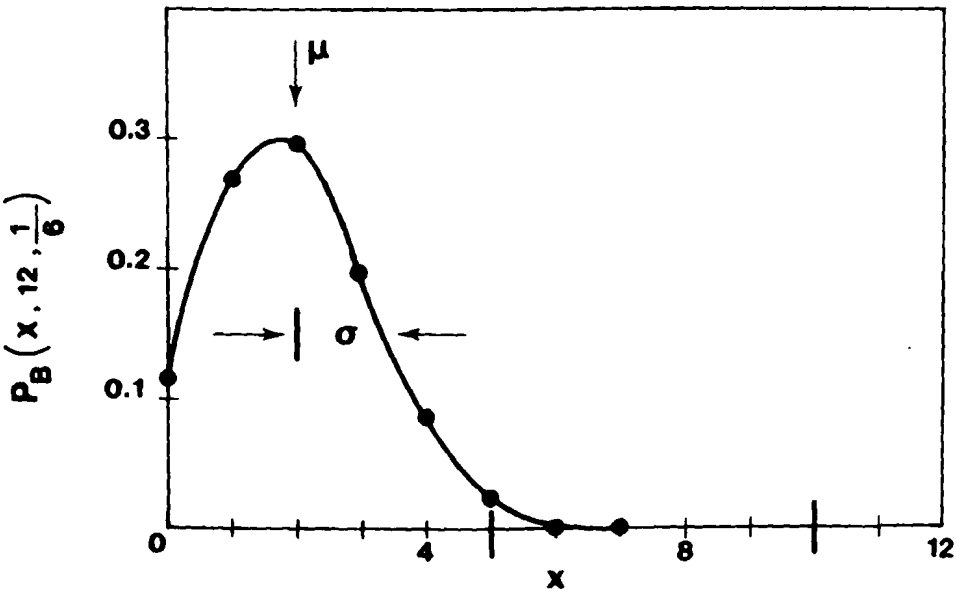
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sigma^2 = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} - \mu^2 = \mu \sum_{z=0}^{\infty} (z+1)^2 \frac{\mu^z}{(z+1)!} e^{-\mu} - \mu^2$$

$$= \mu \sum_{z=0}^{\infty} z \frac{\mu^z}{z!} e^{-\mu} + \mu^2 = \mu \ . \qquad (1.46)$$

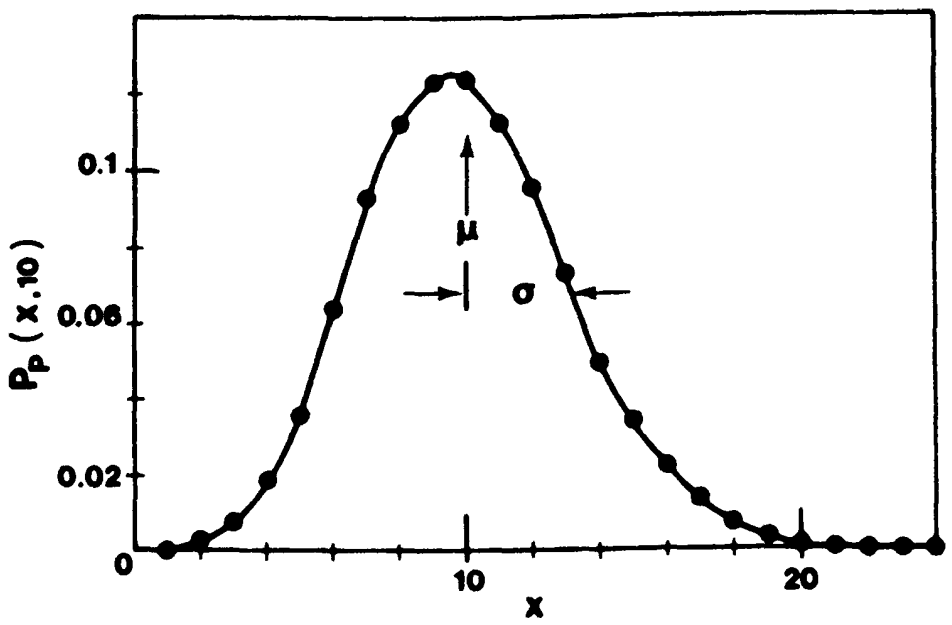
Στήν κατανομή Poisson ἡ τυπική ἀπόκλιση εἶναι ἴση μέ τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ μέσου.

Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα τῆς κατανομῆς Poisson δίνονται στά σχήματα 1-5 καί 1-6. Στό πρῶτο παράδειγμα ὅπου ἔχει χρησιμοποιηθεῖ ὁ ἴδιος μέσος μέ τόν μέσο τῆς διώνυμης κατανομῆς τοῦ σχήματος 1-4, ἡ κατανομή ἐμφανίζει χαρακτηριστική ἀσυμμετρία, ἐνῶ ὁ μέσος ἀπέχει ἀρκετά ἀπό τήν πλέον πιθανή τιμή πού βρίσκεται μεταξύ τῶν τιμῶν x=1 καί x=2. Γιά τήν εἰδική μάλιστα τιμή τοῦ μέσου μ=2 πού χρησιμοποιήθηκε, οἱ τιμές x=1 καί x=2 ἐμφανίζουν τήν ἴδια πιθανότητα. Ἡ κατανομή Poisson $P_P(x,2)$ τοῦ σχήματος 1-5 παρουσιάζει ἐξαιρετική ὁμοιότητα μέ τή διώνυμη κατανομή $P_B(x,12,1/6)$ τοῦ σχήματος 1-4, πού δείχνει ὅτι ἡ ἐπιμέρους πιθανότητα p δέν εἶναι ἀπαραίτητο νά εἶναι πολύ μικρή ὥστε νά ἰσχύει ἡ προσέγγιση τῆς ἐξ. (1.42).



ΣΧΗΜΑ 1-5 Ἡ κατανομή Poisson $P_P(x,\mu)$ γιά $\mu = 1.67$ καί $\sigma = 1.29$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 1-6 Ἡ Κατανομή Poisson $P_P(x,\mu)$ γιά $\mu = 10$ καί $\sigma = 3.16$.

Στό παράδειγμα τοῦ σχήματος 1-6 ὅπου ὁ μέσος εἶναι ἀρκετά μεγαλύτερος τῆς μονάδας ἡ κατανομή εἶναι περισσότερο συμμετρική ἐνῶ ἡ τυπική ἀπόκλιση $\sigma = \sqrt{\mu}$ ἀρκετά μικρότερη ἀπό τήν τιμή τοῦ μέσου. Οἱ ἰδιότητες αὐτές, δηλαδή αὔξηση τῆς συμμετρίας τῆς κατανομῆς καί βελτίωση τῆς ἀκρίβειας τῆς μετρήσεως καθώς αὐξάνει ἡ τιμή τοῦ μέσου, εἶναι χαρακτηριστικές τῆς κατανομῆς Poisson.

1-8 Ἡ Κατανομή Gauss ἤ Κανονική Κατανομή

Ἡ πιό χρήσιμη κατανομή γιά τήν στατιστική ἀνάλυση δεδομένων εἶναι ἡ **κατανομή Gauss ἤ κανονική κατανομή.** Ὅπως καί ἡ κατανομή Poisson πού μόλις ἐξετάσαμε ἀποτελεῖ προσέγγιση τῆς διώνυμης κατανομῆς στήν εἰδική περίπτωση ὅπου ὁ ἀριθμός n τῶν ἐπιμέρους καταστάσεων τείνει πρός τό ἄπειρο ἐνῶ ταυτόχρονα ἡ πιθανότητα np πραγματοποιήσεως καθεμιᾶς εἶναι μεγάλη, ἤτοι

$$n \to \infty, \qquad np >> 1 \ . \tag{1.47}$$

Ἡ μεγάλη χρησιμότητα τῆς κανονικῆς κατανομῆς ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

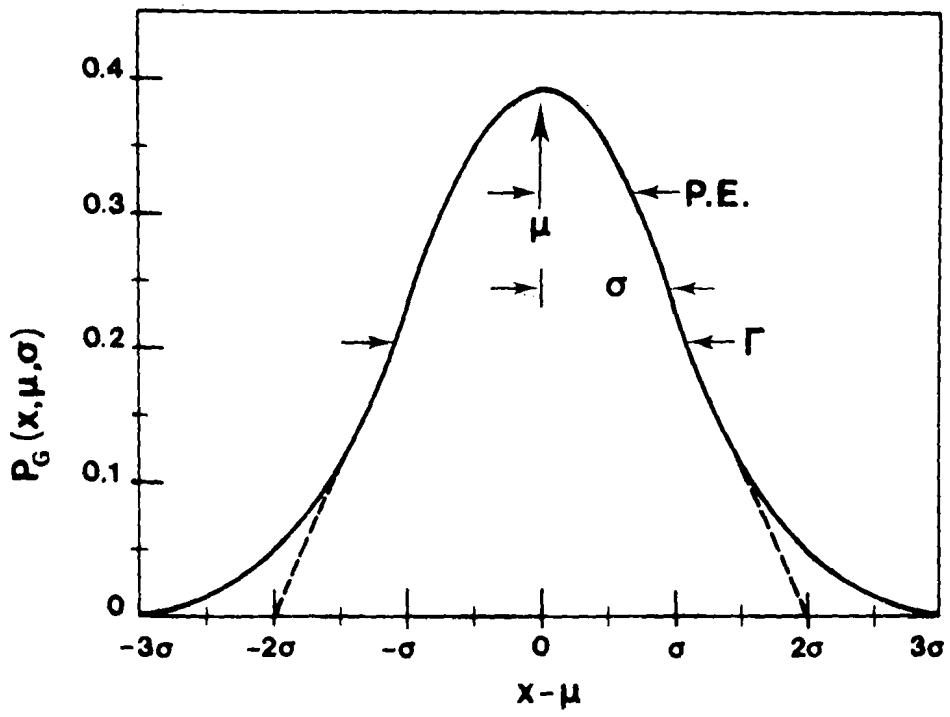
έχει άποδειχτεῖ πειραματικά ὅτι ἀποδίδει ἀρκετά πιστά τό θεωρητικό πληθυσμό τῶν μετρήσεων στίς περισσότερες περιπτώσεις. Ἐπιπλέον ἔχει ἀποδειχτεῖ ὅτι ἀποδίδει τήν κατανομή τῶν ἐκτιμήσεων τῶν στατιστικῶν παραμέτρων γιά τούς περισσότερους θεωρητικούς πληθυσμούς.

Ὑπάρχουν πολλοί μαθηματικοί τρόποι γιά νά καταλήξει κανείς στήν κατανομή Gauss μέ ἀπαρχή τή διώνυμη κατανομή καί τίς συνθῆκες τῆς ἐξ. (1.47) {βλέπε π.χ. F. Reif, Στατιστική Φυσική, Ἔκδοση Ε.Μ.Π., 1978, Παράρτημα Π.1}. Στά πλαίσια τοῦ βιβλίου αὐτοῦ θά ἀρκεστοῦμε στήν παράθεση τῆς τελικῆς ἐκφράσεως

$$P_G(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad (1.48)$$

ὅπου ὁ σταθερός παράγοντας $\left[\sigma\sqrt{2\pi}\right]^{-1}$ ἐξασφαλίζει τή σωστή κανονικοποίηση τῆς ἐξ. (1.9).

Ἡ κατανομή Gauss $P_G(x,\mu,\sigma)$ δίνεται στή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 1-7 ὡς συνάρτηση τῆς ἀποκλίσεως ἀπό τόν μέσο $(x-\mu)$. Εἶναι μιά



ΣΧΗΜΑ 1-7 Ἡ κατανομή Gauss $P_G(x,\mu,\sigma)$ ὡς συνάρτηση τῆς ἀποκλίσεως ἀπό τόν μέσο $(x-\mu)$. Ὁ ὁριζόντιος ἄξονας τῆς γραφικῆς παραστάσεως εἶναι βαθμονομημένος σέ μονάδες ἴσες πρός τήν τυπική ἀπόκλιση σ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

συνεχής συμμετρική κατανομή ὅπου ὁ μέσος μ, ἡ διάμεσος $\mu_{1/2}$ καί ἡ πλέον πιθανή τιμή μ_{max} συμπίπτουν. Γιά $x = \mu = \mu_{1/2} = \mu_{max}$ ἡ κατανομή παίρνει τή μέγιστη τιμή

$$P_G(\mu,\mu,\sigma) \simeq \frac{0.4}{\sigma} \ . \tag{1.49}$$

Ἡ πιθανότητα ὥστε μιά μέτρηση νά δώσει ἀποτέλεσμα μέσα σέ ἕνα διάστημα dx γύρω ἀπό τήν τιμή x εἶναι ἴση μέ $P_G(x,\mu,\sigma)dx$. Ὁ μέσος μ καί ἡ τυπική ἀπόκλιση σ εἶναι πράγματι οἱ ἀντίστοιχες ποσότητες πού περιέχονται μέ τά ἴδια σύμβολα στήν ἀναλυτική ἔκφραση τῆς ἐξ. (1.48). Ὅπως μπορεῖ νά ἐπιβεβαιωθεῖ ἀπό τούς ὁρισμούς τῶν ἐξ. (1.18) καί (1.19)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx = \mu \tag{1.50α}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx = \sigma^2 \tag{1.50β}$$

Ἄν καί ἡ τυπική ἀπόκλιση σ ὁρίζει πλήρως τήν ἔκταση τῆς κατανομῆς, συνήθως ὁρίζεται μιά ἐναλλακτική παράμετρος γιά τήν περιγραφή τῆς περιοχῆς ὅπου ἡ πιθανότητα εἶναι σημαντική. Τό **πλήρες εὖρος στό μισό τοῦ μέγιστου Γ**, ὅπως ἀποκαλεῖται ἡ παράμετρος αὐτή, ὁρίζεται ὡς ἡ ἔκταση τῆς μεταβλητῆς x μεταξύ τῶν δύο τιμῶν ὅπου ἡ συνάρτηση $P_G(x,\mu,\sigma)$ γίνεται τό μισό τῆς μέγιστης τιμῆς $P_G(\mu,\mu,\sigma)$, ἤτοι μεταξύ τῶν σημείων πού ὁρίζονται ἀπό τή σχέση

$$P_G(\mu \pm \tfrac{1}{2}\Gamma,\mu,\sigma) = \tfrac{1}{2} P_G(\mu,\mu,\sigma) \ . \tag{1.51}$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι

$$\Gamma = 2.354\ \sigma \ . \tag{1.52}$$

Καθόσον ἡ ποσότητα $P_G(x,\mu,\sigma)dx$ ἐκφράζει τήν πιθανότητα ὥστε μιά μέτρηση νά δώσει ἀποτέλεσμα στό διάστημα dx γύρω ἀπό τήν τιμή x, τό ὁλοκλήρωμα

$$A = \int_{x_1}^{x_2} P_G(x,\mu,\sigma)dx$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

έκφράζει τήν πιθανότητα ὥστε μιά μέτρηση νά δώσει άποτέλεσμα στό διάστημα μεταξύ τῶν τιμῶν x_1 καί x_2. Συνήθως ἡ **ὁλοκληρωμένη πιθανότητα Gauss** ὁρίζεται ὥστε τά σημεῖα x_1 καί x_2 νά εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τόν μέσο μ ἐνῶ ἡ μεταβλητή x μετρᾶται σέ μονάδες τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως σ. Στό συμβολισμό αὐτό, ἡ πιθανότητα ὥστε μιά μέτρηση νά ἔχει ἀπόκλιση ἀπό τόν μέσο μικρότερη ἀπό $|x-\mu| = z\sigma$ δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$A_G(z,\mu,\sigma) = \int_{\mu-z\sigma}^{\mu+z\sigma} P_G(x,\mu,\sigma)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z}^{z} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \ . \qquad (1.53)$$

Ὁ ὑπολογισμός τοῦ τελευταίου ὁλοκληρώματος δέν εἶναι δυνατόν νά γίνει ἀναλυτικά. Συνήθως ὁ ὑπολογισμός τῆς ὁλοκληρωμένης πιθανότητας Gauss γίνεται μέ τή βοήθεια ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ ἀφοῦ προηγουμένως τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (1.53) ἀναπτυχθεῖ σέ σειρά. Τά ἀποτελέσματα ἑνός παρόμοιου ὑπολογισμοῦ δίνονται στόν Πίνακα 1-1 γιά τιμές τῆς μεταβλητῆς z ἀπό 0.00 ἕως 3.00 σέ βήματα 0.01 καί γιά τιμές τοῦ z ἀπό 3.0 ἕως 5.9 σέ βήματα 0.1. Οἱ τιμές πού περιέχονται στόν πίνακα ἀντιπροσωπεύουν τήν ἀντίστοιχη γραμμοσκιασμένη περιοχή τοῦ σχήματος. Εἶναι ἄξιο νά σημειωθεῖ ὅτι ἡ πιθανότητα μειώνεται στά 50% γιά ἀπόκλιση περίπου $\frac{2}{3}$ σ. Ἀπόκλιση μιᾶς τυπικῆς ἀποκλίσεως ἔχει πιθανότητα μικρότερη ἀπό 32%, δύο τυπικῶν ἀποκλίσεων μικρότερη ἀπό 5% καί τριῶν τυπικῶν ἀποκλίσεων μικρότερη ἀπό 1%. Μέ ἄλλα λόγια σέ ἕνα πείραμα μέ μεγάλο ἀριθμό μετρήσεων περιμένουμε ὅτι τά 68% τῶν σημείων θά ἀπέχουν ἀπό τόν μέσο λιγώτερο ἀπό μιά τυπική ἀπόκλιση, τά 95% λιγώτερο ἀπό δύο καί τά 99% λιγώτερο ἀπό τρεῖς τυπικές ἀποκλίσεις.

Μέ τή βοήθεια τοῦ Πίνακα 1-1 μποροῦμε νά ὁρίσουμε μιά τελευταία παράμετρο πού συμβατικά ἀναφέρεται στή βιβλιογραφία γιά τήν ἀπόδοση μετρήσεων πού ἀκολουθοῦν τήν κανονική κατανομή. Τό **πιθανό σφάλμα (ΠΣ)** ὁρίζεται ὡς ἡ τιμή τῆς μεταβλητῆς $x = z\sigma$ γιά τήν ὁποία ἡ ὁλοκληρωμένη πιθανότητα παίρνει τήν τιμή 0.5, ἤτοι ἡ τιμή x γιά τήν ὁποία

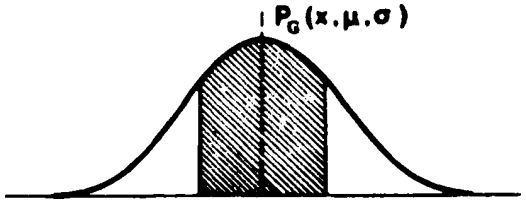
$$A_G(z,\mu,\sigma) = 0.5 \ . \qquad (1.54)$$

Ἀπό τόν Πίνακα 1-2 ἡ σχέση μεταξύ τοῦ ΠΣ καί τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ὡς

$$\Pi\Sigma = 0.6745\ \sigma = 0.2865\ \Gamma \ . \qquad (1.55)$$



ΠΙΝΑΚΑΣ 1-1 Ὁλοκληρώμένη πιθανότητα Gauss $A_G(z,\mu,\sigma)$ ὡς πρός τήν ἀπόκλιση πρός τόν μέσο σέ μονάδες τυπικῆς ἀποκλίσεως $z = |x-\mu| / \sigma$ [P.R. Bevington, Data Reduction and Error Analysis in the Physical Sciences, McGraw-Hill, 1969].



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0	.00798	.01596	.02393	.03191	.03988	.04784	.05581	.06376	.07171
0.1	.07966	.08759	.09552	.10343	.11134	.11924	.12712	.13499	.14285	.15069
0.2	.15852	.16633	.17413	.18191	.18967	.19741	.20514	.21284	.22052	.22818
0.3	.23582	.24344	.25105	.25864	.26614	.27366	.28115	.28862	.29605	.30346
0.4	.31084	.31819	.32551	.33280	.34006	.34729	.35448	.36164	.36877	.37587
0.5	.38292	.38995	.39694	.40389	.41080	.41768	.42452	.43132	.43809	.44481
0.6	.45149	.45814	.46474	.47131	.47783	.48431	.49075	.49716	.50350	.50981
0.7	.51607	.52230	.52847	.53461	.54070	.54676	.55276	.55870	.56461	.57047
0.8	.57629	.58206	.58778	.59346	.59909	.60467	.61021	.61570	.62114	.62653
0.9	.63188	.63718	.64243	.64763	.65278	.65789	.66294	.66795	.67291	.67783
1.0	.68269	.68750	.69227	.69699	.70166	.70628	.71085	.71538	.71985	.72428
1.1	.72866	.73300	.73728	.74152	.74571	.74985	.75395	.75799	.76199	.76595
1.2	.76985	.77371	.77753	.78130	.78502	.78868	.79232	.79591	.79945	.80294
1.3	.80639	.80980	.81318	.81647	.81975	.82298	.82616	.82930	.83240	.83546
1.4	.83848	.84145	.84438	.84727	.85012	.85293	.85570	.85843	.86112	.86377
1.5	.86638	.86895	.87148	.87397	.87643	.87885	.88123	.88358	.88588	.88816
1.6	.89039	.89259	.89476	.89689	.89898	.90103	.90308	.90507	.90703	.90896
1.7	.91086	.91272	.91456	.91636	.91813	.91987	.92158	.92326	.92491	.92654
1.8	.92813	.92969	.93123	.93274	.93422	.93568	.93711	.93851	.93988	.94123
1.9	.94256	.94386	.94513	.94638	.94761	.94882	.95000	.95115	.95229	.95340
2.0	.95449	.95556	.95661	.95764	.95864	.95963	.96059	.96154	.96247	.96338
2.1	.96426	.96513	.96599	.96682	.96764	.96844	.96922	.96999	.97074	.97147
2.2	.97219	.97289	.97358	.97425	.97490	.97555	.97617	.97679	.97739	.97797
2.3	.97855	.97911	.97965	.98019	.98071	.98122	.98172	.98221	.98268	.98315
2.4	.98360	.98404	.98446	.98490	.98531	.98571	.98610	.98648	.98686	.98722
2.5	.98758	.98792	.98826	.98859	.98891	.98922	.98953	.98983	.99012	.99040
2.6	.99067	.99094	.99120	.99146	.99171	.99195	.99218	.99241	.99264	.99285
2.7	.99306	.99327	.99347	.99366	.99385	.99404	.99422	.99439	.99455	.99471
2.8	.99489	.99504	.99520	.99534	.99549	.99563	.99576	.99589	.99602	.99615
2.9	.99627	.99638	.99650	.99661	.99672	.99682	.99692	.99702	.99712	.99721

	.00	.10	.20	.30	.40
3.0	.9973002	.9980648	.9986257	.9990315	.9993261
3.5	.9995347	.9996817	.9997844	.9998553	.9999035
4.0	.9999366	.9999586	.9999733	.9999827	.9999891
4.5	.9999932	.9999957	.9999973	.9999984	.9999991
5.0	.9999994	.9999996	.9999998	.9999999	.9999999
5.5	.9999999	.9999999	.9999999	.9999999	.9999999

1-9 Μετάδοση τοῦ Πειραματικοῦ Σφάλματος

Σπάνια τό ἀποτέλεσμα μιᾶς μετρήσεως ἀποτελεῖ καί τό τέλος τῆς πειραματικῆς προσπάθειας. Συνήθως στόχος τοῦ πειράματος εἶναι ὁ προσδιορισμός μιᾶς ποσότητας πού γιά τόν ὑπολογισμό της ἀπαιτεῖται ἡ γνώση περισσοτέρων ἀπό ἕνα φυσικῶν μεγεθῶν. Ὡς πολύ ἁπλό παράδειγμα μπο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ροῦμε νά θεωρήσουμε τόν ὄγκο ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, ὅπου χρειάζεται νά μετρήσουμε ἀνεξάρτητα τίς τρεῖς του διαστάσεις. Καθεμιά ἐπιμέρους μέτρηση καταλήγει σέ μιά ἐκτίμηση τῆς «πραγματικῆς» τιμῆς τοῦ ἀντίστοιχου φυσικοῦ μεγέθους καί σέ μιά ἐκτίμηση τῆς ἀβεβαιότητας στόν προσδιορισμό τῆς «πραγματικῆς» τιμῆς. Ἀπό τίς πληροφορίες αὐτές καί σύμφωνα μέ κάποια φυσική σχέση θά πρέπει νά ὑπολογίσουμε τήν «πραγματική» τιμή τοῦ σύνθετου μεγέθους καί τήν ἀβεβαιότητα τοῦ ἀποτελέσματος. Εἶναι ἑπομένως ἐνδιαφέρον νά ἐξετάσουμε τή μετάδοση τῆς ἀβεβαιότητας μιᾶς πειραματικῆς μετρήσεως στό τελικό ἀποτέλεσμα κατά τήν ἐκτέλεση μαθηματικῶν πράξεων μέ τιμές ἄλλων φυσικῶν μεγεθῶν πού προέρχονται ἀπό μετρήσεις.

Ἄς θεωρήσουμε τή γενική περίπτωση ὅπου ζητεῖται ἡ τιμή τῆς ποσότητας z, ἡ ὁποία εἶναι συνάρτηση n μεταβλητῶν x_k, k = 1, ..., n

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \ . \tag{1.56}$$

Ἄς θεωρήσουμε ἀκόμη ὅτι ἡ τιμή τῶν μεταβλητῶν x_k εἶναι γνωστή ὡς $\bar{x}_k$ ἀπό N_i ἀνεξάρτητες μετρήσεις γιά κάθε μεταβλητή, μέ ἀντίστοιχη ἀβεβαιότητα σ_k. Γιά καθεμιά δηλαδή μεταβλητή x_k ἔχουμε στή διάθεσή μας N_k μετρήσεις πού θά συμβολίσουμε ὡς x_{ki}, i = 1, ..., N_k. Ἡ ποσότητα σ_k μπορεῖ νά εἶναι ὁποιαδήποτε ἀπό τίς παραμέτρους πού ἔχουμε ὁρίσει ὡς τώρα, ἤτοι ἡ τυπική ἀπόκλιση, τό πιθανό σφάλμα ἤ ἡ τυπική ἀπόκλιση στόν προσδιορισμό τοῦ μέσου. Ποιά εἶναι ἡ ἀβεβαιότητα στόν ὑπολογισμό τῆς ποσότητας z διαμέσου τῆς συναρτήσεως $f(x_1, x_2, ..., x_n)$;

Ἄν καί σέ εἰδικές περιπτώσεις μπορεῖ νά μήν εἶναι ἀκριβές, θά θεωρήσουμε ὅτι ἡ πλέον πιθανή τιμή γιά τήν ποσότητα z εἶναι ἡ τιμή

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \ . \tag{1.57}$$

Θεωρητικά θά μπορούσαμε νά βροῦμε τήν ἀβεβαιότητα στήν τιμή $\bar{z}$ ἄν δημιουργούσαμε μιά μεγάλη κατανομή ἀπό τίς τιμές z_i πού προκύπτουν γιά ὅλους τούς $N = N_1 \times N_2 \times ... \times N_k$ συνδιασμούς τῶν ἐπιμέρους ἀποτελεσμάτων x_{ki}, ἤτοι

$$z_i = f(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni}) \ . \tag{1.58}$$

Γιά ἕνα μεγάλο ἀριθμό μετρήσεων ὁ μέσος τῆς κατανομῆς αὐτῆς συμπίπτει μέ τήν ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (1.57), ἐνῶ ἡ τυπική ἀπόκλιση σ_z δίνεται ἀπό τήν ἐξ. (1.17)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sigma_z^2 = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i - \bar{z})^2\right] . \tag{1.59}$$

Ἂν παραδεχτοῦμε ὅτι ἡ ἀπόκλιση $z_i - \bar{z}$ καθεμιᾶς ἀπό τίς ἐπιμέρους ἐκτιμήσεις τῆς ἐξ. (1.58) εἶναι μικρή, μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τό θεώρημα Taylor καί νά γράψουμε σέ πρώτη προσέγγιση

$$z_i - \bar{z} = \sum_{k=1}^{n}(x_{ki} - \bar{x}_k)\frac{\partial f}{\partial x_k} \tag{1.60}$$

ὅπου ἡ μερική παράγωγος δηλώνει διαφόρηση ὡς πρός τήν μεταβλητή x_k μέ ὅλες τίς ἄλλες μεταβλητές σταθερές στήν ἀντίστοιχη μέση τιμή. Συνδιάζοντας τίς ἐξ. (1.59) καί (1.60) μποροῦμε νά ἐκφράσουμε τήν ἀβεβαιότητα σ_z ὡς συνάρτηση τῶν τυπικῶν ἀποκλίσεων σ_i τῶν μεταβλητῶν x_i

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{n}(x_{ki} - \bar{x}_k)\frac{\partial f}{\partial x_k}\right]^2\right\}\\ &= \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{n}(x_{ki} - \bar{x}_k)^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2\right.\right.\\ &\left.\left. + 2\sum_{\substack{k,\ell=1\\ k\neq\ell}}^{n}(x_{ki} - \bar{x}_k)(x_{\ell i} - \bar{x}_\ell)\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_\ell}\right)\right]\right\} .\end{aligned} \tag{1.61}$$

Ὁ πρῶτος ὅρος τῆς τελευταίας ἐκφράσεως μπορεῖ νά γραφεῖ μέ τή βοήθεια τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐξ. (1.17) ὡς

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{ki} - \bar{x}_k)^2\right]\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 .\end{aligned} \tag{1.62}$$

Ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ἐξ. (1.61) περιέχει τό ἄθροισμα γινομένων τῶν ἀποκλίσεων δύο διαφορετικῶν μεγεθῶν γιά δύο ἀνεξάρτητες μετρήσεις. Ἂν πράγματι οἱ μετρήσεις εἶναι ἀνεξάρτητες τότε κατά μέσον ὅρο περιμένουμε ὅτι θετικές ἀποκλίσεις θά συνεισφέρουν τόσο συχνά ὅσο καί ἀρνητικές ἀποκλίσεις. Στό ὅριο ἑπομένως $N\to\infty$ περιμένουμε ὅτι ὁ δεύτερος ὅρος τῆς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

έξ. (1.61) μηδενίζεται. Γιά n έπομένως ἀνεξάρτητες μετρήσεις πού προσδιορίζουν τίς n μεταβλητές τῆς συναρτήσεως $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ἡ ἀβεβαιότητα στήν τιμή τῆς έξ. (1.57) δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\sigma_z^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2. \tag{1.63}$$

Ἡ έξ. (1.63) ἀποτελεῖ μιά ἀπό τίς σημαντικότερες σχέσεις τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως. Θά ἔχουμε τήν εὐκαιρία νά τήν χρησιμοποιήσουμε ἀρκετές φορές στή συνέχεια. Στό στάδιο αὐτό θά ἐξετάσουμε τήν ἐφαρμογή της σέ ὁρισμένες ἁπλές συναρτήσεις πού προκύπτουν συχνά στή στατιστική ἀνάλυση.

Ἄν ἡ ποσότητα z προέρχεται ἀπό τό ἄθροισμα (ἤ τή διαφορά) δύο μεγεθῶν x καί y

$$z = \alpha x + \beta y \tag{1.64}$$

ὅπου α καί β εἶναι σταθεροί συντελεστές, τότε οἱ μερικές παράγωγοι τῆς έξ. (1.63) δίνουν

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} \quad \beta.$$

Ἡ έξ. (1.63) παίρνει ἑπομένως τή μορφ

$$\sigma_z^2 = \alpha^2 \sigma_x + \beta^2 \sigma_y^2 \tag{1.65}$$

ἤ

$$\sigma_z = \sqrt{\alpha^2 \sigma_x^2 + \beta^2 \sigma_y^2}. \tag{1.66}$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο, .ν z προέρχεται ἀπό τόν πολλαπλασιασμό δύο μεγεθῶν

$$z = \alpha x y \tag{1.67}$$

οἱ μερικές παραγωγοι γίνονται

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \alpha x$$

καί έξ. (1.63) παίρνει τήν εἰδική μορφή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sigma_z^2 = a^2y^2\sigma_x^2 + a^2x^2\sigma_y^2 \tag{1.68}$$

πού μπορεῖ νά ἀποδοθεῖ μέ τήν περισσότερο συμμετρική σχέση

$$\frac{\sigma_z^2}{z^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}. \tag{1.69}$$

Οἱ ἐξ. (1.65) καί (1.69) μποροῦν νά γενικευθοῦν κατά πρωφανή τρόπο στήν περίπτωση ἀθροίσματος ἤ γινομένου πολλῶν μεταβλητῶν. Οἱ ἀντίστοιχες γενικές ἐκφράσεις τῆς ἀβεβαιότητας σ_z δίνονται στίς πρῶτες δύο σειρές τοῦ Πίνακα 1-2. Ὁ ἴδιος πίνακας περιέχει ἀκόμη τίς ἀντίστοιχες ἐκφράσεις τῆς ἀβεβαιότητας γιά μερικές συνήθεις συναρτήσεις, πού μποροῦν νά ἐπαληθευτοῦν εὔκολα μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (1.63).

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-2 Ἀβεβαιότητα σ_z στόν προσδιορισμό τῆς ποσότητας $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ἀπό n ἀνεξάρτητες μετρήσεις τῶν μεταβλητῶν x_k μέ ἀντίστοιχη ἀβεβαιότητα σ_k γιά συνήθεις μαθηματικές συναρτήσεις.

Συνάρτηση	Ἀβεβαιότητα
Ἄθροισμα	
$z = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$	$\sigma_z^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_k^2$
Γινόμενο	
$z = a \prod_{k=1}^{n} x_k$	$\frac{\sigma_z^2}{z^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^2}{x_k^2}$
Δύναμη	
$z = ax^{\beta}$	$\frac{\sigma_z}{z} = \beta \frac{\sigma_x}{x}$
Ἐκθετική συνάρτηση	
$z = ae^{\beta x}$	$\frac{\sigma_z}{z} = \beta\sigma_x$
Λογάριθμος	
$z = a\ln(\beta x)$	$\sigma_z = a \frac{\sigma_x}{x}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1-10 Έκτίμηση τοῦ Μέσου καί τοῦ Πειραματικοῦ Σφάλματος

Στήν Παράγραφο 1-6 δεχτήκαμε χωρίς άπόδειξη ὅτι ἡ καλύτερη ἐκτίμηση γιά τόν μέσο τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ δίνεται άπό τή μέση τιμή τῶν μετρήσεων x_i. Ἡ δικαιολόγηση τῆς παραδοχῆς αὐτῆς στηρίζεται στήν κατανομή Gauss. Γενικά περιμένουμε ὅτι ὁ θεωρητικός πληθυσμός θά εἶναι εἴτε κατανομή Gauss εἴτε κατανομή Poisson. Στά περισσότερα ὅμως φυσικά φαινόμενα ὅπου ἱκανοποιοῦνται ταυτόχρονα οἱ συνθῆκες τῶν ἐξ. (1.37) καί (1.47) οἱ δύο κατανομές συμπίπτουν καί μποροῦμε νά θεωρήσουμε τή συνάρτηση $P_G(x,\mu,\sigma)$ γιά τήν άπόδοση τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Θά θεωρήσουμε δηλαδή ὅτι ἡ πιθανότητα ὥστε μιά μέτρηση τοῦ μεγέθους x νά δώσει τήν τιμή x_i εἶναι $P_i dx_i$, ὅπου

$$P_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right] . \qquad (1.70)$$

Γενικά ἡ τιμή τοῦ μέσου μ στή συνάρτηση τῆς ἐξ. (1.70) δέν εἶναι γνωστή. Ἐκεῖνο πού ἔχει στή διάθεσή του ὁ παρατηρητής εἶναι μιά σειρά άπό N μετρήσεις x_i, $i = 1, ..., N$ καί μιά ἐκτίμηση τοῦ μέσου μ΄ πού προέρχεται άπό τά πειραματικά του δεδομένα. Ὁ παρατηρητής μπορεῖ ἐπομένως νά ἐκτιμήσει τήν πιθανότητα γιά ἕνα άποτέλεσμα μέ τιμή x_i σύμφωνα μέ τή συνάρτηση

$$P_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma}\right)^2\right] . \qquad (1.71)$$

Κατ΄ ἐπέκταση μπορεῖ νά ἐκτιμήσει τήν ὁλική πιθανότητα ὥστε νά πάρει σέ ἕνα πείραμα τίς συγκεκριμένες N τιμές x_i, $i = 1, ..., N$. Ἡ ὁλική αὐτή πιθανότητα εἶναι συνάρτηση τῆς παραμέτρου μ΄ καί δίνεται άπό τό γινόμενο τῶν ἐπιμέρους πιθανοτήτων τῆς ἐξ. (1.71).

$$P(\mu') = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \prod_{i=1}^{N} P_i$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma}\right)^2\right] . \qquad (1.72)$$

Στό σημεῖο αὐτό θά κάνουμε μιά παραδοχή πού θά όνομάσουμε **ἀρχή τῆς μέγιστης πιθανότητας.** Θά παραδεχτοῦμε δηλαδή ὅτι *ἡ πιθανότητα πού ἐκφράζει ἡ ἐξ. (1.72) γίνεται μέγιστη ἄν ἡ ἐκτίμηση μ΄ τοῦ μέσου εἶναι ἴση*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μέ τήν τιμή τοῦ μέσου μ τοῦ πραγματικοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Μέ ἄλλα λόγια, πιστεύουμε ὅτι τό πιό πιθανό εἶναι οἱ μετρήσεις μας νά εἶναι κατανεμημένες σύμφωνα μέ τόν πραγματικό τους θεωρητικό πληθυσμό.

Ἡ πιθανότητα πού ἐκφράζει ἡ ἐξ. (1.72) γίνεται μέγιστη ὅταν τό ἄθροισμα

$$X(\mu') = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2 \tag{1.73}$$

γίνεται ἐλάχιστο, ἤτοι ὅταν

$$\frac{\partial X(\mu')}{\partial \mu'} = \frac{\partial}{\partial \mu'} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \mu'} \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2 = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu') = 0. \tag{1.74}$$

Ἡ πλέον πιθανή ἑπομένως τιμή τοῦ μέσου μ΄ ὑπαγορεύεται ἀπό τή συνθήκη

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu') = 0$$

ἤ

$$\mu' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \equiv \bar{x} \tag{1.75}$$

πού μέ τόν τρόπο αὐτό δικαιολογεῖ τήν προηγούμενη ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (1.20).

Ἡ ἀνάλυση πού ὁδηγεῖ στό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (1.75) περιέχει μιά ἐπιπλέον σιωπηρή παραδοχή πού εἶναι ἐνδεχόμενο νά μήν ἀληθεύει σέ ὁρισμένες περιπτώσεις. Κατά τή δημιουργία τῆς πιθανότητας P(μ΄) χρησιμοποιήσαμε τήν ἴδια μέση ἀπόκλιση γιά ὅλα τά δεδομένα x_i. Μέ ἄλλα λόγια δεχτήκαμε ὅτι ὅλα τά δεδομένα προέρχονται ἀπό τόν ἴδιο θεωρητικό πληθυσμό. Παρόλα αὐτά σέ πολλές περιπτώσεις συμβαίνει ἕνα μέρος τῶν δεδομένων νά ἔχει ληφθεῖ μέ διαφορετική ἀκρίβεια ἀπό τά ὑπόλοιπα. Ἄν οἱ παρατηρήσεις π.χ. ἔχουν γίνει μέ ὄργανο ἠλεκτρικῶν μετρήσεων εἶναι δυνατόν μέρος τῶν μετρήσεων νά ἔχει γίνει μέ διαφορετική κλίμακα τοῦ ὀργάνου καί ἑπομένως μέ αὐξημένη ἤ μειωμένη ἀκρίβεια. Μποροῦμε νά συμ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

περιλάβουμε τά δεδομένα αύτά στό πείραμά μας άν θεωρήσουμε ὅτι προέρχονται άπό διαφορετικό θεωρητικό πληθυσμό μέ τόν ἴδιο μέσο άλλά διαφορετική τυπική άπόκλιση.

Γενικά, θεωρώντας διαφορετική άβεβαιότητα σ_i γιά κάθε έπιμέρους τιμή x_i μποροῦμε νά γράψουμε τήν πιθανότητα $P(\mu')$ τῆς έξ. (1.72) ὡς

$$P(\mu') = \left[\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i} \right)^2 \right] . \qquad (1.76)$$

Χρησιμοποιώντας τήν άρχή τῆς μέγιστης πιθανότητας ἡ συνθήκη πού άντιστοιχεῖ στήν έξ. (1.74) δίνει τώρα

$$\frac{\partial}{\partial \mu'} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \mu'} \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i} \right)^2 \qquad (1.77)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i^2} \right) = 0 \qquad (1.78)$$

ἤ

$$\mu' = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \qquad (1.79)$$

ὅπου ἡ συνεισφορά κάθε σημείου x_i τῶν δεδομένων στήν έκτίμηση τοῦ μέσου εἶναι άντίστροφα άνάλογη πρός τή διακύμανσή του σ_i^2.

Ἡ ποσότητα τῆς έξ. (1.75) ἤ (1.79) εἶναι ἡ καλύτερη έκτίμηση πού μπορεῖ νά κάνει ὁ παρατηρητής γιά τήν «πραγματική» τιμή τοῦ φυσικοῦ μεγέθους πού μετράει μέ βάση τά δεδομένα τοῦ πειράματος. Ποιά ὅμως εἶναι ἡ άβεβαιότητα στήν έκτίμηση αύτή; Μέ ἄλλα λόγια, ποιά ποσότητα μπορεῖ νά άναφέρει ὁ παρατηρητής, ἡ ὁποία νά χαρακτηρίζει τήν άπόκλιση τοῦ μέσου άπό τήν «πραγματική» τιμή;

Ἡ έξ. (1.63) παρέχει τή σχέση πού δίνει τήν άβεβαιότητα στόν προσδιορισμό τοῦ μέσου άπό τίς έπιμέρους άβεβαιότητες, σέ κάθε μέτρηση τοῦ πειράματος. Ἄν καθένα άπό τά N δεδομένα τοῦ πειράματος ἔχει ληφθεῖ μέ άντίστοιχη τυπική άπόκλιση σ_i, ἡ **τυπική άπόκλιση στόν προσδιορισμό τοῦ μέσου** σ_μ δίνεται άπό τή σχέση

$$\sigma_\mu^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\sigma_i^2 \left(\frac{\partial \mu'}{\partial x_i} \right)^2 \right] . \qquad (1.80)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στήν ἁπλή περίπτωση τῆς ἐξ. (1.75) ὅπου ὅλα τά δεδομένα ἀνήκουν στόν ἴδιο θεωρητικό πληθυσμό μέ τυπική ἀπόκλιση $\sigma = \sigma_i$, ἡ παράγωγος τῆς ἐξ. (1.80) δίνει

$$\frac{\partial \mu'}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right] = \frac{1}{N} \tag{1.81}$$

καί ἡ τυπική ἀπόκλιση στόν προσδιορισμό τοῦ μέσου εἶναι

$$\sigma_\mu{}^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\sigma^2\left(\frac{1}{N}\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{N} \ . \tag{1.82}$$

Ἄν ἡ ἀκρίβεια κάθε ἐπιμέρους μετρήσεως εἶναι διαφορετική, ἡ ἐκτίμηση τοῦ μέσου δίνεται ἀπό τήν ἐξ. (1.79) καί ἡ ἀντίστοιχη παράγωγος τῆς ἐξ. (1.80) παίρνει τή μορφή

$$\frac{\partial \mu'}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\ \frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}} \ .$$

Ἀντικατάσταση τῆς παραγώγου στήν ἐξ. (1.80) δίνει τή γενική ἔκφραση γιά τήν τυπική ἀπόκλιση τῆς ἐκτιμήσεως τοῦ μέσου

$$\sigma_\mu{}^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}} \ . \tag{1.83}$$

Ἡ ἀβεβαιότητα σ_μ τῆς ἐξ. (1.82) ἤ (1.83) εἶναι συνήθως ἡ ποσότητα πού ἀναφέρεται σέ κάθε μέτρηση ὡς τό πειραματικό σφάλμα τῆς μετρήσεως. Ἡ στατιστική της ἔννοια ἐξάγεται ἀπό τή μέθοδο τῆς προηγούμενης ἀναλύσεως: Ἡ ποσότητα σ_μ εἶναι ἡ τυπική ἀπόκλιση τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ πού ἀκολουθοῦν οἱ ἐκτιμήσεις τῆς «πραγματικῆς» τιμῆς τοῦ φυσικοῦ μεγέθους πού μετρᾶται, ἄν τό πείραμα τῶν N μετρήσεων ἐπαναληφθεῖ πολλές φορές. Σύμφωνα μέ τήν ἑρμηνεία πού δώσαμε στήν παράγραφο 1-9, ἡ ἐκτίμηση μ΄ ἔχει πιθανότητα 68% νά διαφέρει ἀπό τήν «πραγματική» τιμή κατά μιά ποσότητα μικρότερη ἀπό σ_μ.

Ἡ ἐξ. (1.82) δίνει τό πειραματικό σφάλμα σ_μ σέ σχέση μέ τήν τυπική

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

άπόκλιση σ τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ τῶν δεδομένων. Ὅπως εἴδαμε στήν παράγραφο 1-6, ἡ καλύτερη ἐκτίμηση πού μποροῦμε νά κάνουμε γιά τήν παράμετρο σ μέ βάση τά δεδομένα τοῦ πειράματος εἶναι

$$\sigma \simeq s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu')^2} \ . \tag{1.84}$$

Συνδιάζοντας ἑπομένως τήν τελευταία σχέση μέ τίς ἐξ. (1.75) καί (1.82) μποροῦμε νά γράψουμε γιά τό πειραματικό σφάλμα

$$\sigma_\mu \simeq s_\mu = \sqrt{\frac{1}{N\,(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \ . \tag{1.85}$$

Ἡ τελευταία σχέση ἐπιτρέπει τόν ὑπολογισμό τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος ἀποκλειστικά ἀπό τά δεδομένα τοῦ πειράματος. Ἡ διαδικασία αὐτή δέν εἶναι δυνατή στήν περίπτωση δεδομένων πού ἔχουν ληφθεῖ μέ διαφορετική ἀκρίβεια. Ὅπως δείχνουν οἱ ἐξ. (1.79) καί (1.83) γιά τήν ἐκτίμηση τοῦ μέσου καί τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος εἶναι ἀπαραίτητη ἡ γνώση τῆς ἐπιμέρους ἀβεβαιότητας σ_i κάθε μετρήσεως. Ἡ τυπική ἀπόκλιση σ_i κάθε μετρήσεως μπορεῖ νά εἶναι γνωστή ἀπό προηγούμενα πειράματα. Παρόλα αὐτά μποροῦμε νά παρατηρήσουμε ὅτι κατά τόν ὑπολογισμό τοῦ μέσου στήν ἐξ. (1.79) δέν εἶναι ἀπαραίτητη ἡ γνώση τῆς *ἀπόλυτης* ἐπιμέρους ἀβεβαιότητας κάθε σημείου. Ἄν κάθε ποσότητα σ_i πολλαπλασιαστεῖ μέ ἕνα σταθερό παράγοντα α

$$\sigma_i' = \alpha\, \sigma_i$$

ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ μέσου μένει ἀμετάβλητη. Εἶναι δυνατόν ἑπομένως νά ὑπολογίσουμε τόν μέσο μιᾶς σειρᾶς δεδομένων x_i, $i = 1, \ldots, N$ πού ἔχουν ληφθεῖ μέ διαφορετική ἀκρίβεια ἄν εἶναι γνωστή ἡ **σχετική ἀβεβαιότητα** κάθε σημείου. Μποροῦμε ἀκόμη νά μετασχηματίσουμε τήν ἐξ. (1.83) ὥστε νά παρέχει τήν ἴδια δυνατότητα.

Γιά τό σκοπό αὐτό θά ὁρίσουμε τή **μέση διακύμανση** $\bar{\sigma}^2$ τῶν σημείων x_i μέ τήν προφανή σχέση

$$\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}{N} \ . \tag{1.86}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ ποσότητα

$$\frac{\dfrac{1}{\sigma_i^2}}{\dfrac{1}{\bar{\sigma}^2}} = \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_i^2} \tag{1.87}$$

μπορεῖ τώρα νά ληφθεῖ ὡς τό μέτρο τῆς σχετικῆς συνεισφορᾶς κάθε σημείου x_i στήν ὁλική ἀβεβαιότητα τῆς ἐκτιμήσεως τοῦ μέσου. Ὡς καλύτερη ἐκτίμηση τῆς ποσότητας αὐτῆς θά γράψουμε, σέ ἀναλογία μέ τήν ἐξ. (1.85), τήν ἔκφραση

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_i^2} (x_i - \mu')^2$$

$$= \frac{N}{N-1} \frac{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{\sigma_i^2} (x_i - \mu')^2}{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{\sigma_i^2}} \tag{1.88}$$

Μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (1.82), ἡ ἔκφραση αὐτή δίνει γιά τήν τυπική ἀπόκλιση τοῦ μέσου

$$\sigma_\mu \simeq s_\mu = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \frac{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{\sigma_i^2} (x_i - \mu')^2}{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{\sigma_i^2}}} \tag{1.89}$$

πού ἀφενός μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ ἀπό τά δεδομένα x_i ἐνῶ ἀφετέρου, ὅπως καί ἡ ἐξ. (1.79), ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τή σχετική ἀκρίβεια τῶν ἐπιμέρους μετρήσεων.

1-11 Ἡ Μέτρηση ἑνός Φυσικοῦ Μεγέθους

Στό κεφάλαιο αὐτό προσπαθήσαμε νά συγκεντρώσουμε ὅλες τίς ἀπαραίτητες ἔννοιες καί μεθόδους πού θά μᾶς ἐπιτρέψουν νά ἐξάγουμε τίς περισσότερες δυνατές πληροφορίες ἀπό τή μέτρηση ἑνός φυσικοῦ μεγέθους. Εἶναι χρήσιμο νά κλείσουμε τό κεφάλαιο μέ μιά σύντομη ἀνακεφαλαίωση τῶν βασικῶν ἐννοιῶν πού ὑπεισέρχονται στήν ἀνάλυση τῶν δεδομένων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θά συγκεντρώσουμε άκόμη όλες τίς χρήσιμες σχέσεις γιά τήν έκτίμηση τῶν στατιστικῶν παραμέτρων οί όποῖες περιέχουν τίς πληροφορίες πού άναζητᾶ ἡ μέτρηση.

Μέτρηση εἶναι έξ όρισμοῦ ἡ διεργασία κατά τήν όποία ἕνα φυσικό μέγεθος συγκρίνεται πρός μιά μονάδα πού ἔχει έπιλεγεῖ γιά τό σκοπό αὐτό. Ἡ σύγκριση μπορεῖ νά γίνει εἴτε άπευθείας (π.χ. μέτρηση μήκους) ἤ συνηθέστερα μέ τή βοήθεια όργάνων, δηλαδή συσκευῶν πού άπό προηγούμενη σύγκριση μέ τή μονάδα μετρήσεως παρέχουν τό άποτέλεσμα σέ κατάλληλη κλίμακα. Γιά τήν προκαταρκτική σύγκριση τοῦ όργάνου μέ τή μονάδα μετρήσεως καί τή δημιουργία τῆς κλίμακας χρησιμοποιήσαμε τόν όρο **βαθμονόμηση.**

Καμμιά μέτρηση δέν μπορεῖ νά πραγματοποιηθεῖ μέ άπόλυτη άκρίβεια. Κατά τή διεξαγωγή τῆς μετρήσεως ὑπεισέρχονται σφάλματα πού στήν Παράγραφο 1-1 κατατάξαμε σέ τρεῖς μεγάλες κατηγορίες: *άπαράδεκτα, συστηματικά* καί *τυχαῖα.* Ἄν καί οί δύο πρῶτες κατηγορίες περιέχουν σφάλματα πού πολλές φορές έπηρεάζουν ἤ καταστρέφουν μιά μέτρηση ἡ έπανόρθωσή τους εἶναι εἴτε πολύ άπλή εἴτε άδύνατη. Γιά τό λόγο αὐτό στό ὑπόλοιπο τοῦ κεφαλαίου άσχοληθήκαμε μέ τά τυχαῖα σφάλματα πού όφείλονται σέ ἕνα μεγάλο άριθμό παραγόντων ἔξω άπό τόν ἔλεγχο τοῦ παρατηρητῆ.

Σέ ἕνα τυπικό πείραμα ἐπιστημονικῆς μετρήσεως θεωρήσαμε ὅτι, μετά τή διεξαγωγή τοῦ πειράματος, ὁ παρατηρητής διαθέτει N τιμές τοῦ φυσικοῦ μεγέθους x πού προέρχονται άπό Ισάριθμες μεμονωμένες μετρήσεις. Οἱ μετρήσεις αὐτές x_i, $i = 1, \ldots, N$ άποτελοῦν ἕνα δεῖγμα $f_N(x)$ τοῦ *θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ* $P(x)$ πού χαρακτηρίζει τό φυσικό μέγεθος καί τίς συνθῆκες τοῦ πειράματος. Γιά ἕνα μεγάλο άριθμό μετρήσεων ἡ κατανομή $f_N(x)$ τείνει πρός τόν θεωρητικό πληθυσμό, ἤτοι

$$P(x) = \lim_{N \to \infty} f_N(x) \ . \tag{1.7}$$

Σύμφωνα μέ τή σχέση αὐτή οἱ ἐκτιμήσεις τῶν στατιστικῶν παραμέτρων πού ἐξάγονται άπό τό δεῖγμα κατανομῆς τείνουν πρός τίς άντίστοιχες παραμέτρους τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Ἔτσι όρίσαμε τόν μέσο μ τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ ὡς τό όριο τῆς μέσης τιμῆς τῶν δεδομένων

$$\mu \equiv \lim_{N \to \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \right] \ . \tag{1.11}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στίς περισσότερες περιπτώσεις ἡ παράμετρος αὐτή λαμβάνεται ὡς ἡ «πραγματική» τιμή τοῦ φυσικοῦ μεγέθους πού μετρᾶται. Ἡ ἀκρίβεια τῆς μετρήσεως ἐκφράζεται ἀπό τή *διακύμανση* σ^2 πού ὁρίζεται ὡς τό ὅριο τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων ἀπό τόν μέσο

$$\sigma^2 \equiv \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2\right] \tag{1.17}$$

ἤ τήν *τυπική ἀπόκλιση* σ.

Ἄν ὁ θεωρητικός πληθυσμός ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1 \tag{1.9}$$

τότε ἡ ποσότητα $P(x)dx$ ἐκφράζει τήν πιθανότητα ὥστε μιά μεμονωμένη μέτρηση νά δώσει ἀποτέλεσμα μέσα στό διάστημα dx γύρω ἀπό τήν τιμή x. Μέ τήν ἑρμηνεία αὐτή μπορέσαμε νά ἐκφράσουμε τόν μέσο καί τήν τυπική ἀπόκλιση ὡς συναρτήσεις τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\,P(x)dx \tag{1.18}$$

καί

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\,P(x)dx\ . \tag{1.19}$$

Ἄν ἡ συναρτησιακή μορφή τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ δέν εἶναι γνωστή, ἡ καλύτερη ἐκτίμηση τῶν στατιστικῶν παραμέτρων δίνεται ἀπό τίς ἐκφράσεις

$$\mu \simeq \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1.20}$$

καί

$$\sigma^2 \simeq s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 \tag{1.24}$$

ὅπου s εἶναι ἡ *πειραματική τυπική ἀπόκλιση.*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στή συνέχεια τοῦ κεφαλαίου ἐξετάσαμε τή *διώνυμη κατανομή*

$$P_B\,(x,n,p) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^x(1-p)^{n-x} \tag{1.30}$$

πού ἐκφράζει τήν πιθανότητα ὥστε, σέ ἕνα σύνολο n ἀντικειμένων, x ἀπό αὐτά νά βρεθοῦν σέ μιά κατάσταση μέ ἐπιμέρους πιθανότητα p. Μέ τή βοήθεια τῶν ἐξ. (1.18) καί (1.19) μπορέσαμε ἀκόμη νά ὑπολογίσουμε τίς στατιστικές παραμέτρους πού χαρακτηρίζουν τή διώνυμη κατανομή

$$\mu = np$$

καί

$$\sigma^2 = np\,(1-p)\ . \tag{1.33}$$

Ἡ διώνυμη κατανομή δίνει ἁπλές καί χρήσιμες προσεγγίσεις γιά ἀσυμπτωτικές τιμές τῶν παραμέτρων της καί κάτω ἀπό συνθῆκες πού συχνά ἱκανοποιοῦνται σέ πειραματικές μετρήσεις. Γιά

$$p << 1, \qquad \mu = np << n \tag{1.37}$$

ἡ διώνυμη κατανομή τείνει πρός τήν *κατανομή Poisson*

$$P_p\,(x,\mu) = \frac{\mu^x}{x!}\,e^{-\mu} \tag{1.42}$$

μέ μέσο μ καί τυπική ἀπόκλιση

$$\sigma = \sqrt{\mu}\ . \tag{1.46}$$

Ἡ κατανομή Poisson εἶναι χρήσιμη σέ πειράματα μετρήσεως γεγονότων ἀνά μονάδα χρόνου, ὅπως συνήθως συμβαίνει στήν ἀτομική καί πυρηνική φυσική. Εἶναι μιά ἀσυμμετρική κατανομή μέ αὐξανόμενη συμμετρία στό ὅριο $\mu >> 1$. Στό ὅριο αὐτό, ἤτοι

$$n \to \infty, \qquad np >> 1 \tag{1.47}$$

συμπίπτει μέ μιά ἄλλη προσέγγιση τῆς διώνυμης κατανομῆς, τήν *κατανομή Gauss* ἤ *κανονική κατανομή*

$$P_G(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]. \tag{1.48}$$



Ὁ μέσος μ καί ἡ τυπική ἀπόκλιση σ τῆς κατανομῆς συμπίπτουν μέ τίς ἀντίστοιχες μεταβλητές τῆς συναρτήσεως. Δύο ἄλλες παράμετροι πού συχνά χρησιμοποιοῦνται γιά τήν ἀπόδοση τῆς διασποράς τῶν πειραματικῶν μετρήσεων εἶναι τό *πλῆρες εὖρος στό μισό τοῦ μέγιστου*

$$\Gamma = 2.354\ \sigma \tag{1.52}$$

καί τό *πιθανό σφάλμα*

$$\Pi\Sigma = 0.6745\ \sigma = 0.2865\ \Gamma\ . \tag{1.55}$$

Ἡ συνάρτηση

$$A_G(z,\mu,\sigma) = \int_{\mu - z\sigma}^{\mu + z\sigma} P_G(x,\mu,\sigma)dx \tag{1.53}$$

πού ὀνομάσαμε *ὁλοκληρωμένη πιθανότητα*, ἐκφράζει τήν πιθανότητα ὥστε μιά μέτρηση νά δώσει ἀποτέλεσμα μέ ἀπόκλιση ἀπό τόν μέσο μικρότερη ἀπό τήν ποσότητα zσ. Ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς συναρτήσεως $A_G(z,\mu,\sigma)$ δίνεται στόν Πίνακα 1-1 ὡς συνάρτηση τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως σ. Σέ πολλές περιπτώσεις ὁ Πίνακας 1-1 μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τήν ἀνακάλυψη ἐσφαλμένων μετρήσεων. Ἄν π.χ. σέ ἕνα δεῖγμα κατανομῆς μέ N = 50, ἕνα ἀπό τά σημεῖα ἀποκλίνει περισσότερο ἀπό 3σ ἀπό τόν μέσο, εἶναι πολύ πιθανό ὅτι τό σημεῖο αὐτό ἀντιπροσωπεύει κάποιο ἀπαράδεκτο σφάλμα καί μπορεῖ νά παραληφθεῖ ἀπό τά δεδομένα.

Σέ μιά μέτρηση περιμένουμε ὅτι ὁ θεωρητικός πληθυσμός ἐκφράζεται εἴτε ἀπό τή συνάρτηση Poisson εἴτε ἀπό τή συνάρτηση Gauss. Γιά τίς συνθῆκες πολλῶν πειραματικῶν μετρήσεων στή φυσική οἱ δύο κατανομές συμπίπτουν. Στίς περισσότερες ἑπομένως πειραματικές μετρήσεις μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τήν κανονική κατανομή γιά τήν περιγραφή τοῦ θεωρητικοῦ πληθυσμοῦ. Μέ τή διαπίστωση αὐτή καί τήν *ἀρχή τῆς μέγιστης πιθανότητας* δικαιολογήσαμε τήν ἐκτίμηση τοῦ μέσου ἀπό ἕνα δεῖγμα κατανομῆς μέ N δεδομένα

$$\mu \simeq \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{1.20}$$

Γιά ἄνιση ἀβεβαιότητα τῶν δεδομένων ἡ ἀντίστοιχη ἐκτίμηση παίρνει τή μορφή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mu \simeq \mu' = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{1.79}$$

Τό *πειραματικό σφάλμα* πού συνήθως άναφέρεται† σέ μιά μέτρηση εἶναι ἡ *τυπική ἀπόκλιση στόν προσδιορισμό τοῦ μέσου* σ_μ

$$\sigma_\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{1.82}$$

στήν περίπτωση ὅπου ὅλα τά δεδομένα ἔχουν ληφθεῖ μέ τήν ἴδια ἀκρίβεια. Στήν ἀντίθετη περίπτωση

$$\sigma_\mu^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} . \tag{1.83}$$

Ἀπό τήν ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (1.24) γιά τήν τυπική ἀπόκλιση μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τήν ποσότητα σ_μ τῆς ἐξ. (1.82) ἀπό τά πειραματικά δεδομένα ὡς

$$\sigma_\mu \simeq s_\mu = \sqrt{\frac{1}{N\,(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} . \tag{1.85}$$

Ἡ ἀντίστοιχη ἔκφραση στήν περίπτωση ἄνισης ἀκρίβειας τῶν δεδομένων εἶναι

---

† Πολλοί ἐρευνητές χρησιμοποιοῦν τό πιθανό σφάλμα πού ὁρίζεται στήν ἐξ. (1.55) γιά τήν ἀπόδοση τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος, ἤτοι

$$(\Pi\Sigma)_\mu = 0.6745\ \sigma_\mu .$$

Ἡ πρακτική αὐτή ἐμφανίζει τό πλεονέκτημα ὅτι ἡ στατιστική ἔννοια τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος εἶναι ἁπλούστερη (50% πιθανότητα ἀποκλίσεως ἀπό τήν «πραγματική» τιμή). Ἐξάλλου, ἐπειδή $(\Pi\Sigma)_\mu < \sigma_\mu$, ἡ μέτρηση δείχνει ἐκ πρώτης ὄψεως ἀκριβέστερη!

Καθόσον ἡ πρακτική αὐτή δέν εἶναι ἐννιαία στή βιβλιογραφία ἡ ἐπιλογή τοῦ ἐρευνητῆ πρέπει πάντα νά ἐλέγχεται πρίν ἀπό τή χρησιμοποίηση τῶν ἀποτελεσμάτων μιᾶς πειραματικῆς μετρήσεως.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sigma_\mu \simeq s_\mu = \sqrt{\frac{1}{N\,(N-1)}\;\frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}\,(x_i-\mu')^2}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}}} \qquad (1.89)$$

ὅπου ἡ ἐκτίμηση τοῦ μέσου μ΄ δίνεται ἀπό τήν ἐξ. (1.79). Παρατηρεῖται ὅτι τόσο στήν ἐξ. (1.79) ὅσο καί στήν ἐξ. (1.89) εἶναι ἀπαραίτητη μόνο ἡ γνώση τῆς σχετικῆς ἀκρίβειας σ_i τῶν δεδομένων.

Οἱ ἐξ. (1.83) καί (1.89) δίνουν δύο ἐναλλακτικές ἐκτιμήσεις τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος σ_μ. Στήν πράξη, γιά ἕνα πεπερασμένο ἀριθμό N μετρήσεων, οἱ δύο αὐτές ἐκτιμήσεις δέν συμπίπτουν ἄν καί ἡ διαφορά τους εἶναι συνήθως μικρή. Ἡ πρακτική πού ἀκολουθεῖται ἀπό πολλούς ἐπιστήμονες εἶναι ὁ ὑπολογισμός τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος καί ἀπό τίς δύο ἐκφράσεις καί ἡ υἱοθέτηση τοῦ ἀποτελέσματος μέ τή μεγαλύτερη ἀριθμητική τιμή.

Τό ἀποτέλεσμα κάθε πειραματικῆς μετρήσεως ἀναφέρεται μέ δύο παραμέτρους ὡς

$$x \pm \sigma \qquad (1.1)$$

ὅπου x ἀντιπροσωπεύει τήν καλύτερη δυνατή ἐκτίμηση τῆς «πραγματικῆς» τιμῆς (συνήθως μέ τόν μέσο τῆς κατανομῆς) καί σ τήν ἀκρίβεια τῆς μετρήσεως (μέ τή μέση ἀπόκλιση ἀπό τόν μέσο σ_μ ἤ τό πιθανό σφάλμα $(\Pi\Sigma)_\mu$). Μιά ἴσως περιττή παρατήρηση εἶναι ὅτι τό μέγεθος τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος σ προσδιορίζει καί τό πλῆθος τῶν *σημαντικῶν ψηφίων* στήν τιμή x. Συνήθως τό πειραματικό σφάλμα περιέχει ἕνα ἤ τό πολύ δύο σημαντικά ψηφία, ἐνῶ τά σημαντικά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ x προσδιορίζονται ἀπό τό δεύτερο κανόνα τῆς παραγράφου 1-3 σέ σχέση μέ τήν πράξη πού περιέχεται στήν ἐξ. (1.1). Δέν ἔχει π.χ. ἔννοια νά ἀναφέρουμε τό ἀποτέλεσμα μιᾶς μετρήσεως ὡς 17.31564 ± 0.5.

Ἡ στατιστική ἔννοια τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος μπορεῖ νά διατηρηθεῖ κατά τήν ἐκτέλεση ἀριθμητικῶν πράξεων μεταξύ ἀποτελεσμάτων πειραματικῶν μετρήσεων. Ὅπως εἴδαμε στήν παράγραφο 1-10 ἄν ἕνα φυσικό μέγεθος z ἐκφράζεται ἀπό τήν συνάρτηση

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.56)$$

ὅπου ἡ ἀριθμητική τιμή τῶν μεταβλητῶν x_k προέρχεται ἀπό n ἀνεξάρτητα πειράματα, τότε ὁ μέσος τοῦ μεγέθους z εἶναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \tag{1.57}$$

καί ή άβεβαιότητα σ_z δίνεται άπό τήν έπιμέρους άβεβαιότητα σ_k τῶν μεταβλητῶν x_k σύμφωνα μέ τή σχέση

$$\sigma_z^2 = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \tag{1.62}$$

ὅπου ή τιμή τῆς παραγώγου $\partial f/\partial x_k$ ὑπολογίζεται γιά $x_k = \bar{x}_k$. Μερικά παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῆς ἐξ. (1.62) δίνονται στόν Πίνακα 1-2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1-1. Πόσα σημαντικά ψηφία ἔχουν οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοί

(α) 532.39 (β) 6200 (γ) 5.60×10^7
(δ) 20 (ε) 3.000 (στ) 7×10^{-3}
(ζ) 0.001 (η) 920×10^3 (θ) 8.32

1-2. Στρογγυλέψτε τούς ἑπόμενους ἀριθμούς σέ δύο σημαντικά ψηφία

(α) 7.045 (β) 99.5 (γ) 1.07
(δ) 9.999 (ε) 1.25 (στ) 5.6695
(ζ) 6.449 (η) 1.11 (θ) 1.352

1-3. Τρεῖς ἀντιστάσεις 52.3 Ω, 0.616 Ω καί 5.23 Ω συνδέονται σέ σειρά. Προσδιορίστε τήν ὁλική ἀντίσταση. Ἄν ἡ ὁλική ἀντίσταση διαρρέεται ἀπό ρεῦμα 1.75 A προσδιορίστε τήν ἰσχή IR^2 πού καταναλώνεται.

1-4. Ἡ βαθμολογία σαράντα φοιτητῶν πού παρακολούθησαν ἕνα μάθημα τοῦ Δ΄ ἔτους ἦταν

4.9	6.9	7.4	9.0
8.0	6.9	8.6	8.4
8.4	5.3	7.8	5.9
7.3	5.5	5.5	5.6
8.9	7.7	6.6	6.2
7.8	8.2	6.0	5.3
7.8	8.1	6.8	8.3
9.2	7.6	9.2	8.1
5.6	7.9	8.7	6.5
8.5	8.3	8.6	8.1

(α) Προσδιορίστε τόν μέσο, τή διάμεσο καί τήν πλέον πιθανή τιμή τῆς κατανομῆς βαθμῶν.

(β) Ὑπολογίστε τήν τυπική ἀπόκλιση τῆς κατανομῆς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1-5. Ἡ πιθανότητα ὥστε ἕνα δέσμιο ἠλεκτρόνιο νά βρίσκεται σέ ἀπόσταση r ἀπό τόν πυρήνα τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου εἶναι

$$P(r) = cr^2e^{-2r/R}$$

ὅπου R μιά σταθερά.

(α) Προσδιορίστε τή σταθερά c.

(β) Ὑπολογίστε τή μέση ἀκτίνα τῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου στό ἄτομο τοῦ ὑδρογόνου καί τήν τυπική ἀπόκλιση.

1-6. Ἐπαληθεῦστε τό τελευταῖο σκέλος στήν ἐξ. (1.17), ἤτοι ὅτι

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2\right] = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right] - \mu^2.$$

1-7. Ὑπολογίστε τή διώνυμη κατανομή γιά $n = 6$, $p = \frac{1}{2}$ καί τίς ἀκέραιες τιμές $0 < x < 6$. Κατασκευάστε τή γραφική παράσταση τῆς κατανομῆς καί σημειῶστε τόν μέσο καί τήν τυπική ἀπόκλιση.

1-8. Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἄσκηση γιά τήν κατανομή Poisson.

1-9. Ἀποδεῖξτε ὅτι στήν κατανομή Poisson ἄν ὁ μέσος μ εἶναι ἀκέραιος, τότε ἡ πιθανότητα γιά $x = \mu$ εἶναι ἴση μέ τήν πιθανότητα γιά $x = \mu-1$.

1-10. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα κατά τήν κατανομή Gauss ὥστε νά μετρηθεῖ μιά τιμή μέ ἀπόκλιση $d = |x-\mu|$ ὅταν

(α) $d = \sigma$

(β) $d = \Pi\Sigma$

(γ) $d = \frac{1}{2}\Gamma$.

1-11. Σέ ἕνα πείραμα μέ 10 000 μετρήσεις πόσα σημεῖα θά περιμένατε νά ἀποκλίνουν ἀπό τόν μέσο περισσότερο ἀπό 2σ, 3σ, $3(\Pi\Sigma)$ καί Γ.

1-12. Ἐπαληθεῦστε τήν ἐξ. (1.32).

1-13. Ἐπαληθεῦστε τήν ἐξ. (1.33).

1-14. Προσδιορίστε τήν ἀβεβαιότητα σ_z στήν τιμή τοῦ z ἄν οἱ τιμές τῶν μεταβλητῶν x καί y προέρχονται ἀπό ἀνεξάρτητες μετρήσεις μέ ἀντίστοιχη ἀβεβαιότητα σ_x καί σ_y στίς ἑπόμενες περιπτώσεις

(α) $z = a^{\beta x}$ (β) $z = ax^2$

(β) $z = \frac{1}{2}(x+y)$ (δ) $z = \frac{1}{2}(x-y)$

(ε) $z = x^2 + y^2$ (στ) $z = \frac{1}{x^2}$.

1-15. Ἄν ἡ διάμετρος ἑνός στρογγυλοῦ τραπεζιοῦ εἶναι γνωστή μέ ἀκρίβεια 1%, μέ πόση ἀκρίβεια εἶναι γνωστή ἡ ἐπιφάνειά του; Θά βελτιωνόταν ἡ ἀκρίβεια ἄν γνωρίζαμε τήν ἀκτίνα μέ ἀκρίβεια 1%;

1-16. Μιά ἠλεκτρική συσκευή διαρρέεται ἀπό ρεῦμα 6.6 A σέ διαφορά δυναμικοῦ 218.3 V. Οἱ τιμές αὐτές ἔχουν μετρηθεῖ μέ ἀντίστοιχο πιθανό σφάλμα 0.05 A

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί 0.2 V. Προσδιορίστε τήν ίσχή πού καταναλώνει ή συσκευή σέ watt καί τό πιθανό σφάλμα.

1-17. Μιά άντίσταση R μέ τιμή περίπου 20 Ω διαρρέεται άπό ρεῦμα τοῦ όποίου ή τιμή ἔχει μετρηθεῖ ὡς $I = 12.24 \pm 0.03$ A. Μέ πόση άκρίβεια πρέπει νά μετρηθεῖ ή άντίσταση R ὥστε τό πειραματικό σφάλμα στήν ίσχή πού καταναλώνεται νά μήν ὑπερβαίνει περισσότερο άπό 10% τό πειραματικό σφάλμα πού προκύπτει μόνο άπό τήν άβεβαιότητα στήν τιμή τοῦ ρεύματος;

1-18. Οἱ τιμές δύο άντιστάσεων ἔχουν μετρηθεῖ ὡς

$R_1 = 62.31 \pm 0.04\ \Omega$

$R_2 = 125.12 \pm 0.12\ \Omega$.

Ποιά ή τιμή τῆς ὁλικῆς άντιστάσεως ἄν οἱ δύο άντιστάσεις συνδεθοῦν σέ σειρά; Ποιά ή άντίσταση ἄν συνδεθοῦν παράλληλα;

1-19. Τριάντα διαφορετικές μετρήσεις μιᾶς άντιστάσεως ἔδωσαν τίς τιμές

1.65	2.69	2.44
2.00	1.79	1.75
1.94	1.62	1.69
2.13	1.45	2.06
1.79	2.05	1.79
2.11	1.50	2.01
1.92	1.21	1.79
2.48	2.55	1.69
2.50	2.05	2.26
2.05	1.82	1.97

Οἱ μετρήσεις στήν τρίτη στήλη ἔχουν ληφθεῖ μέ διπλάσια άκρίβεια ($\frac{1}{2}\sigma$) άπό τίς προηγούμενες. Προσδιορίστε τόν μέσο, τήν τυπική άπόκλιση καί τήν τυπική άπόκλιση τοῦ μέσου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ηλεκτρικα φαινομενα

Ὁ ἠλεκτρομαγνητισμός ἐξετάζει τά φυσικά φαινόμενα πού δημιουργοῦνται ἀπό τήν ἀλληλεπίδραση ἠλεκτρικῶν φορτίων. Γνωρίζουμε σήμερα ὅτι τό **ἠλεκτρικό φορτίο** εἶναι μιά ἰδιότητα τῶν στοιχειωδῶν σωματίων τῆς ὕλης. Ἐμφανίζεται μέ δυνάμεις πού ἀναπτύσσονται μεταξύ σωματίων τά ὁποῖα ἔχουν αὐτή τήν ἰδιότητα. Ὑπάρχουν δύο εἴδη φορτίων στή φύση πού παραδοσιακά ὀνομάζουμε **θετικό** καί **ἀρνητικό.** Ἀπό τά δύο σταθερά στοιχειώδη σωμάτια τῆς ὕλης, τό **πρωτόνιο** φέρει πάντα μιά σταθερή ποσότητα e θετικοῦ φορτίου καί τό **ἠλεκτρόνιο** ἴση ποσότητα ἀρνητικοῦ φορτίου. Σέ μονάδες πού θά ὁριστοῦν ἀργότερα, τό φορτίο τοῦ πρωτονίου εἶναι

$$e = 4.803 \times 10^{-10} \text{ ΗΣΜ}-\varphi = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C.} \qquad (2.1)$$

Ἡ ὁρολογία θετικό καί ἀρνητικό φορτίο εἶναι ἐπιτυχής κατά τό ὅτι σέ ὅλες τίς σχέσεις τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ, τά δύο εἴδη φορτίου συμπεριφέρονται ὡς ἀλγεβρικές βαθμωτές ποσότητες μέ πρόσημο ἀντίστοιχο πρός τήν ὀνομασία τους.

Τά πρωτόνια ἀλληλεπιδροῦν μέ **οὐδετερόνια** καί δημιουργοῦν τόν **ἀτομικό πυρήνα**. Τό οὐδετερόνιο εἶναι ἕνα τρίτο στοιχειῶδες σωμάτιο, σταθερό μόνο στό ἐσωτερικό τοῦ πυρήνα, μέ ἴση περίπου μάζα πρός τό πρωτόνιο. Δέν φέρει ἠλεκτρικό φορτίο καί ἡ ἀλληλεπίδρασή του μέ τό πρωτόνιο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

εἶναι τελείως διάφορη ἀπό τήν ἠλεκτρομαγνητική ἀλληλεπίδραση. Γύρω ἀπό τόν πυρήνα περιφέρεται ἕνας ἀριθμός ἠλεκτρονίων, ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν πρωτονίων. Ἔτσι, τό συγκρότημα πού δημιουργεῖται, τό **ἄτομο**, ἐμφανίζεται στή συνήθη του κατάσταση μέ μηδενικό ὁλικό φορτίο. Κατ' ἐπέκταση ἡ ὕλη, πού συγκροτεῖται ἀπό ἄτομα (ἤ συμπλέγματα ἀτόμων, τά **μόρια**) ἐμφανίζεται συνήθως ἀφόρτιστη. Περίσσεια ἤ ἔλλειμα ἠλεκτρονίων δημιουργεῖ τό ἠλεκτρικό φορτίο τῆς μακροσκοπικῆς ὕλης.

Μέχρι σήμερα δέν ἔχει παρατηρηθεῖ στή φύση ἠλεκτρικό φορτίο μέ τιμή μικρότερη ἀπό e. Ἔτσι, κάθε φορτίο τῆς μακροσκοπικῆς ὕλης εἶναι ἕνα ἀκέραιο πολλαπλάσιο Ne (ὅπου N ἕνας τεράστιος ἀριθμός) τοῦ στοιχειώδους φορτίου e. Στή διαπίστωση αὐτή ἀναφερόμαστε μέ τόν ὅρο **κβάντωση τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου**. Παρόλο ὅτι συνεισφέρει στήν κατανόηση πολλῶν ἰδιοτήτων τῆς μακροσκοπικῆς ὕλης, ἡ κβάντωση τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου παίζει περιορισμένο ρόλο στήν ἀνάπτυξη τῆς κλασσικῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς θεωρίας. Ἀντίθετα, μιά δεύτερη ἰδιότητα τοῦ φορτίου, πού θά ὀνομάσουμε **νόμο ἤ ἀρχή διατηρήσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου** στηρίζει ἕνα μεγάλο μέρος τῆς θεωρίας τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ. Κατά τήν ἀρχή αὐτή, σέ ἕνα ἀπομονωμένο σύστημα, τό ποσό τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου παραμένει σταθερό. Ἄν καί στή φύση ἐμφανίζονται συχνά φαινόμενα καταστροφῆς ἤ γενέσεως στοιχειωδῶν σωματίων, οἱ διεργασίες αὐτές πραγματοποιοῦνται πάντα σέ ζεύγη σωματίων μέ ἴσο καί ἀντίθετο ἠλεκτρικό φορτίο, ἔτσι ὥστε τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τοῦ φορτίου νά παραμένει σταθερό. Ἀπό πειραματική ἄποψη, ἡ ἀρχή διατηρήσεως τοῦ φορτίου εἶναι σήμερα ἕνας ἀπό τούς καλύτερα ἐπαληθευμένους νόμους τῆς φύσης.

2-1 Ὁ Νόμος τοῦ Coulomb

Ἡ ἰδιότητα τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου ἐμφανίζεται μέ τήν ἀλληλεπίδραση μεταξύ ὑλικῶν σωμάτων πού φέρουν φορτίο. Γιά δύο στατικά σημειακά φορτία πρῶτος ὁ Coulomb διατύπωσε τό νόμο ὅτι ἡ δύναμη μεταξύ τους εἶναι ἀνάλογη πρός τό γινόμενο τῶν φορτίων καί ἀντίστροφα ἀνάλογη πρός τό τετράγωνο τῆς ἀποστάσεως πού τά χωρίζει, ἤτοι

$$\mathbf{F}_{2\leftarrow 1} \propto \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} \tag{2.2}$$

ὅπου $\mathbf{F}_{2\leftarrow 1}$ εἶναι ἡ δύναμη πού ἀναπτύσσεται στό φορτίο q_2 λόγω τῆς ὑπάρξεως τοῦ φορτίου q_1 καί

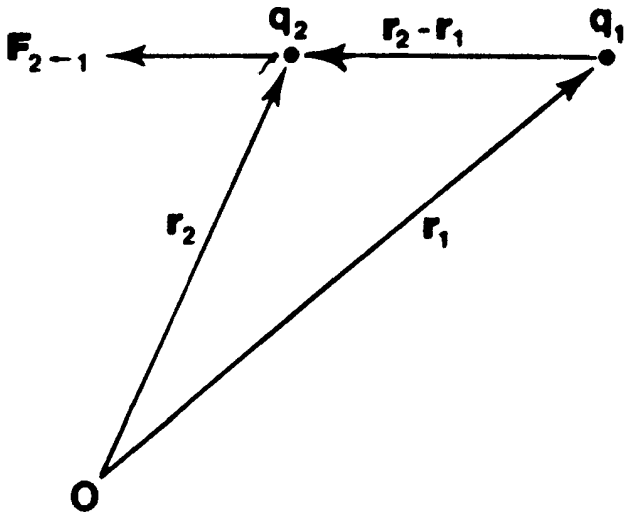
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$r_{21} = |r_2 - r_1| = \left[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1) + (z_2-z_1)^2\right]^{1/2} \qquad (2.3)$$

ἐνῶ $\hat{r}_{21}$ εἶναι τό μοναδιαῖο ἄνυσμα κατά τή διεύθυνση $r_2 - r_1$

$$\hat{r}_{21} = \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|} \ . \qquad (2.4)$$

Στή γεωμετρία πού ἀπεικονίζει τό σχῆμα 2-1, τά ἀνύσματα $r_1 = (x_1,y_1,z_1)$ καί $r_2 = (x_2,y_2,z_2)$ ὁρίζουν ἀντίστοιχα τή θέση τῶν φορτίων q_1 καί q_2 σέ κάποιο σύστημα συντεταγμένων μέ ἀρχή τῶν συντεταγμένων O.



ΣΧΗΜΑ 2-1 Ἀλληλεπίδραση δύο στατικῶν φορτίων q_1 καί q_2. O εἶναι ἡ ἀρχή συντεταγμένων.

Ἀπό τή μορφή τῆς ἐξ. (2.2) ὁρισμένες ἰδιότητες εἶναι ἀμέσως ἐμφανεῖς.

1. Ἡ δύναμη μεταξύ φορτίων ἔχει διεύθυνση κατά τόν ἄξονα πού συνδέει τά δύο φορτία.
2. Ὁμώνυμα φορτία ἀπωθοῦνται καί ἑτερώνυμα ἕλκονται.
3. Ἡ δύναμη $F_{2\leftarrow 1}$ εἶναι Νευτώνια, ἤτοι

$$F_{2\leftarrow 1} = -F_{1\leftarrow 2} \ . \qquad (2.5)$$

Ἡ ἀναλογία πού ἐκφράζει ὁ νόμος τοῦ Coulomb στήν ἐξ. (2.2) μπορεῖ νά μεταβληθεῖ σέ ἰσότητα ἄν ὁριστεῖ ἡ μονάδα τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου. Στό σύστημα† CGS ἡ ἀναλογία (2.2) μεταβάλλεται ἐξ ὁρισμοῦ σέ ἰσότητα

† Συστήματα μονάδων μετρήσεως ἐξετάζονται μέ λεπτομέρεια στό Παράρτημα Α.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί ἡ ἐξίσωση πού προκύπτει χρησιμοποιεῖται γιά τόν ὁρισμό τῆς μονάδας μετρήσεως τοῦ φορτίου. Στό σύστημα αὐτό

$$\mathbf{F}_{2\leftarrow 1} = \frac{q_1\, q_2}{r_{21}^{\,2}}\,\hat{\mathbf{r}}_{21} = \frac{q_1\, q_2}{r_{21}^{\,3}}\,\mathbf{r}_{21} \tag{2.6}$$

ἐνῶ τό φορτίο μετρᾶται σέ **ἠλεκτροστατικές μονάδες φορτίου** (ΗΣΜ–φ). Μεταξύ δύο φορτίων q = 1 ΗΣΜ–φ πού βρίσκονται σέ ἀπόσταση $r_{21} = 1$ cm ἐξασκεῖται δύναμη $F_{2\leftarrow 1} = 1$ dyn. Στό **Διεθνές Σύστημα** SI (παλαιό MKSA), ὅπου τό ἠλεκτρικό φορτίο ὁρίζεται ἀνεξάρτητα† ὡς τό **coulomb** (C), ἡ ἐξ. (2.2) μπορεῖ νά μεταβληθεῖ σέ ἰσότητα μέσω ἑνός συντελεστῆ ἀναλογίας. Παραδοσιακά ἡ ἐξ. (2.2) γράφεται στό σύστημα SI ὡς

$$\mathbf{F}_{2\leftarrow 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1\, q_2}{r_{21}^{\,3}}\,\mathbf{r}_{21} \tag{2.7}$$

ὅπου ἡ σταθερά ε_0, πού ὀνομάζεται **διαπερατότητα στό κενό,** ἔχει τήν τιμή

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2 N^{-1} m^{-2}} \tag{2.8}$$

ἤ

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.9875 \times 10^{9}\ \mathrm{N m^2\, C^{-2}} \tag{2.9}$$

Ἡ σύνδεση μεταξύ τῶν δύο μονάδων δίνεται ἀπό τή σχέση

$$1\ \mathrm{C} = \frac{c}{10}\ \text{ΗΣΜ–φ} \tag{2.10}$$

ὅπου c εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός σέ μονάδες τοῦ συστήματος CGS

$$c = 2.99794580 \times 10^{10}\ \mathrm{cm\ sec^{-1}}. \tag{2.11}$$

Ὅπως προκύπτει ἀπό τή σύγκριση τῶν ἐξ. (2.6) καί (2.7), ὁ νόμος τοῦ

---

† Βασική μονάδα τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ στό σύστημα SI εἶναι τό ampère (A) πού μετρᾶ ἠλεκτρικό ρεῦμα [βλ. ἐξ. (4.7)]. Ἡ μονάδα φορτίου ὁρίζεται ἀπό τή σχέση

$$q = I\,t$$

ὅπου I τό ἠλεκτρικό ρεῦμα καί t ὁ χρόνος. Ἕνα coulomb εἶναι τό ὁλικό φορτίο πού ἀντιπροσωπεύει ροή ρεύματος 1 A σέ χρόνο 1 sec.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Coulomb ὄχι μόνο ἐκφράζεται σέ διαφορετικές μονάδες, ἀλλά καί μέ διαφορετική μορφή στά συστήματα CGS καί SI. Ἡ διαφορά αὐτή παρακολουθεῖ ὅλες τίς σχέσεις τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ πού θά ἀναπτύξουμε στή συνέχεια. Ἄν καί στίς ἐφαρμογές τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ πού θά ἐξετάσουμε στά ἑπόμενα κεφάλαια θά χρησιμοποιήσουμε ἀποκλειστικά μονάδες τοῦ συστήματος SI θά δώσουμε γιά πληρότητα καί τίς ἀντίστοιχες ἐκφράσεις στό σύστημα CGS. Ὅπου εἶναι ἐφικτό θά χρησιμοποιήσουμε ἀγγύλες γιά τό διαχωρισμό τῶν ἐπιπλέον παραγόντων πού ἀπαιτοῦνται γιά τή μετατροπή μιᾶς σχέσης ἀπό τό σύστημα CGS στό σύστημα SI. Ἔτσι, θά γράψουμε π.χ. τό νόμο τοῦ Coulomb ὡς

$$\mathbf{F}_{2\leftarrow 1} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \frac{q_1\, q_2}{r_{21}^3}\, \mathbf{r}_{21} \tag{2.12}$$

ὅπου παράλειψη τῶν παραγόντων πού περιέχονται στίς ἀγγύλες μετατρέπει τή σχέση στό σύστημα CGS.

Μιά σημαντική ἰδιότητα τῆς ἠλεκτροστατικῆς ἀλληλεπιδράσεως πού ἐξάγεται ἀπό τήν πειραματική παρατήρηση εἶναι γνωστή ὡς **ἀρχή τῆς ἐπαλληλίας.** Ἔχει δηλαδή ἐπαληθευτεῖ πειραματικά ὅτι ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖται μεταξύ δύο φορτίων δέν μεταβάλλεται ἄν στή γειτονία τῶν δύο αὐτῶν φορτίων ὑπάρχουν καί ἄλλα ἠλεκτρικά φορτία. Ἀπό τήν παρατήρηση αὐτή ἕπεται ὅτι ἡ ὁλική δύναμη πού ἐξασκεῖται σέ ἕνα φορτίο εἶναι ἴση μέ τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν δυνάμεων πού ἐξασκοῦν ὅλα τά φορτία πού συνυπάρχουν στό γύρω χῶρο. Στό συμβολισμό τῆς ἐξ. (2.12)

$$\mathbf{F}_{0\leftarrow 1,2\ldots,n} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_{0\leftarrow k} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \sum_{k=1}^{n} \frac{q_0\, q_k}{r_{k0}^3}\, \mathbf{r}_{k0}$$

$$= \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] q_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{r_{k0}^3}\, \mathbf{r}_{k0}\ . \tag{2.13}$$

Ἡ ἐξ. (2.13) ἀναφέρεται στήν ἀλληλεπίδραση μεταξύ τοῦ φορτίου q_0 καί n φορτίων q_k, $k = 1, \ldots, n$, στό χῶρο. Μέ τήν εἰσαγωγή τῆς ἔννοιας τῆς **πυκνότητας φορτίου** $\rho(\mathbf{r})$, δηλαδή τοῦ φορτίου ἀνά μονάδα ὄγκου σέ μιά συνεχή κατανομή φορτίου

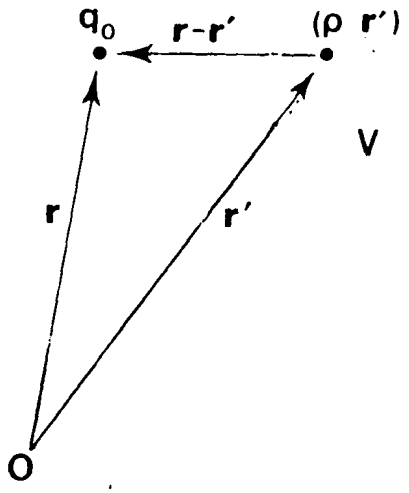
$$\rho(\mathbf{r}) \equiv \frac{dq(\mathbf{r})}{d^3\mathbf{r}} \tag{2.14}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου $d^3r = dxdydz$ εἶναι τό στοιχεῖο τοῦ ὄγκου, μποροῦμε νά γενικεύσουμε τήν ἀρχή τῆς ἐπαλληλίας πού ἐκφράζει ἡ ἐξ. (2.13). Ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖ μιά κατανομή φορτίου στό φορτίο q_0 εἶναι

$$\mathbf{F}_{0-\rho(r)} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] q_0 \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d^3r' \qquad (2.15)$$

ὅπου τό ὁλοκλήρωμα ἐκτείνεται στό χῶρο V πού καταλαμβάνει ἡ κατανομή φορτίου $\rho(r)$. Ἡ γεωμετρία τῆς ἐξ. (2.15) δίνεται στό σχῆμα 2-2.



ΣΧΗΜΑ 2-2 Ἀλληλεπίδραση τοῦ φορτίου q_0 μέ τήν κατανομή φορτίου $\rho(r)$.

2-2 Τό Ἠλεκτρικό Πεδίο

Οἱ ἐξ. (2.13) καί (2.15) ἐκφράζουν τό γεγονός ὅτι ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖται σέ ἕνα φορτίο q_0 ἀπό μιά κατανομή (συνεχή ἤ ἀσυνεχή) φορτίων στό χῶρο εἶναι ἀνάλογη πρός τό μέγεθος τοῦ φορτίου q_0. Μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τήν παρατήρηση αὐτή γιά νά ὁρίσουμε ἕνα νέο ἄνυσμα

$$\mathbf{E}(r) \equiv \frac{\mathbf{F}_0(r)}{q_0} \qquad (2.16)$$

ὅπου ἡ δύναμη $\mathbf{F}_0(r)$ δίνεται ἀπό τήν ἐξ. (2.13) ἤ (2.15). Τό **ἠλεκτρικό πεδίο** $\mathbf{E}(r)$ μετρᾶ τήν ἰδιότητα πού ἀποκτᾶ ὁ χῶρος μέ τήν ὕπαρξη τῶν n φορτίων q_k, $k = 1, ..., n$ στίς θέσεις r_k ἤ μέ τήν ὕπαρξη τῆς συνεχοῦς κατανο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μῆς φορτίου ρ(r) στήν περιοχή τοῦ χώρου V. Ἡ ἰδιότητα αὐτή ἐκφράζεται ἀπό τήν ἐξ. (2.16): ἄν στό σημεῖο r τοῦ χώρου τοποθετηθεῖ τό φορτίο q_0, θά δεχτεῖ μιά δύναμη

$$F_0(r) = q_0 E(r). \tag{2.17}$$

Ἡ συνάρτηση E(r) τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου «χαρτογραφεῖ» τό χῶρο καί μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (2.17) προβλέπει τή συμπεριφορά κάθε φορτίου πού θά εἰσαχθεῖ στό χῶρο αὐτό. Ἡ ἀνυσματική συνάρτηση E(r) μπορεῖ νά γραφεῖ ἀμέσως ἀπό τίς ἐξ. (2.13) καί (2.15). Γενικά

$$E(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \sum_k \frac{q_k}{|r - r_k|^3}(r - r_k)$$

$$+ \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \int_V \frac{\rho(r')}{|r - r'|^3}(r - r')d^3r' \tag{2.18}$$

ὅπου τό ἄθροισμα ἐκτείνεται σέ ὅλα τά διακριτά φορτία q_k πού ὑπάρχουν στό χῶρο καί ἡ ὁλοκλήρωση σέ κάθε συνεχή κατανομή φορτίου.

Στό σύστημα CGS τό ἡλεκτρικό πεδίο μετρᾶται σέ dyn/ΗΣΜ–φ. Ἡ ἀντίστοιχη μονάδα στό σύστημα SI εἶναι τό N/C. Στό τελευταῖο σύστημα μονάδων ἡ μονάδα τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου συχνά ἐκφράζεται καί μέσω τῆς μονάδας τοῦ δυναμικοῦ (βλ. Παράγραφο 2-5) ὡς **volt ἀνά μέτρο** (V/m). Ἡ σύνδεση τῶν μονάδων δίνεται ἀπό τή σχέση

$$1\ \text{V/m} = 1\ \text{N/C} = \frac{10^6}{c}\ \text{dyn/ΗΣΜ–φ}\ . \tag{2.19}$$

Ἡ ἐξ. (2.18) μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου πού δημιουργεῖ μιά συγκεκριμένη διάταξη φορτίων. Τό ἡλεκτρικό πεδίο π.χ. ἑνός μοναδικοῦ σημειακοῦ φορτίου q μπορεῖ νά γραφεῖ ἀμέσως ὡς

$$E(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{2.20}$$

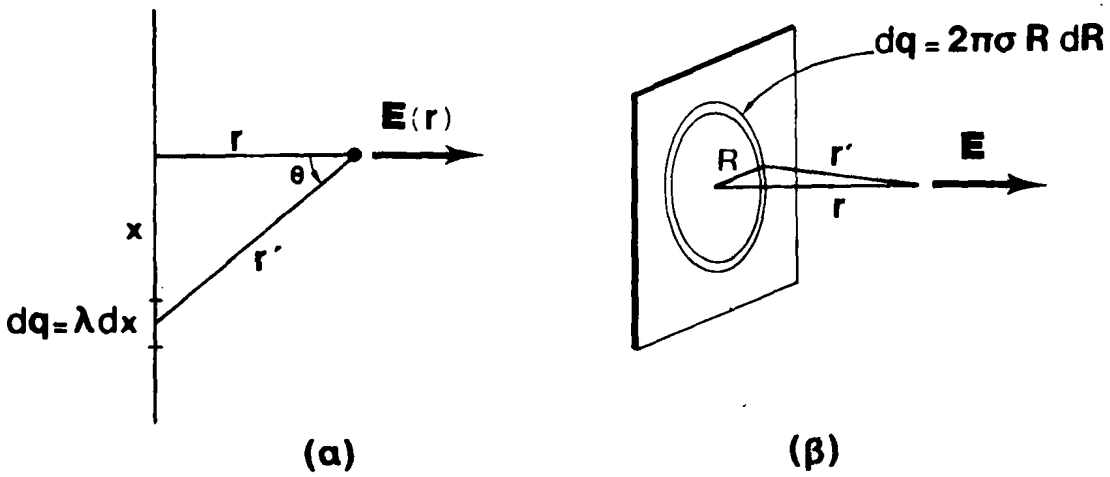
ὅπου γιά ἁπλούστευση τῆς ἐκφράσεως ἡ θέση τοῦ σημειακοῦ φορτίου q ἔχει ληφθεῖ ὡς ἀρχή τῶν συντεταγμένων. Ἡ διεύθυνση τοῦ μοναδιαίου ἀνύσματος $\hat{r}$ εἶναι ἀκτινική. Σέ μερικές ἀκόμη περιπτώσεις ὅπου ἡ διάταξη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τῶν φορτίων παρουσιάζει ἰδιαίτερη συμμετρία τό ἠλεκτρικό πεδίο E(r) μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ μέ ἀπευθείας ἐφαρμογή τῆς ἐξ. (2.18). Δύο παραδείγματα συνεχοῦς κατανομῆς δίνονται στό σχῆμα 2-3. Γιά μιά συνεχή γραμμική κατανομή φορτίου λ {σέ ἀναλογία μέ τήν ἐξ. (2.14) $\lambda \equiv dq/dx$} μέ ἄπειρες διαστάσεις πού εἰκονίζεται στό σχῆμα 2-3(α), τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (2.18) δίνει

$$\mathbf{E}(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \frac{2\lambda}{r}\,\hat{\mathbf{r}} \tag{2.21}$$

ὅπου r εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου ἀπό τήν κατανομή καί τό μοναδιαῖο



ΣΧΗΜΑ 2-3 Δύο ἁπλές συνεχεῖς κατανομές φορτίου.
(α) Σταθερή γραμμική κατανομή λ μέ ἄπειρες διαστάσεις. Ἀπό τή συμμετρία τῆς κατανομῆς, τό πεδίο εἶναι ἀκτινικό μέ ἔνταση

$$E(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \int_V \frac{dq}{r'^2} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \int_V \frac{\lambda dx}{x^2+r^2} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \frac{2\lambda}{r}\,.$$

(β) Σταθερή ἐπίπεδη ἐπιφανειακή κατανομή σ μέ ἄπειρες διαστάσεις. Τό πεδίο εἶναι κάθετο πρός τήν ἐπιφάνεια μέ ἔνταση

$$E(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \int_0^\infty \frac{2\pi\sigma R dR}{R^2+r^2} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 2\pi\sigma$$

ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἀπόσταση r τοῦ σημείου ἀπό τό ἐπίπεδο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἄνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ ἔχει διεύθυνση ἀκτινική. Γιά τή σταθερή ἐπιφανειακή κατανομή σ σέ ἕνα ἐπίπεδο μέ ἄπειρες διαστάσεις, ὁλοκλήρωση τῆς ἐξ. (2.18) δίνει ἔνταση τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἀπόσταση

$$\mathbf{E}(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 2\pi\sigma\,\hat{\mathbf{r}} \tag{2.22}$$

ὅπου τό μοναδιαῖο ἄνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ εἶναι κάθετο πρός τό ἐπίπεδο τῆς κατανομῆς σ. Πέρα ὅμως ἀπό μερικές ἁπλές περιπτώσεις, ὁ ὑπολογισμός τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου μέσω τῆς ἐξ. (2.18) εἶναι ἀρκετά δυσχερής. Στή συνέχεια θά ἀναπτύξουμε ἐναλλακτικές μεθόδους γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου.

2-3 Ροή τοῦ Ἠλεκτρικοῦ Πεδίου καί ὁ Νόμος τοῦ Gauss

Θά θεωρήσουμε μιά κλειστή ἐπιφάνεια S στό χῶρο καί ἕνα στοιχεῖο da τῆς ἐπιφανείας, ὅπου da εἶναι ἕνα ἄνυσμα μέ μέγεθος ἀνάλογο πρός τό ἐμβαδόν da, διεύθυνση κάθετη πρός τήν ἐπιφάνεια καί φορά πρός τό ἐξωτερικό τῆς ἐπιφανείας. Τό ἐσωτερικό γινόμενο

$$d\Phi = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \tag{2.23}$$

ὁρίζεται τότε ὡς ἡ **ροή** τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου διαμέσου τοῦ στοιχείου τῆς ἐπιφανείας da, ἐνῶ ἡ **ὁλική ροή** τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου διαμέσου τῆς ἐπιφανείας S δίνεται ἀπό τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (2.23)

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}. \tag{2.24}$$

Χρησιμοποιώντας τή συναρτησιακή μορφή τῆς ἐξ. (2.18) πού προβλέπει ὅτι ἡ ἔνταση τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου σέ ἕνα σημεῖο τοῦ χώρου εἶναι ἀντίστροφα ἀνάλογη πρός τό τετράγωνο τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπό τό φορτίο πού δημιουργεῖ τό πεδίο, μποροῦμε νά ἀποδείξουμε μιά σημαντική ἰδιότητα τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου, γνωστή ὡς **νόμο τοῦ Gauss**: Ἡ ὁλική ροή τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου σέ μιά κλειστή ἐπιφάνεια εἶναι ἀνάλογη πρός τό ὁλικό φορτίο $q_{\text{ἐσωτ}}$ πού περικλείει ἡ ἐπιφάνεια καί ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ὕπαρξη φορτίων στόν ἐξωτερικό χῶρο, ἤτοι

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 4\pi\, q_{\text{ἐσωτ}}\,. \tag{2.25}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ὁ νόμος τοῦ Gauss, πού ὅπως ἀναφέραμε εἶναι ἄμεσο ἀποτέλεσμα τῆς ἐξαρτήσεως $1/r^2$ στό νόμο τοῦ Coulomb, εἶναι διπλά χρήσιμος. Ἀφενός μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς τό ἀντίστροφο τοῦ νόμου τοῦ Coulomb γιά τόν προσδιορισμό τῆς κατανομῆς φορτίου πού δημιουργεῖ ἕνα πεδίο, ὅταν τό πεδίο εἶναι γνωστό. Ἀφετέρου ἡ ἐξ. (2.25) ἀποδεικνύεται ἕνα ἰσχυρό ἐργαλεῖο στήν ἐπίλυση ἠλεκτροστατικῶν προβλημάτων.

Τό φορτίο πού περικλείεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια S μπορεῖ νά ἀποδοθεῖ ἀπό μιά πυκνότητα φορτίου $\rho(\mathbf{r})$

$$q_{\text{ἐσωτ}} = \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r$$

ὅπου ἡ ὁλοκλήρωση ἐκτείνεται στόν ὄγκο V πού περιβάλλεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια S. Ὁ νόμος τοῦ Gauss παίρνει ἐπομένως τή μορφή

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] 4\pi \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r \ . \tag{2.26}$$

Τό ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα τῆς τελευταίας σχέσης μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ ὁλοκλήρωμα ὄγκου ἄν χρησιμοποιήσουμε τό θεώρημα τοῦ Green

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d^3r. \tag{2.27}$$

Συγκρίνοντας τίς ἐξ. (2.26) καί (2.27) μποροῦμε ἐπομένως νά γράψουμε

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d^3r = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] 4\pi \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r$$

ἤ σέ διαφορική μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] 4\pi\rho. \tag{2.28}$$

Θά ἀναφερθοῦμε στό μέλλον στήν τελευταία σχέση μέ τήν ὀνομασία **διαφορική μορφή τοῦ νόμου τοῦ Gauss.**

2-4 Ἠλεκτροστατική Ἐνέργεια Στατικῶν Φορτίων

Ὁ νόμος τοῦ Coulomb στήν ἐξ. (2.12) ἐκφράζει τή δύναμη πού ἐξασκεῖται στό φορτίο q_2 σέ ἕνα ἠλεκτροστατικό σύστημα πού ἀποτελεῖται

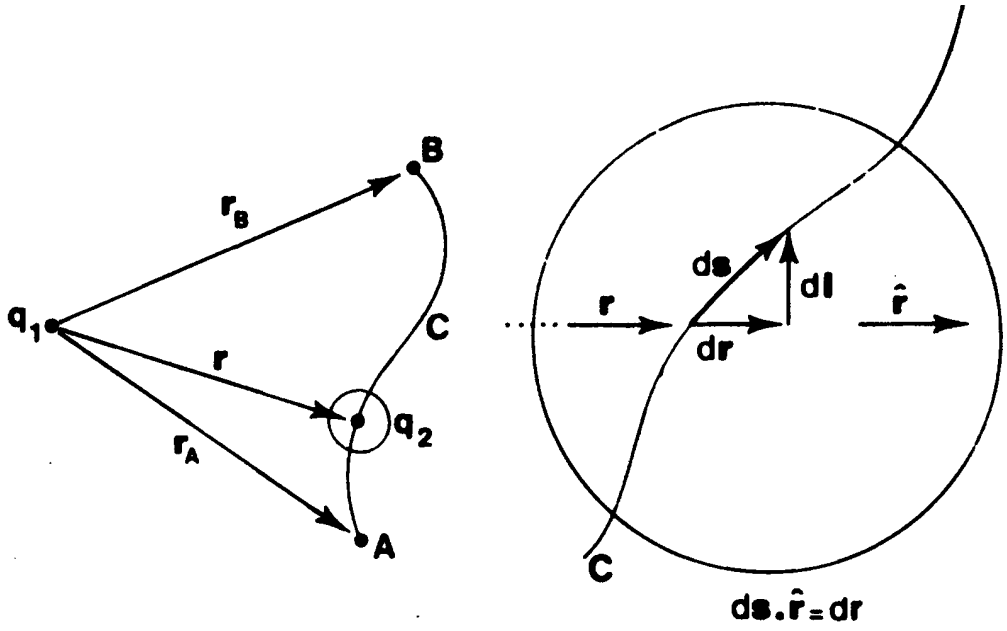
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

από δύο μόνο φορτία q_1 καί q_2. Έστω ότι θέλουμε νά μετακινήσουμε τό φορτίο q_2 κατά τή διαδρομή C, πού εικονίζεται στό σχήμα 2-4, από τό σημείο A στό σημείο B. Γιά τή μετακίνηση αύτή μέ σταθερή ταχύτητα θά πρέπει νά καταβάλουμε μιά δύναμη ίση καί άντίθετη πρός τή δύναμη Coulomb πού έξασκείται στό φορτίο q_2

$$F_{\text{έξωτ}} = -F_{2-1} \ .$$

Τό έργο έπομένως πού καταναλώνεται στό φορτίο q_2 είναι

$$W(A \to B) = \int_C F_{\text{έξωτ}} \cdot ds = -\int_C F_{2-1} \cdot ds$$



ΣΧΗΜΑ 2-4 Μετακίνηση τοῦ φορτίου q_2 κατά τή διαδρομή C μεταξύ τῶν σημείων A καί B. Τό στοιχείο τῆς διαδρομῆς ds μπορεί νά άναλυθεί στίς συνιστῶσες dr καί dl, ὅπου dr είναι τό στοιχειῶδες άνυσμα κατά τή διεύθυνση $\hat{r}$ καί dl κάθετο πρός τό μοναδιαίο άνυσμα $\hat{r}$. Ὅπως δείχνει ή μεγένθυση στό δεξιό μέρος τοῦ σχήματος

$$ds \cdot \hat{r} = dr \ .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= - \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] q_1 q_2 \int_C \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s}}{r^2} \qquad (2.29)$$

ὅπου $d\mathbf{s}$ εἶναι τό στοιχεῖο μήκους κατά τή διαδρομή C καί ὅπου ὡς ἀρχή τῶν συντεταγμένων ἔχει ληφθεῖ ἡ θέση τοῦ φορτίου q_1.

Ἡ προβολή τοῦ στοιχείου $d\mathbf{s}$ στό μοναδιαῖο ἄνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ εἶναι $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = dr$ καί ἡ ἐξ. (2.29) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$W(A \rightarrow B) = - \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] q_1 q_2 \int_C \frac{dr}{r^2} =$$

$$- \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] q_1 q_2 \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) . \qquad (2.30)$$

Πολλά σημαντικά συμπεράσματα ἐξάγονται ἀπό τή μορφή τῆς ἐξ. (2.30). Κατ' ἀρχήν, τό ἔργο πού ὑπολογήσαμε δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή διαδρομή πού ἀκολουθήθηκε γιά τή μετακίνηση τοῦ φορτίου q_2 ἀλλά μόνο ἀπό τά ἄκραῖα σημεῖα A καί B. Μέ ἄλλα λόγια ἡ δύναμη Coulomb εἶναι **διατηρητική**. Εἰδικότερα, γιά μιά κλειστή διαδρομή, ὅπου τό ἀρχικό καί τελικό σημεῖο συμπίπτουν, μποροῦμε νά γράψουμε

$$\oint \mathbf{F}_{2 \leftarrow 1} \cdot d\mathbf{s} = 0 . \qquad (2.31)$$

Ἐξάλλου, ἡ ἐξ. (2.30) μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἔργου πού καταναλώθηκε κατά τή συγκρότηση τοῦ συστήματος τῶν δύο φορτίων σέ μιά ἀπόσταση r. Ἄν θεωρήσουμε ὅτι τό σύστημα δημιουργήθηκε μέ σταδιακή προσέγγιση τῶν δύο φορτίων ἀπό ἄπειρη μεταξύ τους ἀπόσταση, ἡ ἐξ. (2.30) δίνει σέ προφανή συμβολισμό

$$W \equiv W(\infty \rightarrow r_{12}) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] \frac{q_1 q_2}{r_{12}} . \qquad (2.32)$$

Ἡ ποσότητα W, πού στή βιβλιογραφία ἀπαντᾶται καί μέ τό γενικώτερο ὅρο **ἐνέργεια συνδέσεως,** ἀντιπροσωπεύει τό ἔργο πού καταναλώθηκε γιά τή δημιουργία τοῦ συστήματος καί τό ὁποῖο βρίσκεται πλέον «ἀποθηκευμένο» στό σύστημα. Παρατηρεῖται ὅτι ἄν τά φορτία εἶναι ὁμώνυμα, ἡ ἐνέργεια W εἶναι θετική. Καταβλήθηκε δηλαδή μιά θετική ποσότητα ἔργου γιά τή δημιουργία τοῦ συστήματος καί ἡ ὁλική του ἐνέργεια στήν τελική κατάσταση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

εἶναι ὑψηλότερη ἀπό ὅτι στήν ἀρχική. Ἔτσι τό σύστημα μπορεῖ αὐθόρμητα νά ἀποβάλει τό ποσό αὐτό ἐνεργείας καί νά μεταπέσει στήν ἀρχική του κατάσταση. Ἀντίθετα, ἄν τά φορτία q_1 καί q_2 εἶναι ἑτερώνυμα, $W < 0$, πού σημαίνει ὅτι κατά τή συγκρότηση τοῦ συστήματος ἀποδόθηκε ἔργο στό περιβάλλον. Γιά τό διαχωρισμό τοῦ συστήματος θά πρέπει τώρα νά καταναλωθεῖ ἴσο ἔργο στό σύστημα. Ἡ ἀνάλυση αὐτή τῆς ἐξ. (2.32) θά ἀναγνωριστεῖ ἀπό τόν ἀναγνώστη ὡς ἰσοδύναμη μέ τή γνωστή φράση: ὁμώνυμα φορτία ἀπωθοῦνται καί ἑτερώνυμα ἕλκονται.

Χρησιμοποιώντας τήν ἀρχή τῆς ἐπαλληλίας μποροῦμε νά γενικεύσουμε τήν ἐξ. (2.32) γιά τόν ὑπολογισμό τῆς ἠλεκτροστατικῆς ἐνεργείας n φορτίων q_k, $k = 1, \ldots, n$. Ἡ ὁλική ἠλεκτροστατική ἐνέργεια δίνεται ἀπό τήν ἐνέργεια κάθε ζεύγους φορτίων, ἤτοι

$$W = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{q_j q_k}{r_{jk}} \tag{2.33}$$

ὅπου μέ τόν παράγοντα $\frac{1}{2}$ ἀποφεύγεται ἡ διπλή μέτρηση κάθε ζεύγους.

Ἡ ἠλεκτροστατική ἐνέργεια τῆς ἐξ. (2.33), πού ἀπό πλευρᾶς διαστάσεων ὑπολείπεται ἀπό τό νόμο τοῦ Coulomb κατά ἕνα παράγοντα μέ διαστάσεις μήκους στόν παρονομαστή, μετριέται σέ erg στό σύστημα CGS καί σέ joule (J) στό σύστημα SI. Ὑπενθυμίζεται ὅτι

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg.} \tag{2.34}$$

2-5 Ἡ Συνάρτηση Δυναμικοῦ

Στήν ἐξ. (2.29) θεωρήσαμε τό ἔργο $W(A \to B)$ πού καταναλώνεται γιά τή μετακίνηση ἑνός φορτίου q_2 στή γειτονία ἑνός ἄλλου στατικοῦ φορτίου q_1. Χρησιμοποιώντας τήν ἀρχή τῆς ἐπαλληλίας εἶναι εὔκολο νά γενικεύσουμε τήν ἐξ. (2.29) στήν περίπτωση ὅπου ἕνα φορτίο q μετακινεῖται στή γειτονία ὁποιασδήποτε διατάξεως φορτίων. Τό ἔργο πού καταναλώνεται στό φορτίο q εἶναι τότε

$$W(A \to B) = -\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{2.35}$$

ὅπου F εἶναι ἡ ἠλεκτροστατική δύναμη πού δέχεται τό φορτίο q καί E τό ἠλεκτρικό πεδίο πού δημιουργεῖ ἡ διάταξη τῶν ὑπόλοιπων φορτίων στό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χῶρο. Τά ὅρια Α καί Β τοῦ ὁλοκληρώματος τονίζουν τό γεγονός ὅτι ἡ ἔκφραση ἐξαρτᾶται ἀπό τά τερματικά σημεῖα Α καί Β καί ὄχι ἀπό τή συγκεκριμένη διαδρομή πού ἀκολουθήθηκε κατά τή μετακίνηση τοῦ φορτίου q. Ἡ ποσότητα

$$\varphi_{AB} \equiv \frac{W(A \to B)}{q} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{2.36}$$

ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικά ἀπό τήν κατανομή τῶν φορτίων πού δημιουργοῦν τό πεδίο **E** καί ἀπό τά δύο σημεῖα Α καί Β. Ἀντιπροσωπεύει τό ἔργο ἀνά μονάδα φορτίου πού πρέπει νά καταναλωθεῖ γιά τήν κίνηση ἑνός θετικοῦ φορτίου ἀπό τό σημεῖο Α στό σημεῖο Β. Εἶναι ἐπομένως μιά μονοσήμαντη συνάρτηση πού, ὅπως καί τό ἡλεκτρικό πεδίο, μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή «χαρτογράφιση» τοῦ χώρου ὡς πρός τήν ἰδιότητα πού δημιούργησε ἡ συγκεκριμένη διάταξη φορτίων.

Ἡ συνάρτηση φ_{AB}, πού θά ὀνομάσουμε **διαφορά δυναμικοῦ** μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β παρέχει ἕνα ἐναλλακτικό τρόπο περιγραφῆς τῶν ἡλεκτροστατικῶν φαινομένων. Ἄν συμφωνήσουμε στήν ἐπιλογή ἑνός συγκεκριμένου σημείου Α, τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (2.36) χαρακτηρίζει μονοσήμαντα κάθε σημεῖο Β τοῦ χώρου. Ἄν θεωρήσουμε τό σημεῖο Β στή θέση **r**, μποροῦμε νά τονίσουμε τήν ἰδιότητα αὐτή μέ τό συμβολισμό $\varphi_A(\mathbf{r})$ γιά τή συνάρτηση τῆς ἐξ. (2.36), τήν ὁποία μετά τήν ἐπιλογή τοῦ σημείου ἀναφορᾶς θά ὀνομάσουμε **δυναμικό** τοῦ σημείου **r**

$$\varphi_A(\mathbf{r}) \equiv -\int_A^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \tag{2.37}$$

Ἡ τελευταία σχέση μᾶς παρέχει τή δυνατότητα νά ὑπολογίσουμε τό δυναμικό ἑνός σημείου σέ σχέση μέ κάποιο σημεῖο ἀναφορᾶς Α ἄν εἶναι γνωστή ἡ συνάρτηση τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου **E**(**r**). Ἡ ἀντίστροφη διεργασία εἶναι δυνατή ἄν γράψουμε τήν ἐξ. (2.37) σέ διαφορική μορφή

$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{2.38}$$

ὅπου $d\varphi$ εἶναι τό πλῆρες διαφορικό τῆς συναρτήσεως φ

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{s}. \tag{2.39}$$



Σύμφωνα μέ τόν καθιερωμένο συμβολισμό τοῦ ἀνυσματικοῦ λογισμοῦ ἔχουμε χρησιμοποιήσει τήν **κλίση** $\nabla\varphi$ τῆς συναρτήσεως φ, πού ὁρίζεται ὡς τό ἄνυσμα

$$\nabla\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\hat{k} \tag{2.40}$$

ὅπου $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ εἶναι ἀντίστοιχα τά μοναδιαῖα ἀνύσματα κατά τούς ἄξονες x, y, z. Σύγκριση τῶν ἐξ. (2.38) καί (2.39) δίνει τή σχέση

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \tag{2.41}$$

πού ἐπιτρέπει τόν ὑπολογισμό τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου ἀπό τή συνάρτηση δυναμικοῦ.

Ὁ ἀναγνώστης ἴσως παρατήρησε ὅτι στό συμβολισμό τοῦ διαφορικοῦ $d\varphi$ καί τῆς κλίσης $\nabla\varphi$ ἔχει παραληφθεῖ ὁ δείκτης A πού ὁρίζει τό σημεῖο ἀναφορᾶς τοῦ δυναμικοῦ. Ἡ παράλειψη αὐτή εἶναι σκόπιμη καθόσον οἱ δύο αὐτές ποσότητες εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπό τή συγκεκριμένη ἐπιλογή τοῦ σημείου ἀναφορᾶς. Ὅπως μπορεῖ νά ἐπαληθευτεῖ ἀπό τήν ἐξ. (2.37), μεταβολή τοῦ σημείου ἀναφορᾶς ἀπό τό σημεῖο A στό σημεῖο A′ συνεπάγεται τό μετασχηματισμό

$$\varphi_A(r) \rightarrow \varphi_{A'}(r) = \varphi_A(r) + \varphi_A(r_{A'}) \tag{2.42}$$

δηλαδή, τή μεταβολή τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ κατά τή σταθερή ποσότητα $\varphi_A(r_{A'})$. Διαφόριση τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ δίνει

$$d\varphi_{A'} = d\varphi_A \equiv d\varphi \tag{2.43α}$$

καί

$$\nabla\varphi_{A'} = \nabla\varphi_A \equiv \nabla\varphi \tag{2.43β}$$

ἤτοι, συνάρτηση ἀνεξάρτητη ἀπό τό σημεῖο ἀναφορᾶς τοῦ δυναμικοῦ. Τοῦτο βέβαια εἶναι καί κάτι πού ἀναμένεται, καθόσον ὁποιαδήποτε περιγραφή τῆς ἡλεκτροστατικῆς διατάξεως πρέπει νά ὁδηγεῖ σέ μονοσήμαντο ἡλεκτρικό πεδίο.

Ἡ ἐξ. (2.41) πού συνδέει τό ἡλεκτρικό πεδίο μέ τό ἡλεκτρικό δυναμικό ὁδηγεῖ σέ μιά ἀκόμη σπουδαία σχέση τῆς ἡλεκτροστατικῆς. Ὁ ἀναγνώστης ἴσως θά γνωρίζει ἀπό τόν ἀνυσματικό λογισμό τήν ταυτότητα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\nabla \times (\nabla f) = 0. \tag{2.44}$$

Ἀπό τή σχέση αὐτή ἕπεται ὅτι σέ κάθε σημεῖο τοῦ χώρου ὁ στροβιλισμός τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μηδενίζεται

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{2.45}$$

θά ἔχουμε τήν εὐκαιρία ἀργότερα νά ἐπανεξετάσουμε τήν ἐξίσωση αὐτή τῆς ἠλεκτροστατικῆς.

Ἐξ ὁρισμοῦ, ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ μετρᾶ ἐνέργεια ἀνά μονάδα φορτίου. Στό σύστημα CGS ὡς μονάδα δυναμικοῦ χρησιμοποιεῖται τό erg/ΗΣΜ-φ πού συνήθως ἀναφέρεται μέ τήν ὀνομασία **statvolt**. Στό σύστημα SI, ἡ ἀντίστοιχη μονάδα εἶναι τό **volt** (V) πού ὁρίζεται ὡς joule/coulomb. Ἡ σύνδεση τῶν μονάδων στά δύο συστήματα παρέχεται ἀπό τή σχέση

$$1\ \mathrm{V} = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \frac{10^8}{c}\ \mathrm{erg/H\Sigma M\text{-}\varphi}$$

$$= \frac{10^8}{c}\ \mathrm{statvolt} \simeq \frac{1}{300}\ \mathrm{statvolt}\ . \tag{2.46}$$

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (2.36), ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ σέ ἕνα σημεῖο **r** μπορεῖ ἄν βρεθεῖ ἄν εἶναι γνωστή ἡ ἠλεκτροστατική ἐνέργεια πού ἀπαιτεῖται γιά τή μεταφορά ἑνός φορτίου q ἀπό τό σημεῖο ἀναφορᾶς ὡς τό σημεῖο **r**. Μέ τόν τρόπο αὐτό μποροῦμε ἀμέσως νά γράψουμε τό δυναμικό ἑνός σημειακοῦ φορτίου ἀπό τήν ἐξ. (2.30) ὡς

$$\varphi_A(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_A}\right) \tag{2.47}$$

ὅπου σέ προφανή συμβολισμό ἔχουμε ἀντικαταστήσει $q = q_1$ καί $r = r_B$.

Ἡ τελευταία ἔκφραση ἁπλουστεύεται σημαντικά ἄν ἐπιλέξουμε ὡς σημεῖο ἀναφορᾶς ἕνα σημεῖο σέ ἄπειρη ἀπόσταση. Μέ τήν ἐπιλογή αὐτή τό δυναμικό ἑνός σημειακοῦ φορτίου εἶναι

$$\varphi(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \frac{q}{r} \tag{2.48}$$

ὅπου, σύμφωνα μέ τήν καθιερωμένη πρακτική†, ἔχουμε παραλείψει τό δείκτη $A = \infty$ στό συμβολισμό τῆς συναρτήσεως.

---

† Ἡ ἐπιλογή ἑνός σημείου ἀναφορᾶς σέ ἄπειρη ἀπόσταση εἶναι ἐφικτή (καί θά ἀκολουθηθεῖ στή συνέχεια) σέ ἠλεκτροστατικά συστήματα ὅπου ἡ κατανομή φορτίου δέν ἐκτείνεται στό ἄπειρο. Δύο παραδείγματα ὅπου παρόμοια ἐπιλογή δέν εἶναι δυνατή δίνονται στό σχῆμα 2-3.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ συνάρτηση τῆς ἐξ. (2.48) μπορεῖ νά γενικευτεῖ μέ τή βοήθεια τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαλληλίας γιά τήν ἔκφραση τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ ἑνός συνόλου σημειακῶν φορτίων q_k, $k = 1, ..., n$, ἤ γενικώτερα μιᾶς κατανομῆς φορτίου πού περιγράφεται ἀπό τήν πυκνότητα $\rho(r)$. Στή γεωμετρία τοῦ σχήματος 2-2

$$\varphi(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \sum_k \frac{q_k}{|r - r_k|}$$

$$+ \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \int_V \frac{\rho(r')}{|r - r'|}\, d^3r' \,. \qquad (2.49)$$

Ἡ τελευταία ἔκφραση μπορεῖ νά συγκριθεῖ μέ τήν ἀντίστοιχη ἔκφραση τῆς ἐξ. (2.18) γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου $E(r)$. Οἱ δύο συναρτήσεις συνδέονται διαμέσου τῆς ἐξ. (2.41), ὅπως μπορεῖ νά ἐπαληθευτεῖ ἀναλυτικά.

2-6 Ἀλληλεπίδραση Ἐλεύθερων Στατικῶν Φορτίων

Τά ἡλεκτροστατικά φαινόμενα γίνονται ἀντιληπτά ἀπό τίς δυνάμεις πού ἀναπτύσσονται μεταξύ φορτισμένων σωμάτων καί ὁ νόμος τοῦ Coulomb εἶναι κατ' ἀρχήν ἡ μόνη σχέση πού χρειάζεται γιά τήν ἐπίλυση κάθε ἡλεκτροστατικοῦ προβλήματος. Μέ τήν ἴδια ἔννοια, οἱ μόνες σχέσεις πού χρειάζονται στήν Κλασσική Μηχανική εἶναι οἱ τρεῖς νόμοι τοῦ Νεύτωνα. Παρόλα αὐτά τόσο στή Μηχανική ὅσο καί στόν Ἠλεκτρομαγνητισμό βρήκαμε χρήσιμη τήν εἰσαγωγή νέων ἐννοιῶν (ὅπως ἡ ἐνέργεια στή Μηχανική) καί παράγωγων σχέσεων πού αὐξάνουν τήν ἀναλυτική καί ἐποπτική μας ἱκανότητα.

Γιά τήν περιγραφή τῆς ἀλληλεπιδράσεως ἐλεύθερων στατικῶν φορτίων ἔχουμε μέχρι τώρα εἰσάγει δύο νέα μεγέθη, τό ἡλεκτρικό πεδίο $E(r)$ καί τό δυναμικό $\varphi(r)$. Καθένα ἀπό τά δύο αὐτά μεγέθη παρέχει τίς ἴδιες πληροφορίες πού ἐξάγονται ἀπό τό νόμο τοῦ Coulomb, ἐξετάζοντας ἕνα συγκεκριμένο ἡλεκτροστατικό φαινόμενο ἀπό διάφορη ὀπτική γωνία. Μέ τήν εἰσαγωγή τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου ἡ ἔμφαση μετατοπίζεται ἀπό τήν κατανομή φορτίου, πού στό νόμο τοῦ Coulomb ἀποτελεῖ τήν πηγή τῆς ἡλεκτροστατικῆς δυνάμεως, στήν ἰδιότητα πού ἀποκτᾶ ὁ χῶρος μέ τήν ὕπαρξη τῆς συγκεκριμένης κατανομῆς. Ἡ ἰδιότητα αὐτή μετρᾶται μέ τήν ἀνυσματική συνάρτηση $E(r)$ καί διαμέσου τῆς συναρτήσεως αὐτῆς μπορεῖ νά περιγραφεῖ πλήρως τό ἡλεκτροστατικό φαινόμενο. Σέ ἕνα δεύτερο ἐπίπεδο λο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γικῆς ἀφαιρέσεως ἡ ἔμφαση μετατοπίζεται ἀπό τό ἡλεκτρικό πεδίο **E**(r), πού ἀκόμη στηρίζεται στήν ἔννοια τῆς δυνάμεως, στήν ἐνεργειακή ἄποψη τοῦ φαινομένου, ἡ ὁποία ἐκφράζεται μέ τή συνάρτηση δυναμικοῦ φ(r). Ὡς μονόμετρο μέγεθος, ἡ τελευταία συνάρτηση εἶναι περισσότερο εὔχρηστη ἀπό τό ἄνυσμα **E**(r). Παρόλα αὐτά ἡ πληροφορία πού περιέχεται στούς τρεῖς ἀριθμούς τῆς συναρτήσεως **E**(r) (στίς τρεῖς συνιστῶσες τοῦ πεδίου $E_x(r)$, $E_y(r)$, $E_z(r)$) δέν εἶναι δυνατόν νά ἐκφραστεῖ μέ ἕνα καί μόνο ἀριθμό φ(r). Ὅπως καί κατά τήν εἰσαγωγή τῆς ἐνεργείας στήν Κλασσική Μηχανική, βρήκαμε ὅτι εἶναι ἀπαραίτητο νά συμπληρώσουμε τή συνάρτηση δυναμικοῦ μέ τόν ὁρισμό ἑνός σημείου ἀναφορᾶς.

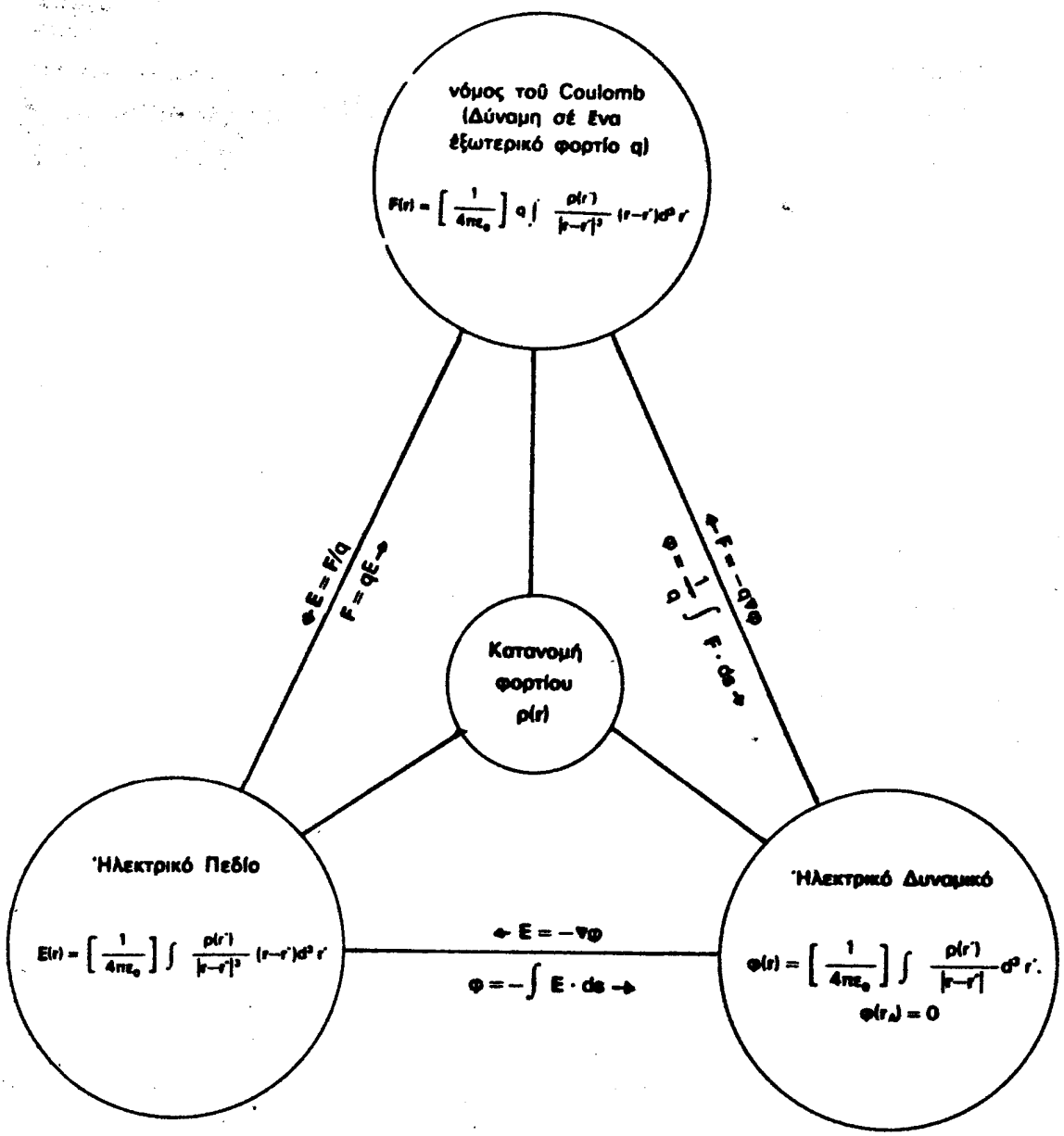
Τό σχῆμα 2-5 δίνει διαγραμματικά τούς τρεῖς ἐναλλακτικούς τρόπους περιγραφῆς τῶν ἡλεκτροστατικῶν φαινομένων καί τίς σχέσεις διασυνδέσεως πού ἀναπτύξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους. Ὅπως δείχνει τό σχῆμα, γιά μιά συγκεκριμένη κατανομή† φορτίου ρ(r) εἶναι δυνατόν νά ὑπολογιστεῖ ἡ δύναμη Coulomb **F**(r) πού θά δεχτεῖ ἕνα φορτίο q στό σημεῖο r {ἐξ. (2.15)}, τό ἡλεκτρικό πεδίο **E**(r) {ἐξ. (2.18)} καί ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ φ(r) {ἐξ. (2.49)}. Στήν τελευταία περίπτωση, ὅπως ἤδη ἀναφέρθηκε, εἶναι ἀκόμα ἀπαραίτητη ἡ πληροφορία $\varphi(r_A) = C$, δηλαδή ὁ προσδιορισμός τῆς τιμῆς τοῦ δυναμικοῦ στό σημεῖο ἀναφορᾶς A. Οἱ σχέσεις πού συνδέουν τίς τρεῖς συναρτήσεις δίνονται ἐπίσης διαγραμματικά στό σχῆμα 2-5.

Γιά μιά συγκεκριμένη κατανομή φορτίου, ἡ ἐπίλυση τοῦ ἡλεκτροστατικοῦ προβλήματος μπορεῖ νά γίνει ἰσοδύναμα διαμέσου ὁποιασδήποτε ἀπό τίς τρεῖς συναρτήσεις μέ τή χρησιμοποίηση τῶν ἐκφράσεων πού περιέχονται στό σχῆμα 2-5 ἤ μέ τήν ἐκμετάλλευση κάποιας συμμετρίας τῆς διατάξεως πού ἐπιτρέπει τήν ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Gauss. Οἱ ὑπόλοιπες συ-

---

† Γιά σύμπτυξη τοῦ συμβολισμοῦ θά θεωρήσουμε στή συνέχεια ὅτι ἡ συνάρτηση ρ(r) πού ὁρίζεται σέ ὅλο τό χῶρο περιγράφει τόσο μιά ἐκτεταμένη κατανομή φορτίου ὅσο καί μεμονωμένα σημειακά φορτία. Θά θεωρήσουμε δηλαδή ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τῶν ἐξ. (2.18) καί (2.47) περιέχεται στό δεύτερο. Γιά ἕνα ἐλεύθερο φορτίο q_k μέ περιορισμένες διαστάσεις ἡ συνάρτηση ρ(r) μπορεῖ νά ληφθεῖ ὡς μιά συνάρτηση μέ σημαντική τιμή στήν ἄμεση γειτονία τοῦ σημείου r_k πού καθορίζει τή θέση τοῦ σημειακοῦ φορτίου καί $\rho(r) = 0$ στόν ὑπόλοιπο χῶρο. Ἀκόμη καί γιά σημειακό φορτίο, ὁρισμένο μέ μαθηματική αὐστηρότητα, ἡ πυκνότητα ρ(r) μπορεῖ νά ἀποδοθεῖ ἀπό τή **συνάρτηση δέλτα** $\delta(r - r_k)$ (ἡ συνάρτηση δέλτα ὁρίζεται συνήθως σέ συγγράμματα Κβαντομηχανικῆς, βλέπε π.χ. P.A.M. Dirac, Quantum Mechanics, Fourth Edition, Oxford Univ. Press, 1958, σελ. 58). Ἄν ρ(r) περιγράφει σημειακό φορτίο, τότε ἡ τιμή της εἶναι σημαντική μόνο γιά $r - r' \simeq r - r_k$ καί τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (2.18) ἤ (2.47) μεταπίπτει σέ ἕνα ἀπό τούς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος στίς ἀντίστοιχες ἐκφράσεις.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 2-5 Τρεῖς ἐναλλακτικές μέθοδοι περιγραφῆς τῆς ἠλεκτροστατικῆς ἀλληλεπιδράσεως.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ναρτήσεις καί ἰδιαίτερα ἡ δύναμη σέ κάθε φορτίο τῆς κατανομῆς, πού ἐπιτρέπει τήν πειραματική ἐπαλήθευση, μποροῦν νά ὑπολογιστοῦν μέ τίς σχέσεις πού συνδέουν τά διάφορα μεγέθη στό σχῆμα 2-5. Ὁ Πίνακας 2-1 περιέχει τίς συναρτήσεις **E**(r) καί φ(r) γιά ὁρισμένες ἁπλές διατάξεις φορτίου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-1 Τό ἠλεκτρικό πεδίο **E**(r) καί ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ φ(r) γιά μερικές τυπικές διατάξεις στατικῶν φορτίων. Ὅπου δέν ἀναφέρεται ἡ τιμή τοῦ δυναμικοῦ στό σημεῖο ἀναφορᾶς ἔχει ληφθεῖ φ(∞) = 0.

Κατανομή Φορτίου	Ἠλεκτρικό Πεδίο	Ἠλεκτρικό Δυναμικό
Σημειακό φορτίο q στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων.	$\mathbf{E}(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$	$\varphi(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\frac{q}{r}$
Ἠλεκτρικο δίπολο $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ Δύο φορτία q, −q σέ ἀπόσταση **d**. Γιά r >> d.	$\mathbf{E}(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\frac{2\lambda}{r}\hat{\mathbf{r}}$	$\varphi(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$
Εὐθύγραμμη κατανομή φορτίου μέ ἄπειρες διαστάσεις καί γραμμική πυκνότητα λ.	$\mathbf{E}(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ ὅπου r ἡ ἀπόσταση ἀπό τήν κατανομή	$\varphi(r) = -\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]2\ln\left(\frac{r}{a}\right)$ ὅπου a ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου ἀναφορᾶς ἀπό τήν κατανομή
Ἐπίπεδη κατανομή φορτίου μέ ἄπειρες διαστάσεις καί ἐπιφανειακή πυκνότητα σ.	$\mathbf{E}(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]2\pi\sigma$	$\varphi(r) = -\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]2\pi\sigma r$ ὅπου r ἡ κάθετη ἀπόσταση ἀπό τό ἐπίπεδο.
Ὁμοιόμορφα φορτισμένος δίσκος μέ ὁλικό φορτίο q καί ἀκτίνα a. Οἱ συναρτήσεις δίνονται γιά σημεῖα στόν ἄξονα τοῦ δίσκου.	$E(z) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \times \frac{2q}{a^2}\left(\sqrt{z^2 + a^2} - \lvert z\rvert\right)$	$\varphi(z) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \times \left(\frac{2q}{a^2}\left(1 - \frac{\lvert z\rvert}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right)\right)$
Ὁμοιόμορφα φορτισμένη σφαῖρα μέ ἀκτίνα R καί ὁλικό φορτίο q.	$\mathbf{E}(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{p}}{r^3}$ $= \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] q\frac{r}{R^3}\hat{\mathbf{r}}$	$\varphi(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\frac{q}{r}$, r > R $= \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\frac{q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ r ⩽ R ὅπου r ἡ ἀπόσταση ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2-7 Ἰσοδυναμικές Ἐπιφάνειες καί Δυναμικές Γραμμές

Στήν προηγούμενη ἀνάλυση, ἡ συνεισφορά τοῦ πεδίου καί τοῦ δυναμικοῦ στήν κατανόηση τῶν ἠλεκτροστατικῶν φαινομένων, ἀναφέρθηκε ὡς «χαρτογράφιση» τῆς ἰδιότητας πού ἀποκτᾶ ὁ χῶρος ἀπό τήν παρουσία μιᾶς κατανομῆς φορτίου ρ(r). Μποροῦμε πράγματι νά ἀποδώσουμε τήν ἰδιότητα αὐτή διαγραμματικά ἄν δανειστοῦμε μερικές ἔννοιες ἀπό τή γεωγραφική χαρτογράφιση. Σέ ἀναλογία μέ τίς ἰσοϋψεῖς καμπύλες σέ ἕνα τοπογραφικό χάρτη θά ὁρίσουμε τίς **ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες** στό χῶρο. Ὡς ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια ὁρίζεται ἡ γεωμετρική ἐπιφάνεια γιά τήν ὁποία ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ παίρνει μιά συγκεκριμένη τιμή α, ἤτοι

$$\varphi(r) = \alpha \ . \tag{2.50}$$

Παράλληλα, σέ ἀναλογία μέ τίς γραμμές πού σέ ἕνα γεωγραφικό χάρτη ἀποδίδουν τή διεύθυνση μέγιστης κλίσης τοῦ ἐδάφους, θά ὁρίσουμε τίς **δυναμικές γραμμές**. Ἄν καί οἱ δυναμικές γραμμές δέν ἀποδίδουν τήν ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ἀπό τήν ἐξ. (2.41) ὅτι ἡ διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος E(r) εἶναι κατά τήν ἐφαπτομένη τῆς δυναμικῆς γραμμῆς πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο r.

Εἶναι δυνατόν νά ἀναπτύξουμε μιά ἀρκετά ἐκτεταμένη θεωρία γύρω ἀπό τήν ἀπεικόνιση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καί δυναμικοῦ, πού στό ἐργαστήριο καί στή βιομηχανία χρησιμοποιεῖται ἀπό κατασκευαστές ἠλεκτροστατικῶν συστημάτων. Στά πλαίσια αὐτά θά ἀρκεστοῦμε στήν ἀπαρίθμιση ὁρισμένων ἰδιοτήτων πού διέπουν τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες καί τίς δυναμικές γραμμές. Στή συνέχεια θά ἐξετάσουμε πειραματικά μερικά ἁπλά παραδείγματα κατανομῆς φορτίου.

1. Οἱ δυναμικές γραμμές εἶναι κάθετες πρός τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες, ὅπως προκύπτει ἀπό τήν ἐξ. (2.41).
2. Μιά ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια δέν τέμνει τόν ἑαυτό της ἐκτός ἀπό σημεῖα στά ὁποῖα τό ἠλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται ἤ εἶναι ἀπροσδιόριστο. Καθόσον ἄν τοῦτο συνέβαινε, στό σημεῖο τομῆς θά μπορούσαμε νά φέρουμε δύο καθέτους καί ἐπομένως δύο διαφορετικές τιμές τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου.
3. Ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες, πού χαρακτηρίζονται ἀπό διαφορετική τιμή τοῦ δυναμικοῦ, δέν τέμνονται, καθόσον τό ἠλεκτρικό δυναμικό ὁρίζεται μονοσήμαντα.
4. Ἄν ὁρίσουμε τή μέση τιμή τοῦ πεδίου $\langle E \rangle$ ὡς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\langle E \rangle \equiv \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} E \, ds \tag{2.51}$$

ὅπου ἡ ὁλοκλήρωση ἀκολουθεῖ τή διαδρομή μιᾶς δυναμικῆς γραμμῆς μεταξύ τῶν σημείων s_1 καί s_2, ὁ ὁρισμός τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ

$$\varphi(s_2) - \varphi(s_1) = - \int_{s_1}^{s_2} E \, ds$$

δίνει

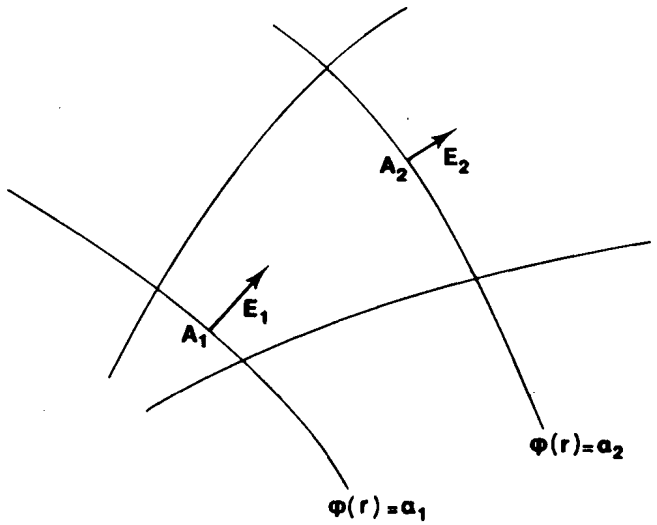
$$\langle E \rangle (s_1 - s_2) = \varphi(s_2) - \varphi(s_1)$$

ἤ

$$s_1 - s_2 = \frac{\varphi(s_2) - \varphi(s_1)}{\langle E \rangle} . \tag{2.52}$$

Ἄν ἑπομένως οἱ ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες χαρακτοῦν κατά σταθερά βήματα τοῦ δυναμικοῦ $\Delta\varphi = \varphi(s_2) - \varphi(s_1)$, ἀπό τήν ἐξ. (2.52) προκύπτει ὅτι ἡ ἀπόσταση μεταξύ ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἀντίστροφα ἀνάλογη πρός τή μέση τιμή τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Μέ ἄλλα λόγια, σέ περιοχές ὅπου τό ἠλεκτρικό πεδίο εἶναι ἰσχυρό ἔχουμε συνωστισμό ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν ἐνῶ σέ περιοχές ὅπου τό ἠλεκτρικό πεδίο εἶναι ἀδύνατο οἱ ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες ἁπαντῶνται κατά ἀραιά διαστήματα.

5. Ἄν ὡς **κῶνο δυναμικῶν γραμμῶν** ὁρίσουμε μιά περιοχή τοῦ χώρου πού περικλείεται ἀπό δυναμικές γραμμές, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν A_1 καί A_2 πού ὁρίζει ἡ τομή τοῦ κώνου μέ δύο ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες εἶναι ἀντίστροφα ἀνάλογος πρός τή μέση τιμή τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου στή γειτονία τῆς ἀντίστοιχης ἰσοδυναμικῆς ἐπιφάνειας, ἤτοι



ΣΧΗΜΑ 2-6 Τομή κώνου δυναμικῶν γραμμῶν μέ δύο ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες $\varphi(r) = a_1$ καί $\varphi(r) = a_2$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{\langle E_2 \rangle}{\langle E_1 \rangle} = \frac{A_1}{A_2} \tag{2.53}$$

Ἡ ἰδιότητα αὐτή, πού δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 2-6, μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ἀπό τή θεώρηση τῆς ροῆς $\int E \cdot da$ στίς δύο τομές τοῦ κώνου μέ τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες.

Ὁ πειραματικός προσδιορισμός τῶν ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν καί τῶν δυναμικῶν γραμμῶν στόν τρισδιάστατο χῶρο γύρω ἀπό μιά κατανομή φορτίου δέν εἶναι πολύ εὔκολος. Παρόλα αὐτά ἀποδεικνύεται ὅτι, ἄν ὁ χῶρος γύρω ἀπό ἕνα σύστημα **ἀγωγῶν** (βλέπε Παρ. 3-1) πού διατηροῦνται σέ διάφορες τιμές δυναμικοῦ, διαπερνᾶται ἀπό ἕνα ἀγώγιμο ὑλικό, οἱ ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες ἔχουν τό ἴδιο σχῆμα μέ τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες γύρω ἀπό μιά κατανομή φορτίων μέ τήν ἴδια γεωμετρία στόν κενό χῶρο. Ἐπιπλέον ἡ διεύθυνση τοῦ ρεύματος μέσα στό ἀγώγιμο ὑλικό εἶναι κάθετη πρός τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες καί ἐπομένως ἐμφανίζει τό ἴδιο σχῆμα μέ τίς δυναμικές γραμμές στόν κενό χῶρο. Στήν ἑπόμενη σειρά πειραμάτων θά ἐκμεταλευτοῦμε τήν ἰδιότητα αὐτή γιά νά μελετήσουμε τή γεωμετρία τῶν δυναμικῶν γραμμῶν καί ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν σέ ἁπλές κατανομές φορτίου. Ἀναγκαστικά θά ἐργαστοῦμε σέ δύο διαστάσεις, δηλαδή θά θεωρήσουμε μιά διάταξη φορτίων σέ ἕνα ἐπίπεδο καί μιά τομή τοῦ χώρου πού περνᾶ ἀπό ὅλα τά φορτία.

ΠΕΙΡΑΜΑ 2-1. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

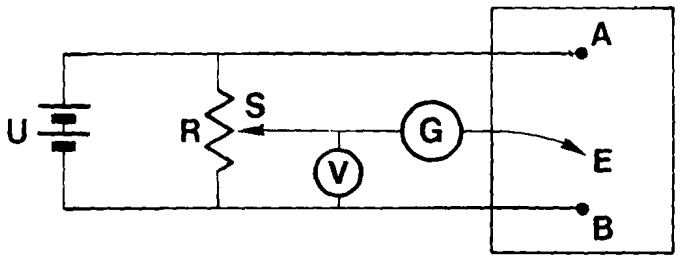
Ὡς ἀγώγιμο ὑλικό πού θά παραστήσει τόν κενό χῶρο θά χρησιμοποιήσουμε εἰδικό χαρτί πού ἔχει ἐμποτιστεῖ μέ ἄνθρακα. Ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀγώγιμου χαρτιοῦ εἶναι περίπου 100 kΩ ἀνά cm. Ἡ κατανομή φορτίου μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ μέ τοποθέτηση ἀγωγῶν διαφόρων σχημάτων πάνω στό χαρτί ἤ μέ σχεδιασμό τῆς κατανομῆς ἄν διατίθεται πέννα μέ μεταλλική μελάνη. Μεταξύ τῶν ἀγωγῶν πού ἐφεξῆς θά ἀναφέρονται ὡς **ἠλεκτρόδια**, μπορεῖ νά ἀναπτυχθεῖ διαφορά δυναμικοῦ μέ τή βοήθεια ἠλεκτρικοῦ στοιχείου ἤ *τροφοδοτικοῦ συνεχοῦς ρεύματος* (ΣΡ). Ὁ προσδιορισμός τώρα τοῦ δυναμικοῦ σέ κάθε σημεῖο τοῦ χαρτιοῦ σέ σχέση μέ τό δυναμικό ἑνός ἠλεκτροδίου (ἤ ὁποιουδήποτε ἄλλου σημείου ἀναφορᾶς) μπορεῖ νά γίνει μέ ἕνα βολτόμετρο μέ μεγάλη ἐσωτερική ἀντίσταση. Κατάλληλο γιά τό σκοπό αὐτό εἶναι ἕνα κοινό ἠλεκτρονικό βολτόμετρο (VTVM) μέ ἐσωτερική ἀντίσταση μεγαλύτερη ἀπό 10 MΩ.

Ἐναλλακτικά τό δυναμικό σέ ἕνα σημεῖο τοῦ χαρτιοῦ μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μέ τή διάταξη μηδενισμοῦ τοῦ σχήματος 2-7 πού ἔχει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σχεδιαστεῖ γιά τήν εἰδική περίπτωση δύο σημειακῶν ἠλεκτροδίων Α καί Β. Τό τροφοδοτικό ΣΡ διατηρεῖ μιά σταθερή διαφορά δυναμικοῦ U μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β καί στά ἄκρα τοῦ ροοστάτη R. Ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῆς κινητῆς ἐπαφῆς S καί τοῦ ἠλεκτροδίου Β μετρᾶται μέ τό βολτόμετρο V καί μέ μετακίνηση τῆς ἐπαφῆς S μπορεῖ νά πάρει ὁποιαδήποτε τιμή μεταξύ 0 καί U. Τό σημεῖο S συνδέεται ἀκόμη διαμέσου ἑνός εὐαίσθητου γαλβανομέτρου G μέ ἕνα εὔκαμπτο ἀκροδέκτη Ε πού μπορεῖ νά ἔρθει σέ ἐπαφή μέ ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ ἀγώγιμου χαρτιοῦ. Ἄν τό δυναμικό τοῦ σημείου Ε ὡς πρός τό ἠλεκτρόδιο Β εἶναι διάφορο ἀπό τήν ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου V, μεταξύ τῶν σημείων S καί Ε θά διέλθει ρεῦμα καί τό γαλβανόμετρο θά ἀποκλίνει. Ἀντίθετα, τό γαλβανόμετρο μηδενίζεται ἄν τό σημεῖο Ε βρίσκεται σέ δυναμικό ἴσο μέ τήν ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου.

- Μέ τή βοήθεια ἑνός ἠλεκτρονικοῦ βολτομέτρου ἤ τῆς διατάξεως στό σχῆμα 2-7 προσδιορίστε τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες γιά τίς τρεῖς κατα-



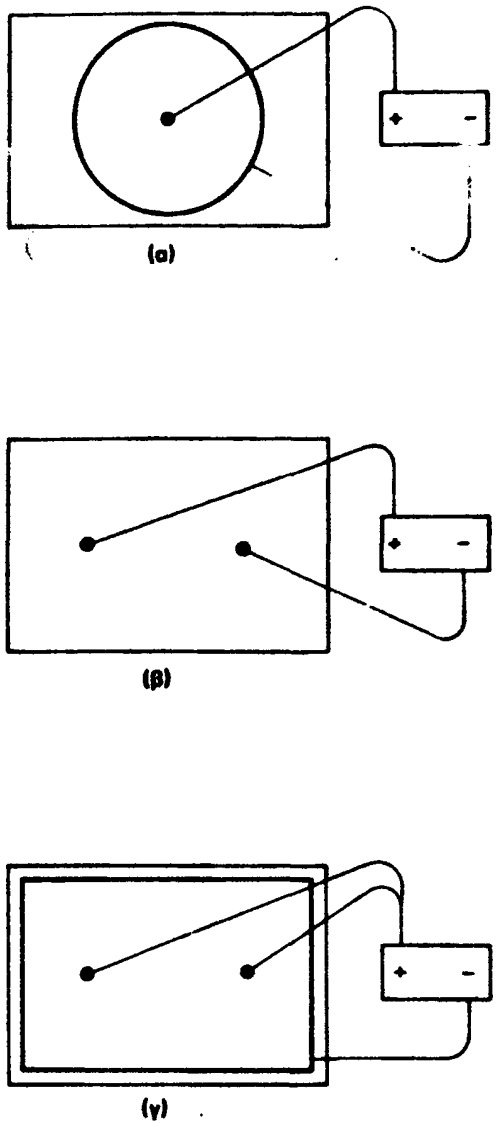
ΣΧΗΜΑ 2-7 Διάταξη μηδενισμοῦ γιά τόν προσδιορισμό διαφορᾶς δυναμικοῦ στό Πείραμα 2-1.

νομές φορτίου πού δίνονται στό σχῆμα 2-8. Σέ κάθε διάταξη, τό κιβώτιο + − ἀντιπροσωπεύει ἠλεκτρικό στοιχεῖο ἤ τροφοδοτικό ΣΡ μέ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ ἠλεκτροδίων περίπου U = 6 V. Κινώντας τόν ἀκροδέκτη τοῦ ἠλεκτρονικοῦ βολτομέτρου ἤ τόν ἀκροδέκτη Ε τοῦ σχήματος 2-7 πάνω στό χαρτί προσδιορίστε ἀρκετά σημεῖα μέ δυναμικό 0.1U καί σημειῶστε τα μέ ἕνα λευκό μολύβι. Ἑνῶστε ὅλα τά σημεῖα ὥστε νά σχηματιστεῖ μιά συνεχής ἰσοδυναμική γραμμή. Ἐπαναλάβετε τήν ἐργασία γιά τόν προσδιορισμό τῶν ἰσοδυναμικῶν γραμμῶν μέ δυναμικό 0.2U, 0.3U, κ.λ.π.

- Χαράξτε τίς δυναμικές γραμμές, δηλαδή καμπύλες κάθετες πρός τίς ἰσοδυναμικές γραμμές πού προσδιορίσατε.

- Ἐπιλέξτε μιά ἀκτινική διεύθυνση μεταξύ τῶν ἠλεκτροδίων στό σχῆμα 2-8(α) καί μετρεῖστε τό δυναμικό κατά μῆκος τῆς ἀκτίνας σέ διαστήματα 1 cm. Προσδιορίστε τήν ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἀπό τήν προσεγγιστική σχέση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 2-8 Τρεῖς διατάξεις ἠλεκτροδίων γιά τή μελέτη τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου στό Πείραμα 2-1.

$$E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

καί ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τήν ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πδίου ὡς συνάρτηση τῆς ἀποστάσεως ἀπό τό κεντρικό ἠλεκτρόδιο.

— Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά τήν εὐθεία πού συνδέει τά δύο ἠλεκτρόδια στά σχήματα 2-8(β) καί 2-8(γ).

— Ποιές κατανομές φορτίου ἀντιπροσωπεύουν οἱ διατάξεις ἠλεκτροδίων στό σχῆμα 2-8; Τί ἐπίδραση ἔχει ἡ περιορισμένη ἔκταση τοῦ ἀγώγιμου ὑλικοῦ στή διαμόρφωση τοῦ πεδίου;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2-1. Τρία σημειακά φορτία 6 μC, 12 μC καί −0.5 μC (1 μC = 10^{-6} C) εἶναι τοποθετημένα στόν κενό χῶρο κατά τόν ἄξονα z καί στίς θέσεις z = 0, z = 20 cm καί z = 50 cm. Προσδιορίστε τή δύναμη πού ἀσκεῖται σέ κάθε φορτίο.

2-2. Δίνονται τρία σημειακά φορτία q_1, q_2 καί q_3. Ἄν τά φορτία q_1 καί q_2 συνενωθοῦν ὥστε νά δημιουργήσουν ἕνα σημειακό φορτίο καί τό φορτίο q_3 τοποθετηθεῖ σέ ἀπόσταση L, μεταξύ τους παρατηρεῖται ἀπωστική δύναμη μέ μέτρο F. Ἄν συνενωθοῦν τά φορτία q_1 καί q_3 καί τό φορτίο q_2 τοποθετηθεῖ στήν ἴδια ἀπόσταση L, ἡ ἀντίστοιχη δύναμη εἶναι ἑλκτική καί μέ μέτρο 9F. Τέλος ἄν συνενωθοῦν τά φορτία q_2 καί q_3 καί τό φορτίο q_1 τοποθετηθεῖ σέ ἀπόσταση L παρατηρεῖται μεταξύ τους ἑλκτική δύναμη μέ μέτρο 2F. Νά προσδιοριστεῖ τό σχετικό πρόσημο καί μέγεθος τῶν τριῶν φορτίων.

2-3. Ἕνα σημειακό φορτίο $q_1 = 2 \times 10^{-2}$ μC βρίσκεται στό σημεῖο τοῦ χώρου (x,y,z) = (3,4,5) cm. Ἄν στόν ὑπόλοιπο κενό χῶρο βρίσκονται δύο ἀκόμη σημειακά φορτία $q_2 = -4 \times 10^{-2}$ μC στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων καί $q_3 = 5 \times 10^{-2}$ μC στό σημεῖο (−6,−1,2) cm, ὑπολογίστε τίς καρτεσιανές συντεταγμένες καί τό μέτρο τῆς δυνάμεως πού ἀσκεῖται στό φορτίο q_1.

2-4. Δύο μικρές σφαῖρες κρέμονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο τῆς ὀροφῆς μέ δύο νήματα μήκους 30 cm. Ἄν κάθε σφαίρα ζυγίζει 0.25 g καί τό βάρος τοῦ νήματος εἶναι ἀμελητέο, ὑπολογίστε τό ἠλεκτρικό φορτίο πού ἄν μοιραστεῖ ἐξίσου στίς δύο σφαῖρες θά προκαλέσει τήν ἰσορρόπιση τῶν δύο σφαιρῶν σέ μεταξύ τους ἀπόσταση 10 cm.

2-5. Τρεῖς μικρές σφαῖρες κρέμονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο τῆς ὀροφῆς μέ τρία νήματα μήκους ℓ τό καθένα. Μιά ποσότητα φορτίου q μοιράζεται ἐξίσου στίς τρεῖς σφαῖρες πού μέ τόν τρόπο αὐτό ἰσορροποῦν στίς κορυφές ἑνός ὁριζόντιου ἰσόπλευρου τριγώνου μέ πλευρά d. Ἄν m εἶναι ἡ μάζα κάθε σφαίρας δεῖξτε ὅτι στό σύστημα SI ἰσχύει ἡ σχέση

$$q^2 \sqrt{\ell^2 - \frac{d^2}{3}} = 12\,\pi^2 \varepsilon_0 m g d^2$$

ὅπου g εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας.

2-6. Ὑπολογίστε τήν ἠλεκτροστατική δύναμη μεταξύ δύο πυρήνων χρυσοῦ μέ ἀτομικό ἀριθμό Z = 79 ὅταν ἡ μεταξύ τους ἀπόσταση εἶναι 3×10^{-12} cm. Τό φορτίο τοῦ πρωτονίου δίνεται στήν ἐξ. (2.1).

2-7. (α) Περίσσεια 10^{10} ἠλεκτρονίων βρίσκεται ὁμοιόμορφα κατανεμημένη στόν ὄγκο σφαίρας μέ ἀκτίνα 10 cm. Προσδιορίστε τήν πυκνότητα φορτίου σέ ἠλεκτρόνια ἀνά mm^3 καθώς καί σέ φορτίο ἀνά μονάδα ὄγκου στά συστήματα CGS καί SI.

(β) Ἄν ἡ προηγούμενη περίσσεια ἠλεκτρονίων κατανεμηθεῖ ὁμοιόμορφα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στήν ἐπιφάνεια τῆς ἴδιας σφαίρας ὑπολογίστε τήν ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου σέ ἠλεκτρόνια ἀνά mm^2 καθώς καί σέ φορτίο ἀνά μονάδα ἐπιφανείας στά συστήματα CGS καί SI.

2-8. (α) Ὑπολογίστε τό ἠλεκτρικό πεδίο πού ἀπαιτεῖται γιά τήν ἀντιστάθμιση τῆς δυνάμεως τῆς βαρύτητας σέ ἕνα ἠλεκτρόνιο.
(β) Ἄν τό πεδίο αὐτό δημιουργεῖται ἀπό ἕνα δεύτερο ἠλεκτρόνιο ἀκριβῶς κάτω ἀπό τό πρῶτο, ποιά εἶναι ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο ἠλεκτρονίων; Ἡ μάζα τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι 9.1×10^{-28} g καί τό φορτίο του δίνεται ἀπό τήν ἐξ. (2.1).

2-9. (α) Μέ ἀπευθείας ὁλοκλήρωση προσδιορίστε τό ἠλεκτρικό πεδίο στόν ἄξονα ἑνός δίσκου μέ ἀκτίνα R καί ὁμοιόμορφη ἐπιφανειακή πυκνότητα σ.
(β) Δεῖξτε ὅτι σέ ἕνα σημεῖο στόν ἄξονα τοῦ δίσκου πού ἀπέχει ἀπό τό δίσκο ἀπόσταση x, τέτοια ὥστε $x >> R$, τό ἠλεκτρικό πεδίο πού προσδιορίσατε μεταπίπτει στό πεδίο σημειακοῦ φορτίου μέ φορτίο ἴσο πρός τό ὁλικό φορτίο τοῦ δίσκου.

2-10. Δύο σημειακά φορτία q καί $-2q$ βρίσκονται σέ ἀπόσταση L. Ὑπάρχει κάποιο σημεῖο τοῦ χώρου ὅπου τό ἠλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται;

2-11. Προσδιορίστε τό ἠλεκτρικό πεδίο στό κέντρο μιᾶς ἡμισφαιρικῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία διαθέτει ὁμοιόμορφη ἐπιφανειακή κατανομή φορτίου σ.

2-12. Μιά ἐπίπεδη ἐπιφάνεια μέ ἄπειρες διαστάσεις διαθέτει ὁμοιόμορφη κατανομή φορτίου σ. Δεῖξτε ὅτι τό μισό ἀπό τό ἠλεκτρικό πεδίο πού δημιουργεῖται σέ ἀπόσταση L ἀπό τήν ἐπιφάνεια ὀφείλεται στό φορτίο πού περιέχεται σέ ἕνα δίσκο τῆς ἐπιφανείας μέ ἀκτίνα $\sqrt{3}\,L$.

2-13. Ὑπολογίστε τήν ἐνέργεια ἰονισμοῦ τοῦ ὑδρογόνου ἄν στό οὐδέτερο ἄτομο ἡ μέση ἀπόσταση μεταξύ ἠλεκτρονίου-πρωτονίου εἶναι 0.529×10^{-8} cm. Ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ φορτίου τοῦ πρωτονίου καί τοῦ ἠλεκτρονίου δίνεται στήν ἐξ. (2.1).

2-14. Θεωρεῖστε δύο σημειακά φορτία $q_1 = 10^{-3}$ μC καί $q_2 = -0.5 \times 10^{-3}$ μC ἀντίστοιχα στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων καί στή θέση $x = 2$ cm.
(α) Προσδιορίστε τή συνάρτηση δυναμικοῦ καθόλο τόν ἄξονα x.
(β) Ἀποδῶστε τήν προηγούμενη συνάρτηση δυναμικοῦ σέ γραφική παράσταση.
(γ) Σέ ποιά σημεῖα τοῦ ἄξονα x μηδενίζεται ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ καί σέ ποιά σημεῖα ἐμφανίζει μέγιστα (ἄπειρα ἤ πεπερασμένα).

2-15. Προσδιορίστε μέ ἀπευθείας ὁλοκλήρωση τήν τιμή τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ στό κέντρο μιᾶς σφαιρικῆς κατανομῆς φορτίου μέ ἀκτίνα R καί πυκνότητα

$$\rho = kr^2$$

ὅπου k εἶναι μιά σταθερά καί r ἡ ἀκτινική ἀπόσταση ἀπό τό κέντρο τῆς κατανομῆς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2-16. Θεωρεῖστε ἕνα δίσκο μέ ἀκτίνα R καί ὁμοιόμορφη κατανομή φορτίου σ. Ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ
(α) στό κέντρο τοῦ δίσκου καί
(β) στήν περιφέρεια τοῦ δίσκου.

2-17. Χρησιμοποιεῖστε τό νόμο τοῦ Gauss γιά νά ὑπολογίσετε τή ροή τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου σέ μιά τετράγωνη ἐπιφάνεια μέ πλευρά α, πού δημιουργεῖται ἀπό ἕνα σημειακό φορτίο q τοποθετημένο σέ μιά εὐθεία, κάθετη πρός τήν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου στό κέντρο του, καί σέ ἀπόσταση α/2. Ὑπολογίστε τήν ἀριθμητική τιμή τῆς ροῆς γιά $q = 10^{-5}$ C.

2-18. Προσδιορίστε μέ ἀπευθείας ὁλοκλήρωση τή ροή τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου σέ ἕνα δίσκο μέ ἀκτίνα R, πού ὀφείλεται στήν ὕπαρξη ἑνός φορτίου q στόν ἄξονα τοῦ δίσκου καί σέ ἀπόσταση L ἀπό τό κέντρο τοῦ δίσκου.

2-19. Χρησιμοποιεῖστε τό ἀποτέλεσμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως καί τό νόμο τοῦ Gauss γιά νά προσδιορίσετε τή ροή τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου στήν κυρτή μόνο ἐπιφάνεια ἑνός κυλίνδρου μέ ὕψος L, πού ὀφείλεται στήν ὕπαρξη ἑνός φορτίου q στό κέντρο τοῦ κυλίνδρου.

2-20. (α) Προσδιορίστε τό ἡλεκτρικό πεδίο στόν ἐσωτερικό καί ἐξωτερικό χῶρο μιᾶς ὁμοιόμορφης κυλινδρικῆς κατανομῆς φορτίου ρ μέ ἀκτίνα R καί ἄπειρη ἔκταση κατά τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου.
(β) Προσδιορίστε τό ἡλεκτρικό πεδίο στήν προηγούμενη γεωμετρία, ἀλλά γιά πυκνότητα φορτίου

$$\rho = kr^2$$

ὅπου k εἶναι μιά σταθερά καί r ἡ ἀκτινική ἀπόσταση ἀπό τόν ἄξονα τῆς κυλινδρικῆς κατανομῆς.

2-21. Προσδιορίστε τή συνάρτηση ρ(r) τῆς πυκνότητας φορτίου γιά μιά κατανομή φορτίου μέ σφαιρική συμμετρία, ἡ ὁποία δημιουργεῖ ἡλεκτρικό πεδίο μέ ἀκτινική διεύθυνση καί μέτρο $E = kr^2$, ὅπου k εἶναι μιά σταθερά.

2-22. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια μέ μηδενικό δυναμικό στό πεδίο δύο ἑτερώνυμων φορτίων εἶναι στή γενική περίπτωση μιά σφαῖρα. Σέ ποιά εἰδική περίπτωση ἡ προηγούμενη ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια ἐκφυλίζεται σέ ἐπίπεδο;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ηλεκτρικες ιδιοτητες της υλης

Ὡς τώρα μελετήσαμε φορτία, (σημειακά ἤ συνεχεῖς κατανομές) πού κατά κάποιο τρόπο βρίσκονται τοποθετημένα σέ σταθερές θέσεις μέσα στόν κενό χῶρο. Στήν πράξη, μιά ποσότητα φορτίου, πού ὅπως εἴδαμε προέρχεται ἀπό ἔλλειμα ἤ περίσσεια ἠλεκτρονίων, ἀναφέρεται σέ ἕνα ὑλικό σῶμα, τό ὁποῖο μπορεῖ νά περιβάλλεται ἀπό ὕλη (ἀτμοσφαιρικό ἀέρα, νερό, κ.λ.π.), ἐνῶ ταυτόχρονα ἄλλα ὑλικά σώματα μέ διάφορα μεγέθη καί σχήματα, φορτισμένα ἤ μή, μπορεῖ νά βρίσκονται στή γειτονία του. Ἡ ὕπαρξη φορτίου ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή δημιουργία ἠλεκτρικοῦ πεδίου στό χῶρο, τό ὁποῖο μέ τή σειρά του ἐξασκεῖ δυνάμεις στά στοιχειώδη φορτία τῆς ὕλης πού περιβάλλουν τό φορτίο. Ἄν τά φορτία αὐτά μποροῦν νά κινηθοῦν (ἄν, σέ ἀτομική κλίμακα, τά ἠλεκτρόνια δέν εἶναι δεσμευμένα σέ ἕνα ἄτομο) θά ἀλλάξουν θέση ἐνῶ ταυτόχρονα μέ τήν ἀνακατανομή τῶν στοιχειωδῶν φορτίων στήν ὕλη θά δημιουργηθοῦν νέα πεδία στό χῶρο. Ἡ ἀνακατάταξη τῶν φορτίων θά συνεχιστεῖ μέχρις ὅτου τό σύστημα καταλήξει σέ κατάσταση ἰσορροπίας, δηλαδή μέχρις ὅτου ἡ ὁλική δύναμη σέ κάθε φορτίο μηδενιστεῖ. Μιά ἑπομένως σημαντική ἰδιότητα πού ἐνδιαφέρει στή διαμόρφωση τῆς καταστάσεως ἰσορροπίας, εἶναι ἡ δυνατότητα ἤ μή τῶν στοιχειωδῶν φορτίων νά μετατοπίζονται στό ἐσωτερικό τῶν ὑλικῶν σωμάτων.

Ὡς πρός τήν ἰδιότητα αὐτή τά ὑλικά πού ἀπαντοῦμε στή φύση καλύπτουν ὅλο τό φάσμα μεταξύ δύο ἀκραίων περιπτώσεων. Στό ἕνα ἄκρο δια-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κρίνουμε τούς **ἀγωγούς,** δηλαδή ὑλικά στό ἐσωτερικό τῶν ὁποίων τά φορτία εἶναι ἐλεύθερα νά κινηθοῦν ὑπό τήν ἐπίδραση ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Στό ἄλλο ἄκρο βρίσκονται οἱ **μονωτές** ἤ **διηλεκτρικά ὑλικά** μέ τήν ἀντίθετη συμπεριφορά. Μεταξύ τῶν δύο ἄκρων βρίσκονται ὅλα τά ρεαλιστικά ὑλικά μέσα στά ὁποῖα τό ἠλεκτρικό φορτίο μπορεῖ νά κινηθεῖ μέ μικρή ἤ μεγάλη δυσκολία. Στήν Παράγραφο 4-1 θά μελετήσουμε τή ροή φορτίων μέσα σέ ἕνα ὑλικό καί θά ὁρίσουμε τό φυσικό μέγεθος πού χαρακτηρίζει τό ὑλικό ὡς πρός αὐτή τήν ἰδιότητα. Πρός τό παρόν θά διαχωρίσουμε τήν ὕλη σέ δύο μεγάλες κατηγορίες, σέ ἀγωγούς καί μονωτές, ὅπου κάθε κατηγορία λίγο πολύ προσεγγίζει τήν ἀντίστοιχη ἔννοια τῆς ἀπόλυτης ἐλευθερίας ἤ ἀπόλυτη δεσμεύσεως στή μετακίνηση φορτίου. Καθόσον θά ἀσχοληθοῦμε μέ τό ἠλεκτροστατικό πρόβλημα, δηλαδή μέ τήν τελική κατάσταση ἰσορροπίας τῶν φορτίων, ἡ εὐκολία μέ τήν ὁποία κινοῦνται τά φορτία μέσα στό ὑλικό δέν ἐνδιαφέρει καί πολύ. Μπορεῖ ἡ μεταβατική περίοδος νά διαρκέσει λίγο ἤ πολύ χρόνο, ἀλλά, ἄν τά φορτία δέν εἶναι ἀπόλυτα δεσμευμένα γύρω ἀπό μιά συγκεκριμένη θέση, τό σύστημα θά καταλήξει σέ μιά καί μοναδική κατάσταση ἰσορροπίας.

Στή συνέχεια θά ἐξετάσουμε τή διαμόρφωση τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου ὅταν πέρα ἀπό μιά συγκεκριμένη κατανομή φορτίου ὁ χῶρος περιέχει ἀγωγούς καί διηλεκτρικά ὑλικά.

3-1 Ἀγωγοί σέ Ἠλεκτροστατικά Συστήματα

Ἐξ ὁρισμοῦ, ἀγωγός εἶναι ἕνα σῶμα στό ἐσωτερικό τοῦ ὁποίου ὑπάρχουν στοιχειώδη ἠλεκτρικά φορτία, ἐλεύθερα νά μετακινοῦνται ὑπό τήν ἐπίδραση τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου. Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό ἕπεται ὅτι *στό ἐσωτερικό ἑνός ἀγωγοῦ τό ἠλεκτροστατικό πεδίο μηδενίζεται,* ὅπως μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ εὔκολα μέ ἐπαγωγή σέ ἄτοπο ἀποτέλεσμα. Ἄν στό ἐσωτερικό τοῦ ἀγωγοῦ ὑπῆρχε πεδίο, στοιχειώδη φορτισμένα σωμάτια θά ἐκινοῦντο καί τό σύστημα δέν θά ἦταν στατικό. Ἐκεῖνο ἐπομένως πού περιμένουμε νά συμβεῖ στό ἐσωτερικό ἑνός ἀγωγοῦ κατά τή μεταβατική περίοδο, ἀμέσως μετά τήν τοποθέτηση τοῦ ἀγωγοῦ σέ ἕνα ἐξωτερικό ἠλεκτρικό πεδίο, εἶναι μιά ἀνακατανομή τῶν στοιχειωδῶν φορτίων. Ἡ τελική κατανομή φορτίου θά εἶναι τέτοια ὥστε νά δημιουργεῖ ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο πού στό ἐσωτερικό τοῦ ἀγωγοῦ ἐξουδετερώνει ἀπόλυτα τό ἐξωτερικό ἠλεκτρικό πεδίο.

Καθόσον τό ἠλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται στό ἐσωτερικό ἑνός ἀγωγοῦ, ἕπεται ὅτι στήν περιοχή αὐτή τό δυναμικό εἶναι σταθερό. Εἰδικότερα *ἡ ἐπι-*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

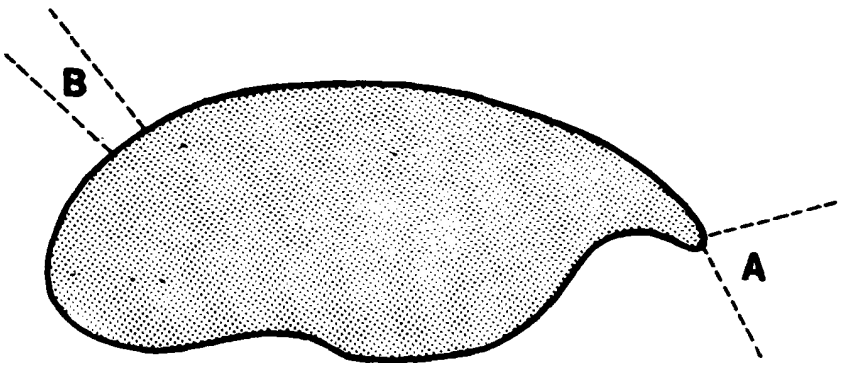
φάνεια ἑνός ἀγωγοῦ εἶναι μιά ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια. Μερικά ἀκόμη ἐνδιαφέροντα ἀποτελέσματα γιά τή συμπεριφορά τῶν ἀγωγῶν στήν ἠλεκτροστατική κατάσταση ἀπορρέουν ἀμέσως ἀπό τή βασική αὐτή ἰδιότητα.

1. *Στό χῶρο πού περικλείεται ἀπό τήν ἐξωτερική ἐπιφάνεια ἑνός ἀγωγοῦ, ἤ ἀπό μιά ἐπιφάνεια, κάθε σημεῖο τῆς ὁποίας βρίσκεται μέσα σέ ἀγώγιμο ὑλικό, τό ὁλικό φορτίο μηδενίζεται.* Ἡ βασική αὐτή ἰδιότητα εἶναι ἄμεσο ἀποτέλεσμα τοῦ νόμου τοῦ Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] 4\pi\rho. \qquad (2.28)$$

Ἄν σέ κάθε σημεῖο τοῦ ἀγωγοῦ τό ἠλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται ἡ πυκνότητα ρ καί τό φορτίο $q = \int_V \rho d^3r$ σέ ὁποιοδήποτε ὄγκο V στό ἐσωτερικό τοῦ ἀγωγοῦ μηδενίζονται. Ὁποιαδήποτε ἐπομένως ποσότητα φορτίου διοχετευθεῖ στόν ἀγωγό θά συγκεντρωθεῖ στήν ἐπιφάνειά του καί στήν ἠλεκτροστατική κατάσταση θά ἐμφανιστεῖ ὡς ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

2. *Ἔξω ἀπό ἕνα ἀγωγό καί κοντά στήν ἐπιφάνειά του, τό ἠλεκτρικό πεδίο εἶναι κάθετο πρός τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ.* Τοῦτο βέβαια προέρχεται ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια. Ποιοτικά, ἡ ἰδιότητα αὐτή ἀποδίδεται στό σχῆμα 3-1, ὅπου ἡ γραμμοσκιασμένη περιοχή ἀντιπροσωπεύει τό ἐσωτερικό ἑνός ἀγωγοῦ, ἐνῶ οἱ διακεκομένες γραμμές τή διεύθυνση τοῦ πεδίου γύρω ἀπό δύο σημεῖα διαφορετικῆς καμπυλότητας τῆς ἐπιφανείας. Οἱ δύο κῶνοι δυναμικῶν γραμμῶν πού ἔχουν σχεδιαστεῖ στά σημεῖα A καί B ἀποκαλύπτουν ἀκόμη μιά σημαντική συμπεριφορά τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου γύρω



ΣΧΗΜΑ 3-1 Φορά τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου κοντά στήν ἐπιφάνεια ἑνός ἀγωγοῦ σέ δύο περιοχές μέ διάφορη καμπυλότητα.

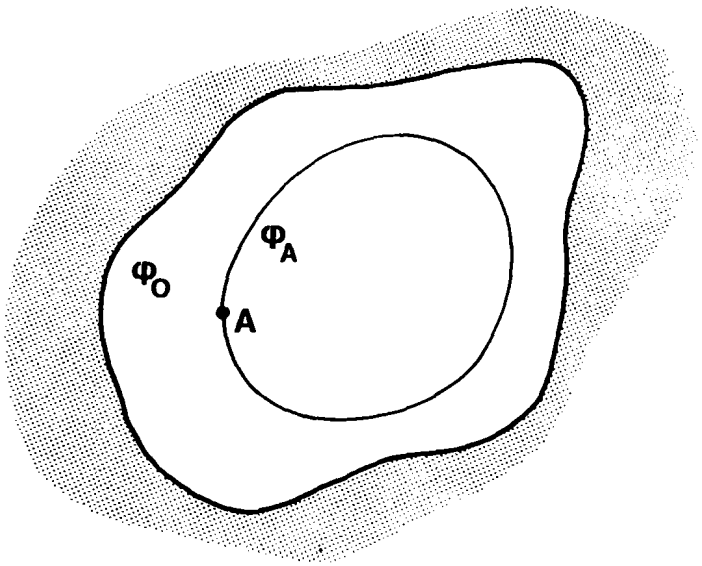
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἀπό ἕνα ἀγωγό. Λόγω τῆς μεγάλης κυρτότητας τῆς ἐπιφανείας στό σημεῖο Α, οἱ δυναμικές γραμμές ἐμφανίζουν στήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ μεγάλη ἀπόκλιση. Τό ἀντίθετο συμβαίνει στό σημεῖο Β ὅπου ἡ μικρή κυρτότητα τῆς ἐπιφανείας προσδιορίζει σχεδόν παράλληλες δυναμικές γραμμές. Τώρα, σέ ἀρκετά μεγάλη ἀπόσταση, ὁ ἀγωγός ἐμφανίζεται ὡς σημειακό φορτίο μέ ἀκτινική διεύθυνση τοῦ πεδίου καί ἰσοτροπική ἔνταση E_0. Ἀπό τήν ἐξ. (2.53) εἶναι φανερό ὅτι γιά νά καταλήξουν ἀσυμπτωτικά στήν ἴδια ἔνταση E_0 οἱ δύο κῶνοι δυναμικῶν γραμμῶν πού ἀρχίζουν ἀπό τά σημεῖα Α καί Β μέ ἀντίστοιχες ἐντάσεις E_A καί E_B θά πρέπει νά ἰσχύει ἡ σχέση

$$E_A > E_B \tag{3.1}$$

Ἄν καί τά ἐπιχειρήματα πού ὁδηγοῦν στήν τελευταία σχέση εἶναι μόνο ποιοτικά ἐπιτρέπουν τήν ἐξαγωγή τοῦ γενικοῦ συμπεράσματος ὅτι στήν περιοχή μεγάλης καμπυλότητας τῆς ἐπιφανείας ἀγωγοῦ περιμένουμε ἔξαρση τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου. Ἡ ἰδιότητα αὐτή λαμβάνεται σοβαρά ὑπόψη κατά τήν κατασκευή ἠλεκτροστατικῶν διατάξεων.

3. *Σέ μιά κοιλότητα ἀγωγοῦ πού δέν ὑπάρχει περίσσεια ἠλεκτρικοῦ φορτίου, τό ἠλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται.* Ἄν ἔξω ἀπό τόν ἀγωγό ὑπάρχει κάποιο ἠλεκτρικό πεδίο, ἡ κατανομή φορτίου πού δημιουργεῖται στήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ ἐκμηδενίζει τό πεδίο τόσο στό ἐσωτερικό τοῦ



ΣΧΗΜΑ 3-2 Μηδενισμός τοῦ ηλεκτρικοῦ πεδίου στό ἐσωτερικό κοιλότητας ἀγωγοῦ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἀγωγοῦ ὅσο καί στό ἐσωτερικό τῆς κοιλότητας. Μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τήν ἰδιότητα αὐτή μέ τή βοήθεια τοῦ σχήματος 3-2, ὅπου ἡ γραμμοσκιασμένη περιοχή ἀντιπροσωπεύει τόν ἀγωγό, ἐνῶ φ_0 εἶναι τό δυναμικό τῆς ἐσωτερικῆς (ἰσοδυναμικῆς) του ἐπιφανείας. Ἔστω ὅτι κάποιο σημεῖο Α στό ἐσωτερικό τῆς κοιλότητας βρίσκεται σέ διάφορο δυναμικό φ_A. Ἄν $\varphi_A \neq \varphi_0$, τότε ὑπάρχει μιά ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια μέ δυναμικό φ_A πού δέν τέμνει τήν ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια φ_0 καί ἑπομένως βρίσκεται ὁλόκληρη στό ἐσωτερικό τῆς κοιλότητας. Μεταξύ τῶν δύο ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν τό ἡλεκτρικό πεδίο ἔχει μιά συγκεκριμένη διεύθυνση καί ἑπομένως ἡ ροή $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{da}$ κάποια μή μηδενική τιμή. Ἀπό τό νόμο τοῦ Gauss τοῦτο συνεπάγεται τήν ὕπαρξη ἑνός φορτίου q στό ἐσωτερικό τῆς ἰσοδυναμικῆς ἐπιφανείας φ_A, πού εἶναι ἀντίθετο πρός τήν ἀρχική ὑπόθεση.

Στήν ἰδιότητα πού μόλις ἐξετάσαμε στηρίζεται ἡ ἀρχή τῆς **ἠλεκτρικῆς θωρακίσεως**, δηλαδή στή δημιουργία χώρων μέσα στό ἐργαστήριο πού εἶναι ἀπαλλαγμένοι ἀπό ἠλεκτρικό πεδίο.

4. *Ἡ πυκνότητα φορτίου στήν ἐπιφάνεια ἑνός ἀγωγοῦ εἶναι ἀνάλογη πρός τήν ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου κοντά στήν ἐπιφάνεια.* Ἡ ἰδιότητα αὐτή μπορεῖ εὔκολα νά ἀποδειχτεῖ ἀπό τό νόμο τοῦ Gauss πού ταυτόχρονα παρέχει τό συντελεστή ἀναλογίας. Παρατηρώντας σέ μεγένθυση τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ, ὅπως στό σχῆμα 3-3, μποροῦμε νά θεωρήσουμε ἕνα μικρό κύλινδρο μέ ἄξονα κάθετο πρός τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ καί διατομή dA. Ὅπως ἔχουμε ἤδη δεῖ, τό ἠλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται στό ἐσωτερικό τοῦ ἀγωγοῦ ἐνῶ κοντά στήν (ἰσοδυναμική) ἐπιφάνεια εἶναι κάθετο πρός αὐτή. Ἡ ὁλική ἑπομένως ροή τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι EdA ἐνῶ τό φορτίο πού περιέχεται στόν κύλινδο σdA, ὅπου σ ἡ ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου στόν ἀγωγό. Ἀπό τό νόμο τοῦ Gauss

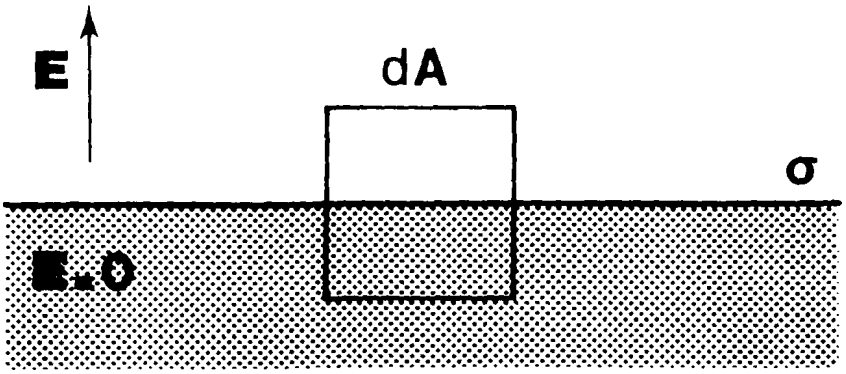
$$EdA = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 4\pi\sigma dA$$

ἤ

$$\sigma = \left[4\pi\varepsilon_0\right] \frac{1}{4\pi} E \qquad (3.2)$$

πού ἐκφράζει τήν ἀναλογία τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἔξω ἀπό τόν ἀγωγό στήν ἄμεση γειτονία τῆς ἐπιφανειακῆς πυκνότητας σ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 3-3 Ἐπιφάνεια Gauss γιά τόν προσδιορισμό τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου κοντά στήν ἐπιφάνεια ἀγωγοῦ.

Οἱ ἰδιότητες τῶν ἀγωγῶν πού μελετήσαμε ἐξετάζονται στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 3-1. ΑΓΩΓΟΙ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

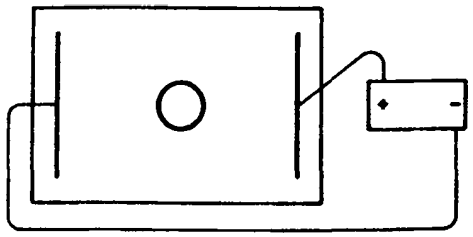
Προτοῦ σχεδιάσετε τό κυκλικό ἠλεκτρόδιο στό σχῆμα (α) χαρτογραφίστε τό ἠλεκτρικό πεδίο πού δημιουργεῖ ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά δύο εὐθύγραμμα ἠλεκτρόδια.

Σχεδιάστε τό κυκλικό ἠλεκτρόδιο καί προσδιορίστε τίς νέες ἰσοδυναμικές καί δυναμικές γραμμές. Χρησιμοποιώντας τίς ἰδιότητες τῶν ἀγωγῶν σχολιάστε τήν παραμόρφωση τοῦ πεδίου ἀπό τήν ὕπαρξη τοῦ κυκλικοῦ ἀγωγοῦ. Ποιά ἡ τιμή τοῦ δυναμικοῦ στήν ἐπιφάνεια τοῦ κυκλικοῦ ἀγωγοῦ καί ποιά ἡ τιμή του στήν ἐσωτερική ἐπιφάνεια;

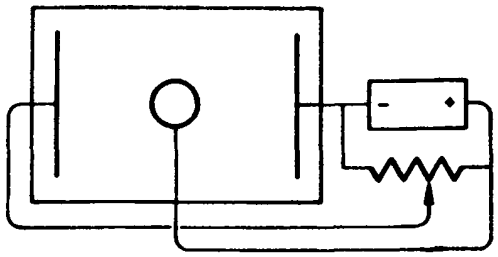
Χρησιμοποιεῖστε ἕνα ροοστάτη μέ ὁλική ἀντίσταση περίπου 5 kΩ γιά νά καθορίσετε τήν τιμή τοῦ δυναμικοῦ στόν κυκλικό ἀγωγό τοῦ σχήματος 3-4 (β), σέ σχέση μέ τήν τιμή δυναμικοῦ στά δύο εὐθύγραμμα ἠλεκτρόδια. Χαρτογραφίστε τό ἠλεκτρικό πεδίο καί συγκρίνετε τά ἀποτελέσματά σας μέ τά ἀποτελέσματα τῆς προηγούμενης διατάξεως.

Προτοῦ σχεδιάσετε τά δύο εὐθύγραμμα ἠλεκτρόδια μέ τήν ἔνδειξη «Ε» χαρτογραφίστε τό ἠλεκτρικό πεδίο μεταξύ τοῦ εὐθύγραμμου καί τοῦ τριγωνικοῦ ἠλεκτροδίου στό σχῆμα 3-4(γ). Προσθέστε τά δύο ἠλεκτρόδια «Ε» καί ἐπαναλάβετε τήν ἐργασία. Σχολιάστε τά ἀποτελέσματα χρησιμοποιώντας τίς ἰδιότητες τῶν ἀγωγῶν.

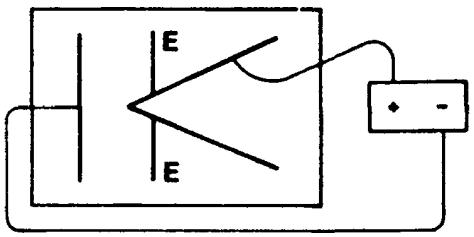
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



(α)



(β)



(γ)

ΣΧΗΜΑ 3-4 Διατάξεις ἠλεκτροδίων γιά τή μελέτη τῆς συμπεριφορᾶς ἀγωγῶν σέ ἠλεκτρικό πεδίο.

3-2 Τό Ἠλεκτροστατικό Πεδίο Ἐλεύθερων Φορτίων. Οἱ Ἐξισώσεις Poisson καί Laplace. Συνοριακές Συνθῆκες

Στήν παράγραφο 2-6 εἴδαμε ὅτι ἄν ἡ κατανομή φορτίου $\rho(\mathbf{r})$ εἶναι γνωστή τότε τό πεδίο $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ἤ τό δυναμικό $\varphi(\mathbf{r})$ μποροῦν νά ὑπολογιστοῦν, τουλάχιστον κατ' ἀρχήν, μέ μιά ὁλοκλήρωση. Στήν πράξη τό ἠλεκτροστατικό πρόβλημα δέν εἶναι τόσο ἁπλό. Ἡ διάταξη πού θεωροῦμε μπορεῖ, πέρα ἀπό μιά συγκεκριμένη κατανομή φορτίου, νά περιέχει ἀγωγούς σέ ὁρισμένο σταθερό δυναμικό ἤ μέ καθορισμένο ὁλικό φορτίο. Ἕνας ἀπό τούς ἀγνώστους στήν περίπτωση αὐτή εἶναι ἡ ἐπιφανειακή κατανομή φορτίου στούς ἀγωγούς, πού μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μόνο μετά τήν ἐπίλυση τοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅλου προβλήματος. Στήν περίπτωση ἑπομένως αὐτή τά ὁλοκληρώματα τῶν ἐξ. (2.18) καί (2.49) δέν μποροῦν νά ὑπολογιστοῦν.

Ἡ μαθηματική διαδικασία πού ἐπιτρέπει τόν ὑπολογισμό τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου στήν περίπτωση ὅπου ἡ κατανομή φορτίου δέν εἶναι ἐξαρχῆς γνωστή συνίσταται στήν ἐπίλυση μιᾶς διαφορικῆς ἐξισώσεως πού ἱκανοποιεῖ τό ἠλεκτρικό πεδίο μέ ταυτόχρονη ἱκανοποίηση τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος. Ἤδη στήν παράγραφο 2-3 εἴδαμε ὅτι τό ἠλεκτρικό πεδίο ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] 4\pi\rho. \tag{3.3}$$

Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τήν ἐξ. (2.41) πού συνδέει τό ἠλεκτρικό πεδίο μέ τό δυναμικό

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \tag{2.41}$$

μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἀντίστοιχη ἐξίσωση, γνωστή ὡς **ἐξίσωση Poisson,** πού ἱκανοποιεῖ ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ

$$\nabla^2\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] 4\pi\rho. \tag{3.4}$$

Εἰδικότερα, στόν ἐλεύθερο χῶρο ὅπου ἡ κατανομή φορτίου μηδενίζεται, ἡ ἐξίσωση Poisson παίρνει τή μορφή

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{3.5}$$

γνωστή ὡς **ἐξίσωση Laplace.** Τό πρόβλημα ἑπομένως ἀνάγεται στήν εὕρεση τῆς συναρτήσεως $\varphi(\mathbf{r})$ πού ἱκανοποιεῖ τήν ἐξ. (3.4) ἤ (3.5) καί ταυτόχρονα τίς συνοριακές συνθῆκες πού ἔχουν δοθεῖ γιά τήν ἐπιφάνεια τῶν ἀγωγῶν τοῦ συστήματος.

Οἱ συνοριακές συνθῆκες τοῦ προβλήματος μπορεῖ νά καθορίζουν τό δυναμικό στήν ἐπιφάνεια κάθε ἀγωγοῦ. Ἄν οἱ συνθῆκες αὐτές συμπληρωθοῦν ἀπό τήν ἀπαίτηση μηδενισμοῦ τοῦ δυναμικοῦ σέ μιά ἐπιφάνεια πού περιβάλλει τό σύστημα σέ ἄπειρη ἀπόσταση, τότε ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ ἔχει καθοριστεῖ στό σύνολο τῶν ἐπιφανειῶν πού περιβάλλουν τόν κενό χῶρο. Θά ὀνομάσουμε τίς συνθῆκες τοῦ τύπου αὐτοῦ **συνθῆκες Dirichlet.** Ἐναλλακτικά οἱ συνοριακές συνθῆκες μπορεῖ νά καθορίζουν τό ἠλεκτρικό πεδίο στήν ἐπιφάνεια κάθε ἀγωγοῦ. Ἀπό τίς ἐξ. (2.41) καί (3.2)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 4\pi\sigma. \tag{3.6}$$

Οἱ συνθῆκες αὐτές, πού θά ὀνομάσουμε **συνθῆκες Neumann,** ἰσοδυναμοῦν μέ τόν προσδιορισμό τῆς κλίσης τοῦ δυναμικοῦ ἤ τῆς πυκνότητας φορτίου στήν ἐπιφάνεια κάθε ἀγωγοῦ. Τέλος οἱ συνοριακές συνθῆκες μπορεῖ νά καθορίζουν τό ὁλικό φορτίο σέ κάθε ἀγωγό, πού ἀπό τήν προηγούμενη σχέση δίνεται ὡς

$$Q = \int_S \sigma\, da = -\left[4\pi\varepsilon_0\right] \frac{1}{4\pi} \int_S \nabla\varphi \cdot d\mathbf{a} \tag{3.7}$$

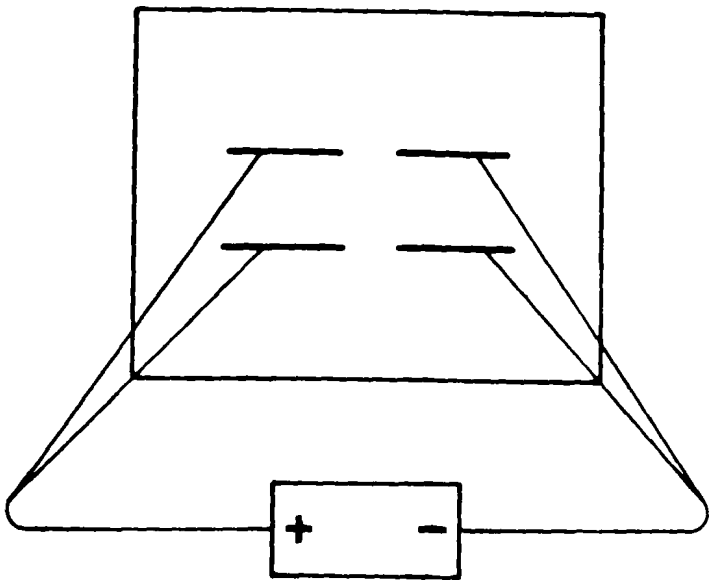
ὅπου S ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ.

Μπορεῖ τώρα νά διατυπωθεῖ ἡ ἐξαιρετικά ἐνδιαφέρουσα ἐρώτηση: *Ποιές εἶναι οἱ ἀπαραίτητες συνθῆκες ὥστε ἡ ἐξίσωση Poisson νά ὁδηγεῖ σέ μιά μοναδική λύση γιά τό δυναμικό;* Τό ἀποτέλεσμα τῆς μαθηματικῆς ἀνάλυσεως, πού παρουσιάζεται σέ πλέον προχωρημένα συγγράμματα καί δέν θά ἀναπτυχθεῖ στά πλαίσια τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ, συμπίπτει μέ αὐτό πού περιμένουμε ἀπό φυσική διαίσθηση. Γιά κάθε ἀγωγό τοῦ συστήματος, πέρα ἀπό τά γεωμετρικά του χαρακτηριστικά, οἱ συνοριακές συνθῆκες πρέπει νά καθορίζουν *ἕνα* ἀπό τά *τρία* μεγέθη: τό δυναμικό τοῦ ἀγωγοῦ, τό ὁλικό του φορτίο, ἤ τό ἠλεκτρικό πεδίο σέ κάθε σημεῖο τῆς ἐπιφανείας του. (Ὁ ἐξαρχῆς προσδιορισμός δύο ἤ καί τῶν τριῶν μεγεθῶν γιά ἕνα ἀγωγό τοῦ συστήματος μπορεῖ νά εἶναι εἴτε περιττός εἴτε ἀσυμβίβαστος). Οἱ συνοριακές αὐτές συνθῆκες εἶναι ἱκανές νά ὁδηγήσουν μέ τήν ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως Poisson σέ μιά μονοσήμαντη συνάρτηση δυναμικοῦ, ἐνῶ τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα κάθε ἀγωγοῦ μποροῦν νά βρεθοῦν διαμέσου τῶν ἐξ. (3.6) καί (3.7).

Γενικές μέθοδοι ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως Poisson ἤ Laplace δίνονται στά περισσότερα συγγράμματα Μαθηματικῆς Φυσικῆς. Σέ πολλές περιπτώσεις, ὅπου τό σύστημα παρουσιάζει συμμετρία ὡς πρός ἕνα σημεῖο ἤ ἄξονα, οἱ ἐξισώσεις μποροῦν νά ἐπιλυθοῦν σέ λιγώτερες ἀπό τρεῖς διαστάσεις. Στή σύντομη ἀνασκόπιση τῆς ἠλεκτροστατικῆς πού διατρέχουμε στό κεφάλαιο αὐτό δέν θά ἐξετάσουμε τίς μαθηματικές αὐτές μεθόδους.

Ἡ ποιοτική συμπεριφορά τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μπορεῖ συχνά νά προσδιοριστεῖ πειραματικά μέ τή μέθοδο πού ἀναπτύξαμε στά μέχρι τώρα πειράματα. Μιά ἐφαρμογή τῆς μεθόδου αὐτῆς γιά τήν ἐπίλυση ἑνός σημαντικοῦ προβλήματος ὁριακῶν συνθηκῶν θά μελετήσουμε στή συνέχεια.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

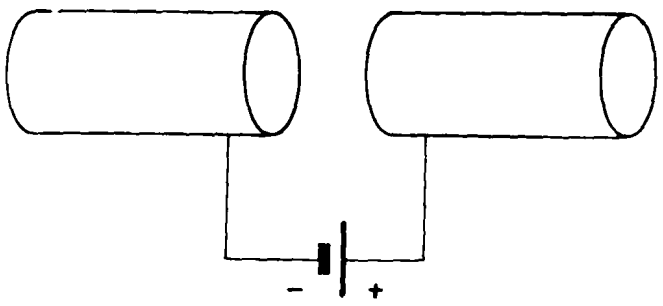


ΣΧΗΜΑ 3-5 Προσδιορισμός τῶν δυναμικῶν γραμμῶν σέ διάταξη ἠλεκτροστατικοῦ φακοῦ.

ΠΕΙΡΑΜΑ 3-2. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟΥ ΦΑΚΟΥ

Συνδέστε ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ ἤ ἕνα ἠλεκτρικό στοιχεῖο 6 V μέ τά τέσσερα εὐθύγραμμα ἠλεκτρόδια πού περιέχονται στή διάταξη τοῦ σχήματος 3-5. Προσδιορίστε τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες καί χαράξτε τίς δυναμικές γραμμές γύρω ἀπό τόν κεντρικό ἄξονα τῆς διατάξεως.

— Ἡ διάταξη τῶν ἠλεκτροδίων τοῦ σχήματος 3-5 μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς τομή τοῦ **ἠλεκτροστατικοῦ φακοῦ** πού δίνεται στό σχῆμα 3-6. Παρόμοιες διατάξεις χρησιμοποιοῦνται σέ ἠλεκτρονικά μικροσκόπια καί ἐπιταχυντές φορτισμένων σωματίων. Χρησιμοποιώντας τά ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος περιγράψτε πῶς ἡ παράλληλη δέσμη ἠλεκτρονίων, πού στό σχῆμα 3-6 διέρχεται ἀπό τά δύο κυλινδρικά ἠλεκτρόδια, ἐστιάζεται στό κέντρο τῆς διατάξεως



ΣΧΗΜΑ 3-6 Διάταξη ηλεκτροστατικου φακού με δυο κυλινδρικά ήλεκτρόδια.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μία ἐναλλακτική μέθοδο, πού μᾶς ἐπιτρέπει νά βροῦμε λύσεις τῆς ἐξισώσεως Poisson χωρίς νά ἐπιλύσουμε τήν διαφορική ἐξίσωση, θά παρουσιάσουμε στήν ἐπόμενη παράγραφο. Ἄν καί μπορεῖ νά ἐφαρμοστεῖ σέ ἕνα σχετικά περιορισμένο ἀριθμό ἠλεκτροστατικῶν διατάξεων, ἐμφανίζει ἀρκετό ἐνδιαφέρον καί χρησιμότητα.

3-3 Ἠλεκτροστατικά Εἴδωλα

Τό δυναμικό πού δημιουργεῖ μιά ἠλεκτροστατική διάταξη σταθερῶν φορτίων καί ἀγωγῶν τοποθετημένων στό κενό χῶρο μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\varphi(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}'$$

$$+ \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \int_{S_c} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^2\mathbf{r}' = \varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}) \qquad (3.8)$$

ὅπου $\rho(\mathbf{r})$ εἶναι ἡ σταθερή πυκνότητα φορτίου στόν κενό χῶρο V καί $\sigma(\mathbf{r})$ ἡ ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου στήν ἐπιφάνεια S_c κάθε ἀγωγοῦ. Ὅπως ἤδη τονίστηκε, ἄν οἱ συνοριακές συνθῆκες τοῦ προβλήματος δέν εἶναι συνθῆκες Neumann τότε ἡ συνάρτηση $\sigma(\mathbf{r})$ ἀποτελεῖ ἕνα ἀπό τούς ἀγνώστους πού μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μόνο μετά τήν ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως Poisson γιά τό δυναμικό. Ἔτσι τό δεύτερο ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (3.8) δέν εἶναι δυνατόν νά ὑπολογιστεῖ. Ὑπάρχουν ὅμως περιπτώσεις ὅπου οἱ ἐπιφάνειες S_c τῶν ἀγωγῶν εἶναι ἀρκετά ἁπλές ὥστε νά τίς ἀναγνωρίζουμε ὡς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες κάποιας διατάξεως σταθερῶν φορτίων. Εἰδικότερα, ἄν ἀπομακρύνουμε ὅλους τούς ἀγωγούς ἀπό τό σύστημα εἶναι δυνατόν νά γνωρίζουμε μιά κατανομή σταθερῶν φορτίων $\rho_i(\mathbf{r})$ στό χῶρο πού προηγουμένως καταλάμβαναν οἱ ἀγωγοί, τέτοια ὥστε, οἱ κατανομές $\rho(\mathbf{r})$ καί $\rho_i(\mathbf{r})$ νά δημιουργοῦν ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες ὅμοιες μέ τίς ἐπιφάνειες τῶν ἀγωγῶν τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος. Ἄν ἐπιπλέον εἶναι δυνατόν νά ἐπιλέξουμε τό ἀπόλυτο μέγεθος τῆς ὑποθετικῆς κατανομῆς $\rho_i(\mathbf{r})$ ἔτσι ὥστε, ὄχι μόνο οἱ ἐπιφάνειες τῶν ἀγωγῶν νά εἶναι ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες, ἀλλά καί νά ἐμφανίζουν τίς σωστές συνοριακές συνθῆκες, τό πρόβλημα ἔχει οὐσιαστικά λυθεῖ. Ἀπό τή μοναδικότητα τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ, τό δυναμικό πού δημιουργεῖ ἡ κατανομή $\rho(\mathbf{r})$ καί ἡ ὑποθετική κατανομή $\rho_i(\mathbf{r})$ στό χῶρο V, ταυτίζεται μέ τή λύση τῆς ἐξισώσεως Poisson πού ἱκανοποιεῖ τίς συνοριακές συνθῆκες στήν ἐπιφάνεια κάθε ἀγωγοῦ τῆς διατάξεως. Ἀναλυτικά, στό χῶρο V, τό δυναμικό $\varphi_2(\mathbf{r})$ δίνεται ἀπό τή σχέση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

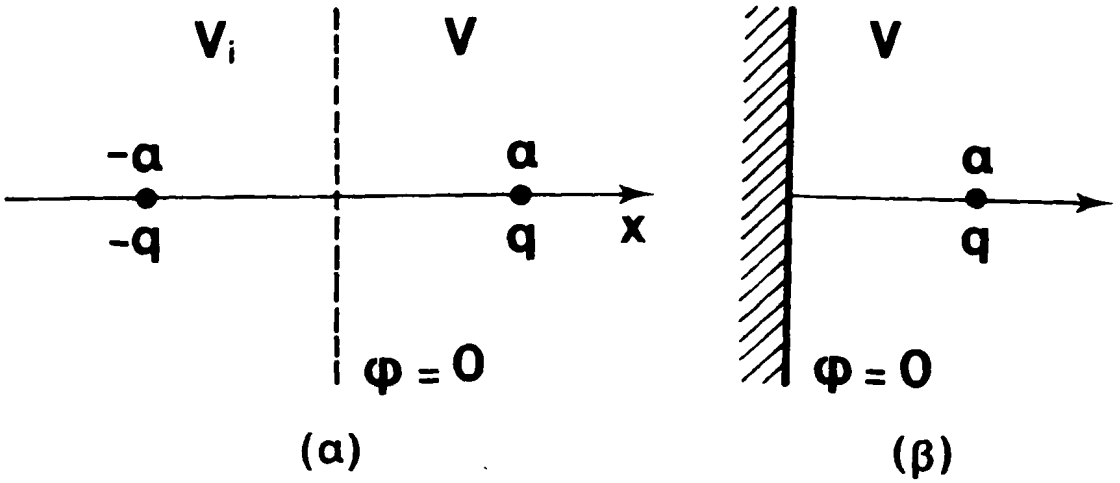
$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \int_{V_i} \frac{\rho_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r' \qquad (3.9)$$

ὅπου ἡ ὁλοκλήρωση ἐπεκτείνεται στό χῶρο V_i πού καταλαμβάνουν οἱ ἀγωγοί τοῦ συστήματος.

Ἕνα ἁπλό παράδειγμα τῆς μεθόδου πού μόλις περιγράψαμε δίνεται στό σχῆμα 3-7 πού ἀναλύει τή διάταξη ἑνός σημειακοῦ φορτίου q σέ ἀπόσταση α ἀπό ἕνα γειωμένο ἐπίπεδο ἀγωγό μέ ἄπειρες διαστάσεις. Γιά σαφήνεια, τό φορτίο q ἔχει τοποθετηθεῖ στόν ἄξονα x καί σέ ἀπόσταση α ἀπό τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων, ἐνῶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ βρίσκεται στό ἐπίπεδο yz. Δέν χρειάζεται μεγάλη πεῖρα μέ ἠλεκτροστατικά προβλήματα ὥστε νά γνωρίζει κανείς ὅτι μιά ἐπίπεδη ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια μέ μηδενικό δυναμικό, ὅπως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ στό σχῆμα 3-7(α), μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ ἀπό τό ἀρχικό φορτίο q καί ἕνα ὑποθετικό φορτίο −q πάνω στόν ἄξονα x καί στή θέση x=−α. Τό δυναμικό στήν περιοχή V μπορεῖ ἑπομένως νά γραφεῖ ἀμέσως ὡς

$$\varphi(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \left(\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right) . \qquad (3.10)$$

Χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (3.6) μποροῦμε τώρα ἀπό τή λύση τοῦ προβλήματος νά ὑπολογίσουμε τήν πυκνότητα φορτίου στήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ ὡς



ΣΧΗΜΑ 3-7 (α) Σημειακό φορτίο q σέ ἀπόσταση α ἀπό ἕνα γειωμένο ἀγωγό μέ ἄπειρες διαστάσεις. (β) Ἀντικατάσταση τοῦ ἀγωγοῦ μέ τό ὑποθετικό φορτίο −q.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sigma = -\left[4\pi\varepsilon_0\right]\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x\,0} = -\frac{q\,a}{2\pi\left(a^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,. \qquad (3.11)$$

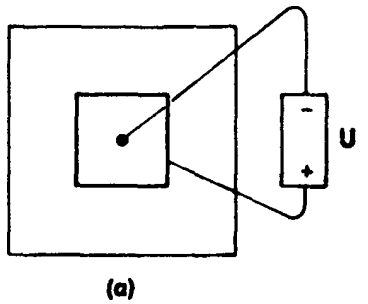
Ἡ λίγο πιό περίπλοκη διάταξη πού θά ἐξετάσουμε στό ἑπόμενο πείραμα βασίζεται στήν ἴδια ἀρχή.

ΠΕΙΡΑΜΑ 3-3. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΑ ΕΙΔΩΛΑ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑΣ ΓΕΙΩΜΕΝΟΥ ΑΓΩΓΟΥ

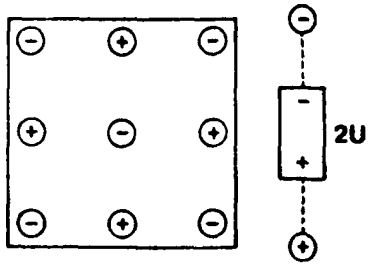
Προσδιορίστε τίς ἰσοδυναμικές καί δυναμικές γραμμές στή διάταξη ἠλεκτροδίων τοῦ σχήματος 3-8(α). Ἡ διάταξη ἀπεικονίζει ἕνα σημειακό ἀρνητικό φορτίο στό κέντρο μιᾶς κοιλότητας γειωμένου ἀγωγοῦ, ἡ ὁποία ἔχει τετράγωνη διατομή καί ἄπειρη ἔκταση ὡς πρός τή διάσταση πού εἶναι κάθετη πρός τό σχῆμα. Χρησιμοποιεῖστε διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν ἠλεκτροδίων $U \simeq 3$ V.

– Προσδιορίστε τίς ἰσοδυναμικές καί δυναμικές γραμμές στή διάταξη τῶν σημειακῶν φορτίων τοῦ σχήματος 3-8(β) καί στό χῶρο πού καταλάμβανε προηγουμένως ἡ κοιλότητα. Τά σημειακά φορτία πού συμβολίζονται ὡς ⊕ συνδέονται μέ τόν θετικό καί τά φορτία πού συμβολίζονται μέ ⊖ μέ τόν ἀρνητικό ἀκροδέκτη τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ ἤ τοῦ ἠλεκτρικοῦ στοιχείου. Χρησιμοποιεῖστε διαφορά δυναμικοῦ $U \simeq 6$ V.

– Ἑρμηνεῦστε τά ἀποτελέσματά σας διαμέσου τῆς μεθόδου τῶν ἠλεκτροστατικῶν εἰδώλων. Γιατί χρειάστηκε νά χρησιμοποιήσετε διπλάσια διαφορά δυναμικοῦ στή δεύτερη διάταξη ἠλεκτροδίων;



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 3-8 (α) Σημειακό φορτίο στό ἐσωτερικό κοιλότητας γειωμένου ἀγωγοῦ.
(β) Ἰσοδύναμη διάταξη ἠλεκτροστατικῶν εἰδώλων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Διατάξεις πού περιέχουν σφαιρικές ἐπιφάνειες ἀγωγῶν μποροῦν νά ἀναλυθοῦν κατά παρόμοιο τρόπο. Κατ' ἀρχήν γνωρίζουμε ὅτι ἕνα σημειακό φορτίο, ἤ ὁποιαδήποτε σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου, δημιουργεῖ σφαιρικές ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες. Μιά σφαιρική ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια μέ δυναμικό ἴσο μέ τό μηδέν μπορεῖ ἀκόμη νά δημιουργηθεῖ ἀπό δύο ἑτερώνυμα φορτία q_1 καί $-q_2$ $(q_1 > q_2 > 0)$. Γιά νά δείξουμε τήν ἰδιότητα αὐτή καί ταυτόχρονα νά προσδιορίσουμε τίς διαστάσεις τῆς ἰσοδυναμικῆς αὐτῆς ἐπιφάνειας θά θεωρήσουμε ἕνα σημεῖο της πού ἀπέχει ἀπό τά δύο φορτία ἀποστάσεις r_1 καί r_2. Τό δυναμικό στό σημεῖο αὐτό δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$\varphi = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2}\right) = 0 \qquad (3.12)$$

πού ὁδηγεῖ στή σχέση

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{q_1}{q_2} \ . \qquad (3.13)$$

Ἡ ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια μέ μηδενικό δυναμικό πού δημιουργοῦν τά δύο φορτία εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων πού ἀπέχουν ἀπό τίς θέσεις τῶν φορτίων ἀποστάσεις μέ σταθερό λόγο q_1/q_2. Ὁ γεωμετρικός αὐτός τόπος, γνωστός στή γεωμετρία ὡς *σφαῖρα τοῦ Ἀπολλωνίου*, εἶναι μιά σφαῖρα μέ ἀκτίνα

$$R = \frac{q_1 q_2}{q_1^2 - q_2^2}\, a \qquad (3.14\alpha)$$

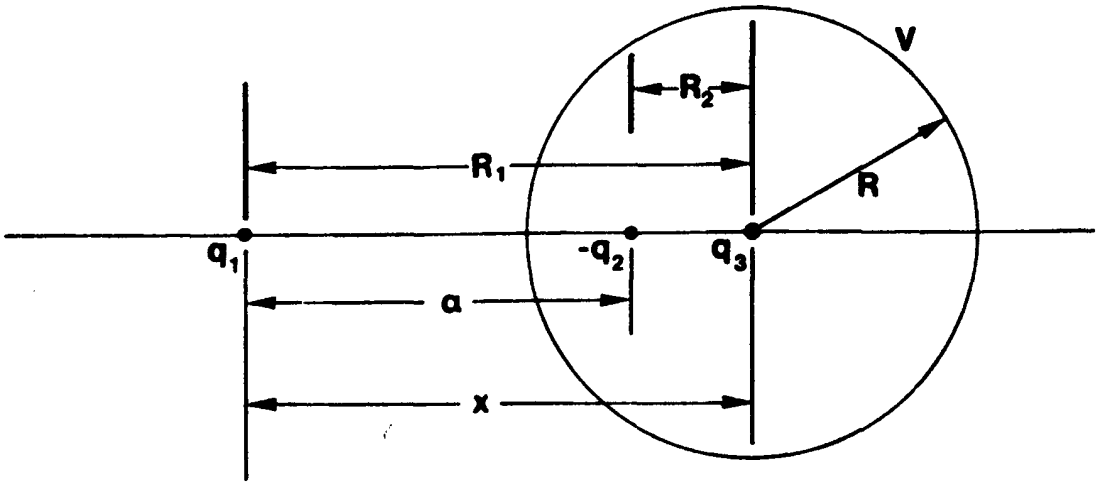
ὅπου a ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο φορτίων. Τό κέντρο τῆς σφαίρας βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία πού ἑνώνει τά δύο φορτία καί σέ ἀπόσταση R_1 ἀπό τό φορτίο q_1

$$R_1 = \frac{q_1^2}{q_1^2 - q_2^2}\, a \ . \qquad (3.14\beta)$$

Ἡ γεωμετρία τοῦ προβλήματος δίνεται στό σχῆμα 3-9.

Ὁ συνδιασμός τῶν δύο παραπάνω ἁπλῶν κατανομῶν μᾶς ἐπιτρέπει τώρα νά δημιουργήσουμε σφαιρικές ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες μέ ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ δυναμικοῦ καί ἐπομένως νά ἐπιλύσουμε προβλήματα ἠλεκ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 3-9 Σφαιρική ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια τριῶν φορτίων.

τροστατικῶν διατάξεων πού περιέχουν σφαιρικούς ἀγωγούς σέ σταθερό δυναμικό. Ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ π.χ. πού δημιουργεῖται ἀπό ἕνα φορτίο q_1 σέ ἀπόσταση R_1 ἀπό τό κέντρο ἑνός σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ μέ ἀκτίνα R καί δυναμικό V, ἀποδίδεται ἀπό μιά ἰσοδύναμη διάταξη τριῶν σημειακῶν φορτίων: τό ἀρχικό φορτίο q_1 καί δύο ὑποθετικά φορτία q_2, q_3, ὅπου τό φορτίο q_2 ἔχει τιμή

$$q_2 = -\frac{R}{R_1} q_1 \qquad (3.15\alpha)$$

καί βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία πού ἑνώνει τό κέντρο τοῦ σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ μέ τό φορτίο q_1, σέ ἀπόσταση

$$R_2 = \frac{R^2}{R_1} \qquad (3.15\beta)$$

ἀπό τό κέντρο τοῦ ἀγωγοῦ. Τό φορτίο q_3 βρίσκεται στό κέντρο τοῦ ἀγωγοῦ καί ἔχει τιμή

$$q_3 = \left[4\pi\varepsilon_0\right] RV \ . \qquad (3.16)$$

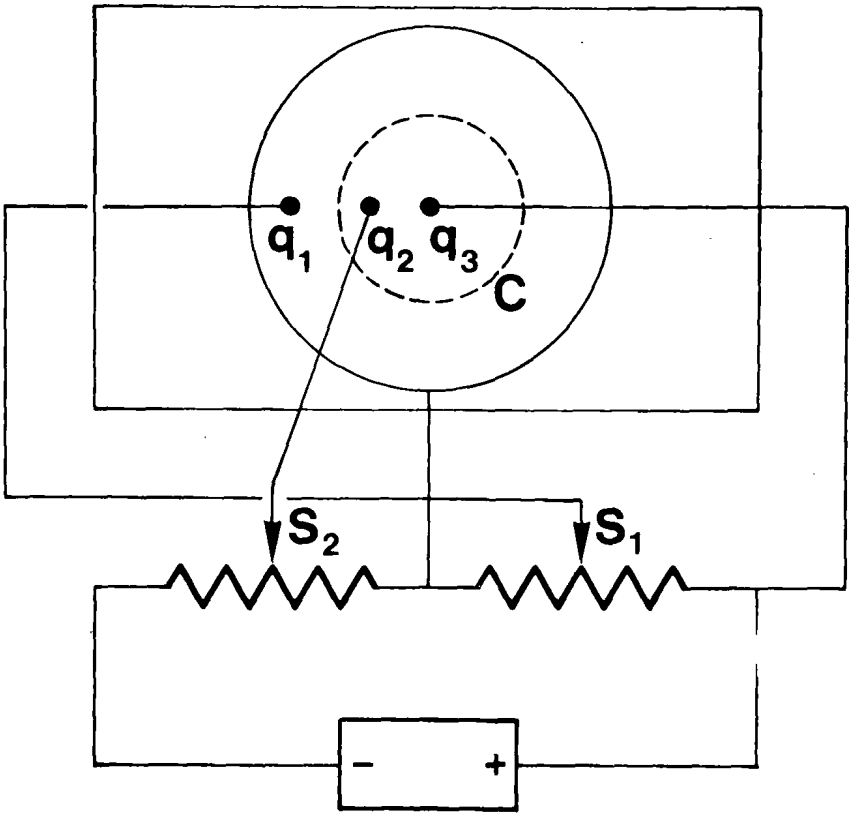
Οἱ ἐξ. (3.15) μποροῦν εὔκολα νά ἐξαχθοῦν ἀπό τίς ἐξ. (3.14) καί τή γεωμετρία τοῦ σχήματος 3-9. Ἡ ἐξ. (3.16) προέρχεται ἀπό τήν ἀπαίτηση διατηρήσεως δυναμικοῦ V στήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ 3-4. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΑ ΕΙΔΩΛΑ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΑΓΩΓΟΥ

Στή διάταξη τοῦ σχήματος 3-10 συνδέστε ἀρχικά τό σημειακό ἠλεκτρόδιο q_3 καί τό κυκλικό ἠλεκτρόδιο πού ἀντιπροσωπεύει τό δυναμικό σέ ἄπειρη ἀπόσταση $V_0 = 0$. Προσδιορίστε τό δυναμικό V ἑνός ἰσοδυναμικοῦ κύκλου C μέ ἀκτίνα R = 4.25 cm. Τοποθετεῖστε τά δύο ἠλεκτρόδια q_1 καί q_2 σέ μιά ἀκτινική διεύθυνση καί σέ κατάλληλες ἀποστάσεις R_1 καί R_2 ἀπό τό κεντρικό ἠλεκτρόδιο ὥστε νά ἱκανοποιεῖται ἡ ἐξ. (3.15β). Προσδιορίστε τή θέση τῆς ἐπαφῆς S_2 ὥστε ὁ κύκλος C νά παραμείνει ἰσοδυναμική γραμμή μέ τό ἴδιο δυναμικό V.

- Χαρτογραφίστε τό ἠλεκτρικό πεδίο στό χῶρο ἔξω ἀπό τόν ἰσοδυναμικό κύκλο C. Ἀναλύστε καί σχολιάστε τά ἀποτελέσματά σας στά πλαίσια τῆς μεθόδου τῶν ἠλεκτροστατικῶν εἰδώλων. Ποιό ἠλεκτροστατικό πρόβλημα ἔχετε ἐπιλύσει;



ΣΧΗΜΑ 3-10 Διάταξη ἠλεκτροδίων τό Πείραμα 3-4.

Ἡ μέθοδος πού περιγράψαμε μέ τά δύο προηγούμενα παραδείγματα ἀναφέρεται παραδοσιακά ὡς **μέθοδος τῶν ἠλεκτροστατικῶν εἰδώλων.** Ἡ ὀνομασία αὐτή προέρχεται ἀπό τό γεγονός ὅτι σέ ὁρισμένες ἁπλές περιπτώσεις τό φανταστικό φορτίο πού, γιά τόν προσδιορισμό τοῦ ἠλεκτρικοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πεδίου μπορεῖ νά ἀντικαταστήσει τόν ἀγωγό, εἶναι τό κατοπτρικό εἴδωλο τοῦ πραγματικοῦ φορτίου ὡς πρός τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ. Παρόλη ὅμως τήν ἁπλότητα καί κομψότητα τῆς μεθόδου, ἡ ἐφαρμογή της στήν ἐπίλυση ρεαλιστικῶν προβλημάτων εἶναι ἁρκετά περιορισμένη.

3-4 Διηλεκτρικά Ὑλικά

Θά στρέψουμε τώρα τήν προσοχή μας στή δεύτερη κατηγορία ὑλικῶν, τούς μονωτές, καί τήν ἐπίδρασή τους στή διαμόρφωση τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου. Στά ὑλικά αὐτά θά ἀναφερθοῦμε καί μέ τόν ὅρο **διηλεκτρικά** ὅταν ἐξετάζουμε τή συμπεριφορά τους μέσα σέ ἕνα ἡλεκτρικό πεδίο. Ἕνα διηλεκτρικό σῶμα μπορεῖ νά συνεισφέρει στό ἡλεκτρικό πεδίο κατά δύο τρόπους. Ἀφενός μπορεῖ νά ἐμφανίζει περίσσεια ἤ ἔλλειμα ἡλεκτρονίων, νά συμβάλλει δηλαδή στή διαμόρφωση τοῦ πεδίου μέ μιά μακροσκοπική κατανομή φορτίου $\rho(\mathbf{r})$. Ἀφετέρου, καί ἡ ἰδιότητα αὐτή παρουσιάζει ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον, μπορεῖ νά δημιουργήσει ἡλεκτρικό πεδίο ἀκόμη καί ὅταν τό ὁλικό του φορτίο μηδενίζεται. Ἡ δυνατότητα αὐτή προέρχεται ἀπό τό γεγονός ὅτι τά στοιχειώδη συστήματα πού δημιουργοῦν τό ὑλικό (ἄτομα, μόρια ἤ μονάδες κρυσταλλικῆς δομῆς), ἄν καί ἀφόρτιστα, συγκροτοῦνται ἀπό στοιχειώδη σωμάτια πού φέρουν ἡλεκτρικό φορτίο. Ἤδη στόν Πίνακα 2-1 τῆς Παραγράφου 2-6 εἴδαμε ἕνα ἁπλό παράδειγμα συστήματος μέ ὁλικό φορτίο μηδέν πού δημιουργεῖ ἡλεκτρικό πεδίο: τό **ἡλεκτρικό δίπολο** πού χαρακτηρίσαμε μέ τό ἄνυσμα τῆς **διπολικῆς ροπῆς**

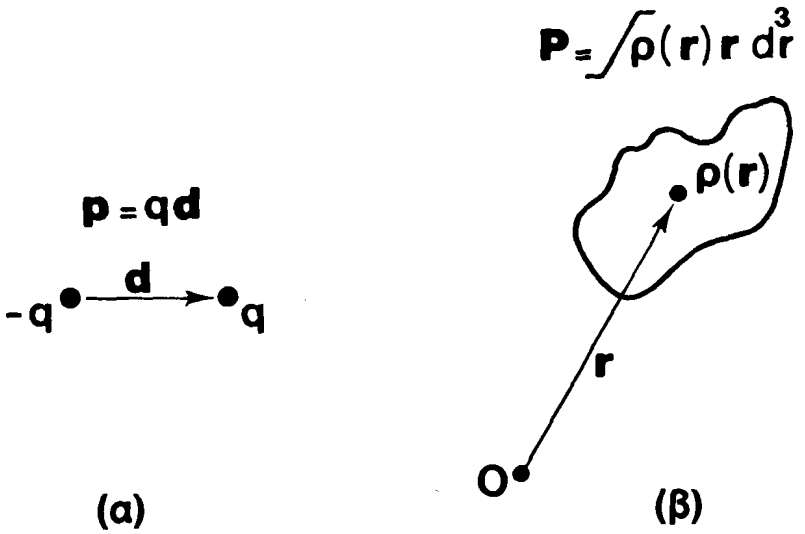
$$\mathbf{p} = q\,\mathbf{d} \ . \tag{3.17}$$

Ἡ ἁπλή αὐτή διάταξη δίνεται στό σχῆμα 3-11(α). Στό ἴδιο σχῆμα ὁρίζονται καί τά μεγέθη πού ὑπεισέρχονται στόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (3.17), ἐνῶ τό σχῆμα 3-11(β) περιέχει διαγραμματικά τή γενίκευση τῆς ἔννοιας τοῦ ἡλεκτρικοῦ διπόλου σέ μιά ὁποιαδήποτε κατανομή φορτίου $\rho(\mathbf{r})$. Θά ὁρίσουμε τήν **ἡλεκτρική διπολική ροπή** μιᾶς κατανομῆς $\rho(\mathbf{r})$ μέ τή σχέση

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}\, d^3r \tag{3.18}$$

πού ὅπως εἶναι εὔκολο νά ἀποδειχτεῖ μεταπίπτει στήν ἐξ. (3.17) γιά τήν ἁπλή κατανομή φορτίου τοῦ σχήματος 3-11(α).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 3-11 (α) Ἁπλή κατανομή ἠλεκτρικοῦ διπόλου δύο φορτίων q καί −q σέ σχετική ἀπόσταση d. (β) Ὁρισμός τῆς διπολικῆς ροπῆς κατανομῆς φορτίου ρ(**r**).

Τό ἠλεκτρικό πεδίο ἤ ἐναλλακτικά τό δυναμικό πού δημιουργεῖ ἕνα ἠλεκτρικό δίπολο δίνονται στόν Πίνακα 2-1

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{p}}{r^3} \tag{3.19}$$

καί

$$\varphi(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{3.20}$$

γιά ἀποστάσεις r μεγάλες σέ σχέση μέ τίς χαρακτηριστικές διαστάσεις τοῦ διπόλου. Ὅπως δείχνουν οἱ ἐξ. (3.19) καί (3.20), τό ἠλεκτρικό πεδίο καί δυναμικό πού δημιουργεῖ ἡ ἠλεκτρική διπολική ροπή **p** φθήνει κατά μιά δύναμη τῆς ἀποστάσεως r γρηγορότερα ἀπό τό πεδίο καί τό δυναμικό πού δημιουργεῖ τό ὁλικό φορτίο τῆς κατανομῆς

$$q = \int \rho(\mathbf{r})\, d^3r \ . \tag{3.21}$$

Τό διπολικό πεδίο καί δυναμικό ἀποκτοῦν ἑπομένως ἐνδιαφέρον στήν περίπτωση ὅπου τό ὁλικό φορτίο τῆς κατανομῆς ρ(**r**) μηδενίζεται. Στήν περίπτωση μάλιστα αὐτή μποροῦμε νά ἀποδείξουμε δύο σημαντικές ἰδιότητες τῆς ἠλεκτρικῆς διπολικῆς ροπῆς πού ὁρίζεται στήν ἐξ. (3.18)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1. Ἄν τό ὁλικό φορτίο τῆς κατανομῆς μηδενίζεται, τό ἄνυσμα **p** τῆς ἐξ. (3.18) εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τήν ἐπιλογή τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.
2. Ἄν ἕνα *σύστημα φορτίων* συγκροτεῖται ἀπό N μικρότερα συστήματα, τό καθένα μέ διπολική ροπή $\mathbf{p}_k$, k = 1, 2, ...N, τότε ἡ ὁλική διπολική ροπή τοῦ συστήματος δίνεται ἀπό τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν ἐπιμέρους ροπῶν

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{p}_k. \tag{3.22}$$

Θά ἔχει γίνει πλέον φανερός, τουλάχιστον στίς γενικές του γραμμές, ὁ μηχανισμός μέ τόν ὁποῖο ἕνα ἀφόρτιστο διηλεκτρικό ὑλικό μπορεῖ νά δημιουργήσει ἡλεκτρικό πεδίο. Κάθε μόριο τοῦ ὑλικοῦ, ἄν καί ἡλεκτρικά οὐδέτερο, *μπορεῖ* νά διαθέτει μιά πεπερασμένη ἡλεκτρική διπολική ροπή $\mathbf{p}_k$ (ὁ τρόπος δημιουργίας τῆς ἀσυμμετρίας στήν κατανομή φορτίου πού δημιουργεῖ τή διπολική ροπή θά μᾶς ἀπασχολήσει ἀργότερα). Ἄν τό ἄθροισμα τῆς ἐξ. (3.22), πού ἐκτείνεται σέ ὅλα τά μόρια τοῦ ὑλικοῦ, εἶναι ἐπίσης πεπερασμένο, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (3.19) θά δημιουργηθεῖ ἕνα μακροσκοπικό ἡλεκτρικό πεδίο.

Μποροῦμε νά συνδέσουμε τή μακροσκοπική ἔννοια τοῦ πεδίου μέ τή μικροσκοπική εἰκόνα τῆς ἡλεκτρικῆς διπολικῆς ροπῆς κάθε μορίου ἄν σέ ἀναλογία μέ τή συνάρτηση πυκνότητας φορτίου ρ(**r**) (ἐλεύθερο φορτίο ἀνά μονάδα ὄγκου) ὁρίσουμε τήν ἀνυσματική συνάρτηση **P**(**r**) πού περιγράφει τήν ἡλεκτρική διπολική ροπή ἀνά μονάδα ὄγκου τοῦ ὑλικοῦ

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \equiv \frac{d\mathbf{p}}{d^3r}. \tag{3.23}$$

Ἡ **ἡλεκτρική πόλωση**, ὅπως θά ὀνομάσουμε τήν ἀνυσματική συνάρτηση **P**(**r**), θά περιγράφει τό διηλεκτρικό ὑλικό ὡς πηγή τοῦ διπολικοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου, ἄν στή διαφόρηση τῆς ἐξ. (3.23) λάβουμε πρόνοια ὥστε τό στοιχεῖο τοῦ ὄγκου d^3r νά εἶναι ἀφενός μακροσκοπικά ἀπειροελάχιστο, ἐνῶ ἀφετέρου νά περιέχει ἀκόμη ἕνα μεγάλο ἀριθμό μορίων τοῦ ὑλικοῦ. Στό ὅριο αὐτό, ἡ ἡλεκτρική διπολική ροπή πού ἐμφανίζει τό στοιχεῖο τοῦ ὄγκου εἶναι

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}\, d^3r = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{p}_k \tag{3.24}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου ὁ μεγάλος ἀριθμός N τῶν μορίων ἐξασφαλίζει ὅτι στατιστικές διακυμάνσεις στόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (3.23) μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὡς ἀμελητέες.

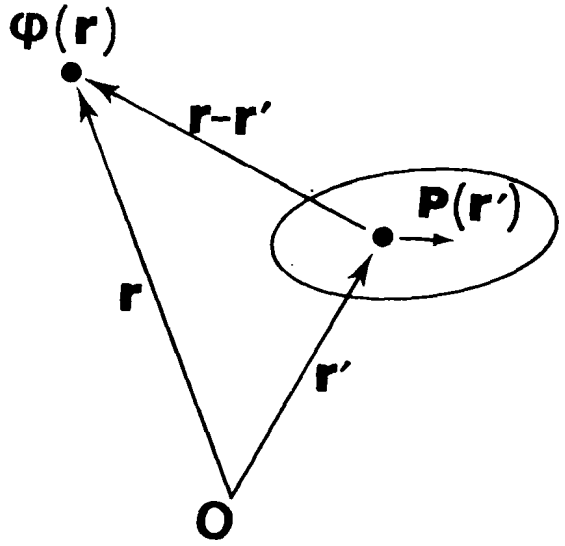
Ἡ συνεισφορά τῆς ἠλεκτρικῆς διπολικῆς ροπῆς τῆς ἐξ. (3.24) στό ἠλεκτρικό δυναμικό δίνεται τώρα στήν ἐξ. (3.20) ὡς

$$d\varphi(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d^3r'$$

ἐνῶ τό ὁλικό δυναμικό μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό τήν ὁλοκλήρωση τῆς τελευταίας ἐκφράσεως στόν ὄγκο V τοῦ διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ

$$\varphi(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d^3r' \qquad (3.25)$$

Ἡ γεωμετρία τῆς ἐξ. (3.25) δίνεται στό σχῆμα 3-12. Ἀνάλογη ἔκφραση μποροῦμε νά γράψουμε γιά τό ἠλεκτρικό πεδίο **E**(**r**).



ΣΧΗΜΑ 3-12 Τό ἠλεκτρικό δυναμικό πού δημιουργεῖται ἀπό τήν πόλωση **P**(**r**) διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ.

Παρατηρεῖται ὅτι ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (3.23) ἡ μονάδα τῆς ἠλεκτρικῆς πολώσεως εἶναι γιά μέν τό σύστημα CGS τό ΗΣΜ-φ/cm² ἐνῶ γιά τό σύστημα SI τό C/m². Ἡ σύνδεση τῶν δύο μονάδων δίνεται ἀπό τή σχέση

$$1\ \text{C/m}^2 = 10^{-5}\,c\quad \text{ΗΣΜ-φ/cm}^2\ . \qquad (3.26)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μέ ἕνα μαθηματικό μετασχηματισμό μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἐξ. (3.25) σέ μιά ἐναλλακτική μορφή πού θά μᾶς ἐπιτρέψει τή θεώρηση τοῦ δυναμικοῦ ἑνός ἀφόρτιστου διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ ἀπό μιά ἄλλη ἄποψη. Γιά τό λόγο αὐτό θά χρειαστοῦμε τήν ταυτότητα

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{3.27}$$

ὅπου

$$\nabla' \equiv \frac{\partial}{\partial x'}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y'}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z'}\,\hat{\mathbf{k}} \tag{3.28}$$

εἶναι ὁ διαφορικός τελεστής πού ἐπιδρᾶ μόνο στό ἄνυσμα $\mathbf{r}'$. Ἡ ἐξ. (3.27) μπορεῖ εὔκολα νά ἐπαληθευτεῖ ἀναλυτικά. Ἡ ἐξ. (3.25) μπορεῖ ἑπομένως νά γραφεῖ ὡς

$$\varphi(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' \tag{3.29}$$

Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τήν ταυτότητα γιά διαφόριση γινομένου

$$\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{3.30}$$

μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἐξ. (3.29) ὡς

$$\varphi(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] \int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r'$$

$$- \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r'$$

$$= \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{a}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r' \tag{3.31}$$

ὅπου στό τελευταῖο σκέλος τῆς ἐξ. (3.31) τό πρῶτο ὁλοκλήρωμα μετασχηματίστηκε σέ ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα στήν ἐπιφάνεια S τοῦ διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ μέ χρησιμοποίηση τοῦ θεωρήματος τοῦ Green [βλ. ἐξ. (2.27)]. Συγκρίνοντας μέ τήν ἐξ. (2.49) μποροῦμε νά ἀναγνωρίσουμε τό δυναμικό τῆς ἐξ. (3.31) ὡς τό δυναμικό πού δημιουργεῖ μιά ἐπιφανειακή πυκνότητα φορ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τίου σ_p στήν ἐπιφάνεια S καί μιά τρισδιάστατη πυκνότητα φορτίου ρ_p κατανεμημένη στό χῶρο V, ἄν

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{3.32α}$$

καί

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{3.32β}$$

ὅπου $\hat{\mathbf{n}}$ εἶναι τό μοναδιαῖο ἄνυσμα, κάθετο πρός τήν ἐπιφάνεια S. Μέ ἄλλα λόγια, γιά τήν ἐπίλυση τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ προβλήματος, μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε τό διηλεκτρικό ὑλικό μέ τίς δύο κατανομές φορτίου τῶν ἐξ. (3.32). Τά φορτία αὐτά θά ὀνομάσουμε **δέσμια φορτία** σέ ἀντιδιαστολή μέ τά ἐλεύθερα φορτία πού θεωρήσαμε ὡς τώρα καί πού δημιουργοῦνται κατά τή μεταφορά ἐλεύθερων στοιχειωδῶν σωματίων.

Ἡ σχέση μεταξύ τῶν δέσμιων φορτίων καί τῆς ἠλεκτρικῆς πολώσεως τοῦ ὑλικοῦ μπορεῖ νά ἐξαχθεῖ καί ἀπό καθαρά γεωμετρική θεώρηση τοῦ φαινομένου. Ἄν ἡ πόλωση τῶν μορίων μέσα στό ὑλικό δέν εἶναι ὁμοιόμορφη, ἡ πυκνότητα ρ_p ἀντιπροσωπεύει τό τοπικό φορτίο πού περισεύει ἀπό τήν ἀτελή ἐξουδετέρωση τῶν ἄκρων γειτονικῶν διπόλων, ἐνῶ ἡ ἐπιφανειακή πυκνότητα σ_p ἀντανακλᾶ τήν περίσσεια φορτίου ἀπό τήν ἔλλειψη ἱκανοῦ ἀριθμοῦ γειτόνων γιά τά δίπολα πού βρίσκονται στήν ἐπιφάνεια.

Τό δέσμιο φορτίο σέ ἕνα διηλεκτρικό ὑλικό εἶναι φυσικά τό ὁλοκλήρωμα τῆς πυκνότητας ρ_p καί σ_p. Ὅπως περιμένουμε ἀπό τό μηχανισμό πού περιγράψαμε τό ὁλικό δέσμιο φορτίο σέ ἕνα διηλεκτρικό ὑλικό εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν. Πράγματι, ἀπό τίς ἐξ. (3.32)

$$\begin{aligned} q_p &= \oint_S \sigma_p \, da + \int_V \rho_p \, d^3r \\ &= \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} \, d^3r \end{aligned} \tag{3.33}$$

πού ἀπό τό θεώρημα τοῦ Green δίνει

$$q_p = 0 \ .$$



3-5 Ἠλεκτρική Μετατόπιση, Ἠλεκτρική Ἐπιδεκτικότητα καί Διηλεκτρική Σταθερά

Ὅπως εἴδαμε παραπάνω τό ἠλεκτροστατικό πεδίο μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ σέ κάθε σημεῖο τοῦ συστήματος (ἀνεξάρτητα ἄν τό σημεῖο βρίσκεται μέσα σέ διηλεκτρικό ὑλικό ἤ στόν κενό χῶρο) ἄν θεωρήσουμε τά ἐλεύθερα φορτία καί τά δέσμια φορτία πού ἀντιπροσωπεύουν τά διηλεκτρικά σώματα. Εἰδικώτερα, μποροῦμε νά γράψουμε τό νόμο τοῦ Gauss [βλ. ἐξ. (2.25)] ὡς

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] 4\pi(q+q_p) \tag{3.34}$$

ὅπου q καί q_p εἶναι ἀντίστοιχα τό ὁλικό ἐλεύθερο καί δέσμιο φορτίο πού περιβάλλονται ἀπό τήν κλειστή ἐπιφάνεια S. Ἡ ἀντίστοιχη διαφορική ἐξίσωση [βλ. ἐξ. (2.28)] εἶναι

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] 4\pi(\rho+\rho_p) \tag{3.35}$$

ὅπου σέ προφανή συμβολισμό ρ καί ρ_p εἶναι ἀντίστοιχα ἡ πυκνότητα ἐλευθέρου καί δέσμιου φορτίου.

Χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (3.32β) μποροῦμε νά ξαναγράψουμε τήν ἐξ. (3.35) ὡς

$$\nabla \cdot \left([\varepsilon_0]\, \mathbf{E} + \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi \mathbf{P} \right) = \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi\rho \ . \tag{3.36}$$

Ἡ τελευταία σχέση ὁδηγεῖ στόν ὁρισμό μιᾶς νέας μακροσκοπικῆς συναρτήσεως, πού θά ὀνομάσουμε **ἠλεκτρική μετατόπιση**

$$\mathbf{D} \equiv [\varepsilon_0]\, \mathbf{E} + \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi \mathbf{P} \tag{3.37}$$

μέ τή βοήθεια τῆς ὁποίας ἡ ἐξ. (3.36) παίρνει τήν ἰδιαίτερα ἁπλή μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi\rho \ . \tag{3.38}$$

Ἡ ὁλοκληρωμένη μορφή τοῦ νόμου τοῦ Gauss μπορεῖ ἐπίσης νά γραφεῖ ἀποκλειστικά διαμέσου τῆς ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως **D** καί τοῦ ἐλευθέρου φορτίου ὡς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi q \qquad (3.39)$$

ὅπου q εἶναι τό ὁλικό ἐλεύθερο φορτίο πού περικλείει ἡ ἐπιφάνεια S.

Ἡ χρησιμότητα τοῦ ἀνυσματικοῦ πεδίου **D** ἀπορρέει ἀπό τό γεγονός ὅτι συνδέεται κατά ἁπλό τρόπο μέ τό ἐλεύθερο φορτίο πού συνήθως λαμβάνεται ὡς ἡ πρωταρχική πηγή τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου. Παρόλα αὐτά τά δύο ἀνύσματα **E** καί **D** διαφέρουν δραστικά. Τό μακροσκοπικό πεδίο **E** ἀντιπροσωπεύει τή μέση τιμή τοῦ μικροσκοπικοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἐνῶ ἡ μετατόπιση **D** ὁρίζεται ὡς μιά καθαρά μακροσκοπική ἰδιότητα τοῦ χώρου. Γιά ἕνα μικροσκοπικό παρατηρητή, οἱ ἔννοιες τῆς πολώσεως τοῦ δέσμιου φορτίου καί τῆς ἠλεκτροστατικῆς μετατοπίσεως παύουν νά ἔχουν φυσικό νόημα. Ἀκόμη καί στή μακροσκοπική εἰκόνα τῶν ἠλεκτροστατικῶν φαινομένων τό ἄνυσμα **E** εἶναι ἡ μόνη ποσότητα πού μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μονοσήμαντα ἀπό τή γνώση τοῦ ἐλεύθερου φορτίου ρ. Καί τοῦτο διότι πέρα ἀπό τή σχέση

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] 4\pi\rho \qquad (2.28)$$

τό ἄνυσμα τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \ . \qquad (2.45)$$

Ἡ ἀντίστοιχη σχέση $\nabla \times \mathbf{D} = 0$ δέν ἀληθεύει γενικά, μέ ἀποτέλεσμα ὁ προσδιορισμός τῆς ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως νά μήν εἶναι γενικά δυνατός ἀπό τήν ἐξ. (3.38) καί τήν κατανομή ἐλεύθερου φορτίου στό σύστημα. Γιά τό μονοσήμαντο προσδιορισμό τοῦ ἀνύσματος **D** εἶναι ἀπαραίτητη κάποια συμπληρωματική γνώση ὅπως οἱ συνοριακές συνθῆκες στίς ἐπιφάνειες τῶν διηλεκτρικῶν σωμάτων. Οἱ συνοριακές συνθῆκες τοῦ ἀνύσματος **D**, πού συνδέονται μέ τήν πόλωση καί τά δέσμια φορτία εἶναι βεβαίως καθαρά μακροσκοπικές ἔννοιες.

Μέχρι τώρα περιγράψαμε τό μακροσκοπικό πεδίο σέ ἕνα ἠλεκτροστατικό σύστημα πού περιέχει διηλεκτρικά ὑλικά χωρίς νά ἐξετάσουμε τή σχέση μεταξύ τῆς πολώσεως τοῦ ὑλικοῦ καί τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Γενικά περιμένουμε ὅτι ἡ πόλωση **P** θά μηδενίζεται ἄν τό ὑλικό βρίσκεται σέ ἕνα χῶρο ἐλεύθερο ἀπό ἠλεκτροστατικό πεδίο. Καί τοῦτο διότι εἴτε τά μόρια τοῦ ὑλικοῦ ἀποτελλοῦνται ἀπό μιά συμμετρική κατανομή φορτίου μέ ἠλεκτρική διπολική ροπή $\mathbf{p}_k = 0$, εἴτε διαθέτουν μιά πεπερασμένη διπολική ρο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πή μέ τό ἄνυσμα $\mathbf{p}_k$ κατανεμημένο σέ τυχαῖες διευθύνσεις. Ἡ παρουσία ἑνός ἐξωτερικοῦ πεδίου $\mathbf{E} \neq 0$ περιμένουμε ὅτι θά ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν αὔξηση τοῦ ἀνύσματος **P** πρός τή διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος **E**. Σέ γενικές γραμμές, περιμένουμε ὅτι σέ μόρια μέ διπολική ροπή $\mathbf{p}_k = 0$, τό ἠλεκτρικό πεδίο θά δημιουργήσει πεπερασμένη διπολική ροπή μέ διαχωρισμό τοῦ κέντρου βάρους τῆς κατανομῆς θετικοῦ καί ἀρνητικοῦ φορτίου. Σέ μόρια μέ διπολική ροπή $\mathbf{p}_k \neq 0$ περιμένουμε, πέρα ἀπό τήν αὔξηση τοῦ ἀνύσματος $\mathbf{p}_k$, εὐθυγράμμιση τῆς διπολικῆς ροπῆς πρός τή διεύθυνση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Πειραματικά ἀποδεικνύεται ὅτι τά περισσότερα διηλεκτρικά ὑλικά† συμπεριφέρονται σύμφωνα μέ τίς παραπάνω προσδοκίες μας. Ἐπιπλέον ἡ πλειονότητα τῶν ὑλικῶν αὐτῶν ἐμφανίζει **ἠλεκτρική ἰσοτροπία.** Μέ τόν ὅρο αὐτό ἐννοοῦμε ὅτι οἱ ἠλεκτρικές ἰδιότητες τοῦ ὑλικοῦ εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπό τή διεύθυνση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Γιά ἰσοτροπικά ὑλικά, ὅπου καμιά εἰδική διεύθυνση δέν εἶναι προτιμητέα, ἕπεται τώρα ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (3.37) ὅτι ἡ ἠλεκτρική μετατόπιση **D** καί τό ἠλεκτρικό πεδίο **E** θά ἔχουν ἐπίσης τήν ἴδια φορά. Γιά ἰσοτροπικά ὑλικά μποροῦμε ἑπομένως νά γράψουμε τή σχέση μεταξύ τῶν ἀνυσμάτων **P**, **D** καί **E** σέ κάθε σημεῖο τοῦ διηλεκτρικοῦ ὡς

$$\mathbf{P} = \chi_e(E)\mathbf{E} \tag{3.40}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon(E)\mathbf{E} \tag{3.41}$$

ὅπου ὁ συντελεστής $\chi_e(E)$ ὀνομάζεται ἡ **ἠλεκτρική ἐπιδεκτικότητα** τοῦ ὑλικοῦ καί ὁ συντελεστής $\varepsilon(E)$ ἡ **διηλεκτρική σταθερά** ἤ **διαπερατότητα** τοῦ ὑλικοῦ. Γενικά, ὅπως ὑποδηλώνει ὁ συμβολισμός, οἱ συντελεστές χ_e καί ε εἶναι συναρτήσεις τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Στήν πράξη, γιά τήν πλειονότητα τῶν διηλεκτρικῶν ὑλικῶν καί λογικές τιμές τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, οἱ συντελεστές τῶν ἐξ. (3.40) καί (3.41) ἀποδεικνύονται ἀνεξάρτητα ἀπό τήν ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Μποροῦμε ἑπομένως νά γράψουμε

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \tag{3.42}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{3.43}$$

† Θά ἀγνοήσουμε μιά μικρή κατηγορία ὑλικῶν γνωστά ὡς **ἠλεκτρίτες**, πού μέ κατάλληλη προπαρασκευή ἐμφανίζουν πόλωση ἀκόμη καί γιά μηδενικό ἠλεκτρικό πεδίο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου χ_e καί ε εἶναι δύο σταθερές πού χαρακτηρίζουν τό ἰσοτροπικό ὑλικό. Θά χρησιμοποιήσουμε τόν ὅρο **γραμμικά διηλεκτρικά** γιά νά ἀναφερθοῦμε σέ ὑλικά πού ἱκανοποιοῦν τίς ἐξ. (3.42) καί (3.43). Ἄν ἐπιπλέον οἱ συντελεστές χ_e καί ε εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπό τή θέση μέσα στό διηλεκτρικό, ὅπως παρατηρεῖται πραγματικά γιά μιά μεγάλη κατηγορία ὑλικῶν, θά ὀνομάσουμε τό ὑλικό **ὁμογενές.**

Ὁ ὁρισμός τῆς ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως στήν ἐξ. (3.37) μᾶς ἐπιτρέπει τή σύνδεση τῆς ἠλεκτρικῆς ἐπιδεκτικότητας μέ τή διηλεκτρική σταθερά. Ἀντικαθιστώντας τίς ἐξ. (3.40) καί (3.41) στήν ἐξ. (3.37)

$$\varepsilon(E) = [\varepsilon_0] + \left[\frac{1}{4\pi}\right] 4\pi\chi_e(E) \ . \tag{3.44}$$

Παρατηρεῖται ὅτι στόν κενό χῶρο ὅπου ἡ πόλωση εἶναι πάντα $\mathbf{P} = 0$ καί ἑπομένως $\chi_e = 0$, ἡ διηλεκτρική σταθερά ταυτίζεται στό σύστημα SI μέ τή σταθερά ε_0. Ἀπό τό γεγονός αὐτό ἀπορρέει καί ἡ ὀνομασία *διηλεκτρική σταθερά στό κενό* ἤ *διαπερατότητα στό κενό* πού δώσαμε στή σταθερά ε_0.

Στό σύστημα CGS οἱ σταθερές ε καί χ_e εἶναι ἀδιάστατα μεγέθη ἐνῶ στό σύστημα SI οἱ μονάδες τους ταυτίζονται μέ τίς μονάδες τῆς σταθερᾶς ε_0, ἤτοι $C^2N^{-1}m^{-2}$. Στό τελευταῖο σύστημα μονάδων εἶναι χρήσιμο νά ὁρίσουμε ἕνα ἀδιάστατο συντελεστή, ὡς τό λόγο τῆς διηλεκτρικῆς σταθερᾶς ἑνός ὑλικοῦ πρός τή διηλεκτρική σταθερά στόν κενό χῶρο, ἤτοι

$$K_e \equiv \frac{\varepsilon(E)}{\varepsilon_0} \ . \tag{3.45}$$

Ὁ συνετελεστής K_e, πού στό σύστημα SI θά ὀνομάσουμε **εἰδική διηλεκτρική σταθερά** ἤ **εἰδική διαπερατότητα,** μπορεῖ νά συνδεθεῖ μέ τήν ἠλεκτρική ἐπιδεκτικότητα διαμέσου τῆς ἐξ. (3.44)

$$K_e = \frac{\chi_e(E)}{\varepsilon_0} + 1 \tag{3.46}$$

ὅπου φυσικά ἡ σχέση ὁρίζεται μόνο γιά τό σύστημα SI. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά δείξει ὅτι οἱ ἀριθμητικές τιμές τῶν συντελεστῶν ε(E) καί $\chi_e(E)$ στά δύο συστήματα μονάδων ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις

$$K_e\Big|_{SI} = \varepsilon(E)\Big|_{CGS} \tag{3.47α}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\left.\frac{\chi_e(E)}{\varepsilon_0}\right|_{SI} = \left.4\pi\chi_e(E)\right|_{CGS} \qquad (3.47\beta)$$

Άν καί στίς προηγούμενες σχέσεις οί συντελεστές $\varepsilon(E)$ καί $\chi_e(E)$ έχουν γραφεῖ γενικά ὡς συναρτήσεις τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἡ πλειονότητα τῶν διηλεκτρικῶν ὑλικῶν πού συναντᾶμε στό ἐργαστήριο καί τή βιομηχανία εἶναι ἰσοτροπικά, ὁμογενή καί γραμμικά. Στή συνέχεια θά ἐγκαταλείψουμε τό συμβολισμό $\varepsilon(E)$ καί $\chi_e(E)$ καί θά χρησιμοποιήσουμε τούς ἀντίστοιχους συντελεστές μέ τήν ἔννοια τῶν ἐξ. (3.42) καί (3.43). Ὁ Πίνακας 3-1 περιέχει χαρακτηριστικές τιμές τῆς διαπερατότητας ε γιά ὁρισμένα τυπικά διηλεκτρικά ὑλικά.

3-6 Συνοριακές Συνθῆκες καί ἡ Ἐξίσωση Poisson σέ Διηλεκτρικά Ὑλικά

Τά δέσμια φορτία σ_p καί ρ_p τῶν ἐξ. (3.32) περιγράφουν πλήρως τήν ὕπαρξη διηλεκτρικῶν σωμάτων στό χῶρο. Τό ἠλεκτροστατικό δυναμικό π.χ. ἑνός συστήματος πού περιέχει ἐλεύθερα φορτία καί διηλεκτρικά μπορεῖ νά γραφεῖ κατ' ἀρχήν ὡς

$$\varphi(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r' + \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\int_{V_p}\frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'$$

$$+ \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\int_{S_p}\frac{\sigma_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^2r' \qquad (3.48)$$

ὅπου V εἶναι ὅλος ὁ χῶρος ὅπου ἐκτείνεται ἡ κατανομή $\rho(\mathbf{r})$ ἐλεύθερου φορτίου ἐνῶ V_p καί S_p εἶναι ἀντίστοιχα ὁ ὄγκος καί ἡ ἐπιφάνεια τῶν διηλεκτρικῶν σωμάτων. Ἡ ἀντίστοιχη διαφορική ἐξίσωση πού διέπει τό δυναμικό $\varphi(\mathbf{r})$ μπορεῖ ἐπίσης νά γραφεῖ ἀμέσως ὡς ἐπέκταση τῆς ἐξισώσεως Poisson ἄν στήν πυκνότητα ἐλεύθερου φορτίου συμπεριλάβουμε καί τήν πυκνότητα δέσμιου φορτίου, ἤτοι

$$\nabla^2\varphi = -\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]4\pi(\rho+\rho_p)\ . \qquad (3.49)$$

Ἡ χρησιμότητα τῶν ἐξ. (3.48) καί (3.49) στόν ὑπολογισμό τοῦ δυναμικοῦ εἶναι ἀρκετά περιορισμένη. Σέ ἀναλογία μέ τήν ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου σέ συστήματα πού περιέχουν ἀγωγούς, οἱ πυκνότητες δέσμιου φορτίου σ_p καί ρ_p περιλαμβάνονται στούς ἀγνώστους τῶν ἐξισώσεων καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-1 Διηλεκτρική σταθερά ε στό σύστημα CGS (κατά ἀριθμητική τιμή ἴ-ση μέ τήν εἰδική διηλεκτρική σταθερά K_e τοῦ συστήματος SI) γιά διάφορα διηλεκτρικά ὑλικά.

Διηλεκτρικό	Συνθῆκες	ε_{CGS} ἤ $(K_e)_{SI}$
Ἀτμοσφαιρικός ἀέρας	°C, 1 atm	1.00059
Νερό, H_2O	ἀτμός, 110°C, 1 atm	1.0046
	ὑγρό, 20°C	80.37
Ἀμμωνία, NH_3	ἀέριο, 25°C	16.9
	ὑγρό, −77°C	25
Ὑδραζίνη, N_2H_4	ὑγρό, 20°C	52.9
Αἰθανόλη, C_2H_6O	ὑγρό, 25°C	24.30
Σύνηθες λάδι μετασχηματιστή	ὑγρό, 20°C	2.25
Χλωριοῦχο νάτριο, NaCl	στερεό, 20°C	6.12
Ναφθαλίνη	στερεό, 20°C	2.52
Νάϋλον	στερεό, 20°C	3.5
Πορσελάνη	στερεό, 20°C	6.0–8.0
Παραφίνη	στερεό, 20°C	2.0–2.5

μποροῦν νά προσδιοριστοῦν μόνο μετά τήν πλήρη ἐπίλυση τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ προβλήματος. Ἔτσι, στήν περίπτωση τῶν ἀγωγῶν χρειάστηκε νά συμπληρώσουμε τήν ἐξίσωση Poisson μέ συνοριακές συνθῆκες πού προσδιορίζουν τό δυναμικό ἤ τό πεδίο στή διαχωριστική ἐπιφάνεια μεταξύ ἀγωγῶν καί κενοῦ χώρου. Μιά τέτοια συνοριακή συνθήκη δίνεται στήν ἐξ. (3.2) ὅπου τό ἠλεκτρικό πεδίο ἀμέσως ἔξω ἀπό ἕνα ἀγωγό συνδέεται μέ τήν ἐπιφανειακή πυκνότητα ἐλεύθερου φορτίου. Ὑπενθυμίζοντας ὅτι τό ἠλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται στό ἐσωτερικό ἑνός ἀγωγοῦ, ἐνῶ εἶναι κάθετο πρός τήν ἐπιφάνεια ἀμέσως ἔξω ἀπό τόν ἀγωγό, μποροῦμε νά δοῦμε τήν ἐξ. (3.2) ὡς μιά ἀσυνέχεια τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καθώς διαβαίνουμε τή μακροσκοπική ἀσυνέχεια πού ἀντιπροσωπεύει ἡ διαχωριστική ἐπιφάνεια μεταξύ ἀγωγοῦ καί κενοῦ χώρου. Εἰδικώτερα ἄν θεωρήσουμε τήν κάθετη καί παράλληλη συνιστῶσα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου σέ ἕνα σημεῖο τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀγωγοῦ

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{E}_{\parallel} \tag{3.50}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἡ ἐξ. (3.2) προβλέπει μιά ἀσυνέχεια ὡς πρός τή συνιστῶσα $\mathbf{E}_\perp$

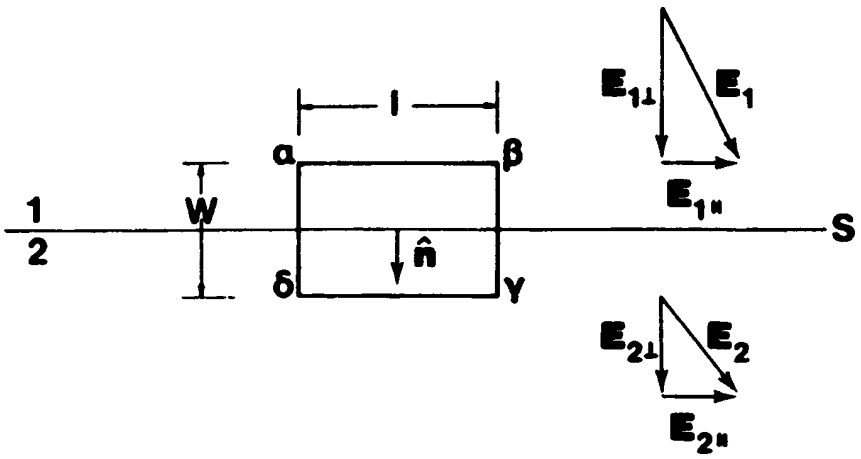
$$(E_\perp)_{\text{ἐξω}} - (E_\perp)_{\text{μέσα}} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 4\pi\sigma \ . \qquad (3.51\alpha)$$

Ἀντίθετα ἡ παράλληλη αυνιστῶσα ἐμφανίζεται συνεχής

$$(E_{\parallel})_{\text{ἐξω}} - (E_{\parallel})_{\text{μέσα}} = 0 \qquad (3.51\beta)$$

καθόσον καθεμία μηδενίζεται ἀνεξάρτητα.

Γιά τήν ἐπίλυση τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ προβλήματος σέ διηλεκτρικά ὑλικά εἶναι χρήσιμο νά ἐξετάσουμε τήν συμπεριφορά τῶν ἀνυσμάτων **E**, **D** καί **P** σέ ἀνάλογες διαχωριστικές ἐπιφάνειες μεταξύ διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ καί κενοῦ χώρου ἤ γενικότερα μεταξύ δύο διηλεκτρικῶν ὑλικῶν. Θά πραγματοποιήσουμε τή διερεύνηση αὐτή ἀπό τήν καθαρά μακροσκοπική ἄποψη ὅπου, ἀφενός ἡ πόλωση **P** καί ἡ μετατόπιση **D** ἔχουν νόημα, ἐνῶ ἀφετέρου ἡ συνοριακή ἐπιφάνεια μεταξύ ὑλικῶν μπορεῖ νά ὁριστεῖ γεωμετρικά χωρίς νά ληφθεῖ ὑπόψη ἡ μοριακή δομή τῆς ὕλης. Ἔτσι τό ἠλεκτρικό πεδίο **E** πού θά θεωρήσουμε στή συνέχεια εἶναι τό μακροσκοπικό πεδίο, δηλαδή ἡ μέση τιμή τοῦ μακροσκοπικοῦ πεδίου σέ ἕνα μακροσκοπικά ἀπειροελάχιστο ὄγκο d^3r. Μέ τήν παρατήρηση αὐτή, θά ἐξετάσουμε τή συμπεριφορά τοῦ ἀνύσματος **E** στή γειτονία τῆς ἐπιφάνειας S μεταξύ τῶν δύο ὑλικῶν 1 καί 2 πού εἰκονίζονται στό σχῆμα 3-13. Τό σχῆμα περιέχει ἕνα ἀρκετά μικρό μέρος τῆς ἐπιφανείας ὥστε στήν περιοχή πού εἰκονίζεται ἡ ἐπιφάνεια νά μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ἐπίπεδο. Ὁλοκληρώνοντας τό ἠλεκτρικό πεδίο κατά μῆκος τῆς ὀρθογώνιας διαδρομῆς αβγδ παίρνουμε τή σχέση



ΣΧΗΜΑ 3-13 Διαδρομή ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου στή διαχωριστική ἐπιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικῶν ὑλικῶν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_{\beta}^{\gamma} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma}^{\delta} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_{\delta}^{\alpha} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0 \ . \quad (3.52)$$

Οἱ διαστάσεις l καί w τῆς διαδρομῆς πού εἰκονίζονται στό σχῆμα ἔχουν ἤδη λειφθεῖ μέ ἀπειροελάχιστο μῆκος. Ἄν θεωρήσουμε τό ὅριο $w \to 0$ τά ὁλοκληρώματα κατά μῆκος τῶν διαδρομῶν αβ καί γδ τείνουν ἐπίσης πρός τό μηδέν. Στίς δύο ὑπόλοιπες διαδρομές μέ μῆκος l μποροῦμε ἀκόμη νά θεωρήσουμε ὅτι τό πεδίο παραμένει σταθερό. Ἡ ἐξ. (3.52) μπορεῖ ἑπομένως νά γραφεῖ ὡς

$$E_{1\|}\, l - E_{2\|}\, l = 0$$

ἤ

$$E_{1\|} = E_{2\|} \ . \quad (3.53)$$

Μέ ἄλλα λόγια, στή διαχωριστική ἐπιφάνεια μεταξύ δύο ὑλικῶν ἡ παράλληλη συνιστώσα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι συνεχής. Ἡ ἐξ. (3.53) μπορεῖ νά γραφεῖ μέ ἀπευθείας χρησιμοποίηση τοῦ ἀνύσματος **E** ὡς

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.54)$$

ὅπου $\hat{\mathbf{n}}$ εἶναι τό μοναδιαῖο ἄνυσμα, κάθετο πρός τήν ἐπιφάνεια μεταξύ τῶν δύο ὑλικῶν καί μέ φορά ἀπό τό ὑλικό 1 πρός τό ὑλικό 2.

Ἡ συμπεριφορά τῆς κάθετης συνιστώσας τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ τήν ἴδια μέθοδο πού ὁδήγησε στήν ἐξ. (3-2) διαμέσου μιᾶς ἐπιφανείας Gauss ἀνάλογης πρός αὐτή τοῦ σχήματος 3-3. Τό ἀποτέλεσμα εἶναι μιά ἀσυνέχεια ἀνάλογη πρός αὐτή τῆς ἐξ. (3.51α)

$$E_{2\perp} - E_{1\perp} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 4\pi(\sigma+\sigma_p)$$

ἤ

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 4\pi(\sigma+\sigma_p) \quad (3.55)$$

ὅπου στήν περίπτωση αὐτή ἡ ἐπιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου συνεισφέρει ἐπίσης στήν ἀσυνέχεια.

Κατά τελείως ἀνάλογο τρόπο μποροῦμε νά ἐξετάσουμε τή συμπεριφορά τῆς ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως **D**. Χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (3.39) καί μιά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἐπιφάνεια Gauss ἀνάλογη πρός αὐτή τοῦ σχήματος 3-3 μποροῦμε νά δείξουμε τή συνοριακή συνθήκη

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi\sigma. \tag{3.56}$$

Παρατηρεῖται ὅτι καθόσον, σέ ἀντίθεση μέ τό ἠλεκτρικό πεδίο, ἡ ματατόπιση δέν εἶναι γενικά ἀστρόβιλο ἀνυσματικό πεδίο (δέν ἰσχύει δηλαδή πάντα $\nabla \times \mathbf{D} = 0$ ἤ ἰσοδύναμα $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = 0$) ἡ μέθοδος πού ὁδήγησε στή συνοριακή συνθήκη τῆς ἐξ. (3.54) δέν εἶναι ἐδῶ ἐφαρμόσιμη. Συνοριακή συνθήκη γιά τή συμπεριφορά τῆς παράλληλης συνιστώσας τῆς ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως δέν μπορεῖ γενικά νά προβλεφθεῖ.

Τέλος μποροῦμε νά ἐξετάσουμε τή συμπεριφορά τῆς πολώσεως $\mathbf{P}$ στά σύνορα μεταξύ δύο ἠλεκτρικῶν ὑλικῶν. Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (3.32α) ἡ πόλωση $\mathbf{P}_1$ στό ὑλικό 1 συνεισφέρει ἐπιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου ἴση μέ $\mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}$ ἐνῶ ἡ πόλωση $\mathbf{P}_2$ στό ὑλικό 2 ἐπιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου ἴση μέ $-\mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Ἡ ὁλική ἐπιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου εἶναι ἐπομένως

$$\sigma_p = \mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

πού ὁδηγεῖ στή συνοριακή συνθήκη

$$(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\sigma_p \ . \tag{3.57}$$

Παρατηρεῖται ὅτι οἱ ἐξ. (3.55), (3.56) καί (3.57) εἶναι συνεπεῖς μέ τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (3.37)

$$\mathbf{D} = [\varepsilon_0]\, \mathbf{E} + \left[\frac{1}{4\pi} \right] 4\pi \mathbf{P} \ . \tag{3.37}$$

Οἱ συνοριακές συνθῆκες τῶν ἀνυσμάτων $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ καί $\mathbf{P}$ μποροῦν νά μετατραποῦν σέ συνοριακές συνθῆκες τοῦ δυναμικοῦ. Χρησιμοποιώντας τή σχέση μεταξύ πεδίου καί δυναμικοῦ

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \tag{2.41}$$

καί τή γεωμετρική σχέση

$$\nabla\varphi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \tag{3.57}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἡ ἐξ. (3.55) ὁδηγεῖ στή συνοριακή συνθήκη

$$-\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_{r_s}+\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{r_s}=\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]4\pi(\sigma+\sigma_p)\ . \qquad (3.58)$$

Στήν τελευταία σχέση φ_1 καί φ_2 εἶναι οἱ συναρτήσεις δυναμικοῦ ἀντίστοιχα στά ὑλικά 1 καί 2, ἐνῶ ἡ τιμή τῆς παραγώγου πρός τήν κάθετη διεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$ λαμβάνεται στό σημεῖο r_s τῆς ἐπιφανείας.

Μιά εἰδικότερη ἀλλά πολύ πιό χρήσιμη συνοριακή συνθήκη γιά τό δυναμικό μπορεῖ νά ἐξαχθεῖ ἀπό τήν ἐξ. (3.56) στήν περίπτωση ὅπου τά διηλεκτρικά 1 καί 2 εἶναι ἰσοτροπικά. Ἄν ε_1 καί ε_2 εἶναι οἱ ἀντίστοιχες διηλεκτρικές σταθερές τῶν δύο ὑλικῶν, ἡ ἐξ. (3.56) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$(\varepsilon_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1\mathbf{E}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}=\left[\frac{1}{4\pi}\right]4\pi\sigma \qquad (3.59)$$

ἤ ὡς συνάρτηση τοῦ δυναμικοῦ

$$-\varepsilon_2\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_{r_s}+\varepsilon_1\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{r_s}=\left[\frac{1}{4\pi}\right]4\pi\sigma \qquad (3.60)$$

Καθόσον οἱ ἐξ. (3.58) καί (3.60) περιγράφουν τή συμπεριφορά τῆς κάθετης παραγώγου τοῦ δυναμικοῦ σέ ἕνα σημεῖο πρέπει νά εἶναι ἰσοδύναμες. Πράγματι ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (3.37) καί τήν ἐξ. (3.32α) μποροῦμε εὔκολα νά δείξουμε ὅτι οἱ τελευταῖες δύο συνοριακές συνθῆκες περιγράφουν τό ἴδιο φυσικό φαινόμενο ἀπό διάφορη ὀπτική γωνία. Στήν ἐξ. (3.58) ἡ διαχωριστική ἐπιφάνεια ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τήν ἐπιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου σ_p ἐνῶ στήν ἐξ. (3.60) ἀπό τήν ἀσυνεχή μεταβολή τῆς τιμῆς τῆς διηλεκτρικῆς σταθερᾶς $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$.

Ἡ συνοριακή συνθήκη (3.58) ἤ (3.60) εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἐπιλογή τῆς αὐθαίρετης σταθερᾶς πού πάντα ὑπεισέρχεται στόν ὁρισμό τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ. Ἄν, ὅπως εἶναι φυσικό, ἐπιλέξουμε τό ἴδιο σημεῖο ἀναφορᾶς γιά τόν ὁρισμό τοῦ δυναμικοῦ στά ὑλικά 1 καί 2, μποροῦμε νά δείξουμε μιά ἀκόμη συνοριακή συνθήκη γιά τή συνάρτηση $\varphi(\mathbf{r})$

$$\varphi_1(\mathbf{r}_s)=\varphi_2(\mathbf{r}_s) \qquad (3.61)$$

ὅπου $\mathbf{r}_s$ εἶναι ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ἐπιφανείας μεταξύ τῶν ὑλικῶν. Μέ ἄλλα λόγια ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ εἶναι συνεχής στή διαχωριστική ἐπιφά-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

νεια δύο διηλεκτρικῶν. Ή ἐξ. (3.61) μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ἄν θεωρήσουμε τό γραμμικό ὁλοκλήρωμα

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

μεταξύ δύο σημείων r_1 καί r_2 ἀντίστοιχα στά ὑλικά 1 καί 2, κατά μιά διαδρομή πού τέμνει τήν ἐπιφάνεια στό σημεῖο r_s. Ή διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων r_1 καί r_2 εἶναι

$$\varphi_2(r_2) - \varphi_1(r_1) = -\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \ . \tag{3.62}$$

Στό ὅριο $r_1 \longrightarrow r_s$ καί $r_2 \longrightarrow r_s$ τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (3.62) τείνει πρός τό μηδέν καί ή ἐξ. (3.61) ἐπαληθεύεται.

Οἱ συνοριακές συνθῆκες τῶν ἐξ. (3.61) καί (3.58) ἤ (3.60) συμπληρώνουν τή διαφορική ἐξίσωση πού διέπει τό δυναμικό. Θά θεωρήσουμε τήν πλέον συνήθη περίπτωση ἰσοτροπικοῦ ὑλικοῦ πού διέπεται ἀπό τή σχέση

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{3.43}$$

ὅπου ή διηλεκτρική σταθερά μπορεῖ νά ἐξαρτᾶται ἀπό τίς συντεταγμένες. Στήν περίπτωση αὐτή ή ἐξ. (3.38) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\nabla\cdot(\varepsilon\,\mathbf{E}) = \left[\frac{1}{4\pi}\right] 4\pi\rho \tag{3.63}$$

ἤ, χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (2.41) ὡς

$$\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\varphi) = -\left[\frac{1}{4\pi}\right] 4\pi\rho. \tag{3.64}$$

Ή τελευταία ἐξίσωση, πού μποροῦμε νά ὀνομάσουμε **γενικευμένη ἐξίσωση Poisson,** εἶναι ἴσως χρήσιμο νά ξαναγραφεῖ στην πιό ἀναλυτική μορφή, ὡς μερική διαφορική ἐξίσωση,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\left[\frac{1}{4\pi}\right] 4\pi\rho \tag{3.65}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μποροῦμε τώρα, ὅπως καί στήν Παράγραφο 3-2, νά θέσουμε πάλι τό ἐξαιρετικά ἐνδιαφέρον ἐρώτημα: *Ποιές εἶναι οἱ ἀναγκαῖες καί ἱκανές συνθῆκες ὥστε ἡ γενικευμένη ἐξίσωση Poisson (3.65) νά ὁδηγεῖ σέ ἕνα μονοσήμαντο προσδιορισμό τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ* $\varphi(\mathbf{r})$. Ἡ ἀπάντηση, πού στήν περίπτωση αὐτή δέν θά ἀποδείξουμε μέ μαθηματική αὐστηρότητα, συμπίπτει μέ τή φυσική διαίσθηση μέ ὁδηγό τίς συνοριακές συνθῆκες τῶν ἐξ. (3.60) καί (3.61). Γιά ἕνα σύστημα ἐλεύθερων φορτίων, ἀγωγῶν καί ἰσοτροπικῶν διηλεκτρικῶν ὑλικῶν ἡ λύση τῆς ἐξ. (3.65) προσδιορίζεται μονοσήμαντα ἄν πέρα ἀπό τή γεωμετρία τοῦ συστήματος πού περιλαμβάνει τίς συναρτήσεις κατανομῆς ἐλεύθερου φορτίου $\rho(\mathbf{r})$ καί τῆς διηλεκτρικῆς σταθερᾶς $\varepsilon(\mathbf{r})$ σέ ὅλα τά διηλεκτρικά ὑλικά, προσδιορίζεται ἀρχικά:

1. Τό δυναμικό ἤ τό ὁλικό φορτίο κάθε ἀγωγοῦ. Ἄν προσδιορίζεται ἀρχικά τό δυναμικό ἔστω καί ἑνός ἀγωγοῦ, ἡ αὐθαίρετη σταθερά τοῦ δυναμικοῦ ἀπορρέει μονοσήμαντα ἀπό τή λύση τῆς ἐξ. (3.65).
2. Ἡ κατανομή ἐλεύθερου φορτίου στήν ἐπιφάνεια κάθε διηλεκτρικοῦ σώματος.

Μέ τήν ἐπίλυση τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ προβλήματος τά χαρακτηριστικά ἠλεκτρικά μεγέθη τοῦ συστήματος μποροῦν νά βρεθοῦν διαμέσου τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν καί τῆς γνωστῆς πλέον συναρτήσεως δυναμικοῦ. Π.χ. στή διαχωριστική ἐπιφάνεια μεταξύ ἀγωγοῦ καί διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ ἡ ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου δίνεται ἀπό τή συνοριακή συνθήκη τῆς ἐξ. (3.60)

$$\sigma = -\left[4\pi\right] \frac{1}{4\pi} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}\bigg|_{r_c} \tag{3.66}$$

ὅπου r_c εἶναι σημεῖο τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀγωγοῦ καί ἡ φορά τοῦ μοναδιαίου ἀνύσματος $\hat{\mathbf{n}}$ πρός τό διηλεκτρικό ὑλικό μέ διαπερατότητα ε. Τό ὁλικό φορτίο στήν ἐπιφάνεια S_c τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι

$$q = \int_{S_c} \sigma \, da = -\left[4\pi\right] \frac{1}{4\pi} \int_{S_c} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, da \tag{3.67}$$

ὅπου ἡ διαπερατότητα ε ἔχει παραμείνει μέσα στό ὁλοκλήρωμα καθόσον γενικά μπορεῖ νά ἐξαρτᾶται ἀπό τίς συντεταγμένες. Στήν περίπτωση ὁμογενοῦς ὑλικοῦ, ὅπου ὁ συντελεστής ε εἶναι μιά σταθερά, μπορεῖ νά βγεῖ ἔξω ἀπό τό ὁλοκλήρωμα καί ἡ ἐξ. (3.67) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$q = -[4\pi]\,\frac{1}{4\pi}\,\varepsilon \int_{S_c} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, da \ . \tag{3.68}$$

Γιά τή σημαντική αύτή κατηγορία διηλεκτρικῶν ύλικῶν ή γενικευμένη έξίσωση Poisson τῆς έξ. (3.64) ἤ (3.65) μπορεῖ έπίσης νά γραφεῖ στήν άπλούστερη μορφή

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\left[\ \frac{1}{4\pi}\ \right] \frac{4\pi}{\varepsilon}\,\rho \ . \tag{3.69}$$

Λόγω τῆς μεγάλης έφαρμογῆς τῆς τελευταίας σχέσεως ὁ ὅρος *έξίσωση Poisson* συνήθως άναφέρεται στήν έξ. (3.69).

Θά τελειώσουμε τήν άνασκόπιση τῆς συμπεριφορᾶς διηλεκτρικῶν ύλικῶν μέ τή θεώρηση μιᾶς είδικῆς κατηγορίας συστημάτων στά ὁποῖα ὁ χειρισμός τοῦ διηλεκτρικοῦ ύλικοῦ δέν έμφανίζει καμιά δυσκολία. Τά συστήματα αύτά εἶναι ήλεκτροστατικές διατάξεις ὅπου ἕνα καί μόνο ίσοτροπικό, γραμμικό καί ὁμογενές ύλικό καλύπτει ὅλο τό χῶρο. Τό διηλεκτρικό ύλικό μπορεῖ νά έκτείνεται στό ἄπειρο ἤ, έν πάσει περιπτώσει, οἱ διαστάσεις του νά εἶναι άρκετά μεγάλες ὥστε ή έπίδραση τῆς έπιφανειακῆς πυκνότητας δέσμιου φορτίου νά εἶναι άμελητέα στήν περιοχή ὅπου τό σύστημα παρουσιάζει ένδιαφέρον. Παρόμοια συμπεριφορά έμφανίζουν ήλεκτροστατικά συστήματα πού περικλείονται τελείως άπό έπιφάνεια άγωγοῦ ένῶ τό διηλεκτρικό ύλικό καλύπτει ὅλο τό χῶρο στό έσωτερικό τῆς έπιφανείας. Τά είδικά αύτά συστήματα έμφανίζονται άρκετά συχνά στό έργαστήριο καί στή φύση ὥστε νά δικαιολογοῦν ίδιαίτερη προσοχή. Στήν πράξη ὅλα τά πειράματα ήλεκτροστατικῆς πού διεξάγονται στό έργαστήριο άνήκουν στήν κατηγορία αύτή, ὅπου ὁ άτμοσφαιρικός άέρας εἶναι τό διηλεκτρικό ύλικό πού καλύπτει ὅλο τό χῶρο.

Μέ τίς παραπάνω προϋποθέσεις ή διαπερατότητα ε εἶναι μιά σταθερά άνεξάρτητη άπό τίς συντεταγμένες καί ή έξίσωση Poisson παίρνει τήν άπλή μορφή τῆς έξ. (3.69). Ἡ διαφορική αύτή έξίσωση ταυτίζεται μέ τήν άντίστοιχη έξίσωση Poisson στό κενό [βλ. έξ. (3.4)] γιά ἕνα ήλεκτροστατικό σύστημα μέ τήν ἴδια γεωμετρία άλλά πυκνότητα φορτίου μειωμένη κατά τό λόγο $[\varepsilon_0]/\varepsilon$. Κατά τόν ἴδιο τρόπο ή συνοριακή συνθήκη τῆς έξ. (3.66) εἶναι ή ἴδια γιά τό άντίστοιχο σύστημα στό κενό άλλά έπιφανειακή πυκνότητα έλεύθερου φορτίου μειωμένη κατά τόν ἴδιο λόγο $[\varepsilon_0]/\varepsilon$, ένῶ ή συνοριακή συνθήκη τῆς έξ. (3.61) εἶναι άνεξάρτητη άπό τήν ὕπαρξη τοῦ διηλεκτρικοῦ. Ἀπό τίς παρατηρήσεις αύτές ἕπεται ὅτι *ή λύση τοῦ συστήματος, τοῦ*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὁποίου ὅλος ὁ χῶρος καλύπτεται ἀπό ἕνα ἰσοτροπικό, γραμμικό καί ὁμογενές διηλεκτρικό ὑλικό, ταυτίζεται μέ τή λύση τοῦ ἴδιου συστήματος στό κενό ἄν ὅλα τά ἐλεύθερα φορτία μειωθοῦν κατά τό λόγο $[\varepsilon_0]/\varepsilon$.

Ὡς ἁπλό παράδειγμα συστήματος τῆς εἰδικῆς κατηγορίας πού μελετᾶμαι θά θεωρήσουμε ἕνα φορτίο q στό ἐσωτερικό ἑνός ἰσοτροπικοῦ, γραμμικοῦ καί ὁμογενοῦς διηλεκτρικοῦ μέ διαπερατότητα ε. Χρησιμοποιώντας τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (2.48) μποροῦμε νά γράψουμε τό δυναμικό τοῦ φορτίου q ὡς

$$\varphi(r) = \left[\frac{1}{4\pi}\right] \frac{q}{\varepsilon r} \tag{3.70}$$

ἐνῶ ἀπό τήν ἐξ. (2.20) τό ἠλεκτρικό πεδίο δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$\mathbf{E}(r) = \left[\frac{1}{4\pi}\right] \frac{q}{\varepsilon r^3} \mathbf{r} \ . \tag{3.71}$$

Ἡ γενίκευση τῶν ἐξ. (2.49) καί (2.18) εἶναι προφανής. Ἀπό τή σχέση $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ μποροῦμε νά γράψουμε ἀκόμη τήν ἠλεκτρική μετατόπιση ὡς

$$\mathbf{D} = \left[\frac{1}{4\pi}\right] \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \ . \tag{3.72}$$

Οἱ ἐξ. (3.70) – (3.72) βρίσκουν τόσο εὐρεία ἐφαρμογή ὥστε πολλές φορές ἡ περιορισμένη τους ἐφαρμογή στό εἰδικό σύστημα ἑνός ἰσοτροπικοῦ, γραμμικοῦ καί ὁμογενοῦς διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ παραβλέπεται. Στά πλαίσια αὐτά εἶναι ἴσως ἀκόμη χρήσιμο νά ἐπιστήσουμε τήν προσοχή τοῦ ἀναγνώστη στόν περιορισμένο χαρακτήρα τῆς «ἐξαγωγῆς» τῆς ἐξ. (3.72) καί ἐπομένως τῶν ἐξ. (3.71) καί (3.70) ἀπό τήν ἐξ. (3.39). Ἡ ἐξ. (3.72) δέν ἀπορρέει ἀπό τή σχέση

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \left[\frac{1}{4\pi}\right] 4\pi q \tag{3.39}$$

παρά μόνο στήν περίπτωση σφαιρικῆς συμμετρίας γύρω ἀπό τό φορτίο q, ὅπως στήν εἰδική περίπτωση πού θεωρήσαμε παραπάνω. Ἄν καί ἡ ἐξ. (3.39) ἰσχύει γενικά, ὅπως ἤδη ἀναφέραμε, τό ἄνυσμα **D** δέν εἶναι πάντα ἀστρόβιλο καί ὑπάρχει ἕνα ἄπειρο πλῆθος συναρτήσεων γιά τό ἠλεκτρικό πεδίο ἑνός σημειακοῦ φορτίου πού μπορεῖ νά τήν ἱκανοποιοῦν.

Ὅπως καί στό ὑπόλοιπο κεφάλαιο, κατά τή μελέτη τῆς συμπεριφορᾶς τῶν διηλεκτρικῶν ὑλικῶν χρησιμοποιήσαμε τή σύμβαση τῶν ἀγκυλῶν γιά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-2 Βασικές σχέσεις καί όρισμοί σέ ήλεκτροστατικά συστήματα διηλεκτρικών ύλικών στά συστήματα μονάδων CGS καί SI.

	CGS	SI
Ήλεκτρική πόλωση (ήλεκτρική διπολική ροπή άνά μονάδα όγκου)	$\mathbf{P} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{d^3r}$	
Δυναμικό πολώσεως	$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3} d^3r' = \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{a}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} - \int_V \frac{\nabla'\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} d^3r'$	$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3} d^3r' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{a}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\nabla'\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} d^3r$
Πυκνότητα δέσμιου φορτίου	$\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$, $\rho_p = -\nabla\cdot\mathbf{P}$	
Νόμος τοῦ Gauss: — μορφή ὁλοκληρώματος	$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = 4\pi(q+q_p)$	$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q+q_p)$
— διαφορική μορφή	$\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi(\rho+\rho_p)$	$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho+\rho_p)$
Ήλεκτρική μετατόπιση	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$

	CGS	SI
Νόμος τοῦ Gauss γιά τήν ἠλεκτρική μετατόπιση:		
– μορφή ὁλοκληρώματος	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi q$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = q$
– διαφορική μορφή	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$
Ἠλεκτρική ἐπιδεκτικότητα	$\mathbf{P} = \chi_e(E)\mathbf{E}$	
Διηλεκτρική σταθερά ἤ διαπερατότητα	$\mathbf{D} = \varepsilon(E)\mathbf{E}$	
Σύνδεση χ_e καί ε	$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e$	$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi_e$
Εἰδική διηλεκτρική σταθερά		$K_e \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\chi_e}{\varepsilon_0}$
Ἐξίσωση Poisson	$\nabla^2\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi(\rho+\rho_p)$	$\nabla^2\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho+\rho_p)$
Ὁριακές συνθῆκες:		
– ἠλεκτρικό πεδίο	$(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{n}} = 0$	
	$(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi(\sigma+\sigma_p)$	$(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma+\sigma_p)$
– ἠλεκτρική μετατόπιση	$(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma$	$(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma$
– ἠλεκτρική πόλωση	$(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\sigma_p$	

	CGS	SI
– δυναμικό (ισοτροπικά υλικά)	$\varphi_1(r_s) = \varphi_2(r_s)$ $-\varepsilon_2 \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right\|_{r_s} + \varepsilon_1 \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right\|_{r_s} = 4\pi\sigma$	$-\varepsilon_2 \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right\|_{r_s} + \varepsilon_1 \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right\|_{r_s} = \sigma$
Εξίσωση Poisson γιά όμογενές, ισοτροπικό διηλεκτρικό ύλικό	$\nabla^2\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$	$\nabla^2\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho$
Επιφανειακή πυκνότητα ελεύθερου φορτίου στήν επιφάνεια άγωγοῦ	$\sigma = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\|_{r_c}$	$\sigma = \varepsilon \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\|_{r_c}$
Ολικό ελεύθερο φορτίο άγωγοῦ	$q = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{s_c} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, da$	$q = -\varepsilon \int_{s_c} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, da$
Ειδική περίπτωση ελεύθερου φορτίου σέ ισοτροπικό, γραμμικό καί όμογενές διηλεκτρικό ύλικό μέ άπειρη έκταση:		
– ηλεκτρικό δυναμικό	$\varphi(r) = \frac{q}{\varepsilon r}$	$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r}$
– ηλεκτρικό πεδίο	$\mathbf{E}(r) = \frac{q}{\varepsilon r^3}\mathbf{r}$	$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^3}\mathbf{r}$
ηλεκτρική μετατόπιση	$\mathbf{D}(r) = \frac{q}{r^3}\mathbf{r}$	$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^3}\mathbf{r}$

τήν ἐνιαία ἔκφραση τῶν ἐξισώσεων στά δύο συστήματα μονάδων. Ἡ πρακτική αὐτή συσκοτίζει λίγο τήν ἁπλότητα καί κομψότητα τῶν ἐξισώσεων. Γιά τό λόγο αὐτό οἱ κυριώτερες σχέσεις τῶν παραγράφων 3-4, 3-5 καί 3-6 συνοψίζονται στόν Πίνακα 3-2 σέ ξεχωριστή μορφή γιά τά δύο συστήματα μονάδων.

3-7 Ἐνέργεια τοῦ Ἠλεκτροστατικοῦ Πεδίου

Στήν Παράγραφο 2-4 ἐξετάσαμε τήν ἐνέργεια συνδέσεως πού περικλείεται σέ ἕνα σύστημα ἐλεύθερων στατικῶν φορτίων. Θεωρώντας τό ἔργο πού καταναλώνεται κατά τή συγκρότηση τοῦ συστήματος μέ σταδιακή μεταφορά ἐλεύθερων φορτίων, τά ὁποῖα ἀντλοῦνται ἀπό μιά ἀστείρευτη πηγή σέ ἄπειρη ἀπόσταση, καταλήξαμε στήν ἔκφραση

$$W = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{q_j q_k}{|r_k - r_j|} \tag{2.33}$$

πού μέ τίς μετέπειτα γνώσεις μας μποροῦμε νά γράψουμε στήν ἰσοδύναμη μορφή

$$W = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} q_j \varphi_{-j}(r_j) \ . \tag{3.73}$$

Στήν τελευταία σχέση

$$\varphi_{-j}(r) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{q_k}{|r_k - r|} \tag{3.74}$$

εἶναι τό δυναμικό πού δημιουργοῦν ὅλα τά φορτία πλήν τοῦ φορτίου q_j.

Οἱ ἐξ. (2.33) καί (3.73) μποροῦν εὔκολα νά γενικευτοῦν στήν περίπτωση συνεχοῦς κατανομῆς ἐλεύθερου φορτίου πού ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τήν συνάρτηση τῆς πυκνότητας $\rho(r)$. Μεταβάλλοντος τό διπλό ἄθροισμα στήν ἐξ. (2.33) σέ διπλό ὁλοκλήρωμα μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἠλεκτροστατική ἐνέργεια ὡς

$$W = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \frac{1}{2} \int_V \int \frac{\rho(r)\rho(r')}{|r - r'|} \, d^3r d^3r' \tag{3.75}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἤ σέ ἀντιστοιχία μέ τήν ἐξ. (3.73) [βλ. ἐξ. (2.49)] ὡς

$$W = \tfrac{1}{2} \int_V \rho(r)\varphi(r)d^3r \tag{3.76}$$

ὅπου ἡ ὁλοκλήρωση στίς δύο τελευταῖες ἐκφράσεις καλύπτει ἀρκετό χῶρο V ὥστε νά περιλαμβάνει ὅλη τήν κατανομή φορτίου. Οἱ ἐξ. (3.73) καί (3.76) ἐκφράζουν τήν ἠλεκτροστατική ἐνέργεια τοῦ συστήματος μέ ἔμφαση στήν κατανομή τοῦ φορτίου καί τήν ἀλληλεπίδραση μεταξύ τῶν στοιχειωδῶν φορτίων μέ τίς δυνάμεις Coulomb. Ἐναλλακτικά μποροῦμε νά μεταθέσουμε τήν ἔμφαση στό ἠλεκτρικό πεδίο καί νά ἐξάγουμε μιά ἰσοδύναμη ἔκφραση τῆς ἐνεργείας ὡς συνάρτηση τοῦ ἀνύσματος **E**.

Χρησιμοποιώντας τήν ἐξίσωση Poisson γιά τό σκοπό αὐτό, ἡ ἐξ. (3.76) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$W = -\left[4\pi\varepsilon_0\right] \frac{1}{8\pi} \int_V \varphi \nabla^2\varphi d^3r \ . \tag{3.77}$$

Ἡ τελευταία σχέση μπορεῖ νά πάρει μιά πλέον χρήσιμη μορφή ἄν χρησιμοποιήσουμε τό θεώρημα τοῦ Green τῆς ἐξ. (2.27)

$$\oint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{G}\, d^3r. \tag{2.27}$$

Γιά τό ἄνυσμα

$$\mathbf{G} = \varphi \nabla \varphi$$

ἡ ἐξ. (2.27) παίρνει τή μορφή

$$\oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) d^3r. \tag{3.78}$$

Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τήν ταυτότητα τοῦ ἀνυσματικοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ

$$\nabla \cdot (f\nabla g) = \nabla\varphi \cdot \nabla g + f\nabla^2 g \tag{3.79}$$

μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἐξ. (3.78) ὡς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\oint_S \varphi \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_V |\nabla\varphi|^2 d^3r + \int_V \varphi \nabla^2\varphi d^3r \ . \qquad (3.80)$$

Τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (3.77) μπορεῖ ἐπομένως νά γραφεῖ ὡς

$$W = [4\pi\varepsilon_0] \frac{1}{8\pi} \int_V |\nabla^2\varphi| d^3r - [4\pi\varepsilon_0] \frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\alpha}$$

$$= [4\pi\varepsilon_0] \frac{1}{8\pi} \int_V |\mathbf{E}|^2 d^3r + [4\pi\varepsilon_0] \frac{1}{8\pi} \int_S \varphi \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\alpha} \qquad (3.81)$$

ὅπου στό τελευταῖο σκέλος τῆς ἐξ. (3.81) ἔχει χρησιμοποιηθεῖ ἡ σύνδεση ἠλεκτρικοῦ πεδίου καί δυναμικοῦ $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Στήν τελευταία ἔκφραση τό πρῶτο ὁλοκλήρωμα καλύπτει τό χῶρο V ὅπου τό ἠλεκτρικό πεδίο ἔχει πεπερασμένη τιμή ἐνῶ τό δεύτερο τήν ἐπιφάνεια S πού περιβάλλει τό σύστημα. Καθόσον τό δυναμικό φ φθήνει τουλάχιστον ὡς πρός τήν πρώτη δύναμη τῆς ἀποστάσεως ἐνῶ τό πεδίο **E** τουλάχιστον ὡς πρός τό τετράγωνο τῆς ἀποστάσεως εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι γιά ἀρκετά μεγάλη ἔκταση τοῦ χώρου V τό δεύτερο ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (3.81) μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ἀμελητέο. Ἡ ἠλεκτροστατική ἐνέργεια τοῦ πεδίου μπορεῖ ἐπομένως νά ἐκφραστεῖ ἀποκλειστικά ὡς συνάρτηση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ὡς

$$W = [4\pi\varepsilon_0] \frac{1}{8\pi} \int_V |\mathbf{E}|^2 d^3r \ . \qquad (3.82)$$

Ἡ τελευταία σχέση ὁδηγεῖ στήν ἔννοια τῆς **πυκνότητας ἐνέργειας**

$$w = [4\pi\varepsilon_0] \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}|^2 \qquad (3.83)$$

πού μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὡς ἀποθηκευμένη στό ἠλεκτρικό πεδίο, χωρίς πλέον ἀναφορά στήν κατανομή φορτίου.

Εἶναι βέβαιο ὅτι οἱ ἐξ. (3.76) καί (3.82) δέν εἶναι δυνατόν νά μεταφερθοῦν ἀτόφιες σέ πλέον πολύπλοκα συστήματα πού, μεταξύ ἄλλων, περιέχουν διηλεκτρικά ὑλικά. Γιά τήν ἐξαγωγή τῶν παραπάνω σχέσεων θεωρήσαμε τή σταδιακή συγκέντρωση τῶν φορτίων ἀπό πολύ μεγάλη ἀπόσταση καί ὑπολογίσαμε τό ἔργο πού καταναλώνεται κατά τήν ἀλληλεπίδραση τῶν φορτίων πού προσκομίζονται μέ τά ἤδη ὑπάρχοντα φορτία στό χῶρο. Τό ὁλικό ἔργο πού καταναλώνεται μέ τή διεργασία αὐτή δίνεται ἐναλλακτικά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἀπό τίς ἐξ. (3.76) καί (3.82). Ἄν τό σύστημα περιέχει διηλεκτρικά ὑλικά τό ἔργο πού καταναλώνεται δέν ἀφορᾶ μόνο στή μεταφορά ἐλεύθερων φορτίων ἀπό τό ἄπειρο ἀλλά καί στή δημιουργία πολώσεως τοῦ ὑλικοῦ. Ἄν $\rho(\mathbf{r})$ εἶναι ἡ τελική κατανομή φορτίου, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ καί $\varphi(\mathbf{r})$ ἀντίστοιχα τό μακροσκοπικό ἡλεκτρικό πεδίο καί δυναμικό, δέν εἶναι ἐκ πρώτης ὄψεως προφανές ὅτι οἱ ἐξ. (3.76) καί (3.82) ἀντιπροσωπεύουν καί στήν περίπτωση αὐτή τό ὁλικό ἔργο γιά τή δημιουργία τῆς τελικῆς καταστάσεως.

Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς ἐνεργείας πού περιέχεται στήν τελική κατάσταση θά θεωρήσουμε τό ἔργο δW πού συνεπάγεται ἡ μεταβολή τῆς κατανομῆς φορτίου κατά μιά ἀπειροελάχιστη ποσότητα $\delta\rho$ μέ ἀντίστοιχη μεταφορά φορτίου ἀπό ἄπειρη ἀπόσταση σέ κάποιο στάδιο δημιουργίας τοῦ συστήματος. Τό ἔργο πού ἀπαιτεῖται γιά τή μεταβολή αὐτή εἶναι

$$\delta W = \int \delta\rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\, d^3r \tag{3.84}$$

ὅπου $\varphi(\mathbf{r})$ εἶναι τό δυναμικό πού δημιουργεῖ ἡ ἤδη ὑπάρχουσα κατανομή $\rho(\mathbf{r})$. Μέ τή σχέση τῆς ἐξ. (3.38)

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \left[\frac{1}{4\pi}\right] 4\pi\rho \tag{3.38}$$

μποροῦμε νά συνδέσουμε τή μεταβολή τῆς πυκνότητας φορτίου $\delta\rho$ καί τή μεταβολή τῆς ἡλεκτρικῆς μετατοπίσεως $\delta\mathbf{D}$

$$\delta\rho = [4\pi]\,\frac{1}{4\pi}\,\nabla\cdot(\delta\mathbf{D})\ . \tag{3.85}$$

Ἡ μεταβολή τῆς ἐνέργειας τοῦ συστήματος στήν ἐξ. (3.84) εἶναι ἐπομένως

$$\delta W = [4\pi]\,\frac{1}{4\pi}\int \varphi\nabla\cdot\delta\mathbf{D}\, d^3r\ . \tag{3.86}$$

Ὅπως καί κατά τήν ἐξαγωγή τῆς ἐξ. (3.82) μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τό θεώρημα τοῦ Green [βλ. ἐξ. (3.78)] γιά νά μετατρέψουμε τήν ἐξ. (3.86) σέ ἕνα ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα μέ ἀμελητέα συνεισφορά καί στό ὁλοκλήρωμα

$$\delta W = -[4\pi]\,\frac{1}{4\pi}\int \nabla\varphi\cdot\delta\mathbf{D}\, d^3r$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= [4\pi] \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}\delta^3 r \qquad (3.87)$$

ὅπου στό τελευταῖο βῆμα χρησιμοποιήθηκε πάλι ἡ σχέση $\mathbf{E} = \nabla\varphi$. Ἡ ὁλική τώρα ἐνέργεια τοῦ συστήματος μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ ὁλοκλήρωση τῆς ἐξ. (3.87) ἀπό τήν ἀρχική τιμή $\mathbf{D}=0$ ὡς τήν τελική τιμή τῆς ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως $\mathbf{D}$, ἤτοι

$$W = \int_0^D \delta W = [4\pi] \frac{1}{4\pi} \int d^3 r \int_0^D \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}. \qquad (3.88)$$

Γιά νά πραγματοποιήσουμε τήν ὁλοκλήρωση τῆς ἐξ. (3.88) θά πρέπει νά δεχτοῦμε κάποια συναρτησιακή σχέση μεταξύ τῶν ἀνυσμάτων $\mathbf{E}$ καί $\mathbf{D}$. Στήν περίπτωση ὅπου τό διηλεκτρικό ὑλικό εἶναι γραμμικό ἰσχύει ἡ σχέση

$$\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D} = \tfrac{1}{2}\,\delta(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) \qquad (3.89)$$

καί τό τελευταῖο ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (3.88) μπορεῖ νά μεταβληθεῖ σέ πλῆρες διαφορικό μέ ἀποτέλεσμα

$$W = [4\pi] \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} d^3 r \qquad (3.90)$$

Τό τελευταῖο ἀποτέλεσμα μετατρέπεται στήν ἔκφραση τῆς ἐξ. (3.76) ἄν χρησιμοποιήσουμε τίς σχέσεις $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ καί $\nabla\cdot\mathbf{D} = [1/4\pi]\ 4\pi\rho$. Μέ ἄλλα λόγια ἡ ἐξ. (3.76) ἐκφράζει σωστά τήν ἐνέργεια ἑνός συστήματος πού περιέχει διηλεκτρικά ὑλικά ἀλλά μόνο στήν περίπτωση ὅπου τά διηλεκτρικά εἶναι γραμμικά. Στήν ἀντίθετη περίπτωση ἡ ἐνέργεια τοῦ συστήματος πρέπει νά ὑπολογιστεῖ ἀπό τήν ἐξ. (3.88) ἀφοῦ προηγουμένως προσδιοριστεῖ ἡ ἐξάρτηση τῆς ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως ἀπό τό ἠλεκτρικό πεδίο.

3-8 Χωρητικότητα καί Πυκνωτές

Ἡ γενική ἐξίσωση (3.76), πού ἐκφράζει τήν ἀποθηκευμένη ἐνέργεια σέ μιά κατανομή φορτίου, μπορεῖ νά ἐξειδικευτεῖ στήν περίπτωση ἑνός ἀγωγοῦ, ὅπου τό φορτίο κατανέμεται ἀποκλειστικά στήν ἐπιφάνεια, ὡς

$$W = \tfrac{1}{2} \int_S \sigma(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) da\ . \qquad (3.91)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στήν τελευταία σχέση τό ἄνυσμα **r** διατρέχει τά σημεῖα τῆς ἐπιφανείας S τοῦ ἀγωγοῦ, ἐνῶ da εἶναι τό στοιχειῶδες ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας. Καθόσον ἡ ἐπιφάνεια ἑνός ἀγωγοῦ εἶναι πάντα ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια, ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ φ(r) μπορεῖ νά βγεῖ ἔξω ἀπό τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (3.91), μέ ἀποτέλεσμα ἡ ἐνέργεια τοῦ ἀγωγοῦ νά πάρει τήν ἁπλή μορφή

$$W = \tfrac{1}{2}\, QV \tag{3.92}$$

ὅπου V ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ στήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ καί Q τό ὁλικό ἐλεύθερο φορτίο πού διαθέτει ὁ ἀγωγός.

