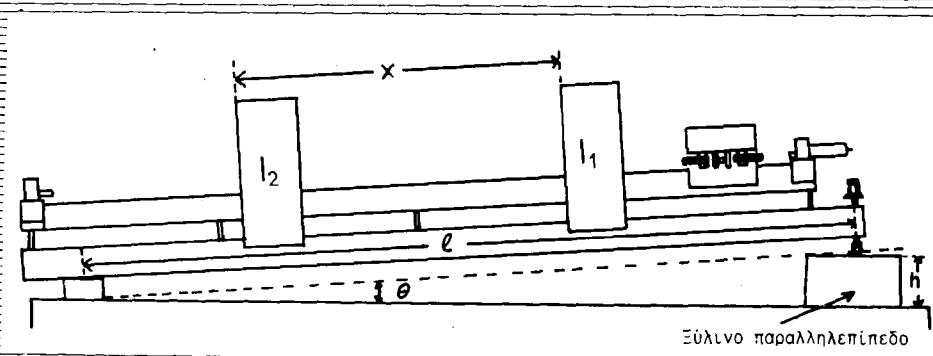


Εισαγωγή στα πειράματα φυσικής

(ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ — ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ)



ΧΡΗΣΤΟΣ ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1998

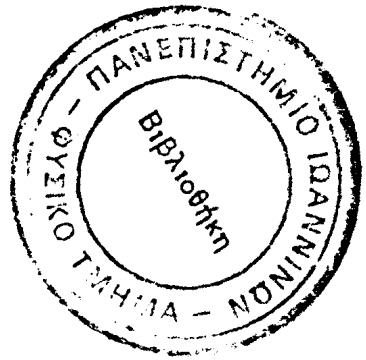


382/2000

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000047617



530.076

ΠΑΠ



ΧΡΗΣΤΟΣ ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εισαγωγή
στα πειράματα
φυσικής
(ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ - ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ)

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1998



**εισαγωγή στα
πειράματα φυσικής
(μηχανικής - θερμότητας)**

**Χρηστος Παπαγεωργουλος
καθηγητης**

**τυπογραφειο
Πανεπιστημιου Ιωαννινων
Ιωαννινα 1993**



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΣΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ

ΦΥΣΙΚΗΣ

(ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ - ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ)



Τα γνήσια αντίτυπα φέρουν την υπογραφή του συγγραφέα

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ

ΑΘΗΝΩΝ



Θ
σ
α
π
ρ
θ
το
φ
εκ
πε
ερ
πε

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Το βιβλίο αυτό έχει γραφεί ύστερα από πολλά χρόνια εμπειρίας στη διδασκαλία των εργαστηρίων Φυσικής σε ασκήσεις κυρίως Μηχανικής και Θερμότητας. Η εμπειρία βασίζεται κυρίως στις ερωτήσεις και γνώμες των φοιτητών. Έχει επανειλημμένα ζητηθεί από τους φοιτητές κάθε εργαστηριακή άσκηση να συνοδεύεται από τη σχετική θεωρία. Με βάση το αίτημα αυτό υπάρχει η απαραίτητη θεωρία η οποία είναι γραμμένη με τέτοιο τρόπο ώστε ο φοιτητής να κατανοήσει το σκοπό του πειράματος και να καταλαβαίνει κάθε βήμα στην εκτέλεσή του. Η θεωρία αυτή είναι γραμμένη έτσι ώστε να αποτελεί γεφύρωμα της διδασκαλίας του μαθήματος Γενικής Φυσικής και του Εργαστηρίου. Έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση ώστε η σειρά των εργαστηριακών ασκήσεων να παραλληλίζεται με τη σειρά των μαθημάτων της Γενικής Φυσικής.

Το βιβλίο αρχικά αναφέρεται στη θεωρία των σφαλμάτων και ελάχιστων τετραγώνων η οποία έχει διαμορφωθεί μετά από συλλογή συστάσεων και αποριών των ασκούμενων στο παρελθόν φοιτητών και τις υποδείξεις των επιτηρητών. Επίσης οι θεωρίες αυτές έχουν εμπλουτιστεί μ' ένα μεγάλο αριθμό παραδειγμάτων.

Έχει θεωρηθεί σκόπιμο να δοθεί μια εμπεριστατωμένη περίληψη θεωρίας με παραδείγματα στα απαραίτητα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται στη θεωρία σφαλμάτων.

Στη συνέχεια ακολουθούν οι εργαστηριακές ασκήσεις. Κάθε άσκηση αποτελείται από 3 μέρη. Το πρώτο μέρος είναι η εισαγωγή όπου δίνεται κυρίως η σκοπιμότητα της άσκησης. Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει τη θεωρία η οποία όπως αναφέραμε προηγούμενα έχει αφετηρία τη διδασκαλία του μαθήματος και διαμορφώνεται έτσι ώστε να μπορεί να χρησιμοποιεί ο φοιτητής τη Φυσική στην εκτέλεση του πειράματος και να έχει προσωπική εκτίμηση των αποτελεσμάτων που βρίσκει. Το τρίτο μέρος περιλαμβάνει την περιγραφή του πειράματος που θα πραγματοποιήσει ο φοιτητής στο εργαστήριο. Εδώ εξοικειώνεται ο φοιτητής με τα όργανα, καταστρώνει το πείραμα, παίρνει τις απαραίτητες μετρήσεις και αναλύει τα αποτελέσματα.



Είναι σκόπιμο να αναφέρουμε ότι οι ασκήσεις είναι γραμμένες, έτσι ώστε κάθε άσκηση να μπορεί να εκτελεστεί σε χρονικό διάστημα από 2 έως 4 ώρες. Αυτό γίνεται διότι κάθε άσκηση αποτελείται από ένα σύνολο μετρήσεων και ερωτήσεων ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, έτσι ώστε ο ασκούμενος να μπορεί να περιοριστεί σε μια σειρά μετρήσεων ανάλογα με το διατιθέμενο χρόνο χωρίς να μειώνεται ουσιαστικά η κατανόηση της άσκησης.

Επίσης υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία ασκήσεων για να αποφεύγεται η επανάληψη των ίδιων ασκήσεων σε δυο διαδοχικά εξάμηνα.

Το βιβλίο αυτό αφιερώνεται στους φιλομαθείς φοιτητές.

Ιούνιος, 1992

ΧΡΗΣΤΟΣ ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ

Ιωάννινα



ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θέλω να ευχαριστήσω τους συνεργάτες μου τον λέκτορα κ. ΜΑΤΘΑΙΟ ΚΑΜΑΡΑΤΟ και την κ. ΜΑΡΙΑΝΘΗ ΛΑΜΠΡΑΚΗ, για τη συνεργασία μαζί μου στο στήσιμο, την κατασκευή ωρισμένων οργάνων, επανειλημμένη εκτέλεση των ασκήσεων, τη βοήθεια στη συγγραφή του βιβλίου, την κατασκευή των σχημάτων και για τις εύστοχες υποδείξεις.

Οι ευχαριστίες επεκτείνονται στα μέλη ΔΕΠ που έχουν διδάξει το μάθημα των Εργαστηρίων Μηχανικής-Θερμότητας για τις πολύ χρήσιμες παρατηρήσεις.

Θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω τον κ. ΚΩΝ/ΝΟ ΠΑΠΠΑ ηλεκτρονικό, για την συνεισφορά στην κατασκευή ωρισμένων βασικών πειραματικών ασκήσεων.

Τελικά θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. ΕΛΕΝΗ ΚΑΠΕΡΔΑ-ΧΡΥΣΟΒΙΤΣΙΝΟΥ για την επιμελημένη και πολλαπλή δακτυλογράφηση του βιβλίου.

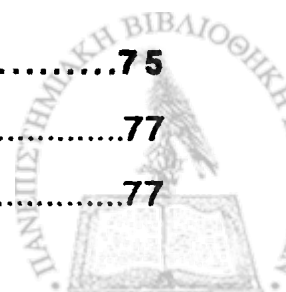


ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

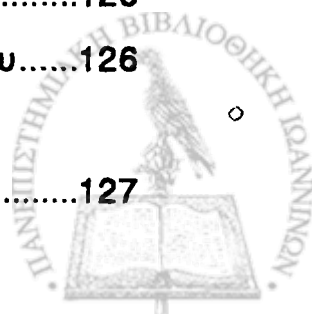
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΧΡΗΣΙΜΑ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ	
ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ.....	1
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	3
2. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ.....	3
2.1 Κανόνες Παραγωγίσης.....	6
2.1.1 Παράγωγος Σταθεράς.....	6
2.1.2 Παράγωγος της Γενικής Μορφής $y = x^n$	6
2.1.3 Παράγωγος της $y = k u(x)$	7
2.1.4 Παράγωγος Αθροίσματος Συναρτήσεων Μίας Μεταβλητής.....	8
2.1.5 Παράγωγος Γινομένου Συναρτήσεων.....	8
2.1.6 Παράγωγος Πηλίκου Συναρτήσεων.....	9
2.1.7 Παράγωγος Δύναμης με Βάση που Είναι Συνάρτηση.....	9
2.1.8 Αλυσωτός Κανόνας Παραγωγίσης.....	10
2.1.9 Παράγωγος Εκθετικής Συνάρτησης.....	10
2.1.10 Παράγωγος Λογαριθμικής Συνάρτησης.....	10
2.1.11 Παράγωγοι Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων.....	11
2.2 Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης.....	12
2.3 Μερικοί Παράγωγοι.....	13
3. ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR ΚΑΙ MAC-LAURIN.....	14
4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ.....	16
4.1 Διαφορικά dx και dy	16
4.2 Ολικό Διαφορικό.....	17
5. ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΚΑΙ ΝΕΠΕΡΕΙΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ.....	18



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΘΕΩΡΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ	21
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	23
2. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ.....	24
2.1 Είδη Μετρήσεων	24
2.2 Ακρίβεια και Πιστότητα	24
2.3 Σημαντικά ψηφία	25
2.4 Στρογγύλεμα Παραγώγου Αποτελέσματος	28
2.5 Σφάλματα Μετρήσεων.....	30
2.5.1 Εισαγωγή.....	30
2.5.2 Μαθηματικός Ορισμός του Σφάλματος.....	31
2.5.3 Κατηγορίες Σφαλμάτων.....	32
2.6 Μέσος Όρος μιας Σειράς Μετρήσεων	36
2.7 Μέσο Σφάλμα ή Τυπική Απόκλιση της μιας Μέτρησης.....	38
2.8 Καμπύλες Κατανομής.....	41
2.8.1 Γενικά.....	41
2.8.2 Κατανομή του Gauss ή Κανονική Κατανομή	44
2.8.3 Γενικές Παρατηρήσεις.....	48
2.9 Σφάλμα ή Τυπική Απόκλιση του Μέσου Όρου	50
2.10 Αριθμητικά Παραδείγματα.....	52
2.11 Ολικό Σφάλμα Σύνθετης Μέτρησης	57
2.12 Παραδείγματα.....	64
2.13 Σταθμισμένες Μέσες Τιμές.....	72
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ	 75
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	77
2. ΧΑΡΑΞΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ.....	77



3.	ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ.....	80
3.1	Ευθεία Γραμμή.....	81
3.2	Λογαριθμικές Καμπύλες.....	83
3.3	Εκθετικές Καμπύλες.....	85
4.	ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.....	89
4.1	Εύρεση της Καλύτερης Σχέσης Μεταξύ Δύο Μεταβλητών.....	89
4.2	Σχέσεις με Περισσότερες των Δύο Μεταβλητών.....	94
4.3	Παραδείγματα.....	95
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....		107
ΑΣΚΗΣΗ 1 όργανα μέτρησης διαστάσεων, μάζας και		
χρονου.....		109
1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	109
2.	ΘΕΩΡΙΑ.....	110
2.1	Διαστημόμετρο.....	110
2.1.1	Περιγραφή.....	110
2.1.2	Βερνιέρος.....	111
2.2	Μικρόμετρο.....	114
2.3	Σφαιρόμετρο.....	117
2.4	Ζυγός.....	120
2.5	Χρονόμετρα.....	122
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	125
3.1	Υπολογισμός Διαστάσεων Ενός Σωλήνα με τη Χρήση Διαστημόμετρου.....	125
3.2	Υπολογισμός Διαμέτρου Σφαίρας με τη Χρήση Μικρόμετρου.....	126
3.3	Υπολογισμός Ακτίνας Καμπυλότητας Κυρτής και Κοίλης Επιφάνειας με τη Χρήση Σφαιρόμετρου.....	127



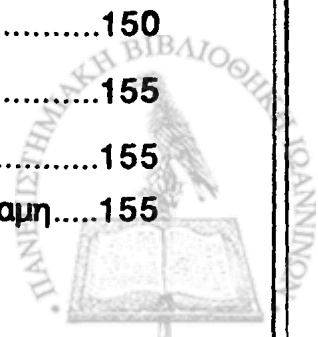
3.3.1	Κυρτή Επιφάνεια	127
3.3.2	Κοίλη Επιφάνεια	129
3.4	Υπολογισμός της Μάζας Ενός Σώματος με τη Χρήση του Ζυγού	129
3.5	Μετρήσεις του Χρόνου.....	130
3.5.1	Μέτρηση του Χρόνου με Χειροκίνητο Χρονόμετρο	131
3.5.2	Μέτρηση του Χρόνου με Αυτόματο Χρονόμετρο.....	131

ΑΣΚΗΣΗ 2 μέτρηση ταχύτητας και επιταχυνσης, Νόμος του Νεύτωνα..... 133

1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	133
2.	ΘΕΩΡΙΑ	134
2.1	Ταχύτητα	134
2.2	Επιτάχυνση	136
2.3.	Οι νόμοι του Νεύτωνα	138
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	140
3.1	Μέτρηση Ταχύτητας στην Ευθύγραμμο Ομαλή Κίνηση	140
3.2	Μέτρηση της Στιγμιαίας Ταχύτητας.....	143
3.3	Μελέτη του 2ου Νόμου του Νεύτωνα ($F = ma$).....	146
3.4	Μελέτη της Ομαλά Επιταχυνόμενης Κίνησης	149

ΑΣΚΗΣΗ 3 ώθηση - μεταβολή της ορμής 150

1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	150
2.	ΘΕΩΡΙΑ.....	150
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	155
3.1	Επαλήθευση της Σχέσης $Mu = Ft$	155
3.1.1	Με τη Μεταβολή του Διαστήματος x_1 που Ενεργεί η Δύναμη.....	155



3.1.2	Μεταβολή της Μάζας m	158
3.1.3	Μεταβολή του Βάρους του Κινητού.....	159
ΑΣΚΗΣΗ 4 θεωρημα εργου-ενεργειας.Νομος διατηρησης ενεργειας (για συντηρητικες δυναμεις).....		
1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	161
2.	ΘΕΩΡΙΑ.....	162
2.1	Έργο Σταθερής Δύναμης.....	162
2.2	Έργο Μεταβλητής Δύναμης.....	163
2.3	Κινητική Ενέργεια, Θεώρημα Έργου-Ενέργειας (για Συντηρητικές δυνάμεις)	165
2.4	Δυναμική Ενέργεια και Νόμος Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (για Συντηρητικές Δυνάμεις).....	166
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	168
3.1	Επαλήθευση του Θεωρήματος Έργου-Ενέργειας, $W=\Delta K$ για Σταθερή Δύναμη	168
3.1.1	Μεταβολή του Αρχικού Διαστήματος x_1	169
3.1.2	Χρήση Διαφόρων Βαριδίων	171
3.2	Επαλήθευση του Θεωρήματος Έργου-Ενέργειας, $W=\Delta K$ για Μεταβλητή Δύναμη	172
3.3	Επαλήθευση του Νόμου Διατήρησης Ενέργειας.....	174
3.3.1	Μεταβολή του Διαστήματος x	175
3.3.2	Μετρήσεις για Διάφορες Κλίσεις	176

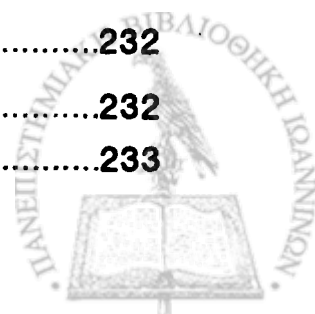


ΑΣΚΗΣΗ 5 εφαρμογή του νομού διατήρησης ενέργειας- επαληθευση της σχέσης $F(x) = - \frac{\partial U(x)}{\partial x}$	178
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	178
2. ΘΕΩΡΙΑ	179
3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ	182
3.1 Μέτρηση της Δυναμικής Ενέργειας $U(x)$	182
3.1.1 Μετατροπή της Μαγνητικής Ενέργειας σε Κινητική	182
3.1.2 Μετατροπή της Μαγνητικής Ενέργειας σε Δυναμική	185
ΑΣΚΗΣΗ 6 κρούσεις	189
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	189
2. ΘΕΩΡΙΑ	190
3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ	195
3.1 Ελαστικές Κρούσεις	195
3.1.1 Κρούση με $u_{01} \neq 0$ και $u_{02} = 0$	195
3.1.2 Κρούση με $u_{01} \neq 0$ και $u_{02} \neq 0$	198
3.2 Πλαστικές Κρούσεις	200
3.2.1 Κρούση με $u_{01} \neq 0$ και $u_{02} = 0$	200
3.2.2 Κρούση με $u_{01} \neq 0$ και $u_{02} \neq 0$	201
ΑΣΚΗΣΗ 7 μελετη απομονωμένου συστήματος	202
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	202
2. ΘΕΩΡΙΑ	203
3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ	206
3.1 Απομονωμένο Σύστημα Δρομέων Συνδεδεμένων με Ελατήριο	206
3.1.1 Ποιοτική Μελέτη του Νόμου Διατήρησης Ενέργειας	207

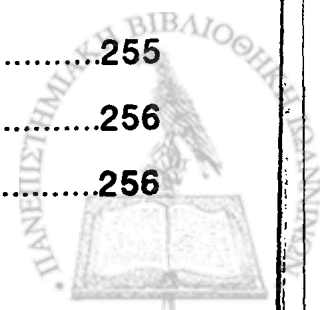
3.1.2	Επαλήθευση της Σχέσης $\frac{u_1}{u_2} = \frac{M_2}{M_1}$	208
3.2	Απομονωμένο Σύστημα Δύο Δρομέων Συνδεδεμένων με Νήμα Από το Οποίο Κρεμείται Ελεύθερα Ένα Βαρίδιο	209
3.2.1	Ποιοτική Μελέτη του Νόμου Διατήρησης Ενέργειας	209
3.2.2	Επαλήθευση της Σχέσης $\frac{u_1}{u_2} = \frac{M_2}{M_1}$	211
3.3	Επαλήθευση του Νόμου Διατήρησης Ορμής Κατά την Διάσπαση Απομονωμένου Συστήματος Δύο Σωμάτων	213
3.3.1	Οι Δρομείς Φέρουν Μεγάλα Ελάσματα.....	213
3.3.2	Οι Δρομείς Φέρουν Μαγνήτες	215
3.4	Ποιοτική Μελέτη του Κέντρου Μάζας Απομονωμένου Συστήματος	217
3.4.1	Προσδιορισμός του Κέντρου Μάζας.....	217
3.4.2	Κίνηση του Κέντρου Μάζας.....	218

ΑΣΚΗΣΗ 8 μελετη δυναμεων αποσβεσης

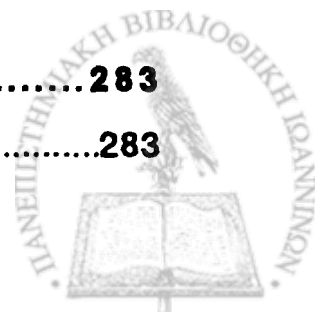
	(μη συντηρητικές δυνάμεις).....	219
1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	219
2.	ΘΕΩΡΙΑ.....	220
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	226
3.1	Υπολογισμός της Σταθεράς Απόσβεσης b	227
3.1.1	Περίπτωση Επίπεδης Αεροτροχιάς.....	227
3.1.2	Περίπτωση Κεκλιμένης Αεροτροχιάς	230
3.2	Υπολογισμός του Συντελεστή Κρούσης e	232
3.2.1	Κρούση Ενός Δρομέα με το Τοίχωμα της Αεροτροχιάς.....	232
3.2.2	Κρούση ενός Δρομέα M_1 με Άλλο Ακίνητο Δρομέα M_2	233



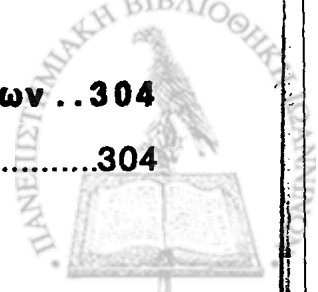
ΑΣΚΗΣΗ 9 απλή αρμονική κίνηση.....	235
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	235
2. ΘΕΩΡΙΑ	236
2.1 Τρόποι Σύνδεσης Ελατηρίων σε Αρμονικούς Ταλαντωτές	238
3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	241
3.1 Προσδιορισμός της Στατικής Σταθεράς Ελατηρίων	242
3.1.1 Χρήση Ενός Ελατηρίου.....	242
3.1.2 Χρήση Δύο Ελατηρίων.....	242
3.2 Προσδιορισμός της Περιόδου σαν Συνάρτηση του Μέγιστου Πλάτους.....	244
3.2.1 Επίπεδη Αεροτροχιά	244
3.2.2 Κεκλιμένη Αεροτροχιά.....	245
3.3 Προσδιορισμός της Περιόδου T σαν Συνάρτηση της Μάζας του Δρομέα M	246
3.4 Προσδιορισμός της Περιόδου T σαν Συνάρτηση της Στατικής Σταθεράς k	247
3.5 Επαλήθευση της Διατήρησης Ενέργειας στην Απλή Αρμονική Κίνηση.....	247
ΑΣΚΗΣΗ 10 φθίνουσα αρμονική κίνηση.....	249
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	249
2. ΘΕΩΡΙΑ	249
3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	255
3.1 Προεργασία.....	255
3.2 Φθίνουσες Ταλαντώσεις	256
3.2.1 Η Μάζα του Δρομέα Διατηρείται Σταθερή	256



3.2.2	Η Μάζα του Δρομέα Μεταβάλλεται.....	257
3.3	Μελέτη της Σχέσης $x = f(t)$	257
3.4	Σύζευξη Ταλαντωτών.....	258
3.5	Τροποποίηση Συζευγμένων Ταλαντωτών.....	260
ΑΣΚΗΣΗ 11 εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.....		261
1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	261
2.	ΘΕΩΡΙΑ.....	262
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	270
3.1	Προεργασία.....	270
3.2	Συντονισμός.....	270
3.3	Συντονισμός με Σύζευξη Ταλαντωτών.....	272
3.4	Πρόσθετη Απόσβεση.....	273
3.5	Προστιθέμενη Μάζα.....	273
ΑΣΚΗΣΗ 12 απλο εκκρεμες - προσδιορισμός του g		274
1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	274
2.	ΘΕΩΡΙΑ.....	275
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	278
3.1	Προσδιορισμός της Περιόδου T σε Συνάρτηση του Μήκους B του Εκκρεμούς. Υπολογισμός του g	279
3.2	Μελέτη των Σχέσεων $T = f(\Theta)$ και $g = f(\Theta)$	280
3.3	Μελέτη της Σχέσης $s = f(t)$	281
ΑΣΚΗΣΗ 13 κυκλικη κινηση.....		283
1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	283



2.	ΘΕΩΡΙΑ.....	284
2.1	Κυκλική Κίνηση.....	284
2.2	Κεντρομόλος Δύναμη	289
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	289
3.1	Συσκευή	289
3.2	Προεργασία.....	291
3.3	Βαθμονόμηση της Κατακορύφου Κλίμακας.....	291
3.4	Επαλήθευση της Σχέσης $F = m\omega^2 r$	291
3.4.1	Προσδιορισμός της Δύναμης F σαν Συνάρτηση της Μάζας m	291
3.4.2	Προσδιορισμός της Δύναμης F σαν Συνάρτηση της Γωνιακής Ταχύτητας ω	293
3.4.3	Προσδιορισμός της Δύναμης F σαν Συνάρτηση της Απόστασης r	294
ΑΣΚΗΣΗ 14 στροφικό εκκρεμές - προσδιορισμός μέτρου		
στρέψης G συρματος.....		295
1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	295
2.	ΘΕΩΡΙΑ.....	296
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	299
3.1	Προσδιορισμός της Περιόδου T σαν Συνάρτηση της Ροπής Αδράνειας I . Υπολογισμός του G	300
3.2	Μελέτη της Σχέσης $T = f(B)$ και Υπολογισμός του Μέτρου Στρέψης G	302
3.3	Μελέτη της Σχέσης $T = f(d)$ και Υπολογισμός του G	303
ΑΣΚΗΣΗ 15 μέτρηση της πυκνότητας στερεών και υγρών		304
1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	304



2.	ΘΕΩΡΙΑ.....	304
2.1	Ορισμός.....	304
2.2	Πυκνότητα Στερεών.....	305
2.3	Πυκνότητα Υγρών.....	308
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	309
3.1	Χρήση του Ζυγού στη Μέθοδο της Άνωσης.....	309
3.2	Πυκνότητα Στερεών Σωμάτων.....	310
3.2.1	Μέθοδος Μάζας - Όγκου (άμεση).....	310
3.2.2	Μέθοδος της Άνωσης.....	311
3.3	Πυκνότητα Υγρών.....	312
3.3.1	Από τον Όγκο και τη Μάζα.....	312
3.3.2	Μέθοδος της Άνωσης.....	312

ΑΣΚΗΣΗ 16 μέτρηση του συντελεστή εσωτερικής τριβής n

	των ρευστών.....	314
1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	314
2.	ΘΕΩΡΙΑ.....	315
2.1	Χαρακτηριστικά της Ροής των Ρευστών.....	315
2.2	Εσωτερική Τριβή Ενός Ρευστού.....	317
2.2.1	Μέτρηση του Συντελεστή Ιξώδους με τη "Μέθοδο του Στροφικού Εκκρεμούς".....	318
2.2.2	Μέτρηση του Συντελεστή Ιξώδους με τη "Μέθοδο της Πτώσης Μικρών Σφαιρών".....	320
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	324
3.1	Συσκευή.....	324
3.2	Προεργασία.....	325
3.3	Μελέτη της Σχέσης $s = f(t)$ για $r =$ Σταθερό.....	327



3.4	Μελέτη της Σχέσης $u_{op} = f(r)$ για $s_{op} = \text{Σταθερό}$	328
3.5	Προσδιορισμός της T_{op} και του Re	329

ΑΣΚΗΣΗ 17 μετρηση της ειδικής θερμότητας στερεών
και υγρών

1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	330
2.	ΘΕΩΡΙΑ	332
2.1	Θερμοχωρητικότητα και Εδική Θερμότητα ενός Υλικού	332
2.2	Μέθοδος Προσδιορισμού Ειδικής Θερμότητας	337
2.3	Διόρθωση των Ακραίων Θερμοκρασιών Λόγω Απωλειών Θερμότητας	339
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ	341
3.1	Θερμιδόμετρο Νερού	341
3.2	Μέτρηση Ειδικής Θερμότητας c_p Στερεών	342
3.3	Μέτρηση Ειδικής Θερμότητας c_p Υγρών	342
3.4	Μελέτη της Θερμομονωτικής Ικανότητας του Θερμιδόμετρου ...	343
3.5	Προσδιορισμός της Θερμοχωρητικότητας του Θερμιδόμετρου ...	344
3.6	Προσδιορισμός c_{AB} του Αλουμινίου	346
3.7	Προσδιορισμός της Ειδικής Θερμότητας c_{Fe} του Σιδήρου	347
3.8	Προσδιορισμός της ειδικής θερμότητας c_K ενός κράματος	348
3.9	Επαλήθευση του Νόμου των Dulong-Petit	349

ΑΣΚΗΣΗ 18 θερμιδομετρία με τη μεθοδο της ηλεκτρικής
θερμανσης (Φαινομενο Joule)

1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	351
2.	ΘΕΩΡΙΑ	352
2.1	Προσδιορισμός της Ειδικής Θερμότητας C_U με Ηλεκτρική Θέρμανση	352

2.2	Προσδιορισμός της θερμοχωρητικότητας C_{θ} του θερμιδόμετρου	355
2.3	Προσδιορισμός του Ηλεκτρικού Ισοδύναμου της Θερμότητας	356
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ	356
3.1	Γενικά	356
3.2	Προσδιορισμός Ηλεκτρικού Ισοδύναμου της Θερμότητας με Σταθερό Χρόνο Θέρμανσης	357
3.3	Προσδιορισμός Ηλεκτρικού Ισοδύναμου της Θερμότητας με Σταθερό Ηλεκτρικό Ρεύμα	358
3.4	Μέτρηση της Ειδικής Θερμότητας της Μεθυλικής Αλκοόλης	359
ΑΣΚΗΣΗ 19	προσδιορισμός του $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$	360
1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	360
2.	ΘΕΩΡΙΑ	361
2.1	Γενικά	361
2.2	Θεωρητικός Υπολογισμός του γ	363
2.3	Μέθοδος Προσδιορισμού του $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ για Αέρια	366
2.3.1	Μέθοδος του Rüchardt	367
2.3.2	Μέθοδος του Rinkel	370
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ	371
3.1	Υπολογισμός της Μάζας της Σφαίρας και Καθαριότητα των Οργάνων	371
3.2	Προσδιορισμός του γ για τον Αέρα με τη Μέθοδο Rüchardt	372
3.3	Προσδιορισμός του γ για τον Αέρα με τη Μέθοδο Rinkel	373



ΑΣΚΗΣΗ 20	προσδιορισμός της θερμότητας εξαερώσης ...	374
1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	374
2.	ΘΕΩΡΙΑ	374
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ	376
3.1	Διάταξη	376
3.2	Διεργασία	379
ΑΣΚΗΣΗ 21	θερμική διαστολή	381
1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	381
2.	ΘΕΩΡΙΑ	382
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ	388
3.1	Γραμμική Διαστολή Στερεών	388
3.2	Διαστολή Όγκου Υγρών	390
ΑΣΚΗΣΗ 22	στατιστικά φαινόμενα	392
1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	392
2.	ΘΕΩΡΙΑ	393
2.1	Απαριθμητής Geiger	393
2.2	Οροπέδιο Απαριθμητή Geiger	394
2.3	Στατιστικές Διακυμάνσεις του Αριθμού των Κρούσεων	395
3.	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ	396



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

**μαθηματικά χρησιμα
στη θεωρια σφαλματων**



1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όπως θα διαπιστώσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, η θεωρία των σφαλμάτων είναι απαραίτητη για τις εργαστηριακές ασκήσεις Φυσικής. Προϋπόθεση για την κατανόηση της θεωρίας των σφαλμάτων είναι η γνώση ορισμένων βασικών μαθηματικών, όπως είναι οι παράγωγοι, μερικοί παράγωγοι, σειρές κ.ά. Η διδασκαλία των παραπάνω κεφαλαίων αργεί να γίνει στις παραδόσεις του μαθήματος των μαθηματικών του Α' έτους. Έτσι θεωρείται σκόπιμο, πριν αρχίσουμε τη θεωρία των σφαλμάτων, να κάνουμε μία σύντομη περιγραφή των παραγώγων, των μερικών παραγώγων, των σειρών και των λογαρίθμων. Παρόλα ότι υπάρχουν σχέσεις με ολοκληρώματα στη θεωρία των σφαλμάτων και ασκήσεων, δεν θα ασχοληθούμε με τον ολοκληρωτικό λογισμό διότι αυτός διδάσκεται αργότερα και δεν χρησιμοποιείται πολύ στην επεξεργασία των πειραματικών αποτελεσμάτων των ασκήσεων του βιβλίου αυτού.

2. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Θεωρούμε ένα σωματίδιο που κινείται κατά μήκος μίας ευθείας γραμμής, η οποία μπορεί να είναι ο άξονας x (Σχ. 1). Η θέση του x είναι συνάρτηση του χρόνου και παριστάνεται με $x(t)$. Όπως δείχνει το σχήμα, το σωματίδιο στο χρόνο t βρίσκεται στη θέση $x(t)$, και στο χρόνο $t+\Delta t$ βρίσκεται στη θέση $x(t+\Delta t)$. Δηλαδή στο χρονικό διάστημα Δt έχει διανύσει μία απόσταση Δx που δίνεται από τη σχέση

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) \quad (1)$$

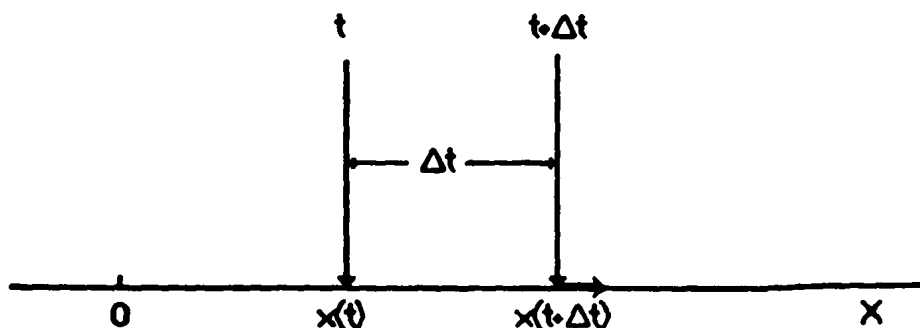
Η μέση ταχύτητά του κατά το χρονικό αυτό διάστημα, σύμφωνα με τον ορισμό, είναι

$$\bar{u}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (2)$$

Εάν το σωματίδιο κινείται, σε ορισμένη διεύθυνση και προς τη θετική φορά του x , με σταθερή ταχύτητα u_0 , τότε η μετατόπισή του είναι ανάλογη του χρονικού διαστήματος Δt :



$$\Delta x = u_0 \Delta t$$



Σχήμα 1: Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος του άξονα x . Μεταξύ των χρόνων t και $t+\Delta t$ η μετατόπιση του είναι Δx .

οπότε η εξίσωση (2) γράφεται

$$\bar{u}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{u_0 \Delta t}{\Delta t} = u_0$$

και η ταχύτητα \bar{u}_x έχει μία σταθερή τιμή ανεξάρτητη της εκλογής των χρόνων t και $t+\Delta t$. Στην περίπτωση, όμως, που το σωματίδιο κινείται με μεταβλητή ταχύτητα, τότε η μέση συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα των x εξαρτάται από τους χρόνους t και $t+\Delta t$. Για μια τέτοια κίνηση, η ποσότητα που έχει σημασία είναι η x συνιστώσα της ταχύτητας κατά τη χρονική στιγμή t . (Όπως θα αναφερθεί στην Άσκηση 2, η ταχύτητα αυτή ονομάζεται στιγμιαία ταχύτητα). Η ταχύτητα αυτή ορίζεται ως εξής:

$$u_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (3)$$

Επειδή το Δx τείνει στο μηδέν όταν το Δt τείνει στο μηδέν, η ταχύτητα ισούται με το όριο του λόγου αυτών καθώς και τα δύο τείνουν στο μηδέν. Εάν το όριο αυτό υπάρχει τότε ονομάζεται παράγωγος του x ως προς t , γράφεται με $\frac{dx}{dt}$ και ορίζεται με την έκφραση



$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (4)$$

Για να υπάρχει το όριο πρέπει η συνάρτηση $x(t)$ να είναι συνεχής. Σύμφωνα με το μαθηματικό ορισμό, μία συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχής για $t = a$: (1) εάν η $x(t)$ είναι ορισμένη στο $t = a$ (2) εάν $\lim_{t \rightarrow a} x(t) = x(a)$ και (3) εάν η

$x(t)$ είναι ορισμένη για όλες τις τιμές του x και από τις δύο πλευρές του $x(a)$. Αν συμβαίνει να έχουμε την περίπτωση $x(t) = \frac{A}{t-1}$ τότε για $t = 1$, $x(1) = \frac{A}{1-1} = \frac{A}{0} = \infty$ και $\lim_{t \rightarrow 0} x(1) = \infty$. Επομένως η συνάρτηση $x(t)$

δεν είναι ορισμένη στο $t = 1$ και συνεπώς δεν είναι συνεχής.

Η παράγωγος που ορίστηκε από την εξίσωση (4) έχει ορισμένη τιμή εάν το x αλλάζει "ομαλά". Από φυσικής πλευράς αυτό σημαίνει ότι η θέση ή η ταχύτητα του σωματιδίου δεν αλλάζει απότομα. Εάν το σωματίδιο, με κάποιο θαύμα, πάει από μια θέση σε μία άλλη σε χρόνο μηδέν ($\Delta t = 0$) τότε η ταχύτητά του δεν έχει μία μόνο τιμή τη στιγμή της μεταφοράς ($u_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{0} = \infty$). Με άλλα λόγια η ταχύτητα

δεν είναι ορισμένη τη στιγμή της μεταφοράς. Η παράγωγος ισούται επίσης με την κλίση μίας ευθείας ή καμπύλης σε ένα διάγραμμα με συντεταγμένες τη συνάρτηση και τη μεταβλητή, αντίστοιχα. Αυτή η πολύ σημαντική άποψη της παραγώγου θα ληφθεί υπόψη για την περιγραφή της ταχύτητας στην Άσκηση 2.

Μέχρι τώρα περιοριστήκαμε για λόγους ευκολότερης κατανόησης στην ειδική περίπτωση της συνάρτησης θέσης $x(t)$ ενός κινητού. Όμως, ο βασικός ορισμός μιας παραγώγου μπορεί να εφαρμοστεί εξίσου καλά σε άλλες συναρτήσεις. Π. χ. εάν f είναι μια συνάρτηση του x τότε

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (5)$$

Είναι σκόπιμο να αναφέρουμε μερικά παραδείγματα συναρτήσεων του x

$f(x) = x^3 - 5x + 7$, $g(x) = (x^2 + 3)^3$, $y(x) = (1 + x)^n$, $h(x) = 4x$, $\varphi(x) = 5$.



Η συνάρτηση $y(x) = (1+x)^n$ είναι ένα διώνυμο της μορφής $(a+\theta)^n$ όπου $n =$ θετικός ακέραιος. Η ανάπτυξη του διωνύμου αυτού είναι χρήσιμη στην κατανόηση των παραγώγων. Σύμφωνα με το θεώρημα του διωνύμου:

$$\begin{aligned} (a+\theta)^n &= a^n + n a^{n-1} \theta + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} \theta^2 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} \theta^3 + \dots + n a \theta^{n-1} + \theta^n \end{aligned} \quad (6)$$

2.1 Κανόνες Παραγώγισης

2.1.1 Παράγωγος Σταθεράς

Εάν $y = K$, όπου $K =$ σταθερά, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dK}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Αυτό είναι ευνόητο γιατί η μεταβολή μίας σταθεράς είναι μηδέν, επομένως:

$$\text{Εάν } y = K \quad \text{τότε } \frac{dy}{dt} = 0 \quad (7)$$

2.1.2 Παράγωγος της Γενικής Μορφής $y = x^n$

Εάν υπάρχει μία αύξηση του x κατά Δx αυτό προκαλεί μία αύξηση του y κατά Δy . Επομένως

$$\eta \quad y = x^n \quad \text{γίνεται } y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

το δεξί μέρος μπορεί να αναπτυχθεί σύμφωνα με το θεώρημα του διωνύμου:

$$y + \Delta y = x^n + n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n$$

Από την εξίσωση αυτή αφαιρούμε την $y = x^n$ κατά μέλη, οπότε έχουμε



$$y + \Delta y - y = x^n - x^n + nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n$$

$$\text{ή } \Delta y = n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n$$

οπότε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x) + \dots + (\Delta x)^{n-1}$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] = \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

άρα

$$\text{Εάν } y = x^n \text{ τότε } \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \quad (8)$$

Παραδείγματα:

$$(a) \text{ Εάν } y = x^3 \text{ τότε } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

$$(b) \text{ Εάν } y = \sqrt{x} = x^{1/2} \text{ τότε } \frac{d(x^{1/2})}{dx} = \frac{1}{2} x^{1/2 - 1} = \frac{x^{-1/2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.1.3 Παράγωγος της $y = k u(x)$

όπου $k = \text{σταθερά}$ και $u(x)$ συνάρτηση του x

Με βάση το σκεπτικό των προηγούμενων παραγράφων μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\frac{d[ku(x)]}{dx} = k \frac{du(x)}{dx} \quad (9)$$

Παράδειγμα:

Εάν $k = 10$ και $u = x^3$ τότε



$$\frac{d}{dx}(10x^3) = 10 \frac{d(x^3)}{dx} = 30x^2$$

Σημείωση: Οι αποδείξεις των υπολοίπων περιπτώσεων παραγώγισης δεν είναι απαραίτητες για το σκοπό του κεφαλαίου αυτού και θα παραληφθούν.

2.1.4 Παράγωγος Αθροίσματος Συναρτήσεων Μίας Μεταβλητής

Εάν $y = u(x) + v(x)$, τότε

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad (10)$$

Παράδειγμα:

Εάν $u = 2x$ και $v = 3x^2$ τότε

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{d}{dx}(2x + 3x^2) = \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(3x^2) = 2 + 6x$$

2.1.5 Παράγωγος Γινομένου Συναρτήσεων

Εάν $y = u(x) \cdot v(x)$ τότε

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad (11)$$

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \text{Εάν } u = 3x^2, v = x^3, \text{ τότε } \frac{d[(3x^2)(x^3)]}{dx} &= 3x^2 \frac{d}{dx}(x^3) + x^3 \frac{d}{dx}(3x^2) = \\ &= 3x^2 \cdot 3x^2 + x^3 \cdot 6x = 9x^4 + 6x^4 = 15x^4 \end{aligned}$$



Αυτό επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι $(3x^2) \cdot (x^3) = 3x^5$, οπότε $\frac{d(3x^5)}{dx} = 15x^4$.

2.1.6 Παράγωγος Πηλίκου Συναρτήσεων

Εάν $y = \frac{u(x)}{v(x)}$, τότε

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{u}{v} \right] = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad (12)$$

Παράδειγμα:

Εάν $y = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$, $x^2 \neq 1$. Τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right] = \frac{(x^2 - 1) \cdot 2x - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

2.1.7 Παράγωγος Δύναμης με Βάση που Είναι Συνάρτηση

Εάν $y = u(x)^m$ τότε

$$\frac{d(u^m)}{dx} = m u^{m-1} \frac{du}{dx} \quad (13)$$

Παράδειγμα:

Εάν $y = (x^2 + 1)^3$ τότε

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^2 + 1)^3 = 3(x^2 + 1)^2 \frac{d}{dx} (x^2 + 1) = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = \\ &= 6x(x^2 + 1)^2 \end{aligned}$$



2.1.8 Αλυσωτός Κανόνας Παραγώγισης

Εάν $y = F(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x και $x = f(t)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του t τότε και η $y = F[f(t)]$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του t , οπότε μπορούμε να γράψουμε τη σχέση

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (14)$$

που ονομάζεται αλυσωτός κανόνας παραγώγισης.

Παράδειγμα:

Εάν $y = F(x) = 3x + 1$ και $x = f(t) = 2t^2$ τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = (3 + 0) (4t) = 12t$$

2.1.9 Παράγωγος Εκθετικής Συνάρτησης

Εάν $y = e^{u(x)}$ τότε

$$\frac{d}{dx} (e^u) = e^u \frac{du}{dx} \quad (15)$$

Παράδειγμα:

$y = a_0 e^{-\lambda x}$, όπου a_0 και $\lambda =$ σταθερές. Εδώ η μεταβλητή συνάρτηση είναι

$u = -\lambda x$ οπότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (a_0 e^{-\lambda x}) = a_0 \frac{d}{dx} (e^{-\lambda x}) = a_0 e^{-\lambda x} \frac{d(-\lambda x)}{dx} = - a_0 \lambda e^{-\lambda x}$$

2.1.10 Παράγωγος Λογαριθμικής Συνάρτησης

Εάν $y = \ln u(x)$ τότε



$$\frac{d}{dx} [\ln(u)] = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad (16)$$

Παραδείγματα:

(α) Εάν $y = \ln x$ τότε $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dx} = \frac{1}{x}$

(β) Εάν $y = \ln(ax)$ τότε $\frac{d(\ln ax)}{ax} = \frac{1}{ax} \frac{d(ax)}{dx} = \frac{1}{x}$

(γ) Εάν $y = \ln e^{-\lambda x}$ τότε $\frac{d(\ln e^{-\lambda x})}{dx} = \frac{1}{e^{-\lambda x}} \frac{d(e^{-\lambda x})}{dx} =$
 $= \frac{1}{e^{-\lambda x}} e^{-\lambda x} (-\lambda) = -\lambda$

2.1.11 Παράγωγοι Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

(α) Εάν $y = \sin u(\theta)$ τότε

$$\frac{d(\sin u)}{d\theta} = \cos u \frac{du}{d\theta} \quad (17)$$

(β) Εάν $y = \cos u(\theta)$ τότε

$$\frac{d(\cos u)}{d\theta} = -\sin u \frac{du}{d\theta} \quad (18)$$

(γ) Εάν $y = \tan u(\theta)$ τότε

$$\frac{d(\tan u)}{d\theta} = \sec^2 u \frac{du}{d\theta} \quad (19)$$

Παραδείγματα:

(α) Εάν $y = \sin a\theta$ τότε $\frac{d}{d\theta} (\sin a\theta) = (\cos a\theta) \frac{d(a\theta)}{d\theta} = a \cos a\theta$



$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad \text{Εάν } y = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \text{ τότε } \frac{d}{d\theta} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] &= \\ &= \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \end{aligned}$$

2.2 Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Όπως θα δούμε αργότερα, η στιγμιαία επιτάχυνση δίνεται από την παράγωγο της στιγμιαίας ταχύτητας. Εάν θεωρήσουμε κίνηση πάνω στον άξονα των x έχουμε

$$a_x = \frac{du_x}{dt}$$

Η στιγμιαία ταχύτητα, όμως, ορίζεται σαν η παράγωγος του διαστήματος ως προς το χρόνο, δηλαδή,

$$u_x = \frac{dx}{dt}$$

Επομένως η επιτάχυνση γράφεται

$$a_x = \frac{d}{dt} \left[\frac{dx}{dt} \right] = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Η έκφραση $\frac{d^2x}{dt^2}$ ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο.

Γενικά εάν $y = u(x)$ τότε

$$\boxed{\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right)} \quad (20)$$

Παράδειγμα:

Εάν $S = ax^3 + \beta x + \gamma$ τότε

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d(ax^3 + \beta x + \gamma)}{dx} \right] = \frac{d}{dx} (3ax^2 + \beta) = 6ax$$



Για λόγους ευκολίας στη γραφή των παραγώγων αντί του συμβολισμού d/dx χρησιμοποιούμε τους τόνους. Έτσι μπορούμε να παριστάνουμε τις παραγώγους με δύο τρόπους:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = f''(x)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} f(x) = f'''(x)$$

· · ·
· · ·
· · ·

$$\frac{d^m}{dx^m} f(x) = f^{(m)}(x)$$

2.3 Μερικοί Παράγωγοι

Στη φυσική καθώς και σε άλλα επιστημονικά πεδία βρίσκουμε συναρτήσεις με περισσότερες της μίας μεταβλητές, όπως η

$$u = f(x, y, z)$$

που είναι συνάρτηση τριών μεταβλητών, της x , y και z . Μπορούμε να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση ως προς τη μία μεταβλητή π. χ. την x και τις άλλες δύο (y και z) τις θεωρούμε σταθερές. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για μερική παραγωγή και το σύμβολο της μερικής παραγωγής είναι τώρα ∂ αντί d . Έτσι εάν θέλουμε να βρούμε τη μερική παράγωγο της $u = f(x, y, z)$ ως προς x γράφουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$$

Παραδείγματα:

(α) Εάν $u = x \cdot y \cdot z$ τότε



$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

(β) Εάν $z = f(x, y) = 3x^2 + y + y^2$ τότε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(3x^2 + y + y^2)}{\partial x} = \frac{\partial(3x^2)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial x} = 6x + 0 + 0 = 6x$$

και

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 + y + y^2)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2)}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} = 0 + 1 + 2y = 2y + 1$$

(γ) Εάν $g = 4\pi^2 \frac{1}{T^2} = g(I, T)$ τότε

$$\frac{\partial g}{\partial I} = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{\partial I}{\partial I} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

και

$$\frac{\partial g}{\partial T} = 4\pi^2 I \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{T^2} \right) = 4\pi^2 I \left(\frac{-2}{T^3} \right) = -\frac{8\pi^2 I}{T^3}$$

3. ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR ΚΑΙ MAC-LAURIN

Για να αναπτύξουμε μία συνάρτηση σε σειρά Taylor κάνουμε τα εξής:

- (1) Βρίσκουμε την πρώτη, τη δεύτερη, την τρίτη, τέταρτη, κ.ο.κ. μέχρι τη νιοστή παράγωγο της συνάρτησης.
- (2) Βρίσκουμε την τιμή της συνάρτησης για $x = a$, (η τιμή του $x = a$ μας δίνεται) την τιμή της πρώτης παραγώγου για $x = a$, της δεύτερης για $x = a$, της τρίτης, τέταρτης κ.ο.κ. της νιοστής για $x = a$.
- (3) Εισάγουμε τις τιμές αυτές στον τύπο:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^m}{m!} f^{(m)}(a)$$



που είναι το ανάπτυγμα της συνάρτησης σε σειρά Taylor.

Στην ειδική περίπτωση που $a = 0$ δηλαδή $x = 0$ ο τύπος (21) παίρνει τη μορφή

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^m}{m!} f^{(m)}(0) \quad (22)$$

που δίνει το ανάπτυγμα μίας συνάρτησης $f(x)$ σε σειρά Mac-Laurin. Δηλαδή ο τύπος του Taylor ισχύει για κάθε τιμή του x , ενώ ο τύπος του Mac-Laurin μας δίνει το ανάπτυγμα μίας συνάρτησης για $x = 0$. Με άλλα λόγια ο τύπος του Taylor μας δίνει το ανάπτυγμα μίας συνάρτησης κατά τις δυνάμεις του $x-a$ ενώ ο τύπος του Mac-Laurin κατά τις δυνάμεις του x .

Παράδειγμα:

Να αναπτυχθεί σε σειρά Mac-Laurin η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Λύση: $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$	$f(0) = 1$
$f'(x) = (1-x)^{-2} = 1! (1-x)^{-2}$	$f'(0) = 1!$
$f''(x) = 2 (1-x)^{-3} = 2! (1-x)^{-3}$	$f''(0) = 2!$
$f'''(x) = 6 (1-x)^{-4} = 3! (1-x)^{-4}$	$f'''(0) = 3!$
.	.
.	.
.	.
$f^{(m)}(x) = m! (1-x)^{-(m+1)}$	$f^{(m)}(0) = m!$

Θέτω τις τιμές αυτές στον τύπο (22) και έχω

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} 1! + \frac{x^2}{2!} 2! + \frac{x^3}{3!} 3! + \dots + \frac{x^m}{m!} m!$$

άρα

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^m.$$



4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ

4.1 Διαφορικά dx και dy

Μπορούμε να ορίσουμε τα dx και dy με τέτοιο τρόπο ώστε ο λόγος αυτών, όταν $dx \neq 0$, να είναι ο ίδιος όπως η παράγωγος του y ως προς x . Αυτό γίνεται στην περίπτωση που το x είναι ανεξάρτητη μεταβλητή και το y είναι συνάρτηση του x . Όταν λοιπόν το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και

$$y = F(x)$$

μπορούμε να υιοθετήσουμε τους παρακάτω ορισμούς:

(α) dx , ονομάζεται **διαφορικό του x** και μπορεί να είναι κάθε πραγματικός αριθμός, δηλαδή dx είναι μία άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή που βρίσκεται στην περιοχή $-\infty < dx < +\infty$ και

(β) dy , ονομάζεται **διαφορικό του y** , που είναι συνάρτηση του x και dx και δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{dy = F'(x)dx} \quad (23)$$

όπου $F'(x)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης $F(x)$ ως προς x .

Όπως προκύπτει από την (23) τα διαφορικά dx και dy έχουν τις ιδιότητες:

(1) Εάν $dx = 0$, τότε $dy = 0$ και

(2) Εάν $dx \neq 0$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F'(x) dx}{dx} = F'(x) \quad (24)$$

που είναι η παράγωγος του y ως προς x .

Παράδειγμα:

Εάν $y = x^3 = F(x)$, τότε

$F'(x) = 3x^2$ και $dy = F'(x)dx = 3x^2dx$



Επίσης μπορούμε να ξεκινήσουμε με την παραγωγή της $y = F(x)$ ως προς x

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

και μετά να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης αυτής με dx παίρνοντας έτσι το διαφορικό dy

$$dy = 3x^2 dx$$

Το δεύτερο αυτό σκεπτικό της αρχικής παραγωγής είναι αρκετά βολικό γιατί αποφεύγουμε τη μνημόνευση νέων κανόνων εύρεσης διαφορικών.

4.2 Ολικό Διαφορικό

Εάν έχουμε μία συνάρτηση με περισσότερες της μίας μεταβλητές, δηλαδή

$$\omega = f(x, y, z) \quad (25)$$

τότε το διαφορικό αυτής της συνάρτησης ορίζεται με τη σχέση

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x} dx + \frac{\partial\omega}{\partial y} dy + \frac{\partial\omega}{\partial z} dz \quad (26)$$

Οι όροι

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} dy, \quad \frac{\partial\omega}{\partial z} dz$$

είναι τα μερικά διαφορικά της ω σε συνάρτηση των x, y, z αντίστοιχα. Έτσι το άθροισμα αυτών των μερικών διαφορικών που δίνεται από την (26) ονομάζεται ολικό διαφορικό του ω .

Εάν x, y, z είναι ανεξάρτητες μεταβλητές της (25), τότε dx, dy και dz είναι τρεις νέες μεταβλητές της (26). Αλλά σε κάθε πρόβλημα που περιλαμβάνει μικρές μεταβολές τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y, \quad dz = \Delta z$$



οπότε το διαφορικό $d\omega$, με μία καλή προσέγγιση είναι $d\omega = \Delta\omega$. Αυτή η προσέγγιση είναι πολύ σημαντική για την εύρεση των σφαλμάτων. Το διαφορικό μίας μεταβλητής μπορεί να παρθεί κατά προσέγγιση, ίσο με το σφάλμα αυτής και το ολικό διαφορικό σαν το ολικό σφάλμα.

Παράδειγμα:

$$\text{Εάν } g = f(l, T) = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}, \text{ τότε}$$

$$dg = \frac{\partial g}{\partial l} dl + \frac{\partial g}{\partial T} dT \text{ και}$$

$$dg = \left(\frac{4\pi^2}{T^2} \right) dl + \left(-\frac{8\pi^2 l}{T^3} \right) dT$$

5. ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΚΑΙ ΝΕΠΕΡΕΙΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Οι λογάριθμοι με βάση το δέκα ονομάζονται δεκαδικοί λογάριθμοι και παριστάνονται συνήθως με "log". Έτσι

$$\log 10 = 1, \log 10^2 = 2, \log 10^3 = 3$$

$$\text{και } \log 10^x = x \quad (27)$$

Ένα άλλο σύστημα λογαρίθμων χρησιμοποιεί σα βάση το e ($e=2.718\dots$). Οι λογάριθμοι με βάση το e ονομάζονται φυσικοί λογάριθμοι ή Νεπέρειοι λογάριθμοι από το όνομα εκείνου που τους χρησιμοποίησε πρώτος. Αυτοί συμβολίζονται με "ln". Έτσι

$$\ln e = 1, \ln e^2 = 2, \ln e^3 = 3, \ln e^x = x$$



$$\eta \quad x = e^{\ln x} \quad (28)$$

Πολλές φορές και ιδίως στην ανάλυση των πειραματικών δεδομένων των ασκήσεων του βιβλίου αυτού είναι απαραίτητη η μετατροπή του $\ln x$ σε $\log x$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα των λογαρίθμων

$$\log (m^n) = n \log m \quad (29)$$

Μπορούμε να λογαριθμίσουμε την (28) με βάση το δέκα, οπότε

$$\log x = \log e^{\ln x}$$

$$\eta \quad \log x = (\ln x) \log e$$

$$\eta \quad \log x = 0.4343 \ln x$$

άρα

$$\log x = \frac{1}{2.303} \ln x \quad (30)$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

θεωρία σφαλμάτων



1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πρώτο βήμα στην κατανόηση ενός φαινομένου είναι να βρούμε τους νόμους που το περιγράφουν. Οι νόμοι περιγράφονται από τη σχέση δύο ή περισσότερων μεγεθών (μεταβλητών) και μας δείχνουν πως μεταβάλλεται ένα φυσικό μέγεθος, όταν κάποιιο άλλο μέγεθος, που το επηρεάζει, μεταβάλλεται. Οι νόμοι αυτοί, που συνήθως εκφράζονται με μαθηματικές σχέσεις, βρίσκονται από πειραματικά δεδομένα. Η συστηματική μελέτη των φυσικών φαινομένων γίνεται κυρίως με μία συνεχή διαδικασία που μπορεί να ξεκινάει από πειραματικά δεδομένα. Αυτά μας οδηγούν συνήθως στη διατύπωση μίας θεωρίας. Η θεωρία αυτή μπορεί να μας οδηγήσει στην πρόβλεψη μίας νέας θεωρίας. Όταν οι προβλέψεις αυτές επιβεβαιώνονται με νέα πειραματικά δεδομένα καταλήγουμε στη διαμόρφωση της θεωρίας που προβλέψαμε, κ.ο.κ.

Τα οπτικά πειράματα του Lyman, Paschen κ.ά. έδειξαν ότι ο κλασσικός ηλεκτρομαγνητισμός δεν ήταν επαρκής για την ερμηνεία των. Έτσι, προέκυψε η ανάγκη διατύπωσης μίας νέας θεωρίας, της θεωρίας των Quanta. Αντίθετα τα δεδομένα των πειραμάτων των Michelson και Morley έδειξαν ότι η θεωρία του "Φωτοφόρου αιθέρα" δεν ήταν ορθή.

Η δυναμική αυτή αλληλεξάρτηση πειράματος και θεωρίας και ο πρωταρχικός ρόλος του πειράματος στη διαδικασία της γνώσης του φυσικού κόσμου επιβάλλουν όπως η εκπαίδευση των σπουδαστών των φυσικών επιστημών περιλαμβάνει, πέρα από τη διδασκαλία με παραδόσεις και την εργαστηριακή άσκηση.

Οι πειραματικές μετρήσεις πρέπει να είναι ακριβείς ώστε να οδηγηθούμε σε ορθά συμπεράσματα. Κατά τις μετρήσεις γίνονται σφάλματα που άλλοτε οφείλονται σε συνθήκες παρατήρησης και άλλοτε σε εξωτερικά αίτια που δεν ελέγχονται. Μερικοί από τους παράγοντες που επηρεάζουν τις μετρήσεις και προκαλούν σφάλματα είναι ατέλειες οργάνων, αδεξιότητες παρατηρητού, εξωτερικά πεδία, θερμοκρασία περιβάλλοντος κ.λ.π. Στο κεφάλαιο αυτό, πέρα από τις βασικές αρχές του πειραματισμού θα ασχοληθούμε με τη μελέτη και εύρεση των σφαλμάτων μετρήσεων.



2. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

2.1 Είδη Μετρήσεων

Σ' ένα πείραμα, η εύρεση των σχέσεων μεταξύ μεγεθών προϋποθέτει τη διεργασία μίας μέτρησης. Συνεπώς είναι σκόπιμο να ορίσουμε τι εννοούμε με τον όρο "μέτρηση". " Μέτρηση ενός μεγέθους A είναι η διεργασία σύγκρισης αυτού προς ομοειδές μέγεθος a που αυθαίρετα λαμβάνεται σα μονάδα. Η αριθμητική τιμή του μεγέθους A , είναι ο λόγος του μεγέθους A προς την ορισμένη μονάδα a ".

Τις μετρήσεις τις διακρίνουμε σε δύο κατηγορίες: τις **απλές** (άμεσες) και τις **σύνθετες** (ή έμμεσες). Απλές είναι οι μετρήσεις στις οποίες η αριθμητική τιμή ενός μεγέθους προκύπτει απευθείας από μία παρατήρηση π.χ. η μέτρηση του μήκους μίας ράβδου με μία μετροταινία είναι μία απλή μέτρηση. Σύνθετες είναι οι μετρήσεις με τις οποίες η αριθμητική τιμή ενός μεγέθους προκύπτει σα συνάρτηση των τιμών άλλων μεγεθών, που προέκυψαν από απλές μετρήσεις, π.χ. η μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g με τη μέθοδο του απλού εκκρεμούς είναι μία σύνθετη μέτρηση, γιατί μετριέται το μήκος l και η περίοδος T του εκκρεμούς. Το g προκύπτει σα συνάρτηση αυτών με βάση τη γνωστή σχέση $g = \frac{4\pi^2}{T^2} l$. Στην αρχή θα μας απασχολήσουν οι απλές μετρήσεις και αργότερα οι σύνθετες.

2.2 Ακρίβεια και Πιστότητα

Η λέξη "ακρίβεια" αναφέρεται στη διακριτική ικανότητα της μέτρησης, δηλαδή πόσο στενά είναι τα όρια μέσα στα οποία μπορεί να προσδιοριστεί η τιμή του μεγέθους που μετράμε. Λέμε π.χ. ότι ένα διαστημόμετρο μετρά μήκος "με ακρίβεια δεκάτου του χιλιοστού". Στην περίπτωση που ρωτάμε ποιά είναι η "ακριβής ώρα" αναφερόμαστε στην **πιστότητα** της μέτρησης και όχι στην ακρίβεια. Δηλαδή στο πόσο κοντά στην "πραγματική τιμή" του μεγέθους που μετριέται βρίσκεται η τιμή που προσδιορίζει τη μέτρηση. Με άλλα λόγια η "ακρίβεια" και η "πιστότητα" είναι δύο διαφορετικές έννοιες. Μία μέτρηση μπορεί να είναι ακριβής αλλά η τιμή που προσδιορίζει να βρίσκεται μακριά από την πραγματική τιμή του μεγέθους

που μετριέται. Στο παράδειγμα του διαστημόμετρου είναι φανερό ότι η ακρίβεια-του είναι ανεξάρτητη από το πόσο "σωστό" είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης. Όπως θα δούμε αργότερα, το αποτέλεσμα κάθε μέτρησης εκφράζεται με το συμβολισμό $\langle x \rangle \pm \sigma$, όπου x είναι το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης και σ το πειραματικό σφάλμα που συνοδεύει τη μέτρηση. Αν το ρολόι που μετρά το χρόνο δεν διαθέτει δεύτερο-λεπτοδείκτη, μπορεί να δείχνει την "πραγματική" ώρα, αλλά με μικρή ακρίβεια μέσα στα όρια του ενός πρώτου λεπτού. Ο αναγνώστης ίσως διακρίνει ότι η ακρίβεια μίας μέτρησης αφορά κυρίως τη δεύτερη παράμετρο της σχέσης $\langle x \rangle \pm \sigma$, ενώ η πιστότητα ανακλάται τόσο στην πρώτη όσο και στη δεύτερη.

Θα περιορίσουμε τον όρο **διακριτική ικανότητα** αποκλειστικά στην αξιολόγηση οργάνων μέτρησης. Για μία μοναδική μέτρηση που παραγματοποιείται από ένα συγκεκριμένο όργανο, η διακριτική ικανότητα αποτελεί τη μέγιστη ακρίβεια με την οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί η μέτρηση.

Ορίζουμε ακόμη την **απόλυτη ακρίβεια** μίας μέτρησης (ή **απόλυτη διακριτική ικανότητα** ενός οργάνου). Αυτή εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες που χρησιμοποιούνται για το μέγεθος που μετριέται (στην περίπτωση του διαστημόμετρου σε mm). Η **σχετική ακρίβεια** εκφράζει την ίδια ιδιότητα σε ποσοστιαίες μονάδες σε σχέση με την απόλυτη τιμή που προσδιορίζει η μέτρηση. Π.χ. ένας ζυγός που μπορεί να προσδιορίζει τη μάζα ενός αντικειμένου 10gr με απόλυτη διακριτική ικανότητα 0.001 gr διαθέτει σχετική διακριτική ικανότητα $\frac{0.001}{10} = 10^{-4}$ ή $\frac{0.001}{10} \cdot 100 = 0.01\%$.

Είναι βέβαιο ότι καμιά μέτρηση δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί με απόλυτη πιστότητα ή απόλυτη ακρίβεια. Κατά τη διεξαγωγή μίας μέτρησης γίνονται σφάλματα ακόμα και όταν η προσοχή του παρατηρητή είναι μεγάλη.

2.3 Σημαντικά ψηφία

Σημαντικά ψηφία ενός αριθμού ορίζονται τα ψηφία, που είναι γνωστά με βεβαιότητα και ένα ψηφίο ακόμα που είναι το πρώτο αβέβαιο ή κατ' εκτίμηση. Στον υπολογισμό των σημαντικών ψηφίων λογαριάζουμε τη σειρά



όλων των ψηφίων του αριθμού χωρίς να παίρνουμε υπόψη την υποδιαστολή. Σε περίπτωση αριθμού μικρότερου της μονάδας δεν υπολογίζουμε το μηδέν πριν από την υποδιαστολή ή τα μηδενικά αμέσως μετά από την υποδιαστολή. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται δυνάμεις του 10 τα σημαντικά ψηφία είναι αυτά που περιέχει ο προεκθετικός όρος. Παραδείγματα υπολογισμού σημαντικών ψηφίων δίνονται στον επόμενο Πίνακα.

Η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους με οποιοδήποτε όργανο δίνει μία αριθμητική τιμή που μπορούμε να διαβάσουμε στην κλίμακα του οργάνου.

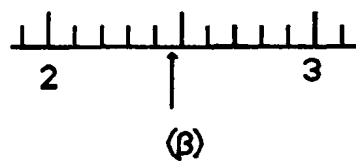
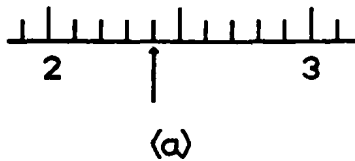
Στο Σχ. 1(α), το βέλος δείχνει ακριβώς τη χαραγή που αντιστοιχεί στον αριθμό 2.4. Οι χαραγές της κλίμακας του οργάνου χρησιμεύουν για την ανάγνωση των ψηφίων που είναι γνωστά με βεβαιότητα. Έτσι και τα δύο ψηφία του αριθμού 2.4 είναι βέβαια ψηφία. Όταν όμως το βέλος βρίσκεται μεταξύ δύο χαραγών, τότε τα βέβαια ψηφία της μέτρησης δίνονται από την τελευταία χαραγή προ του δείκτη, στην περίπτωση του Σχ. 1(β) είναι 2.4. Πρέπει όμως να ληφθεί υπόψη και το διάστημα που υπάρχει μεταξύ της τελευταίας χαραγής και του σημείου που αντιστοιχεί στο βέλος. Το διάστημα αυτό εκτιμάται από τον παρατηρητή και προστίθεται στην τιμή σαν αβέβαιο ή κατ' εκτίμηση ψηφίο. Έτσι στο Σχ. 1(β) η απόσταση μεταξύ δύο χαραγών αντιστοιχεί σε μέγεθος ίσο με 0.1 και η απόσταση μεταξύ της τελευταίας χαραγής (προ του βέλους) και του βέλους θα αντιστοιχεί σε 0.06 περίπου. Επομένως η μέτρηση μας δίνει τον αριθμό 2.46, όπου τα ψηφία 2 και 4 είναι βέβαια και το 6 είναι κατ' εκτίμηση ψηφίο. Ίσως για κάποιον άλλο παρατηρητή το κατ' εκτίμηση ψηφίο να ήταν 5 αντί 6 οπότε η μέτρηση θα έδινε τον αριθμό 2.45. Το τελευταίο ψηφίο, οποιασδήποτε αριθμητικής τιμής, λαμβάνεται πάντοτε κατ' εκτίμηση. Για να βρούμε το πιθανότερο κατ' εκτίμηση ψηφίο είναι σκόπιμο να κάνουμε πολλές μετρήσεις. Για τον προσδιορισμό του όγκου ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου έγιναν οι παρακάτω μετρήσεις του μήκους l , του πλάτους W και του ύψους h :

$$l = 15.27 \text{ cm}, \quad W = 9.30 \text{ cm}, \quad h = 5.57 \text{ cm}.$$



Πίνακας 1+

Αριθμός σημαντικών ψηφίων	2	3	4
Αριθμοί με σημαντικά ψηφία	23 0.17 0.0026 3.7×10^7 2300	21.3 0.271 0.00260 3.70×10^7 2350	26.30 0.3782 0.002706 3.700×10^7 235400



Σχήμα 1: Εύρεση των βέβαιων και κατ' εκτίμηση ψηφίων σε μία κλίμακα μέτρησης.

+ Σημείωση: Στην περίπτωση των τελευταίων δύο σειρών του Πίνακα είναι απαραίτητο να κάνουμε μία διευκρίνιση. Για παράδειγμα παίρνουμε τον αριθμό 235400 που έχει καταρχή τέσσερα σημαντικά ψηφία. Όμως είναι δυνατόν η μέτρηση να έγινε με ακρίβεια του έκτου ψηφίου οπότε ο αριθμός έχει έξι σημαντικά ψηφία. Γιαυτό πολλοί συγγραφείς για να δώσουν έμφαση στην τελευταία περίπτωση γράφουν τον αριθμό με υποδιαστολή στο τέλος που σημαίνει ότι η ακρίβεια πάρθηκε μέχρι το τελευταίο προ της υποδιαστολής ψηφίο. Άλλοι συγγραφείς πάλι βάζουν μία παύλα στο τελευταίο σημαντικό ψηφίο π.χ. $23\bar{5}00$ έχει τρία σημαντικά ψηφία.



Το αποτέλεσμα της μέτρησης του ύψους h ήταν 5.57 cm. Τα δύο πρώτα ψηφία 5 και 5 είναι βέβαια ενώ το ψηφίο 7 είναι κατ' εκτίμηση. Στη μέτρηση του πλάτους W ο αριθμός 9.30 περιέχει δύο βέβαια ψηφία 9 και 3 και το τρίτο 0 κατ' εκτίμηση. Το μηδέν δεν μπορεί να παραληφθεί, γιατί τότε θα θεωρηθεί σαν κατ' εκτίμηση ψηφίο το τελευταίο βέβαιο ψηφίο. Ο όγκος του παραλληλεπίπεδου βρίσκεται:

$$V = l \cdot W \cdot h = 791.00127 \text{ cm}^3 \quad (1)$$

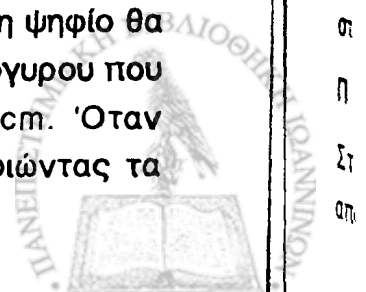
Η τιμή αυτή δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν η πραγματική τιμή του όγκου, γιατί αυτό σημαίνει ότι όλα τα ψηφία του αποτελέσματος, εκτός από το τελευταίο, είναι βέβαια. Επομένως υπάρχει μία ασάφεια στον αριθμό των ψηφίων που παίρνουμε στο εξαγόμενο του όγκου. Αυτή υπάρχει σε όλα τα παράγωγα μεγέθη που βρίσκονται με πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Η ασάφεια αυτή περιορίζεται με το λεγόμενο **στρογγύλεμα**. **Στρογγύλεμα** ενός αριθμού είναι η απομάκρυνση ψηφίων-του, τα οποία θεωρούνται άχρηστα, αν ληφθεί υπόψη η ακρίβεια της μεθόδου με την οποία πάρθηκε.

2.4 Στρογγύλεμα Παράγωγο Αποτελέσματος

Όταν βρίσκουμε ένα παράγωγο αποτέλεσμα που προκύπτει από μία πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση, ακολουθεί συχνά το ερώτημα: Πόσα ψηφία θα κρατήσουμε στο παράγωγο αποτέλεσμα; Η απάντηση μπορεί να δοθεί καλύτερα αν εξετάσουμε τις πράξεις χωριστά.

Π ρ ό σ θ ε σ η:

Όπως είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο, σε ένα αριθμό που προέρχεται από μία μέτρηση το τελευταίο σημαντικό ψηφίο είναι συνήθως κατ' εκτίμηση ψηφίο ενώ όλα τα προηγούμενα ψηφία του αριθμού είναι βέβαια. Όταν πρόκειται να προσθέσουμε αριθμούς που προέρχονται από μετρήσεις με το ίδιο όργανο, τότε θα έχουμε την ίδια ακρίβεια και το κατ' εκτίμηση ψηφίο θα είναι της ίδιας τάξης. Για παράδειγμα θεωρούμε μία στήλη υδράργυρου που το ύψος-της, στη θερμοκρασία δωματίου, έχει βρεθεί 38.14 cm. Όταν θερμανθεί ο υδράργυρος, η στάθμη-του ανέρχεται. Χρησιμοποιώντας τα



ίδια μέτρα βρίσκουμε ότι η άνοδος της στάθμης είναι 0.53 cm. Τόσο το αρχικό μήκος της στήλης όσο και η επιμήκυνση έχουν σαν κατ' εκτίμηση ψηφίο το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο. Το ολικό ύψος της στήλης μετά τη θέρμανση θα δίνεται από την πρόσθεση $38.14 + 0.53 = 38.67$. Το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο (το τελευταίο ψηφίο) του αθροίσματος είναι το κατ' εκτίμηση ψηφίο, όπως και στους προσθετέους. Στην περίπτωση όμως που το αρχικό ύψος της υδραργυρικής στήλης έχει μετρηθεί με ένα μέτρο ακρίβειας 0.01 cm και η ανύψωση της στήλης, μετά τη θέρμανση, με μία οπτική μέθοδο ακρίβειας 0.001 cm βρέθηκε 0.5376 cm, τότε ποιό θα είναι το ολικό ύψος της υδραργυρικής στήλης μετά τη θέρμανση; Αρχικά παίρνεται σαν κοινό κατ' εκτίμηση το ψηφίο του αριθμού με τη μικρότερη ακρίβεια. Οπότε από την ανύψωση παραμένουν μόνο τα δύο πρώτα δεκαδικά ψηφία 0.53, δηλαδή το 0.0076 παραλείπεται. Κατά τη διαδικασία αυτή τα ψηφία που πρόκειται να παραλειφθούν θεωρούνται σαν ένα δεκαδικό κλάσμα μικρότερο της μονάδας του τελευταίου ψηφίου που παραμένει. Σύμφωνα με την εξήγηση που θα δώσουμε πιο κάτω, το κλάσμα αυτό είναι μεγαλύτερο του 0.50 οπότε το τελευταίο ψηφίο που παραμένει αυξάνεται κατά μία μονάδα. Έτσι στην περίπτωση μας η επιμήκυνση της στήλης λαμβάνεται 0.54 cm και το ολικό ύψος της στήλης μετά τη θέρμανση, βρίσκεται $38.14 + 0.54 = 38.68$ cm.

Συμπερασματικά κατά την πρόσθεση αριθμών που προέρχονται από μετρήσεις το αποτέλεσμα έχει τόση ακρίβεια όση έχει ο προσθετέος με τη λιγότερη ακρίβεια.

Α φ α ί ρ ε σ η :

Ισχύουν οι ίδιοι συλλογισμοί που ισχύουν και στην πρόσθεση. Εάν η υδραργυρική στήλη, πάλι αρχικού ύψους 38.14 cm, ψύχεται τότε το ύψος της στήλης ελαττώνεται. Υποθέτουμε ότι η ελάττωση του ύψους βρίσκεται 0.5376 cm και οι μετρήσεις έγιναν πάλι με ένα μέτρο και με μία οπτική μέθοδο ακρίβειας 0.1 cm και 0.001 cm αντίστοιχα. Τότε το τελικό ύψος της στήλης μετά την ψύξη θα είναι : $38.14 - 0.54 = 37.60$.

Π ο λ λ α π λ α σ ι α σ μ ό ς :

Στον πολλαπλασιασμό εκλέγουμε τον αριθμό των ψηφίων του αποτελέσματος του γινομένου ίσο προς τον αριθμό των ψηφίων του



παράγοντα με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία. Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογισμού του όγκου του παραλληλεπίπεδου, ο όγκος που βρέθηκε στη σχέση (1) στρογγυλεύεται στην τιμή 791 cm^3 . Τα ψηφία είναι τώρα τρία γιατί τρία είναι τα ψηφία του παράγοντα με το μικρότερο αριθμό ψηφίων. Στην περίπτωση όμως που ένας ή περισσότεροι από τους παράγοντες δεν προέρχονται από μετρήσεις τότε δεν λαμβάνονται υπόψη στον προσδιορισμό των σημαντικών ψηφίων του αποτελέσματος.

Διαίρεση:

Στην περίπτωση του πηλίκου μίας διαίρεσης εκλέγουμε τον αριθμό των ψηφίων είτε του διαιρετέου είτε του διαιρέτη, εξαρτάται ποιός έχει τα λιγότερα ψηφία. Όταν όμως ο διαιρέτης δεν προέρχεται από μετρήσεις οργάνων τότε εκλέγουμε τον αριθμό των ψηφίων του διαιρετέου.

Τελικά όταν στρογγυλεύουμε αριθμούς: (α) Αυξάνουμε το τελευταίο ψηφίο που κρατάμε κατά μία μονάδα αν το επόμενο είναι μεγαλύτερο του 5. (β) Αφήνουμε το τελευταίο ψηφίο αμετάβλητο αν το επόμενο είναι μικρότερο του 5. (γ) Αν το ψηφίο από το οποίο αρχίζουμε να παραλείπουμε είναι ακριβώς 5, τότε το τελευταίο παραμένει το ίδιο αν είναι άρτιος αριθμός και αυξάνεται κατά μία μονάδα αν είναι περιττός αριθμός. (Εφόσον αναφερόμαστε σε ένα σύνολο τιμών μίας μέτρησης).

Παράδειγμα:

Να γίνουν οι πράξεις και να στρογγυλευτεί το αποτέλεσμα:

$$(α) 21.1 \times 0.029 \times 83.2 = 50.91008 = 51$$

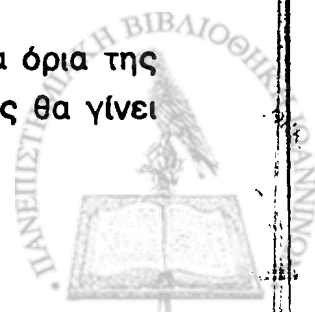
$$(β) 173 \times 242 \times 891 = 37302606 = 3.73 \times 10^7$$

$$(γ) (291 \times 272) : 0.086 = 920372 = 9.2 \times 10^5$$

2.5 Σφάλματα Μετρήσεων

2.5.1 Εισαγωγή

Η ακρίβεια μίας μέτρησης είναι στενά συνδεδεμένη με τα όρια της εμπιστοσύνης που χαρακτηρίζουν τη μέτρηση, και η έννοιά της θα γίνει



πληρέστερα κατανοητή καθώς θα προχωρήσουμε στην ανάπτυξη της θεωρίας σφαλμάτων.

Πέρα από τις ατέλειες κατασκευής των οργάνων μέτρησης, η επίδραση του περιβάλλοντος και ο ανθρώπινος παράγοντας επιδρούν κατά τέτοιο ποικιλόμορφο τρόπο στη διεξαγωγή ενός πειράματος (μέτρησης), που είναι αδύνατο να απαριθμηθούν και να καταγραφούν επακριβώς όλα τα αίτια που συμβάλλουν στην αλλοίωση μίας μέτρησης. Οδηγούμαστε λοιπόν να διακρίνουμε τις κατηγορίες των σφαλμάτων από μία πολύ γενική άποψη.

Μέχρι τώρα δεν έχουμε ορίσει επακριβώς την έννοια του σφάλματος. Αμέσως παρακάτω όμως θα διευκρινίσουμε τι εννοούμε λέγοντες σφάλμα.

2.5.2 Μαθηματικός Ορισμός του Σφάλματος

Έστω N το πλήθος των φυσικών παραμέτρων x_1, x_2, \dots, x_N που επηρεάζουν με οποιοδήποτε τρόπο τη μέτρηση ενός μεγέθους. Υποθέτουμε ότι σε μία ιδανική μέτρηση όπου είναι δυνατό να βρεθεί η αληθινή τιμή a του μετρούμενου μεγέθους οι παραπάνω παράμετροι παίρνουν τις τιμές u_1, u_2, \dots, u_N . Σε μία πραγματική μέτρηση, η τιμή του μεγέθους που μετριέται είναι συνάρτηση της αληθινής τιμής αυτού a και των τιμών x_1, x_2, \dots, x_N των παραμέτρων κατά τη μέτρηση αυτή. Εάν x είναι η μετρούμενη τιμή τότε σύμφωνα με τα παραπάνω

$$x = F(a, x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (2)$$

Στην περίπτωση ιδανικής μέτρησης θα ικανοποιείται προφανώς η συνθήκη

$$a = F(a, u_1, u_2, \dots, u_N) \quad (3)$$

Εάν οι διαφορές $(x_1 - u_1), (x_2 - u_2), \dots, (x_N - u_N)$ ή γενικότερα $(x_i - u_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, είναι μικρές ώστε να μπορούν να παραλειφθούν όροι δεύτερης και ανώτερης τάξης στη σειρά Taylor της συνάρτησης (2) τότε:



$$x - a = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(a, x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_i} \cdot (x_i - u_i) \Big|_{u_1, u_2, \dots, u_i} \quad (4)$$

η διαφορά

$$E = x - a = (\text{μετρούμενη τιμή}) - (\text{αληθινή τιμή}) \quad (5)$$

είναι το σφάλμα που παρατηρήθηκε κατά τη μέτρηση ή το ολικό σφάλμα της μέτρησης και το

$$\varepsilon_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} (x_i - u_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

είναι το σφάλμα της παραμέτρου x_i .

Προφανώς

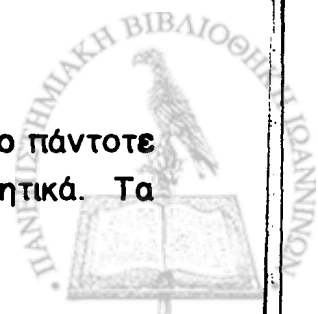
$$E = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \quad (7)$$

Η εξίσωση (7) μας λέει ότι η γνώση όλων των σφαλμάτων ε_i μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το ολικό σφάλμα E και επομένως από την εξίσωση (5), μπορούμε να βρούμε την αληθινή τιμή. Όπως όμως είπαμε και προηγούμενα, είναι αδύνατη η αρίθμηση και ανάλυση όλων των φυσικών αιτίων x_i ($i=1, N$) που αλλοιώνουν το αποτέλεσμα μίας μέτρησης. Μερικά όμως από τα εξωτερικά αίτια x_i είναι δυνατό να προσδιοριστούν, οπότε με τη βοήθεια της (6) να γίνεται μία πρώτη διόρθωση της μέτρησης. Ανάλογα με τη δυνατότητα προσδιορισμού των εξωτερικών αιτίων που επηρεάζουν μία μέτρηση μπορούμε να τα χωρίσουμε σε διάφορες κατηγορίες.

2.5.3 Κατηγορίες Σφαλμάτων

1) Συστηματικά Σφάλματα

Τα σφάλματα αυτά αλλοιώνουν μία μέτρηση κατά τον ίδιο πάντοτε τρόπο και κατά την ίδια φορά δηλαδή είναι είτε θετικά είτε αρνητικά. Τα



αίτια-τους μπορούν να προσδιοριστούν γιατί σχετίζονται με τη μέθοδο της μέτρησης. Τα συστηματικά σφάλματα οφείλονται:

(α) Σε ατέλειες των οργάνων μέτρησης

Οι ατέλειες των οργάνων είναι κυρίως η βαθμολόγηση της κλίμακας και η φθορά του οργάνου.

Βαθμολόγηση της κλίμακας: Είναι γνωστό ότι κάθε όργανο, πριν χρησιμοποιηθεί, πρέπει να βαθμολογηθεί. Η βαθμολόγηση γίνεται με ένα μέγεθος το οποίο ορίζεται σε μονάδα. Μία τέτοια διαδικασία μπορεί να εισάγει σφάλματα στο όργανο, με συνέπεια να παρατηρείται σφάλμα στη διεξαγωγή μίας μέτρησης με το όργανο αυτό. Συνήθως τα σφάλματα βαθμολόγησης είναι συστηματικά. Υπάρχει σχετική ένδειξη επάνω στο όργανο που επιτρέπει στον πειραματιστή να επιφέρει τη σχετική διόρθωση. Όταν, π.χ. μετρούμε το μήκος με κανόνα του οποίου 1000 διαιρέσεις αντιστοιχούν σε 999mm και δεν λάβουμε υπόψη τη διαφορά αυτή του κανόνα από το πραγματικό μέτρο προκύπτει ένα συστηματικό σφάλμα. Για μέτρηση μίας απόστασης ίση με 1m θα υπάρχει σφάλμα 1mm, δηλαδή η βαθμολόγηση του κανόνα έγινε με σφάλμα 0.1%.

Φθορά του οργάνου: Η ατέλεια ενός οργάνου που οφείλεται σε μηχανική φθορά είναι και αυτή πηγή σφαλμάτων. Φθορές, όπως οι τριβές μεταξύ των κινητών μερών, οι κραδασμοί κ.ά. αλλοιώνουν την ομαλή λειτουργία του οργάνου. Ορισμένα όργανα μεγάλης ακρίβειας βαθμολογούνται μπροστά από κάθε μέτρηση.

Όπως θα δούμε στην άσκηση 1, μπορεί το μηδέν της κλίμακας του ακίνητου στελέχους και το μηδέν της κλίμακας του περιστρεφόμενου τυμπάνου να μη συμπίπτουν όταν το παχύμετρο είναι κλειστό. Στην περίπτωση αυτή η διαφορά ενδείξεων τυμπάνου - στελέχους είναι ένα συστηματικό σφάλμα του οργάνου γνωστό από την αρχή που λαμβάνεται υπόψη κατά τη μέτρηση.

(β) Στη Μέθοδο Μέτρησης

Τα σφάλματα αυτά βρίσκονται δύσκολα, γιατί επιβάλλεται ο έλεγχος της μέτρησης και με άλλη μέθοδο.



(Υ) Σε Εξωτερικά Αίτια

Εξωτερικά αίτια όπως η θερμοκρασία, η υγρασία, το γήινο μαγνητικό πεδίο, οι ηλεκτρικές επιδράσεις κ.ά. είναι δυνατό να επηρεάζουν τις μετρήσεις. Στην περίπτωση αυτή πρέπει οι συνθήκες αυτές είτε να λαμβάνονται υπόψη είτε να αναφέρονται.

2) Τυχαία Σφάλματα

Αυτά παρατηρούνται όταν επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου μεγέθους με την ίδια μέθοδο και τα ίδια όργανα δίνουν διαφορετικές αριθμητικές τιμές. Τα σφάλματα αυτά μπορεί να είναι θετικά και αρνητικά και οφείλονται:

(α) Στην περιορισμένη ευαισθησία του οργάνου μέτρησης.

Τα διάφορα μεγέθη μετριοούνται συνήθως με κατάλληλα βαθμολογημένη κλίμακα. Η κλίμακα είναι διαιρημένη σε πεπερασμένο αριθμό διαστημάτων και η πιο λεπτή υποδιαίρεση βάζει ένα όριο στην ακρίβεια του οργάνου. Είναι πράγματι αδύνατο να εκτιμηθούν αποστάσεις με ακρίβεια μεγαλύτερη των 0.5 mm εάν μία μετροταινία έχει υποδιαίρεσεις μέχρι 1 mm.

(β) Στην Ικανότητα του Παρατηρητή

Παρόλες τις τεχνολογικές τελειοποιήσεις ο ανθρώπινος παράγοντας κατέχει εξέχουσα θέση κατά τη διάρκεια μίας μέτρησης. Η πείρα, η προσοχή και η προσωπική ικανότητα του παρατηρητή είναι στοιχεία τα οποία συντελούν στη μεγαλύτερη ακρίβεια των μετρήσεων. Π.χ. κατά τη μέτρηση του χρόνου με χρονόμετρο, η αρχή και το τέλος της μέτρησης σημειώνονται από τον παρατηρητή πιέζοντας το κουμπί του χρονόμετρου. Η ταχύτητα αντίδρασης του παρατηρητή στην έναρξη και το σταμάτημα της λειτουργίας του χρονόμετρου εξαρτάται κατά πολύ από την εμπειρία του. Γενικά είναι σημαντικό να τονιστεί ότι όταν ένα συστηματικό σφάλμα αναγνωρισθεί και εντοπισθεί τότε γίνεται η απαραίτητη διόρθωση και συνεπώς τα συστηματικά σφάλματα δεν θα μας απασχολήσουν άλλο.

(γ) Στην αστάθεια των εξωτερικών συνθηκών.

(δ) Σε πλήθος αστάθμητων παραγόντων.



Στην τελευταία περίπτωση υπάγονται και τα λεγόμενα **χονδροειδή σφάλματα** τα οποία συμβαίνουν, π.χ., εάν ο πειραματιστής από απροσεξία αντί της τιμής 38 που δείχνει το όργανο μέτρησης καταγράψει 83. Η εξάσκηση και η προσωπική ικανότητα του πειραματιστή θα περιορίσουν τα χονδροειδή σφάλματα στο ελάχιστο. Μία μέτρηση με χονδροειδές σφάλμα αναγνωρίζεται εύκολα και απορρίπτεται.

Σε μία μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα, κατά την επανάληψη των μετρήσεων, διαφέρουν μεταξύ τους. Η διαφορά αυτή, που πολλές φορές είναι αμελητέα, οφείλεται σε τυχαία σφάλματα, που δεν μπορούν να ελεγχθούν. Συνεπώς, μία μόνο μέτρηση ενός μεγέθους δεν είναι αρκετή και σκοπός του πειράματος πρέπει να είναι η πολλαπλή επανάληψη της μέτρησης από την οποία τελικά θα βρεθεί η καλύτερη τιμή της μετρούμενης ποσότητας.

Η σπουδαιότητα της επανάληψης βρίσκεται στο γεγονός ότι επιτρέπει την αντικειμενική εκτίμηση των ορίων εμπιστοσύνης των μετρήσεων. Το ερώτημα είναι πως θα εκτιμηθούν τα όρια εμπιστοσύνης και γενικά η ποιότητα μίας σειράς μετρήσεων. Είναι γνωστό ότι τα τυχαία σφάλματα ακολουθούν ορισμένους νόμους. Οι περισσότερες από τις φυσικές παρατηρήσεις έχουν σφάλματα που ακολουθούν το νόμο της κανονικής κατανομής ή κατανομής Gauss που θα περιγράψουμε πιο κάτω. Αυτό συμβαίνει γιατί στις περισσότερες των περιπτώσεων το ολικό σφάλμα είναι άθροισμα αριθμού σφαλμάτων, άλλων θετικών και άλλων αρνητικών, με την ίδια πιθανότητα εμφάνισης ενός θετικού και ενός αρνητικού σφάλματος. Η κατανομή αυτών των σφαλμάτων είναι εκείνη που θα παρέχει όλες τις αντικειμενικές πληροφορίες που ζητάμε σε μία μέτρηση.

Το σύνολο των τιμών που προκύπτει από τις επαναλήψεις της μέτρησης ενός μεγέθους καλύπτει ορισμένη έκταση ή εύρος R που καθορίζεται από τη διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης τιμής του συνόλου, δηλ. $R = x_{\max} - x_{\min}$. Π.χ. το σύνολο των τιμών 6,8,9,7,5,4,8,7 έχει έκταση $9-4 = 5$. Πολλές φορές η έκταση του συνόλου παριστάνεται με παράθεση πρώτα της μικρότερης και μετά της μεγαλύτερης τιμής δηλαδή 4-9. Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές κυμαίνονται μεταξύ κατώτερου ορίου 4 και ανωτέρου ορίου 9.



2.6 Μέσος Όρος Μίας Σειράς Μετρήσεων

Όπως είπαμε και προηγούμενα, οι τιμές που βρίσκονται από πειραματικές μετρήσεις μεγεθών δεν είναι αληθινές. Έτσι η προσπάθεια σε μία μέτρηση ανάγεται στην εύρεση μίας κεντρικής τιμής που είναι η εκτίμηση της αληθινής τιμής.