Τό φορτίο Q καί τό δυναμικό V ἑνός ἀγωγοῦ δέν εἶναι ἀνεξάρτητες ποσότητες. Ὅπως εἴδαμε στήν Παράγραφο 3-2 τό ὁλικό φορτίο ἑνός ἀγωγοῦ συνδέεται μέ τή συνοριακή συνθήκη τῆς ἐξ. (3.7) πρός τό ρυθμό μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ στήν ἄμεση γειτονία τοῦ ἀγωγοῦ

$$Q = -\left[4\pi\varepsilon_0\right]\frac{1}{4\pi}\int_S \nabla\varphi\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da = -\left[4\pi\varepsilon_0\right]\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,da \tag{3.93}$$

ὅπου n εἶναι ἡ κάθετη διεύθυνση πρός τήν ἐπιφάνεια S τοῦ ἀγωγοῦ καί $\hat{\mathbf{n}}$ τό μοναδιαῖο ἄνυσμα πρός τή διεύθυνση αὐτή. Στό ἐξωτερικό χῶρο τοῦ ἀγωγοῦ ἐξάλλου ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ προκύπτει ἀπό τή λύση τῆς ἐξισώσεως Laplace

$$\nabla^2\varphi = 0. \tag{3.94}$$

Καθόσον ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι γραμμική, ἄν μιά συγκεκριμένη συνάρτηση φ(r) ἀποτελεῖ λύση της, τότε καί ὁποιοδήποτε σταθερό πολλαπλάσιο τῆς συναρτήσεως αὐτῆς αφ(r) ἀποτελεῖ ἐπίσης λύση. Ἀπό τήν ἐξ. (3.93) τώρα προκύπτει ὅτι γιά τή νέα λύση αφ(r) τό ὁλικό φορτίο τοῦ ἀγωγοῦ θά εἶναι αQ. Μέ ἄλλα λόγια τό φορτίο ἑνός ἀγωγοῦ καί τό δυναμικό του V εἶναι ἀνάλογες ποσότητες καί μποροῦμε γενικά νά γράψουμε

$$Q = CV \tag{3.95}$$

ὅπου C ἕνας σταθερός συντελεστής ἀναλογίας πού θά ὀνομάσουμε **χωρητικότητα τοῦ ἀγωγοῦ.** Ἀπό τήν προηγούμενη ἀνάλυση εἶναι προφανές ὅτι ὁ συντελεστής C ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τή γεωμετρία τοῦ ἀγωγοῦ. Μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (3.95) ἡ ἐνέργεια πού ἔχει ἀποθηκευτεῖ στόν ἀγωγό μπορεῖ τώρα νά γραφεῖ ὡς συνάρτηση τῆς χωρητικότητας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$W = \tfrac{1}{2} QV = \tfrac{1}{2} CV^2 = \tfrac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \ . \qquad (3.96)$$

Ὁ προηγούμενος ὁρισμός τῆς χωρητικότητας ἑνός ἀγωγοῦ περιέχει τήν ἀσάφεια πού συνεπάγεται ἡ αὐθαίρετη ἐπιλογή τοῦ σημείου ἀναφορᾶς στόν ὁρισμό τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ. Ἡ ἀσάφεια μπορεῖ νά ἀρθεῖ ἄν ὁ ὁρισμός τῆς ἐξ. (3.95) συμπληρωθεῖ μέ τή συνθήκη ὅτι ὡς σημεῖο ἀναφορᾶς τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ ἔχει ληφθεῖ ἕνα σημεῖο στό ἄπειρο. Τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμο μέ τήν ἐπιβολή τῆς πρακτικότερης συνθήκης ὅτι μηδενικό φορτίο στόν ἀγωγό συνεπάγεται δυναμικό $V = 0$.

Ἡ ἔννοια τῆς χωρητικότητας βρίσκει μεγάλη ἐφαρμογή στήν περίπτωση ἑνός συστήματος δύο ἀγωγῶν. Θά ὀνομάσουμε ἕνα τέτοιο σύστημα δύο ἀγωγῶν μέ ὁποιαδήποτε γεωμετρία **πυκνωτή,** ἐνῶ καθένα ἀπό τούς δύο ἀγωγούς τοῦ συστήματος **ὁπλισμούς** τοῦ πυκνωτῆ. Ἄν τό σύστημα βρίσκεται μέ μηδενικό φορτίο στόν κατά τά ἄλλα ἐλεύθερο χῶρο, τό δυναμικό τῶν δύο ὁπλισμῶν συμπίπτει καί ἡ μεταξύ τους διαφορά δυναμικοῦ ΔV μηδενίζεται. Ἄν τώρα μιά ποσότητα ἠλεκτρικοῦ φορτίου Q μεταφερθεῖ ἀπό τόν ἕνα ὁπλισμό στόν ἄλλο θά ἀναπτυχθεῖ μεταξύ τους μιά πεπερασμένη διαφορά δυναμικοῦ ΔV. Χρησιμοποιώντας τή συνοριακή συνθήκη τῆς ἐξ. (3.93) ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά δείξει ὅτι στήν περίπτωση αὐτή οἱ ποσότητες Q καί ΔV εἶναι ἀνάλογες. Θά ὁρίσουμε ἑπομένως τή **χωρητικότητα ἑνός πυκνωτῆ** ὡς

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad (3.97)$$

ὅπου πάλι ὁ συντελεστής ἀναλογίας C ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικά ἀπό τή γεωμετρία τοῦ πυκνωτῆ.

Στό σύστημα CGS ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς χωρητικότητας εἶναι ἡ ΗΣΜ–φ/statvolt. Εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι ἡ χωρητικότητα ἔχει διαστάσεις μήκους καί ὅτι

$$1 \ \frac{\text{ΗΣΜ–φ}}{\text{statvolt}} = 1 \text{ cm} \ . \qquad (3.98)$$

Ἡ ἀντίστοιχη μονάδα στό σύστημα SI εἶναι τό volt/coulomb, ἡ ὁποία, πρός τιμή τοῦ ἄγγλου φυσικοῦ Michael Faraday, ἔχει ὀνομαστεῖ **farad** (F)

$$1 \text{ F} = 1 \ \frac{\text{C}}{\text{V}} \ . \qquad (3.99)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ σύνδεση μεταξύ τῶν δύο μονάδων δίνεται ἀπό τή σχέση

$$1\ F = 10^{9}\ c^{2}\ cm = 9 \times 10^{11}\ cm \qquad (3.100)$$

ὅπου ὅπως πάντα c εἶναι ἡ τιμή τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός στό σύστημα CGS.

Στά ἑπόμενα κεφάλαια θά ἀσχοληθοῦμε σέ μεγάλη ἔκταση μέ τό μέγεθος τῆς χωρητικότητας καί τή συμπεριφορά τῶν πυκνωτῶν σέ κυκλώματα μέ τεχνολογικό ἐνδιαφέρον. Ὡς ἐξαρτήματα κυκλωμάτων οἱ πυκνωτές θά μελετηθοῦν στήν Παράγραφο 14-6.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3-1. Σέ ἕνα κλασσικό πείραμα τῶν πρώτων χρόνων τῆς ἠλεκτροδυναμικῆς ὁ Faraday χρησιμοποίησε τήν ἑξῆς διάταξη γιά τή μελέτη τῆς συμπεριφορᾶς τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου στή γειτονία ἀγωγῶν: Σέ ἕνα κλειστό μεταλλικό δοχεῖο, ἀρχικά ἀφόρτιστο καί μονωμένο, ἐκτός ἀπό ἕνα ἀγωγό πού ἦταν συνδεδεμένος μέ ἕνα ἠλεκτροσκόπιο†, εἰσήγαγε μιά μεταλλική σφαίρα ἀναρτημένη ἀπό μία κλωστή. Χρησιμοποιεῖστε τήν ἀνάλυση τῆς Παραγράφου 3-1 γιά τήν πρόβλεψη καί ἑξήγηση τῶν ἀποτελεσμάτων στίς ἀκόλουθες διεργασίες.
(α) Ἡ φορτισμένη σφαίρα εἰσάγεται στό μεταλλικό δοχεῖο χωρίς νά ἀγγίζει τά τοιχώματα. Ποιά εἶναι ἡ ἀπόκλιση τοῦ ἠλεκτροσκοπίου;
(β) Ἡ φορτισμένη σφαίρα ἔρχεται σέ ἐπαφή μέ τά τοιχώματα τοῦ μεταλλικοῦ δοχείου. Πῶς μεταβάλλεται ἡ ἔνδειξη τοῦ ἠλεκτροσκοπίου;
(γ) Μετά τήν προηγούμενη διεργασία ἡ σφαίρα ἀπομακρύνεται ἀπό τό ἐσωτερικό τοῦ μεταλλικοῦ δοχείου καί τό ἠλεκτρικό της φορτίο μετρᾶται. Ποιό εἶναι τό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως;

3-2. Δεῖξτε μέ ἀπευθείας παραγώγηση σέ ὀρθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες ὅτι ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ γιά ἕνα μεμονωμένο σημειακό φορτίο στό χῶρο ἱκανοποιεῖ παντοῦ τήν ἐξίσωση Laplace, ἐκτός ἀπό τό σημεῖο ὅπου βρίσκεται τό φορτίο.

3-3. Δεῖξτε ὅτι γιά μιά σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου $\rho(r)$, γιά τήν ὁποία ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ ἔχει ἐπίσης σφαιρικά συμμετρική μορφή $\varphi(r)$, ἡ ἐξίσωση Poisson παίρνει τή μορφή

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = -\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 4\pi\rho$$

† Τό *ἠλεκτροσκόπιο*, πού δέν μελετᾶται στό παρόν σύγραμμα, εἶναι ἕνα ὄργανο μέ ἔνδειξη ἀνάλογη πρός τό δυναμικό τοῦ σημείου μέ τό ὁποῖο συνδέεται.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου r εἶναι ἡ ἀπόσταση ἀπό τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ .$$

3-4. Ἀπό τό ἀποτέλεσμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως προσδιορίστε τή γενική μορφή τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ στό ἐσωτερικό τῆς σφαιρικά συμμετρικῆς κατανομῆς

$$\rho(r) = kr$$

ὅπου k εἶναι μιά σταθερά. Ἑρμηνεῦστε τή φυσική σημασία τῶν σταθερῶν πού προκύπτουν κατά τήν ὁλοκλήρωση.

3-5. Θεωρεῖστε στόν κενό χῶρο μιά κατανομή φορτίου μέ ἀξονική συμμετρία κατά τόν ἄξονα x. Ἄν στό σημεῖο x_0 τοῦ ἄξονα x τό ἠλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται καί στή γειτονία του δέν ὑπάρχουν ἠλεκτρικά φορτία, δεῖξτε μέ τή βοήθεια τῆς ἐξισώσεως Laplace ὅτι ἄν ἡ συνάρτηση ἀναπτυχθεῖ σέ σειρά Taylor γύρω ἀπό τό σημεῖο x_0, ὁ ὅρος δεύτερης τάξης εἶναι

$$\varphi^2 = A(2x^2 - y^2 - z^2) + B$$

ὅπου A καί B εἶναι σταθερές.

3-6. Δεῖξτε μέ ἀπευθείας ὁλοκλήρωση ὅτι ἡ γενική μορφή τῆς σφαιρικά συμμετρικῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ πού ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση Laplace εἶναι

$$\varphi(r) = \frac{A}{r} + B$$

ὅπου A καί B εἶναι σταθερές.

3-7. Θεωρεῖστε δύο ὁμοκεντρικά μεταλλικά κελύφη μέ ἀκτῖνες a καί b ὅπου $a<b$. Τό ἐσωτερικό κέλυφος ἔχει φορτίο q ἐνῶ τό ἐξωτερικό εἶναι γειωμένο (διατηρεῖται σέ μηδενικό δυναμικό). Χρησιμοποιεῖστε τό ἀποτέλεσμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως γιά νά προσδιορίσετε τή συνάρτηση δυναμικοῦ στό χῶρο μεταξύ τῶν δύο ἀγωγῶν.

3-8. Ἕνα φορτίο q βρίσκεται στό ἐσωτερικό μιᾶς ὀρθῆς στερεᾶς γωνίας πού δημιουργοῦν δύο μεταλλικές ἐπίπεδες ἐπιφάνειες μέ ἡμιάπειρες διαστάσεις καί σέ ἀπόσταση a καί b ἀπό τά δύο ἐπίπεδα. Ἄν τά δύο μεταλλικά ἐπίπεδα εἶναι γειωμένα προσδιορίστε μέ τή μέθοδο τῶν ἠλεκτροστατικῶν εἰδώλων τή συνάρτηση δυναμικοῦ στό χῶρο ὅπου βρίσκεται τό φορτίο q. Ἐκφράστε τή συνάρτηση δυναμικοῦ σέ καρτεσιανές συντεταγμένες.

3-9. Ἀπό τά ἀποτελέσματα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως ὑπολογίστε τήν κατανομή φορτίου στίς δύο μεταλλικές ἐπιφάνειες πού ὀφείλεται στήν ὕπαρξη


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τοῦ φορτίου q. Ποιά εἶναι ἡ πυκνότητα φορτίου στήν ἀκμή τῆς ὀρθῆς γωνίας πού σχηματίζουν οἱ δύο μεταλλικές ἐπιφάνειες;

3-10. Δύο γειωμένες μεταλλικές ἐπιφάνειες μέ ἡμιάπειρες διαστάσεις σχηματίζουν ὀρθή στερεά γωνία. Προσδιορίστε τήν κατανομή σημειακῶν φορτίων πού πρέπει νά τοποθετηθεῖ στό ἐξωτερικό τῆς στερεᾶς γωνίας ὥστε τό ἐπιφανειακό φορτίο πού δημιουργεῖται στίς δύο ἐπιφάνειες νά ἀντισταθμίζει τό ἐπιφανειακό φορτίο πού δημιουργεῖ ἕνα σημειακό φορτίο q στό ἐσωτερικό τῆς στερεᾶς γωνίας καί σέ ἀπόσταση a καί b ἀπό τίς δύο μεταλλικές ἐπιφάνειες.

3-11. Ἕνα σημειακό φορτίο q_1 βρίσκεται σέ ἀπόσταση R_1 ἀπό τό κέντρο μιᾶς μονωμένης, ἀφόρτιστης μεταλλικῆς σφαίρας μέ ἀκτίνα R, ὅπου $R > R_1$.

(α) Χρησιμοποιώντας σύστημα σφαιρικῶν πολικῶν συντεταγμένων μέ ἀρχή τῶν συντεταγμένων τό κέντρο τῆς σφαίρας, ἐκφράστε τή συνάρτηση δυναμικοῦ σέ κάθε σημεῖο τοῦ χώρου ἔξω ἀπό τή σφαίρα.

(β) Χρησιμοποιεῖστε τήν προηγούμενη συνάρτηση δυναμικοῦ γιά νά προσδιορίσετε τήν ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου στή μεταλλική σφαίρα.

3-12. Μιά εὐθεία κατανομή φορτίου μέ ἄπειρες διαστάσεις καί πυκνότητα 10^{9} C/m εἶναι στόν κενό χῶρο παράλληλη πρός ἕνα γειωμένο μονωμένο μεταλλικό ἐπίπεδο ἐπίσης μέ ἄπειρες διαστάσεις.

(α) Προσδιορίστε τή συνάρτηση δυναμικοῦ στό χῶρο πού περιέχει τή γραμμική κατανομή φορτίου.

(β) Προσδιορίστε τήν ἐπιφανειακή κατανομή φορτίου σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς μεταλλικῆς ἐπιφανείας.

3-13. Μιά εὐθεία γραμμική κατανομή φορτίου μέ ἄπειρες διαστάσεις καί πυκνότητα 10^{9} C/m εἶναι στόν κενό χῶρο παράλληλη πρός ἕνα γειωμένο μεταλλικό κύλινδρο ἐπίσης μέ ἄπειρες διαστάσεις. Ἄν ἡ ἀκτίνα τοῦ κυλίνδρου εἶναι 2 cm καί ἡ ἀπόσταση τῆς γραμμικῆς κατανομῆς φορτίου ἀπό τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου 3 cm

(α) Προσδιορίστε, χρησιμοποιώντας κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες μέ ἄξονα τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, τή συνάρτηση δυναμικοῦ σέ ὅλο τό χῶρο ἔξω ἀπό τό μεταλλικό κύλινδρο.

(β) Προσδιορίστε τήν πυκνότητα φορτίου σέ κάθε σημεῖο τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

(γ) Προσδιορίστε τό φορτίο πού δημιουργεῖ ἡ γραμμική κατανομή ἀνά μονάδα μήκους τοῦ κυλίνδρου.

3-14. Μιά εὐθεία γραμμική κατανομή φορτίου μέ ἄπειρες διαστάσεις βρίσκεται στό ἐσωτερικό ἑνός γειωμένου κοίλου μεταλλικοῦ κυλίνδρου μέ ἐσωτερική διάμετρο R καί ἐπίσης ἄπειρες διαστάσεις κατά τόν ἄξονά του. Ἡ γραμμική κατανομή φορτίου εἶναι παράλληλη πρός καί σέ ἀπόσταση r ἀπό τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Προσδιορίστε τή συνάρτηση δυναμικοῦ γιά κάθε σημεῖο στήν κοιλότητα τοῦ κυλίνδρου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3-15. Γιά ἕνα δίπολο p στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων καί μέ διεύθυνση κατά τόν ἄξονα z προσδιορίστε τίς καρτεσιανές συντεταγμένες τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου σέ ἕνα ἀπομακρυσμένο σημεῖο τοῦ χώρου (x,y,z).

3-16. Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες ἑνός ἡλεκτρικοῦ διπόλου πού βρίσκεται στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων μέ διευθύνση κατά τόν ἄξονα z. Στήν ἴδια γραφική παράσταση σχεδιᾶστε τίς δυναμικές γραμμές τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου πού δημιουργεῖ τό ἡλεκτρικό δίπολο.

3-17. Δύο σημειακά φορτία $q_1 = 10^{-10}$ C καί -10^{-10} C βρίσκονται ἀντίστοιχα στήν ἀρχή τῶν συνταγμένων καί στή θέση (x,y,z) = (−1,−3,2) cm.
(α) **Προσδιορίστε τό ἄνυσμα τοῦ ἡλεκτρικοῦ διπόλου πού ἀντιπροσωπεύουν** τά δύο φορτία.
(β) Ὑπολογίστε στά πλαίσια τῆς διπολικῆς προσεγγίσεως τήν τιμή τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ στό σημεῖο (x,y,z) = (80,−60,120) cm.

3-18. Δεῖξτε ὅτι στή διπολική προσέγγιση, γιά σταθερή ἀπόσταση μεταξύ διπόλου καί σημείου παρατηρήσεως, τό μέτρο τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου μειώνεται μονοτονικά καθώς ἡ γωνία μεταξύ τῆς διευθύνσεως τοῦ διπόλου καί τοῦ ἀνύσματος πρός τόν παρατηρητή μεταβάλλεται μεταξύ 0 καί π/2.

3-19. Τρία σημειακά φορτία $q_1 = 2 \times 10^{-10}$ C, $q_2 = -1 \times 10^{-10}$ C καί $q_3 = 3 \times 10^{-10}$ C βρίσκονται ἀντίστοιχα στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων καί στίς θέσεις (1,0,0) cm καί (1,2,0) cm.
(α) Προσδιορίστε τό ἄνυσμα τῆς διπολικῆς ροπῆς τοῦ συστήματος.
(β) Προσδιορίστε, στά πλαίσια τῆς διπολικῆς προσεγγίσεως, τήν τιμή τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ στό σημεῖο (30,0,0) cm.
(γ) Ὑπολογίστε στό σημεῖο (30,0,0) cm τό ἀκριβές δυναμικό καί τήν ἐπί τοῖς ἑκατό διαφορά ἀπό τήν ἐκτίμηση τῆς διπολικῆς προσεγγίσεως.

3-20. Θεωρεῖστε μιά εὐθεία γραμμική κατανομή φορτίου λ κατά τόν ἄξονα z μεταξύ τῶν σημείων $z = -a/2$ καί $z = a/2$ μέ ἐξάρτηση $\lambda = kz$, ὅπου k εἶναι μιά σταθερά.
(α) Προσδιορίστε τό ἄνυσμα τῆς διπολικῆς ροπῆς τοῦ συστήματος.
(β) Προσδιορίστε, στά πλαίσια τῆς διπολικῆς προσεγγίσεως, τή συνάρτηση δυναμικοῦ σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (x,y) γιά ἀποστάσεις

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} >> a \ .$$

3-21. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ὥστε ἡ ἡλεκτρική διπολική ροπή μιᾶς κατανομῆς φορτίου νά παραμένει ἀμετάβλητη κατά τή μετατόπιση τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων εἶναι ὁ μηδενισμός τοῦ ὁλικοῦ φορτίου τοῦ συστήματος.

3-22. Ὁ ἀριθμός τῶν ἀτόμων ἀνά μονάδα ὄγκου ἑνός στοιχείου δίνεται ἀπό τόν ἀριθμό τοῦ Avogadro πολλαπλασιασμένο ἐπί τό λόγο τῆς πυκνότητας τοῦ ὑλικοῦ στή στερεά κατάσταση ὡς πρός τόν ἀτομικό ἀριθμό. Κατά τήν πό-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

λωση ἑνός ἀτόμου μποροῦμε ἀκόμη νά θεωρήσουμε ὅτι κάθε ἄτομο τοῦ στοιχείου δημιουργεῖ ἕνα δίπολο μέ φορτία $\pm q = Ze$, ὅπου Z ὁ ἀτομικός ἀριθμός καί e τό ἠλεκτρονικό φορτίο. Ἄν σέ ἕνα πείραμα προσδιορίστηκε ὅτι ἡ πόλωση ἑνός δείγματος θείου εἶναι 10^{-5} C/m^3, συμβουλευτεῖτε ἐγχειρίδια φυσικῶν ἰδιοτήτων καί προσδιορίστε

(α) τή μέση ἠλεκτρική διπολική ροπή τοῦ ἀτόμου τοῦ θείου καί

(β) τή μέση ἀπόσταση τῆς κατανομῆς θετικοῦ καί ἀρνητικοῦ φορτίου στό ἄτομο τοῦ θείου ὥστε νά δημιουργεῖται ἡ προηγούμενη ἠλεκτρική διπολική ροπή ἀνά ἄτομο.

3-23. Ἄν ἡ πόλωση ἑνός λεπτοῦ δίσκου ἀπό διηλεκτρικό ὑλικό εἶναι **P** καί μέ διεύθυνση κατά τόν ἄξονα τοῦ δίσκου, προσδιορίστε μέ ἀπευθείας ὁλοκλήρωση τή συνάρτηση δυναμικοῦ σέ ἕνα σημεῖο κατά τόν ἄξονα τοῦ δίσκου σέ ἀπόσταση ἀρκετά μεγάλη ὡς πρός τό πάχος του. Προσδιορίστε τό ἠλεκτρικό πεδίο πού συνεπάγεται ἡ προηγούμενη συνάρτηση δυναμικοῦ.

3-24. Προσδιορίστε τή συνάρτηση δυναμικοῦ γιά μιά λεπτή ράβδο διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ μέ ὁμοιόμορφη πόλωση **P** κατά τόν ἄξονα τῆς ράβδου, σέ ἀποστάσεις μεγάλες σχετικά μέ τή διατομή τῆς ράβδου ἀλλά ὄχι ἀπαραίτητα μεγάλες σέ σχέση μέ τό μῆκος της.

3-25. Προσδιορίστε τή συνάρτηση δυναμικοῦ καί τό ἠλεκτρικό πεδίο πού δημιουργεῖ ἕνας κύλινδρος μέ μῆκος L ἀπό διηλεκτρικό ὑλικό καί ὁμοιόμορφη πόλωση **P** κατά τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Θεωρεῖστε ὡς σημεῖα παρατηρήσεως μόνο σημεῖα κατά τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου καί σέ ἀπόσταση $x > L/2$ ἀπό τό κέντρο του.

3-26. Μιά ράβδος ἀπό διηλεκτρικό ὑλικό ἔχει μῆκος L καί ἐμβαδόν διατομῆς A. Ἡ ράβδος ἐμφανίζει ὁμοιόμορφη πόλωση **P** κατά τό μῆκος της μέ μέτρο $P = ax + b$, ὅπου x εἶναι ἡ ἀπόσταση ἀπό τό ἕνα ἄκρο τῆς ράβδου καί a, b, σταθερές. Προσδιορίστε τή συνάρτηση δυναμικοῦ πού δημιουργεῖ ἡ ράβδος σέ ἀποστάσεις μεγάλες ὡς πρός τίς διαστάσεις της.

3-27. Μιά σφαίρα ἀπό διηλεκτρικό ὑλικό μέ ἀκτίνα R διαθέτει ὁμοιόμορφη πόλωση **P**. Ὁλοκληρώνοντας ὡς πρός ὅλα τά δέσμια φορτία, προσδιορίστε τή συνάρτηση δυναμικοῦ σέ ὅλα τά σημεῖα ἑνός ἄξονα πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας καί ἔχει διεύθυνση παράλληλη πρός τήν πόλωση.

3-28. Μιά σφαίρα ἀπό διηλεκτρικό ὑλικό μέ ἀκτίνα R διαθέτει ἀκτινική πόλωση μέ μέτρο ἀνάλογο πρός τήν ἀπόσταση ἀπό τό κέντρο.

(α) Προσδιορίστε τήν πυκνότητα δέσμιων φορτίων.

(β) Δεῖξτε γιά τήν περίπτωση αὐτή ὅτι τό ἄθροισμα ὅλων τῶν δέσμιων φορτίων μηδενίζεται.

(γ) Προσδιορίστε τό ἠλεκτρικό πεδίο πού δημιουργεῖ ἡ σφαίρα σέ ὅλο τό χῶρο μέσα καί ἔξω ἀπό τό ὑλικό.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3-29. Μιά μεταλλική σφαίρα μέ άκτίνα 2 cm ἔχει ὁλικό φορτίο 3×10^{-9} C. Ἡ σφαίρα περιβάλλεται ἀπό ἕνα κέλυφος ὁμογενοῦς, ἰσοτροπικοῦ καί γραμμικοῦ διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ μέ ἐσωτερική άκτίνα 2 cm καί ἐξωτερική άκτίνα 4 cm. Τό κέλυφος δέν διαθέτει ἐλεύθερο φορτίο. Προσδιορίστε
(α) τήν ἠλεκτρική μετατόπιση σέ κάθε περιοχή τοῦ χώρου,
(β) τό ἠλεκτρικό πεδίο σέ κάθε περιοχή τοῦ χώρου,
(γ) τήν ἠλεκτρική πόλωση στό διηλεκτρικό ὑλικό,
(δ) τήν πυκνότητα δέσμιων φορτίων καί
(ε) τό ὁλικό φορτίο σέ καθεμιά ἀπό τίς δύο ἐπιφάνειες τοῦ κελύφους.

3-30. Σέ κάποιο σημεῖο στό ἐσωτερικό ἑνός ἰσοτροπικοῦ διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ ἡ εἰδική διηλεκτρική σταθερά ἔχει τήν τιμή 3 καί τό ἠλεκτρικό πεδίο μέτρο 10^5 V/m. Γιά τό σημεῖο αὐτό προσδιορίστε
(α) τήν ἠλεκτρική ἐπιδεκτικότητα,
(β) τό μέτρο τῆς ἠλεκτρικῆς πολώσεως,
(γ) τό μέτρο τῆς ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως καί
(δ) τή διαπερατότητα.

3-31. Δεῖξτε ὅτι στό ἐσωτερικό ἑνός ὁμογενοῦς, ἰσοτροπικοῦ καί γραμμικοῦ διηλεκτρικοῦ μέσου ἡ πυκνότητα δέσμιων φορτίων $\rho_p(\mathbf{r})$ συνδέεται πρός τήν πυκνότητα ἐλεύθερων φορτίων $\rho(\mathbf{r})$ μέ τή σχέση

$$\rho_p(\mathbf{r}) = -\frac{K_e - 1}{K_e}\,\rho(\mathbf{r})$$

ὅπου K_e εἶναι ἡ εἰδική διαπερατότητα τοῦ ὑλικοῦ.

3-32. Οἱ ἐσωτερικές ἐπιφάνειες δύο παράλληλων ἐπίπεδων μεταλλικῶν πλακῶν ἀπέχουν 0.5 mm. Ὁ χῶρος μεταξύ τῶν δύο πλακῶν περιέχει διηλεκτρικό ὑλικό μέ εἰδική διαπερατότητα $K_e = 4$. Ἄν μεταξύ τῶν πλακῶν ἀναπτυχθεῖ διαφορά δυναμικοῦ ἴση πρός 1 kV, προσδιορίστε γιά ἕνα σημεῖο στό ἐσωτερικό τοῦ διηλεκτρικοῦ, μακριά ἀπό τά ἄκρα τῶν δύο πλακῶν
(α) τό ἠλεκτρικό πεδίο,
(β) τήν ἠλεκτρική μετατόπιση,
(γ) τήν ἠλεκτρική πόλωση,
(δ) τήν πυκνότητα ἐλεύθερου φορτίου σέ κάθε μεταλλική πλάκα καί
(ε) τήν πυκνότητα δέσμιων φορτίων.

3-33. Ἕνας βιομηχανικός τύπος ὁμοαξωνικοῦ καλωδίου εἶναι κατασκευασμένος ὡς ἑξῆς: Κατά τόν κεντρικό ἄξονα τοῦ καλωδίου ὑπάρχει ἕνας κυλινδρικός ἀγωγός μέ ἐξωτερική άκτίνα a. Ὁ ἀγωγός περιβάλλεται ἀπό διαδοχικούς μανδύες δύο διάφορων διηλεκτρικῶν ὑλικῶν μέ άντίστοιχες ἐξωτερικές άκτῖνες b καί c καί άνττίστοιχες τιμές τῆς εἰδικῆς διαπερατότητας K_1 καί K_2. Τέλος ἡ διάταξη περιβάλλεται ἀπό ἕνα ἀγωγό σέ μορφή πυκνοῦ πλέγματος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μεταξύ τῶν δύο ἀγωγῶν ὑπάρχει διαφορά δυναμικοῦ U_0 ἐνῶ ἡ περιοχή τῶν διηλεκτρικῶν ὑλικῶν δέν περιέχει ἐλεύθερο ἠλεκτρικό φορτίο. Χρησιμοποιεῖστε τό νόμο τοῦ Gauss καί προσδιορίστε τήν πυκνότητα ἐλεύθερων καί δέσμιων φορτίων σέ κάθε περιοχή τῆς διατάξεως.

3-34. Μιά σφαίρα ἀκτίνας R εἶναι κατασκευασμένη ἀπό διηλεκτρικό ὑλικό μέ σταθερή διαπερατότητα ε. Ἡ σφαίρα φέρει ὁμοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο μέ σταθερή πυκνότητα ρ. Προσδιορίστε τό δυναμικό στό κέντρο τῆς σφαίρας

(α) μέ ὁλοκλήρωση τῆς κατανομῆς ἐλεύθερων καί δέσμιων φορτίων καί

(β) μέ ὁλοκλήρωση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου.

3-35. Γιά ἰσοτροπικά διηλεκτρικά ὑλικά προσδιορίστε στά σύνορα ἐπιφανειῶν

(α) συνοριακές συνθῆκες τῆς ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως **D** κατά διεύθυνση παράλληλη πρός τήν ἐπιφάνεια καί

(β) συνοριακές συνθῆκες τῆς ἠλεκτρικῆς πολώσεως **P** κατά διεύθυνση παράλληλη καί κάθετη πρός τήν ἐπιφάνεια στήν περίπτωση ὅπου ἡ κατανομή δέσμιων φορτίων δέν εἶναι γνωστή.

3-36. Δίνεται ἕνας κύλινδρος ἀπό ἰσοτροπικό διηλεκτρικό ὑλικό μέ πεπερασμένο μῆκος, ἀκτίνα R καί ἠλεκτρική διαπερατότητα ε, στόν κατά τό ἄλλα κενό χῶρο. Στό ἐσωτερικό τοῦ κυλίνδρου ὑπάρχει σταθερό ἠλεκτρικό πεδίο **E** μέ διεύθυνση κάθετη πρός τόν ἄξονά του. Προσδιορίστε τή συνάρτηση δυναμικοῦ καί τό ἠλεκτρικό πεδίο ἔξω ἀπό τόν κύλινδρο, στήν ἄμεση γειτονία τῆς ἐπιφανείας του.

3-37. Ὁ χῶρος μεταξύ δύο παράλληλων ἐπίπεδων μεταλλικῶν ἐπιφανειῶν μέ ἄπειρες διαστάσεις καλύπτεται ἀπό ὁμογενές ἰσοτροπικό διηλεκτρικό ὑλικό μέ ἠλεκτρική ἐπιδεκτικότητα ε. Ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν μεταλλικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι L καί ἡ μεταξύ τους διαφορά δυναμικοῦ ΔU.

(α) Γράψτε καί ἐπιλύστε τή διαφορική ἐξίσωση πού διέπει τή συνάρτηση δυναμικοῦ στό χῶρο τοῦ διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ.

(β) Διερευνεῖστε τίς συνοριακές συνθῆκες στίς ἐπιφάνειες τοῦ διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ.

(γ) Μέ τή βοήθεια τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ προσδιορίστε τό ἠλεκτρικό πεδίο καί τήν κατανομή ἐλεύθερων καί δέσμιων φορτίων.

3-38. Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἄσκηση γιά τήν περίπτωση ὅπου ὁ χῶρος μεταξύ τῶν μεταλλικῶν ἐπιφανειῶν καλύπτεται ἀπό δύο περιοχές διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ μέ διαχωριστική ἐπιφάνεια παράλληλη πρός τίς μεταλλικές ἐπιφάνειες, διαφορετικό εὖρος L_1 καί L_2 καί διαφορετική ἠλεκτρική διαπερατότητα ε_1 καί ε_2.

3-39. Δεῖξτε ὅτι ἄν μιά σφαίρα μέ ἀκτίνα R ἀπό ὁμογενές, ἰσοτροπικό διηλεκτρικό ὑλικό τοποθετηθεῖ σέ ἕνα ὁμογενές ἐξωτερικό πεδίο $\mathbf{E}_0$ στό κενό χῶρο, οἱ συνοριακές συνθῆκες πού διέπουν τή συνάρτηση δυναμικοῦ στήν ἐπιφάνεια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τῆς σφαίρας μποροῦν νά ἀποδοθοῦν ἀπό τήν παραδοχή ὅτι
(α) στό ἐσωτερικό τῆς σφαίρας ὑπάρχει ἕνα ὁμογενές ἠλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_s$ καί
(β) ἡ σφαίρα συνεισφέρει στόν ἐξωτερικό χῶρο ἠλεκτρικό πεδίο ἑνός διπόλου **p**.
Προσδιορίστε τά ἀνύσματα $\mathbf{E}_s$ καί **p**.

3-40. Τρία σημειακά φορτία $q_1 = 10^{-10}$ C, $q_2 = -8 \times 10^{-10}$ C καί $q_3 = -2 \times 10^{-10}$ C βρίσκονται στόν κενό χῶρο καί ἀντίστοιχα στίς θέσεις (0,0,0), (3,0,0) καί (0,4,0) cm. Ὑπολογίστε τό ἔργο πού ἀπαιτήθηκε γιά τή συγκρότηση τοῦ συστήματος ἄν ἀρχικά τά τρία σημεῖα ἦταν σέ ἄπειρη μεταξύ τους ἀπόσταση. Δεῖξτε ὅτι τό ἔργο αὐτό εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τή σειρά μέ τήν ὁποία μετακινήθηκαν τά φορτία.

3-41. Δύο λεπτά σφαιρικά κελύφη C_1 καί C_2 μέ ἀκτῖνες $R_1 < R_2$ καί ὁλικό φορτίο q_1 καί q_2 εἶναι τοποθετημένα στόν κενό χῶρο ἔτσι ὥστε τό κέλυφος C_1 νά περιέχεται ὅλο μέσα στό κέλυφος C_2. Ὑπολογίστε τήν ὁλική ἠλεκτροστατική ἐνέργεια τοῦ συστήματος καί δεῖξτε ὅτι εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή θέση τοῦ C_1 ὡς πρός τό C_2.

3-42. Τρία σημειακά φορτία $q_1 = q_2 = 2 \times 10^{-9}$ C καί $q_3 = -2 \times 10^{-9}$ C εἶναι τοποθετημένα στόν κενό χῶρο καί στίς κορυφές ἑνός ἰσόπλευρου τριγώνου μέ πλευρά $d = 10$ cm.
(α) Ὑπολογίστε τήν ἠλεκτροστατική ἐνέργεια πού βρίσκεται ἀποθηκευμένη στό σύστημα.
(β) Ὑπολογίστε τό ἔργο πού ἀπαιτεῖται γιά νά μετακινηθοῦν τά τρία φορτία σέ νέες θέσεις ἔτσι ὥστε νά καταλαμβάνουν τίς κορυφές ἑνός ἰσόπλευρου τριγώνου μέ πλευρά $d = 5$ cm.

3-43. Ἕνα σημειακό φορτίο q βρίσκεται στό κέντρο ἑνός κελύφους ἀπό διηλεκτρικό ὑλικό μέ ἐσωτερική ἀκτίνα a, ἐξωτερική b καί διαπερατότητα ε. Προσδιορίστε τήν ἠλεκτροστατική ἐνέργεια τοῦ συστήματος.

3-44. Ἕνα σημειακό φορτίο $q = 2 \times 10^{-10}$ C βρίσκεται τοποθετημένο σέ ἀπόσταση 65 cm ἀπό τό κέντρο ἑνός σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ μέ ἀκτίνα 50 cm. Ὑπολογίστε τήν ἠλεκτροστατική ἐνέργεια τοῦ συστήματος
(α) ἄν ὁ σφαιρικός ἀγωγός εἶναι γειωμένος καί
(β) ἄν ὁ σφαιρικός ἀγωγός εἶναι μονωμένος καί ἀφόρτιστος.

3-45. Ἕνας σημειακό φορτίο $q = 3 \times 10^{-10}$ C βρίσκεται στό ἐσωτερικό μιᾶς σφαιρικῆς κοιλότητας ἀγωγοῦ μέ ἀκτίνα 2 cm. Ἡ κοιλότητα περιέχει διηλεκτρικό ὑλικό μέ διαπερατότητα $4\varepsilon_0$. Πόσο ἔργο ἀπαιτεῖται γιά τή μετακίνηση τοῦ φορτίου ἀπό τό κέντρο τῆς κοιλότητας σέ ἀπόσταση 0.5 cm ἀπό τό κέντρο.

3-46. Ὑπολογίστε τήν ἠλεκτροστατική ἐνέργεια μιᾶς σφαιρικῆς κατανομῆς φορτίου μέ ἀκτίνα R καί σταθερή πυκνότητα ρ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3-47. Ὁ πυρήνας τοῦ ἀτόμου συγκροτεῖται ἀπό A νουκλεόνια ἐκ τῶν ὁποίων τά Z εἶναι θετικά φορτισμένα πρωτόνια καί τά A–Z ἀφόρτιστα οὐδετερόνια. Ἡ ἀκτίνα τοῦ πυρήνα δίνεται σέ πολύ καλή προσέγγιση ἀπό τή σχέση $R = 1.2 \times A^{1/3}$. Θεωρώντας ὅτι τά πρωτόνια εἶναι ὁμοιόμορφα κατανεμημένα στόν ὄγκο τοῦ πυρήνα, χρησιμοποιεῖστε τό ἀποτέλεσμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως γιά νά ἐκφράσετε τήν ἠλεκτροστατική του ἐνέργεια ὡς συνάρτηση τοῦ ἀτομικοῦ ἀριθμοῦ Z καί τοῦ μαζικοῦ ἀριθμοῦ A. Ὑπολογίστε τήν ἠλεκτροστατική ἐνέργεια τοῦ ὀξυγόνου (A = 16, Z = 8), τοῦ σιδήρου (A = 56, Z = 26) καί τοῦ μολύβδου (A = 208, Z = 82). Τό φορτίο τοῦ πρωτονίου δίνεται στήν ἐξ. (2.1).

3-48. Ἕνας σφαιρικός ἀγωγός μέ ἀκτίνα R_1 περιβάλλεται ἀπό ἕνα σφαιρικό κέλυφος διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ μέ ἐσωτερική ἀκτίνα R_1 καί ἐξωτερική R_2. Προσδιορίστε τήν ἠλεκτροστατική ἐνέργεια τοῦ συστήματος ἄν ὁ σφαιρικός ἀγωγός ἔχει ὁλικό φορτίο q καί ἡ διαπερατότητα τοῦ διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ εἶναι ε.

3-49. Ἕνας ἰδανικός πυκνωτής εἶναι κατασκευασμένος ἀπό δύο παράλληλους ἐπίπεδους μεταλλικούς ὁπλισμούς μέ ἐπιφάνεια 40 cm^2 καί σέ σχετική ἀπόσταση 1 mm. Ὁ χῶρος μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν καλύπτεται ἀπό δύο πλάκες μονωτικοῦ ὑλικοῦ μέ πάχος 0.5 mm ἡ καθεμιά καί διαφορετική διαπερατότητα $3\varepsilon_0$ καί $6\varepsilon_0$. Ὁ ἕνας ὁπλισμός εἶναι γειωμένος ἐνῶ στόν ἄλλο ἀναπτύσσεται σταθερό δυναμικό 300 V. Μέ τή γεωμετρία αὐτή τό ἠλεκτρικό πεδίο μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σέ πολύ καλή προσέγγιση ὁμογενές καί μέ διεύθυνση κάθετη πρός τό ἐπίπεδο τῶν ὁπλισμῶν. Ἄν τό διηλεκτρικό ὑλικό δέν διαθέτει ἐλεύθερο ἠλεκτρικό φορτίο προσδιορίστε τήν ἠλεκτροστατική ἐνέργεια πού βρίσκεται ἀποθηκευμένη στόν πυκνωτή

(α) μέ ὁλοκλήρωση ὡς πρός τό ἠλεκτρικό πεδίο πού ἀναπτύσσεται μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν καί

(β) μέ ὁλοκλήρωση ὡς πρός τήν πυκνότητα φορτίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ηλεκτρικο ρευμα

Τό **ήλεκτρικό ρεῦμα** ὁρίζεται ὡς ἡ ποσότητα φορτίου πού διασχίζει μιά συγκεκριμμένη ἐπιφάνεια S ἀνά μονάδα χρόνου, ἤτοι,

$$I \equiv \frac{dq}{dt} \quad . \tag{4.1}$$

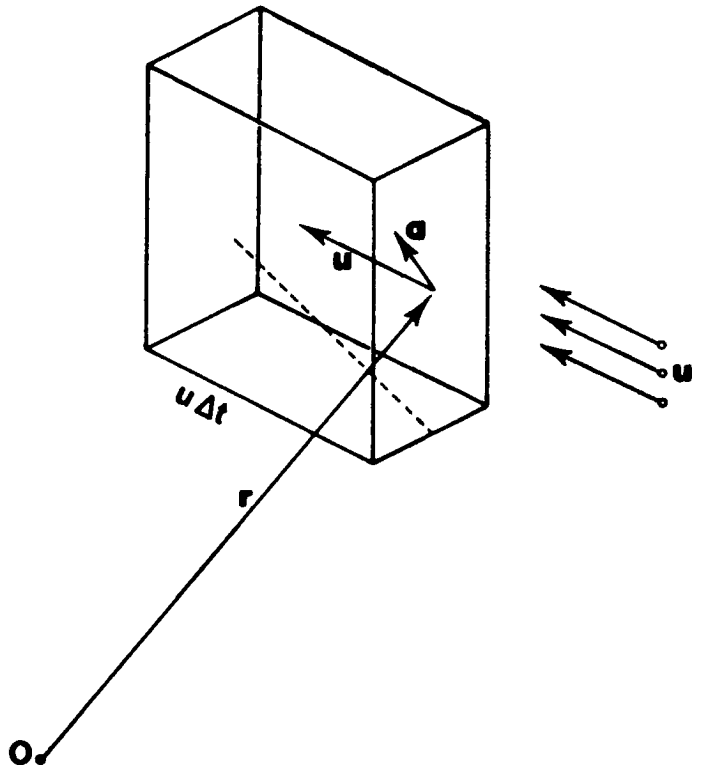
Ὅπως πάντα θά θεωρήσουμε τό μακροσκοπικό ὅριο $dq \to 0$, ὅπου ἡ ἀπειροελάχιστη ποσότητα dq περιέχει ἀκόμη ἕνα μεγάλο ἀριθμό στοιχειωδῶν φορτίων.

4-1 Πυκνότητα Ρεύματος

Ἄν καί ὁ ὁρισμός τῆς ἐξ. (4.1) εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τό μηχανισμό μεταφορᾶς τοῦ φορτίου (τό ρεῦμα I μπορεῖ νά ἀναφέρεται σέ ροή φορτίου μέσα σέ ἕνα κυλινδρικό ἀγωγό, στή δέσμη ἑνός ἐπιταχυντῆ, σέ ἕνα κεραυνό ἤ στή μεταφορά φορτίων κατά τήν ἠλεκτρόλυση), ἐξαρτᾶται ἀπό τή γεωμετρία καί προσανατολισμό τῆς ἐπιφανείας S. Εἶναι ἀρκετά χρήσιμο ἐπομένως νά ὁρίσουμε ἕνα μέγεθος πού θά περιγράψει τήν κίνηση τοῦ φορτίου σέ κάθε σημεῖο τοῦ χώρου ἀνεξάρτητα ἀπό ὁποιαδήποτε γεωμετρία τοῦ μέσου παρατηρήσεως. Γιά τό σκοπό αὐτό εἶναι σκόπιμο νά ἐπιστρέψουμε στή μικροσκοπική ἄποψη καί νά δοῦμε τό ρεῦμα ὡς κίνηση φορτισμένων στοιχειωδῶν σωματίων. Θά θεωρήσουμε, ὅπως δείχνει τό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σχῆμα 4-1, ἕνα μικρό στοιχεῖο τοῦ χώρου γύρω ἀπό τό σημεῖο **r** ὅπου ἡ πυκνότητα τῶν στοιχειωδῶν σωματίων μέ φορτίο q εἶναι n(**r**) (σωμάτια ἀνά κυβικό ἑκατοστόμετρο) καί ἡ ταχύτητά του **u**(**r**). Τά σωμάτια πού διασχίζουν σέ χρόνο Δt μιά μικρή ἐπίπεδη ὀρθογώνια ἐπιφάνεια **a** (ὅπου τό ἄνυσμα **a** εἶναι κάθετο πρός τήν ἐπιφάνεια καί τό μῆκος του μετρᾶ τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας) περιέχεται στό πλάγιο παραλληλεπίπεδο μέ βάση **a**, καί ἀκμή, παράλληλη πρός τήν ταχύτητα **u**, ἴση πρός uΔt. Ὁ ὄγκος τοῦ παραλλη-



ΣΧΗΜΑ 4-1 Τά σωμάτια μέ ταχύτητα **u** πού διέρχονται ἀπό τήν ἐπιφάνεια **a** σέ χρόνο Δt περιέχονται στό πλάγιο παραλληλεπίπεδο μέ βάση τήν ἐπιφάνεια **a** καί ἀκμή μήκους u Δt παράλληλη πρός τήν ταχύτητα **u**. Τό ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου πού σημειώνεται μέ διακεκομένη γραμμή ἔχει μῆκος **a** · uΔt.

λεπίπεδου εἶναι ἴσος μέ τό ἐσωτερικό γινόμενο **a**·**u** Δt καί ἐπομένως ὁ ἀριθμός N τῶν σωματίων μέσα στό παραλληλεπίπεδο δίνεται ἀπό τή σχέση

$$N = n\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\,\Delta t\ . \qquad (4.2)$$

Τό ὁλικό φορτίο πού πέρασε ἀπό τήν ἐπιφάνεια **a** σέ χρόνο Δt εἶναι ἴσο μέ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$q\, n\, \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\,\Delta t$. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (4.1) μποροῦμε τώρα νά γράψουμε τό ρεῦμα $I(\mathbf{a})$ διαμέσου τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{a}$ ὡς

$$I(\mathbf{a}) = \frac{q\, n\, \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\,\Delta t}{\Delta t} = n\, q\, \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}. \tag{4.3}$$

Ἡ ἐξ. (4.3) μπορεῖ νά γενικευτεῖ εὔκολα στήν περίπτωση ὅπου διάφορα εἴδη σωματίων, μέ διαφορετικό φορτίο ἤ διαφορετική ταχύτητα, συνεισφέρουν στό ρεῦμα διαμέσου τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{a}$. Ἄν q_k εἶναι τό φορτίο τῶν σωματίων τῆς κατηγορίας k (ἠλεκτρόνια, πρωτόνια, θετικά ἰόντα) καί $n_\ell^{(k)}$ εἶναι ἡ πυκνότητα τῶν σωματίων τῆς κατηγορίας k μέ ταχύτητα $\mathbf{u}_\ell^{(k)}$ στή γειτονία τοῦ σημείου $\mathbf{r}$, τό ὁλικό ρεῦμα $I(\mathbf{a})$ εἶναι

$$I(\mathbf{a}) = \sum_k q_k \sum_\ell n_\ell^{(k)}\, \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_\ell^{(k)} = \mathbf{a}\cdot\sum_k q_k \sum_\ell n_\ell^{(k)}\, \mathbf{u}_\ell^{(k)} \tag{4.4}$$

ὅπου τό ἄθροισμα στό δείκτη k ἐκτείνεται σέ ὅλες τίς κατηγορίες σωματίων καί τό ἄθροισμα στό δείκτη ℓ σέ ὅλες τίς ταχύτητες τῶν σωματίων κάθε κατηγορίας. Τό ἄνυσμα

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) \equiv \sum_k q_k \sum_\ell n_\ell^{(k)}(\mathbf{r})\, \mathbf{u}_\ell^{(k)}(\mathbf{r}) \tag{4.5}$$

πού χαρακτηρίζει τό ρεῦμα γιά ὁποιαδήποτε ἐπιφάνεια γύρω ἀπό τό σημεῖο $\mathbf{r}$ θά ὀνομάσουμε **πυκνότητα ρεύματος** στό σημεῖο $\mathbf{r}$. Ἄν τό ἄνυσμα $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ εἶναι γνωστό ὡς συνάρτηση τῶν συντεταγμένων, τό ὁλικό ρεῦμα πού διαρρέει μιά ἐπιφάνεια S μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό τό ὁλοκλήρωμα

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}\ . \tag{4.6}$$

Οἱ μονάδες τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, ὅπως ὁρίστηκε στήν ἐξ. (4.1) εἶναι τό ΗΣΜ–φ/sec στό σύστημα CGS καί τό C/sec στό σύστημα SI. Ἡ τελευταία μονάδα εἶναι γνωστή μέ τήν ὀνομασία ampère (A). Οἱ δύο μονάδες συνδέονται μέ τή σχέση τῆς ἐξ. (2.10)

$$1\ \mathrm{A} = \frac{c}{10}\ \text{ΗΣΜ–φ}\cdot\mathrm{sec}^{-1}. \tag{4.7}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στή λογική σειρά πού άκολουθήσαμε κατά τήν άνάπτυξη τῶν ήλεκτρικῶν φαινομένων θεωρήσαμε ὡς βασική μονάδα τό coulomb καί παράγωγη τό ampère. Ὅπως ἤδη άναφέραμε στήν Παράγραφο 2-1, στήν πράξη ή μονάδα τοῦ ρεύματος καθιερώνεται πειραματικά στό σύστημα SI καί ή μονάδα φορτίου ὁρίζεται μέ βάση τό ampère.

Ὡς μονάδα τῆς πυκνότητας ρεύματος στό σύστημα CGS θά ὁρίσουμε τό ΗΣΜ–φ·sec $^{-1}$·cm $^{-2}$. Στό σύστημα SI ἄν θέλουμε νά εἴμαστε συνεπεῖς, θά πρέπει νά έπιλέξουμε τό ampère άνά m^2. Συνήθως στήν πράξη έπιλέγεται ὡς μονάδα τοῦ συστήματος SI τό A·cm^{-2} πού συνδέεται μέ τήν άντίστοιχη μονάδα τοῦ συστήματος CGS διαμέσου τοῦ συντελεστή τῶν ἐξ. (2.10) καί (4.7).

Εἶναι χρήσιμο νά ἐξετάσουμε τή γενική μορφή τῆς πυκνότητας ρεύματος στήν ἐξ. (4.5) σέ μιά ρεαλιστική περίπτωση ροῆς φορτίου, ὅπως σέ ἕνα μεταλλικό άγωγό, ὅπου οἱ φορεῖς τοῦ στοιχειώδους φορτίου άνήκουν σέ μιά μοναδική κατηγορία. Στή μεταλλική δομή τά ἄτομα βρίσκονται διατεταγμένα σέ σταθερές θέσεις ένός κρυσταλλικοῦ πλέγματος† ένῶ ἕνας μικρός άριθμός ήλεκτρονίων άνά ἄτομο (συνήθως ἕνα ή δύο) εἶναι *ἐλεύθερα* νά μετακινοῦνται άπό ἄτομο σέ ἄτομο. Στό πρότυπο αὐτό μοναδικοί φορεῖς τοῦ ήλεκτρικοῦ φορτίου εἶναι τά ἐλεύθερα ήλεκτρόνια μέ φορτίο $-e$ καί ἄν παραλείψουμε τόν δείκτη k στήν ἐξ. (4.5) μποροῦμε νά γράψουμε τήν πυκνότητα ρεύματος ὡς

$$\mathbf{J} = -e \sum_{\ell} n_\ell \mathbf{u}_\ell \,. \tag{4.8}$$

Τό άνυσματικό ἄθροισμα τῆς ἐξ. (4.8) ἐκτείνεται σέ ὅλα τά ήλεκτρόνια πού ἔχουν διαχωριστεῖ σέ ℓ κατηγορίες μέ κριτήριο τήν ταχύτητα $\mathbf{u}_\ell$, ένῶ κάθε κατηγορία χαρακτηρίζεται άπό τήν πυκνότητα τῶν ήλεκτρονίων n_ℓ (ήλεκτρόνια μέ ταχύτητα $\mathbf{u}_\ell$ άνά μονάδα ὄγκου). Στήν ήλεκτροστατική κατάσταση, ὅπου μόνη κίνηση εἶναι ή θερμική, δέν ὑπάρχει καμιά προτιμητέα διεύθυνση γιά τό άνυσμα $\mathbf{u}$ καί τό ἄθροισμα τῆς ἐξ. (4.8) μηδενίζεται. Ἄν άντίθετα δημιουργηθεῖ ἕνα ήλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ στό ἐσωτερικό τοῦ άγωγοῦ, θά άσκηθεῖ δύναμη $-e\mathbf{E}$ σέ κάθε ἐλεύθερο ήλεκτρόνιο καί ή μέση τιμή τῆς ταχύτητας κάθε ήλεκτρονίου θά πάρει μιά πεπερασμένη τιμή πρός τήν προτιμητέα διεύθυνση πού ὁρίζει τό άνυσμα $\mathbf{E}$. Ἄν N_e εἶναι ὁ ὁλικός άριθμός

† Ἕνα σύνηθες μεταλλικό σῶμα μπορεῖ νά ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα μεγάλο ἀριθμό μικροκρυστάλλων σέ τυχαῖο προσανατολισμό.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τῶν ἐλεύθερων ἠλεκτρονίων ἀνά μονάδα ὄγκου μποροῦμε νά ὁρίσουμε τή μέση ταχύτητά τους ὡς

$$\langle \mathbf{u} \rangle \equiv \frac{1}{N_e} \sum_{\ell} n_\ell \mathbf{u}_\ell \tag{4.9}$$

Ἡ πυκνότητα ρεύματος τῆς ἐξ. (4.8) παίρνει ἐπομένως τήν ἁπλή μορφή

$$\mathbf{J} = -eN_e\langle \mathbf{u} \rangle \ . \tag{4.10}$$

Εἶναι ἀρκετά ἐνδιαφέρον νά ἐξετάσουμε τό μέγεθος τῆς μέσης ταχύτητας $\langle u \rangle$ ἠλεκτρονίων πού δημιουργεῖ τήν πυκνότητα ρεύματος στήν ἐξ. (4.10) γιά συνήθη ρεύματα σέ ἀγωγούς. Γιά ἕνα χάλκινο σύρμα μέ διατομή $S=1$ mm^2 πού διαρρέεται ἀπό ρεῦμα $I=1$ A, ἡ πυκνότητα ρεύματος εἶναι

$$J = \frac{I}{S} = 100 \ \text{A}\cdot\text{cm}^{-2} \ . \tag{4.11}$$

Καθόσον ὁ χαλκός διαθέτει ἕνα ἐλεύθερο ἠλεκτρόνιο κατά ἄτομο, ἡ πυκνότητα τῶν φορέων τοῦ φορτίου N_e ταυτίζεται μέ τήν πυκνότητα τῶν ἀτόμων τοῦ χαλκοῦ. Ἡ τελευταία ποσότητα δίνεται ἀπό τή σχέση

$$N_e = \frac{N_0}{V_0} \tag{4.12}$$

ὅπου $N_0 = 6.02\times10^{23}$ εἶναι ὁ ἀριθμός τοῦ Avogadro καί V_0 ὁ ὄγκος ἑνός γραμμομορίου ($m=63$ g) χαλκοῦ. Ἀπό τήν τιμή τῆς πυκνότητας μάζας τοῦ χαλκοῦ $\rho_m = 9$ g/cm^3 μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τόν ὄγκο V_0 ὡς

$$V_0 = \frac{m}{\rho_m} = \frac{63}{9} = 7 \ \text{cm}^3$$

καί στή συνέχεια τήν πυκνότητα ἐλεύθερων ἠλεκτρονίων

$$N_e = \frac{N_0}{V_0} = \frac{6.02\times10^{23}}{7} = 0.86\times10^{23} \ \text{cm}^{-3}. \tag{4.13}$$

Ἡ μέση ταχύτητα τῶν ἠλεκτρονίων πρός τή διεύθυνση τῆς πυκνότητας ρεύματος εἶναι ἐπομένως

$$u_E \equiv \langle u \rangle = \frac{J}{N_e e} = \frac{10^2}{0.86\times10^{23}\cdot 1.602\times10^{-19}} = 7.3\times10^{-3} \ \text{cm/sec.} \tag{4.14}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μιά πράγματι ἐξαιρετικά μικρή ταχύτητα.

Τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (4.14) γίνεται ἀκόμη πιό ἐντυπωσιακό ἄν ὑπολογίσουμε τό μέγεθος τῆς ταχύτητας u_Θ πού ἐκτελοῦν στήν πραγματικότητα τά ἠλεκτρόνια. Ἡ μέση κινητική ἐνέργεια τῆς τυχαίας θερμικῆς κινήσεως κάθε ἠλεκτρονίου εἶναι τῆς τάξης τοῦ kT, ὅπου k $1.38\times10^{-23}\,J\cdot K^{-1}$ εἶναι ἡ σταθερά τοῦ Bolzmann καί T ἡ ἀπόλυτη θερμοκρασία τοῦ ἀγωγοῦ. Γιά θερμοκρασία δωματίου ($T \simeq 300$ K) ἡ μέση κινητική ἐνέργεια τοῦ ἐλεύθερου ἠλεκτρονίου εἶναι

$$T_e = \tfrac{1}{2}\, m_e u_\Theta^2 = kT = 4.14\times10^{-21}\,J$$

καί ἡ ταχύτητα u_e (ἡ μάζα τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι $m_e = 9.11\times10^{-31}$ kg)

$$u_\Theta = 9.5\times10^{6}\ \text{cm/sec}\ . \tag{4.15}$$

Ἡ μέση ταχύτητα μέ τήν ὁποία οἱ φορεῖς τοῦ φορτίου κινοῦνται κατά τή φορά τοῦ ρεύματος εἶναι, γιά συνήθη ρεύματα τοῦ ἐργαστηρίου, δέκα τάξεις μεγέθους μικρότερη ἀπό τήν ταχύτητα τῆς τυχαίας θερμικῆς τους κινήσεως. Ὅπως θά δοῦμε στήν μεθεπόμενη παράγραφο, στήν ἀξιοσημείωτη αὐτή σχέση μεγέθους ὀφείλεται ὁ νόμος τοῦ Ohm.

4-2 Ἡ Ἐξίσωση Συνεχείας

Μιά σημαντική σχέση μεταξύ τῆς πυκνότητας ρεύματος $\mathbf{J}$ καί τῆς πυκνότητας φορτίου ρ μπορεῖ νά ἐξαχθεῖ ἀπό τήν ἀρχή διατηρήσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου πού ἀναφέραμε στήν εἰσαγωγή τοῦ Κεφαλαίου 2. Ἄς θεωρήσουμε σέ μιά ὁρισμένη στιγμή t τό ὁλικό ρεῦμα τῆς ἐξ. (4.6) γιά μιά κλειστή ἐπιφάνεια S

$$I(t) = \oint_S \mathbf{J}\cdot d\boldsymbol{\alpha}\ . \tag{4.16}$$

Σέ κάθε σημεῖο τῆς ἐπιφάνειας S τό ἐσωτερικό γινόμενο $\mathbf{J}\cdot d\boldsymbol{\alpha}$ μπορεῖ νά εἶναι μιά θετική ἤ ἀρνητική ποσότητα. Ἀπό τήν ἐξ. (4.10), $\mathbf{J}\cdot d\boldsymbol{\alpha} > 0$ σημαίνει ὅτι στό σημεῖο αὐτό μιά θετική ποσότητα φορτίου εἰσρέει στό χῶρο V πού περιβάλλει ἡ ἐπιφάνεια S ἤ μιά ἀρνητική ποσότητα φορτίου φεύγει ἀπό τό χῶρο. Τό ἀντίθετο συμβαίνει σέ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας S ὅπου $\mathbf{J}\cdot d\boldsymbol{\alpha} < 0$. Ἡ ὁλοκλήρωση ἑπομένως τῆς ποσότητας $\mathbf{J}\cdot d\boldsymbol{\alpha}$ δίνει τό ρυθμό μέ τόν ὁποῖο θετικό ἤ ἀρνητικό φορτίο εἰσρέει ἤ ἐγκαταλείπει τό χῶρο V. Ἄν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μέσα στό χῶρο V δέν δημιουργεῖται ἤ καταστρέφεται φορτίο, ὁ ρυθμός διελεύσεως τοῦ φορτίου ἀπό τήν ἐπιφάνεια S πρέπει νά εἶναι ἴσος μέ τό ρυθμό αὐξομειώσεως τοῦ ὁλικοῦ φορτίου

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r})\, d^3r$$

μέσα στό χῶρο πού περιβάλλει ἡ ἐπιφάνεια. Μποροῦμε νά ἐκφράσουμε τή σχέση αὐτή ὡς

$$\oint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho(\mathbf{r})\, d^3r \tag{4.17}$$

ἤ χρησιμοποιώντας τό θεώρημα τοῦ Green

$$\oint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{J}\, d^3r \tag{4.18}$$

ὡς

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{J}\, d^3r = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, d^3r\ . \tag{4.19}$$

Τώρα, γιά τήν ἐξαγωγή τῆς ἐξ. (4.19) ἡ ἐπιφάνεια S καί ὁ ἀντίστοιχος ὄγκος V ἐπιλέγησαν τελείως αὐθαίρετα. Θεωρώντας ἑπομένως ἕνα ἀπειροελάχιστο ὄγκο V γύρω ἀπό ἕνα σημεῖο τοῦ χώρου μποροῦμε νά ἀπαλλαγοῦμε ἀπό τά ὁλοκληρώματα καί νά γράψουμε τή διαφορική ἐξίσωση, γνωστή ὡς **ἐξίσωση συνεχείας**,

$$\nabla\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

ἤ

$$\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{4.20}$$

ὅπου ἡ μερική παράγωγος τῆς πυκνότητας φορτίου ὡς πρός τό χρόνο τονίζει τό γεγονός ὅτι ἡ ποσότητα ρ εἶναι ἐπίσης συνάρτηση τῶν συντεταγμένων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οἱ ἐξ. (4.19) καί (4.20) ἀποτελοῦν τήν μαθηματική ἔκφραση τῆς ἀρχῆς διατηρήσεως τοῦ φορτίου. Σέ ἕνα σημεῖο τοῦ χώρου δέν μπορεῖ νά ὑπάρξει μετακίνηση φορτίου χωρίς ἀντίστοιχη μεταβολή τῆς πυκνότητας φορτίου στό σημεῖο αὐτό. Ὅπως θά δοῦμε στό Κεφάλαιο 6, ἡ ἐξ. (4.20) δημιουργεῖ τή θεωρητική βάση γιά τήν ἀνάπτυξη μεθόδων ἀναλύσεως κυκλωμάτων.

4-3 Ἀγωγιμότητα, Ἀντίσταση καί ὁ Νόμος τοῦ Ohm

Μιά ἀπό τίς πρῶτες πειραματικές ἀνακαλύψεις γύρω ἀπό τή ροή τοῦ ἡλεκτρικοῦ φορτίου ἦταν ὅτι *τό ρεῦμα πού ρέει ἀπό ἕνα σημεῖο ἑνός ὑλικοῦ πρός ἕνα ἄλλο εἶναι ἀνάλογο πρός τή διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων αὐτῶν.* Ἡ διαπίστωση αὐτή, γνωστή ὡς **νόμος τοῦ Ohm,** διατυπώνεται μέ τήν ἁπλή σχέση

$$I = RV \tag{4.21}$$

ὅπου ὁ συντελεστής ἀναλογίας R χαρακτηρίζει τό ὑλικό, τήν ἐπιλογή τῶν σημείων μέ διαφορά δυναμικοῦ V καί γενικά τή γεωμετρία τοῦ σώματος πού διαρρέεται ἀπό τό ρεῦμα I. Γιά σταθερή θερμοκρασία, ὁ συντελεστής R, πού θά ὀνομάσουμε **ἀντίσταση** τοῦ σώματος γιά τά συγκεκριμένα ἄκρα, εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τή διαφορά δυναμικοῦ V. Στό σύστημα CGS ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς ἀντιστάσεως προσδιορίζεται ἀπό τήν ἐξ. (4.21) ὡς

$$\frac{\text{ΗΣΜ}-\varphi}{\text{sec}\cdot\text{statvolt}} = \frac{(\text{ΗΣΜ}-\varphi)^2}{\text{sec}\cdot\text{dyn}\cdot\text{cm}} = \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \ . \tag{4.22}$$

Στήν μονάδα αὐτή, μέ διαστάσεις ταχύτητας, πού βρίσκει πολύ μικρή ἐφαρμογή, δέν δίνεται ἰδιαίτερο ὄνομα. Ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς ἀντιστάσεως πού συνήθως χρησιμοποιεῖται ὁρίζεται στό σύστημα SI μέ τήν ὀνομασία ohm καί τό συμβολισμό Ω. Ἀπό τήν ἐξ. (4.21)

$$1 \text{ ohm} = \frac{1 \text{ ampère}}{1 \text{ volt}} \ . \tag{4.23}$$

Στά ἑπόμενα κεφάλαια ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστάσεως καί ὁ νόμος τοῦ Ohm θά παίξουν κεντρικό ρόλο στήν ἐξέταση τῆς τεχνολογίας τοῦ ἡλεκτρισμοῦ. Γιά τόν ἡλεκτρολόγο μηχανικό ἡ ἁπλή σχέση V = IR ἀποτελεῖ τήν ἀπαρχή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κάθε ὑπολογισμοῦ γιά τόν προσδιορισμό τῆς ἀντιστάσεως ἤ τοῦ ρεύματος σέ κάθε ἐπιμέρους στοιχεῖο ἑνός κυκλώματος. Γιά τόν φυσικό ἀπό τήν ἄλλη πλευρά, ἡ ἐμπειρική σχέση τῆς ἐξ. (4.21) ἀντανακλᾶ μιά ἀξιοσημείωτη ἰδιότητα τῆς ὕλης πού καλεῖται νά ἐξηγήσει.

Γενικά ὡς ἠλεκτρικό ρεῦμα μποροῦμε νά θεωρήσουμε κάθε συστηματική μεταφορά φορτίου. Ἡ μηχανική μεταφορά φορτίου μέ τόν ἱμάντα τῆς διατάξεως Van de Graaff, ἡ ροή ἠλεκτρονίων στόν καθοδικό σωλήνα τῆς τηλεοράσεως ἤ ἡ κίνηση θετικῶν καί ἀρνητικῶν ἰόντων σέ ἕνα ἠλεκτρολυτικό διάλυμα εἶναι μερικές μορφές ἠλεκτρικοῦ ρεύματος. Ὁ μηχανισμός πού δημιουργεῖ τή ροή φορτίου σέ κάθε περίπτωση ποικίλει. Στή συντριπτική πλειοψηφία ὅμως τῶν ρευμάτων πού θά μᾶς ἀπασχολήσουν στή συνέχεια ἡ ροή φορτίου δημιουργεῖται ἀπό τή δύναμη πού ἀσκεῖ τό ἠλεκτρικό πεδίο στά στοιχειώδη φορτία. θεωρώντας τό μηχανισμό αὐτό σέ ἕνα στερεό ὁμογενές ὑλικό γιά δύο γειτονικά σημεῖα μέσα στό ὑλικό, ἡ ἐμπειρική παρατήρηση τῆς ἐξ. (4.21) ὁδηγεῖ στό συμπέρασμα ὅτι ἡ πυκνότητα ρεύματος **J** εἶναι ἀνάλογη πρός τό ἠλεκτρικό πεδίο **E**. Μποροῦμε ἑπομένως σέ κάθε σημεῖο τοῦ ὑλικοῦ νά συνδέσουμε τά δύο ἀνύσματα μέ τή σχέση

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \tag{4.24}$$

ὅπου ἡ σταθερά g χαρακτηρίζει τό ὑλικό.

Ἀπό φυσικῆς ἀπόψεως ἡ **ἀγωγιμότητα** g πού ὁρίζεται στήν ἐξ. (4.24) προσφέρεται περισσότερο γιά τή διερεύνηση τοῦ φαινομένου πού ἐκφράζει ὁ νόμος τοῦ Ohm ἀπό ὅτι ἡ ἀντίσταση R τῆς ἐξ. (4.21) πού μεταξύ ἄλλων ἐξαρτᾶται ἀπό τή γεωμετρία τοῦ ὑλικοῦ σώματος. Ἀντίθετα, σέ πρακτικές ἐφαρμογές ὅπου ἐνδιαφέρει τό ὁλικό ρεῦμα ἤ ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων ἑνός κυκλώματος, ἡ ἀντίσταση R εἶναι τό καθοριστικό μέγεθος. Μποροῦμε πάντως νά συνδέσουμε τίς δύο ποσότητες (πού ἔτσι κι ἀλλιῶς περιγράφουν τό ἴδιο φαινόμενο) ἄν θεωρήσουμε μιά ἁπλή γεωμετρία. Ἄν τό σχῆμα τοῦ ὑλικοῦ πού διαρρέεται ἀπό ρεῦμα ἔχει σταθερή διατομή (ὅπως π.χ. ἕνα σύνηθες σύρμα) ἡ ὁλική ἀντίσταση εἶναι ἀνάλογη πρός τό μῆκος του ℓ καί ἀντίστροφα ἀνάλογη πρός τήν ἐγκάρσια διατομή s. Βεβαίως ἐξαρτᾶται καί ἀπό τή φύση τοῦ ὑλικοῦ. Ἡ ἐμπειρική σχέση πού ἐπαληθεύεται πειραματικά γιά μιά μεγάλη κατηγορία ὑλικῶν εἶναι

$$R = \rho \frac{\ell}{s} \tag{4.25}$$



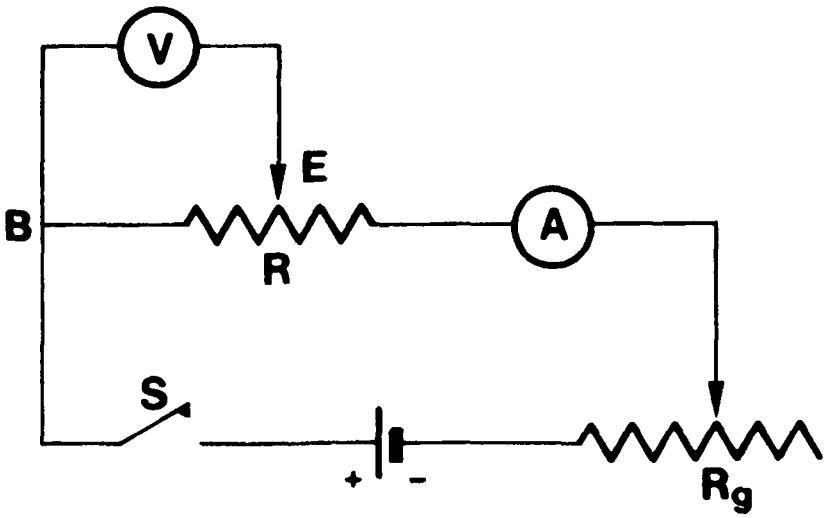
ὅπου ἡ **εἰδική ἀντίσταση** ρ χαρακτηρίζει τό ὑλικό ἀνεξάρτητα ἀπό τή γεωμετρία. Τή σχέση αὐτή θά ἐπαληθεύσουμε στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 4-1 ΕΙΔΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΜΕΤΑΛΛΙΚΟΥ ΑΓΩΓΟΥ

Συνδέστε τό κύκλωμα πού δίνεται στό σχῆμα 4-2. Ὡς ἀντίσταση R χρησιμοποιεῖστε μιά μεταλλική χορδή μέ διατομή s. Σημειῶστε τή διατομή τῆς χορδῆς καί τό ὑλικό ἀπό τό ὁποῖο εἶναι κατασκευασμένη. Συνδέστε τό βολτόμετρο V μέ τό ἕνα ἄκρο τῆς χορδῆς Β. Ἡ ἐπαφή Ε μπορεῖ νά κινεῖται κατά μῆκος τῆς χορδῆς. Κλεῖστε τό διακόπτη S καί μέ τή ρυθμιστική ἀντίσταση R_g ρυθμίστε τήν ἔνταση τοῦ ρεύματος ὥστε νά πάρει κάποια τιμή, ἐπιτρεπτή γιά τό ἀμπερόμετρο Α. Σημειῶστε σέ κατάλληλο πίνακα τήν ἔνδειξη V τοῦ βολτόμετρου, I τοῦ ἀμπερόμετρου καί τό μῆκος ℓ τῆς χορδῆς μεταξύ τῶν σημείων Β καί Ε. Στήν τελευταία στήλη τοῦ πίνακα ὑπολογίστε ἀπό τό νόμο τοῦ Ohm τήν ἀντίσταση R τοῦ μήκους ℓ τῆς χορδῆς. Ἐπανσλάβετε τή μέτρηση γιά 10 τουλάχιστον διάφορες θέσεις τῆς ἐπαφῆς Ε κατά μῆκος τῆς χορδῆς.

– Ἐπαναλάβετε τίς παραπάνω μετρήσεις γιά χορδές κατασκευασμένες ἀπό τό ἴδιο ὑλικό ἀλλά διάφορη διατομή.

– Ἀποδῶστε σέ μία γραφική παράσταση τή μεταβολή τῆς ἀντιστάσεως R ὡς πρός τό μῆκος ℓ τῆς χορδῆς γιά καθεμιά ἀπό τίς προηγούμενες χορδές. Προσαρμόστε μιά εὐθεία γραμμή στά πειραματικά δεδομένα πού ἀντιστοιχοῦν σέ κάθε χορδή. Σημειῶστε στό ἄκρο κάθε εὐθείας τό ἐμβαδόν τῆς διατομῆς s τῆς ἀντίστοιχης χορδῆς. Ἀπό τή γραφική παράσταση προσδιορίστε γιά κάθε χορδή τή σταθερά k στή σχέση



ΣΧΗΜΑ 4-2 Διάταξη γιά τόν προσδιορισμό τῆς εἰδικῆς ἀντιστάσεως ρ στό Πείραμα 4-1.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$R = k\ell \qquad (4.26)$$

πού συνδέει τήν άντίσταση μέ τό μῆκος ἐνός γραμμικοῦ ἀγωγοῦ.

– Χρησιμοποιώντας τά προηγούμενα ἀποτελέσματα ἀποδῶστε σέ μιά δεύτερη γραφική παράσταση τή μεταβολή τοῦ συντελεστή k ὡς πρός τό ἀντίστροφο τῆς διατομῆς τοῦ ἀγωγοῦ s^{-1}. Προσαρμόστε μιά εὐθεία στά πειραματικά δεδομένα καί ἀπό τήν κλίση τῆς εὐθείας προσδιορίστε τήν εἰδική ἀντίσταση ρ τοῦ ὑλικοῦ ἀπό τό ὁποῖο εἶναι κατασκευασμένες οἱ χορδές πού μελετήσατε. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμά σας μέ τιμές πού δίνονται στή βιβλιογραφία.

Μέσα στήν πληθώρα τῶν φυσικῶν μεγεθῶν πού ὁρίζεται στούς διάφορους κλάδους τῆς ἐπιστήμης ἡ εἰδική ἀντίσταση τῶν ὑλικῶν πού ἀπαντοῦμε στή φύση ἤ στό ἐργαστήριο κατέχει ἴσως τό ρεκόρ σέ φάσμα ἀριθμητικῶν τιμῶν. Μεταξύ τοῦ καλύτερου μονωτικοῦ ὑλικοῦ καί τοῦ καλύτερου ἀγωγοῦ σέ κανονική θερμοκρασία, ἡ παράμετρος ρ τῆς ἐξ. (4.25) μεταβάλλεται κατά 30 περίπου τάξεις μεγέθους. Ἄν καί ὁ διαχωρισμός δέν εἶναι ἀπόλυτος, πρακτικά διακρίνουμε τά ὑλικά σέ τρεῖς μεγάλες κατηγορίες. Σέ **ἀγωγούς** μέ εἰδική ἀντίσταση στήν περιοχή 10^{-3} ἕως 10^{-6} Ω·cm, σέ **ἡμιαγωγούς** στήν περιοχή 10^{-2} ἕως 10^{9} Ω·cm καί σέ **μονωτές** στήν περιοχή 10^{10} ἕως 10^{22} Ω·cm. Ἡ εἰδική ἀντίσταση γιά μερικά συνήθη ὑλικά δίνεται στόν Πίνακα 4-1.

Ἡ ἐξ. (4.24) εἶναι μιά ἐμπειρική σχέση μέ προέλευση τήν πειραματική παρατήρηση σέ μιά μεγάλη κατηγορία ὑλικῶν. Συνδέει τή ροή τοῦ ἐλεύθερου φορτίου σέ ἕνα σημεῖο τοῦ ὑλικοῦ μέ τήν τιμή καί διεύθυνση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου στό σημεῖο αὐτό. Ἤδη στήν προηγούμενη πρόταση ὁ παρατηρητικός ἀναγνώστης θά διέκρινε μιά παραδοξολογία. Ὁ ὅρος «ἐλεύθερο φορτίο» συνεπάγεται, σύμφωνα μέ τό δεύτερο νόμο τοῦ Νεύτωνα, ἐπιτάχυνση ἀνάλογη πρός τή δύναμη. Παρόλα αὐτά, ἡ ἐξ (4.24) συνδέει μέ μιά ἁπλή ἀναλογία τή δύναμη $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ πάνω στό «ἐλεύθερο φορτίο» q μέ τήν ταχύτητα $\mathbf{v} = q^{-1}\mathbf{J}$ καί ὄχι μέ τήν ἐπιτάχυνση. Ἄν ἑπομένως σέ ἕνα ὑλικό ἱκανοποιεῖται ὁ νόμος τοῦ Ohm τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ φορεῖς τοῦ φορτίου δέν εἶναι ἀπόλυτα ἐλεύθεροι νά κινηθοῦν. Στήν κίνηση πού προκαλεῖ τό ἠλεκτρικό πεδίο ἀντιτίθεται μιά δύναμη πού θυμίζει ἔντονα τίς δυνάμεις τριβῆς.

Δέν θά ἀποτολμήσουμε ἐδῶ τήν ποσοτική ἀνάλυση τοῦ νόμου τοῦ Ohm. Ἡ πλήρης ἐξήγηση τοῦ φαινομένου καθώς καί ὁ ὑπολογισμός τῆς ἀγωγιμότητας g μποροῦν νά γίνουν μόνο στά πλαίσια τῆς κβαντικῆς θεω-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ 4-1 Εἰδική ἀντίσταση ρ διάφορων ὑλικῶν σέ θερμοκρασία 22°C

Ὑλικό	ρ (Ω·cm)	Ὑλικό	ρ (Ω·cm)
Διηλεκτρικά (στερεά):		Ἄλατα σέ ὑγρή κατάσταση:	
παραφίνη	$>10^{16}$	χλωριοῦχο ἀσβέστιο(750°C)	0.862
θεῖον	1×10^{17}	νιτρικός ἄργυρος (350°C)	0.820
ἤλεκτρο	5×10^{16}	χλωριοῦχο νάτριο (750°C)	0.294
βακελίτης	2×10^{7}		
(διάφοροι τύποι)	-2×10^{16}	Μέταλλα:	
quartz		ἀνθρακας	3.5×10^{-3}
∥ πρός κύριο ἄξονα	1×10^{14}	βισμούθιο	1.19×10^{-4}
⊥ πρός κύριο ἄξονα	3×10^{16}	ὑδράργυρος	9.58×10^{-5}
μίκα	9×10^{15}	ἀντιμόνιο	4.17×10^{-5}
πορσελάνη	3×10^{14}	μπροῦτζος	
σχιστόλιθος	10^{4}	– (88% Cu, 12% Sn)	1.8×10^{-5}
ὕαλος	2×10^{13}	– (89% Cu, 6% Sn, 4% Zn)	1.35×10^{-5}
ξύλο		σίδηρος	1.0×10^{-5}
– μαόνι	4×10^{13}	λευκόχρυσος	1.0×10^{-5}
– λεύκη	5×10^{11}	βολφράμιο	5.51×10^{-6}
– πλάτανος	3×10^{10}	ἀλουμίνιο	2.83×10^{-6}
λευκό μάρμαρο	10^{10}	χρυσός	2.44×10^{-6}
γρανίτης	$10^{7}-10^{9}$	χαλκός	1.7×10^{-6}
Διηλεκτρικά (ὑγρά†):		ἄργυρος	1.47×10^{-6}
πετρέλαιο	2×10^{16}		
παραφινέλαιο	1×10^{16}		
ἐλαιόλαδο	5×10^{12}		
ἀπεσταγμένο νερό	5×10^{5}		
αἰθυλική ἀλκοόλη	3×10^{5}		

† Ἡ εἰδική ἀντίσταση στήν ὑγρή κατάσταση μετρᾶται σέ μονάδες ἀντιστάσεως ἀνά στοιχειώδη ὄγκο. Οἱ τιμές πού περιέχονται στόν πίνακα δίνονται σέ Ω/cm^3.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

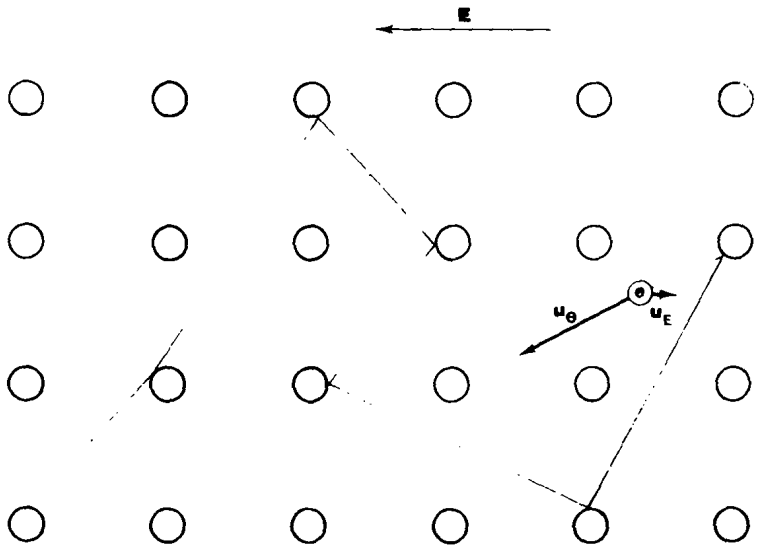
ρίας. Ποιοτικά, μποροῦμε νά ἀποδώσουμε τή συμπεριφορά πού ἐκφράζει ἡ ἐξ. (4.24) στή μεγάλη διαφορά (κατά πολλές τάξεις μεγέθους γιά συνήθη ἡλεκτρικά πεδία καί θερμοκρασίες) μεταξύ τῆς ταχύτητας u_Θ τῶν φορέων πού ὀφείλεται στή θερμική τους κίνηση καί τῆς μέσης ταχύτητας u_E πού ἀποτελεῖ τή συνισταμένη τῆς θερμικῆς κινήσεως καί τῆς κινήσεως πού δημιουργεῖ τό ἡλεκτρικό πεδίο. Ἀπό τίς ἐξ. (4.14) καί (4.15)

$$u_E \simeq 10^{-2} - 10^{-3} << u_\Theta \simeq 10^7 \text{ cm/sec} . \qquad (4.27)$$

Ἄν υἱοθετήσουμε τό ἁπλό πρότυπο πού ὁδήγησε στό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (4.14), ἤτοι ἕνα συνεχές μέσο ὅπου φορεῖς τοῦ φορτίου εἶναι ἕνα ἡλεκτρόνιο κατά ἄτομο, μποροῦμε νά ἐξάγουμε ὁρισμένα γενικά συμπεράσματα γιά τή διακίνηση τοῦ φορτίου μέσα στήν ὕλη. Ἡ κίνηση ἑνός ἡλεκτρονίου μέσα σέ ἕνα στερεό δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 4-3 μέ κύριο χαρακτηριστικό τίς συνεχεῖς καί τυχαῖες κρούσεις τοῦ ἡλεκτρονίου μέ τά ἄτομα ἤ θετικά ἰόντα τοῦ ὑλικοῦ. Γιά τήν τυπική μέση ἀπόσταση

$$\langle d \rangle \simeq 10^{-7} \text{ cm} \qquad (4.28)$$

μεταξύ ἀτόμων μέσα σέ ἕνα στερεό ἡ τιμή τῆς ταχύτητας u_Θ προβλέπει ὅτι



ΣΧΗΜΑ 4-3 Κίνηση ἡλεκτρονίου στό ἐσωτερικό ἀγωγοῦ. Οἱ κύκλοι συμβολίζουν θετικά ἰόντα ἤ οὐδέτερα ἄτομα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὁ μέσος χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικῶν κρούσεων εἶναι, σέ προσέγγιση τάξης μεγέθους,

$$\tau_e = \frac{\langle d \rangle}{u_\theta} \simeq 10^{-14}\ \text{sec} \ . \tag{4.29}$$

Στό μικρό αὐτό χρόνο τό ἡλεκτρικό πεδίο ἐπενεργεῖ μέ μιά δύναμη $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ πάνω στό ἡλεκτρόνιο καί μεταβάλλει τήν ὁρμή του κατά τήν ποσότητα

$$m_e \mathbf{u}_e = -e\mathbf{E}\tau \ . \tag{4.30}$$

Ἄν N εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν ἡλεκτρονίων πού συνεισφέρουν στό ρεῦμα, τότε ἡ μέση τιμή τῆς ὁρμῆς τους μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$m_e \langle \mathbf{u} \rangle \equiv m_e \mathbf{u}_E = \frac{1}{N} \sum_k (m_e \mathbf{u}_\theta^{(k)} - e\mathbf{E}\tau_k) \tag{4.31}$$

ὅπου τό ἄνυσμα $\mathbf{u}_\theta^{(k)}$ ἀντιπροσωπεύει τήν ταχύτητα ἑνός ἡλεκτρονίου μετά τήν τελευταία του κρούση. Καθόσον οἱ ταχύτητες αὐτές ἔχουν τελείως τυχαία διεύθυνση, ὁ πρῶτος ὅρος στό ἄθροισμα τῆς ἐξ. (4.31) μηδενίζεται. Ὁ δεύτερος ὅρος εἶναι τό γινόμενο τῆς δυνάμεως $-e\mathbf{E}$ πού ἐξασκεῖ τό ἡλεκτρικό πεδίο στό ἡλεκτρόνιο ἐπί τό μέσο χρόνο

$$\tau_e \equiv \langle \tau \rangle = \frac{1}{N} \sum_k \tau_k \tag{4.32}$$

μεταξύ διαδοχικῶν κρούσεων. Ἡ μέση ταχύτητα μέ τήν ὁποία κινεῖται τό ἡλεκτρόνιο εἶναι ἐπομένως

$$\mathbf{u}_E = \frac{-e\mathbf{E}}{m_e} \tau_e \ . \tag{4.33}$$



Ἡ τελευταία σχέση ἀποδίδει τή συμπεριφορά πού περιγράφει ὁ νόμος τοῦ Ohm: *ἡ ταχύτητα τῶν φορέων τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου μέσα στήν ὕλη εἶναι ἀνάλογη πρός τή δύναμη πού ἐξασκεῖ τό ἠλεκτρικό πεδίο.* Μποροῦμε μάλιστα νά καταλήξουμε στήν ἐξ. (4.24) ἄν χρησιμοποιήσουμε τή σύνδεση μεταξύ πυκνότητας ρεύματος καί μέσης ταχύτητας τῶν ἠλεκτρονίων πού δίνεται στήν ἐξ. (4.10). Γιά τό πρότυπο πού ὁδηγεῖ στήν ἐξ. (4.33), ἡ πυκνότητα ρεύματος εἶναι

$$\mathbf{J} = -eN_e \mathbf{u}_E = \frac{e^2 Ne}{m_e} \tau_e \mathbf{E} \ . \tag{4.34}$$

Συγκρίνοντας τή σχέση αὐτή μέ τήν ἐξ. (4.24) ἡ ἀγωγιμότητα ἀναγνωρίζεται ὡς

$$g = \frac{e^2 Ne}{m_e} \tau_e \ . \tag{4.35}$$

Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τήν ἐκτίμηση τῆς ἐξ. (4.29) γιά τό μέσο χρόνο μεταξύ διαδοχικῶν κρούσεων τ_e, τήν τιμή τῆς πυκνότητας ἐλεύθερων ἠλεκτρονίων γιά τό χαλκό τῆς ἐξ. (4.13) καί τίς πειραματικές τιμές γιά τό φορτίο ($e = 1.6 \times 10^{-19}$ C) καί τή μάζα ($m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) τοῦ ἠλεκτρονίου, ἡ ἐξ. (4.35) δίνει

$$g \simeq 2 \times 10^7 \, \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$\rho \simeq 5 \times 10^{-8} \, \Omega \cdot m = 5 \times 10^{-6} \, \Omega \cdot cm \tag{4.36}$$

Παρόλη τήν ἁπλοϊκότητα τοῦ προτύπου πού χρησιμοποιήσαμε, ἡ συμφωνία τῆς ἐκτιμήσεως πού προκύπτει στήν ἐξ. (4.36) μέ τήν πειραματική τιμή τῆς εἰδικῆς ἀντιστάσεως τοῦ χαλκοῦ στόν Πίνακα 4-1 εἶναι ἐκπληκτική.

Οἱ δυνάμεις «τριβῆς» πού ἀντιτίθενται στή ροή τοῦ φορτίου μέ σταθερή ἐπιτάχυνση συνεπάγονται τήν κατανάλωση ἔργου. Στό ἁπλό πρότυπο πού θεωρήσαμε ὡς τώρα ὁ μηχανισμός καταναλώσεως ἔργου εἶναι προφανής. Σέ κάθε σύγκρουση τῶν φορέων τοῦ φορτίου μέ τά ἰόντα ἤ τά ἄτομα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τοῦ ὑλικοῦ μεταφέρεται ἐνέργεια εἴτε ἀπό τό ἠλεκτρόνιο στό ἰόν εἴτε ἀντίστροφα. Στή σταθερή κατάσταση ροῆς τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἑπομένως ἕνα μέρος τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῶν ἠλεκτρονίων μεταβάλλεται σέ τυχαία κινητική ἐνέργεια τῶν ἀτόμων τοῦ ὑλικοῦ, δηλαδή σέ θερμότητα. Ἄν $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ εἶναι ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖ τό ἠλεκτρικό πεδίο πάνω σέ ἕνα ἠλεκτρόνιο πού κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα $\mathbf{u}$ ὁ ρυθμός καταναλώσεως ἐνεργείας στό στοιχειώδη ὄγκο πού περιέχει N_e ἠλεκτρόνια πρέπει νά εἶναι

$$p = \frac{dW}{dt} = N_e \mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = -eN_e\mathbf{E}\cdot\mathbf{u} \ . \tag{4.37}$$

Χρησιμοποιώντας τήν ἔκφραση $\mathbf{J} = -eN_e\mathbf{u}$ γιά τήν πυκνότητα ρεύματος καί τό νόμο τοῦ Ohm στήν ἐξ. (4.24), ἡ ἰσχή p μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$p = -eN_e\left(\frac{1}{g}\,\mathbf{J}\right)\cdot\left(\frac{1}{-eN_e}\,\mathbf{J}\right) = \frac{1}{g}\,|\mathbf{J}|^2 = \rho|\mathbf{J}|^2 \tag{4.38}$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ εἰδική ἀντίσταση τοῦ ὑλικοῦ. Ἡ τελευταία σχέση εἶναι περισσότερο γνωστή στήν περίπτωση ἑνός **γραμμικοῦ ἀγωγοῦ**, δηλαδή ἑνός ἀγωγοῦ μέ σταθερή διατομή s καί σταθερή πυκνότητα ρεύματος. Ἄν ℓ εἶναι τό μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ καί $I = Js$ τό ὁλικό ρεῦμα, τότε ἡ ὁλική ἰσχή πού καταναλώνεται στόν ἀγωγό εἶναι

$$P = \int p\,d^3x = ps\ell = \rho\ell s\,\frac{I^2}{s^2} = RI^2 \ . \tag{4.39}$$

Στό τελευταῖο σκέλος τῆς ἐξ. (4.39) ἔχει χρησιμοποιηθεῖ ἡ ἐξ. (4.25). Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τό νόμο τοῦ Ohm, ἡ ἐξ. (4.39) μπορεῖ νά γραφεῖ στίς ἐναλλακτικές μορφές

$$P = RI^2 = VI = \frac{V^2}{R} \tag{4.40}$$

ὅπου V εἶναι ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ ἀγωγοῦ.


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στό σύστημα SI ἡ μονάδα πού μετρᾶ τήν ἰσχή εἶναι τό volt × ampère = volt × coulomb/sec = joule/sec ≡ watt. Μονάδα ἰσχῆς στό σύστημα CGS εἶναι τό erg/sec, ὅπου

$$1 \text{ watt} = 10^7 \text{ erg/sec} \ . \qquad (4.41)$$

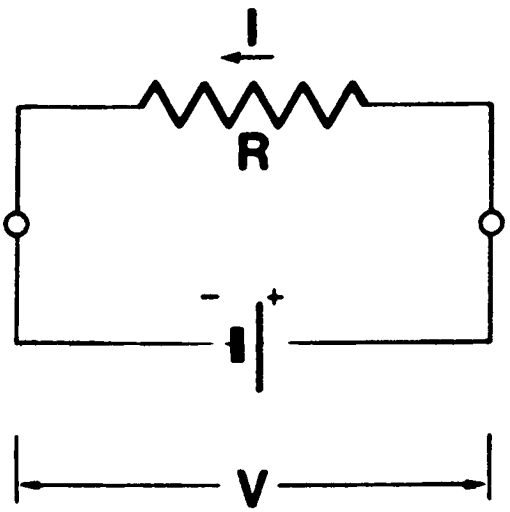
4-4 Ἡ Ὠμική Ἀντίσταση

Ὁ νόμος τοῦ Ohm δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 4-4 ὅπου τό σύμβολο ⊣|⊢ ἀντιπροσωπεύει ἕνα **ἠλεκτρικό στοιχεῖο** καί τό σύμβολο ⁄\⁄\⁄ ἕναν ἀγωγό μέ ἀντίσταση R. Ὡς ἠλεκτρικό στοιχεῖο θά θεωρήσουμε ὁποιαδήποτε συσκευή πού ἔχει τή δυνατότητα νά διατηρήσει σέ δύο σημεῖα της μιά διαφορά δυναμικοῦ V. Ἡ διαφορά αὐτή δυναμικοῦ μπορεῖ νά ἐπιτυγχάνεται μέ διάφορους μηχανισμούς. Στήν πράξη ὁ ὅρος ἠλεκτρικό στοιχεῖο διατηρεῖται μόνο γιά διατάξεις ὅπου ἡ διαφορά δυναμικοῦ δημιουργεῖται ἀπό χημικές ἀντιδράσεις τῶν ὑλικῶν πού ἀποτελοῦν τό στοιχεῖο. Ἂν καί θά ἀναφερθοῦμε σέ ὁρισμένες χαρακτηριστικές ἰδιότητες τῶν ἠλεκτρικῶν στοιχείων στά δύο ἑπόμενα κεφάλαια θά ἔχουμε τήν εὐκαιρία νά τά μελετήσουμε μέ λεπτομέρεια στό Κεφάλαιο 5. Ἐναλλακτικά θά χρησιμοποιήσουμε ἐπανειλλημένα στό ἐργαστήριο συσκευές πού τροφοδοτοῦνται ἀπό τό δίκτυο τῆς πόλης καί εἶναι κατασκευασμένες ἔτσι ὥστε νά ἐμφανίζουν σέ δύο ἀκροδέκτες τους μιά διαφορά δυναμικοῦ V. Στίς περισσότερες συσκευές τοῦ τύπου αὐτοῦ, πού θά ὀνομάσουμε **τροφοδοτικά συνεχοῦς ρεύματος (ΣΡ)**† ἡ διαφορά δυναμικοῦ V πού ἀναπτύσσεται στούς δύο ἀκροδέκτες μπορεῖ νά ἐπιλεγεῖ μεταξύ δύο ὁρίων πού καθορίζει ὁ κατασκευαστής, ἐνῶ ἡ τιμή V καί τό ρεῦμα πού παρέχεται στό ἐξωτερικό κύκλωμα δίνονται σέ ὄργανα τῆς συσκευῆς. Στά πλαίσια τοῦ βιβλίου αὐτοῦ, ἡ ἐσωτερική κατασκευή τῶν τροφοδοτικῶν ΣΡ δέν θά μᾶς ἀπασχολήσει.

Ὁ ἀγωγός πού στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 4-4 παρεμβάλλει τήν ἀντίσταση R μεταξύ τῶν ἀκροδεκτῶν τοῦ ἠλεκτρικοῦ στοιχείου μπορεῖ στήν πράξη νά πάρει πολλές μορφές. Ὁ ἐπιστήμονας ἤ ὁ τεχνικός ἔχει σήμερα στή διάθεσή του μιά μεγάλη ποικιλία ἀπό παθητικά ἐξαρτήματα πού κατασκευάζονται μέ μόνο σκοπό τήν παρεμβολή ἀντιστάσεως σέ ἕνα ἠλεκτρικό κύκλωμα καί πού ἀναφέρονται μέ τή γενική ὀνομασία **ἀντιστάσεις.** Οἱ τυπο-

† Σύμφωνα μέ τήν καθιερωμένη πρακτική θά συμβολίσουμε τό συνεχές ρεῦμα μέ τά γράμματα ΣΡ καί τό ἐναλλασσόμενο ρεῦμα μέ τά γράμματα ΕΡ. Στή διεθνή βιβλιογραφία τά ἀντίστοιχα μεγέθη συμβολίζονται μέ τά γράμματα DC καί AC.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 4-4 Διαγραμματική παράσταση τοῦ νόμου τοῦ Ohm.

ποιημένες ἀντιστάσεις ποικίλουν ὡς πρός τό ὑλικό ἀπό τό ὁποῖο εἶναι κατασκευασμένες, τίς διαστάσεις καί τό σχῆμα. Γενικά χαρακτηρίζονται ἀπό κάποια ὀνομαστική τιμή τῆς ἀντιστάσεως πού παρεμβάλλουν στή ροή τοῦ ρεύματος, τήν ἀκρίβεια (δηλαδή τήν ποσοστιαία πιθανή ἀπόκλιση τῆς πραγματικῆς ἀντιστάσεως ἀπό τήν ὀνομαστική τιμή) καί τή σταθερότητα τῆς ἀντιστάσεως ὡς πρός τίς μεταβολές τῶν συνθηκῶν τοῦ περιβάλλοντος (θερμοκρασία, ὑγρασία, κ.λ.π.).

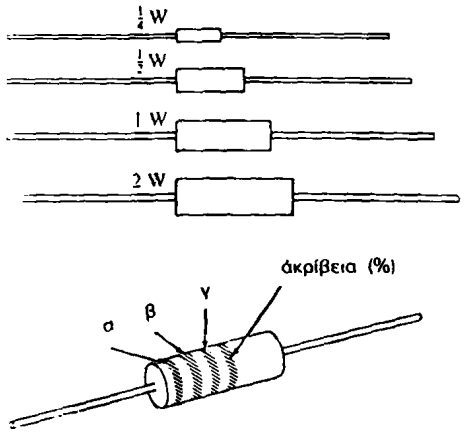
Ἡ ἁπλούστερη μορφή ἀντιστάσεως εἶναι τό **σύρμα** ἠλεκτρικοῦ ρεύματος πού ἀποτελεῖ ἀναπόσπαστο μέρος κάθε κυκλώματος. Χρησιμοποιεῖται συνήθως γιά τήν ἀλληλοσύνδεση τῶν παθητικῶν καί ἐνεργῶν ἐξαρτημάτων ἑνός κυκλώματος ὅπου ἡ ἀντίσταση πού παρεμβάλλει μπορεῖ νά θεωρεηθεῖ ὡς ἀμελητέα. Σέ μεγαλύτερη ποσότητα μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τήν κατασκευή ἄλλων ἐξαρτημάτων ὅπως πηνία, μετασχηματιστές ἤ ροοστάτες. Τά συνήθη σύρματα εἶναι κατασκευασμένα ἀπό χαλκό, ἕνα μέταλλο μέ μικρή εἰδική ἀντίσταση, μεγάλη εὐλυγισία καί σχετικά χαμηλό κόστος. Τό χάλκινο σύρμα συνήθως ἐπιμεταλλώνεται μέ ἄργυρο ἤ κασσίτερο γιά νά προφυλάσσεται ἀπό τήν ὀξείδωση καί νά διευκολύνει τή συγκόληση μέ τούς ἀκροδέκτες ἐξαρτημάτων τοῦ κυκλώματος. Πολλές φορές ἀκόμη περιβάλλεται ἀπό μονωτικό ὑλικό.

Ὅπως δείχνει ἡ ἐξ. (4.25), ἡ ἀντίσταση ἑνός σύρματος ἐξαρτᾶται ἀπό τό μῆκος καί τή διατομή του. Στήν Ἑλλάδα κατασκευάζονται σήμερα χάλκινα σύρματα μέ διάφορες διατομές σύμφωνα πρός τίς προδιαγραφές τῆς Ὑπηρεσίας Προτυποποιήσεως τοῦ Ὑπουργείου Βιομηχανίας. Γιά σύρματα μέ μεγάλη διατομή ὁ χάλκινος ἀγωγός κατασκευάζεται ἀπό πολλά συνε-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στραμμένα σύρματα ἤ *κλώνους* μικρότερης διατομῆς. Τό σύρμα τοῦ τύπου αὐτοῦ, πού ὀνομάζεται **πολύκλωνο,** ἐμφανίζει μεγαλύτερη εὐκαμψία καί ἀντοχή. Ὁρισμένοι τύποι χάλκινων συρμάτων πού κατασκευάζονται καί χρησιμοποιοῦνται σήμερα στήν Ἑλλάδα δίνονται στόν Πίνακα 4-2. Γιά πολλές πρακτικές ἐφαρμογές, κυρίως γιά τή σύνδεση ἑνός ἠλεκτρικοῦ ἐξαρτήματος ἤ ἠλεκτρικῆς συσκευῆς μέ μιά ἀπομακρισμένη πηγή ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, κατασκευάζονται τυποποιημένες διατάξεις στίς ὁποῖες δύο ἤ περισσότερα, μεταξύ τους μονωμένα σύρματα, περιέχονται στό ἴδιο περίβλημα. Ἡ διαδεδομένη αὐτή διάταξη εἶναι γνωστή μέ τόν ὅρο **καλώδιο.**

Ὁ πιό συνηθισμένος τύπος ἀντιστάσεως πού χρησιμοποιεῖται γιά τήν κατασκευή ἠλεκτρικῶν καί ἠλεκτρονικῶν κυκλωμάτων εἶναι κατασκευασμένος ἀπό λεπτούς κόκκους ἄνθρακα πού ἔχουν συμπιεστεῖ σέ ὑψηλή θερμοκρασία ἤ ἔχουν ἀποτεθεῖ ὡς λεπτό στρῶμα πάνω σέ ἕνα ὑπόστρωμα ἀπό μονωτικό ὑλικό. Ἀναφέρονται μέ τή γενική ὀνομασία **ἀντιστάσεις ἄνθρακα** καί ἔχουν κυλινδρικό σχῆμα μέ δύο ἀκροδέκτες κατά τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Ἄν καί ἐμφανίζουν τά πλεονεκτήματα τοῦ χαμηλοῦ κόστους, μικροῦ μεγέθους καί τῆς ἀπουσίας χωρητικότητας καί ἐπαγωγῆς, ἡ ἀκρίβεια τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς ἀντιστάσεως πού παρεμβάλλουν στό κύκλωμα εἶναι σχετικά περιορισμένη (5-10% τῆς ὀνομαστικῆς τιμῆς). Ἡ μορφή τῶν ἀντιστάσεων ἄνθρακα, πού εἶναι γνωστή σέ ὁποιονδήποτε ἔχει ρίξει μιά ματιά στό ἐσωτερικό μιᾶς ἠλεκτρονικῆς συσκευῆς, δίνεται στό σχῆμα 4-5. Ἡ βιομηχανία κατασκευάζει σήμερα ἀντιστάσεις ἄνθρακα σέ ἕνα μεγάλο εὖρος τιμῶν (ἀπό 2.7 Ω ἕως 2.2 × 10^7 Ω) καί σέ διάφορα μεγέθη γιά ἀντίστοιχη κατανάλωση ἰσχῆς ἀπό 1/8 watt ἕως 2 watt.



ΣΧΗΜΑ 4-5 Ἀντιστάσεις ἄνθρακα. Οἱ ἐνδείξεις α, β καί γ ἀντιστοιχοῦν στά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ τῆς ἐξ. (4.42), σύμφωνα μέ τή σύμβαση χρωμάτων στόν Πίνακα 4-3.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ 4-2 Χαρακτηριστικά ὁρισμένων τύπων χάλκινων συρμάτων πού κατασκευάζονται στήν Ἑλλάδα.

Ὀνομαστική διατομή (mm^2)	Ἀριθμός κλώνων	Ἀντίσταση Ω/km	Μέγιστο ἐπιτρεπόμενο ρεῦμα (A)†
1	1	17.8	18
1.5	1	11.9	22
2.5	1	7.14	31
4	1	4.46	41
6	1	2.97	54
10	1	1.785	70
16	1	1.122	96
16	7	1.130	96
25	7	0.742	128
35	19	0.525	153
50	19	0.364	197
70	19	0.271	234
95	19	0.192	287
120	37	0.153	336
150	37	0.122	383
185	37	0.099	435
240	61	0.078	515
300	61	0.063	596

† Τό μέγιστο ἐπιτρεπόμενο ρεῦμα δίνεται γιά θερμοκρασία περιβάλλοντος 30 °C. Γιά ὑψηλότερες θερμοκρασίες τά ὅρια ἐλαττώνονται αἰσθητά. Κατά τίς προδιαγραφές τῆς Ἑλληνικῆς νομοθεσίας οἱ τιμές στήν τελευταία στήλη τοῦ πίνακα ἐλαττώνονται σύμφωνα μέ τήν ἀντιστοιχία

35 °C	85 %
40 °C	75 %
45 °C	65 %
50 °C	53 %
55 °C	38 %

Ἡ ὀνομαστική τιμή τῆς ἀντιστάσεως καί ἡ ἀκρίβεια ἀναφέρεται συμβατικά μέ τέσσερις ἔγχρωμες λωρίδες στήν κυλινδρική ἐπιφάνεια τῆς ἀντιστά-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σεως, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 4-5. Οἱ τρεῖς πρῶτες λωρίδες μποροῦν νά μεταφραστοῦν σέ ἕνα ἀριθμό μέ δύο σημαντικά ψηφία τῆς μορφῆς

$$R = \alpha\beta\underbrace{0\,0\ldots0}_{\gamma} \qquad (4.42)$$

ὅπου τά ψηφία α, β καί τό πλῆθος τῶν μηδενικῶν γ καθορίζονται ἀπό τήν ἀντιστοιχία πού δίνεται στόν Πίνακα 4-3. Παρατηρεῖται ὅτι ἡ ἀντιστοιχία τῶν ψηφίων 2 ἕως 7 ἀκολουθεῖ τή φυσική διαδοχή τῶν χρωμάτων τῆς ἴριδας. Ἔτσι μιά ἀντίσταση μέ διαδοχικές ζῶνες: κόκκινο, ἰῶδες, κόκκινο ἔχει ὀνομαστική τιμή 2700 Ω ἤ 2.7 kΩ. Ἀντίσταση μέ ζῶνες χρωμάτων γαλάζιο, γκρί, μαῦρο ἔχει ὀνομαστική τιμή 68 Ω. Γιά ἀντιστάσεις μέ ὀνομαστική τιμή μεταξύ 1 καί 10 Ω ἡ τρίτη ζώνη ἔχει χρυσαφί χρῶμα. Ἔτσι μιά ἀντίσταση μέ ζῶνες χρώματος πράσινο, γαλάζιο, χρυσαφί, ἔχει τιμή 5.6 Ω.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4-3 Κώδικας χρωμάτων γιά τό συμβολισμό τῆς ὀνομαστικῆς τιμῆς ἀντιστάσεων.

0	Μαῦρο	5	Πράσινο
1	Καφέ	6	Γαλάζιο
2	Κόκκινο	7	Ἰῶδες
3	Πορτοκαλί	8	Γκρί
4	Κίτρινο	9	Λευκό

Ἡ τέταρτη κατά σειρά ζώνη στήν κυλινδρική ἐπιφάνεια μιᾶς ἀντιστάσεως ἄνθρακα δηλώνει τήν ἀκρίβεια στήν ὀνομαστική τιμή πού καθορίζεται ἀπό τίς τρεῖς πρῶτες ζῶνες. Ἀσημένια ζώνη δηλώνει ἀκρίβεια 10 % καί χρυσαφιά ζώνη ἀκρίβεια 5 %. Ἄν ἡ ἀκρίβεια εἶναι καλύτερη ἀπό 5 %, τότε ἀναγράφεται στό περίβλημα τῆς ἀντιστάσεως.

Ἡ συνήθης ἀκρίβεια μέσα στά ὅρια τοῦ 10 % τῶν ἀντιστάσεων ἄνθρακα ἔχει ὁδηγήσει σέ μιά ἐκ πρώτης ὄψεως παράξενη διαδοχή τιμῶν στίς ἀντιστάσεις πού παράγονται ἀπό τή βιομηχανία. Γιά κάθε τιμή τοῦ πλήθους γ τῶν μηδενικῶν στήν ἐξ. (4.42) τά δύο πρῶτα σημαντικά ψηφία τῶν ἀντιστάσεων μπορεῖ νά εἶναι

10, 12, 15, 18, 22, 27, 33, 39, 47, 56, 68 ἤ 82.

Παρατηρεῖται ὅτι μέ τόν τρόπο αὐτό κάθε τιμή ἐπικαλύπτει τό ὅριο τοῦ 10 % πού καθορίζουν οἱ δύο γειτονικές τιμές. Γιά ἀντιστάσεις μέ ἀκρίβεια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5 % κατασκευάζονται ἐπιπλέον στοιχεῖα μέ σημαντικά ψηφία τῆς ὀνομαστικῆς τιμῆς.

11, 13, 16, 20, 24, 30, 36, 43, 51, 62, 75 καί 91.

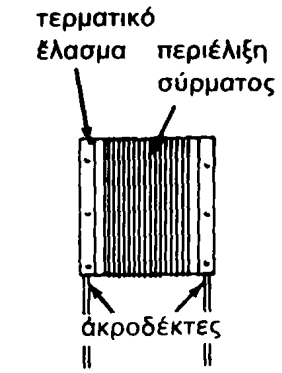
Ἡ ἀπόκλιση τῆς πραγματικῆς τιμῆς τῆς ἀντιστάσεως ἀπό τήν ὀνομαστική μπορεῖ νά ὀφείλεται σέ πολλούς παράγοντες. Γιά ἀντιστάσεις μέ μικρή ὀνομαστική τιμή (μικρότερη ἀπό 10 Ω), ἡ ἀντίσταση τῶν συνδέσεων μέ ἄλλα ἐξαρτήματα τοῦ κυκλώματος μπορεῖ νά αὐξήσει σημαντικά τήν ὁλική τιμή τῆς ἀντιστάσεως. Γιά μεγάλη ὀνομαστική τιμή (μεγαλύτερη ἀπό 10 ΜΩ), διαρροή ρεύματος πάνω στήν ἐπιφάνεια τοῦ στοιχείου μπορεῖ νά ἐλαττώσει κατά πολύ τήν ὁλική ἀντίσταση. Τό φαινόμενο αὐτό γίνεται σημαντικό ἄν ἡ ὑγρασία τοῦ περιβάλλοντος εἶναι μεγάλη. Τό μεγαλύτερο ἴσως μειονέκτημα τῶν ἀντιστάσεων ἄνθρακα εἶναι ἡ σημαντική ἐπίδραση τῆς θερμοκρασίας τοῦ περιβάλλοντος στήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως πού παρεμβάλλουν. Γιά τό λόγο αὐτό, ἄν ἡ σταθερότητα τῆς ἀντιστάσεως εἶναι μιά ἀπό τίς κύριες ἀπαιτήσεις σέ ἕνα συγκεκριμένο κύκλωμα, συνιστᾶται ἡ χρησιμοποίηση ἀντιστάσεως μέ δυνατότητα καταναλώσεως ἐνεργείας πολύ μεγαλύτερη ἀπό αὐτή πού ἀναμένεται κατά τή λειτουργία τοῦ κυκλώματος.

Μιά διαφορετική κατηγορία ἀντιστάσεων παρασκευάζεται μέ τήν περιέλιξη σύρματος γύρω ἀπό ἕνα κύλινδρο ἀπό μονωτικό (συνήθως κεραμικό) ὑλικό. Οἱ **ἀντιστάσεις σύρματος** βρίσκουν ἐφαρμογή σέ περιπτώσεις ὅπου ἀπαιτεῖται χαμηλή ἀντίσταση, μεγάλη ἀκρίβεια ἤ ὑψηλή κατανάλωση ἰσχῆς. Μέ μικρή ποσότητα σύρματος μικρῆς εἰδικῆς ἀντιστάσεως κατασκευάζονται ἀντιστάσεις μέ μικρή ἀπόλυτη τιμή καί ὑψηλή ἀκρίβεια. Μέ χρησιμοποίηση εἰδικῶν κραμάτων μέ χαμηλό θερμικό συντελεστή κατασκευάζονται ἀντιστάσεις σύρματος μέ ἀκρίβεια καλύτερη ἀπό 0.001 %.

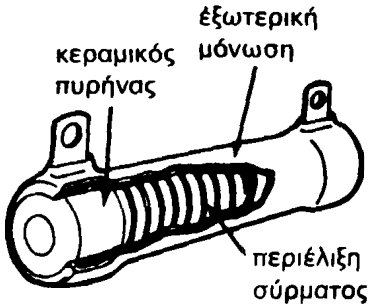
Ἡ ἐνέργεια πού καταναλώνεται σέ ἀντιστάσεις σύρματος εἶναι σέ πολλές περιπτώσεις σημαντική. Σέ ἐφαρμογές ὅπου ἡ προβλεπόμενη κατανάλωση ἐνεργείας εἶναι μεγαλύτερη ἀπό 2 W χρησιμοποιοῦνται **ἀντιστάσεις ἰσχῆς** στίς ὁποῖες ἔχει χρησιμοποιηθεῖ μονωτικό ὑλικό ἀνθεκτικό σέ ὑψηλές θερμοκρασίες. Μερικά παραδείγματα ἀντιστάσεων σύρματος δίνονται στό σχῆμα 4-6.

Ἡ ἀνάπτυξη τῆς τεχνολογίας ἀποθέσεως λεπτῶν στρωμάτων μετάλλου σέ ὑπόστρωμα ἀπό μονωτικό ὑλικό ἔχει ὁδηγήσει στήν κατασκευή **ἀντιστάσεων μεταλλικῆς ταινίας** πού ἐμφανίζουν μεγάλη ἀκρίβεια, ἱκανοποιητική σταθερότητα ὡς πρός τή μεταβολή τῆς θερμοκρασίας καί σχετικά χαμηλό κόστος. Ἀντιστάσεις μεταλλικῆς ταινίας κατασκευάζονται μέ ἐξάχνωση στό κενό καί ἀπόθεση ἑνός λεπτοῦ στρώματος μετάλλου στήν ἐπιφάνεια

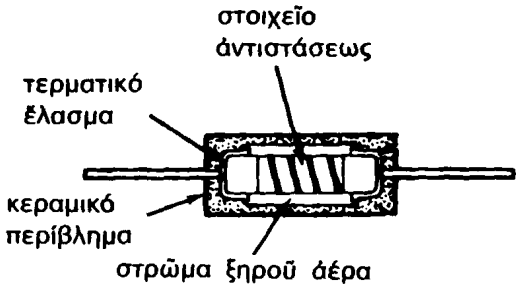
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



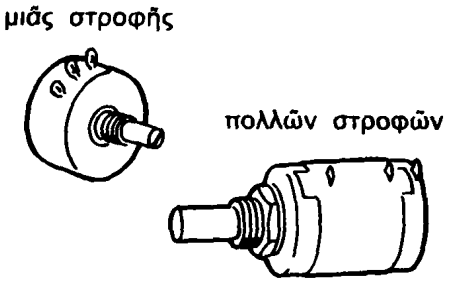
ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ



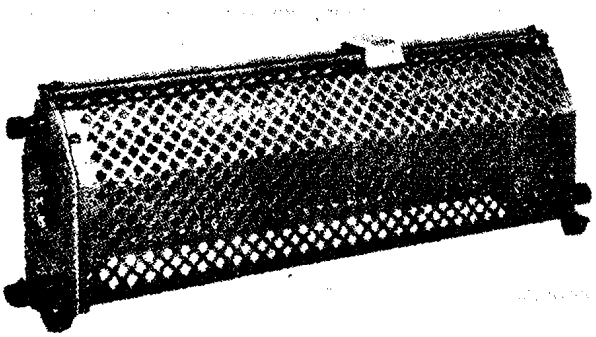
ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΙΣΧΗΣ



ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΜΕΤΑΛΛΙΚΗΣ ΤΑΙΝΙΑΣ



ΠΟΤΕΝΣΙΟΜΕΤΡΑ





ΡΟΟΣΤΑΤΕΣ

ΣΧΗΜΑ 4-6 Ἀντιστάσεις σύρματος, μεταλλικῆς ταινίας καί ρυθμιζόμενες ἀντιστάσεις.

μονωτικοῦ ὑλικοῦ μέ χαμηλό συντελεστή θερμικῆς διαστολῆς. Ἡ ἀντίσταση τοῦ στοιχείου πού δημιουργεῖται μπορεῖ νά αὐξηθεῖ μέ κατάλληλη μηχα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

νική καί χημική λείανση. Μέ τόν τρόπο αὐτό κατασκευάζονται σήμερα ἀντιστάσεις μέ ἀκρίβεια πού πλησιάζει τίς καλύτερες ἀντιστάσεις σύρματος. Οἱ ἀντιστάσεις μεταλλικῆς ταινίας βρίσκουν τή μεγαλύτερη ἐφαρμογή στήν κατασκευή ἀντιστάσεων ἀκριβείας μέ ὑψηλή τιμή ($R > 1$ kΩ) ὅπου τό μεγάλο μῆκος σύρματος πού ἀπαιτεῖται γιά τήν κατασκευή ἀντιστάσεως σύρματος κάνει τό κόστος ἀπαγορευτικό ἐνῶ παράλληλα αὐξάνει τήν ἐπαγωγή πού εἰσάγεται στό κύκλωμα. Ἕνα τυπικό στοιχεῖο ἀντιστάσεως μεταλλικῆς ταινίας δίνεται στό σχῆμα 4-6.

Πολλές ἀντιστάσεις σύρματος ἤ μεταλλικῆς ταινίας κατασκευάζονται ἔτσι ὥστε νά εἶναι δυνατή ἡ ἐπιλογή μέρους τῆς ὅλης ἀντιστάσεως πού μπορεῖ νά παρεμβάλει τό ἐξάρτημα. Τά ἠλεκτρικά αὐτά ἐξαρτήματα πού ὀνομάζονται **ροοστάτες** ἤ **ποτενσιόμετρα** ἔχουν συνήθως τρεῖς ἀκροδέκτες. Δύο ἀπό τούς ἀκροδέκτες εἶναι συνδεδεμένοι μέ τά ἄκρα τοῦ ἐξαρτήματος καί παρεμβάλλουν στό κύκλωμα μιά σταθερή ἀντίσταση πού συνήθως ἀναγράφεται στό ἐξάρτημα. Ὁ τρίτος ἀκροδέκτης συνδέεται μέ μιά κινητή ἐπαφή καί μπορεῖ νά ἐπιλέξει τό μέρος τῆς ἀντιστάσεως πού βρίσκεται μεταξύ τῆς κινητῆς ἐπαφῆς καί ἑνός ἀπό τά δύο ἄκρα τοῦ ἐξαρτήματος. Στά ἠλεκτρικά ἐξαρτήματα τοῦ τύπου αὐτοῦ παρέχεται ἡ δυνατότητα μεταβολῆς τῆς τιμῆς μιᾶς ἀντιστάσεως κατά συνεχή τρόπο. Μιά ἄλλη κατηγορία μεταβλητῶν ἀντιστάσεων πού χρησιμοποιεῖται στό ἐργαστήριο ἔχει τή δυνατότητα ἐπιλογῆς τῆς τιμῆς τῆς ἀντιστάσεως κατά σταθερά βήματα. Συνήθως τά βήματα μεταβολῆς τῆς ἀντιστάσεως εἶναι κατά δεκαπλάσια ἤ ὑποδεκαπλάσια τοῦ ohm. Ἀπό τήν ἰδιότητα αὐτή καί ἀπό τή συνήθη μορφή τῶν ἐξαρτημάτων προέρχεται καί ἡ ὀνομασία **δεκαδικό κιβώτιο ἀντιστάσεων.**

Ὅπως ἤδη ἀναφέραμε, κύριο χαρακτηριστικό τῆς ποιότητας μιᾶς ἀντιστάσεως εἶναι ἡ σταθερότητα πού ἐμφανίζει ὡς πρός τή μεταβολή τῶν συνθηκῶν τοῦ περιβάλλοντος. Πολλά κράματα μετάλλων ἔχουν δημιουργηθεῖ γιά τήν ἐξυπηρέτηση τῆς ἀπαιτήσεως αὐτῆς. Παρόλα αὐτά εἶναι γνωστά σήμερα ἀρκετά ὑλικά πού ἐμφανίζουν τήν ἀντίθετη ἰδιότητα. Δηλαδή ὑλικά στά ὁποῖα ἡ ἠλεκτρική ἀντίσταση μεταβάλλεται δραστικά γιά μικρή σχετικά μεταβολή κάποιου ἄλλου φυσικοῦ μεγέθους ὅπως ἡ θερμοκρασία, τό φῶς ἤ ἡ μηχανική τάση στό ὑλικό. Ἄν ἡ σχέση αὐτή εἶναι μονοσήμαντη, τότε μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως μπορεῖ νά ἀναχθεῖ σέ μέτρηση τοῦ φυσικοῦ μεγέθους ἀπό τό ὁποῖο ἐξαρτᾶται. Παρόμοια ὑλικά χρησιμοποιοῦνται γιά τήν κατασκευή μιᾶς μεγάλης κατηγορίας ἠλεκτρικῶν ἐξαρτημάτων, τῶν **μετατροπέων,** πού χρησιμοποοῦνται σήμερα ἐκτεταμένα στό ἐργαστήριο καί στή βιομηχανία.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4-1. Ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ Πίνακα 4-2 ὑπολογίστε τή μέγιστη ἐπιτρεπτή πυκνότητα ρεύματος σέ χάλκινα σύρματα γιά διατομές 1, 10, 35, 150 καί 240 mm^2. Συγκρίνετε καί σχολιάστε τά ἀποτελέσματα.

4-2. Ὅταν ὁ οὐρανός εἶναι αἴθριος παρατηρεῖται στήν ἀτμόσφαιρα ἠλεκτρικό ρεῦμα μέ κατακόρυφη διεύθυνση καί πυκνότητα 2×10^{-6} A/cm^2. Τοῦτο ὀφείλεται κυρίως σέ ἰόντα, θετικά καί ἀρνητικά μέ πυκνότητα περίπου 600 ἀνά κυβικό ἑκατοστόμετρο γιά κάθε πρόσημο φορτίου. Ὑποθέτοντας ὅτι κάθε ἰόν διαθέτει μιά μονάδα ἠλεκτρονικοῦ φορτίου $e = \pm 1.602 \times 10^{-19}$ C καί ὅτι οἱ ταχύτητες θετικῶν καί ἀρνητικῶν ἰόντων εἶναι ἴσες κατά μέγεθος ἀλλά ἀντίθετες κατά φορά, ὑπολογίστε τή μέση ταχύτητα κάθε ἰόντος.

4-3. Ἕνας μεταλλικός σωλήνας μέ μῆκος L, ἐσωτερική ἀκτίνα a καί ἐξωτερική b, διαρρέεται ἀπό ρεῦμα μέ διεύθυνση γύρω ἀπό τόν κεντρικό του ἄξονα. Ἂν ἡ πυκνότητα ρεύματος εἶναι

$$\mathbf{J} = \frac{J_0}{r}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ὅπου σέ κυλινδρικές συντεταγμένες, r εἶναι ἡ ἀκτινική ἀπόσταση ἑνός σημείου τῆς μεταλλικῆς περιοχῆς ἀπό τόν ἄξονα καί $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ τό μοναδιαῖο ἄνυσμα κατά τήν ἀζυμουθική διεύθυνση, ὑπολογίστε τό ὁλικό ρεῦμα πού διαρρέει τό σωλῆνα.

4-4. Ἂν μιά ἐπίπεδη ἐπιφάνεια μέ ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα **u** πρός μιά διεύθυνση παράλληλη πρός τήν ἐπιφάνεια, προσδιορίστε τήν ἰσοδύναμη ἐπιφανειακή πυκνότητα ρεύματος.

4-5. Στή γεννήτρια Van de Graff ἠλεκτρικό φορτίο μεταφέρεται μηχανικά μέ τή βοήθεια ἑνός ἱμάντα ἀπό ἕνα τροφοδοτικό σέ μιά μεταλλική σφαίρα, δημιουργώντας ἔτσι μεγάλη διαφορά δυναμικοῦ. Στή γεννήτρια Van de Graaff τοῦ ἐπιταχυντῆ tandem τοῦ Κ.Π.Ε. Δημόκριτος, ὁ ἱμάντας ἔχει πλάτος 52.5 cm καί ἡ ταχύτητά του εἶναι 671.5 m/min. Ἂν ἡ μεταφορά φορτίου πού ἐπιτυγχάνεται μέ τόν τρόπο αὐτό ἰσοδυναμεῖ πρός 57 μA, ὑπολογίστε τήν ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου στόν ἱμάντα.

4-6. Γενικεύοντας τό ἀποτέλεσμα τῆς ἀσκήσεως 4-4 προσδιορίστε τήν ἐπιφανειακή πυκνότητα ρεύματος στήν ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας μέ ἀκτίνα R, ἡ ὁποία φέρει ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ καί περιστρέφεται γύρω ἀπό μιά διάμετρό της μέ σταθερή γωνιακή συχνότητα ω.

4-7. Θεωρεῖστε ὅτι μεταξύ δύο ὁμοκεντρικῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν μέ ἀκτῖνες

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

a καί b, ρέει ήλεκτρικό ρεῦμα. Ἄν ή πυκνότητα τοῦ ρεύματος στό χῶρο μεταξύ τῶν δύο ἐπιφανειῶν ἔχει τή μορφή

$$\mathbf{J} = J_0 r^3 e^{-kt}\,\hat{\mathbf{r}}$$

ὅπου r καί $\hat{\mathbf{r}}$ εἶναι ἀντίστοιχα ή ἀκτινική ἀπόσταση καί διεύθυνση, t εἶναι ὁ χρόνος καί J_0 καί k σταθερές, προσδιορίστε τή συνάρτηση πού περιγράφει τήν ἀντίστοιχη πυκνότητα φορτίου.

4-8. Ἡ ἀγωγιμότητα τοῦ χαλκοῦ εἶναι ἴση μέ $5.8 \times 10^7\ \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$. Ὑπολογίστε τό ήλεκτρικό πεδίο στό χαλκό γιά πυκνότητα ρεύματος ἴση μέ $5 \times 10^6\ A\cdot m^{-1}$.

4-9. Ἡ ἀγωγιμότητα τοῦ θείου εἶναι περίπου $10^{-15}\ \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$. Προσδιορίστε τήν πυκνότητα ρεύματος ὅταν στό ἐσωτερικό τοῦ θείου ἔχει ἀναπτυχθεῖ ήλεκτρικό πεδίο 2 kV/m.

4-10. Θεωρεῖστε ὅτι ή θερμότητα πού παράγεται κατά τή διέλευση ήλεκτρικοῦ ρεύματος σέ ἕνα κυλινδρικό ἀγωγό ἀποβάλλεται ἀποκλειστικά μέ ἀκτινοβολία. Ἄν ή ἀνώτατη θερμοκρασία συνεπάγεται ἀποβολή ἐνεργείας ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ ἴση μέ $W\ (J/m^2)$, δεῖξτε ὅτι, γιά ἕνα σύρμα μέ ἀκτίνα R, κατασκευασμένο ἀπό ὁμογενές, ἰσοτροπικό καί γραμμικό ὑλικό μέ ἀγωγιμότητα g, ή μέγιστη ἐπιτρεπτή πυκνότητα ρεύματος J_{max} καί τό μέγιστο ρεῦμα I_{max} δίνονται ἀντίστοιχα ἀπό τίς ἐκφράσεις

$$J_{max} = \sqrt{\frac{2gW}{R}}$$

καί

$$I_{max} = \pi R \sqrt{2gW}$$

4-11. Ἠλεκτρικό ρεῦμα 70 A διαρρέει χάλκινο σύρμα μέ διατομή 10 mm^2. Ἄν ή ἀγωγιμότητα τοῦ χαλκοῦ εἶναι $5.8 \times 10^7\ \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$ ὑπολογίστε σέ θερμίδες
(α) τή θερμότητα πού ἀναπτύσσεται ἀνά κυβικό μέτρο τοῦ ὑλικοῦ καί
(β) τή θερμότητα πού ἀναπτύσσεται ἀνά μέτρο τοῦ σύρματος.

4-12. Ὑπολογίστε τήν ἀντίσταση μιᾶς λυχνίας φωτισμοῦ πού καταναλώνει 60 W σέ τάση ΣΡ 115 V.

4-13. Ἕνα λεπτό σύρμα μέ διατομή 0.205 mm^2 καί μῆκος 200 m διαρρέεται ἀπό ρεῦμα 0.188 A ὅταν στά ἄκρα του ἐφαρμόζεται τάση 3 V. Ὑπολογίστε τήν εἰδική ἀντίσταση τοῦ ὑλικοῦ ἀπό τό ὁποῖο εἶναι κατασκευασμένο τό σύρμα.

4-14. (α) Προσδιορίστε τόν τύπο πού δίνει τήν ἀντίσταση ἑνός σύρματος μέ μῆκος ℓ, μάζα m καί τοῦ ὁποίου τό ὑλικό χαρακτηρίζεται ἀπό πυκνότητα d καί εἰδική ἀντίσταση ρ.
(β) Ἡ **εἰδική μαζική ἀντίσταση** ὁρίζεται ὡς ή ἀντίσταση πού ἐμφανίζει ἕνας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κυλινδρικός ἀγωγός μέ μῆκος 1 m καί μάζα 1 g. Ὑπολογίστε τήν ποσότητα αὐτή γιά τό χαλκό ἄν ἡ ἀγωγιμότητα τοῦ χαλκοῦ εἶναι $5.8 \times 10^7\ \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$ καί ἡ πυκνότητά του $8.89\ g\cdot cm^{-3}$.

(γ) Τό πρότυπο ohm ὁρίστηκε διεθνῶς τό 1908 ὡς ἡ ἀντίσταση πού ἐφμανίζει σέ 0 °C μιά κυλινδρική στήλη ὑδραργύρου μέ μῆκος 106.300 cm καί μάζα 14.4521 g. Ἄν ἡ πυκνότητα τοῦ ὑδραργύρου σέ θερμοκρασία 0 °C εἶναι $13.596\ g\cdot cm^{3}$, ὑπολογίστε τήν εἰδική του ἀντίσταση.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Βασικες μετρησεις συνεχους ρευματος

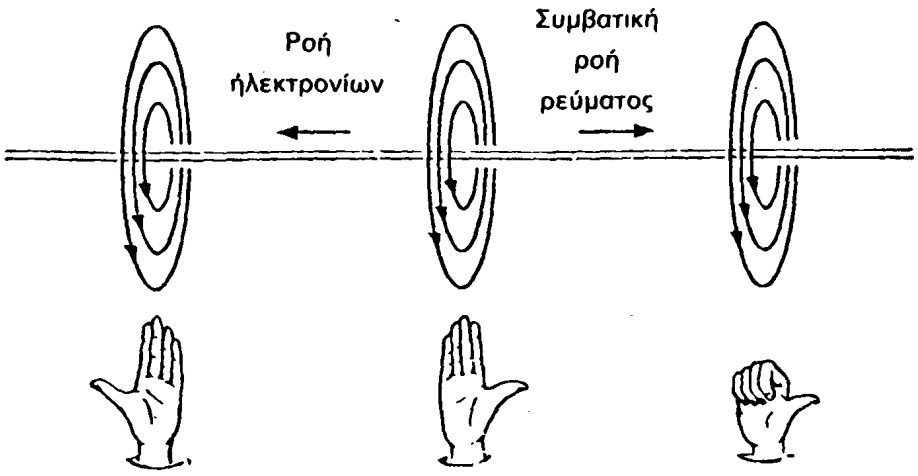
Ἡ μέτρηση ἑνός φυσικοῦ μεγέθους μπορεῖ νά πραγματοποιηθεῖ εἴτε μέ σύγκριση πρός ἕνα πρότυπο εἴτε ἀπό τή μεταβολή πού προξενεῖ σέ ἕνα ἄλλο φυσικό μέγεθος. Ἔτσι τό μῆκος μετρᾶται πάντοτε μέ σύγκριση πρός τό πρότυπο μέτρο ἤ κάποια ἄλλη κατάλληλη πρότυπη μονάδα μήκους. Ἀντίθετα ἡ θερμοκρασία μετρᾶται μέ παρατήρηση τῆς μεταβολῆς τοῦ μήκους στήλης ὑδραργύρου. Στόν ἠλεκτρισμό ἀπ' εὐθείας συγκρίσεις μέ πρότυπες μονάδες φυσικῶν μεγεθῶν δέν εἶναι πάντοτε ἐφικτές. Ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων ἑνός ἀγωγοῦ μπορεῖ π.χ. νά προσδιοριστεῖ μέ σύγκριση πρός ἕνα πρότυπο στοιχεῖο διαμέσου τοῦ ποτενσιομέτρου, ὅπως θά δοῦμε μέ λεπτομέρεια ἀργότερα. Στίς περισσότερες ὅμως περιπτώσεις ἡ μέτρηση ἑνός ἠλεκτρικοῦ μεγέθους πραγματοποιεῖται μέ παρατήρηση τῆς ἐπιδράσεώς του σέ ἄλλα φυσικά μεγέθη.

Ἡ ροή ἠλεκτρικοῦ ρεύματος σέ ἕνα ἀγωγό ἔχει δύο ἐπακόλουθα. Ἀφενός ὁ ἀγωγός θερμαίνεται καί ἐπομένως μεταβάλλονται οἱ διαστάσεις του. Ἀφετέρου δημιουργεῖται ἕνα μαγνητικό πεδίο στό χῶρο γύρω ἀπό τόν ἀγωγό. Ἄν καί θερμικά ἀμπερόμετρα ἔχουν κατασκευαστεῖ στό παρελθόν, μετρήσεις ἠλεκτρικοῦ ρεύματος γίνονται στήν πράξη ἀποκλειστικά μέ παρατήρηση τοῦ δημιουργούμενου μαγνητικοῦ πεδίου.

5-1 Τό Ἐργαστηριακό Ἀμπερόμετρο

Τό ἐργαστηριακό ἀμπερόμετρο μετράει τό ρεῦμα χρησιμοποιώντας τό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 5-1 Μαγνητικό πεδίο γύρω άπό εὐθύγραμμο ἀγωγό πού διαρρέεται ἀπό ρεῦμα I. Στό κάτω μέρος τοῦ σχήματος δίνεται ὁ πρακτικός κανόνας γιά τόν προσδιορισμό τῆς φορᾶς τοῦ πεδίου.

μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖται κατά τή ροή φορτίου μέσα σέ ἕνα ἀγωγό. Ἡ μαγνητική ἐπαγωγή πού δημιουργεῖται σέ ἀπόσταση α γύρω ἀπό ἕνα εὐθύγραμμο ἀγωγό μέ μεγάλες διαστάσεις δίνεται ἀπό τή σχέση†

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad . \tag{5.1}$$

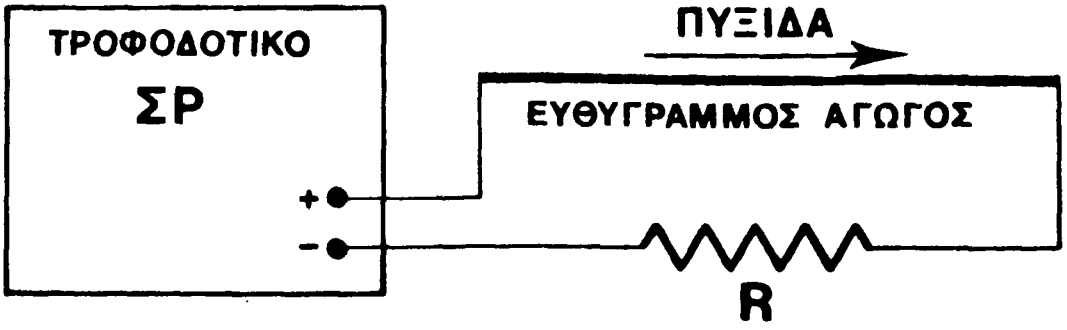
Ἡ διεύθυνση καί φορά τοῦ ἀνύσματος **B** δίνεται στό σχῆμα 5-1. Ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τήν ἐξ. (5.1), σέ μιά σταθερή ἀπόσταση α, ἡ ἔνταση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι ἀνάλογη πρός τό ρεῦμα I πού διαρρέει τόν ἀγωγό. Ἕνα πρόχειρο ἀμπερόμετρο πού χρησιμοποιεῖ τή σχέση αὐτή γιά τή μέτρηση τοῦ ρεύματος θά κατασκευάσουμε στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-1 ΕΝΑ ΠΡΟΧΕΙΡΟ ΑΜΠΕΡΟΜΕΤΡΟ

Στερεῶστε μιά κοινή μαγνητική πυξίδα πάνω ἀπό ἕνα εὐθύγραμμο ἀγωγό πού εἶναι συνδεδεμένος σέ σειρά μέ μιά μικρή ἀντίσταση (~5 –10 Ω), ὅπως δείχνει τό σχῆμα 5-2. Ὡς εὐθύγραμμο ἀγωγό μπορεῖται νά χρησιμοποιήσετε ἕνα κοινό μονόκλωνο ἐπενδυμένο σύρμα. Προσανα-

† Ἄν καί τά μαγνητικά φαινόμενα θά μελετηθοῦν διεξοδικά σέ ἰδιαίτερο κεφάλαιο, θά διανειστοῦμε πρός τό παρόν ὁρισμένες ἁπλές σχέσεις τοῦ μαγνητισμοῦ γνωστές ἀπό τή Βασική Φυσική. Ὅπως γίνεται σέ ὅλα τά κεφάλαια πού ἀναφέρονται κυρίως σέ ἐφαρμογές τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ, θά γράψουμε τίς ἀπαραίτητες ἐκφράσεις στό σύστημα SI.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



ΣΧΗΜΑ 5-2 Πρόχειρο ἀμπερόμετρο μέ χρήση μαγνητικῆς πυξίδας.

τολίστε τόν ἀγωγό μέ διεύθυνση Βορρά-Νότο ὥστε ἡ βελόνα τῆς μαγνητικῆς πυξίδας νά εἶναι παράλληλη πρός τόν ἀγωγό. Συνδέστε τό κύκλωμα μέ ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ (μέ μέγιστη δυνατότητα τροφοδοσίας ~30 V, ~3 Α). Αὐξάνοντας σταδιακά τό δυναμικό παρακολουθεῖστε τήν ἀπόκλιση τῆς μαγνητικῆς βελόνας. Καταγράψτε σέ κατάλληλο πίνακα τήν ἀπόκλιση τῆς βελόνας (σέ μοῖρες), τό δυναμικό καί τό ρεῦμα (ὅπως δίνονται ἀπό τά ὄργανα τοῦ τροφοδοτικοῦ).

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μήν ὑπερβεῖτε τά ὅρια δυνατότητας παροχῆς ρεύματος τοῦ τροφοδοτικοῦ πού καθορίζει ὁ κατασκευαστής.

– Γιά μιά συγκεκριμένη τιμή τοῦ ρεύματος I καί τοῦ δυναμικοῦ V ἡ μαγνητική βελόνα ἀποκλίνει κατά τή διεύθυνση τῆς συνισταμένης τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς γῆς καί τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού δημιουργεῖ ἡ ροή τοῦ ρεύματος. Ἄν θ εἶναι ἡ γωνία ἀποκλίσεως, ἀποδεῖξτε ὅτι

$$I = C_1 \tan\theta \qquad (5.2\alpha)$$

καί

$$V = C_2 \tan\theta \ . \qquad (5.2\beta)$$

Προσδιορίστε τούς συντελεστές C_1 καί C_2 στίς ἐξ. (5.2).

Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τοῦ ρεύματος καί τοῦ δυναμικοῦ ὡς πρός τήν ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ἀποκλίσεως χρησιμοποιώντας τίς προηγούμενες μετρήσεις καί ἐπαληθεῦστε τίς ἐξ. (5.2). Ἀπό τίς γραφικές παραστάσεις προσδιορίστε τίς πειραματικές σταθερές C_1 καί C_2.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

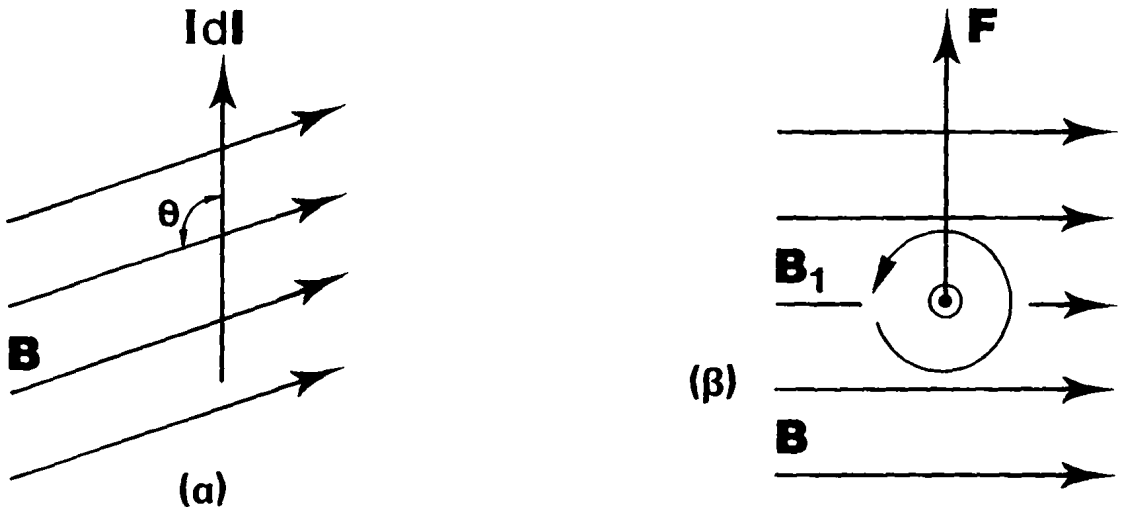
Στό ἀμπερόμετρο πού κατασκευάσαμε παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τή ροπή πού ἐξασκεῖ τό μαγνητικό πεδίο τοῦ ρεύματος πάνω σέ ἕνα μαγνητικό δίπολο. Τά συνήθη ἐργαστηριακά ἀμπερόμετρα μετροῦν τό ρεῦμα προσδιορίζοντας τή ροπή πού ἐξασκεῖ ἕνα σταθερό μαγνητικό πεδίο πάνω στόν ἀγωγό. Ὅπως εἴδαμε, γύρω ἀπό ἕνα στοιχεῖο ρεύματος $Id\ell$ (ἕνα ἀγωγό μήκους $d\ell$ πού διαρρέεται ἀπό ρεῦμα I) δημιουργεῖται ἕνα κυκλικό μαγνητικό πεδίο B_1. Ἄν τό στοιχεῖο βρίσκεται μέσα σέ ἕνα ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 5-3, τότε ἡ ἀλληλεπίδραση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μέ τό ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίου δημιουργεῖ μιά δύναμη

$$F = BI\,d\ell\sin\theta \ . \tag{5.3}$$

Σύμφωνα μέ τό σχῆμα, ἡ φορά τῆς δυνάμεως εἶναι τέτοια ὥστε νά προκαλεῖ μετατόπιση τοῦ στοιχείου ἀπό τήν περιοχή τοῦ ἰσχυρότερου πρός τήν περιοχή ἀσθενέστερου μαγνητικοῦ πεδίου.

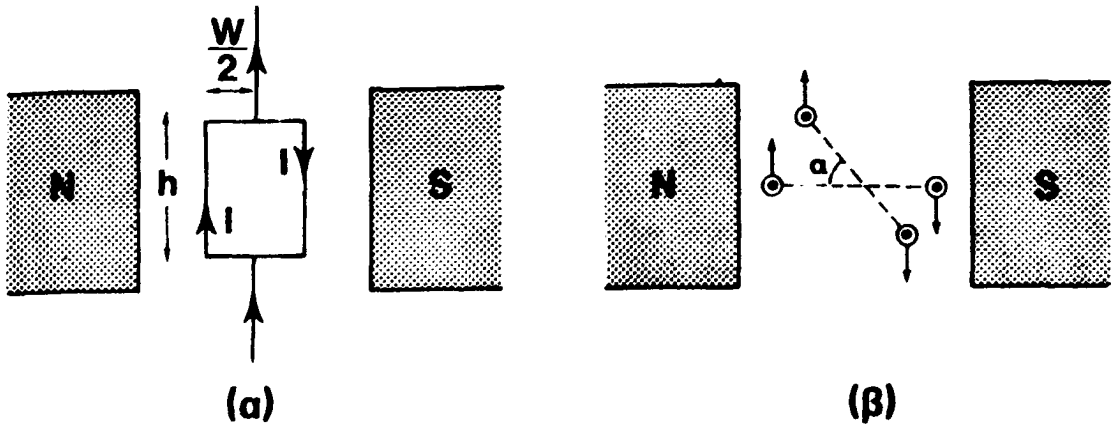
Ἡ ἐξ. (5.3) παρέχει τή βασική ἀρχή γιά τή μέτρηση τοῦ ρεύματος στά συνήθη ἐργαστηριακά ἀμπερόμετρα. Παρέχει δηλαδή τήν βασική ἀναλογία μεταξύ ρεύματος καί δυνάμεως σέ ἕνα ἀγωγό. Καθόσον μέτρηση μικρῆς δυνάμεως μέ καλή ἀκρίβεια εἶναι δύσκολη, συνήθως ἡ μέτρηση πού συνεπάγεται ἡ ἐξ. (5.3) ἀνάγεται μέ μιά κατάλληλη διάταξη σέ μέτρηση ροπῆς.

Ἕνα ἁπλό σύστημα πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ μέ τήν ἔννοια αὐτή ὡς ἀμπερόμετρο δίνεται στό σχῆμα 5-4. Μέσα στό ὁμογενές μαγνητικό



ΣΧΗΜΑ 5-3 (α) Στοιχεῖο ρεύματος σέ ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Ἡ διεύθυνση τοῦ ρεύματος δίνεται ἀπό τό βέλος.
(β) Κάτοψη τοῦ σχήματος (α). Ἡ ἀλληλεπίδαση τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου B καί τοῦ πεδίου τοῦ ρεύματος B_1 δημιουργοῦν τή δύναμη F πού ἐξασκεῖται πάνω στό στοιχεῖο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 5-4 (α) Ὀρθογώνιο πηνίο ἀναρτημένο μεταξύ τῶν πόλων σταθεροῦ μαγνήτη. (β) Κάτοψη τῆς διατάξεως καί φορά τῶν δυνάμεων πού ἀναπτύσσονται *μέ τή ροή ρεύματος.*

πεδίο μεταξύ τῶν πόλων ἑνός σταθεροῦ μαγνήτη ἔχει ἀναρτηθεῖ ἕνα ὀρθογώνιο πηνίο μέ N βρόχους. Σύμφωνα μέ τό σχῆμα, τό ἠλεκτρικό ρεῦμα ἀνέρχεται στήν ἀριστερή πλευρά καί κατέρχεται στή δεξιά. Στό σχῆμα 5-4(β) δίνεται ἡ διεύθυνση τῶν δυνάμεων πού προκαλεῖ ἡ ροή τοῦ ρεύματος. Οἱ δύο δυνάμεις δημιουργοῦν μιά ροπή πού τείνει νά περιστρέψει τό σύστημα δεξιόστροφα. Ἄν τό πηνίο διατηρεῖται σέ θέση ἰσορροπίας ἀπό ἕνα κυκλικό ἐλατήριο, θά περιστραφεῖ κατά μιά γωνία α μέχρις ὅτου ἡ ροπή πού δημιουργεῖ τό ρεῦμα ἰσορροπίσει τή στρέβλωση τοῦ ἐλατηρίου. Χρησιμοποιώντας τίς διαστάσεις τοῦ σχήματος 5-4 μποροῦμε νά γράψουμε τή συνθήκη ἰσορροπίας ὡς

$$2\,N\,B\,I\,h\,\frac{W}{2}\cos\alpha = \tau\,\alpha \qquad (5.4)$$

ὅπου τ εἶναι ἡ σταθερά τοῦ κυκλικοῦ ἐλατηρίου (ροπή ἀνά μονάδα γωνίας). Στήν ἐξ. (5.4), σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (5.3), N B I h εἶναι ἡ δύναμη σέ κάθε πλευρά τοῦ πηνίου καί W/2 cosα εἶναι ἡ κάθετη ἀπόσταση πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ὁ παράγοντας 2 προέρχεται ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ ροπή δημιουργεῖται ἀπό δύο ἴσες δυνάμεις πού τείνουν νά περιστρέψουν τό πηνίο πρός τήν ἴδια φορά. Ἄν A = Wh εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πηνίου ἡ ἐξ. (5.4) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$I = \frac{\tau}{NBA}\,\frac{\alpha}{\cos\alpha} \qquad (5.5)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πού συνδέει τό ρεῦμα I μέ τή γωνία περιστροφῆς α.

Ἡ διάταξη τοῦ σχήματος 5-4 μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς ἀμπερόμετρο ἄν προσαρμόσουμε ἕνα δείκτη πάνω στό πηνίο καί μιά κατάλληλη κλίμακα βαθμονομημένη ἀπευθείας σέ μονάδες ρεύματος. Ὅπως ὅμως καί στήν περίπτωση τῆς διατάξεως πού μελετήσαμε στό Πείραμα 5-1, ἡ κλίμακα τοῦ ἀμπερομέτρου αὐτοῦ δέν μπορεῖ νά εἶναι γραμμική, καθόσον, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (5.5), τό ρεῦμα δέν εἶναι ἀνάλογο πρός τή γωνία ἀποκλίσεως α, ἀλλά πρός τήν συνάρτηση α/cosα. Μιά κατάλληλη κλίμακα γιά τό ἀμπερόμετρο τοῦ σχήματος 5-4 δίνεται στό σχῆμα 5-5. Τό κυριότερο μειονέκτημα τῆς κλίμακας αὐτῆς εἶναι ὅτι ἡ εὐαισθησία τοῦ ὀργάνου δέν εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν τιμή τοῦ ρεύματος πού μετράει {βλ. Ἄσκηση 5-1}. Εἶναι πολύ προτιμότερο νά κατασκευάσουμε ἕνα ὄργανο ὅπου τό ρεῦμα καί ἡ γωνία ἀποκλίσεως εἶναι εὐθέως ἀνάλογα μεγέθη. Ἡ ἀναλογία αὐτή ἐπιτυγχάνεται μέ τή γεωμετρία τοῦ σχήματος 5-6. Ὅπως δείχνει τό σχῆμα οἱ πόλοι τοῦ μαγνήτη ἔχουν κατασκευαστεῖ μέ κυλινδρικό σχῆμα ἐνῶ τό πηνίο ἔχει ἀναρτηθεῖ γύρω ἀπό ἕνα κύλινδρο σιδήρου. Ἡ γεωμετρία αὐτή δημιουργεῖ ἀκτινικό μαγνητικό πεδίο μέ ἐπακόλουθο ἡ ροπή

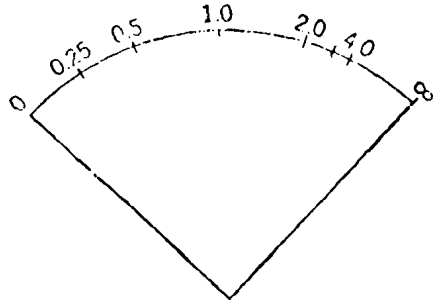
$$T = 2\,N\,B\,I\,h\,\frac{W}{2} = N\,B\,I\,A \qquad (5.6)$$

νά εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή γωνία ἀποκλίσεως α γιά κάθε θέση ἰσορροπίας τοῦ πηνίου. Ἡ ἐξ. (5.5) παίρνει ἐπομένως τή μορφή

$$I = \frac{\tau}{NBA}\,\alpha \qquad (5.7)$$

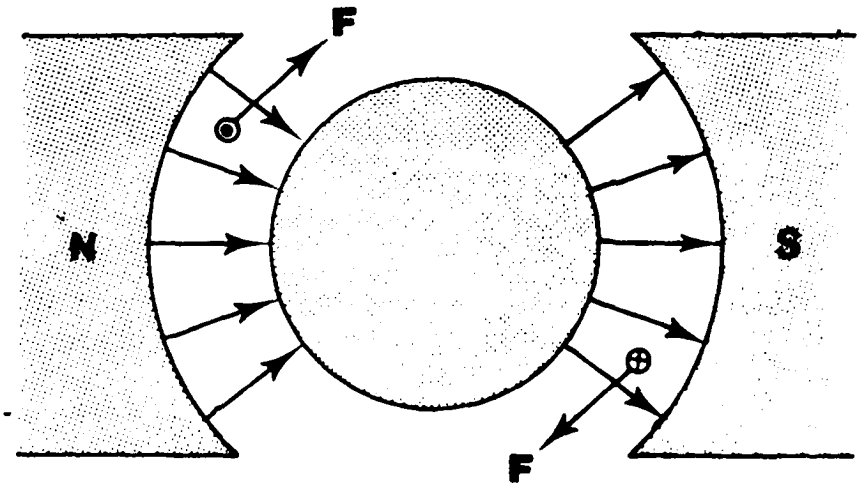
πού ἐμφανίζει τήν ἐπιθυμητή ἀναλογία μεταξύ ρεύματος καί γωνίας ἀποκλίσεως τοῦ πηνίου.

Ἡ πλειονότητα τῶν ἀμπερομέτρων πού χρησιμοποιοῦμε σήμερα στό ἐργαστήριο γιά συνήθεις μετρήσεις ρεύματος βασίζεται στή διάταξη τοῦ



ΣΧΗΜΑ 5-5 Κλίμακα ἀμπερομέτρου γιά τή διάταξη τοῦ σχήματος 5-4.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



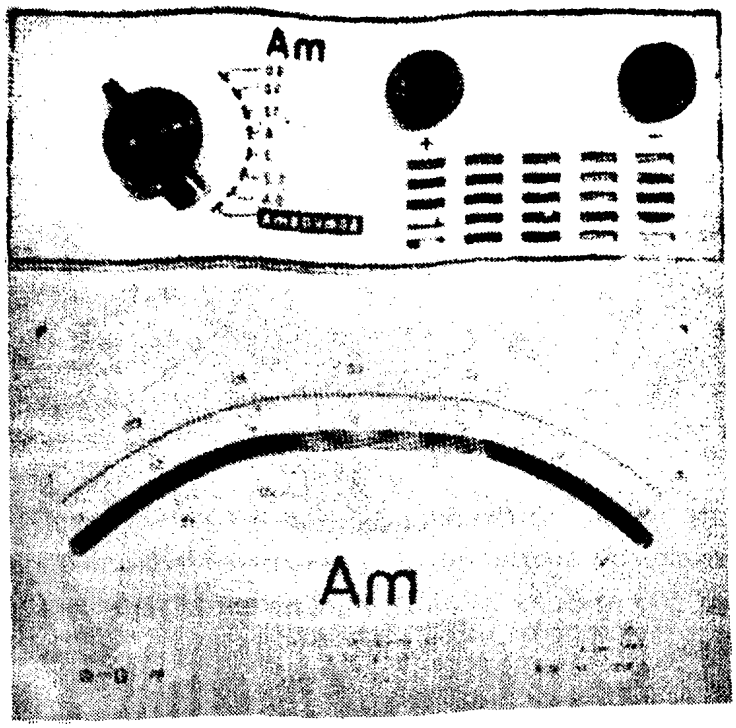
ΣΧΗΜΑ 5-6 Ὀρθογώνιο πηνίο ἀναρτημένο σέ ἀκτινικό μαγνητικό πεδίο. Οἱ δυνάμεις πού ἀναπτύσσονται κατά τή διέλευση ρεύματος εἶναι πάντοτε κάθετες πρός τό πεδίο καί ἡ ροπή ἀνεξάρτητη ἀπό τή γωνία ἀποκλίσεως.

σχήματος 5-6. Ἕνα τυπικό παράδειγμα ἐργαστηριακοῦ ἀμπερομέτρου δίνεται στή φωτογραφία τοῦ σχήματος 5-7. Ὅπως δείχνει ἡ φωτογραφία, τό ἀμπερόμετρο ἔχει κλίμακα ἀπευθείας βαθμονομημένη ἀπό τόν κατασκευαστή σέ ampere, (A), mA ἤ μA, ἀνάλογα μέ τήν τάξη μεγέθους τοῦ ρεύματος πού προορίζεται νά μετρήσει.

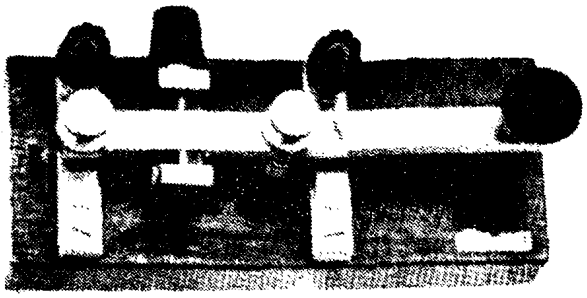
Κατά τή μέτρηση ρεύματος τό ἀμπερόμετρο συνδέεται σέ σειρά ὥστε τό ρεῦμα νά διέρχεται ἀπό τό κινητό πηνίο. Γιά τήν ἐπιλογή τοῦ κατάλληλου ἀμπερομέτρου θά πρέπει νά προσεχθοῦν ὁρισμένα σημεῖα.

1. Τό ρεῦμα πού πρόκειται νά μετρηθεῖ πρέπει νά εἶναι μικρότερο ἀπό τή μέγιστη ἔνδειξη τῆς κλίμακας. Ὑπέρβαση τῆς μέγιστης ἐπιτρεπτῆς τιμῆς τοῦ ρεύματος εἶναι δυνατόν νά στρεβλώσει τό δείκτη, νά καταστρέψει τήν ἀνάρτηση τοῦ πηνίου ἤ ἀκόμη νά κάψει τό πηνίο τοῦ ὀργάνου. Ἄν δέν εἶναι γνωστή ἡ τάξη μεγέθους τοῦ ρεύματος πού πρόκειται νά μετρηθεῖ, εἶναι δυνατόν νά χρησιμοποιηθεῖ ἕνας **διακόπτης τηλεγραφητῆ** σέ σειρά μέ τό ἀμπερόμετρο. Ἡ τάξη τοῦ μεγέθους τοῦ ρεύματος μπορεῖ νά ἐλεγχθεῖ μέ ἕνα ἁπλό κτύπημα τοῦ διακόπτη πού ἀποκαθιστᾶ τή ροή τοῦ ρεύματος γιά κλάσμα τοῦ δευτερολέπτου. Ἄν ὁ δείκτης τοῦ ὀργάνου δέν ἀποκλίνει κατά πολύ τότε τό ρεῦμα βρίσκεται μέσα στά ἐπιτρεπτά ὅρια τοῦ ἀμπερομέτρου καί ὁ διακόπτης μπορεῖ νά διατηρηθεῖ κλειστός μέχρι νά ἰσορροπίσει ὁ δείκτης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 5-7 (α) Ἐργαστηριακό ἀμπερόμετρο.
(β) Διακόπτης τηλεγραφητή γιά στιγμιαῖο ἔλεγχο τοῦ ρεύματος.

2. Τά περισσότερα ἀμπερόμετρα εἶναι μονῆς κατευθύνσεως μέ τό σημεῖο ἰσορροπίας τοῦ δείκτη ὅταν τό κύκλωμα εἶναι ἀνοικτό στό ἄκρο ἀριστερά τῆς κλίμακας. Οἱ δύο ἀκροδέκτες τοῦ ὀργάνου φέρουν συνήθως τίς ἐνδείξεις (+) καί (−) ἤ τά χρώματα κόκκινο (+)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί μαῦρο (—), ὥστε νά ἀποφεύγεται λανθασμένη σύνδεση. Ἀντίστροφη σύνδεση τοῦ ὀργάνου μπορεῖ εὔκολα νά προκαλέσει στρέβλωση τοῦ δείκτη ἤ καταστροφή τοῦ μηχανισμοῦ ἀναρτήσεως τοῦ πηνίου.

3. Ἡ ***ἐσωτερική ἀντίσταση*** πού παρεμβάλλει τό κινητό πηνίο τοῦ ἀμπερομέντρου πρέπει νά εἶναι ἀμελητέα σέ σχέση μέ τίς ὑπόλοιπες ἀντιστάσεις τοῦ κυκλώματος. Στήν ἀντίθετη περίπτωση ἡ παρεμβολή τοῦ ἀμπερομέτρου μεταβάλλει τά χαρακτηριστικά τοῦ κυκλώματος καί πρέπει νά ληφθεῖ ὑπόψη. Συνήθως ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ ἀμπερομέτρου ἀναγράφεται ἀπό τόν κατασκευαστή πάνω στό ὄργανο ἤ στό φυλλάδιο προδιαγραφῶν πού τό συνοδεύει.
4. Τό συνηθέστερο σφάλμα κατά τή μέτρηση ἠλεκτρικοῦ ρεύματος προέρχεται ἀπό τήν παράλλαξη τοῦ δείκτη, ὡς πρός τήν κλίμακα. Γιά τό λόγο αὐτό στά περισσότερα ἠλεκτρικά ὄργανα ὁ δείκτης κινεῖται πάνω σέ ἕνα ἐπίπεδο κάτοπτρο. Ἡ μέτρηση εἶναι ἀπαλλαγμένη ἀπό σφάλμα παραλλάξεως ἄν ἡ ἀνάγνωση τῆς ἐνδείξεως γίνει ἀπό γωνία παρατηρήσεως γιά τήν ὁποία ὁ δείκτης καλύπτει τό εἴδωλό του μέσα στό κάτοπτρο.

Τό ἀνώτατο ρεῦμα πού μπορεῖ νά διαρρεύσει μέσα ἀπό τό ἀμπερόμετρο δίνεται ἀπό τή σχέση [βλ. ἐξ. (5.7)].

$$I_{max} = \frac{\tau}{NBA}\,\alpha_{max} \tag{5.8}$$

ὅπου α_{max} εἶναι ἡ μεγίστη γωνία ἀποκλίσεως τοῦ δείκτη. Ἡ τιμή I_{max} ἐξαρτᾶται προφανῶς ἀπό τίς φυσικές διαστάσεις τοῦ πηνίου, τήν ἔνταση τοῦ σταθεροῦ μαγνητικοῦ πεδίου B καί τή σταθερά τ τοῦ ἐλατηρίου. Στίς συνήθεις διατάξεις τοῦ σχήματος 5-6 πού περιέχονται στά ἐργαστηριακά ἀμπερόμετρα ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς ἐξ. (5.8) δέν ξεπερνᾶ τά μερικά μA. Τό μέγιστο ἐπιτρεπτό ρεῦμα μπορεῖ ὅμως εὔκολα νά αὐξηθεῖ ἄν χρησιμοποιήσουμε ὡς ἀμπερόμετρο τή διάταξη τοῦ σχήματος 5-8, ὅπου μέ τήν παρεμβολή τῆς διακλαδώσεως R_S μόνο ἕνα μέρος τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος διαρέει τό πηνίο τοῦ ἀμπερομέτρου. Θεωρώντας τήν πτώση δυναμικοῦ, μεταξύ τῶν σημείων B καί Γ, τό ρεῦμα I πού διαρέει τή διακλάδωση R_S δίνεται ἀπό τή σχέση

$$I_S = I_A \frac{r_A}{R_S} \tag{5.9}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου I_A καί r_A εἶναι ἀντίστοιχα τό ρεῦμα πού διαρρέει τό πηνίο καί ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου. Τό ὁλικό ρεῦμα I τοῦ ἀγωγοῦ, στόν ὁποῖο ἔχει παρεμβληθεῖ ἡ διάταξη τοῦ σχήματος εἶναι

$$I = I_A + I_S \left(1 + \frac{r_A}{R_S}\right) \tag{5.10}$$

μέ ἀνώτατη ἐπιτρεπτή τιμή

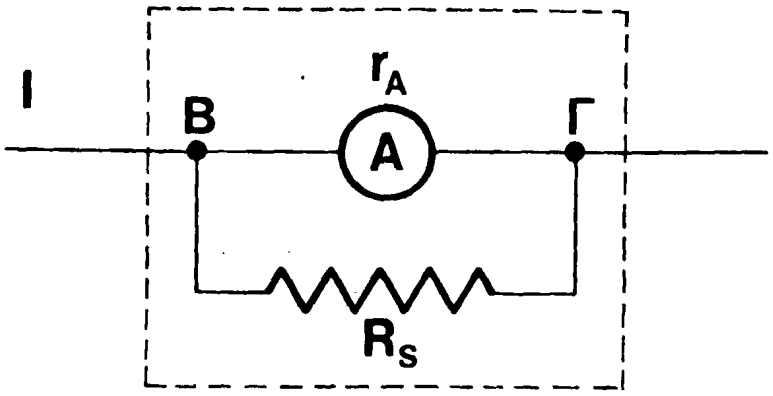
$$I'_{max} = I_{max} \left(1 + \frac{r_A}{R_S}\right) . \tag{5.11}$$

Ἄν ἑπομένως ὡς ἀμπερόμετρο θεωρήσουμε τή διάταξη τοῦ σχήματος 5-8, τό ἀνώτατο ἐπιτρεπτό ρεῦμα (καί ἑπομένως ἡ κλίμακα τοῦ ὀργάνου) μπορεῖ νά ρυθμιστεῖ μέ κατάλληλη ἐπιλογή τῆς διακλαδώσεως R_S. Τά συνήθη ἐργαστηριακά ἀμπερόμετρα περιέχουν σειρά διακλαδώσεων πού μποροῦν νά ἐπιλεγοῦν μέ τή βοήθεια ἑνός ἐξωτερικοῦ διακόπτη.

Πρέπει νά σημειωθεῖ ὅτι ἡ προσθήκη τῆς διακλαδώσεως στό σχῆμα 5-8 μεταβάλλει τήν ὁλική ἀντίσταση πού παρεμβάλλει τό ἀμπερόμετρο στό κύκλωμα. Ἡ ὁλική ἀντίσταση τοῦ ὀργάνου R_A εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ἀντίσταση τοῦ πηνίου r_A καί δίνεται προφανῶς ἀπό τή σχέση

$$R_A = \frac{r_A R_S}{r_A + R_S} \tag{5.12}$$

ὅπου R_S εἶναι ἡ ἀντίσταση τῆς διακλαδώσεως γιά τήν ἐπιθυμητή κλίμακα. Στά ἐργαστηριακά ἀμπερόμετρα μέ πολλαπλές κλίμακες ἡ ὁλική ἀντίσταση τοῦ ὀργάνου γιά κάθε κλίμακα ἀναγράφεται συνήθως ἀπό τόν κατασκευαστή καί πρέπει νά λαμβάνεται ὑπόψη σέ μετρήσεις μεγάλης ἀκριβείας.



ΣΧΗΜΑ 5-8 Ρύθμιση τῆς κλίμακας ἀμπερομέτρου μέ παρεμβολή διακλαδώσεως R_S.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

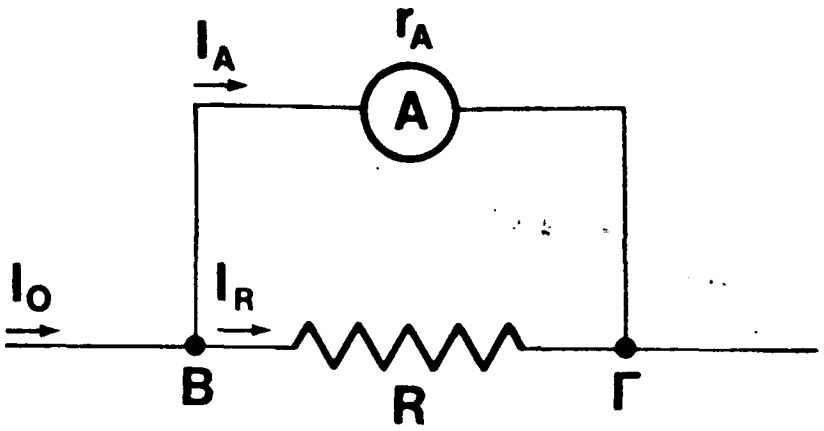
5-2 Τό Ἐργαστηριακό Βολτόμετρο

Ἡ βασική διάταξη τοῦ σχήματος 5-6 μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή μέτρηση διαφορᾶς δυναμικοῦ μέσω τοῦ νόμου τοῦ Ohm. Ἄν ρεῦμα I διαρρέει τό πηνίο τοῦ ὀργάνου, τότε ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά δύο ἄκρα τοῦ πηνίου εἶναι

$$V = I_A r_A \tag{5.13}$$

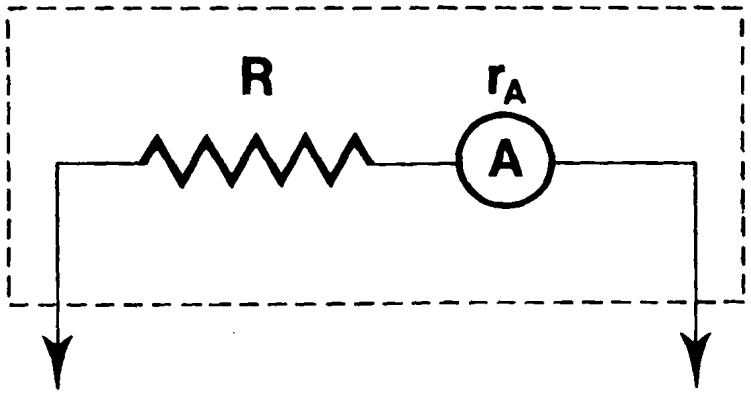
ὅπου r_A εἶναι ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου. Μποροῦμε ἑπομένως νά προσδιορίσουμε τήν πτώση δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων ἑνός κυκλώματος ἄν συνδέσουμε ἕνα ἀμπερόμετρο σύμφωνα μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 5-9. Ὅπως δείχνει τό σχῆμα, ἕνα μέρος τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος I πού διαρρέει τό κύκλωμα διοχετεύεται στόν κλάδο τοῦ ἀμπερομέτρου A καί μέσω τῆς ἐξ. (5.13) προσδιορίζει τή διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων B καί Γ.

Στήν πράξη, ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου r_A εἶναι πολύ μικρή γιά ἀπευθείας χρήση στή διάταξη τοῦ σχήματος 5-9. Σέ ἀντιπαράθεση μέ τή διαγραμματική παράσταση τοῦ ἐργαστηριακοῦ ἀμπερομέτρου στό σχῆμα 5-8, τό ἐργαστηριακό βολτόμετρο περιέχει μιά μεγάλη ἀντίσταση R σέ σειρά μέ τήν ἀντίσταση r_A τοῦ πηνίου. Ἡ διαγραμματική παράσταση τοῦ ἐργαστηριακοῦ βολτομέτρου δίνεται στό σχῆμα 5-10. Ἄν ἡ διάταξη τοῦ σχήματος συνδεθεῖ παράλληλα μεταξύ δύο σημείων ἑνός κυκλώματος τότε τό μικρό ρεῦμα πού διαρέει τήν ἀντίσταση $R + r_A$ εἶναι ἀνάλογο τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ καί ἡ κλίμακα τοῦ ὀργάνου μπορεῖ νά βαθμονομηθεῖ ἀπευθείας σέ volt [βλ. σχῆμα 5-11]. Τά συνήθη ἐργαστηριακά βολτόμετρα περιέχουν διάφορες ἀντιστάσεις πού μποροῦν νά συνδεθοῦν σέ σειρά μέ τό πηνίο μέ τή βοήθεια ἐξωτερικοῦ διακόπτη, αὐξάνοντας ἤ μειώνοντας ἔτσι τήν κλίμακα τοῦ ὀργάνου.



ΣΧΗΜΑ 5-9 Προσδιορισμός διαφορᾶς δυναμικοῦ μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 5-6.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



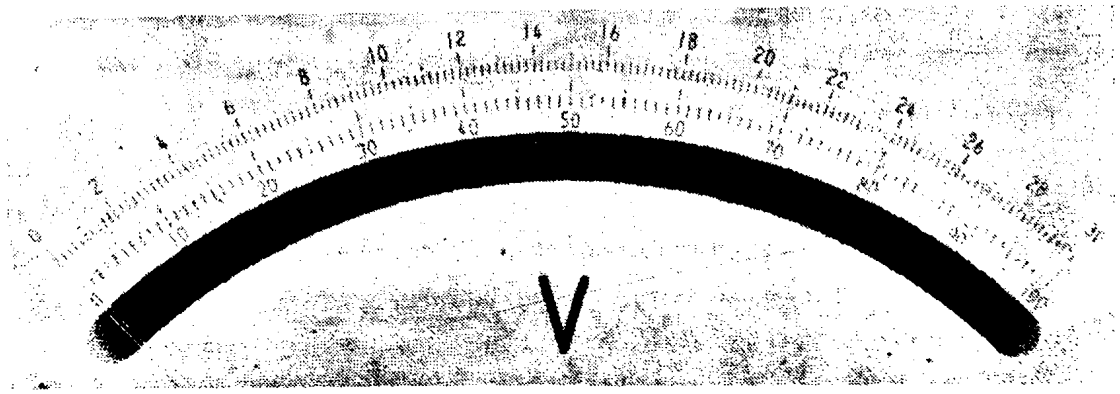
ΣΧΗΜΑ 5-10 Διάταξη ἐργαστηριακοῦ βολτομέτρου.

5-3 Μέτρηση Ἀντιστάσεως μέ Ἀμπερόμετρο καί Βολτόμετρο

Ἡ ἀντίσταση ἑνός ἀγωγοῦ μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μέσω τοῦ νόμου τοῦ Ohm ἄν μετρηθοῦν ταυτόχρονα τό ρεῦμα πού διαρρέει τόν ἀγωγό καί ἡ πτώση δυναμικοῦ στά ἄκρα του. Μιά διάταξη ἀμπερομέτρου καί βολτομέτρου πού ἐπιτρέπει τόν προσδιορισμό αὐτό δίνεται στό σχῆμα 5-12. Θά ὀνομάσουμε τή διάταξη αὐτή «κύκλωμα Ι».

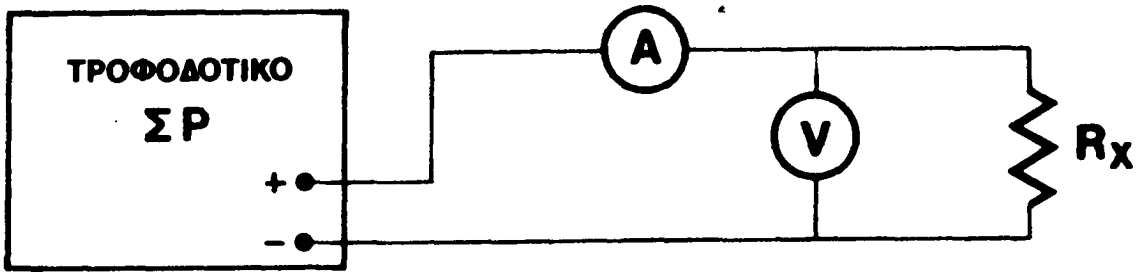
ΠΕΙΡΑΜΑ 5-2 ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΙΚΡΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ ΜΕ ΑΜΠΕΡΟΜΕΤΡΟ ΚΑΙ ΒΟΛΤΟΜΕΤΡΟ

Συνδέστε τό κύκλωμα Ι τοῦ σχήματος 5-12. Στή θέση τῆς ἄγνωστης ἀντιστάσεως R_x χρησιμοποιεῖστε μιά ἀντίσταση R_1 μεταξύ 1 καί 100 kΩ. Αὐξάνοντας σταδιακά τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ σημειῶστε σέ κατάλ-



ΣΧΗΜΑ 5-11 Τυπική κλίμακα ἐργαστηριακοῦ βολτομέτρου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 5-12 Μέτρηση ἀντιστάσεως μέ βολτόμετρο καί ἀμπερόμετρο. Κύκλωμα Ι.

ληλο πίνακα τίς ἐνδείξεις τοῦ ἀμπερομέτρου καί βολτομέτρου γιά πέντε τουλάχιστον ἐνδείξεις τῶν ὀργάνων.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διαδικασία γιά μιά δεύτερη ἄγνωστη ἀντίσταση R_2 μεταξύ 1-10 Ω.

– Χρησιμοποιώντας τά πειραματικά δεδομένα πού συλλέξατε προσδιορίστε τήν τιμή τῶν ἀγνώστων ἀντιστάσεων R_1 καί R_2 μέ ἁπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm

$$R_x = R_0 = \frac{V}{I} \tag{5.14}$$

ὅπου V καί I εἶναι οἱ ἐνδείξεις τῶν ὀργάνων. Προσδιορίστε τίς ἀντίστοιχες τιμές πού προκύπτουν ἄν συνυπολογίσετε τίς ἐσωτερικές ἀντιστάσεις τῶν ὀργάνων. Ὑπολογίστε τήν ἐπί τοῖς ἑκατό διαφορά μεταξύ τῶν δύο προσδιορισμῶν.

Ἡ ἄγνωστη ἀντίσταση R_x τοῦ κυκλώματος Ι μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μέ μεγαλύτερη ἀκρίβεια ἄν στό νόμο τοῦ Ohm συνυπολογίσουμε τό ρεῦμα I_v πού διαρρέει τό βολτόμετρο. Στήν περίπτωση αὐτή

$$R_x = \frac{V}{I - I_v} \tag{5.15}$$

ὅπου τό ρεῦμα I_v ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐσωτερική ἀντίσταση R_v τοῦ βολτομέτρου

$$I_v = \frac{V}{R_v}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ ἐξ. (5.15) μπορεῖ ἑπομένως νά γραφεῖ ὡς

$$R_x = \frac{V}{I - \frac{V}{R_v}} \quad \frac{V}{I} \frac{1}{1 - \frac{V}{I}\frac{1}{R_v}} = R_0 \frac{1}{1 - \frac{R_0}{R_v}} \tag{5.16}$$

ὅπου R_0 εἶναι ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως πού προκύπτει ἀπό τήν ἁπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm στήν ἐξ. (5.14).

Ἡ διόρθωση πού συνεπάγεται ἡ ἐξ. (5.16) εἶναι μικρή ἄν

$$R_0 \simeq R_x << R_v \ . \tag{5.17}$$

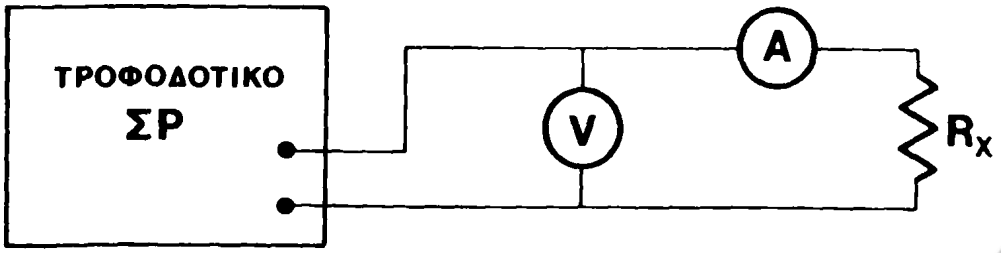
Τότε μποροῦμε νά γράψουμε μέ καλή προσέγγιση

$$R_x = R_0 \frac{1}{1 - \frac{R_0}{R_v}} \simeq R_0 \left(1 + \frac{R_0}{R_v}\right) . \tag{5.18}$$

Στήν ἀντίθετη περίπτωση ὅπου ἡ ἄγνωστη ἀντίσταση R_x εἶναι συγκρίσιμη μέ τήν ἀντίσταση R_v τοῦ βολτομέτρου, τό ρεῦμα I_v ἀποτελεῖ ἕνα μεγάλο μέρος τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος I πού μετράει τό ἀμπερόμετρο τοῦ σχήματος 5-12. Γιά παρόμοιες ἀντιστάσεις εἶναι προσφορότερο νά μετρήσουμε ἀπευθείας τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀντίσταση R_v. Τό «κύκλωμα II» πού πραγματοποιεῖ τή μέτρηση αὐτή δίνεται στό σχῆμα 5-13.

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-3 ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΕΓΑΛΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ ΜΕ ΑΜΠΕΡΟΜΕΤΡΟ ΚΑΙ ΒΟΛΤΟΜΕΤΡΟ

Συνδέστε τό κύκλωμα II τοῦ σχήματος 5-13. Ἐπαναλάβετε τή διαδικασία τοῦ πειράματος 5-2 γιά τίς ἴδιες ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 στή θέση τῆς ἄγνωστης ἀντιστάσεως R_x. Συγκρίνετε τά τελικά σας ἀποτελέσματα μέ τά ἀντίστοιχα ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος 5-2 καί σχολιάστε τίς τυχόν διαφορές.



ΣΧΗΜΑ 5-13 Μέτρηση ἀντιστάσεως μέ βολτόμετρο καί ἀμπερόμετρο. Κύκλωμα II.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ ἄγνωστη ἀντίσταση R_x τοῦ κυκλώματος II μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μέ μεγαλύτερη ἀκρίβεια ἄν στό νόμο τοῦ Ohm συνυπολογίσουμε τήν ἐσωτερική ἀντίσταση R_A τοῦ ἀμπερομέτρου. Ἄν V καί I εἶναι οἱ ἐνδείξεις δυναμικοῦ καί ρεύματος τῶν ἀντίστοιχων ὀργάνων τότε, ὅπως προκύπτει ἀπό τό κύκλωμα

$$\frac{V}{I} = R_x + R_A \ . \tag{5.19}$$

Ἡ ἀνάλογη σχέση πρός τήν ἐξ. (5.18) ἑπομένως εἶναι

$$R_x = \frac{V}{I} \qquad R_A = R_0 - R_A = R_0 \left(1 - \frac{R_A}{R_0}\right) \tag{5.20}$$

ὅπου πάλι R_0 εἶναι ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως πού προκύπτει ἀπό τήν ἁπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm στήν ἐξ. (5.14).

Ἡ διόρθωση πού συνεπάγεται ἡ ἐξ. (5.20) εἶναι μικρή ἄν

$$R_0 \simeq R_x >> R_A \ . \tag{5.21}$$

Ὅπως ἑπομένως προκύπτει ἀπό τίς συνθῆκες τῶν ἐξ. (5.17) καί (5.21) τό κύκλωμα I ἐνδείκνυται γιά τόν προσδιορισμό μικρῶν ἀντιστάσεων σέ σχέση μέ τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ βολτομέτρου ἐνῶ τό κύκλωμα II γιά τόν προσδιορισμό μεγάλων ἀντιστάσεων σέ σχέση μέ τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ ἀμπερομέτρου. Γιά τά συνήθη ἐργαστηριακά ὄργανα ἠλεκτρικῶν μετρήσεων μέ τυπικές τιμές ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως

$$R_V \simeq 10^5\ \Omega \tag{5.22α}$$

$$R_A \simeq 10^4\ \Omega \tag{5.22β}$$

καί οἱ δύο συνθῆκες τῶν ἐξ. (5.17) καί (5.21) ἱκανοποιοῦνται γιά μιά μεγάλη περιοχή ἀντιστάσεων. Ποσοτικά, ἡ διαχωριστική γραμμή πού καθορίζει τίς περιοχές ἐφαρμογῆς τῶν δύο κυκλωμάτων μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τή σύγκριση τῶν διορθώσεων πού προβλέπουν οἱ ἐξ. (5.18) καί (5.20). Ἡ ἁπλή ἐκτίμηση τῆς ἀντιστάσεως $R_x = R_0 = V/I$ περιέχει τήν ἴδια ἀπόκλιση ἀπό τήν πραγματική τιμή ὅταν

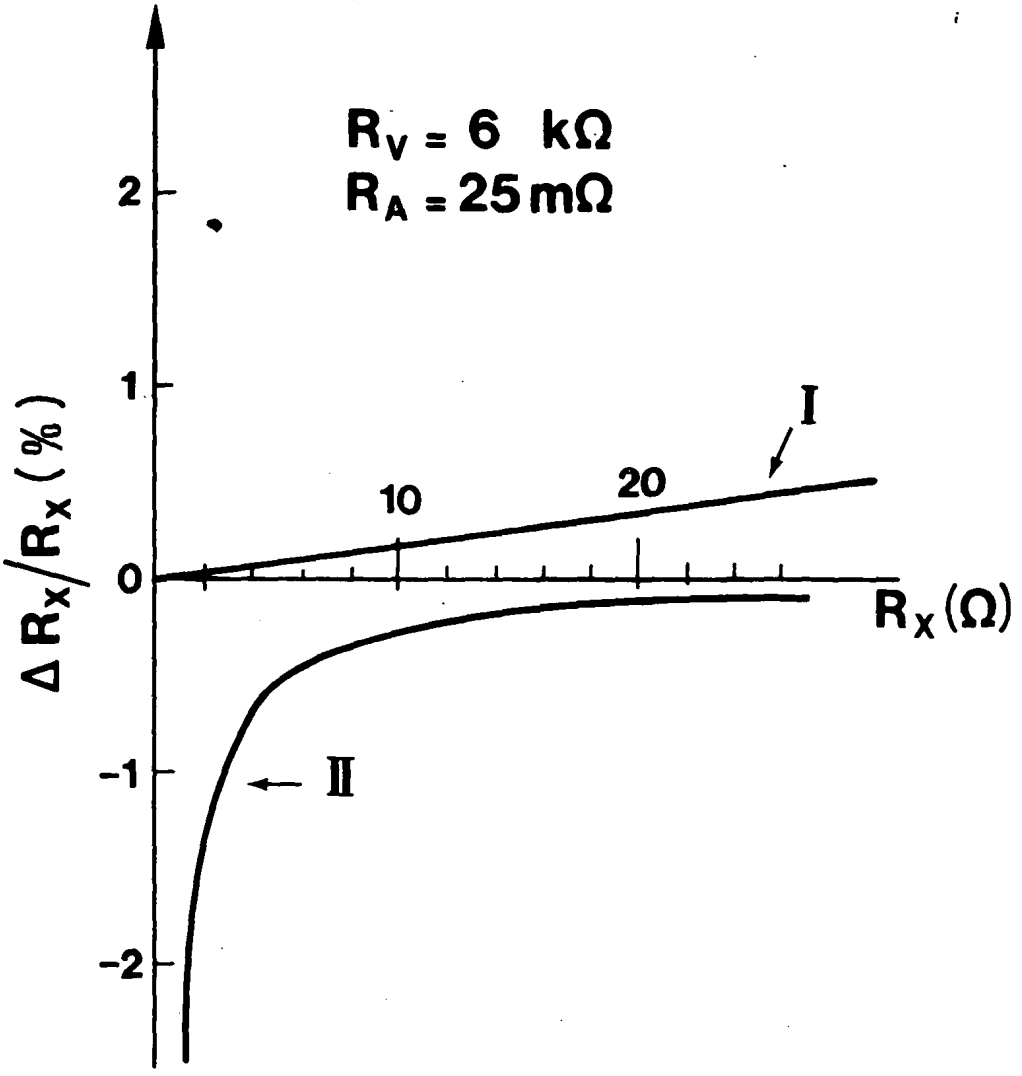
$$\frac{R_0}{R_V} = \frac{R_A}{R_0}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἤ

$$R_0 \simeq R_x = \sqrt{R_A R_v}. \tag{5.23}$$

Γιά ἀντιστάσεις μικρότερες ἀπό τήν τιμή αὐτή, ἡ χρησιμοποίηση τῶν ἐνδείξεων V, I τοῦ κυκλώματος I στό νόμο τοῦ Ohm συνεπάγονται μικρότερο σφάλμα. Τό ἀντίθετο συμβαίνει γιά ἀντιστάσεις μεγαλύτερες ἀπό τήν τιμή τῆς ἐξ. (5.23). Τό ποσοστιαῖο σφάλμα πού συνεπάγεται κάθε κύκλωμα δίνεται ὡς συνάρτηση τῆς ἄγνωστης ἀντιστάσεως στή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 5-14. Ὅπως φαίνεται ἀπό τό σχῆμα, ἄν ἐπιλεγεῖ τό σωστό



ΣΧΗΜΑ 5-14 Ἐπί τοῖς ἑκατό σφάλμα στόν προσδιορισμό ἀντιστάσεως μέ ἁπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm μέσω τῶν ἐνδείξεων τῶν ὀργάνων στά κυκλώματα I καί II. Οἱ ἐσωτερικές ἀντιστάσεις τῶν ὀργάνων ἀναγράφονται στό σχῆμα. Τό ἐπί τοῖς ἑκατό σφάλμα εἶναι περίπου ἴσο καί στίς δύο μεθόδους γιά $R_x = \sqrt{R_A R_v} \simeq 12\ \Omega$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κύκλωμα, σύμφωνα μέ τή διαχωριστική τιμή τῆς ἐξ. (5.23), τό σφάλμα πού συνεπάγεται ἡ ἁπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm εἶναι μικρότερο τοῦ 1%. Ἀπό τήν ἄλλη πλευρά ὑπάρχουν ἀρκετοί ἄλλοι παράγοντες πού εἶναι δυνατόν νά εἰσάγουν μεγαλύτερα σφάλματα στή μέτρηση μιᾶς ἀντιστάσεως. Ὅπως π.χ. θά δοῦμε ἀργότερα, μεταβολή τῆς θερμοκρασίας ἑνός χάλκινου ἀγωγοῦ κατά 5 °C μεταβάλλει τήν ἀντίστασή του κατά 2 % περίπου. Ἄν ἑπομένως κατά τή διεξαγωγή τῆς μετρήσεως ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀγωγοῦ δέν εἶναι γνωστή μέ ἀκρίβεια μεγαλύτερη ἀπό 5 °C, δέν ἔχει νόημα ὁ προσδιορισμός τῆς ἀντιστάσεως μέ ἀκρίβεια μεγαλύτερη τοῦ 1 % πού θά δόσει ἡ χρησιμοποίηση τῶν ἐξ. (5.18) ἤ (5.20).

5-4 Ἠλεκτρεγερτική Δύναμη καί Διαφορά Δυναμικοῦ

Ὡς τώρα θεωρήσαμε ὅτι ἡ ροή τοῦ ἡλεκτρικοῦ ρεύματος σέ ἕνα κύκλωμα προκαλεῖται ἀπό τήν ὕπαρξη μιᾶς διαφορᾶς δυναμικοῦ σέ δύο σημεῖα τοῦ κυκλώματος, χωρίς νά ἐξετάσουμε τούς παράγοντες πού εἰσάγουν οἱ χαρακτηριστικές ἰδιότητες τῆς συσκευῆς πού δημιουργεῖ τή διαφορά αὐτή τοῦ δυναμικοῦ. Ἡ ἁπλούστερη «πηγή» διαφορᾶς δυναμικοῦ εἶναι τό **ἡλεκτρικό στοιχεῖο** (τό ὁποῖο εἶναι γνωστό καί μέ τήν κακόηχη στά Ἑλληνικά γενική ὀνομασία «μπαταρία»). Ἄν καί ἀργότερα θά ἀσχοληθοῦμε εἰδικότερα μέ τήν κατασκευή τῶν ἡλεκτρικῶν στοιχείων, θά τά θεωρήσουμε πρός τό παρόν ἁπλῶς ὡς διατάξεις, οἱ ὁποῖες μέσω χημικῶν ἀντιδράσεων προκαλοῦν τήν κίνηση ἡλεκτρικῶν φορτίων.

Ἡ λειτουργία ἑνός ἡλεκτρικοῦ στοιχείου μέσα σέ ἕνα κύκλωμα γίνεται περισσότερο κατανοητή ἄν ἀνατρέξουμε στή βασική ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας. Εἶναι βέβαιο ὅτι κάθε ἡλεκτρικό φαινόμενο μπορεῖ νά ἐξηγηθεῖ κάτω ἀπό αὐτό τό πρίσμα. Ὁ νόμος τοῦ Ohm π.χ. ἐκφράζει τό ἔργο πού πρέπει νά καταβληθεῖ γιά νά περάσει ἕνα φορτίο μέσα ἀπό ἕνα ἀγωγό. Μικροσκοπικά, τό ἔργο καταναλώνεται στήν ὑπερνίκηση τῶν δυνάμεων ἕλξεως μεταξύ τῶν ἠλεκτρονίων καί τῶν ἀτομικῶν πυρήνων πού ἀποτελοῦν ἀδρανῆ κέντρα ἕλξεως μέσα στήν ὕλη τοῦ ἀγωγοῦ. Τό ἔργο πού ἀπαιτεῖται γιά τή ροή τοῦ φορτίου παράγεται ἀπό τήν ἐνέργεια πού ἐκλύεται κατά τίς χημικές ἀντιδράσεις μέσα στό στοιχεῖο. Ἡ διατήρηση τῆς ἐνεργείας μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ στήν περίπτωση αὐτή μέ τή σχέση

$$E_\chi = E_\Sigma + E_R \qquad (5.24)$$

ὅπου E_χ εἶναι ἡ ἐνέργεια πού ἐκλύεται κατά τή χημική ἀντίδραση, E_Σ ἡ ἐνέργεια πού καταναλώνεται γιά τή μεταφορά φορτίων στό ἐσωτερικό τοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στοιχείου μέχρι τούς πόλους του καί E_R ή ένέργεια πού καταναλώνεται στό ὑπόλοιπο κύκλωμα γιά τή ροή τοῦ ρεύματος. Προφανῶς ἡ «ὠφέλιμη» ἐνέργεια πού μποροῦμε νά πάρουμε ἀπό τό στοιχεῖο εἶναι ἡ τελευταία ποσότητα E_R.

Ἡ ἐξ. (5.24) μπορεῖ νά μεταφραστεῖ σέ σχέση δυναμικοῦ ἄν διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη μέ ἕνα στοιχειῶδες φορτίο q πού πραγματοποιεῖ ἕνα πλήρη κύκλο μέσα στό κύκλωμα. Ἡ ἀντίστοιχη σχέση δυναμικοῦ εἶναι

$$U = U_\Sigma + V \tag{5.25}$$

ὅπου

$$U = \frac{E_\chi}{q}, \qquad U_\Sigma = \frac{E_\Sigma}{q}, \qquad V = \frac{E_R}{q}. \tag{5.26}$$

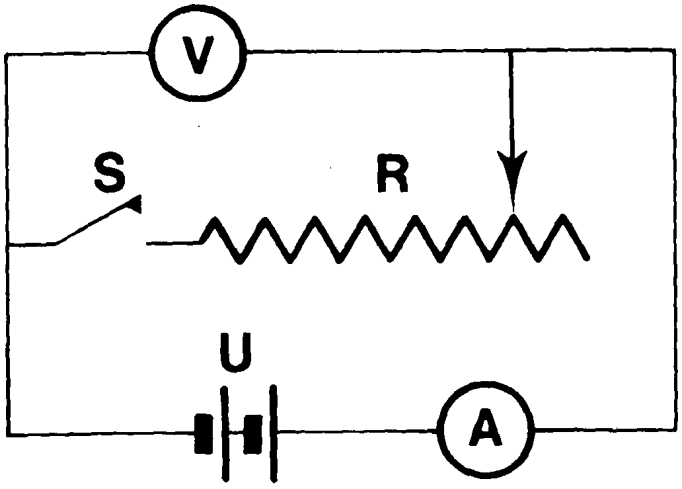
Τό δυναμικό U, πού ἐκφράζει τή μέγιστη διαφορά δυναμικοῦ πού μπορεῖ νά ἀναπτυχθεῖ στούς πόλους ἑνός στοιχείου, ἔχει καθιερωθεῖ μέ τήν ὀνομασία **ἠλεκτρεγερτική δύναμη** (ΗΕΔ), ἐνῶ τό «ὠφέλιμο δυναμικό» $V = RI$ προέρχεται ἀπό τό ἔργο πού καταναλώνεται στό ἐξωτερικό κύκλωμα. Χρησιμοποιώντας τό νόμο τοῦ Ohm μποροῦμε νά ὁρίσουμε μιά ἰσοδύναμη **ἐσωτερική ἀντίσταση** τοῦ στοιχείου r γιά τό ρεῦμα I πού διαρρέει τό κύκλωμα, μέσω τῆς σχέσης

$$U_\Sigma = Ir \tag{5.27}$$

καί νά γράψουμε τό ὠφέλιμο δυναμικό ὑπό τή μορφή

$$V = U - Ir. \tag{5.28}$$

Ἡ τελευταία ποσότητα πού ἀπαντᾶ μέ διάφορες ὀνομασίες ὅπως «τερματικό δυναμικό», «διαθέσιμη ΗΕΔ» ἤ «τερματική ΗΕΔ», μπορεῖ νά μελετηθεῖ μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-15.



ΣΧΗΜΑ 5-15 Μελέτη διαθέσιμης ΗΕΔ καί προσδιορισμός ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως ἠλεκτρικοῦ στοιχείου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-4 ΗΕΔ ΚΑΙ ΤΕΡΜΑΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

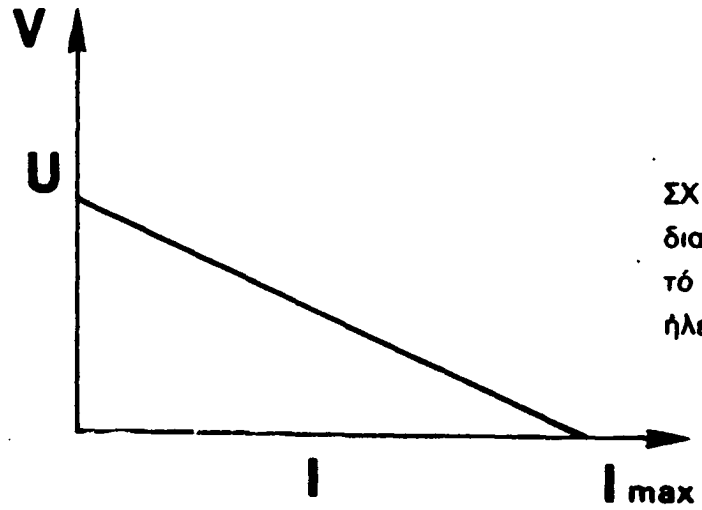
Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-15. Ἡ ὁλική ἀντίσταση τοῦ ροοστάτη πρέπει νά εἶναι πολύ μικρότερη ἀπό τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ βολτομέτρου. Μεταβάλλοντας τό ροοστάτη R σημειῶστε σέ κατάλληλο πίνακα τίς ἐνδείξεις τοῦ ἀμπερομέτρου καί τοῦ βολτομέτρου, τόσο ὅταν ὁ διακόπτης S εἶναι κλειστός ὅσο καί ὅταν ὁδιακόπτης εἶναι ἀνοικτός.

– Ἀποδόστε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τοῦ τερματικοῦ δυναμικοῦ V στά ἄκρα τοῦ στοιχείου ὡς πρός τήν ἔνδειξη τοῦ ἀμπερομέτρου I. Προσαρμόστε τήν καλύτερη εὐθεία γραμμή στά δεδομένα σας καί προσδιορίστε τήν ΗΕΔ τοῦ στοιχείου, τό μέγιστο ρεῦμα πού μπορεῖ νά ἀποδόσει καί τήν ἐσωτερική του ἀντίσταση.

Ἡ γραμμική ἐξάρτηση τοῦ διαθέσιμου δυναμικοῦ ἑνός στοιχείου ἀπό τό ρεῦμα δίνεται στή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 5-16. Ἡ εὐθεία γραμμή πού ἀντιπροσωπεύει τήν ἐξ. (5.28) μπορεῖ νά χαραχτεῖ μέ βάση τά δεδομένα τοῦ προηγουμένου πειράματος καί προσδιορίζει πλήρως τίς χαρακτηριστικές ἰδιότητες τοῦ στοιχείου. Ἡ τομή τῆς εὐθείας μέ τόν κάθετο ἄξονα (I = 0) προσδιορίζει τήν ΗΕΔ τοῦ στοιχείου, καθόσον ἡ ἐξ. (5.28) παίρνει τή μορφή

$$V = U \ . \tag{5.29}$$

Ἀντίθετα, ἡ τομή τῆς εὐθείας μέ τόν ὁριζόντιο ἄξονα (V = 0) προσδιορίζει τή μέγιστη τιμή τοῦ ρεύματος πού μπορεῖ νά προσφέρει τό στοιχεῖο στό ἐξωτερικό κύκλωμα. Γιά V = 0, ἡ ἐξ. (5.28) δίνει



ΣΧΗΜΑ 5-16 Ἐξάρτηση τοῦ διαθέσιμου δυναμικοῦ V ἀπό τό ρεῦμα I πού παρέχει ἕνα ἠλεκτρικό στοιχεῖο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$0 = U - I_{max}\, r$$

ἤ

$$I_{max} = \frac{U}{r} \quad . \tag{5.30}$$

Ἡ τελευταία ποσότητα ἀπαντᾶται στή βιβλιογραφία καί ὡς **ρεῦμα βραχυκυκλώσεως.** Τέλος, ἡ κλίση τῆς εὐθείας τοῦ σχήματος 5-16, πού μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό δύο σημεῖα (V_1, I_1) καί (V_2, I_2) δίνει τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ στοιχείου

$$r = \frac{V_1 - V_2}{I_2 - I_1} \tag{5.31}$$

ὅπως εἶναι εὔκολο νά ἐπιβεβαιωθεῖ ἀπό τήν ἐξ. (5.28).

Πρέπει νά παρατηρήσουμε ὅτι ἄν ὁ προσδιορισμός τῆς χαρακτηριστικῆς εὐθείας τοῦ στοιχείου στό σχῆμα 5-16 γίνει διαμέσου τοῦ κυκλώματος πού δίνεται στό σχῆμα 5-15, ἡ ἀντίσταση r τῶν ἐξ. (5.30) καί (5.31) συμπεριλαμβάνει τήν ἀντίσταση R_A τοῦ ἀμπερομέτρου. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ στοιχείου R_c δίνεται ἀπό τή σχέση

$$R_c = r - R_A = \frac{V_1 - V_2}{I_2 - I_1} - R_A \tag{5.32}$$

ἐνῶ τό ρεῦμα βραχυκυκλώσεως ἀπό τή σχέση

$$I_{max} = \frac{U}{R_c} = \frac{U}{r - R_A} \quad . \tag{5.33}$$

Ἡ ποιότητα ἑνός ἠλεκτρικοῦ στοιχείου συνδέεται στενά μέ τήν ἐσωτερική του ἀντίσταση. Ὅπως δείχνει ἡ ἐξ. (5.28), ὅσο μικρότερη ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ στοιχείου τόσο μεγαλύτερο τό ὠφέλιμο δυναμικό πού ἐξυπηρετεῖ τό ἐξωτερικό κύκλωμα, ἐνῶ, γιά μιά περιορισμένη περιοχή ρεύματος, ἡ διαφορά δυναμικοῦ πού προσφέρεται στό κύκλωμα μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σταθερή.

5-5 Ἠλεκτρικά Στοιχεῖα

Ὅπως ἤδη ἀναφέρθηκε, μέ τή γενική ὀνομασία **ἠλεκτρικό** ἤ **ἠλεκτροχημικό στοιχεῖο** χαρακτηρίζουμε κάθε διάταξη πού μέσω χημικῶν ἀντιδράσεων μπορεῖ νά δημιουργήσει διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα δύο ἀκρο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δεκτῶν. Γιά νά δημιουργηθεῖ ἡ διαφορά δυναμικοῦ θά πρέπει οἱ χημικές ἀντιδράσεις νά δημιουργοῦν σέ καθένα ἀπό τούς ἀκροδέκτες διαφορετική συγκέντρωση φορτίου. Ἀνάλογα μέ τό ἔλλειμα ἢ περίσσεια ἠλεκτρονίων πού θά ἐμφανιστεῖ θά χαρακτηρίσουμε ἀντίστοιχα τούς ἀκροδέκτες τοῦ στοιχείου ὡς **θετικό** καί **ἀρνητικό ἠλεκτρόδιο.**

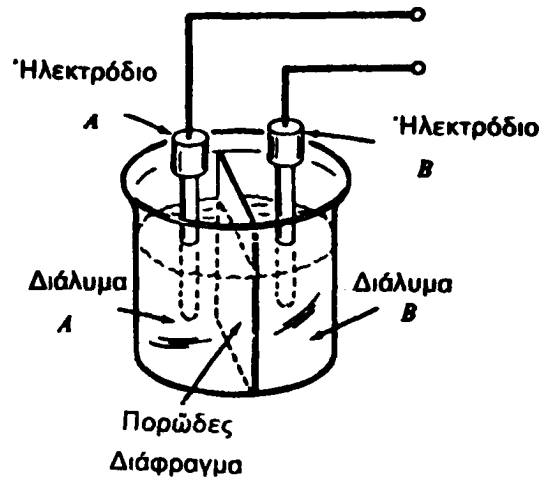
Τό σχῆμα 5-17 περιέχει μιά χαρακτηριστική διάταξη ἠλεκτροχημικοῦ στοιχείου. Καθένα ἀπό τά ἠλεκτρόδια εἶναι δυνατόν νά ἀποτελεῖται ἀπό διαφορετικό μέταλλο ἐνῶ τά δύο διαλύματα Α καί Β πού περιβάλλουν τά ἀντίστοιχα ἠλεκτρόδια μπορεῖ νά ἔχουν διαφορετική χημική σύσταση. Στήν τελευταία περίπτωση μιά πορώδης μεμβράνη διαχωρίζει τά δύο διαλύματα. Ἡ διαχωριστική μεμβράνη ἐπιτρέπει τήν ἐπικοινωνία μεταξύ διαλύματος Α καί διαλύματος Β ἀλλά ἡ διαπήδηση εἶναι ἀρκετά μικρή ὥστε ἡ ἀνάμιξη τῶν δύο διαλυμάτων νά μήν εἶναι σημαντική.

Ἡ λειτουργία τοῦ ἠλεκτρικοῦ στοιχείου μπορεῖ νά γίνει πλέον κατανοητή μέ ἕνα συγκεκριμένο παράδειγμα. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ἠλεκτρικό στοιχεῖο ὅπου τό ἠλεκτρόδιο Α εἶναι κατασκευασμένο ἀπό μεταλλικό κάδμιο σέ διάλυμα θειϊκοῦ καδμίου καί τό ἠλεκτρόδιο Β ἀπό ἄργυρο σέ διάλυμα νιτρικοῦ ἀργύρου. Στά δύο διαλύματα κυκλοφοροῦν θετικά καί ἀρνητικά ἰόντα, Cd^{++} καί SO_4^{--} στό διάλυμα Α καί Ag^{+} καί NO_3^{-} στό διάλυμα Β. Οἱ χημικές ἀντιδράσεις πού συμβαίνουν στήν ἐπιφάνεια κάθε ἠλεκτροδίου εἶναι

$$Cd^{++} + 2e^{-} \rightleftharpoons Cd \text{ (μεταλλικό)} \qquad (5.34\alpha)$$

$$Ag^{+} + e^{-} \rightleftharpoons Ag \text{ (μεταλλικός).} \qquad (5.34\beta)$$

Ὅπως δείχνει ὁ συμβολισμός καθεμιά ἀπό τίς ἀντιδράσεις εἶναι ἀμφίδρομη.



ΣΧΗΜΑ 5-17 Χαρακτηριστική διάταξη ἠλεκτροχημικοῦ στοιχείου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Φορά τῆς ἀντιδράσεως πρός τά δεξιά ἀντιπροσωπεύει διαδικασία κατά τήν ὁποία μεταλλικά ἰόντα τοῦ διαλύματος συλλαμβάνουν ἠλεκτρόνια ἀπό τό ἠλεκτρόδιο καί μεταπίπτουν σέ οὐδέτερα ἄτομα. Τοῦτο ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή συσσώρευση θετικοῦ φορτίου στό ἠλεκτρόδιο. Κατά τήν ἀντίστροφη φορά τῆς ἀντιδράσεως, οὐδέτερα, ἄτομα τοῦ ἠλεκτροδίου ἐγκαταλείπουν ἠλεκτρόνια καί μεταβάλλονται σέ μεταλλικά ἰόντα τοῦ διαλύματος. Θά ὀνομάσουμε τή μετάβαση τῶν ἀντιδράσεων πρός τά δεξιά **ἀναγωγή** καί τή μετάβαση πρός τά ἀριστερά **ὀξείδωση.** Παράλληλα θά ἀναφερθοῦμε στό ἠλεκτρόδιο ὅπου ἡ ἀναγωγή τῶν μεταλλικῶν ἰόντων πραγματοποιεῖται μέ μεγαλύτερο ρυθμό ἀπό τήν ὀξείδωση τῶν ἀτόμων του μέ τόν ὅρο **ἄνοδος,** ἐνῶ στό ἠλεκτρόδιο ὅπου ἡ ὀξείδωση εἶναι ταχύτερη ἀπό τήν ἀναγωγή μέ τόν ὅρο **κάθοδος.**

Στή διεργασία πού περιγράφουμε ἄτομα τῆς καθόδου «κατέρχονται» ὡς μεταλλικά ἰόντα στό διάλυμα ἐνῶ ἰόντα τοῦ διαλύματος «ἀνέρχονται» ὡς οὐδέτερα ἄτομα μετάλλου στήν ἄνοδο. Τοῦτο ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή συσσώρευση ἀρνητικοῦ φορτίου στήν κάθοδο (περίσσεια ἠλεκτρονίων) καί θετικοῦ φορτίου στήν ἄνοδο (ἔλλειμα ἠλεκτρονίων), δηλαδή τήν ἀνάπτυξη μιᾶς διαφορᾶς δυναμικοῦ μεταξύ τῶν δύο ἠλεκτροδίων. Στή συγκεκριμένη περίπτωση τῶν ἐξ. (5.34), ἡ ἀναγωγή τοῦ ἀργύρου πραγματοποιεῖται μέ πολύ ταχύτερο ρυθμό ἀπό τήν ἀναγωγή τοῦ καδμίου. Ἔτσι, ἄν τά δύο διαλύματα πού περιβάλλουν τά ἠλεκτρόδια ἔχουν τήν ἴδια συγκέντρωση μεταλλικῶν ἰόντων, τό ἠλεκτρόδιο τοῦ ἀργύρου ἐμφανίζει μεγαλύτερο ἔλλειμα ἠλεκτρονίων ἀπό τό ἠλεκτρόδιο τοῦ καδμίου καί ἀποτελεῖ τήν ἄνοδο τοῦ στοιχείου. Γιά συγκέντρωση μεταλλικῶν ἰόντων 1 mole/lit στά δύο διαλύματα, ἡ διαφορά δυναμικοῦ πού ἀναπτύσσεται μεταξύ τῶν δύο ἠλεκτροδίων εἶναι περίπου 1.2 V.

Ἄν καί ἡ βιομηχανία παρέχει σήμερα πολλούς τύπους τροφοδοτικῶν ΣΡ γιά χρήση στό ἐργαστήριο, τό ἠλεκτρικό στοιχεῖο βρίσκει εὐρεία ἐφαρμογή ἰδίως σέ τροφοδοσία φορητῶν συσκευῶν. Ἠλεκτρικά στοιχεῖα χρησιμοποιοῦνται ἀκόμη ἀποκλειστικά σέ ἀπομακρυσμένες περιοχές, ὅπως στό διάστημα, σέ ὑποβρύχιες ἔρευνες ἤ σέ ὀρυχεῖα, ὅπου ἠλεκτρική τροφοδοσία τῶν συσκευῶν ἀπό κεντρική παροχή δέν εἶναι διαθέσιμη. Γιά πολλές ἐφαρμογές τό ἠλεκτρικό στοιχεῖο εἶναι οἰκονομικότερο ἀπό τροφοδοτικό ΣΡ μέ συγκρίσιμη σταθερότητα ἐνῶ παράλληλα εἶναι ἀπαλαγμένο ἀπό ἀνεπιθύμητες συχνότητες «θορύβου» τῆς γραμμῆς τροφοδοσίας. Γιά τό λόγο αὐτό παρέχεται σήμερα ἀπό τή βιομηχανία μιά μεγαλη σειρά τυποποιημένων ἠλεκτρικῶν στοιχείων μέ διάφορα χαρακτηριστικά δυναμικοῦ, σταθε-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ρότητας ἤ δυνατότητας ἰσχῆς. Τά περισσότερα στοιχεῖα κατασκευάζονται μέ ἔμφαση στήν παρεχόμενη ἰσχή, στή σταθερότητα τοῦ ρεύματος καί στή μεγάλη διάρκεια ζωῆς, καθόσον τά χαρακτηριστικά αὐτά εἶναι ἐκεῖνα πού ὁδηγοῦν συνήθως στήν ὁμαλή λειτουργία τῶν ὀργάνων πού τροφοδοτοῦνται ἀπό ἠλεκτρικά στοιχεῖα. Μιά μικρή κατηγορία στοιχείων κατασκευάζεται μέ εἰδική μέριμνα ὥστε ἡ ΗΕΔ πού δημιουργεῖται στά δύο ἠλεκτρόδια νά ἔχει σαφῶς καθορισμένη τιμή. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται συνήθως σέ βάρος τοῦ ρεύματος πού μπορεῖ νά ἀντληθεῖ ἀπό τό στοιχεῖο. Μέ τήν κατηγορία αὐτῆ τῶν **πρότυπων στοιχείων** θά ἀσχοληθοῦμε εἰδικώτερα στό Κεφάλαιο 8.

Ἡ ΗΕΔ πού ἀναπτύσσουν τά περισσότερα στοιχεῖα δέν ξεπερνᾶ τά 2 V. Γιά ἐφαρμογές ὅπου ἀπαιτεῖται μεγαλύτερη διαφορά δυναμικοῦ πολλά στοιχεῖα μποροῦν νά συνδεθοῦν σέ σειρά καί νά δημιουργήσουν μιά **συστοιχία** ἤ **μπαταρία.** Ἠλεκτρικά στοιχεῖα συνδέονται ἀκόμη παράλληλα μέ σκοπό τήν αὔξηση τῆς δυνατότητας παροχῆς ρεύματος. Πολλά ἀπό τά στοιχεῖα πού χρησιμοποιοῦνται σήμερα εἶναι «μιᾶς χρήσης» καί ἡ ἀνάπτυξη ΗΕΔ παύει μετά ἀπό ἕνα ὁρισμένο χρόνο ζωῆς. Γιά ἄλλους συνδιασμούς ἠλεκτροδίων καί ἠλεκτρολύτη οἱ χημικές ἀντιδράσεις εἶναι ἀντιστρεπτές καί τό στοιχεῖο μπορεῖ νά ἐπανέλθει στήν ἀρχική του κατάσταση μέ διοχέτευση ἀντίστροφου ρεύματος. Τήν τελευταία κατηγορία ἠλεκτρικῶν στοιχείων ὀνομάζουμε **συσσωρευτές.** Γιά πολλά χρόνια ὑπῆρχαν σέ κοινή χρήση μόνο δύο εἴδη στοιχείων: τό στοιχεῖο Leclanché καί ὁ συσσωρευτής μολύβδου. Σήμερα παρασκευάζονται ἀπό τή βιομηχανία ἀρκετοί τύποι στοιχείων μέ χαρακτηριστικά ΗΕΔ καί δυνατότητας ρεύματος πού ἐπιτρέπουν τή χρησιμοποίησή τους σέ ἕνα εὐρύ φάσμα ἐφαρμογῶν. Μερικούς ἀπό τούς συνηθέστερους τύπους ἠλεκτρικῶν στοιχείων θά περιγράψουμε μέ συντομία στή συνέχεια.

Τό **στοιχεῖο Leclanché** εἶναι ἀκόμη τό πλέον διαδεδομένο ἀπό τά λεγόμενα **ξηρά στοιχεῖα.** Ἡ κατασκευή τοῦ στοιχείου δίνεται στό σχῆμα 5-18. Ὁ ἠλεκτρολύτης περιέχεται σέ ἕνα δοχεῖο ἀπό ψευδάργυρο τό ὁποῖο ἀποτελεῖ ταυτόχρονα καί τήν κάθοδο τοῦ στοιχείου. Ἡ ἄνοδος ἀποτελεῖται ἀπό μιά ράβδο ἄνθρακα στό κέντρο τῆς διατάξεως. Μεταξύ τῶν δύο ἠλεκτροδίων ὑπάρχει ἠλεκτρολύτης ὑπό μορφή χλωριούχου ἀμμωνίου (NH_4Cl) ἐμποτισμένου σέ ὑγροσκοπικό ὑλικό. Ὁ ἠλεκτρολύτης περιέχει ἀκόμη ποσότητα ὑπεροξειδίου τοῦ μαγγανίου (MnO_2), τό ὁποῖο δρᾶ ὡς ἀντιπολωτικό†.

† Μέ τόν γενικό ὅρο **πόλωση** ἀποδίδουμε τήν ἐπιβράδυνση τῆς χημικῆς ἀντιδράσεως πού δημιουργεῖ τήν ΗΕΔ λόγω ἐπικαλύψεως ἑνός ἠλεκτροδίου ἀπό τό ὑδρογόνο πού ἀποδεσμεύεται κατά τήν ἀντίδραση. Τό φαινόμενο μπορεῖ νά ἐξαλειφθεῖ μέ τήν παρουσία μιᾶς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

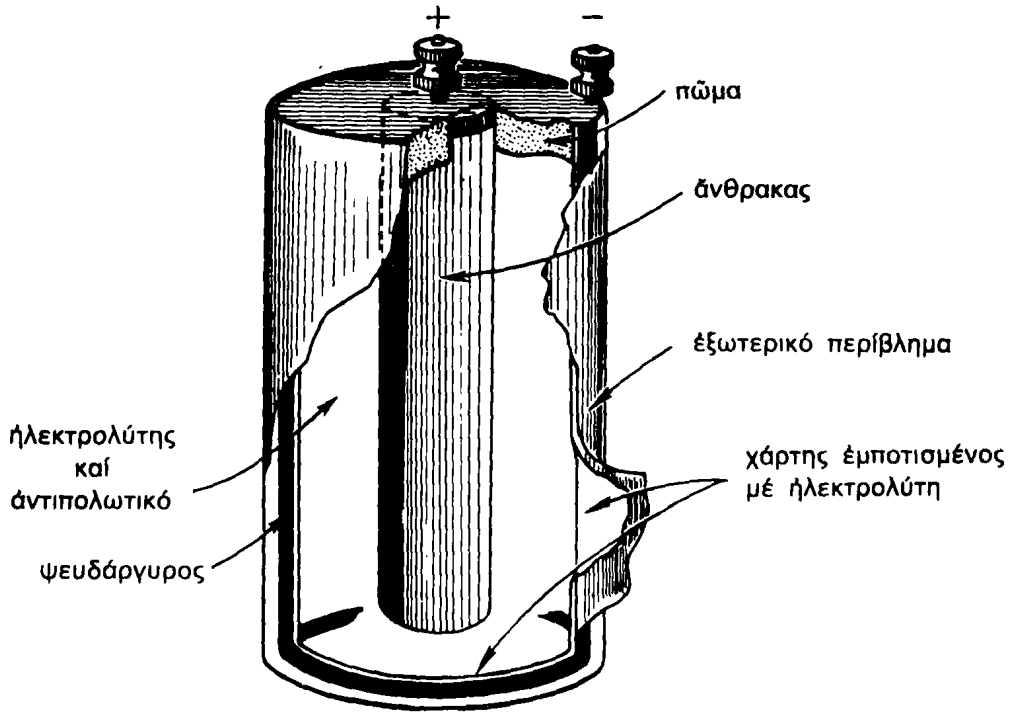
Κατά τή λειτουργία τοῦ στοιχείου, ἄτομα ψευδαργύρου τῆς καθόδου ἐγκαταλείπουν δύο ἠλεκτρόνια καί εἰσέρχονται στόν ἠλεκτρολύτη ὑπό μορφή χλωριούχου ψευδαργύρου, ἀμίνης ἤ ὀξυχλωριούχου ψευδαργύρου. Ἡ κυριώτερη ἀντίδραση στήν κάθοδο εἶναι

$$Zn + 2NH_4Cl \xrightarrow{-2e} ZnCl_2 + 2NH_4^{+}. \qquad (5.35)$$

Ἡ ἀμμωνιακή ρίζα πού δημιουργεῖται μέ τόν τρόπο αὐτό μεταπίπτει σέ οὐδέτερη ἀμμωνία ἐλευθερώνοντας ἰόντα ὑδρογόνου, τά ὁποῖα μέ τή συνεισφορά ἠλεκτρονίων ἀπό τήν ἄνοδο δεσμεύονται ἀπό τό ὑπεροξείδιο τοῦ μαγγανίου διαμέσου τῆς ἀντιδράσεως

$$2MnO_2 + 2H^{+} \xrightarrow{+2e} Mn_2O_3 \cdot H_2O \ . \qquad (5.36)$$

Οἱ χημικές ἀντιδράσεις (5.35) καί (5.36) δημιουργοῦν ΗΕΔ μεταξύ 1.5 καί 1.6 V. Μεγαλύτερη ΗΕΔ μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ μέ σύνδεση ἑνός ἀριθμοῦ στοιχείων Leclanché σέ οειρά. Γιά τήν ἐξοικονόμηση χώρου πολλοί κατασκευαστές παράγουν τυποποιημένες συστοιχίες Leclanché σέ δια-



ΣΧΗΜΑ 5-18 Τό ξηρό στοιχεῖο Leclanché.

χημικῆς ἑνώσεως πού εἶναι πλούσια σέ ὀξυγόνο ὅπως τό νιτρικό ὀξύ (HNO_3) ἤ τό ὑπεροξείδιο τοῦ μαγγανίου (MnO_2). Οἱ οὐσίες πού χρησιμοποιοῦνται σέ ἠλεκτρικά στοιχεῖα γιά τό σκοπό αὐτό ὀνομάζονται **ἀντιπολωτικά.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

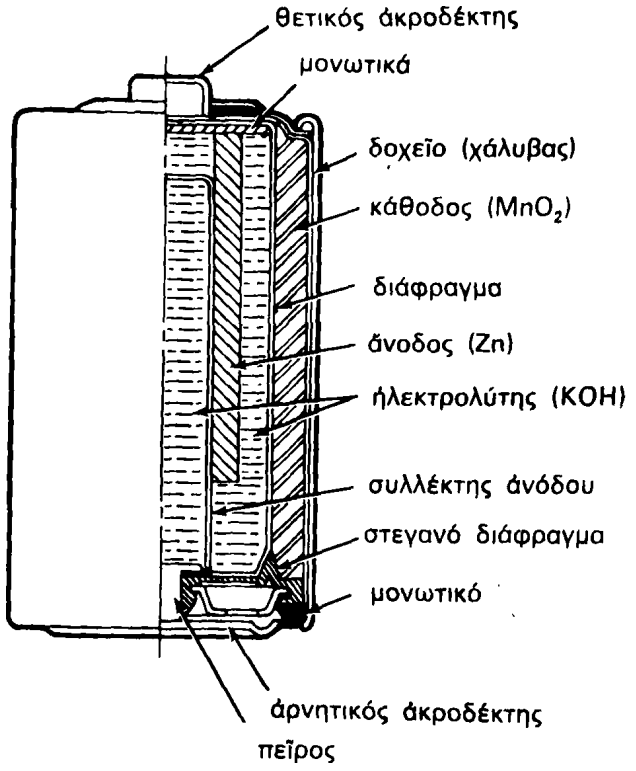
τάξεις πού δημιουργοῦνται μέ διαδοχικές περιοχές ἄνθρακα, ἠλεκτρολύτη καί ψευδαργύρου. Οἱ συνήθεις συστοιχίες ξηρῶν στοιχείων Leclanché πού παράγονται ἀπό τή βιομηχανία ἔχουν ὀνομαστική ΗΕΔ 1.5, 3, 4.5, 6, 7.5, 22.5, 45, 67.5 καί 90 V.

Τό στοιχεῖο Leclanché, εἶναι τό πιό διαδεδομένο ἀπό τά ἠλεκτρικά στοιχεῖα μιᾶς χρήσης. Ὁ χρόνος ζωῆς του (ὁ χρόνος κατά τόν ὁποῖο μπορεῖ νά ἀναπτύξει χρήσιμη ΗΕΔ) ἐξαρτᾶται ἀπό πολλούς παράγοντες, μεταξύ τῶν ὁποίων ὁ χρόνος ἀποθηκεύσεως πρίν ἀπό τή χρησιμοποίησή του, ἡ θερμοκρασία περιβάλλοντος κατά τήν ἀποθήκευση, ὁ ρυθμός ἐκφορτίσεως, τό πλῆθος καί ἡ διάρκεια τῶν περιόδων ἀδρανείας μετά τήν πρώτη χρήση καί ἡ θερμοκρασία περιβάλλοντος κατά τή διάρκεια τροφοδοσίας τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος. Ἀκόμη καί πρίν ἀπό τήν πρώτη χρήση τό στοιχεῖο Leclanché ἐκφορτίζεται ἐσωτερικά, γεγονός πού περιορίζει τό χρόνο ἀποθηκεύσεως. Στίς κλιματολογικές συνθῆκες τῆς χώρας μας ἕνα τυπικό στοιχεῖο Leclanché μπορεῖ νά ἀποθηκευτεῖ γιά περίοδο ἑνός ἔτους. Ὑψηλότερες θερμοκρασίες περιβάλλοντος μειώνουν σημαντικά τόν ἐπιτρεπτό χρόνο ἀποθηκεύσεως.

Σύγχρονα στοιχεῖα Leclanché ἔχουν μέσο χρόνο ζωῆς μεταξύ 10 καί 24 ὡρῶν συνεχοῦς λειτουργίας. Ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου μειώνεται κατά συνεχῆ τρόπο καθόλη τή διάρκεια τῆς χρήσης του. Τό μειονέκτημα αὐτό τό κάνει ἀκατάλληλο γιά τροφοδοσία ἠλεκτρονικῶν συσκευῶν ὅπου οἱ ἀπαιτήσεις σταθερότητας τοῦ δυναμικοῦ εἶναι σχετικά αὐστηρές. Ἕνα δεύτερο μειονέκτημα εἶναι ἡ σταδιακή μείωση τῆς ἀντοχῆς τοῦ περιβλήματος μέ τή διάλυση ψευδαργύρου στό ἠλεκτρολυτικό διάλυμα. Ὁ κίνδυνος θραύσης τοῦ περιβλήματος ἐπιτείνεται μέ τή δημιουργία στό ἐσωτερικό τοῦ στοιχείου φυσαλίδων ὑδρογόνου. Γιά τό λόγο αὐτό συσκευές πού χρησιμοποιοῦν στοιχεῖα Leclanché δέν πρέπει ποτέ νά ἀποθηκεύονται μέ τά στοιχεῖα τροφοδοσίας τους ἐγκατεστημένα.

Παρόμοια σέ κατασκευή μέ τά στοιχεῖα Leclanché εἶναι τά **ἀλκαλικά στοιχεῖα.** Οἱ χημικές ἀντιδράσεις στά δύο ἠλεκτρόδια εἶναι οὐσιαστικά οἱ ἴδιες ἐνῶ ὁ ἠλεκτρολύτης εἶναι ἰσχυρά βασικός. Τά ἀλκαλικά στοιχεῖα διαφέρουν συνήθως στή γεωμετρία τῶν ἠλεκτροδίων. Ἡ τυπική διάταξη δίνεται στό σχῆμα 5-19. Μέ τή γεωμετρία αὐτή τά ἀλκαλικά στοιχεῖα παρέχουν περίπου διπλάσια ἰσχή ἐνῶ ὁ ἐπιτρεπτός χρόνος ἀποθηκεύσεως αὐξάνει σημαντικά. Μερικά ἀκόμη πλεονεκτήματα τῶν ἀλκαλικῶν στοιχείων εἶναι ἡ δυνατότητα λειτουργίας σέ χαμηλές θερμοκρασίες, ἡ μικρή ἐσωτερική ἀντίσταση καί ἡ σταθερότητα στήν παροχή ρεύματος. Μέ τετραπλάσιο περίπου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

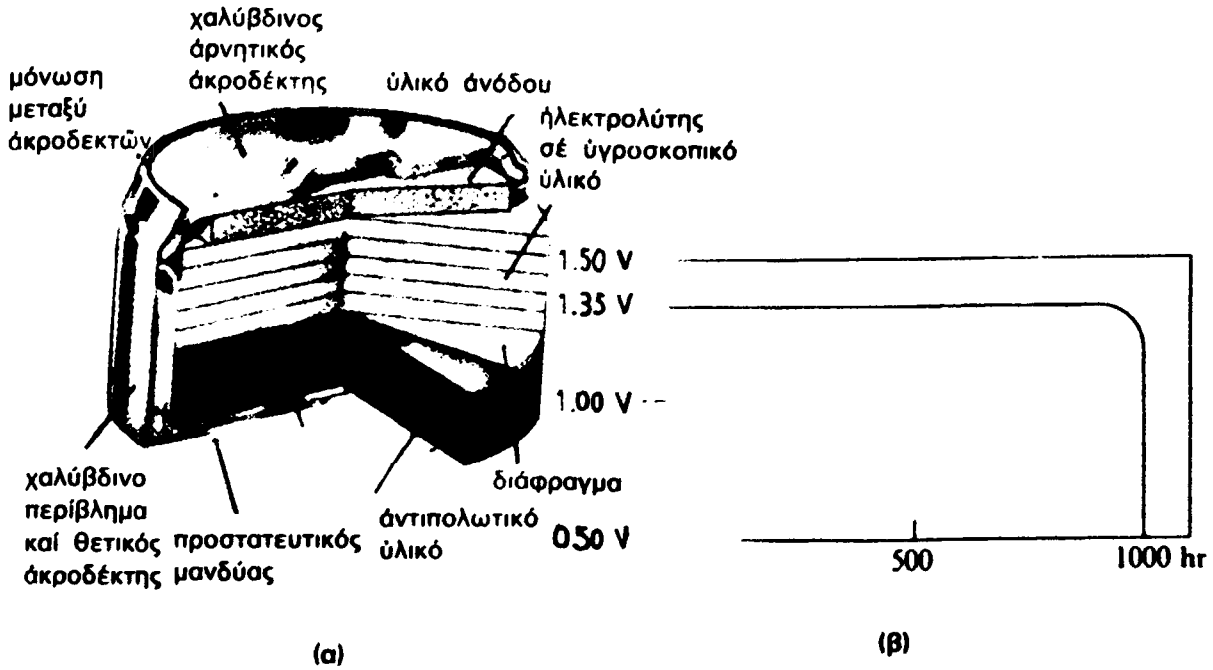


ΣΧΗΜΑ 5-19 Άλκαλικό στοιχεῖο.

κόστος κατασκευῆς, τό άλκαλικό στοιχεῖο δέν πρόκειται νά άντικαταστήσει τελείως τό στοιχεῖο Leclanché. Ό μεγάλος του ὅμως χρόνος ζωῆς καί άποθηκεύσεως συνιστοῦν τή χρησιμοποίησή του σέ συσκευές πού άπαιτοῦν σημαντική ίσχή ἤ πού προορίζονται γιά χρήση ἄμεσης άνάγκης.

Μιά τρίτη κατηγορία ήλεκτρικῶν στοιχείων, τό **στοιχεῖο ὑδραργύρου,** περιγράφεται στό σχῆμα 5-20(α). Ή ἄνοδος άποτελεῖται άπό ψευδάργυρο ένῶ ή κάθοδος άπό συνδιασμό ἄνθρακα καί όξειδίου τοῦ ὑδραργύρου. Κατά τήν έκφόρτιση τοῦ στοιχείου ό ψευδάργυρος όξειδώνεται σέ ZnO έγκαταλείποντας δύο ήλεκτρόνια άνά ἄτομο ένῶ τό όξείδιο τοῦ ὑδραργύρου άνάγεται σέ ὑδράργυρο παίρνοντας άπό τόν ἄνθρακα δύο ήλεκτρόνια άνά μόριο H_2O. Μέ τόν τρόπο αὐτό δημιουργεῖται σταθερή διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν ήλεκτροδίων 1.35 V. Τό στοιχεῖο ὑδραργύρου ἔχει συγκρίσιμες ίδιότητες μέ τό άλκαλικό στοιχεῖο ὅσον άφορᾶ τή δυνατότητα τροφοδοσίας καί τήν έσωτερική άντίσταση. Τό μεγάλο πλεονέκτημα τοῦ στοιχείου εἶναι ή έξαιρετικά σταθερή διαφορά δυναμικοῦ πού διατηρεῖται μέχρι σχεδόν τήν πλήρη έκφόρτιση. Ή ίδιότητα αὐτή άποδίδεται μέ τήν καμπύλη τοῦ σχήματος 5-20(β) καί όφείλεται στό γεγονός ὅτι ό ήλεκτρολύτης δέν μεταβάλλει χημική σύσταση κατά τήν έκφόρτιση. Λόγω τῆς ίδιότητας αὐτῆς, σέ πολλές έφαρμογές ὅπου οἱ άπαιτήσεις άκριβείας δέν εἶναι πολύ αὐστηρές, στοιχεῖα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 5-20 Τό ἠλεκτρικό στοιχεῖο ὑδραργυρου. (α) Διατομή τοῦ στοιχείου. (β) Καμπύλη ἐκφορτίσεως.

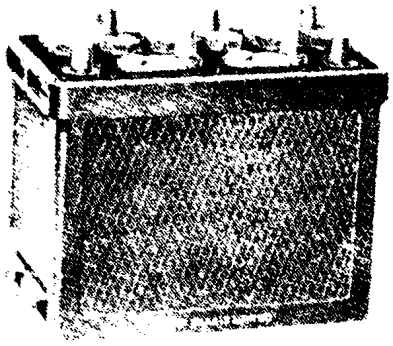
ὑδραργύρου μπορεῖ νά χρησιμοποιηθοῦν ὡς πρότυπα ΗΕΔ. Τό κόστος κατασκευῆς τοῦ στοιχείου ὑδραργύρου εἶναι περίπου πενταπλάσιο ἀπό τό κόστος ἀλκαλικοῦ στοιχείου μέ συγκρίσιμα χαρακτηριστικά. Παρόλα αὐτά, σέ σύγχρονες ἠλεκτρομαγνητικές συσκευές, ὅπου οἱ ἀπαιτήσεις γιά σταθερή ΗΕΔ εἶναι αὐστηρές, ἡ χρησιμοποίηση στοιχείων ὑδραργύρου μπορεῖ νά ἀποτελεῖ τήν πλέον οἰκονομική λύση.

Ὁ πιό γνωστός τύπος συσσωρευτῆ, ἡ κοινή «μπαταρία τοῦ αὐτοκινήτου», εἶναι τό **στοιχεῖο μολύβδου - ὀξέως.** Ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἠλεκτρόδια μολύβδου (κάθοδος) καί ὀξειδίου τοῦ μολύβδου (ἄνοδος) σέ διάλυμα θειϊκοῦ ὀξέως. Κατά τήν ἐκφόρτιση, ὁ μόλυβδος μετατρέπεται σέ ἀδιάλυτο θειϊκό μόλυβδο ἐγκαταλείποντας στήν κάθοδο δύο ἠλεκτρόνια ἀνά μόριο $PbSO_4$, ἐνῶ τό ὀξείδιο τοῦ μολύβδου ἀνάγεται σέ $PbSO_4$ παίρνοντας ἀπό τήν ἄνοδο δύο ἠλεκτρόνια ἀνά μόριο. Οἱ ἀντιδράσεις πού συμβαίνουν κατά τήν ἐκφόρτιση εἶναι

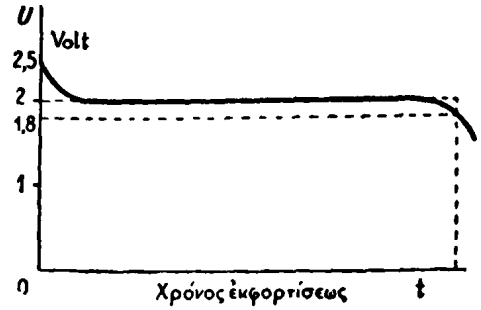
$$\text{Ἄνοδος: } PbO_2 + 2H^+ + H_2SO_4 \rightarrow PbSO_4 + 2H_2O \qquad (5.37\alpha)$$

$$\text{Κάθοδος: } Pb + SO_4^{--} \rightarrow PbSO_4. \qquad (5.37\beta)$$

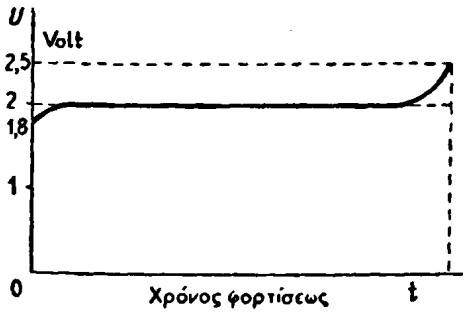
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



(α)



(β)



(γ)

ΣΧΗΜΑ 5-21 (α) Τυπική συστοιχία συσσωρευτῶν μολύβδου. (β) Καμπύλη ἐκφορτίσεως. (γ) Καμπύλη φορτίσεως.

Ἡ συνήθης μορφή μιᾶς συστοιχίας συσσωρευτῶν μολύβδου δίνεται στό σχῆμα 5-21(α). Τό σχῆμα 5-21(β) περιέχει ἐπίσης τήν τυπική καμπύλη ἐκφορτίσεως. Ἕνας νέος συσσωρευτής ἀναπτύσσει ἀρχικά ΗΕΔ περίπου 2.4 V, ἀλλά πολύ γρήγορα κατά τήν ἐκφόρτιση ἡ διαφορά δυναμικοῦ μειώνεται στά ἐπίπεδα τῶν 2 V ὅπου παραμένει γιά ἀρκετό χρόνο. Κατά τό τέλος τοῦ χρόνου ζωῆς τοῦ στοιχείου ἡ πτώση τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ εἶναι ραγδαία.

Σέ ἀντίθεση μέ τά προηγοῦμενα στοιχεῖα μιᾶς χρήσης πού ἐξετάσαμε, ὁ συσσωρευτής μολύβδου μπορεῖ νά ἐπανέλθει στήν ἀρχική του μορφή ἄν διαμέσου τοῦ ἠλεκτρολύτη διοχετευθεῖ ἀντίστροφο ρεῦμα. Οἱ ἀντιδράσεις πού συμβαίνουν κατά τή διεργασία αὐτή, πού ὀνομάζεται **φόρτιση,** εἶναι

$$\text{Ἄνοδος: } PbSO_4 + SO_4^{--} + 2H_2O \rightarrow PbO_2 + 2H_2SO_4 \qquad (5.38\alpha)$$

$$\text{Κάθοδος: } PbSO_4 + 2H^+ \rightarrow Pb + H_2SO_4 \ . \qquad (5.38\beta)$$

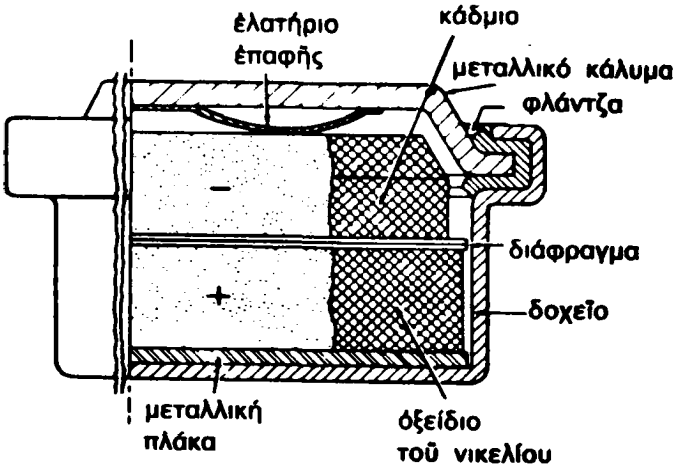
Ὅπως δείχνει ἡ σύγκριση τῶν ἐξ. (5.37) καί (5.38) κατά τή φόρτιση ὁ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

συσσωρευτής μολύβδου ἐπανέρχεται στήν ἀρχική του κατάσταση. Ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου ἐξάλλου κατά τή φόρτιση, πού ἀποδίδεται ἀπό τήν καμπύλη τοῦ σχήματος 5-21(γ), ἐμφανίζει ἀντίστροφη συμπεριφορά ἀπό τήν ἐξέλιξη τῆς ΗΕΔ κατά τήν ἐκφόρτιση.

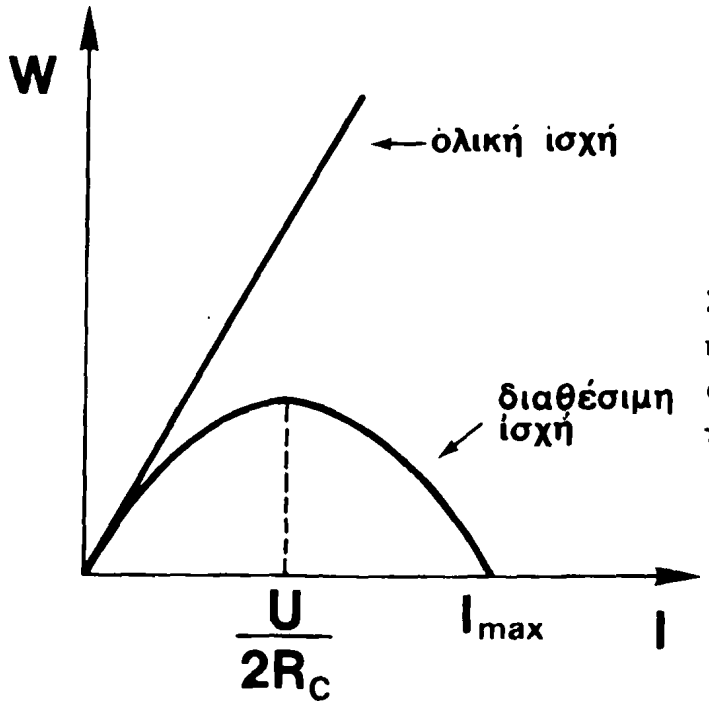
Ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ συσσωρευτῆ μολύβδου εἶναι ἐξαιρετικά μικρή ὥστε νά μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀμελητέα στίς περισσότερες περιπτώσεις. Γιά πολλές ἐφαρμογές ἡ δυνατότητα παροχῆς ὑψηλοῦ ρεύματος γιά μεγάλο χρόνο κάνει τό συσσωρευτή μολύβδου μιά ἀπό τίς οἰκονομικότερες πηγές ἠλεκτρικῆς ἰσχῆς. Παρόλα αὐτά ἡ συνήθης συστοιχία μολύβδου εἶναι βαριά καί ὀγκώδης καί ἀπαιτεῖ συχνή συντήρηση γιά ἀποδοτική λειτουργία.

Τά τελευταῖα χρόνια ἔχει διαδοθεῖ ἀρκετά ἡ χρήση τοῦ **συσσωρευτῆ νικελίου - καδμίου,** ἰδιαίτερα τοῦ σφραγισμένου τύπου. Ἡ τελευταία μονάδα εἶναι ἕνα τελείως σφραγισμένο ἐξάρτημα πού δέν ἀπαιτεῖ καμμιά συντήρηση ἐκτός ἀπό τήν περιοδική φόρτιση. Μιά τυπική διάταξη τοῦ στοιχείου δίνεται στό σχῆμα 5-22. Κατά τήν ἐκφόρτιση τό κάδμιο τῆς καθόδου ὀξειδώνεται ἐνῶ στήν ἄνοδο τοῦ στοιχείου ὀξείδιο τοῦ νικελίου ἀνάγεται σέ χαμηλότερη κατάσταση ὀξειδώσεως. Ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου εἶναι 1.3 V. Κατά τή διοχέτευση ἀντίστροφου ρεύματος τό ὀξείδιο τοῦ νικελίου ἐπανοξειδώνεται στήν ἀνώτερη κατάσταση ὀξειδώσεως ἐνῶ τό ὀξείδιο τοῦ καδμίου ἀνάγεται σέ μεταλλικό κάδμιο. Ὁ συσσωρευτής νικελίου - καδμίου ἔχει τό σημαντικό πλεονέκτημα ὅτι μπορεῖ νά παρέχει ὑψηλό ρεῦμα χωρίς σημαντική μείωση τοῦ δυναμικοῦ. Μπορεῖ νά ἀποθηκευτεῖ γιά μεγάλο χρονικό διάστημα χωρίς νά ἐκφορτιστεῖ. Βιομηχανικοί συσσωρευτές νικελίου - καδμίου παρασκευάζονται σέ ἕνα μεγάλο φάσμα ΗΕΔ καί σέ διάφορα μεγέθη ὥστε νά μποροῦν νά ἀντικαταστήσουν τά συμβατικά στοιχεῖα μιᾶς χρήσης. Τό κυριώτερο μειονέκτημα εἶναι τό μεγάλο κόστος (τουλάχιστον 25 φορές μεγαλύτερο ἀπό τό στοιχεῖο Leclanché) ἐνῶ ταυτόχρονα ἐκφρά-



ΣΧΗΜΑ 5-22 Τυπικός συσσωρευτής νικελίου - καδμίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 5-23 Ἐξάρτηση τῆς παρεχομένης ἰσχῆς ἠλεκτρικοῦ στοιχείου ὡς πρός τό ρεῦμα τοῦ κυκλώματος.

ζονται φόβοι γιά μόλυνση τοῦ περιβάλλοντος ἀπό κάδμιο πού μπορεῖ νά ἐπιφέρει ἡ ἐκτεταμένη χρήση τοῦ στοιχείου.

5-6 Ὠφέλιμη Ἰσχή Ἠλεκτρικοῦ Στοιχείου

Ἡ ἰσχή πού καταναλώνεται στό ἐξωτερικό κύκλωμα ἑνός στοιχείου εἶναι, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (5.28),

$$W = VI = UI - I^2 R_c \ . \qquad (5.39)$$

Ὁ πρῶτος ὅρος στό δεξιό σκέλος τῆς ἐξ. (5.39) ἀντιπροσωπεύει τήν ὁλική ἰσχή πού παράγεται ἀπό χημικές ἀντιδράσεις ἐνῶ ὁ δεύτερος τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στό ἐσωτερικό τοῦ στοιχείου. Ἡ ἐξάρτηση τῶν ὅρων αὐτῶν ἀπό τό ρεῦμα πού διαρρέει τό κύκλωμα δίνεται στή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 5-23. Ἡ ὁλική ἰσχή UI πού παρέχουν οἱ χημικές ἀντιδράσεις αὐξάνει γραμμικά. Ἡ δραστικότερη ὅμως αὔξηση τῆς ἰσχῆς πού καταναλώνεται στό ἐσωτερικό τοῦ στοιχείου ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα μετά ἀπό μιά ὁρισμένη τιμή τοῦ ρεύματος τή σταδιακή μείωση τῆς ἰσχῆς, τήν ὁποία διαθέτει γιά τήν παραγωγή ὠφέλιμου ἔργου στό ἐξωτερικό κύκλωμα. Ἔτσι γιά τιμές τοῦ ρεύματος πού πλησιάζουν τό ρεῦμα βραχυκυκλώσεως, τό μεγαλύτερο μέρος τῆς ἐνεργείας χάνεται μέσα στό στοιχεῖο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-5 ΩΦΕΛΙΜΗ ΙΣΧΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Μέ βάση τά πειραματικά δεδομένα καί τά ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος 5-4 ἀποδόστε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τῆς ἰσχῆς πού καταναλώνεται στήν ἀντίσταση R ὡς πρός τό ρεῦμα. Προσδιορίστε τό ρεῦμα γιά τό ὁποῖο ἡ ἰσχή εἶναι μέγιστη καί συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμά σας μέ τήν πρόβλεψη τῆς ἐξ. (5.41). Γιά τήν τιμή αὐτή τοῦ ρεύματος I συγκρίνετε τήν ἀντίσταση R = V/I πού προσδιορίζουν οἱ ἐνδείξεις τῶν ὀργάνων σας μέ τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ στοιχείου R_c πού μετρήσατε στό Πείραμα 5-4.

Ὁ προσδιορισμός τοῦ ρεύματος γιά κατανάλωση τῆς μέγιστης δυνατῆς ἰσχῆς στό κύκλωμα μπορεῖ νά γίνει μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (5.39). Ἡ συνθήκη γιά τό μέγιστο τῆς συναρτήσεως W εἶναι

$$\frac{dW}{dI} = 0 \tag{5.40}$$

ἤ

$$U - 2IR_c = 0$$

πού συνεπάγεται ρεῦμα

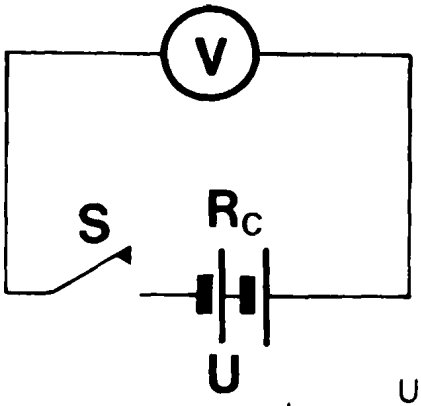
$$I = \frac{U}{2R_c} \ . \tag{5.41}$$

Καθόσον γιά τήν κατάσταση αὐτή ἡ ὁλική ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος εἶναι $2R_c$, ἡ ἐξωτερική ἀντίσταση πρέπει νά εἶναι ἴση μέ R_c. Μέ ἄλλα λόγια, ἡ ἐξ. (5.41) προσδιορίζει ὅτι τό στοιχεῖο παρέχει τή μέγιστη δυνατή ὠφέλιμη ἰσχή ὅταν ἡ ἐξωτερική ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος εἶναι ἴση μέ τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ στοιχείου.

5-7 Μέτρηση ΗΕΔ Ἠλεκτρικοῦ Στοιχείου

Εἶναι φανερό ὅτι γιά ὁποιαδήποτε τιμή τῆς ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως ἡ διαφορά δυναμικοῦ στούς πόλους ἑνός στοιχείου εἶναι πάντα μικρότερη ἀπό τήν ΗΕΔ. Γιά τό λόγο αὐτό δέν εἶναι δυνατόν νά προσδιορίσουμε τήν ΗΕΔ μέ ἁπλή χρήση ἑνός βολτομέτρου ὅπως δείχνει τό σχῆμα 5-24. Εἰδικότερα, ἄν U εἶναι ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου, τό ρεῦμα I πού διαρρέει τό κύκλωμα εἶναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 5-24 Μέτρηση τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ στούς πόλους ἠλεκτρικοῦ στοιχείου.

$$I = \frac{U}{R_V + R_C}$$

ὅπου R_V καί R_C εἶναι ἀντίστοιχα οἱ ἀντιστάσεις τοῦ βολτομέτρου καί τοῦ στοιχείου. Τό δυναμικό ἑπομένως πού μετράει τό βολτόμετρο εἶναι

$$V = IR_V = U - IR_C \ . \tag{5.42}$$

Ἄν εἶναι γνωστή ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ στοιχείου, ἡ ΗΕΔ μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ ἀπό τήν ἐξ. (5.42) ὡς

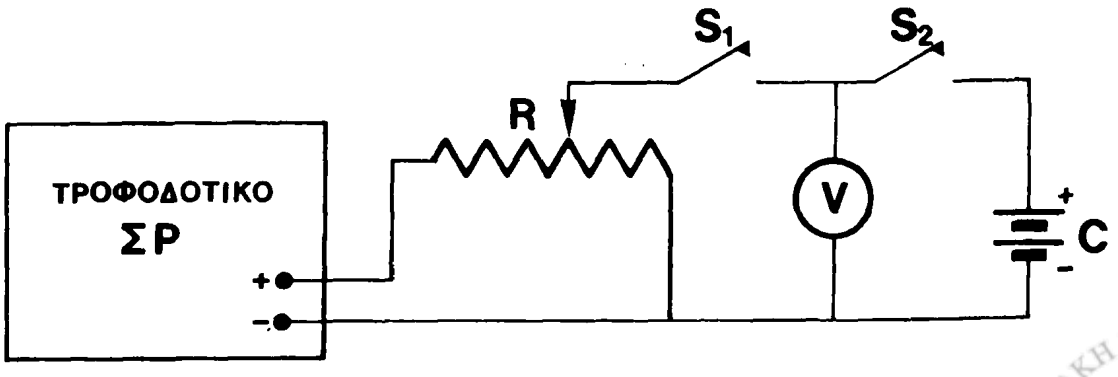
$$U = V + IR_C = V + \frac{R_C}{R_V} V \tag{5.43}$$

Ὅπως δείχνει ἡ τελευταία σχέση, στίς συνήθεις περιπτώσεις ὅπου

$$R_C << R_V \tag{5.44}$$

ἡ ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου V βρίσκεται πολύ κοντά στήν τιμή τῆς ΗΕΔ. Ἡ συνθήκη ὅμως τῆς ἐξ. (5.44) πρέπει νά ἐξακριβώνεται προτοῦ προσδιοριστεῖ ἡ ΗΕΔ ἑνός στοιχείου μέσω τῆς ἁπλῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 5-24.

Μιά διάταξη πού ἐπιτρέπει ἕνα περισσότερο ἀκριβή προσδιορισμό τῆς ΗΕΔ ἑνός στοιχείου δίνεται στό σχῆμα 5-25.



ΣΧΗΜΑ 5-25 Μέτρηση τῆς ΗΕΔ ἠλεκτρικοῦ στοιχείου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-6 ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΗΕΔ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Μετρεῖστε τήν πτώση δυναμικοῦ στούς πόλους τοῦ ἡλεκτρικοῦ στοιχείου C πού χρησιμοποιήσατε στό Πείραμα 5-4 μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 5-24.

– Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-25 χρησιμοποιώντας τό ἴδιο ἡλεκτρικό στοιχεῖο C. Μέ τόν διακόπτη S_2 ἀνοικτό, κλεῖστε τόν διακόπτη S_1 καί ρυθμίστε τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ ὥστε ἡ ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου νά εἶναι ἴση μέ τό δυναμικό πού μετρήσατε προηγουμένως στούς πόλους τοῦ στοιχείου. Κλεῖστε τόν διακόπτη S_2. Ἡ ἔνδειξη τοῦ ἀμπερομέτρου πρέπει νά εἶναι τώρα κοντά στό μηδέν. Ρυθμίστε τόν ροοστάτη R ὥστε ἡ ἔνδειξη τοῦ ἀμπερομέτρου νά μηδενιστεῖ τελείως. Ἀνοῖξτε τόν διακόπτη S_2. Ἡ ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου δίνει τώρα τήν ΗΕΔ τοῦ στοιχείου C. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τήν προηγούμενη μέτρηση μέσω τῆς διατάξεως πού δίνεται στό σχῆμα 5-24 καί μέ τήν τιμή τοῦ ΗΕΔ πού προσδιορίσατε στό Πείραμα 5-4. Ἐξηγεῖστε τή λειτουργία τοῦ κυκλώματος πού δίνεται στό σχῆμα 5-25.

5-8 Τό Ἐργαστηριακό Ὠμόμετρο

Ἄν σέ ἕνα κύκλωμα εἶναι γνωστή ἡ ΗΕΔ καί ἕνα μέρος τῆς ὁλικῆς ἀντιστάσεως, τότε ἡ μέτρηση τοῦ δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς γνωστῆς ἀντιστάσεως μπορεῖ νά προσδιορίσει τήν ὑπόλοιπη ἄγνωστη ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος. Ἡ διαπίστωση αὐτή πού ἀποτελεῖ τήν ἀρχή λειτουργίας τοῦ **ἐργαστηριακοῦ ὠμομέτρου,** μπορεῖ νά ἐξαχθεῖ ἀπό τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-26, στό ὁποῖο ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου U καί οἱ ἀντιστάσεις R_0 καί R_Δ εἶναι γνωστές. Ἄν V εἶναι ἡ πτώση δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς (μικρῆς) ἀντιστάσεως R_Δ τό ρεῦμα I πού διαρρέει τό κύκλωμα δίνεται ἀπό τή σχέση†

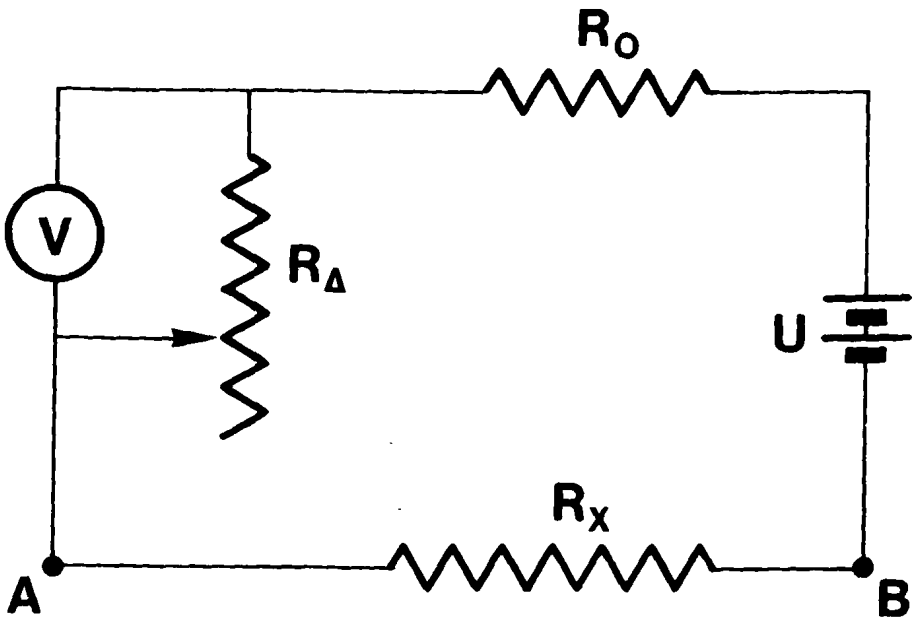
$$I = \frac{V}{R_\Delta} = \frac{U}{R_0 + R_\Delta + R_C + R_x} \qquad (5.45)$$

ὅπου R_C εἶναι ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ στοιχείου. Ἡ ἄγνωστη ἀντίσταση R_x εἶναι

$$R_x = R_\Delta U \frac{1}{V} - R \qquad (5.46)$$

† Θά θεωρήσουμε ὅτι ἡ διακλάδωση R_Δ ἔχει ἀρκετά μικρή τιμή ὥστε τό ρεῦμα διαμέσου τοῦ βολτομέτρου νά εἶναι ἀμελητέο σέ σχέση μέ τό ὁλικό ρεῦμα I.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 5-26 Ἀρχή λειτουργίας τοῦ ἐργαστηριακοῦ ὠμομέτρου.

ὅπου R εἶναι τό σύνολο τῶν γνωστῶν ἀντιστάσεων τοῦ κυκλώματος

$$R = R_0 + R_\Delta + R_c \ . \tag{5.47}$$

Ἂν α εἶναι ἡ γωνία ἀποκλίσεως τοῦ βολτομέτρου γιά δυναμικό V μέ σταθερά ἀναλογίας k, ἤτοι

$$V = k\,\alpha, \tag{5.48}$$

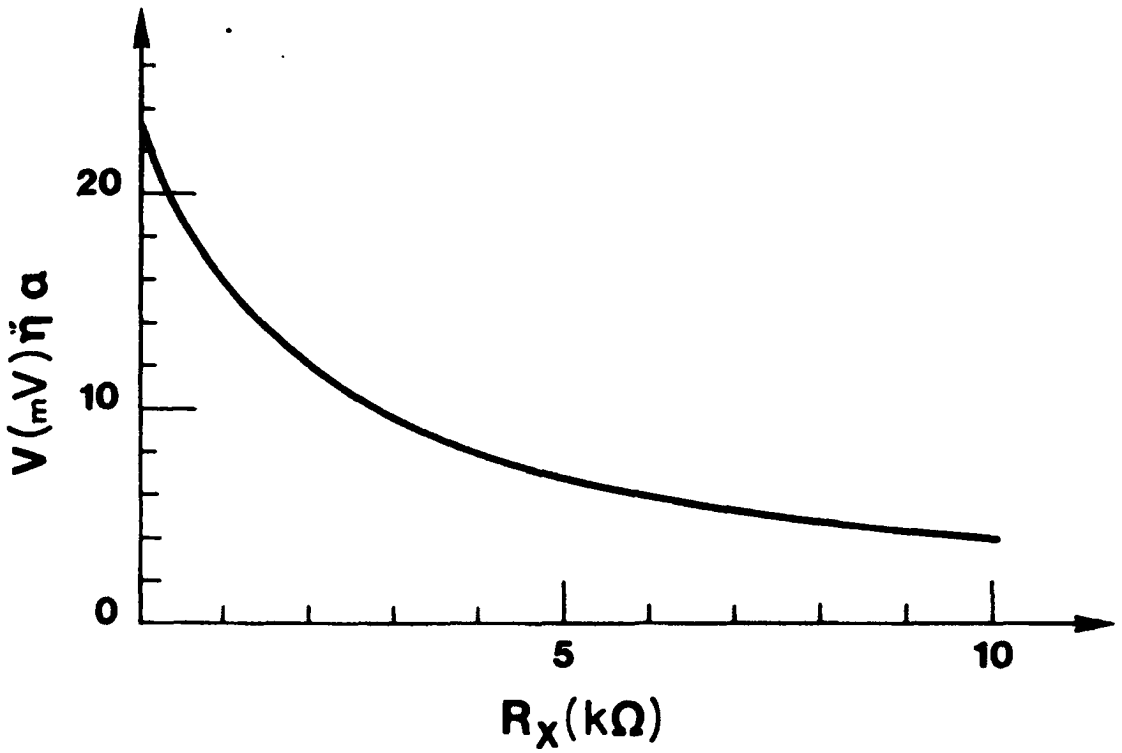
ἡ ἐξ. (5.46) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$R_x = \frac{R_\Delta U}{k}\frac{1}{\alpha} - R \ . \tag{5.49}$$

Ἡ τελευταία σχέση μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή βαθμονόμηση τοῦ βολτομέτρου ἀπευθείας σέ μονάδες ἀντιστάσεως. Σύμφωνα μέ τή σχέση αὐτή ἡ ἀπόκλιση τοῦ ὀργάνου μεταβάλλεται ἀντίστροφα πρός τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_x. Γιά ἄπειρη ἀντίσταση μεταξύ τῶν σημείων A καί B (ἀνοικτό κύκλωμα) ἡ ἀπόκλιση προβλέπεται μηδενική ἐνῶ γιά $R_x = 0$ (ἁπλή ἐπαφή τῶν σημείων A καί B) ἡ ἀπόκλιση εἶναι

$$\alpha = \frac{R_\Delta}{R}\frac{U}{k} \ . \tag{5.50}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 5-27 Ἀπόκλιση α τοῦ βολτομέτρου στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-26 ὡς συνάρτηση τῆς ἀντιστάσεως R_x.

Ἡ τιμή αὐτή τῆς ἀποκλίσεως μπορεῖ νά γίνει ἴση μέ τή μέγιστη δυνατή ἀπόκλιση τοῦ ὀργάνου μέ κατάλληλη μεταβολή τῆς διακλαδώσεως R_Δ. Μεταξύ τῶν ἀκραίων τιμῶν $R_x = 0$ καί $R_x = \infty$, ἡ ἀπόκλιση τοῦ ὀργάνου δίνεται στή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 5-27.

ΠΕΙΡΑΜΑ 5-7 ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ ΩΜΟΜΕΤΡΟΥ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ «ὡμομέτρου» πού δίνεται στό σχῆμα 5-26. Χρησιμοποιεῖστε ἕνα στοιχεῖο μέ ΗΕΔ 6 Volt, ἀντίσταση R_0 τῆς τάξης τῶν 2000 Ω, ἕνα ροοστάτη R_Δ μέ ὁλική ἀντίσταση περίπου 10 Ω καί ἕνα βολτόμετρο μέ μέγιστη ἔνδειξη 30 mV. Ἑνῶστε τά δύο σημεῖα A καί B καί ρυθμίστε τό ροοστάτη R_Δ ὥστε ἡ ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου νά εἶναι μέγιστη (V = 30 mV). Συνδέστε ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων μεταξύ τῶν σημείων A καί B τοῦ κυκλώματος. Σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τήν ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου γιά διάφορες τιμές τῆς ἀντιστάσεως R_x.
– Ἀποδόστε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τῆς ἀντιστάσεως R_x

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὡς πρός τό ἀντίστροφο τῆς ἐνδείξεως τοῦ βολτομέτρου $\frac{1}{V}$. Προσαρμόζοντας τήν καλύτερη εὐθεία γραμμή στά δεδομένα σας προσδιορίστε τοῦ συντελεστές C_1 καί C_2 στή σχέση τῆς ἐξ. (5.46)

$$R_x = C_1 \frac{1}{V} - C_2 \tag{5.51}$$

καί χαράξτε σέ νέα γραφική παράσταση μία καμπύλη βαθμονομήσεως ἀνάλογη πρός τό σχῆμα 5-27.

Ὅπως ἐξάγεται ἀπό τά προηγούμενα, ἡ κλίμακα τοῦ ὠμομέτρου διαφέρει κατά πολύ ἀπό τίς κλίμακες τῶν ὀργάνων ἠλεκτρικῶν μετρήσεων πού μελετήσαμε ὡς τώρα. Τό «0» τῆς κλίμακας βρίσκεται στό δεξιό μέρος καί στό σημεῖο μέγιστης ἀποκλίσεως τοῦ δείκτη, ἐνῶ τό ἄκρο ἀριστερό μέρος τῆς κλίμακας ἀντιστοιχεῖ σέ ἄπειρη ἀντίσταση. Μεταξύ τῶν δύο ἀκραίων ἐνδείξεων ἡ κλίμακα δέν εἶναι γραμμική, μέ σταδιακή αὔξηση τῆς πυκνότητας τῶν ἐνδείξεων πρός τό ἀριστερό μέρος τῆς κλίμακας. Γιά τό λόγο αὐτό ἡ εὐαισθησία τοῦ ὀργάνου εἶναι συνάρτηση τῆς ἀντιστάσεως πού μετράει καί, ἀπό τήν ἐξ. (5.49), δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\frac{d\alpha}{dR_x} = - \frac{R_\Delta U}{k(R+R_x)^2} \tag{5.52}$$

ὅπου τό ἀρνητικό σημεῖο ἀποδίδει τή μείωση τῆς ἀποκλίσεως Δα μέ ἀντίστοιχη αὔξηση τῆς ἀντιστάσεως ΔR_x. Συγκεκριμένα μποροῦμε ἀπό τήν τελευταία ἔκφραση νά γράψουμε τή διαφορά ἀποκλίσεως Δα σέ σχέση μέ τή μεταβολή τῆς ἀντιστάσεως ΔR_x ὡς

$$\Delta\alpha = - \frac{R_\Delta U}{k(R+R_x)^2} \Delta R_x \ . \tag{5.53}$$

Χρησιμοποιόντας ἐπομένως τήν ἐξ. (5.50) ἡ ποσοστιαία ἀπόκλιση τοῦ ὠμομέτρου ὡς πρός τή μέγιστη ἀπόκλιση εἶναι

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha_{max}} = - \frac{R}{(R+R_x)^2} \Delta R_x = \frac{R R_x}{(R+R_x)^2} \frac{\Delta R_x}{R_x} \tag{5.54}$$

ἤ, ἀντίστροφα

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{(R+R_x)^2}{R R_x} \frac{\Delta\alpha}{\alpha_{max}} \tag{5.55}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

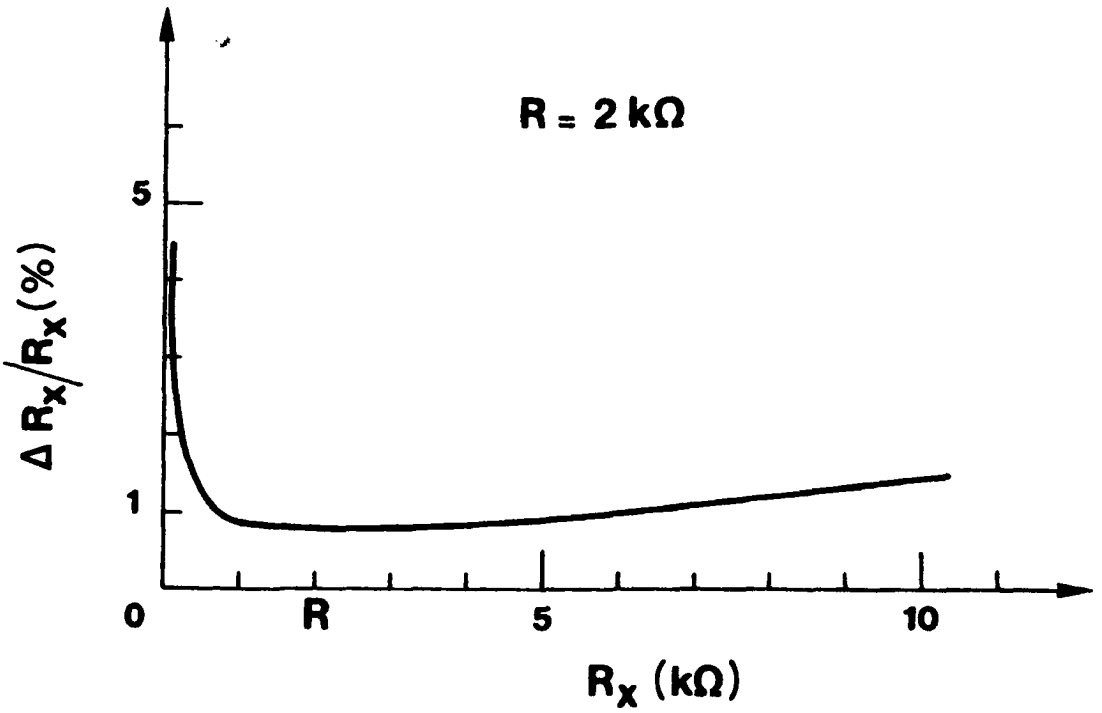
Ἡ τελευταία σχέση δίνει τήν ποσοστιαία εὐαισθησία τοῦ ὠμομέτρου σέ σχέση μέ τήν ποσοστιαία εὐαισθησία τοῦ βολτομέτρου. Γιά ἕνα τυπικό σύγχρονο βολτόμετρο μέ εὐαισθησία 0.2 % τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως, ἡ ποσοστιαία εὐαισθησία τοῦ ὠμομέτρου πού κατασκευάστηκε στό Πείραμα 5-7, δίνεται στό σχῆμα 5-28 ὡς συνάρτηση τῆς ἀντιστάσεως R_x. Ἡ μεγαλύτερη εὐαισθησία μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό τή συνθήκη

$$\frac{d}{dR_x}\left(\frac{\Delta R_x}{R_x}\right) = 0$$

πού δίνει τήν ἁπλή σχέση

$$R_{x,m} = R_0 + R_\Delta + R_C \,. \qquad (5.56)$$

Μέ ἄλλα λόγια *ἡ εὐαισθησία γίνεται μέγιστη ὅταν ἡ ἀντίσταση πού μετρᾶται εἶναι ἴση μέ τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ ὠμομέτρου.* Ἐξάλλου γιά $R_x = R$ ἡ ἀπόκλιση τοῦ ὀργάνου εἶναι ἀπό τίς ἐξ. (5.49) καί (5.50)



ΣΧΗΜΑ 5-28 Ἐπί τοῖς ἑκατό εὐαισθησία τοῦ ὠμομέτρου τοῦ σχήματος 5-26 γιά $R_0 = 1980\ \Omega$, $R_\Delta = 10\ \Omega$ καί εὐαισθησία βολτομέτρου $\Delta V = 0.002\ V_{max}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\alpha = \frac{UR_\Delta}{k(R+R_x)} = \frac{1}{2}\frac{UR_\Delta}{kR} = \frac{1}{2}\alpha_{max} \qquad (5.57)$$

δηλαδή, τό μισό τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως.

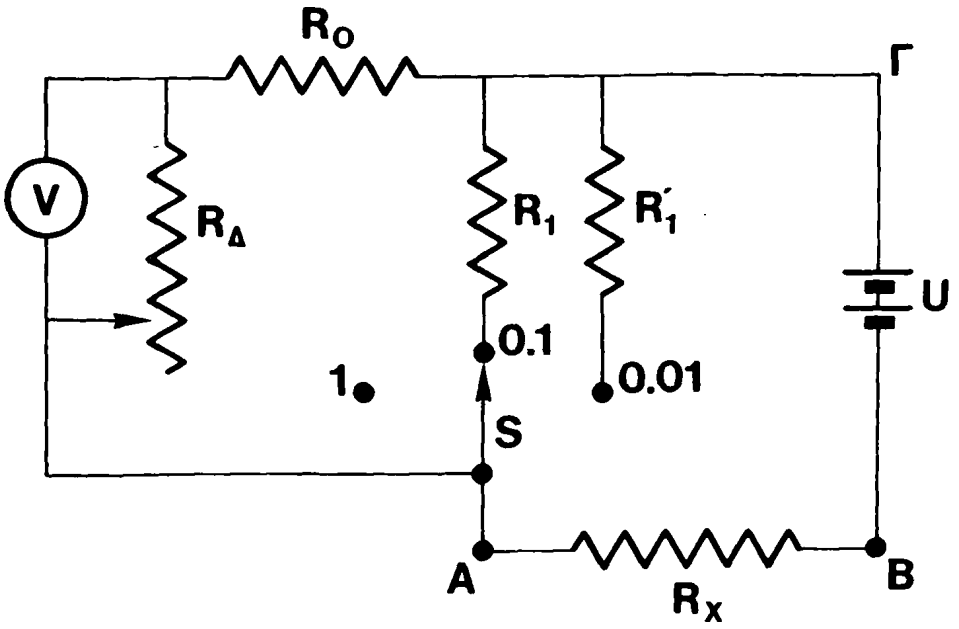
Στήν πράξη ἡ ἀντίσταση $R_{x,m}$, πού θά ὀνομάσουμε **ἀντίσταση μέσης ἀποκλίσεως,** καθορίζει καί τήν περιοχή χρησιμότητας τοῦ ὀργάνου. Ὅπως δείχνει τό σχῆμα 5-28, γιά $R_{x,m} = 2\ k\Omega$ ἡ ποσοστιαία εὐαισθησία τοῦ ὠμομέτρου γίνεται μικρότερη ἀπό 1 % στήν περιοχή

$$0.8\ k\Omega \leqslant R_x \leqslant 5.5.\ k\Omega$$

ὅπου τό ὄργανο μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ μέ ἀνεκτή ἀκρίβεια. Ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τήν ἐξ. (5.56), ἡ ἀντίσταση μέσης ἀποκλίσεως μπορεῖ νά ἐπιλεγεῖ μέ ἀντίστοιχη ἐπιλογή τῆς ἀντιστάσεως R_0 στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-26. Μιά ἐναλλακτική λύση δίνεται στό σχῆμα 5-29 μέ τήν προσθήκη τῆς διακλαδώσεως R_1 πού ἐπιτρέπει τή χρήση τῆς διατάξεως σέ πολλαπλάσια κλίμακα. Ἄν ἡ διακλάδωση R_1 ἐπιλεγεῖ μέ τιμή

$$R_1 = \frac{1}{9}(R_0 + R_\Delta)$$

τότε (στήν προσέγγιση $R_\Delta << R_V$) ἡ ἀντίσταση μεταξύ τῶν σημείων Α καί Γ εἶναι



ΣΧΗΜΑ 5-29 Ἐργαστηριακό ὠμόμετρο μέ διακλαδώσεις γιά ὑποδεκαπλασιασμό τῆς κλίμακας τοῦ ὀργάνου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

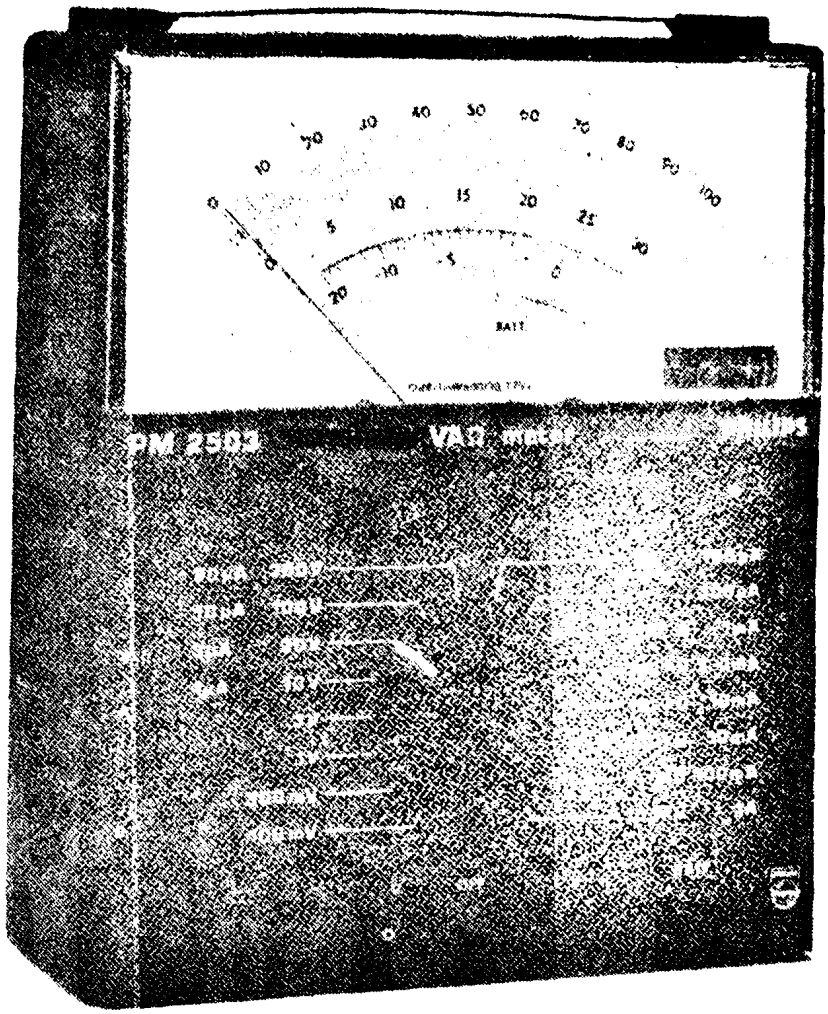
$$R_\varepsilon = \frac{R_1 (R_0 + R_\Delta)}{R_1 + R_0 + R_\Delta} = \frac{9}{10} R_1 = \frac{1}{10} (R_0 + R_\Delta) \qquad (5.58)$$

Μέ ἄλλα λόγια, ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ ὠμομέτρου ὑποδεκαπλασιάζεται ἐνῶ ταυτόχρονα ὑποδεκαπλασιάζεται τό ρεῦμα πού διέρχεται ἀπό τή διακλάδωση R_A (καί ἐπομένως τό δυναμικό στά ἄκρα της). Γιά μιά συγκεκριμένη ἀντίσταση R_x ἡ ἔνδειξη τοῦ ὠμομέτρου εἶναι δεκαπλάσια στή θέση 1 τοῦ διακόπτη S ἀπό ὅτι εἶναι στή θέση 0.1. Ἀντίστροφα, ἡ ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου εἶναι ἡ ἴδια γιά μιά ἀντίσταση R_x ὅταν ὁ διακόπτης S βρίσκεται στή θέση 1 καί γιά μιά ἀντίσταση 10 R_x ὅταν ὁ διακόπτης S βρίσκεται στή θέση 0.1. Ἡ διάταξη ἐπομένως αὐτή μᾶς ἐπιτρέπει τή μέτρηση ἑνός μεγάλου εὔρους ἀντιστάσεων μέ τήν ἴδια κλίμακα καί ἁπλό πολλαπλασιασμό τῆς ἐνδείξεως μέ τόν ἀντίστοιχο συντελεστή τοῦ διακόπτη S. Ὅπως δείχνει τό σχῆμα 5-29 μποροῦμε κατά τόν ἴδιο τρόπο νά προσθέσουμε καί ἄλλες διακλαδώσεις μέ ὑποδεκαπλάσιους συντελεστές 0.01, 0.001 κ.λ.π. Πρέπει νά σημειωθεῖ πάντως ὅτι μέ τή βαθμιαία αὐτή ἐλάττωση τῆς τιμῆς τῆς διακλαδώσεως R_1 τό ρεῦμα διαμέσου τῆς ἄγνωστης ἀντιστάσεως αὐξάνει δραστικά καί μπορεῖ νά φτάσει σέ ἀνεπίτρεπτα ὅρια γιά ὁρισμένες ἐφαρμογές. Στίς περιπτώσεις αὐτές ἡ ἐπέκταση τῆς κλίμακας τοῦ ὠμομέτρου μπορεῖ νά γίνει μέ ταυτόχρονη μεταβολή τῆς διακλαδώσεως R_1 καί τῆς ἀντιστάσεως R_0.

5-9 Τό Ἐργαστηριακό Πολύμετρο

Ὅπως εἴδαμε στό κεφάλαιο αὐτό, τά βασικά ὄργανα ἠλεκτρικῶν μετρήσεων ΣΡ ἀποτελοῦν παραλλαγές τοῦ ἰδιού ὀργάνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχή λειτουργίας δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 5-6. Τό ὄργανο κινητοῦ πλαισίου μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς ἀμπερόμετρο, βολτόμετρο ἤ ὠμόμετρο μέ προσθήκη τοῦ κατάλληλου κυκλώματος καί χάραξη ἀντίστοιχης κλίμακας. Γιά τό λόγο αὐτό πολλοί κατασκευαστές προσφέρουν ὄργανα πού μποροῦν ἐναλλακτικά νά χρησιμοποιηθοῦν γιά τά τρία παραπάνω εἴδη μετρήσεως. Στά **ἐργαστηριακά πολύμετρα,** ἡ ἐπιλογή τῆς μορφῆς τοῦ ὀργάνου (ἀμπερόμετρο - ὠμόμετρο - βολτόμετρο) γίνεται μέ κεντρικό ἐπιλογέα, ὁ ὁποῖος ταυτόχρονα ἐπιλέγει καί τήν ἐπιθυμητή κλίμακα. Ἕνας χαρακτηριστικός τύπος πολυμέτρου δίνεται στό σχῆμα 5-30. Στό ἐσωτερικό τοῦ πολυμέτρου περιέχονται τά κυκλώματα πού ἀπαιτοῦνται γιά κάθε ἐναλλακτική χρήση καθώς καί ἠλεκτρικό στοιχεῖο γιά τό κύκλωμα τοῦ ὠμομέτρου. Ἡ ἐξωτερική ρύθμιση τῆς διακλαδώσεως R_Δ πού φαίνεται στό σχῆμα 5-30

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 5-30 Χαρακτηριστικος τυπος έργαστηριακοῦ πολυμέτρου.

χρησιμοποιεῖται γιά τό μηδενισμό τῆς κλίμακας τοῦ ὠμομέτρου ὅταν βραχυκυκλωθοῦν οἱ δύο ἀκροδέκτες τοῦ ὀργάνου.

Τό έργαστηριακό πολύμετρο εἶναι ἴσως τό πιό χρήσιμο ὄργανο ἠλεκτρικῶν μετρήσεων ΣΡ στίς περιπτώσεις ὅπου οἱ ἀπαιτήσεις ἀκριβείας δέν εἶναι πολύ αύστηρές. Ὅπως καί γιά τά ὑπόλοιπα εἰδικά ὄργανα ἠλεκτρικῶν μετρήσεων πρέπει νά χρησιμοποιεῖται μέ προσοχή ἰδιαίτερα στήν ἐπιλογή τῆς κατάλληλης κλίμακας πρίν ἀπό τή σύνδεση τῶν ἀκροδεκτῶν του σέ κύκλωμα πού περιέχει ΗΕΔ. Εἰδικά ὡς πρός τή χρήση του γιά μέτρηση ἀντιστάσεως πρέπει περιοδικά νά ἐλέγχεται ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου πού περιέχει. Ὑπενθυμίζεται ὅτι τό ἠλεκτρικό στοιχεῖο χρησιμοποιεῖται ἀπό τό ὄργανο μόνο κατά τή χρήση του ὡς ὠμομέτρου. Γιά τό λόγο αὐτό δέν πρέπει ποτέ νά ἐγκαταλείπεται μέ θέση τοῦ κεντρικοῦ διακόπτη σέ κλίμακα μετρήσεως ἀντιστάσεως γιά νά ἀποφεύγεται ἡ ἄσκοπη φθορά τοῦ στοιχείου πού μπορεῖ νά προκληθεῖ ἀπό τυχαία βραχυκύκλωση τῶν ἀκροδεκτῶν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5-1. Χρησιμοποιόντας τήν ἐξ. (5.5) προσδιορίστε τήν εὐαισθησία dI/dα τοῦ ἀμπερομέτρου πού δίνεται στό σχῆμα 5-4. Ἀποδόστε σέ γραφική παράσταση τήν εὐαισθησία ὡς συνάρτηση τῆς γωνίας ἀποκλίσεως καί σχολιάστε τό ἀποτέλεσμα.

5-2. Ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου ἑνός ἀμπερομέτρου εἶναι 10 Ω. Τό ἀμπερόμετρο παρουσιάζει μέγιστη ἀπόκλιση ὅταν διαμέσου τοῦ πηνίου διέρχεται ρεῦμα 1 mA. Πῶς μπορεῖ νά μεταβληθεῖ τό ὄργανο αὐτό σέ ἀμπερόμετρο μέ μέγιστη ἔνδειξη 10 mA;

5-3. Ἕνα βολτόμετρο μέ κλίμακα 0-10 V ἔχει κατασκευαστεῖ ἀπό ἕνα ἀμπερόμετρο μέ ἐσωτερική ἀντίσταση 20 Ω καί μιά ἀντίσταση 9980 Ω σέ σειρά μέ τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ ὀργάνου. Ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως πού πρέπει νά συνδεθεῖ παράλληλα μέ τό ἀμπερόμετρο γιά νά μετατρέψει τή διάταξη σέ βολτόμετρο κλίμακας 1-50 V. Ποιά εἶναι ἡ ὁλική ἀντίσταση τῆς διατάξεως πρίν καί μετά τή μετατροπή;

5-4. Γιά τό βολτόμετρο μέ κλίμακα 0-10 V τοῦ προηγούμενου προβλήματος ὑπολογίστε τήν ἀντίσταση πού πρέπει νά συνδεθεῖ σέ σειρά γιά νά μετατρέψει τή διάταξη σέ βολτόμετρο κλίμακας 1-50 V. Ποιά εἶναι ἡ ὁλική ἀντίσταση τῆς διατάξεως μετά τή μετατροπή. Σχολιάστε τά πλεονεκτήματα καί μειονεκτήματα τῶν δύο μεθόδων γιά τήν αὔξηση τῆς κλίμακας τοῦ βολτομέτρου.

5-5. Μιά ἀντίσταση παρουσιάζει πτώση δυναμικοῦ 50 mV γιά ρεῦμα 300 A. Ἡ ἀντίσταση πρόκειται νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς διακλάδωση ἑνός ἀμπερομέτρου μέ ἀντίσταση πηνίου 25 Ω, τό ὁποῖο παρουσιάζει μέγιστη ἀπόκλιση γιά διέλευση ρεύματος 5 mA. Προσδιορίστε τήν κλίμακα τοῦ ἀμπερομέτρου μέ τή διακλάδωση καί τήν ὁλική ἀντίσταση τῆς διατάξεως.

5-6. Ἕνα ἀμπερόμετρο παρουσιάζει μέγιστη ἀπόκλιση γιά ρεῦμα 1 A. Τό πηνίο τοῦ ἀμπερομέτρου παρουσιάζει βλάβη καί πρέπει νά ἀντικατασταθεῖ. Ἄν τό νέο πηνίο ἔχει 50 % περισσότερους βρόχους, 5 % μεγαλύτερη ἐπιφάνεια καί σταθερά ἐλατηρίου κατά 30 % μικρότερη, ποιά εἶναι ἡ κλίμακα τοῦ νέου ὀργάνου;

5-7. Ἡ τιμή μιᾶς ἄγνωστης ἀντιστάσεως προσδιορίζεται ἐναλλακτικά μέ τά δύο κυκλώματα πού δίνονται στά σχήματα 5-12 καί 5-13. Οἱ ἐσωτερικές ἀντιστάσεις τῶν ὀργάνων εἶναι $R_A = 10^{-4}$ Ω καί $R_v = 500$ kΩ. Γιά ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου V = 50 V, τά ἀντίστοιχα ρεύματα μετρήθηκαν ὡς

κύκλωμα I : I = 350 μA

κύκλωμα II : I = 250 μA.

Προσδιορίστε τήν τιμή τῆς ἄγνωστης ἀντιστάσεως ἀπό τίς παραπάνω ἐνδείξεις χρησιμοποιόντας τή σωστή ἔκφραση γιά κάθε κύκλωμα. Πόσο εἶναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

τό έπί τοῖς ἑκατό σφάλμα πού θά κάνατε σέ κάθε περίπτωση ἄν χρησιμοποούσατε ἁπλῶς τό νόμο τοῦ Ohm R = V/I;

5-8. Ἕνα βολτόμετρο μέ ἐσωτερική ἀντίσταση 20 Ω χρησιμοποιεῖται γιά τή μέτρηση τοῦ δυναμικοῦ στά ἄκρα μιᾶς ἀντιστάσεως 1 Ω. Πόση εἶναι ἡ τιμή τοῦ δυναμικοῦ πού μετράει τό βολτόμετρο σέ σχέση μέ τήν πτώση δυναμικοῦ πρίν ἀπό τή σύνδεση τοῦ ὀργάνου;

5-9. Ἡ πτῶση δυναμικοῦ στά ἄκρα ἑνός ἠλεκτρικοῦ στοιχείου προσδιορίζεται ὡς 1.23 V μέ ἀπευθείας μέτρηση μέ ἕνα βολτόμετρο ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 100 Ω. Ἕνα δεύτερο βολτόμετρο μέ ἐσωτερική ἀντίσταση 30 Ω μετράει 0.63 V. Ποιά εἶναι ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου;

5-10. Ἕνα ἠλεκτρικό στοιχεῖο ἔχει ΗΕΔ 20 V καί ἐσωτερική ἀντίσταση 5 Ω. Ὑπολογίστε τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στό ἐξωτερικό κύκλωμα ὅταν συνδεθεῖ σέ κυκλώματα μέ ὁλική ἀντίσταση στό διάστημα 0 - 50 Ω. Δόστε τά ἀποτελέσματά σας σέ γραφική παράσταση.

5-11. Ὡς ἔνδειξη τῆς χρήσιμης περιοχῆς μετρήσεως ἑνός ὠμομέτρου μπορεῖ νά ληφθεῖ ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως $R_{1/2}$ πού προκαλεῖ ἀπόκλιση τοῦ ὀργάνου ἴση μέ τή μισή τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως. Ὑπολογίστε τήν τιμή αὐτή ὡς συνάρτηση τῶν ἀντιστάσεων R_0 καί R_Δ τοῦ σχήματος 5-26.

5-12. Γιά ἀκριβή βαθμονόμηση τοῦ ὠμομέτρου τοῦ σχήματος 5-26 πολλές φορές ἀπαιτεῖται νά συνυπολογιστεῖ καί ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση R_v τοῦ βολτομέτρου. Ὑποδεῖξτε πῶς μεταβάλλονται οἱ ἀντίστοιχες ἐξισώσεις καί συζητεῖστε τό ὅριο στό ὁποῖο ἡ διόρθωση αὐτή εἶναι ἀμελητέα.

5-13. Γιά τήν κατασκευή ἑνός ὠμομέτρου σύμφωνα μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5-26 διαθέτουμε ἕνα στοιχεῖο 3 V καί βολτόμετρο μέ ἐσωτερική ἀντίσταση 50 Ω. Ἡ μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ βολτομέτρου προκαλεῖται γιά διαφορά δυναμικοῦ 25 mV. Ἄν θέλουμε ἡ ἀντίσταση μέσης ἀποκλίσεως τοῦ ὠμομέτρου νά εἶναι $R_{1/2}$ = 5 kΩ, ὑπολογίστε

(α) Τίς ἀντιστάσεις R_0 καί R_Δ

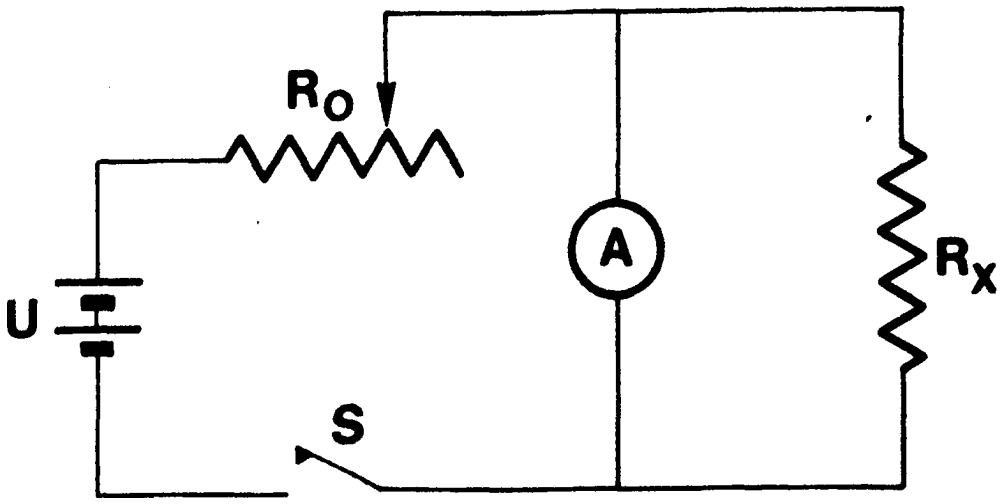
(β) Γιά τήν παραπάνω ἀντίσταση R_0, τά ὅρια τῆς μεταβλητῆς διακλαδώσεως R_Δ ὥστε νά εἶναι δυνατός ὁ μηδενισμός τοῦ ὀργάνου, ἄν τό στοιχεῖο παρουσιάζει μεταβολή μεταξύ 2.70 - 3.10 V.

(γ) Ἡ ἀκρίβεια τοῦ βολτομέτρου εἶναι 0.5 % τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως. Μέ πόση ἀκρίβεια μπορεῖ νά μετρηθεῖ μιά ἀντίσταση πού προκαλεῖ 30 %, 50 % καί 80 % ἀπόκλιση;

5-14. Εἶναι δυνατό νά κατασκευάσουμε ἕνα ὠμόμετρο μέ τό «0» στό ἀριστερό ἄκρο καί τό «∞» στό δεξιό ἄκρο τῆς κλίμακας σύμφωνα μέ τό παρακάτω διάγραμμα. Περιγράψτε τή λειτουργία τοῦ κυκλώματος.

(α) Ποιά πρέπει νά εἶναι ἡ τιμή τῆς μεταβλητῆς ἀντιστάσεως R_0 ὥστε ἡ ἀπόκλιση τοῦ ὀργάνου νά εἶναι μέγιστη;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



(β) Δόστε μιά ἔκφραση γιά τό ρεῦμα πού διαρρέει τό ἀμπερόμετρο ὡς συνάρτηση τῆς ἀγνωστης ἀντιστάσεως R_x μεταξύ τῶν ἄκρων Β καί Γ. Κατασκευάστε τήν ἀντίστοιχη γραφική παράσταση βαθμονομήσεως τοῦ ὡμομέτρου.

(γ) Δεῖξτε ὅτι ἡ μέση ἀπόκλιση τοῦ ὀργάνου ἀντιστοιχεῖ σέ ἀντίσταση

$$R_x = \frac{R_1 R_A}{R_1 + R_A} .$$

(δ) Σχολιάστε τό ὡμόμετρο αὐτό σέ σύγκριση μέ τό ὡμόμετρο τοῦ σχήματος 5-26. Γιατί εἶναι ἀπαραίτητος ὁ διακόπτης S στό παραπάνω κύκλωμα;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

κυκλώματα συνεχους ρευματος

Ἡ πλήρης κατανόηση τῆς λειτουργίας ἑνός κυκλώματος ἀπαιτεῖ τόν προσδιορισμό τοῦ ρεύματος πού διαρρέει κάθε στοιχεῖο του καί τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ μεταξύ ὁποιωνδήποτε σημείων τῆς διατάξεως. Γιά ἁπλά κυκλώματα ἡ ἀνάλυση αὐτή μπορεῖ νά γίνει ἀποκλειστικά μέ χρήση τοῦ νόμου τοῦ Ohm. Πολλά τέτοια παραδείγματα ἀναλύσεως ἁπλῶν κυκλωμάτων εἴδαμε στό προηγούμενο κεφάλαιο. Στά πλαίσια αὐτά μιά ἐξαιρετικά χρήσιμη ἔννοια εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ **ἰσοδύναμου κυκλώματος.** Μέ τόν ὅρο αὐτό ἐννοοῦμε ἕνα δεύτερο (συνήθως ἁπλούστερο) κύκλωμα πού στά ἄκρα του ἐμφανίζεται ἡ ἴδια διαφορά δυναμικοῦ καί ἡ ἴδια ροή ρεύματος μέ τό ἀρχικό κύκλωμα. Μέ ἁπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm μποροῦμε π.χ. νά δείξουμε ὅτι δύο ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 σέ σειρά εἶναι ἰσοδύναμες μέ μιά ἀντίσταση $R = R_1 + R_2$. Κατά τόν ἴδιο τρόπο οἱ δύο αὐτές ἀντιστάσεις σέ παράλληλη σύνδεση εἶναι ἰσοδύναμες μέ μιά ἀντίσταση $R = R_1R_2/(R_1 + R_2)$. Ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα, ὁποιοδήποτε μέρος ἑνός κυκλώματος πού περιέχει ἀντιστάσεις καί πηγές ΗΕΔ μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό ἕνα ἰσοδύναμο κύκλωμα πού περιέχει μιά πηγή ΗΕΔ καί μιά ἀντίσταση σέ σειρά. Ἡ ἀναγωγή ὅμως αὐτή δέν εἶναι πάντα δυνατή μέ ἁπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm. Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἐξετάσουμε τίς κυριώτερες μαθηματικές μεθόδους πού ἔχουν ἀναπτυχθεῖ γιά τό μετασχηματισμό κυκλωμάτων σέ ἁπλούστερες ἰσοδύναμες διατάξεις. Ἄν καί θά ἀναφερθοῦμε ἀποκλειστικά σέ κυκλώματα ΣΡ, πολλές ἀπό τίς τεχνικές πού θά ἀναπτύξουμε μποροῦν νά μεταφερθοῦν ἀτόφιες στήν ἀνάλυση κυκλωμάτων ΕΡ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6-1 Βασικές Ἀρχές

Εἶναι χρήσιμο νά θεμελιώσουμε τήν ἀνάπτυξη τῆς μεθοδολογίας γιά τήν ἀνάλυση κυκλωμάτων μέ τή θεώρηση τῆς πιό ἁπλῆς συνδεσμολογίας πού δίνεται στό σχῆμα 6-1. Τό ἁπλό αὐτό κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπό δύο στοιχεῖα Α καί Β πού, γιά χάρη γενικότητας, ἔχουν παρασταθεῖ ὡς δύο κιβώτια. Τώρα, ἄν V_A καί V_B εἶναι ἡ πτώση δυναμικοῦ στά ἄκρα τῶν ἀντίστοιχων κιβωτίων καί I_A καί I_B τά ἀντίστοιχα ρεύματα πού τά διαρρέουν, δέν χρειάζεται πολύ σκέψη γιά νά γράψει κανείς τίς δύο βασικές σχέσεις

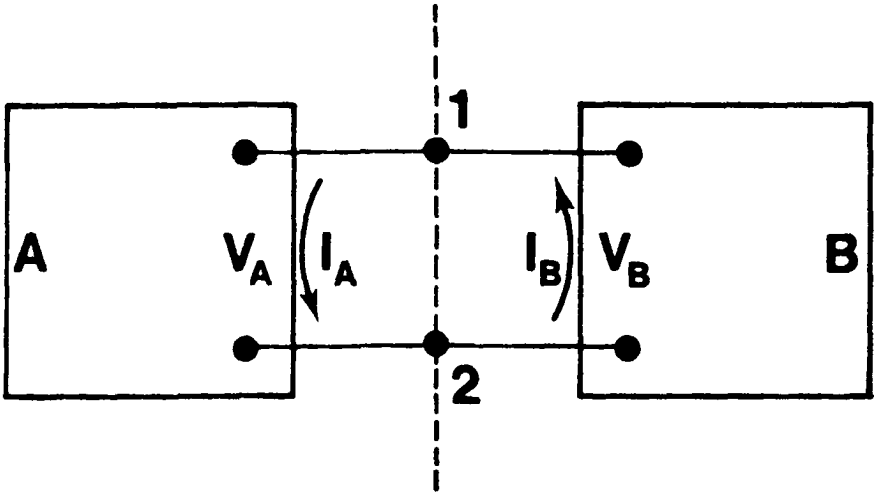
$$V_A = V_B \tag{6.1}$$

$$I_A = I_B \ . \tag{6.2}$$

Παρόλλο ὅτι οἱ δύο αὐτές σχέσεις μποροῦν νά θεωρηθοῦν ἐκ πρώτης ὄψεως «αὐταπόδεικτες» εἶναι χρήσιμο νά ἐξετάσουμε μέ κάποια λεπτομέρεια τήν προέλευσή τους. Ἡ ἐξ. (6.1) εἶναι ἄμεση ἀπόρροια τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ

$$\Delta\varphi_{12} \equiv -\int_1^2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \tag{6.3}$$

ὅπου **E**(r) εἶναι τό ἠλεκτρικό πεδίο καί d**l** τό στοιχειῶδες προσανατολισμένο μῆκος πάνω σέ κάποια καμπύλη πού ἑνώνει τά σημεῖα 1 καί 2. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό αὐτό, ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων στό χῶρο εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό δρόμο πού θά ἀκολουθήσουμε γιά τήν ὁλοκλήρωση καί ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τά τερματικά σημεῖα 1 καί 2. Ἔτσι ἄν διακόψουμε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-1 στά σημεῖα 1 καί 2, ἡ διαφορά δυνα-



ΣΧΗΜΑ 6-1 Ἁπλό κύκλωμα μέ δύο στοιχεῖα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μικοῦ ἔχει τήν ἴδια τιμή ἄν ὑπολογιστεῖ διαμέσου τοῦ κιβωτίου Α ἤ τοῦ κιβωτίου Β

$$V_A = V_B = \Delta\varphi_{12} \ . \tag{6.4}$$

Ἡ ἐξ. (6.2) εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς ἀρχῆς διατηρήσεως τοῦ φορτίου πού ἐκφράζεται ἀπό τήν ἐξ. (4.17) ὡς

$$\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt}\int_V \rho\, d^3r = 0. \tag{6.5}$$

Σύμφωνα μέ τή σχέση αὐτή, ἡ ὁλική ροή τῆς πυκνότητας ρεύματος **J** σέ μιά κλειστή ἐπιφάνεια S εἶναι ἴση μέ τό ρυθμό μεταβολῆς τοῦ φορτίου μέσα στόν ὄγκο V τόν ὁποῖο περιβάλλει. Στήν περίπτωση τοῦ σχήματος 6-1, ἄν μιά κλειστή ἐπιφάνεια S πού περιβάλλει τό κιβώτιο Α, τέμνει τή σύνδεση τῶν δύο κυκλωμάτων στά σημεῖα 1 καί 2, ἡ ὁλική ροή ρεύματος παίρνει τήν ἁπλή μορφή

$$\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = I_A - I_B \tag{6.6}$$

ὅπου I_A καί I_B εἶναι ἀντίστοιχα τά ρεύματα πού εἰσέρχονται καί ἐξέρχονται στό κύκλωμα Α. Ἄν ἐπιπλέον παραδεχτοῦμε ὅτι τό ὁλικό φορτίο στό ἐσωτερικό τοῦ κιβωτίου Α δέν μεταβάλλεται μέ τό χρόνο, ἡ ἀρχή διατηρήσεως τοῦ φορτίου, μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (6.6), ὁδηγεῖ στήν ἐξ. (6.2).

Οἱ δύο βασικές ἀρχές πού ἐκφράζονται ἀπό τίς ἐξ. (6.1) καί (6.2) ἀναφέρονται συνήθως ὡς **ἀρχή τῆς μοναδικότητας διαφορᾶς δυναμικοῦ** καί **ἀρχή τῆς συνεχείας.** Στίς δύο αὐτές ἀρχές στηρίζεται ἡ ὅλη διαδικασία τῆς ἀναλύσεως κυκλωμάτων. Οἱ ἐξισώσεις πού θά γράψουμε στή συνέχεια τοῦ κεφαλαίου, ὁσοδήποτε πολύπλοκες, ἀποτελοῦν σέ τελευταία ἀνάλυση ἐφαρμογή τῶν ἐξ. (6.1) καί (6.2).

6-2 Ἰδανική ΗΕΔ

Ὅπως εἴδαμε στό προηγούμενο κεφάλαιο ἡ διαφορά δυναμικοῦ πού ἀναπτύσσεται στά ἄκρα ἑνός ἠλεκτρικοῦ στοιχείου ἐξαρτᾶται ἀπό τό ρεῦμα I πού διαρρέει τό ἐξωτερικό κύκλωμα καί τήν ἐσωτερική ἀντίσταση r τοῦ στοιχείου. Ἄν U εἶναι ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου ἡ διαφορά δυναμικοῦ V στούς πόλους του δίνεται ἀπό τήν ἐξ. (5.28).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

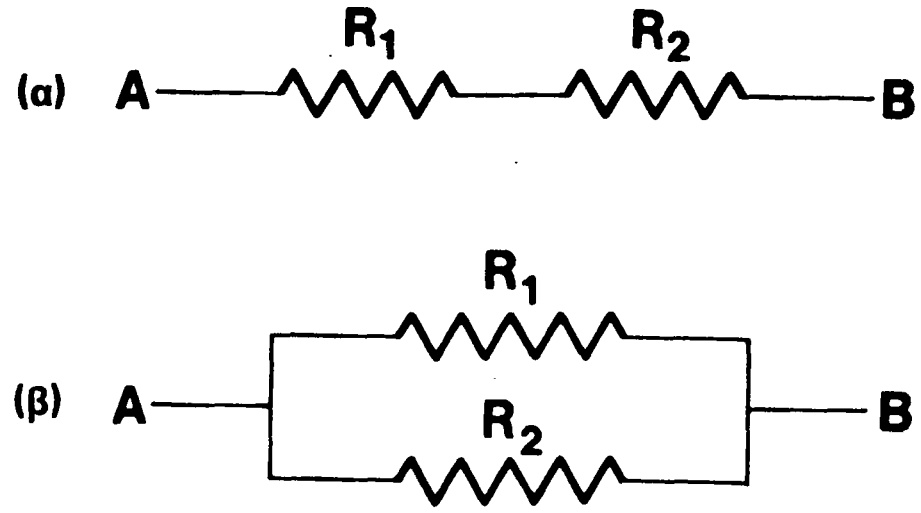
$$V = U - Ir \ . \tag{6.7}$$

Μιά χρήσιμη έννοια κατά τήν άνάλυση κυκλωμάτων εἶναι ἡ ἔννοια τῆς **ἰδανικῆς ΗΕΔ,** δηλαδή ἑνός ἡλεκτρικοῦ στοιχείου μέ μηδενική ἐσωτερική ἀντίσταση. Ἡ ἔννοια αὐτή εἶναι ἰδιαίτερα χρήσιμη κατά τήν ἐπίλυση προβλημάτων στά ὁποῖα ζητεῖται ἡ ὁλική ἀντίσταση μεταξύ δύο σημείων ἑνός κυκλώματος. Ὁ τύπος αὐτός τῶν προβλημάτων μπορεῖ νά λυθεῖ ἄν ἀγνοηθεῖ τό ὑπόλοιπο κύκλωμα καί ἄν θεωρηθεῖ ὅτι στά συγκεκριμένα ἄκρα συνδέεται μιά ἰδανική ΗΕΔ. Καθόσον, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (6.7), στά ἄκρα τοῦ ἰδεατοῦ αὐτοῦ στοιχείου μέ μηδενική ἐσωτερική ἀντίσταση, ἀναπτύσσεται διαφορά δυναμικοῦ ἴση μέ τήν ΗΕΔ, τό ρεῦμα πού διαρρέει τό κύκλωμα εἶναι ἴσο μέ

$$I = \frac{U}{R} \tag{6.8}$$

ὅπου R ἡ ὁλική ἀντίσταση.

Ὡς πρώτη ἐφαρμογή τῆς προηγούμενης μεθόδου θά ὑπολογίσουμε τήν ἰσοδύναμη ἀντίσταση R δύο στοιχείων ἑνός κυκλώματος στίς ἐναλλακτικές συνδέσεις τοῦ σχήματος 6-2. Στό σχῆμα 6-2(α), τά δύο στοιχεῖα, πού γιά ἁπλούστευση δίνονται ὡς δύο ἀντιστάσεις R_1 καί R_2, συνδέονται σέ σειρά. Ἄν στά ἐλεύθερα ἄκρα τῆς διατάξεως συνδεθεῖ μιά ἰδανική ΗΕΔ, ἡ ὁλική πτώση δυναμικοῦ μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς τό ἄθροισμα τῶν ἐπιμέρους διαφορῶν δυναμικοῦ V_1 καί V_2 στά ἄκρα τῶν ἀντίστοιχων ἀντιστάσεων R_1 καί R_2, ἤτοι



ΣΧΗΜΑ 6-2 Ἐναλλακτική σύνδεση δύο ἀντιστάσεων. (α) σέ σειρά, (β) παράλληλα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$U = V_1 + V_2 \ . \tag{6.9}$$

Ἀπό τήν ἀρχή τῆς συνεχείας, οἱ δύο ἀντιστάσεις διαρρέονται ἀπό τό ἴδιο ρεῦμα I καί ἡ ἐξ. (6.9) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$U = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \ . \tag{6.10}$$

Σύγκριση τῆς τελευταίας σχέσης μέ τήν ἐξ. (6.8) προσδιορίζει τήν ἰσοδύναμη ἀντίσταση γιά σύνδεση σέ σειρά ὡς

$$R = R_1 + R_2 \ . \tag{6.11}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τήν ἰσοδύναμη ἀντίσταση στήν παράλληλη σύνδεση τοῦ σχήματος 6-2(β). Ἡ πτώση δυναμικοῦ στά κοινά ἄκρα τῶν δύο ἀντιστάσεων εἶναι

$$U = I_1R_1 = I_2R_2 \tag{6.12}$$

ὅπου I_1 καί I_2 εἶναι τά ρεύματα στίς ἀντίστοιχες ἀντιστάσεις. Τό ἄθροισμά τους εἶναι ἴσο μέ τό ὁλικό ρεῦμα I πού δημιουργεῖ ἡ ἰδανική ΗΕΔ U, ἤτοι

$$I = \frac{U}{R} = I_1 + I_2 \ . \tag{6.13}$$

Ἀντικαθιστώντας τίς τιμές τῶν ρευμάτων I_1 καί I_2 τῆς ἐξ. (6.12) στήν τελευταία σχέση, τό ὁλικό ρεῦμα παίρνει τή μορφή

$$I = \frac{U}{R} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{6.14}$$

πού δίνει τή σύνδεση μεταξύ τῶν ἀντιστάσεων R_1 καί R_2 καί τῆς ἰσοδύναμης ἀντιστάσεως R

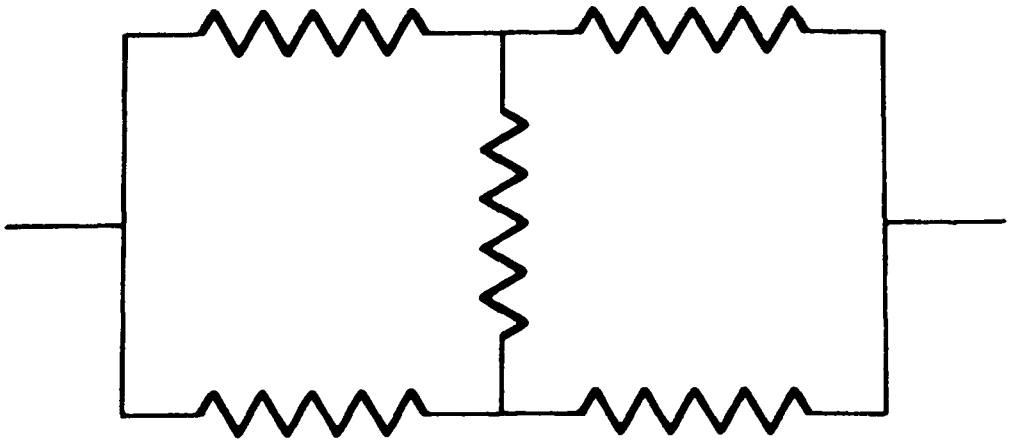
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{6.15}$$

ἤ

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \ . \tag{6.16}$$

Οἱ ἐξ. (6.11) καί (6.15) μποροῦν εὔκολα νά γενικευτοῦν γιά μεγαλύτερο ἀριθμό ἀντιστάσεων πού συνδέονται σέ σειρά ἤ παράλληλα. Εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι ἄν οἱ ἀντιστάσεις $R_1, R_2, \ldots, R_N$ συνδεθοῦν σέ σειρά, ἡ ἰσοδύναμη ἀντίσταση δίνεται ἀπό τή σχέση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 6-3 Ἁπλό παράδειγμα κυκλώματος μέ σύνδεση ἀντιστάσεων πού δέν μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ οὔτε παράλληλη οὔτε σέ σειρά.

$$R = \sum_{k=1}^{N} R_k \ . \tag{6.17}$$

Ἡ ἀντίστοιχη ἔκφραση γιά παράλληλη σύνδεση εἶναι

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k} \ . \tag{6.18}$$

Πολλά κυκλώματα μποροῦν νά ἐπιλυθοῦν τουλάχιστον κατ' ἀρχήν μέ τήν ἀναγνώριση τῶν ἐπιμέρους στοιχείων τους πού εἶναι συνδεδεμένα σέ σειρά ἤ παράλληλα καί μέ χρήση τῶν ἐξ. (6.17) καί (6.18). Ὑπάρχουν ὅμως κυκλώματα ὅπου ἡ σύνδεση δέν εἶναι οὔτε παράλληλη οὔτε σέ σειρά. Ἕνα ἁπλό παράδειγμα τοῦ τύπου αὐτοῦ τῶν κυκλωμάτων δίνεται στό σχῆμα 6-3. Γιά τέτοια κυκλώματα θά πρέπει ἑπομένως νά ἀναπτύξουμε γενικώτερες μεθόδους.

6-3 Οἱ Νόμοι τοῦ Kirchhoff

Ἡ γενίκευση τῶν δύο βασικῶν ἀρχῶν πού ἀναφέραμε στήν ἀρχή τοῦ κεφαλαίου καί ἡ ἐφαρμογή τους γιά τήν ἐπίλυση κυκλωμάτων ὁδηγεῖ σέ δύο σχέσεις πού εἶναι γνωστές ὡς **νόμοι** ἤ **κανόνες τοῦ Kirchhoff.**

Ἡ πρώτη ἀπό τίς σχέσεις αὐτές εἶναι ἄμεση ἐφαρμογή τῆς ἐξ. (6.5) καί ἀφορᾶ τή διατήρηση τοῦ φορτίου σέ κάθε **κόμβο** τοῦ κυκλώματος, δηλαδή σέ κάθε σημεῖο στό ὁποῖο καταλήγουν περισσότεροι ἀπό δύο ἀγωγοί. Ἄν στούς κόμβους τοῦ κυκλώματος δέν δημιουργεῖται ἤ χάνεται φορτίο τότε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1. *Τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ρευμάτων πού καταλήγουν σέ ἕνα κόμβο εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν.*
Σέ μαθηματική ἔκφραση

$$\sum_{k=1}^{S} I_k = 0 \tag{6.19}$$

ὅπου στήν τελευταία σχέση τά διάφορα ρεύματα ἔχουν ληφθεῖ ὡς ἀλγεβρικές ποσότητες. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή διατηρήσεως τοῦ φορτίου θά ἐπιλέξουμε ὡς θετικές ποσότητες ρεύματα πού καταλήγουν στόν κόμβο καί ὡς ἀρνητικές ποσότητες ρεύματα πού ἀναχωροῦν ἀπό τόν κόμβο.

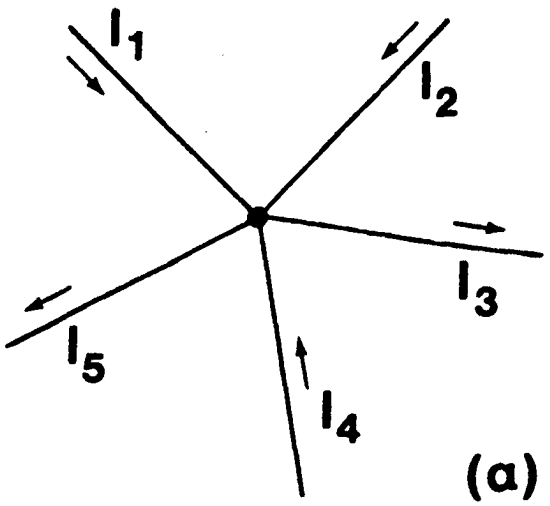
Ὁ δεύτερος νόμος τοῦ Kirchhoff συνδέει τήν πτώση δυναμικοῦ RI πού προκαλεῖ ἡ ροή τοῦ ρεύματος καί τήν ΗΕΔ πού δημιουργεῖ τό ρεῦμα σέ κάθε **βρόχο,** δηλαδή σέ κάθε κλειστή διαδρομή πού διαγράφεται ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ κυκλώματος. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή μοναδικότητας τοῦ δυναμικοῦ ἡ διαφορά δυναμικοῦ πού δημιουργεῖται ἀπό τίς ΗΕΔ πρέπει νά εἶναι ἴση μέ τήν ὁλική πτώση δυναμικοῦ στίς ἀντιστάσεις τοῦ βρόχου. Ποσοτικά μποροῦμε νά διατυπώσουμε τήν ἀρχή αὐτή μέ τό δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff.
2. *Σέ ἕνα βρόγχο τοῦ κυκλώματος τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ΗΕΔ εἶναι ἴσο μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν πτώσεων δυναμικοῦ RI στίς ἀντιστάσεις τοῦ βρόχου.*
Στό νόμο αὐτό, πού μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ μαθηματικά ὡς

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{m=1}^{p} R_m I_m, \tag{6.20}$$

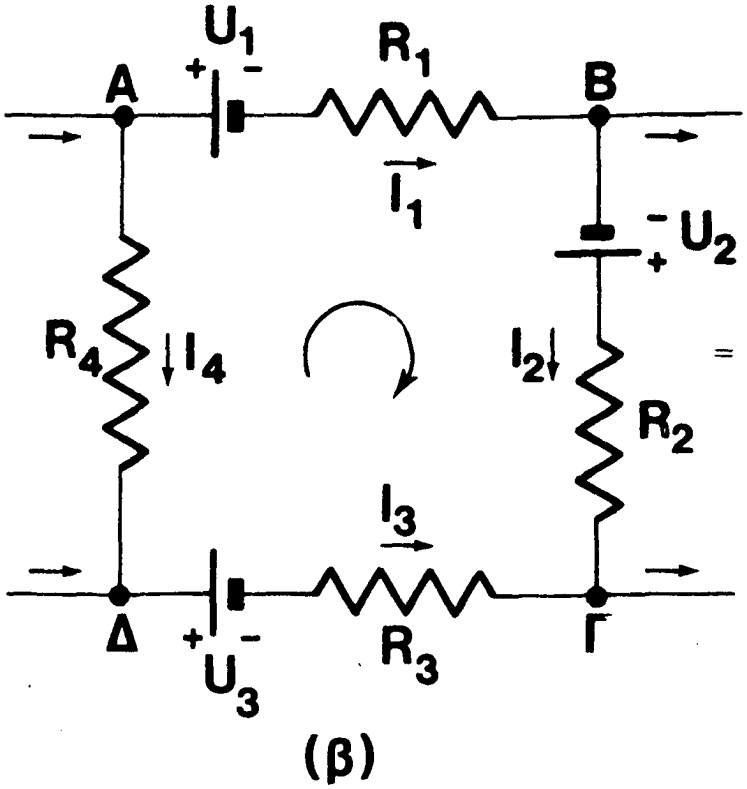
θά ἐπιλέξουμε τό ἀλγεβρικό πρόσημο σύμφωνα μέ τή συμβατική φορά τοῦ ρεύματος, κατά τήν ὁποία στό ἐξωτερικό κύκλωμα ἑνός ἠλεκτρικοῦ στοιχείου τό ρεῦμα ρέει ἀπό τό θετικό πρός τόν ἀρνητικό πόλο. Ἔτσι ἄν διανύσουμε τό βρόχο κατά μιά συγκεκριμένη φορά, π.χ. τή δεξιόστροφη, θετικές ΗΕΔ δημιουργοῦνται ἀπό ἠλεκτρικά στοιχεῖα στά ὁποῖα ὁ ἀρνητικός πόλος ἀπαντᾶται πρίν ἀπό τό θετικό. Κατά τόν ἴδιο τρόπο θετική πτώση δυναμικοῦ δημιουργεῖται ἀπό ρεῦμα πού ρέει σύμφωνα μέ τή συμβατική ροή.

Οἱ δύο νόμοι τοῦ Kirchhoff δίνονται διαγραμματικά στά σχήματα 6-4. Τό σχῆμα 6-4(α) ἐκφράζει τήν ἐξ. (6.19) σέ ἕνα κόμβο μέ 5 κλάδους. Στό σχῆμα 6-4(β) ἔχει ἀπομονωθεῖ ἕνας βρόχος τοῦ κυκλώματος μέ 4 κλάδους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$$



$$-U_1 + U_2 + U_3 = I_1R_1 + I_2R_2 - I_3R_3 - I_4R_4$$

ΣΧΗΜΑ 6-4 Ἐφαρμογή τῶν νόμων τοῦ Kirchhoff. (α) Πρῶτος νόμος τοῦ Kirchhoff σέ κόμβο μέ 5 κλάδους. (β) Δεύτερος νόμος τοῦ Kirchhoff σέ βρόχο κυκλώματος.

Σύμφωνα μέ τή δεξιόστροφη διαδρομή καί γιά τή φορά τῶν ρευμάτων πού ἔχει σχεδιαστεῖ μέ τά ἀντίστοιχα βέλη, ἄμεση ἐφαρμογή τῆς ἐξ. (6.20) καταλήγει στή σχέση πού περιέχεται στό σχῆμα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀνάλυση ἤ ἐπίλυση ἑνός κυκλώματος μέσω τῶν δύο νόμων τοῦ Kirchhoff σημαίνει ὅτι ὁρισμένες ἀπό τίς ποσότητες πού περιέχονται στίς ἐξ. (6.19) καί (6.20) εἶναι ἄγνωστες. Στήν πράξη οἱ ἄγνωστοι μπορεῖ νά εἶναι ὁποιοσδήποτε συνδιασμός ΗΕΔ, ἀντιστάσεων ἤ ρευμάτων πού μποροῦν νά βρεθοῦν ἄν τό πλῆθος τῶν ὑπόλοιπων γνωστῶν στοιχείων τοῦ κυκλώματος εἶναι ἱκανοποιητικό ὥστε νά προσδιορίζονται μονοσήμαντα. Στήν πιό συνήθη κατηγορία προβλημάτων ὅλες οἱ ΗΕΔ καί ἀντιστάσεις εἶναι γνωστές καί ζητοῦνται τά ρεύματα σέ κάθε κλάδο τοῦ κυκλώματος. Αὐτή εἶναι καί ἡ κατηγορία προβλημάτων πού κατ' ἐξοχήν ἀναφέρεται ὡς «ἀνάλυση κυκλώματος». Παρόλα αὐτά ὑπάρχουν περιπτώσεις, ἰδίως στή σχεδίαση κυκλωμάτων γιά ἕνα ὁρισμένο σκοπό, ὅπου ὁρισμένα ἀπό τά ρεύματα προδιαγράφονται, καί ζητοῦνται οἱ ΗΕΔ ἤ οἱ ἀντιστάσεις πού χρειάζονται γιά νά τά δημιουργήσουν. Ἕνα τέτοιο πρόβλημα ἀπαντήσαμε στήν κατασκευή ὠμομέτρου μέ πολλαπλή κλίμακα (βλ. σχῆμα 5-29) ὅπου χρειάστηκε νά προσδιορίσουμε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_1 ὥστε τό ρεῦμα νά διαρρέει τήν ἀντίσταση R_Δ νά ἐκπληρώνει μιά συγκεκριμένη συνθηκη.

Κατά τήν κατάστρωση τῶν ἐξισώσεων τοῦ Kirchhoff τό πρόβλημα πού ἐμφανίζεται ἐκ πρώτης ὄψεως εἶναι ὁ προσδιορισμός τῆς φορᾶς τοῦ ρεύματος σέ κάθε κλάδο τοῦ κυκλώματος. Εἶναι βέβαιο ὅτι σέ πολλούς κλάδους τοῦ κυκλώματος ἡ φορά τοῦ ρεύματος εἶναι προφανής. Πῶς ὅμως μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ τό ἀλγεβρικό πρόσημο τοῦ ρεύματος στόν κλάδο ἑνός πολύπλοκου κυκλώματος πού περιέχει ἕνα μεγάλο ἀριθμό ἀπό ἀντιστάσεις καί ἀντιμαχόμενες ΗΕΔ; Ἡ ἀπάντηση βρίσκεται ἀκριβῶς στήν ἀλγεβρική ἰδιότητα πού δώσαμε στό ρεῦμα. Μέ τόν τρόπο αὐτό ὁ προσδιορισμός τῆς φορᾶς τοῦ ρεύματος κατά τήν κατάστρωση τῶν ἐξισώσεων δέν ἔχει οὐσιαστική σημασία. Σέ κάθε κλάδο τοῦ κυκλώματος ὅπου τό ρεῦμα εἶναι ἄγνωστο μποροῦμε νά ἐπιλέξουμε αὐθαίρετα μιά συγκεκριμένη φορά καί νά τήν ὀνομάσουμε θετική. Ἡ διαδικασία αὐτή διευκολύνεται σημαντικά μέ τή χρησιμοποίηση ἑνός βέλους, ὅπως στά σχήματα 6-4. Ἡ πραγματική φορά (καί τιμή) κάθε ρεύματος θά προέλθει τώρα ἀπό τήν ἐπίλυση τῶν ἐξ. (6.19) καί (6.20) πού ἔχουν καταστρωθεῖ μέ βάση τήν αὐθαίρετη ἐπιλογή. Ρεύματα πού προσδιορίζονται ἀπό τή λύση τῶν ἐξισώσεων τοῦ Kirchhoff μέ θετική τιμή ἔχουν πράγματι τή φορά πού σημειώνεται ἀπό τά βέλη τοῦ ἀρχικοῦ σχήματος. Ἀντίστροφα, ρεύματα μέ ἀρνητική τιμή ἔχουν πραγματική φορά ἀντίθετη ἀπ' αὐτή πού ἔχει ἐπιλεγεῖ γιά τήν κατάστρωση τῶν ἐξισώσεων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ ἴδια διαδικασία μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τόν προσδιορισμό μιᾶς ἄγνωστης ΗΕΔ. Κατά τήν κατάστρωση τῶν ἐξισώσεων ἡ πολικότητα τοῦ ἄγνωστου ἠλεκτρικοῦ στοιχείου μπορεῖ νά ἐπιλεγεῖ αὐθαίρετα, ἐνῶ ἡ πραγματική διάταξη τῶν πόλων του θά προσδιοριστεῖ ἀπό τήν ἀλγεβρική τιμή τῆς ΗΕΔ πού θά προκύψει ὡς λύση.

Ἄς ἐξετάσουμε τήν ἐφαρμογή τῶν νόμων τοῦ Kirchhoff μέ τό ἁπλό παράδειγμα τοῦ σχήματος 6-5. Τό κύκλωμα πού δίνεται στό σχῆμα περιέχει δύο κόμβους στά σημεῖα Β καί Ε καί τρεῖς βρόχους ΑΒΕΖΑ, ΒΓΔΕΒ καί ΑΒΓΔΕΖΑ. Γιά τή φορά τῶν ρευμάτων πού ἔχει σημειωθεῖ στό σχῆμα ὁ πρῶτος νόμος τοῦ Kirchhoff ὁδηγεῖ στίς ἐξισώσεις

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad (6.21\alpha)$$

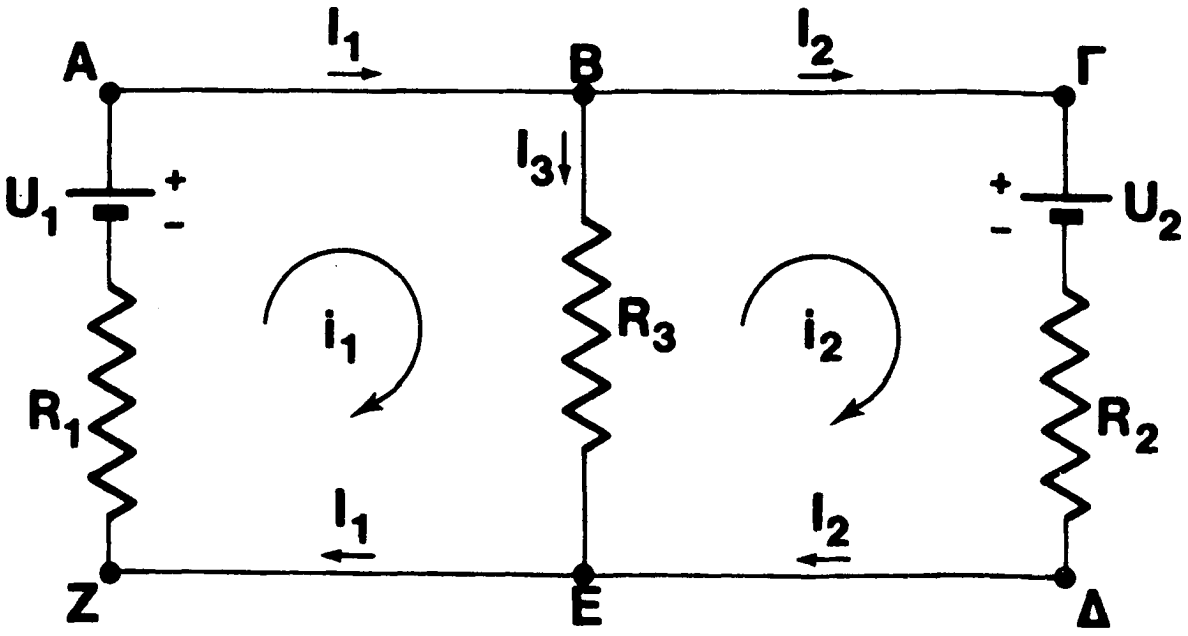
$$I_2 + I_3 - I_1 = 0 \ . \qquad (6.21\beta)$$

Ἐξάλλου γιά τούς τρεῖς βρόχους τοῦ κυκλώματος, ὁ δεύτερος νόμος δίνει τίς σχέσεις

$$\text{ΑΒΕΖΑ}: \quad U_1 = I_1R_1 + I_3R_3 \qquad (6.22\alpha)$$

$$\text{ΒΓΔΕΒ}: \quad -U_2 = I_2R_2 - I_3R_3 \qquad (6.22\beta)$$

$$\text{ΑΒΓΔΕΖΑ}: \quad U_1 - U_2 = I_1R_1 + I_2R_2 \ . \qquad (6.22\gamma)$$



ΣΧΗΜΑ 6-5 Ἁπλό κύκλωμα μέ δύο κόμβους καί τρεῖς βρόχους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εἶναι ἀμέσως φανερό ὅτι οἱ πέντε παραπάνω ἐξισώσεις δέν εἶναι ὅλες ἀνεξάρτητες. Οἱ ἐξ. (6.21) συνδέονται μέ ἁπλή ἀλλαγή τοῦ προσήμου ἐνῶ ἡ ἐξ. (6.22γ) ἕπεται ἀπό τίς ἐξ. (6.22α) καί (6.22β) μέ πρόθεση κατά μέλη. Ἡ περίσσεια αὐτή τῶν ἐξισώσεων δέν εἶναι βέβαια χαρακτηριστικό τοῦ εἰδικοῦ κυκλώματος πού δίνεται στό σχῆμα 6-5. Γενικά ὁ ἀριθμός τῶν ἐξισώσεων πού προκύπτει ἀπό τούς δύο νόμους τοῦ Kirchhoff γιά κάθε κόμβο καί κάθε δυνατό βρόχο ἑνός κυκλώματος εἶναι πολύ μεγαλύτερος ἀπό τόν ἀριθμό τῶν ἀγνώστων. Παράλληλα, ὅπως προκύπτει καί ἀπό τό προηγούμενο ἁπλό παράδειγμα, ὅλες οἱ ἐξισώσεις δέν εἶναι ἀνεξάρτητες. Εἶναι ἐπομένως ἐνδιαφέρον νά διερευνήσουμε μέ κάποια λεπτομέρεια πόσες ἀνεξάρτητες ἐξισώσεις περιμένουμε ἀπό τήν ἐφαρμογή τῶν δύο νόμων τοῦ Kirchhoff σέ ἕνα τυχόν κύκλωμα.

Γιά ἕνα κύκλωμα μέ κ κόμβους, μποροῦμε κατ' ἀρχήν νά γράψουμε κ ἐξισώσεις σέ ἐφαρμογή τοῦ πρώτου νόμου. Τώρα ὁ πρῶτος νόμος τοῦ Kirchhoff εἶναι ἡ μαθηματική ἔκφραση τῆς ἀρχῆς ὅτι σέ κάθε κόμβο τοῦ κυκλώματος (ἤ γενικότερα σέ κάθε σημεῖο) δέν παρουσιάζεται συσσώρευση φορτίου. Καθόσον τό φορτίο πού κυκλοφορεῖ μέσα στό κύκλωμα εἶναι σταθερό, ἕπεται ὅτι ἄν ἡ ἀρχή αὐτή διατυπωθεῖ γιά κ-1 κόμβους τότε ἱκανοποιεῖται αὐτόματα καί γιά τόν τελευταῖο. Μέ ἄλλα λόγια, *σέ ἕνα κύκλωμα μέ κ κόμβους μποροῦμε νά γράψουμε κ-1 ἀνεξάρτητες ἐξισώσεις πού ἀπορρέουν ἀπό τόν πρῶτο νόμο τοῦ Kirchhoff.*

Ὁ ἀριθμός τῶν ἀνεξάρτητων ἐξισώσεων πού θά προκύψουν ἀπό τό δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff ἐξαρτᾶται ἀπό τό πλῆθος τῶν **στοιχειωδῶν βρόχων** τοῦ κυκλώματος. Μέ τόν τελευταῖο ὅρο, ἐννοοῦμε ἕνα βρόχο, ὁ ὁποῖος δέν περικλείει ἄλλους μικρότερους βρόχους. Εἶναι ἀμέσως φανερό ὅτι ἄν ἕνα κύκλωμα περιέχει β στοιχειώδεις βρόχους, ὅλες οἱ ἀντίστοιχες ἐξισώσεις πού προκύπτουν ἀπό τό δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff εἶναι ἀνεξάρτητες. Ἐπιπλέον, ἄν ἔχουν γραφεῖ οἱ ἐξισώσεις γιά ὅλους τούς στοιχειώδεις βρόχους, κάθε ἄλλη ἐξίσωση τοῦ δεύτερου νόμου πού θά προκύψει ἀπό τή θεώρηση ἄλλου (μή στοιχειώδη) βρόχου δέν πρόκειται νά εἶναι ἀνεξάρτητη. Ὅπως δείχνει τό σχῆμα 6-5, ἡ ἐξίσωση τοῦ δεύτερου νόμου γιά τό περίγραμμα δύο γειτονικῶν βρόχων, προκύπτει μέ ἀφαίρεση κατά μέλη τῶν ἀντίστοιχων ἐξισώσεων γιά κάθε στοιχειώδη βρόχο. Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε ἄν θεωρήσουμε τρεῖς ἤ περισσότερους γειτονικούς βρόχους. Τό γεγονός αὐτό βέβαια εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς γραμμικότητας τῶν ἐξ. (6.20). Ἑπομένως, *σέ ἕνα κύκλωμα μέ β στοιχειώδεις βρόχους μποροῦμε νά γράψουμε β ἀνεξάρτητες ἐξισώσεις πού ἀπορρέουν ἀπό τό δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff.*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω, τό πλῆθος N τῶν ἀνεξάρτητων ἐξισώσεων πού προκύπτουν ἀπό τούς νόμους τοῦ Kirchhoff γιά ἕνα κύκλωμα μέ κ κόμβους καί β στοιχειώδεις βρόχους εἶναι

$$N = \beta + \kappa - 1 \qquad (6.23)$$

Αὐτός βέβαια εἶναι καί ὁ μέγιστος ἀριθμός τῶν ἄγνωστων στοιχείων ἑνός κυκλώματος πού μποροῦμε νά προσδιορίσουμε. Στήν πράξη, γιά ἕνα συγκεκριμένο κύκλωμα, εἶναι πολύ πιό εὔκολο νά μετρήσουμε τούς κόμβους καί τούς κλάδους ἑνός κυκλώματος παρά τούς στοιχειώδεις βρόχους. Εἶναι ἑπομένως χρήσιμο νά ἐκφράσουμε τήν ποσότητα τῆς ἐξ. (6.23) ἀνεξάρτητα ἀπό τόν ἀριθμό β.

Σύμφωνα μέ ἕνα πόρισμα τῆς Γεωμετρίας†, τά χαρακτηριστικά μεγέθη β καί κ ἑνός κυκλώματος συνδέονται μέ τό πλῆθος τῶν κλάδων του α διαμέσου τῆς σχέσης

$$\kappa + \beta - \alpha = 1 \ . \qquad (6.25)$$

Σέ συνδιασμό μέ τήν ἐξ. (6.23) ἡ σχέση αὐτή δίνει τό ἁπλό ἀποτέλεσμα

$$N = \alpha \qquad (6.26)$$

δηλαδή ὅτι *τό πλῆθος τῶν ἐξισώσεων πού προκύπτει ἀπό τήν ἐφαρμογή τῶν δύο νόμων τοῦ Kirchhoff εἶναι ἴσο μέ τό πλῆθος τῶν κλάδων τοῦ κυκλώματος*. Τό ἀποτέλεσμα αὐτό βρίσκεται σέ συμφωνία μέ τήν φυσική διαίσθηση. Ἄν σέ ἕνα κύκλωμα μέ α κλάδους δοθοῦν ὅλα τά στοιχεῖα (ἀντιστάσεις καί ΗΕΔ) τότε οἱ ἀνεξάρτητες ἐξισώσεις πού προσφέρουν οἱ νό-

---

† Ἡ ἐξ. (6.25) εἶναι ἄμεσο ἀποτέλεσμα τοῦ γενικοῦ θεωρήματος τῆς Γεωμετρίας σύμφωνα μέ τό ὁποῖο τό πλῆθος τῶν ἑδρῶν ε, τῶν ἀκμῶν α καί τῶν κορυφῶν κ ἑνός στερεοῦ πολυέδρου συνδέονται μέ τή σχέση

$$\kappa + \varepsilon - \alpha = 2 \ . \qquad (6.24)$$

Ἐάν παραληφθεῖ μιά ἕδρα τοῦ πολυέδρου καί ἡ ὑπόλοιπη ἐπιφάνεια μετασχηματιστεῖ τοπολογικά σέ ἐπίπεδο σχῆμα, οἱ κορυφές μετασχηματίζονται σέ κόμβους, οἱ ἀκμές σέ κλάδους καί οἱ ἕδρες σέ στοιχειώδεις βρόχους τοῦ κυκλώματος. Τό πλῆθος τῶν τελευταίων εἶναι

$$\beta = \alpha - 1$$

καί ἡ ἐξ. (6.24) ὁδηγεῖ στήν ἐξ. (6.25).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μοι τοῦ Kirchhoff ἐπαρκοῦν γιά τόν προσδιορισμό τοῦ ρεύματος σέ κάθε κλάδο. Ἀντίστροφα, ἄν δοθοῦν τά ρεύματα σέ n (n<α) κλάδους, τό πρόβλημα ἔχει μονοσήμαντη λύση μόνο ἄν τό πλῆθος τῶν ἄγνωστων στοιχείων εἶναι ἴσο μέ α − n.

Εἶναι ἴσως χρήσιμο νά ἀνακεφαλαιώσουμε τήν διεργασία γιά τήν ἐπίλυση κυκλωμάτων μέσω τῶν νόμων τοῦ Kirchhoff. Ὑπό μορφή συνταγῆς, ἡ διεργασία αὐτή μπορεῖ νά διατυπωθεῖ μέ τά ἑξῆς διακριτά βήματα:

1. *Προσδιορίστε τό πλῆθος κ τῶν κόμβων καί τό πλῆθος α τῶν κλάδων τοῦ κυκλώματος.*
2. *Καθορίστε τή φορά τῶν ρευμάτων σέ κάθε κλάδο τοῦ κυκλώματος. Ὁ συμβολισμός τῆς φορᾶς τοῦ ρεύματος μπορεῖ νά γίνει μέ βέλη, ὅπως στό παράδειγμα τοῦ σχήματος 6-5. Σέ κλάδους ὅπου ἡ φορά δέν εἶναι γνωστή ἤ προφανής, μπορεῖ νά σημειωθεῖ αὐθαίρετα.*
3. *Σέ κλάδους τοῦ κυκλώματος ὅπου ὑπάρχουν περισσότερες ἀπό μιά ἀντιστάσεις καί ΗΕΔ προσδιορίστε τήν ὁλική ἀντίσταση καί ὁλική ΗΕΔ τοῦ κλάδου.*
4. *Σημειῶστε τήν πολικότητα ὅλων τῶν ΗΕΔ. Ἐπιλέξτε αὐθαίρετα τήν πολικότητα τῶν ἄγνωστων ΗΕΔ.*
5. *Γράψτε τίς ἐξισώσεις τοῦ πρώτου νόμου γιά κ−1 κόμβους τοῦ κυκλώματος.*
6. *Γράψτε α − κ + 1 ἐξισώσεις τοῦ δεύτερου νόμου. Βεβαιωθεῖτε ὅτι οἱ ἐξισώσεις αὐτές εἶναι ἀνεξάρτητες. Ἄν καί ἡ συνθήκη αὐτή μπορεῖ νά ἐξασφαλιστεῖ μέ τήν ἐπιλογή ἀποκλειστικά στοιχειωδῶν βρόχων, σέ πολλές ἐφαρμογές τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων εἶναι ἁπλούστερο ἄν συμπεριληφθοῦν καί μεγαλύτεροι βρόχοι. Στήν περίπτωση αὐτή ἕνα κριτήριο γιά τήν ἀνεξαρτησία τῶν ἐξισώσεων τοῦ δεύτερου νόμου εἶναι ἡ συμμετοχή κάθε κλάδου σέ τουλάχιστον μιά ἐξίσωση.*
7. *Ἐπιλύστε τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων.*
8. *Διορθῶστε τή φορά τῶν ἄγνωστων ρευμάτων καί τήν πολικότητα τῶν ἄγνωστων ΗΕΔ γιά τίς ἀντίστοιχες λύσεις πού προκύπτουν μέ ἀρνητική τιμή.*
9. *Ἐπαληθεῦστε τίς λύσεις σας χρησιμοποιώντας τίς ἀριθμητικές τιμές πού προκύπτουν γιά τόν κόμβο πού παραλείψατε στίς ἐξισώσεις πρώτου νόμου ἤ γιά βρόχους πού δέν θεωρήσατε στίς ἐξισώσεις τοῦ δεύτερου.*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6-4 Ρεῦμα Βρόχου

Ἡ ἐπίλυση ἑνός κυκλώματος μέσω τῶν νόμων τοῦ Kirchhoff μπορεῖ νά ἁπλοποιηθεῖ σέ ὁρισμένες περιπτώσεις μέ τήν εἰσαγωγή ἑνός ἀριθμοῦ νέων μεταβλητῶν. Μιά μέθοδος τῆς κατηγορίας αὐτῆς εἶναι ἡ εἰσαγωγή ἑνός ἀριθμοῦ ρευμάτων i_ν πού θεωροῦνται ὅτι διαρρέουν ἀνεξάρτητα καί κατά συγκεκριμένη φορά ἕνα ἀντίστοιχο ἀριθμό βρόχων τοῦ κυκλώματος. Κάθε ***ρεῦμα βρόχου*** ὁρίζεται μέ σταθερή τιμή i_ν καθόλη τήν κλειστή διαδρομή τοῦ ἀντίστοιχου βρόχου ἐνῶ τό πραγματικό ρεῦμα σέ κάθε κλάδο δίνεται ἀπό τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα ὅλων τῶν ρευμάτων βρόχων πού τόν διαρρέουν.

Εἶναι βέβαιο ὅτι ἡ εἰσαγωγή νέων μεταβλητῶν συνεπάγεται ἀντίστοιχη αὔξηση τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος καί ἐπομένως ἐκ πρώτης ὄψεως μπορεῖ νά φανεῖ ὅτι περιπλέκει τό πρόβλημα. Ὅπως εἴδαμε στήν προηγούμενη παράγραφο τό πλῆθος τῶν ἀνεξάρτητων ἐξισώσεων πού μποροῦμε νά γράψουμε μέ βάση τό δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff εἶναι ἴσο μέ τό πλῆθος β τῶν στοιχειωδῶν βρόχων τοῦ κυκλώματος. Ἄν τώρα γιά κάθε στοιχειώδη βρόχο εἰσάγουμε ἕνα ρεῦμα βρόχου i_ν (β νέες μεταβλητές) μποροῦμε νά γράψουμε ἕνα ἀριθμό α ἐπιπλέον ἀνεξάρτητων σχέσεων

$$I_\mu = \sum_\nu i_\nu \tag{6.27}$$

πού συνδέουν τά πραγματικά ρεύματα I_μ κάθε κλάδου μέ τά νοητά ρεύματα βρόχων πού διαρρέουν τό συγκεκριμένο κλάδο. Ὁ συνολικός ἑπομένως ἀριθμός τῶν ἀνεξάρτητων ἐξισώσεων πού μποροῦμε νά γράψουμε γιά τό κύκλωμα χρησιμοποιώντας τόν δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff καί τίς σχέσεις τῆς ἐξ. (6.27) εἶναι α + β. Αὐτό ὅμως εἶναι καί τό πλῆθος τῶν ἀγνώστων μετά τήν εἰσαγωγή τῶν β ρευμάτων βρόχων. Τό πλεονέκτημα ἑπομένως τῆς μεθόδου ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι *μέ τήν εἰσαγωγή τῶν ρευμάτων βρόχων μποροῦμε νά ἐπιλύσουμε τό κύκλωμα χρησιμοποιώντας ἀποκλειστικά τόν δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff καί τίς ἁπλές σχέσεις τῆς ἐξ. (6.27).* Στό ἀποτέλεσμα αὐτό μπορεῖ νά ὁδηγηθεῖ κανείς καί ἀπό φυσική διαίσθηση. Ἀπό τόν τρόπο ὁρισμοῦ τους, τά ρεύματα βρόχων ἱκανοποιοῦν τήν ἀρχή διατηρήσεως τοῦ φορτίου καθώς καί τή συνθήκη ὅτι σέ κανένα σημεῖο τοῦ κυκλώματος δέν πραγματοποιεῖται συσσώρευση φορτίου. Αὐτές ὅμως εἶναι ἀκριβῶς οἱ συνθῆκες πού ἐκφράζουν οἱ ἐξισώσεις τοῦ πρώτου νόμου τοῦ Kirchhoff.

Ὅπως προκύπτει ἀπό τά προηγούμενα, γιά τήν συμπλήρωση τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου νόμου τοῦ Kirchhoff πρέπει νά ὁριστοῦν β ρεύματα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

βρόχων. Ἡ πιό προφανής ἐπιλογή εἶναι ὁ καθορισμός ἑνός ρεύματος γιά κάθε στοιχειώδη βρόχο τοῦ κυκλώματος. Ἡ ἐπιλογή ὅμως αὐτή δέν εἶναι ἀπαραίτητη. Σέ πολλές περιπτώσεις οἱ ἐξισώσεις τοῦ δεύτερου νόμου μπορεῖ νά εἶναι ἁπλούστερες ἄν γιά καθορισμό τῶν νέων μεταβλητῶν ἐπιλεγοῦν καί μή στοιχειώδεις βρόχοι. Ὅπως καί προηγουμένως ἕνα χρήσιμο κριτήριο γιά τήν ἐξασφάλιση μιᾶς πλήρους σειρᾶς μεταβλητῶν εἶναι ἡ συμμετοχή κάθε κλάδου τοῦ κυκλώματος σέ ἕνα τουλάχιστον βρόχο.

Ὡς παράδειγμα τῆς μεθόδου τοῦ ρεύματος βρόχου θά θεωρήσουμε πάλι τό ἁπλό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-5. Μέ τήν εἰσαγωγή τῶν δύο μεταβλητῶν i_1 καί i_2 πού ἀντιπροσωπεύουν τά ρεύματα στούς βρόχους ΑΒΕΖΑ καί ΒΓΔΕΒ μποροῦμε νά γράψουμε τίς ἐξισώσεις τοῦ δεύτερου νόμου ὡς

$$U_1 = i_1R_1 + i_1R_3 - i_2R_3 \tag{6.28α}$$

$$-U_2 = i_2R_3 + i_2R_2 - i_1R_3 \tag{6.28β}$$

πού ὁδηγοῦν ἀμέσως στίς λύσεις

$$i_1 = \frac{(R_2 + R_3)U_1 - R_3U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{6.29α}$$

$$i_2 = \frac{R_3U_1 - (R_1 + R_3)U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{6.29β}$$

Τά πραγματικά ρεύματα στούς τρεῖς κλάδους τοῦ κυκλώματος δίνονται τώρα ἀπό τίς σχέσεις

$$I_1 = i_1 \tag{6.30α}$$

$$I_2 = i_2 \tag{6.30β}$$

$$I_3 = i_1 - i_2 \tag{6.30γ}$$

ἤ

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)U_1 - R_3U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{6.31α}$$

$$I_2 = \frac{R_3U_1 - (R_1 + R_3)U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{6.31β}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$I_3 = \frac{R_2U_1 + R_1U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \,. \qquad (6.31\gamma)$$

Δίνοντας συγκεκριμένες ἀριθμητικές τιμές στίς γνωστές παραμέτρους τοῦ προηγούμενου κυκλώματος ἄς θεωρήσουμε

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1\,\Omega \qquad (6.32\alpha)$$

καί

$$U_1 = 12\,V, \quad U_2 = 9\,V. \qquad (6.32\beta)$$

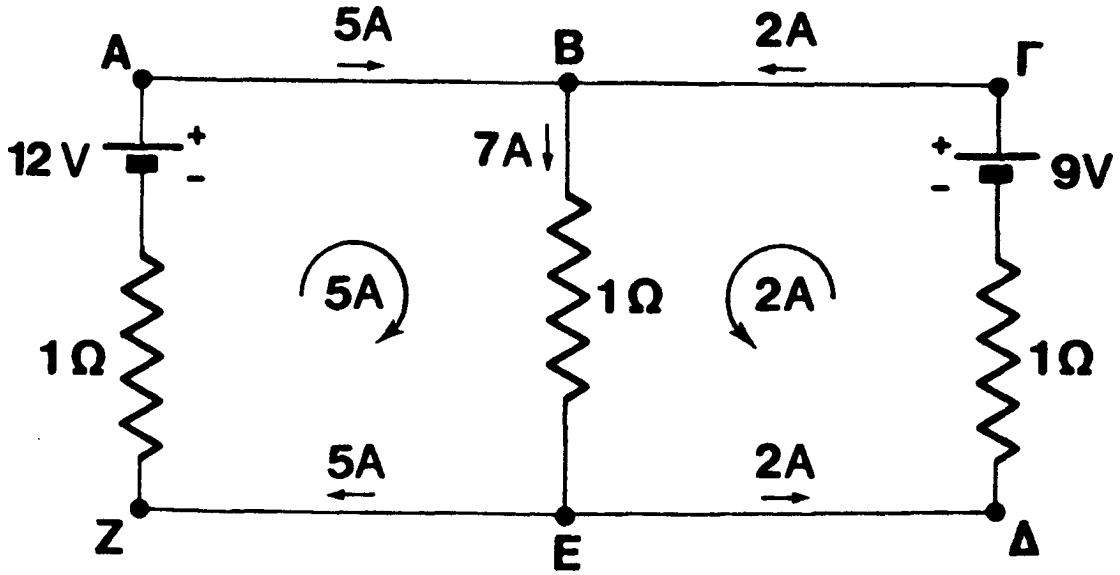
Γιά τίς τιμές αὐτές οἱ ἐξ. (6.29) ἕως (6.31) δίνουν

$$i_1 = 5\,A, \quad i_2 = -2\,A \qquad (6.33)$$

καί

$$I_1 = 5\,A, \quad I_2 = -2\,A, \quad I_3 = 7\,A \,. \qquad (6.34)$$

Ἡ πραγματική φορά τῶν ρευμάτων τοῦ ἀριθμητικοῦ παραδείγματος δίνεται στό σχῆμα 6-6.



ΣΧΗΜΑ 6-6 Πραγματικά ρεύματα και ρευματα βροχων στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-5 γιά τίς ἀριθμητικές τιμές τῶν ἐξ. (6.32).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6-5 Τό Θεώρημα τῆς Ἐπαλληλίας

Οἱ ἐξισώσεις τοῦ Kirchhoff (6.19) καί (6.20) συγκροτοῦν ἕνα σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων μέ α ἀγνώστους {βλ. εξ. (6.26)}. Ἄν οἱ ἄγνωστες παράμετροι τοῦ κυκλώματος εἶναι τά ρεύματα σέ κάθε κλάδο, ἡ λύση τοῦ συστήματος θά ἔχει τή γενική μορφή

$$I_k = \sum_{j\ 1}^{n} G_{kj} U_j, \qquad k = 1,...,a \tag{6.35}$$

ὅπου n εἶναι τό πλῆθος τῶν ΗΕΔ U_j. Στήν τελευταία σχέση οἱ σταθεροί συντελεστές $G_{kj}(k = 1,...,a,\ j = 1,...,n)$ εἶναι ἀποκλειστικά συναρτήσεις τῶν ἀντιστάσεων τοῦ κυκλώματος, ἐνῶ οἱ διαστάσεις τους, ὅπως μπορεῖ νά ἐπιβεβαιωθεῖ εὔκολα ἀπό τό νόμο τοῦ Ohm, εἶναι διαστάσεις ἀντίστροφης ἀντιστάσεως.

Ἡ γενική μορφή τῶν ἐξ. (6.35) ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι οἱ νόμοι τοῦ Kirchhoff ὁδηγοῦν σέ ἀποκλειστικά γραμμικές ἐξισώσεις ὅπου οἱ συντελεστές τῶν ρευμάτων εἶναι ἄθροισμα ἀντιστάσεων ἤ ἡ μονάδα, ἐνῶ οἱ ΗΕΔ ἐμφανίζονται σὲ γραμμικούς ὅρους μέ συντελεστή τή μονάδα. Ἕνα παράδειγμα τῶν ἐξ. (6.35) εἴδαμε στήν ἐπίλυση τοῦ ἁπλοῦ κυκλώματος πού δίνεται στό σχῆμα 6-5 {βλ. εξ. (6.31)}.

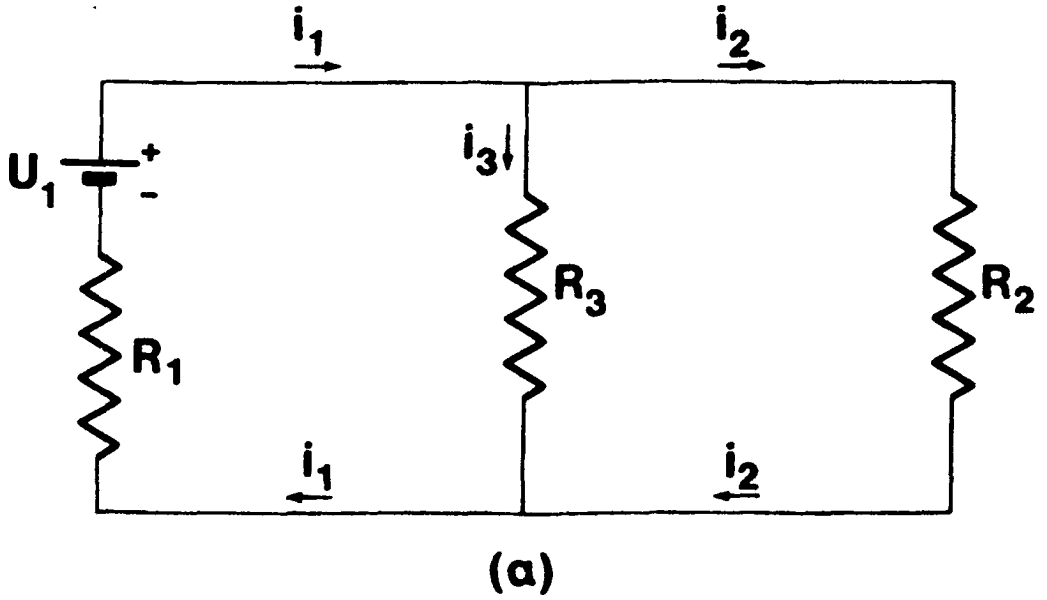
Ἡ φυσική ἑρμηνεία πού μπορεῖ νά δοθεῖ στίς ἐξ. (6.35) εἶναι ὅτι σέ ἕνα συγκεκριμένο κλάδο τοῦ κυκλώματος ἡ συνεισφορά κάθε ΗΕΔ σέ ρεῦμα εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή συνεισφορά τῶν ἄλλων ΗΕΔ, ἐνῶ τό ὁλικό ρεῦμα δημιουργεῖται ἀπό τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ἐπιμέρους ρευμάτων πού δημιουργεῖ ἀνεξάρτητα κάθε ΗΕΔ. Ἡ ἑρμηνεία αὐτή τῆς ἐξ. (6.35), πού ἀπαντᾶται μέ τήν ὀνομασία **θεώρημα τῆς ἐπαλληλίας,** διευκολύνει συχνά τήν ἀνάλυση κυκλωμάτων. Σύμφωνα μέ τήν ἑρμηνεία τῆς ἐξ. (6.35) τό ρεῦμα πού συνεισφέρει σέ ἕνα συγκεκριμένο κλάδο ἡ ΗΕΔ U_j εἶναι τό ρεῦμα πού διαρρέει τόν κλάδο σέ ἕνα ὅμοιο κύκλωμα ὅπου ὅλες οἱ ὑπόλοιπες ΗΕΔ ἔχουν ἀντικατασταθεῖ μέ τήν ἐσωτερική τους ἀντίσταση. *Ὁ προσδιορισμός ἑπομένως τοῦ πραγματικοῦ ρεύματος στόν κλάδο ἀνάγεται στό σταδιακό προσδιορισμό τῶν ρευμάτων πού τόν διαρρέουν ἄν θεωρήσουμε διαδοχικά τήν ἐπενέργεια καθεμιᾶς ΗΕΔ σέ παρόμοια κυκλώματα ὅπου οἱ ὑπόλοιπες ΗΕΔ ἔχουν ἀντικατασταθεῖ μέ τήν ἐσωτερική τους ἀντίσταση.*

Ὡς παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου πού περιγράψαμε θά θεωρήσουμε γιά μιά ἀκόμη φορά τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-5. Τά δύο κυκλώματα ὅπου ἡ δράση τῶν δύο ΗΕΔ U_1 καί U_2 μπορεῖ νά μελετηθεῖ ἀνεξάρτη-

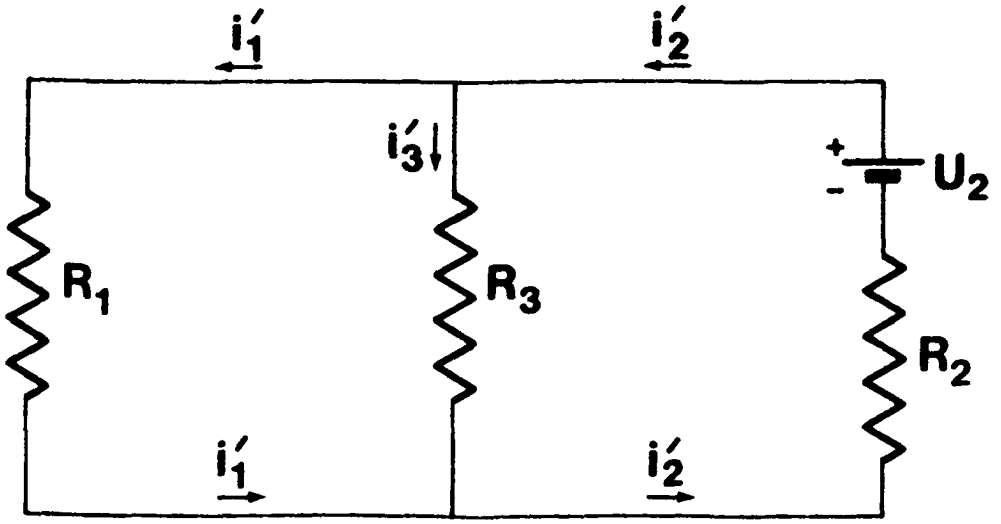
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τα δίνονται άντίστοιχα στά σχήματα 6-7(α) καί 6-7(β). Άν γιά χάρη άπλουστεύσεως θεωρήσουμε τήν έσωτερική άντίσταση τών δύο ΗΕΔ ώς άμελητέα, τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν άντίσταση R_1 στό σχῆμα 6-7(α) δίνεται άπό άπλή έφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm ώς

$$i_1 = \frac{U_1}{R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{(R_2 + R_3)U_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{6.36}$$



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 6-7 Άνάλυση τοῦ κυκλώματος 6-5 μέ έφαρμογή τοῦ θεωρήματος τής έπαλληλίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τά ρεύματα στούς δύο ἄλλους κλάδους διαμοιράζονται σύμφωνα μέ τή σχέση

$$i_2R_2 = i_3R_3 \tag{6.37}$$

ἐνῶ, ἀπό τόν πρῶτο νόμο τοῦ Kirchhoff, συνδέονται μέ τή σχέση

$$i_1 = i_2 + i_3 \ . \tag{6.38}$$

Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι τά ρεύματα στίς ἀντιστάσεις R_2 καί R_3 εἶναι

$$i_2 = \frac{R_3U_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{6.39}$$

$$i_3 = \frac{R_2U_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \ . \tag{6.40}$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο τά ρεύματα πού διαρρέουν τούς κλάδους τοῦ κυκλώματος στό σχῆμα 6-7(β) εἶναι

$$i_1' = \frac{R_3U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{6.41α}$$

$$i_2' = \frac{(R_1 + R_3)U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{6.41β}$$

$$i_3' = \frac{R_1U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \ . \tag{6.41γ}$$

Τά πραγματικά ρεύματα στό ἀρχικό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-5 δίνονται τώρα ἀπό τό θεώρημα τῆς ἐπαλληλίας ὡς

$$I_1 = i_1 - i_1' = \frac{(R_2 + R_3)U_1 - R_3U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{6.42α}$$

$$I_2 = i_2' - i_2 = \frac{R_3U_1 - (R_1 + R_3)U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{6.42β}$$

$$I_3 = i_3 + i_3' = \frac{R_2U_1 + R_1U_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{6.42γ}$$

ὅπου ὡς θετική φορά τοῦ ρεύματος ἔχει ληφθεῖ ἡ δεξιόστροφη. Ὅπως πε-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ριμένουμε οἱ ἐξ. (6.42) ταυτίζονται μέ τίς λύσεις τῶν ἐξ. (6.31) πού ἔδωσε ἡ μέθοδος τῶν ρευμάτων βρόχου.

6-6 Ἰσοδύναμη ΗΕΔ καί Ἰσοδύναμη Ἀντίσταση

Χρησιμοποιώντας τή γενική μορφή τῶν λύσεων στίς ἐξ. (6.35) πού συνεπάγεται τό θεώρημα τῆς ἐπαλληλίας μποροῦμε νά δείξουμε τώρα τή βασική ἀρχή πού ἀναφέραμε στήν εἰσαγωγή τοῦ κεφαλαίου: *Δύο συγκεκριμένα ἄκρα ἑνός κυκλώματος πού περιέχει ἀντιστάσεις καί πηγές ΗΕΔ μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὡς τά ἄκρα ἑνός κλάδου πού περιέχει μιά ἀντίσταση καί μιά πηγή ΗΕΔ.* Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τήν ἔννοια τῆς ἰδανικῆς ΗΕΔ μποροῦμε νά προσδιορίσουμε διαδικαστικά τήν τιμή τῆς **ἰσοδύναμης ΗΕΔ** καί **ἰσοδύναμης ἀντιστάσεως** πού ἀντικαθιστοῦν τό ἀρχικό κύκλωμα.

Ἄς θεωρήσουμε τό κύκλωμα K_0 – πού γιά χάρη γενικότητας παριστάνεται μέ ἕνα κιβώτιο στό σχῆμα 6-8(α) – καί τά δύο συγκεκριμένα ἄκρα τοῦ κυκλώματος 1 καί 2. Ἄν μεταξύ τῶν ἄκρων αὐτῶν συνδέσουμε τήν ἰδανική ΗΕΔ U_a δημιουργεῖται τό νέο κύκλωμα K μέ ἕνα ἐπιπλέον κλάδο, πού θά ὀνομάσουμε κλάδο a. Τό ρεῦμα I_a τοῦ νέου αὐτοῦ κλάδου στό κύκλωμα K μπορεῖ νά γραφεῖ σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (6.35) ὡς

$$I_a = \sum_{j=1}^{n} G_{aj} U_j + G_{aa} U_a. \qquad (6.43)$$

Στήν τελευταία σχέση οἱ n ΗΕΔ U_j εἶναι οἱ ΗΕΔ πού περιέχονται στό ἀρχικό κύκλωμα K_0 ἐνῶ οἱ συντελεστές ἀγωγιμότητας G_{aj} ἀναφέρονται στό κύκλωμα K. Εἶναι χρήσιμο νά παρατηρήσουμε ὅτι ἡ ἐξ. (6.43) παίρνει τή μορφή

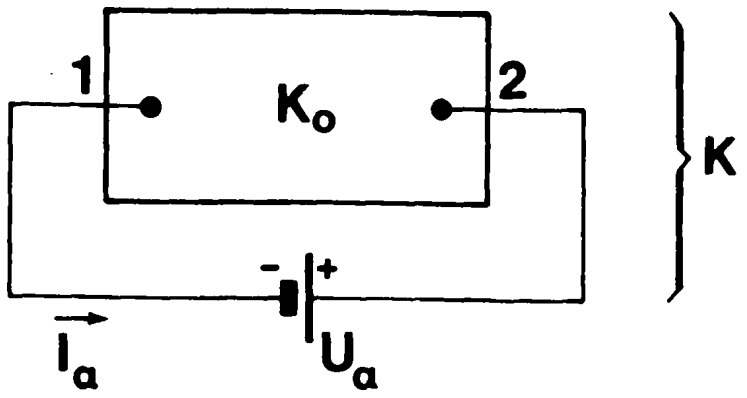
$$I_a = G_{aa} U_a \qquad (6.44)$$

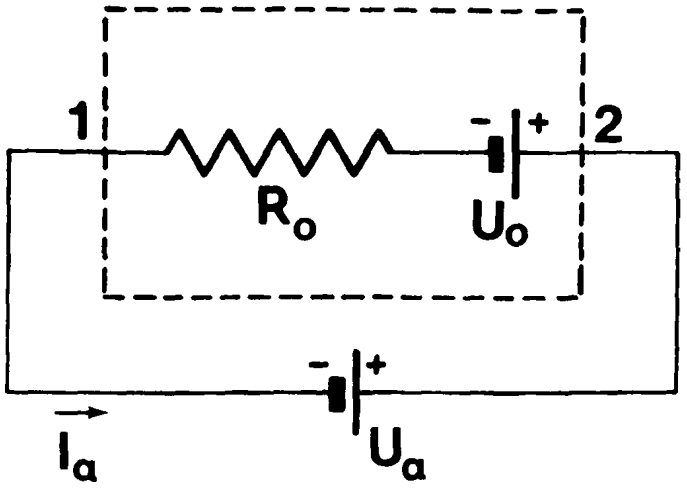
ἄν ὅλες οἱ ΗΕΔ τοῦ κυκλώματος K_0 μηδενιστοῦν. Δηλαδή, ὁ συντελεστής ἀγωγιμότητας G_{aa} τοῦ κλάδου a μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τό κύκλωμα πού προκύπτει ἀπό τό ἀρχικό κύκλωμα K_0 ἄν ἀγνοήσουμε ὅλες τίς ΗΕΔ.

Ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἐξ. (6.43) ἀντιπροσωπεύει τό ρεῦμα στόν κλάδο a γιά ἰδανική ΗΕΔ $U_a = 0$. Μέ ἄλλα λόγια εἶναι τό ρεῦμα μέ τό ὁποῖο τροφοδοτεῖται ὁ κλάδος ἀπό τό κύκλωμα K_0 γιά ἁπλή βραχυκύκλωση τῶν ἄκρων 1 καί 2. Τό ρεῦμα αὐτό, πού θά ὀνομάσουμε **ρεῦμα βραχυκυκλώσεως**,

$$I_s \equiv \sum_{j=1}^{n} G_{aj} U_j \qquad (6.45)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ





ΣΧΗΜΑ 6-8 Διαδικασία ἀντικαταστάσεως τοῦ κυκλώματος K_0 μέ τό ἰσοδύναμο κύκλωμα μιᾶς ἀντιστάσεως καί μιᾶς ΗΕΔ σέ σειρά.

εἶναι μιά χαρακτηριστική σταθερά τοῦ ἀρχικοῦ κυκλώματος K_0 καί μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μέ ὁποιαδήποτε ἀπό τίς μεθόδους ἀναλύσεως κυκλωμάτων πού ἀναπτύξαμε ὡς τώρα. Μέ τόν προσδιορισμό τοῦ ρεύματος βραχυκυκλώσεως I_s, ἡ ἐξ. (6.43) παίρνει τώρα τή μορφή

$$I_a = I_s + G_{aa} U_a. \tag{6.46}$$

Ἄν ἐπιπλέον ὁ προσανατολισμός τῆς ἰδανικῆς ΗΕΔ ἔχει ἐπιλεγεῖ κατά τρόπο ὥστε ἡ παρουσία της στό κύκλωμα νά συνεισφέρει θετικά στό ρεῦμα I_s, ὁ συντελεστής ἀγωγιμότητας G_{aa} στήν ἐξ. (6.46) ἀντιπροσωπεύει θετική ποσότητα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ ἐπέκταση τοῦ κυκλώματος K_0 στό κύκλωμα K θυμίζει τόν προσδιορισμό τῆς ΗΕΔ C στήν πειραματική διάταξη τοῦ σχήματος 5-25. Εἰδικώτερα, ἡ ΗΕΔ πού ἀναπτύσσεται στά ἄκρα 1 καί 2 τοῦ κυκλώματος K_0 εἶναι ἴση καί ἀντίθετη πρός τήν ἰδανική ΗΕΔ πού μηδενίζει τό ρεῦμα I_a στόν ἐξωτερικό κλάδο a τοῦ κυκλώματος K. Γιά $I_a = 0$, ἡ ἐξ. (6.46) προσδιορίζει τήν τιμή τῆς ἰδανικῆς ΗΕΔ U_a ὡς

$$U_{ao} = - \frac{I_s}{G_{aa}} \ . \tag{6.47}$$

Ἡ **ἰσοδύναμη ΗΕΔ** τοῦ κυκλώματος K_0 μπορεῖ νά ὁριστεῖ ὡς

$$U_0 \equiv - U_{ao} = \frac{I_s}{G_{aa}} \ . \tag{6.48}$$

Μέ τόν τελευταῖο ὁρισμό ἡ ἐξ. (6.46) παίρνει τή μορφή

$$I_a = (U_0 + U_a) G_{aa} \tag{6.49}$$

πού ἀμέσως ἀναγνωρίζεται ὡς ὁ νόμος τοῦ Ohm. Ἡ ἑρμηνεία τῆς ἐξ. (6.49) δίνεται στό σχῆμα 6-8(β). Καθόσον ἡ ἰδανική ΗΕΔ ἔχει μηδενική ἀντίσταση, ἡ ἀντίσταση

$$R_0 \equiv \frac{1}{G_{aa}} \tag{6.50}$$

εἶναι ἴση μέ τήν ἀντίσταση πού παρεμβάλλει τό κύκλωμα K_0 μεταξύ τῶν ἄκρων 1 καί 2. Θά ὀνομάσουμε τήν ποσότητα πού ὁρίζει ἡ ἐξ. (6.50) **ἰσοδύναμη ἀντίσταση** τοῦ κυκλώματος K_0.

Ἡ παραπάνω διαδικασία ὁρίζει τήν ἰσοδύναμη ΗΕΔ καί ἰσοδύναμη ἀντίσταση πού παρεμβάλλει ἕνα κύκλωμα μεταξύ δύο συγκεκριμένων ἄκρων του. Ἐπιπλέον ὅμως προσδιορίζει καί τή μέθοδο ὑπολογισμοῦ τῶν δύο αὐτῶν χαρακτηριστικῶν σταθερῶν U_0 καί R_0 ἑνός κυκλώματος. Ἴσως εἶναι χρήσιμο νά συνοψίσουμε τά διακριτά βήματα πού θά πρέπει νά ἀκολουθήσουμε γιά τόν προσδιορισμό τῆς ἰσοδύναμης ΗΕΔ καί ἰσοδύναμης ἀντιστάσεως πού ἀντιστοιχοῦν σέ δύο συγκεκριμένα ἄκρα ἑνός κυκλώματος.

1. *Ἡ ἰσοδύναμη ἀντίσταση R_0 μπορεῖ νά βρεθεῖ ἄν ἀντικαταστήσουμε ὅλες τίς ΗΕΔ τοῦ κυκλώματος μέ τίς ἐσωτερικές τους ἀντιστάσεις — ἤ τίς ἀγνοήσουμε τελείως στήν περίπτωση ὅπου ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση εἶναι ἀμελητέα.*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2. *Βραχυκυκλώνοντας τά δύο ἄκρα τοῦ κυκλώματος μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τό ρεῦμα βραχυκυκλώσεως I_s μέ κατάλληλη ἀνάλυση τοῦ κυκλώματος πού προκύπτει.*
3. *Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (6.48) ἡ ἰσοδύναμη ΗΕΔ δίνεται τώρα ἀπό τή σχέση*

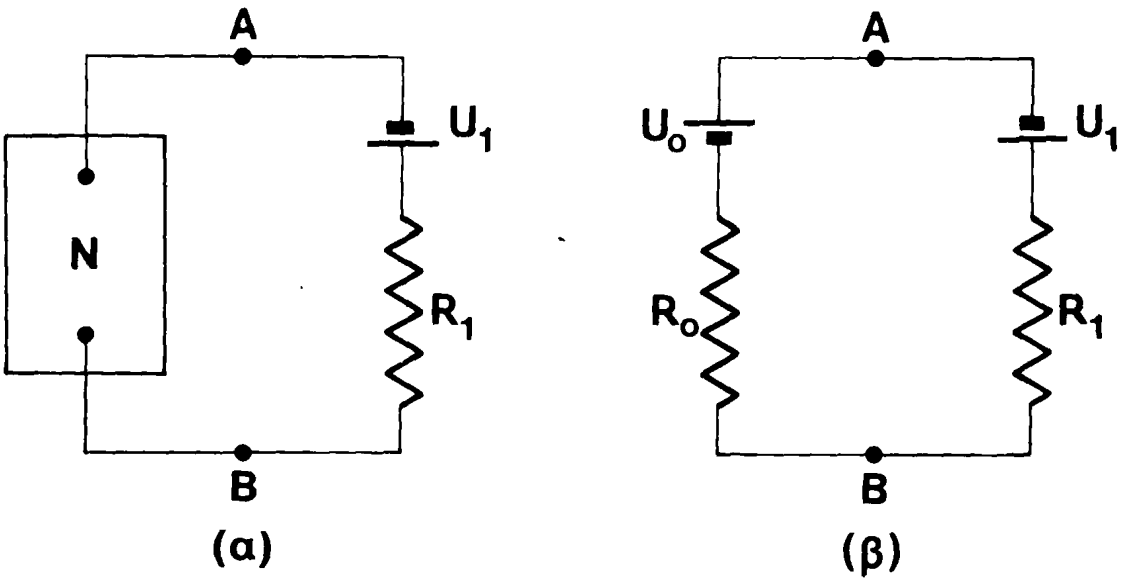
$$U_0 = I_s R_0 \tag{6.51}$$

6-7 Τό Θεώρημα τοῦ Thévenin

Ἡ διαδικασία τῆς προηγούμενης παραγράφου ὁδηγεῖ σέ ἕνα ἐξαιρετικά χρήσιμο πόρισμα γιά τήν ἀνάλυση κυκλωμάτων. Στήν πιό ἁπλή του μορφή, τό πόρισμα αὐτό, γνωστό ὡς **θεώρημα τοῦ Thévenin,** μπορεῖ νά διατυπωθεῖ ὡς ἑξῆς:

Σέ ὁποιοδήποτε κύκλωμα, ἕνα μέρος τοῦ κυκλώματος μεταξύ δύο σημείων A καί B μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό μιά ἀντίσταση R_0 καί μιά ΗΕΔ U_0 σέ σειρά, χωρίς νά μεταβληθεῖ τό ρεῦμα στούς κλάδους τοῦ ὑπόλοιπου κυκλώματος.

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τοῦ Thévenin εἶναι ἄμεσο ἐπακόλουθο τοῦ θεωρήματος τῆς ἐπαλληλίας. Εἶναι ἀκόμη φανερό ὅτι ἡ ἀντίσταση R_0 καί ἡ ΗΕΔ U_0 εἶναι ἀντίστοιχα ἡ ἰσοδύναμη ἀντίσταση καί ἡ ἰσοδύναμη ΗΕΔ τοῦ ἐπιμέρους κυκλώματος μέ ἄκρα A καί B πού μελετήσαμε στήν προηγούμενη παράγραφο.



ΣΧΗΜΑ 6-9 Ἀναγωγή κυκλώματος (α) σε ἰσοδύναμο κύκλωμα (β) γιά τόν προσδιορισμό τοῦ ρεύματος στόν κλάδο (U_1, R_1).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μιά συνήθης ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τοῦ Thévenin περιγράφεται στό σχῆμα 6-9. Ἄν σκοπός τῆς ἀναλύσεως εἶναι ὁ προσδιορισμός τοῦ ρεύματος σέ ἕνα συγκεκριμένο κλάδο τοῦ κυκλώματος πού περιέχει τά στοιχεῖα (U_1, R_1), τότε τό ὑπόλοιπο κύκλωμα N, τό ὁποῖο στό σχῆμα 6-9(α) συμβολίζεται ὡς κιβώτιο, μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ μέ τόν ἰσοδύναμο κλάδο (U_0, R_0). Τό ρεῦμα I_1 στόν κλάδο (U_1, R_1) δίνεται τότε ἀπό ἁπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm στό ἰσοδύναμο κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-9(β)

$$I_1 = \frac{U_0 + U_1}{R_0 + R_1} \,. \tag{6.52}$$

Ὑπενθυμίζεται ὅτι στήν τελευταία σχέση οἱ ΗΕΔ U_0 καί U_1 εἶναι θετικές ἤ ἀρνητικές ποσότητες ἀνάλογα μέ τήν ἐπιλογή τῆς φορᾶς τοῦ ρεύματος καί τῆς φορᾶς τῆς ἰσοδύναμης ΗΕΔ U_0 πού προκύπτει ἀπό τήν ἀνάλυση τοῦ κυκλώματος N.

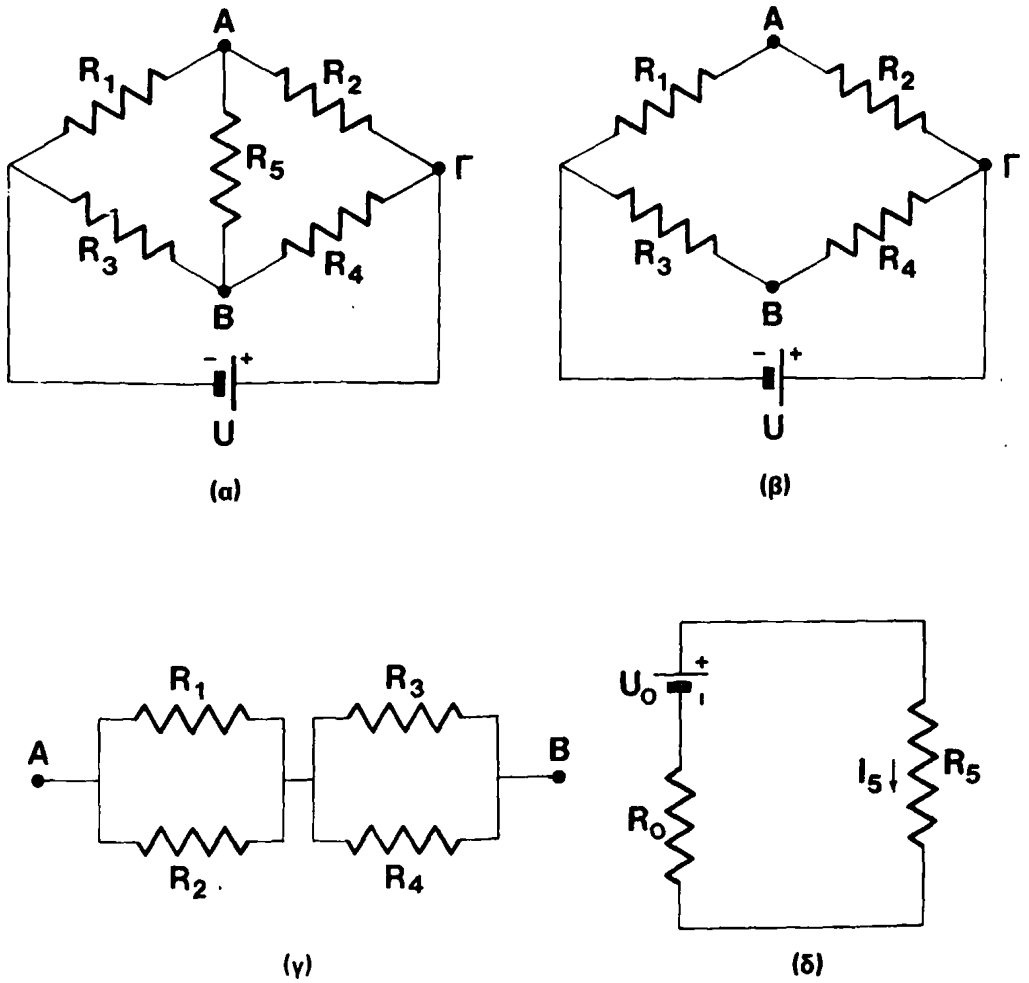
Ἄν καί γιά τόν προσδιορισμό τῆς ἰσοδύναμης ΗΕΔ μπορεῖ νά ἀκολουθηθεῖ ἡ διαδικασία πού περιγράψαμε στό τέλος τῆς παραγράφου 6-6, σέ πολλές ἐφαρμογές ἡ τιμή U_0 μπορεῖ πιό εὔκολα νά προσδιοριστεῖ ἀπό τήν πτώση δυναμικοῦ στά ἄκρα A καί B τοῦ ἀντίστοιχου κυκλώματος πού προκύπτει μέ παράληψη τοῦ κλάδου στόν ὁποῖο ζητεῖται τό ρεῦμα. Τή μέθοδο αὐτή θά ἀκολουθήσουμε στό συγκεκριμένο παράδειγμα ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Thévenin πού δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 6-10.

Ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα, τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-10(α), γνωστό ὡς *γέφυρα Wheatstone*, βρίσκει εὐρεία ἐφαρμογή στήν ἀκριβή μέτρηση ἀντιστάσεως. Κατά τήν ἐφαρμογή αὐτή συνήθως ζητεῖται ὁ προσδιορισμός τοῦ ρεύματος I_5 πού διαρρέει τήν ἀντίσταση R_5. Παρατηρεῖται ὅτι τό ἀρχικό κύκλωμα περιέχει ἕξη κλάδους, ὁπότε ἀνάλυση τοῦ κυκλώματος μέ ἐφαρμογή τῶν νόμων τοῦ Kirchhoff ἀπαιτεῖ τήν ἐπίλυση ἑνός συστήματος μέ ἕξη ἐξισώσεις. Γιά τήν ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τοῦ Thévenin θά θεωρήσουμε τό ἀνοικτό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-10(β) μέ ἄκρα A καί B πού συμπίπτουν μέ τά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_5.

Ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων A καί B τοῦ κυκλώματος 6-10(β) μπορεῖ νά βρεθεῖ εὔκολα ἄν θεωρήσουμε τά ρεύματα I_A καί I_B πού διαρρέουν ἀντίστοιχα τούς κλάδους πού περιέχουν τά σημεῖα A καί B. Ἀπό τό νόμο τοῦ Ohm

$$U = I_A(R_1 + R_2) = I_B(R_3 + R_4). \tag{6.53}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 6-10 (α) Ἡ γέφυρα Wheatstone. (β) Ἀνοικτό κύκλωμα γιά τόν προσδιορισμό τοῦ ρεύματος στόν κλάδο R_5. (γ) Παθητικό κύκλωμα μεταξύ τῶν σημείων A καί B τῆς γέφυρας Wheatstone γιά ἀμελητέα ἐσωτερική ἀντίσταση τῆς ΗΕΔ U. (δ) Ἰσοδύναμο κύκλωμα τῆς γέφυρας Wheatstone.

Ἡ ἰσοδύναμη ΗΕΔ εἶναι ἐπομένως

$$U_0 = I_A R_1 - I_B R_3 = \frac{R_1}{R_1+R_2} U - \frac{R_3}{R_3+R_4} U \,. \qquad (6.54)$$

Ἄν ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τῆς ΗΕΔ U θεωρηθεῖ ὡς ἀμελητέα, τό παθητικό κύκλωμα πού προκύπτει γιά τόν προσδιορισμό τῆς ἰσοδύναμης ἀντιστάσεως μεταξύ τῶν σημείων A καί B δίνεται στό σχῆμα 6-10(γ) πού ὁδηγεῖ στήν ἔκφραση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \quad . \tag{6.55}$$

Τό ρεῦμα στήν ἀντίσταση R_5 μπορεῖ τώρα νά προσδιοριστεῖ ἀπό τό ἰσοδύναμο κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-10(δ) ὡς

$$I_5 = \frac{U_0}{R_0 + R_5} \quad . \tag{6.56}$$

Χρησιμοποιώντας τίς ἐξ. (6.54) καί (6.55) μποροῦμε νά γράψουμε τήν τελευταία σχέση ὡς συνάρτηση τῶν στοιχείων τοῦ ἀρχικοῦ κυκλώματος ὡς

$$I_5 = \frac{\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} - \dfrac{R_3}{R_3 + R_4}}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \dfrac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R_5} U \quad . \tag{6.57}$$

6-8 Τό Θεώρημα τοῦ Norton

Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (6.51), ἡ ἰσοδύναμη ΗΕΔ U_0 συνδέεται μέσω τοῦ νόμου τοῦ Ohm μέ τήν ἰσοδύναμη ἀντίσταση R_0 καί τό ρεῦμα βραχυκυκλώσεως I_S. Μεταθέτοντας ἐπομένως τήν ἔμφαση ἀπό τήν ἰσοδύναμη ΗΕΔ στό ρεῦμα πού παρέχεται ἀπό τό ἰσοδύναμο κύκλωμα μποροῦμε νά διαμορφώσουμε μιά ἐναλλακτική μορφή τοῦ προηγούμενου θεωρήματος.

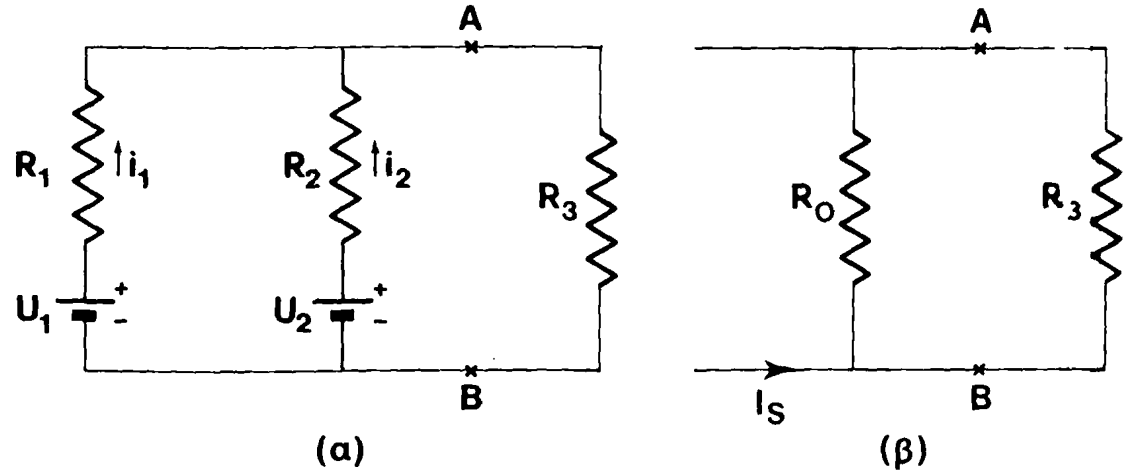
Σέ ὁποιοδήποτε κύκλωμα, ἕνα μέρος τοῦ κυκλώματος μεταξύ δύο σημείων A καί B μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό μιά ἀντίσταση R_0 καί μιά γεννήτρια ρεύματος, χωρίς νά μεταβληθεῖ τό ρεῦμα στούς κλάδους τοῦ ὑπόλοιπου κυκλώματος.

Ὑπό τή μορφή αὐτή τό θεώρημα εἶναι γνωστό ὡς **θεώρημα τοῦ Norton.** Ἡ ἀντίσταση R_0 πού ἀναφέρεται στό θεώρημα εἶναι προφανῶς ἡ ἰσοδύναμη ἀντίσταση πού ἐμφανίζει στά ἄκρα A καί B τό ἀντίστοιχο παθητικό κύκλωμα. Τό ρεῦμα τῆς ἰσοδύναμης γεννήτριας εἶναι τό ρεῦμα βραχυκυκλώσεως I_S πού θεωρήσαμε στήν Παράγραφο 6-6.

Ἕνα παράδειγμα ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Norton δίνεται στό σχῆμα 6-11. Ἄν διακόψουμε τό κύκλωμα στά σημεῖα A καί B, τό παθητικό κύκλωμα πού δημιουργεῖται μέ τήν παράληψη τῶν πηγῶν ΗΕΔ στό ἀριστερό μέρος ἐμφανίζει τήν ἰσοδύναμη ἀντίσταση

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad . \tag{6.58}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 6-11 Ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τοῦ Norton. (α) Τό ρεῦμα βραχυκυκλώσεως I_S βρίσκεται μέ διακοπή τοῦ κυκλώματος στά σημεῖα A καί B καί ἁπλή σύνδεση τῶν ἄκρων. (β) Τό ἰσοδύναμο κύκλωμα κατά τό θεώρημα τοῦ Norton.

Τό ρεῦμα βραχυκυκλώσεως πού ρέει στόν κλάδο AB μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἄν τά δύο ἄκρα συνδεθοῦν μέ ἕνα ἀγωγό μέ μηδενική ἀντίσταση. Χρησιμοποιώντας δύο ρεύματα βρόχων γιά τούς βρόχους πού ὁρίζει ὁ ἀγωγός AB μέ καθένα ἀπό τούς κλάδους (R_1, U_1) καί (R_2, U_2)

$$i_1 = \frac{U_1}{R_1} \qquad \text{καί} \qquad i_2 = \frac{U_2}{R_2} \tag{6.59}$$

Τό ρεῦμα βραχυκυκλώσεως ἐκφράζεται τώρα ὡς

$$I_S = i_1 + i_2 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} \tag{6.60}$$

Τό ἰσοδύναμο κύκλωμα τῆς διατάξεως 6-11(α) κατά τό θεώρημα τοῦ Norton δίνεται στό σχῆμα 6-11(β). Ἀπό τό κύκλωμα αὐτό τό ρεῦμα στόν κλάδο R_3 δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$I_3 = \frac{R_0}{R_0 + R_3} I_S \ . \tag{6.61}$$

6-9 Μετασχηματισμός Τριγώνου σέ Ἀστέρα

Σέ πολλές περιπτώσεις ἡ ἀνάλυση ἑνός κυκλώματος διευκολύνεται σημαντικά ἄν μιά διάταξη τριῶν ἀντιστάσεων σέ σχῆμα τριγώνου μετασχημα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

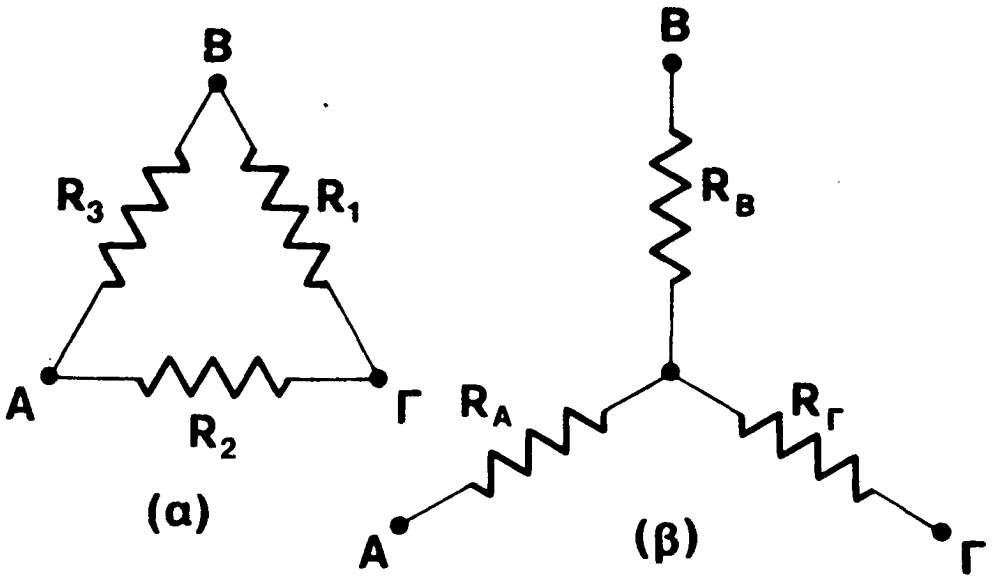
τιστεῖ σέ μιά ἰσοδύναμη διάταξη τριῶν ἀντιστάσεων σέ σχῆμα ἀστέρα. Μέ τόν μετασχηματισμό αὐτό πού δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 6-12, ἕνας στοιχειώδης βρόχος τοῦ κυκλώματος ἀντικαθίσταται ἀπό ἕνα κόμβο. Τοῦτο ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν ἀντικατάσταση μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δεύτερου νόμου τοῦ Kirchhoff ἀπό μιά ἐξίσωση τοῦ πρώτου νόμου μέ ἐπακόλουθη ἁπλοποίηση τοῦ συστήματος ἐξισώσεων πού προσδιορίζουν τή λύση τοῦ κυκλώματος.

Οἱ δύο διατάξεις τοῦ σχήματος 6-12 εἶναι ἰσοδύναμες ἄν ἀντικατάσταση τῆς μιᾶς ἀπό τήν ἄλλη δέν προκαλεῖ καμμιά μεταβολή στά ρεύματα τοῦ ὑπόλοιπου κυκλώματος. Εἰδικώτερα τά ρεύματα πού εἰσέρχονται ἤ ἐξέρχονται ἀπό τό τρίγωνο στά σημεῖα Α, Β καί Γ πρέπει νά εἶναι τά ἴδια μέ τά ἀντίστοιχα ρεύματα στά σημεῖα Α, Β καί Γ τοῦ ἀστέρα. Ἡ σχέση αὐτή μπορεῖ νά ἱκανοποιηθεῖ ἄν θεωρήσουμε τήν ἰσοδύναμη ἀντίσταση μεταξύ δύο ἀντίστοιχων ἄκρων κάθε διατάξεως.

Ἡ ἀντίσταση R_{AB} μεταξύ τῶν ἄκρων Α καί Β τοῦ τριγώνου μπορεῖ νά γραφεῖ ἀμέσως ἀπό τήν ἐξ. (6.15) ὡς

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} \,. \tag{6.62α}$$

Στή διάταξη ἀστέρα ἡ ἀντίστοιχη ἀντίσταση μεταξύ τῶν ἄκρων Α καί Β δημιουργεῖται ἀπό τίς ἀντιστάσεις R_A καί R_B σέ σειρά



ΣΧΗΜΑ 6-12 Μετασχηματισμός τριγώνου σέ ἀστέρα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$R_{AB} = R_A + R_B \ . \qquad (6.62\beta)$$

Ἡ ἰσοδυναμία τῶν δύο διατάξεων ὁδηγεῖ ἐπομένως στή σχέση

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_A + R_B} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} \ . \qquad (6.63\alpha)$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο, θεωρώντας τά ὑπόλοιπα ἄκρα τῶν δύο διατάξεων, μποροῦμε νά δείξουμε τίς ἀνάλογες σχέσεις

$$\frac{1}{R_{A\Gamma}} = \frac{1}{R_A + R_\Gamma} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3} \qquad (6.63\beta)$$

$$\frac{1}{R_{B\Gamma}} = \frac{1}{R_B + R_\Gamma} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} \ . \qquad (6.63\gamma)$$

Τό σύστημα τῶν ἐξ. (6.63) μπορεῖ τώρα νά προσδιορίσει τίς τιμές τῶν ἀντιστάσεων πού συγκροτοῦν τόν ἀστέρα ὡς συνάρτηση τῶν ἀντιστάσεων τοῦ ἰσοδύναμου τριγώνου. Ἡ λύση τοῦ συστήματος εἶναι

$$R_A = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad (6.64\alpha)$$

$$R_B = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad (6.64\beta)$$

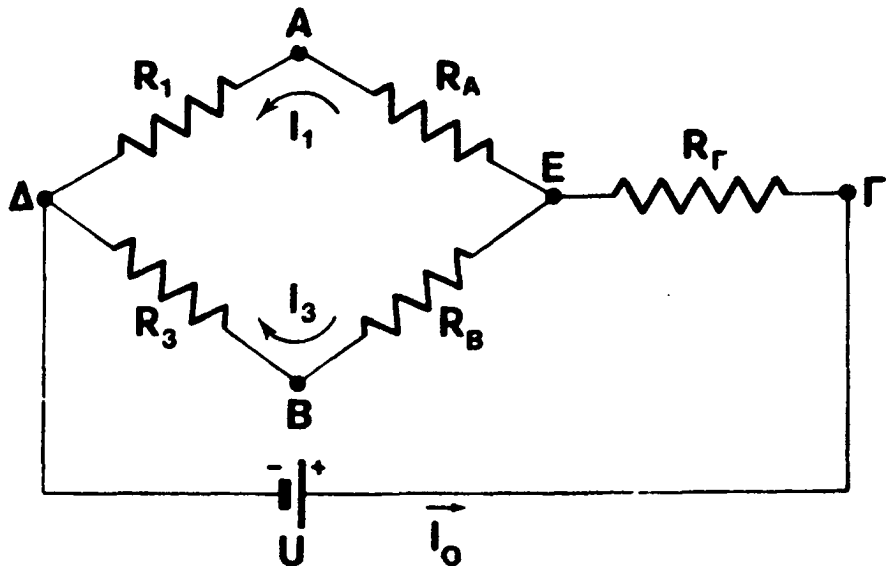
$$R_\Gamma = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \ . \qquad (6.64\gamma)$$

Οἱ ἐξ. (6.64) ἐμφανίζουν μιά ἁπλή σχέση συμμετρίας πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά εὔκολη ἀπομνημόνευση: *Ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀστέρα πού καταλήγει σέ ἕνα συγκεκριμένο ἄκρο εἶναι ἴση πρός τό γινόμενο τῶν ἀντιστάσεων πού καταλήγουν στό ἴδιο σημεῖο τοῦ ἰσοδύναμου τριγώνου, διαιρεμένο μέ τό ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀντιστάσεων τοῦ τριγώνου.*

Ὡς παράδειγμα τῆς μεθόδου θά θεωρήσουμε πάλι τή γέφυρα Wheatstone τοῦ σχήματος 6-10(α). Ἡ ἀντικατάσταση τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μέ ἀστέρα ὁδηγεῖ στό ἰσοδύναμο κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-13, ὅπου οἱ ἀντιστάσεις πού καταλήγουν στά σημεῖα Α, Β καί Γ δίνονται ἀπό τίς σχέσεις

$$R_A = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} \qquad (6.65\alpha)$$





ΣΧΗΜΑ 6-13 Ἰσοδύναμο κύκλωμα τῆς γέφυρας Wheatstone μέ ἀντικατάσταση τριγώνου ἀπό ἀστέρα.

$$R_B = \frac{R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} \tag{6.65β}$$

$$R_\Gamma = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4 + R_5} \,. \tag{6.65γ}$$

Μέ ἁπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm μπορεῖ τώρα νά προσδιοριστεῖ τό ὁλικό ρεῦμα πού διαρρέει τόν κλάδο τῆς ΗΕΔ U ὡς

$$I_0 = \frac{U}{R_\Gamma + \dfrac{(R_1 + R_A)(R_3 + R_B)}{R_1 + R_3 + R_A + R_B}} \,. \tag{6.66}$$

Τά ρεύματα πού διαρρέουν τίς ἀντιστάσεις R_1 καί R_3 μποροῦν νά βρεθοῦν ἀπό τήν πτώση δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων Δ καί Ε

$$I_1(R_1 + R_A) = I_3(R_3 + R_B) = U - I_0 R_\Gamma \tag{6.67}$$

ὅπου ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τῆς ΗΕΔ U ἔχει πάλι θεωρηθεῖ ὡς ἀμελητέα. Χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (6.66) στήν ἐξ. (6.67) εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι

$$I_1 = \frac{(R_3 + R_B)U}{(R_1 + R_A)(R_3 + R_B) + (R_1 + R_3 + R_A + R_B)R_\Gamma} \tag{6.68α}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$I_3 = \frac{(R_1 + R_A)\,U}{(R_1 + R_A)(R_3 + R_B) + (R_1 + R_3 + R_A + R_B)R_\Gamma} \qquad (6.68\beta)$$

Ἡ πτώση δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β εἶναι

$$V_{AB} = I_3R_3 - I_1R_1$$

$$= \frac{R_3R_A - R_1R_B}{(R_1 + R_A)(R_3 + R_B) + (R_1 + R_3 + R_A + R_B)R_\Gamma} \qquad (6.69)$$

καί ἑπομένως τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀντίσταση R_5 τοῦ ἀρχικοῦ κυκλώματος δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$I_5 = \frac{V_{AB}}{R_5} \,. \qquad (6.70)$$

Χρησιμοποιώντας τίς ἐξ. (6.69) καί (6.65) εἶναι δυνατόν νά δείξουμε ὅτι οἱ ἐξ. (6.70) καί (6.57) ταυτίζονται – ἄν καί ὁ ἀλγεβρικός μετασχηματισμός εἶναι ἀρκετά ἐπίπονος. Στήν πράξη ἡ τελική σχέση τῆς ἐξ. (6.70), ἄν γραφεῖ ὡς συνάρτηση τῶν ἀντιστάσεων τοῦ ἀρχικοῦ κυκλώματος, ἔχει περιορισμένη χρησιμότητα. Ἡ διαδικασία πού ἀκολουθεῖται συνήθως εἶναι ἡ σταδιακή ἐπίλυση τοῦ κυκλώματος μέ προσδιορισμό τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῶν ἀντιστάσεων ἤ ρευμάτων σέ κάθε βῆμα. Στό συγκεκριμένο παράδειγμα π.χ. εἶναι προτιμότερο νά προσδιορίσουμε σταδιακά τίς ἀριθμητικές τιμές τῶν ἀντιστάσεων τοῦ ἰσοδυνάμου ἀστέρα R_A, R_B καί R_Γ, τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος I_0, τῶν ρευμάτων I_A καί I_B στούς δύο κλάδους καί τελικά τοῦ ρεύματος I_5.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6-1. Μιά ἀντίσταση ἀκριβείας R_1 μπορεῖ νά συνδεθεῖ παράλληλα μέ μιά μεγαλύτερη ἀντίσταση R_2 ὥστε νά δημιουργηθεῖ μιά ἀντίσταση ἀκριβείας R μέ τιμή λίγο μικρότερη ἀπό τήν ἀντίσταση R_1.

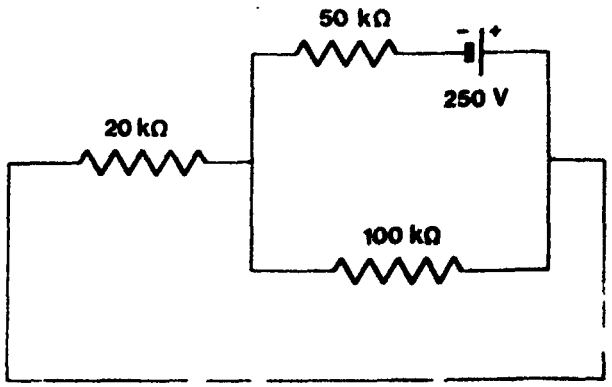
(α) Δεῖξτε ὅτι τό ποσοστιαῖο σφάλμα dR/R, πού συνεισφέρει ἡ ἀντίσταση R_2 μέ ποσοστιαῖο σφάλμα dR_2/R_2, δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\frac{dR}{R} = \frac{R}{R_2}\,\frac{dR_2}{R_2}$$

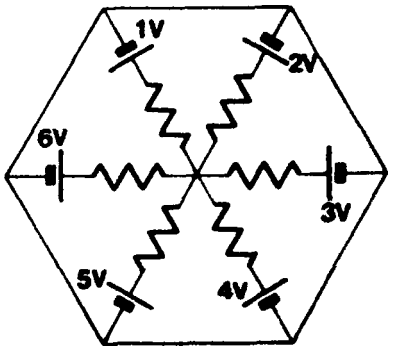
(β) Ἄν $R_1 = 100.00\ \Omega$ μέ ἀκρίβεια 0.01 %, ποιά πρέπει νά εἶναι ἡ ἀκρίβεια τῆς ἀντιστάσεως R_2 ὥστε ἡ ἀντίσταση R νά ἔχει τιμή 99.00 Ω μέ ἀκρίβεια 0.02 %;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6-2. Προσδιορίστε τό ρεῦμα σέ κάθε κλάδο τοῦ κυκλώματος

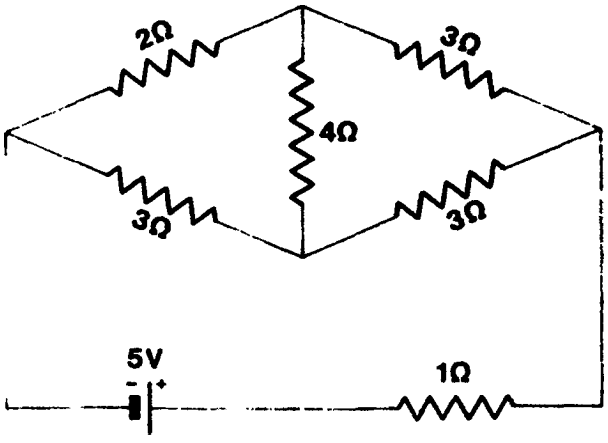


6-3. Χρησιμοποιεῖστε τό θεώρημα τῆς ἐπαλληλίας γιά νά προσδιορίσετε τό ρεῦμα σέ κάθε κλάδο τοῦ κυκλώματος



ὅπου καθεμιά ἀπό τίς ἀντιστάσεις ἔχει τιμή 5 Ω.

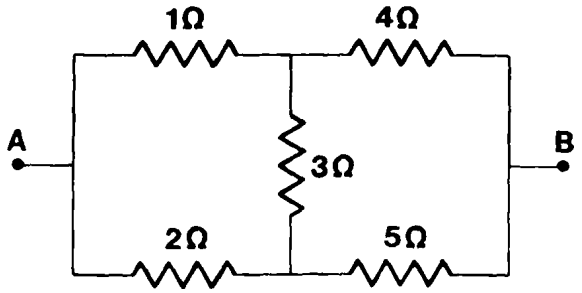
6-4. Χρησιμοποιώντας τό θεώρημα τοῦ Thévenin ὑπολογίστε τό ρεῦμα σέ κάθε κλάδο τοῦ κυκλώματος



6-5. Ἐπιλύστε τό κύκλωμα τῆς ἀσκήσεως 6-4 χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό τριγώνου σέ ἀστέρα.

6-6. Προσδιορίστε τήν ὁλική ἀντίσταση μεταξύ τῶν ἄκρων Α καί Β τοῦ κυκλώματος

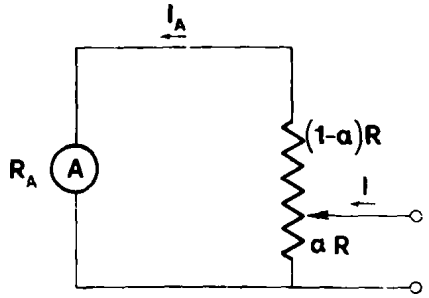
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό τριγώνου σέ άστέρα.

6-7. Προσδιορίστε τίς σχέσεις πού δίνουν τίς άντιστάσεις R_1, R_2 καί R_3 τοῦ τριγώνου τοῦ σχήματος 6-12 ὡς συνάρτηση τῶν άντιστάσεων R_A, R_B καί R_Γ τοῦ ἰσοδύναμου άστέρα. Χρησιμοποιεῖστε τίς σχέσεις αὐτές γιά νά προσδιορίσετε τήν ὁλική άντίσταση μεταξύ τῶν ἄκρων A καί B στό κύκλωμα τῆς άσκήσεως 6-6, άντικαθιστώντας ἕνα άστέρα μέ ἕνα τρίγωνο.

6-8. Ἡ **διακλάδωση Ayrton** χρησιμοποιεῖται συχνά γιά τή μεταβολή τῆς κλίμακας άμπερομέτρου. Σύμφωνα μέ τό κύκλωμα πού άκολουθεῖ

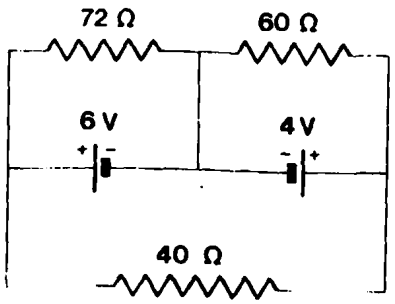


ἡ διακλάδωση Ayrton δημιουργεῖται μέ διοχέτευση τοῦ ρεύματος I σέ μιά ἐπαφή τῆς παράλληλης άντιστάσεως R πού όρίζει τό ποσοστό α τῆς ὁλικῆς τιμῆς. Δεῖξτε ὅτι τό ρεῦμα I_A πού διαρρέει τό άμπερόμετρο συνδέεται μέ τό ὁλικό ρεῦμα I διαμέσου τῆς ἐκφράσεως

$$I_A = \frac{\alpha R}{R + R_A} I$$

ὅπου R_A εἶναι ἡ ἐσωτερική άντίσταση τοῦ άμπερομέτρου.

6-9. Προσδιορίστε τά ρεύματα στούς κλάδους πού περιέχουν στοιχεῖα ΗΕΔ στό κύκλωμα



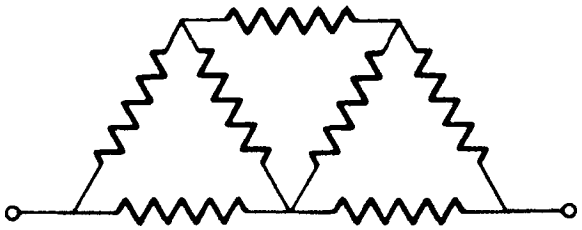
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6-10. Προσδιορίστε ἐμπειρικά, σχεδιάζοντας ἐναλλακτικά κυκλώματα, τόν ἐλάχιστο ἀριθμό κλάδων πού μπορεῖ νά διαθέτει ἕνα κύκλωμα μέ 2, 3, 4, 5 καί 6 κόμβους.

('Απάντηση: $\kappa_{min} = \frac{3}{2}\,\alpha$, α ἄρτιος,

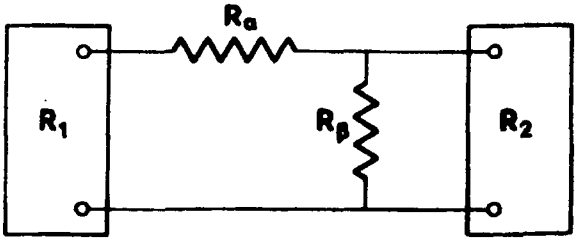
$$\kappa_{min} = \frac{3}{2}\,\alpha + \frac{1}{2},\ \alpha \text{ περιττός}).$$

6-11. Προσδιορίστε τήν ὁλική ἀντίσταση μεταξύ τῶν δύο ἄκρων τοῦ κυκλώματος



ἄν καθεμιά ἀπό τίς ἑπτά ἀντιστάσεις ἔχει τιμή 10 Ω.

6-12. Δεῖξτε ὅτι ἄν δύο συσκευές μέ ἐσωτερική ἀντίσταση R_1 καί R_2 συνδεθοῦν διαμέσου τοῦ κυκλώματος πού δημιουργοῦν οἱ δύο ἀντιστάσεις R_α καί R_β τοῦ σχήματος

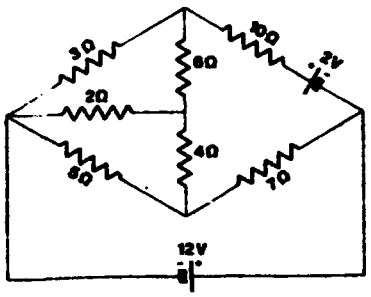


τότε ἡ ἐσωτερική καί ἐξωτερική ἀντίσταση στά ἄκρα κάθε συσκευῆς γίνονται ἴσες ἄν $R_1 > R_2$ καί

$$R_\alpha = R_1 \sqrt{1 - \frac{R_2}{R_1}},$$

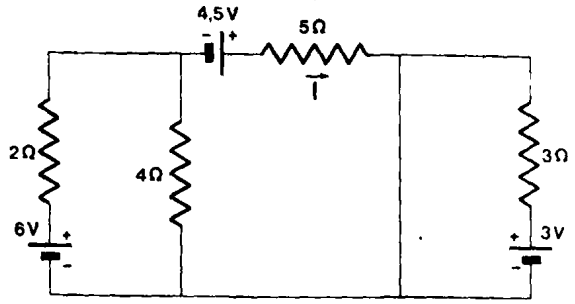
$$R_\beta = \frac{R_2}{\sqrt{1 - \frac{R_2}{R_1}}}.$$

6-13. Προσδιορίστε τά ρεύματα σέ ὅλους τούς κλάδους τοῦ κυκλώματος

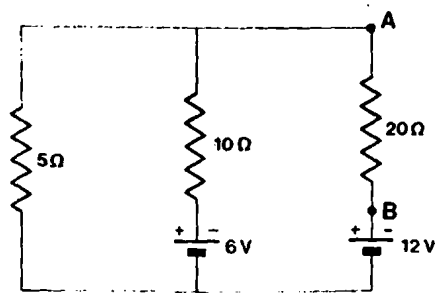


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6-14. Χρησιμοποιεῖστε τό θεώρημα τοῦ Thévenin γιά νά ὑπολογίσετε τό ρεῦμα I στό κύκλωμα



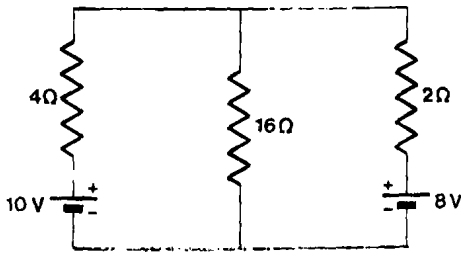
6-15. Χρησιμοποιεῖστε τό θεώρημα τοῦ Thévenin γιά νά προσδιορίσετε τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀντίσταση μέ τιμή 20 Ω στό κύκλωμα



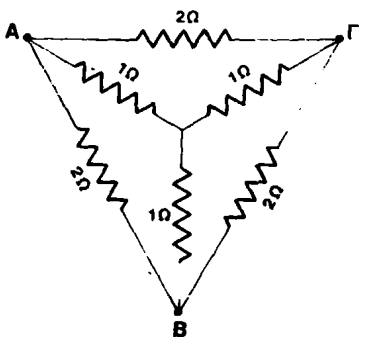
(α) διακόπτοντας τό κύκλωμα στά σημεῖα A καί B καί

(β) διακόπτοντας τό κύκλωμα στά σημεῖα A καί Γ.

6-16. Χρησιμοποιεῖστε τό θεώρημα τοῦ Norton γιά νά προσδιορίσετε τό ρεῦμα στήν ἀντίσταση τῶν 16 Ω τοῦ κυκλώματος



6-17. Προσδιορίστε τήν ὁλική ἀντίσταση μεταξύ τῶν σημείων AB, AΓ καί BΓ στό κύκλωμα



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

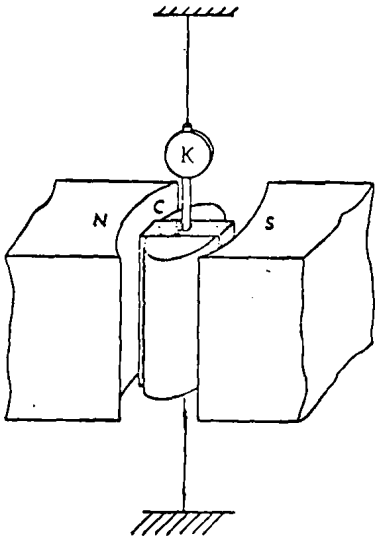
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

το γαλβανομετρο D'arsonval

Ἡ ἀρχή λειτουργίας τοῦ ἐργαστηριακοῦ ἀμπερομέτρου καί γενικώτερα τοῦ **ὀργάνου κινητοῦ πλαισίου** μελετήθηκε μέ λεπτομέρεια στό Κεφάλαιο 5. Ὅπως δείχνει τό σχῆμα 5-6 καί ἡ ἐξ. (5.7), ἕνα κινητό πηνίο ἀναρτημένο σέ ἕνα ἀκτινικό μαγνητικό πεδίο περιστρέφεται κατά μία γωνία θ ἀνάλογη πρός τό ρεῦμα I πού διαρρέει τό πηνίο. Τό **γαλβανόμετρο** καί εἰδικότερα τό **γαλβανόμετρο D'Arsonval** πού θά μελετήσουμε στό κεφάλαιο αὐτό βασίζεται στήν ἴδια ἀρχή λειτουργία. Ἡ κυριότερη διαφορά του ἀπό τό ἐργαστηριακό ἀμπερόμετρο βρίσκεται στό μηχανισμό ἀναρτήσεως τοῦ κινητοῦ πηνίου. Τό πηνίο τοῦ ἐργαστηριακοῦ ἀμπερομέτρου στηρίζεται σέ ἕνα λεπτό μεταλλικό ἄξονα ἐνῶ ἡ δύναμη ἐπαναφορᾶς δημιουργεῖται ἀπό ἕνα σπειροειδές ἐλατήριο προσαρμοσμένο στόν ἄξονα. Ἡ διάταξη αὐτή δημιουργεῖ ἕνα σταθερό καί σχετικά ἀνθεκτικό ὄργανο μετρήσεως μέ ἀντίστοιχη ὅμως μείωση τῆς εὐαισθησίας. Στό γαλβανόμετρο D'Arsonval ἡ ἀνάρτηση τοῦ κινητοῦ πηνίου γίνεται μέ μιά λεπτή μεταλλική ταινία, συνήθως ἀπό χρυσό. Ἡ μεταλλική ταινία ἀφενός ἐπιτρέπει τήν κίνηση τοῦ πηνίου κατά τόν ἄξονα τοῦ ἀκτινικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐνῶ ἀφετέρου δημιουργεῖ ροπή ἀνάλογη πρός τή γωνία ἀποκλίσεως πού τείνει νά ἐπαναφέρει τό πηνίο στή θέση Ισορροπίας.

Ἡ συνήθης διάταξη τοῦ γαλβανομέτρου D'Arsonval δίνεται στό σχῆμα 7-1. Ὅπως δείχνει τό σχῆμα, στό ἄνω μέρος τοῦ πηνίου βρίσκεται σταθερά προσαρμοσμένο ἕνα μικρό κάτοπτρο πού ἀκολουθεῖ τήν κίνηση τοῦ πη-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 7-1.
Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval.

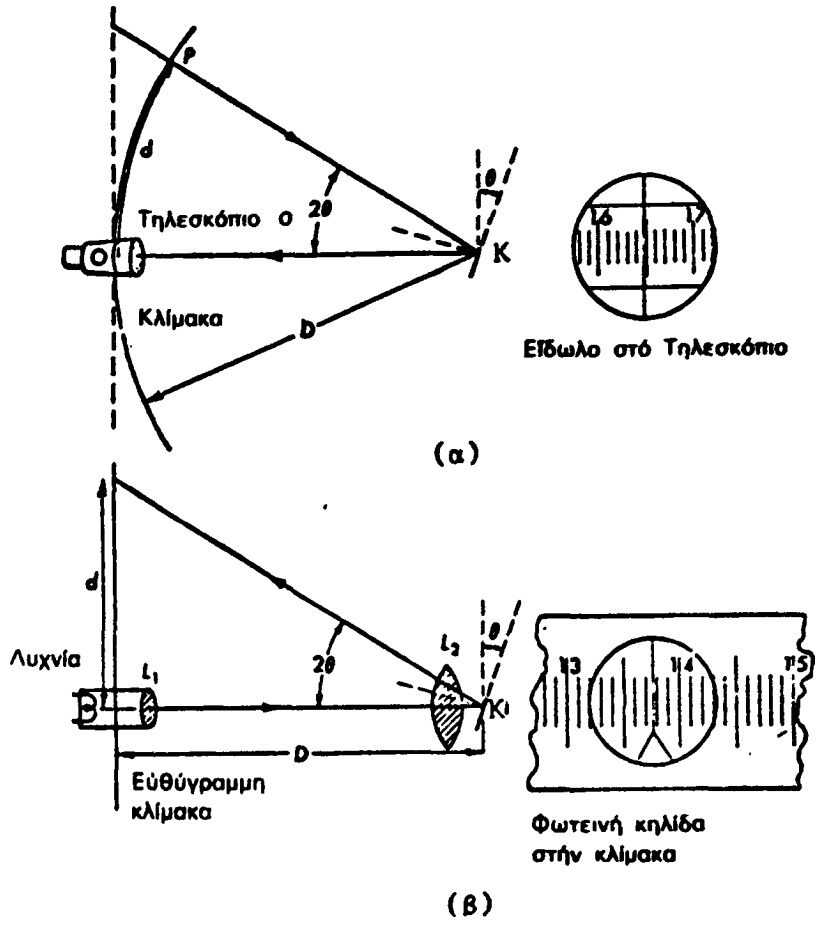
νίου. Σέ ἕνα εὐαίσθητο γαλβανόμετρο τό κάτοπτρο παίζει ρόλο ἀνάλογο πρός τόν δείκτη τοῦ ἐργαστηριακοῦ ἀμπερομέτρου. Δύο ἐναλλακτικές μέθοδοι, πού χρησιμοποιοῦνται συχνά γιά τή μετατροπή τῆς γωνίας ἀποκλίσεως τοῦ πηνίου σέ γραμμική κλίμακα μέσω τοῦ κατόπτρου, περιγράφονται στό σχῆμα 7-2. Στή διάταξη τοῦ σχήματος 7-2(α) ἕνα μικρό τηλεσκόπιο παρακολουθεῖ στό κάτοπτρο K τό εἴδωλο μιᾶς κυκλικῆς κλίμακας πού συνήθως εἶναι βαθμονομημένη σέ ἑκατοστόμετρα καί χιλιοστόμετρα. Ἡ κλίμακα καλύπτει ἕνα τόξο κύκλου μέ κέντρο τό κάτοπτρο καί ἀκτίνα D. Τό τηλεσκόπιο ἔχει ρυθμιστεῖ ἔτσι ὥστε τό κάθετο νῆμα συμπίπτει μέ τήν ἔνδειξη 0 τῆς κλίμακας ὅταν τό πηνίο δέν διαρρέεται ἀπό ρεῦμα. Τότε τό σημεῖο P, τοῦ ὁποίου τό εἴδωλο συμπίπτει μέ τό νῆμα τοῦ τηλεσκοπίου ὅταν τό πηνίο διαρρέεται ἀπό ρεῦμα I, ἀπέχει ἀπό τό σημεῖο 0 ἀπόσταση

$$d = 2\vartheta D = \frac{2}{\tau} NBAID \qquad (7.1)$$

ὅπου στό τελευταῖο σκέλος τῆς ἐξ. (7.1) ἔχει χρησιμοποιηθεῖ ἡ ἐξ. (5.7).

Ἡ διάταξη τοῦ σχήματος 7-2(β) χρησιμοποιεῖ μία λυχνία φωτισμοῦ καί ἕνα σύστημα φακῶν L_1, L_2. Ὁ φακός L_1 πού περιέχει μιά κάθετη γραμμή ἑστιάζει τή δέσμη στό κάτοπτρο τοῦ γαλβανομέτρου ἐνῶ ὁ φακός L_2 μέ ἑστιακή ἀπόσταση D/2 δημιουργεῖ τό εἴδωλο τοῦ φακοῦ L_1, μετά τήν ἀνάκλαση ἀπό τό κάτοπτρο K, στήν εὐθύγραμμη (συνήθως διαφανή) κλίμακα. Ἀπό τή γεωμετρία τοῦ σχήματος, ἡ ἀπόκλιση d πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἐξ. (7.1), δίνεται τώρα ἀπό τή σχέση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 7-2. Ὀπτικές διατάξεις γιά τήν ἀνάγνωση τῆς ἀποκλίσεως τοῦ κινητοῦ πηνίου στό γαλβανόμετρο. (α) Τηλεσκόπιο καί κυκλική κλίμακα. (β) Λυχνία καί εὐθύγραμμη κλίμακα.

$$d = D\tan 2\theta = D\tan\left(\frac{2}{\tau} NBAI\right) . \qquad (7.2)$$

Γιά μικρές ἀποκλίσεις τοῦ πηνίου ὅπου ἰσχύει ἡ προσέγγιση $\tan\theta \simeq \theta$, οἱ δύο ἐκφράσεις συμπίπτουν.

7-1 Εὐαισθησία τοῦ Γαλβανομέτρου

Κατά γενική πρακτική στίς διατάξεις τοῦ σχήματος 7-2 χρησιμοποιεῖται ἀπόσταση κλίμακας - γαλβανομέτρου D = 1 m. Ἡ **εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό ρεῦμα** S_I ὁρίζεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$S_I \equiv 1000 \frac{d}{DI} = 2000 \frac{NBA}{\tau} \qquad (7.3)$$

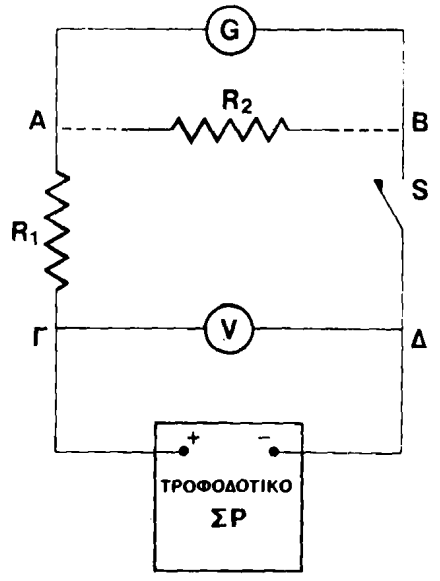
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί ἔχει διαστάσεις ἀντίστροφου ρεύματος. Παρόλα αὐτά, στή συνήθη γεωμετρία μέ ἀπόσταση D = 1 m, ὁ παράγοντας 1000 πού ἔχει συμπεριληφθεῖ στόν ὁρισμό ἐπιτρέπει τήν ἑρμηνεία τῆς ποσότητας S_I ὡς *τήν ἀπόκλιση d σέ mm πού προκαλεῖται ἀπό ρεῦμα 1 A*. Γιά τό λόγο αὐτό πολλέ φορές ἡ εὐαισθησία ὡς πρός τό ρεῦμα ἀναφέρεται σέ *χιλιοστόμετρα ἀν ampère*.

Σέ πολλές ἐφαρμογές τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι χρησιμότερο νά γνωρίζουμε τήν ἀπόκλιση γιά μιά συγκεκριμένη διαφορά δυναμικοῦ παρά γιά ἕνα συγκεκριμένο ρεῦμα. Ἄν στούς ἀκροδέκτες τοῦ γαλβανομέτρου δημιουργηθεῖ διαφορά δυναμικοῦ V καί ἡ ἀντίσταση τοῦ κινητοῦ πηνίου εἶναι R_g, τότε θά διαρεύσει ρεῦμα $I = V/R_g$. Ἡ ποσότητα πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἐξ. (7.3) καί πού μποροῦμε νά ὀνομάσουμε **εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό δυναμικό** δίνεται ἀπό τή σχέση

$$S_V \equiv 1000\,\frac{d}{DV} = 1000\,\frac{d}{DIR_g} = 2000\,\frac{NBA}{\tau R_g} = \frac{S_I}{R_g} \qquad (7.4)$$

καί μετρᾶται σέ V^{-1} ἤ *σέ χιλιοστόμετρα ἀνά volt* γιά τή συνήθη γεωμετρία μέ ἀπόσταση κλίμακας - γαλβανομέτρου D = 1 m. Τήν ἀντίσταση R_g καί τήν εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου θά προσδιορίσουμε στό ἑπόμενο πείραμα.



ΣΧΗΜΑ 7-3 Κύκλωμα γιά τόν προσδιορισμό τῆς εὐαισθησίας γαλβανομέτρου. Ἡ παράλληλη ἀντίσταση R_2 μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ σέ δεύτερο στάδιο γιά τή μέτρηση τῆς ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως τοῦ ὀργάνου ὅπως περιγράφεται στό Πείραμα 7-1.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ 7-1. ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ ΚΑΙ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ ΤΟΥ ΓΑΛΒΑΝΟΜΕΤΡΟΥ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-3. Ἡ ἀντίσταση R_1 εἶναι μιά σταθερή ἀντίσταση τῆς τάξης τῶν μερικῶν ΜΩ. Τό βολτόμετρο V μετρᾶ τή διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως $R_1 + R_g$, ὅπου R_g εἶναι ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου.

- Μέ δυναμικό $V \simeq 0$ κλεῖστε τό διακόπτη S. Αὐξεῖστε τό δυναμικό τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ στήν τιμή 1 V. Θά χρειαστεῖ νά περιμένετε ἴσως γιά λίγο χρόνο ὥστε τό γαλβανόμετρο νά ἰσορροπίσει στήν τελική του ἀπόκλιση. Τό γαλβανόμετρο εἶναι ἕνα ἐξαιρετικά εὐαίσθητο ὄργανο καί ὁποιοσδήποτε κραδασμός προκαλεῖ ταλαντώσεις. Ἰδιαίτερα ὁ τοῖχος στόν ὁποῖο εἶναι ἀναρτημένο πρέπει νά εἶναι ἐλεύθερος ἀπό κραδασμούς (μήν ἀκουμπᾶτε στόν τοῖχο ὅταν παίρνετε μετρήσεις!). Πάντως γιά τήν ἀνάγνωση τῆς ἀποκλίσεως εἶναι δυνατόν νά ἐκμεταλευτοῦμε τό γεγονός ὅτι τό πλάτος τῶν ταλαντώσεων τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι συμμετρικό γύρω ἀπό τή θέση τελικῆς ἀποκλίσεως. Παρατηρώντας ἑπομένως δύο διαδοχικά μέγιστα τῆς ταλαντώσεως μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τή θέση τῆς τελικῆς ἀποκλίσεως. Ἐκτιμεῖστε τό πειραματικό σφάλμα στήν ἀνάγνωση τοῦ δυναμικοῦ, τῆς ἀποκλίσεως τοῦ γαλβανομέτρου (σέ mm) καί στήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_1.

- Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία αὐξάνοντας σταδιακά τό δυναμικό τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ κατά 1 V. Σέ κατάλληλο πίνακα καταγράψτε τό δυναμικό V καί τήν ἀντίστοιχη ἀπόκλιση, σημειώνοντας καί τά ἀντίστοιχα σφάλματα στίς μετρήσεις. Συνεχίστε νά παίρνετε μετρήσεις μέχρι ὁλική ἀπόκλιση 20 cm περίπου. Σέ μιά τρίτη στήλη τοῦ πίνακα ὑπολογίστε τό ρεῦμα (καί τό ἀντίστοιχο σφάλμα) πού διαρρέει τό γαλβανόμετρο γιά κάθε μέτρηση. Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό ρεῦμα. Γιά κάθε σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως σημειῶστε μέ μιά ὁριζόντια γραμμή τό σφάλμα στόν προσδιορισμό τοῦ ρεύματος καί μέ μιά κατακόρυφη γραμμή τό σφάλμα στή μέτρηση τῆς ἀποκλίσεως. Προσαρμόστε στά δεδομένα τήν καλύτερη εὐθεία καί ἀπό τήν κλίση προσδιορίστε τήν εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό ρεῦμα.

Ρυθμίστε τό δυναμικό V ὥστε τό γαλβανόμετρο νά ἀποκλίνει κατά 15 cm περίπου. Συνδέστε παράλληλα πρός τό γαλβανόμετρο τό κιβώτιο ἀντιστάσεως R_2 καί ρυθμίστε τήν τιμή του ὥστε ἡ ἔνδειξη τοῦ γαλβανομέτρου νά εἶναι ἡ μισή ἀπό τήν προηγούμενη. Ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_2 εἶναι τώρα ἴση μέ τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ ὀργάνου R_g. Ἀποδεῖξτε ὅτι τοῦτο ἀληθεύει. Μέ πόση ἀκρίβεια; Διπλασιάστε τό δυναμικό V καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

παρατηρεῖστε τή νέα ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Σχολιάστε τό ἀποτέλεσμα.

— Ἀπό τά προηγούμενα ἀποτελέσματα προσδιορίστε τήν εὐαισθησία S_V τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό δυναμικό.

7-2 Κίνηση τοῦ Γαλβανομέτρου

Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval εἶναι ἕνας λεπτός μηχανισμός μέ ἀρκετά πολύπλοκη ἀλληλεπίδραση μηχανικῶν καί ἠλεκτρομαγνητικῶν φαινομένων. Ἡ λειτουργία του περιλαμβάνει μεταβατικές καταστάσεις πού ἐνδιαφέρουν ὅσο καί ἡ κατάσταση ἰσορροπίας. Ὁ χρόνος π.χ. πού ἀπαιτεῖται γιά νά φτάσει τό γαλβανόμετρο στήν κατάσταση ἰσορροπίας ἐνδιαφέρει ἐξίσου μέ τό μέγεθος τῆς ὁλικῆς ἀποκλίσεως. Ἡ ἐξίσωση πού διέπει τήν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό τή θεώρηση τοῦ συνόλου τῶν ροπῶν πού ἀναπτύσσονται στόν κινητό πηνίο. Ἡ ροπή πού δημιουργεῖ τό ἠλεκτρικό ρεῦμα I ἔχει ἤδη ἐξεταστεῖ στήν Παράγραφο 5-1 καί δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$T = NBAI \tag{7.5}$$

ὅπου B εἶναι ἡ ἔνταση τοῦ ἀκτινικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, N τό πλῆθος τῶν βρόχων τοῦ πηνίου καί A τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας κάθε βρόχου. Στή ροπή αὐτή ἀντιτίθεται ἡ στρέψη τῆς ταινίας ἀναρτήσεως μέ ροπή ἀνάλογη πρός τή γωνία περιστροφῆς

$$T_1 = -\tau\vartheta \tag{7.6}$$

ὅπου τ εἶναι ἡ σταθερά στρέψεως τῆς ταινίας (ροπή ἀνά μονάδα γωνίας). Γιά τήν περισσότερο ρεαλιστική ἀπόδοση τῆς κινήσεως τοῦ γαλβανομέτρου θά πρέπει ἀκόμη νά συμπεριλάβουμε μιά ροπή τριβῆς πού δημιουργεῖ ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀέρας. Ὅπως κάθε ἀντίδραση τριβῆς θά θεωρήσουμε ὅτι ἡ τελευταία ροπή εἶναι ἀνάλογη πρός τήν ταχύτητα (σέ περίπτωση στρέψεως, πρός τή γωνιακή ταχύτητα) καί θά γράψουμε

$$T_2 = -r_0 \frac{d\vartheta}{dt} \tag{7.7}$$

ὅπου r_0 εἶναι μιά σταθερά, πού θά ὀνομάσουμε **σταθερά ἀποσβέσεως.** Τέ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

λος, γιά τήν άπόδοση τῆς κινήσεως τοῦ πηνίου, θά πρέπει άκόμη νά έξετάσουμε τήν έπίδραση τοῦ έξωτερικοῦ κυκλώματος μέ τό ὁποῖο ἔχει συνδεθεῖ τό γαλβανόμετρο. Κατά τήν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου μέ γωνιακή ταχύτητα $d\theta/dt$, ή μεταβολή τῆς ροῆς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου Φ διαμέσου τοῦ πηνίου δημιουργεῖ μιά ΗΕΔ, ή ὁποία σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Faraday [βλ. Κεφάλαιο 11] δίνεται άπό τή σχέση

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -NBA\frac{d\theta}{dt} \quad . \tag{7.8}$$

Ἄν R_g εἶναι ή άντίσταση τοῦ πηνίου καί R_d ή άντίσταση τοῦ έξωτερικοῦ κυκλώματος τότε τό ρεῦμα πού θά διαρρεύσει στό κύκλωμα εἶναι

$$I = \frac{U}{R_g + R_d} \tag{7.9}$$

ένῶ ή κατανάλωση ἰσχῆς

$$P = \frac{U^2}{R_g + R_d} = \frac{N^2B^2A^2}{R_g + R_d}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad . \tag{7.10}$$

Ἡ τελευταία ἰσχή, πού τελικά έγκαταλείπει τό σύστημα ὑπό μορφή θερμότητας, τροφοδοτεῖται άπό τήν κινητική ένέργεια τοῦ πηνίου. Μέ άλλα λόγια ή έπαγωγική ΗΕΔ τῆς έξ. (7.8) δημιουργεῖ στό πηνίο μιά ροπή τριβῆς πού σέ άναλογία μέ τήν έξ. (7.7) θά γράψουμε ὡς

$$T_3 = -r_d\frac{d\theta}{dt} \tag{7.11}$$

μέ κατανάλωση μηχανικῆς ἰσχῆς

$$P = -T_3\frac{d\theta}{dt} = r_d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad . \tag{7.12}$$

Ἐξισώνοντας τίς έξ. (7.10) καί (7.12) μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τό συντελεστή άποσβέσεως πού δημιουργεῖ ή έπαγωγική ΗΕΔ ὡς

$$r_d = \frac{N^2B^2A^2}{R_g + R_d} \quad .$$

Ἡ έξίσωση πού διέπει τήν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου μπορεῖ τώρα νά γραφεῖ ὡς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$M\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = T + T_1 + T_2 + T_3 = NBAI - \tau\vartheta - r_0\frac{d\vartheta}{dt} - r_d\frac{d\vartheta}{dt}$$

ἤ

$$M\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + r\frac{d\vartheta}{dt} + \tau\vartheta = NBAI \tag{7.13}$$

ὅπου M εἶναι ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ κινητοῦ πηνίου καί

$$r = r_0 + r_d = r_0 + \frac{N^2B^2A^2}{R_g + R_d}. \tag{7.14}$$

Παρατηρεῖται ὅτι ἡ κατάσταση ἰσορροπίας ($d\vartheta/dt = 0$) πού προβλέπει ἡ ἐξ. (7.13) ταυτίζεται μέ τή συνθήκη τῆς ἐξ. (5.7) γιά τήν τελική ἀπόκλιση ϑ_f τοῦ ἀμπερομέτρου

$$\vartheta_f = \frac{NBAI}{\tau}.$$

Ἡ ἐξ. (7.13) μπορεῖ νά μεταβληθεῖ σέ ὁμογενή διαφορική ἐξίσωση δεύτερου βαθμοῦ μέ μετασχηματισμό τῆς μεταβλητῆς ὡς

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2} + r\frac{d\alpha}{dt} + \tau\alpha = 0 \tag{7.15}$$

ὅπου

$$\alpha \equiv \vartheta - \vartheta_f. \tag{7.16}$$

Οἱ λύσεις τῆς ἐξ. (7.15) εἶναι γνωστές ἀπό τό πρόβλημα τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ. Μιά εἰδική λύση εἶναι ἡ συνάρτηση

$$\alpha = e^{pt} \tag{7.17}$$

πού μέ ἀντικατάσταση τῶν παραγώγων

$$\frac{d\alpha}{dt} = pe^{pt}, \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = p^2e^{pt} \tag{7.18}$$

δίνει τή συνθήκη πού πρέπει νά ἱκανοποιεῖ ὁ ἐκθέτης p

$$Mp^2 + rp + \tau = 0. \tag{7.19}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Γιά νά ἱκανοποιεῖται ἑπομένως ἡ διαφορική ἐξίσωση (7.15) θά πρέπει ὁ ἐκθέτης p νά ἔχει τιμή

$$p_{\pm} = -\frac{r}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2M}\right)^2 - \frac{\tau}{M}} \,. \tag{7.20}$$

ὅπου ὁ δείκτης + ἤ − ἀναφέρεται ἀντίστοιχα στό ἐναλλακτικό πρόσημο τοῦ δεύτερου ὅρου.

Ἡ μορφή τῶν λύσεων τῆς ἐξ. (7.15) ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τῶν ἀριθμῶν $p_{\pm}$ στήν ἐξ. (7.20). Γιά τή διερεύνηση τῶν λύσεων εἶναι χρήσιμο νά ὁρίσουμε τίς ποσότητες

$$\gamma \equiv \frac{r}{2M} \tag{7.21α}$$

πού θά ὀνομάσουμε **ἀνηγμένο συντελεστή ἀποσβέσεως** τοῦ γαλβανομέτρου καί

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{\tau}{M}} \,. \tag{7.21β}$$

Θά ἀναφερθοῦμε στήν ποσότητα $\omega_0/2\pi$ μέ τόν ὅρο **φυσική συχνότητα** τοῦ γαλβανομέτρου. Εἶναι ἀκόμη χρήσιμο νά ὁρίσουμε τήν ποσότητα

$$\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \,. \tag{7.21γ}$$

Μέ τή βοήθεια τῶν ὁρισμῶν στίς ἐξ. (7.21) θά διακρίνουμε τρεῖς περιπτώσεις:

(α) $\gamma < \omega_0$.

Στήν περίπτωση αὐτή ὁ ἐκθέτης τῆς ἐξ. (7.17) εἶναι μιγαδικός ἀριθμός

$$P_{\pm} = -\gamma \pm i\omega \,. \tag{7.22}$$

Καθόσον οἱ συναρτήσεις $\alpha = e^{p_+ t}$ καί $\alpha = e^{p_- t}$ ἀποτελοῦν δύο ἀνεξάρτητες εἰδικές λύσεις, ἡ γενική λύση τῆς ἐξ. (7.15) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\alpha = C_1 e^{-\gamma t + i\omega t} + C_2 e^{-\gamma t - i\omega t} = e^{-\gamma t}(C_2 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \tag{7.23}$$

ὅπου C_1 καί C_2 εἶναι δύο αὐθαίρετοι μιγαδικοί ἀριθμοί.

Εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι γιά νά εἶναι πραγματικός ἀριθμός ἡ γενική

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

λύση τῆς ἐξ. (7.23), οἱ συντελεστές C_1 καί C_2 πρέπει νά εἶναι μιγαδικοί συζυγεῖς. Γράφοντας

$$C_1 = \tfrac{1}{2} A e^{i\varphi} \qquad C_2 = \tfrac{1}{2} A e^{-i\varphi} \tag{7.24}$$

ἡ ἐξ. (7.23) μετασχηματίζεται στή μορφή

$$\alpha = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \tag{7.25}$$

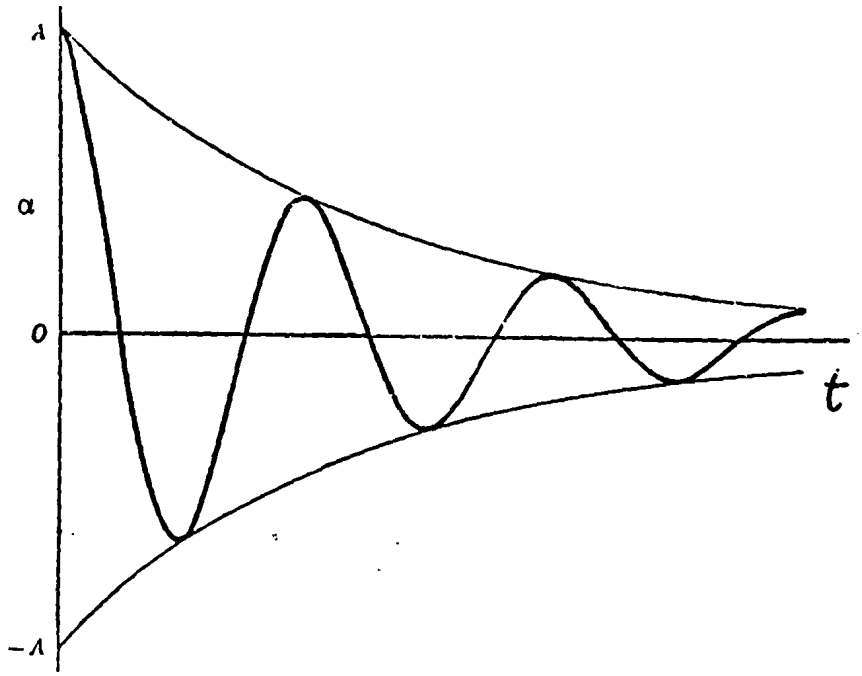
ὅπου οἱ σταθερές A καί φ μποροῦν νά προσδιοριστοῦν ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες.

Ἡ λύση τῆς ἐξ. (7.25) δίνεται στήν γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 7-4, ὅπου σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (7.16), ὁ κάθετος ἄξονας ἀντιπροσωπεύει τή διαφορά τῆς στιγμαίας ἀποκλίσεως ϑ ἀπό τήν τελική ἀπόκλιση ϑ_f καί ὁ ὁριζόντιος ἄξονας τό χρόνο. Ἡ κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι φθήνουσα ταλάντωση γύρω ἀπό τή θέση τελικῆς ἀποκλίσεως ϑ_f ἐνῶ τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως μειώνεται ἀσυμπτωτικά σύμφωνα μέ τή συνάρτηση $Ae^{-\gamma t}$.

(b) $\gamma > \omega_0$.

Οἱ δύο λύσεις τῆς ἐξ. (7.19) εἶναι ἀρνητικοί πραγματικοί ἀριθμοί

$$P_- = -\gamma_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{7.26a}$$



ΣΧΗΜΑ 7-4 Κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου γιά $\gamma < \omega_0$. Ἡ λεπτή καμπύλη περιγράφει τή μείωση τοῦ πλάτους τῆς ταλαντώσεως.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$P_+ = -\gamma_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad (7.26\beta)$$

καί ἡ γενική λύση

$$\alpha = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \ . \qquad (7.27)$$

Οἱ δύο ὅροι στήν τελευταία ἔκφραση φθήνουν ἐκθετικά (ὁ πρῶτος πιό γρήγορα ἀπό τό δεύτερο), ἐνῶ οἱ πραγματικοί ἀριθμοί C_1 καί C_2 μποροῦν νά προσδιοριστοῦν ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες.

(c) $\gamma = \omega_0$.

Στήν περίπτωση αὐτή οἱ δύο λύσεις τῆς ἐξ. (7.19) ἐκφυλίζονται σέ μία

$$\rho = -\gamma \qquad (7.28)$$

καί μιά εἰδική λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (7.15) εἶναι

$$\alpha = e^{-\gamma t} \ . \qquad (7.29)$$

Ὅπως εἶναι εὔκολο νά ἀποδειχτεῖ μέ ἀπευθείας ἀντικατάσταση, γιά τήν εἰδική περίπτωση $\omega_0 = \gamma$, μιά δεύτερη εἰδική λύση μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ ἄν πολλαπλασιάσουμε τή συνάρτηση τῆς ἐξ. (7.29) μέ τό χρόνο. Ἡ γενική ἑπομένως λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\alpha = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t} \ . \qquad (7.30)$$

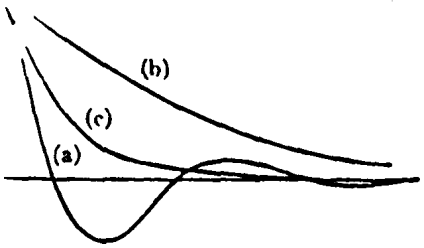
Ἡ τελευταία συνάρτηση φθήνει μέ ρυθμό ἐνδιάμεσο μεταξύ τῶν δύο ὅρων τῆς ἐξ. (7.27), καθόσον ἀπό τίς ἐξ. (7.26)

$$\gamma_1 > \gamma > \gamma_2 \ . \qquad (7.31)$$

Ἄν ἐξαιρέσουμε ἑπομένως τήν εἰδική περίπτωση $C_2 = 0$ στή λύση τῆς ἐξ. (7.27) ἡ λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (7.15) μηδενίζεται ταχύτερα γιά τή συνθήκη $\gamma = \omega_0$.

Οἱ λύσεις τῆς ἐξ. (7.15) στίς τρεῖς περιπτώσεις πού διερευνήσαμε συγκρίνονται στή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 7-5. Γιά ἕνα συγκεκριμένο ἀνηγμένο συντελεστή ἀποσβέσεως γ ἤ μιά συγκεκριμένη φυσική συχνότητα ω_0 ἡ τελική κατάσταση ἐπιτυγχάνεται στό μικρότερο δυνατό χρόνο γιά $\omega_0 = \gamma$. Θά ὀνομάσουμε τή συνθήκη αὐτή, συνθήκη **κρίσιμης ἀποσβέσεως.** Γιά $\omega_0 < \gamma$ τό γαλβανόμετρο ἀντιδρᾶ μέ νωθρότητα καί ἡ τελική ἔνδειξη ἐπιτυγχάνεται μετά ἀπό ἀρκετό χρόνο. Στήν περίπτωση αὐτή τό σύ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 7-5 Κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου γιά τίς συνθῆκες
(a) $\gamma < \omega_0$
(ὑποκρίσιμη ἀπόσβεση)
(b) $\gamma > \omega_0$
(ὑπερκρίσιμη ἀπόσβεση)
(c) $\gamma = \omega_0$
(κρίσιμη ἀπόσβεση).

στημα βρίσκεται σέ κατάσταση **ὑπερκρίσιμης ἀποσβέσεως.** Ἡ κατάσταση **ὑποκρίσιμης ἀποσβέσεως,** στήν ὁποία ἱκανοποιεῖται ἡ ἀντίστροφη συνθήκη $\omega_0 > \gamma$, περιγράφεται ἀπό τή καμπύλη (a) τοῦ σχήματος 7-5. Τό σύστημα ταλαντοῦται γύρω ἀπό τήν τελική ἔνδειξη, στήν ὁποία ἰσορροπεῖ ἀσυμπτωτικά καί σέ χρόνο μεγαλύτερο ἀπό τό χρόνο τῆς κρίσιμης ἀποσβέσεως.

Ἡ κατάσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως, πού συνήθως θεωρεῖται ἡ ἐπιθυμητή γιά τή λειτουργία τοῦ γαλβανομέτρου, ἐπιτυγχάνεται ὅταν ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη

$$\gamma = \omega_0$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$r = 2\sqrt{\tau M} \ . \tag{7.32}$$

Χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (7.14), ἡ τελευταία συνθήκη μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

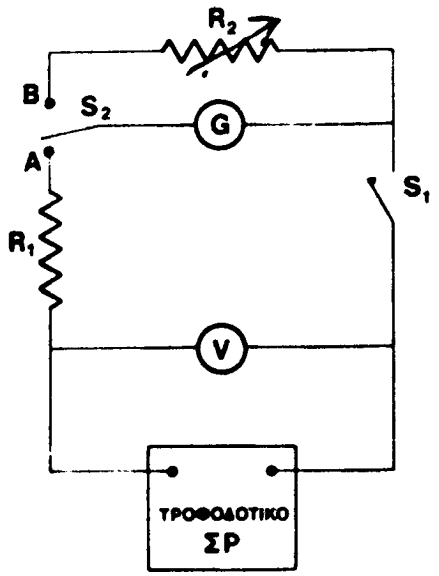
$$r = r_0 + \frac{N^2B^2A^2}{R_g + R_d} = 2\sqrt{\tau M} \tag{7.33}$$

ἤ

$$R_d = \frac{N^2B^2A^2}{2\sqrt{\tau M} - r_0} - R_g \tag{7.34}$$

ὅπου ὅλοι οἱ παράγοντες στό δεξιό μέρος τῆς ἐξ. (7.34) ἐξαρτῶνται ἀποκλειστικά ἀπό τήν κατασκευή τοῦ ὀργάνου. Γιά νά εἶναι ἐπομένως δυνατή ἡ κατάσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως θά πρέπει ἀφενός ἡ ἀντίσταση τριβῆς πού δημιουργεῖ ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀέρας νά εἶναι μικρή ὥστε ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος στήν ἐξ. (7.34) νά ἀντιπροσωπεύει θετική ποσότητα ($r_0 < 2\sqrt{\tau M}$). Ἀφετέρου ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου πρέπει νά εἶναι ἀρκετά μικρή ὥστε ἡ ὅλη ἔκφραση νά ἔχει θετική τιμή. Στήν ἀντίθετη περίπτωση ἡ ἐξωτερική ἀντίσταση εἶναι πάντα μεγαλύτερη ἀπό τήν ποσότητα τῆς ἐξ. (7.34) καί τό γαλβανόμετρο βρίσκεται πάντα στήν κατάσταση ὑπερκρίσιμης ἀποσβέσεως. Στά συνήθη εὐαίσθητα γαλβανόμετρα ἡ ποσότητα πού ὁρίζε-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 7-6 Κύκλωμα γιά τόν προσδιορισμό τῆς **ἀντιστάσεως κρίσιμης ἀποσβέσεως** (CDRX) στό Πείραμα 7-2.

ται στήν ἐξ. (7.34) εἶναι θετικός ἀριθμός καί ὁ χειριστής τοῦ ὀργάνου καλεῖται νά ρυθμίσει τήν ἀντίσταση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος ὥστε νά ἰσχύει ἡ συνθήκη κρίσιμης ἀποσβέσεως τῆς ἐξ. (7.34). Γιά τό λόγο αὐτό πολλοί κατασκευαστές γαλβανομέτρων ἀναγράφουν στό περίβλημα τοῦ ὀργάνου τήν τιμή τῆς **ἀντιστάσεως κρίσιμης ἀποσβέσεως**, ἡ ὁποία συνήθως συμβολίζεται μέ τά γράμματα CDRX (ἀπό τόν ἀγγλικό ὅρο critical damping resistance external). Ἄν δέν εἶναι γνωστή, ἡ ἀντίσταση CDRX μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ πειραματικά.

ΠΕΙΡΑΜΑ 7-2. ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΚΡΙΣΙΜΗΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ ΤΟΥ ΓΑΛΒΑΝΟΜΕΤΡΟΥ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-6. Ὅπως καί στό Πείραμα 7-1 ἡ ἀντίσταση R_1 ἔχει τιμή μερικῶν ΜΩ. Ἡ ἀντίσταση R_2 εἶναι ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων.

– Κλεῖστε τόν διακόπτη S_2 στή θέση A. Κλεῖστε τόν διακόπτη S_1 καί ρυθμίστε τό δυναμικό τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ ὥστε τό γαλβανόμετρο νά ἀποκλίνει κατά 20 cm περίπου. Μέ $R_2 = \infty$ (ἀποσυνδέστε τό ἕνα ἄκρο τῆς ἀντιστάσεως R_2) μεταβάλετε γρήγορα τή θέση τοῦ διακόπτη S_2 ἀπό τή θέση A στή θέση B καί παρατηρεῖστε τήν ταλάντωση τοῦ γαλβανομέτρου μέχρις ὅτου σταματήσει νά κινεῖται. Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση, παρόμοια πρός τό σνῆμα 7-4, τήν ταλάντωση ὡς συνάρτηση τοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χρόνου. Ἡ διεργασία αὐτή διευκολύνεται ἄν μετρήσετε κατ' ἀρχάς τό χρόνο μιᾶς περιόδου (γιά μεγαλύτερη ἀκρίβεια μετρεῖστε τό χρόνο 10 ταλαντώσεων καί διαιρέστε διά τοῦ 10). Στή συνέχεια μετρεῖστε καί καταγράψτε σέ κατάλληλο πίνακα τίς διαδοχικές ἀκραῖες τιμές τῶν ταλαντώσεων.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά $R_2 = 0$. Ἀποδῶστε τήν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου στήν ἴδια γραφική παράσταση.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία αὐξάνοντας σταδιακά τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_2 μέχρις ὅτου προσδιορίσετε τήν ἀντίσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως. Ἀποδῶστε τήν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου στήν προηγούμενη γραφική παράσταση γιά τήν τιμή $R_2 =$ CDRX.

– Κλεῖστε τό διακόπτη S_2 στή θέση A ἤ B καί συνδέστε τά σημεῖα A καί B. Ρυθμίστε τό κιβώτιο ἀντιστάσεων R_2 στήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως κρίσιμης ἀποσβέσεως πού μόλις προσδιορίσατε. Μεταβάλετε τό δυναμικό τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ παρακολουθώντας τήν ἀπόκριση τοῦ γαλβανομέτρου. Περιγράψτε ποιοτικά τή συμπεριφορά τοῦ ὀργάνου καί ἐξηγεῖστε τό ἀποτέλεσμα.

Στό προηγούμενο πείραμα ἡ ἐξωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου ἦταν κατά πολύ μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀντίσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως τῆς ἐξ. (7.34). Γιά τό λόγο αὐτό χρειάστηκε ἡ σύνδεση μιᾶς παράλληλης ἀντιστάσεως, ἤ **διακλαδώσεως**, γιά τήν ἐξάλειψη τῶν ταλαντώσεων τοῦ ὀργάνου. Αὐτή εἶναι συνήθως καί ἡ κατάσταση πού ἀπαντᾶται στίς περισσότερες ἐφαρμογές καί ἡ ἀντιμετώπισή της θά μελετηθεῖ μέ μεγαλύτερη λεπτομέρεια στήν ἑπόμενη παράγραφο. Τό τίμημα πού συνεπάγεται ἡ σύνδεση τῆς διακλαδώσεως εἶναι μιά σχετική μείωση τῆς εὐαισθησίας τοῦ ὀργάνου ὡς πρός τό ρεῦμα. Στήν ἀντίθετη περίπτωση ὅπου ἡ ἐξωτερική ἀντίσταση ὑπολείπεται ἀπό τήν ποσότητα τῆς ἐξ. (7.34), ἡ νωθρότητα τοῦ ὀργάνου μπορεῖ νά ἐξαληφθεῖ μέ σύνδεση κατάλληλης ἀντιστάσεως σέ σειρά μέ τό γαλβανόμετρο. Τό τίμημα στήν περίπτωση αὐτή εἶναι μείωση τῆς εὐαισθησίας ὡς πρός τό δυναμικό.

7-3 Διακλάδωση τοῦ Γαλβανομέτρου

Ὅπως εἴδαμε στήν Παράγραφο 5-1, ἄν τό ρεῦμα πού πρόκειται νά μετρηθεῖ ἀπό ἕνα ἀμπερόμετρο (ἤ γαλβανόμετρο) ἔχει ὑψηλή τιμή, ἡ κλίμακα τοῦ ὀργάνου μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ μέ παράλληλη σύνδεση μιᾶς διακλαδώσεως. Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (5.10) ἄν I εἶναι τό ὁλικό ρεῦμα στό ἐξωτερικό κύκλωμα καί R_g, R_s ἀντίστοιχα οἱ ἀντιστάσεις τοῦ γαλβανομέτρου καί τῆς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

διακλαδώσεως, τότε τό ρεῦμα πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο εἶναι

$$I_g = I \frac{R_s}{R_g + R_s} \tag{7.35}$$

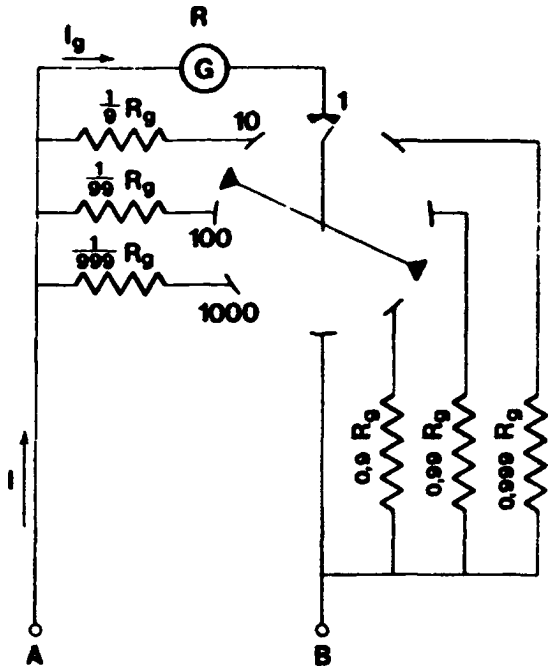
Ἀντίστροφα, ἡ σχέση

$$I = I_g \frac{R_g + R_s}{R_s} \tag{7.36}$$

μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τήν ἀναγωγή τοῦ ρεύματος I_g πού μετρᾶται ἀπό τό ὄργανο σέ ρεῦμα I πού διαρρέει τό ἐξωτερικό κύκλωμα. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ ἀναγωγή γίνεται εὐκολώτερα ἄν ἡ διάκλωση R_s ἐπιλεγεῖ ὡς

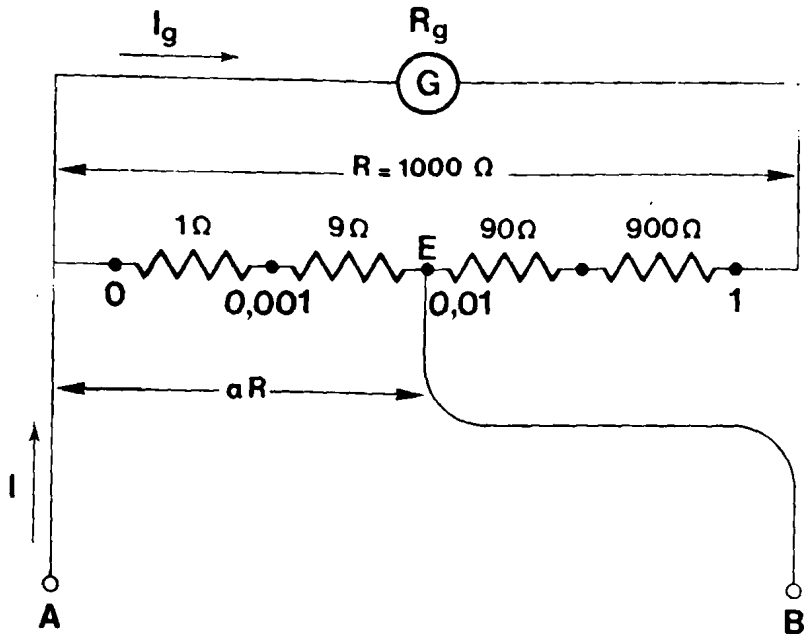
$$\frac{1}{9} R_g, \qquad \frac{1}{99} R_g, \qquad \frac{1}{999} R_g, \quad \text{κ.λ.π.},$$

ὥστε ὁ λόγος $(R_g + R_s)/R_s$ νά πάρει τήν τιμή ἀντίστοιχα 10, 100, 1000, κ.λ.π. Μιά διάταξη πού ἐπιτρέπει τήν ἐπιλογή δεκαπλάσιας, ἑκατονταπλάσιας, κ.λ.π. κλίμακας γιά τό γαλβανόμετρο δίνεται στό σχῆμα 7-7. Παρατηρεῖται ὅτι μέ τήν παρεμβολή τῆς διακλαδώσεως ἡ ὁλική ἀντίσταση τοῦ



ΣΧΗΜΑ 7-7 Διάταξη ἐπιλογῆς διακλαδώσεων γαλβανομέτρου. Γιά τίς τιμές τῶν ἀντιστάσεων πού περιέχονται στή διάταξη, ἡ ἀντίστοιχη ἐπαφή τοῦ διακόπτη S ὑποδεκαπλασιάζει, ὑποεκατονταπλασιάζει, κ.λ.π. τό ρεῦμα πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 7-8 Διακλάδωση Ayrton.

έξωτερικοῦ κυκλώματος, μπορεῖ νά μειωθεῖ αἰσθητα. Ἄν στά ἄκρα A καί B τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 7-7 ἀναπτύσσεται σταθερή διαφορά δυναμικοῦ, ἡ παρεμβολή μιᾶς διακλαδώσεως μπορεῖ ἐπομένως νά μεταβάλει τό ὁλικό ρεῦμα I τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος. Ἡ μεταβολή αὐτή μπορεῖ νά διορθωθεῖ ἄν ταυτόχρονα μέ τή σύνδεση τῆς διακλαδώσεως παρεμβληθεῖ σέ σειρά μιά ἀντίσταση ἴση πρός 0.9 R_g, 0.99 R_g, 0.999 R_g, κ.λ.π. Ἡ ἐπιλογή αὐτή γίνεται αὐτόματα μέ τόν διακόπτη S στή διάταξη τοῦ σχήματος 7-7.

Εἶναι φανερό ὅτι διατάξεις διακλαδώσεως ὅπως αὐτή τοῦ σχήματος 7-7 μποῦν νά χρησιμοποιηθοῦν μέ ἕνα καί μόνο γαλβανόμετρο μέ ἐσωτερική ἀντίσταση ἴση πρός τήν τιμή R_g. Ἄν στό σχῆμα 7-7 ἀντικαταστήσουμε τό γαλβανόμετρο G μέ ἄλλο διαφορετικῆς ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως, οἱ ἁπλές σχέσεις ὑποδεκαπλασιασμοῦ τῆς κλίμακας δέν ἰσχύουν. Μιά διάταξη διακλαδώσεων πού ἐπιτρέπει τήν ἀναγωγή τοῦ ρεύματος I_g στό ρεῦμα τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος I, ἀνεξάρτητα ἀπό τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου, θά ἦταν κατά πολύ προτιμότερη. Τήν ἰδιότητα αὐτή ἐμφανίζει ἡ **διακλάδωση Ayrton** πού μελετήσαμε στήν Ἄσκηση 6-8 καί πού δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 7-8. Μιά μόνιμη διακλάδωση R, πού στό παράδειγμα τοῦ σχήματος ἔχει ληφθεῖ ἴση πρός 1000 Ω, τοποθετεῖται παράλληλα πρός τήν ἐσωτερική ἀντίσταση R_g τοῦ γαλβανομέτρου. Γιά τή σύνδεση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος ἐπιλέγεται μέ τήν κινητή ἐπαφή E ἕ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

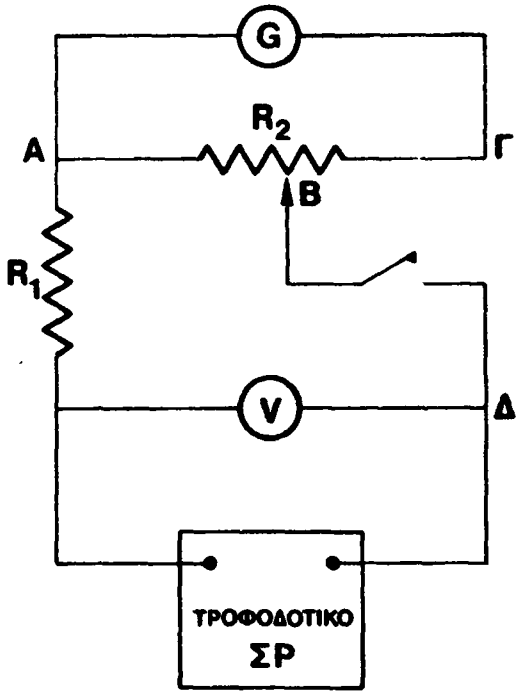
να μέρος αR ($0 < \alpha \leqslant 1$) τῆς ὅλης διακλαδώσεως R, ἐνῶ ἡ ὑπόλοιπη ἀντίσταση $(1 - \alpha)R$ παραμένει σέ σειρά μέ τό γαλβανόμετρο. Σύμφωνα μέ τό ἀποτέλεσμα τῆς Ἀσκήσεως 6-8, τό ρεῦμα I τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος συνδέεται μέ τό ρεῦμα I_g πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο μέ τή σχέση

$$I_g = \alpha \frac{R}{R + R_g} I = \alpha\beta I \tag{7.37}$$

ὅπου

$$\beta = \frac{R}{R + R_g} \tag{7.38}$$

εἶναι τό ποσοστό τοῦ ρεύματος πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο γιά ἀπευθείας σύνδεση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος στά ἄκρα τῆς ὁλικῆς διακλαδώσεως R. Ἡ τελευταία ποσότητα εἶναι βέβαια συνάρτηση τῆς ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως τοῦ γαλβανομέτρου. Σύμφωνα ὅμως μέ τήν ἐξ. (7.37) τό ρεῦμα I_g εἶναι πάντα τό ἴδιο ποσοστό τοῦ ρεύματος βI πού ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικά ἀπό τή θέση τῆς ἐπαφῆς Ε. Μέ ἄλλα λόγια οἱ ἐνδείξεις 0.001, 0.01, 0.1, κ.λ.π. στό παράδειγμα τοῦ σχήματος 7-8 ἰσχύουν γιά ὁποιοδήποτε ὄργανο χρησιμοποιηθεῖ μέ τή διάταξη. Τά πλεονεκτήματα τῆς διακλαδώσεως Ayrton ὡς πρός τήν ἁπλή διακλάδωση γίνονται περισσότερο ἐμφανῆ στό ἑπόμενο πείραμα.



ΣΧΗΜΑ 7-9 Μελέτη τῆς ἀποκλίσεως τοῦ γαλβανομέτρου μέ διακλάδωση Ayrton.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ 7-3. Η ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ AYRTON

Ἐπανασυνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-3 χρησιμοποιώντας τήν ἴδια τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_1. Ἐπιλέξτε τό δυναμικό V τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ ὥστε ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου νά εἶναι περίπου 20 cm. Συνδέστε τήν ἀντίσταση R_2 μέ τιμή δεκαπλάσια ἀπό τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου R_g πού μετρήσατε στό Πείραμα 7-1. Σημειῶστε τή νέα ἀπόκλιση τοῦ ὀργάνου.

– Ἐλαττώνοντας σταδιακά τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_2 καταγράψτε σέ κατάλληλο πίνακα τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου ὡς συνάρτηση τῆς ἁπλῆς διακλαδώσεως R_2. Πάρτε τουλάχιστον 20 μετρήσεις στό διάστημα $0.2\ R_g < R_2 < 10\ R_g$. Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματα τοῦ πίνακα σέ γραφική παράσταση μέ κατακόρυφο ἄξονα τήν ἀπόκλιση καί ὁριζόντιο τήν τιμή τῆς ἁπλῆς διακλαδώσεως R_2. Προσαρμόστε τήν καλύτερη καμπύλη στά δεδομένα σας καί σχολιᾶστε τό ἀποτέλεσμα.

– Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-9. Ἡ ἀντίσταση $R_2 = 1000\ \Omega$ εἶναι ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων μέ ἐνδιάμεση κινητή ἐπαφή ἐνῶ τά ὑπόλοιπα ἐξαρτήματα τοῦ κυκλώματος εἶναι ὅπως καί στήν προηγούμενη ἐργασία. Τοποθετεῖστε τήν κινητή ἐπαφή τῆς διακλαδώσεως R_2 στό σημεῖο Γ καί ρυθμίστε τό δυναμικό V ὥστε ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου νά εἶναι περίπου 20 cm. Μετατοπίστε τήν κινητή ἐπαφή τῆς διακλαδώσεως Ayrton καί σέ κατάλληλο πίνακα καταγράψτε τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου ὡς συνάρτηση τῆς ἀντιστάσεως πού παρεμβάλλεται μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β. Ἀποδῶστε τά δεδομένα σέ γραφική παράσταση καί συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τήν ἀντίστοιχη καμπύλη γιά τήν ἁπλή διακλάδωση.

Μέ τήν προσθήκη διακλαδώσεως εἶναι δυνατόν νά ἐπεκτείνουμε τήν κλίμακα τοῦ γαλβανομέτρου, εἰς βάρος ὅμως τῆς εὐαισθησίας. Γιά ἀπόκλιση κλίμακας - γαλβανομέτρου $D = 1$ m, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (7.3), ἡ εὐαισθησία ὡς πρός τό ρεῦμα δίνεται ἀπό τή σχέση

$$S_I I_g = d \qquad (7.39)$$

ὅπου I_g εἶναι τό ρεῦμα πού διαρρέει τό γαλβανόμετρο, d εἶναι ἡ ἀπόκλιση σέ mm καί ἡ εὐαισθησία S_I μετρᾶται σέ mm ἀνά ampère. Ἄν τώρα θεωρήσουμε τό συγκρότημα τοῦ γαλβανομέτρου καί τῆς διακλαδώσεως ὡς ἕνα ἐνιαῖο ὄργανο, ἡ εὐαισθησία τοῦ νέου ὀργάνου μπορεῖ ἀνάλογα νά ὁριστεῖ ὡς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$S_i' I = d \tag{7.40}$$

ὅπου I εἶναι τό ὁλικό ρεῦμα πού διοχετεύεται στό συνδιασμό διακλαδώσεως - γαλβανομέτρου ἀπό τό ἐξωτερικό κύκλωμα. Γιά τήν ἁπλή διακλάδωση μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τήν ἐξ. (7.36) καί νά γράψουμε τήν ἐξ. (7.40) ὡς

$$S_i' \frac{R_g + R_s}{R_s} I_g = d \tag{7.41}$$

ἀπό τήν ὁποία ἕπεται ὅτι

$$S_i' = \frac{R_s}{R_g + R_s} S_i \ . \tag{7.42}$$

Παρατηρεῖται ὅτι, σύμφωνα μέ τήν τελευταία σχέση, ἡ προσθήκη μιᾶς ἁπλῆς διακλαδώσεως ἔχει πάντα ὡς ἀποτέλεσμα τή μείωση τῆς εὐαισθησίας. Κατά τόν ἴδιο τρόπο μπορούμε νά δείξουμε ὅτι ἡ σύνδεση μιᾶς διακλαδώσεως Ayrton ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή μείωση τῆς εὐαισθησίας σύμφωνα μέ τή σχέση

$$S_i' = \alpha \frac{R}{R + R_g} S_i \ . \tag{7.43}$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 7-4. ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ ΓΑΛΒΑΝΟΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ AYRTON

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-3. Γιά $R_2 = (1/9)\, R_g$, θεωρεῖστε ὡς «γαλβανόμετρο» τό κύκλωμα μεταξύ τῶν σημείων A καί Δ. Ἐπαναλάβετε τή διαδικασία τοῦ Πειράματος 7-1 καί προσδιορίστε τήν εὐαισθησία τοῦ ὀργάνου ὡς πρός τό ρεῦμα. Συγκρίνετε τά ἀποτελέσματά σας μέ τήν πρόβλεψη τῆς ἐξ. (7.42).

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-9. Γιά $R_2 = 1000\ \Omega$, θεωρεῖστε ὡς «γαλβανόμετρο» τό κύκλωμα μεταξύ τῶν σημείων A καί Δ. Ἐπαναλάβετε τή διαδικασία τοῦ Πειράματος 7-1 καί γιά τρεῖς διάφορες θέσεις τῆς ἐπαφῆς B προσδιορίστε τήν εὐαισθησία τοῦ ὀργάνου ὡς πρός τό ρεῦμα. Συγκρίνετε τά ἀποτελέσματά σας μέ τήν πρόβλεψη τῆς ἐξ. (7.43).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7-4 Προστασία τοῦ Γαλβανομέτρου

Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval στηρίζεται σέ ἕνα ἐξαιρετικά λεπτό καί εὐαίσθητο μηχανισμό πού μπορεῖ εὔκολα νά ὑποστεῖ βλάβη ἤ νά καταστραφεῖ τελείως. Ὁ χειρισμός του ἐπομένως πρέπει νά γίνεται μέ μεγάλη προσοχή καί πάντα μέσα στά ὅρια πού προσδιορίζει ὁ κατασκευαστής. Δύο εἶναι κυρίως οἱ παράγοντες πού μπορεῖ νά προξενήσουν βλάβη στό μηχανισμό τοῦ γαλβανομέτρου: μηχανικοί κραδασμοί καί ὑπερβολικό ἠλεκτρικό ρεῦμα.

Μηχανικοί κραδασμοί μπορεῖ νά προξενήσουν μεγάλες ταλαντώσεις πού εἶναι δυνατόν νά στρεβλώσουν ἤ νά ἀποκόψουν τήν ταινία ἀναρτήσεως τοῦ πηνίου. Ἐξάλλου συνεχεῖς ταλαντώσεις μποροῦν νά μεταβάλουν τό συντελεστή στρέψεως τ ἤ ἀκόμη καί νά καταστρέψουν τό μηχανισμό στηρίξεως τοῦ πηνίου λόγω κοπώσεως τοῦ μετάλλου τῆς λεπτῆς ταινίας ἀναρτήσεως. Γιά τό λόγο αὐτό πολλοί κατασκευαστές προφυλάσσουν τό γαλβανόμετρο ὡς πρός τίς συνεχεῖς ταλαντώσεις μέ εἰδικό μηχανισμό γιά τήν ἀκινητοποίηση τοῦ πηνίου ἰδίως κατά τήν μεταφορά. Στά περισσότερα γαλβανόμετρα ἡ ἀκινητοποίηση τοῦ πηνίου μπορεῖ νά γίνει μέ ἐξωτερικό διακόπτη. *Ὁ διακόπτης πρέπει νά βρίσκεται πάντα στή θέση μηχανικῆς ἀσφαλίσεως ὅταν δέν ἐκτελοῦνται μετρήσεις.* Ἀντίστροφα, δέν πρέπει νά διοχετεύεται ἠλεκτρικό ρεῦμα στό πηνίο τοῦ γαλβανομέτρου ὅταν ὁ μηχανισμός ἀναρτήσεως εἶναι ἀσφαλισμένος.

Ταλαντώσεις πού προκαλοῦνται ἀπό μηχανικούς κραδασμούς μποροῦν νά ἐπηρεάσουν σημαντικά τήν ἀκρίβεια καθώς καί τό χρόνο πού ἀπαιτεῖται γιά μιά μέτρηση. Γιά τό λόγο αὐτό, κατά τήν ἐκτέλεση μετρήσεων, τό γαλβανόμετρο πρέπει νά βρίσκεται στηριγμένο σταθερά σέ κατακόρυφη ἤ ὁριζόντια ἐπιφάνεια ἀπαλλαγμένη ἀπό κραδασμούς. Σταθερή στήριξη τοῦ ὀργάνου σέ ἕνα συμπαγή τοῖχο δημιουργεῖ συνήθως ἱκανοποιητικές συνθῆκες ἐργασίας. Ταλαντώσεις τοῦ γαλβανομέτρου κατά τήν ἐκτέλεση μετρήσεων μπορεῖ ἀκόμη νά δημιουργηθοῦν, ὅπως εἴδαμε στίς προηγούμενες παραγράφους, ὅταν ἡ ἀντίσταση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος εἶναι ἀρκετά μεγάλη ὥστε νά δημιουργεῖ κατάσταση ὑποκρίσιμης ἀποσβέσεως. Ἡ κατάσταση αὐτή ἀπαντᾶται στήν πράξη στίς περισσότερες μετρήσεις καί μπορεῖ νά διορθωθεῖ εὔκολα μέ τή σύνδεση μιᾶς ἁπλῆς διακλαδώσεως μέ ἀντίσταση ἴση ἤ μικρότερη πρός τήν ἀντίσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως. Ἀντίθετα ἄν ἡ ὁλική ἀντίσταση R_ε τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ἀντίσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως (CDRX), ὁπότε ὁ χρόνος ἰσορροπήσεως τοῦ ὀργάνου στήν τελική ἔνδειξη αὐξάνει σημαντικά, ἡ ἐπιθυμητή κατάστα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ση κρίσιμης άποσβέσεως μπορεῖ νά έπιτευχθεῖ μέ παρεμβολή σέ σειρά μιᾶς άντιστάσεως μέ τιμή

$$R = CDRX - R_{\varepsilon}. \tag{7.44}$$

Παρατηρεῖται πάντως ὅτι μείωση τῆς έξωτερικῆς άντιστάσεως τοῦ γαλβανομέτρου έχει ὡς άποτέλεσμα αὔξηση τῆς άδρανείας του. Ἡ Ιδιότητα αὐτή μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τήν άσφάλιση τοῦ όργάνου άπό έλεύθερες ταλαντώσεις πού προκαλοῦν μηχανικοί κραδασμοί ὅταν δέν χρησιμοποιεῖται γιά μέτρηση. Ἡ άκραία κατάσταση ὑπερκρίσιμης άποσβέσεως ($R_{\varepsilon} << CDRX$) μπορεῖ εὔκολα νά δημιουργηθεῖ βραχυκυκλώνοντας τούς δύο άκροδέκτες τοῦ όργάνου μέ ἕνα σύρμα. *Ἄν τό γαλβανόμετρο δέν διαθέτει διάταξη μηχανικῆς άσφαλίσεως, οἱ άκροδέκτες του πρέπει νά εἶναι πάντα βραχυκυκλωμένοι κατά τήν άποθήκευση ἤ μεταφορά τοῦ όργάνου.*

Ὁ πιό εὔκολος τρόπος νά καταστρέψει κανείς ἕνα γαλβανόμετρο εἶναι νά τό τροφοδοτήσει μέ ήλεκτρικό ρεῦμα μεγαλύτερο άπό τά ὅρια πού καθορίζει ὁ κατασκευαστής. Τά ὅρια αὐτά δέν ξεπερνοῦν συνήθως τίς μερικές δεκάδες μA. Μέ παρόμοια βάρβαρη μεταχείρηση πολλά εὐαίσθητα (καί άκριβά) γαλβανόμετρα έχουν πάρει στό παρελθόν τό δρόμο πρός τόν κάλαθο τῶν άχρήστων. Καί τοῦτο παρόλο ὅτι ἡ προστασία τοῦ όργάνου ὡς πρός τό ὑπερβολικό ρεῦμα εἶναι έξαιρετικά άπλή. Γιά σταθερή διαφορά δυναμικοῦ, παρεμβολή σέ σειρά μιᾶς άντιστάσεως μέ μεγάλη τιμή μπορεῖ νά μειώσει τό ρεῦμα πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο σέ έπιτρεπτά έπίπεδα. *Ἄν τό ρεῦμα πού πρόκειται νά διοχετευθεῖ στό γαλβανόμετρο δέν εἶναι γνωστό, συνιστᾶται πάντα ἡ σύνδεση τοῦ όργάνου μέ μιά μεγάλη άντίσταση (τῆς τάξης τῶν μερικῶν ΜΩ) σέ σειρά.* Ὅπως ἤδη εἴδαμε προηγουμένως τοῦτο θά ἔχει ὡς άποτέλεσμα τή μείωση τῆς εὐαισθησίας τοῦ γαλβανομέτρου (καί πιθανόν μεταβολή τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τό έξωτερικό κύκλωμα). Ἄν ἡ προστατευτική άντίσταση έχει τή δυνατότητα ρυθμίσεως, ἡ τιμή της μπορεῖ στή συνέχεια νά μειωθεῖ προσεκτικά μέχρις ὅτου έπιτευχθεῖ ἡ καλύτερη κατάσταση λειτουργίας: μέγιστη εὐαισθησία τῆς διατάξεως καί ρεῦμα μέσα στά ὅρια τοῦ γαλβανομέτρου.

Πολλοί κατασκευαστές γαλβανομέτρων διαθέτουν, ένσωματωμένες στό ὄργανο ἤ ὡς ξεχωριστό έξάρτημα, διατάξεις πού περιλαμβάνουν ὅλους τούς παραπάνω παράγοντες προστασίας. Μιά τυπική διάταξη πού χρησιμοποιεῖται άπό τήν έταιρία LEYBOLD - HERAEUS δίνεται στό σχῆμα 7-10. Τό σύμβολο ⌀ τοῦ σχήματος άποδίδει τό γαλβανόμετρο ένῶ οἱ άκροδέκτες 1

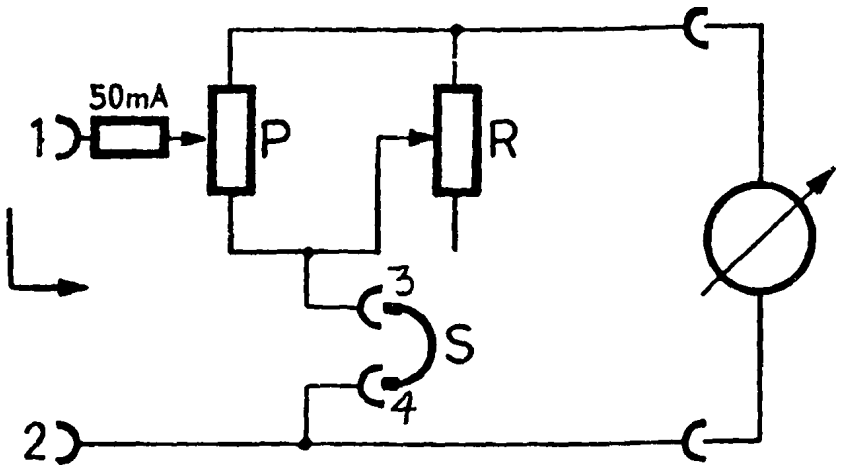
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί 2 συνδέονται μέ τό έξωτερικό κύκλωμα. Ἡ λειτουργία τοῦ κυκλώματος καλύπτει δύο διακριτές περιπτώσεις.

1. Γιά έξωτερική άντίσταση μεγαλύτερη άπό τήν άντίσταση κρίσιμης άποσβέσεως οἱ άκροδέκτες 3 καί 4 εἶναι βραχυκυκλωμένοι. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ διάταξη τῶν άντιστάσεως P καί R ἰσοδυναμεῖ μέ μιά διακλάδωση Ayrton. Τό ποσοστό τῆς άντιστάσεως R πού παρεμβάλλεται παράλληλα μέ τό γαλβανόμετρο μπορεῖ νά έπιλεγεῖ ἴσο πρός τήν άντίσταση CDRX τοῦ γαλβανομέτρου. Τό ποτενσιόμετρο P ρυθμίζει τήν άντίσταση πού παρεμβάλλεται σέ σειρά μέ τό γαλβανόμετρο καί έπομένως τήν εὐαισθησία τοῦ όργάνου. Γιά τή μέτρηση ένός ἄγνωστου ρεύματος ἡ έπαφή τοῦ ποτενσιομέτρου P τοποθετεῖται πλησιέστερα πρός τόν άκροδέκτη 3. Μέ τή ρύθμιση αὐτή σχεδόν ὅλο τό ρεῦμα τοῦ έξωτερικοῦ κυκλώματος διοχετεύεται στή βραχυκύκλωση S. Μεταθέτοντας σταδιακά τήν έπαφή τοῦ ποτενσιομέτρου P, μέρος τοῦ ρεύματος διαρρέει τό γαλβανόμετρο μέ άντίστοιχη αὔξηση τῆς εὐαισθησίας τῆς διατάξεως.

2. Γιά έξωτερική άντίσταση μικρότερη άπό τήν άντίσταση κρίσιμης άποσβέσεως οἱ άκροδέκτες 3 καί 4 άποσυνδέονται. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἡ μεταβλητή άντίσταση R καί τό ποτενσιόμετρο P δημιουργοῦν μιά άντίσταση R_s σέ σειρά μέ τό γαλβανόμετρο. Ἄν αP εἶναι ἡ τιμή τῆς άντιστάσεως μεταξύ τῶν σημείων 1 καί 3 τοῦ κυκλώματος, τότε

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{\alpha P + R} + \frac{1}{(1-\alpha)P} \qquad (7.45)$$



ΣΧΗΜΑ 7-10 Κύκλωμα προστασίας γαλβανομέτρου τῆς έταιρείας LEYBOLD - HERAEUS.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μεταβάλοντας τή θέση τῆς κινητῆς ἐπαφῆς τοῦ ποτενσιομέτρου μποροῦμε νά ἐπιτύχουμε τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_s στήν ἐξ. (7.45) ἴση μέ τήν τιμή R τῆς ἐξ. (7.44) καί ἐπομένως κατάσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως

Ὅπως δείχνει τό σχῆμα 7-10, γιά μεγαλύτερη προστασία ἡ διάταξη περιλαμβάνει μιά ἀσφάλεια πού διακόπτει τό κύκλωμα γιά ρεῦμα μεγαλύτερο ἀπό 50 mA. Στή συνέχεια θά χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές τό γαλβανόμετρο γιά τή μέτρηση ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἀλλά ἀκόμη καί ὡς ἀνιχνευτή γιά τήν ὕπαρξη ἤ μή ρεύματος σέ κάποιο σημεῖο τοῦ κυκλώματος. Γιά τήν προστασία τοῦ ὀργάνου (ἀλλά καί τοῦ φοιτητῆ ἀπό τήν ὀργή τοῦ διδακτικοῦ προσωπικοῦ) θά χρησιμοποιεῖται πάντοτε ἕνα κύκλωμα προστασίας παρόμοιο πρός τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-10. Γιά τή ρύθμιση τοῦ κυκλώματος μπορεῖ νά ἀκολουθηθοῦν τά ἑπόμενα βήματα πού δίνονται ὑπό μορφή συνταγῆς.

1. *Βραχυκυκλῶστε τούς ἀκροδέκτες 3 καί 4 καί τοποθετεῖστε τήν κινητή ἐπαφή τοῦ ποτενσιομέτρου P στό σημεῖο ἐλάχιστης εὐαισθησίας* (πλησιέστερα πρός τόν ἀκροδέκτη 3).
2. *Συνδέστε τό ἐξωτερικό κύκλωμα. Ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου πρέπει νά εἶναι σχεδόν ἴση μέ τό μηδέν. Μεταθέστε τήν κινητή ἐπαφή τοῦ ποτενσιομέτρου μέχρις ὅτου τό γαλβανόμετρο δείξει αἰσθητή ἀπόκλιση.*
3. *Διακόψτε τήν ἐπαφή μέ τό ἐξωτερικό κύκλωμα καί παρατηρεῖστε τήν ἐπιστροφή τοῦ γαλβανομέτρου στή θέση ἰσορροπίας. Ρυθμίστε τήν ἀντίσταση R ὥστε ὅταν διακόπτεται τό ἐξωτερικό κύκλωμα ἡ ἐπιστροφή τοῦ ὀργάνου στή θέση ἰσορροπίας νά ἐμφανίζει κρίσιμη ἀπόσβεση. Στήν κατάσταση αὐτή τό γαλβανόμετρο ἐπανέρχεται στή θέση ἰσορροπίας (ἤ, ἰσοδύναμα, κατά τή μέτρηση, στή θέση τελικῆς ἀποκλίσεως) στόν ἐλάχιστο χρόνο. Παρόλα αὐτά, στήν πράξη ἀποδεικνύεται προτιμότερο νά ρυθμιστεῖ ἡ ἀντίσταση R γιά κατάσταση μικρῆς ὑποκρίσιμης ἀποσβέσεως ὥστε τό ὄργανο νά ἐμφανίσει μικρή ταλάντωση πρός τήν ἀντίθετη πλευρά (π.χ. 1 % τῆς ἀρχικῆς ἀποκλίσεως) καί νά βεβαιωθεῖ ὁ παρατηρητής ὅτι ἡ θέση ἰσορροπίας (ἤ τελικῆς ἀποκλίσεως) ἔχει ἐπιτευχθεῖ.*
4. *Συνδέστε τό ἐξωτερικό κύκλωμα καί μεταθέστε τήν κινητή ἐπαφή τοῦ ποτενσιομέτρου P μέχρις ὅτου ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου φτάσει τά ἐπιτρεπτά ὅρια. Ἄν μέ τή διαδικασία αὐτή ἡ κινητή ἐπαφή τοῦ ποτενσιομέτρου ἐξαντλήσει τά ὅρια τῆς ἀντιστάσεως P, ἡ εὐαισθησία τῆς διατάξεως συμπίπτει μέ τήν εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου πού*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

προσδιορίσατε στό Πείραμα 7-1. Στήν ἀντίθετη περίπτωση ἐπαναλάβετε τή διαδικασία τοῦ Πειράματος 7-1 καί προσδιορίστε τήν εὐαισθησία τῆς διατάξεως.

5. *Ἄν κατά τήν ἐπανασύνδεση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος, τό ὄργανο κινεῖται μέ μεγάλη νωθρότητα, σημαίνει ὅτι ἡ ἀντίσταση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ἀντίσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως τοῦ γαλβανομέτρου. Ἀποσυνδέστε τούς ἀκροδέκτες 3 καί 4 καί ἀρχίζοντας ἀπό τό σημεῖο ἐλάχιστης εὐαισθησίας ρυθμίστε τό ποτενσιόμετρο P ὥστε τό ὄργανο νά ἐμφανίζει κρίσιμη ἀπόσβεση. Προσδιορίστε τήν εὐαισθησία τῆς διατάξεως.*

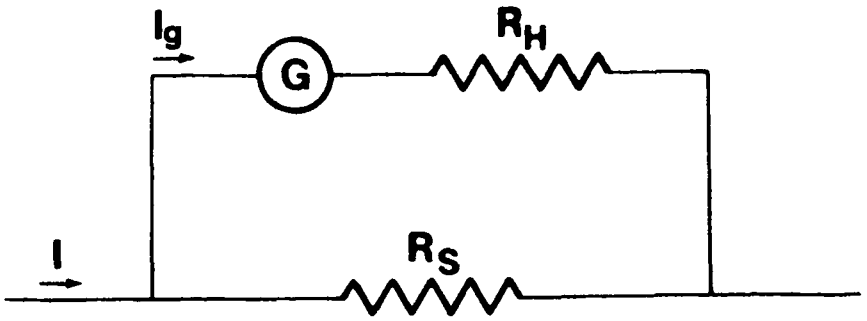
7-5 Τό Γαλβανόμετρο D'Arsonval ὡς Ἀμπερόμετρο, Βολτόμετρο καί Ὡμόμετρο

Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval χρησιμοποιεῖται συνήθως ὡς ἀνιχνευτής ρεύματος, δηλαδή γιά νά διαπιστωθεῖ ἡ ὕπαρξη ἤ ἀπουσία ρεύματος σέ κάποιο σημεῖο τοῦ κυκλώματος. Παρόλα αὐτά ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου μπορεῖ νά βαθμονομηθεῖ εὔκολα σέ ampère καί τό ὄργανο νά χρησιμοποιηθεῖ ἀπευθείας ὡς ἕνα ἐξαιρετικά εὐαίσθητο **ἀμπερόμετρο.** Γιά τή μέτρηση τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος τό κύκλωμα θά πρέπει νά διακοπεῖ σέ κάποιο σημεῖο καί τό γαλβανόμετρο νά παρεμβληθεῖ σέ σειρά. Σέ εἰδικές περιπτώσεις ὅπου εἶναι γνωστό ὅτι τό ρεῦμα τοῦ κυκλώματος βρίσκεται μέσα στά ὅρια τοῦ γαλβανομέτρου, τό ὄργανο μπορεῖ νά παρεμβληθεῖ χωρίς ἄλλη διαδικασία. Στίς περισσότερες ὅμως ἐφαρμογές ὅπου τό ρεῦμα πού πρόκειται νά μετρηθεῖ ὑπερβαίνει τίς μερικές δεκάδες μA, τό γαλβανόμετρο θά πρέπει νά προστατευθεῖ μέ μιά διακλάδωση μικρῆς ἀντιστάσεως καί ἐνδεχομένως μέ μιά μεγάλη ἀντίσταση σέ σειρά. Στή διάταξη τοῦ σχήματος 7-11 τό μεγαλύτερο μέρος τοῦ ρεύματος διοχετεύεται στήν ἀντίσταση R_S ἐνῶ ἕνα μικρό ποσοστό

$$I_g = \frac{R_S}{R_H + R_g + R_S} I \qquad (7.46)$$

διαρρέει τόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου. Μέ κατάλληλη ἐπιλογή τῶν ἀντιστάσεων R_S καί R_H ὥστε τό ρεῦμα I_g νά βρίσκεται μέσα σέ ἐπιτρεπτά ὅρια, ἡ διάταξη τοῦ σχήματος 7-11 μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς ἀμπερόμετρο γιά ὁποιαδήποτε περιοχή ρεύματος. Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (7.41) ἡ εὐαισθησία τῆς διατάξεως ὡς πρός τό ρεῦμα δίνεται ἀπό τή σχέση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 7-11 Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval ώς άμπερόμετρο.

$$S_I' = \frac{R_S}{R_H + R_g + R_S} S_I \qquad (7.47)$$

όπου S_I εἶναι ἡ εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου.

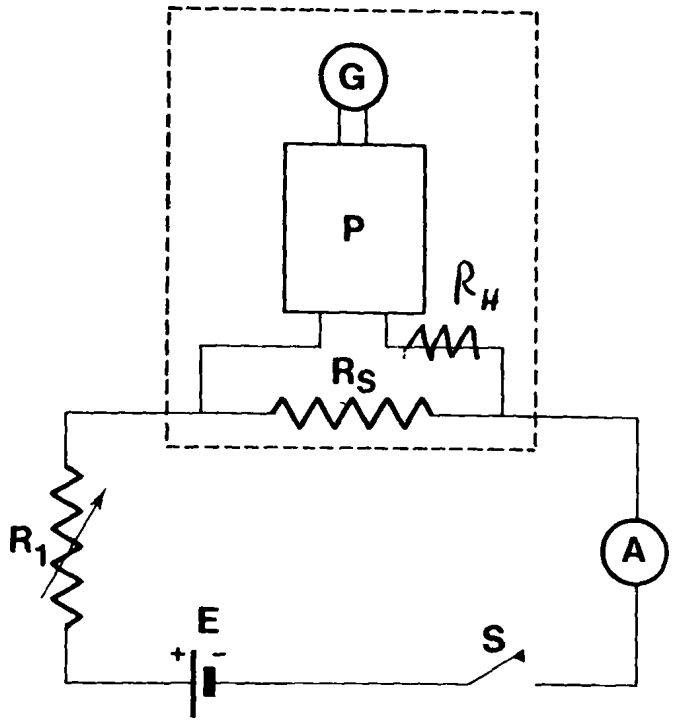
ΠΕΙΡΑΜΑ 7-5. ΤΟ ΓΑΛΒΑΝΟΜΕΤΡΟ D'ARSONVAL ΩΣ ΑΜΠΕΡΟΜΕΤΡΟ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-12. Ὡς διακλάδωση R_S χρησιμοποιεῖστε μιά σταθερή ἀντίσταση 10 Ω. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη μιά σταθερή ἀντίσταση $R_H \simeq 500$ kΩ, ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων R_1 καί ἕνα ἀμπερόμετρο A. Τό κιβώτιο P ἀντιπροσωπεύει τό κύκλωμα προστασίας τοῦ σχήματος 7-10.

– Ρυθμίστε τό κιβώτιο ἀντιστάσεων στήν τιμή $R_1 \simeq 50$ Ω καί τό κύκλωμα προστασίας τοῦ γαλβανομέτρου στό σημεῖο ἐλάχιστης εὐαισθησίας. Ρυθμίστε τό τροφοδοτικό ΣΡ γιά δυναμικό περίπου 0.5 V. Κλεῖστε τό διακόπτη S. Ἄν ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι μικρότερη ἀπό 1 cm, αὐξεῖστε τήν εὐαισθησία τοῦ κυκλώματος προστασίας ὥστε ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου νά εἶναι 1 cm. Ἡ διάταξη πού βρίσκεται μέσα στό πλαίσιο μέ τή διακεκομένη γραμμή στό σχῆμα 7-12, μπορεῖ τώρα νά θεωρηθεῖ ὡς ἕνα εὐαίσθητο ἀμπερόμετρο.

– Σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τήν ἔνδειξη τοῦ ἀμπερομέτρου A καί τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Αὐξεῖστε σταδιακά τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ καί πάρτε ἀρκετές μετρήσεις μέχρις ὅτου τό γαλβανόμετρο ἀποκλίνει περίπου 20 cm. Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό ρεῦμα τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος καί προσαρμόστε τήν καλύτερη εὐθεία στά δεδομένα σας. Ἀπό τήν κλίση τῆς εὐθείας προσδιορίστε τήν εὐαισθησία τοῦ ἀμπερομέτρου πού κατασκευάσατε.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



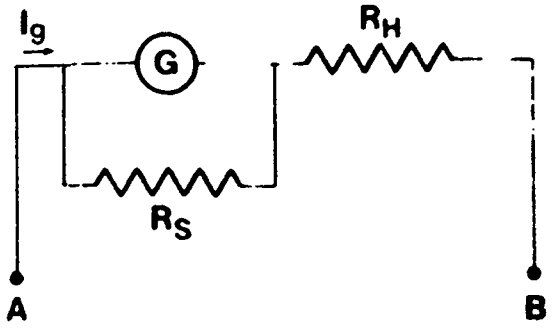
ΣΧΗΜΑ 7-12 Βαθμονόμηση διατάξεως άμπερομέτρου στό Πείραμα 7-5.

— Ἀνοῖξτε τό διακόπτη S, ἀντικαταστεῖστε τήν διακλάδωση R_S μέ μιά νέα ἀντίσταση $R_S = 15\ \Omega$, καί ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία. Ἀποδῶστε τά πειραματικά δεδομένα στήν ἴδια γραφική παράσταση.
— Ποιά εἶναι ἡ **διακριτική ἱκανότητα** {βλ. Παράγραφο 1-1} τοῦ ἀμπερομέτρου πού κατασκευάσατε; Ποιά ἡ διακριτική ἱκανότητα τοῦ ἀμπερομέτρου Α πού χρησιμοποιήσατε γιά τή βαθμονόμηση στό σχῆμα 7-12; Σχολιάστε τό ἀποτέλεσμα.

Παρατηρεῖται ὅτι ἡ ἀντίσταση πού παρεμβάλλει στό κύκλωμα ἡ διάταξη ἀμπερομέτρου τοῦ σχήματος 7-11 εἶναι περίπου ἴση μέ τήν ἀντίσταση R_S. Γιά διακλαδώσεις στήν περιοχή $R_S \simeq 1\ \Omega$ ἡ παρεμβολή τοῦ ἀμπερομέτρου συνήθως δέν ἀλλοιώνει τά χαρακτηριστικά τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος.

Στήν παράγραφο 5-2 μελετήσαμε τήν κατασκευή ἑνός **βολτομέτρου** μέ βάση τό ἐργαστηριακό ἀμπερόμετρο. Μέ μιά ἀνάλογη διάταξη, πού δίνεται στό σχῆμα 7-13, μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕνα ἐξαιρετικά εὐαίσθητο βολτόμετρο χρησιμοποιώντας τό γαλβανόμετρο D'Arsonval. Ἡ διάταξη συνδέεται παράλληλα πρός τό κύκλωμα, σέ δύο σημεῖα Α καί Β, γιά τά ὁποῖα ζητεῖται ἡ διαφορά δυναμικοῦ. Ἡ ἀντίσταση R_H πού βρίσκεται σέ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 7-13 Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval ώς βολτόμετρο.

σειρά μέ τό γαλβανόμετρο ἔχει ἀρκετά ὑψηλή τιμή (στήν περιοχή τῶν kΩ ἤ καί ΜΩ). Μέ τόν τρόπο αὐτό τό ρεῦμα I_g πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο εἶναι ἀρκετά μικρό ὥστε νά μήν ἀλλοιώνει τά χαρακτηριστικά τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος. Χρησιμοποιώντας ἀκόμη μιά διακλάδωση R_S μέ ἀντίσταση μικρότερη ἀπό τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου, ἡ διάταξη μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς βολτόμετρο σέ μιά μεγάλη περιοχή δυναμικοῦ.

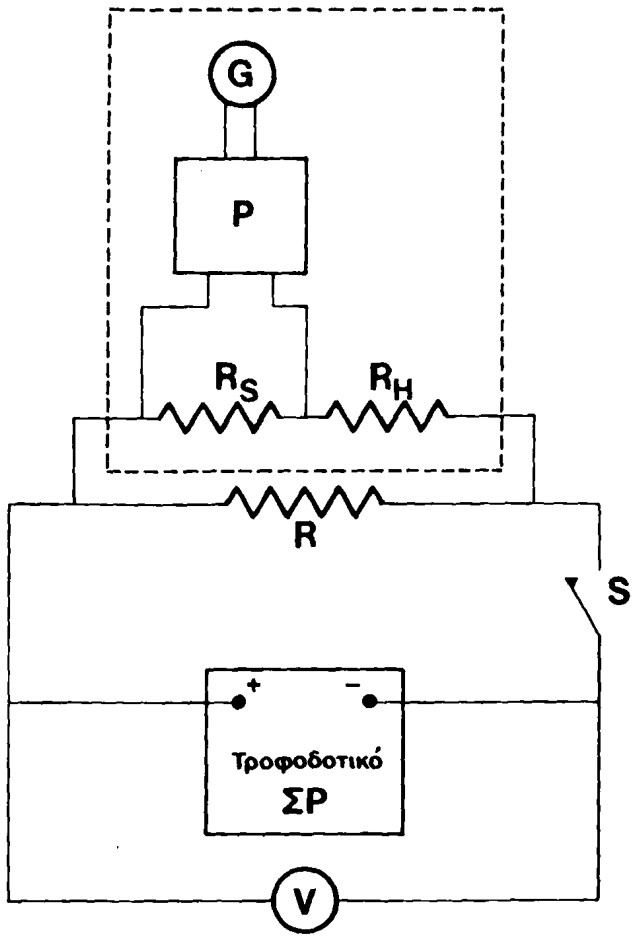
ΠΕΙΡΑΜΑ 7-6. ΤΟ ΓΑΛΒΑΝΟΜΕΤΡΟ D'ARSONVAL ΩΣ ΒΟΛΤΟΜΕΤΡΟ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-14 πού μετρᾶ τή διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα μιᾶς ἀντιστάσεως R = 500 Ω. Ἡ ἀντίσταση R_H εἶναι τῆς τάξης τῶν μερικῶν ΜΩ.

– Ρυθμίστε τό κύκλωμα προστασίας γιά ἐλάχιστη εὐαισθησία, κλεῖστε τό διακόπτη S καί ρυθμίστε τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ σέ 0.5 V. Ρυθμίστε τήν εὐαισθησία τοῦ κυκλώματος προστασίας μέχρις ὅτου τό γαλβανόμετρο ἀποκλίνει κατά περίπου 1 cm. Ἡ διάταξη πού βρίσκεται μέσα στό πλαίσιο μέ τή διακεκομένη γραμμή στό σχῆμα 7-14, μπορεῖ τώρα νά θεωρηθεῖ ὡς ἕνα εὐαίσθητο βολτόμετρο.

– Σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τήν ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου V καί τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Αὐξεῖστε σταδιακά τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ καί πάρτε ἀρκετές μετρήσεις μέχρις ὅτου τό γαλβανόμετρο ἀποκλίνει περίπου 20 cm. Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό δυναμικό στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R καί προσαρμόστε τήν καλύτερη εὐθεία στά δεδομένα σας. Ἀπό τήν κλίση τῆς εὐθείας προσδιορίστε τήν εὐαισθησία τοῦ βολτομέτρου πού κατασκευάσατε.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 7-14 Βαθμονόμηση διατάξεως βολτομέτρου στό Πείραμα 7-6.

Ποιά ή διακριτική ἱκανότητα τοῦ βολτομέτρου πού κατασκευάσατε; Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τή διακριτική ἱκανότητα τοῦ βολτομέτρου V πού χρησιμοποιήσατε γιά τή βαθμονόμηση τῆς διατάξεως καί σχολιᾶστε τό ἀποτέλεσμα.

- Ἀποσυνδέστε τό τροφοδοτικό ΣP, τό βολτόμετρο V καί τήν ἀντίσταση R. Χρησιμοποιώντας τή διάταξη βολτομέτρου πού κατασκευάσατε καί τήν καμπύλη βαθμονομήσεως, μετρεῖστε τό δυναμικό τριῶν ἠλεκτρικῶν στοιχείων πού θά σᾶς δοθοῦν. Μετρεῖστε πάλι τό δυναμικό τῶν στοιχείων μέ τό βολτόμετρο V. Συγκρίνετε τά ἀποτελέσματα τῶν δύο μετρήσεων καί σχολιᾶστε τίς τυχόν διαφορές.

Ὅπως καί τό ἐργαστηριακό ἀμπερόμετρο πού ἐξετάσαμε στό Κεφάλαιο 5, τό γαλβανόμετρο D'Arsonval μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ μέ κατάλληλη βαθμονόμηση ὡς **ὠμόμετρο.** Στό ἑπόμενο πείραμα θά μελετήσουμε δύο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

έναλλακτικές διατάξεις πού έξυπηρετοῦν τήν έφαρμογή αὐτή σέ διάφορες περιοχές άντιστάσεως.

ΠΕΙΡΑΜΑ 7-7. ΤΟ ΓΑΛΒΑΝΟΜΕΤΡΟ D'ARSONVAL ΩΣ ΩΜΟΜΕΤΡΟ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-15(α). Χρησιμοποιεῖστε άντίσταση R ~ 500 kΩ καί τάση 2 V. Καθόσον τό κύκλωμα πρόκειται νά λειτουργήσει μέ έξωτερική άντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου μεγαλύτερη άπό τήν άντίσταση κρίσιμης άποσβέσεως, οἱ άκροδέκτες 3 καί 4 τοῦ κυκλώματος προστασίας (βλ. σχῆμα 7-10) πρέπει νά εἶναι βραχυκυκλωμένοι.

Μέ τό κύκλωμα προστασίας στή θέση έλάχιστης εὐαισθησίας, βραχυκυκλῶστε τούς άκροδέκτες A καί B (R_x 0). Κλεῖστε τόν διακόπτη S καί ρυθμίστε τήν εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὥστε νά δείχνει άπόκλιση 20 cm.

Συνδέστε ἕνα κιβώτιο άντιστάσεων μεταξύ τῶν σημείων A καί B καί σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τήν άπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου ώς συνάρτηση τῆς άντιστάσεως R_x. Πάρτε άρκετές μετρήσεις ὥστε νά καλύψετε τήν περιοχή $0.2\ R \leqslant R_x \leqslant 4\ R$. Άποδῶστε τά άποτελέσματά σας σέ γραφική παράσταση καί χαράξτε τήν καμπύλη βαθμονομήσεως τοῦ ώμομέτρου.

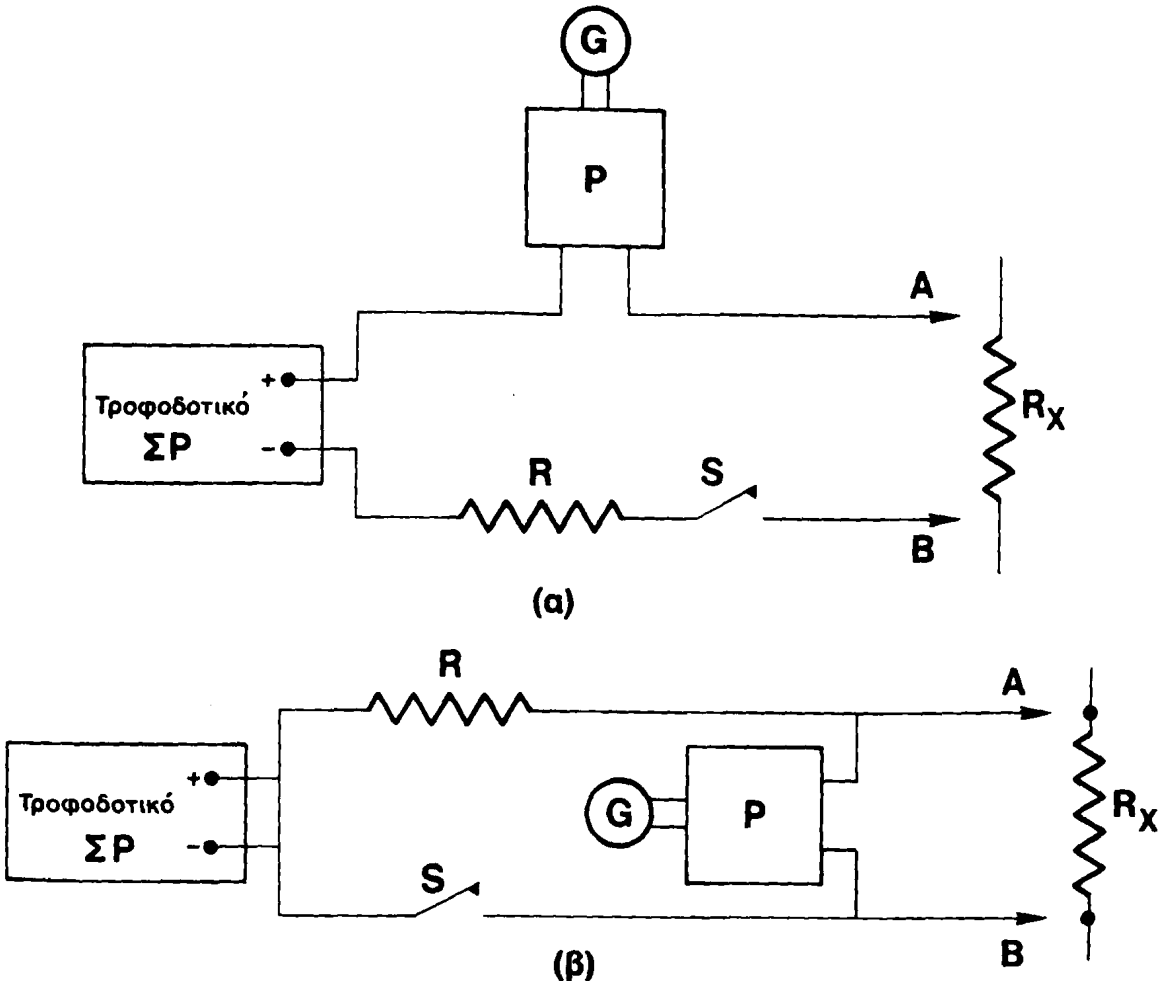
Χρησιμοποιεῖστε τό ώμόμετρο πού κατασκευάσατε γιά νά μετρήσετε τίς ἄγνωστες άντιστάσεις πού θά σᾶς δοθοῦν. Προσδιορίστε μέ προσοχή τό σφάλμα κάθε μετρήσεως.

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-15(β) χωρίς νά μεταβάλετε τήν άντίσταση R, τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ καί τή ρύθμιση τῆς εὐαισθησίας στό κύκλωμα προστασίας άπό τήν προηγούμενη έργασία. Κλεῖστε τόν διακόπτη S. Τό γαλβανόμετρο πρέπει νά άποκλίνει τώρα 20 cm.

Συνδέστε ἕνα κιβώτιο άντιστάσεων στούς άκροδέκτες A καί B καί έπαναλάβετε τήν προηγούμενη έργασία βαθμονομήσεως. Χρησιμοποιεῖστε τό ώμόμετρο τοῦ σχήματος 7-15(β) γιά νά μετρήσετε τίς προηγούμενες ἄγνωστες άντιστάσεις. Σχολιάστε τίς τυχόν διαφορές καί τήν άκρίβεια κάθε μετρήσεως.

Ποιές οἱ κύριες διαφορές τῶν δύο ώμομέτρων πού κατασκευάσατε; Ποιά ἡ περιοχή άντιστάσεως ὅπου τό καθένα βρίσκει έφαρμογή; Πῶς μπορεῖτε νά έπεκτείνετε τήν περιοχή έφαρμογῆς τοῦ πρώτου ώμομέτρου σέ μεγαλύτερες τιμές άντιστάσεως καί τοῦ δευτέρου σέ μικρότερες τιμές άντιστάσεως;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 7-15 Τό γαλβανόμετρο D'Arsonval σέ διάταξη ὠμομέτρου γιά μέτρηση (α) μεγάλης ἀντιστάσεως (β) μικρῆς ἀντιστάσεως.

7-6 Τό Βαλλιστικό Γαλβανόμετρο

Στίς ἐφαρμογές τοῦ γαλβανομέτρου D'Arsonval πού μελετήσαμε ὡς τώρα, ἐνδιέφερε ἡ κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου καί ἡ τελική ἀπόκλιση κατά τή διέλευση ἑνός σταθεροῦ ρεύματος I. Μιά ἐξίσου ἐνδιαφέρουσα καί σημαντική ἐφαρμογή τοῦ γαλβανομέτρου, εἶναι ἡ μέτρηση τοῦ ὁλικοῦ φορτίου σέ ἕνα παλμό ἠλεκτρικοῦ ρεύματος μικρῆς χρονικῆς διαρκείας. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι μέ κάποια διεργασία στό ἐξωτερικό κύκλωμα (ἐκφόρτιση ἑνός πυκνωτῆ ἤ μιά στιγμιαία μεταβολή μαγνητικῆς ροῆς) ἕνα ρεῦμα I(t) διοχετεύεται στό πηνίο τοῦ γαλβανομέτρου γιά μιά μικρή χρονική περίοδο T, μετά τήν ὁποία τό ρεῦμα μηδενίζεται καί πάλι. Κατά τή χρονική περίοδο T ἡ ἐξίσωση πού διέπει τήν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου δίνεται ἀπό τήν ἑξ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(7 13), ὅπου στήν περίπτωση αὐτή ὁ συντελεστής ἀποσβέσεως ὀφείλεται μόνο στήν τριβή πού δημιουργεῖ ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀέρας

$$M\frac{d^2\theta}{dt^2} + r_0\frac{d\theta}{dt} + \tau\theta = NBAI \ . \qquad (7.48)$$

Ὁλοκληρώνοντας ὡς πρός τό χρόνο στό διάστημα (0,T), ἡ τελευταία σχέση παίρνει τή μορφή

$$M\frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0}^{T} + r_0\theta\Big|_{t=0}^{T} + \tau\int_0^T \theta dt = NBA\int_0^T I dt \qquad (7.49)$$

Ἄν τό γαλβανόμετρο βρίσκεται ἀρχικά (κατά τή χρονική στιγμή t = 0) σέ κατάσταση ἠρεμίας, ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἐξ. (7.49) εἶναι ἀνάλογος πρός τή γωνιακή ταχύτητα ω_T τοῦ γαλβανομέτρου κατά τή χρονική στιγμή t = T

$$M\frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0}^{T} = M\omega_T \ . \qquad (7.50)$$

Ὁ δεύτερος ὅρος ἐκφράζει τήν ὁλική γωνιακή ἀπόκλιση κατά τή χρονική στιγμή t = T. Ἄν ἡ διάρκεια τοῦ παλμοῦ εἶναι μικρή μποροῦμε νά γράψουμε τόν ὅρο ἀποσβέσεως ὡς

$$r_0\theta\Big|_{t=0}^{T} = r_0\left\langle\frac{d\theta}{dt}\right\rangle T \qquad (7.51)$$

ὅπου $\langle d\theta/dt\rangle$ εἶναι ἡ μέση γωνιακή ταχύτητα στό διάστημα (0,T). Εἶναι φανερό ὅτι τό ὅριο τῆς ἐξ. (7.51) καθώς ἡ διάρκεια τοῦ παλμοῦ γίνεται μικρή, τείνει πρός τό μηδέν. Κατά τόν ἴδιο τρόπο μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀμελητέος καί ὁ τρίτος ὅρος τῆς ἐξ. (7.49). Ὁ ὅρος αὐτός μπορεῖ στήν ἴδια προσέγγιση νά γραφεῖ ὡς τό γινόμενο τῆς μέσης ἀποκλίσεως $\langle\theta\rangle$ ἐπί τό χρόνο T, ἤτοι

$$\tau\int_0^T \theta dt = \tau\langle\theta\rangle T \ . \qquad (7.52)$$

Τέλος, τό ὁλοκλήρωμα τοῦ ρεύματος στό δεξιό μέρος τῆς ἐξ. (7.49), δίνει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τό ὁλικό φορτίο q πού διέρευσε στό κινητό πηνίο τοῦ ὀργάνου κατά τό μικρό χρονικό διάστημα (0,T).

$$NBA\int_0^T Idt = NBAq \ . \tag{7.53}$$

Παραλείποντας τούς ἀμελητέους σέ πρώτη προσέγγιση ὅρους τῆς ἐξ. (7.49) μποροῦμε ἑπομένως νά γράψουμε τήν ἐξίσωση πού διέπει τήν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου ὡς

$$M\omega_T = NBAq \ . \tag{7.54}$$

Ἡ συμπεριφορά πού προβλέπει ἡ τελευταία σχέση εἶναι ἐξαιρετικά ἁπλή: *Μετά τή διέλευση ἑνός παλμοῦ μέ μικρή χρονική διάρκεια, τό γαλβανόμετρο ἀποκτᾶ ἀρχική γωνιακή ταχύτητα* ω_T, *ἀνάλογη πρός τό ὁλικό φορτίο πού διέρευσε στό πηνίο.* Στή συνέχεια ἡ κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου διέπεται ἀπό τήν ἐξ. (7.13) γιά τήν εἰδική περίπτωση I = 0

$$M\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + r\frac{d\vartheta}{dt} + \tau\vartheta = 0 \tag{7.55}$$

μέ λύσεις πού μποροῦν νά βρεθοῦν σύμφωνα μέ τή διερεύνηση τῆς Παραγράφου 7-2. Μετά ἀπό ἀρκετό χρόνο τό γαλβανόμετρο θά ἐπανέλθει στή θέση $\vartheta = 0$ εἴτε μέ ταλάντωση γύρω ἀπό τό σημεῖο ἰσορροπίας εἴτε μέ τήν ἐκθετική συμπεριφορά τῆς ὑπερκρίσιμης ἀποσβέσεως. Ὅπως καί προηγουμένως ἡ συμπεριφορά τοῦ γαλβανομέτρου ἐξαρτᾶται ἀπό τήν τιμή τῆς ὁλικῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος.

Ἄν καί μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τά χαρακτηριστικά τῆς κινήσεως, ὅπως τήν περίοδο τῆς ταλαντώσεως ἤ τό πλάτος τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως, ἀπό τήν ἀναλυτική μορφή τῶν λύσεων εἶναι κατά πολύ ἁπλούστερο γιά τό σκοπό αὐτό νά θεωρήσουμε τή μηχανική ἐνέργεια πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο ἀπό τό βραχύ παλμό στό χρονικό διάστημα (0,T). Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (7.54) κατά τό χρόνο t = T τό γαλβανόμετρο διαθέτει κινητική ἐνέργεια

$$\frac{1}{2}M\omega_T^2 = \frac{(NBA)^2}{2M}q^2 \ . \tag{7.56}$$

Καθώς τό πηνίο τοῦ γαλβανομέτρου περιστρέφεται, ὁ μηχανισμός ἀναρτή-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σεως έξασκεῖ μιά ροπή άνάλογη πρός τή γωνία άποκλίσεως πού συνεχῶς μειώνει τή γωνιακή ταχύτητα. Ἡ μέγιστη άπόκλιση θ_m έπιτυγχάνεται ὅταν ὅλη ἡ κινητική ένέργεια μετατραπεῖ σέ δυναμική ένέργεια στρέψεως τοῦ μηχανισμοῦ άναρτήσεως. Ἄν οἱ δυνάμεις τριβῆς εἶναι μικρές, μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τή δυναμική ένέργεια πού ἔχει άποθηκευτεῖ στό μηχανισμό άναρτήσεως, θεωρώντας τό ἔργο πού καταναλώθηκε κατά τήν κίνηση γιά τήν ὑπερνίκηση τῆς ροπῆς στρέψεως. Ἐξισώνοντας τίς δύο ποσότητες μποροῦμε νά γράψουμε

$$\frac{1}{2} M\omega_\tau^2 = \int_0^{\theta_m} \tau\theta d\theta \tag{7.57}$$

ἤ

$$\frac{(NBA)^2}{2M} q^2 = \frac{\tau\theta_m^2}{2} .$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση ἡ μέγιστη γωνία άποκλίσεως μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\theta_m = \frac{NBA}{\sqrt{\tau M}} q \tag{7.58}$$

ἤτοι *άνάλογη πρός τό όλικό φορτίο q πού διέρευσε στό πηνίο.*

Στήν άναλογία τῆς ἐξ. (7.58) στηρίζεται σχεδόν πάντα ἡ χρήση τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου. Χρησιμοποιώντας τή διάταξη παρατηρήσεως πού περιγράφεται στό σχῆμα 7-2, ἡ μέγιστη γωνιακή άπόκλιση θ_m καί έπομένως τό φορτίο q πού διέρευσε στό πηνίο μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ γραμμική άπόκλιση διαμέσου τῆς ἐξ. (7.1)

$$d_m = 2\theta_m D \tag{7.59}$$

ὅπου D εἶναι ἡ άπόσταση τῆς γραμμικῆς κλίμακας άπό τό γαλβανόμετρο καί d_m ἡ μέγιστη άπόκλιση. **Ἡ εὐαισθησία τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό φορτίο** S_q μπορεῖ νά ὁριστεῖ σέ άναλογία μέ τίς ἐξ. (7.3) καί (7.4) ὡς

$$S_q \equiv 1000 \frac{d_m}{Dq} = 2000 \frac{NBA}{\sqrt{\tau M}} \tag{7.60}$$



μέ διαστάσεις άντίστροφου φορτίου. Γιά τή συνήθη άπόσταση D = 1 m μπορεῖ άκόμη νά έκφραστεῖ σέ χιλιοστόμετρα ανά coulomb. Χρησιμοποιώντας άκόμη τίς έξ. (7.3) καί (7.21β) μποροῦμε νά γράψουμε

$$S_q = S_I \sqrt{\frac{\tau}{M}} = S_I \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} S_I \tag{7.61}$$

ὅπου $T_0 = 2\pi/\omega_0$ εἶναι ἡ φυσική περίοδος ταλαντώσεως τοῦ γαλβανομέτρου.

Σύμφωνα μέ τήν έξ. (7.61), ἡ εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό φορτίο εἶναι άνάλογη πρός τήν άντίστοιχη εὐαισθησία ὡς πρός τό ρεῦμα καί άντίστροφα άνάλογη πρός τήν περίοδο έλεύθερης ταλαντώσεως. Γαλβανόμετρα πού προορίζονται κυρίως γιά βαλλιστική χρήση συνήθως κατασκευάζονται μέ πηνίο μεγάλης διατομῆς A, ὥστε νά αὐξάνει σημαντικά ἡ ροπή άδρανείας. Τοῦτο ἔχει ὡς άποτέλεσμα αὔξηση τῆς φυσικῆς περιόδου T_0, ἔτσι ὥστε ὁ χρόνος κατά τόν ὁποῖο διοχετεύεται τό φορτίο στό γαλβανόμετρο νά εἶναι πράγματι ἀμελητέος σέ σχέση μέ τό χρόνο τῆς έλεύθερης κινήσεως πού άκολουθεῖ. Άπό τήν έξ. (7.61), ἡ ἰδιότητα αὐτή συνεπάγεται έκ πρώτης ὄψεως μείωση τῆς εὐαισθησίας S_q, ἡ ὁποία ὅμως άντισταθμίζεται άπό τήν αὔξηση τῆς εὐαισθησίας ὡς πρός τό ρεῦμα S_I πού σύμφωνα μέ τήν έξ. (7.3) εἶναι άνάλογη πρός τή διατομή A τοῦ πηνίου.

Ἕνας σχετικά βραχύς παλμός ρεύματος μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ σέ ἕνα κύκλωμα μέ τήν έκφόρτιση ένός πυκνωτῆ πού άρχικά ἔχει φορτιστεῖ σέ κάποιο δυναμικό U. Ἡ βασική διάταξη γιά τή διαδικασία αὐτή δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 7-16. Μέ τόν διακόπτη S στή θέση φορτίσεως ὁ πυκνωτής τῆς διατάξεως, μέ χωρητικότητα C, άποθηκεύει φορτίο

$$q = CU. \tag{7.62}$$

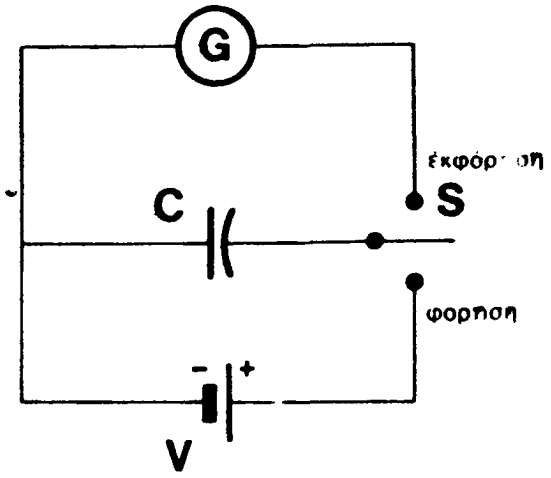
Ἄν ὁ διακόπτης S μετατοπιστεῖ στή θέση έκφορτίσεως, τό φορτίο αὐτό θά διοχετευθεῖ στό πηνίο τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου, τό ὁποῖο θά κινηθεῖ μέ μέγιστη άπόκλιση κατά τήν πρώτη ταλάντωση

$$d_m = qS_q \tag{7.63}$$

ὅπου ἡ έξ. (7.60) ἔχει γραφεῖ γιά τή συνήθη άπόσταση κλίμακας-γαλβανομέτρου D = 1 m. Άπαλείφοντας τό φορτίο q άπό τίς δύο τελευταῖες σχέσεις μποροῦμε νά γράψουμε

$$d_m = S_q CU. \tag{7.64}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 7-16 Απλή διάταξη δημιουργίας παλμοῦ ρεύματος μέ ἐκφόρτιση πυκνωτῆ.

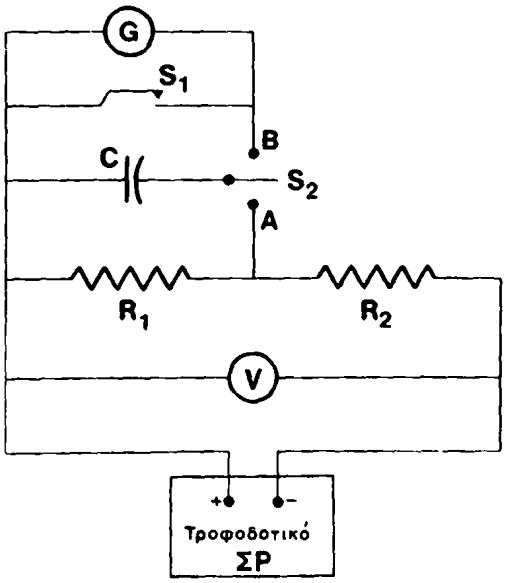
Ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα ἡ τελευταία ἐξίσωση μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ κατά δύο τρόπους. Μέ παρατήρηση τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως d_m μπορεῖ νά μετρηθεῖ ἡ χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ τῆς διατάξεως ἄν εἶναι γνωστό τό δυναμικό φορτίσεως U. Ἀντίστροφα, χρησιμοποιώντας πυκνωτή γνωστῆς χωρητικότητας C μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τή διαφορά δυναμικοῦ πού δημιουργεῖται σέ δύο σημεῖα ἑνός κυκλώματος. Καί στίς δύο περιπτώσεις ὅμως εἶναι ἀπαραίτητη ἡ γνώση τῆς εὐαισθησίας S_q τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό φορτίο.

ΠΕΙΡΑΜΑ 7-Β. ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ ΚΑΙ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ ΤΟΥ ΒΑΛΛΙΣΤΙΚΟΥ ΓΑΛΒΑΝΟΜΕΤΡΟΥ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-17. Οἱ ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 εἶναι ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων μέ ἐνδιάμεση ἐπαφή καί ὁλική ἀντίσταση $R_1 + R_2 = 1\ k\Omega$ ἐνῶ ὁ πυκνωτής C ἔχει γνωστή χωρητικότητα τῆς τάξης τῶν 0.5 μF. Ὁ διακόπτης τηλεγραφητῆ S_1 παρέχει τή δυνατότητα γρήγορης ἐπαναφορᾶς τοῦ γαλβανομέτρου στή θέση ἰσορροπίας μετά τήν ἀνάγνωση τῆς πρώτης μέγιστης ἀποκλίσεως.

Μέ τιμές τῶν ἀντιστάσεων $R_1 = 1\ k\Omega$ καί $R_2 = 0$ ρυθμίστε τό τροφοδοτικό ΣΡ γιά δυναμικό 1 V. Κλεῖστε τόν διακόπτη στή θέση A καί περιμένετε μερικά δευτερόλεπτα. Σημειῶστε τή θέση ἰσορροπίας τοῦ γαλβανομέτρου. Μετατοπίστε τόν διακόπτη S_2 στή θέση B καί παρατηρεῖστε τήν πρώτη μέγιστη ἀπόκλιση d_m. Ἄν ἡ ἀπόκλιση d_m ἀπό τή θέση ἰσορροπίας εἶναι μικρότερη ἀπό 20 cm αὐξεῖστε τό δυναμικό τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ ὥστε νά ἐπιτύχετε μέγιστη ἀπόκλιση τῆς τάξης τῶν 20 cm. Με-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



ΣΧΗΜΑ 7-17 Κύκλωμα γιά τή βαθμονόμηση καί προσδιορισμό τῆς εὐαισθησίας βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου.

λετεῖστε μέ προσοχή τή μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου ὡς συνάρτηση τοῦ χρόνου πού παραμένει ὁ διακόπτης S_2 στή θέση φορτίσεως Α. Βεβαιωθεῖτε ὅτι σέ κάθε μέτρηση ὁ διακόπτης S_2 παραμένει στή θέση Α ἀρκετό χρόνο ὥστε νά φορτιστεῖ πλήρως ὁ πυκνωτής. Μετά ἀπό κάθε μέτρηση χρησιμοποιεῖτε τόν διακόπτη τηλεγραφητῆ S_1 γιά συντόμευση τοῦ χρόνου ἐπαναφορᾶς τοῦ γαλβανομέτρου στή θέση ἰσορροπίας.

– Διατηρώντας τό ἄθροισμα $R_1 + R_2$ σταθερό καί ἴσο πρός 1 kΩ, μεταβάλετε τήν ἀντίσταση R_1 καί σέ κατάλληλο πίνακα καταγράψτε τή μέγιστη ἀπόκλιση γιά ἀρκετές τιμές τῆς ἀντιστάσεως R_1. Τό φορτίο πού ἀποθηκεύεται στόν πυκνωτή δίνεται προφανῶς ἀπό τή σχέση

$$q = CV\frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{7.65}$$

ὅπου V εἶναι ἡ ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου. Σέ κάθε μέτρηση σημειῶστε τόσο τή μέγιστη ἀπόκλιση ὅσο καί τή θέση ἰσορροπίας τοῦ γαλβανομέτρου στήν κατάσταση ἠρεμίας. Ἀντιστρέψτε τήν πολικότητα τοῦ τροφοδοτικοῦ καί ἐπαναλάβετε τίς μετρήσεις γιά τίς ἴδιες τιμές τῆς ἀντιστάσεως R_1. Παίρνοντας τό μέσο ὅρο τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως γιά κάθε τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_1 ἐξαλείφετε μέ τόν τρόπο αὐτό σφάλματα πού προέρχονται ἀπό θερμική ΗΕΔ, βολταϊκά ρεύματα, κ.λ.π.

– Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τή μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μέτρου ὡς πρός τό φορτίο πού διέρρευσε τό πηνίο γιά κάθε τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_1, σημειώνοντας τό πειραματικό σφάλμα γιά κάθε σημεῖο τῶν δεδομένων. Προσαρμόστε τήν καλύτερη εὐθεία στά πειραματικά δεδομένα καί ὑπολογίστε ἀπό τήν κλίση τῆς εὐθείας τήν εὐαισθησία S_q τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό φορτίο. Ἄν τά δεδομένα σας ἀποκλίνουν ἀρκετά ἀπό τή γραμμικότητα πού προβλέπει ἡ ἐξ. (7.64), σχολιάστε τό ἀποτέλεσμα.

- Ἀντικαταστεῖστε τόν πυκνωτή C μέ ἕνα ἀπό τούς πυκνωτές ἀγνωστης χωρητικότητας πού θά σᾶς δοθοῦν. Ρυθμίστε τήν ἀντίσταση R_1 ὥστε κατά τή μετάβαση τοῦ διακόπτη S_2 ἀπό τή θέση A στή θέση B τό γαλβανόμετρο νά ἐμφανίζει μέγιστη ἀπόκλιση μεγαλύτερη ἀπό 10 cm. Χρησιμοποιώντας τήν προηγούμενη καμπύλη βαθμονομήσεως ὑπολογίστε τήν ἀγνωστη χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ. Ἐπαναλάβετε τήν ἐργασία γιά ὅλους τούς πυκνωτές ἀγνωστης χωρητικότητας πού θά σᾶς δοθοῦν.

7-7 Μέτρηση Ἀντιστάσεως καί Χωρητικότητας μέ τό Βαλλιστικό Γαλβανόμετρο

Τό βαλλιστικό γαλβανόμετρο βρίσκει μιά σημαντική ἐφαρμογή στή μέτρηση ἀντιστάσεων πού ξεπερνοῦν τίς μερικές δεκάδες ΜΩ. Στήν περιοχή αὐτή ἀπευθείας μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως μέ ὠμόμετρο δίνει πενιχρά ἀποτελέσματα καθόσον γιά τή διαφορά δυναμικοῦ πού ἀναπτύσσουν τά συνήθη ἠλεκτρικά στοιχεῖα τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀγνωστη ἀντίσταση εἶναι ἐξαιρετικά μικρό. Ἀκόμη ὅμως καί στήν περίπτωση ὅπου τό ρεῦμα i διαμέσου τῆς ἀντιστάσεως εἶναι πολύ μικρό ὥστε νά διεγείρει ἕνα εὐαίσθητο γαλβανόμετρο, εἶναι δυνατόν νά μετρηθεῖ τό ὁλικό φορτίο

$$q = \int_0^t i\,dt' \tag{7.66}$$

πού διέρρευσε στήν ἀντίσταση μέσα στό χρόνο t. Μιά διάταξη πού ἐπιτρέπει τήν παρατήρηση αὐτή δίνεται στό σχῆμα 7-18, ὅπου R ἀντιπροσωπεύει μιά ἀντίσταση τῆς τάξης τῶν $10^7 - 10^8$ Ω. Ἄν ὁ διακόπτης S κλείσει στή θέση A ἕνα μικρό ρεῦμα θά διαρρεύσει στήν ἀντίσταση R καί θά ἀρχίσει ἡ φόρτιση τοῦ πυκνωτῆ C. Μετά ἀπό ἕνα χρονικό διάστημα t, τό φορτίο πού ἔχει συσωρευτεῖ στόν πυκνωτή εἶναι

$$q = CV \tag{7.67}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου C ή χωρητικότητα καί V τό δυναμικό στά άκρα τοῦ πυκνωτῆ. Κατά τή χρονική αὐτή στιγμή, τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν άντίσταση R εἶναι

$$i = \frac{U - V}{R} = \frac{U - \frac{q}{C}}{R} \quad . \tag{7.68}$$

Ἡ έξίσωση έπομένως πού διέπει τή συσσώρευση φορτίου στόν πυκνωτή εἶναι

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U - \frac{q}{C}}{R}$$

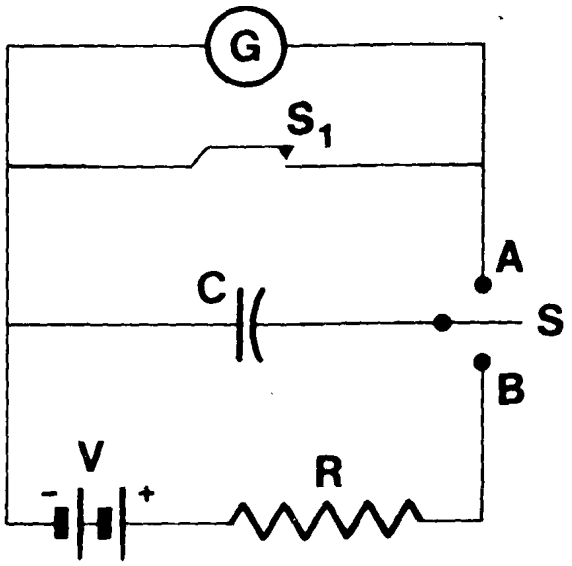
ἤ

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{U}{R} \quad . \tag{7.69}$$

Ἡ γενική λύση τῆς τελευταίας διαφορικῆς έξισώσεως μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ άπευθείας όλοκλήρωση ἤ μέ ἄλλες μεθόδους ὡς

$$q(t) = UC - Ae^{-\frac{t}{RC}} \tag{7.70}$$

όπου ἡ σταθερά A καθορίζεται άπό τίς άρχικές συνθῆκες. Γιά τό συγκεκρι-.



ΣΧΗΜΑ 7-18 Διάταξη γιά τή μέτρηση ὑψηλῆς άντιστάσεως.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μένο πρόβλημα ὅπου ἀρχικά (σέ χρόνο t=0) ὁ πυκνωτής εἶναι ἀφόρτιστος (q(0) = 0) ἡ ἐξ. (7.70) δίνει

$$0 = UC - A$$

ἤ

$$q(t) = UC\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \qquad (7.71)$$

Παρατηρεῖται ὅτι ἡ ποσότητα Q = UC ἀντιπροσωπεύει τό ὁλικό φορτίο πού μπορεῖ νά συσσωρεύσει στόν πυκνωτή ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου. Μπορεῖ π.χ. νά προσδιοριστεῖ πειραματικά ἄν φορτίσουμε τόν πυκνωτή ἐπί ἕνα μεγάλο χρονικό διάστημα καί στή συνέχεια διοχετεύσουμε τό φορτίο στό βαλλιστικό γαλβανόμετρο μεταθέτοντας τό διακόπτη S ἀπό τή θέση A στή θέση B.

Ἡ λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (7.69) στήν ἐξ. (7.71) ὑπαγορεύει τή μέθοδο προσδιορισμοῦ τῆς ἀντιστάσεως R. Ἄν ὁ πυκνωτής γνωστῆς χωρητικότητας C φορτιστεῖ γιά ἕνα χρονικό διάστημα t καί στή συνέχεια μετρηθεῖ τό φορτίο q(t) πού συσσωρεύτηκε (μέ ἐκφόρτιση τοῦ πυκνωτῆ στό κύκλωμα τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου) ἡ μόνη ἄγνωστη παράμετρος πού παραμένει στήν ἐξ. (7.71) εἶναι ἡ ἀντίσταση R. Ἡ σχέση αὐτή μπορεῖ νά γραφεῖ σέ μιά πλέον εὔχρηστη μορφή ἄν θεωρήσουμε τήν ἀντίστοιχη λογαριθμική σχέση. Γράφοντας

$$Q = UC \qquad (7.72)$$

γιά τό ὁλικό φορτίο πού μπορεῖ νά συσσωρεύσει ἡ ΗΕΔ τοῦ κυκλώματος στόν πυκνωτή, ἡ ἐξ. (7.71) μπορεῖ νά μετασχηματιστεῖ στήν ἔκφραση

$$\ln\frac{Q}{Q - q(t)} = \frac{t}{RC} \qquad (7.73)$$

ἤ

$$\ln\frac{Q}{Q - q(t)} = \ln\frac{D}{D - d} = \frac{t}{RC} \qquad (7.74)$$

Στήν τελευταία σχέση D εἶναι ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου γιά πλήρη φόρτιση τοῦ πυκνωτῆ καί d ἡ ἀπόκλιση γιά χρόνο φορτίσεως t.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ 7-9. ΜΕΤΡΗΣΗ ΥΨΗΛΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ ΜΕ ΤΟ ΒΑΛΛΙΣΤΙΚΟ ΓΑΛΒΑΝΟΜΕΤΡΟ (Ι. ΦΟΡΤΙΣΗ ΠΥΚΝΩΤΗ)

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-18. Ὡς στοιχεῖο χρησιμοποιεῖστε ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη ἕνα πυκνωτή μέ χωρητικότητα τῆς τάξης τῶν 5 μF καί τήν ἄγνωστη ἀντίσταση R πού θά σᾶς δοθεῖ. Βραχυκυκλῶστε τά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R ὥστε μέ τόν διακόπτη S στή θέση A ὁ πυκνωτής νά συνδέεται ἀπευθείας μέ τό τροφοδοτικό ΣΡ. Ἀναπτύξτε διαφορά δυναμικοῦ 1 V στό τροφοδοτικό ΣΡ καί φορτίστε τόν πυκνωτή κλείνοντας τόν διακόπτη S στή θέση A. Μεταθέστε τόν διακόπτη S στή θέση B καί παρατηρεῖστε τή μέγιστη ἀπόκλιση D τοῦ γαλβανομέτρου. Ρυθμίστε τό δυναμικό τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ ὥστε ἡ ἀπόκλιση νά εἶναι περίπου 20 cm. Μετά τήν παρατήρηση τῆς πρώτης μέγιστης ἀποκλίσεως, ὁ διακόπτης τηλεγραφητή S_1 μπορεῖ νά χρησιμοποιεῖται γιά τήν γρήγορη ἐπαναφορά τοῦ γαλβανομέτρου στή θέση ἰσορροπίας. Σημειῶστε τή θέση ἰσορροπίας καί τή μέγιστη ἀπόκλιση. Ἀντιστρέψτε τήν πολικότητα τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ, σημειῶστε τή νέα θέση ἰσορροπίας (μήν προσπαθήσετε νά μετακινήσετε τήν κλίμακα) καί ἐπαναλαμβάνοντας τή διαδικασία φορτίσεως - ἐκφορτίσεως σημειῶστε τή νέα μέγιστη ἀπόκλιση πρός τήν ἀντίθετη πλευρά τῆς κλίμακας. Παίρνοντας τό μέσο ὅρο τῶν δύο μετρήσεων ἐλαττώνετε συστηματικά σφάλματα πού τυχόν ὑπεισέρχονται στίς μετρήσεις σας ἀπό θερμικές ΗΕΔ, βολταϊκά φαινόμενα κ.λ.π.

– Ἀποσυνδέστε τό βραχυκύκλωμα ἀπό τά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R. Φορτίστε τόν πυκνωτή (κλείνοντας τόν διακόπτη S στή θέση A) γιά ἕνα χρονικό διάστημα t=30 sec. Μεταθέστε τόν διακόπτη S στή θέση B καί παρατηρεῖστε τή μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τό χρόνο φορτίσεως τοῦ πυκνωτῆ, τή θέση ἰσορροπίας καί τή θέση μέγιστης ἀποκλίσεως. Ἐπαναλάβετε τήν ἐργασία γιά πέντε ἕως δέκα διάφορους χρόνους φορτίσεως ὥστε νά καλυφθεῖ ἡ περιοχή τῆς κλίμακας μεταξύ 5 καί 20 cm.

– Ἀντιστρέψτε τήν πολικότητα τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ καί ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά τούς ἴδιους χρόνους φορτίσεως τοῦ πυκνωτῆ. Ὑπολογίστε τό μέσο ὅρο τῆς ὁλικῆς ἀποκλίσεως d γιά κάθε χρόνο φορτίσεως ἀπό τίς δύο ἀντίστοιχες μετρήσεις.

– Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματά σας σέ γραφική παράσταση μέ κατακόρυφο ἄξονα τήν ποσότητα $\ln [D/(D-d)]$ καί ὁριζόντιο ἄξονα τό χρόνο φορτίσεως t. Χρησιμοποιεῖστε ἡμιλογαριθμικό χαρτί. Προσαρμόστε τήν καλύτερη εὐθεία στά δεδομένα σας καί ἀπό τήν κλίση τῆς εὐθείας ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (7.74).

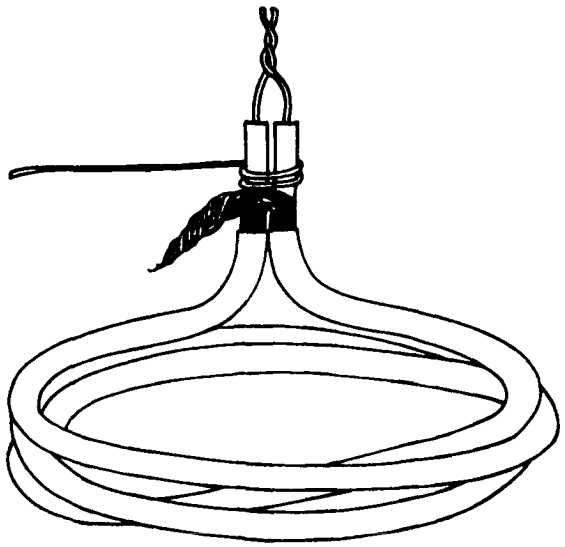
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ μέθοδος τοῦ προηγουμένου πειράματος βρίσκει ἀρκετές ἐφαρμογές στή βιομηχανία γιά τόν ἔλεγχο τῶν ἠλεκτρικῶν ἰδιοτήτων ὑλικῶν καί διατάξεων. Ἡ μόνωση μεταξύ τῶν καλωδίων ἠλεκτρικοῦ ρεύματος καί τῶν σωληνώσεων ὑδρεύσεως σέ ἕνα κτίριο, μπορεῖ π.χ. νά προσδιορίστεῖ μέ βαλλιστικό γαλβανόμετρο. Μιά συγκεκριμένη ἐφαρμογή τῆς μεθόδου θά μελετήσουμε στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 7-10. ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΔΙΑΡΡΟΗΣ ΜΟΝΩΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΕ ΟΜΟΑΞΟΝΙΚΟ ΚΑΛΩΔΙΟ

Χρησιμοποιεῖστε τήν προηγούμενη μέθοδο γιά νά προσδιορίσετε τήν ἀντίσταση μεταξύ τοῦ κεντρικοῦ ἀγωγοῦ καί τῆς θωρακίσεως σέ ἕνα ὁμοαξονικό καλώδιο. Καθόσον ἡ ἀντίσταση πού πρόκειται νά μετρήσετε εἶναι ἀρκετά ὑψηλή θά πρέπει νά λάβετε εἰδικά μέτρα ὥστε τό φορτίο πού συσσωρεύεται στόν πυκνωτή τοῦ σχήματος 7-18 νά προέρχεται πράγματι ἀπό τό ρεῦμα πού διαρρέει τό μονωτικό ὑλικό μεταξύ κεντρικοῦ ἀγωγοῦ καί θωρακίσεως. Εἶναι π.χ. δυνατόν ἕνα μέρος τοῦ φορτίου νά διαρρεύσει στήν ἐπιφάνεια τοῦ μονωτικοῦ ὑλικοῦ.

– Σημειῶστε τό μῆκος τοῦ ὁμοαξονικοῦ καλωδίου πού σᾶς δόθηκε. Ἀπογυμνῶστε ἕνα μῆκος περίπου 10 cm σέ κάθε ἄκρο τοῦ καλωδίου ἀπό τό ἐξωτερικό περίβλημα καί τή θωράκιση. Συνδέστε μεταξύ τους τά δύο ἄκρα τοῦ κεντρικοῦ ἀγωγοῦ καί τά δύο ἄκρα τῆς θωρακίσεως ὅπως δείχνει τό σχῆμα 7-19. Γιά μεγαλύτερη προστασία περιτυλίξτε ἕνα γυμνό



ΣΧΗΜΑ 7-19 Προπαρασκευή ὁμοαξονικοῦ καλωδίου γιά μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως τοῦ μονωτικοῦ ὑλικοῦ μεταξύ κεντρικοῦ ἀγωγοῦ καί θωρακίσεως. Οἱ ἐνδείξεις τοῦ σχήματος +, –, Α ἀναφέρονται στά ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ σχήματος 7.18.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χάλκινο σύρμα γύρω άπό τό μονωτικό ὑλικό στό διάστημα μεταξύ τῶν δύο ἄκρων τοῦ κεντρικοῦ ἀγωγοῦ καί τῶν δύο ἄκρων τῆς θωρακίσεως. Τό προστατευτικό αὐτό σύρμα πού συνδέεται μέ τόν ἀρνητικό πόλο τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ παρεμποδίζει τή διαρροή φορτίου στήν ἐπιφάνεια τοῦ μονωτικοῦ ὑλικοῦ.

– Συνδέστε τήν ἀντίσταση πού δημιουργεῖ τό μονωτικό τοῦ ὁμοαξονικοῦ καλωδίου τοῦ σχήματος 7-19 στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-18 καί ἐπαναλάβετε τή διαδικασία τοῦ Πειράματος 7-9. Χρησιμοποιεῖστε πυκνωτή μέ χωρητικότητα 0.1 – 0.5 μF καί δυναμικό μεταξύ 20 καί 30 V. Ρυθμίστε τό δυναμικό ἔτσι ὥστε γιά πλήρη φόρτιση τοῦ πυκνωτῆ τό βαλλιστικό γαλβανόμετρο νά ἀποκλίνει κατά τήν ἐκφόρτιση περίπου 20 cm.

– Προσδιορίστε τήν ἀντίσταση τοῦ μονωτικοῦ ὑλικοῦ ἀνά μέτρο ὁμοαξονικοῦ καλωδίου καί συγκρίνετε μέ τίς προδιαγραφές τοῦ κατασκευαστῆ.

Κατά τήν προηγούμενη μέθοδο ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως προσδιορίστηκε ἀπό τό χρόνο φορτίσεως – ἤ μερικῆς φορτίσεως – τοῦ πυκνωτῆ. Ἐναλλακτικά μποροῦμε νά μετρήσουμε τό ἴδιο μέγεθος στήν ἀντίστροφη διεργασία, δηλαδή κατά τήν ἐκφόρτιση ἑνός πυκνωτῆ μέ γνωστή χωρητικότητα διαμέσου μιᾶς ἄγνωστης ἀντιστάσεως μέ ὑψηλή τιμή. Ἕνα κύκλωμα πού ἐπιτρέπει τή διεργασία αὐτή δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 7-20. Μέ τό διακόπτη S στή θέση φορτίσεως A τό φορτίο πού ἀποθηκεύεται (μέσα σέ πολύ μικρό χρόνο) στόν πυκνωτή C εἶναι

$$q = CU \tag{7.75}$$

ὅπου U ἡ ΗΕΔ τοῦ ἠλεκτρικοῦ στοιχείου. Ἀποσυνδέοντας τό διακόπτη S ἀπό τή θέση A ἀρχίζει ἡ ἐκφόρτιση τοῦ πυκνωτῆ διαμέσου τῆς ἀντιστάσεως R. Τό ρεῦμα πού θά διαρρεύσει στήν ἀντίσταση R εἶναι

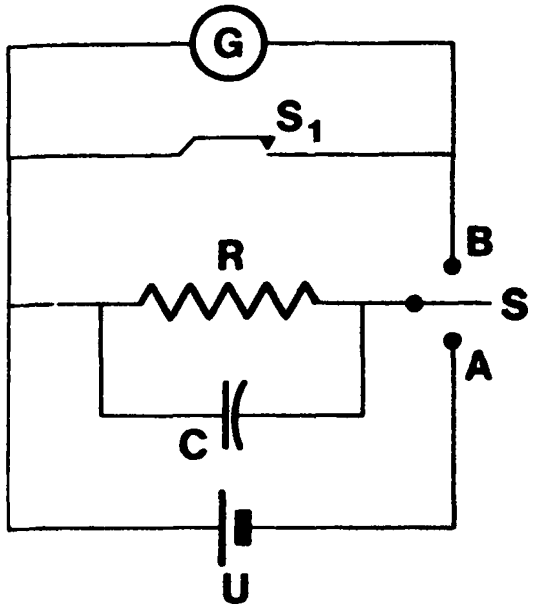
$$i = \frac{V}{R} \tag{7.76}$$

ὅπου

$$V = \frac{q(t)}{C} \tag{7.77}$$

εἶναι τό δυναμικό πού δημιουργεῖ στά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ τό φορτίο q(t)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 7-20 Διάταξη γιά τή μέτρηση ὑψηλῆς ἀντιστάσεως μέ ἐκφόρτιση πυκνωτῆ γνωστῆς χωρητικότητας.

πού ἔχει παραμείνει μετά ἀπό χρόνο ἐκφορτίσεως t. Μποροῦμε ἐπομένως νά γράψουμε τήν ἐξίσωση πού διέπει τήν μείωση τοῦ φορτίου ὡς

$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} = \frac{q}{RC} \tag{7.78}$$

μέ λύσεις

$$q(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} \tag{7.79}$$

ὅπου ἡ σταθερά A προσδιορίζεται ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες. Ἄν σέ χρόνο t=0 ὁ πυκνωτής εἶναι πλήρως φορτισμένος εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι

$$A = Q = UC$$

ὁπότε ἡ ἐξ. (7.79) παίρνει τή μορφή

$$q(t) = UCe^{-\frac{t}{RC}}. \tag{7.80}$$

Ὅπως καί προηγουμένως ἡ τελευταία σχέση μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ σχετική ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου d ὡς πρός τήν πλήρη ἀπόκλιση D (γιά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χρόνο έκφορτίσεως t=0). Σέ άναλογία μέ τήν έξ. (7.74) μποροῦμε νά γράψουμε

$$\ln \frac{Q}{q} = \ln \frac{D}{d} = \frac{t}{RC} \quad . \tag{7.81}$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 7-11. ΜΕΤΡΗΣΗ ΥΨΗΛΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ ΜΕ ΤΟ ΒΑΛΛΙΣΤΙΚΟ ΓΑΛΒΑΝΟΜΕΤΡΟ (ΙΙ. ΕΚΦΟΡΤΙΣΗ ΠΥΚΝΩΤΗ)

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-20. Ὡς ἠλεκτρικό στοιχεῖο χρησιμοποιεῖστε ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη ἕνα πυκνωτή μέ χωρητικότητα τῆς τάξης τῶν 5 μF καί τήν ἄγνωστη ἀντίσταση πού θά σᾶς δοθεῖ. Ἀναπτύξτε διαφορά δυναμικοῦ 1 V στό τροφοδοτικό ΣΡ καί φορτίστε τόν πυκνωτή κλείνοντας τόν διακόπτη S στή θέση A. Μεταθέστε τόν διακόπτη S στή θέση B καί παρατηρεῖστε τή μέγιστη ἀπόκλιση D τοῦ γαλβανομέτρου. Ρυθμίστε τό δυναμικό τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ ὥστε ἡ μέγιστη ἀπόκλιση D νά εἶναι περίπου 20 cm. Σημειῶστε τή θέση ἰσορροπίας καί τή θέση μέγιστης ἀποκλίσεως. Ἡ μεταφορά τοῦ διακόπτη S ἀπό τή θέση A στή θέση B πρέπει νά γίνεται μέ ἀρκετά γρήγορη κίνηση ὥστε τό φορτίο πού θά διαρρεύσει διαμέσου τῆς ἀντιστάσεως R στό μικρό χρονικό διάστημα πού θά παραμείνει ἀνοικτό τό κύκλωμα νά εἶναι ἀμελητέο. Καθόσον ἡ τιμή τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως D θά χρησιμοποιηθεῖ στή συνέχεια ὡς σημεῖο ἀναφορᾶς, ἐπαναλάβετε τή μέτρηση μερικές φορές καί ὑπολογίστε τόν μέσο ὅρο τῶν τιμῶν πού θά προκύψουν. Μετά ἀπό κάθε παρατήρηση τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως, ὁ διακόπτης τηλεγραφητής S_1 μπορεῖ νά χρησιμοποιεῖται γιά τή γρήγορη ἐπαναφορά τοῦ γαλβανομέτρου στή θέση ἰσορροπίας. Ἀντιστρέψτε τήν πολικότητα τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ, σημειῶστε τή νέα θέση ἰσορροπίας (μήν προσπαθήσετε νά μετακινήσετε τήν κλίμακα) καί μέ ἰσάριθμες μετρήσεις προσδιορίστε τή μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου πρός τήν ἀντίθετη πλευρά τῆς κλίμακας γιά πλήρη ἐκφόρτιση τοῦ πυκνωτῆ. Παίρνοντας τό μέσο ὅρο τῶν δύο ἀποτελεσμάτων ἐλαττώνετε συστηματικά σφάλματα πού τυχόν ὑπεισέρχονται στίς μετρήσεις σας ἀπό θερμικές ΗΕΔ, βολταϊκά φαινόμενα, κ.λ.π.

Φορτίστε τόν πυκνωτή (κλείνοντας τόν διακόπτη S στή θέση A) καί στή συνέχεια διακόψτε τό κύκλωμα γιά ἕνα χρονικό διάστημα t = 20 sec. Κλεῖστε τόν διακόπτη στή θέση B καί παρατηρεῖστε τή μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τό χρόνο ἐκφορτίσεως τοῦ πυκνωτῆ, τή θέση ἰσορροπίας τοῦ γαλβανομέτρου καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ιή θέση μέγιστης άποκλίσεως. Ἐπαναλάβετε τή διεργασία γιά πέντε ἕως δέκα διάφορους χρόνους ἐκφορτίσεως τοῦ πυκνωτῆ ὥστε νά καλυφθεῖ ἡ περιοχή τῆς κλίμακας μεταξύ 5 καί 20 cm.

Ἀντιστρέψτε τήν πολικότητα τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ καί ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά τούς ἴδιους χρόνους ἐκφορτίσεως τοῦ πυκνωτῆ. Ὑπολογίστε τό μέσο ὅρο τῆς ὁλικῆς ἀποκλίσεως d γιά κάθε χρόνο ἐκφορτίσεως ἀπό τίς δύο ἀντίστοιχες μετρήσεις.

Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματά σας σέ γραφική παράσταση μέ κατακόρυφο ἄξονα τήν ποσότητα ln (D/d) καί ὁριζόντιο ἄξονα τό χρόνο ἐκφορτίσεως t. Χρησιμοποιεῖστε ἡμιλογαριθμικό χαρτί. Προσαρμόστε τήν καλύτερη εὐθεία στά δεδομένα σας καί ἀπό τήν κλίση τῆς εὐθείας ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (7.81).

Τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-20 μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως ἠλεκτρικῶν ἐξαρτημάτων ἤ διατάξεων πού ἐμφανίζουν τόσο (ὑψηλή) ἀντίσταση ὅσο καί χωρητικότητα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 7-12. ΜΕΤΡΗΣΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΤΟ ΒΑΛΛΙΣΤΙΚΟ ΓΑΛΒΑΝΟΜΕΤΡΟ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-20 χρησιμοποιώντας τόν πυκνωτή πού θά σᾶς δοθεῖ γιά τό συνδιασμό CR τῆς διατάξεως. Ἐπαναλάβετε τό πρῶτο μέρος τοῦ Πειράματος 7-11 καί ἀπό τή μέγιστη ἀπόκλιση D τοῦ γαλβανομέτρου (γιά ἀμελητέο χρόνο ἐκφορτίσεως) προσδιορίστε τή χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ. Ὑπολογίστε τό πειραματικό σφάλμα στή μέτρηση καί συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμά σας μέ τήν τιμή καί τό πειραματικό σφάλμα πού δίνει ὁ κατασκευαστής.

Ἐπαναλάβετε τό δεύτερο μέρος τοῦ Πειράματος 7-11 καί ἀπό τή μεταβολή τῆς μέγιστης ἀποκλίσεως d τοῦ γαλβανομέτορυ ὡς πρός τό χρόνο ἐκφορτίσεως t ὑπολογίστε τήν ἀντίσταση R τοῦ πυκνωτῆ. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμά σας μέ τίς προδιαγραφές τοῦ κατασκευαστῆ.

Κατά τήν ἐφαρμογή τῶν μεθόδων πού περιγράψαμε γιά τή μέτρηση ὑψηλῶν ἀντιστάσεων στήν πράξη, ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως R πού προσδιορίζεται συνήθως σέ μιά πρώτη μέτρηση εἶναι ἀρκετά μικρότερη ἀπό τήν πραγματική. Τοῦτο ὀφείλεται στήν ἀπορρόφηση φορτίου ἀπό τό διηλεκτρικό ὑλικό πού κατά τή μέτρηση ἐμφανίζεται ὡς διαρροή φορτίου διαμέσου τῆς ἀντιστάσεως. Ἡ πραγματική τιμή τῆς ἀντιστάσεως προκύπτει μετά ἀπό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

φόρτιση τοῦ ὑλικοῦ γιά ἀρκετές ὧρες ἤ σέ μερικές περιπτώσεις ἡμέρες. Γιά ἀκριβή προσδιορισμό τῆς ἀντιστάσεως συνιστᾶται ἡ ἐπανάληψη τῆς μετρήσεως σέ τακτά χρονικά διαστήματα καί ἡ παρακολούθηση τοῦ ἀποτελέσματος σέ γραφική παράσταση μέ ὁριζόντιο ἄξονα τό χρόνο πού πραγματοποιήθηκε ἡ μέτρηση καί κατακόρυφο ἄξονα τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως πού προέκυψε ἀπό τή μέτρηση. Ἡ μέθοδος πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά μιά γρήγορη ἐκτίμηση τῆς ἀντιστάσεως R καί πού ἐξαλείφει, τουλάχιστον μερικά, τό φαινόμενο τῆς ἀπορροφήσεως φορτίου, προέρχεται ἀπό τή μορφή τῆς ἐξ. (7.81). Θεωρώντας δύο διαδοχικές μετρήσεις τοῦ Πειράματος 7-11 ἤ 7-12 γιά διάφορους χρόνους ἐκφορτίσεως τοῦ πυκνωτῆ, ἡ ἐξ. (7.81) δίνει

$$\ln \frac{D}{d_2} - \ln \frac{D}{d_1} = \frac{t_2 - t_1}{R}$$

ἤ

$$R = \frac{t_2 - t_1}{C \ln (d_1/d_2)} \tag{7.82}$$

Ἄν καί ἡ τελευταία σχέση παρέχει μιά πρώτη ἐκτίμηση τῆς ἀντιστάσεως, ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά δείξει ὅτι τό πειραματικό σφάλμα πού συνεπάγεται εἶναι σημαντικό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7-1. (α) Ἡ σταθερά στρέψεως τ τοῦ μηχανισμοῦ ἀναρτήσεως ἑνός γαλβανομέτρου εἶναι 20 dyn·cm·rad^{-1}. Ὑπολογίστε τήν ἐνέργεια πού ἀποθηκεύεται στό μηχανισμό ἄν τό πηνίο περιστραφεῖ κατά 28°.
(β) Ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ πηνίου M εἶναι 2.5 g·cm^2. Ἄν ἡ ἀπόσβεση εἶναι ἀμελητέα, ὑπολογίστε τή γωνιακή ταχύτητα κατά τήν ἐπαναφορά τοῦ γαλβανομέτρου ὅταν διέρχεται ἀπό τή θέση ἰσορροπίας.
(γ) Γιά ἀμελητέα ἀπόσβεση ὑπολογίστε τήν περίοδο ταλαντώσεως.

7-2. Ἡ κλίμακα ἑνός γαλβανομέτρου ἔχει τοποθετηθεῖ 45 cm ἀπό τό κάτοπτρο. Τό πηνίο ἔχει περιστραφεῖ κατά 15°. Πόση εἶναι ἡ ἀπόκλιση τῆς φωτεινῆς κηλίδας πάνω στήν κλίμακα ἀπό τή θέση ἰσορροπίας;

7-3. Ἡ **εὐαισθησία σέ μεγα-Ωμ** γαλβανομέτρου ὁρίζεται ὡς ἡ ἀντίσταση (σέ MΩ) πού ἄν τοποθετηθεῖ σέ σειρά μέ τό πηνίο προκαλεῖ ἀπόκλιση 1 mm (γιά ἀπόσταση κλίμακας-κατόπτρου D=1 m) ἄν ἀναπτυχθεῖ διαφορά δυναμι-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κοῦ 1 V. Ἡ εὐαισθησία ὡς πρός τό ρεῦμα ἑνός γαλβανομέτρου εἶναι 10^8 mm/A. Ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου εἶναι R_g=280 Ω.

(α) Ὑπολογίστε τήν εὐαισθησία ὡς πρός τό δυναμικό καί τήν εὐαισθησία σέ μεγα-Ωμ.

(β) *Πόση εἶναι ἡ ἀπόκλιση ἀπό τή θέση ἰσορροπίας ἄν διοχετευθεῖ ρεῦμα* 0.5 μA καί ἡ κλίμακα τοποθετηθεῖ σέ ἀπόσταση 45 cm ἀπό τό κάτοπτρο;

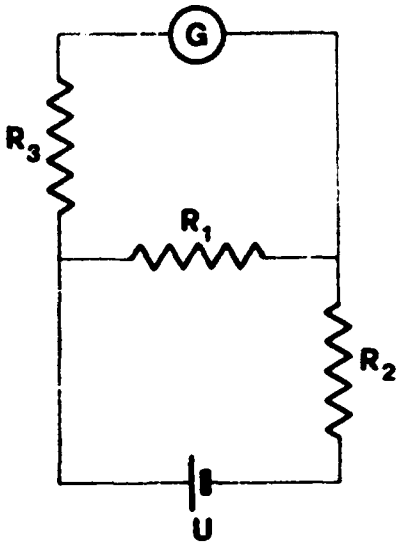
(γ) Μιά ἀντίσταση 75 Ω συνδέεται παράλληλα πρός τό γαλβανόμετρο. Ὑπολογίστε τή νέα εὐαισθησία τῆς διατάξεως ὡς πρός τό ρεῦμα (γιά ἀπόσταση κλίμακας-κατόπτρου D=1 m), τή νέα εὐαισθησία ὡς πρός τό δυναμικό καί τή νέα εὐαισθησία σέ μεγα-Ωμ.

7-4. Στό διπλανό κύκλωμα U = 1.5 V, R_1 = 1 Ω καί R_2 = 7500 Ω. Ὅταν ἡ τιμή τῆς μεταβλητῆς ἀντιστάσεως R_3 εἶναι 350 Ω, τό γαλβανόμετρο ἀποκλίνει κατά 14.5 cm. Γιά τιμή R_3 = 1080 Ω ἡ ἀντίστοιχη ἀπόκλιση εἶναι 5.0 cm.

(α) Προσδιορίστε τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου.

(β) Ὑπολογίστε τήν εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό ρεῦμα.

(γ) Ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_3 πού θά προκαλέσει ἀπόκλιση 7.0 cm.



7-5. Στό κύκλωμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως τό γαλβανόμετρο ἔχει εὐαισθησία 2000 MΩ καί ἐσωτερική ἀντίσταση 600 Ω. Τά ὑπόλοιπα γνωστά στοιχεῖα τοῦ κυκλώματος εἶναι R_1 = 1 Ω, R_3 = 900 Ω καί U = 1.5 V.

(α) Ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_2 ὥστε ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου νά εἶναι 15 cm.

(β) Ἄν γιά τήν τιμή αὐτή τῆς ἀντιστάσεως R_2 ἀποσυνδεθεῖ ἡ ἀντίσταση R_1, πόσο εἶναι τό ρεῦμα πού διοχετεύεται στό γαλβανόμετρο;

7-6. Ἕνα γαλβανόμετρο ἔχει εὐαισθησία ὡς πρός τό ρεῦμα 10^8 mm/A καί ἐσωτερική ἀντίσταση 200 Ω. Τό πηνίο τοῦ γαλβανομέτρου ἀντικαθίσταται ἀπό ἕνα ἄλλο κατασκευασμένο ἀπό τό ἴδιο ἀγώγιμο ὑλικό, ἴσο ἐμβαδό βρόχων

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

καί ἴσο ὁλικό βάρος. Τό σύρμα πού ἔχει χρησιμοποιηθεῖ ὅμως γιά τήν κατασκευή τοῦ νέου πηνίου ἔχει διπλάσια διάμετρο διατομῆς ἀπό ὅτι στό προηγούμενο. Ὑπολογίστε τή νέα ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου καί τή νέα εὐαισθησία (ὡς πρός τό ρεῦμα, τό δυναμικό καί σέ μεγα-Ωμ).

7-7. Ὑποθέστε ὅτι ἡ ὁλική διατομή τοῦ ἀγωγοῦ στό πηνίο ἑνός γαλβανομέτρου καθορίζεται ἀπό τίς προδιαγραφές τοῦ ὀργάνου ἀλλά ὁ κατασκευαστής μπορεῖ νά μεταβάλλει τόν ἀριθμό τῶν βρόχων χρησιμοποιώντας σύρμα ἀνάλογου διαμετρήματος. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι ἀνάλογη πρός τό τετράγωνο τοῦ ἀριθμοῦ τῶν βρόχων.

7-8. Χρησιμοποιώντας τό ἀποτέλεσμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως δεῖξτε ὅτι μέ τίς ἴδιες προϋποθέσεις ἡ γωνιακή ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι ἀνάλογη πρός τήν τετραγωνική ρίζα τῆς ἰσχῆς πού καταναλώνεται στό πηνίο.

7-9. Μέ τίς προϋποθέσεις τῆς ἀσκήσεως 7-7, δεῖξτε ὅτι ὁ συντελεστής ἀποσβέσεως πού δημιουργεῖται ἀπό ἐπαγωγικά ρεύματα κατά τήν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου γιά μία συγκεκριμένη ἀντίσταση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος αὐξάνει μονοτονικά πρός μιά ἀσυμπτωτική σταθερά καθώς αὐξάνει ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου.

7-10. Δεῖξτε ὅτι ἡ περίοδος ταλαντώσεως τοῦ γαλβανομέτρου γιά μηδενική ἀπόσβεση εἶναι

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\tau}}$$

7-11. Δεῖξτε ὅτι ἡ περίοδος ταλαντώσεως στήν ὑποκρίσιμη κατάσταση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι

$$T = T_0 \frac{r_c}{\sqrt{r_c^2 - r^2}}$$

ὅπου $r_c = 2\sqrt{\tau M}$ εἶναι ὁ συντελεστής κρίσιμης ἀποσβέσεως. Σχολιάστε τήν προηγούμενη ἔκφραση γιά τήν κατάσταση ὑπερκρίσιμης ἀποσβέσεως.

7-12. Δεῖξτε ὅτι στήν κατάσταση ὑποκρίσιμης ἀποσβέσεως ὁ λόγος τῶν διαδοχικῶν μέγιστων ταλαντώσεων εἶναι

$$\exp\left(-\frac{rT}{4M}\right) = \exp\left(\frac{-\pi r}{\sqrt{r_c^2 - r^2}}\right).$$

7-13. Ὑπολογίστε τό λόγο τοῦ συντελεστῆ κρίσιμης ἀποσβέσεως πρός τό συντελεστή ἀποσβέσεως πού δημιουργεῖ πρῶτο πλάτος μέγιστης ἀποκλίσεως κατά 10^{-3} φορές μεγαλύτερο ἀπό τήν τελική ἀπόκλιση.

7-14. Ὑπολογίστε τό λόγο τῆς περιόδου T στήν ταλάντωση τῆς προηγούμενη ἀσκήσεως πρός τήν περίοδο T_0 τῆς ταλαντώσεως μέ μηδενική ἀπόσβεση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7-15. Δεῖξτε ὅτι στή διάταξη τοῦ σχήματος 7-7 ἡ ὁλική ἀντίσταση μεταξύ τῶν σημείων A καί B εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή θέση τοῦ διακόπτη ἐπιλογῆς.

7-16. Ἐπαληθεῦστε τήν ἐξ. (7.43).

7-17. Ἕνα γαλβανόμετρο ἔχει ἐσωτερική ἀντίσταση $R_g = 50\ \Omega$ καί ἀντίσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως CDRX = 500 Ω. Ὅταν χρησιμοποιεῖται χωρίς διακλάδωση ἀποκλίνει κατά 12 cm γιά ρεῦμα 0.6 μA. Μιά διακλάδωση Ayrton μέ ὁλική ἀντίσταση 500 Ω καί ἐνδιάμεσες ἐπαφές στά 5 Ω καί 50 Ω ἀπό τό ἀριστερό μέρος τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 7-8 συνδέεται παράλληλα πρός τό γαλβανόμετρο. Ὑπολογίστε τήν εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό ρεῦμα

(α) χωρίς διακλάδωση,

(β) μέ τή διακλάδωση Ayrton καί σύνδεση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος γιά μέγιστη εὐαισθησία καί

(γ) μέ τή διακλάδωση Ayrton καί σύνδεση στίς ἐνδιάμεσες ἐπαφές.

7-18. Ἕνα γαλβανόμετρο μέ εὐαισθησία 10^8 mm/A, ἐσωτερική ἀντίσταση $R_g = 30\ \Omega$ καί ἀντίσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως CDRX = 300 Ω προστατεύεται ἀπό τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 7-10 μέ τούς ἀκροδέκτες 3 καί 4 τοῦ κυκλώματος βραχυκυκλωμένους. Τό ποτενσιόμετρο R ἔχει ρυθμιστεῖ στήν ἀντίσταση CDRX. Ἐκφράστε τήν εὐαισθησία τῆς διατάξεως ὡς πρός τό ρεῦμα ὡς συνάρτηση τοῦ ποσοστοῦ α τῆς ἀντιστάσεως P πού παρεμβάλλεται μεταξύ τῆς κινητῆς ἐπαφῆς καί τοῦ ἀκροδέκτη 3. Μεταβάλλοντας τήν παράμετρο α, ἀποδῶστε τήν εὐαισθησία τῆς διατάξεως σέ γραφική παράσταση.

7-19. Ἕνας πυκνωτής μέ χωρητικότητα 0.2 μF φορτίζεται σέ δυναμικό 10 V. Ὁ πυκνωτής ἐκφορτίζεται χωρίς καθυστέρηση διαμέσου ἑνός βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου, στό ὁποῖο παρατηρεῖται μέγιστη ἀπόκλιση 20 cm. Ἡ διεργασία ἐπαναλαμβάνεται μέ τή διαφορά ὅτι τό κύκλωμα παραμένει ἀνοικτό γιά 25 sec προτοῦ ἐκφορτιστεῖ ὁ πυκνωτής. Ἡ νέα μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου εἶναι 17.5 cm. Ὑπολογίστε τήν ἀντίσταση τοῦ πυκνωτῆ.

7-20. Στή διάταξη τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως μιά ὡμική ἀντίσταση συνδέεται παράλληλα πρός τόν πυκνωτή. Ἡ διεργασία ἐπαναλαμβάνεται καί ἡ μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου πού παρατηρεῖται γιά καθυστέρηση 25 sec μεταξύ φορτίσεως καί ἐκφορτίσεως εἶναι 16.5 cm. Ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως πού συνδέθηκε παράλληλα μέ τόν πυκνωτή.

7-21. Ἕνας ἰδανικός πυκνωτής μέ χωρητικότητα 0.01 μF φορτίζεται σέ δυναμικό 2 V διαμέσου μιᾶς ἀντιστάσεως σέ σειρά. Μετά ἀπό χρόνο ἐκφορτίσεως 100 sec ὁ πυκνωτής ἐκφορτίζεται διαμέσου ἑνός βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου, στό ὁποῖο παρατηρεῖται ἀπόκλιση 12.6 cm. Ἡ διεργασία ἐπαναλαμβάνεται μέ τά δύο ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως βραχυκυκλωμένα καί ἡ νέα ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι 20 cm. Ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

μετρησεις συνεχους ρευματος με μεθοδους μηδενισμου

Όλες οι μετρήσεις πού θεωρήσαμε ώς τώρα βασίζονται στήν ἔνδειξη πού παρέχει ἡ ἀπόκλιση ἑνός κινητοῦ συστήματος. Μετρήσεις τοῦ τύπου αὐτοῦ παρέχουν ἀμέσως τό ἀποτέλεσμα μέ ἁπλή ἀνάγνωση τῆς ἐνδείξεως στήν κλίμακα τοῦ ὀργάνου. Ἡ ἀκρίβεια ὅμως τοῦ ἀποτελέσματος εἶναι δυνατόν νά περιορίζεται σημαντικά ἀπό τήν εὐαισθησία τοῦ ὀργάνου πού εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νά χρησιμοποιήσουμε ἐνῶ ἡ πιστότητα ἐξαρτᾶται κατά κρίσιμο τρόπο ἀπό τή διαδικασία βαθμονομήσεως πού ἔχει προηγηθεῖ.

Εἶναι ἴσως χρήσιμο νά μελετήσουμε τούς περιορισμούς αὐτούς μέ ἕνα συγκεκριμένο παράδειγμα. Ἄς θεωρήσουμε τήν μέτρηση μιᾶς ἀντιστάσεως R_x μέ τό «κύκλωμα II» τοῦ σχήματος 5-13. Λαμβάνοντας ὑπόψη τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ ἀμπερομέτρου R_A, ἡ τιμή τῆς ἄγνωστης ἀντιστάσεως δίνεται ἀπό τήν ἐξ. (5.20) ὡς

$$R_x = \frac{V}{I} - R_A \tag{8.1}$$

ὅπου V καί I εἶναι οἱ ἀντίστοιχες ἐνδείξεις τοῦ βολτομέτρου καί ἀμπερομέτρου. Τό σφάλμα σ_x πού συνεπάγεται ἡ μέτρηση μπορεῖ νά ἐκτιμηθεῖ ἀπό τή γενική ἔκφραση τῆς ἐξ. (1.63). Στή συγκεκριμένη περίπτωση

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial R_x}{\partial V}\right)^2 \sigma_V^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial I}\right)^2 \sigma_I^2 = \frac{1}{I^2}\sigma_V^2 + \frac{V^2}{I^4}\sigma_I^2 \tag{8.2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου σ_V καί σ_I εἶναι τά σφάλματα στίς ἐνδείξεις τῶν δύο ὀργάνων. Ἄν δεχτοῦμε (σέ πολύ καλή προσέγγιση) ὅτι ἡ *ἐσωτερική ἀντίσταση* τοῦ ἀμπερομέτρου R_A εἶναι ἀμελητέα σέ σχέση μέ τό λόγο V/I, μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἐξ. (8.2) στήν πλέον συμμετρική μορφή

$$\frac{\sigma_x^2}{R_x^2} = \frac{\sigma_V^2}{V^2} + \frac{\sigma_I^2}{I^2} \qquad (8.3)$$

πού ταυτόχρονα ἐκφράζει τό σχετικό σφάλμα στόν προσδιορισμό τῆς ἀγνωστης ἀντιστάσεως ὡς συνάρτηση τῶν σχετικῶν σφαλμάτων τῶν ὀργάνων. Γιά τυπικά ἐργαστηριακά ὄργανα μέ σχετικό σφάλμα τῆς τάξης τοῦ 0.02 (2%), τό ἀντίστοιχο σφάλμα στήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως πού παρέχει ἡ προηγούμενη μέτρηση, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (8.3), εἶναι τῆς τάξης τοῦ 0.03 (3%). Μέ ἄλλα λόγια, μιά ἄγνωστη ἀντίσταση στήν περιοχή τοῦ 1 kΩ δέν μπορεῖ νά μετρηθεῖ μέ μεγαλύτερη ἀκρίβεια ἀπό $\pm$ 30 Ω.

Γενικά κάθε μέτρηση πού στηρίζεται σέ ἐνδείξεις ἀποκλίσεως ὀργάνων συνεπάγεται ἕνα συγκεκριμένο *σχετικό* σφάλμα, ἔτσι ὥστε ἡ *ἀπόλυτη* ἀκρίβεια τῆς μετρήσεως νά περιορίζεται ἀπό τήν τάξη μεγέθους τοῦ ἀποτελέσματος. Ἀντίθετα, μετρήσεις μέ **διατάξεις μηδενισμοῦ** δέν ἐμφανίζουν παρόμοιους περιορισμούς ὡς πρός τό ἀπόλυτο σφάλμα. Μέ τόν ὅρο *διάταξη μηδενισμοῦ* θά ἐννοήσουμε κάθε ἠλεκτρικό κύκλωμα τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα μποροῦν νά ρυθμιστοῦν ἔτσι ὥστε ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων του νά μηδενιστεῖ. Ἄν ἕνα ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ κυκλώματος (ΗΕΔ, ἀντίσταση, πυκνωτής, κ.λ.π.) εἶναι ἄγνωστο, τότε ἡ τιμή του μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τή σχέση πού τό συνδέει μέ τά λοιπά (γνωστά) στοιχεῖα κατά τή συνθήκη μηδενισμοῦ. Γιά κύκλωμα συνεχοῦς ρεύματος, ἡ ὕπαρξη ἤ μή διαφορᾶς δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων του μπορεῖ νά διαπιστωθεῖ μέ ἀπευθείας σύνδεση ἑνός εὐαίσθητου ἀμπερομέτρου. Γιά τό σκοπό αὐτό τό γαλβανόμετρο D'Arsonval πού μελετήσαμε στό προηγούμενο κεφάλαιο ἔχει, στίς περισσότερες ἐφαρμογές, ἰδανικές ἰδιότητες.

Τά πλεονεκτήματα τῆς μεθόδου μηδενισμοῦ σέ μιά μέτρηση εἶναι προφανῆ. Κατ' ἀρχήν σέ ἀντίθεση μέ μετρήσεις πού στηρίζονται σέ ἀνάγνωση τῆς ἀποκλίσεως ὀργάνου, ὅπου ἡ τάξη μεγέθους τοῦ ρεύματος περιορίζει τήν περιοχή τῆς κλίμακας καί ἐπομένως τήν ἀπόλυτη ἀκρίβεια, ἡ παρατήρηση τῆς ροῆς ἤ μή ρεύματος μπορεῖ νά γίνει μέ τήν πλήρη εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου. Ἐξάλλου, καθόσον ἡ ἀπόκριση πού ἀπαιτεῖται ἀπό τό ὄργανο εἶναι τοῦ τύπου «ναί» ἤ «ὄχι», ἡ ἀκρίβεια τῆς μετρήσεως δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή γραμμικότητα τῆς ἐνδείξεως ἤ τή βαθμονόμηση.

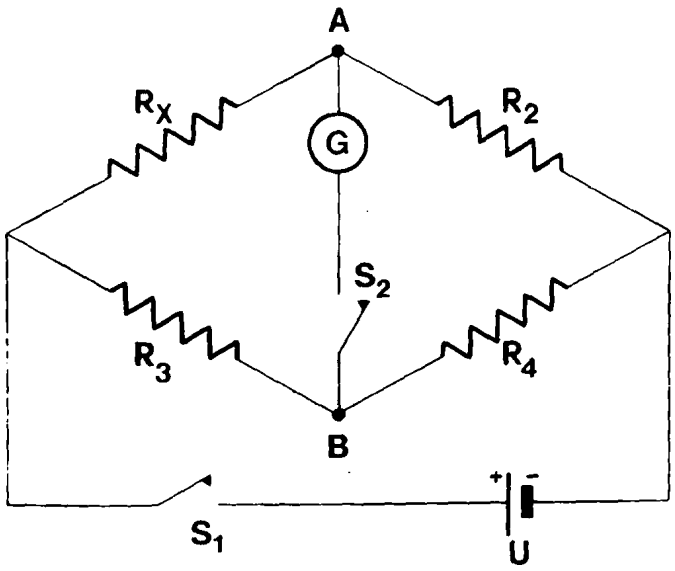
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ προηγούμενη διαπίστωση, πού μπορεῖ νά ἀποδοθεῖ μέ τή φράση *«τό μηδέν μπορεῖ νά μετρηθεῖ μέ μεγαλύτερη ἀκρίβεια ἀπό ὁποιοδήποτε ἄλλο ἀριθμό»*, ἔχει ὁδηγήσει στήν ἐπινόηση πολλῶν κυκλωμάτων πού ἐκμεταλλεύονται τή μέθοδο μηδενισμοῦ γιά τή μέτρηση ἠλεκτρικῶν μεγεθῶν. Θά ἀναφερθοῦμε σέ κυκλώματα τοῦ τύπου αὐτοῦ μέ τή γενική ὀνομασία **γέφυρα** καί στήν κατάσταση μηδενισμοῦ μέ τόν ὅρο **κατάσταση ἰσορροπίας.**

8-1 Ἡ Γέφυρα Wheatstone

Τό ἁπλούστερο κύκλωμα μηδενισμοῦ καί ταυτόχρονα ἕνα ἀπό τά χρησιμότερα εἶναι ἡ **γέφυρα Wheatstone** πού ἐπινοήθηκε ἀπό τόν S.H. Christie τό 1833 καί διαδόθηκε σέ εὐρεία κλίμακα λίγο ἀργότερα ἀπό τόν Charles Wheatstone. Ἡ γέφυρα Wheatstone, πού δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 8-1, εἶναι ἕνα κύκλωμα μέ ἕξη κλάδους ἀπό τούς ὁποίους ὁ πρῶτος περιέχει ΗΕΔ, ὁ δεύτερος ἕνα γαλβανόμετρο καί οἱ ἄλλοι τέσσερις ὡμικές ἀντιστάσεις. Ἡ κατάσταση ἰσορροπίας τῆς γέφυρας ἐπιτυγχάνεται ὅταν τό ρεῦμα I_g στόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου μηδενιστεῖ. Στήν κατάσταση αὐτή ὅλο τό ρεῦμα I_x πού διαρρέει τήν ἀντίσταση R_x διοχετεύεται στήν ἀντίσταση R_2 καί ὅλο τό ρεῦμα I_3 τῆς ἀντιστάσεως R_3 στήν ἀντίσταση R_4, ἤτοι

$$I_2 = I_x \tag{8.4α}$$



ΣΧΗΜΑ 8-1 Ἡ γέφυρα Wheatstone.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί

$$I_4 = I_3 \ . \tag{8.4β}$$

Ἐξάλλου τά σημεῖα Α καί Β βρίσκονται στό ἴδιο δυναμικό ὁπότε

$$I_x R_x = I_3 R_3 \tag{8.5α}$$

καί

$$I_2 R_2 = I_4 R_4 \ . \tag{8.5β}$$

Ἀπαλείφοντας τά ρεύματα ἀπό τίς ἐξ. (8.4) καί (8.5) μποροῦμε τώρα εὔκολα νά καταλήξουμε στή σχέση πού συνδέει τίς ἀντιστάσεις τοῦ κυκλώματος στήν κατάσταση ἰσορροπίας

$$\frac{R_x}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \ . \tag{8.6}$$

Ἄν ἐπομένως οἱ τρεῖς ἀπό τίς ἀντιστάσεις τῆς γέφυρας R_1, R_2 καί R_3 εἶναι γνωστές, ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_x μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τήν τελευταία σχέση.

Ἡ ἐξ. (8.6) πού καθορίζει τήν κατάσταση ἰσορροπίας τῆς γέφυρας εἶναι ἀνεξάρτητη τόσο ἀπό τήν ΗΕΔ τοῦ ἡλεκτρικοῦ στοιχείου ὅσο καί ἀπό τήν ἐσωτερική ἀντίσταση R_g τοῦ γαλβανομέτρου. Τοῦτο φυσικά δέν ἰσχύει γιά ὁποιαδήποτε ἄλλη κατάσταση τῆς γέφυρας κατά τήν ὁποία ἕνα μή μηδενικό ρεῦμα I_g διαρρέει τόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου. Στή γενική κατάσταση λειτουργίας του τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-1 ἔχει ἤδη ἀναλυθεῖ μέ τό θεώρημα τοῦ Thévenin στήν Παράγραφο 6-7, καί μέ μετασχηματισμό τριγώνου σέ ἀστέρα στήν Παράγραφο 6-9. Σύμφωνα μέ τήν ἀνάλυση κατά τήν πρώτη μέθοδο, τό ἐξωτερικό κύκλωμα τοῦ γαλβανομέτρου μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ (βλ. σχῆμα 6-10) ἀπό μιά ἰσοδύναμη ΗΕΔ

$$U_0 = \left[\frac{R_x}{R_x + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right] U \tag{8.7}$$

καί μιά ἰσοδύναμη ἀντίσταση

$$R_0 = \frac{R_x R_2}{R_x + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \ . \tag{8.8}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τό ρεῦμα ἑπομένως πού διαρρέει τόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι

$$I_g = \frac{U_0}{R_0 + R_g} = \frac{\dfrac{R_x}{R_x + R_2} - \dfrac{R_3}{R_3 + R_4}}{\dfrac{R_xR_2}{R_x + R_2} + \dfrac{R_3R_4}{R_3 + R_4} + R_g} U \ . \qquad (8.9)$$

Παρατηρεῖται ὅτι γιά τήν κατάσταση ἰσορροπίας τῆς γέφυρας ὅπου $I_g = 0$ ἡ τελευταία σχέση ὁδηγεῖ στή συνθήκη τῆς ἐξ. (8.6).

Ἡ ἀκρίβεια τῆς γέφυρας Wheatstone στή μέτρηση ἀντιστάσεως ἐξαρτᾶται ἀπό πολλούς παράγοντες, ὅπως ἡ ἀκρίβεια τῶν ἐπιμέρους γνωστῶν ἀντιστάσεων, ἡ σταθερότητα καθεμιᾶς ὡς πρός μεταβολές τῆς θερμοκρασίας πού προκαλεῖ ἡ κατανάλωση ἰσχῆς καί ἡ εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό ρεῦμα. Σύμφωνα μέ τήν ἀνάλυση τῆς Παραγράφου 5-6 ἡ μέγιστη ὠφέλιμη ἰσχή πού καταναλώνεται στόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου ἀπό τήν ἰσοδύναμη ΗΕΔ U_0 ἐπιτυγχάνεται γιά ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου R_g ἴση πρός τήν ἰσοδύναμη ἀντίσταση R_0. Ἡ προσαρμογή αὐτή τῆς ποσότητας R_0 στήν ἐξ. (8.8) πρός τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου

$$R_g = \frac{R_xR_2}{R_x + R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3 + R_4} \qquad (8.10)$$

θεωρεῖται συνήθως ἡ ἐπιθυμητή κατάσταση λειτουργίας τῆς γέφυρας Wheatstone.

ΠΕΙΡΑΜΑ 8-1. Η ΓΕΦΥΡΑ WHEATSTONE

Μετρεῖστε μέ ἕνα ὠμόμετρο τήν ἄγνωστη ἀντίσταση R_x πού σᾶς δόθηκε. Ἐκτιμεῖστε τό πειραματικό σφάλμα στή μέτρηση.

– Συνδέστε τό κύκλωμα τῆς γέφυρας Wheatstone πού δίνεται στό σχῆμα 8-1. Ὡς ἀντίσταση R_2 χρησιμοποιεῖστε ἕνα δεκαδικό κιβώτιο ἀντιστάσεων. Γιά τό συνδιασμό τῶν ἀντιστάσεων $R_3 + R_4$ χρησιμοποιεῖστε μιά ἀντίσταση μέ ἐνδιάμεση βαθμονομημένη κινητή ἐπαφή. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη ἕνα ἠλεκτρικό στοιχεῖο μέ ΗΕΔ περίπου 3 V ἤ ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ. Συνδέστε τό γαλβανόμετρο διαμέσου τοῦ κυκλώματος προστασίας του καί ἑνός διακόπτη τηλεγραφητῆ S_2.

– Ἐπιλέξτε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως $R_2 \simeq R_x$ καί τό λόγο $R_3 / R_4 = 1$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ὑπολογίστε τά ρεύματα πού διαρρέουν κάθε κλάδο τῆς γέφυρας ὅταν ὁ διακόπτης S_2 εἶναι ἀνοικτός καί ἄν χρειαστεῖ μειῶστε τήν ΗΕΔ U ὥστε τά ρεύματα νά βρίσκονται μέσα στά ἐπιτρεπτά ὅρια πού καθορίζει ὁ κατασκευαστής γιά καθεμιά ἀπό τίς ἀντιστάσεις.

– Κλεῖστε τό διακόπτη S_1. Μέ τό κύκλωμα προστασίας τοῦ γαλβανομέτρου στό σημεῖο ἐλάχιστης εὐαισθησίας κλεῖστε τόν διακόπτη S_2. Αὐξεῖστε τήν εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου μέχρις ὅτου δείξει κάποια ἀπόκλιση. Ρυθμίστε τήν ἀντίσταση R_2 ὥστε νά ἀποκατασταθεῖ ἡ ἰσορροπία τοῦ ὀργάνου. Συνεχίστε τή διαδικασία, αὐξάνοντας σταδιακά τήν εὐαισθησία τοῦ κυκλώματος προστασίας καί ρυθμίζοντας τήν ἀντίσταση R_2, ὥστε νά ἐπιτύχετε κατάσταση ἰσορροπίας γιά μέγιστη εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου. Ἄν τό κιβώτιο ἀντιστάσεων R_2 δέν διαθέτει ἀρκετά μικρές ὑποδιαιρέσεις, πραγματοποιεῖστε τήν τελική ρύθμιση μέ μετατόπιση τῆς κινητῆς ἐπαφῆς μεταξύ τῶν ἀντιστάσεων R_3 καί R_4. Ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_x ἀπό τήν ἐξ. (8.6).

– Μεταβάλετε τήν ἀντίσταση R_2 κατά μικρά βήματα καί καταγράψτε τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου d γιά ἀρκετές τιμές μικρότερες ἤ μεγαλύτερες ἀπό τήν τιμή $R_{20} = R_x$. Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματα σέ γραφική παράσταση, μέ τετμημένη τήν ἀπόκλιση d τοῦ γαλβανομέτρου καί τεταγμένη τήν ἀπόκλιση

$$\Delta R = |R_2 - R_{20}| \tag{8.11}$$

ὅπου R_{20} ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_2 γιά τήν ὁποία ἐπιτυγχάνεται ἡ κατάσταση ἰσορροπίας. Σχολιάστε τή μορφή τῆς καμπύλης πού προκύπτει. Εἶναι ἡ σχέση τῶν δύο μεγεθῶν γραμμική; Εἶναι συμμετρική γύρω ἀπό τήν τιμή $\Delta R = 0$; Ἀπό τήν κλίση τῆς καμπύλης κοντά στή θέση ἰσορροπίας ὑπολογίστε τήν εὐαισθησία τῆς διατάξεως

$$S_R \equiv \frac{d}{\Delta R} \ . \tag{8.12}$$

Ἀπό τήν τελευταία ποσότητα καί τήν ἐλάχιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτορυ ἀπό τή θέση ἰσορροπίας πού μπορεῖτε νά παρατηρήσετε ἐκτιμεῖστε τό πειραματικό σφάλμα στή μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως R_x.

Λόγω τῆς μεγάλης εὐαισθησίας τῆς γέφυρας Wheatstone ὁποιαδήποτε τυχαία ΗΕΔ στούς κλάδους τοῦ κυκλώματος (ἀπό θερμικά ἤ βολταϊκά φαινόμενα) μπορεῖ νά ἐπηρεάσει τή συνθήκη ἰσορροπίας. Γιά νά ἐξαλείψετε παρόμοια φαινόμενα ἀντιστρέψτε τούς πόλους τοῦ ἠλεκτρικοῦ στοιχείου U (ἄν χρησιμοποιεῖτε τροφοδοτικό ΣΡ, ἀντιστρέψτε τούς πόλους χωρίς νά πειράξετε τή ρύθμιση τοῦ δυναμικοῦ) καί ἐπαναλάβετε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

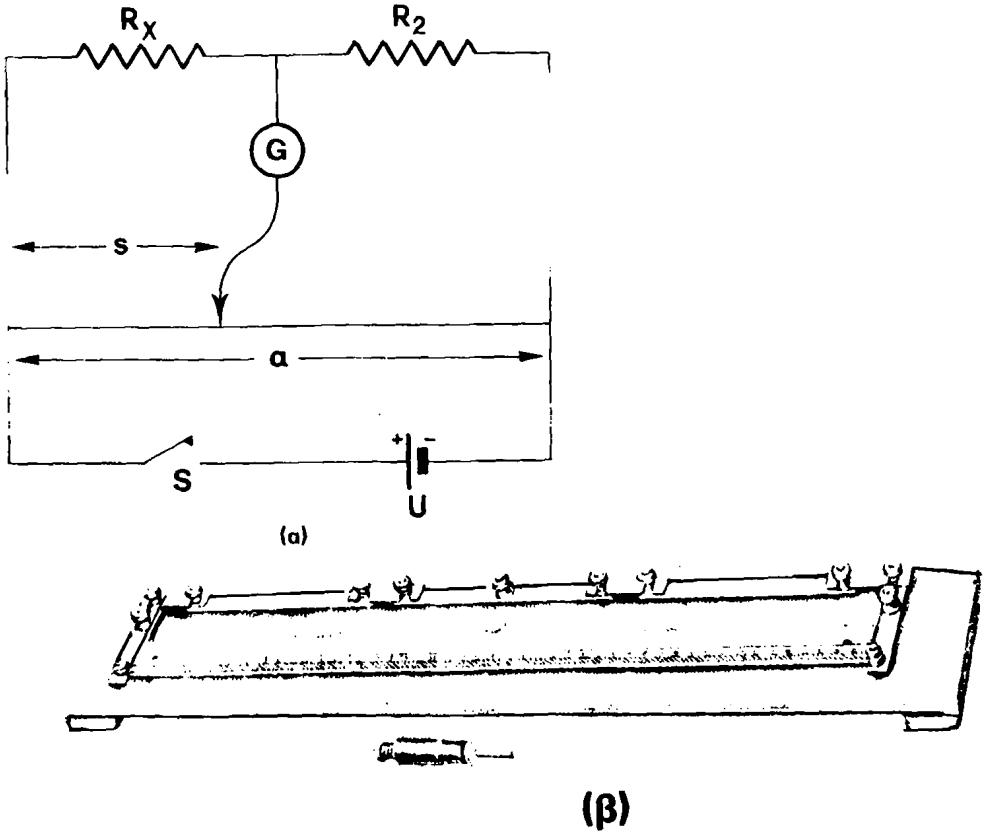
τήν προηγούμενη διαδικασία. Ὑπολογίστε τόν μέσο ὅρο τῶν δύο μετρήσεων καί τό πειραματικό σφάλμα ἀπό τίς σχέσεις τῆς Παραγράφου 1-11.

Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά λόγο τῶν ἀντιστάσεων $R_3/R_4 = 0.25$, $R_3/R_4 = 1/3$ καί $R_3/R_4 = 3$.

Προσδιορίστε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_x καί τό πειραματικό σφάλμα ἀπό ὅλες τίς προηγούμενες μετρήσεις. Συγκρίνετε τό τελικό ἀποτέλεσμα μέ τήν τιμή πού ἔδωσε ἡ μέτρηση μέ τό ὠμόμετρο.

8-2 Πειραματικό Σφάλμα στή Μέτρηση Ἀντιστάσεως

Στό προηγούμενο πείραμα ἡ γέφυρα Wheatstone χρησιμοποιήθηκε στήν πλέον συνήθη της μορφή, ὅπου ὁ ἕνας κλάδος (τῶν γνωστῶν ἀντιστάσεων R_3 καί R_4) ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα γραμμικό ἀγωγό, ἐνῶ ἡ συνθήκη ἰσορροπίας προσδιορίζεται ἀπό τή θέση τῆς κινητῆς ἐπαφῆς πάνω σέ μιά κλίμακα. Ἄν ὅπως δείχνει τό σχῆμα 8-2, α εἶναι τό ὁλικό μῆκος τοῦ γραμμικοῦ ἀγωγοῦ καί s ἡ ἀπόσταση τῆς κινητῆς ἐπαφῆς ἀπό τό ἕνα ἄκρο του τότε σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (4.25) ἡ τιμή τῶν ἀντιστάσεων R_3 καί R_4 εἶναι



ΣΧΗΜΑ 8-2 (α) Σχηματική διάταξη καί (β) συνήθως ἐργαστηριακός τύπος γέφυρας Wheatstone μέ γραμμικό ἀγωγό καί κινητή ἐπαφή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$R_3 = \rho \frac{s}{S} \tag{8.13α}$$

$$R_4 = \rho \frac{a - s}{S} \tag{8.13β}$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ εἰδική ἀντίσταση καί S ἡ διατομή τοῦ ἀγωγοῦ. Στήν περίπτωση ἐπομένως αὐτή ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τῆς ἐξ. (8.6) παίρνει τή μορφή

$$R_x = R_2 \frac{s}{a - s} . \tag{8.14}$$

Στήν πράξη, τό πειραματικό σφάλμα πού συνεπάγεται ἡ ἐξ. (8.14) στή μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως R_x προέρχεται κατά κύριο λόγο ἀπό τήν ἀβεβαιότητα μέ τήν ὁποία μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἡ θέση τῆς κινητῆς ἐπαφῆς πάνω στό γραμμικό ἀγωγό. Μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (1.63) μποροῦμε εὔκολα νά δείξουμε ὅτι ἄν σ_s εἶναι τό σφάλμα στόν προσδιορισμό τοῦ μήκους s, τότε ἡ ἀβεβαιότητα σ_x στήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_x πού προκύπτει ἀπό τήν ἐξ. (8.14) εἶναι

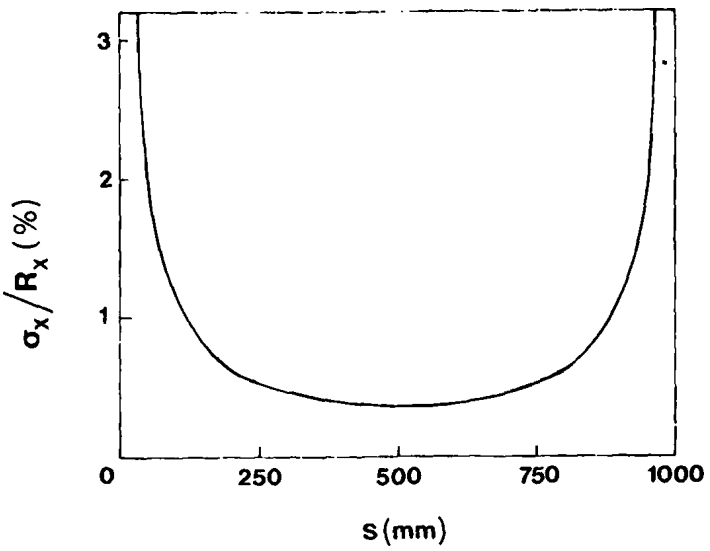
$$\sigma_x = R_2 \frac{a}{(a - s)^2} \sigma_s = \frac{a}{(a - s)^s} R_x \sigma_s . \tag{8.15}$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση ἕπεται ὅτι τό σχετικό σφάλμα στή μέτρηση εἶναι

$$\frac{\sigma_x}{R_x} = \frac{a}{(a - s)} \frac{\sigma_s}{s} . \tag{8.16}$$

Ἄν ἡ ἀντίσταση R_2 ἐπιλεγεῖ περίπου ἴση πρός τήν ἄγνωστη ἀντίσταση R_x, ὥστε ὁ λόγος R_3/R_4 νά μή διαφέρει πολύ ἀπό τή μονάδα, τό σχετικό σφάλμα πού συνεπάγεται ἡ ἐξ. (8.16) εἶναι ἀρκετά μικρό. Γιά συνήθεις διατάξεις μέ ὁλικό μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ $R_3 + R_4$ ἴσο μέ 1 m καί διακριτική ἱκανότητα στή θέση τῆς κινητῆς ἐπαφῆς περίπου 1 mm, τό σχετικό σφάλμα σ_x/R_x δέν ξεπερνᾶ τό 0.003 (0.3%). Ὅπως δείχνει τό σχῆμα 8-3 τό πειραματικό σφάλμα γίνεται σημαντικό μόνο γιά συνθήκη ἰσορροπίας πού ἀπαιτεῖ τήν τοποθέτηση τῆς κινητῆς ἐπαφῆς κοντά στά ἄκρα τοῦ γραμμικοῦ ἀγωγοῦ. Ὅπως ἤδη ἀναφέρθηκε, ἡ κατάσταση αὐτή μπορεῖ νά ἀποφευχθεῖ μέ κατάλληλη ἐπιλογή τῆς ἀντιστάσεως R_2. Ἡ μέγιστη ἀκρίβεια ἐπιτυγχάνε-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 8-3 Σχετικό σφάλμα σ_x/R_x κατά τή μέτρηση άντιστάσεως μέ τή γέφυρα Wheatstone τοῦ σχήματος 8-2 ὡς συνάρτηση τῆς θέσεως s τῆς κινητῆς ἐπαφῆς στό γραμμικό ἀγωγό. Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς γραφικῆς παραστάσεως ἔχει ληφθεῖ ὁλικό μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ $a = 1$ m καί διακριτική ἱκανότητα στή θέση τῆς κινητῆς ἐπαφῆς $\sigma_s = 1$ mm.

ται στό σημεῖο ὅπου ἡ μεταβλητή s παίρνει τιμή ὥστε ἡ πρώτη παράγωγος τοῦ σχετικοῦ σφάλματος νά μηδενίζεται

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma_x}{R_x}\right)^2 = \frac{2s - a}{(a - s)^2 s^2} = 0 \qquad (8.17)$$

ἤ

$$s = \frac{a}{2} \qquad (8.18)$$

Μέ ἄλλα λόγια *ἡ ἀκρίβεια τῆς μετρήσεως εἶναι μέγιστη ὅταν ἡ κινητή ἐπαφή βρίσκεται στό μέσον τοῦ ἀγωγοῦ καί ὁ λόγος τῶν ἀντιστάσεων R_3/R_4 εἶναι μονάδα.* Στήν περίπτωση αὐτή τό σχετικό σφάλμα στή μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως εἶναι διπλάσιο ἀπό τό σχετικό σφάλμα στόν προσδιορισμό τῆς θέσης τῆς κινητῆς ἐπαφῆς.

Ἡ ἀκρίβεια πού παρέχει ἡ ἁπλή γέφυρα Wheatstone στή μέτρηση ἀντιστάσεων γιά μιά μεγάλη περιοχή τιμῶν ἱκανοποιεῖ τίς ἀπαιτήσεις στίς περισσότερες ἐφαρμογές. Ἡ ἀβεβαιότητα στήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_2 συνήθως συνεισφέρει σφάλμα κάτά πολύ μικρότερο ἀπό τήν ποσότητα τῆς ἐξ. (8.15) ἐνῶ συστηματικά σφάλματα πού μποροῦν νά ὑπεισέλθουν ἀπό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

θερμική ΗΕΔ ή άλλα τυχαία ήλεκτρικά φαινόμενα μπορούν νά έξαληφθούν μέ τή διαδικασία άναστροφής τών πόλων τοῦ στοιχείου πού περιγράφηκε στό Πείραμα 8-1. Άπό τήν άλλη πλευρά συστηματικά σφάλματα πού προκαλοῦνται άπό τίς συνθῆκες τοῦ περιβάλλοντος μποροῦν νά έπηρεάσουν κατά πολύ δραστικότερο τρόπο τή μέτρηση. Μεταβολή π.χ. τῆς θερμοκρασίας τοῦ περιβάλλοντος κατά 1 °C μπορεῖ νά έπιφέρει διακυμάνσεις στήν τιμή μιᾶς άντιστάσεως μέχρι 0.5 %. Γιά τή διάταξη τοῦ σχήματος 8-2 ή μεταβολή αὐτή εἶναι ὑπερδιπλάσια άπό τό πειραματικό σφάλμα πού συνεισφέρει ή έπιμέρους άβεβαιότητα στήν τιμή τῶν γνωστῶν άντιστάσεων. Εἶναι έπομένως δυνατόν νά έκμεταλευτοῦμε τήν εὐαισθησία τῆς γέφυρας Wheatstone γιά τή μελέτη τῆς θερμικῆς συμπεριφορᾶς μιᾶς άντιστάσεως. Ή διεργασία αὐτή περιγράφεται στό έπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 8-2. ΘΕΡΜΙΚΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ

Γιά πολλά μέταλλα, σέ μιά περιορισμένη περιοχή θερμοκρασιῶν, ή άντίσταση έμφανίζει γραμμική έξάρτηση ὡς πρός τή θερμοκρασία, ήτοι

$$R = R_0\left[1 + \alpha\,(t - t_0)\right] \qquad (8.19)$$

ὅπου R_0 εἶναι ή τιμή τῆς άντιστάσεως σέ θερμοκρασία t_0, R ή τιμή τῆς άντιστάσεως σέ θερμοκρασία t καί α ὁ **θερμικός συντελεστής άντιστάσεως** πού χαρακτηρίζει τό μέταλλο.

– Βυθίστε τήν άντίσταση πού θά σᾶς δοθεῖ σέ ἕνα λουτρό λαδιοῦ καί μετρεῖστε μέ ἕνα θερμόμετρο τή θερμοκρασία του. Άκολουθεῖστε τή διαδικασία τοῦ Πειράματος 8-1 καί μετρεῖστε τήν τιμή τῆς άγνωστης άντιστάσεως σέ θερμοκρασία δωματίου.

– Τοποθετεῖστε ἕνα άναμμένο λύχνο Bunsen κάτω άπό τό λουτρό λαδιοῦ. Καθώς ή θερμοκρασία τῆς άντιστάσεως αὐξάνει θά παρατηρήσετε άπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Μεταβάλετε τή θέση τῆς κινητῆς έπαφῆς μεταξύ τῶν άντιστάσεων R_3 καί R_4 (βλ. σχῆμα 8-2) ὥστε νά διατηρεῖται ή ἰσορροπία τῆς γέφυρας. Σέ κατάλληλο πίνακα καταγράψτε τή θερμοκρασία τῆς άντιστάσεως άνά 5 °C καί τήν άντίστοιχη θέση τῆς κινητῆς έποφῆς γιά τήν ὁποία ἰσορροπεῖ ή γέφυρα μέχρι περίπου 30 °C πάνω άπό τή θερμοκρασία δωματίου. Άναδεύετε τό λάδι κατά τακτικά διαστήματα, ὥστε νά έπιτύχετε ὁμοιόμορφη θερμοκρασία. Σβύστε τό λύχνο καί έπαναλάβετε τίς μετρήσεις κατά τήν έπαναφορά τοῦ λουτροῦ στή θερμοκρασία δωματίου.

– Άποδῶστε τά πειραματικά δεδομένα σέ γραφική παράσταση μέ τεταγμένη τήν άντίσταση καί τετμημένη τή θερμοκρασία. Προσαρμόστε στά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

δεδομένα τήν καλύτερη εὐθεία καί ἀπό τήν κλίση τῆς εὐθείας προσδιορίστε τόν θερμικό συντελεστή τοῦ μετάλλου. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τήν ἀντίστοιχη τιμή πού δίνεται στή βιβλιογραφία καί σχολιάστε τήν ἀκρίβεια τῆς μετρήσεώς σας.