Οι τιμές που προκύπτουν από την επανάληψη της μέτρησης μίας ποσότητας προσεγγίζουν μία κεντρική τιμή. Σαν τέτοια τιμή ορίζουμε την **αριθμητική μέση τιμή ή μέσο όρο**. Ο μέσος όρος είναι το άθροισμα όλων των τιμών της μέτρησης διαιρεμένο με το πλήθος των τιμών. Συμβολίζεται με $\langle x \rangle$ ή \bar{x} και υπολογίζεται από τη σχέση

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (8)$$

Ο μέσος όρος είναι η πιθανότερη τιμή, με άλλα λόγια αντιπροσωπεύει την καλύτερη εκτίμηση της αληθινής τιμής.

Παράδειγμα:

Ο μέσος όρος του συνόλου των τιμών 5,7,3,4,6,8,5,7,5,4 είναι $\bar{x} = \frac{5+7+3+4+6+8+5+7+5+4}{10} = \frac{54}{10} = 5.4$.

Εάν οι αριθμοί x_1, x_2, \dots, x_n επαναλαμβάνονται μέσα στο σύνολο των τιμών f_1, f_2, \dots, f_n φορές αντίστοιχα, τότε λέμε ότι η **συχνότητα επανάληψης** της τιμής x_1 είναι f_1 , της x_2 είναι f_2 κ.λ.π. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{\sum_{k=1}^n f_k = N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n f_k x_k \quad (9)$$

όπου $f_k \geq 1$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα οι όροι 3,6,8 έχουν συχνότητα επανάληψης 1, οι όροι 4 και 7 έχουν συχνότητα επανάληψης 2 και ο όρος 5 έχει συχνότητα επανάληψης 3, οπότε



$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 1}{10} = 5.4$$

Εδώ είναι απαραίτητο να σημειωθεί ότι ο μέσος όρος έχει τόσα σημαντικά ψηφία όσα έχει μία από τις τιμές του συνόλου ή/και ένα ακόμα.

Σε ένα σύνολο τιμών x_i ($i = 1, N$) μίας μέτρησης ορίζουμε σαν απόκλιση μίας τιμής x_i από το μέσο όρο \bar{x} το μέγεθος

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x} \quad (10)$$

Μία από τις βασικές ιδιότητες της αριθμητικής μέσης τιμής είναι ότι το άθροισμα των αποκλίσεων των όρων του συνόλου των τιμών από αυτή είναι μηδέν, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^N \Delta x_i = 0 \quad (11)$$

Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε εύκολα

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta x_i &= \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i - N\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i - N \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \\ &= \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N x_i = 0 \end{aligned}$$

Επίσης για το ίδιο σύνολο τιμών x_i ($i = 1, N$) ορίζουμε σαν μέση απόκλιση $\overline{\Delta x}$, το ηλικό του αθροίσματος των αποκλίσεων κάθε τιμής x_i κατ' απόλυτο τιμή από τη μέση τιμή \bar{x} δια του συνολικού αριθμού των διαφορών N , δηλαδή

$$\overline{\Delta x} = \frac{\sum_{i=1}^N |\Delta x_i|}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_N - \bar{x}|}{N} \quad (12)$$



Εάν η κατανομή των τιμών x_i ($i=1,N$) δίνεται με μία συνεχή καμπύλη (καμπύλη κατανομής) που έστω ότι παριστάνεται με τη συνάρτηση $f(x)$, τότε το $\overline{\Delta x}$ ορίζεται σαν η επέκταση της (12) στο ολοκλήρωμα

$$\overline{\Delta x} = \int |x_i - \bar{x}| f(x) dx \quad (13)$$

2.7 Μέσο Σφάλμα ή Τυπική Απόκλιση της Μίας Μέτρησης

Εάν έχουμε ένα σύνολο τιμών x_i ($i=1,N$) ενός μεγέθους τότε η απόκλιση μίας τιμής x_i από την αληθινή τιμή a του μεγέθους είναι το σφάλμα της τιμής αυτής και παριστάνεται με

$$\varepsilon_i = x_i - a \quad (14)$$

Το σφάλμα αυτό μπορεί να είναι άλλοτε θετικό και άλλοτε αρνητικό με ίση πιθανότητα ώστε το άθροισμα των σφαλμάτων ενός πολύ μεγάλου αριθμού N παρατηρήσεων να είναι σχεδόν ίσο με το μηδέν, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i = 0 \quad (15)$$

Στην πράξη όταν μιλάμε για πολύ μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων συνήθως εννοούμε $N > 30$.

Για τον προσδιορισμό του μέσου σφάλματος (ή της τυπικής απόκλισης) μίας παρατήρησης σε ένα σύνολο N παρατηρήσεων χρησιμοποιούμε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων, γιατί δίνει καλύτερο μέτρο για το χαρακτηρισμό της ακρίβειας. Σύμφωνα με την αρχή των ελαχίστων τετραγώνων του LEGENDRE: "Η πιο πιθανή τιμή μίας ποσότητας είναι εκείνη για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων των επιμέρους μετρήσεων είναι ελάχιστο". Έτσι ως μέτρο της ποιότητας των μετρήσεων χρησιμοποιούμε την παράσταση



$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2}{N} = \frac{1}{N} [\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_N^2] \quad (16)$$

Όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων N είναι πολύ μεγάλος τότε η τυπική απόκλιση μίας παρατήρησης δίνεται από την έκφραση

$$s = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2}{N}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - a)^2}{N}} \quad (17)$$

Επειδή όμως στην πράξη, η αληθινή τιμή δεν μας είναι γνωστή, αντί αυτής χρησιμοποιούμε το μέσο όρο \bar{x} και αντί της απόκλισης ε_i χρησιμοποιούμε την απόκλιση Δx_i , που ορίσαμε με τη σχέση (10) σαν

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$$

Όπως θα αποδειχθεί στην περιγραφή της κατανομής του Gauss, εάν ο αριθμός των παρατηρήσεων γίνει πολύ μεγάλος, δηλαδή όταν $N \rightarrow \infty$ τότε $\bar{x} \rightarrow a^+$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{i=1}^N (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (18)$$

Έτσι για πολύ μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων ($N > 30$) η τυπική απόκλιση της μιας παρατήρησης δίνεται από τη σχέση

* Σημείωση: Με το σκεπτικό της $x \rightarrow a$ για $N \rightarrow \infty$ αποδεικνύεται η εξίσωση (15) αναλυτικά

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \sum_{i=1}^N (x_i - a) = \sum_{i=1}^N x_i - Na \approx \sum_{i=1}^N x_i - N\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N x_i = 0.$$


$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}{N}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad (19)$$

Όταν το σύνολο των παρατηρήσεων είναι μικρό δηλαδή όταν $N < 30$ τότε

$$\sum \varepsilon_i^2 > \sum (\Delta x_i)^2 \quad *$$

ή

$$\sum \varepsilon_i^2 = \sum (\Delta x_i)^2 + u \quad (20)$$

* Σημείωση: Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$\sum_{i=1}^N (x_i - a)^2 > \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{ή } \sum_{i=1}^N (x_i^2 + a^2 - 2ax_i) > \sum_{i=1}^N (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}x_i)$$

$$\text{ή } a^2 N - 2a \sum_{i=1}^N x_i > N\bar{x}^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^N x_i \text{ ή } N(a^2 - \bar{x}^2) > 2 \sum_{i=1}^N x_i(a - \bar{x})$$

$$\text{ή } N(a^2 - \bar{x}^2) > 2N\bar{x}(a - \bar{x}) \text{ ή } a^2 - \bar{x}^2 > 2\bar{x}(a - \bar{x}) \text{ ή } a^2 - \bar{x}^2 - 2\bar{x}a + 2\bar{x}^2 > 0$$

$$\text{ή } a^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}a > 0 \text{ ή } (a - \bar{x})^2 > 0$$

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για μικρό N . Άρα η αρχική εξίσωση αληθεύει πράγματι. Η εξίσωση (20) γράφεται με την μορφή

$$\sum \varepsilon_i^2 = \sum (\Delta x_i)^2 + u$$



Η ποσότητα u είναι άγνωστη και μικραίνει όσο ο αριθμός των παρατηρήσεων N αυξάνει. Επειδή όμως στην πράξη είμαστε υποχρεωμένοι να εργαζόμαστε με τις αποκλίσεις Δx_i των τιμών από τη μέση τιμή, θεωρούμε την καλύτερη δυνατή προσέγγιση

$$\frac{\sum \varepsilon_i^2}{N} \approx \frac{\sum (\Delta x_i)^2}{N-1} \quad (21)$$

Έτσι για σχετικά μικρό αριθμό παρατηρήσεων, $N < 30$, το μέσο σφάλμα ή η τυπική απόκλιση της μίας μέτρησης είναι

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}{N-1}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (22)$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις των πειραματικών μετρήσεων, το πλήθος των παρατηρήσεων είναι σχετικά μικρό ($N < 30$), οπότε η τυπική απόκλιση της μίας παρατήρησης δίνεται από τη σχέση (22) αντί της σχέσης (19).

Στην πραγματικότητα δεν μας ενδιαφέρει το μέσο σφάλμα μίας παρατήρησης αλλά το μέσο σφάλμα του εξαγομένου όλων των N παρατηρήσεων μίας μέτρησης ή η τυπική απόκλιση του μέσου όρου. Ο ορισμός όμως του σφάλματος αυτού θα ήταν πιο κατανοητός αν ασχοληθούμε πρώτα για λίγο με τις κατανομές.

2.8 Καμπύλες Κατανομής

2.8.1 Γενικά

Το ενδιαφέρον σε μία μέτρηση δεν περιορίζεται μόνο στην εύρεση της καλύτερης τιμής που είναι η μέση αριθμητική τιμή. Είναι εξίσου σημαντικό να βρεθούν τα "όρια εμπιστοσύνης" μεταξύ των οποίων βρίσκεται η καλύτερη τιμή. Αυτό πετυχαίνεται σημαντικά με ένα **ιστόγραμμα** το οποίο απεικονίζει την κατανομή των μετρήσεων.



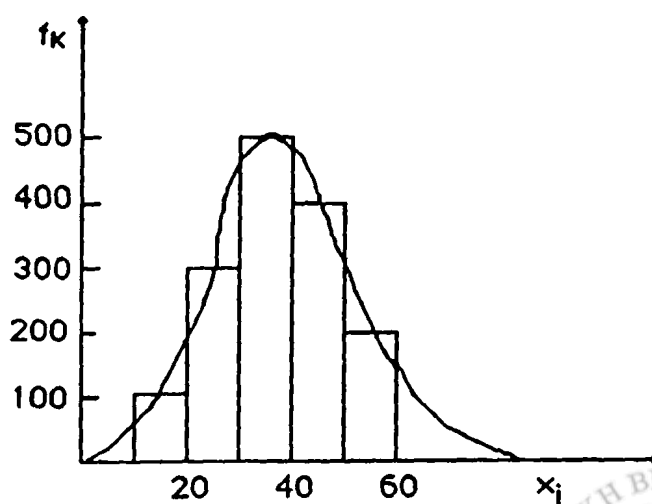
Το ιστόγραμμα είναι μία διαγραμματική παράσταση των αποτελεσμάτων των μετρήσεων. Έστω x_1, x_2, \dots, x_N το σύνολο των παρατηρήσεων που βρέθηκαν για ένα μέγεθος με αληθινή τιμή a . Εάν x_α και x_β είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και μέγιστη τιμή που βρέθηκε σε ένα σύνολο παρατηρήσεων x_i ($i=1, N$) τότε το διάστημα μεταβολής ή έκταση ή εύρος όλων των τιμών του συνόλου είναι $R = x_\beta - x_\alpha$. Το διάστημα R το διαιρούμε σε αυθαίρετο αριθμό ισομήκων διαστημάτων R_k ($k = 1, n$) έτσι ώστε

$$R = \sum_{k=1}^n R_k \quad (23)$$

Αρχικά βρίσκουμε πόσες τιμές από ένα σύνολο x_i ($i=1, N$) παρατηρήσεων περιέχονται σε κάθε διάστημα R_k ($k = 1, n$). Με άλλα λόγια βρίσκουμε τη συχνότητα επανάληψης (ή εμφάνισης) f_k ($k = 1, n$) των τιμών x_k σε κάθε διάστημα R_k . Η συχνότητα επανάληψης της τιμής x_1 στο διάστημα R_1 είναι f_1 , της τιμής x_2 στο διάστημα R_2 είναι f_2 κ.λ.π. Εύκολα γράφουμε ότι

$$N = \sum_{k=1}^n f_k \quad (24)$$

Σε ένα σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων θέτουμε στον άξονα των τετμημένων τις τιμές x_i ($i=1, N$) και στον άξονα των τεταγμένων τις συχνότητες f_k ($k=1, n$). Το σύνολο των ορθογωνίων διαγραμμάτων που προκύπτει αποτελεί ένα ιστόγραμμα. Το Σχ. 2 δείχνει ένα παράδειγμα ιστογράμματος που βασίζεται σε τιμές κάποιου αυθαίρετου μεγέθους.



Σχήμα 2 Ιστόγραμμα



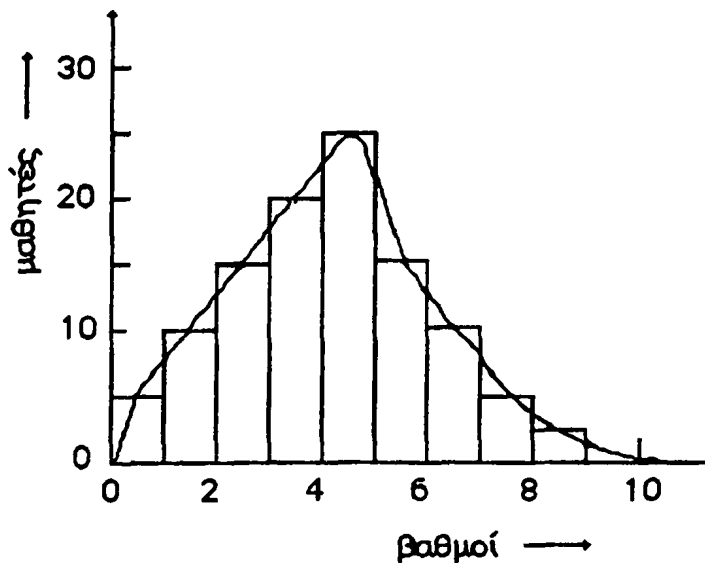
Παράδειγμα:

Να βρεθεί το ιστόγραμμα των βαθμών, σε ένα σύνολο 100 μαθητών που έλαβαν τους βαθμούς του Πίνακα 2.

Πίνακας 2

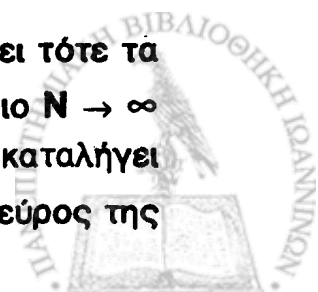
αριθμός μαθητών	3	10	15	20	25	15	7	3	2	0
Βαθμοί	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ο αριθμός των μαθητών με τους αντίστοιχους βαθμούς είναι οι συχνότητες επανάληψης f_k ($k = 1, 2, \dots, 10$). Το σύνολο των μαθητών είναι $N = 100$. Τα διαστήματα R_k ($k = 1, 2, \dots, 10$) έχουν έκταση ένα βαθμό. Η κατανομή των βαθμών φαίνεται στο ιστόγραμμα του Σχ. 3.



Σχήμα 3. Ιστόγραμμα κατανομής βαθμών σ' ένα σύνολο μαθητών.

Όσο το σύνολο των παρατηρήσεων x_i ($i = 1, N$) μεγαλώνει τότε τα διαστήματα R_k ($k = 1, n$) γίνονται συνεχώς μικρότερα. Στο όριο $N \rightarrow \infty$ τα R_k γίνονται απειροστά διαστήματα dx , οπότε το ιστόγραμμα καταλήγει σε μία συνεχή καμπύλη που καλείται καμπύλη κατανομής. Το εύρος της

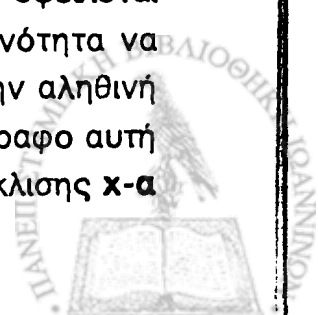


καμπύλης κατανομής συσχετίζεται προς την ποιότητα της μέτρησης. Είναι σχεδόν φανερό ότι όσο μεγαλύτερο είναι το εύρος της καμπύλης κατανομής τόσο ελαττώνεται η ποιότητα των μετρήσεων. Στο Σχ. 3 ο επικρατέστερος βαθμός είναι το 5 και ο μέσος βαθμός, που βρίσκεται με τη βοήθεια της σχέσης (9), είναι 4.47. Γενικά σαν επικρατέστερη τιμή είναι η τιμή που εμφανίζεται με τη μεγαλύτερη συχνότητα σε μία σειρά πειραματικών δεδομένων. Σε μία συμμετρική κατανομή η επικρατέστερη τιμή και η μέση τιμή συμπίπτουν. Στο Σχ. 3, τόσο το ιστόγραμμα όσο και το όριο στο οποίο τείνει, δηλαδή η αντίστοιχη καμπύλη κατανομής, δεν είναι απόλυτα συμμετρικά. Με άλλα λόγια, στην πράξη, τα ιστογράμματα και οι αντίστοιχες καμπύλες κατανομής δεν ακολουθούν απόλυτα τη συμμετρία που προϋποθέτει η ιδανική κατανομή του Gauss.

Τα τυχαία σφάλματα των πειραματικών μετρήσεων ακολουθούν ορισμένες κατανομές της μαθηματικής στατιστικής. Έτσι με τη βοήθεια των κατανομών αυτών είναι δυνατή η διερεύνηση και περιγραφή των τυχαίων σφαλμάτων. Για τη Φυσική οι σπουδαιότερες κατανομές είναι: (α) η κατανομή του Poisson και (β) η κατανομή του Gauss. Η πρώτη κατανομή έχει περιορισμένες εφαρμογές. Εφαρμόζεται κυρίως σε μετρήσεις πειραμάτων ραδιενεργούς διάσπασης, σε μετρήσεις της έντασης ακτινοβολίας ακτίνων-Χ και οπτικής φασματοσκοπίας, όπου στην περίπτωση χαμηλών εντάσεων φωτεινών ακτινοβολιών γίνεται απαρίθμηση των φωτονίων. Επίσης εφαρμόζεται στην κρυσταλλογραφία για την εύρεση δομικών σφαλμάτων των κρυστάλλων. Η δεύτερη κατανομή εφαρμόζεται σε όλες σχεδόν τις άλλες μετρήσεις των φαινομένων Φυσικής. Γιαυτό θα περιοριστούμε στην περιγραφή της κατανομής Gauss.

2.8.2 Κατανομή του Gauss ή Κανονική Κατανομή

Όπως αναφέραμε, η διασπορά των τιμών σε μία μέτρηση ενός μεγέθους, μετά την απομάκρυνση των συστηματικών σφαλμάτων, οφείλεται σε τυχαία σφάλματα. Επίσης αναφέραμε, ότι υπάρχει ίση πιθανότητα να εμφανιστεί θετική ή αρνητική απόκλιση της μετρούμενης από την αληθινή τιμή, όταν τα σφάλματα της μέτρησης είναι τυχαία. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα του μεγέθους αυτής της απόκλισης $x-\alpha$



Σχ.

σε σχέση με την πιθανότητα εμφάνισης-της. Η διασπορά των τιμών μίας μέτρησης $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ γύρω από την αληθινή τιμή ακολουθεί ορισμένο νόμο, που λέγεται κατανομή του Gauss ή κανονική κατανομή. Η μαθηματική περιγραφή αυτής της κατανομής δίνεται από τη σχέση

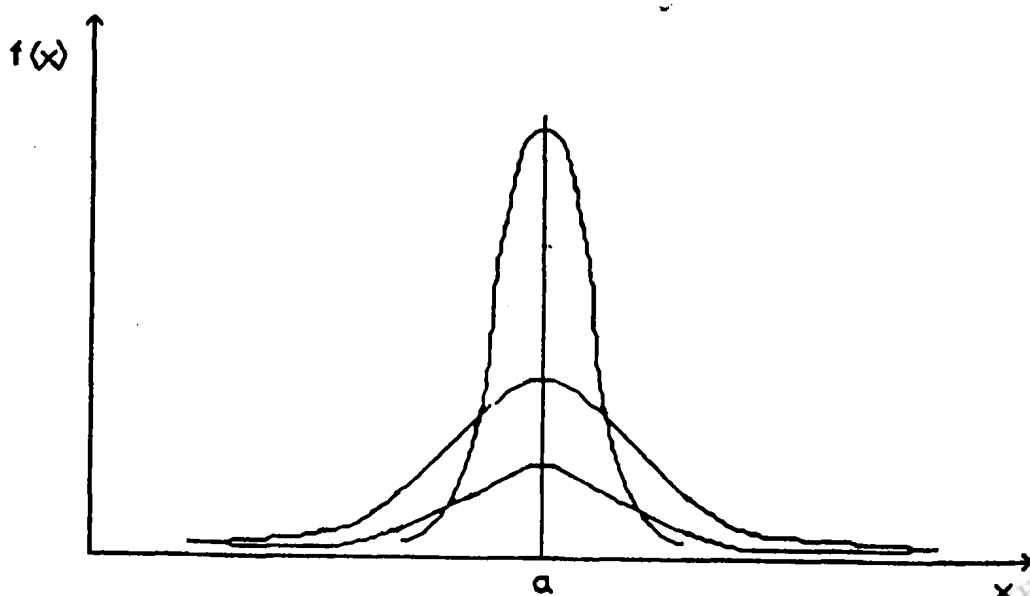
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} \quad (25)$$

όπου x είναι η μετρούμενη τιμή, a η αληθινή τιμή και το s είναι η τυπική απόκλιση που ορίσαμε με τη σχέση (17). Το μέγεθος $f(x)$ παριστάνει τη σχετική συχνότητα εμφάνισης κάθε τιμής x_i . Η γραφική παράσταση της σχέσης (25) για τρεις διαφορετικές παραμέτρους δίνεται στο Σχ. 4.

Εάν $\varepsilon = |x-a|$ (απόλυτο σφάλμα της τιμής x) τότε η σχέση

$$P(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2s^2}} d\varepsilon \quad (26)$$

δίνει την πιθανότητα εύρεσης ενός σφάλματος στο διάστημα ε έως $\varepsilon+d\varepsilon$.



Σχήμα 4. Γραφική παράσταση της κατανομής Gauss.



Η ερμηνεία αυτή της συχνότητας $f(x)$ σαν πυκνότητα πιθανότητας μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τη μέση τιμή \bar{x} του μετρούμενου μεγέθους που είναι

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx = a \quad (27)$$

Η σχέση (27) έχει την εξής φυσική σημασία: Σε ένα άπειρα μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων για τη μέτρηση του ίδιου μεγέθους η υπολογισμένη μέση τιμή \bar{x} συμπίπτει με την αληθινή τιμή a του μεγέθους. Αυτό επίσης δικαιολογεί τον προηγούμενο χαρακτηρισμό της μέσης τιμής σαν την "καλύτερη" και δείχνει ότι όταν αυξάνεται ο αριθμός των παρατηρήσεων βελτιώνεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων (εφόσον η χρησιμοποιούμενη μέθοδος έχει καλή επαναληπτικότητα). Το αποτέλεσμα της σχέσης (27) αποτελεί επιβεβαίωση της προηγούμενης παραγράφου 2.7 σχετικά με τον ορισμό της τυπικής απόκλισης μίας μέτρησης. Συγκεκριμένα

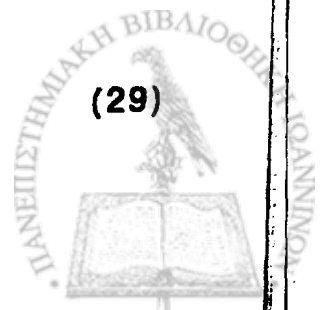
$$\text{όταν } N \rightarrow \infty \text{ τότε } x - a = x - \bar{x}$$

οπότε η τυπική απόκλιση, που ορίσαμε στη σχέση (17) δίνεται με τη σχέση (19), δηλαδή

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x - \bar{x})^2}{N}} \quad (28)$$

Μετά από αυτό το συμπέρασμα, η (25) γράφεται με τη μορφή

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad \text{Εξίσωση κατανομής Gauss} \quad (29)$$



Πρέπει να διευκρινιστεί ότι η κατανομή Gauss είναι μία ιδανική περίπτωση: (α) Από την άποψη "του άπειρα μεγάλου αριθμού μετρήσεων" και (β) από την εξιδανικευμένη υπόθεση της ύπαρξης απόλυτης συμμετρίας ως προς τα επί μέρους σφάλματα που συντελούν στη μέτρηση της τιμής x αντί της αληθινής τιμής a . Στην πράξη, οι παραπάνω προϋποθέσεις δεν είναι τόσο ιδανικές όσο στο θεωρητικό πρότυπο, αλλά η κανονική κατανομή αποτελεί ικανοποιητική προσέγγιση. Όπως είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο 2.7, το πλήθος των μετρήσεων θεωρείται πολύ μεγάλο όταν $N > 30$. Το πλήθος αυτό ικανοποιεί προσεγγιστικά την κατανομή του Gauss. Πρέπει όμως να προσέχουμε μήπως η φύση του πειράματος αποκλείει τη χρησιμοποίηση της κατανομής αυτής.

Η ερμηνεία της (26) σα πυκνότητα πιθανότητας έχει σα συνέπεια ένα οποιοδήποτε τμήμα μεταξύ της καμπύλης και του άξονα των x να παριστάνει την πιθανότητα να βρεθεί η τιμή x στο τμήμα αυτό, δηλαδή:

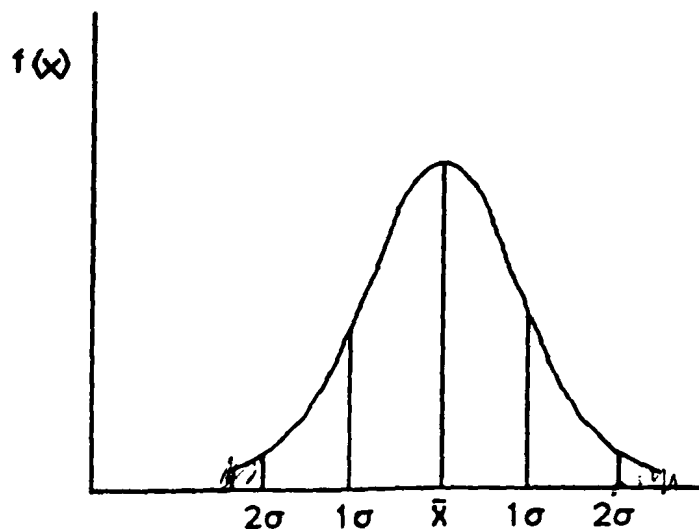
$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx \quad (30)$$

όπου $P(x_1 < x < x_2)$ παριστάνει την πιθανότητα να βρεθεί η τιμή x στο διάστημα (x_1, x_2) . Θεωρώντας την τυπική απόκλιση σ σα βασική μονάδα, διαιρούμε την καμπύλη κατανομής, όπως στο Σχ. 5.

Η εκτέλεση ενός ιδανικού πειράματος με άπειρο αριθμό παρατηρήσεων συντελεί στη δημιουργία ενός υπερσυνόλου R . Προφανώς οι μετρήσεις αυτές ακολουθούν την κατανομή Gauss με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Η μέση τιμή που θα προκύψει από το σύνολο των παρατηρήσεων κατά την μέτρηση θα είναι ίση με τη μέση τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Όταν το πείραμα γίνεται στην πράξη και κάνουμε μία μόνο παρατήρηση για τη μέτρηση ενός μεγέθους τότε η τιμή που βρίσκουμε είναι υποσύνολο του υπερσυνόλου R . Από τη σχέση (27) υπολογίζουμε την πιθανότητα να βρίσκεται η τιμή της μέτρησης μέσα σε ορισμένα όρια. Έτσι η πιθανότητα να βρίσκεται η παραπάνω τιμή μεταξύ $+1\sigma$ και -1σ της αληθινής τιμής είναι



$$P(-1\sigma < x < +1\sigma) = \int_{-1\sigma}^{+1\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx = 0.68 \quad (31)$$



Σχήμα 5. Κατανομή Gauss με βασική μονάδα την τυπική απόκλιση.

Επομένως υπάρχει 68% πιθανότητα ώστε η τιμή που βρέθηκε να περιέχεται μεταξύ $\pm 1\sigma$ της αληθινής τιμής. Αυτό είναι το μόνο αντικειμενικό αλλά και αόριστο συμπέρασμα στο οποίο μπορούμε να καταλήξουμε από τη μία και μοναδική παρατήρηση της μέτρησης ενός μεγέθους. Συνεπώς, καταλήγουμε πάλι στο συμπέρασμα της παραγράφου 2.6 ότι, δηλαδή, οι μετρήσεις πρέπει να επαναλαμβάνονται για να βρούμε την καλύτερη δυνατή τιμή και την τυπική απόκλιση του εξαγόμενου ενός συνόλου παρατηρήσεων.

2.8.3 Γενικές Παρατηρήσεις

Όπως είπαμε η καλύτερη τιμή μίας σειράς παρατηρήσεων ενός μεγέθους x είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων. Όσο αυξάνει ο αριθμός των παρατηρήσεων N , μέχρι ένα όριο ($N \leq 30$), αυξάνεται η ακρίβεια. Με

βάση την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου υπάρχει πιθανότητα 68% η καλύτερη τιμή \bar{x} να απέχει κατά σ από την αληθινή τιμή του x .

Η επανάληψη των παρατηρήσεων για τη μέτρηση ενός μεγέθους δεν αυξάνει μόνο την ακρίβεια του αποτελέσματος αλλά μας δίνει ένα τρόπο συγκεκριμένης και αντικειμενικής εκτίμησης της ακρίβειας.

Μπορεί όμως οι επανειλημμένες μετρήσεις να δίνουν πάντοτε το ίδιο αποτέλεσμα. Στις περιπτώσεις αυτές θα θεωρούμε ότι η ακρίβεια των μετρήσεων περιορίζεται από την κλίμακα του χρησιμοποιούμενου οργάνου και η ελάχιστη υποδιαίρεση της κλίμακας παρέχει ένα μέτρο της ακρίβειας των μετρήσεων. Συγκεκριμένα, το τυπικό σφάλμα της μέτρησης θα παίρνεται ίσο με την ελάχιστη υποδιαίρεση της κλίμακας του χρησιμοποιούμενου οργάνου, ή προς το μισό αυτής.

Σε μία σειρά παρατηρήσεων για τη μέτρηση μεγέθους, οι περισσότερες τιμές εμφανίζονται κοντά σε μία κεντρική τιμή. Είναι δυνατόν όμως, μία από τις τιμές να βρίσκεται μακριά από αυτή την κεντρική τιμή. Εάν η ανώμαλη αυτή τιμή οφείλεται σε χονδροειδές λάθος πρέπει να αποκλειστεί.

Η πιθανότητα μία τιμή να βρίσκεται μεταξύ των ορίων $\pm 2\sigma$ είναι

$$P(-2\sigma < x < +2\sigma) = \int_{-2\sigma}^{+2\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx \approx 0.95 \quad (32)$$

Σύμφωνα με τη σχέση αυτή η πιθανότητα να βρίσκεται μία τιμή έξω από τα όρια $\bar{x} - 2\sigma$ και $\bar{x} + 2\sigma$ είναι 5%. Ανάλογα η πιθανότητα μία τιμή να βρίσκεται έξω από τα όρια $\bar{x} \pm 3\sigma$ είναι μόνο 0.33%. Με βάση τα παραπάνω και εφόσον υπάρχει ικανός αριθμός παρατηρήσεων, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι μία ανώμαλη τιμή οφείλεται σε χονδροειδές λάθος, και την αγνοούμε από το σύνολο των τιμών. Αυτό πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή και ποτέ όταν ο αριθμός των μετρήσεων είναι μικρός ή δεν υπάρχουν αρκετές πληροφορίες για τη φύση του μετρούμενου μεγέθους. Στις περιπτώσεις αυτές είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούνται οι τιμές όλων

των παρατηρήσεων έστω και αν είναι "ανώμαλες" και έχουν σα συνέπεια την ελάττωση της ακρίβειας του αποτελέσματος.

2.9 Σφάλμα ή Τυπική Απόκλιση του Μέσου Όρου

Στην παράγραφο 2.6 βρήκαμε την τυπική απόκλιση σ μίας μόνο παρατήρησης. Όπως όμως καταλήξαμε στην ίδια παράγραφο, σε ένα πείραμα δεν μας ενδιαφέρει το σφάλμα μίας παρατήρησης αλλά το σφάλμα της μέσης τιμής ενός συνόλου N παρατηρήσεων. Στην πλειοψηφία των πειραμάτων οι μετρήσεις είναι σχετικά λίγες, $N < 30$.

Όπως είπαμε προηγούμενα, οι κατανομές του Gauss και Poisson ισχύουν για μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων $N > 30$ (για μεγάλα δείγματα). Στα περισσότερα όμως πειράματα ο αριθμός των μετρήσεων είναι σχετικά μικρός ($N < 30$), οπότε μιλάμε για μικρά δείγματα. Στην περίπτωση αυτή η μεθοδολογία της επεξεργασίας πειραματικών δεδομένων στηρίζεται σε μερικές κατανομές που ισχύουν κυρίως για μικρά δείγματα. Τέτοιες είναι η κατανομή $-t$, η κατανομή $-F$ και η κατανομή χ^2 . Η περιγραφή των κατανομών αυτών δεν εξυπηρετεί τη σκοπιμότητα αυτού του κεφαλαίου γιαυτό και θα την αποφύγουμε. Είναι όμως σκόπιμο να αναφερθούμε σε ένα θεώρημα που ισχύει σε σχέση με την κατανομή $-t$: Αν x_i είναι η τιμή μίας και μόνο παρατήρησης σε ένα σύνολο τιμών, που υπακούει σε κανονική κατανομή, με αληθινή τιμή α και τυπική απόκλιση σ_x , τότε ο μέσος όρος \bar{x} που υπολογίζεται από N μετρήσεις ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή με την ίδια αληθινή τιμή και τυπική απόκλιση

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (33)$$

όπου σ_x είναι η τυπική απόκλιση μίας παρατήρησης και $\sigma(x)$ η τυπική απόκλιση του μέσου όρου. Το ίδιο ισχύει και για μικρό αριθμό μετρήσεων ($N < 30$). Η εξίσωση (33) είναι εφαρμογή του κεντρικού οριακού θεωρήματος της στατιστικής.



Σ
82
137

Η τυπική απόκλιση σ_x μιας μόνο παρατήρησης σε ένα σύνολο σχετικά μικρού αριθμού παρατηρήσεων ($N < 30$) δόθηκε με τη σχέση (22) που είναι

$$\sigma_x = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

Αν αντικαταστήσουμε την τιμή αυτή της σ_x στη σχέση (33) προκύπτει η

$$\sigma(\bar{x}) = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N - 1)}} \quad (34)$$

Η σχέση (34) δίνει το σφάλμα ή τυπική απόκλιση του μέσου όρου \bar{x} ενός συνόλου N παρατηρήσεων που έγιναν για τη μέτρηση του μεγέθους.

Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι ένα μέγεθος που δίνει ένα μέτρο της ακρίβειας σε μία μέτρηση είναι το **σχετικό σφάλμα r** που ορίζεται με τη σχέση

$$r = \frac{\sigma(\bar{x})}{\bar{x}} \quad (35)$$

Συνηθίζεται το σχετικό σφάλμα να αναφέρεται με τη μορφή $r\%$ ή $r\%$ και ορίζεται σαν το σφάλμα του μέσου όρου στα εκατό ή στα χίλια, δηλαδή

$$r\% = \frac{\sigma(\bar{x})}{\bar{x}} \cdot 100 \quad (36)$$

Συνεπώς η τιμή του μετρούμενου μεγέθους κυμαίνεται στα όρια

$$x = \bar{x} \pm \sigma(\bar{x}) \quad (37)$$

Βασικοί κανόνες που πρέπει να τηρούνται στη γραφή του αποτελέσματος (37) είναι:



- 1) Δεν πρέπει να γράφεται η μέση τιμή \bar{x} με περισσότερα από ένα σημαντικά ψηφία όσα έχει μία από τις τιμές του συνόλου.
- 2) Να μην γράφεται το τυπικό σφάλμα με περισσότερα από ένα σημαντικά ψηφία.
- 3) Δεν πρέπει να γράφεται η μέση τιμή \bar{x} με περισσότερα ψηφία από το πρώτο σημαντικό ψηφίο του τυπικού σφάλματος $\sigma(\bar{x})$.
- 4) Η ελάχιστη μονάδα (υποδιαίρεση) που μπορούμε να διαβάσουμε στην κλίμακα ενός οργάνου δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη του διπλάσιου του τυπικού σφάλματος των μετρήσεων. Σε αντίθετη περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κλίμακα με μικρότερες υποδιαιρέσεις (εφ' όσον υπάρχουν όργανα).

2.10 Αριθμητικά παραδείγματα

- (1) Για την εύρεση του πάχους a ενός τεμαχίου αλουμινίου με παχύμετρο ακριβείας 0.1mm έγιναν οι μετρήσεις

a/a	1	2	3	4	5	6
a (mm)	3.0	2.9	3.1	2.9	3.0	3.1

Να βρεθεί:

- (α) η τιμή του a
- (β) το σχετικό σφάλμα



Λύση

a/a	a (mm)	\bar{a} (mm)	$(a_i - \bar{a})$ (mm)	$(a_i - \bar{a})^2$ (mm ²)
1	3.0	3.00	0.0	0.00
2	2.9		-0.1	0.01
3	3.1		0.1	0.01
4	2.9		-0.1	0.01
5	3.0		0.0	0.00
6	3.1		0.1	0.01
	$\Sigma a = 18.0$			$\Sigma (a_i - \bar{a})^2 = 0.04$

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^N a_i}{N} = \frac{18.0}{6} = 3.00 \text{ mm}$$

$$\sigma(\bar{a}) = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})^2}{N(N-1)}} = \pm \sqrt{\frac{0.04}{6 \cdot 5}} = \pm 0.04 \text{ mm}$$

Άρα $a = \bar{a} \pm \sigma(\bar{a}) = (3.00 \pm 0.04) \text{ mm}$

και

$$r\% = \frac{\sigma(\bar{a})}{\bar{a}} \cdot 1000 = \frac{0.04}{3.00} \cdot 1000 = 10\%$$



(2) Για τη μέτρηση ενός μήκους l έγιναν οι παρακάτω μετρήσεις:

a/a	1	2	3	4	5	6	7	8
l (mm)	1.01	1.02	1.08	1.04	1.07	1.04	1.04	1.05

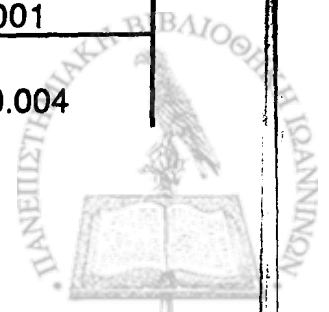
Να βρεθεί:

(α) η τιμή του l

(β) το σχετικό σφάλμα

Λύση

a/a	l (mm)	\bar{l} (mm)	$(l_i - \bar{l})$ (mm)	$(l_i - \bar{l})^2$ (mm ²)
1	1.01	1.044	-0.03	0.0009
2	1.02		0.02	-0.0004
3	1.08		0.04	0.0020
4	1.04		0.00	0.0000
5	1.07		0.03	0.0009
6	1.04		0.00	0.0000
7	1.04		0.00	0.0000
8	1.05		0.01	0.0001
	$\Sigma l = 8.35$			$\Sigma(l_i - \bar{l})^2 = 0.004$



$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^N l_i}{N} = \frac{8.35}{8} = 1.044 \text{ mm}$$

$$\sigma(\bar{l}) = l \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (l_i - \bar{l})^2}{N(N-1)}} = \pm \sqrt{\frac{0.004}{56}} = \pm 0.008 \text{ mm}$$

Άρα

$$l = (1.044 \pm 0.008) \text{ mm}$$

$$r\% = \frac{\sigma(\bar{l})}{\bar{l}} \cdot 1000 = \frac{0.008}{1.044} \cdot 1000 = 8\%$$

- (3) Για την μέτρηση της μάζας ενός σώματος με ζυγό, έγιναν 12 μετρήσεις. Να βρεθούν:
- (α) Η τυπική απόκλιση μίας παρατήρησης
 - (β) Η τυπική απόκλιση του μέσου όρου και
 - (γ) Η τιμή της μάζας.



Λύση

a/a	m (gr)	\bar{m} (gr)	$(m_i - \bar{m})$ (gr)	$(m_i - \bar{m})^2$ (gr ²)
1	174.32		0.05	0.002
2	174.28		0.01	0.0001
3	174.31		0.04	0.002
4	174.25		-0.02	0.0004
5	174.21		-0.06	0.004
6	174.24	174.274	-0.03	0.0009
7	174.27		0.00	0.0000
8	174.29		0.02	0.0004
9	174.25		-0.02	0.0004
10	174.31		0.04	0.002
11	174.30		0.03	0.0009
12	174.26		-0.01	0.0001
	2091.29			0.013

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{N} = \frac{2091.29}{12} = 174.274 \text{ gr}$$



$$\sigma_m = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m})^2}{N-1}} = \pm \sqrt{\frac{0.013}{11}} = \pm 0.034 \text{ gr}$$

$$\sigma(\bar{m}) = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m})^2}{N(N-1)}} = \pm \sqrt{\frac{0.013}{12 \cdot 11}} =$$

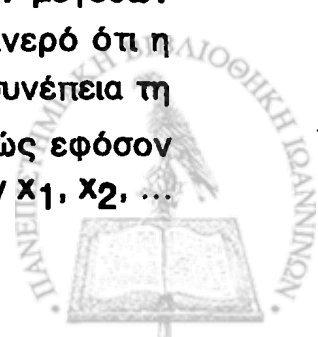
$$= \pm 0.0099 \approx \pm 0.010 \approx 0.01 \text{ gr}$$

$$\text{Άρα } m = \bar{m} \pm \sigma(\bar{m}) = (174.27 \pm 0.01) \text{ gr.}$$

2.11 Ολικό Σφάλμα Σύνθετης Μέτρησης

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέραμε τη διεργασία για την εύρεση της καλύτερης τιμής κατά τη μέτρηση ενός απλού μεγέθους. Οι άμεσες μετρήσεις απλών μεγεθών, όπως είναι το μήκος, η μάζα, η θερμοκρασία κ.ά. αποτελούν την πιο στοιχειώδη μορφή πειράματος, που σπάνια παρουσιάζεται στην πράξη. Συνήθως μία σειρά άμεσων μετρήσεων των μεγεθών x_1, x_2, \dots έχει σκοπό τον υπολογισμό της τιμής ενός άλλου μεγέθους z που είναι συνάρτηση των x_1, x_2, \dots . Η περίπτωση αυτή συναντιέται στα πιο απλά πειράματα με τα οποία ο σπουδαστής αρχίζει την εκπαίδευση-του στο εργαστήριο. Η μέτρηση του g με τη μέθοδο του απλού εκκρεμούς είναι χαρακτηριστικό απλό παράδειγμα μίας σύνθετης μέτρησης. Κατά τη μέτρηση αυτή το g είναι συνάρτηση του μήκους l και της περιόδου T του εκκρεμούς.

Εάν το μέγεθος $z = f(x_1, x_2, \dots)$ είναι συνάρτηση των μεγεθών x_1, x_2, \dots που προκύπτουν από απλές μετρήσεις τότε είναι φανερό ότι η αβεβαιότητα που υπάρχει στις τιμές των x_1, x_2, \dots θα έχει σα συνέπεια τη δημιουργία αβεβαιότητας στον υπολογισμό της τιμής z . Συνεπώς εφόσον υπολογιστούν τα τυπικά σφάλματα και οι μέσοι όροι των μεγεθών x_1, x_2, \dots



που προκύπτουν από απλές μετρήσεις πρέπει να βρεθούν μέθοδοι για τον προσδιορισμό του μέσου όρου \bar{z} και της τυπικής απόκλισης $\sigma(\bar{z})$.

Για εύκολη κατανόηση θα αρχίσουμε με ένα μέγεθος που είναι συνάρτηση μικρού αριθμού ανεξάρτητων μεγεθών. Συγκεκριμένα θα προσπαθήσουμε να βρούμε την τυπική απόκλιση ενός μεγέθους z που είναι συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών w, x και y , δηλαδή

$$z = f(w, x, y) \quad (38)$$

Για κάθε ένα από τα ανεξάρτητα μεγέθη w, x και y έγιναν N επανειλημμένες παρατηρήσεις από τις οποίες προέκυψαν αντίστοιχα οι μέσοι όροι

$$\bar{w}, \bar{x}, \bar{y}$$

Αν τα μεγέθη w, x και y στη σχέση (38) αντικατασταθούν με τους αντίστοιχους μέσους όρους προκύπτει ο μέσος όρος της z δηλαδή

$$\bar{z} = f(\bar{w}, \bar{x}, \bar{y}) \quad (39)$$

Αν η κάθε μία από τις τιμές w_i, x_i και y_i αντιστοιχεί σε μία μόνο παρατήρηση, τότε οι αποκλίσεις αυτών από τους αντίστοιχους μέσους όρους είναι:

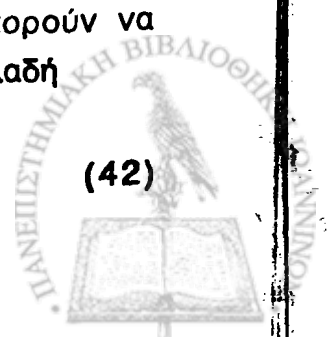
$$\Delta w_i = w_i - \bar{w}, \quad \Delta x_i = x_i - \bar{x}, \quad \Delta y_i = y_i - \bar{y} \quad (40)$$

Εισάγοντες τις τιμές w_i, x_i, y_i στην (38) προκύπτει η z_i . Η απόκλιση της z_i από το μέσο όρο αυτής είναι

$$\Delta z_i = z_i - \bar{z} \quad (41)$$

Σύμφωνα με την παράγραφο 4.1 του πρώτου κεφαλαίου, οι παραπάνω αποκλίσεις, που προέκυψαν από πειραματικές μετρήσεις, μπορούν να θεωρηθούν κατά προσέγγιση ίσες με τα αντίστοιχα διαφορικά, δηλαδή

$$\Delta z_i \approx dz_i, \quad \Delta w_i \approx dw_i, \quad \Delta x_i \approx dx_i \quad \text{και} \quad \Delta y_i \approx dy_i \quad (42)$$



Μετά από την προσέγγιση της (42) είναι σκόπιμο να αναφερθούμε στο ολικό διαφορικό της (38).

Ας υποθέσουμε πρώτα, ότι κάνουμε μόνο μία παρατήρηση i τότε το ολικό διαφορικό της (38) γράφεται

$$dz_i = \frac{\partial z}{\partial w} dw_i + \frac{\partial z}{\partial x} dx_i + \frac{\partial z}{\partial y} dy_i \quad (43)$$

Οι μερικοί παράγωγοι παίρνονται αντίστοιχα στα σημεία $w = \bar{w}$, $x = \bar{x}$ και $y = \bar{y}$. Εάν τώρα λάβουμε υπόψη τις προσεγγίσεις της (42) και αντικαταστήσουμε τα διαφορικά dz_i , dw_i , dx_i και dy_i με τις αντίστοιχες αποκλίσεις Δz_i , Δw_i , Δx_i και Δy_i η εξίσωση (43) γράφεται

$$\Delta z_i = \frac{\partial z}{\partial w} \Delta w_i + \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y_i \quad (44)$$

Υψώνοντας την εξίσωση (44) στο τετράγωνο θα πάρουμε

$$\begin{aligned} (\Delta z_i)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial w} \Delta w_i\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x_i\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \Delta y_i\right)^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \Delta w_i \Delta x_i + \\ &+ 2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Delta x_i \Delta y_i + 2 \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Delta w_i \Delta y_i \end{aligned} \quad (45)$$

Εάν κάνουμε όλες τις N επανειλημμένες παρατηρήσεις τότε θα έχουμε N εξισώσεις σαν την (45) για $i = 1, 2, \dots, N$ αντίστοιχα. Το άθροισμα αυτών των N εξισώσεων γράφεται

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\Delta z_i)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 \sum_{i=1}^N (\Delta w_i)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \sum_{i=1}^N (\Delta y_i)^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial x} \sum_{i=1}^N \Delta w_i \Delta x_i + \end{aligned}$$



$$+ 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta y_i + 2 \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial y} \sum_{i=1}^N \Delta w_i \Delta y_i \quad (46)$$

Από την αρχή υποθέσαμε ότι τα μεγέθη w, x, y είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους οπότε οι παραστάσεις

$$\sum_{i=1}^N \Delta w_i \Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta y_i, \quad \sum_{i=1}^N \Delta w_i \Delta y_i$$

είναι μηδέν, όταν το $N \rightarrow \infty$, σύμφωνα με την εξίσωση (11) της παραγράφου 2.6. Έτσι στην εξίσωση (46) οι όροι που έχουν παράγοντα 2 παραλείπονται και μένει η τελική σχέση:

$$\sum_{i=1}^N (\Delta z_i)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 \sum_{i=1}^N (\Delta w_i)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \sum_{i=1}^N (\Delta y_i)^2 \quad (47)$$

Εάν διαιρέσουμε τα μέλη της (47) με το πλήθος παρατηρήσεων N έχουμε

$$\frac{\sum_{i=1}^N (\Delta z_i)^2}{N} = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta w_i)^2}{N} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}{N} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta y_i)^2}{N} \quad (48)$$

Οι ποσότητες

$$\frac{\sum_{i=1}^N (\Delta z_i)^2}{N}, \quad \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta w_i)^2}{N}, \quad \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}{N}, \quad \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta y_i)^2}{N},$$



σύμφωνα με την (19), είναι αντίστοιχα ίσες με τα τετράγωνα των τυπικών αποκλίσεων σ_z , σ_w , σ_x και σ_y μίας παρατήρησης, οπότε η (48) γράφεται

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 \sigma_w^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 \quad (49)$$

Το σ_z είναι η τυπική απόκλιση, που όπως είπαμε, ισχύει για μία μόνο παρατήρηση των w , x και y . Όταν όμως το z δοθεί σαν μέσος όρος των N παρατηρήσεων, τότε σύμφωνα με τη σχέση (33) η τυπική απόκλιση του μέσου όρου \bar{z} θα είναι $\sigma(\bar{z}) = \frac{\sigma_z}{\sqrt{N}}$. Αν λοιπόν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη

της (49) με \sqrt{N} παίρνουμε τη ζητούμενη τυπική απόκλιση του μέσου όρου, $\sigma(\bar{z})$ σα συνάρτηση των τυπικών αποκλίσεων $\sigma(\bar{w})$, $\sigma(\bar{x})$ και $\sigma(\bar{y})$, δηλαδή

$$\sigma(\bar{z}) = \left[\left\{ \frac{\partial z}{\partial w} \sigma(\bar{w}) \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial z}{\partial x} \sigma(\bar{x}) \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial z}{\partial y} \sigma(\bar{y}) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (50)$$

Στα περισσότερα πειράματα ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι σχετικά μικρός ($N < 30$) οπότε το N στον παρονομαστή της (48) μπορεί να αντικατασταθεί με $N-1$. Έτσι οι τυπικές αποκλίσεις των μέσων όρων θα ορίζονται σύμφωνα με τη σχέση (34).

Εάν αντί της συνάρτησης $z = f(w, x, y)$ των μεταβλητών w , x και y έχουμε τη γενική μορφή

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (51)$$

τότε η μέση τιμή \bar{z} δίνεται με τη σχέση

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (52)$$

και η (50) γράφεται με τη γενική μορφή



$$\sigma(\mathbf{z}) = \left[\left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \sigma(\bar{x}_1) \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \sigma(\bar{x}_2) \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial z}{\partial x_n} \sigma(\bar{x}_n) \right)^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (53)$$

ή γενικώτερα

$$\sigma(\mathbf{z}) = \left[\sum_{\kappa=1}^n \left(\frac{\partial z}{\partial x_{\kappa}} \right)^2 \sigma(\bar{x}_{\kappa})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (54)$$

όπου $\sigma(\bar{z})$ είναι η τυπική απόκλιση του μέσου όρου \bar{z} . Επομένως σε μία σύνθετη μέτρηση η εύρεση του εξαγόμενου z δίνεται με τη μορφή

$$z = \bar{z} \pm \sigma(\bar{z}) \quad (55)$$

και το σχετικό επί % ή ‰ σφάλμα του z είναι

$$r_z \% = \frac{\sigma(\bar{z})}{\bar{z}} \cdot 100 \quad (56)$$

Γενική πορεία μίας σύνθετης μέτρησης:

Τα προηγούμενα συμπεράσματα και η πορεία που ακολουθείται στις σύνθετες μετρήσεις συνοψίζεται με τα παρακάτω:

- 1) z : είναι το μετρούμενο μέγεθος το οποίο είναι συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταξύ τους μεγεθών x_1, x_2, \dots, x_n που προκύπτουν από απλές μετρήσεις και δίνεται με τη συνάρτηση

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- 2) Για κάθε μέγεθος x_{κ} ($\kappa=1, n$) γίνονται N επανειλημμένες παρατηρήσεις από τις οποίες βρίσκεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής, με το γνωστό τρόπο:



$$\bar{x}_k = \frac{\sum_{i=1}^N (x_k)_i}{N}$$

και

$$\sigma(\bar{x}_k) = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\Delta x_k)_i^2}{N(N-1)}}$$

όπου $(\Delta x_k)_i = (x_k)_i - \bar{x}_k$

- 3) Υπολογίζουμε τη μέση τιμή του μεγέθους z από τη σχέση

$$z = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

- 4) Υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής z από τη σχέση

$$\sigma(z) = \left[\left\{ \frac{\partial z}{\partial x_1} \sigma(\bar{x}_1) \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial z}{\partial x_2} \sigma(\bar{x}_2) \right\}^2 + \dots + \left\{ \frac{\partial z}{\partial x_n} \sigma(\bar{x}_n) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

- 5) Το τελικό αποτέλεσμα είναι η εύρεση του z με τη μορφή

$$z = \bar{z} \pm \sigma(\bar{z})$$

Για την ικανοποίηση του κανόνα αυτού ίσως χρειαστεί να γίνει στρογγύλεμα της μέσης τιμής ή του τυπικού σφάλματος ή και των δύο. Για παράδειγμα η μέση τιμή του όγκου \bar{V} και το τυπικό σφάλμα $\sigma(\bar{V})$ βρέθηκαν αντίστοιχα $\bar{V} = 37.9 \text{ cm}^3$ και $\sigma(\bar{V}) = 1.94 \text{ cm}^3$ οπότε το $V = (38 \pm 2) \text{ cm}^3$.

- 6) Υπολογίζεται το σχετικό επί % ή ‰ σφάλμα

$$r\% = \frac{\sigma(\bar{z})}{\bar{z}} \cdot 100$$



2.12 Παραδείγματα

(1) Εάν $z = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, να βρεθεί το $\sigma(z)$.

Λύση

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial z}{\partial x_n} = 1$$

Άρα

$$\sigma(\bar{z}) = \{\sigma^2(\bar{x}_1) + \sigma^2(\bar{x}_2) + \dots + \sigma^2(\bar{x}_n)\}^{1/2}$$

(2) Εάν $z = x_1^m x_2^n$ να βρεθεί το $\sigma(\bar{z})$.

Λύση

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = m x_1^{m-1} x_2^n = m \frac{z}{x_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = n x_1^m x_2^{n-1} = n \frac{z}{x_2}$$

$$\text{άρα } \sigma(\bar{z}) = \bar{z} \left\{ \frac{m^2}{\bar{x}_1^2} \sigma^2(\bar{x}_1) + \frac{n^2}{\bar{x}_2^2} \sigma^2(\bar{x}_2) \right\}^{1/2}$$

(3) Εάν $z = \sqrt[\lambda]{x}$ να βρεθεί το $\sigma(\bar{z})$.

Λύση

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\lambda} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \quad \text{άρα } \sigma(\bar{z}) = \frac{1}{\lambda} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \sigma(\bar{x})$$



- (4) Για τον υπολογισμό της πυκνότητας ενός σώματος με τη μέθοδο της άνωσης ζυγίζεται το σώμα στον αέρα και μέσα στο νερό. Η πυκνότητα δίνεται από τον τύπο

$$\rho = \frac{B_a}{B_a - B_v} \rho_v, (\rho_v = 1)$$

Για τη μέτρηση των B_a και B_v χρησιμοποιήθηκε ζυγός ακρίβειας 0.01gr. Οι μετρήσεις που πάρθηκαν είναι

a/a	1	2	3	4	5
B_a (gr)	44.65	44.64	44.65	44.65	44.64
B_v (gr)	38.80	38.81	38.80	38.80	38.81

Να βρεθεί η τιμή της πυκνότητας ρ .

Λύση

Καταρτίζουμε χωριστά τους πίνακες για τις μετρήσεις των B_a και B_v .

a/a	B_a (gr)	\bar{B}_a (gr)	$(B_{a_i} - \bar{B}_a)$ (gr)	$(B_{a_i} - \bar{B}_a)^2 \times 10^{-4}$ (gr ²)
1	44.65	44.646	0.00	0
2	44.64		-0.01	1
3	44.65		0.00	0
4	44.65		0.00	0
5	44.64		-0.01	1
	223.23			2×10^{-4}



$$N = 5, \quad \bar{B}_a = \frac{223.23}{5} = 44.646 \text{ gr}$$

$$\sigma(\bar{B}_a) = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (B_{a_i} - \bar{B}_a)^2}{N(N-1)}} = \pm \sqrt{\frac{2 \times 10^{-4}}{5 \cdot 4}} = \pm 0.003 \text{ gr}$$

a/a	B _v (gr)	\bar{B}_v (gr)	$(B_{v_i} - \bar{B}_v) \times 10^{-2}$ (gr)	$(B_{v_i} - \bar{B}_v)^2 \times 10^{-4}$ (gr ²)
1	38.80	38.804	0	0
2	38.81		1	1
3	38.80		0	0
4	38.80		0	0
5	38.81		1	1
	194.02			2×10^{-4}

$$N = 5, \quad \bar{B}_v = 38.804 \text{ gr}, \quad \sigma(\bar{B}_v) = \pm 0.003 \text{ gr}$$

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{B}_a}{\bar{B}_a - \bar{B}_v} \rho_v = \frac{44.646}{44.646 - 38.804} \times 1 = 7.6420 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$$

$$\sigma(\bar{\rho}) = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial B_a}\right)^2 \sigma(\bar{B}_a)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial B_v}\right)^2 \sigma(\bar{B}_v)^2}$$



$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial B_{\alpha}}\right)^2 = \left[-\frac{\rho_v \cdot B_v}{(B_{\alpha} - B_v)^2}\right]^2 = \left[\frac{38.804}{(44.646 - 38.804)^2}\right]^2 = 1.2927$$

και

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial B_v}\right)^2 = \left[-\frac{\rho_v \cdot B_{\alpha}}{(B_{\alpha} - B_v)^2}\right]^2 = \left[\frac{44.646}{(44.646 - 38.804)^2}\right]^2 = 1.7113$$

οπότε

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{\rho}) &= \pm \sqrt{1.2937 \times (0.003)^2 + 1.7113 \times (0.003)^2} = \\ &= \pm 0.0052 \approx \pm 0.005 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

Άρα $\rho = \bar{\rho} \pm \sigma(\bar{\rho}) = (7.642 \pm 0.005) \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$.

(5) Για την εύρεση του όγκου $V = \pi R^2 h$ ενός κυλίνδρου έγιναν οι παρακάτω μετρήσεις της ακτίνας και του ύψους:

a/a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R (cm)	2.1	1.9	2.2	1.8	1.9	2.1	1.8	2.2	1.9	1.9
h (cm)	3.2	2.9	3.1	3.2	3.0	3.1	3.2	3.0	2.9	3.2

Να βρεθεί η τιμή του όγκου V και το σχετικό επί % σφάλμα.



Λύση

a/a	R (cm)	\bar{R} (cm)	ΔR_i (cm)	$(\Delta R_i)^2$ (cm ²)
1	2.1		0.1	0.01
2	1.9		-0.1	0.01
3	2.2		0.2	0.04
4	1.8		-0.2	0.04
5	1.9	1.98	-0.1	0.01
6	2.1		0.1	0.01
7	1.8		-0.2	0.04
8	2.2		0.2	0.04
9	1.9		-0.1	0.01
10	1.9		-0.1	0.01
	19.8			0.22

$$\bar{R} = \frac{19.8}{10} = 1.98 \text{ cm}$$

$$\sigma(\bar{R}) = \sqrt{\frac{0.22}{9 \cdot 10}} = 0.05 \text{ cm}$$



a/a	h (cm)	\bar{h} (cm)	Δh_i (cm)	$(\Delta h_i)^2$ (cm ²)
1	3.2		0.1	0.01
2	2.9		-0.2	0.04
3	3.1		0.0	0.00
4	3.2		0.1	0.01
5	3.0	3.08	0.1	0.01
6	3.1		0.0	0.00
7	3.2		0.1	0.01
8	3.0		0.1	0.01
9	2.9		-0.2	0.04
10	3.2		0.1	0.01
	30.8			0.14

$$\bar{h} = 3.080 \text{ cm} \quad \text{και} \quad \sigma(\bar{h}) = \sqrt{\frac{0.14}{10 \cdot 9}} = 0.04 \text{ cm}$$

οπότε

$$\sigma^2(\bar{V}) = \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 \sigma^2(\bar{R}) + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \sigma^2(\bar{h}) =$$

$$= (\pi \bar{h}^2 2\bar{R})^2 \sigma^2(\bar{R}) + (\pi \bar{R}^2)^2 \sigma^2(\bar{h}) = 3.5 + 0.24 = 3.7 \text{ cm}^2$$



$$\text{Άρα } \sigma(\bar{V}) = \pm \sqrt{3.7} = \pm 1.92 \approx 2 \text{ cm}^3$$

$$\bar{V} = \pi \bar{R}^2 \bar{h} = 3.14 \cdot (1.98)^2 \cdot 3.08 = 37.9 \text{ cm}^3 \approx 38 \text{ cm}^3$$

$$\text{Άρα } V = \bar{V} \pm \sigma(\bar{V}) = (38 \pm 2) \text{ cm}^3$$

και

$$r_V \% = \frac{2}{38} \cdot 100 = 5.26 \approx 5 \%$$

- (6) Για την εύρεση του $g = 4\pi^2 l / T^2$ με τη μέθοδο του εκκρεμούς έγιναν οι παρακάτω μετρήσεις του χρόνου 10 περιόδων με χρονόμετρο ακρίβειας 0.1sec. Το μήκος του εκκρεμούς δόθηκε $l = (190.0 \pm 0.1)$ cm

a/a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T (sec)	2.76	2.72	2.73	2.74	2.74	2.75	2.72	2.76	2.75	2.75

Να βρεθεί το g και το σχετικό σφάλμα.



Λύση

a/a	T (sec)	\bar{T} (sec)	$(T_i - \bar{T})$ (sec)	$(T_i - \bar{T})^2 \times 10^{-4}$ (sec ²)
1	2.76	2.742	0.02	4
2	2.72		-0.02	4
3	2.73		-0.01	1
4	2.74		0.01	1
5	2.74		0.01	1
6	2.75		0.01	1
7	2.72		-0.02	4
8	2.76		0.02	4
9	2.75		0.01	1
10	2.75		0.01	1
	27.42			22 x 10 ⁻⁴

$$\bar{T} = 2.742 \text{sec} \quad \sigma(\bar{T}) = \pm \sqrt{\frac{22 \times 10^{-4}}{10 \cdot 9}} = \pm 0.0047 \text{sec}$$

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 \cdot l}{\bar{T}^2} = \frac{4 \cdot (3.14)^2 \cdot 190.0}{(2.742)^2} = 996.6 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$



$$\sigma(\bar{g}) = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 \sigma^2(\bar{T}) + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 \sigma^2(\bar{l})} = \pm \sqrt{\left(\frac{8\pi^2 l}{\bar{T}^3}\right)^2 \sigma^2(\bar{T}) + \left(\frac{4\pi^2}{\bar{T}^2}\right)^2 \sigma^2(\bar{l})} =$$

$$= \sqrt{11.67 + 0.28} = 3.457 \approx 3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$

$$\text{Άρα } g = \bar{g} \pm \sigma(\bar{g}) = (997 \pm 3) \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$

$$\text{και } r_g \% = \frac{\sigma(\bar{g})}{\bar{g}} \cdot 100 = \frac{3}{997} \cdot 100 = 0.40 \% \approx 0.4 \%$$

2.13 Σταθμισμένες Μέσες Τιμές

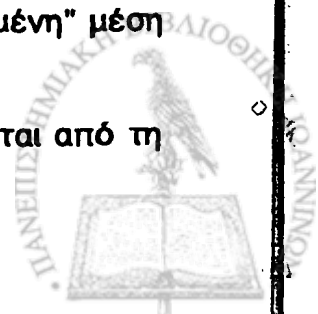
Μία πολύ χρήσιμη εφαρμογή της θεωρίας σφαλμάτων είναι η ακόλουθη περίπτωση: Όταν ένα μέγεθος x μετρηθεί από πολλούς παρατηρητές ή ο ίδιος παρατηρητής κάνει μία σειρά επανειλημμένων μετρήσεων, (προφανώς κάθε μέτρηση γίνεται μετά από ένα σύνολο παρατηρήσεων) και βρεθούν οι μέσες τιμές \bar{x}_k και οι τυπικές αποκλίσεις από τις μέσες τιμές $\sigma(\bar{x}_k)$ όπου $k = 1, N$. Τότε από το σύνολο αυτών των μετρήσεων μπορούμε να βρούμε την καλύτερη τιμή του μεγέθους.

Έχει αποδειχθεί ότι η καλύτερη τιμή από ένα σύνολο μετρήσεων δίνεται από τη σχέση

$$x = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{x}_k / \sigma^2(\bar{x}_k)}{\sum_{k=1}^N 1 / \sigma^2(\bar{x}_k)} \quad (57)$$

Η έκφραση του x όπως δίνεται από την (57) καλείται "σταθμισμένη" μέση τιμή.

Η τυπική απόκλιση από τη σταθμισμένη μέση τιμή δίνεται από τη σχέση



$$S_x = \pm \left[\frac{\sum_{\kappa=1}^N \frac{(\bar{x}_\kappa - x)^2}{\sigma^2(\bar{x}_\kappa)}}{(N-1) \sum_{\kappa=1}^N \frac{1}{\sigma^2(\bar{x}_\kappa)}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (58)$$

οπότε η καλύτερη τιμή του μεγέθους x από ένα σύνολο μετρήσεων είναι η

$$x \pm S_x \quad (59)$$

Παράδειγμα:

Δέκα ερευνητές μέτρησαν χωριστά το ίδιο μέγεθος x . Τα αποτελέσματα-των που είναι της μορφής $\bar{x} \pm \sigma(\bar{x})$ συνοψίζονται στον πίνακα:

παρατηρητής	\bar{x}_κ	$\sigma(\bar{x}_\kappa)$
1	17.3	2.1
2	18.4	1.9
3	17.1	2.5
4	16.6	2.8
5	19.1	3.2
6	17.4	1.2
7	18.5	1.8
8	14.3	4.5
9	16.8	2.3
10	17.4	1.6

Ζητούμε τη σταθμισμένη μέση τιμή x και την τυπική απόκλιση S_x



Λύση

Για διευκόλυνση των πράξεων καταρτίζουμε τον πίνακα:

\bar{x}_k	$\sigma(\bar{x}_k)$	$1/\sigma^2(\bar{x}_k)$	$\bar{x}_k/\sigma^2(\bar{x}_k)$	x	$(\bar{x}_k-x)^2/\sigma^2(\bar{x}_k)$
17.3	2.1	0.227	3.92	17.54	0.0131
18.4	1.9	0.277	5.10		0.2049
17.1	2.5	0.16	2.74		0.031
16.6	2.8	0.127	2.12		0.1127
19.1	3.2	0.098	1.86		0.2376
17.4	1.2	0.694	12.08		0.0136
18.5	1.8	0.309	5.71		0.2844
14.3	4.5	0.049	0.71		0.5184
16.8	2.3	0.189	3.18		0.1035
17.4	1.6	0.391	6.80		0.0076
		$\Sigma = 2.521$	$\Sigma = 44.22$		$\Sigma = 1.527$

Η τιμή του x στην πέμπτη στήλη του πίνακα βρέθηκαν από τη σχέση (57). Η τυπική απόκλιση του x δίνεται από τη σχέση (58)

$$S_x = \pm \sqrt{\frac{1.527}{9 \times 2.521}} = \pm 0.26 \approx \pm 0.3$$

Η καλύτερη τιμή του μετρούμενου μεγέθους είναι

$$x = 17.5 \pm 0.3$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

θεωρια ελαχιστων τετραγωνων



1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επεξεργασία πειραματικών δεδομένων δεν έχει πάντοτε σαν αντικειμενικό σκοπό την εύρεση της αριθμητικής τιμής ενός μετρούμενου μεγέθους με απλή ή σύνθετη μέτρηση. Τις περισσότερες φορές ο σκοπός ενός πειράματος είναι η εύρεση ή επαλήθευση μίας μαθηματικής σχέσης που να συνδέει τα μετρούμενα μεγέθη. Π.χ., μετά από μία σειρά παρατηρήσεων της πίεσης P και του όγκου V ενός τέλει αερίου ορισμένης μάζας M και σταθερής θερμοκρασίας T ζητάμε τη σχέση που συνδέει τα P και V . Η γραφική μέθοδος είναι ίσως η καλύτερη που γνωρίζουμε για τον προσδιορισμό μίας σχέσης, έτσι για να βρούμε τη ζητούμενη σχέση σχεδιάζουμε την καμπύλη των μεταβλητών P και V . Η μαθηματική εξίσωση που περιγράφει την καμπύλη είναι ουσιαστικά η μαθηματική σχέση των φυσικών μεγεθών P και V . Στις μετρήσεις των P και V οπωσδήποτε γίνονται σφάλματα. Το πρόβλημα-μας λοιπόν δεν είναι να χαράξουμε απλώς την καμπύλη των μεταβλητών, αλλά την "καλύτερη καμπύλη". Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των "ελαχίστων τετραγώνων" που θα περιγράψουμε στις επόμενες παραγράφους του κεφαλαίου αυτού. Πριν όμως περιγράψουμε τη μέθοδο αυτή είναι σκόπιμο να πούμε δύο λόγια για τον τρόπο χάραξης μίας καμπύλης δύο ανεξάρτητων μεταβλητών και για τις σπουδαιότερες μορφές καμπυλών.

2. ΧΑΡΑΞΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Όπως είπαμε στην εισαγωγή, πριν αναφερθούμε στην εύρεση της μαθηματικής σχέσης δύο φυσικών μεγεθών θα πούμε σε γενικές γραμμές πως γίνεται η χάραξη μίας καμπύλης, αρχίζοντας με ένα παράδειγμα.

Ένας πειραματιστής κρεμάει διάφορα βάρη από ένα κατακόρυφο ελατήριο και μετράει κάθε φορά τις αντίστοιχες επιμηκύνσεις, με σκοπό την πρακτική απόδειξη του νόμου του Hooke ($F=-kx$). Τα αποτελέσματα των μετρήσεων φαίνονται στον Πίνακα 1.

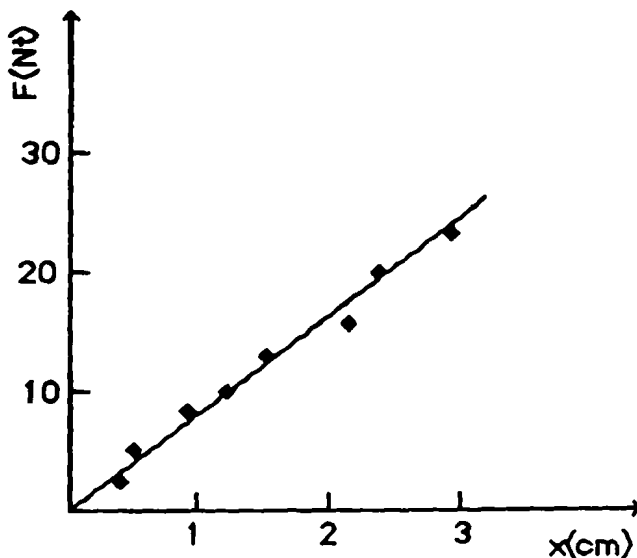
Πίνακας 1

X (cm)	0.40	0.50	1.00	1.25	1.45	2.10	2.30	2.95
F (Nt)	2.0	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	20.0	22.5



Αφού γίνουν οι μετρήσεις και κατασκευαστεί ο πίνακας τιμών κάνουμε τη γραφική παράσταση αυτών σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων $x-y$. Για ευκολία χρησιμοποιούμε συνήθως χιλιοστομετρικό (καρτεσιανό) χαρτί. Τα δύο μεγέθη ή μεταβλητές απεικονίζονται αντίστοιχα στους άξονες x και y τους οποίους χωρίζουμε σε ίσα τμήματα. Στις κλίμακες των αξόνων δεν γράφονται οι μετρήσεις αλλά πολλαπλάσια των βασικών μονάδων των μετρούμενων μεγεθών. Φροντίζουμε ώστε οι τιμές των μεγεθών να εκτείνονται σε ολόκληρο το τμήμα του χαρτιού που εκλέγεται για να μη παρουσιάζουν συσσώρευση. Δίπλα στους άξονες πρέπει να γράφονται αντίστοιχα τα φυσικά μεγέθη και οι μονάδες μέτρησης-των. Στο διάγραμμα τοποθετούμε τα ζεύγη των τιμών με σημεία $(.,x,θ,.,...)$. Οι τιμές των σημείων μπορούν να αναγνωστούν στις αντίστοιχες κλίμακες. Επομένως δεν είναι σωστό να γράφεται η τιμή κάθε μετρήσεως πάνω στις κλίμακες.

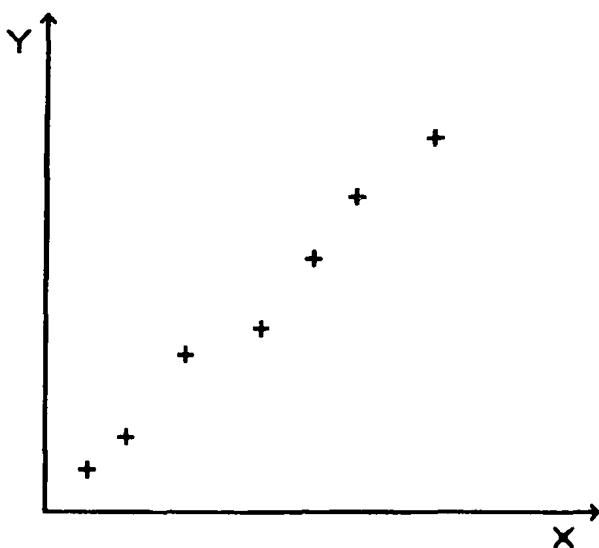
Τελικά φέρουμε μεταξύ των σημείων την καλύτερη γραμμή (καμπύλη). Σαν καλύτερη γραμμή χαρακτηρίζουμε την απλούστερη γεωμετρική γραμμή που διέρχεται κοντά από τα σημεία και όχι τη γραμμή που διέρχεται από όλα τα σημεία. Η τελευταία αυτή γραμμή, εξαιτίας των σφαλμάτων των επί μέρους μετρήσεων, είναι δυνατό να οδηγήσει σε ανώμαλη τεθλασμένη γραμμή. Βασικά η καλύτερη γραμμή είναι ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων που μας δίνει τη γεωμετρική παράσταση του φαινομένου (Σχ. 1).



Σχήμα 1. Γραφική παράσταση των μεγεθών F και x που οι τιμές τους αναφέρονται στον Πίνακα 1.



Στο προηγούμενο παράδειγμα δεν αναφέρονται τα τυχαία σφάλματα των παρατηρήσεων των F και x και γιαυτό το λόγο δεν σημειώνονται στο διάγραμμα του Σχ. 1. Εάν όμως σε κάθε παρατήρηση αναφέρονται και τα αντίστοιχα σφάλματα τότε κάθε πειραματικό σημείο θα σημειώνεται όπως στο Σχ. 2. Οι οριζόντιες και κατακόρυφες ευθείες που συνοδεύουν κάθε σημείο παριστάνουν τα σφάλματα των παρατηρήσεων των μεγεθών x και y αντίστοιχα. Η γραφική αυτή παράσταση δίνει μία πλήρη εποπτική εικόνα της ακρίβειας των μετρήσεων.



Σχήμα 2: Εποπτική εικόνα της ακρίβειας των μετρήσεων σε μία γραφική παράσταση των μεγεθών x και y .

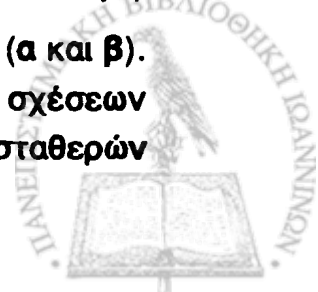
Τελικά εάν έχουμε ένα διάγραμμα με την διασπορά των πειραματικών σημείων που δείχνει το Σχ. 3 δεν μπορούμε να προδικάσουμε ποια είναι η καλύτερη γεωμετρική γραμμή. Με άλλα λόγια δεν μπορούμε να βρούμε την αναλυτική σχέση μεταξύ των μεγεθών x και y . Μία πιθανή καμπύλη που να παριστάνει τα πειραματικά σημεία του Σχ. 3 είναι η ευθεία

$$y = a + \beta x \quad (1)$$

αλλά μπορεί να είναι και η καμπύλη δεύτερου βαθμού

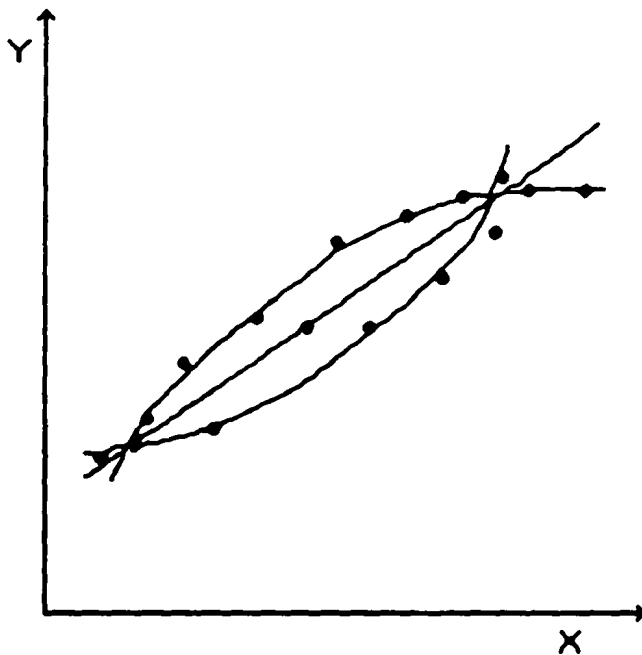
$$y = ax + \beta x^2 \quad (2)$$

Η μορφή της καμπύλης χαρακτηρίζεται κυρίως από τις σταθερές (a και β). Από το σύνολο των τιμών x και y προσδιορίζουμε τις a και β των σχέσεων (1) και (2) αντίστοιχα. Συγκεκριμένα βρίσκουμε σύνολο τιμών των σταθερών



αυτών. Αν η διασπορά των τιμών α και β που αντιστοιχούν στη σχέση (1) είναι μικρότερη αυτής που αντιστοιχούν στην (2) τότε η καλύτερη καμπύλη είναι η (1). Η διεργασία αυτή είναι πολύπλοκη και αποφεύγεται. Το συμπέρασμα όμως είναι ότι για να βρούμε τη συνάρτηση

$$y = f(c_1, c_2, \dots, c_n, x) \quad (3)$$

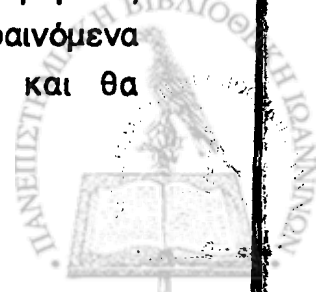


Σχήμα 3: Γραφική παράσταση των μεγεθών x και y .

επιβάλλεται ο υπολογισμός των σταθερών c_1, c_2, \dots, c_n οι οποίες πρέπει, σε ένα σύνολο παρατηρήσεων των x και y , να δείχνουν ελάχιστη διασπορά. Μία κατάλληλη μέθοδος για το σκοπό αυτό είναι η εφαρμογή της μεθόδου των "ελάχιστων τετραγώνων" που στηρίζεται στην αρχή του Legendre.

3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Πριν αρχίσουμε με την εφαρμογή των "ελάχιστων τετραγώνων" είναι σκόπιμο να αναφερθούμε στις εξισώσεις που περιγράφουν μερικές συνηθισμένες μορφές καμπυλών. Τα περισσότερα από τα φυσικά φαινόμενα αποδίδονται με απλές μαθηματικές σχέσεις στις οποίες και θα



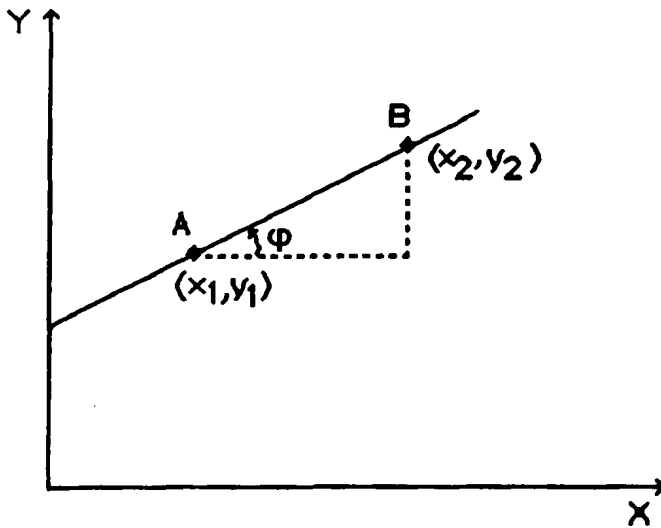
περιοριστούμε. (Για πολυπλοκώτερες εκφράσεις πρέπει να συμβουλευτούμε ειδικά βιβλία μαθηματικών).

3.1 Ευθεία Γραμμή

Ο πιο απλός αλλά και συνηθισμένος τύπος καμπύλης είναι η ευθεία, που περιγράφεται με την εξίσωση

$$y = y_0 + \lambda x \quad (4)$$

όπου y και x είναι οι μεταβλητές (ή τα μετρούμενα φυσικά μεγέθη σ' ένα πείραμα), y_0 και λ είναι σταθερές. Τις σταθερές αυτές μπορούμε να προσδιορίσουμε εύκολα. Όπως δείχνεται στο Σχ. 4, η σταθερά y_0 είναι η τιμή της μεταβλητής y όταν $x = 0$ και καλείται τεταγμένη στην αρχή.



Σχήμα 4. Γραφική παράσταση της ευθείας.

Η σταθερά λ προσδιορίζεται ως εξής: Παίρνουμε δύο σημεία πάνω στην ευθεία, έστω A και B, που έχουν ζεύγη τιμών (x_1, y_1) και (x_2, y_2) αντίστοιχα. Εισάγουμε αυτά τα ζεύγη διαδοχικά στην (4) και έχουμε

$$y_1 = y_0 + \lambda x_1$$

$$y_2 = y_0 + \lambda x_2$$



Αφαιρούμε κατά μέλη της δύο αυτές εξισώσεις και έχουμε

$$y_2 - y_1 = \lambda (x_2 - x_1)$$

οπότε

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (5)$$

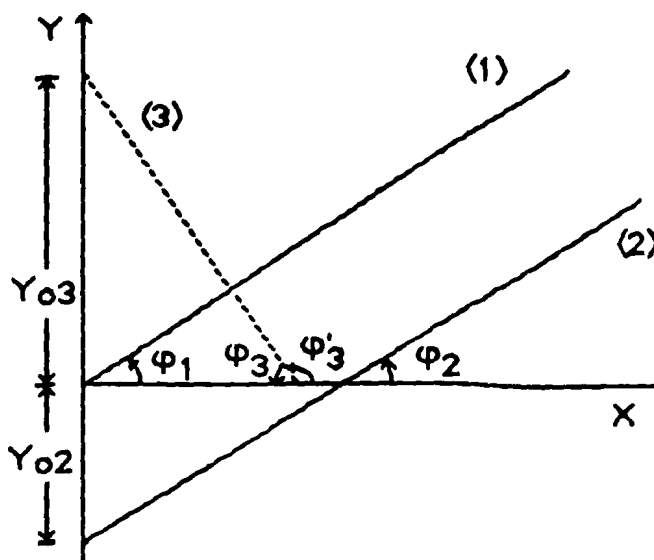
Η σταθερά αυτή λ ονομάζεται κλίση της ευθείας ως προς τον άξονα των x (Σχ. 4).

Το Σχ. 5 δείχνει τρεις ακόμη περιπτώσεις ευθειών. Η ευθεία (1) έχει $y_0 = 0$ και $\lambda = \lambda_1$, οπότε η εξίσωσή της γράφεται $y = \lambda_1 x$.

Η ευθεία (2) έχει $y_0 = -y_{02}$ και $\lambda = \lambda_2$. Η εξίσωσή της γράφεται $y = -y_{02} + \lambda_2 x$.

Η ευθεία (3) έχει $y_0 = y_{03}$ και αρνητική κλίση, $\lambda = -\lambda_3$, οπότε η εξίσωσή της γράφεται $y = y_{03} - \lambda_3 x$.

Η χάραξη της ευθείας γίνεται σε χιλιοστομετρικό χαρτί. Ένα παράδειγμα ευθείας γραμμής είναι το διάγραμμα του Σχ. 1.



Σχήμα 5: Τρεις περιπτώσεις ευθειών



3.2 Λογαριθμικές Καμπύλες

Μία συνηθισμένη σχέση μεταξύ των μεταβλητών x και y είναι η εξίσωση με τη μορφή

$$y = y_0 + cx^n \quad (6)$$

όπου y_0 είναι η τεταγμένη στην αρχή (η τιμή της y για $x = 0$). Η c είναι μία σταθερή ποσότητα και n είναι ένας αριθμός. Εάν $n = 1$ τότε η παράσταση της (6) είναι ευθεία και αν $n = 2$ είναι παραβολή. Η σχέση (6) μπορεί να γραφεί και $y - y_0 = cx^n$. Πολλές φορές τυχαίνει το y_0 να είναι μηδέν και τότε η εξίσωση έχει τη μορφή $y = cx^n$. Για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα-μας θα ασχοληθούμε με την τελευταία σχέση, έχοντας όμως υπόψη ότι όταν $y_0 \neq 0$ τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε την y με $y - y_0$. Έτσι λοιπόν θα αναλύσουμε τη σχέση

$$y = cx^n \quad (7)$$

Λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη της (7) με βάση το 10 βρίσκουμε ότι

$$\log y = \log c + n \cdot \log x \quad (8)$$

Εάν $Y = \log y$, $C = \log c$, και $X = \log x$ η (8) γράφεται

$$Y = C + nX \quad (9)$$

που είναι η εξίσωση της ευθείας (4). Επομένως, αν αντί των τιμών x και y χρησιμοποιήσουμε τους λογάριθμους αυτών, τότε η καμπύλη της εξίσωσης (8) ανάγεται σε ευθεία με κλίση ίση προς n που δίνεται από τη σχέση

$$n = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} \quad (10)$$

όπου (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι δύο ζεύγη τιμών που αντιστοιχούν σε δύο σημεία της ευθείας. Άρα, αν μεταξύ των $\log y$ και $\log x$ ισχύει γραμμική



σχέση της μορφής (9) συνεπάγεται ότι μεταξύ των μεταβλητών y και x ισχύει η σχέση (7).

Για λόγους ευκολίας αντί να βρίσκουμε τους λογάριθμους των τιμών y και x χρησιμοποιούμε λογαριθμικό χαρτί, όπου τοποθετούνται κατευθείαν οι τιμές των x και y . Το λογαριθμικό χαρτί (Σχ.6) έχει τους άξονες-του διαιρεμένους έτσι ώστε κάθε υποδιαίρεση είναι ανάλογη του λογάριθμου της ακολουθίας των ακέραιων αριθμών. Οπότε, όταν τοποθετούμε τις τιμές των μετρήσεων x και y στο διάγραμμα η σχέση μεταξύ-τους να είναι λογαριθμική.

Παράδειγμα:

Από τη θερμοδυναμική γνωρίζουμε ότι σε μία αδιαβατική μεταβολή ισχύει η σχέση $PV^\gamma = c$, όπου c και γ σταθερές. Η σχέση αυτή ανάγεται σε γραμμική με λογαρίθμηση

$$\log P = \log c - \gamma \log V$$

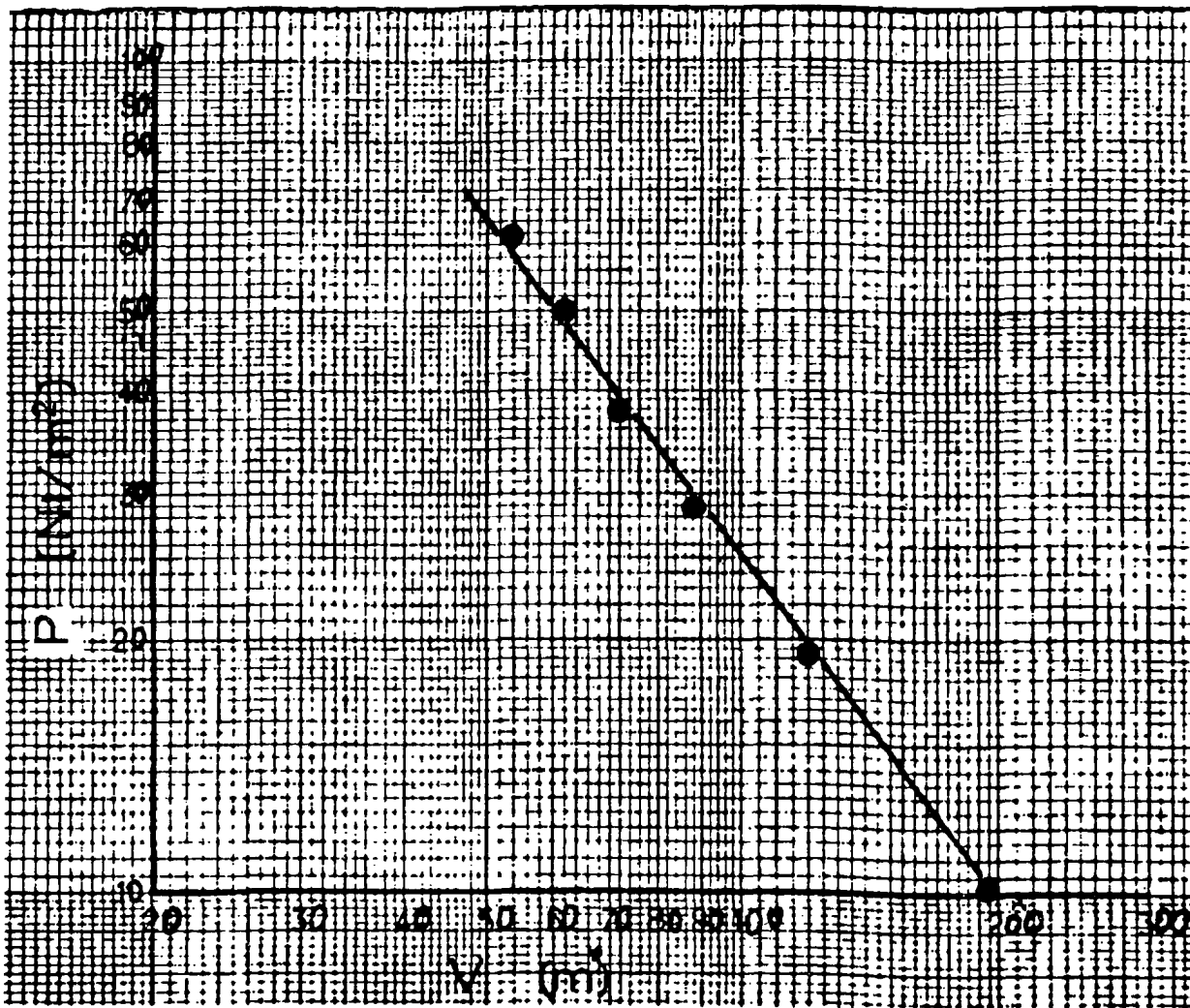
και παριστάνεται με ευθεία σε λογαριθμικό χαρτί. Αυτό επαληθεύεται στο Σχ. 6 με τη βοήθεια των πειραματικών τιμών της πίεσης P και του όγκου V μίας ορισμένης μάζας αερίου που απεικονίζονται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2

$p \left(\frac{Nt}{m^2} \right)$	61.2	49.5	37.6	28.4	19.2	10.1
$V (m^3)$	54.3	61.8	72.4	88.7	118.6	194.0

Από την ευθεία του Σχ. 6, μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τις σταθερές c και γ . Το $c = 16 \times 10^4$ και $\gamma = \frac{\log P_1 - \log P_2}{\log V_1 - \log V_2} = -1.33$. Για μεγαλύτερη ακρίβεια εφαρμόζουμε τη θεωρία των "ελάχιστων τετραγώνων".