8-3 Μέτρηση Πολύ Μικρῶν Ἀντιστάσεων. Ἡ Διπλή Γέφυρα Kelvin

Ἡ ἀκρίβεια τῆς γέφυρας Wheatstone περιορίζεται σημαντικά κατά τή μέτρηση πολύ μικρῶν ἀντιστάσεων ($R_x \lesssim 0.1\ \Omega$) ὅπου ἡ ἀντίσταση τῶν συρμάτων ἤ τῶν σημείων ἐπαφῆς γίνεται συγκρίσιμη πρός τήν τιμή τῆς ἄγνωστης ἀντιστάσεως. Γενικώτερα ἡ σύνδεση ἑνός ἐξαρτήματος σέ ἕνα κύκλωμα γίνεται προβληματική ὅταν ἡ χαρακτηριστική του ἀντίσταση εἶναι συγκρίσιμη μέ τίς ἀντιστάσεις τῶν σημείων ἐπαφῆς ἤ τῶν ἀγωγῶν πού τό συνδέουν μέ ἄλλα ἐξαρτήματα ἤ ὄργανα τοῦ κυκλώματος. Μιά μέθοδος γιά τήν ἐξάλειψη τῆς δυσκολίας αὐτῆς περιγράφεται στό ἑπόμενο πείραμα.

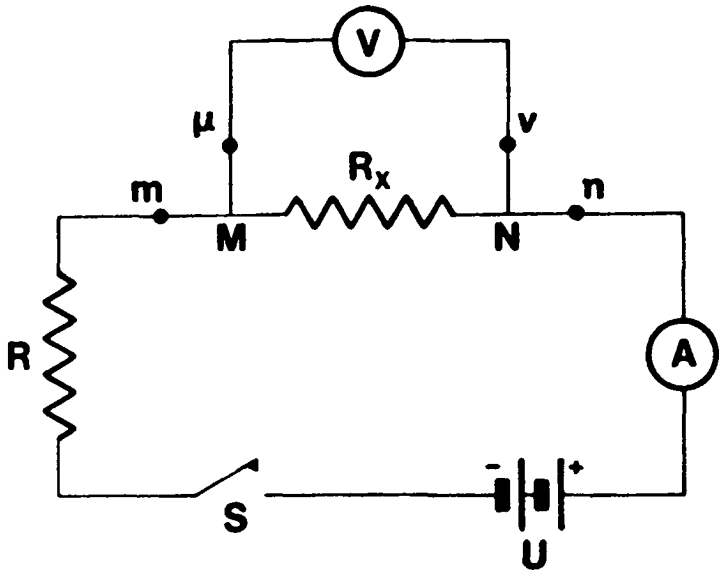
ΠΕΙΡΑΜΑ 8-3. ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΑΚΡΟΔΕΚΤΩΝ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-4. Ὡς πηγή ΗΕΔ χρησιμοποιεῖστε ἠλεκτρικό στοιχεῖο ἤ τροφοδοτικό ΣΡ. Ἐπιλέξτε τήν ΗΕΔ U καί τήν ἀντίσταση R ὥστε τό ρεῦμα πού διαρρέει τό ἀμπερόμετρο A νά πάρει κάποια τιμή μέσα στά ἐπιτρεπτά ὅρια γιά κάθε ἐξάρτημα τοῦ κυκλώματος. Μεταξύ τῶν σημείων m καί n συνδέστε ἕνα γραμμικό ἀγωγό (π.χ. μιά λεπτή μεταλλική ράβδο).

— Συνδέστε ἕνα εὐαίσθητο βολτόμετρο σέ δύο σημεῖα M καί N τοῦ γραμμικοῦ ἀγωγοῦ. Κλεῖστε τόν διακόπτη S. Ἀπό τίς ἐνδείξεις τοῦ ἀμπερομέτρου A καί τοῦ βολτομέτρου V ὑπολογίστε τήν ἀντίσταση τοῦ γραμμικοῦ ἀγωγοῦ μεταξύ τῶν σημείων M καί N. Προσδιορίστε τό πειραματικό σφάλμα στή μέτρηση.

Ὁ γραμμικός ἀγωγός πού χρησιμοποιήθηκε στό προηγούμενο πείραμα μπορεῖ νά διατηρηθεῖ ὡς ἐξάρτημα μέ γνωστή ἀντίσταση ἄν τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-4 διακοπεῖ στά σημεῖα m, n, μ καί ν. Μέ τήν προϋπόθεση ὅτι σέ μιά νέα σύνδεση οἱ ἀκροδέκτες m καί n θά χρησιμοποιηθοῦν γιά τή διοχέτευση ρεύματος ἐνῶ οἱ ἀκροδέκτες μ καί ν γιά τόν καθορισμό διαφορᾶς δυναμικοῦ, δέν ἀνακύπτει πλέον τό πρόβλημα τῆς ἀντιστάσεως πού παρεμβάλλουν τά σημεῖα ἐπαφῆς ἤ οἱ ἀγωγοί πού συνδέουν τό ἐξάρτημα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 8-4. Μέτρηση πολύ μικρῆς ἀντιστάσεως μέ βολτόμετρο καί ἀμπερόμετρο.

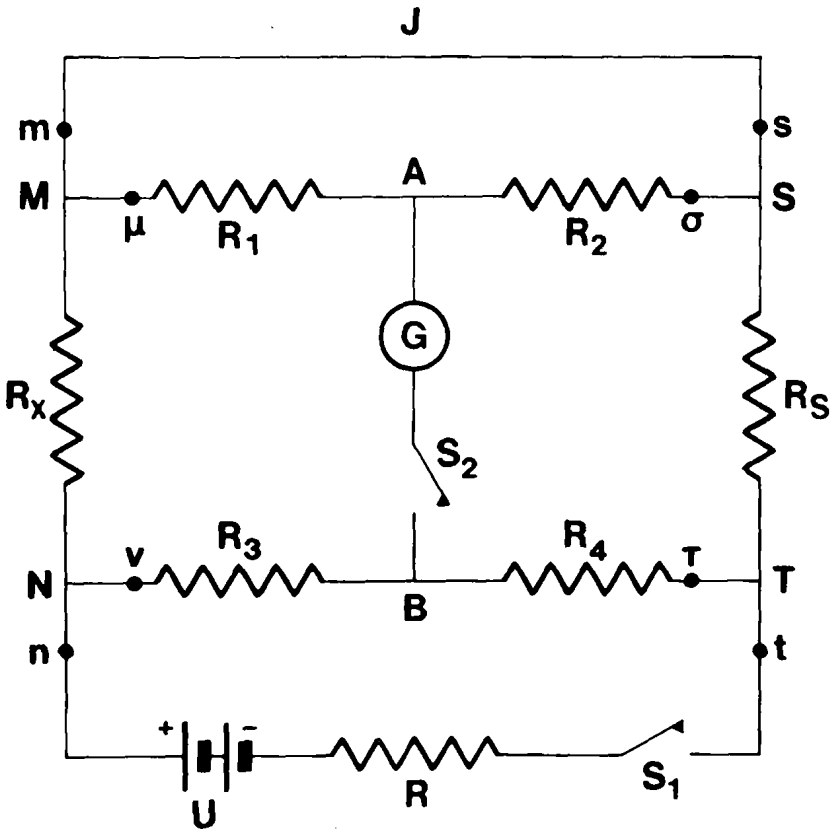
μέ τό ὑπόλοιπο κύκλωμα. Πράγματι, οἱ ἐπαφές m καί n ἀνήκουν στό κύκλωμα πού περιέχει τήν ΗΕΔ καί ἡ ἀντίστασή τους μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀμελητέα σέ σύγκριση μέ τήν ἀντίσταση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος (στήν περίπτωση τοῦ σχήματος 8-4, τήν ἀντίσταση R). Παράλληλα, τά σημεῖα ἐπαφῆς M, N, μ καί ν ἀνήκουν στό κύκλωμα τοῦ βολτομέτρου καί ἡ ἀντίσταση πού παρεμβάλλουν μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀμελητέα σέ σύγκριση μέ τή (συνήθως μεγάλη) ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ ὀργάνου. Πολλοί κατασκευαστές παράγουν παρόμοια ἐξαρτήματα μικρῆς ἀντιστάσεως μέ τή γενική ὀνομασία **ἀντιστάσεις τεσσάρων ἀκροδεκτῶν,** τά ὁποῖα διαθέτουν δύο ἀκροδέκτες ρεύματος καί δύο ἀκροδέκτες δυναμικοῦ. Τά ἐξαρτήματα αὐτά, ὅπου ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως ἔχει προσδιοριστεῖ ἀπό τόν κατασκευαστή μέ ἀρκετά μεγάλη ἀκρίβεια, χρησιμοποιοῦνται συνήθως ὡς πρότυπα γιά τή μέτρηση μικρῶν ἀντιστάσεων μέ μεθόδους μηδενισμοῦ.

Στίς περισσότερες ἐφαρμογές τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-4, πού μπορεῖ νά ἀναγνωριστεῖ ὡς τό «κύκλωμα Ι» τῆς Παραγράφου 5-3 [βλ. σχῆμα 5-12], ὁδηγεῖ σέ προσδιορισμό τῆς ἀντιστάσεως μέ ἱκανοποιητική ἀκρίβεια. Ὅπως δείχνει ἡ γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 5-14, ἀκόμη καί ἁπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Ohm μέ βάση τίς ἐνδείξεις τῶν ὀργάνων, ὁδηγεῖ σέ ἐκτίμηση τῆς ἀντιστάσεως μέ σχετικό σφάλμα μικρότερο τοῦ 1 %. Σέ ἐφαρμογές, ὅπου οἱ ἀπαιτήσεις ἀκριβείας εἶναι αὐστηρότερες, μικρές ἀντιστάσεις μποροῦν νά μετρηθοῦν μέ μεθόδους μηδενισμοῦ. Τό κύκλωμα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

μηδενισμοῦ πού χρησιμοποιεῖται συνήθως ἔχει ἐπινοηθεῖ ἀπό τόν λόρδο Kelvin καί ἀπαντᾶται στή βιβλιογραφία μέ τήν ὀνομασία **διπλή γέφυρα Kelvin** ἤ ἁπλῶς **γέφυρα Kelvin.**

Ὅπως δείχνει τό σχῆμα 8-5, ἡ γέφυρα Kelvin ἀποτελεῖ παραλλαγή τῆς γέφυρας Wheatstone στήν ὁποία ἡ (μικρή) ἄγνωστη ἀντίσταση R_x μέ ἀκροδέκτες ρεύματος m, n καί ἀκροδέκτες δυναμικοῦ μ, ν συγκρίνεται πρός τήν πρότυπη ἀντίσταση R_s μέ ἀντιστοίχους ἀκροδέκτες s, t καί σ, τ. Οἱ ἀντιστάσεις R_x καί R_s συνδέονται στά σημεῖα m καί s διαμέσου ἑνός ἀγωγοῦ J ἀμελητέας ἀντιστάσεως καί σέ συνδιασμό μέ τίς ἀντιστάσεις R_3 καί R_4 δημιουργοῦν τούς τέσσερις κλάδους τῆς γέφυρας Wheatstone. Στήν ἁπλή γέφυρα Wheatstone τό γαλβανόμετρο συνδέεται μεταξύ τοῦ σημείου B καί τοῦ κοινοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν ἀντιστάσεων R_x καί R_s. Γιά πολύ μικρές ἀντιστάσεις, ὅπως στήν περίπτωση τοῦ σχήματος 8-5, τό σημεῖο αὐτό δέν εἶναι πλήρως καθορισμένο, καθόσον οἱ ἐπαφές m καί s μπορεῖ νά παρεμβάλλουν ἀντίσταση συγκρίσιμη πρός τίς τιμές R_x καί R_s. Ἡ δυσκολία αὐτή μπορεῖ νά παρακαμφθεῖ μέ τήν παράλληλη σύνδεση τοῦ συνδιασμοῦ τῶν ἀντιστάσεων $R_1 + R_2$ ἔτσι ὥστε τό σημεῖο A νά πάρει ὁποιαδήποτε ἐπιθυμητή τιμή δυναμικοῦ. Μέ τή συνδεσμολογία τοῦ σχήματος 8-5 οἱ ἀντιστά-



ΣΧΗΜΑ 8-5 Ἡ διπλή γέφυρα Kelvin.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σεις τῶν σημείων ἐπαφῆς m καί n δέν ἐπηρεάζουν τή συνθήκη ἰσορροπίας ἐνῶ τά ὑπόλοιπα σημεῖα ἐπαφῆς παρεμβάλλουν ἀμελητέα ἀντίσταση σέ σχέση μέ τίς ἀντιστάσεις R_1, R_2, R_3 καί R_4.

Η συνθήκη ἰσορροπίας τῆς γέφυρας Kelvin μπορεῖ νά ἐξαχθεῖ ἄν συγκρίνουμε τήν πτώση δυναμικοῦ στόν κλάδο TB καί στόν κλάδο TSA. Ἄν V_{TN} εἶναι ἡ διαφορά δυναμικοῦ πού ἀναπτύσσει ἡ ΗΕΔ μεταξύ τῶν σημείων T καί N, ἡ πτώση δυναμικοῦ στόν κλάδο TB εἶναι

$$V_{TB} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_{TN} \,. \tag{8.20}$$

Στήν κατάσταση ἰσορροπίας τῆς γέφυρας, τό ρεῦμα πού διαρρέει τόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου μηδενίζεται καί τό ρεῦμα I πού διατρέχει τήν ἀντίσταση R_S εἶναι ἴσο μέ τό ρεῦμα πού διατρέχει τήν ἄγνωστη ἀντίσταση R_x. Τό ρεῦμα I δίνεται ἀπό τήν σχέση

$$V_{TN} = I\left[R_S + \frac{(R_1 + R_2)R_J}{R_1 + R_2 + R_J} + R_x\right] \tag{8.21}$$

ὅπου R_J εἶναι ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀγωγοῦ J καί τῶν σημείων ἐπαφῆς m καί s. Η ἐξ. (8.20) μπορεῖ ἐπομένως νά γραφεῖ ὡς

$$V_{TB} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} I\left[R_S + \frac{(R_1 + R_2)R_J}{R_1 + R_2 + R_J} + R_x\right] \,. \tag{8.22}$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι

$$V_{TSA} = I\left[R_S + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{(R_1 + R_2)R_J}{R_1 + R_2 + R_J}\right] \tag{8.23}$$

Στήν κατάσταση ἰσορροπίας πού θεωροῦμε, ὅπου τό δυναμικό τῶν σημείων A καί B ταυτίζεται, οἱ δύο τελευταῖες σχέσεις δίνουν τή συνθήκη ἰσορροπίας

$$\frac{R_4}{R_3 + R_4}\left[R_S + \frac{(R_1 + R_2)R_J}{R_1 + R_2 + R_J} + R_x\right]$$

$$= R_S + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{(R_1 + R_2)R_J}{R_1 + R_2 + R_J}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἤ

$$R_x = R_s \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_2 R_J}{R_1 + R_2 + R_J} \left[\frac{R_3}{R_4} - \frac{R_1}{R_2} \right] . \qquad (8.24)$$

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τῆς γέφυρας Kelvin γίνεται κατά πολύ ἁπλούστερη ἄν ἐπιλεγεῖ ἡ σχέση τῶν ἀντιστάσεων

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} . \qquad (8.25)$$

Στήν περίπτωση αὐτή συμπίπτει μέ τή συνθήκη γιά ἰσορροπία τῆς γέφυρας Wheatstone, ἤτοι

$$R_x = R_s \frac{R_3}{R_4} . \qquad (8.26)$$

Ἡ σχέση τῆς ἐξ. (8.25) ἐπιλέγεται συνήθως ὡς ἡ συνθήκη λειτουργίας τῆς γέφυρας Kelvin καί ἡ ἄγνωστη ἀντίσταση προσδιορίζεται ἀπό τήν ἐξ. (8.26). Ἡ γενικώτερη ὅμως σχέση τῆς ἐξ. (8.24) εἶναι χρήσιμη στήν ἐκτίμηση τοῦ σφάλματος πού ὑπεισέρχεται λόγω ἀποκλίσεως ἀπό τήν ἐξίσωση τῶν λόγων R_1/R_2 καί R_3/R_4 πού καθορίζει ἡ ἐξ. (8.25). Τό σφάλμα αὐτό εἶναι ἀνάλογο πρός τήν ὁλική ἀντίσταση τοῦ κλάδου MmJsS.

ΠΕΙΡΑΜΑ 8-4. Η ΓΕΦΥΡΑ KELVIN

Μέ σκοπό τήν ἀκριβέστερη μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως πού προσδιορίσατε στό Πείραμα 8-3, συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-5. Χρησιμοποιεῖστε μιά πρότυπη ἀντίσταση R_s μέ τιμή ὅσο τό δυνατόν πλησιέστερα στό ἀποτέλεσμα τοῦ Πειράματος 8-3. Μεταξύ τῶν σημείων μ καί σ συνδέστε ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων μέ ἐνδιάμεση ἐπαφή Α καί μεταξύ τῶν σημείων ν καί τ ἕνα γραμμικό ἀγωγό μέ κινητή βαθμονομημένη ἐπαφή. Συνδέστε ἀκόμη τά σημεῖα m καί s μέ ἕνα ἁπλό σύρμα J. Χρησιμοποιεῖστε ἕνα διακόπτη S_1 στόν κλάδο τῆς ΗΕΔ καί ὡς διακόπτη S_2 στόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου τήν κινητή ἐπαφή. Ἡ ἀντίσταση R (πού μπορεῖ νά εἶναι μεταβλητή) χρησιμοποιεῖται γιά τόν περιορισμό τοῦ ρεύματος σέ ἐπιτρεπτά ἐπίπεδα στήν περίπτωση ὅπου ἡ ΗΕΔ U προέρχεται ἀπό ἠλεκτρικό στοιχεῖο καί μπορεῖ νά παραληφθεῖ ἄν χρησιμοποιεῖται ρυθμιζόμενο τροφοδοτικό ΣΡ.

Ἀποσυνδέστε τόν ἀγωγό J. Τό κύκλωμα τώρα εἶναι μιά γέφυρα Wheatstone πού ἰσορροπεῖ ἄν ἱκανοποιεῖται ἡ σχέση

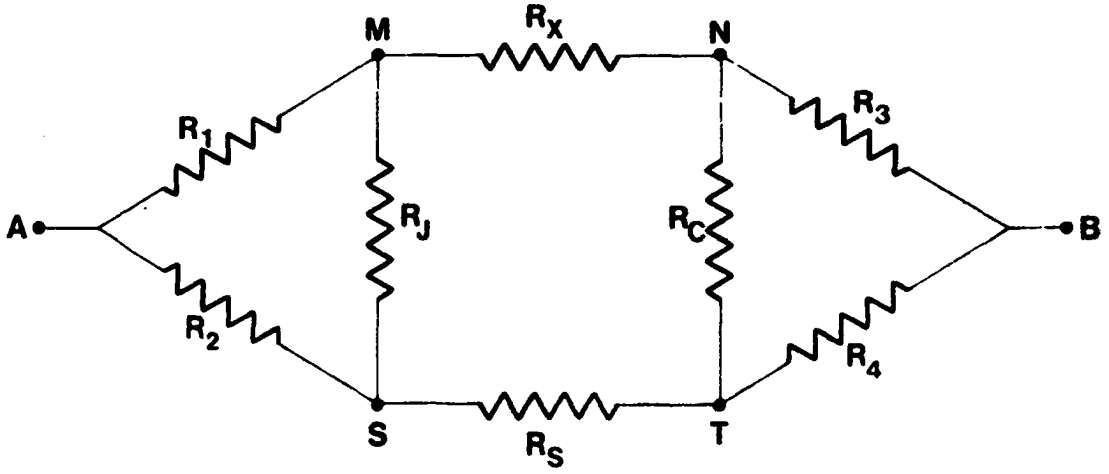
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{s_3}{s_4} = \frac{R_1 + R_x}{R_2 + R_s} \tag{8.27}$$

Ρυθμίστε τήν έπαφή Α έτσι ώστε $R_1/R_2 = 1$ καί τήν κινητή έπαφή Β τοῦ γραμμικοῦ άγωγοῦ έτσι ώστε νά ίσορροπήσει ή γέφυρα Wheatstone. Έπανασυνδέστε τόν άγωγό J καί έλέγξτε άν ίσορροπεῖ ή γέφυρα Kelvin. Ρυθμίστε τίς έπαφές Α καί Β γιά διόρθωση τῆς ίσορροπίας. Σέ κάθε στάδιο τῆς έργασίας άρχίστε μέ τό προστατευτικό κύκλωμα τοῦ γαλβανομέτρου ρυθμισμένο γιά έλάχιστη εύαισθησία καί αύξεῖστε σταδιακά τήν εύαισθησία του μέχρι ὅτου παρατηρήσετε κάποια άπόκλιση.

Έπαναλάβετε τήν προηγούμενη έργασία μέχρις ὅτου ίσορροπεῖ τόσο ή γέφυρα Wheatstone (τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-5 χωρίς τόν άγωγό J) ὅσο καί ή γέφυρα Kelvin. Άπό τήν έξ. (8.26) ύπολογίστε τήν τιμή τῆς άντιστάσεως R_x. Έκτιμεῖστε τήν άβεβαιότητα στό λόγο R_1/R_2 καί τό πειραματικό σφάλμα πού συνεπάγεται στήν τιμή τῆς άντιστάσεως R_x. Συγκρίνετε τό άποτέλεσμα μέ τό πειραματικό σφάλμα στό Πείραμα 8-3.

Όπως καί στήν περίπτωση τῆς γέφυρας Wheatstone ή ίσοδύναμη ΗΕΔ καί ή ίσοδύναμη άντίσταση στό έξωτερικό κύκλωμα τοῦ γαλβανομέτρου τῆς γέφυρας Kelvin μποροῦν νά ύπολογιστοῦν μέ τίς μεθόδους τοῦ Κεφαλαίου 6. Παραλείποντας τήν άντίσταση R τοῦ σχήματος 8-5 στόν κλάδο τῆς ΗΕΔ μποροῦμε νά άποδώσουμε τό έξωτερικό κύκλωμα άντιστάσεων τοῦ γαλβανομέτρου σύμφωνα μέ τό σχῆμα 8-6. Η όλική άντίσταση μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ δύο μετασχηματισμούς τριγώ-



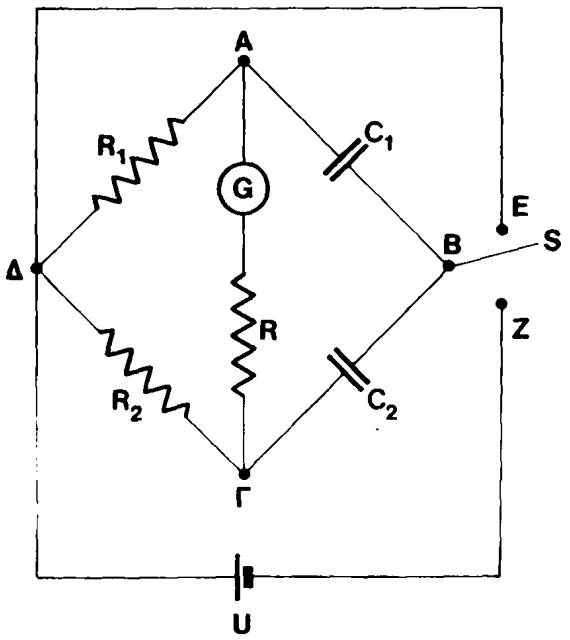
ΣΧΗΜΑ 8-6 Έξωτερικό κύκλωμα άντιστάσεων στά άκρα τοῦ γαλβανομέτρου τῆς γέφυρας Kelvin.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

νου σέ άστέρα. Παρόλα αύτά στήν πράξη οί άντιστάσεις R_J, R_S, R_x καί ή έσωτερική άντίσταση τοῦ στοιχείου R_C έχουν άμελητέα τιμή σέ σχέση μέ τίς άντιστάσεις R_1, R_2, R_3 καί R_4. Στήν προσέγγιση αύτή τό κύκλωμα εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6-10(γ), ἤτοι δύο ζεύγη παράλληλων άντιστάσεων σέ σειρά. Ὁ ὑπολογισμός τῆς ἰσοδύναμης ΗΕΔ πού άναπτύσσεται μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ στίς ἴδιες γενικές γραμμές πού όδήγησαν στίς ἐξ. (6.54) καί (6.55) [βλ. Ἄσκηση 8-10].

8-4 Μέτρηση Χωρητικότητας μέ Μεθόδους Μηδενισμοῦ ΣΡ

Μέθοδοι μηδενισμοῦ στό ΣΡ εἶναι δυνατόν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά τήν άκριβή μέτρηση χωρητικότητας. Μιά μέθοδος πού συγκρίνει ἕνα ἄγνωστο πυκνωτή πρός ἕνα πρότυπο ἐξάρτημα χωρητικότητας περιέχεται στό σχῆμα 8-7. Τό κύκλωμα, πού θυμίζει τήν άπλή γέφυρα Wheatstone, περιέχει ἕνα διακόπτη S πού μπορεῖ ἐπιλεκτικά νά φορτίσει ἤ νά ἐκφορτίσει τούς δύο πυκνωτές C_1 καί C_2 διαμέσου τῶν άντιστάσεων R_1 καί R_2. Ὡς άνιχνευτής τῆς καταστάσεως ἰσορροπίας χρησιμοποιεῖται ἕνα βαλλιστικό γαλβανόμετρο G μέ ἐσωτερική άντίσταση R_G, τό ὁποῖο μετρᾶ τό ὁλικό φορτίο Q_G πού μεταφέρεται μεταξύ τῶν σημείων Α καί Γ κατά τή φόρτιση ἤ ἐκφόρτιση τῶν πυκνωτῶν. Ἡ άντίσταση R στόν κλάδο τοῦ γαλβανομέ-



ΣΧΗΜΑ 8-7 Γέφυρα γιά τή μέτρηση χωρητικότητας κατά τή φόρτιση καί ἐκφόρτιση πυκνωτῶν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τρου ἔχει συμπεριληφθεῖ γιά λόγους ἀσφαλείας σέ περιπτώσεις πού λόγω μή ἰσορροπίας τῆς γέφυρας, διοχετεύεται στιγμιαῖα μεγάλο ρεῦμα στόν κλάδο ΑΓ.

Ἄν μέ ἀρχικά ἀφόρτιστους τούς πυκνωτές C_1 καί C_2, ὁ διακόπτης S τοποθετηθεῖ στό σημεῖο φορτίσεως Z, στούς κλάδους τῶν ἀντιστάσεων R_1 καί R_2 θά διοχετευτοῦν ἀντίστοιχα ρεύματα i_1 καί i_2. Ἄν τό ρεῦμα πού κατά τήν ἴδια στιγμή διαρρέει τόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι i_G, ἐφαρμογή τοῦ δεύτερου νόμου τοῦ Kirchhoff στό βρόχο ΔΑΓ δίνει τήν ἐξίσωση

$$i_1R_1 + i_G(R_G + R) - i_2R_2 = 0 \ . \qquad (8.28)$$

Χρησιμοποιώντας τόν ὁρισμό τοῦ ρεύματος $i = dq/dt$, μποροῦμε νά γράψουμε τήν προηγούμενη σχέση ὡς

$$R_1 \frac{dq_1}{dt} + (R_G + R)\frac{dq_G}{dt} - R_2 \frac{dq_2}{dt} = 0 \ . \qquad (8.29)$$

Γιά μικρές τιμές τῶν ἀντιστάσεων στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-7, ὁ χρόνος πού διαρκεῖ ἡ φόρτιση τῶν πυκνωτῶν (καί ἑπομένως ἡ διάρκεια ροῆς τοῦ ρεύματος) εἶναι ἀρκετά μικρός. Ὁλοκληρώνοντας τήν ἐξ. (8.29) ὡς πρός τό χρόνο, καθόλη τή διάρκεια τῆς φορτίσεως, μποροῦμε ἑπομένως νά γράψουμε

$$R_1Q_1 + (R_G + R)Q_G - R_2Q_2 = 0 \qquad (8.30)$$

ὅπου Q εἶναι τό ὁλικό φορτίο πού διέρρευσε στούς ἀντίστοιχους κλάδους. Στήν περίπτωση ὅπου τά μεγέθη τῶν ἐξαρτημάτων πού συγκροτοῦν τό κύκλωμα ἔχουν ἐπιλεγεῖ ἔτσι ὥστε κατά τή φόρτιση ὁ κλάδος τοῦ γαλβανομέτρου δέν διαρρέεται ἀπό ρεῦμα (καί ἑπομένως $Q_G = 0$) ἡ ἐξ. (8.30) παίρνει τήν ἁπλή μορφή

$$R_1Q_1 = R_2Q_2 \ . \qquad (8.31)$$

Μετά τήν πλήρη φόρτιση τῶν πυκνωτῶν τό ρεῦμα σέ κάθε κλάδο τοῦ κυκλώματος μηδενίζεται ἐνῶ τό δυναμικό μεταξύ τῶν σημείων Δ καί Β παραμένει σταθερό. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τῶν δύο πυκνωτῶν ταυτίζεται, ἤτοι

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \ . \qquad (8.32)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ὁ συνδιασμός τῶν ἐξ. (8.31) καί (8.32) ὁδηγεῖ τώρα στή συνθήκη ἰσορροπίας τῆς γέφυρας

$$R_1C_1 = R_2C_2. \tag{8.33}$$

πού μπορεῖ νά συγκριθεῖ μέ τή συνθήκη ἰσορροπίας τῆς γέφυρας Wheatstone τῆς ἐξ. (8.6). Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά δείξει ὅτι ἡ ἴδια συνθήκη ἰσχύει γιά μηδενική ἀπόκριση τοῦ γαλβανομέτρου κατά τή διαδικασία τῆς ἐκφορτίσεως ἄν ὁ διακόπτης S μετακινηθεῖ ἀπό τήν ἐπαφή Z στήν ἐπαφή E. Ἡ ἐξ. (8.33) παρέχει τή δυνατότητα προσδιορισμοῦ τῆς χωρητικότητας ἑνός κλάδου, ἄν ἡ χωρητικότητα καί οἱ ἀντιστάσεις τῶν ὑπόλοιπων κλάδων τῆς γέφυρας εἶναι γνωστές.

ΠΕΙΡΑΜΑ 8-5. ΜΕΤΡΗΣΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΓΕΦΥΡΑ ΣΡ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-7. Χρησιμοποιεῖστε δύο κιβώτια ἀντιστάσεων R_1 καί R_2, τό καθένα μέ ὁλική ἀντίσταση 1 kΩ. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη ἕνα πρότυπο ἐξάρτημα χωρητικότητας $C_1 = 1$ μF. Ὡς ἀντίσταση προστασίας τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου G, χρησιμοποιεῖστε ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων ἤ ροοστάτη μέ ὁλική ἀντίσταση R = 100 kΩ. Ὡς πηγή ΣΡ χρησιμοποιεῖστε τροφοδοτικό ΣΡ ἤ στοιχεῖο μέ ΗΕΔ U = 3 V. Ὡς πυκνωτή C_2 συνδέστε τό ἐξάρτημα μέ ἄγνωστη χωρητικότητα πού θά σᾶς δοθεῖ.

Γιά $R_1 = R_2 = 200$ Ω καί R = 10 kΩ κλεῖστε τό διακόπτη S στή θέση Z καί παρατηρεῖστε τήν πρώτη μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Μεταθέστε τό διακόπτη S στή θέση Z καί ἐκφορτίστε τούς πυκνωτές, παρατηρώντας ταυτόχρονα ἄν ἡ πρώτη μέγιστη ἔνδειξη τοῦ γλβανομέτρου, πρός τή ἀντίθετη φορά, εἶναι ἴση μέ τήν προηγούμενη ἔνδειξη κατά τή φόρτιση. Ἄν ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι μικρή, μειῶστε σταδιακά τήν ἀντίσταση R μέχρις ὅτου ἡ πρώτη μέγιστη ἀπόκλισή του εἶναι ἴση περίπου μέ τά 2/3 τῆς ὅλης κλίμακας.

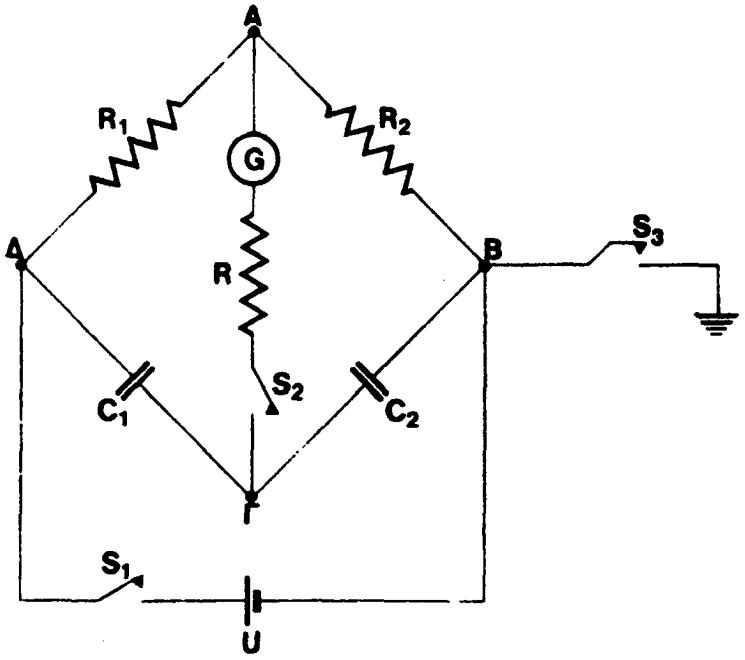
Αὐξεῖστε ἤ μειῶστε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_2 ὥστε κατά τή διαδοχική φόρτιση καί ἐκφόρτιση τῶν πυκνωτῶν τῆς γέφυρας ἡ πρώτη μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου νά μειωθεῖ. Συνεχίστε ρυθμίζοντας τήν ἀντίσταση R_2 καί μειώνοντας τήν ἀντίσταση προστασίας τοῦ γαλβανομέτρου R (μέχρι τήν τελική τιμή μέγιστης εὐαισθησίας R = 0) μέχρις ὅτου, κατά τή φόρτιση ἤ ἐκφόρτιση, τό γαλβανόμετρο παραμένει ἀδρανές. Ἀπό τήν ἐξ. (8.33) ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς ἄγνωστης χωρητικότητας C_2 καί ἀπό τή διακριτική ἱκανότητα τῶν ἐξαρτημάτων R_1 καί R_2 τό πειραματικό σφάλμα στή μέτρηση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά ὅλα τά ἐξαρτήματα μέ ἄγνωστη χωρητικότητα πού θά σᾶς δοθοῦν.

Μιά ἐναλλακτική μέθοδος μηδενισμοῦ γιά τή μέτρηση χωρητικότητας, γνωστή ὡς **μέθοδος Gott**, παρέχεται ἀπό τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-8. Τό κύκλωμα, πού διαφέρει οὐσιαστικά ἀπό τή γέφυρα τοῦ σχήματος 8-7 ὡς πρός τήν ἐναλλαγή τῆς πηγῆς ΣΡ καί τοῦ γαλβανομέτρου, ἐλέγχει τή διαφορά δυναμικοῦ πού δημιουργεῖται μεταξύ τῶν σημείων Α καί Γ μετά τήν πλήρη φόρτιση τῶν δύο πυκνωτῶν. Κατά τήν ἀποκατάσταση τοῦ κυκλώματος μέ τό διακόπτη S_1 οἱ δύο πυκνωτές φορτίζονται στό δυναμικό πού δημιουργεῖ τό ἠλεκτρικό στοιχεῖο μεταξύ τῶν σημείων Δ καί Β. Μετά τήν παρέλευση τῆς μεταβατικῆς περιόδου φορτίσεως, ἄν ὁ διακόπτης S_2 παραμένει ἀνοικτός, τό φορτίο Q πού ἔχει συσσωρευτεῖ στούς δύο πυκνωτές ταυτίζεται. Ἡ κατάσταση ἰσορροπίας τῆς γέφυρας χαρακτηρίζεται ἀπό τήν ταύτιση τοῦ δυναμικοῦ τῶν σημείων Α καί Γ. Ἄν στήν κατάσταση αὐτή κλείσει ὁ διακόπτης S_2, οἱ ἐξισώσεις τοῦ δεύτερου νόμου τοῦ Kirchhoff πού διέπουν τούς βρόχους ΔΑΓΔ καί ΑΒΓΑ εἶναι

$$\frac{Q}{C_1} = IR_1 \qquad (8.34a)$$



ΣΧΗΜΑ 8-8 Ἡ γέφυρα Gott μέ τή μέτρηση χωρητικότητας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί

$$\frac{Q}{C_2} = IR_2 \qquad (8.34\beta)$$

ὅπου, καθόσον τό ρεῦμα στόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου μηδενίζεται, I εἶναι τό κοινό ρεῦμα πού διαρρέει τίς ἀντιστάσεις R_1 καί R_2. Ἀπαλειφή τοῦ ρεύματος I ἀπό τίς ἐξ. (8.34) ὁδηγεῖ στή συνθήκη ἰσορροπίας

$$R_1C_1 = R_2C_2. \qquad (8.35)$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 8-6. ΜΕΤΡΗΣΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΤΗ ΓΕΦΥΡΑ GOTT

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-8. Χρησιμοποιεῖστε δύο κιβώτια ἀντιστάσεων τό καθένα μέ ὁλική ἀντίσταση 1 kΩ ἤ 10 kΩ. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη ἕνα πρότυπο ἐξάρτημα χωρητικότητας $C_1 = 1$ μF. Ὡς ἀντίσταση προστασίας τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου G, χρησιμοποιεῖστε ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων ἤ ροοστάτη μέ ὁλική ἀντίσταση R = 100 kΩ. Ὡς πηγή ΣΡ χρησιμοποιεῖστε τροφοδοτικό ΣΡ ἤ στοιχεῖο μέ ΗΕΔ U = 3 V. Ὡς πυκνωτή C_2 συνδέστε τό ἐξάρτημα μέ ἄγνωστη χωρητικότητα πού θά σᾶς δοθεῖ. Συνδέστε τό σημεῖο Β πρός τή γῆ παρεμβάλλοντας ἕνα διακόπτη τηλεγραφητῆ S_3.

Γιά $R_1 = R_2 = 200$ Ω κλεῖστε τό διακόπτη S_1 φορτίζοντας τούς δύο πυκνωτές C_1 καί C_2. Γιά R = 10 kΩ κλεῖστε τό διακόπτη S_2 καί παρατηρεῖστε τήν πρώτη μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Ἄν ἡ ἀπόκλιση εἶναι μικρή, ἀνοῖξτε τό διακόπτη S_1, ἐκφορτίστε τούς δύο πυκνωτές πρός τή γῆ κλείνοντας πρός στιγμή τό διακόπτη τηλεγραφητῆ, καί ἀνοῖξτε τό διακόπτη S_2. Μειῶστε τήν ἀντίσταση προστασίας τοῦ γαλβανομέτρου R καί ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία μέχρις ὅτου ἡ πρώτη μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι ἴση περίπου μέ τά 2/3 τῆς ὅλης κλίμακας.

Αὐξεῖστε ἤ μειῶστε τήν ἀντίσταση R_2 ὥστε κατά τήν προηγούμενη διεργασία ἡ πρώτη μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου νά μειωθεῖ. Συνεχίστε ρυθμίζοντας τήν ἀντίσταση R_2 καί μειώνοντας τήν ἀντίσταση προστασίας τοῦ γαλβανομέτρου (μέχρι τήν τελική τιμή μέγιστης εὐαισθησίας R = 0) μέχρις ὅτου κατά τήν ἀποκατάσταση τῆς συνεχείας στόν κλάδο ΑΓ (μέσω τοῦ διακόπτη S_2) τό γαλβανόμετρο παραμένει ἀδρανές. Ἀπό τήν ἐξ. (8.35) ὑπολογίστε τήν ἄγνωστη χωρητικότητα C_2 καί ἀπό τή διακριτική ἱκανότητα τῶν ἐξαρτημάτων R_1 καί R_2 τό πειραματικό σφάλμα στή μέτρηση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά ὅλα τά ἐξαρτήματα μέ ἄγνωστη χωρητικότητα πού θά σᾶς δοθοῦν. Ἄν ἔχετε χρησιμοποιήσει τά ἴδια ἄγνωστα ἐξαρτήματα στό Πείραμα 8-5, συγκρίνετε τά ἀποτελέσματα καί σχολιάστε τή σχετική ἀκρίβεια τῶν δύο μεθόδων μετρήσεως χωρητικότητας.

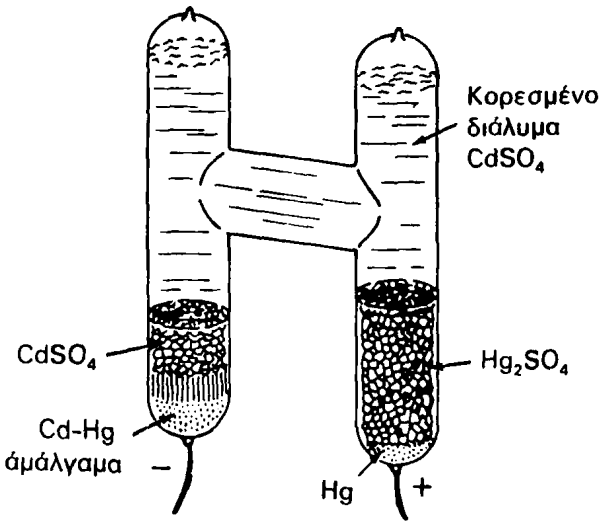
8-5 Πρότυπα Ἠλεκτρικά Στοιχεῖα

Στό Πείραμα 5-6 χρησιμοποιήσαμε μιά μέθοδο μηδενισμοῦ γιά τόν προσδιορισμό τῆς ΗΕΔ ἑνός ἠλεκτρικοῦ στοιχείου. Ἡ μέτρηση ὅμως στηρίχτηκε κατά κύριο λόγο στήν ἔνδειξη ἑνός βολτομέτρου καί ἑπομένως στή βαθμονόμηση τοῦ ὀργάνου πού ἀναγκαστικά εἶχε προηγηθεῖ. Ὅπως θά δοῦμε στήν ἑπόμενη παράγραφο, μιά ἄγνωστη ΗΕΔ μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μέ μεγάλη ἀκρίβεια χρησιμοποιώντας μεθόδους μηδενισμοῦ πού εἶναι ἀπαλλαγμένες ἀπό τά συνήθη σφάλματα τῶν ὀργάνων ἀποκλίσεως. Κατά τίς μεθόδους αὐτές ἡ ἄγνωστη ΗΕΔ συγκρίνεται ἀπευθείας μέ μιά πρότυπη διάταξη, τῆς ὁποίας ἡ ΗΕΔ εἶναι γνωστή μέ μεγάλη ἀκρίβεια. Προτοῦ ἑπομένως μελετήσουμε τίς μεθόδους αὐτές εἶναι χρήσιμο νά ἐξετάσουμε τίς πρότυπες ΗΕΔ πού διαθέτουμε σήμερα στό ἐργαστήριο.

Ἡ ἀνάγκη γιά ἕνα ἀκριβές πρότυπο ΗΕΔ ἀναγνωρίστηκε ἀρκετά νωρίς στήν ἱστορία τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ. Ὅπως εἴδαμε στήν Παράγραφο 5-5, ἡ ΗΕΔ ἑνός στοιχείου ἐξαρτᾶται ἀπό τή σύσταση τῶν ἠλεκτροδίων καί τοῦ ἠλεκτρολύτη. Ἀναμένεται ἑπομένως ὅτι ἕνας συγκεκριμένος συνδιασμός συστατικῶν θά ἀποδώσει μιά ὁρισμένη ΗΕΔ πού μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς πρότυπη μονάδα. Στά πρῶτα χρόνια τῆς τεχνολογίας τοῦ ἠλεκτρισμοῦ τό στοιχεῖο Daniel, μέ ἠλεκτρόδια ἀπό χαλκό καί ψευδάργυρο καί ἀντίστοιχα διαλύματα $CuSO_4$ καί $ZnSO_4$, χρησιμοποιήθηκε ὡς πρότυπη ΗΕΔ ἀλλά λόγω τῶν σημαντικῶν του μειονεκτημάτων (μικρός χρόνος ζωῆς καί ἀστάθεια ΗΕΔ) γρήγορα ἐγκαταλείφθηκε.

Γιά νά ἀποτελέσει πρότυπο ἀναφορᾶς ΗΕΔ ἕνα στοιχεῖο πρέπει νά ἐκπληρώνει ὁρισμένες ἀπαιτήσεις. Μεταξύ ἄλλων πρέπει νά διαθέτει μεγάλο χρόνο ζωῆς, μικρή μεταβολή τῆς ΗΕΔ μέ τή θερμοκρασία καί τιμή τῆς ΗΕΔ ὅσο τό δυνατόν ἀνεξάρτητη ἀπό τή γεωμετρία τοῦ στοιχείου. Ἡ τελευταία ἰδιότητα εἶναι ἀπαραίτητη γιά τή δυνατότητα ἀναπαραγωγῆς τοῦ στοιχείου (καί ἑπομένως τῆς πρότυπης ΗΕΔ) ἀπό ἀνεξάρτητους ἐρευνητές. Ἡ διάταξη πού ἱκανοποιεῖ σέ μεγάλο βαθμό ὅλες τίς προηγούμενες ἀπαιτήσεις καί πού τελικά υἱοθετήθηκε τό 1908 ἀπό τό Διεθνές Ἠλεκτρικό Συνέδριο τοῦ Λον-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 8-9 Τό πρότυπο στοιχεῖο Weston.

δίνου ὡς τό πρότυπο ἀναφορᾶς ΗΕΔ, εἶναι τό στοιχεῖο καδμίου πού κατασκεύασε ὁ Endward Weston τό 1892. Ἡ ΗΕΔ πού ἀναπτύσσεται μέ ἀξιοσημείωτη ἐπαναληπτικότητα μεταξύ τῶν ἠλεκτροδίων τῆς διατάξεως σέ θερμοκρασία δωματίου εἶναι 1.0183 V. Ἀπό τό 1910, τό **διεθνές volt** ὁρίζεται ὡς τό 1/1.0183 τῆς ΗΕΔ τοῦ λεγόμενου *κανονικοῦ (κορεσμένου)* στοιχείου Weston σέ 20 °C.

Τό στοιχεῖο Weston κατασκευάζεται συνήθως σέ γυάλινο δοχεῖο σχήματος Η, ὅπως περιγράφεται διαγραμματικά στό σχῆμα 8-9. Τό θετικό ἠλεκτρόδιο ἀποτελεῖται ἀπό ὑδράργυρο μέ ἐπικάλυψη Hg_2SO_4, τό ὁποῖο δρᾶ ὡς ἀντιπολωτικό. Τό ἀρνητικό ἠλεκτρόδιο εἶναι ἀμάλγαμα καδμίου ἐνῶ ὡς ἠλεκτρολύτης χρησιμοποιεῖται θειϊκό κάδμιο. Στό **κανονικό ἤ κορεσμένο στοιχεῖο Weston** τό διάλυμα περιέχει ἕνα πλεόνασμα κρυστάλλων $CdSO_4$ ὥστε νά εἶναι κορεσμένο σέ θερμοκρασία δωματίου. Τό στοιχεῖο αὐτό ἀποτελεῖ τό βασικό πρότυπο ΗΕΔ καί χρησιμοποιεῖται ἀπό τά διάφορα Ἐθνικά Ἐργαστήρια Προτύπων γιά τόν καθορισμό τῆς μονάδας μετρήσεως δυναμικοῦ. Ἐμφανίζει σχετικά μεγάλη μεταβολή τῆς ΗΕΔ μέ ἀντίστοιχη μεταβολή τῆς θερμοκρασίας καί γιά τό λόγο αὐτό διατηρεῖται σέ ἐλεγχόμενο περιβάλλον (συνήθως σέ λουτρό λαδιοῦ) μέ δυνατότητα ἐλέγχου τῆς θερμοκρασίας στά ὅρια τοῦ $\pm$ 0.01 °C. Στήν πραγματικότητα ἡ μεταβολή τῆς θερμοκρασίας ἐπηρεάζει διαφορετικά τά δύο ἠλεκτρόδια μέ ἀντίστοιχους συντελεστές 0.31 mV/°C στό θετικό ἠλεκτρόδιο καί −0.35 mV/°C στό ἀρνητικό. Ἡ ἐμπειρική συνάρτηση πού ἔχει υἱοθετηθεῖ ἀπό τό 1911 γιά τήν ἀπόδωση τῆς ΗΕΔ τοῦ στοιχείου Weston σέ θερμοκρασία t σέ σχέση μέ τήν ΗΕΔ σέ θερμοκρασία 20 °C εἶναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$U_t = U_{20} - 10^{-6}\left[40.6(t-20) + 0.95(t-20)^2 - 0.01(t-20)^2\right] \quad (8.36\alpha)$$

ὅπου $$U_{20} = 1.01830\ V\ . \quad (8.36\beta)$$

Λόγω τῆς μεγάλης εὐαισθησίας πού ἐμφανίζει τό κορεσμένο στοιχεῖο Weston ὡς πρός τή θερμοκρασία, σπάνια χρησιμοποιεῖται ὡς πρότυπο ἀναφορᾶς σέ μετρήσεις στό ἐργαστήριο. Τό σύνηθες ἐργαστηριακό πρότυπο ΗΕΔ δημιουργεῖται μέ μικρές τροποποιήσεις τοῦ κανονικοῦ στοιχείου Weston πού ὁδηγοῦν σέ μικρή μείωση τῆς ἀκρίβειας στήν ΗΕΔ ἀλλά σημαντική βελτίωση στήν εὐελιξία τοῦ στοιχείου. Ἡ σημαντικότερη τροποποίηση στό **ἀκόρεστο στοιχεῖο Weston** ἀφορᾶ στήν περιεκτικότητα τοῦ ἠλεκτρολύτη σέ $CdSO_4$, ἡ ὁποία ρυθμίζεται ἔτσι ὥστε τό διάλυμα νά εἶναι κορεσμένο στούς 4 °C καί ἑπομένως ἀκόρεστο στή συνήθη θερμοκρασία δωματίου. Ἐπιπλέον στά δύο ἄνω μέρη τοῦ γυάλινου δοχείου τοποθετεῖται ἀπό τόν κατασκευαστή πῶμα ὥστε τό στοιχεῖο νά εἶναι φορητό. Ἡ ὅλη διάταξη τοποθετεῖται συνήθως σέ περίβλημα ἀπό χαλκό πού ἐξασφαλίζει ὁμοιόμορφη θερμοκρασία.

Ἀκόρεστα στοιχεῖα Weston ἐμφανίζουν ὑψηλότερη ΗΕΔ ἀπό τήν τιμή τῶν ἐξ. (8.36) ἐνῶ ἡ σταθερότητά της ὡς πρός τό χρόνο εἶναι συγκριτικά μειωμένη. Οἱ κατασκευαστές στοιχείων Weston συνήθως βαθμονομοῦν ἀκόρεστα στοιχεῖα ὡς πρός κανονικά πρότυπα καί ἀναγράφουν στό περίβλημα τήν ΗΕΔ γιά μιά ὁρισμένη θερμοκρασία περιβάλλοντος. Νέα ἀκόρεστα στοιχεῖα κυμαίνονται μεταξύ 1.0190 καί 1.0194 V μέ μείωση τῆς ΗΕΔ κατά περίπου 0.004 % ἀνά ἔτος. Ἀντίθετα, ὁ θερμικός συντελεστής τοῦ ἀκόρεστου στοιχείου εἶναι ἀρκετά μικρός (περίπου 10 μV/°C) γεγονός πού ἐπιτρέπει τή χρησιμοποίησή του χωρίς αὐστηρό ἔλεγχο τῆς θερμοκρασίας περιβάλλοντος. Ὁ μέσος χρόνος ζωῆς ἑνός ἀκόρεστου στοιχείου Weston, πού, μεταξύ ἄλλων, ἐξαρτᾶται καί ἀπό τή μεταχείριση τοῦ στοιχείου, κειμένεται μεταξύ 10 καί 20 ἐτῶν.

Ὁ κυριώτερος περιορισμός στή χρησιμοποίηση ἑνός πρότυπου στοιχείου ἀφορᾶ στό ρεῦμα. *Ρεύματα μεγαλύτερα ἀπό 0.1 mA δέν πρέπει ποτέ νά ἀντλοῦνται ἀπό τό πρότυπο στοιχεῖο.* Τό συνηθισμένο ρεῦμα λειτουργίας τοῦ στοιχείου Weston εἶναι τῆς τάξης τῶν 10 μA καί τοῦτο γιά μικρά χρονικά διαστήματα. Ὑψηλότερο ρεῦμα μπορεῖ νά μεταβάλει μόνιμα ἤ γιά ἀρκετό χρονικό διάστημα τήν ΗΕΔ τοῦ στοιχείου κατά μιά ἀπροσδιόριστη ποσότητα. Στοιχεῖα στά ὁποῖα οἱ ἀκροδέκτες ἔχουν βραχυκυκλωθεῖ κατά λάθος, ἔστω καί γιά μικρό χρονικό διάστημα, πρέπει νά θεωροῦνται ἄχρηστα ὡς πρότυπα ΗΕΔ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ ΗΕΔ ἑνός πρότυπου στοιχείου πρέπει νά ἐλέγχεται περιοδικά σέ σύγκριση μέ μιά ἄλλη γνωστή πρότυπη ΗΕΔ χρησιμοποιώντας μεθόδους μηδενισμοῦ πού περιγράφονται στή συνέχεια. *Οὐδέποτε πρέπει νά ἐλέγχεται μέ ἁπλή σύνδεση ἑνός βολτομέτρου.* Τό ρεῦμα πού ἀπαιτεῖται γιά ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου εἶναι συνήθως μεγάλο καί μπορεῖ νά καταστρέψει τό στοιχεῖο. Ἐξάλλου ἡ μέτρηση τῆς ΗΕΔ μέ βολτόμετρο δέν ἔχει νόημα λόγω τῆς μεγάλης ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως τοῦ στοιχείου (μεταξύ 100 καί 500 Ω, ἀνάλογα μέ τίς διαστάσεις καί τήν ἡλικία).

Τό ἀκόρεστο στοιχεῖο Weston εἶναι ἕνα ἐξαιρετικά λεπτό καί χρήσιμο ἐξάρτημα σέ κάθε ἐργαστήριο ἠλεκτρικῶν μετρήσεων. Ὅπως κάθε ὄργανο ἀκριβείας ἀπαιτεῖ προσεκτική μεταχείριση. Τά μέτρα προφυλάξεως πού συνιστοῦν οἱ περισσότεροι κατασκευαστές μποροῦν νά συνοψιστοῦν σέ μερικές ἁπλές ὁδηγίες.

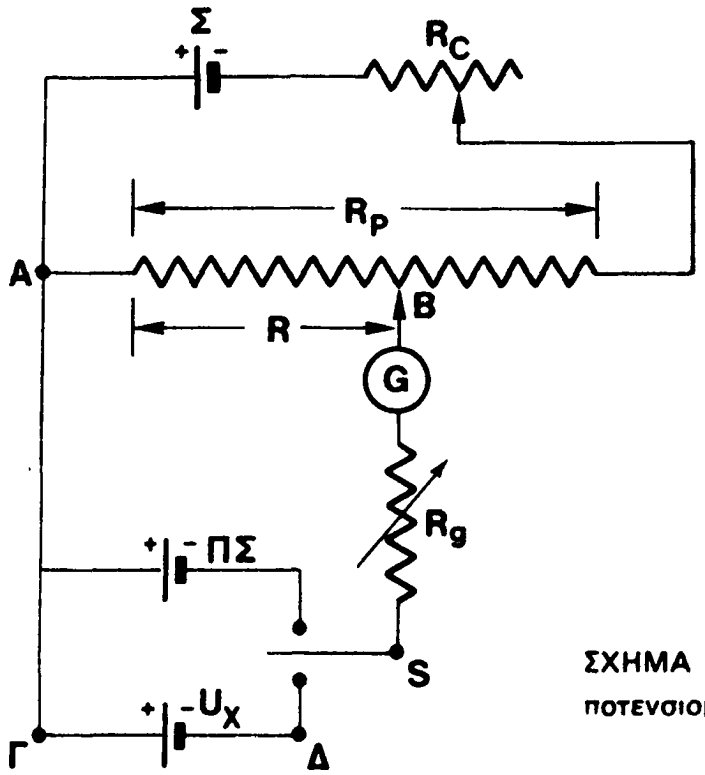
1. Τό στοιχεῖο δέν πρέπει νά ἐκτίθεται σέ θερμοκρασίες χαμηλότερες ἀπό 4 °C καί ὑψηλότερες ἀπό 40 °C. Πρέπει ἀκόμη νά ἀποφεύγονται ἀπότομες μεταβολές στή θερμοκρασία περιβάλλοντος.
2. Ὅλα τά μέρη τοῦ στοιχείου πρέπει νά διατηροῦνται στήν ἴδια θερμοκρασία.
3. Οὐδέποτε πρέπει νά ἀντλεῖται ρεῦμα μεγαλύτερο ἀπό 100 μA.
4. Ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου πρέπει νά ἐλέγχεται κάθε ἕνα ἤ δύο ἔτη.

8-6 Ποτενσιόμετρα

Τό **ποτενσιόμετρο** εἶναι μιά ἄλλη διάταξη μηδενισμοῦ πού χρησιμοποιεῖται συχνά στό ἐργαστήριο γιά τήν ἀκριβή μέτρηση διαφορᾶς δυναμικοῦ. Τό βασικό κύκλωμα τοῦ ποτενσιομέτρου δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 8-10. Ἡ λειτουργία του γίνεται εὔκολα κατανοητή ἄν θεωρήσουμε ὅτι τό κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπό δύο βρόχους μέ κοινό κλάδο τήν ἀντίσταση R μεταξύ τοῦ σημείου A καί τῆς κινητῆς ἐπαφῆς B. Ὁ **βρόχος τροφοδοσίας** τοῦ ποτενσιομέτρου περιλαμβάνει τό στοιχεῖο Σ, τό ροοστάτη R_c καί τήν ἀντίσταση ἀκριβείας R_p. Ὁ **βρόχος τοῦ γαλβανομέτρου** περιλαμβάνει τό ποσοστό R τῆς ἀντιστάσεως R_p, τό γαλβανόμετρο G, τή ρυθμιζόμενη ἀντίσταση προστασίας R_q καί διαμέσου τοῦ διακόπτη S, μπορεῖ νά κλείσει μέ τό πρότυπο στοιχεῖο ΠΣ ἤ τό στοιχεῖο μέ ἄγνωστη ΗΕΔ U_x.

Ἡ τιμή τοῦ ρεύματος I πού διατρέχει τόν βρόχο τροφοδοσίας μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μέ κατάλληλη ρύθμιση τοῦ ροοστάτη R_c καί εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή θέση τοῦ διακόπτη S ἤ τῆς κινητῆς ἐπαφῆς B. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἡ κινητή ἐπαφή καθορίζει μιά συγκεκριμένη πτώση δυναμικοῦ IR με-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 8-10 Βασικό κύκλωμα ποτενσιομέτρου.

ταξύ τῶν σημείων A καί B. Ἄν τώρα ὁ διακόπτης S κλείσει πρός τό πρότυπο στοιχεῖο μέ ΗΕΔ $U_π$, τό ρεῦμα πού θά διατρέξει τόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου θά ἔχει φορά πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό σχετικό μέγεθος τῆς ΗΕΔ $U_π$ καί τῆς πτώσης δυναμικοῦ IR. Τό ρεῦμα τοῦ γαλβανομέτρου μπορεῖ νά μηδενιστεῖ ἄν, μέ μετακίνηση τῆς ἐπαφῆς B, ἐπιλεγεῖ ἡ ἀντίσταση $R_π$ ἔτσι ὥστε

$$IR_π = U_π. \tag{8.37}$$

Ἄν στή συνέχεια ὁ διακόπτης S μετακινηθεῖ στή θέση συνδέσεως τοῦ ἡλεκτρικοῦ στοιχείου μέ ἄγνωστη ΗΕΔ U_x, τό γαλβανόμετρο μπορεῖ νά ἰσορροπήσει μέ μετακίνηση τῆς ἐπαφῆς B ἔτσι ὥστε ἡ ἀντίσταση R_x πού ἐπιλέγεται νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$IR_x = U_x \ . \tag{8.38}$$

Καθόσον κατά τήν κατάσταση ἰσορροπίας δέν κυκλοφορεῖ ρεῦμα στό βρόχο τοῦ γαλβανομέτρου, τό ρεῦμα I τοῦ βρόχου τροφοδοσίας πού ὑπεισέρχεται στίς ἐξ. (8.37) καί (8.38) παραμένει τό ἴδιο. Ἀπό τίς δύο τελευταῖες ἐξισώσεις μποροῦμε ἐπομένως νά γράψουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{U_x}{U_\pi} = \frac{R_x}{R_\pi} \quad . \tag{8.39}$$

Μέ ἄλλα λόγια, μποροῦμε μέ τό κύκλωμα τοῦ ποτενσιομέτρου νά ἀνάγουμε τή σύγκριση δύο δυναμικῶν στή σύγκριση δύο ἀντιστάσεων — μιά σύγκριση πού μπορεῖ νά πραγματοποιηθεῖ μέ μεγάλη ἀκρίβεια.

Ἐργαστηριακά ποτενσιόμετρα, ἄν καί οὐσιαστικά ἀποτελοῦν παραλλαγή τοῦ βασικοῦ κυκλώματος στό σχῆμα 8-10, μπορεῖ νά πάρουν ἀρκετά πολύπλοκη μορφή ὡς πρός τή διάταξη τῶν ἀντιστάσεων ὥστε νά παρέχεται εὐεληξία στή μέτρηση ἑνός μεγάλου φάσματος διαφορᾶς δυναμικοῦ. Ὁρισμένες ἀπαιτήσεις πού πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τό κύκλωμα τοῦ ποτενσιομέτρου εἶναι προφανεῖς. Κατ' ἀρχάς τό ρεῦμα I πρέπει νά παραμένει σταθερό καθόλη τή διάρκεια τῆς μετρήσεως ὥστε νά εἶναι δυνατή ἡ ἐξαγωγή τῆς ἀναλογίας (8.39) ἀπό τίς ἐξ. (8.37) καί (8.38). Ἡ ἀπαίτηση αὐτή συνήθως ἱκανοποιεῖται ἀπό ἕνα συσσωρευτή μολύβδου ἤ ἕνα σύγχρονο τροφοδοτικό ΣΡ. Ἐξάλλου ἡ ἀντίσταση R_p, στήν ὁποία βασίζεται ἡ ἀναγωγή τοῦ δυναμικοῦ, πρέπει νά διαθέτει ἀρκετές διαβαθμήσεις γιά τήν ἀκριβή ἀνάγνωση τῆς ἀντιστάσεως R μεταξύ τῶν σημείων A καί B. Ὡς ἀντίσταση R_p μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ εἴτε γραμμικός ἀγωγός μέ διαβαθμήσεις μήκους, εἴτε συνδιασμός δύο δεκαδικῶν κιβωτίων ἀντιστάσεων. Στήν πρώτη περίπτωση, ὅπως καί στή γέφυρα Wheatstone, ὁ λόγος τῶν ἀντιστάσεων R_x/R_π μπορεῖ νά ἀναχθεῖ σέ λόγο ἀποστάσεων κατά μῆκος τοῦ γραμμικοῦ ἀγωγοῦ.

Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (8.39), μιά ἄγνωστη διαφορά δυναμικοῦ V μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ ἀπό τή σχέση

$$V = \frac{U_\pi}{R_\pi} R \tag{8.40}$$

ὅπου R εἶναι ἡ ἀντίσταση πού ἐπιλέγει ἡ κινητή ἐπαφή τοῦ ποτενσιομέτρου γιά ἰσορρόπιση τῆς διατάξεως, ἐνῶ ὁ λόγος U_π/R_π εἶναι ἴσος μέ τό ρεῦμα πού κυκλοφορεῖ στό βρόχο τροφοδοσίας. Ἡ ἀναγωγή ἑπομένως τῆς ἀντιστάσεως R σέ ἔνδειξη δυναμικοῦ μπορεῖ νά ἁπλοποιηθεῖ σημαντικά ἄν ρυθμίσουμε τό ρεῦμα τοῦ βρόχου τροφοδοσίας ὥστε ὁ παράγοντας U_π/R_π νά πάρει ἁπλή τιμή (π.χ. ἴση μέ τή μονάδα). Τοῦτο μπορεῖ νά γίνει εὔκολα μέ κατάλληλη ρύθμιση τοῦ ροοστάτη R_c. Τή διαδικασία αὐτή θά ἀκολουθήσουμε στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ 8-7. ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ ΠΟΤΕΝΣΙΟΜΕΤΡΟΥ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-10. Στό κύκλωμα τροφοδοσίας χρησιμοποιεῖστε ἕνα συσσωρευτή μολύβδου Σ μέ δυναμικό 6.5 V ἤ τροφοδοτικό ΣΡ. Ὡς ἀντίσταση R_p χρησιμοποιεῖστε δύο ὅμοια δεκαδικά κιβώτια ἀντιστάσεων καί ὡς ρυθμιστική ἀντίσταση R_c ἕνα ροοστάτη. Ἐπιλέξτε τίς τιμές τῶν ἀντιστάσεων R_p καί R_c σύμφωνα μέ τόν ἑπόμενο πίνακα

R_p (Σύνολο ἀντιστάσεως δύο κιβωτίων)	R_c (Ροοστάτης)
600 Ω	250 Ω
6 kΩ	1 kΩ
60 kΩ	10 kΩ

Ἀπό τίς προηγούμενες ἐναλλακτικές τιμές ἐπιλέξτε τίς μεγαλύτερες πού ἐπιτρέπουν τά ἐξαρτήματα τά ὁποῖα χρησιμοποιεῖτε. Ἡ μεταβλητή ἀντίσταση R_g ἔχει τοποθετηθεῖ μέ σκόπο τήν προστασία τόσο τοῦ γαλβανομέτρου ὅσο καί τοῦ πρότυπου στοιχείου. Σέ κάθε ἀπόπειρα ἰσορροπήσεως τοῦ ποτενσιομέτρου ἀρχίζετε πάντα μέ τή μέγιστη τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_g (περίπου 20 kΩ) καί μειώνετε σταδιακά τήν τιμή της καθώς πλησιάζετε τό σημεῖο ἰσορροπίας.

Μέ τόν διακόπτη S ἀνοικτό καί διατηρώντας τό ἄθροισμα τῆς ἀντιστάσεως R_p τῶν δύο κιβωτίων σταθερό, ἐπιλέξτε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R ὡς ἁπλό πολλαπλάσιο τῆς ΗΕΔ τοῦ πρότυπου στοιχείου. Ἄν π.χ. χρησιμοποιεῖτε ὁλική ἀντίσταση 6 kΩ καί πρότυπο στοιχεῖο μέ ΗΕΔ = 1.0190 V, ἐπιλέξτε τήν τιμή R = 1019 Ω. Συνδέστε μεταξύ τῶν σημείων A καί B ἕνα βολτόμετρο μέ μεγάλη ἐσωτερική ἀντίσταση καί προσδιορίστε τή διαφορά δυναμικοῦ. Ρυθμίστε τόν ροοστάτη R_c ὥστε ἡ διαφορά δυναμικοῦ νά βρίσκεται ὅσο τό δυνατόν πλησιέστερα πρός τήν ΗΕΔ τοῦ πρότυπου στοιχείου. Ἀποσυνδέστε τό βολτόμετρο.

Μέ μέγιστη τιμή τῆς ἀντιστάσεως προστασίας R_g κλεῖστε τόν διακόπτη S πρός τό πρότυπο στοιχεῖο. Ἐλαττώνοντας σταδιακά τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_g ρυθμίστε τόν ροοστάτη R_c στό κύκλωμα τροφοδοσίας μέχρις ὅτου ἰσορροπήσει πλήρως τό γαλβανόμετρο. Ποιά εἶναι ἡ τιμή τοῦ λόγου U_n/R_n στήν ἐξ. (8.40) πού ἐπιτρέπει τή μετατροπή ἀντιστάσεως σέ διαφορά δυναμικοῦ;

Ἐπαναφέρετε τήν ἀντίσταση προστασίας R_g στή μέγιστη τιμή καί κλεῖστε τόν διακόπτη S πρός τήν ἄγνωστη ΗΕΔ U_x. Μετακινεῖστε τήν ἐπαφή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Β καί ἰσορροπεῖστε τό γαλβανόμετρο ἐλαττώνοντας σταδιακά τήν ἀντίσταση προστασίας R_g. Ἀπό τή θέση τῆς κινητῆς ἐπαφῆς Β προσδιορίστε τήν ΗΕΔ τοῦ στοιχείου U_x. Ἐκτιμεῖστε τό πειραματικό σφάλμα στήν τιμή U_x.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία καί μετρεῖστε τήν ΗΕΔ ὅλων τῶν στοιχείων πού θά σᾶς δοθοῦν.

Τό βασικό κύκλωμα μηδενισμοῦ τοῦ σχήματος 8-10 ἀποτέλεσε γιά πολλά χρόνια τή μόνη μέθοδο γιά τήν ἀκριβή μέτρηση διαφορᾶς δυναμικοῦ. Πολλές παραλλαγές τοῦ κυκλώματος ἔχουν κατασκευαστεῖ στό παρελθόν ἀπό τή βιομηχανία ὡς αὐτόνομες συσκευές μετρήσεως μέ στόχο τήν εὐελιξία καί τήν πρακτικότητα (βλέπε π.χ. Ἀσκήσεις 8-18 καί 8-23). Ἕνα παράδειγμα **ἐργαστηριακοῦ ποτενσιομέτρου** δίνεται στό σχῆμα 8-11. Τό ὄργανο ἔχει σχῆμα κιβωτίου στήν ἄνω ὄψη τοῦ ὁποίου ὑπάρχουν ὅλοι οἱ ἀκροδέκτες γιά τή σύνδεση τῶν περιφερειακῶν ὀργάνων καί οἱ ἐπιλογεῖς γιά τίς ἀπαραίτητες ρυθμίσεις. Στήν ἄνω ὄψη τοῦ ὀργάνου δίνεται ἀκόμη διαγραμματικά τό κύκλωμα τοῦ ποτενσιομέτρου, πού μπορεῖ νά συγκριθεῖ μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-10.

Ποτενσιόμετρα σπάνια χρησιμοποιοῦνται γιά μετρήσεις διαφορᾶς δυναμικοῦ μεγαλύτερης ἀπό μερικά volt. Ἡ ἀκρίβεια πού ἀπαιτεῖται σέ μετρήσεις ὑψηλῆς τάσης στίς περισσότερες ἐφαρμογές ἱκανοποιεῖται ἀπό βολτόμετρα μέ μεγάλη ἐσωτερική ἀντίσταση. Ἀντίθετα, σέ πολλές ἐφαρμογές ἀπαιτεῖται ἡ ἀκριβής μέτρηση πολύ μικρῶν ΗΕΔ. Μιά ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογή τοῦ ἐργαστηριακοῦ ποτενσιομέτρου παρουσιάζεται στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 8-8. ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΗΕΔ ΘΕΡΜΟΖΕΥΓΟΥΣ

Ἄν συγκολήσουμε τά ἄκρα δύο ἀγωγῶν ἀπό διαφορετικό μέταλλο, στό σημεῖο ἐπαφῆς συνήθως ἀναπτύσσεται μιά διαφορά δυναμικοῦ, ἡ ὁποία, μεταξύ ἄλλων, ἐξαρτᾶται ἀπό τή θερμοκρασία περιβάλλοντος. Ἄν οἱ δύο ἀγωγοί ἀποτελοῦν κλειστό κύκλωμα, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 8-12 καί τά δύο σημεῖα ἐπαφῆς βρίσκονται στήν ἴδια θερμοκρασία, τό ρεῦμα πού διαρρέει τό κύκλωμα μηδενίζεται, καθόσον οἱ δύο ΗΕΔ στά σημεῖα ἐπαφῆς εἶναι ἴσες καί ἀντίθετες. Ἀντίθετα, ἄν ἡ θερμοκρασία τῶν δύο σημείων ἐπαφῆς διαφέρει, μιά ἀπό τίς ΗΕΔ θά ὑπερισχύσει καί ἕνα συγκεκριμένο ρεῦμα θά διαρεύσει στό κύκλωμα. Ἡ διάταξη αὐτή ἀποτελεῖ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τή βάση τοῦ **θερμοζεύγους** πού χρησιμοποιεῖται σέ πολλές έφαρμογές γιά τή μέτρηση θερμοκρασιῶν.

Συνδέστε τά περιφερειακά όργανα τοῦ έργαστηριακοῦ ποτενσιομέτρου μέ τήν άκόλουθη σειρά προσέχοντας τήν πολικότητα (κόκκινο = +, μαῦρο = −).

1. Σταθερή τάση 4.5 V στούς άκροδέκτες μέ τήν ένδειξη «4.5 Battery».
2. Τό γαλβανόμετρο στούς άκροδέκτες μέ τήν ένδειξη «Galvo».
3. Τό πρότυπο στοιχεῖο στούς άκροδέκτες μέ τήν ένδειξη «Standard cell».

Η προηγούμενη σειρά μειώνει τόν κίνδυνο βραχυκυκλώσεως τοῦ πρότυπου στοιχείου. Ὑπενθυμίζεται ὅτι **ἄν οἱ ἀκροδέκτες τοῦ πρότυπου στοιχείου βραχυκυκλωθοῦν ἔστω καί στιγμιαῖα, τό ἐξάρτημα εἶναι πλέον ἄχρηστο ὡς πρότυπο ΗΕΔ.**

Πιέστε τόν διακόπτη S πρός τή θέση «Standardize» παρατηρώντας τό γαλβανόμετρο. Μήν κρατᾶτε γιά πολλή ὥρα τόν διακόπτη S στή θέση «Standardize» γιά μεγάλη άπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου καθόσον μέ τόν τρόπο αὐτό άντλεῖτε σημαντικό ρεῦμα άπό τό πρότυπο στοιχεῖο. Ρυθμίστε τούς έπιλογεῖς «Current» ὥστε νά ίσορροπίσει τό γαλβανόμετρο. Τό ποτενσιόμετρό σας εἶναι τώρα βαθμονομημένο.

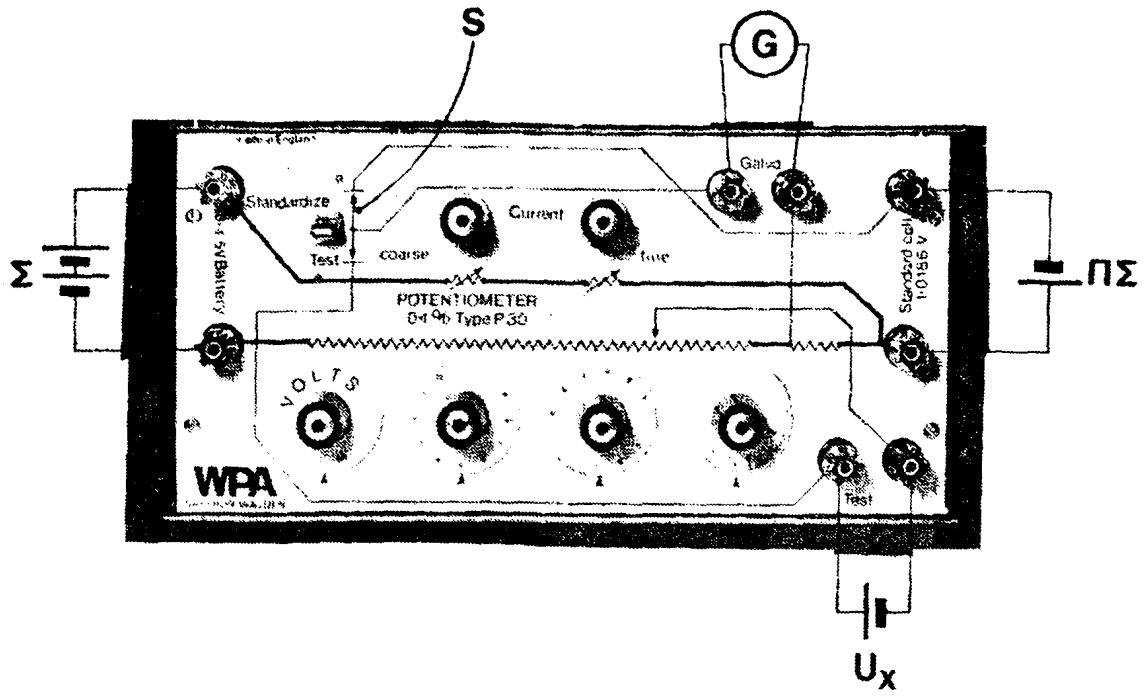
Γιά νά έξοικειωθεῖτε μέ τή χρήση τοῦ έργαστηριακοῦ ποτενσιομέτρου, μετρεῖστε τήν ΗΕΔ ὅλων τῶν «ἀγνωστων» στοιχείων πού σᾶς δόθηκαν στό Πείραμα 8-7. Σέ κάθε περίπτωση συνδέστε τήν άγνωστη ΗΕΔ στούς άκροδέκτες μέ τήν ένδειξη «Test» προσέχοντας τήν πολικότητα. Πιέστε τόν διακόπτη S πρός τή θέση «Test» παρατηρώντας τό γαλβανόμετρο. Μεταβάλετε τή θέση τῶν τεσσάρων έπιλογέων ὥστε νά ίσορροπήσει τό γαλβανόμετρο. Διαβάστε τήν ΗΕΔ άπευθείας σέ volt άπό τή θέση τῶν έπιλογέων.

Συνδέστε στούς άκροδέκτες «Test» τοῦ ποτενσιομέτρου τό θερμοζεῦγος καί μετρεῖστε τήν ΗΕΔ πού άναπτύσσεται ὅταν τό ένα άκρο τοῦ ζεύγους εἶναι βυθισμένο σέ νερό θερμοκρασίας δωματίου (μετρεῖστε τή θερμοκρασία τοῦ νεροῦ μέ ένα θερμόμετρο) καί τό άλλο άκρο σέ:

1. Μῖγμα νεροῦ καί πάγου.
2. Μῖγμα άλκοόλης καί ξηροῦ πάγου.
3. Ὑγρό ἄζωτο.

Ἐκτιμεῖστε τήν ὕπαρξη τυχαίων ΗΕΔ έπαναλαμβάνοντας τήν προηγούμενη έργασία μέ τά δύο άκρα τοῦ θερμοζεύγους βυθισμένα σέ νερό θερμοκρασίας δωματίου. Μετρεῖστε τήν ΗΕΔ τοῦ θερμοζεύγους γιά ὅλους τούς άλλους συνδιασμούς θερμοκρασιῶν. Συγκρίνετε τά άποτελέσματά σας σέ τιμές πού δίνονται στή βιβλιογραφία.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



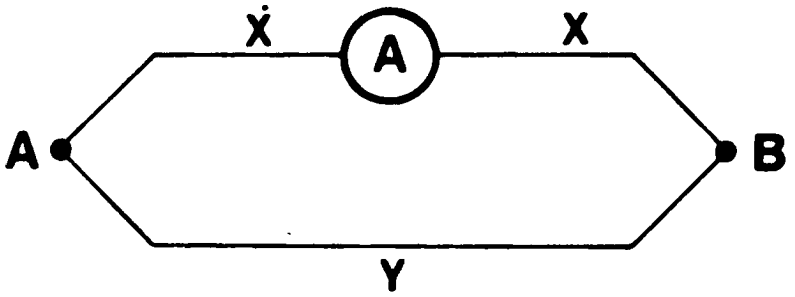
ΣΧΗΜΑ 8-11 Τό έργαστηριακό ποτενσιόμετρο, τύπος P30, τῆς έταιρείας Walden Precision Apparatus, Ltd. Τό κύκλωμα πού έμφανίζεται στήν όψη τοῦ όργάνου ταυτίζεται μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-10. Οἱ δύο έπιλογεῖς μέ τήν ένδειξη «Current» στό άνω μέρος ρυθμίζουν τήν άντίσταση R_c τοῦ σχήματος 8-10 (Ὁ άριστερός μέ τήν ένδειξη «coarse» δραστικότερα καί ὁ δεξιός μέ τήν ένδειξη «fine» λεπτομερέστερα). Οἱ τέσσερις βαθμολογημένοι έπιλογεῖς ρυθμίζουν τή θέση τῆς έπαφῆς Β στήν άντίσταση R_p. Ἄν τό όργανο έχει προηγουμένως βαθμονομηθεῖ, οἱ ένδείξεις τῶν έπιλογέων δίνουν άπευθείας σέ volt τό δυναμικό πού άναπτύσσεται μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β τῆς άντιστάσεως R_p. Γιά τήν ένδειξη π.χ. τῶν έπιλογέων

(0.1) (4) (2) (19)

τό δυναμικό εἶναι 0.14219 V. Ὁ διακόπτης S τοῦ σχήματος 8-10 βρίσκεται στό άνω άριστερό μέρος τοῦ ποτενσιομέτρου. Στή θέση «Standardize» συνδέει τό πρότυπο στοιχεῖο ένῶ στή θέση «Test» τήν άγνωστη ΗΕΔ πού πρόκειται νά μετρηθεῖ.

Πολλές παραλλαγές βιομηχανικῶν ποτενσιομέτρων, μέ στόχο τήν έξειδίκευση τοῦ όργάνου σέ όρισμένες έφαρμογές, περιγράφονται σέ παλαιότερα συγγράμματα. Μιά σημαντική βελτίωση τῶν ποτενσιομέτρων κατά τά τελευταῖα χρόνια εἶναι ἡ εἰσαγωγή ἠλεκτρονικῶν κυκλωμάτων μέ τά ὁποῖα έπιτυγχάνεται ἡ αὐτόματη ἰσορρόπιση τῆς διατάξεως. Παρόμοιες συσκευές

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



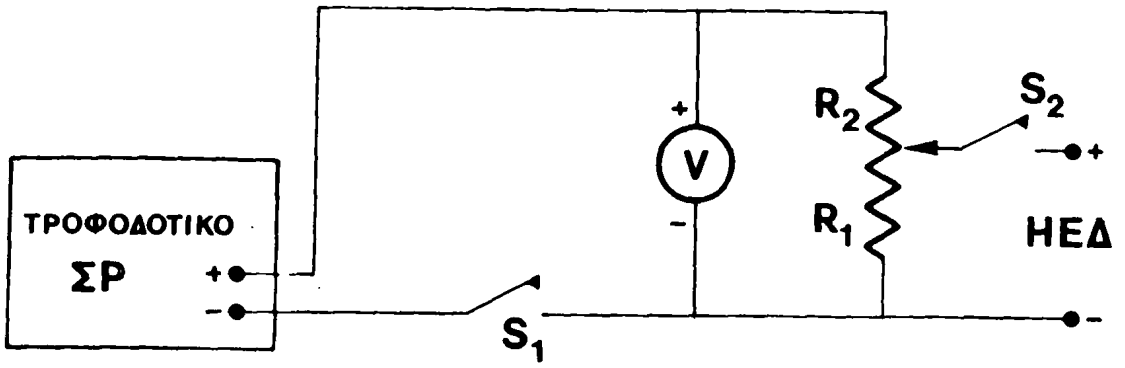
ΣΧΗΜΑ 8-12 Θερμοστοιχεῖο. Δύο ἀγωγοί ἀπό διαφορετικά μέταλλα X καί Y ἔχουν συγκοληθεῖ στά σημεῖα A καί B.

ἐπεκτείνουν τή χρησιμότητα τῶν κυκλωμάτων μηδενισμοῦ μέ τήν ἐξάλειψη τῆς ἄχαρης καί χρονοβόρας διαδικασίας ἰσορροπίσεως τοῦ κυκλώματος. Ἡ περιγραφή ὅμως τῶν αὐτόματων ποτενσιομέτρων ξεφεύγει ἀπό τά ὅρια τοῦ παρόντος βιβλίου.

8-7 Βαθμονόμηση Ὀργάνων Ἀποκλίσεως

Ὡς διάταξη πού προσδιορίζει μέ μεγάλη ἀκρίβεια μιά διαφορά δυναμικοῦ, τό ποτενσιόμετρο μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τήν ἀπευθείας βαθμονόμηση τοῦ ἐργαστηριακοῦ βολτομέτρου. Ὅπως εἴδαμε στήν Παράγραφο 5-2 (βλ. σχῆμα 5-10), τό ἐργαστηριακό βολτόμετρο ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα ὄργανο κινητοῦ πλαισίου καί μιά μεγάλη ἀντίσταση σέ σειρά, ἐνῶ ὁ δείκτης τοῦ ὀργάνου κινεῖται σέ κλίμακα μέ διαβαθμήσεις δυναμικοῦ. Ἡ βαθμονόμηση τοῦ ὀργάνου πραγματοποιεῖται ἀρχικά ἀπό τόν κατασκευαστή μέ σύγκριση τῆς ἐνδείξεως πρός τήν ἔνδειξη πρότυπων ὀργάνων ἤ μέ τήν ποτενσιομετρική μέθοδο πού θά μελετήσουμε στή συνέχεια. Κατασκευαστές ἀναφέρουν ἀκόμη στό περίβλημα τοῦ ὀργάνου ἤ στό φυλλάδιο πού τό συνοδεύει τό ὁλικό σφάλμα στήν ἔνδειξη, συνήθως ὑπό μορφή ποσοστιαίου σφάλματος τῆς μέγιστης ἐνδείξεως. Μέ τήν πάροδο τοῦ χρόνου καί τή συνεχή χρήση τοῦ βολτομέτρου, τόσο ἡ πιστότητα ὅσο καί ἡ ἀκρίβεια τῆς ἐνδείξεως εἶναι δυνατόν νά ἐλαττωθοῦν λόγω φθορᾶς τοῦ μηχανισμοῦ ἀναρτήσεως τοῦ πηνίου, μειώσεως τοῦ συντελεστῆ στρέψεως τοῦ ἐλατηρίου, ἤ μεταβολῆς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Γιά τό λόγο αὐτό ἡ βαθμονόμηση τοῦ ἐργαστηριακοῦ βολτομέτρου πρέπει περιοδικά νά ἐλέγχεται. Συνήθη ἐργαστηριακά βολτόμετρα μέ ἀκρίβεια 0.5 % ἕως 1 % μποροῦν νά ἐλεγχθοῦν μέ ἀπευθείας σύγκριση πρός πρότυπα βολτόμετρα πού διαθέτουν ἀκρίβεια 0.1 % ἕως 0.2 %. Τά τελευταῖα μποροῦν νά βαθμονομηθοῦν μέ τή βοήθεια ἑνός ποτενσιομέτρου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 8-13 Διάταξη γιά τή βαθμονόμηση βολτομέτρου.

Βολτόμετρα μέ μέγιστη ἔνδειξη κλίμακας μέχρι 1.5 V μποροῦν νά βαθμονομηθοῦν μέ ἀπευθείας σύγκριση πρός τή διαφορά δυναμικοῦ πού μετρᾶ τό ποτενσιόμετρο. Γιά βολτόμετρα μέ μεγαλύτερη κλίμακα ἡ σύγκριση μπορεῖ νά γίνει διαμέσου ἑνός κιβωτίου ἀντιστάσεων μέ ἐνδιάμεση ἐπαφή, ὅπως δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 8-13. Καθόσον τό ρεῦμα πού διοχετεύεται στό ποτενσιόμετρο κατά τήν κατάσταση ἰσορροπίας μηδενίζεται, τό ἴδιο ρεῦμα διαρρέει τίς ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 στίς ὁποῖες διαχωρίζεται ἀπό τήν ἐνδιάμεση ἐπαφή τό κιβώτιο ἀντιστάσεων. Ἡ διαφορά δυναμικοῦ V_π πού μετρᾶ τό ποτενσιόμετρο συνδέεται ἑπομένως πρός τή διαφορά δυναμικοῦ V στά ἄκρα τοῦ βολτομέτρου μέ τήν ἁπλή σχέση

$$V = \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_\pi \qquad (8.41)$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 8-9. ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ ΒΟΛΤΟΜΕΤΡΟΥ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 8-13. Οἱ ἀκροδέκτες μέ τήν ἔνδειξη ΗΕΔ μποροῦν νά συνδεθοῦν εἴτε στούς ἀντίστοιχους ἀκροδέκτες ἐργαστηριακοῦ ποτενσιομέτρου εἴτε στούς ἀκροδέκτες Γ καί Δ τοῦ κυκλώματος ποτενσιομέτρου στό σχῆμα 8-10. Μέ τόν διακόπτη S_1 ἀνοικτό ἐλέγξτε τή μηδενική ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου καί διορθῶστε τή θέση τοῦ δείκτη. Χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (8.41) ἐπιλέξτε τίς ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 γιά $V_\pi = 1.5$ volt καί V ἴσο μέ τήν μέγιστη ἔνδειξη τῆς κλίμακας τοῦ βολτομέτρου.

– Ἐπιλέξτε μιά χαρακτηριστική ἔνδειξη στήν κλίμακα τοῦ βολτομέτρου στό 1/5 περίπου τῆς μέγιστης ἐνδείξεως. Ρυθμίστε τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ ὥστε ὁ δείκτης τοῦ βολτομέτρου νά ἀνέλθει στήν ἔνδειξη αὐτή. Κλεῖστε τόν διακόπτη S_2 καί μέ τό ποτενσιόμετρο προσδιορίστε τή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_1. Μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (8.41) ὑπολογίστε τήν πραγματική διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ βολτομέτρου.

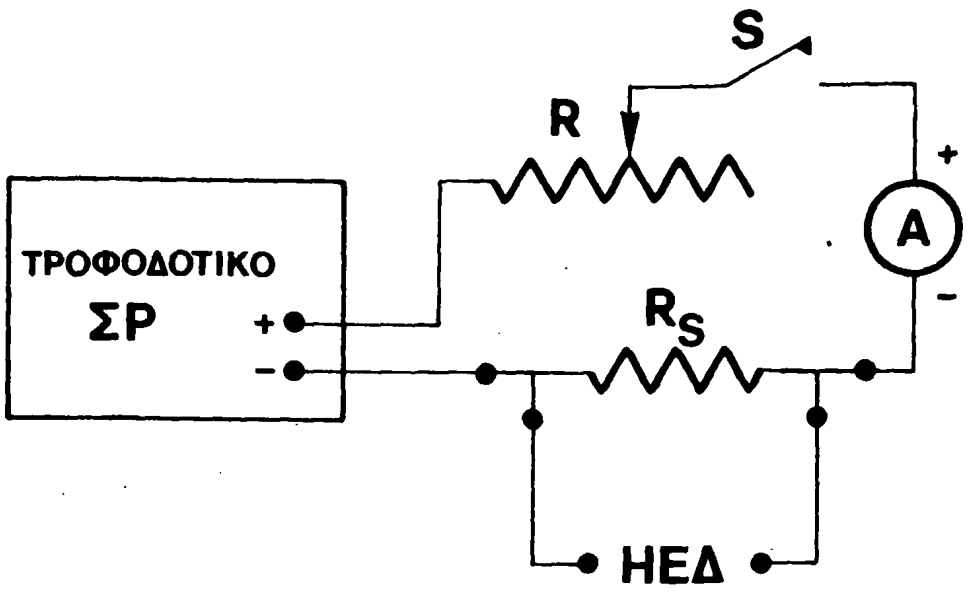
- Ἡ πιστότητα τοῦ βολτομέτρου μπορεῖ νά ἐξαρτᾶται ἀπό τόν τρόπο διεξαγωγῆς τῆς μετρήσεως. Ἰδιαίτερα, εἶναι δυνατόν, γιά μιά συγκεκριμένη διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ βολτομέτρου, ἡ ἔνδειξη στήν ὁποία θά καταλήξει τό ὄργανο μέ σταδιακή αὔξηση τοῦ δυναμικοῦ ἀπό μικρότερες τιμές νά διαφέρει ἀπό τήν ἔνδειξη στήν ὁποία θά καταλήξει μέ σταδιακή μείωση τοῦ δυναμικοῦ ἀπό μεγαλύτερες τιμές. Πραγματοποιεῖστε τήν προηγούμενη ἐργασία μέ δύο διαφορετικούς τρόπους προσεγγίζοντας τή χαρακτηριστική ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου πού ἐπιλέξατε ἀπό μικρότερες καί ἀπό μεγαλύτερες τιμές τοῦ δυναμικοῦ. Σέ κατάλληλο πίνακα καταγράψτε τήν ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου καί τήν πραγματική τιμή τοῦ δυναμικοῦ στά ἄκρα του σέ καθεμιά ἀπό τίς δύο περιπτώσεις, ἤτοι ὅταν ἡ τιμή αὐτή προσεγγίζεται ἀπό μικρότερες ἤ ἀπό μεγαλύτερες τιμές δυναμικοῦ.

Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά 5 ἤ 6 χαρακτηριστικές ἐνδείξεις σέ ὅλο τό εὖρος τῆς κλίμακας τοῦ βολτομέτρου. Γιά κάθε χαρακτηριστική ἔνδειξη ὑπολογίστε τή **διόρθωση** τῆς ἐνδείξεως, ἤτοι τή διαφορά μεταξύ τῆς ἐνδείξεως τοῦ ὀργάνου καί τῆς πραγματικῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ στά ἄκρα του. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἡ διόρθωση ἀποτελεῖ τήν ποσότητα πού πρέπει νά προστεθεῖ στήν ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου ὥστε νά δώσει τήν πραγματική διαφορά δυναμικοῦ πού μετρᾶ τό βολτόμετρο. Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τή διόρθωση ὡς πρός τήν ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου γιά τά χαρακτηριστικά σημεῖα πού μετρήσατε. Ἄν ἡ διόρθωση διαφέρει γιά προσέγγιση τῆς ἐνδείξεως ἀπό μεγαλύτερες ἤ μικρότερες τιμές, ἀποδῶστε τά πειραματικά σημεῖα μέ διαφορετικό σύμβολο γιά κάθε περίπτωση.

Ἄν καί συμβατικά ἡ γραφική παράσταση πού κατασκευάστηκε στό προηγούμενο πείραμα ἀναφέρεται ὡς **καμπύλη διορθώσεως**, δέν ὑπάρχει κανένας λόγος νά περιμένουμε ὅτι σέ ὅλη τήν ἔκταση τῆς κλίμακας ἡ διόρθωση συνδέεται πρός τήν ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου μέ κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση. Στήν πραγματικότητα, ἡ διόρθωση ἔχει ποσοτική ἔννοια μόνο στά σημεῖα ὅπου προσδιορίστηκε πειραματικά. Γιά τό λόγο αὐτό ἡ καμπύλη διορθώσεως ἑνός βολτομέτρου ἀποδίδεται συνήθως μέ τά πειραματικά προσδιορισμένα σημεῖα καί μιά τεθλασμένη γραμμή πού τά συνδέει μέ εὐθύγραμμα τμήματα.

Τό ποτενσιόμετρο μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ μέ παρόμοια διαδικασία

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 8-14 Διάταξη γιά τή βαθμονόμηση ἀμπερομέτρου.

γιά τόν ἔλεγχο τῆς βαθμονομήσεως τοῦ ἐργαστηριακοῦ ἀμπερομέτρου. Τό πραγματικό ρεῦμα πού διαρρέει τό ἀμπερόμετρο γιά μιά συγκεκριμένη ἔνδειξη μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τή μέτρηση τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ στά ἄκρα μιᾶς ἀντιστάσεως, ἡ ὁποία βρίσκεται σέ σειρά μέ τό ἀμπερόμετρο. Τό κύκλωμα πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή διεργασία αὐτή δίνεται στό σχῆμα 8-14.

ΠΕΙΡΑΜΑ 8-10. ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ ΑΜΠΕΡΟΜΕΤΡΟΥ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ Σχήματος 8-14. Οἱ ἀκροδέκτες μέ τήν ἔνδειξη ΗΕΔ μποροῦν νά συνδεθοῦν εἴτε στούς ἀντίστοιχους ἀκροδέκτες ἐργαστηριακοῦ ποτενσιομέτρου εἴτε στούς ἀκροδέκτες Γ καί Δ τοῦ κυκλώματος ποτενσιομέτρου στό σχῆμα 8-10. Μέ τόν διακόπτη S ἀνοικτό ἐλέξτε τή μηδενική ἔνδειξη τοῦ ἀμπερομέτρου καί ἄν χρειαστεῖ διορθῶστε τή θέση τοῦ δείκτη. Ἡ ἀντίσταση R_s εἶναι μιά πρότυπη ἀντίσταση τεσσάρων ἀκροδεκτῶν.

Ἐπιλέξτε τό δυναμικό τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ καί τή θέση τῆς κινητῆς ἐπαφῆς τοῦ ροοστάτη R ὥστε ὁ δείκτης τοῦ ἀμπερομέτρου νά ἰσορροπήσει στη μέγιστη ἔνδειξη τῆς κλίμακας, ἐνῶ ταυτόχρονα νά ἱκανοποιοῦνται ὅσο τό δυνατόν καλύτερα οἱ ἑπόμενες συνθῆκες:

1. Ἡ πτώση δυναμικοῦ στήν πρότυπη ἀντίσταση R_s νά εἶναι μεταξύ 0.5 καί 1 V.

2. Τό ρεῦμα πού διαρρέει τό κύκλωμα νά μήν ὑπερβαίνει τίς προδιαγραφές τοῦ κατασκευαστῆ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνδέστε τό ποτενσιόμετρο στούς ἀκροδέκτες μέ τήν ἐνδειξη ΗΕΔ καί μετρεῖστε τή διαφορά δυναμικοῦ V_s στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_s. Καθόσον τό ρεῦμα πού διοχετεύεται στό ποτενσιόμετρο κατά τήν κατάσταση ἰσορροπίας μηδενίζεται, τό ἴδιο ρεῦμα διαρρέει τήν ἀντίσταση R_s καί τό ἀμπερόμετρο. Ὑπολογίστε τό πραγματικό ρεῦμα $I = V_s/R_s$ πού διαρρέει τό ἀμπερόμετρο καί τήν ἀντίστοιχη διόρθωση, ἤτοι τή διαφορά μεταξύ τῆς ἐνδείξεως τοῦ ὀργάνου καί τῆς πραγματικῆς τιμῆς τοῦ ρεύματος I_s.

Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά 5 ἕως 6 χαρακτηριστικές ἐνδείξεις σέ ὅλη τήν κλίμακα τοῦ ἀμπερομέτρου. Σέ κάθε περίπτωση ἐπαναλάβετε τήν ἐργασία γιά προσέγγιση τῆς ἐνδείξεως ἀπό μικρότερες ἢ μεγαλύτερες τιμές. Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τίς ἀντίστοιχες καμπύλες διορθώσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8-1. Μιά ἀντίσταση μέ τιμή περίπου 1000 Ω πρόκειται νά μετρηθεῖ μέ μιά γέφυρα Wheatstone. Ἡ ἀντίσταση τῶν κλάδων R_3 καί R_4 (βλ. σχῆμα 8-1) εἶναι γνωστή μέ μεγάλη ἀκρίβεια ὡς 1000 Ω. Ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι 50 Ω, ἐνῶ ἀπαιτεῖται ρεῦμα 0.05 μA γιά ἀπόκλιση 1 mm ἀπό τή θέση ἰσορροπίας του. Τό ἠλεκτρικό στοιχεῖο τῆς γέφυρας ἔχει ΗΕΔ 4 V καί ἀμελητέα ἐσωτερική ἀντίσταση. Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ διαφορά μεταξύ τῆς ἀντιστάσεως R_2 καί τῆς ἀγνωστης ἀντιστάσεως ὥστε νά παρατηρηθεῖ ἀπόκλιση κατά 1 mm;

8-2. Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἄσκηση γιά ἄγνωστη ἀντίσταση περίπου 100 Ω.

8-3. Ἡ «ἄγνωστη» ἀντίσταση πού μετρᾶται μέ μιά γέφυρα Wheatstone ἔχει πραγματική τιμή 351.6 Ω. Οἱ κλάδοι R_3 καί R_4 ἔχουν ὀνομαστική τιμή 1000 Ω ἀλλά στήν πραγματικότητα οἱ τιμές τους εἶναι $R_3 = 999.1$ Ω καί $R_4 = 1001.6$ Ω.

(α) Ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς ἀγνωστης ἀντιστάσεως πού θά προκύψει ἀπό τή μέτρηση ἄν ἡ ἀντίσταση R_2 ἔχει δυνατότητα μεταβολης κατά βήματα 0.1 Ω.

(β) Ὑπολογίστε τήν τιμή πού θά προκύψει ἀπό τή μέτρηση ἄν ἐναλλαγοῦν οἱ ἀντιστάσεις R_3 καί R_4.

(γ) Συγκρίνετε τή μέση τιμή τῶν δύο μετρήσεων μέ τήν πραγματική τιμή τῆς ἀγνωστης ἀντιστάσεως.

8-4. Οἱ κλάδοι μιᾶς γέφυρας Wheatstone εἶναι $R_x = 300$ Ω, $R_2 = 600$ Ω, $R_3 = 380$ Ω καί $R_4 = 750$ Ω. Τό ἠλεκτρικό στοιχεῖο τῆς γέφυρας ἔχει ΗΕΔ = 2 V καί ἀμελητέα ἐσωτερική ἀντίσταση. Ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση καί εὐαισθη-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σία τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι άντίστοιχα 60 Ω καί 0.05 μA/mm. Στόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου έχει έπιπλέον προστεθεῖ μιά άπλή διακλάδωση μέ άντίσταση 40 Ω. Ποιά ἡ άπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου;

8-5. Οἱ κλάδοι μιᾶς γέφυρας Wheatstone εἶναι $R_3 = R_4 = 1000$ Ω. Ἡ ἄγνωστη άντίσταση ἔχει προσδιοριστεῖ μέ ἕνα ὠμόμετρο ὡς περίπου 500 Ω. Τό ἡλεκτρικό στοιχεῖο τῆς γέφυρας ἔχει ΗΕΔ 1.5 V καί ἀμελητέα ἐσωτερική άντίσταση. Τό γαλβανόμετρο, μέ ἐσωτερική άντίσταση 50 Ω καί εὐαισθησία ± 0.05 % ἐνῶ τό σφάλμα στήν τιμή τῆς άντιστάσεως R_2 ±0.1 %. Μέ τιμές μέ ἐνδιάμεσα σημεῖα ἐπαφῆς πού ἐπιλέγουν σχετική εὐαισθησία 0.001, 0.01, 0.1 καί 1.

(α) Μέ τή διακλάδωση Ayrton στό σημεῖο μέγιστης εὐαισθησίας πόση πρέπει νά εἶναι ἡ ποσοστιαία διαφορά μεταξύ τῆς άντιστάσεως R_2 καί τῆς ἄγνωστης άντιστάσεως ὥστε τό γαλβανόμετρο νά άποκλίνει κατά 1 mm;

(β) Ἄν ἡ άντίσταση R_2 εἶναι κατά 20 % μικρότερη άπό τήν τιμή πού άπαιτεῖται γιά ἰσορρόπιση τῆς γέφυρας καί ἡ διακλάδωση Ayrton στήν ἐπαφή 0.001, ποία ἡ άπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου;

8-6. Μιά γέφυρα Wheatstone λειτουργεῖ μέ ἡλεκτρικό στοιχεῖο ΗΕΔ 2 V καί γαλβανόμετρο μέ εὐαισθησία 0.5 μA/mm. Ἡ άντίσταση R_2 ἔχει σταθερή τιμή 1 kΩ. Ποιά ἀκρίβεια ἀναμένεται στή μέτρηση άντιστάσεων 10 Ω, 1 kΩ, 10 kΩ καί 1 MΩ;

8-7. Τρεῖς κλάδοι μιᾶς γέφυρας Wheatstone περιέχουν άντιστάσεις 100.0 Ω ἐνῶ ὁ τέταρτος άντίσταση 100.1 Ω. Στή μιά διαγώνιο τῆς γέφυρας συνδέεται γαλβανόμετρο μέ ἐσωτερική άντίσταση 50 Ω καί εὐαισθησία 0.05 μA/mm. Στήν ἄλλη διαγώνιο συνδέεται ἡλεκτρικό στοιχεῖο μέ ΗΕΔ 3 V σέ σειρά μέ άντίσταση 200 Ω. Ποιά ἡ άπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου;

8-8. Τό σφάλμα στήν τιμή τῶν άντιστάσεων μιᾶς γέφυρας Wheatstone εἶναι ± 0.05 % ἐνῶ τό σφάλμα στήν τιμή τῆς άντιστάσεως R_2 ±0.1 %. Μέ τιμές τῶν άντιστάσεων $R_3 = R_4 = 1$ kΩ, ἡ τιμή τῆς ἄγνωστης άντιστάσεως προσδιορίζεται ὡς 2324 Ω. Ποιό τό πειραματικό σφάλμα στό άποτέλεσμα τῆς μετρήσεως;

8-9. Μιά άπλή γέφυρα Wheatstone χρησιμοποιεῖται γιά μέτρηση άντιστάσεων στήν περιοχή τῶν MΩ. Οἱ άντιστάσεις R_3 καί R_4 μποροῦν νά πάρουν τίς τιμές 1 Ω, 10 Ω, 100 Ω, 1 kΩ, καί 10 kΩ ἐνῶ ἡ άντίσταση R_2 μπορεῖ νά πάρει συνεχεῖς τιμές μέχρι 10 kΩ. Τό ἡλεκτρικό στοιχεῖο τῆς γέφυρας ἔχει ΗΕΔ 10 V καί ἀμελητέα ἐσωτερική άντίσταση. Γιά τή συνθήκη $R_3 = R_4$

(α) Ποιά εἶναι ἡ μέγιστη τιμή άντιστάσεως πού μπορεῖ νά μετρηθεῖ μέ τή γέφυρα;

(β) Τό γαλβανόμετρο ἔχει ἐσωτερική άντίσταση 25 Ω καί εὐαισθησία 0.005 μA/mm. Πόση μεταβολή στήν τιμή τῆς μέγιστης ἄγνωστης άντιστάσεως πού μπορεῖ νά μετρήσει ἡ γέφυρα θά προκαλέσει άπόκλιση 1 mm;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(γ) Ἄν τό γαλβανόμετρο ἀντικατασταθεῖ μέ ἕνα δεύτερο μέ ἐσωτερική ἀντίσταση 550 Ω καί εὐαισθησία 0.0005 μA/mm πῶς μεταβάλλεται ἡ ἀπάντηση στήν προηγούμενη ἐρώτηση;

8-10. Θεωρεῖστε τό ἐξωτερικό κύκλωμα τοῦ γαλβανομέτρου στή διπλή γέφυρα Kelvin. Ὑπολογίστε τήν ἰσοδύναμη ΗΕΔ καί τήν ἰσοδύναμη ἀντίσταση (βλ. σχῆμα 8-5).
(α) Γιά ΗΕΔ τοῦ ἡλεκτρικοῦ στοιχείου ἴση μέ 1.5 V καί ἀμελητέα ἐσωτερική ἀντίσταση, $R_3 = R_4 = 100\ \Omega$ καί ἀμελητέες ἀντιστάσεις R_J, R_s καί R_x.
(β) Γιά τίς προηγούμενες τιμές καί $R_J = 0.1\ \Omega$, $R_s = 0.100\ \Omega$ καί $R_x = 0.101\ \Omega$.

8-11. Ἡ γέφυρα Kelvin τοῦ σχήματος 8-5 ἰσορροπεῖ μέ τιμές τῶν ἀντιστάσεων $R_s = 0.003770\ \Omega$, $R_1 = 100.00\ \Omega$, $R_2 = 1000.0\ \Omega$, $R_3 = 99.92\ \Omega$, $R_4 = 1000.6\ \Omega$ καί $R_J = 0.1\ \Omega$. Ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς ἄγνωστης ἀντιστάσεως R_x.

8-12. Σέ μιά γέφυρα Kelvin οἱ ἀντιστάσεις R_3 καί R_4 ἔχουν τιμή 1 kΩ. Ἡ πρότυπη ἀντίσταση R_s εἶναι 0.1000 Ω καί ἡ ἄγνωστη ἀντίσταση R_x εἶναι 0.1002 Ω. Τό γαλβανόμετρο ἔχει ἐσωτερική ἀντίσταση 500 Ω καί εὐαισθησία 0.005 μA/mm. Τό ἡλεκτρικό στοιχεῖο ἔχει ΗΕΔ 2 V καί ἀμελητέα ἐσωτερική ἀντίσταση. Ἀμελητέα ἐπίσης μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἡ ἀντίσταση R_J.
(α) Ποιά ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου;
(β) Ἀπό τήν προηγούμενη ἀπάντηση ἐκτιμεῖστε τήν ποσοστιαία διαφορά στήν τιμή τῆς ἄγνωστης ἀντιστάσεως πού προκαλεῖ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου 1 mm.

8-13. Μιά γέφυρα Kelvin μέ ἀντιστάσεις $R_3 = 1$ kΩ καί $R_4 = 10$ kΩ μετρᾶ μιά «ἄγνωστη» ἀντίσταση μέ τιμή 0.0997 Ω. Τό ἡλεκτρικό στοιχεῖο ἔχει ΗΕΔ 2.16 V καί ἐσωτερική ἀντίσταση 300 μΩ. Ἡ ἀντίσταση R_J εἶναι 10 mΩ, ἐνῶ τό γαλβανόμετρο ἔχει ἐσωτερική ἀντίσταση 100 Ω καί εὐαισθησία 0.005 μA/mm. Προσδιορίστε τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου.

8-14. Μιά διπλή γέφυρα Kelvin κατασκευάζεται μέ ἀντιστάσεις $R_3 = R_4 = 100\ \Omega$. Ἡ πρότυπη ἀντίσταση εἶναι 0.100 Ω καί ἡ «ἄγνωστη» ἀντίσταση 0.101 Ω. Ἡ ἀντίσταση τοῦ ζυγοῦ εἶναι $R_J = 0.1\ \Omega$. Τό γαλβανόμετρο ἔχει ἐσωτερική ἀντίσταση 25 Ω καί εὐαισθησία 0.05 μA/mm, ἐνῶ ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ στοιχείου μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀμελητέα. Τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν πρότυπη ἀντίσταση εἶναι 10 A. Προσδιορίστε τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου.

8-15. Ἡ ἀντίσταση ἑνός χάλκινου πηνίου μετρᾶται μέ μιά γέφυρα Wheatstone καί τό ἀποτέλεσμα ἀναφέρεται ὡς 263.8 Ω. Ἡ θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος κατά τή μέτρηση εἶναι περίπου 20 °C. Μέ πόση ἀκρίβεια πρέπει νά εἶναι γνωστή ἡ θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος ὥστε ὅλα τά ψηφία τοῦ ἀποτελέσματος νά θεωροῦνται σημαντικά; (Ὁ θερμικός συντελεστής ἀντιστά-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σεως τοῦ χαλκοῦ στήν περιοχή τῶν 20 °C εἶναι α = 0.00393/°C).

8-16. Ἕνα ἀκόρεστο στοιχεῖο Weston ἔχει ΗΕΔ 1.01910 V καί ἐσωτερική ἀντίσταση 250 Ω.

(α) Ἄν συνδέσετε ἕνα βολτόμετρο μέ ἐσωτερική ἀντίσταση 500 Ω ἀπευθείας στούς πόλους τοῦ στοιχείου, ποιά θά εἶναι ἡ ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου; Πόσο ρεῦμα θά ἀντλήσετε ἀπό τό στοιχεῖο;

(β) Πόσο ρεῦμα θά κυκλοφορήσει ἄν βραχυκυκλώσετε τό στοιχεῖο;

(γ) Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ ἐλάχιστη ἀντίσταση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος τοῦ στοιχείου ὥστε τό ρεῦμα νά μήν ὑπερβαίνει τά 100 μA;

8-17. Ἡ ἀντίσταση R_p τοῦ ἁπλοῦ ποτενσιομέτρου πού δίνεται στό σχῆμα 8-10 εἶναι ἕνας γραμμικός ἀγωγός μέ ὁλικό μῆκος 200 cm καί ἀντίσταση 100 Ω. Ὁ βρόχος τροφοδοσίας περιέχει ἠλεκτρικό στοιχεῖο μέ ΗΕΔ 4 V καί ἀμελητέα ἐσωτερική ἀντίσταση. Ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι 50 Ω. Τό πρότυπο στοιχεῖο ἔχει ΗΕΔ 1.018 V καί ἐσωτερική ἀντίσταση 200 Ω. Γιά τό λόγο αὐτό, ὁ ροοστάτης τοῦ βρόχου τροφοδοσίας ρυθμίζεται ἔτσι ὥστε τό πρότυπο στοιχεῖο νά ἰσορροπεῖ μέ τήν κινητή ἐπαφή τοῦ γραμμικοῦ ἀγωγοῦ σέ ἀπόσταση 101.8 cm ἀπό τό ἕνα ἄκρο.

(α) Προσδιορίστε τό ρεῦμα πού κυκλοφορεῖ στό βρόχο τροφοδοσίας καί τήν ἀντίσταση τοῦ ροοστάτη.

(β) Γιά τόν προσδιορισμό τοῦ σημείου ἰσορροπίας ἡ προστατευτική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου R_g μηδενίζεται. Στή συνέχεια, ἀπό ἐσφαλμένο χειρισμό, ἡ σύνδεση τοῦ πρότυπου στοιχείου ἀντιστρέφεται. Ὑπολογίστε τό ρεῦμα πού θά διερρεύσει τόν κλάδο τοῦ πρότυπου στοιχείου. Σχολιάστε τίς ἐπιπτώσεις τοῦ ἀτυχήματος.

(γ) Ποιά ἡ τιμή τῆς προστατευτικῆς ἀντιστάσεως πού θά περιόριζε τό ρεῦμα στά 10 μA;

(δ) Ἄν γιά προστασία τοῦ γαλβανομέτρου χρησιμοποιήσουμε διακλάδωση Ayrton μέ ὁλική ἀντίσταση 500 Ω (ἀντί γιά ἀντίσταση σέ σειρά), ὑπολογίστε τό ρεῦμα πού θά διαρρεύσει στόν κλάδο τοῦ πρότυπου στοιχείου κατά τό προηγούμενο ἀτύχημα γιά ρύθμιση τῆς διακλαδώσεως στό σημεῖο ἐπαφῆς 0.001.

8-18. Στό ἑπόμενο διάγραμμα δίνεται τό κύκλωμα ἑνός ἁπλοῦ τύπου ἐργαστηριακοῦ ποτενσιομέτρου, γνωστοῦ ὡς «φοιτητικό ποτενσιόμετρο».

Στό φοιτητικό ποτενσιόμετρο ἡ ἀντίσταση R_p δημιουργεῖται μέ 15 σταθερές ἀντιστάσεις τῶν 10 Ω καί ἕνα γραμμικό ἀγωγό (σέ σχῆμα πηνίου) μέ 200 διαβαθμήσεις. Ὁ ροοστάτης χρησιμοποιεῖται γιά βαθμονόμηση τοῦ ποτενσιομέτρου μέ σύγκριση πρός τήν ΗΕΔ τοῦ πρότυπου στοιχείου.

Σέ ἕνα ποτενσιόμετρο τοῦ τύπου αὐτοῦ, ἡ ἀντίσταση μεταξύ τῶν διαβαθμήσεων 0 καί 0.1 V ἀντί τῆς ὀνομαστικῆς τιμῆς 10.0 Ω εἶναι 10.1 Ω. Τό ποτενσιόμετρο βαθμονομεῖται μέ ἕνα πρότυπο στοιχεῖο ΗΕΔ = 1.0191 V

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί στή συνέχεια χρησιμοποιεῖται γιά τή μέτρηση μιᾶς ἄγνωστης διαφορᾶς δυναμικοῦ, ἡ ὁποία προσδιορίζεται ὡς 0.2153 V. Ποιά ἡ πραγματική τιμή τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ πού μετρήθηκε; Ὑπολογίστε τό σχετικό σφάλμα στή μέτρηση.

8-19. Τό ποτενσιόμετρο τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως βαθμονομεῖται μέ ἕνα πρότυπο στοιχεῖο ΗΕΔ = 1.0192 V. Ὁ ροοστάτης τοῦ βρόχου τροφοδοσίας μπορεῖ νά ρυθμιστεῖ συνεχῶς μεταξύ 0 καί 100 Ω.

(α) Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ ΗΕΔ τοῦ ἡλεκτρικοῦ στοιχείου στό βρόχο τροφοδοσίας;

(β) Λόγω ἐσφαλμένου χειρισμοῦ ἕνα μεγάλο ρεῦμα διοχετεύεται στό πρότυπο στοιχεῖο καί στή συνέχεια ἡ ΗΕΔ μεταβάλλεται σέ 1.0000 V. Ποιό θά εἶναι τό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως ἑνός δυναμικοῦ 0.750 V ἄν ὁ χειριστής δέν ἀντιληφθεῖ τήν πτώση τῆς ΗΕΔ τοῦ πρότυπου στοιχείου;

8-20. Ἕνα φοιτητικό ποτενσιόμετρο [βλ. Ἄσκηση 8-18] ἔχει ἕνα ἐπιλογέα μέ 15 βήματα τῶν 10 Ω μέ ἀντίστοιχες ἐνδείξεις κατά 0.1 V καί ἕνα ἐπιλογέα γραμμικοῦ ἀγωγοῦ μέ συνολική ἔνδειξη δυναμικοῦ 0.11 V. Τό ἡλεκτρικό στοιχεῖο στό βρόχο τροφοδοσίας ἔχει ΗΕΔ 3 V καί ἐσωτερική ἀντίσταση 0.1 Ω. Ἡ ΗΕΔ τοῦ πρότυπου στοιχείου εἶναι 1.0168 V καί ἡ ἐσωτερική του ἀντίσταση 250 Ω. Τό γαλβανόμετρο παρεμβάλλει ἀντίσταση 50 Ω καί ἡ εὐαισθησία του εἶναι 0.05 μA/mm. Μετά τή βαθμονόμηση τοῦ ποτενσιομέτρου καί μέ τούς ἐπιλογεῖς ρυθμισμένους σέ ἔνδειξη 0.600 V, ὁ διακόπτης συνδέεται στόν κλάδο τοῦ πρότυπου στοιχείου.

(α) Ὑπολογίστε τό ρεῦμα στόν κλάδο τοῦ γαλβανομέτρου, ἄν ἡ προστατευτική ἀντίσταση ἔχει προηγουμένως μηδενιστεῖ.

(β) Ὑπολογίστε τήν προστατευτική ἀντίσταση πού πρέπει νά τοποθετηθεῖ σέ σειρά μέ τό γαλβανόμετρο ὥστε ἡ ἀπόκλιση τοῦ ὀργάνου νά μήν ὑπερβαίνει τά 50 mm.

8-21. Τό φοιτητικό ποτενσιόμετρο πού περιγράφεται στήν Ἄσκηση 8-18 διαθέτει ΗΕΔ στό βρόχο τροφοδοσίας 3 V καί πρότυπο στοιχεῖο μέ ΗΕΔ = 1.0181 V καί ἐσωτερική ἀντίσταση 250 Ω. Τό γαλβανόμετρο τοῦ ποτενσιομέτρου ἔχει ἐσωτερική ἀντίσταση 50 Ω.

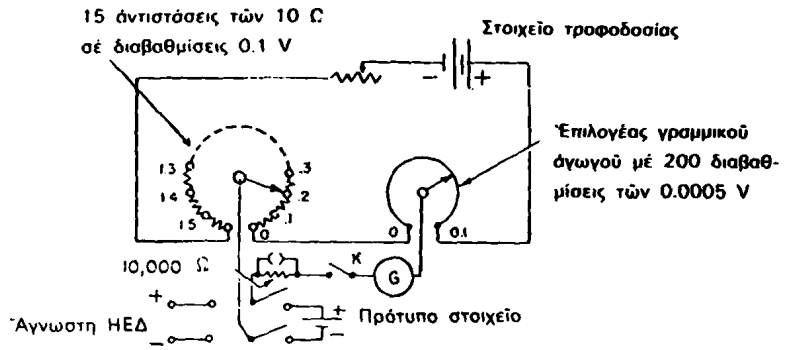
(α) Σέ ποιά περιοχή δυναμικοῦ ἐμφανίζει τό ποτενσιόμετρο τή μεγαλύτερη εὐαισθησία;

(β) Ποιά εὐαισθησία πρέπει νά ἔχει τό γαλβανόμετρο ὥστε νά ἀποκλίνει κατά 1 mm ἀνά διαβάθμιση τοῦ ἐπιλογέα στόν γραμμικό ἀγωγό;

8-22. Τό ποτενσιόμετρο πού δίνεται στό ἑπόμενο κύκλωμα περιέχει ἕνα ἐπιλογέα μέ 15 βήματα τῶν 10 Ω καί ἕνα ἐπιλογέα ὀλισθήσεως σέ γραμμικό ἀγωγό συνολικῆς ἀντιστάσεως 10 Ω. Ἄν ὁ διακόπτης S τοποθετηθεῖ στήν ἐπαφή a, τό ρεῦμα διαμέσου τῶν ἀντιστάσεων τῶν ἐπιλογέων πρέπει νά εἶναι 10 mA. Γιά τή θέση τοῦ διακόπτη S στή θέση b τό ἀντίστοιχο ρεῦμα πρέπει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

νά εἶναι 1 mA. Προσδιορισστε τίς τιμές τῶν ἀντιστάσεων R_1 καί R_2 ὥστε νά ἱκανοποιοῦνται οἱ προηγούμενες συνθῆκες ἐνῶ ταυτόχρονα ἡ διαφορά δυναμικοῦ καί τό ὁλικό ρεῦμα μεταξύ τῶν σημείων c καί d νά παραμένουν ἴδια γιά τίς δύο θέσεις τοῦ διακόπτη S.



8-23. Γιά τή βαθμονόμηση ἑνός βολτομέτρου μέ κλίμακα 0—150 V διατίθεται ἕνα ποτενσιόμετρο μέ ἀκρίβεια ± 0.0001 V καί ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων, στό ὁποῖο ἡ κινητή ἐπαφή μπορεῖ νά ἐπιλέξει δύο ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 μέ ἀκρίβεια στό λόγο R_1/R_2 ±0.05 %. Κατά τή διεργασία τοῦ Πειράματος 8-9 προσδιορίζεται ὅτι ὅταν ἡ ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου εἶναι 80 V, τό ποτενσιόμετρο μετρᾶ 0.8025 V. Ὑπολογίστε τό σφάλμα σέ volt καί ὡς σχετικό σφάλμα τῆς κλίμακας τοῦ βολτομέτρου. Προσδιορίστε τήν ἀβεβαιότητα στή διόρθωση, θεωρώντας ὅτι τό γαλβανόμετρο ἔχει ἱκανή εὐαισθησία ὥστε ὅλα τά ψηφία τοῦ ἀποτελέσματος νά εἶναι σημαντικά.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

μαγνητικα φαινομενα

Στό Κεφάλαιο 2 έξετάσαμε διεξοδικά τίς δυνάμεις πού άναπτύσσονται μεταξύ στατικῶν φορτίων. Λέν εἶναι βέβαια άπαραίτητο οἱ δυνάμεις αὐτές, πού όνομάσαμε **ήλεκτροστατικές** ἤ **δυνάμεις Coulomb,** νά παραμένουν άναλλοίωτες ὅταν τά φορτία κινοῦνται τό ἕνα ὡς πρός τό άλλο ἤ καί τά δύο ὡς πρός τόν παρατηρητή. Πράγματι, ἔχει παρατηρηθεῖ πειραματικά ὅτι ἡ γενική μορφή τῆς δυνάμεως μεταξύ δύο κινούμενων φορτίων ἐξαρτᾶται τόσο άπό τή μεταξύ τους άπόσταση ὅσο καί άπό τήν ταχύτητα. Τήν ἐξάρτηση αὐτή, πού όδηγεῖ σέ ἕνα πλῆθος άπό νέα φαινόμενα, τά **μαγνητικά,** θά ἐξετάσουμε στή συνέχεια.

Κατά τή μελέτη τῶν μαγνητικῶν φαινομένων θά άντλήσουμε πολλά άπό τίς γνώσεις καί τήν ἐμπειρία πού άποκτήθηκαν μέ τή μελέτη τῶν καθαρά ήλεκτρικῶν φαινομένων. Συγκεκριμένα θά κάνουμε μιά παράλληλη λογική άφαίρεση καί θά εἰσάγουμε τίς ἔννοιες τοῦ **μαγνητικοῦ πεδίου** καί **δυναμικοῦ.** Στήν προσπάθειά μας νά οἰκοδομήσουμε τή θεωρία τῶν μαγνητικῶν φαινομένων παράλληλα πρός τήν ήλεκτροστατική θά άκολουθήσουμε πορεία πού διαφέρει ριζικά άπό τήν ἱστορική ἐξέλιξη τῆς ήλεκτρομαγνητικῆς θεωρίας. Πολλά άπό τά πειραματικά δεδομένα πού θά ἐπικαλεστοῦμε εὐθύς ἐξαρχῆς ἔγιναν γνωστά ἤ κατανοητά πολύ άργότερα στήν ἱστορία τοῦ ήλεκτρομαγνητισμοῦ. Ἡ ἱστορική αὐτή άναστροφή γίνεται για λόγους λογικῆς καί παιδαγωγικῆς οἰκονομίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

9-1 Ἀλληλεπίδραση δύο Κινούμενων Σημειακῶν Φορτίων

Ὅπως καί στήν περίπτωση τῶν ἠλεκτροστατικῶν φαινομένων, θά στηρίξουμε τή μελέτη τῆς ἀλληλεπιδράσεως δύο κινούμενων φορτίων στήν πειραματική παρατήρηση. Ἄν ἕνας παρατηρητής ἐπαναλάβει τό πείραμα πού ὁδήγησε στό νόμο τοῦ Coulomb γιά δύο φορτία q_1 καί q_2 πού κινοῦνται ὡς πρός τόν παρατηρητή μέ ἀντίστοιχες ταχύτητες $\mathbf{u}_1$ καί $\mathbf{u}_2$, θά παρατηρήσει ὅτι ἡ ὁλική δύναμη $\mathbf{F}_{2..1}$ πού ἀσκεῖ τό φορτίο q_1 στό φορτίο q_2 μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς τό ἄθροισμα δύο ὅρων

$$\mathbf{F}_{2..1} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_M \ . \tag{9.1}$$

Ὁ πρῶτος ὅρος $\mathbf{F}_E$ ταυτίζεται μέ τήν ἠλεκτροστατική δύναμη πού δίνεται στήν ἐξ. (2.6). Ὁ δεύτερος ὅρος ἔχει πιό πολύπλοκη μορφή. Μέ σειρά πειραμάτων† μπορεῖ νά προσδιορίσει κανείς ὅτι:

1. Τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\mathbf{F}_M$ εἶναι ἀνάλογο πρός τά φορτία q_1 καί q_2, ἀνάλογο πρός τήν ταχύτητα κάθε φορτίου καί ἀντίστροφα ἀνάλογο πρός τό τετράγωνο τῆς μεταξύ τους ἀποστάσεως. Ἐξαρτᾶται ἀκόμη ἀπό τήν σχετική διεύθυνση τῶν δύο ταχυτήτων.
2. Ἡ διεύθυνση τῆς δυνάμεως $\mathbf{F}_M$ εἶναι κάθετη πρός τήν ταχύτητα $\mathbf{u}_2$. Εἶναι ἀκόμη παράλληλη πρός τό ἐπίπεδο πού ὁρίζουν ἡ ταχύτητα $\mathbf{u}_1$ καί τό ἄνυσμα τῆς ἀποστάσεως μεταξύ τῶν δύο φορτίων $\mathbf{r}_{21}$.

Στή γεωμετρία τοῦ σχήματος 9-1, τά πειραματικά αὐτά ἀποτελέσματα μποροῦν νά συνοψιστοῦν μέ τή μαθηματική ἔκφραση

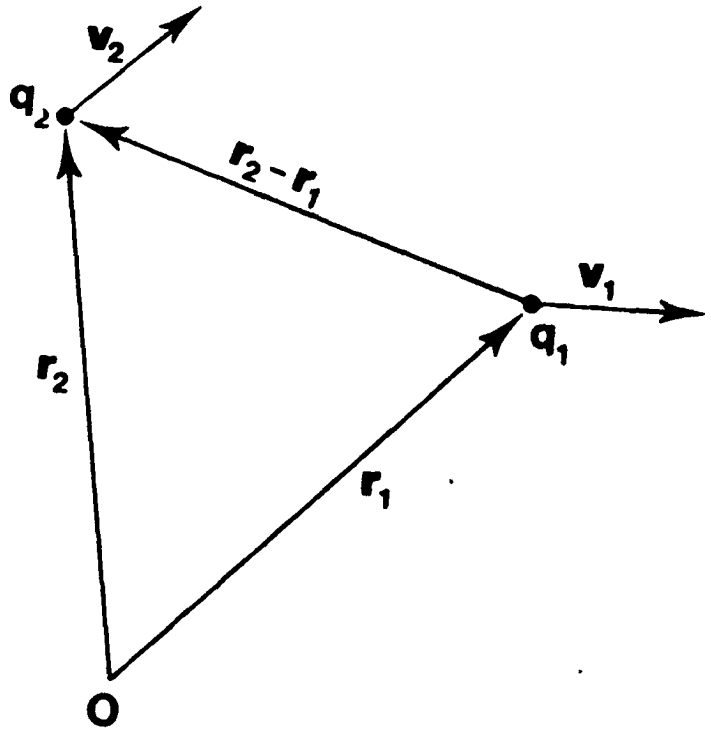
$$\mathbf{F}_M = q_1 q_2 \frac{\mathbf{u}_2 \times (\mathbf{u}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{21})}{c^2 r_{21}^2} = q_1 q_2 \frac{\mathbf{u}_2 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{21})}{c_2 r_{21}^3} \tag{9.2}$$

ὅπου ἡ ἀπόσταση r_{21} καί τό μοναδιαῖο ἄνυσμα $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ ὁρίζονται στίς ἐξ. (2.3) καί (2.4). Στό σύστημα CGS, ὅπου ἔχει γραφεῖ ἡ ἐξ. (9.2), προσδιορίζεται ἀκόμη ἀπό τό πείραμα ὅτι ὁ συντελεστής ἀναλογίας τοῦ ὅρου $\mathbf{F}_M$ εἶναι ἡ ποσότητα $1/c^2$, ὅπου c ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός.

---

† Ἄν καί, ὅπως ἤδη ἀναφέραμε, τά μαγνητικά φαινόμενα δέν μελετήθηκαν ἱστορικά μέ παρόμοια πειράματα, θά μποροῦσε κανείς νά προσδιορίσει τή μορφή τοῦ ὅρου $\mathbf{F}_M$ χρησιμοποιώντας σύγχρονες τεχνικές τῆς Πυρηνικῆς Φυσικῆς. Σέ ἕνα τέτοιο πείραμα θά ἦταν δυνατόν φορτισμένα σωμάτια μέ γνωστή ἀρχική ταχύτητα, νά διοχετευθοῦν σέ ἕνα θάλαμο νεφώσεως ἤ φυσσαλίδων, ὅπου οἱ τροχιές τους γίνονται ὁρατές καί μποροῦν νά φωτογραφηθοῦν. Ἀπό τήν ἀνάλυση τῆς τροχιᾶς τῶν σωματίων θά ἦταν δυνατόν νά ἐξαχθοῦν ὅλες οἱ ἰδιότητες τῆς δυνάμεως $\mathbf{F}_M$ πού ἀπαριθμοῦνται στό κυρίως κείμενο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 9-1 Ἀλληλεπίδραση δύο κινούμενων φορτίων. Τά ἀνύσματα $\mathbf{v}_1$ καί $\mathbf{v}_2$ δέν βρίσκονται ἀπαραίτητα στό ἴδιο ἐπίπεδο.

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ἀποτελέσματα, ἡ ὁλική δύναμη μεταξύ δύο κινούμενων φορτίων μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\mathbf{F}_{2\to 1} = \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3}\,\mathbf{r}_{21} + \frac{q_1 q_2\,\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{21})}{c^2 r_{21}^3} \tag{9.3}$$

Στήν ἔκφραση αὐτή, πού ὅπως ἤδη τονίσαμε προκύπτει ἀπό τήν πειραματική παρατήρηση, θά στηρίξουμε τό λογικό οἰκοδόμημα τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς θεωρίας.

Ἀπό τή μορφή τῆς ἐξ. (9.3), ὁρισμένες ἰδιότητες εἶναι ἀμέσως ἐμφανεῖς.

1. Γιά στάσιμα φορτία ($\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0$), ἤ ἕνα ἀπό τά δύο φορτία στάσιμο, ἡ δύναμη $\mathbf{F}_{2\to 1}$ γίνεται καθαρά ἠλεκτροστατική. Γενικώτερα, *ἡ συνεισφορά τοῦ δεύτερου ὅρου ἐξαρτᾶται ἀπό τή σχετική ταχύτητα κάθε φορτίου πρός τόν παρατηρητή.* Ἕνας παρατηρητής, στάσιμος στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων O τοῦ σχήματος 9-1, καί ἕνας παρα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τηρητής πού κινεῖται μέ τήν ταχύτητα $\mathbf{u}_1$ τοῦ φορτίου q_1, θά δοῦν τελείως διάφορη ἀλληλεπίδραση μεταξύ τῶν δύο φορτίων. Τήν ἰδιότητα αὐτή θά μελετήσουμε μέ μεγαλύτερη λεπτομέρεια ἀργότερα, στά πλαίσια τῆς Εἰδικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας.

2. *Ἡ ὁλική δύναμη* $\mathbf{F}_{2\leftarrow 1}$ *δέν εἶναι Νευτώνια,* ἤτοι

$$\mathbf{F}_{2\leftarrow 1} \neq -\mathbf{F}_{1\leftarrow 2} \ . \tag{9.4}$$

Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά ἐπαληθεύσει τήν ἀνισότητα αὐτή θεωρώντας ταχύτητες τῶν φορτίων μέ ἁπλή γεωμετρία. Στή γεωμετρία π.χ. τοῦ σχήματος 9-2, ὅπου οἱ ταχύτητες $\mathbf{u}_1$ καί $\mathbf{u}_2$ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι ἡ δύναμη $\mathbf{F}_{M2\leftarrow 1}$ εἶναι πεπερασμένη, ἐνῶ

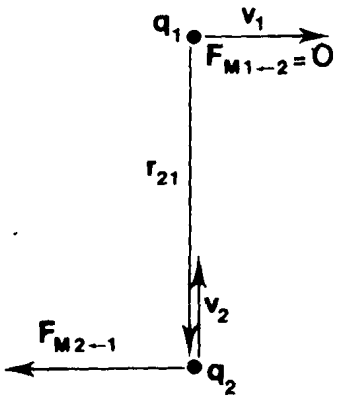
$$\mathbf{F}_{M1\leftarrow 2} = 0 \ , \tag{9.5}$$

3. Ἡ σχετική συνεισφορά τῶν δύο ὅρων στήν ὁλική δύναμη ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ταχύτητα τῶν δύο φορτίων. Κατά μέτρο, ὁ λόγος τῶν δύο ὅρων τῆς ὁλικῆς δυνάμεως εἶναι

$$\frac{F_M}{F_E} = \frac{u_1 u_2}{c^2} \ . \tag{9.6}$$

Γιά τυπικές ταχύτητες πού ἀπαντῶνται στό ἐργαστήριο ($u/c<0.1$) ὁ λόγος F_M/F_E παίρνει πολύ μικρή τιμή.

Ἡ τελευταία ἰδιότητα εἶναι ἐξαιρετικά ἐνδιαφέρουσα. Ἐκ πρώτης ὄψεως ὁδηγεῖ στό συμπέρασμα ὅτι μαγνητικά φαινόμενα (φαινόμενα πού ὀφείλονται στόν δεύτερο ὅρο τῆς ἐξ. (9.3)) μπορεῖ νά θεωρηθοῦν ἀμελητέα σέ σχέση μέ τά ἠλεκτρικά. Τοῦτο ἔρχεται σέ ἄμεση ἀντίφαση μέ τήν



ΣΧΗΜΑ 9-2 Σχετική κίνηση δύο φορτίων μέ ταχύτητες στό ἴδιο ἐπίπεδο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καθημερινή ἐμπειρία, ὅπου μαγνητικά φαινόμενα ἀπαντῶνται μέ ἀξιοσημείωτη ἔνταση, χωρίς ἀπαραίτητα νά συνοδεύονται ἀπό ἀντίστοιχα ἡλεκτρικά. Ἡ ἀπάντηση στήν ἀντίφαση αὐτή βρίσκεται στή σχεδόν ἀπόλυτη ἐξισορρόπιση θετικῶν καί ἀρνητικῶν φορτίων πού ἐμφανίζει ἡ μακροσκοπική ὕλη στή συνήθη της κατάσταση. Μεταξύ δύο ἀγωγῶν, π.χ. πού διαρρέονται ἀπό ρεῦμα, ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ἐξ. (9.3) συνεπάγεται τήν ἀνάπτυξη κάποιας δυνάμεως μεταξύ τῶν ἠλεκτρονίων πού κινοῦνται στό ἐσωτερικό κάθε ἀγωγοῦ. Οἱ δυνάμεις αὐτές μετατίθενται στό κρυσταλλικό πλέγμα τῶν ἀκίνητων θετικῶν ἰόντων καί ἡ ὅλη ἀλληλεπίδραση ἐμφανίζεται τελικά ὡς δύναμη μεταξύ τῶν δύο ἀγωγῶν. Τό ὁλικό φορτίο ὅμως κάθε ἀγωγοῦ (κινούμενα ἠλεκτρόνια καί ἀκίνητα θετικά ἰόντα) εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν, ἔτσι ὥστε ὁ πρῶτος ὅρος νά μή συνεισφέρει στήν ὁλική δύναμη. Ἀντίθετα, στήν ἀτομική κλίμακα, ὅπου τά στοιχειώδη φορτία κινοῦνται ὡς ἀνεξάρτητες ὀντότητες, ὁ λόγος τῆς ἐξ. (9.6) διατηρεῖ τήν πραγματική του σημασία καί τά μαγνητικά φαινόμενα μποροῦν σέ πρώτη προσέγγιση νά παραληφθοῦν.

Ἡ ἐπέκταση τοῦ νόμου τοῦ Coulomb στήν περίπτωση κινούμεων φορτίων ἔχει γραφεῖ μέ τή μορφή τῆς ἐξ. (9.3) στό σύστημα CGS ὅπου τό φορτίο μετρᾶται σέ ΗΣΜ-φ. Στό σύστημα SI ὅπου ἡ μονάδα φορτίου ὁρίζεται αὐθαίρετα ὡς τό coulomb, ἀπαιτεῖται ἕνας συντελεστής ἀναλογίας στό δεύτερο ὅρο τῆς ἐξ. (9.3). Θά γράψουμε ἑπομένως στό σύστημα SI τήν ἔκφραση

$$\mathbf{F}_{2-1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} + k\frac{q_1 q_2 \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{21})}{c^2 r_{21}^3} \quad . \tag{9.7}$$

Καθόσον ὁ λόγος τῶν δύο ὅρων στήν τελευταία ἔκφραση πρέπει νά εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τό σύστημα μονάδων στό ὁποῖο μετρῶνται τά φυσικά μεγέθη, ὁ συντελεστής ἀναλογίας k μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τό λόγο τῆς ἐξ. (9.6). Θά πρέπει δηλαδή νά ἰσχύει

$$\frac{F_M}{F_E} = 4\pi\varepsilon_0 k\frac{u_1 u_2}{c^2} = \frac{u_1 u_2}{c^2}$$

ἤ

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad . \tag{9.8}$$

Γιά καθαρά ἱστορικούς λόγους ἔχει καθιερωθεῖ ὁ συντελεστής ἀναλογίας k νά γράφεται ὡς



$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} c^2 \tag{9.9}$$

όπου ή νέα σταθερά μ_0 πού είσάγεται στήν τελευταία σχέση όνομάζεται **μαγνητική διαπερατότητα στό κενό.** Στό σύστημα SI έπομένως ή δύναμη μεταξύ δύο κινούμενων φορτίων γράφεται ώς

$$\mathbf{F}_{2,1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{21})}{r_{21}^3} . \tag{9.10}$$

Χρησιμοποιώντας τήν πρακτική διαχωρισμοῦ τῶν έπιπλέον παραγόντων στό σύστημα SI μέ άγγύλες μποροῦμε νά γράψουμε τίς έξ. (9.3) καί (9.10) ὑπό τήν ένιαία μορφή

$$\mathbf{F}_{2\leftarrow 1} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} + \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c^2\right] \frac{q_1 q_2 \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{21})}{c^2 r_{21}^3} . \tag{9.11}$$

Εἶναι ἴσως χρήσιμο στό στάδιο αὐτό νά παρατηρήσουμε ὅτι ή ήλεκτρική καί μαγνητική διαπερατότητα στό κενό συνδέονται διαμέσου τῶν έξ. (9.8) καί (9.9) μέ τήν άπλή σχέση

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} . \tag{9.12}$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση εἶναι άκόμη δυνατό νά προσδιοριστεῖ ή άριθμητική τιμή τῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας στό κενό. Χρησιμοποιώντας τήν έξ. (2.9) καί τήν τιμή τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός {βλ. έξ. (2.11)}

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{4\pi\varepsilon_0 c^2} = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2} = 4\pi \times 10^{-7}\ \frac{\mathrm{V \cdot sec}}{\mathrm{A \cdot m}} . \tag{9.13}$$

9-2 Τό Μαγνητικό Πεδίο καί ή Δύναμη Lorentz

Εἶναι εὐτυχές γεγονός ὅτι ή άρχή τῆς έπαλληλίας, πού έπέτρεψε τήν εἰσαγωγή τῆς ἔννοιας τοῦ ήλεκτρικοῦ πεδίου στήν ήλεκτροστατική, άποδεικνύεται πειραματικά ὅτι ἰσχύει καί στήν περίπτωση τῆς γενικώτερης ήλεκτρομαγνητικῆς άλληλεπιδράσεως. Μέ ἄλλα λόγια, άποδεικνύεται πειραματικά ὅτι ή δύναμη $\mathbf{F}_{2\leftarrow 1}$ τῆς έξ. (9.4) μεταξύ τῶν φορτίων q_1 καί q_2 παραμένει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

άναλείωτη, άν στή γειτονία τῶν δύο φορτίων ὑπάρχουν καί άλλα φορτία, κινούμενα ή μή. Μποροῦμε ἐπομένως, σέ άναλογία μέ τήν ἐξ. (2.13), νά γράψουμε τήν ὁλική δύναμη πού ἐξασκοῦν n φορτία $q_1, q_2, \ldots, q_n$ σέ ἕνα φορτίο q_0 ὡς τό άνυσματικό άθροισμα

$$\mathbf{F}_{0-1,2,\ldots,n} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_{0-k} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] q_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{r_{0k}^3}\mathbf{r}_{0k}$$

$$+ \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c^2\right] q_0\mathbf{u}_0 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k(\mathbf{u}_k \times \mathbf{r}_{0k})}{c^2 r_{0k}^3} \quad . \tag{9.14}$$

Εἶναι φανερό ὅτι ὁ δεύτερος ὅρος συνεισφέρει στήν ὁλική δύναμη μόνο ἄν τό φορτίο q_0 κινεῖται ($u_0 \neq 0$) καί γιά ὅσα άπό τά φορτία $q_1, q_2, \ldots, q_n$ κινοῦνται ($u_k \neq 0$). Ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς ἐξ. (2.15) ή τελευταία σχέση μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ στήν περίπτωση συνεχοῦς κατανομῆς φορτίου καί ρεύματος. Ὁρίζοντας τή συνάρτηση τῆς **πυκνότητας ρεύματος J(r)** σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (4.5) μποροῦμε νά γράψουμε τή γενική μορφή τῆς δυνάμεως $\mathbf{F}_{0-\rho,J}$ πού ἐξασκεῖται σέ ἕνα φορτίο q_0 ὡς

$$\mathbf{F}_{0-\rho,J} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] q_0 \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,d^3r'$$

$$+ \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c^2\right] q_0\mathbf{u}_0 \times \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d^3r' \tag{9.15}$$

ὅπου ή ὁλοκλήρωση ἐκτείνεται σέ ὅλο τό χῶρο† V πού καταλαμβάνει ή κατανομή φορτίου ρ(r) καί ή πυκνότητα ρεύματος J(r). Ἡ γεωμετρία τῆς ἐξ. (9.15) άποδίδεται στό σχῆμα 2-2.

Οἱ ἐξ. (9.14) καί (9.15) ἐπιτρέπουν τή λογική μετάβαση άπό τήν ἔννοια τῆς δυνάμεως στήν ἔννοια τοῦ πεδίου. Ὅπως ἤδη άναφέραμε στό Κεφάλαιο 2, μεταξύ τῶν ἄλλων, ή εἰσαγωγή τῆς ἔννοιας τοῦ πεδίου μᾶς άπαλλάσσει καί άπό τή λογικά μή ἱκανοποιητική ἔννοια τῆς «δράσεως ἐξ άπο-

† Οἱ συναρτήσεις πού ὁλοκληρώνονται στήν ἐξ. (9.15) φθήνουν μέ τήν άπόσταση γρηγορώτερα άπό r^{-1}. Ὁ χῶρος τῆς ὁλοκληρώσεως V μπορεῖ ἐπομένως νά ἐπεκταθεῖ ὡς τό άπειρο. Ἡ ἰδιότητα αὐτή θά μᾶς ἐπιτρέψει άργότερα τήν ὁλοκλήρωση ἐκφράσεων κατά μέρη καί τήν παράλειψη ἐπιφανειακῶν ὁλοκληρωμάτων σέ μεγάλες άποστάσεις. Γιά τό λόγο αὐτό θά παραλείψουμε στή συνέχεια τήν ἔνδειξη V στά ὁλοκληρώματα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στάσεως». Ἡ συνάρτηση τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου **E**(**r**) πού ὁρίστηκε στήν ἐξ. (2.18) «χαρτογραφεῖ» τό χῶρο ὡς πρός τήν ἰδιότητα πού ἀποκτᾶ λόγω τῆς ὑπάρξεως στατικῶν φορτίων. Ἡ μορφή τοῦ δεύτερου ὅρου τῆς ἐξ. (9.15) μᾶς ἐπιτρέπει τώρα τήν ἀνάλογη «χαρτογράφιση» τοῦ χώρου ὡς πρός τήν ἰδιότητα πού ἀποκτᾶ λόγω τῆς ὑπάρξεως κινούμενων φορτίων, μέ τόν παράλληλο ὁρισμό τῆς συναρτήσεως

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{\mathbf{u}_k \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|^3}$$

$$+ \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, d^3r' \qquad (9.16)$$

ὅπου καί πάλι τό ἄθροισμα ἐκτείνεται σέ ὅλα τά διακριτά φορτία q_k πού κινοῦνται μέ ἀντίστοιχη ταχύτητα $\mathbf{u}_k$ καί ἡ ὁλοκλήρωση σέ κάθε κατανομή ρεύματος. Οἱ δύο συναρτήσεις **E**(**r**) καί **B**(**r**) ἀποδίδουν πλήρως τήν ἰδιότητα πού ἔχει ἀποκτήσει ὁ χῶρος. Συγκεκριμένα, προσδιορίζουν ὅτι ἄν ἕνα φορτίο q κινεῖται μέσα στό χῶρο αὐτό μέ ταχύτητα **u**(**r**) τότε στή θέση **r** θά ὑποστεῖ μιά δύναμη

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left[c\right] \frac{1}{c}\, q\mathbf{u}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \ . \qquad (9.17)$$

Ἡ τελευταία δύναμη ἀπαντᾶται συνήθως στή βιβλιογραφία μέ τήν ὀνομασία **δύναμη Lorentz.** Σέ ἀναλογία μέ τήν ὁρολογία τῆς ἠλεκτροστατικῆς θά ὀνομάσουμε τή συνάρτηση **B**(**r**) **μαγνητικό πεδίο**†.

Ὅπως δείχνει ἡ ἐξ. (9.17), στό σύστημα CGS τό ἠλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο ἔχουν τίς ἴδιες διαστάσεις. Ἡ μονάδα ἑπομένως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι το dyn/ΗΣΜ-φ, στήν ὁποία ἔχει δοθεῖ ἡ ὀνομασία **gauss** (G). Ἀπό τή μορφή τῆς ἐξ. (9.17), ἡ μονάδα gauss μπορεῖ νά ἑρμηνευτεῖ ὡς τό μαγνητικό πεδίο, τό ὁποῖο δημιουργεῖ δύναμη 1 dyn σέ ἕνα φορτίο 1 ΗΣΜ-φ πού κινεῖται μέ τήν ταχύτητα τοῦ φωτός (ἤ ἐναλλακτικά σέ ἕνα φορτίο c ΗΣΜ-φ πού κινεῖται μέ ταχύτητα 1 cm/sec). Ἡ ἀντίστοιχη μονάδα στό σύστημα SI ὀνομάζεται **tesla** (T) καί ἀντιπροσωπεύει πεδίο, τό ὁποῖο

† Σέ πολλά συγγράμματα ἡ συνάρτηση **B**(**r**) ἀπαντᾶται μέ τήν ὀνομασία **μαγνητική ἐπαγωγή.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δημιουργεῖ δύναμη 1 N σέ φορτίο ἴσο μέ 1 C ὅταν τοῦτο κινεῖται μέ ταχύτητα 1 m/sec. Ἐναλλακτικά εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι

$$1\,T = 1\,V \cdot sec \cdot m^{-2} \ . \qquad (9.18\alpha)$$

Ἡ σύνδεση μεταξύ τῶν δύο μονάδων δίνεται ἀπό τή σχέση

$$1\,T = 10^4\,G \ . \qquad (9.18\beta)$$

Τό gauss εἶναι ἡ μονάδα πού κατά παράδοση χρησιμοποιεῖται στή μέτρηση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου παρόλο ὅτι τό σύστημα SI συνήθως προτιμᾶται στίς τεχνολογικές ἐφαρμογές τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ. Ὡς τάξη μεγέθους εἶναι συγκρίσιμο μέ τό μαγνητικό πεδίο τῆς γῆς (στήν περιοχή τῆς Ἀθήνας τό γήϊνο μαγνητικό πεδίο εἶναι περίπου 0.32 G). Συνήθεις ἡλεκτρομαγνῆτες ἀναπτύσσουν πεδία μερικῶν χιλιάδων gauss ἐνῶ μέ τή χρήση ὑπεραγωγῶν γιά τή διοχέτευση ἡλεκτρικοῦ ρεύματος μποροῦν νά κατασκευαστοῦν σήμερα ἡλεκτρομαγνῆτες πού δημιουργοῦν πεδία μεγαλύτερα ἀπό 10^5 G.

Σέ πρακτικές ἐφαρμογές ἡ πυκνότητα ρεύματος **J** πού ἀπαντᾶται στίς ἐξ. (9.15) καί (9.16) δημιουργεῖται συνήθως ἀπό τή ροή σταθεροῦ ἡλεκτρικοῦ ρεύματος σέ γραμμικό ἀγωγό. Στήν ἐνδιαφέρουσα αὐτή περίπτωση τό ἄνυσμα **J** ἔχει διεύθυνση κατά μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ καί σταθερό μέτρο σέ ὅλη τήν ἐγκάρσια διατομή του[1]. Γιά ἕνα στοιχειώδη ὄγκο d^3r τοῦ ἀγωγοῦ μποροῦμε ἐπομένως νά γράψουμε τή σχέση

$$\mathbf{J}d^3r = \mathbf{J}sd\mathbf{l} = Id\mathbf{l} \qquad (9.19)$$

ὅπου s εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐγκάρσιας διατομῆς καί $d\mathbf{l}$ τό στοιχειῶδες προσανατολισμένο μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ. Ἡ γεωμετρία τῆς ἐξ. (9.19) δίνεται στό σχῆμα 9-3. Ἀντικαθιστώντας τήν ἐξ. (9.19) στήν ἐξ. (9.16) μποροῦμε τώρα νά γράψουμε τό μαγνητικό πεδίο **B** πού δημιουργεῖ ἕνας γραμμικός ἀγωγός ὡς

---

† Ἡ δεύτερη ἰδιότητα εἶναι δυνατόν νά μήν ἀληθεύει, ἰδιως γιά ἀγωγό μέ μεγάλη ἐγκαρσια διατομή. Ἄν ὅμως ἡ διατομή τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι μικρή σέ σχέση μέ τίς διαστάσεις τοῦ συστήματος πού δημιουργεῖ ὁ ἀγωγός (δακτύλιος, πηνίο, κ.λ.π.), ἡ ὁμοιόμορφη κατανομή τῆς πυκνότητας ρεύματος κατά τήν ἐγκάρσια διατομή του ἀποτελεῖ πολύ καλή προσέγγιση.

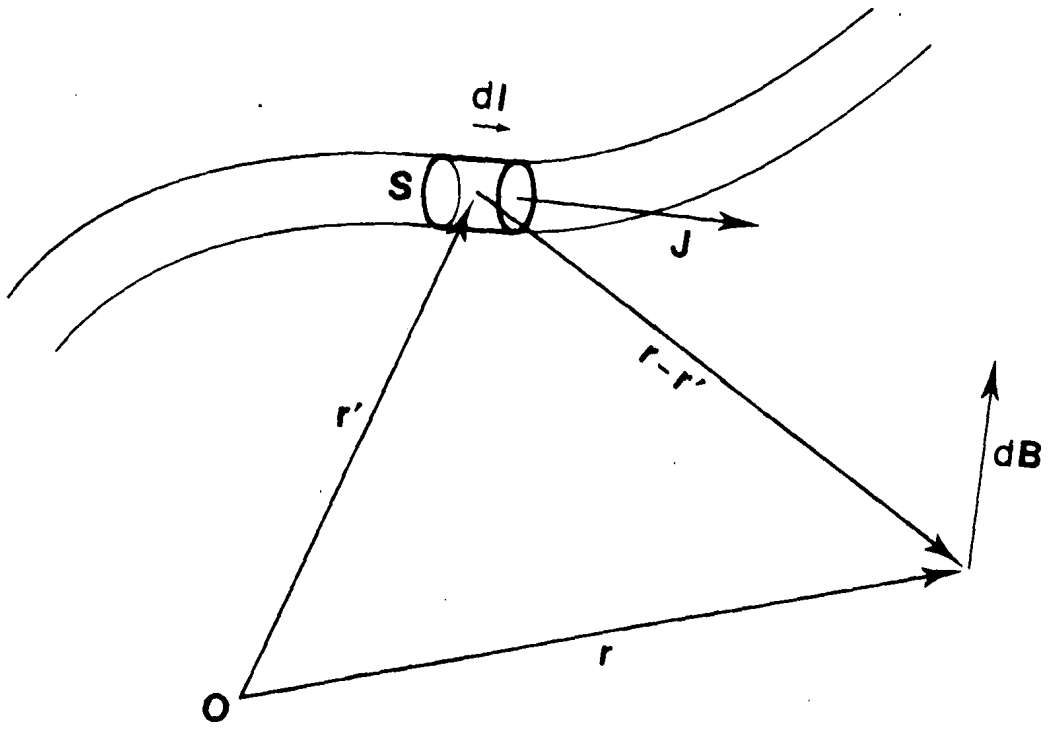
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{I}{c} \int_c \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} . \qquad (9.20)$$

ὅπου τό ὁλοκλήρωμα ἐκτείνεται σέ ὅλο τό μῆκος τοῦ γραμμικοῦ ἀγωγοῦ. Ἡ ἐξ. (9.20) εἶναι ἱστορικά γνωστή ὡς **νόμος τῶν Biot καί Savart.**

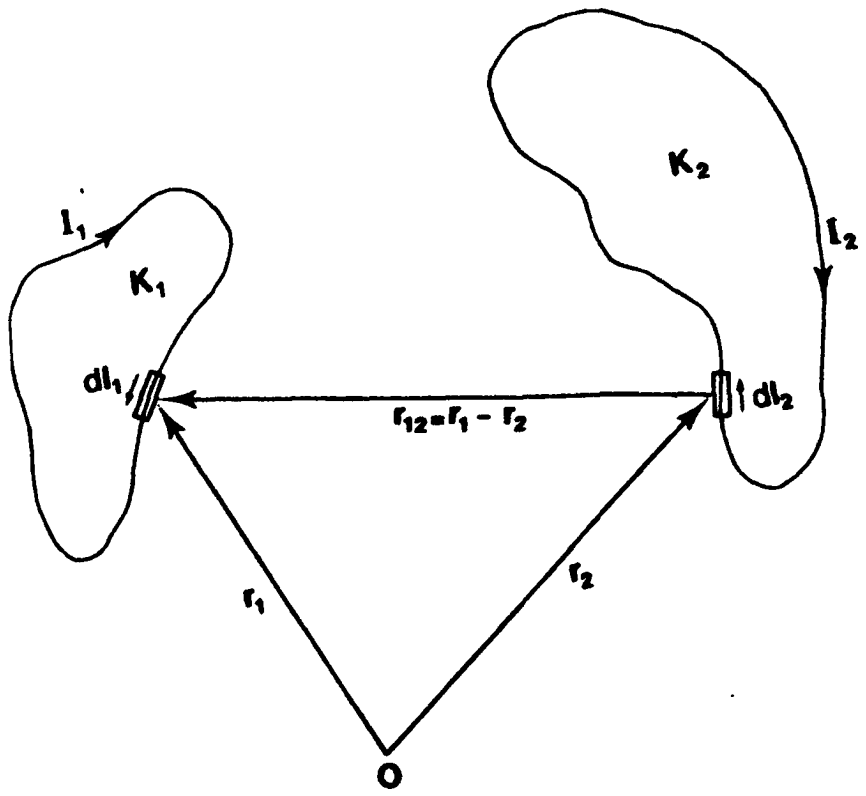
Μέ ἀπευθείας ὁλοκλήρωση τῆς ἐξ. (9.20) εἶναι δυνατόν νά ὑπολογιστεῖ τό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖται στό χῶρο ἀπό συστήματα ἀγωγῶν πού ἐμφανίζουν ἁπλή γεωμετρία. Ὁ Πίνακας 9-1 τῆς σελ. 355 περιέχει τό μαγνητικό πεδίο ὁρισμένων διατάξεων ἀγωγῶν πού ἀπαντῶνται συχνά στό ἐργαστήριο. Μέ ὁρισμένα ἀπό τά πεδία αὐτά θά ἀσχοληθοῦμε διεξοδικώτερα στό Κεφάλαιο 11 ὅπου θά ἀναπτύξουμε μεθόδους γιά τή μέτρηση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Σέ παράλληλες γραμμές, ἡ ἐξ. (9.15) μπορεῖ νά ἐκφράσει τή δύναμη πού ἀσκεῖ ἕνας ρευματοφόρος ἀγωγός σέ ἕνα κινούμενο φορτίο ἤ τή δύναμη πού ἀσκεῖται μεταξύ δύο ρευματοφόρων ἀγωγῶν. Ἡ τελευταία περίπτωση, πού παρουσιάζει τό μεγαλύτερο πρακτικό ἐνδιαφέρον, δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 9-4. Χρησιμοποιώντας τόν ὁρισμό τῆς πυκνότητας ρεύματος στήν ἐξ. (4.34) καί τήν ἐξ. (9.19), μποροῦμε νά γράψουμε τή δύναμη πού ἐξασκεῖ τό κύκλωμα K_2 στό κύκλωμα K_1 ὡς



ΣΧΗΜΑ 9-3 Πυκνότητα ρεύματος **J** σέ γραμμικό ἀγωγό.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 9-4 Άλληλεπίδραση δύο κυκλωμάτων πού διαρρέονται άπό ρεύμα.

$$F_{1.2} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c^2\right] \frac{1}{c^2} \int J(r_1) \times \int J(r_2) \times \frac{(r_1 - r_2)}{|r_1 - r_2|^3} d^3r_1 d^3r_2$$

$$= \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c^2\right] \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \frac{dl_1 \times (dl_2 \times r_{12})}{r_{12}^3} \qquad (9.21)$$

όπου στό τελευταίο σκέλος ή όλοκλήρωση έκτείνεται σέ όλη τή διαδρομή κάθε κυκλώματος.

Μέ ένα άπλό μαθηματικό μετασχηματισμό ή έξ. (9.21) μπορεί νά γραφεί σέ πλέον συμμετρική μορφή. Χρησιμοποιώντας τήν ίδιότητα τοῦ τριπλοῦ έξωτερικοῦ γινομένου

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \qquad (9.22)$$

ή έκφραση πού πρόκειται νά όλοκληρωθεί στήν έξ. (9.21) μπορεί νά γραφεί ώς

$$(dl_1 \cdot r_{12})dl_2 - (dl_1 \cdot dl_2)r_{12} \ . \qquad (9.23)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ὁ πρῶτος ὅρος στήν τελευταία συνάρτηση περιέχει τήν ἀνεξάρτητη ὁλοκλήρωση ὡς πρός $d\mathbf{l}_2$, ἡ ὁποία σέ κλειστή διαδρομή δίνει μηδενικό ἀποτέλεσμα. Μποροῦμε νά γράψουμε ἐπομένως τήν ἐξ. (9.21) ὡς

$$\mathbf{F}_{1\text{-}2} = -\left[\frac{\mu_0}{4\pi}c^2\right]\frac{I_1 I_2}{c^2}\oint\oint\frac{(d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2)\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \tag{9.24}$$

Εἶναι ἄξιο νά παρατηρηθεῖ ὅτι, τηρουμένων ὁρισμένων ἀναλογιῶν, ἡ ἀλληλεπίδραση δύο κλειστῶν ρευματοφόρων κυκλωμάτων πού ἐκφράζεται στήν τελευταία σχέση, θυμίζει ἔντονα τήν ἀλληλεπίδραση Coulomb μεταξύ δύο στατικῶν φορτίων. Τήν ἀναλογία αὐτή θά διερευνήσουμε σέ ἄλλη μορφή ἀργότερα.

Ἡ ἀνάλυση πού προηγήθηκε γιά δύο κλειστά κυκλώματα μπορεῖ νά μεταφερθεῖ ἀτόφια στήν περίπτωση δύο ρευματοφόρων ἀγωγῶν πού ἐκτείνονται στό ἄπειρο. Χρησιμοποιώντας μέ τήν ἔννοια αὐτή τήν ἐξ. (9.24) εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι ἡ δύναμη ἀνά μονάδα μήκους πού ἀσκεῖται μεταξύ δύο εὐθύγραμμων παράλληλων ρευματοφόρων ἀγωγῶν ἄπειρου μήκους ἔχει μέτρο

$$F = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}c^2\right]\frac{2}{c^2}\frac{I_1 I_2}{R} \tag{9.25}$$

ὅπου R εἶναι ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο ἀγωγῶν. Ὅπως δείχνει ἡ ἐξ. (9.24) ἡ δύναμη ἔχει διεύθυνση κατά τήν κοινή κάθετο μεταξύ τῶν δύο ἀγωγῶν καί εἶναι ἑλκτική ἤ ἀπωστική ἄν τά ρεύματα στούς δύο ἀγωγούς ρέουν ἀντίστοιχα κατά τήν ἴδια ἤ ἀντίθετη φορά. Στό σύστημα SI ἡ ἐξ. (9.25) χρησιμοποιεῖται γιά τόν ὁρισμό τοῦ ampère ὡς μονάδας μετρήσεως τοῦ ρεύματος.

9-3 Διαφορικές Ἐξισώσεις τοῦ Μαγνητικοῦ Πεδίου καί ὁ Νόμος τοῦ Ampère

Ἀπορροφώντας τά τυχόν ἐλεύθερα κινούμενα φορτία στήν πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ [βλ. ὑποσημείωση στήν παράγραφο 2-6] θά γράψουμε τόν ὁρισμό τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού ἤδη δόθηκε στήν ἐξ. (9.16) ὡς

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}c\right]\frac{1}{c}\int\mathbf{J}(\mathbf{r})\times\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d^3r' \,. \tag{9.26}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ σχέση αὐτή ἀντιστοιχεῖ στόν ὁρισμό τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου πού δημιουργεῖ μιά κατανομή φορτίου $\rho(\mathbf{r})$ [βλ. ἐξ. (2.18)]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \int \rho(\mathbf{r}) \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3r' \ . \tag{9.27}$$

Ἡ τελευταία σχέση ἀποτέλεσε στήν ἠλεκτροστατική τήν ἀφετηρία γιά τήν ἐξαγωγή ὁρισμένων διαφορικῶν ἐξισώσεων πού ὅπως ἀποδείχτηκε εἶναι πολύ πιό εὔχρηστες γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου σέ πρακτικές ἐφαρμογές. Κατά τόν ἴδιο τρόπο, ἄν καί ἡ ἐξ. (9.26) εἶναι κατ' ἀρχήν ἐπαρκής γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού δημιουργεῖ ὁποιαδήποτε κατανομή ρεύματος, ἀποδεικνύεται συχνά στήν πράξη ἐξαιρετικά δύσχρηστη. Μέ ἀνάλογες μεθόδους θά προσπαθήσουμε ἐπομένως νά ἐξάγουμε ἀπό τήν ἐξ. (9.26) ὁρισμένες ἰσοδύναμες διαφορικές ἐξισώσεις. Πρός τήν κατεύθυνση αὐτή θά μετασχηματίσουμε ἀρχικά τήν ἐξ. (9.26) σέ μιά πιό χρήσιμη μορφή.

Ἡ πρώτη συνιστῶσα τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (9.26), μπορεῖ νά γραφεῖ ἀναλυτικά ὡς

$$B_x = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{1}{c} \int \frac{(z-z')J_y - (y-y')J_z}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3r' \ . \tag{9.28}$$

Στή μορφή αὐτή ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά ἀναγνωρίσει (ἤ νά ἐπαληθεύσει εὔκολα) δύο παράγωγους

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -\frac{z-z'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{9.29α}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -\frac{y-y'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{9.29β}$$

ἔτσι ὥστε ἡ ἐξ. (9.28) νά γραφεῖ ὡς

$$B_x = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{1}{c} \int \left\{ J_z \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) - J_y \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\right\} d^3r' \ . \tag{9.30}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Καθόσον οἱ συνιστῶσες τῆς πυκνότητας ρεύματος εἶναι συναρτήσεις μόνο τῶν μεταβλητῶν (x′, y′, z′) μποροῦν νά συμπεριληφθοῦν στίς παραγώγους τῆς τελευταίας σχέσης, ὁπότε

$$B_x = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{1}{c} \left\{ \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{J_z}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' - \int \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{J_y}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' \right\}$$

$$= \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int \left(\frac{J_z}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' - \frac{\partial}{\partial z} \int \left(\frac{J_y}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' \right\} . \tag{9.31}$$

Ἡ ἐναλλαγή τῆς ὁλοκληρώσεως καί παραγωγήσεως στό τελευταῖο σκέλος τῆς ἐξ. (9.31) εἶναι ἐπιτρεπτή καθόσον τά ὅρια τῆς ὁλοκληρώσεως δέν ἐξαρτῶνται ἀπό τίς μεταβλητές (x, y, z). Γράφοντες καί τίς ὑπόλοιπες συνιστῶσες τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (9.31), εἶναι εὔκολα νά δοῦμε ὅτι ἡ ἐξ. (9.26), μετασχηματίζεται στήν ἀνυσματική ἔκφραση

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{1}{c}\, \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r' . \tag{9.32}$$

Καθόσον ἡ ἀπόκλιση ὁποιουδήποτε στροβιλισμοῦ μηδενίζεται [$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$, γιά ὁποιοδήποτε ἄνυσμα $\mathbf{a}$], ἕνα ἄμεσο ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (9.32) εἶναι ὅτι

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \tag{9.33}$$

Ἡ διαφορική αὐτή ἐξίσωση ἀντιστοιχεῖ στήν ἐξ. (2.45) τῆς ἠλεκτροστατικῆς $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

Ὁ ὑπολογισμός τοῦ στροβιλισμοῦ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἀπαιτεῖ πιό ἐπίπονη διεργασία. Ἀπό τήν ἐξ. (9.32) προκύπτει ὅτι

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{1}{c}\, \nabla \times \left(\nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r' \right) . \tag{9.34}$$

Χρησιμοποιώντας τήν ταυτότητα† τῆς ἐξ. (9.22) ἡ τελευταία σχέση μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

---

† Γιά τό διπλό στροβιλισμό $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$ ἡ ἐξ. (9.22) παίρνει τή μορφή

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{1}{c} \nabla \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d^3r'$$

$$- \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d^3r' \qquad (9.35)$$

Γιά τόν ὑπολογισμό τῶν ὁλοκληρωμάτων τῆς ἐξ. (9.35) χρειαζόμαστε δύο σχέσεις. Τήν ἁπλή σχέση

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = - \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \qquad (9.36\alpha)$$

πού μπορεῖ νά ἐπαληθευτεῖ εὔκολα ἀπό τόν ἀναγνώστη καί τήν ταυτότητα

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = - 4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (9.36\beta)$$

Στήν τελευταία ἐξίσωση $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ εἶναι ἡ συνάρτηση δέλτα [βλ. ὑποσημείωση στήν Παράγραφο 2-6] πού γιά μιά συνάρτηση $f(\mathbf{r})$ ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$\int f(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^3r' = f(\mathbf{r}) \ . \qquad (9.37)$$

Μέ τή βοήθεια τῶν ἐξ. (9.36) καί (9.37) ἡ ἐξ. (9.35) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\nabla \times \mathbf{B} = - \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{1}{c} \nabla \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d^3r'$$

$$+ \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \ . \qquad (9.38)$$

Τό ὁλοκλήρωμα τοῦ πρώτου ὅρου στήν τελευταία σχέση μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ μέ ὁλοκλήρωση κατά μέρη. Γράφοντας

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d^3r'$$

$$= \int \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d^3r' - \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' \qquad (9.39)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

είναι εύκολο νά δοῦμε ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἐξ. (9.38) μηδενίζεται. Στή μορφή τῆς ἐξ. (9.39) ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δεξιοῦ μέρους μηδενίζεται, καθόσον μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\mathbf{J}(\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, ἡ ὁποία τείνει πρός τό μηδέν καθώς ἡ ἀπόσταση $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ τείνει πρός τό ἄπειρο. Ὁ δεύτερος ὅρος συνεισφέρει μηδενικό ἀποτέλεσμα ἀπό τήν ἀρχή διατηρήσεως τοῦ φορτίου πού ἐκφράζει ἡ ἐξ. (4.20): γιά σταθερή κατάσταση ρεύματος τό φορτίο δέν μεταβάλλεται μέ τό χρόνο ($\partial\rho/\partial t = 0$) καί ἀπό τήν ἐξ. (4.20) ἕπεται ὅτι $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Μέ τήν παρατήρηση αὐτή ἡ ἐξ. (9.38) ὁδηγεῖ στήν ἁπλή διαφορική ἐξίσωση

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{4\pi}{c}\, \mathbf{J} \ . \tag{9.40}$$

Ἡ δεύτερη αὐτή ἐξίσωση πού διέπει τό μαγνητικό πεδίο **B** ἀντιστοιχεῖ στή διαφορική ἐξίσωση τῆς ἠλεκτροστατικῆς [βλ. ἐξ. (2.28)] $\nabla \cdot \mathbf{E} = \left[1/4\pi\varepsilon_0\right] 4\pi\rho$.

Εἶναι χρήσιμο, συνοψίζοντας, νά γράψουμε τίς τέσσερες διαφορικές ἐξισώσεις πού διαθέτουμε ὡς τώρα γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου. Εἶναι ἐπίσης χρήσιμο νά τονιστεῖ γιά μιά ἀκόμη φορά ὅτι οἱ διαφορικές αὐτές ἐξισώσεις ἀπορρέουν (μέ ἐπίπονη ὁμολογουμένως διεργασία) ἀπό τό πειραματικό γεγονός τῆς ἐξ. (9.3) καί τίς πειραματικά ἐπαληθευμένες ἀρχές τῆς ἐπαλληλίας καί διατηρήσεως τοῦ φορτίου. Ἐπιπλέον ἔχουν ἐξαχθεῖ γιά σταθερές ὡς πρός τό χρόνο κατανομές φορτίου καί ρεύματος. Μέ τίς προϋποθέσεις αὐτές μποροῦμε νά γράψουμε στά δύο συστήματα μετρήσεως

Σύστημα CGS

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} \end{aligned} \tag{9.41}$$

Σύστημα SI

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} \quad & \frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho & \nabla \cdot \mathbf{B} \quad & 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} \quad & 0 & \nabla \times \mathbf{B} \quad & \mu_0 \mathbf{J} \ . \end{aligned} \tag{9.42}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στήν ήλεκτροστατική ή ὁλοκληρωματική μορφή τῆς ἐξισώσεως $\nabla \cdot \mathbf{E} = [1/4\pi\varepsilon_0]4\pi\rho$ εἶναι ἡ ἐξ. (2.25)

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 4\pi q \tag{9.43}$$

γνωστή μέ τήν ὀνομασία νόμος τοῦ Gauss. Ἡ ἀντίστοιχη ὁλοκληρωματική μορφή τῆς ἐξ. (9.40) ἀπαντᾶται μέ τήν ὀνομασία **νόμος τοῦ Ampère** καί μπορεῖ νά βρεθεῖ ἄν θεωρήσουμε τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (9.40) μέσω μιᾶς ἐπιφανείας S,ἡ ὁποία περιβάλλεται ἀπό τήν προσανατολισμένη διαδρομή C. Στή γεωμετρία αὐτή, πού ἀπεικονίζεται στό σχῆμα 9-5, ἡ ἐξ. (9.40) μπορεῖ νά ὁλοκληρωθεῖ ὡς

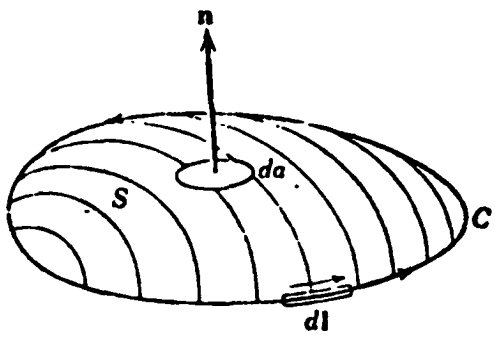
$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{n} da = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{4\pi}{c} \int_s \mathbf{J} \cdot \hat{n} da \tag{9.44}$$

ὅπου $\hat{n}$ εἶναι τό μοναδιαῖο διάνυσμα κάθετο πρός τήν ἐπιφάνεια S. Χρησιμοποιώντας τήν ταυτότητα τοῦ Stokes

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{n} da = \oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \tag{9.45}$$

καί τό γεγονός ὅτι τό ὁλοκλήρωμα $\mathbf{J} \cdot \hat{n} da$ ἀντιπροσωπεύει τό ὁλικό ρεῦμα I πού διέρχεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια S, ἡ ἐξ. (9.44) μπορεῖ νά γραφεῖ στή μορφή

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{4\pi}{c} I. \tag{9.46}$$



ΣΧΗΜΑ 9-5 Ὁλοκλήρωση τῆς ἐξ. (9.40) σέ ἀνοικτή ἐπιφάνεια S μέ περίγραμμα τήν καμπύλη C.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Όπως ό νόμος τοῦ Gauss άποδεικνύεται στήν ήλεκτροστατική χρήσιμος γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ήλεκτρικοῦ πεδίου, ἔτσι καί στό μαγνητισμό ό νόμος τοῦ Ampère στήν ἐξ. (9.46) μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ σέ ὁρισμένες γεωμετρικές διατάξεις γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

9-4 Τό Ἀνυσματικό Δυναμικό

Ἀπό τήν ταυτότητα τοῦ ἀνυσματικοῦ λογισμοῦ, σύμφωνα μέ τήν ὁποία ἡ ἀπόκλιση ὁποιουδήποτε στροβιλισμοῦ μηδενίζεται, ἡ ἐξ. (9.33) ἐπιτρέπει τήν ἔκφραση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ὡς τόν στροβιλισμό κάποιας ἀνυσματικῆς συναρτήσεως $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, ἤτοι

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{9.47}$$

Ὁ ὁρισμός αὐτός θυμίζει τή διεργασία πού συνδέει τήν ἐξίσωση $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ τῆς ήλεκτροστατικῆς μέ τήν εἰσαγωγή τοῦ ήλεκτροστατικοῦ δυναμικοῦ. Θά ὀνομάσουμε τή συνάρτηση $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ πού εἰσάγει ἡ ἐξ. (9.47) **ἀνυσματικό δυναμικό,** ἐνῶ θά διατηρήσουμε τήν ἁπλή ὀνομασία **δυναμικό** γιά τή βαθμωτή συνάρτηση $\varphi(\mathbf{r})$ τῆς ήλεκτροστατικῆς.

Όπως καί στήν ήλεκτροστατική, ἡ ἐξ. (9.47) δέν ὁρίζει μονοσήματα τό ἀνυσματικό δυναμικό. Ἀπό τήν ταυτότητα

$$\nabla \times \nabla \Lambda(\mathbf{r}) = 0 \tag{9.48}$$

ἡ συνάρτηση $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ μπορεῖ νά ὁριστεῖ μόνο μέσα στά πλαίσια μιᾶς συναρτήσεως $\Lambda(\mathbf{r})$ καί τό μαγνητικό πεδίο παραμένει ἀμετάβλητο ἄν τό ἀνυσματικό δυναμικό μετασχηματιστεῖ σύμφωνα μέ τή σχέση

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \Lambda(\mathbf{r}) \ . \tag{9.49}$$

Θά ἀναφερθοῦμε στό μετασχηματισμό τῆς ἐξ. (9.49) μέ τόν ὅρο **μετασχηματισμός βαθμίδας.**

Ἤδη στήν ἐξ. (9.32) μποροῦμε νά ἀναγνωρίσουμε τήν ἀναλυτική μορφή τοῦ ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ. Ἔχοντας ὑπόψη τήν ἐλευθερία βαθμίδας πού ἐπιτρέπει ἡ ἐξ. (9.49) μποροῦμε ἀμέσως νά γράψουμε τή γενική ἔκφραση

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' + \nabla \Lambda(\mathbf{r}). \tag{9.50}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ τελευταία ἀβεβαιότητα ὡς πρός τήν κλίση κάποιας συναρτήσεως $\Lambda(\mathbf{r})$ εἶναι παρεμφερής πρός τήν ἀβεβαιότητα τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ δυναμικοῦ ὡς πρός τή σταθερά πού καθορίζει τό σημεῖο μηδενικῆς ἐνεργείας. Στόν ἀναγνώστη θά εἶναι ἴσως γνωστό ὅτι γιά τόν πλήρη προσδιορισμό μιᾶς ἀνυσματικῆς συναρτήσεως εἶναι ἀπαραίτητος ὄχι μόνο ὁ στροβιλισμός, πού καθορίζεται στήν ἐξ. (9.47), ἀλλά καί ἡ ἀπόκλιση. Ἡ ἐλευθερία ἐπομένως πού μᾶς παρέχει ὁ μετασχηματισμός βαθμίδας τῆς ἐξ. (9.49) ἐπιτρέπει τόν αὐθαίρετο προσδιορισμό τῆς ἀποκλίσεως $\nabla \cdot \mathbf{A}$, κατά τόν ἴδιο τρόπο πού ἡ ἀβεβαιότητα στήν ἠλεκτροστατική συνάρτηση δυναμικοῦ μᾶς ἐπιτρέπει τήν ἐπιλογή ἑνός σημείου ἀναφορᾶς.

Χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (9.47) στήν ἐξ. (9.40), προκύπτει ὅτι

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \tag{9.51}$$

ἤ

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \ . \tag{9.52}$$

Στήν τελευταία σχέση μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τήν ἐλευθερία πού ἀναφέραμε προηγουμένως ὡς πρός τόν προσδιορισμό τῆς ἀποκλίσεως $\nabla \cdot \mathbf{A}$ καί νά ἀπαιτήσουμε τή συνθήκη

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \ . \tag{9.53}$$

Ἡ τελευταία συνθήκη καθορίζει μιά *βαθμίδα*, ἀπό τίς δυνατές τοῦ μετασχηματισμοῦ τῆς ἐξ. (9.49), πού σέ συνέπεια μέ τήν καθιερωμένη ὁρολογία, θά ὀνομάσουμε **βαθμίδα Coulomb.** Ἡ βαθμίδα αὐτή παρουσιάζει τό πλεονέκτημα ὅτι ἡ ἐξ. (9.52) μεταπίπτει, γιά κάθε καρτεσιανή συντεταγμένη τοῦ ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ, στήν ἐξίσωση Poisson. Ὡς ἀνυσματική ἐξίσωση μποροῦμε νά γράψουμε

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \ . \tag{9.54}$$

Ἡ ἐπιλογή τοῦ συστήματος $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, πού ὁδηγεῖ στήν ἐξ. (9.54), καθορίζει ἀκόμη καί τή μορφή τῆς αὐθαίρετης συναρτήσεως $\Lambda(\mathbf{r})$ στήν ἐξ. (9.50). Στή βαθμίδα αὐτή

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{1}{c} \nabla \cdot \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' + \nabla^2 \Lambda(\mathbf{r}) \ . \tag{9.55}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Χρησιμοποιώντας άκόμη τό γεγονός ὅτι γιά φαινόμενα ἀνεξάρτητα ἀπό τό χρόνο ἰσχύει ἡ σχέση $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0$, εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι ἡ ἀπόκλιση τοῦ ὁλοκληρώματος στήν ἐξ. (9.55) μηδενίζεται. Ἡ συνθήκη ἐπομένως πού προσδιορίζει στή βαθμίδα Coulomb τή συνάρτηση $\Lambda(\mathbf{r})$ εἶναι

$$\nabla^2 \Lambda(\mathbf{r}) = 0 \tag{9.56}$$

γιά κάθε σημεῖο $\mathbf{r}$ τοῦ χώρου. Ἀπό τήν τελευταία συνθήκη ἔπεται ὅτι ἡ συνάρτηση $\Lambda(\mathbf{r})$ μηδενίζεται παντοῦ καί ἡ λύση τῆς ἐξ. (9.54) εἶναι

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' \ . \tag{9.57}$$

Πέρα ἀπό τό γεγονός ὅτι δίνει τό ἀνυσματικό δυναμικό σέ ἀναλυτική μορφή, ἡ ἐξ. (9.57) παρέχει ἐπιπλέον τήν εὐκαιρία νά ἐκμεταλευτοῦμε τήν ἐμπειρία πού ἀποκτήθηκε κατά τή μελέτη τοῦ ἀντίστοιχου ἠλεκτροστατικοῦ προβλήματος. Ἀπό τή σύγκριση τῶν ἐξισώσεων (3.4) καί (9.45) καί τῶν ἀντίστοιχων λύσεων στίς ἐξ. (2.49) καί (9.57) γίνεται φανερό ὅτι τόσο τό ἠλεκτροστατικό δυναμικό $\varphi(\mathbf{r})$ ὅσο καί κάθε συνιστῶσα τοῦ ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ $A_x(\mathbf{r})$, $A_y(\mathbf{r})$, $A_z(\mathbf{r})$ ἱκανοποιοῦν τίς ἴδιες ἐξισώσεις μέ τήν ἁπλή ἀντικατάσταση

$$\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \rho \leftrightarrow \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{1}{c} J_i \tag{9.58}$$

γιά κάθε συνιστῶσα τῆς πυκνότητας ρεύματος $J_i = J_x, J_y, J_z$. Ἄν ἐπομένως γιά κάποια κατανομή στατικοῦ φορτίου εἶναι γνωστή ἡ μορφή τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ δυναμικοῦ, εἶναι δυνατόν νά γράψουμε ἀμέσως τή συνάρτηση τοῦ ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ γιά τήν ἀντίστοιχη γεωμετρία πυκνότητας ρεύματος χρησιμοποιώντας τό μετασχηματισμό τῆς ἐξ. (9.58). Εἶναι ἴσως χρήσιμο νά γράψουμε τόν τελευταῖο μετασχηματισμό ξεχωριστά στά δύο συστήματα μονάδων:

CGS	SI
$\rho \leftrightarrow \frac{1}{c} J_i$	$\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \leftrightarrow \mu_0 J_i$.

(9.59)

Ἡ διεργασία αὐτή γίνεται πιό σαφής μέ ἕνα ἁπλό παράδειγμα. Στόν Πίνακα 2-1 ἔχει δοθεῖ τό ἠλεκτροστατικό δυναμικό γιά διάφορες κατανομές

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

φορτίου. Ἄν θεωρήσουμε τήν ευθύγραμμη κατανομή μέ ἄπειρες διαστάσεις καί σταθερή γραμμική πυκνότητα λ, τότε τό δυναμικό ἔχει τή μορφή

$$\varphi(r) = -\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 2\lambda \ln\left(\frac{r}{a}\right) \tag{9.60}$$

ὅπου α εἶναι μιά σταθερά πού ἀναφέρεται στήν ἐπιλογή τοῦ σημείου ἀναφορᾶς. Ἡ σχέση μεταξύ πυκνότητας φορτίου ρ καί γραμμικῆς πυκνότητας λ μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό τή θεώρηση ἑνός στοιχειώδους μήκους h τῆς ἄπειρης κατανομῆς. Ἄν S εἶναι ἡ ἐγκάρσια διατομή τῆς κατανομῆς, τότε στόν στοιχειώδη ὄγκο

$$\rho S h = \lambda h$$

ἤ

$$\rho = \frac{\lambda}{S} \ . \tag{9.61}$$

Ὁ μετασχηματισμός τῆς ἐξ. (9.58) ὑπαγορεύει ἐπομένως τήν ἀντικατάσταση

$$\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \frac{\lambda}{S} \leftrightarrow \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{1}{c} J_i$$

ἤ

$$\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \lambda \leftrightarrow \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{1}{c} J_i S \ . \tag{9.62}$$

ὅπου J_i εἶναι ἡ πυκνότητα ρεύματος στήν ἀντίστοιχη γεωμετρία ἑνός γραμμικοῦ ρευματοφόρου ἀγωγοῦ μέ ἄπειρες διαστάσεις. Ἄν τό σύστημα συντεταγμένων ληφθεῖ μέ διεύθυνση τοῦ ἄξονα z κατά τή διεύθυνση τῶν ἄπειρων διαστάσεων τοῦ ἀγωγοῦ ἡ μόνη συνιστῶσα τῆς πυκνότητας ρεύματος πού δέν μηδενίζεται εἶναι ἡ ποσότητα J_z, ἐνῶ τό γινόμενο $J_z S$ ἀντιπροσωπεύει τό ρεῦμα I πού διαρρέει τόν ἀγωγό. Μποροῦμε τώρα μέ βάση τήν ἐξ. (9.60) καί τό ματασχηματισμό τῆς ἐξ. (9.62) νά γράψουμε τό ἀνυσματικό δύναμικό τοῦ ρευματοφόρου ἀγωγοῦ ὡς

$$\mathbf{A}(r) = -\left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] 2 \frac{I}{c} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \hat{z} \ . \tag{9.63}$$

Ὅπως δείχνει ἡ τελευταία σχέση, τό ἀνυσματικό δυναμικό ἔχει διεύθυνση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

παράλληλη πρός τόν ἀγωγό. Τό ἀντίστοιχο μαγνητικό πεδίο μπορεῖ νά βρεθεῖ διαμέσου τῆς ἐξ. (9.47) πού δίνει

$$\mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{2I}{cr}\left(-\frac{y}{r}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{r}\,\hat{\mathbf{y}}\right) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{2I}{cr}\,\hat{\mathbf{e}}_t \qquad (9.64)$$

ὅπου $\hat{\mathbf{e}}_t$ εἶναι τό μοναδιαῖο ἄνυσμα, ἐφαπτόμενο σέ κύκλο τοῦ ἐπιπέδου xy, μέ κέντρο στόν ἄξονα z καί ἀκτίνα r.

Ὁ ματασχηματισμός τῆς ἐξ. (9.58) μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ἐπωφελῶς σέ πολλές περιπτώσεις ὅπου ἡ γεωμετρία στατικῶν φορτίων μπορεῖ νά ταυτιστεῖ μέ γεωμετρία ρευμάτων. Μερικά ἀποτελέσματα τῆς διεργασίας αὐτῆς περιέχονται στόν Πίνακα 9-1. Σέ ἄλλες περιπτώσεις εἶναι εὐκολώτερος ὁ προσδιορισμός τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μέ ἀπευθείας ὁλοκλήρωση τῆς ἐξ. (9.26). Σέ γεωμετρίες πού ἐμφανίζουν χαρακτηριστική συμμετρία, τό μαγνητικό πεδίο μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό ὁλοκληρωματικές σχέσεις, ἀνάλογες πρός τό νόμο τοῦ Gauss τῆς ἠλεκτροστατικῆς, ὅπως ὁ νόμος τοῦ Ampère στήν ἐξ. (9.46). Γιά ὁρισμένες συνήθεις διατάξεις ρευμάτων, ὁ Πίνακας 9-1 περιέχει τό ἀντίστοιχο μαγνητικό πεδίο καί ἀνυσματικό δυναμικό.

9-5 Μαγνητικό Πεδίο Κυκλώματος σέ Μεγάλες Ἀποστάσεις. Μαγνητική Διπολική Ροπή

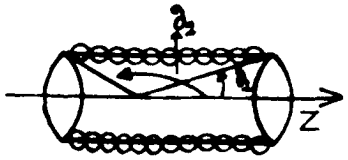
Γιά ἕνα κύκλωμα γραμμικοῦ ἀγωγοῦ πού διαρρέεται ἀπό ρεῦμα I, τό ἀνυσματικό δυναμικό τῆς ἐξ. (9.57) μπορεῖ μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (9.19) νά πάρει τή μορφή

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{I}{c} \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad (9.65)$$

ὅπου ἡ ὁλοκλήρωση κατά τό στοιχειῶδες ἄνυσμα $d\mathbf{l}$ ἐκτείνεται σέ ὅλο τό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ 9-1 Τό μαγνητικό πεδίο **B**(r) καί τό άνυσματικό δυναμικό **A**(r) γιά μερικές τυπικές διατάξεις ρευμάτων.

Διάταξη ρεύματος	Μαγνητικό Πεδίο	Άνυσματικό Δυναμικό
Κυλινδρικός άγωγός άκτίνας R μέ άπειρες διαστάσεις κατά τόν άξονα z.	$\mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{2I}{cr} \hat{\boldsymbol{\theta}}_t, \quad r>R$ $= \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{2I}{cR^2} r\hat{\boldsymbol{\theta}}_t, \quad r\leqslant R$	$\mathbf{A} = -\left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right]\left\{\frac{2I}{c} \ln\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{I}{c}\right\}\hat{\boldsymbol{\ell}}, \quad r>R$ $= -\left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{I}{c}\hat{\boldsymbol{\ell}}, \quad r<R$
Έπίπεδο μέ άπειρες διαστάσεις, κάθετο πρός τόν άξονα y καί έπιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $J\hat{\boldsymbol{\ell}}$.	όπου r ή κάθετη άπόσταση άπό τόν κύριο άξονα τοῦ κυλινδρικοῦ άγωγοῦ καί $\hat{\boldsymbol{\theta}}_t$ τό μοναδιαῖο άνυσμα κατά τήν έφαπτομένη σέ άπόσταση r.	
Κυκλικός βρόχος άκτίνας R, στό έπίπεδο xy, πού διαρρέεται άπό ρεῦμα I. Στόν άξονα z πού διέρχεται άπό τό κέντρο τοῦ κύκλου.	$\mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{2\pi}{c} J\hat{\boldsymbol{\ell}}, \quad y>0$ $= -\left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{2\pi}{c} J\hat{\boldsymbol{\ell}}, \quad y<0$ $\mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{2\pi R^2 I}{c(R^2+z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$	
Σωληνοειδές n σπειρῶν ἀνά μονάδα μήκους, μέ κύριο άξονα κατά τή διεύθυνση z. Στόν κύριο άξονα τοῦ σωληνοειδοῦς.	 $B_z = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{2\pi nI}{c} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$ Οἱ γωνίες θ_1 καί θ_2 δίνονται στό έπόμενο σχῆμα.	
Τροειδές μεγάλης άκτίνας R μέ N σπεῖρες. Κατά τήν έφαπτομένη τοῦ κύκλου R.	$\mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{2}{c} \frac{NI}{R}$	$\mathbf{A} = -\left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{2\pi}{c} J\lvert y\rvert\hat{\boldsymbol{\ell}}$
Μαγνητικό δίπολο **m**. Σέ μεγάλη άπόσταση καί σέ σχέση μέ τίς φυσικές διαστάσεις τοῦ δίπολου.	$\mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\right] \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}})-\mathbf{m}}{r^3}$	$\mathbf{A} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\right] \frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}$

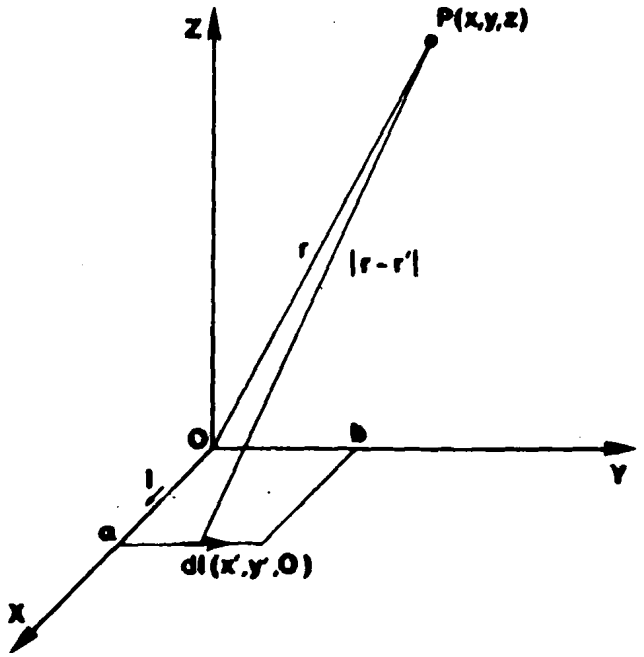
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μῆκος C τοῦ ἀγωγοῦ. Εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι ὁ συμβολισμός τῆς ἐξ. (9.65) ὁδηγεῖ στήν ἐξ. (9.20) γιά τό μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{I}{c} \int_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad . \tag{9.20}$$

Γενικά οἱ συναρτήσεις τῶν ἐξ. (9.65) καί (9.20) παίρνουν ἀρκετά πολύπλοκη μορφή στή γειτονία τοῦ κυκλώματος. Εἶναι ὅμως δυνατόν νά δείξουμε ὅτι σέ μεγάλες ἀποστάσεις ἀπό ἕνα κλειστό κύκλωμα, τόσο τό ἀνυσματικό δυναμικό ὅσο καί τό μαγνητικό πεδίο μεταπίπτουν σέ ἁπλές ἐκφράσεις πού εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπό τή γεωμετρία τοῦ ἀγωγοῦ πού δημιουργεῖ τό συγκεκριμένο κύκλωμα. Θά δείξουμε τήν ἰδιότητα αὐτή ἀρχικά γιά τό ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο κύκλωμα τοῦ σχήματος 9-6. Χωρίς ἀπώλεια ἀπό τή γενικότητα μποροῦμε νά θεωρήσουμε τό κύκλωμα μέ τίς τέσσερις γωνίες στά σημεῖα (0,0), (a,0), (a,b) καί (0,b) καί ροή τοῦ ρεύματος κατά τή φορά πού δηλώνει ἡ διαδοχή αὐτή. Θά θεωρήσουμε ἀκόμη τήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου παρατηρήσεως P εἶναι μεγάλη σέ σχέση μέ τίς διαστάσεις τοῦ κυκλώματος, ἤτοι

$$a << r \quad \text{καί} \quad b << r \; . \tag{9.66}$$



ΣΧΗΜΑ 9-6 Ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο κύκλωμα γραμμικοῦ ἀγωγοῦ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η συνθήκη αύτή έχει ώς επακόλουθο ότι γιά κάθε σημεῖο τοῦ άγωγοῦ (x′, y′, 0) ισχύει ή σχέση

$$\frac{x'}{r} << 1 \qquad \text{καί} \qquad \frac{y'}{r} << 1 \ . \tag{9.67}$$

Τό όλοκλήρωμα τῆς έξ. (9.65) μπορεῖ τώρα νά γραφεῖ στή μορφή

$$\mathbf{A}(r) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{I}{c} \left(\hat{x} \int_0^a \frac{dx'}{|r-r'|} + \hat{y} \int_0^b \frac{dy'}{|r-r'|} - \hat{x} \int_0^a \frac{dx'}{|r-r'|} - \hat{y} \int_0^b \frac{dy'}{|r-r'|}\right) \tag{9.68}$$

όπου $\hat{x}$ καί $\hat{y}$ εἶναι τά μοναδιαῖα άνύσματα κατά τούς άντίστοιχους άξονες. Έχοντας ύπόψη τίς συνθῆκες τῆς έξ. (9.67) ή συνάρτηση $1/|r-r'|$ μπορεῖ νά γραφεῖ ώς άνάπτυγμα γύρω άπό τήν άρχή τῶν συντεταγμένων μέ τή μορφή

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r} + x' \frac{\partial\left(\frac{1}{|r-r'|}\right)}{\partial x'} + y' \frac{\partial\left(\frac{1}{|r-r'|}\right)}{\partial y'} + \ldots \tag{6.69}$$

όπου οί παραλειπόμενοι όροι περιέχουν ύψηλότερες δυνάμεις τῶν λόγων x'/r καί y'/r. Μέ τήν έκτέλεση τῆς διαφορήσεως ή τελευταία σχέση δίνει

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r} + \frac{x}{r^3} x' + \frac{y}{r^3} y' + \ldots \tag{9.70}$$

πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ στήν όλοκλήρωση τῆς έξ. (9.68). Μέ τόν τρόπο αὐτό τό άνυσματικό δυναμικό μπορεῖ νά γραφεῖ στό ὅριο τῶν μεγάλων άποστάσεων ώς

$$\mathbf{A}(r) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{I}{c} \left(-\hat{x} \frac{yb}{r^3} \int_0^a dx' + \hat{y} \frac{xa}{r^3} \int_0^b dy'\right)$$

$$= \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{I}{c} \frac{ab}{r^3} (-y\hat{x} + x\hat{y}) \ . \tag{9.71}$$

Στήν τελευταία έκφραση τό γινόμενο ab μπορεῖ νά άναγνωριστεῖ ώς ή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

έπιφάνεια S πού περικλείεται άπό τό κύκλωμα. Όρίζοντας άκόμη τό άνυσμα

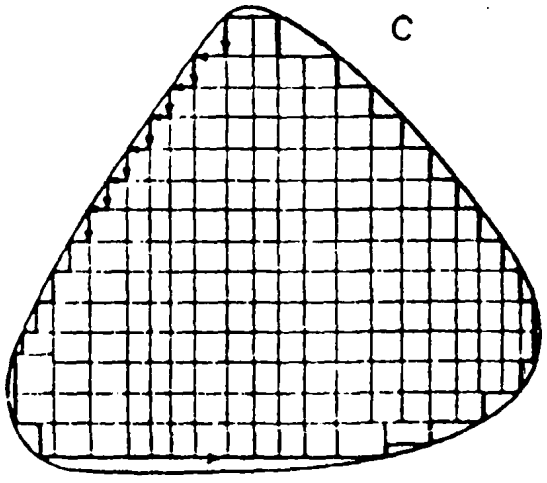
$$\mathbf{m} = [c]\,\frac{I}{c}\,S\hat{\mathbf{z}} \tag{9.72}$$

ή έξ. (9.71) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\right]\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}\ . \tag{9.73}$$

Στόν όρισμό τῆς έξ. (9.72) τό ἄνυσμα **m**, πού θά όνομάσουμε **μαγνητική διπολική ροπή,** ἔχει φορά κατά τή σύμβαση τοῦ δεξιόστροφου κοχλία. Μέ τόν όρισμό αὐτό καί γιά τή συνθήκη τῆς έξ. (9.66) ή γεωμετρία τοῦ κυκλώματος μετατίθεται στό ἄνυσμα **m**. Βέβαια τοῦτο δέν ἔχει ἀποδειχτεῖ γενικά γιά όποιοδήποτε σχῆμα κυκλώματος. Ἕνας τρόπος σκέψης πού ἐπιτρέπει τή γενίκευση τοῦ ἀποτελέσματος γιά κύκλωμα όποιουδήποτε σχήματος δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 9-7.

Ἄς θεωρήσουμε ὅτι τό κύκλωμα C διαρρέεται κατά τήν ἀριστερόστροφη φορά ἀπό ρεῦμα I. Ἄς δημιουργήσουμε ἀκόμα τό δίκτυο τῶν ὀρθογώνιων βρόχων πού περιέχεται στό σχῆμα καί ἄς θεωρήσουμε ὅτι καθένας ἀπό τούς ὀρθογώνιους βρόχους διαρρέεται ἀπό ρεῦμα I κατά τήν ἀριστερόστροφη φορά. Εἶναι ἀμέσως φανερό ὅτι στό ἐσωτερικό τοῦ δικτύου κάθε κλάδος διαρρέεται ἀπό δύο ἴσα καί ἀντίθετα ρεύματα (μέ ἀποτέλεσμα τήν ἀλληλοεξουδετέρωσή τους) ἐνῶ τό τελικό ἀποτέλεσμα εἶναι ροή ρεύματος κατά τήν τεθλασμένη περίμετρο τοῦ δικτύου. Εἶναι ἀκόμη φανερό ὅτι μέ σμίκρυνση τῶν διαστάσεων τῶν βρόχων τοῦ δικτύου εἶναι δυνατόν ἡ



ΣΧΗΜΑ 9-7 Ἀνάλυση κυκλώματος μέ αὐθαίρετο σχῆμα σέ ἰσοδύναμο δίκτυο ὀρθογωνίων κυκλωμάτων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τεθλασμένη περίμετρος νά προσεγγίσει μέ όποιαδήποτε άκρίβεια τήν περίμετρο τοῦ κυκλώματος C. Στό όριο αύτό οί διαστάσεις κάθε βρόχου ίκανοποιοῦν τίς συνθῆκες τῆς έξ. (9.66) καί καθένας συνεισφέρει στό χῶρο ἕνα άνυσματικό δυναμικό

$$d\mathbf{A} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\right] \frac{d\mathbf{m}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{9.74}$$

όπου $\mathbf{r}'$ εἶναι ή θέση κάποιου σημείου τοῦ βρόχου ἐνῶ ή στοιχειώδης μαγνητική διπολική ροπή $d\mathbf{m}$ εἶναι

$$d\mathbf{m}(\mathbf{r}') = [c]\,\frac{I}{c}\,dS'\hat{\mathbf{n}}' \,. \tag{9.75}$$

Στήν τελευταία σχέση dS' εἶναι ή έπιφάνεια κάθε βρόχου καί $\hat{\mathbf{n}}'$ τό μοναδιαῖο ἄνυσμα κάθετο στήν έπιφάνεια dS'. Τό όλικό άνυσματικό δυναμικό πού δημιουργεῖ τό κύκλωμα C μπορεῖ ἐπομένως νά γραφεῖ ὡς

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\right] \int \frac{d\mathbf{m}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{9.76}$$

ή

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{I}{c} \int_S \frac{\hat{\mathbf{n}}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, dS' \tag{9.77}$$

όπου ή όλοκλήρωση έκτείνεται σέ κάποια έπιφάνεια S, ή όποία περατώνεται στήν καμπύλη C. Παρατηρεῖται ὅτι ή έπιφάνεια S δέν χρειάζεται κάν νά εἶναι έπίπεδη, ἀρκεῖ τό μοναδιαῖο ἄνυσμα $\hat{\mathbf{n}}'$ νά εἶναι κατά τήν όλοκλήρωση κάθετο στήν στοιχειώδη έπιφάνεια dS'.

Ἄν καί κατ' ἀρχήν σωστή, ή έξ. (9.77) δέν εἶναι ἰδιαίτερα χρήσιμη καθόσον ή όλοκλήρωση πού συνεπάγεται εἶναι γενικά πολυπλοκώτερη ἀπό τήν όλοκλήρωση τῆς ἰσοδύναμης ἐκφράσεως στήν έξ. (9.65). Ἡ χρησιμότητά της ἐμφανίζεται στήν περίπτωση ὅπου οἱ διαστάσεις τοῦ κυκλώματος C εἶναι μικρές σέ σχέση μέ τήν ἀπόσταση τοῦ παρατηρητῆ ἀπό τό κύκλωμα. Στήν περίπτωση αὐτή, μέ ἐπιλογή τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων κάπου στήν γειτονία τοῦ κυκλώματος, τά ἀνύσματα $\mathbf{r}$ καί $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ διαφέρουν πολύ λίγο καί ή έξ. (9.76) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\right] \left(\int_S d\mathbf{m}(\mathbf{r}')\right) \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \,. \tag{9.78}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ τελευταία σχέση ἔχει τήν ἴδια συναρτησιακή ἐξάρτηση μέ τήν ἐξ. (9.73). Ἡ παρατήρηση αὐτή ὁδηγεῖ ἑπομένως στή γενίκευση τῆς ἐξ. (9.73) γιά τό ἀνυσματικό δυναμικό ὁποιουδήποτε κυκλώματος, τοῦ ὁποίου οἱ διαστάσεις εἶναι μικρές σέ σχέση μέ τήν ἀπόσταση τοῦ παρατηρητῆ, ἀρκεῖ νά ὁρίσουμε τή μαγνητική διπολική ροπή ὡς

$$\mathbf{m} = \int_S d\mathbf{m} = [c]\,\frac{1}{c}\int_S \hat{\mathbf{n}}\,dS \ . \tag{9.79}$$

Ἡ τελευταία ὁλοκλήρωση ἐκτείνεται σέ ὁποιαδήποτε ἐπιφάνεια S μέ περίμετρο τό κύκλωμα C ἐνῶ τό ἄνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ εἶναι κάθετο σέ κάθε στοιχεῖο dS τῆς ἐπιφανείας. Στήν περίπτωση ὅπου ἡ περίμετρος C τοῦ κυκλώματος βρίσκεται σέ ἕνα ἐπίπεδο, τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (9.79) δίνει τό (προσανατολισμένο) ἐμβαδόν τῆς ἐπίπεδης ἐπιφάνειας S πού περικλείει τό κύκλωμα καί ἡ μαγνητική διπολική ροπή παίρνει τήν ἰδιαίτερα ἁπλή μορφή

$$\mathbf{m} = [c]\,\frac{1}{c}\,S\hat{\mathbf{n}} \ . \tag{9.80}$$

Τό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖ τό ἀνυσματικό δυναμικό τῆς ἐξ. (9.73) μπορεῖ τώρα νά βρεθεῖ ἀπό τό στροβιλισμό $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά ἐπιβεβαιώσει ἀναλυτικά ὅτι

$$\mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\right]\frac{3\hat{\mathbf{r}}\,(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}}{r^3} \ . \tag{9.81}$$

Ἡ τελευταία σχέση μπορεῖ νά συγκριθεῖ μέ τήν ἐξ. (3.19)

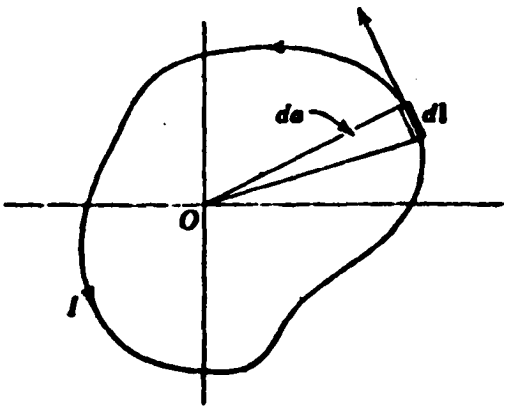
$$\mathbf{E} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\frac{3\hat{\mathbf{r}}\,(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{p}}{r^3} \tag{9.82}$$

πού δίνει τό ἡλεκτρικό πεδίο ἑνός ἡλεκτρικοῦ διπόλου $\mathbf{p}$ σέ μεγάλες ἀποστάσεις ἀπό τό δίπολο.

Ὁ ὁρισμός τῆς ἐξ. (9.79) εἶναι δυνατόν μέ ἕνα ἁπλό μετασχηματισμό νά δώσει ἕνα σημαντικό ἀποτέλεσμα. Γιά ἕνα ἐπίπεδο κύκλωμα ὅπως αὐτό πού εἰκονίζεται στό σχῆμα 9-8, τό ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\int_S \hat{\mathbf{n}}\,dS = \frac{1}{2}\oint_C \mathbf{r}\times d\mathbf{l} \tag{9.83}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 9-8 Στοιχειώδης ἐπιφάνεια dS ἐπίπεδου κυκλώματος C.

καθόσον τό ἐξωτερικό γινόμενο $\frac{1}{2}\, r \times dl$ μπορεῖ νά ἀναγνωριστεῖ ὡς τό (τριγωνικό) στοιχεῖο τῆς ἐπιφανείας μέ ἀναφορά σέ ἕνα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων O. Παρατηρεῖται ὅτι στήν ἐξ. (9.83) τό ἐξωτερικό γινόμενο ἐξασφαλίζει τό σωστό προσανατολισμό τῆς στοιχειώδους ἐπιφανείας κατά τή διεύθυνση n̂. Ἡ μαγνητική διπολική ροπή μπορεῖ ἐπομένως νά γραφεῖ ὡς

$$\mathbf{m} = [c]\,\frac{I}{2c}\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \ . \tag{9.84}$$

Ἄν τό ρεῦμα I δημιουργεῖται ἀπό τήν κίνηση φορτισμένων σωματίων πού κινοῦνται κατά τή διαδρομή C, εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ἀπό τήν ἐξ. (4.5) ὅτι

$$I\,d\mathbf{l} = \sum_k q_k \mathbf{u}_k \tag{9.85}$$

ὅπου q_k εἶναι τό φορτίο τοῦ σωματίου πού κινεῖται μέ ταχύτητα $\mathbf{u}_k$. Τό ἄνυσμα r στήν ἐξ. (9.84) ἀποκτᾶ φυσική σημασία μόνο γιά τίς συντεταγμένες $\mathbf{r}_k$ κάθε σωματίου† καί τό ὁλοκλήρωμα μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς ἄθροισμα σέ ὅλα τά σωμάτια ὡς

$$\mathbf{m} = [c]\,\frac{1}{2c}\sum_k q_k(\mathbf{r}_k \times \mathbf{u}_k) \ . \tag{9.86}$$

† Τό ἀποτέλεσμα μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ μέ μαθηματική αὐστηρότητα ἄν χρησιμοποιήσουμε τή συνάρτηση δ καί γράψουμε

$$I\,d\mathbf{l} = \sum_k q_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}_k)\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τό ἄνυσμα $\mathbf{r}_k \times \mathbf{u}_k$ εἶναι ἀνάλογο πρός τή στροφορμή τοῦ σωματίου k (μέ μάζα M_k)

$$\mathbf{L}_k = M_k(\mathbf{r}_k \times \mathbf{u}_k) \ . \tag{9.87}$$

Ἔτσι ἡ ες. (9.86) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\mathbf{m} = [c] \sum_k \frac{q_k}{2M_k c} \mathbf{L}_k \ . \tag{9.88}$$

Στήν ἐνδιαφέρουσα περίπτωση ὅπου ὁ λόγος τοῦ φορτίου πρός τή μάζα q_k/M_k εἶναι ὁ ἴδιος γιά κάθε σωμάτιο πού δημιουργεῖ τό ρεῦμα, ἡ μαγνητική διπολική ροπή μπορεῖ νά γραφεῖ στήν πλέον ἁπλή μορφή

$$\mathbf{m} = [c] \frac{q}{2Mc} \sum_k \mathbf{L}_k = [c] \frac{q}{2Mc} \mathbf{L} \tag{9.89}$$

ὅπου **L** εἶναι ἡ ὁλική στροφορμή τῶν κινούμενων φορτισμένων σωματίων. Θά ἔχουμε τήν εὐκαιρία νά ἐξετάσουμε μέ μεγαλύτερη λεπτομέρεια τό σημαντικό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (9.89) κατά τή μελέτη τῶν μαγνητικῶν ἰδιοτήτων τῆς ὕλης.

9-6 Δύναμη καί Ροπή σέ Μαγνητικό Δίπολο

Χρησιμοποιώντας τό γενικό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (9.21) γιά τή δύναμη πού ἀναπτύσσεται μεταξύ δύο κατανομῶν ρεύματος καί τήν ἔκφραση τῆς ἐξ. (9.26) γιά τό μαγνητικό πεδίο καθεμιᾶς ἀπό τίς κατανομές, μποροῦμε νά γράψουμε τή δύναμη πού ἀσκεῖται σέ μιά κατανομή **J**(**r**) ὅταν βρεθεῖ σέ ἕνα ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο **B**(**r**) ὡς

$$\mathbf{F} = [c] \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3r = [c] \frac{I}{c} \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{9.90}$$

ὅπου στό τελευταῖο σκέλος ἔχει χρησιμοποιηθεῖ ἡ σύνδεση τῆς ἐξ. (9.19) γιά τήν εἰδική περίπτωση ἑνός κυκλώματος C πού διαρρέεται ἀπό σταθερό ρεῦμα I. Ἡ τελευταία σχέση ἀποκτᾶ ἰδιαίτερη χρησιμότητα στήν περίπτωση ὅπου ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως **B**(**r**) μεταβάλλεται ἀργά καθόλη τήν ἔκταση τοῦ κυκλώματος C. Τότε τό μαγνητικό πεδίο μπορεῖ νά ἀναπτυχθεῖ σέ σειρά Taylor γύρω ἀπό μιά κατάλληλη ἀρχή τῶν συντεταγμένων στή γειτο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

νία τοῦ κυκλώματος. Θά γράψουμε τή γενική ἔκφραση τοῦ ἀναπτύγματος Taylor γιά μιά ἀνυσματική συνάρτηση ὡς

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(0) + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{B}(0) + \ldots \tag{9.91}$$

ὅπου ὁ δεύτερος ὅρος ἔχει τήν ἀναλυτική μορφή

$$(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{B}(0)$$

$$= \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k})\Big|_{r=0}. \tag{9.92}$$

Ἡ δύναμη τῆς ἐξ. (9.90) παίρνει τότε τή μορφή

$$\mathbf{F} = -[c]\frac{I}{c}\,\mathbf{B}(0)\times\oint d\mathbf{l}' + [c]\frac{I}{c}\oint d\mathbf{l}'\times(\mathbf{r}'\cdot\nabla)\mathbf{B}(0) + \ldots \tag{9.93}$$

Καθόσον ἡ ὁλοκλήρωση τοῦ στοιχείου $d\mathbf{l}'$ στό κλειστό κύκλωμα C δίνει μηδενικό ἀποτέλεσμα θά θεωρήσουμε μόνο τό δεύτερο ὅρο τῆς ἐξ. (9.93).

Γιά τό ἐξωτερικό πεδίο $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ στή γειτονία τοῦ κυκλώματος ἰσχύει ἡ σχέση $\nabla\times\mathbf{B} = 0$. Μέ τήν παρατήρηση αὐτή καί τή βοήθεια τῆς ταυτότητας (9.22) μποροῦμε νά μετασχηματίσουμε τό δεύτερο ὅρο τῆς ἐξ. (9.93) ὡς

$$d\mathbf{l}'\times(\mathbf{r}'\cdot\nabla)\mathbf{B} = d\mathbf{l}'\times\nabla(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{B}) = -\nabla\times\{(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{B})d\mathbf{l}'\} \tag{9.94}$$

ὅπου ὁ τονισμός τῶν παραμέτρων ὑπογραμμίζει τό γεγονός ὅτι ὁ τελεστής ∇ δρᾶ μόνο στή συνάρτηση $\mathbf{B}$. Ἡ δύναμη τῆς ἐξ. (9.93) μπορεῖ ἐπομένως νά γραφεῖ ὡς

$$\mathbf{F} = -[c]\frac{I}{c}\,\nabla\times\oint(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{B})d\mathbf{l}'\,. \tag{9.95}$$

Στήν τελευταία σχέση μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ἡ ταυτότητα τῆς ἐξ. (9.22). Εἰδικότερα μποροῦμε νά γράψουμε

$$(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{B})d\mathbf{l}' = (\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}')\mathbf{r}' - \mathbf{B}\times(\mathbf{r}'\times d\mathbf{l}')\,. \tag{9.96}$$

Εἶναι τώρα δυνατόν νά δείξουμε ὅτι τό κλειστό ὁλοκλήρωμα τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους τῆς ἐξ. (9.96) εἶναι ἴσο καί ἀντίθετο μέ τό κλειστό ὁλοκλήρωμα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τοῦ πρώτου ὅρου στό δεύτερο σκέλος. Γιά τό σκοπό αὐτό θά θεωρήσουμε τή συνιστῶσα i τοῦ πρώτου ὁλοκληρώματος

$$\oint (\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}')d\mathbf{r}_i' = \sum_j B_j \oint r_j' d\mathbf{r}_i' \qquad (9.97)$$

ὅπου τό ἀνυσματικό στοιχεῖο τῆς ὁλοκληρώσεως $d\mathbf{l}'$ ἔχει γραφεῖ ὡς

$$d\mathbf{l}' = dr_x'\hat{\mathbf{x}} + dr_y'\hat{\mathbf{y}} + dr_z'\hat{\mathbf{z}} \ . \qquad (9.98)$$

Παρατηρεῖται ὅτι οἱ συνιστῶσες dr_i' καί r_i' πού ὑπεισέρχονται στίς προηγούμενες ἐκφράσεις ἀναφέρονται μόνο σέ σημεῖα τῆς διαδρομῆς πού ὁρίζει τό κύκλωμα. Ὁλοκληρώνοντας τήν ἐξ. (9.97) κατά μέρη

$$\sum_j B_j \oint r_j' dr_i' = \sum_j B_j \oint d(r_j' r_i') - \sum_j B_j \oint r_i' dr_j' . \qquad (9.99)$$

Τό ὁλοκλήρωμα στόν πρῶτο ὅρο τοῦ δεξιοῦ μέρους τῆς τελευταίας σχέσης προφανῶς μηδενίζεται ὡς κλειστό ὁλοκλήρωμα τέλειου διαφορικοῦ. Ἔτσι, σέ συνδιασμό μέ τήν ἐξ. (9.97), μποροῦμε νά γράψουμε

$$\oint (\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}')d\mathbf{r}_i' = -\oint (\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}')r_i$$

ἤ σέ ἀνυσματική μορφή,

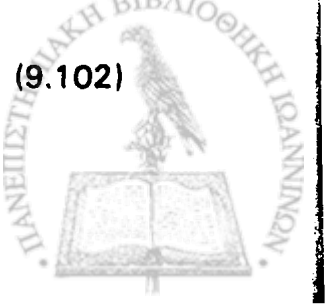
$$\oint (\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}')d\mathbf{l}' = -\oint (\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}')\mathbf{r}' \ . \qquad (9.100)$$

Χρησιμοποώντας τό ἀποτέλεσμα αὐτό στήν ἐξ. (9.96) προκύπτει ὅτι

$$\oint (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{B})d\mathbf{l} = -\frac{1}{2}\mathbf{B}\times\oint(\mathbf{r}'\times d\mathbf{l}') \qquad (9.101)$$

ἐνῶ ἡ δύναμη τῆς ἐξ. (9.95) παίρνει τήν ἁπλή μορφή

$$\mathbf{F} = [c]\frac{I}{2c}\nabla\times(\mathbf{B}\times\oint\mathbf{r}'\times d\mathbf{l}') = \nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{m}) \ . \qquad (9.102)$$


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στήν τελευταία σχέση έχει χρησιμοποιηθεῖ ἡ ἔκφραση τῆς ἐξ. (9.84) γιά τή μαγνητική διπολική ροπή **m** τοῦ κυκλώματος.

Χρησιμοποιώντας άκόμη τό άνάπτυγμα τοῦ τριπλοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου [βλ. ἐξ. (9.22)] καί τίς σχέσεις

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{B} = 0 \tag{9.103}$$

γιά τό ἐξωτερικό πεδίο, εἶναι δυνατόν νά γράψουμε τή δύναμη πού ἀσκεῖται στό κύκλωμα στήν ἐναλλακτική μορφή

$$\mathbf{F} = \nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{m}) = (\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}) \ . \tag{9.104}$$

Ἄν ἑρμηνεύσουμε τή δύναμη ὡς τήν ἀρνητική κλίση τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας U, ἡ τελευταία σχέση δίνει ἀμέσως τό ἀποτέλεσμα

$$U = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B} \ . \tag{9.105}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο εἶναι δυνατόν νά ὑπολογίσουμε τή ροπή πού ἀσκεῖται στό κύκλωμα ἀπό ἕνα ἐξωτερικό πεδίο **B**(r). Ἀπό τό γενικό ὁρισμό τῆς ροπῆς

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{r}\times d\mathbf{F} \tag{9.106}$$

ὅπου dF εἶναι ἡ στοιχειώδης δύναμη σέ κάθε σημεῖο τοῦ κυκλώματος, μποροῦμε νά γράψουμε σέ ἀναλογία μέ τήν ἐξ. (9.90),

$$\mathbf{N} = [c]\frac{1}{c}\int \mathbf{r}\times(\mathbf{J}(\mathbf{r})\times\mathbf{B}(\mathbf{r}))d^3r = [c]\frac{1}{c}\oint \mathbf{r}\times(d\mathbf{l}\times\mathbf{B}(\mathbf{r})) \ . \tag{9.107}$$

Ἀναπτύσσοντας τό μαγνητικό πεδίο **B**(r) σέ σειρά Taylor [βλ. ἐξ. (9.91)] καί διατηρώντας μόνο τόν πρῶτο ὅρο, ὁ ὁποῖος στήν περίπτωση αὐτή δέν ὁδηγεῖ σέ μηδενικό ἀποτέλεσμα, ἔχουμε σέ πρώτη προσέγγιση

$$\mathbf{N} = [c]\frac{1}{c}\oint \mathbf{r}\times(d\mathbf{l}\times\mathbf{B}(0)) \tag{9.108}$$

πού μέ ἀνάπτυξη τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος δίνει



$$\mathbf{N} = [c]\frac{I}{c}\oint(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{B})d\mathbf{l}' - [c]\frac{I}{c}\oint(\mathbf{r}'\cdot d\mathbf{l}')\mathbf{B} \ . \qquad (9.109)$$

Στήν τελευταία σχέση ἔχει ἐπανεισαχθεῖ ὁ συμβολισμός τονισμοῦ τῶν παραμέτρων γιά τίς μεταβλητές στίς ὁποῖες ἀναφέρεται ἡ ὁλοκλήρωση. Τό πρῶτο ὁλοκλήρωμα ἔχει ἤδη ὑπολογιστεῖ στήν ἐξ. (9.101) ὡς

$$[c]\frac{I}{c}\oint(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{B})d\mathbf{l}' = -\mathbf{B}\times\mathbf{m} \ . \qquad (9.110)$$

Τό δεύτερο ὁλοκλήρωμα, μέ ἀνάλογη ἀνάλυση πρός αὐτή πού χρησιμοποιήθηκε γιά τήν ἀπόδειξη τῆς ἐξ. (9.100), μπορεῖ νά μετασχηματιστεῖ σέ κλειστό ὁλοκλήρωμα τέλειου διαφορικοῦ καί προφανῶς μηδενίζεται. Ἡ ροπή ἑπομένως πού ἀσκεῖται ἀπό τό ἐξωτερικό πεδίο στό κύκλωμα μέ μαγνητική διπολική ροπή **m** μπορεῖ νά γραφεῖ σέ πρώτη προσέγγιση ὡς

$$\mathbf{N} = \mathbf{m}\times\mathbf{B}(0) \ . \qquad (9.111)$$

Παρατηρεῖται ὅτι ἡ τελευταία ἔκφραση ὁδηγεῖ ἐπίσης στό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (9.105) γιά τή δυναμική ἐνέργεια μιᾶς σταθερῆς μαγνητικῆς ροπῆς **m** σέ ἕνα ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο, ἄν ἡ ροπή ἑρμηνευτεῖ ὡς ἡ ἀρνητική παράγωγος τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας U ὡς πρός τή γωνία πού σχηματίζουν τά ἀνύσματα **m** καί **B**.

Τό ἀποτέλεσμα

$$U = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B} \qquad (9.105)$$

ἐκφράζει τή γνωστή ἰδιότητα ὅτι τό μαγνητικό δίπολο τείνει νά προσανατολιστεῖ πρός τή διεύθυνση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Πρέπει πάντως νά τονιστεῖ ὅτι ἡ ἐξ. (9.105) δέν ἐκφράζει τήν ὁλική ἐνέργεια τοῦ μαγνητικοῦ διπόλου. Κατά τή δημιουργία τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** στήν περιοχή τοῦ διπόλου **m** (ἤ ἰσοδύναμα κατά τήν προσαγωγή τοῦ διπόλου στήν περιοχή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου) καταναλώνεται ἐπιπρόσθετο ἔργο ὥστε τό ρεῦμα I, πού δημιουργεῖ τή μαγνητική διπολική ροπή **m**, νά παραμείνει σταθερό. Ἡ ὁλική ἐνέργεια τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου θά μᾶς ἀπασχολήσει ἐκτενέστερα στό Κεφάλαιο 12, ἀφοῦ προηγουμένως μελετηθοῦν τά φαινόμενα ἐπαγωγῆς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

9-7 Τό Ἠλεκτρικό καί Μαγνητικό Πεδίο. Θέμα Ἀπόψεως

Ἡ ἀρχή τῆς ἐπαλληλίας μᾶς ἔδωσε τή δυνατότητα νά ξεφύγουμε ἀπό τήν ἔννοια τῆς *δράσης σέ ἀπόσταση* καί νά περιγράψουμε τήν ἠλεκτρομαγνητική ἀλληλεπίδραση διαμέσου τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου. Μιά ἁπλή ὅμως ματιά στίς ἀναλυτικές ἐκφράσεις πού προσδιορίσαμε γιά τά πεδία φανερώνει ἀμέσως ὅτι ἡ τιμή τους ἐξαρτᾶται καθοριστικά ἀπό τό σύστημα ἀναφορᾶς τοῦ παρατηρητῆ. Ἄν π.χ. ὁ παρατηρητής βρίσκεται σέ ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς S, στό ὁποῖο δύο φορτία q_1 καί q_2 κινοῦνται μέ ἀντίστοιχες ταχύτητες $\mathbf{u}_1$ καί $\mathbf{u}_2$ θά «δεῖ» ὅτι ἡ δύναμη πού ἀσκεῖται στό φορτίο q_2 [βλ. ἐξ. (9.3)] ὀφείλεται σέ ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο **E** καί ἕνα μαγνητικό πεδίο **B** πού δημιουργεῖ στό χῶρο ἡ ὕπαρξη τοῦ φορτίου q_1. Ἄν στή συνέχεια ὁ ἴδιος παρατηρητής μεταπηδήσει σέ ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς S′, πού κινεῖται μέ ταχύτητα $\mathbf{V} = \mathbf{u}_1$ σέ σχέση μέ τό σύστημα S, θά παρατηρήσει ὅτι τό φορτίο q_1 εἶναι ἀκίνητο καί θά «δεῖ» ὅτι ἡ δύναμη πού ἀσκεῖται στό φορτίο q_2 ὀφείλεται ἀποκλειστικά στό στατικό ἠλεκτρικό πεδίο **E′** πού δημιουργεῖ ἡ ὕπαρξη τοῦ φορτίου q_1.

Τό προηγούμενο παράδειγμα δείχνει καθαρά ὅτι ἡ ἀναγωγή τῆς ἀλληλεπιδράσεως σέ ἕνα ἠλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο πού ὑπάρχει στό χῶρο εἶναι θέμα ἀπόψεως. Ἄν γιά ἕνα παρατηρητή πού βρίσκεται σέ κάποιο σύστημα ἀναφορᾶς S τό ἠλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖ μιά συγκεκριμένη κατανομή φορτίου καί ρεύματος εἶναι ἀντίστοιχα **E** καί **B**, τότε γιά ἕνα δεύτερο παρατηρητή σέ ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς S′, τό ὁποῖο κινεῖται ὡς πρός τό σύστημα S μέ σταθερή ταχύτητα† **V**, τά δύο πεδία θά ἐμφανιστοῦν διαφορετικά ὡς **E′** καί **B′**. Ἄν ἐπιπλέον παραδεχτοῦμε ὅτι ὁ χῶρος εἶναι ὁμογενής καί ἰσοτροπικός, ἡ σύνδεση μεταξύ τῶν πεδίων στά δύο συστήματα ἀναφορᾶς θά περιέχει ὡς ἀνεξάρτητη μεταβλητή μόνο τή σχετική ταχύτητα μεταξύ τῶν δύο συστημάτων. Περιμένουμε δηλαδή γενικά ὅτι θά ἰσχύει κάποια σχέση

$$\mathbf{E}' = f(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{V}) \qquad (9.112\alpha)$$

καί

$$\mathbf{B}' = g(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{V}) \ . \qquad (9.112\beta)$$

---

† Θά ἀναφερθοῦμε στά συστήματα ἀναφορᾶς πού πληροῦν τίς προϋποθέσεις αὐτές μέ τόν ὅρο *ἀδρανειακά συστήματα*.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Γιά τόν προσδιορισμό τῶν συναρτήσεων στίς δύο τελευταῖες ἐξισώσεις θά δανειστοῦμε ὁρισμένες σχέσεις ἀπό τή Θεωρία τῆς Σχετικότητας. Γιά ἁπλοποίηση τοῦ συμβολισμοῦ θά θεωρήσουμε δύο συστήματα ἀναφορᾶς S καί S′ μέ σχετική ταχύτητα **V** κατά τόν κοινό ἄξονα z, z′. Θά θεωρήσουμε ἐπιπλέον ὅτι κατά τό χρόνο t = 0 τά δύο συστήματα συμπίπτουν. Τότε

1. Οἱ συνεταγμένες τοῦ χώρου x, y, z καί ὁ χρόνος t ἑνός σημείου μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὡς ἕνα ἄνυσμα τεσσάρων διαστάσεων (x_1, x_2, x_3, x_4) σύμφωνα μέ τήν ἀντιστοιχία

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ict\ . \tag{9.113}$$

Τό μέτρο τοῦ τετρανύσματος (x_1, x_2, x_3, x_4) ἔχει τήν ἴδια τιμή σέ κάθε ἀδρανειακό σύστημα ἀναφορᾶς, ἤτοι

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - ct'^2\ . \tag{9.114}$$

Ὁ μετασχηματισμός τῶν συντεταγμένων ἀπό τό σύστημα S στό σύστημα S′ δίνεται ἀπό τή γραμμική σχέση

$$x'_\mu = \sum_{\nu\ 1}^{4} a_{\mu\nu} x_\nu,\ \mu = 1,2,3,4 \tag{9.115}$$

γνωστή ὡς **μετασχηματισμός Lorentz.**

2. Ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ ποσότητα R^2 εἶναι σταθερή εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι οἱ συντελεστές $a_{\mu\nu}$ τοῦ μετασχηματισμοῦ Lorentz ἱκανοποιοῦν τήν ὀρθοκανονική σχέση

$$\sum_{\mu\ 1}^{4} a_{\mu\nu}\, a_{\mu\kappa} = \delta_{\nu\kappa} \tag{9.116}$$

ἀπό τήν ὁποία ἕπεται ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός

$$x_\mu = \sum_{\nu\ 1}^{4} x'_\nu\, a_{\nu\mu},\quad \mu = 1,2,3,4 \tag{9.117}$$

καί ἡ δεύτερη ὀρθοκανονική σχέση

$$\sum_{\mu\ 1}^{4} a_{\nu\mu}\, a_{\kappa\mu} = \delta_{\nu\kappa}\ . \tag{9.118}$$

Τέλος ἀπό τή σύγκριση τῶν ἐξ. (9.115) καί (9.117) μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι ὁ πίνακας πού σχηματίζουν οἱ 16 συντελεστές $a_{\mu\nu}$ ἔχει ὁρίζουσα ἴση μέ τή μονάδα

$$\det |a_{\mu\nu}| = 1 \tag{9.119}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3. Γιά τό είδικό σύστημα S′ πού θεωροῦμε (σταθερή σχετική ταχύτητα κατά τόν κοινό ἄξονα x_3), οἱ συντελεστές τοῦ μετασχηματισμοῦ $a_{\mu\nu}$ ἔχουν τήν τιμή

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \tag{9.120}$$

ὅπου γιά σύμπτυξη τοῦ συμβολισμοῦ ἔχουν εἰσαχθεῖ οἱ ποσότητες

$$\beta = \frac{V}{c} \tag{9.121α}$$

καί

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} . \tag{9.121β}$$

Ἀναλυτικότερα, ὁ μετασχηματισμός τῆς ἐξ. (9.115) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = \gamma(z - Vt),\ t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c}z\right) . \tag{9.122}$$

4. Κάθε ποσότητα πού ἔχει τήν ἴδια τιμή σέ ὅλα τά ἀδρανειακά συστήματα ὀνομάζεται **ἀναλοίωτη** ἤ **βαθμωτή ποσότητα Lorentz**, ἐνῶ κάθε ὁμάδα τεσσάρων ποσοτήτων A_μ, $\mu = 1,2,3,4$ πού μετασχηματίζεται σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (9.115) ὀνομάζεται **τετράνυσμα**. Πολλές ἰδιότητες τῶν τετρανυσμάτων ἀπορρέουν ἀμεσα ἀπό τίς ἰδιότητες τῶν συντελεστῶν $a_{\mu\nu}$.

i. Οἱ τέσσερις ποσότητες

$$A_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} , \qquad \mu = 1,2,3,4 \tag{9.123}$$

πού προέρχονται ἀπό τή διαφόριση μιᾶς βαθμωτῆς ποσότητας φ ὡς πρός τίς τέσσερις συντεταγμένες x_μ ἀποτελοῦν τετράνυσμα.

ii. Ἡ ἀπόκλιση

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \tag{9.124}$$

ἑνός τετρανύσματος A_μ εἶναι βαθμωτή ποσότητα. Ἄμεσο πόρισμα τῆς ἰδιότητας αὐτῆς εἶναι ὅτι καί ὁ τετραδιάστατος τελεστής Laplace δημιουργεῖ ἀναλλοίωτη ποσότητα

$$\square'^2\varphi = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu'^2} = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2} = \square^2\varphi . \tag{9.125}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

iii. Το εσωτερικο γινόμενο δυο τετρανυσμάτων άποτελεῖ επίσης άναλλοίωτη ποσότητα, ἤτοι

$$(A'\cdot B') \equiv \sum_{\mu=1}^{4} A'_\mu B'_\mu \qquad \sum_{\mu=1}^{4} A_\mu B_\mu \equiv (A\cdot B) \ . \tag{9.126}$$

Εἰδικότερα, τό μέτρο κάθε τετρανύσματος εἶναι άναλλοίωτη ποσότητα

$$|(A'\cdot A')| = |(A\cdot A)| \ . \tag{9.127}$$

5. Ἕνα χαρακτηριστικό τετράνυσμα μέ τίς προηγούμενες ἰδιότητες μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ άπό τήν ὁρμή **p** καί ένέργεια W ένός σωματίου ὡς

$$(p_\mu) = \left(\mathbf{p}, \frac{iW}{c}\right) \tag{9.128}$$

ὅπου τό τρισδιάστατο ἄνυσμα **p** εἶναι ἡ κλασσική ὁρμή τοῦ σωματίου $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Ἡ τιμή τῶν συντελεστῶν $a_{\mu\nu}$ στήν ἐξ. (9.120) προβλέπει, γιά τά εἰδικά άδρανειακά συστήματα S καί S', πού θεωροῦμε, τόν άναλυτικό μετασχηματισμό

$$p'_x = p_x, \ p'_y = p_y,$$

$$p'_z = \gamma\left(p_z - \frac{\beta}{c} W\right), \ W' = \gamma\,(W - \beta c p_z) \ . \tag{9.129}$$

Ἀπό τό γεγονός ὅτι τό μέτρο τοῦ προηγούμενου τετρανύσματος εἶναι άναλλοίωτη ποσότητα, μποροῦμε άκόμη νά δείξουμε ὅτι ἡ ένέργεια W καί ἡ ὁρμή ρ ένός ἐλεύθερου σωματίου συνδέονται μέ τή σχέση

$$W^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \tag{9.130}$$

ὅπου m εἶναι ἡ μάζα τοῦ σωματίου.

6. Ὁρισμένα φυσικά μεγέθη τῆς κλασσικῆς μηχανικῆς, ὅπως ἡ ταχύτητα, δέν εἶναι δυνατόν νά ἐνταχθοῦν άπευθείας στή Θεωρία τῆς Σχετικότητας ὡς συνιστῶσες ένός τετρανύσματος. Παρόλα αὐτά ὁ μετασχηματισμός κάθε τρισδιάστατης συνιστώσας μεταξύ δύο άδρανειακῶν συστημάτων μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ άπό τά προηγούμενα. Εἰδικά γιά τήν ταχύτητα $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ ένός ἐλεύθερου σωματίου μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι

$$u'_x = \frac{u_x}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} u_z\right)} \tag{9.131α}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} u_z\right)} \tag{9.131β}$$

$$u'_z = \frac{u_z - V}{1 - \frac{\beta}{c} u_z} \ . \tag{9.131γ}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ή προηγούμενη σταχυολόγηση τῶν άποτελεσμάτων τῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας μᾶς δίνει τά έφόδια γιά τόν προσδιορισμό τῶν συναρτήσεων στίς έξ. (9.112). Θά θεωρήσουμε πάλι δύο συστήματα S καί S′, τά όποῖα κινοῦνται μέ σχετική ταχύτητα V κατά τόν κοινό άξονα z, z′. Ή δύναμη Lorentz πού δέχεται ἕνα φορτίο q στά δύο συστήματα μπορεῖ νά γραφεῖ άντίστοιχα ὡς†

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{9.132α}$$

καί

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' + \frac{q}{c}(\mathbf{u}' \times \mathbf{B}') \ . \tag{9.132β}$$

Μποροῦμε άκόμη νά θεωρήσουμε, χωρίς άπώλεια άπό τή γενικότητα ὅτι στό σύστημα S ἡ ταχύτητα u βρίσκεται στό έπίπεδο y—z. Ή δύναμη αὐτή μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ὁ ρυθμός μεταβολῆς τῆς ὁρμῆς τοῦ σωματίου στό κάθε σύστημα, ἤτοι

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{9.133α}$$

καί

$$\mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{p}'}{dt}\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1}. \tag{9.133β}$$

Ή σύνδεση τῶν δύο δυνάμεων μπορεῖ νά γίνει μέσω τοῦ μετασχηματισμοῦ τῆς ὁρμῆς πού δίνεται στήν έξ. (9.129). Γιά κάθε συνιστώσα τῆς ὁρμῆς μποροῦμε νά γράψουμε μέ άπλή διαφόριση

$$\frac{dp'_x}{dt} = \frac{dp_x}{dt} = F_x \tag{9.134α}$$

$$\frac{dp'_y}{dt} = \frac{dp_y}{dt} = F_y \tag{9.134β}$$

† Γιά άπλούστευση τοῦ συμβολισμοῦ στήν παράγραφο αὐτή θά ἐργαστοῦμε άποκλειστικά στό σύστημα CGS.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{dp'_z}{dt} = \gamma\left(\frac{dp_z}{dt} - \frac{\beta}{c}\frac{dW}{dt}\right) . \qquad (9.134\gamma)$$

Ἐξάλλου ἡ παράγωγος dW/dt ἀντιπροσωπεύει τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στό φορτίο q καί μπορεῖ νά γραφεῖ (γιά $u_x = 0$) ὡς

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = F_y u_y + F_z u_z . \qquad (9.135)$$

Ἡ ἐξ. (9.134γ) μπορεῖ ἐπομένως νά γραφεῖ ὡς

$$\frac{dp'_z}{dt} = \gamma\left(F_z - \frac{\beta}{c} F_y u_y - \frac{\beta}{c} F_z u_z\right). \qquad (9.136)$$

Ἀπό τήν ἐξ. (9.122) ἡ παράγωγος dt′/dt πού ὑπεισέρχεται στήν ἐξ. (9.133β) εἶναι

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\gamma\left(t - \frac{\beta}{c} z\right)\right] = \gamma\left(1 - \frac{\beta}{c}\frac{dz}{dt}\right)$$

$$= \gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} u_z\right) . \qquad (9.137)$$

Χρησιμοποιώντας τά ἀποτελέσματα αὐτά οἱ τρεῖς συνιστῶσες τῆς ἐξ. (9.133β) μποροῦν τώρα νά γραφοῦν ὡς

$$\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} u_z\right) F'_x = F_x \qquad (9.138\alpha)$$

$$\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} u_z\right) F_y = F_y \qquad (9.138\beta)$$

$$\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} u_z\right) F'_z = \gamma\left(F_z - \frac{\beta}{c} F_y u_y - \frac{\beta}{c} F_z u_z\right) . \qquad (9.138\gamma)$$

Στίς σχέσεις αὐτές μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ἡ ἀναλυτική μορφή τῆς δυνάμεως Lorentz πού δίνεται στίς ἐξ. (9.132). Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά δείξει (μέ ὁμολογουμένως ἀρκετά ἐπίπονη διεργασία) ὅτι οἱ ἐξισώσεις πού προκύπτουν εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπό τό φορτίο q καί ἔχουν ἀντίστοιχα τή μορφή

$$\frac{1}{c}(B'_z - B_z)u_y + \frac{1}{c}(B_y - \gamma\beta E'_x - \gamma B'_y)u_z + \gamma E'_x + \gamma\beta B'_y - E_x = 0$$

(9.139α)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{1}{c}(B'_x - \gamma\beta E'_y - B_x)u_z + \gamma E'_y - \gamma\beta B'_x - E_y = 0 \qquad (9.139\beta)$$

$$\frac{1}{c}\left(B_x - \frac{1}{\gamma}B'_x + \beta E_y\right)u_y + \frac{\beta}{c}(E_z - E'_z)u_z + E_z - E'_z = 0 \,. \qquad (9.139\gamma)$$

Γιά τήν ἐξαγωγή τῶν τελευταίων ἐξισώσεων ἔχει ἐπιπλέον χρησιμοποιηθεῖ ὁ μετασχηματισμός τῆς ταχύτητας πού δίνεται στίς ἐξ. (9.131).

Οἱ ἐξ. (9.139) πού συνδέουν τίς συνιστῶσες τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου στά δύο ἀδρανειακά συστήματα πρέπει νά ἰσχύουν για ὁποιαδήποτε ταχύτητα τοῦ φορτίου q στό ὁποῖο ἐπενεργεῖ ἡ δύναμη Lorentz. Οἱ συντελεστές ἑπομένως κάθε συνιστώσας τῆς ταχύτητας u_x, u_y πρέπει νά μηδενίζονται ἀνεξάρτητα. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἡ ἐξ. (9.139α) προσδιορίζει ὅτι

$$B_z = B'_z \qquad (9.140\alpha)$$

$$B_y = \gamma(B'_y + \beta E'_x) \qquad (9.140\beta)$$

$$E_x = \gamma(F'_x + \beta B'_y). \qquad (9.140\gamma)$$

Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ τήν ἁπλή ἀντικατάσταση $\beta \rightarrow -\beta$, πού δίνει

$$B'_z = B_z \qquad (9.141\alpha)$$

$$B'_y = \gamma(B_y - \beta E_x) \qquad (9.141\beta)$$

$$E'_x = \gamma(E_x - \beta B_y) \,. \qquad (9.141\gamma)$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο τρόπο οἱ ἐξ. (9.139β) καί (9.139γ) συμπληρώνουν τό μετασχηματισμό γιά τίς ὑπόλοιπες συνιστῶσες τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά ἐπαληθεύσει τόν πλήρη μετασχηματισμό

$$E'_x = \gamma(E_x - \beta B_y) \qquad B'_x = \gamma(B_x + \beta E_y)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$E'_y = \gamma(E_y + \beta B_x) \qquad B'_y = \gamma(B_y - \beta E_x) \tag{9.142}$$

$$E'_z = E_z \qquad B'_z = B_z$$

Παρατηρεῖται ὅτι τά πεδία παραμένουν ἀμετάβλητα κατά τόν κοινό ἄξονα z, z′ πρός τόν ὁποῖο θεωρήσαμε τή σχετική ταχύτητα **V** τῶν δύο συστημάτων. Γενικώτερα μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι τά πεδία παραμένουν ἀμετάβλητα πρός τή διεύθυνση τῆς σχετικῆς ταχύτητας τῶν δύο συστημάτων καί νά γράψουμε τό μετασχηματισμό τῆς ἐξ. (9.142) σέ ἀνυσματική μορφή ὡς

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \qquad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{B}\right) \qquad \mathbf{B}_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{E}\right) \tag{9.143}$$

ὅπου τά σύμβολα $\parallel$ καί $\perp$ δηλώνουν ἀντίστοιχα διεύθυνση παράλληλη καί κάθετη πρός τή σχετική ταχύτητα **V** μεταξύ τοῦ συστήματος S καί S′.

Γιά λόγους πληρότητας θά γράψουμε τό μετασχηματισμό τῶν ἐξ. (9.143) στόν καθιερωμένο συμβολισμό πού ἐπιτρέπει τήν ἀνάγνωση τῶν σχέσεων στά δύο συστήματα CGS καί SI. Στό συμβολισμό αὐτό ὁ μετασχηματισμός τοῦ ἡλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου παίρνει τή μορφή

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \qquad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E}_{\perp} + [c]\frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{B}\right) \qquad \mathbf{B}_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} + \left[\frac{1}{c}\right]\frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{E}\right) \tag{9.144}$$

Ὁ μετασχηματισμός τῶν ἐξ. (9.144) εἶναι ἀρκετά ἀποκαλυπτικός. Κατά κύριο λόγο δείχνει ὅτι τό ἡλεκτρικό πεδίο **E** καί τό μαγνητικό πεδίο **B** δέν ἔχουν ἀνεξάρτητη ὑπόσταση. Ἕνα καθαρά ἡλεκτρικό ἤ μαγνητικό πεδίο σέ κάποιο σύστημα ἀναφορᾶς θά ἐμφανιστεῖ σέ ἕνα ἄλλο σύστημα ὡς μίγμα ἡλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου. Ἀντίστροφα, ὁ παρατηρητής μπορεῖ πάντοτε νά ἐπιλέξει ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς ὅπου μιά συγκεκριμένη κατανομή φορτίων καί ρευμάτων δημιουργεῖ ἁπλούστερα πεδία. Εἶναι π.χ. δυνατό νά δείξουμε ὅτι ἄν σέ κάποιο σύστημα τά ἀνύσματα **E** καί **B** εἶναι κάθετα, θά παραμείνουν κάθετα σέ ὁποιοδήποτε ἄλλο ἀδρανειακό σύστημα. Ἔτσι, στήν περίπτωση αὐτή, εἶναι δυνατόν νά ἐπιλέξουμε ἕνα σύστημα, στό ὁποῖο τό πεδίο ἐμφανίζεται ὡς καθαρά ἡλεκτρικό ἤ καθαρά μαγνητικό. Τή δυνατότητα αὐτή θά ἐκμεταλευτοῦμε στό ἑπόμενο κεφάλαιο κατά τή μελέτη τῆς κινήσεως ἡλεκτρικῶν φορτίων σέ ἡλεκτρομαγνητικό πεδίο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9-1. Ἀπό τίς διαστάσεις τῆς ἡλεκτρικῆς καί μαγνητικῆς διαπερατότητας στό κενό ε_0 καί μ_0 δεῖξτε ὅτι στό σύστημα SI ἡ ἐξ. (9.12) ἔχει τίς σωστές διαστάσεις.

9-2. Δύο ἠλεκτρόνια στή δέσμη καθοδικῆς λυχνίας [βλ. Παράγραφο 10-1] ταξιδεύουν σέ παράλληλες τροχιές πού ἀπέχουν ἀπόσταση r = 0.01 cm. Ἡ σταθερή ταχύτητα υ τῶν δύο ἠλεκτρονίων ἔχει ἀποκτηθεῖ μετά ἀπό ἐπιτάχυνση σέ διαφορά δυναμικοῦ 6 kV. Ὑπολογίστε τή δύναμη μεταξύ τῶν δύο ἠλεκτρονίων πού μετρᾶ ἕνας παρατηρητής στό σύστημα ἀναφορᾶς τοῦ ἐργαστηρίου. Ἡ μάζα τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι $m = 9.12 \times 10^{-28}$ g καί τό φορτίο του $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C.

9-3. Μιά κλασσική τεχνική τῆς πυρηνικῆς φυσικῆς γιά τή μέτρηση τῆς ταχύτητας φορτισμένων σωματίων συνίσταται στή διοχέτευση τοῦ σωματίου σέ ἕνα χῶρο ὅπου ὑπάρχει ὁμογενές στατικό ἠλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο μέ τά ἀνύσματα **E** καί **B** ἀμοιβαῖα κάθετα καί κάθετα πρός τήν ἀρχική ταχύτητα τοῦ σωματίου. Στή συνέχεια ἡ ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου ρυθμίζονται ἔτσι ὥστε ἡ τροχιά τοῦ σωματίου νά μήν ἀποκλίνει ἀπό τήν ἀρχική διεύθυνση. Ἄν σέ μιά τέτοια μέτρηση τό μαγνητικό πεδίο εἶναι 0.1 T ἐνῶ τό ἠλεκτρικό πεδίο δημιουργεῖται ἀπό ἕνα πυκνωτή μέ ἐπίπεδους ὀπλισμούς σέ ἀπόσταση 5 mm καί σέ διαφορά δυναμικοῦ 300 V, ὑπολογίστε τήν ταχύτητα τῶν σωματίων πού διατηροῦν τήν ἀρχική τους διεύθυνση.

9-4. Ἕνα βολταϊκό τόξο ἔχει μῆκος 5 cm καί ἰσοδυναμεῖ μέ ρεῦμα 400 A. Ἄν στό χῶρο ὑπάρχει μαγνητικό πεδίο 50 G, κάθετο πρός τή διεύθυνση τοῦ τόξου, ὑπολογίστε τή δύναμη πού ἀσκεῖται στό τόξο.

9-5. Ὑπολογίστε τή δύναμη πού ἀσκεῖται σέ ἕνα σύρμα μέ μῆκος 100 m καί διεύθυνση ἀπό βορρά πρός νότο ὅταν στό σύρμα ρέει ρεῦμα 50 A. Θεωρεῖστε ὅτι τό μαγνητικό πεδίο τῆς γῆς εἶναι 0.5×10^{-4} T μέ διεύθυνση πού σχηματίζει γωνία 70° ὡς πρός τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

9-6. Ὑπολογίστε τήν πυκνότητα ρεύματος πού ἀπαιτεῖται ὥστε ἕνα χάλκινο σύρμα νά αἰωρεῖται κοντά στήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς. Θεωρεῖστε ὅτι τό πείραμα πραγματοποιεῖται στόν Ἰσημερινό ὅπου τό μαγνητικό πεδίο τῆς γῆς εἶναι 1 G. Πόση ἰσχή θά καταναλωθεῖ κατά τό προηγούμενο πείραμα ἀνά μονάδα μήκους ἑνός σύρματος μέ διατομή 1 cm^2; Δίνεται ἡ πυκνότητα τοῦ χαλκοῦ $d = 8.9$ g/cm^3 καί ἡ εἰδική του ἀντίσταση $\rho = 1.7 \times 10^{-8}$ Ω·m.

9-7. Δεῖξτε ὅτι ἡ ὁλική δύναμη πού ἀσκεῖ ἕνα ὁμογενές μαγνητικό πεδίο σέ ἕνα κλειστό κύκλωμα πού διαρρέεται ἀπό σταθερό ρεῦμα I μηδενίζεται.

9-8. Χρησιμοποιεῖστε τό νόμο τῶν Biot καί Savart γιά νά ὑπολογίσετε τό μαγνητικό πεδίο στό κέντρο ἑνός κλειστοῦ κυκλώματος μέ τετράγωνο σχῆμα, στό ὁποῖο ρέει σταθερό ρεῦμα I.

9-9. Δεῖξτε ὅτι ἄν τό μαγνητικό πεδίο ἔχει τή μορφή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{B} = k\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

όπου k είναι μιά σταθερά, τό άνυσματικό δυναμικό δίνεται άπό τή συνάρτηση

$$\mathbf{A} = \frac{kyz}{r\,(x^2 + y^2)}\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{kzx}{r\,(x^2 + y^2)}\,\hat{\mathbf{y}}$$

όπου $\hat{\mathbf{x}}$ καί $\hat{\mathbf{y}}$ είναι άντίστοιχα τά μοναδιαία άνύσματα κατά τούς άξονες x καί y.

9-10. Προσδιορίστε τό άνυσματικό δυναμικό δύο εύθύγραμμων παράλληλων άγωγῶν μέ ἄπειρες διαστάσεις πού διαρρέονται άπό τό ἴδιο ρεῦμα I άλλά πρός άντίθετες κατευθύνσεις.

9-11. Ἄν οἱ δύο άγωγοί τῆς προηγούμενης άσκήσεως συμπίπτουν μέ τίς εὐθεῖες $x = a$, $y = 0$ καί $x = -a$, $y = 0$ στό ἐπίπεδο (x, y) ἐκφρᾶστε τό άνυσματικό δυναμικό σέ καρτεσιανές συντεταγμένες. Χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (9.47) προσδιορίστε σέ καρτεσιανές συντεταγμένες τό άντίστοιχο μαγνητικό πεδίο.

9-12. Ἐκφρᾶστε τό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖται στό χῶρο άπό ἕνα εύθύγραμμο άγωγό μέ ἄπειρες διαστάσεις καί ρεῦμα I σέ καρτεσιανές συντεταγμένες. Χωρίς νά χάσετε τίποτε άπό τή γενικότητα μπορεῖτε νά θεωρήσετε ὅτι ὁ άγωγός ἔχει διεύθυνση κατά τόν ἄξονα z καί τό ρεῦμα φορά κατά τή θετική φορά τοῦ ἄξονα. Δεῖξτε ὅτι ἡ άνυσματική συνάρτηση πού προσδιορίσατε ἔχει μηδενική ἀπόκλιση.

9-13. Ἕνα πηνίο μέ 100 βρόχους, μῆκος 12 cm καί άκτίνα 2 cm διαρρέεται άπό ρεῦμα 4 A. Ὑπολογίστε τό μαγνητικό πεδίο στόν ἄξονα τοῦ πηνίου
(α) στό κέντρο του καί
(β) στό κάθε ἄκρο τοῦ πηνίου.

9-14. Ἕνα πηνίο άπό λεπτό μονωμένο σύρμα ἔχει διαμορφωθεῖ μέ περιέλειξη τοῦ σύρματος στήν ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας μέ άκτίνα R. Οἱ βρόχοι τοῦ πηνίου εἶναι παράλληλοι κύκλοι ἐνῶ κατά ἕνα μέγιστο κύκλο, κάθετο πρός τούς βρόχους, ἡ πυκνότητα τῶν βρόχων n εἶναι σταθερή. Προσδιορίστε τό μαγνητικό πεδίο στό κέντρο τῆς σφαίρας ἄν στό πηνίο διοχετευτεῖ σταθερό ρεῦμα I.

9-15. Ἕνας τετράγωνος βρόχος μέ πλευρά 6 cm διαρρέεται άπό ρεῦμα 4 A. Στό ἐπίπεδο τοῦ βρόχου καί σέ άπόσταση 10 cm άπό τό κέντρο του βρίσκεται ἕνας λεπτός εὐθύγραμμος άγωγός μέ ἄπειρες διαστάσεις καί διεύθυνση παράλληλη πρός δύο πλευρές τοῦ τετράγωνου βρόχου. Ἄν ὁ εὐθύγραμμος άγωγός διαρρέεται άπό ρεῦμα 25 A ὑπολογίστε τή δύναμη πού άσκεῖται στόν τετράγωνο βρόχο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

9-16. Ἕνας μεταλλικός σωλήνας μέ ἐσωτερική ἀκτίνα a καί ἐξωτερική ἀκτίνα b διαρρέεται ἀπό σταθερό ρεῦμα I μέ διεύθυνση παράλληλη πρός τόν ἄξονά του. Θεωρώντας ὁμοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος ὑπολογίστε τό μαγνητικό πεδίο στό ἐσωτερικό καί στή γειτονία τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφάνειας τοῦ σωλήνα.

9-17. Μιά σφαίρα μέ ἀκτίνα R φέρει ἠλεκτρικό φορτίο ὁμοιόμορφα κατανεμημένο στήν ἐπιφάνειά της. Ἡ σφαίρα περιστρέφεται γύρω ἀπό μία διάμετρό της μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Προσδιορίστε τό ἀνυσματικό δυναμικό καί τό μαγνητικό πεδίο στόν ἐσωτερικό καί ἐξωτερικό χῶρο τῆς σφαίρας.

9-18. Ἕνα πηνίο μέ 25 βρόχους ἀπό λεπτό σύρμα ἔχει τή μορφή ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου μέ πλευρές 10 καί 20 cm. Ἄν τό παραλληλόγραμμο βρίσκεται στό ἐπίπεδο (x,y) καί μέ τό κέντρο του στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων, ὑπολογίστε τό μαγνητικό πεδίο στό σημεῖο x = 4 m, y = 0, z = 3 m, ὅταν τό πηνίο διαρρέεται ἀπό ρεῦμα 5 A.

9-19. Τά κέντρα δύο δακτυλίων C_1 καί C_2 μέ ἀκτῖνες R_1 καί R_2 ἀπέχουν ἀπόσταση L. Οἱ ἄξονες τῶν δύο δακτυλίων βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο καί σχηματίζουν ἀντίστοιχα γωνίες θ_1 καί θ_2 μέ τήν ἀπόσταση L, ἡ ὁποία εἶναι ἀρκετά μεγάλη ὥστε νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις $L >> R_1$ καί $L >> R_2$. Ὑπολογίστε τό μαγνητικό πεδίο στό κέντρο τοῦ δακτυλίου C_2 ἄν στό δακτύλιο C_1 κυκλοφορεῖ ρεῦμα I. Προσδιορίστε τή φορά τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου σέ σχέση μέ τή φορά τοῦ ρεύματος.

9-20. Ἕνα λεπτό σύρμα ἔχει περιελειχθεῖ στό ἐπίπεδο ἔτσι ὥστε νά καλύπτει ὅλο τό ἐμβαδόν ἀπό τό κέντρο μέχρι τήν περιφέρεια ἑνός κύκλου μέ ἀκτίνα R = 50 cm. Ἡ περιέλειξη περιέχει 500 σπεῖρες πού μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὁμοκεντρικοί κύκλοι μέ ἀκτίνα πού αὐξάνει διαδοχικά κατά τή διάμετρο τῆς διατομῆς τοῦ σύρματος. Ὑπολογίστε τή μαγνητική διπολική ροπή τοῦ συστήματος ἄν στό σύρμα κυκλοφορεῖ ρεῦμα 0.5 A.

9-21. Ὑποθέστε ὅτι σέ ἕνα ἄτομο τό ἠλεκτρόνιο κινεῖται σέ κυκλική τροχιά μέ ἀκτίνα R καί στροφορμή

$$L = \sqrt{2}\,\frac{h}{2\pi}$$

ὅπου h εἶναι ἡ σταθερά τοῦ Planck μέ ἀριθμητική τιμή $h = 6.62 \times 10^{-34}$ J·sec. Ὑπολογίστε τή μαγνητική διπολική ροπή πού δημιουργεῖ ἡ περιστροφή τοῦ ἠλεκτρονίου ἄν ἡ μάζα καί τό φορτίο εἶναι ἀντίστοιχα $m_e = 9.12 \times 10^{-31}$ kg καί $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C.

9-22. Ἕνας τετράγωνος βρόχος μέ πλευρά a ἔχει καμφθεῖ σέ σχῆμα ὀρθῆς στερεᾶς γωνίας μέ νοητή ἀκμή παράλληλη πρός μιά ἀπό τίς πλευρές του. Σέ πλάγια ὄψη ὁ βρόχος ἔχει τό σχῆμα τοῦ λατινικοῦ γράμματος L μέ ὁριζόντια ἔκταση a/3 καί κατακόρυφη ἔκταση 2a/3. Ἄν στό βρόχο κυκλοφορεῖ ρεῦμα I, προσδιορίστε τή μαγνητική του ροπή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

9-23. Ένας επίπεδος βρόχος σέ σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου μέ πλευρές 30 cm καί 50 cm εἶναι τοποθετημένος ατό ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Στόν τόπο ὅπου βρίσκεται ὁ βρόχος τό μαγνητικό πεδίο τῆς γῆς ἔχει μέτρο 2×10^{-5} T, σχηματίζει γωνία 60° μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο καί ἔχει φορά πρός τά κάτω. Ἄν στό βρόχο κυκλοφορεῖ ρεῦμα 5 A, ὑπολογίστε τό ἔργο πού ἀπαιτεῖται γιά νά στραφεῖ ὁ βρόχος κατά 180° περί ἄξονα πού βρίσκεται στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο καί διέρχεται ἀπό τό κέντρο του.

9-24. Τά κέντρα δύο ὁμοαξονικῶν δακτυλίων C_1 καί C_2, μέ ἀκτῖνες R_1 καί R_2 ἀπέχουν ἀπόσταση $R_1/2$. Ἄν $R_1 >> R_2$ καί στούς δύο δακτυλίους κυκλοφορεῖ ἀντίστοιχα ρεῦμα I_1 καί I_2 μέ ἀντίθετη μεταξύ τους φορά, ὑπολογίστε τή δύναμη πού ἀσκεῖται μεταξύ τῶν δύο δακτυλίων.

9-25. Ένα κυλινδρικό πηνίο 10 σπειρῶν μέ ἀκτίνα 0.5 cm καί μῆκος 1 cm βρίσκεται στό κέντρο ἑνός δακτυλίου μέ ἀκτίνα 50 cm. Ὁ ἄξονας τοῦ πηνίου σχηματίζει γωνία 90° μέ τόν ἄξονα τοῦ δακτυλίου. Ὑπολογίστε τήν ἐνέργεια μαγνητικῆς ἀλληλεπιδράσεως τῶν δύο συστημάτων ἄν καί στά δύο κυκλοφορεῖ ρεῦμα 2 A.

9-26. Δύο ὅμοιοι ὁμοαξονικοί δακτύλιοι μέ ἀκτίνα R διαρρέονται κατά τήν ἴδια φορά ἀπό ρεῦμα I. Τά κέντρα τῶν δύο δακτυλίων ἀπέχουν ἀπόσταση L, ὅπου $L >> R$. Ὑπολογίστε στά πλαίσια τῆς διπολικῆς προσεγγίσεως τή δύναμη πού ἀσκεῖται μεταξύ τῶν δύο δακτυλίων.

9-27. Δύο ὅμοιοι τετράγωνοι βρόχοι μέ πλευρά α βρίσκονται στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο μέ τά κέντρα τους σέ ἀπόσταση L, ὅπου $L >> α$. Ἄν οἱ δύο βρόχοι διαρρέονται ἀπό ρεῦμα I κατά ἀντίθετη φορά, ὑπολογίστε στά πλαίσια τῆς διπολικῆς προσεγγίσεως τή μεταξύ τους δύναμη.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

κινηση ηλεκτρικου φορτιου σε στατικο ηλεκτρομαγνητικο πεδιο

Στό προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε μέ λεπτομέρεια τήν άλληλεπίδραση ένός στάσιμου ή κινούμενου φορτίου μέ άλλα φορτία, στάσιμα ή κινούμενα, πού βρίσκονται στό γύρω χῶρο. Εἴδαμε ὅτι ἡ ἰδιότητα πού άποκτᾶ ὁ χῶρος μέ τήν ὕπαρξη στατικῶν φορτίων καί ρευμάτων μπορεῖ νά άποδοθεῖ πλήρως άπό δύο άνυσματικές συναρτήσεις, τό ήλεκτρικό πεδίο **E**(r) καί τό μαγνητικό πεδίο **B**(r). Συγκεκριμένα, οἱ συναρτήσεις αὐτές προσδιορίζουν ὅτι ἄν τό φορτίο q κινεῖται μέ ταχύτητα **u**(r), τότε στή θέση r θά ὑποστεῖ μιά δύναμη

$$\mathbf{F}(r) = q\mathbf{E}(r) + q\mathbf{u}(r) \times \mathbf{B}(r). \qquad (10.1)$$

Στό κεφάλαιο αὐτό† θά ἐξετάσουμε τήν κίνηση πού ἐκτελεῖ τό φορτίο ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς δυνάμεως Lorentz πού δίνεται στήν τελευταία ἔκφραση. Στά πλαίσια τῆς Νευτώνιας Δυναμικῆς μποροῦμε ἀμέσως νά γράψουμε γιά τή χρονική μεταβολή τῆς ὁρμῆς τοῦ σωματίου

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \qquad (10.2)$$

† Ὁρισμένα ἀπό τά πειράματα τοῦ Κεφαλαίου 10 ἔχουν προσαρμοστεῖ ἀπό τή σειρά τῶν πειραμάτων τοῦ Ἐργαστηρίου Φυσικῆς Berkeley [βλ. A.M. Portis and H.D. Young, **Berkeley Physics Laboratory**, Mc Htaw-Hill, Inc. 1971].

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σέ κάποιο σύστημα συντεταγμένων πού ἔχει ἐπιλεγεῖ ἀπό τόν παρατηρητή.

Ἡ λύση τῆς ἐξ. (10.2) στή γενική περίπτωση, ὅπου τό ἠλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο εἶναι συναρτήσεις τῶν συντεταγμένων τοῦ χώρου, εἶναι ἀρκετά δυσχερής καί πολύπλοκη. Εὐτυχῶς στίς περισσότερες περιπτώσεις πού ἐμφανίζουν πρακτικό ἐνδιαφέρον ἡ μορφή τῶν πεδίων εἶναι ἀρκετά ἁπλή ὥστε ἡ κίνηση τοῦ φορτίου νά ἐπιδέχεται περιγραφή μέ ἀντίστοιχα ἁπλή μαθηματική γλῶσσα. Γνώριμο παράδειγμα ἀποτελεῖ ἡ κίνηση φορτίου στό ὁμογενές ἠλεκτρικό πεδίο μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν ἑνός πυκνωτῆ πού δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 10-1. Ἂν ἡ διεύθυνση τοῦ σταθεροῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ληφθεῖ κατά τόν ἄξονα z, ἁπλή ὁλοκλήρωση τῆς ἐξ. (10.2) δίνει γιά τίς δύο πρῶτες συνιστῶσες τῆς ταχύτητας τοῦ φορτίου

$$v_x = \text{σταθερή}$$

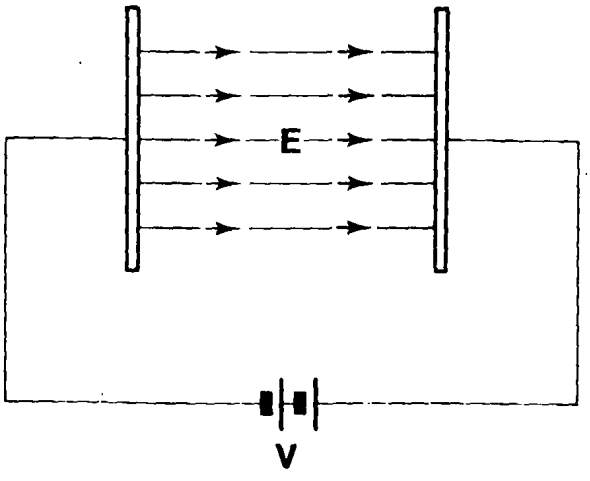
$$v_y = \text{σταθερή}$$

Ἡ τρίτη συνιστῶσα ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$m\frac{dv_z}{dt} = qE = -q\frac{dV}{dz} \tag{10.3}$$

ὅπου V τό δυναμικό. Ἡ τελευταία σχέση μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$mv_z dv_z = -qdV \tag{10.4}$$



ΣΧΗΜΑ 10-1 Ὁμογενές ἠλεκτρικό πεδίο **E** μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν πυκνωτῆ σέ διαφορά δυναμικοῦ V.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πού μέ ὁλοκλήρωση δίνει

$$\frac{1}{2} m u_z^2 \Big|_1^2 = -qV \Big|_1^2 . \qquad (10.5)$$

Τά ὅρια τῆς ὁλοκληρώσεως ἀναφέρονται σέ δύο σημεῖα μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτῆ. Ἰδιαίτερα γιά ἕνα φορτίο πού ξεκινᾶ μέ μηδενική ταχύτητα ἀπό τόν ἕνα ὁπλισμό καί καταλήγει στόν ἄλλο μέ τελική ταχύτητα u_z, ἡ ἐξ. (10.5) παίρνει τή μορφή

$$\frac{1}{2} m u_z^2 = -qV \qquad (10.6)$$

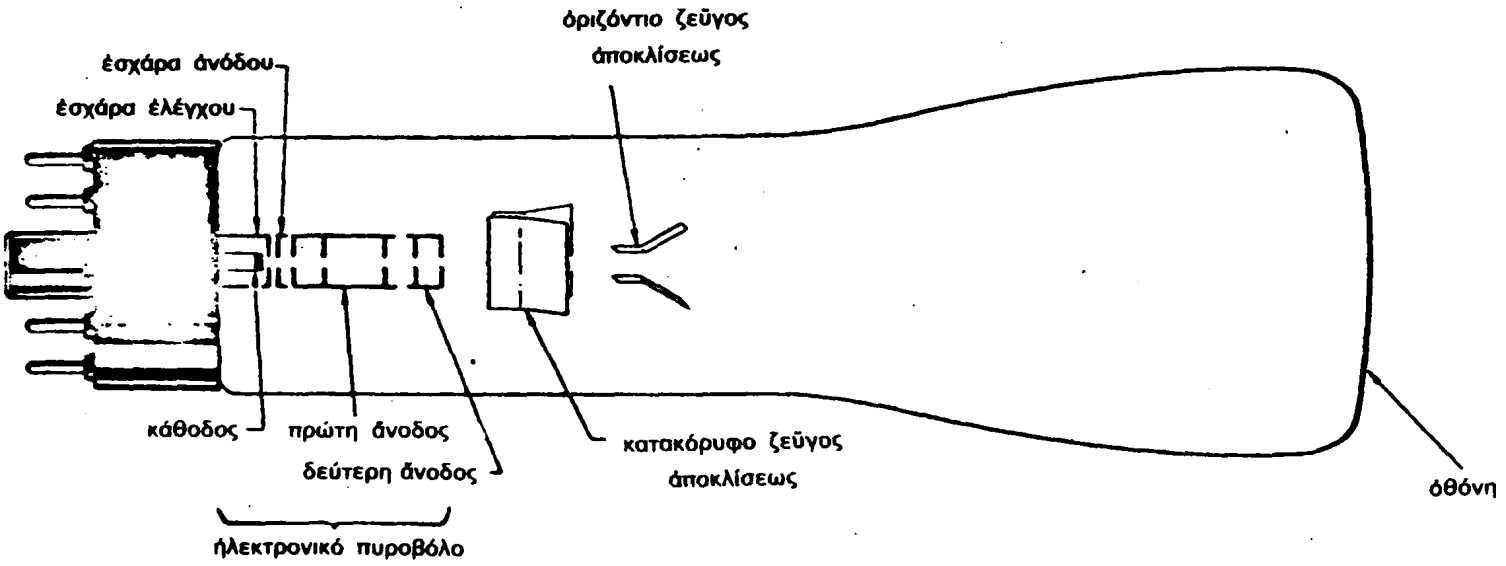
ὅπου στήν τελευταία σχέση V εἶναι ἡ ὁλική διαφορά δυναμικοῦ. Εἶναι φανερό ὅτι γιά νά ἔχει φυσική σημασία ἡ ἐξ. (10.6) θά πρέπει τό γινόμενο $-qV$ νά παίρνει θετική τιμή. Τοῦτο εἶναι δυνατό γιά θετικό φορτίο καί ἀρνητική διαφορά δυναμικοῦ ἤ ἀρνητικό φορτίο καί θετική διαφορά δυναμικοῦ. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ ἐξ. (10.6) μπορεῖ νά ἑρμηνευτεῖ ὡς μετατροπή δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ φορτίου σέ κινητική.

10-1 Ἡ Καθοδική Λυχνία

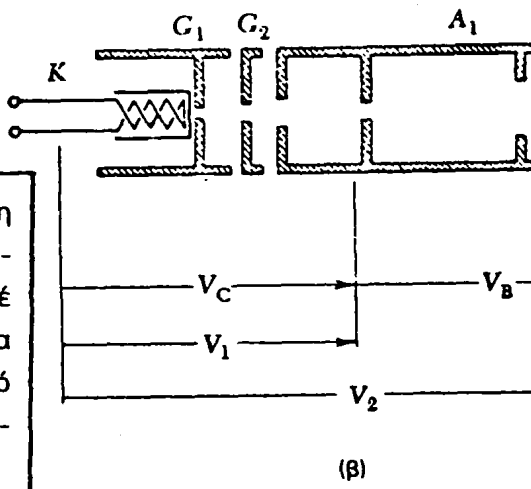
Ἡ κίνηση φορτίων σέ ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο μπορεῖ νά μελετηθεῖ μέ τήν **καθοδική λυχνία** πού σέ σύγχρονη μορφή δίνεται στό σχῆμα 10-2. Ἡ ὀνομασία «καθοδική» λυχνία βρίσκει τήν προέλευσή της σέ πειράματα ἀγωγιμότητας σέ ἀέρια ὑπό χαμηλή πίεση πού ἀπασχόλησαν τούς ἐρευνητές στά μέσα τοῦ προηγούμενου αἰώνα. Τό 1897 ὁ γερμανός φυσικός F. Braun κατασκεύασε τήν πρώτη παρόμοια διάταξη ἐλεγχόμενης δέσμης ἠλεκτρονίων καί γιά τό λόγο αὐτό ἡ καθοδική λυχνία ἀπαντᾶται συχνά στή βιβλιογραφία καί μέ τήν ὀνομασία **λυχνία ἤ σωλήνας Braun.** Σήμερα, ἡ καθοδική λυχνία ἀποτελεῖ τήν κεντρική διάταξη σέ πολλά ὄργανα μετρήσεως καί ἐλέγχου. Ἄμεση ἐφαρμογή βρίσκει στόν **καθοδικό παλμογράφο** πού θά ἔχουμε τήν εὐκαιρία νά μελετήσουμε μέ λεπτομέρεια ἀργότερα. Μέ μικρές παραλλαγές ἀπαντᾶται ὡς τερματική ὀθόνη ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, ραντάρ καί, στήν πιό γνωστή της μορφή, ὡς λυχνία τηλεοράσεως.

Ὅπως δείχνει τό σχῆμα 10-2(α), ἡ καθοδική λυχνία ἔχει τή μορφή ἀερόκενου σωλήνα, ὁ ὁποῖος περιέχει τά στοιχεῖα γιά τή δημιουργία καί ἔλεγχο μιᾶς λεπτῆς δέσμης ἠλεκτρονίων. Στίς περισσότερες καθοδικές λυχνίες ἡ πίεση στό ἐσωτερικό τοῦ σωλήνα εἶναι τῆς τάξης τῶν 10^{-7} torr, ὥστε ἡ πιθανότητα συγκρούσεως ἑνός ἠλεκτρονίου τῆς δέσμης μέ μόρια τοῦ περιβάλλοντος νά εἶναι πρακτικά ἀμελητέα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 10-2 (α) Καθοδική λυχνία.
(β) Ἠλεκτρονικό πυροβόλο καθοδικῆς λυχνίας.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Τό ὑψηλό κενό καί ἡ ἐκτεταμένη ἐπίπεδη ἐπιφάνεια στήν ὀθόνη τῆς λυχνίας κάνει τό χειρισμό της ἀρκετά ἐπικίνδυνο. Ἐξασθένηση τοῦ γυάλινου περιβλήματος ἀπό μηχανική διάβρωση ἤ κραδασμό μπορεῖ νά ὁδηγήσει σέ ἰσχυρή ἔκρηξη μέ ἀντίστοιχη διασπορά θρυμάτων γυαλιοῦ. Ἡ καθοδικήλυχνία πού θά χρησιμοποίσετε στό ἐργαστήριο περιβάλλεται ἀπό ἕνα προστατευτικό κάλυμα. ΜΗΝ ΑΦΑΙΡΕΣΕΤΕ ΓΙΑ ΚΑΝΕΝΑ ΛΟΓΟ ΤΟ ΠΡΟΣΤΑΤΕΥΤΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ ΤΗΣ ΛΥΧΝΙΑΣ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

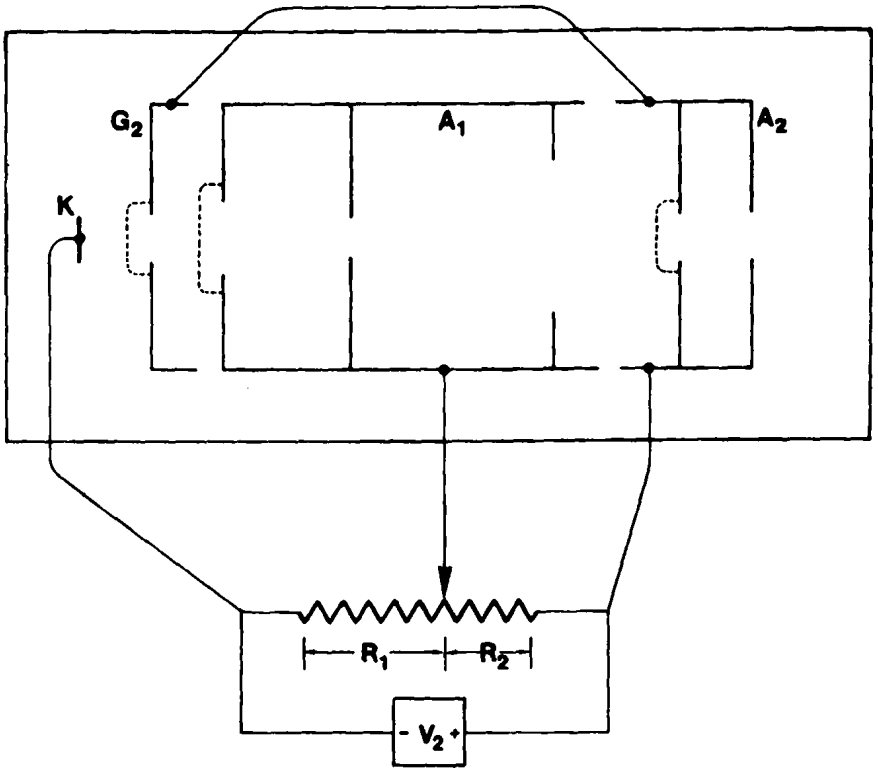
Ἡ λεπτή δέσμη τῶν ἠλεκτρονίων δημιουργεῖται ἀπό μιά διάταξη ἠλεκτροδίων στό ἕνα ἄκρο τοῦ σωλήνα πού δίνεται σέ μεγένθυση στό σχῆμα 10-2(β). Ἡ διάταξη αὐτή ἀναφέρεται συνήθως μέ τήν ὀνομασία **ἠλεκτρονικό πυροβόλο.** Πηγή τῶν ἠλεκτρονίων ἀποτελεῖ ἡ κάθοδος Κ πού συνήθως ἔχει τή μορφή ἑνός μικροῦ κυλίνδρου. Στό ἐσωτερικό τοῦ κυλίνδρου καί μονωμένο ἠλεκτρικά μέ ἕνα μανδύα ἀπό κεραμικό ὑλικό βρίσκεται ἕνα νῆμα πού μέ διοχέτευση ἐναλλασσόμενου ρεύματος θερμαίνει τήν κάθοδο. Στίς συνήθεις καθοδικές λυχνίες ἡ ἐναλλασσόμενη τάση θερμάνσεως τῆς καθόδου εἶναι τῆς τάξης τῶν 6 V ἐνῶ ἡ θερμοκρασία λειτουργίας τῆς καθόδου γύρω στούς 1200 K. Στό ἐξωτερικό τῆς καθόδου ἔχει ἀποτεθεῖ ὑλικό μέ μικρό ἔργο ἐξόδου ἠλεκτρονίων (συνήθως ὀξείδια τοῦ βαρίου ἤ τοῦ στροντίου). Μέ τή θέρμανση τῆς καθόδου ὁρισμένα ἠλεκτρόνια ἀποκτοῦν κινητική ἐνέργεια ὥστε νά ξεφύγουν ἀπό τό ὑλικό. Ἔτσι στό γύρω χῶρο δημιουργεῖται ἕνα νέφος ἠλεκτρονίων μέ πυκνότητα πού ἐξαρτᾶται ἀπό τή θερμοκρασία τῆς καθόδου καί τό ἠλεκτροστατικό πεδίο πού τυχόν ὑπάρχει στή γειτονία της. Τό φαινόμενο εἶναι γνωστό ὡς **θερμιονική ἐκπομπή.**

Τέσσερα ὁμοαξονικά κυλινδρικά ἠλεκτρόδια μέ κυκλικά διαφράγματα περιβάλλουν τήν κάθοδο, ὅπως εἰκονίζεται σέ διατομή στό σχῆμα 10-2(β). Τό ἠλεκτρόδιο G_1, πού ὀνομάζεται **ἐσχάρα ἐλέγχου** λειτουργεῖ μέ ἀρνητικό δυναμικό ὡς πρός τήν κάθοδο (στήν περιοχή μεταξύ 5 καί 20 V). Μέ τόν τρόπο αὐτό τείνει νά ἀπωθήσει τά ἠλεκτρόνια πρός τήν κάθοδο. Ἔτσι, μέ μεταβολή τοῦ δυναμικοῦ τῆς ἐσχάρας ἐλέγχου εἶναι δυνατόν νά περιορισθεῖ ἤ νά αὐξηθεῖ ὁ ἀριθμός τῶν ἠλεκτρονίων καί ἐπομένως ἡ ἔνταση τῆς δέσμης πού δημιουργεῖ τό πυροβόλο. Τά ἠλεκτρόδια G_2 καί A_2 εἶναι συνδεδεμένα ἐσωτερικά μέ ἀγωγό ἀμελητέας ἀντιστάσεως. Κατά τή λειτουργία τῆς λυχνίας στά ἠλεκτρόδια αὐτά ἀναπτύσσεται θετικό δυναμικό V_2 ὡς πρός τήν κάθοδο Κ μέ τιμή μερικῶν ἑκατοντάδων ἤ ἀκόμη καί χιλιάδων volt. Τό ἠλεκτρικό πεδίο πού δημιουργεῖται μέ τόν τρόπο αὐτό ἐπιταχύνει τά ἠλεκτρόνια κατά μῆκος τοῦ κοινοῦ ἄξονα τῶν ἠλεκτροδίων. Τό ἠλεκτρόδιο A_1 διατηρεῖται σέ δυναμικό μέ τιμή V_1 ἐνδιάμεση μεταξύ τοῦ δυναμικοῦ τῆς καθόδου καί τῆς ἀνόδου. Τό ἠλεκτρικό πεδίο πού δημιουργεῖται ἀπό τήν ὅλη διάταξη τοῦ πυροβόλου ἠλεκτρονίων ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν **ἑστίαση** τῶν ἠλεκτρονίων σέ μιά λεπτή δέσμη μέ ἐγκάρσια διατομή πού καθορίζεται οὐσιαστικά ἀπό τό μέγεθος τοῦ διαφράγματος στό ἠλεκτρόδιο G_1. Ἕνα ἁπλό παράδειγμα **ἠλεκτροστατικοῦ φακοῦ** τῆς μορφῆς αὐτῆς ἔχουμε ἤδη μελετήσει στό Πείραμα 3-2. Τό πείραμα πού ἀκολουθεῖ μελετᾶ μέ ἤδη γνωστές μεθόδους τό ἀντίστοιχο ἠλεκτρικό πεδίο τοῦ ἠλεκτρονικοῦ πυροβόλου στήν καθοδική λυχνία.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-1. ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΠΥΡΟΒΟΛΟ ΚΑΘΟΔΙΚΗΣ ΛΥΧΝΙΑΣ

Χαράξτε μέ μεταλλική μελάνη σέ ἀγώγιμο χαρτί τή διατομή τοῦ ἠλεκτρονικοῦ πυροβόλου πού δίνεται στό σχῆμα 10-3. Βεβαιωθεῖτε ὅτι ἔχετε συνδέσει ἐξωτερικά τό ἄνω καί κάτω μέρος τῆς διατομῆς κάθε ἠλεκτροδίου ὅπως δείχνουν οἱ διακεκομμένες γραμμές τοῦ σχήματος. Χρησι-



ΣΧΗΜΑ 10-3 Διατομή ἠλεκτρονικοῦ πυροβόλου. Οἱ διακεκομένες γραμμές ἀντιπροσωπεύουν ἐξωτερική σύνδεση στή διατομή κάθε ἠλεκτροδίου.

μοποιεῖστε ἕνα ροοστάτη μέ ἐνδιάμεση ἐπαφή καί ὁλική ἀντίσταση $R \simeq 1$ ΜΩ.

- Προσδιορίστε τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες καί χαράξτε τίς δυναμικές γραμμές γιά σημεῖα τῆς ἐνδιάμεσης ἐπαφῆς, τέτοια ὥστε $R_2/R_1=3$ καί $R_2/R_1=8$. Σχολιάστε τό ἀποτέλεσμα.

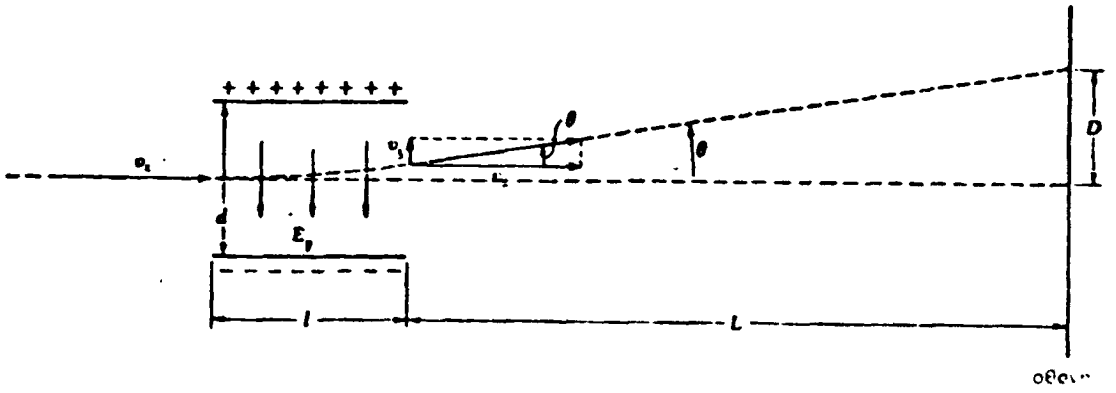
Ὅπως θά δοῦμε πειραματικά ἀργότερα καθοριστικό ρόλο στήν ἐστίαση τῆς δέσμης παίζει ὁ λόγος τῶν δυναμικῶν V_1/V_2. Ἡ λεπτή δέσμη ἠλεκτρονίων πού δημιουργεῖται μέ τόν τρόπο αὐτό ἀπό τό πυροβόλο διατρέχει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τόν ἄξονα τῆς καθοδικῆς λυχνίας καί προσπίπτει στήν ἐπίπεδη ἐπιφάνεια πού στό σχῆμα 10-2(α) ἀναφέρεται ὡς **ὀθόνη.** Τό ἐσωτερικό τῆς ὀθόνης εἶναι ἐπιστρωμένο μέ φωσφορίζουσα οὐσία ἡ ὁποία μέ τήν πρόσπτωση ἠλεκτρονίων ἐκπέμπει φῶς†. Ἐπιπλέον, στήν ἐσωτερική ἐπιφάνεια τῆς λυχνίας ὑπάρχει μιά λεπτή ἐπίστρωση ἀπό ἀγώγιμο γραφίτη. Ὁ ρόλος τῆς ἐπιστρώσεως αὐτῆς εἶναι πολλαπλός. Εἶναι ἠλεκτρικά συνδεδεμένη μέ τήν ἄνοδο καί ἀποτελεῖ ἐπέκτασή της, ἐνῶ ταυτόχρονα θωρακίζει τόν ἐσωτερικό χῶρο τῆς λυχνίας καί ἀπαλλάσσει τή δέσμη ἀπό τήν ἐπίδραση ἐξωτερικῶν ἠλεκτρικῶν πεδίων. Συλλέγει ἠλεκτρόνια, τά ὁποῖα ἐκπέμπονται ἀπό τή φωσφορίζουσα οὐσία κατά τήν πρόσπτωση τῆς δέσμης. Τέλος κάνει τό γυάλινο περίβλημα ἀδιαφανές καί βελτιώνει ἔτσι τή φωτεινότητα τῆς εἰκόνας στήν ὀθόνη.

Ἡ εὐαισθησία τῆς καθοδικῆς λυχνίας ὀφείλεται κατά κύριο λόγο σέ δύο ζεύγη κατακόρυφων καί ὁριζόντιων πλακῶν, πού, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 10-2(α), περιβάλλουν τή δέσμη. Μέ τήν ἀνάπτυξη διαφορᾶς δυναμικοῦ στίς πλάκες τοῦ κατακόρυφου ἤ του ὁριζόντιου ζεύγους δημιουργεῖται ἠλεκτρικό πεδίο κάθετο πρός τόν ἄξονα τῆς λυχνίας μέ ἀποτέλεσμα ἡ δέσμη νά ἀποκλίνει ἀντίστοιχα κατά τήν ὁριζόντια ἤ κατακόρυφη διεύθυνση. Κατά τόν ἴδιο τρόπο βέβαια συμπεριφέρεται καί ἡ φωτεινή κηλίδα πού δημιουργεῖ ἡ δέσμη στήν ὀθόνη τῆς λυχνίας. Ἡ συμπεριφορά τῆς δέσμης κατά τή διέλευσή της μεταξύ τῶν ὁριζόντιων πλακῶν ἀναλύεται στό σχῆμα 10-4.

Ἡ ἐνέργεια ἑνός ἠλεκτρονίου πού ἐκτοξεύεται ἀπό τό πυροβόλο τῆς λυχνίας ἔχει ταχύτητα πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό δυναμικό V_2 τῆς ἀνόδου ὡς



ΣΧΗΜΑ 10-4 Τροχιά τῆς δέσμης ἠλεκτρονίων στήν καθοδική λυχνία κατά τή διέλευσή της διαμέσου κατακόρυφου ἠλεκτρικοῦ πεδίου.

† Τό φαινόμενο ὀφείλεται στή διέγερση τῶν ἀτόμων τοῦ ὑλικοῦ σέ ἀνώτερες ἐνεργειακές καταστάσεις. Κατά τήν ἐπαναφορά τῶν ἀτόμων στή βασική τους κατάσταση ἡ περίσσεια ἐνέργειας ἐκπέμπεται ὡς ἠλεκτρομαγνητική ἀκτινοβολία στήν περιοχή τοῦ ὁρατοῦ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πρός τήν κάθοδο. Σέ ἕνα σύστημα συντεταγμένων μέ τόν ἄξονα x κατά τήν ὁριζόντια διεύθυνση, τόν ἄξονα y κατά τήν κατακόρυφη καί τόν ἄξονα z κατά τόν ἄξονα τῆς λυχνίας, μποροῦμε νά γράψουμε ἀπό τήν ἐξ. (10.6)

$$\tfrac{1}{2} m v_z^2 = eV_2 \tag{10.7}$$

ὅπου m καί $-e$ εἶναι ἀντίστοιχα ἡ μάζα καί τό φορτίο τοῦ ἠλεκτρονίου. Ὅταν τό ἠλεκτρόνιο ἐγκαταλείπει τήν ἄνοδο οἱ δύο ἄλλες συνιστῶσες τῆς ταχύτητάς του v_x, v_y ἔχουν μηδενική τιμή καί, ἄν τό πυροβόλο εἶναι εὐθυγραμμισμένο μέ τόν ἄξονα τῆς λυχνίας, ἡ τροχιά του καταλήγει στό κέντρο τῆς ὀθόνης.

Ἡ ἀνάπτυξη διαφορᾶς δυναμικοῦ V_d στό ὁριζόντιο ζεῦγος ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή δημιουργία ἑνός κατακόρυφου ἠλεκτρικοῦ πεδίου E_y μέ τιμή

$$E_y = \frac{V_d}{d} \tag{10.8}$$

ὅπου d ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο πλακῶν. Τό ἠλεκτρικό πεδίο ἐπενεργεῖ στό ἠλεκτρόνιο μέ δύναμη

$$F_y = -eE_y \tag{10.9}$$

πού κατά τή διέλευσή του ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νά τό ἐπιταχύνει ἀπό μηδενική ἐγκάρσια ταχύτητα ἕως κάποια ταχύτητα v_y. Ἔτσι, ἀφοῦ ἐγκαταλείψει τήν περιοχή τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου E_y καί μέχρι νά προσπέσει στήν ὀθόνη, τό ἠλεκτρόνιο κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα

$$\mathbf{v} = v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}} \tag{10.10}$$

σέ εὐθύγραμμη τροχιά πού, ὅπως ἀναλύεται διαγραμματικά στό σχῆμα 10-4, σχηματίζει γωνία θ ὡς πρός τόν ἄξονα τῆς λυχνίας, τέτοια ὥστε

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_z} \,. \tag{10.11}$$

Ἡ ταχύτητα v_z πού ἔχει προσδώσει τό πυροβόλο στό ἠλεκτρόνιο μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ ἀμέσως ἀπό τήν ἐξ. (10.7). Ἡ ἐγκάρσια ταχύτητα v_y πού ἀποκτᾶται κατά τή διέλευση τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπό τό ὁριζόντιο ζεῦγος, ἱκανοποιεῖ τή σχέση (10.3)

$$m\frac{dv_y}{dt} = eE_y = e\frac{V_d}{d}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἤ

$$mdu_y = e\frac{V_d}{d}dt \ . \qquad (10.12)$$

Ὁλοκλήρωση τῆς τελευταίας σχέσης δίνει

$$mu_y = e\frac{V_d}{d}\Delta t \qquad (10.13)$$

ὅπου Δt εἶναι ὁ χρόνος πού ἀπαιτεῖται γιά τή διέλευση τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπό τό ὁριζόντιο ζεῦγος. Ἄν ℓ εἶναι οἱ διαστάσεις τοῦ ζεύγους κατά τόν ἄξονα τῆς λυχνίας, τότε ὁ χρόνος αὐτός δίνεται ἀπό τήν ἁπλή σχέση

$$\Delta t = \frac{\ell}{u_z} \qquad (10.14)$$

καί ἡ ἐξ. (10.13) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$u_y = \frac{e}{m}\frac{V_d}{d}\frac{\ell}{u_z} \ . \qquad (10.15)$$

Συνδιάζοντας τέλος τή σχέση αὐτή μέ τήν ἐξ. (10.7) μποροῦμε νά ἐκφράσουμε τήν ἀπόκλιση τῆς δέσμης ὡς συνάρτηση τῶν ἠλεκτρικῶν καί γεωμετρικῶν χαρακτηριστικῶν τῆς λυχνίας

$$\tan\theta = \frac{eV_d\ell}{mdu_z^2} = \frac{V_d}{V_z}\frac{\ell}{2d} \ . \qquad (10.16)$$

Ὅπως ἀναμένεται, ἡ ἀπόκλιση τῆς δέσμης αὐξάνει μέ ἀντίστοιχη αὔξηση τοῦ δυναμικοῦ V_d πού ἐφαρμόζεται στό ζεῦγος. Εἶναι ἐπίσης ἀνάλογη πρός τίς φυσικές διαστάσεις τοῦ ζεύγους κατά τόν ἄξονα τῆς λυχνίας (ℓ). Ἀντίθετα, ἡ ἀπόκλιση τῆς δέσμης εἶναι ἀντίστροφα ἀνάλογη πρός τό δυναμικό ἐπιταχύνσεως V_z: μικρότερο δυναμικό ἐπιταχύνσεως συνεπάγεται μικρότερη ταχύτητα τοῦ ἠλεκτρονίου κατά τόν ἄξονα z καί ἑπομένως μεγαλύτερη διάρκεια πτήσης στήν περιοχή τοῦ ἐγκάρσιου ἠλεκτρικοῦ πεδίου.

Ἡ ἐξ. (10.16) μπορεῖ νά μεταφραστεῖ εὔκολα σέ ἀπόκλιση τῆς φωτεινῆς κηλίδας πού σχηματίζεται στήν ὀθόνη τῆς λυχνίας. Ἄν D εἶναι ἡ ἀπόκλιση τῆς φωτεινῆς κηλίδας ἀπό τόν ἄξονα τῆς λυχνίας, τότε σύμφωνα μέ τή γεωμετρία τοῦ σχήματος 10-4 (παραβλέποντας τήν μικρή καμπυλότητα τῆς ὀθόνης)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\tan\theta = \frac{D}{L} \tag{10.17}$$

ὅπου L εἶναι ἡ ἀπόσταση τῆς ὀθόνης ἀπό τό ζεῦγος πού προκαλεῖ τήν ἀπόκλιση. Μέ λεπτομερέστερη ἀνάλυση προκύπτει ὅτι ἡ ἀπόσταση L πρέπει νά μετρηθεῖ ἀπό τό μέσον τοῦ ζεύγους ὡς τήν ὀθόνη. Ἡ ἀπόκλιση ἑπομένως τῆς φωτεινῆς κηλίδας μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$D = \frac{V_d}{V_2}\frac{\ell}{2d}L \ . \tag{10.18}$$

Τή σχέση αὐτή καθώς καί γενικώτερα τή λειτουργία τῆς καθοδικῆς λυχνίας θά μελετήσουμε στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-2. Η ΚΑΘΟΔΙΚΗ ΛΥΧΝΙΑ

Συνδέστε τήν καθοδική λυχνία σύμφωνα μέ τό διάγραμμα τοῦ σχήματος 10-5. Ὅπως δείχνει τό σχῆμα, οἱ ἀκροδέκτες κάθε ἠλεκτροδίου φέρουν ἰδιαίτερο κωδικό ἀριθμό καί χρῶμα. Συνδέστε τούς ἀκροδέκτες θερμάνσεως τῆς καθόδου στή λήψη 6.3 V ΕΡ. Συνδέστε τήν κάθοδο στόν ἀρνητικό πόλο τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ C. Ὁ θετικός πόλος τοῦ ἴδιου τροφοδοτικοῦ συνδέεται μέ τό ἠλεκτρόδιο ἑστιάσεως A_1 [βλ. σχῆμα 10-2(β)]. Ὁ θετικός πόλος τοῦ τροφοδοτικοῦ C συνδέεται ἐπίσης μέ τόν ἀρνητικό πόλο τοῦ τροφοδοτικοῦ B, τοῦ ὁποίου ὁ θετικός πόλος συνδέεται μέ τήν ἄνοδο τῆς λυχνίας. Μέ τόν τρόπο αὐτό τό ὁλικό δυναμικό ἐπιταχύνσεως εἶναι

$$V_2 = V_C + V_B \tag{10.19}$$

[βλ. σχῆμα 10-2(β)]. Ὁ ἔλεγχος ἐντάσεως τῆς δέσμης πραγματοποιεῖται μέ ἀνάπτυξη ἀρνητικοῦ δυναμικοῦ τῆς τάξης τῶν 4.5 V μεταξύ τῆς καθόδου καί τῆς ἐσχάρας ἐλέγχου. Γιά τό δυναμικό αὐτό χρησιμοποιεῖστε ἠλεκτρικό στοιχεῖο ἤ τροφοδοτικό ΣΡ.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μή λειτουργεῖτε ποτέ τή λυχνία μέ μηδενικό δυναμικό στήν ἐσχάρα ἐλέγχου G_1. Τοῦτο θά ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή δημιουργία ἐξαιρετικά ἰσχυρῆς δέσμης ἠλεκτρονίων, ἡ ὁποία εἶναι δυνατόν νά καταστρέψει τοπικά τή φωσφορίζουσα οὐσία τῆς ὀθόνης.

Στό σχῆμα 10-5, ἡ γείωση τοῦ τροφοδοτικοῦ B (ἡ ὁποία εἶναι συνδεδεμένη μέ τή γείωση τοῦ ἐργαστηρίου) ἔχει συνδεθεῖ μέ τόν θετικό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πόλο. Τήν ἴδια κοινή γείωση χρησιμοποιοῦν ἐπίσης ὡς σημεῖο ἀναφορᾶς οἱ πλάκες ἀποκλίσεως τῆς λυχνίας.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μέ τή συνδεσμολογία τοῦ σχήματος 10-5, ἕνα ἀρνητικό δυναμικό ἀρκετῶν ἑκατοντάδων volt ἐμφανίζεται στά ἄκρα τοῦ ἡλεκτρικοῦ στοιχείου πολώσεως τῆς ἐσχάρας ἐλέγχου. **Ἀποφεύγετε κάθε ἐπαφή μέ τούς ἀκροδέκτες τοῦ στοιχείου πού μπορεῖ νά προκαλέσει ἰσχυρό ἤ ἀκόμη καί θανατηφόρα σόκ.**

Συνδέστε ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ στούς ἀκροδέκτες $-x$ καί x τοῦ ὁριζόντιου ζεύγους. Ἄν δέν διαθέτετε τροφοδοτικό ΣΡ μπορεῖτε νά χρησιμοποιήσετε ἕνα ἡλεκτρικό στοιχεῖο 45 V μέ ἐνδιάμεση ἐπαφή καί ροοστάτη, σύμφωνα μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 10-6. Βεβαιωθεῖτε ὅτι κατανοεῖτε τή λειτουργία τῆς διατάξεως. Στήν περίπτωση αὐτή μετρεῖστε τή διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν πλακῶν μέ ἕνα βολτόμετρο.

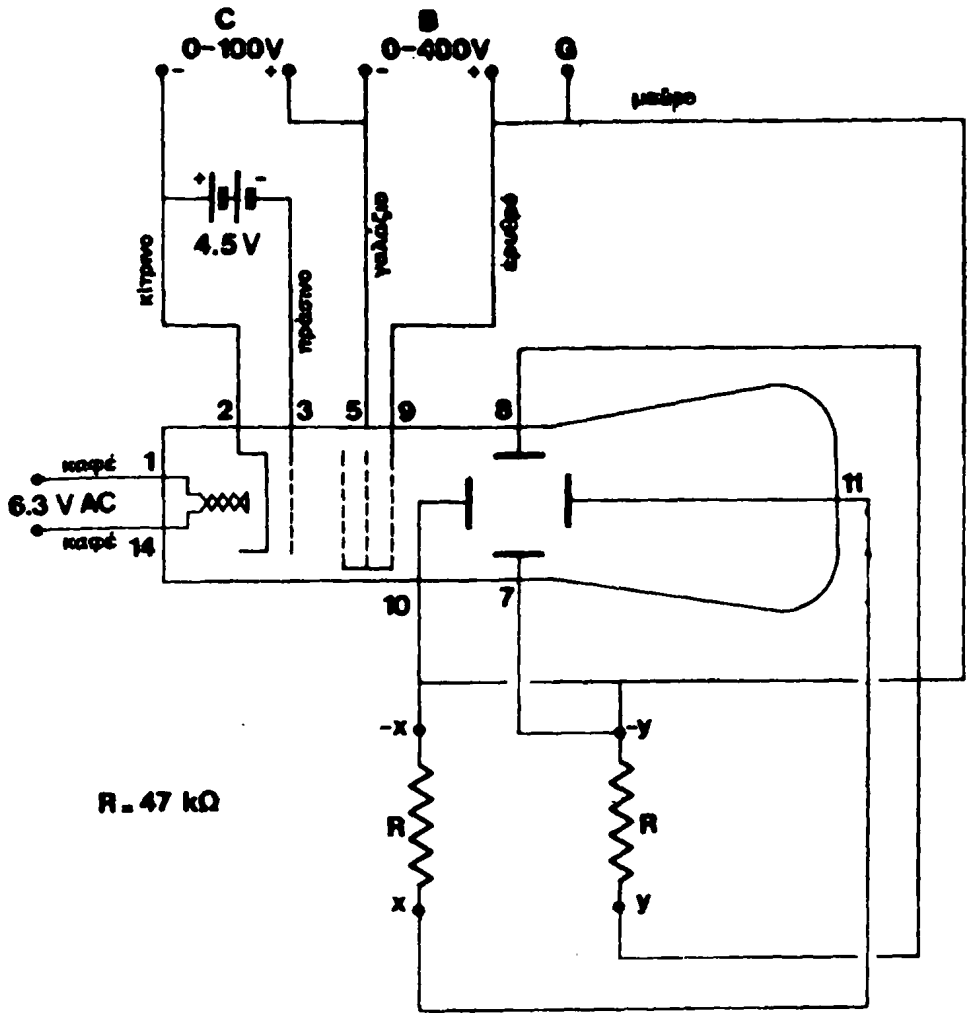
– Ἐνεργοποιεῖστε τήν τροφοδοσία 6.3 V AC γιά τή θέρμανση τῆς καθόδου. Παρατηρεῖστε τήν ἐρυθρή φωταύγεια κοντά στή βάση τῆς λυχνίας πού δημιουργεῖ ἡ ἀντίσταση θερμάνσεως. Ἐνεργοποιεῖστε τό τροφοδοτικό B καί ἀναπτύξτε διαφορά δυναμικοῦ $V_B \simeq 400$ V. Ἐνεργοποιεῖστε τό τροφοδοτικό C καί ἀναπτύξτε δυναμικό V_C τέτοιο ὥστε νά ἐπιτύχετε μιά λεπτή φωτεινή κηλίδα στήν ὀθόνη τῆς λυχνίας. Καταγράψτε τό δυναμικό ἐπιταχύνσεως $V_2 = V_C + V_B$ καί τό δυναμικό ἑστιάσεως $V_1 = V_C$. Αὐξεῖστε τό δυναμικό πολώσεως τῆς ἐσχάρας ἐλέγχου G_1 καί καταγράψτε τό δυναμικό V_G γιά τό ὁποῖο ἐξαφανίζεται ἡ φωτεινή κηλίδα.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά τρεῖς ἤ τέσσερις μικρότερες τιμές τοῦ δυναμικοῦ V_B. Τί συμπεραίνετε γιά τό λόγο V_1/V_2, ὁ ὁποῖος δημιουργεῖ τήν καλύτερη ἑστίαση τῆς δέσμης; Πῶς μεταβάλλεται τό δυναμικό V_G σέ σχέση μέ τό δυναμικό ἐπιταχύνσεως V_2;

Ξαναγυρίστε στή συνθήκη λειτουργίας γιά τό μέγιστο δυναμικό V_B τῆς προηγούμενης διεργασίας. Ἀναπτύξτε κάποια διαφορά δυναμικοῦ V_d στό κατακόρυφο ζεῦγος καί μετρεῖστε τήν ὁριζόντια ἀπόκλιση D τῆς φωτεινῆς κηλίδας. Ἐπαναλάβετε τήν ἐργασία γιά τουλάχιστον 8 τιμές τοῦ δυναμικοῦ V_d καλύπτοντας ὅλο τόν ὁριζόντιο ἄξονα τῆς ὀθόνης. Χρησιμοποιεῖστε τήν τιμή πού δίνει ὁ κατασκευαστής γιά τήν ἀπόσταση L μεταξύ τῆς ὀθόνης καί τοῦ κατακόρυφου ζεύγους καί ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς συναρτήσεως $\tan\theta$. Δῶστε σέ γραφική παράσταση τή συνάρτηση $\tan\theta$ ὡς πρός τό δυναμικό ἀποκλίσεως V_d.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά ὅλες τίς τιμές τοῦ δυναμικοῦ V_B πού χρησιμοποιήσατε στό πρῶτο μέρος τοῦ πειράματος. Σέ κάθε περίπτωση ρυθμίστε τήν πόλωση τῆς ἐσχάρας ἐλέγχου ὥστε ἡ φωτεινότητα τῆς κηλίδας στήν ὀθόνη τῆς λυχνίας νά εἶναι ἱκανοποιητική.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

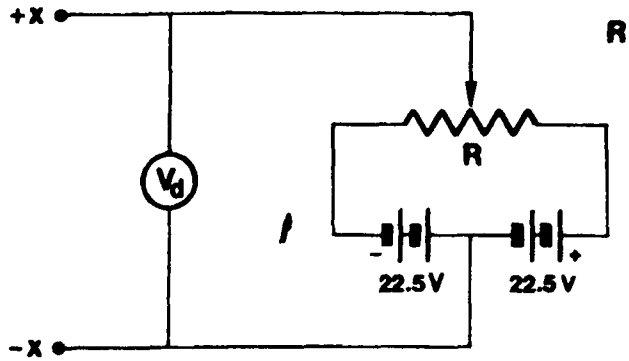


ΣΧΗΜΑ 10-5 Σύνδεση καθοδικῆς λυχνίας γιά τή μελέτη τῆς ἀποκλίσεως ἠλεκτρονίων σέ ἐγκάρσιο ἠλεκτρικό πεδίο.

– Γιά καθεμιά ἀπό τίς προηγούμενες μετρήσεις ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τήν ποσότητα $V_2 \tan\theta$ ὡς συνάρτηση τοῦ δυναμικοῦ ἀποκλίσεως V_d. Ἀπό τίς γραφικές παραστάσεις προσδιορίστε τό μέγεθος ℓ/d γιά τό ζεῦγος πού δημιουργεῖ τήν ἀπόκλιση τῆς δέσμης. Συγκρίνετε τήν τιμή πού προκύπτει μέ τήν τιμή πού δίνει ὁ κατασκευαστής καί σχολιᾶστε τό ἀποτέλεσμα.

– Ὑπολογίστε τήν **εὐαισθησία** τῆς λυχνίας σας **ὡς πρός τό δυναμικό ἀποκλίσεως**, ἤτοι τήν ποσότητα V_d/D σέ μονάδες V/cm, γιά κάθε τιμή τοῦ δυναμικοῦ ἐπιταχύνσεως V_2. Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματα σέ γραφική παράσταση. Σχολιᾶστε τήν καμπύλη πού προκύπτει.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-6 Διάταξη γιά τήν άνάπτυξη διαφοράς δυναμικοῦ στίς πλάκες άποκλίσεως τῆς καθοδικῆς λυχνίας.

10-2 Κίνηση Φορτισμένων Σωματίων σέ Όμογενές Στατικό Μαγνητικό Πεδίο

Ή έξ. (10.2) παίρνει ίδιαίτερα άπλή μορφή γιά τήν περιγραφή τῆς κινήσεως ένός φορτισμένου σωματίου σέ όμογενές στατικό μαγνητικό πεδίο. Καθόσον ή δύναμη εἶναι πάντα κάθετη πρός τήν ταχύτητα τοῦ σωματίου, τό ἔργο πού καταναλώνεται εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν. Ή ένέργεια έπομένως καθώς καί ή ταχύτητα (κατά άπόλυτη τιμή) τοῦ σωματίου παραμένει σταθερή. Μποροῦμε ἔτσι νά γράψουμε τήν έξίσωση τῆς κινήσεως ὡς

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{10.20}$$

ἤ

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_B \tag{10.21}$$

ὅπου

$$\omega_B = \frac{qB}{m} \,. \tag{10.22}$$

Οἱ προηγούμενες έξισώσεις ἰσχύουν γιά ταχύτητα τοῦ φορτισμένου σωματίου μικρή σέ σχέση μέ τήν ταχύτητα τοῦ φωτός. Τοῦτο ὀφείλεται στή χρησιμοποίηση τῆς σχέσης

$$p = mu \tag{10.23}$$

γιά τή μετάβαση άπό τήν έξ. (10.2) στήν έξ. (10.20). Στή σχετικιστική περιοχή ($u \simeq c$), ή διόρθωση πού ἀπαιτεῖται εἶναι ἁπλή. Καθόσον ή ταχύτητα παραμένει σταθερή, μποροῦμε νά γράψουμε

$$\mathbf{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \mathbf{u} \equiv \gamma m \mathbf{u} \tag{10.24}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί στή θέση τῆς ἐξ. (10.20)

$$\gamma m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \ . \tag{10.25}$$

Στίς δύο τελευταῖες σχέσεις ἔχει χρησιμοποιηθεῖ ὁ καθιερωμένος συμβολισμός

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \ . \tag{10.26}$$

Μέ τόν τρόπο αὐτό ἡ ἐξ. (10.21) περιγράφει πάλι τή χρονική μεταβολή (κατά διεύθυνση) τῆς ταχύτητας ἐνῶ τό ἄνυσμα $\boldsymbol{\omega}_B$ τῆς ἐξ. (10.22) τροποποιεῖται ὡς

$$\boldsymbol{\omega}_B = \frac{q\mathbf{B}}{\gamma m} \ . \tag{10.27}$$

Ἡ γενική κίνηση πού περιγράφεται ἀπό τήν ἐξ. (10.21) εἶναι ὁμαλή κατά τή διεύθυνση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** καί κυκλική κατά διεύθυνση κάθετη πρός αὐτό. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά ἐπιβεβαιώσει μέ ἀντικατάσταση ὅτι ἡ γενική λύση τῆς ἐξ. (10.21) δίνεται ἀπό τό πραγματικό μέρος τῆς συναρτήσεως

$$\mathbf{u}(t) = u_{\parallel}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_3 + \omega_B R(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 - i\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2)e^{-i\omega_B t} \tag{10.28}$$

ὅπου i εἶναι ἡ φανταστική μονάδα, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_3$ τό μοναδιαῖο ἄνυσμα κατά τή διεύθυνση τοῦ πεδίου **B** καί $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1$, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2$ δύο μοναδιαῖα ἀνύσματα, ἀμοιβαῖα κάθετα καί κάθετα πρός τό μαγνητικό πεδίο. Ἡ σταθερή ταχύτητα $u_{\parallel}$ κατά τή διεύθυνση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐξαρτᾶται ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες ἐνῶ ἡ ποσότητα R (μέ διαστάσεις μήκους) ἀντιπροσωπεύει τήν ἀκτίνα τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς σέ ἕνα ἐπίπεδο κάθετο πρός τό πεδίο. Ἡ κυκλική τροχιά εἶναι δεξιόστροφη σέ σχέση μέ τή διεύθυνση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου γιά θετικό φορτίο καί ἀριστερόστροφη γιά ἀρνητικό. Ἡ ἀκτίνα R μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ ἀναλυτικά ἄν παρατηρήσουμε ὅτι ἡ ποσότητα $\omega_B R$ στή συνάρτηση τῆς ἐξ. (10.28) ἀντιπροσωπεύει τή σταθερή (κατά ἀπόλυτη τιμή) ταχύτητα $u_{\perp}$ στό ἐπίπεδο πού ὁρίζουν τά ἀνύσματα $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1$ καί $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2$. Τοτε ἀπό τήν ἐξ. (10.27)

$$\frac{RqB}{\gamma m} = u_{\perp}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ή

$$R = \frac{\gamma m u_{\perp}}{qB} . \tag{10.29}$$

Η κίνηση φορτίου (καί συγκεκριμένα τοῦ ήλεκτρονίου) σέ ένα όμογενές στατικό μαγνητικό πεδίο μπορεῖ νά μελετηθεῖ μέ τή βοήθεια τῆς καθοδικῆς λυχνίας πού έξετάσαμε καί χρησιμοποιήσαμε στήν προηγούμενη παράγραφο. Είδικότερα θά μελετήσουμε τήν έπίδραση ένός μαγνητικοῦ πεδίου μέ διεύθυνση κάθετη πρός τή δέσμη ήλεκτρονίων τῆς καθοδικῆς λυχνίας. Στό σύστημα συντεταγμένων πού χρησιμοποιήσαμε στήν προηγούμενη παράγραφο, θά θεωρήσουμε ένα όμογενές στατικό μαγνητικό πεδίο κατά τόν άξονα x. Στήν περίπτωση αὐτή ή ταχύτητα $u_{\parallel}$ (= u_x) τοῦ ήλεκτρονίου στήν έξ. (10.28) μηδενίζεται καί ή κίνηση τοῦ ήλεκτρονίου, στήν περιοχή τοῦ πεδίου, εἶναι κυκλική στό έπίπεδο y–z.

Η τροχιά ένός ήλεκτρονίου κατά μῆκος τοῦ άξονα τῆς καθοδικῆς λυχνίας δίνεται στό σχῆμα 10-7. Κατά τή διέλευσή του διαμέσου τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τό όποῖο έκτείνεται σέ περιοχή μήκους ℓ κατά τόν άξονα τῆς λυχνίας, τό ήλεκτρόνιο άκολουθεῖ κυκλική τροχιά άκτίνας R καί άποκλίνει άπό τήν άρχική του διεύθυνση κατά γωνία θ. Στή συνέχεια έκτελεῖ κίνηση κατά εὐθύγραμμη τροχιά καί καταλήγει στήν όθόνη σέ άπόσταση D άπό τόν άξονα τῆς λυχνίας. Τό διάγραμμα σημειώνει άκόμη τήν άπόσταση a άπό τόν άξονα τῆς λυχνίας στήν όποία βρίσκεται τό ήλεκτρόνιο κατά τήν έξοδό του άπό τήν περιοχή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Γιά τή συνήθη λειτουργία τῆς καθοδικῆς λυχνίας, ή σχετικιστική διόρθωση τῆς έξ. (10.29) δέν εἶναι άπαραίτητη†. Μποροῦμε έπομένως νά γράψουμε

---

† Η κινητική ένέργεια τοῦ ήλεκτρονίου κατά τήν έξοδό του άπό τό ήλεκτρονικό πυροβόλο εἶναι

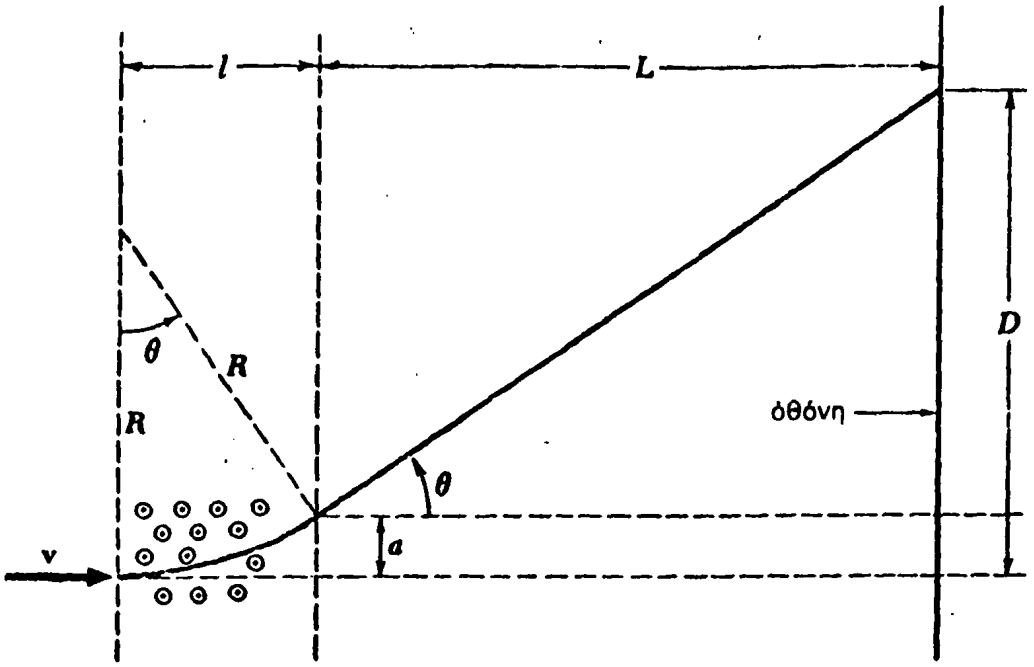
$$\tfrac{1}{2} m u^2 = eV_2 \tag{10.31}$$

όπου V_2 εἶναι τό δυναμικό έπιταχύνσεως. Άπό τή σχέση αὐτή ή σχετικιστική ταχύτητα τοῦ ήλεκτρονίου ὡς πρός τήν ταχύτητα τοῦ φωτός c μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\left(\frac{u}{c}\right)^2 = \frac{2eV_2}{mc^2} . \tag{10.32}$$

Γιά τυπικό δυναμικό έπιταχύνσεως V_2 = 500 V, ή δυναμική ένέργεια πού καταναλίσκεται στό ήλεκτρόνιο εἶναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-7 Τροχιά ἠλεκτρονίου στήν καθοδική λυχνία ὑπό τήν ἐπίδραση ἐγκάρσιου μαγνητικοῦ πεδίου. Τό σύμβολο ⊙ ἀντιπροσωπεύει μαγνητικό πεδίο κάθετο πρός τό ἐπίπεδο τοῦ σχήματος καί μέ φορά πρός τά ἄνω.

$$R = \frac{mu}{eB} \tag{10.30}$$

ὅπου $u = u_z$ εἶναι ἡ ταχύτητα πού προσδίδει τό ἠλεκτρονικό πυροβόλο στό ἠλεκτρόνιο.

$$eV_2 = 500\ eV \tag{10.33}$$

σέ μονάδες **ἠλεκτρονιοβόλτ** (eV) τῆς Ἀτομικῆς Φυσικῆς. (Ἡ μονάδα αὐτή ὁρίζεται ὡς ἡ ἐνέργεια πού ἀποκτᾶ σωμάτιο φορτισμένο μέ ἕνα ἠλεκτρονικό φορτίο κατά τήν ἐπιτάχυνσή του ἀπό διαφορά δυναμικοῦ 1 V). Στίς ἴδιες μονάδες ἡ ἐνέργεια τῆς μάζας ἀδρανείας τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι

$$mc^2 = 511\,000\ eV. \tag{10.34}$$

Μέ τά δύο τελευταῖα μεγέθη ἡ ἐξ. (10.31) παίρνει τήν τιμή

$$\left(\frac{u}{c}\right)^2 = \frac{1}{511} \simeq 0.002$$

πού δικαιολογεῖ τήν ἀντικατάσταση $\gamma = 1$ στήν ἐξ. (10.29).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ή γωνία άποκλίσεως θ τοῦ ήλεκτρονίου μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ εὔκολα ἀπό τή γεωμετρία τοῦ σχήματος 10-7 ὡς

$$\sin\theta = \frac{\ell}{R} = \frac{\ell eB}{mu} \tag{10.35}$$

ἐνῶ ή παράλληλη μετατόπιση τῆς δέσμης α κατά τή στιγμή πού ἐγκαταλείπει τήν περιοχή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ὡς

$$a = R - R\cos\theta = \frac{mu}{eB}(1 - \cos\theta) \ . \tag{10.36}$$

Ή ἀπόκλιση D τοῦ σημείου τῆς φωτεινῆς κηλίδας στήν ὀθόνη ἀπό τόν ἄξονα τῆς λυχνίας δίνεται τέλος ἀπό τήν ἔκφραση

$$D = L\tan\theta + a \tag{10.37}$$

ὅπου L εἶναι οἱ διαστάσεις τοῦ χώρου, κατά μῆκος τοῦ ἄξονα τῆς λυχνίας, πού εἶναι ἀπαλλαγμένος ἀπό μαγνητικό πεδίο.

Ή ἀπόκλιση D στήν ἐξ. (10.37) μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ ὡς συνάρτηση τῶν γεωμετρικῶν χαρακτηριστικῶν τῆς λυχνίας μέ ἀντικατάσταση τῶν ἐξ. (10.35) καί (10.36). Τό ἀποτέλεσμα ὅμως ἀπλοποιεῖται σημαντικά ἄν χρησιμοποιήσουμε τό γεγονός ὅτι ή τυπική γωνία ἀποκλίσεως θ εἶναι ἀρκετά μικρή. Ἔτσι, μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τήν προσέγγιση

$$\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta \tag{10.38α}$$

καί

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} \ . \tag{10.38β}$$

Μέ τόν τρόπο αὐτό ή ἀπόκλιση D παίρνει τή μορφή

$$D = \ell\theta + \tfrac{1}{2}R\theta^2 = \frac{\ell eB}{mu}\left(L + \frac{\ell}{2}\right) \tag{10.39}$$

ἤ, χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (10.31) γιά τόν ὑπολογισμό τῆς ταχύτητας u,

$$D = \frac{\ell eB}{\sqrt{2meV_2}}\left(L + \frac{\ell}{2}\right) \ . \tag{10.40}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ὅπως ἀναμένεται, ἡ ἀπόκλιση τῆς δέσμης εἶναι ἀνάλογη πρός τήν ἔνταση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου Β. Εἶναι ἐπίσης ἀντίστροφα ἀνάλογη πρός τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ δυναμικοῦ ἐπιταχύνσεως. Ἡ τελευταία ἰδιότητα μπορεῖ νά συγκριθεῖ μέ τήν ἐξάρτηση τῆς ἀποκλίσεως κατά τή διέλευση τῆς δέσμης ὀπό ἡλεκτρικό πεδίο [βλ. ἐξ. (10.18)]. Ἡ διαφορά ὀφείλεται στήν ἐπιπλέον ἐξάρτηση ὡς πρός τήν ταχύτητα, τήν ὁποία περιέχει ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖ τό μαγνητικό πεδίο.

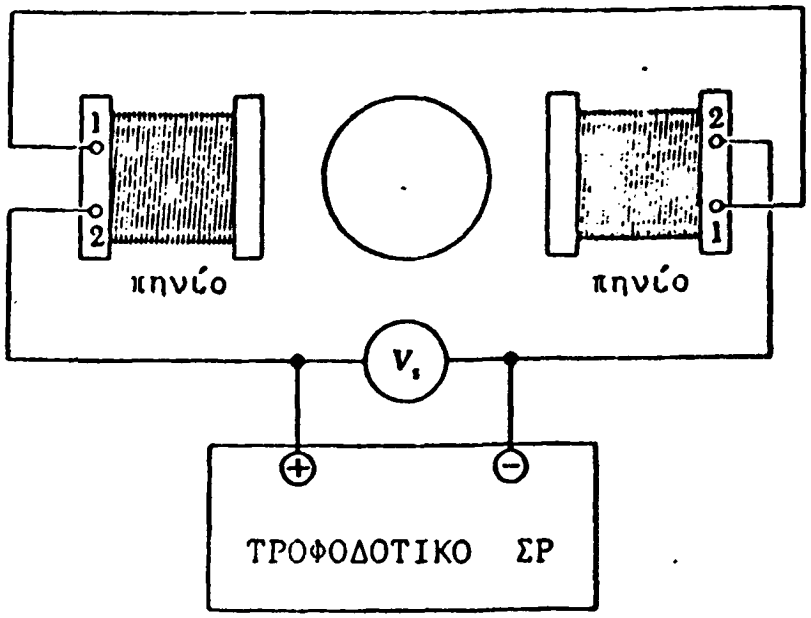
Στό πείραμα πού ἀκολουθεῖ μελετᾶται ἡ ἐπίδραση ἑνός ἐγκάρσιου μαγνητικοῦ πεδίου στήν ἠλεκτρονική δέσμη τῆς καθοδικῆς λυχνίας.

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-3. ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΟΥ ΣΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Ἄν καί εἶναι δυνατόν νά κατασκευαστεῖ καθοδική λυχνία μέ διατάξεις στό ἐσωτερικό τοῦ γυάλινου περιβλήματος πού δημιουργοῦν ἐλεγχόμενο μαγνητικό πεδίο, θά χρησιμοποιήσουμε δύο ἐξωτερικά πηνία μέ κοινό ἄξονα, κάθετο πρός τόν ἄξονα τῆς λυχνίας. Συνδέστε τή λυχνία σύμφωνα μέ τό διάγραμμα τοῦ σχήματος 10-5 καί ἑκατέρωθεν τῆς λυχνίας τά δύο πηνία σύμφωνα μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 10-8. Βεβαιωθεῖτε ὅτι μέ τή συνδεσμολογία τά δύο πηνία δημιουργοῦν μαγνητικό πεδίο κατά τήν ἴδια φορά καί ὄχι κατά ἀντίθετη. Τά ζεύγη ὀριζόντιας καί κατακόρυφης ἀποκλίσεως τῆς λυχνίας δέν χρησιμοιτιοιοῦνται στό πείραμα αὐτό, ἀλλά πρέπει νά συνδεθοῦν μέ τόν γειωμένο θετικό ἀκροδέκτη B^+ τοῦ τροφοδοτικοῦ Β [βλ. σχῆμα 10-5] ὥστε νά ἀποφευχθεῖ ἡ συσσώρευση στατικοῦ φορτίου στίς πλάκες, τό ὁποῖο μπορεῖ νά προκαλέσει ἀπόκλιση τῆς δέσμης.

Τό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργοῦν τά δύο πηνία εἶναι ἀνάλογο πρός τό ρεῦμα πού παρέχει τό τροφοδοτικό ΣΡ [βλ. Πίνακα 9-1] καί ἀπό τό νόμο τοῦ Ohm ἀνάλογο πρός τό δυναμικό V_s πού μετρᾶ τό βολτόμετρο στή διάταξη τοῦ σχήματος 10-8. Μετρεῖστε τήν ἀπόκλιση D τῆς φωτεινῆς κηλίδας στήν ὀθόνη τῆς λυχνίας ὡς συνάρτηση τοῦ δυναμικοῦ V_s γιά διάφορες τιμές τοῦ δυναμικοῦ ἐπιταχύνσεως V_2. Ἀποδῶστε τίς μετρήσεις σέ γραφική παράσταση χαράσσοντας διαφορετική καμπύλη γιά κάθε τιμή τοῦ δυναμικοῦ V_2. Σέ δεύτερη γραφική παράσταση ἀποδῶστε ὅλα τά δεδομένα χρησιμοποιώντας ὡς μεταβλητή στόν ὁριζόντιο ἄξονα τήν ποσότητα $V_s/\sqrt{V_2}$. Τί πληροφορίες μπορεῖτε νά ἐξάγετε ἀπό τά προηγούμενα δεδομένα; Σχολιᾶστε τό σχῆμα τῆς καμπύλης πού προκύπτει σέ κάθε γραφική παράσταση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-8 Συνδεσμολογία πηνίων γιά τή δημιουργία ὁμογενοῦς στατικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου στήν καθοδική λυχνία.

Κατά τή διεξαγωγή τῶν Πειραμάτων 10-2 καί 10-3 θά παρατηρήθηκε ἴσως ὅτι ἡ φωτεινή κηλίδα στήν ὀθόνη τῆς λυχνίας, ἀκόμη καί κατά τήν ἀπουσία ἠλεκτρικοῦ ἤ μαγνητικοῦ πεδίου, μεταβάλλει θέση ὅταν μεταβάλλεται τό δυναμικό ἐπιταχύνσεως V_2. Ἡ ἀπόκλιση αὐτή ὀφείλεται ἐν μέρει στό μαγνητικό πεδίο τῆς γῆς καί μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τόν προσδιορισμό του.

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-4. ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΓΗΙΝΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΘΟΔΙΚΗ ΛΥΧΝΙΑ

Συνδέστε τή καθοδική λυχνία σύμφωνα μέ τό σχῆμα 10-5. Ἐστιάστε μέ προσοχή τή φωτεινή κηλίδα στήν ὀθόνη καί, περιστρέφοντας τή λυχνία, παρατηρεῖστε τήν ἀπόκλιση τῆς κηλίδας καθώς ἡ λυχνία μεταβάλλει διεύθυνση στό χῶρο. Προσδιορίστε τή διεύθυνση στήν ὁποία παρατηρεῖται ἐλάχιστη ἀπόκλιση. Τί σχέση ἔχει ἡ διεύθυνση αὐτή μέ τή διεύθυνση τοῦ γήϊνου μαγνητικοῦ πεδίου στόν τόπο πού βρίσκεστε;

Προσδιορίστε τή διεύθυνση τῆς λυχνίας γιά τήν ὁποία ἡ ἀπόκλιση D τῆς φωτεινῆς κηλίδας γίνεται μέγιστη. Μετρεῖστε τήν ἀπόσταση D καί μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (10.40) ὑπολογεῖστε τήν ἔνταση τοῦ γήϊνου μαγνητικοῦ πεδίου. Στήν περίπτωση αὐτή ℓ εἶναι ἡ ὁλική ἀπόσταση μεταξύ τοῦ ηλεκτρονικοῦ πυροβόλου καί τῆς ὀθόνης καί $L = 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



— Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά διάφορες τιμές τοῦ δυναμικοῦ ἐπιταχύνσεως V_2. Ὑπολογίστε τή μέση τιμή τοῦ γήϊνου μαγνητικοῦ πεδίου καί τό ἀντίστοιχο πειραματικό σφάλμα. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τιμές πού δίνονται στή βιβλιογραφία.

10-3 Κίνηση Φορτισμένων Σωματίων σέ Ὁμογενές Στατικό Ἠλεκτρικό καί Μαγνητικό Πεδίο

Ὅταν στό χῶρο ὑπάρχει ταυτόχρονα ἠλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο ἡ κίνηση ἑνός φορτισμένου σωματίου εἶναι ἀρκετά περίπλοκη. Γιά ὁμογενές στατικό ἠλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο στό χῶρο ἡ ἐξ. (10.2) μπορεῖ νά λυθεῖ ἀναλυτικά σέ κατάλληλο σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων. Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ κίνηση φορτισμένου σωματίου σέ ὁμογενές, στατικό ἠλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο, ὅπου τά δύο πεδία ἔχουν ἀμοιβαία κάθετη διεύθυνση. Ἡ ἀνάλυση τῆς περιπτώσεως αὐτῆς γίνεται ἐξαιρετικά ἁπλή στά πλαίσια τῆς εἰδικῆς θεωρίας τῆς σχετικότητας†. Σέ γενικές γραμμές, ἄν σέ κάποιο σύστημα συντεταγμένων K τό ἠλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο ἔχουν ἀντίστοιχα διεύθυνση κατά τούς ἄξονες y καί z, μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τήν κίνηση τοῦ φορτισμένου σωματίου σέ ἕνα δεύτερο σύστημα συντεταγμένων K′ πού κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα ὡς πρός τό σύστημα K. Εἰδικότερα, ἄν ἐπιλέξουμε τήν ταχύτητα **u** τοῦ συστήματος K′ κατά τήν διεύθυνση τοῦ ἄξονα x καί μέ μέγεθος

$$u = c\,\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} \tag{10.41}$$

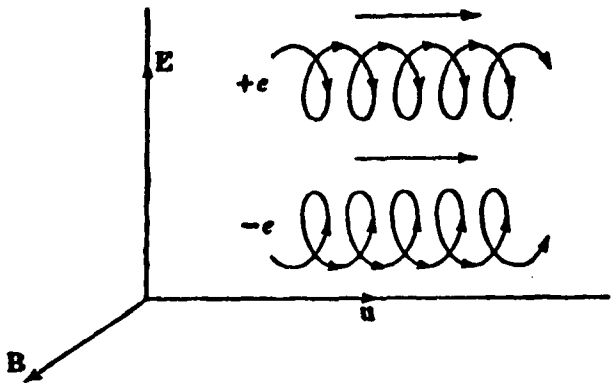
τότε στό σύστημα K′ τό μέν ἠλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}'$ μηδενίζεται ἐνῶ τό μαγνητικό πεδίο ἔχει ἔνταση

$$B'_z = \frac{1}{\gamma}\,B_z\ . \tag{10.42}$$

Τό πρόβλημα ἑπομένως ἀνάγεται στόν προσδιορισμό τῆς κινήσεως τοῦ φορτισμένου σωματίου σέ ὁμογενές στατικό μαγνητικό πεδίο πού ἐξετάσαμε στήν προηγούμενη παράγραφο. Στό σύστημα K′ ἡ κίνηση ἐμφανίζεται κυκλική στό ἐπίπεδο x — y ἐνῶ, παρατηρούμενο ἀπό τό σύστημα K, τό σω-

† Βλ. π.χ. J.D. Jackson, **Classical Electrodynamics**, John Wiley and Sons, Inc., 1962.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-9 Κίνηση ήλεκτρικοῦ φορτίου σέ κάθετα όμογενή στατικά πεδία.

μάτιο έκτελεῖ ταυτόχρονα όμαλή κίνηση κατά τόν άξονα x. Ἡ όμαλή κίνηση κατά διεύθυνση κάθετη πρός τό ήλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο μπορεῖ νά ἑρμηνευτεῖ ποιοτικά ἄν παρατηρήσουμε ὅτι (στό σύστημα K) καθώς τό σωμάτιο περιστρέφεται γύρω ἀπό τό μαγνητικό πεδίο, κατά τή διάρκεια ἑνός ήμικυκλίου ἐπιταχύνεται ἀπό τό ήλεκτρικό πεδίο καί ή ἀκτίνα τῆς τροχιᾶς του αὐξάνει. Στό ἐπόμενο ήμικύκλιο, ἐπιβραδύνεται ἀπό τό ήλεκτρικό πεδίο μέ ἀντίστοιχη μείωση τῆς ἀκτίνας. Ἡ αὐξομείωση αὐτή τῆς ἀκτίνας τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς προκαλεῖ τήν όμαλή μετατόπιση κατά διεύθυνση κάθετη πρός τό ἐπίπεδο τῶν πεδίων **E** καί **B**, ὅπως δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 10-9. Παρατηρεῖται ὅτι ή φορά τῆς μετατοπίσεως εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό πρόσημο τοῦ ήλεκτρικοῦ φορτίου.

Θά μελετήσουμε τήν κίνηση ήλεκτρονίων σέ διασταυρωμένο ήλεκτρομαγνητικό πεδίο χρησιμοποιώντας ἀκόμη μιά φορά τήν καθοδική λυχνία. Γιά τό σκοπό αὐτό θά ἀναπτύξουμε ἕνα όμογενές στατικό μαγνητικό πεδίο κατά τόν ἄξονα τῆς ὀθόνης πού θά ταυτίσουμε μέ τόν ἄξονα z τοῦ συστήματος συντεταγμένων. Ὁμογενές στατικό ήλεκτρικό πεδίο κατά τόν ἄξονα y μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ, ὅπως στό Πείραμα 10-1, μέ ἀνάπτυξη διαφορᾶς δυναμικοῦ στό ὁριζόντιο ζεῦγος ἀποκλίσεως. Στήν ἀνάλυση πού ἀκολουθεῖ θά χρησιμοποιήσουμε λιγώτερο προχωρημένες μεθόδους ἀπό τήν προηγούμενη σκιαγράφιση στά πλαίσια τῆς εἰδικῆς θεωρίας τῆς σχετικότητας.

Κατά τή λειτουργία τῆς καθοδικῆς λυχνίας τό ήλεκτρονικό πυροβόλο δημιουργεῖ κατά τόν ἄξονα τῆς λυχνίας ήλεκτρόνια μέ ταχύτητα u_z, ή ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπό τό δυναμικό ἐπιταχύνσεως V_2 σύμφωνα μέ τή σχέση

$$eV_2 = \tfrac{1}{2} m u_z^2 \ . \qquad (10.43)$$

Ἄν τό ἐσωτερικό τῆς λυχνίας εἶναι ἀπαλλαγμένο ἀπό ήλεκτρικό πεδίο, ἕνα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μαγνητικό πεδίο κατά τόν ἄξονα τῆς λυχνίας δέν ἐπηρεάζει τή δέσμη καί ἡ φωτεινή κηλίδα δημιουργεῖται στό κέντρο τῆς ὀθόνης. Τό ἀξονικό μαγνητικό πεδίο ἐπιδρᾶ στά ἠλεκτρόνια τῆς δέσμης μόνον ὅταν αὐτά διαθέτουν συνιστῶσα τῆς ταχύτητας u_r κάθετη πρός τόν ἄξονα τῆς λυχνίας. Στήν περίπτωση αὐτή, ὅπως εἴδαμε στήν προηγούμενη παράγραφο, ἡ κίνηση εἶναι κυκλική μέ ἀκτίνα

$$R = \frac{mu_r}{eB} \tag{10.44}$$

καί γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \frac{u_r}{R} = \frac{eB}{m} \tag{10.45}$$

[βλ. ἐξ. (10.22)]. Ἡ περίοδος τῆς κινήσεως εἶναι

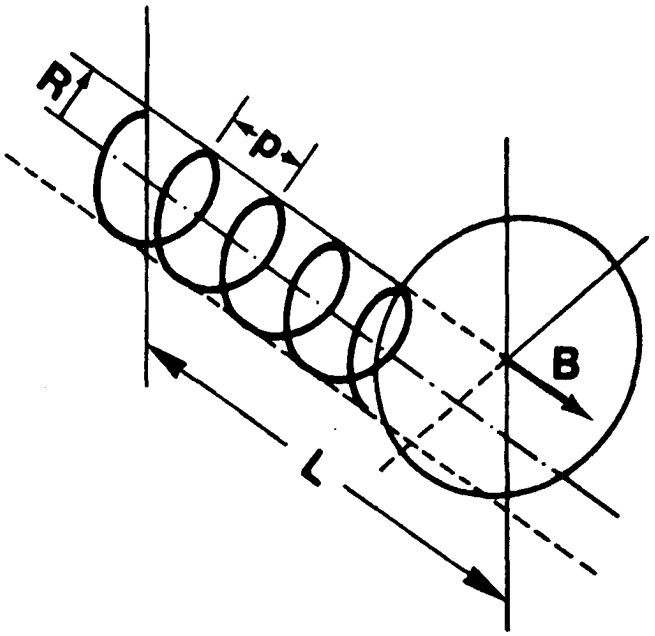
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB} \ . \tag{10.46}$$

Ἄν τό μαγνητικό πεδίο ἐκτείνεται καθόλο τό μῆκος τοῦ ἄξονα τῆς λυχνίας τότε ἡ ἔκταση ℓ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, στήν περιοχή τοῦ ζεύγους ἀποκλίσεως [βλ. σχῆμα 10-7], μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀμελητέα σέ σχέση μέ τή διαδρομή L τῆς δέσμης. Στήν προσέγγιση αὐτή μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὅτι ἡ μόνη ἐπίδραση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου στή δέσμη εἶναι ἡ δημιουργία μιᾶς ἐγκάρσιας συνιστώσας τῆς ταχύτητας u_r. Λόγω τῆς ἀρχικῆς αὐτῆς συνιστώσας τῆς ταχύτητας τό ἠλεκτρόνιο ἐκτελεῖ κυκλική τροχιά στό ἐπίπεδο x – y μέ χαρακτηριστικά μεγέθη πού δίνονται ἀπό τίς ἐξ. (10.44) - (10.46). Ταυτόχρονα ἐκτελεῖ ὁμαλή κίνηση κατά τόν ἄξονα τῆς λυχνίας μέ σταθερή ταχύτητα u_z. Ὁ συνδιασμός τῶν δύο κινήσεων ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν ἑλικοειδή τροχιά πού περιγράφει τό σχῆμα 10-10.

Ἕνα χαρακτηριστικό μέγεθος τῆς τροχιᾶς τοῦ σχήματος 10-10 εἶναι ἡ ἀπόσταση πού διανύεται κατά μῆκος τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου στό χρόνο μιᾶς πλήρους περιστροφῆς στό ἐπίπεδο x–y. Τό μέγεθος αὐτό πού θά ὀνομάσουμε **βῆμα** τῆς τροχιᾶς δίνεται προφανῶς ἀπό τή σχέση

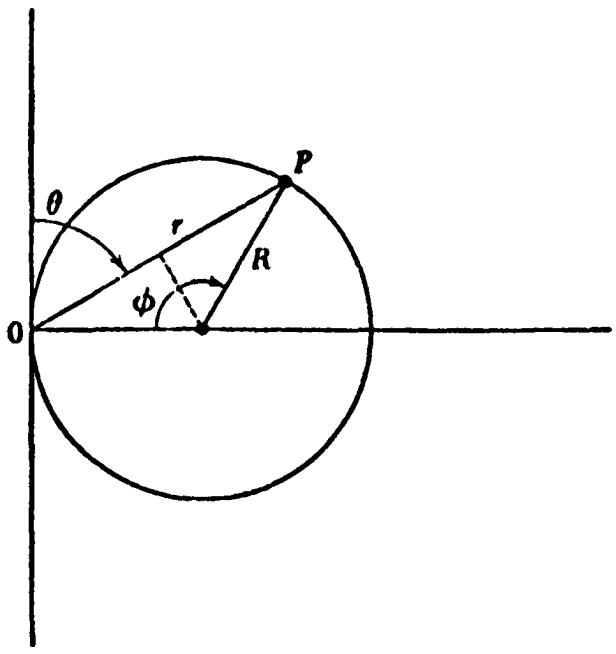
$$p = u_z T = \frac{2\pi m u_z}{eB} \ . \tag{10.47}$$





ΣΧΗΜΑ 10-10 Ἑλικοειδής τροχιά ἠλεκτρονίου σέ ἀξονικό μαγνητικό πεδίο.

Τό σημεῖο τῆς ὀθόνης ὅπου τελικά καταλήγει ἡ τροχιά τοῦ σχήματος 10-10 μπορεῖ νά περιγραφεῖ ὡς συνάρτηση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου B καί τῶν λοιπῶν χαρακτηριστικῶν τῆς λυχνίας. Γιά τό σκοπό αὐτό εἶναι χρήσιμο νά εἰσάγουμε τό σύστημα συντεταγμένων πού δίνεται στό σχῆμα 10-11. Ὁ κύκλος μέ ἀκτίνα R ἀντιπροσωπεύει τήν προβολή τῆς ἑλικοειδοῦς τροχιᾶς στήν ὀθόνη καί τό σημεῖο O τή θέση τῆς φωτεινῆς κηλίδας γιά $\theta_r = 0$. Τό σημεῖο P εἶναι τό σημεῖο ὅπου ἡ τροχιά συναντᾶ τήν ὀθόνη ἐνῶ ἡ γωνία φ



ΣΧΗΜΑ 10-11 Σύστημα συντεταγμένων στήν ὀθόνη καθοδικῆς λυχνίας γιά τήν περιγραφή τῆς κινήσεως ἠλεκτρονίων σέ ἀξονικό μαγνητικό πεδίο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἀντιπροσωπεύει τή γωνία πού ἔχει διαγράψει τό ἠλεκτρόνιο κατά τή διαδρομή του. Ἀπό τή γεωμετρία τοῦ σχήματος 10-10 καί τόν ὁρισμό τοῦ βήματος στήν ἐξ. (10.47) εἶναι φανερό ὅτι

$$\varphi = 2\pi \frac{L}{P} = \frac{eBL}{mu_z} \quad . \tag{10.48}$$

(Παρατηρεῖται ὅτι ἡ γωνία φ πού σημειώνεται στό σχῆμα 10-11 διαφέρει ἀπό τή γωνία φ τῆς ἐξ. (10.48) κατά ἕνα ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ 2π). Οἱ πολικές συντεταγμένες r, θ πού εἰσάγονται στό σχῆμα 10-11 συνδέονται μέ τίς συντεταγμένες R, φ μέ τίς ἁπλές σχέσεις

$$r = 2R \sin \frac{\varphi}{2} \tag{10.49α}$$

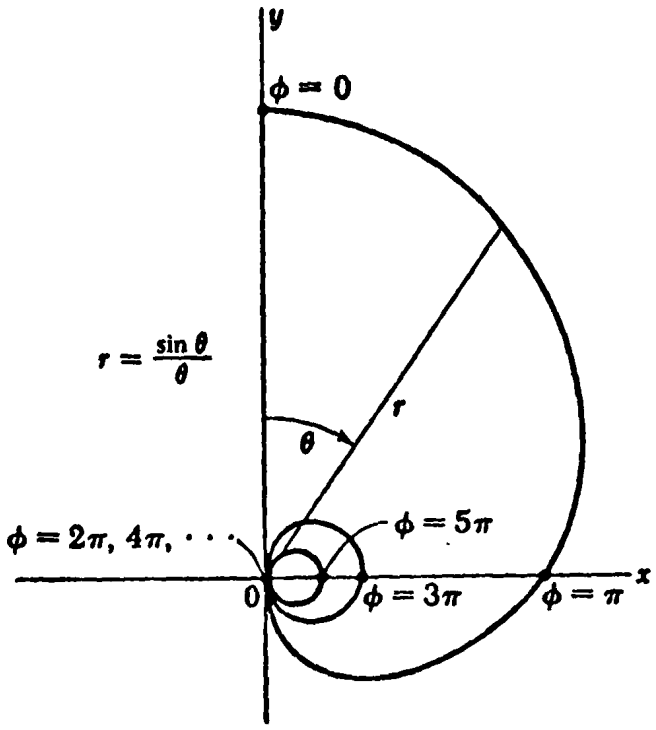
καί

$$\theta = \frac{\varphi}{2} \tag{10.49β}$$

πού ὁδηγοῦν στήν ἁπλή σχέση

$$r = 2R \sin\theta \quad . \tag{10.50}$$

Ἡ ἀκτίνα R τῆς κυκλικῆς κινήσεως ἐξαρτᾶται ἀπό τό ἀξονικό μαγνητικό πε-



ΣΧΗΜΑ 10-12 Ἡ κοχλιοειδής καμπύλη r = sinθ/θ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δίο Β. Χρησιμοποιώντας τίς έξ. (10.44) καί (10.48) εἶναι εὐκολο νά δείξουμε ὅτι

$$R = \frac{Lu_r}{u_z\varphi} = \frac{Lu_r}{2u_z\theta} \tag{10.51}$$

πού σέ συνδιασμό μέ τήν έξ. (10.49) δίνει

$$r = \frac{Lu_r}{u_z}\,\frac{\sin\theta}{\theta} \,. \tag{10.52}$$

Ὁ γεωμετρικός τόπος πού περιγράφεται στήν τελευταία σχέση ἀπαντᾶται στή γεωμετρία μέ τήν ὀνομασία **κοχλιοειδές**. Ἡ καμπύλη, καθώς καί χαρακτηριστικές τιμές τῆς παραμέτρου $\varphi = 2\theta$, δίνεται στό σχῆμα 10-12. Γιά κάθε τιμή τῆς γωνίας $\theta = k\pi$, ὅπου k ἀκέραιος, ἡ καμπύλη διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων 0. Τοῦτο βρίσκεται σέ συνέπεια μέ τήν ἀντίστοιχη τιμή τῆς γωνίας $\varphi = 2k\pi$, πού ὑποδηλώνει ἕνα ἀκέραιο πολλαπλάσιο πλήρων περιστροφῶν τοῦ ἠλεκτρονίου στό ἐπίπεδο x–y. Καθώς ἡ τιμή τῆς γωνίας φ αὐξάνει, μέ ἀντίστοιχη αὔξηση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου Β, ἡ ἀπόκλιση ; φωτεινῆς κηλίδας ἀπό τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων, ὅπως ἀναμένεται, γίνεται ὅλο καί μικρότερη.

Τό 1922 μιά εἰδικά κατασκευασμένη καθοδική λυχνία μέ ἀξονικό μαγνητικό πεδίο χρησιμοποιήθηκε† ἀπό τόν καθηγητή τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ἰένας H. Busch γιά τή μέτρηση τοῦ λόγου e/m (φορτίο πρός μάζα) τοῦ ἠλεκτρονίου. Ὅπως δείχνει ἡ έξ. (10.48), ὁ λόγος e/m μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ στήν προηγούμενη διάταξη ἀπό τή σχέση

$$\frac{e}{m} = \frac{u_z\varphi}{BL} = \left(2\,\frac{e}{m}\,V_2\right)^{1/2}\,\frac{\varphi}{BL} \tag{10.53}$$

ὅπου στό τελευταῖο σκέλος ἡ τιμή τῆς ταχύτητας u_z ἔχει ἀντικατασταθεῖ ἀπό τήν έξ. (10.43). Ἐπίλυση τῆς έξ. (10.53) ὡς πρός τό λόγο e/m δίνει ἀμέσως

$$\frac{e}{m} = 2V_2\left(\frac{\varphi}{BL}\right)^2 \,. \tag{10.54}$$

† H. Busch, Physikalische Zeitschrift, **23**, (1922) 438. Ἡ περιγραφή τῆς διατάξεως ἔχει δοθεῖ πιό πρόσφατα στό ἄρθρο τοῦ καθηγητῆ H.V. Neher, American Journal of Physics, **29** (1961) 471.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατηρεῖται ὅτι τό δεξιό μέρος τῆς ἐξ. (10.54) περιέχει ἀποκλειστικά μεγέθη πού εἶναι δυνατόν νά μετρηθοῦν πειραματικά ἤ να προσδιοριστοῦν ἀπό τίς συνθῆκες λειτουργίας τῆς λυχνίας.

Τό ἱστορικό πείραμα τοῦ H. Busch θά ἐπαναλάβουμε στή συνέχεια.

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-5. ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ e/m ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΘΟΔΙΚΗ ΛΥΧΝΙΑ

Συνδέστε τήν καθοδική λυχνία σύμφωνα μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 10-5. Δημιουργεῖστε ἀξονικό μαγνητικό πεδίο περιβάλλοντος τή λυχνία μέ τά δύο πηνία πού χρησιμοποιήσατε στό Πείραμα 10-2, ἔτσι ὥστε ὁ ἄξονας τῆς λυχνίας καί τῶν πηνίων νά συμπίπτουν. Βεβαιωθεῖτε ὅτι τά πηνία ἔχουν συνδεθεῖ ὥστε τό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖ καθένα νά ἔχει φορά κατά τή φορά τῆς δέσμης.

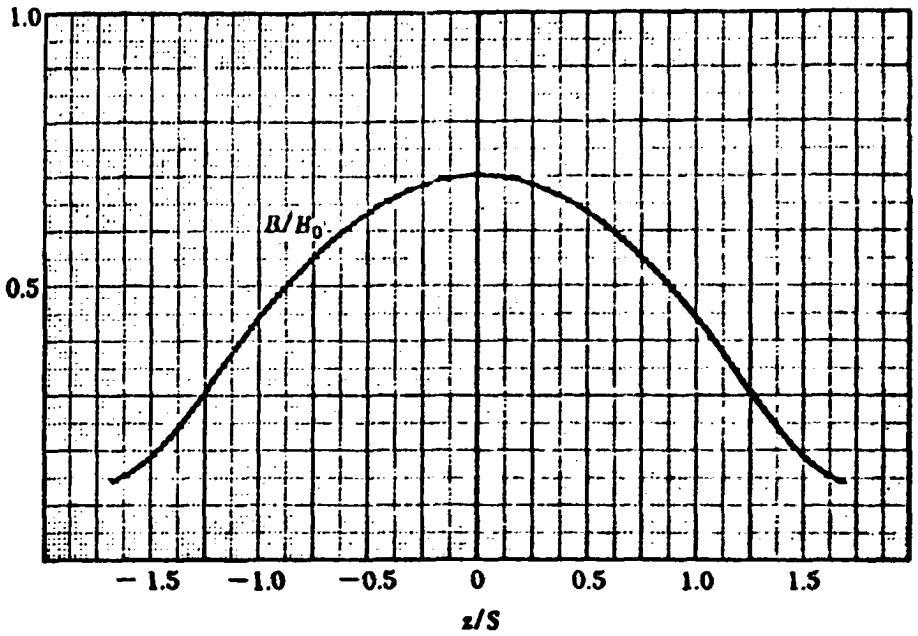
– Ἀναπτύξτε κάποια διαφορά δυναμικοῦ V_d στό ὁριζόντιο ζεῦγος καί παρατηρεῖστε τήν ἀπόκλιση τῆς δέσμης. Αὐξεῖστε σταδιακά τήν τιμή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου B καί παρατηρεῖστε τή φωτεινή κηλίδα νά διαγράφει τήν κοχλιοειδή καμπύλη τοῦ σχήματος 10-12. Σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τίς συντεταγμένες τῆς φωτεινῆς κηλίδας καί τό ἀντίστοιχο δυναμικό πού ἀναπτύσσεται στά ἄκρα τῶν πηνίων. Ὑπολογίστε ἀντίστοιχα τήν τιμή τῆς γωνίας φ, τό μαγνητικό πεδίο καί ἀπό τήν ἐξ. (10.54) τό λόγο e/m. Συγκρίνετε τό τελικό ἀποτέλεσμα τοῦ λόγου e/m μέ τιμές πού δίνονται στή βιβλιογραφία.

Μία πιθανή πηγή σφάλματος στό προηγούμενο πείραμα προέρχεται ἀπό τήν παραδοχή ὅτι τό ἀξονικό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖται ἀπό τό σύστημα τῶν πηνίων εἶναι ὁμογενές. Ἄμεση ἐφαρμογή τῶν τύπων τοῦ Πίνακα 9-1 δίνει τό μαγνητικό πεδίο στόν ἄξονα ἑνός πηνίου μέ ἄπειρες διαστάσεις ὡς

$$B = \mu_0 n I \qquad (10.55)$$

ὅπου n ὁ ἀριθμός τῶν σπειρῶν ἀνά μονάδα μήκους. Στήν πράξη κανένα πηνίο δέν μπορεῖ νά θεωρηθεῖ μέ ἄπειρες διαστάσεις καί ἰδιαίτερα τό σύστημα πηνίων πού χρησιμοποιήθηκε στό προηγούμενο πείραμα πολύ διαφέρει ἀπό τήν ἰδανική αὐτή κατάσταση. Ἡ πραγματική τιμή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου στόν ἄξονα τῶν πηνίων πού χρησιμοποιήθηκαν στό προηγούμενο πείραμα ἔχει προσδιοριστεῖ μέ μεθόδους πού θά μελετήσουμε ἀργότερα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



ΣΧΗΜΑ 10-13 Διόρθωση μαγνητικοῦ πεδίου στόν ἄξονα τῶν πηνίων τοῦ πειράματος 10-4.

(βλ. Πείραμα 10-14) γιά διάφορες τιμές τοῦ ρεύματος I. Ὁ παράγοντας διορθώσεως πού προκύπτει δίνεται ὑπό μορφή γραφικῆς παραστάσεως στό σχῆμα 10-13. Ὁ κατακόρυφος ἄξονας τῆς γραφικῆς παραστάσεως ἀντιπροσωπεύει τό λόγο τοῦ πραγματικοῦ πεδίου B πρός τό πεδίο B_0 πού ὑπολογίζεται στήν ἐξ. (10.55). Ἡ παράμετρος τοῦ ὁριζόντιου ἄξονα z/S ἐκφράζει τό λόγο τῆς ἀποστάσεως z ἀπό τό κέντρο τοῦ συστήματος τῶν δύο πηνίων πρός τό μῆκος S τοῦ ἄξονα καθενός πηνίου. Τό ἀποτέλεσμα τοῦ λόγου e/m πού προσδιορίζεται στό Πείραμα 10-5 μπορεῖ νά βελτιωθεῖ σημαντικά ἄν στόν ὑπολογισμό τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ληφθεῖ ὑπόψη ἕνας μέσος παράγοντας διορθώσεως μέ βάση τά δεδομένα τοῦ σχήματος 10-13.

10-4 Ὁ Καθοδικός Παλμογράφος

Ἡ καθοδική λυχνία πού χρησιμοποιήσαμε στίς προηγούμενες παραγράφους ἀποτελεῖ τήν κεντρική διάταξη τοῦ **καθοδικοῦ παλμογράφου,** πού ἀπαντᾶται σήμερα σέ κάθε ἐργαστήριο ἠλεκτρικῶν ἤ ἠλεκτρονικῶν μετρήσεων. Ἡ λειτουργία τοῦ ὀργάνου στηρίζεται στήν ἐκμετάλλευση τῆς ἀνα-

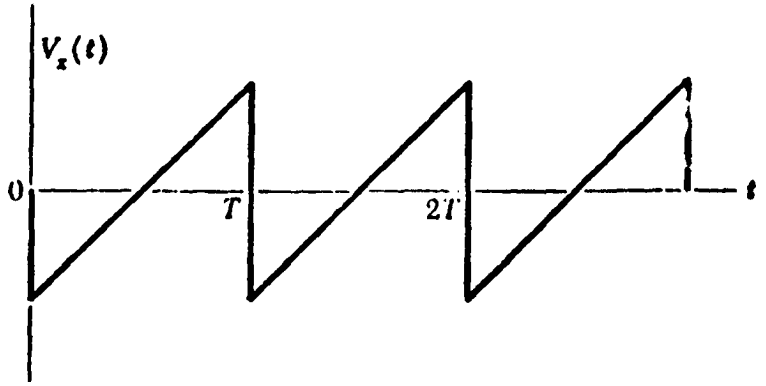
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

λογίας μεταξύ τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ V_d πού ἀναπτύσσεται σέ ἕνα ζεῦγος τῆς λυχνίας μέ τήν ἀπόκλιση D τῆς φωτεινῆς κηλίδας στήν ὀθόνη. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἡ ἠλεκτρονική δέσμη τῆς καθοδικῆς λυχνίας ἀναλαμβάνει τό ρόλο τοῦ κινητοῦ πηνίου τοῦ γαλβανομέτρου. Ἡ σημαντική διαφορά ἐδῶ ἔγκειται στήν ἀπουσία κάθε τριβῆς ἤ ἄλλου παράγοντα ἀδρανείας, ἔτσι ὥστε ἡ ἀπόκριση τοῦ ὀργάνου νά γίνεται ἐξαιρετικά γρήγορη. Ὁ χρόνος πτήσεως τοῦ ἠλεκτρονίου μέσα στή λυχνία εἶναι περίπου 10^{-8} sec μέ δυνατότητες ἀποκρίσεως τῆς δέσμης σέ χρονικές μεταβολές τοῦ δυναμικοῦ ἀποκλίσεως τῆς ἴδιας τάξης μεγέθους. Οἱ δυνατότητες αὐτές ἀποκρίσεως ὑπερβαίνουν βέβαια κατά πολλές τάξεις μεγέθους τίς δυνατότητες παρακολουθήσεως τοῦ ἀνθρώπινου ὀφθαλμοῦ.

Ἡ δυσκολία ξεπερνιέται μέ τήν ταυτόχρονη χρησιμοποίηση καί τῶν δύο ζευγῶν ἀποκλίσεως τῆς καθοδικῆς λυχνίας. Στή συνήθη λειτουργία τοῦ παλμογράφου, τό δυναμικό πού πρόκειται νά παρατηρηθεῖ συνδέεται στό ὁριζόντιο ζεῦγος. Στό κάθετο ζεῦγος ἀναπτύσσεται ταυτόχρονα ἕνα δυναμικό πού μεταβάλλεται γραμμικά μέ τό χρόνο. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἡ ἀπόκλιση τῆς φωτεινῆς κηλίδας κατά τόν κατακόρυφο ἄξονα εἶναι ἀνάλογη πρός τό δυναμικό, ἐνῶ κατά τόν ὁριζόντιο πρός τό χρόνο. Ἔτσι, ἡ κίνηση τῆς φωτεινῆς κηλίδας στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου διατρέχει καμπύλη πού ἀντιστοιχεῖ στή γραφική παράσταση τοῦ δυναμικοῦ ὡς πρός τό χρόνο. Ἀκόμη καί ἄν ἡ φωτεινή κηλίδα διατρέξει τήν ὀθόνη σέ πολύ μικρό χρόνο, ἡ εἰκόνα τῆς γραφικῆς παραστάσεως παραμένει, λόγω τῆς ἰδιότητας τῆς φωσφορίζουσας οὐσίας νά διατηρεῖ τή φωταύγεια γιά ἕνα ὁρισμένο χρονικό διάστημα. Ἔτσι ἡ γραφική παράσταση στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου μπορεῖ νά παρατηρηθεῖ ἀπευθείας ἤ νά φωτογραφηθεῖ γιά μετέπειτα λεπτομερέστερη παρατήρηση.

Ἄν ἡ μεταβολή τοῦ δυναμικοῦ πού ἀναπτύσσεται στό ὁριζόντιο ζεῦγος εἶναι περιοδική ἡ παρατήρηση μπορεῖ νά βελτιωθεῖ σημαντικά μέ ἐπανειλημένη ἀποτύπωση τῆς γραφικῆς παραστάσεως στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου. Τοῦτο εἶναι δυνατόν ἄν τό γραμμικά μεταβαλλόμενο δυναμικό πού ἀναπτύσσεται στό κατακόρυφο ζεῦγος ἐπαναλαμβάνεται μέ τήν περίοδο μεταβολῆς τοῦ δυναμικοῦ στό ὁριζόντιο ζεῦγος. Τό δυναμικό πού ἀπαιτεῖται γιά τό σκοπό αὐτό καί πού γιά προφανεῖς λόγους ἔχει καθιερωθεῖ μέ τήν ὀνομασία **πριονωτή τάση,** δίνεται στό σχῆμα 10-14. Καθόλη τή διάρκεια τῆς περιόδου ἡ πριονωτή τάση μεταβάλλεται γραμμικά ἀπό μιά ἀρνητική τιμή τοῦ δυναμικοῦ ἀποκλίσεως ἕως τήν ἴδια θετική τιμή. Μέ τόν τρόπο αὐτό *σαρώνει* τή δέσμη ἀπό τό ἀριστερό ἕως τό δεξιό ἄκρο τῆς ὀθόνης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-14 Πριονωτή τάση στό κατακόρυφο ζεῦγος καθοδικοῦ παλμογράφου.

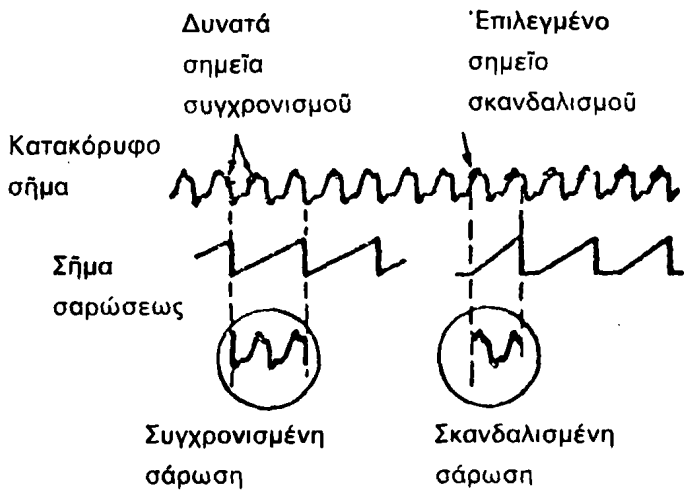
(ἐξοῦ καί ἡ ἐναλλακτική ὀνομασία **δυναμικό ἤ τάση σαρώσεως**). Στό τέλος τῆς περιόδου ἐπανέρχεται γρήγορα στήν πρώτη ἀρνητική τιμή. Ἄν κι μικρό τό χρονικό διάστημα ἐπαναφορᾶς τῆς πριονωτῆς τάσης εἶναι παρόλα ταῦτα πεπερασμένο καί ἡ τροχιά τῆς δέσμης καθώς ἐπανέρχεται ἀπό τό δεξιό ἄκρο τῆς ὀθόνης στό ἀριστερό εἶναι ζυνατό νά ἐμφανιστεῖ ὡς μιά φωτεινή γραμμή χαμηλῆς ἐντάσεως. Ἐφαρμόζοντας κατά τή διάρκεια τῆς ἐπαναφορᾶς, ἕνα ἀρνητικό δυναμικό μερικῶν volt στήν ἐσχάρα ἐλέγχου τοῦ ἠλεκτρονικοῦ πυροβόλου, ἡ δέσμη μπορεῖ νά διακοπεῖ γιά τό χρονικό διάστημα πού ἀπαιτεῖται, ὥστε ἡ τροχιά ἐπαναφορᾶς νά μήν εἶναι ὁρατή.

Μιά (περιοδικά) μεταβαλλόμενη τάση, πού γιά συντομία θά ἀναφέρουμε στό μέλλον ὡς **σῆμα,** θά ἐμφανίσει σταθερή εἰκόνα στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου ἄν ἐκπληρώνονται ὁρισμένες προϋποθέσεις. Κατ' ἀρχήν, ὅπως ἤδη ἀναφέρθηκε, ἡ περίοδος τοῦ δυναμικοῦ σαρώσεως πρέπει νά ταυτίζεται μέ τήν περίοδο τοῦ σήματος. Ἐξάλλου ἡ ἀρχή τῆς σαρώσεως πρέπει νά συμπίπτει πάντα μέ τό ἴδιο σημεῖο τοῦ σήματος. Πολλοί σύγχρονοι παλμογράφοι χρησιμοποιοῦν τό ἴδιο τό σῆμα γιά τήν ἔναρξη τῆς σαρώσεως, ἐνῶ τό **ἐπίπεδο σκανδαλισμοῦ,** δηλαδή τό σημεῖο τοῦ σήματος, στό ὁποῖο ἀρχίζει ἡ σάρωση, προσδιορίζεται μέ ἐξωτερική ρύθμιση. Ἡ δυνατότητα σκανδαλισμοῦ τοῦ δυναμικοῦ σαρώσεως δίνει μεγάλη εὐελιξία στήν ἀπεικόνιση τοῦ σήματος. Εἶναι π.χ. δυνατόν νά ἐπιλεγεῖ ἄν ἡ γραφική παράσταση πού σχηματίζεται στήν ὀθόνη θά ἀρχίσει κατά τή θετική ἢ ἀρνητική ἡμιπερίοδο ἑνός σήματος ἐναλλασσόμενης τάσης. Ἐπιπλέον σέ παλμογράφους πού διαθέτουν δυνατότητα σκανδαλισμοῦ τῆς ὁριζόντιας σαρώσεως δέν εἶναι ἀπαραίτητο τό σῆμα νά ἔχει περιοδικό χαρακτῆρα, καθόσον ἡ (μοναδική) σάρωση ἑνός τυχαίου γεγονότος μπορεῖ νά συμβεῖ μέ σκανδαλισμό ἀπό τό ἴδιο τό γεγονός.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

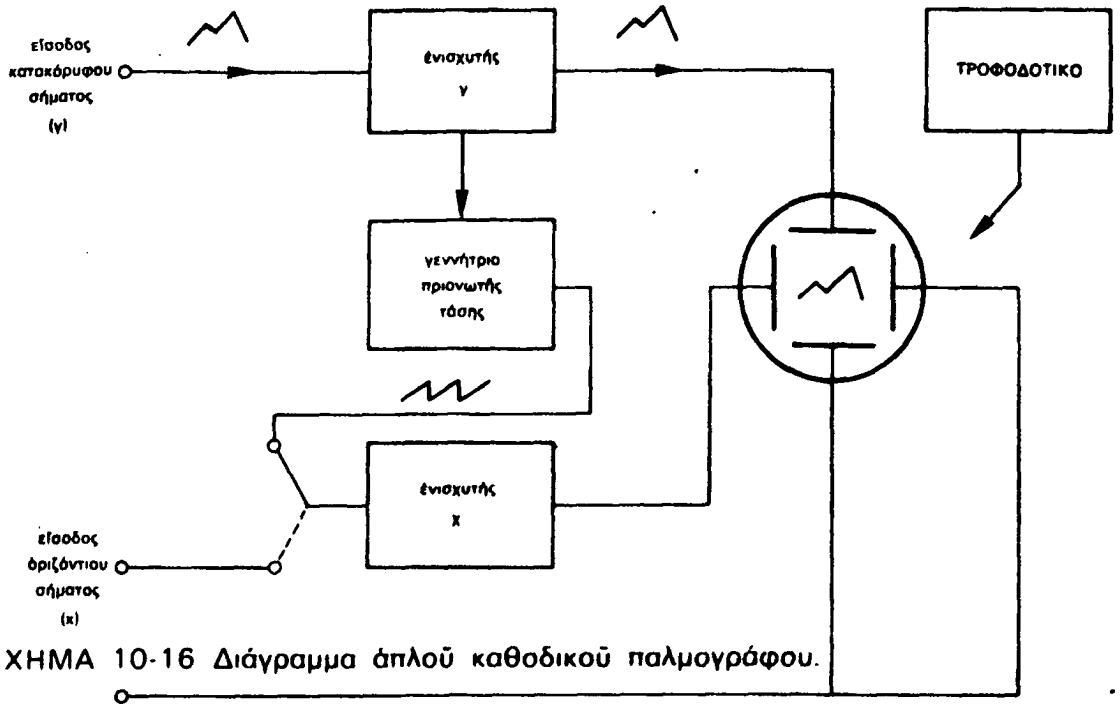
Ὁρισμένοι τύποι ἐργαστηριακῶν παλμογράφων χρησιμοποιοῦν γεννήτρια συνεχοῦς πριονωτῆς τάσης πού συνήθως ἀναφέρεται ὡς **συγχρονισμένη σάρωση.** Γιά σταθερή εἰκόνα στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου, ἡ περίοδος τῆς πριονωτῆς τάσης πρέπει νά εἶναι ἴση ἤ ἀκέραιο πολλαπλάσιο τῆς περιόδου τοῦ σήματος. Ἡ γεννήτρια τῆς πριονωτῆς τάσης στήν περίπτωση αὐτή συγχρονίζεται αὐτόματα ὡς πρός τό σῆμα, ἀντλώντας τήν πληροφορία ἀπό τό ἴδιο τό σῆμα. Ἡ δυνατότητα συγχρονισμοῦ σέ συνήθεις παλμογράφους καλύπτει μιά περιορισμένη περιοχή καί παλμογράφοι τοῦ τύπου αὐτοῦ περιέχουν διακόπτη ἐπιλογῆς γιά τήν περιοχή τῆς συχνότητας τοῦ σήματος. Ἡ σχέση μεταξύ τοῦ σήματος καί τοῦ δυναμικοῦ σαρώσεως δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 10-15.

Ἡ δημιουργία ἑνός παλμογράφου, πέρα ἀπό τήν καθοδική λυχνία καί τή **γεννήτρια πριονωτῆς τάσης,** ἀπαιτεῖ διάφορα ἄλλα κυκλώματα. Ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ πρέπει νά παρέχει τό δυναμικό πού ἀπαιτεῖται γιά κάθε ἠλεκτρόδιο τοῦ ἠλεκτρονικοῦ πυροβόλου. Τυπικό δυναμικό ἐπιταχύνσεως σέ σύγχρονους παλμογράφους εἶναι τῆς τάξης τῶν 2 000 V, ἐνῶ γιά ὁρισμένους τύπους μπορεῖ νά φτάσει τά 10 000 V. Μέ τίς τιμές αὐτές τοῦ δυναμικοῦ ἐπιταχύνσεως, τό δυναμικό ἀποκλίσεως πού ἀπαιτεῖται γιά τή μετατόπιση τῆς φωτεινῆς κηλίδας κατά τήν ἀκτίνα τῆς ὀθόνης εἶναι γύρω στά 200 V. Γιά νά εἶναι δυνατή ἡ μελέτη σημάτων στήν περιοχή τῶν mV πού συχνά ἀνακύπτουν σέ ἠλεκτρονικά κυκλώματα ἀπαιτεῖται ἡ ἐνίσχυση τοῦ σήματος κατά ἕνα παράγοντα τοῦ 100 ἤ 1 000. Οἱ περισσότεροι παλμογράφοι δια-



ΣΧΗΜΑ 10-15 Σκανδαλισμένη καί συγχρονισμένη ἀπόκριση τοῦ δυναμικοῦ σαρώσεως σέ καθοδικό παλμογράφο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-16 Διάγραμμα ἁπλοῦ καθοδικοῦ παλμογράφου.

θέτουν ἕνα ἐνισχυτή γιά κάθε ζεῦγος ἀποκλίσεως μέ δυνατότητα ἐπιλογῆς τοῦ παράγοντα ἐνισχύσεως ἐξωτερικά. Ἡ σχέση τῶν διαφόρων κυκλωμάτων πού συγκροτοῦν ἕνα ἁπλό παλμογράφο δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 10-16.

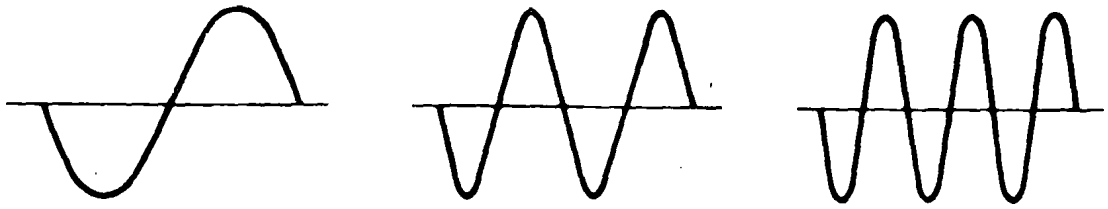
Στή συνέχεια θά κάνουμε μιά πρώτη γνωριμία μέ τόν καθοδικό παλμογράφο.

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-6. Ο ΚΑΘΟΔΙΚΟΣ ΠΑΛΜΟΓΡΑΦΟΣ

Περιεργαστεῖτε τό χειριστήριο τοῦ παλμογράφου σας στήν πρόσοψη τοῦ ὀργάνου. Βεβαιωθεῖτε ὅτι κατανοεῖτε τό χειρισμό καί τή λειτουργία κάθε διακόπτη. Περιγράψτε στήν ἐργαστηριακή σας ἔκθεση μέ μερικές φράσεις τή λειτουργία κάθε διακόπτη. Ἀναφερθεῖτε τόσο στό διάγραμμα τοῦ σχήματος 10-16 ὅσο καί στήν εἰκόνα πού σχηματίζεται στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου.

– Γιά νά ἀποκτήσετε κάποια εὐχέρεια στό χειρισμό τοῦ παλμογράφου συνδέστε στό ζεῦγος κάθετης ἀποκλίσεως τήν ἔξοδο μιᾶς γεννήτριας περιοδικῆς τάσης (π.χ. ἡμιτονοειδοῦς τάσης). Ρυθμίστε τόν παλμογράφο ὥστε νά ἐπιτύχετε στήν ὀθόνη καθεμιά ἀπό τίς εἰκόνες τοῦ σχήματος 10-17. Μεταβάλετε τή συχνότητα καί τό πλάτος τῆς γεννήτριας καί παρατηρεῖστε τί ρυθμίσεις ἀπαιτοῦνται στόν παλμογράφο γιά τήν ἐπαναφορά τῆς εἰκόνας. Ἐπαναλάβετε τήν ἐργασία γιά ἄλλες τυχόν κυματομορφές πού διαθέτει ἡ γεννήτρια.

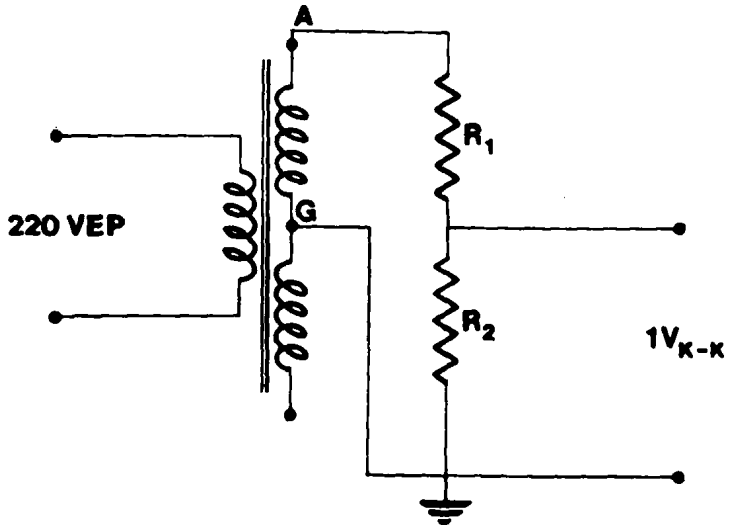
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-17 Εικόνα ἡμιτονοειδοῦς τάσης στήν ὀθόνη καθοδικοῦ παλμογράφου.

- Ὁ παλμογράφος σας μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή μέτρηση δυναμικοῦ. Γιά τό σκοπό αὐτό πρέπει νά εἶναι σωστά βαθμονομημένος. Πολλοί παλμογράφοι διαθέτουν ἔξοδο μέ σταθερό σῆμα (συνήθως τετραγωνικό) γνωστοῦ ὕψους. Συνδέστε τό σῆμα βαθμονομήσεως στήν εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως καί ἐλέγξτε τή βαθμονόμηση τοῦ παλμογράφου ὡς πρός τήν ἔνδειξη τοῦ διακόπτη κατακόρυφης ἐνισχύσεως.

- Μπορεῖτε νά κάνετε μιά ἀνεξάρτητη βαθμονόμηση τοῦ παλμογράφου χρησιμοποιώντας τή διάταξη τοῦ σχήματος 10-18. Χρησιμοποιεῖστε τό μετασχηματιστή πού παρέχει 6.3 V ΕΡ γιά τή θέρμανση τῆς καθόδου ἠλεκτρονικῶν λυχνιῶν καί ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων μέ ἐνδιάμεση ἐπαφή. Μετρεῖστε μέ ἕνα βολτόμετρο τό ἀκριβές δυναμικό μεταξύ τῶν σημείων A καί G στήν ἔξοδο τοῦ μετασχηματιστῆ. Ὅπως θά δοῦμε στό Κεφάλαιο 14, γιά ἡμιτονοειδή τάση, τό βολτόμετρο ΕΡ μετράει τήν ἐνεργό τάση $V_{εν}$, πού συνδέεται μέ τή διαφορά δυναμικοῦ ἀπό κορυφή σέ κορυφή τοῦ σήματος $V_{κ\ κ}$ μέ τή σχέση



ΣΧΗΜΑ 10-18 Διάταξη γιά τή βαθμονόμηση καθοδικοῦ παλμογράφου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$V_{κ\,κ} = 2\sqrt{2}\,V_{εν} = 2.83\ V_{εν}\ . \qquad (10.56)$$

Γιά συνολική ἀντίσταση $R_1+R_2 \simeq 500\ Ω$, προσδιορίστε τίς τιμές τῶν ἀντιστάσεων R_1 καί R_2 ὥστε στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_2 νά ἀναπτύσσεται δυναμικό $V_{κ\,κ} = 1$ V. Ἐπιβεβαιῶστε τόν ὑπολογισμό σας συνδέοντας τό βολτόμετρο στά ἄκρα τῆς R_2 (μήν ξεχνᾶτε τήν ἐξ. (10.56)). Ἀποσυνδέστε τό βολτόμετρο καί συνδέστε τά ἄκρα τῆς R_2 στήν εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως τοῦ παλμογράφου. Σταθεροποιεῖστε τήν εἰκόνα καί μεταβάλετε τήν κατακόρυφη ἐνίσχυση ὥστε τό σῆμα νά ἔχει ἔκταση κατά τόν κατακόρυφο ἄξονα 1 cm. Ἡ ὀθόνη τώρα εἶναι βαθμονομημένη σέ 1 V/cm. Συγκρίνετε τή βαθμονόμηση πού προσδιορίσατε μέ τήν ἔνδειξη τοῦ διακόπτη κατακόρυφης ἐνισχύσεως.

Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη βαθμονόμηση γιά 2 V/cm καί 4 V/cm. Σημειῶστε τυχόν συστηματικό σφάλμα στήν ἔνδειξη τοῦ διακόπτη κατακόρυφης ἐνισχύσεως στόν παλμογράφο. Ἐπαναφέρετε τή βαθμονόμηση τοῦ παλμογράφου σας σέ 1 V/cm καί διατηρεῖστε την γιά τόν ὑπόλοιπο τοῦ πειράματος. (Μή μεταβάλλετε πλέον τόν διακόπτη κατακόρυφης ἐνισχύσεως).

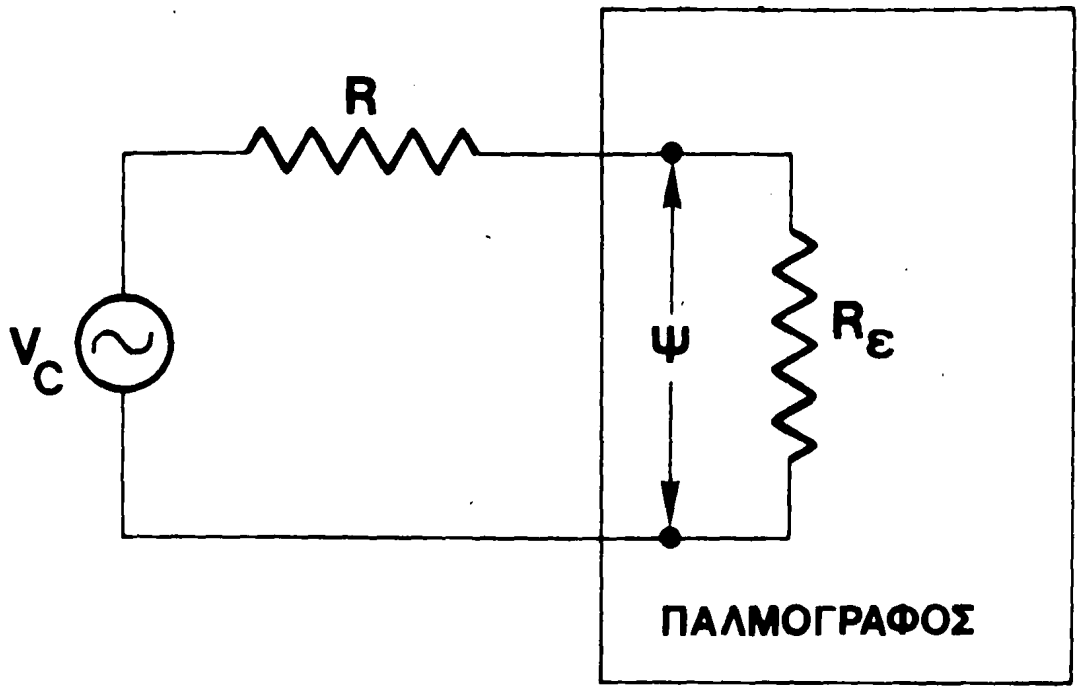
Μιά ἰδιότητα τοῦ παλμογράφου σας πού ἐνδιαφέρει σέ πολλές ἐφαρμογές εἶναι ἡ ἐσωτερική του ἀντίσταση $R_ε$. Συνδέστε τή γεννήτρια ἡμιτονοειδοῦς τάσης μέ τόν παλμογράφο, παρεμβάλλοντας ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων R, σύμφωνα μέ τό σχῆμα 10-19. Ἄν οἱ ἀντιστάσεις R καί $R_ε$ εἶναι πολύ μεγαλύτερες ἀπό τήν ἀντίσταση τῆς γεννήτριας, τότε τό δυναμικό V_y πού ἀναπτύσσεται στό ζεῦγος κατακόρυφης ἀποκλίσεως τοῦ παλμογράφου, συνδέεται μέ τό δυναμικό V_c πού ἀναπτύσσει ἡ γεννήτρια μέ τή σχέση

$$V_y = \frac{R_ε}{R + R_ε}\,V_c\ . \qquad (10.57)$$

Μέ τιμή $R \simeq 0$ μεταβάλετε τό πλάτος τῆς γεννήτριας ὥστε νά ἐπιτύχετε στόν παλμογράφο σῆμα μέ δυναμικό $V_{1-κ} = 4$ V. Μεταβάλετε τήν ἀντίσταση R ὥστε τό δυναμικό $V_{κ\,κ}$ νά μειωθεῖ στά 3/4 καί στή συνέχεια στό μισό τῆς προηγούμενης τιμῆς. Χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (10.57) προσδιορίστε τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ παλμογράφου σας.

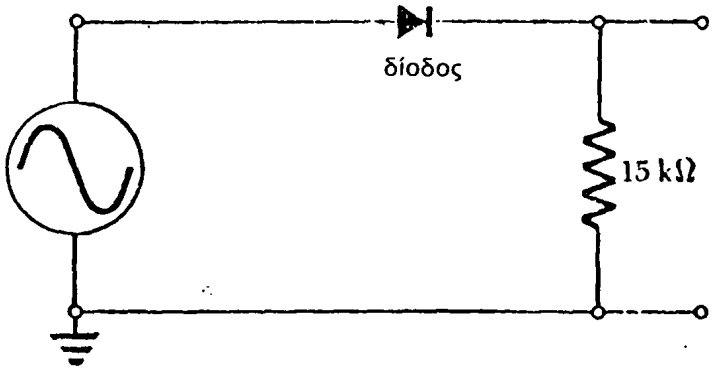
– Μιά ἐνδιαφέρουσα κυματομορφή πού μπορεῖτε νά παρατηρήσετε στόν παλμογράφο σας παρέχεται ἀπό τή διάταξη τοῦ σήματος 10-20. Τό ἐξάρτημα πού συμβολίζεται ὡς —▷|— εἶναι μιά **δίοδος**. Στήν ἐπόμενη παράγραφο θά μελετήσουμε τή **δίοδη λυχνία** μέ συμπεριφορά παρόμοια πρός τό ἐξάρτημα τοῦ σχήματος 10-20. Γιά τό κύκλωμα αὐτό ἀρκεῖ (σέ πολύ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-19 Μέτρηση ἐσώτερικῆς ἀντιστάσεως καθοδικοῦ παλμογράφου.

καλή προσέγγιση) νά θεωρήσουμε τή δίοδο ὡς ἕνα ἐξάρτημα μέ μηδενική ἀντίσταση γιά φορά τοῦ ρεύματος πρός τή φορά πού δείχνει τό βέλος καί ἄπειρη ἀντίσταση πρός τήν ἀντίθετη φορά. Συνδέστε τά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως στήν εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως τοῦ παλμογράφου καί παρατηρεῖστε τήν εἰκόνα πού σχηματίζεται στήν ὀθόνη. Ἄν ὁ παλμογράφος σας διαθέτει καί δεύτερη εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως, συνδέστε στήν δεύτερη εἴσοδο τά ἄκρα τῆς γεννήτριας. *Βεβαιωθεῖτε ὅτι τά δύο σήματα κατακόρυφης ἀποκλίσεως ἔχουν συνδεθεῖ ἔτσι ὥστε ἡ γείωση νά εἶναι κοινή.* Ρυθμίστε τούς δύο ἐπιλογεῖς πού καθορίζουν τή θέση



ΣΧΗΜΑ 10-20 Ἁπλό κύκλωμα ἀνορθώσεως.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κάθε σήματος ὥστε νά ἐπιτύχετε μιά συσχετισμένη εἰκόνα στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου γιά τό δυναμικό στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως υέ σχέση μέ τό δυναμικό στά ἄκρα τῆς γεννήτριας. Τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 10-20 ἀναφέρεται ὡς *ἁπλό κύκλωμα ἀνορθώσεως*. Δικαιολογεῖστε τήν κυματομορφή πού προκύπτει καί τήν ὀνομασία τοῦ κυκλώματος.

Στό προηγούμενο πείραμα, ὁ καθοδικός παλμογράφος χρησιμοποιήθηκε γιά τήν παρατήρηση καί μελέτη κυματομορφῶν. Τοῦτο ἔγινε δυνατό μέ τήν ἀνάπτυξη πριονωτῆς τάσης στό ζεῦγος ὁριζόντιας ἀποκλίσεως τῆς καθοδικῆς λυχνίας. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἡ εἰκόνα πού σχηματίζεται στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου εἶναι ἡ γραφική παράσταση τοῦ δυναμικοῦ (στήν εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως) ὡς πρός τό χρόνο.

Μιά δυνατότητα πού προσδίδει μεγάλη εὐελιξία στόν καθοδικό παλμογράφο εἶναι ἡ δυνατότητα (μέ ἐξωτερικό διακόπτη) ἀποσυνδέσεως τῆς πριονωτῆς τάσης καί ἐξωτερικῆς συνδέσεως ἑνός σήματος στό ζεῦγος ὁριζόντιας ἀποκλίσεως. Ἄν τό σῆμα κατακόρυφης καί ὁριζόντιας ἀποκλίσεως στήν προηγούμενη σύνδεση εἶναι ἀνάλογα πρός δύο φυσικά μεγέθη, ἡ εἰκόνα πού σχηματίζεται στήν ὀθόνη εἶναι ἡ ἀντίστοιχη γραφική παράσταση τῆς μεταβολῆς τοῦ πρώτου φυσικοῦ μεγέθους ὡς πρός τό δεύτερο.

Ὡς πρῶτο παράδειγμα τῆς δυνατότητας αὐτῆς θά ἐξετάσουμε τή σύνδεση δύο ἡμιτονοειδῶν κυματομορφῶν στίς εἰσόδους ὁριζόντιας καί κατακόρυφης ἀποκλίσεως τοῦ παλμογράφου. Ἄν οἱ δύο κυματομορφές ἔχουν συχνότητες ν_1 καί ν_2 τότε ἡ μεταβολή τῆς ἀποκλίσεως στόν ὁριζόντιο καί κατακόρυφο ἄξονα δίνεται ἀντίστοιχα ἀπό τίς σχέσεις

$$x = x_0 \cos\omega_1 t \qquad (10.58\alpha)$$

$$y = y_0 \cos(\omega_2 t + \varphi) \qquad (10.58\beta)$$

ὅπου

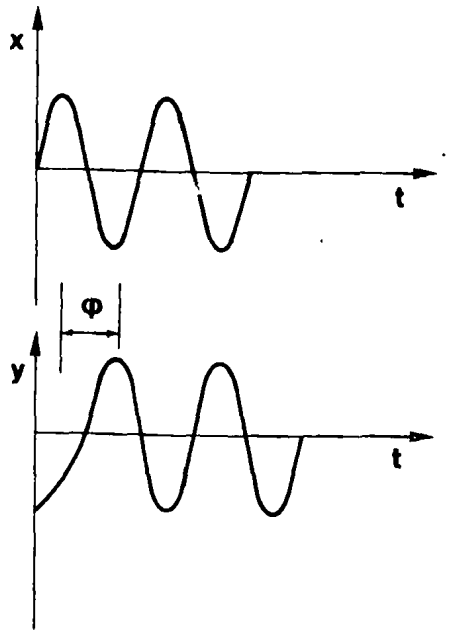
$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 \qquad (10.59\alpha)$$

$$\omega_2 = 2\pi\nu_2 \qquad (10.59\beta)$$

x_0, y_0 εἶναι οἱ μέγιστες ἀποκλίσεις καί φ εἶναι ἡ **διαφορά φάσης** πού σημειώνεται στό σχῆμα 10-21 γιά δύο κυματομορφές μέ $\omega_1 = \omega_2$.

Ἄν $x_0 = y_0$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ καί ἡ διαφορά φάσης εἶναι ἴση μέ 90°, τότε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-21 Δύο ἡμιτονοειδεῖς κυματομορφές μέ τήν ἴδια συχνότητα καί διαφορά φάσης φ.

$$y = y_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -y_0 \sin\omega t \qquad (10.60)$$

καί ἡ ἀπόσταση τῆς φωτεινῆς κηλίδας ἀπό τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων εἶναι ἀνά πᾶσα στιγμή

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = x_0 \ . \qquad (10.61)$$

Τό σχῆμα ἑπομένως πού ἀναμένεται στήν ὀθόνη εἶναι κύκλος. Κατά τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι ἄν φ = 0 (ἤ ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ π), ἡ εἰκόνα πού σχηματίζεται στήν ὀθόνη εἶναι εὐθεία γραμμή.

Γενικά, γιά ἡμιτονοειδεῖς τάσεις τῆς ἐξ. (10.58) μέ τήν ἴδια συχνότητα καί τυχαία διαφορά φάσης φ ὁ γεωμετρικός τόπος πού διαγράφει ἡ φωτεινή κηλίδα στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου εἶναι ἔλλειψη. Ἡ διεύθυνση καί τό σχῆμα τῆς ἐλλείψεως, ὅπως θά δοῦμε στή συνέχεια, μᾶς ἐπιτρέπουν μάλιστα τή μέτρηση τῆς διαφορᾶς φάσης. Γιά τιμή τῆς γωνίας φ μεταξύ 0 καί π/2, ἡ διαδρομή τῆς φωτεινῆς κηλίδας δίνεται στό σχῆμα 10-22. Ἡ γωνία φ μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἄν παρατηρήσουμε ὅτι ἡ διαδρομή της φωτεινῆς κηλίδας διέρχεται ἀπό τόν ὁριζόντιο ἄξονα (y = 0) ὅταν

$$\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἤτοι, ὅταν

$$\omega t + \varphi = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \tag{10.62}$$

ὅπου k ἀκέραιος. Κατά τή χρονική αὐτή στιγμή ἡ ὁριζόντια ἀπόκλιση εἶναι

$$x = x_0 \cos\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2} - \varphi\right] = x_0 \sin(k\pi + \varphi) = \pm x_0 \sin\varphi. \tag{10.63}$$

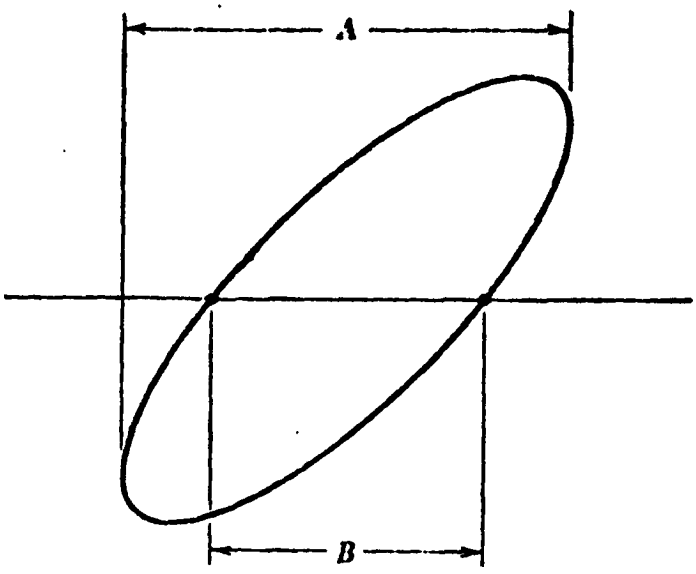
Ἡ ἀπόσταση B ἐπομένως τοῦ σχήματος 10-22 εἶναι ἴση μέ $2x_0 \sin\varphi$ ἐνῶ ἡ ἀπόσταση A ἴση μέ $2x_0$. Ἀπό τίς δύο αὐτές σχέσεις ἕπεται ὅτι

$$\varphi = \sin^{-1}\frac{B}{A} . \tag{10.64}$$

Γενικώτερα γιά $\omega_1 \neq \omega_2$ καί ἀνεξάρτητα ἀπό τή διαφορά φάσης, ἡ διαδρομή τῆς φωτεινῆς κηλίδας διαγράφει κλειστή καμπύλη ἄν ὁ λόγος τῶν δύο συχνοτήτων εἶναι ρητός ἀριθμός, δηλαδή ἄν

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n} \tag{10.65}$$

ὅπου m καί n ἀκέραιοι. Τότε στό χρονικό διάστημα, κατά τό ὁποῖο ἡ χαμηλότερη συχνότητα ἐκτελεῖ m πλήρεις ταλαντώσεις, ἡ ὑψηλότερη συχνότητα ἐκτελεῖ n. Τό ἀποτέλεσμα εἶναι μιά κλειστή διαδρομή πού ἐπαναλαμβάνεται μέ περίοδο

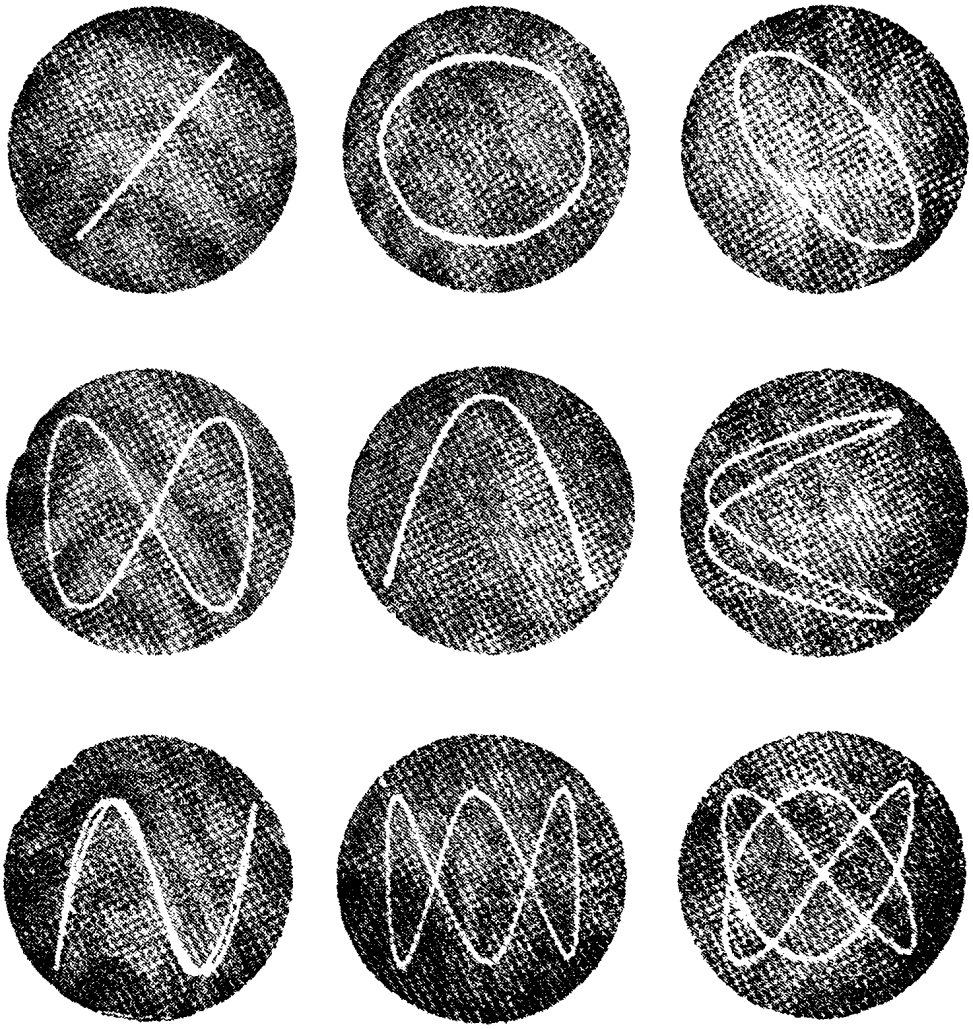


ΣΧΗΜΑ 10-22 Ἔλλειψη στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου γιά δύο ἡμιτονοειδεῖς τάσεις (x, y) μέ τήν ἴδια συχνότητα καί διαφορά φάσης $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$T = \frac{2\pi}{n\omega_1} = \frac{2\pi}{m\omega_2} \quad . \tag{10.66}$$

Ἡ εἰκόνα πού σχηματίζεται στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου ἔχει m μέγιστα κατά τόν κατακόρυφο ἄξονα καί n μέγιστα κατά τόν ὁριζόντιο. Ὁρισμένες χαρακτηριστικές εἰκόνες πού σχηματίζονται μέ τόν τρόπο αὐτό καί πού συνήθως ἀναφέρονται ὡς **σχήματα Lissajous,** δίνονται στό σχῆμα 10-23. Ἄν μιά ἀπό τίς δύο κυματομορφές προέρχεται ἀπό βαθμονομημένη γεννήτρια,



ΣΧΗΜΑ 10-23 Σχήματα Lissajous γιά ὁρισμένες τιμές τοῦ λόγου m/n καί τῆς διαφορᾶς φάσης φ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τά σχήματα Lissajous παρέχουν ἕνα εὔκολο τρόπο γιά τή μέτρηση συχνότητας.

Μικρή ἀπόκλιση ἀπό τήν ἁπλή σχέση τῆς ἐξ. (10.65) ὁδηγεῖ σέ ἕνα ἐνδιαφέρον ὀπτικό φαινόμενο. Γράφοντας τήν ἀπόκλιση ἀπό τή σχέση $n\omega_1 = m\omega_2$ ὡς

$$m\omega_2 = n\omega_1 + \delta \qquad (10.67)$$

οἱ ἐξ. (10.58) παίρνουν τή μορφή

$$x = x_0 \cos\omega_1 t \qquad (10.68\alpha)$$

$$y = y_0 \cos\left(\frac{n\omega_1}{m} t + \varphi + \frac{\delta}{m} t\right) . \qquad (10.68\beta)$$

Ἡ μικρή ἀπόκλιση ἐπομένως ἀπό τήν ἱκανοποίηση τῆς συνθήκης (10.65) ὁδηγεῖ σέ μιά μικρή διαφορά φάσης μεταξύ τῶν δύο κυματομορφῶν πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό χρόνο. Τό ἀποτέλεσμα εἶναι ἀργή μετατόπιση τοῦ σχήματος Lissajous πού προσδίδει στήν εἰκόνα μιά χροιά τρισδιάστατης περιστροφῆς γύρω ἀπό τόν ὁριζόντιο ἤ κατακόρυφο ἄξονα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-7. ΣΧΗΜΑΤΑ LISSAJOUS

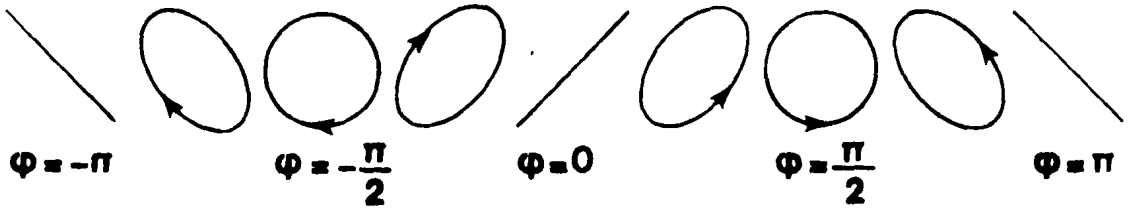
Συνδέστε στήν εἴσοδο ὁριζόντιας ἀποκλίσεως τοῦ παλμογράφου τήν ἔξοδο τοῦ μετασχηματιστῆ 6.3 V ΕΡ καί στήν εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως τή γεννήτρια ἡμιτονοειδοῦς τάσης. Ρυθμίστε τήν ἐνίσχυση τῆς γεννήτριας ὥστε νά ἐπιτύχετε ἴση ἀπόκλιση πρός τούς δύο ἄξονες. Ρυθμίστε τή συχνότητα τῆς γεννήτριας ὥστε νά ἐπιτύχετε σταθερή εἰκόνα τοῦ σχήματος Lissajous γιά λόγο 1:1. Πόσο καλά εἶναι βαθμονομημένη ἡ γεννήτρια πού χρησιμοποιεῖτε; Μετατοπίστε λίγο τή συχνότητα καί παρατηρεῖστε τήν εἰκόνα νά μεταβάλλεται ἀργά σύμφωνα μέ τή διαδοχή τοῦ σχήματος 10-24.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία χρησιμοποιώντας διάφορες ἁπλές τιμές τοῦ λόγου

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{m}{n}$$

ὅπου ω_x εἶναι ἡ συχνότητα τοῦ δικτύου τῆς πόλης (στήν Ἑλλάδα $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \times 50$ Hz). Καταγράψτε σέ κάθε περίπτωση τό σχῆμα Lissajous πού σχηματίζεται στήν ὀθόνη. Σημειῶστε τήν ἔνδειξη τῆς γεννήτριας σέ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

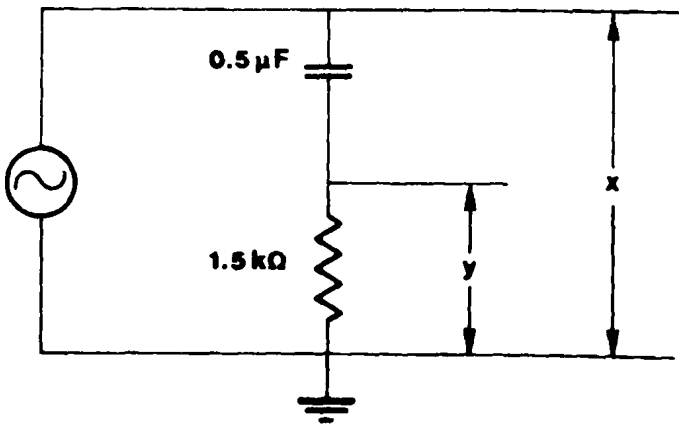


ΣΧΗΜΑ 10-24 Διαδοχική μεταβολή του σχήματος Lissajous γιά $\omega_1 \sim \omega_2$.

καθε πρίπτωση καί ἐλέγξτε τή βαθμονόμησή της ὡς πρός τή συχνότητα. Μεταβάλετε λίγο τή συχνότητα τῆς γεννήτριας καί παρατηρεῖστε τήν «τρισδιάστατη» περιστροφή τοῦ σχήματος Lissajous.

Ἡ διαφορά φάσης μεταξύ δύο ἡμιτονοειδῶν τάσεων μέ τήν ἴδια συχνότητα μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 10-25. Ἡ λειτουργία τοῦ κυκλώματος θά μελετηθεῖ μέ λεπτομέρεια στό Κεφάλαιο 14. Θά δείξουμε ἐκεῖ ὅτι τό δυναμικό στά ἄκρα τῆς διατάξεως προηγεῖται ἀπό τό ρεῦμα κατά μία φάση πού κυμαίνεται μεταξύ π/2 γιά χαμηλές συχνότητες μέχρι μηδέν γιά ὑψηλές. Συνδέστε τή διάταξη στόν παλμογράφο ὅπως δείχνει τό σχῆμα. Παρατηρεῖται ὅτι τό ρεῦμα πού διαρρέει τό κύκλωμα εἶναι ἀνάλογο πρός τό δυναμικό στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως. Ἐπιλέξτε συχνότητα 100 Hz καί ρυθμίστε τήν κατακόρυφη ἐνίσχυση τοῦ παλμογράφου ὥστε νά ἐπιτύχετε ἴση μέγιστη ἀπόκλιση πρός τούς δύο ἄξονες τῆς ὀθόνης. Μετρεῖστε τή διαφορά φάσης σύμφωνα μέ τό σχῆμα 10-22 καί τήν ἐξ. (10.64).

Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά διάφορες συχνότητες. Σέ κάθε περίπτωση θά χρειαστεῖ ἐνδεχομένως νά μεταβάλετε τήν κατακόρυφη ἐνίσχυση τοῦ παλμογράφου ὥστε νά διατηρηθεῖ ἡ ἰσότητα μέγι-



ΣΧΗΜΑ 10-25 Διάταξη γιά τή μέτρηση διαφορᾶς φάσης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στης ὁριζόντιας καί κατακόρυφης ἀποκλίσεως τοῦ σχήματος Lissajous. Σημειῶστε τή διαφορά φάσης γιά κάθε συχνότητα. Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματα σέ ἡμιλογαριθμική γραφική παράσταση μέ τή συχνότητα στό λογαριθμικό ἄξονα.

Ὅπως ἤδη ἀναφέρθηκε, ἄν δύο φυσικά μεγέθη εἶναι ἀνάλογα, τό καθένα, πρός κάποια διαφορά δυναμικοῦ, τότε ὁ καθοδικός παλμογράφος παρέχει τή δυνατότητα γιά ἀπεικόνιση τῆς γραφικῆς παραστάσεως τοῦ ἑνός φυσικοῦ μεγέθους ὡς πρός τό ἄλλο. Ἕνα πολύ ἁπλό παράδειγμα παρέχεται ἀπό τή διάταξη τοῦ σχήματος 10-18, ὅπου τό ρεῦμα πού διατρέχει τή διάταξη εἶναι ἀνάλογο πρός τό δυναμικό στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_2. Σύνδεση ἑπομένως τῶν ἄκρων τῆς ἀντιστάσεως R_2 στήν εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως καί τῶν σημείων A—G στήν εἴσοδο ὁριζόντιας ἀποκλίσεως τοῦ παλμογράφου θά δώσει τή γραφική παράσταση τοῦ νόμου τοῦ Ohm.

Πιό ἐνδιαφέρουσα περίπτωση ἀποτελεῖ ἡ διάταξη τοῦ σχήματος 10-20.

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-8. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΗ ΔΙΟΔΟΥ ΣΤΗΝ ΟΘΟΝΗ ΤΟΥ ΚΑΘΟΔΙΚΟΥ ΠΑΛΜΟΓΡΑΦΟΥ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 10-18 χρησιμοποιώντας ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων μέ ἐνδιάμεση ἐπαφή καί $R_1 \simeq R_2 \simeq 500\ \Omega$. Συνδέστε τά ἄκρα A—G στήν εἴσοδο ὁριζόντιας ἀποκλίσεως καί τά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_2 στήν εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως. Παρατηρεῖστε τή γραφική παράσταση πού δημιουργεῖται στήν ὀθόνη καί ἑρμηνεῦστε τό ἀποτέλεσμα. Ἑρμηνεῦστε τό ἀποτέλεσμα ἀπό τήν ἄποψη τῶν σχημάτων Lissajous.

- Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 10-20. Ὡς γεννήτρια ἡμιτονοειδοῦς τάσης χρησιμοποιεῖστε μετασχηματιστή 6.3 V ΕΡ. Συνδέστε τά ἄκρα τοῦ μετασχηματιστῆ μέ τήν εἴσοδο ὁριζόντιας ἀποκλίσεως καί τά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως μέ τήν εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως τοῦ παλμογράφου. *Βεβαιωθεῖτε ὅτι τά σήματα κατακόρυφης καί ὁριζόντιας ἀποκλίσεως ἔχουν συνδεθεῖ ἔτσι ὥστε ἡ γείωση νά εἶναι κοινή.* Ἑρμηνεῦστε τή γραφική παράσταση πού σχηματίζεται στήν ὀθόνη.
- Ἀντιστρέψτε τή φορά τῆς διόδου καί ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

10-5 Ἡ Δίοδη Λυχνία

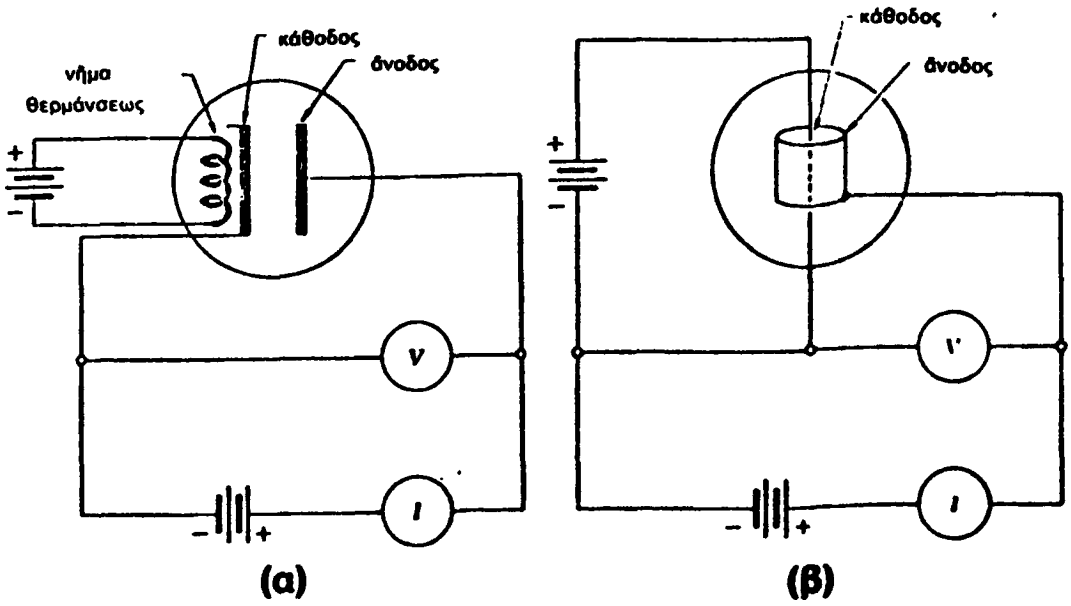
Κίνηση ἠλεκτρονίων ὑπό τήν ἐπίδραση ἠλεκτρικοῦ πεδίου βρίσκει μιά σημαντική ἐφαρμογή στή **δίοδη λυχνία,** ἕνα ἀπό τά πρῶτα ἐνεργά ἐξαρτήματα τῆς ἠλεκτρονικῆς. Ἄν καί ἡ χρήση τῆς δίοδης λυχνίας ἔχει σήμερα περιοριστεῖ σημαντικά μέ τήν εἰσαγωγή ἀντίστοιχων ἐξαρτημάτων στερεᾶς καταστάσεως, ἀπαντᾶται ἀκόμη σέ ὁρισμένα κυκλώματα ὅπου οἱ ἀπαιτήσεις ἰσχῆς εἶναι ὑψηλές.

Ἡ ἀρχή λειτουργίας τῆς δίοδης λυχνίας δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 10-26. Δύο ἠλεκτρόδια, πού στό ἑξῆς θά ἀναφέρουμε ὡς **κάθοδο** καί **ἄνοδο,** εἶναι τοποθετημένα σέ ἕνα ἀερόκενο, συνήθως γυάλινο, σωλήνα. Ἡ γεωμετρία τῶν ἠλεκτροδίων στίς συνήθεις δίοδες λυχνίες ποικίλει. Δύο συνήθη παραδείγματα διατάξεων περιέχονται στό σχῆμα 10-26. Ἡ κάθοδος θερμαίνεται εἴτε ἀπευθείας, εἴτε ἔμμεσα, ὅπως καί στήν καθοδική λυχνία, μέ ξεχωριστό νῆμα θερμάνσεως. Τυπική θερμοκρασία λειτουργίας στίς συνήθεις δίοδες λυχνίες εἶναι τῆς τάξης τῶν 2 500 K. Ἡ θερμαινόμενη κάθοδος ἐκπέμπει ἠλεκτρόνια πού συσσωρεύονται στή γειτονία της. Ἄν μεταξύ ἀνόδου καί καθόδου ὑπάρχει μιά θετική διαφορά δυναμικοῦ, τό ἠλεκτρικό πεδίο ἐπιταχύνει τά ἠλεκτρόνια πού βρίσκονται στό χῶρο μεταξύ τῶν ἠλεκτροδίων καί ἕνα ρεῦμα I διαρρέει τό ἐξωτερικό κύκλωμα. Ἡ κατάσταση ἰσορροπίας, πού σύντομα ἐπιτυγχάνεται, δίνεται (γιά τή γεωμετρία παράλληλων ἐπίπεδων ἠλεκτροδίων) στό σχῆμα 10-27. Στή γεωμετρία αὐτή, μέ τά δύο ἐπίπεδα ἠλεκτρόδια στό ἐπίπεδο x–y καί τό ἠλεκτρικό πεδίο κατά τόν ἄξονα z, ἡ πυκνότητα ρεύματος ἔχει μόνο μία συνιστῶσα J_z μέ μέτρο

$$J = J_z = -Neu = -\rho u \tag{10.69}$$

ὅπου u ἡ ταχύτητα τῶν ἠλεκτρονίων καί ρ ἡ πυκνότητα φορτίου στό χῶρο. Στήν κατάσταση ἰσορροπίας, ἡ ποσότητα τῆς ἐξ. (10.69) εἶναι σταθερή καθόλο τό μῆκος τοῦ ἄξονα z μεταξύ καθόδου καί ἀνόδου. Τοῦτο εἶναι ἄμεσο ἐπακόλουθο τῆς ἐννοίας τῆς «καταστάσεως ἰσορροπίας»: γιά μιά συνεχῆ ροή ἠλεκτρονίων κατά τόν ἄξονα z ὁ ἴδιος ἀριθμός σωματίων ἀνά μονάδα χρόνου πρέπει νά διέρχεται ἀπό κάθε ἐπίπεδο κάθετο πρός τή διεύθυνση τῆς ροῆς σέ ὅλο τό διάστημα μεταξύ τῶν ἠλεκτροδίων. Τό ἴδιο ἀποτέλεσμα μπορεῖ ἀκόμη νά ἀποδειχτεῖ μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (4.20). Ἄν ὅμως τό γινόμενο ρu εἶναι σταθερό, ἡ ταχύτητα u τῶν ἠλεκτρονίων αὐξάνει καθώς κατευθύνονται ἀπό τήν κάθοδο πρός τήν ἄνοδο. Συγκεκριμένα, ἄν τό δυναμικό V_κ τῆς καθόδου εἶναι $V_\kappa = 0$, ἡ ταχύτητα τοῦ ἠλεκτρονίου u(z) σέ κά-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

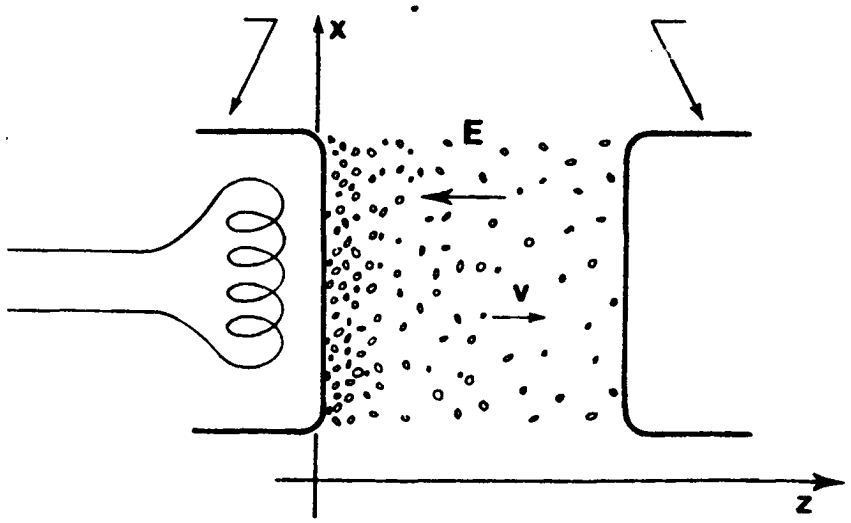


ΣΧΗΜΑ 10.26 Διάταξη ήλεκτροδίων στή δίοδη λυχνία

ποιο σημεῖο z τοῦ ἄξονα κατά τόν ὁποῖο κινεῖται δίνεται ἀπό τή γνωστή μας σχέση

$$\frac{1}{2}mu(z)^2 = eV(z) \qquad (10.70)$$

ὅπου V(z) τό δυναμικό στό σημεῖο z. Τοῦτο ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν ἀντίστοιχη μείωση τῆς πυκνότητας τοῦ φορτίου ρ κατά τή θετική φορά τοῦ ἄξονα z. Τή μεταβολή αὐτή τῆς πυκνότητας φορτίου προσπαθεῖ νά ἀπεικονίσει τό σχῆμα 10-27.



ΣΧΗΜΑ 10-27 Δίοδη λυχνία μέ παράλληλα ἐπίπεδα ἠλεκτρόδια.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τό ρεῦμα τῆς δίοδης λυχνίας μπορεῖ νά περιοριστεῖ ἀπό ἕνα ἐνδιαφέρον φαινόμενο. Κατά τήν ἀπουσία σημαντικῆς πυκνότητας φορτίου ρ στό χῶρο, ἡ ἐξίσωση Poisson πού προσδιορίζει τή συνάρτηση δυναμικοῦ V(z) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\frac{d^2V}{dz^2} \simeq 0 \tag{10.71}$$

ἤ

$$\frac{dV}{dz} = \text{σταθερό} \tag{10.72}$$

καί τό πρόβλημα ἀνάγεται στήν κίνηση φορτίου σέ σταθερό ἠλεκτρικό πεδίο. Ἡ πυκνότητα ὅμως (ἀρνητικοῦ) φορτίου πού δημιουργεῖται κατά τή θερμιονική ἐκπομπή στήν κάθοδο τῆς δίοδης λυχνίας εἶναι ἀρκετή ὥστε ἡ προσέγγιση τῆς ἐξ. (10.71) νά μήν ἰσχύει. Ἡ συσσώρευση ἠλεκτρονίων, κυρίως στή γειτονία τῆς καθόδου, ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή μεταβολή τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου κατά τρόπο ὥστε νέα ἠλεκτρόνια πού ἐκπέμπονται ἀπό τήν κάθοδο νά ἀπωθοῦνται πάλι πρός αὐτή. Ἡ κατάσταση ἰσορροπίας στήν περίπτωση αὐτή ὀνομάζεται **περιορισμένη ἀπό τό φορτίο χώρου.**

Λαμβάνοντας ὑπόψη τίς παραπάνω συνθῆκες εἶναι δυνατόν νά ἐκφράσουμε τό ρεῦμα πού διαρρέει τή δίοδη λυχνία ὡς συνάρτηση τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ μεταξύ ἀνόδου καί καθόδου. Γιά τό σκοπό αὐτό θά πρέπει κατ' ἀρχήν νά λύσουμε τήν ἐξίσωση Poisson γιά τόν προσδιορισμό τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ V(z) πού τώρα παίρνει τή μορφή

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{10.73}$$

Χρησιμοποιώντας τίς ἐξ. (10.69) καί (10.70) ἡ τελευταία ἐξίσωση μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{J}{\varepsilon_0}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/2}\frac{1}{V^{1/2}} \tag{10.74}$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε κάθε πλευρά τῆς ἐξισώσεως μέ τήν ποσότητα 2(dV/dz) καί ὁλοκληρώσουμε ὡς πρός z, τό ἀποτέλεσμα εἶναι

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = \frac{4J}{\varepsilon_0}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/2} V^{1/2} + K \tag{10.75}$$



ὅπου K εἶναι ἡ σταθερά τῆς ὁλοκληρώσεως. Τώρα, γιά τήν κατάσταση ἰσορροπίας πού θεωροῦμε, τόσο τό δυναμικό ὅσο καί τό ἠλεκτρικό πεδίο† πρέπει νά μηδενίζονται στήν ἐπιφάνεια τῆς καθόδου, ἤτοι

$$V(0) = 0 \tag{10.76α}$$

καί

$$\left.\frac{dV}{dz}\right|_{z\,0} = 0. \tag{10.76β}$$

Μέ τίς συνοριακές αὐτές συνθῆκες ἡ σταθερά K τῆς ἐξ. (10.75) προσδιορίζεται ὡς K = 0. Ἔτσι, ἡ ἐξ. (10.75) παίρνει τή μορφή

$$\frac{dV}{dz} = 2\left(\frac{J^2}{\varepsilon_0{}^2}\frac{m}{2e}\right)^{1/4} V^{1/4} \tag{10.77}$$

πού μέ ἁπλή ὁλοκλήρωση δίνει

$$\frac{4}{3}V^{3/4} = 2\sqrt{\frac{J}{\varepsilon_0}}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4} z + K' \,. \tag{10.78}$$

Οἱ συνοριακές συνθῆκες τῶν ἐξ. (10.76) προσδιορίζουν πάλι ὅτι ἡ σταθερά K′ μηδενίζεται. Ἀντιστρέφοντας τήν τελευταία σχέση μποροῦμε ἑπομένως νά γράψουμε τήν ἐξάρτηση τοῦ ρεύματος ἀπό τή συνάρτηση δυναμικοῦ ὡς

$$J = \frac{4}{9}\,\varepsilon_0\sqrt{\frac{e}{m}}\,\frac{V(z)^{3/2}}{z^2} \,. \tag{10.79}$$

Ἄν οἱ τιμές τοῦ λόγου e/m καί τῆς διαπερατότητας ε_0 ἀντικατασταθοῦν στήν τελευταία σχέση προκύπτει ἡ ἀναλογία

$$J = 2.33 \times 10^{-6}\,\frac{V(z)^{3/2}}{z^2} \,. \tag{10.80}$$

Στήν τελευταία σχέση V(z) εἶναι ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ σέ κάποιο σημεῖο τοῦ ἄξονα z μεταξύ ἀνόδου καί καθόδου. Γιά ὁλική διαφορά δυναμικοῦ

† Μή μηδενική τιμή τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου στήν ἐπιφάνειας τῆς καθόδου σημαίνει ὅτι, εἴτε νέα ἠλεκτρόνια ἐκπέμπονται στό χῶρο, εἴτε ἠλεκτρόνια τοῦ φορτίου τοῦ χώρου ἐπανεισέρχονται στό ὑλικό τῆς καθόδου. Τοῦτο βέβαια δέν συμπίπτει μέ τήν ἔννοια τῆς κατάστασης ἰσορροπίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

V_a καί άπόσταση d μεταξύ τῶν δύο ἠλεκτροδίων ἡ ἐξ. (10.80) παίρνει τή μορφή

$$J \quad 2.33 \times 10^{-6} \frac{V_a^{3/2}}{d^2} . \qquad (10.81)$$

Παρατηρεῖται ὅτι στήν κατάσταση ἰσορροπίας, ἡ ἐξ. (10.81) προβλέπει ὅτι τό ρεῦμα ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικά ἀπό τή διαφορά δυναμικοῦ — συγκεκριμένα, κατά τή δύναμη 3/2 τοῦ δυναμικοῦ. Τό ἀποτέλεσμα αὐτό εἶναι γνωστό ὡς **νόμος τῶν Langmuir καί Child.** Ἄν καί ἀποδείχτηκε γιά παράλληλα ἐπίπεδα ἠλεκτρόδια, μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι ἡ ἐξ. (10.81) ἰσχύει ἐπίσης καί γιά τήν ἐναλλακτική γεωμετρία πού εἰκονίζεται στό σχῆμα 10-26(β).

Ἡ ἐξάρτηση τοῦ ρεύματος ἀπό τήν **ἀνοδική τάση** V_a στή δίοδη λυχνία ἀκολουθεῖ τή συμπεριφορά πού προβλέπει ἡ ἐξ. (10.81) γιά μιά μικρή περιοχή τοῦ δυναμικοῦ. Καθώς ἡ ἀνοδική τάση αὐξάνει, τό φορτίο χώρου μειώνεται μέχρις ὅτου ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ μεταξύ τῶν ἠλεκτροδίων ἀποδίδεται σέ καλή προσέγγιση ἀπό τήν ἐξ. (10.71). Στήν κατάσταση αὐτή τό ρεῦμα προσδιορίζεται ἀποκλειστικά ἀπό τό ρυθμό ἐκπομπῆς ἠλεκτρονίων στήν κάθοδο. Παραπέρα αὔξηση τῆς ἀνοδικῆς τάσης δέν μεταβάλλει τό ρεῦμα.

Ὅπως ἀναμένεται, ὁ ρυθμός ἐκπομπῆς ἠλεκτρονίων αὐξάνει δραστικά μέ τη θερμοκρασία τῆς καθόδου. Ἡ τυπική συμπεριφορά τοῦ ρεύματος ὡς πρός τήν ἀνοδική τάση σέ μιά συνηθισμένη δίοδη λυχνία δίνεται στό σχῆμα 10-28. Γιά ἀρκετά χαμηλές τιμές τῆς ἀνοδικῆς τάσης ἡ μεταβολή τοῦ ρεύματος ἀκολουθεῖ τό νόμο τῆς ἐξ. (10.81). Σέ ὑψηλότερο δυναμικό, τό ρεῦμα περιορίζεται ἀπό τό ρυθμό ἐκπομπῆς τῆς καθόδου καί τό ρεῦμα παραμένει σέ σχεδόν σταθερή τιμή. Καθώς αὐξάνει ἡ θερμοκρασία τῆς καθόδου, αὐξάνει ἀντίστοιχα καί ἡ τιμή τῆς ἀνοδικῆς τάσης, στήν ὁποία τό ρεῦμα γίνεται σταθερό. Τό μέγιστο ρεῦμα δίνεται ὡς συνάρτηση τῆς θερμοκρασία ἀπό τήν σχέση τῶν Richardson καί Dushman[†]

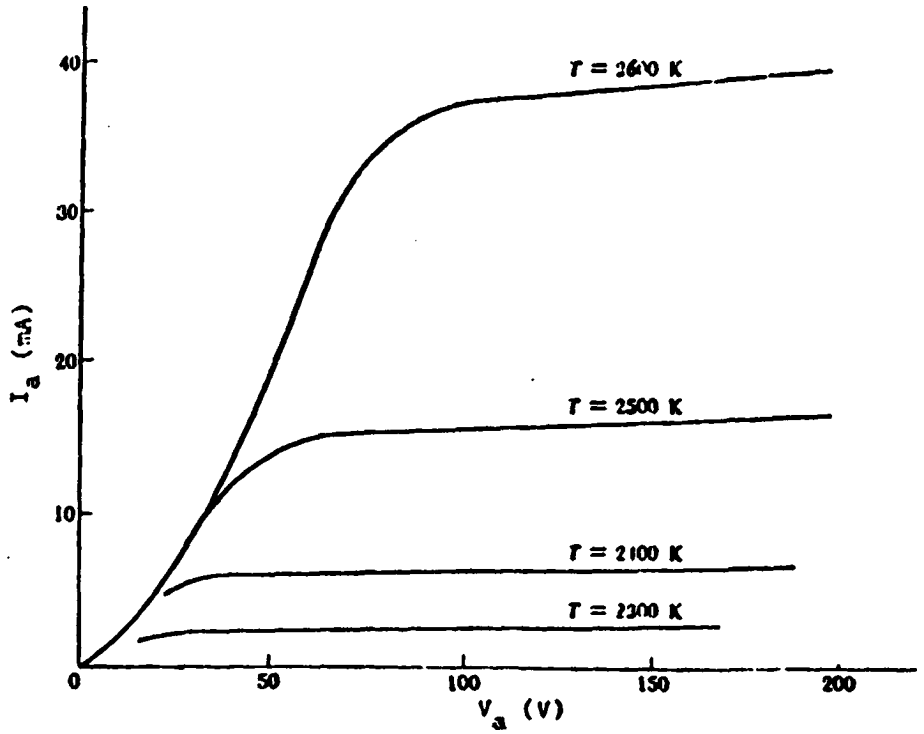
$$I = AT^2 e^{-w/kT} \qquad (10.82)$$

ὅπου A εἶναι μιά σταθερά, w τό **ἔργο ἐξόδου** (δηλαδή τό ἔργο πού ἀπαιτεῖται ὥστε νά ἀποσπασθεῖ ἕνα ἠλεκτρόνιο ἀπό τήν κάθοδο) καί k ἡ σταθερά τοῦ Boltzmann.

---

† Γιά τήν ἀπόδειξη τῆς ἐξ. (10.82) βλ. π.χ. C.L. Hemenway, R.W. Henry and M. Caulton, **Physical Electronics,** John Wiley and Sons, Inc., 1962.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-28 Χαρακτηριστικές καμπύλες ρεύματος ὡς πρός τήν ἀνοδική τάση δίοδης λυχνίας.

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-9. Η ΔΙΟΔΗ ΛΥΧΝΙΑ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 10-29. Γιά τή θέρμανση τοῦ νήματος τῆς λυχνίας χρησιμοποιεῖστε τή λήψη 6.3 V ΕΡ τοῦ τροφοδοτικοῦ σας ἤ κατάλληλο μετασχηματιστή. Συνδέστε σέ σειρά ἕνα ροοστάτη μέ ὁλική ἀντίσταση περίπου 20 Ω καί παράλληλα ἕνα βολτόμετρο ΕΡ.

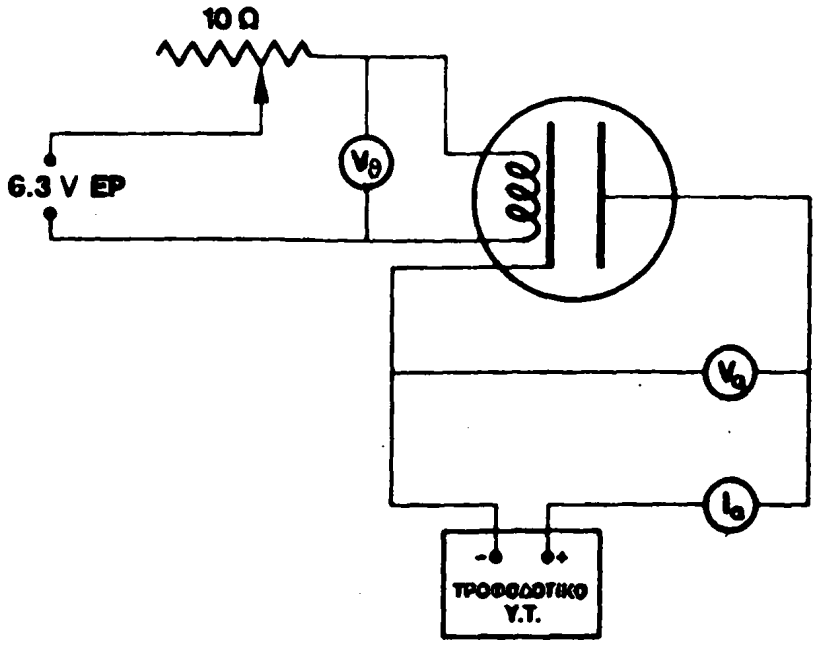
– Μηδενίστε τήν ἀντίσταση τοῦ ροοστάτη καί σημειῶστε τήν τάση θερμάνσεως $V_θ$. Μεταβάλλοντας τήν ἀνοδική τάση V_a σημειῶστε σέ κατάλληλο πίνακα τό ἀντίστοιχο ρεῦμα I_a μέχρις ὅτου ἀναπτυχθεῖ **ρεῦμα κόρου,** δηλαδή κατάσταση λειτουργίας κατά τήν ὁποία τό ρεῦμα δέν μεταβάλλεται αἰσθητά μέ ἀντίστοιχη αὔξηση τῆς ἀνοδικῆς τάσης.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μήν ὑπερβεῖτε τά ἀνώτατα ὅρια ἀνοδικῆς τάσης καί ρεύματος πού προσδιορίζει ὁ κατασκευαστής.

– Μεταβάλλοντας τήν κινητή ἐπαφή τοῦ ροοστάτη, ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά τρεῖς τουλάχιστον ἀκόμη τιμές τοῦ δυναμικοῦ θερμάνσεως $V_θ$.

– Χρησιμοποιώντας τήν πλέον εὐαίσθητη κλίμακα τοῦ ἀμπερομέτρου,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



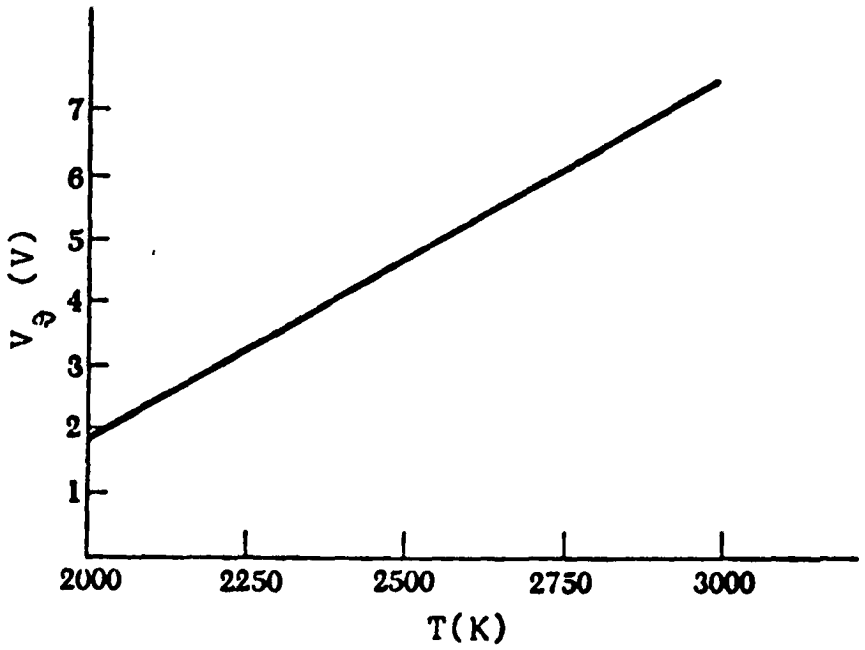
ΣΧΗΜΑ 10-29 Συνδεσμολογία γιά τή μελέτη χαρακτηριστικῶν δίοδης λυχνίας.

διερευνεῖστε γιά καθεμιά ἀπό τίς προηγούμενες συνθῆκες λειτουργίας, τή μεταβολή τοῦ ρεύματος I_a γύρω ἀπό τήν τιμή $V_a \simeq 0$. Σημειῶστε τό ρεῦμα γιά μικρές θετικές καί ἀρνητικές τιμές τῆς ἀνοδικῆς τάσης V_a. Γιά κάθε θερμοκρασία τῆς καθόδου χαράξτε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τοῦ ρεύματος ὡς πρός τήν ἀνοδική τάση. Συμπεριλάβετε ὅλες τίς καμπύλες σέ μιά γραφική παράσταση.

- Προσδιορίστε ἀπό τίς προηγούμενες καμπύλες, μέ ὅση ἀκρίβεια εἶναι δυνατό, τό μέγιστο ρεῦμα I_m γιά τό ὁποῖο ἡ λυχνία συμπεριφέρεται ἀκόμη σύμφωνη μέ τό νόμο τῶν Langmuir καί Child. Ἀποδῶστε τά δεδομένα σέ ἡμιλογαριθμική γραφική παράσταση μέ τήν ποσότητα I_m/T^2 στόν λογαριθμικό ἄξονα ὡς συνάρτηση τοῦ ἀντιστρόφου τῆς θερμοκρασίας $1/T$. Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς θερμοκρασίας τῆς καθόδου χρησιμοποιεῖστε τή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 10-30. Ἐξηγεῖστε τήν καμπύλη πού προκύπτει καί ὑπολογίστε τή σταθερά A καί τό ἔργο ἐξόδου w πού περιέχονται στήν ἐξ. (10.82).

Ἡ συμπεριφορά τῆς δίοδης λυχνίας σέ ἕνα κύκλωμα μελετήθηκε οὐσιαστικά στό Πείραμα 10-6, ὅπου παρατηρήθηκε ἡ λειτουργία τοῦ κυκλώματος ἀνορθώσεως τοῦ σχήματος 10-20. Καθόσον φορεῖς τοῦ ρεύματος εἶναι ἀποκλειστικά τά ἀρνητικά φορτισμένα ἠλεκτρόνια, ροή τοῦ ρεύματος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



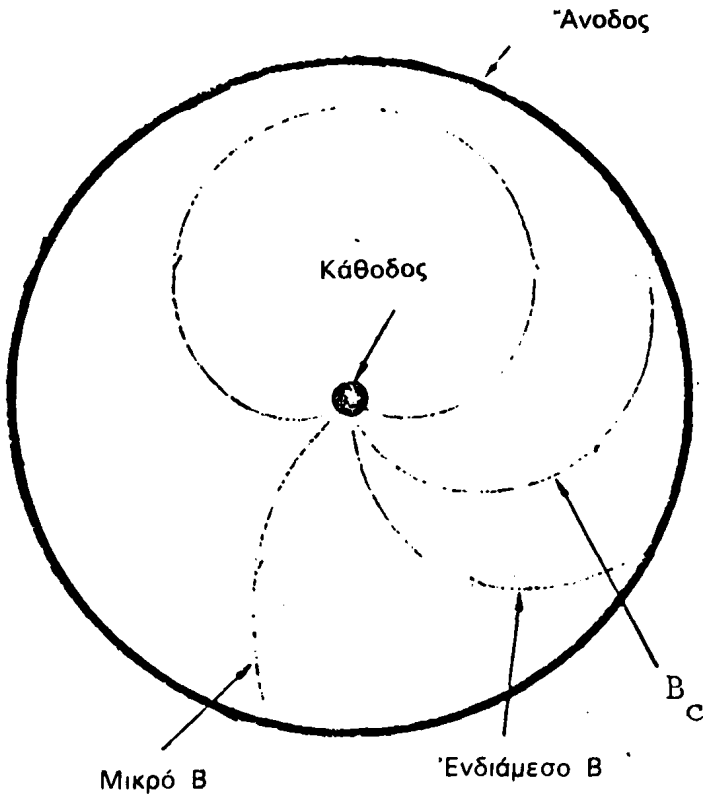
ΣΧΗΜΑ 10-30 Μεταβολή τῆς θερμοκρασίας τῆς καθόδου ὡς πρός τήν τάση θερμάνσεως τοῦ νήματος στή δίοδη λυχνία τοῦ Πειράματος 10-9.

εἶναι δυνατή μόνο ἀπό τήν κάθοδο πρός τήν ἄνοδο καί μόνο γιά θετική τιμή τῆς ἀνοδικῆς τάσης. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἡ δίοδη λυχνία δρᾶ ὡς **βαλβίδα**† μονῆς κατευθύνσεως τοῦ ρεύματος

Πολύ πιό ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ κίνηση τῶν ἠλεκτρονίων στή δίοδη λυχνία ὅταν ταυτόχρονα ὑπάρχει στό γύρω χῶρο μαγνητικό πεδίο. Εἰδικότερα, θά ἐξετάσουμε τήν κίνηση ἠλεκτρονίων στή γεωμετρία ἠλεκτροδίων τοῦ σχήματος 10-26(β) ὅταν στό χῶρο ὑπάρχει ὁμογενές στατικό μαγνητικό πεδίο **B** κατά τόν ἄξονα τῆς καθόδου. Ἡ κίνηση ἑνός ἠλεκτρονίου ὑπό τήν ἐπίδραση τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου στό χῶρο μεταξύ τῶν δύο ἠλεκτροδίων δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 10-31. Καθώς τό ἠλεκτρόνιο ἐγκαταλείπει τήν κάθοδο καί ὑπό τήν ἐπίδραση τοῦ ἀκτινικοῦ πεδίου ἀρχίζει τήν ἐπιταχυνόμενη κίνησή του πρός τήν ἄνοδο, δέχεται μιά δύναμη $\mathbf{F} = -e\mathbf{u} \times \mathbf{B}$, κάθετη πρός τήν ταχύτητά του. Τό ἀποτέλεσμα ὅπως δείχνει τό σχῆμα 10-31, εἶναι μιά καμπυλόγραμμη τροχιά, ἡ ὁποία, γιά μικρές τιμές τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, καταλήγει στήν ἄνοδο. Γιά ἰσχυρότερο μαγνητικό πεδίο ἡ καμπυλότητα τῆς τροχιᾶς αὐξάνει μέχρις ὅτου, πέρα ἀπό μιά κρίσιμη τιμή B_c ἡ τροχιά δέν τέμνει τήν ἄνοδο καί τό ἠλεκτρόνιο ἐπα-

† Στή Μεγάλη Βρετανία οἱ ἠλεκτρονικές λυχνίες ἀπαντῶνται ὄντως μέ τή γενική ὀνομασία *βαλβίδες*.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-31 Κίνηση ἠλεκτρονίου σέ δίοδη λυχνία μέ κυλινδρικά ἠλεκτρόδια ὑπό τήν ἐπίδραση ἀξονικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Τό μαγνητικό πεδίο Β εἶναι κάθετο καί πρός τά ἄνω.

νέρχεται στήν κάθοδο. Στήν κρίσιμη αὐτή τιμή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἀναμένεται ἐπομένως δραστική μείωση τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τή δίοδη λυχνία.

Εἶναι βέβαιο ὅτι ἡ προηγούμενη κρίσιμη τιμή B_c τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἀνοδική τάση στήν ὁποία λειτουργεῖ ἡ λυχνία. Ἡ σχέση ὅμως αὐτῆς τῆς ἐξαρτήσεως δέν εἶναι προφανής. Αὔξηση τοῦ δυναμικοῦ V_a τῆς ἀνόδου αὐξάνει τή δύναμη πού ἐξασκεῖ τό ἠλεκτρικό πεδίο στό ἠλεκτρόνιο κατά τήν ἀκτινική διεύθυνση. Ταυτόχρονα ὅμως αὐξάνει καί τήν ταχύτητα τοῦ ἠλεκτρονίου καί ἐπομένως τή δύναμη πού ἀσκεῖ τό μαγνητικό πεδίο καί ἡ ὁποία τείνει νά αὐξήσει τήν καμπυλότητα τῆς τροχιᾶς. Παρόλα αὐτά τό ἠλεκτρικό πεδίο μεταβάλλεται γραμμικά μέ τήν ἀνοδική τάση ἐνῶ, ὅπως προκύπτει ἀπό τήν ἐξ. (10.70), ἡ ταχύτητα εἶναι ἀνάλογη πρός $V_a^{1/2}$. Ἔτσι, ποιοτικά, περιμένουμε ὅτι ἡ κρίσιμη τιμή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου γιά διακοπή τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος θά μεταβάλλεται κατά τήν τετραγωνική ρίζα τῆς ἀνοδικῆς τάσης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ὁ προσδιορισμός τῆς τιμῆς B_c ἀποτελεῖ μιά ἐνδιαφέρουσα ἄσκηση στήν κλασσική μηχανική. Ἄν τό ἠλεκτρόνιο ἐκπέμπεται ἀπό τήν κάθοδο μέ μηδενική ἀρχική ταχύτητα, ἡ κίνησή του περιορίζεται σέ ἕνα ἐπίπεδο κάθετο πρός τόν κοινό ἄξονα τῶν ἠλεκτροδίων καί ἡ γεωμετρία τοῦ συστήματος ὑποδεικνύει τό σύστημα κυλινδρικῶν συντεταγμένων (r, θ) πού ὁρίζεται στό σχῆμα 10-32. Ἡ ἐξίσωση τῆς κινήσεως δίνεται ἀπό τόν δεύτερο νόμο τοῦ Νεύτωνα

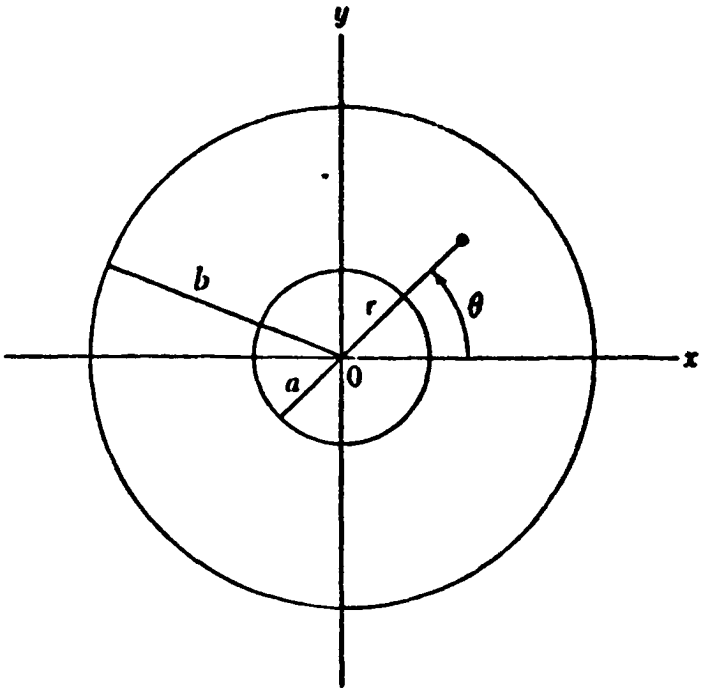
$$m\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{10.83}$$

πού στό σύστημα κυλινδρικῶν συντεταγμένων παίρνει τήν ἁπλή μορφή

$$m\left(\frac{du}{dt}\right)_\theta = eu_r B \tag{10.84α}$$

$$m\left(\frac{du}{dt}\right)_r = -eE - eu_\theta B \ . \tag{10.84β}$$

Ἡ ταχύτητα καί ἐπιτάχυνση τοῦ ἠλεκτρονίου πρός τήν ἐφαπτόμενη καί ἀκτινική διεύθυνση εἶναι εὔκολο νά ὑπολογιστοῦν [βλ. Ἄσκηση 10-11] ὡς



ΣΧΗΜΑ 10-32 Σύστημα κυλινδρικῶν συντεταγμένων στή δίοδη λυχνία. a εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς καθόδου καί b τῆς ἀνόδου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \tag{10.85α}$$

$$v_r = \dot{r} \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \tag{10.85β}$$

ὅπου, γιά σύντμηση τοῦ συμβολισμοῦ, οἱ τελεῖες δηλώνουν διαφόριση ὡς πρός τό χρόνο. Χρησιμοποιώντας τίς ἐξ. (10.84α) καί (10.85α) μποροῦμε ἑπομένως νά γράψουμε τήν ἐξίσωση τῆς κινήσεως κατά τήν ἐφαπτόμενη διεύθυνση ὡς

$$eB\dot{r} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \ . \tag{10.86}$$

Πολλαπλασιάζοντας τήν τελευταία σχέση μέ r, μποροῦμε νά τή γράψουμε στή μορφή

$$m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) - eBr\dot{r} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta} - \tfrac{1}{2}eBr^2) = 0 \ . \tag{10.87}$$

πού συνεπάγεται τή σχέση

$$mr^2\dot{\theta} - \tfrac{1}{2}eBr^2 = L \tag{10.88}$$

ὅπου L εἶναι μιά σταθερή ποσότητα (μέ διαστάσεις στροφορμῆς). Παρατηρεῖται μέ τήν εὐκαιρία αὐτή ὅτι ἡ ποσότητα $mr^2\dot{\theta}$ εἶναι ἡ στροφορμή τοῦ ἠλεκτρονίου γύρω ἀπό τόν ἄξονα τῆς καθόδου. Ἡ ἐξ. (10.88) ἑπομένως ἐπισημαίνει τό γεγονός ὅτι ἡ στροφορμή τοῦ ἠλεκτρονίου *δέν* διατηρεῖται, ἀλλά αὐξάνει συνεχῶς κατά τήν ποσότητα $\frac{1}{2}eBr^2$. Τοῦτο βέβαια ὀφείλεται στήν ἐξάρτηση τῆς δυνάμεως Lorentz ἀπό τήν ταχύτητα.

Ἡ ποσότητα L τῆς ἐξ. (10.88) μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τίς συνοριακές συνθῆκες τοῦ προβλήματος. Παρατηρεῖται ὅτι ἄν τό ἠλεκτρόνιο ἐγκαταλείπει τήν κάθοδο μέ σχεδόν μηδενική ταχύτητα, τότε γιά $r = a$ θά πρέπει $\dot{\theta} = 0$. Μέ τή συνθήκη αὐτή ἡ ἐξ. (10.88) δίνει

$$L = -\tfrac{1}{2}eBa^2 \tag{10.89}$$

πού, ἀπό τήν ἴδια ἐξίσωση, προσδιορίζει τήν τιμή τῆς γωνιακῆς ταχύτητας ὡς



$$\dot{\theta} = \frac{eB}{2m}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) . \qquad (10.90)$$

Ἡ γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$ μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ εὔκολα ἀπό τήν ἐξίσωση διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας.

$$\frac{1}{2} mu^2 = eV \qquad (10.91)$$

πού σέ σύστημα κυλινδρικῶν συντεταγμένων παίρνει τή μορφή [βλ. ἐξ. (10.85)]

$$\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = eV(r) . \qquad (10.92)$$

Συνδιάζοντας τή σχέση αὐτή μέ τήν ἐξ. (10.90) μποροῦμε νά ἀπαλείψουμε τή γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$ καί νά ἐκφράσουμε τήν ἐξίσωση τῆς κινήσεως ἀποκλειστικά ὡς συνάρτηση τῆς ἀκτινικῆς ἀποστάσεως r μέ τή σχέση

$$\frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{eB}{2m}\right)^2\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^2\right] = eV(r) . \qquad (10.93)$$

Τώρα, ἡ κρίσιμη τιμή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, γιά τήν ὁποία διακόπτεται τό ἀνοδικό ρεῦμα, ἐπιτυγχάνεται ὅταν στήν ἀπόσταση $r = b$ ἡ ταχύτητα ἔχει διεύθυνση κατά τήν ἐφαπτομένη. Δηλαδή, στήν περίπτωση ὅπου γιά $r = b$ ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη $\dot{r} = 0$. Παρατηρώντας ἀκόμη ὅτι γιά $r = b$ ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ παίρνει τήν τιμή τῆς ἀνοδικῆς τάσης μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἐξ. (10.93) ὡς

$$\frac{1}{2} mb^2\left(\frac{eB_c}{2m}\right)^2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = eV_a . \qquad (10.94)$$

Για συνήθεις δίοδες λυχνίες ἡ ἀκτινική διάσταση τῆς καθόδου a εἶναι πολύ μικρότερη ἀπό τήν ἐσωτερική ἀκτίνα b τῆς ἀνόδου. Σέ πολύ καλή προσέγγιση ἑπομένως μποροῦμε νά παραλείψουμε τόν ὅρο a^2/b^2 καί λύνοντας ὡς πρός B_c τήν τελευταία σχέση, νά γράψουμε γιά τήν κρίσιμη τιμή τοῦ ἀξονικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου

$$B_c = \sqrt{\frac{8mV_a}{eb^2}} . \qquad (10.95)$$

Ἡ κίνηση τῶν ἠλεκτρονίων πού περιγράψαμε ἀπαντᾶται σέ εἰδικά δια-

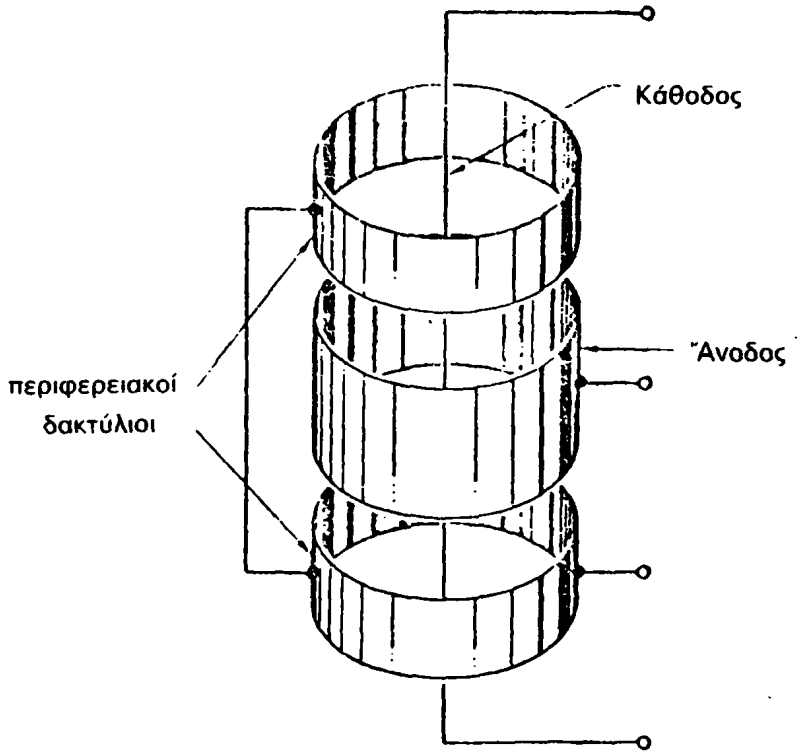
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μορφωμένες δίοδες λυχνίες γιά τήν κατασκευή ἠλεκτρικῶν ταλαντωτῶν ἐξαιρετικά ὑψηλῶν συχνοτήτων (τῆς τάξης τῶν 10^{10} Hz). Παρόμοια ἐξαρτήματα ὀνομάζονται **μαγνητρόνια** ἐνῶ ἡ συνθήκη τῆς ἐξ. (10.95) ἀναφέρεται συνήθως ὡς **συνθήκη μαγνητρονίου.**

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-10. ΔΙΟΔΗ ΛΥΧΝΙΑ ΜΕ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Η ΣΥΝΘΗΚΗ ΜΑΓΝΗΤΡΟΝΙΟΥ

Ἡ δίοδη λυχνία πού θά χρησιμοποιηθεῖ (Feranti GRD 7) ἔχει τή γεωμετρία τοῦ σχήματος 10-26(β). Ἡ διάταξη τῶν ἠλεκτροδίων δίνεται μέ μεγαλύτερη λεπτομέρεια στό σχῆμα 10-33. Ἡ κάθοδος ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα σύρμα βολφραμίου μέ διάμετρο 0.125 mm. Δύο **περιφερειακοί δακτύλιοι** περιβάλλουν τήν κάθοδο ὡς γεωμετρική ἐπέκταση τῆς ἀνόδου. Στή συνήθη λειτουργία τῆς δίοδης λυχνίας, οἱ δακτύλιοι διατηροῦνται στό ἴδιο δυναμικό μέ τήν ἄνοδο, ἀλλά εἶναι ἠλεκτρικά μονωμένοι ἀπό αὐτή. Σκοπός τους εἶναι ὁ σωστός τερματισμός τοῦ πεδίου στήν περιφέρεια τῆς διατάξεως ὥστε τό ἠλεκτρικό πεδίο μεταξύ καθόδου καί ἀνόδου νά προσεγγίζει ὅσο τό δυνατόν περισσότερο τό πεδίο δύο ὁμοαξονικῶν κυλίνδρων μέ ἄπειρες διαστάσεις.

– Συνδέστε τή δίοδη λυχνία σύμφωνα μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 10-



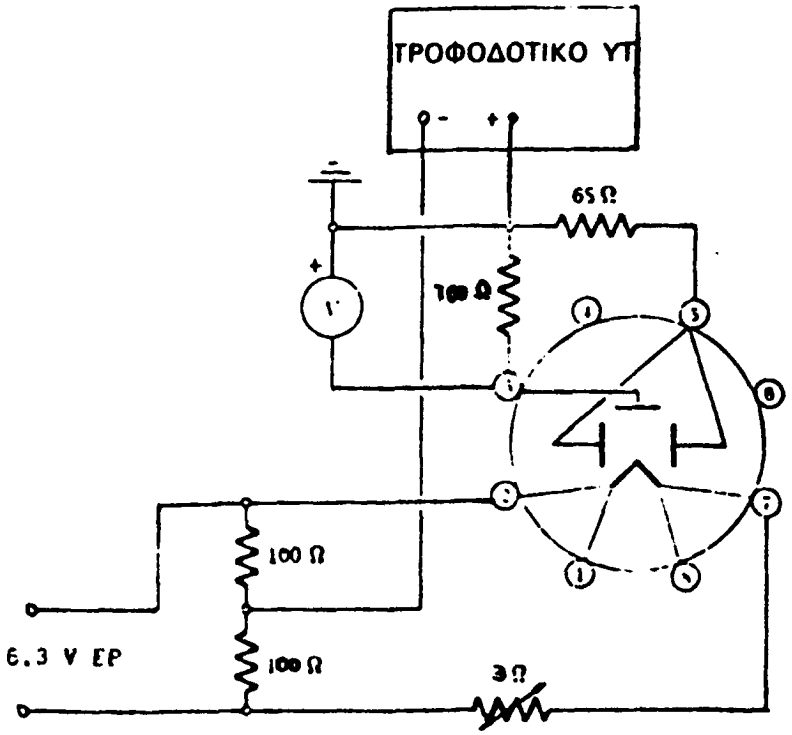
ΣΧΗΜΑ 10-33 Διάταξη ἠλεκτροδίων στή λυχνία τοῦ Πειράματος 10-10.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

34. Ἡ κάθοδος θερμαίνεται μέ τή σταθερή παροχή 6.3 V ΕΡ καί ἡ θερμοκρασία της μπορεῖ νά ρυθμιστεῖ μέ τόν ροοστάτη 3 Ω πού ἔχει παρεμβληθεῖ σέ σειρά. Τό ἀνοδικό ρεῦμα μπορεῖ νά μετρηθεῖ ἀπό τήν ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως 100 Ω. Τά δύο ἠλεκτρόδια πού συνδέονται μέ τόν ἀκροδέκτη 5 ἀντιπροσωπεύουν τούς περιφερειακούς δακτυλίους καί διατηροῦνται στό ἴδιο δυναμικό μέ τήν ἄνοδο διαμέσου τῆς ἀντιστάσεως 68 Ω. Στή συνδεσμολογία τοῦ σχήματος 10-34, ὁ θετικός ἀκροδέκτης τοῦ τροφοδοτικοῦ ΥΤ εἶναι γειωμένος ὥστε τό βολτόμετρο νά βρίσκεται κοντά στή γῆ.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μέ τήν προηγούμενη συνδεσμολογία, τό τροφοδοτικό σταθερῆς παροχῆς 6.3 V ΕΡ καί τό κύκλωμα θερμάνσεως τῆς καθόδου βρίσκονται σέ ἀρνητικό δυναμικό τῆς τάξης τῶν 300 V.

—Βεβαιωθεῖτε ὅτι κατανοεῖτε τή συνδεσμολογία τοῦ σχήματος 10-34 (Ποιός, π.χ. εἶναι ὁ ρόλος τῶν δύο ἀντιστάσεων 100 Ω στό κύκλωμα θερμάνσεως τῆς καθόδου;). Ρυθμίστε τήν ἀνοδική τάση στά 100 V καί τή θερμοκρασία τῆς καθόδου ὥστε νά ἐπιτύχετε ἀνοδικό ρεῦμα 1 mA. Μεταβάλλοντας τήν ἀνοδική τάση, μετρεῖστε τό ἀνοδικό ρεῦμα καί χαράξτε τή χαρακτηριστική καμπύλη τῆς λυχνίας πού ἀντιστοιχεῖ στή θερ-



ΣΧΗΜΑ 10-34 Σύνδεση δίοδης λυχνίας μέ κυλινδρικά ἠλεκτρόδια καί περιφερειακούς δακτυλίους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μοκρασία αὐτή τῆς καθόδου. Ἐπανέλθετε στά 100 V ἀνοδική τάση καί αὐξεῖστε τό ρεῦμα θερμάνσεως τῆς καθόδου ὥστε τό ἀνοδικό ρεῦμα νά ἀνέλθει στά 5 mA. Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία καί χαράξτε τή νέα χαρακτηριστική καμπύλη. Τέλος, ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά μηδενική ἀντίσταση τοῦ ροοστάτη στό κύκλωμα θερμάνσεως τῆς καθόδου. Ἄν δέν ἔχετε ἐκτελέσει τό Πείραμα 10-9, ἀκολουθεῖστε τίς ὁδηγίες τῆς τελευταίας παραγράφου πού δίνονται ἐκεῖ.

Περιβάλετε τή λυχνία μέ δύο πηνία ὁμοαξονικά ὡς πρός τήν κάθοδο. Τροφοδοτεῖστε τά πηνία καί ὑπολογίστε τό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖται στήν περιοχή τῆς λυχνίας σύμφωνα μέ τά δεδομένα πού θά σᾶς δοθοῦν. Μπορεῖτε ἐναλλακτικά νά μετρήσετε τό μαγνητικό πεδίο μέ τό *μαγνητόμετρο Hall* πού περιγράφεται στό Πείραμα 10-14. Μεταβάλλοντας τήν ἀνοδική τάση, προσδιορίστε τήν τιμή B_c τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου γιά τήν ὁποία διακόπτεται τό ἀνοδικό ρεῦμα. Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τήν ποσότητα B_c ὡς πρός τήν ἀνοδική τάση V καί ἐλέγξτε τήν πρόβλεψη τῆς ἐξ. (10.95). Χρησιμοποιεῖστε τή γραφική παράσταση γιά τόν προσδιορισμό τοῦ λόγου e/m καί συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τήν ἀντίστοιχη τιμή πού δίνεται στή βιβλιογραφία.

10-6 Ἡ Τρίοδη Λυχνία

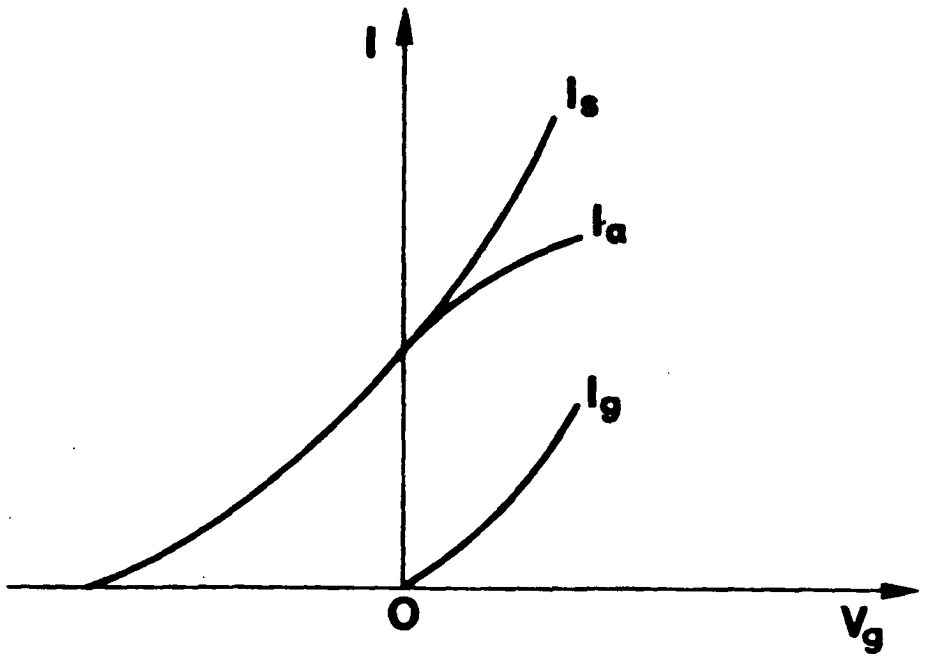
Ἡ σχετικά ἁπλή κίνηση ἠλεκτρονίων πού περιγράψαμε στή δίοδη λυχνία ἀποκτᾶ νέες διαστάσεις καί δυνατότητες μέ τήν προσθήκη ἐπιπλέον ἠλεκτροδίων στό χῶρο μεταξύ καθόδου καί ἀνόδου. Στήν **τρίοδη λυχνία** ἕνα νέο ἠλεκτρόδιο, πού θά ὀνομάσουμε **πλέγμα ἐλέγχου** ἤ ἁπλῶς **πλέγμα,** συνήθως μέ τή μορφή λεπτῆς συρμάτινης ἑσχάρας, περιβάλλει τήν κάθοδο σέ μικρή ἀπόσταση ἀπό αὐτή. Κατά τή συνήθη λειτουργία τῆς τρίοδης λυχνίας, τό δυναμικό τοῦ πλέγματος διατηρεῖται κατά μερικά volt ἀρνητικό ἐνῶ τό δυναμικό τῆς ἀνόδου κατά μερικές ἑκατοντάδες volt θετικό ὡς πρός τήν κάθοδο. Τό ἠλεκτρικό πεδίο πού δημιουργεῖται κατά τόν τρόπο αὐτό συντελεῖ στή διατήρηση ἑνός σημαντικοῦ φορτίου χώρου μεταξύ καθόδου καί πλέγματος, ἐνῶ τό δυναμικό τῆς ἀνόδου ἐπιταχύνει ἠλεκτρόνια ἀπό τήν κάθοδο πρός τήν ἄνοδο. Ἀπό τά ἐπιχειρήματα τῆς προηγούμενης παραγράφου περιμένουμε ἑπομένως ὅτι τό ρεῦμα πού διατρέχει τήν τρίοδη λυχνία θά συνδέεται πρός τό δυναμικό τῶν ἠλεκτροδίων μέ μιά σχέση ἀνάλογη πρός τό νόμο τῶν Langmuir καί Child τῆς ἐξ. (10.81). Ἔτσι, θά γράψουμε γιά τό ρεῦμα I_a μεταξύ καθόδου καί ἀνόδου τή σχέση

$$I_a = k\left(V_g + \frac{V_a}{\mu}\right)^{3/2} \qquad (10.96)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου k εἶναι μιά σταθερά, V_a τό δυναμικό τῆς ἀνόδου καί V_g τό δυναμικό τοῦ πλέγματος. Εἶναι φανερό ὅτι τό δυναμικό τοῦ πλέγματος καί τῆς ἀνόδου ἐπηρεάζουν κατά διαφορετικό τρόπο τή ροή τοῦ ρεύματος λόγω τῆς διαφορετικῆς ἀποστάσεως τῶν δύο ἠλεκτροδίων ἀπό τήν κάθοδο. Τό γεγονός αὐτό ἀποδίδεται μέ τόν συντελεστή μ στήν ἐξ. (10.96), πού θά ὀνομάσουμε **συντελεστή ἐνισχύσεως** τοῦ πλέγματος.

Δέν εἶναι δυστυχῶς δυνατόν νά δώσουμε αὐστηρά μαθηματική ἀπόδειξη τῆς ἐξ. (10.96), πού γράψαμε ὡς φυσική ἐπέκταση τοῦ νόμου τῶν Langmuir καί Child, ἀκόμη καί γιά τρίοδη λυχνία μέ ἁπλή γεωμετρία ἠλεκτροδίων. Ἡ ἰσχή τῆς σχέσης πάντως ἔχει ἐπιβεβαιωθεῖ πειραματικά σέ πολλές τριόδους μέ διαφορετικές γεωμετρίες. Σύμφωνα μέ τή σχέση αὐτή, ἀρνητικό δυναμικό V_g στό πλέγμα ἐλέγχου ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή μείωση τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος. Καθώς τό δυναμικό τοῦ πλέγματος γίνεται λιγώτερο ἀρνητικό περιμένουμε αὔξηση τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος. Γιά θετικό δυναμικό V_g τό ρεῦμα αὐξάνει ἀκόμη περισσότερο. Παρόλα αὐτά στήν τελευταία περίπτωση, τό θετικό δυναμικό τοῦ πλέγματος ἕλκει ἕνα μέρος τοῦ φορτίου χώρου μέ ἀποτέλεσμα νά δημιουργηθεῖ ἀντίστοιχο ρεῦμα στό ἐξωτερικό κύκλωμα. Ἡ γενική συμπεριφορά τοῦ ρεύματος ὡς πρός τό δυναμικό πλέγματος, γιά σταθερή ἀνοδική τάση, δίνεται ποιοτικά στό σχῆμα 10-35. Γιά ἀρκετά ἀρνητικό δυναμικό πλέγματος, τό ἀνοδικό ρεῦμα I_a ἀποκόπτεται τελείως, αὐξάνει ὅμως σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (10.96) καθώς τό δυ-



ΣΧΗΜΑ 10-35 Ἀνοδικό ρεῦμα I_a καί ρεῦμα πλέγματος I_g τρίοδης λυχνίας ὡς συνάρτηση τοῦ δυναμικοῦ πλέγματος V_g γιά σταθερή ἀνοδική τάση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ναμικό μετατοπίζεται πρός λιγώτερο ἀρνητικές τιμές. Τό ρεῦμα πλέγματος ἐμφανίζεται σέ θετικές τιμές τοῦ δυναμικοῦ καί ἐφεξῆς αὐξάνει δραστικά μέ ἀντίστοιχη μείωση τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος. Στήν περιοχή αὐτή ἡ ἐξ. (10.96) περιγράφει πλέον τό ὁλικό ρεῦμα πού διοχετεύει ἡ κάθοδος στά δύο ἄλλα ἠλεκτρόδια

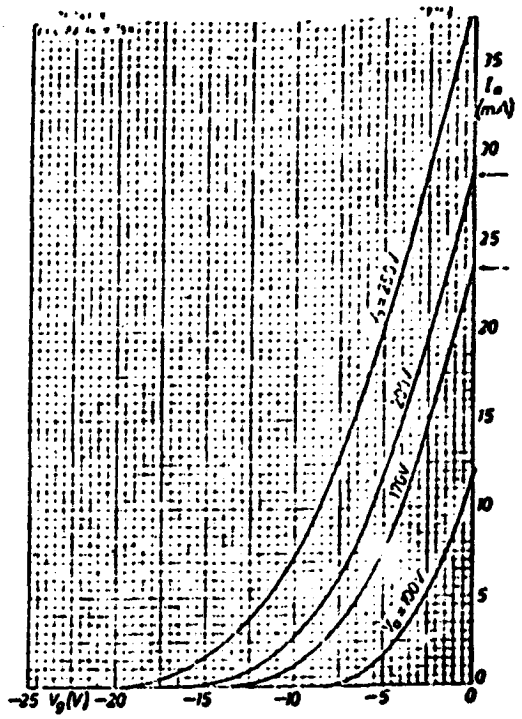
$$I_s = I_a + I_g \ . \qquad (10.97)$$

Κατά τή συνήθη λειτουργία τῆς τρίοδης λυχνίας (μέ ἀρνητικό, ἤ μικρό θετικό δυναμικό στό πλέγμα ἐλέγχου) τό ἀνοδικό ρεῦμα I_a, ἡ ἀνοδική τάση V_a καί τό δυναμικό πλέγματος V_g, στό ὁποῖο θά ἀναφερθοῦμε καί μέ τήν ἐναλλακτική ὀνομασία **πόλωση,** συνδέονται διαμέσου τῆς ἐξ. (10.96). Βέβαια, τό ἀνοδικό ρεῦμα, ὅπως καί στή δίοδο, ἐξαρτᾶται ἐπιπλέον καί ἀπό τό ρεῦμα θερμάνσεως τῆς καθόδου. Στή συνέχεια θά ἀγνοήσουμε τήν ἐξάρτηση αὐτή καί θά θεωρήσουμε ὅτι ἡ κάθοδος θερμαίνεται μέ τό ρεῦμα λειτουργίας πού προσδιορίζει ὁ κατασκευαστής. Στήν πλειονότητα τῶν τριόδων λυχνιῶν τό ρεῦμα αὐτό παρέχει δυνατότητα θερμιονικῆς ἐκπομπῆς πέντε ἕως δέκα φορές ὑψηλότερη ἀπό τό ἀνοδικό ρεῦμα, ἔτσι ὥστε ἡ κατάσταση ἰσορροπίας νά διέπεται ἀπό τό φορτίο χώρου μεταξύ τῶν ἠλεκτροδίων.

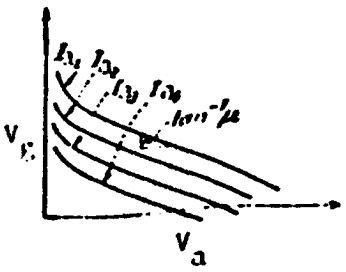
Ἡ μεταβολή τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος ὡς πρός τήν πόλωση τοῦ πλέγματος, γιά σταθερή ἀνοδική τάση, δόθηκε ἤδη στό σχῆμα 10-35. Μεταβολή τῆς ἀνοδικῆς τάσης ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν αὔξηση τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος. Γιά μιά μεγαλύτερη (μικρότερη) τιμή τῆς ἀνοδικῆς τάσης τοῦτο ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν παράλληλη μετατόπιση τῆς καμπύλης τοῦ σχήματος 10-35 πρός τά ἀριστερά (δεξιά). Μιά οἰκογένεια τέτοιων καμπυλῶν γιά τέσσερις διάφορες τιμές τῆς ἀνοδικῆς τάσης δίνεται στό σχῆμα 10-36(α). Γραφικές παραστάσεις τῆς μορφῆς αὐτῆς ἀπαντῶνται στή βιβλιογραφία μέ τήν ὀνομασία **χαρακτηριστικές καμπύλες τῆς λυχνίας.**

Ἡ λειτουργία τῆς τρίοδης λυχνίας μπορεῖ νά ἀποδοθεῖ μέ δύο συμπληρωματικές γραφικές παραστάσεις πού προκύπτουν ἄν ἕνα ἀπό τά τρία μεγέθη I_a, V_a καί V_g διατηρηθεῖ σταθερό καί ἀποδοθεῖ ἡ ἀμοιβαία ἐξάρτηση τῶν δύο ἄλλων. Τό σχῆμα 10-36(β) περιέχει τίς χαρακτηριστικές καμπύλες πού ἀποδίδουν τή μεταβολή τοῦ ρεύματος ὡς πρός τήν ἀνοδική τάση γιά σταθερές τιμές τοῦ δυναμικοῦ στό πλέγμα ἐλέγχου. Μεγαλύτερη ἀρνητική πόλωση τοῦ πλέγματος ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν μετατόπιση τῆς καμπύλης πρός τά δεξιά χωρίς νά μεταβάλλεται αἰσθητά ἡ μορφή της. Τοῦτο βέβαια εἶναι σύμφωνο μέ τήν πρόβλεψη τῆς ἐξ. (10.96). Τέλος, στό σχῆμα 10-

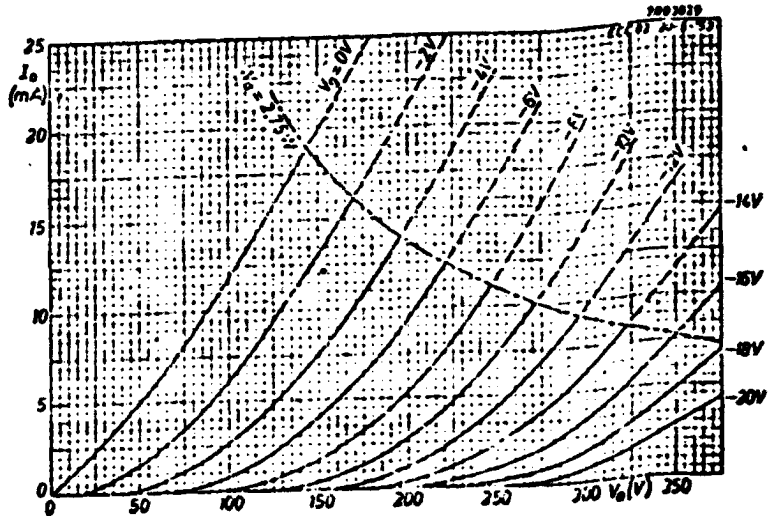
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



(α)



(γ)



(β)

ΣΧΗΜΑ 10-36 Χαρακτηριστικές καμπύλες τῆς τρίοδης λυχνίας Edicron ECC 82. (α) Ἀνοδικό πλέγμα I_a πρός πόλωση V_g. (β) Ἀνοδικό ρεῦμα I_a πρός ἀνοδική τάση V_a. (γ) Χαρακτηριστικές καμπύλες σταθεροῦ ρεύματος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

36(γ) περιέχονται οἱ **χαρακτηριστικές καμπύλες σταθεροῦ ρεύματος,** ἤτοι οἱ καμπύλες πού προκύπτουν ἀπό τή μεταβολή τοῦ δυναμικοῦ τοῦ πλέγματος πρός τήν ἀνοδική τάση γιά διατήρηση σταθεροῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος.

Οἱ τελευταῖες χαρακτηριστικές καμπύλες ἐκφράζουν σέ γραφική παράσταση τή σχετική ἐπίδραση τῶν δυναμικῶν V_a καί V_g στό ἀνοδικό ρεῦμα. Εἶναι μάλιστα δυνατόν ἀπό τή γραφική παράσταση νά ἐξάγουμε τήν τιμή τοῦ συντελεστῆ ἐνισχύσεως μ πού εἰσήχθη στήν ἐξ. (10.96) γιά τήν ἀπόδοση τοῦ ἴδιου φαινομένου. Διαφορίζοντας τήν ἐξ. (10.96) ὡς πρός τό δυναμικό τοῦ πλέγματος V_g καί ἐπιβάλλοντας τή συνθήκη σταθεροῦ ρεύματος $(\partial I_a/\partial V_g = 0)$ προκύπτει ἀμέσως ὅτι

$$0 = k\left[1 + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial V_a}{\partial V_g}\right)_{I_a}\right]$$

ἤ

$$\mu = -\left(\frac{\partial V_a}{\partial V_g}\right)_{I_a} . \tag{10.98}$$

Στίς δύο τελευταῖες σχέσεις ὁ δείκτης στά δεξιά τῆς μερικῆς παραγώγου δηλώνει τό μέγεθος πού διατηρεῖται σταθερό, ἐνῶ τό ἀρνητικό πρόσημο στήν ἐξ. (10.98) ἐπισημαίνει τό γεγονός ὅτι, γιά τή διατήρηση σταθεροῦ ρεύματος, μείωση τοῦ δυναμικοῦ πλέγματος ἀντισταθμίζεται μέ αὔξηση τῆς ἀνοδικῆς τάσης.

Ἡ ἐξ. (10.98) προβλέπει τόν προσδιορισμό τοῦ συντελεστῆ ἐνισχύσεως ἀπό τήν κλίση τῶν χαρακτηριστικῶν σταθεροῦ ρεύματος. Δύο ἀκόμη παράμετροι πού χαρακτηρίζουν τή λειτουργία τῆς τρίοδης λυχνίας μποροῦν νά ἐξαχθοῦν ἀπό τίς ὑπόλοιπες γραφικές παραστάσεις τοῦ σχήματος 10-36. Ἡ ποσότητα

$$r_p \equiv \left(\frac{\partial V_a}{\partial I_a}\right)_{V_g} \tag{10.99}$$

μέ διαστάσεις ἀντιστάσεως ἀντιπροσωπεύει τή μεταβολή τῆς ἀνοδικῆς τάσης ὡς πρός τήν ἀντίστοιχη μεταβολή τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος γιά σταθερό δυναμικό τοῦ πλέγματος. Ἡ παράμετρος αὐτή, πού ἀπαντᾶται μέ τήν ὀνομασία **ἐσωτερική ἀντίσταση** τῆς τρίοδης λυχνίας, μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τήν κλίση τῶν χαρακτηριστικῶν καμπυλῶν τοῦ σχήματος 10-36(β). Παράλληλα, ἡ ποσότητα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$g_m \equiv \left(\frac{\partial I_a}{\partial V_g}\right)_{V_a} \tag{10.100}$$

μέ διαστάσεις ἀγωγιμότητας, γνωστή ὡς **διαγωγιμότητα** τῆς λυχνίας ἀντιπροσωπεύει τήν κλίση τῶν χαρακτηριστικῶν καμπυλῶν τοῦ σχήματος 10-36(α).

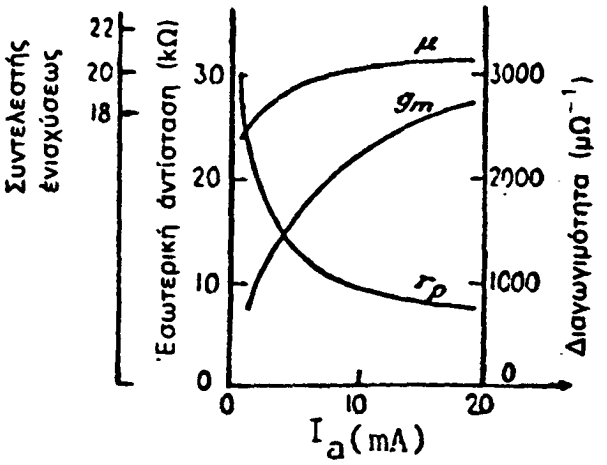
Ἡ σημασία τῶν δύο προηγούμενων παραμέτρων γίνεται ἀντιληπτή ἄν τό ἀνοδικό ρεῦμα, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τίς δύο τάσεις V_a καί V_g, ἀναπτυχθεῖ σέ σειρά Taylor. Διατηρώντας μόνο ὅρους πρώτης τάξης μποροῦμε νά γράψουμε γιά μικρές μεταβολές τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος τή σχέση

$$\Delta I_a = \left(\frac{\partial I_a}{\partial V_a}\right)_{V_g} \Delta V_a + \left(\frac{\partial I_a}{\partial V_g}\right)_{V_a} \Delta V_g$$

$$= \frac{1}{r_p} \Delta V_a + g_m \Delta V_g \ . \tag{10.101}$$

Ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση καί ἡ διαγωγιμότητα προσδιορίζουν ἐπομένως τή μεταβολή τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος γιά ἀντίστοιχη μεταβολή τῆς ἀνοδικῆς τάσηςκαί τοῦ δυναμικοῦ πλέγματος. Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τήν τελευταία ἔκφραση καί τόν ὁρισμό τοῦ συντελεστῆ ἐνισχύσεως στήν ἐξ. (10.98) εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι οἱ τρεῖς παράμετροι πού χαρακτηρίζουν τή λειτουργία τῆς τρίοδης λυχνίας συνδέονται μέ τήν ἁπλή σχέση

$$\mu = r_p g_m. \tag{10.102}$$



ΣΧΗΜΑ 10-37 Οἱ παράμετροι μ, r_p καί g_m τῆς τρίοδης λυχνίας ὡς συνάρτηση τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

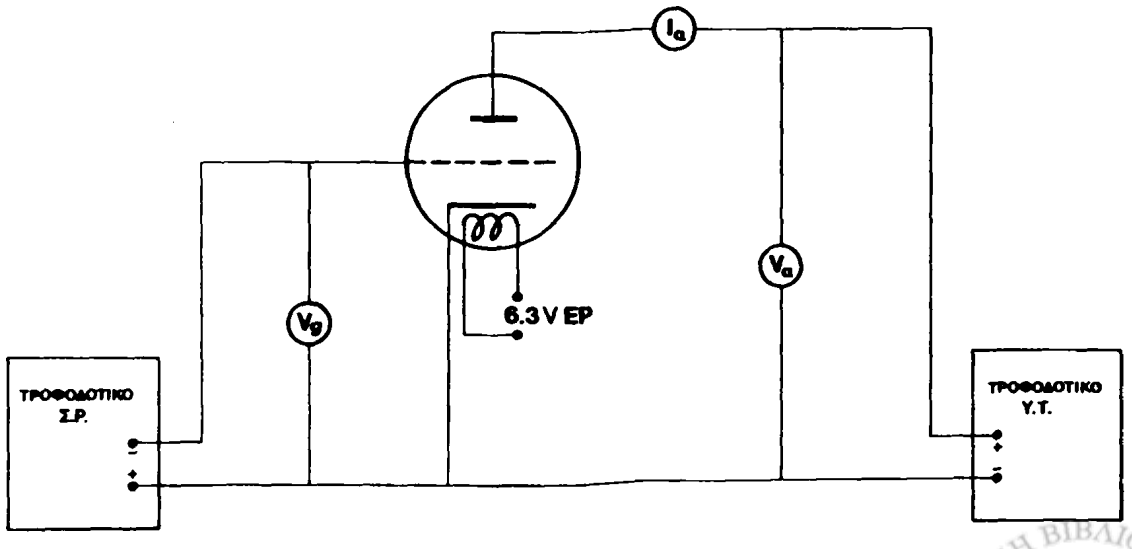
Ἡ μεταβολή τῶν παραμέτρων μ, r_p καί g_m γιά σταθερή τιμη τῆς ἀνοδικῆς τάσης στήν τρίοδη λυχνία πού θά χρησιμοποιήσουμε στά ἑπόμενα πειράματα δίνεται στό σχῆμα 10-37. Ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση μεταβάλλεται σέ μιά ἐκτεταμένη περιοχή ἀπό πολύ ὑψηλές τιμές γιά σχετικά μικρό ρεῦμα, ἐνῶ προσεγγίζει ἀσυμπτωματικά μιά σχεδόν σταθερή τιμή γιά μεγάλα ἀνοδικά ρεύματα. Ἀντίστροφη εἶναι ἡ μεταβολή τῆς διαγωγιμότητας, ἡ ὁποία αὐξάνει συνεχῶς μέ ἀντίστοιχη αὔξηση τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος. Τοῦτο ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (10.102), τή διατήρηση σχεδόν σταθερῆς τιμῆς τοῦ συντελεστῆ ἐνισχύσεως μ γιά μιά ἐκτεταμένη περιοχή τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος.

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-11. Η ΤΡΙΟΔΗ ΛΥΧΝΙΑ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 10-38.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Τοποθετεῖστε τά ἐπιμέρους ὄργανα κατά τέτοιο τρόπο ὥστε νά ἀποφεύγεται κατά λάθος ἐπαφή μέ σημεῖα ὅπου ἀναπτύσσεται ὑψηλή τάση.

– Μηδενίστε τήν τάση πλέγματος V_g. Μεταβάλετε τήν ἀνοδική τάση V_a ἀπό 0 V μέχρι τήν ἀνώτατη ἐπιτρεπτή τάση πού προσδιορίζει ὁ κατασκευαστής σέ βήματα τῶν 10 V. Σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τό ἀνοδικά ρεῦμα I_a γιά κάθε τιμή τῆς ἀνοδικῆς τάσης.



ΣΧΗΜΑ 10-38 Συνδεσμολογια για τη μελετη των χαρακτηριστικῶν τρίοδης λυχνίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διαδικασία γιά διάφορες τιμές τῆς τάσης πλέγματος V_g. Καλύψτε ὅλη τήν περιοχή μεταξύ −14 V καί 2 V σέ βήματα τῶν 2 V. Χαράξτε σέ μιά γραφική παράσταση τήν οἰκογένεια τῶν καμπυλῶν πού ἀποδίδουν τή μεταβολή τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος ὡς πρός τήν ἀνοδική τάση. Σημειῶστε στήν ἄκρη κάθε καμπύλης τήν ἀντίστοιχη τιμή τῆς τάσης πλέγματος.

– Ρυθμίστε τήν ἀνοδική τάση στά 90 V. Σέ κατάλληλο πίνακα καταγράψτε τή μεταβολή τοῦ ρεύματος I_a καθώς ἡ τάση πλέγματος μεταβάλλεται στήν περιοχή ἀπό −14 V ἕως 2 V. Οἱ τιμές τοῦ δυναμικοῦ V_g πρέπει νά εἶναι πυκνότερες στά σημεῖα ὅπου ἡ μεταβολή τοῦ ρεύματος μεταβάλλεται δραστικά.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά τιμές τῆς ἀνοδικῆς τάσης 45 V, 150 V, 200 V καί 250 V. Χαράξτε σέ μιά γραφική παράσταση τήν οἰκογένεια τῶν καμπυλῶν I_a πρός V_g.

– Ρυθμίστε τήν ἀνοδική τάση στά 150 V καί τήν τάση πλέγματος σέ τιμή ὥστε τό ἀνοδικό ρεῦμα νά ἔχει τιμή 5 mA. Μεταβάλετε τήν τάση τοῦ πλέγματος μεταξύ −14 V καί 2 V καί σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τήν ἀντίστοιχη τιμή τῆς ἀνοδικῆς τάσης ὥστε τό ρεῦμα νά παραμένει ἴσο μέ 5 mA. Καλύψτε ὅλη τήν ἐπιτρεπτή περιοχή τῆς ἀνοδικῆς τάσης.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά τέσσερις ἀκόμη τιμές τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος διασπαρμένες καθόλη τήν ἐπιτρεπτή περιοχή πού προσδιορίζει ὁ κατασκευαστής. Χαράξτε σέ μιά γραφική παράσταση τήν οἰκογένεια τῶν καμπυλῶν V_g πρός V_a γιά τίς πέντε προηγούμενες τιμές σταθεροῦ ρεύματος.

– Συμβουλευτεῖτε τίς προδιαγραφές τοῦ κατασκευαστῆ γιά τά ζεύγη τιμῶν I_a καί V_a πού δίνονται ὡς *Τυπικά Χαρακτηριστικά Σημεῖα (Typical characteristics)*. Στά σημεῖα αὐτά προσδιορίστε τίς παραμέτρους μ, r_p καί g_m χρησιμοποιώντας τίς προηγούμενες γραφικές παραστάσεις. Παρατηρεῖται ὅτι κάθε γραφική παράσταση μπορεῖ νά προσδιορίσει ἀνεξάρτητα καί τίς τρεῖς παραμέτρους. Ἐλέξτε τή συνέπεια τῶν ἀποτελεσμάτων πού προκύπτουν ἀπό κάθε γραφική παράσταση καί συγκρίνετε τίς πειραματικές τιμές μέ τίς τιμές πού δίνει ὁ κατασκευαστής.

Ἡ εἰσαγωγή τοῦ τρίτου ἠλεκτροδίου (μέ τή μορφή πλέγματος) μεταξύ ἀνόδου καί καθόδου ἀπό τόν Deforest τό 1907 καί ἡ δημιουργία μέ τόν τρόπο αὐτό τῆς τρίοδης λυχνίας ἄνοιξε νέους ὁρίζοντες στήν ἐπιστήμη καί τεχνολογία. Μέ τήν προσθήκη ἐπιπλέον ἠλεκτροδίων δημιουργήθηκαν λυχνίες (*τέτροδοι, πέντοδοι,* κ.λ.π.) μέ ἀκόμη μεγαλύτερη εὐελιξία καί δυνα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τότητες ἐλέγχου τοῦ ἀνοδικοῦ ρεύματος. Πιό πρόσφατα, τό ἀντικείμενο τῆς παλαιότερης **Ἠλεκτρονικῆς**, πού ἐξέταζε τήν συνδεσμολογία καί ἀπόκριση κυκλωμάτων λυχνιῶν, ἐπεκτάθηκε σημαντικά μέ τήν εἰσαγωγή ἀντίστοιχων ἐξαρτημάτων στερεᾶς καταστάσεως. Ὁ χῶρος αὐτός βρίσκεται βέβαια ἔξω ἀπό τό ἀντικείμενο τοῦ παρόντος βιβλίου. Στά πλαίσια ὅμως τῶν ἠλεκτρικῶν μετρήσεων εἶναι ἀρκετά χρήσιμο νά ἐξετάσουμε τή δυνατότητα πού ἀναδεικνύεται στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-12. ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΟΛΤΟΜΕΤΡΟ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 10-39, τό ὁποῖο μπορεῖ νά ἀναγνωριστεῖ ὡς τό βασικό κύκλωμα τῆς τρίοδης λυχνίας μέ τήν προσθήκη ἑνός στοιχείου $U_b \simeq 1.5$ V καί ἑνός ροοστάτη μέ ὁλική ἀντίσταση $R \simeq 2$ kΩ. Τό δευτερεῦον αὐτό κύκλωμα ἔχει τή δυνατότητα νά ἀντισταθμίσει τό ἀνοδικό ρεῦμα πού διοχετεύεται στό ἀμπερόμετρο A. Ὁ πυκνωτής C ἔχει συμπεριληφθεῖ μέ σκοπό τή χρησιμοποίηση τοῦ ἴδιου κυκλώματος σέ ἑπόμενο πείραμα. Στό παρόν πείραμα ἡ παρουσία του μπορεῖ νά ἀγνοηθεῖ. Στό κύκλωμα τοῦ πλέγματος χρησιμοποιεῖστε ἀντίσταση $R_g \simeq 1$ MΩ.

– Μέ τό διακόπτη S ἀνοικτό θέστε τό κύκλωμα τῆς λυχνίας σέ λειτουργία. Ρυθμίστε τήν ἀνοδική τάση U_a καί τήν τάση πλέγματος U_g ὥστε ἡ λυχνία νά λειτουργεῖ σέ ἕνα ζεῦγος τιμῶν ἀνοδικῆς τάσης καί ἀνοδικοῦ ρεύματος, τό ὁποῖο ὁ κατασκευαστής δίνει ὡς *τυπικό χαρακτηριστικό σημεῖο*. Κλεῖστε τόν διακόπτη S καί ρυθμίζοντας τό ροοστάτη R μηδενίστε τήν ἔνδειξη τοῦ ἀμπερομέτρου.

– Χρησιμοποιώντας ἕνα πρότυπο στοιχεῖο βαθμονομίστε τό ἐργαστηριακό σας ποτενσιόμετρο σέ volt. Ἀποσυνδέστε τό πρότυπο στοιχεῖο καί τό γαλβανόμετρο τοῦ ποτενσιομέτρου. Βραχυκυκλῶστε τούς δύο ἀκροδέκτες πού προορίζονται γιά σύνδεση τοῦ γαλβνομέτρου. Τό ποτενσιόμετρό σας ἀποτελεῖ τώρα (γιά μεγάλη ἀντίσταση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος) μιά βαθμονομημένη πηγή μεταβλητῆς ΗΕΔ. Συνδέστε τό ποτενσιόμετρο στούς ἀκροδέκτες τοῦ κυκλώματος πού σημειώνονται μέ τήν ἔνδειξη ΗΕΔ. Μεταβάλετε τήν ΗΕΔ πού παρέχει τό ποτενσιόμετρο καί σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τήν ἀντίστοιχη ἔνδειξη τοῦ ἀμπερομέτρου. Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματα σέ γραφική παράσταση καί προσδιορίστε τή βαθμονόμηση τοῦ ἀμπερομέτρου σέ volt.

– Μετρεῖστε τίς «ἄγνωστες» ΗΕΔ πού θά σᾶς δοθοῦν

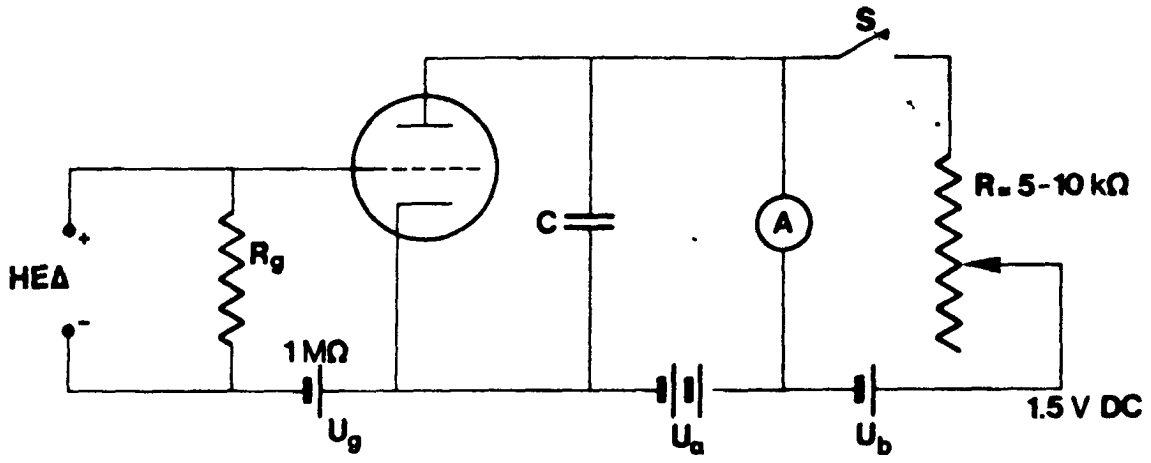
α. Μέ κοινό ἐργαστηριακό βολτόμετρο

β. Μέ τό ἐργαστηριακό ποτενσιόμετρο

γ. Μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 10-39.

Συγκρίνετε καί σχολιᾶστε τά ἀποτελέσματα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-39 Κύκλωμα ἠλεκτρονικοῦ βολτομέτρου

Τό κύκλωμα πού μελετήθηκε στό προηγούμενο πείραμα ἀποτελεῖ τό βασικό κύκλωμα τοῦ **ἠλεκτρονικοῦ βολτομέτρου,** πού πολλές φορές ἀπαντᾶται μέ τή σύντμηση **ὄργανο VTVM** (ἀπό τά ἀρχικά τοῦ Ἀγγλικοῦ ὅρου Vacuum Tube Volt Meter). Ὅπως προκύπτει ἀπό τό σχῆμα 10-39, τό κυριώτερο πλεονέκτημα τοῦ ὀργάνου, σέ σχέση μέ τό κοινό ἐργαστηριακό βολτόμετρο, εἶναι ἡ μεγάλη ἐσωτερική του ἀντίσταση. Παρόμοιο ὄργανο ἔχει ἤδη χρησιμοποιηθεῖ στά πειράματα τοῦ Κεφαλαίου 2.

10-7 Ἠλεκτρική Ἀγωγιμότητα τῶν Στερεῶν σέ Μαγνητικό Πεδίο. Τό φαινόμενο Hall

Στό Κεφάλαιο 4 μελετήσαμε τήν κίνηση φορτισμένων σωματίων στό ἐσωτερικό ἑνός ἀγωγοῦ ὑπό τήν ἐπίδραση ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Σέ ἀντίθεση μέ τήν ἀντίστοιχη συμπεριφορά στόν κενό χῶρο, βρήκαμε ὅτι ἡ κίνηση τῶν φορέων τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου στά στερεά προβλέπεται μέ σταθερή ταχύτητα, γεγονός πού ἐπαληθεύεται πειραματικά ἀπό τό νόμο τοῦ Ohm.

Ἐξίσου ἐνδιαφέρουσα ἐμφανίζεται ἡ κίνηση φορτίων στό ἐσωτερικό ἑνός στερεοῦ ὑπό τήν ταυτόχρονη ἐπίδραση ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου. Ἄν ἡ διεύθυνση τῶν δύο πεδίων δέν συμπίπτει, τότε τό μαγνητικό πεδίο θά ἀσκήσει σέ κάθε φορτίο μιά δύναμη

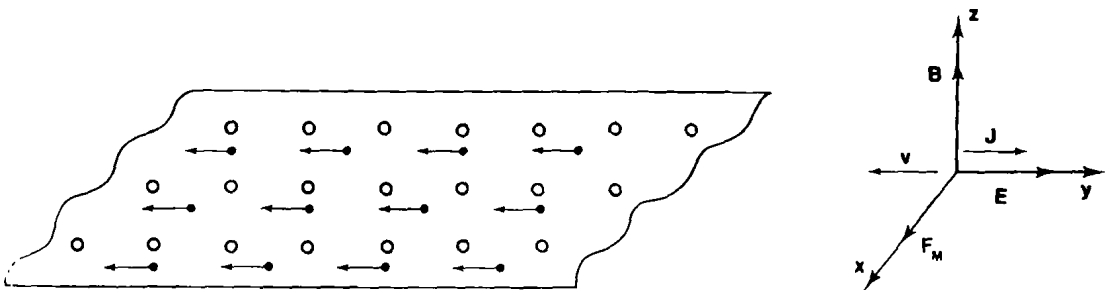
$$\mathbf{F}_M = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \qquad (10.103)$$

ὅπου **u** εἶναι ἡ σταθερή ταχύτητα τήν ὁποία στό ἐσωτερικό ἑνός στερεοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

προσδίδει στά φορτία τό ἠλεκτρικό πεδίο. Γιά ἕνα ἀγωγό στήν ἁπλή γεωμετρία ὅπου τά ἀνύσματα **E** καί **B** εἶναι μεταξύ τους κάθετα ἡ κίνηση τῶν φορτίων δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 10-40. Στήν περίπτωση αὐτή φορεῖς τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου εἶναι ἠλεκτρόνια πού κινοῦνται ἀντίθετα πρός τή διεύθυνση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου διαμέσου τῶν θετικῶν ἰόντων τοῦ κρυσταλλικοῦ πλέγματος. Ἡ δύναμη τῆς ἐξ. (10.103) ἐπενεργεῖ στά κινούμενα ἠλεκτρόνια μέ ἀποτέλεσμα νά τούς προσδώσει μιά ἐπιτάχυνση κατά τή διεύθυνση x. Τοῦτο ἔχει μιά σειρά ἀπό ἀλυσωτά ἐπακόλουθα. Κατ' ἀρχήν τά ἠλεκτρόνια ἀποκλίνουν πρός τή διεύθυνση x. Καθόσον ὅμως δέν εἶναι ἐλεύθερα νά διαφύγουν ἀπό τά ὅρια τοῦ ἀγωγοῦ (πού στό σχῆμα 10-40 εἰκονίζονται μέ τίς δύο ὁριζόντιες εὐθεῖες) ἁπλῶς συσσωρεύονται ἐκεῖ μέχρις ὅτου ἡ περίσσεια ἀρνητικοῦ φορτίου στό κάτω ὅριο καί ἡ ἀντίστοιχη περίσσεια θετικοῦ φορτίου στό ἄνω δημιουργήσουν ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_H$, τό ὁποῖο ἀσκεῖ σέ κάθε ἠλεκτρόνιο δύναμη $e\mathbf{E}_H$ ἴση καί ἀντίθετη μέ τή δύναμη $e\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Στήν κατάσταση ἰσορροπίας (πού ἐπιτυγχάνεται πολύ γρήγορα) ἡ μέση ταχύτητα τῶν ἠλεκτρονίων εἶναι κατά τή διεύθυνση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου **E** ἐνῶ οἱ τροχιές πυκνώνουν σταδιακά κατά τή διεύθυνση x. Ταυτόχρονα διατηρεῖται τό ἐγκάρσιο ἠλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_H$. Μέ τή σειρά του τό τελευταῖο πεδίο ἐξασκεῖ μιά δύναμη πρός τή διεύθυνση x στά θετικά ἰόντα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πλέγματος, ἡ ὁποία ἐμφανίζεται μακροσκοπικά ὡς μιά δύναμη σέ ὁλόκληρο τόν ἀγωγό.

Ἡ προηγούμενη ἀνάλυση τῆς δυνάμεως πού ἀσκεῖ τό μαγνητικό πεδίο σέ ἕνα ἀγωγό πού διαρρέεται ἀπό ρεῦμα βασίζεται στήν κβάντωση τοῦ



ΣΧΗΜΑ 10-40 Κίνηση ἠλεκτρονίων σέ ἀγωγό ὑπό τήν ἐπίδραση ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου. Οἱ κύκλοι συμβολίζουν θετικά ἰόντα τοῦ κρυσταλλικοῦ πλέγματος. Ἡ διεύθυνση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου **E**, τοῦ μαγνητικοῦ **B** καί τῆς πυκνότητας ρεύματος **J** δίνονται μέ τή βοήθεια τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἡλεκτρικοῦ φορτίου καί στήν ἀσυνέχεια πού διέπει τή δομή τῆς ὕλης. Ἡ ἀνακάλυψη ὅμως τοῦ ἐγκάρσιου ἡλεκτρικοῦ πεδίου $\mathbf{E}_H$ εἶναι πολύ παλιότερη. Τό φαινόμενο παρατηρήθηκε γιά πρώτη φορά τό 1879 ἀπό τόν F. H. Hall, μαθητή τοῦ μεγάλου φυσικοῦ Henry Rowland στό Πανεπιστήμιο Johns Hopkins. Ἡ προέλευση βέβαια τοῦ **πεδίου Hall**, ὅπως ὀνομάστηκε, παρέμεινε ἀνεξήγητη μέχρις ὅτου, στά μέσα τοῦ 20οῦ αἰώνα, ἔγινε ἀντιληπτή ἡ κβαντική ὑπόσταση τῆς ὕλης καί εἰδικότερα ἡ δομή τῆς στερεᾶς καταστάσεως. Ὅπως θά δοῦμε στή συνέχεια ἡ βαθύτερη αὐτή κατανόηση ὁδήγησε ἀφενός σέ μιά σημαντική μέθοδο γιά τή λεπτομερέστερη διερεύνηση τῆς δομῆς τῆς στερεᾶς καταστάσεως καί ἀφετέρου στήν ἀνάδειξη ἑνός ἐξαιρετικά χρήσιμου ἐργαλείου στό πεδίο τῶν μαγνητικῶν μετρήσεων.

Ποσοτικά, τό ἐγκάρσιο ἡλεκτρικό πεδίο E_H πού δημιουργεῖ ἡ ὕπαρξη μαγνητικοῦ πεδίου, μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ ἀπό τήν ἰσότητα

$$qE_H = quB \tag{10.104}$$

ἤ

$$E_H = uB \tag{10.105}$$

ὅπου u εἶναι ἡ μέση ταχύτητα τῶν φορέων τοῦ ἡλεκτρικοῦ φορτίου στό στερεό. Σέ προφανή γενίκευση τῆς ἐξ. (4.10) ἡ ταχύτητα u συνδέεται πρός τήν πυκνότητα ρεύματος J μέ τή σχέση

$$J = qN_q u \tag{10.106}$$

ὅπου N_q εἶναι ὁ πληθυσμός τῶν «ἐλεύθερων» φορέων μέ φορτίο q ἀνά μονάδα ὄγκου. Ἡ ἐξ. (10.105) μπορεῖ ἑπομένως νά γραφεῖ ὡς

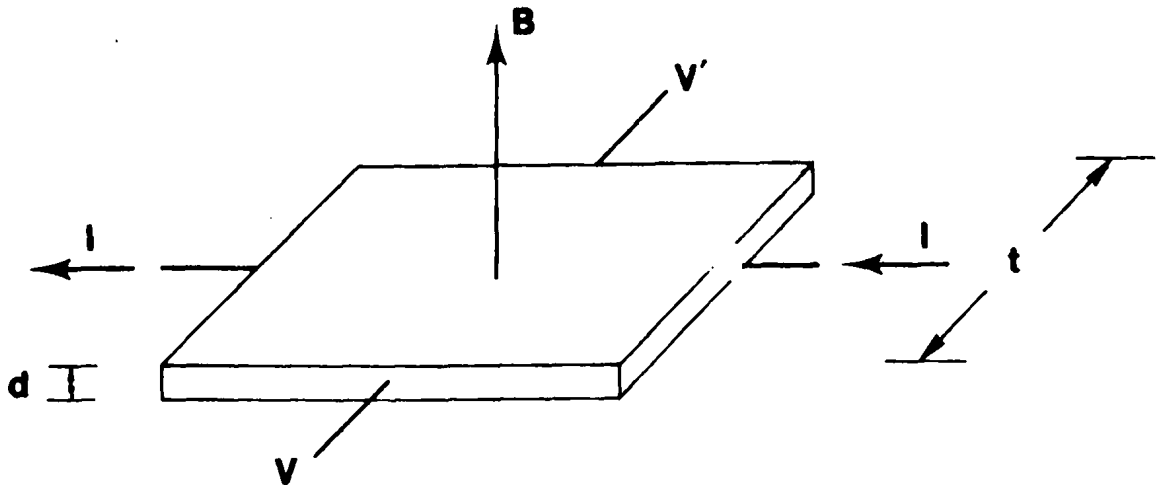
$$E_H = \frac{1}{N_q q} JB = R_H JB \tag{10.107}$$

ὅπου στό τελευταῖο σκέλος ἔχει ὁριστεῖ ὁ **συντελεστής Hall**

$$R_H = \frac{1}{N_q q} \,. \tag{10.108}$$

Μιά τυπική διάταξη γιά τήν παρατήρηση τοῦ φαινομένου Hall δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 10-41. Τό ὑλικό, σέ σχῆμα παραλληλεπιπέδου μέ λεπτό πάχος, τοποθετεῖται σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο **B** κάθετο πρός

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-41 Τυπική διάταξη γιά τή μέτρηση τοῦ συντελεστῆ Hall.

τίς μεγάλες του ἐπιφάνειες. Ἕνα σταθερό συνεχές ρεῦμα I διοχετεύεται ἀπό δύο ἀκροδέκτες κατά διεύθυνση κάθετη πρός τό μαγνητικό πεδίο ἐνῶ τό **δυναμικό Hall** μετρᾶται σέ ἕνα ἄλλο ζεῦγος ἀκροδεκτῶν VV'. Ἄν t εἶναι ἡ ἀπόσταση κατά τή διεύθυνση τῶν ἀκροδεκτῶν τοῦ δυναμικοῦ, τό ἐγκάρσιο ἠλεκτρικό πεδίο E_H συνδέεται πρός τό δυναμικό Hall U_H μέ τή σχέση

$$E_H = \frac{U_H}{t} \tag{10.109}$$

ἐνῶ τό ρεῦμα I πού διοχετεύεται στό ὑλικό δημιουργεῖ πυκνότητα ρεύματος

$$J = \frac{I}{td} \tag{10.110}$$

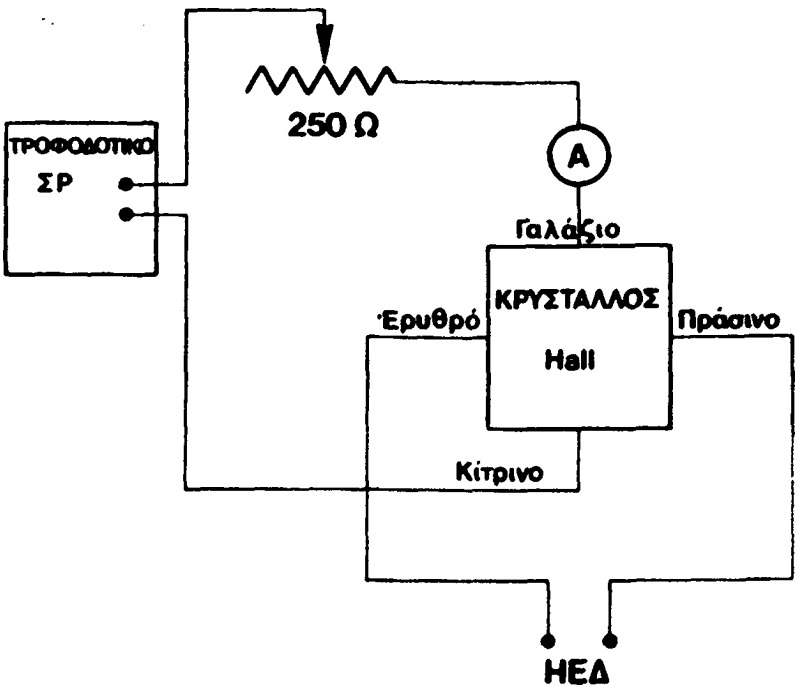
ὅπου d εἶναι τό πάχος τοῦ παραλληλεπιπέδου κατά τή διεύθυνση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Συγκεντρώνοντας τά προηγούμενα ἀποτελέσματα μποροῦμε τώρα νά γράψουμε τήν ἐξ. (10.107) ὡς

$$U_H = R_H \frac{IB}{d} \tag{10.111}$$

πού ἐπιτρέπει τόν προσδιορισμό τοῦ συντελεστῆ Hall ἀπό ἀπευθείας μετρήσιμες ποσότητες.

Ὅπως δείχνει ἡ ἐξ. (10.108) ὁ συντελεστής Hall παρέχει πληροφορίες

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-42 Συνδεσμολογία γιά τή μέτρηση τοῦ δυναμικοῦ Hall.

τόσο γιά τό φορτίο ὅσο καί γιά τό πλῆθος τῶν φορέων τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου. Στίς περισσότερες περιπτώσεις εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός μέ τιμή πού θά περίμενε κανείς γιά φορεῖς τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου ἠλεκτρόνια μέ πληθυσμό ἕνα «ἐλεύθερο» ἠλεκτρόνιο ἀνά ἄτομο τοῦ ὑλικοῦ. Ἀντίθετα, γιά πολλά στερεά τό ἁπλό πρότυπο τοῦ σχήματος 10-40 ἀποτυγχάνει οἰκτρά, ἐνῶ σέ μερικά ὑλικά ἡ πειραματική τιμή τοῦ συντελεστῆ Hall εἶναι θετικός ἀριθμός. Ἡ ἐξήγηση ὅμως τῶν ἀποκλίσεων αὐτῶν, πού παρέχουν σημαντικές πληροφορίες γιά τό μηχανισμό ἀγωγιμότητας στά στερεά, ἀπαιτεῖ τήν κβαντική θεωρία τῆς στερεᾶς καταστάσεως πού ξεφεύγει ἀπό τά ὅρια τοῦ παρόντος βιβλίου.

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-13. ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ HALL

Ὁ κρύσταλλος Hall βρίσκεται τοποθετημένος στήν ἄκρη μιᾶς λεπτῆς ράβδου μέ τή μεγάλη του ἐπιφάνεια κάθετη πρός τόν ἄξονα τῆς ράβδου. Βεβαιωθεῖτε ὅτι στήν περιοχή τοῦ κρυστάλλου δέν ὑπάρχει μαγνητικό πεδίο.

– Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 10-42. Γιά διευκόλυνση τῆς συνδεσμολογίας, οἱ ἀκροδέκτες τοῦ κρυστάλλου Hall φέρουν τά διακριτικά χρώματα πού ἀναγράφονται στό σχῆμα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΡΟΣΟΧΗ: Λανθασμένη συνδεσμολογία εἶναι δυνατόν νά καταστρέψει τόν κρύσταλλο.

– Ρυθμίστε τό ροοστάτη ὥστε νά παρεμβάλλει στό κύκλωμα τή μέγιστη δυνατή ἀντίσταση καί ἀναπτύξτε στό τροφοδοτικό ΣΡ τάση 4-5 V. Ρυθμίστε τό ροοστάτη ὥστε τό ρεῦμα πού διαρρέει τό ἀμπερόμετρο Α νά εἶναι 50 μΑ.

Συνδέστε τούς ἀκροδέκτες μέ τήν ἔνδειξη ΗΕΔ σέ ἕνα ποτενσιόμετρο. Μετρεῖστε τό δυναμικό Hall κατά τήν ἀπουσία ὁποιουδήποτε μαγνητικοῦ πεδίου. Τυχόν ἔνδειξη δυναμικοῦ ὀφείλεται σέ σφάλμα εὐθυγραμμίσεως τῶν ἐπαφῶν δυναμικοῦ στόν κρύσταλλο. Σημειῶστε τήν ἔνδειξη γιά διόρθωση τοῦ συστηματικοῦ σφάλματος στίς ἑπόμενες μετρήσεις.

– Τοποθετεῖστε τόν κρύσταλλο στό κέντρο ἑνός πηνίου. Τροφοδοτεῖστε τό πηνίο μέ ΣΡ καί μετρεῖστε τό ρεῦμα πού διαρρέει τό πηνίο. Συμβουλευτεῖτε τή γραφική παράσταση πού συνοδεύει τό πηνίο πού χρησιμοποιεῖτε καί ἡ ὁποία δίνει τό ἀξονικό μαγνητικό πεδίο στό κέντρο τοῦ πηνίου ὡς συνάρτηση τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τό πηνίο. Μετρεῖστε τό δυναμικό Hall γιά ἀρκετές τιμές τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μέσα στά ὅρια παροχῆς ρεύματος πού διαθέτει τό τροφοδοτικό ΣΡ.

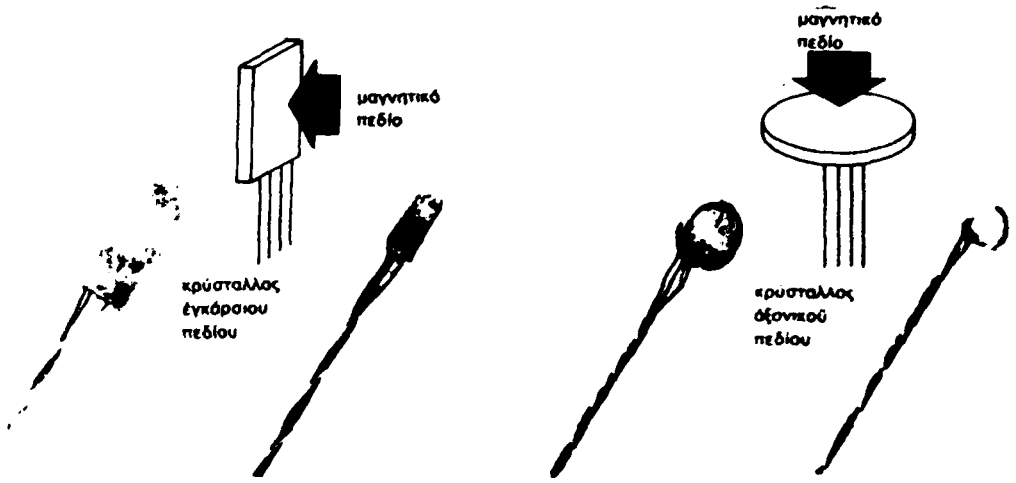
– Διορθῶστε τά ἀποτελέσματά σας γιά τυχόν ἀπόκλιση ἀπό τή μηδενική ἔνδειξη κατά τήν ἀπουσία μαγνητικοῦ πεδίου καί ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τοῦ δυναμικοῦ Hall ὡς πρός τό μαγνητικό πεδίο. Προσαρμόστε στά δεδομένα τήν καλύτερη εὐθεία καί μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (10.111) προσδιορίστε τό συντελεστή Hall τοῦ κρυστάλλου. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τιμές πού δίνονται στή βιβλιογραφία.

Ἡ γραμμική ἀντιστοιχία μεταξύ δυναμικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου

$$U_H = \alpha B \qquad (10.112)$$

πού ἀντανακλᾶται στήν ἐξ. (10.111) ὁδηγεῖ σέ μιά ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογή τοῦ φαινομένου Hall. Ἄν ὁ συντελεστής α εἶναι γνωστός τότε μέτρηση τοῦ δυναμικοῦ U_H μπορεῖ νά μεταφραστεῖ σέ μέτρηση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Πολλοί κατασκευαστές διαθέτουν σήμερα συσκευές (συνήθως φορητές) μέ τή γενική ὀνομασία **μαγνητόμετρα Hall** γιά τή μέτρηση μαγνητικοῦ πεδίου μέ ἐκμετάλλευση τῆς ἐξ. (10.112). Σέ παρόμοιες συσκευές ὁ κρύσταλλος Hall βρίσκεται συνήθως στήν ἄκρη λεπτῆς ράβδου ἡ ὁποία συνδέεται μέ τήν κυρία συσκευή μέ καλώδιο. Ἡ συσκευή περιέχει κύκλωμα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-43 Συνήθεις τύποι βιομηχανικῶν κρυστάλλων Hall γιά τή μέτρηση μαγνητικοῦ πεδίου σέ διάφορες γεωμετρίες. Οἱ διαστάσεις τοῦ κρυστάλλου συγκρίνονται μέ τό κέρμα δέκα δραχμῶν.

ἐνισχύσεως τοῦ δυναμικοῦ πού ἀναπτύσσεται στόν κρύσταλλο, ὅταν στήν περιοχή του ὑπάρχει ἐγκάρσιο μαγνητικό πεδίο, καθώς καί ὄργανο κινητοῦ πλαισίου βαθμονομημένο ἀπευθείας σέ μονάδες μαγνητικοῦ πεδίου. Στήν πράξη ὁ συντελεστής ἀναλογίας τῆς ἐξ. (10.112) προσδιορίζεται ἐμπειρικά μέ τή βοήθεια ἑνός πρότυπου μαγνήτη ρυθμίζοντας τήν ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου στή σωστή τιμή.

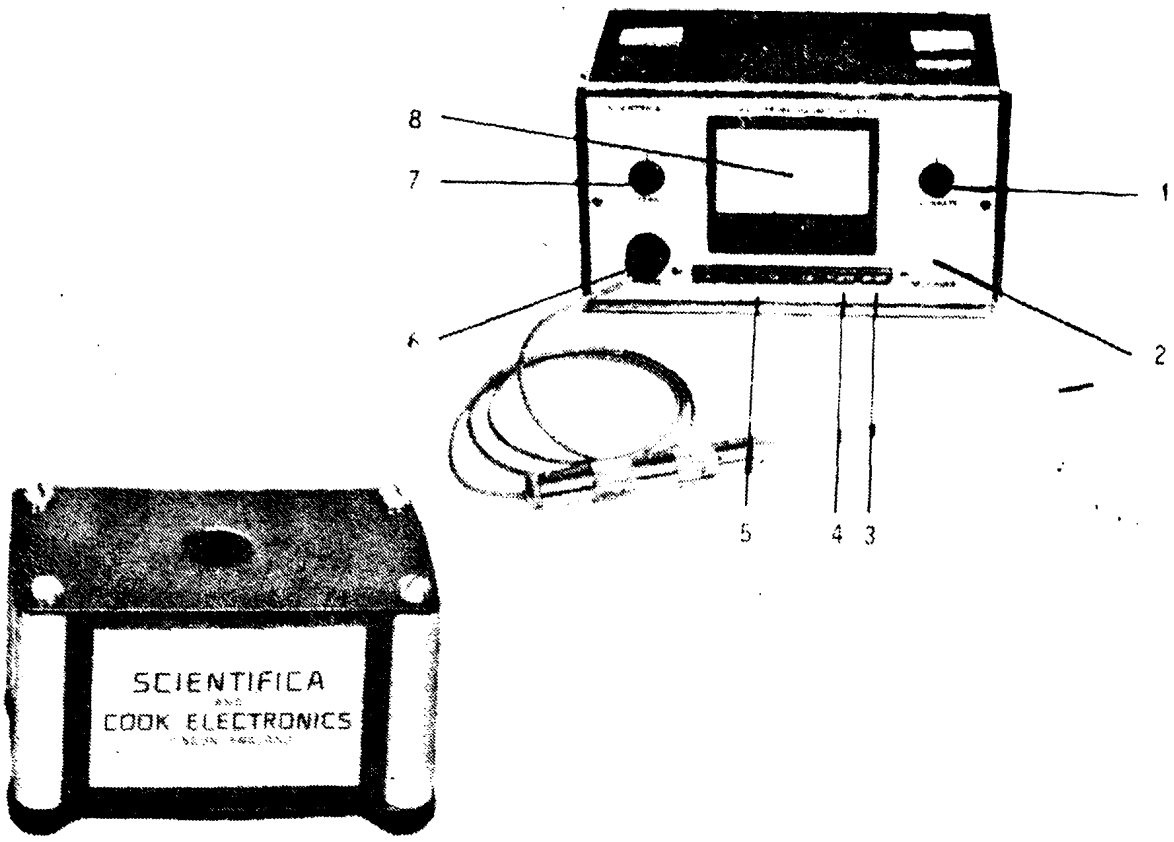
Τό σχῆμα 10-43 περιέχει βιομηχανικούς τύπους κρυστάλλων Hall πού χρησιμοποιοῦνται σέ συσκευές μετρήσεως μαγνητικοῦ πεδίου ἐνῶ στό σχῆμα 10-44 εἰκονίζεται ἕνας συνήθης τύπος φορητοῦ μαγνητομέτρου Hall. Ἡ ἐξοικείωση στή χρήση τοῦ μαγνητομέτρου Hall εἶναι ὁ στόχος τοῦ πειράματος πού ἀκολουθεῖ.

ΠΕΙΡΑΜΑ 10-14. ΤΟ ΜΑΓΝΗΤΟΜΕΤΡΟ HALL

Περιεργαστεῖτε τό χειριστήριο τοῦ μαγνητομέτρου πού διαθέτετε. Βεβαιωθεῖτε ὅτι κατανοεῖτε τό χειρισμό καί τή λειτουργία κάθε διακόπτη στήν πρόσοψη τῆς συσκευῆς. Περιγράψτε στήν ἐργαστηριακή σας ἔκθεση μέ μερικές φράσεις τή λειτουργία κάθε διακόπτη.

– Ἐπιλέξτε μιά ράβδο μέ κρύσταλλο Hall κατάλληλο γιά τή μέτρηση μαγνητικοῦ πεδίου μέ διεύθυνση κατά τόν ἄξονα τῆς ράβδου. Ἀφοῦ θέσετε τή συσκευή σέ λειτουργία ρυθμίστε τή μηδενική ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου. Μέ τή βοήθεια ἑνός πρότυπου μαγνήτη βαθμονομίστε τό ὄργανο. ○

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 10-44 Συνήθης τύπος μαγνητομέτρου Hall.
(α) Ἡ κεντρική συσκευή. Τά κυριώτερα σημεῖα τῆς συσκευῆς εἶναι:
1. ρύθμιση βαθμονομήσεως
2. ἔξοδος καταγραφικοῦ
3. διακόπτης λειτουργίας
4. ἐπιλογέας πολικότητας
5. ἐπιλογεῖς κλίμακας
6. ὑποδοχή ράβδου κρυστάλλου Hall
7. ρύθμιση μηδενικῆς ἐνδείξεως
8. ὄργανο ἐνδείξεως.
(β) πρότυπος μαγνήτης βαθμονομήσεως.

– Τό πηνίο πού θά σᾶς δοθεῖ διαθέτει ἕνα ὁδηγό κατά τόν ἄξονα συμμετρίας του. Τοποθετεῖστε τή ράβδο τοῦ μαγνητομέτρου ἔτσι ὥστε ὁ κρύσταλλος Hall νά βρίσκεται στό μέσο τοῦ πηνίου. Συνδέστε τούς ἀκροδέκτες τοῦ πηνίου μέ ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ καί ἕνα ἀμπερόμετρο σέ σειρά καί ἀναπτύξτε δυναμικό ὥστε τό πηνίο νά διαρρέεται ἀπό ρεῦμα 2 Α. Μετρεῖστε τό μαγνητικό πεδίο στό κέντρο τοῦ πηνίου. καί στή συνέχεια, μεταθέτοντας τή ράβδο κατά τόν ὁδηγό πού βρίσκεται στόν ἄξονα τοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πηνίου, μετρεῖστε τό μαγνητικό πεδίο σέ διαστήματα 1 cm καθόλη τήν ἔκταση $-\ell \leqslant z \leqslant \ell$, ὅπου z εἶναι ἡ ἀπόσταση ἀπό τό μέσο τοῦ πηνίου καί ℓ τό μῆκος τοῦ ἄξονα τοῦ πηνίου. Ἄν κατά τή διάρκεια τῶν μετρήσεων χρειαστεῖ νά ἀλλάξετε κλίμακα, ἐλέξτε πάλι τή μηδενική ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου. Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματά σας σέ γραφική παράσταση μέ κατακόρυφο ἄξονα τό μαγνητικό πεδίο B καί ὁριζόντιο ἄξονα τήν ποσότητα z/ℓ. Στήν ἴδια γραφική παράσταση ἀποδῶστε μέ συνεχή καμπύλη τήν ἐκτίμηση τοῦ τύπου γιά σωληνοειδές πεπερασμένων διαστάσεων πού περιέχεται στόν Πίνακα 9-1. Σχολιάστε τυχόν ἀποκλίσεις ἀπό τή θεωρητική πρόβλεψη.

- Ἐπαναλάβετε τίς προηγούμενες ἐργασίες γιά ὅλα τά πηνία διαφορετικῶν διαστάσεων πού θά σᾶς δοθοῦν.

Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά ρεῦμα τροφοδοτήσεως τοῦ πηνίου 1 A.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

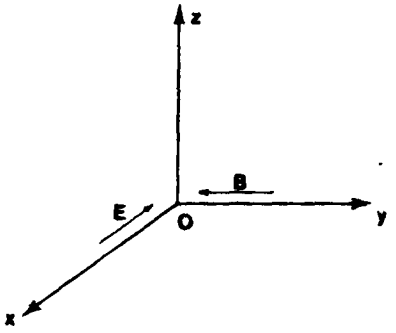
10-1. Ἕνα πρωτόνιο μέ μάζα m_p καί θετικό φορτίο e κινεῖται σέ ἕνα ὁμογενές, στατικό ἡλεκτρικό πεδίο **E**.

(α) Προσδιορίστε τή θέση καί ταχύτητα τοῦ πρωτονίου ὡς συναρτήσεις τοῦ χρόνου ὑποθέτοντας ὅτι σέ χρόνο $t = 0$ ἡ ταχύτητά του ἦταν κάθετη πρός τό ἡλεκτρικό πεδίο.

(β) Ἐξαλεῖψτε τό χρόνο ἀπό τίς δύο προηγούμενες ἐκφράσεις καί προσδιορίστε τήν τροχιά τοῦ πρωτονίου στό χῶρο.

10-2. Ἕνας χῶρος χαρακτηρίζεται ἀπό ὁμογενές, στατικό ἡλεκτρικό πεδίο 10^4 V/m καί ὁμογενές, στατικό μαγνητικό πεδίο 5 mT. Τά δύο πεδία ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση ἀλλά ἀντίθετη φορά. Ἠλεκτρόνια μέ ταχύτητα 1.19×10^7 m/sec εἰσέρχονται στό χῶρο ὑπό γωνία 30° ὡς πρός τό ἡλεκτρικό πεδίο. Προσδιορίστε τήν τροχιά πού ἀκολουθοῦν στή συνέχεια τά ἠλεκτρόνια.

10-3. Ἕνας χῶρος χαρακτηρίζεται ἀπό ὁμογενές, στατικό ἡλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο μέ τή διεύθυνση καί φορά πού δίνεται στό ἑπόμενο σχῆμα.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Προσδιορίστε τήν τροχιά ἑνός ἠλεκτρονίου πού ἀρχικά βρίσκεται ἐν στάσει στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων 0.

10-4. Σέ μιά καθοδική λυχνία ὑπάρχει ἕνα ἀξονικό, ὁμογενές στατικό μαγνητικό πεδίο 10 mT. Μεταξύ τῶν κατακόρυφων πλακῶν τῆς λυχνίας πού καλύπτουν ἔκταση 2 cm κατά τόν ἄξονα, ἀναπτύσσεται ἠλεκτρικό πεδίο 10^4 V/m. Ὑπολογίστε τήν ἀπόσταση ἀπό τόν ἄξονα τῆς λυχνίας, στήν ὁποία θά βρίσκεται ἕνα ἠλεκτρόνιο τῆς δέσμης τήν στιγμή πού ἐξέρχεται ἀπό τήν περιοχή τῶν πλακῶν ἀποκλίσεως, ἄν ἀρχικά ταξίδευε κατά τόν ἄξονα μέ ταχύτητα 10^6 m/sec.

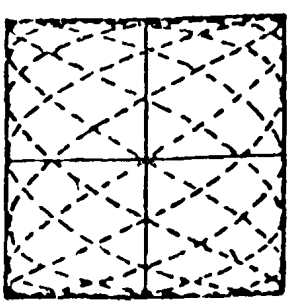
10-5. Ἕνας χῶρος χαρακτηρίζεται ἀπό ὁμογενές, στατικό ἠλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο πού σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 20°. Προσδιορίστε τήν τροχιά ἑνός ἠλεκτρονίου πού ἀρχικά βρίσκεται ἐν στάσει.

10-6. Κατά τή μέτρηση τῆς διαφορᾶς φάσης μέ τή μέθοδο πού περιγοάφεται στό σχῆμα 10-22 [βλ. ἐξ. (10.64)] θεωρεῖστε ὅτι ἡ μέτρηση τῶν ἀποστάσεων A καί B περιέχει ἕνα σφάλμα $\pm$ 0.5 mm. Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τό σφάλμα στόν προσδιορισμό τῆς διαφορᾶς φάσης φ ὡς συνάρτηση τοῦ φ γιά διάσταση A = 7 cm.

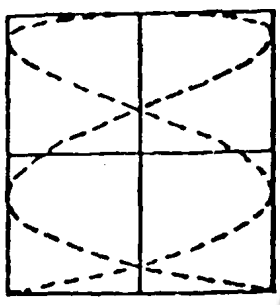
10-7. Δύο ἡμιτονοειδεῖς κυματομορφές μέ διαφορετική συχνότητα ἐφαρμόζονται ταυτόχρονα στίς εἰσόδους ὁριζόντιας καί κατακόρυφης ἀποκλίσεως ἑνός παλμογράφου. Οἱ συντεταγμένες (x,y) τῆς τροχιᾶς πού διαγράφει ἡ φωτεινή κηλίδα στήν ὀθόνη τοῦ πλαμογράφου μποροῦν νά ἐκφραστοῦν ὡς $x = \sin(n\vartheta + \varphi)$ καί $y = \sin\vartheta$. Σχεδιάστε τά σχήματα πού δημιουργοῦνται στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου γιά $\varphi = 0°, 30°, 60°, 90°$ γιά $n = 2$ καί $n = 3$.

10-8. Δύο ἡμιτονοειδεῖς κυματομορφές μέ διαφορετική συχνότητα ἐφαρμόζονται ταυτόχρονα στίς εἰσόδους ὁριζόντιας καί κατακόρυφης ἀποκλίσεως ἑνός παλμογράφου. Οἱ συντεταγμένες (x,y) τῆς τροχιᾶς πού διαγράφει ἡ φωτεινή κηλίδα στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου μποροῦν νά ἐκφραστοῦν ὡς $x = \sin(3\vartheta + \varphi)$ καί $y = \sin 2\vartheta$. Σχεδιάστε τά σχήματα πού δημιουργοῦνται στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου γιά $\varphi = 0°, 30°, 60°, 90°, 120°$ καί $180°$.

10-9. Δύο ἡμιτονοειδεῖς κυματομορφές μέ διαφορετική συχνότητα ἐφαρμόζονται ταυτόχρονα στίς εἰσόδους ὁριζόντιας καί κατακόρυφης ἀποκλίσεως ἑνός παλμογράφου. Προσδιορίστε τό λόγο τῶν συχνοτήτων ἄν στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου σχηματίζονται τά ἀκόλουθα σχήματα.



(α)



(β)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

10-10. Τό ἀνοδικό ρεῦμα μιᾶς διόδου σέ δυναμικό 54 V εἶναι 200 mA. Ἄν ἡ δίοδος λειτουργεῖ σέ κατάσταση περιορισμένη ἀπό τό φορτίο χώρου, πόση τάση πρέπει νά ἐφαρμοστεῖ ὥστε νά διαρρεύσει ρεῦμα 100 mA;

10-11. Δεῖξτε ὅτι, στό σύστημα συντεταγμένων πού ὁρίζεται στό σχῆμα 10-32, ἡ ταχύτητα καί ἐπιτάχυνση ἑνός ἠλεκτρονίου πού κινεῖται μεταξύ ἀνόδου καί καθόδου σέ μία δίοδη λυχνία μέ κυλινδρική γεωμετρία ἠλεκτροδίων δίνεται ἀπό τίς ἐξ. (10.85).

10-12. Ἕνα ἠλεκτρόνιο, πού ἀρχικά βρίσκεται ἐν στάσει στήν ἐσωτερική ἐπιφάνεια τοῦ ἀρνητικοῦ ὁπλισμοῦ ἑνός πυκνωτῆ ἐπιταχύνεται πρός τό θετικό ὁπλισμό. Οἱ δύο παράλληλοι ὁπλισμοί τοῦ πυκνωτῆ βρίσκονται σέ ἀπόσταση 2 cm καί διαφορά δυναμικοῦ 1500 V.

(α) Σέ πόσο χρόνο ἀποκτᾶ τό ἠλεκτρόνιο ταχύτητα ἴση μέ 10^7 m/sec;

(β) Πόση ἀπόσταση καλύπτει ὥστε νά ἀποκτήσει αὐτή τήν ταχύτητα;

(γ) Ποιό εἶναι τό δυναμικό στό σημεῖο ὅπου ἀποκτᾶ αὐτή τήν ταχύτητα;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

επαγωγικα φαινομενα

Ἡ θεμελιώδης πειραματική παρατήρηση πού έκφράζεται στήν έξ. (9.3) μᾶς ἐπέτρεψε μέχρι τώρα νά περιγράψουμε ποσοτικά τήν ἀλληλεπίδραση στάσιμων καί κινούμενων φορτίων. Στήν προσπάθειά μας αὐτή βρήκαμε ἐξαιρετικά χρήσιμη τήν ἔννοια τοῦ πεδίου. Ἀρκετά νωρίς στή μελέτη μας ὁρίσαμε τό ἠλεκτρικό πεδίο **E** [βλ. ἐξ. (2.18)] πού ἐκπροσωπεῖ τόν πρῶτο ὅρο τῆς ἐξ. (9.3), ἐνῶ μέ τόν ὁρισμό τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** [βλ. ἐξ. (9.16)] ἐκπροσωπήθηκε ὁ δεύτερος ὅρος. Ὁ τρόπος καί μόνο ὁρισμοῦ τῶν δύο πεδίων ὁδηγεῖ διαισθητικά στό συμπέρασμα ὅτι μεταξύ τους πρέπει νά ὑπάρχει μιά στενή σύνδεση καί συνεργασία. Μιά ἄποψη τοῦ γεγονότος αὐτοῦ εἴδαμε στήν Παράγραφο 9-7 στά πλαίσια τῆς Εἰδικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας.

Ἡ οὐσιαστική ἀλληλοσύνδεση ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου γίνεται ἀκόμη πιό φανερή κατά τήν ἐξέταση πεδίων πού μεταβάλλονται μέ τό χρόνο. Ὅπως θά δοῦμε στή συνέχεια, μεταβαλλόμενα ἠλεκτρικά πεδία δημιουργοῦν μαγνητικά πεδία καί ἀντίστροφα. Ἡ δυνατότητα αὐτή, πού εἶναι ἐπίσης ἐπακόλουθο τῆς ἐξ. (9.3) στά πλαίσια τῆς Εἰδικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας, ἀποδίδεται συνήθως μέ τόν ὅρο **ἐπαγωγικά φαινόμενα.**

11-1 Ὁ Νόμος τῆς Ἐπαγωγῆς

Κατά τίς πρῶτες δεκαετίες τοῦ 19ου αἰῶνα ὁ ἄγγλος φυσικός Michael Faraday ἐκτέλεσε ἐκτενῆ πειράματα γύρω ἀπό τή συμπεριφορά ρευμάτων

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σέ κυκλώματα πού βρίσκονται στήν περιοχή μαγνητικῶν πεδίων. Τά πειράματα αὐτά ἔδειξαν ὅτι σταθερό μαγνητικό πεδίο δέν ἐπηρεάζει τό ρεῦμα, ἀλλά μεταβολή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου στή γειτονία ἑνός κυκλώματος δημιουργεῖ μεταβατικά ρεύματα πού μετά τή συμπλήρωση τῆς μεταβολῆς φθήνουν μέ τό χρόνο. Ὁ Faraday μπόρεσε νά περιγράψει τό φαινόμενο ποσοτικά θεωρώντας τή μεταβολή τῆς **ροῆς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου** πού ὁρίζει τό κύκλωμα

$$\Phi \equiv \int_S \mathbf{B}\cdot\hat{n}\,da \tag{11.1}$$

ὅπου ἡ ὁλοκλήρωση ἐκτείνεται σέ μιά ἐπιφάνεια S μέ περίγραμμα τό κύκλωμα C, ἐνῶ $\hat{n}$ εἶναι τό μοναδιαῖο ἄνυσμα κάθετο πρός τό στοιχεῖο da τῆς ἐπιφανείας S. Ἡ γεωμετρία τῆς ὁλοκληρώσεως στήν ἐξ. (11.1) ἔχει ἤδη δοθεῖ στό σχῆμα 9-5. Τό σύνολο τῶν πειραμάτων τοῦ Faraday ἀποδόθηκε μέ τό **νόμο τῆς ἐπαγωγῆς** πού φέρει σήμερα τό ὄνομά του. Σύμφωνα μέ τό νόμο αὐτό, πού θά ἀποδεχτοῦμε πρός τό παρόν ὡς καθαρά πειραματικό γεγονός, μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς στήν ἐπιφάνεια S πού ὁρίζει ἕνα κύκλωμα ἔχει ὡς ἐπακόλουθο τήν ἀνάπτυξη μιᾶς ΗΕΔ U πού δίνεται ἀπό τή σχέση

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\hat{n}\,da. \tag{11.2}$$

Ἔτσι, ἄν τό κύκλωμα C πού ἀποτελεῖ τό περίγραμμα τῆς ἐπιφανείας S, εἶναι ἕνας ἀγωγός μέ ὁλική ἀντίσταση R, τότε ἡ ΗΕΔ τῆς ἐξ. (11.2) θά προκαλέσει τή ροή ἑνός ρεύματος†

$$I = \frac{U}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{11.3}$$

Τήν τελευταία σχέση θά ἐπαληθεύσουμε στό ἑπόμενο πείραμα. Καθόσον τό ρεῦμα πού ἐκφράζεται στήν ἐξ. (11.3) μεταβάλλεται πολύ γρήγορα μέ τό χρόνο ἡ ἀνίχνευσή του παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες. Γιά τό λόγο αὐτό θά ἀνιχνεύσουμε τό ὁλικό φορτίο πού διαρρέει τό κύκλωμα ὡς ἀπο-

† Ἄν τό ρεῦμα τῆς ἐξ. (11.3) μετρᾶται ἀπό κάποιο ὄργανο σέ σειρά, ἡ ἀντίσταση R πρέπει νά περιλαμβάνει καί τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ ὀργάνου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τέλεσμα τῆς μεταβολῆς τῆς μαγνητικῆς ροῆς. Πράγματι, ὁλοκλήρωση τῆς ἐξ. (11.3)

$$\int I dt = -\frac{1}{R}\int d\Phi$$

ὁδηγεῖ στή σχέση

$$q = -\frac{1}{R}\Delta\Phi \qquad (11.4)$$

ὅπου q εἶναι τό ὁλικό φορτίο πού διέρευσε στό κύκλωμα C γιά μεταβολή ΔΦ τῆς μαγνητικῆς ροῆς στήν ἐπιφάνεια S πού περικλύει τό κύκλωμα. Τό φορτίο q μπορεῖ βεβαίως νά μετρηθεῖ μέ ἕνα βαλλιστικό γαλβανόμετρο ἄν ὁ χρόνος στόν ὁποῖο πραγματοποιεῖται ἡ μεταβολή ΔΦ εἶναι μικρός.

ΠΕΙΡΑΜΑ 11-1. Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Γιά τήν ἐπιβεβαίωση τοῦ νόμου τῆς ἐπαγωγῆς θά θεωρήσουμε τή μαγνητική ροή πού δημιουργεῖ ἕνα πηνίο Π σέ ἕνα δεύτερο ὁμοαξονικό πηνίο π στή διάταξη τοῦ σχήματος 11-1. Ἄν οἱ γεωμετρικές διαστάσεις τῶν δύο πηνίων διαφέρουν σημαντικά ($A >> a$ καί $L >> \ell$) τότε γιά ροή ρεύματος I στό πηνίο Π δημιουργεῖται ἕνα ὁμογενές ἀξονικό μαγνητικό πεδίο στήν περιοχή τοῦ πηνίου π, πού σύμφωνα μέ τά δεδομένα τοῦ Πίνακα 9-1 δίνεται ἀπό τή σχέση

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I \qquad (11.5)$$

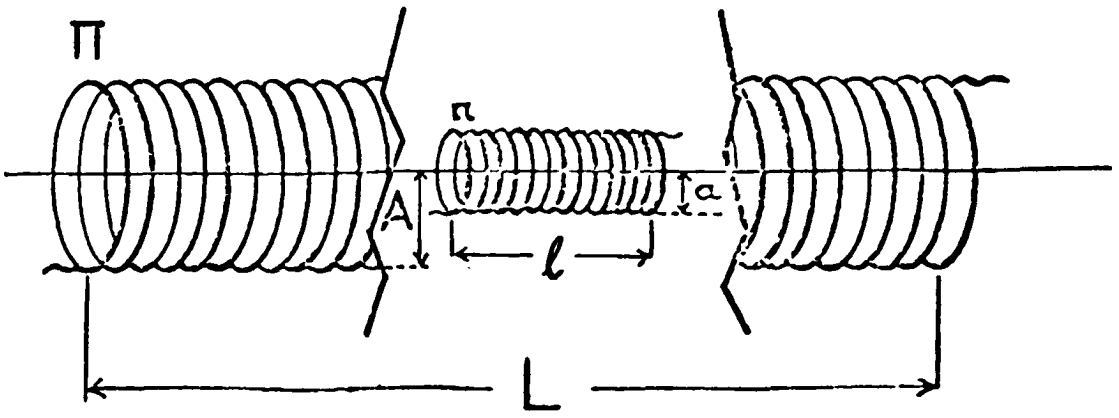
ὅπου N ὁ ἀριθμός τῶν σπειρῶν τοῦ πηνίου Π. Ἄν ἐπιπλέον n εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν σπειρῶν στό πηνίο π, τότε ἡ ὁλική μαγνητική ροή πού διαρρέει τό πηνίο εἶναι

$$\Phi = \mu_0 \frac{Nn}{L} I\pi a^2. \qquad (11.6)$$

Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (11.4), διακοπή τοῦ ρεύματος στό πηνίο Π θά προκαλέσει στό πηνίο π τή ροή ἑνός ὁλικοῦ φορτίου

$$q = \frac{\mu_0 N n \pi a^2}{RL} I \qquad (11.7)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 11-1 Διάταξη δύο ὁμοαξονικῶν πηνίων γιά τήν ἐπιβεβαίωση τοῦ νόμου τῆς ἐπαγωγῆς.

ὅπου

$$R = R_\pi + R_G \tag{11.8}$$

καί R_π, R_G εἶναι ἀντίστοιχα ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου π καί ἡ ἀντίσταση πού παρεμβάλλει στό κύκλωμα τοῦ πηνίου τό γαλβανόμετρο.

— Γιά ρεῦμα $I \simeq 3$ A ὑπολογίστε τό φορτίο τῆς ἐξ. (11.7) χρησιμοποιώντας τίς γεωμετρικές διαστάσεις τῆς διατάξεως δύο πηνίων πού διαθέτετε. Ὑπολογίστε τήν εὐαισθησία τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου S_q ὥστε τό φορτίο τῆς ἐξ. (11.7) νά συνεπάγεται ἀπόκλιση 10 cm.

— Τό ἁπλό κύκλωμα τοῦ σχήματος 11-2 ἐπιτρέπει τή βαθμονόμηση τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου γιά τήν ἐπιθυμητή εὐαισθησία. Χρησιμοποιεῖστε ἕνα πυκνωτή τῆς τάξης τῶν 5 μF καί ἐπιλέξτε τό δυναμικό V ἔτσι ὥστε τό γινόμενο CV νά ἰσοῦται μέ τό φορτίο q τῆς ἐξ. (11.7). Μέ τό κύκλωμα προστασίας P ρυθμισμένο στό σημεῖο ἐλάχιστης εὐαισθησίας, φορτίστε καί ἐκφορτίστε τόν πυκνωτή, παρατηρώντας τό μέγιστο τῆς πρώτης ταλαντώσεως τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου. Αὐξεῖστε σταδιακά τήν εὐαισθησία τοῦ κυκλώματος προστασίας μέχρις ὅτου ἐπιτύχεται μέγιστη ἀπόκλιση περίπου 10 cm.

— Χωρίς νά μεταβάλετε πλέον τή ρύθμιση τῆς εὐαισθησίας φορτίστε καί ἐκφορτίστε τόν πυκνωτή γιά διάφορες ὑψηλότερες καί χαμηλότερες τιμές τοῦ δυναμικοῦ V. Ἀποδῶστε σέ κατάλληλο πίνακα καί σέ γραφική παράσταση τή μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό φορτίο CV γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ δυναμικοῦ V. Προσαρμόστε στά δεδομένα σας τήν καλύτερη εὐθεία καί ἀπό τήν κλίση της

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

προσδιορίστε τήν εὐαισθησία τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό φορτίο S_q.

– Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 11-3. Συνδέστε τό ἐσωτερικό πηνίο π μέ τό κύκλωμα προστασίας P τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου ρυθμισμένο στήν εὐαισθησία πού προσδιόρισε ἡ προηγούμενη διαδικασία. Βεβαιωθεῖτε ὅτι κατανοεῖτε τή λειτουργία τοῦ διακόπτη S, ὁ ὁποῖος ἐπιλέγει τή φορά τοῦ ρεύματος στό πηνίο Π. Ὡς πηγή V χρησιμοποιεῖστε τροφοδοτικό ΣΡ.

– Μέ τό διακόπτη S στή θέση ΑΑ ἀναπτύξτε δυναμικό V ἔτσι ὥστε τό πηνίο Π νά διαρρέεται ἀπό ρεῦμα I = 3 Α. Ἀνοῖξτε τό διακόπτη S καί παρατηρεῖστε τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Ἐπαναλάβετε τή διαδικασία γιά διάφορες τιμές τοῦ ρεύματος στήν ἐπιτρεπτή περιοχή πού ἀναγράφεται στή διάταξη τῶν δύο πηνίων. Σημειῶστε τά ἀποτελέσματά σας σέ κατάλληλο πίνακα. Σέ μιά τρίτη στήλη τοῦ πίνακα ὑπολογίστε τό ὁλικό φορτίο[†] πού ἀντιστοιχεῖ σέ κάθε ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου χρησιμοποιώντας τή γνωστή εὐαισθησία S_q.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία κλείνοντας ἀρχικά τό διακόπτη στή θέση ΒΒ καί στή συνέχεια ἀνοίγοντας τό διακόπτη.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία κλείνοντας ἀρχικά τό διακόπτη S στή θέση ΑΑ καί στή συνέχεια μεταθέτοντας μέ γρήγορη κίνηση τό διακόπτη ἀπό τή θέση ΑΑ στή ΒΒ.

– Ἐπαναλάβετε τέλος τήν προηγούμενη ἐργασία κλείνοντας ἀρχικά τό διακόπτη S στή θέση ΒΒ καί στή συνέχεια μεταθέτοντας μέ γρήγορη κίνηση τό διακόπτη ἀπό τή θέση ΒΒ στή ΑΑ.

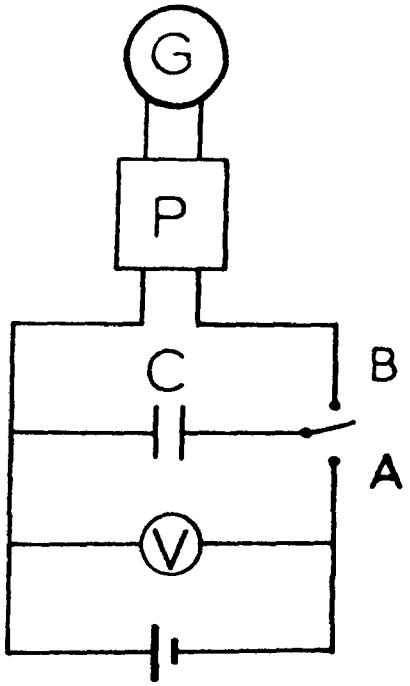
– Ἀποδῶστε τά πειραματικά σας δεδομένα σέ μιά γραφική παράσταση, χρησιμοποιώντας διαφορετικά σύμβολα γιά κάθε ὁμάδα δεδομένων πού προέρχεται ἀπό καθεμιά ἀπό τίς προηγούμενες διεργασίες. Προσαρμόστε στά δεδομένα τήν καλύτερη εὐθεία καί ἀπό τήν κλίση τῆς εὐθείας προσδιορίστε τή σταθερά a στή σχέση

$$q = a\Delta I \qquad (11.9)$$

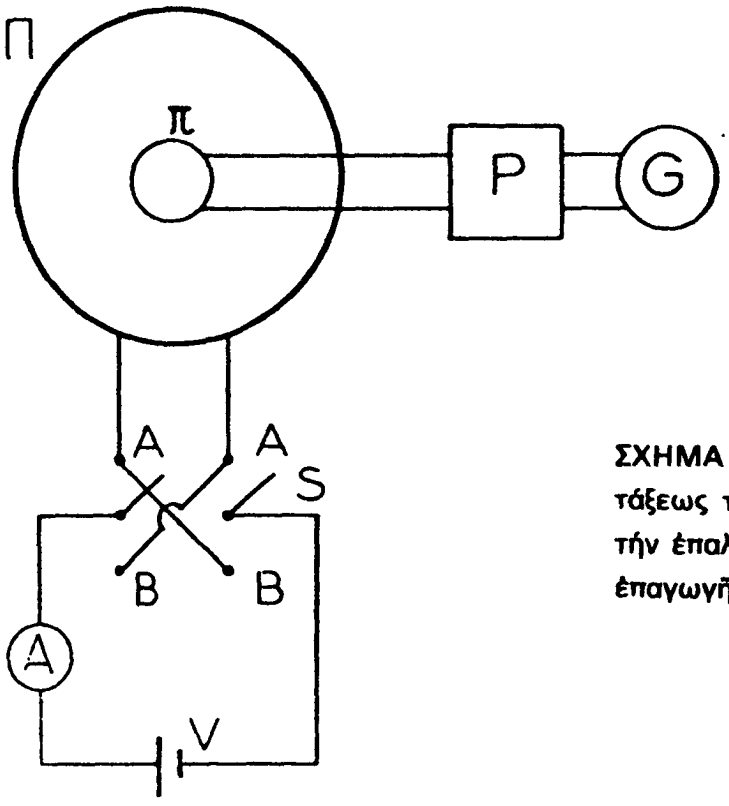
ὅπου ΔΙ εἶναι ἡ διαφορά τοῦ ρεύματος μεταξύ τῆς ἀρχικῆς καί τελικῆς καταστάσεως λειτουργίας τοῦ κυκλώματος σέ καθεμιά ἀπό τίς προηγούμενες διεργασίες. Ἐκτιμεῖστε τό πειραματικό σφάλμα σ_a στόν προσδιορισμό τῆς σταθερᾶς a. Συγκρίνετε καί σχολιάστε τυχόν ἀποκλίσεις τῆς πειραματικῆς τιμῆς μέ τήν θεωρητική πρόβλεψη τῆς ἐξ. (11.7)

† Θεωρεῖστε ὅτι ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου πρός τά δεξιά ἀντιπροσωπεύει θετικό φορτίο καί πρός τά ἀριστερά ἀρνητικό. (Μπορεῖτε νά υἱοθετήσετε τήν ἀντίστροφη σύμβαση – δέν ἔχει μεγάλη σημασία).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 11-2 Κύκλωμα βαθμονομήσεως βαλιστικοῦ γαλβανομέτρου.



ΣΧΗΜΑ 11-3 Σύνδεση τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 11-1 γιά τήν ἐπαλήθευση τοῦ νόμου τῆς ἐπαγωγῆς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$a = \frac{\mu_0 N n \pi a^2}{RL}. \qquad (11.10)$$

Ἔχοντας ὑπόψη τήν ἄμεση χρησιμοποίηση τοῦ νόμου τῆς ἐπαγωγῆς σέ πείραμα, γράψαμε τήν ἐξ. (11.2) ἀποκλειστικά στό σύστημα SI. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά δείξει ὅτι ἄν ἡ ΗΕΔ U ἐκφραστεῖ σέ volt καί τό μαγνητικό πεδίο **B** σέ tesla τότε ἡ ἐξ. (11.2) ἔχει τίς σωστές διαστάσεις. Ἡ μεταφορά τοῦ νόμου τῆς ἐπαγωγῆς στό σύστημα CGS μπορεῖ νά γίνει διαμέσου τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός†. Θά γράψουμε ἑπομένως τήν ἐξ. (11.2) στήν ἑνοποιημένη μορφή γιά τά δύο συστήματα μονάδων ὡς††

$$U = -[c]\,\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -[c]\,\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\hat{n}\,da. \qquad (11.11)$$

Στή μονάδα μετρήσεως τῆς μαγνητικῆς ροῆς μέ διαστάσεις (μαγνητικό πεδίο) × (ἐπιφάνεια) ἔχει δοθεῖ ἰδιαίτερη ὀνομασία σέ κάθε σύστημα μονάδων. Στό σύστημα CGS ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς μαγνητικῆς ροῆς εἶναι τό **maxwell** (Mx) (πού στήν παλαιότερη βιβλιογραφία ἀπαντᾶται καί μέ τήν ὀνομασία **γραμμή**)

$$1\ \mathrm{Mx} = 1\ \mathrm{G\cdot cm^2} \qquad (11.12)$$

ἐνῶ στό σύστημα SI ἡ ἀντίστοιχη μονάδα εἶναι τό **weber** (Wb)

$$1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{T\cdot m^2} = 1\ \mathrm{V\cdot sec}. \qquad (11.13)$$

---

† Στό σημεῖο αὐτό δέν θά ἀποδείξουμε μέ λεπτομέρεια ὅτι ὁ παράγοντας πού ἀπαιτεῖται γιά τή μεταφορά ἀπό τό σύστημα CGS στό σύστημα SI εἶναι ὄντως ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός c. Ὁ ἀναγνώστης πάντως μπορεῖ νά πεισθεῖ γιά τήν ὀρθότητα τῆς ἐξ. (11.11) μέ ἁπλή σύγκριση πρός τήν ἐξ. (9.17).

†† Στά κεφάλαια πού ἀκολουθοῦν θά γράψουμε τίς περισσότερες ἐξισώσεις ἀπευθείας στό σύστημα SI. Θά διατηρήσουμε τόν ἑνιαῖο τρόπο γραφῆς (μέ χρησιμοποίηση ἀγγυλῶν γιά τόν διαχωρισμό τῶν ἐπιπλέον παραγόντων τοῦ συστήματος SI) μόνο γιά ἐξισώσεις ἰδιαίτερου θεωρητικοῦ ἐνδιαφέροντος πού πρόκειται νά χρησιμοποιηθοῦν ἀργότερα στήν περαιτέρω ἀνάπτυξη τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς θεωρίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ σύνδεση μεταξύ τῶν δύο μονάδων δίνεται ἀπό τή σχέση†

$$1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ Mx.} \tag{11.14}$$

11-2 Μέτρηση τοῦ Μαγνητικοῦ Πεδίου μέ Βαλλιστικό Γαλβανόμετρο

Τό βαλλιστικό γαλβανόμετρο πού χρησιμοποιήσαμε στό Πείραμα 11-1 μπορεῖ μέ κατάλληλη βαθμονόμηση νά μετατραπεῖ σέ ὄργανο μετρήσεως μαγνητικῆς ροῆς ἤ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἄν τό βαλλιστικό γαλβανόμετρο συνδεθεῖ μέ ἕνα πηνίο πού διαθέτει N σπεῖρες, ἐπιφάνεια A καί ἀντίσταση R_π τότε σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (11.4) μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς διαμέσου τοῦ πηνίου κατά $\Delta\Phi$ συνεπάγεται μέτρηση φορτίου (κατά μέτρο)

$$q = \frac{1}{R}\,\Delta\Phi. \tag{11.15}$$

Στήν τελευταία σχέση ἡ ἀντίσταση R περιλαμβάνει τήν ἀντίσταση R_π καί τήν ἀντίσταση R_g πού παρεμβάλλει τό γαλβανόμετρο στό κύκλωμα τοῦ πηνίου. Ἄν τό γαλβανόμετρο χρησιμοποιεῖται μέ κύκλωμα προστασίας ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως R εἶναι

$$R = R_\pi + \frac{R_p R_g}{R_p + R_g} \tag{11.16}$$

ὅπου R_g εἶναι ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου καί R_p ἡ ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος προστασίας πού παρεμβάλλεται ὡς διακλάδωση. Ἡ τελευταία μπορεῖ νά μετρηθεῖ μέ ἕνα ὠμόμετρο·ἀφοῦ βεβαίως τό κύκλωμα προστασίας ἀποσυνδεθεῖ ἀπό τό γαλβανόμετρο καί τό πηνίο π) μετά τόν προσδιορισμό τῆς εὐαισθησίας τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό φορτίο S_q. Ἡ εὐαισθησία τώρα τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός μεταβολές τῆς μαγνητικῆς ροῆς S_Φ (σέ mm/Mx ἤ mm/Wb) μπορεῖ μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (11.15) νά ἐκφραστεῖ ὡς

$$S_\Phi = S_q/R \tag{11.17}$$

Γαλβανόμετρα βαθμονομημένα ἀπευθείας σέ maxwell ἤ weber ἀπαν-

---

† Σέ πολλά συγγράμματα μέ ἔμφαση σέ ἐφαρμογές οἱ παράγωγες μονάδες Mx/cm² (= 1 G) καί Wb/m² ἤ V·sec/m² (= 1 T) χρησιμοποιοῦνται γιά τή μέτρηση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τῶνται μέ τήν ὀνομασία **ροόμετρα**. Καθόσον παρόμοια ὄργανα ἔχουν δυνατότητες μετρήσεως μόνο μεταβολῶν τῆς μαγνητικῆς ροῆς, ἀπόλυτες μετρήσεις μποροῦν νά γίνουν κατά τήν ἀνάπτυξη ἤ ἐξάλειψη τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἄν τοῦτο δέν εἶναι ἐπιθυμητό (ὅπως συνήθως συμβαίνει σέ τεχνολογικές ἐφαρμογές) τό πηνίο μπορεῖ νά τοποθετηθεῖ ἀρχικά κάθετα πρός τίς μαγνητικές γραμμές καί στή συνέχεια, μέ γρήγορη κίνηση, νά στραφεῖ κατά 90° ἤ 180°. Στήν τελευταία περίπτωση ἡ ἔνδειξη τοῦ γαλβανομέτρου ἀντιπροσωπεύει τό διπλάσιο τῆς μαγνητικῆς ροῆς πού ἀρχικά διέρρεε τό πηνίο. Στά συνήθη ροόμετρα τό πηνίο ἀνιχνεύσεως τῆς μαγνητικῆς ροῆς ἔχει ἀμελητέα ἀντίσταση. Ἔτσι ἄν τό γαλβανόμετρο χρησιμοποιηθεῖ χωρίς κύκλωμα προστασίας (πού συνήθως παρεμβάλλει διακλάδωση ἴση μέ τήν ἀντίσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως) ἡ κατάστασή του εἶναι ἐξαιρετικά ὑπερκρίσιμη. Κατά τή μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς ἡ φωτεινή κηλίδα τοῦ ὀργάνου μετατίθεται μέ γοργή κίνηση στό σημεῖο τῆς πρώτης μέγιστης ἀποκλίσεως ἀλλά ἐπανέρχεται στό σημεῖο ἰσορροπίας μέ μεγάλη νωθρότητα. Πολλοί κατασκευαστές ροομέτρων ἐκμεταλλεύονται τό γεγονός αὐτό χρησιμοποιώντας γαλβανόμετρα μέ ἀμελητέα σταθερά στρέψεως τ [βλ. ἐξ. (7.6)]. Στά ὄργανα αὐτά μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς στό πηνίο ἀνιχνεύσεως προκαλεῖ γρήγορη μετατόπιση τῆς φωτεινῆς κηλίδας ἤ τοῦ δείκτη τοῦ ὀργάνου καί παραμονή τῆς ἐνδείξεως γιά μεγάλο χρόνο. Ἡ ἐπαναφορά βεβαίως στή μηδενική ἔνδειξη μετά τή μέτρηση πρέπει νά γίνει μέ μηχανικό ἤ ἠλεκτρικό τρόπο. Ἕνας χαρακτηριστικός τύπος ροομέτρου περιέχεται στό σχῆμα 11-4.

Ἄν τό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖ τή μαγνητική ροή στό πηνίο ἀνιχνεύσεως ἑνός ροομέτρου εἶναι ὁμογενές, ἡ μέτρηση τῆς μαγνητικῆς ροῆς μπορεῖ νά ἀναχθεῖ σέ μέτρηση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Γιά μαγνητικό πεδίο κάθετο πρός τήν ἐγκάρσια διατομή τοῦ πηνίου μέ N σπεῖρες καί διατομή A ἡ μαγνητική ροή εἶναι

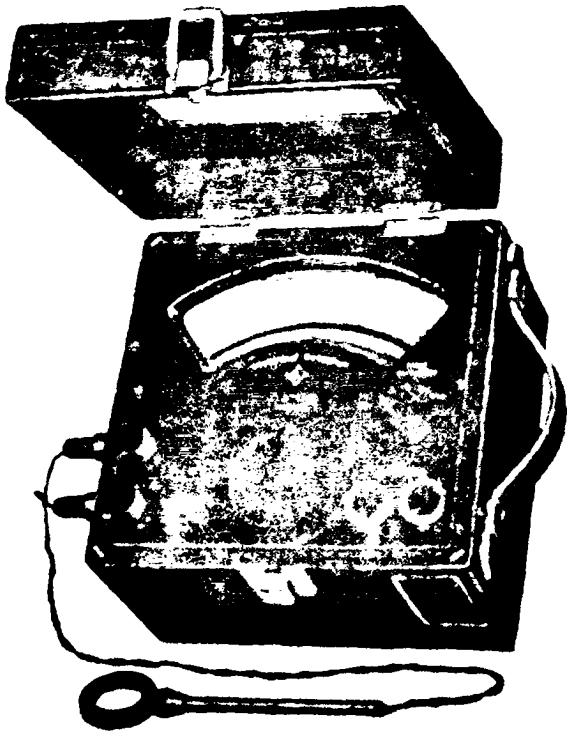
$$\Phi = NAB \tag{11.18}$$

ἐνῶ τό ὁλικό φορτίο πού θά διαρεύσει στό γαλβανόμετρο κατά τήν ἀνάπτυξη ἤ ἐξάλειψη τῆς ροῆς αὐτῆς δίνεται ἀπό τή σχέση

$$q = \frac{NA}{R} B. \tag{11.19}$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση τό γαλβανόμετρο μπορεῖ νά βαθμονομηθεῖ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 11-4 Φορητός τύπος ροομέτρου μέ πολλαπλές κλίμακες.

άπευθείας σέ gauss ἤ tesla. Ἡ ἀντίστοιχη **εὐαισθησία τοῦ ὀργάνου ὡς πρός τό μαγνητικό πεδίο** S_B (σέ mm/G ἤ mm/T) ἐξάγεται ἀπό τήν ἐξ. (11.17) ὡς

$$S_B = \frac{NA}{R} S_q. \qquad (11.20)$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 11-2. ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΡΟΗΣ

Χρησιμοποιώντας τή διάταξη τοῦ σχήματος 11-1 συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 11-3 μέ τό κύκλωμα προστασίας τοῦ γαλβανομέτρου P ρυθμισμένο γιά μικρή εὐαισθησία. Κλεῖστε τό διακόπτη S στή θέση AA καί ἀναπτύξτε δυναμικό V ἔτσι ὥστε τό πηνίο Π νά διαρρέεται ἀπό ρεῦμα I = 3 A. Μεταθέστε τό διακόπτη S ἀπό τή θέση AA στή θέση BB καί παρατηρεῖστε τήν πρώτη μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Ρυθμίστε τήν εὐαισθησία τοῦ κυκλώματος προστασίας ἔτσι ὥστε ἡ ἀπόκλιση κατά τήν προηγούμενη διεργασία νά εἶναι περίπου 20 cm.

– Χωρίς νά μεταβάλετε πλέον τή ρύθμιση εὐαισθησίας τοῦ γαλβανομέτρου μεταθέστε τό πηνίο ἀνιχνεύσεως π κατά τόν ἄξονα τοῦ πηνίου Π σέ ἀπόσταση 5 cm ἀπό τήν προηγούμενη θέση. Παρατηρεῖστε τήν ἀπό-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κλιση τοῦ γαλβανομέτρου ὅταν ὁ διακόπτης S μετατίθεται ἀπό τή θέση AA στή θέση BB.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία μεταθέτοντας τό πηνίο ἀνιχνεύσεως κατά διαστήματα 5 cm καθόλη τήν ἔκταση $-L < z < L$, ὅπου z εἶναι ἡ ἀπόσταση ἀπό τό μέσο καί L τό μῆκος τοῦ ἄξονα τοῦ πηνίου Π. Σέ κατάλληλο πίνακα ἀποδῶστε τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου ὡς συνάρτηση τῆς ἀποστάσεως τοῦ πηνίου ἀνιχνεύσεως ἀπό τό μέσο τοῦ πηνίου Π.

– Χρησιμοποιώντας τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 11-2 καί τή διεργασία πού περιγράφεται στό Πείραμα 11-1 προσδιορίστε, γιά τή ρύθμιση τοῦ κυκλώματος προστασίας P μέ τήν ὁποία ἐκτελέσατε μέχρι τό σημεῖο αὐτό τό πείραμα, τήν εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό φορτίο S_q.

– Ἀποσυνδέστε τό κύκλωμα προστασίας τοῦ γαλβανομέτρου ἀπό τήν ὅλη διάταξη καί μέ ἕνα ὠμόμετρο μετρεῖστε τήν ἐσωτερική του ἀντίσταση R_p. Σημειῶστε ἀκόμη τήν ἐσωτερική ἀντίσταση R_g τοῦ γαλβανομέτρου πού ἀναγράφεται ἀπό τόν κατασκευαστή στό περίβλημα τοῦ ὀργάνου. Ἀπό τά δεδομένα αὐτά καί τίς διαστάσεις τοῦ πηνίου ἀνιχνεύσεως ὑπολογίστε τήν εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό πεδίο S_B [βλ. ἐξ. (11.16) καί (11.20)]. Μετατρέψτε τίς μετρήσεις ἀποκλίσεως τοῦ γαλβανομέτρου σέ τιμές μαγνητικοῦ πεδίου καί ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματα σέ γραφική παράσταση μέ κατακόρυφο ἄξονα τό μαγνητικό πεδίο καί ὁριζόντιο ἄξονα τήν ποσότητα z/L. Στήν ἴδια γραφική παράσταση ἀποδῶστε μέ συνεχή καμπύλη τήν ἐκτίμηση τοῦ τύπου γιά σωληνοειδές πεπερασμένων διαστάσεων πού περιέχεται στόν Πίνακα 9-1. Σχολιάστε τυχόν ἀποκλίσεις ἀπό τή θεωρητική πρόβλεψη.

11-3 ΗΕΔ καί ἡ Σύνδεση Ἠλεκτρικοῦ καί Μαγνητικοῦ Πεδίου

Στήν Παράγραφο 5-4 ὁρίσαμε τήν ΗΕΔ στά συγκεκριμένα πλαίσια ἑνός κλειστοῦ κυκλώματος ὡς τήν ἐνέργεια ἀνά μονάδα φορτίου πού ἀπαιτεῖται γιά μιά πλήρη διαδρομή τοῦ φορτίου στό κλειστό κύκλωμα. Ἄν dw εἶναι ἡ ἐνέργεια πού ἀπαιτεῖται γιά τή μεταφορά τοῦ φορτίου q κατά τό στοιχεῖο **ds** τῆς διαδρομῆς μποροῦμε νά γράψουμε τήν ΗΕΔ, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (5.26) ὡς

$$U = \frac{1}{q} \oint_C dw = \frac{1}{q} \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (11.21)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου **F** εἶναι ἡ δύναμη πού κινεῖ τό φορτίο, ἐνῶ στό τελευταῖο σκέλος ἔχει χρησιμοποιηθεῖ ὁ ὁρισμός τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \tag{2.16}$$

Ἡ σχέση τῆς ἐξ. (11.21) μᾶς ἐπιτρέπει τώρα νά γράψουμε τό νόμο τῆς ἐπαγωγῆς στήν ἐναλλακτική μορφή

$$\oint_c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -[c]\,\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_s \mathbf{B}\cdot\hat{n}\,da. \tag{11.22}$$

Στήν εἰδική περίπτωση ἑνός ἀγωγοῦ C πού περιγράφει τήν ἐπιφάνεια S μποροῦμε νά ἑρμηνεύσουμε τήν ἐξ. (11.22) υἱοθετώντας τήν ἄποψη ὅτι χρονική μεταβολή τῆς ροῆς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου στήν ἐπιφάνεια πού περικλείει ὁ ἀγωγός C δημιουργεῖ μέσα στόν ἀγωγό ἕνα ἡλεκτρικό πεδίο **E**, τό ὁποῖο εἶναι ὑπεύθυνο γιά τή δημιουργία τοῦ ρεύματος. Γενικότερα μποροῦμε νά ἀπαλλαγοῦμε τελείως ἀπό τίς ἔννοιες τοῦ ἀγωγοῦ καί τοῦ ρεύματος καί νά θεωρήσουμε ὅτι ἡ μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς στήν ἐπιφάνεια S δημιουργεῖ ἡλεκτρικό πεδίο κατά τό δρόμο C πού περιβάλλει τήν ἐπιφάνεια S, ἀνεξάρτητα ἀπό τήν ὕπαρξη ἤ μή ἀγωγοῦ στό δρόμο αὐτό. Ἡ ἐξ. (11.22) ἀναδεικνύεται ἐπομένως ὡς μία γενική ἐξίσωση τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς θεωρίας πού συνδέει τό ἡλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο στό χῶρο.

Δύο σημεῖα σχετικά μέ τήν ἐξ. (11.22) εἶναι ἴσως χρήσιμο νά τονιστοῦν:

1. Τό ἡλεκτρικό πεδίο **E** πού ὑπεισέρχεται στήν ἐξ. (11.22) εἶναι τό ὁλικό πεδίο στό χῶρο καί μπορεῖ νά περιέχει μιά συνιστῶσα, ἡ ὁποία δημιουργεῖται ἀπό στατική κατανομή φορτίων. Τοῦτο προέρχεται ἀπό τήν ἰδιότητα τοῦ ἡλεκτροστατικοῦ πεδίου

$$\oint_c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0. \tag{11.23}$$

2. Ἡ ἐπιφάνεια S πού χρησιμοποιεῖται στήν ἐξ. (11.22) γιά τόν ὑπολογισμό τῆς μαγνητικῆς ροῆς μπορεῖ νά εἶναι ὁποιαδήποτε ἐπιφάνεια πού καταλήγει στό δρόμο C. Τοῦτο εἶναι ἀπόρροια τῆς μηδενικῆς ἀπόκλισης τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου [βλ. ἐξ. (9.33)]

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{9.33}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τήν ὁποία ἀπό φυσικῆς ἀπόψεως ὑπαγορεύει ἡ μή ὕπαρξη μαγνητικῶν μονοπόλων. Ὁ ἀναγνώστης εἶναι εὔκολο νά δείξει [βλ. Ἄσκηση 11-6] ὅτι ἡ ἐξ. (9.33) ὁδηγεῖ στή σχέση

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0 \tag{11.24}$$

ἀπό τήν ὁποία ἕπεται ὅτι, γιά ἕνα συγκεκριμένο περίγραμμα C, ὁ ὑπολογισμός τῆς μαγνητικῆς ροῆς εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τή μορφή τῆς ἐπιφανείας.

Ὁ Νόμος τοῦ Faraday μπορεῖ εὔκολα νά μετασχηματιστεῖ σέ διαφορική ἐξίσωση πού συνδέει τά δύο πεδία στό ἴδιο σημεῖο τοῦ χώρου. Ἄν ἡ μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς ὀφείλεται ἀποκλειστικά στή χρονική μεταβολή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου[†] τότε μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἐξ. (11.22) ὡς

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -[c] \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} da. \tag{11.25}$$

Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τό θεώρημα τοῦ Stokes μποροῦμε νά μετατρέψουμε τό ἀριστερό σκέλος τῆς ἐξ. (11.25) σέ ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da. \tag{11.26}$$

Ἡ ἐξ. (11.22) μπορεῖ ἑπομένως νά γραφεῖ ὡς

$$\int_S \left(\nabla \times \mathbf{E} + [c] \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0. \tag{11.27}$$

Τό γεγονός τώρα ὅτι ἡ ἐπιλογή τοῦ δρόμου C καί τῆς ἐπιφανείας S εἶναι αὐθαίρετη συνεπάγεται ὅτι ἡ συνάρτηση πού ὁλοκληρώνεται στήν ἐξ. (11.27) πρέπει νά μηδενίζεται σέ κάθε σημεῖο τοῦ χώρου, ἤτοι

$$\nabla \times \mathbf{E} = -[c] \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{11.28}$$

---

† Ἡ συνθήκη αὐτή συνεπάγεται ὅτι τό κύκλωμα (ἤ γενικότερα ὁ δρόμος) C δέν ἀλλάζει σχῆμα ἤ θέση μέ τό χρόνο. Στό πνεῦμα τῆς Παραγράφου 9-7 τοῦτο σημαίνει ὅτι τόσο τό μαγνητικό ὅσο καί τό ἠλεκτρικό πεδίου ὁρίζονται στό ἴδιο ἀδρανειακό σύστημα ἀναφορᾶς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατηρεῖται ὅτι ἡ τελευταία σχέση ἀποτελεῖ τή γενίκευση τῆς ἐξισώσεως τῆς ἠλεκτροστατικῆς {βλ. ἐξ. (2.45)} $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

Μιά δεύτερη γενίκευση τῶν ἐξισώσεων τῆς ἠλεκτροστατικῆς, στήν περίπτωση χρονικά μεταβαλλόμενων πεδίων, ἕπεται ἀμέσως ἀπό τήν ἐξ. (11.28). Ὑπενθυμίζεται ὅτι τό ἠλεκτρικό πεδίο πού δημιουργεῖται ἀποκλειστικά ἀπό κατανομή στατικῶν φορτίων στό χῶρο εἶναι ἀστρόβιλο, ἤτοι ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{2.45}$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τό ἠλεκτρικό πεδίο μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς ἡ κλίση κάποιας βαθμωτῆς συναρτήσεως καί τό γεγονός αὐτό μᾶς ἐπέτρεψε νά εἰσάγουμε τή συνάρτηση δυναμικοῦ $\varphi(r)$ μέ τή σχέση

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \tag{2.41}$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο ἡ σχέση

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{9.33}$$

πού ἱκανοποιεῖ τό μαγνητικό πεδίο ἐπέτρεψε τή μετάθεση τῆς περιγραφῆς τῶν μαγνητικῶν φαινομένων στό ἀνυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}(r)$, τό ὁποῖο συνδέεται πρός τό μαγνητικό πεδίο μέ τή σχέση

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{9.47}$$

Ἡ τελευταία σχέση μᾶς ἐπιτρέπει νά γράψουμε τή διαφορική μορφή τοῦ νόμου τῆς ἐπαγωγῆς {ἐξ. (11.18)} ὡς

$$\nabla \times \mathbf{E} = -[c]\,\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{A} \tag{11.29}$$

ἤ, ἀντιστρέφοντας τή σειρά τῆς διαφορίσεως στό δεύτερο σκέλος, ὡς

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + [c]\,\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{11.30}$$

Σέ ἀναλογία μέ τό συμπέρασμα πού ἀκολούθησε τήν ἐξ. (2.45) ἕπεται ὅτι ἡ ἔκφραση πού περιέχεται στίς παρενθέσεις τῆς ἐξ. (11.30) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς ἡ κλίση μιᾶς βαθμωτῆς συναρτήσεως $\varphi(r)$. Σέ ἀναλογία μέ τόν ὁρισμό τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ στήν ἠλεκτροστατική θά γράψουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{E} + [c]\,\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$$

ἤ

$$\mathbf{E} = -[c]\,\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi. \qquad (11.31)$$

Στήν περίπτωση ἑπομένως χρονικά μεταβαλλόμενων πεδίων ὁ ὁρισμός τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου ἀπαιτεῖ τή γνώση τόσο τοῦ ἀνυσματικοῦ ὅσο καί τοῦ βαθμωτοῦ δυναμικοῦ. Γιά στατικά πεδία βεβαίως ἡ συνάρτηση **A**(r) εἶναι σταθερή ὡς πρός τό χρόνο καί ἡ ἐξ. (11.31) μεταπίπτει στή σχέση τῆς ἡλεκτροστατικῆς $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

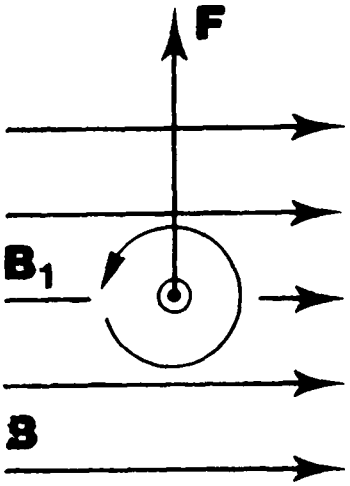
11-4 Ὁ Νόμος τοῦ Lenz

Τό ἀρνητικό σημεῖο στήν ἐξ. (11.2) ἀποτελεῖ τήν ἔκφραση ἑνός γενικότερου κανόνα πού διέπει ὅλα τά ἐπαγωγικά φαινόμενα. Ὁ κανόνας αὐτός, γνωστός ὡς **νόμος τοῦ Lenz,** μπορεῖ νά διατυπωθεῖ ὡς ἑξῆς:

Ἐπαγωγικά ρεύματα ἔχουν πάντα διεύθυνση τέτοια ὥστε οἱ ἐπιπτώσεις τους νά ἀντιτίθενται στά αἴτια πού τά προκαλοῦν.

Τά ἐπαγωγικά φαινόμενα στά ὁποῖα ἀναφέρεται ὁ νόμος τοῦ Lenz μποροῦν νά θεωρηθοῦν ἀπό δύο διαφορετικές ὀπτικές γωνίες. Εἶναι δυνατόν κατά μία ἄποψη νά θεωρήσουμε τό νόμο τοῦ Lenz ὡς ἀντίδραση στή δράση μαγνητικῆς δυνάμεως ἤ ροπῆς. Ἐναλλακτικά μποροῦμε νά υἱοθετήσουμε τήν ἄποψη ὅτι ἕνα σύστημα ἀντιδρᾶ στήν αὔξηση ἤ μείωση τῆς μαγνητικῆς ροῆς. Ὁ ἀναγνώστης θά ἦταν ἴσως χρήσιμο νά ἀναλύσει ὁρισμένα συνήθη ἐπαγωγικά φαινόμενα πού πραγματεύονται μέ μεγαλύτερη λεπτομέρεια περισσότερο στοιχειώδη συγγράμματα. Κατά τήν πρώτη ἄποψη, ἀντίδραση σέ μαγνητική δύναμη ἤ ροπή συνεπάγεται ἀντίδραση σέ γραμμική ἤ περιστροφική κίνηση. Μποροῦμε π.χ. νά θεωρήσουμε τό βόρειο πόλο ἑνός μαγνήτη, ὁ ὁποῖος πλησιάζει ἕνα ἀγωγό σέ σχῆμα δακτυλίου μέ διεύθυνση κατά τόν ἄξονα τοῦ δακτυλίου. Τότε ὁ νόμος τοῦ Lenz ὑπαγορεύει ὅτι στό δακτύλιο θά δημιουργηθεῖ ἐπαγωγικό ρεῦμα μέ φορά τέτοια, ὥστε τό δημιουργούμενο μαγνητικό πεδίο νά ἀντισταθεῖ στήν κίνηση τοῦ μαγνήτη. Κατά τήν ἐναλλακτική ἄποψη μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι ἡ κίνηση τοῦ μαγνήτη προκαλεῖ αὔξηση τῆς μαγνητικῆς ροῆς πού διαρρέει τό δακτύλιο. Τότε, πάλι κατά τό νόμο τοῦ Lenz, τό ἐπαγωγικό ρεῦμα πού δημιουργεῖται στό δακτύλιο θά ἔχει τέτοια φορά ὥστε νά ἀναπτύξει μαγνητικό πεδίο πού τείνει νά μειώσει τή μαγνητική ροή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 11-5 Ἀλληλεπίδραση ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** καί ρευματοφόρου ἀγωγοῦ.

Τά παραδείγματα πού μποροῦμε νά ἀναφέρουμε γύρω ἀπό τήν ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Lenz εἶναι πολυάριθμα. Ἴσως εἶναι χρήσιμο νά παρατηρήσουμε ὅτι μέ τή βοήθεια τοῦ νόμου τοῦ Lenz μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τή φορά περιστροφῆς τοῦ ὀργάνου κινητοῦ πλαισίου πού ἀποτέλεσε ἕνα ἀπό τά πρῶτα ἀντικείμενα μελέτης τοῦ παρόντος βιβλίου. Ἡ δύναμη πού ἀσκεῖται στό κινητό πλαίσιο ἀναλύθηκε ἤδη σό σχῆμα 5-3(β), τό ὁποῖο ἀναπαράγεται ἐδῶ στό σχῆμα 11-5. Τό μαγνητικό πεδίο B_1 τοῦ ρευματοφόρου ἀγωγοῦ τείνει νά μειώσει τή μαγνητική ροή στό ἄνω μέρος τοῦ σχήματος καί νά τήν αὐξήσει στό κάτω. Ἔτσι ἡ δύναμη **F** πού δημιουργεῖται στόν ἀγωγό ἔχει διεύθυνση καί φορά τέτοια ὥστε νά ἀποφευχθεῖ ἡ μεταβολή τῆς ροῆς. Ἡ εὐεληξία μέ τήν ὁποία μπορεῖ νά ἐφαρμοστεῖ ὁ νόμος τοῦ Lenz ὑπογραμμίζεται στήν Ἄσκηση 11-7, ὅπου τό ἴδιο φαινόμενονο ἐξετάζεται ἀπό μιά ἐπιπλέον ἄποψη, θεωρώντας τή μεταβολή τῆς ὁλικῆς μαγνητικῆς ροῆς πού διαρρέει τό κινητό πλαίσιο κατά τή διέλευση ἡλεκτρικοῦ ρεύματος. Ἡ ἴδια ἄποψη μπορεῖ νά υἱοθετηθεῖ γιά τήν ἀντίσταση πού προβάλλεται στήν περιστροφή ἑνός πλαισίου περί ἄξονα πού βρίσκεται στό ἐπίπεδο τοῦ πλαισίου, ὅταν στό χῶρο ὑπάρχει ὁμογενές μαγνητικό πεδίο μέ διεύθυνση κάθετη πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς (βλ. Ἀσκήσεις 11-1 καί 11-2). Τή διάταξη αὐτή θά συναντήσουμε ἀργότερα στήν παραγωγή ἐναλλασσόμενου ρεύματος (βλ. σχῆμα 14-1).

Ἰδιαίτερα ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογή τῆς ἐξ. (11.2) καί τοῦ νόμου τοῦ Lenz ἀποτελεῖ ἡ περίπτωση κατά τήν ὁποία ἡ μαγνητική ροή πού διαρρέει ἕνα κύκλωμα προέρχεται ἀπό τό ρεῦμα τοῦ κυκλώματος καί ἡ μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς προκαλεῖται ἀπό μεταβολή τοῦ ἴδιου τοῦ ρεύματος. Στήν περίπτωση αὐτή, σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Lenz, τό ρεῦμα ἐπαγωγῆς πού δημιουργεῖται ἔχει τέτοια φορά ὥστε νά ἀναπτύξει μαγνητικό πεδίο πού ἀντιδρᾶ στή μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς. Ἕπεται ὅτι τό ἐπαγωγικό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ρεῦμα ἔχει φορά ἀντίθετη πρός τή φορά τοῦ ἀρχικοῦ ρεύματος στό κύκλωμα. Μέ ἄλλο λόγια τό ἐπαγωγικό φαινόμενο ἔχει τήν τάση νά διατηρήσει σταθερό τό ρεῦμα τοῦ κυκλώματος. Στήν Παράγραφο 13-5 θά μᾶς δοθεῖ ἡ εὐκαιρία νά μελετήσουμε μέ κάποια λεπτομέρεια ἕνα πρακτικό ἐπακόλουθο τοῦ φαινομένου, πού ἐκδηλώνεται μέ τή δημιουργία σπινθήρα μεταξύ τῶν ἐπαφῶν τοῦ διακόπτη κατά τή διακοπή τοῦ ρεύματος σέ ἕνα κύκλωμα. Ἀπό τήν ἄποψη τοῦ νόμου τοῦ Lenz, ὁ σπινθήρας διατηρεῖ τή συνέχεια τοῦ κυκλώματος καί οὐσιαστικά ἀποτελεῖ ἀπόπειρα ὥστε νά συνεχιστεῖ ἡ ροή τοῦ ρεύματος γιά ὅσο τό δυνατό μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

Σέ ὅλα τά προηγούμενα παραδείγματα ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά διαπιστώσει ὅτι ὁ νόμος τοῦ Lenz δέν ἀποτελεῖ ἀνεξάρτητο νόμο τῆς φύσης, ἀλλά ἁπλή ἐφαρμογή τῆς ἀρχῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας στόν εἰδικό χῶρο τῶν φαινομένων ἐπαγωγῆς. Πράγματι, υἱοθετώντας τήν ἄποψη ἀντιδράσεως σέ μαγνητικές δυνάμεις ἤ ροπές, ἡ ἀρχή διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἐπιβεβαιώνει τήν ἀντίδραση, καθόσον τοῦτο σημαίνει ὅτι καταναλώνεται ἔργο γιά τή δημιουργία τῶν ἐπαγωγικῶν ρευμάτων. Στήν ἀντίθετη περίπτωση θά ἦταν δυνατόν νά ἀντλήσουμε ἐνέργεια ἀπό ἕνα σύστημα καθώς ἐπαγωγικά ρεύματα μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά τήν παραγωγή θερμότητας ἤ τήν λειτουργία κινητήρων. Στήν περίπτωση τοῦ παραδείγματος πού μελετᾶται στήν Ἄσκηση 11-1, ἀνατροπή τοῦ νόμου τοῦ Lenz θά ἐσήμαινε τήν χωρίς δαπάνη ἐνεργείας παραγωγή ἐναλλασσόμενου ρεύματος. Παρόλα αὐτά, ὁ νόμος τοῦ Lenz, ἄν καί μιά ἔκφραση τῆς γενικότερης ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας σέ ἕνα εἰδικό χῶρο τῆς Φυσικῆς, παραμένει ἕνα ἐξαιρετικά χρήσιμο ἐργαλεῖο πού θά χρησιμοποιήσουμε ἐπανειλημμένα στή συνέχεια.

11-5 Αὐτεπαγωγή

Ἡ ἐνδιαφέρουσα περίπτωση ὅπου ἡ ὕπαρξη καί μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς σέ ἕνα κύκλωμα συνδέεται μέ τήν ὕπαρξη καί μεταβολή τοῦ ρεύματος στό ἴδιο κύκλωμα ὁδηγεῖ στόν ὁρισμό τῆς **αὐτεπαγωγῆς**†

$$L = [c]\,\frac{1}{c}\,\frac{d\Phi}{dI} \qquad (11.32)$$

† Στό σημεῖο αὐτό εἶναι ἴσως χρήσιμο νά διευκρινιστοῦν ὁρισμένα γύρω ἀπό τήν ὁρολογία πού χρησιμοποιεῖται στό χῶρο τῶν φαινομένων ἐπαγωγῆς. Στήν ἑλληνική βιβλιογραφία ἔχει καθιερωθεῖ ὁ ὅρος *συντελεστής αὐτεπαγωγῆς* γιά τό φυσικό μέγεθος πού ὁρίζεται στήν ἐξ. (11.32) ἐνῶ μέ τόν ὅρο *αὐτεπαγωγή* ἀποδίδεται τό ἀντίστοιχο φαινόμενο. Κα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ὅπου στό σύστημα CGS ἔχει περιληφθεῖ ὁ παράγοντας c^{-1} γιά μετέπειτα συνέπεια στόν ὁρισμό τῶν μονάδων μετρήσεως. Στόν ὁρισμό αὐτό ἡ μαγνητική ροή Φ εἶναι συνάρτηση τοῦ ρεύματος I πού διαρρέει τό ἴδιο τό κύκλωμα, ἐνῶ ἡ ποσότητα L ἀποτελεῖ μιά συγκεκριμένη γεωμετρική ἰδιότητα τοῦ κυκλώματος.

Μέ τή βοήθεια τῆς αὐτεπαγωγῆς ὁ νόμος τοῦ Faraday μπορεῖ νά γραφεῖ σέ νέα μορφή. Ἄν τό ρεῦμα τοῦ κυκλώματος μεταβάλλεται μέ ρυθμό dI/dt, μποροῦμε νά γράψουμε τό ρυθμό μεταβολῆς τῆς μαγνητικῆς ροῆς ὡς

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI}\frac{dI}{dt} = \left[\frac{1}{c}\right] cL\,\frac{dI}{dt} \qquad (11.33)$$

πού σέ συνδιασμό μέ τήν ἐξ. (11.11) δίνει

$$U = -L\,\frac{dI}{dt}\,. \qquad (11.34)$$

Ἡ τελευταία σχέση συχνά χρησιμοποιεῖται γιά τόν ὁρισμό τῆς ἐπαγωγῆς σέ ἕνα κλειστό κύκλωμα (ὁπότε ἕπεται ὡς παράγωγη σχέση ἡ ἐξ. (11.32)). Μπορεῖ ἀκόμη νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τόν ὁρισμό τῶν μονάδων μετρήσεως τῆς αὐτεπαγωγῆς.

Ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς αὐτεπαγωγῆς πού προκύπτει στό σύστημα CGS ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (11.32) ἢ τήν ἐξ. (11.34) εἶναι† τό sec^2/cm. Στή μονάδα πού προκύπτει ἀπό τήν ἐξ. (11.32) στό σύστημα SI ἔχει δοθεῖ ἡ ὀνομασία henry (H)

θόσον τό φαινόμενο τῆς αὐτεπαγωγῆς ἀποτελεῖ εἰδική περίπτωση τοῦ νόμου τοῦ Faraday ἡ λεπτολογία αὐτή δέν προσφέρει τίποτα. Ἔτσι στή συνέχεια θά χρησιμοποιήσουμε χωρίς διάκριση τούς ὅρους *αὐτεπαγωγή* καί *συντελεστής αὐτεπαγωγῆς* γιά τήν ἀπόδοση τῆς ποσότητας L στήν ἐξ. (11.32). Παρόμοια τακτική θά ἀκολουθήσουμε γιά τήν ἄρση τῆς διακρίσεως μεταξύ τῶν ὅρων *ἀμοιβαία ἐπαγωγή* καί *συντελεστής ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς* καί μέ τούς ὁποίους θά ἀποδώσουμε τό φυσικό μέγεθος M πού ὁρίζεται στίς ἐξ. (11.43) τῆς ἑπόμενης παραγράφου. Μέ τό γεννετικό ὅρο *ἐπαγωγή* θά ἀναφερθοῦμε καί στά δύο φυσικά μεγέθη L καί M ὅταν δέν ἀπαιτεῖται μεταξύ τους ἰδιαίτερη διάκριση. Τέλος, ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς *ἀντιστάσεως* θά χρησιμοποιήσουμε τούς ὅρους *αὐτεπαγωγή, ἀμοιβαία ἐπαγωγή* καί τόν γενικώτερο ὅρο *ἐπαγωγή* γιά τήν ἀπόδοση τῶν ἀντίστοιχων βιομηχανικῶν ἐξαρτημάτων σέ ἠλεκτρικά κυκλώματα.

† Στή βιβλιογραφία ὑπάρχει μιά σχετική σύγχιση γύρω ἀπό τόν ὁρισμό τῆς μονάδας μετρήσεως στό σύστημα CGS. Τοῦτο προέρχεται ἀπό τό γεγονός ὅτι πολλοί συγγραφεῖς χρησιμοποιοῦν ἕνα τροποποιημένο σύστημα CGS κατά τό ὁποῖο μαγνητικά φυσικά μεγέθη μετροῦνται σέ μονάδες τοῦ λεγόμενου *ἠλεκτρομαγνητικοῦ συστήματος* [βλ. Παράρτημα A]. Ἡ μονάδα μετρήσεως πού προκύπτει στό σύστημα αὐτό γιά τή μέτρηση τῆς ἐπαγωγῆς εἶναι τό cm.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$1\ \mathrm{H} = 1\ \mathrm{Wb}\cdot\mathrm{A}^{-1}. \tag{11.35}$$

Ἡ σύνδεση τῶν μονάδων στά δύο συστήματα δίνεται ἀπό τή σχέση

$$1\ \mathrm{H} = 10^{-9}\ \mathrm{cm} = 1.113 \times 10^{-12}\ \mathrm{sec^2/cm}. \tag{11.36}$$

Ἐναλλακτικά, χρησιμοποιώντας γιά τόν ὁρισμό τῆς μονάδας μετρήσεως τῆς αὐτεπαγωγῆς τήν ἐξ. (11.34), ἡ ἐξ. (11.35) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$1\ \mathrm{H} = 1\ \mathrm{V}\cdot\mathrm{sec}\cdot\mathrm{A}^{-1} = 1\ \Omega\cdot\mathrm{sec}. \tag{11.37}$$

Ὁ συντελεστής αὐτεπαγωγῆς μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ σέ πολλές περιπτώσεις ὅπου ἡ γεωμετρία τοῦ κυκλώματος εἶναι ἁπλή. Στήν περίπτωση π.χ. ἑνός πηνίου μέ μεγάλο μῆκος ℓ, τό μαγνητικό πεδίο στόν ἄξονα εἶναι σέ καλή προσέγγιση σταθερό καί ἴσο πρός

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \tag{11.5}$$

ὅπου N εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν σπειρῶν καί I τό ρεῦμα πού διαρρέει τό πηνίο. Ἄν R εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ πηνίου τότε ἡ ὁλική ροή πού δημιουργεῖ τό μαγνητικό πεδίο B εἶναι

$$\Phi = NB\pi R^2 = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi R^2 I \tag{11.38}$$

πού ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (11.32) προσδιορίζει τό συντελεστή αὐτεπαγωγῆς ὡς

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi R^2. \tag{11.39}$$

Ἄλλα παραδείγματα ὑπολογισμοῦ τῆς αὐτεπαγωγῆς σέ κυκλώματα μέ ἁπλή γεωμετρία παραπέμπονται στίς Ἀσκήσεις.

Ὡς τώρα θεωρήσαμε τήν αὐτεπαγωγή ὡς ἰδιότητα ἑνός κλειστοῦ κυκλώματος. Πολλές φορές ὅμως εἶναι χρήσιμη ἡ ἔννοια τῆς αὐτεπαγωγῆς ἑνός μέρους τοῦ κυκλώματος ἤ, συχνότερα, ἑνός ἐξαρτήματος. Τοῦτο συμβαίνει ὅταν ἡ μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς πού δημιουργεῖ τήν ἐπαγωγική ΗΕΔ εἶναι σημαντική μόνο σέ ἕνα μέρος ἤ ἕνα ἐξάρτημα τοῦ κυκλώματος. Ἡ παρεμβολή ἑνός πηνίου σέ ἕνα κύκλωμα πού κατά τό ὑπόλοιπο μέρος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

του συγκροτεῖται ἀπό ἀντιστάσεις συνδεδεμένες μέ ἀκροδέκτες μικροῦ μήκους ἀποτελεῖ ἕνα προφανές παράδειγμα. Διαδικαστικά μποροῦμε πάντοτε νά ὁρίσουμε τήν αὐτεπαγωγή ἑνός ἐξαρτήματος μέ δύο ἀκροδέκτες διαμέσου τῆς ἐξ. (11.32) καθορίζοντας ὅτι τοῦτο ἀποτελεῖ μέρος ἑνός κυκλώματος, γιά τό ὑπόλοιπο μέρος τοῦ ὁποίου ἔχει ληφθεῖ πρόνοια ὥστε νά ἰσχύει ἡ σχέση

$$\frac{d\Phi}{dI} = 0. \tag{11.40}$$

Τοῦτο μπορεῖ νά ἐπιτευχθεῖ πάντα σέ ὁποιαδήποτε προσέγγιση μέ κατάλληλη ἐπιλογή τῆς γεωμετρίας. Ἐναλλακτικά μποροῦμε νά ὁρίσουμε τήν αὐτεπαγωγή ἑνός ἐξαρτήματος χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (11.34), ἡ ὁποία ὅμως στήν περίπτωση αὐτή πρέπει νά χρησιμοποιηθεῖ μέ κάποια προσοχή. Τοῦτο διευκρινίζεται ἀμέσως στή συνέχεια.

Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (11.23) ἡ ΗΕΔ πού ὑπεισέρχεται στήν ἐξ. (11.34) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$U = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{11.23}$$

ὅπου ἡ ὁλοκλήρωση ἐκτείνεται σέ ὅλο τό κλειστό κύκλωμα C. Κατ' ἀναλογία θά χρησιμοποιήσουμε γιά τόν ὁρισμό τῆς αὐτεπαγωγῆς L_{12} ἑνός ἐξαρτήματος μέ ἀκροδέκτες 1 καί 2 τήν ΗΕΔ ἐπαγωγῆς

$$U_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_\varepsilon \cdot d\mathbf{s}. \tag{11.41}$$

Στήν τελευταία σχέση τό ἠλεκτρικό πεδίο κατά τό δρόμο 1 → 2 πού καλύπτει τό ἐξάρτημα ἔχει συμβολιστεῖ ὡς $\mathbf{E}_\varepsilon$ γιά νά τονιστεῖ ὅτι ἀποτελεῖται ἀποκλειστικά ἀπό τό ἠλεκτρικό πεδίο πού δημιουργοῦν τά ἐπαγωγικά φαινόμενα. Σέ ἀντίθεση μέ τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (11.23), ὅπου τό ἠλεκτρικό πεδίο μπορεῖ νά περιέχει καί συνιστῶσα μέ καθαρά ἠλεκτροστατική προέλευση, στήν ἐξ. (11.41) πρέπει νά ἀποκλειστεῖ ἡ συνεισφορά ἠλεκτρικοῦ πεδίου πού δημιουργεῖται ἀπό τυχόν στατική κατανομή φορτίου στό χῶρο. Μέ τήν προϋπόθεση αὐτή ἡ αὐτεπαγωγή τοῦ ἐξαρτήματος μπορεῖ τώρα νά ὁριστεῖ ὡς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$L_{12} \equiv - \frac{U_{12}}{dI/dt} . \qquad (11.42)$$

Ὁρισμένες παρατηρήσεις γιά τό φυσικό μέγεθος τῆς αὐτεπαγωγῆς πού ὁρίσαμε στήν παράγραφο αὐτή εἶναι ἴσως χρήσιμες:

1. Ἀπό τήν ἁπλή ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Lenz ἕπεται ὅτι ἡ ποσότητα L εἶναι πάντα θετική ποσότητα.
2. Ὅπως ἤδη τονίστηκε ἡ αὐτεπαγωγή ἀποτελεῖ γεωμετρική ἰδιότητα τοῦ κυκλώματος ἤ τοῦ ἐξαρτήματος. Γιά κυκλώματα ἤ ἐξαρτήματα στόν κενό χῶρο ὁ συντελεστής L ἤ L_{12} εἶναι σταθερές ποσότητες. Τοῦτο ἕπεται ἀπό τή γραμμική ἐξάρτηση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἀπό τό ρεῦμα. Ὅπως θά δοῦμε στό ἑπόμενο κεφάλαιο, ἡ παρουσία ὁρισμένων ὑλικῶν στό χῶρο αὐξάνει σημαντικά τό συντελεστή αὐτεπαγωγῆς ἐνῶ ταυτόχρονα εἰσάγει ἀποκλίσεις ἀπό τή γραμμικότητα. Ἔτσι μέ τήν παρουσία σιδηρομαγνητικῶν ὑλικῶν ἡ αὐτεπαγωγή μεταπίπτει σέ μή γραμμική συνάρτηση τοῦ ρεύματος.
3. Στήν περίπτωση αὐτεπαγωγῆς ἐξαρτήματος ἤ μέρους τοῦ κυκλώματος ἡ μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς πού ἀναπτύσσει ΗΕΔ εἶναι δυνατόν νά μήν ὀφείλεται ἀποκλειστικά στό ρεῦμα τοῦ ἐξαρτήματος ἀλλά καί σέ μεταβολή τοῦ ρεύματος σέ ἄλλες περιοχές τοῦ κυκλώματος. Στή συνέχεια θά θεωρήσουμε ὅτι στόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (11.42) ἡ μεταβολή τοῦ ρεύματος dI/dt ἀναφέρεται ἀποκλειστικά στό ρεῦμα πού διαρρέει τό δρόμο 1 → 2 τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς ἐξ. (11.41). Ὁποιαδήποτε ἐπιπρόσθετη μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς πού προέρχεται ἀπό ἄλλα μέρη τοῦ κυκλώματος θά ληφθεῖ ὑπόψη μέ τήν ἔννοια τῆς ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς πού θά εἰσάγουμε στήν ἑπόμενη παράγραφο. Ἡ τελευταία σύμβαση θά μᾶς ἐπιτρέψει ἐπιπλέον τήν παράλειψη τῶν δεικτῶν στό σύμβολο L_{12} καί στό μέλλον θά ἀναφερθοῦμε ἐπανειλημμένα στήν *αὐτεπαγωγή* L ἤ τό *συντελεστή αὐτεπαγωγῆς* L χωρίς νά γίνεται διάκριση ἄν τοῦτο ἀναφέρεται σέ κλειστό κύκλωμα, μέρος κυκλώματος ἤ ἐξάρτημα.

Βιομηχανικά ἐξαρτήματα πού χαρακτηρίζονται ἀπό ὑψηλό συντελεστή αὐτεπαγωγῆς διατίθενται σήμερα σέ πολλές μορφές. Καθόσον ἡ συμπεριφορά τους ἐνδιαφέρει κυρίως στό ἐναλλασσόμενο ρεῦμα οἱ ἰδιότητές τους θά μᾶς ἀπασχολήσουν στό οἰκεῖο κεφάλαιο. Μέθοδοι πειραματικοῦ προσδιορισμοῦ τῆς αὐτεπαγωγῆς κυκλωμάτων καί ἐξαρτημάτων θά μελετηθοῦν μέ λεπτομέρεια στό Κεφάλαιο 15.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

11-6 Ἀμοιβαία Ἐπαγωγή

Ἡ τελευταία παρατήρηση τῆς προηγούμενης παραγράφου ὑπαγορεύει τήν εἰσαγωγή ἑνός νέου φυσικοῦ μεγέθους γιά τήν περιγραφή τῆς ἐπαγωγικῆς ἀλληλεπιδράσεως δύο κυκλωμάτων μέ μεταβαλλόμενα ρεύματα. Ἄς θεωρήσουμε δύο κυκλώματα C_1 καί C_2 πού διαρρέονται ἀντίστοιχα ἀπό ρεύματα I_1 καί I_2 καί μαγνητική ροή Φ_1 καί Φ_2. Ἡ μαγνητική ροή Φ_i κάθε κυκλώματος εἶναι βέβαια ἀποτέλεσμα τῆς ροῆς ρεύματος τόσο στό ἴδιο τό κύκλωμα ὅσο καί στό ἄλλο. Ἄς θεωρήσουμε ἀκόμη ὅτι μεταβολή τῶν ρευμάτων δημιουργεῖ ἐπαγωγικές ΗΕΔ U_1 καί U_2 στά δύο κυκλώματα. Γιά νά ἀποφύγουμε ἀσάφειες σχετικά μέ τό σχετικό πρόσημο τῶν διαφόρων μεγεθῶν θά ὁρίσουμε τή θετική μαγνητική ροή σέ σχέση μέ τή φορά τοῦ ρεύματος σύμφωνα μέ τή δεξιόστροφη σύμβαση τοῦ σχήματος 5-1. Θά ὁρίσουμε ἀκόμη ὡς θετική φορά τῆς ΗΕΔ τή φορά πού αὐξάνει τήν ἐνέργεια τοῦ κυκλώματος ὅταν τό ἀντίστοιχο ρεῦμα πού διαρρέει τό κύκλωμα εἶναι θετικό. Πρέπει τέλος νά υἱοθετήσουμε μιά συνεπή σύμβαση γιά τό σχετικό πρόσημο τῶν δύο ρευμάτων I_1 καί I_2. Γιά τό σκοπό αὐτό θά ὁρίσουμε ὅτι θετική μεταβολή ΔI τοῦ ρεύματος στό κύκλωμα C_1 προκαλεῖ θετική μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς $\Delta\Phi_2$ στό κύκλωμα C_2.

Ἡ μαγνητική ροή Φ_i τοῦ κυκλώματος C_i εἶναι γενικά μιά συνάρτηση τῶν ρευμάτων I_1 καί I_2 στά δύο κυκλώματα. Σέ ἀναλογία μέ τήν ἐξ. (11.32) θά ὁρίσουμε τήν **ἀμοιβαία ἐπαγωγή**† M_{21} **τοῦ κυκλώματος** C_2 **ὡς πρός τό κύκλωμα** C_1 ὡς τή μερική παράγωγο

$$M_{21} \equiv [c]\,\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_2}{\partial I_1}\,. \qquad (11.43\alpha)$$

Ἡ ἀντίστροφη ἐξάρτηση τοῦ κυκλώματος C_1 ἀπό τό κύκλωμα C_2 θά ἀποδοθεῖ μέ τόν ὁρισμό

$$M_{12} \equiv [c]\,\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_1}{\partial I_2}\,. \qquad (11.43\beta)$$

Ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τούς δύο τελευταίους ὁρισμούς ἡ ἀμοιβαία ἐπαγωγή μετρᾶται μέ τίς ἴδιες μονάδες πού υἱοθετήσαμε γιά τήν αὐτεπαγωγή. Γιά δύο κυκλώματα στόν κενό χῶρο (ἤ γενικότερα σέ χῶρο πού εἶναι

† Γιά τήν ποσότητα πού ὁρίζεται στίς ἐξ. (11.43) θά χρησιμοποιηθεῖ ἐναλλακτικά καί ὁ ὅρος **συντελεστής ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς** (βλ. ὑποσημείωση πού ἀκολουθεῖ τήν ἐξ. (11.32)).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἀπαλλαγμένος ἀπό μαγνητικά ὑλικά) μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι οἱ δύο ποσότητες στίς ἐξ. (11.43) εἶναι ἴσες καί ἀνεξάρτητες ἀπό τό ρεῦμα. Τίς δύο αὐτές σημαντικές ἰδιότητες θά ἀποδείξουμε μέ ἀναλυτικό ὑπολογισμό τῆς μαγνητικῆς ροῆς πού δημιουργεῖ τό ρεῦμα τοῦ ἑνός κυκλώματος στό ἄλλο.

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (11.1) ἡ μαγνητική ροή τοῦ κυκλώματος C_2 πού προκύπτει ἀπό τήν ὕπαρξη τοῦ ρεύματος I_1 στό κύκλωμα C_1 μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 da_2 \tag{11.44}$$

ὅπου da_2 εἶναι τό στοιχεῖο μιᾶς αὐθαίρετης ἐπιφανείας S_2 πού περιγράφεται ἀπό τό κύκλωμα C_2 καί $\mathbf{B}_1$ τό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖ τό ρεῦμα I_1 σέ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας S_2. Ἄν $\mathbf{A}_1$ εἶναι τό ἀντίστοιχο ἀνυσματικό δυναμικό {βλ. ἐξ. (9.47)}, ἡ ἐξ. (11.44) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\Phi_2 = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 da_2 \tag{11.45}$$

ἡ ὁποία μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος τοῦ Stokes μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ κλειστό ὁλοκλήρωμα κατά τό δρόμο τοῦ κυκλώματος C_2

$$\Phi_2 = \oint_{C_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{s}_2. \tag{11.46}$$

Γιά τήν ἀναλυτική μορφή τοῦ ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ $\mathbf{A}_1$ μπορεῖ τώρα νά χρησιμοποιηθεῖ ἡ γενική ἔκφραση τῆς ἐξ. (9.65). Μέ προφανή ἑπομένως προσαρμογή τοῦ συμβολισμοῦ μποροῦμε νά γράψουμε τή μαγνητική ροή στό κύκλωμα C_2 ὡς

$$\Phi_2 = \oint_{C_2} \left(\left[\frac{\mu_0}{4\pi} c \right] \frac{I_1}{c} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) \cdot d\mathbf{l}_2$$

$$= \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c \right] \frac{I_1}{c} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \tag{11.47}$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση καί τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (11.43α) ἕπεται τώρα ὅτι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$M_{21} \equiv \left[\frac{\mu_0}{4\pi}c\right]\frac{1}{c^2}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}. \qquad (11.48)$$

Ὅπως ἤδη προαναγγέλθηκε ἡ ἀμοιβαία ἐπαγωγή εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό ρεῦμα καί ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικά ἀπό τή γεωμετρία τῶν δύο κυκλωμάτων. Ἐξάλλου ἀπό τήν πλήρη συμμετρία τῆς ἐκφράσεως γίνεται φανερό ὅτι οἱ δύο ὁρισμοί τῶν ἐξ. (11.43) ὁδηγοῦν στό ἴδιο ἀποτέλεσμα. Στή συνέχεια ἑπομένως θά παραλείψουμε τούς δείκτες στό συντελεστή ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς καί θά γράψουμε

$$M = M_{21} = M_{12}. \qquad (11.49)$$

Τό διπλό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (11.48) πού στή βιβλιογραφία ἀπαντᾶται ὡς **ἐξίσωση τοῦ Neumann** εἶναι συχνά πολύ δύσκολο νά ὑπολογιστεῖ. Στίς περισσότερες περιπτώσεις εἶναι πιό εὔκολο νά χρησιμοποιήσει κανείς τίς ἐξ. (11.43) ἀφοῦ προηγουμένως ὑπολογίσει τή μαγνητική ροή Φ_1 ἤ Φ_2. Γιά τή διάταξη π.χ. πού χρησιμοποιήσαμε στό Πείραμα 11-1 [βλ. σχῆμα 11-1] ἡ μαγνητική ροή πού διαρρέει τό πηνίο π δίνεται στήν ἐξ. (11.6), ἀπό τήν ὁποία ἐξάγεται ἀμέσως ὁ συντελεστής ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς

$$M = \mu_0\frac{Nn}{L}\pi a^2. \qquad (11.50)$$

Ἡ τελευταία ἔκφραση μπορεῖ νά συνδεθεῖ μέ τήν πειραματική ποσότητα a πού προσδιορίσαμε στό Πείραμα 11-1 [βλ. ἐξ. (11.10)] μέ τή σχέση

$$M = aR \qquad (11.51)$$

ὅπου R ἡ ὠμική ἀντίσταση τῆς ἐξ. (11.8). Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (11.49) ἡ τελευταία ποσότητα, πού κατά τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (11.43α) ἀντιπροσωπεύει τήν *ἀμοιβαία ἐπαγωγή τοῦ πηνίου π ὡς πρός τό πηνίο Π* πρέπει νά ἰσοῦται μέ τήν ἀντίστροφη ἀμοιβαία ἐπαγωγή. Τή σχέση αὐτή θά ἐξετάσουμε στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 11-3. ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ ΔΥΟ ΠΗΝΙΩΝ

Ἀπό τά ἀποτελέσματα τοῦ Πειράματος 11-1 ὑπολογίστε τήν ἀμοιβαία ἐπαγωγή σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (11.51).

– Στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 11-3 ἀνταλλάξτε τό ρόλο τοῦ κυκλώματος τροφοδοσίας καί τοῦ γαλβανομέτρου, ἤτοι συνδέστε τίς ἐπαφές AA τοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

διακόπτη S μέ τούς ἀκροδέκτες τοῦ πηνίου π καί τό γαλβανόμετρο μέ τούς ἀκροδέκτες τοῦ πηνίου Π. Ἐπαναλλάβετε τή διεργασία τοῦ Πειράματος 11-1 καί προσδιορίστε τήν ἀμοιβαία ἐπαγωγή τοῦ πηνίου Π ὡς πρός τό πηνίο π. Ξαναγράψτε τίς ἐξ. (11.5) - (11.10) γιά τίς διαστάσεις καί χαρακτηριστικά τῶν πηνίων στή νέα συνδεσμολογία. Γιά τήν ἐκτέλεση τοῦ πειράματος θά χρειαστεῖ ἴσως νά αὐξήσετε τήν εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου S_g. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τήν πρόβλεψη τῆς ἐξ. (11.49) καί σχολιάστε τυχόν ἀποκλίσεις.

Ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς αὐτεπαγωγῆς ὁ νόμος τοῦ Faraday ὁδηγεῖ σέ μιά ἔκφραση γιά τήν ΗΕΔ ἐπαγωγῆς πού μπορεῖ ἐναλλακτικά νά χρησιμεύσει ὡς ὁρισμός τῆς ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς. Ἄν τό ρεῦμα I_2 παραμένει σταθερό ἐνῶ τό ρεῦμα I_1 μεταβάλλεται μέ ρυθμό dI_1/dt, ὁ ρυθμός μεταβολῆς τῆς μαγνητικῆς ροῆς στό κύκλωμα C_2 μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial I_1}\,\frac{dI_1}{dt} = \left[\frac{1}{c}\right] cM_{21}\frac{dI_1}{dt} \qquad (11.52)$$

Τοῦτο, σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Faraday, ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν ἀνάπτυξη στό κύκλωμα C_2 μιᾶς ἐπαγωγικῆς ΗΕΔ

$$U_2 = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}\,. \qquad (11.53)$$

Ἄν ἐπιπλέον τό ρεῦμα I_2 μεταβάλλεται, μέ κατά συνέπεια συνεισφορά στή μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς, ὁ νόμος τῆς ἐπαγωγῆς παίρνει τή μορφή

$$U_2 = -[c]\,\frac{1}{c}\frac{d\Phi_2}{dt} = -[c]\,\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial I_1}\,\frac{dI_1}{dt} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial I_2}\,\frac{dI_2}{dt}\right). \qquad (11.54)$$

Ἀναγνωρίζοντας τή δεύτερη μερική παράγωγο στήν τελευταία σχέση ὡς τήν αὐτεπαγωγή L_2 τοῦ κυκλώματος C_2 μποροῦμε νά γράψουμε γιά τήν ἐπαγωγική ΗΕΔ πού ἀναπτύσσεται στό κύκλωμα αὐτό

$$U_2 = -\left(M_{21}\,\frac{dI_1}{dt} + L_2\,\frac{dI_2}{dt}\right). \qquad (11.55)$$

Γενικότερα γιά ἕνα ζεῦγος κυκλωμάτων, παραλείποντας τούς δεῖκτες στό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

συντελεστή ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (11.49), θά γράψουμε τίς ΗΕΔ ἐπαγωγῆς πού ἀναπτύσσονται σέ κάθε κύκλωμα ὡς

$$U_i = -\left(M \frac{dI_j}{dt} + L_i \frac{dI_i}{dt}\right), \quad \cdot \quad i,j=1,2 \quad i\neq j. \tag{11.56}$$

Ἔχοντας ὑπόψη τίς θεωρητικές δυσκολίες πού συζητήθηκαν μέ κάποια λεπτομέρεια στήν προηγούμενη παράγραφο μποροῦμε καί ἐδῶ μέ τήν κατάλληλη προσοχή νά ὁρίσουμε τήν ἀμοιβαία ἐπαγωγή μεταξύ τμημάτων δύο κυκλωμάτων, μεταξύ ἐξαρτημάτων δύο διαφορετικῶν κυκλωμάτων, ἤ ἀκόμη μεταξύ δύο ἐξαρτημάτων τοῦ ἰδίου κυκλώματος. Ἄν στό χῶρο ὑπάρχουν περισσότερα ἀπό δύο κυκλώματα μέ ἀμοιβαία ἐπαγωγική ἀλληλεπίδραση, ἡ ἀμοιβαία ἐπαγωγή κάθε ζεύγους μπορεῖ νά γραφεῖ κατ' ἀναλογία πρός τόν ὁρισμό τῶν ἐξ. (11.43) ὡς

$$M_{ij} \equiv [c] \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_i}{\partial I_j}. \tag{11.57}$$

Ἡ μαγνητική ροή Φ_i τοῦ κυκλώματος ἤ ἐξαρτήματος C_i πού ὑπεισέρχεται στόν προηγούμενο ὁρισμό εἶναι βέβαια συνάρτηση τῶν ρευμάτων πού διαρρέουν ὅλα τά ὑπόλοιπα κυκλώματα ἤ ἐξαρτήματα στό χῶρο. Ἡ χρησιμοποίηση ὅμως τῆς μερικῆς παραγώγου στήν ἐξ. (11.57) ἐξασφαλίζει ὅτι, γιά τόν ὁρισμό τῆς ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς M_{ij}, ὅλα τά ρεύματα, πλήν τοῦ ρεύματος I_j, παραμένουν σταθερά. Μέ τίς προϋποθέσεις αὐτές ἡ ΗΕΔ πού ἀναπτύσσεται στό κύκλωμα C_i μπορεῖ νά γραφεῖ μέ τήν προφανή γενίκευση τῆς ἐξ. (11.56) ὡς

$$U_i = -\left(\sum_{\prime} M_{ij} \frac{dI_j}{dt} + L_i \frac{dI_i}{dt}\right), \quad i\neq j \tag{11.58}$$

ὅπου τό ἄθροισμα ἐκτείνεται σέ ὅλα τά κυκλώματα C_j πού βρίσκονται σέ ἀμοιβαία ἐπαγωγική ἀλληλεπίδραση μέ τό κύκλωμα C_i.

11-7 Ἐνέργεια τοῦ Μαγνητικοῦ Πεδίου

Στήν Παράγραφο 3-7 ἐξετάσαμε τήν ἐνέργεια πού συνεπάγεται ἡ ὕπαρξη φορτίου στό χῶρο (σημειακά φορτία ἤ γενικότερα μιά κατανομή φορτίου πού περιγράφεται ἀπό τή συνάρτηση $\rho(r)$). Ἡ ἐνέργεια αὐτή ἀποδόθηκε διαμέσου τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ $\varphi(r)$ μέ τό ὁλοκλήρωμα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})d^3r. \tag{3.76}$$

Στή συνέχεια μέ ἕνα μετασχηματισμό μπορέσαμε νά ξαναγράψουμε τήν ἐξ. (3.76), πού εἶναι ἀκόμη στενά συνδεδεμένη μέ τήν πηγή τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου (τή συνάρτηση $\rho(\mathbf{r})$), ὡς συνάρτηση τοῦ ἴδιου τοῦ πεδίου $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ πού ἡ κατανομή φορτίου δημιουργεῖ στό χῶρο.

$$W = \left[4\pi\varepsilon_0\right] \frac{1}{8\pi} \int_V |\mathbf{E}|^2 d^3r. \tag{3.82}$$

Ἡ μορφή αὐτή μᾶς ἐπέτρεψε νά εἰσάγουμε τήν ἔννοια τῆς *ἐνεργείας πού βρίσκεται ἀποθηκευμένη στό ἡλεκτρικό πεδίο* καί κατ' ἐπέκταση τήν ἔννοια τῆς *πυκνότητας ἐνεργείας* στό χῶρο πού χαρακτηρίζεται ἀπό ἡλεκτρικό πεδίο

$$w = \left[4\pi\varepsilon_0\right] \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}|^2 d^3r. \tag{3.83}$$

Παρόμοια διεργασία δέν στάθηκε δυνατό νά ἀκολουθήσουμε κατά τή μελέτη τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού εἰσήχθη στό Κεφάλαιο 9 γιά τήν ἀπόδοση τῆς ἰδιότητας πού ἀποκτᾶ ὁ χῶρος μέ τήν ὕπαρξη μιᾶς κατανομῆς ρεύματος $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. Ὁ λόγος εἶναι ὅτι κατά τήν ἀνάπτυξη τῆς κατανομῆς ρεύματος καί τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού, ὡς ἐπακόλουθο τοῦ ρεύματος, δημιουργεῖται στό χῶρο, μεσολαβεῖ μιά μεταβατική περίοδος κατά τήν ὁποία τόσο ἡ συνάρτηση $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ ὅσο καί τό πεδίο $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ διαμορφώνουν τίς τελικές τους τιμές. Στή μεταβατική αὐτή περίοδο, ὅπως εἴδαμε στό παρόν κεφάλαιο, ἐπαγωγικά φαινόμενα δημιουργοῦν ΗΕΔ πού ἐξαναγκάζουν τίς πηγές ἡλεκτρικοῦ ρεύματος στήν παραγωγή ἐπιπρόσθετου ἔργου. Καθόσον ἡ ἐνέργεια πού ἀποθηκεύεται στό πεδίο εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ τό ὁλικό ἔργο πού καταναλώθηκε γιά τή δημιουργία του, ἡ συνεισφορά τῶν ἐπαγωγικῶν αὐτῶν φαινομένων πρέπει νά ληφθεῖ ὑπόψη.

Ἄς θεωρήσουμε πρός στιγμή, χωρίς ἀπώλεια ἀπό τή γενικότητα, ὅτι σέ κάποιο κύκλωμα C ἀναπτύσσεται ρεῦμα I. Σύμφωνα μέ τήν Παράγραφο 5-6 ἡ πηγή ἡλεκτρικοῦ ρεύματος καταναλώνει ἰσχή VI, ἕνα μέρος τῆς ὁποίας μπορεῖ νά καταναλωθεῖ σέ θέρμανση τῶν ἀγωγῶν πού συγκροτοῦν τό κύκλωμα. Ἡ ἰσχή πού καταναλώνεται σέ θερμότητα μπορεῖ πάντα νά γραφεῖ ὡς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{dW_\theta}{dt} = I^2R \tag{11.59}$$

ὅπου R εἶναι ἡ ὁλική ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος, ἐνῶ ἡ ἰσχή πού τελικά ἀποταμιεύεται στό μαγνητικό πεδίο εἶναι συνάρτηση τῶν ΗΕΔ U πού δημιουργοῦν τά ἐπαγωγικά φαινόμενα. Μποροῦμε νά γράψουμε τήν τελευταία ποσότητα ὡς

$$\frac{dW_M}{dt} = -IU \tag{11.60}$$

ὅπου τό ἀρνητικό πρόσημο εἶναι ἀπόρροια τῆς συμβάσεως πού υἱοθετήσαμε προηγουμένως γιά τή φορά τῶν ΗΕΔ ἐπαγωγῆς. Ἡ ἐπαγωγική ΗΕΔ U στήν τελευταία ἔκφραση συνδέεται μέ τό ρυθμό μεταβολῆς τῆς μαγνητικῆς ροῆς πού δημιουργεῖ τό ἀναπτυσσόμενο μαγνητικό πεδίο. Χρησιμοποιώντας ἐπομένως τό νόμο τοῦ Faraday μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἐξ. (11.60) ὡς

$$\frac{dW_M}{dt} = [c]\,\frac{I}{c}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{11.61}$$

Μεταβολή ἐπομένως τῆς μαγνητικῆς ροῆς πού διαρρέει τό κύκλωμα κατά τήν ποσότητα ΔΦ συνεπάγεται ἀποταμίευση ἐνεργείας

$$\Delta W_M = [c]\,\frac{I}{c}\,\Delta\Phi. \tag{11.62}$$

Ἡ ἐξ. (11.61) παίρνει ἰδιαίτερα χρήσιμη μορφή ἄν ἡ μαγνητική ροή ἐκφραστεῖ ὡς συνάρτηση τοῦ ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ {βλ. ἐξ. (11.46)}. Τότε

$$\frac{dW_M}{dt} = [c]\,\frac{1}{c}\,I\frac{d}{dt}\oint_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = [c]\,\frac{1}{c}\oint_\Gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot(I d\mathbf{s}) \tag{11.63}$$

ὅπου Γ εἶναι κάποιος δρόμος στό ἐσωτερικό τῶν ἀγωγῶν πού συγκροτοῦν τό κύκλωμα C. Χρησιμοποιώντας τώρα τήν ταυτότητα τῆς ἐξ. (9.19)

$$I d\mathbf{s} = \mathbf{J} d^3r \tag{11.64}$$

τό τελευταῖο γραμμικό ὁλοκλήρωμα μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ ὁλοκλήρωμα ὄγκου γιά τό χῶρο πού καλύπτουν οἱ ἀγωγοί τοῦ κυκλώματος (ἤ γενικότε-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ρα γιά τό χῶρο ὅπου ἡ πυκνότητα **J**(r) ἔχει τιμή διάφορη ἀπό τό μηδέν). Συμβολίζοντας τό χῶρο αὐτό ὡς Τ θά γράψουμε τήν ἐξ. (11.63) στή μορφή

$$\frac{dW_M}{dt} = [c]\ \frac{1}{c}\int_\tau \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot \mathbf{J}d^3r. \qquad (11.65)$$

Παρατηρεῖται πάντως ὅτι καθόσον ἡ συμβολή στό τελευταῖο ὁλοκλήρωμα εἶναι μή μηδενική μόνο σέ σημεῖα ὅπου $\mathbf{J} \neq 0$, ἡ ὁλοκλήρωση μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ μέχρι τό ἄπειρο.

Ἡ ἐξ. (11.65) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς συνάρτηση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μέ χρησιμοποίηση τοῦ νόμου τοῦ Ampère

$$\mathbf{J} = \left[\frac{4\pi}{\mu_0 c}\right]\frac{c}{4\pi}\nabla \times \mathbf{B} \qquad (11.66)$$

πού δίνει

$$\frac{dW_M}{dt} = \left[\frac{4\pi}{\mu_0}\right]\frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot(\nabla \times \mathbf{B})d^3r =$$

$$= \left[\frac{4\pi}{\mu_0}\right]\frac{1}{4\pi}\left(\int_\tau \mathbf{B}\cdot\left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)d^3r - \int_\tau \nabla\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\times \mathbf{B}\right)d^3r\right). \qquad (11.67)$$

Στό τελευταῖο σκέλος τῆς ἐξ. (11.67) ἔχει χρησιμοποιηθεῖ ἡ ταυτότητα τοῦ ἀνυσματικοῦ λογαριασμοῦ

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}). \qquad (11.68)$$

Ἐξάλλου τό τελευταῖο ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (11.67) μπορεῖ μέ χρησιμοποίηση τοῦ θεωρήματος τοῦ Green νά μετασχηματιστεῖ μέ ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα

$$\int_\tau \nabla\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\times\mathbf{B}\right)d^3r = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\times\mathbf{B}\right)\cdot d\mathbf{a} \qquad (11.69)$$

ὅπου S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια πού περικλείει τόν ὄγκο Τ.

Εἶναι τώρα εὔκολο νά δείξουμε ὅτι ἄν, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση πού ἀκολουθεῖ τήν ἐξ. (11.65), ἐπεκτείνουμε τήν ὁλοκλήρωση σέ ὅλο τόν τρισδιάστατο χῶρο, τό ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (11.69) μηδενίζε-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ται. Τοῦτο ὀφείλεται στήν ἀσυμπτωτική συμπεριφορά τῶν συναρτήσεων **B** καί $\partial\mathbf{A}/\partial t$ πού μελετήσαμε στήν Παράγραφο 9-5 γιά μιά κατανομή ρεύματος μέ πεπερασμένες διαστάσεις. Συγκεκριμένα τό μαννητικό πεδίο **B** γιά μεγάλες ἀποστάσεις συμπεριφέρεται ὡς r^{-3} [βλ. ἐξ. (9.81)] ἐνῶ ἡ συνάρτηση $\partial\mathbf{A}/\partial t$ [ὅπως καί ἡ συνάρτηση **A**) φθίνει ὡς r^{-2} [βλ. ἐξ. (9.78)]. Καθόσον ἡ ἐπιφάνεια αὐξάνει μόνο ὡς r^2 ἕπεται ὅτι τό ὁλοκλήρωμα φθίνει ὡς r^{3} καθώς ἡ ἐπιφάνεια S τείνει πρός τό ἄπειρο. Θά γράψουμε ἑπομένως νως τήν ἐξ. (11.67) ὡς

$$\frac{dW_M}{dt} = \left[\frac{4\pi}{\mu_0}\right]\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{B}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A})d^3r$$

$$= \left[\frac{4\pi}{\mu_0}\right]\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,d^3r \qquad (11.70)$$

ὅπου ἡ ὁλοκλήρωση ἐκτείνεται σέ ὅλο τό χῶρο, ἐνῶ στό τελευταῖο σκέλος ἔχει χρησιμοποιηθεῖ ἡ σύνδεση $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$. Τέλος μποροῦμε νά ἐναλλάξουμε τή σειρά τῆς ὁλοκληρώσεως καί διαφορήσεως στήν τελευταία σχέση (ὁπότε ἡ παράγωγος ἀπό μερική μεταπίπτει σέ ὁλική) καί νά γράψουμε γιά τήν ἰσχή πού ἀποταμιεύεται στό μαγνητικό πεδίο ὡς

$$\frac{dW_M}{dt} = \left[\frac{4\pi}{\mu_0}\right]\frac{1}{8\pi}\frac{d}{dt}\int |\mathbf{B}|^2 d^3r. \qquad (11.71)$$

Ἡ ἀντίστοιχη ἐνέργεια πού ἀποθηκεύεται στό μαγνητικό πεδίο μέχρις ὅτου φτάσει στήν τελική του τιμή μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ μιά ἁπλή ὁλοκλήρωση τῆς τελευταίας ἐκφράσεως καθόλο τό χρόνο πού διαρκεῖ ἡ μεταβολή ἀπό τήν τιμή $\mathbf{B} = 0$ ὡς τήν τελική τιμή **B**. Καθόσον $W_M = 0$ γιά $\mathbf{B} = 0$,

$$W_M = \left[\frac{4\pi}{\mu_0}\right]\frac{1}{8\pi}\int |\mathbf{B}|^2 d^3r. \qquad (11.72)$$

Ὑπό τό φῶς τῆς στενῆς σχέσης μεταξύ ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου πού ἀποκαλύπτουν τά ἐπαγωγικά φαινόμενα, ἡ ὁμοιότητα τῆς τελευταίας ἐκφράσεως μέ τήν ἐνέργεια πού ἀποτεμιεύεται στό ἠλεκτρικό πεδίο

$$W_E = [4\pi\varepsilon_0]\frac{1}{8\pi}\int |\mathbf{E}|^2 d^3r \qquad (3.82)$$

ἀποτελεῖ μιά εὐχάριστη, ἄν καί ἴσως ἀναμενόμενη, διαπίστωση. Ἐπιτρέπει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

άκόμη, ὅπως καί στήν ἠλεκτροστατική, τήν εἰσαγωγή τῆς ἐννοίας τῆς **πυκνότητας ἐνεργείας** στό χῶρο πού χαρακτηρίζεται ἀπό μαγνητικό πεδίο

$$w_M = \left[\frac{4\pi}{\mu_0}\right] \frac{1}{8\pi} |\mathbf{B}|^2. \tag{11.73}$$

Πρέπει ἴσως νά τονιστεῖ πάλι ὅτι τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (11.72) ἀναφέρεται ἀποκλειστικά στήν περίπτωση ὅπου ὁ χῶρος εἶναι ἀπαλλαγμένος ἀπό μαγνητικά ὑλικά. Τοῦτο ὀφείλεται στή χρησιμοποίηση τοῦ νόμου τοῦ Ampère {βλ. ἐξ. (11.66)} πού ἰσχύει μόνο γιά τή δημιουργία μαγνητικοῦ πεδίου στόν κενό χῶρο. Θά ἐπανέλθουμε στή θεώρηση τῆς μαγνητικῆς ἐνεργείας στό ἑπόμενο κεφάλαιο ἀφοῦ προηγουμένως ἐξετάσουμε τή συμπεριφορά τῶν μαγνητικῶν ὑλικῶν. Κατά τήν ἀπουσία ὅμως παρόμοιων ὑλικῶν ἡ ἐξ. (11.61) ὁδηγεῖ σέ μιά ἔκφραση τῆς μαγνητικῆς ἐνεργείας πού ἀναφέρεται στά γεωμετρικά χαρακτηριστικά ἑνός κυκλώματος ἤ ἐξαρτήματος. Στήν περίπτωση αὐτή, ὅπου ὁ συντελεστής αὐτεπαγωγῆς ἀποτελεῖ σταθερά τοῦ συστήματος, ἡ ἐξ. (11.61) παίρνει τή μορφή

$$\frac{dW_L}{dt} = [c]\ \frac{1}{c} I \frac{d\Phi}{dI}\frac{dI}{dt} = LI\ \frac{dI}{dt} = \frac{1}{2} L\frac{d^2I}{dt} \tag{11.74}$$

πού μέ μιά ἁπλή ὁλοκλήρωση δίνει

$$W_L = \tfrac{1}{2} LI^2. \tag{11.75}$$

Ἡ τελευταία σχέση μπορεῖ νά συγκριθεῖ μέ τήν ἀντίστοιχη τῆς ἠλεκτροστατικῆς γιά ἀποθήκευση ἐνεργείας σέ ἕνα πυκνωτή

$$W_C = \tfrac{1}{2} CV^2. \tag{11.76}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11-1. Ἕνας μεταλλικός δακτύλιος μέ ἐμβαδόν A περιστρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω ἀπό ἄξονα παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο πού ὁρίζει ὁ δακτύλιος. Ἄν τό μαγνητικό πεδίο ἔχει μιά σταθερή συνιστῶσα B_κ κάθετη πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς δεῖξτε ὅτι στό δακτύλιο ἀναπτύσσεται ἐπαγωγική ΗΕΔ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$U = B_\kappa A\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\sin\theta$$

ὅπου ἡ γωνία θ περιγράφει τή θέση τοῦ δακτυλίου γύρω ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς.

11-2. Ἕνας μεταλλικός δακτύλιος μέ ἐμβαδόν Α περιστρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω ἀπό ἄξονα ὁ ὁποῖος βρίσκεται στό ἐπίπεδο τοῦ δακτυλίου καί περνᾶ ἀπό τό κέντρο του. Ἄν ὁ δακτύλιος βρίσκεται σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο **B** καί ὁ ἄξονας περιστροφῆς σχηματίζει γωνία α ὡς πρός τή θετική φορά τοῦ ἀνύσματος **B**, προσδιορίστε τήν ἐπαγωγική ΗΕΔ πού ἀναπτύσσεται στό δακτύλιο.

11-3. Πηνίο πεντακοσίων σπειρῶν μέ τετράγωνη ἐγκάρσια διατομή πλευρᾶς 10 cm τοποθετεῖται μέ τόν κύριο ἄξονά του σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο καί περιστρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα περί κατακόρυφο ἄξονα, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπό τό κέντρο βάρους του. Ὅταν τό πηνίο ἐκτελεῖ 120 στροφές ἀνά πρῶτο λεπτό ἀναπτύσσεται μέγιστη ΗΕΔ 1.57 mV. Στή συνέχεια τό πηνίο τοποθετεῖται μέ τόν κύριο ἄξονά του κατά τό μαγνητικό μεσημβρινό καί περιστρέφεται μέ τήν ἴδια σταθερή γωνιακή ταχύτητα περί ἄξονα κάθετο πρός τό μαγνητικό μεσημβρινό, ὁπότε ἡ μέγιστη ΗΕΔ πού ἀναπτύσσεται στό πηνίο εἶναι 3.14 mV. Ὑπολογίστε τά στοιχεῖα τοῦ γήϊνου μαγνητικοῦ πεδίου στόν τόπο ὅπου βρίσκεται τό πηνίο.
(Θέμα στίς Γενικές Εἰσιτήριες Ἐξετάσεις τῶν ΑΕΙ, 1979).

11-4. Δύο ὁμοαξονικοί μεταλλικοί δακτύλιοι μέ ἀκτίνα α ἀπέχουν ἀπόσταση $x >> a$. Στόν ἕνα ἀπό τούς δύο δακτυλίους ρέει σταθερό ρεῦμα I, ἐνῶ ὁ δακτύλιος αὐτός κινεῖται πρός τόν ἄλλο μέ σταθερή ταχύτητα $v = dx/dt$. Ποιά ἡ ἐπαγωγική ΗΕΔ πού ἀναπτύσσεται στόν ἀκίνητο δακτύλιο; Χρησιμοποιεῖστε τή διπολική προσέγγιση.

11-5. Ὁ βόρειος πόλος μιᾶς μαγνητικῆς ράβδου δημιουργεῖ στήν ἀτμόσφαιρα ἀκτινικό, σφαιρικά συμμετρικό, μαγνητικό πεδίο μέ ἔνταση

$$B = \frac{K}{4\pi r^2}$$

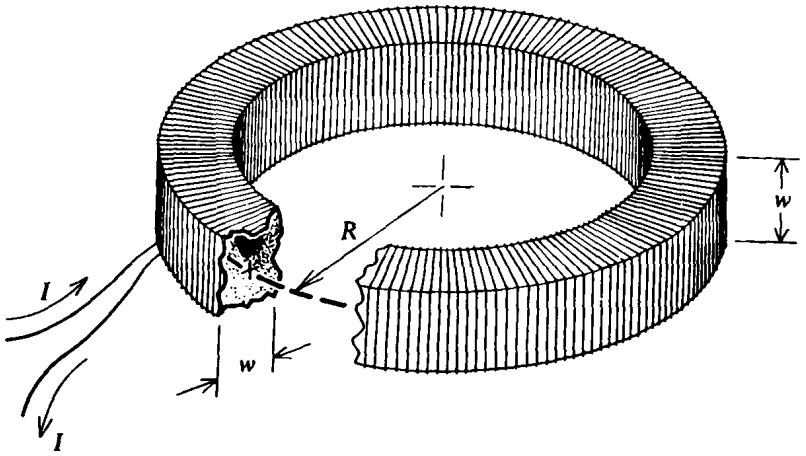
ὅπου $K = 4.0 \times 10^{-5}$ Wb. Ὁ πόλος κινεῖται μέ ταχύτητα 20 cm/sec κατά τόν ἄξονα ἑνός χάλκινου δακτυλίου μέ ἀκτίνα 5 cm καί ἀντίσταση 0.02 Ω. Πόσο εἶναι τό ρεῦμα πού διαρρέει τό δακτύλιο τή στιγμή πού ὁ μαγνητικός πόλος διέρχεται ἀπό τό κέντρο του;

11-6. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξ. (9.33) ὁδηγεῖ στήν ἐξ. (11.24).

11-7. Θεωρεῖστε τή μαγνητική ροή πού ἀναπτύσσεται στό κινητό πλαίσιο τοῦ ἀμπερομέτρου ὅταν διαρρέεται ἀπό ρεῦμα. Μέ τή βοήθεια ἑνός σχήματος χρησιμοποιεῖστε τό νόμο τοῦ Lenz γιά νά προβλέψετε τή φορά περιστροφῆς τοῦ κινητοῦ πλαισίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

11-8. Θεωρεῖστε τό τοροειδές μέ τετράγωνη διατομή καί N σπεῖρες πού δίνεται στό ἑπόμενο σχῆμα.



(α) Προσδιορίστε τό συντελεστή αὐτεπαγωγῆς ὡς συνάρτηση τῶν διαστάσεων τῆς διατάξεως.
(β) Μετατρέψτε τήν προηγούμενη σχέση σέ τύπο πού ὑπολογίζει τήν αὐτεπαγωγή σε μH ὅταν οἱ διαστάσεις δίνονται σέ cm.
(γ) Δεῖξτε ὅτι γιά R >> w ἡ αὐτεπαγωγή τῆς διατάξεως δίνεται ἀπό τήν προσεγγιστική σχέση (στό σύστημα SI)

$$L \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{N^2 w^2}{R}.$$

11-9. Δεῖξτε ὅτι γιά τό τοροειδές τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως ὁ συντελεστής αὐτεπαγωγῆς μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς συνάρτηση τῆς ἐξωτερικῆς ἀκτίνας R καί τῆς ἐσωτερικῆς r ὡς

$$L = \mu_0 N^2 (R - \sqrt{R^2 - r^2})$$

11-10. Μιά γραμμή μεταφορᾶς ρεύματος ἀποτελεῖται ἀπό δύο σύρματα μέ ἀκτίνες a καί b. Τό ρεῦμα ταξιδεύει πρός μιά διεύθυνση στό ἕνα σύρμα καί ἐπιστρέφει στό ἄλλο. Ἂν ἡ μεταξύ τῶν δύο συρμάτων ἀπόσταση εἶναι d > a+b καί τό ρεῦμα κατανέμεται ὁμοιόμορφα στό ἐσωτερικό τῶν συρμάτων, δεῖξτε ὅτι στό σύστημα CGS ἡ αὐτεπαγωγή ἀνά μονάδα μήκους τῆς γραμμῆς μεταφορᾶς δίνεται ἀπό τή σχέση

$$cL^2 = 1 + 2 \ln\left(\frac{d^2}{ab}\right).$$

11-11. Δύο μεταλλικοί δακτύλιοι βρίσκονται τοποθετημένοι ὥστε τά κέντρα τους νά συμπίπτουν. Ἂν οἱ ἀκτίνες τους εἶναι a καί b καί b >> a προσδιορίστε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τό συντελεστή ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς τῆς διατάξεως ὡς συνάρτηση τῆς γωνίας θ μεταξύ τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο δακτυλίων.

11-12. Δύο μεταλλικοί δακτύλιοι μέ παράλληλους ἄξονες βρίσκονται σέ ἀρκετά μεγάλη ἀπόσταση μεταξύ τους ὥστε νά ἰσχύει ἡ διπολική προσέγγιση. Δεῖξτε ὅτι ἄν ἡ διεύθυνση τῶν ἀξόνων τους σχηματίζει μέ τή διεύθυνση τῆς εὐθείας πού ἑνώνει τά κέντρα τους γωνία ἴση μέ περίπου 55°, ἡ ἀμοιβαία ἐπαγωγή τῶν δύο δακτυλίων μηδενίζεται.

11-13. Συγκρίνετε τήν πυκνότητα ἐνεργείας πού περιέχεται σέ ἕνα μαγνητικό πεδίο 1.0 T καί σέ ἕνα ἡλεκτρικό πεδίο 1 MV/m.

11-14. Προσδιορίστε τήν χωρητικότητα πού πρέπει νά ἔχει ἕνας πυκνωτής ὥστε νά ἀποθηκεύσει ἐνέργεια ἴση μέ αὐτή πού ἀποθηκεύεται σέ ἕνα ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς μέ συντελεστή αὐτεπαγωγῆς 0.1 H καί ὠμική ἀντίσταση 6 Ω.

11-15. Ὑπολογίστε τή μαγνητική ἐνέργεια πού ἀποθηκεύεται στό τοροειδές τῆς Ἀσκήσεως 11-8 μέ δύο διαφορετικούς τρόπους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

μαγνητικες ιδιοτητες της υλης

Στή μέχρι τώρα ἀνάπτυξη τῶν ἡλεκτρομαγνητικῶν φαινομένων εἴδαμε σταδιακά τή στενή ἀλληλοεξάρτηση τοῦ ἡλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου. Στήν Παράγραφο 9-7 εἴδαμε τό διαμοιρασμό τῶν Ιδιοτήτων τοῦ χώρου σέ ἡλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο ἀνάλογα μέ τό σύστημα ἀναφορᾶς τοῦ παρατηρητῆ ἐνῶ στό προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τή δημιουργία ἡλεκτρικοῦ πεδίου κατά τή χρονική μεταβολή μαγνητικοῦ πεδίου. Ὑπάρχει μιά βαθειά συμμετρία στήν ὑπόσταση τοῦ ἡλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου πού πηγάζει ἀπό τόν ἐνιαῖο πειραματικό νόμο τῆς ἐξ. (9.11). Ἀντίθετα ἡ μελέτη τῶν μαγνητικῶν φαινομένων τῆς ὕλης πού ἀποσκοπεῖται στό παρόν κεφάλαιο ἀποδεικνύει ὅτι μιά σημαντική συμμετρία πού θά μποροῦσε νά διέπει τά ἡλεκτρομαγνητικά φαινόμενα ἀπουσιάζει ἀπό τή φύση.

Ἡ εἰσαγωγή τῶν ἡλεκτρικῶν φαινομένων ἔγινε μέ τή διαπίστωση ὅτι τό ἡλεκτρικό φορτίο ἀποτελεῖ μιά Ιδιότητα ὁρισμένων στοιχειωδῶν σωματίων (ἡ ὁποία ἐκδηλώνεται μέ τήν ἀνάπτυξη δυνάμεων σύμφωνα πρός τό νόμο τοῦ Coulomb). Ἔτσι τό ἡλεκτρικό φορτίο (ἤ γενικότερα μιά κατανομή ἡλεκτρικοῦ φορτίου $\rho(r)$) ἀναδεικνύεται ὡς πηγή τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου **E**. Τό γεγονός αὐτό ἐκφράζεται μέ τή διαφορική ἐξίσωση

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 4\pi\rho. \qquad (12.1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράλληλα ἀποδείχτηκε ὅτι ἡ κίνηση τοῦ ἡλεκτρικοῦ φορτίου δημιουργεῖ ἐπιπρόσθετες δυνάμεις πού ἀποδίδονται μέ τό μαγνητικό πεδίο. Μέ τόν τρόπο αὐτό ὡς πηγή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** θεωρήθηκε ἀποκλειστικά ἡ κατανομή ρεύματος **J**(r) σύμφωνα μέ τή διαφορική ἐξίσωση

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \tag{12.2}$$

Θά ἦταν δυνατόν νά δημιουργήσει κανείς μιά τελείως συμμετρική θεωρία ὅπου παράλληλα μέ τό ἡλεκτρικό φορτίο, οἱ δομικοί λίθοι τῆς ὕλης ἐμφανίζουν καί *μαγνητικό φορτίο*. Ἡ ἰδιότητα αὐτή τῆς ὕλης, σέ ἀντιστοιχία μέ τήν ἐξ. (12.1), θά μποροῦσε νά ἀποτελέσει πηγή μαγνητικοῦ πεδίου σύμφωνα μέ τή σχέση.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \left[\frac{4\pi}{4\pi}\right] 4\pi\eta \tag{12.3}$$

ὅπου, σέ ἀναλογία μέ τήν πυκνότητα ρ(r), ἡ συνάρτηση η(r) ἀποδίδει τήν κατανομή τοῦ *μαγνητικοῦ φορτίου*. Κίνηση τοῦ *μαγνητικοῦ φορτίου* θά ἦταν δυνατόν στή συνέχεια νά προκαλέσει ἡλεκτρικό πεδίο σέ ἀναλογία μέ τήν ἐξ. (12.2), σύμφωνα μέ τή διαφορική ἐξίσωση

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left[\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}\right] \frac{4\pi}{c} \zeta(r) \tag{12.4}$$

ὅπου ἡ *πυκνότητα ρεύματος μαγνητικοῦ φορτίου* ζ(r) ἀντιστοιχεῖ στή συνάρτηση **J**(r).

Τό προηγούμενο θεωρητικό πλαίσιο τῶν ἡλεκτρομαγνητικῶν φαινομένων, πού ἔχει διερευνηθεῖ διεξοδικά στό παρελθόν, ὅσο καί ἄν ἱκανοποιεῖ ἀπό ἀπόψεως συμμετρίας καί αἰσθητικῆς, σκοντάφτει σέ ἕνα ἀνυπέρβλητο πειραματικό γεγονός: στοιχειώδη σωμάτια μέ *μαγνητικό φορτίο* δέν ὑπάρχουν — ἤ τουλάχιστον δέν ἔχουν μέχρι σήμερα παρατηρηθεῖ — στή φύση. Ἔτσι εἴμαστε ὑποχρεωμένοι στή θέση τῶν ἐξ. (12.3) καί (12.4) νά γράψουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{12.5}$$

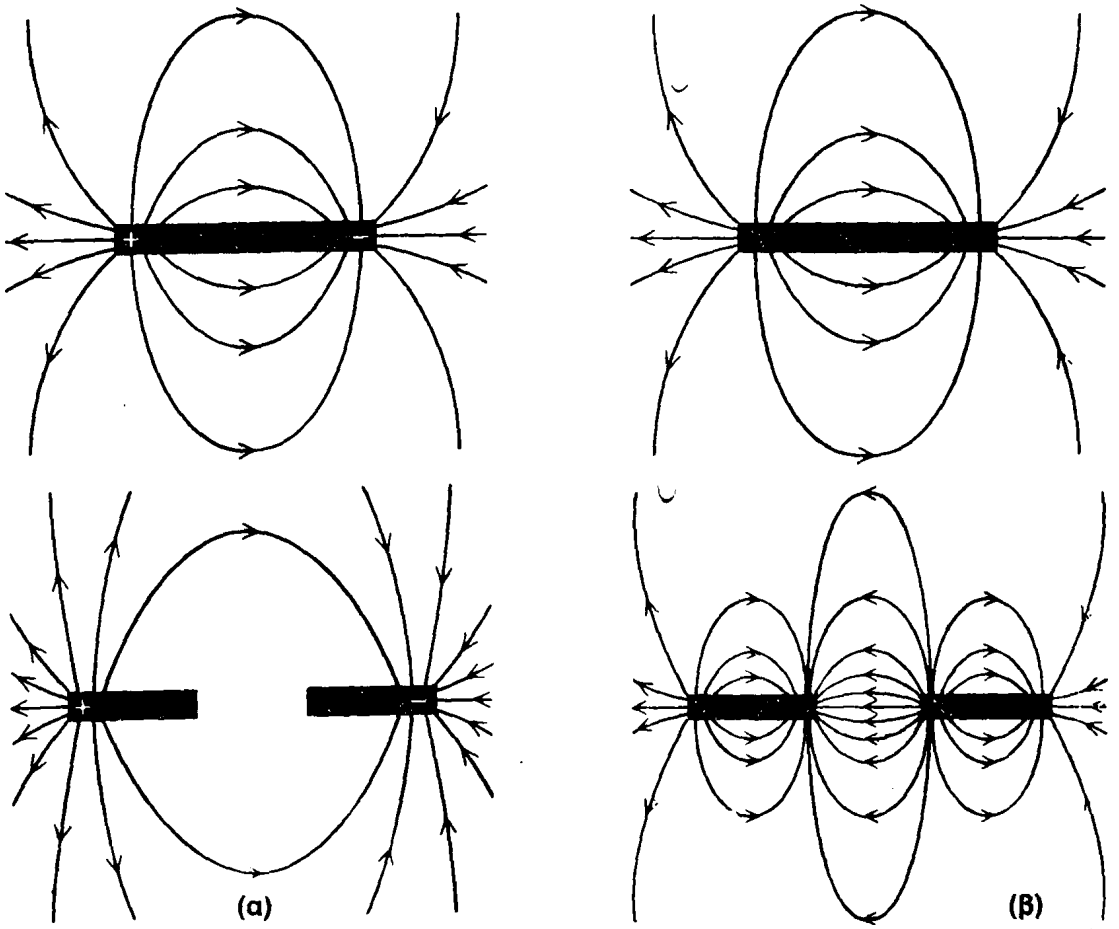
καί (γιά σταθερό μαγνητικό πεδίο)

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{12.6}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

θεωρώντας ὡς μόνη πηγή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τήν κίνηση ἠλεκτρικοῦ φορτίου.

Εἶναι βέβαιο ὅτι στό μακροσκοπικό ἐπίπεδο πολλά ὑλικά ἔχουν τήν ἰδιότητα νά δημιουργοῦν στό γύρω χῶρο μαγνητικό πεδίο, ὅπως μακροσκοπικά φορτισμένη ὕλη δημιουργεῖ ἠλεκτρικό πεδίο. Θά μποροῦσε κανείς ἑπομένως νά ἀποδώσει τήν ἰδιότητα αὐτή στήν ὕπαρξη κατανομῆς *μαγνητικοῦ φορτίου* στό ἐσωτερικό τοῦ μαγνητισμένου ὑλικοῦ. Ὑπάρχει ὅμως μιά οὐσιώδης διαφορά μεταξύ τῶν δύο φαινομένων: Ἄν καί ἠλεκτρικό φορτίο τοῦ ἑνός ἤ τοῦ ἄλλου εἴδους (θετικό ἤ ἀρνητικό) μπορεῖ νά ὑπάρξει αὐτόνομα σέ ὁποιαδήποτε ποσότητα, τό *μαγνητικό φορτίο* ἐμφανίζεται πάντα ὑπό μορφή διπόλου, ἤτοι ὡς δύο ἴσες καί ἀντίθετες ποσότητες σέ κάποια ἀπόσταση. Ἡ διαφορά περιγράφεται στό σχῆμα 12-1 ὅπου ἕνας μαγνήτης



ΣΧΗΜΑ 12-1 Σύγκριση τῶν ἀντίστοιχων ἠλεκτρικῶν καί μαγνητικῶν πεδίων (α) ἑνός ἠλεκτρικοῦ διπόλου καί (β) ἑνός λεπτοῦ μαγνήτη μέ ἴδιες διαστάσεις. Ἄν τό ἠλεκτρικό δίπολο κοπεῖ στά δύο τό πεδίο παραμένει ἀμετάβλητο καθόσον τό ἠλεκτρικό φορτίο παραμένει ἀμετακίνητο. Ἡ ἀντίστοιχη διαδικασία στό μαγνητικό δίπολο ὁδηγεῖ στή δημιουργία δύο μικρότερων μαγνητικῶν διπόλων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σέ μορφή ράβδου συγκρίνεται μέ ἕνα ἡλεκτρικό δίπολο τῶν ἴδιων διαστάσεων. Ἡ διαδικασία ἀποδεικνύει ὅτι *μαγνητικό φορτίο* ἑνός ἤ τοῦ ἄλλου εἴδους (**βόρειο ἤ νότιο**, κατά τήν καθιερωμένη ὁρολογία) δέν εἶναι δυνατόν νά ἀπομονωθεῖ.

Ἡ ἐλκυστική ἔννοια τοῦ **μαγνητικοῦ μονοπόλου**, ὅπως ἔχει καθιερωθεῖ στή βιβλιογραφία τό μεμονωμένο *μαγνητικό φορτίο* σέ ἀντιπαράθεση μέ τή συνήθη διπολική μορφή τῆς μαγνητισμένης ὕλης, ἔχει ἀρκετά μεγάλη ἱστορία. Μέ ἀπαρχή τήν παρατήρηση τοῦ γάλλου φυσικοῦ Petrus Peregrinus περί τά μέσα τοῦ XII αἰώνα ὅτι οἱ δυναμικές γραμμές τοῦ πεδίου γύρω ἀπό ἕνα φυσικό μαγνήτη συγκεντρώνονται πάντα σέ δύο σημεῖα πού ὀνόμασε **πόλους**, ἡ προσπάθεια γιά τή διερεύνηση καί πειραματική παρατήρηση μαγνητικῶν μονοπόλων συνεχίζεται μέχρι τίς ἡμέρες μας. Τό ἐνδιαφέρον γιά τήν ὕπαρξη ἤ μή τῶν μαγνητικῶν μονοπόλων ἀναζωπυρώθηκε τό 1931 ὅταν ἕνας ἀπό τούς μεγαλύτερους θεωρητικούς φυσικούς τοῦ αἰώνα μας, ὁ P.A.M. Dirac, ἔδειξε ὅτι ἡ παρατηρούμενη κβάντωση τοῦ ἡλεκτρικοῦ φορτίου μπορεῖ νά δικαιολογηθεῖ μέ τήν παραδοχή ὅτι κάπου στό σύμπαν ὑπάρχουν ἐπίσης κβαντισμένα μαγνητικά μονόπολα. Τό ἐπιχείρημα τοῦ Dirac ὑπῆρξε τό ἔναυσμα γιά μιά πληθώρα θεωρητικῶν ἐργασιῶν καί πειραμάτων μέ σκοπό τήν ἀνακάλυψη μαγνητικῶν μονοπόλων. Οἱ πειραματικές αὐτές προσπάθειες ἔχουν μέχρι σήμερα παραμείνει ἄκαρπες.

Εἶναι βέβαιο ὅτι ἡ ἐνδεχόμενη ἀνακάλυψη μαγνητικῶν μονοπόλων στό μέλλον δέν πρόκειται νά μεταβάλει τήν ἤδη διαμορφωμένη κλασσική ἠλεκτρομαγνητική θεωρία. Πιστεύεται σήμερα ὅτι ἄν ὑπάρχουν μαγνητικά μονόπολα αὐτά θά πρέπει νά εἶναι ἐξαιρετικά βαριά σέ σχέση μέ τά γνωστά στοιχειώδη σωμάτια (κατά μιά πρόσφατη θεωρητική ἐκτίμηση ἡ μάζα τους θά πρέπει νά εἶναι τῆς τάξης τῶν 20×10^{-9} g, ἤτοι περίπου ἴση μέ τή μάζα 10^{16} πρωτονίων) καί ἐξαιρετικά σπάνια. Ἡ δεύτερη ἰδιότητα εἶναι βέβαια ἄμεση ἀπόρροια τῆς πρώτης. Ἄν τόσο βαριά σωμάτια σχηματίστηκαν κατά τήν κοσμογονία, ἡ δημιουργία τους θά πρέπει νά συντελέστηκε μόνο μέσα στά πρῶτα 10^{-35} δευτερόλεπτα μετά τή γέννηση τοῦ σύμπαντος, ὅταν οἱ ἐπικρατοῦσες θερμοκρασίες (περίπου 10^{30} K) ἦσαν ἀρκετά ὑψηλές†.

† Ἡ σπανιότητα τῶν μαγνητικῶν μονοπόλων ἐπιτείνεται ἀπό τό γεγονός ὅτι ἄν παρόμοια βαριά σωμάτια δημιουργήθηκαν κατά τήν κοσμογονία, θά πρέπει ταυτόχρονα νά δημιουργήθηκε καί ἕνας περίπου ἴσος ἀριθμός ἀπό ἀντίστοιχα *ἀντισωμάτια*. Στό χρόνο πού διέρρευσε στό μεταξύ πολλά σωμάτια θά πρέπει νά συνάντησαν ἀντίστοιχα ἀντισωμάτια μέ ἐπακόλουθο τήν ἀμοιβαία καταστροφή τους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἔτσι γιά τόν κενό χῶρο καί τή συνήθη ὕλη ἡ ἐξ. (12.5) παραμένει ἡ θεμελιώδης ἐξίσωση τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ. Ὅπως πολύ γλαφυρά παρατηρεῖ στό σύγγραμμά του ὁ E.M. Purcell, ἄν κάποτε σέ κάποιο πείραμα παρατηρηθεῖ ἕνα μαγνητικό μονόπολο, τό μόνο πού θά ἀλλάξει θά εἶναι ἡ προσθήκη τῆς διευκρινήσεως μετά τήν ἐξ. (12.5) «...ἐκτός ἀπό τό σημεῖο τοῦ βόρειου (ἤ νότιου) μαγνητικοῦ μονοπόλου πού ἐμφανίζεται στή φωτογραφική πλάκα ἀριθ...». Ἀλλά καί αὐτή ἡ διευκρίνηση δέν πρόκειται νά ἀλλάξει τό βασικό συμπέρασμα πού θά ἐξαχθεῖ στό παρόν κεφάλαιο: *Ἡ συνήθης ὕλη ἀποτελεῖται ἀπό ἠλεκτρικά φορτισμένα σωμάτια καί ὅλα τά μαγνητικά φαινόμενα πού ἐμφανίζει ἡ ὕλη βρίσκουν τήν ἀποκλειστική τους ἑρμηνεία στήν κίνηση τῶν φορτισμένων αὐτῶν σωματίων.*

12-1 Μαγνητική Διπολική Ροπή τῶν Δομικῶν Λίθων τῆς Ὕλης

Στήν Παράγραφο 9-5 ἔχουν ἤδη τεθεῖ τά θεμέλια γιά τήν κατανόηση τῶν μαγνητικῶν φαινομένων τῆς ὕλης. Ὅπως εἴδαμε ἕνα φορτισμένο σωμάτιο πού κινεῖται σέ κλειστή τροχιά μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ ἀπό μαγνητική ροπή (στό σύστημα SI)

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m_q}\mathbf{l} \tag{12.7}$$

ὅπου q καί m_q εἶναι ἀντίστοιχα τό φορτίο καί ἡ μάζα τοῦ σωματίου καί **l** ἡ τροχιακή του στροφορμή†. Ἡ μαγνητική αὐτή ροπή δημιουργεῖ ἕνα μαγνητικό πεδίο στό χῶρο σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (9.81)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\,\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}}{r^3}. \tag{12.8}$$

Ὑπενθυμίζεται ὅτι γιά νά ἰσχύει ἡ τελευταία σχέση, ἡ ἀπόσταση r πρέπει νά εἶναι μεγάλη σέ σχέση μέ τίς χαρακτηριστικές διαστάσεις τῆς κλειστῆς τροχιᾶς τοῦ σωματίου.

Ὁ ἀναγνώστης θά διέκρινε ἴσως στά προηγούμενα ἕνα βασικό μηχανισμό γιά τή δημιουργία μαγνητικοῦ πεδίου ἀπό τούς δομικούς λίθους τῆς ὕλης. Τά ἄτομα καί τά μόρια πού συγκροτοῦν τή συνήθη ὕλη ἀποτελοῦνται ἀπό βαρεῖς ἀδρανεῖς πυρῆνες καί ἐλαφρά, ἀρνητικά φορτισμένα, ἠλεκτρό-

† Ὑπενθυμίζεται τό ἀποτέλεσμα τῆς μηχανικῆς κατά τό ὁποῖο ἡ στροφορμή ἑνός ἀπομονωμένου συστήματος εἶναι σταθερά τῆς κινήσεως καί ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἐπιλογή τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

νια πού κινοῦνται σέ τροχιές γύρω ἀπό τούς πυρῆνες. Κάθε ἠλεκτρονική τροχιά συνεισφέρει μαγνητική ροπή

$$m = \frac{e}{2m_e} l \tag{12.9}$$

πού δημιουργεῖ στό χῶρο μαγνητικό πεδίο σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (12.8). Τή συνεισφορά τῶν στοιχειωδῶν αὐτῶν μαγνητικῶν ροπῶν καί εἰδικότερα τήν ἀλληλεπίδρασή τους μέ ἕνα ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο θά προσπαθήσουμε νά κατανοήσουμε στή συνέχεια.

Πρέπει εὐθύς ἐξαρχῆς νά τονιστεῖ ὅτι ὁ μικρόκοσμος τῶν ἀτόμων καί μορίων ἐπιδέχεται ποσοτική περιγραφή μόνο στά πλαίσια τῆς κβαντικῆς θεωρίας. Ἔννοιες ὅπως ἡ κβάντωση τῆς στροφορμῆς, τό σπίν ἤ ἡ ἀπαγορευτική ἀρχή τοῦ Pauli, πού διέπουν καθοριστικά τή συμπεριφορά τοῦ ἀτομικοῦ καί μοριακοῦ συστήματος, ἀπαντῶνται ἐδῶ γιά πρώτη φορά χωρίς νά εἶναι δυνατός ὁ παραλληλισμός τους μέ ἔννοιες ἤ φυσικά μεγέθη τοῦ περισσότερο οἰκείου μας μακροκόσμου. Κατ' ἐπέκταση οἱ μακροσκοπικές ἰδιότητες τῆς ὕλης πού ἀπορρέουν ἀπό τή συμπεριφορά τῶν δομικῶν της λίθων εἶναι δυνατόν νά προβλεφθοῦν ποσοτικά μόνο μέ χειρισμό τῶν τελευταίων στά πλαίσια τῆς κβαντικῆς θεωρίας. Γιά τό λόγο αὐτό εἶναι ἀπαραίτητο, ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς θεωρίας τῆς σχετικότητας, νά δανειστοῦμε ὁρισμένες ἔννοιες τῆς κβαντικῆς θεωρίας πού στό στάδιο αὐτό εἶναι σκόπιμο νά παραθέσουμε χωρίς συστηματική θεμελίωση ἤ ἀπόδειξη.

1. Στό ἀτομικό σύστημα τά ἠλεκτρόνια μποροῦν νά κινηθοῦν μόνο σέ ὁρισμένες διακριτές τροχιές γύρω ἀπό τόν πυρήνα. Κάθε δυνατή τροχιά χαρακτηρίζεται ἀπό συγκεκριμένη **ἐνέργεια συνδέσεως** τοῦ ἠλεκτρονίου (ἐνέργεια πού ἀπαιτεῖται ὥστε τό δέσμιο ἠλεκτρόνιο νά ἀπελευθερωθεῖ ἀπό τό ἄτομο) καί συγκεκριμένη στροφορμή τοῦ ἠλεκτρονίου ὡς πρός τόν πυρήνα. Τά δύο αὐτά μεγέθη πού καθορίζουν τίς δυνατές τροχιές δέν μποροῦν νά πάρουν ὁποιαδήποτε τιμή. Ἡ ἐνέργεια συνδέσεως W μπορεῖ νά πάρει μόνο διακριτές τιμές πού δίνονται ἀπό τή σχέση

$$W_n = -\frac{a}{n^2} \tag{12.10}$$

ὅπου a εἶναι μιά σταθερά καί n = 1,2,3, ... Κατά τόν ἴδιο τρόπο ἡ τροχιακή στροφορμή τοῦ ἠλεκτρονίου L μπορεῖ νά πάρει μόνο τίς διακριτές τιμές

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \tag{12.11}$$

ὅπου $\hbar$ εἶναι μιά σταθερά τῆς φύσης μέ διαστάσεις στροφορμῆς καί ἡ μεταβλητή ℓ παίρνει τίς ἀκέραιες τιμές $\ell = 0,1,2, \ldots$. Ἐξάλλου γιά μιά τροχιά οἱ δυό ἀριθμοί (στό μικρόκοσμο τοῦ ἀτόμου ὀνομάζονται «κβαντικοί ἀριθμοί») n καί ℓ πού ἀντίστοιχα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

προσδιορίζουν τήν ἐνέργεια συνδέσεως τοῦ ἠλεκτρονίου καί τήν τροχιακή του στροφορμή δέν εἶναι ἀνεξάρτητοι. Οἱ ἐπιτρεπτές τροχιές κινήσεως τοῦ ἠλεκτρονίου ἱκανοποιοῦν τή σχέση $n > \ell$. Ἔτσι ἐπιτρεπτές τροχιές χαρακτηρίζονται ἀπό τούς κβαντικούς ἀριθμούς

$$(n,\ell) = (1,0),\ (2,0),\ (2,1),\ (3,0),\ (3,1),\ (3,2),\ (4,0),\ \ldots \tag{12.12}$$

2. Ἡ τροχιακή στροφορμή L τῆς ἐξ. (12.11) δέν μπορεῖ νά πάρει ὁποιαδήποτε διεύθυνση στό χῶρο. Ἄν ὁρίσουμε στό χῶρο μιά συγκεκριμένη διεύθυνση† τότε τό ἄνυσμα $\boldsymbol{L}$ μπορεῖ νά πάρει μόνο τέτοιες διευθύνσεις ὥστε ἡ προβολή του στήν προτιμητέα αὐτή διεύθυνση νά ἔχει τίς διακριτές τιμές

$$M_\ell = m_\ell \hbar \tag{12.13}$$

ὅπου $m_\ell = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$. Μέ τόν τρόπο αὐτό οἱ κβαντικοί ἀριθμοί πού χαρακτηρίζουν κάθε τροχιά ἠλεκτρονίου αὐξάνουν σέ τρεῖς. Συνοψίζοντας τήν ἠλεκτρονική τροχιακή κίνηση γύρω ἀπό τόν πυρήνα μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι κάθε τροχιά χαρακτηρίζεται ἀπό τούς κβαντικούς ἀριθμούς (n,ℓ,m_ℓ) πού ἀναφέρονται ἀντίστοιχα στήν ἐνέργεια συνδέσεως τοῦ ἠλεκτρονίου, τό μέτρο καί τή διεύθυνση τῆς τροχιακῆς του στροφορμῆς. Οἱ κβαντικοί ἀριθμοί κάθε τροχιᾶς ὑπόκεινται στούς περιορισμούς

$$\ell < n \tag{12.14α}$$

καί

$$-\ell \leqslant m_\ell \leqslant \ell \tag{12.14β}$$

ὅπου $n = 1,2,3,\ldots$, $\ell = 0,1,2,\ldots$ καί m_ℓ ἀκέραιος. Ἔτσι μποροῦμε νά κατατάξουμε τίς ἐπιτρεπτές τροχιές τῶν ἠλεκτρονίων σύμφωνα μέ τό σχῆμα

$$\begin{aligned}(n,\ell,m_\ell) = {} & (1,0,0) \\ & (2,0,0),\ (2,1,-1),\ (2,1,0),\ (2,1,1) \\ & (3,0,0),\ (3,1,-1),\ (3,1,0),\ (3,1,1) \\ & (3,2,-2),\ (3,2,-1),\ (3,2,0),\ (3,2,1),\ (3,2,2)\ldots\end{aligned} \tag{12.15}$$

3. Τό ἠλεκτρόνιο, ὅπως καί ἄλλα στοιχειώδη σωμάτια τοῦ ὑποατομικοῦ κόσμου, συμπεριφέρεται ὡσάν νά περιστρέφεται γύρω ἀπό τόν ἑαυτό του μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Ἡ ἰδιότητα αὐτή πού δέν ἔχει ἀνάλογο στόν οἰκεῖο μας μακροσκοπικό κόσμο τῆς κλασικῆς φυσικῆς καί πού θά ἀποδώσουμε μέ τόν ὅρο **σπίν,** εἶναι ἐξίσου θεμελιώδης ὅσο καί ἡ μάζα ἤ τό φορτίο τοῦ ἠλεκτρονίου. Σέ ὁποιαδήποτε κατάστα-

---

† Τοῦτο εἶναι ἐπακόλουθο κάθε ἀπόπειρας μετρήσεως. Ἡ διεύθυνση τῆς τροχιακῆς στροφορμῆς ἑνός ἀτομικοῦ ἠλεκτρονίου μπορεῖ π.χ. νά μετρηθεῖ ἀπό τήν ἀλληλεπίδραση τῆς μαγνητικῆς διπολικῆς ροπῆς πού δημιουργεῖ ἡ κίνησή του μέ ἕνα ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Ἡ ὕπαρξη ὅμως τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καθορίζει ἤδη μιά διεύθυνση ἀναφορᾶς στό χῶρο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ση καί άν βρίσκεται τό ήλεκτρόνιο (έλεύθερο στόν κενό χώρο, έλεύθερο νά κινηθεί στό έσωτερικά ένός άγωγοῦ ή δέσμιο σέ άτομική τροχιά) διαθέτει στροφορμή ἴση μέ

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar. \tag{12.16}$$

Παρατηρεῖται ὅτι ἡ τελευταία τιμή τῆς *ἰδιοστροφορμῆς* τοῦ ἡλεκτρονίου μπορεῖ νά γραφεῖ σέ ἀναλογία μέ τήν ἐξ. (12.11) πού ἐκφράζει τήν κβάντωση τῆς τροχιακῆς στροφορμῆς ὡς

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar \tag{12.17}$$

γιά μοναδική τιμή τῆς παραμέτρου $s = \frac{1}{2}$. Μέ τήν ἔννοια αὐτή θά χρησιμοποιήσουμε κατ' οἰκονομία τίς φράσεις *τροχιακή στροφορμή ℓ* καί *σπίν* $\frac{1}{2}$.

4. Τό σπίν τοῦ ἡλεκτρονίου ἱκανοποιεῖ ὡς πρός τή διεύθυνση τήν ἴδια συνθήκη κβαντώσεως μέ τήν τροχιακή στροφορμή [βλ. ἐξ. (12.14β)]. Ἡ προβολή τοῦ σπίν σέ μιά ἐπιλεγμένη διεύθυνση στό χῶρο μπορεῖ νά πάρει μόνο τίς τιμές

$$M_s = m_s\hbar \tag{12.18}$$

ὅπου

$$-s \leqslant m_s \leqslant s. \tag{12.19}$$

Μέ ἄλλα λόγια ἄν ἐπιλεγεῖ μιά διεύθυνση στό χῶρο, γιά τή συγκεκριμένη τιμή $s = \frac{1}{2}$, οἱ μόνες δυνατές τιμές τῆς προβολῆς τοῦ σπίν πρός τή διεύθυνση αὐτή εἶναι

$$M_s = \tfrac{1}{2}\hbar \tag{12.20α}$$

καί

$$M_s = -\tfrac{1}{2}\hbar. \tag{12.20β}$$

5. Ἀπό τά προηγούμενα, κάθε ἡλεκτρόνιο πού συμμετέχει στή συγκρότηση τοῦ ἀτομικοῦ συστήματος συνεισφέρει στήν ὁλική στροφορμή τοῦ ἀτόμου στροφορμή

$$J_i = L_i + S_i \tag{12.21α}$$

μέ προβολή πρός κάποια διεύθυνση στό χῶρο M_J, πού μπορεῖ νά πάρει τίς διακριτές τιμές

$$M_J = M_\ell + M_s = (m_\ell + m_s)\hbar \tag{12.21β}$$

ὅπου οἱ κβαντικοί ἀριθμοί m_ℓ καί m_s προσδιορίζονται ἀπό τίς ἐξ. (12.14β) καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(12.19). Κατ' ἐπέκταση ἡ ὁλική στροφορμή τοῦ ἀτομικοῦ συστήματος μέ Z ἠλεκτρόνια εἶναι

$$\boldsymbol{J} = \sum_{i=1}^{Z} (\boldsymbol{L}_i + \boldsymbol{S}_i) = \sum_{i=1}^{Z} \boldsymbol{L}_i + \sum_{i=1}^{Z} \boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}. \tag{12.22}$$

ὅπου $\boldsymbol{L}$ καί $\boldsymbol{S}$ εἶναι ἀντίστοιχα ἡ ὁλική τροχιακή στροφορμή καί τό ὁλικό σπίν τῶν ἠλεκτρονίων πού συμμετέχουν στή συγκρότηση τοῦ ἀτόμου.

6. Μιά βασική ἀρχή† πού διέπει τή δομή τοῦ ἀτομικοῦ συστήματος εἶναι ἐπίσης ἀποκλειστική ἰδιότητα συμπεριφορᾶς τῶν δομικῶν λίθων τοῦ μικροκόσμου χωρίς ἀνάλογο στήν κλασσική φυσική: Ἠλεκτρόνια (καί γενικώτερα σωμάτια μέ σπίν $\frac{1}{2}$) δέν εἶναι δυνατόν νά συνειπάρχουν σέ ἕνα σύστημα ἄν ὅλοι οἱ κβαντικοί ἀριθμοί πού χαρακτηρίζουν τήν κατάστασή τους συμπίπτουν. Ἔτσι, σύμφωνα μέ τά προηγούμενα δέν εἶναι δυνατόν σέ ἕνα ἀτομικό σύστημα νά συνυπάρχουν δύο ἠλεκτρόνια μέ τούς ἴδιους κβαντικούς ἀριθμούς n, ℓ, m_ℓ, s καί m_s. Τά Z ἑπομένως ἠλεκτρόνια τοῦ ἀτόμου θά κατανεμηθοῦν σέ Z καταστάσεις μέ διαφορετικούς ἀριθμούς (n, ℓ, m_ℓ, m_s) ἔτσι ὥστε ἡ ὁλική ἐνέργεια τοῦ συστήματος νά εἶναι ἡ ἐλάχιστη δυνατή (ἤ Ισοδύναμα ἡ ἐνέργεια συνδέσεως ἡ μέγιστη δυνατή).

Ἀπό τήν ἐξ. (12.10) ἕπεται ὅτι κατ' ἀρχήν θά συμπληρωθοῦν πρῶτα τροχιές μέ μικρότερο κβαντικό ἀριθμό n. Γιά κάθε n = 1,2,3, ... ὁ κβαντικός ἀριθμός ℓ μπορεῖ νά πάρει ὅλες τίς ἀκέραιες τιμές $\ell < n$, ἐνῶ γιά κάθε ℓ ὑπάρχουν $2\ell + 1$ καταστάσεις προσανατολισμοῦ τῆς στροφορμῆς. Ἐπιπλέον κάθε ὁμάδα κβαντικῶν ἀριθμῶν (n, ℓ, m_ℓ) ὁδηγεῖ σέ δύο διαφορετικές καταστάσεις προσανατολισμοῦ τοῦ σπίν ($m_s = \pm \frac{1}{2}$). Ἡ σειρά μέ τήν ὁποία θά συμπληρωθοῦν οἱ καταστάσεις αὐτές σέ ἕνα συγκεκριμένο σύστημα μέ Z ἠλεκτρόνια θά ἐξαρτηθεῖ ἀπό τό ποσό ἐνεργείας πού συνεισφέρει κάθε τροχιά. Δέν θά ἀναλύσουμε ἐδῶ μέ λεπτομέρεια τήν ἐξάρτηση τῆς ἐνέργειας συνδέσεως κάθε καταστάσεως ἀπό τούς κβαντικούς ἀριθμούς ℓ, m_ℓ καί m_s, καθόσον τοῦτο δέν ἐνδιαφέρει στήν ἀνάπτυξη τοῦ θέματος πού ἀκολουθεῖ. Θά συγκεντρώσουμε μόνο τήν προσοχή μας σέ ἕνα κανόνα πού διέπει τήν ἀτομική δομή σέ ὅλη τήν ἔκταση τοῦ περιοδικοῦ συστήματος: Κατά τή σταδιακή πλήρωση τῶν ἀτομικῶν τροχιῶν οἱ κβαντικοί ἀριθμοί m_ℓ καί m_s συμπληρώνονται κατά ζεύγη. Ἄν δηλαδή ἕνα ἠλεκτρόνιο τοποθετηθεῖ σέ μιά κατάσταση (n, ℓ, m_ℓ, m_s) ἡ ἑπόμενη κατάσταση πού προσθέτει στό σύστημα τή μικρότερη ἐνέργεια εἶναι κατά κανόνα ἡ κατάσταση (n, ℓ, m_ℓ, $-m_s$). Παρόμοια διαδοχή ἐμφανίζουν οἱ καταστάσεις ὡς πρός τόν ἀριθμό m_ℓ.

Ὁ τελευταῖος κανόνας ἔχει σημαντική ἐπίπτωση στή διαμόρφωση τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς τοῦ ἀτόμου. Καθόσον ἡ τροχιακή στροφορμή καί τό σπίν τῶν περισσότερων ἠλεκτρονίων ἀλληλοεξουδετερώνονται, ἡ ὁλική στροφορμή τοῦ συστήματος προέρχεται ἀπό μερικά ἐξωτερικά «ἀζευγάρωτα» ἠλεκτρόνια. Εἰδικότερα γιά ἄτομα ὅπου καταλαμβάνονται ὅλες οἱ προβλεπόμενες καταστάσεις προβολῆς τῆς στροφορμῆς γιά κάποιο κβαντικό ἀριθμό n = 1,2,3, ... (τά λεγόμενα *εὐγενῆ* ἄτομα) περιμένουμε ὅτι ἡ ὁλική στροφορμή θά μηδενίζεται (κάτι πού ἐπαληθεύεται καί πειραματικά).

---

† Γνωστή στήν κβαντική θεωρία ὡς *ἀπαγορευτική ἀρχή τοῦ Pauli*.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ μαγνητική διπολική ροπή τοῦ ἀτομικοῦ (καί κατ' ἐπέκταση τοῦ μοριακοῦ) συστήματος μπορεῖ τώρα νά ἐξαχθεῖ ἀπό τήν προηγούμενη ἀνάλυση τῆς δομῆς του. Κάθε ἠλεκτρόνιο συνεισφέρει στό σύστημα λόγω τῆς τροχιακῆς του κινήσεως μαγνητική ροπή $\boldsymbol{m}$, πού ἔχει δοθεῖ ἤδη στήν ἐξ. (12.9). Ἔτσι ἡ ὁλική μαγνητική διπολική ροπή τοῦ ἀτόμου ἤ τοῦ μορίου λόγω τῆς τροχιακῆς κινήσεως τῶν ἠλεκτρονίων του μπορεῖ νά γραφεῖ σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (12.22) ὡς

$$\boldsymbol{m}_L = \frac{e}{2m_e}\boldsymbol{L}. \tag{12.23}$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο θά περιμέναμε συνεισφορά στήν ἀτομική μαγνητική διπολική ροπή ἀπό τό σπίν τῶν ἠλεκτρονίων {βλ. Ἄσκηση 12-1}

$$\boldsymbol{m}_S = \frac{e}{2m_e}\boldsymbol{S}. \tag{12.24}$$

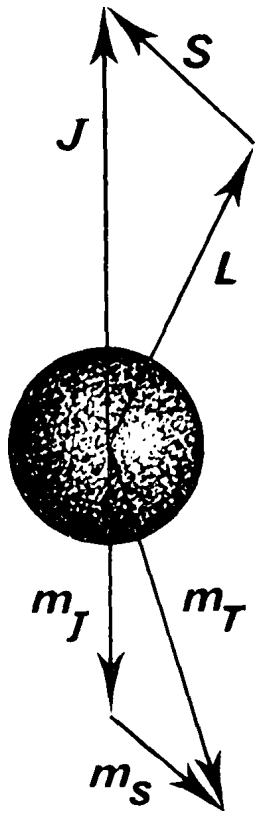
Δυστυχῶς ἡ κλασσική πρόβλεψη τῆς ἐξ. (12.24) δέν ἐπαληθεύεται στήν περίπτωση τοῦ σπίν. Τό γεγονός αὐτό εἶναι ἕνας ἀπό τούς λόγους γιά τούς ὁποίους προειδοποιήσαμε τόν ἀναγνώστη ὅτι τό σπίν εἶναι καθαρά ἔννοια τῆς κβαντικῆς μηχανικῆς χωρίς ἀνάλογο στόν κλασσικό μακρόκοσμο. Πειραματικά προσδιορίζεται (καί δικαιολογεῖται θεωρητικά στά πλαίσια τῆς κβαντικῆς μηχανικῆς) ὅτι ἡ συνεισφορά τοῦ σπίν στή μαγνητική διπολική ροπή τοῦ ἀτόμου εἶναι διπλάσια ἀπό αὐτή πού προβλέπει ἡ ἐξ. (12.24). Θά γράψουμε ἑπομένως γιά τήν ὁλική μαγνητική ροπή ἑνός δομικοῦ λίθου τῆς ὕλης

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}_T = \boldsymbol{m}_L + \boldsymbol{m}_S &= \frac{e}{2m_e}(\boldsymbol{L} + 2\boldsymbol{S}) = \frac{e}{2m_e}(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{S}) \\ &= \boldsymbol{m}_J + \boldsymbol{m}_S.\end{aligned} \tag{12.25}$$

ὅπου $\boldsymbol{J}$ εἶναι ἡ ὁλική στροφορμή τοῦ ἀτόμου ἤ μορίου.

Ἡ σχέση μεταξύ μαγνητικῆς διπολικῆς ροπῆς καί ὁλικῆς στροφορμῆς ἑνός ἀτομικοῦ ἤ μοριακοῦ συστήματος δίνεται στό σχῆμα 12-2. Παρατηρεῖται ὅτι ἡ διεύθυνση τῶν δύο ἀνυσμάτων $\boldsymbol{m}_T$ καί $\boldsymbol{J}$ δέν συμπίπτει λόγω τῶν διαφορετικῶν συντελεστῶν πού ὑπεισέρχονται στό ἄθροισμα τῆς τροχιακῆς στροφορμῆς καί τοῦ σπίν {βλ. ἐξ. (12.22) καί (12.25)}. Ἡ ἀντίστροφη φορά τῶν δύο ἀνυσμάτων ὀφείλεται στό ἀρνητικό φορτίο e τοῦ ἠλεκτρονίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 12-2 Στροφορμή καί μαγνητική διπολική ροπή ἀτομικοῦ ἤ μοριακοῦ συστήματος.

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα κάθε δομικός λίθος τῆς ὕλης — ἄτομο ἤ μόριο — ἐμφανίζει μαγνητική διπολική ροπή πού προέρχεται† τόσο ἀπό τήν τροχιακή κίνηση ὅσο καί ἀπό τό σπίν τῶν ἠλεκτρονίων του. Τό μέγεθος τῆς μαγνητικῆς ροπῆς ἐξαρτᾶται ἀπό τή δομή τοῦ συστήματος. Ὅπως εἴδαμε, κατά τή συγκρότηση τοῦ ἀτόμου οἱ δυνατές καταστάσεις ἠλεκτρονίων συμπληρώνονται κατά ζεύγη ἔτσι ὥστε τόσο τά σπίν ὅσο καί οἱ τροχιακές στροφορμές νά ἀλληλοεξουδετερώνονται.. Μέ τόν τρόπο αὐτό στήν ὁλική στροφορμή καί κατ' ἐπέκταση στήν ὁλική μαγνητική διπολική ροπή τοῦ ἀτόμου συνεισφέρουν μόνο λίγα ἐξωτερικά ἠλεκτρόνια. Ἰδιαίτερα, ἡ συνεισφορά τοῦ σπίν προβλέπεται μηδενική γιά ἄτομα μέ ἄρτιο ἀριθμό ἠλεκτρονίων. Περιμένουμε ἑπομένως [βλ. ἐξ. (12.21) καί (12.25)] ὅτι ἡ μαγνητική ροπή ἑνός ἀτομικοῦ ἤ μοριακοῦ συστήματος θά εἶναι ἕνα μικρό πολλαπλάσιο τῆς ποσότητας $e\hbar/2m_e$. Ἡ ποσότητα αὐτή πού ἀπαντᾶται στή βιβλιογραφία μέ τήν ὀνομασία **μαγνετόνη Bohr** ἔχει στά δύο συστήματα μονάδων τήν τιμή

† Στήν ὁλική μαγνητική ροπή συνεισφέρει ἀκόμη ἡ τροχιακή κίνηση καί τό σπίν τῶν πρωτονίων καί οὐδετερονίων στό ἐσωτερικό τοῦ ἀτομικοῦ πυρήνα. Λόγω ὅμως τῆς κατά πολύ μεγαλύτερης μάζας τῶν νουκλεονίων ἡ συνεισφορά αὐτή εἶναι κατά τρεῖς περίπου τάξεις μεγέθους μικρότερη καί σέ πολύ καλή προσέγγιση μπορεῖ νά παραληφθεῖ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mu_B \equiv [c]\frac{e\hbar}{2m_e c} = 0.93 \times 10^{20} \text{ erg/G} = 0.93 \times 10^{-23} \text{ J/T}. \qquad (12.26)$$

12-2 Διαμαγνητισμός καί Παραμαγνητισμός

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα τήν ἀλληλεπίδραση τῆς μαγνητικῆς διπολικῆς ροπῆς ἑνός δομικοῦ λίθου τῆς ὕλης μέ ἕνα ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Θεωρώντας ἀρχικά τή μαγνητική ροπή πού δημιουργεῖται ἀπό τήν περιστροφή τῶν ἠλεκτρονίων γύρω ἀπό τόν πυρήνα μποροῦμε νά συμπεράνουμε ἀπό τό νόμο τῆς ἐπαγωγῆς ὅτι κατά τήν ἀνάπτυξη τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου θά δημιουργηθεῖ κατά τήν τροχιά τοῦ ἠλεκτρονίου ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο **E** σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (11.22). Τό ἠλεκτρικό αὐτό πεδίο θά ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νά ἐπιταχύνει (ἤ νά ἐπιβραδύνει) τό ἠλεκτρόνιο. Χρησιμοποιώντας τό νόμο τοῦ Lenz ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά δείξει ὅτι τό ἠλεκτρόνιο ἐπιταχύνεται (ἐπιβραδύνεται) ἄν ἡ μαγνητική ροπή πού δημιουργεῖ ἀρχικά ἡ περιστροφική του κίνηση εἶναι πρός τήν ἀντίθετη (πρός τήν ἴδια) φορά μέ τό ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο [βλ. Ἄσκηση 12-2]. Μετά τήν ὁλοκλήρωση τῆς μεταβολῆς καί τή σταθεροποίηση τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου σέ κάποια τιμή **B** ἡ ταχύτητα τοῦ ἠλεκτρονίου θά διαφέρει ἀπό τήν ἀρχική κατά μιά συγκεκριμένη ποσότητα Δυ. Σέ ἀντίθεση μέ τά μεταβατικά φαινόμενα ἐπαγωγῆς τοῦ Κεφαλαίου 11, ὅπου μελετήσαμε ροή ἠλεκτρονίων μέσα στήν ὕλη, ἡ αὔξηση (ἤ μείωση) τῆς ταχύτητας τοῦ ἠλεκτρονίου στήν ἀτομική τροχιά θά διατηρηθεῖ καθόλο τό χρόνο πού παραμένει σταθερό τό ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Καί τοῦτο διότι στόν κενό χῶρο δέν ὑπάρχει κανένας μηχανισμός ὥστε τό ἠλεκτρόνιο νά χάσει ἐνέργεια καί νά μειώσει τήν ταχύτητά του.

Ἡ μεταβολή τῆς ταχύτητας τοῦ ἠλεκτρονίου στήν ἀτομική τροχιά μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ εὔκολα στήν περίπτωση ὅπου τό ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο εἶναι κάθετο πρός τό ἐπίπεδο τῆς τοχιᾶς. Γιά μηδενικό ἐξωτερικό πεδίο τό ἠλεκτρόνιο κινεῖται σέ κυκλική ἀκτίνα r μέ ταχύτητα υ_0 πού προσδιορίζεται ἀπό τήν ἐξισορόπιση τῆς κεντρομόλου καί φυγόκεντρης δυνάμεως

$$m_e \frac{\upsilon_0^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Ze)\,e}{r^2}$$

ἤ

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}} \qquad (12.27)$$



ὅπου **Z** εἶναι ὁ ἀτομικός ἀριθμός τοῦ ἀτόμου. Μέ τήν παρουσία ἑνός ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** ἐπιδρᾶ ἐπιπλέον ἡ δύναμη Lorentz καί ἡ προηγούμενη συνθήκη παίρνει τή μορφή

$$m_e \frac{u^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} + euB. \tag{12.28}$$

Οἱ λύσεις τῆς τελευταίας ἐξισώσεως δεύτερου βαθμοῦ εἶναι

$$u = \frac{erB}{2m_e} \pm \sqrt{\frac{e^2r^2B^2}{4m_e} + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}} = \pm\sqrt{u_0^2 + \left(\frac{erB}{2m_e}\right)^2} + \frac{erB}{2m_e}$$

πού στήν περίπτωση ὅπου†

$$\left|\frac{erB}{2m_e}\right| << u_0 \tag{12.29}$$

παίρνουν τήν ἁπλή μορφή

$$u = \pm u_0 + \frac{erB}{2m_e}. \tag{12.30}$$

Τό ἐναλλακτικό πρόσημο στήν τελευταία σχέση ἀποτελεῖ τήν ποσοτική ἔκφραση τῆς διαπιστώσεως στήν ὁποία ὁδήγησε προηγουμένως ἡ ἐφαρμογή τοῦ νόμου τοῦ Lenz: Ἠλεκτρόνια μέ μαγνητική ροπή ἐξαιτίας τῆς τροχιακῆς κινήσεως παράλληλη (ἀντιπαράλληλη) πρός τό ἐξωτερικό πεδίο ἐπιβραδύνονται (ἐπιταχύνονται) κατά τήν ποσότητα††

$$\Delta u = \frac{erB}{2m_e}. \tag{12.31}$$

Ἀπό μιά ἐναλλακτική, ἀλλά ἰσοδύναμη, ἄποψη μποροῦμε νά θεωρήσουμε τή μεταβολή τῆς ταχύτητας τοῦ ἠλεκτρονίου πού προκαλεῖται ἀπό τήν ἀνάπτυξη τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** ὡς μεταβολή τοῦ ρεύματος πού συνεπάγεται ἡ περιφορά τοῦ ἠλεκτρονίου γύρω ἀπό τόν πυρή-

† Γιά τήν ἀριθμητική ἐπαλήθευση τῆς ἐξ. (12.29) βλ. Ἄσκηση 12-3.

†† Παρατηρεῖται ὅτι λόγω τοῦ ἀρνητικοῦ φορτίου e τοῦ ἠλεκτρονίου, ἡ ποσότητα τῆς ἐξ. (12.31) εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

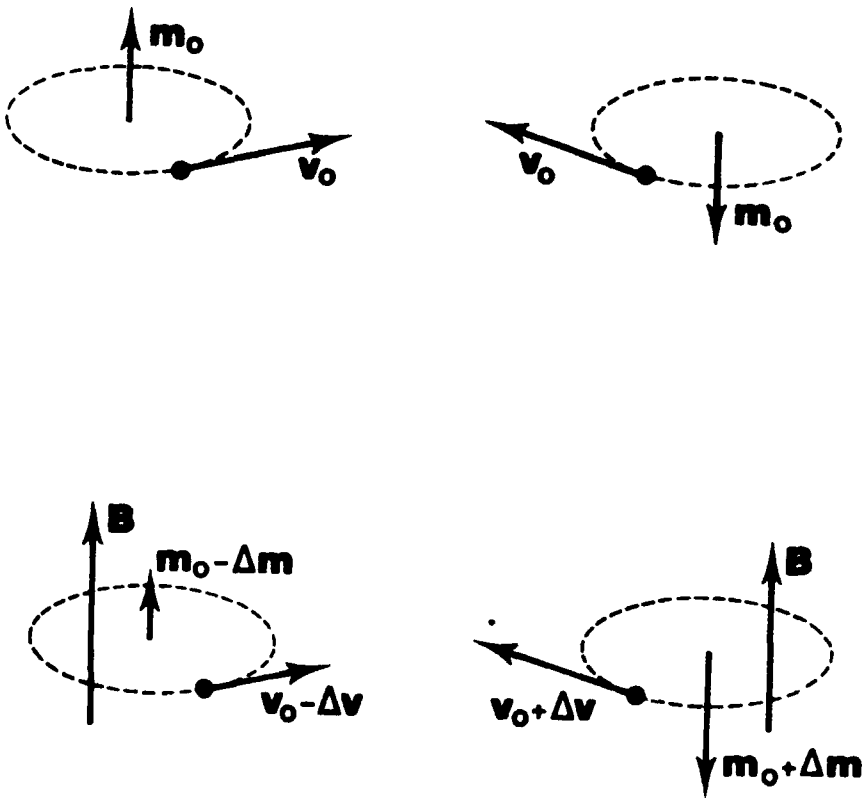
να. Ὑπό τήν ἄποψη αὐτή ἡ μεταβολή τοῦ ρεύματος πού συνεπάγεται ἡ ἐξ. (12.31) εἶναι

$$\Delta I = \frac{e\Delta v}{2\pi r} = \frac{e^2 B}{4\pi m_e}$$

καί ἔχει ὡς ἐπακόλουθο τή δημιουργία μαγνητικῆς διπολικῆς ροπῆς Δm μέ μέτρο

$$\Delta m = \Delta I \pi r^2 = \frac{e^2 B}{4m_e} r^2 \qquad (12.32)$$

ὅπου πr^2 εἶναι ἡ ἐπιφάνεια πού καθορίζει ἡ τροχιά τοῦ ἠλεκτρονίου. Ἡ διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος Δm δίνεται στό σχῆμα 12-3 γιά δύο τροχιές ἠλεκτρονίων μέ ἀντιπαράλληλη κίνηση καί συνεπῶς ἀντιπαράλληλη ἀρχική μαγνητική ροπή. Ὅπως παρατηρεῖται στό σχῆμα, καί στίς δύο περιπτώσεις



ΣΧΗΜΑ 12-3 Μεταβολή τῆς μαγνητικῆς διπολικῆς ροπῆς ἀτομικῆς τροχιᾶς ὑπό τήν ἐπίδραση ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μέ διεύθυνση κάθετη πρός τό ἐπίπεδο τῆς τροχιᾶς. Ἡ μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροπῆς Δm ἔχει φορά ἀντίθετη πρός τό μαγνητικό πεδίο **B** ἀνεξάρτητα ἀπό τή φορά περιστροφῆς τοῦ ἠλεκτρονίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τό ἄνυσμα Δm ἔχει φορά ἀντίθετη πρός τή φορά τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Στήν προηγούμενη ἀνάλυση θεωρήσαμε ἀποκλειστικά κυκλικές ἡλεκτρονικές τροχιές κάθετες πρός τή διεύθυνση τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Εἶναι ἀρκετά εὔκολο νά γενικεύσουμε τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (12.32) ὥστε νά συμπεριλάβει περισσότερο ρεαλιστικές καταστάσεις. Γιά μή κυκλικές τροχιές (π.χ. ἐλλειπτικές) ἡ ποσότητα r^2 μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό τό τετράγωνο τῆς μέσης ἀκτίνας τοῦ ἡλεκτρονίου ἀπό τόν πυρήνα $\bar{r}^2$. Κατά τόν ἴδιο τρόπο, γιά κεκλιμένες τροχιές, ἡ ἀκτίνα r μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό τή μέση ἀκτίνα $\bar{\rho}$ τῆς προβολῆς τῆς τροχιᾶς στό ἰσημερινό ἐπίπεδο τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Στήν τελευταία περίπτωση ἡ γεωμετρία δίνεται στό σχῆμα 12-4. Ἄν τό μαγνητικό πεδίο βρίσκεται κατά τόν ἄξονα z ἡ μέση ἀκτίνα τῆς προβολῆς $\bar{\rho}$ μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

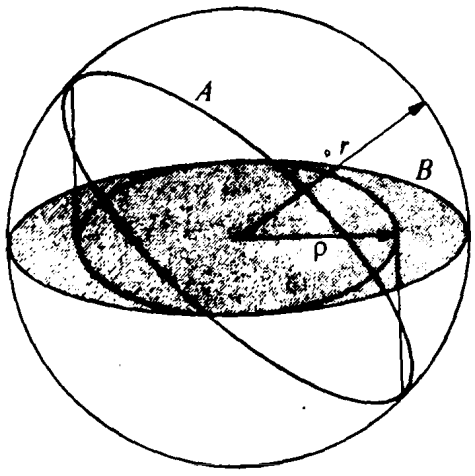
$$\bar{\rho}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \tag{12.33}$$

ὅπου σέ προφανή συμβολισμό $\bar{x}$, $\bar{y}$ καί $\bar{z}$ εἶναι οἱ προβολές τῆς μέσης ἀποστάσεως

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}$$

πρός τούς τρεῖς ἄξονες. Γιά κατανομή ἡλεκτρονίων γύρω ἀπό τόν πυρῆνα μέ σφαιρική συμμετρία

$$\bar{x}^2 = \bar{y}^2 = \bar{z}^2 = \frac{1}{3}\bar{r}^2 \tag{12.34}$$



ΣΧΗΜΑ 12-4 Προβολή κεκλιμένης τροχιᾶς A στό ἰσημερινό ἐπίπεδο B μαγνητικοῦ πεδίου μέ κατακόρυφη διεύθυνση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

οι έξ. (12.33) καί (12.34) δίνουν

$$\bar{\rho}^2 = \frac{2}{3}\bar{r}^2. \tag{12.35}$$

Θά γράψουμε έπομένως γιά τή μαγνητική ροπή πού συνεισφέρει κάθε ατομική τροχιά μέ οποιοδήποτε σχήμα καί οποιαδήποτε κλίση ώς πρός τό μαγνητικό πεδίο

$$\Delta m = \frac{e^2B}{4m_e}\bar{\rho}^2 = \frac{e^2B}{6m_e}\bar{r}^2. \tag{12.36}$$

Η εικόνα πού άναδεικνύεται άπό τήν προηγούμενη άνάλυση εἶναι άρκετά σαφής. Κατά τήν άπουσία μαγνητικοῦ πεδίου κάθε δομικός λίθος τῆς ὕλης διαθέτει μιά μαγνητική ροπή $\mathbf{m}_0$ πού προέρχεται άπό τήν τροχιακή κίνηση τῶν ήλεκτρονίων του (θά άγνοήσουμε πρός τό παρόν τή συμβολή τοῦ σπίν). Καθόσον στό χῶρο δέν ὑπάρχει κάποια προτιμητέα διεύθυνση, περιμένουμε ἰσοτροπική κατανομή τῶν άνυσμάτων $\mathbf{m}_0$ ώς πρός τή διεύθυνση καί φορά. Ἔτσι περιμένουμε ὅτι κατά τήν άπουσία μαγνητικοῦ πεδίου ή όλική μαγνητική ροπή τῆς μακροσκοπικῆς ὕλης θά μηδενίζεται. Μέ τήν άνάπτυξη μαγνητικοῦ πεδίου στό χῶρο, κάθε ήλεκτρονική τροχιά, *άνεξάρτητα άπό τή διεύθυνσή της στό χῶρο,* συνεισφέρει μαγνητική ροπή $\Delta\mathbf{m}$ *μέ διεύθυνση καί φορά πάντα άντιπαράλληλη πρός τό μαγνητικό πεδίο.* Η συνεισφορά κάθε άτόμου μέ Z ήλεκτρόνια εἶναι κατά μέτρο†

$$\Delta m = \frac{Ze^2B}{6m_e}\bar{r}^2 \tag{12.37}$$

μέ άποτέλεσμα μακροσκοπική ὕλη μέ N άτομα νά ἐμφανίζει όλική μαγνητική ροπή

$$M_\delta = N\frac{Ze^2B}{6m_e}\bar{r}^2. \tag{12.38}$$

Στό φαινόμενο αὐτό πού ἐμφανίζεται σέ κάθε ὑλικό ὅταν στό χῶρο ὑπάρχει μαγνητικό πεδίο θά άναφερθοῦμε μέ τόν ὅρο **διαμαγνητισμός.**

---

† Στίς έξ. (12.37) καί (12.38) ή ποσότητα $\bar{r}^2$ άντιπροσωπεύει τό τετράγωνο τῆς μέσης άποστάσεως τῶν ήλεκτρονίων τοῦ άτομικοῦ συστήματος άπό τό πυρήνα. Η ποσότητα αὐτή μέ άριθμητική τιμή τῆς τάξης $\sqrt{\bar{r}^2} \simeq 0.5 \times 10^{-8}$ cm μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ μόνο στά πλαίσια τῆς κβαντικῆς θεωρίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἂς γυρίσουμε τώρα τήν προσοχή μας στή μόνιμη μαγνητική διπολική ροπή $\mathbf{m}_0$ πού διαθέτει κάθε δομικός λίθος. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι:

1. Ἡ προέλευση τῆς μαγνητικῆς αὐτῆς διπολικῆς ροπῆς ὀφείλεται στήν τροχιακή στροφορμή καί τό σπίν λίγων μόνον ἀτομικῶν ἠλεκτρονίων στίς τελευταῖες ἐξωτερικές τροχιές. Ἰδιαίτερα, λόγω τῆς ἀπόλυτης συζεύξεως τῶν ἠλεκτρονίων, περιμένουμε μηδενική συνεισφορά ἀπό τό σπίν σέ ἄτομα ἤ μόρια μέ ἄρτιο ἀριθμό ἠλεκτρονίων†.
2. Σέ συνήθεις θερμοκρασίες ἡ διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος $\mathbf{m}_0$ εἶναι ὁμοιόμορφα κατανεμημένη στό χῶρο.

Ἡ ὕπαρξη ἑνός μαγνητικοῦ πεδίου **B** ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (9.11), τήν ἄσκηση μιᾶς ροπῆς

$$\mathbf{N} = \mathbf{m}_0 \times \mathbf{B} \tag{12.39}$$

πού τείνει νά εὐθυγραμμίσει τά ἀνύσματα $\mathbf{m}_0$ καί **B**. Στήν προσπάθεια αὐτή ἀντιτίθεται βέβαια ἡ συνεχής θερμική κίνηση τῶν δομικῶν λίθων πού τείνει νά ἐπαναφέρει τήν κατάσταση ἰσοτροπικῆς κατανομῆς τοῦ ἀνύσματος $\mathbf{m}_0$ πρός ὅλες τίς διευθύνσεις. Τό ἀποτέλεσμα εἶναι μιά δυναμική ἰσορροπία στήν ὁποία ἡ μέση προβολή m_B τῆς μαγνητικῆς διπολικῆς ροπῆς πρός τή διεύθυνση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή μέση προβολή πρός οποιαδήποτε ἄλλη διεύθυνση. Ὅπως καί κατά τό φαινόμενο τοῦ διαμαγνητισμοῦ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ εὐθυγράμμιση αὐτή, πού θά ἀποδώσουμε μέ τόν ὅρο **παραμαγνητισμός**, εἶναι ἀνάλογη πρός τό μέτρο τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου B. Θά γράψουμε ἑπομένως σέ ἀναλογία μέ τήν ἐξ. (12.36)

$$m_B = \alpha B \tag{12.40}$$

ἄν καί στήν περίπτωση αὐτή δέν θά ἐξάγουμε τήν ἀναλυτική μορφή τοῦ συντελεστῆ ἀναλογία α πού ἀπαιτεῖ ἔννοιες τῆς Στατιστικῆς Μηχανικῆς. Κατ' ἐπέκταση, σέ ἀναλογία μέ τήν ἐξ. (12.38), θά γράψουμε τήν ὁλική μαγνητική ροπή πού ἐμφανίζει λόγω τοῦ παραμαγνητισμοῦ ἡ μακροσκοπική ὕλη ὡς

$$M_\pi = N\alpha B. \tag{12.41}$$

---

† Ὁ κανόνας αὐτός ἔχει ἀρκετές ἐξαιρέσεις ἰδιαίτερα στήν περίπτωση τῶν μορίων. Τό μόριο τοῦ ὀξυγόνου O_2 π.χ. μέ 16 ἠλεκτρόνια διαθέτει δύο ἀσύζευκτα ἠλεκτρόνια μέ παράλληλα σπίν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

12-3 Μαγνήτιση καί τό Πεδίο Μαγνητίσεως

Τά δύο άντιμαχόμενα φαινόμενα τοῦ διαμαγνητισμοῦ καί παραμαγνητισμοῦ ἔχουν ὡς ἀποτέλεσμα τή δημιουργία σέ κάθε ὑλικό μιᾶς μαγνητικῆς διπολικῆς ροπῆς **M** μέ διεύθυνση κατά τή διεύθυνση τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** καί φορά ἀντιπαράλληλη ἤ παράλληλη, ἄν ὑπερισχύει τό πρῶτο ἤ τό δεύτερο φαινόμενο. Σέ ἀναλογία ἑπομένως μέ τήν ἠλεκτρική πόλωση **P**(r) {βλ. ἐξ. (3.23)}, πού περιγράφει τήν ἐπίδραση ἑνός ἐξωτερικοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, θά ὁρίσουμε ἐδῶ τή **μαγνητική πόλωση M**(r), ὡς τή μέση μαγνητική διπολική ροπή ἀνά μονάδα ὄγκου πού ἐμφανίζεται σέ ἕνα ὑλικό μέ τήν ὕπαρξη ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Γιά τό ἄνυσμα **M**(r) θά χρησιμοποιήσουμε ἐναλλακτικά καί τόν ὅρο **μαγνήτιση**†. Ἐπακόλουθο τῆς μαγνητικῆς πολώσεως βέβαια εἶναι ἡ ἀνάπτυξη δευτερογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου σύμφωνα μέ τήν ἔκφραση τῆς ἐξ. (12.8).

Εἶναι φανερό ἀπό τά προηγούμενα ὅτι ἄν στό χῶρο ὑπάρχει ὕλη, ἡ μετάβαση ἀπό τήν ἀρχική κατάσταση μέ μαγνητικό πεδίο **B** = 0 σέ κάποια τελική κατάσταση μέ πεπερασμένη τιμή **B** τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι ἀρκετά πολύπλοκη διεργασία. Ἡ ἀνάπτυξη μαγνητικοῦ πεδίου σημαίνει ὅτι στόν κενό χῶρο ἤ στό ἐσωτερικό τῆς ὕλης δημιουργεῖται ἀπό ἐξωτερικές πηγές μιά πυκνότητα ρεύματος **J**(r). Τοῦτο ἔχει ὡς ἐπακόλουθο τή μαγνήτιση τῆς ὕλης καί τή δημιουργία δευτερογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, τό ὁποῖο σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Lenz, ἀντιτίθεται στήν ἀνάπτυξη τοῦ ἀρχικοῦ πεδίου (ἤ ἰσοδύναμα ὑποχρεώνει τίς ἐξωτερικές πηγές ρεύματος νά παράγουν μεγαλύτερο ἔργο). Θά ἐπανέλθουμε ἀργότερα στό θέμα τῆς ἐνεργείας πού καταναλώνεται κατά τή μεταβατική αὐτή περίοδο. Πρός τό παρόν θά ἀγνοήσουμε τήν προϊστορία τῆς τελικῆς καταστάσεως καί θά ἐξάγουμε τίς ἐξισώσεις τοῦ μακροσκοπικοῦ πεδίου **B** στήν κατάσταση ὅπου ἡ κατανομή ρεύματος **J**(r) καί ἡ μαγνήτιση **M**(r) ἔχουν καταλάβει τίς τελικές τους τιμές. Τό ἀνυσματικό δυναμικό πού περιγράφει τή σταθερή αὐτή κατάσταση μπορεῖ νά γραφεῖ ἀμέσως ἀπό τίς ἐξ. (9.57) καί (9.76) ὡς

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\right] \left([c] \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' + \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3r' \right). \quad (12.42)$$

† Κατ' ἐπέκταση θά ὀνομάσουμε **μαγνητισμένο ὑλικό** κάθε ὑλικό πού ἐμφανίζει μή μηδενική μαγνήτιση **M**(r).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ συνεισφορά τῆς μαγνητικῆς πολώσεως στή διαμόρφωση τοῦ ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ μπορεῖ νά γραφεῖ σέ ἐναλλακτική μορφή μέ τό μετασχηματισμό τοῦ δεύτερου ὁλοκληρώματος ὡς

$$\int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3r' = \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' \qquad (12.43)$$

ὅπου ὁ τόνος στόν τελεστή ∇' δηλώνει παραγώγιση μόνο ὡς πρός τή μεταβλητή $\mathbf{r}'$. Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τήν ταυτότητα τοῦ ἀνυσματικοῦ λογισμοῦ

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{M}) = \nabla\varphi \times \mathbf{M} + \varphi \nabla \times \mathbf{M} \qquad (12.44)$$

τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (12.43) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' = \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' - \int \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'. \qquad (12.45)$$

Τό τελευταῖο ὁλοκλήρωμα μπορεῖ τώρα νά μετασχηματιστεῖ σέ ὁλοκλήρωμα ἐπιφανείας τῆς συναρτήσεως $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{M}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, τό ὁποῖο, γιά ὑλικό μέ πεπερασμένες διαστάσεις, μηδενίζεται. Ἔτσι ἡ ἐξ. (12.42) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} c\right] \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \left[\frac{1}{c}\right] c\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'. \qquad (12.46)$$

Σέ σύγκριση μέ τήν ἐξ. (9.57) ἡ τελευταία ἔκφραση ἀναδεικνύει μιά σημαντική ἰδιότητα. Ἡ συνεισφορά τῆς μαγνητικῆς πολώσεως $\mathbf{M}$ στό ἀνυσματικό δυναμικό εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή συνεισφορά μιᾶς κατανομῆς ρεύματος

$$\mathbf{J}_M = \left[\frac{1}{c}\right] c\nabla \times \mathbf{M}. \qquad (12.47)$$

Σέ ἐντελῶς παράλληλο χειρισμό μέ τά ἠλεκτρικά φαινόμενα τῆς ὕλης μποροῦμε ἐπομένως νά περιγράψουμε τήν παρουσία ὑλικῶν στήν περιοχή μαγνητικοῦ πεδίου μέ τήν ἀνάπτυξη **δέσμιων ρευμάτων** στό ὑλικό μέ κατανομή πυκνότητας $\mathbf{J}_M(\mathbf{r})$ πού δίνεται στήν ἐξ. (12.47).

Ἡ ἐξίσωση πού διέπει τώρα τό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό τό ἀνυσματικό δυναμικό τῆς ἐξ. (12.46)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r' \qquad (12.48)$$

καί τή σχέση $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ή Ισοδύναμα χρησιμοποιώντας στήν έξ. (9.40) τό όλικό ρεῦμα $\mathbf{J} + \mathbf{J}_M$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M)$$

$$= \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{4\pi}{c}\, \mathbf{J} + \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\right] 4\pi \nabla \times \mathbf{M}. \qquad (12.49)$$

Ὁ ἀνάλογος χειρισμός ἡλεκτρικῶν καί μαγνητικῶν φαινομένων τῆς ὕλης μπορεῖ ἀκόμη νά ἐπεκταθεῖ μέ τήν ἀπομόνωση τῶν ἰδιοτήτων πού ἀποκτᾶ ὁ χῶρος ἀποκλειστικά λόγω τῶν ἐλεύθερων ρευμάτων. Ὑπενθυμίζεται ὅτι κατά τήν ἐξέταση ἡλεκτρικῶν φαινομένων, ἡ ἐξ. (3.35) μᾶς ἔδωσε τή δυνατότητα νά εἰσάγουμε τήν ἡλεκτρική μετατόπιση **D**, ἔτσι ὥστε γιά μιά κατανομή ἐλεύθερων φορτίων $\rho(\mathbf{r})$ οἱ ἀνυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ καί $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ νά ἱκανοποιοῦν ἀντίστοιχα τίς ἴδιες διαφορικές ἐξισώσεις στόν κενό χῶρο ἤ σέ χῶρο πού περιέχει κάποιο ὑλικό. Σέ πλήρη ἀναλογία μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἐξ. (12.49) ὡς

$$\nabla \times \left(\mathbf{B} - \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\right] 4\pi \mathbf{M}\right) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{4\pi}{c}\, \mathbf{J} \qquad (12.50)$$

καί σέ ἀντιστοιχία μέ τήν ἡλεκτρική μετατόπιση **D** [βλ. ἐξ. (3.37)] νά ὁρίσουμε τό ἄνυσμα **H**

$$\mathbf{H} = \left[\frac{1}{\mu_0}\right] \mathbf{B} - \left[\frac{1}{4\pi}\right] 4\pi \mathbf{M} \qquad (12.51)$$

πού ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left[\frac{c}{4\pi}\right] \frac{4\pi}{c}\, \mathbf{J}. \qquad (12.52)$$

Ἡ ἀνυσματική συνάρτηση $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ πού ὁρίσαμε στήν ἐξ. (12.51) ἀπαντᾶται στή βιβλιογραφία μέ διάφορες ὀνομασίες ὅπως **μαγνητίζουσα δύναμη** (ἤ **δύναμη μαγνητίσεως**), **μαγνητική ἔνταση** ἤ **μαγνητικό πεδίο**. Ὅπως, γιά πολλά ἄλλα φυσικά μεγέθη πιστεύουμε ὅτι ὅλες οἱ προηγούμενες ὀνομασίες εἶναι ἀτυχεῖς. Ἀφενός προκαλοῦν σύγχιση μέ τό φυσικό μέγεθος τῆς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δυνάμεως, ἐνῶ τό πραγματικό *μαγνητικό πεδίο*, σέ ἀναλογία μέ τό ἠλεκτρικό πεδίο **E**, εἶναι ἡ συνάρτηση **B**(r) πού ἤδη ἔχουμε μελετήσει διεξοδικά. Γιά τήν ἀπόδοση τῆς συναρτήσεως **H**(r) πού ὁρίζεται στήν ἐξ. (12.51) θά προτιμήσουμε τήν ὀνομασία† **πεδίο μαγνητίσεως.** Θά χρησιμοποιήσουμε ἀκόμη ἐναλλακτικά τήν (ὁμολογουμένως ἄχαρη) ὀνομασία **πεδίο H** πού ἀκολουθεῖται σέ ὁρισμένα σύγχρονα συγγράμματα.

Οἱ μονάδες μετρήσεως τῆς μαγνητικῆς πολώσεως **M**(r) καί τοῦ πεδίου **H**(r) διαφέρουν ὡς συνήθως στά δύο ἐπικρατέστερα συστήματα. Στό σύστημα CGS, ὅπου σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (12.51)

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \tag{12.53}$$

ἡ μαγνήτιση **M** καί τό πεδίο μαγνητίσεως **H** μετροῦνται στίς ἴδιες μονάδες μέ τό μαγνητικό πεδίο **B**. Ἔτσι ἡ φυσική μονάδα μετρήσεως τοῦ πεδίου μαγνητίσεως στό σύστημα CGS εἶναι τό gauss (= 1 dyn/ΗΣΜ—φ). Κατά γενική πρακτική ἔχει ἐπικρατήσει ἡ μονάδα αὐτή νά ὀνομάζεται **œsterd** (Oe) ὅταν ἀναφέρεται σέ μέτρηση τοῦ Πεδίου **H**.

Στό σύστημα SI ἡ ἀντίστοιχη μονάδα μετρήσεως μπορεῖ νά ὁριστεῖ ἀπό τή σύνδεση μεταξύ ἐλεύθερου ρεύματος καί τοῦ πεδίου μαγνητίσεως. Σέ ἀναλογία μέ τό νόμο τοῦ Ampère {βλ. ἐξ. (9.46)} μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἐξ. (12.52) ὑπό μορφή ὁλοκληρώματος στό σύστημα SI ὡς

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I \tag{12.54}$$

---

† Στό σημεῖο αὐτό θά πρέπει νά παρατηρήσουμε ὅτι ἡ ἀπόδοση τοῦ πεδίου μαγνητίσεως μέ τήν ὀνομασία *μαγνητικό πεδίο* δέν εἶναι, ἀπό μιά ἄποψη, τελείως ἀδικαιολόγητη. Ἄν καί οἱ συναρτήσεις **D**(r) καί **H**(r) παίζουν ἀνάλογο ρόλο στήν περιγραφή τῶν ἠλεκτρικῶν καί μαγνητικῶν φαινομένων, ἀποδίδοντας τίς ἰδιότητες πού ἀποκτᾶ ὁ χῶρος μέ πηγή ἀντίστοιχα τό ἐλεύθερο φορτίο καί ἐλεύθερο ρεῦμα, ὑπάρχει, ἀπό καθαρά τεχνολογική ἄποψη, μιά οὐσιαστική διαφορά. Στήν πράξη μιά ἠλεκτρομαγνητική διάταξη ἀναπτύσσεται καί ἐλέγχεται μέ βάση τό δυναμικό καί τό ρεῦμα. Οἱ συσκευές πού χρησιμοποιοῦνται στό ἐργαστήριο καί στή βιομηχανία ἔχουν τή δυνατότητα νά ἀναπτύσσουν ἐλεγχόμενη διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ ἀγωγῶν ἤ νά διοχετεύουν ἐλεγχόμενο ρεῦμα. Ἀντίθετα ἡ μέτρηση ἤ ὁ ἔλεγχος τοῦ ἐλεύθερου φορτίου εἶναι συνήθως πολύ δύσκολος ἤ ἀδύνατος. Ἔτσι οἱ ἰδιότητες πού ἀποκτᾶ ὁ χῶρος μέ τή διοχέτευση ρευμάτων (καί ἀποδίδεται ἀπό τή συνάρτηση **H**(r)) ἀποκτᾶ τεχνολογικό ἐνδιαφέρον ἐνῶ ἡ ἰδιότητα τοῦ χώρου μέ προέλευση τό ἐλεύθερο φορτίο (καί ἀντίστοιχη ἀπόδοση ἀπό τή συνάρτηση **D**(r)) μεταπίπτει στό ἐπίπεδο θεωρητικοῦ καί αἰσθητικοῦ ἐνδιαφέροντος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου I εἶναι τό ἐλεύθερο ρεῦμα πού περιβάλλεται ἀπό τό δρόμο τῆς ὁλοκληρώσεως C. Ἀπό τήν ἐξ. (12.54) ἡ μονάδα μετρήσεως τοῦ πεδίου μαγνητίσεως μπορεῖ νά ἀναγνωριστεῖ ὡς τό A/m. Ἡ σύνδεση μεταξύ τῶν μονάδων μετρήσεων στά δύο συστήματα εἶναι

$$1 \text{ A/m} = 4\pi \times 10^{-3} \text{ Oe.} \tag{12.55}$$

Στίς συνήθεις πειραματικές διατάξεις, γιά καθαρά πρακτικούς λόγους, τό ὁλικό ρεῦμα I πού περιβάλλεται ἀπό τό δρόμο C στήν ἐξ. (12.54) διαρρέει ἕνα ἀριθμό ὁμοιων ἀγωγῶν. Σέ ἕνα πηνίο μέ n σπεῖρες π.χ. τό ὁλικό ἐλεύθερο ρεῦμα πού πρέπει νά χρησιμοποιηθεῖ στήν ἐξ. (12.54) εἶναι ἡ ποσότητα nI, ὅπου I τό ρεῦμα πού διαρρέει τό πηνίο. Ἀπό τό γεγονός αὐτό ἡ μονάδα μετρήσεως τοῦ πεδίου **H** ἀναφέρεται ὁρισμένες φορές καί ὡς **ἀμπεροστροφές ἀνά μέτρο** (At/m).

12-4 Μαγνητική Διαπερατότητα καί Μαγνητική Ἐπιδεκτικότητα

Οἱ δύο βασικοί μηχανισμοί πού προκαλοῦν μαγνήτιση τῆς ὕλης, ὁ διαμαγνητισμός καί ὁ παραμαγνητισμός, ἔχουν ὅπως εἴδαμε στήν Παράγραφο 12-2 μιά κοινή ἰδιότητα: Ἡ μαγνητική πόλωση **M** πού ἀναπτύσσεται στήν ὕλη εἶναι ἀνάλογη πρός τό μαγνητικό πεδίο **B**. Κατ' ἐπέκταση, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (12.51), ἀναμένεται ἀναλογία μεταξύ τοῦ πεδίου **H** καί τῆς μαγνητικῆς πολώσεως **M** καθώς καί μεταξύ τοῦ πεδίου **H** καί τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B**. Σέ ἀναλογία ἐπομένως μέ τίς ἐξ. (3.42) καί (3.43)

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \tag{3.42}$$

καί

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{3.43}$$

πού περιγράφουν τά ἡλεκτρικά φαινόμενα τῆς ὕλης θά μπορούσαμε νά γράψουμε γιά τήν περιγραφή ἀντίστοιχων μαγνητικῶν φαινομένων

$$\mathbf{M} = \alpha \mathbf{B} \tag{12.56}$$

καί

$$\mathbf{H} = \beta \mathbf{B} \tag{12.57}$$

ὅπου α καί β εἶναι σταθερές (ἤ γενικότερα συναρτήσεις τοῦ πεδίου **B**) πού

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χαρακτηρίζουν τό ὑλικό. Δυστυχῶς γιά καθαρά Ιστορικούς λόγους ὁ παράλληλος αὐτός χειρισμός τῶν μαγνητικῶν καί ἠλεκτρικῶν Ιδιοτήτων τῆς ὕλης δέν εἶναι ὁ καθιερωμένος. Ἡ ἀναλογία τῆς ἐξ. (12.56) ἐκφράζεται μέ τήν ἀπευθείας ἀναλογία μεταξύ τῶν ἀνυσμάτων **M** καί **H**

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{12.58}$$

ὅπου στό συντελεστή χ_m ἔχει δοθεῖ ἡ ὀνομασία **μαγνητική ἐπιδεκτικότητα,** ἐνῶ ἡ δεύτερη ἀναλογία τῆς ἐξ. (12.57) ἀποδίδεται ἀπό τήν ἀντίστροφη σχέση

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{12.59}$$

ὅπου μ εἶναι ἡ **μαγνητική διαπερατότητα** τοῦ ὑλικοῦ. Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (12.51) οἱ δύο τελεστές μ καί χ_m συνδέονται μέ τή σχέση

$$1 = \left[\frac{1}{\mu_0}\right] \mu - \left[\frac{1}{4\pi}\right] 4\pi\chi_m. \tag{12.60}$$

Στά δύο συστήματα μονάδων μετρήσεως ἡ τελευταία σχέση παίρνει τή μορφή

CGS: $$\mu = 1 + 4\pi\chi_m \tag{12.61}$$

SI: $$\chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} - 1 = K_m - 1 \tag{12.62}$$

ὅπου στήν τελευταία σχέση, σέ ἀναλογία μέ τήν ἐξ. (3.45), ἔχουμε ὁρίσει στό σύστημα SI τήν ἀδιάστατη ποσότητα

$$K_m \equiv \frac{\mu}{\mu_0} \tag{12.63}$$

στήν ὁποία θά ἀναφερθοῦμε μέ τόν ὅρο **σχετική μαγνητική διαπερατότητα.**

Ὅπως φαίνεται ἀπό τήν ἐξ. (12.59), στό σύστημα CGS οἱ συντελεστές μ καί χ_m εἶναι ἀδιάστατες ποσότητες. Στόν κενό χῶρο, ὅπου ἡ μαγνήτιση **M** εἶναι ἴση μέ τό μηδέν, δέν ὑπάρχει οὐσιαστική διαφορά μεταξύ τῶν ἀνυσμάτων **B** καί **H** καί ἡ μαγνητική διαπερατότητα μ εἶναι ἴση μέ τή μονάδα. Ἀντίθετα στό σύστημα SI ὅπου τά πεδία **B** καί **H** ἔχουν διαφορετικές διαστάσεις, ἀκόμη καί στόν κενό χῶρο Ισχύει ἡ σχέση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{12.64}$$

πού προσδίδει στή σταθερά μ_0 τήν όνομασία *μαγνητική διαπερατότητα στό κενό.*

Ἴσως εἶναι χρήσιμο νά ὑπενθυμίσουμε ὅτι ἡ μαγνητική διαπερατότητα στό κενό μ_0 δέν εἶναι σταθερά τῆς φύσης ἀλλά μιά ἰδιομορφία τοῦ συστήματος μονάδων SI. Προκύπτει ἀπό τόν αὐθαίρετο ὁρισμό ἰδιαίτερης μονάδας γιά τό ἠλεκτρικό φορτίο καί τήν πειραματικά παρατηρούμενη σχετική ἔνταση μεταξύ τοῦ πρώτου καί δεύτερου ὅρου τῆς ἐξ. (9.7) [βλ. ἐξ. (9.7) — (9.13)]. Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (9.12) ἡ ἀριθμητική της τιμή μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ ἀπό τήν ἀντίστοιχη ἠλεκτρική διαπερατότητα καί τήν ταχύτητα τοῦ φωτός. Τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐξ. (9.13) θά ἐπαληθεύσουμε† στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 12-1. ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΔΙΑΠΕΡΑΤΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΚΕΝΟ

Χρησιμοποιώντας τή διάταξη τοῦ σχήματος 11-1 συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 11-3. Μέ τό κύκλωμα προστασίας τοῦ γαλβανομέτρου P ρυθμισμένο γιά μικρή εὐαισθησία κλείστε τό διακόπτη S στή θέση AA καί ἀναπτύξτε δυναμικό V ἔτσι ὥστε τό πηνίο Π νά διαρρέει ἀπό ρεῦμα I = 2 A. Μεταθέστε τό διακόπτη S ἀπό τή θέση AA στή θέση BB καί παρατηρεῖστε τή μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Ρυθμίστε τήν εὐαισθησία τοῦ κυκλώματος προστασίας ἔτσι ὥστε ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου κατά τήν προηγούμενη διεργασία νά εἶναι περίπου 20 cm.

Χωρίς νά μεταβάλετε πλέον τή ρύθμιση εὐαισθησίας τοῦ γαλβανομέτρου μειῶστε τό ρεῦμα τοῦ πηνίου Π καί παρατηρεῖστε τήν ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου ὅταν ὁ διακόπτης S μετατίθεται ἀπό τή θέση AA στή θέση BB γιά διάφορες τιμές τοῦ ρεύματος στήν περιοχή $0.5\ \text{A} < I < 2.0\ \text{A}$. Καταγράψτε τά ἀποτελέσματά σας σέ κατάλληλο πίνακα. Τό πεδίο H στό κέντρο ἑνός πηνίου μέ μεγάλες διαστάσεις μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό τήν ὁλοκλήρωση τῆς ἐξ. (12.54). Δεῖξτε ὅτι σέ πολύ καλή προσέγγιση

† Παρατηρεῖται ὅτι στήν πραγματικότητα τό Πείραμα 12-1 μετρᾶ τή μαγνητική διαπερατότητα στόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα μ_a. Καθόσον ὅμως ἡ μαγνητική ἐπιδεκτικότητα τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα εἶναι πολύ μικρή ($\chi_m \simeq 10^{-4}$) ἡ διαφορά μεταξύ μ_0 καί μ_a βρίσκεται ἔξω ἀπό τή διακριτική ἱκανότητα τῆς μετρήσεως.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



$$H \qquad (2.65)$$

ὅπου N καί ℓ εἶναι ἀντίστοιχα ὁ ἀριθμός τῶν σπειρῶν καί τό μῆκος τοῦ πηνίου Π. Σέ μιά τρίτη στήλη τοῦ πίνακα δεδομένων ὑπολογίστε τό πεδίο H πού δημιουργεῖ στήν περιοχή τοῦ πηνίου π ἡ ροή ρεύματος I.

Χρησιμοποιώντας τό κύκλωμα 11-2 καί τή διεργασία πού περιγράφεται στό Πείραμα 11-1 προσδιορίστε, γιά τή ρύθμιση τοῦ κυκλώματος προστασίας P μέ τήν ὁποία ἐκτελέσατε μέχρι τό σημεῖο αὐτό τό πείραμα, τήν εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό φορτίο S_q.

Ἀποσυνδέστε τό κύκλωμα προστασίας τοῦ γαλβανομέτρου ἀπό τήν ὅλη διάταξη καί μέ ἕνα ὠμόμετρο μετρεῖστε τήν ἐσωτερική του ἀντίσταση R_p. Σημειῶστε ἀκόμη τήν ἐσωτερική ἀντίσταση R_g τοῦ γαλβανομέτρου πού ἀναγράφεται ἀπό τόν κατασκευαστή στό περίβλημα τοῦ ὀργάνου. Ἀπό τά δεδομένα αὐτά καί τίς διαστάσεις τοῦ πηνίου π ὑπολογίστε τήν εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου ὡς πρός τό πεδίο S_B {βλ. ἐξ. (11.16) καί (11.20)}. Σέ μιά τέταρτη στήλη τοῦ πίνακα δεδομένων μετατρέψτε τίς μετρήσεις ἀποκλίσεως τοῦ γαλβανομέτρου σέ τιμές μαγνητικοῦ πεδίου B.

– Ὑπολογίστε σέ μιά τελευταία στήλη τοῦ πίνακα δεδομένων τό λόγο

$$\mu_0 = \frac{B}{H}\,.$$

Ὑπολογίστε τό μέσο ὅρο τῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας στό κενό καί τό πειραματικό σφάλμα πού προκύπτει ἀπό τίς μετρήσεις σας. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμά σας μέ τήν τιμή τῆς ἐξ. (9.13) καί σχολιάστε τυχόν ἀποκλίσεις.

Σέ ἀναλογία μέ τίς ἐξ. (3.47) ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά δείξει εὔκολα ὅτι οἱ ἀριθμητικές τιμές τῶν συντελεστῶν μ καί χ_m στά δύο συστήματα μονάδων ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις

$$K_m\Big|_{SI} = \mu\Big|_{CGS} \qquad (12.66\alpha)$$

$$\chi_m\Big|_{SI} = 4\pi\chi_m\Big|_{CGS}\,. \qquad (12.66\beta)$$



ΠΙΝΑΚΑΣ 12-1 Μαγνητική έπιδεκτικότητα γιά διάφορα ύλικά.

Ύλικό	Συνθῆκες	Χm $\times 10^{-6}$ (CGS)
όξείδιο τοῦ άργιλίου, Al_2O_3	20°C	−0.098
νερό, H_2O	−120–0°C, στερεό	−0.699
άμμωνία, NH_3	16°C, άέριο	−1.1
άργό A	20°C, άέριο	−0.45
βισμούθιο, Bi	18°C	−1.35
βόριο, B	18°C	−0.52
κάδμιο, Cd	18°C	−0.18
άσβέστιο, Ca	18°C	1.10
άδάμας, C	20°C	−0.49
γραφίτης, C	20°C	−3.5
διοξείδιο τοῦ άνθρακα, CO_2	20°C, άέριο	−0.423
χλώριο, Cl	−60°C, ύγρό	−0.57
χρώμιο, Cr	18°C	3.6
χλωριοῦχο χρώμιο, $CrCl_3$	19°C	44.3
χαλκός, Cu	18°C	−0.086
χλωριοῦχο βρώμιο, $CuCl_2$	19°C	9.10
ἔρβιο, Er	18°C	22
όξείδιο τοῦ ἐρβίου, Er_2O_3	20°C	189.1
όξείδιο τοῦ σιδήρου, Fe_2O_3	18°C	20.6
γερμάνιο, Ge	18°C	−0.12
χρυσός, Au	18°C	−0.15
ύδρογόνο, H	20°C, άέριο	−1.97
μαγνήσιο, Mg	18°C	−0.55
μαγγάνιο, Mn	18°C	9.9
ύδράργυρος, Hg	18°C, ύγρός	−0.19
νέο N	20°C, άέριο	−0.33
όξυγόνο, O	20°C, άέριο	106.2
	−219°C, ύγρό	310.0
φωσφόρος, P	20°C	−0.90
πυρίτιο,	18°C	−0.13
ούράνιο, U	18°C	2.6

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ὁ Πίνακας 12-1 περιέχει πειραματικές τιμές τῆς μαγνητικῆς ἐπιδεκτικότητας γιά μιά σειρά ὑλικῶν. Ὅπως ἀναδεικνύεται ἀπό τά ἀντιπροσωπευτικά αὐτά ὑλικά ἡ τιμή τῆς μαγνητικῆς ἐπιδεκτικότητας εἶναι τῆς τάξης τοῦ 10^{-6} καί μπορεῖ νά εἶναι θετική ἤ ἀρνητική ποσότητα. Ἀπό τή μελέτη τοῦ μηχανισμοῦ τῆς μαγνητικῆς πολώσεως στήν Παράγραφο 12-2 εἶναι φανερό ὅτι θετικό ἤ ἀρνητικό πρόσημο τῆς μαγνητικῆς ἐπιδεκτικότητας σημαίνει ὅτι ὑπερισχύει ἀντίστοιχα τό φαινόμενο τοῦ παραμαγνητισμοῦ ἤ τοῦ διαμαγνητισμοῦ. Μέ βάση τό κριτήριο αὐτό τά συνήθη ὑλικά χαρακτηρίζονται ὡς **παραμαγνητικά ἤ διαμαγνητικά** ἄν ἡ μαγνητική τους ἐπιδεκτικότητα ἔχει ἀντίστοιχα θετική ἤ ἀρνητική τιμή.

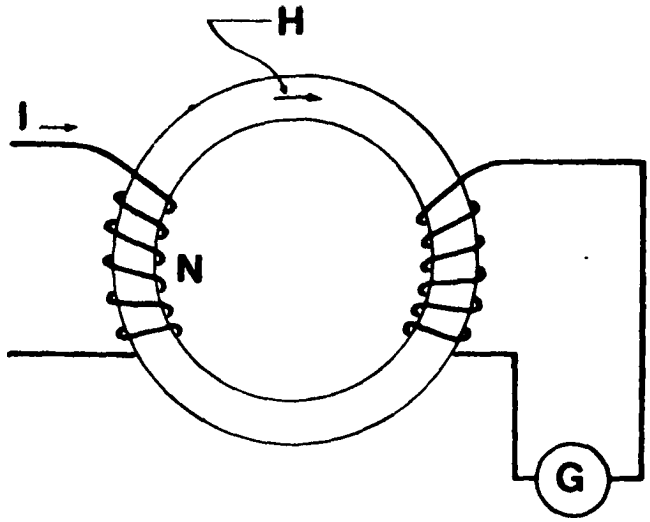
12-5 Σιδηρομαγνητισμός

Ὅπως προδίδει ὁ Πίνακας 12-1 ἡ ὕπαρξη τῶν περισσότερων ὑλικῶν στό χῶρο πολύ λίγο ἐπηρεάζει τά μαγνητικά φαινόμενα. Γιά τά συνήθη ὑλικά ἡ μικρή τιμή τῆς μαγνητικῆς ἐπιδεκτικότητας ($\chi_m \simeq 10^{-4} - 10^{-6}$) ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν οὐσιαστική ταύτιση τῶν πεδίων **B** καί **H** ἐνῶ ἡ μαγνήτιση **M** μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀμελητέα σέ σχέση μέ τά δύο πεδία. Τά μαγνητικά φαινόμενα γίνονται ἰδιαίτερα ἔντονα γιά μιά μικρή ἀλλά σημαντική κατηγορία ὑλικῶν πού περιλαμβάνει τόν σίδηρο, τό κοβάλτιο καί τό νικέλιο. Ἀπό τό κυριώτερο μέλος τῆς ὁμάδας τά ὑλικά αὐτά ἀναφέρονται συνήθως ὡς **σιδηρομαγνητικά,** ἐνῶ ὁ ὅρος **σιδηρομαγνητισμός** ἔχει καθιερωθεῖ γιά τά ἔντονα μαγνητικά φαινόμενα πού παρουσιάζουν.

Τά κυριώτερα χαρακτηριστικά τοῦ σιδηρομαγνητισμοῦ εἶναι ἡ ἐμφάνιση μόνιμης μαγνητικῆς πολώσεως (χωρίς τήν παρουσία ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου), ὑψηλή τιμή τῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας καί σημαντική ἐξάρτηση τῆς διαπερατότητας ἀπό τή μαγνητική προϊστορία τοῦ ὑλικοῦ. Τιμές τῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας μ (στό σύστημα CGS, ἤ ἰσοδύναμα τῆς εἰδικῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας K_m στό σύστημα SI) κυμαίνονται συνήθως στήν περιοχή 10^3 ἕως 10^5. Γιά τό λόγο αὐτό ἡ κατά μία μονάδα διαφορά μεταξύ τῶν παραμέτρων μ καί χ_m (στό σύστημα CGS, ἤ τῶν παραμέτρων K_m καί χ_m στό σύστημα SI) εἶναι ἀμελητέα καί κατά παράδοση ἡ ἔνταση τοῦ φαινομένου ἀποδίδεται μέ τήν τιμή τῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας πού σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (12.59) ἀποδίδει τή σχέση μεταξύ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καί τοῦ πεδίου μαγνητίσεως.

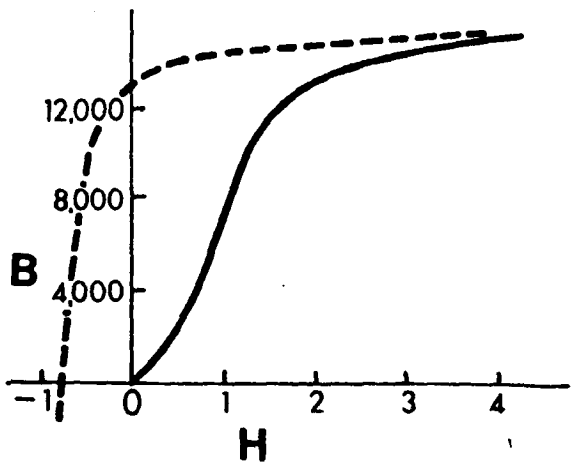
Ὅπως ἤδη ἀναφέρθηκε, ἡ τιμή τῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας σέ ἕνα σιδηρομαγνητικό ὑλικό ἐξαρτᾶται σημαντινά ἀπό τήν προϊστορία τοῦ δείγματος. Ἄν τό δεῖγμα ἔχει στό παρελθόν ἐκτεθεῖ σέ κάποιο ἐξωτερικό πεδίο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 12-5 Διάταξη γιά τή μελέτη τῆς σχέσης μεταξύ **B** καί **H** σέ σιδηρομαγνητικό ὑλικό.

H εἶναι δυνατόν νά ἔχει δημιουργηθεῖ μόνιμη μαγνητική πόλωση πού θά ἐπηρεάσει τήν τιμή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** κατά τήν ἔκθεση τοῦ δείγματος σέ ἕνα πεδίο μαγνητίσεως **H**. Ἡ σχέση μεταξύ τῶν ἀνυσμάτων **B** καί **H** (καί ἐπομένως ἡ τιμή τῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας μ) σέ ἕνα σιδηρομαγνητικό ὑλικό μπορεῖ νά μελετηθεῖ μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 12-5. Ἡ γεωμετρία σέ μορφή δακτυλίου ἔχει τό σημαντικό πλεονέκτημα ὅτι δημιουργεῖ στό ἐσωτερικό τοῦ δείγματος ὁμογενές μαγνητικό πεδίο μέ κλειστές δυναμικές γραμμές. Τό πεδίο **H** δημιουργεῖται ἀπό ἕνα πηνίο μέ N σπεῖρες ἐνῶ ἕνα δεύτερο πηνίο μετρᾶ τήν ἐπαγωγική ΗΕΔ πού δημιουργεῖ ἡ μεταβολή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** ὅταν μεταβάλλεται τό πεδίο **H**. Στήν πράξη ἡ τιμή τοῦ πεδίου μαγνητίσεως μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ ἀπό τίς διαστάσεις τοῦ πρώτου πηνίου καί τό ρεῦμα I πού διοχετεύεται, ἐνῶ ἄν ἡ τιμή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** εἶναι ἀρχικά γνωστή, ἡ τιμή του ἀνά πᾶσα στιγμή μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό τό ἄθροισμα τῶν μέχρι τή στιγμή αὐτή μεταβολῶν τοῦ **B**.



ΣΧΗΜΑ 12-6 Σχέση μεταξύ **B** καί **H** γιά μαλακό σίδηρο. Ἡ συνεχής γραμμή ἀκολουθεῖται κατά τή σταδιακή αὔξηση τοῦ πεδίου μαγνητίσεως ἀπό τήν κατάσταση **H** = **B** = 0. Ἡ διακεκομένη γραμμή ἀντανακλᾶ τή συμπεριφορά τοῦ ὑλικοῦ κατά τή σταδιακή μείωση τοῦ πεδίου **H** ἀπό τήν κατάσταση ὑψηλοῦ θετικοῦ πεδίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ τυπική συμπεριφορά ἑνός σιδηρομαγνητικοῦ δείγματος κατά τήν προηγούμενη διεργασία δίνεται στό σχῆμα 12-6. Ἀρχίζοντας ἀπό τήν κατάσταση $\mathbf{B} = 0 = \mathbf{H}$, αὔξηση τοῦ πεδίου μαγνητίσεως προκαλεῖ ἀντίστοιχη αὔξηση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B**. Τό κυριώτερο χαρακτηριστικό τῆς καμπύλης πού διαγράφεται εἶναι ἡ ἔλλειψη γραμμικότητας πού συνεπάγεται τή συνεχή μεταβολή τῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας. Γιά μικρές τιμές τοῦ πεδίου μαγνητίσεως ὁ ρυθμός μεταβολῆς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** εἶναι χαμηλός, αὐξάνει σημαντικά γιά μιά ἐνδιάμεση περιοχή τιμῶν, ἐνῶ γιά ἀρκετά ὑψηλό πεδίο **H** ἐμφανίζεται τό φαινόμενο τοῦ κορεσμοῦ. Παραπέρα αὔξηση τοῦ πεδίου μαγνητίσεως δέν ἐπηρεάζει αἰσθητά τήν τιμή **B**.

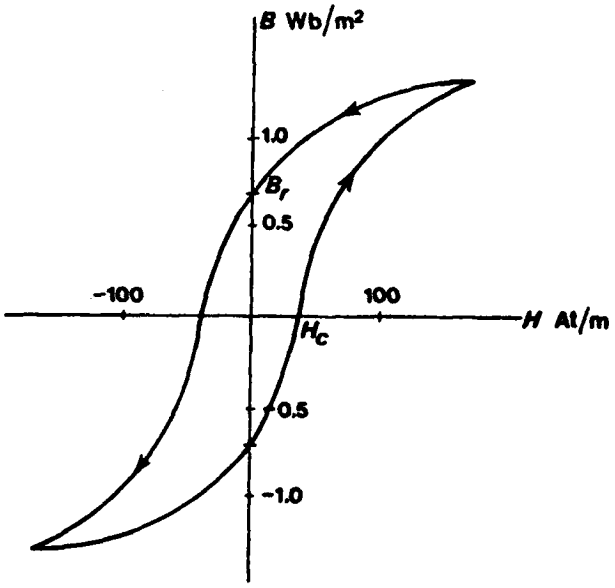
Τό φαινόμενο γίνεται πιό ἐνδιαφέρον ἄν στή συνέχεια τό πεδίο μαγνητίσεως ἐλαττωθεῖ σταδιακά. Ἡ συμπεριφορά τοῦ ὑλικοῦ ἀποδίδεται ἀπό τήν διακεκομένη καμπύλη τοῦ σχήματος 12-6. Στό στάδιο αὐτό ὁ ρυθμός μειώσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** κατά τήν ἀντίστοιχη μείωση τοῦ πεδίου **H** εἶναι αἰσθητά μικρότερος ἐνῶ ἕνα ἀρκετά ἰσχυρό μαγνητικό πεδίο παραμένει ἀκόμη καί ὅταν μηδενιστεῖ τό ἐξωτερικό πεδίο **H**. Ὅπως δείχνει ἡ γραφική παράσταση, γιά νά μηδενιστεῖ τό μαγνητικό πεδίο **B** θά πρέπει νά ἀναπτυχθεῖ ἕνα ἀντίστροφο ἐξωτερικό πεδίο μαγνητίσεως.

Συνεχίζοντας τήν προηγούμενη διεργασία μέ σταδιακή αὔξηση τοῦ ἀντίστροφου πεδίου μαγνητίσεως παρατηρεῖται ἀντίστοιχη ἀνάπτυξη μαγνητικοῦ πεδίου **B** μέ τήν ἴδια φορά πρός τό πεδίο **H**. Ὅπως καί προηγουμένως ἡ ἐξάρτηση τῶν δύο ἀνυσμάτων εἶναι μή γραμμική μέχρι κάποια τιμή τοῦ πεδίου μαγνητίσεως ὅπου ἐμφανίζεται καί πάλι κορεσμός. Ἡ μελέτη τοῦ φαινομένου τέλος μπορεῖ νά ὁλοκληρωθεῖ ἄν τό πεδίο μαγνητίσεως μεταβληθεῖ σταδιακά ἀπό τήν ἀρνητική τιμή κορεσμοῦ ὡς τή θετική τιμή κορεσμοῦ. Ἡ καμπύλη πού διαγράφεται κατά τήν πορεία αὐτή εἶναι κατοπτρική τῆς προηγουμένης ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων ἐνῶ οἱ δύο καμπύλες σχηματίζουν τόν κλειστό δρόμο τοῦ σχήματος 12-7 πού στή βιβλιογραφία ἀπαντᾶται μέ τόν ὅρο **καμπύλη ὑστερήσεως.** Τήν καμπύλη αὐτή θά χαράξουμε γιά ἕνα δεῖγμα σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 12-2. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΥΣΤΕΡΗΣΕΩΣ ΜΕ ΒΑΛΛΙΣΤΙΚΟ ΓΑΛΒΑΝΟΜΕΤΡΟ

Δημιουργεῖστε μιά διάταξη τῆς μορφῆς τοῦ σχήματος 12-5 χρησιμοποιώντας ἕνα πυρήνα σέ σχῆμα U πού περιβάλλεται ἀπό δύο πηνία. Κλεῖστε τό δρόμο τοῦ μαγνητικοῦ ὑλικοῦ χρησιμοποιώντας ἕνα **ζυγό** (μιά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



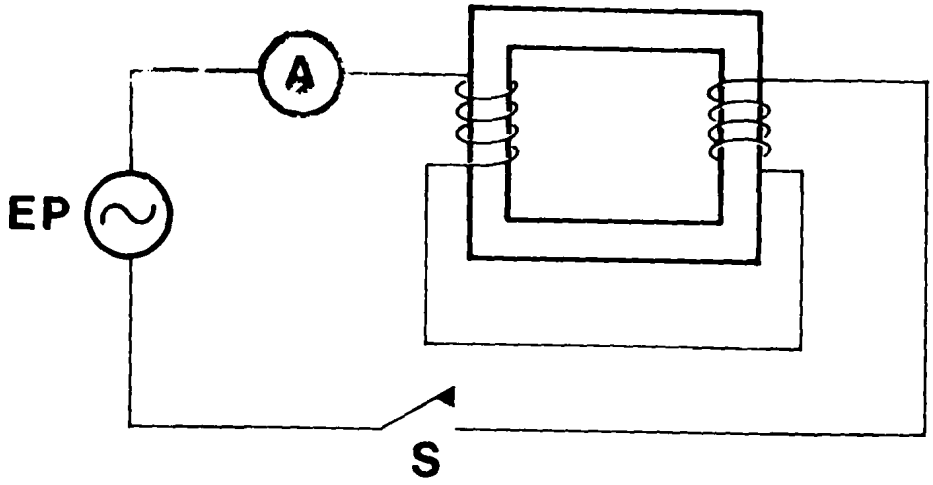
ΣΧΗΜΑ 12-7 Καμπύλη ὑστερήσεως γιά σιδηρομαγνητικό ὑλικό.

ράβδο ἀπό τό ἴδιο σιδηρομαγνητικό ὑλικό ὅπως ὁ πυρήνας). Συνδέστε τά δύο πηνία ὥστε νά διαρρέονται ἀπό ρεῦμα κατά ἀντίθετη φορά. Τοῦτο ἐξασφαλίζει ὅτι τό πεδίο μαγνητίσεως πού δημιουργεῖ κάθε πηνίο στό ἐσωτερικό τοῦ πυρήνα ἔχει τήν ἴδια φορά. Ὡς ἐπαγωγικό πηνίο ἀνιχνεύσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** χρησιμοποιεῖστε ἕνα ἁπλό μονωμένο σύρμα. Δημιουργεῖστε μέ τό σύρμα μερικές σπεῖρες γύρω ἀπό τό σιδηρομαγνητικό πυρήνα καί συνδέστε τούς ἀκροδέκτες τοῦ σύρματος μέ τό κύκλωμα προστασίας τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου. Ἀλληλοπεριστρέψτε τά δύο ἐλεύθερα ἄκρα τοῦ σύρματος πού ὁδηγοῦν στό γαλβανόμετρο ὥστε νά ἀποφύγετε ἐπηρεασμό τῆς μετρήσεως ἀπό τυχαῖα μαγνητικά πεδία ἔξω ἀπό τόν πυρήνα. Ἡ ὅλη διάταξη δίνεται στό σχῆμα 12-8.



ΣΧΗΜΑ 12-8 Πειραματική διάταξη γιά τόν προσδιορισμό τῆς καμπύλης ὑστερήσεως.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 12-9 Διάταξη γιά ἀπομαγνήτιση σιδηρομαγνητικοῦ πυρήνα.

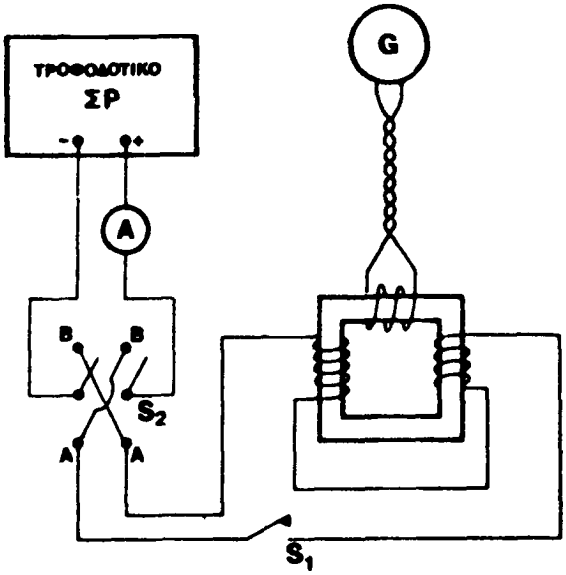
– Βεβαιωθεῖτε ὅτι ὁ σιδηρομαγνητικός πυρήνας βρίσκεται σέ **οὐδέτερη κατάσταση,** δηλαδή ὅτι δέν διαθέτει μόνιμη μαγνητική πόλωση. Τοῦτο εἶναι εὔκολο νά ἐλεγχθεῖ κατά τή σύνδεση ἤ ἀποσύνδεση τοῦ ζυγοῦ μέ τόν πυρήνα, ὁπότε ἄν $\mathbf{M} = 0$ (καί ἑπομένως $\mathbf{B} = 0$) δέν θά πρέπει νά παρατηρηθεῖ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου.

– Ἄν ὁ σιδηρομαγνητικός πυρήνας διαθέτει μόνιμη μαγνητική πόλωση μπορεῖτε νά τόν ἀπομαγνητίσετε μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 12-9. Γιά μηδενική τάση τοῦ EP κλεῖστε τό διακόπτη S. Αὐξεῖστε τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ μέχρις ὅτου τά πηνία διαρρέονται ἀπό ρεῦμα 3 A. Στή συνέχεια μειῶστε σταδιακά τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ μέχρις ὅτου μηδενιστεῖ τό ρεῦμα. Ἡ ὅλη διεργασία πού ὀνομάζεται *ἀπομαγνήτιση τοῦ ὑλικοῦ* πρέπει νά διαρκέσει περίπου 30 sec.

– Χρησιμοποιώντας τή διάταξη τοῦ σχήματος 12-2 βαθμονομεῖστε τό γαλβανόμετρο γιά εὐαισθησία ὡς πρός τό φορτίο $S_q \simeq 5 \times 10^6$ mm/C. Ἀποσυνδέστε πρός στιγμή τό κύκλωμα προστασίας ἀπό τήν ὅλη διάταξη καί μέ ἕνα ὠμόμετρο μετρεῖστε τήν ἐσωτερική του ἀντίσταση. Σημειῶστε ἀκόμη τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ γαλβανομέτρου πού ἀναγράφεται ἀπό τόν κατασκευαστή στό περίβλημα τοῦ ὀργάνου. Οἱ πληροφορίες αὐτές θά σᾶς χρειαστοῦν στή βαθμονόμηση τῶν ἀξόνων τῆς καμπύλης ὑστερήσεως.

– Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 12-10. Μέ μηδενική τάση στό τροφοδοτικό ΣΡ κλεῖστε τόν ἁπλό διακόπτη S_1 καί τό διπλό διακόπτη S_2 στή θέση ΑΑ. Αὐξεῖστε λίγο τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ καί σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τή μέγιστη πρώτη ἀπόκλιση τοῦ βαλλιστικοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 12-10 Συνδεσμολογία πειραματικής διατάξεως γιά τόν προσδιορισμό τῆς καμπύλης ὑστερήσεως σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ.

γαλβανομέτρου καί τό ἀντίστοιχο ρεῦμα πού διαρρέει τά πηνία. Ἡ μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου πού παρατηρήσατε εἶναι ἀνάλογη πρός τή *μεταβολή* τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** στό ἐσωτερικό τοῦ πυρήνα. Συνεχίστε τή διαδικασία αὐξάνοντας τό ρεῦμα μέχρι τήν τιμή 2 A. Σέ μιά τρίτη στήλη τοῦ πίνακα σημειῶστε τό ἄθροισμα τῶν προηγούμενων ἀποκλίσεων τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου.

– Μειῶστε λίγο τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ καί παρατηρεῖστε τή μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου. Ἡ φορά πρός τήν ὁποία ἀποκλίνει τώρα τό γαλβανόμετρο πρέπει νά εἶναι ἀντίθετη πρός τήν προηγούμενη. Ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου πρός τή φορά αὐτή ἀντιπροσωπεύει μείωση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Σημειῶστε τήν ἀντίστοιχη μέγιστη ἀπόκλιση ὡς ἀρνητική ποσότητα. Στήν τρίτη στήλη τοῦ πίνακα σημειῶστε τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν προηγούμενων ἀποκλίσεων τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου. Συνεχίστε μειώνοντας σταδιακά τό ρεῦμα μέχρις ὅτου μηδενιστεῖ.

– Μεταθέστε τό διακόπτη S_2 στή θέση BB. Τοῦτο ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νά ἀντιστραφεῖ ἡ φορά τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τά πηνία. Σημειώνετε τό ρεῦμα ὡς θετικό ὅταν ὁ διακόπτης S_2 βρίσκεται στή θέση AA καί ὡς ἀρνητικό ὅταν βρίσκεται στή θέση BB. Αὐξεῖστε σταδιακά τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ παρατηρώντας κάθε φορά τή μέγιστη ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου μέχρις ὅτου τό ρεῦμα τῶν πηνίων γίνει 2 A. Στό στάδιο αὐτό τό γαλβανόμετρο θά πρέπει νά ἀποκλίνει πρός τήν περιοχή ἀρνητικῶν ἀποκλίσεων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία μειώνοντας σταδιακά τό ρεῦμα μέχρις ὅτου μηδενιστεῖ καί παρατηρώντας τίς ἀντίστοιχες θετικές ἀποκλίσεις τοῦ γαλβανομέτρου.

– Μεταθέστε τό διακόπτη S_2 στή θέση ΑΑ καί ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία αὐξάνοντας σταδιακά τό ρεῦμα μέχρι τήν τιμή 2 Α. **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Ἡ διαδρομή τῆς καμπύλης ὑστερήσεως πρέπει νά γίνει σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη διεργασία, σέ κάθε στάδιο αὐξάνοντας ἤ μειώνοντας μονοτονικά τό ρεῦμα. Ἄν σέ κάποιο σημεῖο τῆς διαδρομῆς θελήσετε νά ἐπαναλάβετε τή μέτρηση, ἐπιστρέφοντας στήν προηγούμενη τιμή τοῦ ρεύματος, ὅλες οἱ ἐπόμενες μετρήσεις θά εἶναι λανθασμένες. Ἡ μόνη θεραπεία στήν περίπτωση αὐτή εἶναι ἡ ἐπανάληψη τοῦ πειράματος ἀπό τήν οὐδέτερη κατάσταση ἀφοῦ προηγουμένως ὁ πυρήνας ἀπομαγνητιστεῖ μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 12-9.

– Ἀποδῶστε τά δεδομένα σέ γραφική παράσταση μέ ὁριζόντιο ἄξονα τό ρεῦμα πού διαρρέει τά πηνία καί κατακόρυφο τήν ὁλική ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου πού ἔχετε ὑπολογίσει στήν τρίτη στήλη τοῦ πίνακα δεδομένων. Ὁ ὁριζόντιος καί κατακόρυφος ἄξονας εἶναι ἀντίστοιχα ἀνάλογος πρός τό πεδίο **H** καί τό μαγνητικό πεδίο **B**. Ἡ βαθμονόμηση τῶν ἀξόνων σέ μονάδες πεδίου μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό τή γεωμετρία τῆς διατάξεως. Ἄν θεωρήσουμε τό πεδίο μαγνητίσεως ὁμογενές στό ἐσωτερικό τοῦ πυρήνα, ℓ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ πυρήνα κατά τόν κεντρικό του ἄξονα καί N ὁ συνολικός ἀριθμός τῶν σπειρῶν στά δύο πηνία, ὁλοκλήρωση τῆς ἐξ. (12.54) δίνει τή σύνδεση μεταξύ πεδίου μαγνητίσεως καί ρεύματος

$$H = \frac{NI}{\ell}. \tag{12.65}$$

Ἡ βαθμονόμηση τοῦ κατακόρυφου ἄξονα σέ μονάδες μαγνητικοῦ πεδίου μπορεῖ νά γίνει μέ τή βοήθεια τῶν ἐξ. (11.16) καί (11.20). Στήν περίπτωση αὐτή ἡ ἀντίσταση R_π τοῦ πηνίου ἀνιχνεύσεως μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀμελητέα.

Ὁ χαρακτηρισμός τῶν μαγνητικῶν Ἰδιοτήτων ἑνός σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ στηρίζεται κατά πολύ στήν καμπύλη ὑστερήσεως πού ἐπιτυγχάνεται σύμφωνα μέ τή διαδικασία τοῦ Πειράματος 12-2. Ὅπως ἤδη τονίστηκε ἡ καμπύλη ὑστερήσεως γιά ἕνα συγκεκριμένο ὑλικό δέν εἶναι μοναδική ἀλλά ἐξαρτᾶται μεταξύ ἄλλων ἀπό τή μαγνητική προϊστορία τοῦ ὑλικοῦ, τίς συνθῆκες τοῦ πειράματος καί τή μέγιστη τιμή τοῦ πεδίου **H** στά δύο σημεῖα ἀναστροφῆς τῆς διαδρομῆς. Παρόλα αὐτά οἱ παράμετροι πού θά ὁρίσουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στή συνέχεια ἔχουν ἀποδειχτεῖ ἐπαρκεῖς γιά τήν περιγραφή τῶν μαγνητικῶν ἰδιοτήτων ἑνός σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ.

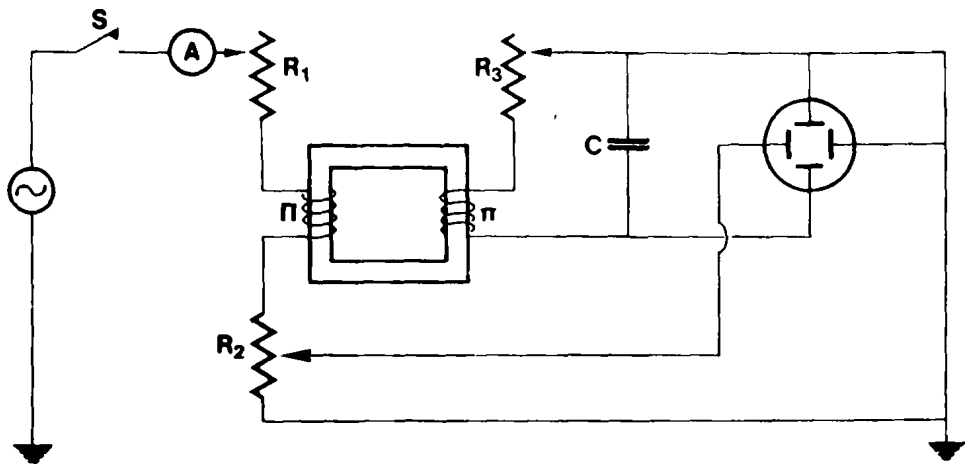
Θά θεωρήσουμε ὅτι ἕνα ὑλικό βρίσκεται στήν **οὐδέτερη κατάσταση** ὅταν γιά $\mathbf{H} = 0$ ἐμφανίζει μηδενική μαγνητική πόλωση καί μαγνητικό πεδίο ($\mathbf{M} = \mathbf{B} = 0$). Ἡ διαδικασία ἀπομαγνητίσεως ἑνός σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ μέ μαγνητική προϊστορία περιγράφτηκε ἤδη στά πλαίσια τοῦ Πειράματος 12-2. Θά διακρίνουμε πάντως τήν οὐδέτερη κατάσταση ἀπό τήν **παρθένα κατάσταση** τοῦ ὑλικοῦ πού χαρακτηρίζει τό ὑλικό μετά τή στερεοποίησή του προτοῦ ἐκτεθεῖ σέ ὁποιοδήποτε πεδίο. Πειραματικά, ἡ παρθένα κατάσταση ἐμφανίζεται διαφορετική ἀπό τήν οὐδέτερη.

Κατά τήν ἔκθεση ἑνός δείγματος πού βρίσκεται στήν οὐδέτερη κατάσταση σέ ἐξωτερικό πεδίο μαγνητίσεως, τό μαγνητικό πεδίο **B** συμπεριφέρεται σύμφωνα μέ τή συνεχή καμπύλη πού περιέχεται στό σχῆμα 12-6. Θά ὀνομάσουμε τήν καμπύλη αὐτή **καμπύλη ἀρχικῆς μαγνητίσεως.** Ἄν τώρα κατά τήν ἀρχική μαγνήτιση τοῦ ὑλικοῦ τό πεδίο **H** σταματήσει νά αὐξάνει σέ κάποια τιμή $\mathbf{H}_m$ καί στή συνέχεια διατρέξει μονοτονικά τό διάστημα $\mathbf{H}_m \rightarrow -\mathbf{H}_m \rightarrow \mathbf{H}_m$ θά δημιουργηθεῖ ἡ κλειστή καμπύλη ὑστερήσεως πού μελετήθηκε στό Πείραμα 12-2. Σέ μιά δεύτερη διαδρομή μεταξύ τῶν μέγιστων τιμῶν $\mathbf{H}_m \rightarrow -\mathbf{H}_m \rightarrow \mathbf{H}_m$ θά δημιουργηθεῖ μιά λίγο διαφορετική κλειστή διαδρομή, ἐνῶ μετά ἀπό ἀρκετές ἀνακυκλώσεις τοῦ πεδίου **H** ἡ καμπύλη ὑστερήσεως θά σταθεροποιηθεῖ σέ ἕνα συγκεκριμένο κλειστό δρόμο, συμμετρικό γύρω ἀπό τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων. Τό δρόμο αὐτό πού δημιουργεῖται μεταξύ δύο τιμῶν $-\mathbf{H}_m$ καί $\mathbf{H}_m$ μετά ἀπό πολλές μονοτονικές ἀνακυκλώσεις τοῦ δείγματος θά ὀνομάσουμε **κανονική καμπύλη ὑστερήσεως.** Καθόσον ἡ διεργασία πού ἀκολουθήθηκε στό Πείραμα 12-2 εἶναι ἀρκετά χρονοβόρα, θά μελετήσουμε τήν κανονική καμπύλη ὑστερήσεως μέ τή βοήθεια τοῦ καθοδικοῦ παλμογράφου.

ΠΕΙΡΑΜΑ 12-3. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΥΣΤΕΡΗΣΕΩΣ ΜΕ ΚΑΘΟΔΙΚΟ ΠΑΛΜΟΓΡΑΦΟ

Συναρμολογεῖστε τή διάταξη τοῦ σχήματος 12-5 χρησιμοποιώντας ἕνα πηνίο Π μέ 125 σπεῖρες γιά τή δημιουργία τοῦ πεδίου **H** καί ἕνα πηνίο ἀνιχνεύσεως π μέ 1000 σπεῖρες. Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 12-11. Συνδέστε τό πηνίο Π μέ ἕνα τροφοδοτικό EP (variac). Βεβαιωθεῖτε ὅτι ὁ ἕνας ἀκροδέκτης τοῦ τροφοδοτικοῦ EP εἶναι γειωμένος ὅπως δείχνει τό σχῆμα. Τά ἐξαρτήματα τοῦ κυκλώματος ἔχουν τίς τιμές $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 4000\ \Omega$ καί $C = 10\ \mu F$. Συνδέστε τό ροο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 12-11 Κύκλωμα γιά τήν παρατήρηση κανονικῆς καμπύλης ὑστερήσεως στήν ὀθόνη καθοδικοῦ παλμογράφου.

στάτη R_2 μέ τήν εἴσοδο ὁριζόντιας ἀποκλίσεως τοῦ παλμογράφου. Μέ τόν τρόπο αὐτό ὁ ὁριζόντιος ἄξονας τῆς εἰκόνας πού θά δημιουργηθεῖ στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου εἶναι ἀνάλογος πρός τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀντίσταση R_2 (στήν πραγματικότητα ἀνάλογος πρός τή διαφορά δυναμικοῦ πού δημιουργεῖ ἡ ροή ρεύματος στήν ἀντίσταση R_2) καί ἐπομένως ἀνάλογος πρός τό πεδίο μαγνητίσεως στόν πυρήνα. Βεβαιωθεῖτε ὅτι ἡ σύνδεση μεταξύ παλμογράφου καί ροοστάτη ἔχει τή γείωση πού σημειώνεται στό σχῆμα 12-11. Τό κύκλωμα τοῦ πηνίου ἀνιχνεύσεως περιέχει τήν ἀντίσταση R_3 καί τόν πυκνωτή C, ἐνῶ τά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ συνδέονται στήν εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως τοῦ παλμογράφου. Ὅπως θά δοῦμε στό Κεφάλαιο 14, γιά ἐναλλασσόμενο ρεῦμα I, τό δυναμικό V_c στά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ [βλ. ἐξ. (14.3β)] εἶναι ἀνάλογο πρός τό ὁλοκλήρωμα $\int I dt$. Καθόσον τό ρεῦμα στό πηνίο ἀνιχνεύσεως εἶναι ἀνάλογο πρός τήν παράγωγο τῆς μαγνητικῆς ροῆς $d\Phi/dt$ ἕπεται ὅτι τό δυναμικό V_c στά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ θά εἶναι ἀνάλογο πρός τή μαγνητική ροή καί ἐπομένως πρός τό μαγνητικό πεδίο **B** στό ἐσωτερικό τοῦ πυρῆνα.

— Κλεῖστε τό διακόπτη S καί ἀναπτύξτε τάση στό τροφοδοτικό ΕΡ περίπου 100 V. Ρυθμίστε τό ροοστάτη R_1 ὥστε ἡ ἔνδειξη τοῦ ἀμπερομέτρου νά εἶναι περίπου 3 A.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μήν ἀγγίζεται τούς ἀκροδέκτες τοῦ κυκλώματος ὅταν τό τροφοδοτικό ΕΡ παρέχει τάση. Τάση ΕΡ 100 V, μέ ρεῦμα 3 A εἶναι ἐξαιρετικά ἐπικίνδυνη καί μπορεῖ νά ἀποβεῖ θανατηφόρα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



– Ρυθμίστε τήν όριζόντια καί κατακόρυφη ένίσχυση τοῦ παλμογράφου ὥστε νά σχηματιστεῖ στήν όθόνη ή καμπύλη ὑστερήσεως. Ἄν ή καμπύλη πού σχηματίζεται εἶναι ή κατοπτρική τοῦ σχήματος 12-7, μηδενίστε τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ ΕΡ καί άντιστρέψτε τή σύνδεση στά άκρα τοῦ πηνίου άνιχνεύσεως. Τό εὖρος τῆς γραφικῆς παραστάσεως στήν όθόνη τοῦ παλμογράφου μπορεῖ νά ρυθμιστεῖ μέ τό δρομέα τοῦ ροοστάτη R_2 ένῶ τό ὕψος μέ τό δρομέα τοῦ ροοστάτη R_3 (Ἡ άντίσταση πού παρεμβάλλει ὁ ροοστάτης R_3 στό κύκλωμα δέν πρέπει νά έλαττωθεῖ πολύ, άλλοιῶς ή καμπύλη ὑστερήσεως θά έκφυλιστεῖ σέ ἔλλειψη). Μέ κατάλληλες ρυθμίσεις δημιουργεῖστε μιά καμπύλη ὑστερήσεως πού νά καλύπτει τό μεγαλύτερο μέρος τῆς όθόνης τοῦ παλμογράφου.

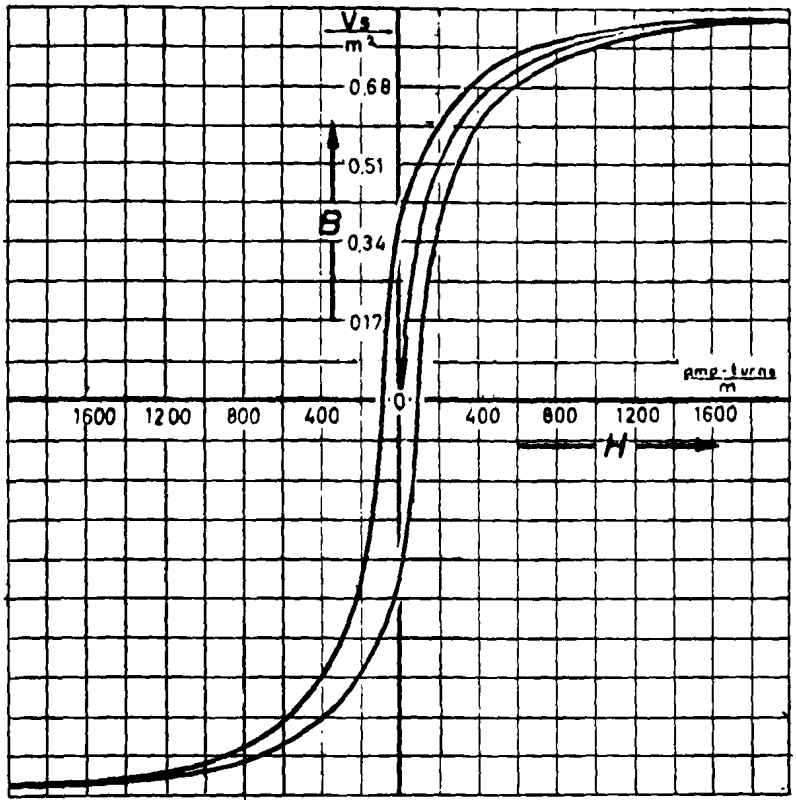
– Μειῶστε μέ άργή κίνηση τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ ΕΡ. Μέ τόν τρόπο αὐτό έπιτυγχάνετε άπομαγνήτιση τοῦ πυρήνα. Ἀνοῖξτε τό διακόπτη S. Ἀναπτύξτε τάση 100 V στό τροφοδοτικό ΕΡ καί κλεῖστε τό διακόπτη S. Παρατηρεῖστε στήν όθόνη τοῦ παλμογράφου τήν άνάπτυξη τῆς καμπύλης ὑστερήσεως σέ κανονική καμπύλη ὑστερήσεως. Σχεδιάστε σέ γραφική παράσταση τήν κανονική καμπύλη ὑστερήσεως πού παρατηρεῖτε στήν όθόνη του παλμογράφου.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη έργασία γιά μικρότερες τιμές τοῦ ρεύματος πού τροφοδοτεῖ τό πηνίο Π. Χαράξτε τίς άντίστοιχες κανονικές καμπύλες ὑστερήσεως στήν ἴδια γραφική παράσταση.

Ὅπως παρατηρήθηκε στό προηγούμενο πείραμα γιά ἕνα σιδηρομαγνητικό ὑλικό ὑπάρχει ἕνας ἄπειρος άριθμός κανονικῶν καμπυλῶν καθεμιά άπό τίς ὁποῖες χαρακτηρίζεται άπό τή μέγιστη τιμή H_m τοῦ πεδίου μαγνητίσεως **H** στά δύο άκρα. Ἡ οἰκογένεια αὐτή τῶν κανονικῶν καμπυλῶν ὑστερήσεως άποτελεῖ τή βάση γιά τήν τεχνική περιγραφή τοῦ ὑλικοῦ. Γιά άρκετά ὑψηλές τιμές H_m τοῦ μέγιστου πεδίου οἱ καμπύλες ὑστερήσεως ἐμφανίζουν τό φαινόμενο τοῦ κορεσμοῦ καί οἱ δύο κλάδοι τῆς καμπύλης συμπίπτουν γιά μιά περιοχή ὑψηλῶν τιμῶν τοῦ πεδίου **H**. Στήν περιοχή αὐτή τό ὑλικό ἐμφανίζει τή μέγιστη δυνατή μαγνητική πόλωση **M** καί παραπέρα αὔξηση τοῦ πεδίου **H** ἐλάχιστα ἐπηρεάζει τό μαγνητικό πεδίο. Μιά καμπύλη ὑστερήσεως πού ἐμφανίζει κορεσμό στά δύο ἄκρα περιέχεται στό σχῆμα 12-12.

Τό σχῆμα 12-13 περιέχει μιά οἰκογένεια κανονικῶν καμπυλῶν μαγνητίσεως γιά διάφορες τιμές H_m τοῦ μέγιστου πεδίου μαγνητίσεως. Ἡ τιμή B_m τοῦ μέγιστου μαγνητικοῦ πεδίου στό σημεῖο άναστροφῆς κάθε κανονικῆς καμπύλης ὑστερήσεως άναφέρεται ὡς ή τιμή τοῦ **κανονικοῦ μαγνητικοῦ πε-**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

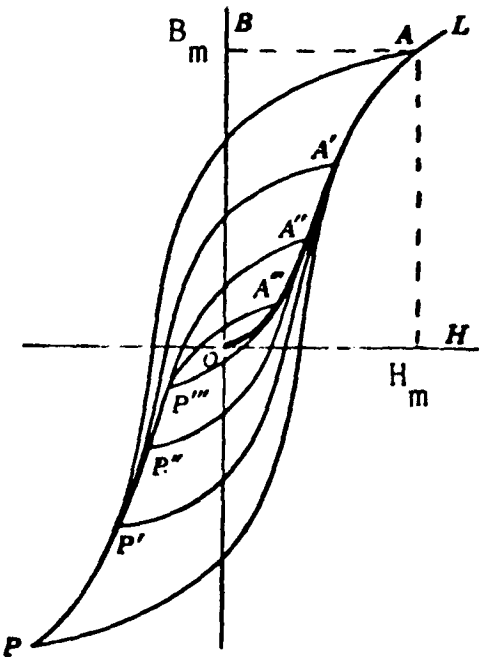


ΣΧΗΜΑ 12-12 Καμπύλη ὑστερήσεως γιά μαλακό σίδηρο. Τό φαινόμενο τοῦ κορεσμοῦ ἐμφανίζεται γιά τιμές τοῦ πεδίου **H** μεγαλύτερες ἀπό 1400 At/m.

δίου γιά τήν ἀντίστοιχη μέγιστη τιμή H_m τοῦ πεδίου **H**. Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν τιμῶν τοῦ κανονικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου διαγράφει μιά καμπύλη (ἡ καμπύλη OAL τοῦ σχήματος 12-13) πού ἀπαντᾶται μέ τήν ὀνομασία **κανονική καμπύλη μαγνητίσεως**. Χωρίς νά ταυτίζεται μέ τήν καμπύλη ἀρχικῆς μαγνητίσεως ἡ κανονική καμπύλη μαγνητίσεως ἐμφανίζει παρόμοια συμπεριφορά. Ὁ λόγος B_m/H_m τῶν σημείων τῆς κανονικῆς καμπύλης μαγνητίσεως ἀναφέρεται ὡς **κανονική διαπερατότητα** τοῦ ὑλικοῦ καί εἶναι βεβαίως συνάρτηση τοῦ πεδίου **H**. Καμπύλες κανονικῆς διαπερατότητας ἤ ἁπλῶς ἡ μέγιστη τιμή τοῦ λόγου B_m/H_m περιέχονται συνήθως σέ ἐγχειρίδια δεδομένων γιά τό χαρακτηρισμό σιδηρομαγνητικῶν ὑλικῶν.

Δύο ἀκόμη παράμετροι πού χαρακτηρίζουν τήν κανονική καμπύλη ὑστερήσεως εἶναι τά σημεῖα τομῆς μέ τούς ἄξονες τῶν συντεταγμένων (βλ. σχῆμα 12-7). Ἡ τιμή B_r τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού παραμένει ὅταν κατά τή διαδρομή τῆς καμπύλης μηδενιστεῖ τό πεδίο **H** ὀνομάζεται **παραμένουσα μαγνήτιση**. Ἡ τομή τῆς καμπύλης ὑστερήσεως μέ τόν ὁριζόντιο ἄξονα ὁρί-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



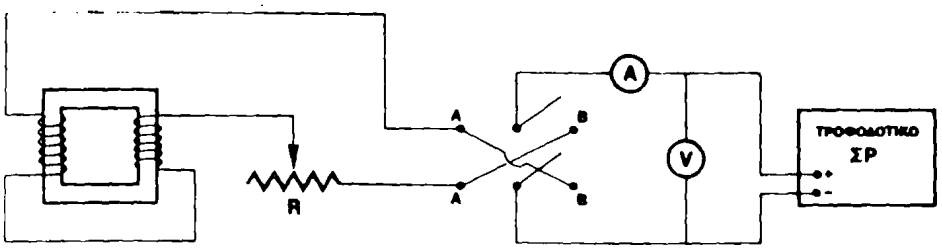
ΣΧΗΜΑ 12-13 Οἰκογένεια κανονικῶν καμπυλῶν ὑστερήσεως καί ἡ κανονική καμπύλη μαγνητίσεως.

ζει τό **πεδίο ἀπομαγνητίσεως** H_c καί ἀντιπροσωπεύει τήν τιμή τοῦ ἀνάστροφου πεδίου **H** πού ἀπαιτεῖται γιά τήν πλήρη ἀπομαγνήτιση τοῦ ὑλικοῦ. Σιδηρομαγνητικά ὑλικά κατατάσσονται σύμφωνα μέ τό μέγεθος τοῦ πεδίου ἀπομαγνητίσεως πού ἐμφανίζουν σέ **σκληρά** ἤ **μαλακά**. Σκληρά ὑλικά, μέ ὑψηλές τιμές τῆς παραμέτρου H_c, χρησιμοποιοῦνται στήν κατασκευή μόνιμων μαγνητῶν. Οἱ παράμετροι B_r καί H_c εἶναι **βέβαια** συναρτήσεις τῆς μέγιστης τιμῆς H_m πού χαρακτηρίζει τήν ἀντίστοιχη κανονική καμπύλη ὑστερήσεως. Ἡ μέτρηση τοῦ πεδίου ἀπομαγνητίσεως ἀποτελεῖ τό ἀντικείμενο τοῦ ἑπόμενου πειράματος.

ΠΕΙΡΑΜΑ 12-4. ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΑΠΟΜΑΓΝΗΤΙΣΕΩΣ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 12-14 χρησιμοποιώντας δύο πηνία μέ 250 ἤ 500 σπεῖρες καί ἕνα πυρήνα ἀπό μαλακό σίδηρο σέ σχῆμα U. Τοποθετεῖστε τό ζυγό στά ἄκρα τοῦ πυρήνα ὥστε νά συμπληρωθεῖ ὁ τετράγωνος δακτύλιος τοῦ σχήματος 12-14. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη ἕνα ροοστάτη $R \simeq 400\ \Omega$ καί ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ. Βεβαιωθεῖτε ὅτι τό δύο πηνία εἶναι συνδεδεμένα ἔτσι ὥστε νά διαρρέονται ἀπό ρεῦμα κατά τήν ἀντίθετη φορά. Τοῦτο ἐξασφαλίζει ὅτι τό πεδίο μαγνητίσεως πού δημιουργεῖ κάθε πηνίο στό ἐσωτερικό τοῦ πυρήνα ἔχει τήν ἴδια φορά.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 12-14 Κύκλωμα γιά τή μέτρηση τοῦ πεδίου ἀπομαγνητίσεως σέ μαλακό σίδηρο.

—Κλεῖστε τό διπλό διακόπτη στή θέση ΑΑ καί ἀναπτύξτε δυναμικό περίπου 10 V. Ρυθμίστε τήν ἀντίσταση R ὥστε τό ρεῦμα πού διαρρέει τά πηνία νά εἶναι περίπου 2 - 3 A. Παρατηρεῖστε ὅτι ὁ ζυγός ἔλκεται ἰσχυρά ἀπό τόν πυρήνα (εἶναι δυνατόν κρατώντας τό ζυγό νά σηκώσετε τήν ὅλη διάταξη χωρίς νά ἀποκολληθεῖ ὁ πυρήνας).

— Ἀνοῖξτε τό διακόπτη καί παρατηρεῖστε ὅτι παρόλο ὅτι πλέον τά πηνία δέν διαρρέονται ἀπό ρεῦμα (τό πεδίο **H** ἔχει μηδενιστεῖ), ὁ πυρήνας ἐξακολουθεῖ νά ἔλκει τό ζυγό. Εἶναι δυνατόν νά ἀποκολλήσετε μέ κάποια δύναμη τό ζυγό, ὁπότε στή συνέχεια παύει ἡ ἕλξη μεταξύ ζυγοῦ καί πυρήνα. Τοῦτο ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι ὁ πυρήνας καί ὁ ζυγός ἀποτελοῦνται ἀπό μαλακό σιδηρομαγνητικό ὑλικό στό ὁποῖο ἡ παραμένουσα μαγνήτιση εἶναι μικρή καί ἐξαλείφεται ἀρκετά εὔκολα.

— Τοποθετεῖστε πάλι τό ζυγό στόν πυρήνα καί ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία. Μηδενίστε τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ καί μετακινεῖστε τό δρομέα τοῦ ροοστάτη ὥστε νά παρεμβληθεῖ στό κύκλωμα ὅλη ἡ ἀντίσταση R. Κλεῖστε τό διακόπτη στή θέση ΒΒ καί ἀναπτύξτε δυναμικό ἔτσι ὥστε τό ρεῦμα πού διαρρέει τά πηνία (τώρα κατά τήν ἀντίστροφη φορά) νά μήν ξεπερνᾶ τά 10 mA (1 - 2 V). Παρατηρώντας τό ἀμπερόμετρο μετακινεῖστε προσεκτικά τό δρομέα τοῦ ροοστάτη καί σημειῶστε τό ρεῦμα γιά τό ὁποῖο παύει ἡ ἕλξη μεταξύ ζυγοῦ καί πυρήνα. Ἐπαναλάβετε ἀρκετές φορές τήν ὅλη διεργασία γιά νά βελτιώσετε τή στατιστική τοῦ ἀποτελέσματος. Χρησιμοποιεῖστε τήν ἐξ. (12.65) γιά νά μετατρέψετε τό ἀποτέλεσμα σέ τιμή μαγνητικοῦ πεδίου. Ἄν ἔχετε ἐκτελέσει ἤδη τό Πείραμα 12-2 συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τήν τιμή τοῦ πεδίου ἀπομαγνητίσεως πού προκύπτει ἀπό τήν ἀντίστοιχη καμπύλη ὑστερήσεως.

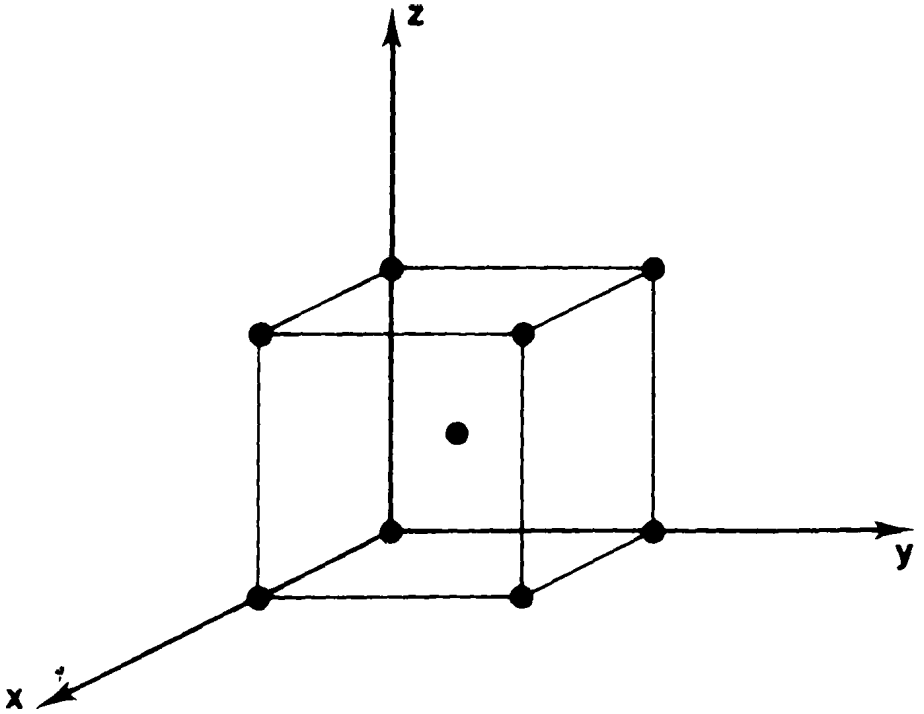
Ὁ σιδηρομαγνητισμός, ὅπως καί τά ἄλλα μαγνητικά φαινόμενα τῆς ὕ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

λης, βρίσκει τήν πλήρη έξήγησή του μόνο στά πλαίσια τῆς κβαντικῆς θεωρίας. Τό φαινόμενο αὐτό πού κατά τήν ἀρχαιότητα καί τό μεσαίωνα περιβλήθηκε μέ ἕνα ἰδιαίτερο μυστήριο ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι ἕνα ἀπό τά ἀφθονώτερα στοιχεῖα στόν πλανήτη μας — ὁ σίδηρος — ἐμφανίζει μιά ἰδιοτροπία ὅσον ἀφορᾶ τή διεύθυνση τοῦ σπίν πού διαθέτουν τά ἄτομά του: *ἡ κατάσταση δύο γειτονικῶν ἀτόμων σιδήρου πού εὐννοεῖται ἐνεργειακά εἶναι ἡ κατάσταση μέ παράλληλα σπίν.* Μέ ἄλλα λόγια, ἄν δύο γειτονικά ἄτομα σιδήρου βρεθοῦν μέ τά σπίν τους προσανατολισμένα πρός διαφορετικές κατευθύνσεις θά μεταπέσουν αὐθόρμητα στήν κατάσταση μέ παράλληλα σπίν μέ ταυτόχρονη ἐκπομπή ἐνεργείας. Ἐπιπλέον, σέ ἕνα κρυσταλλικό περιβάλλον, ἡ κοινή διεύθυνση τῶν παράλληλων σπίν δύο γειτονικῶν ἀτόμων δέν εἶναι τυχαία, ἀλλά χαρακτηρίζεται ἀπό *προτιμητέες* διευθύνσεις. Ἴσως πρέπει νά τονιστεῖ ἰδιαίτερα ὅτι τό φαινόμενο εἶναι καθαρά κβαντικό καί δέν ἔχει νά κάνει τίποτε μέ τήν μαγνητική διπολική ἀλληλεπίδραση τῶν δύο ἀτόμων —ἡ ὁποία δρᾶ κατά τελείως διαφορετικό τρόπο καί εἶναι ἀρκετά ἀσθενέστερη.

Ἡ προηγούμενη συμπεριφορά τῶν ἀτόμων τοῦ σιδήρου μᾶς ἐπιτρέπει τήν κατανόηση τοῦ μηχανισμοῦ πού δημιουργεῖ μόνιμη μαγνήτιση τῆς ὕλης, τουλάχιστον στό μικροσκοπικό ἐπίπεδο. Ἐξετάζοντας τήν παρθένα κατάσταση ἑνός σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ μποροῦμε νά παρακολουθήσουμε τή διαμόρφωση τῆς γεωμετρίας τῶν σπίν κατά τή μετάβαση τοῦ ὑλικοῦ ἀπό τήν ὑγρή στήν στερεά κατάσταση. Ὁ καθαρός σίδηρος στερεοποιεῖται στό χωροκεντρικό κυβικό κρυσταλλικό σύστημα πού δίνεται στό σχῆμα 12-15. Στό κρυσταλλικό αὐτό σύστημα οἱ προτιμητέες διευθύνσεις προσανατολισμοῦ τοῦ σπίν βρίσκονται κατά τούς κυβικούς ἄξονες $\pm \hat{\mathbf{x}}$, $\pm \hat{\mathbf{y}}$, $\pm \hat{\mathbf{z}}$. Ἄν τώρα κατά τή στερεοποίηση τό σπίν ἑνός ἀτόμου βρεθεῖ πρός κάποια προτιμητέα διεύθυνση, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα πού περιγράψαμε, τά γειτονικά του ἄτομα (στό κρυσταλλικό σύστημα τοῦ σχήματος 12-15 κάθε ἄτομο διαθέτει ὀκτώ πρώτους γείτονες) ἔχουν τήν τάση νά προσανατολιστοῦν μέ τό σπίν τους πρός τήν ἴδια προτιμητέα διεύθυνση. Εἶναι εὔκολο νά δεῖ κανείς ὅτι ἡ τάση αὐτή θά ἐξαπλωθεῖ σέ μιά **περιοχή** τοῦ κρυστάλλου μέχρις ὅτου τά ἄτομα πού καταλαμβάνουν θέσεις στό κρυσταλλικό πλέγμα μέ τά σπίν τους προσανατολισμένα πρός μιά προτιμητέα διεύθυνση συναντήσουν μιά ἄλλη περιοχή ὅπου τά ἄτομα ἔχουν ἀρχίσει νά κρυσταλλώνονται μέ τά σπίν τους προσανατολισμένα πρός κάποια ἄλλη.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 12-15 Χωροκεντρικό κυβικό κρυσταλλικό σύστημα τοῦ σιδήρου. Οἱ προτιμητέες διευθύνσεις προσανατολισμοῦ τοῦ σπίν βρίσκονται κατά τούς κυβικούς ἄξονες τοῦ κρυστάλλου.

Ἕνα μέταλλο σπάνια στερεοποιεῖται σέ ἕνα μεγάλο συνεχή κρύσταλλο (ἐκτός ἄν καταβληθεῖ γιά τοῦτο εἰδική προσπάθεια). Στήν τελική του κατάσταση τό στερεό ἀποτελεῖται ἀπό μυριάδες μικροκρυστάλλους μέ τυπικές διαστάσεις τῆς τάξης τῶν 10^{-5} m. Ἐπιπλέον, ὅπως εἴδαμε προηγουμένως, κάθε μικροκρύσταλλος σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ χωρίζεται σέ περιοχές ὅπου τά σπίν τῶν ἀτόμων βρίσκονται προσανατολισμένα πρός κάποια διεύθυνση. Μέ διαστάσεις τῆς τάξης τῶν $10^{-6} - 10^{-7}$ m κάθε περιοχή περιέχει μιά συγκεκριμένη διεύθυνση, ἔτσι ὥστε ἡ ὁλική μαγνητική διπολική ροπή τῆς περιοχῆς νά εἶναι σημαντική. Στό μακροσκοπικό βέβαια ἐπίπεδο ὁ προσανατολισμός κάθε περιοχῆς εἶναι τυχαῖος (ἄν κατά τή στερεοποίηση δέν ὑπῆρχε στό χῶρο τοῦ ὑλικοῦ μαγνητικό πεδίο) μέ ἀποτέλεσμα ἡ παρθένα κατάσταση ἑνός σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ νά ἐμφανίζεται μέ μηδενική μακροσκοπική μαγνήτιση.

Τό προηγούμενο πρότυπο δομῆς τοῦ σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ μπορεῖ τώρα εὔκολα νά ἐξηγήσει τίς μαγνητικές του ἰδιότητες, ὅπως ἀντικατοπτρίζονται στήν καμπύλη ὑστερήσεως τοῦ σχήματος 12-12. Μέ τήν ἀνάπτυξη ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου στό χῶρο πού καταλαμβάνει τό σιδηρομα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γνητικό ὑλικό ὁρισμένες περιοχές μέ μαγνητική ροπή παράλληλη πρός τό μαγνητικό πεδίο θά βρεθοῦν σέ κατάσταση χαμηλότερης ἐνεργείας ἀπ' ὅτι περιοχές μέ μαγνητική ροπή πρός ὁποιαδήποτε ἄλλη διεύθυνση. Ἔτσι θά ἀναπτυχθεῖ ἡ τάση ὥστε *προτιμητέες* (ἀπό ἐνεργειακή ἄποψη) περιοχές, μέ μαγνήτιση παράλληλη πρός τό ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο, νά πολλαπλασιαστοῦν εἰς βάρος *μή προτιμητέων* περιοχῶν, μέ μαγνήτιση πρός κάποια ἄλλη διεύθυνση. Ἡ ὅλη διεργασία εὐθυγραμμίσεως τῆς μαγνητικῆς ροπῆς τῶν ἀτόμων πρός τό ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο πραγματοποιεῖται μέ μικρές μή ἀντιστρεπτές μεταβολές πού ἐπεκτείνουν σταδιακά τά σύνορα τῶν προτιμητέων περιοχῶν. Ἡ ἐπέκταση τῶν συνόρων προτιμητέων περιοχῶν κατά τήν ἀνάπτυξη ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μπορεῖ νά γίνει ἀντιληπτή μέ τή βοήθεια τοῦ **φαινομένου Barkhausen** πού περιγράφεται στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 12-5. ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ BARKHAUSEN

Χρησιμοποιώντας τή διάταξη τοῦ σχήματος 12-8 συνδέστε τό κύκλωμα πού περιέχεται στό σχῆμα 12-10, παραλείποντας τή σύνδεση πρός τό γαλβανόμετρο. Συνδέστε τούς ἀκροδέκτες τοῦ πηνίου ἀνιχνεύσεως στήν εἴσοδο ἑνός ἐνισχυτῆ ἀκουστικῶν συχνοτήτων ἤ σέ ἀκουστικά.

– Ἀπομαγνητίστε τόν πυρήνα τῆς διατάξεως ἀκολουθώντας τή διεργασία πού περιγράφεται στό Πείραμα 12-2.

– Κλεῖστε τό διακόπτη στή θέση AA καί πολύ ἀργά αὐξεῖστε τό ρεῦμα πού διοχετεύεται στά πηνία τῆς διατάξεως. Παρατηρεῖστε μέ προσοχή τούς συριγμούς πού ἐκπέμπονται κατά τήν ἀνακατάταξη τῆς διευθύνσεως τῆς μαγνητικῆς ροπῆς τῶν περιοχῶν τοῦ πυρήνα μέ τήν σταδιακή ἀνάπτυξη μαγνητικοῦ πεδίου στό σιδηρομαγνητικό ὑλικό. Περιγράψτε ποιοτικά τό φαινόμενο μέ ἔμφαση σέ τυχόν παρατηρούμενες ἀσυνέχειες.

Σέ ὅλη τήν ἔκταση ἡ καμπύλη ἀρχικῆς μαγνητίσεως τοῦ σχήματος 12-6 περιγράφει τή σταδιακή μετάπτωση περιοχῶν καθώς αὐξάνει τό ἐξωτερικό πεδίο. Στό ἄνω μέρος τῆς καμπύλης, ὅπου ἀρχίζει νά ἐμφανίζεται κορεσμός, ἡ μαγνητική ροπή ὅλων τῶν περιοχῶν τοῦ ὑλικοῦ ἔχει προσανατολιστεῖ πρός τήν προτιμητέα διεύθυνση πού βρίσκεται πλησιέστερα πρός τή διεύθυνση τοῦ πεδίου μαγνητίσεως. Βέβαια, ἀκόμη καί γιά ὑλικό σέ μορφή μονοκρυστάλλου, εἶναι πολύ ἀπίθανο ἡ διεύθυνση τοῦ ἐξωτερικοῦ πεδίου **H** νά συμπίπτει πρός μιά ἀπό τίς προτιμητέες διευθύνσεις τοῦ κρυστάλλου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σέ ἕνα πολυκρυσταλλικό ὑλικό ὅπου ὁ προσανατολισμός τῶν μικροκρυστάλλων εἶναι τυχαῖος, μόνο ἕνα μικρό πλῆθος περιοχῶν θά διαθέτει προτιμητέες διευθύνσεις πρός τή διεύθυνση τοῦ πεδίου **H**. Ἔτσι, μετά τή μετάπτωση ὅλων τῶν μή προτιμητέων περιοχῶν σέ προτιμητέες, ἡ διεύθυνση τῆς μαγνητίσεως **M** καί τοῦ πεδίου **H** δέν συμπίπτουν ἀπαραίτητα. Στήν τελευταία περιοχή τῆς ἀρχικῆς καμπύλης μαγνητίσεως τό ἰσχυρό πλέον πεδίο εὐθυγραμμίζει βίαια τή μαγνητική ροπή κάθε ἀτόμου πρός τή διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος **H**. Στό σημεῖο αὐτό τό ὑλικό ἔχει ἀναπτύξει τή μεγαλύτερη δυνατή μαγνητική ροπή καί παραπέρα αὔξηση τοῦ πεδίου **H** δέν ἔχει τή δυνατότητα νά αὐξήσει τή μαγνήτιση **M**. Καθόσον ἡ σχετική συνεισφορά τοῦ πεδίου **H** στό μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{M} + \mathbf{H}$$

εἶναι ἀμελητέα, μετά τόν κορεσμό τῆς μαγνητίσεως ἐπέρχεται οὐσιαστικά καί κορεσμός τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά ἐπεκτείνει εὔκολα τήν προηγούμενη ἀνάλυση σέ ὅλη τήν περιοχή τῆς καμπύλης ὑστερήσεως.

Ἕνα σημεῖο πού ἴσως πρέπει νά διευκρινιστεῖ προτοῦ ἀφήσουμε τό θέμα τοῦ σιδηρομαγνητισμοῦ ἀφορᾶ τή θερμοκρασία τοῦ ὑλικοῦ. Κατά τήν προηγούμενη ἀνάλυση παρακολουθήσαμε τή δημιουργία τῶν περιοχῶν μαγνητίσεως κατά τή μετάβαση τοῦ ὑλικοῦ ἀπό τήν ὑγρή στή στερεά κατάσταση. Ταυτίσαμε δηλαδή τό σημεῖο τήξεως τοῦ ὑλικοῦ μέ τή θερμοκρασία ὅπου (κατά τή θέρμανση) ἐξαφανίζονται οἱ σιδηρομαγνητικές ἰδιότητες. Στήν πραγματικότητα οἱ σιδηρομαγνητικές ἰδιότητες ἐξαφανίζονται ὅταν τό ὑλικό ὑπερβεῖ μιά συγκεκριμένη θερμοκρασία, γνωστή ὡς **σημεῖο Curie**, πολύ χαμηλότερη ἀπό τό σημεῖο τήξεως. Γιά τό σίδηρο τό σημεῖο Curie εἶναι 770 °C (σημεῖο τήξεως 1530 °C) ἐνῶ γιά τό νικέλιο 358 °C (σημεῖο τήξεως 1450 °C). Ποιοτικά μποροῦμε νά κατανοήσουμε τό σημεῖο Curie ὡς τή θερμοκρασία, πέρα ἀπό τήν ὁποία ἡ κινητική ἐνέργεια τῶν μορίων τοῦ ὑλικοῦ γίνεται τόσο μεγάλη ὥστε νά μήν ἐπιτρέπει τή διατήρηση περιοχῶν μέ προσανατολισμένη μαγνητική ροπή. Ἡ ποσοτική ὅμως ἀνάλυση τοῦ φαινομένου καί ἰδιαίτερα ὁ ὑπολογισμός τοῦ σημείου Curie γιά ἕνα συγκεκριμένο σιδηρομαγνητικό ὑλικό μπορεῖ νά γίνει μόνο στά πλαίσια τῆς κβαντικῆς στατιστικῆς φυσικῆς καί ξεφεύγει ἀπό τούς στόχους τοῦ παρόντος βιβλίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

12-6 Τό Μαγνητικό Κύκλωμα

Ένα πρακτικό πρόβλημα πού ανακύπτει σέ πολλές τεχνολογικές έφαρμογές τοῦ μαγνητισμοῦ εἶναι ὁ ὑπολογισμός τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού δημιουργεῖ κάποια έπαγωγική διάταξη σέ ἕνα κλειστό σιδηρομαγνητικό πυρήνα. Ἡ ἁπλούστερη μορφή μιᾶς τέτοιας διατάξεως ἔχει δοθεῖ διαγραμματικά στό σχῆμα 12-5. Λόγω τῆς μεγάλης τιμῆς τῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας στά σιδηρομαγνητικά ὑλικά τό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ στό ἐσωτερικό τοῦ πυρήνα ὑπερβαίνει συνήθως τό μαγνητικό πεδίο στόν ὑπόλοιπο χῶρο κατά μερικές τάξεις μεγέθους, ἐνῶ ἡ μαγνητική ροή πού διαπερνᾶ τά τοιχώματα τοῦ πυρήνα μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀμελητέα. Ἔτσι, σέ πολύ καλή προσέγγιση μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὅτι ἡ μαγνητική ροή περιορίζεται στό ἐσωτερικό τοῦ πυρήνα κατά τόν ἴδιο τρόπο πού τό ἠλεκτρικό ρεῦμα περιορίζεται στό ἐσωτερικό τῶν ἀγωγῶν καί ἐξαρτημάτων ἑνός ἠλεκτρικοῦ κυκλώματος. Ἡ ἀναλογία αὐτή μεταξύ μαγνητικῆς ροῆς καί ἠλεκτρικοῦ ρεύματος μπορεῖ νά ἀναπτυχθεῖ σημαντικά μέ ἀποτέλεσμα πολλές ἀπό τίς μεθόδους ἀναλύσεως κυκλωμάτων ΣΡ πού ἀναπτύξαμε στό Κεφάλαιο 6 νά βρίσκουν ἐφαρμογή στόν ὑπολογισμό **μαγνητικῶν κυκλωμάτων.** Ὡς μαγνητικό κύκλωμα θά θεωρήσουμε τό γεωμετρικό ἀνάλογο τοῦ ἠλεκτρικοῦ κυκλώματος, ὅπου κάθε κλάδος ἀντιπροσωπεύει σιδηρομαγνητικό ὑλικό μέ συγκεκριμένο μῆκος καί πεπερασμένες ἐγκάρσιες διαστάσεις. Ἡ μαγνητική ροή πού διαρρέει τό μαγνητικό κύκλωμα θά θεωρήσουμε ὅτι προέρχεται ἀπό τή ροή ρεύματος σέ κάποια περιέλειξη τοῦ σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ.

Ὁ παραλληλισμός τῆς μαγνητικῆς ροῆς μέ τό ἠλεκτρικό ρεῦμα μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ ἄν θεωρήσουμε τίς ἀντίστοιχες πυκνότητες. Γιά μιά κλειστή ἐπιφάνεια S καί σταθερή κατάσταση, ἡ πυκνότητα μαγνητικῆς ροῆς (τό μαγνητικό πεδίο **B**) καί ἡ πυκνότητα ρεύματος **J** ἱκανοποιοῦν τήν ἴδια σχέση ὁλοκληρώσεως

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = 0 \qquad (12.67\alpha)$$

$$\oint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = 0 \qquad (12.67\beta)$$

πού δηλώνει τήν ἀπουσία σημείων δημιουργίας ἤ καταστροφῆς στό ἐσωτερικό τοῦ κυκλώματος. Τό γεγονός αὐτό ἐξασφαλίζει τήν ἀρχή τῆς συνεχείας πού διατυπώσαμε στήν Παράγραφο 6-1. Σέ ἕνα διαχωρισμό τοῦ κυκλώμα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τος κατά τό σχηματικό τρόπο πού περιέχεται στό σχῆμα 6-1, ἡ μαγνητική ροή Φ_A στή διατομή 2 θά εἶναι ἴση μέ τή μαγνητική ροή Φ_B στή διατομή 1. Κατ' ἐπέκταση γιά ἕνα κόμβο τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος ἡ ἐξ. (12.67α) συνεπάγεται τή σχέση διατηρήσεως, ἀνάλογη πρός τόν πρῶτο νόμο τοῦ Kirchhoff,

$$\Sigma \Phi_K = 0 \tag{12.68}$$

ὅπου μέ κάποια κατάλληλη σύμβαση οἱ μαγνητικές ροές κάθε κλάδου πού καταλήγει στόν κόμβο θεωροῦνται ὡς ἀλγεβρικές ποσότητες.

Γιά τή διατύπωση μιᾶς σχέσης ἀνάλογης πρός τό δεύτερο νόμο τοῦ Kirchhoff θά πρέπει νά εἰσάγουμε κατ' ἀρχήν μεγέθη ἀνάλογα πρός τή διαφορά δυναμικοῦ καί τήν ἀντίσταση. Ἡ πρώτη δυνατότητα παρέχεται ἀπό τήν ἐξ. (12.52) πού γιά ἕνα μαγνητικό κύκλωμα, τό ὁποῖο δέν διαρρέεται ἀπό ἠλεκτρικό ρεῦμα, παίρνει τή μορφή

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0. \tag{12.69}$$

Καθόσον ὁ στροβιλισμός τοῦ πεδίου **H** μηδενίζεται, τό ἴδιο τό πεδίο μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς ἡ κλίση μιᾶς βαθμωτῆς συναρτήσεως. Θά εἰσάγουμε ἑπομένως τή **συνάρτηση μαγνητικοῦ δυναμικοῦ** Υ σύμφωνα μέ τή σχέση

$$\mathbf{H} \equiv -\nabla Y. \tag{12.70}$$

Σέ ἀναλογία μέ τήν ΗΕΔ σέ ἠλεκτρικά κυκλώματα θά ὁρίσουμε ἀκόμη τή **μαγνητεγερτική δύναμη** Θ (μέ ἀνάλογη σύντμιση **ΜΕΔ**) ἀπό τήν ἀντίστροφη σχέση τῆς ἐξ. (12.70) {βλ. ἐξ. (11.21)}

$$\Theta_C = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \tag{12.71}$$

ὅπου C εἶναι κάποιος κλειστός δρόμος ὁλοκληρώσεως.

Πρέπει νά σημειωθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση μαγνητικοῦ δυναμικοῦ καί ἡ ΜΕΔ πού μόλις ὁρίσαμε δέν εἶναι τόσο καλά συμπεριφερόμενες συναρτήσεις ὅσο οἱ ἀντίστοιχες συναρτήσεις τῶν ἠλεκτρικῶν φαινομένων. Ἄν στό χῶρο κυκλοφοροῦν ρεύματα ἡ συνάρτηση Υ δέν ὁρίζεται μονοσήμαντα ἐνῶ ἡ τιμή τῆς ΜΕΔ ἐξαρτᾶται ἀπό τό δρόμο τῆς ὁλοκληρώσεως (γιά τό λόγο αὐτό χρησιμοποιήθηκε ὁ δείκτης C στόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (12.71)). Ἄν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

π.χ. ὁ δρόμος C περικλείει ρεῦμα I_C τότε σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (12.54)

$$\Theta_C = I_C \tag{12.72}$$

Κατ' ἐπέκταση ἡ **διαφορά μαγνητικοῦ δυναμικοῦ** μεταξύ δύο σημείων A καί B τοῦ χώρου πού θά μπορούσαμε νά ὁρίσουμε σέ ἀναλογία μέ τήν ἐξ. (2.36)

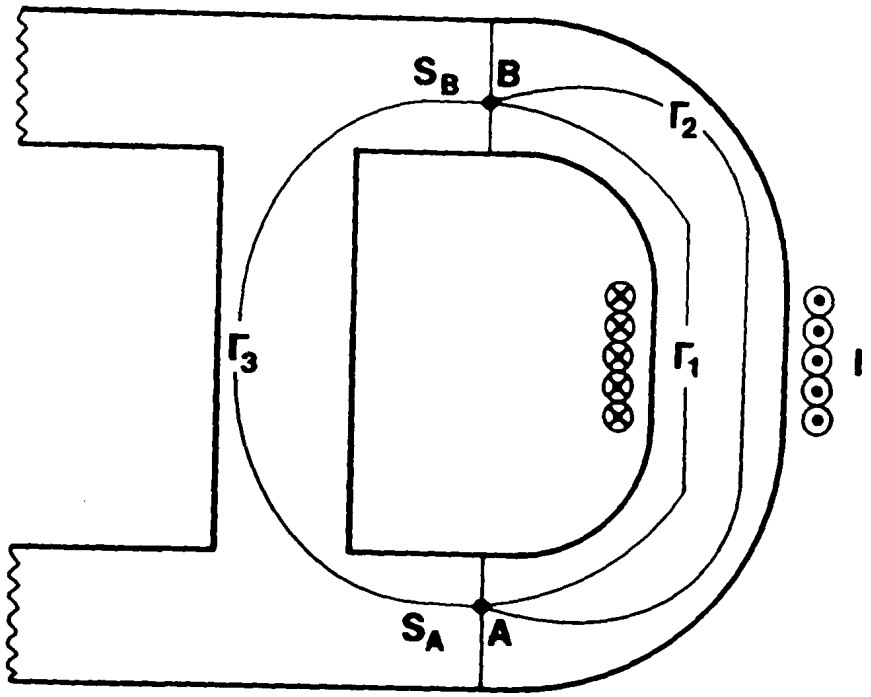
$$\Delta Y_{AB} = Y(B) - Y(A) = \left[- \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \right]_\Gamma \tag{12.73}$$

ἐξαρτᾶται, ὅπως σημειώνεται στό συμβολισμό, ἀπό τό δρόμο Γ πού συνδέει τά σημεῖα A καί B.

Γιά τούς προηγούμενους λόγους οἱ ἔννοιες τῆς συναρτήσεως μαγνητικοῦ δυναμικοῦ καί τῆς ΜΕΔ βρίσκουν μικρή ἐφαρμογή στήν περιγραφή τῶν μαγνητικῶν φαινομένων. Ὅπως εἴδαμε στό Κεφάλαιο 9, ἡ μόνη συνάρτηση πού ἀπαιτεῖται γιά τήν περιγραφή τῶν ἰδιοτήτων πού ἀποκτᾶ ὁ χῶρος λόγω τῆς ὑπάρξεως ρευμάτων εἶναι τό ἀνυσματικό δυναμικό **A**. Ἐξάλλου ἡ ἐνσωμάτωση τῶν ἐννοιῶν στήν ἑνοποιημένη θεωρία τοῦ ἡλεκρομαγνητικοῦ πεδίου μπορεῖ νά γίνει μέ μεγάλη δυσκολία. Ἀντίθετα οἱ δύο ἔννοιες μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν μέ ἐπιτυχία σέ περιοχές τοῦ χώρου ὅπου τό ρεῦμα μηδενίζεται καί ἰδιαίτερα στό ἐσωτερικό τοῦ σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ μαγνητικῶν κυκλωμάτων, ὅπου συμπεριφέρονται ἀνάλογα πρός τά ἀντίστοιχα ἡλεκτρικά μεγέθη.

Ἡ συμπεριφορά τῆς συναρτήσεως μαγνητικοῦ δυναμικοῦ μπορεῖ νά μελετηθεῖ μέ τή βοήθεια τοῦ σχήματος 12-16 πού περιέχει διαγραμματικά μέρος ἑνός μαγνητικοῦ κυκλώματος. Ἄν ἡ γεωμετρία τοῦ κυκλώματος δέν ἐμφανίζει δραστικές ἀσυνέχειες καί ἡ διαφυγή μαγνητικῆς ροῆς ἀπό τά τοιχώματα εἶναι ἀμελητέα, ἡ συνάρτηση Y ἐπιτρέπει τή θεώρηση ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν. Οἱ ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες εἶναι κάθετες πρός τό πεδίο **H**, τό ὁποῖο σέ μιά τέτοια γεωμετρία προβλέπεται σέ γενικές γραμμές παράλληλο πρός τά ὅρια τοῦ σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ. Δύο τέτοιες ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες S_A καί S_B σημειώνονται στό σχῆμα 12-16. Γιά δύο σημεῖα A καί B τῶν ἀντίστοιχων ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι τώρα εὔκολο νά δείξουμε ὅτι τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξ. (12.73) ἔχει μονοσήμαντη τιμή γιά ὅλους τούς δρόμους ὁλοκληρώσεως σέ ἕνα συγκεκριμένο κλάδο τοῦ κυκλώ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 12-16 Τμῆμα μαγνητικοῦ κυκλώματος. Οἱ καμπύλες Γ_1, Γ_2 καί Γ_3 ἀντιπροσωπεύουν τρεῖς διαφορετικούς δρόμους ὁλοκληρώσεως μεταξύ τῶν ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν S_A καί S_B. Ἡ ΜΕΔ τοῦ κυκλώματος δημιουργεῖται ἀπό τήν περιέλειξη N σπειρῶν στό δεξιό κλάδο τοῦ κυκλώματος, ἡ ὁποία διαρρέεται ἀπό ρεῦμα I.

ματος. Πράγματι, ἀπό τό γεγονός ὅτι ὁ δρόμος $\Gamma_1 + \Gamma_2$ δέν περιέχει ρεῦμα ἕπεται ὅτι

$$\oint_{\Gamma_1+\Gamma_2} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{12.74}$$

μέ ἀποτέλεσμα

$$\left[\int_A^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}\right]_{\Gamma_1} = \left[\int_A^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}\right]_{\Gamma_2} \tag{12.75}$$

ἀνεξάρτητα ἀπό τό δρόμο πού ἀκολουθεῖται στό δεξιό κλάδο τοῦ σχήματος 12-16. Ἐπιπλέον ἡ τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος στήν ἐξ. (12.75) εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἐπιλογή τῶν σημείων A καί B στίς ἀντίστοιχες ἰσοδυναμικές

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

έπιφάνειες, καθόσον τό όλοκλήρωμα $\int \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}$ μεταξύ σημείων όποιασδήποτε ίσοδυναμικῆς έπιφάνειας μηδενίζεται έξ όρισμοῦ. Σέ άντιπαράθεση τό σχῆμα 12-16 περιέχει τό δρόμο Γ_3 γιά τόν όποῖο

$$\left[\int_A^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}\right]_{\Gamma_1,\Gamma_2} \neq \left[\int_A^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}\right]_{\Gamma_3} \tag{12.76}$$

καθόσον, σύμφωνα μέ τήν έξ. (12.54)

$$\oint_{\Gamma_1+\Gamma_3} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Gamma_2+\Gamma_3} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = NI \tag{12.77}$$

όπου N εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν σπειρῶν καί I τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν περιέλειξη στό δεξιό κλάδο τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος.

Ἡ προηγούμενη άνάλυση έπιτρέπει τό μονοσήμαντο όρισμό τῆς διαφορᾶς μαγνητικοῦ δυναμικοῦ, τουλάχιστον γιά ἕνα συγκεκριμένο βρόχο τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος. Θά όρίσουμε τή διαφορά μαγνητικοῦ δυναμικοῦ ΔY_{AB} μεταξύ δύο σημείων ἑνός βρόχου A καί B μέ τό όλοκλήρωμα τῆς έξ. (12.73) όπου Γ εἶναι όποιοσδήποτε δρόμος στό ἐσωτερικό τοῦ σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ πού διατρέχει τό βρόχο κατά τή δεξιόστροφη φορά. Ἄμεσο ἐπακόλουθο τῆς έξ. (12.73) εἶναι ὅτι κατά τήν ἴδια σύμβαση μποροῦμε νά γράψουμε γιά ἕνα κλειστό δρόμο C πού διατρέχει ἕνα βρόχο τή σχέση

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = \Theta_C \tag{12.78}$$

άνεξάρτητα άπό τό δρόμο C, όπου Θ_C εἶναι ἡ ΜΕΔ τοῦ βρόχου. Ἄν τώρα κατά μῆκος τοῦ δρόμου C θεωρήσουμε ἕνα πλῆθος σημείων A_k, $k = 1,2...n$, τό κλειστό όλοκλήρωμα τῆς έξ. (12.78) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς ἕνα ἄθροισμα n όλοκληρωμάτων

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = \sum_k \int_{A_{k-1}}^{A_k} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} \tag{12.79}$$

πού μέ τή βοήθεια τῶν έξ. (12.73) καί (12.78) δίνει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$-\sum_k \Delta Y_{A_{k-1}A_k} = \Theta_C. \tag{12.80}$$

Ἡ τελευταία σχέση, σύμφωνα μέ τήν ὁποία τό ἄθροισμα τῶν διαφορῶν μαγνητικοῦ δυναμικοῦ κατά τήν κλειστή διαδρομή ἑνός βρόχου ἰσοῦται μέ τή ΜΕΔ τοῦ βρόχου, εἶναι τό μαγνητικό ἀνάλογο τοῦ δεύτερου νόμου τοῦ Kirchhoff. Γιά νά χρησιμοποιηθεῖ σέ ὑπολογισμούς, ἡ διαφορά μαγνητικοῦ δυναμικοῦ θά πρέπει νά ἐκφραστεῖ ὡς συνάρτηση τῆς μαγνητικῆς ροῆς καί τῶν φυσικῶν χαρακτηριστικῶν τοῦ ὑλικοῦ πού συγκροτεῖ τό βρόχο. Τοῦτο εἶναι ἀρκετά εὔκολο ἄν ὁ πυρήνας τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος ἐμφανίζει ὁρισμένες ἁπλές γεωμετρικές ἰδιότητες.

Σέ ἕνα τμῆμα τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος μεταξύ τῶν σημείων A_{k-1} καί A_k πού ἀποτελεῖται ἀπό ὁμογενές ἰσοτροπικό ὑλικό μέ σταθερή διατομή S_k καί μαγνητική διαπερατότητα μ_k τό πεδίο $\mathbf{H}_k$ εἶναι παράλληλο πρός τόν κεντρικό ἄξονα καί οἱ ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες ταυτίζονται μέ τίς γεωμετρικές διατομές. Ἄν τό μῆκος τοῦ ἄξονα μεταξύ τῶν σημείων A_{k-1} καί A_k εἶναι ℓ_k ἡ διαφορά μαγνητικοῦ δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων δίνεται ἀπό τήν ἁπλή ὁλοκλήρωση τῆς ἐξ. (12.73) ὡς

$$\Delta Y_k (\equiv \Delta Y_{A_{k-1}A_k}) = -H_k \ell_k. \tag{12.81}$$

Στήν ἴδια περιοχή τό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}_k$ δημιουργεῖ μαγνητική ροή

$$\Phi_k = B_k S_k = \mu_k H_k S_k. \tag{12.82}$$

Συνδιάζοντας τίς ἐξ. (12.81) καί (12.82) μποροῦμε νά γράψουμε τή διαφορά μαγνητικοῦ δυναμικοῦ (παραλείποντας τό πρόσημο) ὡς

$$\Delta Y_k = \Phi_k \frac{\ell_k}{\mu_k S_k}. \tag{12.83}$$

Ἡ τελευταία σχέση ἐπιτρέπει τώρα τήν ἐπέκταση τοῦ παραλληλισμοῦ μεταξύ ἠλεκτρικῶν καί μαγνητικῶν κυκλωμάτων. Σέ ἀναλογία μέ τήν ἠλεκτρική περίπτωση ὅπου ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ ὡς πρός τό ρεῦμα ὁρίζει τήν ἀντίσταση τοῦ ἀγωγοῦ, θά ὁρίσουμε τό λόγο

$$R_{Mk} \equiv \frac{\Delta Y_k}{\Phi_k} \tag{12.84}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ώς τή **μαγνητική άντίσταση** τοῦ πυρήνα μεταξύ τῶν σημείων A_{k-1} καί A_k. Μέ τόν τελευταῖο ὁρισμό ἡ ἐξ. (12.80) παίρνει τή μορφή

$$\sum_k R_{Mk}\Phi_k = \Theta_C \tag{12.85}$$

ὅπου τό ἄθροισμα ἐκτείνεται σέ ὅλα τά σημεῖα k τοῦ κλειστοῦ δρόμου C σέ ἕνα βρόχο τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος. Ἡ τελευταία σχέση μπορεῖ νά συγκριθεῖ μέ τήν ἐξ. (6.20).

Στίς περισσότερες ἐφαρμογές μέ τεχνολογικό ἐνδιαφέρον (γεννήτριες, ἠλεκτρομαγνητικοί γερανοί, κλπ.) τό μαγνητικό κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα μοναδικό βρόχο. Στίς περιπτώσεις αὐτές ἡ ἐξ. (12.85) ἀρκεῖ γιά τόν ὑπολογισμό τῶν παραμέτρων τοῦ κυκλώματος ἐνῶ ἡ μαγνητική ἀντίσταση διαφόρων περιοχῶν τοῦ βρόχου μέ ἐνδεχομένως διαφορετικό ὑλικό ἤ φυσικές διαστάσεις μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό τή σχέση

$$R_{Mk} = \frac{\ell_k}{\mu_k S_k} \tag{12.86}$$

πού προκύπτει ἀπό τή σύγκριση τῶν ἐξ. (12.83) καί (12.84). Ὁρισμένες ἐφαρμογές τῶν ἐννοιῶν τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος περιλαμβάνονται στίς Ἀσκήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12-1. Δεῖξτε ὅτι μιά ὁμογενής σφαῖρα μέ ἠλεκτρικό φορτίο e καί μάζα m_e, ἡ ὁποία περιστρέφεται περί μία διάμετρό της μέ σταθερή στροφορμή **S**, ἐμφανίζει μαγνητική διπολική ροπή

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m_e}\mathbf{S}.$$

12-2. Χρησιμοποιώντας τό νόμο τοῦ Lenz δεῖξτε ὅτι ἄν στήν περιοχή ἑνός ἠλεκτρονίου πού κινεῖται σέ σταθερή τροχιά ἀναπτυχθεῖ ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο **B**, παράλληλο πρός τή μαγνητική διπολική ροπή **μ** πού δημιουργεῖ ἡ κίνηση τοῦ ἠλεκτρονίου, τό ἀποτέλεσμα εἶναι ἐπιβράδυνση τοῦ ἠλεκτρονίου. Δεῖξτε ὅτι ἄν τά ἀνύσματα **B** καί **μ** εἶναι ἀντιπαράλληλα, τό ἠλεκτρόνιο θά ὑποστεῖ ἐπιτάχυνση.

12-3. Θεωρεῖστε ὅτι ἕνα ἠλεκτρόνιο στό ἄτομο τοῦ χλωρίου κινεῖται σέ τροχιά μέ ἀκτίνα 0.5×10^{-8} cm καί ὑπολογίστε τήν ταχύτητά του v_0. Ἄν στήν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

περιοχή τοῦ ἡλεκτρονίου ἀναπτυχθεῖ ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο **B**, ἐξετάστε γιά ποιές τιμές τοῦ πεδίου ἰσχύει ἡ προσέγγιση τῆς ἐξ. (12.29).

12-4. Πολλά κράματα τοῦ σιδήρου δέν ἐμφανίζουν σιδηρομαγνητικές ἰδιότητες. Ἕνα κράμα π.χ. σιδήρου, χρωμίου καί νικελίου μέ εἰδικό βάρος 7.89 g/cm^3 ἐμφανίζει σχετική διαπερατότητα 0.01. Προσδιορίστε τή διαπερατότητα, ἐπιδεκτικότητα καί τήν **εἰδική ἐπιδεκτικότητα** (ἐπιδεκτικότητα ἀνά μονάδα μάζας) τοῦ ὑλικοῦ στό σύστημα SI.

12-5. Χρησιμοποιώντας ἔννοιες τῆς Παραγράφου 9-6 δεῖξτε ὅτι σέ ἕνα μή ὁμογενές πεδίο, διαμαγνητικά καί παραμαγνητικά ὑλικά συμπεριφέρονται κατά διαφορετικό τρόπο. Συγκεκριμένα δεῖξτε ὅτι διαμαγνητικά ὑλικά ἕλκονται πρός περιοχές μέ ἀσθενέστερο καί παραμαγνητικά σέ περιοχές μέ ἰσχυρότερο μαγνητικό πεδίο.

12-6. Χρησιμοποιώντας τό ἀποτέλεσμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως καί τά δεδομένα τοῦ Πίνακα 12-1 ὑπολογίστε, γιά τουλάχιστον πέντε διαφορετικά ὑλικά, τή δύναμη πού ἀσκεῖται σέ ἕνα γραμμάριο ὑλικοῦ ἄν τοποθετηθεῖ σέ μαγνητικό πεδίο B = 10 kG, μέ κλίση κατά τόν ἄξονα x dB_x/dx = 1.2 kG/cm.

12-7. Δεῖξτε ὅτι τό ἔργο πού καταναλώνεται γιά τήν ἀπομάκρυνση ἑνός γραμμαρίου ὑλικοῦ μέ εἰδική ἐπιδεκτικότητα χ ἀπό τήν περιοχή ἑνός μαγνητικοῦ πεδίου B εἶναι

$$W = \tfrac{1}{2}\chi B^2.$$

Θεωρώντας ὅτι ἡ παράμετρος χ εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό πεδίο ὑπολογίστε τό ἔργο πού ἀπαιτεῖται γιά τήν ἀπομάκρυνση ἑνός γραμμαρίου ὑγροῦ ὀξυγόνου ἀπό τό μαγνητικό πεδίο τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως.

12-8. Ἡ μαγνήτιση τοῦ σιδήρου συνεισφέρει μέχρι 2 T στό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖται στό ἐσωτερικό τοῦ σιδήρου κατά τήν ἀνάπτυξη πεδίου μαγνητίσεως. Ὑπολογίστε τόν ἀριθμό τῶν ἡλεκτρονίων ἀνά ἄτομο πού συνεισφέρουν στή μαγνήτιση.

12-9. Ἀπό τήν καμπύλη ὑστερήσεως πού χαράξατε στό Πείραμα 12-2 ὑπολογίστε τή μαγνητική ροπή ἀνά γραμμάριο τοῦ σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ στήν περιοχή κορεσμοῦ. Ἐκτιμεῖστε πόσα ἡλεκτρόνια ἀνά ἄτομο συνεισφέρουν στή μαγνήτιση ἄν τό ὑλικό ἀποτελεῖται ἀπό καθαρό σίδηρο. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τήν ἐκτίμηση τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως.

12-10. Ἕνα κράμα μέ 78.5 % νικέλιο καί 21.5 % σίδηρο, ἄν παραχθεῖ μέ κατάλληλες συνθῆκες, ἐμφανίζει ἐξαιρετικά ὑψηλή τιμή σχετικῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας $K_m = 10^5$ γιά πεδίο μαγνητίσεως 4.4 At/m. Στό σημεῖο αὐτό τῆς ἀρχικῆς καμπύλης μαγνητίσεως ποιό εἶναι τό ποσοστό τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού συνεισφέρει ἡ μαγνήτιση τοῦ ὑλικοῦ;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

12-11. Ἕνα κράμα πού χρησιμοποιεῖται γιά τήν κατασκευή μόνιμων μαγνητῶν ἐμφανίζει παραμένουσα μαγνήτιση 0.73 Wb/m^2 καί πεδίο ἀπομαγνητίσεως 3.5 At/m. Προσδιορίστε τή μαγνήτιση στά σημεῖα τῆς κανονικῆς καμπύλης ὑστερήσεως ὅπους ἀναφέρονται τά προηγούμενα δεδομένα καί ἀνάλογα μέ τήν περίπτωση τή διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος **M** ὡς πρός τά πεδία **B** καί **H**.

12-12. Ἕνας λεπτός δίσκος μέ πάχος s ἔχει ὁμοιόμορφη μαγνήτιση $\mathbf{M}_0$ μέ διεύθυνση κάθετη πρός τίς δύο ἐπίπεδες ἐπιφάνειές του. Δεῖξτε ὅτι τό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖ ὁ δίσκος σέ ἀπόσταση $r >> s$ εἶναι τό ἴδιο μέ τό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖ ἕνα κύκλωμα C κατά τήν περιφέρεια τοῦ δίσκου, τό ὁποῖο διαρρέεται ἀπό σταθερό ρεῦμα $I = M_0 s$.

12-13. Ἕνα πηνίο 300 σπειρῶν περιβάλλει ἕνα δακτύλιο ἀπό σιδηρομαγνητικό ὑλικό μέ σχετική διαπερατότητα $K_m = 500$. Ἄν ὁ δακτύλιος ἔχει μέση διάμετρο 40 cm καί διατομή 10 cm^2 ὑπολογίστε τή μαγνητική ροή στό δακτύλιο ὅταν τό πηνίο διαρρέεται ἀπό ρεῦμα I = 1 A. Ὑπολογίστε τή μαγνητική ροή ἄν ἀπό τό δακτύλιο ἀποκοπεῖ ἕνας δίσκος μέ πάχος 1 mm.

12-14. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐνέργεια πού ἀποθηκεύεται σέ ἕνα μαγνητικό κύκλωμα εἶναι

$$W = \frac{1}{2} \Phi^2 R_M$$

ὅπου Φ εἶναι ἡ μαγνητική ροή καί R_M ἡ μαγνητική ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος.

12-15. Ἕνας σιδερένιος δακτύλιος μέ ἐσωτερική διάμετρο 10 cm καί ἐξωτερική διάμετρο 12 cm περιβάλλεται ἀπό πηνίο μέ 20 σπεῖρες. Χρησιμοποιεῖστε τήν καμπύλη ἀρχικῆς μαγνητίσεως (ἀπό ἐγχειρίδιο δεδομένων ἤ ἀπό τά ἀποτελέσματα τοῦ Πειράματος 12-2) καί ὑπολογίστε τό ρεῦμα πού ἀπαιτεῖται ὥστε νά ἀναπτυχθεῖ στό ἐσωτερικό τοῦ σιδήρου μαγνητικό πεδίο 12 kG.

12-16. Θεωρεῖστε ἕνα μαγνητικό κύκλωμα πού περιβάλλεται ἀπό πηνίο μέ μιά σπεῖρα. Δεῖξτε ὅτι ἡ αὐτεπαγωγή τοῦ πηνίου L εἶναι ἴση μέ τό ἀντίστροφο τῆς μαγνητικῆς ἀντιστάσεως R_M τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος. Ἄν τό πηνίο ἔχει N σπεῖρες, δεῖξτε ὅτι

$$R_M = \frac{N^2}{L}.$$

12-17. Ὅταν ἕνας μόνιμος μαγνήτης δέν χρησιμοποιεῖται συνιστᾶται ἡ τοποθέτηση μεταξύ τῶν πόλων του μιᾶς ράβδου ἀπό σιδηρομαγνητικό ὑλικό μέ ὑψηλή διαπερατότητα καί μικρό πεδίο ἀπομαγνητίσεως, ἔτσι ὥστε ὁ μόνιμος μαγνήτης καί ἡ ράβδος νά ἀποτελοῦν ἐνιαῖο μαγνητικό κύκλωμα. Ἐξη-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γεῖστε τό ρόλο τῆς ράβδου καί τούς λόγους γιά τούς ὁποίους συνιστᾶται ἡ πρακτική αὐτή.

12-18. Ἕνας σιδηρομαγνήτης συγκροτεῖται ἀπό σιδηρομαγνητικό πυρήνα σέ σχῆμα U μέ ὁλικό μῆκος 20 cm καί κυκλική διατομή ἀκτίνας 1 cm. Μιά ράβδος μέ εὖρος 1 cm καί πάχος 2 mm συνδέει τούς πόλους τοῦ πυρήνα, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ τους 5 cm. Ἡ σχετική διαπερατότητα τοῦ πυρήνα καί τῆς ράβδου ὡς πρός τόν ἀέρα εἶναι ἀντίστοιχα 3000 καί 2000. Ἄν ἀπαιτεῖται μαγνητικό πεδίο 0.8 Wb/m^2 στό ἐσωτερικό τῆς ράβδου, ὑπολογίστε

(α) Τήν ὁλική μαγνητική ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος

(β) Τή μαγνητική ροή

(γ) Τό μαγνητικό πεδίο στό ἐσωτερικό τοῦ πυρήνα

(δ) Τή ΜΕΔ τῆς περιελείξεως

(ε) Τόν ἀριθμό τῶν σπειρῶν τῆς περιελείξεως ἄν τό ρεῦμα πού τήν τροφοδοτεῖ εἶναι 0.5 A

(στ) Τή διαφορά μαγνητικοῦ δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς ράβδου.

12-19. Ὁ πυρήνας ἑνός μετασχηματιστῆ ἔχει κατασκευαστεῖ ἀπό ἐλάσματα σιδήρου πάχους 1 mm σέ σχῆμα E ὅπου ὅλοι οἱ βραχίονες τοῦ γράμματος ἔχουν τό ἴδιο μῆκος καί εὖρος 2 cm. Ὁ πυρήνας εἶναι κατασκευασμένος ἀπό 100 τέτοια ἐλάσματα, τοποθετημένα ἔτσι ὥστε οἱ βραχίονες τοῦ σχήματος διαδοχικῶν ἐλασμάτων νά ἔχουν ἀντίθετη φορά καί νά ἐπικαλύπτονται πλήρως. Τό τελικό σχῆμα εἶναι τετράγωνο μέ τή μορφή τοῦ γράμματος Θ, πλευρά 10 cm καί εὖρος τοῦ κάθε κλάδου 2 cm. Ἄν ὁ κεντρικός κλάδος τοῦ πυρήνα περιβάλλεται ἀπό πηνίο μέ 300 σπεῖρες καί ἡ σχετική διαπερατότητα τοῦ σιδήρου εἶναι 5000, πόσο ρεῦμα πρέπει νά διοχετευθεῖ ὥστε τό μαγνητικό πεδίο στόν κλάδο αὐτό νά εἶναι 1 Wb/m^2;

12-20. Ἕνας μόνιμος μαγνήτης ἔχει τή μορφή δακτυλίου ἀπό τόν ὁποῖο ἔχει ἀφαιρεθεῖ ἕνας λεπτός δίσκος μέ ὄγκο V_g. Δεῖξτε ὅτι ἄν ἀγνοηθεῖ ἡ διαφυγή ροῆς, ἰσχύει ἡ σχέση

$$B_g^2 V_g = -\mu_0 B_m \bar{H}_m V_m$$

ὅπου B_g καί B_m εἶναι ἀντίστοιχα τό μαγνητικό πεδίο μεταξύ τῶν πόλων καί στό ἐσωτερικό τοῦ δακτυλίου, $\bar{H}_m$ τό μέσο πεδίο μαγνητίσεως στό ὑλικό τοῦ δακτυλίου καί V_m ὁ ὄγκος τοῦ ὑλικοῦ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

μεταβατικα ρευματα

Κατά τή μελέτη τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου στό τέλος τοῦ Κεφαλαίου 7 εἴδαμε γιά πρώτη φορά ρεύματα πού μεταβάλλονται μέ τό χρόνο. Ἡ ἐκφόρτιση ἑνός πυκνωτῆ μέ χωρητικότητα C διαμέσου μιᾶς ἀντιστάσεως R μᾶς ἔδωσε τόν ἐκθετικό νόμο

$$q(t) = q(0)e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (13.1)$$

γιά τό φορτίο q(t) πού ἔχει παραμείνει ἀποθηκευμένο στόν πυκνωτή μετά ἀπό παρέλευση χρόνου t. Εἶναι ἄμεσο ἐπακόλουθο τῆς ἐξ. (13.1) ὅτι τόν ἴδιο ἐκθετικό νόμο ἀκολουθεῖ καί τό ρεῦμα $I = dq/dt$ πού διαρρέει τήν ἀντίσταση. Μεταβλητά ρεύματα εἴδαμε ἀκόμη στά φαινόμενα ἐπαγωγῆς ὅπου τό ρεῦμα σέ ἕνα κλειστό ἀγωγό παρακολουθεῖ τή μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς ὡς πρός τό χρόνο. Στή συνέχεια θά μελετήσουμε τή μεγαλύτερη λεπτομέρεια τή χρονική μεταβολή τοῦ ρεύματος σέ κυκλώματα πού συγκροτοῦνται ἀπό ἐξαρτήματα δύο ἀκροδεκτῶν καί ΗΕΔ. Τά ἐξαρτήματα αὐτά χαρακτηρίζονται ἀπό ἀντίσταση, χωρητικότητα, αὐτεπαγωγή καί εἶναι δυνατόν νά ἀλληλεπιδροῦν μέ ἀμοιβαία ἐπαγωγή. Στήν ἀνάλυσή μας θά θεωρήσουμε *ἰδανικά* ἐξαρτήματα, δηλαδή στοιχεῖα τοῦ κυκλώματος πού ἐμφανίζουν ἀποκλειστικά μιά ἀπό τίς προηγούμενες ἰδιότητες. Ὁ χειρισμός αὐτός δέν ἀφαιρεῖ τίποτε ἀπό τή γενικότητα καθόσον πλέον ρεαλιστικά ἐξαρτήματα μπορεῖ πάντοτε νά ἀναχθοῦν σέ ἕνα ἁπλό κύκλωμα ἰδανικῶν ἐξαρτημάτων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κάθε ιδανικό έξάρτημα χαρακτηρίζεται άπό τή σχέση τοῦ ρεύματος ὡς πρός τή διαφορά δυναμικοῦ πού άναπτύσσεται στά ἄκρα του. Γιά μιά *ἰδανική άντίσταση,* ή σχέση αὐτή ταυτίζεται μέ τό νόμο τοῦ Ohm

$$V = IR \tag{13.2}$$

ὅπου γενικά V καί I εἶναι συναρτήσεις τοῦ χρόνου. Ἡ ἐξ. (13.2) μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ὁ ὁρισμός ἑνός ἰδανικοῦ ἐξαρτήματος άντιστάσεως.

Ἰδανικά ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς χαρακτηρίζονται άπό τήν ἐξίσωση

$$V = L\frac{dI}{dt} \tag{13.3}$$

ὅπου L εἶναι ὁ συντελεστής αὐτεπαγωγῆς τοῦ ἐξαρτήματος. Ἄν τό ἐξάρτημα άλληλεπιδρᾶ ἐπαγωγικά μέ κάποιο ἄλλο, τό ὁποῖο διαρρέεται άπό ρεῦμα I′, τότε τό στιγμιαῖο δυναμικό στά ἄκρα του περιγράφεται άπό τή σχέση

$$V = L\frac{dI}{dt} \pm M\frac{dI'}{dt} \tag{13.4}$$

ὅπου M εἶναι ὁ συντελεστής ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς.

Εἶναι ἴσως χρήσιμο στό σημεῖο αὐτό νά ὑπενθυμίσουμε τή συνθήκη πού διέπει τό πρόσημο τοῦ δυναμικοῦ καί τοῦ ρεύματος στίς προηγούμενες σχέσεις. Ἡ συνθήκη πού ἔχει υἱοθετηθεῖ ἐδῶ γιά μιά ἰδανική ἐπαγωγή θεωρεῖ θετικό δυναμικό V στίς ἐξ. (13.3) καί (13.4) ὅταν τό ρεῦμα διατρέχει τό ἐξάρτημα άπό τόν άκροδέκτη μέ ὑψηλότερο δυναμικό πρός τόν άκροδέκτη μέ χαμηλότερο. Τοῦτο βέβαια ἰσχύει καί γιά τήν ἐξ. (13.2). Τό ἐναλλακτικό πρόσημο στήν ἐξ. (13.4) ἐπιλέγεται ὡς θετικό (ἀρνητικό) ἄν αὔξηση τοῦ ρεύματος I′ προκαλεῖ αὔξηση (μείωση) τῆς μαγνητικῆς ροῆς στό ἐξάρτημα L.

Ὁ *ἰδανικός πυκνωτής* ὁρίζεται ἀντίστοιχα άπό τή σχέση

$$V = \frac{q}{C} \tag{13.5}$$

ὅπου C εἶναι ἡ χωρητικότητα καί V ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ ἐξαρτήματος ὅταν φορτίο q ἔχει μεταφερθεῖ άπό τό ἕνα ἄκρο στό ἄλλο διαμέσου τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος. Ἡ συνθήκη ὡς πρός τό πρόσημο τοῦ δυναμικοῦ καί φορτίου πού θά υἱοθετηθεῖ ἐδῶ εἶναι τέτοια ὥστε ἡ χωρητικότητα C νά άντιπροσωπεύει πάντα θετική ποσότητα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σέ άντίθεση μέ τά δύο προηγούμενα έξαρτήματα, ό πυκνωτής είσάγει μιά άσυνέχεια στό κύκλωμα, ὅσον άφορᾶ τή φυσική μεταφορά φορτίων. Ἡ λειτουργία του χαρακτηρίζεται άπό τό γεγονός ὅτι γιά συσσώρευση μιᾶς συγκεκριμένης ποσότητας φορτίου στό ἕνα ἄκρο του, ἴση ποσότητα φορτίου άποχωρεῖ άπό τό ἄλλο ἄκρο. Ροή ἐπομένως ρεύματος στό ἐξωτερικό κύκλωμα πρός τόν ἕνα άκροδέκτη τοῦ πυκνωτῆ άκολουθεῖται άπό ροή ἴσου ρεύματος άπό τόν ἄλλο. Ἡ κατάσταση αὐτή δέν μπορεῖ νά διακριθεῖ πειραματικά άπό τή ροή ρεύματος διαμέσου τοῦ ἐξαρτήματος καί μέ τήν ἔννοια αὐτή συχνά θά άναφερθοῦμε στό «ρεῦμα πού διαρρέει τόν πυκνωτή». Χρησιμοποιώντας άκόμη τόν ὁρισμό τοῦ ρεύματος

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{13.6}$$

καί τήν ἐξ. (13.5) μποροῦμε νά γράψουμε τή σχέση μεταξύ ρεύματος καί δυναμικοῦ

$$I = C\frac{dV}{dt}. \tag{13.7}$$

Μέ τήν προηγούμενη συνθήκη γιά τό πρόσημο δυναμικοῦ καί ρεύματος, ἡ τελευταία σχέση συνεπάγεται ὅτι θετικό ρεῦμα τείνει νά αὐξήσει τή διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν δύο ἄκρων τοῦ πυκνωτῆ.

Χωρίς νά χάσουμε τίποτε άπό τή γενικότητα θά θεωρήσουμε, γιά άπλούστευση τῆς άναλύσεως πού άκολουθεῖ, *ἰδανικές ΗΕΔ*. Ρεαλιστικά ἡλεκτρικά στοιχεῖα ἤ τροφοδοτικά ΣΡ ἐμφανίζουν ἐπιπλέον πεπερασμένη ἐσωτερική άντίσταση, ἡ ὁποία, ἄν τοῦτο ἐπηρεάζει τό πρόβλημα, μπορεῖ πάντα νά συμπεριληφθεῖ ὡς μιά ἰδανική άντίσταση σέ σειρά.

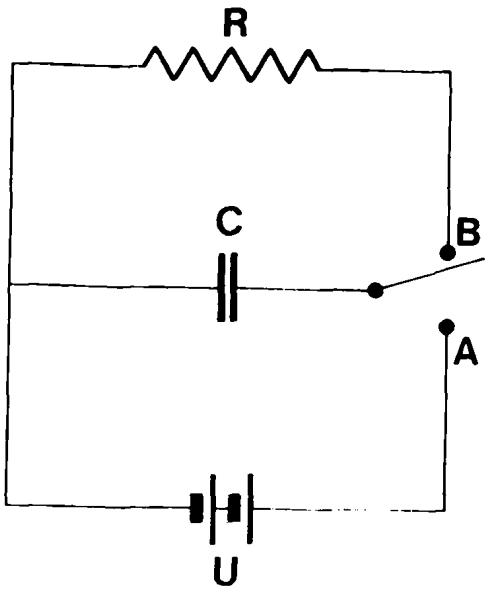
13-1 Τό Κύκλωμα R-C

Τό άπλό κύκλωμα άντιστάσεως - πυκνωτῆ άναλύθηκε ἤδη στήν παράγραφο 7-7 ὅπου ἡ φόρτιση ἤ ἐκφόρτιση ἑνός πυκνωτῆ χρησιμοποιήθηκε γιά τή μέτηση άντιστάσεως μέ τό βαλλιστικό γαλβανόμετρο. Γιά λόγους πληρότητας θά συγκεντρώσουμε ἐδῶ τά κυριώτερα άποτελέσματα.

Ἡ συμπεριφορά τοῦ άπλοῦ κυκλώματος πού άποτελεῖται άποκλειστικά άπό μιά ἰδανική άντίσταση καί ἕνα ἰδανικό πυκνωτή μπορεῖ νά μελετηθεῖ μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 13-1. Ἐπαφή τοῦ διακόπτη στό σημεῖο Α συσσωρεύει στόν πυκνωτή φορτίο

$$q = UC. \tag{13.8}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 13-1 Κύκλωμα R-C. Ἐκφόρτιση πυκνωτή διαμέσου ἀντιστάσεως.

Μέ μετάθεση τοῦ διακόπτη στό σημεῖο B ἀρχίζει ἡ ἐκφόρτιση τοῦ πυκνωτῆ σύμφωνα μέ τόν ἐκθετικό νόμο τῆς ἐξ. (13.1)

$$q(t) = q(0)e^{-\frac{t}{RC}} = UC\,e^{-\frac{t}{RC}} = q(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (13.9)$$

πού ἀποδίδεται στή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 13-2. Στό τελευταῖο σκέλος τῆς ἐξ. (13.9) ἔχει ὁριστεῖ ἡ **σταθερά χρόνου** πού χαρακτηρίζει τήν ἐκφόρτιση

$$\tau = RC. \qquad (13.10)$$

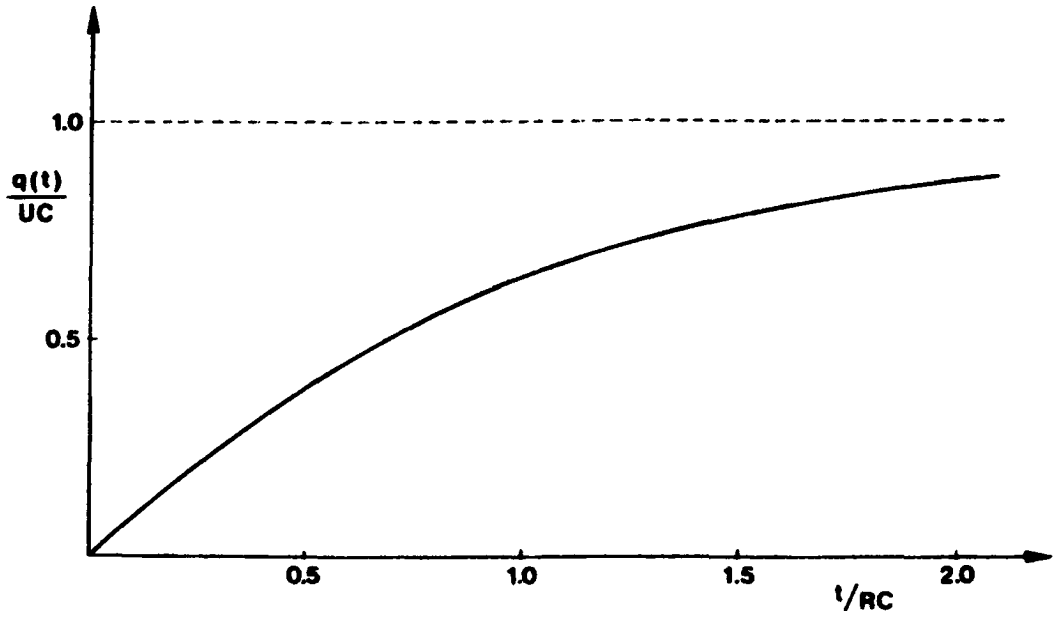
Ἀπό τήν ἐξ. (13.9) εἶναι δυνατόν νά προσδιορίσουμε τό ρεῦμα πού ρέει στό κύκλωμα κατά τήν ἐκφόρτιση τοῦ πυκνωτῆ. Μέ ἁπλή διαφόρηση τῆς συναρτήσεως

$$I(t) = -\frac{q(0)}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{U}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (13.11)$$

Τό ρεῦμα ἑπομένως φθήνει μέ ἐκθετική συμπεριφορά παρόμοια πρός τό φορτίο τοῦ πυκνωτῆ. Τό ἀρνητικό πρόσημο στήν τελευταία σχέση προέρχεται ἀπό τή σύμβαση πού ἔχουμε υἱοθετήσει γιά τό σχετικό πρόσημο φορτίου καί ρεύματος.

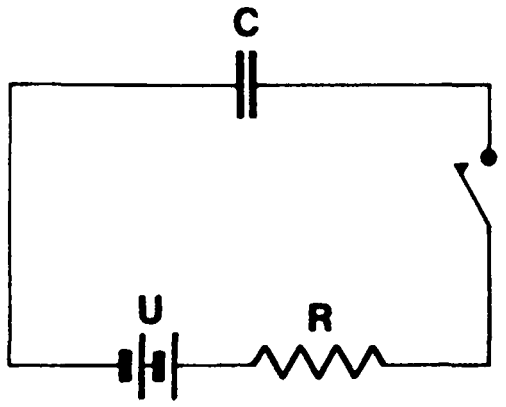
Πέρα ἀπό τήν ἀρχική τιμή τοῦ δυναμικοῦ, στό ὁποῖο ἔχει φορτιστεῖ ὁ πυκνωτής, ἡ συμπεριφορά τοῦ κυκλώματος χαρακτηρίζεται ἀποκλειστικά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 13-2 Έκφόρτιση πυκνωτῆ σέ κύκλωμα R-C.

ἀπό τή σταθερά χρόνου τ τῆς ἐξ. (13.10). Σέ χρόνο t = τ τό φορτίο (ἤ τό ρεῦμα) μειώνεται στά 36.8 % τῆς ἀρχικῆς του τιμῆς. Μιά ἐναλλακτική παράμετρος πού χαρακτηρίζει ἐξίσου τό κύκλωμα προσφέρεται ἀπό τό χρόνο πού ἀπαιτεῖται ὥστε τά ἠλεκτρικά μεγέθη (φορτίο ἤ ρεῦμα) νά μειωθοῦν στό 50 % τῆς ἀρχικῆς του τιμῆς. Ὁ **χρόνος ἡμιζωῆς**† $T_{1/2}$ τοῦ κυκλώματος, σύμφωνα μέ τόν προηγούμενο ὁρισμό, προσδιορίζεται ἀπό τή σχέση



ΣΧΗΜΑ 13-3 Κύκλωμα R-C. Φόρτιση πυκνωτή διαμέσου ἀντιστάσεως.

† Ἡ ὀνομασία εἶναι πολύ νεώτερη ἀπό τήν πρώτη μελέτη τῶν φαινομένων πού ἀναλύουμε καί ἔχει τίς ρίζες της στό χῶρο τῆς Ἀτομικῆς καί Πυρηνικῆς Φυσικῆς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$q(T_{1/2}) = \frac{1}{2}q(0) = q(0)e^{-\frac{T_{1/2}}{\tau}} \qquad (13.12)$$

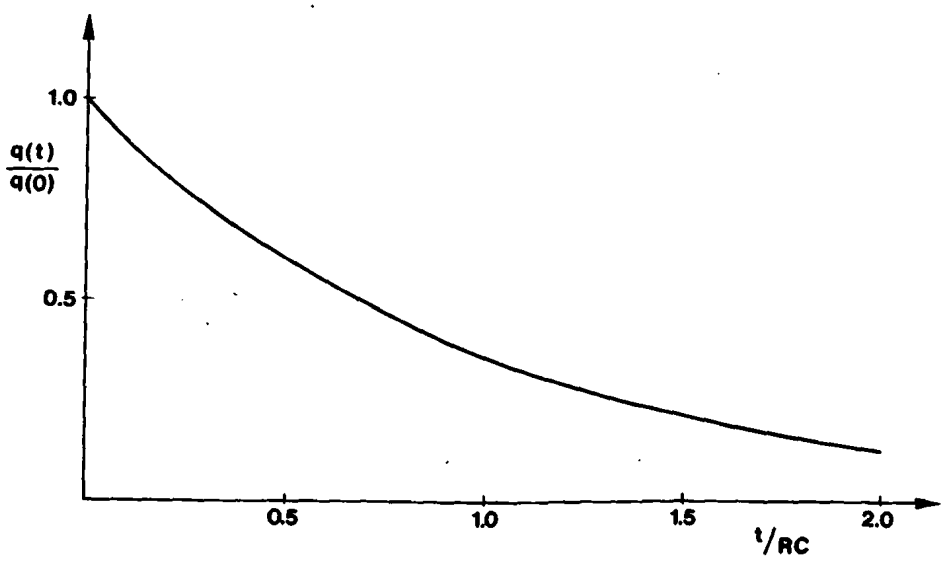
πού δίνει άμέσως τή σύνδεση μεταξύ τῶν δύο παραμέτρων

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = 0.693\ \tau. \qquad (13.13)$$

Ἡ ἐναλλακτική σύνδεση ἀντιστάσεως καί πυκνωτῆ σέ σειρά μέ μιά ΗΕΔ πού δίνεται στό σχῆμα 13-3 ἔχει ἐπίσης μελετηθεῖ στήν Παράγραφο 7-7. Ἡ ἐξέλιξη τοῦ φορτίου πού συσσωρεύεται στόν πυκνωτή δίνεται ἀπό τήν ἐξ. (7.71) ὡς

$$q(t) = UC(1-e^{-\frac{t}{RC}}) = UC(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad (13.14)$$

καί ἀποδίδεται σέ γραφική παράσταση στό σχῆμα 13-4. Ὅπως δείχνει ἡ γραφική παράσταση, μέ τό κλείσιμο τοῦ διακόπτη (σέ χρόνο t = 0) ἀρχίζει ἡ συσσώρευση φορτίου στόν πυκνωτή μέ ἐκθετική ἐξέλιξη ἕως τήν ἀσυμπτωτική τιμή q = UC. Παρόμοια ἐξέλιξη ἔχει καί τό ρεῦμα πού διαρρέει τό κύκλωμα. Μέ ἁπλή διαφόριση τῆς ἐξ. (13.12) καταλήγουμε στή σχέση



ΣΧΗΜΑ 13-4 Φόρτιση πυκνωτῆ σέ κύκλωμα R-C.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$I(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (13.15)$$

μέ ἐκθετική πτώση ἀνάλογη πρός τή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 13-2. Παρατηρεῖται ὅτι τό πρόσημο τοῦ ρεύματος στήν τελευταία σχέση προβλέπεται θετικό, σύμφωνα μέ τή σύμβαση πού ἀναλύθηκε στήν εἰσαγωγή τοῦ κεφαλαίου.

ΠΕΙΡΑΜΑ 13-1. ΚΥΚΛΩΜΑ R-C ΜΕ ΜΕΓΑΛΗ ΣΤΑΘΕΡΑ ΧΡΟΝΟΥ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 13-1. Χρησιμοποιεῖστε ἀντίσταση $R \simeq 25$ MΩ καί πυκνωτή μέ χωρητικότητα $C = 5$ μF. Χρησιμοποιεῖστε ὡς πηγή ΗΕΔ ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ.

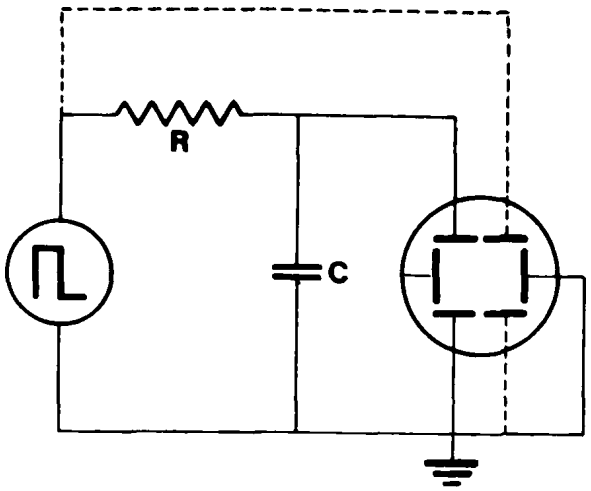
– Ἀναπτύξτε δυναμικό στό τροφοδοτικό ΣΡ $U = 15$ V. Ἐλέξτε τό δυναμικό συνδέοντας τούς ἀκροδέκτες τοῦ τροφοδοτικοῦ ἕνα ἠλεκτρονικό βολτόμετρο. Κλεῖστε τόν διακόπτη στή θέση Α καί παρατηρεῖστε τυχόν μεταβολή στήν ἔνδειξη τοῦ ἠλεκτρονικοῦ βολτομέτρου.

– Συνδέστε τό ἠλεκτρονικό βολτόμετρο στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R. Κλεῖστε τόν διακόπτη στή θέση Β καί παρατηρεῖστε τήν ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου. Σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τό χρόνο ἀπό τή στιγμή τῆς ἐπαφῆς τοῦ διακόπτη στό σημεῖο Β καθώς καί τήν ἀντίστοιχη ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου. Μπορεῖτε νά ἐπεκτείνετε τήν περιοχή τῶν μετρήσεών σας μεταβάλλοντας τήν κλίμακα τοῦ βολτομέτρου καθώς τό δυναμικό στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως φθήνει καί ὁ χρόνος παρατηρήσεως παρατείνεται. (Κατά τή μεταβολή τῆς κλίμακας εἶναι ἐνδεχόμενο νά χρειάζεται ρύθμιση τῆς μηδενικῆς ἐνδείξεως τοῦ ὀργάνου. Ἐλέξτε τή μηδενική ἔνδειξη τοῦ βολτομέτρου σέ κάθε κλίμακα πού πρόκειται νά χρησιμοποιήσετε καί προγραμματίστε ἀνάλογα τίς μετρήσεις σας). Ἡ ὅλη διεργασία θά χρειαστεῖ συνεργασία καί προπόνηση.

– Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματά σας σέ ἡμιλογαριθμική γραφική παράσταση, μέ τό δυναμικό στή λογαριθμική κλίμακα. Δεῖξτε ὅτι τά πειραματικά δεδομένα πρέπει νά ἀποδίδονται ἀπό εὐθεία γραμμή. Προσαρμῶστε τήν καλύτερη εὐθεία στά δεδομένα καί προσδιορίστε τή σταθερά χρόνου $\tau = RC$ τοῦ κυκλώματος.

– Χρησιμοποιώντας τά ἴδια ἐξαρτήματα συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 13-3. Ἀναπτύξτε δυναμικό $U = 15$ V στό τροφοδοτικό ΣΡ (ἐλέγξτε τήν ἀκριβή τιμή μέ τό ἠλεκτρονικό βολτόμετρο). Κλεῖστε τόν διακόπτη καί ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία καί ἀνάλυση τῶν πειραματικῶν δεδομένων γιά τό δυναμικό στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R καί στά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ C.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 13-5 Παρατήρηση άποκρίσεως κυκλώματος R-C μέ καθοδικό παλμογράφο.

Ἡ παρακολούθηση τῆς ἐκθετικῆς ἐξελίξεως τοῦ δυναμικοῦ στό προηγούμενο πείραμα ἦταν δυνατή λόγω τῆς μεγάλης σταθερᾶς χρόνου τοῦ κυκλώματος. Γιά μικρότερες τιμές τοῦ γινομένου RC, ἡ πτώση τοῦ δυναμικοῦ γίνεται ἀρκετά γρήγορη ὥστε νά βρίσκεται ἔξω ἀπό τίς δυνατότητες ἀποκρίσεως τῶν συνηθισμένων ὀργάνων ἀποκλίσεως. Στήν περίπτωση αὐτή, ὅπως ἀναδεικνύεται στό ἑπόμενο πείραμα, ὁ καθοδικός παλμογράφος μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς μέσο παρατηρήσεως.

ΠΕΙΡΑΜΑ 13-2. ΚΥΚΛΩΜΑ R-C ΜΕ ΜΙΚΡΗ ΣΤΑΘΕΡΑ ΧΡΟΝΟΥ

Κατά τή συναρμολόγηση τοῦ κυκλώματος πού δίνεται στό σχῆμα 13-5 χρησιμοποιεῖστε ἀντίσταση R = 10 kΩ καί πυκνωτή μέ χωρητικότητα C = 0.1 μF. Γιά τήν περιοδική φόρτιση τοῦ πυκνωτῆ χρησιμοποιεῖστε γεννήτρια τετραγωνικῶν παλμῶν.

– Συνδέστε ἀρχικά τή γεννήτρια τετραγωνικῶν παλμῶν ἀπευθείας στόν παλμογράφο. Ρυθμίστε τήν περίοδο τῆς γεννήτριας σέ τριπλάσια τιμή τῆς σταθερᾶς χρόνου τ = RC τοῦ κυκλώματος. Ἐλέξτε τή βαθμονόμηση τῆς γεννήτριας σέ συχνότητα ὡς πρός τή βαθμονόμηση τοῦ ὁριζόντιου ἄξονα στήν ὀθόνη τοῦ πλαμογράφου. Ρυθμίστε τό πλάτος τοῦ σήματος στήν τιμή $V_{κκ}$ = 8 V.

– Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 13-5. Παρατηρεῖστε ὅτι μέ τή διάταξη αὐτή ὁ πυκνωτής C φορτίζεται καί ἐκφορτίζεται σέ διαδοχικές ἡμιπεριόδους τοῦ τετραγωνικοῦ σήματος. Βεβαιωθεῖτε ὅτι κατανοεῖτε τή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

λειτουργία τοῦ κυκλώματος καί τή συμπεριφορά τοῦ δυναμικοῦ πού ἀναμένεται στά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ. Ἄν ὁ παλμογράφος πού χρησιμοποιεῖτε διαθέτει δεύτερη εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως, συνδέστε στήν εἴσοδο αὐτή τά ἄκρα τῆς γεννήτριας τετραγωνικῶν παλμῶν σύμφωνα μέ τή διακεκομένη γραμμή τοῦ σχήματος. Σταθεροποιεῖστε τήν εἰκόνα στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου ὥστε νά περιλαμβάνει μιά πλήρη περίοδο τοῦ σήματος τῆς γεννήτριας τετραγωνικῶν παλμῶν. Ἀποδῶστε γραφικά καί ἐξηγεῖστε τήν εἰκόνα πού σχηματίζεται. Μετρεῖστε τό χρόνο ἡμιζωῆς καί ὑπολογίστε τή σταθερά χρόνου RC τοῦ κυκλώματος.

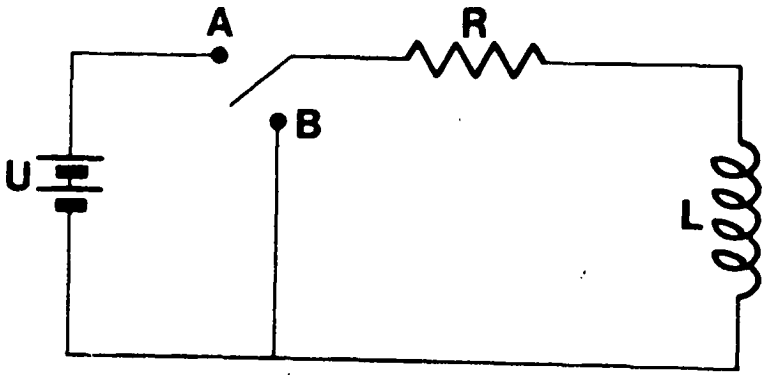
13-2 Τό Κύκλωμα R-L

Τό σχῆμα 13-6 περιέχει τό ἁπλό κύκλωμα πού συγκροτεῖ μιά ἰδανική ἀντίσταση καί μιά ἰδανική ἐπαγωγή. Ἡ ΗΕΔ U μπορεῖ νά συνδεθεῖ σέ σειρά μέ τά δύο ἐξαρτήματα ἄν ὁ διακόπτης κλείσει στήν ἐπαφή A. Ἄν στή συνέχεια ὁ διακόπτης μετατεθεῖ γρήγορα στήν ἐπαφή B, ἡ ἐπενέργεια τοῦ ἡλεκτρικοῦ στοιχείου παύει καί τό κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπό τά ἐξαρτήματα R καί L στά ὁποῖα ἀρχικά κυκλοφορεῖ ρεῦμα I_0. Σύμφωνα μέ τίς ἐξ. (13.2) καί (13.3), στό ἁπλό αὐτό κύκλωμα τό ρεῦμα περιγράφεται ἀπό τήν ἐξίσωση

$$L\frac{dI}{dt} + RI = 0. \qquad (13.16)$$

Ἡ λύση τῆς τελευταίας διαφορικῆς ἐξισώσεως ἀποδίδεται ἀπό τή συνάρτηση

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} \qquad (13.17)$$



ΣΧΗΜΑ 13-6 Κύκλωμα R-L.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου Α είναι μιά σταθερά. Άπό τή συνοριακή συνθήκη γιά t = 0 ή σταθερά τῆς ἐξ. (13.17) ποσδιορίζεται ἀμέσως ὡς τό ἀρχικό ρεῦμα I_0, ἔτσι ὥστε ἡ μετέπειτα ἐξέλιξη τοῦ ρεύματος νά περιγράφεται ἀπό τή συνάρτηση

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (13.18)$$

Μέ ἄλλα λόγια τό ρεῦμα ἀκολουθεῖ τήν ἴδια ἐκθετική πτώση ὅπως τό φορτίο καί τό ρεῦμα στό κύκλωμα R-C πού ἀποδίδεται στό σχῆμα 13-2.

Σέ ἀναλογία μέ τό κύκλωμα R-C μποροῦμε καί ἐδῶ νά ὁρίσουμε τή σταθερά χρόνου τοῦ κυκλώματος ὡς

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad (13.19)$$

πού συνδέεται διαμέσου τῆς ἐξ. (13.13) μέ τόν ἀντίστοιχο χρόνο ἡμιζωῆς. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά ἐπιβεβαιώσει τή σχέση μονάδων henry/ohm = sec.

Γνώριμη ἀπό τό κύκλωμα R-C εἶναι καί ἡ συμπεριφορά τοῦ κυκλώματος R-L σέ σειρά μέ ΗΕΔ (τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 13-6 μέ τόν διακόπτη κλειστό στήν ἐπαφή Α). Ἡ διαφορική ἐξίσωση πού διέπει τό ρεῦμα στήν περίπτωση αὐτή εἶναι

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U \qquad (13.20)$$

πού μέ ἀπευθείας ὁλοκλήρωση ἤ ἄλλες μεθόδους δίνει τή λύση

$$I(t) = \frac{U}{R} - Ae^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (13.21)$$

Ἡ σταθερά τῆς ὁλοκληρώσεως Α μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τή συνοριακή συνθήκη I(0) = 0, πού δίνει

$$A = \frac{U}{R}, \qquad (13.22)$$

καί

$$I(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \qquad (13.23)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ ἐκθετική αὔξηση τοῦ ρεύματος πρός τήν ἀσυμπτωτική τιμή U/R εἶναι παρόμοια πρός τή χρονική ἐξέλιξη τοῦ φορτίου πού συσσωρεύεται στόν πυκνωτή τοῦ κυκλώματος R-C, ὅπως ἀποδίδεται στή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 13-4.

Ἀπό τά τρία στοιχεῖα R, C καί L πού ἐξετάζουμε στό παρόν κεφάλαιο, στήν πράξη, μόνο τά ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς παρουσιάζουν σημαντική ἀπόκλιση ἀπό τήν ἰδανική κατάσταση. Ἐργαστηριακά ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς ἔχουν συνήθως τή μορφή πηνίου καί τό σημαντικό μῆκος τοῦ σύρματος πού ἀπαιτεῖται γιά τήν κατασκευή τοῦ ἐξαρτήματος μπορεῖ νά τοῦ προσδώσει ἀρκετά μεγάλη ἀντίσταση. Στήν περίπτωση τοῦ κυκλώματος R-L ἡ δυσκολία μπορεῖ νά παρακαμφθεῖ ἄν συμπεριλάβουμε τήν ἀντίσταση τοῦ ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς στήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R πού ὑπεισέρχεται στίς ἐξισώσεις. Κατά τόν ἴδιο τρόπο εἶναι δυνατόν νά συμπεριληφθεῖ καί ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ στοιχείου, ἄν ἡ τιμή της δέν μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀμελητέα.

Δυστυχῶς ἡ παρατήρηση τῆς ἐκθετικῆς ἐξελίξεως τοῦ ρεύματος σέ κύκλωμα R-L δέν εἶναι πρακτικά ἐφικτή μέ ὄργανο ἀποκλίσεως, λόγω τῆς μεγάλης τιμῆς τοῦ συντελεστῆ αὐτεπαγωγῆς πού ἀπαιτεῖται ὥστε ἡ σταθερά χρόνου νά ὑπερβαίνει τά μερικά sec. Μποροῦμε ὅμως καί στήν περίπτωση αὐτή νά ἐκμεταλευτοῦμε τήν εὐελιξία πού μᾶς παρέχει ὁ καθοδικός παλμογράφος.

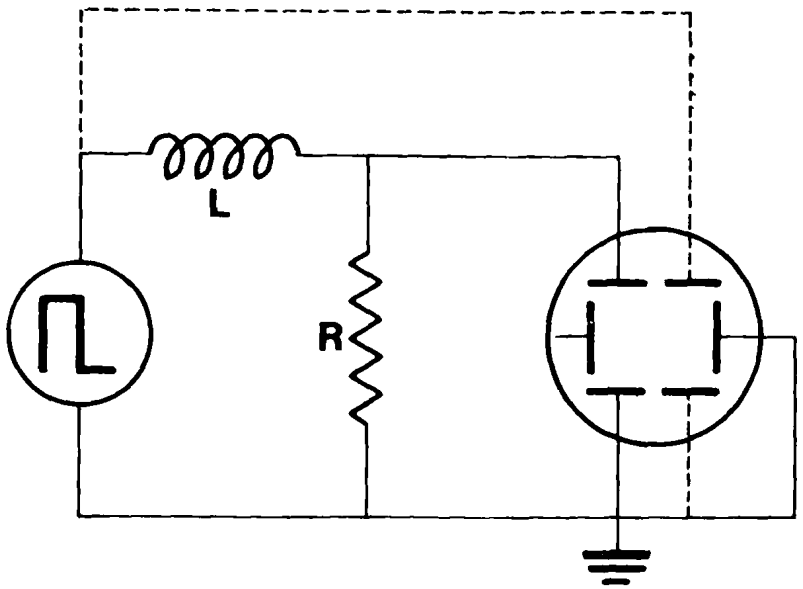
ΠΕΙΡΑΜΑ 13-3. ΚΥΚΛΩΜΑ R-L

Συνδέστε τό κύκλωμα πού δίνεται στό σχῆμα 13-7. Χρησιμοποιεῖστε ἀντίσταση R = 1 kΩ καί πηνίο μέ συντελεστή αὐτεπαγωγῆς L = 25 mH.

– Συνδέστε ἀρχικά τή γεννήτρια τετραγωνικῶν παλμῶν ἀπευθείας στόν παλμογράφο. Ρυθμίστε τήν περίοδο τῆς γεννήτριας σέ τριπλάσια τιμῆς τῆς σταθερᾶς τ = L/R πού χαρακτηρίζει τό κύκλωμα. (**Προσοχή:** Ἡ ἀντίσταση τοῦ ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς μπορεῖ νά εἶναι σημαντική). Ἐλέξτε τή βαθμονόμηση τῆς γεννήτριας σέ συχνότητα ὡς πρός τήν βαθμονόμηση τοῦ ὁριζόντιου ἄξονα στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου. Ρυθμίστε τό πλάτος τοῦ σήματος στήν τιμή $V_{κκ}$ = 8 V.

– Μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 13-7 παρατηρεῖστε τή μεταβολή τοῦ δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R. Ἄν ὁ παλμογράφος πού χρησιμοποιεῖτε διαθέτει δεύτερη εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως, συνδέστε στήν εἴσοδο αὐτή τά ἄκρα τῆς γεννήτριας τετραγωνικῶν παλμῶν σύμφωνα μέ τή διακεκομένη γραμμή τοῦ σχήματος. Σταθεροποιεῖστε τήν ει-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 13-7 Παρατήρηση άποκρίσεως κυκλώματος R-L μέ καθοδικό παλμογράφο.

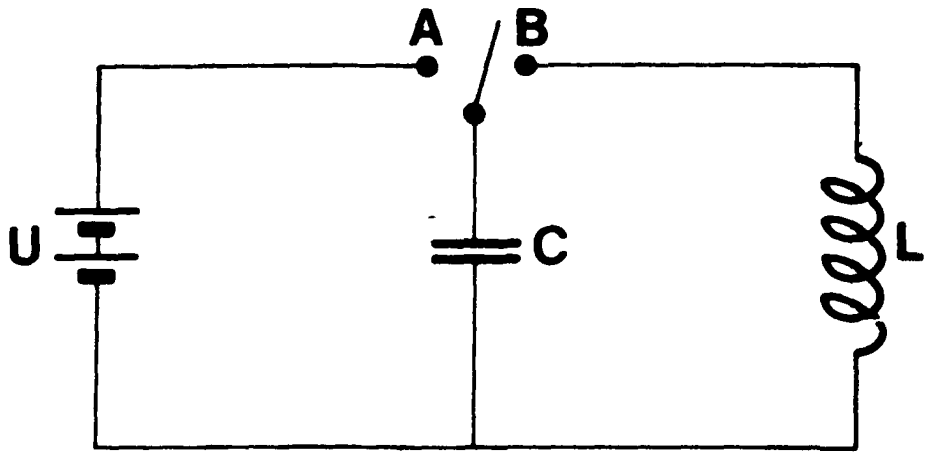
κόνα στήν όθόνη τοῦ παλμογράφου ὥστε νά περιλαμβάνει μιά πλήρη περίοδο τῆς γεννήτριας τετραγωνικῶν παλμῶν. Ἀποδῶστε γραφικά καί ἐξηγεῖστε τήν εἰκόνα πού σχηματίζεται. Μετρεῖστε τό χρόνο ἡμιζωῆς καί ὑπολογίστε τή σταθερά χρόνου L/R τοῦ κυκλώματος. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τήν τιμή πού προκύπτει ἄν ὑπολογίσετε τή σταθερά χρόνου μέ βάση τά ἐξαρτήματα πού χρησιμοποιήσατε γιά τή συγκρότηση τοῦ κυκλώματος.

13-3 Τό Ἰδανικό Κύκλωμα C-L

Ὅπως ἤδη ἀναφέρθηκε, ἐργαστηριακά ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς εἰσάγουν πάντα στό κύκλωμα ὠμική ἀντίσταση πού δέν εἶναι δυνατό νά θεωρηθεῖ ἀμελητέα. Ἡ μελέτη ἐπομένως ἑνός κυκλώματος πού χαρακτηρίζεται ἀποκλειστικά ἀπό χωρητικότητα καί συντελεστή αὐτεπαγωγῆς μπορεῖ νά ἔχει μόνο θεωρητικό ἐνδιαφέρον. Παρόλα αὐτά τό Ἰδανικό κύκλωμα C-L ἐμφανίζει τελείως νέα συμπεριφορά πού εἶναι χρήσιμο νά μελετηθεῖ, κυρίως ἐνόψει τοῦ περισσότερο ρεαλιστικοῦ κυκλώματος πού θά μᾶς ἀπασχολήσει στήν ἐπόμενη παράγραφο.

Τό Ἰδανικό κύκλωμα C-L μπορεῖ νά μελετηθεῖ, τουλάχιστον κατ' ἀρχήν, μέ τή συνδεσμολογία τοῦ σχήματος 13-8. Ἐπαφή τοῦ διακόπτη στό σημεῖο A ἔχει ὡς ἐπακόλουθο τή συσσώρευση φορτίου $q = VC$ στόν πυκνωτή. Ἄν στή συνέχεια ὁ διακόπτης μετατεθεῖ στήν ἐπαφή B τό ρεῦμα πού διαρρέει τό Ἰδανικό κύκλωμα C-L διέπεται ἀπό τήν ἐξίσωση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 13-8 Τό Ιδανικό κύκλωμα C-L.

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \tag{13.24}$$

Χρησιμοποιώντας τόν ὁρισμό τοῦ ρεύματος στήν ἐξ. (13.6) ἡ διαφορική ἐξίσωση μπορεῖ νά γραφεῖ ἀποκλειστικά ὡς πρός τό φορτίο ὡς

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0. \tag{13.25}$$

Οἱ λύσεις τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εἶναι γνωστές ἀπό τή θεωρία τοῦ ἰδανικοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά ἐπαληθεύσει μέ ἁπλή ἀντικατάσταση ὅτι ἡ γενική λύση ἔχει τή μορφή

$$q = A\cos(\omega t - \varphi) \tag{13.26}$$

ὅπου οἱ σταθερές A καί φ προσδιορίζονται ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες, ἐνῶ

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{13.27}$$

Ἡ ἐξ. (13.26) δίνει γιά πρώτη φορά μιά νέα συμπεριφορά στά μεταβατικά ἠλεκτρικά φαινόμενα. Ἡ συσσώρευση τοῦ φορτίου στόν πυκνωτή C προβλέπεται περιοδική μεταξύ τῶν ὁρίων $\pm A$ μέ περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC} \tag{13.28}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἡ συχνότητα

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} . \tag{13.29}$$

Ἡ **φάση** φ τῆς περιοδικῆς κινήσεως ἀναφέρεται στό φορτίο πού ὑπάρχει στόν πυκνωτή σέ χρόνο $t = 0$.

Τό ρεῦμα πού διαρρέει τό κύκλωμα ἐμφανίζει παρόμοια περιοδική συμπεριφορά. Μέ ἁπλή διαφόριση τῆς ἐξ. (13.26)

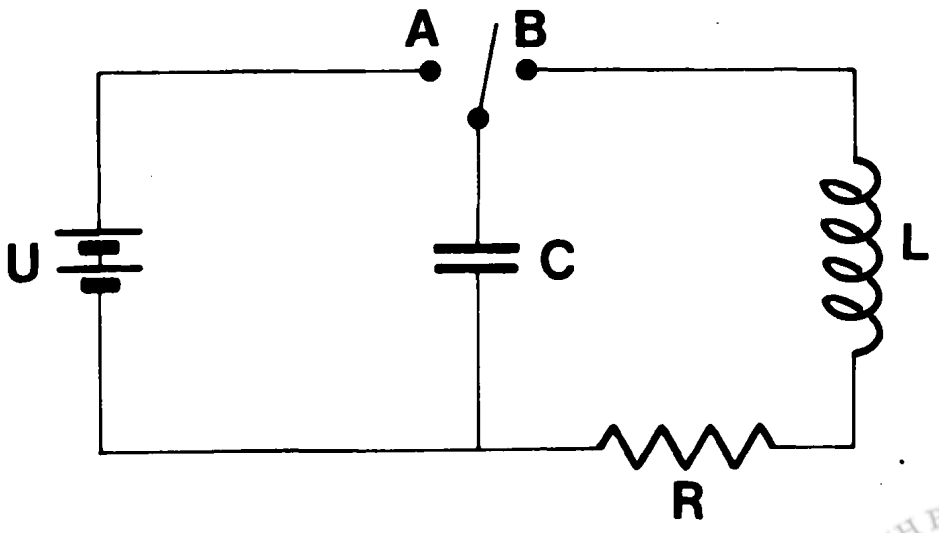
$$I(t) = -A\omega \sin(\omega t - \varphi) \tag{13.30}$$

ὅπου τό ἀρνητικό πρόσημο ὀφείλεται πάλι στή συνθήκη πού ἔχει υἱοθετηθεῖ ὡς πρός τή θετική ροή τοῦ ρεύματος. Παρατηρεῖται ὅτι ἡ ἐξ. (13.30) ἀποτελεῖ ἰσοδύναμη λύση τῆς ἀντίστοιχης διαφορικῆς ἐξισώσεως γιά τό ρεῦμα πού μπορεῖ νά ἐξαχθεῖ μέ διαφόριση τῆς ἐξ. (13.25).

13-4 Κύκλωμα R-C-L σέ Σειρά

Ἡ διαφορική ἐξίσωση πού διέπει τό πλέον ρεαλιστικό κύκλωμα τοῦ σχήματος 13-9 μπορεῖ νά γραφεῖ ἀμέσως ἀπό τίς ἐξ. (13.2), (13.3) καί (13.5) ὡς

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0. \tag{13.31}$$



ΣΧΗΜΑ 13-9 Κύκλωμα R-C-L σέ σειρά.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Χρησιμοποιώντας άκόμη τόν όρισμό τοῦ ρεύματος $I = dq/dt$ μποροῦμε μέ άπλή διαφόριση νά γράψουμε τήν ἴδια έξίσωση στίς δύο έναλλακτικές μορφές, ὡς πρός τό φορτίο πού συσσωρεύεται στόν πυκνωτή

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \tag{13.32}$$

ἤ ὡς πρός τό ρεῦμα

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \tag{13.33}$$

Ἡ διαφορική έξίσωση πού προκύπτει στίς δύο τελευταῖες σχέσεις ἔχει ἤδη μελετηθεῖ διεξοδικά στήν Παράγραφο 7-2 σέ σχέση μέ τήν κίνηση τοῦ γαλβανομέτρου D'Arsonval. Χρησιμοποιώντας τήν άντιστοιχία

$$\begin{aligned} M &\leftrightarrow L \\ r &\leftrightarrow R \\ \tau &\leftrightarrow \frac{1}{C} \end{aligned} \tag{13.34}$$

μποροῦμε νά ταυτίσουμε τήν έξ. (13.32) ἤ (13.33) μέ τήν έξ. (7.15). Μποροῦμε άκόμη νά όρίσουμε παράλληλα τόν **άνηγμένο συντελεστή άποσβέσεως**

$$\gamma = \frac{R}{2L}, \tag{13.35}$$

τή **φυσική (γωνιακή) συχνότητα**

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{13.36}$$

καί τήν γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \tag{13.37}$$

Ἡ μορφή τῆς λύσης έξαρτᾶται καί έδῶ άπό τό σχετικό μέγεθος τῶν παραμέτρων ω_0 καί γ. Ἀκολουθώντας τήν άνάλυση τῆς Παραγράφου 7-2 συνοψίζουμε στή συνέχεια τά άποτελέσματα γιά τή συμπεριφορά τοῦ ρεύματος ἤ τοῦ φορτίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(α) $\gamma < \omega_0$ (ὑποκρίσιμη ἀπόσβεση)

Στήν περίπτωση αὐτή

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{13.38}$$

καί ἡ συμπεριφορά τῶν ἠλεκτρικῶν μεγεθῶν περιγράφεται ἀπό τή λύση {βλ. ἐξ. (7.25)}

$$(q \text{ ἤ } I) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) \tag{13.39}$$

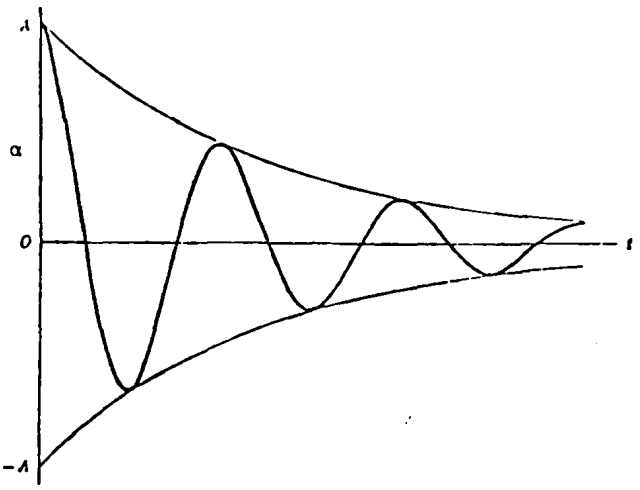
πού ἀποδίδεται γραφικά στό σχῆμα 13-10. Οἱ σταθερές A καί φ μποροῦν νά προσδιοριστοῦν ὅπως πάντα ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες.

Ἡ ἐξ. (13.39) περιγράφει ἀποσβενόμενη ταλάντωση. Σέ ἀναλογία μέ τή συμπεριφορά τῶν κυκλωμάτων πού μελετήσαμε προηγουμένως μποροῦμε νά ὁρίσουμε τή **σταθερά χρόνου** τῆς ἀποσβέσεως ὡς τό χρόνο πού ἀπαιτεῖται γιά μείωση τοῦ πλάτους τῆς ταλαντώσεως κατά τόν παράγοντα 1/e. Ἀπό τήν ἐξ. (13.35) ὁ μέσος χρόνος ζωῆς δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R} \tag{13.40}$$

ἐνῶ ὁ ἀντίστοιχος **χρόνος ἡμιζωῆς** τῆς ἀποσβέσεως {βλ. ἐξ. (13.13)} ὡς

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = 1.386\,\frac{L}{R} \tag{13.41}$$



ΣΧΗΜΑ 13-10 Μεταβολή τοῦ φορτίου ἤ τοῦ ρεύματος σέ κύκλωμα R-C-L κατά τήν ὑποκρίσιμη κατάσταση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(β) $\gamma > \omega_0$ (ὑπερκρίσιμη ἀπόσβεση)

Ἡ συνθήκη ἱκανοποιεῖται γιά

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{13.42}$$

καί ὁδηγεῖ στή γενική ἐκθετική λύση [βλ. ἐξ. (7.27)]

$$(q \text{ ἤ } I) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \tag{13.43}$$

ὅπου

$$\gamma_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{13.44}$$

καί C_1, C_2 δύο πραγματικοί ἀριθμοί πού ἐξαρτῶνται ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες.

(γ) $\gamma = \omega_0$ (κρίσιμη ἀπόσβεση)

Ἡ συνθήκη ἐπιτυγχάνεται γιά

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{13.45}$$

Μέ λύση [βλ. ἐξ. (7.30)]

$$(q \text{ ἤ } I) = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t} \tag{13.46}$$

ἐμφανίζει τήν ταχύτερη ἀποκατάσταση ἰσορροπίας στό κύκλωμα. Ἡ συμπεριφορά τῶν ἠλεκτρικῶν μεγεθῶν τοῦ κυκλώματος στίς τρεῖς προηγούμενες καταστάσεις συγκρίνεται στή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 7-5.

Εἶναι ἐνδιαφέρον νά παρατηρήσουμε ὅτι τά ἐπιμέρους κυκλώματα πού μελετήσαμε στίς προηγούμενες παραγράφους μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὡς ὁριακές περιπτώσεις τοῦ κυκλώματος R-C-L. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά διερευνήσει τή συνθήκη πού ἱκανοποιεῖται στίς ὁριακές περιπτώσεις $C \to 0$, $L \to 0$ καί $R \to 0$.

Κατά τήν ἀπόσβεση τῶν ταλαντώσεων στήν ὑποκρίσιμη κατάσταση, μιά παράμετρος πού χαρακτηρίζει τό κύκλωμα μπορεῖ νά ἐξαχθεῖ ἀπό τά διαδοχικά μέγιστα τοῦ φορτίου (ἤ τοῦ ρεύματος) κατά τό διάστημα μιᾶς περιόδου. Ἡ μείωση τοῦ πλάτους τῆς ταλαντώσεως σέ δύο διαδοχικά μέγιστα δίνεται προφανῶς ἀπό τό λόγο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{e^{-\gamma t}}{e^{-\gamma(t+T)}} = e^{\gamma T} \tag{13.47}$$

όπου

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{13.48}$$

είναι ή περίοδος τῆς ταλαντώσεως. Ἡ **λογαριθμική μείωση**

$$\delta = \gamma T$$

χαρακτηρίζει ἐπομένως τήν ἀπόσβεση τοῦ κυκλώματος ἤ ἰσοδύναμα τό ρυθμό μέ τόν ὁποῖο ἐνέργεια καταναλώνεται στήν ὠμική ἀντίσταση R. Γιά τή συνθήκη

$$R << 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{13.49}$$

τό κύκλωμα ταλαντοῦται μέ συχνότητα $\omega \simeq \omega_0$ καί ἡ λογαριθμική μείωση δίνεται προσεγγιστικά ἀπό τή σχέση

$$\delta_0 \simeq \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} . \tag{13.50}$$

Γιά τήν ἀπόδοση τῆς ἴδιας ἰδιότητας τοῦ κυκλώματος πολλοί κατασκευαστές χρησιμοποιοῦν μιά ἐναλλακτική παράμετρο μέ τήν ὀνομασία **παράγοντας ποιότητας** (QF) πού ὁρίζεται μέ βάση τήν ἐξ. (13.50) ὡς

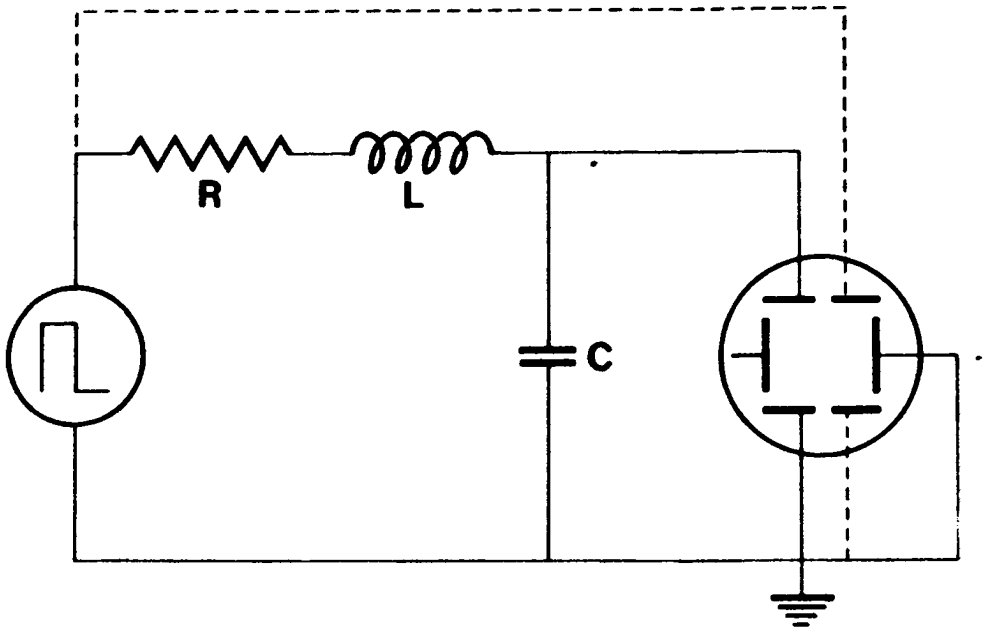
$$QF \equiv \frac{\pi}{\delta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} . \tag{13.51}$$

Παρατηρεῖται ὅτι στό κύκλωμα πού ἐμφανίζει κρίσιμη ἀπόσβεση ὁ παράγοντας ποιότητας παίρνει τήν τιμή QF = 1/2.

ΠΕΙΡΑΜΑ 13-4. ΚΥΚΛΩΜΑ R-C-L ΣΕ ΣΕΙΡΑ

Γιά τή μελέτη τοῦ κυκλώματος R-C-L συνδέστε τή διάταξη τοῦ σχήματος 13-11. Χρησιμοποιεῖστε ἕνα ἐξάρτημα αὐτεπαγωγῆς μέ συντελεστή L = 25 mH. Ἡ ἀντίσταση R ἀντιπροσωπεύει τήν ὠμική ἀντίσταση τοῦ ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς L καί τήν ἐσωτερική ἀντίσταση τῆς γεννή-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 13-11 Μελέτη τοῦ κυκλώματος R-C-L μέ καθοδικό παλμογράφο.

τριας τετραγωνικῶν παλμῶν (Συμβουλευθεῖτε τό ἐγχειρίδιο τοῦ κατασκευστῆ γιά τόν προσδιορισμό τῆς τελευταίας).

- Συνδέστε ἀρχικά τή γεννήτρια τετραγωνικῶν παλμῶν ἀπευθείας στόν παλμογράφο. Ἐλέξτε τή βαθμονόμηση τῆς γεννήτριας σέ συχνότητα ὡς πρός τή βαθμονόμηση τοῦ ὁριζόντιου ἄξονα στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου. Ρυθμίστε τό πλάτος τοῦ σήματος στήν τιμή $V_{κκ} = 8$ V.
- Μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 13-11 παρατηρεῖστε τή μεταβολή τοῦ δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ C. Ἄν ὁ παλμογράφος πού χρησιμοποιεῖτε διαθέτει δεύτερη εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως, συνδέστε στήν εἴσοδο αὐτή τά ἄκρα τῆς γεννήτριας τετραγωνικῶν παλμῶν σύμφωνα μέ τή διακεκομένη γραμμή τοῦ σχήματος. Σταθεροποιεῖστε τήν εἰκόνα στήν ὀθόνη τοῦ πλαμογράφου ὥστε νά περιέχει δύο ἤ τρεῖς πλήρεις ταλαντώσεις. Ἀποδῶστε τήν εἰκόνα σέ γραφική παράσταση. Προσδιορίστε τή συχνότητα τῆς ταλαντώσεως καί τό χρόνο ἡμιζωῆς τῆς ἀποσβέσεως. Χρησιμοποιεῖστε τά πειραματικά ἀποτελέσματα γιά τόν ὑπολογισμό τῆς σταθερᾶς χρόνου τ καί τῶν παραμέτρων γ, ω_0 καί QF τοῦ κυκλώματος. Συγκρίνετε τά ἀποτελέσματα μέ τίς προβλέψεις τῶν ἐξ. (13.35), (13.36) καί (13.51).
- Παρεμβάλετε σέ σειρά μέ τό ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς L ἕνα ροοστάτη μέ ὁλική ἀντίσταση 25 kΩ. Αὐξεῖστε σταδιακά τήν ἀντίσταση πού παρεμβάλλει ὁ ροοστάτης στό κύκλωμα μέχρις ὅτου ἐπιτύχετε κρίσιμη ἀπόσβεση. Μετρεῖστε τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως μέ ἕνα ὠμόμετρο καί συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τήν πρόβλεψη τῆς ἐξ. (13.45).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



—Αύξεῖστε περισσότερο τήν ἀντίσταση τοῦ ροοστάτη καί περιγράψτε τή συμπεριφορά τοῦ κυκλώματος πού παρατηρεῖτε.

13-5 Διακοπή τῆς Καταστάσεως Ἰσορροπίας σέ Κυκλώματα R-C-L

Οἱ καταστάσεις πού μελετᾶμε διαρκοῦν γιά ἕνα πεπερασμένο χρονικό διάστημα — γιαυτό ἐξάλλου ὀνομάζονται καί *μεταβατικές*. Ἄν τό κύκλωμα περιέχει πυκνωτή σέ σειρά μέ τήν ΗΕΔ, μετά ἀπό χρόνο τριπλάσιο ἤ τετραπλάσιο ἀπό τή σταθερά χρόνου τ, τό ρεῦμα οὐσιαστικά μηδενίζεται. Ἀντίθετα, σέ κύκλωμα πού περιέχει ἀποκλειστικά ἀντίσταση καί ἐπαγωγή (καθώς καί ΗΕΔ) τό ρεῦμα σύντομα φτάνει στήν τιμή ἰσορροπίας πού προσδιορίζει ἡ ἐξ. (13.21)

$$I = \frac{U}{R} \tag{13.52}$$

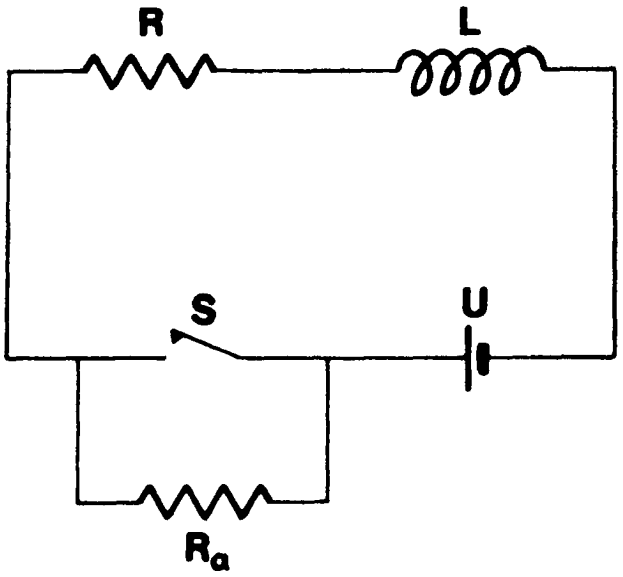
καί ἐφεξῆς παραμένει σταθερό. Στήν κατάσταση αὐτή τό ἡλεκτρικό στοιχεῖο καταναλώνει ἐνέργεια γιά τή διέλευση τοῦ ρεύματος ἀπό τήν ἀντίσταση, ἐνῶ στό ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς ἔχει ἀποθηκευτεῖ ἕνα ποσό ἐνεργείας {βλ. ἐξ. (11.75)}

$$W = \tfrac{1}{2} LI^2. \tag{13.53}$$

Ἄν τώρα τό κύκλωμα διακοπεῖ (ἀποσυνδέοντας τό διακόπτη στό σχῆμα 13-6 ἀπό τήν ἐπαφή A) ἡ ἐνέργεια τῆς ἐξ. (13.53) πρέπει κατά κάποιο τρόπο νά ἀποδοθεῖ στό περιβάλλον. Ὁ μόνος τρόπος πού προσφέρεται στό ἐξάρτημα γιά νά ἀποδώσει τό ἀποθηκευμένο αὐτό ποσό ἐνεργείας εἶναι ἡ συνέχιση τῆς ροῆς τοῦ ρεύματος γιά ἕνα μικρό ἀκόμη χρονικό διάστημα, ὥστε ἕνα ἴσο ποσό ἐνεργείας νά καταναλωθεῖ στήν ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος. Τοῦτο ἔχει ὡς ἐπακόλουθο τή δημιουργία ἑνός σπινθῆρα μεταξύ τῶν ἐπαφῶν τοῦ διακόπτη πού ὁ ἀναγνώστης ἔχει ἴσως παρατηρήσει κατά τή διακοπή λειτουργίας ἡλεκτρικῶν συσκευῶν.

Καθόσον ὁ ἰονισμός καί ἡ ἀγωγιμότητα τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα εἶναι ἕνα ἐξαιρετικά πολύπλοκο φαινόμενο, θά μελετήσουμε τήν ἀπόδοση τῆς ἐνεργείας, πού ἔχει ἐναποθηκευτεῖ σέ ἕνα ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς, μέ τή συνδεσμολογία τοῦ σχήματος 13-12. Στό κύκλωμα αὐτό ἡ ἀντίσταση R_a ἀντιπροσωπεύει τήν ἀντίσταση πού κατά τή διακοπή τοῦ κυκλώματος παρεμβάλλει ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀέρας μεταξύ τῶν ἐπαφῶν τοῦ διακόπτη S. Ἄν ἡ ἀντίσταση R_a εἶναι μεγάλη, ἡ παρουσία της μπορεῖ νά ἀγνοηθεῖ ὅταν ὁ δια-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 13-12 Διάταξη γιά τήν προσομοίωση διακοπῆς κυκλώματος R-.

κόπτης S εἶναι κλειστός καί τό κύκλωμα μεταπίπτει στό γνωστό κύκλωμα R-L μέ ΗΕΔ σέ σειρά, πού μελετήσαμε στήν Παράγραφο 13-2. Στό κύκλωμα αὐτό τό ρεῦμα αὐξάνει ἀσυμπτωτικά πρός τήν τιμή τῆς ἐξ. (13.52) καί σύντομα δημιουργεῖται κατάσταση ἰσορροπίας μέ σταθερό ρεῦμα. Ἄν σέ κάποια μετέπειτα στιγμή, πού θά ὀνομάσουμε $t = 0$, ἀνοίξει ὁ διακόπτης S, τό κύκλωμα παραμένει ἕνα κύκλωμα R-L, ἀλλά μέ ὠμική ἀντίσταση αὐξημένη κατά τήν ἀντίσταση R_a. Ἡ ἐξέλιξη τοῦ ρεύματος τώρα περιγράφεται ἀπό τήν ἐξ. (13.20)

$$L\frac{dI}{dt} + (R + R_a)I = U \qquad (13.54)$$

μέ λύση [βλ. ἐξ. (13.21)]

$$I(t) = \frac{U}{R + R_a} - Ae^{-\frac{R + R_a}{L}t}. \qquad (13.55)$$

Ἡ σταθερά τῆς ὁλοκληρώσεως A στήν τελευταία συνάρτηση μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τήν ἀρχική συνθήκη

$$I(0) = \frac{U}{R} \qquad (13.56)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πού δίνει

$$A = - \frac{UR_\alpha}{(R + R_\alpha)R} . \qquad (13.57)$$

Ἡ λύση ἐπομένως τῆς ἐξ. (13.55) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$I(t) = \frac{U}{R + R_\alpha} \left(1 + \frac{R_\alpha}{R} e^{- \frac{R + R_\alpha}{L} t} \right) \qquad (13.58)$$

ἐνῶ τό δυναμικό πού ἀναπτύσσεται στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_α ὡς

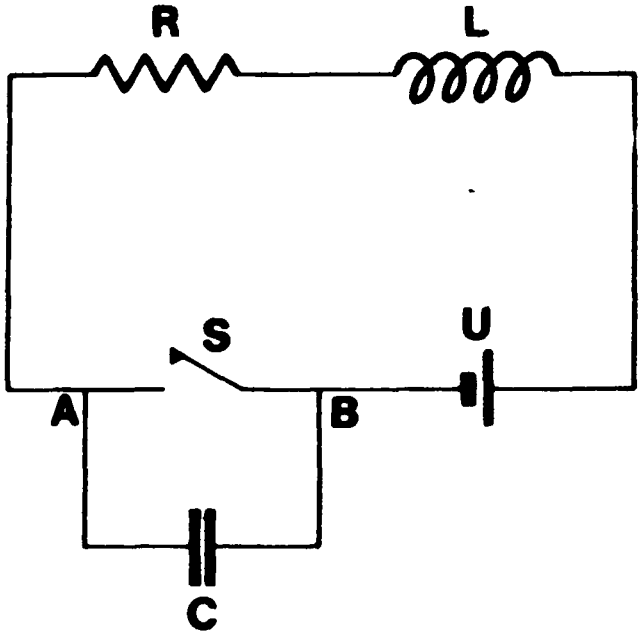
$$V(t) = I(t)R_\alpha = \frac{UR_\alpha}{R + R_\alpha} \left(1 + \frac{R_\alpha}{R} e^{- \frac{R + R_\alpha}{L} t} \right). \qquad (13.59)$$

Κατά τή χρονική στιγμή $t = 0$, ἡ τιμή τοῦ δυναμικοῦ αὐτοῦ εἶναι

$$V(0) = U \frac{R_\alpha}{R} . \qquad (13.60)$$

Στήν πράξη, κατά τή διακοπή ἑνός κυκλώματος R-L, ἡ ἀντίσταση R_α ἀντιπροσωπεύει τήν ἀντίσταση τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα μεταξύ τῶν ἐπαφῶν τοῦ διακόπτη, μέ τιμή οὐσιαστικά ἄπειρη. Τοῦτο, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (13.60), ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή δημιουργία μιᾶς τεράστιας διαφορᾶς δυναμικοῦ μέ ἐπακόλουθο τήν ἠλεκτρική ἐκκένωση πού ἀναφέραμε. Παρατηρεῖται ὅτι ἡ διαφορά αὐτή δυναμικοῦ εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό συντελεστή αὐτεπαγωγῆς τοῦ κυκλώματος. Ρεαλιστικά ἐξαρτήματα ἀντιστάσεως χαρακτηρίζονται πάντα ἀπό κάποιο (μικρό ἤ μεγάλο) συντελεστή αὐτεπαγωγῆς. Ἡ διακοπή ἐπομένως τῆς λειτουργίας ἑνός κυκλώματος συνοδεύεται κατά κανόνα ἀπό ἠλεκτρική ἐκκένωση μεταξύ τῶν ἐπαφῶν τοῦ διακόπτη. Κάτω ἀπό ὁρισμένες συνθῆκες ἐργασίας (π.χ. στή γειτονία εὔφλεκτων πτητικῶν ὑγρῶν) τοῦτο εἶναι δυνατόν νά ἔχει ἀντίξοες ἤ καί καταστροφικές ἐπιπτώσεις. Ἡ ἀποφυγή τῆς ἐκκενώσεως μπορεῖ νά πραγματοποιηθεῖ ἄν δοθεῖ στήν ἐπαγωγή τοῦ κυκλώματος μιά ἐναλλακτική λύση γιά τήν ἀπόδοση τῆς ἐνεργείας πού ἔχει ἀποθηκεύσει κατά τή λειτουργία τοῦ κυκλώματος στήν κατάσταση ἰσορροπίας. Μιά τέτοια λύση δίνεται μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 13-13.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 13-13 Παράλληλη σύνδεση πυκνωτῆ γιά τήν ἀποφυγή ἠλεκτρικῆς ἐκκενώσεως κατά τή διακοπή κυκλώματος R-L.

Ἄν καί εἶναι δυνατή ἡ ἀνάλυση τοῦ κυκλώματος μέ μεθόδους πού ἀναπτύχθηκαν στήν προηγούμενη παράγραφο, θά ἀρκεστοῦμε στά ἐπιχειρήματα πού παρέχει ἡ ἐνεργειακή ἄποψη. Μέ τό διακόπτη S κλειστό, ἡ παρουσία τοῦ πυκνωτῆ C μπορεῖ νά ἀγνοηθεῖ καί τό κύκλωμα συμπεριφέρεται ὡς ἁπλό κύκλωμα R-L μέ ροή ρεύματος, στήν κατάσταση ἰσορροπίας

$$I = \frac{U}{R} . \tag{13.52}$$

Ἡ παρουσία τοῦ πυκνωτῆ γίνεται σημαντική κατά τή διακοπή τοῦ κυκλώματος μεταξύ τῶν σημείων A καί B. Στήν περίπτωση αὐτή παρέχεται ἡ δυνατότητα στό ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς νά μεταφέρει τήν ἀποθηκευμένη του ἐνέργεια στόν πυκνωτή, ἀναπτύσσοντας μεταξύ τῶν σημείων A καί B ἕνα δυναμικό V, πού μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τή σχέση

$$\tfrac{1}{2} LI^2 \simeq \tfrac{1}{2} CV^2 \tag{13.61}$$

ἤ

$$V \simeq I \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} . \tag{13.62}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τό προσεγγιστικό σύμβολο $\simeq$ στίς τελευταῖες δύο ἐξισώσεις προέρχεται ἀπό τήν ἀναπόφευκτη κατανάλωση ἐνεργείας κατά τή ροή τοῦ ρεύματος μέσω τῆς ὡμικῆς ἀντιστάσεως τοῦ κυκλώματος. Ἡ μετέπειτα ἐξέλιξη τοῦ δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ διακόπτη (καί τοῦ πυκνωτῆ) θά ἐξαρτηθεῖ ἀπό τή σχετική τιμή τῶν μεγεθῶν R, C καί L. Ἡ ἐκτίμηση πάντως τῆς ἐξ. (13.62) ἀντιπροσωπεύει τό μέγιστο δυναμικό ἔτσι ὥστε ἄν ἡ τιμή αὐτή δέν ὑπερβαίνει τίς προδιαγραφές τοῦ κατασκευαστῆ γιά τό ἐξάρτημα C, ἡ διακοπή λειτουργίας τοῦ κυκλώματος νά πραγματοποιηθεῖ χωρίς ἠλεκτρική ἐκκένωση.

ΠΕΙΡΑΜΑ 13-5. ΔΙΑΚΟΠΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ R-L

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 13-13 παραλείποντας τόν πυκνωτή C. Χρησιμοποιεῖστε ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς μέ συντελεστή L $\simeq$ 25 mH. Ἡ ἀντίσταση R τοῦ σχήματος 13-13 ἀντιπροσωπεύει τήν ὡμική ἀντίσταση τοῦ ἐξαρτήματος. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη τροφοδοτικό ΣΡ καί διακόπτη τηλεγραφητῆ. Ἀπό τήν ἐξ. (13.19) ὑπολογίστε τή σταθερά χρόνου τοῦ κυκλώματος R-L.

– Ἀναπτύξτε διαφορά δυναμικοῦ στό τροφοδοτικό ΣΡ U = 15 V. Κλεῖστε τό διακόπτη S γιά ἀρκετό χρονικό διάστημα, ὥστε νά ἐπιτευχθεῖ κατάσταση ἰσορροπίας στό κύκλωμα. Ἀνοῖξτε τό διακόπτη καί παρατηρεῖστε τό σπινθῆρα πού δημιουργεῖται.

– Συνδέστε ἕνα πυκνωτή μέ χωρητικότητα C=5 μF παράλληλα πρός τόν διακόπτη S. Συνδέστε τά σημεῖα A καί B τοῦ κυκλώματος στήν εἴσοδο κατακόρυφης ἀποκλίσεως τοῦ καθοδικοῦ παλμογράφου. Ρυθμίστε τή συχνότητα σαρώσεως τοῦ παλμογράφου ὥστε ὁ ὁριζόντιος ἄξονας τῆς ὀθόνης νά ἀντιστοιχεῖ σέ χρόνο περίπου τριπλάσιο ἀπό τή σταθερά χρόνου τοῦ κυκλώματος R-C-L πού δημιουργεῖται ὅταν ὁ διακόπτης S εἶναι ἀνοικτός. Κλεῖστε τό διακόπτη S γιά ἀρκετό χρονικό διάστημα, ὥστε νά ἐπιτευχθεῖ κατάσταση ἰσορροπίας στό κύκλωμα. Ἀνοῖξτε τό διακόπτη καί παρατηρεῖστε στήν ὀθόνη τή μεταβολή δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ. Ἀποδῶστε τήν εἰκόνα σέ ποιοτική γραφική παράσταση καί ἑρμηνεῦστε τό ἀποτέλεσμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

13-1. Ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα ἑνός ἰδανικοῦ ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς μέ συντελεστή αὐτεπαγωγῆς L = 25 μH μετρᾶται ὡς 600 V. Ποιός ὁ ρυθμός μεταβολῆς τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τό ἐξάρτημα;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

13-2. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐνέργεια πού ἀποθηκεύεται τελικά στόν πυκνωτή τοῦ σχήματος 13-3 εἶναι ἴση μέ τήν ἐνέργεια πού κατά τή μεταβατική κατάσταση καταναλώνεται στήν ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος.

13-3. Τό φορτίο Q ἑνός πυκνωτῆ διοχετεύεται σέ ἕνα βαλλιστικό γαλβανόμετρο. Στά ἄκρα τοῦ γαλβανομέτρου ἔχει συνδεθεῖ παράλληλα μιά διακλάδωση μέ ἀντίσταση R_s. Ἄν τό πηνίο τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου χαρακτηρίζεται ἀπό ἀντίσταση R_g καί συντελεστή αὐτεπαγωγῆς L δεῖξτε ὅτι τό ποσοστό τοῦ φορτίου Q_g πού διέρχεται ἀπό τό γαλβανόμετρο εἶναι ἀνεξάρτητο τῆς ἐπαγωγῆς L καί δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\frac{Q_g}{Q} = \frac{R_s}{R_g + R_s}.$$

13-4. Ἕνας πυκνωτής μέ χωρητικότητα C = 3 μF φορτίζεται σέ δυναμικό 400 V καί στή συνέχεια ἐκφορτίζεται διαμέσου μιᾶς ἀντιστάσεως 100 kΩ. Μετά ἀπό παρέλευση 2 sec προσδιορίστε τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀντίσταση καί τό φορτίο πού ἔχει παραμείνει στόν πυκνωτή.

13-5. Τροφοδοτικό ΣΡ μέ ἀμελητέα ἀντίσταση καί δυναμικό 500 V συνδέεται σέ σειρά μέ πυκνωτή καί ἀντίσταση. Ἄν ἡ σταθερά χρόνου τοῦ κυκλώματος εἶναι 250 msec καί τό ἀρχικό ρεῦμα 40 mA προσδιορίστε τή χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ καί τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως.

13-6. Ἡ πριονωτή τάση ἑνός παλμογράφου γιά ὁριζόντια σάρωση μεταβάλλεται μεταξύ τῶν τιμῶν ± 100 V. Ἡ χωρητικότητα τοῦ ζεύγους ὁριζόντιας ἀποκλίσεως εἶναι 15 pF. Ἄν ὁ ὁριζόντιος ἄξονας καλύπτει 10 cm προσδιορίστε τό στιγμιαῖο ρεῦμα πού ἀπαιτεῖται γιά βαθμονόμηση τοῦ ὁριζόντιου ἄξονα σέ κλίμακα 1 nsec/cm.

13.7. Δεῖξτε ὅτι

$$\frac{1\,H}{1\,\Omega} = 1\,\Omega \times 1\,F = 1\ \text{sec}.$$

13-8. Ἡλεκτρικό στοιχεῖο μέ ἀμελητέα ἐσωτερική ἀντίστραση καί ΗΕΔ U = 2 V συνδέεται μέ ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς πού χαρακτηρίζεται ἀπό ἀντίσταση R = 100 Ω καί συντελεστή αὐτεπαγωγῆς L = 4 H. Προσδιορίστε τό χρόνο πού ἀπαιτεῖται ὥστε τό ρεῦμα νά ἀνέλθει στό μισό τῆς τελικῆς του τιμῆς καί τό ρυθμό μεταβολῆς τοῦ ρεύματος κατά τή στιγμή αὐτή.

13-9. Ἡλεκτρικό στοιχεῖο μέ ἀμελητέα ἐσωτερική ἀντίσταση καί ΗΕΔ U = 10 V συνδέεται μέ ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς πού χαρακτηρίζεται ἀπό ἀντίσταση R = 50 Ω καί συντελεστή αὐτεπαγωγῆς L = 200 mH στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 13-6. Ἄν ὁ διακόπτης μετατεθεῖ ἀπό τή θέση A στή θέση B ὑπολογί-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στε τό ὁλικό φορτίο πού διέρχεται ἀπό τό ἐξάρτημα κατά τή μεταβατική κατάσταση.

13-10. Δεῖξτε ὅτι στό ἰδανικό κύκλωμα C-L τό ρεῦμα μηδενίζεται ὅταν τό φορτίο στόν πυκνωτή γίνεται μέγιστο. Δεῖξτε τό ἀντίστροφο.

13-11. Στό ἰδανικό κύκλωμα C-L (βλ. σχῆμα 13-8) ὁ πυκνωτής φορτίζεται πλήρως σέ δυναμικό U καί στή συνέχεια ἐκφορτίζεται διαμέσου τῆς ἐπαγωγῆς L μέ μετάθεση τοῦ διακόπτη στή θέση B. Προσδιορίστε τό μέγιστο ρεῦμα πού διαρρέει τό ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς ὡς συνάρτηση τῶν μεγεθῶν τοῦ κυκλώματος.

13-12. Δεῖξτε ὅτι στό ἰδανικό κύκλωμα C-L ἡ ὁλική ἐνέργεια πού βρίσκεται σέ κάθε στιγμή ἀποθηκευμένη στά δύο ἐξαρτήματα ἔχει σταθερή τιμή.

13-13. Προσδιορίστε τή χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ, ὁ ὁποῖος σέ ἕνα ἰδανικό κύκλωμα C-L μέ ἐπαγωγή L = 0.4 mH δημιουργεῖ ταλαντώσεις μέ συχνότητα 800 kHz. Ἄν στό κύκλωμα αὐτό προστεθεῖ σέ σειρά ἀντίσταση R = 80 Ω, ποιά ἡ ποσοστιαία μεταβολή τῆς συχνότητας;

13-14. Ἕνα ἰδανικό ἠλεκτρικό στοιχεῖο συνδέεται μέ ἕνα ἰδανικό ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς. Προσδιορίστε τό ρεῦμα πού θά διαρρεύσει στό ἐξάρτημα ὡς συνάρτηση τοῦ χρόνου.

13-15. Ἕνα ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς ἐμφανίζει ὠμική ἀντίσταση 2 kΩ καί συντελεστή αὐτεπαγωγῆς L = 4 H. Ἄν τό ἐξάρτημα αὐτό συνδεθεῖ μέ πυκνωτή, σέ ποιά περιοχή πρέπει νά βρίσκεται ἡ χωρητικότητα ὥστε τό κύκλωμα νά ἐμφανίζει ταλαντώσεις;

13-16. Πυκνωτής μέ χωρητικότητα C = 0.01 μF, ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς καί ἠλεκτρικό στοιχεῖο συνδέονται σέ σειρά. Προσδιορίζεται στή συνέχεια ὅτι ἡ φυσική συχνότητα τοῦ κυκλώματος εἶναι 50 kHz ἐνῶ τό πλάτος τῶν ταλαντώσεων μειώνεται κατά e^{-1} μετά ἀπό 1000 πλήρεις ταλαντώσεις. Ποιά ἡ ὠμική ἀντίσταση καί ὁ συντελεστής αὐτεπαγωγῆς τοῦ ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς;

13-17. Ἕνα κύκλωμα R-C-L σέ σειρά μέ R = 100 Ω, C = 30 μF καί L = 0.25 H βρίσκεται σέ κάποια χρονική στιγμή μέ δυναμικό 90 V στά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ καί μηδενικό ρεῦμα. Προσδιορίστε τό χρόνο πού ἀπαιτεῖται ὥστε τό φορτίο τοῦ πυκνωτῆ νά μηδενιστεῖ καθώς καί τό ρεῦμα πού διαρρέει τό κύκλωμα κατά τή στιγμή αὐτή.