Σχήμα 6: Απεικόνιση των τιμών του Πίνακα 2 σε λογαριθμικό χαρτί.

3.3 Εκθετικές Καμπύλες

Μία άλλη συνηθισμένη σχέση μεταξύ μεταβλητών ενός φυσικού φαινομένου είναι η εκθετική σχέση με τη μορφή

$$y = D e^{nx} \tag{11}$$

όπου D και n είναι σταθερές. Εάν λογαριθμίσω την (11) με βάση το e προκύπτει η γραμμική σχέση



$$\ln y = \ln D + n x \quad (12)$$

Μετατρέποντας τους νεπέρειους σε δεκαδικούς λογάριθμους (βλέπε Κεφ. 1, παραγρ. 5) έχουμε

$$\log y = \log D + \frac{n}{2.303} \cdot x \quad (13)$$

Σε ένα διάγραμμα με συντεταγμένες $\log y$ και x τα ζεύγη των τιμών θα ορίζουν μία ευθεία με τεταγμένη $\log y = \log D$ (όταν $x = 0$) και κλίση

$$\frac{n}{2.303} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{x_2 - x_1} \quad (14)$$

όπου (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι δύο σημεία της ευθείας.

Για ευκολία χρησιμοποιούμε ειδικά χαραγμένο χαρτί που φέρει λογαριθμική κλίμακα στην τεταγμένη και απλή αριθμητική κλίμακα στην τετμημένη και ονομάζεται συνήθως ημιλογαριθμικό χαρτί (Σχ.7). Υπάρχουν ημιλογαριθμικά χαρτιά με διαφορετικό πλήθος περιοχών στη λογαριθμική κλίμακα. Οι τιμές των μετρήσεων τοποθετούνται απευθείας στο χαρτί χωρίς μετασχηματισμό.

Παράδειγμα:

Ραδιενεργό κοβάλτιο Co^{60} εκπέμπει διεισδυτικές ακτίνες- γ και προσπίπτουν σε ελάσματα στερεού μολύβδου διαφόρου πάχους που ελαττώνουν την ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Τα μεγέθη έντασης ακτινοβολίας I και πάχους υλικού (μολύβδου) x συνδέονται με τη σχέση

$$I = I_0 e^{-kx}$$

όπου I_0 η ένταση της ακτινοβολίας για $x = 0$ και k ο γραμμικός συντελεστής απορρόφησης, είναι σταθερά μεγέθη.

Με λογαρίθμηση η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\log I = \log I_0 - \frac{k}{2.303} x$$



Οι πειραματικές τιμές των I και x συνοψίζονται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3

x (cm)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
I (mCi)	10.0	7.1	5.0	3.5	2.5	1.8	1.2	0.9	0.6	0.5	0.3

Με τις τιμές του πίνακα κατασκευάζουμε την προσεγγιστική ευθεία σε ημιλογαριθμικό χαρτί, όπως δείχνει το Σχ. 7. Από την ευθεία μπορούμε να βρούμε κατά προσέγγιση τις σταθερές I_0 και k .

Για $x = 0$, $I_0 = 10$ mCi

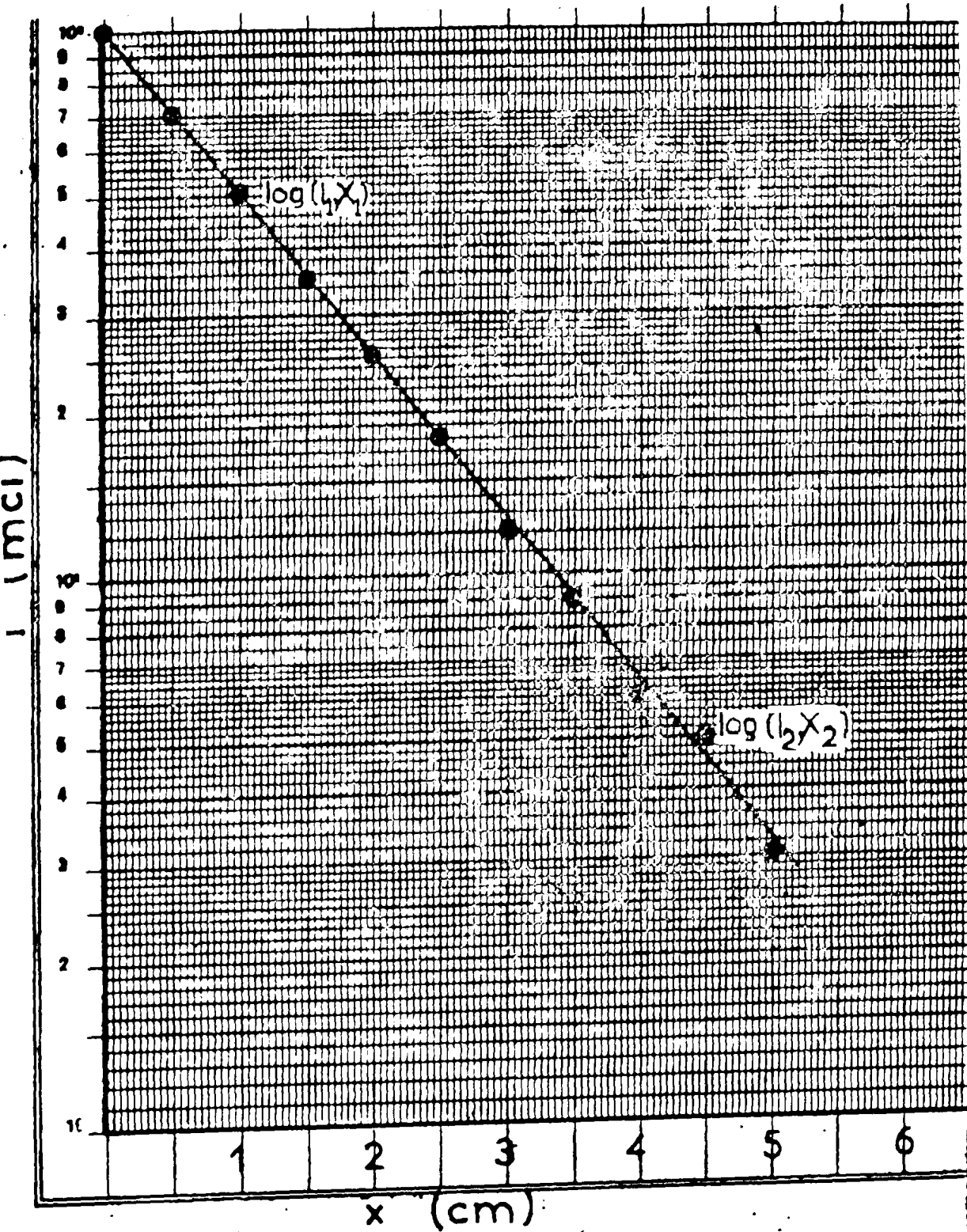
$$\lambda = \frac{\log I_2 - \log I_1}{x_2 - x_1} = \frac{-0.28 - 0.70}{4.3 - 1} = \frac{-0.98}{3.3} = -0.30$$

$$\text{άρα } \lambda = -\frac{k}{2.303} = -0.30$$

$$\text{ή } k = (0.30) \cdot (2.303) = 0.691$$

Καλύτερες τιμές των k και I_0 προϋποθέτουν τη θεωρία των ελαχίστων τετραγώνων.





ήμα 7: Απεικόνιση των τιμών του Πίνακα 3 σε ημιλογαριθμικό χαρτί.



4. ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

4.1 Εύρεση της Καλύτερης Σχέσης Μεταξύ Δύο Μεταβλητών

Για την εύρεση της καλύτερης ευθείας θα χρησιμοποιήσουμε μία μέθοδο που στηρίζεται στην αρχή των ελαχίστων τετραγώνων του **Legendre**. Σύμφωνα με την αρχή αυτή, η καλύτερη τιμή x ενός μεγέθους είναι εκείνη για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των μετρήσεων $x_i (i=1, N)$ από την τιμή x είναι ελάχιστο, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^N (x - x_i)^2 = \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2 \quad (15)$$

Έστω ότι κατά την εκτέλεση ενός πειράματος μετρούνται τα μεγέθη x και y και παίρνονται N ζεύγη τιμών $x_i, y_i (i=1, N)$. Έστω επίσης ότι η σχέση που συνδέει τα x και y είναι η εξίσωση της ευθείας

$$y = y_0 + \lambda x \quad (4)$$

Ζητάμε τις σταθερές λ (κλίση) και y_0 (τεταγμένη στην αρχή) που ορίζουν την ευθεία. Υποθέτουμε ότι οι τιμές $x_i (i=1, N)$ μετρήθηκαν με ακρίβεια, δηλαδή $\Delta x_i = 0$ και ότι μόνο στην εύρεση των τιμών $y_i (i=1, N)$ έγιναν σφάλματα παρατηρήσεων. Για ορισμένη τιμή του x_i η καλύτερη τιμή του y δίνεται από την (4) σαν $\lambda x_i + y_0$. Η απόκλιση μίας μετρούμενης τιμής y_i από την καλύτερη αυτή τιμή δίνεται με τη σχέση

$$\Delta y_i = \lambda x_i + y_0 - y_i \quad (16)$$

Η συνθήκη

$$\sum_{i=1}^N (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^N (\lambda x_i + y_0 - y_i)^2 = \text{ελάχιστο} \quad (17)$$



είναι η αρχή των "ελάχιστων τετραγώνων". Για ευκολία ορίζουμε τη συνάρτηση $F(\lambda, y_0)$ ως εξής:

$$F(\lambda, y_0) = \sum_{i=1}^N (\lambda x_i + y_0 - y_i)^2 \quad (18)$$

Συνδυάζοντας τις (17) και (18) έχουμε

$$F(\lambda, y_0) = \text{ελάχιστο} \quad (19)$$

Όπως είναι γνωστό οι συνθήκες για να έχει ακρότατο η συνάρτηση $F(\lambda, y_0)$ είναι

$$\frac{\partial F(y_0, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F(y_0, \lambda)}{\partial y_0} = 0 \quad (20)$$

Οι συνθήκες (20) εγγυώνται την ύπαρξη του ακρότατου της $F(\lambda, y_0)$ όχι όμως οπωσδήποτε του ελάχιστου, όπως απαιτεί η (19). Η ύπαρξη του ελάχιστου (και όχι του μέγιστου) είναι φανερή από το σκεπτικό του προβλήματος. Οι συνθήκες (20) δίνουν τις σταθερές λ και y_0 . Από τις σχέσεις (18) και (20) έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\sum_{i=1}^N (\lambda x_i + y_0 - y_i)^2 \right] = \sum_{i=1}^N (\lambda x_i + y_0 - y_i) x_i = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \left[\sum_{i=1}^N (\lambda x_i + y_0 - y_i)^2 \right] = \sum_{i=1}^N (\lambda x_i + y_0 - y_i) = 0 \quad (22)$$

Από τα δεύτερα μέρη των (21) και (22) προκύπτει το σύστημα

$$\lambda \sum_{i=1}^N x_i^2 + y_0 \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i \quad (23)$$



$$\lambda \sum_{i=1}^N x_i + N y_0 = \sum_{i=1}^N y_i$$

Η λύση του συστήματος (23) ως προς λ και y_0 δίνει τις ζητούμενες τιμές

$$\lambda = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2} \quad (24)$$

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2} \quad (25)$$

Με βάση τις τιμές των λ και y_0 , όπως δίνονται από τις (24) και (25), βρίσκεται η καλύτερη ευθεία που αντιστοιχεί στην εξίσωση (4). Η ευθεία αυτή ονομάζεται και "ευθεία ελαχίστων τετραγώνων". (Το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των πραγματικών τιμών από τις τιμές που αντιστοιχούν σε ένα σημείο της ευθείας είναι ελάχιστο).

Συνήθως οι δείκτες παραλείπονται και οι τύποι (24) και (25) γράφονται με απλούστερη μορφή

$$\lambda = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (26)$$

$$y_0 = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (27)$$

Μέχρι τώρα για την εύρεση της καλύτερης ευθείας θεωρήσαμε την x σαν ανεξάρτητη μεταβλητή και την y σαν εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή



$$y = y_0 + \lambda x \quad (4)$$

Αν όμως παίρναμε το y σαν ανεξάρτητη μεταβλητή και το x σαν εξαρτημένη, δηλαδή είχαμε

$$x = x_0 + \lambda' y \quad (28)$$

τότε τα x_0 και λ' δεν μπορούν να προκύψουν από την (4). Δηλαδή λύνοντας την (4) ως προς x :

$$x = -\frac{y_0}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} y \quad (29)$$

δεν μπορούμε να γράψουμε ότι $x_0 = -y_0/\lambda$ και $\lambda' = 1/\lambda$, αλλά πρέπει να επαναληφθεί η μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων από την αρχή. Δηλαδή, πρέπει σε όλη τη διαδικασία της μεθόδου, να αντικαταστήσουμε το y με το x και αντίστροφα. Ο λόγος βέβαια είναι φανερός, γιατί στην περίπτωση της (4) υποθέσαμε ότι οι τιμές του x μετρήθηκαν με ακρίβεια, ενώ στην (28) υποθέτουμε ότι τα y μετρούνται με ακρίβεια. Προφανώς, αν οι μετρήσεις των x και y δεν συνοδεύονται από μεγάλα σφάλματα τότε οι ευθείες (4) και (28) περίπου θα συμπίπτουν.

Όπως είδαμε, η μέθοδος που περιγράψαμε αναφέρεται στην εύρεση της καλύτερης ευθείας. Επομένως εάν η σχέση που συνδέει τις μεταβλητές δεν είναι γραμμική τότε πρέπει να την ανάγουμε σε γραμμική. Εάν πρόκειται για επαλήθευση μίας σχέσης ή μας δίνεται η μορφή της καμπύλης που συνδέει δύο φυσικά μεγέθη τότε αμέσως διαλέγουμε το χαρτί με τις κατάλληλες κλίμακες. Δηλαδή το χαρτί στο οποίο, όταν τοποθετηθούν οι τιμές των μεγεθών θα προκύψει ευθεία. Εάν δεν γνωρίζουμε τη σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη τότε πρέπει να βρούμε σε ποιο χαρτί η τοποθέτηση των σημείων δίνει ευθεία. Αρχίζουμε συνήθως από το χιλιοστομετρικό, εάν δεν προκύψει ευθεία δοκιμάζουμε το λογαριθμικό και αν χρειαστεί καταλήγουμε στο ημιλογαριθμικό. Έτσι παίρνουμε το διάγραμμα της προσεγγιστικής ευθείας που μας δίνει τη μορφή της εξίσωσης, οπότε με τη βοήθεια των εξισώσεων (26) και (27) προσδιορίζουμε τις πιό πιθανές τιμές

των σταθερών y_0 και λ . Με βάση τις σταθερές αυτές σχεδιάζουμε την καλύτερη καμπύλη και διατυπώνουμε τη μαθηματική σχέση που συνδέει τα μετρούμενα μεγέθη.

Μη γραμμικές σχέσεις: Η προηγούμενη μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δεν περιορίζεται βέβαια μόνο για την εύρεση των ευθειών. Εάν, π.χ. η σχέση μεταξύ των σημείων $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$ εκφράζεται με μία εξίσωση 2ου βαθμού.

$$y = a + b x + c x^2 \quad (30)$$

και θέλουμε να βρούμε την καλύτερη καμπύλη που αντιστοιχεί στην εξίσωση αυτή, τότε προσδιορίζουμε τις σταθερές a, b και c από συνθήκες ανάλογες προς την (20). Τώρα όμως η συνάρτηση F θα είναι της μορφής

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^N (a + b x_i + c x_i^2 - y_i)^2 \quad (31)$$

Οι συνθήκες για να έχει ακρότατο η συνάρτηση $F(a, b, c)$ είναι

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 0 \quad (32)$$

Από τις (31) και (32) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \sum y &= aN + b \sum x + c \sum x^2 \\ \sum xy &= a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\sum x^2 y = a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4$$

Οι σταθερές a, b και c προσδιορίζονται όταν λύσουμε το σύστημα αυτό.

Μπορούμε να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις (33) εάν εκλέξουμε το x έτσι ώστε $\sum x = 0$.



4.2 Σχέσεις με Περισσότερες των Δύο Μεταβλητών

Η εφαρμογή της μεθόδου των ελάχιστων τετραγώνων προεκτείνεται και σε προβλήματα με περισσότερες από δύο μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε στην εύρεση μίας επιφάνειας της μορφής

$$z = f(x, y) \quad (34)$$

Η εύρεση αυτή γίνεται με τρόπο ακριβώς ανάλογο με αυτά που περιγράψαμε προηγούμενα. Εδώ όμως, για τον προσδιορισμό της απόκλισης μίας μετρούμενης τιμής Δz_i , υποθέτουμε ότι οι τιμές x_i ($i=1, N$) και y_i ($i=1, N$) μετρήθηκαν με ακρίβεια και μόνο στην εύρεση της z_i ($i=1, N$) έγιναν σφάλματα παρατηρήσεων.

Έστω ότι η σχέση μεταξύ των μεταβλητών x , y και z εκφράζεται με τη γραμμική εξίσωση

$$z = a + bx + cy \quad (35)$$

Η εξίσωση αυτή σε ένα τρισδιάστατο σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων παριστάνει επίπεδο. Τα σημεία των μετρήσεων $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_N, y_N, z_N)$ πρέπει να βρίσκονται κοντά στο επίπεδο αυτό. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων, όπως προηγούμενα καταλήγουμε στο σύστημα

$$\sum z = aN + b\sum x + c\sum y$$

$$\sum xz = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum xy \quad (36)$$

$$\sum yz = a\sum y + b\sum xy + c\sum y^2$$

Οι σταθερές a , b και c προσδιορίζονται με τη λύση αυτού του συστήματος.



4.3 Παραδείγματα

- 1) Σε μία σειρά παρατηρήσεων των μεγεθών x και y βρέθηκαν οι αντίστοιχες τιμές:

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	12.3	12.9	13.6	13.8	14.5	15.1	15.2	15.9

Να βρεθεί η καλύτερη εξίσωση της ευθείας που τα παριστάνει.

Λύση

Η εξίσωση της ευθείας έχει τη μορφή

$$y = y_0 + \lambda x$$

Ζητάμε τα y_0 και λ που δίνονται από τις σχέσεις:

$$y_0 = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}, \quad \lambda = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

Για διευκόλυνση των πράξεων καταρτίζουμε τον πίνακα:

x	y	x^2	xy
10	12.3	100	123
20	12.9	400	258
30	13.6	900	408
40	13.8	1600	552
50	14.5	2500	725
60	15.1	3600	906
70	15.2	4900	1064
80	15.9	6400	1272
$\sum x = 360$	$\sum y = 113.3$	$\sum x^2 = 20400$	$\sum xy = 5308$
$(\sum x)^2 = 129600$			

οπότε



$$y_0 = \frac{20400 \times 113.3 - 360 \times 5308}{8 \times 20400 - 129600} = \frac{400440}{33600} = 11.9$$

$$\lambda = \frac{8 \times 5308 - 113.3 \times 360}{33600} = \frac{1676}{33600} = 0.05$$

και η ζητούμενη ευθεία είναι

$$y = 11.9 + 0.05 x$$

- 2) Ένα κινητό διανύει ένα καθορισμένο διάστημα x με ταχύτητα u σε χρόνο t . Για να βρεθεί η σχέση μεταξύ της ταχύτητας u και του χρόνου t που χρειάζεται το κινητό να διανύσει το διάστημα x , πάρθηκαν οι παρακάτω μετρήσεις:

t (sec)	2.43	2.53	2.63	2.73	2.93
u ($\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$)	65	70	75	80	90

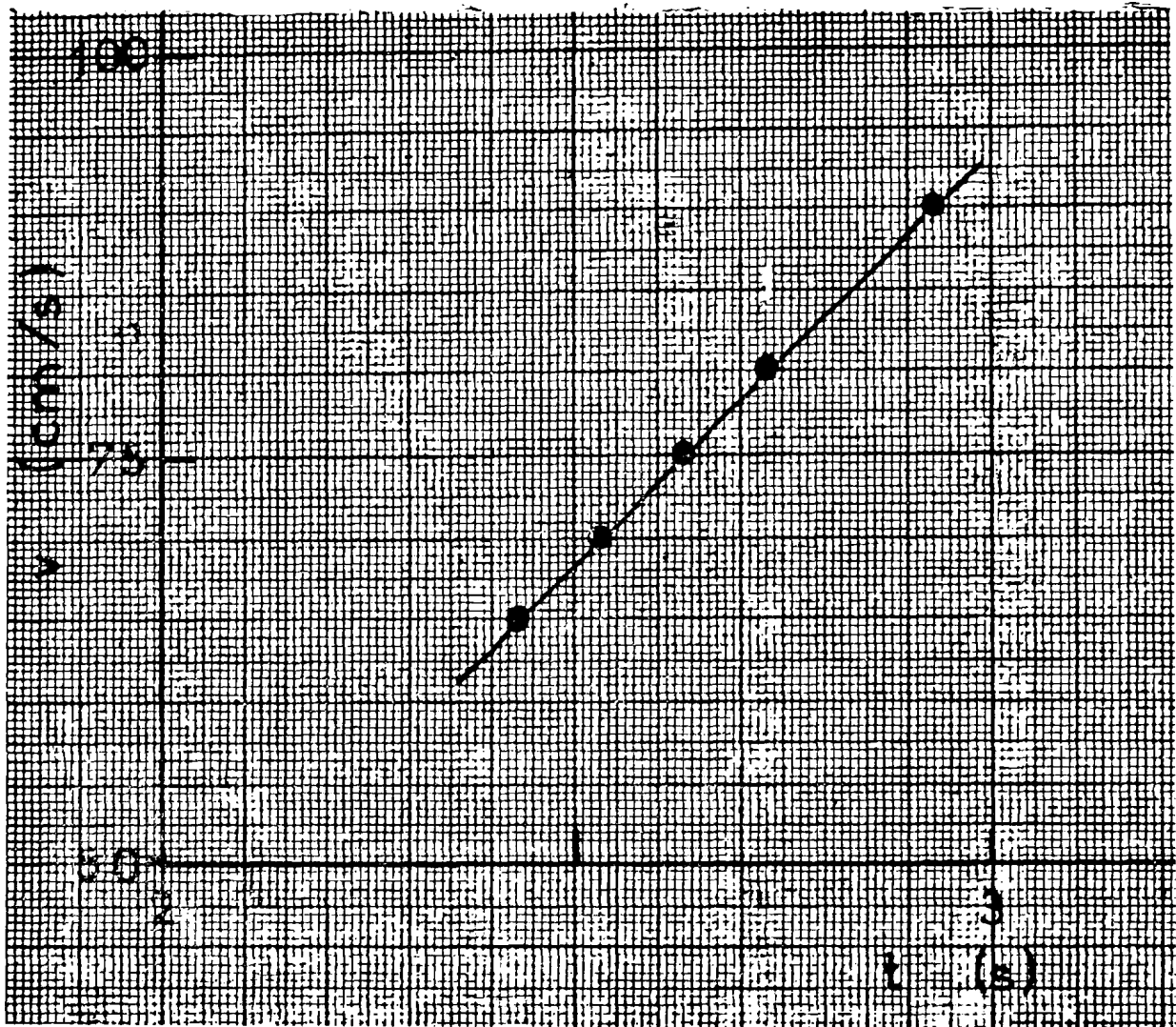
Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη.

Λύση

Αρχικά κάνουμε το διάγραμμα της κίνησης του κινητού τοποθετώντας τα ζεύγη των τιμών σε χιλιοστομετρικό χαρτί (Σχ.8). Σύμφωνα με το διάγραμμα οι τιμές αυτές βρίσκονται σε ευθεία. Επομένως η σχέση μεταξύ των u και t είναι ευθεία της μορφής

$$u = u_0 + at$$





Σχήμα 8



Καταρτίζουμε τον πίνακα:

t (sec)	u ($\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$)	t ²	ut
2.43	65	5.90	157.95
2.53	7	6.40	177.10
2.63	75	6.92	197.25
2.73	80	7.45	218.40
2.93	90	8.58	263.70
Σt = 13.25 (Σt) ² = 175.65	Σu = 380	Σt ² = 35.25	Σut = 1014.40

οπότε

$$u_0 = \frac{\Sigma t^2 \Sigma u - \Sigma t \Sigma ut}{N \Sigma t^2 - (\Sigma t)^2} = \frac{35.25 \times 380 - 13.25 \times 1014.40}{5 \times 35.25 - 175.65} =$$

$$= \frac{-45.80}{0.60} = -76.33 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \approx -76 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

$$a = \frac{N \Sigma ut - \Sigma t \Sigma u}{N \Sigma t^2 - (\Sigma t)^2} = \frac{5 \times 1014.40 - 13.25 \times 380}{5 \times 35.25 - 175.65} = \frac{37}{0.60} = 61.67$$

Άρα η εξίσωση είναι

$$u = (-76 + 61.67 t) \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$



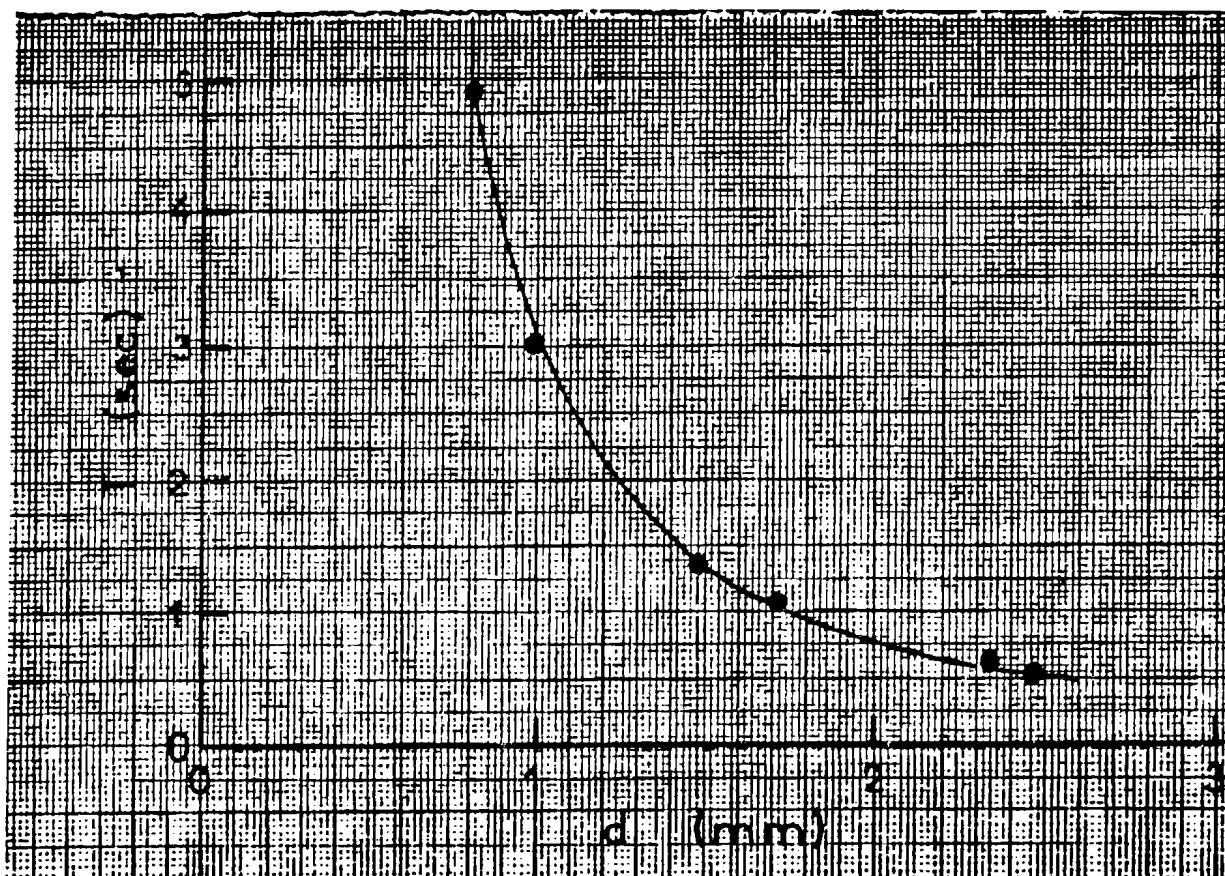
3) Στο πείραμα των στροφικών ταλαντώσεων για να προσδιοριστεί η εξάρτηση της περιόδου T των ταλαντώσεων από τη διάμετρο του σύρματος από το οποίο εξαρτάται ο δίσκος, έγιναν οι παρακάτω μετρήσεις:

T (sec)	4.84	3.02	1.36	1.04	0.62	0.52
d (mm)	0.80	0.99	1.48	1.72	2.31	2.46

Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα μεγέθη T και d .

Λύση

Αρχικά τοποθετούμε τα σημεία των τιμών σε χλιοστομετρικό χαρτί (Σχ.9).



Σχήμα 9

Όπως δείχνει το διάγραμμα η καμπύλη των σημείων δεν είναι ευθεία. Τοποθετούμε μετά τα σημεία σε λογαριθμικό χαρτί (Σχ.10). Η καμπύλη τώρα



είναι ευθεία. Άρα η καμπύλη είναι λογαριθμική και η σχέση μεταξύ των T και d είναι της μορφής

$$T = cd^n$$

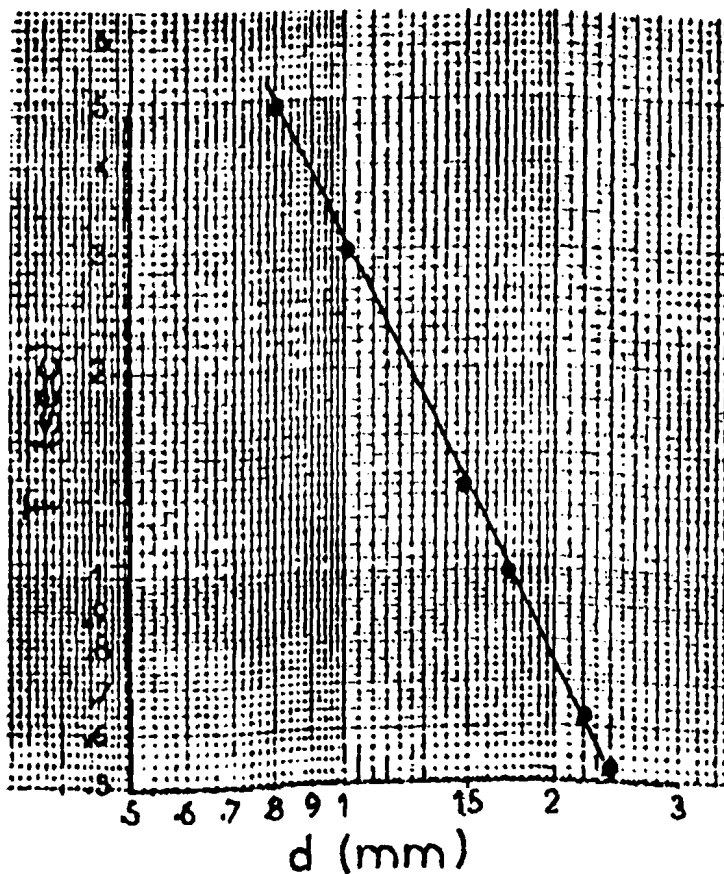
Λογαριθμίζοντας την εξίσωση προκύπτει

$$\log T = \log c + n \log d$$

Η εξίσωση αυτή είναι ευθεία της μορφής

$$Y = Y_0 + \lambda X$$

όπου $Y = \log T$, $Y_0 = \log c$, $\lambda = n$, $X = \log d$.



Σχήμα 10

Καταρτίζουμε τον πίνακα:

X	Y	X ²	XY
-0.097	0.685	0.009	-0.066
-0.004	0.480	0.000	-0.002
0.170	0.134	0.029	0.023
0.236	0.017	0.056	0.004
0.364	-0.208	0.132	-0.075
0.391	-0.284	0.153	-0.111
ΣX = 1.060 (ΣX) ² = 1.124	ΣY = 0.824	ΣX ² = 0.379	ΣXY = -0.227

οπότε

$$\lambda = n = \frac{6x(-0.227) - (1.06 \times 0.824)}{6 \times 0.379 - 1.124} = -1.94 \approx -2$$

$$Y_0 = \log c = \frac{0.379 \times 0.824 - 1.060 \times (-0.227)}{6 \times 0.379 - 1.124} = 0.481 \Rightarrow c = 3.03$$

άρα η εξίσωση είναι

$$T = cd^n = 3.03 d^{-2}$$

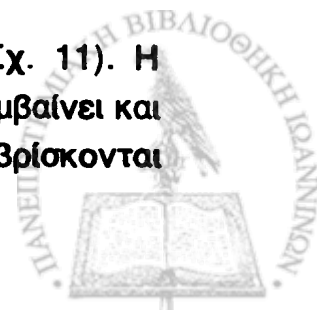
- 4) Όταν ένας φορτισμένος πυκνωτής συνδεθεί με μια αντίσταση R τότε ρεύμα i θα διαρρέει την αντίσταση. Για να βρεθεί πως μεταβάλλεται το i με το χρόνο t πάρθηκαν οι παρακάτω μετρήσεις:

t (msec)	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
i(mAmp)	50.0	33.0	24.0	15.0	11.0	7.0	5.0	3.1	2.2

Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα μεγέθη i και t.

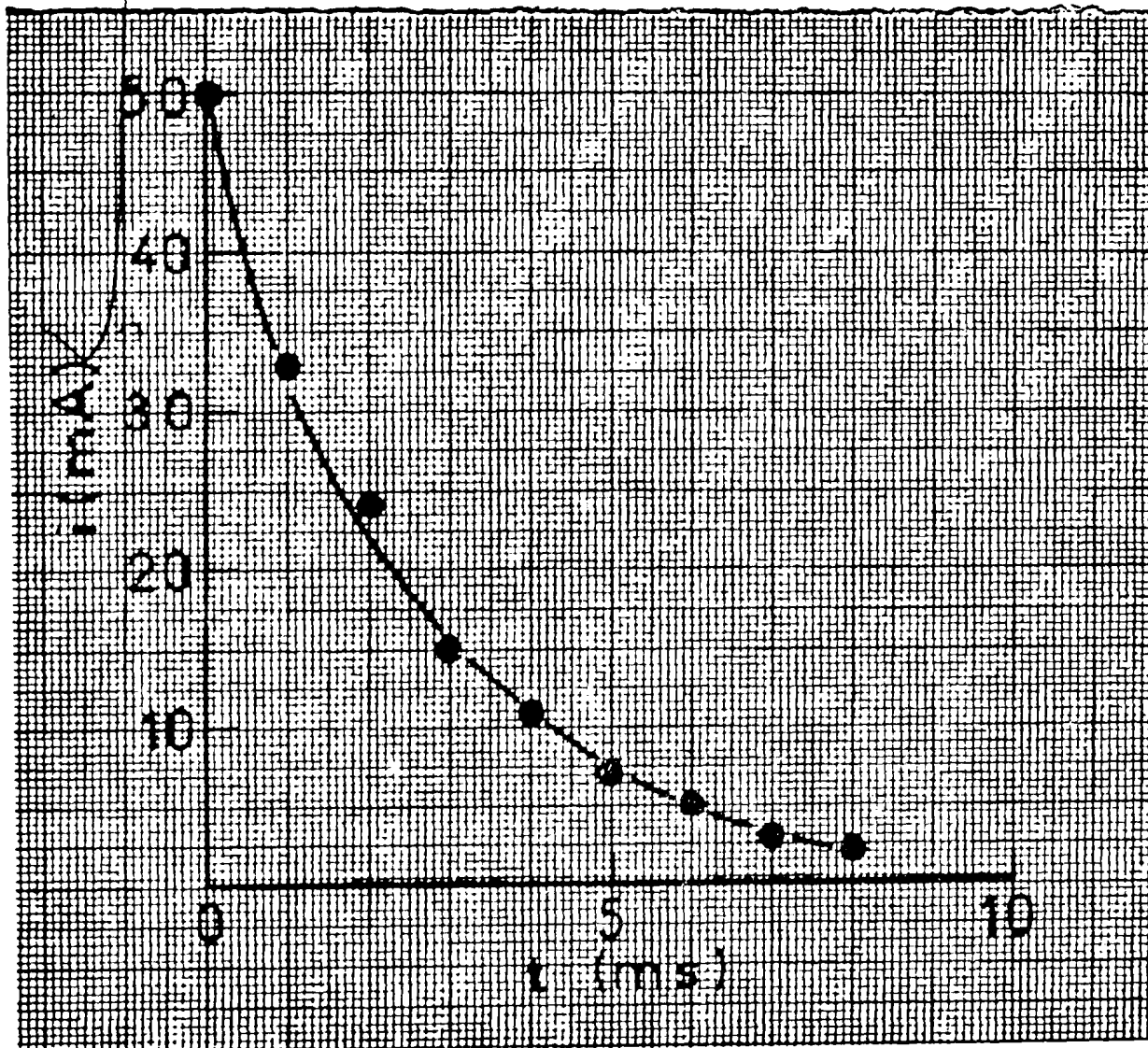
Λύση

Τοποθετούμε αρχικά τα σημεία στο χιλιοστομετρικό χαρτί (Σχ. 11). Η καμπύλη που προκύπτει απέχει πολύ από την ευθεία. Το ίδιο συμβαίνει και στο λογαριθμικό. Στο ημιλογαριθμικό όμως (Σχ. 12), τα σημεία βρίσκονται



πολύ κοντά στην ευθεία. Επομένως η εξίσωση που συνδέει τα i και t είναι εκθετική και έχει τη μορφή

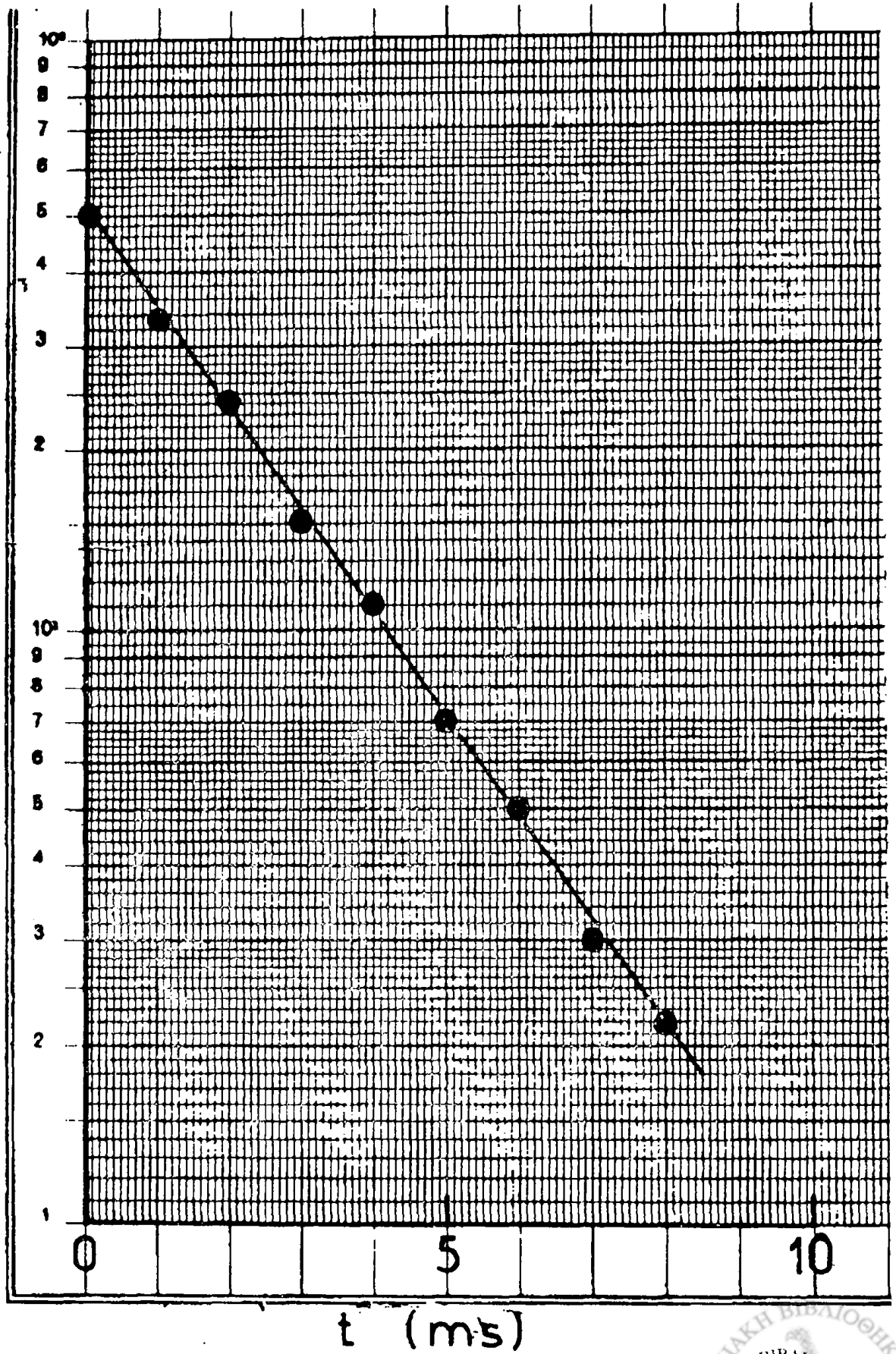
$$i = D e^{-\alpha t}$$



Σχήμα 11



i (mA)



Σχήμα 12



Η σχέση αυτή ανάγεται σε γραμμική με λογαρίθμηση

$$\ln i = \ln D + nt$$

ή

$$\log i = \log D + \frac{n}{2.303} t$$

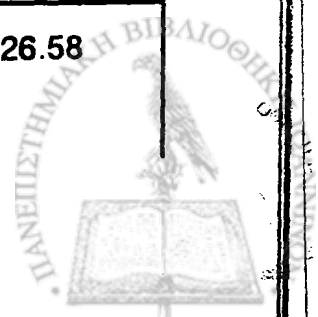
η εξίσωση αυτή παριστάνεται με την ευθεία

$$Y = Y_0 + \lambda X$$

όπου $Y = \log i$, $Y_0 = \log D$, $\lambda = \frac{n}{2.303}$, $X = t$

Για τον προσδιορισμό των σταθερών D και n κατασκευάζουμε τον πίνακα:

X	Y	X ²	XY
0.0	1.70	0.0	0.0
1.0	1.52	1.0	1.52
2.0	1.38	4.0	2.76
3.0	1.18	9.0	3.54
4.0	1.04	16.0	4.16
5.0	0.85	25.0	4.25
6.0	0.70	36.0	4.20
7.0	0.49	49.0	3.43
8.0	0.34	64.0	2.72
ΣX = 36.0 (ΣX) ² = 1296.0	ΣY = 9.20	ΣX ² = 204	ΣXY = 26.58



οπότε

$$Y_0 = \log D = \frac{204 \times 9.20 - 36 \times 26.58}{9 \times 204 - 1296} = \frac{919.92}{540} = 1.70$$

$$\text{ή } D = 50.53 \approx 50.5$$

$$\lambda = \frac{n}{2.303} = \frac{9 \times 26.58 - 36 \times 9.20}{540} = \frac{-91.98}{540} = -0.17$$

$$\text{ή } n = -0.17 \times 2.303 = -0.39 \approx -0.4$$

οπότε η αρχική σχέση γράφεται

$$i = 50.5e^{-0.4t}$$



ΑΙΤΗΣΗ

ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΟΙΚΗΤΗ

ΤΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

εργαστηριακές ασκήσεις



ΑΣΚΗΣΗ 1

органа μετρησης διαστασεων, μαζας και χρονου

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το μήκος (L) είναι ένα από τα θεμελιώδη μεγέθη της Φυσικής. Αυτό το μέγεθος, πέρα από την ομώνυμη-του σημασία, αποτελεί βασικό στοιχείο των διαστάσεων των διαφόρων σωμάτων. Η μέτρηση ενός μήκους ή των διαστάσεων σώματος είναι μία πολύ συνηθισμένη διεργασία στον πειραματικό κόσμο της Φυσικής. Όταν οι μετρήσεις απαιτούν μία σχετική ακρίβεια τότε χρησιμοποιούμε απλά όργανα που είναι πολύ διαδεδομένα. Τέτοια είναι το διαστημόμετρο, το παχύμετρο και το σφαιρόμετρο.

Όπως γνωρίζουμε το χρόνος (T) είναι ένα από τα θεμελιώδη μεγέθη της Φυσικής μαζί με το μήκος (L) και τη μάζα (M). Για τη μέτρηση του χρόνου χρησιμοποιούμε διάφορα χρονόμετρα. Η ακρίβεια ενός χρονομέτρου καθορίζει την ποιότητα της μέτρησης.

Ένα άλλο βασικό όργανο μέτρησης είναι ο ζυγός ο οποίος χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της μάζας. Η μέτρηση της μάζας είναι απαραίτητη σε πλήθος πειραμάτων Φυσικής.

Στην άσκηση αυτή θα αναφερθούμε στην περιγραφή και χρήση των παραπάνω οργάνων μέτρησης.

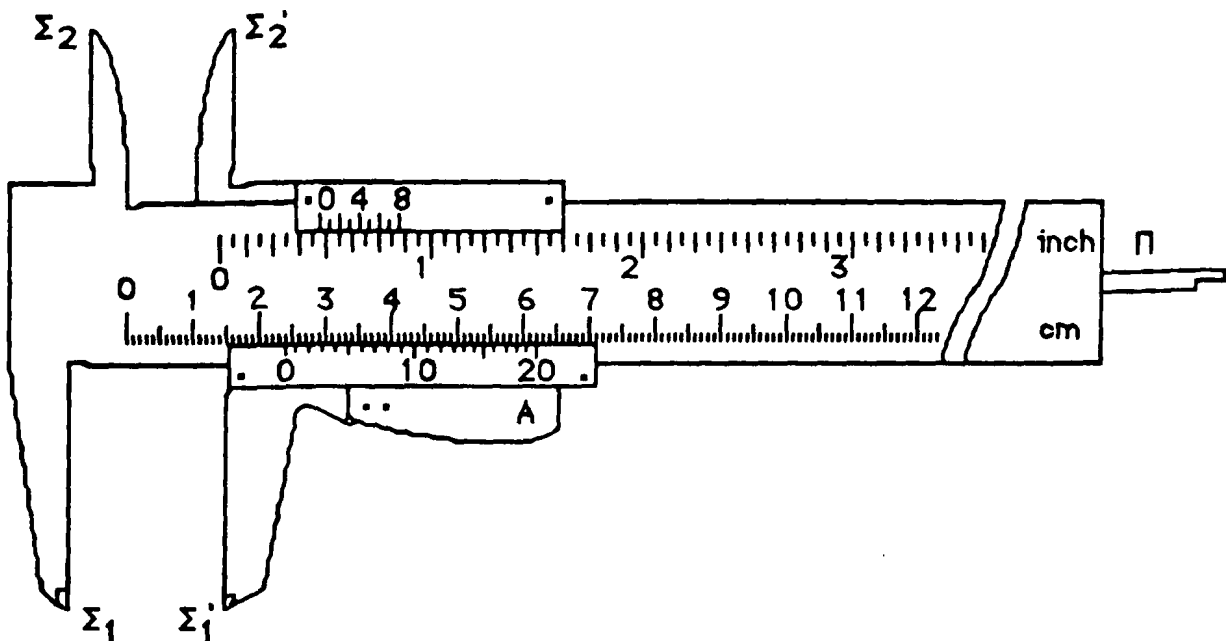


2. ΘΕΩΡΙΑ

2.1 Διαστημόμετρο

2.1.1 Περιγραφή

Το διαστημόμετρο είναι ένα όργανο που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση διαστάσεων διαφόρων αντικειμένων συνήθως μέχρι 25 cm. Για παράδειγμα αναφέρουμε μετρήσεις του πάχους μίας πλάκας ή ενός ελάσματος, της διαμέτρου μίας σφαίρας, της εξωτερικής και εσωτερικής διαμέτρου, του μήκους και του βάθους ενός σωλήνα κλπ. Όπως φαίνεται στο Σχ.1 το διαστημόμετρο αποτελείται βασικά από ένα κανόνα που φέρει την κύρια κλίμακα με διαιρέσεις σε mm ή inch. Στη μία άκρη ο κανόνας καταλήγει σε δύο σιαγόνες Σ_1 και Σ_2 . Η σιαγόνα Σ_1 έχει την εσωτερική-της πλευρά κάθετη προς τον κανόνα ενώ η σιαγόνα Σ_2 έχει την εξωτερική-της.



Σχήμα 1: Σχηματική απεικόνιση διαστημόμετρου

Η σκοπιμότητα της κατασκευής αυτής των σιαγόνων είναι ότι το Σ_1 χρησιμοποιείται για τη μέτρηση εξωτερικών διαστάσεων αντικειμένων ενώ το Σ_2 για τη μέτρηση εσωτερικών όπως την εσωτερική διάμετρο σωλήνα. Στον κανόνα πάνω είναι προσαρμοσμένος ένας άλλος μικρός κανόνας A (που λέγεται Βερνιέρος) που μπορεί να πηγαиноέρχεται πάνω στον αρχικό

κανόνα. Ο μικρός κανόνας καταλήγει επίσης σε δύο σιαγόνες, τις Σ_1' και Σ_2' που αποτελούν ζεύγη με τις Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα. Καθώς απομακρύνονται τα ζεύγη των σιαγόνων εμφανίζεται μία προεξοχή Π που χρησιμοποιείται για μετρήσεις βάθους. Το σύστημα του μικρού κανόνα A που μπορεί να ολισθαίνει, φέρει μία μικρή κλίμακα συνήθως με είκοσι μία χαραγές από 0 έως 20. Όπως θα εξηγήσουμε αργότερα, οι αποστάσεις μεταξύ των διαδοχικών αυτών χαραγών είναι μικρότερες από 1mm. Όταν θέλουμε να μετρήσουμε το μήκος ενός σώματος, π.χ. τη διάμετρο ενός κυλίνδρου προσαρμόζουμε τον κύλινδρο ανάμεσα στις σιαγόνες Σ_1 και Σ_1' και προσέχουμε σε ποια χαραγή της κύριας κλίμακας προσεγγίζει το μηδέν της μικρής κλίμακας A . Η χαραγή αυτή αντιστοιχεί στο μετρούμενο μήκος. Εάν θέλουμε να μετρήσουμε την εσωτερική διάμετρο σωλήνα, εισάγουμε τις σιαγόνες Σ_2 και Σ_2' στο σωλήνα, τις απομακρύνουμε μέχρι νάρθουν σε επαφή με τα εσωτερικά τοιχώματα του σωλήνα και μετά βλέπουμε που βρίσκεται το μηδέν της κλίμακας A . Για να μετρήσουμε το βάθος ενός σωλήνα απομακρύνουμε τις σιαγόνες Σ_1 και Σ_1' , εισάγουμε την προεξοχή Π μέχρι το βάθος που θέλουμε να μετρήσουμε και παρατηρούμε πάλι που βρίσκεται το μηδέν της κλίμακας A .

Συμβαίνει πολλές φορές το μηδέν της κλίμακας A να μη συμπίπτει ακριβώς με διαιρέσεις της κύριας κλίμακας αλλά να βρίσκεται στο διάστημα μεταξύ δύο διαιρέσεων. Στην περίπτωση αυτή η μέτρηση είναι προσεγγιστική. Για να βρούμε την ακριβή μέτρηση προσέχουμε ποια χαραγή της κλίμακας A συμπίπτει με κάποια διαίρεση της κύριας κλίμακας. Πριν όμως προχωρήσουμε στον προσδιορισμό της ακριβούς μέτρησης είναι σκόπιμο να δώσουμε μία πληρέστερη περιγραφή του βερνιέρου.

2.1.2 Βερνιέρος

Σταθερά Βερνιέρου: Όπως είπαμε προηγούμενα ο βερνιέρος είναι μία μικρή κλίμακα που μπορεί να πηγαινοέρχεται κατά μήκος της κύριας κλίμακας. Αν S είναι το μήκος μίας υποδιαίρεσης της κύριας κλίμακας και N ο αριθμός των υποδιαίρεσεων του A τότε θα ισχύει

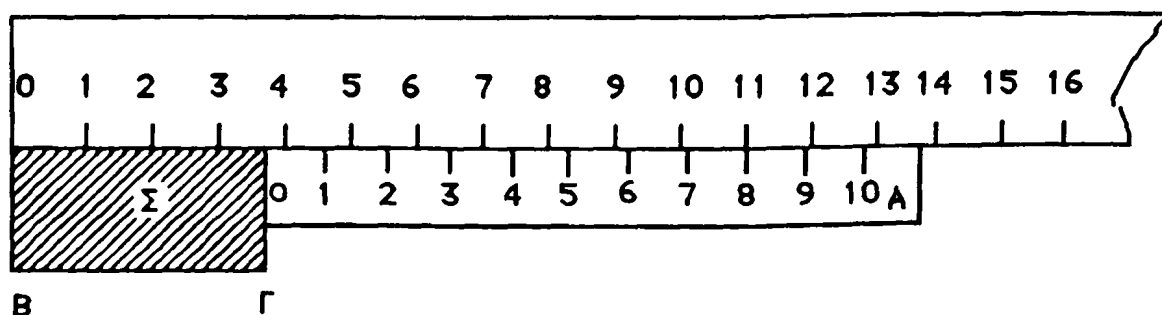
$$\frac{S}{N} = \sigma = \text{Σταθερά του βερνιέρου}$$

(1.1)



Η σταθερά σ του βερνιέρου είναι η ελάχιστη τιμή που μπορούμε να διαβάσουμε κατευθείαν από μία κλίμακα του βερνιέρου.

Για τη μέτρηση του μήκους ενός σώματος Σ με ένα κανόνα που φέρει βερνιέρο όπως στο Σχ. 2, βρίσκουμε τη σταθερά του βερνιέρου. Σ' αυτή την περίπτωση $S=1\text{mm}$ και $N=10$ οπότε $\sigma=0.1\text{mm}$ τοποθετούμε τη μία άκρη Β του σώματος στο μηδέν της κλίμακας του κανόνα. Μετά σύρουμε το βερνιέρο μέχρις ότου το μηδέν-του (χαραγή 0) έλθει σε επαφή με την άλλη άκρη Γ του σώματος. Με τη βοήθεια της αρχής 0 (μηδέν) του βερνιέρου βρίσκουμε τις ακέραιες υποδιαίρεσεις της κλίμακας που καλύπτει το σώμα (στην προκειμένη περίπτωση 3mm). Επίσης βρίσκουμε ποιά χαραγή του βερνιέρου συμπίπτει με κάποια χαραγή της κύριας κλίμακας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση του Σχ. 2 είναι η 8η χαραγή. Επομένως το ζητούμενο μήκος είναι μεγαλύτερο των 3mm κατά $8 \text{ υποδ.} \times \frac{1}{10} \frac{\text{mm}}{\text{υποδ.}} = 0.8 \text{ mm}$. Άρα το μήκος του σώματος Σ είναι: $B\Gamma = 3.8 \text{ mm}$.

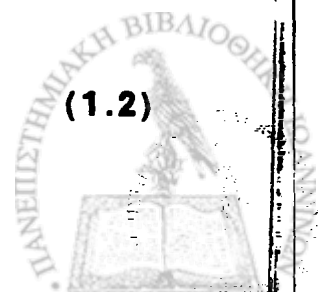


Σχήμα 2. Μέτρηση του μήκους σώματος Σ με κανόνα που φέρει βερνιέρο.

Γενικώτερα γράφουμε τον αριθμό x_0 των υποδιαίρεσεων της κύριας κλίμακας που βρίσκεται ακριβώς πριν από το 0 (μηδέν) του βερνιέρου. Βρίσκουμε την υποδιαίρεση x του βερνιέρου που συμπίπτει με μία οποιαδήποτε χαραγή (δεν χρειάζεται να την ξέρουμε) της κύριας κλίμακας. Πολλαπλασιάζουμε την υποδιαίρεση x με τη σταθερά $\sigma = \frac{S}{N}$ του βερνιέρου.

Το μήκος $B\Gamma = l$ θάναί

$$l = x_0 + x \cdot \sigma = x_0 + x \cdot \frac{S}{N} \quad (1.2)$$



Στην ειδική περίπτωση του διαστημόμετρου το σώμα Σ τοποθετείται ανάμεσα στις σιαγόνες Σ_1 και Σ_1' και η υπόλοιπη διαδικασία μεταξύ κύριας κλίμακας και βερνιέρου είναι η ίδια.

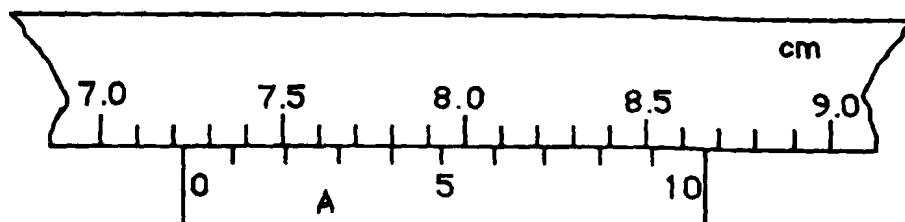
Σφάλμα ανάγνωσης: Αυτό οφείλεται στην αδυναμία του ματιού-μας για ακριβή προσδιορισμό της χαραγής του βερνιέρου που συμπίπτει με μία χαραγή της κλίμακας. Γενικά δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προσδιορίσουμε ποια χαραγή του βερνιέρου θ συμπίπτει με κάποια χαραγή της κύριας κλίμακας. Δηλαδή είναι δυνατό να είναι η χαραγή θ αλλά είναι πιθανόν να είναι η $\theta+1$ ή το ίδιο πιθανόν να είναι η χαραγή $\theta-1$. Συνεπώς, ορθότερο είναι να γράψουμε ότι η χαραγή του βερνιέρου που συμπίπτει με μία χαραγή της κύριας κλίμακας είναι $\theta \pm 1$ χαραγή. Το σφάλμα λοιπόν κατά την εκτίμηση του μήκους του σώματος θα είναι ± 1 υποδιαίρεση επί τη σταθερά σ του βερνιέρου. Στη μέτρηση του Σχ. 2 θα πρέπει να γράψουμε για το μήκος του σώματος Σ ότι $(\text{ΒΓ}) = (3.8 \pm 0.1) \text{ mm}$.

Μετάθεση μηδενός: Εάν φέρουμε τις σιαγόνες Σ_1 και Σ_1' σε επαφή πρέπει η χαραγή 0 του βερνιέρου να συμπέσει με τη χαραγή 0 της κύριας κλίμακας. Αυτό όμως, είτε λόγω ατέλειας του οργάνου είτε λόγω βλάβης αυτού δεν πραγματοποιείται συνήθως. Η μετατόπιση αυτή σ_0 της πρώτης χαραγής του βερνιέρου από το μηδέν της κύριας κλίμακας (μετάθεση μηδενός) πρέπει να εκτιμηθεί για να διορθωθεί το αποτέλεσμα της μέτρησης. Η διόρθωση προστίθεται όταν η πρώτη χαραγή του βερνιέρου έχει μετατοπιστεί προς τα αριστερά του μηδενός της κλίμακας και αφαιρείται όταν η μετατόπιση είναι προς τα δεξιά της κλίμακας.

Ένα παράδειγμα μέτρησης με διαστημόμετρο δίνεται στο Σχ. 3. Η σταθερά του διαστημόμετρου είναι $\sigma_{\Delta} = \frac{S}{N} = \frac{0.05 \text{ cm}}{10} = 0.005 \text{ cm}$. Έστω ότι η μετάθεση μηδενός $\sigma_0 = 0$. Ο αριθμός x_0 των υποδιαίρεσεων της κύριας κλίμακας είναι $x_0 = 7.200 \text{ cm}$. Βρίσκουμε την υποδιαίρεση $x = 4$ του βερνιέρου οπότε το μήκος l σύμφωνα με τη σχέση (1.4) είναι

$$l = x_0 + x \cdot \sigma_{\Delta} \pm \sigma_0 = 7.200 + 4 \times 0.005 \pm 0 = 7.220 \text{ cm}$$



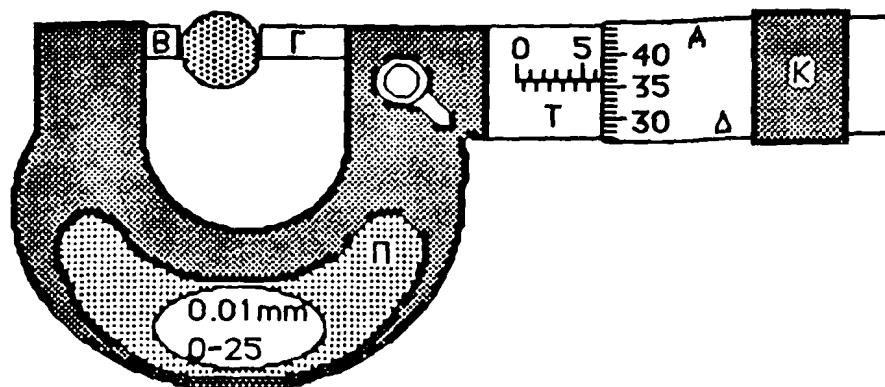


Σχήμα 3. Μέτρηση με διαστημόμετρο.

2.2 Μικρόμετρο

Περιγραφή

Για μετρήσεις αντικειμένων πάχους συνήθως μέχρι 25mm με σχετικά μεγαλύτερη ακρίβεια χρησιμοποιούμε το μικρόμετρο. Η σχηματική απεικόνιση του μικρόμετρου δείχνεται στο Σχ. 4. Όπως φαίνεται στο σχήμα στο στέλεχος Π είναι χαραγμένη η κλίμακα Τ ανά 0.5 mm και αριθμημένη ανά 5 mm. Στο στέλεχος Π είναι επίσης προσαρμοσμένη και η κυλινδρική βάση Β. Στο εσωτερικό του Τ κινείται μία μικρομετρική βίδα ακρίβειας που καταλήγει στη μία άκρη στον άξονα Γ και στην άλλη στο κυλινδρικό τύμπανο Δ. Στο ένα άκρο της κυλινδρικής επιφάνειας Δ είναι χαραγμένος κυκλικά ο βερνιέρος Α σε 50 υποδιαίρεσεις αριθμημένες ανά 5 χαραγές. Η μετατόπιση του άξονα Γ πρέπει να γίνεται με περιστροφή της κεφαλής Κ και όχι με περιστροφή του τυμπάνου Δ. Με τη χρησιμοποίηση της Κ επιτυγχάνουμε να έχουμε πάντα την ίδια συμπίεση στα άκρα Β και Γ για κάθε διαφορετική μέτρηση.



Σχήμα 4. Σχηματική απεικόνιση μικρόμετρου.

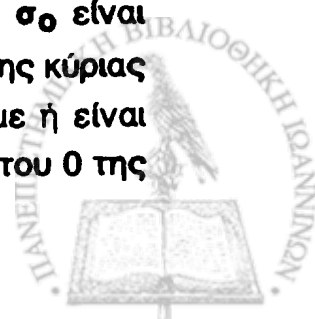


Σταθερά μικρόμετρου: Δύο στροφές του τυμπάνου Δ μεταθέτουν τα χείλη Β και Γ κατά 1 mm. Οι χαραγές του βερνιέρου αφορούν το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο της ανάγνωσης. Εάν μία χαραγή της κύριας κλίμακας συμπίπτει π.χ. με την 7η χαραγή του βερνιέρου τότε η ανάγνωση του δεκαδικού μέρους είναι 0.07, εάν με την 31η, τότε η ανάγνωση είναι 0.31. Εάν το δεκαδικό μέρος είναι μεγαλύτερο από 0.50 τότε διαβάζονται από το ίδιο τύμπανο Δ κατά τη δεύτερη στροφή του. Σημειώνουμε ότι η συμπλήρωση μίας πλήρους περιστροφής του τυμπάνου Δ αντιστοιχεί με μετατόπιση του Γ κατά 0.5 mm και δείχνεται με μη αριθμημένες χαραγές στα μισά των κανονικών διαιρέσεων. Εάν μία χαραγή της κύριας κλίμακας συμπίπτει π.χ με την 7η χαραγή του βερνιέρου, αφού έχει συμπληρώσει μία πλήρη περιστροφή, τότε η ανάγνωση του δεκαδικού μέρους είναι 0.57, εάν με την 31η, η ανάγνωση είναι 0.81.

Γενικότερα ο κυκλικός βερνιέρος έχει 50 υποδιαιρέσεις. Δύο πλήρεις περιστροφές του τυμπάνου Δ αντιστοιχούν σε 100 χαραγές του βερνιέρου και μεταθέτουν τα χείλη Β και Γ κατά 1.00 mm. Άρα η σταθερά αυτού του μικρόμετρου είναι $\sigma_M = \frac{1.00 \text{ mm}}{100 \text{ χαραγ.}} = 0.01 \text{ mm}$.

Σφάλμα ανάγνωσης: Συνήθως κατά την ανάγνωση στο τύμπανο Δ η οριζόντια γραμμή της κύριας κλίμακας Τ δεν συμπίπτει με μία χαραγή του τυμπάνου. Σ' αυτή την περίπτωση εκτιμούμε τη θέση της πλησιέστερης χαραγής του τυμπάνου ως προς την οριζόντια γραμμή της κύριας κλίμακας Τ. Έτσι αν κατά τη μέτρηση έχουμε σφάλμα ανάγνωσης ± 0.2 υποδιαιρέσεις του τυμπάνου, το σφάλμα ανάγνωσης είναι $\pm 0.2 \text{ υποδ.} \times 0.01 \frac{\text{mm}}{\text{υποδ.}} = \pm 0.002 \text{ mm}$.

Μετάθεση μηδενός: Εάν φέρουμε τα άκρα των αξόνων Β και Γ σε επαφή πρέπει το μηδέν του βερνιέρου να συμπίπτει με το μηδέν της κύριας κλίμακας. Όμως τις περισσότερες φορές το μηδέν του βερνιέρου δεν συμπίπτει με το μηδέν της κύριας κλίμακας οπότε έχουμε μετάθεση μηδενός σ_0 . Αυτό οφείλεται είτε στην ατέλεια του οργάνου είτε στην βλάβη που προκαλούν οι απρόσεκτοι πειραματιστές. Η μετάθεση μηδενός σ_0 είναι θετική όταν το 0 (μηδέν) του βερνιέρου βρίσκεται στα δεξιά του 0 της κύριας κλίμακας, οπότε αφαιρείται από την τιμή του πάχους που μετράμε ή είναι αρνητική όταν το 0 (μηδέν) του βερνιέρου βρίσκεται στα αριστερά του 0 της

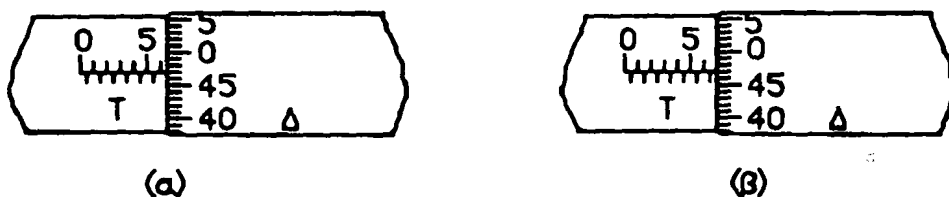


κύριας κλίμακας οπότε προστίθεται στην τιμή που μετράμε. Η τιμή της σ_0 υπολογίζεται από τις επιπλέον χαραγές του βερνιέρου που χρειάζονται για να συμπέσει το 0 (μηδέν) του βερνιέρου με το 0 (μηδέν) της κύριας κλίμακας.

Ένα παράδειγμα μέτρησης με μικρόμετρο δίνεται στο Σχ. 5. Η σταθερά του μικρόμετρου είναι $\sigma_M = 0.01$ mm. Έστω ότι η μετάθεση μηδενός είναι $\sigma_0 = -0.36$ mm (το μηδέν του βερνιέρου βρισκότανε 36 χαραγές αριστερά του 0 της κύριας κλίμακας). Ο αριθμός x_0 των υποδιαίρεσεων της κύριας κλίμακας όπως φαίνεται στο Σχ. 5(α), είναι $x_0 = 6.00$ mm. Βρίσκουμε την υποδιαίρεση $x = 47$ του βερνιέρου Α οπότε η τιμή του πάχους d του σώματος θα είναι

$$d = (6.00 + 47 \times 0.01 + 0.36) \text{ mm} = 6.83 \text{ mm}$$

Όμοια στο Σχ. 5(β) το $x = 47$ του βερνιέρου Α, αλλά κατά τη δεύτερη



Σχήμα 5. Μέτρηση με μικρόμετρο.

περιστροφή του τυμπάνου Δ οπότε

$$d = (6.00 + (50 + 47) \times 0.01 + 0.36) = 7.33 \text{ mm.}$$

Αν θεωρήσουμε και το σφάλμα ανάγνωσης τότε το πάχος

$$d = (6.830 \pm 0.002) \text{ mm.}$$

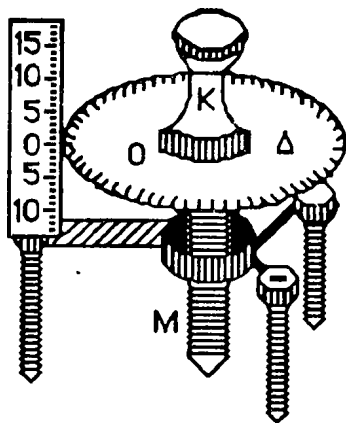


2.3 Σφαιρόμετρο

Περιγραφή

Για τη μέτρηση της ακτίνας καμπυλότητας σφαιρικών επιφανειών, όπως π.χ. της ακτίνας καμπυλότητας κοίλων και κυρτών φακών, χρησιμοποιούμε το σφαιρόμετρο. Αποτελείται από ένα μεταλλικό τρίποδα με 3 σκέλη που καταλήγουν σε ακίδες και σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο, όπως φαίνεται στο Σχ. 6. Στο κέντρο αυτού υπάρχει ένα περικόχλιο στο οποίο βιδώνεται με τη βοήθεια της κεφαλής K ένας μικρομετρικός κοχλίας (βίδα) M που καταλήγει σε ακίδα. Στη βάση της κεφαλής K είναι στερεωμένος ένας δίσκος Δ έτσι ώστε η κεφαλή, ο δίσκος και ο μικρομετρικός κοχλίας να περιστρέφονται σαν ένα σώμα. Στην περιφέρεια του Δ υπάρχει κυκλική κλίμακα με 250 χαραγές, αριθμημένες από 0 μέχρι 500 ανά 50. Κάθε χαραγή αντιστοιχεί σε 2 μονάδες. Η κυκλική κλίμακα του δίσκου Δ αποτελεί το βερνιέρο του σφαιρόμετρου.

Ο δίσκος περιστρέφεται μπροστά σε μία κατακόρυφη κλίμακα, την κύρια κλίμακα του σφαιρόμετρου που είναι στερεωμένη πάνω σε ένα από τα σκέλη του τρίποδα και έχει υποδιαίρεσεις ανά 1 mm. Η αριθμηση της κύριας κλίμακας είναι από 0 μέχρι 15 mm προς τα πάνω για τη μέτρηση κυρτών επιφανειών και από 0 μέχρι 10 mm προς τα κάτω για τη μέτρηση κοίλων επιφανειών.

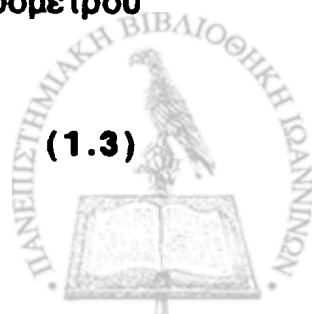


Σχήμα 6. Σχηματική απεικόνιση σφαιρόμετρου.

Βήμα του σφαιρόμετρου: Στρέφουμε το δίσκο Δ έτσι ώστε το 0 (μηδέν) του βερνιέρου να ευθυγραμμίζεται με κάποια τυχαία χαραγή της κύριας κλίμακας, π.χ. την h_1 εκφρασμένη σε mm. Περιστρέφουμε μετά το δίσκο Δ κατά ακέραιο αριθμό N στροφών έτσι ώστε το 0 (μηδέν) του βερνιέρου να ευθυγραμμίζεται με κάποια άλλη χαραγή h_2 της κύριας κλίμακας. Το βήμα θ_M του σφαιρόμετρου θα είναι τότε ίσο

$$\theta_M = \frac{h_2 - h_1}{N} \text{ (mm)}$$

(1.3)



Το βήμα του σφαιρόμετρου στο εργαστήριο-μας είναι ίσο με 0.5 mm.

Σταθερά του σφαιρόμετρου: Όταν περιστρέψουμε το δίσκο Δ κατά μία πλήρη στροφή, που αντιστοιχεί σε 250 χαραγές του βερνιέρου, ο κοχλίας Μ μετατοπίζεται κατά $\beta_M = 0.5 \text{ mm}$. Επομένως η σταθερά σ_Σ του Σφαιρόμετρου θα είναι ίση με $\sigma_\Sigma = \frac{0.5 \text{ mm}}{250 \text{ χαραγ.}} = 0.002 \text{ mm}$.

Μετάθεση μηδενός: Πριν κάνουμε τη μέτρηση με το σφαιρόμετρο προσδιορίζουμε τη μετάθεση μηδενός σ_0 του οργάνου.

Τοποθετούμε το σφαιρόμετρο πάνω σε μία επίπεδη επιφάνεια και περιστρέφουμε την κεφαλή Κ μέχρι που η ακίδα του Μ μόλις να εγγίζει την επιφάνεια. Στη θέση αυτή και οι 4 ακίδες του σφαιρόμετρου θα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Αν το 0 του βερνιέρου συμπίπτει με το 0 της κύριας κλίμακας τότε δεν υπάρχει μετάθεση μηδενός. Αν όμως δεν συμπίπτει τότε υπάρχει μετάθεση μηδενός. Για να βρούμε τη μετάθεση μηδενός περιστρέφουμε την κεφαλή Κ μέχρι που το 0 (μηδέν) του βερνιέρου να συμπέσει με το 0 (μηδέν) της κύριας κλίμακας και μετράμε τις χαραγές του βερνιέρου στην περιστροφή αυτή. Γνωρίζοντας τη σταθερά σ_Σ του σφαιρόμετρου μπορούμε να εκφράσουμε το σ_0 σε mm. Για να βρούμε πότε προστίθεται η μετάθεση μηδενός ή αφαιρείται διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

α) Κυρτή επιφάνεια: 1) Αν το σ_0 βρίσκεται κάτω από το 0 (μηδέν) της κύριας κλίμακας τότε $h_1 = h_{01} + \sigma_0$

(βλέπε Σχ. 7(α)).

2) Αν το σ_0 βρίσκεται πάνω από το 0 (μηδέν) της κύριας κλίμακας τότε $h_1 = h_{01} - \sigma_0$

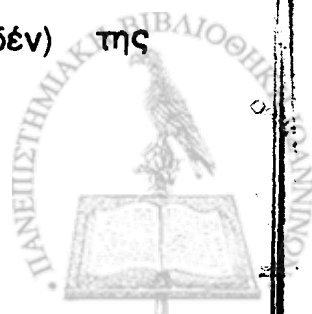
(βλέπε Σχ. 7(β)).

β) Κοίλη επιφάνεια: 1) Αν το σ_0 βρίσκεται κάτω από το 0 (μηδέν) της κύριας κλίμακας, τότε $h_2 = h_{02} - \sigma_0$

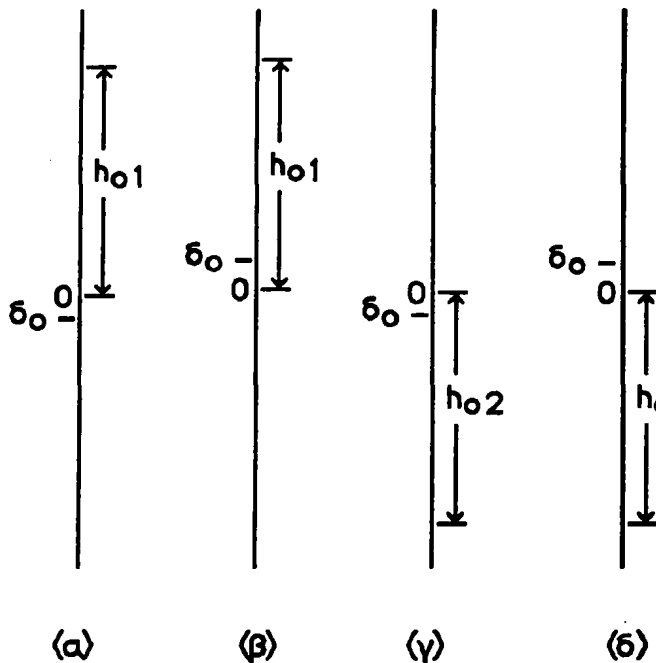
(βλέπε Σχ. 7(γ)).

2) Αν το σ_0 βρίσκεται πάνω από το 0 (μηδέν) της κύριας κλίμακας, τότε $h_2 = h_{02} + \sigma_0$

(βλέπε Σχ. 7(δ)).



Το h_{o1} , h_{o2} είναι οι ενδείξεις όταν μετράμε κυρτή και κοίλη επιφάνεια αντίστοιχα όπως φαίνεται στο Σχ. 7.



Σχήμα 7. Ενδείξεις για κυρτή και κοίλη επιφάνεια.

Μέτρηση ακτίνας καμπυλότητας: Τοποθετούμε το σφαιρόμετρο πρώτα πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια σύμφωνα με το Σχ. 8α και σημειώνουμε τα ίχνη επαφής Α,Β,Γ των 3 ακίδων του τρίποδα και Δ το σημείο επαφής της κεντρικής ακίδας Α. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ αποδεικνύεται ότι

$$r = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Στη συνέχεια τοποθετούμε το σφαιρόμετρο στη σφαιρική επιφάνεια

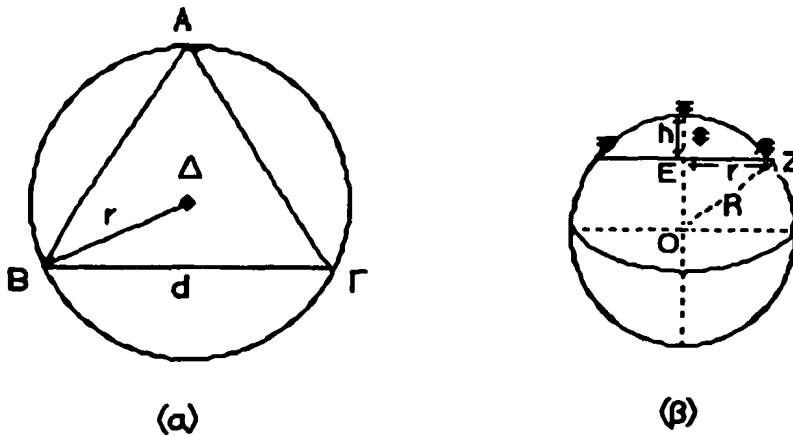
όπως φαίνεται στο Σχ. 8β. Από το τρίγωνο ΕΟΖ έχουμε $R^2 = (R-h)^2 + r^2$ και λύνοντας ως προς R βρίσκουμε

$$R = \frac{h}{2} + \frac{r^2}{2h}$$

Αντικαθιστώντας $r = \frac{d}{\sqrt{3}}$ προκύπτει

$$R = \frac{h}{2} + \frac{d^2}{6h}$$





Σχήμα 8. Τοποθέτηση του σφαιρόμετρου πάνω στη σφαιρική επιφάνεια.
 (α) Κάθετη όψη (τομή κάθετη προς τον άξονα του σφαιρομέτρου).
 (β) Πλάγια όψη (τομή κατά μήκος του άξονα του σφαιρομέτρου).

2.4 Ζυγός

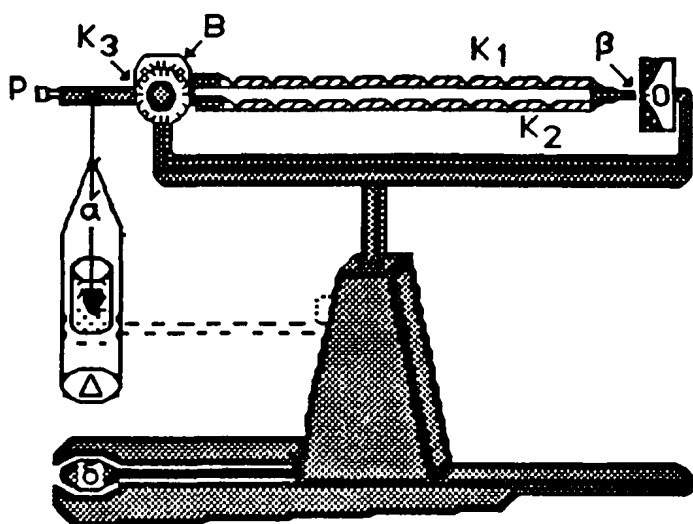
Περιγραφή

Ο κλασικός ζυγός που έχει χρησιμοποιηθεί εδώ και πολλές εκατοντάδες ετών για ακριβείς ζυγίσεις αποτελείται από δύο δίσκους εξαρτημένους από τα άκρα μίας οριζόντιας ράβδου το κέντρο της οποίας στηρίζεται σε μια κατακόρυφη δοκό. Η στήριξη είναι τέτοια ώστε οι τριβές να γίνονται ελάχιστες. Για τη μέτρηση του βάρους, στον ένα δίσκο τοποθετείται το προς μέτρηση σώμα και στον άλλο τα σταθμά.

Σήμερα υπάρχουν πολλά είδη ζυγών πολύ μεγάλης ακρίβειας μεταξύ των οποίων είναι οι ηλεκτρονικοί ζυγοί με ακρίβεια μεγαλύτερη του χιλιοστού του gr.

Εδώ θα περιοριστούμε στην περιγραφή ενός είδους ζυγού ο οποίος χρησιμοποιείται στα περισσότερα από τα φοιτητικά εργαστήρια. Στο Σχ. 9 φαίνεται σχηματικά ο ζυγός ακριβείας που θα χρησιμοποιηθεί στο πείραμα αυτό για τη μέτρηση της μάζας των σωμάτων. Με το ζυγό αυτό μπορούν να ζυγιστούν μάζες μέχρι 310 gr. Η ευαισθησία του ζυγού είναι 0.01 gr. Ο ζυγός αποτελείται από δύο ευθύγραμμες κλίμακες με κινητούς δρομείς K_1 , K_2 αριθμημένες η μία (K_1) σε εκατοντάδες (0-100-200 gr) και η άλλη (K_2) σε

δεκάδες γραμμαρίων (0-10-20 ... 100 gr). Για τη μέτρηση στην περιοχή (0-10 gr) χρησιμοποιείται κυκλική κλίμακα K_3 αριθμημένη ανά 1 gr και με μικρότερη υποδιαίρεση 0.1 gr. Η κυκλική κλίμακα φέρει και βερνιέρο B που μας επιτρέπει την ανάγνωση μέχρι και 0.01 gr.



Σχήμα 9. Ζυγός

Ένας δίσκος Δ που φέρει και άγκιστρο α χρησιμοποιείται για την τοποθέτηση ή την εξάρτηση από το άγκιστρο των διαφόρων σωμάτων τα οποία έχουμε προς ζύγιση. Κάτω από το δίσκο Δ υπάρχει ένας άλλος κυκλικός δίσκος δ που μπορεί να μετακινείται κατακόρυφα και χρησιμεύει για την τοποθέτηση αντικειμένων π.χ. ένα δοχείο με νερό. Ο κυκλικός δίσκος δ τοποθετείται κάτω από το δίσκο Δ (προσέχουμε ώστε ο δίσκος Δ να μην ακουμπάει σε άλλα αντικείμενα). Αν ο ζυγός δεν δείχνει μηδέν τότε ρυθμίζουμε το ρυθμιστή P ώστε η ένδειξη της βελόνας β να είναι μηδέν. Για τη γρήγορη σταθεροποίηση της βελόνας β κατά τη μέτρηση χρησιμοποιούνται μαγνήτες που τη φρενάρουν καθώς ταλαντεύεται. Τοποθετούμε το σώμα που θέλουμε να ζυγίσουμε στο δίσκο Δ ή το κρεμάμε από το άγκιστρο α . Στη συνέχεια με τους δρομείς που υπάρχουν στις ευθύγραμμες κλίμακες και το βερνιέρο προσπαθούμε να σταθεροποιήσουμε τη βελόνα στη θέση μηδέν. Η ένδειξη που διαβάζουμε τόσο στις ευθύγραμμες κλίμακες όσο και στην κυκλική με το βερνιέρο αντιστοιχεί στη μάζα του σώματος σε gr.

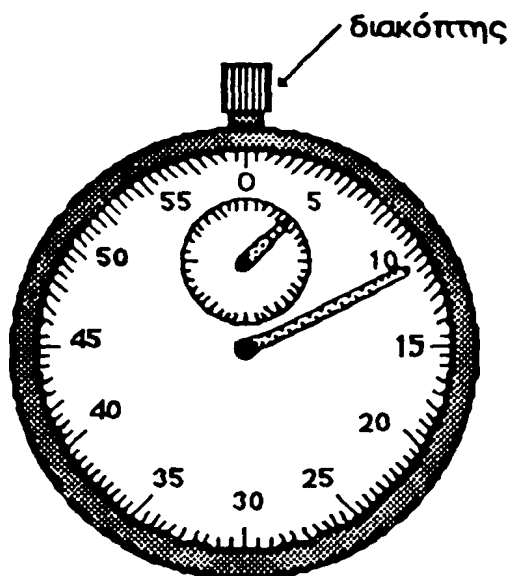


2.5 Χρονόμετρα

Περιγραφή

Ο χρόνος είναι ένα από τα βασικά μεγέθη που χρησιμοποιούμε στην Φυσική. Γι' αυτό από πολύ νωρίς προσπαθούσαν να βρουν όργανα μέτρησης-του, που σήμερα λέγονται χρονόμετρα. Η βασική μονάδα του χρόνου είναι το δευτερόλεπτο το οποίο παριστάνεται με s (sec).

Χρονόμετρο είναι η συσκευή που μετράει καθορισμένα διαστήματα χρόνου. Η διέγερση και η αποδιέγερση του χρονομέτρου για τη μέτρηση καθορισμένου διαστήματος χρόνου μπορεί να γίνει είτε χειροκίνητα είτε αυτόματα διαμέσου ηλεκτρικών παλμών. Τα χρονόμετρα χειρός (κοινά) διεγείρονται και αποδιεγείρονται χειροκίνητα, είναι μικρά σε μέγεθος και γενικώς εύχρηστα. Τα ηλεκτρονικά χρονόμετρα έχουν τη δυνατότητα τόσο χειροκίνητης όσο και αυτόματης διέγερσης. Η ακρίβεια των ηλεκτρονικών χρονομέτρων είναι συνήθως καλύτερη των κοινών (0.1s/0.001s) και είναι ψηφιακά.



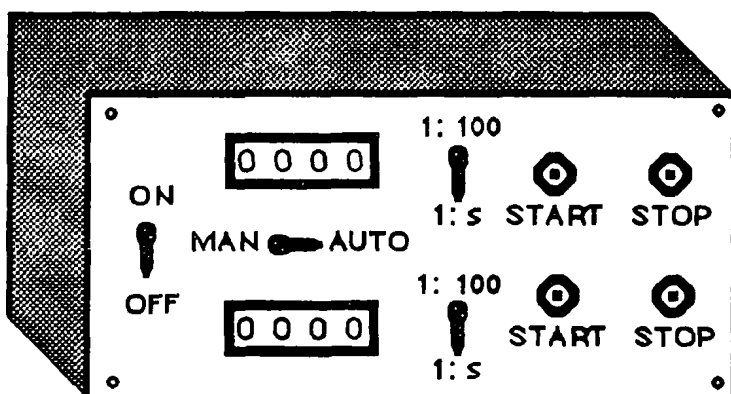
Σχήμα 10. Σχηματική παράσταση του κοινού χρονομέτρου.

Τα κοινά χρονόμετρα στηρίζονται στον μηχανισμό του ελατηρίου και οι ενδείξεις φαίνονται σε κατάλληλα βαθμονομημένη κυκλική κλίμακα με τη βοήθεια δείκτη. Η διέγερση (Ξεκίνημα) του χρονομέτρου γίνεται με πάτημα του διακόπτη και το σταμάτημα με δεύτερο πάτημα. Με τρίτο πάτημα του διακόπτη το χρονόμετρο μηδενίζεται και είναι έτοιμο πάλι για νέα μέτρηση. Η ακρίβειά του είναι της τάξης 0.1s.

Ηλεκτρονικά χρονόμετρα υπάρχουν πολλών ειδών. Τα κύρια χαρακτηριστικά ενός τέτοιου χρονομέτρου είναι οι διακόπτες διέγερσης (START) και αποδιέγερσης (STOP), ο διακόπτης MAN-AUTO για τον τρόπο χειρισμού και οι ενδείξεις που συνήθως δίνονται ψηφιακά. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε με

Γ
C
δ
O
E
φ
κ
η
η
η

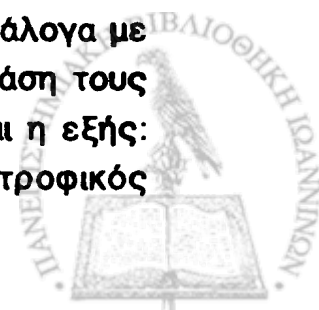
λεπτομέρεια το χρονόμετρο που υπάρχει στο εργαστήριό μας. Αποτελείται από δύο ανεξάρτητα χρονόμετρα Α και Β, όπως φαίνονται στο Σχ. 11. Το καθένα μπορεί να δουλέψει χειροκίνητα και αυτόματα. Ο τρόπος λειτουργίας ρυθμίζεται με το διακόπτη MAN-AUTO. Στη θέση MAN λειτουργεί χειροκίνητα και στη θέση AUTO αυτόματα. Η ακρίβεια του χρονομέτρου με οποιοδήποτε τρόπο λειτουργίας εξαρτάται από τη θέση του διακόπτη 1: 100 - 1: s. Στη θέση 1: 100 η ακρίβεια είναι 0.01s και στη θέση 1: s η ακρίβεια είναι 1s. Ακόμα υπάρχει ένας περιστροφικός μεταγωγός επιλογής συναρτήσεων F, όπου για τον αυτόματο τρόπο λειτουργίας ρυθμίζει το χρονικό διάστημα και τον τρόπο καταγραφής του χρόνου.



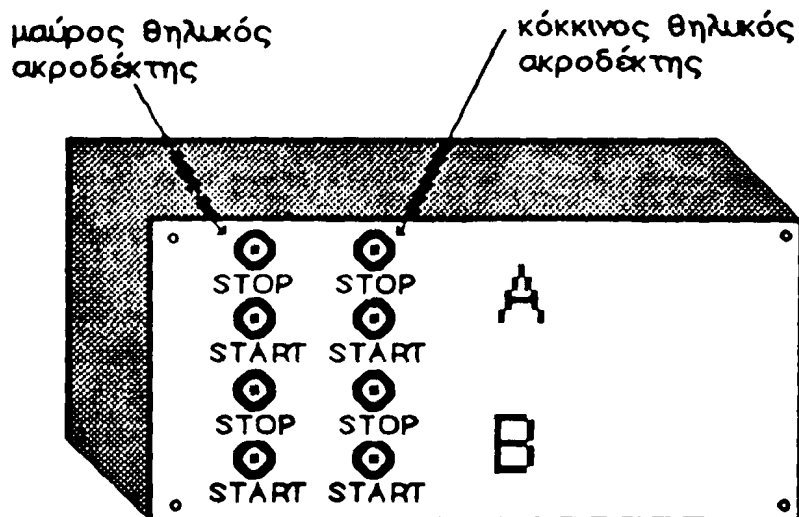
Σχήμα 11. Σχηματική διάταξη του ηλεκτρονικού χρονομέτρου.

Η λειτουργία του χρονομέτρου στη θέση MAN έχει ως εξής: Γυρίζουμε το διακόπτη στη θέση MAN και τον περιστροφικό μεταγωγό συναρτήσεων F στη θέση F_3 . Αν το χρονόμετρο μετά τη σύνδεση του με το δίκτυο αρχίσει να καταμετρά πατάμε το STOP και το χρονόμετρο σταματά. Ο μηδενισμός και η διέγερση του χρονομέτρου γίνεται από το κουμπί START ενώ η αποδιέγερση με το STOP. **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Δεν χρειάζεται μηδενισμός, αρκεί να είναι σταματημένο, διότι με τη νέα διέγερση μηδενίζεται ακαριαίως και αρχίζει η μέτρηση.

Στη θέση AUTO το χρονόμετρο καταγράφει το χρόνο ανάλογα με τη θέση του περιστροφικού μεταγωγού συναρτήσεων F και με βάση τους ηλεκτρικούς παλμούς που το τροφοδοτούμε. Η διαδικασία είναι η εξής: Γυρίζουμε το κουμπί MAN-AUTO στη θέση AUTO. Ο περιστροφικός



μεταγωγός συναρτήσεων μπορεί να τοποθετηθεί στις θέσεις F_1 , F_2 και F_3 . Οι ηλεκτρικοί παλμοί προέρχονται από κατάλληλους φωτοανιχνευτές, η σύνδεση των οποίων γίνεται στο πίσω μέρος του χρονομέτρου. Για τη λειτουργία των φωτοανιχνευτών απαιτείται η τροφοδοσία και η διέγερση ενός λαμπτήρα, οι ακροδέκτες (κίτρινοι) του οποίου συνδέονται με ένα μετασχηματιστή (12V). Οι άλλοι ακροδέκτες του φωτοανιχνευτή συνδέονται με τους θηλυκούς ακροδέκτες στο πίσω μέρος του χρονομέτρου όπως φαίνεται στο Σχ. 12. Προσοχή στην πολικότητα των φωτοανιχνευτών. Ο μαύρος αρσενικός ακροδέκτης στο μαύρο θηλυκό ακροδέκτη και ο κόκκινος αρσενικός στον κόκκινο θηλυκό ακροδέκτη αντίστοιχα.



Σχήμα 12. Πίσω όψη του χρονομέτρου.

Μετά τη σύνδεση των φωτοανιχνευτών είναι δυνατόν το χρονόμετρο να καταμετρά συνέχεια. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι είτε οι λαμπτήρες δεν λειτουργούν είτε ο φωτοανιχνευτής δεν είναι σωστά συνδεδεμένος. Εάν οι φωτοανιχνευτές έχουν συνδεθεί σωστά και λειτουργούν καλά και το χρονόμετρο ξεκινήσει για κάποιο λόγο π.χ. κόψιμο της φωτεινής δέσμης των φωτοανιχνευτών, τότε πατώντας το κουμπί STOP σταματά αμέσως την καταμέτρηση του χρόνου. Στην θέση AUTO ο περιστροφικός διακόπτης συναρτήσεων F μας επιτρέπει τη μέτρηση των παρακάτω χρόνων:



α) Ο περιστροφικός διακόπτης στη θέση F_3

Συνδέουμε τους ακροδέκτες του φωτοανιχνευτή I_1 στο START και του φωτοανιχνευτή I_2 στο STOP όπως φαίνεται στο Σχ. 12. Η μέτρηση του χρόνου αρχίζει, όταν ο δρομέας που κινείται στην αεροτροχιά κόψει τη φωτεινή δέσμη του φωτοανιχνευτή I_1 και σταματά όταν ο δρομέας κόψει τη φωτεινή δέσμη του φωτοανιχνευτή I_2 .

β) Ο περιστροφικός διακόπτης στη θέση F_2

Συνδέουμε τον φωτοανιχνευτή I_1 στο START του χρονομέτρου. Η μέτρηση του χρόνου αρχίζει όταν ο δρομέας κόψει τη φωτεινή δέσμη του φωτοανιχνευτή I_1 και σταματά μόλις αυτός περάσει από τον ίδιο φωτοανιχνευτή, δηλαδή το χρονόμετρο καταμετρά μόνο όσο χρόνο ο δρομέας κόβει τη φωτεινή δέσμη. Ο φωτοανιχνευτής I_2 δεν διεγείρεται.

γ) Ο περιστροφικός διακόπτης στη θέση F_1

Συνδέουμε το φωτοανιχνευτή I_1 στο START του χρονομέτρου. Η μέτρηση του χρόνου αρχίζει όταν ο δρομέας κόψει τη φωτεινή δέσμη του φωτοανιχνευτή I_1 και σταματά όταν αυτός ξανακόψει τη φωτεινή δέσμη του ίδιου φωτοανιχνευτή για δεύτερη φορά από οποιαδήποτε διεύθυνση και αν πηγαίνει ο δρομέας. Σ' αυτή τη θέση ο φωτοανιχνευτής I_2 δεν διεγείρεται.

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

3.1 Υπολογισμός Διαστάσεων Ενός Σωλήνα με τη Χρήση Διαστημόμετρου

Υπολογίζουμε τη σταθερά σ_{Δ} του διαστημόμετρου καθώς και τη μετάθεση του μηδενός σ_0 αυτού. Τοποθετούμε ένα σωλήνα μεταξύ των σιαγόνων Σ_1 και Σ_1' και μετακινούμε το μικρό κανόνα A έτσι ώστε οι Σ_1 και Σ_1' να εφάπτονται στο σώμα. Μετράμε την εξωτερική διάμετρο $d = x_0 + x \cdot \sigma_{\Delta} + (\text{ή-}) \sigma_0$. Τοποθετούμε τώρα τις σιαγόνες Σ_2 και Σ_2' στο εσωτερικό του σωλήνα. Μετράμε την εσωτερική διάμετρο d' . Εισάγουμε την προεξοχή Π στο σωλήνα και μετράμε το βάθος h . Παίρνουμε 10 περίπου μετρήσεις για τα d , d' και h . Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 1.



Πίνακας 1

Μετρήσεις για τον υπολογισμό διαστάσεων ενός σωλήνα με διαστημόμετρο

a/a	d (mm)	d' (mm)	h (mm)
1			
2			
3			
.			
.			
.			

Από τις τιμές του Πίνακα 1:

Με τη βοήθεια της θεωρίας σφαλμάτων να υπολογίσετε τη τιμή της εξωτερικής διαμέτρου d , της εσωτερικής διαμέτρου d' και του βάθους h καθώς και τα σφάλματα $\sigma(\bar{d})$, $\sigma(\bar{d}')$ και $\sigma(\bar{h})$ (μέσα και σχετικά).

3.2 Υπολογισμός Διαμέτρου Σφαίρας με τη Χρήση Μικρόμετρου

Υπολογίζουμε τη σταθερά σ_M του μικρόμετρου. Περιστρέφουμε την κεφαλή K έτσι ώστε το άκρο του άξονα Γ μόλις να εγγίζει τη βάση B . Βρίσκουμε την ένδειξη για τη μετάθεση του μηδενός σ_0 του μικρόμετρου. Τοποθετούμε μία χαλύβδινη σφαίρα μεταξύ των αξόνων B και Γ του μικρόμετρου και περιστρέφουμε την κεφαλή K μέχρι που το άκρο του Γ μόλις να εγγίζει τη σφαίρα. Βρίσκουμε την ένδειξη d_0 . Παίρνουμε 10 ανεξάρτητες μετρήσεις για τη διάμετρο d_0 της σφαίρας. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 2.



Πίνακας 2

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της διαμέτρου μιας σφαίρας με μικρόμετρο

a/a	1, 2, 3 ...
$d_0(\text{mm})$	

Από τις τιμές του Πίνακα 2:

- 1) Να βρείτε τη διάμετρος d από τις τιμές του d_0 και σ_0 .
- 2) Με τη βοήθεια της θεωρίας σφαλμάτων να βρεθεί η τιμή της διαμέτρου d καθώς και το μέσο σφάλμα $\sigma(\bar{d})$.
- 3) Να βρείτε την τιμή του όγκου V καθώς και το σφάλμα $\sigma(\bar{V})$ της σφαίρας.

3.3 Υπολογισμός Ακτίνας Καμπυλότητας Κυρτής και Κοίλης Επιφάνειας με τη Χρήση Σφαιρόμετρου

3.3.1 Κυρτή Επιφάνεια

Υπολογίζουμε το βήμα θ_M του μικρομετρικού κοχλία M και τη σταθερά σ_Σ του σφαιρόμετρου. Τοποθετούμε το σφαιρόμετρο πάνω σε επίπεδη επιφάνεια και περιστρέφουμε την κεφαλή K έτσι ώστε και οι 4 ακίδες-του μόλις να εγγίζουν την επιφάνεια. Μετράμε τη μετάθεση μηδενός σ_0 του σφαιρόμετρου. Παίρνουμε δέκα περίπου ανεξάρτητες μετρήσεις για τη μετάθεση μηδενός και βρίσκουμε τη μέση τιμή σ_0 . Τοποθετούμε τώρα το σφαιρόμετρο πάνω στη γυάλινη κυρτή επιφάνεια και περιστρέφουμε την κεφαλή K έτσι ώστε οι 4 ακίδες-του μόλις να εγγίζουν τη σφαιρική επιφάνεια. Μετράμε την ένδειξη που μας δίνει το ύψος h_{01} . Μετράμε δέκα φορές περίπου το ύψος h_{01} . Τοποθετούμε το σφαιρόμετρο πάνω σ' ένα χαρτί στην επίπεδη επιφάνεια και χαράσουμε προσεκτικά τα ίχνη των 3 ακίδων του τρίποδα. Με ένα διαστημόμετρο χρησιμοποιώντας τις σιαγόνες Σ_2 και Σ_2' (βλέπε Σχ. 1) μετράμε την απόσταση d μεταξύ δύο τυχαίων ιχνών των



ακίδων. Παίρνουμε δέκα φορές την απόσταση d . Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3

Μετρήσεις για τον υπολογισμό ακτίνας καμπυλότητας κυρτής επιφάνειας με σφαιρόμετρο

a/a	σ_0 (mm)	h_{01} (mm)	d (mm)
1			
2			
3			
.			
.			
.			

Από τις τιμές του Πίνακα 3:

- 1) Να βρείτε τη μέση τιμή της απόστασης \bar{d} καθώς και το σφάλμα της $\sigma(\bar{d})$.
- 2) Με τη βοήθεια της θεωρίας σφαλμάτων να βρεθεί η μέση τιμή του ύψους \bar{h}_{01} και της μετάθεσης μηδενός $\bar{\sigma}_0$ καθώς και τα μέσα σφάλματα $\sigma(\bar{h}_{01})$ και $\sigma(\bar{\sigma}_0)$.
- 3) Να βρεθεί το ύψος h_1 καθώς και το σφάλμα-του $\sigma(\bar{h})$.
- 4) Από τη σχέση (1.6) να υπολογισθεί η ακτίνα καμπυλότητας R_1 καθώς και το σφάλμα-της $\sigma(\bar{R}_1)$.



3.3.2 Κοίλη Επιφάνεια

Κάνουμε ακριβώς την ίδια δουλειά μόνο που εδώ έχουμε αντί κυρτή επιφάνεια, κοίλη επιφάνεια οπότε υπολογίζουμε το ύψος h_{o2} . Παίρνουμε δέκα περίπου ανεξάρτητες μετρήσεις για το h_{o2} . Τη μετάθεση μηδενός σ_o καθώς και την απόσταση d την έχουμε ήδη μετρήσει προηγούμενα. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 4.

Πίνακας 4

Μετρήσεις για τον υπολογισμό ακτίνας καμπυλότητας κοίλης επιφάνειας με σφαιρόμετρο

a/a	σ_o (mm)	h_{o2} (mm)
1		
2		
3		
.		
.		
.		

Από τις τιμές του Πίνακα 4:

- 1) Με τη βοήθεια της θεωρίας σφαλμάτων να βρεθεί η μέση τιμή του ύψους \bar{h}_{o2} καθώς και το μέσο σφάλμα $\sigma(\bar{h}_{o2})$.
- 2) Να βρεθεί το ύψος h_2 καθώς και το σφάλμα-του $\sigma(\bar{h}_2)$.
- 3) Από τη σχέση (1.6) να υπολογισθεί η ακτίνα καμπυλότητας R_2 καθώς και το σφάλμα-της $\sigma(\bar{R}_2)$.

3.4 Υπολογισμός της Μάζας Ενός Σώματος με τη Χρήση του Ζυγού

Τοποθετούμε το σώμα μάζας m στο δίσκο Δ. Σύμφωνα με τη θεωρία της παραγρ. 2.4, προσδιορίζουμε τη μάζα του σώματος m . Η



μέτρηση αυτή επαναλαμβάνεται περίπου 5 φορές. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 5.

Πίνακας 5

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της μάζας ενός σώματος με τη χρήση ζυγού

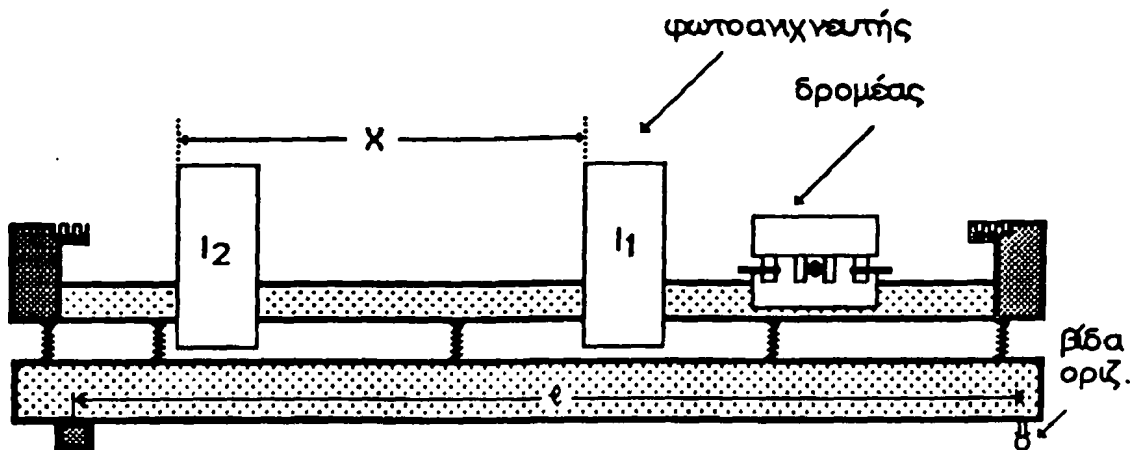
a/a	1, 2, 3 ...
m (gr)	

Από τις τιμές του Πίνακα 5:

Με τη βοήθεια της θεωρίας σφαλμάτων να βρεθεί η τιμή της μάζας m καθώς και το σφάλμα $\sigma(\bar{m})$.

3.5 Μετρήσεις του Χρόνου

Η πειραματική μελέτη της κίνησης των σωμάτων γίνεται με τη βοήθεια των αεροτροχιών (AIR TRACK) όπως φαίνεται στο Σχ. 13. Οι



Σχήμα 13. Σύστημα αεροτροχιάς

τροχιές αυτές έχουν στην επιφάνεια πολύ μικρές τρύπες από όπου εξέρχεται ο αέρας με πίεση προερχόμενος από σχετική αεραντλία. Ο αέρας εμποδίζει τα κινητά, που είναι ειδικά κατασκευασμένοι δρομείς, να

έρθουν σε άμεση επαφή με την μεταλλική τροχιά. Έτσι μειώνονται πολύ οι τριβές και προσεγγιστικά έχουμε κίνηση χωρίς τριβή. Τα διανυόμενα διαστήματα και οι αντίστοιχοι χρόνοι μετριοούνται με ένα συνδυασμό ηλεκτρονικού χρονομέτρου και φωτοανιχνευτών.

3.5.1 Μέτρηση του Χρόνου με Χειροκίνητο Χρονόμετρο

Συνδέουμε το χρονόμετρο με το δίκτυο (220 V). Τοποθετούμε το διακόπτη MAN-AUTO στη θέση MAN. Στην περίπτωση που θέλουμε να μετρήσουμε το χρόνο ταλάντωσης ενός εκκρεμούς, απομακρύνουμε το εκκρεμές σε πλάτος περίπου 20.0 cm και μετράμε το χρόνο μιας πλήρους ταλάντωσης-της πατώντας στην αρχή και στο τέλος τα κουμπιά START και STOP αντίστοιχα. Κάνουμε 10 φορές τη διαδικασία αυτή και καταγράφουμε τις μετρήσεις στον Πίνακα 6.

Πίνακας 6

Μετρήσεις για τον υπολογισμό του χρόνου με χειροκίνητο χρονόμετρο

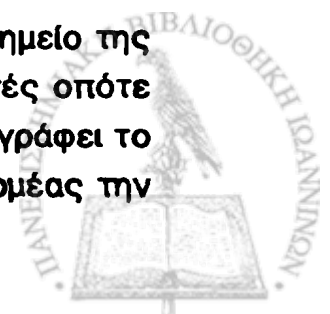
a/a	1, 2, 3 ...
t (sec)	

Από τις τιμές του Πίνακα 6:

Με τη βοήθεια της θεωρίας σφαλμάτων να βρεθεί η τιμή του χρόνου t καθώς και το σφάλμα $\sigma(\bar{t})$.

3.5.2 Μέτρηση του Χρόνου με Αυτόματο Χρονόμετρο

Στην περίπτωση π.χ. του κεκλιμένου επιπέδου (κεκλιμένη αεροτροχιά) συνδέουμε δύο φωτοανιχνευτές I_1 και I_2 αντίστοιχα στα START και STOP του χρονομέτρου. Ο μεταγωγός των συναρτήσεων F τοποθετείται στη θέση F_3 . Τοποθετούμε τους φωτοανιχνευτές πάνω στην αεροτροχιά σε απόσταση 50 cm. Αφήνουμε ένα δρομέα από το ψηλότερο σημείο της αεροτροχιάς να κινηθεί με κατεύθυνση προς τους φωτοανιχνευτές οπότε καταγράφεται στο χρονόμετρο ο χρόνος t . Ο χρόνος t που καταγράφει το χρονόμετρο είναι ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει ο δρομέας την



απόσταση x μεταξύ των φωτοανιχνευτών. Κάνουμε δέκα φορές περίπου τη διεργασία αυτή και οι τιμές γράφονται στον Πίνακα 7.

Πίνακας 7

Μετρήσεις για τον υπολογισμό του χρόνου με αυτόματο χρονόμετρο

a/a	1, 2, 3 ...
t (sec)	

Από τις τιμές του Πίνακα 7:

- 1) Με τη βοήθεια της θεωρίας σφαλμάτων να βρεθεί η τιμή του χρόνου t καθώς και το σφάλμα $\sigma(\bar{t})$.
- 2) Να βρεθεί η μέση ταχύτητα $\bar{u}_{\text{μεσ}}$ καθώς και το σφάλμα $\sigma(\bar{u}_{\text{μεσ}})$.



ΑΣΚΗΣΗ 2

μετρηση ταχυτητας και επιταχυνσης νομος του νευτωνα

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργαστηριακή αυτή άσκηση θα ασχοληθούμε αρχικά με μετρήσεις των βασικών φυσικών μεγεθών της **κινηματικής**, για μεταφορική κίνηση σε μία διάσταση. Οι κινηματικές αυτές ποσότητες είναι η ταχύτητα (μέση και στιγμιαία) και η επιτάχυνση. Μετά θα συσχετίσουμε την κίνηση με τις δυνάμεις που την προκαλούν. Με τη συσχέτιση αυτή μπαίνουμε στην **δυναμική**, επαληθεύοντας πειραματικά το βασικό νόμο του Νεύτωνα. Οι μετρήσεις θα γίνουν με τη χρήση αεροτροχιών και τη βοήθεια της θεωρίας του κεκλιμένου επιπέδου.

Στην περίπτωση της μεταφορικής κίνησης ενός σώματος, όλα τα σημεία του σώματος ακολουθούν, κατά τη διάρκεια της κίνησης, τις ίδιες μετατοπίσεις. Ένα πραγματικό αντικείμενο μπορεί να περιστρέφεται ή ταλαντεύεται καθώς κινείται. Οι περιπλοκές αυτές αποφεύγονται αν, για την μεταφορική κίνηση, θεωρήσουμε το σώμα σα σωματίο, γιατί περιγράφοντας την κίνηση ενός σωματίου πάνω στο σώμα έχουμε περιγράψει την κίνηση του σώματος σα σύνολο.

Μαθηματικά ένα σωματίο θεωρείται σα σημείο, όπως ένα αντικείμενο χωρίς έκταση και επομένως δεν παρεμβάλλεται η περιστροφή και η ταλάντευση. Ακόμα όμως και στην περίπτωση που το σώμα περιστρέφεται ή ταλαντεύεται κατά την κίνησή του, υπάρχει ένα σημείο του σώματος που



λέγεται **κέντρο μάζας**¹ το οποίο κινείται με τον ίδιο τρόπο που θα κινιόταν ένα σώμα με την επίδραση της ίδιας εξωτερικής δύναμης. Η κίνηση του κέντρου μάζας είναι μεταφορική και όταν μία εξωτερική δύναμη ενεργεί στο κέντρο μάζας του σώματος, τότε η κίνηση του σώματος θεωρείται μεταφορική.

2. ΘΕΩΡΙΑ

2.1 Ταχύτητα

(α) Μέση ταχύτητα

Η ταχύτητα ενός σωμάτιου είναι ο ρυθμός με τον οποίο η θέση του μεταβάλλεται με τον χρόνο. Σε ένα ορισμένο σύστημα αναφοράς, η θέση ενός σωμάτιου δίνεται από το διάνυσμα θέσης \vec{r} , που αρχίζει από την αρχή του συστήματος και καταλήγει στο σώμα. Το Σχ. 1 περιγράφει την κίνηση ενός σωμάτιου. Για λόγους απλότητας θεωρούμε την κίνηση στο επίπεδο $x-y$. Υποθέτουμε ότι τη στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη θέση p_1 με διάνυσμα θέσης \vec{r}_1 και αργότερα σε μία στιγμή t_2 στη θέση p_2 με διάνυσμα θέσης \vec{r}_2 . Το διάνυσμα μετατόπισης $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ περιγράφει την μεταβολή της θέσης του σωμάτιου καθώς κινείται από το p_1 στο p_2 σε χρόνο $\Delta t = t_2 - t_1$.

Η μέση ταχύτητα για το σώμα ορίζεται από τη σχέση

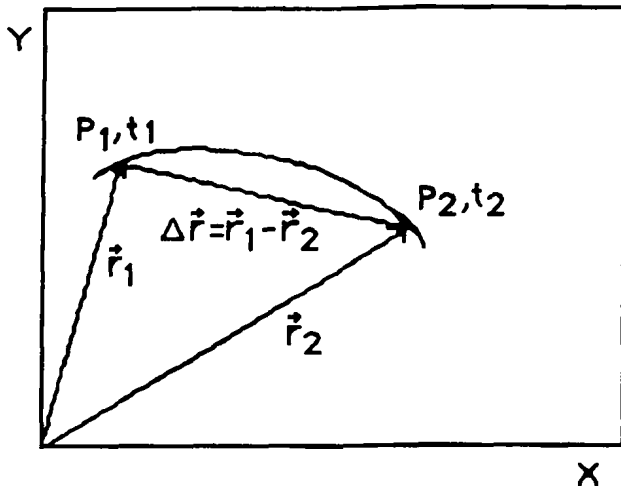
$$\vec{V}_\mu = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\text{διάνυσμα μετατόπισης}}{\text{χρόνος που πέρασε}} \quad (2.1)$$

Η ταχύτητα \vec{V}_μ είναι διάνυσμα και έχει διεύθυνση και φορά ίδιες με αυτές του $\Delta\vec{r}$ και μέτρο $\left| \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right|$. Η ταχύτητα λέγεται μέση γιατί ορίζεται από τη συνολική μετατόπιση και το συνολικό χρόνο που πέρασε και δεν μας λέει

¹ Φυσική, Μέρος Α, Halliday-Resnick, Γ.Α. Πνευματικός, Κεφ. 9.



τίποτα για την μορφή της τροχιάς και αν η κίνηση ανάμεσα στα P_1 και P_2 είναι ομαλή ή ασταθής.



Σχήμα 1. Γραφική παράσταση για τον προσδιορισμό της μέσης ταχύτητας.

Για λόγους ευκολίας στην παρούσα εργαστηριακή άσκηση θα μελετήσουμε την μονοδιάστατη κίνηση παίρνοντας τον άξονα x , οπότε προσδιορίζουμε την x - συνιστώσα της μέσης ταχύτητας

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.2}$$

Στην περίπτωση αυτή η κίνηση θα είναι ευθύγραμμη και ομαλή και κατά την κίνηση δεν υπάρχουν αλλαγές της ταχύτητας οπότε η τιμή της μέσης ταχύτητας που θα βρεθεί δεν θα διαφέρει ουσιαστικά από την τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας που θα μελετηθεί στην επόμενη παράγραφο.

(β) Στιγμιαία ταχύτητα

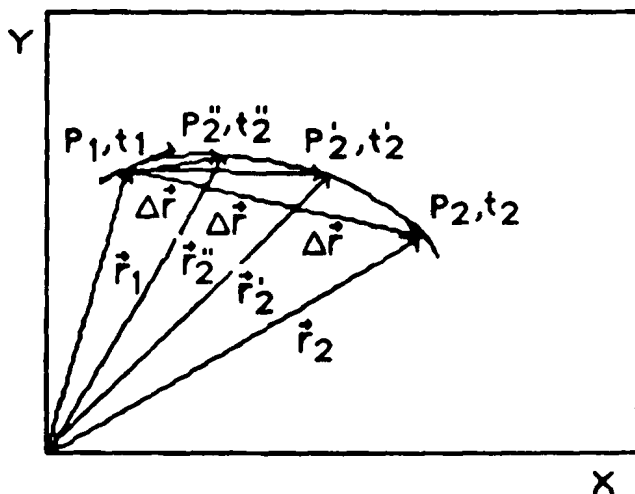
Όταν το σώμα κινείται έτσι ώστε η μέση ταχύτητα-του που μετριέται σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα, να μην είναι σταθερή, λέμε ότι το σώμα κινείται με μεταβλητή ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να ορίσουμε την ταχύτητα του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή που λέγεται **στιγμιαία ταχύτητα**.

Για να ορίσουμε τη στιγμιαία ταχύτητα αναφερόμαστε στο Σχ. 2. Όταν το σώμα κινείται από τη θέση P_1 στη θέση P_2 στο χρόνο $t_2 - t_1$, η



μέση ταχύτητα έχει τη διεύθυνση της $\Delta\vec{r}$. Καθώς το p_2 διαλέγεται διαδοχικά στα σημεία p_2' και p_2'' , δηλαδή παίρνεται συνεχώς πιο κοντά στο p_1 , το μέτρο και η διεύθυνση της μέσης ταχύτητας αλλάζουν συνεχώς. Όταν το p_2 πλησιάζει πολύ κοντά στο p_1 , το διάνυσμα μετατόπισης μικραίνει και πλησιάζει μία οριακή διεύθυνση, εκείνη που έχει η εφαπτομένη της τροχιάς στο σημείο p_1 . Η οριακή τιμή του $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ ονομάζεται στιγμιαία ταχύτητα στο σημείο p_1 ή ταχύτητα του σώματος κατά την χρονική στιγμή t_1 . Πιο συγκεκριμένα, η στιγμιαία ταχύτητα ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.3)$$



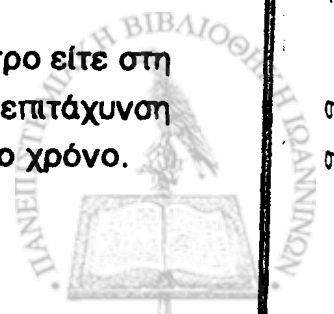
Σχήμα 2. Γραφική παράσταση στην οποία η μέση ταχύτητα προσεγγίζει τη στιγμιαία ταχύτητα.

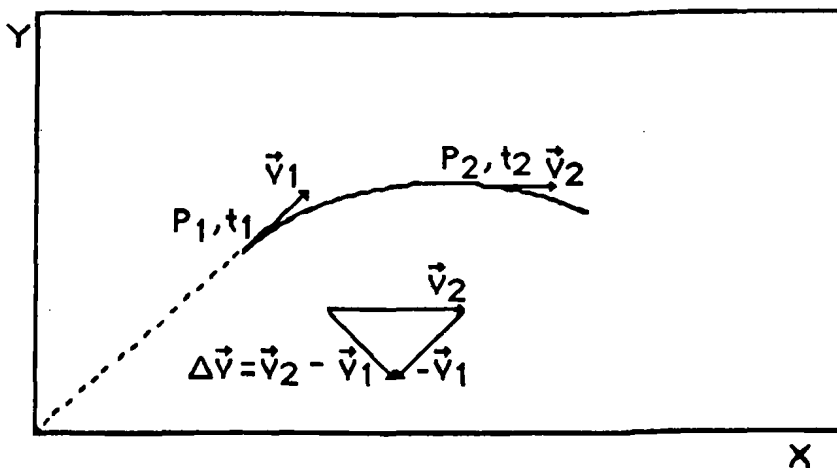
για την μονοδιάστατη κίνηση στον άξονα των x

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.4)$$

2.2 Επιτάχυνση

Όταν η ταχύτητα ενός κινητού αλλάζει είτε στο μέτρο είτε στη διεύθυνση είτε και στα δύο λέμε ότι το σώμα έχει επιτάχυνση. Η επιτάχυνση ενός σώματος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας-του με το χρόνο.





Σχήμα 3. Γραφική παράσταση για τον ορισμό της μέσης επιτάχυνσης.

Όπως δείχνει το Σχ. 3, ένα σώμα βρίσκεται τη στιγμή t_1 στο σημείο p_1 και κινείται στο επίπεδο $x-y$ με στιγμιαία ταχύτητα \vec{u}_1 , ενώ αργότερα τη στιγμή t_2 βρίσκεται στο σημείο p_2 όπου κινείται με στιγμιαία ταχύτητα \vec{u}_2 . Η μέση επιτάχυνση \vec{a}_μ στη διάρκεια της κίνησης από το p_1 στο p_2 ορίζεται σαν η μεταβολή της ταχύτητας δια του χρονικού διαστήματος, δηλαδή

$$\vec{a}_\mu = \frac{\vec{u}_2 - \vec{u}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} \quad (2.5)$$

Το \vec{a}_μ λέγεται μέση επιτάχυνση γιατί δεν γνωρίζουμε τίποτα για τη χρονική μεταβολή της ταχύτητας στη διάρκεια του χρονικού διαστήματος Δt . Γνωρίζουμε μόνο τη συνολική μεταβολή της ταχύτητας και το συνολικό χρόνο που πέρασε.

Αν η μεταβολή της ταχύτητας είναι ομαλή κατά διεύθυνση και μέτρο, δηλαδή σε ίσα χρονικά διαστήματα έχουμε ίσες μεταβολές της ταχύτητας, τότε έχουμε σταθερή επιτάχυνση.

Αν σωμάτιο κινείται έτσι ώστε η μέση επιτάχυνση-του να μην είναι σταθερή λέμε ότι το σωμάτιο έχει μεταβλητή επιτάχυνση είτε στο μέτρο είτε στη διεύθυνση είτε και στα δύο. Σε τέτοιες περιπτώσεις ορίζουμε την



επιτάχυνση του σώματος σε κάθε δοσμένη χρονική στιγμή που λέγεται **στιγμιαία επιτάχυνση** και ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (2.6)$$

Όταν η επιτάχυνση είναι σταθερή η στιγμιαία επιτάχυνση ισούται με την μέση επιτάχυνση. Όταν η κίνηση γίνεται κατά μήκος του άξονα x τότε η (2.6) γράφεται ως εξής:

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u_x}{\Delta t} = \frac{du_x}{dt} \quad (2.7)$$

Από τους ορισμούς της ταχύτητας και της επιτάχυνσης παίρνουμε τις βασικές εξισώσεις της κίνησης οι οποίες σε μία διάσταση και με σταθερή επιτάχυνση είναι

$$u_x = u_{x0} + a_x t \quad (2.8)$$

και

$$x = x_0 + u_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (2.9)$$

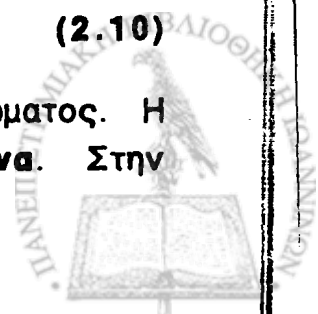
2.3. Οι νόμοι του Νεύτωνα

Όταν θέλουμε να ορίσουμε τη δύναμη, ο νους μας πάει σε μία ώθηση ή έλξη. Στη Φυσική όμως χρειαζόμαστε ένα αυστηρότερο ορισμό. Εδώ η δύναμη ορίζεται με τη βοήθεια της επιτάχυνσης που προσδίδεται σε σώμα μάζας m .

Η σχέση μεταξύ δύναμης \vec{F} και επιτάχυνσης \vec{a} δίνεται από την έκφραση

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.10)$$

όπου η σταθερά αναλογίας m είναι η σταθερή μάζα του σώματος. Η εξίσωση (2.10) είναι ο **Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα**. Στην



περίπτωση που η μάζα του σώματος δεν είναι σταθερή (όπως π.χ. συμβαίνει στην κίνηση των πυραύλων) τότε ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.11)$$

Η έκφραση αυτής μας λέει ότι η δύναμη ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ορμής.

Εάν η συνισταμένη δύναμη που ενεργεί σε ένα σώμα μάζας $m \neq 0$ είναι μηδέν, τότε $\vec{F} = m\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \text{σταθερό}$.

Αυτό με απλά λόγια διατυπώνεται ως εξής: Εάν δεν ενεργούν δυνάμεις σε ένα σώμα τότε το σώμα διατηρεί την κατάσταση ηρεμίας ή ομαλής κίνησης του σε ευθεία γραμμή.

Αυτή η διατύπωση αποτελεί τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα που λέγεται συχνά και νόμος αδράνειας.

Όταν έχουμε δύο σώματα και το ένα Α δρα πάνω στο άλλο σώμα Β με μία δύναμη \vec{F}_{AB} τότε και το δεύτερο σώμα Β αντιδρά πάνω στο Α με μία ίση και αντίθετη δύναμη $-\vec{F}_{BA}$ ή

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad (2.12)$$

Αυτή η έκφραση είναι ο Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα.

Όταν ένα σώμα μάζας m βρίσκεται στο πεδίο βαρύτητας της γης τότε ενεργεί στο σώμα μία δύναμη που είναι το βάρος του W και δίνεται με τη σχέση

$$W = mg \quad (2.13)$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

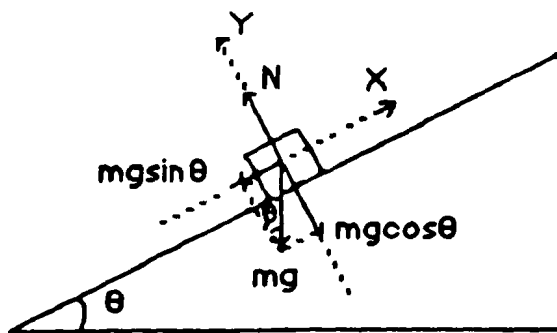
Για να έχουμε μία πειραματική εμπειρία μέτρησης της επιτάχυνσης που προσδίδεται σε ένα σώμα, θα ήταν σκόπιμο να είχαμε μία σταθερή



δύναμη που θα μπορούσαμε να την ρυθμίσουμε ώστε να είναι δυνατή η περιγραφή της κίνησης. Δύο από τις περιπτώσεις που μπορούν να μας δώσουν εύκολα την παραπάνω προϋπόθεση είναι το **κεκλιμένο επίπεδο** και η χρήση της **ακίνητης τροχαλίας**. Στην άσκηση αυτή θα ασχοληθούμε μόνο με το κεκλιμένο επίπεδο.

Κεκλιμένο επίπεδο

Έστω σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ . Όταν το σώμα αφήνεται ελεύθερο τότε κινείται με την επίδραση μίας σταθερής δύναμης $F = mg \sin \theta$, που είναι η συνιστώσα



Σχήμα 4. Κεκλιμένο επίπεδο

του βάρους κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Η δύναμη αυτή εξαρτάται μόνο από τη γωνία κλίσης θ και μπορεί να μεταβληθεί μεταβάλλοντας την θ . Από τον Νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$F = ma = mg \sin \theta$$

ή

$$a = g \sin \theta \quad (2.14)$$

Εάν η γωνία είναι πολύ μικρή μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\sin \theta \approx \theta$ και η (2.14) γίνεται

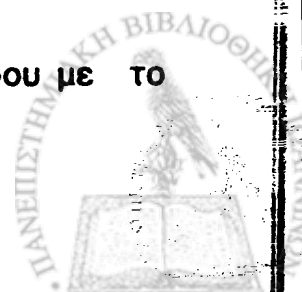
$$a \approx g \theta \quad (2.15)$$

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

3.1 Μέτρηση Ταχύτητας στην Ευθύγραμμο Ομαλή Κίνηση

Προεργασία

- a) Σύνδεση αεραντλίας, μετασχηματιστού και χρονομέτρου με το δίκτυο (220 Volt).

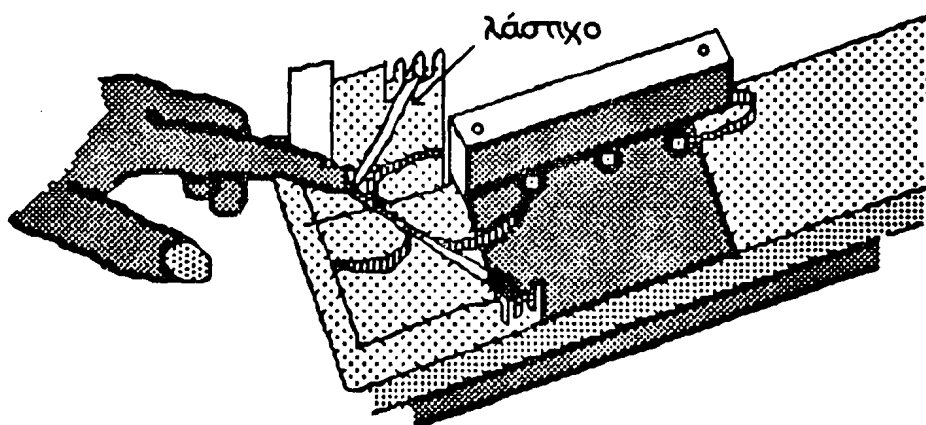


Σελ.
Ερω
Σελή
η ας

- β) Σύνδεση των φωτοανιχνευτών με το μετασχηματιστή (12 Volt). Συνδέουμε τους κίτρινους ακροδέκτες παράλληλα στους θηλυκούς ακροδέκτες του μετασχηματιστή.
- γ) Λειτουργία ηλεκτρονικού χρονομέτρου και φωτοανιχνευτών. Η βασική λειτουργία του χρονομέτρου σε συνδυασμό με τους φωτοανιχνευτές έχει περιγραφεί στην άσκηση 1.
- δ) Οριζοντίωση της αεροτροχιάς: Αρχικά θέτουμε σε λειτουργία την αεραντλία και τοποθετούμε ένα δρομέα κάπου στη μέση της αεροτροχιάς. Εάν ο δρομέας κινηθεί γυρίζουμε τη βίδα οριζοντίωσης (βλέπε Σχ. 6) μέχρι να ακινητοποιηθεί ο δρομέας.

Πειραματική Διάταξη - Μετρήσεις

Για να επιτύχουμε την επαναληπτικότητα της μέτρησης της ταχύτητας, επιβάλλεται το κινούμενο σώμα να ξεκινά σε κάθε μέτρηση με την ίδια ταχύτητα. Αυτό γίνεται με δύο τρόπους: (i) Με τη μέθοδο της σφενδόνης, όπως δείχνει το Σχ. 5. Φέρνουμε το δρομέα στην αρχή της αεροτροχιάς, δένουμε το δρομέα με νήμα, τραβάμε το νήμα οπότε ο



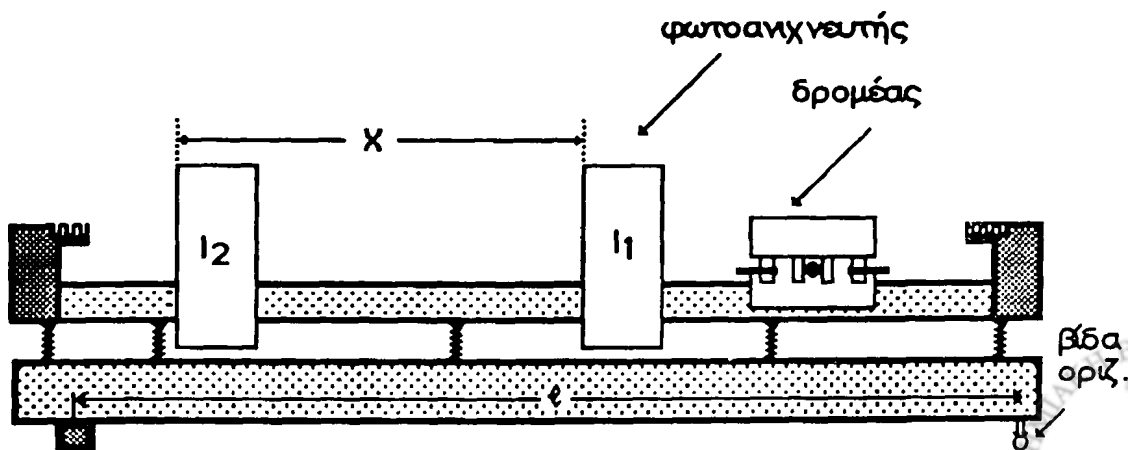
Σχήμα 5. Εκκίνηση δρομέα με τη μέθοδο της σφενδόνης

δρομέας έρχεται σε ορισμένη θέση και πιέζει το λάστιχο που δείχνεται στο σχήμα. Αφήνουμε το νήμα και το λάστιχο δίνει μία ώθηση στο δρομέα, όπως η σφενδόνη. Τα αποτελέσματα δεν θα είναι πολύ διαφορετικά εάν αντί να



χρησιμοποιήσουμε το νήμα κρατάμε το δρομέα με το χέρι μας σε μία θέση, ώστε να πιέζεται το λάστιχο που αναφέραμε προηγουμένως. Αφήνοντας το δρομέα, αυτός εκτοξεύεται με μία ώθηση. Για να έχουμε επαναληπτικότητα στην εκκίνηση πρέπει η ώθηση να είναι ίδια και αυτό γίνεται όταν ο δρομέας ξεκινά από την ίδια ακριβώς θέση. (ii) Με τη χρήση τροφοδοτικού εκτόξευσης (Launcher Supply). Η ταχύτητα που αποκτά ο δρομέας με την εκτόξευση ρυθμίζεται με το κουμπί που γράφει δίπλα velocity. Η αρχική ταχύτητα θα είναι ίδια όταν το κουμπί αυτό (velocity) βρίσκεται στην ίδια ακριβώς θέση. Για την ακρίβεια της επαναληπτικότητας θα πρέπει να περιμένουμε το φωτάκι (wait) να σβήσει και μετά πιέζουμε το κουμπί εκτόξευσης. Να χρησιμοποιήσετε και τους δύο τρόπους για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας και να διαλέξετε τα δεδομένα του ενός με τις ακριβέστερες τιμές.

Συνδέουμε το φωτοανιχνευτή I_1 στο START του χρονομέτρου και το φωτοανιχνευτή I_2 στο STOP του χρονομέτρου. Ο περιστροφικός μεταγωγός των συναρτήσεων F βρίσκεται στη θέση F_3 . Για τη μέτρηση της απόστασης x , τοποθετούμε το φωτοανιχνευτή I_1 σε μία μόνιμη θέση π.χ. 120 cm της κλίμακας που είναι προσαρμοσμένη στην αεροτροχιά. Ύστερα μετακινούμε το φωτοανιχνευτή I_2 σε διάφορες θέσεις και μετρούμε τα αντίστοιχα διαστήματα $x_1, x_2, x_3 \dots$ και τους αντίστοιχους χρόνους $t_1, t_2, t_3 \dots$. Η απόσταση μεταξύ των φωτοανιχνευτών I_1 και I_2 που είναι και το διανυόμενο διάστημα του κινητού μετρείται όπως στο Σχ. 6.



Σχήμα 6. Σύστημα αεροτροχιάς

Παίρνουμε περίπου δέκα διαφορετικά διαστήματα που διανύει ο δρομέας και για κάθε διάστημα x μετρούμε τουλάχιστον 5 φορές το χρόνο. Τα διαστήματα και οι χρόνοι με τις αντίστοιχες μέσες τιμές τους καταχωρούνται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας

Χρήση Σφενδόνης							Χρήση Εκτοξευτού								
α/α	x (cm)	t (sec)					$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{5}$	α/α	x (cm)	t (sec)					$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{5}$
		t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅				t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅	
1															
2															
3															
.															
.															
.															

$i = 1, 2, \dots, 5.$

Από τις τιμές του Πίνακα 1:

- 1) Με τη βοήθεια της θεωρίας των σφαλμάτων να βρεθεί η μέση τιμή της ταχύτητας καθώς και το σφάλμα (μέσο και σχετικό) για μία τιμή του x .
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση $x = f(\bar{t})$ και από την κλίση της ευθείας να βρεθεί η ταχύτητα v_{μ} .

3.2 Μέτρηση της Στιγμιαίας Ταχύτητας

Στην περίπτωση που ενεργεί δύναμη στο δρομέα η ταχύτητα-του δεν είναι σταθερή. Τότε είναι ανάγκη να αναφερθούμε στη στιγμιαία ταχύτητα. Ο απλούστερος τρόπος για να ενεργεί δύναμη στο δρομέα είναι



η περίπτωση κεκλιμένου επιπέδου (σταθερή δύναμη). Έτσι ανυψώνουμε τη μια άκρη της αεροτροχιάς με τη βοήθεια ξύλινου παραλληλεπίπεδου που τοποθετείται κάτω από τη βίδα οριζοντίωσης.

Σύμφωνα με τη θεωρία η στιγμιαία ταχύτητα του δρομέα είναι η μέση ταχύτητα σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt . Το μήκος Δx που διανύει ο δρομέας κινούμενος με ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση, σύμφωνα με τη σχέση 2.9, γράφεται

$$\Delta x = u_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \quad (2.16)$$

όπου u_0 είναι η αρχική ταχύτητα του δρομέα, Δt είναι ο χρόνος που κάνει ο δρομέας να διανύσει το διάστημα Δx και a είναι η επιτάχυνση.

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της σχέσης (2.16) με Δt βρίσκουμε ότι

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = u_0 + \frac{1}{2} a \Delta t$$

Αλλά $\frac{\Delta x}{\Delta t} = u_{\text{μεσ}}$, όπως έχει ορισθεί στη σχέση (2.2), οπότε

$$u_{\text{μεσ}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = u_0 + \frac{1}{2} a \Delta t \quad (2.17)$$

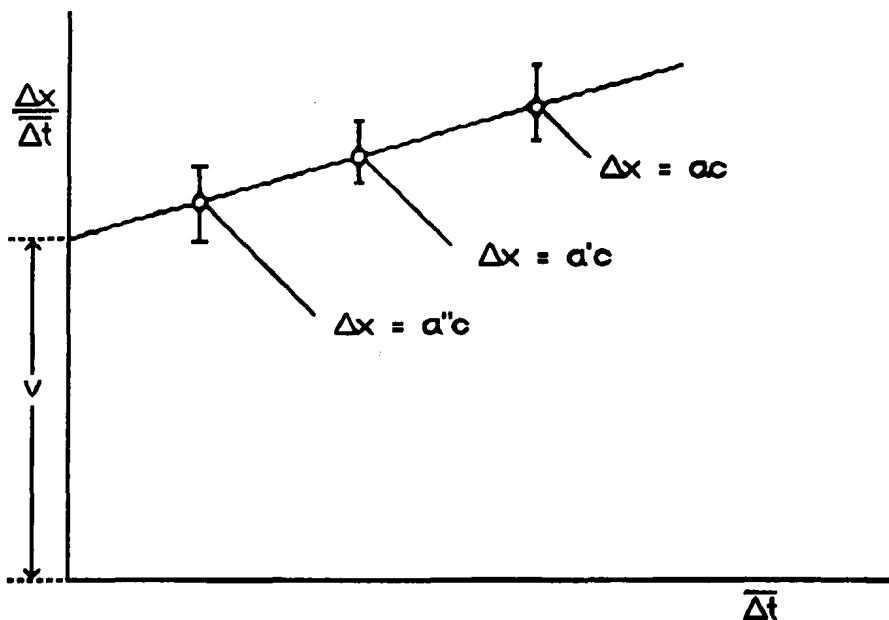
Γνωρίζοντας ότι η στιγμιαία ταχύτητα ορίζεται ως

$u_{\text{στιγμ}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)$ η σχέση (2.17) γράφεται

$$u_{\text{στιγμ}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = u_0$$

η οποία είναι η τεταγμένη επί την αρχή, όπως φαίνεται στο Σχ. 7, της ευθείας που βρίσκεται από την σχέση (2.17). Η μέτρηση της στιγμιαίας ταχύτητας ενός δρομέα γίνεται με τη βοήθεια σημαιών μήκους Δx . Οι σημαίες είναι κομμάτια από χαρτόνι καθορισμένου μήκους και προσαρμόζονται στην κατακόρυφη υποδοχή του δρομέα. Τα μήκη των σημαιών παίρνονται ανά 5.0 cm στην περιοχή (5.0-30.0) cm. Είναι

απαραίτητο η αρχή των σημαιών να βρίσκεται πάντα στο ίδιο σημείο έτσι ώστε η αρχική ταχύτητα u_0 στη σχέση (2.17) να είναι πάντα η ίδια.



Σχήμα 7. Γραφικός προσδιορισμός εύρεσης στιγμιαίας ταχύτητας.

Τοποθετούμε ένα φωτοανιχνευτή σε μια συγκεκριμένη θέση x_2 . Ο μεταγωγός της συνάρτησης F του χρονομέτρου βρίσκεται στη θέση F_2 και οι ακροδέκτες του φωτοανιχνευτή στο START του χρονομέτρου. Αφήνουμε το δρομέα με τη σημαία από καθορισμένη θέση της αεροτροχιάς x_1 (αρχή της σημαίας). Με την επίδραση της δύναμης βαρύτητας ο δρομέας κινείται προς το φωτοανιχνευτή με ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και το χρονόμετρο καταγράφει το χρόνο Δt που η σημαία διακόπτει τη δέσμη. (Προσοχή η δέσμη να διακόπτεται μόνο από τη σημαία). Μετράμε πέντε φορές το χρόνο Δt και υπολογίζουμε τη μέση τιμή του Δt . Η παραπάνω εργασία επαναλαμβάνεται για όλες τις διαθέσιμες σημαίες και οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 2.



Πίνακας 2

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της στιγμιαίας ταχύτητας

a/a	Δx (cm)	Δt (sec)					$\overline{\Delta t} = \frac{\sum \Delta t_i^*}{5}$ (sec)
		Δt_1	Δt_2	Δt_3	Δt_4	Δt_5	
1							
2							
3							
.							
.							
.							

* $i = 1, 2, \dots, 5.$

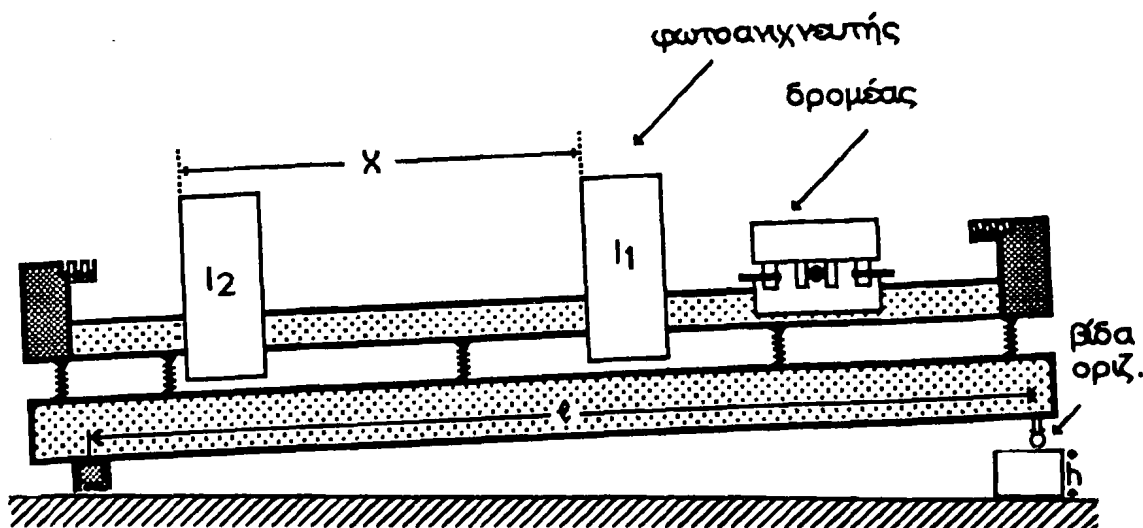
Από τις τιμές του Πίνακα 2:

- 1) Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα του δρομέα $\frac{\Delta x}{\Delta t}$.
- 2) Να χαραχθεί η καμπύλη $\frac{\Delta x}{\Delta t} = f(\overline{\Delta t})$ σχέση (2.17) και να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα του δρομέα.
- 3) Να συγκριθεί η τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας που βρέθηκε γραφικά με την τιμή που βρίσκεται από τη σχέση $v = \sqrt{2a(x_2 - x_1)}$ όπου $a = g \sin \theta$ η επιτάχυνση του δρομέα.

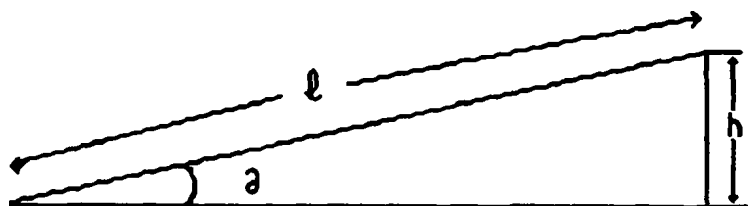
3.3 Μελέτη του 2ου Νόμου του Νεύτωνα ($\vec{F} = m\vec{a}$)

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τη σχέση που συνδέει την επιτάχυνση \vec{a} που προσδίνεται σε ένα κινητό όταν πάνω του δρα μια σταθερή δύναμη \vec{F} ως προς τη δύναμη \vec{F} . Η δύναμη F που θα ενεργεί πάνω

στο δρομέα μπορεί να προκύψει είτε από τη δύναμη βαρύτητας σε κεκλιμένο αεροτροχιά $F = Mgsin\theta$, είτε από ένα βαρίδι μάζας m που συνδέεται με το



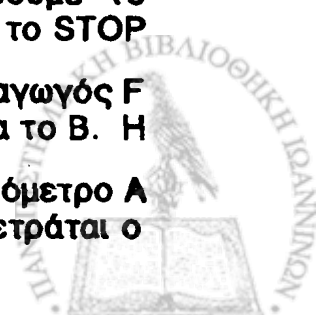
(α)



(β)

Σχήμα Β. (α) Αεροτροχιά σε θέση κεκλιμένου επιπέδου
(β) Υπολογισμός της γωνίας κλίσης

δρομέα M διαμέσου μιας τροχαλίας $F = \frac{Mm}{M+m} \cdot g$. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση του κεκλιμένου επιπέδου. Συνδέουμε το φωτοανιχνευτή I_1 με το START του χρονομέτρου Α και τον I_2 με το STOP του χρονομέτρου Α και το START του χρονομέτρου Β. Ο μεταγωγός F των χρονομέτρων βρίσκεται στη θέση F_3 για το Α και στο F_2 για το Β. Η εκκίνηση του δρομέα γίνεται 1mm πριν αρχίσει να μετράει το χρονόμετρο Α οπότε η αρχική ταχύτητα του δρομέα θα είναι μηδέν ($u_0 = 0$). Μετράται ο



χρόνος t που κάνει ο δρομέας να διανύσει την απόσταση μεταξύ των δύο φωτοανιχνευτών ($x_2 - x_1$) (χρονόμετρο A) και ο χρόνος Δt που ο δρομέας διακόπτει τη δέσμη του φωτοανιχνευτή I_2 ($\Delta x_{\text{δρομέας}} = 14.0 \text{ cm}$). Η μέτρηση γίνεται πέντε φορές και προσδιορίζονται τα t και Δt . Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω δουλειά για διάφορες κλίσεις του κεκλιμένου επιπέδου όπως δείχνει το Σχ. 8. Παίρνουμε 6 τουλάχιστον διαφορετικές δυνάμεις. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3

Μετρήσεις για την επαλήθευση του 2ου νόμου του Νεύτωνα

a/a	h (cm)	t (sec)					$\bar{t} = \frac{\sum t_i^*}{5}$ (sec)	Δt (sec)					$\overline{\Delta t} = \frac{\sum \Delta t_i^*}{5}$ (sec)	
		t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅		Δt_1	Δt_2	Δt_3	Δt_4	Δt_5		
1														
2														
3														
.														
.														
.														

* $i = 1, 2, \dots, 5$.

Από τις τιμές του Πίνακα 3:

- 1) Να υπολογιστεί η δύναμη F για κάθε ύψος h .
- 2) Να προσδιοριστεί η επιτάχυνση \vec{a} για κάθε ύψος h

$$a = \frac{\Delta u}{\bar{t}} = \frac{u - u_0}{\bar{t}} = \frac{u - 0}{\bar{t}} = \frac{u}{\bar{t}} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\bar{t}}$$

χρησιμοποιώντας τα $\overline{\Delta t}$ και \bar{t} .

- 3) Να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση $F = f(a)$ και να βρεθεί η κλίση της ευθείας. Εξάγετε τα απαραίτητα συμπεράσματα.

3.4 Μελέτη της Ομαλά Επιταχυνόμενης Κίνησης

Ανυψώνουμε τη μία άκρη της αεροτροχιάς με την τοποθέτηση ξύλινου παραλληλεπιπέδου κάτω από τη βίδα οριζοντίωσης, όπως φαίνεται στο Σχ. 8. Οι φωτοανιχνευτές και το χρονόμετρο χρησιμοποιούνται όπως στην περίπτωση της μέτρησης της μέσης ταχύτητας. Η εκκίνηση του δρομέα γίνεται 1mm πριν αρχίσει να μετράει το χρονόμετρο, έτσι η αρχική ταχύτητα του δρομέα θεωρείται μηδέν. Μετράμε 5 φορές το χρόνο που κάνει ο δρομέας να διανύσει το διάστημα x μεταξύ των φωτοανιχνευτών. Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για 10 τουλάχιστον διαφορετικά x και οι μετρήσεις καταχωρούνται σε Πίνακα όπως ο Πίνακας 1.

Από τις τιμές του Πίνακα:

- 1) Να χαραχθεί η καμπύλη $x = f(\bar{t})$.
- 2) Να χαραχθεί η καμπύλη $x = f(\bar{t})$ σε log-log χαρτί και να προσδιοριστεί η ακριβής μορφή της.



ΑΣΚΗΣΗ 3

ώθηση μεταβολη της ορμης

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εργαστηριακή αυτή άσκηση αναφέρεται σε μία νέα μορφή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Η μορφή αυτή θα μας επιτρέψει να ορίσουμε ένα νέο φυσικό μέγεθος, την ώθηση δύναμης. Η επενέργεια μίας δύναμης σ' ένα σώμα μεταβάλλει την κινητική κατάσταση του σώματος, με άλλα λόγια, μεταβάλλει την ορμή (ή ποσότητα κίνησης). Η μεταβολή αυτή της ορμής, όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω, ισούται με το ολοκλήρωμα της δύναμης στο χρονικό διάστημα που ενεργεί η δύναμη. Η ισότητα αυτή επαληθεύεται πειραματικά με σταθερή ή μεταβαλλόμενη δύναμη. Για λόγους απλότητας η κίνηση του σώματος γίνεται σε μία διάσταση και συγκεκριμένα πάνω σε αεροτροχιά. Η δύναμη που μπορεί να είναι σταθερή ή να μεταβάλλεται προέρχεται από ένα βαρίδι δεμένο μ' ένα σχοινί που περνά από ακίνητη τροχαλία και καταλήγει στο κινητό. Χρησιμοποιείται επίσης μία προσεγγιστική μέθοδος για να δώσει στον ασκούμενο την αίσθηση των προσεγγίσεων.

2. ΘΕΩΡΙΑ

Όταν μία σταθερή δύναμη \vec{F} εφαρμόζεται σ' ένα σώμα κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα επιταχύνεται με την επίδραση της δύναμης. Για λόγους απλότητας, υποθέτουμε μονοδιάστατη κίνηση στον άξονα των x



ε

Η.
με
δία
ως

οπότε $\vec{F} = F_x \hat{x}_0$. Η κίνηση για $t > 0$ περιγράφεται από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$F = F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{du_x}{dt} = ma \quad (3.1)$$

από αυτή προκύπτει ότι

$$\int_{u_0}^u du = \int_0^t a dt = \int_0^t \frac{F}{m} dt$$

ή

$$u - u_0 = \frac{F}{m} t \quad (3.2)$$

Η εξίσωση (3.2) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$Ft = m u(t) - mu(0) = \Delta(mu) = \Delta P = \text{μεταβολή της ορμής.}$$

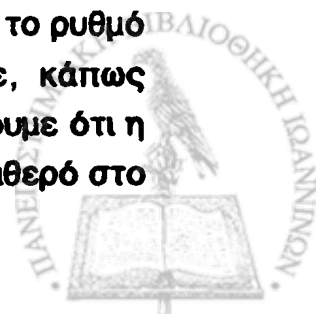
Το πρώτο μέλος ονομάζεται **ώθηση** της δύναμης στο ίδιο χρονικό διάστημα. Όταν η δύναμη F είναι πολύ μεγάλη και επιδρά για πολύ μικρό χρόνο τότε είναι καλύτερα να ορίσουμε την ώθηση ως εξής:

$$\text{Ώθηση} = J = \int_0^t F dt = \Delta (mu) \quad (3.3)$$

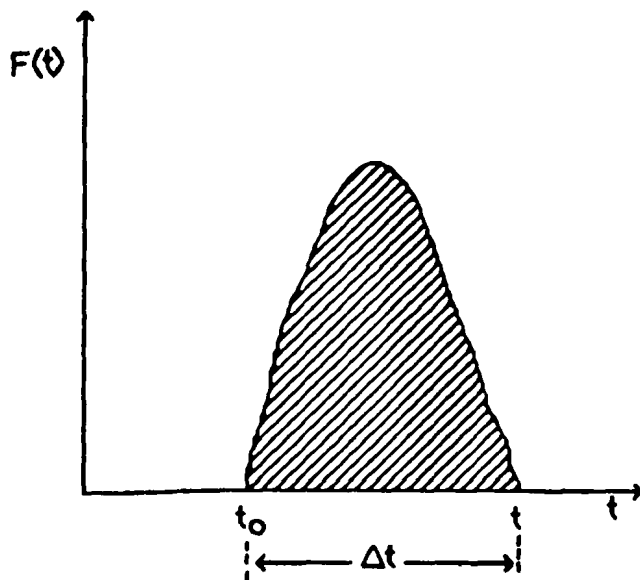
Όπως είπαμε στη θεωρία της προηγούμενης άσκησης η γενική έκφραση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα δίνεται με τη σχέση

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.4)$$

Η σχέση αυτή λέει ότι η δύναμη που ενεργεί σ' ένα σώμα ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ορμής. Ξεκινώντας από την (3.4) μπορούμε, κάπως διαφορετικά και ίσως καλύτερα, να ορίσουμε την ώθηση. Υποθέτουμε ότι η ωστική δύναμη έχει σταθερή διεύθυνση αλλά το μέτρο δεν είναι σταθερό στο



χρόνο που επενεργεί. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι η μεταβολή του μέτρου της δύναμης στο χρονικό διάστημα $t-t_0$ δίνεται στο Σχ. 1.



Σχήμα 1. Διάγραμμα μεταβολής της ωστικής δύναμης με το χρόνο.

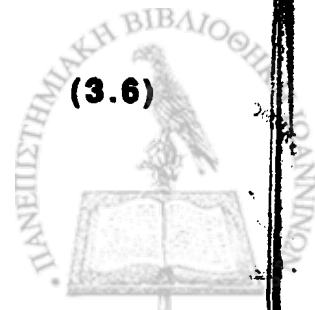
Από την (3.4) προκύπτει

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt = \vec{J} \quad (3.5)$$

Συμπερασματικά η ώθηση \vec{J} της δύναμης είναι το ολοκλήρωμα της δύναμης \vec{F} στο χρονικό διάστημα που ενεργεί η δύναμη σ' ένα σώμα και ισούται με τη μεταβολή της ορμής του σώματος. Η ώθηση της δύναμης που έχει σταθερή διεύθυνση, $\int_{t_0}^t \vec{F} dt$, ισούται κατά μέτρο με το εμβαδό που περικλείει η καμπύλη δύναμη - χρόνος.

Σ' αυτή την άσκηση θεωρούμε τη δύναμη σταθερή, τον αρχικό χρόνο $t_0 = 0$ και την αρχική ορμή $\vec{p}_0 = 0$, οπότε η (3.5) γίνεται

$$\vec{p} = M\vec{v} = F\vec{t} \quad (3.6)$$



Ένας απλός τρόπος για να έχουμε μονοδιάστατη κίνηση και δύναμη σταθερής διεύθυνσης είναι η χρήση οριζόντιας αεροτροχιάς σε συνδυασμό με ακίνητη τροχαλία, που περιγράφουμε αμέσως.

Χρήση Ακίνητης Τροχαλίας

Ένα σώμα μάζας M που θέλουμε να περιγράψουμε την κίνηση, συνδέεται με ένα σχοινί που περνάει από μία τροχαλία και καταλήγει σε ένα βαρίδι γνωστής μάζας m , όπως δείχνει το Σχ. 2. Οι δυνάμεις που ενεργούν στις μάζες M και m φαίνονται αντίστοιχα στα διαγράμματα (α) και (β) του ίδιου σχήματος και μας δίνουν τις παρακάτω εξισώσεις:

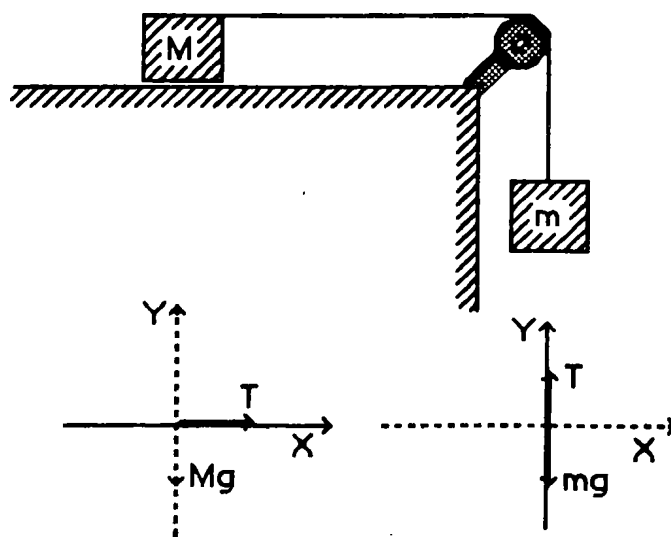
$$mg - T = ma \quad (3.7)$$

και

$$T = Ma \quad (3.8)$$

όπου T είναι η τάση του νήματος. Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (3.7) και (3.8) προκύπτει ότι η επιτάχυνση του συστήματος είναι

$$a = \frac{m}{M+m} g \quad (3.9)$$



Σχήμα 2. Σώμα μάζας M που κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο συνδέεται με βαρίδι μάζας m δια μέσου τροχαλίας.



και η δύναμη είναι

$$F = \frac{Mm}{M+m} g \quad (3.10)$$

Στην περίπτωση που $M \gg m$ τότε η

$$F = \frac{mM}{M+m} g \approx \frac{Mm}{M} g = mg \quad (3.11)$$

Δηλαδή η δύναμη που εξασκεί το βαρίδι στο σώμα είναι ανεξάρτητη της μάζας M του σώματος. Την αίσθηση αυτής της προσέγγισης θα έχει ο ασκούμενος στο τρίτο μέρος των πειραματικών μετρήσεων.

Από τις πειραματικές εξισώσεις (3.7) και (3.8) εξαλείφοντας την T και λύνοντας ως προς M έχουμε

$$M = \left(\frac{a}{g} - 1\right) m \quad (3.12)$$

Η (3.12) μας δίνει τη μάζα του κινούμενου σώματος σα συνάρτηση της επιτάχυνσης a που προσδίδει η δύναμη στο σώμα και της μάζας του βαριδιού m . Η μάζα του βαριδιού είναι γνωστή, εκείνο που δεν είναι γνωστό είναι η επιτάχυνση. Γιαυτό θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση του σώματος βασιζόμενοι στην θεωρία της 2ης άσκησης.

Έστω ότι κατά τη χρονική διάρκεια t , που επενεργεί η δύναμη στο σώμα, αυτό διανύει διάστημα x

$$x = \frac{1}{2} at^2 \quad (3.13)$$

οπότε η επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση

$$a = \frac{2x}{t^2} \quad (3.14)$$

Επίσης μπορούμε να προσδιορίσουμε έμμεσα και τη δύναμη F που εξασκείται πάνω στη μάζα M .

Από τη σχέση (3.8) έχουμε ότι



$$a = \frac{T}{M} = \frac{F}{M} \quad (3.15)$$

Από τις (3.14) και (3.15) προκύπτει ότι

$$\frac{2x}{t^2} = \frac{F}{M} \quad (3.16)$$

και λύνοντας ως προς F έχουμε

$$F = \frac{2M}{t^2} x \quad (3.17)$$

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

3.1 Επαλήθευση της Σχέσης $Mu = Ft$

3.1.1 Με τη Μεταβολή του Διαστήματος x_1 που Ενεργεί η Δύναμη

Προεργασία

- α) Σύνδεση αεραντλίας, μετασχηματιστού και χρονομέτρου με το δίκτυο (220 Volt).
- β) Σύνδεση φωτοανιχνευτών με το μετασχηματιστή (12 Volt).
- γ) Λειτουργία ηλεκτρονικού χρονομέτρου και φωτοανιχνευτών.

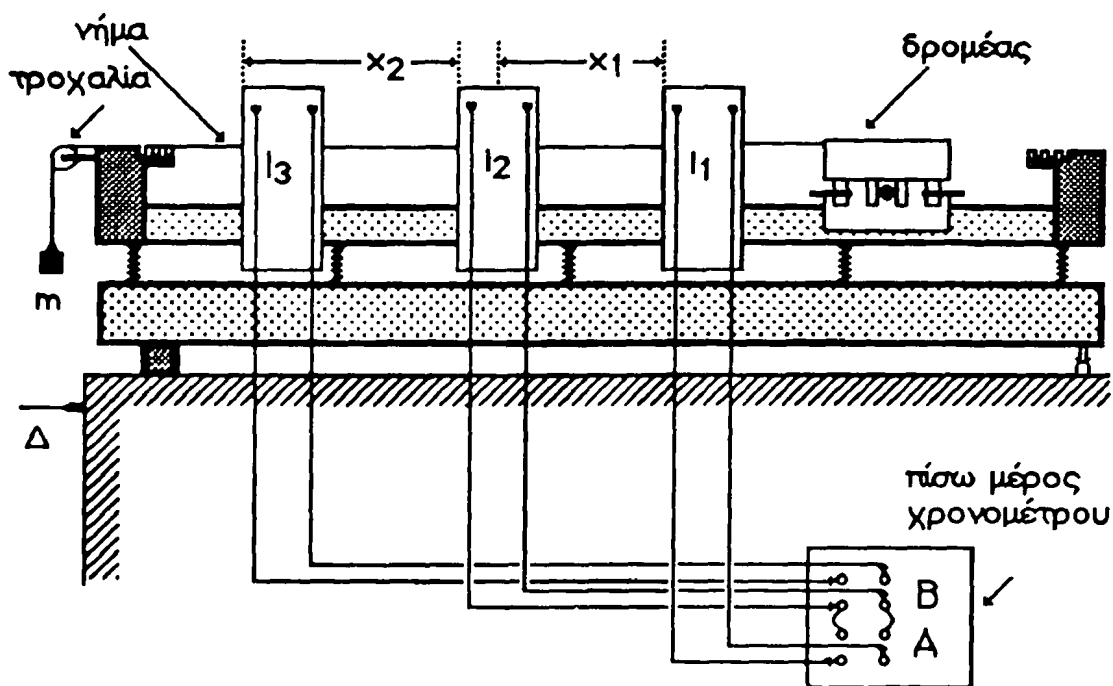
Η βασική λειτουργία του χρονομέτρου σε συνδυασμό με τους φωτοανιχνευτές έχει δοθεί στην άσκηση 1. Για την άσκηση αυτή χρειάζονται επιπρόσθετες οδηγίες για τη μέτρηση του χρόνου. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούνται και τα δύο χρονόμετρα της συσκευής μέτρησης του χρόνου. Σχετικά με τη χρήση των χρονομέτρων θα πρέπει τώρα ο περιστροφικός μεταγωγός επιλογής των συναρτήσεων F να είναι στη θέση F_3 .

Η σύνδεση των φωτοανιχνευτών με τα χρονόμετρα γίνεται όπως στο Σχ. 3. Συγκεκριμένα ο φωτοανιχνευτής I_1 συνδέεται με το START του Α χρονομέτρου, ο φωτοανιχνευτής I_2 συνδέεται με το STOP του Α χρονομέτρου και το START του Β χρονομέτρου. Ο I_3 συνδέεται με το



STOP του Β χρονόμετρου. Τους χρόνους που καταγράφουν τα δύο χρονόμετρα είναι αυτοί που απαιτούνται για να διανύσει ο δρομέας τις αποστάσεις, μεταξύ των φωτοανιχνευτών, x_1 και x_2 αντίστοιχα, όπως δείχνει το Σχ. 3.

δ) Οριζοντίωση της αεροτροχιάς (βλέπε άσκ. 2).



Σχήμα 3. Διάταξη αεροτροχιάς και φωτοανιχνευτών για την επαλήθευση του νόμου ώθηση-ορμή με τη βοήθεια ακίνητης τροχαλίας.

Πειραματική Διάταξη - Μετρήσεις

Φέρνουμε το δρομέα μέσα στο φωτοανιχνευτή I_1 και σε θέση περίπου 1mm μακρύτερα από αυτή που αρχίζει να μετρά το χρονόμετρο.

Για τη μέτρηση των διαστημάτων τοποθετούμε τους φωτοανιχνευτές I_2 και I_3 σε σταθερή απόσταση μεταξύ τους περίπου $x_2 = 40.0 \text{ cm}$. Παίρνουμε τουλάχιστον πέντε διαφορετικά διαστήματα x_1 . Αυτό γίνεται μετακινώντας το φωτοανιχνευτή I_1 σε διάφορες θέσεις. Το διάστημα x_1 διανύεται από το δρομέα Μ στο χρόνο t_1 που ενεργεί η σταθερή δύναμη F και καταγράφεται στο Α χρονόμετρο. Το διάστημα x_2

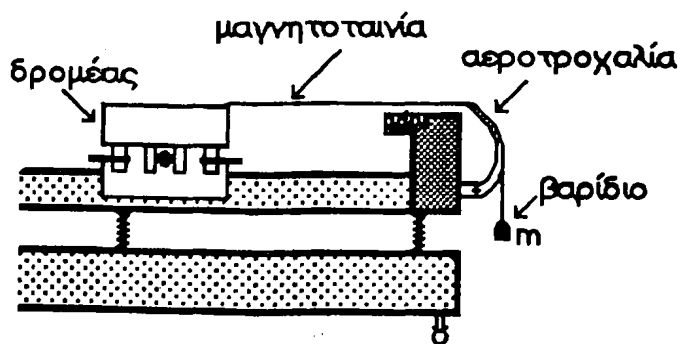
διανύεται σε χρόνο t_2 που καταγράφεται στο Β χρονόμετρο, χωρίς την επίδραση της δύναμης. Αυτό ρυθμίζεται με την τοποθέτηση δίσκου Δ σε τέτοια απόσταση ώστε το βαρίδι m , που συνδέεται με το δρομέα δια μέσου της τροχαλίας Τ, να φθάνει στο δίσκο τη στιγμή ακριβώς που το Α χρονόμετρο σταματά να καταγράφει το χρόνο t_1 και το Β χρονόμετρο αρχίζει να καταγράφει το χρόνο t_2 . Επειδή στην πράξη οι τριβές μεταξύ νήματος και τροχαλίας είναι αισθητές, για ακριβέστερα αποτελέσματα αντικαθιστούμε την τροχαλία με αεροτροχαλία και το νήμα με μαγνητοταινία, όπως δείχνει το Σχ. 4.

Η σταθερή δύναμη προϋποθέτει σταθερή μάζα βαριδιού που συνήθως παίρνεται $m = 10.0 \text{ gr}$. Οι τιμές x_1 , t_1 και t_2 καταχωρούνται στον

Πίνακα 1. Τα υπόλοιπα μεγέθη προσδιορίζονται έμμεσα. Συγκεκριμένα η επιτάχυνση δίνεται σα συνάρτηση του x_1 , σύμφωνα με τη σχέση (3.13). Για

τον προσδιορισμό της μάζας του δρομέα M στηριζόμαστε στη θεωρία της παραγράφου 2.1, όπου η μάζα δίνεται από τη σχέση (3.12). Έτσι γνωρίζουμε τη δύναμη $F = Ma$ και επομένως την ώση $J = F t_1$. Επίσης

γνωρίζοντας τη μάζα του δρομέα M καθώς και την ταχύτητα $u_2 = \frac{x_2}{t_2}$, προσδιορίζουμε τη μεταβολή της ορμής $\Delta P = Mu_2$.



Σχήμα 4. Προσαρμογή αεροτροχαλίας σε σύστημα αεροτροχιάς.

Πίνακας 1

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της ώθησης και ορμής για σταθερή ωστική δύναμη

a/a	x_1 (cm)	t_1 (sec)	t_2 (sec)

Από τις τιμές του Πίνακα 1 να γίνει η γραφική παράσταση $J = f(\Delta P)$ και να εξηγήσετε τη συμπεριφορά της καμπύλης.

3.1.2 Μεταβολή της Μάζας m

Στην προηγούμενη παράγραφο διατηρήσαμε σταθερή τη δύναμη διατηρώντας σταθερό το m και μεταβάλαμε τα διαστήματα x_1 που διανύει ο δρομέας με την επενέργεια της δύναμης. Τώρα θα μεταβάλλουμε τη δύναμη F αλλάζοντας τη μάζα του βαριδιού m . Κρατούμε σταθερά, τη μάζα του δρομέα (όσο τη βρήκατε) και τα διαστήματα x_1 και x_2 , περίπου 40 cm. Για κάθε τιμή του m μετρούμε τα t_1, t_2 και βρίσκουμε την ταχύτητα $u_2 = \frac{x_2}{t_2}$, τη δύναμη από τη σχέση (3.10) και την $\Delta P = Mu_2$. Καλό θα είναι για κάθε βαρίδι να μετρούμε τουλάχιστον 5 φορές το χρόνο. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 2.



Πίνακας 2

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της ώθησης και ορμής για μεταβλητή ωστική δύναμη

α/α	m (gr)	t ₁ (sec)					t ₁ = $\frac{\sum t_{1i}^*}{5}$ (sec)	t ₂ (sec)					t ₂ = $\frac{\sum t_{2i}^*}{5}$ (sec)	
		t _{1α}	t _{1β}	t _{1γ}	t _{1δ}	t _{1ε}		t _{2α}	t _{2β}	t _{2γ}	t _{2δ}	t _{2ε}		
1														
2														
3														
.														
.														
.														

*i = 1, 2, ... , 5.

Από τις τιμές του Πίνακα 2 να γίνει γραφική παράσταση της $J = f(\Delta P)$ και να συγκριθεί με την προηγούμενη (από τον Πίνακα 1).

3.1.3 Μεταβολή του Βάρους του Κινητού

Στην περίπτωση που το $m \ll M$ η δύναμη F δίνεται από τη σχέση (3.11). Με το σκεπτικό αυτό να επαναληφθούν οι μετρήσεις της προηγούμενης παραγράφου και αντί να μεταβάλλετε το βάρος του βαριδιού να μεταβάλλετε το βάρος του δρομέα. Η μάζα του βαριδιού παίρνεται $m = 10.0 \text{ gr}$ και του δρομέα μεταβάλλεται με πρόσθεση βαριδιών των 40.0 gr . Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 3.



Πίνακας 3

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της ώθησης και ορμής για μεταβλητό βάρος του κινητού

α/α	M (gr)	t ₁ (sec)					$t_1 = \frac{\sum t_{1i}^*}{5}$ (sec)	t ₂ (sec)					$t_2 = \frac{\sum t_{2i}^*}{5}$ (sec)
		t _{1α}	t _{1β}	t _{1γ}	t _{1δ}	t _{1ε}		t _{2α}	t _{2β}	t _{2γ}	t _{2δ}	t _{2ε}	
1	300												
2	.												
3	.												
.	.												
.	.												
.	.												

*i = 1, 2, ..., 5.

Από τις τιμές του Πίνακα 3:

- 1) Να γίνει η γραφική παράσταση $F = f(M)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί, όπου η δύναμη δίνεται από τη σχέση (3.10) και να δικαιολογηθεί η συμπεριφορά της καμπύλης.
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση $J = f(\Delta P)$ και να εξηγήσετε τη συμπεριφορά της καμπύλης.



ΑΣΚΗΣΗ

4

θεώρημα έργου - ενέργειας νόμος διατήρησης ενέργειας

(για συντηρητικές δυνάμεις)

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για την περιγραφή της κίνησης ενός σώματος που κινείται με την επίδραση σταθερής δύναμης, αρκεί να βρούμε τη θέση του σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου. Για μονοδιάστατη κίνηση βρήκαμε (άσκηση 2) ότι

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Στην περίπτωση όμως που η δύναμη που εξασκείται στο σώμα δεν είναι σταθερή δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω σχέση γιατί η επιτάχυνση a δεν θα είναι σταθερή. Θα περιοριστούμε σε δυνάμεις που μεταβάλλονται με τη θέση του σώματος στο χώρο. Παραδείγματα τέτοιων δυνάμεων στη φύση είναι οι δυνάμεις παγκόσμιας έλξης μεταξύ σωμάτων και η δύναμη που εξασκεί ένα τεντωμένο ελατήριο σ' ένα σώμα που είναι δεμένο πάνω του. Για να προσδιορίσουμε την κίνηση ενός σώματος στο οποίο εξασκούνται τέτοιες δυνάμεις οδηγούμαστε στις έννοιες του έργου, της κινητικής και δυναμικής ενέργειας, του θεωρήματος έργου-ενέργειας και τον νόμο διατήρησης της ενέργειας, που έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της Φυσικής.

Ο σκοπός της άσκησης αυτής είναι η επαλήθευση του θεωρήματος έργου-ενέργειας και του νόμου διατήρησης της ενέργειας. Θα ασχοληθούμε

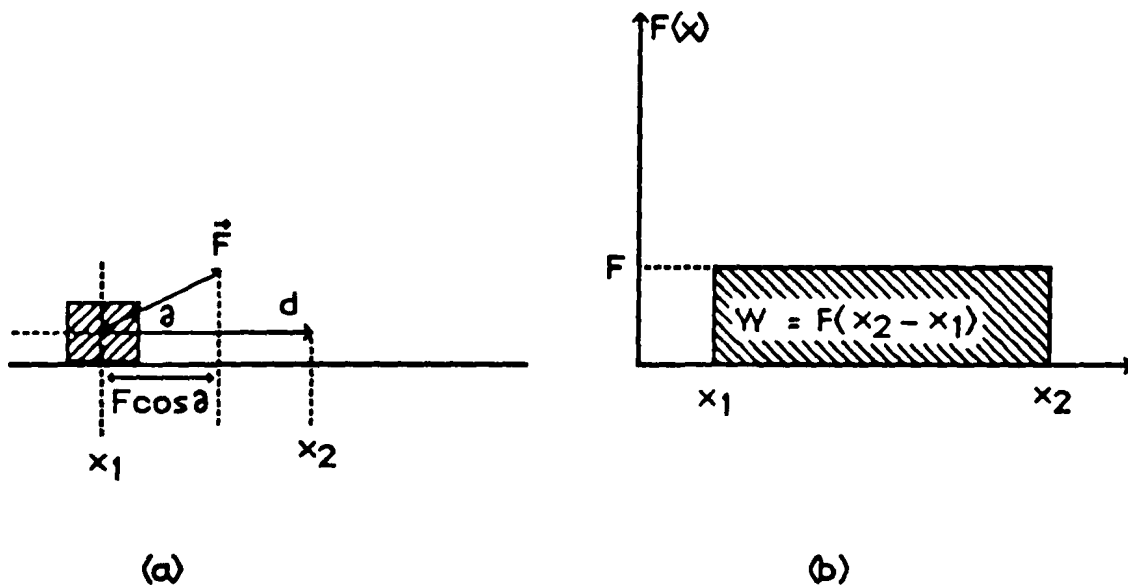


μόνο με συντηρητικές δυνάμεις. Το απλούστερο πείραμα για τις παραπάνω επαληθεύσεις είναι η σχετική κίνηση των δρομέων σε κεκλιμένες αεροτροχιές.

2. ΘΕΩΡΙΑ

2.1 Έργο Σταθερής Δύναμης

Θεωρούμε σώμα που μετατοπίζεται με την επίδραση σταθερής δύναμης κατά μήκος του άξονα x , όπως στο Σχ. 1(a).

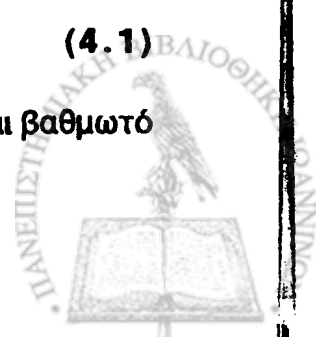


Σχήμα 1. (a) Η δύναμη \vec{F} προκαλεί μία μετατόπιση \vec{d} του κύβου.
(b) Το έργο που παράγει η δύναμη F στο σώμα ισούται με το εμβαδόν $F(x_2 - x_1)$.

Ορίζουμε το έργο που παράγει η δύναμη πάνω στο σώμα σαν το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης \vec{F} επί τη μετατόπιση \vec{d} του σώματος, δηλαδή

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (4.1)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό που προκύπτει από την (4.1), το έργο είναι βαθμωτό μέγεθος. Η (4.1) γράφεται



$$W = F d \cos\theta = F \cos\theta d = F_x d = F_x (x_2 - x_1) \quad (4.2)$$

όπου $F_x = F \cos\theta$ είναι η συνιστώσα της δύναμης κατά τη διεύθυνση της κίνησης, στον άξονα x . Όπως προκύπτει από την (4.2), το έργο που παράγει η σταθερή δύναμη F για να μετατοπίσει το σώμα από τη θέση x_1 στη θέση x_2 ισούται με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του Σχ. 1(b). Στο σύστημα MKS η μονάδα του έργου είναι το Joule ($Nt \cdot m$).

2.2 Έργο Μεταβλητής Δύναμης

Αρχικά θεωρούμε το έργο που παράγεται από μία δύναμη που μεταβάλλεται μόνο κατά μέτρο. Η δύναμη αυτή μετακινεί ένα σώμα κατά μήκος του άξονα x από τη θέση x_1 στη θέση x_2 . Αν υποδιαιρέσουμε την αρχική μετατόπιση σε μεγάλο αριθμό μικρών ίσων διαστημάτων Δx (Σχ. 2) τότε η δύναμη F , στη διάρκεια της μικρής αυτής μετατόπισης, έχει σχεδόν σταθερή τιμή οπότε το έργο ΔW δίνεται από το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος (Σχ. 2), δηλαδή

$$\Delta W = F \Delta x \quad (4.3)$$

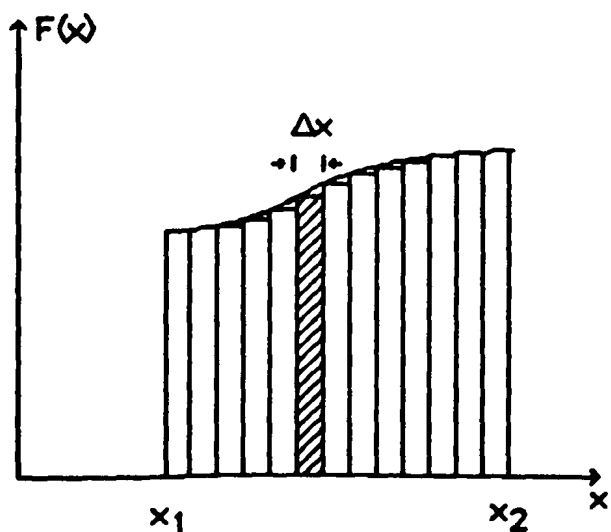
Το ολικό έργο που παράγει η δύναμη κατά τη μετατόπιση του σώματος από το x_1 στο x_2 , W_{12} , είναι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων $F \Delta x$ μεταξύ του x_1 και x_2 , δηλαδή

$$W_{12} = \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x \quad (4.4)$$

όπου το F έχει διαφορετική τιμή για κάθε όρο. Αν ο αριθμός των διαστημάτων αυξηθεί, έτσι ώστε το Δx να τείνει στο μηδέν και ο αριθμός των διαστημάτων στο άπειρο, τότε η σχέση (4.4) γράφεται με τη μορφή

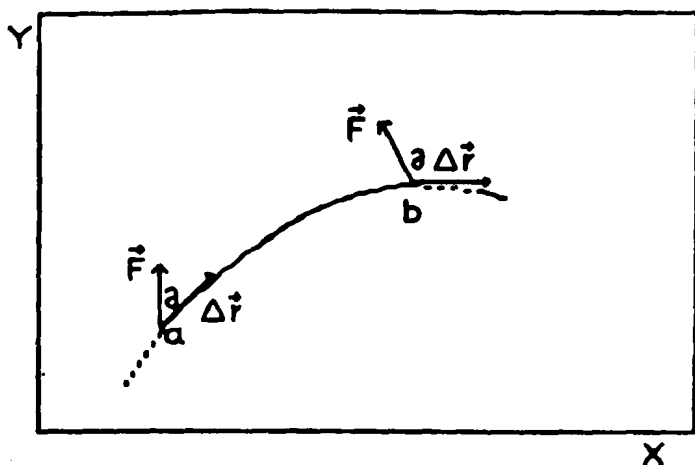
$$W_{12} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F dx \quad (4.5)$$





Σχήμα 2. Γραφική παράσταση του έργου μεταβλητής δύναμης που μετακινεί ένα σώμα από τη θέση x_1 στη θέση x_2 .

Μέχρι εδώ αναφερθήκαμε στην περίπτωση που η δύναμη μεταβάλλεται κατά μέτρο. Είναι σκόπιμο να δώσουμε μία αίσθηση της μεταβολής της δύναμης και κατά διεύθυνση, όπως στο Σχ. 3.



Σχήμα 3. Μετακίνηση σώματος σε καμπύλη τροχιά από το σημείο a στο σημείο b με την επενέργεια δύναμης μεταβλητής κατά μέτρο και διεύθυνση.

Στην περίπτωση αυτή το έργο βρίσκεται από τη σχέση

$$W_{a\theta} = \int_a^{\theta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^{\theta} F \cos \theta dr \quad (4.6)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται μόνο όταν ξέρουμε πως μεταβάλλεται η F και η θ .



2.3 Κινητική Ενέργεια, Θεώρημα Έργου-Ενέργειας (για συντηρητικές Δυνάμεις)

Το μισό του γινομένου της μάζας m ενός σώματος επί το τετράγωνο της ταχύτητάς-του, u , ονομάζουμε **κινητική ενέργεια** K , του σώματος, δηλαδή

$$K = \frac{1}{2} m u^2 \quad (4.7)$$

Με άλλα λόγια η κινητική ενέργεια ενός σώματος είναι το έργο που μπορεί να αποδώσει λόγω της κίνησης-του.

Έστω \vec{F} η συνισταμένη δύναμη που εξασκείται πάνω σ' ένα σωματίο (για ευκολία θεωρούμε ότι η δύναμη μεταβάλλεται μόνο κατά μέτρο και ενεργεί στη διεύθυνση του άξονα x που κινείται το σώμα). Το έργο που παράγει η συνισταμένη δύναμη κατά τη μετατόπιση του σωματίου, από το x_0 στο x είναι

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_0}^x F dx$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι $F = ma$ και η επιτάχυνση μπορεί να γραφεί σαν

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dx} u$$

οπότε το έργο δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_0}^x F dx = \int_{x_0}^x m u \frac{du}{dx} dx = \int_{u_0}^u m u du = \\ &= \frac{1}{2} m u^2 - \frac{1}{2} m u_0^2 = K - K_0 = \Delta K \end{aligned}$$



$$\text{δηλαδή} \quad W = \Delta K \quad (4.8)$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι το έργο που παράγει η συνισταμένη δύναμη η οποία εξασκείται πάνω σ' ένα σωματίο, ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματίου και είναι γνωστή σα **Θεώρημα Έργου - Ενέργειας**. Το θεώρημα ισχύει ακόμη και όταν η δύναμη μεταβάλλεται κατά μέτρο και διεύθυνση, δεν ισχύει όμως όταν η δύναμη δεν είναι συντηρητική (εξήγηση παρακάτω).

2.4 Δυναμική Ενέργεια και Νόμος Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (για Συντηρητικές Δυνάμεις)

Αρχικά είναι σκόπιμο να εξηγήσουμε πότε μία δύναμη είναι συντηρητική. Μία δύναμη είναι συντηρητική αν το έργο που παράγει στο σώμα που κινείται μεταξύ δύο σημείων είναι ανεξάρτητο του δρόμου και εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση. Μία δύναμη είναι μη συντηρητική αν το έργο που παράγει η δύναμη αυτή πάνω στο σώμα που κινείται μεταξύ δύο σημείων εξαρτάται από τον ακολουθούμενο δρόμο μεταξύ των δύο σημείων. Η συνθήκη των συντηρητικών δυνάμεων στη διαφορική της μορφή και σε μία διάσταση είναι

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx} \quad (4.9)$$

Η συνάρτηση $U(x)$ ονομάζεται δυναμική ενέργεια. Από τη σχέση (4.9) μπορούμε να πούμε ότι η δυναμική ενέργεια είναι μία συνάρτηση θέσης, της οποίας το αντίθετο της παραγώγου μας δίνει τη δύναμη. Σε μονοδιάστατη κίνηση η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$\Delta U = U(x) - U(x_0) = - \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (4.10)$$



$$\text{ή} \quad U(x) = - \int_{x_0}^x F(x) dx + U(x_0) \quad (4.11)$$

Ανάλογα με τον ορισμό της κινητικής ενέργειας, η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος σωμάτων είναι το έργο που μπορεί να αποδώσει το σύστημα των σωμάτων αυτών, λόγω της σχετικής θέσης των μελών του, δηλαδή λόγω της κατάστασης-του. Όταν ένα σώμα κρατιέται σ' ένα ύψος y πάνω από την επιφάνεια του εδάφους τότε λόγω της θέσης του έχει μία δυναμική ενέργεια ενώ η κινητική ενέργεια είναι μηδέν. Τη δυναμική αυτή ενέργεια βρίσκουμε από τη σχέση (4.11) αν λάβουμε υπόψη ότι η δύναμη $F = B = mg$. Συγκεκριμένα

$$U(y) - U(y_0) = \int_{y_0}^y mg dy = mg (y - y_0).$$

Εάν θεωρήσω ότι στην επιφάνεια του εδάφους $U(y_0) = 0$, όπου $y_0 = 0$, τότε

$$U(y) = mgy \quad (4.12)$$

Όταν το σώμα πέσει από το ύψος y στην επιφάνεια του εδάφους όλη η δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική $K = \frac{1}{2} mv^2$, δηλαδή

$$\Delta K = - \Delta U \quad (4.13)$$

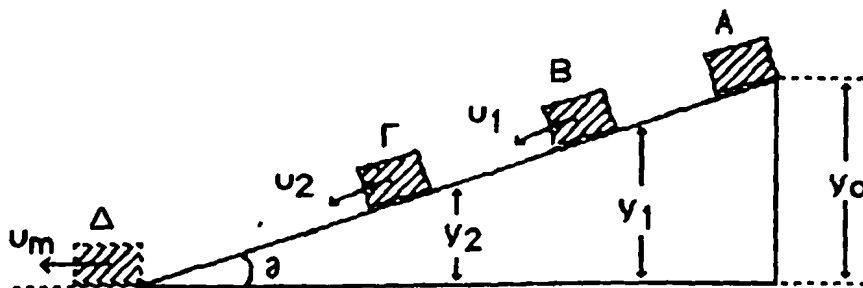
Σε μία ενδιάμεση θέση το σώμα θα έχει κινητική και δυναμική ενέργεια. Συγκεκριμένα

$$K + U = \text{σταθερό} = E = \text{Ολική μηχανική ενέργεια} \quad (4.14)$$

εφόσον οι δυνάμεις είναι συντηρητικές. Η εξίσωση (4.13) ή (4.14) ονομάζεται νόμος διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.



Μία απλή εφαρμογή του νόμου αυτού είναι το κεκλιμένο επίπεδο. Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση Α του Σχ. 4, τότε όλη η ενέργεια-του είναι δυναμική $U(y_0) = mgy_0$. Στη θέση Δ όπου $y = 0$ όλη η ενέργεια



Σχήμα 4. Εφαρμογή του νόμου διατήρησης ενέργειας σε κεκλιμένο επίπεδο.

είναι κινητική $K_{\max} = \frac{1}{2} m u_{\max}^2$. Σε μία ενδιάμεση θέση Β ή Γ το σώμα έχει κινητική και δυναμική ενεργεια που το άθροισμα γράφεται

$$\frac{1}{2} m u_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2} m u_2^2 + mgy_2 = mgy_0 = \frac{1}{2} m u_{\max}^2 = E \quad (4.15)$$

Όπως προκύπτει η χρήση της κεκλιμένης αεροτροχιάς είναι ένας απλός τρόπος για την επαλήθευση του νόμου διατήρησης μηχανικής ενέργειας. Οι αεροτροχίες εξασφαλίζουν σε ικανοποιητική προσέγγιση τη συντηρητικότητα των δυνάμεων που ενεργούν στο κινητό.

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

3.1 Επαλήθευση του Θεωρήματος Έργου-Ενέργειας, $W = \Delta K$ για Σταθερή Δύναμη

Όπως αναφέραμε και στη θεωρία το θεώρημα έργου-ενέργειας δίνεται με την έκφραση $Fx = \frac{1}{2} M u^2 - \frac{1}{2} m u_0^2$. Για λόγους απλότητας

θεωρούμε $u_0 = 0$ οπότε $Fx = \frac{1}{2} M u^2$, όπου F είναι η δύναμη που ενεργεί στο κινητό, x είναι το διάστημα που διανύει το κινητό κατά την επενέργεια

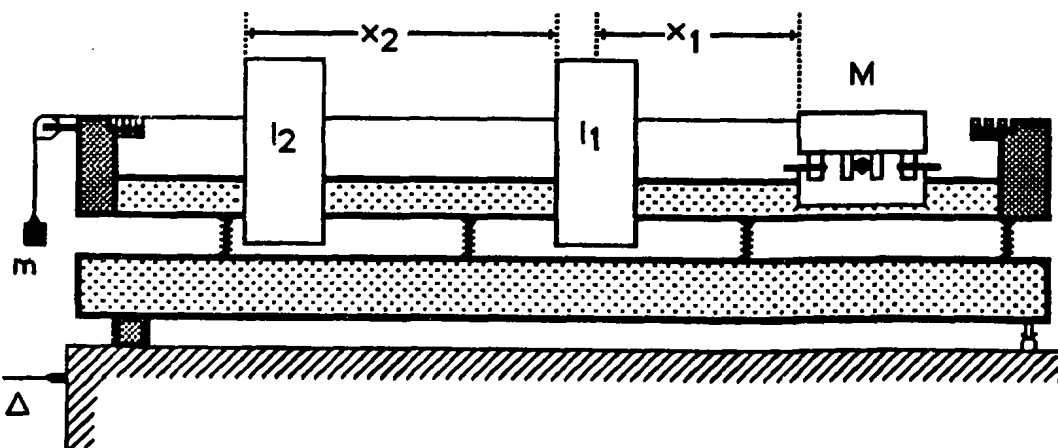


της δύναμης, M είναι η μάζα του κινητού και u είναι η ταχύτητα που αποκτά το κινητό όταν σταματήσει η επενέργεια της δύναμης.

Μεταβάλλοντας το πρώτο μέλος θα πρέπει να μεταβάλλεται και το δεύτερο χωρίς να παύσει η ισχύς της ισότητας. Η μεταβολή του Fx γίνεται μεταβάλλοντας το x ή το F ή και τα δύο. Οι μεταβολές αυτές μπορούν να γίνουν με το σύστημα αεροτροχιών, που χρησιμοποιήσαμε στις προηγούμενες ασκήσεις και τη βοήθεια της ακίνητης τροχαλίας.

3.1.1 Μεταβολή του Αρχικού Διαστήματος x_1

Στην περίπτωση που η δύναμη είναι σταθερή μεταβάλλουμε το διάστημα που διανύει το κινητό με την επενέργεια της δύναμης. Όπως δείχνει το Σχ. 5 το διάστημα αυτό είναι το x_1 από το σημείο εκκίνησης μέχρι τον πρώτο φωτοανιχνευτή I_1 . Μετά το φωτοανιχνευτή I_1 το κινητό κινείται με σταθερή ταχύτητα u . Την ταχύτητα αυτή μπορούμε να την προσδιορίσουμε στο διάστημα x_2 μεταξύ των φωτοανιχνευτών I_1 και I_2 και μετρώντας την αντίστοιχη χρονική διάρκεια $t, u = \frac{x_2}{t}$. Η δύναμη δίνεται από την έκφραση $F = \frac{Mm}{M+m} \cdot g$ που έχει αποδειχθεί στην παράγραφο 2 της άσκησης 3, όπου M είναι η μάζα του δρομέα, m είναι η μάζα του βαριδιού και g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.



Σχήμα 5. Σύστημα αεροτροχιάς και φωτοανιχνευτών για την επαλήθευση του θεωρήματος έργου-ενέργειας με τη βοήθεια της ακίνητης τροχαλίας.



Προεργασία

- α) Σύνδεση αεραντλίας, μετασχηματιστού και χρονομέτρου με το δίκτυο (220 Volt).
- β) Σύνδεση φωτοανιχνευτών με το μετασχηματιστή (12 Volt).
- γ) Λειτουργία Ηλεκτρονικού Χρονομέτρου και Φωτοανιχνευτών. Η λειτουργία του ηλεκτρονικού χρονομέτρου σε συνδυασμό με τους φωτοανιχνευτές είναι ίδια με εκείνη της άσκησης 2.
- δ) Οριζοντίωση της αεροτροχιάς (βλέπε άσκ. 2).

Πειραματική Διάταξη - Μετρήσεις

Κρατάμε το δρομέα με το χέρι μας πάνω στην αεροτροχιά σε μία θέση που απέχει απόσταση x_1 από το φωτοανιχνευτή I_1 , όπως φαίνεται στο Σχ. 5. Ο δρομέας διανύει το διάστημα x_1 με την επενέργεια της δύναμης που προσδίνεται από το βαρίδι στο σώμα δια μέσου του νήματος. Μόλις ο δρομέας φθάσει στο φωτοανιχνευτή I_1 , παύει η επενέργεια της δύναμης. Αυτό γίνεται με την τοποθέτηση δίσκου σε τέτοια θέση ώστε το βαρίδι να φθάνει στο δίσκο τη στιγμή που ο δρομέας βρίσκεται μέσα στο φωτοανιχνευτή I_1 . Με άλλα λόγια μετά το φωτοανιχνευτή I_1 ο δρομέας διανύει το υπόλοιπο διάστημα της αεροτροχιάς με σταθερή ταχύτητα. Τη μάζα του βαριδιού την παίρνουμε σταθερή περίπου 10.0 gr.

Όπως είπαμε στην αρχή της παραγράφου, η μεταβολή του έργου θα γίνει αρχικά με τη μεταβολή της απόστασης x_1 που διανύει το κινητό με την επενέργεια της δύναμης. Για να έχουμε διαφορετικά x_1 αρκεί κάθε φορά να κάνουμε την εκκίνηση από διαφορετικά σημεία της αεροτροχιάς, δεδομένου ότι δεν έχουμε λόγους να μεταβάλλουμε την απόσταση x_2 , που παίρνεται συνήθως ίση με 40 cm. Παίρνουμε περίπου πέντε διαφορετικά διαστήματα x_1 . Για κάθε x_1 μετρούμε περίπου 5 φορές το χρόνο που χρειάζεται ο δρομέας να διανύσει το διάστημα x_2 με σταθερή ταχύτητα. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 1.



Πίνακας 1

Μετρήσεις για την επαλήθευση του θεωρήματος έργου - ενέργειας με σταθερή δύναμη

a/a	x ₁ (cm)	t (sec)					$\bar{t} = \frac{\sum t_i^*}{5}$ (sec)
		t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅	
1							
2							
3							
.							
.							
.							

* i = 1, 2, ..., 5.

Από τις τιμές του Πίνακα 1 για κάθε x₁:

- 1) Να επαληθεύσετε τη σχέση $W = \Delta K$
- 2) Να βρείτε και να δικαιολογήσετε την απόκλιση στα εκατό (%).
- 3) Να κάνετε τη γραφική παράσταση $W = f(x)$ και να επαληθεύσετε ότι η κλίση της ευθείας ισούται με την κινούσα δύναμη.

3.1.2 Χρήση Διαφόρων Βαριδίων

Στην περίπτωση αυτή μεταβάλλουμε τη δύναμη που παράγει το έργο κατά την κίνηση του δρομέα. Η μεταβολή αυτή γίνεται αλλάζοντας τη μάζα του βαριδιού m που δείχνεται στο Σχ. 5. Τα διαστήματα x_1 και x_2 διατηρούνται σταθερά περίπου 40.0 cm το καθένα. Για κάθε μάζα μετρούμε 5 φορές το χρόνο που χρειάζεται ο δρομέας να διανύσει το διάστημα x_2 με σταθερή ταχύτητα. Οι τιμές των m και t καταχωρούνται στον Πίνακα 2.



Πίνακας 2

Μετρήσεις για την επαλήθευση του θεωρήματος έργου - ενέργειας με μεταβλητή δύναμη

a/a	m (gr)	t (sec)					$\bar{t} = \frac{\sum t_i^*}{5}$ (sec)
		t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅	
1							
2							
3							
.							
.							
.							

*i = 1, 2, ..., 5.

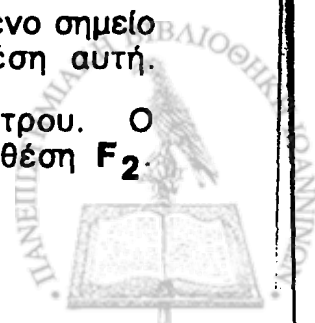
Από τις τιμές του Πίνακα 2 για κάθε m:

- 1) Να επαληθεύσετε τη σχέση $W = \Delta K$
- 2) Να βρείτε και να δικαιολογήσετε την απόκλιση στα εκατό (%).

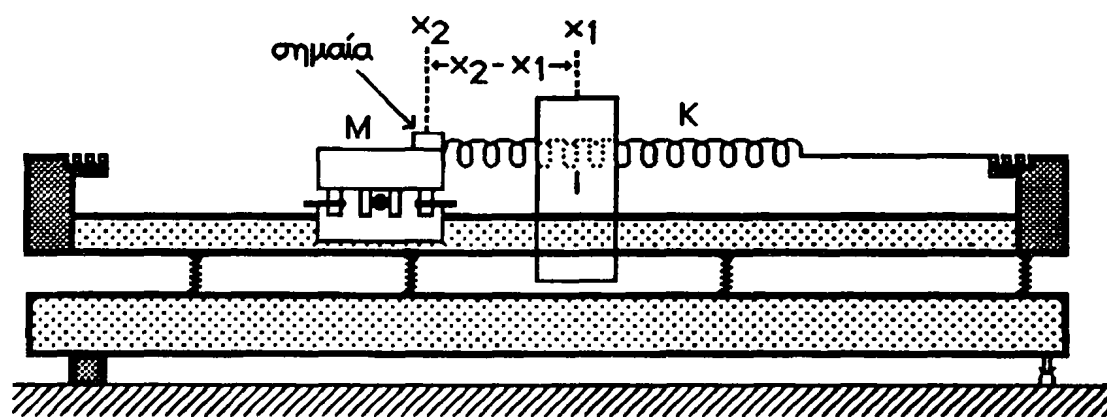
3.2 Επαλήθευση του θεωρήματος Έργου- Ενέργειας, $W = \Delta K$ για Μεταβλητή Δύναμη

Στην περίπτωση μεταβλητής δύναμης, ο δρομέας έχει διαφορετική δύναμη σε κάθε σημείο της τροχιάς. Το ολικό έργο που απορροφά ο δρομέας διανύοντας την απόσταση $x_2 - x_1$ δίνεται από τη σχέση (4.5). Στο εργαστήριο η μεταβλητή δύναμη που ενεργεί στο δρομέα είναι η δύναμη του ελατηρίου ($F = kx$). Το ένα άκρο του ελατηρίου γνωστής σταθεράς είναι συνδεδεμένο στο άκρο της αεροτροχιάς και το άλλο στον δρομέα.

Για τη μέτρηση της ταχύτητας του δρομέα σε καθορισμένο σημείο της τροχιάς x_1 , τοποθετούμε ένα φωτοανιχνευτή στη θέση αυτή. Συνδέουμε τον φωτοανιχνευτή με το START του χρονομέτρου. Ο περιστροφικός μεταγωγός του χρονομέτρου βρίσκεται στη θέση F_2 .



Χρησιμοποιούμε σημαία μήκους $\Delta x = 5.0\text{cm}$. Προσέχουμε ώστε η δέσμη του φωτοανιχνευτή να διακόπτεται μόνο από τη σημαία. Η στιγμιαία ταχύτητα του δρομέα στο σημείο x_1 δίνεται από τη σχέση $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ όπου Δx το μήκος της σημαίας και Δt ο χρόνος που η σημαία διακόπτει το φωτοανιχνευτή. Απομακρύνουμε το δρομέα σε μια απόσταση $x_2 (> x_1)$ από το φωτοανιχνευτή όπως φαίνεται στο Σχ. 6.



Σχήμα 6. Σύστημα αεροτροχιάς και φωτοανιχνευτή για την επαλήθευση του θεωρήματος Έργου-Ενέργειας με ελατήριο.

Αφήνουμε ελεύθερο το δρομέα ο οποίος με την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου θα κινηθεί προς το φωτοανιχνευτή. Γράφουμε το χρόνο Δt που καταγράφει το χρονόμετρο και είναι ο χρόνος που κάνει η σημαία να περάσει από το φωτοανιχνευτή. Επαναλαμβάνουμε τη διεργασία αυτή για 5 τουλάχιστον διαστήματα x_2 και για κάθε διάστημα x_2 παίρνουμε 5 φορές το χρόνο Δt . Προσέχουμε ώστε τα ελατήρια να μην υποστούν πλαστικές παραμορφώσεις. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 3.



Πίνακας 3

Μετρήσεις για την επαλήθευση του θεωρήματος έργου-ενέργειας με μεταβλητή δύναμη

α/α	x_2 (cm)	Δt (sec)					$\overline{\Delta t} = \frac{\sum \Delta t_i^*}{5}$ (sec)
		Δt_1	Δt_2	Δt_3	Δt_4	Δt_5	
1							
2							
3							
.							
.							
.							

* $i = 1, 2, \dots, 5.$

Από τις τιμές του Πίνακα 3 για κάθε x_2 :

- 1) Επαληθεύεται το θεώρημα Έργου-Ενέργειας;
- 2) Να βρείτε και να δικαιολογήσετε τις αποκλίσεις στα %.

3.3 Επαλήθευση του Νόμου Διατήρησης Ενέργειας

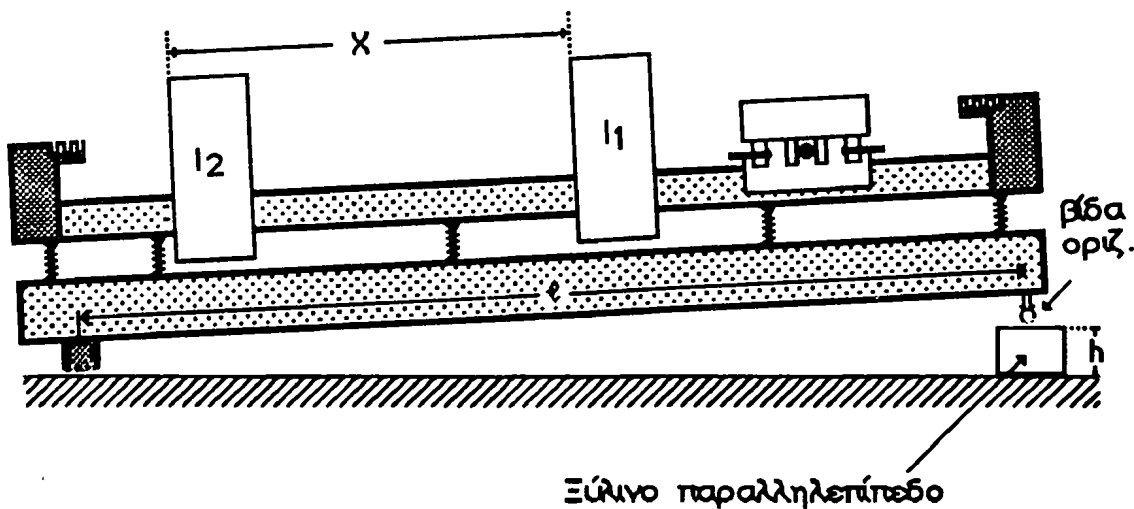
Για την επαλήθευση του νόμου διατήρησης ενέργειας $\Delta U = \Delta K$ είναι σκόπιμο να χρησιμοποιήσουμε το κεκλιμένο επίπεδο. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε εύκολα να μετρήσουμε τις μεταβολές των δύο μορφών ενέργειας που δίνονται από τις σχέσεις $\Delta U = Mg\Delta h$ και $\Delta K = \frac{1}{2} Mv^2$ για την περίπτωση που το κινητό ξεκινά από τη θέση ηρεμίας, όπου $v_0 = 0$.

Η επαλήθευση του νόμου διατήρησης ενέργειας μπορεί να γίνει και με τη χρήση τροχαλίας. Η διαδικασία είναι η ίδια με το πείραμα 3.1.1 με τη διαφορά ότι η απόσταση x_1 είναι ίδια με το ύψος Δh που είναι η απόσταση του βαριδιού από το δίσκο.



3.3.1 Μεταβολή του Διαστήματος x

Για τη μέτρηση της μεταβολής δυναμικής ενέργειας ΔU κατά την κίνηση του δρομέα μεταξύ δύο σημείων της αεροτροχιάς πρέπει να γνωρίζουμε τη διαφορά ύψους Δh μεταξύ των δύο θέσεων καθώς και τη μάζα του δρομέα. Η μέτρηση περιορίζεται στο Δh για σταθερή μάζα του δρομέα. Γνωρίζουμε όμως από το κεκλιμένο επίπεδο ότι $\Delta h = x \sin \theta$, όπου θ είναι η σταθερά γωνία κλίσης της τροχιάς. Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στη μέτρηση του διαστήματος x των δύο παραπάνω θέσεων όπως φαίνεται στο Σχ. 7. Για το σκοπό αυτό τοποθετούμε τον ένα φωτοανιχνευτή I_1 σε μία σταθερή θέση στο δεξιό μέρος της



Σχήμα 7. Σύστημα αεροτροχιάς σε κεκλιμένο επίπεδο.

αεροτροχιάς και τον άλλο I_2 σε μία θέση που απέχει απόσταση x από τον πρώτο. Κρατούμε το δρομέα μέσα στον πρώτο φωτοανιχνευτή και σε θέση περίπου 1 mm μακρύτερα απ' αυτή που αρχίζει να μετρά το χρονόμετρο. Η ταχύτητα στη θέση του φωτοανιχνευτή I_2 δίνεται από τη σχέση $v = at$, όπου a είναι η επιτάχυνση του δρομέα και t ο χρόνος που χρειάζεται ο δρομέας να διανύσει την απόσταση x . Η επιτάχυνση a δίνεται από τη σχέση $a = g \sin \theta$ όπου το $\sin \theta$ προσδιορίζεται από το Σχ. 7. Το ύψος h είναι περίπου 6.0 cm. Έτσι γνωρίζοντας την απόσταση x και τον αντίστοιχο χρόνο t μπορούμε να προσδιορίσουμε τόσο το ΔU όσο και το ΔK . Οι μετρήσεις είναι δυνατό να επαναληφθούν παίρνοντας 5-10 περίπου



διαφορετικά διαστήματα x , απομακρύνοντας το φωτοανιχνευτή I_2 από τον I_1 . Για κάθε διάστημα μετρούμε πέντε φορές το χρόνο. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 4.

Πίνακας 4

Μετρήσεις για την επαλήθευση του νόμου διατήρησης ενέργειας με σταθερή κλίση

a/a	x (cm)	t (sec)					$\bar{t} = \frac{\sum t_i^*}{5}$ (sec)
		t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅	
1							
2							
3							
.							
.							
.							

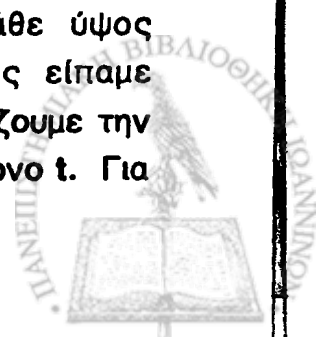
* $i = 1, 2, \dots, 5$.

Από τις τιμές του Πίνακα 4 για κάθε x :

- 1) Να επαληθεύσετε τη σχέση $\Delta U = \Delta K$
- 2) Να βρείτε και να δικαιολογήσετε την απόκλιση στα εκατό (%).

3.3.2 Μετρήσεις για Διάφορες Κλίσεις

Και στην περίπτωση αυτή θα μετρήσουμε τις μεταβολές ΔU και ΔK . Για τον προσδιορισμό του ΔU χρειαζόμαστε πάλι να προσδιορίσουμε το $\Delta h = x \sin \theta$. Τώρα κρατάμε σταθερό το x περίπου 50.0 cm και μεταβάλλουμε τη γωνία θ , τοποθετώντας ξύλινα παραλληλεπίπεδα πέντε περίπου υψών κάτω από τη βίδα οριζοντιώσεως. Για κάθε ύψος προσδιορίζουμε το $\sin \theta$ οπότε γνωρίζουμε το Δh . Όπως είπαμε προηγουμένως για να προσδιορίσουμε το ΔK πρέπει να γνωρίζουμε την ταχύτητα $u = at$ και κατά συνέπεια την επιτάχυνση a και το χρόνο t . Για



κάθε τιμή της θ έχουμε διαφορετική τιμή της $a = g \sin \theta$. Ο χρόνος t που χρειάζεται ο δρομέας να διανύσει το διάστημα μεταξύ των φωτοανιχνευτών μετρίεται περίπου πέντε φορές. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 5.

Πίνακας 5

Μετρήσεις για την επαλήθευση του νόμου διατήρησης ενέργειας με μεταβλητή γωνία κλίσης

α/α	h (cm)	t (sec)					$\bar{t} = \frac{\sum t_i^*}{5}$ (sec)
		t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅	
1							
2							
3							
.							
.							
.							

* $i = 1, 2, \dots, 5$.

Από τις τιμές του Πίνακα 5 για κάθε h:

- 1) Να επαληθεύσετε τη σχέση $\Delta U = \Delta K$
- 2) Να βρείτε και να δικαιολογήσετε την απόκλιση στα εκατό (%).



ΑΣΚΗΣΗ 5

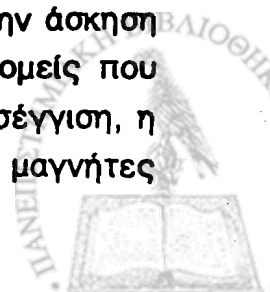
εφαρμογή του νομού διατήρησης
ενέργειας - επαλήθευση της σχέσης

$$F(x) = - \frac{\partial U(x)}{\partial x}$$

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην προηγούμενη άσκηση έγινε η επαλήθευση του νόμου διατήρησης της ενέργειας για συντηρητικές δυνάμεις. Πέρα από το γεγονός ότι ο νόμος αυτός έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της Φυσικής, αποτελεί βασικό ορμητήριο για την επίλυση πολλών προβλημάτων σε διάφορους κλάδους της Φυσικής. Επομένως, είναι σκόπιμο να ασχοληθούμε με κάποια εφαρμογή του νόμου αυτού. Οι κεντρικές δυνάμεις, όπως οι δυνάμεις παγκόσμιας έλξης και οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης ηλεκτρικών φορτίων και μαγνητικών ποσοτήτων (Νόμος του Coulomb για τον Ηλεκτρισμό και Μαγνητισμό αντίστοιχα) είναι συντηρητικές δυνάμεις. Με τη βοήθεια του νόμου διατήρησης ενέργειας για τέτοια συστήματα, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης και συνεπώς να επαληθεύσουμε τη συνθήκη των συντηρητικών δυνάμεων $F(x) = - \frac{\partial U(x)}{\partial x}$, που είναι και αυτή μία από τις σημαντικότερες σχέσεις της Φυσικής.

Ένας απλός τρόπος που μπορούμε να εφαρμόσουμε στην άσκηση αυτή, είναι η προσαρμογή μικρών μαγνητικών διπόλων σε δρομείς που κινούνται χωρίς τριβές σε αεροτροχιές. Έτσι με κάποια προσέγγιση, η δυναμική μαγνητική ενέργεια στην άπωση των δρομέων με τους μαγνήτες



μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια ($\frac{1}{2} m v^2$) ή δυναμική μηχανική ενέργεια (mgh) ανάλογα αν η αεροτροχιά είναι οριζόντια ή κεκλιμένη.

2. ΘΕΩΡΙΑ

Ουσιαστικά στην άσκηση αυτή θέλουμε να επαληθεύσουμε τη συνθήκη των συντηρητικών δυνάμεων στη διαφορική της μορφή για μία διάσταση

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx} \quad (5.1)$$

Είναι σκόπιμο να εξετάσουμε μερικές μορφές συντηρητικών δυνάμεων. Οι δυνάμεις που εφαρμόζονται στον απλό αρμονικό ταλαντωτή είναι συντηρητικές δυνάμεις. Το σύστημα μάζας ελατηρίου που κινείται πάνω σε μία λεία επιφάνεια αποτελεί έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή. Η ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου για μία διάσταση είναι

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (5.2)$$

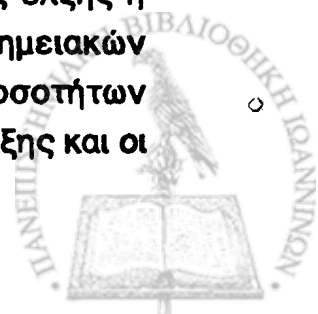
Η δύναμη επαναφοράς που εφαρμόζεται στο ελατήριο είναι η συντηρητική δύναμη που δίνεται από το νόμο του Hooke:

$$F(x) = - kx \quad (5.3)$$

όπου k η σταθερά του ελατηρίου και x η απομάκρυνση της μάζας από το σημείο ισορροπίας. Στην περίπτωση αυτή η σχέση (5.1) ικανοποιείται γιατί

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx} = - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) = - kx \quad (5.4)$$

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, άλλες συντηρητικές δυνάμεις είναι οι κεντρικές δυνάμεις. Τέτοιες είναι οι δυνάμεις παγκόσμιας έλξης ή βαρύτητας μεταξύ σημειακών μαζών, οι δυνάμεις μεταξύ σημειακών ηλεκτρικών φορτίων (Ηλεκτροστατικές) και μεταξύ μαγνητικών ποσοτήτων (Μαγνητικές). Η πρώτη δύναμη δίνεται από το νόμο παγκόσμιας έλξης και οι



δύο τελευταίες δίνονται από το νόμο του Coulomb για τον Ηλεκτρισμό και το Μαγνητισμό αντίστοιχα. Όπως είπαμε και στη θεωρία της 2ης Άσκησης, στην πράξη δεν υπάρχουν υλικά σημεία ή σημειακές μάζες ή ακόμη σημειακά φορτία. Με σχετική προσέγγιση όμως, μπορούμε να επεκτείνουμε την ισχύ των παραπάνω νόμων στα τρισδιάστατα σώματα.

Σε μία διάσταση όλες οι παραπάνω συντηρητικές δυνάμεις μπορούν να δοθούν μ' ένα γενικό τύπο σα συνάρτηση της απόστασης

$$F = \theta x^n \quad (5.5)$$

καθώς και οι αντίστοιχες δυναμικές ενέργειες με τον τύπο

$$U(x) = -\frac{1}{n+1} \theta x^{n+1} \quad (5.6)$$

Στους τύπους (5.5) και (5.6) το x είναι η απόσταση μεταξύ των αλληλεπιδρόντων σωμάτων και θ η σταθερά αναλογίας. Ο Πίνακας 1 δίνει τη σταθερά αναλογίας θ και τον εκθέτη n για τις παραπάνω τέσσερις δυνάμεις που αναφέραμε.

Όταν η δυναμική ενέργεια και οι συντηρητικές δυνάμεις δίνονται στη γενική τους μορφή τότε ικανοποιείται πάλι η σχέση (5.1) δηλαδή

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{n+1} \theta x^{n+1} \right) = \theta x^n \quad (5.7)$$

Με βάση τη σχέση (5.1) είναι δυνατό να προσδιορίσουμε την $F(x)$ γραφικά. Χαράζουμε την καμπύλη που προκύπτει από τη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας σα συνάρτηση του x . Η κλίση σε κάθε σημείο x της καμπύλης μας δίνει τη δύναμη $F(x)$ στο σημείο αυτό. Σώματα μ' ένα είδος φορτίου θετικού ή αρνητικού υπάρχουν στη φύση, σώματα όμως μ' ένα είδος μαγνητικής ποσότητας δηλαδή μονόπολα δεν υπάρχουν. Στην περίπτωση που θέλουμε να εξετάσουμε μαγνητικές αλληλεπιδράσεις, π.χ. μεταξύ δρομέων στις αεροτροχιές, είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε μικρούς μαγνήτες, δηλαδή μαγνητικά δίπολα. Και στην περίπτωση αυτή οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης των διπόλων είναι συντηρητικές. Βασικά προέρχονται από επαλληλία μαγνητικών δυνάμεων

Coulomb. Επίσης η μαγνητική ενέργεια θα έχει τη μορφή της (5.6). Εδώ όμως βρίσκεται το ενδιαφέρον της άσκησης με την εφαρμογή του νόμου διατήρησης της ενέργειας. Μετατρέπουμε τη μαγνητική δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης των διπόλων σε μία άλλη μορφή ενέργειας.

Πίνακας 1

Η σταθερά αναλογίας θ και ο εκθέτης n για μερικές συντηρητικές δυνάμεις που υπάρχουν στη φύση

F (Δύναμη)	θ	n
Επαναφοράς ελατηρίου	$-k$	$+1$
Παγκόσμιας έλξης ή βαρύτητας (2 σημειακών μαζών)	Gmm'	-2
Ηλεκτρική (2 σημειακών φορτίων)	$\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}$	-2
Μαγνητική (2 σημειακών μαγνητικών ποσοτήτων)	$\frac{MM'}{4\pi\mu}$	-2

Η άλλη αυτή μορφή ενέργειας μπορεί να είναι κινητική ή μηχανική δυναμική που προσδιορίζονται σχετικά εύκολα. Έτσι, γραφικά και με τη βοήθεια των ελαχίστων τετραγώνων μπορούμε να βρούμε τη δύναμη και την έκφραση της δυναμικής ενέργειας μαγνητικού πεδίου. Γνωρίζοντας τα δύο αυτά μεγέθη μπορούμε να επαληθεύσουμε άνετα την (5.1).

Η (5.1) είναι η διαφορική μορφή της συνθήκης των συντηρητικών δυνάμεων. Είναι σκόπιμο να αναφέρουμε ότι υπάρχει και η ολοκληρωτική μορφή που δίνεται από τη σχέση

$$\oint \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0 \quad (5.8)$$

Η (5.8) μας λέει ότι μία δύναμη είναι συντηρητική αν το έργο που παράγει η δύναμη αυτή πάνω σε σώματιο που κινείται σε πλήρη κύκλο είναι μηδέν.



3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Αρχικά θα μετρήσουμε τη δυναμική ενέργεια κατά την αλληλεπίδραση των διπόλων. Οι μαγνήτες προσαρμόζονται στα άκρα δρομέων που κινούνται πάνω σε αεροτροχιές. Η μέτρηση της δυναμικής ενέργειας γίνεται με την εφαρμογή του νόμου διατήρησης της ενέργειας. Γνωρίζοντας τη δυναμική ενέργεια εφαρμόζουμε τη συνθήκη των συντηρητικών δυνάμεων, εξίσωση (5.1) και βρίσκουμε τη δύναμη αλληλεπίδρασης των μαγνητικών διπόλων. Η μέτρηση αυτή είναι δυνατό να γίνει με δύο τρόπους: α) η αεροτροχιά βρίσκεται σε οριζόντια θέση οπότε η δυναμική ενέργεια κατά την άπωση των μαγνητικών διπόλων μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια. Την κινητική ενέργεια μπορούμε να την προσδιορίσουμε γνωρίζοντας τη μάζα και την ταχύτητα των δρομέων μετά την απομάκρυνση τους. β) η αεροτροχιά βρίσκεται σε κεκλιμένη θέση οπότε η μηχανική δυναμική ενέργεια κατά το πλησίασμα των μαγνητικών διπόλων στην ελάχιστη ποσότητα μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια μαγνητικού πεδίου. Και στην περίπτωση αυτή τη δυναμική ενέργεια την προσδιορίζουμε γνωρίζοντας τη μάζα και την υψομετρική διαφορά μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης του κινούμενου δρομέα.

3.1 Μέτρηση της Δυναμικής Ενέργειας $U(x)$

3.1.1 Μετατροπή της Μαγνητικής Ενέργειας σε Κινητική

Προεργασία

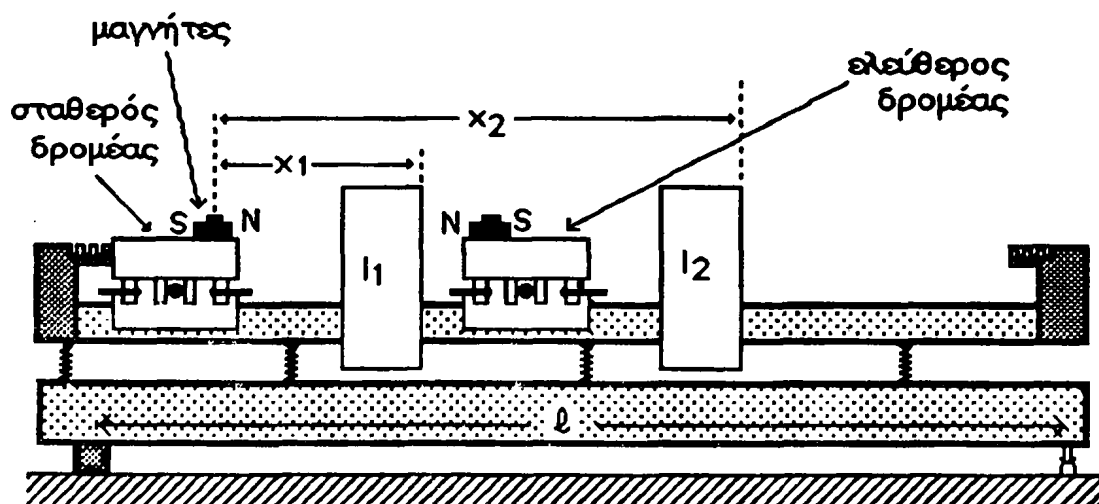
- α) Σύνδεση αεραντλίας, μετασχηματιστού και χρονομέτρου με το δίκτυο (220 Volt).
- β) Σύνδεση φωτοανιχνευτών με το μετασχηματιστή (12 Volt) και το χρονόμετρο.
- γ) Λειτουργία χρονομέτρου. Η λειτουργία τόσο του χρονομέτρου όσο και των φωτοανιχνευτών έχει δοθεί με λεπτομέρεια στην άσκηση 1. Θα πρέπει όμως να τονίσουμε ότι τώρα ο περιστροφικός μεταγωγός επιλογής των συναρτήσεων F βρίσκεται στη θέση F_3 .
- δ) Οριζοντίωση αεροτροχιάς (βλέπε άσκηση 2).



Πειραματική Διάταξη - Μετρήσεις

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο δρομείς και στο πάνω άκρο κάθε δρομέα προσαρμόζουμε παράλληλα τρεις μικρούς μαγνήτες με τη χρήση των πλαστικών βιδών. Η τοποθέτηση των μαγνητών είναι τέτοια ώστε οι δύο δρομείς να απωθούνται όταν πλησιάζουν. Οι μαγνήτες που χρησιμοποιούμε αποτελούνται από πολλά προσανατολισμένα δίπολα αλλά στο πείραμα-μας θα τους θεωρήσουμε σαν απλά δίπολα με κέντρα το κέντρο του μαγνήτη (αυτό εισάγει ένα σχετικό μικρό σφάλμα στις μετρήσεις μας).

Για την απλοποίηση του πειράματος στερεώνουμε τον ένα δρομέα με τη χρήση κολλητικής ταινίας στο ένα άκρο της αεροτροχιάς, ενώ ο άλλος κινείται ελεύθερα στο υπόλοιπο μέρος της αεροτροχιάς. Ο φωτοανιχνευτής I_1 τοποθετείται σε απόσταση 40.0cm περίπου από το σταθερό δρομέα και συνδέεται με το START του χρονομέτρου. Ο φωτοανιχνευτής I_2 τοποθετείται σε απόσταση 70.0 cm περίπου από το σταθερό δρομέα και συνδέεται με το STOP του χρονομέτρου. Η παραπάνω διάταξη φαίνεται στο Σχ. 1.



Σχήμα 1. Διάταξη φωτοανιχνευτών και δρομέων σε οριζόντια αεροτροχιά.

Πλησιάζουμε τον ελεύθερο δρομέα προς το σταθερό, έτσι ώστε η απόσταση των κέντρων των μαγνητών Δx να είναι στην περιοχή 2.0 cm έως 5.0 cm. Στη συνέχεια αφήνουμε απότομα τον ελεύθερο δρομέα ο οποίος απομακρύνεται (λόγω των απωστικών δυνάμεων). Όταν απομακρυνθεί σε αρκετά μεγάλη απόσταση ≥ 40 cm, όπου η αλληλεπίδραση μεταξύ των



μαγνητών είναι αμελητέα, η ταχύτητα του ελεύθερου δρομέα θα είναι σταθερή. Μετράμε το χρόνο t που χρειάζεται να διανύσει ο δρομέας την απόσταση $x_2 - x_1$. Παίρνουμε τουλάχιστο πέντε διαφορετικά διαστήματα Δx και για κάθε Δx μετράμε περίπου πέντε φορές το χρόνο t . Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 2.

Από τις τιμές του Πίνακα 2 υπολογίζουμε τη μέση ταχύτητα $\bar{u} = \frac{x_2 - x_1}{\bar{t}}$ του

δρομέα και ακολούθως την κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2} M \bar{u}^2$ για κάθε Δx , όπου M η μάζα του δρομέα μαζί με τους μαγνήτες. Από το νόμο διατήρησης της ενέργειας $\Delta U = \Delta K$ υπολογίζουμε τη δυναμική ενέργεια μαγνητικού πεδίου $U(x) = \Delta U$. Γνωρίζοντας την $U(x)$ μπορούμε να βρούμε την $F(x)$ που εξασκείται πάνω στο δρομέα από τη συνθήκη των συντηρητικών δυνάμεων $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \cong -\frac{\Delta U(x)}{\Delta x}$ για κάθε Δx .

Πίνακας 2

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας κατά την άπωση των μαγνητικών διπόλων

a/a	Δx (cm)	t (sec)					$\bar{t} = \frac{\sum t_i^*}{5}$ (sec)	$u = \frac{x_2 - x_1}{\bar{t}}$ ($\frac{cm}{sec}$)
		t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅		
1.								
2								
3								
.								
.								

* $i = 1, 2, \dots, 5$.



Ζητούνται:

- 1) Να υπολογίσετε την $U(x)$ για κάθε Δx του Πίνακα 2.
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση $U(x) = f(\Delta x)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί.
- 3) Να βρείτε την εξίσωση $U(x) = f(\Delta x)$.
- 4) Να υπολογίσετε την $F(x)$ για κάθε Δx .
- 5) Να γίνει η γραφική παράσταση $F(x) = f(\Delta x)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί.
- 6) Να βρείτε την εξίσωση $F(x) = f(\Delta x)$.
- 7) Από τις (3) και (6) να εξετάσετε κατά πόσο επαληθεύεται η σχέση $F(x) = - \frac{\partial U(x)}{\partial x}$.

3.1.2 Μετατροπή της Μαγνητικής Ενέργειας σε Δυναμική

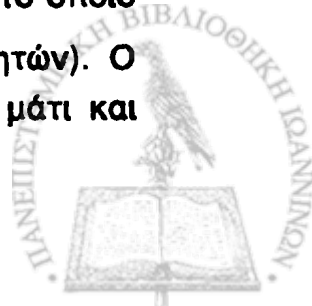
Προεργασία

Αποσύνδεση και απομάκρυνση των φωτοανιχνευτών από την αεροτροχιά. (Κλείνουμε το χρονόμετρο).

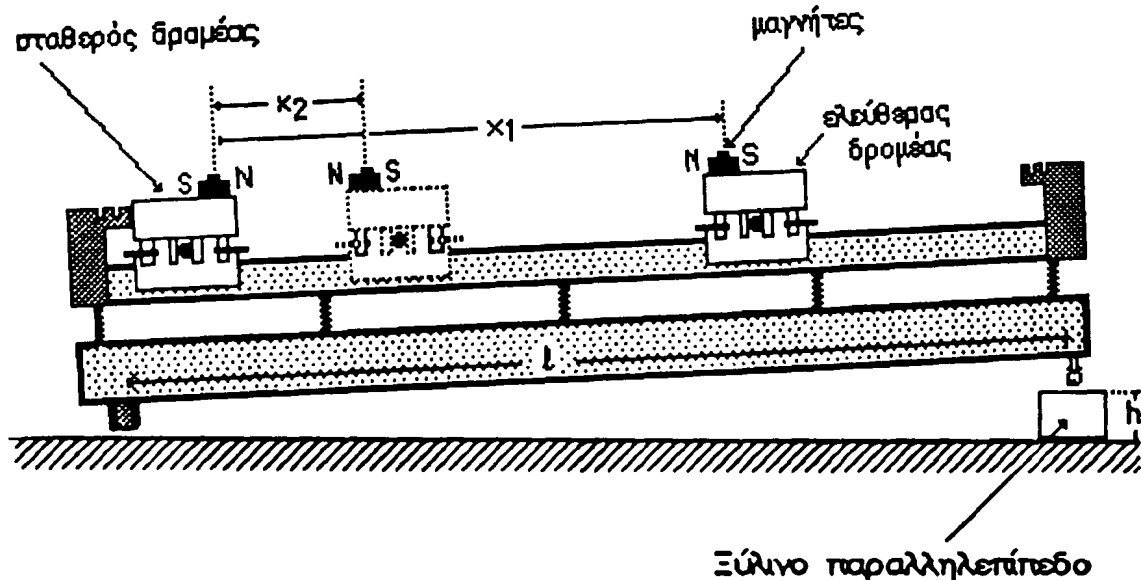
Πειραματική Διάταξη - Μετρήσεις

Αρχικά κάνουμε την αεροτροχιά κεκλιμένη τοποθετώντας ένα ξύλινο παραλληλεπίπεδο περίπου 0.8 cm κάτω από τη βίδα οριζοντίωσης. Κρατάμε τον ελεύθερο δρομέα σε απόσταση x_1 (5.0 - 30.0 cm) από το σταθερό όπως φαίνεται στο Σχ. 2.

Αφήνουμε τον ελεύθερο δρομέα να κινηθεί προς το σταθερό. Όταν οι δύο δρομείς πλησιάζουν οι μαγνήτες θα αρχίσουν να αλληλεπιδρούν. Επειδή η τοποθέτηση των μαγνητών είναι τέτοια ώστε να απωθούνται οι δρομείς σε κάποιο σημείο x_2 ο ελεύθερος δρομέας θα ακινητοποιηθεί στιγμιαία και θα αρχίσει την αντίστροφη πορεία. Προσπαθούμε με όσο το δυνατό μεγαλύτερη ακρίβεια να προσδιορίσουμε το κατώτατο σημείο x_2 στο οποίο φθάνει ο ελεύθερος δρομέας (ελάχιστη απόσταση μεταξύ των μαγνητών). Ο προσδιορισμός αυτός δεν είναι εύκολος να γίνει με το απλό μάτι και



χρειάζεται πολλές επαναλήψεις. Ένας τρόπος είναι να προσδιορίσουμε το σημείο x_2 περίπου με το μάτι και στη συνέχεια να επαναλάβουμε τη μέτρηση τοποθετώντας ένα αντικείμενο (σύρμα) στο υποτιθέμενο σημείο αντιστροφής



Σχήμα 2. Αλληλεπιδράσεις δρομών σε κεκλιμένη αεροτροχιά.

της ταχύτητας του ελεύθερου δρομέα. Αν ο δρομέας ακουμπήσει το αντικείμενο τότε επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση τοποθετώντας τώρα το αντικείμενο σε χαμηλότερο σημείο. Αν δεν ακουμπήσει τότε πάλι επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση (σταθερό x_1) τοποθετώντας το αντικείμενο σε υψηλότερο σημείο. Μετά από αρκετές επαναλήψεις προσδιορίζεται το x_2 (θα είναι το σημείο όπου ο δρομέας θα εφάπτεται του αντικειμένου στο σημείο αντιστροφής). Προσδιορίζουμε τη διαφορά $x_1 - x_2$, τη διαφορά ύψους των δύο σημείων x_1 και x_2 , $h_1 - h_2$ και την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κέντρων των μαγνητών $x_2 = \Delta x$. Παίρνουμε τουλάχιστο πέντε διαφορετικά διαστήματα x_1 και επαναλαμβάνουμε την παραπάνω εργασία. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 3.

Η ελάττωση της δυναμικής ενέργειας του ελεύθερου δρομέα στα δύο σημεία x_1 , x_2 που οφείλεται στο πεδίο βαρύτητας είναι



$$U_B = Mg (h_1 - h_2)$$

Η ενέργεια αυτή έχει μετατραπεί σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου U_M στο σημείο x_2 . Επειδή δεν υπάρχουν άλλες μεταβολές της ενέργειας, σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ενέργειας (άσκηση 4) θα έχουμε

$$U_B = U_M = Mg (h_1 - h_2)$$

Από τις τιμές του Πίνακα 3 υπολογίζουμε την $U_B = U_M$. Γνωρίζοντας την U_M μπορούμε να βρούμε την $F(x)$ που εξασκείται πάνω στο δρομέα από τη συνθήκη των συντηρητικών δυνάμεων $F(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$ για κάθε Δx .

Πίνακας 3

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της μηχανικής δυναμικής ενέργειας κατά την αλληλεπίδραση μαγνητικών διπόλων

a/a	$x_1 - x_2$ (cm)	$h_1 - h_2$ (cm)	$x_2 = \Delta x$ (cm)

Ζητούνται:

- 1) Να υπολογίσετε την U_M για κάθε Δx του Πίνακα 3.
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση $U_M = f(\Delta x)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί.
- 3) Να βρείτε την εξίσωση $U_M = f(\Delta x)$.
- 4) Να υπολογίσετε την $F(x)$ για κάθε Δx .



- 5) Να γίνει η γραφική παράσταση $F(x) = f(\Delta x)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί.
- 6) Να βρείτε την εξίσωση $F(x) = f(\Delta x)$.
- 7) Από τις (3) και (6) να εξετάσετε κατά πόσο επαληθεύεται η σχέση $F(x) = - \frac{\partial U_M}{\partial x}$.



Ι
Τ
Σ
Ε
Κ
Π
Ε
Μ
Φ
Α
Ε
Θ
Χ
Κ
Υ

ΑΣΚΗΣΗ 6

ΚΡΟΥΣΕΙΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργαστηριακή αυτή άσκηση θα ασχοληθούμε με την επαλήθευση των νόμων της ορμής (ή ποσότητας κίνησης) και κινητικής ενέργειας κατά τις κρούσεις σωμάτων. Οι νόμοι αυτοί είναι από τους πιο βασικούς του κλάδου της Μηχανικής και αποτελούν τη βάση στη λύση των προβλημάτων της Φυσικής των στοιχειωδών σωματίων και Πυρηνικής Φυσικής. Οι πυρηνικές αντιδράσεις και οι ραδιενεργές διασπάσεις για άτομα, πυρήνες και στοιχειώδη σωματίδια μπορούν να αντιμετωπιστούν με τις ίδιες μέθοδες που χρησιμοποιούμε στη μελέτη των κρούσεων. Στα προβλήματα αυτά πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη διατήρηση της ολικής ενέργειας, γιατί η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται. Σε μεγαλύτερη κλίμακα, μπορούμε με τη βοήθεια των κρούσεων σωμάτων να ερμηνεύσουμε διάφορα φυσικά φαινόμενα, όπως οι θεωρίες των αερίων.

Σε μία κρούση εξασκείται μία σχετικά μεγάλη δύναμη πάνω σε κάθε συγκρουόμενο σωματίο, για ένα σχετικά μικρό χρόνο. Η ουσία σε μία κρούση είναι το ότι η κίνηση των σωματίων που συγκρούονται μεταβάλλεται μάλλον απότομα και ότι μπορούμε να κάνουμε ένα σχετικά σαφή διαχωρισμό των χρόνων "πριν από την κρούση" και αυτών "μετά την κρούση".

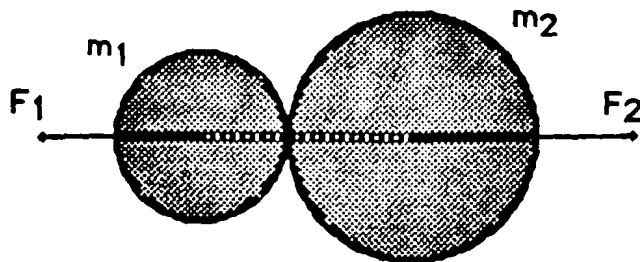
Η επαλήθευση των νόμων διατήρησης ορμής και ενέργειας στις κρούσεις απλουστεύεται αν περιοριστούμε σε μία διάσταση. Αυτό μπορεί να γίνει με την κρούση δρομέων πάνω σε οριζόντιες αεροτροχιές.



2. ΘΕΩΡΙΑ

Η ανάλυση των κρούσεων μεταξύ δύο σωματίων βασίζεται στο δεύτερο και τρίτο νόμο του Νεύτωνα. Ουσιαστικά οι νόμοι αυτοί χρησιμοποιούνται για να αποδείξουμε την "αρχή διατήρησης της ορμής" που αναφέρεται στην κρούση. Για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι τα σωματάρια κινούνται σε οριζόντια τροχιά και ότι ενεργούν μόνο οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των κατά τη διάρκεια της κρούσης. Έστω ότι οι μάζες των σωματίων είναι m_1 και m_2 και οι ταχύτητες-τους μετά την κρούση είναι u_1 και u_2 αντίστοιχα. Θεωρούμε την u_1 θετική εάν το m_1 κινείται προς τα δεξιά και αρνητική εάν κινείται προς τα αριστερά, την ίδια θεώρηση κάνουμε και για το u_2 . Οι ταχύτητες u_1 και u_2 είναι συναρτήσεις του χρόνου, επειδή αλλάζουν κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Όταν τα σωματάρια βρίσκονται σε επαφή κατά την κρούση, επιφέρουν δυνάμεις το ένα πάνω στο άλλο, όπως φαίνεται στο Σχ. 1. Οι δυνάμεις που ενεργούν στα m_1 και m_2 είναι F_1 και F_2 αντίστοιχα, με την ίδια συνθήκη



Σχήμα 1. Δύο σωματάρια m_1 και m_2 σε μία κρούση που δέχονται ίσες αλλά αντίθετες δυνάμεις κατά μήκος της διακέντρου τους, σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα.

διεύθυνσης (θετική ή αρνητική) που ισχύει για τις ταχύτητες. Οι δυνάμεις αυτές σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα έχουν σε κάθε στιγμή το ίδιο μέτρο αλλά αντίθετη διεύθυνση. Σύμφωνα με τον ορισμό της ώθησης (Ασκ. 3, Εξ. 3.3), η μεταβολή της ορμής του σωματίου m , που προέρχεται από την κρούση είναι



$$\Delta \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 dt = \langle \vec{F}_1 \rangle \Delta t \quad (6.1)$$

όπου $\langle \vec{F}_1 \rangle$ είναι η μέση τιμή της δύναμης \vec{F}_1 στη διάρκεια της κρούσης $\Delta t = t_2 - t_1$.

Όμοια για το σωματίο m_2 έχουμε

$$\Delta \vec{p}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 dt = \langle \vec{F}_2 \rangle \Delta t \quad (6.2)$$

όπου $\langle \vec{F}_2 \rangle$ είναι η μέση τιμή της δύναμης \vec{F}_2 κατά τη διάρκεια της κρούσης $\Delta t = t_2 - t_1$.

Αν δεν ενεργούν άλλες δυνάμεις στα σωματίια m_1 και m_2 τότε τα $\Delta \vec{p}_1$ και $\Delta \vec{p}_2$ δίνουν την ολική μεταβολή της ορμής για κάθε σωματίιο.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \text{ και επομένως } \langle \vec{F}_1 \rangle = -\langle \vec{F}_2 \rangle \quad (6.3)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (6.1), (6.2) και (6.3) προκύπτει ότι η ολική μεταβολή της ορμής

$$\Delta \vec{P} = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 \quad (6.4)$$

Έτσι η εξίσωση (6.4) μας λέει ότι η ολική ορμή $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κρούσης, με άλλα λόγια

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = \text{σταθερό} \quad (6.5)$$



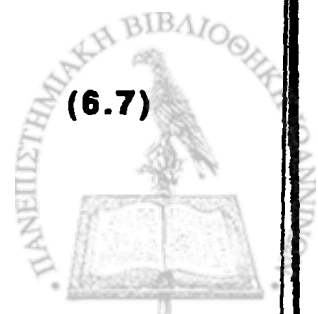
Αυτό είναι ένα χρήσιμο αποτέλεσμα που αγνοεί τη μεταβολή των δυνάμεων, οι οποίες μπορεί να μεταβάλλονται με πολύπλοκο τρόπο κατά τη διάρκεια της κρούσης. Με άλλα λόγια η εξίσωση (6.5) μας λέει ότι η ολική ορμή διατηρείται σταθερή κατά την κρούση. Οποσδήποτε η αρχή αυτή αληθεύει μόνο όταν δεν ενεργούν οριζόντιες δυνάμεις στα σώματα εκτός από τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης (που αναφέρονται στην εξίσωση 6.3). Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν έχουμε αποδείξει ότι η κινητική ενέργεια διατηρείται κατά τη διάρκεια της κρούσης. Όπως όμως θα δούμε, η κινητική ενέργεια δεν είναι απαραίτητα διατηρήσιμη, εξαρτάται από το είδος της κρούσης.

Συνηθίζεται να ταξινομούμε τις κρούσεις σύμφωνα με τη **σχετική ταχύτητα** των δύο σωματίων προ και μετά την κρούση. Εάν η σχετική ταχύτητα έχει την ίδια τιμή (μέγεθος), προ και μετά την κρούση τότε η κρούση είναι **τελείως ελαστική**. Εάν η σχετική ταχύτητα έχει μικρότερη τιμή μετά την κρούση από αυτή προ της κρούσης τότε η κρούση είναι **ημιαστική**, και εάν είναι μηδέν μετά την κρούση (δηλαδή, εάν τα δύο σώματα κολλούν μεταξύ τους) τότε η κρούση είναι **τελείως ανελαστική ή πλαστική**. Ο λόγος της τελικής προς την αρχική σχετική ταχύτητα ονομάζεται **συντελεστής κρούσης** και παριστάνεται με e . Για μία τελείως ελαστική κρούση $e=1$, για μία πλαστική κρούση $e=0$ και για ημιαστική κρούση το e παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1. Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι στη μάζα m_1 δίνεται η αρχική ταχύτητα u_0 , ενώ η μάζα m_2 βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, και ότι οι ταχύτητες μετά την κρούση είναι u_1 και u_2 . Τότε ο συντελεστής κρούσης δίνεται με τη σχέση

$$e = \frac{u_2 - u_1}{u_0} \quad (6.6)$$

Εάν $m_2 > m_1$ τότε η u_1 μπορεί να είναι αρνητική αλλά και πάλι η σχετική ταχύτητα μετά την κρούση δίνεται με την έκφραση $u_2 - u_1$. Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε τις αρχικές και τελικές κινητικές ενέργειες. Για το σκοπό αυτό θα βρούμε τη σχετική έκφραση στην ειδική περίπτωση των ίσων μαζών, δηλαδή $m_1 = m_2$. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση διατήρησης της ορμής

$$m_1 u_0 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (6.7)$$



παίρνει την απλούστερη μορφή

$$u_0 = u_1 + u_2 \quad (6.8)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να συνδυαστεί με την εξίσωση (6.6) για να εκφράσουμε τις u_1 και u_2 σε συνάρτηση των u_0 και e . Οι τελικές εκφράσεις είναι

$$u_1 = \frac{1}{2} (1 - e) u_0 \quad (6.9)$$

$$u_2 = \frac{1}{2} (1 + e) u_0$$

Έστω ότι R είναι ο λόγος της τελικής (μετά την κρούση) προς την αρχική (προ της κρούσης) κινητική ενέργεια, δηλαδή

$$R = \frac{\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2}{\frac{1}{2} m_1 u_0^2} \quad (6.10)$$

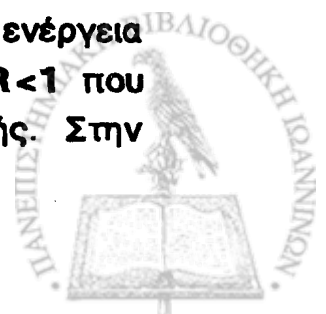
Στην περίπτωση που $m_1 = m_2$ η εξίσωση αυτή γίνεται

$$R = \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_0^2} \quad (6.11)$$

Εισάγοντας τις εξισώσεις (6.9) στην (6.11) παίρνουμε τη μορφή

$$R = \frac{1}{2} (1 + e^2) \quad (6.12)$$

Εάν η κρούση είναι τελείως ελαστική ($e = 1$) τότε $R = 1$ που σημαίνει ότι η αρχική κινητική ενέργεια είναι ίση με την τελική, δηλαδή η κινητική ενέργεια διατηρείται. Εάν η κρούση είναι ανελαστική ($e < 1$) τότε το $R < 1$ που σημαίνει ότι η τελική κινητική ενέργεια είναι μικρότερη της αρχικής. Στην



περίπτωση που η κρούση είναι τελείως ανελαστική ($e = 0$) τότε το R παίρνει την ελάχιστη τιμή $\frac{1}{2}$. Η ίδια έκφραση για το R μπορεί να παραχθεί για τη γενική περίπτωση των άνισων μαζών, $m_1 \neq m_2$. Στην περίπτωση αυτή, ο συνδυασμός των (6.6) και (6.10) μας φέρνει στο αποτέλεσμα

$$R = \frac{m_1 + e^2 m_2}{m_1 + m_2} \quad (6.13)$$

Η εξίσωση (6.13) δείχνει μ' ένα διαφορετικό τρόπο ότι η κινητική ενέργεια διατηρείται (προ και μετά την κρούση) όταν $e = 1$.

Στη γενική περίπτωση που οι μάζες m_1 και m_2 , οι αρχικές ταχύτητες u_{01} και u_{02} και οι τελικές ταχύτητες u_1 και u_2 δεν είναι μηδέν τότε η ορμή διατηρείται ανεξάρτητα της τιμής του συντελεστή κρούσης e και δίνεται από τη σχέση

$$m_1 u_{01} + m_2 u_{02} = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (6.14)$$

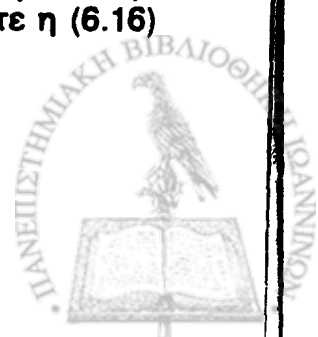
Η διατήρηση της κινητικής ενέργειας εξαρτάται από την τιμή του e . Στην περίπτωση της τελείως ελαστικής $e = 1$ έχουμε διατήρηση της κινητικής ενέργειας που εκφράζεται με τη σχέση

$$\frac{1}{2} m_1 u_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 u_{02}^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad (6.15)$$

Στην ανελαστική κρούση ($e < 1$) δεν διατηρείται η κινητική ενέργεια οπότε έχουμε τη σχέση

$$\frac{1}{2} m_1 u_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 u_{02}^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + Q \quad (6.16)$$

όπου Q είναι η απώλεια ενέργειας κατά την κρούση. Ειδικά στην περίπτωση της τελείως ανελαστικής ή πλαστικής οι δύο μάζες ενώνονται μετά την κρούση σε μία μάζα ($m_1 + m_2$) που κινείται με ταχύτητα V οπότε η (6.16) παίρνει τη μορφή



$$\frac{1}{2} m_1 v_{o1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{o2}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + Q \quad (6.17)$$

Στο πείραμα αυτό θα εξετάσουμε κρούσεις τελείως ελαστικές και τελείως ανελαστικές (πλαστικές). Επίσης τα δύο σωμάτια της κρούσης αντικαθιστούνται με δύο δρομείς που κινούνται πάνω σε οριζόντια αεροτροχιά, χωρίς την παρουσία άλλων οριζόντιων δυνάμεων (τριβές ή αντιστάσεις) εκτός των δυνάμεων αλληλεπίδρασης. Η θεωρία που αναφέρθηκε στην κρούση των σωματίων (Σχ. 1) εφαρμόζεται ακριβώς και για την κρούση των δρομέων.

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Όπως είπαμε και στη θεωρία στο πείραμα αυτό θα μελετήσουμε τις κρούσεις μεταξύ δρομέων που κινούνται σε οριζόντια αεροτροχιά. Η μελέτη θα γίνει για τις τελείως ελαστικές και τελείως ανελαστικές κρούσεις.

Προεργασία

- α) Αρχικά συνδέουμε την αεραντλία, το μετασχηματιστή και το χρονόμετρο με το δίκτυο (220 Volt).
- β) Συνδέουμε τους φωτοανιχνευτές με το μετασχηματιστή (12 Volt) και με τα START των χρονομέτρων (βλέπε λεπτομέρειες στην άσκ. 1).
- γ) Οριζοντιώνουμε την αεροτροχιά (βλέπε άσκ. 2).

3.1 Ελαστικές Κρούσεις

3.1.1 Κρούση με $v_{o1} \neq 0$ και $v_{o2} = 0$

Στην περίπτωση αυτή ο κινούμενος δρομέας με μάζα M_1 συγκρούεται με ακίνητο δρομέα μάζας M_2 . Το είδος αυτής της κρούσης θα το εξετάσουμε σε δύο περιπτώσεις.



α) $M_2 = \infty$

Σαν ακίνητο δρομέα με άπειρη μάζα μπορούμε να θεωρήσουμε ένα ακίνητο τοίχωμα και συγκεκριμένα την άκρη της αεροτροχιάς. Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη της ελαστικής κρούσης των μορίων πάνω στα τοιχώματα του δοχείου. Η κρούση αυτή χρησιμοποιείται στην κινητική θεωρία των αερίων για τον προσδιορισμό της πίεσης.

Ο δρομέας M_1 τοποθετείται στη μία άκρη της αεροτροχιάς ενώ η άλλη αποτελεί το ακίνητο τοίχωμα. Η μάζα M_1 έχει υπολογιστεί σε προηγούμενη άσκηση. Για τη μέτρηση των ταχυτήτων προ και μετά την κρούση u_{01} και u_1 αντίστοιχα χρησιμοποιούμε την ίδια μέθοδο μ' αυτή για τη μέτρηση της στιγμιαίας ταχύτητας (βλέπε άσκ. 2). Δηλαδή χρησιμοποιούμε μία σημαία μήκους 10.0 cm που την προσαρμόζουμε πάνω στο δρομέα M_1 . Μετρούμε τους χρόνους t_0 και t_1 που χρειάζεται η σημαία να περάσει μέσα από το φωτοανιχνευτή πριν την κρούση και μετά την κρούση. Ο φωτοανιχνευτής τοποθετείται σε μία ορισμένη θέση πάνω στην αεροτροχιά και στο START του χρονομέτρου. Για τη μέτρηση των χρόνων αυτών τοποθετείται ο περιστροφικός μεταγωγός της συνάρτησης F του χρονομέτρου στη θέση F_2 . Η εκκίνηση του δρομέα γίνεται με τη βοήθεια της σφενδόνης (βλέπε άσκ. 2). Για την ίδια αρχική ταχύτητα, δηλαδή για την ίδια ακριβώς εκκίνηση του δρομέα, επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση, τουλάχιστο πέντε φορές. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

Μετρήσεις για τον υπολογισμό των ταχυτήτων προ και μετά της κρούσης

a/a	t_0 (sec)	t_1 (sec)

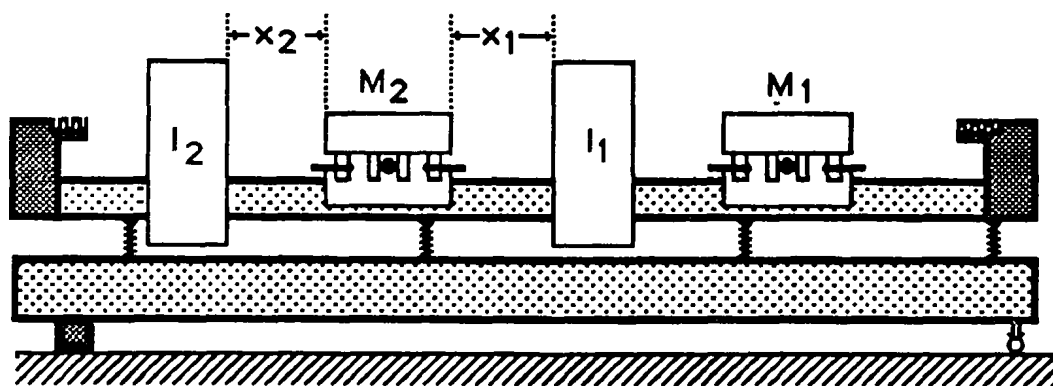


Από τις τιμές του Πίνακα 1 να βρείτε τις μέσες τιμές των t_0 και t_1 , να επαληθεύσετε τις σχέσεις (6.14) και (6.15) και να βρείτε και να δικαιολογήσετε τις αποκλίσεις.

β) $M_2 \neq \infty$

Ουσιαστικά στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε τις περιπτώσεις για $M_1 = M_2$ και για $M_1 \neq M_2$.

Ο δρομέας που έχει μάζα M_2 μένει ακίνητος στη μέση περίπου της αεροτροχιάς. Τοποθετούμε δύο φωτοανιχνευτές δεξιά και αριστερά σε απόσταση περίπου 30.0 cm από το δρομέα M_2 , όπως δείχνει το Σχ. 2.



Σχήμα 2. Σύστημα αεροτροχιάς για την περίπτωση κρούσης δύο δρομέων από τους οποίους ο ένας παραμένει αρχικά ακίνητος ($u_0 = 0$).

Ο φωτοανιχνευτής I_1 χρησιμοποιείται για τη μέτρηση των χρόνων t_{01} και t_1 του δρομέα μάζας M_1 , ενώ ο φωτοανιχνευτής I_2 χρησιμοποιείται για τη μέτρηση του t_2 του άλλου δρομέα. Ο φωτοανιχνευτής I_1 είναι συνδεδεμένος με το Α χρονόμετρο και ο περιστροφικός μεταγωγός της συνάρτησης F βρίσκεται στη θέση F_2 . Προσέξτε γιατί το Α χρονόμετρο μετρά διαδοχικά τους χρόνους t_{01} και t_1 . Ο φωτοανιχνευτής I_2 είναι συνδεδεμένος με το Β χρονόμετρο και πάλι ο περιστροφικός μεταγωγός F στη θέση F_2 . Το ξεκίνημα του δρομέα γίνεται με τη μέθοδο της σφενδόνης. Παίρνουμε πέντε τουλάχιστο φορές τους χρόνους για την ίδια αρχική ταχύτητα (ξεκίνημα) και οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 2. Στην περίπτωση που $M_1 \neq M_2$ για



να έχουμε αποτελεσματικές μετρήσεις είναι σκόπιμο η τιμή του M_2 να είναι μικρότερη του $2M_1$.

Πίνακας 2

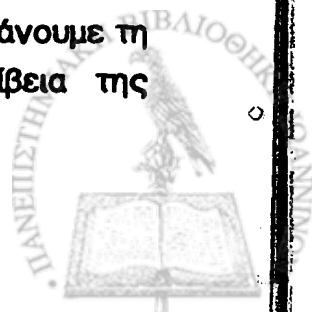
Μετρήσεις για τον υπολογισμό των ταχυτήτων προ και μετά της κρούσης

a/a	t_{01} (sec)	t_1 (sec)	t_2 (sec)

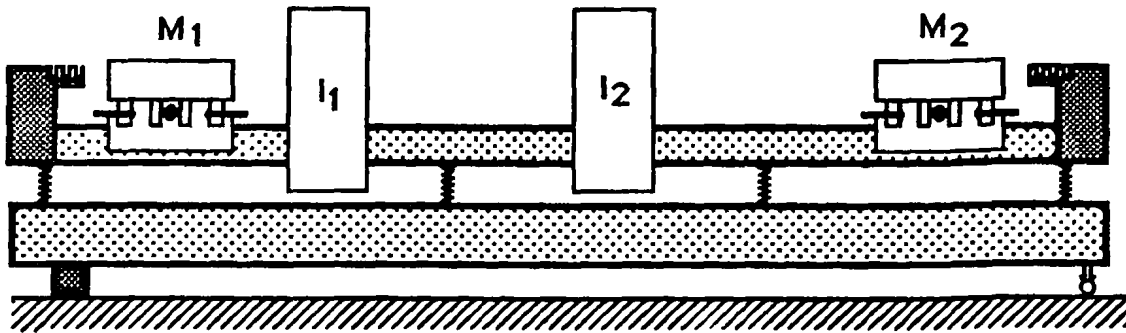
Από τις τιμές του Πίνακα 2 να βρείτε τις μέσες τιμές των t_{01} , t_1 , t_2 , να επαληθεύσετε τις σχέσεις (6.14) και (6.15) και να βρείτε και να δικαιολογήσετε τις αποκλίσεις. Να εξάγετε τα απαραίτητα συμπεράσματα.

3.1.2 Κρούση με $u_{01} \neq 0$ και $u_{02} \neq 0$

Εξετάζουμε πάλι τις περιπτώσεις για $M_1 = M_2$ και $M_1 \neq M_2$. Φέρνουμε τους δρομείς στα δύο άκρα της αεροτροχιάς. Τοποθετούμε δύο φωτοανιχνευτές στην αεροτροχιά σε ίσες αποστάσεις από τους δρομείς, όπως δείχνει το Σχ. 3. Οι αρχικές ταχύτητες δεν είναι απαραίτητο να είναι ίσες. Ο φωτοανιχνευτής I_1 είναι συνδεδεμένος με το χρονόμετρο A που μετρά διαδοχικά τους χρόνους t_{01} και t_1 του δρομέα μάζας M_1 . Ο φωτοανιχνευτής I_2 είναι συνδεδεμένος με το χρονόμετρο B που μετρά διαδοχικά τους χρόνους t_{02} και t_2 του άλλου δρομέα. (Είναι σκόπιμο να γίνεται η κρούση στη μέση περίπου της αεροτροχιάς). Επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση τουλάχιστο πέντε φορές, προσέχουμε για την ακρίβεια της



επαναληπτικότητας των αρχικών ταχυτήτων. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 3.



Σχήμα 3. Σύστημα αεροτροχιάς για την περίπτωση κρούσης με δύο κινούμενους δρομείς ($v_{01} \neq 0, v_{02} \neq 0$).

Πίνακας 3

Μετρήσεις για τον υπολογισμό των ταχυτήτων προ και μετά της κρούσης

a/a	t_{01} (sec)	t_1 (sec)	t_{02} (sec)	t_2 (sec)

Από τις τιμές του Πίνακα 3 να βρείτε τις μέσες τιμές των t_{01}, t_1, t_{02}, t_2 να επαληθεύσετε τις σχέσεις (6.14) και (6.15) και να βρείτε και να δικαιολογήσετε τις αποκλίσεις. Να εξάγετε τα απαραίτητα συμπεράσματα.



3.2 Πλαστικές Κρούσεις

3.2.1 Κρούση με $u_{o1} \neq 0$ και $u_{o2} = 0$

Εξετάζουμε τις περιπτώσεις για $M_1 = M_2$ και $M_1 \neq M_2$. Θέτουμε στους δρομείς κολλητική ταινία έτσι ώστε μετά την κρούση οι δύο δρομείς να κολλήσουν και να κινηθούν μαζί προς την ίδια κατεύθυνση. Τοποθετούμε το δρομέα μάζας M_2 στη μέση περίπου της αεροτροχιάς και τον αφήνουμε ακίνητο. Η εκκίνηση του δρομέα μάζας M_1 γίνεται με τη βοήθεια της σφενδόνης. Τοποθετούμε δύο φωτοανιχνευτές I_1 και I_2 σε ορισμένη απόσταση και τους συνδέουμε με τα δύο χρονόμετρα αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο Σχ. 2. Ο κινούμενος δρομέας M_1 που έχει τη σημαία περνά από το φωτοανιχνευτή I_1 όπου το χρονόμετρο Α μετρά το χρόνο t_{o1} . Μετά τα δύο σώματα κολλούν και αποτελούν το σύστημα των δύο δρομέων που έχει μάζα $(M_1 + M_2)$. Το σύστημα αυτό περνά από τον ένα φωτοανιχνευτή. Οι μετρήσεις επαναλαμβάνονται περίπου πέντε φορές και καταχωρούνται στον Πίνακα 4.

Πίνακας 4

Μετρήσεις για τον υπολογισμό των ταχυτήτων προ και μετά της κρούσης

a/a	t_o (sec)	t (sec)

Από τις τιμές του Πίνακα 4:

- 1) Να βρείτε τις μέσες τιμές των t_o και t
- 2) Να επαληθεύσετε τη σχέση $m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) u$
- 3) Από τη σχέση (6.17) να υπολογίσετε την τιμή του Q.



3.2.2 Κρούση με $u_{01} \neq 0$ και $u_{02} \neq 0$

Εξετάζουμε πάλι τις περιπτώσεις για $M_1 = M_2$ και $M_1 \neq M_2$.

Φέρνουμε τους δύο δρομείς στα δύο άκρα της αεροτροχιάς και η εκκίνηση τους γίνεται με τη μέθοδο της σφενδόνης. Τοποθετούμε τους φωτοανιχνευτές I_1 και I_2 σε μία ορισμένη απόσταση, όπως στο Σχ. 3. Ο φωτοανιχνευτής I_1 συνδέεται με το χρονόμετρο Α που μετρά το χρόνο t_{01} του δρομέα μάζας M_1 . Ο φωτοανιχνευτής I_2 συνδέεται με το χρονόμετρο Β που καταγράφει το χρόνο t_{02} του δρομέα μάζας M_2 . Το χρόνο t του συστήματος των δύο δρομέων τον καταγράφει ένα χρονόμετρο. Επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση πέντε φορές τουλάχιστο για την επαναληπτικότητα των αρχικών ταχυτήτων. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 5.

Πίνακας 5

Μετρήσεις για τον υπολογισμό των ταχυτήτων προ και μετά της κρούσης

a/a	t_{01} (sec)	t_{02} (sec)	t (sec)

Από τις τιμές του Πίνακα 5:

- 1) Να βρείτε τις μέσες τιμές των t_{01} , t_{02} και t
- 2) Να επαληθεύσετε τη σχέση $m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) u$
- 3) Από τη σχέση (6.17) να υπολογίσετε την τιμή του Q.

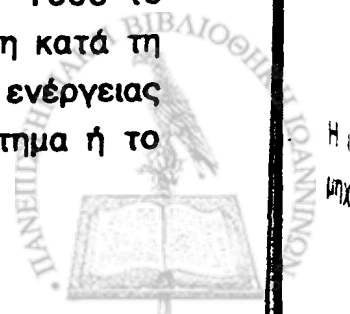


ΑΣΚΗΣΗ 7

μελετη απομονωμενου συστηματος

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην προηγούμενη άσκηση ασχοληθήκαμε με τις κρούσεις δύο σωμάτων. Εκεί αναφερθήκαμε σε εφαρμογές των κρούσεων. Ανάμεσα σε αυτές ήταν οι ραδιενεργές διασπάσεις. Ένα παράδειγμα διάσπασης είναι η **ραδιενεργή διάσπαση β** του νετρονίου n σε πρωτόνιο p , ηλεκτρόνιο e^- και σωματίο $\tilde{\nu}$, δηλ. $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}$. Παρόλα που δεν έρχονται σε σύγκρουση τα τρία προϊόντα της διάσπασης στη διαδικασία αυτή (εκτός αν τη δούμε αντίστροφα) έχει πολλά χαρακτηριστικά με τις κρούσεις: (α) υπάρχει μία σαφής διάκριση μεταξύ του "πριν από το γεγονός" και του "μετά το γεγονός". (β) οι νόμοι διατήρησης της ορμής και ενέργειας μας επιτρέπουν να μάθουμε πολλά για τέτοιες διαδικασίες μελετώντας τις "πριν και μετά" καταστάσεις, ακόμη και όταν έχουμε πολύ λίγες γνώσεις για τους νόμους των δυνάμεων που ισχύουν στη διάρκεια της κρούσης. Οι δυνάμεις της διάσπασης είναι **εσωτερικές δυνάμεις**. Οι δυνάμεις αυτές μπορούν να μεταβάλλουν τις ορμές των προϊόντων της διάσπασης. Το νετρόνιο και τα προϊόντα της διάσπασης (πρωτόνιο, ηλεκτρόνιο και σωματίο $\tilde{\nu}$) αποτελούν ένα **απομονωμένο σύστημα**. Στην ίδια κατηγορία απομονωμένου συστήματος είναι η έκρηξη των βλημάτων. Και στην περίπτωση αυτή οι δυνάμεις της έκρηξης είναι εσωτερικές δυνάμεις που μπορούν να μεταβάλλουν τις ορμές όλων των ξεχωριστών θραυσμάτων. Τόσο το νετρόνιο όσο και το βλήμα μπορούν να βρίσκονται σε κίνηση κατά τη διάσπαση ή έκρηξη αντίστοιχα. Οι νόμοι διατήρησης ορμής και ενέργειας ισχύουν πάλι εφόσο δεν ενεργεί εξωτερική δύναμη στο σύστημα ή το



σύστημα βρίσκεται σε ένα ομογενές πεδίο δυνάμεων προ και μετά τη διάσπαση.

Μία άλλη κατηγορία απομονωμένου συστήματος είναι η περίπτωση εφαρμογής δυνάμεων επαναφοράς όταν τμήματα του συστήματος απομακρυνθούν από τη θέση ισορροπίας. Οι δυνάμεις επαναφοράς μπορεί να οφείλονται σε ελατήρια, σε ηλεκτρικά ή μαγνητικά φορτία ή στη βαρύτητα.

Η εργαστηριακή μελέτη απομονωμένων συστημάτων μπορεί να γίνει με δρομείς που κινούνται σε αεροτροχιές. Οι πειραματικές δυνατότητες περιορίζουν τη μελέτη ώστε το σύστημα να κινείται σε μία διάσταση και να αποτελείται από δύο μόνο δρομείς. Οι εσωτερικές δυνάμεις στο σύστημα των δρομέων εφαρμόζονται με τη βοήθεια των ελατηρίων, βαριδίων, ελασμάτων ή προσαρμόζοντας μαγνήτες στους δρομείς.

2. ΘΕΩΡΙΑ

Σαν απλούστερο απομονωμένο σύστημα θεωρούμε δύο σώματα (κύβους) A και B που συνδέονται με ελατήριο. Το σύστημα βρίσκεται σε θέση ισορροπίας πάνω σε ένα λείο οριζόντιο τραπέζι, όπως δείχνει το Σχ. 1(α). Οι δύο κύβοι A και B έχουν μάζες m_A και m_B αντίστοιχα. Αρχικά πλησιάζουμε τους δύο κύβους συσπειρώνοντας το ελατήριο. Το σύστημα στη θέση συσπείρωσης έχει μία δυναμική ενέργεια U και ορμή P μηδέν. Αφήνουμε ελεύθερους τους κύβους A και B να απομακρυνθούν με ταχύτητες u_A και u_B αντίστοιχα, όπως δείχνει το Σχ. 1(β). Η απομάκρυνση γίνεται με την επενέργεια της απωστικής δύναμης του ελατηρίου που είναι εσωτερική δύναμη του συστήματος. Μετά την απελευθέρωση των κύβων δεν εξασκείται συνολικά εξωτερική δύναμη πάνω στο σύστημα.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διατήρηση της ορμής στην κίνηση

$$\text{αρχική ορμή} = \text{τελική ορμή}$$

$$0 = m_A u_A + m_B u_B$$

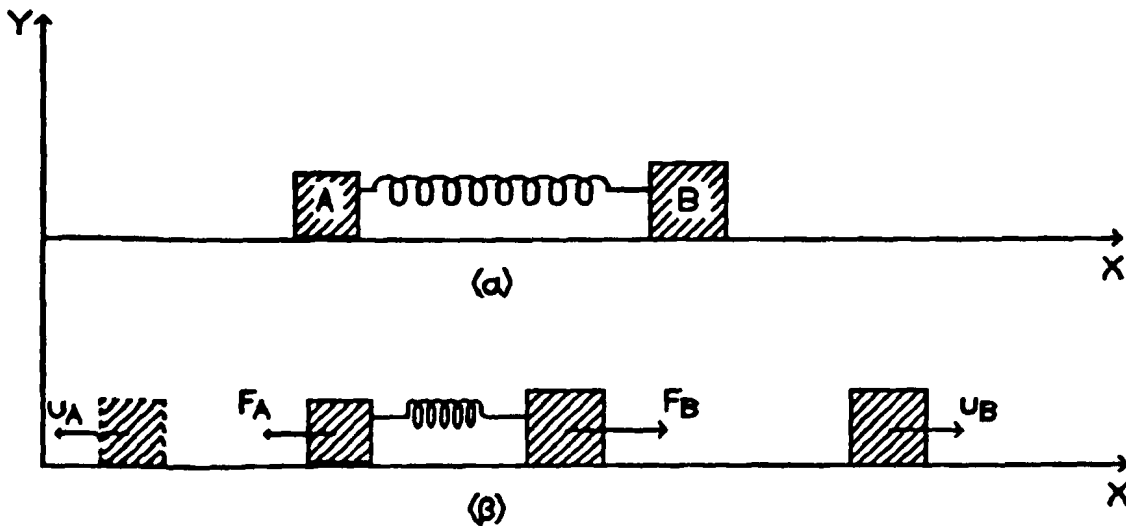
(7.1)

Η εσωτερική δύναμη του συστήματος είναι συντηρητική. Έτσι η ολική μηχανική ενέργεια είναι σταθερή, δηλαδή



$$U = K_A + K_B \quad (7.2)$$

όπου $K_A = \frac{1}{2} m_A u_A^2$ και $K_B = \frac{1}{2} m_B u_B^2$ είναι οι κινητικές ενέργειες των κύβων A και B αντίστοιχα. Από την (7.1) έχουμε



Σχήμα 1. Παράδειγμα απομονωμένου συστήματος δύο κύβων που συνδέονται με ελατήρια πάνω σε λεία επιφάνεια.

$$m_A u_A = -m_B u_B$$

ή

$$u_A = -\frac{m_B}{m_A} u_B \quad (7.3)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{\frac{1}{2} m_A u_A^2}{\frac{1}{2} m_B u_B^2} = \frac{\frac{1}{2} m_A \frac{m_B^2}{m_A^2} u_B^2}{\frac{1}{2} m_B u_B^2} = \frac{m_B}{m_A} \quad (7.4)$$

που μας λέει ότι οι κινητικές ενέργειες είναι αντίστροφα ανάλογες των μαζών των.



Το σύστημα του Σχ. 1 θα μπορούσε να εξομοιωθεί με ένα σύστημα διάσπασης ή έκρηξης δύο σωμάτων. Αυτό γίνεται εάν το ελατήριο που συνδέει του κύβους A και B είναι προσαρμοσμένο στον ένα κύβο και εφάπτεται στον άλλον ή αν το ελατήριο αντικατασταθεί με ελάσματα. Ακόμα μπορούμε να προσαρμόσουμε μαγνήτες στους κύβους, αλλά στην περίπτωση αυτή πρέπει να υποθέσουμε ότι η αλληλεπίδραση των μαγνητών μετά την αρχική απομάκρυνση των κύβων είναι αμελητέα. Μετά την απελευθέρωση του συσπειρωμένου συστήματος δεν επενεργούν οι δυνάμεις επαναφοράς ούτε υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις και οι κύβοι A και B απομακρύνονται με σταθερές ταχύτητες u_A και u_B αντίστοιχα. Μετά χρόνο t οι κύβοι διανύουν αντίστοιχα διαστήματα x_A και x_B που δίνονται από τις σχέσεις

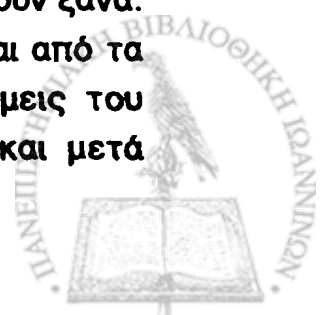
$$x_A = u_A t \quad \text{και} \quad x_B = - u_B t \quad (7.5)$$

Εάν η σχέση (7.3) που ισχύει και για το σύστημα αυτό, εισαχθεί στην (7.5) έχουμε

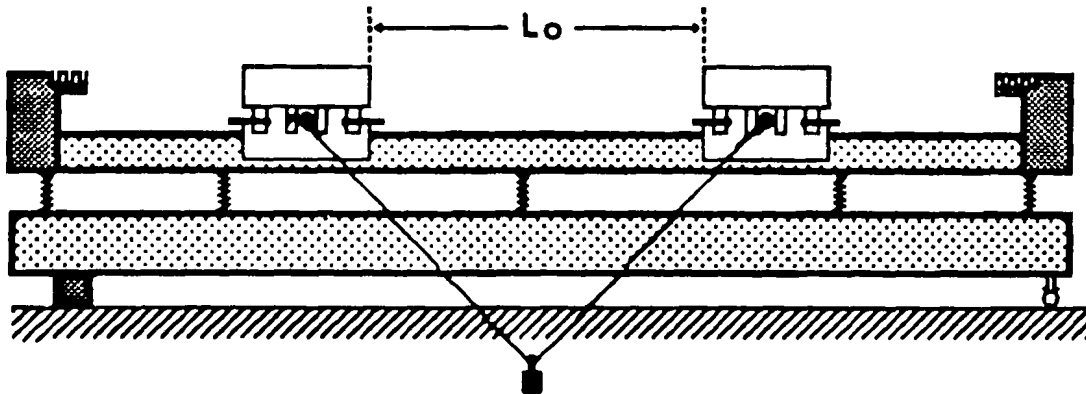
$$\frac{x_A}{x_B} = \frac{u_A t}{u_B t} = \frac{\frac{m_B}{m_A} u_B t}{u_B t} = \frac{m_B}{m_A} \quad (7.6)$$

Δηλαδή τα διαστήματα που διανύουν οι κύβοι μετά ένα ορισμένο χρόνο είναι αντίστροφα ανάλογα των μαζών των. Στο πείραμα μας αντί για κύβους έχουμε δρομείς που κινούνται σε αεροτροχιές χωρίς τριβές (κατά προσέγγιση).

Με τη βοήθεια των δρομέων στις αεροτροχιές μπορούμε να επιδείξουμε ένα άλλο απομονωμένο σύστημα με περισσότερες από μία εσωτερικές δυνάμεις. Οι δρομείς φέρουν ελάσματα και συνδέονται με σχοινί από το οποίο κρεμιέται ελεύθερα ένα βαρίδιο, όπως στο Σχ. 2. Αν απομακρύνουμε τους δύο δρομείς σε μία απόσταση L_0 μεταξύ τους τότε οι οριζόντιες συνιστώσες της δύναμης βαρύτητας που εξασκεί το βαρίδιο πάνω στους δρομείς τείνουν να τους πλησιάσουν. Όταν οι δρομείς πλησιάσουν, συμπιέζονται τα δύο ελάσματα-τους με αποτέλεσμα να απομακρυνθούν ξανά. Τόσο οι δυνάμεις βαρύτητας όσο και οι δυνάμεις που προέρχονται από τα ελάσματα είναι συντηρητικές και αποτελούν εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος. Κατά την κίνηση αυτή το βαρίδιο κατέρχεται και μετά



επανέρχεται. Εφόσον δεν ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις θα πρέπει η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος να είναι σταθερή. Σε δύο διαδοχικές απομακρύνσεις θα πρέπει η απόσταση L_0 των δρομέων να είναι η ίδια και η ανύψωση h του βαριδιού σταθερή.



Σχήμα 2. Ένα βαρίδιο που κρεμίζεται ελεύθερα από ένα σχανί του οποίου τα άκρα είναι προσαρμοσμένα σε δύο δρομείς της αεροτροχιάς.

Όπως είπαμε και προηγούμενα ένα σύστημα είναι απομονωμένο όταν δεν επενεργούν εξωτερικές δυνάμεις. Ανεξάρτητα με τον τρόπο που κινούνται τα μέρη ενός απομονωμένου συστήματος, το κέντρο μάζας αυτού είτε ηρεμεί είτε κινείται με σταθερή ταχύτητα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι δρομείς που συνδέονται με ελατήριο. Όταν το σύστημα αυτό ταλαντώνεται και του δοθεί επιπλέον μία ώθηση τότε το κέντρο μάζας κινείται με σταθερή ταχύτητα. Στη μελέτη του συστήματος αυτού πρέπει να θεωρήσουμε τις σχετικές ταχύτητες των δρομέων.

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

3.1 Απομονωμένο Σύστημα Δρομέων Συνδεδεμένων με Ελατήριο

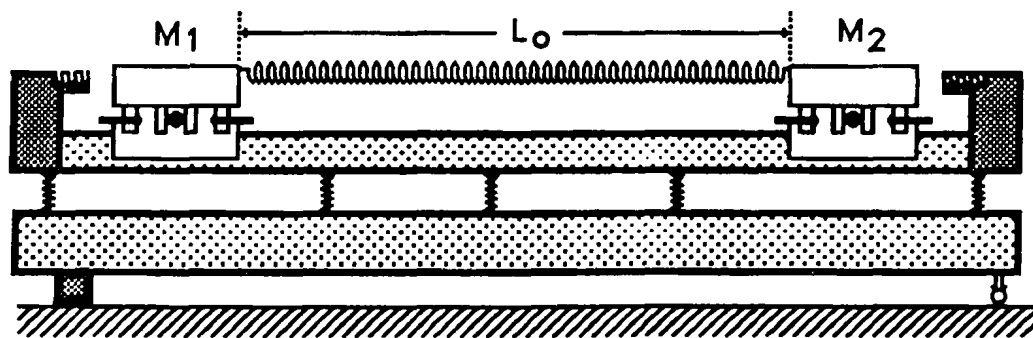
Προεργασία

- α) Σύνδεση αεραντλίας, μετασχηματιστού και χρονομέτρου με το δίκτυο (220 Volt).
- β) Οριζοντίωση της αεροτροχιάς (βλέπε άσκηση 2).



3.1.1 Ποιοτική Μελέτη του Νόμου Διατήρησης Ενέργειας

Προσαρμόζουμε τα άκρα ελατηρίου σε δύο δρομείς και τους τοποθετούμε πάνω στην αεροτροχιά, όπως φαίνεται στο Σχ. 3. Απομακρύνουμε τους δρομείς από τη θέση ισορροπίας σε μία απόσταση L_0 μεταξύ τους. Αφήνουμε τους δρομείς ελεύθερους οπότε θα κινηθούν



Σχήμα 3. Δύο δρομείς συνδεμένοι με ελατήριο.

ο ένας προς τον άλλο με την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου. Μετά τη συσπείρωση οι δρομείς θα απομακρυνθούν πάλι σε απόσταση L . Μετρούμε το L πέντε φορές τουλάχιστο για το ίδιο αρχικό L_0 . Επαναλαμβάνουμε τις μετρήσεις για 3 διαφορετικά διαστήματα L_0 . Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

Μετρήσεις για την ποιοτική μελέτη του νόμου διατήρησης της ενέργειας με δρομείς που συνδέονται με ελατήριο

α/α	L_0 (cm)	L (cm)					$L = \frac{\sum L_i^*}{5}$ (cm)
		L1	L2	L3	L4	L5	

* $i = 1, 2, \dots, 5.$

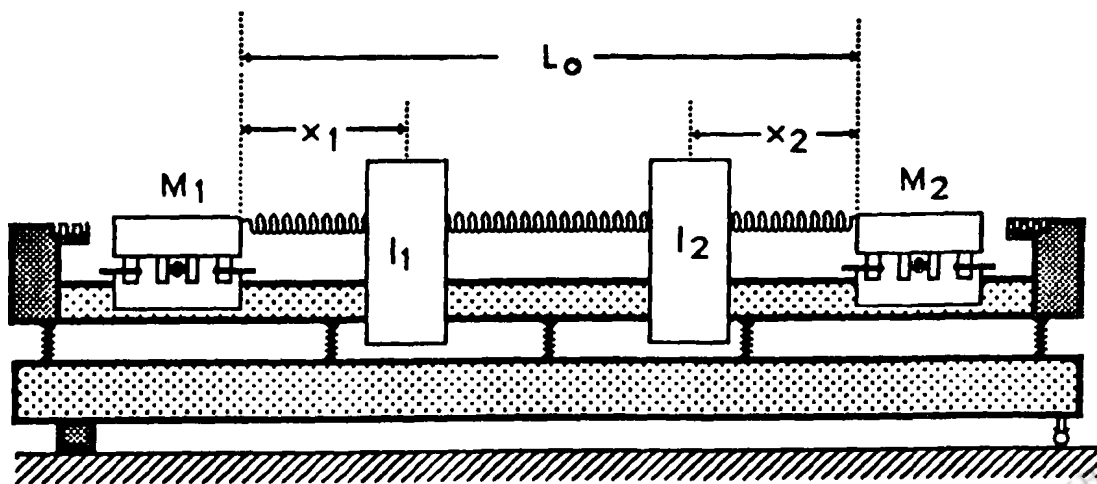


Από τις τιμές του Πίνακα 1:

Εξετάστε αν ισχύει ο νόμος διατήρησης της ενέργειας $E = \text{σταθ. για κάθε } L_0$.

3.1.2 Επαλήθευση της Σχέσης $\frac{u_1}{u_2} = \frac{M_2}{M_1}$

Στην πειραματική διάταξη του Σχ. 3 τοποθετούμε δύο φωτοανιχνευτές σε αποστάσεις περίπου 15.0 cm από τους δρομείς μετά την απομάκρυνση, όπως φαίνεται στο Σχ. 4. Συνδέουμε τους φωτοανιχνευτές με το μετασχηματιστή και με τα START των δύο χρονομέτρων της συσκευής μέτρησης χρόνου. Ο περιστροφικός μεταγωγός της συνάρτησης F βρίσκεται στη θέση F_2 . Τοποθετούμε στους δύο δρομείς από μία σημαία μήκους $\Delta x = 5.0 \text{ cm}$. Για να γίνει η μέτρηση των ταχυτήτων σε ίσους χρόνους από το ξεκίνημα των δρομέων πρέπει οι φωτοανιχνευτές να τοποθετηθούν έτσι ώστε να αρχίζουν και τα δύο χρονόμετρα ταυτόχρονα. Αφήνουμε τους δρομείς να κινηθούν ο ένας προς τον άλλο. Μετράμε τους χρόνους t_1 και t_2 που κατέγραψαν τα δύο χρονόμετρα. Οι ταχύτητες θα είναι $u_1 = \frac{\Delta x}{t_1}$ και $u_2 = \frac{\Delta x}{t_2}$. Κρατάμε σταθερό το L_0 και μεταβάλλουμε τη μάζα M_1 του ενός δρομέα μέχρι να γίνει $M_1 = 2 M_2$. (Οι τιμές των μαζών M_1 και M_2 δίνονται από τον επιτηρητή).



Σχήμα 4. Σύστημα δύο δρομέων που συνδέονται με ελατήριο.



Για κάθε μάζα M_1 παίρνουμε τουλάχιστο 5 φορές τους χρόνους t_1 και t_2 .
 (Να μην ξεχνάμε ότι για κάθε μάζα χρειάζεται επανατοποθέτηση των φωτοανιχνευτών για να αρχίζει η ταυτόχρονη μέτρηση των χρονομέτρων).
 Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2

Μετρήσεις για την επαλήθευση της σχέσης $\frac{v_1}{v_2} = \frac{M_2}{M_1}$

α/α	M_1 (gr)	t_1 (sec)					$t_1 = \frac{\sum t_{1i}^*}{5}$ (sec)	t_2 (sec)					$t_2 = \frac{\sum t_{2i}^*}{5}$ (sec)
		$t_{1\alpha}$	$t_{1\beta}$	$t_{1\gamma}$	$t_{1\delta}$	$t_{1\epsilon}$		$t_{2\alpha}$	$t_{2\beta}$	$t_{2\gamma}$	$t_{2\delta}$	$t_{2\epsilon}$	
1													
2													
3													
.													
.													
.													

* $i = 1, 2, \dots, 5$.

Από τις τιμές του Πίνακα 2:

Επαληθεύστε ότι $\frac{v_1}{v_2} = \frac{M_2}{M_1}$.

3.2 Απομονωμένο Σύστημα Δύο Δρομέων Συνδεδεμένων με Νήμα Από το Οποίο Κρεμιέται Ελεύθερα Ένα Βαρίδιο

3.2.1 Ποιοτική Μελέτη του Νόμου Διατήρησης Ενέργειας

α) Σταθερή Μάζα Βαριδιού, $m = 10.0$ gr

Μετατοπίζουμε προσεκτικά την αεροτροχιά στην άκρη του τραπεζιού. Δένουμε ένα αβαρές μη εκτατό νήμα μήκους ~ 60.0 cm στα



άκρα πλαστικών βραχιόνων που προσαρμόζονται σε δύο δρομείς πάνω σε αεροτροχιά. Κρεμάμε από το νήμα ελεύθερα ένα βαρίδιο $m = 10.0 \text{ gr}$. (Προσέχουμε ώστε το νήμα να μην ακουμπά στην αεροτροχιά και στο τραπέζι). Το σύστημα δρομέων νήματος και βαριδιού φαίνεται στο Σχ. 2. Απομακρύνουμε τους δρομείς σε μία απόσταση L_0 μεταξύ τους. Αφήνουμε τους δρομείς ελεύθερους. Με την επενέργεια της δύναμης που οφείλεται στο βαρίδιο οι δρομείς θα πλησιάσουν. Η συνάντηση των δύο δρομέων θα γίνει στο μέσο της απόστασης L_0 . Μετά τη σύγκρουση οι δρομείς θα απομακρυνθούν ξανά σε μία απόσταση L . Για το ίδιο L_0 μετρούμε 5 φορές τουλάχιστο το L . Παίρνουμε περίπου 3 διαφορετικά L_0 και επαναλαμβάνουμε τις μετρήσεις. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3

Μετρήσεις για την ποιοτική μελέτη του νόμου διατήρησης της ενέργειας με δρομείς που συνδέονται μεταξύ τους με νήμα από το οποίο κρεμιέται ένα βαρίδι σταθερής μάζας

a/a	L_0 (cm)	L (cm)					$L = \frac{\sum L_i^*}{5}$ (cm)
		L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	

* $i = 1, 2, \dots, 5$.

Από τις τιμές του Πίνακα 3:

Εξετάστε αν ισχύει ο νόμος διατήρησης της ενέργειας $E = \text{σταθ.}$ για κάθε L_0 .



β) Μεταβλητή Μάζα Βαριδιού

Επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία όπως και προηγούμενα, με τη διαφορά ότι η απόσταση L_0 παραμένει σταθερή και μεταβάλλουμε τη μάζα του βαριδιού. Παίρνουμε τουλάχιστον 3 διαφορετικές μάζες και μετρούμε 5 φορές το L . Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 4.

Πίνακας 4

Μετρήσεις για την ποιοτική μελέτη του νόμου διατήρησης της ενέργειας με δρομείς που συνδέονται μεταξύ τους με νήμα από το οποίο κρεμάται ένα βαρίδι μεταβλητής μάζας

α/α	L_0 (cm)	L (cm)					$L = \frac{\sum L_i^*}{5}$ (cm)
		L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	

* $i = 1, 2, \dots, 5$.

Από τις τιμές του Πίνακα 4:

Εξετάστε αν ισχύει ο νόμος διατήρησης της ενέργειας $E = \text{σταθ. για κάθε τιμή του } m$.

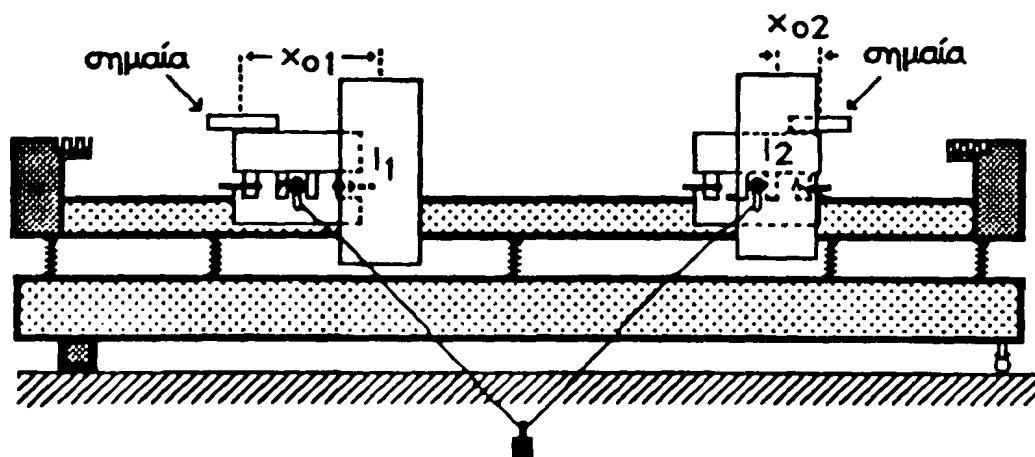
3.2.2 Επαλήθευση της Σχέσης $\frac{v_1}{v_2} = \frac{M_2}{M_1}$

Στη διάταξη του Σχ. 2 προσδιορίζουμε τη θέση που θα συγκρούονται οι δρομείς και τοποθετούμε δεξιά και αριστερά αυτής δύο



φωτοανιχνευτές. Προσέχουμε ώστε το νήμα να μην ακουμπά στους φωτοανιχνευτές. Συνδέουμε τους φωτοανιχνευτές με το μετασχηματιστή και με τα START των δύο χρονομέτρων της συσκευής μέτρησης χρόνου. Ο περιστροφικός μεταγωγός της συνάρτησης F βρίσκεται στη θέση F_2 .

Τοποθετούμε στους δύο δρομείς από μία σημαία μήκους $\Delta x = 5.0$ cm. Απομακρύνουμε τους δρομείς αρχικά σε αποστάσεις x_{01} και x_{02} , περίπου 4.0 - 5.0 cm από το σημείο όπου αρχίζουν να μετρούν τα χρονόμετρα, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.



Σχήμα 5. Σύστημα δύο δρομέων συνδεδεμένων με νήμα από το οποίο κρεμιέται ελεύθερα ένα βαρίδι.

Για να γίνει η μέτρηση των ταχυτήτων σε ίσους χρόνους από το ξεκίνημα των δρομέων πρέπει οι φωτοανιχνευτές, να τοποθετηθούν έτσι ώστε να αρχίζουν και τα δύο χρονόμετρα να μετρούν ταυτόχρονα. Αφήνουμε τους δρομείς ελεύθερους να πλησιάσουν. Μετρούμε τους χρόνους t_1 και t_2 που κατέγραψαν τα δύο χρονόμετρα. Οι ταχύτητες θάνα $v_1 = \frac{\Delta x}{t_1}$ και $v_2 = \frac{\Delta x}{t_2}$.

Κρατάμε σταθερά τα x_{01} , x_{02} , τη μάζα του βαριδιού $m = 10.0$ gr και μεταβάλλουμε τη μάζα M_1 ενός δρομέα μέχρι $M_1 = 2M_2$. (Οι τιμές των μαζών M_1 και M_2 δίνονται από τον επιτηρητή). Για κάθε μάζα M_1 παίρνουμε τουλάχιστον 5 φορές τους χρόνους t_1 και t_2 . (Να μην ξεχνάμε ότι για κάθε μάζα χρειάζεται επανατοποθέτηση των φωτοανιχνευτών για να αρχίζει η ταυτόχρονη μέτρηση των χρονομέτρων). Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 5.

Πίνακας 5

Μετρήσεις για την επαλήθευση της σχέσης $\frac{u_1}{u_2} = \frac{M_2}{M_1}$

α/α	M ₁ (gr)	t ₁ (sec)					t ₁ = $\frac{\sum t_{1i}^*}{5}$ (sec)	t ₂ (sec)					t ₂ = $\frac{\sum t_{2i}^*}{5}$ (sec)	
		t _{1α}	t _{1β}	t _{1γ}	t _{1δ}	t _{1ε}		t _{2α}	t _{2β}	t _{2γ}	t _{2δ}	t _{2ε}		
1														
2														
3														
.														
.														
.														

*i = 1, 2, ..., 5.

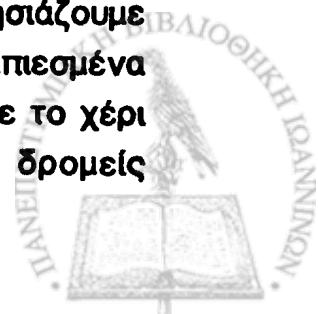
Από τις τιμές του Πίνακα 5:

Επαληθεύστε τη σχέση $\frac{u_1}{u_2} = \frac{M_2}{M_1}$.

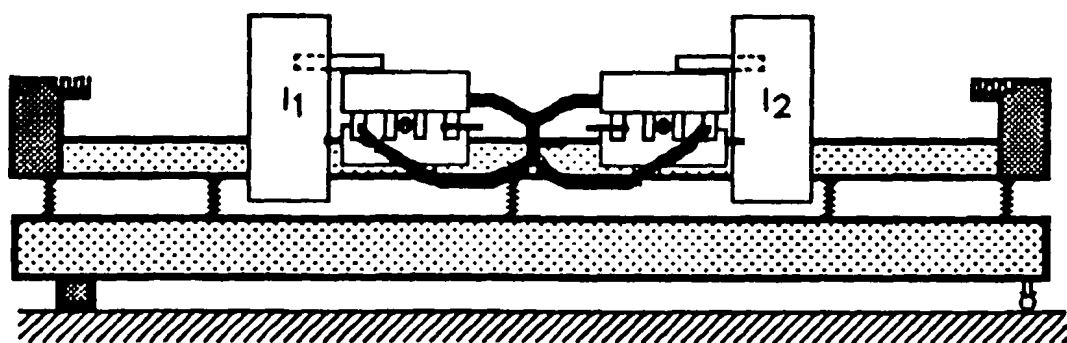
3.3 Επαλήθευση του Νόμου Διατήρησης Ορμής Κατά την Διάσπαση Απομονωμένου Συστήματος Δύο Σωμάτων

3.3.1 Οι Δρομείς Φέρουν Μεγάλα Ελάσματα

Προσαρμόζουμε σε δύο δρομείς δύο μεγάλα ελάσματα και δύο σημαίες των 5.0 cm και τους τοποθετούμε στην αεροτροχιά. Πλησιάζουμε τους δρομείς με τέτοιο τρόπο ώστε τα ελάσματα να είναι συμπιεσμένα (15.0 - 30.0 cm). Η παραμονή στη θέση συμπίεσης γίνεται είτε με το χέρι είτε κλείνοντας την αεραντλία. Δεξιά και αριστερά από τους δρομείς



τοποθετούμε, σε ίσες αποστάσεις, δύο φωτοανιχνευτές, όπως φαίνονται στο Σχ. 6. Επειδή οι δρομείς φέρουν τα ελάσματα δεν μπορούν να περάσουν από τους φωτοανιχνευτές. Στην πραγματικότητα δεν μας ενδιαφέρει το πέρασμα των δρομέων από τους φωτοανιχνευτές αλλά το πέρασμα των σημαίων.



Σχήμα 6. Σύστημα διάσπασης δύο δρομέων που φέρουν δύο ελάσματα.

Για το λόγο αυτό φροντίζουμε ώστε οι σημαίες να τοποθετούνται στις άκρες των δρομέων. Επίσης πρέπει να προσέξουμε ώστε τα χρονόμετρα να καταγράφουν τον πραγματικό χρόνο, εμποδίζοντας το ξαναπέρασμα των δρομέων. Αφήνουμε τους δρομείς ελεύθερους και αυτοί απομακρύνονται με την απωστική δύναμη των ελασμάτων. Διατηρούμε τη μάζα M_2 του ενός δρομέα σταθερή και μεταβάλλουμε τη μάζα M_1 του άλλου δρομέα. Για κάθε μάζα M_1 μετρούμε 5 φορές τους χρόνους t_1, t_2 που οι σημαίες αποκρύπτουν το φως από το φωτοανιχνευτή. Επαναλαμβάνουμε τις μετρήσεις για 5 τουλάχιστο διαφορετικές μάζες M_1 . Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 6.

Πίνακας 6

Μετρήσεις για την επαλήθευση του νόμου διατήρησης ορμής με δρομείς που φέρουν μεγάλα ελάσματα

α/α	M ₁ (gr)	t ₁ (sec)					$t_1 = \frac{\sum t_{1i}^*}{5}$ (sec)	t ₂ (sec)					$t_2 = \frac{\sum t_{2i}^*}{5}$ (sec)
		t _{1α}	t _{1β}	t _{1γ}	t _{1δ}	t _{1ε}		t _{2α}	t _{2β}	t _{2γ}	t _{2δ}	t _{2ε}	
1													
2													
3													
.													
.													
.													

*i = 1, 2, ... , 5.

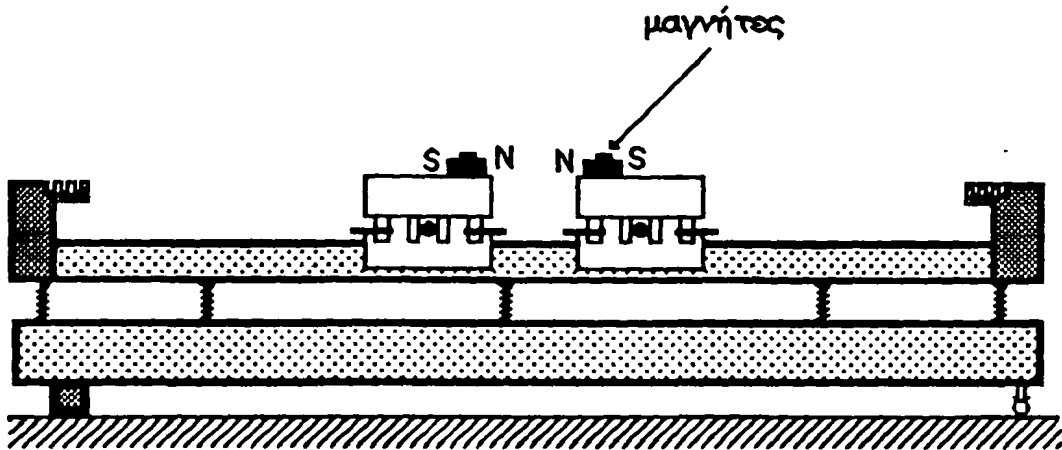
Από τις τιμές του Πίνακα 6:

- 1) Βρείτε τις ταχύτητες u₁, u₂ των δύο δρομέων.
- 2) Επαληθεύσατε τη σχέση p₁ = - p₂ για κάθε μάζα.

3.3.2 Οι Δρομείς φέρουν Μαγνήτες

Το πείραμα 3.3.1 μπορεί να επαναληφθεί τοποθετώντας στους δρομείς αντί ελάσματα μαγνήτες. Οι μαγνήτες τοποθετούνται στις άκρες του πάνω μέρους των δρομέων, όπως φαίνεται στο Σχ. 7. (Οι τιμές των μαζών M₁ και M₂ δίνονται από τον επιτηρητή). οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 7.





Σχήμα 7. Προσαρμοσμένοι μαγνήτες σε δρομείς που απωθούνται μεταξύ τους.

Πίνακας 7

Μετρήσεις για την επαλήθευση του νόμου διατήρησης ορμής με δρομείς που φέρουν μαγνήτες

α/α	M ₁ (gr)	t ₁ (sec)					$t_1 = \frac{\sum t_{1i}^*}{5}$ (sec)	t ₂ (sec)					$t_2 = \frac{\sum t_{2i}^*}{5}$ (sec)	
		t _{1α}	t _{1β}	t _{1γ}	t _{1δ}	t _{1ε}		t _{2α}	t _{2β}	t _{2γ}	t _{2δ}	t _{2ε}		
1														
2														
3														
.														
.														
.														

*i = 1, 2, ..., 5.

Από τις τιμές του Πίνακα 7:

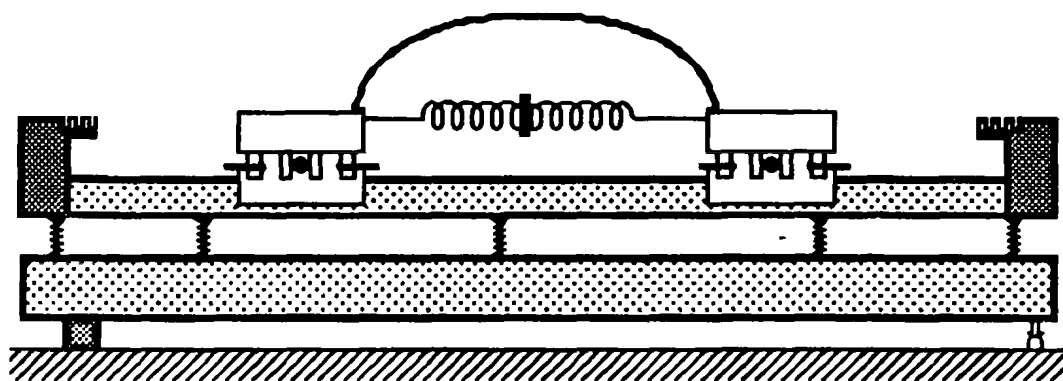
- 1) Βρείτε τις ταχύτητες u_1 , u_2 των δύο δρομέων
- 2) Επαληθεύσατε τη σχέση $p_1 = -p_2$ για κάθε μάζα.



3.4 Ποιοτική Μελέτη του Κέντρου Μάζας Απομονωμένου Συστήματος

3.4.1 Προσδιορισμός του Κέντρου Μάζας

Συνδέουμε δύο δρομείς με ένα ελατήριο και ένα έλασμα, όπως φαίνεται στο Σχ. 8. Το κέντρο μάζας του συστήματος είναι περίπου στο κέντρο του ελατηρίου και δείχνεται μ' ένα λαστιχένιο δακτυλίδι τοποθετημένο στο σημείο αυτό.



Σχήμα 8. Σύστημα δρομέων συνδεμένων με ελατήριο και έλασμα.

Τοποθετούμε το σύστημα και το ισορροπούμε στην μέση περίπου της αεροτροχιάς. Στη συνέχεια απομακρύνουμε τους δρομείς κατά ίσες αποστάσεις από τη θέση ισορροπίας και τους αφήνουμε ελεύθερους ταυτόχρονα. Το σύστημα με την επενέργεια των εσωτερικών δυνάμεων θα αρχίσει να ταλαντώνεται. Το κέντρο μάζας θεωρητικά πρέπει να παραμείνει ακίνητο. Στην πραγματικότητα όμως πάλλεται και αυτό δεξιά και αριστερά από τη θέση ισορροπίας x_0 . Καταγράφουμε τις μέγιστες τιμές απομακρύνσεως του Κ.Μ. από το x_0 . (Οι προς τα δεξιά θετικές και οι προς τα αριστερά αρνητικές). Βρίσκουμε τη μέση τιμή της απομάκρυνσης από το x_0 .

Ζητείται να επαληθευτεί ότι το Κ.Μ. του συστήματος δεν μετακινείται κατά μέσο όρο.



3.4.2 Κίνηση του Κέντρου Μάζας

Ισορροπούμε πάλι το σύστημα στο ένα άκρο της αεροτροχιάς και με το δάκτυλο μας δίνουμε μία ώθηση στον ένα από τους δρομείς. Οι δρομείς θα αρχίσουν να ταλαντώνονται γύρω από το κέντρο μάζας το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα, γιατί δεν ενεργεί εξωτερική δύναμη στο σύστημα. Να επιβεβαιωθεί η σταθερή ταχύτητα του κέντρου μάζας κατά μέσο όρο.



ε
ε
ε
κ
ε
φ
π
τ
γ
π
ο
ο

ΑΣΚΗΣΗ 8

μελετη δυναμεων αποσβεσης (μη συντηρητικες δυναμεις)

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην άσκηση 4 επαληθεύσαμε το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Συγκεκριμένα η ολική μηχανική ενέργεια, δυναμική και κινητική, κινούμενου σώματος παραμένει σταθερή. Η σταθερότητα αυτή ισχύει εφόσον οι δυνάμεις που εξασκούνται είναι συντηρητικές. Όταν σε κινούμενο σώμα ενεργούν δυνάμεις μη συντηρητικές τότε η ολική ενέργεια του σώματος μεταβάλλεται. Στην περίπτωση που η ολική μηχανική ενέργεια του κινούμενου σώματος φθίνει ή αλλοιώς αποσβένεται τότε οι δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα ονομάζονται **δυνάμεις απόσβεσης** (ή **εξασθένησης**). Τέτοιες είναι οι διάφορες δυνάμεις τριβής, οι μαγνητικές δυνάμεις απόσβεσης, οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης κατά τις ημιαστικές κρούσεις και άλλες. Στο πείραμα αυτό θα περιοριστούμε στη μελέτη των δυνάμεων απόσβεσης.

Η μελέτη των δυνάμεων απόσβεσης μπορεί να γίνει με κίνηση δρομέων σε αεροτροχιές. Μέχρι τώρα έχουμε θεωρήσει, με ικανοποιητική προσέγγιση, ότι η κίνηση των δρομέων πάνω σε αεροτροχιά γίνεται χωρίς τριβές. Η προσέγγιση μεγαλώνει και η απόσβεση της κίνησης του δρομέα γίνεται αισθητή όταν η αρχική ταχύτητα που προσδίνεται στο δρομέα είναι πολύ μικρή. Επίσης μπορούμε να πετύχουμε απόσβεση στην κίνηση του δρομέα όταν προσαρμόσουμε μαγνήτες στους δρομείς με κατάλληλο προσανατολισμό. Τελικά, μπορούμε να μελετήσουμε την απόσβεση της



κίνησης δρομέα που συγκρούεται μη ελαστικά με άλλο δρομέα ή με τα τοιχώματα κεκλιμένης αεροτροχιάς. Η τελευταία αυτή μελέτη αποτελεί εξομοίωση του προβλήματος της μπάλας που πηδάει διαδοχικά στο έδαφος.

2. ΘΕΩΡΙΑ

Οι περισσότερες από τις δυνάμεις απόσβεσης που ενεργούν σε κινούμενα σώματα είναι συναρτήσεις των σχετικών ταχυτήτων των σωμάτων. Ανάμεσα σε αυτές είναι οι μηχανικές και μαγνητικές δυνάμεις τριβής.

Οι δυνάμεις τριβής εξασκούνται κατά τη σχετική κίνηση στερεού σώματος πάνω σε στερεή επιφάνεια ή κατά τη σχετική κίνηση στερεού ή ρευστού σώματος μέσα σε ρευστό περιβάλλον, (υγρό ή αέριο). Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις μιλάμε για τριβή ιξώδους και δυνάμεις τριβής ιξώδους. Γενικά οι δυνάμεις τριβής είναι ανάλογες της ταχύτητας του κινούμενου σώματος.

$$F_T = - bu \quad (8.1)$$

Το αρνητικό σημείο δείχνει ότι η διεύθυνση της F_T είναι πάντοτε αντίθετη προς τη διεύθυνση της ταχύτητας.

Η εξίσωση κίνησης του κινητού όταν ενεργεί πάνω του μόνο η δύναμη F_T , είναι

$$- bu = m \frac{du}{dt} \quad (8.2)$$

Με τη βοήθεια του αλυσωτού κανόνα για παραγώγους, εκφράζουμε την $\frac{du}{dt}$ σε συνάρτηση της $\frac{du}{dx}$, δηλαδή

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dx} u$$

οπότε η (8.2) γίνεται



u
κ
ε
δ
σ
αι
μ
όπι
ονο
από

$$\frac{du}{dx} = -\frac{b}{m} \quad \text{ή} \quad du = -\frac{b}{m} dx \quad (8.3)$$

Εάν η αρχική ταχύτητα του κινητού είναι u_0 στη θέση $x = 0$ και η τελική ταχύτητα-του γίνεται $u = 0$ στη θέση x , τότε με ολοκλήρωση της (8.3) έχουμε

$$\int_{u_0}^0 du = - \int_0^x \frac{b}{m} dx \quad \text{ή} \quad -u_0 = -\frac{b}{m} x$$

και λύνοντας ως προς x καταλήγουμε στη σχέση

$$x = \frac{mu_0}{b} \quad (8.4)$$

Το ίδιο αποτέλεσμα έχουμε εάν εξισώσουμε την ώθηση της δύναμης F_T με τη μεταβολή της ορμής (βλέπε άσκ. 3)

$$\int_0^t F dt = \int_0^t -b u dt = \int_0^x -b dx = -bx = \Delta(mu) = -mu_0$$

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, η κίνηση ενός δρομέα σε αεροτροχιά, ιδιαίτερα όταν η ταχύτητα είναι μικρή, δεν είναι απαλλαγμένη από τριβές. Η κύρια πηγή των τριβών είναι το ιξώδες ενός λεπτού στρώματος αέρα μεταξύ του δρομέα και της αεροτροχιάς. Μπορεί να αποδειχθεί πειραματικά ότι η δύναμη ιξώδους είναι ανάλογη προς την επιφάνεια A του σώματος, τη σχετική ταχύτητα u του δρομέα και της αεροτροχιάς και αντίστροφα ανάλογη του πάχους d του στρώματος. Έτσι η δύναμη τριβής ιξώδους μπορεί να δοθεί με τη σχέση

$$F_T = -\frac{nAu}{d} = -bu \quad (8.5)$$

όπου n είναι μία χαρακτηριστική σταθερά του ρευστού (αέρα) που ονομάζεται ιξώδες. Όπως προκύπτει η σταθερά απόσβεσης b εξαρτάται από τις διαστάσεις, τη διάταξη και τις ιδιότητες του αερίου στρώματος.



Στην εισαγωγή αναφερθήκαμε στις μαγνητικές δυνάμεις απόσβεσης. Αυτές εξασκούνται σε ηλεκτρικούς αγωγούς που κινούνται σε μαγνητικό πεδίο, είναι ανάλογες της ταχύτητας και συμπεριφέρονται σα δυνάμεις τριβής. Μέσα στον αγωγό δημιουργούνται ρεύματα μετατόπισης που είναι αποτέλεσμα της κίνησης-του στο μαγνητικό πεδίο. Συγκεκριμένα όταν ο αγωγός κινείται μέσα στο μαγνητικό πεδίο η μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή στον αγωγό παράγει ρεύματα. Τα ρεύματα αυτά είναι ανάλογα του ρυθμού μεταβολής της ροής και συνεπώς της ταχύτητας του αγωγού. Αυτά τα ρεύματα με τη σειρά τους ασκούν μία δύναμη σε κάθε σημείο του αγωγού. Η διεύθυνση της δύναμης στον αγωγό είναι πάντοτε τέτοια ώστε να **αντιτίθεται** στη σχετική κίνηση. Έτσι η δύναμη αυτή μπορεί να παριστάνεται όπως η δύναμη τριβής ιξώδους (στον αέρα) δηλαδή $F = -bv$. Στην περίπτωση αυτή η σταθερά b είναι ανάλογη της ηλεκτρικής αγωγιμότητας του υλικού, της επιφάνειας του αγωγού στην οποία εφαρμόζεται το μαγνητικό πεδίο και του τετραγώνου της έντασης του μαγνητικού πεδίου.

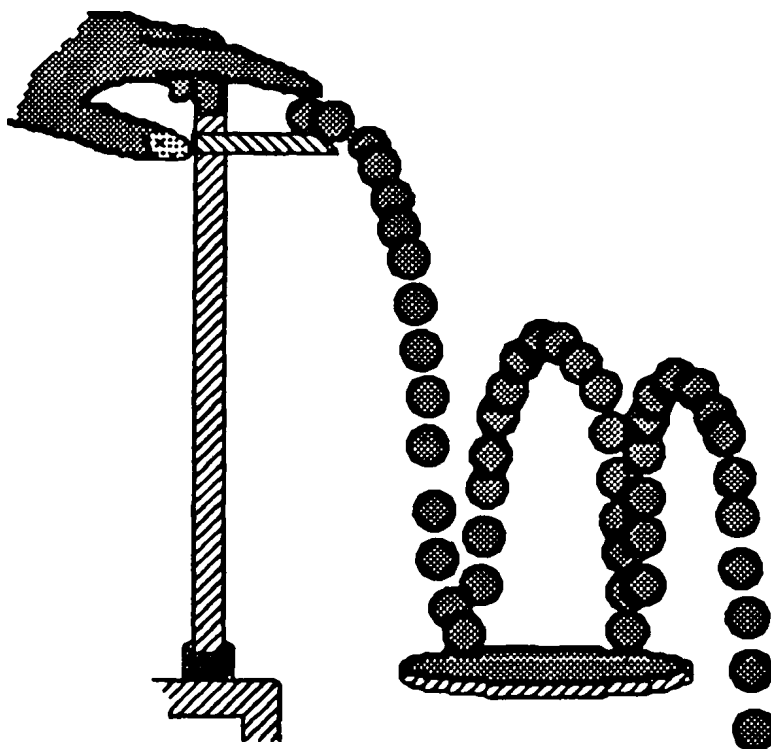
Στο πείραμα-μας εφαρμόζουμε μόνιμους μαγνήτες στους δρομείς. Η μαγνητική απόσβεση οφείλεται στα ρεύματα μετατόπισης που εμφανίζονται στην αεροτροχιά σαν αποτέλεσμα της σχετικής κίνησης της αεροτροχιάς ως προς τους μαγνήτες.

Ένα άλλο παράδειγμα δυνάμεων απόσβεσης που αναφέραμε είναι οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης κατά τις μη ελαστικές κρούσεις. Την περίπτωση αυτή μπορούμε να την εξετάσουμε στο εργαστήριο-μας με τους δρομείς σε αεροτροχιές. Όταν ένας δρομέας συγκρούεται με άλλο δρομέα ή με το τοίχωμα της αεροτροχιάς, η σχετική ταχύτητα μετά την κρούση γίνεται μικρότερη από αυτή προ της κρούσης. Όπως περιγράφεται στην άσκηση 6, ο λόγος αυτών των ταχυτήτων ονομάζεται **συντελεστής κρούσης** και δίνεται από τη σχέση

$$e = \frac{u_2 - u_1}{u_{o2} - u_{o1}} \quad (8.6)$$

Τελικά αναφερόμαστε στο πρόβλημα της μπάλας που πηδάει διαδοχικά, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.





Σχήμα 1. Πολλαπλή φωτογραφία μπάλας που πηδάει διαδοχικά
(Από το *University Physics*, by Sears and Zemansky).

Όπως δείχνει το σχήμα, το ύψος στο οποίο πηδάει η μπάλα συνεχώς ελαττώνεται με την επίδραση των δυνάμεων απόσβεσης. Με τη βοήθεια του συντελεστή κρούσης μπορούμε να βρούμε τους λόγους των διαδοχικών ανυψώσεων. Ένα ενδιαφέρον ανάλογο του προβλήματος της μπάλας πετυχαίνεται στο εργαστήριο, αν δώσουμε μία κλίση στην αεροτροχιά κατά γωνία ϕ και αφήσουμε ένα δρομέα ελεύθερο από την κορυφή της αεροτροχιάς να κινηθεί προς τα κάτω. Όταν φθάσει στο τοίχωμα του κάτω άκρου της αεροτροχιάς προσκρούει και γυρίζει πίσω, αλλά δεν επιστρέφει στην αρχική θέση. Μετά από μία σειρά διαδοχικών κρούσεων το ύψος ελαττώνεται συνεχώς και τελικά ο δρομέας παραμένει στη βάση της αεροτροχιάς. Εάν η αρχική απόσταση του δρομέα από τη βάση της αεροτροχιάς είναι x_0 , τότε μετά την πρώτη κρούση φθάνει στην απόσταση x_1 , μετά τη δεύτερη στην x_2 κ.λ.π. Αυτές οι αποστάσεις μπορούν να μετρηθούν.



Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος μπορούν να λυθούν ακριβώς. Οι λύσεις όμως αυτές είναι πολύπλοκες και όχι διαφωτιστικές. Μία προσεγγιστική ανάλυση είναι πιο χρήσιμη, παρόλα που έχουμε συγχρόνως δυνάμεις ιξώδους και κρούσης. Αργότερα θα δούμε ότι, ανάλογα με την περίπτωση η μία από αυτές τις δυνάμεις είναι επικρατέστερη της άλλης. Θεωρώντας αρχικά τις δυνάμεις ιξώδους, βρίσκουμε ότι η αρχική δυναμική ενέργεια στη βάση της αεροτροχιάς είναι $mgx_0 \sin\phi$ και ότι μετά την πρώτη κρούση γίνεται $mgx_1 \sin\phi$. Έστω ότι η διαφορά απόστασης προ και μετά την κρούση είναι $\Delta x = x_1 - x_0$, οπότε η αντίστοιχη απώλεια δυναμικής ενέργειας είναι

$$mg \sin\phi \Delta x \quad (8.7)$$

Επειδή η δύναμη βαρύτητας είναι συντηρητική, η απώλεια αυτής της ενέργειας οφείλεται αποκλειστικά στο έργο που γίνεται ενάντια της δύναμης τριβής. Το έργο που παράγεται από τη δύναμη τριβής κατά το πρώτο κατέβασμα από τη θέση x_0 είναι

$$W = \int_0^{x_0} F dx = \int_0^{x_0} -b dx \quad (8.8)$$

Η επιτάχυνση του δρομέα είναι $a = g \sin\phi$ και η ταχύτητα σε οποιοδήποτε σημείο x της τροχιάς είναι $u^2 = 2ax = 2gx \sin\phi$. Λύνοντας ως προς x και εισάγοντας την τιμή αυτή στην (8.8) βρίσκουμε

$$W = \int_0^{x_0} -b(2ax)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{2b(2a)^{\frac{1}{2}}(x_0)^{\frac{3}{2}}}{3} \quad (8.9)$$

Το έργο που παράγεται στην επιστροφή είναι προσεγγιστικά το ίδιο. Έτσι η ολική μεταβολή της ενέργειας που αντιστοιχεί σε μία κρούση και οφείλεται στην τριβή είναι $2W$. Τελικά συνδυάζοντας την (8.9) με την (8.7) και λύνοντας ως προς Δx έχουμε



$$\Delta x = - \frac{b (2x_0)^{\frac{3}{2}}}{3ma^{\frac{1}{2}}} \quad (8.10)$$

Έτσι η μεταβολή της απόστασης μετά την πρώτη κρούση είναι ανάλογη της $\frac{3}{2}$ δύναμης της αρχικής απόστασης. Όμοια, η μεταβολή της απόστασης μετά τη δεύτερη κρούση είναι $x_1^{\frac{3}{2}}$. Με λογαρίθμηση της (8.10), για οποιοδήποτε x έχουμε

$$\log (-\Delta x) = \frac{3}{2} \log x + \log \frac{2^{\frac{3}{2}} b}{3ma^{\frac{1}{2}}} \quad (8.11)$$

Ξεκινώντας από τον ορισμό του e για την περίπτωση διαδοχικών κρούσεων έχουμε

$$e = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\sqrt{u_2^2}}{\sqrt{u_1^2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}mu_2^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}mu_1^2}} = \frac{\sqrt{K_2}}{\sqrt{K_1}} \quad (8.12)$$

Με άλλα λόγια ο συντελεστής κρούσης είναι ανάλογος της τετραγωνικής ρίζας του λόγου των κινητικών ενεργειών προ και μετά την κρούση. Όμοια από τον ορισμό του e και από τη σχέση $u^2 = 2ax$ έχουμε

$$e = \frac{\sqrt{u_2^2}}{\sqrt{u_1^2}} = \frac{\sqrt{2ax_2}}{\sqrt{2ax_1}} = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} \quad (8.13)$$

ή

$$e^2 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_0}$$



αυτό σημαίνει ότι

$$x_1 = x_0 e^{-2} \quad x_2 = x_1 e^{-2}$$

Έτσι η διαφορά Δx μετά την πρώτη κρούση γίνεται

$$\Delta x = x_1 - x_0 = -(1 - e^{-2}) x_0 \quad (8.14)$$

και μετά τη δεύτερη

$$\Delta x = -(1 - e^{-2}) x_1 \text{ κ.ο.κ}$$

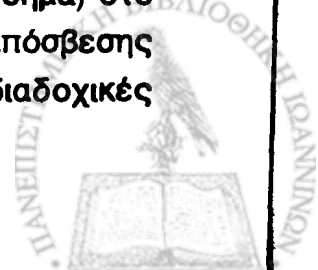
Λογαριθμίζοντας την (8.14) για οποιοδήποτε x έχουμε

$$\log(-\Delta x) = \log x + \log(1 - e^{-2}) \quad (8.15)$$

Στην περίπτωση της μπάλας όλες οι σχέσεις ισχύουν εάν θέσω αντί για την απόσταση x το ύψος y που πηδάει η μπάλα.

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, θα μελετήσουμε δυνάμεις απόσβεσης με κίνηση δρομέων σε αεροτροχιές. Τη μελέτη αυτή θα την κάνουμε σε οριζόντια αεροτροχιά με ένα δρομέα που κινείται με πολύ μικρή ταχύτητα και για ένα δρομέα στον οποίο προσαρμόζουμε μαγνήτες με κατάλληλο προσανατολισμό. Επίσης θα μελετήσουμε το πρόβλημα της μπάλας που πηδάει, με τη βοήθεια του δρομέα που συγκρούεται με το τοίχωμα κεκλιμένης αεροτροχιάς. Η δύναμη απόσβεσης κατά την οριζόντια κίνηση του δρομέα δίνεται με τη σχέση (8.1). Η σταθερά απόσβεσης b χαρακτηρίζει τη δύναμη και θα προσδιοριστεί στο πείραμα-μας με τη βοήθεια της σχέσης (8.4). Στην κεκλιμένη αεροτροχιά θα μετρήσουμε τη διαδοχική ελάττωση του ύψους που φθάνει ο δρομέας μετά την κρούση (πήδημα) στο τοίχωμα και από τη σχέση (8.10) θα προσδιορίσουμε τη σταθερά απόσβεσης b . Επίσης θα μελετήσουμε την εξίσωση που περιγράφει τις διαδοχικές



σ
τ
φ
α
δ
α
δ
ε
π
τ
π
α
α

κρούσεις του δρομέα. Τελικά θα πειραματιστούμε στην κρούση δύο δρομέων ή ενός δρομέα με το τοίχωμα. Στην περίπτωση αυτή θα υπολογίσουμε το συντελεστή κρούσης από τη σχέση (8.6).

Προεργασία

- α) Σύνδεση αεραντλίας, μετασχηματιστού και χρονομέτρου με το δίκτυο (220 Volt).
- β) Σύνδεση φωτοανιχνευτών με το μετασχηματιστή (12 V) και τα START του χρονομέτρου (βλέπε άσκ.1). Ο περιστροφικός μεταγωγός επιλογής των συναρτήσεων F βρίσκεται στην θέση F_2 .
- γ) Οριζοντίωση της αεροτροχιάς (βλέπε άσκηση 2).

3.1 Υπολογισμός της Σταθεράς Απόσβεσης b

3.1.1 Περίπτωση Επίπεδης Αεροτροχιάς

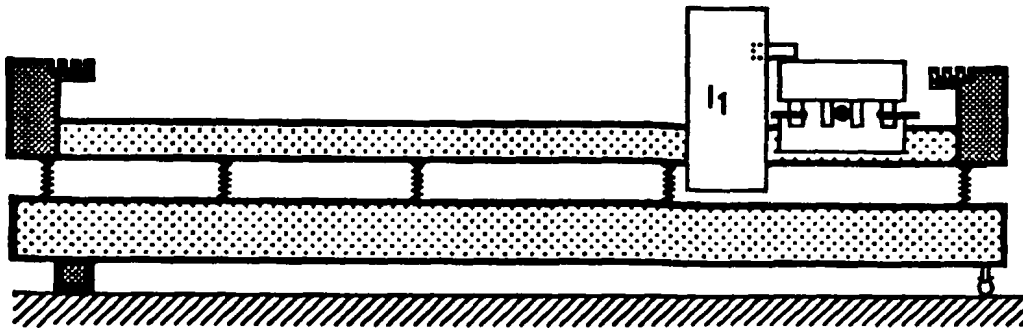
α) Κίνηση Δρομέα με Μικρή Ταχύτητα

Μετά την οριζοντίωση τοποθετούμε ένα δρομέα πάνω στην αεροτροχιά. Στο δρομέα προσαρμόζουμε μία σημαία των 5.0 cm. Τοποθετούμε ένα φωτοανιχνευτή I_1 στην αρχή της αεροτροχιάς, όπως φαίνεται στο Σχ. 2, έτσι ώστε ο δρομέας να βρίσκεται 1mm μακρύτερα από αυτή που αρχίζει να μετρά το χρονόμετρο. Με τη χρήση της σφενδόνης δίνουμε μία τέτοια ταχύτητα u_0 στο δρομέα έτσι ώστε να μη φθάνει στο απέναντι άκρο της αεροτροχιάς. Προσδιορίζουμε την απόσταση x που διανύει ο δρομέας καθώς και την αρχική ταχύτητα u_0 του δρομέα.

Επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση 5 φορές περίπου και για κάθε x μετρούμε και τον αρχικό χρόνο t που κάνει η σημαία να περάσει το φωτοανιχνευτή I_1 . Παίρνουμε τις ίδιες μετρήσεις για 3-4 διαφορετικές αρχικές ταχύτητες u_0 .

Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 1.





Σχήμα 2. Σύστημα δρομέα, φωτοανιχνευτή πάνω σε αεροτροχιά.

Πίνακας 1

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της σταθεράς b

α/α	x (cm)					t (sec)					$x = \frac{\sum x_i^*}{5}$	$t = \frac{\sum t_i^*}{5}$
	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅	(cm)	(sec)

$i = 1, \dots, 5.$

Από τις τιμές του Πίνακα 1:

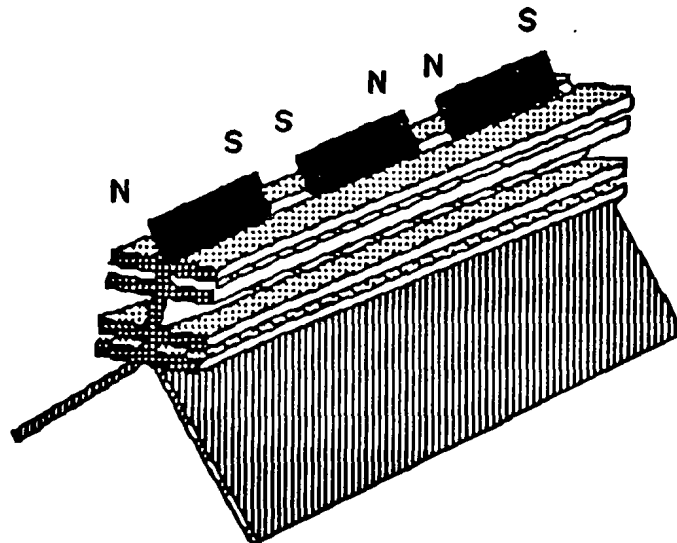
Υπολογίστε τη σταθερά b για κάθε x .



β) Κίνηση Δρομέα με Προσαρμογή Μαγνητών

Στην περίπτωση αυτή μετρούμε το ολικό b που οφείλεται στη μαγνητική και ιεώδη απόσβεση.

Τοποθετούμε συμμετρικά 4 μαγνήτες πάνω στο δρομέα, όπως φαίνεται στο Σχ. 3 και επαναλαμβάνουμε την ίδια δουλειά όπως προηγούμενα. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 2.



Σχήμα 3. Δύο δρομείς συνδεμένοι με ελατήριο.

Πίνακας 2

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της σταθεράς b

α/α	x (cm)					t (sec)					$x = \frac{\sum x_i^*}{5}$	$t = \frac{\sum t_i^*}{5}$
	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅	(cm)	(sec)

* i = 1, , 5.

Από τις τιμές του Πίνακα 2:

- 1) Υπολογίσετε τη σταθερά b για κάθε x .
- 2) Συγκρίνετε τις τιμές του b στις (α) και (β) περιπτώσεις.



3.1.2 Περίπτωση Κεκλιμένης Αεροτροχιάς

α) Κίνηση Δρομέα Χωρίς Μαγνήτες

Τοποθετούμε κάτω από τη βίδα οριζοντίωσης ένα ξύλινο παραλληλεπίπεδο, περίπου 0.8 cm, οπότε η τροχιά γίνεται κεκλιμένη. Κρατάμε ένα δρομέα σε μία ορισμένη θέση x_0 κοντά στην αρχή της αεροτροχιάς. Όταν αφήσουμε το δρομέα κατέρχεται με μία επιτάχυνση $a = g \sin \theta$, όπου θ η γωνία κλίσης. Συγκρούεται με το τοίχωμα της αεροτροχιάς και επιστρέφει στο σημείο x_1 . Υπολογίζουμε τη διαφορά $\Delta x = x_0 - x_1$. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη δουλειά τουλάχιστον 5 φορές. Παίρνουμε τις ίδιες μετρήσεις για 10 περίπου διαφορετικά διαστήματα x_0 και οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της σταθεράς b

a/a	x_0 (cm)	Δx (cm)					$\Delta x = \frac{\sum \Delta x_i^*}{5}$ (cm)
		Δx_1	Δx_2	Δx_3	Δx_4	Δx_5	
1							
2							
3							
.							
.							
.							

* $i = 1, 2, \dots, 5$.

Από τις τιμές του Πίνακα 3:

- 1) Να γίνει η γραφική παράσταση $\Delta x = f(x_0)$.
- 2) Να προσδιορίσετε την ακριβή μορφή της $\Delta x = f(x_0)$.
- 3) Να συγκριθεί η μορφή που θα βρείτε με τη σχέση (8.10).
- 4) Να υπολογίσετε τη σταθερά b.



β) Κίνηση Δρομέα με Μαγνήτες

Τοποθετούμε πάλι 4 μαγνήτες συμμετρικά πάνω στο δρομέα και επαναλαμβάνουμε την ίδια δουλειά, όπως προηγούμενα. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 4.

Πίνακας 4

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της σταθεράς b

α/α	x ₀ (cm)	Δx (cm)					Δx = $\frac{\sum \Delta x_i^*}{5}$ (cm)
		Δx ₁	Δx ₂	Δx ₃	Δx ₄	Δx ₅	
1							
2							
3							
.							
.							
.							

* i = 1, 2, ..., 5.

Από τις τιμές του Πίνακα 4:

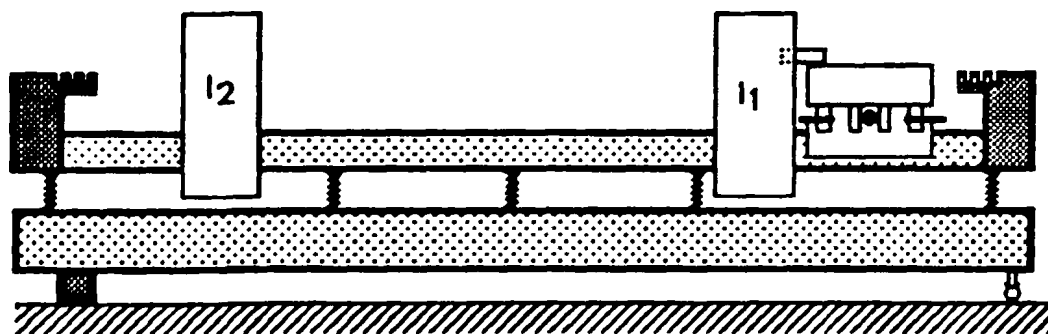
- 1) Να γίνει η γραφική παράσταση $\Delta x = f(x_0)$.
- 2) Να προσδιορίσετε την ακριβή μορφή της $\Delta x = f(x_0)$.
- 3) Να συγκριθεί η μορφή που θα βρείτε με τη σχέση (8.10).
- 4) Να υπολογίσετε τη σταθερά b.



3.2 Υπολογισμός του Συντελεστή Κρούσης •

3.2.1 Κρούση Ενός Δρομέα με το Τοίχωμα της Αεροτροχιάς

Τοποθετούμε το δρομέα M_1 στη μία άκρη της αεροτροχιάς ενώ η άλλη αποτελεί το ακίνητο τοίχωμα. Για τη μέτρηση των ταχυτήτων προ και μετά την κρούση u_{01} και u_1 αντίστοιχα χρησιμοποιούμε την ίδια μέθοδο με αυτή για τη μέτρηση της στιγμιαίας ταχύτητας (βλέπε άσκ. 2). Δηλαδή χρησιμοποιούμε μία σημαία μήκους 5.0 cm που την προσαρμόζουμε πάνω στο δρομέα M_1 . Μετρούμε τους χρόνους t_0 και t_1 που χρειάζεται η σημαία να περάσει μέσα από τους φωτοανιχνευτές πριν την κρούση και μετά την κρούση. Οι φωτοανιχνευτές I_1 και I_2 τοποθετούνται πάνω στην αεροτροχιά όπως φαίνεται στο Σχ. 4. Η εκκίνηση του δρομέα γίνεται με τη βοήθεια της σφενδόνης. Για την ίδια αρχική ταχύτητα επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση τουλάχιστον 5 φορές.



Σχήμα 4. Σύστημα αεροτροχιάς με τους φωτοανιχνευτές και το δρομέα.

Παίρνουμε 2-4 διαφορετικές αρχικές ταχύτητες. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 5.



Πίνακας 5

Μετρήσεις για τον υπολογισμό συντελεστή κρούσης e

a/a	t_0 (sec)					$t_0 = \frac{\sum t_{0i}^*}{5}$ (sec)	t_1 (sec)					$t_1 = \frac{\sum t_{1i}^*}{5}$ (sec)
	t_{01}	t_{02}	t_{03}	t_{04}	t_{05}		t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	
1												
2												
3												
.												
.												
.												

$i = 1, 2, \dots, 5.$

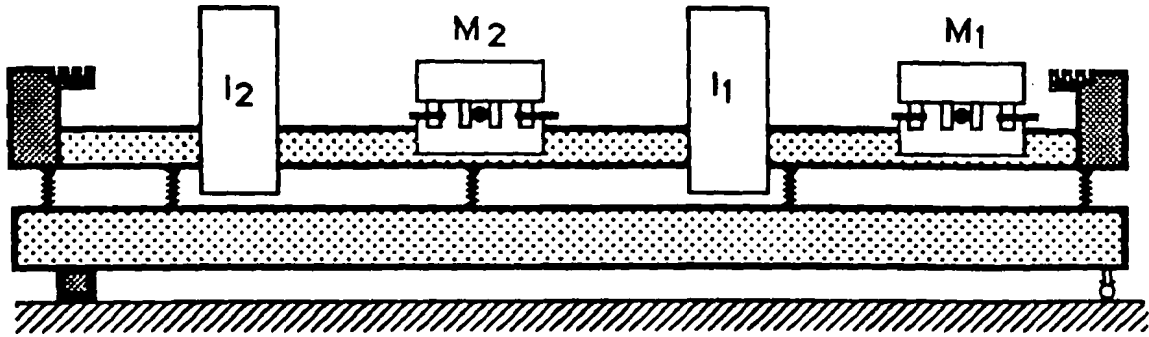
Από τις τιμές του Πίνακα 5:

Να υπολογίσετε το συντελεστή κρούσης e για κάθε αρχική ταχύτητα u_0 .

3.2.2 Κρούση ενός Δρομέα M_1 με Άλλο Ακίνητο Δρομέα M_2

Σε αυτή την περίπτωση ο δρομέας που έχει μάζα M_2 μένει ακίνητος στη μέση περίπου της αεροτροχιάς. Τοποθετούμε δύο φωτοανιχνευτές δεξιά και αριστερά σε απόσταση περίπου 30.0 cm από το δρομέα M_2 , όπως δείχνει το Σχ. 5: Ο φωτοανιχνευτής I_1 χρησιμοποιείται για τη μέτρηση των χρόνων t_{01} και t_1 του δρομέα μάζας M_1 , ενώ ο φωτοανιχνευτής I_2 χρησιμοποιείται για τη μέτρηση t_2 του άλλου δρομέα. Προσέξτε τώρα γιατί το Α χρονόμετρο μετρά διαδοχικά τους χρόνους t_{01} και t_1 . Η εκκίνηση του δρομέα γίνεται με τη βοήθεια της σφενδόνης. Παίρνουμε 5 τουλάχιστο φορές τους χρόνους για την ίδια αρχική ταχύτητα. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για 2-4 αρχικές ταχύτητες. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 6.





Σχήμα 5. Σύστημα αεροτροχιάς για την περίπτωση κρούσης δύο δρομέων από τους οποίους ο ένας παραμένει αρχικά ακίνητος ($u_0 = 0$).

Πίνακας 6

Μετρήσεις για τον υπολογισμό του συντελεστή κρούσης e

α/α	t_0 (sec)				t_1 (sec)				t_2 (sec)				$t_0 = \frac{\sum t_{0i}^*}{5}$ (sec)	$t_1 = \frac{\sum t_{1i}^*}{5}$ (sec)	$t_2 = \frac{\sum t_{2i}^*}{5}$ (sec)
	t_{01}			t_{05}	t_{11}			t_{15}	t_{21}			t_{25}			
1															
2															
3															
.															
.															
.															

$i = 1, \dots, 5.$

Από τις τιμές του Πίνακα 6:

- 1) Να υπολογίσετε τις ταχύτητες u_0, u_1, u_2 για κάθε μέτρηση της u_0 .
- 2) Να υπολογίσετε το συντελεστή κρούσης e .



ΑΣΚΗΣΗ 9

απλη αρμονικη κινηση

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όπως μάθαμε, οποιαδήποτε κίνηση η οποία επαναλαμβάνεται κατά ίσα χρονικά διαστήματα λέγεται **περιοδική κίνηση**. Όταν η μετατόπιση ενός σωμάτιου που εκτελεί περιοδική κίνηση εκφράζεται σε συνάρτηση ημιτόνων και συνημιτόνων τότε η περιοδική αυτή κίνηση ονομάζεται **αρμονική κίνηση**. Εάν ένα σώμα που εκτελεί περιοδική κίνηση πάει και έρχεται στην ίδια τροχιά, λέμε ότι εκτελεί **ταλάντωση**. Στην περίπτωση που η κίνηση του ταλαντούμενου σώματος είναι αρμονική τότε το σώμα λέγεται **αρμονικός ταλαντωτής**. Υπάρχουν πολλοί ταλαντωτές μερικά παραδείγματα είναι, το εκκρεμές ενός ρολογιού, η χορδή ενός βιολιού, η προσδεμένη σε ελατήριο μάζα, τα άτομα ενός μορίου, τα άτομα του πλέγματος ενός στερεού, τα μόρια του αέρα τη στιγμή που περνά ένα ηχητικό κύμα, και άλλα. Πέρα από τα μηχανικά συστήματα που ταλαντώνονται, τα ραδιοκύματα, τα μικροκύματα και το ορατό φως είναι ταλαντούμενα διανύσματα μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου. Οι μηχανικές και ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις περιγράφονται από τις ίδιες βασικές μαθηματικές εξισώσεις.

Τα περισσότερα ταλαντούμενα σώματα δεν κινούνται πάντοτε ανάμεσα σε σταθερά τροχιακά όρια, γιατί οι δυνάμεις τριβής καταναλώνουν την ενέργεια της κίνησης. Η χορδή ενός βιολιού γρήγορα σταματάει να ταλαντώνεται. Οι κινήσεις αυτές ονομάζονται **φθίνουσες αρμονικές κινήσεις**. Μπορούμε να εξουδετερώσουμε τα αποτελέσματα της τριβής προσφέροντας ενέργεια στο ταλαντούμενο σύστημα έτσι ώστε να

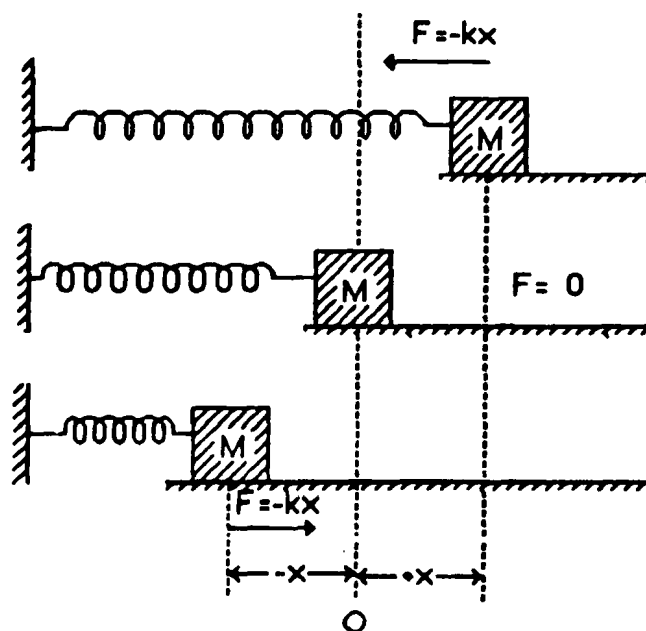


αναπληρώνεται η ενέργεια που καταναλώνει η τριβή. Το ελατήριο σε ένα ρολόι προσφέρει ενέργεια ώστε το ταλαντούμενο σύστημα, δηλαδή ο τροχός να κινείται χωρίς φθορά. Το τελευταίο αυτό είδος της ταλάντωσης ονομάζεται **εξαναγκασμένη ταλάντωση**. Οι φθίνουσες και οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις θα μελετηθούν σε επόμενες ασκήσεις.

Στην άσκηση αυτή θα περιοριστούμε στην απλή αρμονική κίνηση. Ο απλούστερος αρμονικός ταλαντωτής είναι η μάζα που είναι δεμένη στην άκρη ενός ελατηρίου. Το ρόλο της μάζας μπορεί να τον παίζει ένας δρομέας που κινείται σε αεροτροχιά με την επίδραση ενός ελατηρίου προσαρμοσμένου στο άκρο του.

2. ΘΕΩΡΙΑ

Το Σχ. 1 δείχνει ένα απλό αρμονικό ταλαντωτή. Εάν τεντώσουμε το ελατήριο και απομακρύνουμε το σώμα μάζας M σε απόσταση x από τη θέση ισορροπίας εξασκείται στο σώμα δύναμη επαναφοράς $F = -kx$. Η δύναμη επαναφοράς τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας. Όταν όμως το σώμα φθάνει στη θέση ισορροπίας έχει μία αποκτημένη ταχύτητα που το εξαναγκάζει να συνεχίσει την πορεία του. Το ελατήριο συσπειρώνεται και εξασκείται πάλι στο σώμα δύναμη επαναφοράς $F = -kx$. Η θέση μέγιστης συσπείρωσης είναι ίση με τη μέγιστη απομάκρυνση. Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου έχει μελετηθεί στην άσκηση 5, είναι συντηρητική δύναμη και δίνεται από το νόμο του Hooke



Σχήμα 1. Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

$$F(x) = - kx \quad (9.1)$$

όπου k είναι σταθερά δύναμης του ελατηρίου και x η απομάκρυνση της μάζας M από τη θέση ισορροπίας. Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$- kx = Ma = M \frac{d^2x}{dt^2}$$

ή

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (9.2)$$

$$\text{όπου } \omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Η εξίσωση αυτή λέγεται **εξίσωση κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή**.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι συναρτήσεις

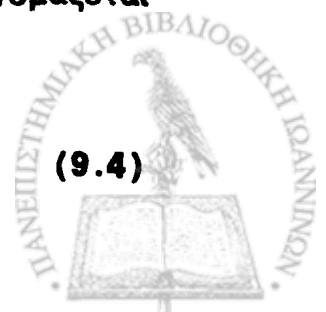
$$x = A \cos \omega t \quad (9.3)$$

$$x = A \sin \omega t$$

είναι λύσεις της εξίσωσης του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Η σταθερά A είναι το πλάτος της κίνησης και είναι η μέγιστη απομάκρυνση της μάζας από τη θέση ισορροπίας· γενικώτερα όμως εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο φέρνεται το σύστημα στη θέση της αρχικής κίνησης. Η ω εξαρτάται μόνο από τις βασικές ιδιότητες του συστήματος, δηλ. τις σταθερές k και M .

Κάθε φορά που η ποσότητα ωt αυξάνεται κατά 2π , ο ταλαντωτής εκτελεί ένα πλήρη κύκλο. Ο χρόνος για ένα πλήρη κύκλο ονομάζεται περίοδος και συμβολίζεται με T . Σύμφωνα με τον ορισμό

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \quad (9.4)$$



Το αντίστροφο της περιόδου είναι ο αριθμός των κύκλων στη μονάδα του χρόνου ή **συχνότητα** και παριστάνεται με f . Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (9.5)$$

Η ποσότητα ω παριστάνει το χρονικό ρυθμό μεταβολής της ποσότητας ωt στις εξισώσεις (9.3). Επειδή το ωt παίζει το ρόλο της γωνίας, η ω ονομάζεται συνήθως **κυκλική συχνότητα**.

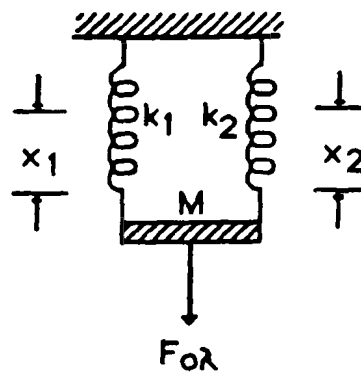
Σε ένα απλό αρμονικό ταλαντωτή η ολική ενέργεια διατηρείται και ισούται με το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας, $E_{ολ} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$. Σε κάθε ταλάντωση έχουμε συνεχή εναλλαγή κινητικής και δυναμικής ενέργειας, έτσι ώστε οι όροι x και v να αλλάζουν ενώ η $E_{ολ}$ παραμένει σταθερή.

Οι ίδιες ακριβώς μαθηματικές σχέσεις ισχύουν όταν ο αρμονικός ταλαντωτής ελατήριο - μάζα ταλαντώνεται κατακόρυφα.

2.1 Τρόποι Σύνδεσης Ελατηρίων σε Αρμονικούς Ταλαντωτές

α) Παράλληλη Σύνδεση

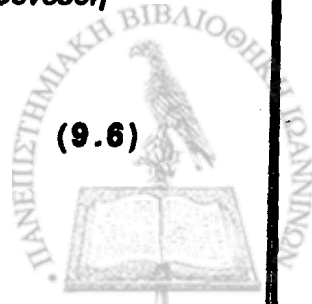
Σώμα μάζας M συνδέεται στα άκρα δύο ελατηρίων που έχουν σταθερές δυνάμεις k_1 και k_2 αντίστοιχα. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων προσαρμόζονται σε κάποια οροφή, όπως στο Σχ. 2. Τα δύο ελατήρια είναι παράλληλα και μετατοπίζονται κατά ίσα διαστήματα $x_1 = x_2 = x$. Η ολική δύναμη επαφής προέρχεται από τη συνεισφορά των δύο ελατηρίων. Έτσι η ολική δύναμη είναι



Σχήμα 2. Παράλληλη σύνδεση

$$F_{ολ} = F_1 + F_2$$

(9.6)



Ε
μ
ε
F₁
Α
αν

Η c
δρλ

$$\text{ή} \quad k_{\text{ολ}} x_{\text{ολ}} = k_1 x_1 + k_2 x_2 \quad (9.7)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη $x_1 = x_2 = x_{\text{ολ}} = x$ η (9.7) γράφεται

$$k_{\text{ολ}} x = k_1 x + k_2 x$$

$$\text{ή} \quad k_{\text{ολ}} = k_1 + k_2 \quad (9.8)$$

με άλλα λόγια στην παράλληλη σύνδεση ελατηρίων η ολική σταθερά δύναμης του συστήματος των ελατηρίων ισούται με το άθροισμα των σταθερών των δυνάμεων του κάθε ελατηρίου.

β) Σύνδεση σε Σειρά

Στην περίπτωση αυτή, η ολική μετατόπιση του εξαρτωμένου σώματος $x_{\text{ολ}}$ ισούται με το άθροισμα των μετατοπίσεων των δύο ελατηρίων x_1 και x_2 , όπως φαίνεται στο Σχ. 3 δηλαδή

$$x_{\text{ολ}} = x_1 + x_2 \quad (9.9)$$

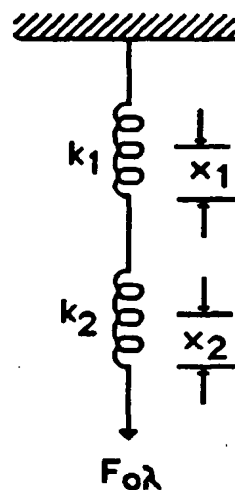
Εάν εφαρμόσουμε τον νόμο του Hooke για την ολική μετατόπιση και τις επί μέρους μετατοπίσεις των δύο ελατηρίων, έχουμε αντίστοιχα

$$F_{\text{ολ}} = k_{\text{ολ}} x_{\text{ολ}}, \quad F_1 = k_1 x_1, \quad F_2 = k_2 x_2$$

Λύνοντας την κάθε μία ως προς τη μετατόπιση x και θέτοντας τις αντίστοιχες τιμές στην (9.9) έχουμε

$$\frac{F_{\text{ολ}}}{k_{\text{ολ}}} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2} \quad (9.10)$$

Η ολική τάση είναι ίδια με τις τάσεις που επιφέρονται σε κάθε ελατήριο, δηλαδή



Σχήμα 3. Σύνδεση ελατηρίων σε σειρά



$$F_{0\lambda} = F_1 = F_2 = F$$

έχοντας υπόψη την τελευταία σχέση η (9.10) γράφεται

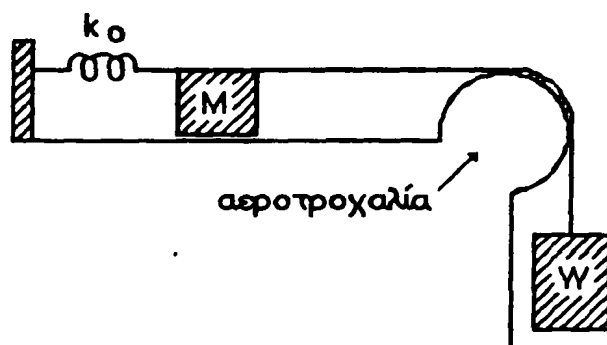
$$\frac{F}{k_{0\lambda}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

ή

$$\frac{1}{k_{0\lambda}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (9.11)$$

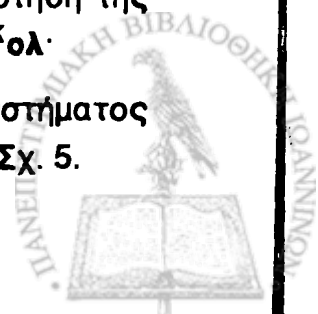
Στο πείραμά μας θα χρησιμοποιήσουμε συστήματα δρομέων-ελατηρίων πάνω σε αεροτροχιές σαν αρμονικούς ταλαντωτές. Για να γνωρίσουμε τη δύναμη επαναφοράς όταν το ελατήριο μετατοπίζεται κατά x από τη θέση ισορροπίας πρέπει να υπολογίσουμε τη σταθερά δύναμης του ελατηρίου. Ο τρόπος που συνιστάται για το σκοπό αυτό φαίνεται στο Σχ. 4.

Η μία άκρη του ελατηρίου είναι προσαρμοσμένη στην άκρη της αεροτροχιάς ενώ η άλλη συνδέεται στο δρομέα. Επίσης στο δρομέα προσαρμόζεται μία μαγνητοταινία που καταλήγει σε κρεμασμένο βάρος W δια μέσου μίας αεροτροχαλίας. Το σύστημα βρίσκεται αρχικά σε ισορροπία. Μετά αυξάνουμε το βάρος κατά 10.0 gr περίπου μέχρι 40.0 gr, έτσι ώστε να μη ξεπεράσουμε το όριο ελαστικότητας του ελατηρίου. Για κάθε βάρος σημειώνουμε τη μετατόπιση x του δρομέα από τη θέση ισορροπίας. Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση του βάρους (mg) σε συνάρτηση της μετατόπισης x . Από τη γραφική παράσταση προσδιορίζουμε την $k_{0\lambda}$.



Σχήμα 4. Προσδιορισμός της σταθεράς δύναμης $k_{0\lambda}$ του ελατηρίου.

Για να παρακολουθήσουμε μία απλή αρμονική κίνηση συστήματος δρομέων-ελατηρίων σε αεροτροχιά, θεωρούμε την απεικόνιση του Σχ. 5.



Κατά τη μετατόπιση x του δρομέα ενεργεί δύναμη επαναφοράς $F_{ολ} = k_{ολ}x$, όπου $k_{ολ} = k_1 + k_2$ γιατί τα ελατήρια είναι συνδεδεμένα παράλληλα. Από το πείραμα αυτό μπορεί κανείς να προσδιορίσει και τη σταθερά $k_{ολ}$ από τη σχέση

$$k = \frac{4\pi^2 M}{T^2} \quad (9.12)$$

όπου T η περίοδος αιώρησης. Η τιμή του k που προσδιορίζεται με τη μέτρηση της T είναι γνωστή σα "δυναμική σταθερά ελατηρίου", ενώ με την προηγούμενη μέθοδο της αεροτροχιάς είναι γνωστή σα "στατική σταθερά ελατηρίου".

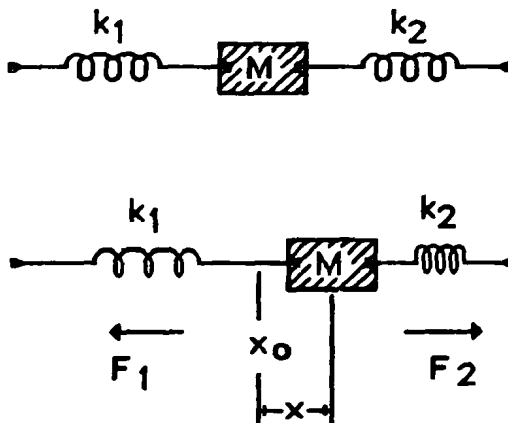
3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Σε αυτή την άσκηση θα προσδιορίσουμε τις σταθερές δυνάμεων διαφόρων ελατηρίων καθώς και την ολική σταθερά δύναμης συνδεδεμένων ελατηρίων. Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε την περίοδο T σα συνάρτηση της μέγιστης απομάκρυνσης πάνω σε οριζόντια και κεκλιμένη αεροτροχιά. Επίσης θα προσδιορίσουμε την περίοδο T σα συνάρτηση της μάζας του δρομέα M και της σταθεράς δύναμης k . Τελικά θα επαληθεύσουμε τη διατήρηση της ενέργειας, $E = K+U = \text{σταθ.}$

Προεργασία

- Σύνδεση αεραντλίας, μετασχηματιστού και χρονομέτρου με το δίκτυο (220 Volt).
- Οριζοντίωση της αεροτροχιάς (βλέπε άσκηση 2).
- Λειτουργία του χρονομέτρου.

Το χρονόμετρο λειτουργεί στη θέση MAN. Η περιγραφή του χρονομέτρου γίνεται στην άσκ. 1.



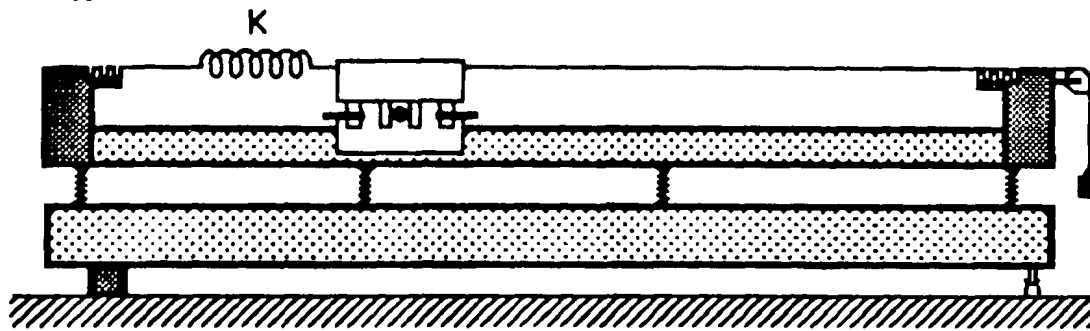
Σχήμα 5. Τυπική απεικόνιση δρομέα-ελατηρίου σαν απλό αρμονικό ταλαντωτή.



3.1 Προσδιορισμός της Στατικής Σταθεράς Ελατηρίων

3.1.1 Χρήση Ενός Ελατηρίου

Συνδέουμε τη μία άκρη ενός ελατηρίου με ένα δρομέα και την άλλη στην αρχή της αεροτροχιάς. Ο δρομέας συνδέεται με νήμα που περνάει πάνω από τροχαλία και καταλήγει σε βαρίδι μάζας $m_1=10.0\text{gr}$ όπως φαίνεται στο Σχ. 6.



Σχήμα 6. Σύστημα δρομέα-ελατηρίου που συνδέεται δια μέσου αεροτροχαλίας με βαρίδι.

Αρχικά προσδιορίζουμε τη θέση ισορροπίας x_1 του δρομέα. Μετά αλλάζουμε τη μάζα του βαριδιού σε 15.0, 20.0, 25.0, 30.0, 35.0, 40.0 gr και προσδιορίζουμε πάλι τις νέες θέσεις ισορροπίας $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ του δρομέα αντίστοιχα. Να γίνει η γραφική παράσταση της σχέσης $\Delta F = f(\Delta x)$ όπου $\Delta x_i = x_i - x_1$ ($i = 2, \dots, 7$) και από αυτή να υπολογισθεί η σταθερά k .

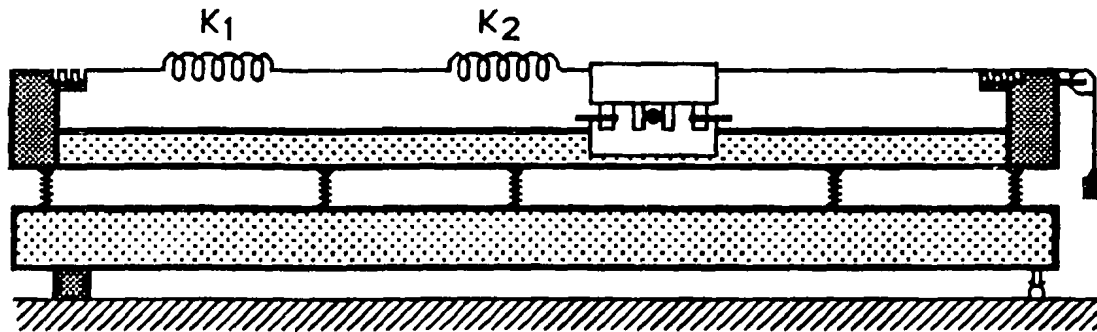
Η παραπάνω διεργασία να γίνει για πέντε ελατήρια που θα χρησιμοποιηθούν στις επόμενες παραγράφους.

3.1.2 Χρήση Δύο Ελατηρίων

α) Σύνδεση σε Σειρά

Με τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου 3.1.1 προσδιορίζουμε τις σταθερές δύο ελατηρίων k_1 και k_2 αντίστοιχα. Συνδέουμε τα δύο ελατήρια το ένα μετά το άλλο. Το ένα άκρο του συστήματος προσαρμόζεται στην αρχή της αεροτροχιάς και το άλλο στο δρομέα. Στη συνέχεια συνδέουμε το δρομέα με νήμα που καταλήγει σε

βαρίδι $m_1 = 10.0 \text{ gr}$ δια μέσου τροχαλίας και προσδιορίζουμε τη θέση ισορροπίας x_1 , όπως φαίνεται στο Σχ. 7.



Σχήμα 7. Σύστημα δρομέα-ελατηρίων που συνδέεται δια μέσου αεροτροχαλίας με βαρίδι.

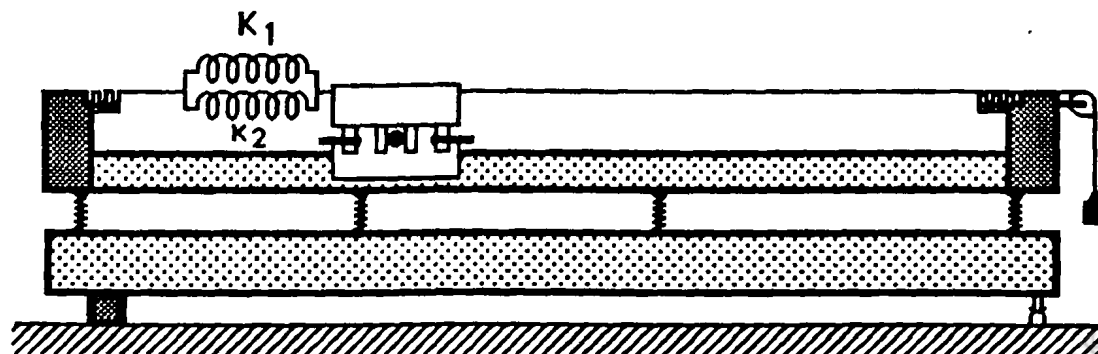
Να υπολογισθεί η ολική σταθερά $k_{ολ}$ του συστήματος των δύο ελατηρίων

- 1) Με τη μέθοδο της παραγράφου 3.1.1
- 2) Από τη σχέση (9.11)

Να συγκριθούν οι δύο τιμές.

β) Παράλληλη Σύνδεση

Συνδέουμε τα δύο ελατήρια k_1 και k_2 (που υπολογίστηκαν στην προηγούμενη σύνδεση) παράλληλα. Το ένα άκρο του συστήματος των ελατηρίων συνδέεται με την αρχή της αεροτροχιάς ενώ το άλλο με το δρομέα. Ο δρομέας συνδέεται διαμέσου νήματος με το βαρίδι $m_1 = 10.0 \text{ gr}$ και προσδιορίζουμε τη θέση ισορροπίας x_1 , όπως δείχνει το Σχ. 8.



Σχήμα 8. Σύστημα δρομέα-ελατηρίων που συνδέεται δια μέσου αεροτροχαλίας με βαρίδι.



Να υπολογισθεί η ολική σταθερά $k_{ολ}$ του συστήματος των ελατηρίων

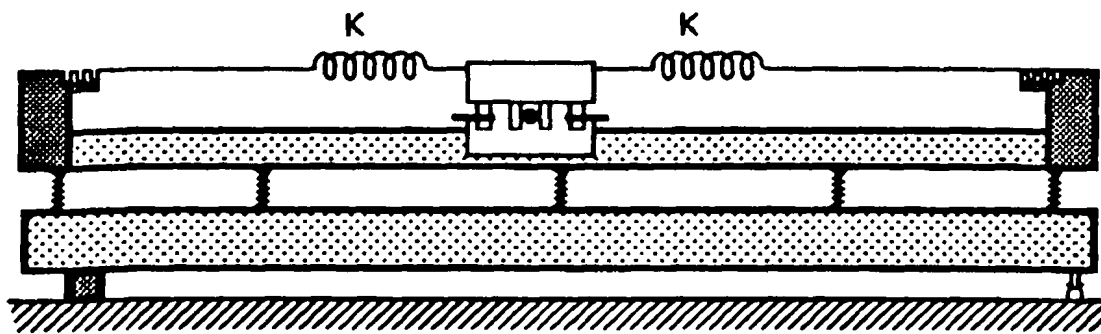
- 1) Με τη μέθοδο της παραγράφου 3.1.1
- 2) Από τη σχέση (9.8)

Να συγκριθούν οι δύο τμές.

3.2 Προσδιορισμός της Περιόδου σαν Συνάρτηση του Μέγιστου Πλάτους

3.2.1 Επίπεδη Αεροτροχιά

Συνδέουμε δύο όμοια ελατήρια γνωστού k (που υπολογίστηκε στην 3.1.1) σε κάθε πλευρά του δρομέα. Το ένα ελατήριο προσαρμόζεται στην αρχή της αεροτροχιάς και το άλλο συνδέεται με σχοινί που καταλήγει στο τέλος της αεροτροχιάς, όπως φαίνεται στο Σχ. 9.



Σχήμα 9. Σύστημα δρομέα-ελατηρίων τοποθετημένο πάνω στην αεροτροχιά.

Προσδιορίζουμε τη θέση ισορροπίας x_0 του δρομέα. Απομακρύνουμε το δρομέα από τη θέση ισορροπίας κατά Δx και μετράμε το χρόνο 10 ταλαντώσεων. Επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση για 5 τουλάχιστο διαφορετικά Δx . Οι τμές καταχωρούνται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της περιόδου T σε συνάρτηση του μέγιστου πλάτους Δx

a/a	Δx (cm)	t (sec)

Από τις τιμές του Πίνακα 1:

- 1) Να βρεθεί η περίοδος $T = \frac{t}{10}$ για κάθε Δx .
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση $T = f(\Delta x)$ και να εξηγηθεί η μορφή της καμπύλης.

3.2.2 Κεκλιμένη Αεροτροχιά

Φέρνουμε την αεροτροχιά σε κεκλιμένη θέση θέτοντας κάτω από τη βίδα οριζοντιώσεως ένα ξύλινο παραλληλεπίπεδο ύψους 2.0 cm. Προσδιορίζουμε πάλι τη θέση ισορροπίας x_0 και απομακρύνουμε το δρομέα κατά Δx . Μετράμε το χρόνο 10 ταλαντώσεων. Επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση για πέντε τουλάχιστο Δx . Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της περιόδου T σε συνάρτηση του μέγιστου πλάτους Δx

a/a	Δx (cm)	t (sec)



Από τις τιμές του Πίνακα 2:

- 1) Να βρεθεί για κάθε Δx η περίοδος $T = \frac{t}{10}$.
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση $T = f(\Delta x)$.
- 3) Να συγκριθούν τα αποτελέσματα της επίπεδης και κεκλιμένης αεροτροχιάς.
- 4) Επηρεάζει η κλίση την περίοδο του ταλαντωτή;

3.3 Προσδιορισμός της Περιόδου T σαν Συνάρτηση της Μάζας του Δρομέα M

Συνδέουμε πάλι τα δύο όμοια ελατήρια με το δρομέα που βρίσκεται πάνω σε οριζοντιωμένη αεροτροχιά, όπως φαίνεται στο Σχ. 9. Προσδιορίζουμε τη θέση ισορροπίας x_0 του δρομέα. Απομακρύνουμε το δρομέα σε σταθερό διάστημα $\Delta x = 15.0 \text{ cm}$. Αλλάζουμε τη μάζα του δρομέα 5 έως 10 φορές και για κάθε μάζα μετράμε το χρόνο 10 ταλαντώσεων. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της περιόδου T σε συνάρτηση της μάζας του δρομέα M

a/a	M (gr)	t (sec)

Από τις τιμές του Πίνακα 3:

- 1) Να βρεθεί η περίοδος $T = \frac{t}{10}$ για κάθε μάζα M .
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση $T = f(M)$.
- 3) Να βρεθεί η ακριβής μορφή της σχέσης $T = f(M)$.



3.4 Προσδιορισμός της Περιόδου T σαν Συνάρτηση της Στατικής Σταθεράς k

Συνδέουμε δύο όμοια ελατήρια, σταθεράς k, με το δρομέα και κάνουμε την ίδια δουλειά, όπως και προηγούμενα. Η μάζα του δρομέα μένει σταθερή. Με τη μέθοδο της παραγράφου 3.1.1 παίρνουμε τιμές για πέντε τουλάχιστο ζεύγη ελατηρίων και μετράμε το χρόνο 10 ταλαντώσεων. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 4.

Πίνακας 4

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της περιόδου T σα συνάρτηση της στατικής σταθεράς k

a/a	k (dyn/cm)	t (sec)

Handwritten notes:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

Από τις τιμές του Πίνακα 4:

- 1) Να βρεθεί η περίοδος $T = \frac{t}{10}$ για κάθε k.
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση $T = f(k)$.
- 3) Να βρεθεί η ακριβής μορφή της σχέσης $T = f(k)$.

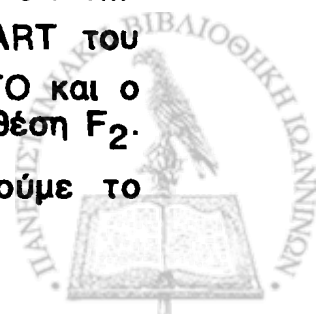
Handwritten formula:

$$k = \frac{1}{4\pi^2} T^2$$

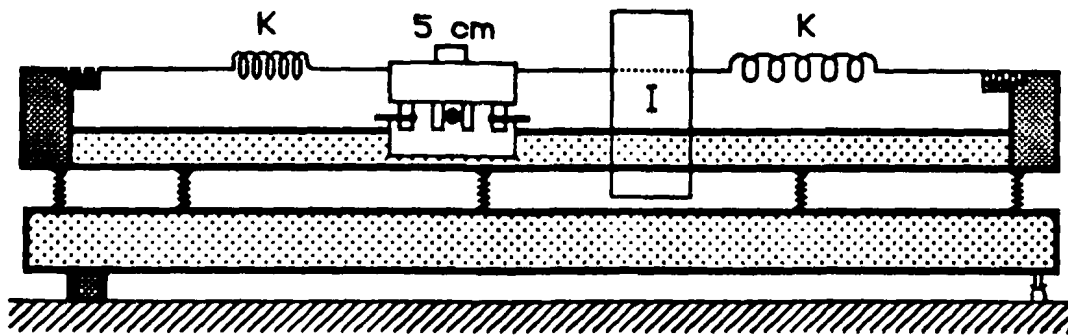
10230000

3.5 Επαλήθευση της Διατήρησης Ενέργειας στην Απλή Αρμονική Κίνηση

Συνδέουμε πάλι τα δύο ελατήρια με το δρομέα, όπως στο Σχ. 9. Προσαρμόζουμε τώρα στη μέση ακριβώς του δρομέα μία σημαία 5.0 cm. Τοποθετούμε ένα φωτοανιχνευτή που συνδέεται με το START του χρονομέτρου. Το χρονόμετρο δουλεύει τώρα στη θέση AUTO και ο περιστροφικός μεταγωγός των συναρτήσεων F βρίσκεται στη θέση F₂. Βρίσκουμε τη θέση ισορροπίας του δρομέα και τοποθετούμε το



φωτοανιχνευτή στο σημείο αυτό. Απομακρύνουμε το δρομέα σε απόσταση $x_{\max} = 20.0 \text{ cm}$ και μετράμε το χρόνο που καταγράφει το χρονόμετρο, όπως φαίνεται στο Σχ. 10. Μετακινούμε το φωτοανιχνευτή κατά 2.0 cm περίπου και προσδιορίζουμε την ταχύτητα σε όλες τις θέσεις μέσα στην περιοχή $+x_{\max}$ έως $-x_{\max}$. Οι τιμές των t και x καταχωρούνται στον Πίνακα 5.



Σχήμα 10. Σύστημα δρομέα-ελατηρίων-φωτοανιχνευτή πάνω στην αεροτροχιά

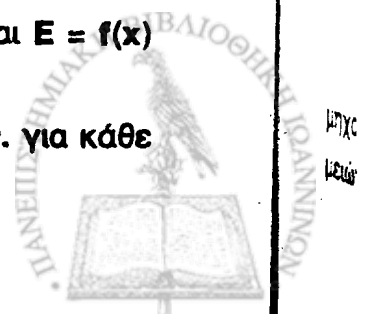
Πίνακας 5

Μετρήσεις για την επαλήθευση της διατήρησης της ενέργειας στην απλή αρμονική κίνηση

a/a	x_i (cm)	t_i (sec)

Από τις τιμές του Πίνακα 5:

- 1) Να βρεθούν οι τιμές των $K = \frac{1}{2} M\omega^2$ και $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$
- 2) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις $K = f(x)$, $U = f(x)$ και $E = f(x)$ και να σχολιαστούν.
- 3) Να επαληθεύσετε τη θεωρητική σχέση $E = K+U = \text{σταθ.}$ για κάθε x_i .



ΑΣΚΗΣΗ 10

φθίνουσα αρμονική κίνηση

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην προηγούμενη άσκηση μελετήσαμε την κίνηση του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Η κίνηση αυτή επαναλαμβάνεται αμείωτα σε ίσα χρονικά διαστήματα. Στην πραγματικότητα όμως το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται και μηδενίζεται βαθμιαία γιατί οι δυνάμεις τριβής καταναλώνουν την ενέργεια της κίνησης. Το πλάτος ταλάντωσης της χορδής ενός βιολιού φθίνει βαθμηδόν και τελικά μηδενίζεται. Η κίνηση αυτή ονομάζεται **φθίνουσα αρμονική κίνηση**.

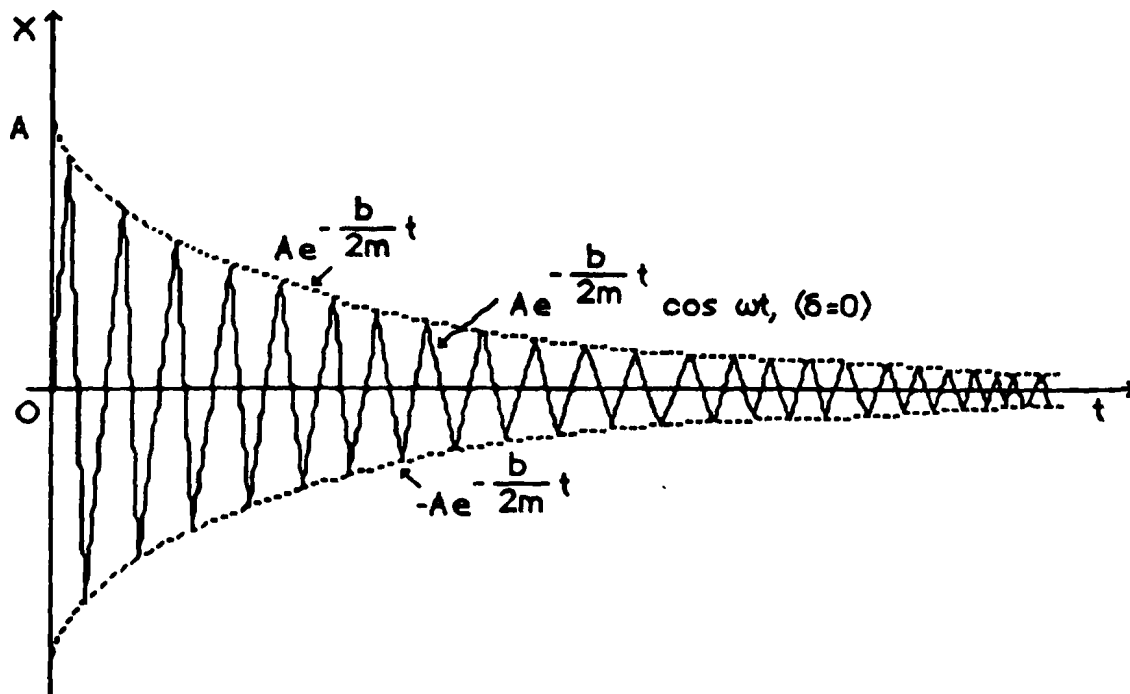
Στην άσκηση αυτή θα μελετήσουμε τη φθίνουσα αρμονική κίνηση δρομέων που συνδέονται με ελατήρια και ταλαντώνονται πάνω σε αεροτροχιές. Όταν ο δρομέας κινείται πολύ αργά ή όταν προστίθεται βαρίδιο ή μαγνήτες στο δρομέα τότε η απόσβεση της ταλάντωσης είναι εμφανής. Η κύρια πηγή απόσβεσης είναι το ιξώδες του γνωστού στρώματος αέρα που υπάρχει μεταξύ του δρομέα και της αεροτροχιάς. Όταν οι δρομείς φέρουν μαγνήτες έχουμε τη μαγνητική απόσβεση. Και οι δύο αυτές πηγές απόσβεσης έχουν εξηγηθεί στην άσκηση 8.

2. ΘΕΩΡΙΑ

Όπως αναφέραμε, στην εισαγωγή, όταν οποιοδήποτε ταλαντούμενο μηχανικό σύστημα τίθεται σε κίνηση το πλάτος των ταλαντώσεων βαθμιαία μειώνεται και το σύστημα ηρεμεί στην αρχική θέση ισορροπίας. Η θέση της



ταλαντούμενης μάζας δίνεται σα συνάρτηση του χρόνου αλλά όχι με μία απλή ημιτονοειδή συνάρτηση, όπως στον απλό αρμονικό ταλαντωτή της άσκησης 9, αλλά με μία συνάρτηση που απεικονίζεται στο Σχ. 1.

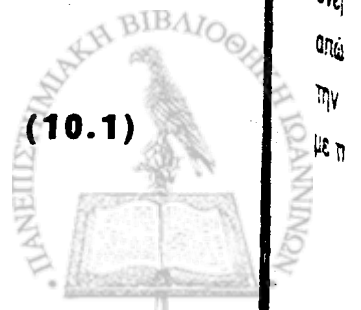


Σχήμα 1. Η μορφή της συνάρτησης $x = f(t)$ για φθίνουσα αρμονική ταλάντωση.

Η μορφή της προηγούμενης συνάρτησης οφείλεται στην ταυτόχρονη παρουσία των δυνάμεων απόσβεσης και των ελαστικών δυνάμεων επαναφοράς των ελατηρίων. Γνωστά παραδείγματα δυνάμεων απόσβεσης είναι το ιξώδες και η μαγνητική απόσβεση που μελετήθηκαν στην άσκηση 8.

Από αυτά που είπαμε στα προηγούμενα προκύπτει ότι η επίδραση της απόσβεσης πρέπει να προστεθεί στο μοντέλο του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Σύμφωνα με τη θεωρία της άσκησης 8, η δύναμη απόσβεσης, είτε οφείλεται στο ιξώδες είτε στη μαγνητική απόσβεση, είναι ανάλογη της ταχύτητας και δίνεται από τη σχέση

$$F = -bv = -b \frac{dx}{dt} \quad (10.1)$$



όπου b είναι η σταθερά απόσβεσης. Συγκεκριμένα ο ρυθμός με τον οποίο οι ταλαντώσεις μειώνονται εξαρτάται από την τιμή του b . Μεγάλη ή μικρή τιμή του b σημαίνει ταχεία ή βραδεία απόσβεση αντίστοιχα. Η δύναμη αυτή που δίνεται από τη σχέση (10.1) πρέπει να περιληφθεί στη διαφορική εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή, που τώρα γίνεται

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (10.2)$$

Μία λεπτομερειακή ανάλυση και εξέταση των ιδιοτήτων του συστήματος με φθίνουσα ταλάντωση μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι να κάνουμε χρήση της γενικής λύσης της εξίσωσης (10.2), που είναι

$$x(t) = A e^{-\frac{b}{2m} t} \cos(\omega t + \delta) \quad (10.3)$$

Ο άλλος τρόπος είναι μία προσεγγιστική μέθοδος στην οποία χρησιμοποιούμε την ενέργεια του συστήματος. Η ανάλυση της σχέσης (10.3) δίνεται στα περισσότερα διδακτικά βιβλία της Φυσικής και δεν έχει νόημα να την επαναλάβουμε. Γιαυτό θα χρησιμοποιήσουμε μόνο την ενεργειακή μέθοδο.

Αρχίζουμε με την εξής ερώτηση: Εάν το πλάτος (η μέγιστη μετατόπιση) σε κάποιο κύκλο (πλήρη ταλάντωση) είναι A , πόση ενέργεια χάνει το σύστημα στη διάρκεια του κύκλου αυτού; Ο στιγμιαίος ρυθμός απώλειας ενέργειας είναι ο ρυθμός του έργου που παράγεται ενάντια στη δύναμη απόσβεσης και εκφράζεται με τη σχέση

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d(F \cdot x)}{dt} = F \frac{dx}{dt} = -bu \frac{dx}{dt} = -bu^2 \quad (10.4)$$

Η ποσότητα αυτή αλλάζει κατά τη διάρκεια του ενός κύκλου. Η ολική ενέργεια όμως που χάνεται, δίνεται προσεγγιστικά από το μέσο ρυθμό απώλειας ενέργειας (μέση τιμή της ποσότητας bu^2) πολλαπλασιασμένη με την περίοδο. Η περίοδος για ελατήρια ορίστηκε στην προηγούμενη άσκηση με τη σχέση



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (10.5)$$

Η μέση κινητική ενέργεια $\langle \frac{1}{2} m u^2 \rangle$ ενός αρμονικού ταλαντωτή είναι ίση με τη μέση δυναμική ενέργεια αυτού $\langle \frac{1}{2} k x^2 \rangle$, έτσι κάθε μία από αυτές τις ποσότητες πρέπει να είναι ίση με το μισό της ολικής ενέργειας E . Έτσι έχουμε $\frac{1}{2} m \langle u^2 \rangle = \frac{1}{2} E$. Ο μέσος ρυθμός απώλειας της ενέργειας είναι

$$\langle \frac{dE}{dt} \rangle = - \langle b u^2 \rangle = - \frac{b}{m} E \quad (10.6)$$

και η απώλεια ενέργειας κατά τη διάρκεια ενός κύκλου είναι

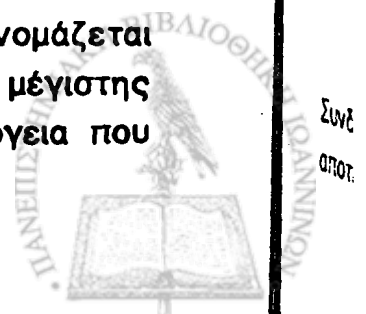
$$\Delta E = - \left(\frac{b}{m} E \right) \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) = - 2\pi \frac{b}{\sqrt{km}} E \quad (10.7)$$

Η τιμή $\frac{dE}{dt}$ δεν παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια ενός κύκλου, αλλά είναι μέγιστη όταν η u είναι μέγιστη και μηδέν όταν η u είναι μηδέν. Εάν αγνοήσουμε αυτή τη μεταβολή και λάβουμε υπόψη πως ελαττώνεται η ενέργεια κατά μέσο όρο, βλέπουμε ότι η εξίσωση (10.6) είναι μία διαφορική εξίσωση ως προς E και ότι η λύση της δίνει την ενέργεια σε συνάρτηση του χρόνου. Η λύση της εξίσωσης (10.6) είναι

$$E = E_0 e^{-\left(\frac{b}{m}\right)t} \quad (10.8)$$

όπου E_0 είναι η αρχική ολική ενέργεια σε χρόνο $t = 0$. Έτσι η ενέργεια ενός ταλαντωτή ελαττώνεται εκθετικά. Ο χρόνος που χρειάζεται ώστε η ενέργεια να ελαττωθεί στο $\frac{1}{e}$ της αρχικής τιμής ονομάζεται χρόνος αφησυχασής τ και ισούται με $\frac{m}{b}$.

Είναι χρήσιμο να αναφέρουμε μία σταθερά που ονομάζεται παράγοντας ποιότητας Q και ορίζεται με το λόγο της μέγιστης ενέργειας που αποθηκεύεται στο σύστημα προς την ενέργεια που



χάνεται σε ένα κύκλο επί 2π . Το Q μπορεί να εκφρασθεί με τη βοήθεια της εξίσωσης (10.7) ως εξής:

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{m\omega}{b} = \frac{\sqrt{mk}}{b} \quad (10.9)$$

Αφού βρήκαμε πως η ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται με το χρόνο, μπορούμε να ρωτήσουμε τώρα πως το πλάτος, που παρατηρείται συνήθως άμεσα, ελαττώνεται με το χρόνο. Επειδή η E σε κάθε στιγμή είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους, η μεταβολή του A με το χρόνο πρέπει να δίνεται με την τετραγωνική ρίζα της συνάρτησης που περιγράφει τη χρονική μεταβολή της E , δηλαδή με μία συνάρτηση της μορφής:

$$\left(e^{-\frac{b}{m}t} \right)^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{b}{2m}t} \quad (10.10)$$

Το πλάτος σε χρονική στιγμή t πρέπει να δίνεται από τη σχέση

$$x_{\max} = A e^{-\frac{b}{2m}t} \quad (10.11)$$

όπου A είναι το αρχικό πλάτος σε χρόνο $t = 0$. Έτσι βλέπουμε ότι ο χρόνος αφησυχασίας για το πλάτος των ταλαντώσεων (ο χρόνος που απαιτείται ώστε το πλάτος να ελαττωθεί στο $\frac{1}{e}$ της αρχικής του τιμής) είναι

$$\tau = \frac{2m}{b} \quad (10.12)$$

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε το χρόνο μισής ζωής $T_{1/2}$. Στη διάρκεια του χρόνου αυτού το πλάτος ελαττώνεται στο μισό της αρχικής του τιμής και δίνεται από τη σχέση

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{2m \ln 2}{b} = \frac{1.386 m}{b} \quad (10.13)$$

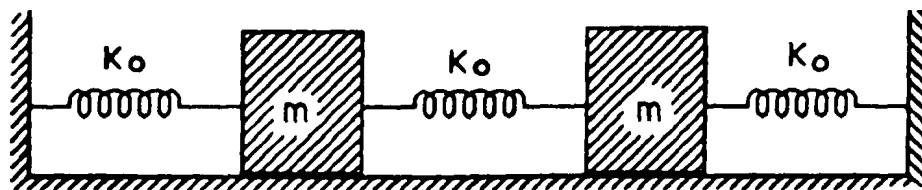
Συνδυάζοντας την (10.13) με την εξίσωση (10.9) παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα



$$Q = \frac{1}{2} \omega T = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{T} \right) \left(\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \right) = \frac{\pi}{\ln 2} \frac{T_{1/2}}{T} \quad (10.14)$$

Έτσι η Q μπορεί να προσδιοριστεί σα συνάρτηση μεγεθών, χαρακτηριστικών της κίνησης, που είναι δυνατό να παρατηρηθούν άμεσα.

Τελικά μελετούμε το πρόβλημα ταλαντούμενου συστήματος δύο μαζών. Το απλούστερο παράδειγμα δείχνεται στο Σχ. 2. Εάν μία από τις μάζες μετατοπισθεί από τη θέση ισορροπίας και μετά αφεθεί ελεύθερη, η κίνηση που θα προκύψει δεν θα είναι ημιτονοειδής. Όμως, είναι δυνατόν κάθε μάζα χωριστά να κινείται ημιτονοειδώς. Μία περίπτωση είναι οι δύο μάζες να κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ τους να παραμένει σταθερή. Λίγη σκέψη μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κατά την κίνηση αυτή το κεντρικό ελατήριο δεν συνεισφέρει στη δύναμη επαναφοράς που εξασκείται πάνω στις δύο μάζες. Αυτός ο τρόπος ταλάντωσης μπορεί να ονομασθεί **αντισυμμετρικός**.



Σχήμα 2. Σύστημα ταλαντωτού με δύο μάζες συνδεδεμένων με ελατήρια.

Έτσι περιμένουμε ότι η συχνότητα αντισυμμετρικού τρόπου ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_0}{m}} \quad (10.15)$$

Μία δεύτερη περίπτωση είναι ότι οι δύο μάζες έχουν ακριβώς αντίθετες κινήσεις. Στην περίπτωση αυτή το κέντρο (το μέσο) του μεσαίου ελατηρίου δεν κινείται. Η κίνηση κάθε μάζας είναι σαν να επιδρούσε στη μία πλευρά ελατήριο σταθεράς δύναμης k_0 και στην άλλη πλευρά ελατήριο μισού μήκους σε σύγκριση με το πρώτο. Κάνοντας το μήκος του ελατηρίου μισό διπλασιάζουμε την τιμή της σταθεράς δύναμης (Γιατί;). Έτσι

η ολική ενεργός σταθερά δύναμης για κάθε μάζα είναι $3k_0$. Αυτός ο τρόπος ταλάντωσης ονομάζεται **συμμετρικός**. Η συχνότητα του συμμετρικού τρόπου ταλάντωσης είναι

$$\omega_{\sigma} = \sqrt{\frac{3k_0}{m}} \quad (10.16)$$

Αυτές οι προβλέψεις μπορούν να εξετασθούν πειραματικά με τη χρήση δρομέων συνδεδεμένων με ελατήρια σε αεροτροχιές και μπορούν να μελετηθούν χαρακτηριστικά μεγέθη της απόσβεσης. Ο χρόνος απόσβεσης και ο παράγοντας ποιότητας μπορούν να οριστούν για κάθε κίνηση. Η κίνηση συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών στην οποία όλες οι μάζες κινούνται ημιτονοειδώς με την ίδια συχνότητα, ονομάζεται **κανονικός τρόπος ταλάντωσης** του συστήματος. Κάθε κανονικός τρόπος ταλάντωσης έχει μία χαρακτηριστική συχνότητα. Κάθε τυχαία ταλάντωση ενός συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών θα είναι άθροισμα αντισυμμετρικού και συμμετρικού τρόπου ταλάντωσης.

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Θα μελετήσουμε τις φθίνουσες ταλαντώσεις ενός δρομέα που κινείται πάνω σε αεροτροχιά. Ακολούθως θα γίνει μελέτη συζευγμένων ταλαντωτών.

3.1 Προεργασία

- α) Σύνδεση αεραντλίας και χρονομέτρου με το δίκτυο (220 Volt).
- β) Οριζοντίωση της αεροτροχιάς (βλέπε άσκηση 2).
- γ) Λειτουργία του χρονομέτρου.

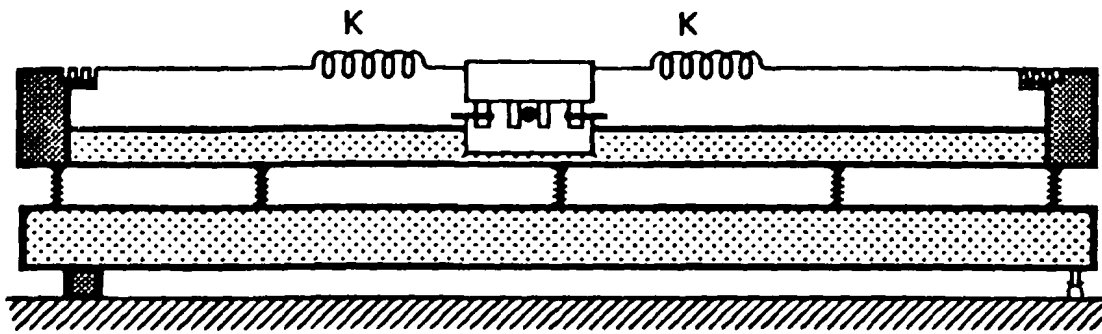
Το χρονόμετρο λειτουργεί στη θέση MAN. Η περιγραφή του χρονομέτρου γίνεται στην άσκ. 1.



3.2 Φθίνουσες Ταλαντώσεις

3.2.1 Η Μάζα του Δρομέα Διατηρείται Σταθερή

Ένας δρομέας συνδέεται και από τα δύο άκρα με δύο όμοια ελατήρια σταθεράς k που υπολογίζεται με τη μέθοδο της παραγράφου 3.1.1 της Άσκησης 9. Τα ελεύθερα άκρα των ελατηρίων συνδέονται αντίστοιχα με τα τοιχώματα της αεροτροχιάς, όπως δείχνει το Σχ. 3. Βρίσκουμε τη θέση ισορροπίας x_0 του δρομέα. Απομακρύνουμε το δρομέα από τη θέση



Σχήμα 3. Σύστημα δρομέα - ελατηρίων πάνω σε αεροτροχιά.

ισορροπίας σε απόσταση περίπου 10.0 cm. Η απόσταση αυτή αποτελεί το μέγιστο πλάτος A της ταλάντωσης. Αφήνουμε ελεύθερο το δρομέα ο οποίος αρχίζει να ταλαντώνεται. Μετρούμε και με τα δύο χρονόμετρα πατώντας ταυτόχρονα τα START των χρονομέτρων. Το A χρονόμετρο μετρά το χρόνο t_1 των 10 πρώτων ταλαντώσεων. Προσδιορίζουμε την περίοδο $T (= t_1/10)$ του ταλαντωτή. Ο ταλαντωτής θα συνεχίσει να ταλαντώνεται και το πλάτος θα μικραίνει. Το B χρονόμετρο μετρά το χρόνο t_2 που κάνει ο ταλαντωτής να φθάσει στο μισό της αρχικής τιμής του πλάτους. Ο χρόνος t_2 είναι ο χρόνος της μισής ζωής $t_2 = T_{1/2}$.

Από τις τιμές των T και $T_{1/2}$:

- 1) Να υπολογισθεί ο συντελεστής ποιότητας Q .
- 2) Να υπολογισθεί ο χρόνος αφησυχασής.
- 3) Να υπολογισθεί η σταθερά απόσβεσης b .

3.2.2 Η Μάζα του Δρομέα Μεταβάλλεται

Κάνουμε την ίδια δουλειά όπως προηγούμενα για διαφορετικές μάζες του δρομέα προσθέτοντας βάρη των 40.0 gr. Παίρνουμε τουλάχιστο 6 διαφορετικές μάζες και για κάθε μάζα δρομέα προσδιορίζουμε το Q . Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

Φθίνουσες ταλαντώσεις για μεταβλητή μάζα του δρομέα

a/a	M (gr)	T (sec)	$T_{1/2}$ (sec)	Q

Από τις τιμές του Πίνακα 1:

- 1) Να γίνει η γραφική παράσταση της $Q = f(M)$.
- 2) Να σχολιάσετε την καμπύλη που θα βρείτε.

3.3 Μελέτη της Σχέσης $x = f(t)$

Συνδέουμε ένα δρομέα και από τα δύο άκρα με δύο όμοια ελατήρια σταθεράς k (που υπολογίστηκε στην παράγραφο 3.2.1). Τα ελεύθερα άκρα των ελατηρίων συνδέονται αντίστοιχα με τα τοιχώματα της αεροτροχιάς, όπως δείχνει το Σχ. 3. Βρίσκουμε τη θέση ισορροπίας x_0 του δρομέα.

Απομακρύνουμε το δρομέα από τη θέση ισορροπίας σε απόσταση 20.0 cm, που αποτελεί το μέγιστο πλάτος A της ταλάντωσης. Αφήνουμε ελεύθερο το δρομέα ο οποίος αρχίζει να ταλαντώνεται. Μετρούμε το χρόνο t κάθε 10.5



ταλαντώσεων και το αντίστοιχο μέγιστο πλάτος x_{\max} που φθάνει ο ταλαντωτής. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε διαδοχικά θετικές (δεξιά από τη θέση ισορροπίας) και αρνητικές (αριστερά από τη θέση ισορροπίας) τιμές των $(x_{\max})_i$. Συνεχίζουμε τις μετρήσεις έως ότου ακινητοποιηθεί ο ταλαντωτής στη θέση ισορροπίας. Οι τιμές γράφονται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2

Μετρήσεις για τη μελέτη της σχέσης $x = f(t)$

a/a	$t_i=10.5 T$ (sec)	(θετικές) x_i (cm)	a/a	$t_i=10.5 T$ (sec)	(Αρνητικές) x_i (cm)
1			2		
3			4		
.			.		
.			.		
.			.		

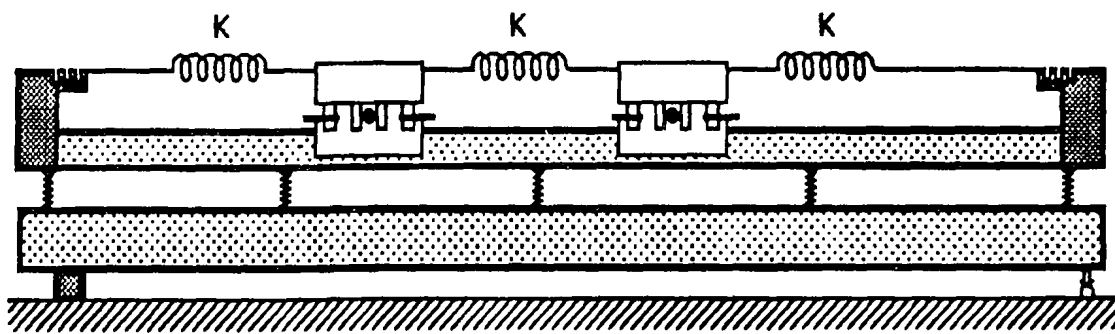
Από τις τιμές του Πίνακα 2:

- 1) Να γίνει η γραφική παράσταση της σχέσης $x_{\max} = f(t)$ και να βρεθεί η ακριβής μαθηματική εξίσωση.
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση της σχέσης $x = f(t)$ στο ίδιο διάγραμμα μ' αυτό της $x_{\max} = f(t)$.

3.4 Σύζευξη Ταλαντωτών

Τοποθετούμε τώρα στην αεροτροχιά δύο δρομείς που συνδέονται μεταξύ-τους με ένα ελατήριο σταθεράς k (που υπολογίστηκε στην 3.2.1). Τα άλλα άκρα των δρομέων τα συνδέουμε με ελατήρια τα οποία προσαρμόζονται αντίστοιχα στα τοιχώματα της αεροτροχιάς, όπως φαίνεται

στο Σχ. 4. Ο τρόπος αυτός σύνδεσης λέγεται σύζευξη δύο ταλαντωτών. Προσδιορίζουμε τις θέσεις ισορροπίας των δύο ταλαντωτών x_{01} και x_{02} . Απομακρύνουμε μόνον τον ένα δρομέα και μελετούμε την κίνηση του συστήματος. Είναι η κίνηση ημιτονοειδής; Προσδιορίζουμε την περίοδο $T = (t/10)$ της ταλάντωσης.



Σχήμα 4. Σύζευξη δύο ταλαντωτών.

Ακίνητοποιούμε τους δύο δρομείς στις θέσεις ισορροπίας x_{01} και x_{02} . Απομακρύνουμε τους δρομείς προς την ίδια κατεύθυνση έτσι ώστε τα μέγιστα πλάτη A_1 και A_2 να είναι ίσα. Αφήνουμε ταυτόχρονα ελεύθερους τους δρομείς οι οποίοι αρχίζουν να ταλαντώνονται. Ο τρόπος αυτός ταλάντωσης λέγεται αντισυμμετρικός. Προσδιορίζουμε την περίοδο T_a ($=t/10$) της ταλάντωσης και την κυκλική συχνότητα $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$. Η τιμή της

ω_a που θα βρεθεί να συγκριθεί με τη θεωρητική τιμή $\omega_a = \left(\frac{k_0}{M}\right)^{1/2}$. Ακίνητοποιούμε πάλι τους δύο δρομείς στις θέσεις ισορροπίας x_{01} , x_{02} .

Απομακρύνουμε τους δρομείς σε αντίθετες διευθύνσεις αλλά κατά το ίδιο πλάτος $A'_1 = A'_2$. Αφήνουμε ταυτόχρονα ελεύθερους τους δρομείς οι οποίοι αρχίζουν να ταλαντώνονται. Αυτός ο τρόπος ταλάντωσης λέγεται συμμετρικός. Προσδιορίζουμε την περίοδο T_σ ($=t/10$) και τη συχνότητα

$\omega_\sigma = \frac{2\pi}{T_\sigma}$. Η τιμή της ω_σ που θα βρεθεί να συγκριθεί με τη θεωρητική τιμή

της $\omega_\sigma = \left(\frac{3k_0}{M}\right)^{1/2}$.



ΑΣΚΗΣΗ 11

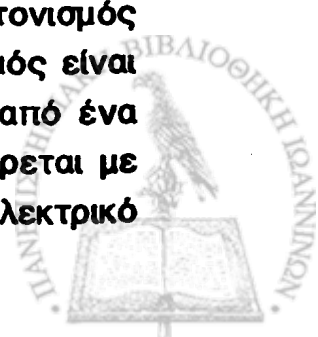
εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη άσκηση, οι ταλαντωτές που υπάρχουν στη φύση εκτελούν φθίνουσα αρμονική ταλάντωση. Για να διατηρηθεί η ταλάντωση ενός τέτοιου ταλαντωτή χρειάζεται να αναπληρώνεται η ενέργεια που χάνεται στη διάρκεια κάθε κύκλου. Αυτό απαιτεί την εφαρμογή πάνω στον ταλαντωτή μίας εξωτερικής δύναμης με ορισμένη περιοδικότητα. Οι ταλαντώσεις που παράγονται με τον τρόπο αυτό λέγονται **εξαναγκασμένες ταλαντώσεις**.

Υπάρχει πλήθος παραδειγμάτων εξαναγκασμένων ταλαντώσεων. Ένα διαπασών δονείται όταν εκτεθεί στην περιοδική δύναμη ενός ηχητικού κύματος. Το ελατήριο σε ένα ρολόι του χεριού προσφέρει ενέργεια με περιοδικό τρόπο ώστε το ταλαντούμενο σύστημα, δηλαδή ο τροχός, να κινείται χωρίς να ελαττώνεται το πλάτος.

Οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις έχουν τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης και όχι τη φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα) του ταλαντούμενου σώματος. Όταν η συχνότητα μεταβολής της εξωτερικής δύναμης είναι ίση με τη φυσική συχνότητα του ταλαντούμενου σώματος τότε έχουμε **συντονισμό**. Η συχνότητα στην οποία συμβαίνει ο συντονισμός λέγεται **συχνότητα συντονισμού**. Με άλλα λόγια, ο συντονισμός είναι ένα φαινόμενο κατά το οποίο έχουμε απορρόφηση ενέργειας από ένα σύστημα που μπορεί να ταλαντώνεται όταν η ενέργεια προσφέρεται με συχνότητα ίση με τη φυσική συχνότητα του συστήματος. Ένα ηλεκτρικό



κύκλωμα που αποτελείται από μία αυτεπαγωγή και μία χωρητικότητα είναι ένα κύκλωμα ταλάντωσης. Αυτό μπορεί να απορροφήσει ηλεκτρομαγνητική ενέργεια όταν αυτή έχει συχνότητα ίση με τη φυσική συχνότητα του κυκλώματος. Η φυσική συχνότητα καθορίζεται από τη χωρητικότητα και το συντελεστή αυτεπαγωγής. Αλλάζοντας την τιμή της χωρητικότητας αλλάζει και η φυσική συχνότητα συντονισμού. Έτσι δικαιολογείται γιατί γυρίζοντας το κουμπί επιλογής σταθμών του ραδιοφώνου πιάνουμε διαφορετικούς σταθμούς που εκπέμπουν ενέργεια σε διάφορες συχνότητες. Η ταλάντωση ενός μορίου και η διέγερση των ηλεκτρονίων ενός ατόμου εξηγούνται με το συντονισμό. Τελικά, στο συντονισμό στηρίζεται η αρχή που μας λέει ότι ένα σύστημα απορροφάει ενέργεια που έχει συχνότητα ίση με τη συχνότητα της ενέργειας με την οποία εκπέμπει.

Όπως είδαμε οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις είναι ένα σημαντικό και πολύ γενικό πρόβλημα της Φυσικής. Η λύση του είναι χρήσιμη στη μηχανική, στα ακουστικά συστήματα, στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος και στην ατομική και μοριακή φυσική.

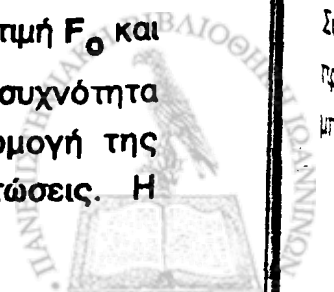
Η μελέτη εξαναγκασμένων ταλαντώσεων στο εργαστήριο μπορεί να γίνει με τη χρήση δρομέων συνδεδεμένων με ελατήρια πάνω σε οριζόντιες αεροτροχιές. Περιοδικά μεταβαλλόμενη δύναμη εφαρμόζεται στα ταλαντούμενα συστήματα δρομέων-ελατηρίων από ένα μηχανικά δονούμενο σύστημα που προσαρμόζεται στην αεροτροχιά.

2. ΘΕΩΡΙΑ

Στην άσκηση αυτή θα ασχοληθούμε με τη συμπεριφορά ενός αρμονικού ταλαντωτή στον οποίο ενεργεί ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη εξωτερική δύναμη της μορφής:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad (11.1)$$

Η δύναμη αυτή εφαρμόζεται συνέχεια με μέτρο που έχει μέγιστη τιμή F_0 και μεταβάλλεται περιοδικά με συχνότητα διαφορετική από τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης. Οι ταλαντώσεις που παράγονται με την εφαρμογή της εξωτερικής αυτής δύναμης λέγονται **εξαναγκασμένες ταλαντώσεις**. Η



εξίσωση κίνησης ενός εξαναγκασμένου ταλαντωτή προκύπτει από το νόμο του Νεύτωνα, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις της απλής και φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης. Εδώ, εκτός από τη δύναμη επαναφοράς $-kx$ και τη δύναμη απόσβεσης $-b \frac{dx}{dt}$ έχουμε επίσης την εξωτερική περιοδική δύναμη. Οπότε η εξίσωση κίνησης του εξαναγκασμένου ταλαντωτή γράφεται

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F(t) \quad (11.2)$$

Στη βιβλιογραφία δίνεται συνήθως η λύση της (11.2) χωρίς απόδειξη και με βάση αυτή γίνεται η ποσοτική μελέτη της κίνησης που προκύπτει. Εμείς θα απλουστεύσουμε αρχικά το πρόβλημα-μας και θα παραλείψουμε την απόσβεση παίρνοντας το $b = 0$. Έτσι η εξίσωση (11.2) γίνεται

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(t) \quad (11.3)$$

ή

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (11.4)$$

Η εξίσωση αυτή εκφράζει τη συμπεριφορά αρμονικού ταλαντωτή που εξαναγκάζεται σε ταλάντωση από εξωτερική δύναμη. Η $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ είναι η φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα) του ταλαντωτή που όταν εισαχθεί στην (11.4) γράφεται

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (11.5)$$

Σύμφωνα με την έκφραση της εξίσωσης αυτής, η κίνηση του ταλαντωτή πρέπει να παρακολουθεί τη συχνότητα εξαναγκασμού. Με το σκεπτικό αυτό μπορούμε να προτείνουμε σαν πιθανή λύση τη συνάρτηση



$$x(t) = A \cos \omega t \quad (11.6)$$

όπου η σταθερά A είναι η μέγιστη απομάκρυνση ή το πλάτος της ταλάντωσης που θα προσδιορίσουμε παρακάτω. Με αντικατάσταση της (11.6) στην (11.5) έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2} (A \cos \omega t) + \omega_0^2 A \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (11.7)$$

που καταλήγει στη σχέση

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (11.8)$$

Η αντικατάσταση αυτή δείχνει ότι η (11.6) είναι πράγματι λύση της (11.5) εφόσον το πλάτος A δίνεται από τη σχέση (11.8). Εισάγοντας την πμή αυτή στην (11.6) έχουμε την

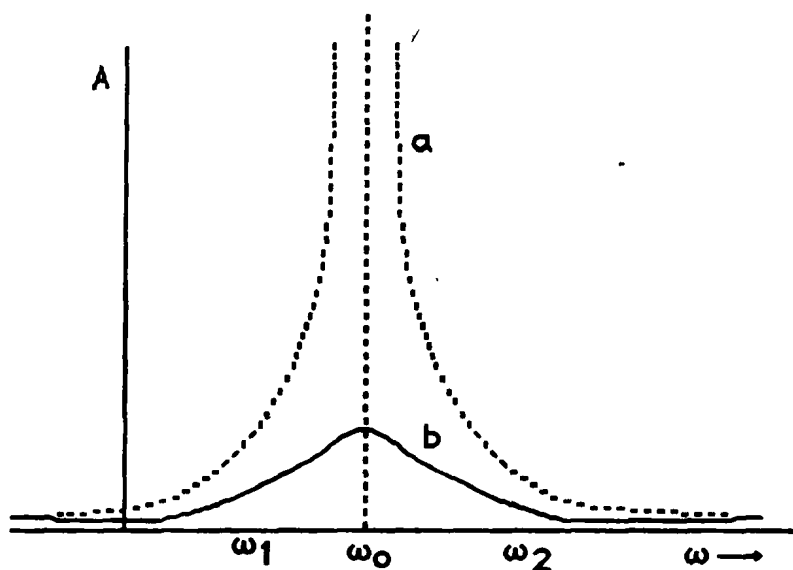
$$x = A \cos \omega t = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (11.9)$$

που εκφράζει την επίδραση της δύναμης στην ταλάντωση. Παρατηρούμε ότι το πλάτος αυξάνεται όσο η συχνότητα του εξαναγκασμού πλησιάζει τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης. Εάν με τη βοήθεια της (11.9) κατασκευάσουμε το διάγραμμα με συντεταγμένες τα A και ω , βρίσκουμε την καμπύλη (a) του Σχ. 1. Βλέπουμε ότι στο σημείο $\omega = \omega_0$ το πλάτος τείνει στο άπειρο. Η συνθήκη αυτή χαρακτηρίζει το συντονισμό του ταλαντωτή με την εξωτερική δύναμη.

Όταν $\omega < \omega_0$ το πλάτος είναι θετικό, η εξαναγκασμένη ταλάντωση είναι σε φάση με την εξωτερική δύναμη. Όταν $\omega > \omega_0$ η εξαναγκασμένη ταλάντωση βρίσκεται σε διαφορά φάσεως 180° με την εξωτερική δύναμη.



Σε μία λεπτομερειακή ανάλυση του συστήματος δεν μπορούμε να παραλείψουμε την απόσβεση. Η παρουσία όμως της απόσβεσης δυσκολεύει τη λύση του προβλήματος γιατί δεν θα ασχοληθούμε με αυτήν. Απλά θα αναφέρουμε ότι το πλάτος A έχει μία μέγιστη τιμή για $\omega = \omega_0$ αλλά όχι μία άπειρη ασυνέχεια. Με άλλα λόγια η τριβή δεν επιτρέπει το πλάτος στο συντονισμό να γίνει άπειρο και η καμπύλη συντονισμού έχει τη μορφή (b) του Σχ. 1. Όσο μεγαλύτερος είναι ο παράγοντας ποιότητας Q του συστήματος τόσο η καμπύλη γίνεται οξύτερη και το πλάτος αυξάνει.



Σχήμα 1. Καμπύλες συντονισμού εξαναγκασμένης ταλάντωσης (a) χωρίς τριβές και (b) με τριβές.

Η καμπύλη συντονισμού πλαταίνει εξαιτίας των τριβών και χαρακτηρίζεται από το εύρος. Για το μέτρο του εύρους της καμπύλης συντονισμού χρησιμοποιείται η διαφορά των συχνοτήτων $\omega_2 - \omega_1$ που η κάθε μία αντιπροσωπεύει τη συχνότητα εκείνη όπου το πλάτος έχει μειωθεί κατά $\frac{1}{\sqrt{2}}$ του πλάτους συντονισμού. Αποδεικνύεται ότι

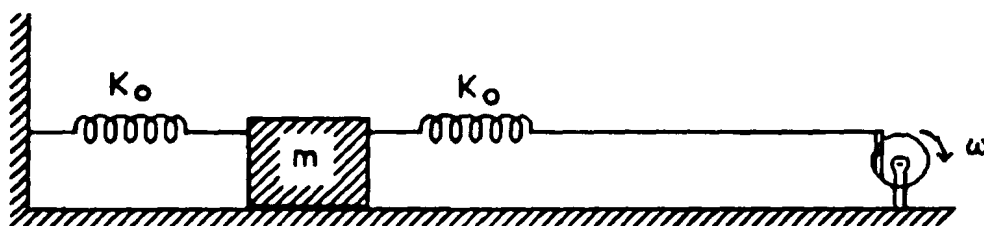
$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

(11.10)



Σε μία εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση, ενέργεια χάνεται συνεχώς από τη δύναμη απόσβεσης, αλλά η εξωτερική (οδηγούσα) δύναμη αντικαθιστά την απώλεια ενέργειας προσφέροντας έργο στο σύστημα. Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης καθορίζεται, στην πραγματικότητα, από την απαίτηση ότι ο μέσος ρυθμός απώλειας ενέργειας που οφείλεται στην απόσβεση είναι ίσος με το μέσο ρυθμό με τον οποίο η οδηγούσα δύναμη εκτελεί έργο. Αυτή η σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του πλάτους στο συντονισμό.

Μία πειραματική διάταξη με την οποία μπορούμε να μελετήσουμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις είναι σχεδόν ίδια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην άσκηση 10. Η βασική διαφορά είναι ότι το σχοινί που ήταν τότε δεμένο μεταξύ του ενός ελατηρίου και του άκρου της αεροτροχιάς, τώρα είναι δεμένο μεταξύ του ελατηρίου και μίας συσκευής. Η συσκευή αυτή προσδίνει στο σχοινί μία ημιτονοειδή κίνηση με μεταβαλλόμενο πλάτος και συχνότητα, όπως δείχνει το Σχ. 2.

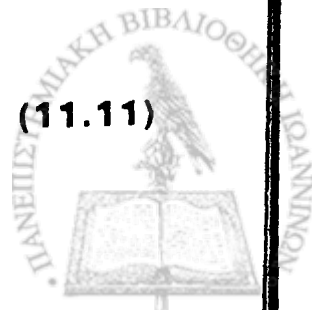


Σχήμα 2. Σύστημα ελατηρίων - δρομέα που εκτελεί εξαναγκασμένη κίνηση με τη βοήθεια ενός κινητήρα.

Η κίνηση αυτή παράγει μία ημιτονοειδή μεταβολή στην επιμήκυνση του ελατηρίου, το οποίο, με τη σειρά του, επιφέρει μία πρόσθετη ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη δύναμη στο δρομέα. Έστω ότι η κίνηση του σχοινιού περιγράφεται με την έκφραση $r \cdot \cos \omega t$, όπου r είναι το πλάτος της κίνησης-του, και ω είναι η γωνιακή-του συχνότητα. Εάν η σταθερά του ελατηρίου είναι k_0 τότε η επιπρόσθετη (εξωτερική) ημιτονοειδής δύναμη που εφαρμόζεται στο δρομέα είναι

$$F = F_0 \cos \omega t$$

(11.11)



αλλά

$$F = k_0 x = k_0 r \cos \omega t \quad (11.12)$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της δύναμης είναι

$$F_0 = k_0 r \quad (11.13)$$

Η ω δεν είναι οπωσδήποτε ίση με τη φυσική συχνότητα $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ του συστήματος ελατηρίων - δρομέα. Ουσιαστικά το σύστημα του Σχ. 2 εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Όπως είπαμε, το πλάτος A της εξαναγκασμένης ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση (11.8). Στη συγκεκριμένη περίπτωση του Σχ. 2, έχουμε ότι $k = 2k_0$. Οπότε από τον ορισμό της φυσικής συχνότητας έχουμε

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{ή} \quad m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{2k_0}{\omega_0^2} \quad (11.14)$$

Εισάγοντας τις (11.13) και (11.14) στην (11.8) έχουμε

$$A = \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} r \quad (11.15)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία της άσκησης 10, ο μέσος ρυθμός απώλειας ενέργειας του ταλαντωτή ισούται με

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \equiv \frac{\Delta E}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \Delta E \quad (11.16)$$

Η εξίσωση (10.9) μας λέει ότι η απώλεια ενέργειας κατά τη διάρκεια ενός κύκλου είναι

$$\Delta E = 2\pi \frac{E}{Q} \quad (11.17)$$



όπου E είναι η ολική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα κατά τη διάρκεια του κύκλου και δίνεται με τη σχέση $E = \frac{1}{2} k A^2$. Σύμφωνα με το Σχ. 2, $k = 2k_0$ οπότε

$$E = \frac{1}{2} (2k_0) A^2 = k_0 A^2 \quad (11.18)$$

Εισάγοντας τις εξισώσεις (11.17) και (11.18) στην (11.16) προκύπτει ότι

$$\frac{\Delta E}{T} = \frac{\omega}{Q} k_0 A^2 \quad (11.19)$$

Η απώλεια ισχύος, λόγω τριβής, κατά τη διάρκεια ενός κύκλου ισούται με τη μέση παραγωγή ισχύος από την εξωτερική δύναμη, δηλαδή

$$\frac{\Delta E}{T} = \frac{\omega}{Q} k_0 A^2 = \langle P \rangle = \langle Fv \rangle \quad (11.20)$$

Όπως θα δούμε, μόνο το μέρος της ταχύτητας που είναι σε ίδια φάση με τη δύναμη συνεισφέρει στη μέση τιμή (ως προς το χρόνο) της ισχύος P . Εάν θεωρήσουμε σαν πιθανή λύση την $x = A \cos \omega t$ της εξίσωσης (11.5) προκύπτει ότι η μέση ισχύς μηδενίζεται. Για να αποφευχθεί αυτό το αδιέξοδο, θα θεωρήσουμε τη γενική μορφή της λύσης της εξίσωσης (11.5) που είναι

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (11.21)$$

Στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t$$

Όπως γνωρίζουμε

$$F = F_0 \cos \omega t = k_0 r \cos \omega t$$

οπότε

$$\langle P \rangle = \langle Fv \rangle = k_0 r \omega A \langle \cos^2 \omega t \rangle - k_0 r \omega B \langle \cos \omega t \cdot \sin \omega t \rangle$$



η
ν
ε
μ
ξ
οι
τρ
με
τοι
κνι
ηα
όπο
είν
αλλ

αλλά

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos \omega t \cdot \sin \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$$

Άρα $\langle P \rangle = \frac{k_0 r \omega A}{2}$ (11.22)

Εισάγοντας την (11.22) στην (11.20) προκύπτει ότι

$$\frac{\omega}{Q} k_0 A^2 = \frac{k_0 r \omega A}{2}$$

ή

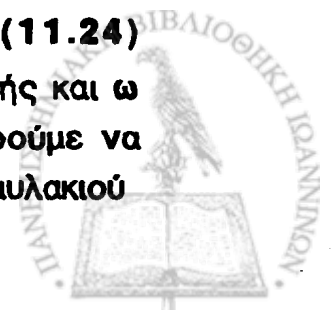
$$A = \frac{1}{2} Qr$$
 (11.23)

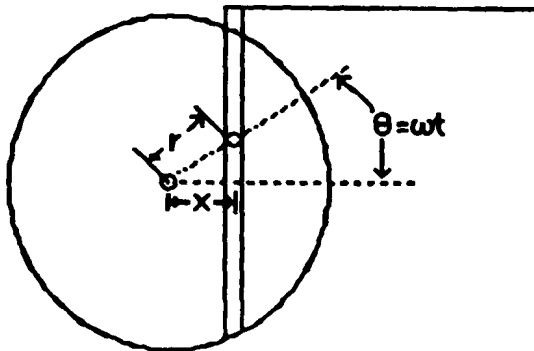
Όταν το A είναι δυνατό να μετρηθεί άμεσα, τότε από την (11.23) μπορούμε να προσδιορίσουμε το συντελεστή ποιότητας Q . Πρέπει να τονίσουμε ότι η εξίσωση (11.23) δίνει το πλάτος A μόνο στη συχνότητα συντονισμού γιατί μόνο τότε η εξωτερική δύναμη βρίσκεται σε φάση με την ταχύτητα του δρομέα. Σε άλλες συχνότητες, δεν βρίσκονται σε φάση και ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη παράγει έργο δεν είναι ανάλογη του A και του r .

Την ημιτονοειδή μετατόπιση του σχοινιού μπορούμε να πετύχουμε με τροχό που είναι προσαρμοσμένος σε ένα κινητήρα. Ο τρόπος με τον οποίο μεταδίδεται η κίνηση στο σχοινί φαίνεται στο Σχ. 3. Ένα εκκεντρικά τοποθετημένο καρφί περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα. Το καρφί κινείται πάνω κάτω μέσα σε ένα αυλάκι που είναι συνεχώς κατακόρυφο. Έτσι η οριζόντια μετατόπιση του αυλακιού δίνεται από τη σχέση

$$x = r \cos \omega t$$
 (11.24)

όπου r είναι η απόσταση του καρφιού από τον άξονα περιστροφής και ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Αλλάζοντας το r μπορούμε να αλλάξουμε το πλάτος μετατόπισης. Η συχνότητα μετατόπισης του αυλακιού





Σχήμα 3. Μετάδοση της κίνησης από τον τροχό στον ταλαντωτή βρούμε τη συχνότητα.

ρυθμίζεται μεταβάλλοντας την τάση που εφαρμόζεται στον κινητήρα. Για τον κινητήρα που χρησιμοποιείται στην άσκηση αυτή, η γωνιακή ταχύτητα είναι περίπου ανάλογη της εφαρμοζόμενης τάσης. Η σχέση αυτή μπορεί να βρεθεί πειραματικά οπότε για δεδομένη τάση μπορούμε να

Έτσι με τη βοήθεια ενός κινητήρα μπορούμε να μελετήσουμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ενός δρομέα πάνω σε μία αεροτροχιά.

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

3.1 Προεργασία

- α) Σύνδεση αεραντλίας, χρονομέτρου και τροφοδοτικού με το δίκτυο (220 Volt). Το χρονόμετρο λειτουργεί στη θέση MAN (βλέπε άσκηση 1).
- β) Οριζοντιση της αεροτροχιάς (βλέπε άσκηση 2).
- γ) Σύνδεση του κινητήρα με το τροφοδοτικό.

Πάνω στο τροφοδοτικό υπάρχει ένας ρυθμιστής τάσης βαθμολογημένος από 0-10. Η συχνότητα του κινητήρα μεταβάλλεται ανάλογα με την εφαρμοζόμενη τάση. Ένα πλαίσιο είναι προσαρμοσμένο με την αύλακα του τροχού και κινείται με τη βοήθεια ενός εκκεντρικού καρφιού. Η απόσταση του καρφιού από το κέντρο του τροχού είναι $r = 0.8 \text{ cm}$.

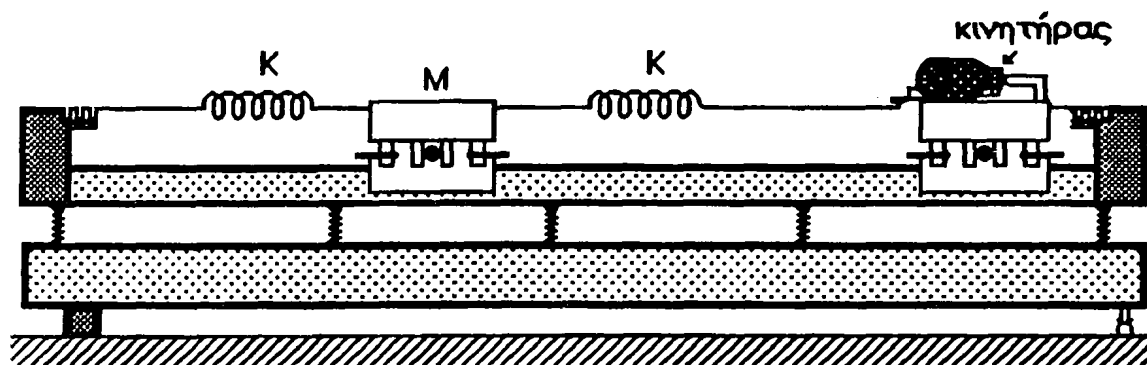
3.2 Συντονισμός

Συνδέουμε δύο όμοια ελατήρια σταθεράς k σε κάθε πλευρά του δρομέα. Το ένα ελατήριο προσαρμόζεται στην αρχή της αεροτροχιάς και



Απλ
1)
2)
3)

το άλλο συνδέεται με σχοινί που καταλήγει στο άκρο του κινητήρα, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.



Σχήμα 4. Σύστημα ενός ταλαντωτή που συνδέεται με κινητήρα πάνω στην αεροτροχιά.

Μεταβάλλουμε την τάση του κινητήρα με πολύ μικρά βήματα και μετρούμε τον χρόνο 10 ταλαντώσεων του πλαισίου καθώς και το μέγιστο πλάτος που ταλαντώνεται ο δρομέας. Παίρνουμε περίπου 15 μετρήσεις του χρόνου και του μέγιστου πλάτους. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

Συντονισμός χωρίς μαγνήτες

a/a	$t = 10T$ (sec)	T (sec)	A (cm)

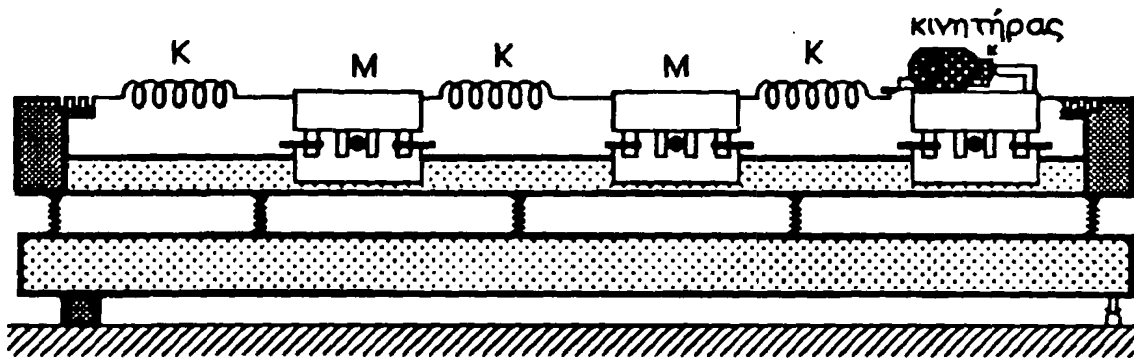
Από τις τιμές του Πίνακα 1:

- 1) Να βρεθεί η κυκλική συχνότητα ω .
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση $A=f(\omega)$ και από αυτή να προσδιοριστεί η ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή.
- 3) Να προσδιοριστεί ο συντελεστής Q στη συχνότητα συντονισμού.



3.3 Συντονισμός με Σύζευξη Ταλαντωτών

Συνδέουμε δύο δρομείς με ελατήριο. Οι άλλες πλευρές των δρομέων συνδέονται με δύο ελατήρια. Τα ελατήρια αυτά προσαρμόζονται αντίστοιχα στο τοίχωμα της αεροτροχιάς και στο κινούμενο πλαίσιο του κινητήρα, όπως φαίνεται στο Σχ. 5. Μεταβάλλουμε την τάση του κινητήρα 15 φορές περίπου και για κάθε τάση



Σχήμα 5. Σύστημα δύο συζευγμένων ταλαντωτών με κινητήρα τοποθετημένο πάνω στην αεροτροχιά.

μετρούμε το μέγιστο πλάτος του δρομέα καθώς και το χρόνο 10 ταλαντώσεων του πλαισίου. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2

Σύζευξη ταλαντωτών

a/a	$t = 10T$ (sec)	T (sec)	A (cm)



Από τις τιμές του Πίνακα 2:

- 1) Να βρεθεί η κυκλική συχνότητα ω .
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση $A = f(\omega)$.
- 3) Να προσδιορίσετε από τη γραφική παράσταση τις συχνότητες συντονισμού.

3.4 Πρόσθετη Απόσβεση

Αφαιρούμε το ελατήριο που βρίσκεται μεταξύ των δύο δρομέων του Σχ. 5 και συνδέουμε τους δύο δρομείς με νήμα. Εξετάσατε την κίνηση των δρομέων όταν μεταβάλλεται η τάση του κινητήρα. Έχουμε απόσβεση στο συμμετρικό ή αντισυμμετρικό τρόπο ταλάντωσης; Βρείτε το μέγιστο πλάτος των δύο κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

3.5 Προστιθέμενη Μάζα

Προσθέτουμε μάζες στον ένα δρομέα του Σχ. 5 και βρίσκουμε τις συχνότητες ω_a , ω_σ των κανονικών τρόπων ταλάντωσης για κάθε μάζα του δρομέα. Ποιά η διαφορά των συχνοτήτων ω_a και ω_σ με την περίπτωση των ίσων μαζών των δρομέων;



ΑΣΚΗΣΗ 12

απλό εκκρεμές προσδιορισμός του g

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

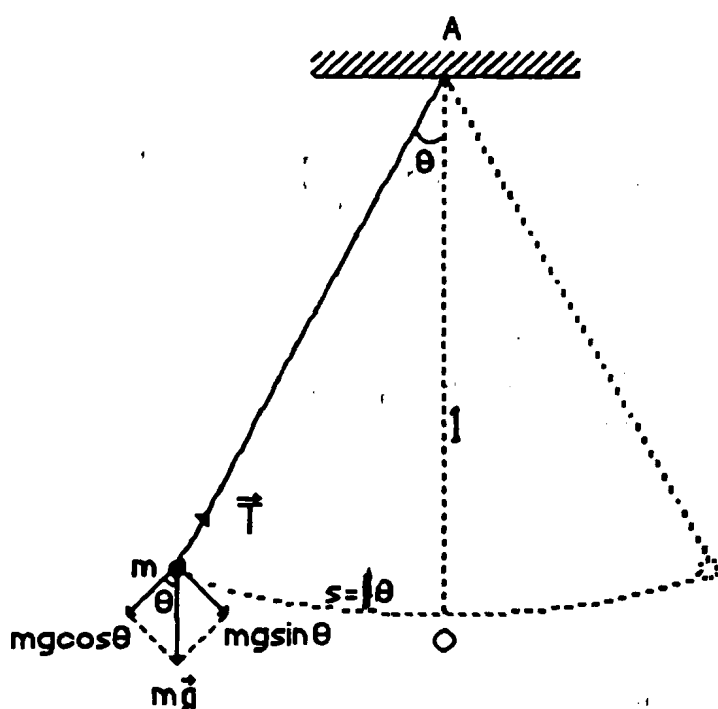
Το απλό ή μαθηματικό εκκρεμές είναι ένα ιδανικό σύστημα που αποτελεί βασική εφαρμογή της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Αποτελείται από μία σημειακή μάζα κρεμασμένη μ' ένα μη εκτατό και αβαρές νήμα από ένα σταθερό σημείο. Όταν το απλό εκκρεμές απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας και αφεθεί ελεύθερο αρχίζει να αιωρείται χωρίς τριβή σε κατακόρυφο επίπεδο εκτελώντας απλή αρμονική κίνηση. Η περιοδική αυτή κίνηση γίνεται κάτω από την επίδραση της βαρύτητας. Ένα αντίστοιχο φυσικό σύστημα του απλού εκκρεμούς είναι το εκκρεμές του ρολογιού ή γενικώτερα το φυσικό εκκρεμές. Το απλό εκκρεμές, πέρα από το ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της απλής αρμονικής κίνησης, μας δίνει μια εύκολη μέθοδο για τον προσδιορισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας g . Στην πράξη φροντίζουμε να προσεγγίσουμε το ιδανικό σύστημα του απλού εκκρεμούς παίρνοντας όσο το δυνατό ελαφρύ και μη εκτατό νήμα. Επίσης η σημειακή μάζα προσεγγίζεται με μια σχετικά μικρή μεταλλική σφαίρα, οπότε με τη βοήθεια μιας μετροταινίας και ενός χρονομέτρου μπορούμε να βρούμε το g .



2
α
κα
πε
τό
τη
ακ
επα
κέν
επα
θέσ

2. ΘΕΩΡΙΑ

Το Σχ. 1 δείχνει ένα απλό εκκρεμές μήκους l και μάζας m που σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη. Η κατακόρυφη διεύθυνση AO είναι η θέση ισορροπίας ή ελάχιστης δυναμικής ενέργειας του εκκρεμούς. Όταν το εκκρεμές απομακρυνθεί



Σχήμα 1. Το απλό εκκρεμές και οι δυνάμεις που ενεργούν σ' αυτό.

από τη θέση ισορροπίας κατά γωνία θ και αφεθεί ελεύθερο τότε αυτό κινείται προς τη θέση O . Η κίνηση αυτή οφείλεται στις δυνάμεις που δρουν πάνω στη μάζα m . Οι δυνάμεις αυτές είναι η δύναμη βαρύτητας $m\vec{g}$ και η τάση του νήματος \vec{T} . Αναλύουμε την $m\vec{g}$ στην ακτινική συνιστώσα με μέτρο $mg \cos \theta$ και την εφαπτομενική συνιστώσα με μέτρο $mg \sin \theta$. Οι ακτινικές συνιστώσες των δυνάμεων δίνουν την αναγκαία κεντρομόλο επιτάχυνση για να κινείται το σώμα πάνω στο τόξο του κύκλου με ακτίνα l και κέντρο το σημείο εξάρτησης A . Η εφαπτομενική συνιστώσα είναι η δύναμη επαναφοράς που δρα πάνω στη μάζα m και τείνει να την ξαναφέρει στη θέση ισορροπίας. Επομένως η δύναμη επαναφοράς γράφεται



$$F = -mg \sin \Theta = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (12.1)$$

όπου το μήκος s του τόξου που διαγράφει η μάζα m δίνεται από τη σχέση

$$s = l\Theta \quad (12.2)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση αυτή ως προς το χρόνο παίρνουμε

$$\frac{ds}{dt} = l \frac{d\Theta}{dt} \quad \text{και} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = l \frac{d^2 \Theta}{dt^2}$$

οπότε η εξίσωση (12.1) γράφεται

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \Theta = 0 \quad (12.3)$$

Όπως περιγράψαμε στην άσκηση 9, η εξίσωση κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (9.2)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (9.2) και (12.3) βλέπουμε ότι δεν είναι της ίδιας μορφής. Επομένως η κίνηση του εκκρεμούς που περιγράφει η εξίσωση (12.3) δεν είναι απλή αρμονική. Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και από την εξίσωση (12.1) στην οποία η δύναμη επαναφοράς δεν είναι ανάλογη προς τη γωνιακή μετατόπιση Θ , όπως απαιτεί ο νόμος του Hooke, αλλά προς το $\sin \Theta$. Αν όμως η γωνία Θ είναι μικρή τότε με μεγάλη προσέγγιση

$$\sin \Theta \cong \Theta$$

και η εξίσωση (12.3) παίρνει τη μορφή της διαφορικής εξίσωσης του απλού αρμονικού ταλαντωτή



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (12.4)$$

Επομένως για μικρού πλάτους αιωρήσεις, το απλό εκκρεμές είναι ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής.

Στην περίπτωση της εξισ. (9.2) ορίσαμε την κυκλική συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (9.5)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για την (12.4) ισχύει η σχέση

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (12.5)$$

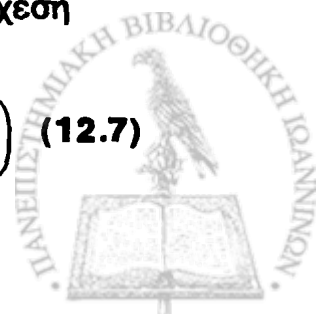
Οπότε η περίοδος της ταλάντωσης ενός απλού εκκρεμούς, με μικρό πλάτος αιώρησης δίνεται από τη σχέση

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (12.6)$$

Η σχέση (12.6) εκφράζει ότι η περίοδος T ενός εκκρεμούς είναι γραμμική συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας του μήκους l . Στη σχέση αυτή δεν περιλαμβάνονται η μάζα m και το πλάτος της ταλάντωσης A . Επομένως η περίοδος του εκκρεμούς είναι ανεξάρτητη της μάζας και για μικρά πλάτη, ανεξάρτητη του πλάτους της ταλάντωσης. Συνεπώς οι αιωρήσεις ενός απλού εκκρεμούς είναι ισόχρονοι, έστω και αν οι δυνάμεις απόσβεσης (αντίσταση του αέρα, τριβή στο σημείο εξάρτησης) ελαττώνουν το πλάτος.

Όταν το πλάτος της ταλάντωσης δεν είναι μικρό τότε δεν ισχύει η προσέγγιση $\sin \theta \cong \theta$, και η κίνηση δεν είναι απλή αρμονική ταλάντωση με ισόχρονες περιόδους. Στην περίπτωση αυτή μπορεί ναδειχθεί ότι από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (12.3), η περίοδος δίνεται από τη σχέση

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} + \frac{1}{2^2} \frac{3^2}{4^2} \sin^4 \frac{\theta_{\max}}{2} + \dots \right) \quad (12.7)$$



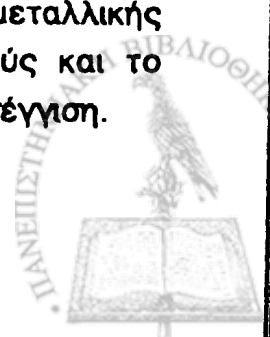
όπου Θ_{\max} η μέγιστη γωνιακή μετατόπιση. Η περίοδος T μπορεί να υπολογιστεί με όση ακρίβεια θέλουμε, παίρνοντας όλο και περισσότερους όρους. Στην περίπτωση π.χ. που το $\Theta_{\max} = 15^\circ$ η πραγματική περίοδος διαφέρει λιγότερο από 0.5% από αυτή που δίνει η εξίσωση (12.6).

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή το απλό εκκρεμές είναι ένα ιδανικό σύστημα, όπου το νήμα θεωρείται μη εκτατό και αβαρές και η μάζα συγκεντρωμένη σ' ένα σημείο. Στην πράξη όμως οι προϋποθέσεις αυτές δεν τηρούνται. Η σημειακή μάζα προσεγγίζεται με μια σχετικά μικρή ομογενή μεταλλική σφαίρα. Αν όμως το νήμα δεν είναι αβαρές το κέντρο μάζας (Κ.Μ.) του εκκρεμούς δεν συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο (Γ.Κ.) της σφαίρας. Στην περίπτωση αυτή το μήκος l δεν είναι ίσο με την απόσταση του σημείου στήριξης A από το Κ.Μ. της σφαίρας (Σχ. 1). Έτσι η θέση του Κ.Μ. του εκκρεμούς δεν είναι γνωστή με ακρίβεια και συνεπώς ο προσδιορισμός του μήκους l γίνεται μ' ένα σχετικό σφάλμα.

Το σχεδιάγραμμα στο Σχ. 2 παριστάνει το προσεγγιστικό απλό εκκρεμές που χρησιμοποιείται στην άσκηση αυτή. Όπως δείχνει το σχήμα, το εκκρεμές αποτελείται από ομογενή μεταλλική σφαίρα μάζας m . Η σφαίρα είναι κρεμασμένη από το ένα άκρο πλαστικού μη εκτατού νήματος με αμελητέο βάρος. Το άλλο άκρο του νήματος είναι στερεωμένο στο σημείο στήριξης A μεταξύ δυο επίπεδων μεταλλικών επιφανειών του στηρίγματος Σ .

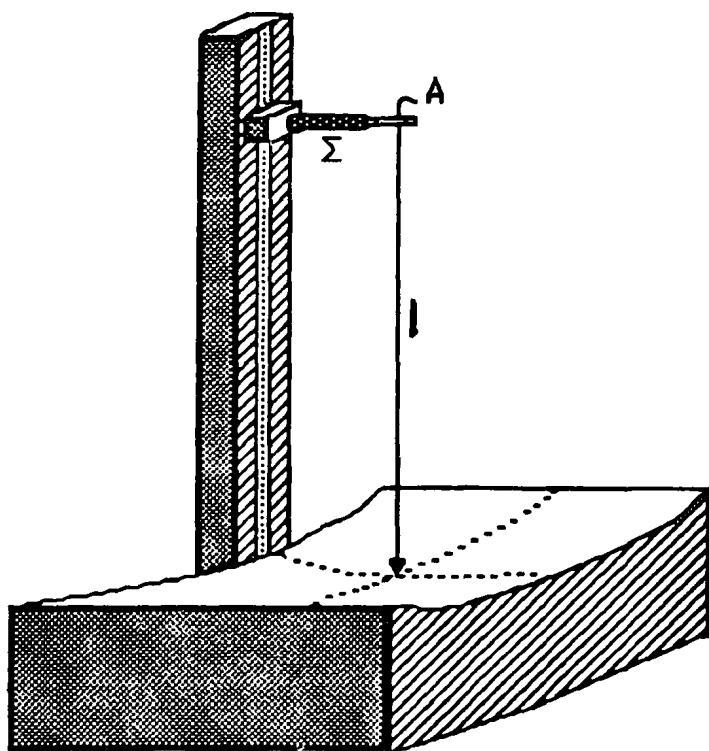
Το εκκρεμές αιωρείται πάνω από μια ξύλινη καμπύλη επιφάνεια με ακτίνα καμπυλότητας R . Η καμπύλη αυτή επιφάνεια είναι υποδιαιρεμένη σε ομόκεντρους και ισαπέχοντες κύκλους με κέντρο τη θέση ισορροπίας του εκκρεμούς. Η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κύκλων είναι 1.0 cm μέχρι τα 10.0 cm και 2.0 cm στην περιοχή από 10.0 - 50.0 cm. Το εκκρεμές αυτό μπορεί να προσεγγίζει το απλό εκκρεμές γιατί το νήμα και ο γάντζος εξάρτησης έχουν αμελητέο βάρος σε σχέση με εκείνο της μεταλλικής σφαίρας. Επομένως το κέντρο μάζας (Κ.Μ.) του εκκρεμούς και το γεωμετρικό κέντρο (Γ.Κ.) της σφαίρας συμπίπτουν με μεγάλη προσέγγιση.



3.

με:
εκκ
εκτ
ελε
αυτ
που

Το μήκος l του εκκρεμούς μετριέται με μια μετροταινία από το σημείο στήριξης μέχρι το γεωμετρικό κέντρο (Γ.Κ.) της σφαίρας. Για τη μέτρηση της περιόδου T χρησιμοποιούνται χρονόμετρα με ακρίβεια μεγαλύτερη των 0.2 sec. Ο προσδιορισμός της γωνίας εκτροπής Θ γίνεται μετρώντας το αντίστοιχο τόξο στην ξύλινη καμπύλη επιφάνεια.



Σχήμα 2. Σχεδιάγραμμα της εργαστηριακής συσκευής προσεγγιστικού απλού εκκρεμούς με τη χαραγμένη ημικυκλική βάση για τη μέτρηση του πλάτους των ταλαντώσεων

3.1 Προσδιορισμός της Περιόδου T σε Συνάρτηση του Μήκους l του Εκκρεμούς. Υπολογισμός του g

Κρεμάμε το εκκρεμές από το σημείο στήριξης Σ . Μετράμε με μία μετροταινία το μήκος του νήματος l , περίπου 25.0 cm. Απομακρύνουμε το εκκρεμές από τη θέση ισορροπίας σε μήκος τόξου s περίπου 1 cm. Η γωνία εκτροπής Θ σε μοίρες θα είναι $\Theta = \frac{s}{l}$ (rad) = $\frac{s}{l} \times 57.3(^{\circ})$. Αφήνουμε ελεύθερο το εκκρεμές το οποίο θα ταλαντωθεί. Μετά από 1-2 πλήρεις αιωρήσεις αρχίζουμε να μετράμε το χρόνο δέκα πλήρων αιωρήσεων ($t = 10T$) που κάνει το εκκρεμές. Αυξάνουμε κατά 10.0 cm περίπου το μήκος του



νήματος και επαναλαμβάνουμε την ίδια διεργασία. Η διεργασία αυτή γίνεται περίπου 10 φορές. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της περιόδου T σε συνάρτηση του μήκους l και τον υπολογισμό της επιτάχυνσης βαρύτητας g

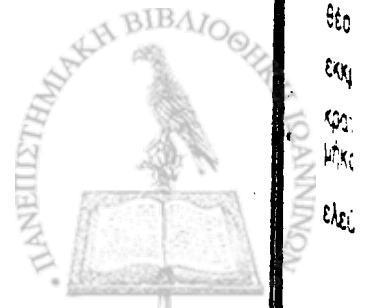
a/a	l (cm)	$t_i = 10T_i$ (sec)

Από τις τιμές του Πίνακα 1:

- 1) Να βρεθεί η περίοδος T για κάθε μήκος l .
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση της σχέσης $T = f(l)$ και να βρεθεί η μαθηματική έκφραση της σχέσης αυτής.
- 3) Από την εξίσωση που θα βρείτε παραπάνω να υπολογίσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας g .

3.2 Μελέτη των Σχέσεων $T = f(\theta)$ και $g = f(\theta)$

Κρατάμε σταθερό το μήκος l του εκκρεμούς περίπου 130.0 cm. Απομακρύνουμε το εκκρεμές σε μήκος τόξου s περίπου 10.0 cm και το αφήνουμε ελεύθερο οπότε θα ταλαντωθεί. Μετράμε το χρόνο δέκα πλήρων αιωρήσεων. Παίρνουμε περίπου πέντε διαφορετικά μήκη τόξου αυξάνοντας κατά 4.0 cm από το αρχικό και μετράμε τους αντίστοιχους χρόνους 10 αιωρήσεων. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 2.



Πίνακας 2

Μετρήσεις για τη μελέτη των σχέσεων $T = f(\Theta)$ και $g = f(\Theta)$

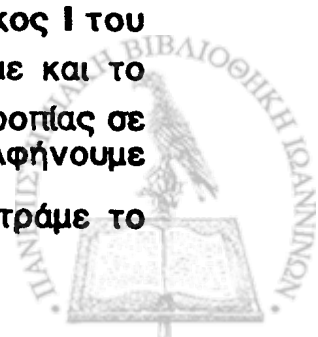
a/a	s (cm)	t = 10T _i (sec)

Από τις τιμές του Πίνακα 2:

- 1) Υπολογίστε την περίοδο T και την επιτάχυνση g για κάθε τιμή του s .
- 2) Να γίνουν και να σχολιαστούν οι γραφικές παραστάσεις των σχέσεων $T = f(\Theta)$ και $g = f(\Theta)$

3.3 Μελέτη της Σχέσης $s = f(t)$

Αρχικά βρίσκουμε την ακτίνα καμπυλότητας της ξύλινης καμπύλης επιφάνειας. Για το σκοπό αυτό βρίσκουμε το μήκος l του εκκρεμούς που συμπίπτει με την ακτίνα καμπυλότητας R και κάνουμε την ακόλουθη διεργασία. Το εκκρεμές στη θέση ισορροπίας απέχει από την ξύλινη επιφάνεια ένα μικρό διάστημα Δl . Απομακρύνουμε το εκκρεμές από τη θέση ισορροπίας προς τα άκρα της καμπύλης επιφάνειας. Αν κατά την απομάκρυνση το διάστημα Δl παραμένει το ίδιο, τότε το μήκος l είναι κατά προσέγγιση ίσο με την ακτίνα καμπυλότητας R . Διαφορετικά μεγαλώνουμε ή μικραίνουμε το μήκος l μέχρις ότου να είναι ίδια η απόσταση σ' όλες τις θέσεις της καμπύλης επιφάνειας. Ακολουθώντας παίρνουμε το μήκος l του εκκρεμούς ίσο με την ακτίνα καμπυλότητας που προσδιορίσαμε και το κρατάμε σταθερό. Απομακρύνουμε το εκκρεμές από τη θέση ισορροπίας σε μήκος τόξου 50 cm που είναι το μέγιστο μήκος τόξου s_m . Αφήνουμε ελεύθερο το εκκρεμές το οποίο αρχίζει να ταλαντώνεται. Μετράμε το



χρόνο t κάθε 10.5 ταλαντώσεων και το αντίστοιχο μήκος τόξου s_m που φθάνει το εκκρεμές. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε διαδοχικά θετικές (δεξιά από τη θέση ισορροπίας) και αρνητικές (αριστερά από τη θέση ισορροπίας) τιμές των $(s_m)_i$. Συνεχίζουμε τις μετρήσεις έως ότου ακινητοποιηθεί περίπου το εκκρεμές στη θέση ισορροπίας. Οι τιμές γράφονται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3

Μετρήσεις για τη μελέτη της σχέσης $s = f(t)$

a/a	t_i (sec)	(θετικές) x_i (cm)	a/a	t_i (sec)	(Αρνητικές) x_i (cm)
1			2		
3			4		
.			.		
.			.		
.			.		

Από τις τιμές του Πίνακα 3:

- 1) Να γίνει η γραφική παράσταση των δύο κλάδων της $s_m = f(t)$.
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση της $s=f(t)$ για τις 4 πρώτες τιμές του s_m .
- 3) Να βρεθεί και να σχολιαστεί η ακριβής μορφή της $s_m(t)$.
- 4) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της (3) να βρεθεί και να σχολιαστεί η ακριβής μορφή της $s(t)$.



ΑΣΚΗΣΗ 13

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πολλές φορές γίνεται παραπλανητικό το ερώτημα: 'Όταν ένα σώμα κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου και διανύει ίσα διαστήματα (τόξα) σε ίσους χρόνους η κίνηση του σώματος είναι επιταχυνόμενη ή όχι; Τα ίσα διαστήματα σε ίσους χρόνους σημαίνουν ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό. Η διεύθυνση όμως της κίνησης αλλάζει συνεχώς και η ταχύτητα στο σύνολό της μεταβάλλεται χρονικά. Μεταβολή όμως του διανύσματος της ταχύτητας σημαίνει ότι η κίνηση είναι επιταχυνόμενη. 'Όταν ένα σώμα κινείται σε μια κυκλική τροχιά τότε η κίνηση είναι επιταχυνόμενη και ονομάζεται κυκλική κίνηση. 'Όταν το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό τότε η κίνηση είναι ομαλή κυκλική κίνηση. Στην περίπτωση όμως που το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται τότε μιλάμε για μη ομαλή κυκλική κίνηση. Η επιτάχυνση προϋποθέτει την ύπαρξη δύναμης. Με άλλα λόγια, όταν ένα σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση ενεργεί σ' αυτό μια δύναμη. 'Όταν η κυκλική κίνηση είναι ομαλή τότε η επιτάχυνση που έχει το σώμα λέγεται **κεντρομόλος επιτάχυνση** και η αντίστοιχη δύναμη που ενεργεί στο σώμα **κεντρομόλος δύναμη**. Στην περίπτωση που η κυκλική κίνηση δεν είναι ομαλή τότε η επιτάχυνση είναι η συνισταμένη μιας κεντρομόλου και μιας επιτρόχιας επιτάχυνσης.

Στην άσκηση αυτή θα ασχοληθούμε με την επαλήθευση της σχέσης που δίνει την κεντρομόλο δύναμη.



2. ΘΕΩΡΙΑ

2.1 Κυκλική Κίνηση

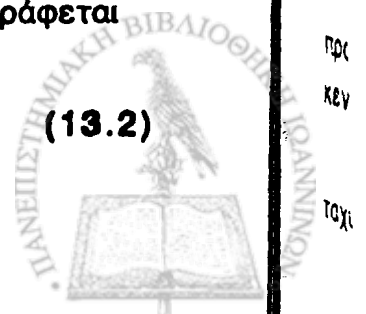
Θα προσδιορίσουμε αρχικά την επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση όπου η ταχύτητα μεταβάλλεται συνεχώς κατά διεύθυνση ενώ το μέτρο-της παραμένει σταθερό. Έστω A η θέση σωμάτιου στο χρόνο t και B η θέση-του στο χρόνο t + Δt (Σχ. 1). Η ταχύτητα στο A είναι \vec{v}_1 και εφάπτεται της περιφέρειας στο σημείο A. Η ταχύτητα στο B είναι \vec{v}_2 και εφάπτεται της περιφέρειας στο σημείο B. Οι ταχύτητες \vec{v}_1 και \vec{v}_2 έχουν ίσα μέτρα αλλά διαφορετικές διευθύνσεις. Στο χρονικό διάστημα Δt διανύθηκε απόσταση ίση με το μήκος του τόξου AB που ισούται με vΔt αφού το μέτρο της ταχύτητας v είναι σταθερό. Τώρα μετατοπίζουμε το διάνυσμα \vec{v}_2 ώστε να έχει κοινή αρχή με το διάνυσμα \vec{v}_1 στο σημείο A. Η διαφορά των δυο διανυσμάτων $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$ είναι η μεταβολή της ταχύτητας καθώς το σώμα κινείται από το A στο B. Όπως φαίνεται στο Σχ. 1, η διαφορά των ταχυτήτων έχει φορά προς τα μέσα και κατευθύνεται περίπου προς το κέντρο K του κύκλου.

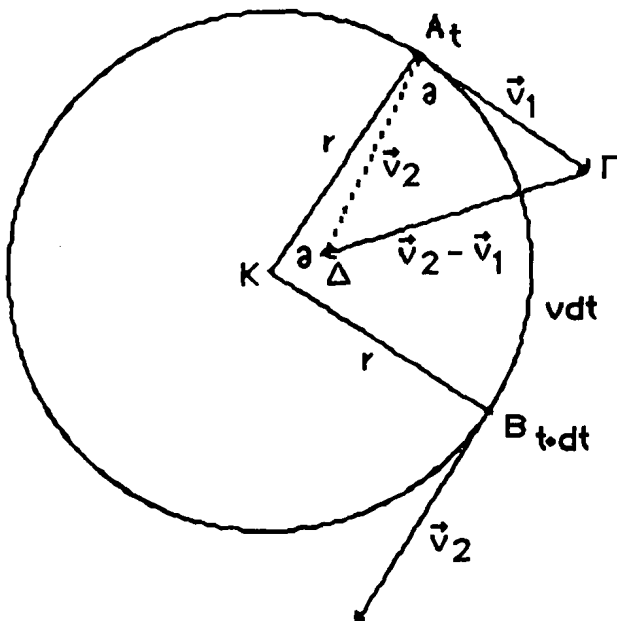
Τα τρίγωνα KAB και AΓΔ, στο Σχ. 1, είναι όμοια και ισοσκελή ($|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$). Οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\Delta v}{v} \equiv \frac{v\Delta t}{r} \quad (13.1)$$

κάνοντας την προσέγγιση ότι η χορδή AB ισούται προς το μήκος του τόξου AB. Η προσέγγιση αυτή γίνεται ακριβέστερη όσο το Δt γίνεται μικρότερο οπότε το τόξο και η χορδή τείνουν να εξισωθούν. Καθώς το Δt μικραίνει η $\Delta\vec{v}$ τείνει όλο και περισσότερο προς μια διεύθυνση κάθετη στις \vec{v}_1 και \vec{v}_2 που περνά ακριβώς από το κέντρο του κύκλου. Η εξίσωση (13.1) γράφεται

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \equiv \frac{v^2}{r} \quad (13.2)$$





Σχήμα 1. Ομαλή κυκλική κίνηση ενός σωμάτιου στην περιφέρεια κύκλου K που ξεκινάει στο χρόνο t από τη θέση A και καταλήγει στο χρόνο $t + \Delta t$ στη θέση B όπου η ταχύτητα του μεταβάλλεται κατά $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

όταν $\Delta t \rightarrow 0$ η σχέση (13.2) γίνεται ακριβής και χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του μέτρου της επιτάχυνσης

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \quad (13.3)$$

Όπως είπαμε προηγουμένως, όταν $\Delta t \rightarrow 0$ τότε $\Delta \vec{v}$ διευθύνεται προς το κέντρο του κύκλου. Από το συμπέρασμα αυτό και τον ορισμό της επιτάχυνσης

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

προκύπτει ότι η επιτάχυνση \vec{a} , σε μια ομαλή κυκλική κίνηση, διευθύνεται προς το κέντρο του κύκλου, είναι κάθετη προς την \vec{v} , και ονομάζεται κεντρομόλος επιτάχυνση.

Η μελέτη της γενικότερης περίπτωσης της κυκλικής κίνησης όπου η ταχύτητα του κινούμενου σώματος δεν είναι σταθερή θα γίνει με



διανυσματικό λογισμό χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες r και θ . Θεωρούμε ένα κύκλο στο επίπεδο $x-y$ με το κέντρο-του στην αρχή των συντεταγμένων, όπως δείχνει το Σχ. 2. Εδώ είναι σκόπιμο να χρησιμοποιήσουμε δυο νέα μοναδιαία διανύσματα \hat{e}_r και \hat{e}_θ). Το \hat{e}_r σε οποιοδήποτε σημείο έχει τη διεύθυνση της ακτίνας προς τα έξω που καταλήγει στο σημείο αυτό. Το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{e}_θ σε κάθε σημείο είναι εφαπτόμενο στην περιφέρεια του κύκλου που περνά από το σημείο αυτό και έχει φορά τη φορά κατά την οποία αυξάνεται το θ . Τα μοναδιαία διανύσματα \hat{e}_r και \hat{e}_θ είναι κάθετα μεταξύ τους και διαφέρουν από τα \hat{x} και \hat{y} στο ότι οι διευθύνσεις-τους μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο του επιπέδου. Επομένως τα μοναδιαία διανύσματα \hat{e}_r και \hat{e}_θ δεν είναι πάντοτε σταθερά. Το διάνυσμα θέσεως r (ακτίνα) δίνεται από τη σχέση

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} \quad (13.4)$$

όπου $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$. Τα μοναδιαία διανύσματα \hat{e}_r και \hat{e}_θ όπως εύκολα προκύπτουν από το Σχ. 2 δίνονται από τις σχέσεις

$$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (13.5)$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (13.6)$$

Εάν ένα σωματίο κινείται με ταχύτητα που δεν είναι σταθερή στην περιφέρεια κύκλου του (Σχ. 2) σε κάθε χρονική στιγμή η ταχύτητα δίνεται ως εξής

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (x \hat{i} + y \hat{j})$$

$$\text{ή } \vec{v} = \frac{d}{dt} (r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}) = -r \hat{i} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + r \hat{j} \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{Αλλά } \frac{d\theta}{dt} = \omega \text{ οπότε } \vec{v} = r\omega (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})$$



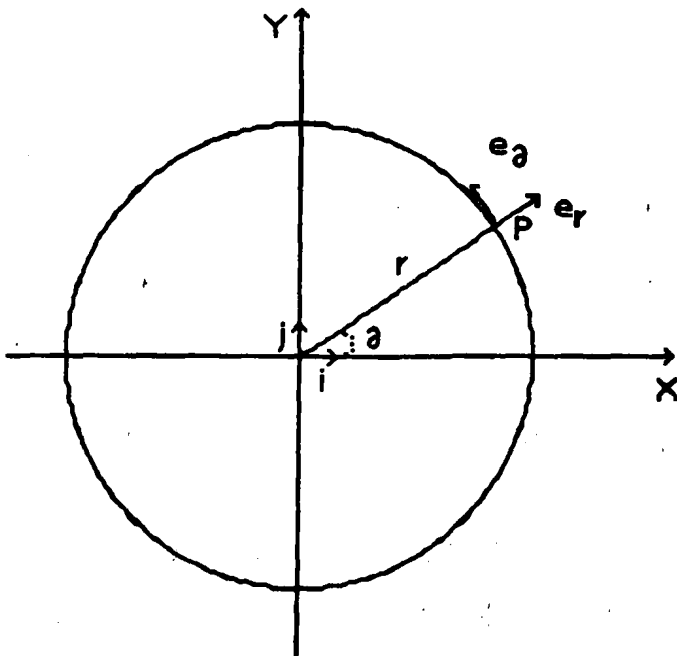
Εισάγοντες την (13.6) στην εξίσωση αυτή προκύπτει

$$\vec{v} = r \omega \hat{e}_\theta \quad (13.7)$$

Συνδυάζοντας τον ορισμό της επιτάχυνσης με την (13.7) έχουμε

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \omega \hat{e}_\theta)$$

$$\vec{a} = r \left(\frac{d\omega}{dt} \hat{e}_\theta + \omega \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \right)$$



Σχήμα 2. Κυκλική κίνηση ενός σωμάτιου του οποίου η θέση ορίζεται από τις πολικές συντεταγμένες r και θ και η κίνηση περιγράφεται με τη βοήθεια των μοναδιαίων διανυσμάτων \hat{e}_r και \hat{e}_θ .

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{d\omega}{dt} = a$, όπου a η γωνιακή επιτάχυνση και αντικαθιστώντας το \hat{e}_θ από την (13.6) έχουμε

$$\vec{a} = r \left[a \hat{e}_\theta + \omega \frac{d}{dt} (-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}) \right] =$$



$$= r \left(a \hat{e}_\theta - \omega \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \hat{i} - \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \hat{j} \right)$$

$$\text{ή } \vec{a} = r a \hat{e}_\theta - r\omega^2 (\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j})$$

Εισάγοντας την (13.5) στην εξίσωση αυτή προκύπτει

$$\vec{a} = r a \hat{e}_\theta - r\omega^2 \hat{e}_r \quad (13.8)$$

Αλλά

$$r a = a_\tau \quad (13.9)$$

και

$$r\omega^2 = a_r$$

όπου a_τ η επιτρόχια επιτάχυνση και a_r η κεντρομόλος επιτάχυνση.

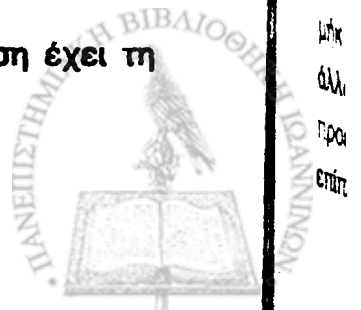
Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (13.8) και (13.9) προκύπτει η επιτάχυνση για τη γενική περίπτωση της κυκλικής κίνησης (μη ομαλή κυκλική κίνηση).

$$\vec{a} = a_\tau \hat{e}_\theta - a_r \hat{e}_r \quad (13.10)$$

Στην περίπτωση της ομαλής κυκλικής κίνησης τα μέτρα των \vec{u} και $\vec{\omega}$ είναι σταθερά και η επιτρόχια επιτάχυνση a_τ μηδενίζεται οπότε η (13.10) δίνει το διάνυσμα της κεντρομόλου επιτάχυνσης

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau = -a_r \hat{e}_r = -r\omega^2 \hat{e}_r = -\frac{v^2}{r} \hat{e}_r \quad (13.11)$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει τη διεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου.



2.2 Κεντρομόλος Δύναμη

Η κεντρομόλος επιτάχυνση που έχει ένα σωματίο κινούμενο σε κυκλική τροχιά προϋποθέτει την εφαρμογή μιας δύναμης σ' αυτό. Η δύναμη αυτή διευθύνεται προς το κέντρο του κύκλου, ονομάζεται **κεντρομόλος δύναμη** και έχει μέτρο

$$F = m a_{\kappa} = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r \quad (13.14)$$

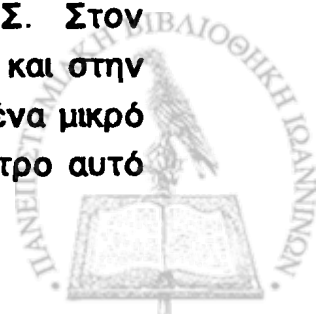
Από την αρχή δράση-αντίδραση συνάγεται ότι στο σωματίο που εξασκείται η κεντρομόλος δύναμη F επενεργεί αντίθετη δύναμη $F' = -F$ η οποία καλείται, ανάλογα, **φυγόκεντρος δύναμη**. Η φυγόκεντρος δύναμη είναι μια ψευτοδύναμη η οποία γίνεται αισθητή στον παρατηρητή όταν αυτός συμμετέχει στην κίνηση του περιστρεφόμενου σώματος. Αν θεωρήσουμε το περιστρεφόμενο σώμα σ' ένα μη αδρανειακό (επιταχυνόμενο) σύστημα αναφοράς τότε ο παρατηρητής παρατηρεί την επίδραση της κεντρομόλου δύναμης δηλαδή βλέπει το σώμα να απομακρύνεται από το κέντρο περιστροφής.

Σ' αυτή την άσκηση θα γίνει επαλήθευση της σχέσης (13.14) με τη μέθοδο της κυκλικής κίνησης στην περίπτωση που σώμα μάζας m κινείται ομαλά σε κυκλική τροχιά ακτίνας r με γωνιακή ταχύτητα ω .

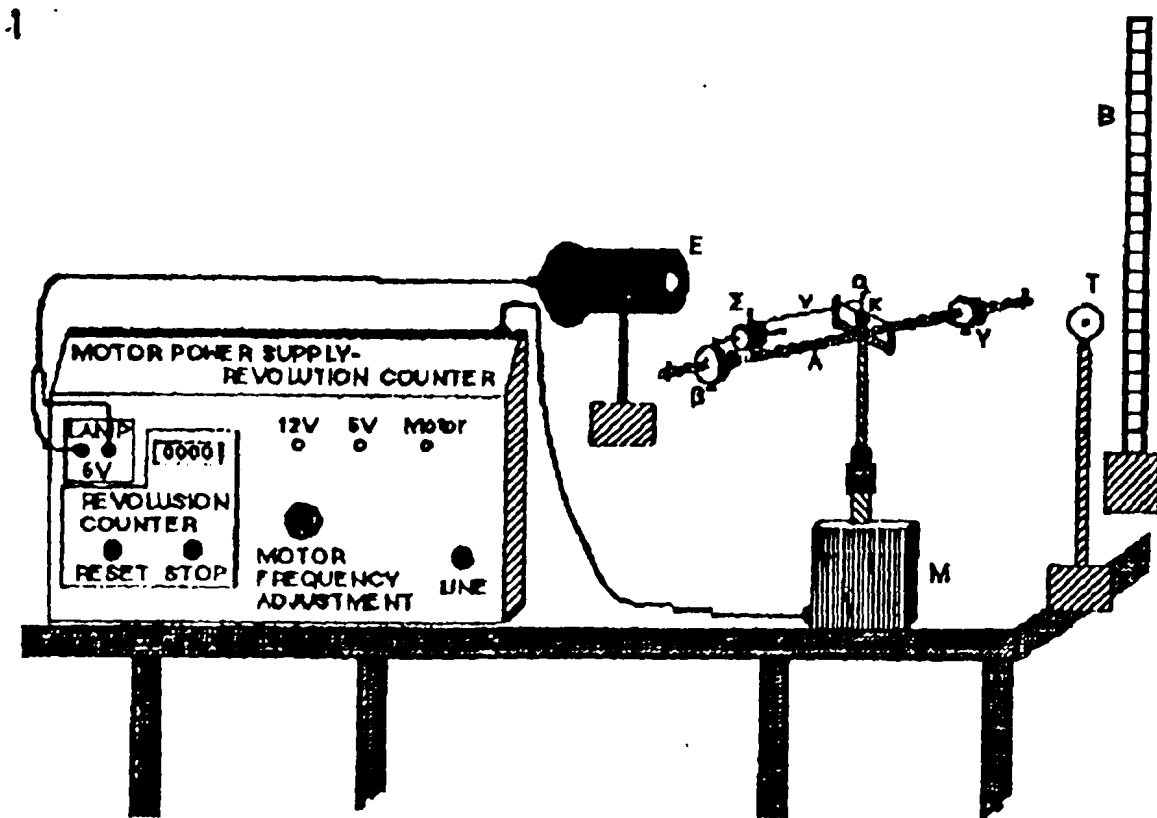
3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

3.1 Συσσκευή

Η διάταξη με την οποία επαληθεύεται η σχέση (13.14) φαίνεται στο Σχ. 3. Ένας κατακόρυφος άξονας A που μπορεί να περιστρέφεται με ένα ηλεκτροκινητήρα M φέρει μια κεφαλή σχήματος T . Στον ένα βραχίονα της κεφαλής υπάρχει στήριγμα β το οποίο μπορεί να γλιστράει ελεύθερα κατά μήκος του βραχίονα. Στο στήριγμα αυτό τοποθετείται το σώμα Σ . Στον άλλο βραχίονα υπάρχει επίσης κινητό αντίβαρο γ . Στην κεφαλή και στην προέκταση του άξονα A στερεώνεται κατακόρυφα με σύρμα σ ένα μικρό επίπεδο κάτοπτρο κ το οποίο φέρει άγγιστρο α . Από το άγγιστρο αυτό

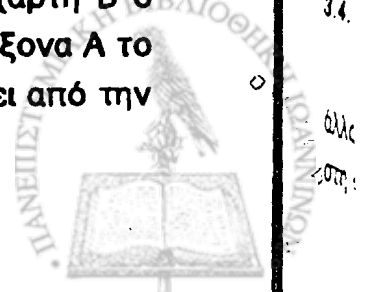


δένεται μ' ένα μη εκτατό νήμα ν το σώμα Σ . Ο ηλεκτροκινητήρας M ο οποίος περιστρέφει τον κατακόρυφο άξονα A τροφοδοτείται από ένα τροφοδοτικό μεταβλητής τάσης και οι στροφές του ρυθμίζονται από το κουμπί MOTOR FREQUENCY ADJUSTMENT. Πάνω στο τροφοδοτικό υπάρχει επίσης και ο απαριθμητής (REVOLUTION COUNTER) με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε την γωνιακή ταχύτητα.



Σχήμα 3. Διάταξη περιστροφής σώματος Σ με τη βοήθεια ενός ηλεκτροκινητήρα M . Η επίδραση της κεντρομόλου δύναμης φαίνεται με τη βοήθεια μιας φωτεινής ακτίνας από πηγή E η οποία δια μέσου κατόπτρου K απεικονίζεται στο πέτασμα B .

Μια οριζόντια οπτική δέσμη που προέρχεται από ένα σύστημα εστίας-φακού E , τροφοδοτούμενο από το τροφοδοτικό, στη θέση LAMP (6 V) ανακλάται στο κάτοπτρο και προσπίπτει στον κατακόρυφο χάρτη B ο οποίος φέρει κατακόρυφο κλίμακα. Κατά την περιστροφή του άξονα A το κάτοπτρο, υπό την επίδραση της κεντρομόλου δύναμης, αποκλίνει από την



κατακόρυφο και η φωτεινή δέσμη σχηματίζει φωτεινή κηλίδα στο χάρτη μετατοπισμένη από την αρχική-της θέση.

3.2 Προεργασία

- α) Σύνδεση του συστήματος εστίας-φακού με το τροφοδοτικό στη θέση LAMP (6 V)
- β) Σύνδεση του τροφοδοτικού με το δίκτυο (220 V)

3.3 Βαθμονόμηση της Κατακόρυφου Κλίμακας

Θέτουμε σε λειτουργία το τροφοδοτικό με το κουμπί LINE. Ρυθμίζουμε τη θέση του συστήματος εστίας-φακού έτσι ώστε η εστίαση της οπτικής δέσμης να γίνεται στην κατακόρυφη κλίμακα αφού ανακλαστεί από το κάτοπτρο κ του άξονα Α της συσκευής. Η θέση της φωτεινής κηλίδας στην κατακόρυφη κλίμακα είναι η θέση του μηδενός της κλίμακας. Στη συνέχεια προσδένουμε στο άγγιστρο α ένα νήμα το οποίο περνάει διαμέσου της ακίνητης τροχαλίας Τ και καταλήγει σε βαρίδιο μάζας $m \approx 10.0$ gr. Το βαρίδιο προκαλεί στρέψη του κατόπτρου με αποτέλεσμα τη μετακίνηση της φωτεινής κηλίδας στην κατακόρυφη κλίμακα. Σημειώνουμε τη νέα θέση της κηλίδας ϵ_1 . Αλλάζουμε μετά τη μάζα του βαριδιού σε 15.0, 20.0, 25.0, 30.0, 35.0, 40.0, 45.0 gr και σημειώνουμε τις αντίστοιχες θέσεις ϵ_1 (ϵ_2 , ϵ_3 , ϵ_4 , ϵ_5 , ϵ_6 , ϵ_7 , ϵ_8).

Την δύναμη F που επιφέρει το βαρίδιο, την υπολογίζουμε σύμφωνα με τη σχέση 3.11 της άσκ. 3. Να γίνει η γραφική παράσταση $\epsilon = f(F)$ και από αυτή να εκτιμηθούν οι δυνάμεις στις οποίες οφείλονται οι παρατηρηθείσες αποκλίσεις της δέσμης στο πείραμα.

3.4 Επαλήθευση της Σχέσης $F = m\omega^2 r$

3.4.1 Προσδιορισμός της Δύναμης F σαν Συνάρτηση της Μάζας m

Αφαιρούμε το νήμα με το βαρίδι από το άγγιστρο α. Συνδέουμε ένα άλλο νήμα ν μήκους $r = 10.0$ cm με σώμα μάζας $m \approx 10.0$ gr που βρίσκεται στη θέση Σ της ράβδου. Σημειώνουμε τη θέση της κηλίδας. Συνδέουμε τον



κινητήρα με το τροφοδοτικό. Θέτουμε σε λειτουργία το τροφοδοτικό πατώντας το κουμπί LINE. Στρέφουμε το ρυθμιστή στροφών (MOTOR FREQUENCY ADJUSTMENT) του τροφοδοτικού σε μια τυχαία θέση και μετράμε τη γωνιακή ταχύτητα με το σύστημα του απαριθμητή (REVOLUTION COUNTER) ως εξής: Κρατάμε υπό πίεση το κουμπί RESET του τροφοδοτικού. Αρχίζουμε την καταμέτρηση του χρόνου με το χρονόμετρο και συγχρόνως αφήνουμε το κουμπί RESET. Σε χρόνο $t = 30 \text{ sec}$ πατάμε το κουμπί STOP του τροφοδοτικού και σημειώνουμε τον αριθμό των στροφών n που γράφονται ψηφιακά πάνω στον απαριθμητή. Από τη σχέση $\omega = 2\pi \frac{n}{t}$ βρίσκουμε τη ζητούμενη γωνιακή ταχύτητα.

Για τη θέση που έχουμε στρέψει το ρυθμιστή στροφών σημειώνουμε τη θέση της φωτεινής κηλίδας ϵ . Θέτουμε το ρυθμιστή στροφών στο μηδέν και μεταβάλλουμε τη μάζα m του σώματος Σ . Γυρίζουμε πάλι το ρυθμιστή στροφών στην προηγούμενη θέση για να έχουμε την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω (σταθερή). Κρατώντας το μήκος του νήματος r σταθερό (στην αρχική τιμή) σημειώνουμε τη νέα θέση της κηλίδας ϵ . Παίρνουμε 5 τουλάχιστον διαφορετικές μάζες και κάνουμε την ίδια διεργασία. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της δύναμης F σαν συνάρτηση της μάζας m

a/a	m (gr)	ϵ (mm)



Από τις τμές του Πίνακα 1:

- 1) Να βρεθεί η δύναμη F για κάθε μάζα.
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση της σχέσης $F = f(m)$ και να βρεθεί η ακριβής μορφή της.

3.4.2 Προσδιορισμός της Δύναμης F σαν Συνάρτηση της Γωνιακής Ταχύτητας ω

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διεργασία κρατώντας σταθερά τα μεγέθη m και r . Μεταβάλλουμε την γωνιακή ταχύτητα ω στρέφοντας το ρυθμιστή στροφών σε διάφορες θέσεις και προσδιορίζουμε τις αντίστοιχες θέσεις της φωτεινής κηλίδας ε . Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της δύναμης F σαν συνάρτηση της γωνιακής ταχύτητας ω

a/a	ω (sec^{-1})	ε (mm)

Από τις τμές του Πίνακα 2:

- 1) Να βρεθεί η δύναμη F για κάθε ω .
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση της σχέσης $F = f(\omega)$ και να βρεθεί η ακριβής μορφή της.



ΑΣΚΗΣΗ 14

στροφικό εκκρεμές προσδιορισμός μετρου στρεψης G σύρματος

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην προηγούμενη άσκηση αναφερθήκαμε σε μία εφαρμογή της απλής αρμονικής κίνησης, το απλό εκκρεμές. Το απλό εκκρεμές αιωρείται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από τον άξονά του. Υπάρχουν όμως συστήματα τα οποία είναι δυνατό να απομακρυνθούν από τη θέση ισορροπίας με απλή στρέψη κατά γωνία θ σε οριζόντιο επίπεδο. Ένα τέτοιο σύστημα είναι το στροφικό εκκρεμές. Σε γενικές γραμμές το στροφικό εκκρεμές αποτελείται από ένα δίσκο που εξαρτιέται από ένα σύρμα. Το ένα άκρο του σύρματος είναι πακτωμένο στο κέντρο μάζας του δίσκου ενώ το άλλο είναι ακλόνητα προσαρμοσμένο σ' ένα στήριγμα. Όταν το στροφικό εκκρεμές στραφεί οριζόντια κατά γωνία θ από τη θέση ισορροπίας εφαρμόζεται σ' αυτό μία ροπή επαναφοράς. Για μικρές αποκλίσεις η ροπή επαναφοράς είναι ανάλογη της γωνιακής απομάκρυνσης θ . Αυτή όμως η αναλογία είναι η έκφραση του νόμου του Hooke για γωνιακές απομακρύνσεις. Έτσι μετά τη στρέψη από τη θέση ισορροπίας το εκκρεμές εκτελεί στροφική απλή αρμονική κίνηση.

Πολλά όργανα εργαστηρίου περιέχουν στροφικές ταλαντώσεις, όπως το γαλβανόμετρο. Ο ζυγός του Cavendish είναι ουσιαστικά ένα στροφικό εκκρεμές. Επίσης ο τροχός ενός ρολογιού είναι ένα παράδειγμα στροφικής αρμονικής κίνησης.

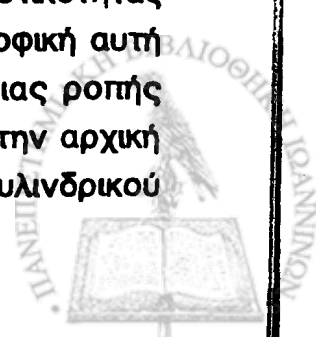


Η ροπή επαναφοράς στο στροφικό εκκρεμές οφείλεται στην ελαστικότητα του σύρματος. Τα μεταλλικά σύρματα μπορούν να υποστούν ελαστικές παραμορφώσεις με **ελκυσμό, θλίψη, κάμψη και στρέψη**. Στην περίπτωση του στροφικού εκκρεμούς αναφερόμαστε μόνο στη στρέψη του σώματος. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι ελαστικές παραμορφώσεις του σώματος, όταν συμβαίνουν με μεγάλη συχνότητα, είναι δυνατό να καταστρέψουν σιγά-σιγά τις ελαστικές ιδιότητες του στερεού σώματος, δηλαδή να προκαλέσουν φυσική φθορά ή παλαίωση. Η ευκολία με την οποία στρέφεται ένα σύρμα ορίζεται με ένα συντελεστή που είναι χαρακτηριστικό του υλικού και ονομάζεται **μέτρο στρέψης G** . Το μέτρο στρέψης χρησιμοποιείται για την περιγραφή των ελαστικών παραμορφώσεων που παθαίνουν τα στερεά. Με τη βοήθεια του στροφικού εκκρεμούς μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή του G . Έτσι, στην άσκηση αυτή, πέρα από τη μελέτη της στροφικής απλής αρμονικής κίνησης, θα προσδιορίσουμε και την τιμή του G για ορισμένο σύρμα. Ο προσδιορισμός αυτός προϋποθέτει μία εκτενέστερη μελέτη της στρέψης σύρματος, γιαυτό πριν περιγράψουμε το στροφικό εκκρεμές σαν σύνολο, θα ασχοληθούμε για λίγο με τη στρέψη του σύρματος.

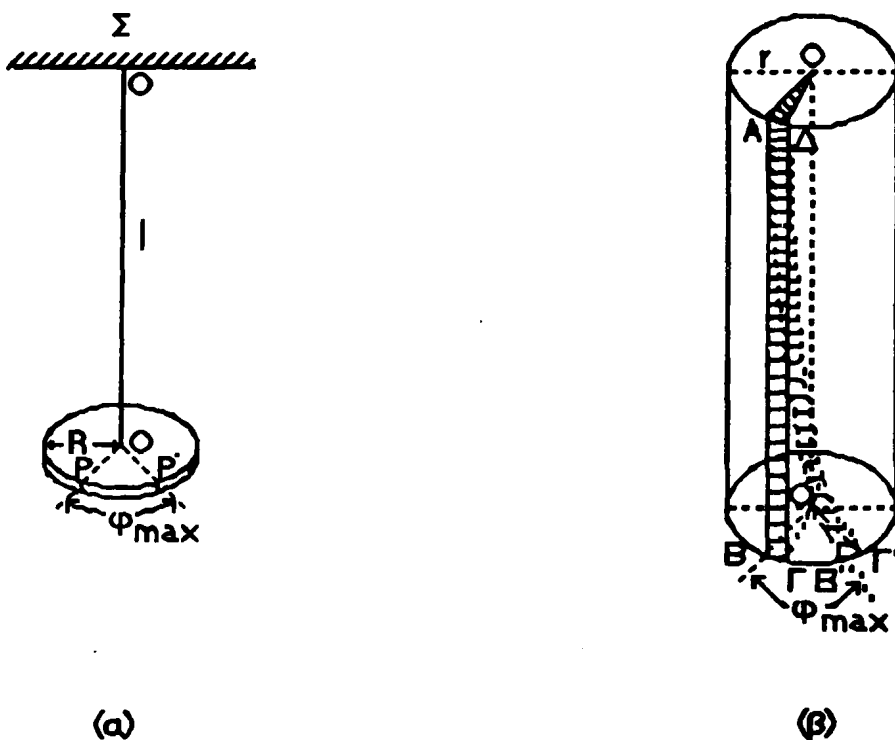
2. ΘΕΩΡΙΑ

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή το στροφικό εκκρεμές αποτελείται από ένα μεταλλικό δίσκο που είναι κρεμασμένος από το κέντρο μάζας του μ' ένα σύρμα, όπως φαίνεται στο Σχ. 1(α). Το σύρμα έχει μήκος l και ακτίνα r . Το άνω άκρο O του σύρματος είναι σταθερά στερεωμένο σε ακλόνητο στήριγμα Σ και το κάτω άκρο O' είναι πακτωμένο στο κέντρο του μεταλλικού δίσκου μάζας m , ακτίνας R και ροπής αδράνειας $I = \frac{1}{2} mR^2$. Αν ο δίσκος στραφεί οριζόντια κατά γωνία ϕ_{\max} , ώστε το P να φτάσει στο P' , τότε το σύρμα OO' στρέφεται αντίστοιχα κατά γωνία ϕ_{\max} . Όταν η γωνιακή απόκλιση είναι σχετικά μικρή, ώστε να μη ξεπερνιέται το όριο ελαστικότητας του σύρματος, τότε μιλάμε για ελαστική παραμόρφωση. Η στροφική αυτή ελαστική παραμόρφωση έχει σαν αποτέλεσμα την εξάσκηση μιας ροπής επαναφοράς πάνω στο δίσκο που τείνει να τον επαναφέρει στην αρχική θέση P . Το Σχ. 1(β) δείχνει μία απεικόνιση της στρέψης του κυλινδρικού

Σχ

ροπ
Η α
στρε

σύρματος. Κάθε σφήνα $AB\Gamma\Delta OO'$ του σύρματος θα υποστεί στρέψη με νέα θέση την $AB'\Gamma'\Delta OO'$. Η άνω επίπεδη επιφάνεια και ο κεντρικός άξονας του κυλινδρικού σύρματος παραμένουν αμετάβλητα. Η γωνία ϕ ονομάζεται γωνία στρέψης του σύρματος και είναι μέγιστη για την κάτω επίπεδη επιφάνεια του σύρματος που είναι σταθερά προσαρμοσμένη στο δίσκο. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $\phi = \phi_{max} = \angle BO'B' = \angle \Gamma O'\Gamma'$.



Σχήμα 1. (α) Στροφικό εκκρεμές που έχει στραφεί κατά γωνία ϕ_{max}
 (β) Τρισδιάστατη απεικόνιση της στρέψης στο κυλινδρικό σύρμα.

Όταν η στρέψη του σύρματος είναι σχετικά μικρή δημιουργείται μία ροπή επαναφοράς που είναι ανάλογη του μεγέθους της γωνίας στρέψης ϕ . Η αναλογία αυτή είναι ουσιαστικά ο νόμος του Hooke για την περίπτωση της στρέψης και γράφεται

$$\tau = - D^* \phi$$



(14.1)

Το D^* είναι μία σταθερά που εξαρτάται από τις ιδιότητες του σύρματος και λέγεται **στροφική σταθερά**. Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η ροπή έχει αντίθετη φορά από την απομάκρυνση ϕ . Η Εξ. (14.1) είναι η συνθήκη για **στροφική απλή αρμονική κίνηση**. Η ροπή επαναφοράς του σύρματος εφαρμόζεται ταυτόχρονα στο δίσκο και δίνεται από το θεμελιώδη νόμο της γωνιακής κίνησης

$$\tau = I \alpha = I \frac{d^2 \phi}{dt^2} \quad (14.2)$$

όπου I η ροπή αδράνειας του δίσκου και α η γωνιακή επιτάχυνση. Συνδυασμός των σχέσεων (14.1) και (14.2) δίνει

$$- D^* \phi = I \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

ή

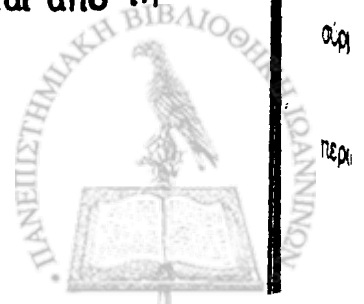
$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{D^*}{I} \phi = 0 \quad (14.3)$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση αυτή με την (9.2) που είναι η διαφορική εξίσωση της απλής γραμμικής αρμονικής κίνησης, συμπεραίνουμε ότι η (14.3) είναι η διαφορική εξίσωση της στροφικής απλής αρμονικής κίνησης. Η λύση της (14.3) είναι μία απλή αρμονική ταλάντωση της γωνιακής συντεταγμένης ϕ που έχει τη μορφή

$$\phi = \phi_{\max} \sin \omega t \quad (14.4)$$

όπου ϕ_{\max} είναι η μέγιστη γωνιακή απομάκρυνση, δηλαδή το πλάτος της στροφικής ταλάντωσης.

Σε αναλογία με τις εξισώσεις (9.4) και (12.9) η περίοδος της στροφικής αρμονικής ταλάντωσης στροφικού εκκρεμούς δίνεται από τη σχέση



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D^*}} \quad (14.5)$$

Εάν η ροπή αδράνειας I του δίσκου, ως προς τον άξονα περιστροφής, είναι γνωστή και μετρηθεί η περίοδος T είναι δυνατό να προσδιοριστεί η στροφική σταθερά D^* οποιουδήποτε σύρματος.

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, ένας σπιδυδαίος συντελεστής που χρησιμοποιείται για την περιγραφή των ελαστικών παραμορφώσεων που παθαίνουν τα στερεά σώματα είναι το μέτρο στρέψης G . Το G είναι χαρακτηριστικό του υλικού του σώματος και δεν εξαρτάται από τις γεωμετρικές διαστάσεις του. Για ένα π.χ. σύρμα το G είναι ανεξάρτητο του μήκους και της διαμέτρου του. Η τιμή G για ένα σύρμα κάποιου υλικού μπορεί να βρεθεί όταν γνωρίζουμε την τιμή της σταθεράς D^* του σύρματος. Είναι δυνατό να αποδειχθεί με μαθηματική ανάλυση ότι η σχέση που συνδέει τα μεγέθη D^* και G είναι

$$D^* = G \frac{\pi r^4}{2l} \quad (14.6)$$

όπου r και l είναι η ακτίνα και το μήκος του σύρματος αντίστοιχα. Επομένως, από τις σχέσεις (14.5) και (14.6) με τη μέθοδο του στροφικού εκκρεμούς, μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή του G .

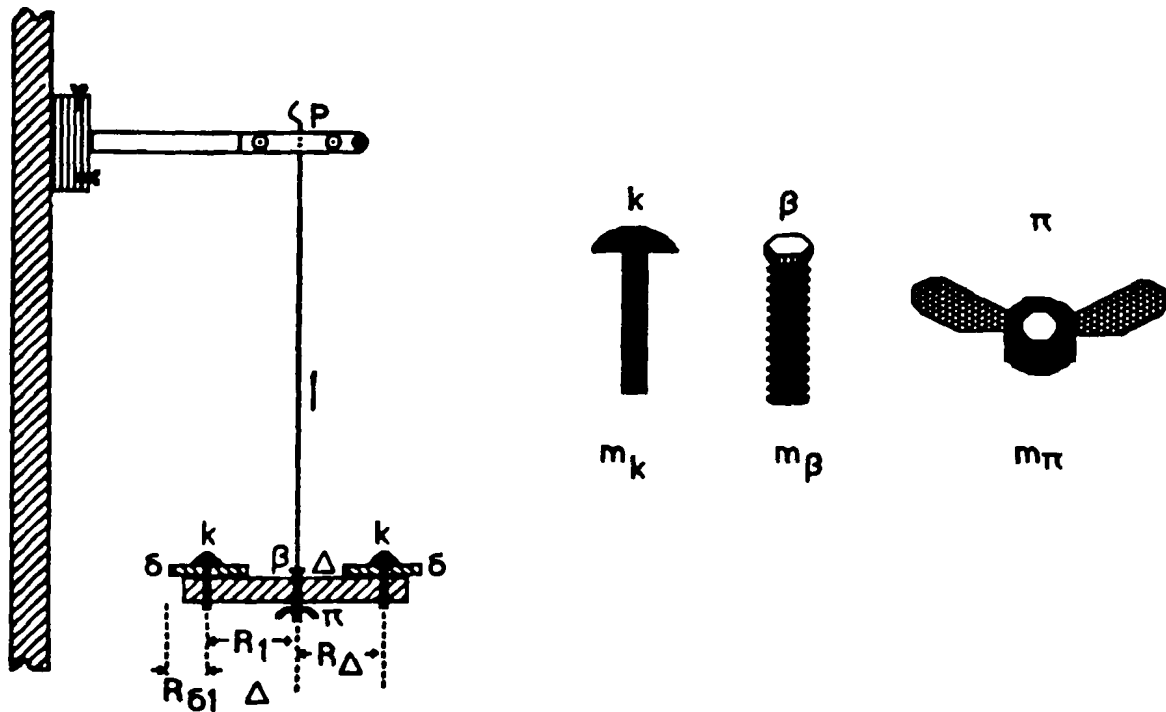
3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Όπως φαίνεται στο Σχ. 2 η πειραματική διάταξη του στροφικού εκκρεμούς αποτελείται από ένα μεγάλο μεταλλικό δίσκο Δ στον οποίο είναι στερεωμένο στο κέντρο μάζας του, ένα χαλύβδινο σύρμα Σ . Το κάτω άκρο του σύρματος είναι ασημοκολλημένο σε μία βίδα β η οποία στηρίζεται στο δίσκο με τη βοήθεια μιας "πεταλούδας" π . Όλο το σύστημα εξαρτάται από μια διάταξη έτσι ώστε να είναι δυνατή τόσο η αυξομείωση του μήκους l του σύρματος, όσο και η αντικατάστασή-του με άλλο διαφορετικής διαμέτρου d .

Το στροφικό εκκρεμές μπορεί να εκτελεί στροφικές ταλαντώσεις περιόδου T . Η περίοδος T εξαρτάται τόσο από τα γεωμετρικά στοιχεία



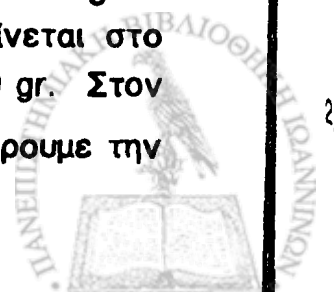
(l, d) και το υλικό (G) του σύρματος στρέψης, όσο και από τα γεωμετρικά στοιχεία του δίσκου περιστροφής (I).



Σχήμα 2. Σχεδιάγραμμα πειραματικής διάταξης του στροφικού εκκρεμούς.

3.1 Προσδιορισμός της Περιόδου T σαν Συνάρτηση της Ροπής Αδράνειας I . Υπολογισμός του G .

Παίρνουμε ένα χαλύβδινο σύρμα μήκους l περίπου 95.0 cm και διαμέτρου d περίπου 1.50 mm. Το μήκος l μετριέται με μια μετροταινία ενώ η διάμετρος d μένα μικρόμετρο. Στηρίζουμε το άνω άκρο του σύρματος στη ράβδο στήριξης P , όπως φαίνεται στο Σχ. 2, έτσι ώστε το σύρμα να σχηματίζει γωνία 90° με τη ράβδο P . Χρειάζεται προσοχή για να μη παραμορφωθεί το σύρμα. Στερεώνουμε με τη βίδα β , μάζας $m_\beta = 27.0$ gr το άλλο άκρο του σύρματος στο δίσκο Δ που έχει μάζα m_Δ (φαίνεται στο δίσκο) με τη βοήθεια της "πεταλούδας" π , μάζας $m_\pi = 10.0$ gr. Στον υπολογισμό της ροπής αδράνειας του δίσκου θα πρέπει να πάρουμε την



ολική μάζα $m_{\Delta\theta\pi} = m_{\Delta} + m_{\theta} + m_{\pi}$. Στρέφουμε το δίσκο Δ κατά γωνία ϕ και τον αφήνουμε ελεύθερο να περιστραφεί γύρω από τον κατακόρυφο άξονα. Μετά 1-2 πλήρεις ταλαντώσεις του δίσκου μετράμε το χρόνο t πέντε ταλαντώσεων. Τοποθετούμε στο δίσκο Δ, συμμετρικά ως προς τον άξονα εξάρτησης-του, δύο μικρούς δίσκους δ της ίδιας περίπου μάζας m_{δ} και τους στερεώνουμε με τα καρφιά κ μάζας $m_{\kappa} = 6.0$ gr. Στον υπολογισμό της ροπής αδράνειας I_{δ} κάθε δίσκου, ως προς τον άξονα εξάρτησης του σύρματος, θα πρέπει να πάρουμε τη μάζα $m_{\delta\kappa} = m_{\delta} + m_{\kappa}$. Παίρνουμε πέντε περίπου διαφορετικές μάζες μικρών δίσκων (ανά 2 ή ανά 4) και για κάθε συνδυασμό $\Sigma m_{\delta\kappa}$ μετράμε το χρόνο πέντε ταλαντώσεων. Οι μικροί δίσκοι που δίνονται έχουν μάζες 100.0, 200.0, 300.0, 500.0 gr. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της περιόδου T σε συνάρτηση της ροπής αδράνειας I και τον υπολογισμό του μέτρου στρέψης G

a/a	t = 5T (sec)	$\Sigma m_{\delta\kappa}$ (gr)
1		
2		
.		
.		
.		

Από τις τιμές του Πίνακα 1:

- 1) Να υπολογιστεί η ολική ροπή αδράνειας $I_{ολ}$ του συστήματος ($m_{\Delta\theta\pi}$, $\Sigma m_{\delta\kappa}$) εφαρμόζοντας το θεώρημα Steiner (Παραλλήλων Αξόνων).
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση της σχέσης $T = f(I)$ και να βρεθεί η μαθηματική εξίσωση της σχέσης αυτής.



- 3) Από την εξίσωση που θα βρείτε παραπάνω να υπολογίσετε το μέτρο στρέψης G .

3.2 Μελέτη της Σχέσης $T = f(l)$ και Υπολογισμός του Μέτρου Στρέψης G .

Παίρνουμε ένα χαλύβδινο σύρμα ορισμένης διαμέτρου d περίπου 1.50 mm και στερεώνουμε πάλι το κάτω άκρο στο δίσκο σταθερής μάζας $m_{\Delta\theta\pi}$ και το άνω άκρο στη ράβδο στήριξης. Το μήκος του σύρματος παίρνεται αρχικά 50.0 cm περίπου. Στρέφουμε το δίσκο Δ κατά γωνία ϕ και τον αφήνουμε ελεύθερο να περιστραφεί γύρω από τον κατακόρυφο άξονα. Μετά από 1-2 πλήρεις αιωρήσεις μετράμε το χρόνο t πέντε αιωρήσεων. Μεταβάλλουμε το μήκος l αυξάνοντας-το περίπου κατά 10.0 cm κάθε φορά και για κάθε μήκος μετράμε το χρόνο πέντε αιωρήσεων. Οι τιμές καταχωρούνται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2

Μετρήσεις για τη μελέτη της σχέσης $T = f(l)$ και τον υπολογισμό του G

a/a	$t = 5T$ (sec)	l (cm)
1		
2		
.		
.		
.		

Από τις τιμές του Πίνακα 2:

- 1) Να υπολογίσετε την περίοδο T για κάθε μήκος l .
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση της σχέσης $T = f(l)$ και να βρεθεί η μαθηματική εξίσωση αυτής.



- 3) Από την εξίσωση που θα βρείτε παραπάνω να υπολογίσετε το μέτρο στρέψης G.

3.3 Μελέτη της Σχέσης $T = f(d)$ και Υπολογισμός του G

Κρατάμε σταθερή τη μάζα του δίσκου $m_{\Delta\theta\pi}$ και το μήκος του σύρματος l περίπου 70.0 cm. Παίρνουμε ένα σύρμα διαμέτρου περίπου 1.50 mm και στερεώνουμε πάλι τα άκρα του στο δίσκο και στη ράβδο στήριξης. Στρέφουμε το δίσκο κατά γωνία ϕ και μετράμε το χρόνο πέντε αιωρήσεων, όπως προηγούμενα. Παίρνουμε περίπου 5 διαφορετικά σύρματα που η διάμετρος-τους είναι στην περιοχή από ~1.00 mm έως ~ 2.50 mm και μετράμε το χρόνο t πέντε αιωρήσεων. Οι τιμές γράφονται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3

Μετρήσεις για τη μελέτη της σχέσης $T = f(d)$ και τον υπολογισμό του G

a/a	t = 5T (sec)	d (mm)
1		
2		
.		
.		
.		

Από τις τιμές του Πίνακα 3:

- 1) Να βρείτε την περίοδο T για κάθε διάμετρο d.
- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση της σχέσης $T = f(d)$ και να βρεθεί η μαθηματική εξίσωση αυτής.
- 3) Από την εξίσωση που θα βρείτε παραπάνω να υπολογίσετε το μέτρο στρέψης G.



ΑΣΚΗΣΗ 15

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΚΑΙ ΥΓΡΩΝ

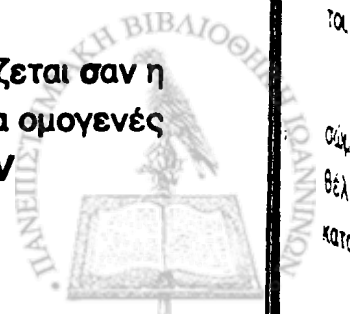
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πυκνότητα είναι μέτρο εκτίμησης της μάζας ενός σώματος. Η πυκνότητα των σωμάτων είναι από τα βασικότερα μεγέθη που παίρνουν μέρος στη μελέτη των φυσικών φαινομένων. Επομένως για ένα μελετητή του φυσικού κόσμου είναι απαραίτητη μια άμεση αίσθηση και εκτίμηση του μεγέθους αυτού. Προϋπόθεση για τον προσδιορισμό της πυκνότητας ενός σώματος είναι η γνώση της μάζας του. Η μέτρηση της μάζας ή του βάρους των σωμάτων γίνεται με ζυγούς. Η ακριβής ζύγιση είναι μια λεπτή διαδικασία που απαιτεί σχετική πείρα. Ένας ακριβής ζυγός προϋποθέτει οριζοντίωση, προσδιορισμό του μηδενός, βαθμολόγηση κλίμακας κ.ά. Στο πείραμα αυτό θα ασχοληθούμε με τον προσδιορισμό της πυκνότητας στερεών και υγρών σωμάτων.

2. ΘΕΩΡΙΑ

2.1 Ορισμός

Η πυκνότητα ενός σώματος στερεού, υγρού ή αερίου ορίζεται σαν η μάζα του σώματος που περιέχεται στη μονάδα του όγκου. Για ένα ομογενές σώμα ορίζεται σαν το πηλίκο της μάζας του m δια του όγκου του V



ζ
α
π
τε
σι
πε
δε
στι
τα
α
β
κατε

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (15.1)$$

Σε πειραματικές μετρήσεις, η πυκνότητα εκφράζεται κυρίως σε μονάδες gr/cm^3 . Μια συγγενής έννοια της πυκνότητας ενός σώματος είναι το ειδικό βάρος ε . Το ειδικό βάρος ορίζεται σαν το πηλίκο του βάρους του B δια του όγκου του V

$$\varepsilon = \frac{B}{V} \quad (15.2)$$

Το ειδικό βάρος εκφράζεται συνήθως σε dyn/cm^3 . Το βάρος $B = mg$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στον τόπο όπου γίνεται η μέτρηση. Επομένως η σχέση που συνδέει το ειδικό βάρος ε με την πυκνότητα ρ ενός σώματος είναι

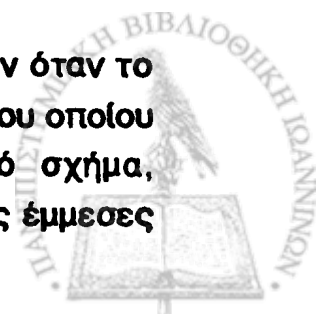
$$\varepsilon = \rho g \quad (15.3)$$

Εδώ θα ασχοληθούμε με την πυκνότητα των ομογενών στερεών και υγρών σωμάτων.

2.2 Πυκνότητα Στερεών

Για τον προσδιορισμό της πυκνότητας των στερεών έχουν αναπτυχθεί πολλοί τρόποι άλλοι άμεσοι και άλλοι έμμεσοι. Άμεσα, η πυκνότητα των στερεών υπολογίζεται αν είναι γνωστά η μάζα και ο όγκος του. Η μάζα m προσδιορίζεται με άμεση ζύγιση του σώματος μ' ένα ζυγό. Στις περιπτώσεις που το σώμα έχει κανονικό σχήμα (π.χ. κύλινδρος, σφαίρα, παραλληλεπίπεδο κ.ά.) ο όγκος του προσδιορίζεται εύκολα με μέτρηση των διαστάσεων-του. Γνωρίζοντας τη μάζα m και τον όγκο V του ομογενούς στερεού μπορούμε από τη σχέση (15.1) να προσδιορίσουμε την πυκνότητα ρ του σώματος.

Η άμεση μέθοδος εφαρμόζεται αρκετά ικανοποιητικά μόνον όταν το σώμα έχει κανονικό σχήμα. Στην περίπτωση όμως που το σώμα, του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε την πυκνότητα, δεν έχει κανονικό σχήμα, καταφεύγουμε σε έμμεσες μεθόδους. Μια από τις πιο σημαντικές έμμεσες

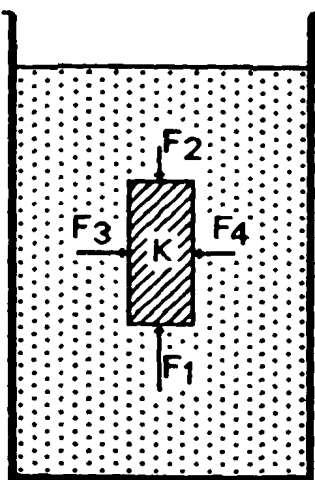


μεθόδους που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της πυκνότητας των στερεών είναι η μέθοδος της άνωσης. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην πολύ γνωστή αρχή του Αρχιμήδη που λέει: Κάθε σώμα που βυθίζεται μέσα σ' ένα υγρό, χάνει τόσο από το βάρος του όσο είναι το βάρος του υγρού που εκτοπίζει. Το βάρος που φαινομενικά χάνει το σώμα, όταν βυθίζεται σε υγρό ονομάζεται άνωση και θα την υπολογίσουμε αμέσως παρακάτω.

Για ευκολία θα θεωρήσουμε ένα σώμα με κανονικό σχήμα βυθισμένο σε υγρό όπως φαίνεται στο Σχ. 1. Στο σώμα Κ εξασκούνται λόγω πιέσεων οι δυνάμεις F_1 , F_2 , F_3 , και F_4 . Οι δυνάμεις F_3 και F_4 που δρουν στις παράπλευρες επιφάνειες αλληλοαναιρούνται οπότε μένουν μόνο οι δυνάμεις F_1 και F_2 που δρουν στις δυο βάσεις. Από τη θεωρία της υδροστατικής έχουμε

$$F_1 = p_1 S = \varepsilon h_1 S \quad (15.4\alpha)$$

και
$$F_2 = p_2 S = \varepsilon h_2 S \quad (15.4\beta)$$



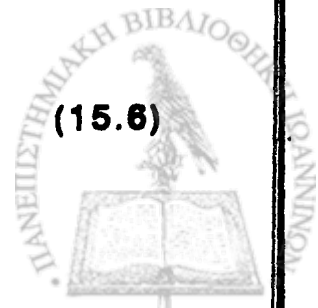
όπου p_1 , p_2 οι πιέσεις που δέχονται από το υγρό οι βάσεις του σώματος, ε το ειδικό βάρος του υγρού, h_1 , h_2 οι αποστάσεις των δυο βάσεων του σώματος από την επιφάνεια του υγρού και S το εμβαδόν των βάσεων του σώματος Κ. Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα από το υγρό είναι

$$F = F_1 - F_2 = \varepsilon (h_2 - h_1) S \quad (15.5)$$

Όμως $(h_2 - h_1)S$ είναι ο όγκος V του σώματος Κ οπότε

$$A = F = \varepsilon \cdot V \quad (15.6)$$

Σχήμα 1. Το σύνολο των δυνάμεων που εφαρμόζονται σ' ένα σώμα Κ που είναι βυθισμένο σ' ένα υγρό.



Η σελίδα
παράγει
στο

Η δύναμη F έχει διεύθυνση προς την επιφάνεια του υγρού και ονομάζεται άνωση A . Ο όγκος που εκτοπίζει το σώμα K ισούται με τον όγκο του σώματος $V = (h_2 - h_1)S$ οπότε η σχέση (15.6) δίνει το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού. Η σχέση (15.6) αν και αποδείχτηκε για ένα σώμα με κανονικό σχήμα ισχύει και για οποιοδήποτε σχήμα του σώματος.

Για τον προσδιορισμό της πυκνότητας ενός σώματος με τη μέθοδο της άνωσης μετράμε το βάρος του B στον αέρα και το βάρος B' όταν βυθιστεί σε υγρό γνωστού ειδικού βάρους, συνήθως νερού. Η άνωση που δέχεται το σώμα μέσα στο υγρό προσδιορίζεται από τη διαφορά των δυο μετρήσεων

$$A = B - B' \quad (15.7)$$

Συνδυάζοντας τη σχέση (15.7) με την (15.6) παίρνουμε

$$B - B' = \varepsilon V_{\sigma} = \rho_{\text{υ}} g V_{\sigma} \quad (15.8)$$

όπου $\rho_{\text{υ}}$ η πυκνότητα του υγρού και V_{σ} ο όγκος του σώματος. Από την (15.8) μπορούμε να προσδιορίσουμε τον όγκο του σώματος

$$V_{\sigma} = \frac{B - B'}{\rho_{\text{υ}} g} \quad (15.9)$$

θέτοντας την (15.9) στην (15.1) βρίσκουμε

$$\rho_{\sigma} = \frac{m_{\sigma}}{V_{\sigma}} = \frac{m_{\sigma}}{\frac{B - B'}{\rho_{\text{υ}} g}} = \rho_{\text{υ}} \frac{m_{\sigma} g}{B - B'} \quad (15.10)$$

Όμως $B = m_{\sigma} g$ και $B' = m'_{\sigma} g$ οπότε η (15.10) γίνεται

$$\rho_{\sigma} = \frac{B}{B - B'} \rho_{\text{υ}} = \frac{m_{\sigma}}{m_{\sigma} - m'_{\sigma}} \rho_{\text{υ}} \quad (15.11)$$

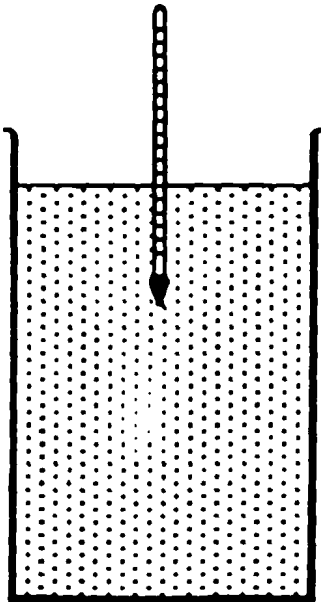
Η σχέση (15.11) δίνει την πυκνότητα του σώματος αν είναι γνωστά η πυκνότητα του υγρού στο οποίο βυθίζεται το σώμα και οι μάζες του σώματος στον αέρα m_{σ} και στο υγρό m'_{σ} .



Μια άλλη μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της πυκνότητας των στερεών είναι η μέθοδος της ληκύθου που δεν θα συζητηθεί εδώ.

2.3 Πυκνότητα Υγρών

Η πυκνότητα των υγρών μπορεί να μετρηθεί απευθείας, με ειδικά όργανα που λέγονται πυκνόμετρα αν μετρούν πυκνότητες μεγαλύτερες της πυκνότητας του νερού ή αραιόμετρα αν μετρούν πυκνότητες μικρότερες αυτής του νερού. Τα όργανα αυτά είναι πλωτήρες, όπως φαίνεται στο Σχ. 2, που φέρουν ειδικά βαθμολογημένη κλίμακα και στο κάτω μέρος ειδικό έρμα. Η λειτουργία των οργάνων αυτών στηρίζεται στην αρχή του Αρχιμήδη που περιγράφηκε παραπάνω.



Σχήμα 2. Μέτρηση της πυκνότητας υγρού με πυκνόμετρο.

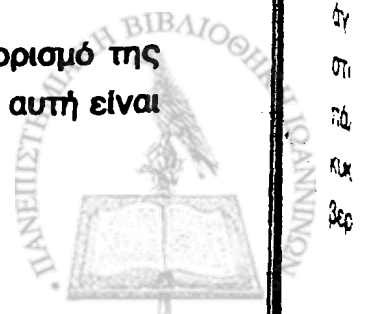
Η κλίμακα των πυκνομέτρων και αραιομέτρων είναι βαθμολογημένη συνήθως σε αυθαίρετες μονάδες που λέγονται βαθμοί B α μ θ. ($^{\circ}B\theta$). Στα πυκνόμετρα το μηδέν της κλίμακας αντιστοιχεί σε πυκνότητα 1 gr cm^{-3} ενώ στα αραιόμετρα οι $10^{\circ}B\theta$ αντιστοιχούν σε πυκνότητα 1 gr cm^{-3} .

Άλλη μέθοδος για τον προσδιορισμό της πυκνότητας των υγρών είναι από τη μάζα και τον όγκο. Η μάζα προσδιορίζεται με ζύγιση του υγρού που περιέχεται σε δοχείο βάρους B_{δ} .

$$m_{\text{υ}} = \frac{B - B_{\delta}}{g} \quad (15.12)$$

όπου B το βάρος του υγρού συν το βάρος του δοχείου. Ο όγκος του υγρού προσδιορίζεται αν θέσουμε το υγρό σε ογκομετρικό σωλήνα. Η σχέση (15.1) δίνει τότε την πυκνότητα του υγρού.

Μια άλλη μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της πυκνότητας των υγρών είναι η μέθοδος της άνωσης. Η μέθοδος αυτή είναι παρόμοια μ' αυτή που περιγράψαμε παραπάνω για τα στερεά.



Μετράμε το βάρος B ενός τυχαίου στερεού σώματος στον αέρα. Στη συνέχεια βυθίζουμε το σώμα σε υγρό γνωστής πυκνότητας π.χ. νερό και μετράμε το φαινόμενο βάρος B' . Η άνωση A που εξασκείται από το νερό στο σώμα δίνεται από την

$$A_V = B - B' = \rho_V g V_\sigma \quad (15.13)$$

Μετά βυθίζουμε το σώμα στο υγρό του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα και μετράμε πάλι το φαινόμενο βάρος B'' . Η άνωση τώρα θα είναι

$$A_U = B - B'' = \rho_U g V_\sigma \quad (15.14)$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (15.13) και (15.14) καταλήγουμε στη σχέση

$$\rho_U = \frac{B - B''}{B - B'} \rho_V = \frac{m_\sigma - m''_\sigma}{m_\sigma - m'_\sigma} \rho_V \quad (15.15)$$

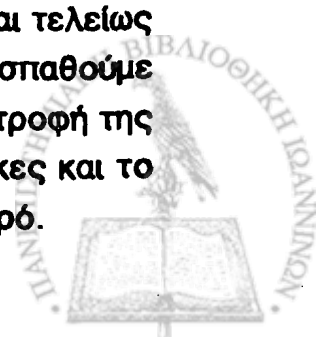
που δίνει την πυκνότητα του υγρού αν είναι γνωστά η πυκνότητα του νερού ρ_V και οι μάζες m_σ , m'_σ και m''_σ .

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

3.1 Χρήση του Ζυγού στη Μέθοδο της Άνωσης

Η πλήρης περιγραφή του ζυγού που θα χρησιμοποιήσουμε στο πείραμα μας γίνεται στην Άσκ. 1 παρ. 2.4.

Φέρνουμε το δίσκο δ πάνω από το δίσκο Δ . Ρυθμίζουμε το ζυγό ώστε η βελόνα β να δείχνει την ένδειξη μηδέν. Τοποθετούμε το δοχείο με το υγρό πάνω στο δίσκο δ ώστε να μην ακουμπάει σε άλλα μέλη του ζυγού. Κρεμάμε το σώμα του οποίου θέλουμε να βρούμε τη φαινόμενη μάζα από το άγκιστρο α με λεπτό νήμα. Προσέχουμε ώστε το σώμα να βυθίζεται τελείως στο υγρό και να μην ακουμπάει στα τοιχώματα του δοχείου. Προσπαθούμε πάλι να μηδενίσουμε το ζυγό με μετακίνηση των δρομέων και περιστροφή της κυκλικής κλίμακας. Η ένδειξη που διαβάζουμε απ' όλες τις κλίμακες και το βερνιέρο είναι η φαινόμενη μάζα του σώματος όταν βυθιστεί στο υγρό.



3.2 Πυκνότητα Στερεών Σωμάτων

3.2.1 Μέθοδος Μάζας - Όγκου (άμεση)

Μ' ένα διαστημόμετρο μετρούμε τις πλευρές α,β,γ ενός στερεού ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου (Al) και τη διάμετρο και το ύψος ενός κυλίνδρου (Fe). Οι μετρήσεις των διαστάσεων α,β,γ επαναλαμβάνονται πέντε φορές και καταχωρούνται στον Πίνακα 1. Μετά ζυγίζουμε πέντε φορές το ίδιο σώμα με τον υδροστατικό ζυγό. Οι μετρήσεις της μάζας m_{σ} τοποθετούνται στον Πίνακα 1.

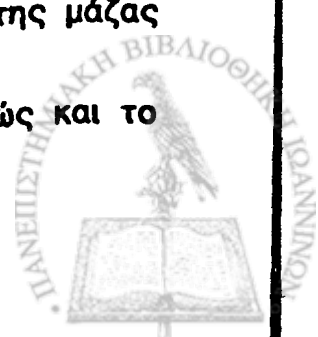
Πίνακας 1

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της πυκνότητας ενός σώματος από τον όγκο και τη μάζα

α/α	Al				Fe		
	a (cm)	β (cm)	γ (cm)	m_{σ} (gr)	d (cm)	h (cm)	m_{σ} (gr)
1							
2							
3							
.							
.							
.							

Από τις τμές του Πίνακα 1:

- 1) Να υπολογισθεί η μέση τιμή καθώς και το σφάλμα του όγκου V του σώματος .
- 2) Να υπολογισθεί η μέση τιμή καθώς και το σφάλμα της μάζας m_{σ} του σώματος.
- 3) Να υπολογισθεί η πυκνότητα ρ_{σ} του στερεού καθώς και το σφάλμα της $\sigma(\bar{\rho}_{\sigma})$.



3.2.2 Μέθοδος της Άνωσης

Καθαρίζουμε καλά ένα γυάλινο δοχείο περιεκτικότητας 250 ml και το γεμίζουμε με νερό ($\rho_v = 1 \text{ gr cm}^{-3}$). Με λεπτό νήμα κρεμάμε ένα στερεό σώμα (σιδερένιο κύλινδρο) από το άγκιστρο του ζυγού α και μετράμε τη μάζα του όταν είναι στον αέρα m_σ . Η μέτρηση της μάζας γίνεται πέντε φορές και οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 2. Τοποθετούμε το δοχείο με το νερό στο δίσκο δ και βυθίζουμε το σώμα (που κρεμάται από το άγκιστρο) στο νερό. Μετράμε τη φαινόμενη μάζα του σώματος m'_σ πέντε φορές. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 2. Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλα τα σώματα (ένα δρομέα από Al ή μια τετραγωνική πλάκα Al, ένα μπρούτζινο κύλινδρο και ένα σώμα ακανόνιστου σχήματος). Οι μετρήσεις τοποθετούνται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της πυκνότητας στερεού σώματος με τη μέθοδο της άνωσης

α/α	Fe		Al		Μπρούτζος		Pb (Ακανόνιστο)	
	m_σ (gr)	m'_σ (gr)	m_σ (gr)	m'_σ (gr)	m_σ (gr)	m'_σ (gr)	m_σ (gr)	m'_σ (gr)
1								
2								
3								
.								
.								
.								



Από τις τιμές του Πίνακα 2:

- 1) Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές και τα σφάλματα των μαζών m_{σ} και m'_{σ} για όλα τα σώματα.
- 2) Να υπολογιστεί η πυκνότητα ρ_{σ} καθώς και το σφάλμα της $\sigma(\bar{\rho}_{\sigma})$ για όλα τα σώματα.

3.3 Πυκνότητα Υγρών

3.3.1 Από τον Όγκο και τη Μάζα

Θέτουμε σ' ένα καθαρό ογκομετρικό σωλήνα μια ποσότητα από το υγρό του οποίου θέλουμε να βρούμε την πυκνότητα. Από τις ενδείξεις του ογκομετρικού σωλήνα βρίσκουμε τον όγκο που καταλαμβάνει το υγρό ($1\text{ ml} = 1\text{ cm}^3$). Τοποθετούμε ένα κενό δοχείο Α (των 250 ml) στο δίσκο Δ του υδροστατικού ζυγού και βρίσκουμε τη μάζα $m_{\delta\sigma\chi}$. Στη συνέχεια χύνουμε το υγρό που υπάρχει στον ογκομετρικό σωλήνα στο δοχείο που βρίσκεται στο ζυγό και μετράμε τη μάζα του δοχείου και του υγρού $m_{\text{υ}+\delta\sigma\chi}$. Από τα $m_{\delta\sigma\chi}$ και $m_{\text{υ}+\delta\sigma\chi}$ βρίσκουμε με αφαίρεση τη μάζα του υγρού. Από τις τιμές της μάζας $m_{\text{υ}}$ και του όγκου V να βρεθεί η πυκνότητα του υγρού $\rho_{\text{υ}}$.

3.3.2 Μέθοδος της Άνωσης

Γεμίζουμε ένα δοχείο των 250 ml με νερό. Ζυγίζουμε ένα σώμα (τυχαίο) με το ζυγό και βρίσκουμε τη μάζα του στον αέρα m_{σ} . Στη συνέχεια τοποθετούμε το δοχείο με το νερό στο δίσκο δ του υδροστατικού ζυγού και μετράμε τη φαινόμενη μάζα του ίδιου σώματος όταν είναι βυθισμένο στο νερό m'_{σ} . Στεγνώνουμε στη συνέχεια το σώμα και οντκαθιστούμε το δοχείο του νερού με το δοχείο που περιέχει το υγρό του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε την πυκνότητα. Βρίσκουμε τη φαινόμενη μάζα του σώματος όταν βυθιστεί στο υγρό m''_{σ} . Οι μετρήσεις των m_{σ} , m'_{σ} και m''_{σ} γίνονται πέντε φορές και καταχωρούνται στον Πίνακα 3.



Πίνακας 3

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της πυκνότητας υγρού με τη μέθοδο της άνωσης

a/a	m_{σ} (gr)	m'_{σ} (gr)	m''_{σ} (gr)
1			
2			
3			
.			
.			
.			

Από τις τιμές του Πίνακα 3:

- 1) Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές και τα σφάλματα των μαζών m_{σ} , m'_{σ} και m''_{σ} .
- 2) Να υπολογιστεί η πυκνότητα του υγρού $\rho_{\text{υ}}$ και να βρεθεί το σφάλμα της $\sigma(\bar{\rho}_{\text{υ}})$.
- 3) Συγκρίνετε την τιμή της $\rho_{\text{υ}}$ από τις δυο μεθόδους.



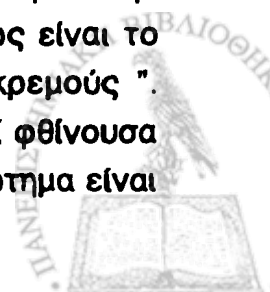
ΑΣΚΗΣΗ 16

μετρηση του συντελεστη εσωτερικης τριβης η των ρευστων

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ευκολία με την οποία αναδεύουμε ένα υγρό εξαρτάται από το πόσο παχύρρευστο είναι. Το παχύρρευστο ενός υγρού είναι ένα μέτρο ποιοτικής εκτίμησης της τριβής μεταξύ αναδευτήρα και υγρού και έμμεσα της εσωτερικής τριβής του υγρού. Η εσωτερική τριβή ενός ρευστού γενικώτερα είναι ανάλογη του συντελεστή ιξώδους η του ρευστού. Όπως θα αναφέρουμε στη θεωρία ο συντελεστής εσωτερικής τριβής ή ιξώδους είναι ένα χαρακτηριστικό μέγεθος που εξαρτάται από τη φύση του ρευστού και αποτελεί μέτρο εκτίμησης της τριβής που αναπτύσσεται στο εσωτερικό του ρευστού κατά την κίνησή του. Συγκεκριμένα κατά την κίνηση των πραγματικών ρευστών δημιουργούνται στρώματα ρευστού τα οποία κινούνται με κάποια σχετική ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο και ως προς τα τοιχώματα του δοχείου το οποίο τα περιέχει. Αυτό οφείλεται σε δυνάμεις εσωτερικής τριβής οι οποίες με τη σειρά τους οφείλονται στις δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των μορίων, τις δυνάμεις Van der Waals.

Ο τρόπος προσδιορισμού του συντελεστή εσωτερικής τριβής ή ιξώδους ενός ρευστού εξαρτάται από την τιμή του συντελεστή. Στην περίπτωση ρευστών με σχετικά μικρό συντελεστή ιξώδους, όπως είναι το νερό, χρησιμοποιούμε κυρίως τη " Μέθοδο του στροφικού εκκρεμούς ". Πρόκειται για ένα δίσκο κρεμασμένο από ένα σύρμα που εκτελεί φθίνουσα αρμονική κίνηση λόγω της εσωτερικής τριβής του υγρού. Το ερώτημα είναι



1
2
2
κίν
σε
ενέ
σώλ
ρεμ
τότε

πως συσχετίζεται η κίνηση του δίσκου του στροφικού εκκρεμούς με την εσωτερική τριβή του ρευστού. Το στρώμα του ρευστού που βρίσκεται σε επαφή με το δίσκο λόγω συνάφειας ακολουθεί την κίνηση του δίσκου. Έτσι δημιουργείται μια σχετική κίνηση ενός στρώματος του ρευστού ως προς τα γειτονικά του στρώματα. Η σχετική αυτή κίνηση των στρωμάτων του ρευστού έχει σαν αποτέλεσμα την εσωτερική τριβή του ρευστού.

Στην περίπτωση ρευστών με σχετικά μεγάλο συντελεστή ιξώδους, όπως είναι τα λάδια, η γλυκερίνη κ.ά., χρησιμοποιούμε κυρίως τη μέθοδο της " Πτώσης μικρών σφαιρών ". Η κίνηση ενός πραγματικού ρευστού γύρω από μια σφαίρα είναι ισοδύναμη με την κίνηση της ίδιας της σφαίρας μέσα στο ρευστό το οποίο βρίσκεται σε στατική ισορροπία. Η ταχύτητα πτώσης ενός σώματος μέσα σε ρευστό εξαρτάται από την αντίσταση ιξώδους που δέχεται το σώμα από το ρευστό και η οποία είναι συνέπεια της εσωτερικής τριβής του ρευστού. Η αντίσταση του ιξώδους που δέχεται το σώμα εξαρτάται από το γεωμετρικό σχήμα του σώματος. Ο Stokes το 1845 περιορίστηκε σε σώματα με σφαιρικό σχήμα και βρήκε μια μαθηματική σχέση που δίνει την αντίσταση του ιξώδους που δέχεται η σφαίρα από το ρευστό σαν συνάρτηση της ακτίνας της σφαίρας, της ταχύτητας πτώσης αυτής και του συντελεστή ιξώδους του ρευστού που πρόκειται να προσδιορίσουμε.

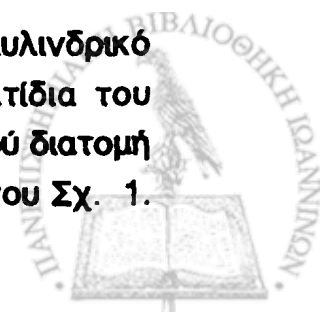
Στην άσκηση αυτή θα προσδιορίσουμε το συντελεστή ιξώδους της γλυκερίνης με τη μέθοδο της πτώσης μικρών σφαιρών.

2. ΘΕΩΡΙΑ

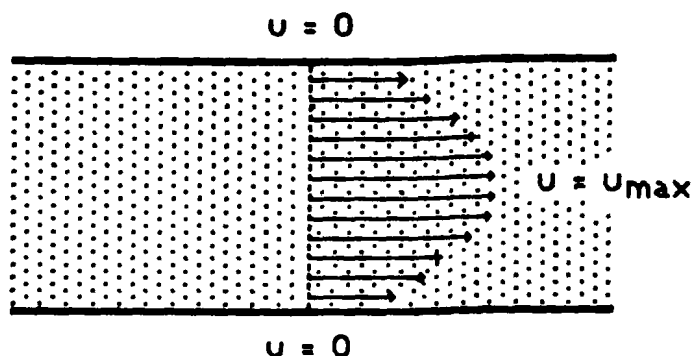
2.1 Χαρακτηριστικά της Ροής των Ρευστών

Οι μέθοδοι μέτρησης του συντελεστή ιξώδους προϋποθέτουν ότι η κίνηση του ρευστού είναι ροή στρωτή, αστρόβιλη και ασυμπίεστη. Είναι σκόπιμο να πούμε δυο λόγια για τις έννοιες αυτές που χαρακτηρίζουν τη ροή ενός ρευστού.

Θεωρούμε ένα πραγματικό ρευστό που κινείται μέσα σε κυλινδρικό σωλήνα. Αν σε μια χρονική στιγμή θεωρήσουμε όλα τα σωματίδια του ρευστού που βρίσκονται σε μια κάθετη προς την κίνηση του ρευστού διατομή τότε οι ταχύτητες των σωματιδίων αυτών θα έχουν την κατανομή του Σχ. 1.



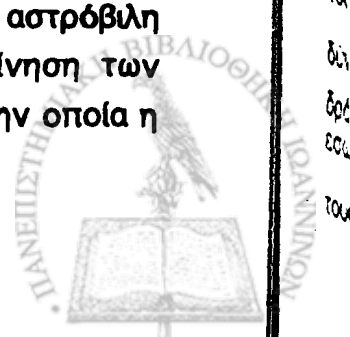
Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι ταχύτητες μεταβάλλονται μεταξύ μιας μηδενικής τιμής στα τοιχώματα και κάποιας μέγιστης U_{\max} στο μέσο του σωλήνα. Όταν οι ταχύτητες σε κάθε σημείο της διατομής παραμένουν



Σχήμα 1. Κατανομή ταχυτήτων των σωματιδίων ρευστού που βρίσκονται σε μια κάθετη διατομή.

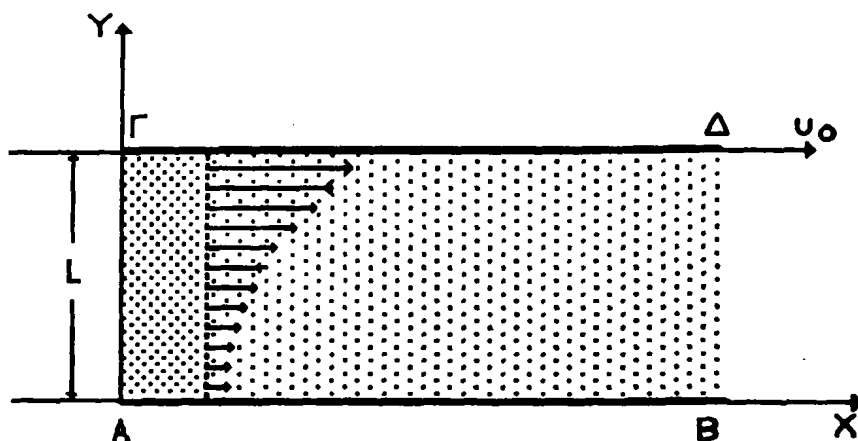
σταθερές σε κάθε χρονική στιγμή τότε η ροή είναι στρωτή. Αν όμως μεταβάλλονται χρονικά τότε η ροή είναι τυρβώδης. Στη στρωτή ροή οι τροχιές των σωματιδίων του ρευστού βρίσκονται μέσα σε κανονικά διατεταγμένες φλέβες, ενώ στην τυρβώδη ροή είναι ακανόνιστες. Η ροή είναι συνήθως στρωτή για μικρές ταχύτητες αλλά γίνεται σταδιακά τυρβώδης όσο μεγαλώνουν οι ταχύτητες. Στη στρωτή ροή, όπως σ' ένα παλιρροιακό ρεύμα, οι ταχύτητες του ρευστού \vec{u} είναι συναρτήσεις του χρόνου. Στην περίπτωση της τυρβώδους ροής, όπως σε υδατοπτώσεις, οι ταχύτητες μεταβάλλονται ακανόνιστα από σημείο σε σημείο και από στιγμή σε στιγμή.

Η ροή του ρευστού μπορεί να είναι στροβιλή ή αστρόβιλη. Αν το στοιχείο του ρευστού σε κάθε σημείο δεν έχει συνολικά στροφορμή ως προς το σημείο αυτό η ροή είναι αστρόβιλη. Υποθέτουμε ένα μικρό τροχό με πτερύγια μέσα σε κινούμενο ρευστό. Αν ο τροχός κινείται χωρίς να περιστρέφεται, η κίνηση είναι αστρόβιλη, αλλιώς είναι στροβιλή. Η αστρόβιλη ροή δημιουργεί μάλλον απλά μαθηματικά προβλήματα. Η κίνηση των στροβίλων υπάγεται στη στροβιλή ροή όπως και η κίνηση κατά την οποία η ταχύτητα μεταβάλλεται στην εγκάρσια κατεύθυνση.



2.2 Εσωτερική Τριβή Ενός Ρευστού

Για να μελετήσουμε την εσωτερική τριβή ενός ρευστού κάνουμε το παρακάτω θεωρητικό πείραμα. Θεωρούμε μια μάζα ρευστού που περιέχεται μεταξύ δυο παράλληλων πλακών AB και ΓΔ με επιφάνεια S και απόσταση μεταξύ των πλακών L. Η πλάκα AB μένει ακίνητη ($u_x = 0$), ενώ η ΓΔ κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_x = u_0$ στο επίπεδο της (Σχ. 2). Επειδή τα πραγματικά ρευστά παρουσιάζουν συνάφεια με τα στερεά τοιχώματα με τα οποία έρχονται σ' επαφή, το στρώμα του ρευστού που βρίσκεται σε άμεση επαφή με την κινούμενη πλάκα ΓΔ θα αποκτήσει την ταχύτητα της πλάκας u_0 . Αντίθετα το ρευστό που βρίσκεται σ' επαφή με την AB θα μείνει



Σχήμα 2. Σχετική κίνηση ρευστού μεταξύ δύο πλακών όταν η πάνω πλάκα κινείται με ταχύτητα u_0 ενώ η κάτω μένει ακίνητη.

ακίνητο. Τα ενδιάμεσα στρώματα του ρευστού μεταξύ των πλακών θα πάρουν όλες τις τιμές ταχύτητας από $u_x = 0$ έως $u_x = u_0$. Η κατανομή των ταχυτήτων μεταξύ των πλακών εκφράζεται με τη βαθμίδα ταχύτητας $\frac{du_x}{dy}$, όπου du_x είναι η διαφορά ταχυτήτων μεταξύ δυο γειτονικών παραλλήλων στρωμάτων που απέχουν απειροστό διάστημα dy . Ένα στρώμα του ρευστού που έχει ταχύτητα u_x εξασκεί στο αμέσως επόμενο στρώμα μια δύναμη F. Η δύναμη όμως αυτή αντισταθμίζεται, σύμφωνα με την αρχή της δράσης και αντίδρασης από μια ίση και αντίθετη δύναμη που είναι η δύναμη εσωτερικής τριβής F_T . Οι δυνάμεις εσωτερικής τριβής έχουν σαν αρχή τους τις δυνάμεις Van der Waals που εξασκούνται μεταξύ των μορίων.



Έχει βρεθεί πειραματικά ότι

$$F_T = nS \frac{du_x}{dy} \quad (16.1)$$

όπου S το εμβαδόν της επιφάνειας του ενός από τα δυο αλληλομετακινούμενα στρώματα του ρευστού που είναι ουσιαστικά ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας της μιας πλάκας και n ο συντελεστής αναλογίας που ονομάζεται *συντελεστής εσωτερικής τριβής* ή *ιξώδους*. Στην περίπτωση που η τιμή του F_T είναι μικρή και η απόσταση L μεταξύ των πλακών είναι μικρή τότε η (16.1) γράφεται

$$F_T = nS \frac{u_0}{L} \quad (16.2)$$

Ο συντελεστής ιξώδους του ρευστού n εκφράζεται σε μονάδες $1 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} = 1 \text{ P} = 1 \text{ Poise} = 100 \text{ Centipoise}$.

Ο συντελεστής εσωτερικής τριβής n των ρευστών εξαρτάται πολύ από τη θερμοκρασία T του ρευστού. Σε πολλές περιπτώσεις η σχέση $n = f(T)$ μπορεί να δοθεί με την έκφραση

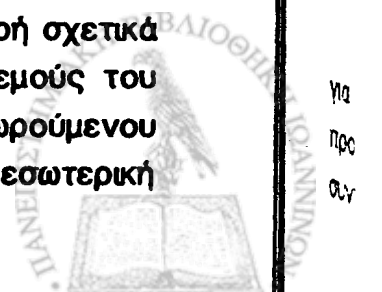
$$n = a e^{-\frac{b}{T}} \quad (16.3)$$

όπου a και b είναι σταθερές που μπορούν να προσδιοριστούν.

2.2.1 Μέτρηση του Συντελεστή Ιξώδους με τη " Μέθοδο του Στροφικού Εκκρεμούς "

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για ρευστά με μικρό συντελεστή ιξώδους π.χ. το νερό.

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, ένας τρόπος για να προσδιορίσουμε το συντελεστή εσωτερικής τριβής υγρού με μικρή σχετικά τιμή, είναι η απόσβεση των αιωρήσεων ενός στροφικού εκκρεμούς του οποίου ο δίσκος είναι βυθισμένος στο υγρό. Η επιφάνεια του αιωρούμενου δίσκου παίζει το ρόλο της κινούμενης πλάκας $\Gamma\Delta$ του Σχ. 2, ενώ η εσωτερική



επιφάνεια του δοχείου που περιέχει το υγρό παίζει το ρόλο της πλάκας AB. Εάν στρέψουμε το δίσκο κατά γωνία φ , λόγω παραμόρφωσης του σύρματος, δημιουργείται ροπή επαναφοράς

$$\tau = -D^* \varphi \quad (16.4)$$

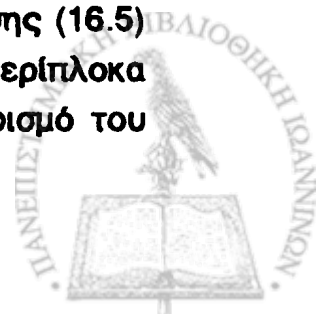
όπου D^* είναι η στροφική σταθερά του σύρματος. Κατά την κίνηση επαναφοράς του δίσκου μέσα στο ρευστό θα αναπτυχθεί μια ανθιστάμενη ροπή M λόγω δυνάμεων τριβών. Με την επίδραση αυτών των ροπών, ο δίσκος που έχει ροπή αδράνειας I , αποκτά γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ οπότε μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση

$$-D^* \varphi + M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (16.5)$$

Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή πρέπει αρχικά να προσδιορίσουμε την ανθιστάμενη ροπή M . Το M εκφράζεται σαν συνάρτηση της δύναμης τριβής F_T , που δίνεται από τη σχέση (16.1) και εισάγεται στην εξίσωση (16.5).

Όπως αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο το στρώμα του ρευστού που βρίσκεται σε άμεση επαφή με την επιφάνεια του δίσκου συμμετέχει στην κίνησή του. Το στρώμα αυτό του ρευστού λόγω συνάφειας τείνει να παρασύρει ένα επόμενο στρώμα και αυτό ένα μεθεπόμενο κ.ο.κ. . Λόγω όμως της εσωτερικής τριβής F_T του ρευστού η γωνιακή ταχύτητα ω των στρωμάτων ελαττώνεται όσο απομακρυνόμαστε από το δίσκο προς τα τοιχώματα του δοχείου που περιέχει το ρευστό, όπου $\omega = 0$. Με άλλα λόγια η ανθιστάμενη ροπή κατανέμεται μεταξύ των στρωμάτων του ρευστού. Οι σχετικές διαστάσεις του δίσκου και δοχείου που περιέχει το υγρό πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να εφαρμόζεται η προσέγγιση της στρωτής ροής.

Τόσο ο προσδιορισμός του M όσο και η λύση της εξίσωσης (16.5) για τον προσδιορισμό του συντελεστή ιξώδους η είναι αρκετά περίπλοκα προβλήματα. Γιαυτό δεν θα ασχοληθούμε εδώ με τον προσδιορισμό του συντελεστή ιξώδους του νερού ή άλλων ρευστών με μικρό η .



Ο Ο.Ε. Meyer* έχει αποδείξει ότι για δίσκο που αιωρείται μέσα σε υγρό ο συντελεστής ιξώδους η για υγρά δίνεται από τη σχέση

$$\eta = \frac{16I^2}{\pi\rho T(r^4 + 2r^3d)^2} \left(\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\pi} \right) + \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\pi} \right)^2 \right)^2$$

όπου I είναι η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα περιστροφής, ρ η πυκνότητα του υγρού, T η περίοδος στον αέρα, r η ακτίνα του δίσκου, d το πάχος του δίσκου, λ η λογαριθμική ελάττωση του πλάτους αιώρησης στο υγρό και λ_0 η λογαριθμική ελάττωση στον αέρα.

2.2.2 Μέτρηση του Συντελεστή Ιξώδους με τη " Μέθοδο της Πτώσης Μικρών Σφαιρών "

1) Νόμος του Stokes για στρωτή ροή.

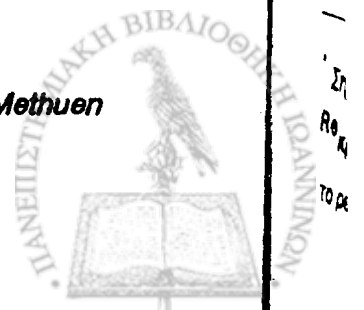
Όταν η ροή είναι στρωτή ο Stokes (1845) απέδειξε ότι η αντίσταση \vec{T} του ιξώδους που δέχεται η σφαίρα από το ρευστό και που οφείλεται στην τριβή της με τα μόρια του ρευστού, δίνεται από τη σχέση

$$\vec{T} = - 6 \pi \eta r \vec{v} \quad (16.6)$$

όπου η το ιξώδες του ρευστού, r η ακτίνα της σφαίρας και \vec{v} η σχετική ταχύτητα της σφαίρας ως προς το ρευστό. Η σχέση (16.6) ισχύει γενικά για κάθε σφαιρικό σώμα με ακτίνα r , όπως μια σταγόνα βροχής, μια μεταλλική σφαίρα, που κινείται με μικρή ταχύτητα \vec{v} μέσα σ' ένα ρευστό.

2) Κριτήριο εμφάνισης των διαφόρων μορφών ροής - Αριθμός Reynolds.

* *Advanced Practical Physics for students by B.L. Wopson and H.T. Flint, Methuen Educational Ltd London*



Όπως αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο στρωτή ροή έχουμε όταν οι ταχύτητες παραμένουν σταθερές. Όταν μεγαλώνουν οι ταχύτητες και φθάσουν κάποια κρίσιμη ταχύτητα $u_{κρ}$ τότε η ροή γίνεται τυρβώδης. Η αλλαγή αυτή εξαρτάται από την ταχύτητα της ροής u , το ιξώδες η , την πυκνότητα ρ του ρευστού και το γεωμετρικό σχήμα του αντικειμένου στο ρευστό. Η σχέση που συνδέει τους παράγοντες αυτούς είναι γνωστή σαν Κρίσιμος Αριθμός Reynold $Re_{κρ}$

$$Re_{κρ} = \frac{\rho D u_{κρ}}{\eta} \quad (16.7)$$

όπου D μια γεωμετρική γραμμική διάσταση του σώματος, π.χ. για σφαίρα ακτίνας r , $D = 2r$, για σωλήνα κυκλικής διατομής $D = r$ και για σωλήνα τετραγωνικής ή τριγωνικής διατομής μήκους l , $D = l$.

Σε περίπτωση που η ταχύτητα u ενός ρευστού είναι διάφορη της κρίσιμης ταχύτητας $u_{κρ}$ τότε έχουμε τον Αριθμό Reynold Re

$$Re = \frac{\rho D u}{\eta} \quad (16.8)$$

Για να δούμε αν μια ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης χρησιμοποιούμε σαν κριτήριο τον Αριθμό Reynold για τη ροή αυτή: α) αν $Re < Re_{κρ}$ τότε η ροή είναι στρωτή, β) αν $Re > Re_{κρ}$ τότε η ροή είναι τυρβώδης και γ) αν $Re = Re_{κρ}$ τότε η κατάσταση της ροής είναι ασταθής και εύκολα μεταπίπτει από τη μια ροή στην άλλη.

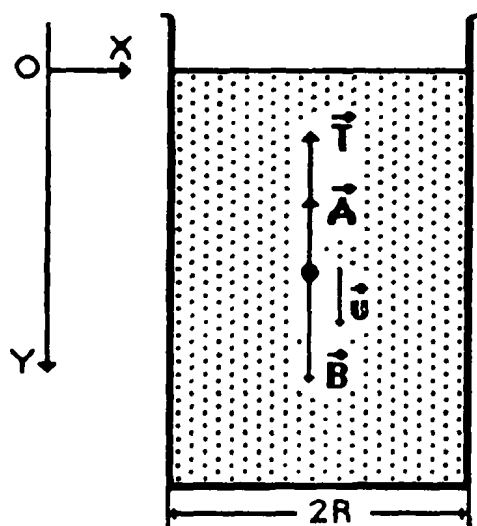
Ο Αριθμός Reynold Re έχει πολύ μεγάλη σημασία και σπουδαιότητα στην Αεροδυναμική γιατί επιτρέπει τη μελέτη της συμπεριφοράς ενός πραγματικού συστήματος με τη χρήση όμως μικρών πανομοιότυπων μοντέλων (π.χ. μικρών αεροπλάνων) υπό κλίμακα.

* Σημείωση: Στην περίπτωση της σφαίρας σε ρευστό, η τυρβώδης ροή αρχίζει για $Re_{κρ} = 10$ και για σωλήνα κυκλικής διατομής για $Re_{κρ} = 1160$. Στην περίπτωση που το ρευστό θεωρείται ιδανικό τότε $\eta = 0$ και $Re = \infty$.



3) Προσδιορισμός της ορικής ταχύτητας u_{0p}

Μια μέθοδος για τη μέτρηση του ιξώδους η των ρευστών είναι η πτώση σφαιρών σε ακίνητο ρευστό, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.



Σχήμα 3. Σχηματική παράσταση δυνάμεων που ενεργούν σε σφαίρα μέσα σε υγρό ιξώδους η .

Θεωρούμε ένα κυλινδρικό δοχείο μεγάλης ακτίνας R γεμάτο με ακίνητο υγρό πυκνότητας $\rho_{\text{υ}}$ και ιξώδους η .

Αφήνουμε να πέσει από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού μια μεταλλική μικρή σφαίρα μάζας m , πυκνότητας ρ_{σ} ($\rho_{\sigma} > \rho_{\text{υ}}$) και ακτίνας r ($r \ll R$). Η σφαίρα είναι μικρή για να επιτύχουμε στρωτή ροή. Πάνω στη σφαίρα εξασκούνται 3 κατακόρυφες δυνάμεις.

Το βάρος της \vec{B} , η άνωση \vec{A} από τη συνισταμένη υδροστατική πίεση του υγρού και η αντίσταση ιξώδους \vec{T} από τις εσωτερικές τριβές των μορίων του υγρού με τη σφαίρα. Στην αρχή η

σφαίρα θα κινείται με επιτάχυνση \vec{a} και επομένως θα έχουμε

$$\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a} = \vec{B} + \vec{A} + \vec{T} \quad (16.9)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (16.6) στην (16.9) και παίρνοντας τα μέτρα τους έχουμε

$$ma = B - A - \eta\pi r u \quad (16.10)$$

Όσο η σφαίρα κατέρχεται, τόσο η ταχύτητά της αυξάνεται και επομένως η αντίσταση T που βρίσκει συνεχώς αυξάνεται, ενώ οι δυνάμεις B και A παραμένουν σταθερές. Θα έλθει όμως μια στιγμή που η σφαίρα θα αποκτήσει μια τέτοια ταχύτητα, την ορική ταχύτητα u_{0p} , ώστε η T να γίνει ίση με τη διαφορά $B - A$. Οπότε η συνισταμένη δύναμη που εξασκείται στη

σφαίρα θα είναι ίση με μηδέν. Η σφαίρα τώρα θα κινείται με σταθερή ταχύτητα

$$v_{op} = \frac{s_{op}}{t} \quad (16.11)$$

όπου s_{op} είναι το διανυόμενο διάστημα με ορική ταχύτητα σε χρόνο t . Η σχέση (16.10) γράφεται τώρα

$$B - A = T_{op} = 6\pi\eta v_{op} \quad (16.12)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι

$$B = mg = \rho_{\sigma} V_{\sigma} g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\sigma} g$$

και

$$A = \rho_{\upsilon} V_{\upsilon} g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\upsilon} g \quad (16.13)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (16.13) στην (16.12) και λύνοντας ως προς v_{op} έχουμε

$$v_{op} = \frac{2}{9} \frac{g(\rho_{\sigma} - \rho_{\upsilon})}{\eta} r^2 \quad (16.14)$$

Από τη σχέση (16.14) μπορούμε να προσδιορίσουμε το συντελεστή ιξώδους των ρευστών η .

4) Προσδιορισμός της ορικής αντίστασης ιξώδους T_{op}

Σύμφωνα με τις σχέσεις (16.12) και (16.14) έχουμε για την ορική αντίσταση ιξώδους T_{op} τη σχέση

$$T_{op} = \frac{4}{3} g (\rho_{\sigma} - \rho_{\upsilon}) r^3 \pi \quad (16.15)$$

την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε.



- 5) Προσδιορισμός του συντελεστή ιξώδους η
 Λύνοντας την εξίσωση (16.14) ως προς η έχουμε

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{g(\rho_{\sigma} - \rho_{\nu}) r^2}{u_{0\rho}} \quad (16.16)$$

Δεν λάβαμε όμως υπόψη την επίδραση των τοιχωμάτων του κυλινδρικού δοχείου η οποία είναι πολύ μεγάλη όταν η ακτίνα του R πλησιάζει την ακτίνα r της σφαίρας. Γιαυτό η $u_{0\rho}$ θάναί μικρότερη κάποιας $u_{\infty,0\rho}$ που θα είχε η σφαίρα αν κινιόταν σε δοχείο με άπειρες διαστάσεις ($R = \infty$). Έτσι η σχέση (16.16) γνωστή και σαν σχέση του Stokes, γράφεται

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{g(\rho_{\sigma} - \rho_{\nu}) r^2}{(u_{\infty,0\rho})} \quad (16.17)$$

και μας επιτρέπει τον προσδιορισμό του η για σταθερή θερμοκρασία.

Η σχέση (16.17) μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο για σώματα που πέφτουν ($\rho_{\sigma} > \rho_{\nu}$) αλλά και για σώματα που ανεβαίνουν ($\rho_{\sigma} < \rho_{\nu}$) δια μέσου ενός ρευστού με πυκνότητα ρ_{ν} , όπως συμβαίνει π.χ. στην ανύψωση μιας σφαιρικής φουσαλλίδας γεμάτη με αέριο (π.χ. οξυγόνο). Μια παρόμοια σχέση χρησιμοποιήθηκε από τον R. Millikan (1910) για τον υπολογισμό της ακτίνας των ηλεκτρικά φορτισμένων μικροσκοπικών σταγονιδίων λαδιού κατά την πτώση τους μέσα στον αέρα. Από το πείραμα αυτό προσδιορίστηκε για πρώτη φορά το φορτίο ενός ηλεκτρονίου.

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

3.1 Συσσκευή

Για τον προσδιορισμό του ιξώδους η της γλυκερίνης στη θερμοκρασία δωματίου, χρησιμοποιούμε ένα γυάλινο σωλήνα και αρκετές χαλύβδινες σφαίρες με ίδιες και διαφορετικές διαμέτρους.



Έχει παρατηρηθεί ότι, ανάδευση της γλυκερίνης που βρίσκεται σε στατική ισορροπία μέσα σ' ένα δοχείο στη θερμοκρασία δωματίου έχει σαν αποτέλεσμα τη μεγάλη διατάραξη της ισορροπίας της. Για να ξαναεπανέλθει στη στατική ισορροπία της, απαιτούνται συνήθως πολλές ώρες. Γιαυτό το λόγο η γλυκερίνη πρέπει να ρίχνεται στο σωλήνα τουλάχιστο 12 ώρες πριν από την εκτέλεση του πειράματος.

3.2 Προεργασία

Προσδιορίζουμε τη Μετάθεση Μηδενός δ_0 του Μικρομέτρου.

Διαλέγουμε με το " μάτι " αρκετές όμοιες χαλύβδινες σφαίρες με τη μεγαλύτερη διάμετρο από αυτές που διατίθενται. Μετράμε με το Μικρόμετρο, μόνο μια φορά τη διάμετρο $d_{0,max}$ κάθε σφαίρας για 24 συνολικά σφαίρες. Βρίσκουμε τις τιμές των διαμέτρων d_{max} προσθέτοντας ή αφαιρώντας τη Μετάθεση Μηδενός και τις καταχωρούμε στον Πίνακα 1.

Στη συνέχεια διαλέγουμε 3 όμοιες σφαίρες για 7 διαφορετικές διαμέτρους d_i και μετράμε τις διαμέτρους τους $d_{0,i}$ μια φορά για κάθε σφαίρα. Βρίσκουμε πάλι τις διαμέτρους d_i και τις καταχωρούμε στον Πίνακα 2.

Ζυγίζουμε μια φορά μαζί τις 24 σφαίρες με r_{max} , υπολογίζουμε τη μάζα $m (= \frac{m_{ολ}}{24})$ μιας από αυτές και προσδιορίζουμε την πυκνότητα της χαλύβδινης σφαίρας $\rho_{\sigma} (= \frac{m}{V_{max}})$. Με το πυκνόμετρο προσδιορίζουμε την πυκνότητα ρ_{ν} της γλυκερίνης. Ρίχνουμε δοκιμαστικά 1 ή 2 σφαίρες (όχι από αυτές που μετρήθηκαν) στο γυάλινο σωλήνα, χρησιμοποιώντας το ηλεκτρονικό χρονόμετρο. Έτσι προσπαθούμε να εξοικειωθούμε με τον τρόπο ρίψης των σφαιρών και μέτρησης του χρόνου, όπως επίσης και εκτίμηση με το " μάτι " του διαστήματος που διανύουν οι σφαίρες για να αποκτήσουν ορισκή ταχύτητα. Η ρίψη των σφαιρών πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή και όσο το δυνατό πλησιέστερα προς τον κατακόρυφο άξονα του σωλήνα.



Πίνακας 1

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό των ακτίνων των σφαιρών

a/a	d_{\max} (mm)
1	
2	
3	
.	
.	
.	
24	

Πίνακας 2

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό των ακτίνων των σφαιρών

a/a	d_1 (mm)	d_2 (mm)	d_3 (mm)	d_4 (mm)	d_5 (mm)	d_6 (mm)	d_7 (mm)
1							
2							
3							