13-18. Ἕνας πυκνωτής ἐκφορτίζεται διαμέσου ἑνός ἐξαρτήματος μέ ὠμική ἀντίσταση R = 10 Ω καί συντελεστή αὐτεπαγωγῆς L = 1 H. Ἄν τό κύκλωμα βρίσκεται σέ κατάσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως προσδιορίστε τό ποσοστό τοῦ ἀρχικοῦ φορτίου πού παραμένει στόν πυκνωτή μετά ἀπό χρόνο t = 0.01, 0.05, 0.1 καί 1 sec.

13-19. Γιά ἕνα κύκλωμα R-C-L σέ σειρά πού ἐκτελεῖ ταλαντώσεις προσδιορίστε τό χρόνο μεταξύ τῆς στιγμῆς κατά τήν ὁποία τό ρεῦμα γίνεται μέγιστο καί τῆς στιγμῆς κατά τήν ὁποία τό φορτίο τοῦ πυκνωτῆ μηδενίζεται.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

13-20. Κύκλωμα R-C-L σέ σειρά περιέχει ἠλεκτρικό στοιχεῖο μέ ΗΕΔ U καί διακόπτη. Ὁ διακόπτης κλείνει κατά τή χρονική στιγμή t = 0. Προσδιορίστε καί διερευνεῖστε τίς λύσεις τοῦ κυκλώματος ἐκφράζοντας ὅλες τίς σταθερές συναρτήσει τῶν παραμέτρων R, C, L καί U.

13-21. Σέ ἕνα κύκλωμα R-C-L σέ σειρά ἡ ὡμική ἀντίσταση εἶναι ἡ μισή ἀπό αὐτή πού ἀπαιτεῖται γιά κατάσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως. Ὑπολογίστε τή λογαριθμική μείωση τῶν ταλαντώσεων καί τό λόγο τοῦ πλάτους σέ δύο διαδοχικά μέγιστα.

13-22. Προσδιορίστε τή λογαριθμική μείωση τῶν ταλαντώσεων ἑνός κυκλώματος R-C-L σέ σειρά ἄν ὁ λόγος τοῦ πλάτους σέ δύο διαδοχικά μέγιστα εἶναι 2:1. Γιά τήν περίπτωση αὐτή προσδιορίστε τή σχέση τῶν παραμέτρων R, C καί L καί συγκρίνετε τό προηγούμενο ἀποτέλεσμα μέ τήν προσέγγιση τῆς ἐξ. (13.50).

13-23. Ἕνα κύκλωμα R-C-L σέ σειρά βρίσκεται σέ κατάσταση κρίσιμης ἀποσβέσεως. Κατά τή χρονική στιγμή t = 0 τό φορτίο πού βρίσκεται ἀποθηκευμένο στόν πυκνωτή εἶναι $q_0 > 0$ καί τό ρεῦμα ἴσο μέ τό μηδέν.

(α) Προσδιορίστε τό πρόσημο τῶν συντελεστῶν C_1 καί C_2 στή λύση τῆς ἐξ. (13.46) πού περιγράφει τή χρονική ἐξέλιξη τοῦ φορτίου.

(β) Δεῖξτε ὅτι, σύμφωνα μέ τή σύμβαση πού ἔχει υἱοθετηθεῖ ἐδῶ, τό ρεῦμα I εἶναι πάντα ἀρνητικό ἐνῶ ἡ πρώτη παράγωγος τοῦ ρεύματος ὡς πρός τό χρόνο ἀλλάζει περιοδικά πρόσημο.

(γ) Προσδιορίστε τή χρονική στιγμή κατά τήν ὁποία τό ρεῦμα γίνεται μέγιστο.

(δ) Γιά $q_0 = 0.5$ C ἀποδῶστε στήν ἴδια γραφική παράσταση τίς λύσεις q(t) καί I(t).

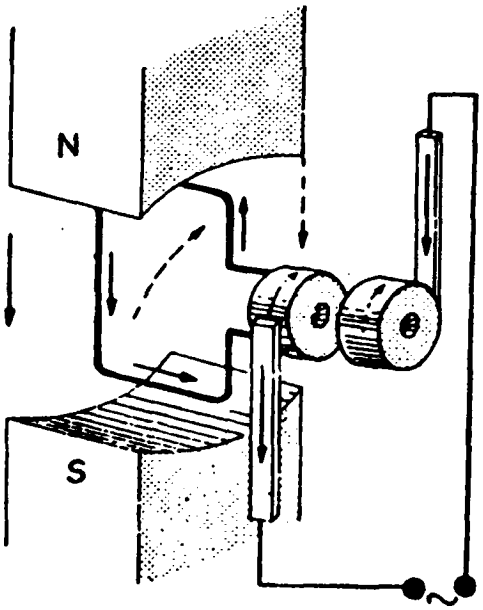


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

εναλλασσομενο ρευμα

Σέ πολλές ήλεκτρικές έφαρμογές, Ιδίως όταν ήλεκτρική ένέργεια μετατρέπεται σέ άλλες μορφές, όπως θερμική, φωτιστική ή μηχανική, ή ΗΕΔ δέν εΐναι άπαραίτητο νά παραμένει σταθερή. 'Οποιοδήποτε **έναλλασσόμενο δυναμικό,** μέ ήμιτονοειδή, τριγωνική, τετραγωνική ή άκόμη καί μή περιοδική μορφή μπορεΐ νά θερμάνει ένα άγωγό, νά πυρακτώσει τό νήμα μιάς λυχνίας ή νά περιστρέψει ένα κατάλληλα κατασκευασμένο κινητήρα. 'Από τήν άλλη πλευρά, έναλλασσόμενη ΗΕΔ μπορεΐ νά παραχθεΐ εύκολότερα καί οικονομικότερα άπ' ότι ή συνεχής. 'Ημιτονοειδής ΗΕΔ μπορεΐ νά παραχθεΐ στά άκρα ένός πλαισίου πού περιστρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέσα σέ ένα όμογενές μαγνητικό πεδίο, όπως δείχνει τό σχήμα 14-1, πού περιλαμβάνεται στό βιβλίο Φυσικής τής Γ΄ Λυκείου. 'Η ένέργεια πού άντιπροσωπεύει τό ρεύμα πού παράγεται μπορεΐ νά μεταφερθεΐ σέ μεγάλες άποστάσεις μέ πολύ μικρότερες άπώλειες άπ' ότι τό συνεχές. Τέλος ή κατανομή του σέ πολλούς καταναλωτές μπορεΐ νά γίνει, όπως θά δούμε στό τέλος τοΰ κεφαλαίου, άρκετά εύκολα μέ έπαγωγικές μεθόδους. Γιά τούς παραπάνω λόγους τό **έναλλασσόμενο ρεύμα** βρίσκει σήμερα εύρεία έφαρμογή στήν παραγωγή καί κατανάλωση ένεργείας. Στό κεφάλαιο αύτό θά άσχοληθούμε μέ τή συμπεριφορά τοΰ έναλλασσόμενου ρεύματος (τό όποΐο σέ άναλογία μέ τό συνεχές θά συντμήσουμε ώς ΕΡ) σέ κυκλώματα πού περιέχουν μιά ή περισσότερες πηγές έναλλασσόμενης ΗΕΔ καί έξαρτήματα μέ άντίσταση, χωρητικότητα καί αύτεπαγωγή. Καθόσον άλλες μορφές

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 14-1 Παραγωγή ἡμιτονοειδοῦς τάσης (Α.Ε. Μάζη, ΦΥΣΙΚΗ, Γ΄ Λυκείου, ΟΕΔΒ 1980).

έναλλασσόμενης ΗΕΔ έχουν μάλλον θεωρητικό ένδιαφέρον, θά άναφερθοῦμε κατά κύριο λόγο σέ δυναμικό μέ ἡμιτονοειδή μεταβολή ὡς πρός τό χρόνο

$$U = U_0\cos(\omega t + a). \qquad (14.1)$$

Στήν τελευταία σχέση U_0, ω καί α εἶναι σταθερές ὡς πρός τό χρόνο. Θά άναφερθοῦμε στή συνέχεια στήν ποσότητα U_0 μέ τόν ὅρο **πλάτος** καί στήν ποσότητα α μέ τόν ὅρο **φάση** τῆς ΗΕΔ. ω εἶναι ἡ **γωνιακή συχνότητα** πού συνδέεται πρός τή συχνότητα ν καί τήν περίοδο Τ μέ τίς σχέσεις

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \qquad (14.2)$$

14-1 Ἰδανικά Ἐξαρτήματα R, C, L στό ΕΡ

Στό προηγούμενο κεφάλαιο όρίσαμε τά ἰδανικά ἐξαρτήματα άντιστάσεως, χωρητικότητας καί ἐπαγωγῆς άπό τίς άντίστοιχες σχέσεις πού συνδέουν τή διαφορά δυναμικοῦ στά άκρα τοῦ ἐξαρτήματος μέ τό ρεῦμα πού τά διαρρέει:

άντίσταση: $V_R = IR$ (14.3α)

χωρητικότητα: $V_C = \frac{1}{C}\int I\,dt$ (14.3β)

ἐπαγωγή: $V_L = L\frac{dI}{dt}$. (14.3γ)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εἶναι χρήσιμο σέ πρῶτο στάδιο νά ἐξετάσουμε τή συμπεριφορά τῶν ἰδανικῶν αὐτῶν ἐξαρτημάτων ὅταν διαρρέονται ἀπό ρεῦμα μέ ἡμιτονοειδή μεταβολή ὡς πρός τό χρόνο. Χωρίς ἀπώλεια ἀπό τή γενικότητα μποροῦμε γιά τό σκοπό αὐτό νά θεωρήσουμε ρεῦμα τῆς μορφῆς

$$I = I_0 \sin\omega t \tag{14.4}$$

ὅπου ἡ παράλειψη κάποιας σταθερῆς φάσης σημαίνει κατάλληλη ἐπιλογή τῆς ἀρχῆς μετρήσεως τοῦ χρόνου. Ἄν τό ρεῦμα αὐτό διαρρέει μιά ἰδανική ἀντίσταση R, τό δυναμικό στά ἄκρα τοῦ ἐξαρτήματος δίνεται ἀπό τήν ἐξ. (14.3α) ὡς

$$V_R = I_0 R \sin\omega t. \tag{14.5}$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο, γιά ἕνα ἰδανικό πυκνωτή ἡ ἐξ. (14.3β) δίνει

$$V_C = -\frac{I_0}{C\omega}\cos\omega t + A \tag{14.6}$$

ὅπου A εἶναι ἡ σταθερά τῆς ὁλοκληρώσεως. Τιμή τῆς σταθερᾶς A διάφορη τοῦ μηδενός σημαίνει ὅτι κάποιο μόνιμο δυναμικό ἔχει ἀναπτυχθεῖ στά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ. Καθόσον ἡ περίπτωση αὐτή μπορεῖ νά διερευνηθεῖ ξεχωριστά, θά θεωρήσουμε ὅτι A = 0 καί θά γράψουμε τήν ἐξ. (14.6) ὡς

$$V_C = -\frac{I}{C\omega}\cos\omega t = \frac{I_0}{C\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{14.7}$$

Ἡ ἐξ. (14.3γ), τέλος, ὁδηγεῖ στήν περίπτωση ἑνός ἰδανικοῦ ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς στή σχέση δυναμικοῦ - ρεύματος

$$V_L = I_0 L\omega\cos\omega t = I_0 L\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{14.8}$$

Παρατηρεῖται ὅτι οἱ ἐξ. (14.5), (14.7) καί (14.8) μποροῦν νά γραφοῦν στην ἑνιαία μορφή

$$V_k = V_{0k}\sin(\omega t + \varphi_k) \tag{14.9}$$

ὅπου V_{0k} καί φ_k εἶναι ἀντίστοιχα τό πλάτος καί ἡ φάση πού χαρακτηρίζουν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τά ἰδανικά ἐξαρτήματα γιά k = R, C, L. Ἡ φάση φ_k ἀντιπροσωπεύει τή γωνία κατά τήν ὁποία ἡ διαφορά δυναμικοῦ προηγεῖται τοῦ ρεύματος. Ἄν κάποιο χαρακτηριστικό σημεῖο τῆς ταλαντώσεως τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ (π.χ. τό μέγιστο θετικό πλάτος) συμβαίνει σέ χρόνο t, τό ἴδιο χαρακτηριστικό σημεῖο τῆς ταλαντώσεως τοῦ ρεύματος συμβαίνει σέ χρόνο $t' = t + \varphi_k/\omega$. Ἔτσι τό ρεῦμα προηγεῖται τοῦ δυναμικοῦ ἄν ἡ γωνία φ_k εἶναι θετική καί ὑπολείπεται τοῦ δυναμικοῦ ἄν ἡ γωνία φ_k εἶναι ἀρνητική. Ἡ ἐξ. (14.7) δείχνει ὅτι γιά ἕνα ἰδανικό πυκνωτή

$$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}. \tag{14.10}$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο, γιά ἕνα ἰδανικό ἐξάρτημα αὐτεπαγωγῆς, ἀπό τήν ἐξ. (12.8)

$$\varphi_L = \frac{\pi}{2}. \tag{14.11}$$

Γιά μιά ἰδανική ἀντίσταση, προφανῶς

$$\varphi_R = 0. \tag{14.12}$$

Τό πλάτος τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ V_{0k} μπορεῖ ἐπίσης νά ἐξαχθεῖ ἀπό τίς ἐξ. (14.5), (14.7) καί (14.8). Γιά τά τρία ἰδανικά ἐξαρτήματα ἔχουμε

$$V_{0R} = I_0 R \tag{14.13α}$$

$$V_{0C} = \frac{I_0}{C\omega} \tag{14.13β}$$

$$V_{0L} = I_0 L\omega. \tag{14.13γ}$$

Παρατηρεῖται ὅτι καί στίς τρεῖς περιπτώσεις τό πλάτος τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ εἶναι ἀνάλογο πρός τό πλάτος τοῦ ρεύματος. Ἰδιαίτερα ἡ ἐξ. (14.13α) θυμίζει ἔντονα τό νόμο τοῦ Ohm. Μποροῦμε τυπικά νά θέσουμε καί τίς δύο ἑπόμενες ἐξισώσεις στήν ἴδια μορφή

$$V_{0k} = I_0 X_k \tag{14.14}$$

ἄν ὁρίσουμε τούς συντελεστές ἀναλογίας



$$X_C = \frac{1}{C\omega} \qquad (14.15\alpha)$$

καί

$$X_L = L\omega. \qquad (14.15\beta)$$

Θά ἀναφερθοῦμε στίς δύο τελευταῖες ποσότητες μέ τούς ὅρους **χωρητική ἀντίσταση** καί **ἐπαγωγική ἀντίσταση** τῶν ἀντίστοιχων ἰδανικῶν ἐξαρτημάτων. Εἶναι προφανές ὅτι ἡ ὁρολογία ἔχει ἔννοια μόνο στήν περίπτωση τοῦ ΕΡ. Γιά συνεχές ρεῦμα ($\omega = 0$), ὅπως ἀναμένεται

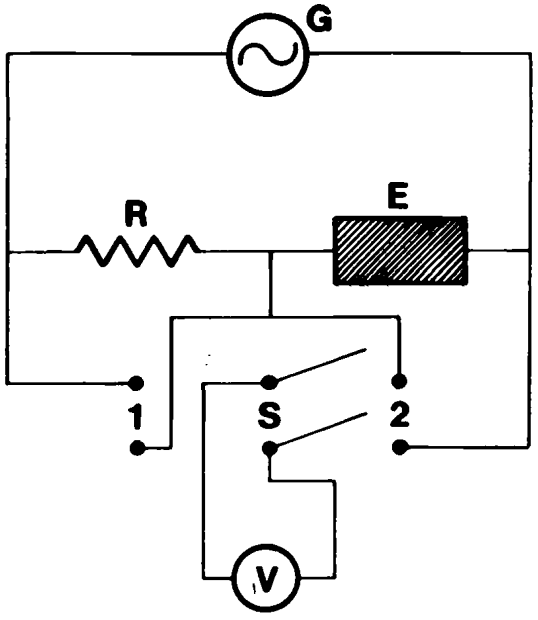
$$X_C \underset{\omega \to 0}{\longrightarrow} \infty \qquad (14.16\alpha)$$

$$X_L \underset{\omega \to 0}{\longrightarrow} 0. \qquad (14.16\beta)$$

Γιά πληρότητα, μποροῦμε ἀκόμη νά ἀναφερθοῦμε στήν **ὠμική ἀντίσταση** ἑνός ἰδανικοῦ ἐξαρτήματος ἀντιστάσεως

$$X_R = R \qquad (14.16\gamma)$$

πού διατηρεῖ τήν ἴδια τιμή γιά τό συνεχές καί ἐναλλασσόμενο ρεῦμα.



ΣΧΗΜΑ 14-2 Κύκλωμα γιά τόν προσδιορισμό χωρητικῆς καί ἐπαγωγικῆς ἀντιστάσεως.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ 14-1. ΜΕΤΡΗΣΗ ΧΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΩΓΙΚΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-2. Ὡς ἀντίσταση R χρησιμοποιεῖστε ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων. Στή θέση τοῦ ἐξαρτήματος E τοποθετεῖστε ἕνα πυκνωτή μέ χωρητικότητα C = 5 μF. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη μιά γεννήτρια ἡμιτονοειδῶν παλμῶν G, ἕνα ἠλεκτρονικό βολτόμετρο ΕΡ V καί ἕνα διπλό διακόπτη S.

– Ρυθμίστε τή γεννήτρια σέ συχνότητα 30 Hz. Ἐναλλάσσοντας τή θέση τοῦ διπλοῦ διακόπτη μεταξύ τῶν ἐπαφῶν 1 καί 2, ρυθμίστε τό κιβώτιο ἀντιστάσεων ὥστε ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν ἄκρων τοῦ ἐξαρτήματος R καί τοῦ ἐξαρτήματος E νά εἶναι ἴση. Στήν κατάσταση αὐτή ἡ χωρητική ἀντίσταση τοῦ πυκνωτῆ εἶναι ἴση μέ τήν ὠμική ἀντίσταση τοῦ κιβωτίου ἀντιστάσεων.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἐργασία γιά τουλάχιστον 10 τιμές τῆς συχνότητας μεταξύ 30 καί 1000 Hz. Σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τή χωρητική ἀντίσταση τοῦ πυκνωτῆ ὡς συνάρτηση τῆς συχνότητας. Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματά σας σέ γραφική παράσταση μέ λογαριθμικούς ἄξονες. Προσαρμόστε τήν καλύτερη δυνατή εὐθεία στά δεδομένα καί σχολιάστε τή γραφική παράσταση πού προκύπτει.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία ἀντικαθιστώντας στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-2 τό ἐξάρτημα E μέ ἕνα ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς L = 0.044 H γιά τήν περιοχή συχνοτήτων μεταξύ 500 Hz καί 3.5 kHz.

Οἱ προηγούμενες ἔννοιες μποροῦν νά ἐπεκταθοῦν στή γενική περίπτωση ἑνός ρεαλιστικοῦ ἐξαρτήματος ἤ ἑνός συγκροτήματος ἐξαρτημάτων μέ δύο ἄκρα. Πρός τό παρόν θά ἐξαιρέσουμε ἀπό τό συγκρότημα ἐξαρτημάτων ἀμοιβαία ἐπαγωγή καί γεννήτριες ΕΡ. Ἄν τό ρεῦμα πού διαρρέει τό ἐξάρτημα ἔχει τή μορφή τῆς ἐξ. (14.4), ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα του θά εἶναι ἀνάλογη πρός τό ρεῦμα. Γενικά μποροῦμε νά γράψουμε

$$V = I_0 Z \sin(\omega t + \varphi) \qquad (14.17)$$

ὅπου, ὅπως θά δοῦμε στήν ἑπόμενη παράγραφο, ἡ φάση φ μπορεῖ νά πάρει ὁποιαδήποτε τιμή μεταξύ $-\pi/2$ καί $\pi/2$. Θά ὀνομάσουμε τήν ποσότητα Z **σύνθετη ἀντίσταση** τοῦ ἐξαρτήματος. Παρατηρεῖται ὅτι ἄν V_0 εἶναι τό πλάτος τοῦ δυναμικοῦ, ἡ σύνθετη ἀντίσταση ἱκανοποιεῖ τή σχέση πού ἀντιστοιχεῖ στό νόμο τοῦ Ohm

$$Z = \frac{V_0}{I_0} . \qquad (14.18)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

14-2 Ἰσχὺς ΕΡ

Ἂς ἐξετάσουμε στὴ συνέχεια τὴν ἰσχὺ ποὺ δαπανᾶται κατὰ τὴ ροὴ ΕΡ σὲ ἕνα ἐξάρτημα ἢ κύκλωμα ἐξαρτημάτων μὲ δύο ἀκροδέκτες. Ἂν V καὶ I εἶναι ἀντίστοιχα ἡ στιγμιαία τιμὴ τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ καὶ τοῦ ρεύματος, τότε μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε τὴ **στιγμιαία τιμὴ τῆς ἰσχύος** ὡς

$$W = VI. \tag{14.19}$$

Θὰ θεωρήσουμε ΕΡ μὲ τὴ συναρτησιακὴ μορφὴ τῆς ἐξ. (14.4)

$$I = I_0 \sin\omega t \tag{14.4}$$

ὁπότε σύμφωνα μὲ τὴν ἐξ. (14.9) ἡ διαφορὰ τοῦ δυναμικοῦ στὰ ἄκρα τοῦ ἐξαρτήματος θὰ ἔχει τὴ μορφὴ

$$V = V_0 \sin(\omega t + \varphi) \tag{14.20}$$

ὅπου τὸ πλάτος τοῦ ρεύματος καὶ τὸ πλάτος τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ συνδέονται διαμέσου τῆς σύνθετης ἀντιστάσεως μὲ τὴ σχέση

$$V_0 = ZI_0. \tag{14.21}$$

Μὲ τὴ μορφὴ αὐτὴ τοῦ ρεύματος καὶ διαφορᾶς δυναμικοῦ ἡ ἐξ. (14.19) γίνεται

$$W = I_0 V_0 \sin\omega t \sin(\omega t + \varphi). \tag{14.22}$$

Εἶναι ἀρκετὰ χρήσιμο νὰ ξαναγράψουμε τὴν τελευταία σχέση σὲ λίγο διαφορετικὴ μορφή. Χρησιμοποιώντας τὴν τριγωνομετρικὴ ταυτότητα

$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right] \tag{14.23}$$

γιὰ $\alpha = \omega t + \varphi$ καὶ $\beta = \omega t$, ἡ ἐξ. (14.22) μπορεῖ νὰ γραφεῖ ὡς

$$W = \tfrac{1}{2} I_0 V_0 \left[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)\right]. \tag{14.24}$$

Ἡ **μέση ἰσχὺ** ποὺ καταναλώνεται σὲ ἕνα ἐξάρτημα κατὰ τὴ ροὴ ἐναλλασσόμενου ρεύματος μπορεῖ τώρα νὰ ὑπολογιστεῖ μὲ τὴ βοήθεια τῆς τελευταίας ἐκφράσεως. Ἡ μέση ἰσχὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\langle W \rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T W dt \qquad (14.25)$$

πού σέ συνδιασμό μέ τήν ἐξ. (14.24) δίνει

$$\langle W \rangle = \tfrac{1}{2} I_0 V_0 \cos\varphi. \qquad (14.26)$$

Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τήν ἐξ. (14.21) μποροῦμε νά γράψουμε τή μέση ἰσχή στίς ἐναλλακτικές μορφές

$$\langle W \rangle = \tfrac{1}{2} I_0^2 Z \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\frac{V_0^2}{Z}\cos\varphi. \qquad (14.27)$$

Ὁ ἀναγνώστης θά παρατηρήσει ἀμέσως ὅτι σύμφωνα μέ τό τελευταῖο ἀποτέλεσμα ἕνα ἰδανικό ἐξάρτημα χωρητικότητας ἤ ἐπαγωγῆς, ὅπου $\varphi = \pm \pi/2$, δέν καταναλώνει ἰσχή. Ἀντίθετα, μιά ἰδανική ἀντίσταση καταναλώνει τή μέγιστη δυνατή ἰσχή

$$\langle W \rangle = \tfrac{1}{2} I_0 V = \tfrac{1}{2} I_0^2 R = \tfrac{1}{2}\frac{V_0^2}{R}. \qquad (14.28)$$

Ἡ τελευταία μάλιστα σχέση μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ, ἀπό τήν ἐνεργειακή ἄποψη, ὡς σημεῖο συγκρίσεως μεταξύ συνεχοῦς καί ἐναλλασσόμενου ρεύματος. Πράγματι, συγκρίνοντας μέ τίς ἐξ. (4.40) προκύπτει ὅτι ἡ ἰσχή πού καταναλώνεται σέ μιά ἰδανική ἀντίσταση ἀπό ΕΡ τῆς μορφῆς (14.4) καί ἐπομένως διαφορά δυναμικοῦ τῆς μορφῆς (14.20) εἶναι ἴση μέ τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στό ἴδιο ἐξάρτημα ΣΡ μέ τιμή

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad (14.29\alpha)$$

καί διαφορά δυναμικοῦ

$$V_{\varepsilon\nu} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}. \qquad (14.29\beta)$$

Μέ τήν ἔννοια αὐτή στίς ποσότητες τῆς ἐξ. (14.29) ἔχουν δοθεῖ οἱ εἰδικές ὀνομασίες **ἐνεργό ρεῦμα** καί **ἐνεργός τάση.** Ὅπως ἐπισημάνθηκε στό Πείραμα 10-6, τά περισσότερα βολτόμετρα καί ἀμπερόμετρα ΕΡ εἶναι βαθμονομημένα ὥστε νά μετροῦν ἐνεργούς τιμές τοῦ δυναμικοῦ καί τοῦ ρεύματος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μιά ἐναλλακτική ἄποψη τῆς ἐνεργοῦ τιμῆς δυναμικοῦ καί ρεύματος παρέχεται μέ τή χρησιμοποίηση τοῦ γενικοῦ ὁρισμοῦ τῆς μέσης τιμῆς πού δίνεται στήν ἐξ. (14.25). Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά δείξει ὅτι

$$\left[\langle V^2\rangle\right]^{1/2} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \tag{14.30α}$$

καί

$$\left[\langle I^2\rangle\right]^{1/2} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \tag{14.30β}$$

δηλαδή, ὅτι οἱ ἐνεργές τιμές τοῦ δυναμικοῦ καί τοῦ ρεύματος ἀντιπροσωπεύουν τήν **τετραγωνική ρίζα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ τετραγώνου** τῶν ἀντίστοιχων στιγμιαίων μεγεθῶν. Ἀπό τήν παρατήρηση αὐτή, οἱ τιμές τῶν ἐξ. (14.29) ἀναφέρονται συνήθως καί ὡς **τιμές rms** (ἀπό τόν ἀντίστοιχο ἀγγλοσαξωνικό ὅρο «root - mean - square»). Μέ τή βοήθεια τῶν τιμῶν rms οἱ ἐξ. (14.26) καί (14.27) μποροῦν τώρα νά γραφοῦν ἰσοδύναμα ὡς

$$\langle W\rangle = I_{\varepsilon\nu}V_{\varepsilon\nu}\cos\varphi = I_{\varepsilon\nu}^2 Z\cos\varphi = \frac{V_{\varepsilon\nu}^2}{Z}\cos\varphi. \tag{14.31}$$

Γιά λόγους πληρότητας μποροῦμε νά γράψουμε ἀκόμη τήν ἐξ. (14.21), πού γιά τό ΕΡ ἀντιστοιχεῖ στό νόμο τοῦ Ohm, ὡς σύνδεση τῶν ἐνεργῶν τιμῶν

$$V_{\varepsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu}Z. \tag{14.32}$$

Ὅπως δείχνουν οἱ ἐξ. (14.26) καί (14.27) σημαντικό ρόλο στήν κατανάλωση ἰσχῆς σέ ἕνα ἐξάρτημα κατά τή ροή ΕΡ παίζει ἡ διαφορά φάσης μεταξύ τοῦ ρεύματος καί τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ πού ἀναπτύσσεται στά ἄκρα του. Γιά τό λόγο αὐτό στήν ποσότητα cosφ πού ὑπεισέρχεται στίς ἐκφράσεις τῆς μέσης ἰσχῆς ἔχει δοθεῖ ἡ εἰδική ὀνομασία **συντελεστής ἰσχῆς.** Μέ τήν ποσότητα αὐτή θά ἔχουμε τήν εὐκαιρία νά ἀσχοληθοῦμε ἐκτενέστερα στή συνέχεια τοῦ κεφαλαίου.

Οἱ προηγούμενες ἔννοιες μποροῦν νά μεταφερθοῦν ἀτόφιες στό χειρισμό μιᾶς γεννήτριας πού παρέχει ΕΡ σέ κάποιο ἐξάρτημα ἢ κύκλωμα ἐξαρτημάτων μέ δύο διακριτά ἄκρα. Ἄν ἡ ἡμιτονοειδής ΗΕΔ πού χαρακτηρίζει τή γεννήτρια εἶναι U, τότε ἡ στιγμιαία ἰσχή πού παρέχει ἡ γεννήτρια στό ἐξωτερικό κύκλωμα εἶναι

$$W = UI. \tag{14.33}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Γιά ρεῦμα τῆς μορφῆς (14.4) ἡ ΗΕΔ τῆς γεννήτριας μπορεῖ νά γραφεῖ γενικά ὡς

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi) \tag{14.34}$$

μέ στιγμιαία ἰσχή {βλ. ἐξ. (14.22) καί (14.24)}

$$W = I_0 U_0 \sin\omega t \sin(\omega t + \varphi) = \tfrac{1}{2} I_0 U_0 [\cos\varphi - \cos(\omega t + \varphi)] \tag{14.35}$$

καί μέση ἰσχή, σέ ἀναλογία μέ τίς ἐξ. (14.26) καί (14.27),

$$\langle W \rangle = \tfrac{1}{2} I_0 U_0 \cos\varphi = \tfrac{1}{2} I_0^2 Z \cos\varphi = \tfrac{1}{2} \frac{U_0^2}{Z} \cos\varphi \tag{14.36}$$

ὅπου στήν περίπτωση αὐτή Z εἶναι ἡ σύνθετη ἀντίσταση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος. Κατά τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά ὁρίσουμε τήν **ἐνεργό ΗΕΔ**

$$U_{\varepsilon v} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \tag{14.37}$$

μέ μέση παροχή ἰσχῆς στό ἐξωτερικό κύκλωμα τῆς γεννήτριας

$$\langle W \rangle = I_{\varepsilon v} U_{\varepsilon v} \cos\varphi. \tag{14.38}$$

14-3 Ἀνυσματική Ἀναπαράσταση Μεγεθῶν ΕΡ

Ἡ στιγμιαία τιμή ὁποιουδήποτε μεγέθους ΕΡ (ΗΕΔ, διαφορά δυναμικοῦ, ρεῦμα) μέ τή γενική μορφή

$$A = A_0 \sin(\omega t + \alpha) \tag{14.39}$$

εἶναι δυνατόν νά παρασταθεῖ γεωμετρικά σέ δύο διαστάσεις μέ τή βοήθεια τοῦ σχήματος 14-3. Γράφοντας τήν ἐξ. (14.39) στήν ἰσοδύναμη μορφή

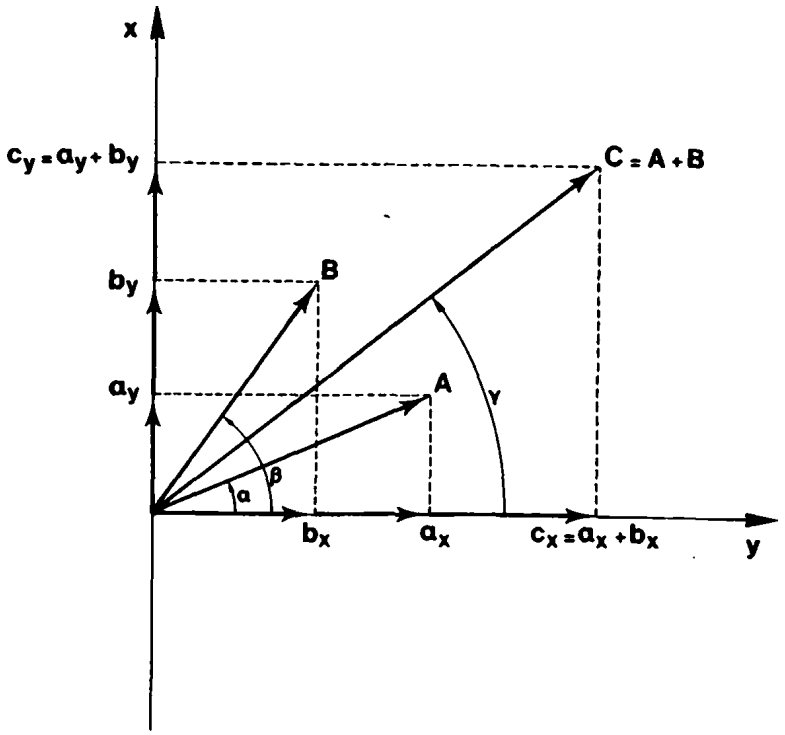
$$A = (A_0 \cos\alpha)\sin\omega t + (A_0 \sin\alpha)\cos\omega t \tag{14.40}$$

εἶναι δυνατόν νά θεωρήσουμε τό στιγμιαῖο μέγεθος A ὡς ἕνα δισδιάστατο ἄνυσμα **A** μέ μῆκος A_0 τό ὁποῖο σχηματίζει γωνία α μέ τόν ἄξονα x καί τοῦ ὁποίου οἱ συνιστῶσες

$$a_x = A_0 \cos\alpha \tag{14.41α}$$

$$a_y = A_0 \sin\alpha \tag{14.41β}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 14-3 Ἀνυσματική ἀναπαράσταση μεταβλητῆς στό ΕΡ.

μεταβάλλονται μέ τό χρόνο ὡς $a_x \sin\omega t$ καί $a_y \cos\omega t$. Ὅπως δείχνει τό σχῆμα 14-3, ἕνα δεύτερο μέγεθος ΕΡ, μέ τήν ἴδια συχνότητα ω καί στιγμιαία τιμή

$$B = B_0 \sin(\omega t + \beta) \qquad (14.42)$$

μπορεῖ νά παρασταθεῖ ὡς ἕνα δεύτερο ἄνυσμα **B** μέ μῆκος B_0 καί συνιστῶσες

$$b_x = B_0 \cos\beta \qquad (14.43\alpha)$$

$$b_y = B_0 \sin\beta \qquad (14.43\beta)$$

πού μεταβάλλονται μέ τό χρόνο ὡς $b_x \sin\omega t$ καί $b_y \cos\omega t$.

Ἡ ἀπεικόνιση τοῦ σχήματος 14-3 δίνει κατ' ἀρχήν μιά ποιοτική ἐποπτία τῆς σχετικῆς πορείας τῶν δύο μεγεθῶν. Ἀναδεικνύεται ὅμως ὡς ἕνα ἐξαιρετικά ἰσχυρό ἐργαλεῖο στήν ἀνάλυση κυκλωμάτων ΕΡ ὅταν τά δύο μεγέθη Α καί Β ἔχουν τίς ἴδιες διαστάσεις. Ὅπως θά θυμᾶται ὁ ἀναγνώστης, κατά τήν ἀνάλυση κυκλωμάτων οἱ νόμοι τοῦ Kirchhoff ἀπαιτοῦν τήν πρόσθεση ρευμάτων καί διαφορῶν δυναμικοῦ {βλ. ἐξ. (6.19) καί (6.20)}. Στήν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

μορφή τῆς ἐξ. (14.40), ἂν τά μεγέθη εἶναι ὁμοειδῆ (ὁπότε καί τό ἄθροισμά τους ἔχει νόημα) μποροῦν νά προστεθοῦν ὡς

$$C = A + B = (A_0\cos\alpha + B_0\cos\beta)\sin\omega t + (A_0\sin\alpha + B_0\sin\beta)\cos\omega t. \tag{14.44}$$

Τό τελευταῖο ἀποτέλεσμα ἐπιδέχεται τήν ἴδια ἑρμηνεία μέ τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐξ. (14.40). Μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ἕνα ἄνυσμα **C** μέ συνιστῶσες

$$c_x = A_0\cos\alpha + B_0\cos\beta \tag{14.45α}$$

$$c_y = A_0\sin\alpha + B_0\sin\beta \tag{14.45β}$$

πού μεταβάλλονται μέ τό χρόνο ὡς $c_x\sin\omega t$ καί $c_y\cos\omega t$. Ἐπιπλέον, οἱ συνιστῶσες εἶναι αὐτές πού προβλέπονται ὡς συνιστῶσες τοῦ ἀνυσματικοῦ ἀθροίσματος

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{14.46}$$

ἤτοι

$$c_x = a_x + b_x \tag{14.47α}$$

$$c_y = a_y + b_y. \tag{14.47β}$$

Τό μέγεθος μπορεῖ τώρα νά γραφεῖ στή μορφή τῆς ἐξ. (14.39) ὡς

$$C = C_0\sin(\omega t + \gamma).$$

Ἀπό τήν ἁπλή θεώρηση τοῦ σχήματος 14-3 ἕπεται ὅτι

$$C_0 = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \tag{14.48α}$$

$$\gamma = \tan^{-1}\frac{c_y}{c_x} = \cos^{-1}\frac{c_x}{C_0}. \tag{14.48β}$$

Γιά τήν εἰδική περίπτωση τῶν δύο ἀνυσμάτων πού θεωρήσαμε ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ μέ λίγη τριγωνομετρία νά ἐκφράσει τό πλάτος καί τή φάση τοῦ μεγέθους **C** ὡς συνάρτηση τῶν ἀρχικῶν παραμέτρων

$$C_0 = \sqrt{A_0^2 + B_0^2 + 2A_0B_0\cos(\beta - \alpha)} \tag{14.49α}$$

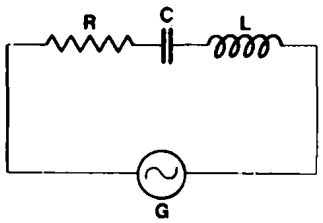
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\gamma = \sin^{-1}\left[\frac{B_0}{C_0}\sin(\beta - \alpha)\right] + \alpha. \qquad (14.49\beta)$$

Εἶναι προφανές ὅτι ἡ προηγούμενη διεργασία μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ σέ ὁποιοδήποτε ἀριθμό μεγεθῶν. Μποροῦμε νά συνοψίσουμε ἐπομένως τή μέθοδο ὑπό μορφή κανόνα:

Μεγέθη ΕΡ (ΗΕΔ, διαφορές δυναμικοῦ, ρεύματα) τῆς ἴδιας συχνότητας μποροῦν νά ἀντιπροσωπευθοῦν ἀπό ἀνύσματα δύο διαστάσεων μέ μέτρο τό πλάτος καί κλίση πρός τόν ὁριζόντιο ἄξονα τή φάση πού τά χαρακτηρίζει. Τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἔχει πλάτος καί φάση ἀντίστοιχα τό μέτρο καί τήν κλίση (ὡς πρός τόν ὁριζόντιο ἄξονα) τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀνυσμάτων πού τά ἀντιπροσωπεύουν.

Ὅπως ἤδη ἀναφέρθηκε, ἡ ἀνυσματική ἀναπαράσταση μεγεθῶν ΕΡ πού περιγράψαμε βρίσκει εὐρεία ἐφαρμογή στήν ἀνάλυση κυκλωμάτων. Εἶναι ἴσως χρήσιμο νά μελετήσουμε στήν πράξη τή μέθοδο μέ ἕνα ἁπλό παράδειγμα καί λίγη πειραματική ἐργασία. Θά θεωρήσουμε γιά τό σκοπό αὐτό τό ἁπλό κύκλωμα R-C-L σέ σειρά πού δίνεται στό σχῆμα 14-4. Γιά ὑπολογιστικούς σκοπούς θά δεχτοῦμε ἀρχικά ἰδανικά ἐξαρτήματα μέ τή συμπεριφορά πού περιγράφηκε στήν Παράγραφο 14-1. Ἄν θεωρήσουμε ὅτι τό



ΣΧΗΜΑ 14-4 Κύκλωμα R-C-L σέ σειρά.

ρεῦμα πού διοχετεύει ἡ γεννήτρια G ἔχει τή μορφή τῆς ἐξ. (14.4), τό δυναμικό στά ἄκρα κάθε ἐξαρτήματος δίνεται ἀντίστοιχα ἀπό τίς ἐξ. (14.5), (14.7) καί (14.8). Ἡ ἀντίστοιχη ἀνυσματική ἀναπαράσταση δίνεται στό σχῆμα 14-5. Τό στιγμιαῖο ρεῦμα

$$I = I_0 \sin\omega t \qquad (14.4)$$

ἔχει ληφθεῖ κατά τόν ἄξονα x. Κατά τόν ἴδιο ἄξονα, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (14.5) ἔχει ληφθεῖ† καί ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R

† Παρατηρεῖται ὅτι πολλές φορές μεγέθη ΕΡ διαφόρων διαστάσεων μποροῦν νά συμπεριληφθοῦν στήν ἴδια γραφική παράσταση. Τοῦτο, ὅπως ἤδη ἀναφέρθηκε, βοηθάει στήν ποιοτική ἐκτίμηση τῆς σχετικῆς πορείας τῶν δύο μεγεθῶν. Τό σχετικό μῆκος ὅμως δύο ἑτεροειδῶν ἀνυσμάτων μπρεῖ νά ἐπιλεγεῖ αὐθαίρετα καθόσον μετροῦνται σέ διαφορετικές κλίμακες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

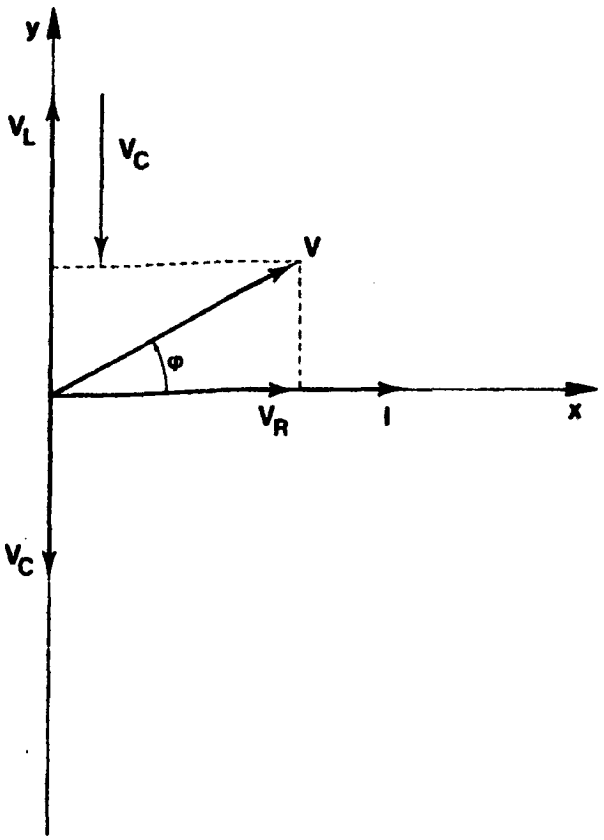
$$V_R = I_0 R \sin\omega t \qquad (14.50)$$

μέ ἐπίσης μηδενική φάση. Οἱ διαφορές δυναμικοῦ στά ἄκρα τῶν ἰδανικῶν ἐξαρτημάτων C καί L

$$V_C = \frac{I_0}{C\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (14.51)$$

$$V_L = I_0 L\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (14.52)$$

ἔχουν ἀντίστοιχη φορά κατά τό θετικό καί ἀρνητικό ἄξονα y.



ΣΧΗΜΑ 14-5 Ἀνυσματική ἀναπαράσταση τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ σέ κύκλωμα R-C-L.

Σύμφωνα μέ τόν προηγούμενο κανόνα, ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ συνδιασμοῦ R-C-L ἔχει πλάτος

$$V_{RCLO}^2 = V_R^2 + (V_C - V_L)^2 = I_0^2 R^2 + \left(\frac{I_0}{C\omega} - I_0 L\omega\right)^2$$

$$= I_0^2 \left[R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2\right]$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἤ

$$V_{RCLO} = I_0 \left[R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2 \right]^{1/2}. \qquad (14.53)$$

Ἡ τελευταία σχέση μπορεῖ ἀμέσως νά συγκριθεῖ μέ τήν ἐξ. (14.18) ἀπό τήν ὁποία ἔπεται ἡ τιμή τῆς σύνθετης ἀντιστάσεως γιά τό κύκλωμα R-C-L ὡς

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2}. \qquad (14.54)$$

Τέλος, ἀπό τήν ἐξ. (14.48β), ἡ φάση τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ κυκλώματος, μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{R}{Z}. \qquad (14.55)$$

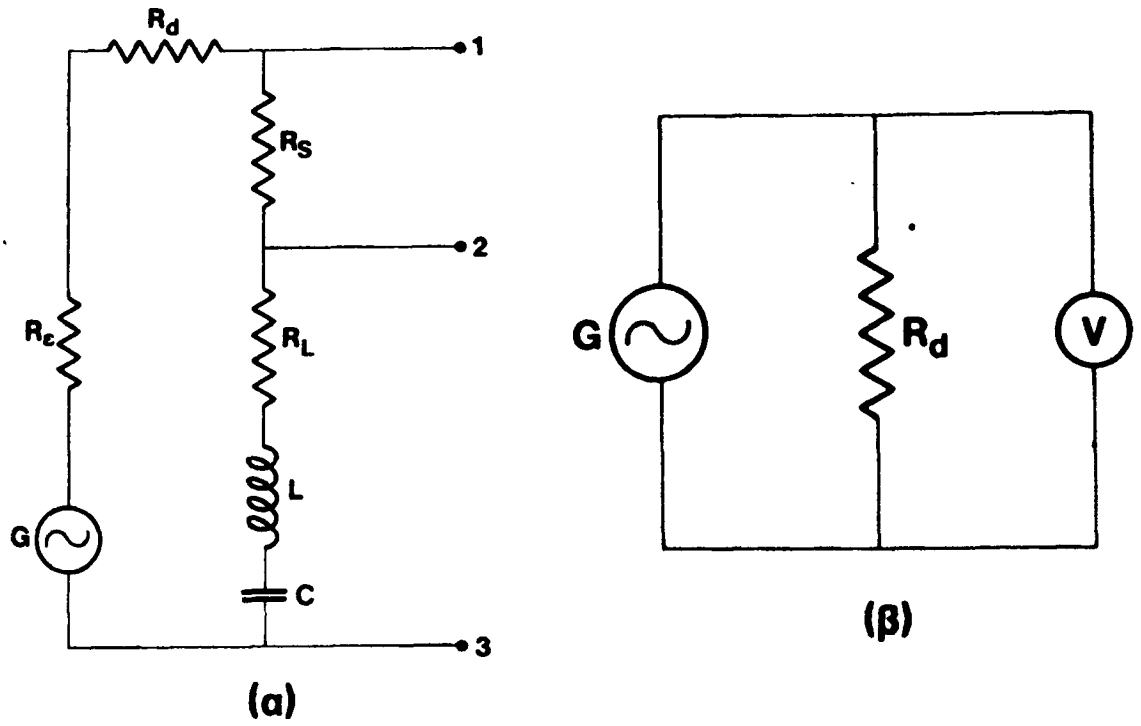
ΠΕΙΡΑΜΑ 14-2. ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ R-C-L ΣΕ ΣΕΙΡΑ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-6(α). Χρησιμοποιεῖστε ἕνα πυκνωτή $C = 5\ \mu F$, ἕνα ἐξάρτημα αὐτεπαγωγῆς $L = 44$ mH καί μιά πρότυπη ἀντίσταση $R_s = 5.\Omega$. Ἡ ἀντίσταση R_L ἀντιπροσωπεύει τήν ὡμική ἀντίσταση τοῦ ἐξαρτήματος αὐτεπαγωγῆς, R_ε εἶναι ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τῆς γεννήτριας G καί R_d ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων.

– Ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση R_ε τῆς γεννήτριας G μπορεῖ νά μετρηθεῖ μέ τή βοήθεια τῆς ἁπλῆς διατάξεως πού δίνεται στό σχῆμα 14-6(β). Ρυθμίστε τό πλάτος ἐξόδου τῆς γεννήτριας στήν κλίμακα 1 - 10 V. Γιά μιά τυπική συχνότητα τῆς τάξης τοῦ 1 kHz μετρεῖστε τή διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ κιβωτίου ἀντιστάσεων R_d γιά ἀρκετές τιμές τῆς ἀντιστάσεως στήν περιοχή $10\ \Omega \leqslant R_d \leqslant 100\ \Omega$. Σημειῶστε σέ κατάλληλο πίνακα τή διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ κιβωτίου καί τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως. Σέ μιά τρίτη στήλη ὑπολογίστε τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀντίσταση. Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τοῦ δυναμικοῦ ὡς συνάρτηση τοῦ ρεύματος καί προσαρμῶστε στά δεδομένα τήν καλύτερη εὐθεία. Ἀπό τήν κλίση τῆς εὐθείας {βλ. ἐξ. (5.31)} προσδιορίστε τήν ἐσωτερική ἀντίσταση R_ε τῆς γεννήτριας.

– Συνδέστε ἕνα ἠλεκτρονικό βολτόμετρο στά σημεῖα 1 καί 2 τοῦ κυκλώματος 14-6(α). Ἐπιλέξτε στό κιβώτιο ἀντιστάσεων τήν τιμή $R_d = 0$. Μεταβάλλοντας τή συχνότητα ν τῆς γεννήτριας στήν περιοχή $0 < \nu < 3$ kHz καταγράψτε σέ κατάλληλο πίνακα τή συχνότητα καί τήν ἐνεργό δια-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 14-6 (α) Διάταξη γιά τή μελέτη κυκλώματος R-C-L σέ σειρά. (β) Διάταξη γιά τή μέτρηση ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως γεννήτριας.

φορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς σύνθετης ἀντιστάσεως τήν τιμή τῆς θέσης ἀντιστάσεως ὑπολογίστε σέ μιά τρίτη στήλη τό ἀντίστοιχο ἐνεργό ρεῦμα πού διαρρέει τό κύκλωμα.

— Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά $R_d = 150\ \Omega$ καί $R_d = 300\ \Omega$.

— Ἀποδῶστε σέ μιά γραφική παράσταση τή μεταβολή τοῦ ἐνεργοῦ ρεύματος πού διαρρέει τό κύκλωμα ὡς συνάρτηση τῆς συχνότητας γιά τίς τρεῖς προηγούμενες τιμές τῆς ἀντιστάσεως R_d. Χρησιμοποιεῖστε ἡμιλογαριθμικό χαρτί μέ τή συχνότητα στό λογαριθμικό ἄξονα. Ἑρμηνεῦστε τά ἀποτελέσματα.

Ἡ ἀνυσματική ἀναπαράσταση πού περιγράψαμε μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ σημαντικά πρός δύο διακριτές κατευθύνσεις μέ σημαντικά ὀφέλη στήν κατανόηση τῆς συμπεριφορᾶς μεγεθῶν ΕΡ. Ἀφενός μπορεῖ νά εἰσαχθεῖ ἡ ἔννοια τῶν περιστρεφόμενων ἀνυσμάτων. Στό πρότυπο αὐτό, ἀνύσματα δύο διαστάσεων θεωροῦνται ὅτι περιστρέφονται στό σύστημα συντεταγμένων τοῦ σχήματος 14-5 κατά φορά ἀντίθετη πρός αὐτή τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Κατά τόν τρόπο αὐτό ἡ προβολή τους σέ ὁποιονδήποτε ἀπό τούς δύο ἄξονες ἐμφανίζει ἁρμονική μεταβολή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μέ περίοδο ω/2π. Ἡ θέση τῶν ἀνυσμάτων ἐξάλλου κατά τή χρονική στιγμή t = 0 προσδιορίζει τή διαφορά φάσης μεταξύ τῶν διαφόρων μεγεθῶν.

Μιά ἐναλλακτική ἐπέκταση τῆς ἀνυσματικῆς ἀναπαραστάσεως μεγεθῶν ΕΡ μπορεῖ νά γίνει μέ τήν εἰσαγωγή **τελεστῶν.** Σέ γενικές γραμμές ὁ **τελεστής σύνθετης ἀντιστάσεως** $\mathscr{L}$ γιά ἕνα ἐξάρτημα, ἤ συγκρότημα ἐξαρτημάτων μέ δύο ἄκρα, ὁρίζεται ἀπό τή σχέση

$$\mathbf{V} = \mathscr{L}\mathbf{I} \tag{14.56}$$

ὅπου ἡ ἐπίδραση τοῦ τελεστῆ στό ἄνυσμα τοῦ ρεύματος **I** δημιουργεῖ τό ἀντίστοιχο ἄνυσμα τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ **V**. Συγκεκριμένα ὁ τελεστής $\mathscr{L}$ πολλαπλασιάζει τό πλάτος τοῦ ρεύματος μέ τή σύνθετη ἀντίσταση Z καί μεταβάλλει τή φάση του κατά τή γωνία φ. Τελεστές πού ὁρίζοντσι κατά τόν τρόπο αὐτό εἶναι γραμμικοί καί ἔτσι ἔννοιες καί τεχνικές τῆς γραμμικῆς ἄλγεβρας μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν μέ σημαντικό ὄφελος στήν ἀνάλυση κυκλωμάτων ΕΡ.

Στά πλαίσια τοῦ παρόντος βιβλίου δέν θά προχωρήσουμε στή μελέτη τῶν δύο τελευταίων ἐπεκτάσεων τῶν ἀνυσματικῆς ἀναπαραστάσεως. Ἀντίθετα θά ἐξετάσουμε μέ κάποια λεπτομέρεια τίς δυνατότητες πού προσφέρονται μέ τήν εἰσαγωγή μιγαδικῶν ἀριθμῶν στήν ἀναπαράσταση μεγεθῶν ΕΡ.

14-4 Ἀναπαράσταση Μεγεθῶν ΕΡ μέ Μιγαδικούς Ἀριθμούς

Τό ἐπίπεδο ὁρισμοῦ ἀνυσμάτων δύο διαστάσεων μπορεῖ νά τεθεῖ σέ ἀμφιμονοσήμαντη σχέση μέ τό μιγαδικό ἐπίπεδο. Ἔτσι, μεγέθη ΕΡ πού ὅπως εἴδαμε χαρακτηρίζονται ἀπό δύο στοιχεῖα (π.χ. τό πλάτος καί τή φάση) μποροῦν νά ἀναπαρασταθοῦν μέ μιγαδικούς ἀριθμούς. Ἡ ἀναπαράσταση αὐτή ἀποδεικνύεται ἕνα ἐξαιρετικά ἰσχυρό ἐργαλεῖο στήν ἀνάλυση κυκλωμάτων ΕΡ. Εἶναι ἑπομένως σκόπιμο νά κάνουμε κατ' ἀρχήν μιά γρήγορη ἀνασκόπιση ὁρισμῶν καί ἰδιοτήτων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν πού θά φανοῦν χρήσιμοι στή συνέχεια.

1. Ἕνας μιγαδικός ἀριθμός ἔχει τή γενική μορφή†

$$z = a + jb \tag{14.57}$$

† Μιγαδικοί ἀριθμοί, ὅπως καί ἡ φανταστική μονάδα *j*, συμβολίζονται μέ πλάγιους χαρακτῆρες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου a καί b εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί† i εἶναι ἡ φανταστική μονάδα

$$i = \sqrt{-1}. \tag{14.58}$$

2. Δύο μιγαδικόι ἀριθμοί

$$z_1 = a_1 + ib_1 \quad \text{καί} \quad z_2 = a_2 + ib_2 \tag{14.59}$$

εἶναι ἴσοι ἄν καί μόνον ἄν

$$a_1 = a_2 \quad \text{καί} \quad b_1 = b_2. \tag{14.60}$$

3. Τό ἄθροισμα καί τό γινόμενο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί. Γιά τούς δύο μιγαδικούς ἀριθμούς τῆς ἐξ. (14.59) μποροῦμε νά γράψουμε ἀντίστοιχα

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \tag{14.61}$$

καί

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2). \tag{14.62}$$

4. Ἡ διαίρεση δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν μπορεῖ νά ὁριστεῖ ὡς τό ἀντίστροφο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἄν

$$\frac{z_1}{z_2} = z \tag{14.63}$$

τότε z εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός, τέτοιος ὥστε

$$z_1 = zz_2. \tag{14.64}$$

---

† Σέ πολλά βιβλία ἠλεκτρισμοῦ, κυρίως ἀπευθυνόμενα σέ μηχανικούς, ἡ φανταστική μονάδα συμβολίζεται μέ τό γράμμα j. Τοῦτο ἀκολουθεῖται γιά νά ἀποφευχθεῖ σύγχιση μέ τή στιγμιαία τιμή τοῦ ρεύματος πού κατά παλαιή παράδοση συμβολίζεται ἀπό ὁρισμένους συγγραφεῖς μέ τό γράμμα i. Στά πλαίσια τοῦ παρόντος βιβλίου θά χρησιμοποιήσουμε ἀποκλειστικά κεφαλαῖα γράμματα γιά τό συμβολισμό μεγεθῶν ΕΡ καί θά διατηρήσουμε τό γράμμα i γιά τό συμβολισμό τῆς φανταστικῆς μονάδας σέ συνέπεια μέ τήν καθιερωμένη πρακτική στά μαθηματικά καί στή φυσική.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἂν ὁ ἀριθμός z γραφεῖ στή μορφή τῆς ἐξ. (14.57), τότε οἱ δύο ἰσότητες πού συνεπάγεται ἡ ἐξ. (14.64) {βλ. ἐξ. (14.60)} δίνουν

$$a = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \qquad b = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \tag{14.65}$$

5. Ὁ **συζυγής** $\tilde{z}$ ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = a + ib$ ὁρίζεται ὡς

$$\tilde{z} \equiv a - ib. \tag{14.66}$$

Τό γινόμενο ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z μέ τό συζυγή του δίνει τό τετράγωνο τοῦ **μέτρου** $|z|$ τοῦ z, ἤτοι

$$z\tilde{z} \equiv |z|^2 = a^2 + b^2. \tag{14.67}$$

6. Ὅπως ἤδη ἀναφέρθηκε μιγαδικοί ἀριθμοί καί δισδιάστατα ἀνύσματα εἶναι δυνατόν νά τεθοῦν σέ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία. Ἔτσι θά ἀντιστοιχήσουμε τό ἄνυσμα μέ συντεταγμένες $x = a$ καί $y = b$ μέ τό μιγαδικό ἀριθμό $z = a + ib$. Ἐπιπλέον, ὅπως εἶναι εὔκολο νά ἐπιβεβαιώσει ὁ ἀναγνώστης, ἡ πράξη τῆς προσθέσεως στίς δύο ἀναπαραστάσεις ὁδηγεῖ σέ ἀντίστοιχα ἀποτελέσματα.
7. Ἕνα ἄνυσμα (x, y) μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ σέ πολικές συντεταγμένες σύμφωνα μέ τό μετασχηματισμό

$$x = r\cos\theta \tag{14.68α}$$

$$y = r\sin\theta \tag{14.68β}$$

ὅπου

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{14.69}$$

καί θ ἡ γωνία πού σχηματίζει μέ τόν ὁριζόντιο ἄξονα

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \cos^{-1}\frac{x}{r}. \tag{14.70}$$

Ὁ ἀντίστοιχος μιγαδικός ἀριθμός $z = x + iy$ μπορεῖ νά γραφεῖ σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ὡς

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{14.71}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τήν ταυτότητα

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{14.72}$$

ἡ ἐξ. (14.71) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$z = |z|e^{i\theta}. \tag{14.73}$$

Μεγέθη ΕΡ μποροῦν τώρα νά ἀναπαρασταθοῦν μέ μιγαδικούς ἀριθμούς. Π.χ. τό ρεῦμα πού διαρρέει ἕνα ἐξάρτημα μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$I = I_{\varepsilon\nu}e^{i\varphi} = I_{\varepsilon\nu}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{14.74}$$

ὅπου φ εἶναι ἡ φάση καί $I_{\varepsilon\nu}$ ἡ ἐνεργός τιμή†, μέ ἀνάλογες ἐκφράσεις γιά τή διαφορά δυναμικοῦ ἤ τήν ΗΕΔ μιᾶς γεννήτριας. Ὁμοειδῆ μεγέθη μποροῦν νά προστεθοῦν σύμφωνα μέ τούς κανόνες τῆς μιγαδικῆς ἄλγεβρας καί τό μιγαδικό ἄθροισμα ἀντιπροσωπεύει τό ἀντίστοιχο ἄθροισμα τῶν μεγεθῶν. Οἱ δύο νόμοι τοῦ Kirchhoff π.χ. μποροῦν νά γραφοῦν ὡς

$$\sum_i I_i = 0 \tag{14.75α}$$

ὅπου I_i τό μιγαδικό ρεῦμα πού ρέει σέ κάθε κλάδο ἑνός κόμβου, καί

$$\sum_i V_i = U \tag{14.75β}$$

ὅπου V_i καί U εἶναι ἀντίστοιχα διαφορές δυναμικοῦ καί ἡ ΗΕΔ ἑνός βρόχου.

Στά πλαίσια τῆς ἀνυσματικῆς ἀναπαραστάσεως μεγεθῶν ΕΡ ἀναφέραμε τή δυνατότητα συνδέσεως τοῦ ρεύματος καί τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ (τά ὁποῖα ἀντιπροσωπεύονται ἀντίστοιχα ἀπό τά ἀνύσματα I καί V) μέ τή βοήθεια ἑνός τελεστῆ. Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (14.56), ὁ τελεστής τῆς σύνθε-

† Ἡ ἐπιλογή τῆς ἐνεργοῦ τιμῆς ὡς μέτρου τοῦ μιγαδικοῦ ρεύματος στήν ἐξ. (14.74) εἶναι αὐθαίρετη. Γιά τήν ἀνάλυση κυκλωμάτων μπορεῖ ἰσοδύναμα νά ἐπιλεγεῖ τό πλάτος I_0 ὡς μέτρο τοῦ μιγαδικοῦ ρεύματος. Ἡ ἐπιλογή πάντως τῆς ἐξ. (14.74) εἶναι συνηθέστερη στήν πράξη καί μεταξύ ἄλλων ὁδηγεῖ σέ ἁπλούστερες ἐκφράσεις γιά τήν ἰσχή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

της ἀντιστάσεως $\mathscr{L}$ ἐπιδρᾶ στό ρεῦμα καί δημιουργεῖ τή διαφορά δυναμικοῦ

$$\mathbf{V} = \mathscr{L}\mathbf{I}. \tag{14.56}$$

Συγκεκριμένα ἡ ἐπίδραση τοῦ τελεστῆ $\mathscr{L}$ στό ἄνυσμα **I** ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή μεταβολή τοῦ πλάτους τοῦ ρεύματος κατά ἕνα παράγοντα z καί τή μετατόπιση τῆς φάσης κατά μιά γωνία φ. Ἡ διεργασία ὅμως αὐτή ἐπιτυγχάνεται κατά τόν πολλαπλασιασμό μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Πράγματι ἂν παραστήσουμε ἀντίστοιχα τό ρεῦμα καί τή σύνθετη ἀντίσταση μέ τούς μιγαδικούς ἀριθμούς

$$I = I_{\varepsilon\nu} e^{i\vartheta} \tag{14.76}$$

καί

$$Z = Z e^{i\varphi} \tag{14.77}$$

ἡ μιγαδική διαφορά δυναμικοῦ

$$V = ZI = Z I_{\varepsilon\nu} e^{i(\vartheta+\varphi)} \tag{14.78}$$

πληρεῖ τίς προηγούμενες προϋποθέσεις. Μέ ἄλλα λόγια *στήν ἀναπαράσταση μεγεθῶν ΕΡ μέ μιγαδικούς ἀριθμούς, ἡ σύνθετη ἀντίσταση εἶναι ἐπίσης μιγαδικός ἀριθμός.*

Ἡ τελευταία διαπίστωση διευκολύνει σημαντικά τό χειρισμό καί ἀνάλυση κυκλωμάτων ΕΡ. Οὐσιαστικά ὅλες οἱ τεχνικές καί τά ἀποτελέσματα τῆς ἀναλύσεως κυκλωμάτων ΣΡ μποροῦν νά μεταφερθοῦν στό χῶρο τοῦ ΕΡ ἂν οἱ ἀντίστοιχες ποσότητες ἀντικατασταθοῦν ἀπό μιγαδικούς ἀριθμούς. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα, π.χ. νά δείξει ὅτι στό ΕΡ ἠλεκτρικά ἐξαρτήματα σέ σειρά ἐμφανίζουν ὁλική σύνθετη ἀντίσταση

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots \tag{14.79}$$

ἐνῶ συνδεδεμένα παράλληλα, σύνθετη ἀντίσταση

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots \tag{14.80}$$

ὅπου Z_1, Z_2, ... εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί πού ἀντιπροσωπεύουν τή σύνθετη ἀντίσταση κάθε ἐξαρτήματος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ιδιαίτερα άπλή μορφή στή μιγαδική άναπαράσταση παίρνουν οί σύνθετες άντιστάσεις γιά ίδανικά έξαρτήματα. Χρησιμοποιώντας τίς έξ. (14.15) μπορούμε άμέσως νά γράψουμε

Ιδανική άντίσταση: $$Z_R = R \tag{14.81α}$$

Ιδανικός πυκνωτής: $$Z_C = X_C e^{-i\pi/2} = -i\frac{1}{C\omega} \tag{14.81β}$$

Ιδανική αύτεπαγωγή: $$Z_L = X_C e^{i\pi/2} = iL\omega. \tag{14.81γ}$$

Χρησιμοποιώντας έπομένως τήν έξ. (14.79) μπορούμε νά γράψουμε τή σύνθετη άντίσταση γιά τό κύκλωμα R-C-L σέ σειρά ώς

$$Z = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right). \tag{14.82}$$

Οί έξισώσεις (14.75), (14.79) καί (14.80) έπαρκοῦν τώρα γιά τήν άνάλυση κάθε κυκλώματος ΕΡ. Όπως καί στό παρελθόν, θά συνοψίσουμε τή διεργασία πού μπορεῖ νά άκολουθηθεῖ γιά τήν έπίλυση ένός κυκλώματος ΕΡ ύπό μορφή συνταγῆς:

1. Γράψτε τή σύνθετη άντίσταση κάθε έξαρτήματος τοῦ κυκλώματος ώς μιγαδικό άριθμό. Ρεαλιστικά έξαρτήματα μπορούν νά άντιπροσωπευτούν άπό άπλά κυκλώματα ίδανικῶν έξαρτημάτων [βλ. Παράγραφο 14-6]. Γιά ίδανικά έξαρτήματα χρησιμοποιεῖστε τίς έξ. (14.81).
2. Χρησιμοποιώντας τίς μιγαδικές σύνθετες άντιστάσεις άναλύστε τό κύκλωμα σάν κύκλωμα ΣΡ [βλ. Κεφάλαιο 6].
3. Άν ένδιαφέρουν τά μεγέθη ΕΡ μεταξύ δύο σημείων τοῦ κυκλώματος προσδιορίστε τίς άντίστοιχες μιγαδικές ποσότητες

$$V = V_{\epsilon\nu} e^{i\theta} \tag{14.83α}$$

$$I = I_{\epsilon\nu} e^{i\Phi} \tag{14.83β}$$

$$Z = Ze^{i\gamma} = Z_1 + iZ_2. \tag{14.83γ}$$



Οἱ ποσότητες αὐτές συνδέονται μέ τή σχέση

$$V_{\varepsilon\nu} = ZI_{\varepsilon\nu} = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\, I_{\varepsilon\nu}. \qquad (14.84)$$

4. Ἡ διαφορά δυναμικοῦ προηγεῖται ἀπό τό ρεῦμα κατά τή φάση

$$\vartheta - \varphi = \tan^{-1} \frac{Z_2}{Z_1} \qquad (14.85)$$

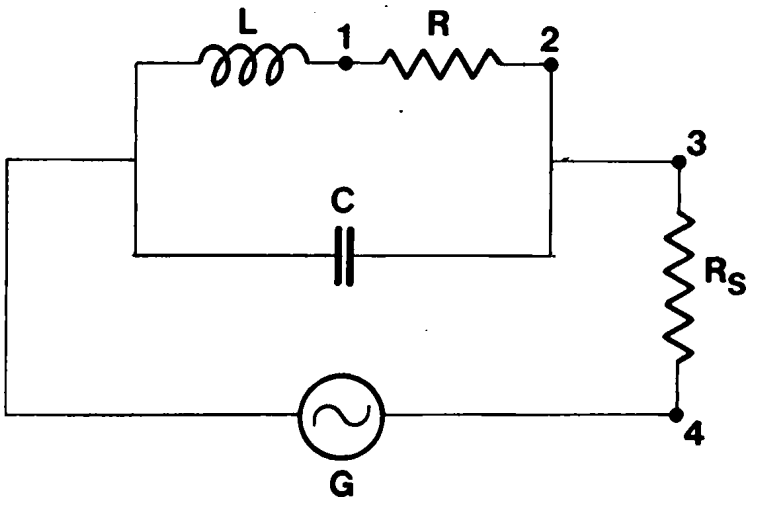
Ἡ προηγούμενη διεργασία εἶναι χρήσιμο νά μελετηθεῖ μέ ἕνα παράδειγμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 14-3. ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ R-C-L ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΥΝΔΕΣΗ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-7. Χρησιμοποιεῖστε ἕνα πυκνωτή $C \simeq 0.5\ \mu F$, ἕνα ἐξάρτημα αὐτεπαγωγῆς $L \simeq 45$ mH ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων R καί μιά πρότυπη ἀντίσταση R_s.

— Ρυθμίστε τή γεννήτρια G σέ συχνότητα 100 Hz καί τό κιβώτιο ἀντιστάσεων στήν τιμή $R = 100\ \Omega$. Συνδέστε ἕνα ἠλεκτρονικό βολτόμετρο στά ἄκρα 3 καί 4 τῆς πρότυπης ἀντιστάσεως R_s καί καταγράψτε τή διαφορά δυναμικοῦ ὡς συνάρτηση τῆς συχνότητας στήν περιοχή $50\ \text{Hz} < \nu < 100\ \text{kHz}$. Ὑπολογίστε τό ἀντίστοιχο ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀντίσταση R_s καί ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τοῦ ρεύματος ὡς συνάρτηση τῆς συχνότητας.

— Ἀπό τά προηγούμενα πειραματικά ἀποτελέσματα προσδιορίστε τήν τιμή τῆς συχνότητας ν_0 γιά τήν ὁποία ἡ σύνθετη ἀντίσταση τοῦ κυκλώμα-



ΣΧΗΜΑ 14-7 Κύκλωμα R-C-L σέ παράλληλη σύνδεση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τος γίνεται μέγιστη. Ὑπολογίστε θεωρητικά τή σύνθετη ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος καί ἑρμηνεῦστε τά ἀποτελέσματά σας.

– Ρυθμίστε τή συχνότητα τῆς γεννήτριας στήν τιμή ν_0 πού προσδιορίσατε προηγουμένως. Μεταβάλετε τήν ἀντίσταση τοῦ κιβωτίου ἀντιστάσεων στήν περιοχή $0 \leqslant R \leqslant 500\ \Omega$. Σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε

1. Τήν ἀντίσταση R.
2. Τήν πτώση δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων 1 καί 2 (ἐκτός ἀπό τήν περίπτωση $R = 0$).
3. Τήν πτώση δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων 3 καί 4.

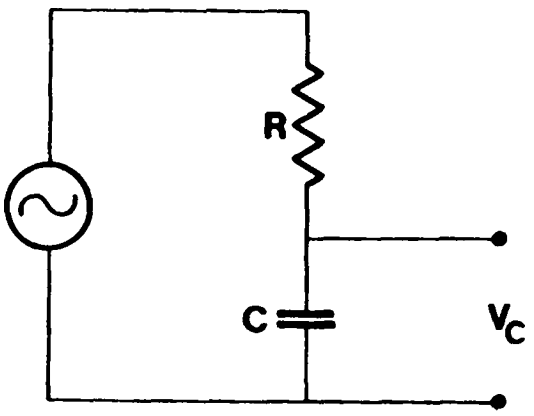
Ἀπό τίς τιμές τῶν ἀντιστάσεων R καί R_s ὑπολογίστε τό ἀντίστοιχο ἐνεργό ρεῦμα γιά κάθε τιμή τῆς R.

– Παρατηρεῖστε ὅτι σέ ὁρισμένη περιοχή τιμῶν τῆς ἀντιστάσεως R, τό ρεῦμα στόν ἄνω ἤ τόν κάτω κλάδο τῆς παράλληλης συνδέσεως ὑπερβαίνει κατά πολύ τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀντίσταση R_s. Ἑρμηνεῦστε τό φαινόμενο ἀπεικονίζοντας τό ρεῦμα κάθε κλάδου στό μιγαδικό ἐπίπεδο.

14-5 Φίλτρα Συχνότητας

Στά Πειράματα 14-2 καί 14-3 εἴδαμε μεταξύ ἄλλων μιά συμπεριφορά **συντονισμοῦ**. Παρατηρήσαμε ὅτι γιά μιά μικρή περιοχή συχνοτήτων ἡ σύνθετη ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος R-C-L σέ σειρά γίνεται πολύ μικρή. Ἀντίθετα γιά τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-7 ὑπάρχει μιά περιοχή συχνοτήτων ὅπου ἡ σύνθετη ἀντίσταση γίνεται πολύ μεγάλη. Τά δύο κυκλώματα ἑπομένως μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν ὡς **φίλτρα** πού ἀντίστοιχα ἐπιτρέπουν ἤ ἀπαγορεύουν τή διέλευση ρεύματος σέ κάποια περιοχή συχνότητας.

Μιά ἁπλούστερη διάταξη πού μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ μέ τήν ἴδια ἔννοια ὡς φίλτρο δίνεται στό σχῆμα 14-8. Ἄν $U_{\varepsilon\nu}$ εἶναι ἡ ἐνεργός ΗΕΔ τῆς



ΣΧΗΜΑ 14-8 Φίλτρο RC γιά τή διέλευση χαμηλῶν συχνοτήτων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γεννήτριας, τότε ἡ ἐνεργός τιμή τοῦ ρεύματος πού θά διαρεύσει στό κύκλωμα εἶναι

$$I_{\varepsilon v} = \frac{U_{\varepsilon v}}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{U_{\varepsilon v}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \qquad (14.86)$$

ἐνῶ ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$V_{C,\varepsilon v} = I_{\varepsilon v} X_C = U_{\varepsilon v} \frac{1/C\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} . \qquad (14.87)$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση προκύπτει ὅτι ἡ διαφορά δυναμικοῦ V_C φθίνει καθώς ἡ συχνότητα τῆς γεννήτριας αὐξάνει. Μέ ἄλλα λόγια ἡ διάταξη εὐνοεῖ τή διέλευση χαμηλῶν συχνοτήτων σέ σχέση μέ ὑψηλότερες. Συγκεκριμένα ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ ἐξόδου πρός τή διαφορά δυναμικοῦ εἰσόδου ἐμφανίζει τή συμπεριφορά

$$\frac{V_{C,\varepsilon v}}{U_{\varepsilon v}} = \frac{1/C\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} . \qquad (14.88)$$

Τήν ἀντίθετη συμπεριφορά ἐμφανίζει τό κύκλωμα 14-9 πού μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ ὡς φίλτρο διελεύσεως ὑψηλῶν συχνοτήτων. Εἶναι εὔκολο νά δείξουμε κατά τόν ἴδιο τρόπο ὅτι στήν περίπτωση αὐτή ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ ἐξόδου πρός τή διαφορά δυναμικοῦ εἰσόδου δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\frac{V_{L,\varepsilon v}}{U_{\varepsilon v}} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \qquad (14.89)$$

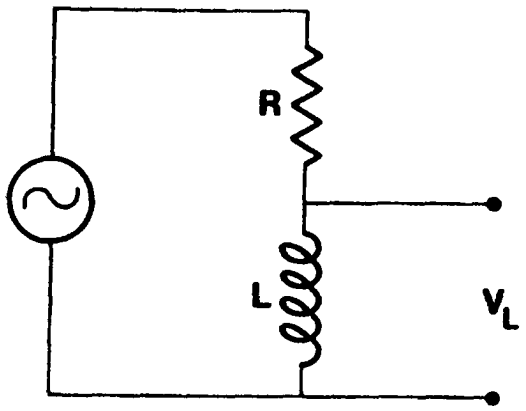
πού εὐνοεῖ τή διέλευση ὑψηλῶν συχνοτήτων σέ σχέση μέ χαμηλότερες. Τή συμπεριφορά τῶν προηγούμενων κυκλωμάτων θά μελετήσουμε στό ἑπόμενο πείραμα.



ΠΕΙΡΑΜΑ 14-4. ΦΙΛΤΡΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-10. Χρησιμοποιεῖστε ἀντίσταση R = 1 kΩ. Στή θέση τοῦ ἐξαρτήματος E τοποθετεῖστε ἕνα πυκνω-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 14-9 Φίλτρο RL γιά τή διέλευση ὑψηλῶν συχνοτήτων.

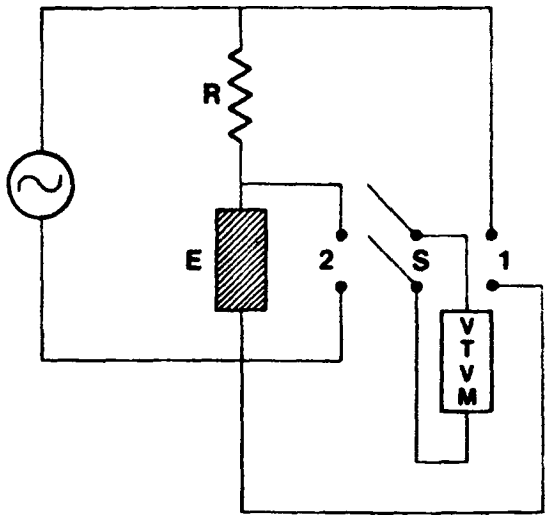
τή μέ χωρητικότητα C = 1 μF. Ὅπως δείχνει τό σχῆμα 14-10, χρησιμοποιεῖστε τό διπλό διακόπτη S ἔτσι ὥστε ἐπιλεκτικά νά συνδέει τό ἠλεκτρονικό βολτόμετρο VTVM στά ἄκρα τῆς γεννήτριας (θέση 1) ἤ στά ἄκρα τοῦ ἐξαρτήματος E (θέση 2).

– Μεταβάλλοντας τή συχνότητα τῆς γεννήτριας στήν περιοχή $0 \leqslant v \leqslant 10$ kHz καταγράψτε σέ κατάλληλο πίνακα τό δυναμικό V_1 καί V_2 πού μετράει ἀντίστοιχα τό ἠλεκτρονικό βολτόμετρο στίς θέσεις 1 καί 2 τοῦ κυκλώματος. Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τά λόγο V_2/V_1 ὡς συνάρτηση τῆς συχνότητας. Σχολιάστε τό ἀποτέλεσμα.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία ἀντικαθιστώντας στή θέση τοῦ ἐξαρτήματος E μιά αὐτεπαγωγή μέ συντελεστή L = 44 mH.

14-6 Ρεαλιστικά Ἐξαρτήματα στό ΕΡ

Ἰδανικά ἐξαρτήματα ΕΡ εἶναι μαθηματικές ἀφαιρέσεις πού χρησιμοποιοῦμε γιά τήν προσέγγιση περισσότερο ρεαλιστικῶν καταστάσεων. Σέ



ΣΧΗΜΑ 14-10 Κύκλωμα γιά τή μελέτη φίλτρου συχνότητας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

βιομηχανικά ἐξαρτήματα χωρητικότητας καί ἐπαγωγῆς τό ρεῦμα προηγεῖται ἀπό τό δυναμικό μέ διαφορά φάσης πού ἀποκλίνει ἀπό τήν τιμή $\pm\pi/2$ ἐνῶ σέ ρεαλιστικές ἀντιστάσεις σπάνια ἱκανοποιεῖται ἡ ἰδανική σχέση $\varphi=0$. Ἐπιπλέον, τά μεγέθη πού ἐμφανίζει ἕνα ρεαλιστικό ἐξάρτημα στό ΕΡ μεταβάλλονται μέ τή συχνότητα.

Γενικά ἡ ἀντίσταση πού ἐμφανίζει ἕνας ἀγωγός στό ΕΡ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό ὅτι στό ΣΡ καί αὐξάνει μέ τή συχνότητα. Τοῦτο ὀφείλεται κατά κύριο λόγο σέ ἐπαγωγικές ΗΕΔ πού ἀναπτύσσονται κατά τή ροή τοῦ ΕΡ καί πού εἶναι διαφορετικές γιά διαφορετικούς δρόμους τοῦ ρεύματος μέσα στόν ἀγωγό. Ἔτσι, γιά μιά δεδομένη συχνότητα ἡ πυκνότητα τοῦ ρεύματος μέσα στόν ἀγωγό προσαρμόζεται κατά τρόπο ὥστε νά ἐλαχιστοποιηθοῦν οἱ ἐπαγωγικές ΗΕΔ καί ἐπομένως ἡ ἀντίσταση. Γιά ἕνα σύρμα πού διαρρέεται ἀπό ΕΡ ἡ πυκνότητα τοῦ ρεύματος εἶναι μεγαλύτερη κοντά στήν ἐπιφάνεια τοῦ σύρματος ἐνῶ γιά ἕνα ἀγωγό σέ σχῆμα πηνίου τό φαινόμενο εἶναι πιό ἔντονο λόγω τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού ἀναπτύσσει τό ἴδιο τό πηνίο.

Ἡ ἐπιφανειακή αὔξηση τῆς πυκνότητας ρεύματος σέ σύρματα πού διαρρέονται ἀπό ΕΡ συνδέεται† ἄμεσα μέ τό φαινόμενο ἀπορροφήσεως ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων σέ ἀγωγούς. Συγκεκριμένα τό πλάτος Α ἑνός ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος πού προσπίπτει σέ ἕνα ἀγωγό φθίνει σέ ἀπόσταση r ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ σύμφωνα μέ τό νόμο

$$A(r) = A(0)e^{-\frac{r}{s}} \tag{14.90}$$

ὅπου s εἶναι μιά χαρακτηριστική σταθερά πού μποροῦμε νά ὀνομάσουμε **ἀπόσταση διεισδύσεως** καί πού δίνεται ἀπό τή σχέση

$$s = \sqrt{\frac{2}{\mu g \omega}}\,. \tag{14.91}$$

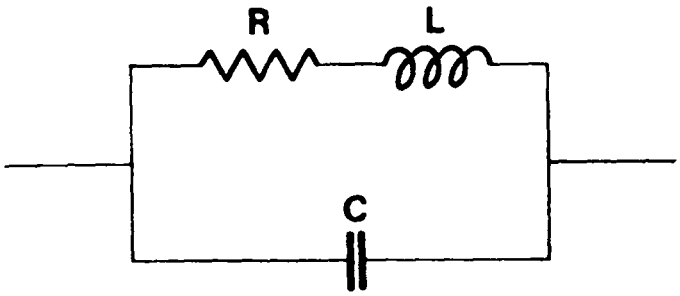
Στήν τελευταία ἔκφραση μ εἶναι ἡ διαπερατότητα καί g ἡ ἀγωγιμότητα τοῦ ὑλικοῦ τοῦ ἀγωγοῦ. Ἄν ἐπομένως σέ ἕνα ἀγωγό μέ σχῆμα κυλίνδρου ἡ παράμετρος s εἶναι ἀρκετά μικρότερη ἀπό τήν ἀκτίνα τοῦ κυλίνδρου, μιά μεγάλη περιοχή στό ἐσωτερικό τοῦ ἀγωγοῦ παραμένει οὐσιαστικά ἀδρανής καί ἡ πυκνότητα ρεύματος συσσωρεύεται κοντά στήν ἐπιφάνεια. Τοῦτο ἐ-

† Τό φαινόμενο ἀναφέρεται συχνά μέ τόν ὅρο **ἐπιδερμικό φαινόμενο.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χει ὡς ἀποτέλεσμα τήν αὔξηση τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀγωγοῦ σέ σχέση μέ αὐτή πού ἐμφανίζει γιά τό ΣΡ, ἐνῶ σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (14.91), ἡ ἀντίσταση αὐξάνει ἐπιπλέον μέ ἀντίστοιχη αὔξηση τῆς συχνότητας. Τό φαινόμενο εἶναι ἐντονότερο γιά κυλινδρικούς ἀγωγούς μέ μεγάλη ἀκτίνα καί γιά τό λόγο αὐτό σέ κυκλώματα ΕΡ, ἰδίως γιά ὑψηλές συχνότητες, χρησιμοποιεῖται κατά προτίμηση πολύ λεπτό σύρμα.

Βιομηχανικά *ἐξαρτήματα ἀντιστάσεως* πέρα ἀπό τή χαρακτηριστική ἀντίσταση R ἐμφανίζουν συνήθως χωρητικότητα καί ἐπαγωγή. Ἡ χωρητικότητα μεταξύ ἄλλων ὀφείλεται στή σύνδεση τῶν ἀκροδεκτῶν μέ ἄλλα ἐξαρτήματα τοῦ κυκλώματος ἐνῶ, προκειμένου περί ἀντιστάσεων σύρματος, στή γειτνίαση τῶν βρόχων τῆς περιελείξεως. Στήν περιέλειξη σύρματος ὀφείλεται ἐπίσης καί ἡ ἐπαγωγή L πού μπορεῖ νά ἐμφανίζει ἕνα βιομηχανικό ἐξάρτημα ἀντιστάσεως. Ἡ ἐπαγωγή μπορεῖ νά εἶναι σημαντική ἄν κατά τήν κατασκευή τοῦ ἐξαρτήματος δέν ἐπιλεγεῖ κατάλληλη γεωμετρία περιελείξεως. Τό ἰσοδύναμο κύκλωμα ἑνός ρεαλιστικοῦ ἐξαρτήματος ἀντιστάσεως γιά τό ΕΡ δίνεται στό σχῆμα 14-11. Τό κύκλωμα αὐτό μελετήθηκε ἤδη στό Πείραμα 14-3. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά δείξει μέ λίγη ἄλγεβρα ὅτι ἄν ὁ συντελεστής αὐτεπαγωγῆς L τοῦ ἐξαρτήματος εἶναι μικρός σέ σχέση μέ τήν ἀντίσταση, τότε ἡ διαφορά φάσης μεταξύ ρεύματος καί δυναμικοῦ δίνεται προσεγγιστικά ἀπό τήν ἔκφραση



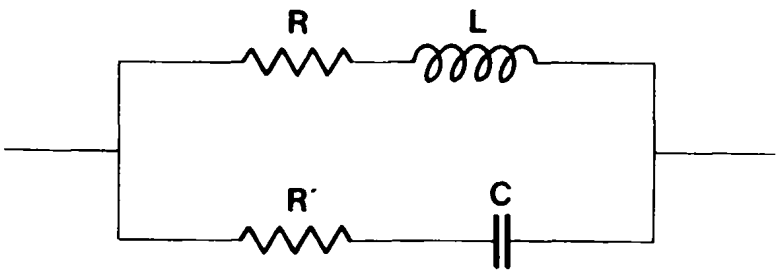
ΣΧΗΜΑ 14-11 Ἰσοδύναμο κύκλωμα ρεαλιστικοῦ ἐξαρτήματος ἀντιστάσεως.

$$\varphi = \tan^{-1}\left[\frac{\omega(L - CR^2)}{R}\right] \qquad (14.92)$$

Παρατηρεῖται ὅτι ἄν καί ἡ γωνία φ εἶναι γενικά συνάρτηση τῆς συχνότητας, οἱ ποσότητες L, C καί R μποροῦν νά ἐπιλεγοῦν κατά τέτοιο τρόπο ($L = CR^2$) ὥστε γιά ὁποιαδήποτε συχνότητα τό ἐξάρτημα νά ἱκανοποιεῖ τήν ἰδανική συνθήκη $\varphi = 0$.

Ἄν καί τό σχῆμα 14-11 μπορεῖ σέ ὁρισμένες περιπτώσεις νά ἐκπροσωπήσει τό ἰσοδύναμο κύκλωμα ἑνός ρεαλιστικοῦ *ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς*,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 14-12 Ἐναλλακτικό ἰσοδύναμο κύκλωμα ρεαλιστικοῦ ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς.

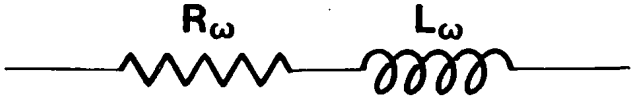
τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-12 ἀποδεικνύεται προσφορότερο. Βιομηχανικά ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς ἔχουν συνήθως τή μορφή πηνίου καί ἡ χωρητικότητα ὀφείλεται κατά κύριο λόγο στή γειτνίαση τῶν βρόχων τῆς περιελείξεως. Ἡ ἀντίσταση R ὀφείλεται κυρίως στήν ἀντίσταση τοῦ σύρματος πού δημιουργεῖ τό πηνίο. Ὅπως καί στά ἐξαρτήματα ἀντιστάσεως ἡ τιμή της αὐξάνει μέ ἀντίστοιχη αὔξηση τῆς συχνότητας ὁπότε παρατηροῦνται ἔντονα ἐπιδερμικά φαινόμενα.

Ἄν ἡ χωρητική ἀντίσταση πού ἐμφανίζει τό ἐξάρτημα εἶναι μεγάλη σέ σχέση μέ τήν ἐπαγωγική καί ἡ τελευταία μεγάλη σέ σχέση μέ τήν ὠμική τότε τό ἰσοδύναμο κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-11 μπορεῖ γιά μιά συγκεκριμένη συχνότητα νά ἀντικατασταθεῖ† ἀπό τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-13 ὅπου τά ἰσοδύναμα ἰδανικά ἐξαρτήματα χαρακτηρίζονται ἀπό τά μεγέθη

$$L_\omega = \frac{L}{1 - \omega^2 LC} \qquad (14.93\alpha)$$

καί

$$R_\omega = \frac{R}{(1 - \omega^2 LC)^2} \,. \qquad (14.93\beta)$$



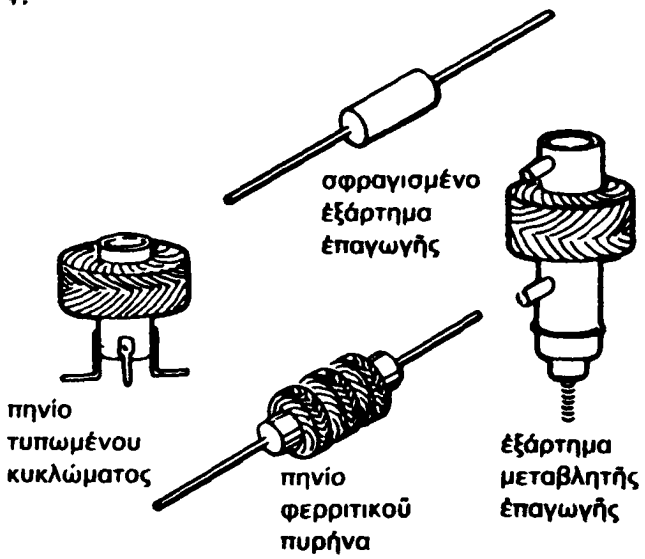
ΣΧΗΜΑ 14-13 Ἰσοδύναμο κύκλωμα ρεαλιστικοῦ ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς γιά συγκεκριμένη συχνότητα.

† Τό ἁπλοποιημένο ἰσοδύναμο κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-13 προτείνεται ἀπό ἐγκύκλιο τοῦ Ἐθνικοῦ Γραφείου Προτύπων τῶν ΗΠΑ (Natl. Bur. Standards, Cir. 74, p. 133, 1936).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ τελευταία ἀναπαράσταση ἰσχύει γιά συχνότητες πολύ χαμηλότερες ἀπό τή συχνότητα συντονισμοῦ ω_0 τοῦ κυκλώματος 14-11. Ἀντίθετα, γιά ἀρκετά ὑψηλές συχνότητες, στήν περιοχή $\omega >> \omega_0$, ἕνα πηνίο μπορεῖ νά ἐμφανίζει περισσότερο τά χαρακτηριστικά πυκνωτῆ παρά ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς.

Βιομηχανικά ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς διατίθενται σήμερα μέ συντελεστή αὐτεπαγωγῆς πού κειμένεται ἀπό μερικά μΗ μέχρι ἀρκετές ἑκατοντάδες Η. Δημιουργοῦνται συνήθως μέ περιέλειξη μονωμένου σύρματος γύρω ἀπό ἕνα πυρήνα ὁ ὁποῖος μπορεῖ νά ἀποτελεῖται εἴτε ἀπό ἀδρανές ὑλικό εἴτε ἀπό σίδηρο ἤ φερρίτη†. Ἄν καί ὁ πυρήνας ἀπό μαγνητικό ὑλικό αὐξάνει σημαντικά τό συντελεστή αὐτεπαγωγῆς, μαγνητικές ἀπώλειες, ἰδίως σέ ὑψηλές συχνότητες, ὁδηγοῦν σέ ὑπερθέρμανση τοῦ ἐξαρτήματος. Πυρῆνες ἀπό σίδηρο π.χ. περιορίζονται στήν περιοχή κάτω ἀπό 15 kHz. Σέ ὑψηλότερες συχνότητες μόνο ὁ φερρίτης εἶναι κατάλληλο ὑλικό ὡς πυρήνας γιά ἐξάρτημα μέ μεγάλο συντελεστή αὐτεπαγωγῆς. Πολλοί κατασκευαστές διαθέτουν ἐξαρτήματα μέ μεταβλητό συντελεστή αὐτεπαγωγῆς. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται μέ μεταβολή τῆς μαγνητικῆς συζεύξεως μεταξύ τῆς περιελείξεως καί τοῦ πυρήνα. Μερικοί χαρακτηριστικοί τύποι ἐξαρτημάτων ἐπαγωγῆς περιέχονται στό σχῆμα 14-14.



ΣΧΗΜΑ 14-14 Χαρακτηριστικοί τύποι ἐξαρτημάτων ἐπαγωγῆς.

† Ὁ *φερρίτης* εἶναι ἕνα κονιορτοποιημένο καί στή συνέχεια συμπιεσμένο μαγνητικό ὑλικό κυρίως ἀπό ὀξείδιο τοῦ σιδήρου μέ προσμίξεις ὀξειδίων ἑνός ἤ περισσοτέρων ἄλλων μετάλλων. Χαρακτηρίζεται ἀπό μεγάλη εἰδική ἀντίσταση, ἔτσι ὥστε σέ ὑψηλές συχνότητες οἱ ἀπώλειες λόγω ρευμάτων Foucault νά εἶναι ἀμελητέες. Μέχρι πρόσφατα, λόγω τῆς ἰδιότητάς του νά μαγνητίζεται καί νά ἀπομαγνητίζεται πολύ γρήγορα, χρησίμευε στήν κατασκευή μνήμης ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς ἀξιολογοῦνται συνήθως μέ ἕνα συντελεστή Q πού ὁρίζεται ὡς ὁ λόγος τῆς ἐπαγωγικῆς πρός τήν ὠμική ἀντίσταση πού παρεμβάλλει τό ἐξάρτημα. Γιά μιά συγκεκριμένη συχνότητα ω/2π ὁ συντελεστής ἀξιολογήσεως δίνεται ἀπό τή σχέση

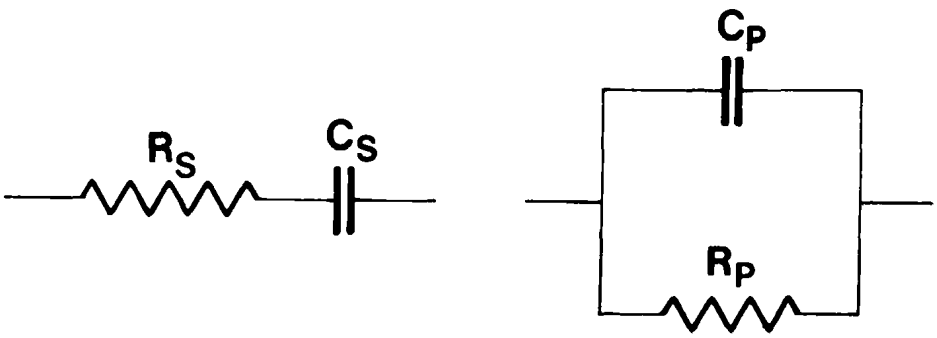
$$Q = \frac{L_\omega \omega}{R_\omega} \tag{14.94}$$

ὅπου L_ω καί R_ω ἔχουν ὁριστεῖ στίς ἐξ. (14.93). Ὁ συντελεστής Q παίζει σημαντικό ρόλο κατά τή χρησιμοποίηση ἐξαρτημάτων αὐτεπαγωγῆς σέ συντονιζόμενα κυκλώματα (βλ. π.χ. σχήματα 14-4 καί 14-7). Ὑψηλή τιμή τοῦ συντελεστῆ Q ὁδηγεῖ σέ μικρό εὖρος τῆς καμπύλης συντονισμοῦ. Βιομηχανικά ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς πού χρησιμοποιοῦνται στήν κατασκευή συσκευῶν χαρακτηρίζονται ἀπό συντελεστή Q τῆς τάξης τῶν μερικῶν ἑκατοντάδων.

Πυκνωτές μέ μεταλλικούς ἐπίπεδους ὀπλισμούς καί διάκενο ἀπό ἀτμοσφαιρικό ἀέρα συμπεριφέρονται σχεδόν σάν ἰδανικά *ἐξαρτήματα χωρητικότητας*. Γιά τό λόγο αὐτό συνήθως ἀξιολογοῦνται μέ βάση τό **ἔλλειμμα φάσης** δ παρά τή διαφορά φάσης μεταξύ δυναμικοῦ καί ρεύματος. Τό ἔλλειμμα φάσης ὁρίζεται ὡς ἡ διαφορά τῆς πραγματικῆς διαφορᾶς φάσης φ πού ἐμφανίζει τό ἐξάρτημα ἀπό τήν ἰδανική τιμή $-\pi/2$, ἤτοι

$$\delta \equiv \varphi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \varphi + \frac{\pi}{2}. \tag{14.95}$$

Τό ἰσοδύναμο κύκλωμα ἑνός ρεαλιστικοῦ πυκνωτῆ μπορεῖ νά παρασταθεῖ, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 14-15, κατά δύο ἐναλλακτικούς τρόπους. Ἡ σύνθε-



ΣΧΗΜΑ 14-15 Ἐναλλακτική ἀναπαράσταση ρεαλιστικοῦ πυκνωτῆ μέ ἰδανικά ἐξαρτήματα ἀντιστάσεως καί χωρητικότητας (α) σέ σειρά (β) σέ παράλληλη σύνδεση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τη άντίσταση στίς δύο περιπτώσεις μπορεῖ εὔκολα νά ὑπολογιστεῖ ὡς

$$Z = R_s - i\frac{1}{C_s\omega} = \frac{R_p}{R_p^2C_p^2\omega^2 + 1} - i\frac{R_p^2C_p\omega}{R_p^2C_p^2\omega^2 + 1} \qquad (14.96)$$

καί τό ἔλλειμμα φάσης ὡς

$$\delta = \tan^{-1}(R_sC_s\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{R_pC_p\omega}\right). \qquad (14.97)$$

Ἐξισώνοντας τά πραγματικά καί φανταστικά μέρη τῶν δύο ἐναλλακτικῶν ἐκφράσεων γιά τή σύνθετη ἀντίσταση στήν ἐξ. (14.96) μποροῦμε νά συνδέσουμε τίς τιμές τῶν ἰδανικῶν ἐξαρτημάτων στά δύο ἰσοδύναμα κυκλώματα μέ τίς σχέσεις

$$R_s = R_p\sin^2\delta \qquad (14.98\alpha)$$

καί

$$C_p = C_s\cos^2\delta. \qquad (14.98\beta)$$

Παρατηρεῖται ὅτι στή συνήθη περίπτωση ὅπου ἡ γωνία δ εἶναι μικρή

$$C_s \simeq C_p \qquad (14.99)$$

ἐνῶ οἱ τιμές τῶν ἰδανικῶν ἀντιστάσεων R_s καί R_p διαφέρουν κατά πολύ.

Ρεαλιστικοί πυκνωτές ὑπόκεινται σέ ἀπώλεια φορτίου μεταξύ τῶν ὀπλισμῶν τους εἴτε διαμέσου τοῦ ὄγκου τοῦ διηλεκτρικοῦ εἴτε, σέ περίπτωση στερεοῦ διηλεκτρικοῦ, κατά τήν ἐπιφάνειά του. Τό φαινόμενο αὐτό μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέ μιά μεγάλη ἀντίσταση σέ παράλληλη σύνδεση ὅπως στό ἰσοδύναμο κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-15(β). Ἕνα δεύτερο φαινόμενο πού παρατηρεῖται σέ πυκνωτές μέ στερεό ἤ ὑγρό διηλεκτρικό μέσο εἶναι ἡ **διηλεκτρική ἀπορρόφηση.** Τοῦτο ὀφείλεται στήν πόλωση τοῦ ὑλικοῦ πού ἐμφανίζεται μέ τήν ἀργή αὔξηση τοῦ φορτίου πού ἀποθηκεύεται στόν πυκνωτή ὅταν διατηρεῖται σέ σταθερό δυναμικό. Ἄν στή συνέχεια ὁ πυκνωτής ἐκφορτιστεῖ, μόνο μέρος τοῦ ἀποθηκευμένου φοτίου θά ἐπιστρέψει ἀκαριαία ἐνῶ ἕνα σημαντικό ποσοστό τοῦ φορτίου θά ἀποδεσμευτεῖ μέ ἀργή ροή πού μπορεῖ νά διαρκέσει ἀρκετό χρόνο. Πυκνωτές πού ἐκφορτίζονται μέ στιγμιαία βραχυκύκλωση, μετά ἀπό ἕνα ὁρισμένο χρόνο ἀναπτύσσουν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πάλι μιά διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν τους. Ἄμεσο ἀποτέλεσμα τῆς διηλεκτρικῆς ἀπορροφήσεως εἶναι ὅτι ἕνας πυκνωτής ἐμφανίζει μεγαλύτερη χωρητικότητα

$$C_{\Sigma P} = \frac{q}{V} \tag{14.100}$$

στό ΣΡ ἀπό ὅτι στό ἐναλλασσόμενο ὅπου ἡ χωρητικότητα ἐκφράζεται ἀπό τή σχέση

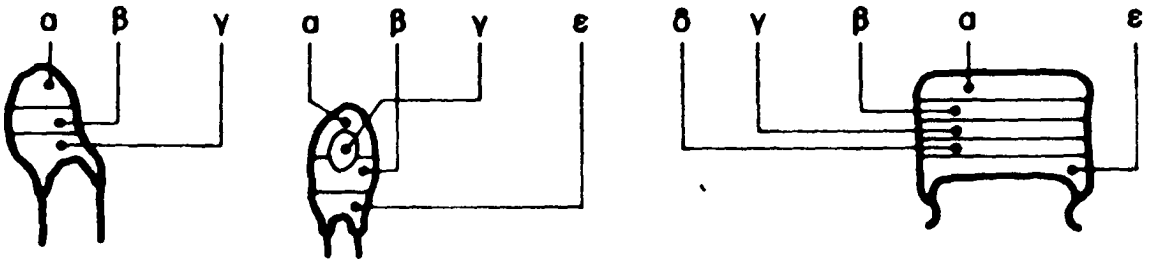
$$C_{EP} = \frac{dq}{dV} . \tag{14.101}$$

Ἐπιπλέον ἡ χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ στό ΕΡ μειώνεται καθώς ἡ συχνότητα αὐξάνει. Τό κατώτατο ὅριο πάντως πρός τό ὁποῖο τείνει ἡ χωρητικότητα καθώς αὐξάνει ἡ συχνότητα εἶναι πεπερασμένο. Συνήθως ἀναφέρεται ὡς ἡ *γεωμετρική χωρητικότητα* τοῦ πυκνωτῆ.

Ἕνας ἁπλός πυκνωτής μπορεῖ νά κατασκευαστεῖ ἀπό δύο λεπτά μεταλλικά φύλλα μεταξύ τῶν ὁποίων παρεμβάλλεται ἕνα λεπτό φύλλο διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ. Τό διηλεκτρικό ὑλικό μπορεῖ νά εἶναι χαρτί, μίκα, κεραμικό ἤ πλαστικό. Ἡ διάταξη μπορεῖ νά διπλωθεῖ ἤ νά τυλιχτεῖ σέ σχῆμα κυλίνδρου καί στή συνέχεια νά ἐπικαλυφθεῖ ἑρμητικά μέ κάποια οὐσία ὥστε νά προστατευτεῖ ἀπό τό περιβάλλον. Βιομηχανικοί πυκνωτές τοῦ τύπου αὐτοῦ περιέχονται στό σχῆμα 14-16. Ὅπως καί στήν περίπτωση τῶν ἀντιστάσεων ἄνθρακα πού περιγράψαμε στήν Παράγραφο 4-14, ἡ χωρητικότητα τοῦ ἐξαρτήματος δίνεται μέ τή βοήθεια ἔγχρωμων ταινιῶν πού ἀκολουθοῦν τόν κώδικα τῆς ἐξ. (4.42) καί τήν ἀντιστοιχία τοῦ Πίνακα 4-3. Δύο ἐπιπλέον ἔγχρωμες ταινίες ἀναφέρονται στήν ἀκρίβεια τῆς ὀνομαστικῆς τιμῆς τῆς χωρητικότητας καί στά ὅρια ἀντοχῆς τοῦ ἐξαρτήματος ὡς πρός τό δυναμικό. Ὑπέρβαση τοῦ τελευταίου ὁρίου μπορεῖ νά ὁδηγήσει σέ διάτρηση τοῦ διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ πού συνήθως συνεπάγεται ὁριστική καταστροφή τοῦ ἐξαρτήματος. Τά ἐξαρτήματα τοῦ τύπου αὐτοῦ πού διατίθενται σήμερα ἀπό τή βιομηχανία ἔχουν διάφορα σχήματα μέ ὀνομαστική χωρητικότητα πού κειμένεται ἀπό 1 pF ἕως μερικά μF, ἀκρίβεια μεταξύ 1 % καί 20 % καί ἀντοχή δυναμικοῦ ἀπό 3 V ἕως 50 V.

Ἠλεκτρολυτικοί πυκνωτές κατασκευάζονται ἀπό λεπτά φύλλα ταντάλιου ἤ ἀλουμινίου τῶν ὁποίων ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ὑποστεῖ ἀνοδική ὀξείδωση. Τό μεταλλικό φύλλο τοποθετεῖται σέ κάποιο ἠλεκτρολυτικό διάλυμα. Στή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

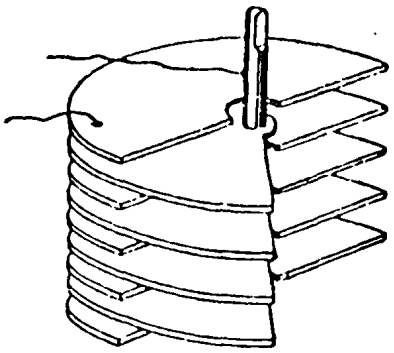


ΣΧΗΜΑ 14-16 Βιομηχανικοί τύποι πυκνωτῶν. Οἱ ἐνδείξεις α, β καί γ ἀντιστοιχοῦν στόν κώδικα τῆς ἐξ. (4.42) μέ τήν ἀντιστοιχία χρωμάτων πού περιέχεται στόν Πίνακα 4-3. Ἡ ἔνδειξη δ ἀναφέρεται στήν ἀκρίβεια τῆς ὀνομαστικῆς τιμῆς τῆς χωρητικότητας καί ἡ ἔνδειξη ε στήν ἀντοχή τοῦ ἐξαρτήματος ὡς πρός τό δυναμικό.

διάταξη αὐτή τό λεπτό ἐπίστρωμα ὀξειδίων τοῦ μετάλλου πού ἔχει σχηματιστεῖ στήν ἐπιφάνεια κατά τήν ἀνοδική ὀξείδωση ἀποτελεῖ τό διηλεκτρικό ὑλικό τοῦ πυκνωτῆ. Καθόσον τό πάχος τοῦ διηλεκτρικοῦ εἶναι ἐξαιρετικά μικρό ἡ διάταξη ἐμφανίζει μεγάλη χωρητικότητα σέ ἕνα ἐξάρτημα μικρῶν διαστάσεων. Οἱ περισσότεροι ἠλεκτρολυτικοί πυκνωτές μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν σέ κυκλώματα ἔτσι ὥστε τό δυναμικό νά ἔχει πάντα τήν ἴδια πολικότητα. Ἀντιστροφή τῆς πολικότητας τοῦ δυναμικοῦ ὁδηγεῖ σέ ἀναγωγή τῶν ὀξειδίων καί στήν καταστροφή τοῦ διηλεκτρικοῦ. Κατά τήν ἀναγωγή δημιουργεῖται ἀέριο καί ὁ πυκνωτής μπορεῖ νά ἐκραγεῖ. Ὁρισμένοι ἠλεκτρολυτικοί πυκνωτές ταντάλιου κατασκευάζονται ἀπό δύο ἀνοδωμένα μεταλλικά φύλλα, τά ὁποῖα διαχωρίζονται ἀπό τό διηλεκτρικό διάλυμα. Πυκνωτές τοῦ τύπου αὐτοῦ ὀνομάζονται *διπολικοί* καί μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν στό ΕΡ ἤ νά συνδεθοῦν κατά ὁποιαδήποτε φορά σέ κυκλώματα ΣΡ. Ἠλεκτρολυτικοί πυκνωτές διατίθενται σήμερα μέ ὀνομαστική τιμή χωρητικότητας ἀπό 1 μF ἕως μερικά mF.

Ἀρκετά διαδεδομένα εἶναι *ἐξαρτήματα μεταβλητῆς χωρητικότητας* πού χρησιμοποιοῦνται κυρίως σέ συντονιζόμενα κυκλώματα. Οἱ πλέον διαδεδομένοι τύποι πυκνωτῶν μεταβλητῆς χωρητικότητας εἶναι ὁ *μεταβλητός πυκνωτής μίκας* καί ὁ *μεταβλητός πυκνωτής ἀέρος*. Ὁ πρῶτος τύπος κατασκευάζεται ἀπό δύο μεταλλικά φύλλα μεταξύ τῶν ὁποίων παρεμβάλλεται ἕνα λεπτό φύλλο μίκας. Ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο μεταλλικῶν φύλλων καί ἐπομένως ἡ χωρητικότητα τῆς διατάξεως μεταβάλλεται μέ ἕνα κοχλία. Ἡ περιοχή μεταβολῆς τῆς χωρητικότητας μεταβλητῶν πυκνωτῶν μίκας εἶ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 14-17 Τυπική διάταξη μεταβλητοῦ πυκνωτῆ ἀέρος.

ναι ἀρκετά μικρή καί γιά τό λόγο αὐτό ἐξαρτήματα τοῦ τύπου αὐτοῦ χρησιμοποιοῦνται σέ περιπτώσεις ὅπου ἡ χωρητικότητα εἶναι ἀπό πρίν περίπου γνωστή. Ἡ τυπική διάταξη μεταβλητοῦ πυκνωτῆ ἀέρος εἰκονίζεται στό σχῆμα 14-17. Ἕνα σύστημα παράλληλων μεταλλικῶν πλακῶν κινεῖται γύρω ἀπό ἄξονα ἔτσι ὥστε νά παρεμβάλλεται σέ ἕνα δεύτερο σύστημα μεταλλικῶν πλακῶν. Ἄν τό σχῆμα τῶν πλακῶν εἶναι ἡμικυκλικό, ἡ μεταβολή τῆς χωρητικότητας εἶναι γραμμική ὡς πρός τή γωνία περιστροφῆς τοῦ ἄξονα. Μεταβλητοί πυκνωτές ἔχουν δυνατότητα μεταβολῆς τῆς χωρητικότητας σέ μιά περιοχή τῆς τάξης τοῦ 1 μF. Γιά μεγαλύτερες μεταβολές τῆς χωρητικότητας συνήθως ἐπιλέγεται ἡ παρεμβολή στό κύκλωμα σταθερῆς χωρητικότητας μέ τή βοήθεια διακόπτη.

Ὅπως καί τά ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς, πυκνωτές μποροῦν νά ἀξιολογηθοῦν μέ τόν ὁρισμό ἑνός συντελεστῆ, ὁ ὁποῖος σέ ἀναλογία μέ τήν ἐξ. (14.94) ὁρίζεται ὡς ὁ λόγος τῆς χωρητικῆς πρός τήν ὡμική ἀντίσταση τοῦ ἰσοδύναμου κυκλώματος στό σχῆμα 14-15(α).

$$Q = \frac{1}{\omega C_s R_s} \tag{14.102}$$

Συγκρίνοντας μέ τήν ἐξ. (14.97) προκύπτει ὅτι

$$Q = \cot\delta. \tag{14.103}$$

Γιά συνήθεις πυκνωτές ὅπου τό ἔλλειμμα φάσης εἶναι ἀρκετά μικρό ἡ τελευταία σχέση προσεγγίζεται ἀρκετά καλά ἀπό τήν ἁπλούστερη ἔκφραση

$$Q = \frac{1}{\delta} \tag{14.104}$$

Σέ ἕνα καλά σχεδιασμένο πυκνωτή ἀέρος ὁ συντελεστής Q μπορεῖ νά εἶναι τῆς τάξης τοῦ 10^4.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

14-7 Ἀμοιβαία Ἐπαγωγή σέ Κυκλώματα ΕΡ. Μετασχηματιστές

Ἡ στιγμιαία διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα ἑνός ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς μέ συντελεστή αὐτεπαγωγῆς L καί συντελεστή ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς M πρός ἕνα δεύτερο ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς, ἔχει ἤδη δοθεῖ στήν ἐξ. (14.4) ὡς

$$V_{LM} = L\frac{dI}{dt} \pm M\frac{dI'}{dt} \tag{14.105}$$

ὅπου I καί I′ εἶναι τά ρεύματα πού διαρρέουν τά ἀντίστοιχα ἐξαρτήματα. Ἄν θεωρήσουμε ὅτι τό ρεῦμα πού διαρρέει τά δύο ἐξαρτήματα ἔχει τήν ἴδια συχνότητα καί τή γενική μορφή

$$I = I_0\sin(\omega t + \alpha) \tag{14.106α}$$

$$I' = I_0'\sin(\omega t + \alpha') \tag{14.106β}$$

τότε ἁπλή ἀντικατάσταση στήν ἐξ. (14.105) δίνει

$$V_{LM} = I_0L\omega\sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) + I_0'M\omega\sin\left(\omega t + \alpha' + \frac{\pi}{2}\right). \tag{14.107}$$

Στήν τελευταία σχέση καί ἐφεξῆς, γιά ἁπλούστευση τοῦ συμβολισμοῦ, θά παραλείψουμε τό ἐναλλακτικό πρόσημο τῆς ἐξ. (14.105), ἔχοντας πάντα ὑπόψη τή σύμβαση πού καθορίστηκε στήν ἀρχή τοῦ Κεφαλαίου 13.

Ἡ ἐξ. (14.107) ἀναδεικνύει τή δράση τῶν φαινομένων τῆς αὐτεπαγωγῆς καί ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς. Τό δυναμικό V_{LM} πού ἀναπτύσσεται στά ἄκρα τοῦ ἐξαρτήματος ἔχει δύο ὅρους. Ὁ πρῶτος προέρχεται ἀπό τό ρεῦμα I πού διαρρέει τό ἐξάρτημα μέ μεταβολή τοῦ πλάτους κατά τόν παράγοντα Lω καί μετατόπιση τῆς φάσης κατά π/2. Ὁ δεύτερος ἀπό τό ρεῦμα I′ μέ μεταβολή τοῦ πλάτους κατά τόν παράγοντα Mω καί μετατόπιση τῆς φάσης ἐπίσης κατά π/2. Στήν ἀνυσματική ἀναπάσταση τοῦ ΕΡ τοῦτο μπορεῖ νά ἀποδοθεῖ μέ ὁρισμό δύο τελεστῶν $\mathscr{L}_L$ καί $\mathscr{L}_M$ πού πραγματοποιοῦν τούς ἀντίστοιχους μετασχηματισμούς

$$\mathbf{V}_{LM} = \mathscr{L}_L\mathbf{I} + \mathscr{L}_M\mathbf{I}' \tag{14.108}$$

ὅπου $\mathbf{V}_{LM}$, I καί I′ εἶναι τά ἀνύσματα δυναμικοῦ καί ρεύματος. Ἐναλλακτικά, στή μιγαδική ἀναπαράσταση τῶν μεγεθῶν τοῦ ΕΡ μποροῦμε νά πραγματοποιήσουμε τόν ἴδιο μετασχηματισμό πολλαπλασιάζοντας τά ἀντίστοιχα μιγαδικά ρεύματα μέ μιγαδικές σύνθετες ἀντιστάσεις Z_L καί Z_M ὡς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$V_{LM} = Z_L I + Z_M I' \tag{14.109}$$

Ἀπό τή μορφή τῆς ἐξ. (12.107) προκύπτει ἀμέσως ὅτι

$$Z_L = L\omega e^{i\frac{\pi}{2}} = iL\omega \tag{14.110α}$$

καί

$$Z_M = M\omega e^{i\frac{\pi}{2}} = iM\omega. \tag{14.110β}$$

Εἶναι προφανές ὅτι ἡ ἐξ. (14.109) μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ στήν περίπτωση ὅπου ἕνα ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς ἀλληλεπιδρᾶ μέ περισσότερα ἐξαρτήματα τοῦ κυκλώματος πού διαρρέονται ἀπό διάφορα ρεύματα I_k. Καθένα ἀπό τά ἐξαρτήματα θά συνεισφέρει ἕνα ὅρο ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς ἔτσι ὥστε στή μιγαδική ἀναπαράσταση ἡ ὁλική διαφορά δυναμικοῦ νά εἶναι

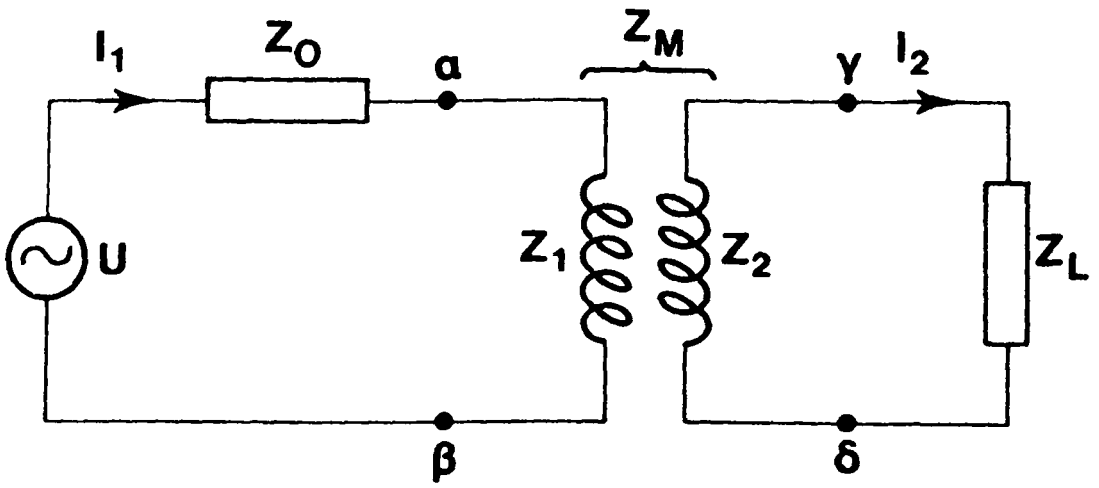
$$V_{LM} = Z_L I + \sum_k Z_{Mk} I_k. \tag{14.111}$$

Ἡ προηγούμενη ἀνάλυση βρίσκει μιά ἁπλή ἀλλά σημαντική ἐφαρμογή στήν περίπτωση τῶν· **μετασχηματιστῶν.** Ὁ μετασχηματιστής ἀποτελεῖται ἀπό δύο στενά συζευγμένα ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς καί βρίσκει ἐφαρμογή ὅταν ἀπαιτεῖται μεταφορά ἐνεργείας ἀπό ἕνα κύκλωμα σέ ἕνα δεύτερο. Στό ΕΡ μπορεῖ ἀκόμη νά παίξει ρόλο ποτενσιομετρικῆς διατάξεως γιά τήν ἀνύψωση ἤ ὑποβίβαση διαφορᾶς δυναμικοῦ. Τό κύκλωμα ἑνός ἰδανικοῦ μετασχηματιστῆ δίνεται στό σχῆμα 14-18. Τά τέσσερα ἄκρα τοῦ μετασχηματιστῆ ἔχουν σημειωθεῖ μέ τά γράμματα αβγδ. Θά ἀναφερθοῦμε στό πηνίο μέ ἄκρα αβ πού συνδέεται στή γεννήτρια μέ τόν ὅρο **πρωτεῦον** καί στό πηνίο μέ ἄκρα γδ ὡς **δευτερεῦον.** Τήν ἴδια ὁρολογία θά χρησιμοποιήσουμε καί γιά τά κυκλώματα πού συνδέονται στά ἀντίστοιχα πηνία, καθώς καί γιά τά ἀντίστοιχα ρεύματα. Μέ τόν ὅρο **λόγος μετασχηματισμοῦ** θά ἀναφερθοῦμε στό λόγο

$$n = \frac{N_2}{N_1} \tag{14.112}$$

ὅπου N_1 καί N_2 εἶναι ἀντίστοιχα ὁ ἀριθμός τῶν σπειρῶν τοῦ πρωτεύοντος καί τοῦ δευτερεύοντος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 14-18 Κύκλωμα ἰδανικοῦ μετασχηματιστῆ.

Στό σχῆμα 14-18 σημειώνονται οἱ σύνθετες ἀντιστάσεις Z_1 καί Z_2 πού ἐμφανίζουν ἀντίστοιχα τό πρωτεῦον καί τό δευτερεῦον ὡς ἀνεξάρτητα, ἀσύζευκτα ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς, ἐνῶ Z_M εἶναι ἡ σύνθετη ἀντίσταση συζεύξεως. Σύμφωνα μέ τίς ἐξ. (14.110)

$$Z_1 = i\omega L_1 \qquad (14.113\alpha)$$

$$Z_2 = i\omega L_2 \qquad (14.113\beta)$$

$$Z_M = i\omega M \qquad (14.113\gamma)$$

ὅπου L_1, L_2 εἶναι ἀντίστοιχα οἱ συντελεστές αὐτεπαγωγῆς τῶν δύο πηνίων καί M ὁ συντελεστής ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς. Στήν πράξη εἶναι δυνατόν νά ὑπάρχει μιά σημαντική χωρητικότητα μεταξύ πρωτεύοντος καί δευτερεύοντος πηνίου, ἀλλά ἡ δυνατότητα αὐτή θά ἀγνοηθεῖ πρός τό παρόν.

Ἡ λειτουργία τοῦ μετασχηματιστῆ μπορεῖ νά γίνει κατανοητή μέ ἀνάλυση τοῦ κυκλώματος πού δίνεται στό σχῆμα 14-18. Ἄν U καί Z_0 εἶναι ἀντίστοιχα ἡ ΗΕΔ καί σύνθετη ἀντίσταση τῆς γεννήτριας καί Z_L ἡ σύνθετη ἀντίσταση τοῦ δευτερεύοντος κυκλώματος, ἐφαρμόζοντας τό δεύτερο νόμο τοῦ Kircchoff σέ μιγαδική μορφή γιά καθένα ἀπό τούς δύο βρόχους, μποροῦμε νά γράψουμε

$$(Z_0 + Z_1)I_1 + Z_M I_2 = U \qquad (14.114\alpha)$$

$$(Z_2 + Z_L)I_2 + Z_M I_1 = 0 \qquad (14.114\beta)$$

ὅπου I_1 καί I_2 εἶναι τό μιγαδικό ρεῦμα ἀντίστοιχα στό κύκλωμα τοῦ πρω-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τεύοντος καί τοῦ δευτερεύοντος. Τό σύστημα τῶν ἐξ. (14.114) μπορεῖ νά γραφεῖ σέ ἰσοδύναμη μορφή ὥστε κάθε ἐξίσωση νά περιέχει μόνο ἕνα ἀπό τά ρεύματα I_1 καί I_2. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά δείξει ὅτι τό σύστημα τῶν ἐξ. (14.114) εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό σύστημα

$$\left(Z_0 + Z_1 - \frac{Z_M^2}{Z_2 + Z_L}\right) I_1 = U \qquad (14.115\alpha)$$

$$\left(Z_2 + Z_L - \frac{Z_M^2}{Z_1 + Z_0}\right) I_2 = - \frac{Z_M}{Z_1 + Z_0} U. \qquad (14.115\beta)$$

Ἔχοντας κατά νοῦ ὁρισμένες προσεγγιστικές συνθῆκες πού ἰσχύουν γιά σχεδόν ὅλους τούς ρεαλιστικούς μετασχηματιστές, θά γράψουμε τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων τοῦ Kirchhoff σέ μιά τρίτη ἰσοδύναμη μορφή ὡς

$$\left(Z_0 + \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_2 + Z_L} + \frac{Z_1}{Z_2 + Z_L} Z_L\right) I_1 = U \qquad (14.116\alpha)$$

$$\left(Z_L + \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_0} + \frac{Z_2}{Z_1 + Z_0} Z_0\right) I_2 = - \frac{Z_M}{Z_1 + Z_0} U. \qquad (14.116\beta)$$

Ἄν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι ἱκανοποιοῦνται οἱ συνθῆκες

$$Z_1 Z_2 - Z_M^2 = 0 \qquad (14.117\alpha)$$

$$|Z_2| >> |Z_L| \qquad (14.117\beta)$$

καί

$$|Z_1| >> |Z_0| \qquad (14.117\gamma)$$

οἱ ἐξισώσεις τοῦ μετασχηματιστῆ παίρνουν τήν ἰδιαίτερα ἁπλή μορφή

$$\left(Z_0 + \frac{Z_1}{Z_2} Z_L\right) I_1 = U \qquad (14.118\alpha)$$

$$\left(Z_2 + \frac{Z_2}{Z_1} Z_0\right) I_2 = - \frac{Z_M}{Z_1} U. \qquad (14.118\beta)$$

Θά ἐπανέλθουμε στό θέμα τῶν συνθηκῶν πού καθορίζονται στίς ἐξ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(14.117) ἀργότερα. Πρός τό παρόν εἶναι χρήσιμο νά ἐξετάσουμε μέ μεγαλύτερη λεπτομέρεια τίς προσεγγιστικές ἐξισώσεις (14.118).

Καθεμιά ἀπό τίς ἐξ. (14.118) ἀφορᾶ ἕνα ἀπό τά κυκλώματα τοῦ μετασχηματιστῆ. Ἡ ἐξ. (14.118α) ἀφορᾶ μόνο τό πρωτεῦον. Μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἡ λειτουργία τοῦ μετασχηματιστῆ ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή μεταβολή τῆς σύνθετης ἀντιστάσεως ἐξόδου κατά ἕνα παράγοντα Z_1/Z_2 καί τή μεταφορά της στό κύκλωμα τοῦ πρωτεύοντος. Αὐτό εἶναι καί τό μόνο ἀποτέλεσμα τῆς λειτουργίας τοῦ μετασχηματιστῆ ἀπό τήν ἄποψη τοῦ πρωτεύοντος. Κατά τόν ἴδιο τρόπο ἡ ἐξ. (14.118β) ἀφορᾶ μόνο τό ρεῦμα τοῦ δευτερεύοντος κυκλώματος. Σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση αὐτή, ἡ λειτουργία τοῦ μετασχηματιστῆ ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή μεταβολή τῆς σύνθετης ἀντιστάσεως τοῦ πρωτεύοντος κατά ἕνα παράγοντα Z_2/Z_1, τή μεταβολή τῆς ΗΕΔ κατά ἕνα παράγοντα $-Z_M/Z_1$ καί τή μεταφορά τους στό κύκλωμα τοῦ δευτερεύοντος. Πάλι, αὐτό εἶναι τό μόνο ἀποτέλεσμα τῆς λειτουργίας τοῦ μετασχηματιστῆ ἀπό τήν ἄποψη τοῦ δευτερεύοντος.

Ἡ προηγούμενη ἄποψη ἑρμηνεύει κατά κάποιο τρόπο τήν ὀνομασία *μετασχηματιστής*. Ἡ προέλευση τοῦ ὅρου γίνεται προφανέστερη ἄν ἐξετάσουμε τό λόγο τῶν ρευμάτων στά δύο κυκλώματα. Ἀπαλείφοντας τήν ΗΕΔ U μεταξύ τῶν ἐξ. (14.118) καί χρησιμοποιώντας τίς συνθῆκες τῶν ἐξ. (14.117) ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά δείξει ὅτι ὁ λόγος τῶν δύο ρευμάτων ἔχει τήν ἁπλή καί σταθερή τιμή

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_M}{Z_2}. \tag{14.119}$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο εἶναι δυνατόν νά προσδιοριστεῖ ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος καί τοῦ δευτερεύοντος. Μέ ἀναφορά στό σχῆμα 14-18, μποροῦμε ἀμέσως νά γράψουμε

$$V_{\alpha\beta} = U - Z_0 Z_1 \tag{14.120α}$$

$$V_{\gamma\delta} = Z_1 I_2. \tag{14.120β}$$

Σέ συνδιασμό μέ τίς ἐξ. (14.118α) καί (14.119) ἡ τελευταία σχέση δίνει

$$\frac{V_{\gamma\delta}}{V_{\alpha\beta}} = -\frac{Z_M}{Z_1}. \tag{14.121}$$

Οἱ προηγούμενες σχέσεις μετασχηματισμοῦ μποροῦν νά ἑνοποιηθοῦν ὡς πρός τό συμβολισμό μέ τόν ὁρισμό τοῦ λόγου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$n = \frac{Z_M}{Z_1}. \tag{14.122}$$

Ἔχοντας κατά νοῦ τόν ὁρισμό τῆς ἐξ. (14.112) θά ἀναφερθοῦμε στήν τελευταία ποσότητα μέ τόν ὁρισμό **μιγαδικός λόγος μετασχηματισμοῦ.** Χρησιμοποιώντας τή συνθήκη τῆς ἐξ. (14.117α) μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι ὁ λόγος n συνδέεται πρός τίς ὑπόλοιπες μιγαδικές ἀντιστάσεις μέ τίς σχέσεις

$$\frac{Z_M}{Z_2} = \frac{1}{n} \tag{14.123α}$$

καί

$$\frac{Z_2}{Z_1} = n^2. \tag{14.123β}$$

Μέ τή βοήθεια τώρα τοῦ μιγαδικοῦ λόγου μετασχηματισμοῦ οἱ ἐξισώσεις πού χαρακτηρίζουν τή λειτουργία τοῦ μετασχηματιστῆ μποροῦν νά γραφοῦν σέ ἑνοποιημένη μορφή ὡς

$$\left(Z_0 + \frac{Z_L}{n^2}\right) I_1 = U. \tag{14.124α}$$

$$(Z_L + n^2 Z_0) I_2 = - nU \tag{14.124β}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = - \frac{1}{n} \tag{14.124γ}$$

$$\frac{V_{\gamma\delta}}{V_{\alpha\beta}} = - n. \tag{14.124δ}$$

Οἱ τελευταῖες δύο σχέσεις ἀναδεικνύουν τή χρησιμότητα τοῦ μετασχηματιστῆ στή μετατροπή ρεύματος καί δυναμικοῦ. Ὁ ἀναγνώστης ἀσφαλῶς θά διερωτᾶται γύρω ἀπό τήν ἰσχή τῶν προσεγγίσεων τῶν ἐξ. (14.117) σέ ρεαλιστικά ἐξαρτήματα. Ἡ ἀπάντηση εἶναι καταφατική. Οἱ περισσότεροι βιομηχανικοί μετασχηματιστές ἱκανοποιοῦν μέ πολύ καλή προσέγγιση τίς συνθῆκες τῶν ἐξ. (14.117) ἔτσι ὥστε ἡ λειτουργία τους νά ἀκολουθεῖ ἀρκετά πιστά τή συμπεριφορά πού περιγράφουν οἱ ἐξ. (14.124). Ὅπως καί γιά τά λοιπά ἐξαρτήματα πού χρησιμοποιοῦνται στό ΕΡ θά εἰσάγουμε τήν ἔννοια τοῦ **ἰδανικοῦ μετασχηματιστῆ** μέ τήν ἀπαίτηση ὅτι οἱ συνθῆκες τῆς ἐξ. (14.117) καί ἑπομένως οἱ ἐξ. (14.124) ἱκανοποιοῦνται ἐπακριβῶς. Ἐπι-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πλέον, γιά τό ἰδανικό ἐξάρτημα θά ἀπαιτήσουμε ὁ λόγος μετασχηματισμοῦ νά εἶναι σταθερός καί πραγματικός ἀριθμός.

Ἄν καί ἕνας μετασχηματιστής μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ ἀπό ὁποιαδήποτε δύο ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς πού ἀλληλεπιδροῦν μέ ἀμοιβαία ἐπαγωγή, εἶναι χρήσιμο νά ἐξετάσουμε ἕνα συγκεκριμένο πρότυπο ἐξαρτήματος πού πλησιάζει πολύ τή λειτουργία τοῦ ἰδανικοῦ μετασχηματιστῆ. Γιά τό σκοπό αὐτό θά ἐξετάσουμε τή συμπεριφορά δύο πηνίων τά ὁποῖα ἔχουν περιελειχθεῖ γύρω ἀπό ἕνα κοινό σιδηρομαγνητικό πυρῆνα. Θά θεωρήσουμε ἐπιπλέον, γιά προσέγγιση τῆς ἰδανικῆς συμπεριφορᾶς, ὅτι τό ὑλικό τοῦ πυρῆνα εἶναι γραμμικό (καί ἐπομένως ἀπαλλαγμένο ἀπό ἀπώλειες ὑστερήσεως), ἀπαλλαγμένο ἀπό ἀπώλειες λόγω ρευμάτων Foucault καί ὅτι ἡ ὠμική ἀντίσταση τῆς περιελείξεως τῶν πηνίων εἶναι ἀμελητέα. Μέ τόν τρόπο αὐτό τό πρωτεῦον καί δευτερεῦον πηνίο μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὡς ἰδανικά ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς μέ ὑψηλή ἐπαγωγική ἀντίσταση. Ἄν οἱ συντελεστές αὐτεπαγωγῆς τοῦ πρωτεύοντος καί δευτερεύοντος πηνίου καί ὁ συντελεστής ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς εἶναι ἀντίστοιχα L_1, L_2 καί M, οἱ σύνθετες ἀντιστάσεις πού χαρακτηρίζουν τό μετασχηματιστή εἶναι

$$Z_1 = i\omega L_1 \qquad (14.125\alpha)$$

$$Z_2 = i\omega L_2 \qquad (14.125\beta)$$

καί

$$Z_M = i\omega M. \qquad (14.125\gamma)$$

Θά θεωρήσουμε ὅτι οἱ σύνθετες ἀντιστάσεις ἱκανοποιοῦν τίς συνθῆκες τῶν ἐξ. (14.117). Ἄν φ εἶναι ἡ μαγνητική ροή κάθε σπείρας τῶν δύο πηνίων καί N_1, N_2 ἀντίστοιχα ὁ ἀριθμός τῶν σπειρῶν τοῦ πρωτεύοντος καί τοῦ δευτερεύοντος, ἡ μαγνητική ροή τῶν δύο πηνίων εἶναι

$$\Phi_1 = N_1\varphi \qquad (14.126\alpha)$$

$$\Phi_2 = N_2\varphi. \qquad (14.126\beta)$$

Στήν ἁπλή γεωμετρία πού θεωροῦμε οἱ συντελεστές αὐτεπαγωγῆς τῶν δύο πηνίων εἶναι ἀντίστοιχα

$$L_1 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial I_1} = N_1\frac{\partial\varphi}{\partial I_1} \qquad (14.127\alpha)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$L_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial I_2} = N_2 \frac{\partial \varphi}{\partial I_2} \qquad (14.127\beta)$$

ἐνῶ ὁ συντελεστής ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ κατά δύο τρόπους

$$M = \frac{\partial \Phi_2}{\partial I_1} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial I_2} \qquad (14.128)$$

πού μέ τή βοήθεια τῶν ἐξ. (14.126) δίνει

$$M = N_2 \frac{\partial \varphi}{\partial I_1} = N_1 \frac{\partial \varphi}{\partial I_2}. \qquad (14.129)$$

Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τίς ἐξ. (14.127) προκύπτει ὅτι

$$M = \frac{N_2}{N_1} L_1 = \frac{N_1}{N_2} L_2 \qquad (14.130)$$

ἤ

$$M = \sqrt{L_1 L_2}. \qquad (14.131)$$

Σύγκριση τῆς τελευταίας σχέσης μέ τίς ἐξ. (14.125) δείχνει ὅτι γιά τόν πρότυπο μετασχηματιστή πού θεωροῦμε, ἡ συνθήκη τῆς ἐξ. (14.117α) ἱκανοποιεῖται ἐπακριβῶς. Ὁ λόγος μετασχηματισμοῦ δίνεται ἀπό τή σχέση

$$n = \frac{Z_M}{Z_1} = \frac{i\omega M}{i\omega L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \qquad (14.132)$$

ἐνῶ ἀπό τήν ἐξ. (14.130) προκύπτει ὅτι

$$\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}. \qquad (14.133)$$

Τό τελευταῖο ἀποτέλεσμα ἐπιβεβαιώνει τήν πρόβλεψη πού ὁδήγησε στή συγκεκριμένη ἀπαίτηση γιά τό μιγαδικό λόγο μετασχηματισμοῦ ἑνός ἰδανικοῦ μετασχηματιστῆ: Ὁ συντελεστής n εἶναι σταθερός πραγματικός ἀριθμός καί γιά τό πρότυπο πού μελετᾶμε ἴσος μέ τό λόγο τῶν σπειρῶν τοῦ δευτερεύοντος καί τοῦ πρωτεύοντος πηνίου. Συγκεκριμένα, οἱ ἐξ. (14.124γ) καί (14.124δ) μποροῦν νά γραφοῦν τώρα ὡς σχέσεις μεταξύ πραγματικῶν ἀριθμῶν γιά τά ἀντίστοιχα ἐνεργά μεγέθη ὡς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \qquad (14.134\alpha)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad (14.134\beta)$$

ὅπου ἡ ἐνεργός διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος καί τοῦ δευτερεύοντος ἀποδίδεται, γιά ἐνοποίηση τοῦ συμβολισμοῦ, ἀντίστοιχα ὡς V_1 καί V_2.

Τή λειτουργία ἑνός ρεαλιστικοῦ μετασχηματιστῆ, πού προσεγγίζει ἀρκετά καλά τήν προηγούμενη ἰδανική συμπεριφορά, θά μελετήσουμε στό ἑπόμενο Πείραμα.

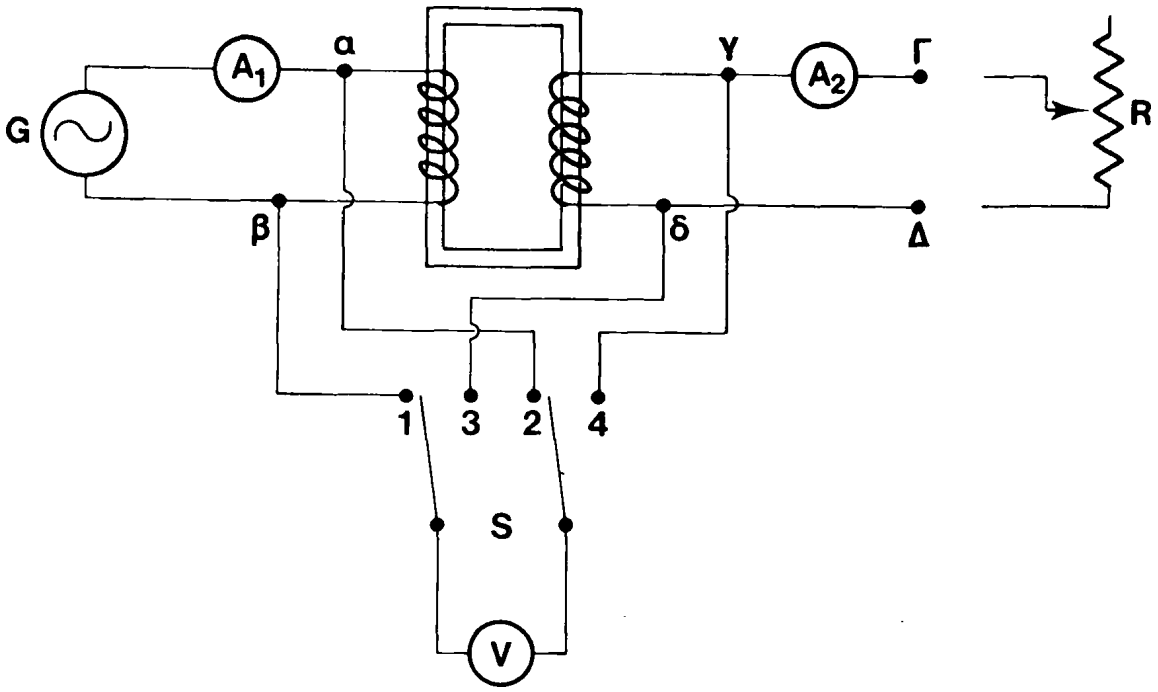
ΠΕΙΡΑΜΑ 14-5. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ ΜΕ ΣΙΔΗΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΥΡΗΝΑ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-19. Γιά τή δημιουργία τοῦ μετασχηματιστῆ χρησιμοποιεῖστε δύο πηνία μέ ἐνδιάμεσες ἐπαφές γιά δυνατότητα ἐπιλογῆς τοῦ ἀριθμοῦ σπειρῶν στό πρωτεῦον καί τό δευτερεῦον. Γιά μεγαλύτερη σύζευξη συνδέστε τά δύο πηνία μέ κοινό πυρῆνα ἀπό σίδηρο. Ὡς γεννήτρια ΕΡ χρησιμοποιεῖστε πηγή μέ συνεχῶς μεταβαλλόμενη ἐνεργό τάση (variac). Ὁ διπλός διακόπτης S ἐπιτρέπει τήν ἐπιλεκτική σύνδεση τοῦ ἠλεκτρονικοῦ βολτομέτρου V στά ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος ἤ τοῦ δευτερεύοντος.

– Συνδέστε τό πρωτεῦον καί δευτερεῦον πηνίο ἔτσι ὥστε νά παρεμβάλλεται στό καθένα ὁ μέγιστος ἀριθμός σπειρῶν. Σημειῶστε τό λόγο μετασχηματισμοῦ N_2/N_1. Μέ τά ἄκρα Γ καί Δ τοῦ κυκλώματος ἀνοικτά μεταβάλετε τήν ἐνεργό τάση τῆς πηγῆς ΕΡ καί σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τήν ἐνεργό διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος ὡς πρός τήν ἐνεργό διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος. Καλύψτε ὅλη τήν περιοχή πού ἐπιτρέπει ἡ κλίμακα τοῦ ἀμπερομέτρου A_1. Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματά σας σέ γραφική παράσταση καί ἑρμηνεῦστε ποσοτικά τά ἀποτελέσματα. Συγκρίνετε τό λόγο μετασχηματισμοῦ πού προκύπτει ἀπό τή γραφική παράσταση μέ τήν ἀντίστοιχη ποσότητα πού ὑπολογίσατε ἀπό τά κατασκευαστικά χαρακτηριστικά τῶν ἐξαρτημάτων πού συγκροτοῦν τό μετασχηματιστή.

– Συνδέστε τό πρωτεῦον στή γεννήτρια ἔτσι ὥστε νά παρεμβάλλεται στό κύκλωμα ὁ μέγιστος ἀριθμός σπειρῶν καί ἀναπτύξτε ἐνεργό διαφορά δυναμικοῦ περίπου 12 V. Σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τό δυναμικό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



ΣΧΗΜΑ 14-19 Πειραματική διάταξη γιά τή μελέτη τῆς συμπεριφορᾶς μετασχηματιστῆ μέ σιδηρομαγνητικό πυρήνα.

πού ἀναπτύσσεται στά ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος γιά κάθε ἐπαφή πού παρεμβάλλει διαφορετικό ἀριθμό σπειρῶν στό κύκλωμα. Ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τήν ἐνεργό διαφορά δυναμικοῦ ὡς συνάρτηση τῶν σπειρῶν τοῦ δευτερεύοντος καί ἑρμηνεῦστε τό ἀποτέλεσμα.

– Συνδέστε τό πρωτεῦον πηνίο ὥστε νά παρεμβάλλεται στό κύκλωμα ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός σπειρῶν καί τό δευτερεῦον ὥστε νά παρεμβάλλεται ὁ μέγιστος δυνατός ἀριθμός σπειρῶν. Ἀναπτύξτε στά ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος ἐνεργό τάση περίπου 3 V. Μεταβάλλοντας τήν ἐπαφή πού ἐπιλέγει τόν ἀριθμό σπειρῶν τοῦ πρωτεύοντος σημειῶστε σέ κατάλληλο πίνακα καί ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τῆς ἐνεργοῦ τάσης στά ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος ὡς συνάρτηση τοῦ ἀριθμοῦ σπειρῶν τοῦ πρωτεύοντος. Ἑρμηνεῦστε τό ἀποτέλεσμα.

– Βραχυκυκλῶστε τά ἄκρα Γ καί Δ τοῦ δευτερεύοντος. Παρεμβάλετε στό κύκλωμα τοῦ πρωτεύοντος, σέ σειρά, ἕνα ροοστάτη μέ ὁλική ὠμική ἀντίσταση περίπου 15 Ω. Μέ τό δρομέα τοῦ ροοστάτη στό σημεῖο ἐλάχιστης ἀντιστάσεως ἀναπτύξτε ἐνεργό διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος περίπου 5 V. Μεταβάλλοντας τήν ἀντίσταση τοῦ ροοστάτη σημειῶστε καί ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τοῦ ρεύματος στό κύκλωμα τοῦ δευτερεύοντος ὡς συνάρτηση τοῦ ρεύματος στό κύκλωμα τοῦ πρωτεύοντος.

– Χρησιμοποιώντας τήν προηγούμενη συνδεσμολογία, μέ τό ροοστάτη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

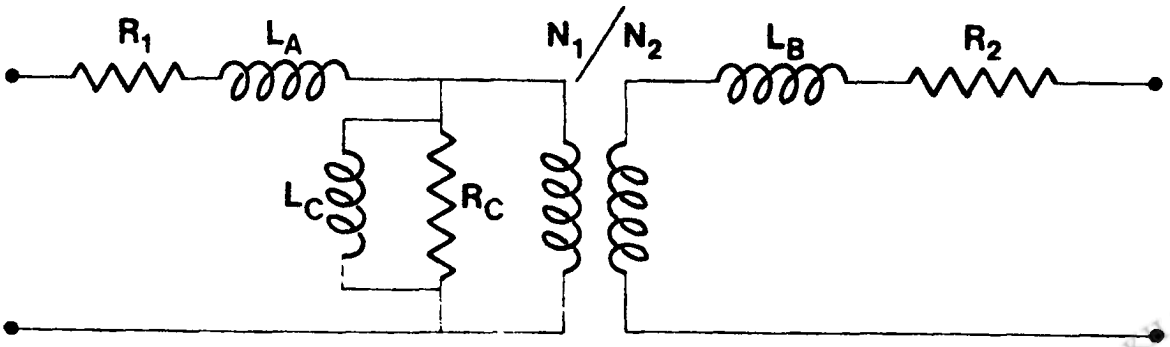
στό μισό περίπου τῆς ὁλικῆς του ἀντιστάσεως μελετεῖστε καί ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τοῦ ρεύματος στό κύκλωμα τοῦ δευτερεύοντος ὡς συνάρτηση

1. τοῦ ἀριθμοῦ σπειρῶν στό δευτερεῦον πηνίο καί
2. τοῦ ἀριθμοῦ σπειρῶν στό πρωτεῦον πηνίο.

– Στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-19 παρεμβάλετε τό ροοστάτη πού χρησιμοποιήσατε προηγουμένως μεταξύ τῶν σημείων Γ καί Δ. Ἀναπτύξτε στά ἄκρα τοῦ πρεωτεύοντος ἐνεργό διαφορά δυναμικοῦ περίπου 3 V. Μεταβάλλοντας τήν ἀντίσταση πού παρεμβάλλει ὁ ροοστάτης μελετεῖστε καί ἀποδῶστε σέ γραφική παράσταση τή μεταβολή τοῦ ρεύματος στό κύκλωμα τοῦ δευτερεύοντος ὡς συνάρτηση τοῦ ρεύματος στό κύκλωμα τοῦ πρωτεύοντος.

– Χρησιμοποιώντας ὅλα τά προηγούμενα ἀποτελέσματα διερευνεῖστε κατά πόσο ὁ μετασχηματιστής πού μελετήσατε προσεγγίζει τίς συνθῆκες λειτουργίας ἑνός ἰδανικοῦ μετασχηματιστῆ.

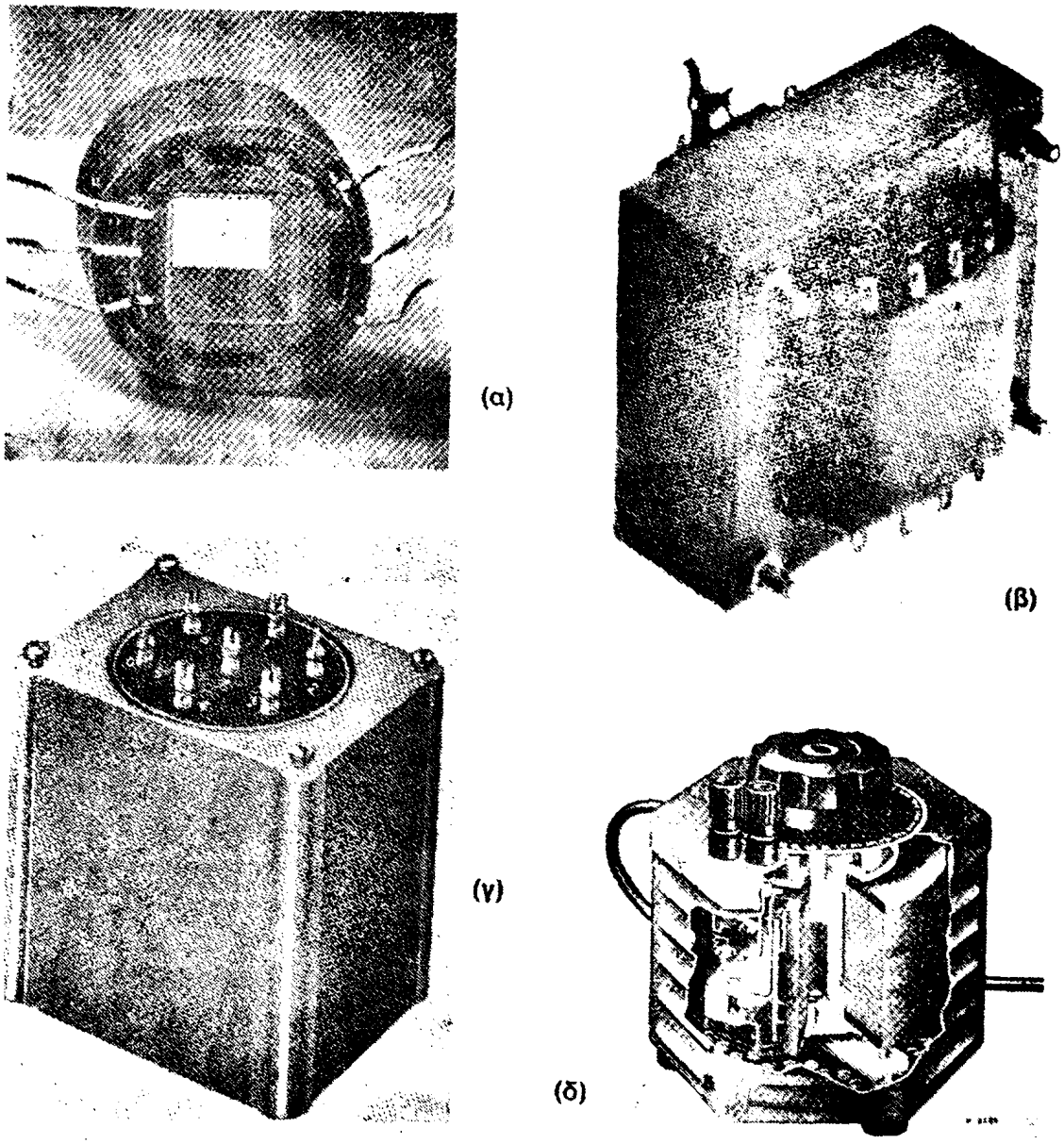
Μετασχηματιστές βρίσκουν σήμερα εὐρεία ἐφαρμογή στή μεταφορά ἐνεργείας, σέ συστήματα τηλεπικοινωνιῶν καί στήν ἠλεκτρονική. Χρησιμοποιοῦνται γιά τή σύζευξη δύο κυκλωμάτων μέ σκοπό τή μεταξύ τους μόνωση ὅσον ἀφορᾶ τό ΣΡ, τό μετασχηματισμό δυναμικοῦ, ρεύματος καί σύνθετης ἀντιστάσεως στό ΕΡ, καθώς καί ὡς φίλτρα συχνότητας. Ὅπως ἤδη ἀναφέρθηκε, ρεαλιστικά ἐξαρτήματα μετασχηματιστῆ μποροῦν νά σχεδιαστοῦν ὥστε ἡ λειτουργία τους νά πλησιάζει κατά πολύ τή συμπεριφορά τοῦ προτύπου πού περιγράψαμε. Παρόλα αὐτά ἡ συγκεκριμένη συμπεριφορά ἑνός ρεαλιστικοῦ μετασχηματιστῆ ἀπαιτεῖ στήν πράξη λεπτομερή ἀνάλυση τῶν κατασκευαστικῶν του χαρακτηριστικῶν μέ ἰδιαίτερη ἔμφαση στή γεωμετρία καί τή γραμμικότητα τοῦ ὑλικοῦ τοῦ πυρήνα πού συνήθως χρησιμοποιεῖται γιά μεγαλύτερη σύζευξη. Ὁ ἐνδιαφερόμενος ἀναγνώστης παραπέμπεται στά πολλά ἐξειδικευμένα συγγράμματα πού ἀπευθύνονται πε-



ΣΧΗΜΑ 14-20 Ἰσοδύναμο κύκλωμα ρεαλιστικοῦ μετασχηματιστῆ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ρισσότερο σέ ἠλεκτρολόγους μηχανικούς. Γιά πληρότητα δίνεται στό σχῆμα 14-20 τό ἰσοδύναμο κύκλωμα πού, ὅπως ἀποδεικνύεται, ἀντιπροσωπεύει μέ πολύ καλή προσέγγιση ἕνα ρεαλιστικό μετασχηματιστή. Τό κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα ἰδανικό μετασχηματιστή μέ ἀριθμό σπειρῶν πρωτεύοντος καί δευτερεύοντος ἀντίστοιχα N_1 καί N_2. Οἱ ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 ἀντιπροσωπεύουν ἀποκλειστικά τίς ὠμικές ἀντιστάσεις τοῦ πρωτεύοντος καί τοῦ δευτερεύοντος ἐνῶ τά ἰδανικά ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς L_A



ΧΗΜΑ 14-21 Χαρακτηριστικοί τύποι μετασχηματιστῶν. (α) Μετασχηματιστής μικρῆς ἰσχῆς χωρίς πυρήνα. (β) Μετασχηματιστής μικρῆς ἰσχῆς μέ σιδηρομαγνητικό πυρήνα. (γ) Θωρακισμένος μετασχηματιστής τροφοδοσίας. (δ) Μεταβλητός μετασχηματιστής (variac).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί L_B, πού συνήθως ἀναφέρονται ὡς *ἐπαγωγική διαρροή* ἀντιπροσωπεύουν τήν ἐπαγωγική ἀντίσταση τῶν ἐξαρτημάτων πού συγκροτοῦν τό μετασχηματιστή. Οἱ ἐπαγωγικές αὐτές ἀντιστάσεις εἶναι σταθερές ἀκόμη καί γιά μετασχηματιστές μέ σιδηρομαγνητικό πυρήνα ὁπου οἱ συντελεστές αὐτεπαγωγῆς καί ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς δέν εἶναι σταθεροί. Ἡ διακλάδωση $R_C - L_C$ ἀντιπροσωπεύει αὐτό πού συνήθως ὀνομάζεται *ρεῦμα μαγνητισμοῦ*. Ἡ ἐπαγωγική ἀντίσταση $i\omega L_C$ ἀποδίδει τήν αὐτεπαγωγή τῶν πηνίων ἐνῶ ἡ ὡμική ἀντίσταση R_C ἀπώλειες στό πυρήνα. Τά στοιχεῖα R_C καί L_C εἶναι τά μόνα πού μεταβάλλονται μέ τή μεταβολή τοῦ ρεύματος.

Διάφοροι χαρακτηριστικοί τύποι μετασχηματιστῶν πού χρησιμοποιοῦνται σήμερα εἰκονίζονται στό σχῆμα 14-21.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

14-1. Ἕνα πηνίο ἔχει συντελεστή αὐτεπαγωγῆς 1 mH καί ἀντίσταση 10 Ω. Τό πηνίο συνδέεται μέ γεννήτρια ΕΡ πού ἀναπτύσσει στά ἄκρα του ἐνεργό διαφορά δυναμικοῦ 5 V. Προσδιορίστε τό ρεῦμα πού διαρρέει τό πηνίο, τή διαφορά φάσης μεταξύ ρεύματος καί δυναμικοῦ καί τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στό πηνίο γιά συχνότητα δυναμικοῦ 0, 10^2, 10^4 καί 10^6 Hz.

14-2. Δεῖξτε ὅτι οἱ ποσότητες $1/C\omega$ καί $L\omega$ ἔχουν διαστάσεις ἀντιστάσεως.

14-3. Θεωρεῖστε τήν πριονωτή τάση τοῦ σχήματος 10-14 πού μεταβάλλεται μεταξύ τῶν ἀκραίων τιμῶν $-V_0$ καί V_0 μέ περίοδο T. Ὑπολογίστε τήν ἐνεργό τιμή τοῦ δυναμικοῦ.

14-4. Στά ἄκρα ἑνός συνδιασμοῦ ἀντιστάσεως-πυκνωτῆ σέ σειρά ἀναπτύσσεται ἡμιτονοειδής διαφορά δυναμικοῦ V. Δεῖξτε ὅτι:
(α) Σέ μιά συγκεκριμένη περιοχή συχνότητας ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως εἶναι περίπου ἴση μέ τήν παράγωγο dV/dt.
(β) Σέ μιά συγκεκριμένη περιοχή συχνότητας ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ εἶναι ἴση μέ τό ὁλοκλήρωμα $\int V dt$.

14-5. Μέ ἀπευθείας ὑπολογισμό τοῦ κατάλληλου ὁλοκληρώματος δεῖξτε ὅτι ἡ ἰσχή πού καταναλώνεται σέ ἕνα ἰδανικό ἐξάρτημα χωρητικότητας καί σέ ἰδανικό ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς εἶναι ἴση μέ τό μηδέν.

14-6. Στά ἄκρα ἑνός πηνίου μέ συντελεστή αὐτεπαγωγῆς $L = 200$ mH καί ἀντίσταση περιελείξεως $R = 30$ Ω ἐφαρμόζεται διαφορά δυναμικοῦ τῆς μορφῆς

$$V = V_{01}\sin\omega_1 t + V_{02}\sin\omega_2 t.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἄν $V_{01} = V_{02} = 100$ V, $\omega_1 = 100$ Hz καί $\omega_2 = 600$ Hz ὑπολογίστε τό ρεῦμα πού διαρρέει τό ἐξάρτημα καί τήν ἰσχή πού καταναλώνεται.

14-7. Ἕνας κινητήρας ΕΡ ὅπου τό ρεῦμα ὑπολείπεται ἀπό τό δυναμικό μέ συντελεστή ἰσχῆς 0.60, ἀντλεῖ ρεῦμα† 3 Α ἀπό πηγή 220 V, 50 Hz. Ὑπολογίστε τήν ἰσχή τοῦ κινητῆρα.

14-8. Ὑπολογίστε τή χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ πού πρέπει νά συνδεθεῖ παράλληλα πρός τόν κινητῆρα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως ὥστε ὁ συντελεστής ἰσχῆς τῆς διατάξεως νά γίνει ἴσος μέ τή μονάδα. Πόσο ρεῦμα ἀντλεῖται στήν περίπτωση αὐτή ἀπό τήν πηγή;

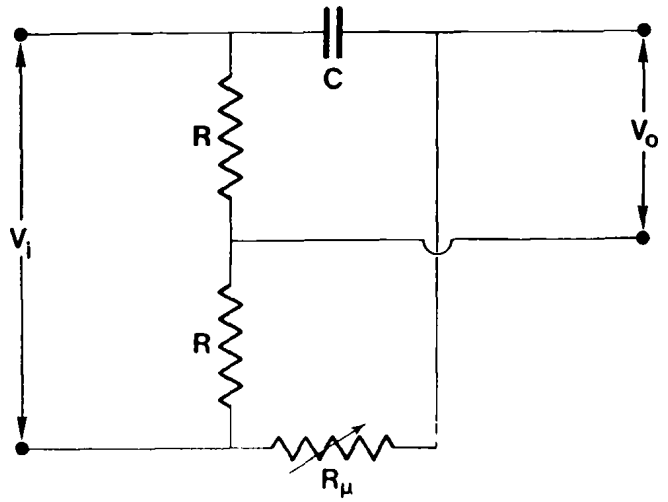
14-9. Ἕνας κινητήρας, σχεδιασμένος γιά λειτουργία στά 120 V ΕΡ συνδέεται σέ πηγή ΕΡ 220 V μέ παρεμβολή μιᾶς καθαρά ὠμικῆς ἀντιστάσεως σέ σειρά. Ἡ ἀντίσταση ρυθμίζεται στήν κατάλληλη τιμή γιά σωστή λειτουργία τοῦ κινητῆρα. Μέ τόν τρόπο αὐτό ὁ κινητήρας ἀντλεῖ ρεῦμα 10 Α ἐνῶ ἡ ὅλη διάταξη ἐμφανίζει συντελεστή ἰσχῆς 0.90. Ὑπολογίστε,

(α) τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στήν ἀντίσταση,

(β) τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στόν κινητῆρα καί

(γ) τό συντελεστή ἰσχῆς τοῦ κινητῆρα.

14-10. Τό ἑπόμενο κύκλωμα χρησιμοποιεῖται συχνά γιά τή μετατόπιση φάσης.



Δεῖξτε ὅτι τό δυναμικό ἐξόδου V_0 εἶναι τό μισό ἀπό τό δυναμικό εἰσόδου V_i ἐνῶ ἡ διαφορά φάσης μεταξύ τῶν δύο δυναμικῶν πού κυμαίνεται ἀπό 0° ἕως 180° ἐξαρτᾶται ἀπό τήν τιμή τῆς μεταβλητῆς ἀντιστάσεως R_μ.

14-11. Ἀποδεῖξτε τίς ἐξ. (14.30).

14-12. Γιά τή μέτρηση τῆς καταναλώσεως ἰσχῆς σέ ἕνα ἐξάρτημα χρησιμοποιεῖται πολλές φορές ἡ *μέθοδος τῶν τριῶν βολτομέτρων*. Κατά τή μέθοδο αὐτή μιά καθαρά ὠμική ἀντίσταση R συνδέεται σέ σειρά μέ τό ἐξάρτημα. Δεῖξτε

† Σέ ὅλες τίς ἀσκήσεις, ὅπου δέν καθορίζεται ρητῶς κάτι τό διαφορετικό, οἱ τιμές ΗΕΔ, δυναμικοῦ καί ρεύματος ἀναφέρονται στά ἀντίστοιχα ἐνεργά μεγέθη.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅτι, ἄν V_1 εἶναι ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως, V_2 στά ἄκρα τοῦ ἐξαρτήματος καί V_{12} ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ συνδιασμοῦ, τότε ἡ μέση ἰσχή πού καταναλώνεται στό ἐξάρτημα δίνεται ἀπό τή σχέση

$$p = \frac{V_{12}^2 - V_1^2 - V_2^2}{2R}.$$

Δεῖξτε τήν προηγούμενη σχέση μέ τή βοήθεια ἀνυσματικοῦ διαγράμματος.

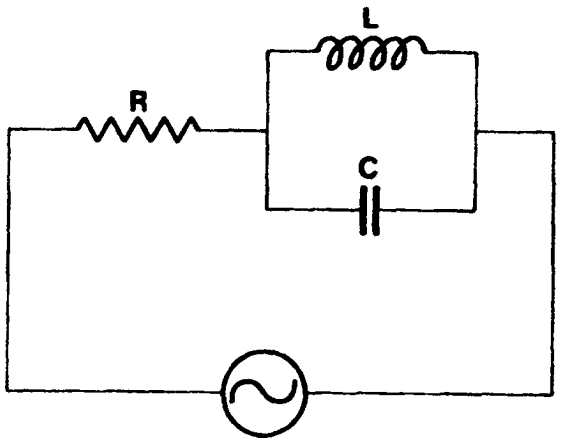
14-13. Χρησιμοποιεῖστε τήν ἀνυσματική ἀναπαράσταση μεγεθῶν EP γιά νά προσδιορίσετε τή σύνθετη ἀντίσταση καί τή διαφορά φάσης μεταξύ δυναμικοῦ καί ρεύματος γιά σύνδεση σέ σειρά μιᾶς ἀντιστάσεως 600 Ω, ἐπαγωγῆς 4 H καί χωρητικότητας 1 μF σέ συχνότητα 50 Hz.

14-14. Στό ἑπόμενο κύκλωμα προσδιορίστε τό ρεῦμα, τή διαφορά δυναμικοῦ καί τήν ἰσχή πού καταναλώνεται σέ κάθε ἐξάρτημα καθώς καί τή διαφορά φάσης μεταξύ δυναμικοῦ καί ρεύματος στά ἄκρα τοῦ κυκλώματος, γιά ὠμική, χωρητική καί ἐπαγωγική ἀντίσταση τῶν ἐξαρτημάτων

(α) $R = 5\ \Omega$, $X_C = 12\ \Omega$, $X_L = 6\ \Omega$

(β) $R = 5\ \Omega$, $X_C = 6\ \Omega$, $X_L = 6\ \Omega$

ὅταν ἡ ἐνεργός τιμή τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ πού ἀναπτύσσει ἡ γεννήτρια εἶναι 20 V.



14-15. Χρησιμοποιώντας τή μιγαδική ἀναπαράσταση μεγεθῶν EP δεῖξτε ὅτι n πυκνωτές μέ χωρητικότητα $C_1, C_2, \ldots, C_n$ σέ παράλληλη σύνδεση ἐμφανίζουν ὁλική χωρητικότητα

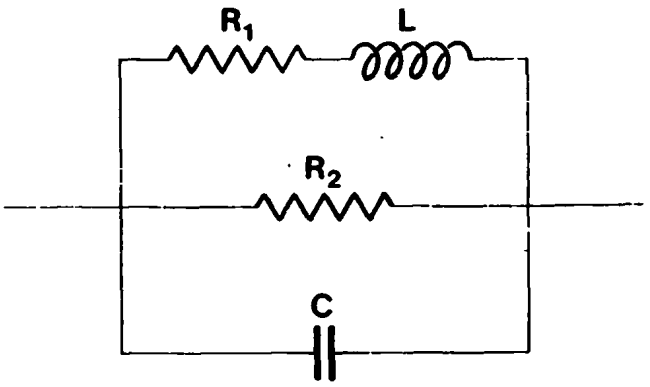
$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

ἐνῶ, ἄν συνδεθοῦν σέ σειρά, ὁλική χωρητικότητα C πού δίνεται ἀπό τή σχέση

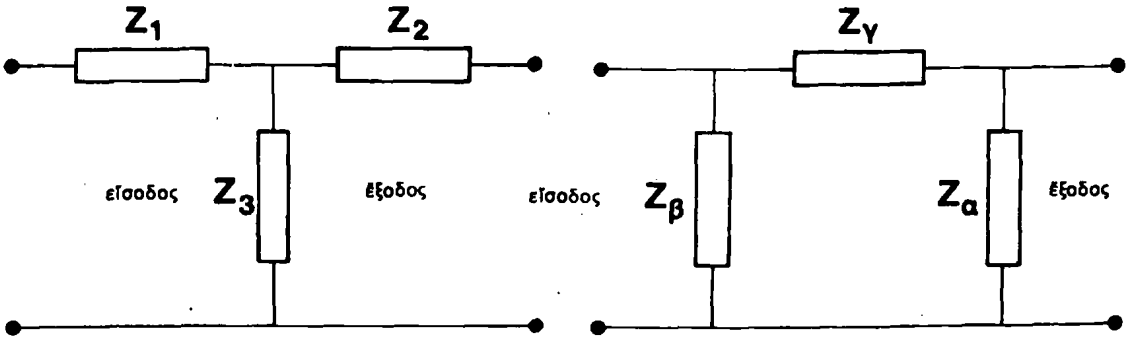
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}.$$

14-16. Προσδιορίστε τήν ὁλική σύνθετη ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος πού ἀκολουθεῖ ὡς συνάρτηση τῆς συχνότητας, ἄν $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 25\ \Omega$, $L = 50$ mH καί $C = 100\ \mu$F. Προσδιορίστε τή συχνότητα συντονισμοῦ καί τή σύνθετη ἀντίσταση στήν κατάσταση συντονισμοῦ.



14-17. Δεῖξτε ὅτι τά δύο κυκλώματα σχήματος «Τ» καί σχήματος «Π» εἶναι ἰσοδύναμα ἄν



$$Z_1 = \frac{Z_\beta Z_\gamma}{Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma}$$

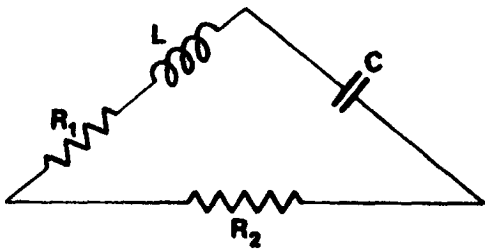
$$Z_2 = \frac{Z_\gamma Z_\alpha}{Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma}$$

$$Z_3 = \frac{Z_\alpha Z_\beta}{Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma}$$

ὅπου Z_i εἶναι σύνθετες ἀντιστάσεις.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

14-18. Προσδιορίστε τό κύκλωμα μέ ὀχῆμα ἀστέρα πού εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό ἑπόμενο κύκλωμα



ὅπου $R_1 = 2R_2 = 4\ \Omega$, $X_L = 3\ \Omega$ καί $X_C = 5\ \Omega$.

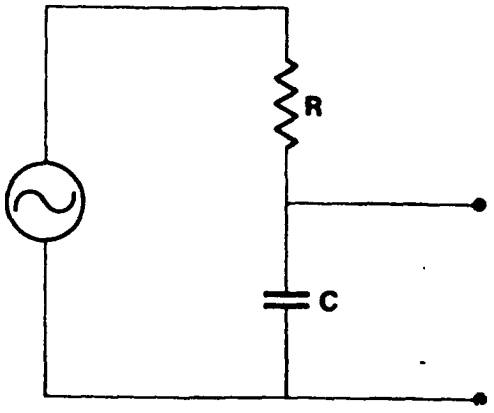
14-19. Δεῖξτε ὅτι σέ συχνότητα ω, ἡ ὁποία ἀποκλίνει κατά μιά μικρή ποσότητα Δω ἀπό τή συχνότητα συντονισμοῦ ω_0 σέ ἕνα κύκλωμα R-C-L σέ σειρά, ἡ σύνθετη ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος σέ μιγαδική μορφή δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$Z = R + j\left(\omega_0 L + \frac{1}{C\omega_0}\right)\frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

14-20. Ἕνας ἰδανικός πυκνωτής μέ μεταβλητή χωρητικότητα συνδέεται παράλληλα μέ ἕνα ρεαλιστικό ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς τό ὁποῖο ἐμφανίζει συντελεστή αὐτεπαγωγῆς L καί ὠμική ἀντίσταση R. Τό ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς δύο ἰδανικά ἐξαρτήματα σέ σειρά. Δεῖξτε ὅτι, ἄν ἡ συχνότητα ω εἶναι σταθερή, τό κύκλωμα ἐμφανίζει τή μέγιστη σύνθετη ἀντίσταση γιά χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ.

$$C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2}.$$

14-21. Στό σχῆμα πού ἀκολουθεῖ ἡ γεννήτρια EP ἀναπτύσσει διαφορά δυναμικοῦ ταυτοχρόνως σέ τρεῖς συχνότητες $\nu_1 = 50$ Hz, $\nu_2 = 1$ kHz καί $\nu_3 = 10$ kHz μέ τήν ἴδια ἐνεργό τιμή $V_{\varepsilon\nu} = 100$ V. Προσδιορίστε τή διαφορά δυναμικοῦ



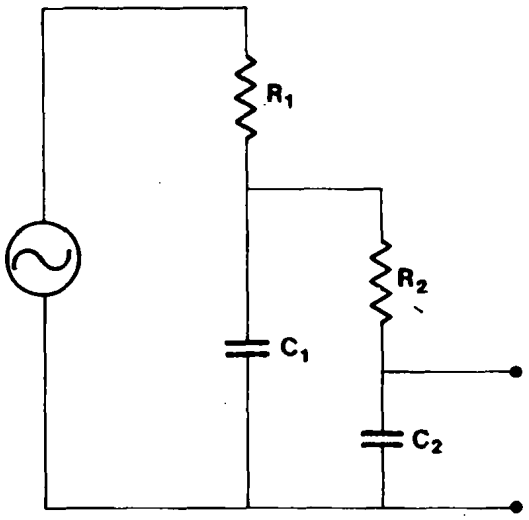
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γιά κάθε συχνότητα στά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ τοῦ φίλτρου RC πού ἀκολουθεῖ ἄν R = 200 Ω καί C = 1μF.

14-22. Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη ἄσκηση ἀντικαθιστώντας τόν πυκνωτή μέ ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς L = 100 mH.

14-23. Τά φίλτρα τῶν Ἀσκήσεων 14-21 καί 14-22 τροφοδοτοῦν κάποια συσκευή μέ ἐσωτερική ἀντίσταση 2 kΩ. Ὑπολογίστε γιά καθένα ἀπό τά φίλτρα τό δυναμικό ἐξόδου κάθε συχνότητας.

14-24. Πολλές φορές ἕνα φίλτρο δέν ἐπαρκεῖ γιά τήν ἱκανοποιητική ἐξάλειψη μιᾶς συχνότητας. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ ἀνεπιθύμητη συχνότητα μπορεῖ νά μειωθεῖ σημαντικά ἄν παρεμβληθεῖ ἕνα δεύτερο φίλτρο. Θεωρώντας ὅτι ἡ γεννήτρια τῆς Ἀσκήσεως 14-21 τροφοδοτεῖ τό ἑπόμενο κύκλωμα ὑπολογίστε τό δυναμικό ἐξόδου γιά καθεμιά ἀπό τίς συχνότητες καί συγκρίνετε τά ἀποτελέσματα μέ τήν ἐπενέργεια τοῦ ἁπλοῦ φίλτρου στήν Ἄσκηση 14-21 ἄν $R_1 = R_2 = 200\ \Omega$ καί $C_1 = C_2 = 1\mu F$.



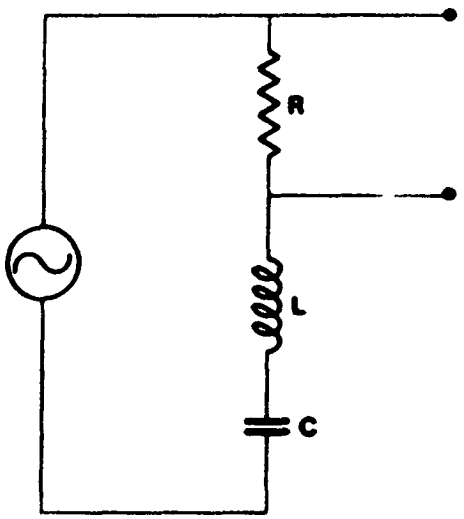
14-25. Ἕνας κινητήρας EP εἶναι σχεδιασμένος γιά λειτουργία μέ παροχή συχνότητας 50 Hz. Παρατηρεῖται ὅμως ὅτι ἡ διαθέσιμη παροχή περιέχει μιά συνιστῶσα μέ δυναμικό 100 V καί συχνότητα 50 Hz καί μιά ἀνεπιθύμητη συνιστῶσα μέ δυναμικό 10 V καί συχνότητα 100 Hz. Ἡ τελευταία πρόκειται νά ἐξαλειφθεῖ μέ τήν ἑπόμενη διάταξη φίλτρου. Ὑπολογίστε τήν ἐνεργό τιμή τοῦ δυναμικοῦ ἐξόδου γιά κάθε συχνότητα ἄν ἡ ἀντίστοιχη ὡμική, χωρητική καί ἐπαγωγική ἀντίσταση εἶναι

$$R = 10\ \Omega$$

$$X_C(50\ Hz) = 1\ k\Omega,\ X_C(100\ Hz) = 500\ \Omega$$

$$X_L(50\ Hz) = 1\ k\Omega,\ X_L(100\ Hz) = 2\ k\Omega$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



14-26. Ἕνα βιομηχανικό ἐξάρτημα ἀντιστάσεως μπορεῖ νά ἀποδοθεῖ ἀπό τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-11 ὅπου τυπικά ὁ συντελεστής αὐτεπαγωγῆς εἶναι τῆς τάξης τοῦ 1 mH καί ἡ χωρητικότητα τῆς τάξης τοῦ 10 pF. Γιά ἀντίσταση R = 100 Ω ὑπολογίστε τή σύνθετη ἀντίσταση πού παρεμβάλλεται σέ ΕΡ μέ συχνότητα στήν περιοχή μεταξύ 1 kHz καί 1 MHz καί ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματα σέ γραφική παράσταση. Ὑπολογίστε τή συχνότητα συντονισμοῦ καί τή σύνθετη ἀντίσταση στή συχνότητα συντονισμοῦ. Ὑπολογίστε τό συντελεστή ἰσχῆς στήν περιοχή μεταξύ 1 kHz καί 1 MHz καί ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματα σέ γραφική παράσταση.

14-27. Ἕνα ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς ἔχει συντελεστή ἀξιολογήσεως Q = 200 καί σέ συχνότητα 500 kHz ἰσοδύναμο συντελεστή αὐτεπαγωγῆς L = 400 μH. Γιά τή συχνότητα αὐτή ὑπολογίστε τήν ὠμική ἀντίσταση σέ σειρά πού ἐκπροσωπεῖ τό ἐξάρτημα, τήν ὁλική σύνθετη ἀντίσταση καί τή διαφορά φάσης μεταξύ δυναμικοῦ καί ρεύματος.

14-28. Ἕνας πυκνωτής μπορεῖ νά θεωρηθεῖ γιά συχνότητα 50 Hz ὡς ἕνας ἰδανικός πυκνωτής μέ χωρητικότητα 500 pF καί μιά ἰδανική ἀντίσταση R = 40 Ω σέ σειρά. Προσδιορίστε τά στοιχεῖα τοῦ ἰσοδύναμου παράλληλου κυκλώματος πού ἐκπροσωπεῖ τόν πυκνωτή στήν ἴδια συχνότητα, τό ἔλλειμμα φάσης καί τό συντελεστή ἰσχῆς τοῦ πυκνωτῆ.

14-29. Θεωρεῖστε ὅτι τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-15α ἐκπροσωπεῖ ἕνα ρεαλιστικό ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς μέ συντελεστή Q σέ σειρά μέ ἕνα ἰδανικό πυκνωτή. Δεῖξτε ὅτι στήν κατάσταση συντονισμοῦ ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ πυκνωτῆ ὑπερβαίνει τή διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς ὅλης διατάξεως κατά τόν παράγοντα Q.

14-30. Θεωρεῖστε ὅτι τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 14-15β ἐκπροσωπεῖ ἕνα ρεαλιστικό ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς μέ συντελεστή Q σέ παράλληλη σύνδεση μέ ἕνα ἰδανικό πυκνωτή. Δεῖξτε ὅτι στήν κατάσταση συντονισμοῦ ἡ σύνθετη ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος ὑπερβαίνει τή χωρητική ἀντίσταση τοῦ πυκνωτῆ κατά τόν παράγοντα Q.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

14-31. Θεωρεῖστε σέ σειρά ἕνα ἰδανικό πυκνωτή καί ἕνα ρεαλιστικό ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς μέ συντελεστή $Q >> 1$. Χρησιμοποιώντας τό ἀποτέλεσμα τῆς Ἀσκήσεως 14-19 δεῖξτε ὅτι ἡ σύνθετη ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος αὐξάνει κατά $\sqrt{2}$ ὅταν ἡ συχνότητα ἀποκλίνει ἀπό τή συχνότητα συντονισμοῦ ω_0 κατά

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2Q}.$$

14-32. Ἀποδεῖξτε τίς ἐξ. (14.115) καί (14.116).

14-33. Ὑπολογίστε τό μῆκος διεισδύσεως s [βλ. ἐξ. (14.91)] ἡλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων στό χαλκό σέ συχνότητα 1 MHz. Χρησιμοποιεῖστε τήν τιμή τῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας στό κενό. Ἡ εἰδική ἀντίσταση τοῦ χαλκοῦ εἶναι $\rho = 1.7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot m$. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τή διάμετρο τῶν μονόκλωνων συρμάτων πού δίνονται στόν Πίνακα 4-2.

14-34. Ἕνας ἰδανικός μετασχηματιστής τροφοδοτεῖται ἀπό γεννήτρια μέ ΗΕΔ 25 V, συχνότητα 1 kHz καί ὠμική ἐσωτερική ἀντίσταση 10 kΩ. Τό ἐξωτερικό κύκλωμα τοῦ δευτερεύοντος ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα πυκνωτή μέ χωρητικότητα 100 pF σέ σειρά μέ μιά ὠμική ἀντίσταση 400 Ω. Ἄν ὁ λόγος μετασχηματισμοῦ εἶναι 0.25 προσδιορίστε τό μιγαδικό ρεῦμα πού διαρρέει τό πρωτεῦον καί δευτερεῦον κύκλωμα καί τή μιγαδική διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος καί δευτερεύοντος πηνίου.

14-35. Ἕνας ἰδανικός πυκνωτής μέ συντελεστές αὐτεπαγωγῆς πρωτεύοντος καί δευτερεύοντος ἀντίστοιχα L_p καί L_s καί συντελεστή ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς M ἔχει συνδεδεμένο στά ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος ἕνα ἰδανικό πυκνωτή μέ χωρητικότητα C. Δεῖξτε ὅτι ἡ σύνθετη ἀντίσταση στά ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος εἶναι

$$Z = i\left(\omega L_p - \frac{\omega^2 M^2}{\omega L_s - (1/\omega C)}\right)$$

14-36. Ἕνας ἰδανικός πυκνωτής τροφοδοτεῖται ἀπό γεννήτρια μέ γωνιακή συχνότητα ω, ΗΕΔ U καί ἐσωτερική ὠμική ἀντίσταση R_0. Στά ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος ἔχει συνδεθεῖ ἕνα ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς μέ συντελεστή αὐτεπαγωγῆς L σέ σειρά μέ μιά ὠμική ἀντίσταση R.

(α) Προσδιορίστε τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στό ἐξωτερικό κύκλωμα τοῦ δευτερεύοντος.

(β) Μέ διαφόριση τῆς προηγούμενης ἐκφράσεως προσδιορίστε τό λόγο μετασχηματισμοῦ πού δίνει τή μέγιστη ἰσχή. Γιά τή συνθήκη αὐτή προσδιορίστε τή σύνθετη ἀντίσταση τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος τῆς γεννήτριας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15

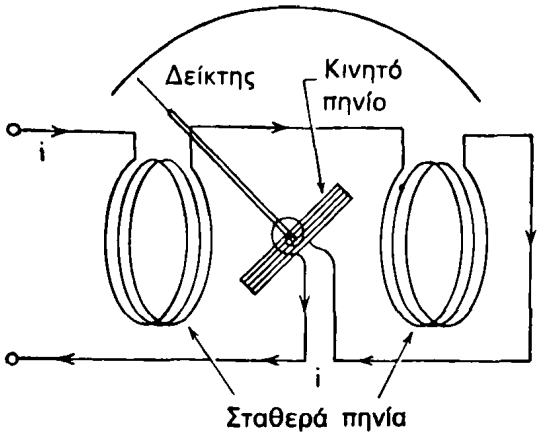
βασικες μετρησεις εναλλασσομενου ρευματος

Όπως είδαμε στό προηγούμενο κεφάλαιο τό ΕΡ είσάγει νέα φυσικά μεγέθη καί παράμετρους στήν τεχνολογία τοῦ ήλεκτρισμοῦ. Πυκνωτές; πού στό ΣΡ συμπεριφέρονται ούσιαστικά ὡς διακόπτες, μεταπίπτουν σέ ένεργά έξαρτήματα ένῶ τό φυσικό μέγεθος τῆς έπαγωγῆς, άνύπαρκτο στό ΣΡ, παίζει καθοριστικό ρόλο στή συμπεριφορά ένός κυκλώματος. Τίς μεθόδους καί τά όργανα πού έχουν άναπτυχθεῖ γιά τόν προσδιορισμό τῶν φυσικῶν μεγεθῶν πού άνακύπτουν στό ΕΡ θά έξετάσουμε στή συνέχεια.

15-1 Τό Ήλεκτροδυναμόμετρο

Κεντρική θέση στίς μετρήσεις ΕΡ, άνάλογη μέ αύτή τοῦ γαλβανομέτρου D' Arsonval στό ΣΡ, κατέχει τό **ήλεκτροδυναμόμετρο** πού περιέχεται διαγραμματικά στό σχῆμα 15-1. Όπως δείχνει τό σχῆμα, τό ήλεκτροδυναμόμετρο, ὅπως καί τό γαλβανόμετρο, εἶναι ένα όργανο κινητοῦ πλαισίου. Ή ούσιαστική διαφορά μεταξύ τῶν δύο όργάνων εἶναι ὅτι στήν περίπτωση αύτή τό μαγνητικό πεδίο δημιουργεῖται άπό μιά ήλεκτρομαγνητική διάταξη, ή όποία, στήν περίπτωση τοῦ σχήματος 15-1, τροφοδοτεῖται άπό τό ἴδιο ρεῦμα πού διοχετεύεται στό κινητό πλαίσιο. Στά συνήθη ήλεκτροδυναμόμετρα ή ήλεκτρομαγνητική αύτή διάταξη παίρνει τή μορφή δύο σταθερῶν πηνίων σέ σειρά ένῶ στό κέντρο τῆς διατάξεως βρίσκεται άναρτημένο τό κινητό πηνίο. Στόν έργαστηριακό τύπο τοῦ όργάνου, ὁ άξονας τοῦ κινητοῦ πηνίου περιέχει ένα έλικοειδές έλατήριο, τό όποῖο δημιουργεῖ τή ροπή έπα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 15-1 Τό ήλεκτροδυναμόμετρο.

ναφορᾶς καί γιά μηδενικό ρεῦμα τό ἰσορροπεῖ σέ γωνία 45° ὡς πρός τό ἐπίπεδο τῶν σταθερῶν πηνίων. Ἄν τώρα ἕνα ρεῦμα I διοχετευθεῖ στή διάταξη τοῦ σχήματος 15-1, τά σταθερά πηνία θά δημιουργήσουν στήν περιοχή τοῦ κινητοῦ ἕνα σχεδόν ἀκτινικό μαγνητικό πεδίο B καί ἡ κίνησή του θά ἀκολουθήσει τό νόμο τῆς ἐξ. (5.7) μέ γωνιακή ἀπόκλιση α ἀπό τή θέση ἰσορροπίας

$$\alpha = kBI \tag{15.1}$$

ὅπου στή σταθερά k ἔχουν συμπεριληφθεῖ ἡ σταθερά τοῦ ἐλατηρίου καί ἡ γεωμετρία τοῦ κινητοῦ πηνίου. Ὁ ἀναγνώστης εἶναι εὔκολο νά πεισθεῖ ὅτι ἡ φορά τῆς ἀποκλίσεως ἀπό τή θέση ἰσορροπίας εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή φορά τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τή διάταξη.

Τό μαγνητικό πεδίο B πού δημιουργεῖται στήν περιοχή τοῦ κινητοῦ πλαισίου εἶναι ἐπίσης ἀνάλογο πρός τό ρεῦμα I πού διαρρέει τά σταθερά πηνία, ἤτοι

$$B = sI \tag{15.2}$$

ὅπου ἡ σταθερά s ἐξαρτᾶται πάλι ἀπό τή γεωμετρία τῆς διατάξεως. Μποροῦμε ἑπομένως νά γράψουμε τήν ἐξ. (15.1) ὡς

$$\alpha = ksI^2 \tag{15.3}$$

ἤ ἀντίστροφα

$$I = d\sqrt{a} \tag{15.4}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου, γιά ἁπλοποίηση τοῦ συμβολισμοῦ, ἔχουμε εἰσάγει τή σταθερά $d = 1/\sqrt{ks}$. Ὅπως προκύπτει ἀπό τήν τελευταία σχέση, ἄν ἡ διάταξη τοῦ σχήματος 15-1 χρησιμοποιηθεῖ ὡς ἀμπερόμετρο, τό ρεῦμα πού μετρᾶται εἶναι ἀνάλογο πρός τήν τετραγωνική ρίζα τῆς ἀποκλίσεως.

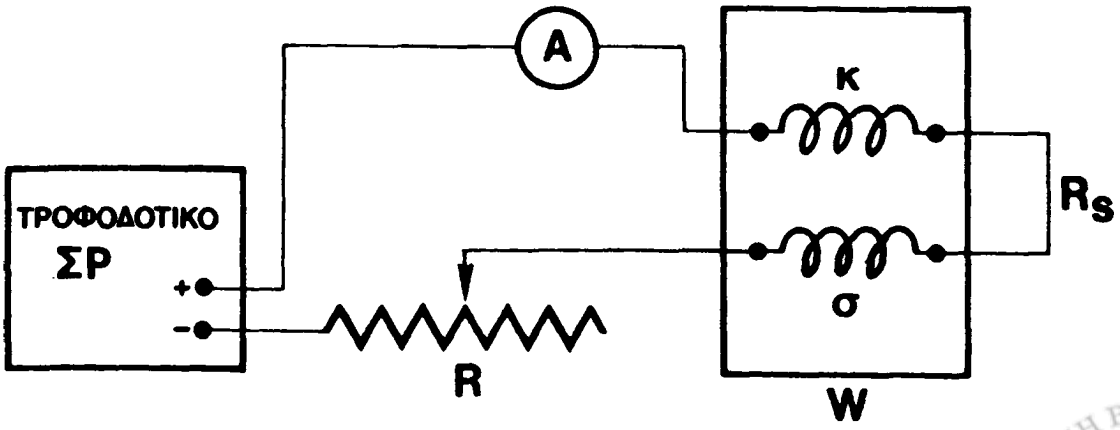
ΠΕΙΡΑΜΑ 15-1. ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΟΜΕΤΡΟΥ ΣΤΟ ΣΡ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-2. Χρησιμοποιεῖστε ἕνα ροοστάτη τῆς τάξης τῶν 10 kΩ. Μέ τή βραχυκύκλωση R_s συνδέστε σέ σειρά τό κινητό πηνίο κ καί τό σταθερό πηνίο σ τοῦ ἡλεκτροδυναμομέτρου W.

– Τοποθετεῖστε τήν κινητή ἐπαφή τοῦ ροοστάτη στό σημεῖο ὅπου ἐπιλέγεται ἡ ὁλική τιμή τῆς ἀντιστάσεως καί ρυθμίστε τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ ὥστε νά ἐπιτύχετε ἀπόκλιση τοῦ ἡλεκτροδυναμομέτρου κατά 5° περίπου (ἄν οἱ διαβαθμίσεις στήν κλίμακα τοῦ ὀργάνου δέν εἶναι χαραγμένες κατά ἴσα διαστήματα, χρησιμοποιεῖστε ἕνα μοιρογνωμόνιο). Σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τήν ἀπόκλιση τοῦ ἡλεκτροδυναμομέτρου σέ μοῖρες (ἤ διαβαθμίσεις, ἄν ἡ κλίμακα τοῦ ὀργάνου εἶναι γραμμική) καί τήν ἔνδειξη τοῦ ἀμπερομέτρου A.

– Ἐλαττῶστε τήν ἀντίσταση R πού παρεμβάλει ὁ ροοστάτης στό κύκλωμα (καί ἄν χρειαστεῖ αὐξεῖστε τήν τάση τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ) ὥστε νά αὐξηθεῖ κατά 5° περίπου ἡ ἀπόκλιση τοῦ ἡλεκτροδυναμομέτρου. Σημειῶστε τή νέα ἀπόκλιση καί τήν ἀντίστοιχη ἔνδειξη τοῦ ἀμπερομέτρου. Συνεχίστε τήν προηγούμενη ἐργασία μέχρις ὅτου καλύψετε ὅλη τήν κλίμακα τοῦ ἡλεκτροδυναμομέτρου.

– Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματά σας σέ γραφική παράσταση μέ τετμημένη τό ρεῦμα καί τεταγμένη τήν τετραγωνική ρίζα τῆς ἀποκλίσεως τοῦ

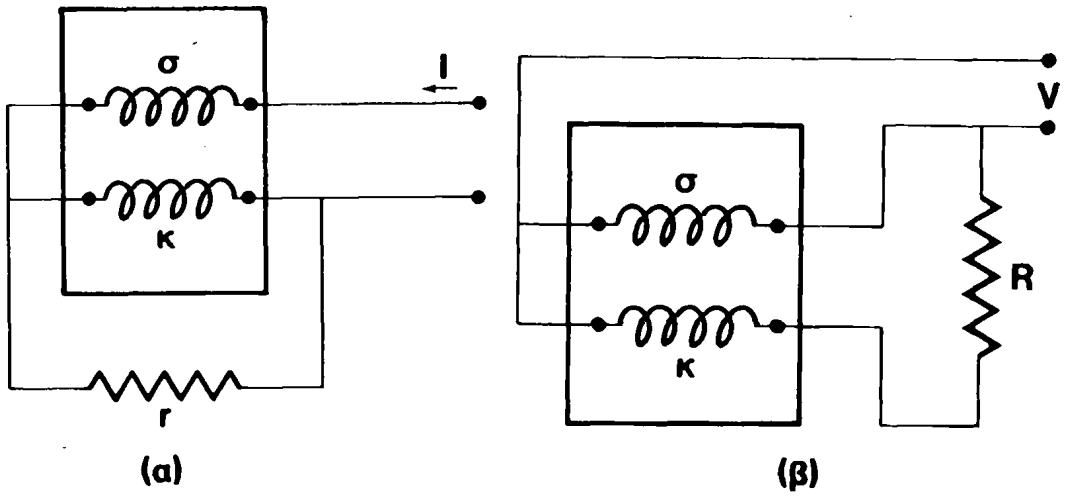


ΣΧΗΜΑ 15-2 Τό ἡλεκτροδυναμόμετρο ὡς ἀμπερόμετρο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἡλεκτροδυναμομέτρου. Συγκρίνετε τά ἀποτελέσματά σας μέ τήν πρόβλεψη τῆς ἐξ. (15.4) καί σχολιάστε τυχόν ἀποκλίσεις ἀπό τή γραμμικότητα. Προσδιορίστε τή σταθερά d τῆς ἐξ. (15.4).

Ἄν καί ἡ ἀπόκλιση τοῦ ἡλεκτροδυναμομέτρου δέν συνδέεται μέ ἁπλή ἀναλογία πρός τό ρεῦμα, μέ κατάλληλη βαθμονόμηση τό ὄργανο μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς ἀμπερόμετρο. Παρόλα αὐτά στήν πράξη ἡ κατασκευή ἀμπερομέτρου μέ κλίμακα μεγαλύτερη ἀπό 100 mA συναντάει σημαντικές δυσχέρειες. Ὁ κυριώτερος λόγος εἶναι ὅτι ἡ χρησιμοποίηση σύρματος μέ μεγάλη διατομή γιά τήν κατασκευή τοῦ κινητοῦ πηνίου, αὐξάνει σημαντικά τήν ἀδράνεια τῶν κινητῶν μερῶν τῆς διατάξεως. Ὅπως καί μέ τό γαλβανόμετρο D' Arsonval, ἡ ἐπέκταση τῆς κλίμακας ἀμπερομέτρου πού στηρίζεται στή διάταξη ἡλεκτροδυναμομέτρου μπορεῖ νά γίνει μέ κατάλληλη διακλάδωση τοῦ ρεύματος. Καθόσον ὁ περιορισμός στήν κατασκευή τοῦ κινητοῦ πλαισίου πού ἀναφέραμε δέν ἀφορᾶ τό σταθερό πηνίο, τά συνήθη βιομηχανικά ἡλεκτροδυναμόμετρα κατασκευάζονται μέ σταθερά πηνία ἀπό σύρμα μεγάλης διατομῆς, πού μποροῦν νά δεχτοῦν ὑψηλό ρεῦμα, ἐνῶ ἡ διακλάδωση τοποθετεῖται παράλληλα πρός τό κινητό πηνίο. Ταυτόχρονα, μιά δεύτερη ἀντίσταση σέ σειρά μέ τό κινητό πηνίο, ὅπως στή διάταξη τοῦ σχήματος 7-12, μπορεῖ νά ἐπεκτείνει τήν κλίμακα σέ ὑψηλότερες τιμές. Μέ τόν τρόπο αὐτό εἶναι δυνατόν νά κατασκευαστοῦν ἀμπερόμετρα μέ δυνατότητα μετρήσεως ρεύματος μέχρι 20 A. Τό σχῆμα 15-3(α) περιέχει τήν



ΣΧΗΜΑ 15-3 Σύνδεση ἡλεκτροδυναμομέτρου. (α) ὡς ἀμπερόμετρο. (β) ὡς βολτόμετρο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τυπική σύνδεση τοῦ ἠλεκτροδυναμομέτρου σέ διάταξη ἀμπερομέτρου. Ἡ ἐναλλακτική σύνδεση ὥστε τό ὄργανο νά ἀποτελέσει βολτόμετρο δίνεται στό σχῆμα 15-3(β). Γιά μεγαλύτερη εὐελιξία στήν παρεμβολή διακλαδώσεων, βιομηχανικά ἠλεκτροδυναμόμετρα διαθέτουν συνήθως τέσσερις ἀκροδέκτες πού ἀνά δύο καθορίζουν τά ἄκρα τοῦ κινητοῦ καί σταθεροῦ πηνίου. Ὅπως θά δοῦμε στή συνέχεια ἡ μορφή αὐτή τοῦ ὀργάνου ἐπιτρέπει ἐπιπλέον τή μέτρηση ἰσχῆς.

Μιά σημαντική ἰδιότητα τοῦ ἠλεκτροδυναμομέτρου, πού ἤδη ἀναφέρθηκε, εἶναι ὅτι ἡ ἀπόκλιση εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή φορά τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τό ὄργανο. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά δείξει τήν ἰδιότητα αὐτή θεωρώντας τή φορά τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού δημιουργοῦν τά δύο σταθερά πηνία τοῦ σχήματος 15-1 γιά κάθε φορά τοῦ ρεύματος καί τήν ἀντίστοιχη ἀπόκριση τοιῦ κινητοῦ πηνίου σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Lenz. Τοῦτο βεβαίως ἐξάγεται καί ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ ἀπόκλιση τοῦ ὀργάνου εἶναι ἀνάλογη πρός τό τετράγωνο τοῦ ρεύματος. Κατ' ἐπέκταση τό ὄργανο ἀποκρίνεται ἐξίσου στό συνεχές καί ἐναλλασσόμενο ρεῦμα. Ἡ συγκεκριμένη μάλιστα σχέση μεταξύ ἀποκλίσεως καί ρεύματος ὁδηγεῖ στόν προσδιορισμό τῶν ἐνεργῶν τιμῶν τοῦ ΕΡ [βλ. ἐξ. (14.29)]. Παράλληλα, οἱ μέθοδοι βαθμονομήσεως πού ἔχουμε ἀναπτύξει στό ΣΡ μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά τή βαθμονόμηση τοῦ ἠλεκτροδυναμομέτρου ἀπευθείας σέ μονάδες ΕΡ.

ΠΕΙΡΑΜΑ 15-2. ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΟΜΕΤΡΟΥ

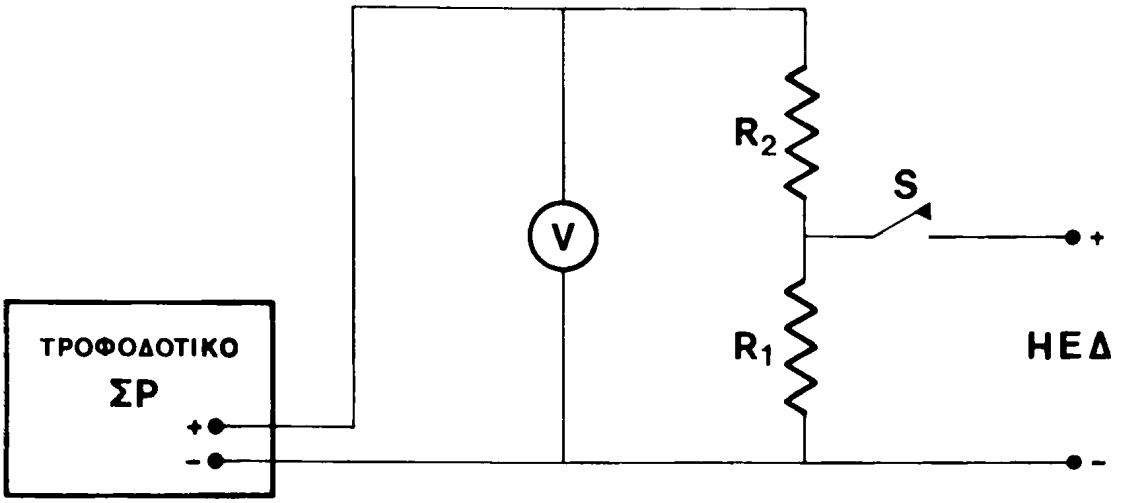
Τό κύκλωμα βαθμονομήσεως τοῦ βολτομέτρου ΣΡ ἔχει δοθεῖ ἤδη στό σχῆμα 8-13 καί ἀναπαράγεται ἐδῶ στό σχῆμα 15-4. Συνδέστε τό ἠλεκτροδυναμόμετρο, βαθμονομημένο ὡς βολτόμετρο, στή διάταξη τοῦ σχήματος 15-4. Ἄν V εἶναι ἡ μέγιστη ἔνδειξη τῆς κλίμακας τοῦ ὀργάνου, ἐπιλέξτε τίς ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 ἔτσι ὥστε

$$V = 1.5\,\frac{R_1 + R_2}{R_1}.$$

Συνδέστε στούς ἀκροδέκτες μέ τήν ἔνδειξη ΗΕΔ ἕνα βαθμονομημένο ποτενσιόμετρο. Ἀκολουθεῖστε τή διεργασία τοῦ Πειράματος 8-9 καί χαράξτε τήν καμπύλη διορθώσεως τοῦ ὀργάνου.

— Καθόσον τό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργοῦν τά δύο σταθερά πηνία τοῦ ὀργάνου εἶναι πολύ ἀσθενέστερο ἀπό τό μαγνητικό πεδίο τοῦ μόνιμου μαγνήτη στά ὄργανα ΣΡ, τό ἠλεκτροδυναμόμετρο εἶναι πολύ πιό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 15-4 Διάταξη γιά τή βαθμονόμηση ἠλεκτροδυναμομέτρου στό ΣΡ.

εὐαίσθητο σέ τυχαῖα μαγνητικά πεδία πού μπορεῖ νά ὑπάρχουν στό χῶρο. Βεβαιωθεῖτε ὅτι στή γειτονία τοῦ ἠλεκτροδυναμομέτρου δέν ὑπάρχουν ὄργανα πού περιέχουν μαγνήτη, μεγάλοι ὄγκοι σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ ἤ ἀγωγοί πού διαρρέονται ἀπό ὑψηλό ρεῦμα. Γιά νά ἐξαλείψετε τυχόν συστηματικά σφάλματα ἀντιστρέψτε τήν πολικότητα τοῦ τροφοδοτικοῦ ΣΡ καί τοῦ ποτενσιομέτρου καί ἐπαναλάβετε τή διαδικασία τοῦ πειράματος. Ὡς διόρθωση σέ κάθε χαρακτηριστική ἔνδειξη τῆς κλίμακας τοῦ βολτομέτρου θεωρεῖστε τό μέσο ὅρο τῶν τεσσάρων μετρήσεων πού διαθέτετε.

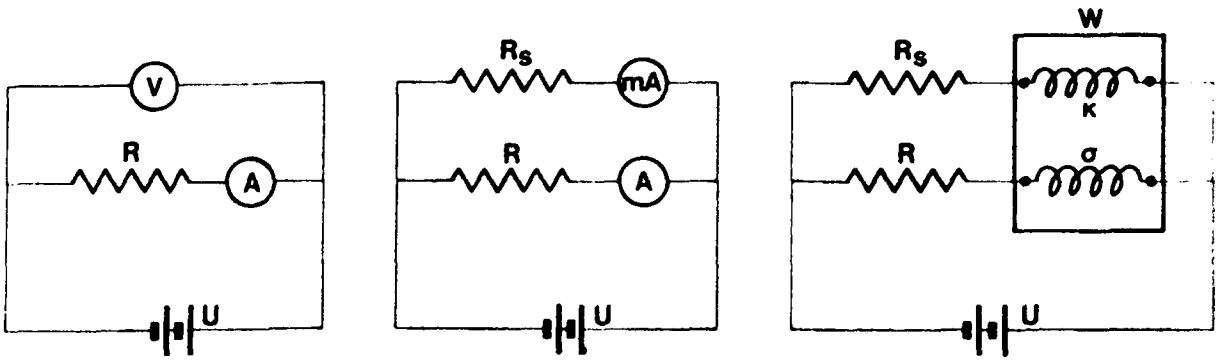
15-2 Μέτρηση Ἰσχῆς. Τό Βαττόμετρο

Ὁ προσδιορισμός τῆς ἰσχῆς

$$P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R} \qquad (15.5)$$

πού καταναλώνεται σέ μιά ἀντίσταση R (ἤ γενικώτερα σέ ἕνα τμῆμα τοῦ κυκλώματος μέ ὁλική ἀντίσταση R) μπορεῖ νά γίνει μέ ταυτόχρονη μέτρηση τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ V στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως καί τοῦ ρεύματος I πού τή διαρρέει. Μέ τή μέθοδο αὐτή προσδιορίσαμε στήν Παράγραφο 5-6 τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στό ἐξωτερικό κύκλωμα ἑνός ἠλεκτρικοῦ στοιχείου. Ἡ γενική συνδεσμολογία δίνεται στό σχῆμα 15-5(α) ὅπου, ἄν ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ ἀμπερομέτρου A εἶναι ἀμελητέα, τό γινόμενο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 15-5 Μέτρηση ἰσχῆς (α) καί (β) μέ ἀμπερόμετρο καί βολτόμετρο καί (γ) μέ ἡλεκτροδυναμόμετρο.

τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο ὀργάνων VI δίνει ἀπευθείας τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στήν ἀντίσταση R.

Τό σχῆμα 15-5(β) περιέχει τήν ἴδια οὐσιαστικά διάταξη μέ τή διαφορά ὅτι τό ἐργαστηριακό βολτόμετρο ἔχει παρασταθεῖ ὡς ἕνα ἀμπερόμετρο σέ σειρά μέ μιά μεγάλη ἀντίσταση R_δ [βλ. σχῆμα 5-10]. Ἄν i εἶναι τό ρεῦμα πού στή διάταξη αὐτή διαρρέει τή διακλάδωση R_δ, ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R εἶναι

$$V = iR_\delta$$

καί ἡ ἰσχή πού καταναλώνεται στήν ἀντίσταση R μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$P = R_\delta i l. \qquad (15.6)$$

Ἡ ἔκφραση τῆς ἰσχῆς ὡς τό γινόμενο δύο ρευμάτων στήν τελευταία σχέση ὑποδεικνύει τή χρήση τοῦ ἡλεκτροδυναμομέτρου γιά ἀπευθείας μέτρηση τοῦ φυσικοῦ αὐτοῦ μεγέθους. Ἡ προφανής σύνδεση δίνεται στό σχῆμα 15-5(γ) ὅπου τά σταθερά πηνία τοῦ ὀργάνου (μέ συνήθως ἀμελητέα ἀντίσταση) ἔχουν ἀντικαταστήσει τό ἀμπερόμετρο ἐνῶ τό κινητό πηνίο, σέ σειρά μέ τή διακλάδωση R_δ, τό βολτόμετρο. Σύμφωνα μέ τίς ἐξ. (15.3) καί (15.6) ἡ ἀπόκλιση α τοῦ ὀργάνου στή συνδεσμολογία αὐτή θά εἶναι

$$\alpha = ksil = \frac{ks}{R_\delta} P \qquad (15.7)$$

ἤτοι ἀνάλογη πρός τήν ἰσχή.

Χρησιμοποιώντας τήν προηγούμενη ἀναλογία μεταξύ ἀποκλίσεως καί ἰσχῆς στό ἡλεκτροδυναμόμετρο, πολλοί κατασκευαστές διαθέτουν ὄργανα βαθμονομημένα ἀπευθείας σέ μονάδες ἰσχῆς μέ τή γενική ὀνομασία **βαττό-**

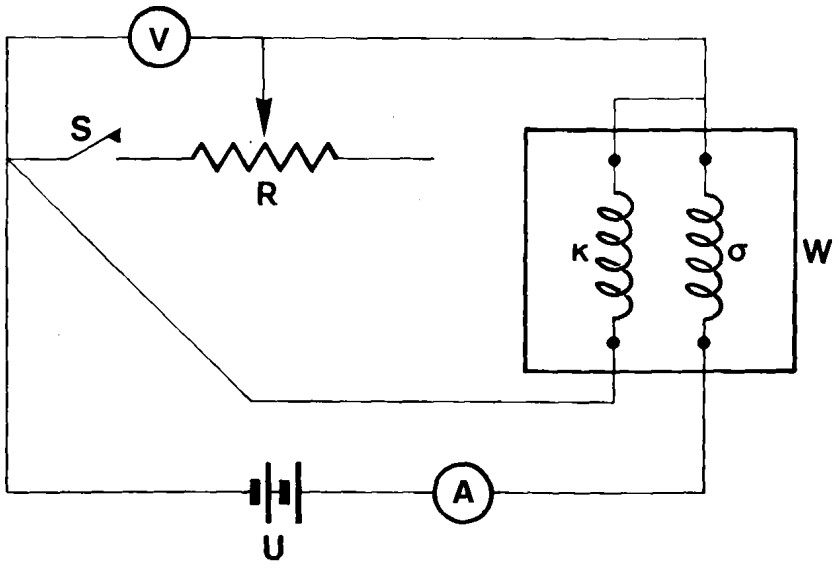
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μετρα. Τό βαττόμετρο εἶναι στήν οὐσία ἕνα ἠλεκτροδυναμόμετρο ὅπου τά σταθερά πηνία εἶναι κατασκευασμένα ἀπό σύρμα μεγάλης διατομῆς, ὥστε νά παρεμβάλλουν στό κύκλωμα μικρή ἀντίσταση, ἐνῶ τό κινητό πηνίο περιέχει σέ σειρά μιά ἀρκετά ὑψηλή ἀντίσταση (ἐνδεχομένως μεταβλητή). Μέ τόν τρόπο αὐτό τά σταθερά πηνία μποροῦν νά συνδεθοῦν γιά τή μέτρηση τοῦ ρεύματος ἐνῶ τό κινητό γιά τή μέτρηση τοῦ δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως ὅπου καταναλώνεται ἠλεκτρική ἐνέργεια. Ἡ χρήση τοῦ ἠλεκτροδυναμομέτρου γιά τή μέτρηση ἰσχῆς ΣΡ μελετᾶται στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 15-3. ΜΕΤΡΗΣΗ ΙΣΧΗΣ ΣΡ ΜΕ ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΟΜΕΤΡΟ

Συνδέστε τό ἠλεκτροδυναμόμετρο σύμφωνα μέ τό σχῆμα 15-6. Ὡς πηγή συνεχοῦς ρεύματος χρησιμοποιεῖστε ἕνα στοιχεῖο μέ ΗΕΔ $U = 4.5$ V. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη ἕνα ροοστάτη μέ ὁλική ἀντίσταση $R = 250\ \Omega$ καί ἕνα διακόπτη τηλεγραφητῆ S. Σημειῶστε τήν ἔνδειξη τοῦ ἀμπερομέτρου A, τοῦ βολτομέτρου V καί τοῦ βαττομέτρου W ὅταν ὁ διακόπτης S εἶναι ἀνοικτός.

– Σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τίς ἐνδείξεις τῶν ὀργάνων γιά διάφορες θέσεις τοῦ δρομέα τοῦ ροοστάτη R ὅταν ὁ διακόπτης S εἶναι κλειστός. Καλύψτε ὅλη τήν περιοχή τοῦ ροοστάτη. Σέ μιά τέταρτη στήλη τοῦ πίνακα ὑπολογίστε τό γινόμενο τοῦ ρεύματος καί τοῦ δυναμικοῦ πού σημειώσατε σέ κάθε θέση τῆς κινητῆς ἐπαφῆς.



ΣΧΗΜΑ 15-6 Κύκλωμα βαθμονομήσεως βαττομέτρου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



– Ἄν τό βαττόμετρο εἶναι βαθμονομημένο σέ μονάδες ἰσχῆς συγκρίνετε τήν ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου μέ τό ἀποτέλεσμα P = VI. Ἀποδῶστε τά ἀποτελέσματα σέ γραφική παράσταση σέ ὅλο τό εὖρος τοῦ ρεύματος (μέχρι τό ρεῦμα βραχυκυκλώσεως) καί σχολιάστε τυχόν ἀποκλίσεις.
– Ἄν τό ἡλεκτροδυναμόμετρο πού χρησιμοποιεῖτε δέν εἶναι βαθμονομημένο, χρησιμοποιεῖστε τά ἀποτελέσματα γιά τή βαθμονόμηση τοῦ ὀργάνου σέ μονάδες ἰσχῆς. Σχολιάστε τυχόν ἀποκλίσεις ἀπό τή γραμμικότητα.

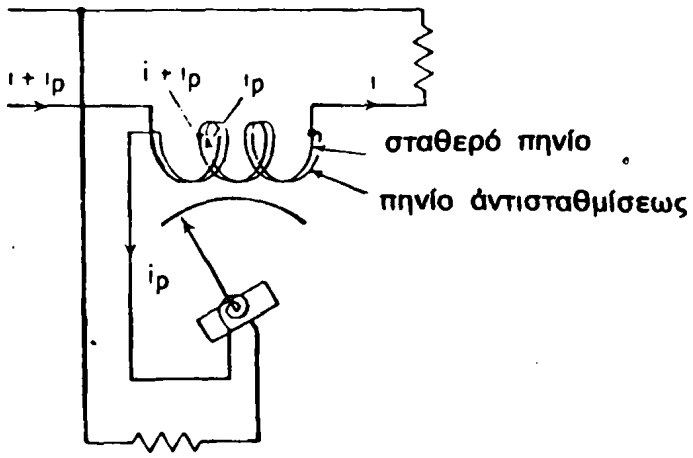
Προσεκτική ἀνάλυση τῆς συνδεσμολογίας τοῦ βαττομέτρου στό σχῆμα 15-6 ἀποδεικνύει ὅτι τό ὄργανο ὑπερεκτιμᾶ τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στήν ἀντίσταση R. Τοῦτο ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι ἕνα μικρό μέρος τοῦ ρεύματος, τό ὁποῖο διαρρέει τά σταθερά πηνία (καί ἐπομένως συνεισφέρει στό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖ τή ροπή στό κινητό πλαίσιο) διοχετεύεται στόν κλάδο πού περιέχει τό κινητό πηνίο. Ἔτσι ἡ μέτρηση τελικά ἀντιπροσωπεύει τό ἄθροισμα τῆς ἰσχῆς πού καταναλώνεται στήν ἀντίσταση R καί τῆς ἰσχῆς πού καταναλώνεται στό κινητό πηνίο τοῦ ὀργάνου†. Γιά τήν ἐξάλειψη τοῦ συστηματικοῦ αὐτοῦ σφάλματος πολλοί τύποι βαττομέτρου περιέχουν ἐπιπρόσθετα σταθερά πηνία ἀντισταθμίσεως μέ περιέλειξη παράλληλη πρός αὐτή τῶν κύριων σταθερῶν πηνίων τοῦ ὀργάνου. Τά πηνία ἀντισταθμίσεως εἶναι συνδεδεμένα σέ σειρά μέ τό κινητό πηνίο τοῦ ἡλεκτροδυναμομέτρου καί κατά τρόπο ὥστε τό ρεῦμα πού τά διαρρέει νά ἔχει ἀντίθετη φορά μέ τό ρεῦμα πού διαρρέει τά σταθερά πηνία. Ἡ διάταξη τῶν πηνίων σέ ἕνα **ἀντισταθμισμένο βαττόμετρο** δίνεται στό σχῆμα 15-7.

Παρατηρεῖται ὅτι ἡ συνδεσμολογία τοῦ σχήματος 15-6 προϋποθέτει τή χρησιμοποίηση μή ἀντισταθμισμένου βαττομέτρου. Πράγματι, στήν περίπτωση αὐτή τό βαττόμετρο μετρᾶ τήν ἰσχή πού καταναλώνεται τόσο στήν ἀντίσταση R ὅσο καί στό κινητό πηνίο τοῦ ὀργάνου. Ἔτσι τό ἀμπερόμετρο A ἔχει συνδεθεῖ ὥστε νά μετρᾶ τό ὁλικό ρεῦμα πού διοχετεύεται στό ὄργανο. Γιά τή βαθμονόμηση ἀντισταθμισμένου βαττομέτρου, ὅπου τό ρεῦμα πού πρέπει νά χρησιμοποιηθεῖ στό γινόμενο P = VI εἶναι ἀποκλειστικά τό ρεῦμα τῆς ἀντιστάσεως R, ἡ σωστή συνδεσμολογία δίνεται στό σχῆμα 15-8.

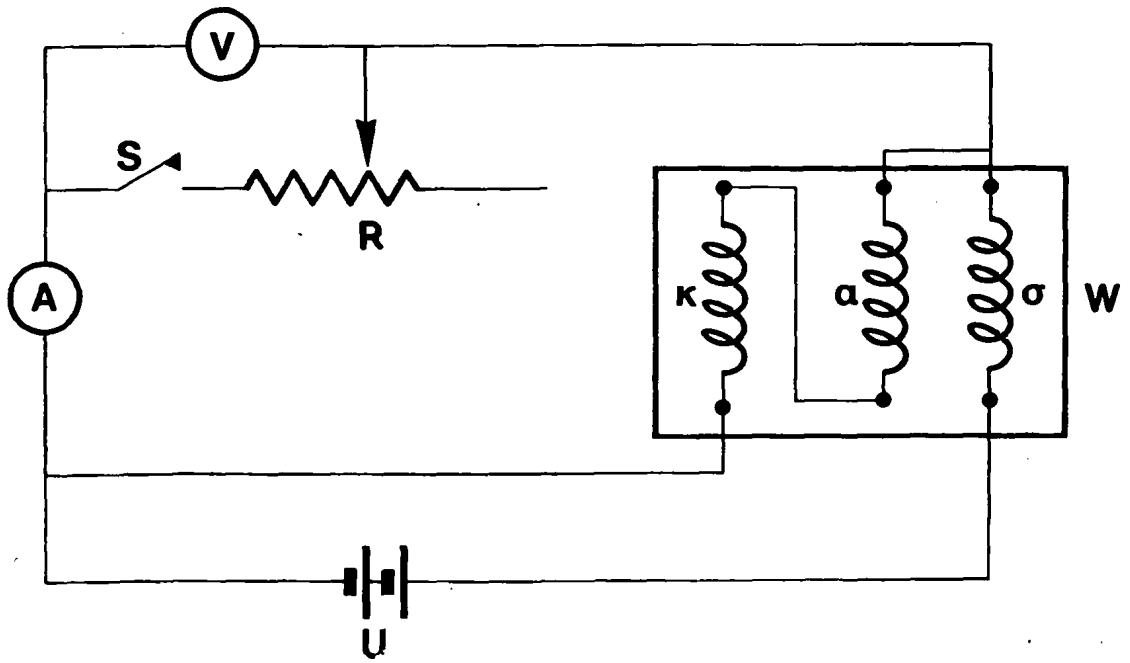
---

† Παρατηρεῖται ὅτι ἄν παράλληλα χρησιμοποιεῖται καί βολτόμετρο γιά τόν προσδιορισμό τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως, ὅπως στή συνδεσμολογία τοῦ σχήματος 15-6, ἡ μέτρηση τοῦ βαττομέτρου συμπεριλαμβάνει καί τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στό βολτόμετρο. Στό Πείραμα 15-3 ἡ ἰσχή αὐτή θεωρεῖται ἀμελητέα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 15-7 Διάταξη άντισταθμισμένου βαττομέτρου. Ἂν i εἶναι τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀντίσταση R καί i_p τό ρεῦμα πού διαρρέει τό κινητό πηνίο τοῦ ἡλεκτροδυναμομέτρου, τό ὁλικό ρεῦμα πού διοχετεύεται στό ὄργανο εἶναι $i + i_p$.



ΣΧΗΜΑ 15-8 Κύκλωμα βαθμονομήσεως ἀντισταθμισμένου βαττομέτρου.

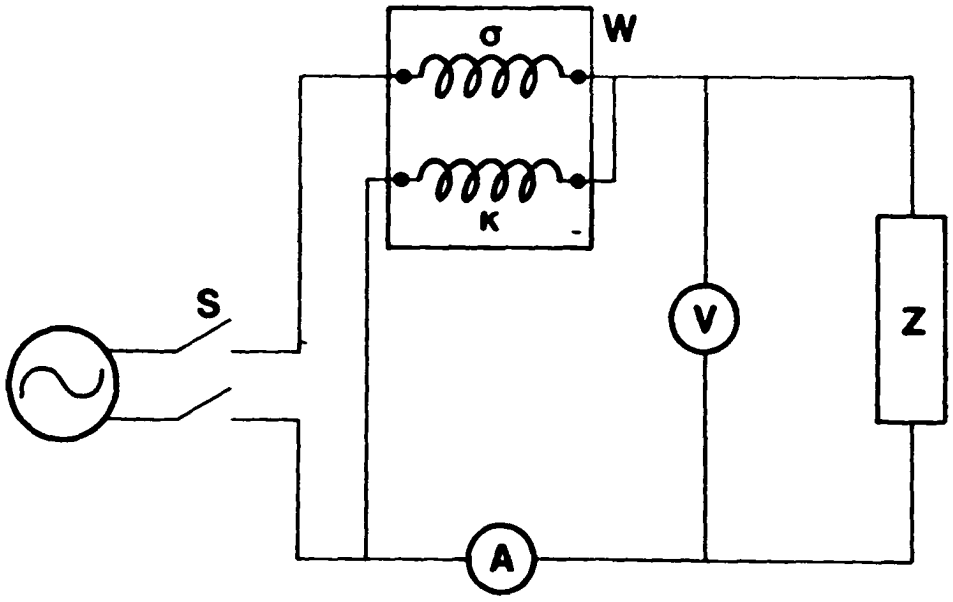


Στή μέχρι τώρα θεώρηση τῶν ἐφαρμογῶν τοῦ βαττομέτρου ἀναφερθήκαμε ἀποκλειστικά στή μέτρηση τῆς ἰσχῆς συνεχοῦς ρεύματος. Παρόλα αὐτά, ὅπως εἴδαμε καί στήν προηγούμενη παράγραφο, τό ἡλεκτροδυναμόμετρο ἀποκρίνεται ἐξίσου καί στό ἐναλλασσόμενο ρεῦμα. Στήν τελευταία περίπτωση τό ὄργανο μετρᾶ τή μέση ἰσχή πού σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (14.31) δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$P = V_{\varepsilon v} I_{\varepsilon v} \cos\varphi = I_{\varepsilon v}^2 Z \cos\varphi = \frac{V_{\varepsilon v}^2}{Z} \cos\varphi. \qquad (15.8)$$

Στήν ἐξ. (15.8) Z εἶναι τό μέτρο τῆς σύνθετης ἀντιστάσεως ὅπου καταναλώνεται ἐνέργεια καί φ ἡ διαφορά φάσης μεταξύ ρεύματος καί δυναμικοῦ. Ὅπως προκύπτει ἀπό τήν τελευταία σχέση, ἡ ἰσχή EP πού καταναλώνεται σέ μιά σύνθετη ἀντίσταση μπορεῖ νά εἶναι μικρή ἀκόμη καί γιά ἀρκετά ὑψηλές τιμές ρεύματος καί δυναμικοῦ.

Ἡ κατανάλωση ἰσχῆς EP σέ μιά σύνθετη ἀντίσταση μπορεῖ νά μελετηθεῖ πειραματικά μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 15-9. Στή συνδεσμολογία αὐ-



ΣΧΗΜΑ 15-9 Διάταξη γιά τή μελέτη τῆς καταναλώσεως ἰσχῆς στό EP.

τή ἡ ἔνδειξη P τοῦ βαττομέτρου, πέρα ἀπό τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στή σύνθετη ἀντίσταση Z, συμπεριλαμβάνει τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στό κύκλωμα τοῦ κινητοῦ πηνίου καθώς καί στά δύο ὄργανα μετρήσεως καί δυναμικοῦ. Ἄν (σέ πολύ καλή προσέγγιση) θεωρήσουμε ὅτι οἱ ἐσωτερικές ἀντιστάσεις τῶν ὀργάνων R_A καί R_V καθώς καί ἡ ἀντίσταση τοῦ κυ-

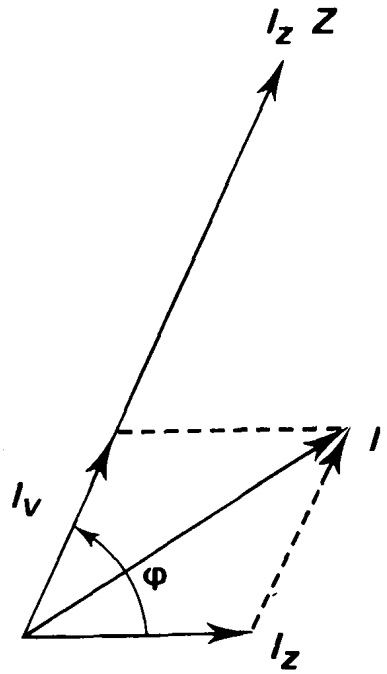
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κλώματος κινητοῦ πηνίου στό βαττόμετρο εἶναι καθαρά ὠμικές, μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἰσχή πού μετρᾶται ὡς

$$P = P_Z + \frac{V^2}{R_V} + \frac{V^2}{R_K} + I^2 R_A. \qquad (15.9)$$

Στήν τελευταία σχέση I καί V εἶναι οἱ ἐνδείξεις τῶν δύο ὀργάνων καί R_K ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος κινητοῦ πηνίου στό βαττόμετρο.

Ἡ διαφορά φάσης φ μεταξύ τοῦ ρεύματος I_Z καί τοῦ δυναμικοῦ V_Z στή σύνθετη ἀντίσταση **Z** μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό τήν ἀνυσματική ἀναπαράσταση τῶν μεγεθῶν στό σχῆμα 15-10. Καθόσον ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση R_V τοῦ βολτομέτρου εἶναι καθαρά ὠμική τό δυναμικό **V**, τό ρεῦμα πού διαρρέει τό



ΣΧΗΜΑ 15-10 Ἀνυσματική ἀναπαράσταση ρεύματος καί δυναμικοῦ στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-9.

βολτόμετρο $I_V = (1/R_V)\,\mathbf{V}$ καί ἡ διαφορά δυναμικοῦ $\mathbf{V}_Z = \mathbf{I}_Z\,\mathbf{Z}$ στά ἄκρα τῆς σύνθετης ἀντιστάσεως **Z** εἶναι σέ φάση. Ἡ διαφορά φάσης φ μεταξύ τοῦ ρεύματος I_Z καί τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ V_Z δίνεται στό σχῆμα 15-10 ἐνῶ τό μέτρο τοῦ ρεύματος I πού διαρρέει τόν κλάδο τοῦ ἀμπερομέτρου μπορεῖ ἀμέσως νά ὑπολογιστεῖ ὡς

$$I^2 = I_Z^2 + \frac{V^2}{R_V^2} + 2I_Z \frac{V}{R_V} \cos\varphi. \qquad (15.10)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀπό τήν τελευταία σχέση καί τήν ἐξ. (15.8), πού στήν περίπτωση αὐτή παίρνει τή μορφή

$$P_Z = V I_Z \cos\varphi \tag{15.11}$$

μποροῦμε νά ἀπαλείψουμε τό συντελεστή ἰσχῆς cosφ καί νά προσδιορίσουμε τό μέτρο τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τήν ἀντίσταση Z ὡς

$$I_Z^2 = I^2 - \frac{V^2}{R_V^2} - 2\,\frac{P_Z}{R_V}\,. \tag{15.12}$$

Μέ τή βοήθεια τῆς ἐξ. (15.9) ἡ τελευταία σχέση παρέχει τή δυνατότητα προσδιορισμοῦ τοῦ ρεύματος στήν ἀντίσταση Z μέ βάση τίς ἐνδείξεις καί τίς ἐσωτερικές ἀντιστάσεις τῶν ὀργάνων μετρήσεως τοῦ κυκλώματος. Τό μέτρο τῆς σύνθετης ἀντιστάσεως Z καί ὁ συντελεστής ἰσχῆς cosφ μποροῦν τώρα νά ὑπολογιστοῦν ἀπό τίς σχέσεις

$$Z = \frac{V}{I_Z} \tag{15.13}$$

καί

$$\cos\varphi = \frac{P_Z}{V I_Z}\,. \tag{15.14}$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 15-4. ΜΕΤΡΗΣΗ ΙΣΧΗΣ ΕΡ ΜΕ ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΟΜΕΤΡΟ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-9 χρησιμοποιώντας ὡς σύνθετη ἀντίσταση ἕνα πυκνωτή μέ χωρητικότητα 5 μF καί ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων μέ ὁλική ἀντίσταση 1 kΩ. Ἐπιλέξτε τή μέγιστη ἀντίσταση στό κιβώτιο ἀντιστάσεων. Κλεῖστε τό διακόπτη S καί ἀναπτύξτε δυναμικό σύμφωνα μέ τήν ἔνδειξη τοῦ τροφοδοτικοῦ ΕΡ (variac) περίπου 10 V. Σημειῶστε τίς ἐνδείξεις τῶν τριῶν ὀργάνων.

– Μεταβάλετε τήν ἀντίσταση R τοῦ κιβωτίου ἀντιστάσεων καί σέ κατάλληλο πίνακα σημειῶστε τίς ἐνδείξεις τῶν ὀργάνων σέ ὅλη τήν περιοχή πού παρέχει τό κιβώτιο μέχρι τήν τιμή R = 0. Χρησιμοποιώντας τήν προηγούμενη ἀνάλυση τοῦ κυκλώματος καί τίς ἐνδείξεις τῶν ὀργάνων ὑπολογίστε γιά κάθε τιμή τῆς ἀντιστάσεως τοῦ κιβωτίου τήν ἰσχή P_Z πού καταναλώνεται στή σύνθετη ἀντίσταση Z, τό μέτρο τῆς σύνθετης ἀντιστάσεως Z καί τό συντελεστή ἰσχῆς cosφ. Συγκρίνετε τήν ποσότητα P_Z

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



μέ τήν ἀντίστοιχη ἔνδειξη τοῦ βαττομέτρου P καί σχολιάστε τό ἀποτέλεσμα.

— Γιά κάθε τιμή τῆς ἀντιστάσεως τοῦ κιβωτίου ὑπολογίστε τήν τιμή τῆς σύνθετης ἀντιστάσεως καί τοῦ συντελεστῆ ἰσχῆς πού περιμένετε θεωρητικά. Συγκρίνετε τά ἀποτελέσματα μέ τίς τιμές πού προσδιορίσατε στήν προηγούμενη διαδικασία.

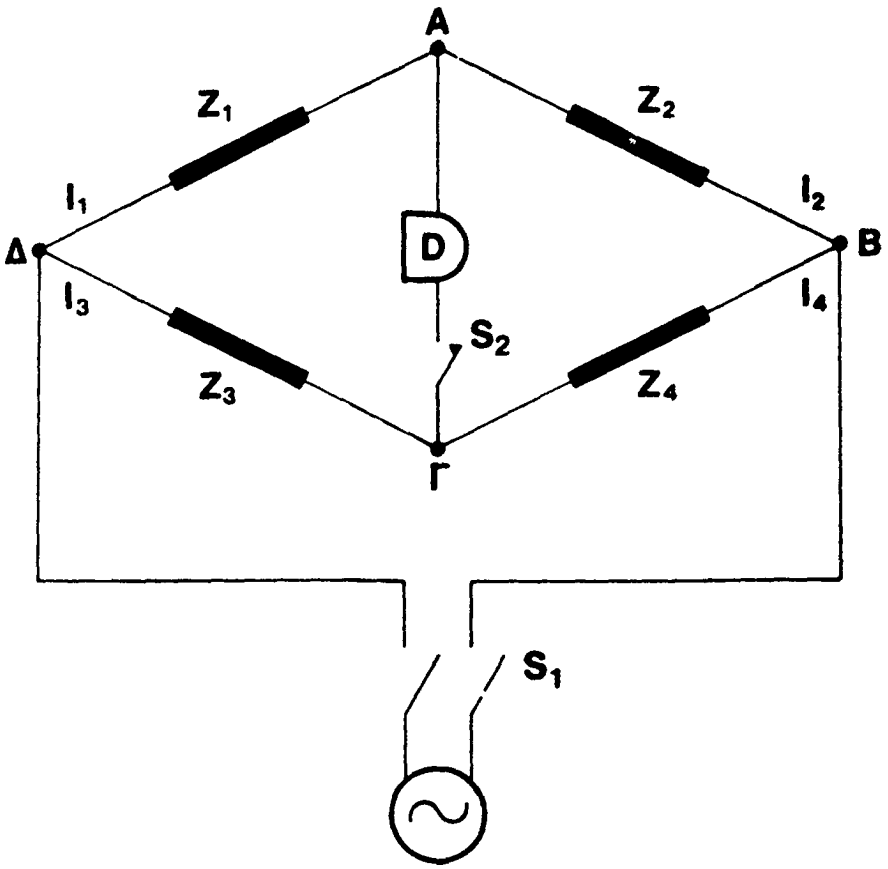
Ἴσως πρέπει νά σημειωθεῖ ὅτι ἀπό γενικώτερη ἄποψη τό ἡλεκτροδυναμόμετρο, πού σέ μιά σημαντική του χρήση μελετήσαμε ὡς ὄργανο μετρήσεως ἰσχῆς, μπορεῖ νά ἀναχθεῖ σέ ὄργανο μετρήσεως τοῦ γινομένου δύο φυσικῶν μεγεθῶν. Μέ ἄλλα λόγια, ἡ ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου εἶναι ἀνάλογη πρός τό γινόμενο τοῦ δυναμικοῦ πού ἐφαρμόζεται στά ἄκρα τοῦ κινητοῦ πλαισίου ἐπί τό ρεῦμα πού διαρρέει τά σταθερά πηνία. Ἄν τό δυναμικό καί τό ρεῦμα ἀφοροῦν τό ἴδιο ἐξάρτημα τότε ὅπως εἴδαμε ἡ ἔνδειξη ἀντιπροσωπεύει τήν ἰσχή πού καταναλώνεται στό ἐξάρτημα. Ἄν ὅμως ἡ προέλευση τοῦ δυναμικοῦ καί τοῦ ρεύματος εἶναι διάφορη καί ἐπιπλέον ἀντίστοιχα ἀνάλογη πρός δύο φυσικά μεγέθη A καί B, τότε ἡ ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου εἶναι ἀνάλογη πρός τό φυσικό μέγεθος A·B. Πολλά ἐξειδικευμένα ὄργανα πού βασίζονται στήν ἰδιότητα αὐτή τοῦ ἡλεκτροδυναμομέτρου χρησιμοποιοῦνται σήμερα στή βιομηχανία. Ἄν π.χ. στά σταθερά πηνία ἑνός ἡλεκτροδυναμομέτρου διοχετευτεῖ τό ρεῦμα ἑνός ἐξαρτήματος ἐνῶ στό κινητό πηνίο ἐφαρμοστεῖ ἡ διαφορά δυναμικοῦ μετατοπισμένη κατά φάση 90°, ἡ ἔνδειξη τοῦ ὀργάνου εἶναι ἀνάλογη πρός τήν *ἄεργο ἰσχή* πού χαρακτηρίζει τό ἐξάρτημα. Γιά τήν λεπτομερέστερη περιγραφή παρόμοιων ὀργάνων ὁ ἐνδιαφερόμενος ἀναγνώστης παραπέμπεται σέ περισσότερο ἐξειδικευμένα συγγράμματα ἡλεκτρικῶν μετρήσεων.

15-3 Γέφυρες ΕΡ

Οἱ μέθοδοι μηδενισμοῦ πού μελετήσαμε στό Κεφάλαιο 8 βρίσκουν ἰδιαίτερη ἐφαρμογή στό ΕΡ γιά τή μέτρηση μιᾶς πληθώρας φυσικῶν μεγεθῶν. Ἡ γενική διάταξη μηδενισμοῦ, πού θυμίζει ἔντονα τή γέφυρα Wheatstone στό ΣΡ, δίνεται στό σχῆμα 15-11. Οἱ τέσσερις κλάδοι τῆς γέφυρας δημιουργοῦνται ἀπό τέσσερις σύνθετες ἀντιστάσεις πού τροφοδοτοῦνται ἀπό πηγή ΕΡ. Μεταξύ τῶν σημείων A καί Γ ἔχει τοποθετηθεῖ ἕνας ἀνιχνευτής μηδενισμοῦ τοῦ ρεύματος.

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τῆς γέφυρας μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ τήν ἴδια μέθοδο πού χρησιμοποιήθηκε στό ΣΡ. Ἄν ὁ κλάδος τοῦ ἀνιχνευτῆ δέν διαρ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 15-11 Γενική διάταξη γέφυρας ΕΡ.

ρέεται άπό ρεῦμα τά σημεῖα Α καί Γ βρίσκονται στό ἴδιο δυναμικό. Μποροῦμε ἐπομένως νά γράψουμε γιά τά ρεύματα τῶν τεσσάρων κλάδων τίς σχέσεις

$$I_1 = I_2 \qquad (15.15\alpha)$$

καί

$$I_3 = I_4. \qquad (15.15\beta)$$

Ἐξάλλου ἡ ταύτιση τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ τῶν σημείων Α καί Γ ἀπό τούς δύο κόμβους Β καί Δ τῆς γέφυρας ὁδηγεῖ στίς σχέσεις

$$I_1Z_1 = I_1Z_2 \qquad (15.16\alpha)$$

καί

$$I_3Z_3 = I_3Z_4. \qquad (15.16\beta)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀπαλειφή τῶν ρευμάτων ἀπό τίς ἐξ. (15.15) καί (15.16) δίνει τή συνθήκη ἰσορροπίας

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \tag{15.17}$$

ἤ

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 \tag{15.18}$$

ὅπου γιά τήν ἀναπαράσταση τῶν σύνθετων ἀντιστάσεων ἔχουν χρησιμοποιηθεῖ οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί Z_1, Z_2, Z_3 καί Z_4. Ἀναλυτικότερα μποροῦμε νά γράψουμε γιά κάθε σύνθετη ἀντίσταση

$$Z_K = R_K + iX_K \tag{15.19}$$

ὅπου R_K εἶναι ἡ καθαρά ὡμική ἀντίσταση καί X_K τό φανταστικό μέρος τῆς σύνθετης ἀντιστάσεως. Στό συμβολισμό αὐτό ἡ ἐξ. (15.18) παίρνει τή μορφή

$$(R_1 + iX_1)(R_4 + iX_4) = (R_2 + iX_2)(R_3 + iX_3)$$

ἤ

$$(R_1R_4 - X_1X_4) + i(R_4X_1 + R_1X_4) = (R_2R_3 - X_2X_3) + i(R_2X_3 + R_3X_2)$$

ἡ ὁποία, ἐξισώνοντας πραγματικά καί φανταστικά μέλη, ὁδηγεῖ στίς συνθῆκες ἰσορροπίας τῆς γέφυρας

$$R_1R_4 - X_1X_4 = R_2R_3 - X_2X_3 \tag{15.20α}$$

$$R_4X_1 + R_1X_4 = R_2X_3 + R_3X_2. \tag{15.20β}$$

Οἱ δύο προηγούμενες σχέσεις ἐπιτρέπουν τόν προσδιορισμό δύο ἀγνώστων μεγεθῶν ἄν τά μεγέθη ὅλων τῶν ἄλλων ἐξαρτημάτων πού συγκροτοῦν τίς τέσσερις σύνθετες ἀντιστάσεις τῆς γέφυρας εἶναι γνωστά. Τοῦτο εἶναι εὐτυχές καθόσον ὅπως εἴδαμε στήν Παράγραφο 14-6, ἡ σύνθετη ἀντίσταση ρεαλιστικῶν ἐξαρτημάτων χαρακτηρίζεται ἀπό δύο κυρίως μεγέθη (ρεαλιστικοί πυκνωτές ἀπό χωρητικότητα καί ὡμική ἀντίσταση, ρεαλιστικά ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς ἀπό ἐπαγωγή καί ὡμική ἀντίσταση). Ἔτσι γέφυρες ΕΡ ἔχουν τή δυνατότητα ὄχι ἁπλῶς νά μετρήσουν ἕνα φυσικό μέ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γεθος άλλά νά προσδιορίσουν πλήρως τά χαρακτηριστικά ένός ρεαλιστικοῦ έξαρτήματος. Θά έχουμε στή συνέχεια τήν εύκαιρία νά μελετήσουμε μέ κάποια λεπτομέρεια είδικές γέφυρες ΕΡ μέ σκοπό τή μέτρηση τῆς χωρητικότητας, αὐτεπαγωγῆς καί άμοιβαίας έπαγωγῆς. Προηγουμένως ὅμως εἶναι χρήσιμο νά έξετάσουμε τίς διατάξεις πού μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν ὡς άνιχνευτές τῆς ἰσορροπίας σέ γέφυρες ΕΡ.

Ἡ άνάγκη ένός όργάνου μέ μεγάλη εύαισθησία όδήγησε στό ΣΡ στήν άνάπτυξη τοῦ γαλβανομέτρου D' Arsonval πού άποτελεῖ έκλεπτισμένη μορφή τοῦ όργάνου κινητοῦ πλαισίου μέ μόνιμο μαγνήτη. Τό άντίστοιχο όργανο στό ΕΡ εἶναι τό **ήλεκτροδυναμικό γαλβανόμετρο** πού χρησιμοποιεῖ τή διάταξη τοῦ σχήματος 15-1 γιά τή δημιουργία τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Γιά μεγαλύτερη αὔξηση τῆς εύαισθησίας συνήθως τό κινητό πηνίο περιέχει πυρήνα άπό σιδηρομαγνητικό ὑλικό πού πολλαπλασιάζει τή μαγνητική του ροπή. Ἄν καί ή προσθήκη αὐτή καταστρέφει τήν άπλή έξάρτηση τῆς άποκλίσεως άπό τό τετράγωνο τοῦ ρεύματος, τό όργανο μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς ἕνας έξαιρετικά εύαίσθητος άνιχνευτής μηδενισμοῦ, ὅπου ή γραμμικότητα ἤ ή άπόλυτη βαθμονόμηση δέν έπηρεάζουν τή χρησιμότητά του. Ἐναλλακτικά, σέ συχνότητες μεταξύ 100 Hz καί 5 kHz τό **τηλεφωνικό άκουστικό** άποτελεῖ ἕνα έξαιρετικά εὔχρηστο καί εύαίσθητο άνιχνευτή μηδενισμοῦ. Στήν περιοχή τῶν 1000 Hz, ὅπου ή άνθρώπινη άκοή έμφανίζει τή μέγιστη εύαισθησία, ἕνα τηλεφωνικό άκουστικό μπορεῖ νά άνιχνεύσει διαφορά δυναμικοῦ τῆς τάξης τῶν 10^{-6} V. Καθόσον στά πειράματα πού άκολουθοῦν τό τηλεφωνικό άκουστικό θά χρησιμοποιηθεῖ έκτεταμένα, θά άπεικονίσουμε έφεξῆς στά σχεδιαγράμματα γεφυρῶν ΕΡ τόν άνιχνευτή μηδενισμοῦ μέ τό σύμβολο τηλεφωνικοῦ άκουστικοῦ.

15-4 Μέτρηση Χωρητικότητας

Μιά έξαιρετικά άπλή γέφυρα ΕΡ πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή μέτρηση τῶν χαρακτηριστικῶν ένός πυκνωτῆ δίνεται στό σχῆμα 15-12. Ἡ διάταξη συγκρίνει ἕνα πυκνωτή μέ ἄγνωστη χωρητικότητα C_x καί ἄγνωστη άντίσταση διαρροῆς R_x πρός ἕνα πρότυπο έξάρτημα μέ άντίστοιχα γνωστά μεγέθη C_2 καί R_2. Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τῆς γέφυρας, πού στή βιβλιογραφία άπαντᾶται μέ τήν όνομασία **γέφυρα Wien**, μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ τή βοήθεια τῶν ἐξ. (15.20), πού στήν περίπτωση αὐτή παίρνουν τή μορφή (γιά $X_1 = X_3 = 0$)

$$R_1R_x = R_2R_3 \qquad (15.21α)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί

$$R_1 X_x = R_3 X_2 \quad . \tag{15.21β}$$

ὅπου

$$X_2 = \frac{1}{\omega C_2} \tag{15.22α}$$

καί

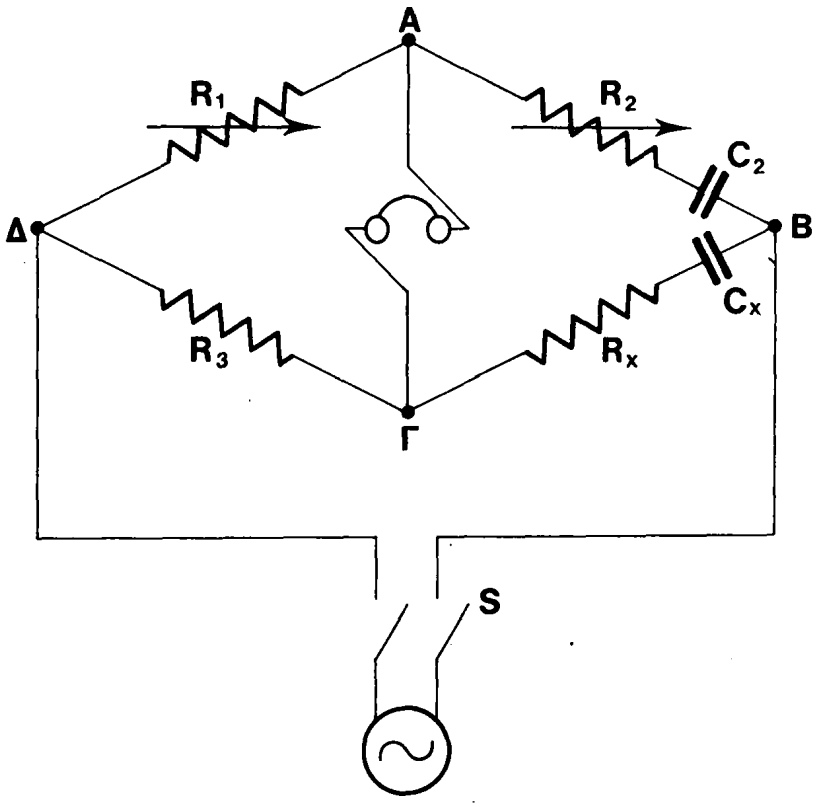
$$X_x = \frac{1}{\omega C_x} \quad . \tag{15.22β}$$

Ὁ συνδιασμός τῶν τελευταίων ἐξισώσεων προσδιορίζει τά ἄγνωστα μεγέθη τοῦ ἐξαρτήματος στόν τέταρτο κλάδο τῆς γέφυρας ὡς

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} \tag{15.23α}$$

καί

$$C_x = C_2 \frac{R_1}{R_3} \quad . \tag{15.23β}$$



ΣΧΗΜΑ 15-12 Ἡ γέφυρα Wien γιά τή μέτρηση χωρητικότητας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Όπως σέ κάθε γέφυρα ΕΡ ή κατάσταση ισορροπίας άπαιτεῖ τήν ταυτόχρονη ικανοποίηση δύο συνθηκῶν. Τοῦτο, ὅπως φαίνεται άπό τίς ἐξ. (15.23), όδηγεῖ στόν προσδιορισμό δύο φυσικῶν μεγεθῶν πού χαρακτηρίζουν τό ἄγνωστο ἐξάρτημα. Ἀπό πειραματική ἄποψη τοῦτο μπορεῖ νά ἐπιτευχθεῖ μέ τή σταδιακή μεταβολή δύο μεγεθῶν ὅπως περιγράφεται στή διαδικασία τοῦ ἐπόμενου πειράματος.

ΠΕΙΡΑΜΑ 15-5. ΜΕΤΡΗΣΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΤΗ ΓΕΦΥΡΑ WIEN

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-12. Χρησιμοποιεῖστε δύο κιβώτια άντιστάσεων R_1 (μέ όλική άντίσταση 10 kΩ) καί R_2 (μέ όλική άντίσταση 1 kΩ), μιά πρότυπη άντίσταση $R_3 = 5$ kΩ καί ἕνα πρότυπο πυκνωτή $C_2 = 1$ μF. Στόν τέταρτο κλάδο συνδέστε τόν ἄγνωστο πυκνωτή πού θά σᾶς δοθεῖ.

– Ρυθμίστε τή γεννήτρια σέ συχνότητα $\nu = 1$ kHz καί τό κιβώτιο άντιστάσεων R_2 γιά μηδενική άντίσταση. Κλεῖστε τό διακόπτη S καί παρατηρεῖστε τήν ἔνταση τοῦ ἤχου στά ἀκουστικά. Ρυθμίστε τήν άντίσταση R_1 ὥστε νά ἐπιτύχετε τήν ἐλάχιστη ἔνταση ἤχου. Ἡ κατάσταση αὐτή δέν άποτελεῖ ισορροπία τῆς γέφυρας, καθόσον μέ καταβολή μόνο ἑνός φυσικοῦ μεγέθους δέν εἶναι δυνατόν νά ικανοποιήσετε καί τίς δύο συνθῆκες τῶν ἐξ. (15.23).

– Ρυθμίστε τήν άντίσταση R_2 ὥστε νά ἐπιτύχετε ἕνα νέο ἐλάχιστο στόν ἦχο τῶν ἀκουστικῶν. Συνεχίστε τή διεργασία ρυθμίζοντας ἐναλλάξ τίς άντιστάσεις R_1 καί R_2 ἔτσι ὥστε τά ἀκουστικά νά σιγήσουν τελείως†. Ἡ κατάσταση αὐτή άποτελεῖ τήν κατάσταση ισορροπίας τῆς γέφυρας.

– Χρησιμοποιώντας τίς ἐνδείξεις τῶν κιβωτίων άντιστάσεων καί τά λοιπά στοιχεῖα τῆς γέφυρας ὑπολογίστε τά φυσικά μεγέθη R_x καί C_x τοῦ ἐξαρτήματος πού σᾶς δόθηκε. Προσδιορίστε τό ἔλλειμμα φάσης δ [βλ. ἐξ. (14.95), (14.97)] καί τό συντελεστή Q [βλ. ἐξ. (14.102)] πού άξιολογοῦν τό ἐξάρτημα.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά ὅλα τά ἄγνωστα ἐξαρτήματα πού θά σᾶς δοθοῦν.

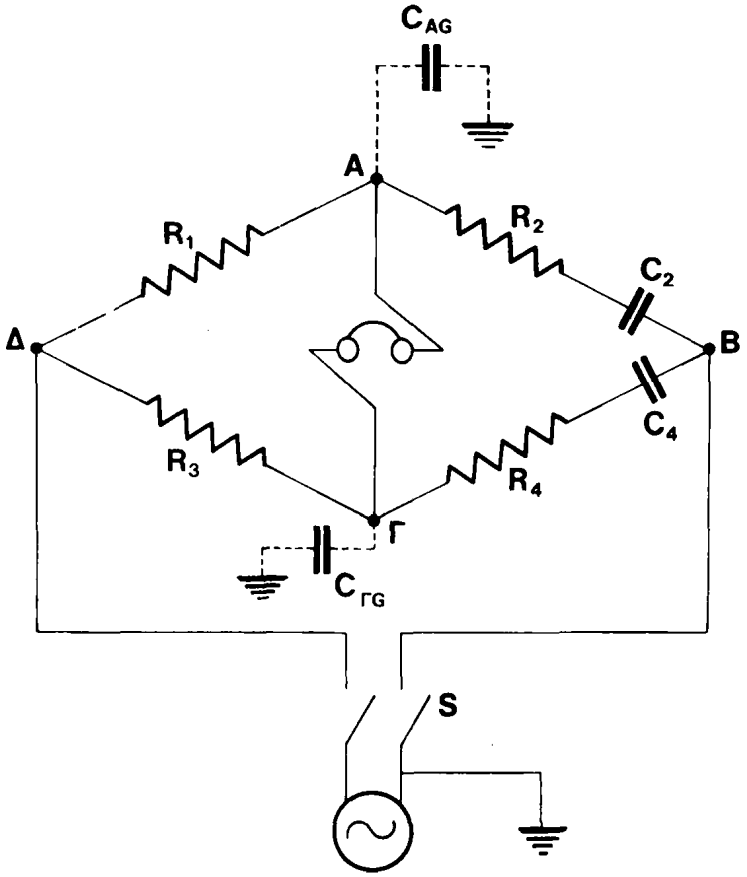
Μιά πηγή σφάλματος, ἡ ὁποία μπορεῖ νά ἐπηρεάσει σημαντικά τήν πιστότητα τῆς μετρήσεως σέ γέφυρες ΕΡ, άποτελεῖ ἡ χωρητικότητα πού ἐν-

† Ἡ τέλεια ἐξάληψη τοῦ ἤχου ἐνδεχομένως νά μήν εἶναι ἐφικτή μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 15-12. Τοῦτο ὀφείλεται σέ ἐλλειπή γείωση τῆς γέφυρας. Θά ἐπανέλθουμε στό σημεῖο αὐτό στή συνέχεια.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δεχομένως δημιουργεῖται μεταξύ τῶν ἐξαρτημάτων ἤ μεταξύ ἐξαρτημάτων καί γῆς. Παρόμοιες τυχαῖες χωρητικότητες μπορεῖ σέ ὁρισμένες περιπτώσεις νά εἶναι συγκρίσιμες πρός τά μεγέθη πού συγκροτοῦν τή γέφυρα, ὁπότε γιά τήν ἐξασφάλιση τῆς ἰσορροπίας εἴτε θά πρέπει νά συνυπολογιστοῦν εἴτε ἡ ἐπίδρασή τους νά ἀντισταθμιστεῖ. Καθόσον τυχαῖες χωρητικότητες μεταξύ τῶν ἐξαρτημάτων εἶναι κατά πολύ ἄγνωστες συνήθως ἐπιλέγεται ὁ δεύτερος τρόπος ἐξαλείψεως τοῦ σφάλματος.

Ἰδιαίτερα σημαντικό σφάλμα μπορεῖ νά εἰσάγει στή μέτρηση ἡ χωρητικότητα μεταξύ τῶν σημείων τῆς γέφυρας ὅπου συνδέεται ὁ ἀνιχνευτής καί τῆς γῆς. Ἄν ὁ ἕνας ἀκροδέκτης τῆς παλμογεννήτριας εἶναι γειωμένος, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 15-13, τότε ἡ χωρητικότητα C_{AG} πού ἐμφανίζει ὁ κόμβος Α πρός τή γῆ βρίσκεται σέ παράλληλη σύνδεση μέ τόν πυκνωτή C_2. Κατά τόν ἴδιο τρόπο, παράλληλα μέ τόν πυκνωτή C_4, ὁ κόμβος Γ ἐμφανίζει χωρητικότητα $C_{ΓG}$ ὡς πρός τή γῆ, ἡ ὁποία γενικά διαφέρει ἀπό τή χωρητικότητα C_{AG}. Ἄν ὁ λόγος τῶν δύο τυχαίων χωρητικοτήτων δέν συμπίπτει μέ τό



ΣΧΗΜΑ 15-13 Γείωση τῆς γέφυρας Wien καί τυχαία χωρητικότητα τοῦ ἀνιχνευτῆ ὡς πρός τή γῆ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

λόγο C_2/C_4, ή κατάσταση ισορροπίας της γέφυρας θά διαφέρει άπό αύτή πού προβλέπουν οί έξ. (15.23) καί τό σφάλμα στή μέτρηση μπορεί νά είναι σημαντικό.

Ή άνωμαλία πού είσάγεται μέ τή μέθοδο γειώσεως τοῦ σχήματος 15-13 μπορεί νά έξαλειφθεί μέ τή διακοπή της γειώσεως στόν άκροδέκτη της γεννήτριας καί τήν προσθήκη δύο έναλλακτικῶν κλάδων πού στήν ούσία τοποθετοῦν τούς ρόμβους Α καί Γ στό δυναμικό της γῆς. Ή συνδεσμολογία, πού συνήθως άναφέρεται ώς **γείωση Wagner,** περιέχεται στό σχήμα 15-14. Τό κύκλωμα είναι ή γέφυρα Wien τοῦ σχήματος 15-12 μέ δύο βοηθητικούς κλάδους, τῶν όποίων τό μέσον έχει γειωθεί. Ή διεργασία ισορροπίσεως της γέφυρας μέ τή γείωση Wagner περιγράφεται στό έπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 15-6. ΓΕΙΩΣΗ WAGNER ΣΕ ΓΕΦΥΡΑ WIEN

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-14. Γιά τή συγκρότηση της γέφυρας Wien χρησιμοποιεῖστε τά έξαρτήματα πού περιγράφονται στό Πείραμα 15-5. Χρησιμοποιεῖστε άκόμη γιά τούς βοηθητικούς κλάδους ένα πρότυπο πυκνωτή μέ χωρητικότητα $C_w = 5\ \mu F$ καί ένα κιβώτιο άντιστάσεων R_w.

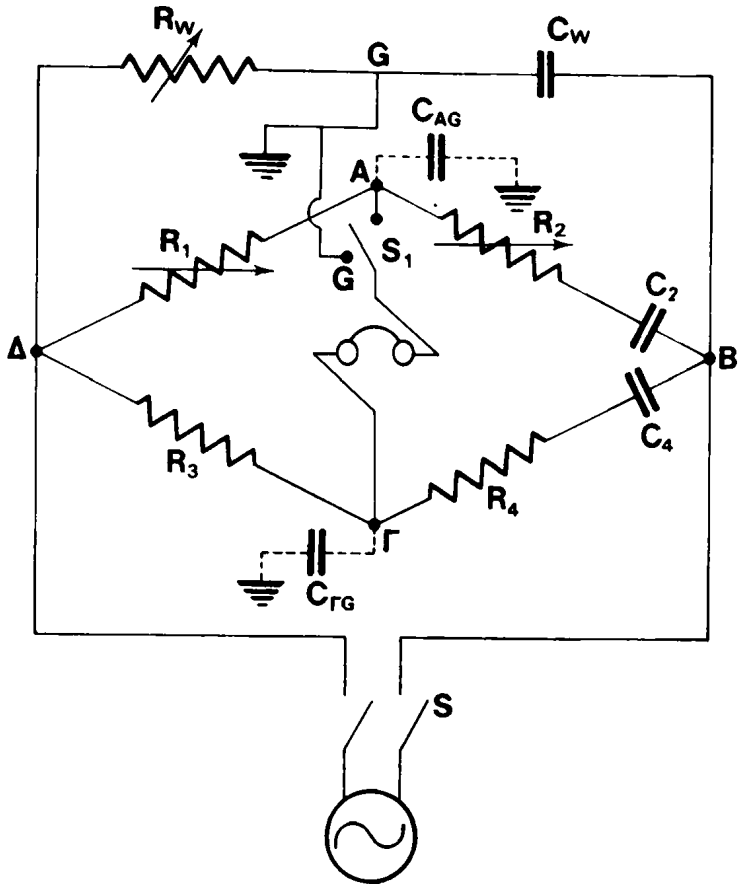
– Ρυθμίστε τήν παλμογεννήτρια σέ συχνότητα 1 kHz καί κλείστε τό διακόπτη S. Κλείστε τό διακόπτη S_1 στή θέση Α καί άκολουθώντας τή διαδικασία τοῦ Πειράματος 15-5 ισορροπεῖστε τή γέφυρα. Μεταθέστε τό διακόπτη S_1 στή θέση G καί μεταβάλλοντας τήν άντίσταση R_w προσδιορίστε τό έλάχιστο στήν ένταση τοῦ ήχου πού έκπέμπεται άπό τά άκουστικά.

– Έπαναλάβετε τήν προηγούμενη διαδικασία μεταθέτοντας διαδοχικά τό διακόπτη S_1 μεταξύ τῶν θέσεων Α καί G καί ρυθμίζοντας άντίστοιχα τίς άντιστάσεις R_1, R_2 καί R_w μέχρις ότου έξαλειφθεί τελείως ό ήχος τῶν άκουστικῶν. Δεῖξτε ότι στήν κατάσταση αύτή τά σημεία Α καί Γ βρίσκονται όχι άπλῶς στό ίδιο δυναμικό, άλλά καί στό δυναμικό της γῆς.

– Άπό τή συνθήκη ισορροπίας τῶν έξ. (15.23) ύπολογίστε τά άγνωστα μεγέθη C_x (= C_4) καί R_x (= R_4) τοῦ έξαρτήματος στόν τέταρτο κλάδο της γέφυρας. Άν έχετε έκτελέσει τό Πείραμα 15-5 μέ τή γέφυρα Wien χωρίς τή γείωση Wagner συγκρίνετε καί σχολιάστε τά δύο άποτελέσματα.

– Έπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά όλα τά άγνωστα έξαρτήματα πού θά σᾶς δοθοῦν.

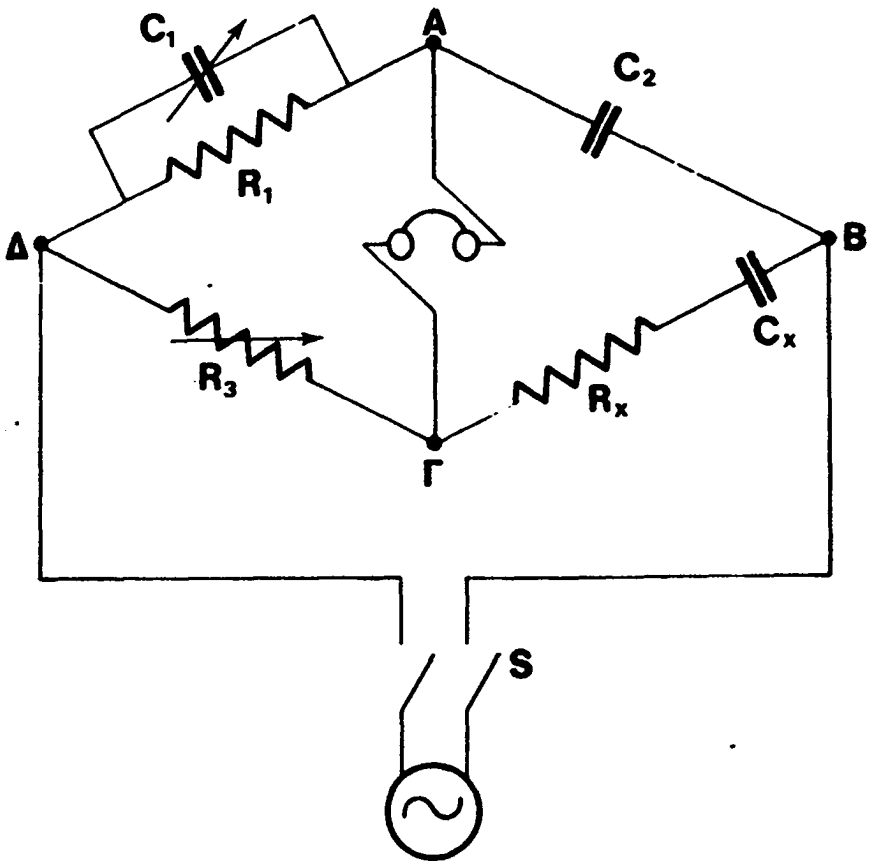
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 15-14 Γείωση Wagner σέ γέφυρα Wien.

Ἡ γέφυρα Wien πού μελετήσαμε στά δύο προηγούμενα πειράματα μετρᾶ τά ἄγνωστα στοιχεῖα C_x καί R_x συγκρίνοντας τό ἐξάρτημα μέ ἕνα πρότυπο πυκνωτή C_3. Καθόσον ὁ πυκνωτής C_3 εἶναι συνήθως ἕνα πρότυπο ἐξάρτημα ὑψηλῆς ποιότητας, ἀναμένεται ὅτι ἡ ἀντίστασή του θά εἶναι πολύ μικρότερη ἀπό τή χαρακτηριστική ἀντίσταση R_x τοῦ ἄγνωστου πυκνωτῆ. Ἔτσι ἀναμένεται ὅτι ἡ κατάσταση ἰσορροπίας τῆς γέφυρας θά ἐπιτευχθεῖ μέ προσθήκη κάποιας ἀντιστάσεως R_3 σέ σειρά μέ τόν πυκνωτή C_3. Ἄν ἡ ἰσορρόπιση τῆς γέφυρας δέν εἶναι δυνατή ἀκόμη καί γιά $R_3 = 0$ τότε ἡ ἀντίσταση R_x εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ἀντίσταση τοῦ πρότυπου πυκνωτῆ καί ἡ κατάσταση ἰσορροπίας μπορεῖ νά ἐπιτευχθεῖ μόνο μέ προσθήκη κάποιας ἀντιστάσεως στόν κλάδο πού περιέχει τό ἄγνωστο ἐξάρτημα. Ἐναλλακτικά μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή μέτρηση ἡ **γέφυρα Shering** πού περιέχεται στό σχῆμα 15-15 καί ἀποτελεῖ γενικώτερα ἐναλλακτική μέθοδο γιά τή μέτρηση χωρητικότητας. Στό κύκλωμα αὐτό ἕνα ἐξάρτημα μέ ἄγνωστα στοιχεῖα R_x καί C_x συγκρίνεται πρός ἕνα πρότυπο πυκνωτή C_2 ἐνῶ ἡ ἰσορροπία ἐπιτυγχάνεται μέ τή μεταβολή τῆς ἀντιστάσεως R_3 καί τοῦ πυκνωτῆ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 15-15 Ἡ γέφυρα Shering γιά τή μέτρηση χωρητικότητας.

C_1 πού συνδέεται στόν κλάδο 1 παράλληλα πρός μιά πρότυπη ἀντίσταση R_1.

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τῆς γέφυρας Shering μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ τή βοήθεια τῶν γενικῶν ἐξ. (15.20). Στή συγκεκριμένη περίπτωση οἱ σύνθετες ἀντιστάσεις τῶν τεσσάρων κλάδων τῆς γέφυρας ἔχουν τίς τιμές

$$Z_2 = -i\frac{1}{\omega C_2} \qquad (15.24\alpha)$$

$$Z_3 = R_3 \qquad (15.24\beta)$$

$$Z_x = R_x - i\frac{1}{\omega C_x} \qquad (15.24\gamma)$$

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + i\omega C_1 \qquad (15.24\delta)$$

πού ἀπό τή συνθήκη τῆς ἐξ. (15.18)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$Z_x = \frac{Z_2 Z_3}{Z_1}$$

δίνουν

$$R_x - i\frac{1}{\omega C_x} = -i\,\frac{R_3}{\omega C_2}\left(\frac{1}{R_1} + i\omega C_1\right)$$

ή

$$R_x - i\frac{1}{\omega C_x} = \frac{R_3 C_1}{C_2} - i\,\frac{R_3}{\omega R_1 C_2}\,. \qquad (15.25)$$

Έξισώνοντας στήν τελευταία σχέση πραγματικά καί φανταστικά μέρη οί δύο συνθῆκες γιά τήν ἰσορροπία τῆς γέφυρας Shering πού προκύπτουν εἶναι

$$R_x = R_3\,\frac{C_1}{C_2} \qquad (15.26\alpha)$$

καί

$$C_x = C_2\,\frac{R_1}{R_3}\,. \qquad (15.26\beta)$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 15-7. ΜΕΤΡΗΣΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΤΗ ΓΕΦΥΡΑ SHERING

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-15. Χρησιμοποιεῖστε μιά πρότυπη ἀντίσταση $R_1 = 5\ \Omega$ καί ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων R_3 μέ διαβαθμίσεις ἕως 0.1 Ω. Χρησιμοποιεῖστε ἀκόμη ἕνα πρότυπο πυκνωτή μέ χωρητικότητα $C_2 = 5\ \mu F$ καί ἕνα κιβώτιο πυκνωτῶν μέ διαβαθμίσεις ἕως 10 pF.

— Ἄν γνωρίζετε σέ τάξη μεγέθους τή χωρητικότητα τοῦ ἄγνωστου πυκνωτῆ C_x χρησιμοποιεῖστε τίς ἐξ. (15.16) γιά μιά πρώτη ἐκτίμηση τῆς τιμῆς τῶν μεταβλητῶν ἐξαρτημάτων τῆς γέφυρας (ἡ ἄγνωστη ἀντίσταση R_x πρέπει νά εἶναι τῆς τάξης τῶν μερικῶν ohm).

— Ρυθμίστε τή συχνότητα τῆς παλμογεννήτριας στήν τιμή $\nu = 1$ kHz καί κλεῖστε τό διακόπτη S. Ρυθμίζοντας ἐναλλάξ τή χωρητικότητα C_1 καί τήν ἀντίσταση R_3 προσδιορίστε τήν κατάσταση ἰσορροπίας τῆς γέφυρας καί τίς τιμές R_x καί C_x.

— Ἄν κατά τήν προηγούμενη διεργασία δέ στάθηκε δυνατόν νά ἐξαλείψετε τελείως τόν ἦχο πού ἐκπέμπουν τά ἀκουστικά, εἶναι πολύ πιθανόν ὅτι ἡ ἀτελής γείωση τῆς γέφυρας εἰσάγει τυχαῖες χωρητικότητες. Προσθέστε δύο βοηθητικούς κλάδους δημιουργώντας μιά γείωση Wagner

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

σύμφωνα μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-14 καί ἐπαναλάβετε τή διαδικασία τοῦ Πειράματος 15-6. Συγκρίνετε τίς τιμές R_x καί C_x πού προσδιορίζετε μέ καί χωρίς γείωση Wagner.
– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά ὅλα τά ἄγνωστα ἐξαρτήματα πού θά σᾶς δοθοῦν.

Ἡ γέφυρα Shering ἀποτελεῖ μιά ἀπό τίς πιό διαδεδομένες διατάξεις σέ μετρήσεις μεγεθῶν ΕΡ. Χρησιμοποιεῖται συχνά μέ διάφορες παραλλαγές σέ βιομηχανικά ἐργαστήρια γιά τή μέτρηση χωρητικότητας καί ἰδιαίτερα γιά τόν ἔλεγχο μονωτικῶν ὑλικῶν. Ἰδιαίτερα ἁπλός στή γέφυρα αὐτή εἶναι ὁ προσδιορισμός τοῦ συντελεστῆ ἰσχῆς πού ἀπό τήν ἐξ. (14.55) ἔχει τή μορφή

$$\cos\varphi = \frac{R_x}{Z_x} \tag{15.27}$$

ὅπου Z_x εἶναι τό μέτρο τῆς σύνθετης ἀντιστάσεως στήν ἐξ. (15.24γ)

$$Z_x = \sqrt{R_x^2 + \frac{1}{\omega^2 C_x^2}}\,. \tag{15.28}$$

Ἄν τό ἐξάρτημα ἐμφανίζει κατά κύριο λόγο χωρητικότητα, ἡ ἐξ. (15.27) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$\cos\varphi = \omega C_x R_x \tag{15.29}$$

πού μέ τή βοήθεια τῶν ἐξ. (15.26) παίρνει τή μορφή

$$\cos\varphi = \omega C_1 R_1. \tag{15.30}$$

Πέρα ἀπό τήν ἁπλή σχέση πού παρέχει ἡ γέφυρα Shering γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ συντελεστῆ ἰσχῆς, ἡ ἐξ. (15.30) ὑποδεικνύει καί μιά ἐνδιαφέρουσα δυνατότητα. Χρησιμοποιώντας τήν ἀναλογία μεταξύ συντελεστῆ ἰσχῆς καί τῆς χωρητικότητας C_1 μποροῦμε νά βαθμονομήσουμε ἀπευθείας τήν ἔνδειξη τοῦ μεταβλητοῦ πυκνωτῆ σέ τιμές cosφ καί νά μετατρέψουμε τή διάταξη τοῦ σχήματος 15-15 σέ συσκευή μετρήσεως τοῦ συντελεστῆ ἰσχῆς. Ἡ βαθμονόμηση αὐτή ἰσχύει βέβαια γιά μιά συγκεκριμένη συχνότητα ω_0. Ἡ ἀναγωγή σέ κάποια ἄλλη συχνότητα ω μπορεῖ νά γίνει μέ τό συντελεστή διορθώσεως ω/ω_0. Ἐναλλακτικά ἡ ἔνδειξη τοῦ μεταβλητοῦ πυ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κνωτῆ τῆς γέφυρας Sherίng μπορεῖ νά βαθμονομηθεῖ ὡς πρός τό ἔλλειμμα φάσης, πού ἀπό τήν ἐξ. (14.97) δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\tan\delta = \omega C_x R_x = \omega C_1 R_1. \qquad (15.31)$$

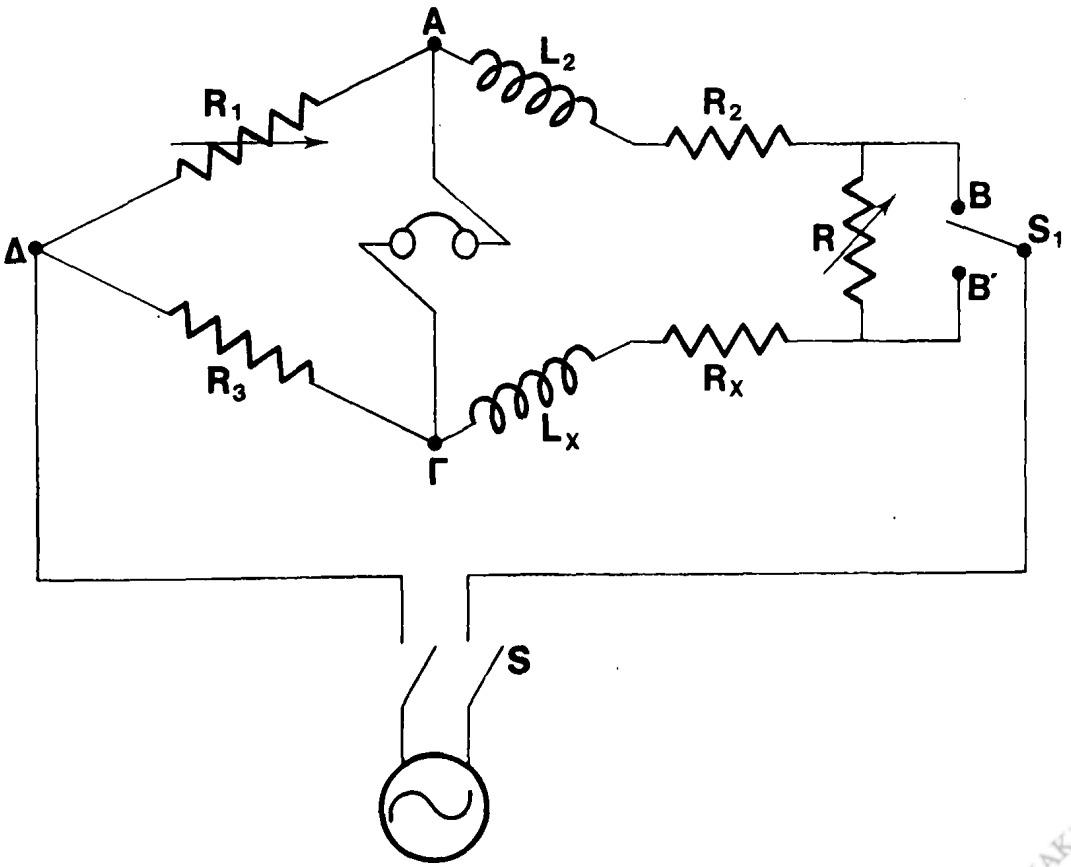
Γιά ἐξαρτήματα πού χαρακτηρίζονται κυρίως ἀπό χωρητικότητα ($\varphi \simeq -\pi/2$, $\delta \simeq 0$) ἰσχύει

$$\cos\varphi \simeq \tan\delta \qquad (15.32)$$

καί οἱ δύο βαθμονομήσεις σχεδόν συμπίπτουν.

15-5 Μέτρηση Αὐτεπαγωγῆς

Τό σχῆμα 15-16 περιέχει τήν ἁπλούστερη μέθοδο γιά τή μέτρηση τοῦ συντελεστῆ αὐτεπαγωγῆς ἑνός ἐξαρτήματος. Ὅπως στήν περίπτωση τῆς γέφυρας Wien τό ἄγνωστο ἐξάρτημα συγκρίνεται μέ ἕνα πρότυπο ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς καί ἡ κατάσταση ἰσορροπίας ἐπιτυγχάνεται μέ σταδιακή μεταβο-



ΣΧΗΜΑ 15-16 Γέφυρα ΕΡ γιά τή μέτρηση συντελεστῆ αὐτεπαγωγῆς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

λή δύο ἀντιστάσεων. Στή διάταξη τοῦ σχήματος 15-16 ἡ μία μεταβλητή ἀντίσταση ἔχει τοποθετηθεῖ στόν πρῶτο κλάδο τῆς γέφυρας. Ἡ δεύτερη, μέ τή βοήθεια τοῦ διακόπτη S_1 μπορεῖ νά τοποθετηθεῖ σέ σειρά εἴτε μέ τό πρότυπο ἐξάρτημα στό δεύτερο κλάδο εἴτε μέ τό ἄγνωστο ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς στόν τέταρτο.

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό τίς γενικές ἐξισώσεις (15.20). Στή συγκεκριμένη περίπτωση οἱ σύνθετες ἀντιστάσεις τῶν τεσσάρων κλάδων εἶναι

$$Z_1 = R_1 \tag{15.33α}$$

$$Z_2 = R_2 + i\omega L_2 \quad \text{ἤ} \quad Z_2 = R + R_2 + i\omega L_2 \tag{15.33β}$$

$$Z_3 = R_3 \tag{15.33γ}$$

$$Z_x = R + R_x + i\omega L_x \quad \text{ἤ} \quad Z_x = R_x + i\omega L_x \tag{15.33δ}$$

γιά τίς ὁποῖες οἱ ἐξ. (15.20) δίνουν

$$L_x = \frac{R_3}{R_1} L_2 \tag{15.34α}$$

καί

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} - R \quad \text{ἤ} \quad R_x = \frac{R_3}{R_1}(R_2 + R) \tag{15.34β}$$

ὅπου ἡ δεύτερη συνθήκη ἀντιπροσωπεύει ἀντίστοιχα τίς δύο ἐναλλακτικές θέσεις Β καί Β′ τοῦ διακόπτη S_1.

ΠΕΙΡΑΜΑ 15-8. ΜΕΤΡΗΣΗ ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΡΟΣ ΠΡΟΤΥΠΟ ΕΞΑΡΤΗΜΑ

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-16. Χρησιμοποιεῖστε μιά πρότυπη ἀντίσταση $R_3 = 10\ \Omega$, ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων R_1 μέ διαβαθμίσεις ἕως 0.1 Ω καί ἕνα πρότυπο ἐξάρτημα μέ συντελεστή αὐτεπαγωγῆς L_2 περίπου 50 mH.

– Μέ ἕνα ὠμόμετρο μετρεῖστε τήν ὠμική ἀντίσταση R_2 τοῦ πρότυπου ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς καί τήν ὠμική ἀντίσταση R_x τοῦ ἀγνώστου ἐξαρτήματος πού σᾶς δόθηκε. Τοποθετεῖστε ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων R στόν κλάδο τοῦ ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς πού περιέχει τή μικρότερη ὠμική ἀντί-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σταση (δέν εἶναι ἀνάγκη νά χρησιμοποιήσετε τό διακόπτη S_1). Ρυθμίστε τήν ἀντίσταση R στήν τιμή R = 0.

– Ἀναπτύξτε στήν παλμογεννήτρια συχνότητα ν = 1 kHz καί κλεῖστε τό διακόπτη S. Ρυθμίστε τήν ἀντίσταση R_1 ὥστε ἡ ἔνταση τοῦ ἤχου πού ἐκπέμπουν τά ἀκουστικά νά γίνει ἐλάχιστη. Αὐξεῖστε τήν ἀντίσταση R ὥστε νά ἐπιτύχετε ἕνα νέο ἐλάχιστο στήν ἔνταση τοῦ ἤχου τῶν ἀκουστικῶν. Συνεχίστε τήν ἐναλλάξ ρύθμιση τῶν ἀντιστάσεων R_1 καί R μέχρις ὅτου σιγήσουν τελείως τά ἀκουστικά. Ἀπό τήν ἐξ. (15.34α) προσδιορίστε τό συντελεστή αὐτεπαγωγῆς L_x τοῦ ἄγνωστου ἐξαρτήματος. Χρησιμοποιώντας τήν ἐξ. (15.34β) πού ἁρμόζει στό κύκλωμά σας προσδιορίστε τήν ἄγνωστη ὠμική του ἀντίσταση R_x. Ὑπολογίστε τό συντελεστή Q {βλ. ἐξ. (14.94)} πού ἀξιολογεῖ τό ἐξάρτημα.

– Ἄν κατά τήν προηγούμενη διεργασία δέ στάθηκε δυνατόν νά ἐξαλείψετε τελείως τόν ἦχο πού ἐκπέμπουν τά ἀκουστικά, εἶναι πολύ πιθανόν ὅτι ἡ ἀτελής γείωση τῆς γέφυρας εἰσάγει τυχαῖες χωρητικότητες. Προσθέστε δύο βοηθητικούς κλάδους δημιουργώντας μιά γείωση Wagner σύμφωνα μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-14 καί ἐπαναλάβετε τή διαδικασία τοῦ Πειράματος 15-6. Συγκρίνετε τίς τιμές L_x καί R_x πού προσδιορίζετε μέ καί χωρίς τή γείωση Wagner.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά ὅλα τά ἄγνωστα ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς πού θά σᾶς δοθοῦν.

Ὁ συντελεστής αὐτεπαγωγῆς ἑνός ἐξαρτήματος πού ἐμφανίζει κυρίως ἐπαγωγική ἀντίσταση μπορεῖ νά μετρηθεῖ ἐναλλακτικά μέ σύγκριση τῆς σύνθετης ἀντιστάσεως τοῦ ἐξαρτήματος πρός τή σύνθετη ἀντίσταση ἑνός πρότυπου πυκνωτῆ. Ἡ τελευταία σύγκριση ἐμφανίζει ὁρισμένα πλεονεκτήματα. Σέ ἀντίθεση μέ ἕνα πρότυπο ἐξάρτημα ἐπαγωγῆς, ὁ πυκνωτής δέν δημιουργεῖ μαγνητικό πεδίο στό χῶρο πού μπορεῖ νά προκαλέσει ἀλληλεπίδραση ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς μέ τό ἄγνωστο ἐξάρτημα. Ἐξάλλου πρότυποι πυκνωτές εἶναι φθηνότεροι, μικρότεροι σέ ὄγκο καί ἡ χωρητικότητά τους εἶναι συνήθως γνωστή μέ μεγαλύτερη ἀκρίβεια ἀπ' ὅτι ὁ συντελεστής αὐτεπαγωγῆς πρότυπων ἐξαρτημάτων ἐπαγωγῆς. Δύο γέφυρες πού μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά τό σκοπό αὐτό καί πού ἀντίστοιχα θυμίζουν τίς γέφυρες Wien καί Shering δίνονται στά σχήματα 15-17 καί 15-18.

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τῆς **γέφυρας Hay** πού δίνεται στό σχῆμα 15-17 μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀπό τίς γενικές ἐξισώσεις τῆς Παραγράφου 15-3. Οἱ τέσσερις σύνθετες ἀντιστάσεις πού συγκροτοῦν τή γέφυρα στήν περίπτωση αὐτή εἶναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$Z_1 = R_1 - j\frac{1}{\omega C_1} \qquad (15.35\alpha)$$

$$Z_2 = R_2 \qquad (15.35\beta)$$

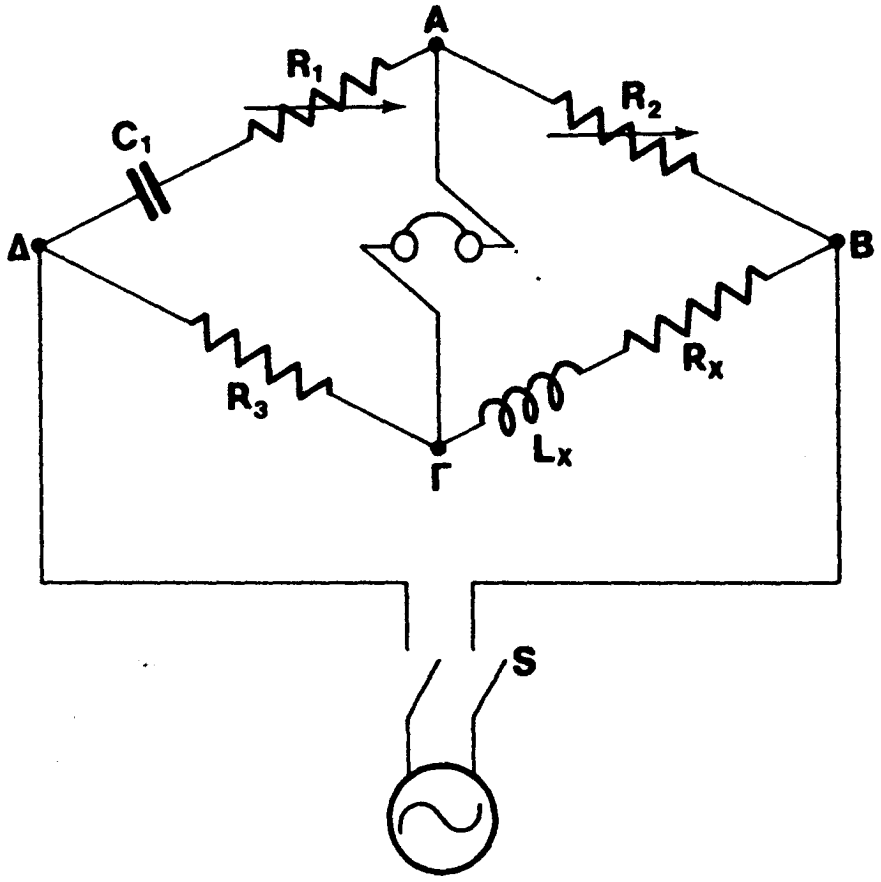
$$Z_3 = R_3 \qquad (15.35\gamma)$$

$$Z_x = R_x + j\omega L_x \qquad (15.35\delta)$$

γιά τίς όποίες οί έξ. (15.20) παίρνουν τή μορφή

$$R_1R_x + \frac{L_x}{C_1} = R_2R_3 \qquad (15.36\alpha)$$

$$\frac{R_x}{\omega C_1} - R_1\omega L_x = 0. \qquad (15.36\beta)$$



ΣΧΗΜΑ 15-17 Ή γέφυρα Hay γιά τή μέτρηση αύτεπαγωγής.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ό άναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά δείξει ὅτι ἐπίλυση τοῦ συστήματος ὡς πρός L_x καί R_x ὁδηγεῖ στίς τιμές

$$L_x = \frac{R_2R_3C_1}{1 + \omega^2R_1^2C_1^2} \tag{15.37α}$$

$$R_x = \frac{\omega^2R_1R_2R_3C_1^2}{1 + \omega^2R_1^2C_1^2} . \tag{15.37β}$$

Παρατηρεῖται ὅτι, σέ ἀντίθετη μέ τις γέφυρες ΕΡ πού μελετήσαμε ὡς τώρα, ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τῆς γέφυρας Hay ἐξαρτᾶται ἀπό τή συχνότητα. Ἔτσι, ἐκ πρώτης ὄψεως, ὁ προσδιορισμός τοῦ συντελεστῆ αὐτεπαγωγῆς ἀπαιτεῖ γνώση τῆς συχνότητας. Παρόλα αὐτά εἶναι δυνατόν νά δείξουμε ὅτι γιά ἐξαρτήματα πού κατά κύριο λόγο ἐμφανίζουν ἐπαγωγική ἀντίσταση ἡ ἀκριβής γνώση τῆς συχνότητας δέν ἀποτελεῖ καθοριστικό παράγοντα. Ὁ συντελεστής Q {βλ. ἐξ. (14.94)} πού ἀξιολογεῖ τό ἐξάρτημα

$$Q = \frac{\omega L_x}{R_x} \tag{15.38}$$

μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μέ διαίρεση κατά μέλη τῶν ἐξ. (15.37) ὡς

$$Q = \frac{1}{\omega R_1C_1} . \tag{15.39}$$

Γιά ἐξαρτήματα μέ συντελεστή Q μεγαλύτερο τοῦ 10 ἑπομένως ὁ δεύτερος ὅρος στόν παρονομαστή τῶν ἐξ. (15.37) μπορεῖ νά παραλειφθεῖ καί ὁ συντελεστής αὐτεπαγωγῆς νά ὑπολογιστεῖ σέ πολύ καλή προσέγγιση ἀπό τή σχέση

$$L_x = R_2R_3C_1. \tag{15.40}$$

πού εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή συχνότητα. Ἐναλλακτικά ὁ ὅρος $\omega^2R_1^2C_1^2$ μπορεῖ νά διατηρηθεῖ ἐνῶ, λόγω τῆς μικρῆς του συμμετοχῆς, ὁ ὑπολογισμός μπορεῖ νά γίνει μέ κάποια προσεγγιστική τιμή τῆς συχνότητας.



ΠΕΙΡΑΜΑ 15-9. ΜΕΤΡΗΣΗ ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΤΗ ΓΕΦΥΡΑ HAY

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-17. Χρησιμοποιεῖστε μιά πρότυπη ἀντίσταση $R_3 = 50\ \Omega$, δύο κιβώτια ἀντιστάσεων μέ ὁλική ἀντί-


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σταση περίπου 1 kΩ καί ἕνα πρότυπο πυκνωτή μέ χωρητικότητα $C_1 = 5$ μF.

– Μέ ἕνα ὡμόμετρο μετρεῖστε τήν ὡμική ἀντίσταση R_x τοῦ ἄγνωστου ἐξαρτήματος καί γιά συχνότητα $\omega/2\pi = 1$ kHz ἐπιλέξτε τιμές τῶν ἀντιστάσεων R_1 καί R_2 πού ἱκανοποιοῦν τήν ἐξ. (15.37β) (μπορεῖτε σέ πρώτη προσέγγιση νά παραλείψετε τόν ὅρο τοῦ παρονομαστή $\omega^2R_1^2C_1^2$ ὡς ἀμελητέα ποσότητα).

– Ἀναπτύξτε στήν παλμογεννήτρια συχνότητα $\nu = 1$ kHz καί κλεῖστε τό διακόπτη S. Ρυθμίστε ἐναλλάξ τίς ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 μέχρις ὅτου ἰσορροπήσει ἡ γέφυρα. Ἀπό τίς ἐξ. (15.37) ὑπολογίστε τά στοιχεῖα L_x καί R_x τοῦ ἄγνωστου ἐξαρτήματος. Ἐκτιμεῖστε τό ἐπί τοῖς ἑκατό σφάλμα πού συνεπάγεται ἡ παράλειψη τοῦ ὅρου $\omega^2R_1^2C_1^2$ στόν παρονομαστή τῶν ἐξ. (15.37). Ὑπολογίστε τό συντελεστή Q πού ἀξιολογεῖ τό ἐξάρτημα.

– Ἄν κατά τήν προηγούμενη διεργασία δέ στάθηκε δυνατόν νά ἐξαλείψετε τελείως τόν ἦχο πού ἐκπέμπουν τά ἀκουστικά, εἶναι πολύ πιθανόν ὅτι ἡ ἀτελής γείωση τῆς γέφυρας εἰσάγει τυχαῖες χωρητικότητες. Προσθέστε δύο βοηθητικούς κλάδους δημιουργώντας μιά γείωση Wagner σύμφωνα μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-14 καί ἐπαναλάβετε τή διαδικασία τοῦ Πειράματος 15-6. Συγκρίνετε τίς τιμές L_x καί R_x πού προσδιορίζετε μέ καί χωρίς τή γείωση Wagner.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά ὅλα τά ἄγνωστα ἐξαρτήματα πού θά σᾶς δοθοῦν.

Ὁ πρότυπος πυκνωτής C_1 καί ἡ μεταβλητή ἀντίσταση R_1 πού στή γέφυρα Hay συνδέονται σέ σειρά, μποροῦν νά συνδεθοῦν παράλληλα σέ μιά διάταξη πού θυμίζει ἔντονα τή γέφυρα Shering. Ἡ **γέφυρα Maxwell** πού προκύπτει κατά τόν τρόπο αὐτό περιέχεται στό σχῆμα 15-18. Οἱ τέσσερις σύνθετες ἀντιστάσεις πού συγκροτοῦν τή γέφυρα δίνονται ἀπό τίς σχέσεις

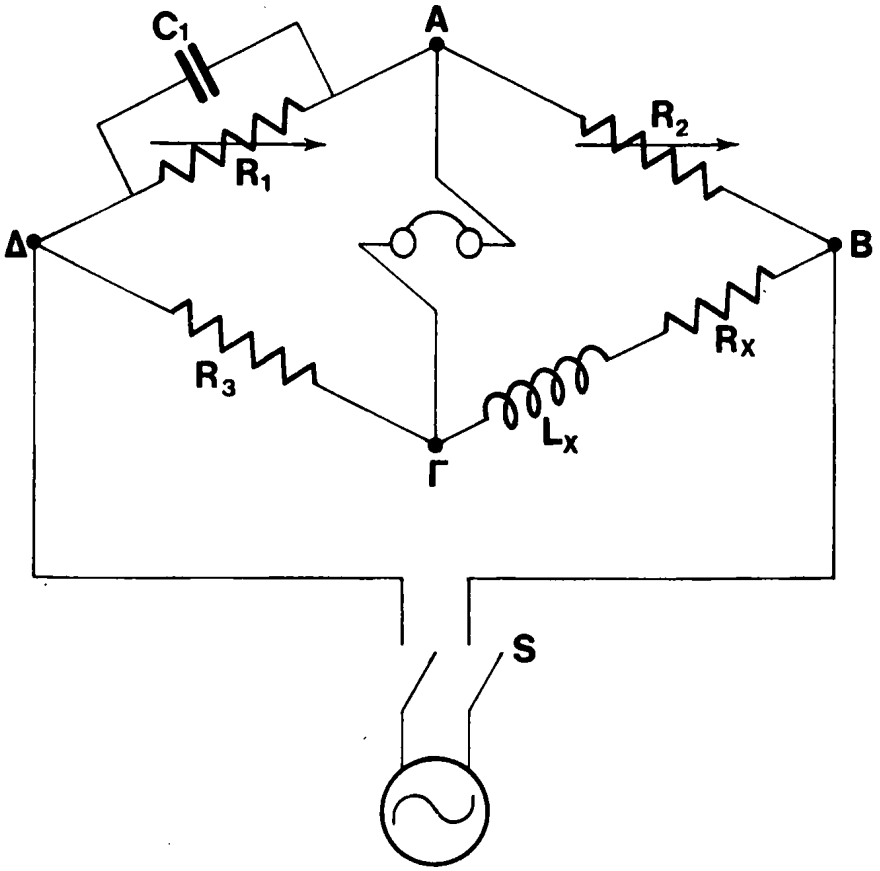
$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + i\omega C_1 \qquad (15.41\alpha)$$

$$Z_2 = R_2 \qquad (15.41\beta)$$

$$Z_3 = R_3 \qquad (15.41\gamma)$$

$$Z_x = R_x + i\omega L_x \qquad (15.41\delta)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 15-18 Ἡ γέφυρα Maxwell γιά τή μέτρηση αὐτεπαγωγῆς.

πού ἀπό τή γενική σχέση ἰσορροπίας

$$Z_x = \frac{Z_2 Z_3}{Z_1} \tag{15.42}$$

δίνουν

$$R_x + i\omega L_x = R_2 R_3 \left(\frac{1}{R_1} + i\omega C_1 \right). \tag{15.43}$$

Ἐξίσωση τοῦ πραγματικοῦ καί φανταστικοῦ μέρους τῶν δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν ὁδηγεῖ στίς συνθῆκες ἰσορροπίας

$$L_x = R_2 R_3 C_1 \tag{15.44α}$$

καί

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1}. \tag{15.44β}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ 15-10. ΜΕΤΡΗΣΗ ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΤΗ ΓΕΦΥΡΑ MAXWELL

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-18. Χρησιμοποιεῖστε μιά πρότυπη ἀντίσταση $R_3 = 50\ \Omega$, ἕνα κιβώτιο ἀντιστάσεων μέ ὁλική ἀντίσταση $R_1 \simeq 100\ k\Omega$, ἕνα δεύτερο κιβώτιο ἀντιστάσεων μέ ὁλική ἀντίσταση $R_2 \simeq 1\ k\Omega$ καί ἕνα πρότυπο πυκνωτή μέ χωρητικότητα $C_1 = 5\ \mu F$.

– Μέ ἕνα ὠμόμετρο μετρεῖστε τήν ὠμική ἀντίσταση R_x τοῦ ἀγνώστου ἐξαρτήματος καί ἐπιλέξτε τιμές τῶν ἀντιστάσεων R_1 καί R_2 ὥστε νά ἱκανοποιεῖται ἡ ἐξ. (15.44β).

– Ἀναπτύξτε στήν παλμογεννήτρια συχνότητα $\nu = 1\ kHz$ καί κλεῖστε τό διακόπτη S. Ρυθμίστε ἐναλλάξ τίς ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 μέχρις ὅτου ἰσορροπίσει ἡ γέφυρα. Ἀπό τίς ἐξ. (15.44) ὑπολογίστε τά στοιχεῖα L_x καί R_x τοῦ ἀγνώστου ἐξαρτήματος. Ὑπολογίστε τό συντελεστή Q πού ἀξιολογεῖ τό ἐξάρτημα.

– Ἄν κατά τήν προηγούμενη διεργασία δέ στάθηκε δυνατόν νά ἐξαλείψετε τελείως τόν ἦχο πού ἐκπέμπουν τά ἀκουστικά, εἶναι πολύ πιθανόν ὅτι ἡ ἀτελής γείωση τῆς γέφυρας εἰσάγει τυχαῖες χωρητικότητες. Προσθέστε δύο βοηθητικούς κλάδους δημιουργώντας μιά γείωση Wagner σύμφωνα μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-14 καί ἐπαναλάβετε τή διαδικασία τοῦ Πειράματος 15-6. Συγκρίνετε τίς τιμές L_x καί R_x πού προσδιορίζετε μέ καί χωρίς τή γείωση Wagner.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά ὅλα τά ἄγνωστα ἐξαρτήματα πού θά σᾶς δοθοῦν.

Ἡ γέφυρα Maxwell ἀποτελεῖ μιά εὔχρηστη καί ἁπλή διάταξη μηδενισμοῦ γιά τή μέτρηση τοῦ συντελεστῆ αὐτεπαγωγῆς βιομηχανικῶν ἐξαρτημάτων, γιά τά ὁποῖα ὁ συντελεστής Q δέν ἔχει πολύ ὑψηλή τιμή. Σύμφωνα μέ τίς ἐξ. (15.44) ὁ συντελεστής Q τοῦ ἐξαρτήματος μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$Q = \frac{\omega L_x}{R_x} = \omega R_1 C_1. \qquad (15.45)$$

Γιά ἐξαρτήματα μέ Q μεγαλύτερο ἀπό 10^3 ἡ ὑψηλή τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_1 πού ἀπαιτεῖται μπορεῖ νά βρίσκεται ἔξω ἀπό τά ὅρια τῶν συνηθισμένων κιβωτίων ἀντιστάσεων. Στίς περιπτώσεις αὐτές ἡ γέφυρα Hay εἶναι προσφορώτερη γιά τή μέτρηση. Ἡ διαχωριστική γραμμή ὅπου ἡ μιά ἀπό τίς δυό γέφυρες ὑπερτερεῖ δέν εἶναι σαφής. Γιά μιά μεγάλη περιοχή τιμῶν τοῦ συντελεστῆ Q ($10 \lesssim Q \lesssim 10^3$) οἱ δύο γέφυρες δίνουν παρεμφερῆ ἀποτελέσματα. Γιά μικρότερες τιμές τοῦ Q ἡ γέφυρα Maxwell ἐμφανίζεται προσφο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ρώτερη ένῶ γιά $Q \gtrsim 10^3$ ή γέφυρα Hay ύπερτερεῖ ὡς πρός τήν εύκολία μέ τήν ὁποία έπιτυγχάνεται ή κατάσταση ἰσορροπίας. Έξάλλου, ὅπως ἤδη εἴδαμε, γιά ἀρκετά ὑψηλές τιμές τοῦ συντελεστῆ Q οἱ συνθῆκες ἰσορροπίας τῆς γέφυρας Hay ἁπλουστεύονται σημαντικά μέ τή δυνατότητα παραλείψεως τοῦ ὅρου $\omega^2 R_1^2 C_1^2$ στόν παρονομαστή τῶν ἐξ. (15.37). Πολλοί κατασκευαστές διαθέτουν σήμερα γέφυρες EP βιομηχανικοῦ τύπου ὅπου ή μεταβλητή ἀντίσταση R_1 καί ὁ πρότυπος πυκνωτής C_1 στόν πρῶτο κλάδο τῆς γέφυρας μποροῦν νά συνδεθοῦν ἐπιλεκτικά, εἴτε σέ σειρά, εἴτε παράλληλα.

Πολλές παραλλαγές τῶν βασικῶν γεφυρῶν Maxwell καί Hay χρησιμοποιοῦνται σήμερα ἐκτεταμένα σέ ἐργαστήρια ἠλεκτρομαγνητικῶν μετρήσεων καί στή βιομηχανία†. Ένα παράδειγμα παραλλαγῆς τῆς γέφυρας Maxwell πού παρουσιάζει μιά ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογή μεθόδων μηδενισμοῦ μέ συνεχές καί ἐναλλασσόμενο ρεῦμα θά ἐξετάσουμε στή συνέχεια.

Η **γέφυρα Anderson** δίνεται διαγραμματικά στό σχῆμα 15-19. Ἡ διάταξη εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-20 ἄν τό τρίγωνο ΑΕΔ μετασχηματιστεῖ σέ ἀστέρα {βλ. Ἄσκηση 14-17} μέ σύνθετες ἀντιστάσεις

$$Z_1 = \frac{R_1\left(-i\frac{1}{\omega C}\right)}{R + R_1 - i\frac{1}{\omega C}} \qquad (15.46\alpha)$$

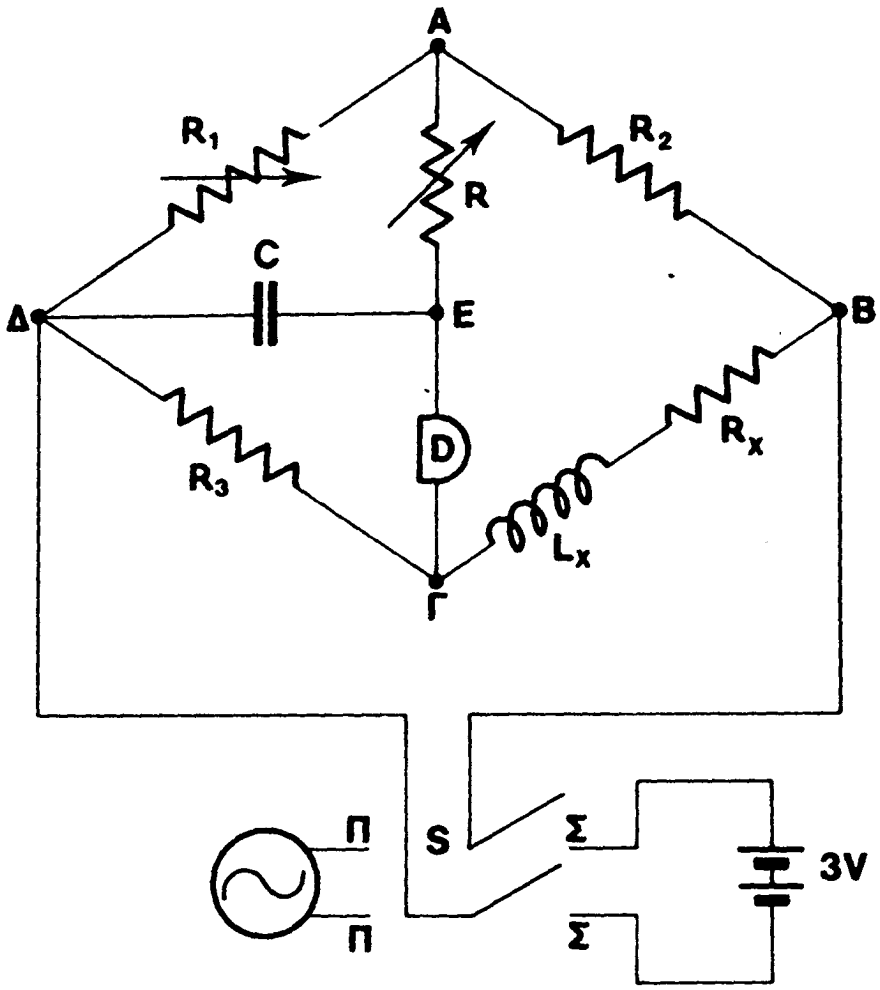
$$Z_2 = \frac{RR_1}{R + R_1 - i\frac{1}{\omega C}} \qquad (15.46\beta)$$

$$Z = \frac{R\left(-i\frac{1}{\omega C}\right)}{R + R_1 - i\frac{1}{\omega C}}. \qquad (15.46\gamma)$$

Ἡ κατάσταση ἰσορροπίας τῆς ἰσοδύναμης γέφυρας τοῦ σχήματος 15-20 πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τή γενική σχέση

† Οἱ γέφυρες Stout καί Oates πού ἀποτελοῦν παραλλαγή τῆς γέφυρας Maxwell ἐξετάζονται

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 15-19 Η γέφυρα Anderson γιά τή μέτρηση αύτεπαγωγής.

$$Z_1 Z_x = R_3 (R_2 + Z_2) \tag{15.47}$$

πού όδηγεῖ στήν ἰσότητα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

$$\frac{R_1 L_x}{C} - i \frac{R_1 R_x}{\omega C} = R_1 R_2 R_3 + R R_1 R_3 + R R_2 R_3 - i \frac{R_2 R_3}{\omega C}. \tag{15.48}$$

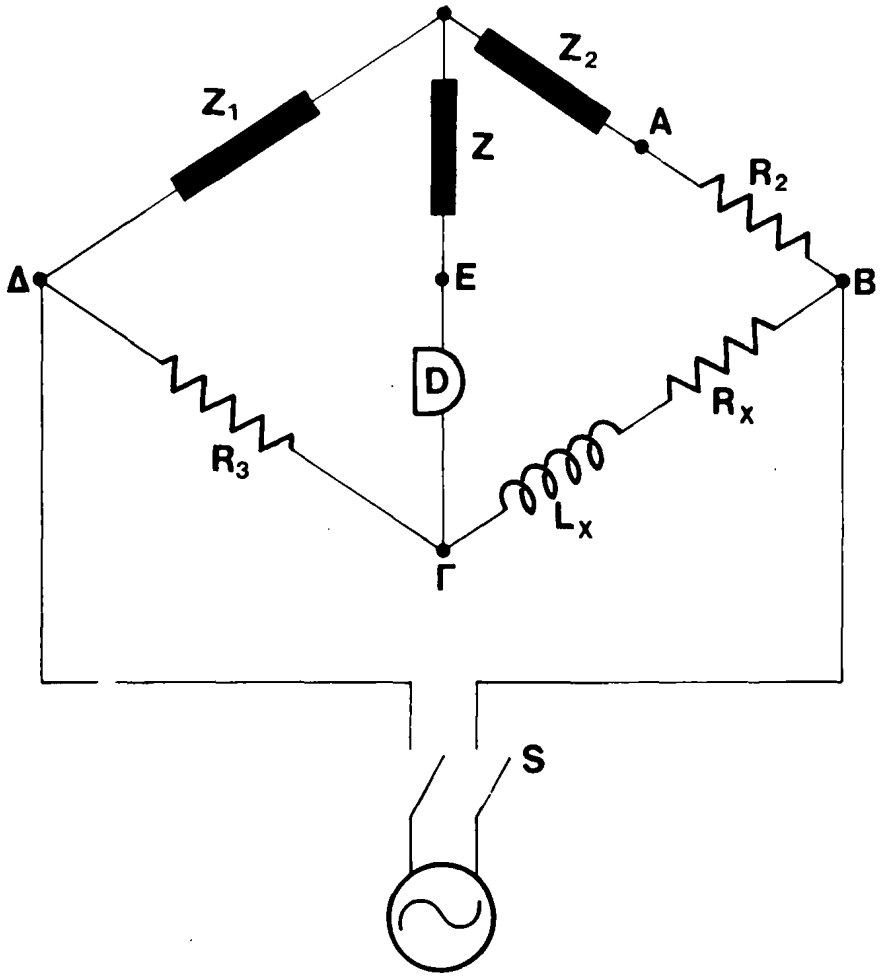
Ἐξισώνοντας τά φανταστικά καί πραγματικά μέρη τῆς ἐξ. (15.48) προκύπτουν οἱ συνθῆκες ἰσορροπίας

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} \tag{15.49α}$$

καί

$$L_x = R R_3 C + R_2 R_3 C + \frac{R R_2 R_3}{R_1} C = R_2 R_3 C + R(R_3 + R_x) C. \tag{15.49β}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 15-20 Ἰσοδύναμο κύκλωμα τῆς γέφυρας Anderson μετά ἀπό μετασχηματισμό τριγώνου σέ ἀστέρα.

Παρατηρεῖται ὅτι οἱ δύο συνθῆκες τῆς γέφυρας Anderson εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπό τή συχνότητα καί κατά πολύ ἀνεξάρτητες μεταξύ τους. Εἶναι π.χ. δυνατόν ἡ πρώτη σχέση, πού περιλαμβάνει μόνο ὠμικές ἀντιστάσεις, νά ἱκανοποιηθεῖ μέ μεταβολή μιᾶς ἀπό τίς ἀντιστάσεις R_1, R_2 ἤ R_3. Ἡ ἰσορρόπιση τῆς γέφυρας στό στάδιο αὐτό μπορεῖ νά γίνει ἀκόμη καί μέ διοχέτευση ΣΡ. Στή συνέχεια, μεταβολή τῆς ἀντιστάσεως R (καί ἄν χρειαστεῖ τοῦ πυκνωτῆ C) μπορεῖ ἀνεξάρτητα νά ἰσορροπίσει τή γέφυρα σέ ὁποιαδήποτε συχνότητα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 15-11. ΜΕΤΡΗΣΗ ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΤΗ ΓΕΦΥΡΑ ANDERSON

Συνδέστε τή γέφυρα Anderson πού δίνεται στό κύκλωμα τοῦ σχήμα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τος 15-19. Μέ ἕνα ὠμόμετρο μετρεῖστε τήν ὠμική ἀντίσταση R_x τοῦ ἀγνωστου ἐξαρτήματος. Χρησιμοποιεῖστε δύο πρότυπες ἀντιστάσεις $R_2 \simeq R_x$ καί $R_3 \simeq R_x$ καί ἕνα κιβώτιο μέ ὁλική ἀντίσταση $R_1 > R_x$. Χρησιμοποιεῖστε ἕνα δεύτερο κιβώτιο ἀντιστάσεων R μέ ὁλική ἀντίσταση περίπου 1 kΩ καί ἕνα πρότυπο πυκνωτή μέ χωρητικότητα C = 0.1 μF. Ὡς ἀνιχνευτή μηδενισμοῦ χρησιμοποιεῖστε ἕνα γαλβανόμετρο D' Arsonval μέ κύκλωμα προστασίας.

– Ἐπιλέξτε στό κιβώτιο ἀντιστάσεων R_1 ἀντίσταση πού ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη τῆς ἐξ. (15.49α) καί μέ τό κύκλωμα προστασίας τοῦ γαλβανομέτρου ρυθμισμένο γιά ἐλάχιστη εὐαισθησία κλεῖστε τό διακόπτη S πρός τή σταθερή τάση 3 V (ἐπαφή ΣΣ). Ἡ διάταξη τοῦ σχήματος 15-19 ἀποτελεῖ τώρα μιά γέφυρα Wheatstone. Αὐξάνοντας σταδιακά τήν εὐαισθησία τοῦ κυκλώματος προστασίας καί μειώνοντας τήν ἀντίσταση πού παρεμβάλλει τό κιβώτιο R (μέχρις ὅτου μηδενιστεῖ) ρυθμίστε τήν ἀντίσταση R_1 ὥστε νά ἰσορροπίσει ἡ γέφυρα.

– Ἀνοῖξτε τό διακόπτη S. Ἀντικαταστεῖστε τόν ἀνιχνευτή μηδενισμοῦ μέ ἀκουστικά, ρυθμίστε τήν παλμογεννήτρια σέ συχνότητα ν = 1 kHz καί κλεῖστε τό διακόπτη στή θέση ΠΠ. Αὐξεῖστε σταδιακά τήν ἀντίσταση R μέχρις ὅτου σιγήσουν τά ἀκουστικά. Ἄν μέ ἀπαρχή τήν τιμή R = 0 αὔξηση τῆς ἀντιστάσεως R δέν προκαλεῖ μείωση τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου σημαίνει ὅτι ἡ χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ C εἶναι πολύ ὑψηλή. Ἀντικαταστεῖστε τόν πρότυπο πυκνωτή μέ ἕνα ἄλλο μικρότερης χωρητικότητας καί ἐπαναλάβετε τή διαδικασία ἰσορροπίσεως τῆς γέφυρας μέ τό ΕΡ. Ἀπό τίς ἐξ. (15.49) ὑπολογίστε τά μεγέθη L_x καί R_x τοῦ ἀγνωστου ἐξαρτήματος.

– Ἄν κατά τήν πρόηγούμενη διεργασία δέν στάθηκε δυνατόν νά ἐξαλείψετε τελείως τόν ἦχο πού ἐκπέμπουν τά ἀκουστικά, εἶναι πολύ πιθανόν ὅτι ἡ ἀτελής γείωση τῆς γέφυρας εἰσάγει τυχαῖες χωρητικότητες. Προσθέστε δύο βοηθητικούς κλάδους δημιουργώντας μιά γείωση Wagner σύμφωνα μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-14 καί ἐπαναλάβετε τή διαδικασία τοῦ Πειράματος 15-6. Συγκρίνετε τίς τιμές L_x καί R_x πού προσδιορίζετε μέ καί χωρίς τή γείωση Wagner.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά ὅλα τά ἄγνωστα ἐξαρτήματα πού θά σᾶς δοθοῦν.

Ἄν καί πιό πολύπλοκη στή συγκρότησή της σέ σύγκριση μέ τίς γέφυρες Maxwell καί Hay, ἡ γέφυρα Anderson ἐμφανίζεται ἐξαιρετικά ἁπλή στή χρήση. Ἐξάλλου ἡ περιοχή ἐφαρμογῆς της δέν ἀπαντᾶ κανένα περιορισμό. Γέφυρες Anderson χρησιμοποοῦνται σήμερα ἐκτεταμένα στό ἐργαστήριο καί στή βιομηχανία γιά τή μέτρηση τοῦ συντελεστῆ αὐτεπαγωγῆς ἐξαρτη-

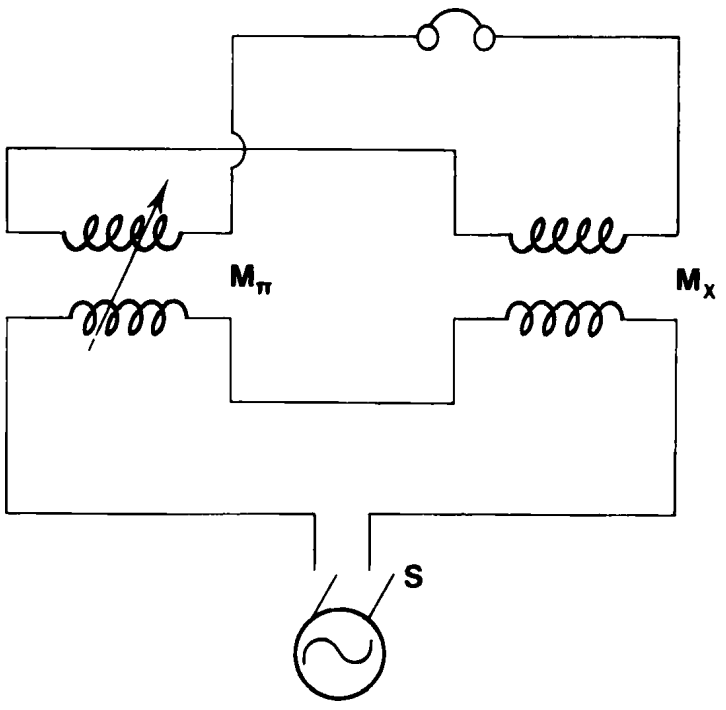
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μάτων μέ συντελεστή Q πού κυμαίνεται άπό κλάσμα τῆς μονάδας (πού άντιπροσωπεύει τή μικρή έπαγωγή πού έμφανίζουν έξαρτήματα άντιστάσεως) μέχρι τιμές τῆς τάξης τοῦ 10^5.

15-6 Μέτρηση Ἀμοιβαίας Ἐπαγωγῆς

Ἡ μέτρηση τοῦ συντελεστῆ άμοιβαίας έπαγωγῆς μεταξύ δύο πηνίων ἤ γενικώτερα δύο έξαρτημάτων ένός κυκλώματος παρουσιάζει σημαντικό ένδιαφέρον. Πολλοί κατασκευαστές διαθέτουν σήμερα πρότυπα έξαρτήματα μέ μεταβλητό συντελεστή άμοιβαίας έπαγωγῆς καί ό άμεσότερος τρόπος μετρήσεως συνίσταται στήν άπευθείας σύγκριση τοῦ ἄγνωστου έξαρτήματος μέ τό πρότυπο. Μιά άπλή διάταξη πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τό σκοπό αύτό περιέχεται στό σχῆμα 15-21.

Σύμφωνα μέ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-21 τά πρωτεύοντα πηνία τῶν δύο έξαρτημάτων συνδέονται σέ σειρά μέ τήν παλμογεννήτρια ένῶ τά δευτερεύοντα συνδέονται μέσω τῶν ἀκούστικῶν ἔτσι ὥστε οἱ ΗΕΔ πού δημιουργεῖ στό καθένα ἡ άμοιβαία έπαγωγή νά έχουν άντίθετη φορά. Ἄν μέ μεταβολή τοῦ συντελεστῆ άμοιβαίας έπαγωγῆς M_π τοῦ πρότυπου έξαρτήματος έπιτευχθεῖ έξάλειψη τοῦ ἤχου τῶν ἀκουστικῶν, σημαίνει ὅτι οἱ δύο έπαγόμενες ΗΕΔ καί έπομένως οἱ δύο συντελεστές άμοιβαίας έπαγωγῆς M_π καί M_x έχουν τήν ἴδια τιμή.



ΣΧΗΜΑ 15-21 Σύγκριση δύο έξαρτημάτων άμοιβαίας έπαγωγῆς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πρότυπα έξαρτήματα άμοιβαίας έπαγωγής είναι όγκώδη, δαπανηρά καί σέ πολλές περιπτώσεις τό εύρος μεταβολής τοῦ συντελεστῆ άμοιβαίας έπαγωγῆς άρκετά περιορισμένο. Τό άπλό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-21 μπορεῖ νά έπεκτείνει τήν περιοχή μετρήσεων μέ προσθήκη έξαρτημάτων αύτεπαγωγῆς, άλλά παρόμοιες προσθῆκες είσάγουν συνήθως σημαντικό σφάλμα στή μέτρηση. Έναλλακτικά, πολλές άπό τίς γέφυρες ΕΡ πού μελετήσαμε ώς τώρα μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά τή σύγκριση έξαρτημάτων άμοιβαίας έπαγωγῆς πρός πρότυπα έξαρτήματα αύτεπαγωγῆς ἤ χωρητικότητας.

Ή **γέφυρα Heaviside** τοῦ σχήματος 15-22 άποτελεῖ παραλλαγή τῆς γέφυρας ΕΡ πού στό Πείραμα 15-8 χρησιμοποιήθηκε γιά τή σύγκριση δύο έξαρτημάτων αύτεπαγωγῆς. Στή συγκεκριμένη διάταξη† ένα έξάρτημα μέ άγνωστο συντελεστή άμοιβαίας έπαγωγῆς M_x συγκρίνεται πρός ένα πρότυπο έξάρτημα μέ συντελεστή αύτεπαγωγῆς L_2. Οί συνθῆκες ίσορροπίας μποροῦν νά βρεθοῦν άπό τή θεώρηση τῶν ρευμάτων I_1 καί I_3 πού διαρρέουν τόν άνω καί κάτω κλάδο τῆς γέφυρας.

Γιά μηδενισμό τοῦ ρεύματος στόν κλάδο τῶν άκουστικῶν θά πρέπει τά σημεῖα Α καί Γ νά βρίσκονται στό ἴδιο δυναμικό. Τοῦτο συνεπάγεται τή σχέση

$$I_1 R_1 = I_3 R_3. \tag{15.50}$$

Μιά δεύτερη σχέση πού χαρακτηρίζει τήν κατάσταση ίσορροπίας στή γέφυρα Heaviside μπορεῖ νά γραφεῖ άπό τόν ύπολογισμό τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β κατά τούς δύο παράλληλους δρόμους ΔΑΒ καί ΔΓΒ. Ή έξίσωση πού προκύπτει εἶναι

$$I_1(R_1 + R_2 + i\omega L_2) = I_2(R_3 + R_x + i\omega L_4) \quad (I_1 + I_2) i\omega M_x. \tag{15.51}$$

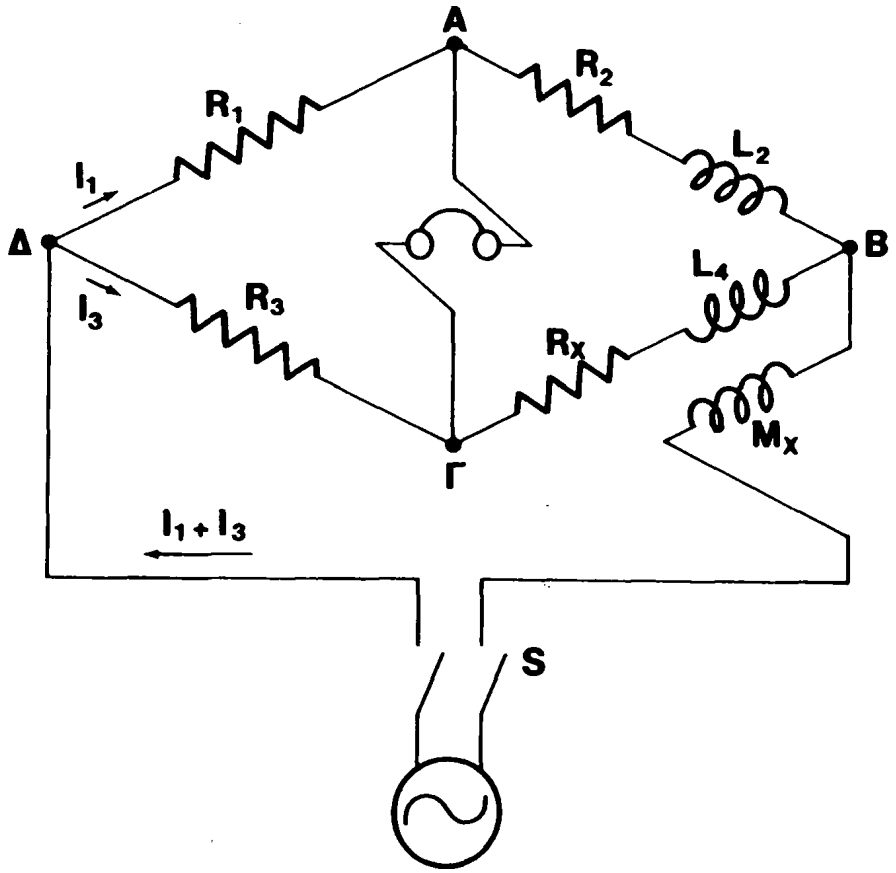
Άντικατάσταση τοῦ ρεύματος $I_1 = (R_2/R_1) I_2$ άπό τήν έξ. (15.50) στήν έξ. (15.51) όδηγεῖ στή σχέση

$$R_2 R_3 + i\omega R_3 L_2 = R_1 R_x + i\omega (R_1 L_4 + R_3 M_x + R_1 M_x) \tag{15.52}$$

---

† Μιά παραλλαγή τῆς γέφυρας τοῦ σχήματος 15-22, γνωστή ώς **γέφυρα Campbell**, μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή μέτρηση άγνωστης αύτεπαγωγῆς μέ σύγκριση πρός έξάρτημα γνωστῆς άμοιβαίας έπαγωγῆς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 15-22 Ή γέφυρα Heaviside γιά τή μέτρηση τοῦ συντελεστῆ ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς μέ σύγκριση πρός ἕνα πρότυπο ἐξάρτημα αὐτεπαγωγῆς.

πού μέ ἐξίσωση πραγματικῶν καί φανταστικῶν μερῶν παρέχει τίς σχέσεις ἰσορροπίας.

$$R_1 R_x = R_2 R_3 \qquad (15.53\alpha)$$

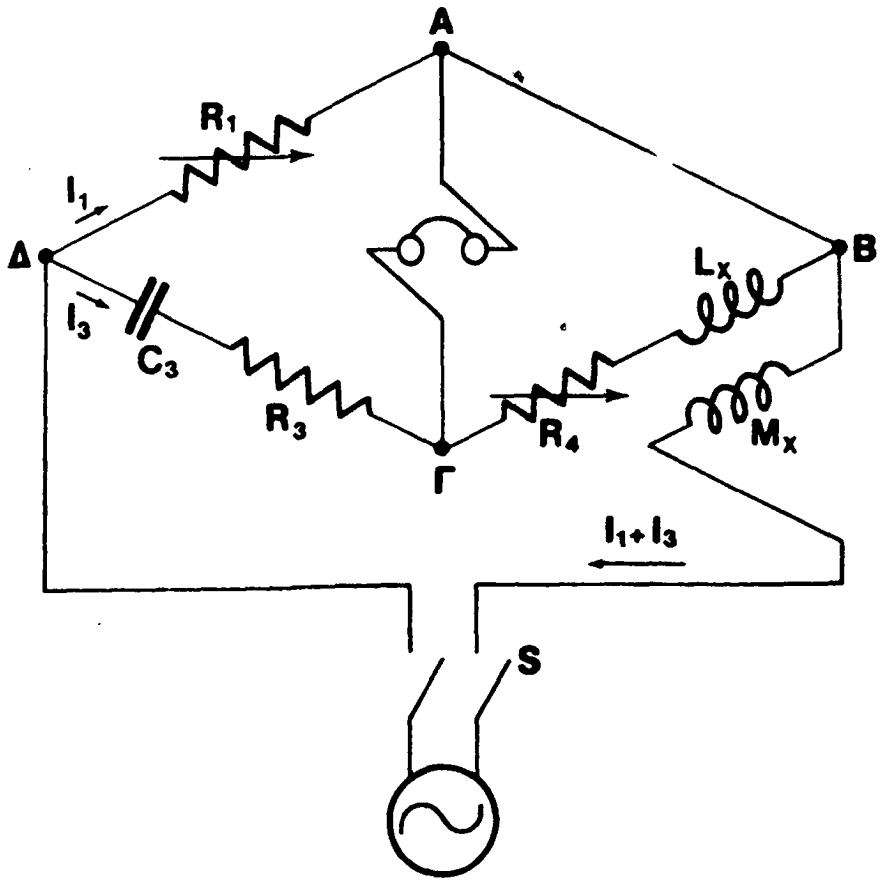
καί

$$M_x = \frac{R_3 L_2 - R_1 L_4}{R_1 + R_3} \qquad (15.53\beta)$$

Παρατηρεῖται ὅτι, ὅπως προκύπτει ἀπό τίς τελευταῖες ἐξισώσεις, ὁ προσδιορισμός τοῦ συντελεστῆ ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς M_x προϋποθέτει γνώση τοῦ συντελεστῆ αὐτεπαγωγῆς L_4 τοῦ δευτερεύοντος τοῦ ἐξαρτήματος. Ή μέτρηση βεβαίως τοῦ συντελεστῆ L_4 μπορεῖ νά γίνει ἀνεξάρτητα μέ μιά ἀπό τίς μεθόδους τῆς Παραγράφου 15-5.

Μιά μέθοδος γιά τήν ταυτόχρονη μέτρηση τῶν συντελεστῶν αὐτεπα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 15-23 Ἡ γέφυρα Carey Foster.

γωγῆς καί ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς παρέχεται ἀπό τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-23. Ἡ γέφυρα Carey Foster διαφέρει ἀπό τίς γέφυρες ΕΡ πού μελετήσαμε ὡς τώρα ὡς πρός τό ὅτι ἕνας ἀπό τούς τέσσερις κλάδους ἔχει μηδενική ἀντίσταση. Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τῆς γέφυρας μπορεῖ νά βρεθεῖ ὅπως καί προηγουμένως μέ θεώρηση τῶν ρευμάτων I_1 καί I_3 πού διατρέχουν τούς δύο κλάδους. Ἡ ταύτιση τοῦ δυναμικοῦ τῶν σημείων Α καί Γ δίνει τή σχέση

$$I_1 R_1 = I_3 \left(R_3 - i \frac{1}{\omega C} \right). \qquad (15.54\alpha)$$

Ἐξάλλου, καθόσον τό δυναμικό τῶν σημείων Α καί Β ταυτίζεται, θά πρέπει νά μηδενίζεται καί ἡ διαφορά δυναμικοῦ στόν κλάδο ΒΓ, ἤτοι

$$I_3 (R_4 + i\omega L_x) - (I_1 + I_3) i\omega M_x = 0. \qquad (15.54\beta)$$

Στήν τελευταία σχέση τό ἀρνητικό πρόσημο δηλώνει ὅτι ἡ ΗΕΔ πού δημιουργεῖ στόν κλάδο ἡ ἀμοιβαία ἐπαγωγή ἀντισταθμίζει τήν πτώση δυναμικοῦ στή σύνθετη ἀντίσταση μεταξύ τῶν σημείων Β καί Γ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἐπίλυση τῶν ἐξ. (15.54) ὁδηγεῖ στίς συνθῆκες ἰσορροπίας

$$M_x = R_1 R_4 C_3 \qquad (15.55\alpha)$$

$$L_x = (R_1 + R_3) R_4 C_3 \qquad (15.55\beta)$$

πού ταυτόχρονα προσδιορίζουν τούς συντελεστές ἐπαγωγῆς τοῦ ἄγνωστου ἐξαρτήματος. Ἡ διεργασία ἰσορροπίσεως τῆς γέφυρας περιγράφεται στό ἑπόμενο πείραμα.

ΠΕΙΡΑΜΑ 15-12. ΜΕΤΡΗΣΗ ΑΜΟΙΒΑΙΑΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΤΗ ΓΕΦΥΡΑ CAREY FOSTER

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-23. Χρησιμοποιεῖστε δύο κιβώτια ἀντιστάσεων R_1 καί R_4, μιά πρότυπη ἀντίσταση $R_3 = 100\ \Omega$ καί ἕνα πρότυπο πυκνωτή μέ χωρητικότητα $C_3 = 1\ \mu F$. Μέ ἕνα ὠμόμετρο μετρεῖστε τήν ὠμική ἀντίσταση καθενός πηνίου τοῦ ἐξαρτήματος ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς.

— Ἀναπτύξτε στήν παλμογεννήτρια συχνότητα $\nu = 1$ kHz καί κλεῖστε τό διακόπτη S. Ρυθμίστε ἐναλλάξ τίς ἀντιστάσεις R_1 καί R_4 μέχρις ὅτου ἰσορροπήσει ἡ γέφυρα. Ἀπό τίς ἐξ. (15.55) ὑπολογίστε τούς συντελεστές L_x καί M_x τοῦ ἄγνωστου ἐξαρτήματος (στήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_4 πρέπει νά συνυπολογιστεῖ καί ἡ ὠμική ἀντίσταση R_x τοῦ δευτερεύοντος).

— Ἀντιστρέψτε τούς ρόλους τοῦ πρωτεύοντος καί δευτερεύοντος τοῦ ἐξαρτήματος ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς στό κύκλωμα καί ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία. Συγκρίνετε καί σχολιάστε τίς δύο μετρήσεις τοῦ συντελεστῆ ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς M_x.

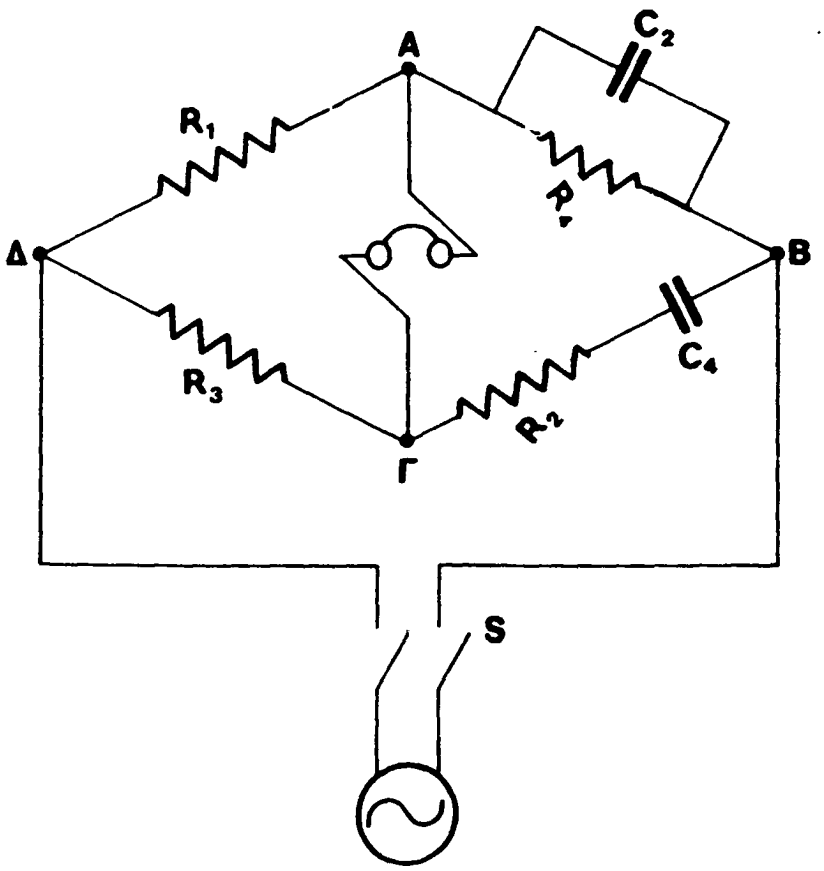
Ἡ διάταξη τοῦ σχήματος 15-23 χρησιμοποιήθηκε γιά πρώτη φορά τό 1887 ἀπό τόν G. Carey Foster μέ πηγή ΣΡ καί βαλλιστικό γαλβανόμετρο καί τροποποιήθηκε τό 1894 ἀπό τόν Heydweiller γιά χρήση μέ ΕΡ. Στή βιβλιογραφία ἀπαντᾶται σήμερα καί μέ τίς δύο ὀνομασίες. Εἶναι ἴσως ἄξιο νά παρατηρηθεῖ ὅτι ἄν τά στοιχεῖα τοῦ ἐξαρτήματος ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς εἶναι γνωστά, ἡ γέφυρα μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ἐναλλακτικά γιά τή μέτρηση τῆς χωρητικότητας καί τῆς ἀντιστάσεως διαρροῆς ἑνός πυκνωτῆ. Βιομηχανικοί τύποι τῆς γέφυρας Carey Foster μέ σκοπό τήν τελευταία ἐφαρμογή διατίθενται σήμερα ἀπό πολλούς κατασκευαστές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

15-7 Μέτρηση Συχνότητας

Σέ όρισμένες γέφυρες ΕΡ πού μελετήσαμε οί συνθῆκες πού προσδιορίζουν τήν κατάσταση ἰσορροπίας ἐξαρτῶνται ἀπό τή συχνότητα. Στίς περιπτώσεις αὐτές, ἄν τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα τῶν ἐξαρτημάτων πού συγκροτοῦν τή γέφυρα εἶναι γνωστά, ἰσορρόπιση τῆς γέφυρας μπορεῖ νά ἀποτελέσει μέτρηση τῆς συχνότητας. Ἡ γωνιακή συχνότητα ω ὑπεισέρχεται π.χ. στίς ἐξ. (15.37) πού ἀποτελοῦν τίς συνθῆκες ἰσορροπίας τῆς γέφυρας Hay. Λόγω ὅμως τῆς ἀσθενοῦς ἐξαρτήσεως τῶν ἐξισώσεων ἀπό τή συχνότητα (πού καθιστᾶ τή γέφυρα Hay χρήσιμη στή μέτρηση αὐτεπαγωγῆς) ἡ γέφυρα αὐτή δέν προσφέρεται γιά μέτρηση τῆς συχνότητας.

Ἰδιαίτερα ἔντονη ἐξάρτηση ἀπό τή συχνότητα ἐμφανίζουν οἱ συνθῆκες ἰσορροπίας τῆς τροποποιημένης γέφυρας Wien πού περιέχεται στό σχῆμα 15-24. Ἡ τροποποίηση στή διάταξη τοῦ σχήματος 15-24, σέ σύγκριση μέ τή γέφυρα τοῦ σχήματος 15-12, συνίσταται στήν παράλληλη σύνδεση τῆς ὠμικῆς ἀντιστάσεως καί τοῦ πυκνωτῆ στό δεύτερο κλάδο. Στήν οὐσία ἡ



ΣΧΗΜΑ 15-24 Ἡ γέφυρα Wien γιά τή μέτρηση συχνότητας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

διάταξη συγκρίνει μιά σύνδεση R-C σέ σειρά πρός μιά παράλληλη σύνδεση R-C πού μποροῦν νά γίνουν ἰσοδύναμες μόνο γιά μιά συγκεκριμένη συχνότητα.

Οἱ τέσσερις σύνθετες ἀντιστάσεις τῆς γέφυρας εἶναι

$$Z_1 = R_1 \tag{15.56α}$$

$$Z_2 = \frac{-iR_2\dfrac{1}{\omega C_2}}{R_2 - i\dfrac{1}{\omega C_2}} = \frac{-iR_2}{\omega C_2 R_2 - i} \tag{15.56β}$$

$$Z_3 = R_3 \tag{15.56γ}$$

$$Z_4 = R_4 - i\frac{1}{\omega C_4} = \frac{\omega R_4 C_4 - i}{\omega C_4} \tag{15.56δ}$$

πού ἀπό τή γενική ἐξίσωση ἰσορροπίας $Z_1Z_4 = Z_2Z_3$ δίνουν

$$\frac{R_1}{\omega C_4}(\omega R_4 C_4 - i) = R_3\frac{-iR_2}{\omega R_2 C_2 - i}$$

ἤ

$$R_1(\omega R_4 C_4 - i)\,(\omega R_2 C_2 - i) = -iR_2R_3C_4. \tag{15.57}$$

Ἐξίσωση τῶν πραγματικῶν μερῶν στήν τελευταία σχέση δίνει

$$\omega^2 R_1R_2R_4C_2C_4 - R_1 = 0$$

ἤ

$$\omega^2 = \frac{1}{R_2R_4C_2C_4} \tag{15.58}$$

πού προσδιορίζει τή συχνότητα ὡς

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_2R_4C_2C_4}}. \tag{15.59α}$$

Ἡ δεύτερη συνθήκη ἰσορροπίας προκύπτει ἀπό τήν ἐξίσωση τῶν φανταστικῶν μερῶν στήν ἐξ. (15.57)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$R_1R_4C_4 = R_2R_3C_4 - R_1R_2C_2$$

πού μπορεῖ νά γραφεῖ στήν περισσότερο συμμετρική μορφή

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2} + \frac{C_2}{C_4}. \qquad (13.59\beta)$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 15-13. ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΤΗ ΓΕΦΥΡΑ WIEN

Συνδέστε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 15-24. Χρησιμοποιεῖστε δύο πρότυπες ἀντιστάσεις $R_1 = 100\ \Omega$ καί $R_3 = 200\ \Omega$ καί δύο πρότυπους πυκνωτές μέ χωρητικότητα $C_2 = C_4 = 1\ \mu F$. Δεῖξτε ὅτι γιά τίς τιμές αὐτές ἡ ἐξ. (15.59β) ἱκανοποιεῖται γιά τιμές τῶν δύο κιβωτίων ἀντιστάσεων $R_2 = R_4$ ἐνῶ ἡ ἐξ. (15.59α) παίρνει ἁπλούστερη μορφή.

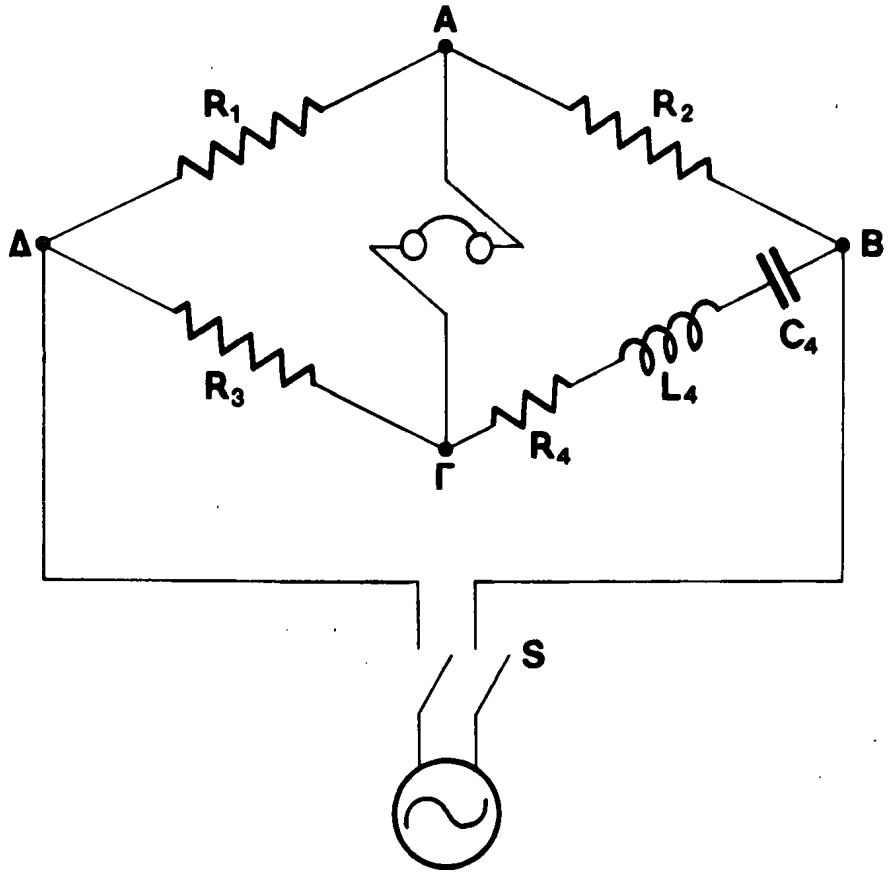
– Ἀναπτύξτε συχνότητα $\nu = 1$ kHz σύμφωνα μέ τόν ἐπιλογέα τῆς παλμογεννήτριας καί ρυθμίστε τά κιβώτια R_2 καί R_4 (διατηρώντας τή μεταξύ τους ἰσότητα $R_2 = R_4$) μέχρις ὅτου ἰσορροπίσει ἡ γέφυρα. Ὑπολογίστε τή συχνότητα καί συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τήν ἔνδειξη τῆς παλμογεννήτριας.

– Ἐπαναλάβετε τήν προηγούμενη διεργασία γιά χαρακτηριστικά σημεῖα τῆς συχνότητας σέ ὅλη τήν περιοχή μεταξύ 1 kHz καί 2.5 kHz καί χαράξτε τήν καμπύλη διορθώσεως γιά τήν παλμογεννήτρια πού χρησιμοποιήσατε.

Ὅπως εἴδαμε στήν Παράγραφο 15-4 ἡ γέφυρα Wien μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή μέτρηση χωρητικότητας, ἄν ἡ συχνότητα τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τή διάταξη εἶναι γνωστή. Σήμερα κατά κανόνα ἡ γέφυρα Wien χρησιμοποιεῖται γιά τή μέτρηση συχνότητας ἐνῶ γιά τή μέτρηση χωρητικότητας προτιμᾶται ἡ γέφυρα Shering.

Μιά ἐναλλακτική μέθοδος γιά τή μέτρηση συχνότητας παρέχεται ἀπό τή **γέφυρα συντονισμοῦ** πού περιέχεται στό σχῆμα 15-25. Ἡ γέφυρα συγκροτεῖται ἀπό τρεῖς κλάδους μέ καθαρά ὠμικές ἀντιστάσεις καί ἕνα κλάδο ὅπου τρία ἐξαρτήματα R - C - L συνδέονται σέ σειρά. Ἄν καί οἱ συνθῆκες ἰσορροπίας τῆς γέφυρας μποροῦν νά ἐξαχθοῦν ἀπό τίς γενικές ἐξισώσεις τῆς Παραγράφου 15-3, εἶναι ἀμέσως φανερό ὅτι τό ρεῦμα στόν κλάδο τῶν ἀκουστικῶν μπορεῖ νά μηδενιστεῖ μόνον ἄν καί οἱ τέσσερις κλάδοι ἐμφανίζουν καθαρά ὠμική ἀντίσταση. Ὅπως εἴδαμε στήν Παράγραφο 14-3 ἡ σύνθετη ἀντίσταση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 15-25 Η γέφυρα συντονισμοῦ γιά τή μέτρηση συχνότητας.

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad (15.60)$$

ένός κυκλώματος R - C - L σέ σειρά μεταπίπτει σέ καθαρά ὠμική γιά συχνότητα

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (15.61\alpha)$$

Ἐξάλλου στή συχνότητα αὐτή ἡ γέφυρα μεταπίπτει σέ γέφυρα Wheatstone καί οἱ τέσσερις ἀντιστάσεις πρέπει νά ἱκανοποιοῦν τή σχέση

$$R_1R_4 = R_2R_3. \qquad (15.61\beta)$$

Οἱ ἐξ. (15.61) ἀποτελοῦν τίς συνθῆκες ἰσορροπίας τῆς γέφυρας συντονισμοῦ ἐνῶ ἡ ἐξ. (15.61α) μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή μέτρηση τῆς συχνότητας. Ἐναλλακτικά, ἄν ἡ συχνότητα εἶναι γνωστή, ἡ διάταξη τοῦ σχή-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ματος 15-25 μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως καί τοῦ συντελεστῆ αὐτεπαγωγῆς ἑνός ἐξαρτήματος ἐπαγωγῆς. Ἡ χρήση αὐτή τῆς γέφυρας συντονισμοῦ βρίσκει σήμερα σημαντική ἐφαρμογή, ἰδίως στήν περιοχή ραδιοφωνικῶν συχνοτήτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

15-1. Ἄν στό γαλβανόμετρο D' Arsonval διοχετευτεῖ ἐναλλασσόμενο ρεῦμα $I = I_0 \cos\omega t$, ἡ διαφορική ἐξίσωση πού διέπει τήν κίνησή του εἶναι [βλ. ἐξ. (7.13)]

$$M\frac{d^2\theta}{dt^2} + r\frac{d\theta}{dt} + \tau\theta = NBAI_0\cos\omega t.$$

Γιά συνήθεις τιμές τῆς γωνιακῆς συχνότητας τοῦ ρεύματος (π.χ. $\omega/2\pi = 50$ sec^{-1}), ἡ φυσική γωνιακή συχνότητα τοῦ γαλβανομέτρου $\omega_0 = \sqrt{\tau/M}$ ἱκανοποιεῖ τή σχέση $\omega_0 << \omega$. Δεῖξτε ὅτι ὑπό τίς συνθῆκες αὐτές ὁ δεύτερος καί ὁ τρίτος ὅρος στό ἀριστερό σκέλος τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως μποροῦν νά παραλειφθοῦν. Λύστε τή διαφορική ἐξίσωση πού προκύπτει καί δεῖξτε ὅτι ἡ ἀπόκλιση τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι ἀνάλογη πρός τό τετράγωνο τοῦ λόγου ω_0/ω. Μέ τά στοιχεῖα αὐτά σχολιάστε τήν ἀπόκριση τοῦ γαλβανομέτρου D' Arsonval στό ἐναλλασσόμενο ρεῦμα.

15-2. Τρεῖς ἀντιστάσεις 10 Ω, 100 Ω καί 500 Ω εἶναι συνδεδεμένες παράλληλα. Ἄν στήν ἀντίσταση τῶν 100 Ω καταναλώνεται ἰσχή 2 W, πόση ἰσχή καταναλώνεται σέ καθεμιά ἀπό τίς δύο ἄλλες ἀντιστάσεις;

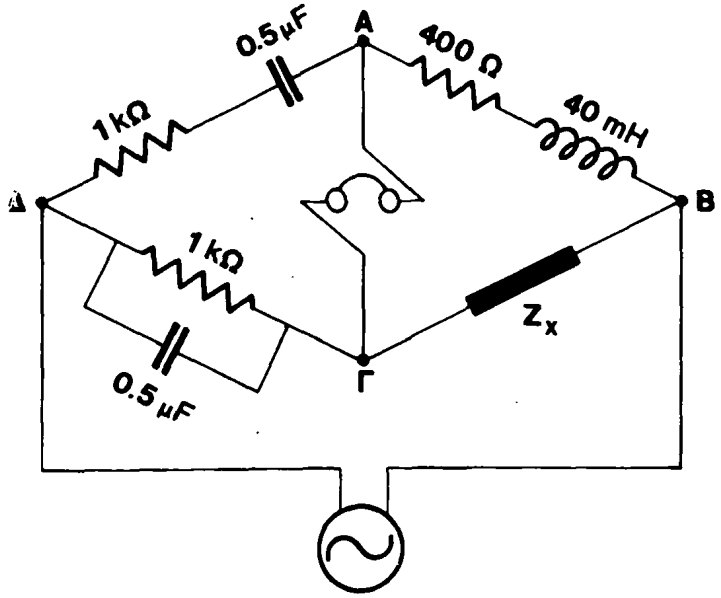
15-3. Τρεῖς ἀντιστάσεις 10 Ω, 100 Ω καί 500 Ω εἶναι συνδεδεμένες σέ σειρά. Ἄν στήν ἀντίσταση τῶν 500 Ω καταναλώνεται ἰσχή 20 W, πόση ἰσχή καταναλώνεται σέ καθεμιά ἀπό τίς ἄλλες ἀντιστάσεις;

15-4. Μιά γέφυρα πού τροφοδοτεῖται μέ ΕΡ σέ συχνότητα 1 kHz περιέχει ἕνα κλάδο ὁ ὁποῖος συγκροτεῖται ἀπό μιά ἀντίσταση 1 kΩ καί ἕνα πυκνωτή μέ χωρητικότητα 0.2 μF. Προσδιορίστε τήν τιμή μιᾶς ἀντιστάσεως καί τή χωρητικότητα ἑνός πυκνωτῆ πού ἄν συνδεθοῦν παράλληλα δημιουργοῦν ἕνα ἰσοδύναμο κλάδο.

15-5. Μιά γέφυρα πού τροφοδοτεῖται μέ ΕΡ σέ συχνότητα 1 kHz περιέχει ἕνα κλάδο ὁ ὁποῖος συγκροτεῖται ἀπό μιά ἀντίσταση 0.5 kΩ καί ἕνα ἐξάρτημα αὐτεπαγωγῆς μέ συντελεστή L = 0.2 H. Προσδιορίστε τήν τιμή μιᾶς ἀντιστάσεως καί τό συντελεστή αὐτεπαγωγῆς ἑνός ἐξαρτήματος μέ ἀμελητέα ὡμική ἀντίσταση πού ἄν συνδεθοῦν παράλληλα δημιουργοῦν ἕνα ἰσοδύναμο κλάδο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

15-6. Ή έπόμενη γέφυρα ίσορροπεΐ σέ συχνότητα 1 kHz

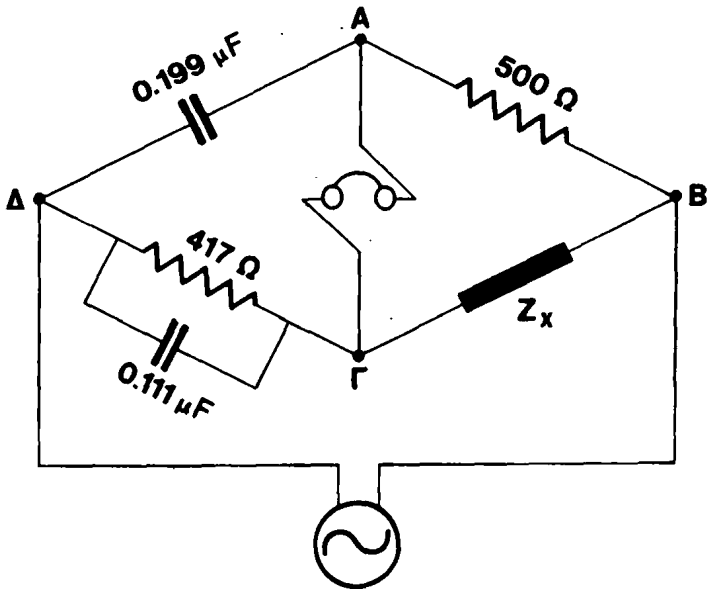


Προσδιορίστε τά στοιχεΐα τής σύνθετης άντιστάσεως Z_x άν τούτη άποτελεΐται άπό

(α) ώμική άντίσταση καί χωρητικότητα σέ σειρά καί

(β) ώμική άντίσταση καί αύτεπαγωγή σέ σειρά.

15-7. Ή έπόμενη γέφυρα ίσορροπεΐ σέ συχνότητα 1 kHz



Προσδιορίστε τά στοιχεΐα τής σύνθετης άντιστάσεως Z_x άν τούτη άποτελεΐται άπό

(α) ώμική άντίσταση σέ παράλληλη σύνδεση μέ χωρητικότητα καί

(β) ώμική άντίσταση σέ παράλληλη σύνδεση μέ αύτεπαγωγή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

15-8. Συνδέστε μιά γέφυρα Hay (βλ. σχήμα 15-17) μέ τά έξής στοιχεῖα:

$C_1 = 0.2\ \mu F$

$R_2 = 1\ k\Omega$

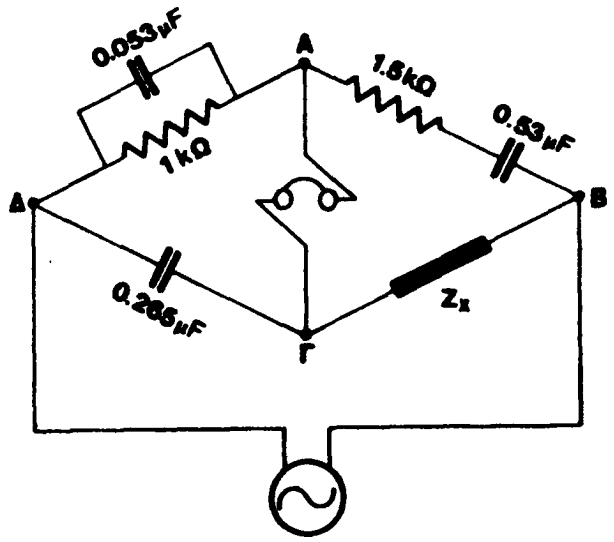
$L_x = 150\ mH$

$R_x = 100\ \Omega$.

Προσδιορίστε τίς άντιστάσεις R_1 καί R_3 ὥστε νά ἰσορροπίσει ἡ γέφυρα σέ συχνότητα 1 kHz.

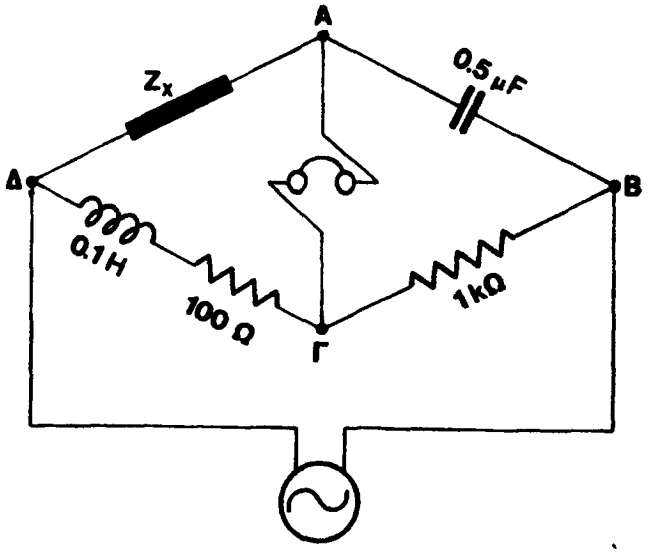
15-9. Συνδέστε μιά γέφυρα Maxwell (βλ. σχήμα 15-18) μέ τά στοιχεῖα τῆς προηγούμενης άσκήσεως. Προσδιορίστε τίς άντιστάσεις R_1 καί R_3 ὥστε νά ἰσορροπίσει ἡ γέφυρα.

15-10. Ἡ ἐπόμενη γέφυρα ἰσορροπεῖ σέ συχνότητα 1 kHz



Προσδιορίστε τά στοιχεῖα (R_x, C_x) ἤ (R_x, L_x) τῆς ἀγνωστης σύνθετης άντιστάσεως Z_x θεωρώντας σύνδεση σέ σειρά ἤ παράλληλη.

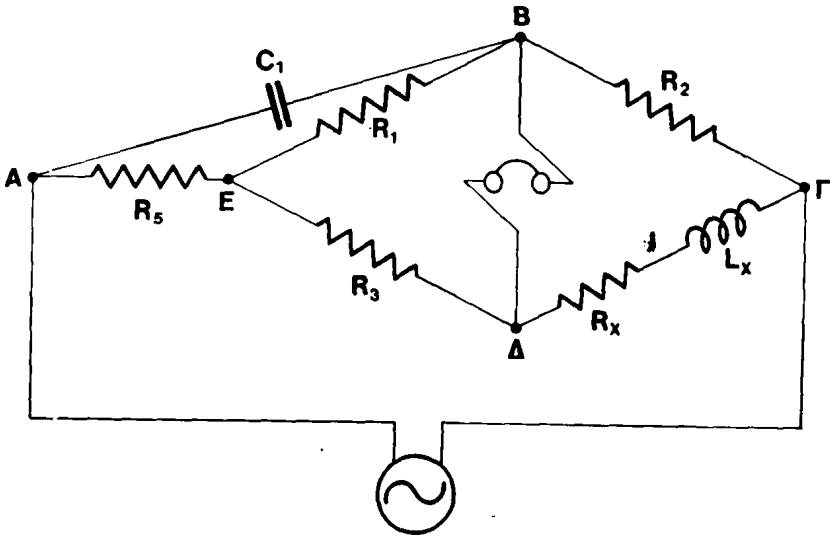
15-11. Ἡ ἐπόμενη γέφυρα ἰσορροπεῖ σέ συχνότητα 1 kHz



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Προσδιορίστε τά στοιχεῖα (R_x, C_x) ἤ (R_x, L_x) τῆς ἀγνωστης σύνθετης ἀντιστάσεως Z_x θεωρώντας σύνδεση σέ σειρά ἤ παράλληλη.

15-12. Ἡ **γέφυρα Stroud - Oates** πού δίνεται στό ἐπόμενο σχῆμα μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τή μέτρηση τῶν στοιχείων ἑνός ἐξαρτήματος αὐτεπαγωγῆς.



Μετασχηματίζοντας τόν ἀστέρα πού σχηματίζουν οἱ ἀντιστάσεις R_1, R_3 καί R_5 σέ τρίγωνο, δεῖξτε ὅτι τό κύκλωμα πού προκύπτει εἶναι ἰσοδύναμο πρός τή γέφυρα Maxwell (ἐκτός ἀπό μιά ἐπουσιώδη διακλάδωση πρός τά ἀκουστικά). Ἀπό τό ἰσοδύναμο κύκλωμα δεῖξτε ὅτι οἱ συνθῆκες ἰσορροπίας τῆς γέφυρας Stroud - Oates εἶναι

$$L_x = C_1R_2\left(R_3 + R_5 + \frac{R_3R_5}{R_1}\right)$$

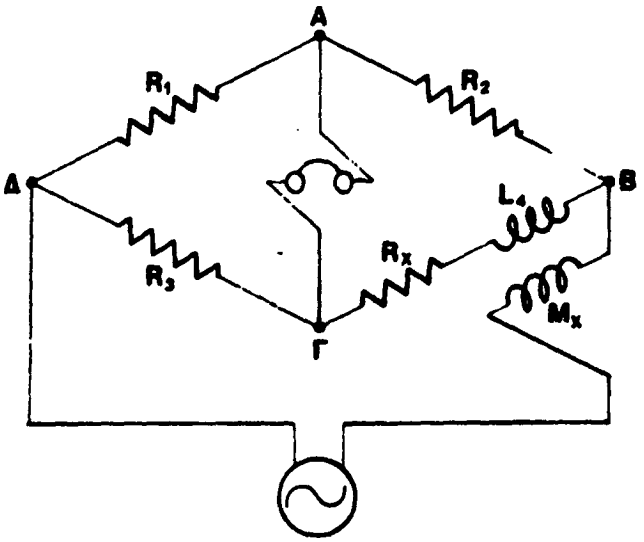
$$R_x = \frac{R_2R_3}{R_1}.$$

10-13. Ἡ γέφυρα πού ἀκολουθεῖ μπορεῖ νά προσδιορίσει τό συντελεστή ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς ἑνός ἐξαρτήματος. Δεῖξτε ὅτι οἱ συνθῆκες ἰσορροπίας τῆς γέφυρας εἶναι

$$M_x = \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

$$R_x = R_3\frac{R_2}{R_1}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



15-14. Ἡ γέφυρα τοῦ σχήματος 15-24 ἔχει τά ἑξῆς στοιχεῖα:

$R_1 = 1\ k\Omega$

$R_2 = 800\ \Omega$

$C_2 = 0.159\ \mu F$

$R_3 = 500\ \Omega$

$C_4 = 0.636\ \mu F$.

Προσδιορίστε τή συχνότητα στήν ὁποία ἰσορροπεῖ ἡ γέφυρα καί τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_4 πού ἀπαιτεῖται γιά νά ἐπιτευχθεῖ ἰσορροπία.

15-15. Ἡ γέφυρα τοῦ σχήματος 15-24 ἔχει τά ἑξῆς στοιχεῖα:

$R_2 = 800\ \Omega$

$C_2 = 0.5\ \mu F$

$R_3 = 1\ k\Omega$

$R_4 = 400\ \Omega$

$C_4 = 1.0\ \mu F$.

Προσδιορίστε τή συχνότητα στήν ὁποία ἰσορροπεῖ ἡ γέφυρα καί τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_1 πού ἀπαιτεῖται γιά νά ἐπιτευχθεῖ ἰσορροπία.

15-16. Μία γέφυρα συντονισμοῦ (βλ. σχῆμα 15-25) μέ γνωστά στοιχεῖα

$R_1 = 200\ \Omega$

$R_2 = 100\ \Omega$

$R_3 = 25\ \Omega$

$C_4 = 0.25\ pF$

ἰσορροπεῖ σέ συχνότητα $\nu = 1$ MHz.

(α) Προσδιορίστε τά στοιχεῖα R_4 καί L_4 στόν τέταρτο κλάδο τῆς γέφυρας.

(β) Ἄν ἕνας πυκνωτής μέ χωρητικότητα 0.2 pF τοποθετηθεῖ παράλληλα πρός τήν ἀντίσταση R_1, κατά πόσο πρέπει νά μεταβληθεῖ ἡ χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ C_4 ὥστε νά ἰσορροπίσει καί πάλι ἡ γέφυρα;

(γ) Ἄν ὁ πυκνωτής τοποθετηθεῖ παράλληλα πρός τήν ἀντίσταση R_3 προσδιορίστε τή νέα τιμή τοῦ πυκνωτῆ C_4 γιά ἐπίτευξη τῆς ἰσορροπίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16

οι εξισωσεις του Maxwell

Ἡ ἰδιότητα πού ἀποκτᾶ ὁ χῶρος μέ τήν παρουσία κάποιας κατανομῆς φορτίου καί ρεύματος περιγράφεται μέ δύο ἀνυσματικές συναρτῆσεις: τό ἠλεκτρικό πεδίο **E** καί τό μαγνητικό πεδίο **B**. Ὡς πηγές τῶν δύο πεδίων ἀντίστοιχα οἱ κατανομές ρ καί **J** περιγράφουν τή δημιουργία τῶν πεδίων μέ τίς ἐξισώσεις

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 4\pi\rho \qquad (2.28)$$

καί

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\, c\right] \frac{4\pi}{c}\, \mathbf{J}. \qquad (7.40)$$

Ἡ μή ὕπαρξη μαγνητικοῦ φορτίου στή φύση μᾶς ἐπιτρέπει νά γράψουμε μιά ἀκόμη διαφορική ἐξίσωση γιά τό μαγνητικό πεδίο

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (7.33)$$

ἐνῶ, μέ τή θεώρηση μαγνητικῶν πεδίων πού μεταβάλλονται μέ τό χρόνο, προσδιορίσαμε τή διαφορική ἐξίσωση πού συνδέει τά ἀνύσματα **E** καί **B**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\,[c]\,\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \qquad (9.28)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στό τελευταῖο αὐτό κεφάλαιο θά ἐξετάσουμε τό πεδίο ἐφαρμογῆς τῶν προηγούμενων ἐξισώσεων καί τίς λύσεις πού προσφέρουν γιά τήν περιγραφή τοῦ ἡλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου.

16-1 Ρεῦμα Μετατοπίσεως

Εἶναι κατ' ἀρχήν χρήσιμο νά ξαναγράψουμε τίς προηγούμενες ἐξισώσεις γιά τά ἀντίστοιχα ἀνύσματα τῆς ἡλεκτρικῆς μετατοπίσεως **D** καί τοῦ πεδίου μαγνητίσεως **H**, ὥστε νά μήν ἀποκλειστεῖ ἡ παρουσία διηλεκτρικῶν καί μαγνητικῶν ὑλικῶν. Θυμίζοντας τήν προέλευσή τους οἱ τέσσερις διαφορικές ἐξισώσεις πού διέπουν τή γένεση καί ἐξέλιξη τοῦ ἡλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου εἶναι

Νόμος τοῦ Coulomb
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left[\frac{1}{4\pi}\right] 4\pi\rho \tag{16.1}$$

Νόμος τοῦ Ampère
$$\nabla \times \mathbf{H} = \left[\frac{c}{4\pi}\right] \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \tag{16.2}$$

Ἀπουσία μαγνητικοῦ φορτίου
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{16.3}$$

Νόμος τοῦ Faraday
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\,[c]\,\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,. \tag{16.4}$$

Πρέπει ἀμέσως νά παρατηρηθεῖ ὅτι ὅλες οἱ προηγούμενες ἐξισώσεις δέν εἶναι ἀνεξάρτητες μεταξύ τους. Ἀπό τό γενικό θεώρημα τοῦ ἀνυσματικοῦ λογισμοῦ πού προβλέπει ὅτι ἡ ἀπόκλιση τοῦ στροβιλισμοῦ κάθε ἀνύσματος μηδενίζεται

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0 \tag{16.5}$$

ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ εὔκολα νά δείξει ὅτι ἡ ἐξ. (16.3) εἶναι ἄμεσο ἐπακόλουθο τοῦ νόμου τοῦ Faraday. Παρόλα αὐτά ἡ ἐξ. (16.3) εἶναι τόσο σημαντική ὥστε συνήθως διατηρεῖται στό σύστημα τῶν βασικῶν ἐξισώσεων τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ.

Μιά δεύτερη παρατήρηση ἀφορᾶ τό πεδίο ἐφαρμογῆς τῶν ἐξ. (16.1) - (16.4) καί ἰδιαίτερα στήν περιοχή τῶν χρονικά μεταβαλλόμενων πεδίων. Ἡ ἐξ. (16.4) (καί ἐπομένως ἡ ἐξ. (16.3)) εἶναι βέβαιο ὅτι δέν περιορίζεται σέ καταστάσεις πού παραμένουν σταθερές ὡς πρός τό χρόνο. Ἀντίθετα ὁ νόμος τοῦ Faraday ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς στατικῆς ἐξισώσεως $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ μέ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τή θεώρηση χρονικά μεταβαλλόμενου μαγνητικοῦ (καί ἡλεκτρικοῦ) πεδίου. Εἶναι ἀκόμη δυνατόν νά δείξουμε στά πλαίσια τῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας ὅτι ἡ ἐξ. (16.1) ἰσχύει τόσο γιά στατικά ὅσο καί γιά κινούμενα φορτία†. Ἰσχύει δηλαδή καί στήν περίπτωση ὅπου οἱ κατανομές καί τά πεδία εἶναι συναρτήσεις τοῦ χρόνου. Τελικά ἀπό τίς τέσσερις βασικές ἐξισώσεις τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ πού μελετήσαμε ὡς τώρα μόνο ὁ νόμος τοῦ Ampère ἔχει ἐξαχθεῖ θεωρώντας ἀποκλειστικά στατική κατάσταση. Τοῦτο, ὅπως θά δοῦμε ἀμέσως στή συνέχεια, μεταξύ ἄλλων καθιστᾶ τήν ἐξ. (16.2) ἀσυμβίβαστη πρός τίς ὑπόλοιπες.

Ἡ ἀντινομία προέρχεται ἀπό τή διατήρηση τοῦ ἡλεκτρικοῦ φορτίου πού, ὅπως εἴδαμε στήν Παράγραφο 4-2, συνεπάγεται τή σχέση μεταξύ κατανομῆς φορτίου καί ρεύματος

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{16.6}$$

Γιά σταθερή πυκνότητα ρεύματος δείξαμε στήν Παράγραφο 9-3 ὅτι ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Ampère τῆς ἐξ. (16.2). Ἄς θεωρήσουμε ὅμως τήν περίπτωση ὅπου ὁ χῶρος χαρακτηρίζεται ἀπό μιά χρονικά μεταβαλλόμενη πυκνότητα φορτίου $\rho(\mathbf{r},t)$. Στήν περίπτωση αὐτή $\partial\rho/\partial t \neq 0$ καί ἀπό τήν ἐξ. (16.6)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0. \tag{16.7}$$

Ἀλλά ἀπό τήν ἐξ. (16.2), καθόσον ἡ ἀπόκλιση τοῦ στροβιλισμοῦ ὁποιουδήποτε ἀνύσματος μηδενίζεται, ἕπεται ὅτι

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \left[\frac{4\pi}{c}\right] \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0. \tag{16.8}$$

Ἡ ἀσυμφωνία μεταξύ τῶν ἐξ. (16.7) καί (16.8) δείχνει ὅτι ὁ νόμος τοῦ Ampère δέν πρέπει νά ἰσχύει γιά συστήματα ὅπου ἡ κατανομή φορτίου καί ρεύματος μεταβάλλονται μέ τό χρόνο.

Τό 1865 ὁ J.C. Maxwell, μετά τήν ὁλοκλήρωση τῶν πειραμάτων τοῦ Faraday πού ὁδήγησαν στόν ὁμώνυμο νόμο τῆς ἐπαγωγῆς, διέκρινε τήν ἀντινομία καί τροποποίησε τήν ἐξ. (16.2) ἔτσι, ὥστε νά εἶναι συνεπής πρός τή διατήρηση τοῦ ἡλεκρικοῦ φορτίου. Γιά τή μεγάλη του αὐτή συμβολή οἱ βασικές ἐξισώσεις τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ ἀναφέρονται σήμερα ὡς **ἐξισώ-**

† Βλέπε π.χ. «Μαθήματα Φυσικῆς Πανεπιστημίου Berkeley», Τόμος 2, «Ἠλεκτρισμός - Μαγνητισμός», Ἔκδοση ΕΜΠ, 1978, Κεφ. 5.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σεις τοῦ Maxwell. Ὁ Maxwell παρατήρηση ὅτι ἡ ἐξ. (16.6) μπορεῖ νά μεταβληθεῖ σέ κλίση ἑνός ἀνύσματος μέ μηδενική ἀριθμητική τιμή ἄν χρησιμοποιηθεῖ ὁ νόμος τοῦ Coulomb. Πράγματι, διαφορίζοντας τήν ἐξ. (16.1) καί ἀντικαθιστώντας στήν ἐξ. (16.6) προκύπτει

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + [4\pi] \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0. \tag{16.9}$$

Πρότεινε ἐπομένως τήν τροποποίηση τοῦ νόμου τοῦ Ampère μέ τό μετασχηματισμό

$$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J} + [4\pi] \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{16.10'}$$

καί ἔγραψε τήν ἐξ. (16.2) στή γενική μορφή

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left[\frac{c}{4\pi} \right] \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + [c] \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{16.11}$$

Πρέπει ἴσως νά τονιστεῖ ὅτι ὁ προηγούμενος συλλογισμός δέν ἀποτελεῖ «ἀπόδειξη». Οὔτε, ὅπως ὁ νόμος τοῦ Faraday, προέρχεται ἀπό τήν πειραματική παρατήρηση. Ἡ τροποποίηση τοῦ Maxwell στηρίζεται στήν ἐπιστημονική διαίσθηση, πού βεβαίως στή συνέχεια ἀναμένει τή δικαίωσή της ἀπό τό πείραμα. Ὁ ἐπιπλέον ὅρος στό δεξιό σκέλος τῆς ἐξ. (16.11) ὀνομάστηκε ἀπό τόν Maxwell **ρεῦμα μετατοπίσεως** καί ἡ ὀνομασία αὐτή ἔχει παραμείνει. Ἡ σημασία τοῦ ὅρου $\partial \mathbf{D}/\partial t$ στίς ἐπιπτώσεις τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς θεωρίας εἶναι τεράστια. Χωρίς τόν ὅρο αὐτό θά ἀπουσίαζε τελείως τό φαινόμενο τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας καί ἡ πληθώρα τῶν τεχνολογικῶν ἐφαρμογῶν πού στηρίζονται σ' αὐτή.

Οἱ τέσσερις ἐξισώσεις τοῦ Maxwell στά δύο συστήματα μονάδων εἶναι

Σύστημα CGS	Σύστημα SI	
$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	(16.12α)
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	(16.12β)
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(17.12γ)
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	(16.12δ)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στή μορφή αὐτή ἀναφέρονται στή γένεση καί συμπεριφορά τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου, σέ ὁποιοδήποτε μέσο καί γιά ὁποιαδήποτε κατανομή φορτίου καί ρεύματος, χρονικά μεταβαλλόμενη ἤ μή. Γιά νά συμπληρωθοῦν ἀπαιτεῖται βέβαια ἡ περιγραφή τοῦ μέσου. Οἱ ἠλεκτρικές ἰδιότητες τοῦ μέσου προσδιορίζονται ἀπό τή σύνδεση μεταξύ ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως **D** καί ἠλεκτρικοῦ πεδίου **E** καί μεταξύ τῆς κατανομῆς ρεύματος **J** καί ἠλεκτρικοῦ πεδίου **E**. Οἱ μαγνητικές ἰδιότητες ἀπό τή σύνδεση μεταξύ πεδίου μαγνητίσεως **H** καί μαγνητικοῦ πεδίου **B**. Οἱ ἐξισώσεις πού ἀποδίδουν τίς ἰδιότητες αὐτές μελετήθηκαν μέ κάποια λεπτομέρεια στά προηγούμενα κεφάλαια. Στήν ἰδιαίτερα ἐνδιαφέρουσα περίπτωση ὅπου τό ὑλικό εἶναι ὁμογενές καί ἰσοτροπικό παίρνουν τήν ἁπλή μορφή

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{16.13}$$

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \tag{16.14}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}. \tag{16.15}$$

Ἄν ἐπιπλέον τό ὑλικό εἶναι γραμμικό, οἱ συντελεστές ε, μ καί g εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπό τά πεδία **E** καί **B**.

16-2 Βαθμωτό καί Ἀνυσματικό Δυναμικό

Οἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell ἀποτελοῦν τή βάση μιᾶς ὁλοκληρωμένης θεωρίας τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν φαινομένων. Μέ τήν προσθήκη τῆς ἐξισώσεως πού περιγράφει τή δύναμη Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + [c] \frac{1}{c} q\,\mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{16.16}$$

καί τοῦ δεύτερου νόμου τοῦ Νεύτωνα, δημιουργοῦν ἕνα πλαίσιο μέσα στό ὁποῖο μποροῦν νά περιγραφοῦν κατ' ἀρχήν ὅλα τά φαινόμενα τοῦ μακροκόσμου. Σέ πολλές περιπτώσεις μέ σχετικά ἁπλή γεωμετρία, ἀπευθείας λύση τῶν ἐξ. (16.12) μπορεῖ νά ὁδηγήσει στόν προσδιορισμό τῶν συναρτήσεων **E**(r) καί **B**(r) σέ ὅλο τό χῶρο. Ὅπως ὅμως καί στή στατική κατάσταση εἶναι συνήθως προτιμώτερη καί μαθηματικά εὐκολώτερη μιά δεύτερη λογική ἀφαίρεση στό ἐπίπεδο τῶν δυναμικῶν.

Ἤδη ἔχουμε μελετήσει τό βαθμωτό δυναμικό φ(r) στήν ἠλεκτροστατική καί τό ἀνυσματικό δυναμικό **A**(r) στά στατικά μαγνητικά φαινόμενα. Κα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θόσον ή έξίσωση $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ισχύει καί στή γενική περίπτωση τῶν χρονικά μεταβαλλόμενων πεδίων, μποροῦμε νά διατηρήσουμε τόν όρισμό τοῦ άνυσματικοῦ δυναμικοῦ

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{16.17}$$

Μέ τόν όρισμό αὐτό ή έξ. (16.12δ) παίρνει τή μορφή

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\,[c]\,\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\nabla \times \mathbf{A} \tag{16.18}$$

ή

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + [c]\,\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{16.19}$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ή παράσταση, τῆς ὁποίας ὁ στροβιλισμός στήν τελευταία σχέση μηδενίζεται, μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς ή κλίση μιᾶς βαθμωτῆς συναρτήσεως $\varphi(r)$. Σέ άναλογία ἐπομένως μέ τόν όρισμό τῆς ήλεκτροστατικῆς $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ θά όρίσουμε τή συνάρτηση δυναμικοῦ μέ τή σχέση

$$\mathbf{E} + [c]\,\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \tag{16.20}$$

ή

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - [c]\,\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{16.21}$$

Έξ όρισμοῦ οἱ συναρτήσεις $\mathbf{A}(r)$ καί $\varphi(r)$ ικανοποιοῦν τίς έξ. (16.12γ) καί (16.12δ). Ὁ προσδιορισμός τους μπορεῖ νά ἐπιτευχθεῖ μέ τή χρησιμοποίηση τῶν δύο ὑπόλοιπων έξισώσεων τοῦ Maxwell. Ἄν καί οἱ έξισώσεις μποροῦν νά ἐπιλυθοῦν στή γενική περίπτωση ὅπου ὁ χῶρος καταλαμβάνεται άπό διηλεκτρικά καί μαγνητικά ὑλικά θά θεωρήσουμε τίς έξ. (16.12α) καί (16.12β) στόν κενό χῶρο, ὅπου στό σύστημα CGS οἱ βοηθητικές συναρτήσεις $\mathbf{D}$ καί $\mathbf{H}$ ταυτίζονται μέ τά άντίστοιχα πεδία $\mathbf{E}$ καί $\mathbf{B}$, ένῶ στό σύστημα SI ισχύουν οἱ σχέσεις

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{16.22}$$

καί

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{B}. \tag{16.23}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀντικαθιστώντας ἐπομένως τίς ἐξ. (16.17) καί (16.21) στίς ἐξ. (16.12α) καί (16.12β) προκύπτουν οἱ διαφορικές ἐξισώσεις

$$\nabla^2\varphi + [c]\,\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]4\pi\rho \qquad (16.24\alpha)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \left[\frac{1}{c}\right]\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \left[\frac{\mu_0 c}{4\pi}\right]\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \qquad (16.24\beta)$$

ὅπου γιά ἁπλοποίηση τοῦ συμβολισμοῦ ἔχει χρησιμοποιηθεῖ ἡ ἐξ. (9.12)

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}\,. \qquad (16.25)$$

Τό σύστημα τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (16.24), μέ τή βοήθεια τῶν ὁρισμῶν τοῦ βαθμωτοῦ καί ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ, εἶναι ἰσοδύναμο πρός τίς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell. Ἐκ πρώτης ὄψεως βέβαια οἱ ἐξ. (16.24) φαίνονται πιό πολύπλοκες ἀπό τίς ἐξ. (16.12). Ἐπιπλέον περιέχουν τό μειονέκτημα ὅτι οἱ ἄγνωστες συναρτήσεις $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ καί $\varphi(\mathbf{r})$ ἀπαντῶνται καί στίς δύο ἐξισώσεις. Ἡ ἁπλοποίηση τῶν ἐξ. (16.24) καί ταυτόχρονα ὁ διαχωρισμός τους σέ δύο ἀνεξάρτητες ἐξισώσεις μπορεῖ νά ἐπιτευχθεῖ μέ ἐκμετάλλευση τῆς σχετικῆς ἐλευθερίας πού παρέχεται στόν ὁρισμό τῶν δύο δυναμικῶν.

Στήν Παράγραφο 2-5 εἴδαμε ὅτι τό ἠλεκτροστατικό πεδίο εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τό σημεῖο ἀναφορᾶς τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ. Μεταβολή τοῦ σημείου ἀναφορᾶς συνεπάγεται τήν πρόσθεση μιᾶς σταθερῆς ποσότητας στή συνάρτηση δυναμικοῦ, ἡ ὁποία ὅμως διαμέσου τῆς σχέσεως $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ὁδηγεῖ στό ἴδιο ἠλεκτροστατικό πεδίο. Κατά τόν ἴδιο τρόπο, καθόσον ὁ στροβιλισμός τῆς κλίσης $\nabla\Lambda$ ὁποιασδήποτε βαθμωτῆς συναρτήσεως $\Lambda(\mathbf{r})$ μηδενίζεται, τό μαγνητικό πεδίο πού προσδιορίζει ἡ ἐξ. (16.17) παραμένει ἀναλλοίωτο ἄν τό ἀνυσματικό δυναμικό ὑποστεῖ τό μετασχηματισμό {βλ. Παράγραφο 9-4}

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda. \qquad (16.26)$$

Ὁ μετασχηματισμός αὐτός ἔχει βέβαια ὁρισμένες ἐπιπτώσεις στόν ὁρισμό τοῦ βαθμωτοῦ δυναμικοῦ, πού μέ τή συμμετοχή τῆς συναρτήσεως $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ὁρίζει τό ἠλεκτρικό πεδίο. Γιά νά μείνει ἀναλλοίωτο τό ἠλεκτρικό πεδίο πού

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

προσδιορίζει ή έξ. (16.21), ό μετασχηματισμός τής έξ. (16.26) θά πρέπει νά συνοδεύεται άπό τό μετασχηματισμό

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - [c] \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \tag{16.27}$$

Ή εύχέρεια πού παρέχεται άπό τίς έξ. (16.26) καί (16.27) μᾶς έπιτρέπει τώρα νά έπιλέξουμε ἕνα ζεῦγος δυναμικῶν πού ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη†

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \left[\frac{1}{c}\right] \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{16.28}$$

Μέ τήν έπιβολή τῆς συνθήκης αὐτῆς διαχωρίζεται τό σύστημα τῶν έξ. (16.24) σέ δύο άνεξάρτητες διαφορικές έξισώσεις γιά καθεμιά άπό τίς συναρτήσεις δυναμικοῦ

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 4\pi\rho \tag{16.29α}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = - \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\right] \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \tag{16.29β}$$

Οἱ έξ. (16.28) καί (16.29) συγκροτοῦν ἕνα σύστημα διαφορικῶν έξισώσεων τελείως ἰσοδύναμο πρός τίς έξισώσεις τοῦ Maxwell.

Οἱ μετασχηματισμοί τῶν έξ. (16.26) καί (16.27) όνομάζονται **μετασχηματισμοί βαθμίδας** ένῶ ή μή μεταβολή τῶν πεδίων μέ τούς μετασχηματισμούς αὐτούς άναφέρεται ὡς **διατήρηση βαθμίδας**. Βεβαίως άνακύπτει τό έρώτημα ἄν εἶναι πάντα δυνατόν νά βρεθοῦν δύο συναρτήσεις **A**(r) καί φ(r) πού ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη Lorentz τῆς έξ. (16.28) καί ταυτόχρονα τίς θεμελιώδεις έξισώσεις (16.24). Γιά τό σκοπό αὐτό ἄς θεωρήσουμε δύο συναρτήσεις **A**(r) καί φ(r) πού άποτελοῦν λύσεις τῶν έξ. (16.24) άλλά δέν ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη Lorentz. Οἱ δύο συναρτήσεις **A**′(r) καί φ′(r) πού προκύπτουν άπό τό μετασχηματισμό τῶν έξ. (16.26) καί (16.27) θά ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη Lorentz ἄν

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \left[\frac{1}{c}\right] \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t}$$

† Ή έξ. (16.28) άπαντᾶται στή βιβλιογραφία μέ τόν ὅρο **συνθήκη Lorentz**.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \nabla \cdot \mathbf{A} \left[\frac{1}{c} \right] \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0$$

ἤ

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \left[\frac{1}{c} \right] \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} - \nabla^2 \Lambda. \qquad (16.30)$$

Μέ ἄλλα λόγια, ἄν μπορεῖ νά βρεθεῖ μιά συνάρτηση Λ πού ἱκανοποιεῖ τήν ἐξ. (16.30) γιά τίς λύσεις $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ καί $\varphi(\mathbf{r})$ τῶν ἐξ. (16.24), τότε οἱ νέες συναρτήσεις $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ καί $\varphi'(\mathbf{r})$ θά εἶναι λύσεις τῶν ἐξ. (16.24), θά ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη Lorentz καί ταυτόχρονα θά εἶναι λύσεις τῶν ἀνεξάρτητων ἐξισώσεων (16.29).

Παρατηρεῖται ὅτι ἀκόμη καί γιά τίς συναρτήσεις δυναμικοῦ πού ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη Lorentz ὑπάρχει κάποια εὐχέρεια στήν ἐπιλογή. Ἄν οἱ συναρτήσεις $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ καί $\varphi(\mathbf{r})$ ἱκανοποιοῦν τήν ἐξ. (16.28), τότε εἶναι φανερό ἀπό τήν ἐξ. (16.30) ὅτι ὅλες οἱ συναρτήσεις πού προέρχονται ἀπό τό μετασχηματισμό

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \qquad (16.31\alpha)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \left[\frac{1}{c} \right] \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \qquad (16.31\beta)$$

ἱκανοποιοῦν ἐπίσης τή συνθήκη Lorentz, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ συνάρτηση Λ ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0. \qquad (16.31\gamma)$$

Οἱ λύσεις τῆς κατηγορίας αὐτῆς λέγεται ὅτι ἀνήκουν στή **βαθμίδα Lorentz**.

16-3 Ἐπίπεδα Κύματα σέ Διηλεκτρικά Ὑλικά

Σέ ἕνα διηλεκτρικό ὑλικό μέ ἀμελητέα ἀγωγιμότητα ($g \simeq 0$) εἶναι φανερό ἀπό τήν ἐξ. (16.14) ὅτι δέν μπορεῖ νά ὑπάρξει κατανομή ρεύματος. Ἄν ἐπιπλέον θεωρήσουμε ὅτι στό ἐσωτερικό τοῦ ὑλικοῦ δέν ὑπάρχουν ἐλεύθερα φορτία ($\rho = 0$) οἱ ἐξ. (16.29) μεταπίπτουν στήν ὁμογενή διαφορική ἐξίσωση

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (16.32)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου ή συνάρτηση u άντιπροσωπεύει τό βαθμωτό δυναμικό ή κάποια συντεταγμένη τοῦ άνυσματικοῦ δυναμικοῦ.

Στήν περίπτωση πού θεωροῦμε ή έξ. (16.32) διέπει καί κάθε συνιστῶσα τοῦ ήλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου. Πράγματι, γιά $\rho = 0$ καί $\mathbf{J} = 0$ οί έξισώσεις τοῦ Maxwell παίρνουν τή μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{16.33α}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = [c]\,\frac{\mu\varepsilon}{c}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{16.33β}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{16.33γ}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\,[c]\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{16.33δ}$$

όπου ε καί μ εἶναι οἱ παράμετροι πού χαρακτηρίζουν τό ὑλικό. Εἶναι τώρα δυνατόν μεταξύ τῶν έξ. (16.33β) καί (16.33δ) νά άπαλείψουμε τό άνυσμα **B** ή **E**. Θεωρώντας π.χ. τό στροβιλισμό τῆς έξ. (16.33δ) μποροῦμε νά γράψουμε

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = [c]\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\nabla \times \mathbf{B}) = [c^2]\,\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{16.34}$$

Άπό τήν ταυτότητα

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}, \tag{16.35}$$

καί τήν έξ. (16.33α) ή έξ. (16.34) όδηγεῖ στή διαφορική έξίσωση

$$\nabla^2 \mathbf{E} - [c^2]\,\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{16.36}$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι τό μαγνητικό πεδίο ἱκανοποιεῖ τήν έξίσωση

$$\nabla^2 \mathbf{B} - [c^2]\,\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\,\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{16.37}$$

Οἱ δύο τελευταῖες έξισώσεις μποροῦν νά γραφοῦν ὑπό ἑνιαία μορφή γιά κάθε συνιστῶσα ὡς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\nabla^2 u - \frac{1}{u^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{16.38}$$

ὅπου

$$u = \left[\frac{1}{c}\right]\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \left[\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\right]\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \equiv \beta c. \tag{16.39}$$

Παρατηρεῖται ὅτι λόγω τῶν ἐξ. (3.47α) καί (12.66α) ἡ τιμή τῆς ἀδιάστατης παραμέτρου β, πού ὁρίζεται στό τελευταῖο σκέλος τῆς ἐξ. (16.39), συμπίπτει στά δύο συστήματα μονάδων.

Ἡ ἐξ. (16.38) εἶναι ἴσως ἡ πιό καλά μελετημένη διαφορική ἐξίσωση δεύτερου βαθμοῦ. Οἱ λύσεις της εἶναι περιοδικές συναρτήσεις τῆς ἐκφράσεως

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t \tag{16.40}$$

ὅπου τό **κυματικό ἄνυσμα k** καί ἡ **γωνιακή συχνότητα** ω συνδέονται μέ τή σχέση

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{\beta}\,\frac{\omega}{c}\,. \tag{16.41}$$

Ὁ ἀναγνώστης π.χ. μπορεῖ εὔκολα νά ἀποδείξει μέ ἀντικατάσταση ὅτι δύο ἀνεξάρτητες λύσεις τῆς ἐξ. (16.38) εἶναι οἱ ἐκθετικές συναρτήσεις

$$u_{\pm}(\mathbf{r}, t) = e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}. \tag{16.42}$$

Μιά γενική ἑπομένως λύση τῆς ἐξ. (16.38) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$u(\mathbf{r}, t) = Au_+(\mathbf{r}, t) + Bu_-(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} - Be^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}. \tag{16.43}$$

Καθεμιά ἀπό τίς λύσεις τῆς ἐξ. (16.42) ἀντιπροσωπεύει ἕνα κῦμα πού ταξιδεύει ἀντίστοιχα πρός τή διεύθυνση **k** ἤ $-\mathbf{k}$ μέ ταχύτητα μεταδόσεως u. Θά ἀναφερθοῦμε στήν ταχύτητα u πού χαρακτηρίζει τό κῦμα μέ τήν ὀνομασία **ταχύτητα φάσης.** Ἀπό τήν ἐπίλυση ἑπομένως τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell προκύπτει ἡ ὕπαρξη **ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας**, ἤτοι ἡ δημιουργία μιᾶς περιοδικῆς μεταβολῆς τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου πού μεταδίδεται σέ ἕνα διηλεκτρικό ὑλικό μέ τήν ταχύτητα τῆς ἐξ. (16.39). Εἰδικώτερα στόν κενό χῶρο, ἡ ταχύτητα τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων προβλέπεται ἴση μέ τήν ταχύτητα τοῦ φωτός.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$v = c. \tag{16.44}$$

Ἡ ταύτιση τοῦ φωτός μέ τήν ἠλεκτρομαγνητική ἀκτινοβολία (σέ μιά περιορισμένη περιοχή τῆς συχνότητας ω) ὑπῆρξε ἕνα ἀπό τά σημαντικώτερα ἐπιτεύγματα τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell.

Ἡ ἐξ. (16.35) διέπει καθεμιά ἀπό τίς συνιστῶσες τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί μανητικοῦ πεδίου. Γιά νά διερευνήσουμε περισσότερο τήν ἀνυσματική φύση τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας θά πρέπει νά ἐξετάσουμε ἐπιπλέον τίς δύο ὑπόλοιπες ἐξισώσεις τοῦ Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{16.45α}$$

καί

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{16.45β}$$

Σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (16.42), γιά ἕνα ἐπίπεδο κῦμα πού μεταδίδεται πρός τήν διεύθυνση **k**, θά θεωρήσουμε τά πεδία

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_1 E_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} \tag{16.46α}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_2 B_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} \tag{16.46β}$$

ὅπου E_0 καί B_0 εἶναι δυό σταθερές μιγαδικές ποσότητες καί $\hat{\mathbf{e}}_1$ καί $\hat{\mathbf{e}}_2$ δύο σταθερά μοναδιαῖα ἀνύσματα. Ὅπως καί κατά τήν ἀνάλυση τοῦ ΕΡ θά θεωρήσουμε ὅτι στίς ἐξ. (16.46) φυσική σημασία ἔχει μόνο τό πραγματικό μέρος τῶν μιγαδικῶν ἐκφράσεων.

Ἐφαρμογή τῶν ἐξ. (16.45) στά πεδία τῶν ἐξ. (16.46) δίνει ἀμέσως δύο περιορισμούς ὡς πρός τή σχετική διεύθυνση τῶν ἀνυσμάτων $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ καί **k**

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{k} = 0 \tag{16.47α}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{k} = 0. \tag{16.47β}$$

Ἡ διεύθυνση δηλαδή τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου **E** καί τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου **B** προβλέπεται σέ κάθε στιγμή κάθετη πρός τή διεύθυνση τῆς μεταδόσεως τοῦ κύματος†. Οἱ δύο ἄλλες ἐξισώσεις τοῦ Maxwell, πού συνδέουν τή χρονική μεταβολή κάθε πεδίου μέ τό στροβιλισμό τοῦ ἄλλου, ἐπιβάλλουν ἕνα

† Ἕνα κῦμα τῆς μορφῆς αὐτῆς ἀναφέρεται συνήθως ὡς *ἐγκάρσιο κῦμα*.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἐπιπλέον γενικό περιορισμό. Ἀντικατάσταση τῶν ἐξ. (16.46) στήν ἐξ. (16.33δ) δίνει τή σχέση

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = [c] \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}$$

ἤ

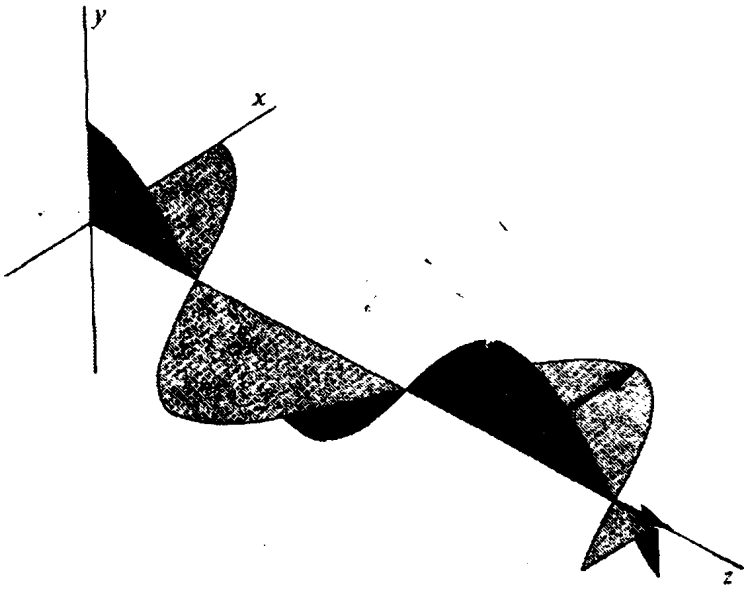
$$\mathbf{B} = \left[\frac{1}{c}\right] \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}. \tag{16.48}$$

Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τίς ἐξ. (16.39) καί (16.41) ἡ τελευταία σχέση μποεῖ νά γραφεῖ ὡς†

$$\mathbf{B} = \left[\frac{1}{c}\right] \frac{1}{\beta k} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \sqrt{\varepsilon\mu}\ \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{k} \tag{16.49}$$

μέ ἄλλα λόγια, τά τρία ἀνύσματα **E**, **B** καί **k** ἀποτελοῦν ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα ἀνυσμάτων, ἐνῶ τά πεδία **E** καί **B** ἔχουν τήν ἴδια φάση. Οἱ διευθύνσεις καθώς καί ἡ μεταβολή τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου σέ σχέση μέ τό κυματικό ἄνυσμα **k** δίνονται στό σχῆμα 16-1. Ἀναλυτικότερα ἡ ἐξ. (16.49) προβλέπει ὅτι τά τρία μοναδιαία ἀνύσματα $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ καί $\hat{\mathbf{k}}$ ἱκανοποιοῦν τή γεωμετρική σχέση

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_1 \tag{16.50}$$



ΣΧΗΜΑ 16-1. Στιγμιαία ἀπεικόνιση τῶν ἀνυσμάτων **E** καί **B** ἑνός ἐπίπεδου κύματος μέ διεύθυνση μεταδόσεως κατά τόν ἄξονα z. Τά δύο ἀνύσματα ἔχουν τήν ἴδια φάση καί εἶναι ταυτόχρονα κάθετα μεταξύ τους καί κάθετα πρός τή διεύθυνση μεταδόσεως τοῦ κύματος.

† Ἡ ἐξ. (16.49) ἰσχύει καί στά δύο συστήματα μονάδων ὅπου οἱ συντελεστές ε καί μ ὁρίζονται κατά διαφορετικό τρόπο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἐνῶ τό σχετικό πλάτος τῶν δύο πεδίων ἐξαρτᾶται ἀπό τίς ἠλεκτρικές καί μαγνητικές ἰδιότητες τοῦ ὑλικοῦ

$$\frac{B_0}{E_0} = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{16.51}$$

16-4 Πόλωση τῶν Ἠλεκτρομαγνητικῶν Κυμάτων

Ἄν $\hat{\mathbf{e}}_1$ καί $\hat{\mathbf{e}}_2$ εἶναι δύο μοναδιαῖα ἀνύσματα κατά τούς ἄξονες x καί y, οἱ ἐξ. (16.46) ἀντιπροσωπεύουν ἕνα κῦμα, τοῦ ὁποίου τό ἠλεκτρικό πεδίο βρίσκεται πάντα στό ἐπίπεδο xz. Γιά τή γενική περίπτωση ἑνός ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος θά πρέπει νά θεωρήσουμε τή συμβολή δύο ἀνεξάρτητων ἠλεκτρικῶν πεδίων, κατά τούς δύο ἄξονες x καί y,

$$\mathbf{E}_x = \hat{\imath}E_x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} = \hat{\imath}E_x e^{ikz-i\omega t} \tag{16.52α}$$

$$\mathbf{E}_y = \hat{\jmath}E_y e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} = \hat{\jmath}E_y e^{ikz-i\omega t} \tag{16.52β}$$

μέ ἀντίστοιχα μαγνητικά πεδία

$$\mathbf{B}_y = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}_x}{k} \tag{16.53α}$$

$$\mathbf{B}_x = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}_y}{k}. \tag{16.53β}$$

Στίς ἐξ. (16.52) τό ἐσωτερικό γινόμενο $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ ἔχει ἀντικατασταθεῖ ἀπό τήν τιμή πού ἐκφράζει τή διάδοση τοῦ κύματος κατά τόν ἄξονα z

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = kz. \tag{16.54}$$

Ἡ γενική μορφή ἑπομένως ἑνός κύματος πού ταξιδεύει πρός τή διεύθυνση $\mathbf{k}$ εἶναι

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\hat{\imath}E_x + \hat{\jmath}E_y)\,e^{ikz-i\omega t} \tag{16.55}$$

μέ ἀντίστοιχη ἔκφραση γιά τό μαγνητικό πεδίο.

Καθόσον τά πλάτη E_x καί E_y εἶναι μιγαδικές ποσότητες, τά δύο ἀνεξάρτητα κύματα τῶν ἐξ. (16.52) μπορεῖ νά ἐμφανίζουν διαφορά φάσης. Ἄν ἡ διαφορά φάσης εἶναι ἴση μέ τό μηδέν, τό κῦμα ἐμφανίζει **γραμμική πόλωση**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί τό ἄνυσμα παραμένει σέ ἕνα σταθερό ἐπίπεδο πού σχηματίζει γωνία ὡς πρός τό ἐπίπεδο xz

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{|E_y|}{|E_x|}\right) \tag{16.56}$$

ἐνῶ τό πλάτος τοῦ κύματος εἶναι

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}. \tag{16.57}$$

Ἄν μεταξύ τῶν κυμάτων E_x καί E_y ὑπάρχει διαφορά φάσης τό κῦμα τῆς ἐξ. (16.54) βρίσκεται σέ κατάσταση **ἐλλειπτικῆς πολώσεως.** Ἡ πιό ἁπλή μορφή τῆς καταστάσεως αὐτῆς εἶναι ἡ **κυκλική πόλωση,** κατά τήν ὁποία τά δύο κύματα τῶν ἐξ. (14.52) ἔχουν τό ἴδιο πλάτος ἀλλά οἱ φάσεις τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν E_x καί E_y διαφέρουν κατά 90°. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ ἐξ. (16.55) παίρνει τή μορφή

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})\, e^{ikz - i\omega t} \tag{16.58}$$

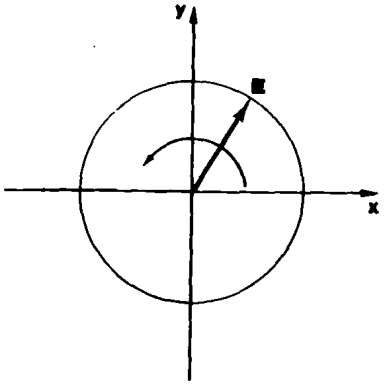
ὅπου

$$E_0 = |E_x| = |E_y|. \tag{16.59}$$

Τό κῦμα τῆς ἐξ. (16.58) ἐπιδέχεται μιά ἁπλή γεωμετρική ἀναπαράσταση πού περιέχεται στό σχῆμα 16-2. Οἱ προβολές τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου στούς δύο ἄξονες πού προκύπτουν μέ τή θεώρηση τοῦ πραγματικοῦ μέρους τῆς ἐξ. (16.58) εἶναι

$$E_x(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \tag{16.60α}$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = \mp E_0 \sin(kz - \omega t). \tag{16.60β}$$



ΣΧΗΜΑ 16-2. Τό ἡλεκτρικό πεδίο κύματος μέ κυκλική πόλωση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ὅπως δείχνει τό σχῆμα 16-2, γιά ἕνα συγκεκριμένο σημεῖο τοῦ ἄξονα z, τό ἡλεκτρικό πεδίο ἔχει σταθερό πλάτος E_0 ἐνῶ ἡ διεύθυνσή του περιστρέφεται στό ἐπίπεδο xy μέ συχνότητα ω/2π. Γιά ἕνα παρατηρητή πρός τόν ὁποῖο πλησιάζει τό κῦμα ἡ περιστροφή εἶναι ἀντίθετη πρός τή φορά τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου γιά θετικό πρόσημο στήν ἐξ. (16.60β) καί σύμφωνα μέ τή φορά τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου γιά ἀρνητικό πρόσημο. Ἡ πρώτη κατάσταση ἀναφέρεται† ὡς **ἀριστερή κυκλική πόλωση** καί ἡ δεύτερη ὡς **δεξιά κυκλική πόλωση.**

Ἡ περίπτωση ὅπου ἡ διαφορά φάσης μεταξύ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν E_x καί E_y δέν εἶναι ἴση πρός π/2 μπορεῖ νά μελετηθεῖ κατά τόν ἴδιο τρόπο. Σέ ἕνα συγκεκριμένο σημεῖο τοῦ ἄξονα z τό μέγιστο ἤ ἐλάχιστο τῶν δύο κυμάτων τῶν ἐξ. (16.52) δέν συμβαίνει τήν ἴδια χρονική στιγμή, ἐνῶ τό ἀνυσματικό τους ἄθροισμα, πού ἐκφράζεται ἀπό τήν ἐξ. (16.55), διατρέχει μιά ἔλλειψη στό ἐπίπεδο xy. Στήν κατάσταση ἐλλειπτικῆς πολώσεως ἡ περιστροφή μπορεῖ νά εἶναι ἀντίθετη ἤ σύμφωνη μέ τή φορά τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου ἄν ἀντίστοιχα ἡ συνιστῶσα E_x προηγεῖται ἤ ἕπεται ὡς πρός τή φάση ἀπό τή συνιστῶσα E_y.

16-5 Ροή Ἐνεργείας καί τό Ἄνυσμα Poynting

Σέ περιπτώσεις ὅπου τό ἡλεκτρομαγνητικό πεδίο ἀνταλλάσσει ἐνέργεια μέ ἄλλα συστήματα οἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell ὁδηγοῦν σέ μιά ἐνδιαφέρουσα μαθηματική ἔκφραση τῆς ἀρχῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας. Ἄς θεωρήσουμε γιά τό σκοπό αὐτό τό ἔργο πού ἀσκεῖται σέ ἕνα φορτίο q, τό ὁποῖο κινεῖται μέ ταχύτητα **u** στήν περιοχή ἑνός ἡλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου (**E**, **B**). Ἡ ἀλληλεπίδραση ἐκφράζεται ἀπό τή δύναμη Lorentz

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + [c]\,\frac{1}{c}\,\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right). \tag{16.61}$$

Ἔτσι τό πεδίο ἀσκεῖ στό φορτίο ἔργο μέ ρυθμό

$$P = \mathbf{u}\cdot\mathbf{F} = q\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{E}. \tag{16.62}$$

---

† Σέ πολλά σύγχρονα συγγράμματα οἱ δύο ἐναλλακτικές καταστάσεις κυκλικῆς πολώσεως ἀναφέρονται ἀντίστοιχα ὡς καταστάσεις μέ **θετική** καί **ἀρνητική ἑλίκωση.** Ἡ ὁρολογία αὐτή ἀντικατοπτρίζει τό γεγονός ὅτι τό ἄνυσμα τῆς στροφορμῆς ἑνός κύματος μέ ἀριστερή κυκλική πόλωση ἔχει φορά κατά τή θετική φορά τοῦ ἄξονα z, ἐνῶ συμβαίνει τό ἀντίθετο γιά κῦμα μέ δεξιά κυκλική πόλωση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Ἡ τελευταία σχέση μπορεῖ εὔκολα νά γενικευτεῖ στήν περίπτωση ὅπου στό χῶρο κυκλοφοροῦν πολλά φορτία q_i μέ ταχύτητες $\mathbf{u}_i$, τά ὁποῖα, σύμφωνα μέ τήν ἐξ. (4.5), δημιουργοῦν μιά κατανομή πυκνότητας ρεύματος

$$\mathbf{J} = \sum_i n_i q_i \mathbf{u}_i. \tag{16.63}$$

Στή γενική αὐτή περίπτωση ἡ ἰσχή πού καταναλώνεται ἀπό τό πεδίο στή μονάδα ὄγκου παίρνει τή μορφή

$$\rho = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \tag{16.64}$$

ἐνῶ σέ ἕνα πεπερασμένο ὄγκο V ὁ ρυθμός μέ τόν ὁποῖο ἀντλεῖται ἐνέργεια ἀπό τό πεδίο δίνεται ἀπό τό ὁλοκλήρωμα

$$P = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3r. \tag{16.65}$$

Ἡ ἐνέργεια αὐτή μετατρέπεται σέ ἄλλη μορφή, ὅπως μηχανική ἤ θερμική, ἐνῶ ἀπό τήν ἀρχή διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἀναμένεται ὅτι ἡ ὁλική ἐνέργεια τοῦ συστήματος, ἄν δέν ἀλληλεπιδρᾶ μέ τό περιβάλλον, θά παραμένει σταθερή.

Γιά νά ἐξάγουμε τή μαθηματική ἔκφραση τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας θά χρησιμοποιήσουμε τήν ἐξ. (16.12β) γιά τήν ἀντικατάσταση τῆς κατανομῆς ρεύματος στήν ἐξ. (16.65)

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3r = \int_V \left(\left[\frac{4\pi}{c} \right] \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \right.$$

$$\left. - [4\pi] \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d^3r. \tag{16.66}$$

Χρησιμοποιώντας ἀκόμη τήν ταυτότητα τοῦ ἀνυσματικοῦ λογισμοῦ

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \tag{16.67}$$

καί τήν ἐξ. (16.12δ) γιά τήν ἀντικατάσταση τοῦ στροβιλισμοῦ $\nabla \times \mathbf{E}$ θά γράψουμε τήν ἐξ. (16.66) στή μορφή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}d^3r = -\,|4\pi|\,\frac{1}{4\pi}\int_v\Big(\Big[\,\frac{1}{c}\,\Big]\,c\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

$$+\,\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\Big)d^3r. \qquad (16.68)$$

Κάθε ὅρος στήν τελευταία σχέση ἔχει τίς διαστάσεις ἰσχῆς. Ἄν θεωρήσουμε ὑλικά μέ γραμμικές ἠλεκτρικές καί μαγνητικές ἰδιότητες, ὁ δεύτερος ὅρος στό δεξιό σκέλος τῆς ἐξ. (16.68) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$P_2 = [4\pi]\,\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_v \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}d^3r \qquad (16.69)$$

πού σέ σύγκριση μέ τήν ἐξ. (3.90) ἀναγνωρίζεται ὡς ὁ ρυθμός μεταβολῆς τῆς ἐνεργείας στατικοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου σέ ἕνα γραμμικό διηλεκτρικό ὑλικό. Κατά τόν ἴδιο τρόπο ὁ τρίτος ὅρος στό δεξιό σκέλος τῆς ἐξ. (16.68) ταυτίζεται μέ τήν ἔκφραση πού ἀποδίδει τό ρυθμό μεταβολῆς τῆς ἐνεργείας στατικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου σέ ὑλικό μέ γραμμικές μαγνητικές ἰδιότητες

$$P_3 = [4\pi]\,\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_v \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}d^3r. \qquad (16.70)$$

Ἡ παραδοχή ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωμάτων στίς ἐξ. (16.69) καί (16.70)

$$W = [4\pi]\,\frac{1}{8\pi}\int_v(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\,d^3r \qquad (16.71)$$

ἐκφράζει τήν ἐνέργεια πού στό χῶρο V ἔχει ἀποθηκευτεῖ στό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο, ἀκόμη καί στήν περίπτωση χρονικά μεταβαλλόμενων πεδίων, εἶναι ἐξαιρετικά ἐλκυστική. Παρόλο ὅτι ἡ παραδοχή αὐτή δέν ἔχει ἐλεγχθεῖ ἀπευθείας μέ τό πείραμα†, ἡ υἱοθέτησή της δέν ὁδηγεῖ σέ καμμιά γνωστή σήμερα ἀντινομία μεταξύ θεωρίας καί παρατηρήσεως. Θά γράψου-

† Γιά μιά ἐξαιρετικά ἐνδιαφέρουσα ἀνάλυση γύρω ἀπό τήν ἑρμηνεία τῆς πυκνότητας ἐνεργείας καί ροῆς ἐνεργείας χρονικά μεταβαλλομένων ἠλεκτρομαγνητικῶν πεδίων βλέπε «The Feynman Lectures», Addison Wesley, Reading, Mass., U.S.A., Τόμος II, Παράγραφος 27-4.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

με έπομένως γιά τήν πυκνότητα ένεργείας στή γενική περίπτωση χρονικά μεταβαλλόμενου ήλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου τήν έκφραση

$$w = [4\pi]\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}). \tag{16.72}$$

Όρίζοντας άκόμη τό άνυσμα

$$\mathbf{S} \equiv \left[\frac{4\pi}{c}\right]\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \tag{16.73}$$

θά γράψουμε τήν έξ. (16.68) ώς

$$\int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}d^3r = -\int_v \left(\nabla\cdot\mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t}\right)d^3r. \tag{16.74}$$

Τό άνυσμα **S** πού όρίσαμε στήν έξ. (16.73) καί πού στή βιβλιογραφία συναντᾶται μέ τήν όνομασία **άνυσμα Poynting** έχει τίς διαστάσεις ένέργεια/(έπιφάνεια × χρόνος). Υπό τό φῶς τῆς διατηρήσεως τῆς ένεργείας καί τῆς παραδοχῆς πού υιοθετήσαμε γιά τήν έκφραση τῆς έξ. (16.72), τό άνυσμα Poynting άντιπροσωπεύει ένα έξαιρετικά σημαντικό μέγεθος. Μετασχηματίζοντας στήν έξ. (16.74) τόν όρο πού περιέχει τήν άπόκλιση $\nabla\cdot\mathbf{S}$ σέ έπιφανειακό όλοκλήρωμα μποροῦμε νά γράψουμε

$$\int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}d^3r + \frac{\partial}{\partial t}\int_v wd^3r = -\int_A \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} \tag{16.75}$$

όπου $d\mathbf{a}$ εἶναι τό στοιχεῖο τῆς έπιφανείας A πού περιβάλλει τόν όγκο V. Τό άριστερό μέρος τῆς τελευταίας έξισώσεως περιέχει τήν ίσχή πού καταναλώνει τό ήλεκτρομαγνητικό πεδίο στήν κατανομή ρεύματος τοῦ χώρου V καί τό ρυθμό μεταβολῆς τῆς ένεργείας τοῦ πεδίου. Τοῦτο, άπό τή διατήρηση τῆς ένεργείας, πρέπει νά ίσοῦται μέ τήν ένέργεια πού διαφεύγει στή μονάδα τοῦ χρόνου άπό τά όρια τοῦ χώρου V. Μέ τήν έρμηνεία αὐτή τό άνυσμα Poynting άναδεικνύεται ώς τό μέγεθος πού έκφράζει τή ροή ένεργείας στό χῶρο. Καθόσον ό χῶρος V τῶν έξ. (16.74) καί (16.75) εἶναι αὐθαίρετος, ή ἴδια σχέση μπορεῖ νά γραφεῖ καί ὑπό μορφή διαφορικῆς έξισώσεως ώς

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{S}. \tag{16.76}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ τελευταία ἐξίσωση ἀναφέρεται συχνά καί ὡς **θεώρημα τοῦ Poynting**.

Εἶναι ἴσως χρήσιμο νά ὑπενθυμίσουμε ὅτι ἡ προηγούμενη ἀνάλυση περιορίστηκε σέ ἰσοτροπικά ὑλικά μέ γραμμικές ἠλεκτρικές καί μαγνητικές ἰδιότητες. Ἄν καί ἡ κατηγορία αὐτή περιλαμβάνει τά περισσότερα διηλεκτρικά ὑλικά, ἀποκλείστηκε ἡ μεγάλη (καί ἀπό τεχνολογικῆς πλευρᾶς ἐνδιαφέρουσα) κατηγορία τῶν σιδηρομαγνητικῶν ὑλικῶν. Γιά μή γραμμικά φαινόμενα, ὅπως τό φαινόμενο τῆς ὑστερήσεως σέ σιδηρομαγνητικά ὑλικά, ἕνα μέρος τῆς ἐνεργείας καταναλώνεται σέ μή ἀντιστρεπτές μεταβολές τοῦ ὑλικοῦ καί ἡ ἁπλή σχέση τῆς ἐξ. (16.76) παύει νά ἰσχύει.

16-6 Ἠλεκτρομαγνητική Ἀκτινοβολία

Τό σημαντικώτερο ἴσως γεγονός πού ἀναδεικνύεται ἀπό τήν ὁλοκλήρωση τῆς θεωρίας τῶν ἠλεκτρικῶν καί μαγνητικῶν φαινομένων μέ τή διατύπωση τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell εἶναι ἡ πρόβλεψη τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας. Ὅπως εἴδαμε στήν Παράγραφο 16-3, ἡ ἐξ. (16.38) πού προκύπτει ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell γιά ἕνα ὁμογενές ἰσοτροπικό ὑλικό μέ ἄπειρες ἤ ἡμιάπειρες διαστάσεις, προβλέπει τήν ὕπαρξη ἑνός ἐπίπεδου κύματος πού διαδίδεται στό ὑλικό μέ τήν ταχύτητα τῆς ἐξ. (16.39). Τό κῦμα χαρακτηρίζεται ἀπό τή συχνότητα ω πού συνδέεται πρός τό μέγεθος τοῦ κυματικοῦ ἀνύσματος **k** μέ τή σχέση τῆς ἐξ. (16.41). Ἄν χωρίς νά χάσουμε τίποτε ἀπό τή γενικότητα, ἐπιλέξουμε ἕνα σύστημα συντεταγμένων μέ τόν ἄξονα z πρός τή διεύθυνση τοῦ κυματικοῦ ἀνύσματος **k**, ἡ γενική λύση τῆς ἐξ. (16.43) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς

$$u(\mathbf{r}, t) = u(z, t) = Ae^{ikz - i\omega t} + Be^{-ikz - i\omega t}$$

$$= Ae^{ik(z - vt)} + Be^{-ik(z + vt)} \qquad (16.77)$$

Ὅπως γνωρίζουμε ἀπό τή θεωρία συναρτήσεων οἱ συναρτήσεις $e^{\pm ikx}$ ἀποτελοῦν μιά πλήρη βάση γιά τήν ἀπεικόνιση ὁποιασδήποτε συναρτήσεως f(x) μέσω τοῦ ὁλοκληρώματος Fourier. Χρησιμοποιώντας ἑπομένως ἕνα γραμμικό συνδιασμό τῶν συναρτήσεων τῆς ἐξ. (16.77) μποροῦμε νά γράψουμε τή γενική λύση

$$u(z, t) = f_-(z - vt) + f_+(z + vt) \qquad (16.78)$$

ὅπου $f_-(x)$ καί $f_+(x)$ εἶναι αὐθαίρετες συναρτήσεις τῶν μεταβλητῶν $x = z \pm vt$. Ἡ ἐπαλήθευση μπορεῖ νά γίνει εὔκολα μέ ἀπευθείας ἀντικατάσταση στήν ἐξ. (16.38).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Οἱ δύο συναρτήσεις $f_{\pm}(z \pm ut)$ τῆς γενικῆς λύσεως (16.78) ἀντιπροσωπεύουν δύο ἐπίπεδα κύματα πού ταξιδεύουν ἀντίστοιχα πρός τή θετική καί ἀρνητική φορά τοῦ ἄξονα τῶν συντεταγμένων z. Καθένα ἀπό τά κύματα συγκροτεῖται ἀπό τήν ἐπαλληλία ἐπίπεδων κυμάτων μέ διαφορετικές συχνότητες. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα Fourier μποροῦμε νά ἀπεικονίσουμε καθεμιά ἀπό τίς συναρτήσεις $f_{\pm}(x)$ μέ τό ὁλοκλήρωμα

$$f_{\pm}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\pm}(k) e^{\pm ikz - i\omega t} dk \qquad (16.79\alpha)$$

ὅπου τό πλάτος κάθε μονοχρωματικοῦ κύματος $A_{\pm}(k)$ προσδιορίζεται ἀπό τήν τιμή τῆς συναρτήσεως $f_{\pm}$ σέ κάποια χρονική στιγμή, π.χ. τή στιγμή $t = 0$, ὡς

$$A_{\pm}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\pm}(z, 0) e^{\pm ikz} dz. \qquad (16.79\beta)$$

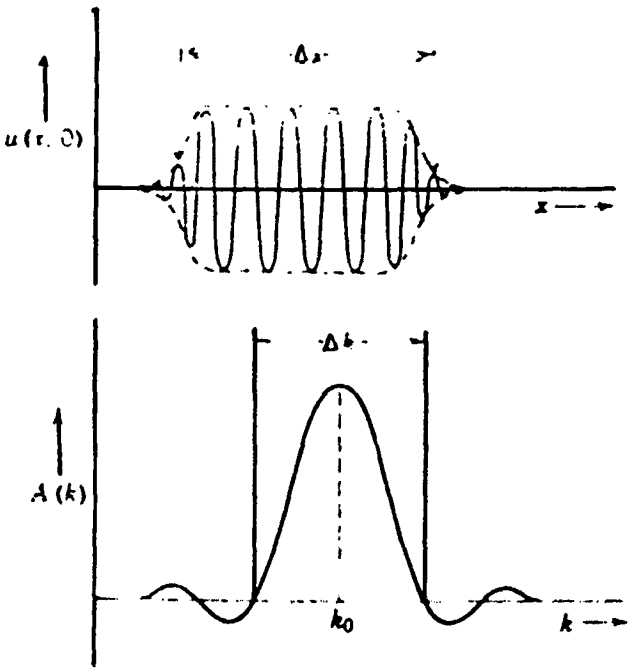
Ἡ γενική λύση τῶν ἐξ. (16.78) καί (16.79) μπορεῖ νά περιγράψει ὅλες τίς ρεαλιστικές καταστάσεις ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας. Συνεχῆ μονοχρωματικά κύματα μέ ἀμείωτη ἔνταση χαρακτηρίζονται ἀπό πλάτος

$$A(k) = A_0 \delta(k - k_0) \qquad (16.80)$$

ὅπου k_0 εἶναι τό μέτρο τοῦ κυματικοῦ ἀνύσματος καί $A_0/\sqrt{2\pi}$ τό σταθερό πλάτος τοῦ πεδίου. **Παλμοί** ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας ἀποδίδονται ἀπό μιά συνεχῆ κατανομή τοῦ πλάτους $A(k)$, πού θυμίζει τήν κατανομή Gauss καί πού ὁδηγεῖ σέ ἕνα κῦμα μέ πεπερασμένες διαστάσεις στό χῶρο. Ἡ τελευταία περίπτωση περιέχεται στό σχῆμα 16-3.

Οἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell δέν ἐπιβάλλουν κανένα περιορισμό στή συχνότητα τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων. Ἠλεκτρομαγνητική ἀκτινοβολία σέ ἕνα ἐκτεταμένο φάσμα συχνοτήτων πού καλύπτει 20 τάξεις μεγέθους ἔχει μελετηθεῖ διεξοδικά καί ἀπαντᾶται σέ πληθώρα τεχνολογικῶν ἐφαρμογῶν. Ἡ ὀνοματολογία πού χρησιμοποιεῖται σήμερα γιά τίς διάφορες περιοχές τοῦ φάσματος τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας περιέχεται στό σχῆμα 16-4. Μέ ἐπίκεντρο τή ζώνη τοῦ ὁρατοῦ φωτός πού καλύπτει μιά ἐξαιρετικά περιορισμένη περιοχή, τό φάσμα ἐκτείνεται ἀπό πολύ χαμηλές συχνότητες τῆς τάξης τῶν 10^4 Hz, μέ ἐφαρμογές στήν τεχνολογία τῆς ἀσύρματης ἐπικοινωνίας, μέχρι τίς ἐξαιρετικά ὑψηλές συχνότητες τῆς τάξης τῶν

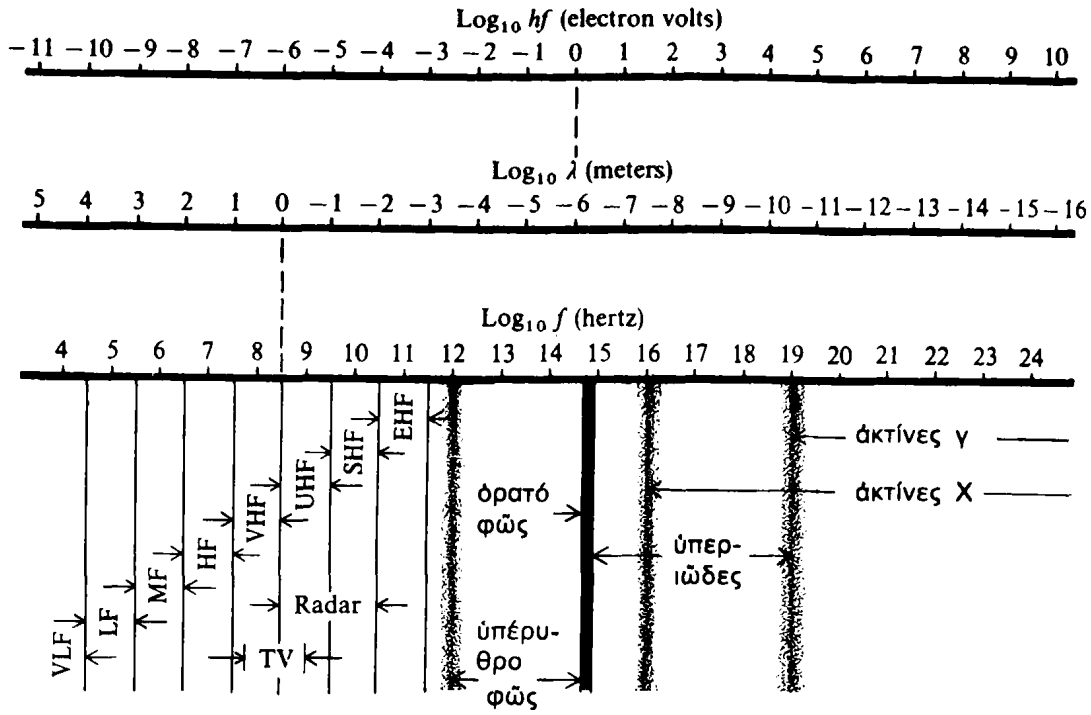
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 16-3. Κατανομή πλάτους A(k) ὡς πρός τό μέτρο τοῦ κυματικοῦ ἀνύσματος k πού ὁδηγεῖ σέ παλμό ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας μέ περασμένη ἔκταση Δz.

$10^{20} - 10^{24}$ Hz, πού ἀντιπροσωπεύουν τήν ἠλεκτρομαγνητική ἀκτινοβολία ἀποδιεγέρσεως τῶν ἀτομικῶν πυρήνων. Ραδιοφωνικά κύματα, θερμική ἀκτινοβολία, τό ὁρατό φῶς, ἀκτίνες x καί γ ἀποτελοῦν ἐκδηλώσεις τοῦ ἴδιου φυσικοῦ φαινομένου, ἄν καί οἱ πηγές τους ἤ οἱ μέθοδοι παρατηρήσεως διαφέρουν ριζικά ἀπό περιοχή σέ περιοχή. Ἡ διαπίστωση αὐτή, πού ἔχει ὑποστεῖ ἐξοντοτική πειραματική διερεύνηση καί τεχνολογική ἐκμετάλευση, ἀποτελεῖ ἕνα ἀπό τά λαμπρότερα ἐπιτεύγματα τῆς φυσικῆς ἐπιστήμης.

Πολλά ἐνδιαφέροντα φαινόμενα ἀναδύονται κατά τή μελέτη τῆς δημιουργίας καί μεταδόσεως τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας. Εἶναι δυνατόν τό μέσο μεταδόσεως νά μήν ἐμφανίζει ὁμοιογένεια ὡς πρός τίς ἠλεκτρικές καί μαγνητικές του ἰδιότητες. Τοῦτο ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τή μεταβολή τῆς ταχύτητας καί τῆς διευθύνσεως μεταδόσεως τῆς ἀκτινοβολίας. Πιό ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ περίπτωση ὁμογενοῦς μέσου, στό ὁποῖο ὅμως ἡ ταχύτητα φάσης ἐξαρτᾶται ἀπό τή συχνότητα. Τήν ἰδιότητα αὐτή ἐμφανίζουν στήν πράξη τά περισσότερα διηλεκτρικά ὑλικά. Φαινόμενα **διασκεδασμοῦ** πού ἐμφανίζονται στήν περίπτωση αὐτή ἔχουν τήν τάση νά μεταβάλλουν τό σχῆμα τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος. Ἕνας παλμός π.χ. μέ τά χαρα-



ΣΧΗΜΑ 16-4. Φάσμα ἡλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας σέ δυνάμεις τῆς συχνότητας f, τοῦ μήκους κύματος λ καί τῆς ἐνεργείας. Ἡ τελευταία κλίμακα συνδέεται μέ τήν κλίμακα τῆς συχνότητας μέσω τῆς σχέσης

$$E = hf$$

ὅπου $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J·sec εἶναι ἡ σταθερά τοῦ Planck. Οἱ ἐνδείξεις VLF, LF, MF,... ἀποτελοῦν συντμήσεις ὅρων ἀπό τήν ἀγγλική, ὅπως «Very Low Frequency», «Low Frequency», «Medium Frequency»,...

κτηριστικά τοῦ σχήματος 16-3 κατά τή χρονική στιγμή t = 0, ἔχει τήν τάση μέ τήν πάροδο τοῦ χρόνου νά ἐπεκταθεῖ στό χῶρο μέ ἀντίστοιχη μείωση τοῦ πλάτους. Ἐξίσου ἐνδιαφέροντα εἶναι φαινόμενα πού ἀνακύπτουν σέ συνοριακές ἐπιφάνειες δύο ὑλικῶν, ὅπου οἱ ἠλεκτρικές καί μαγνητικές ἰδιότητες τοῦ μέσου διαδόσεως μεταβάλλονται κατά ἀσυνεχή τρόπο. Τά φαινόμενα τῆς **ἀνακλάσεως** καί **διαθλάσεως** εἶναι ἀπό τά πιό γνωστά τῆς Ὀπτικῆς καί ἡ ποσοτική τους περιγραφή μέ βάση τήν ἠλεκτρομαγνητική ἀκτινοβολία ἀποτέλεσε μιά ἀπό τίς πρῶτες πειραματικές ἐπιβεβαιώσεις τῆς ὀρθότητας τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell.

Τό ἀντικείμενο τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας καλύπτει ἕνα ἐκτεταμένο πεδίο γνώσης μέ ἐνδιαφέροντα φαινόμενα τόσο ἀπό τή θεωρητική ὅσο καί τεχνολογική ἄποψη. Στήν πανεπιστημιακή ἐκπαίδευση ὁ χῶρος αὐτός συσχετίζεται μέ μηχανικά καί ἀκουστικά φαινόμενα ταλαντώσεων ὅπου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἰσχύουν κατά βάση οἱ ἴδιες διαφορετικές ἐξισώσεις. Στήν ἐνιαία αὐτή μορφή ἀποτελεῖ τό ἀντικείμενο τῆς **Κυματικῆς**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

16-1. Σέ κάποια περιοχή τοῦ χώρου τό μαγνητικό πεδίο δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\mathbf{B} = \hat{\imath}B_0\cos\omega t$$

ὅπου $\hat{\imath}$ εἶναι τό μοναδιαῖο ἄνυσμα κατά τόν ἄξονα τῶν συντεταγμένων z. Χρησιμοποιεῖστε τό νόμο τοῦ Faraday καί προσδιορίστε τό ἠλεκτρικό πεδίο στό χῶρο γύρω ἀπό τόν ἄξονα z. Ἐκφράστε τό ἠλεκτρικό πεδίο σέ καρτεσιανές συντεταγμένες.

16-2. Δεῖξτε ὅτι τό ἠλεκτρικό πεδίο πού προσδιορίσατε στήν προηγούμενη ἄσκηση δέν ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση τοῦ Maxwell πού περιέχει τό ρεῦμα μετατοπίσεως. Σχολιάστε τό ἀποτέλεσμα.

16-3. Οἱ παράλληλοι ὁπλισμοί ἑνός πυκνωτῆ ἔχουν ἐπιφάνεια 500 cm^2 καί ἀπέχουν 0.5 mm. Ὁ πυκνωτής εἶναι συνδεδεμένος σέ σειρά μέ μιά ἀντίσταση 100 Ω καί ἕνα τροφοδοτικό ΣΡ μέ ἀμελητέα ἐσωτερική ἀντίσταση καί ΗΕΔ 1 kV. Τό κύκλωμα περιέχει ἀκόμη ἕνα διακόπτη. Ὑπολογίστε τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν ἀντίσταση τή στιγμή πού κλείνει ὁ διακόπτης τοῦ κυκλώματος. Ὑπολογίστε ἀκόμη τό ρεῦμα μετατοπίσεως $\partial\mathbf{D}/\partial t$ στό χῶρο μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτῆ. Συγκρίνετε τίς δύο ποσότητες καί δικαιολογεῖστε τό ἀποτέλεσμα.

16-4. Ἄν στόν ἐλεύθερο χῶρο δέν ὑπάρχει κατανομή ρεύματος θεωρεῖστε τό ἀνυσματικό δυναμικό

$$\mathbf{A} = \hat{\imath}A_0\cos(kz - \omega t)$$

ὅπου $\omega = kc$, A_0 καί k εἶναι σταθεροί ἀριθμοί καί $\hat{\imath}$ εἶναι τό μοναδιαῖο ἄνυσμα κατά τόν ἄξονα τῶν συντεταγμένων z. Δεῖξτε ὅτι ἡ συνάρτηση αὐτή ἱκανοποιεῖ τήν κυματική ἐξίσωση (16.29β). Παρατηρεῖστε ὅτι το μαγνητικό δυναμικό πού προκύπτει εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν. Προσδιορίστε τό ἀντίστοιχο βαθμωτό δυναμικό καί δεῖξτε ὅτι καί αὐτό, ἄν δέν μηδενίζεται εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τό χρόνο.

16-5. Ἄν τό ἠλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο ἑνός ἐπίπεδου ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος στόν ἐλεύθερο χῶρο δίνεται ἀπό τά ἀνύσματα

$$\mathbf{E} = \hat{\imath}E_0\cos(kx - \omega t)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\jmath}B_0\cos(ky - \omega t)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου ω = kc καί $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ εἶναι ἀντίστοιχα τά μοναδιαῖα ἀνύσματα πρός τούς ἄξονες τῶν συντεταγμένων x καί y, προσδιορίστε ἕνα ζεῦγος δυναμικῶν **A**, φ πού ἀποδίδουν τά δύο πεδία καί ταυτόχρονα ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη Lorentz.

16-6. Μία βαθμίδα δυναμικῶν πού χρησιμοποιεῖται συχνά ἀντί τῆς βαθμίδας Lorentz εἶναι ἡ **βαθμίδα Coulomb**, πού ὁρίζεται ἀπό τή συνθήκη {βλ. Παράγραφο 9-4}

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Ὅπως προκύπτει ἀπό τήν ἐξ. (16.24α) στή βαθμίδα Coulomb τό βαθμωτό δυναμικό ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \varphi = -\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] 4\pi\rho.$$

Ἄν ἡ κατανομή ρεύματος **J** γραφεῖ ὡς ἄθροισμα δύο ρευμάτων

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_\ell + \mathbf{J}_t$$

ὅπου οἱ δύο συνιστῶσες τῆς κατανομῆς ρεύματος ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις

$$\nabla \times \mathbf{J}_\ell = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_t = 0$$

δεῖξτε ὅτι τό ἀνυσματικό δυναμικό ἱκανοποιεῖ τήν ἐξ. (16.29β) μόνο γιά τό ἐγκάρσιο ρεῦμα $\mathbf{J}_t$, ἤτοι

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\left[\frac{\mu_0 c}{4\pi}\right]\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_t.$$

Λόγω τῆς τελευταίας σχέσης ἡ βαθμίδα Coulomb ἀναφέρεται συχνά καί ὡς **ἐγκάρσια βαθμίδα.**

16-7. Ἐπίπεδο ἡλεκτρομαγνητικό κῦμα μέ συχνότητα 3 MHz καί πλάτος ἡλεκτρικοῦ πεδίου 100 mV/m, διαδίδεται στόν ἐλεύθερο χῶρο. Ὑπολογίστε τό πλάτος τῆς ΗΕΔ πού ἀναπτύσσεται σέ ἕνα πηνίο μέ δέκα σπεῖρες καί ἐγκάρσια ἐπιφάνεια 1 m^2 ὅταν ὁ ἄξονας τοῦ πηνίου καί τό κυματικό ἄνυσμα **k** σχηματίζουν γωνία 60°.

16-8. Τό ἡλεκτρικό πεδίο ἑνός ἐπίπεδου ἡλεκτρομαγνητικοῦ κύματος ἔχει τή μορφή

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos\omega\left(\frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{v} \mp t\right)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ εἶναι ἡ ταχύτητα φάσης γιά τό ὁμογενές, ἰσοτροπικό, γραμμικό ὑλικό μέσα στό ὁποῖο μεταδίδεται τό κῦμα.

(α) Προσδιορίστε τή σχέση πού πρέπει νά ἱκανοποιοῦν οἱ σταθερές a_1, a_2 καί a_3 ὥστε τό ἡλεκτρικό πεδίο **E** νά ἀποτελεῖ λύση τῆς κυματικῆς ἐξισώσεως (16.36).

(β) Ἑρμηνεῦστε τή φυσική σημασία τῶν σταθερῶν a_1, a_2 καί a_3 καί τῆς μεταξύ τους σχέσης.

(γ) Χρησιμοποιώντας τίς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell δεῖξτε ὅτι ἄν τό κῦμα αὐτό διαδίδεται σέ ὑλικό πού δέν περιέχει ἡλεκτρικό φορτίο, τό ἄνυσμα **E** εἶναι κάθετο πρός τή διεύθυνση διαδόσεως.

16-9. Δεῖξτε ὅτι ἕνα ἡλεκτρομανητικό πεδίο στόν ἐλεύθερο χῶρο ἱκανοποιεῖ τή σχέση (σύστημα SI)

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + c^2 \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{B}) = 0.$$

ἡ σχέση αὐτή ἔχει τή μορφή ἐξισώσεως διατηρήσεως.

(α) Δεῖξτε ὅτι τό ἄνυσμα τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόκλιση περιέχεται στό ἀριστερό σκέλος τῆς ἐξισώσεως, μηδενίζεται γιά ἕνα γραμμικά πολωμένο κῦμα.

(β) Δεῖξτε ὅτι γιά ἕνα κῦμα μέ κυκλική πόλωση τό προηγούμενο ἄνυσμα εἶναι ἀνάλογο πρός τή συχνότητα καί ἔχει φορά πρός τή φορά τῆς διαδόσεως γιά θετική ἑλίκωση καί ἀντίθετη φορά γιά ἀρνητική ἑλίκωση τοῦ κύματος.

16-10. Δεῖξτε ὅτι γιά ἕνα ἐπίπεδο ἡλεκτρομαγνητικό κῦμα πού διαδίδεται σέ ἕνα ὁμογενές, ἰσοτροπικό καί γραμμικό μέσο, οἱ ποσότητες πού ἀντιπροσωπεύουν τή μέση ἐνέργεια ἀνά μονάδα ὄγκου τοῦ ἡλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι ἴσες.

16-11. Ἡ ὁλική ἰσχή πού ἐκπέμπεται ἀπό τόν ἥλιο εἶναι 3.8×10^{26} W.

(α) Ἄν ἡ ἀκτίνα τοῦ ἡλίου εἶναι 7×10^8 m, ὑπολογίστε στήν ἐπιφάνειά του τό πλάτος τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου στήν ἡλεκτρομαγνητική ἀκτινοβολία πού ἐκπέμπει.

(β) Θεωρώντας τή μέση ἀπόσταση ἡλιου-γῆς ὡς 1.5×10^{11} m, ὑπολογίστε τό πλάτος τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου στήν ἡλεκτρομαγνητική ἀκτινοβολία πού δέχεται ἡ γῆ ἀπό τόν ἥλιο.

(γ) Δεῖξτε ὅτι ἡ μέση ἰσχή πού δέχεται ἡ γῆ ἀπό τόν ἥλιο ἀνά πρῶτο λεπτό εἶναι 2 θερμίδες ἀνά τετραγωνικό ἑκατοστόμετρο.

16-12. Θεωρεῖστε τό κυκλικά πολωμένο κῦμα τῆς ἐξ. (16.58) ὡς τό ἄθροισμα δύο γραμμικά πολωμένων κυμάτων στά ἐπίπεδα xz καί yz. Δεῖξτε ὅτι ἡ μέση τιμή τοῦ ἀνύσματος Poynting γιά τό κυκλικά πολωμένο κῦμα εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν μέσων τιμῶν τῶν δύο γραμμικά πολωμένων κυμάτων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

16-13. (α) Ἕνα εὐθύγραμμο χάλκινο σύρμα μέ διάμετρο d καί ἀγωγιμότητα g μεταφέρει συνεχές ρεῦμα I. Ὁλοκληρῶστε τό ἄνυσμα Poynting σέ ὅλη τήν ἐπιφάνεια πού περικλείει ἕνα τμῆμα τοῦ σύρματος μέ μῆκος ℓ καί συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τή θερμότητα Joule πού καταναλώνεται στό τμῆμα αὐτό λόγω τῆς ροῆς τοῦ ρεύματος.

(β) Προσδιορίστε τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ ἀνύσματος Poynting στήν ἐπιφάνεια τοῦ σύρματος ἄν $g = 5.8\ \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$, $d = 0.102$ cm καί $I = 5$ A.

16-14. Ἕνα ὁμοαξονικό καλώδιο ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα κυλινδρικό ἀγωγό μέ ἐσωτερική διάμετρο 2 cm καί ἕνα κεντρικό ἀγωγό κατά τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου μέ διάμετρο 0.5 cm. Ὁ χῶρος μεταξύ τῶν δύο ἀγωγῶν περιέχει μονωτικό ὑλικό. Ὁ ἐξωτερικός ἀγωγός εἶναι γειωμένος ἐνῶ ὁ κεντρικός βρίσκεται σέ δυναμικό 330 V. Ἄν τό καλώδιο μεταφέρει 50 A προσδιορίστε:

(α) Τή συνιστῶσα τοῦ ἀνύσματος Poynting κατά τή διεύθυνση ροῆς τοῦ ρεύματος στό χῶρο μεταξύ τῶν δύο ἀγωγῶν.

(β) Τό ὁλοκλήρωμα τοῦ προηγούμενου ἀνύσματος καθόλη τήν ἐγκάρσια ἐπιφάνεια μεταξύ τῶν δύο ἀγωγῶν. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμα μέ τήν ἰσχή πού μεταφέρει τό καλώδιο. (Βοήθημα: Ἡ ὁλοκλήρωση ἁπλοποιεῖται σημαντικά ἄν τό ἡλεκτρικό πεδίο ἐκφραστεῖ ὡς ἡ ἀκτινική παράγωγος τῆς συναρτήσεως δυναμικοῦ).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

διαστασεις φυσικων μεγεθων και μοναδες μετρησεως

Οἱ μονάδες μετρήσεως πού χρησιμοποιοῦνται στό χῶρο τῆς κλασσικῆς μηχανικῆς χαρακτηρίζονται ἀπό σαφήνεια καί ἁπλότητα. Μέ ἀπαρχή τρία θεμελιώδη μεγέθη (μῆκος, μάζα καί χρόνος) καί τίς ἀντίστοιχες μονάδες μετρήσεως (μέτρο ἤ ἑκατοστόμετρο, χιλιόγραμμο ἤ γραμμάριο καί δευτερόλεπτο) οἱ μονάδες μετρήσεως ὅλων τῶν φυσικῶν μεγεθῶν πού προκύπτουν ὁρίζονται κατά τρόπο σαφή καί μονοσήμαντο. Ἡ εὐτυχής αὐτή κατάσταση παύει νά ἰσχύει μέ τήν εἰσαγωγή τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν φαινομένων. Ἡ ἐπέκταση τοῦ ἁπλοῦ συστήματος μονάδων μετρήσεως τῆς μηχανικῆς στό χῶρο τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ δέν γίνεται κατά πάγιο καί καθολικά ἀποδεκτό τρόπο. Ἡ πληθώρα τῶν συστημάτων πού ἔχουν κατά καιρούς εἰσαχθεῖ ἔχει στό παρελθόν δοκιμάσει τήν ὑπομονή ἑνός μεγάλου ἀριθμοῦ ἐπιστημόνων καί μηχανικῶν.

Στό κυρίως κείμενο τοῦ παρόντος συγγράμματος γίνεται παράλληλη χρήση τῶν δύο συστημάτων μέ τή μεγαλύτερη ἀποδοχή στή θεωρία (σύστημα CGS Gauss) καί πρακτική (σύστημα SI) τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ. Στή συνέχεια τοῦ παραρτήματος περιγράφονται τρία ἀκόμη συστήματα πού ἀναπτύσσονται καί χρησιμοποιοῦνται στή διεθνή βιβλιογραφία. Ἀποσκοπεῖται ἀκόμη μιά σύντομη ἀνασκόπιση τῶν μεθόδων πού χρησιμοποιοῦνται γιά τήν ὑλοποίηση τῶν μονάδων μετρήσεως στό ἐργαστήριο. Στό τέλος τοῦ παραρτήματος περιγράφεται τό ὁλοκληρωμένο σύστημα SI πού ἔχει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

υιοθετηθεῖ έπίσημα άπό τήν Εύρωπαϊκή Κοινότητα καί τείνει νά γίνει παγκόσμια άποδεκτό.

Α-1 Θεμελιώδη Φυσικά Μεγέθη καί Συστήματα Μονάδων Μετρήσεως

Ήδη άπό τήν πρώτη ποσοτική άπόδοση φυσικῶν φαινομένων μέ τή Γεωμετρία άναγνωρίστηκε ὅτι όρισμένα μεγέθη εἶναι θεμελιώδη ένῶ τά περισσότερα, ὡς παράγωγα, εἶναι δυνατόν νά άποδοθοῦν ὡς συνάρτηση τῶν θεμελιωδῶν. Ἔτσι στή Γεωμετρία τό μῆκος (L) εἶναι θεμελιῶδες μέγεθος ένῶ ή έπιφάνεια καί ό ὄγκος εἶναι παράγωγα μεγέθη μέ άντίστοιχες διαστάσεις L^2 καί L^3. Μέ τήν εἰσαγωγή τῆς κινηματικῆς άνακύπτει ἕνα νέο θεμελιῶδες μέγεθος, ό χρόνος (T), ένῶ τό πλέον χαρακτηριστικό φυσικό μέγεθος τῆς κινηματικῆς, ή ταχύτητα έμφανίζεται ὡς παράγωγο μέ διαστάσεις $L \cdot T^{-1}$. Τέλος, ἕνα τρίτο θεμελιῶδες μέγεθος ή μᾶζα, άνακύπτει κατά τή μελέτη τῆς δυναμικῆς συμπεριφορᾶς τῶν σωμάτων. Θά μποροῦσε νά ύποθέσει κανείς ὅτι μέ τήν έπέκταση τῆς μελέτης στούς διάφορους τομεῖς τῆς φυσικῆς καί μέ τή συνεχή εἰσαγωγή νέων φυσικῶν έννοιῶν θά χρειαζόταν μιά συνεχής αὔξηση τοῦ πλήθους τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν. Στήν πραγματικότητα άποδεικνύεται ὅτι τά τρία θεμελιώδη μεγέθη πού άναφέραμε εἶναι άρκετά ὥστε νά προσδιορίσουν τίς διαστάσεις κάθε ἄλλου φυσικοῦ μεγέθους πού προκύπτει. Ἡ ἰδιότητα αὐτή τοῦ φυσικοῦ κόσμου, πού βεβαίως δέν ἔχει νά κάνει τίποτε μέ τίς τρεῖς διαστάσεις τοῦ χώρου, δέν εἶναι σήμερα άπόλυτα κατανοητή.

Στά προηγούμενα πλαίσια, ἕνα συνεπές **σύστημα μονάδων μετρήσεως** μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ μέ τήν αὐθαίρετη έπιλογή τριῶν θεμελιωδῶν φυσικῶν μεγεθῶν, τόν όρισμό μονάδων μετρήσεως γιά τά θεμελιώδη μεγέθη καί στή συνέχεια μέ τόν προσδιορισμό παράγωγων μονάδων μετρήσεως μέ βάση τίς σχέσεις όρισμοῦ τῶν παράγωγων φυσικῶν μεγεθῶν. Ὁ άναγνώστης εἶναι άναμφισβήτητα έξοικειωμένος μέ τά δύο καθιερωμένα συστήματα μονάδων μετρήσεως τῆς κλασσικῆς μηχανικῆς, τό **σύστημα CGS** καί τό **σύστημα MKS**, ὅπου ὡς θεμελιώδη μεγέθη έπιλέγονται τό μῆκος, ή μάζα καί ό χρόνος (L, M, T) ένῶ ὡς μονάδες μετρήσεως ὁρίζονται άντίστοιχα οἱ τριάδες έκατοστόμετρο - γραμμάριο - δευτερόλεπτο (cm, g, sec) καί μέτρο - χιλιόγραμμο - δευτερόλεπτο (m, kg, sec). Στά συστήματα αὐτά ή δύναμη π.χ. εἶναι παράγωγο μέγεθος καί άπό τή σχέση όρισμοῦ

$$F = m \cdot \gamma \qquad (A.1)$$

ἔχει διαστάσεις $M \cdot L \cdot T^{-2}$ μέ μονάδες μετρήσεως τό $g \cdot cm \cdot sec^{-2}$ στό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σύστημα CGS καί τό $kg \cdot m \cdot sec^{-2}$ στό σύστημα MKS. Ὅπως εἶναι φυσικό, σέ μονάδες μετρήσεως, ὅπως αὐτές τῆς δυνάμεως, πού χρησιμοποιοῦνται μέ μεγάλη συχνότητα, ἔχουν δοθεῖ ἰδιαίτερα ὀνόματα. Ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς δυνάμεως στό σύστημα CGS εἶναι γνωστή ὡς dyn ἐνῶ στό σύστημα MKS ἀπαντᾶται, πρός τιμή τοῦ Νεύτονα, μέ τήν ὀνομασία newton (N).

Ἄν καί πάγια καθιερωμένη ἡ ἐπιλογή τῶν συγκεκριμένων θεμελιωδῶν φυσικῶν μεγεθῶν στά συστήματα CGS καί MKS δέν εἶναι ἡ μόνη δυνατή. Ὁ ἀναγνώστης θά θυμᾶται πιθανόν ἀπό τή Γυμνασιακή του ἐκπαίδευση τό λεγόμενο **Τεχνικό Σύστημα**, στό ὁποῖο ὡς θεμελιώδη μεγέθη ἐπιλέγονται τό μῆκος, ὁ χρόνος καί ἡ δύναμη. Στό σύστημα αὐτό, τοῦ ὁποίου ἡ χρήση τείνει νά ἐκλείψει ἀκόμη καί σέ πρακτικές ἐφαρμογές, ἡ μάζα εἶναι παράγωγο μέγεθος. Ἐναλλακτικά συστήματα μονάδων μετρήσεως μποροῦν ἀκόμη νά δημιουργηθοῦν μέ μείωση ἤ αὔξηση τοῦ πλήθους τῶν θεμελιωδῶν φυσικῶν μεγεθῶν. Ἡ πρώτη δυνατότητα παρέχεται μέ τόν αὐθαίρετο καθορισμό ὅτι ὁρισμένες φυσικές σταθερές εἶναι μοναδιαῖες καί ἀδιάστατες. Παράδειγμα συστήματος τῆς κατηγορίας αὐτῆς ἀποτελεῖ ἡ ἐπιλογή†

$$c = \hbar = 1 \tag{A.2}$$

τοῦ φυσικοῦ συστήματος μονάδων πού χρησιμοποιεῖται στά πλαίσια τῆς κβαντικῆς θεωρίας τῶν πεδίων. Στό σύστημα αὐτό ὑπάρχει μόνο ἕνα μέγεθος, τό μῆκος, ἐνῶ ὅλα τά ἄλλα μεγέθη (χρόνος, μάζα, ἐνέργεια, δύναμη κλπ.) εἶναι παράγωγα καί ἐκφράζονται ὡς δυνάμεις τοῦ μήκους.

Ἡ ἀντίθετη δυνατότητα, δηλαδή ἡ δημιουργία ἑνός συστήματος μονάδων μετρήσεως μέ τήν αὐθαίρετη ἐπιλογή περισσοτέρων τῶν τριῶν θεμελιωδῶν φυσικῶν μεγεθῶν ὁδηγεῖ σέ ὁρισμένες ἐπιπλοκές. Λόγω ἀκριβῶς τῆς ἰδιότητας τοῦ φυσικοῦ κόσμου πού ἤδη ἀναφέραμε, νά ἐπιδέχεται περιγραφή ὅλων τῶν φυσικῶν μεγεθῶν μέ βάση τρεῖς μόνο διαστάσεις, μέ τόν ὁρισμό ἐπιπλέον θεμελιωδῶν μεγεθῶν, οἱ σχέσεις ὁρισμοῦ πού συνδέουν τά μεγέθη αὐτά μέ ἄλλα φυσικά μεγέθη μεταπίπτουν ἀπό ἐξισώσεις σέ ἀναλογίες. Ἄν π.χ. στό χῶρο τῆς Γεωμετρίας τό μῆκος (L) καί ἡ ἐπιφάνεια (S) ὁριστοῦν ὡς θεμελιώδη μεγέθη μέ ἀντίστοιχες μονάδες μετρήσεως τό *μέτρο* (m) καί τό *ἑκτάριο* (ha), ἡ ἁπλή σχέση

$$S = L^2 \tag{A.3}$$

† Στήν ἐξ. (A.2) c εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός καί $\hbar \equiv h/2\pi$, ὅπου h εἶναι ἡ σταθερά δράσης τοῦ Planck, $h = 6.6256 \times 10^{-27}$ erg·sec.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

παύει νά ίσχύει. Έξακολουθεῖ βέβαια νά ίσχύει ή άναλογία

$$S \propto L^2 \tag{A.4}$$

ή όποία μπορεῖ νά μεταβληθεῖ σέ ίσότητα μέ τή βοήθεια μιᾶς σταθερᾶς k ὡς

$$S = kL^2. \tag{A.5}$$

Πέρα άπό κάποια συγκεκριμένη άριθμητική τιμή, ή σταθερά k τῆς έξ. (A.5) έμφανίζει καί διαστάσεις ($S \cdot L^{-2}$) ένῶ ή άριθμητική της τιμή έκφράζεται σέ μονάδες $ha \cdot m^{-2}$. Ό άναγνώστης θά εἶναι βέβαια έξοικειωμένος μέ τό περισσότερο ρεαλιστικό παράδειγμα στόν εύρύτερο χῶρο τῆς κλασσικῆς μηχανικῆς καί θερμιδομετρίας, ὅπου πέρα άπό τά τρία θεμελιώδη μεγέθη τῶν συστημάτων CGS καί MKS, ή θερμοκρασία καί ή θερμότητα όρίζονται ὡς άνεξάρτητα έπιπλέον θεμελιώδη μεγέθη μέ άντίστοιχες μονάδες μετρήσεως τό βαθμό Κελσίου (°C) καί τή θερμίδα (cal). Ή πρακτική αύτή όδηγεῖ σέ ἔννοιες ὅπως *τό μηχανικό ἰσοδύναμο τῆς θερμότητας*, μιά ἔννοια πού μᾶλλον έπισκιάζει παρά άναδεικνύει τό φυσικό περιεχόμενο τῶν έξισώσεων τῆς θερμότητας. Δυστυχῶς στό σημεῖο αὐτό ή παράδοση καί ή καθιερωμένη πρακτική ἔχουν έπικρατήσει σέ βάρος τῆς συνέπειας καί άπλότητας.

Α-2 Έπέκταση τῶν Συστημάτων CGS καί MKS στό Χῶρο τοῦ Ήλεκτρομαγνητισμοῦ

Στό χῶρο τῶν ήλεκτρομαγνητικῶν φαινομένων, τό νέο φυσικό μέγεθος πού άνακύπτει εἶναι τό ήλεκτρικό φορτίο. Ήλεκτρομαγνητικά φαινόμενα έκδηλώνονται μέ δυνάμεις πού άναπτύσσονται μεταξύ σωμάτων πού χαρακτηρίζονται άπό ήλεκτρικό φορτίο καί ή άναλογία πού προέκυψε άπό τά πειράματα τοῦ Coulomb

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{A.6}$$

περιγράφει τή συμπεριφορά τῆς δυνάμεως σέ σχέση μέ τό μέγεθος τῶν φορτίων καί τή μεταξύ τους άπόσταση. Καθόσον ή σχέση τῆς έξ. (A.6) περιέχει ἕνα μόνο νέο φυσικό μέγεθος, μπορεῖ νά μεταβληθεῖ άμέσως σέ ίσότητα καί νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τόν όρισμό τόσο τῶν διαστάσεων ὅσο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί τῆς μονάδας μετρήσεως τοῦ ἡλεκτρικοῦ φορτίου. Τοῦτο εἶναι ἀνάλογο μέ τήν ἐπιλογή $k = 1$ στήν ἐξ. (A.5), τόν προσδιορισμό τῶν διαστάσεων τῆς ἐπιφανείας ὡς L^2 καί τῆς ἀντίστοιχης μονάδας μετρήσεως ὡς m^2.

Ἡ υἱοθέτηση τῆς ἰσότητας

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{A.7}$$

γίνεται μέ τήν ἐπέκταση τοῦ συστήματος CGS στό χῶρο τῶν ἡλεκτρομαγνητικῶν φαινομένων. Μέ τόν τρόπο αὐτό τό ἡλεκτρικό φορτίο προσδιορίζεται μέ διαστάσεις $L^{3/2} \cdot M^{1/2} \cdot T^{-1}$ καί ἡ ἀντίστοιχη μονάδα μετρήσεως εἶναι ἡ **ἡλεκτροστατική μονάδα φορτίου** (ΗΣΜ-φ) ἤ, ὅπως ἀναφέρεται διεθνῶς, τό **statcoulomb**

$$1 \text{ ΗΣΜ-φ} = 1 \text{ statcoulomb} = 1 \text{ dyn}^{1/2} \cdot \text{cm} = 1 \text{ cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{sec}^{-1}. \tag{A.8}$$

Ἡ ἐπέκταση τοῦ συστήματος CGS *σέ μαγνητικά φαινόμενα* μπορεῖ νά γίνει μέ τή θεμελιώδη σχέση τῆς ἐξ. (9.3)

$$F_{2-1} = \frac{q_1 q^2}{r_{21}^3} r_{21} + \frac{1}{c^2} \frac{q_1 q_2 u_2 \times (u_1 \times r_{21})}{r_{21}^3} \tag{A.9}$$

πού δεχτήκαμε ὡς καθαρά ἀποτέλεσμα τῆς πειραματικῆς παρατηρήσεως. Καθόσον ἡ προσθήκη τοῦ δεύτερου ὅρου στήν ἐξ. (A.9) δέν εἰσάγει νέο φυσικό μέγεθος, ἡ μονάδα ΗΣΜ-φ μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τόν ὁρισμό τῶν μονάδων πού μετροῦν ὅλα τά παράγωγα φυσικά μεγέθη στό χῶρο τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ.

Ἡ μεταβολή τῆς πειραματικά παρατηρούμενης ἀναλογίας (A.6) σέ ἰσότητα δέν ἀκολουθήθηκε ἱστορικά γιά τήν ἐπέκταση τοῦ συστήματος MKS στό χῶρο τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ. Ἀκρετά νωρίς στήν ἱστορία τῆς μελέτης τῶν ἡλεκτρικῶν φαινομένων οἱ τότε ἐρευνητές προχώρησαν στήν αὐθαίρετη υἱοθέτηση ἑνός ἐπιπλέον θεμελιώδους φυσικοῦ μεγέθους. Ὡς θεμελιῶδες φυσικό μέγεθος ἐπελέγη τό ἡλεκτρικό ρεῦμα καί ἡ ἀντίστοιχη μονάδα μετρήσεως ὁρίστηκε διαδικαστικά μέ βάση τήν ἐξ. (9.25). Ἡ πειραματικά παρατηρούμενη ἀναλογία

$$F \propto \frac{I^2}{R} \tag{A.10}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μεταξύ τοῦ ρεύματος I πού διαρρέει δύο παράλληλους ἀγωγούς σέ ἀπόσταση R καί τῆς δυνάμεως ἀνά μονάδα μήκους F πού ἀναπτύσσεται μεταξύ τους μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τόν ὁρισμό τῆς μονάδας μετρήσεως τοῦ ρεύματος, ἄν ἡ ἀναλογία μετατραπεῖ σέ ἰσότητα μέ ἐνδεχομένως τή χρησιμοποίηση ἑνός συντελεστῆ ἀναλογίας. Ἱστορικά τό **ampère** (A) καθιερώθηκε ὡς μονάδα μετρήσεως τοῦ ρεύματος, γράφοντας τήν ἀναλογία (A.10) ὡς

$$F = 2 \times 10^{-7} \frac{I^2}{R} \tag{A.11}$$

καί ὁρίζοντας ὅτι 1 ampère εἶναι ἡ πόστητα σταθεροῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, ἡ ὁποία, ὅταν διαρρέει δύο παράλληλους λεπτούς ἀγωγούς σέ ἀπόσταση 1 m, ἀναπτύσσει μεταξύ τῶν ἀγωγῶν δύναμη ἀνά μέτρο ἀγωγοῦ ἴση πρός 2×10^{-7} N · m^{-1}.

Στό σύστημα μονάδων μετρήσεως πού προκύπτει μέ τήν προηγούμενη διεργασία (παλαιότερα γνωστό ὡς **σύστημα MKSA**) τό φορτίο εἶναι παράγωγο μέγεθος μέ διαστάσεις I · T καί μονάδα μετρήσεως τό A · sec, στήν ὁποία ἔχει δοθεῖ ἡ ὀνομασία **coulomb** (C). Παρόλα αὐτά γιά τόν προσδιορισμό τῶν παράγωγων μονάδων μετρήσεως μεγεθῶν τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ στό σύστημα MKS εἶναι προσφορώτερο νά θεωρήσουμε τό φορτίο ὡς θεμελιῶδες μέγεθος ἄν καί, ὅπως μόλις περιγράψαμε, διαδικαστικά ἡ μονάδα μετρήσεώς του ὁρίζεται μέ βάση τό ampère. Υἱοθετόντας τήν ἄποψη αὐτή, ἡ ἀναλογία (A.6) μπορεῖ νά μεταβληθεῖ σέ ἰσότητα μόνο μέ τήν ἐπιστράτευση ἑνός συντελεστῆ ἀναλογίας. Κατά τήν καθιερωμένη πρακτική ἡ ἰσότητα πού προκύπτει γράφεται στή μορφή

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{A.12}$$

ὅπου γιά τήν προσαρμογή τῆς μονάδας coulomb πρός τίς μονάδες N καί m τοῦ συστήματος MKS, ὁ συντελεστής ἀναλογίας προσδιορίζεται ὡς

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}. \tag{A.13}$$

Ὅπως ἀκόμη ἀναλύεται στήν Παράγραφο 9-1, ἡ πειραματικά παρατηρούμενη σχετική συνεισφορά τῶν δύο ὅρων τῆς ἐξ. (A.9) στή δύναμη πού ἀναπτύσσεται μεταξύ δύο κινούμενων φορτίων, ἐπιβάλλει τήν εἰσαγωγή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ένός δεύτερου συντελεστῆ, μέ ἀποτέλεσμα στό σύστημα MKS ἡ ἐξ. (A.9) νά πάρει τή μορφή

$$\mathbf{F}_{2\leftarrow 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{21}^{\,3}}\,\mathbf{r}_{21} + \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q_1 q_2 \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{21})}{r_{21}^{\,3}}\,. \qquad \text{(A.14)}$$

Οἱ δύο σταθερές ε_0 καί μ_0, πού παρακολουθοῦν ὅλες τίς παράγωγες σχέσεις στό σύστημα MKS, συνδέονται μέσω τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός μέ τήν ἁπλή σχέση

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}\,. \qquad \text{(A.15)}$$

Ἔτσι ἐνῶ οἱ σχέσεις τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ στό ἡλεκτροστατικό σύστημα CGS περιέχουν τή φυσική σταθερά c, πού γιά πρώτη φορά ἀνακύπτει στήν ἐξ. (A.9) γιά τήν ἀπόδοση τῆς σχετικῆς ἰσχῆς ἡλεκτρικῶν καί μαγνητικῶν ἀλληλεπιδράσεων, οἱ ἀντίστοιχες ἐκφράσεις στό σύστημα MKS εἶναι ἀπαλλαγμένες ἀπό τήν ταχύτητα τοῦ φωτός καί ἀποδίδουν τό ἴδιο φαινόμενο μέσω τῶν σταθερῶν ε_0 καί μ_0.

Οἱ δύο προηγούμενοι τρόποι μεταφορᾶς τῶν συστημάτων μονάδων μετρήσεως τῆς κλασσικῆς φυσικῆς στό χῶρο τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ δέν εἶναι καί οἱ μοναδικοί. Μέ σκοπό τήν ἁπλοποίηση τῶν παράγωγων σχέσεων τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ, κυρίως τῆς ἐξισώσεως συνεχείας καί τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell, ἔχουν κατά καιρούς εἰσαχθεῖ συστήματα μονάδων μετρήσεως πού ἐπιτείνουν τή σύγχιση πού ἐπικρατεῖ. Τά συστήματα αὐτά ὁρίζονται μέ αὐθαίρετη ἐπιλογή τῶν δύο σταθερῶν k_e καί k_m στή θεμελιώδη σχέση τῆς δυνάμεως

$$\mathbf{F}_{2\leftarrow 1} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{21}^{\,3}}\,\mathbf{r}_{21} + k_m\,\frac{q_1 q_2 \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{21})}{r_{21}^{\,3}}\,. \qquad \text{(A.16)}$$

διατηρώντας τήν πειραματικά παρατηρούμενη σχετική συνεισφορά τῶν δύο ὅρων μέ ἐπιβολή τῆς συνθήκης

$$\frac{k_m}{k_e} = \frac{1}{c^2}\,. \qquad \text{(A.17)}$$

Ἕνα σύστημα μονάδων μετρήσεως μπορεῖ ἀκόμη νά διαφοροποιηθεῖ κατά τόν ὁρισμό τοῦ ἡλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου. Γράφοντας τίς ἐξισώσεις ὁρισμοῦ τῶν δύο πεδίων ὡς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = n_e \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, d^3r' \qquad (A.18)$$

καί

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = n_m \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, d^3r' \qquad (A.19)$$

ἕνα σύστημα μονάδων μετρήσεως μπορεῖ νά καθοριστεῖ μέ συγκεκριμένη ἐπιλογή τῶν σταθερῶν n_e καί n_m. Τοῦτο βεβαίως θά ἔχει ὡς ἐπακόλουθο τήν ἐμφάνιση τῶν σταθερῶν n_e καί n_m στίς ἐξισώσεις πού συνδέουν τά ἀνύσματα **E** καί **B**. Μέ τούς ὁρισμούς (A.18) καί (A.19) ὁ νόμος τοῦ Faraday π.χ. παίρνει τή μορφή

$$\frac{k_e}{n_e}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{k_m}{n_m}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \qquad (A.20)$$

Ὅλα τά συστήματα μονάδων μετρήσεως στό χῶρο τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ πού γνωρίζει ὁ συγγραφέας τοῦ παρόντος βιβλίου υἱοθετοῦν τή σύμβαση

$$n_e = k_e. \qquad (A.21)$$

Οἱ ἐπιλογές τῶν σταθερῶν $k_e\,(= n_e)$, k_m καί n_m πού ὁδηγοῦν στά πέντε συστήματα μονάδων μετρήσεως πού χρησιμοποιοῦνται συνηθέστερα περιέχονται στόν Πίνακα Α-1. Ἡ ἐπιλογή $k_e = 1$, $k_m = n_m = c^{-2}$ ὁδηγεῖ στό **ἡλεκτροστατικό σύστημα** (ΗΣΣ) πού ἤδη ἀναφέρθηκε καί ὅπου βασικό μέγεθος εἶναι τό ἡλεκτρικό φορτίο μέ διαστάσεις $M^{1/2} \cdot L^{3/2} \cdot T^{-1}$ καί μονάδα μετρήσεως τήν ΗΣΜ-φ ἤ **statcoulomb.** Οἱ ὑπόλοιπες μονάδες μετρήσεως (ἡλεκτρικό πεδίο, δυναμικό, κλπ.) ὁρίζονται μέ τή χρησιμοποίηση μονάδων τοῦ συστήματος CGS ἐνῶ τό μαγνητικό πεδίο ὁρίζεται ὡς

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, d^3r'. \qquad (A.22)$$

Ἐναλλακτικά, στό **ἡλεκτρομαγνητικό σύστημα** (ΗΜΣ) ὡς βασικό μέγεθος προσδιορίζεται τό ἡλεκτρικό ρεῦμα μέ τήν ἐπιλογή $k_m = 1$ καί ὁρισμό τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἀπό τήν προηγούμενη σχέση χωρίς τόν παράγοντα $1/c^2$. Στό σύστημα αὐτό ἡ ἐπιλογή $k_e = c^2$ ἐπιβάλεται ἀπό τήν ἐξ. (A.17). Τό ρεῦμα ἔχει διαστάσεις $M^{1/2} \cdot L^{1/2} \cdot T^{-1}$ καί στή μονάδα μετρήσεως πού προκύπτει δίνεται ἡ ὀνομασία **abampère**. Παράγωγη μονάδα τοῦ ἡλεκτρικοῦ φορτίου εἶναι τό **abcoulomb** πού ὁρίζεται ὡς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$1 \text{ abcoulomb} = 1 \text{ abampère} \cdot \text{sec}. \tag{A.23}$$

Μονάδες τοῦ ἡλεκτροστατικοῦ καί ἡλεκτρομαγνητικοῦ συστήματος συνδέονται μέσω τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός. Ἡ κίνηση ἑνός φορτίου q (στό ΗΣΣ) μέ ταχύτητα **u** ὁδηγεῖ σέ πυκνότητα ρεύματος τοῦ ΗΜΣ

$$J_{\text{ΗΜΣ}} = q_{\text{ΗΣΣ}} \frac{\mathbf{u}}{c} . \tag{A.24}$$

Ἱστορικά ἡ παράμετρος c πού ἀπαντᾶται στήν τελευταία σχέση μετρήθηκε γιά πρώτη φορά ἀπό τούς Weber καί Kohlrauch καί ἀποτέλεσε τήν πρώτη ἔνδειξη γιά τό σημαντικό ρόλο πού παίζει ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός στήν ἠλεκτρομαγνητική θεωρία. Ἕνα συνεπές σύστημα μονάδων μετρήσεως μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ μέ τή μέτρηση ἠλεκτρικῶν φυσικῶν μεγεθῶν πού ἀπορρέουν ἀπό τό φορτίο $q_{\text{ΗΣΣ}}$ σέ μονάδες τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ συστήματος καί μαγνητικῶν φυσικῶν μεγεθῶν πού ἀπορρέουν ἀπό τήν πυκνότητα φορτίου $J_{\text{ΗΜΣ}}$ σέ μονάδες τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ συστήματος. Στό σύστημα αὐτό, πού ἀπό πολλούς συγγραφεῖς ἀναφέρεται ὡς **σύστημα CGS Gauss,** τό ρεῦμα ὁρίζεται ὡς

$$I = \frac{1}{c} \frac{dq}{dt} \tag{A.25}$$

ἐνῶ ἡ ἐξίσωση τῆς συνεχείας παίρνει τή μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{A.26}$$

Ἡ σύγχιση πού ἐπικρατεῖ γύρω ἀπό τίς μονάδες μετρήσεως στό χῶρο τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ ἐπιτείνεται ἀπό τό γεγονός ὅτι πολλοί συγγραφεῖς χρησιμοποιοῦν ἕνα σύστημα, πού ἐπίσης ὀνομάζουν **σύστημα CGS Gauss**, ἤ ἁπλῶς **σύστημα CGS**, στό ὁποῖο τό ρεῦμα μετρᾶται σέ μονάδες τοῦ ΗΣΣ (ΗΣΜ-φ/sec) ἐνῶ ὁ παράγοντας 1/c τῶν ἐξ. (A.25) καί (A.26) μετατίθεται στόν ὁρισμό τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3r'. \tag{A.27}$$

Ἡ ἐπιλογή τῶν σταθερῶν στό σύστημα αὐτό, πού χρησιμοποιεῖται καί στό κυρίως κείμενο τοῦ παρόντος συγγράμματος, δίνεται στήν τρίτη σειρά τοῦ Πίνακα Α-1. Ἡ συγκεκριμένη ἐπιλογή (ὅπως καί ἡ ἐπιλογή τοῦ συστήματος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ Α-1 Ἐπιλογή σταθερῶν στά διάφορα συστήματα μονάδων μετρήσεως τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ.

Σύστημα	$k_e (= n_e)$	k_m	n_m
Ἠλεκτροστατικό CGS	1	c^{-2}	c^{-2}
Ἠλεκτρομαγνητικό CGS	c^2	1	1
CGS Gauss	1	c^{-2}	c^{-1}
Heaviside-Lorentz	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}$	$\frac{1}{4\pi c}$
MKS	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7} c^2$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$

Haeviside-Lorentz πού θά συζητηθεῖ στή συνέχεια) ἐμφανίζει τό πλεονέκτημα ὅτι τό ἠλεκτρικό καί μαγνητικό πεδίο ἔχουν τίς ἴδιες διαστάσεις. Ἐπιπλέον ἀπό τή μορφή πού παίρνει ὁ νόμος τοῦ Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{(A.28)}$$

προκύπτει ὅτι, γιά ἠλεκτρομαγνητικά κύματα στόν κενό χῶρο, τά ἀνύσματα **E** καί **B** ἔχουν ὄχι μόνο τίς ἴδιες διαστάσεις ἀλλά καί τήν ἴδια ἀριθμητική τιμή.

Τό σύστημα MKS, πού ἐπίσης χρησιμοποιεῖται στό κυρίως κείμενο τοῦ παρόντος συγγράμματος, περιέχεται στήν **ὀρθολογισμένη** του μορφή. Ὁ ὅρος *ὀρθολογισμένη μορφή* σημαίνει ὅτι ὁ παράγοντας 4π ἔχει συμπεριληφθεῖ στίς σταθερές k_e, k_m καί n_m ὥστε νά ἀποφευχθεῖ ἡ παρουσία του σέ μετέπειτα ἐξισώσεις ὅπως ὁ νόμος τοῦ Gauss ἤ οἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell. Ἕνα παρόμοιο ὀρθολογισμένο σύστημα μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ μέ βάση τό σύστημα CGS ἄν στίς σταθερές k_e, k_m καί n_m συμπεριληφθεῖ ὁ παράγοντας 4π. Τό σύστημα πού προκύπτει, γνωστό ὡς **σύστημα Heaviside-Lorentz** περιέχεται στήν τέταρτη σειρά τοῦ Πίνακα Α-1.

Α-3 Μακροσκοπικά Πεδία

Στή μέχρι τώρα περιγραφή τῶν συστημάτων μονάδων μετρήσεως στόν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ήλεκτρομαγνητισμό θεωρήσαμε ήλεκτρικά καί μαγνητικά φαινόμενα στόν κενό χῶρο. Ἔτσι τά μόνα πεδία πού ἀνέκυψαν ἦσαν τό ήλεκτρικό πεδίο **E** καί τό μαγνητικό πεδίο **B**. Ἡ παρουσία ὕλης στό χῶρο ἀποδίδεται ἀπό τά ἀνύσματα **P** καί **M** πού ἐκφράζουν ἀντίστοιχα τήν ήλεκτρική καί μαγνητική πόλωση τοῦ ὑλικοῦ. Μποροῦμε νά θεωρήσουμε τά δύο ἀνύσματα **P** καί **M** ἀπό δύο διαφορετικές ὀπτικές γωνίες. Ἀφενός εἶναι δυνατόν νά θεωρήσουμε ὅτι ἡ ήλεκτρική καί μαγνητική πόλωση δημιουργοῦν ἀντίστοιχα δέσμια φορτία καί ρεύματα

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{A.29}$$

καί

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \tag{A.30}$$

πού μέ τή σειρά τους συμβάλλουν στή διαμόρφωση τῶν πεδίων **E** καί **B**. Ἀφετέρου τά ἀνύσματα **P** καί **M** μποροῦν νά προστεθοῦν ἀντίστοιχα στά πεδία **E** καί **B** καί νά δώσουν τά μακροσκοπικά πεδία **D** καί **H** πού γιά τά ἐλεύθερα φορτία καί ρεύματα ἱκανοποιοῦν τίς ἴδιες ἐξισώσεις πού ἰσχύουν γιά τά θεμελιώδη πεδία **E** καί **B** στόν κενό χῶρο. Οἱ ἐξισώσεις πού ὁρίζουν τά μακροσκοπικά πεδία μποροῦν νά γραφοῦν στή γενική μορφή

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \lambda \mathbf{P} \tag{A.31}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \lambda' \mathbf{M} \tag{A.32}$$

ὅπου οἱ συντελεστές ἀναλογίας ε_0, μ_0 λ καί λ' χαρακτηρίζουν τό σύστημα μονάδων μετρήσεως. Καθόσον ἡ διαφοροποίηση τῶν διαστάσεων μεταξύ τῶν ἀνυσμάτων **D** καί **P** ἤ **H** καί **M** δέν προσφέρει τίποτε, ὅλα τά ὀρθολογισμένα συστήματα ἐπιλέγουν $\lambda = \lambda' = 1$ καί τά μή ὀρθολογισμένα $\lambda = \lambda' = 4\pi$. Τά διάφορα ὅμως συστήματα μονάδων μετρήσεως διαφοροποιοῦνται ὡς πρός τήν ταύτιση ἤ μή τῶν διαστάσεων τῶν μακροσκοπικῶν πεδίων **D**, **H** καί τῶν θεμελιωδῶν πεδίων **E**, **B**. Ἡ συγκεκριμένη ἐπιλογή γίνεται μέ γνώμονα τήν ἁπλούστευση μετέπειτα ἐξισώσεων, ὅπως οἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell, γιά τά μακροσκοπικά πεδία **D** καί **H**. Ἡ συγκεκριμένη ἐπιλογή τῶν σταθερῶν ε_0 καί μ_0 στά διάφορα συστήματα, πού ταυτόχρονα καθορίζει καί τίς σχετικές διαστάσεις μακροσκοπικῶν καί θεμελιωδῶν πεδίων, περιέχεται στόν Πίνακα Α-2. Στόν ἴδιο πίνακα περιέχεται ἡ ἀντίστοιχη μορφή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ Α-2 Ὁρισμοί τῶν σταθερῶν ε_0, μ_0, τῶν μακροσκοπικῶν πεδίων **D** καί **H**, ἡ μορφή τῶν μακροσκοπικῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell καί ἡ δύναμη Lorentz στά διάφορα συστήματα μονάδων μετρήσεως. [Ἀπό τό σύγγραμμα τοῦ J.D. Jakcson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, Inc., 1962].

Σύστημα Μονάδων	ε_0	μ_0	**D**, **H**	Μακροσκοπικές ἐξισώσεις τοῦ Maxwell		Δύναμη Lorentz
Ἠλεκτροστατικό CGS	1	c^2	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = c^2\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla\times\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}$
Ἠλεκτρομαγνητικό CGS	c^2	1	$\mathbf{D} = \frac{1}{c^2}\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla\times\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}$
CGS Gauss†	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}$
Heaviside-Lorentz	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$	$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)$ $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$
MKS		$4\pi\times10^{-7}$	$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$	$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$

† Στό σύστημα CGS Gauss ὅπου τό ρεῦμα ὁρίζεται ὡς $\frac{1}{c}\frac{dq}{dt}$ ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ Maxwell ἔχει τή μορφή $\nabla\times\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$

τῶν ἐξ. (A.31) καί (A.32), τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell καί τῆς δυνάμεως Lorentz.

Παρατηρεῖται ὅτι σέ ὅλα τά συστήματα μονάδων μετρήσεως, ἄν τό ὑλικό εἶναι ἰσοτροπικό καί γραμμικό, ἰσχύουν οἱ ἀναλογίες

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{A.33}$$

καί

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \tag{A.34}$$

ὅπου ε καί μ εἶναι ἀντίστοιχα ἡ ἠλεκτρική καί μαγνητική διαπερατότητα τοῦ ὑλικοῦ. Μέ τόν τρόπο αὐτό οἱ παράμετροι ε_0 καί μ_0 ἀποτελοῦν τίς ὁριακές τιμές τῶν παραμέτρων ε καί μ στόν κενό χῶρο. Παρατηρεῖται ἀκόμη ὅτι σέ ὅλα τά συστήματα ὁ νόμος τοῦ Ohm

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{A.35}$$

διατηρεῖ τήν ἴδια μορφή.

Α-4 Μετασχηματισμός Ἐξισώσεων καί Μονάδων

Ὅπως τουλάχιστον ἐν μέρει ἀντανακλᾶ ὁ Πίνακας Α-2, στά διάφορα συστήματα μονάδων μετρήσεως οἱ ἐξισώσεις τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ παίρνουν διαφορετική μορφή. Τοῦτο ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι μιά σταθερά τῆς φύσης, ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός c, ἐμφανίζεται ρητά στίς ἐξισώσεις κατά τήν εἰσαγωγή τῶν μαγνητικῶν φαινομένων. Ἀντίθετα ὁ χῶρος τῆς κλασσικῆς μηχανικῆς χαρακτηρίζεται ἀπό τήν ἀπουσία ὁποιασδήποτε φυσικῆς σταθερᾶς στίς ἐξισώσεις. Ἔτσι ἐνῶ στήν κλασσική μηχανική οἱ φυσικοί νόμοι ἔχουν τή δυνατότητα *κλιμακώσεως* γιά ὁποιοδήποτε εὖρος μεταβολῆς τῶν φυσικῶν μεγεθῶν, ἡ ἀντίστοιχη *κλιμάκωση* μπορεῖ νά γίνει στό χῶρο τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ μόνο ἄν λόγοι μέ διαστάσεις μήκους πρός χρόνο διατηρηθοῦν σταθεροί. Ὁ τελευταῖος περιορισμός εἶναι βαθειά συνδεδεμένος μέ τήν Εἰδική Θεωρία τῆς Σχετικότητας πού, ὅπως διαφάνηκε στήν Παράγραφο 9-7, εἶναι ἐξ ὑπαρχῆς ἐνσωματωμένη στήν ἠλεκτρομαγνητική θεωρία.

Στό κυρίως κείμενο τοῦ παρόντος συγγράμματος οἱ ἐξισώσεις τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ ἔχουν γραφεῖ κατά τέτοιο τρόπο ὥστε νά εἶναι δυνατή ἡ ἀνάγνωσή τους τόσο στό σύστημα CGS ὅσο καί στό σύστημα MKS. Τά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

δύο αύτά συστήματα μονάδων μετρήσεως τείνουν σήμερα νά έπικρατήσουν. Τό σύστημα CGS χαρακτηρίζεται άπό φυσική έξέλιξη τών διαστάσεων πού άποδίδονται στά φυσικά μεγέθη χωρίς αύθαίρετη είσαγωγή έπιπλέον θεμελιωδών φυσικών μεγεθών καί παραμέτρων. Προτιμάται κυρίως άπό έρευνητές καί συγγραφεῖς μέ θεωρητικό προσανατολισμό. Τό σύστημα MKS έμφανίζεται άπλούστερο στίς παράγωγες έξισώσεις, ίδίως στίς έξισώσεις τοῦ Maxwell, ένῶ οί μονάδες μετρήσεως πού χρησιμοποιεῖ (volt, ampère, ohm, κλπ.) εἶναι οί καθιερωμένες στό χῶρο τῆς ήλεκτρομαγνητικῆς πρακτικῆς. Έξάλλου, όπως άναλύεται στήν Παράγραφο Α-6, τό σύστημα MKS ἔχει έπιλεγεῖ ὡς μέρος τοῦ γενικότερου **Διεθνοῦς Συστήματος Μονάδων** (Système International). Μιά πρακτική μέθοδος γιά τή μετατροπή έξισώσεων τοῦ συστήματος CGS σέ έξισώσεις τοῦ συστήματος MKS παρέχεται στόν Πίνακα Α-3. Οί κυριώτερες μονάδες μετρήσεως στά δύο συστήματα καί οί μεταξύ τους συντελεστές μετατροπῆς περιέχονται στήν έσωτερική πλευρά τοῦ πίσω έξωφύλλου.

Α-5 Πρότυπα Μονάδων Μετρήσεως καί Άπόλυτες Μονάδες

Ό προσδιορισμός ένός συνεποῦς συστήματος μονάδων σέ κάποιο χῶρο τῆς φυσικῆς καί ή άναπαραγωγή τῶν μονάδων αύτῶν στό έργαστήριο εἶναι δύο διαφορετικά θέματα. Ή πρώτη διεργασία συντελεῖται μέ τήν προσεκτική παρακολούθηση τῆς έξελίξεως τῶν έξισώσεων μέσα στό λογικό οἰκοδόμημα τῆς θεωρίας καί τό σταδιακό όρισμό μονάδων μετρήσεως καθώς άνακύπτουν νέα φυσικά μεγέθη. Ή δεύτερη συνίσταται στήν κατασκευή έξαρτημάτων ἤ συσκευῶν πού άντιπροσωπεύουν φυσικό μέγεθος μέ άριθμητική τιμή ἴση πρός τή μονάδα μετρήσεως πού όρίστηκε σέ θεωρητικά πλαίσια. Ή μονάδα μετρήσεως τοῦ ήλεκτρικοῦ φορτίου π.χ. μπορεῖ όπως εἴδαμε νά όριστεῖ θεωρητικά μέ μετατροπή τῆς άναλογίας (Α.6) σέ έξίσωση καί τόν καθορισμό ὅτι άντιστοιχεῖ σέ ποσότητα φορτίου μέ άμελητέες διαστάσεις πού, ἄν τοποθετηθεῖ σέ άπόσταση 1 cm άπό μιά ἴση ποσότητα φορτίου στόν κατά τά ἄλλα κενό χῶρο, δέχεται δύναμη ἴση μέ 1 dyn. Ό όρισμός αύτός εἶναι άπλός καί σαφής. Δέν χρειάζεται ὅμως μεγάλη έργαστηριακή πεῖρα γιά νά άντιληφθεῖ κανείς ὅτι ή δημιουργία μιᾶς ποσότητας φορτίου ἴσης πρός 1 ΗΣΜ-φ καί ή διατήρησή της στό έργαστήριο μέ σκοπό τή μέτρηση ἀγνωστων φορτίων εἶναι πολύ δύσκολο, ἄν ὄχι άδύνατο, έπίτευγμα. Ἔτσι γιά τόν έργαστηριακό προσδιορισμό ένός συστήματος μονάδων μετρήσεως εἶναι δυνατόν νά έπιλεγοῦν πρότυπα έξαρτήματα ἤ συσκευές πού άντιπροσωπεύουν παράγωγα μεγέθη.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ Α-3 Ὁ μετασχηματισμός ἐξισώσεων τοῦ συστήματος CGS (Gauss) σέ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος MKS μπορεῖ νά γίνει μέ ἀντικατάσταση τῶν μεταβλητῶν τῆς δεύτερης στήλης μέ τίς ποσότητες τῆς τρίτης. Φυσικά μεγέθη πού δέν ἀνήκουν ἀποκλειστικά στό χῶρο τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ (μῆκος, μάζα, χρόνος, δύναμη κλπ.) παραμένουν ἀμετάβλητα κατά τό μετασχηματισμό. Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός εἶναι ἐπίσης ἐπιτρεπτός {Ἀπό τό σύγγραμμα τοῦ J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, Inc., 1962}.

Φυσικό Μέγεθος	CGS (Gauss)	MKS
ταχύτητα τοῦ φωτός	c	$\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$
ἠλεκτρικό πεδίο, συνάρτηση δυναμικοῦ, διαφορά δυναμικοῦ	$\mathbf{E},\Phi,V$	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,(\mathbf{E},\Phi,V)$
φορτίο, ρεῦμα, πυκνότητα φορτίου, πυκνότητα ρεύματος, ἠλεκτρική πόλωση	$q,I,\rho,\mathbf{J},\mathbf{P}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\,(q,I,\rho,\mathbf{J},\mathbf{P})$
ἠλεκτρική μετατόπιση	$\mathbf{D}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}}\,\mathbf{D}$
μαγνητικό πεδίο	$\mathbf{B}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\,\mathbf{B}$
μαγνητική πόλωση	$\mathbf{M}$	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\,\mathbf{M}$
πεδίο μαγνητίσεως	$\mathbf{H}$	$\sqrt{4\pi\mu_0}\,\mathbf{H}$
ἀγωγιμότητα	σ	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\sigma$
ἠλεκτρική διαπερατότητα	ε	$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$
μαγνητική διαπερατότητα	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$
ἀντίσταση, σύνθετη ἀντίσταση	R,Z	$4\pi\varepsilon_0\,(R,Z)$
χωρητικότητα	C	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,C$
ἐπαγωγή	L	$4\pi\varepsilon_0 L$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μιά **πρότυπη μονάδα μετρήσεως** μπορεῖ νά καθοριστεῖ κατά διάφορους τρόπους. Ὁ ἁπλούστερος συνίσταται στήν κατασκευή ἑνός καί μόνο προτύπου καί μέτρηση κάθε φυσικοῦ μεγέθους πού ἀντιπροσωπεύει μέ ἄμεση ἤ ἔμμεση σύγκριση πρός τό μοναδικό αὐτό πρότυπο. Χαρακτηριστική εἶναι ἡ περίπτωση τοῦ **πρότυπου μέτρου** πού μέχρι τό 1960 ἀποτελοῦσε τό ἐπίσημο (καί μοναδικό) πρότυπο γιά τόν ὁρισμό τῆς μονάδας μετρήσεως μήκους. Τό πρότυπο μέτρο, μιά ράβδος ἀπό ἰριδιοῦχο λευκόχρυσο καί μῆκος περίπου ἴσο μέ 2.5×10^{-7} φορές τό μῆκος τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς γῆς, κατασκευάστηκε τό 1875 καί ἡ φύλαξή του ἀνατέθηκε στό Διεθνές Γραφεῖο Μέτρων καί Σταθμῶν πού ἑδρεύει στήν πόλη Sèvres τῆς Γαλλίας. Ἡ μονάδα μετρήσεως μήκους στό σύστημα MKS ὁρίστηκε ὡς μῆκος ἴσο πρός τό μῆκος τοῦ πρότυπου μέτρου καί στό σύστημα CGS ὡς μῆκος ἴσο πρός 0.01 τοῦ μήκους τοῦ πρότυπου μέτρου. Μέχρι τό 1960 ὅλοι οἱ συνήθεις κανόνες, μετροταινίες, μέτρα, κλπ., κατασκευάζονταν μέ ἀπευθείας ἤ ἔμμεση σύγκριση πρός τό πρότυπο μέτρο.

Τά μειονεκτήματα πού ἐμφανίζει ἡ υἱοθέτηση ἑνός καί μόνο προτύπου εἶναι προφανῆ. Τό πρότυπο μπορεῖ μέ τήν πάροδο τοῦ χρόνου νά ὑποστεῖ χημικές ἤ μηχανικές ἀλλοιώσεις ὅπως διάβρωση, ἐξάχνωση ἤ ὀξείδωση. Εἶναι δυνατόν οἱ φυσικές του ἰδιότητες νά μήν παραμένουν σταθερές λόγω ἐπιδράσεως τοῦ περιβάλλοντος (θερμοκρασία, ὑγρασία, μαγνητικό πεδίο τῆς γῆς, κλπ.). Σέ πολλές περιπτώσεις τό μοναδικό πρότυπο μπορεῖ νά εἶναι δύσκολα ἤ καθόλου προσιτό λόγω μεγάλης γεωγραφικῆς ἀποστάσεως τοῦ ἐργαστηρίου ἀπό τόν τόπο πού φυλάσσεται, ἐντάσεως τῶν διπλωματικῶν σχέσεων μεταξύ χωρῶν ἤ ἐμπόλεμης καταστάσεως. Τέλος εἶναι ἐνδεχόμενη κάποια στιγμή ἡ καταστροφή τοῦ προτύπου λόγω θεομηνίας, πολέμου ἤ δολιοφθορᾶς. Εἶναι βέβαιο ὅτι ὅλα τά προηγούμενα μειονεκτήματα, ἐκτός ἀπό τήν ἐνδεχόμενη ὁλοκληρωτική καταστροφή τοῦ προτύπου, μποροῦν νά ἀντιμετωπιστοῦν ἱκανοποιητικά μέ τίς δυνατότητες τῆς σύγχρονης τεχνολογίας. Παρόλα αὐτά ἡ ἐξάρτηση τοῦ ὅλου συστήματος ἀπό τήν ὕπαρξη ἑνός μοναδικοῦ ἀνθρώπινου κατσκευάσματος δέν μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ἱκανοποιητική λύση. Ἔτσι, ἡ τάση πού ἐπικράτησε μετά τό Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο συνίσταται στήν ἐγκατάλειψη τῶν προτύπων καί στόν ὁρισμό μονάδων μετρήσεως μέσω φυσικῶν σταθερῶν. Τό μῆκος κύματος τῆς ἀκτινοβολίας τοῦ ἀτόμου ^{86}Kr στό κενό κατά τή μετάπτωση ἀπό τή στάθμη $^2P_{10}$ στή στάθμη $^5d_5$ μετρήθηκε μέ ἀκρίβεια καί βρέθηκε (σέ σύγκριση μέ τό πρότυπο μέτρο) ἴσο πρός 6.0578021×10^{-7} m. Οἱ ρόλοι ἀντιστράφησαν καί σήμερα τό μέτρο ὁρίζεται ὡς 1.65076373×10^6 μῆκη κύματος τῆς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

προηγούμενης ἀκτινοβολίας. Κατά τόν ἴδιο τρόπο, ἀπό τή γνωστή σήμερα τιμή τοῦ φορτίου τοῦ ἠλεκτρονίου $e = 1.6021892 \times 10^{-19}$ C, τό coulomb θά μποροῦσε νά ὁριστεῖ ὡς ποσότητα ἴση πρός $(e^{-1} =)$ 6.2414601×10^{18} ἠλεκτρονικά φορτία. Τό ὅτι τοῦτο δέν ἀκολουθεῖται στήν πράξη εἶναι θέμα διεθνοῦς συμφωνίας[†].

Μιά ἐναλλακτική μέθοδος γιά τήν ὑλοποίηση πρότυπης μονάδας μετρήσεως εἶναι ἡ λεπτομερής προδιαγραφή ὁδηγιῶν γιά τήν κατασκευή ἐξαρτήματος ἤ τή διεξαγωγή διεργασίας πού ὁδηγεῖ σέ κάποιο μονοσήμαντο ἀποτέλεσμα, τό ὁποῖο συνδέεται μέ τή συγκεκριμένη μονάδα μετρήσεως. Πολλά πρότυπα ἀντιστάσεως, χωρητικότητας καί ἐπαγωγῆς ἔχουν υἱοθετηθεῖ στό παρελθόν μέ τόν τρόπο αὐτό καί μέ συνεχῶς αὐξανόμενη πιστότητα στήν ἀναπαραγωγή τῶν ἀποτελεσμάτων. Ἀντιπροσωπευτικό πρότυπο μονάδας μετρήσεως πού καθορίζεται μέ συγκεκριμένη διαδικασία ἀποτελεῖ τό **διεθνές ampère** πού ὁρίστηκε ἀπό τό Συνέδριο τοῦ Λονδίνου τό 1908 ὡς ἡ ποσότητα σταθεροῦ ρεύματος, ἡ ὁποία, ἄν διοχετευτεῖ σέ ἕνα προκαθορισμένο διάλυμα νιτρικοῦ ἀργύρου, ἐναποθέτει στήν κάθοδο ἄργυρο μέ ρυθμό 0.00111800 g/sec. Κατά τόν ἴδιο τρόπο ὑπῆρξαν ἀρκετές ἀπόπειρες στό παρελθόν γιά τήν υἱοθέτηση πρότυπων ἀντιστάσεως καί δυναμικοῦ. Τό πρότυπο ἀντιστάσεως μέ τή μεγαλύτερη διάρκεια ζωῆς ὑπῆρξε τό **διεθνές ohm** πού τό 1908 ὁρίστηκε ὡς ἡ ἀντίσταση στήλη ὑδραργύρου μέ μάζα 14.4521 g καί μῆκος 106.300 cm. Τά δύο τελευταῖα πρότυπα ἔχουν τή δυνατότητα μέσω τοῦ νόμου τοῦ Ohm νά προσδιορίσουν διαδικαστικά τή μονάδα μετρήσεως δυναμικοῦ. Πράγματι, τό 1908 στό Συνέδριο τοῦ Λονδίνου, τό **διεθνές volt** ὁρίστηκε ὡς ἡ διαφορά δυναμικοῦ πού δημιουργεῖται κατά τή ροή ἑνός διεθνοῦς ampère μέσω ἑνός διεθνοῦς ohm.

Εἶναι βέβαιο ὅτι ἀπό τά τρία φυσικά μεγέθη, δυναμικό, ρεῦμα καί ἀντίσταση, εἶναι δυνατός ὁ ὁρισμός πρότυπης μονάδας μόνο γιά δύο, ἐνῶ ἡ πρότυπη μονάδα τοῦ τρίτου μεγέθους ὁρίζεται μονοσήμαντα μέσω τοῦ νόμου τοῦ Ohm. Συχνά ἀναφέρεται ἡ διασκεδαστική ἱστορία κατά τήν ὁποία τό Ἀμερικανικό Κογκρέσσο υἱοθέτησε διά νόμου τό 1894 (μετά ἀπό εἰσή-

---

† Ἐξάλλου, ὅπως ἀναλύθηκε καί στήν Παράγραφο 12-3 κατά τήν ἀξιολόγηση τῆς σχετικῆς σημασίας τῶν μακροσκοπικῶν πεδίων **D** καί **H**, ἡ παραγωγή, ὁ ἔλεγχος καί ἡ μέτρηση τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου ἐμφανίζουν στήν τεχνολογία τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ μειωμένο ἐνδιαφέρον σέ σχέση μέ τήν παραγωγή, τόν ἔλεγχο καί τή μέτρηση ἠλεκτρικοῦ ρεύματος. Αὐτός εἶναι καί ἕνας ἀπό τούς λόγους γιά τούς ὁποίους προτιμήθηκε ἡ υἱοθέτηση θεμελιώδους μονάδας μετρήσεως γιά τό ἠλεκτρικό ρεῦμα καί παράγωγης μονάδας μετρήσεως γιά τό ἠλεκτρικό φορτίο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

γηση μιᾶς διεθνοῦς ἐπιτροπῆς ἐμπειρογνωμόνων) τρία ἀνεξάρτητα πρότυπα γιά τόν ὁρισμό τοῦ volt, τοῦ ampère καί τοῦ ohm. Πολύ γρήγορα, λόγω συστηματικῶν σφαλμάτων στόν προσδιορισμό τῶν τριῶν μονάδων, στά πλαίσια τῆς Ἀμερικανικῆς νομοθεσίας, ἔπαψε νά ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Ohm! Βεβαίως τίποτε δέν ἀπαγορεύει τήν υἱοθέτηση μιᾶς πρότυπης διατάξεως μέ καθορισμένη ΗΕΔ, τῆς ὁποίας ἡ τιμή προσδιορίζεται ἀπό τό νόμο τοῦ Ohm καί τίς πρότυπες μονάδες ρεύματος καί ἀντιστάσεως. Τό ἡλεκτρικό στοιχεῖο Weston, πού σήμερα χρησιμοποιεῖται ὡς πρότυπη διάταξη ΗΕΔ, μελετήθηκε μέ λεπτομέρεια στήν Παράγραφο 8-5.

Παράλληλα μέ τήν ἐξέλιξη τῶν πρότυπων μονάδων μετρήσεως, ἀρκετά νωρίς στήν ἱστορία τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ ἄρχισε ἡ προσπάθεια γιά τόν **ἀπόλυτο προσδιορισμό** τους. Βασισμένη στίς ἰδέες πού διατύπωσε ὁ Weber τό 1851, ἡ ἔννοια τοῦ ἀπόλυτου προσδιορισμοῦ ἐκφράζει τή σύγκριση μονάδων ἡλεκτρομαγνητικῶν μεγεθῶν ἀπευθείας πρός τά τρία θεμελιώδη μεγέθη τῆς μηχανικῆς. Οἱ πρῶτες προσπάθειες ἀπόλυτου προσδιορισμοῦ εἶχαν ὡς στόχο τόν ὁρισμό τῆς μονάδας μετρήσεως τῆς ἀντιστάσεως. Πολύ γρήγορα, μέ συνεχή βελτίωση τῆς πιστότητας καί ἀκρίβειας τῶν ἀποτελεσμάτων, οἱ προσπάθειες αὐτές ὁδήγησαν στήν ἐγκατάλειψη τοῦ προτύπου στήλης ὑδραργύρου. Σύγχρονοι μέθοδοι ἀπόλυτου προσδιορισμοῦ τοῦ ohm χρησιμοποιοῦν ἕνα περιστρεφόμενο ἀγωγό μέ γνωστή γωνιακή ταχύτητα, εἰσάγοντας ἔτσι τά μεγέθη τοῦ μήκους καί τοῦ χρόνου. Χρησιμοποιοῦν ἀκόμα ἐξαρτήματα ἐπαγωγῆς μέ συντελεστές αὐτεπαγωγῆς ἤ ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς πού εἶναι δυνατόν νά ὑπολογιστοῦν μέ μεγάλη ἀκρίβεια ἀπό τή γεωμετρία καί τίς διαστάσεις τους. Κατά τόν ἴδιο τρόπο ὁ ἀπόλυτος προσδιορισμός τοῦ ampère μπορεῖ νά γίνει μέ προσεκτική μέτρηση τῆς δυνάμεως πού ἀναπτύσσεται μεταξύ ἑνός κινητοῦ πηνίου καί ἑνός συστήματος σταθερῶν πηνίων, ἄν οἱ διαστάσεις τῶν πηνίων εἶναι γνωστές.

Ἡ δημιουργία ἤ διαθεσιμότητα προτύπων πολύ λίγο ἐνδιαφέρει σήμερα τόν ἐπιστήμονα ἤ τό μηχανικό. Στά περισσότερα κράτη ὁ προσδιορισμός τῶν μονάδων μετρήσεως καί ἡ δημιουργία καί διατήρηση προτύπων ἔχει ἀνατεθεῖ σέ Ἐθνικά Ἐργαστήρια Προτύπων ἐνῶ ἀπό τή βιομηχανία διατίθενται δευτερογενῆ καί τριτογενῆ πρότυπα γιά χρήση στό ἐργαστήριο. Τά Ἐθνικά Ἐργαστήρια Προτύπων φυλάσσουν τά πρωτογενῆ πρότυπα, τά ὁποῖα περιοδικά ἐλέγχουν μέ ἀλληλοσύγκριση ἤ μέ διαδικασίες ἀπόλυτου προσδιορισμοῦ. Σημαντική ἀκόμη προσπάθεια καταβάλλεται ἀπό τά Ἐθνικά Ἐργαστήρια γιά τόν συνεχῶς ἀκριβέστερο προσδιορισμό τῶν μονάδων μετρήσεως καί τή διαμόρφωση ἀκριβέστερων, πρακτικότερων καί οἰκονομικό-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τερων δευτερογενῶν προτύπων πού θά χρησιμοποιηθοῦν γιά μετρήσεις στήν ἔρευνα καί τή βιομηχανία. Πολλές μονάδες μετρήσεως εἶναι σήμερα γνωστές μέ ἀκρίβεια πού ξεπερνᾶ τή μιά μονάδα στά ἑκατό ἑκατομμύρια (10^{-8}).

Ἡ ἀκριβής γνώση καί ὑλοποίηση ὑπό μορφή προτύπου τῶν μονάδων μετρήσεως ἔχει πρωταρχική σημασία στή σύγχρονη ἔρευνα καί τεχνολογία. Ὅπως πολλές φορές ἀναφέραμε, κάθε μέτρηση ἀνάγεται σέ τελευταία ἀνάλυση στή σύγκριση τοῦ φυσικοῦ μεγέθους πού μετρᾶται πρός κάποιο πρότυπο καί ἡ ἀκρίβεια μέ τήν ὁποία ἔχει προσδιοριστεῖ τό πρότυπο εἶναι καθοριστική γιά τήν πιστότητα τῆς μετρήσεως. Κατά τόν προσδιορισμό ἀποστάσεων στήν ἀστρονομία, κατά τή μέτρηση ἀντιστάσεων στή φυσική στερεᾶς καταστάσεως, κατά τήν ἀνάλυση φασματοσκοπικῶν δεδομένων στή σύγχρονη ἔρευνα ἀπαιτεῖται συχνά ἀκρίβεια τῆς τάξης τοῦ 10^{-6} μέ ἀντίστοιχες ἀπαιτήσεις στήν ἀκριβή γνώση τοῦ προτύπου. Ἐξίσου σημαντική εἶναι ἡ ἀκρίβεια τῶν προτύπων πού χρησιμοποιοῦνται στή βιομηχανία. Προηγμένες μηχανές ἐσωτερικῆς καύσης ἀπαιτοῦν προσδιορισμό τῶν διαστάσεων μέ τέσσερα ἕως ἕξη σημαντικά ψηφία. Ἀλλά καί στήν καθημερινή ζωή καί τό ἐμπόριο ἡ ἐλλειπής γνώση μονάδων μετρήσεων μπορεῖ νά ἔχει σημαντικές ἐπιπτώσεις. Κατά τή δεκαετία 1980-1990 οἱ χῶρες τῆς Εὐρωπαϊκῆς Κοινότητας προβλέπεται ὅτι θά καταναλώσουν εἰσαγόμενο πετρέλαιο μέ ἐτήσιο ρυθμό 5.6×10^9 βαρέλια† (bbl). Ἄν ἡ μονάδα bbl εἶναι γνωστή μέ ἀκρίβεια τῆς τάξης τοῦ 10^{-4} (πού συνεπάγεται προσδιορισμό γραμμικῶν διαστάσεων μέ ἀκρίβεια περίπου 100 μm) ἡ ἀβεβαιότητα στήν ποσότητα τοῦ εἰσαγόμενου πετρελαίου εἶναι τῆς τάξης τῶν 10^5 bbl μέ συνολική ἀξία κατά ἔτος περίπου ἕνα δισεκατομμύριο δραχμές.

Α-6 Τό Διεθνές Σύστημα Μονάδων Μετρήσεως (Système International)

Ἡ πρώτη μονάδα μετρήσεως πού ἀναφέρεται στήν ἱστορία εἶναι ὁ *πήχης* πού χρησιμοποιήθηκε ἀπό τούς ἀρχαίους Αἰγυπτίους κατά τήν κατασκευή τῶν πυραμίδων καί ὁρίστηκε ὡς ἡ ἀπόσταση ἀπό τόν ἀγκώνα ὡς τήν ἄκρη τοῦ μεσαίου δακτύλου ἑνός Αἰγυπτίου τῆς ἐποχῆς ἐκείνης. Πολλοί παρόμοιοι ὁρισμοί καί πρότυπα ἀναφέρονται στήν ἱστορία. Ὁ βασιλιᾶς Ἑρρῖκος Ι τῆς Ἀγγλίας ὅρισε ὡς μονάδα μετρήσεως τοῦ μήκους τήν ἀπόσταση ἀπό τή μύτη του ὡς τόν ἀντίχειρα τοῦ ἀριστεροῦ του χεριοῦ καί τήν ὀνόμασε *γιάρδα*. Ὁ βασιλιᾶς Δαυΐδ Ι τῆς Σκωτίας ὅρισε ἀνεξάρτητα ὡς μο-

† Διεθνής μονάδα μετρήσεως ὄγκου ὑγρῶν καυσίμων. 1 bbl = 0.11924 m^3.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

νάδα μετρήσεως τό μέσο μῆκος τοῦ ἀντίχειρα τριῶν Σκωτσέζων (ἑνός ψηλοῦ, ἑνός κοντοῦ καί ἑνός μέ μεσαῖο ἀνάστημα) καί τήν ὀνόμασε *ἴντσα*. Οἱ ἀνθρωπομορφικοί αὐτοί ὁρισμοί πολύ γρήγορα ἐγκαταλείφθηκαν (κυρίως ἀπό ἀνθρώπους πού γιά τήν ἐκτέλεση μετρήσεων δέν εἶχαν πρόχειρους ἀρχαίους Αἰγυπτίους, Ἄγγλους βασιλεῖς ἤ Σκωτσέζους διαφόρων διαστάσεων) ἐνῶ παράλληλα καταβλήθηκε προσπάθεια γιά τή διαμόρφωση καί υἱοθέτηση περισσότερο ἀντικειμενικῶν προτύπων. Στήν προσπάθεια αὐτή ὁ ἄνθρωπος δέν ὑστέρησε σέ φαντασία καί ἐφευρετικότητα. Στά τέλη τοῦ ΙΗ΄ αἰώνα ὑπῆρχαν σέ χρήση περισσότερες ἀπό 200 διαφορετικά ὁρισμένες μονάδες μόνο γιά τή μέτρηση τοῦ μήκους.

Ἡ πρώτη ἀπόπειρα γιά τή δημιουργία ἑνός ἁπλοῦ, εὔχρηστου καί διεθνῶς ἀποδεκτοῦ συστήματος μονάδων μετρήσεως γίνεται ἀμέσως μετά τή Γαλλική Ἐπανάσταση μέ ἀποτέλεσμα τή γένεση τοῦ μέτρου καί τοῦ χιλιογράμμου. Ἄν καί οἱ ἀγγλοσαξονικές χῶρες συνέχισαν μέχρι πρόσφατα τή χρήση διαφορετικοῦ συστήματος μονάδων στήν τεχνολογία καί τό ἐμπόριο, τά συστήματα CGS καί MKS πού προέκυψαν ἀπό τήν προσπάθεια αὐτή καθιερώθηκαν διεθνῶς στόν ἐπιστημονικό χῶρο. Δυστυχῶς ἡ βιομηχανική ἐπανάσταση καί ἡ μετέπειτα ἀλματώδης ἐξέλειξη τῆς ἐπιστήμης καί τῆς τεχνολογίας ἐπανέφεραν γρήγορα τό χάος στή χρήση τῶν μονάδων μετρήσεως. Μέ τήν ἀνακάλυψη νέων φαινομένων, ἰδίως τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν, μέ τήν ἀνάπτυξη τῆς ἐφαρμοσμένης ἔρευνας σέ διάφορους, κατά πολύ ἀνεξάρτητους, τομεῖς τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν, ὅπως ἡ ὀπτική, ἡ ἀντοχή ὑλικῶν, ἡ ἀεροδυναμική, ὁρίστηκε μιά πληθώρα νέων μονάδων μετρήσεως πού οὐσιαστικά ἀναφέρονται στό ἴδιο φυσικό μέγεθος. Σέ ἕνα σύνηθες ἐγχειρίδιο φυσικῶν σταθερῶν καί μονάδων μετρήσεως† ἐκδόσεως 1960 μπορεῖ νά μετρήσει κανείς 20 διαφορετικές μονάδες πιέσεως, 32 ἐνεργείας, 20 ἠλεκτρικοῦ ρεύματος καί 21 φωτισμοῦ.

Μέ τή σημερινή τεράστια διακίνηση ἐπιστημονικῶν πληροφοριῶν, μηχανημάτων, βιομηχανικῶν προϊόντων καί ἐμπορευμάτων, ἡ υἱοθέτηση ἑνός παγκόσμια ἀποδεκτοῦ συστήματος μονάδων μετρήσεως ἀποτελεῖ ἐπιτακτική ἀνάγκη. Πρός τήν κατεύθυνση αὐτή καταβάλλεται κατά τήν τελευταία εἰκοσαετία μιά συντονισμένη διεθνής προσπάθεια μέ προσεκτική μελέτη τῶν ἀναγκῶν τῆς ἐπιστήμης καί τῆς τεχνολογίας, νομοθετικές ρυθμίσεις καί διακρατικές συμφωνίες. Τό **Διεθνές Σύστημα** ἤ **Système International** (SI)

† βλέπε π.χ. Handbook of Chemistry and Physics, 41st ed., Chemical Rubber Publ. Co., Cleveland, Ohio, 1960.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πού έχει προκύψει άπό τήν προσπάθεια αύτή χρησιμοποιεῖ τίς θεμελιώδεις μονάδες τοῦ παλαιοῦ συστήματος MKSA, καθώς καί τρεῖς ἐπιπλέον αὐθαίρετα ὁρισμένες μονάδες άπό κατά μεγάλο βαθμό αύτόνομους τομεῖς τῆς ἐπιστήμης. Υἱοθετεῖ ἐπιπλέον ἑνιαῖο συμβολισμό τῶν μονάδων καί καθορισμένα πρότυπα γιά τήν ὑλοποίησή τους στό ἐργαστήριο καί τήν κατασκευή δευτερογενῶν προτύπων.

Τό σύστημα SI χρησιμοποιεῖται σήμερα άπό ὅλες σχεδόν τίς βιομηχανικές χῶρες καί τείνει νά γίνει παγκόσμια άποδεκτό. Ἔχει πλήρως ἐφαρμοστεῖ (μέ ἀνεκτές μόνο ὁρισμένες παρεκλήσεις γιά μιά μεταβατική περίοδο 10 ἐτῶν) στίς χῶρες τῆς Εὐρωπαϊκῆς Κοινότητας, ἐνῶ γιά τήν Ἑλλάδα άποτελεῖ μέρος τοῦ Παράγωγου Δικαίου πού κληρονόμησε ἡ χώρα μας κατά τήν ἔνταξή της στήν Εὐρωπαϊκή Κοινότητα τό 1981. Ἡ περιγραφή τοῦ συστήματος SI περιέχεται στήν 'Οδηγία' τοῦ Συμβουλίου τῶν Εὐρωπαϊκῶν Κοινοτήτων 80/181, πού γιά λόγους πληρότητας παρατίθεται στίς ἑπόμενες σελίδες μέ ἀνατύπωση τοῦ κειμένου άπό τήν Ἐπίσημη Ἐφημερίδα τῶν Εὐρωπαϊκῶν Κοινοτήτων.

---

† βλέπε ἐπίσης προγενέστερες Ὁδηγίες 71/354 καί 76/770.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Άριθ. Ν 30/80 Επίσημη Εφημερίδα των Ευρωπαϊκών Κοινοτήτων 15.2.80

ΟΔΗΓΙΑ ΤΟΥ ΣΥΜΒΟΥΛΙΟΥ

της 20ής Δεκεμβρίου 1979

περί προσεγγίσεως των νομοθεσιών των Κρατών Μελών των αναφερομένων στις μονάδες μετρήσεως καί καταργήσεως της οδηγίας 71/354/ΕΟΚ

(80/181/ΕΟΚ)

ΤΟ ΣΥΜΒΟΥΛΙΟ ΤΩΝ ΕΥΡΩΠΑΪΚΩΝ ΚΟΙΝΟΤΗΤΩΝ,

Έχοντας υπόψη:

τή συνθήκη περί ιδρύσεως της Ευρωπαϊκής Οικονομικής Κοινότητος καί ιδίως τό άρθρο 100,

τήν οδηγία 71/354/ΕΟΚ του Συμβουλίου της 18ης Οκτωβρίου 1971 περί προσεγγίσεως των νομοθεσιών των Κρατών Μελών σχετικά μέ τίς μονάδες μετρήσεως(1), όπως τροποποιήθηκε τελευταία από τήν οδηγία 76/770/ΕΟΚ(2),

τήν πρόταση της Επιτροπής(3),

τή γνώμη της Συνελεύσεως(4),

τή γνώμη της Οικονομικής καί Κοινωνικής Επιτροπής(5),

Εκτιμώντας:

δτι οί μονάδες μετρήσεως είναι απαραίτητες γιά κάθε όργανο μετρήσεως, γιά τήν έκφραση κάθε πραγματοποιούμενης μετρήσεως καί γιά τήν έκφραση κάθε ενδείξεως μεγέθους· δτι οί μονάδες μετρήσεως χρησιμοποιούνται στούς περισσότερους από τούς τομείς ανθρώπινης δραστηριότητος· δτι είναι αναγκαίο νά εξασφαλισθεί ή μεγαλύτερη δυνατή σαφήνεια κατά τή χρησιμοποίησή τους· δτι είναι επομένως αναγκαίο νά ρυθμισθεί ή χρήση τους εντός της Κοινότητος στό οικονομικό κύκλωμα, στούς τομείς της δημοσίας υγείας καί κοινωνικών ασφαλίσεων καθώς επίσης καί στίς εργασίες διοικητικού χαρακτήρα·

δτι εν τούτοις, στό πεδίο των διεθνών μεταφορών, υπάρχουν διεθνείς συμβάσεις ή συμφωνίες πού δεσμεύουν τήν Κοινότητα ή τά Κράτη Μέλη· δτι οί συμβάσεις ή συμφωνίες αύτές πρέπει νά τηρηθούν·

δτι οί νομοθεσίες των Κρατών Μελών πού καθορίζουν τή χρήση των μονάδων μετρήσεων διαφέρουν από τό ένα Κράτος Μέλος στό άλλο καί ώς έκ τούτου παρεμποδίζουν τίς εμπορικές συναλλαγές· δτι, υπό τίς συνθήκες αύτές, επιβάλλεται ή εναρμόνιση των νομοθετικών, κανονιστικών καί διοικητικών διατάξεων γιά νά εξαλειφθούν τά εμπόδια αύτά·

δτι οί μονάδες μετρήσεως αποτελούν αντικείμενο διεθνών αποφάσεων πού λαμβάνονται από τή Γενική Συνδιάσκεψη Μέτρων καί Σταθμών (CGPM) πού συνεστήθη μέ τή Σύμβαση του Μέτρου πού υπεγράφη στό Παρίσι στίς 20 Μαΐου 1875, στήν οποία έχουν προσχωρήσει όλα τά Κράτη Μέλη· δτι οί αποφάσεις αύτές συνέβαλαν στή γένεση του Διεθνούς Συστήματος Μονάδων μετρήσεως (SI)·

δτι τό Συμβούλιο υιοθέτησε στίς 18 Οκτωβρίου 1971 τήν οδηγία 71/354/ΕΟΚ πού αποβλέπει στήν εναρμόνιση των νομοθεσιών των Κρατών Μελών γιά νά εξαλειφθούν τά εμπόδια στίς συναλλαγές υιοθετώντας σέ κοινοτικό επίπεδο τό Διεθνές Σύστημα Μονάδων· δτι ή οδηγία 71/354/ΕΟΚ τροποποιήθηκε από τήν πράξη προσχωρήσεως καί από τήν οδηγία 76/770/ΕΟΚ·

δτι οί κοινοτικές αύτές διατάξεις δέν εξάλειψαν όλα τά εμπόδια στό πεδίο αύτό· δτι κατ' εφαρμογή της οδηγίας 76/770/ΕΟΚ προβλέπεται νά εξετασθεί, πρό της 31ης Δεκεμβρίου 1979, ή κατάσταση των μονάδων μετρήσεως, των ονομασιών καί των συμβόλων πού περιλαμβάνονται στό κεφάλαιο Δ του παραρτήματός της· δτι, επί πλέον, απεδείχθη αναγκαία ή επαναξέταση της καταστάσεως ορισμένων άλλων μονάδων μετρήσεως·

δτι γιά τήν αποφυγή σημαντικών δυσκολιών, είναι αναγκαίο νά προβλεφθεί μία μεταβατική περίοδος γιά τήν εξάλειψη των μονάδων μετρήσεως οί οποίες δέν είναι συμβιβαστές μέ τό Διεθνές Σύστημα· δτι είναι εν τούτοις απαραίτητο νά επιτραπεί στά Κράτη Μέλη πού τό επιθυμούν νά επιβάλλουν στήν επικράτειά τους τίς διατάξεις μόνον του κεφαλαίου Ι του παραρτήματος, τό ταχύτερο δυνατό· δτι είναι λοιπόν αναγκαίο, σέ κοινοτικό επίπεδο, νά περιορισθεί ή μεταβατική αύτή περίοδος αφήνοντας ελευθερία στά Κράτη

(1) ΕΕ άριθ. Ν 243 της 29.10.1971, σ. 29.
(2) ΕΕ άριθ. Ν 262 της 27.9.1976, σ. 204.
(3) ΕΕ άριθ. Α 81 της 28.3.1979, σ. 6.
(4) ΕΕ άριθ. Α 127 της 21.5.1979, σ. 80.
(5) Γνώμη πού εκφράσθηκε στίς 24 καί 25 Οκτωβρίου 1979 (καί ή οποία δέν δημοσιεύθηκε ακόμη στήν Επίσημη Εφημερίδα)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μέλη νά μήν κάνουν χρήση όλόκληρης τής μεταβατικής αύτής περιόδου·

ότι, κατά τή διάρκεια τής μεταβατικής περιόδου είναι άπαραίτητο νά διατηρηθεί μιά σαφής κατάσταση έπί τοῦ θέματος τής χρήσεως τῶν μονάδων μετρήσεως στίς συναλλαγές μεταξύ τῶν Κρατῶν Μελῶν, καί αὐτό ἰδίως γιά νά προστατευθεί ὁ καταναλωτής ὅτι ἡ ἐπιβεβλημένη ὑποχρέωση στά Κράτη Μέλη γιά τήν ἀποδοχή χρησιμοποιήσεως ἐπιπροσθέτων ἐνδείξεων ἐπί τῶν προϊόντων καί τοῦ ἐξοπλισμοῦ πού εἰσάγονται ἀπό τά ἄλλα Κράτη Μέλη κατά τή διάρκεια τής μεταβατικής αὐτής περιόδου ἐμφανίζεται καλῶς προσαρμοσμένη γιά τό σκοπό αὐτό·

ὅτι ἐν τούτοις ἡ συστηματική ἐφαρμογή μιᾶς τέτοιας λύσεως σέ ὅλα τά ὄργανα μετρήσεως καί μεταξύ ἄλλων καί στά ἰατρικά ὄργανα δέν εἶναι κατ' ἀνάγκη ἐπιθυμητή· ὅτι τά Κράτη Μέλη πρέπει λοιπόν νά μποροῦν νά ἀπαιτοῦν στήν ἐπικράτειά τους ὅπως τά ὄργανα μετρήσεως φέρουν τίς ἐνδείξεις μεγέθους σέ μία μόνο νόμιμη μονάδα μετρήσεως·

ὅτι ἡ παρούσα ὁδηγία δέν ἐπηρεάζει τή συνεχή κατασκευή προϊόντων πού ἤδη διατίθενται στήν ἀγορά· ὅτι ἀφορᾶ ἐν τούτοις τή διάθεση στήν ἀγορά καί τή χρησιμοποίηση προϊόντων καί ἐξοπλισμῶν πού φέρουν ἐνδείξεις μεγεθῶν σέ μονάδες μετρήσεως πού δέν εἶναι πλέον νόμιμες μονάδες μετρήσεως καί πού εἶναι ἀναγκαῖα γιά τή συμπλήρωση ἤ ἀντικατάσταση ἐξαρτημάτων ἤ μερῶν τῶν προϊόντων, ἐξοπλισμῶν καί ὀργάνων μετρήσεως πού ἤδη ἔχουν διατεθεῖ στήν ἀγορά· ὅτι εἶναι συνεπῶς ἀναγκαῖο ὅπως τά Κράτη Μέλη ἐγκρίνουν τή διάθεση στήν ἀγορά καί τή χρησιμοποίηση, ἀκόμη κι ὅταν φέρουν ἐνδείξεις μεγέθους σέ μονάδες μετρήσεως πού δέν εἶναι πλέον νόμιμες, τέτοιων προϊόντων καί ἐξοπλισμῶν συμπληρώσεως ἤ ἀντικαταστάσεως γιά νά καταστεῖ δυνατή ἡ συνεχής χρησιμοποίηση τῶν προϊόντων, ἐξοπλισμῶν ἤ ὀργάνων μετρήσεως πού ἤδη ἔχουν διατεθεῖ στήν ἀγορά·

ὅτι ὁ Διεθνής Ὀργανισμός Τυποποιήσεως (ISO) υἱοθέτησε στή 1 Μαρτίου 1974 ἕνα διεθνές πρότυπο πού ἀφορᾶ τήν παρουσίαση τῶν μονάδων SI καί ἄλλων μονάδων γιά τή χρησιμοποίησή τους σέ συστήματα πού περιλαμβάνουν λειτουργίες καθορισμένων χαρακτήρων· ὅτι εἶναι ἑπομένως χρήσιμο ὅπως ἡ Κοινότης υἱοθετήσει τίς λύσεις πού ἔχουν ἤδη γίνει ἀποδεκτές σέ ἕνα εὐρύτερο διεθνές σχέδιο ὁτό πρότυπο ISO 2955 τῆς 1ης Μαρτίου 1974·

ὅτι οἱ κοινοτικές διατάξεις ἐπί τοῦ θέματος τῶν μονάδων μετρήσεως εὑρίσκονται διασκορπισμένες σέ περισσότερα ἀπό ἕνα κοινοτικά κείμενα· ὅτι τό θέμα τῶν μονάδων μετρήσεως ἔχει τέτοια σημασία πού εἶναι ἀπαραίτητη ἡ δυνατότητα ἀναφορᾶς σέ ἕνα μοναδικό κοινοτικό κείμενο· ὅτι γι' αὐτό τό λόγο ἡ παροῦσα ὁδηγία συνενώνει ὅλες τίς κοινοτικές διατάξεις ἐπί τοῦ θέματος καί χρειάζεται ἡ κατάργηση τῆς ὁδηγίας

ΕΞΕΔΩΣΕ ΤΗΝ ΠΑΡΟΥΣΑ ΟΔΗΓΙΑ:

Ἄρθρο 1

Οἱ νόμιμες κατά τήν ἔννοια τῆς παρούσας ὁδηγίας μονάδες μετρήσεως οἱ ὁποῖες πρέπει νά χρησιμοποιοῦνται γιά τήν ἔκφραση τῶν μεγεθῶν εἶναι:

α) ἐκεῖνες πού περιλαμβάνονται στό κεφάλαιο I τοῦ παραρτήματος·

β) ἐκεῖνες πού περιλαμβάνονται στό κεφάλαιο II τοῦ παραρτήματος, μέχρι μία ἡμερομηνία καθοριζόμενη ἀπό τά Κράτη Μέλη. Ἡ ἡμερομηνία αὐτή δέν μπορεῖ νά ὑπερβεῖ τίς 31 Δεκεμβρίου 1985·

γ) ἐκεῖνες πού περιλαμβάνονται στό κεφάλαιο III τοῦ παραρτήματος σέ ἐκεῖνα τά Κράτη Μέλη μόνο στά ὁποῖα ἦταν σέ ἰσχύ στίς 21 Ἀπριλίου 1973 καί μέχρι μία ἡμερομηνία καθοριζόμενη ἀπό αὐτά μόνο τά Κράτη Μέλη. Ἡ ἡμερομηνία αὐτή δέν μπορεῖ νά ὑπερβεῖ μία ὁριακή ἡμερμηνία πού θά καθορισθεῖ ἡ ἴδια ἀπό τό Συμβούλιο ἐπί τῇ βάσει τοῦ ἄρθρου 100 τῆς συνθήκης πρίν τίς 31 Δεκεμβρίου 1989.

Ἄρθρο 2

α) Οἱ ὑποχρεώσεις πού ἀπορρέουν ἀπό τό ἄρθρο 1 ἀφοροῦν τά χρησιμοποιούμενα ὄργανα μετρήσεως, τίς πραγματοποιούμενες μετρήσεις καί τίς ἐνδείξεις μεγέθους πού ἐκφράζονται σέ μονάδες μετρήσεως στό οἰκονομικό κύκλωμα, στούς τομεῖς τῆς δημοσίας ὑγείας καί τῶν κοινωνικῶν ἀσφαλίσεων, καθώς ἐπίσης καί στίς ἐργασίες διοικητικοῦ χαρακτήρα.

β) Ἡ παρούσα ὁδηγία δέν ἐπηρεάζει τή χρησιμοποίηση, στά πεδία τῶν θαλασσίων καί ἀεροπορικῶν συγκοινωνιῶν καί τῶν σιδηροδρομικῶν μεταφορῶν, μονάδων ἄλλων ἀπό ἐκεῖνες πού καθίστανται ὑποχρεωτικές μέ τήν παρούσα ὁδηγία ἀλλά οἱ ὁποῖες προβλέπονται ἀπό διεθνεῖς συμβάσεις ἤ συμφωνίες πού δεσμεύουν τήν Κοινότητα ἤ τά Κράτη Μέλη.

Ἄρθρο 3

1. Κατά τήν ἔννοια τῆς παρούσας ὁδηγίας, ὑπάρχει συμπληρωματική ἔνδειξη, ὅταν μιά ἔνδειξη ἐκφραζόμενη σέ μιά μονάδα τοῦ κεφαλαίου I τοῦ παραρτήματος συνοδεύεται ἀπό μιά ἤ περισσότερες ἐνδείξεις ἐκφραζόμενες σέ μονάδες πού δέν περιλαμβάνονται στό κεφάλαιο I.

2. Ἡ χρησιμοποίηση συμπληρωματικῶν ἐνδείξεων ἐπιτρέπεται μέχρι τίς 31 Δεκεμβρίου 1989.

3. Ἐν τούτοις, τά Κράτη Μέλη μποροῦν νά ἀπαιτήσουν ὅπως τά ὄργανα μετρήσεως φέρουν τίς ἐνδείξεις μεγέθους σέ μιά μόνο νόμιμη μονάδα μετρήσεως.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

4. Ἡ ἔνδειξη πού ἐκφράζεται στή μονάδα μετρήσεως πού περιλαμβάνεται στό κεφάλαιο I πρέπει νά εἶναι προεξάρχουσα. Οἱ ἐνδείξεις πού ἐκφράζονται σέ μονάδες μετρήσεως πού δέν περιλαμβάνονται στό κεφάλαιο I πρέπει νά ἐκφράζονται ἰδιαίτερα μέ χαρακτῆρες διαστάσεων τό πολύ ἴσων μέ ἐκεῖνες τῶν χαρακτήρων τῆς ἐνδείξεως πού ἀντιστοιχεῖ σέ μονάδες πού περιλαμβάνονται στό κεφάλαιο I.

5. Ἡ χρησιμοποίηση τῶν συμπληρωματικῶν ἐνδείξεων μπορεῖ νά παραταθεῖ πέραν τῆς 31ης Δεκεμβρίου 1989.

Ἄρθρο 4

Ἡ χρησιμοποίηση μονάδων μετρήσεως πού δέν εἶναι ἤ πού δέν εἶναι πλέον νόμιμες ἐπιτρέπεται:

— γιά τά προϊόντα καί ἐξοπλισμούς πού διατίθενται ἤδη στήν ἀγορά καί/ἤ εὑρίσκονται ἤδη σέ χρήση κατά τήν ἡμερομηνία υἱοθετήσεως τῆς παρούσας ὁδηγίας,

— γιά τά ἐξαρτήματα καί μέρη προϊόντων καί ἐξοπλισμῶν τά ἀναγκαῖα γιά τή συμπλήρωση ἤ ἀντικατάσταση τῶν ἐξαρτημάτων ἤ μερῶν προϊόντων καί ἐξοπλισμῶν πού προβλέπονται ἀνωτέρω.

Ἐν τούτοις, γιά τίς διατάξεις ἐνδείξεως τῶν ὀργάνων μετρήσεως, μπορεῖ νά ἀπαιτηθεῖ ἡ χρησιμοποίηση νομίμων μονάδων μετρήσεως.

Ἄρθρο 5

Τό Διεθνές πρότυπο ISO 2955 τῆς 1ης Μαρτίου 1974, «Ἐπεξεργασία τῆς πληροφορήσεως-Παρουσίαση τῶν μονάδων SI καί ἄλλων μονάδων γιά χρησιμοποίηση σέ συστήματα πού περιλαμβάνουν λειτουργίες καθορισμένων χαρακτήρων», εἶναι ἐφαρμόσιμο στόν τομέα πού διέπεται ἀπό τήν παράγραφο 1 αὐτοῦ.

Ἄρθρο 6

Ἡ ὁδηγία 71/354/ΕΟΚ καταργεῖται τήν 1η Ὀκτωβρίου 1981.

Ἐν τούτοις, κατά παρέκκλιση τῆς ὁδηγίας 71/354/ΕΟΚ, τά Κράτη Μέλη ἐπιτρέπουν ἤ συνεχίζουν νά θεωροῦν ὡς ἀνεκτή, ὑπό τίς προϋποθέσεις πού καθορίζονται στό ἄρθρο 1 τῆς παρούσας ὁδηγίας, τή χρησιμοποίηση πέραν τῆς 31ης Δεκεμβρίου 1979 τῶν ἀκολούθων μονάδων μετρήσεως:

millimetre of mercury	(Κεφάλαιο II),
poise	(Κεφάλαιο II),
stokes	(Κεφάλαιο II),
yard	(Κεφάλαιο III),
square yard	(Κεφάλαιο III),
therm	(Κεφάλαιο III).

Ἄρθρο 7

α) Τά Κράτη Μέλη θεσπίζουν καί δημοσιεύουν πρό τῆς 1ης Ἰουλίου 1981 τίς ἀναγκαῖες νομοθετικές, κανονιστικές καί διοικητικές διατάξεις γιά νά συμμορφωθοῦν πρός τήν παρούσα ὁδηγία καί τίς κοινοποιοῦν στήν Ἐπιτροπή.

Ἐφαρμόζουν τίς διατάξεις αὐτές ἀπό τήν 1η Ὀκτωβρίου 1981.

β) Ἀπό τῆς κοινοποιήσεως τῆς παρούσας ὁδηγίας, τά Κράτη Μέλη θά ἐνημερώνουν ἐξάλλου τήν Ἐπιτροπή ἐντός εὐθέτου χρόνου, γιά νά τῆς δίνεται ἡ δυνατότητα νά παρουσιάζει τίς παρατηρήσεις της, γιά κάθε σχέδιο διατάξεως, νομοθετικῆς, κανονιστικῆς ἤ διοικητικῆς μορφῆς, πού σκοπεύουν νά υἱοθετήσουν στό πεδίο πού διέπεται ἀπό τήν παρούσα ὁδηγία.

Ἄρθρο 8

Ἡ παρούσα ὁδηγία ἀπευθύνεται στά Κράτη Μέλη.

Ἔγινε στίς Βρυξέλλες, στίς 20 Δεκεμβρίου 1979.

Γιά τό Συμβούλιο

Ὁ Πρόεδρος

J. TUNNEY

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΝΟΜΙΜΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΠΡΟΒΛΕΠΟΜΕΝΕΣ ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΘΡΟ 1 ΥΠΟ α)

1. ΜΟΝΑΔΕΣ SI ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΚΑΙ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΤΩΝ

1.1. Μονάδες βάσεως SI

Μέγεθος	Μονάδα	
	Όνομασία	Σύμβολο
Μήκος	μέτρο	m
Μάζα	χιλιόγραμμο	Kg
Χρόνος	δευτερόλεπτο	s
Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος	ampère	A
Θερμοδυναμική θερμοκρασία	kelvin	K
Ποσότητα ύλης	mole	mol
Φωτεινή ένταση (φωτοβολία)	candela	cd

Οι όρισμοί των μονάδων βάσεως SI είναι οι ακόλουθοι:

Μονάδα μήκους

Τό μέτρο είναι μήκος ίσο μέ 1 650 763,73 μήκη κύματος στό κενό τής ακτινοβολίας πού αντιστοιχεί στή μετάπτωση μεταξύ των σταθμών $2p_{10}$ καί $5d_5$ τού ατόμου τού κρυπτού 86.

[11η CGPM(1960) άποφ. 6].

Μονάδα μάζας

Τό χιλιόγραμμο είναι ή μονάδα μάζας. Είναι ίσο μέ τή μάζα τού διεθνούς πρωτοτύπου τού χιλιογράμμου.

[3η CGPM(1901) σ. 70 των πρακτικών].

Μονάδα χρόνου

Τό δευτερόλεπτο είναι ή διάρκεια 9 192 631 770 περιόδων τής ακτινοβολίας πού αντιστοιχεί στή μετάπτωση μεταξύ των δύο υπερλέπτων σταθμών ενεργείας τής θεμελιώδους καταστάσεως τού ατόμου τού καισίου 133.

[13η CGPM(1967) άπόφ. 1]

Μονάδα έντάσεως ηλεκτρικού ρεύματος

Τό ampere είναι ή ένταση σταθερού ρεύματος τό οποίο, διερχόμενο δύο ευθύγραμμους παραλλήλους αγωγούς, άπειρου μήκους, αμελητέας κυκλικής διατομής καί τοποθετημένους στό κενό σέ απόσταση 1 μέτρου ό ένας από τόν άλλο, παράγει μεταξύ των αγωγών αυτών δύναμη ίση μέ 2×10^{-7} newton ανά μέτρο μήκους.

[CIPM(1946) άπόφ. 2, έγκριθείσα από τήν 9η CGPM(1948)].

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μονάδα θερμοδυναμικής θερμοκρασίας

Τό Kelvin, μονάδα θερμοδυναμικής θερμοκρασίας, είναι τό κλάσμα 1/273,16 τής θερμοδυναμικής θερμοκρασίας τού τριπλού σημείου τού νερού.

[13η CGPM(1967) άπόφ. 4]

Μονάδα ποσότητας ὕλης

Τό mole είναι ἡ ποσότητα ὕλης συστήματος πού περιέχει τόσες στοιχειώδεις ὀντότητες ὅσα είναι τά ἄτομα πού ὑπάρχουν σέ 0,012 χιλιόγραμμα ἀνθρακος 12.

Ἐφ' ὅσον χρησιμοποιείται τό mole, οἱ στοιχειώδεις ὀντότητες πρέπει νά καθορίζονται καί μπορεί νά είναι ἄτομα, μόρια, ἰόντα, ἠλεκτρόνια, ἄλλα σωματίδια ἤ καθορισμένα συγκροτήματα τέτοιων σωματιδίων.

[14η CGPM(1971) άπόφ. 3].

Μονάδα φωτεινῆς ἐντάσεως

Ἡ candela είναι φωτεινή ἔνταση πρός μιά δεδομένη κατεύθυνση πηγῆς ἡ ὁποία ἐκπέμπει μονοχρωματική ἀκτινοβολία συχνότητας 540×10^{12} hertz καί τῆς ὁποίας ἡ ἰσχύς πρός τήν κατεύθυνση αὐτή είναι 1/683 watt ἀνά στερακτίνιο.

[16η CGPM(1979) άπόφ. 3]

1.1.1. **Εἰδική ὀνομασία καί σύμβολο τῆς μονάδας θερμοκρασίας SI στήν περίπτωση τῆς θερμοκρασίας Κελσίου**

Μέγεθος	Μονάδα	
	Ὀνομασία	Σύμβολο
Θερμοκρασία Κελσίου	βαθμός Κελσίου	°C

Ἡ θερμοκρασία Κελσίου t ὁρίζεται ἀπό τή διαφορά $t = T - T_0$ μεταξύ δύο θερμοδυναμικῶν θερμοκρασιῶν T καί T_0 ὅπου $T_0 = 273,15$ kelvins. Ἕνα διάστημα ἤ διαφορά θερμοκρασίας μποροῦν νά ἐκφρασθοῦν εἴτε σέ kelvin, εἴτε σέ βαθμούς Κελσίου. Ἡ μονάδα «βαθμός Κελσίου» είναι ἴση μέ τή μονάδα «kelvin».

1.2. **Ἄλλες μονάδες SI**

1.2.1. **Συμπληρωματικές μονάδες SI**

Μέγεθος	Μονάδα	
	Ὀνομασία	Σύμβολο
Ἐπίπεδος γωνία	ἀκτίνιο	rad
Στερεά γωνία	στερακτίνιο	sr

[11η CGPM(1960) άπόφ. 12]

Οἱ ὁρισμοί τῶν συμπληρωματικῶν μονάδων SI είναι οἱ ἀκόλουθοι:

Μονάδα ἐπιπέδου γωνίας

Τό ἀκτίνιο είναι ἡ ἐπίπεδος γωνία πού περιέχεται μεταξύ δύο ἀκτίνων οἱ ὁποῖες, ἐπί τῆς περιφερείας ἑνός κύκλου, ἀποκόπτουν τόξο μήκους ἴσου μέ ἐκεῖνο τῆς ἀκτίνας.

(Διεθνές πρότυπο ISO 31-1, Δεκέμβριος 1965).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μονάδα στερεᾶς γωνίας

Τό στερεακτίνιο εἶναι ἡ στερεὰ γωνία ἡ ὁποία, ἔχοντας τὴν κορυφή της στὸ κέντρο μίας σφαίρας, ἀποκόπτει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας αὐτῆς ἐμβαδὸν ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος ὡς πλευρὰ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

(Διεθνές πρότυπο ISO 31-1, Δεκέμβριος 1965).

1.2.2. Παράγωγες μονάδες SI

Οἱ μονάδες, οἱ ὁποῖες παράγονται κατὰ τρόπο συναφῆ ἀπὸ τὶς μονάδες βάσεως καὶ τὶς συμπληρωματικὲς μονάδες SI, δίνονται ἀπὸ ἀλγεβρικὲς ἐκφράσεις ὑπὸ τὴν μορφὴ γινομένων δυνάμεων τῶν μονάδων βάσεως καὶ/ἢ τῶν συμπληρωματικῶν μονάδων SI μὲ ἕναν ἀριθμητικὸ συντελεστὴ ἴσο μὲ τὸν ἀριθμὸ 1.

1.2.3. Παράγωγες μονάδες SI μὲ εἰδικὲς ὀνομασίες καὶ σύμβολα

Μέγεθος	Μονάδα		Ἔκφραση	
	Ὄνομασία	Σύμβολο	Σὲ ἄλλες μονάδες SI	Σὲ βασικὲς ἢ συμπληρωματικὲς μονάδες
Συχνότητα	hertz	Hz		s^{-1}
Δύναμη	newton	N		$= kg \cdot s^{-2}$
Πίεση καὶ τάση	pacal	Pa	$N \cdot m^{-2}$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Ἐνέργεια, ἔργο, ποσότητα θερμότητος	joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Ἰσχύς(1), ροὴ ἐνεργείας	watt	W	$J \cdot s^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Ποσότητα ἠλεκτρισμοῦ, ἠλεκτρικὸ φορτίο	coulomb	C		$s \cdot A$
Ἠλεκτρικὴ τάση, ἠλεκτρικὸ δυναμικό, ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμη	volt	V	$W \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Ἠλεκτρικὴ ἀντίσταση	ohm	Ω	$V \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Ἠλεκτρικὴ ἀγωγιμότητα	siemens	S	$A \cdot V^{-1}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^{4} \cdot A^{2}$
Ἠλεκτρικὴ χωρητικότητα	farad	F	$C \cdot V^{-1}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^{4} \cdot A^{2}$
Μαγνητικὴ ροὴ	weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Μαγνητικὴ ἐπαγωγή	tesla	T	$Wb \cdot m^{-2}$	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς	henry	H	$Wb \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Φωτεινὴ ροή	lumen	lm		$cd \cdot sr$
Φωτισμός	lux	lx	$lm \cdot m^{-2}$	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$
Ραδιενέργεια (ἰονίζουσες ἀκτινοβολίες)	becquerel	Bq		s^{-1}
Ἀπορροφουμένη δόση, δείκτης ἀπορροφουμένης δόσεως, ἐνέργεια μεταδιδόμενη στὴ μάζα kerma	gray	Gy	$J \cdot kg^{-1}$	$m^2 s^{-2}$
Βιολογικῶς ἀποτελεσματικὴ ἀπορροφουμένη δόση, ἰσοδύναμο δόσεως	sievert	Sv	$J \cdot kg^{-1}$	$m^2 s^{-2}$

(1) Εἰδικὲς ὀνομασίες τῆς μονάδος ἰσχύος: Ἡ ὀνομασία «βολταμπὲρ» γιὰ τὴν ἀντίληψη τῆς φαινομένης ἰσχύος στὸν ἀντιλαμβανόμενο ἡλεκτρισμὸ μιᾶς καὶ ἡ ὀνομασία «βάτ» γιὰ τὴν ἔκφραση τῆς ἐνεργοῦ ἠλεκτρικῆς ἰσχύος. Ἡ ὀνομασία «βάτ» δὲν περιλαμβάνεται στὶς ἀποφάσεις τῆς CGPM.

Μονάδες πολλαπλάσιες τῶν μονάδων βάσεως SI ἢ συμπληρωματικῶν δίνονται νὰ ἐκφράζονται μὲ τὴ χρησιμοποίηση τῶν μονάδων τοῦ κεφαλαίου Ι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εἰδικότερα, παράγωγες μονάδες SI δύνανται νά σχηματίζονται μέ τή χρησιμοποίηση τῶν ὀνομασιῶν καί τῶν εἰδικῶν συμβόλων τοῦ ἀνωτέρω πίνακα, π.χ. ἡ μονάδα SI τοῦ δυναμικοῦ ἐξόδου δύναται νά ἐκφράζεται ὡς $m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$ ἤ $N \cdot m \cdot A^{-1}$ ἤ Pa.s

1.3 Προθέματα καί σύμβολά τους τά ὁποῖα χρησιμεύουν στήν ἐπίδειξη ἀριθμῶν δεκαδικῶν πολλαπλασίων καί ὑποπολλαπλασίων

Συντελεστής	Πρόθεμα	Σύμβολο	Συντελεστής	Πρόθεμα	Σύμβολο
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	milli	m
10^{9}	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^{6}	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^{3}	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^{2}	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10^{1}	deca	da	10^{-18}	atto	a

Οἱ ὀνομασίες καί τά σύμβολα τῶν δεκαδικῶν πολλαπλασίων καί ὑποπολλαπλασίων τῆς μονάδας μάζας σχηματίζονται μέ τήν προσθήκη τῶν προθεμάτων στή λέξη «γραμμο» καί τῶν συμβόλων τους στό σύμβολο «g».

Γιά τήν ὑπόδειξη τῶν δεκαδικῶν πολλαπλασίων καί ὑποπολλαπλασίων μιᾶς παράγωγης μονάδας τῆς ὁποίας ἡ ἔκφραση παρίσταται, ὑπό μορφή κλάσματος, πρόθεμα δύναται νά συνδυασθεῖ εἴτε μέ τίς μονάδες πού ἐμφαίνονται στόν ἀριθμητή, εἴτε στόν παρονομαστή, εἴτε καί στούς δύο αὐτούς ὅρους.

Σύνθετα προθέματα, δηλ. προθέματα πού σχηματίζονται διά παραθέσεως περισσοτέρων τοῦ ἑνός ἀπό τά ἀνωτέρω προθέματα, ἀπαγορεύονται.

1.4. **Εἰδικές ὀνομασίες καί σύμβολα δεκαδικῶν πολλαπλασίων καί ὑποπολλαπλασίων ἐγκεκριμένων μονάδων SI**

Μέγεθος	Μονάδα		
	Ὀνομασία	Σύμβολο	Σχέση
Ὄγκος	λίτρο	l ἤ L(1)	$1 l = 1 dm^3 = 10^{-3} m^3$
Μάζα	τόννος	t	$1 t = 1 Mg = 10^3 kg$
Πίεση καί τάση	bar	bar(2)	$1 bar = 105 Pa$

(1) Τά δύο σύμβολα «l» καί «L» χρησιμοποιοῦνται γιά τή μονάδα «λίτρο» [16η CGPM (1979) ἀπόφ. 3].
(2) Μονάδα περιλαμβανομένη στό φυλλάδιο τοῦ Διεθνοῦς Γραφείου Μέτρων καί Σταθμῶν (BIPM) μεταξύ τῶν ἀποδεκτῶν προσωρινά μονάδων.

Παρατήρηση: Τά προθέματα καί σύμβολά τους πού ἀναφέρονται στό σημεῖο 1.3 χρησιμοποιοῦνται καί γιά τίς μονάδες καί σύμβολα τοῦ πίνακα τοῦ σημείου 1.4.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4 ΜΟΝΑΔΕΣ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΙΕΣ ΜΟΝΑΔΩΝ ΑΠΟΔΕΚΤΩΝ ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ ΣΕ ΦΥΣΙΚΟΥΣ ΤΟΜΕΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

Μέγεθος	Μονάδα		
	Ὄνομασία	Σύμβολο	Τιμή
Ἰσχύς ὀπτικῶν συστημάτων	διοπτρία(*)		1 διοπτρία = 1 m^{-1}
Μάζα πολυτίμων λίθων	μετρικό καράτι		1 μετρικό καράτι = 2×10^{-4} kg
Ἐμβαδόν ἢ ἐπιφάνεια τῶν ἀγροτικῶν ἐκτάσεων καί οἰκοπέδων	are	a	1 a = 10^2 m^2
Μάζα ἀνά μονάδα μήκους τῶν ὑφασίμων ἴνῶν καί τῶν νημάτων	tex(*)	tex(*)	1 tex = 10^{-6} kg. m^{-1}

Παρατήρηση: Τά προθέματα πού ἀναφέρονται στό σημεῖο 1.3 χρησιμοποιοῦνται καί γιά τίς ἀνωτέρω μονάδες. Ἐν τούτοις, τό πολλαπλάσιο 10^2 a ὀνομάζεται «ἑκτάριο».

5. ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ

Διά συνδυασμοῦ τῶν μονάδων πού ἀναφέρονται στό κεφάλαιο I συνιστῶνται οἱ σύνθετες μονάδες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΝΟΜΙΜΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΠΡΟΒΛΕΠΟΜΕΝΕΣ ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΘΡΟ 1 ΥΠΟ 6)

ΜΕΓΕΘΗ, ΟΝΟΜΑΣΙΕΣ ΜΟΝΑΔΩΝ, ΣΥΜΒΟΛΑ ΚΑΙ ΤΙΜΕΣ

Μέγεθος	Μονάδα		
	Ὄνομασία	Σύμβολο	Τιμή
Πίεση τοῦ αἵματος	χιλιοστόμετρο ὑδραργύρου(*)	mm Hg(*)	1 mm Hg = 133,322 Pa
Ἐπίπεδος γωνία		g(*)(1)	$1^g = \frac{\pi}{200}$ rad
Ραδιενέργεια ραδιενεργοῦ πηγῆς	curie	Ci	1 Ci = 3,7. 10^{10} Bq
Ἀπορροφουμένη δόση	rad	rad(2)	1 rad = 10^{-2} Gy
Ἰσοδύναμο δόσεως	rem(*)	rem(*)	1 rem = 10^{-2} Sv
Ἔκθεση ἀκτινοβολίας γ ἢ X	röntgen	R	1 R = 2,58.10^{-4} C.Kg^{-1}
Δυναμικό ἰξῶδες	poise	P	1 P = 10^{-1} Pa.s
Κινηματικό ἰξῶδες	stokes	St	1 St = 10^{-4} m^2. s^{-1}

(1) Σύμβολο τοῦ «βαθμοῦ».
(2) Ὅταν ἡ λέξη «rad» δύναται νά διαφέρει σύγχυση μέ τό σύμβολο τοῦ ἀκτινίου, δύναται νά χρησιμοποιεῖται τό ἕν ἤ τό ἄλλο σύμβολο τοῦ rad.

Παρατήρηση: Τά προθέματα καί τά σύμβολά τους πού ἀναφέρονται στό σημεῖο 1.3 τοῦ κεφαλαίου I χρησιμοποιοῦνται καί γιά τίς μονάδες καί τά σύμβολα πού ἐμφαίνονται στό παρόν σημεῖο, ἐξαιρέσει τοῦ χιλιοστομέτρου τοῦ ὑδραργύρου καί τοῦ συμβόλου του καί τοῦ συμβόλου «g».

Μέχρι τήν ἡμερομηνία πού διευκρινίζεται στό ἄρθρο 1 ὑπό 6), οἱ μονάδες πού περιλαμβάνονται στό κεφάλαιο II δύνανται νά συνδυάζονται μεταξύ τους ἢ μέ ἐκεῖνες τοῦ κεφαλαίου I γιά τή δημιουργία συνθέτων μονάδων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2. ΜΟΝΑΔΕΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΕΣ ΑΠΟ ΜΟΝΑΔΕΣ SI ΑΛΛΑ ΟΙ ΟΠΟΙΕΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ Ή ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΑΥΤΩΝ

Μέγεθος	Μονάδα		
	Όνομασία	Σύμβολο	Σχέση
Επίπεδος γωνία	περιφέρεια(°)(1)(a)		1 περιφέρεια = 2 π rad
	βαθμός (°) ή gon(°)	gon(°)	1 βαθμός = $\frac{\pi}{200}$ rad
	μοίρα	°	1° = $\frac{\pi}{180}$ rad
	λεπτό γωνίας	′	1′ = $\frac{\pi}{10\,800}$ rad
	δεύτερο λεπτό γωνίας	″	1″ = $\frac{\pi}{648\,000}$ rad
Χρόνος	λεπτό	min	1 min = 60 s
	ώρα	h	1 h = 3600 s
	ήμέρα	d	1 d = 86 400 s

(1) Τό σημεῖο(°) ὅταν βρίσκεται μετά ἀπό μιά ὀνομασία ἤ σύμβολο μονάδος σημαίνει ὅτι αὐτά δέν ὑπάρχουν μέσα στούς καταλόγους τοῦ CGPM, CIPM ἤ BIPM. Ἡ παρατήρηση αὐτή ἀφορᾶ τό σύνολο τοῦ παραρτήματος αὐτοῦ.
(a) Δέν ὑπάρχει διεθνές σύμβολο.

Παρατήρηση: Τά προθέματα πού ἀναφέρονται στό σημεῖο 1.3 δέν χρησιμοποιοῦνται παρά μόνο μέ τήν ὀνομασία «βαθμός» ἤ «gon» καί τά σύμβολά τους μόνο μέ τό σύμβολο «gon».

3. ΜΟΝΑΔΕΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΕΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΠΤΑ ΜΟΝΑΔΕΣ ΒΑΣΕΩΣ SI

Ἡ μονάδα ἀτομικῆς μάζας εἶναι ἴση μέ τό 1/12 τῆς μάζας τοῦ ἀτόμου τοῦ C_{12}.

Τό ἠλεκτρονιοβόλτ εἶναι ἡ κινητική ἐνέργεια πού ἀποκτᾶται ἀπό ἕνα ἠλεκτρόνιο τό ὁποῖο μεταβαίνει, στό κενό, ἀπό ἕνα σημεῖο σέ ἕνα ἄλλο μέ δυναμικό ἀνώτερο τοῦ πρώτου σημείου κατά 1 volt.

Μέγεθος	Μονάδα		
	Όνομασία	Σύμβολο	Τιμή
Μάζα	μονάδα ἀτομικῆς μάζας	u	1 u = 1,660 565 5×10^{-27} kg
Ἐνέργεια	ἠλεκτρονιοβόλτ	eV	1 e V = 1,602 189 2×10^{-19} J

Ἡ τιμή τῶν μονάδων αὐτῶν, ἐκπεφρασμένη σέ μονάδες SI, δέν εἶναι ἐπακριβῶς γνωστή.

Οἱ ἐνδεικνύομενες τιμές ἐξάγονται ἀπό τό δελτίο GODATA ἀριθ. 11 τοῦ Δεκεμβρίου 1973 τοῦ Διεθνοῦς Συμβουλίου Ἐπιστημονικῶν Ἑνώσεων.

Παρατήρηση: Τά προθέματα καί τά σύμβολα πού ἀναφέρονται στό σημεῖο 1.3 χρησιμοποιοῦνται καί στίς δύο αὐτές μονάδες καί τά σύμβολά τους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΝΟΜΙΜΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΠΡΟΒΛΕΠΟΜΕΝΕΣ ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΘΡΟ 1 ΥΠΟ γ)

ΜΕΓΕΘΗ. ΟΝΟΜΑΣΙΕΣ ΜΟΝΑΔΩΝ. ΣΥΜΒΟΛΑ ΚΑΙ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥΣ

Μήκος		
Ίντσα	1 in	= $2,54 \cdot 10^{-2}$ m
Πόδι	1 ft	= 0,3048 m
Fathom(1)	1 fm	= 1,829 m
Μίλι	1 mile	= 1609 m
Υάρδα	1 yd	= 0,9144 m
Επιφάνεια		
Τετραγωνικό πόδι	1 sqft	= $0,929 \cdot 10^{-1}$ m^2
Άκρ	1 ac	= 4047 m^2
Τετραγωνική υάρδα	1 sq yd	= 0,8361 m^2
Όγκος		
Fluid ounce	1 fl oz	= $28,41 \cdot 10^{-6}$ m^3
Gill	1 gill	= $0,1421 \cdot 10^{-3}$ m^3
Pint	1 pt	= $0,5683 \cdot 10^{-3}$ m^3
Quart	1 qt	= $1,137 \cdot 10^{-3}$ m^3
Γαλλόνι	1 gal	= $4,546 \cdot 10^{-3}$ m^3
Μάζα		
Ούγγιά (avoirdupois)	1 oz	= $28,35 \cdot 10^{-3}$ kg
Troy ounce	1 oz tr	= $31,10 \cdot 10^{-3}$ kg
Λίμπρα	1 lb	= 0,4536 kg
Ενέργεια		
Therm	1 therm	= $105,506 \cdot 10^6$ J

(1) Χρησιμοποιούνται διεθνώς στή ναυτιλία.

Μέχρι τής ημερομηνίας τής καθοριζομένης σύμφωνα μέ τό άρθρο 1 άπό γ), οί μονάδες πού περιλαμβάνονται στό κεφάλαιο III δύνανται νά συνδυάζονται μεταξύ τους ή μέ άλλες πού περιλαμβάνονται στό κεφάλαιο I γιά τή δημιουργία συνθέτων μονάδων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

η εργαστηριακη εκθεση

Ένα μεγάλο μέρος τῆς προσπάθειας πού καταβάλλει ὁ φοιτητής σέ κάθε ἐργαστηριακό μάθημα καταναλώνεται στή σύνταξη Ἐργαστηριακῶν Ἐκθέσεων, ἐνῶ ἕνα μεγάλο μέρος τοῦ βαθμοῦ πού θά πάρει προέρχεται ἀπό τήν ἀξιολόγηση τῶν ἐκθέσεων πού θά συντάξει κατά τή διάρκεια τοῦ ἔτους. Τοῦτο δέν εἶναι τυχαῖα γεγονός. Ἡ Ἐργαστηριακή Ἔκθεση ἀνταναλλᾶ τίς γνώσεις τοῦ φοιτητῆ πάνω στό ἀντικείμενο πού μελέτησε, τήν ἐφαρμογή σωστῆς μεθοδολογίας κατά τήν ἐκτέλεση τῆς ἐργαστηριακῆς ἀσκήσεως καί τή δυνατότητα ἐξαγωγῆς συμπερασμάτων ἀπό τήν παρατήρηση ἑνός φαινομένου. Ἡ ἄσκηση ὅμως στή σύνταξη μιᾶς σωστῆς Ἐργαστηριακῆς Ἐκθέσεως ἀποβλέπει σέ πολύ εὐρύτερο στόχο. Οἱ Ἐκθέσεις πού θά κληθεῖ νά συντάξει ὁ φοιτητής κατά τή διάρκεια τοῦ μαθήματος δέ θά διαφέρουν καί πολύ ἀπό παρόμοιες Ἐκθέσεις πού θά χρειαστεῖ νά συντάξει ἤ νά ἀξιολογήσει στή μεταπανεπιστημιακή του καριέρα. Ἡ Ἐργαστηριακή Ἔκθεση καί γενικότερα ἡ Ἐπιστημονική Ἐργασία ἀποτελεῖ σήμερα τό κυριότερο μέσο ἐπικοινωνίας ἐπιστημονικῆς γνώσης, ἐπιστημονικῶν παρατηρήσεων καί ἐπιστημονικῶν πορισμάτων πού ἐξάγονται ἀπό τήν παρατήρηση. Ἔτσι, ἕνα ἀπό τά ἐφόδια πού πρέπει νά ἀποκομίσει ὁ φοιτητής ἀπό τήν πανεπιστημιακή του θητεία εἶναι ἡ δυνατότητα καί εὐχέρεια συντάξεως μιᾶς ἄρτιας Ἐργαστηριακῆς Ἐκθέσεως.

Ἄν καί ὑπάρχει ἀρκετή εὐελιξία στή σύνταξη τῆς Ἐπιστημονικῆς Ἐκθέσεως παραθέτουμε παρακάτω ἐνδεικτικά τή μορφή τοῦ «κλασσικοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τύπου». Ὁ φοιτητής ἐνθαρρύνεται στήν ἀνάπτυξη πρωτοβουλίας καί φαντασίας γιά τήν καλύτερη ἀπόδοση τοῦ ἀντικειμένου πού πραγματεύεται. Ὅλα ὅμως τά παρακάτω σημεῖα θά πρέπει νά περιέχονται κατά κάποιο τρόπο σέ μιά ὁλοκληρωμένη Ἐργαστηριακή Ἔκθεση.

1. **Ἐξώφυλλο καί Τίτλος.** Τό ὄνομα τοῦ φοιτητή, τοῦ συνεργάτη, ὁ τίτλος καί ἀριθμός τῆς ἀσκήσεως, ἡμερομηνία διεξαγωγῆς τῆς ἀσκήσεως καί ἡμερομηνία παραδόσεως.
2. **Περίληψη.** Σύντομη περίληψη (περίπου 150 λέξεις) τῆς Ἐργαστηριακῆς Ἐκθέσεως. Ἡ περίληψη πρέπει νά μεταφέρει στόν ἀναγνώστη τῆς ἐκθέσεως τό ἀντικείμενο τῆς μελέτης, τόν τρόπο διεξαγωγῆς τοῦ πειράματος καί τά συμπεράσματα πού προέκυψαν.
3. **Εἰσαγωγή.** Σύντομη περιγραφή τοῦ ἀντικειμένου πού πραγματεύεται ἡ ἄσκηση. Ἀντικειμενικός σκοπός τῆς ἀσκήσεως.
4. **Θεωρία.** Ἀνάπτυξη τοῦ θεωρητικοῦ ὑποβάθρου τῆς ἀσκήσεως καί ἀπόδειξη τῶν ἐξισώσεων πού χρησιμοποιοῦνται γιά τήν ἐξαγωγή ἀποτελεσμάτων.
5. **Πειραματική Διάταξη.** Περιγραφή ὅλων τῶν ὀργάνων πού χρησιμοποιήθηκαν μέ σύντομη ἐπεξήγηση τῆς λειτουργίας κάθε ὀργάνου. Γενική συνδεσμολογία τῶν ὀργάνων καί ἐπεξήγηση τῆς λειτουργίας τῆς πειραματικῆς διατάξεως. Περιγραφή λήψεως τῶν δεδομένων.
6. **Ἀνάλυση τῶν Δεδομένων.** Ὑπολογισμοί καί ἀνάλυση τῶν δεδομένων. Τό μέρος αὐτό περιλαμβάνει ὅλους τούς πίνακες καί γραφικές παραστάσεις πού προκύπτουν ἀπό τίς μετρήσεις. Περιέχει ἀκόμη ἀνάλυση τῶν θεωρητικῶν προσεγγίσεων καί πειραματικῶν παραγόντων πού ἐπηρεάζουν τά ἀποτελέσματα καθώς καί ἐκτίμηση τῶν πειραματικῶν σφαλμάτων. Ἰδιαίτερη προσοχή πρέπει νά δοθεῖ στίς γραφικές παραστάσεις. Κάθε γραφική παράσταση πρέπει νά περιέχει ὑπότιτλο, σωστά βαθμονομημένους ἄξονες καί νά ἀπεικονίζει τήν ἔκταση τοῦ πειραματικοῦ σφάλματος που συνδέεται μέ κάθε μέτρηση.
7. **Συμπεράσματα.** Γενικά συμπεράσματα ἀπό τό πείραμα καί σύγκριση μέ θεωρητικές προβλέψεις. Τό μέρος αὐτό μπορεῖ νά περιέχει ὑποδείξεις γιά τή βελτίωση τῆς ἀκριβείας τῶν μετρήσεων καί γενικότερα τοῦ πειράματος.
8. **Βιβλιογραφία.** Ὅλη ἡ σχετική βιβλιογραφία πού χρησιμοποιήθηκε μέ παραπομπές ἀπό τό κείμενο τῆς ἐκθέσεως.
9. **Παράρτημα** μέ σημειώσεις πού κρατήθηκαν κατά τή διεξαγωγή τῆς ἀσκήσεως. Στό παράρτημα αὐτό πρέπει νά συμπεριλαμβάνονται ὅλα τά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δεδομένα πού ἐλήφθησαν στό ἐργαστήριο (ἤ φωτοαντίγραφο ἄν τό πρωτότυπο συμπεριλαμβάνεται στήν ἔκθεση συνεργάτη). Τά πρωτότυπα τῶν δεδομένων πρέπει νά εἶναι πλήρη καί μέ ἐπαρκεῖς πληροφορίες γιά τή σύνταξη τῆς Ἐργαστηριακῆς Ἐκθέσεως. Ὁ φοιτητής θά πρέπει νά βεβαιωθεῖ ὅτι θά μποροῦσε νά συντάξει Ἔκθεση καί νά καταλήξει σέ παρόμοια συμπεράσματα ἀπό τά πρωτότυπα τῶν μετρήσεων πού περιέχονται στό Παράρτημα χωρίς νά χρειαστεῖ ἐπανάληψη τοῦ πειράματος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

οργανα και εξαρτηματα του εργαστηριου ηλεκτρικων και μαγνητικων μετρησεων

Στίς ἐπόμενες σελίδες ἔχουν συγκεντρωθεῖ τά πειράματα πού περιέχονται στό κυρίως κείμενο, καθώς καί τά ὄργανα πού ἀπαιτοῦνται γιά τήν ἐκτέλεση καθενός. Γιά κάθε ἐξάρτημα ἤ ὄργανο δίνεται ἀκόμη ἐνδεικτικά ἡ τάξη μεγέθους ἤ ἡ περιοχή τῆς κλίμακας. Πολλά ἀπό τά ὄργανα χρησιμοποιοῦνται σέ περισσότερα ἀπό ἕνα πειράματα. Μέ μαύρους χαρακτῆρες σημειώνονται στό πείραμα ὅπου ἀπαντῶνται γιά πρώτη φορά.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Άντικείμενο Πειράματος		Όργανα
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1		
2-1	Ήλεκτρικό πεδίο σημειακῶν φορτίων	— **Άγώγιμο χαρτί** καί **πέννα μέ μεταλλική μελάνη** — **Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V**
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3		
3-1	Άγωγοί σέ ήλεκτρικό πεδίο	— **Ήλεκτρονικό βολτόμετρο** ἤ
3-2	Ήλεκτρικό πεδίο ήλεκτροστατικοῦ φακοῦ	— Κύκλωμα μηδενισμοῦ (βλ. σχῆμα 2-7) πού συγκροτεῖται ἀπό
3-3	Ήλεκτροστατικά εἴδωλα σημειακοῦ φορτίου στό ἐσωτερικό κοιλότητας γειωμένου ἀγωγοῦ	— **Ροοστάτης** 10 kΩ — **Βολτόμετρο**
3-4	Ήλεκτροστατικά εἴδωλα σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ	— **Γαλβανόμετρο** (εὐαισθησία ~ 1μA/div)
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4		
4-1	Εἰδική ἀντίσταση μεταλλικοῦ ἀγωγοῦ	— **Σειρά μεταλλικῶν χορδῶν ἀπό τό ἴδιο ὑλικό, μέ διαφορετικές διατομές** — Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V — Βολτόμετρο — Άμπερόμετρο
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5		
5-1	Πρόχειρο ἀμπερόμετρο	— **Εὐθύγραμμος ἀγωγός** — **Άντίσταση** 10 Ω — **Πυξίδα** — Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V
5-2	Μέτρηση μικρῆς ἀντιστάσεως μέ ἀμπερόμετρο καί βολτόμετρο	— «Άγνωστη ἀντίσταση» R≃ 1kΩ — «Άγνωστη ἀντίσταση» R≃1-10 Ω
5-3	Μέτρηση μεγάλης ἀντιστάσεως μέ ἀμπερόμετρο καί βολτόμετρο	— Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V — Βολτόμετρο — Άμπερόμετρο
5-4	ΗΕΔ καί ἐρματικό δυναμικό ἡλεκτρικοῦ στοιχείου	— Ροοστάτης 10 Ω — **Ήλεκτρικό στοιχεῖο** (3-6 V) — Βολτόμετρο
5-5	Ώφέλιμη ἰσχή ἡλεκτρικοῦ στοιχείου	— **Διακόπτης μιᾶς ἐπαφῆς**[1]
5-6	Μέτρηση τῆς ΗΕΔ ἡλεκτρικοῦ στοιχείου	— Ήλεκτρικό στοιχεῖο (3-6 V) — Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πείραμα		Όργανα
5-7	Τό βασικό κύκλωμα ώμομέτρου	– Ροοστάτης 1 kΩ – Βολτόμετρο – Δύο διακόπτες μιάς έπαφής – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V – Άντίσταση 1 kΩ – Βολτόμετρο – **Κιβώτιο άντιστάσεων** 1 kΩ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7		
7-1	Βαθμονόμηση καί εύαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου	– **Γαλβανόμετρο d' Arsonval** – **Άντίσταση** 3 ΜΩ – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V – Βολτόμετρο – Κιβώτιο άντιστάσεων – Διακόπτης μιάς έπαφής
7-2	Άντίσταση κρίσιμης άποσβέσεως τοῦ γαλβανομέτρου	– Γαλβανόμετρο D' Arsonval – Άντίσταση 3 ΜΩ – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V – Βολτόμετρο – Κιβώτιο άντιστάσεων – Διακόπτης μιάς έποφής – **Διακόπτης δύο έπαφών**
7-3	Ή διακλάδωση Ayrton	– Γαλβανόμετρο D' Arsonval
7-4	Εύαισθησία γαλβανομέτρου μέ διακλάδωση Ayrton	– Άντίσταση 3 ΜΩ – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V – Βολτόμετρο (κλίμακα 0-6 V) – **Κιβώτιο άντιστάσεων μέ ένδιάμεση έπαφή ή δύο κιβώτια άντιστάσεων** – Διακόπτης μιάς έπαφής
7-5	Τό γαλβανόμετρο D' Arsonval ώς άμπερόμετρο	– Γαλβανόμετρο D' Arsonval – **Κύκλωμα προστασίας** – Τροφοδοτικό ΣΡ – Άντίσταση 500 kΩ – Άντίσταση 1-10 Ω – Κιβώτιο άντιστάσεων – Άμπερόμετρο – Διακόπτης μιάς έπαφής
7-6	Τό γαλβανόμετρο D' Arsonval ώς βολτόμετρο	– Γαλβανόμετρο D' Arsonval – Κύκλωμα προστασίας – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πείραμα		Όργανα
		– Άντίσταση 3 MΩ
		– **Άντίσταση 500 Ω**
		– Βολτόμετρο
		– Διακόπτης μιᾶς ἐπαφῆς
7-7	Τό γαλβανόμετρο D' Arsonval ὡς ὠμόμετρο	– Γαλβανόμετρο D' Arsonval
		– Κύκλωμα προστασίας
		– Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V
		– Άντίσταση 500 Ω
		– Κιβώτιο ἀντιστάσεων
		– «Ἄγνωστες» ἀντιστάσεις 1-1000 Ω
		– Διακόπτης μιᾶς ἐπαφῆς
7-8	Βαθμονόμηση καί εὐαισθησία τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου	– **Βαλλιστικό γαλβανόμετρο**[2]
		– Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V
		– Κιβώτιο ἀντιστάσεων μέ ἐνδιάμεση ἐπαφή
		– **Πυκνωτής 0.5 μF**
		– Βολτόμετρο
		– Διακόπτης δύο ἐπαφῶν
		– Διακόπτης τηλεγραφητῆ
7-9	Μέτρηση ἀντιστάσεως καί χωρητικότητας μέ τό βαλλιστικό γαλβανόμετρο	– Βαλλιστικό γαλβανόμετρο[2]
		– Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V
7-10		– «Ἄγνωστη» ἀντίσταση 1-10 MΩ
7-11		– Πυκνωτής 0.5-5 μF
7-12		– Διακόπτης δύο ἐπαφῶν
		– Διακόπτης τηλεγραφητῆ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8		
8-1	Ἡ γέφυρα Wheatstone	– Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V
		– Κιβώτιο ἀντιστάσεων
		– **Γραμμικός ἀγωγός μέ κλίμακα μήκους**
		– «Ἄγνωστη» ἀντίσταση
		– Γαλβανόμετρο
		– Διακόπτης μιᾶς ἐπαφῆς
8-2	Θερμικός συντελεστής ἀντιστάσεως	– Ἡ γέφυρα Wheatstone τοῦ Πειράματος 8-1
		– **Πηνίο ἀντιστάσεως** 5 Ω ἀπό σίδηρο βυθισμένο σέ λουτρό λαδιοῦ
		– **Λύχνος Bunsen**
		– **Θερμόμετρο**
8-3	Ἀντίσταση τεσσάρων ἀκροδεκτῶν	– Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V
		– Ἀντίσταση 1 kΩ
		– **Λεπτή μεταλλική ράβδος**
		– Ἀμπερόμετρο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πείραμα		Όργανα
		– Βολτόμετρο
		– Διακόπτης μιᾶς έπαφῆς
8-4	Ἡ γέφυρα Kelvin	– Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V
		– Ροοστάτης 100 Ω
		– Γραμμικός ἀγωγός μέ κλίμακα μήκους
		– **Πρότυπη ἀντίσταση τεσσάρων ἀκροδεκτῶν**
		– «Ἄγνωστη» ἀντίσταση τεσσάρων ἀκροδεκτῶν
		– Γαλβανόμετρο
		– Διακόπτης μιᾶς ἁπαφῆς
8-5	Μέτρηση χωρητικότητας μέ γέφυρα ΣΡ	– Δύο κιβώτια ἀντιστάσεων
		– **Πρότυπο ἐξάρτημα χωρητικότητας** 1 μF
8-6	Μέτρηση χωρητικότητας μέ τή γέφυρα Gott	– Βαλλιστικό γαλβανόμετρο
		– Ροοστάτης 100 kΩ
		– Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V
		– «Ἄγνωστη» χωρητικότητα
		– Διακόπτης τηλεγραφητῆ
8-7	Τό βασικό κύκλωμα ποτεντσιομέτρου	– Τροφοδοτικό ΣΡ
		– **Πρότυπο στοιχεῖο**
		– **Ἠλεκτρικό στοιχεῖο μέ «ἄγνωστη» ΗΕΔ** ≃ 1.5 V
		– Γραμμικός ἀγωγός μέ κλίμακα μήκους
		– Δύο ροοστάτες 1-20 kΩ
		– Γαλβανόμετρο
		– Διακόπτης δύο ἐπαφῶν
8-8	Μέτρηση ΗΕΔ θερμοζεύγους	– **Ἐργαστηριακό ποτεγσιόμετρο**
		– **Θερμοστοιχεῖο**
		– Μίγμα νεροῦ καί πάγου
		– Μίγμα ἀλκοόλης καί ξηροῦ πάγου
		– Ὑγρό ἄζωτο
8-9	Βαθμονόμηση βολτομέτρου	– Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V
		– Ροοστάτης 500 Ω
		– Κιβώτιο ἀντιστάσεων μέ ἐνδιάμεση ἐπαφή
		– Βολτόμετρο
		– Δύο διακόπτες μιᾶς ἐπαφῆς
		– Ἐργαστηριακό ποτενσιόμετρο
8-10	Βαθμονόμηση ἀμπερομέτρου	– Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V
		– Ροοστάτης
		– Ἀντίσταση τεσσάρων ἀκροδεκτῶν
		– Ἀμπερόμετρο
		– Διακόπτης μιᾶς ἐπαφῆς
		– Ἐργαστηριακό ποτενσιόμετρο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πείραμα		Ὄργανα
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10		
10-1	Τό ἠλεκτρονικό πυροβόλο καθοδικῆς λυχνίας	– Ὄργανα τῶν Πειραμάτων 2-1 ἕως 3-4
10-2	Ἡ καθοδική λυχνία	– Καθοδική λυχνία
10-3	Κίνηση φορτισμένου σωματίου σε μαγνητικό πεδίο	– **Δύο τροφοδοτικά ΣΡ** 0-400 V – Σταθερή τάση ΣΡ 4.5 V
10-4	Μέτρηση τοῦ γήϊνου μαγνητικοῦ πεδίου μέ τήν καθοδική λυχνία	– **Σταθερή τάση ΕΡ 6.3 V** – Ἀντίσταση R $\simeq$ 47 kΩ – Δύο πηνία μέ διάμετρο 15 cm, 200 σπεῖρες
10-5	Μέτρηση τοῦ λόγου e/m μέ τήν καθοδική λυχνία	– Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V
10-6	Ὁ καθοδικός παλμογράφος	– **Καθοδικός παλμογράφος** (ἁπλῆς ἤ διπλῆς σαρώσεως)
10-7	Σχήματα Lissajous	– **Γεννήτρια** ἁρμονικῶν, τριγωνικῶν καί τετράγωνων παλμῶν μέ μεταβλητή συχνότητα.
10-8	Χαρακτηριστική καμπύλη διόδου στήν ὀθόνη τοῦ καθοδικοῦ παλμογράφου	– Σταθερή τάση ΕΡ 6.3 V – Κιβώτιο ἀντιστάσεων 100 kΩ μέ ἐνδιάμεση ἐπαφή – Κιβώτιο ἀντιστάσεων μέ ὁλική ἀντίσταση 50 MΩ – **Κρυσταλλοδίοδος** – Πυκνωτής 0.5 μF
10-9	Ἡ δίοδη λυχνία	– **Δίοδη λυχνία** μέ ἐπίπεδη ἤ κυλινδρική γεωμετρία ἠλεκτροδίων – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-400 V – Σταθερή τάση ΕΡ 6.3 V – Ροοστάτης 10 Ω – Βολτόμετρο – Ἀμπερόμετρο
10-10	Δίοδη λυχνία μέ κυλινδρική γεωμετρία. Ἡ συνθήκη μαγνητοτρονίου	– Δίοδη λυχνία μέ κυλινδρική γεωμετρία ἠλεκτροδίων – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-400 V – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V – Σταθερή τάση ΕΡ 6.3 V – **Ροοστάτης** 3 Ω – Τρεῖς ἀντιστάσεις 100 Ω – **Ἀντίσταση** 68 Ω – Βολτόμετρο – Δύο πηνία μέ διάμετρο 15 cm, 200 σπεῖρες

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πείραμα		Όργανα
10-11	Ἡ τρίοδη λυχνία	– **Τρίοδη λυχνία** – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-400 V – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V – Σταθερή τάση ΕΡ 6.3 V – Δύο βολτόμετρα – Ἀμπερόμετρο
10-12	Τό ἠλεκτρονικό βολτόμετρο	– Τρίοδη λυχνία – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-400 V – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V – Σταθερή τάση ΣΡ 1.5 V – Σταθερή τάση ΕΡ 6.3 V – Ἀντίσταση 1 MΩ – Ροοστάτης 2 kΩ – Ἐργαστηριακό ποτενσιόμετρο – Ἀμπερόμετρο – «Ἄγνωστες ΗΕΔ».
10-13	Τό φαινόμενο Hall	– **Κρύσταλλος Hall** – Τροφοδοτικό ΣΡ – Ροοστάτης 250 Ω – Ἐργαστηριακό ποτενσιόμετρο – Ἀμπερόμετρο
10-14	Τό μαγνητόμετρο Hall	– **Μαγνητόμετρο Hall** – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V – Πηνία διαφορετικῶν διαστάσεων
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11		
11-1	Ὁ νόμος τῆς ἐπαγωγῆς	– **Ἡ διάταξη ὁμοαξονικῶν πηνίων** τοῦ σχήματος 11-1
11-2	Μέτρηση μαγνητικῆς ροῆς	
11-3	Ἀμοιβαία ἐπαγωγή δύο πηνίων	– Βαλλιστικό γαλβανόμετρο – Πυκνωτής 5 μF – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V – Ἀμπερόμετρο – Διπλός διακόπτης δύο ἐπαφῶν
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12		
12-1	Μέτρηση τῆς μαγνητικῆς διαπερατότητας στό κενό	
12-2	Προσδιορισμός καμπύλης ὑστέρησεως μέ βαλλιστικό γαλβανόμετρο	– **Δύο πηνία σέ σύζευξη μέ κοινό σιδηρομαγνητικό πυρήνα** – Τροφοδοτικό 0-40 V

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πείραμα		Ὄργανα
		– **Τροφοδοτικό ΕΡ** (variac) – Βαλλιστικό γαλβανόμετρο – Ἀμπερόμετρο – Διακόπτης μιᾶς ἐπαφῆς – Διπλός διακόπτης δύο ἐπαφῶν
12-3	Προσδιορισμός καμπύλης ὑστερήσεως με καθοδικό παλμογράφο	– Δύο πηνία σέ σύζευξη μέ κοινό σιδηρομαγνητικό πυρήνα – Τροφοδοτικό ΕΡ (variac) – Καθοδικός παμογράφος – Τρεῖς ροοστάτες 10 Ω, 50 Ω καί 4 kΩ – Πυκνωτής 10 μF – Διακόπτης μιᾶς ἐπαφῆς
12-4	Μέτρηση τοῦ πεδίου ἀπομαγνητίσεως	– Δύο πηνία σέ σύζευξη μέ κοινό σιδηρομαγνητικό πυρήνα – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V – Ροοστάτης 400 Ω – Ἀμπερόμετρο – Διπλός διακόπτης δύο ἐπαφῶν
12-5	Τό φαινόμενο Barkhausen	– Δύο πηνία σέ σύζευξη μέ κοινό σιδηρομαγνητικό πυρήνα – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V – Τροφοδοτικό ΕΡ (variac) – **Ἐνισχυτής ἀκουστικῶν συχνοτήτων ἤ ἀκουστικά** – Ἀμπερόμετρο – Διπλός διακόπτης δύο ἐπαφῶν
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13		
13-1	Κύκλωμα R-C μέ μεγάλη σταθερά χρόνου	– Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V – Ἀντίσταση 25 ΜΩ – Πυκνωτής 5 μF – Ἠλεκτρονικό βολτόμετρο – Ἁπλός διακόπτης δύο ἐπαφῶν
13-2	Κύκλωμα R-C μέ μικρή σταθερά χρόνου	– Γεννήτρια τετραγωνικῶν παλμῶν – Καθοδικός παλμογράφος (ἁπλῆς ἤ διπλῆς σαρώσεως) – Ἀντίσταση 10 kΩ – Πυκνωτής 0.1 μF
13-3	Κύκλωμα R-L	– Γεννήτρια τετραγωνικῶν παλμῶν – Καθοδικός παμογράφος (ἁπλῆς ἤ διπλῆς σαρώσεως)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πείραμα		Όργανα
		– Έξάρτημα αύτεπαγωγῆς 25 mH
		– Άντίσταση 1 kΩ
13-4	Κύκλωμα R-C-L σέ σειρά	– Γεννήτρια τετραγωνικῶν παλμῶν
		– Καθοδικός παλμογράφος (άπλῆς ἤ διπλῆς σαρώσεως)
		– Έξάρτημα αύτεπαγωγῆς 25 mH
		– Πυκνωτής 0.001 μF
13-5	Διακοπή κυκλώματος R-L	– Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V
		– Έξάρτημα αύτεπαγωγῆς 25 mH
		– Πυκνωτής 5 μF
		– Διακόπτης τηλεγραφητῆ
		– Καθοδικός παλμογράφος
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14		
14-1	Μέτρηση χωρητικῆς καί έπαγωγικῆς άντιστάσεως	– Γεννήτρια ήμιτονοειδῶν παλμῶν
		– Ήλεκτρονικό βολτόμετρο
		– Κιβώτιο άντιστάσεων
		– Πυκνωτής 5 μF
		– Έξάρτημα έπαγωγῆς 44 mH
		– Διπλός διακόπτης δύο έπαφῶν
14-2	Σύνθετη άντίσταση κυκλώματος R-C-L σέ σειρά	– Γεννήτρια ήμιτονοειδῶν παλμῶν
		– Πυκνωτής 5 μF
		– Έξάρτημα αύτεπαγωγῆς 44 mH
		– Άντίσταση 5 Ω
		– Κιβώτιο άντιστάσεων
		– Ήλεκτρονικό βολτόμετρο
14-3	Σύνθετη άντίσταση κυκλώματος R-C-L σέ παράλληλη σύνδεση	– Γεννήτρια ήμιτονοειδῶν παλμῶν
		– Πυκνωτής 0.5 μF
		– Έξάρτημα αύτεπαγωγῆς 44 mH
		– Άντίσταση 5 Ω
		– Κιβώτιο άντιστάσεων
		– Ήλεκτρονικό βολτόμετρο
		– Άμπερόμετρο
14-4	Φίλτρα συχνότητας	– Γεννήτρια ήμιτονοειδῶν παλμῶν
		– Άντίσταση 1 kΩ
		– Πυκνωτής 1 μF
		– Έξάρτημα αύτεπαγωγῆς 44 mH
		– Ήλεκτρονικό βολτόμετρο
		– Διπλός διακόπτης δύο έπαφῶν
14-5	Μετασχηματιστής μέ σιδηρομαγνητικό πυρήνα	– Μετασχηματιστής μέ σιδηρομαγνητικό πυρήνα καί δυνατότητα έπιλογῆς σπειρῶν πρωτεύοντος καί δευτερεύοντος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πείραμα		Όργανα
		– Τροφοδοτικό ΕΡ (variac) – Δύο άμπερόμετρα – Ήλεκτρονικό βολτόμετρο – Ροοστάτη 15 Ω – Διπλός διακόπτης δύο έπαφῶν
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15		
15-1	Άπόκριση τοῦ ήλεκτροδυναμομέτρου στό ΣΡ	– **Ήλεκτροδυναμόμετρο** – Τροφοδοτικό ΣΡ 0-40 V – Άμπερόμετρο – Ροοστάτης 10 kΩ
15-2	Βαθμονόμηση τοῦ ήλεκτροδυναμομέτρου	– Ήλεκτροδυναμόμετρο – Κιβώτιο άντιστάσεων μέ ένδιάμεση έπαφή – Έργαστηριακό ποτενσιόμετρο
15-3	Μέτρηση ίσχῆς ΣΡ μέ τό ήλεκτροδυναμόμετρο	– Ήλεκτροδυναμόμετρο – Σταθερή τάση 4.5 V – Βολτόμετρο – Άμπερόμετρο – Ροοστάτης 250 Ω – Διακόπτης τηλεγραφητῆ
15-4	Μέτρηση ίσχῆς ΕΡ μέ τό ήλεκτροδυναμόμετρο	– Ήλεκτροδυναμόμετρο – Τροφοδοτικό ΕΡ (variac) – Κιβώτιο άντιστάσεων 1 kΩ – Πυκνωτής 5 μF – Άπλός διακόπτης μιᾶς έπαφῆς
15-5	Μέτρηση χωρητικότητας μέ τή γέφυρα Wien	– Γεννήτρια ήμιτονοειδῶν παλμῶν – Άκουστικά – Κιβώτιο άντιστάσεων 10 kΩ – Κιβώτιο άντιστάσεων 1 kΩ – Άντίσταση 5 kΩ – Πυκνωτής 1 μF – Πυκνωτές μέ ἄγνωστη χωρητικότητα
15-6	Γείωση Wagner σέ γέφυρα Wien	– Τά ὄργανα τοῦ Πειράματος 15-5 – Κιβώτιο άντιστάσεων 10 kΩ – Πυκνωτής 5 μF
15-7	Μέτρηση χωρητικότητας μέ τή γέφυρα Shering	– Γεννήτρια ήμιτονοειδῶν παλμῶν – Άκουστικά – Κιβώτιο άντιστάσεων 1 kΩ – Άντίσταση 5 Ω – **Κιβώτιο πυκνωτῶν** 10 μF – Πυκνωτής 5 μF

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

	Πείραμα	Όργανα
15-8	Μέτρηση αὐτεπαγωγῆς μέ σύγκριση πρός πρότυπο ἐξάρτημα	– Ἁπλός διακόπτης μιᾶς ἐπαφῆς – Γεννήτρια ἡμιτονοειδῶν παλμῶν – Ἀκουστικά – Δύο κιβώτια ἀντιστόσεων 1 kΩ – Ἀντίσταση 10 Ω – Ἐξάρτημα αὐτεπαγωγῆς 44 mH – Ἐξαρτήματα μέ ἄγνωστη αὐτεπαγωγή
15-9	Μέτρηση αὐτεπαγωγῆς μέ τή γέφυρα Hay	– Ἁπλός διακόπτης μιᾶς ἐπαφῆς – Γεννήτρια ἡμιτονοειδῶν παλμῶν – Δύο κιβώτια ἀντιστάσεων 1 kΩ – Ἀντίσταση 50 Ω – Πυκνωτής 5 μF – Ἐξαρτήματα μέ ἄγνωστη αὐτεπαγωγή
15-10	Μέτρηση αὐτεπαγωγῆς μέ τή γέφυρα Maxwell	– Ἁπλός διακόπτης μιᾶς ἐπαφῆς – Γεννήτρια ἡμιτονοειδῶν παλμῶν – Ἀκουστικά – Κιβώτιο ἀντιστάσεων 100 kΩ – Κιβώτιο ἀντιστάσεων 1 kΩ – Ἀντίσταση 50 Ω – Πυκνωτής 5 μF – Ἐξαρτήματα μέ ἄγνωστη αὐτεπαγωγή
15-11	Μέτρηση αὐτεπαγωγῆς μέ τή γέφυρα Anderson	– Ἁπλός διακόπτης μιᾶς ἐπαφῆς – Τροφοδοτικό ΣΡ – Γαλβανόμετρο – Γεννήτρια ἡμιτονοειδῶν παλμῶν – Ἀκουστικά – Δύο κιβώτια ἀντιστάσεων 1 kΩ – Δύο ἀντιστάσεις – Πυκνωτής 0.1 μF – Ἐξαρτήματα μέ ἄγνωστη αὐτεπαγωγή
15-12	Μέτρηση ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς μέ τή γέφυρα Carey Foster	– Διπλός διακόπτης δύο ἐπαφῶν – Γεννήτρια ἡμιτονοειδῶν παλμῶν – Ἀκουστικά – Δύο κιβώτια ἀντιστάσεων 10 kΩ – Ἀντίσταση 100 Ω – Πυκνωτής 1 μF – Ἐξάρτημα μέ ἄγνωστη ἀμοιβαία ἐπαγωγή – Ἁπλός διακόπτης μιᾶς ἐπαφῆς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πείραμα		Όργανα
15-13	Μέτρηση συχνότητας μέ τή γέφυρα Wien	– Γεννήτρια ήμιτονοειδῶν παλμῶν – Ἀκουστικά – Ἀντίσταση 100 Ω – Ἀντίσταση 200 Ω – Δύο πυκνωτές 1 μF – Ἁπλός διακόπτης μιᾶς ἐπαφῆς

[1] ἤ διακόπτης τηλεγραφητῆ.

[2]. Πολλά γαλβανόμετρα D' Arsonval μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν ἐναλλακτικά καί ὡς βαλλιστικά γαλβανόμετρα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ευρετηριο

Τό άλφαβητικό εύρετήριο περιέχει τούς κυριώτερους όρους καί έννοιες όπου άρχικά όρίζονται καί όπου μετέπειτα άναλύονται ή χρησιμοποιοῦνται σέ κάποια έκταση. Γιά τήν κατάταξη όνομάτων καί όρων μέ λατινικούς χαρακτῆρες άκολουθεῖται ή άντιστοιχία πού έχει υἱοθετήσει ό ΟΤΕ, ἤτοι

B, V, W στό Β	C, Q στό Κ	D στό Δ
G στό Γ	H στό Χ	J στό Ζ
	X στό Ξ	U στό Υ

Τά γράμματα πού άκολουθοῦν όρισμένους άριθμούς σελίδων συμβολίζουν:
- ff: καί σελίδες πού άκολουθοῦν
- α: άπαντᾶται σέ ἄσκηση
- π: άπαντᾶται σέ κείμενο πειράματος
- σ: άπαντᾶται σέ ὑπότιτλο σχήματος
- υ: άπαντᾶται σέ ὑποσημείωση

abampère 708
abcoulomb 708
άγωγημότητα 147
άγωγός 84ff, 148
— σέ ἡλεκτρικό πεδίο 88π
άκρίβεια 3
— άπόλυτη 4
άκτινοβολία, βλ. ἡλεκτρομαγνητική άκτινοβολία
άμοιβαία έπαγωγή 475ff, 603
— δύο πηγίων 477π
— μέτρηση 660ff, 662σ, 664π
— συντελεστής 470υ
ampère 140, 706
— διεθνές, 717
Ampère, νόμος 344ff, 675
άμπερόμετρο 266, 267π, 268σ, 326π
— έργαστηριακο 165ff, 176π

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

— πρόχειρο 166π, 178π
άμπεροστροφές άνά μέτρο 509
άναγωγή 186
άνάκλαση 696
άναλοίωτη ποσότητα 369
Anderson, βλ. γέφυρα
άνοδική τάση 524
άνοδος 186, 420
άνόρθωση 412σ, 413π
άντίσταση
— άνθρακα 156, 156σ
— είδική 147
— είδική μαζική 163α
— έπαγωγική 572, 573π
— έσωτερική πηνίου 173
— έσωτερική στοιχείου 182
— θερμικός συντελεστής 301π
— ίσοδύναμη 227ff
— ίσχῆς 159
— κρίσημης άποσβέσεως 253, 255π, 263
— μαγνητική 537
— μέσης άποκλίσεως ώμομέτρου 202
— μέτρηση 293, 294, 296π, 298ff, 302ff, 306π
— μεταλλικῆς ταινίας 159
— μέτρηση μέ βαλλιστικό γαλβανόμετρο 279, 282π, 286π
— σύρματος 159
— στό EP 569ff
— σύνθετη 573, 582π, 590π
— τεσσάρων άκροδεκτῶν 302π, 303
— χωρητική 572, 573π
— ώμική 154ff
άνυσματικό δυναμικό, βλ. δυναμικό
άπόκλιση 16
— μέση 17
— πειραματική τυπική 20
— τυπική 17
άπόσταση διεισδύσεως 594
άρχή τῆς έπαλληλίας 59
Ayrton, βλ. διακλάδωση
αὐτεπαγωγή 470ff
— μέτρηση 648ff, 651σ, 658π, 654σ, 655π, 656σ
— συντελεστής 470υ
Wagner, γείωση 643
βαθμίδα 681
— διατήρηση 681
— έγκάρσια 698α
— Coulomb 351, 698α
— Lorentz 682
— μετασχηματισμός 350, 681
βαθμονόμηση 46
βαθμοί έλευθερίας 20
βαθμωτή ποσότητα 369
βαλβίδα 427
Barkhausen, φαινόμενο 529
βαττόμετρο 628ff, 630σ
— άντισταθμισμένο 631, 632σ
weber 460
Weston, βλ. ήλεκτρικό στοιχεῖο
Wien, βλ. γέφυρα
Biot καί Savart, νόμος 342
volt 70
— διεθνές 717
βολτόμετρο 176σ, 266, 269π, 269σ, 270σ, 324π
— έργαστηριακό 175ff, 176π, 178π
— ήλεκτρονικό 442π, 443σ
Braun, σωλήνας 381
βρόχος 214
— στοιχειώδης 218
— ροῦχα βρόχου 221ff
VTVM, βλ. βολτόμετρο ήλεκτρονικό
Wheatstone, βλ. γέφυρα

γαλβανόμετρο 243ff
— άνηγμένος συντελεστής άποσβέσεως 251
— βαλλιστικό 272ff, 277π, 456
— D' Arsonval 243ff, 244σ, 245σ
— διακλάδωση 256ff, 257σ, 261π
— εὐαισθησία σέ μεγα-Ωμ 288α
— εὐαισθησία ὡς πρός τό δυναμικό 246
— εὐαισθησία ὡς πρός τό μαγνητικό πεδίο 463
— εὐαισθησία ὡς πρός τό ρεῦμα 245, 247π

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

— εύαισθησία ώς πρός τό φορτίο 275, 277π
— ήλεκτροδυναμικό 639
— κίνηση 248ff
— κρίσιμη άπόσβεση 253, 255π
— προστασία 262ff, 264σ
— ύπερκρίσιμη άπόσβεση 254, 255π
— ύποκρίσιμη άπόσβεση 254, 255π
— φυσική συχνότητα 251
— ώς άμπερόμετρο 266ff, 267π, 268σ
— ώς βολτόμετρο 266ff, 269π, 269σ, 270σ
— ώς ώμόμετρο 266ff, 270, 271π, 272σ
gauss 340
Gauss, κατανομή, βλ. στατιστική κατανομή
Gauss, νόμος 63ff
— διαφορική μορφή 64
γέφυρα
— Anderson 656, 656σ, 658π
— Wien 639, 640σ, 641π, 665, 667π
— Wheatstone 232σ, 237σ, 294ff, 296π, 298σ
— διπλή, βλ. Kelvin
— EP 636ff
— Campbell 661υ
— Carey Foster 663, 664π
— Kelvin 304ff, 306π
— Maxwell 653, 654σ, 655π
— Stoud-Oates 672α
— συντονισμοῦ 667, 668σ
— Shering 644, 645σ, 646π
— Hay 650, 651σ, 651π
— Heaviside 661, 662σ
Gott, μέθοδος 311, 312π
γραμμή 460
γωνιακή συχνότητα, βλ. συχνότητα

D' Arsonval, βλ. γαλβανόμετρο
δευτερεῦον μετασχηματιστή 604
διαγωγημότητα, βλ. τρίοδη λυχνία
διάθλαση 696
διακλάδωση 174σ, 256
— Ayrton 240α, 258, 259σ, 260π, 261π
— γαλβανομέτρου 256ff, 257σ, 261π
διακόπτης τηλεγραφητῆ 171, 172σ
διακριτική ικανότητα 3
— άμπερομέτρου 268π
— άπόλυτη 4
διακύμανση 17
— μέση 44
διαμαγνητισμός 499ff, 503
διάμεσος 15
διαπερατότητα, βλ. ήλεκτρική διαπερατότητα, μαγνητική διαπερατότητα
διασκεδασμός 695
διατάξεις μηδενισμοῦ 293ff
διαφορά δυναμικοῦ, βλ. δυναμικό
διαφορά φάσης 413, 414σ, 415σ, 418π
διεθνές σύστημα μονάδων 58, 702, 714, 719ff
διηλεκτρικά ὑλικά 84, 99ff, 149
— γραμμικά 108
— όμογενῆ 108
διηλεκτρική άπορρόφηση 599
διηλεκτρική σταθερά 107, 110
— είδική 108, 110
δίοδη λυχνία 411π, 420ff, 425π
δίοδος 411π, 419π
Dirichlet, συνθῆκες 90
διώνυμη κατανομή, βλ. στατιστική κατανομή
δύναμη Lorentz, β. Lorentz
δυναμικές γραμμές 75 ff
— κῶνος 76
δυναμικό 67ff, 74
— άνυσματικό 350ff, 355, 678ff
— βαθμωτό 678ff
— διαφορά 68, 181ff
— έναλλασσόμενο 568
— μαγνητικό 333
— πλάτος 569
— συνάρτηση 67ff
— τερματικό 183π

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

eV, βλ. ήλεκτρονιοβόλτ
είδική θεωρία τῆς σχετικότητας 368ff
έλίκωση 689υ
έλλειμα φάσης 689υ
ένεργός τάση, βλ. τάση
ένέργεια
— ήλεκτροστατική 64ff, 122ff
— μαγνητικοῦ πεδίου 479ff
— πυκνότητα 124, 691υ
— συνδέσεως 66, 493
έπαγωγή 470υ, 569
— έξαρτήματα 597ff
— νόμος 454ff
έπαγωγικά φαινόμενα 454ff
έπαλληλίας, άρχή 59
έπαλληλίας, θεώρημα 224ff, 239α
έπιδερμικό φαινόμενο 594υ
EP, βλ. ήλεκτρικό ρεῦμα έναλλασσόμενο
έργαστηριακή έκθεση 732ff
έργο έξόδου 424
έσχάρα έλέγχου 383
εύαισθησία γαλβανομέτρου, βλ. γαλβανόμετρο

ΗΕΔ, βλ. ήλεκτρεγερτική δύναμη
ήλεκτρεγερτική δύναμη 181ff, 183π, 833
— διαθέσιμη 182
— ίδανική 210ff
— ίσοδύναμη 227ff
— μέτρηση 195ff, 197π
— τερματική 182
ήλεκτρική διαπερατότητα 107
— είδική 108
— στό κενό 58
ήλεκτρική διπολική ροπή 99, 100σ, 101
ήλεκτρική έπιδεκτικότητα 107
ήλεκτρική θωράκιση 87
ήλεκτρική ίσοτροπία 107
ήλεκτρική μετατόπιση 105ff
ήλεκτρική πόλωση 101, 102σ
ήλεκτρικό δίπολο 74, 99, 490σ
ήλεκτρικό πεδίο 60ff, 74, 77
— έλεύθερων φορτίων 89ff
— ένέργεια 122ff
— ήλεκτροστατικοῦ φακοῦ 92
ήλεκτρικό ρεῦμα 138ff
— δέσιμο 506
— έναλλασσόμενο 568ff
— ένεργό 575
— μεγέθη 580, 580υ
— πυκνότητα 138ff, 140, 339
— συνεχές 83ff
ήλεκτρικό στοιχεῖο 184ff
— άκόρεστο, Weston 315
— άλκαλικό 189, 190σ
— Weston 314
— Daniel 313
— κανονικό Weston 314
— κορεσμένο Weston 314
— Leclanché 187, 188σ
— μολύβδου - όξέως 191
— ξηρό 187
— πρότυπο 187, 313ff
— ύδραργύρου 190, 191σ
— ώφέλιμη ίσχή 194ff, 195π
ήλεκτρικό φορτίο 55
— δέσμιο 104
— διατήρηση 56
— ήλεκτροστατική μονάδα 58, 705
— κβάντωση 56
ήλεκτρίτες 107υ
ήλεκτρόδιο 105
ήλεκτροδυναμόμετρο 623ff, 624σ
— βαθμονόμηση 627π
— στό ΣΡ 625π
ήλεκτρομαγνητική άκτινοβολία 684, 693ff
ήλεκτρομαγνητικό κύμα 682
— γραμμική πόλωση 687
— κυκλική πόλωση 689
— πόλωση 687ff
ήλεκτρομαγνητικό σύστημα μονάδων 708
ήλεκτρονικό πυροβόλο 382, 384σ
ήλεκτρόνιο 55
ήλεκτρονιοβόλτ 394υ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ήλεκτροστατικά εἴδωλα 93ff
— σημειακῶν φορτίων 95π
— σφαιρικοῦ ἀγωγου 98π
ήλεκτροστατική μονάδα φορτίου, βλ. ήλεκτρικό φορτίο
ήλεκτροστατικό σύστημα μονάδων 708
ήλεκτροστατικός φακός 92, 383
ήμιαγωγοί 148
ΗΣΜ-φ 58, 705

θερμιονική έκπομπή 383
θερμοζεῦγος 321π
θεωρητικός πληθυσμός 12
— δεῖγμα 12
— στατιστικές παράμετροι 14

Ισοδυναμική έπιφάνεια 75ff, 91σ
Ισχή
— EP 574ff
— μέση 574
— μέτρηση 628ff, 629σ, 630π, 635π
— στιγμιαία τιμή 574
— συντελεστής 576

καθοδική λυχνία 381ff, 382σ, 388π
καθοδικός παλμογράφος 381, 405ff, 409π, 409σ
κάθοδος 186, 420
καλώδιο 156
— όμοαξωνικό 283π
Campbell, βλ. γέφυρα
καμπύλη άρχικῆς μαγνητίσεως 521
καμπύλη ὑστερήσεως 516, 517σ, 521π, 524π
— κανονική 521
κανονική καμπύλη μαγνητίσεως 524
Carey Foster, βλ. γέφυρα
κατανομή, βλ. στατιστική κατανομή
κβαντικοί άριθμοί 494
CGS, σύστημα 57, 702, 704ff, 709
CDRX, βλ. άντίσταση κρίσιμης άποσβέσεως
Kelvin, βλ. γέφυρα
κεντροειδές 15
Kirchhoff, νόμοι 213ff, 215σ
Coulomb 58, 706
Coulomb, νόμος 56ff, 333
κύμα, βλ. ήλεκτρομαγνητικό κύμα
Curie, σημεῖο 530
QF, βλ. παράγοντας ποιότητας

Langmuir καί Child, νόμος 424
Laplace, έξίσωση 89ff
Leclanché, βλ. ήλεκτρικό στοιχεῖο
Lissajous, σχήματα 416ff, 417π
λογαριθμική μείωση 558
λόγος μετασχηματισμοῦ 604
Lorentz, δύναμη 338ff, 340
Lorentz, μετασχηματισμός 368

μαγνετόνη Bohr 498
μαγνητεγερτική δύναμη 532
μαγνητίζουσα δύναμη 507, 508υ
μαγνητική διαπερατότητα 510
— κανονική 524
— στό κενό 338, 511π
— σχετική 510
μαγνητική διπολική ροπή 355ff, 358, 492ff
μαγνητική ένταση 507, 508υ
μαγνητική έπαγωγή 340υ
μαγνητική έπιδεκτικότητα 510, 513
— ειδική 538α
μαγνητική πόλωση 505
μαγνητική ροή 455 460
— μέτρηση 453π
μαγνητικό δίπολο 355, 490σ
δύναμη 362ff
ροπή 362ff

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μαγνητικό δυναμικό, βλ. δυναμικό, άνυσματικό δυναμικό
μαγνητικό κύκλωμα 531ff
μαγνητικό μονόπολο 491
μαγνητικό πεδίο 333, 338ff, 340, 355
— γήϊνο 397π
— κανονικό 523
μαγνητικό φορτίο 489
μαγνήτιση 505ff
μαγνητόμετρο Hall 448, 449π, 450π
μαγνητρόνιο 432
maxwell 460
Maxwell, έξισώσεις 674ff
Maxwell, βλ. γέφυρα
ΜΕΔ, βλ. μαγνητεγερτική δύναμη
μεταβατικά ρεύματα 541ff
μετασχηματιστής 603ff, 611π, 614σ
μετατροπέας 161
μέση απόκλιση, βλ. απόκλιση
μιγαδικοί αριθμοί 584ff
— συζηγεῖς 586
MKSA, σύστημα 58, 702, 704ff, 706
μονάδες μετρήσεως 701ff
— απόλυτες 714ff
— πρότυπες 714ff
μοναδικότητα διαφορᾶς δυναμικοῦ, αρχή 210
μονωτές 84, 148
μπαταρία 187

Neumann, συνθῆκες 91
Norton, θεώρημα 233ff, 234σ, 242α

oesterd 508
όλοκληρωμένη πιθανότητα Gauss 34, 35
όξείδωση 186
όπλισμός πυκνωτῆ 128
όργανο κινητοῦ πλαισίου, βλ. γαλβονόμετρο
όρθολογισμένο σύστημα μονάδων 710
ούδετερόνιο 55

ohm 146
Ohm, νόμος 145ff

παλμογράφος, βλ. καθοδικός παλμογράφος
παράγοντας ποιότητας 558
παραμαγνητισμός 499ff, 504
παραμένουσα μαγνήτιση 524
πεδίο απομαγνητίσεως 525
πεδίο μαγνητίσεως 505ff, 508
πειραματικό σφάλμα 1
— απαράδεκτο 5
— έκτίμηση 2π, 40ff
— μετάδοση 35ff
— όργάνων μετρήσεως 5, 180π
— παρατηρήσεως 5
— πιθανό 50υ
— συστηματικό 5
— τυχαῖο 5
περιοχή 527
πλέγμα έλέγχου 434
πλέον πιθανή τιμή 15
Poisson, έξίσωση 89ff
— γενικευμένη 115
— σέ διηλεκτρικά ὑλικά 117
πολύμετρο 203ff, 204σ
— έργαστηριακό 203ff, 204
ποτενσιόμετρο 160σ, 316ff, 331α
— βασικό κύκλωμα 317σ, 319π
— έργαστηριακό 320, 322π
Poynting, ἄνυσμα 689ff
πριονοτή τάση 406
πρωτεῦον μετασχηματιστῆ 604
πρωτόνιο 55
πυκνότητα ένεργείας, βλ. ένέργεια
πυκνότητα ρεύματος, βλ. ήλεκτρικό ρεῦμα
πυκνωτής 126ff, 599ff
— ήλεκτρολυτικός 601
— μεταβλητῆς χωρητικότητας 601

ρεῦμα, βλ. ήλεκτρικό ρεῦμα
ρεῦμα βρόχου, βλ. βρόχος
ρεῦμα μετατοπίσεως 675ff, 677

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ροή ήλεκτρικοῦ πεδίου 63ff
ροόμετρο 462
ροοστάτης 160σ, 161

σάρωση 407
σημαντικά ψηφία 7ff
SI, σύστημα, βλ. Système International
σιδηρομαγνητισμός 514
σκανδαλισμός 407
σπίν 494
ΣΡ, βλ. ήλεκτρικό ρεῦμα συνεχές
σταθερά χρόνου 556
statvolt 70
στατιστική κατανομή 6, 11ff
— Gauss 31ff
— διώνυμη 21ff
— κανονική 31ff
— Poisson 27ff
statcoulomb 705, 708
Stoud-Oates, βλ. γέφυρα
συνεχείας, ἀρχή 210
συνεχείας, ἐξίσωση 143ff, 145
συνοριακές συνθῆκες 89ff
συντελεστής ἰσχῆς, βλ. Ισχή
σύρμα 155, 157
συσσωρευτής 187
— μολύβδου 192, 192σ
— νικελίου - καδμίου 193, 193σ
Système International 58, 702, 714, 719ff
συστήματα μονάδων μετρήσεως 702ff
συστηματικό σφάλμα, βλ. πειραματικό σφάλμα
συστοιχία 187
συχνότητα
— γωνιακή 569
— μέτρηση 665ff, 667π, 668π
σφαίρα τοῦ Ἀπολλωνίου 96
σφάλμα, βλ. πειραματικό σφάλμα
σφάλμα παρατηρήσεως, βλ. πειραματικό σφάλμα
Shering, βλ. γέφυρα
σωλήνας Braun 381
σωληνοειδές 355

τάση
— ἐνεργός 575
— πριονοτή 406
tesla 340
τετράνυσμα 369
τεχνικό σύστημα 703
τοροειδές 355, 486σ
τρίοδη λυχνία 434ff, 440π
— διαγωγημότητα 439
— ἐσωτερική ἀντίσταση 438
— πλέγμα ἐλέγχου 434
— πόλωση 436
— συντελεστής ἐνισχύσεως 435
— χαρακτηριστικές καμπύλες 436, 437σ
τυπική ἀπόκλιση, βλ. ἀπόκλιση
τυχαῖα σφάλματα, βλ. πειραματικό σφάλμα
Thévenin, θεώρημα 230ff, 239σ, 242σ

ὑστέρηση, βλ. καμπύλη ὑστερήσεως

farad 128
φάση 413, 569, 684
φερρίτης 597υ
φίλτρα συχνότητας 591ff, 592π
φόρτιση 192

Hall, φαινόμενο 443ff, 447π
— δυναμικό 446
— μαγνητόμετρο 448, 449π, 450σ
— πεδίο 445
— συντελεστής 445, 446σ
Hay, βλ. γέφυρα
Heaviside, βλ. γέφυρα
Heaviside - Lorentz, σύστημα 710
henry 471
χρόνος ἡμιζωῆς 556

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χωρητικότητα 126ff, 569
— άγωγοῦ 127
— μέτρηση μέ βαλλιστικό γαλβανόμετρο 279, 287π
— μέτρηση μέ γέφυρα ΕΡ 639ff, 641π, 645σ, 646π
— μέτρηση μέ γέφυρα ΣΡ 310π
— μέτρηση μέ μεθόδους μηδενισμοῦ 308ff
— πυκνωτῆ 128

ὦμ, βλ. ohm
ὠμόμετρο, 197, 199π, 206α, 266, 270, 271π, 272σ
— ἐργαστηριακό 197ff, 198σ
— εὐαισθησία 201, 201σ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Τηλ.: 26510 - 95958

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΠΙΣΤΡΟΦΗΣ		
13/4/05		

CALL NO: 530.141 ΑΣΗ

Please Keep Slip With Book





Ὁ Παναγιώτης Ἀσημακόπουλος γεννήθηκε τό 1940. Τό 1958 ἀποφοίτησε ἀπό τό Ἐθνικό Ἐκπαιδευτήριο Ἀναβρύτων καί τόν ἑπόμενο χρόνο ἄρχισε τίς Πανεπιστημιακές τους σπουδές στό Πανεπιστήμιο Brandeis τῶν Η.Π.Α. ἀπ' ὅπου τό 1961 ἔλαβε τό πτυχίο Bachelor στή Φυσική. Συνέχισε τίς μεταπτυχιακές του σπουδές στήν Ἀγγλία καί στίς Η.Π.Α. ἀπό ὅπου ἔλαβε διαδοχικά τά διπλώματα D.I.C. (Imperial College of Science and Technology) στή Μαθηματική Φυσική. Master of Science (Rutgers. The State University) καί Ph. D. (Thomas Jefferson University) στήν Πυρηνική Φυσική. Ἀπό τό 1965 ἕως τό 1976 ἐργάστηκε ὡς ἐρευνητής στό Ἐργαστήριο Ἐπιταχυντῶν τοῦ Κ.Π.Ε. Δημόκριτος. Τό 1976 ἐξελέγη τακτικός καθηγητής τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων, ὅπου ὑπηρετεῖ μέχρι σήμερα. Τό συγγραφικό του ἔργο περιλαμβάνει περισσότερα ἀπό τριάντα ἐπιστημονικά ἄρθρα σέ διεθνῆ περιοδικά, δύο πανεπιστημιακά συγγράμματα καί ἕνα μεγάλο ἀριθμό ἀνακοινώσεων σέ διεθνῆ ἐπιστημονικά συνέδρια. Τό 1974 συμμετεῖχε στήν ὁμάδα ἐργασίας πού δημιούργησε τό Ὑπουργεῖο Παιδείας γιά τή διαμόρφωση τοῦ ἀναλυτικοῦ προγράμματος καί τή συγγραφή τῶν βιβλίων γιά τά μαθήματα τῆς Φυσικῆς καί Χημείας στή Στοιχειώδη Ἐκπαίδευση. Τό 1981 ἀνέλαβε τήν προεδρία στήν ἀντίστοιχη ὁμάδα ἐργασίας τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας γιά τή διαμόρφωση τοῦ ἀναλυτικοῦ προγράμματος τῆς Φυσικῆς στή Μέση Ἐκπαίδευση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΙΟΘ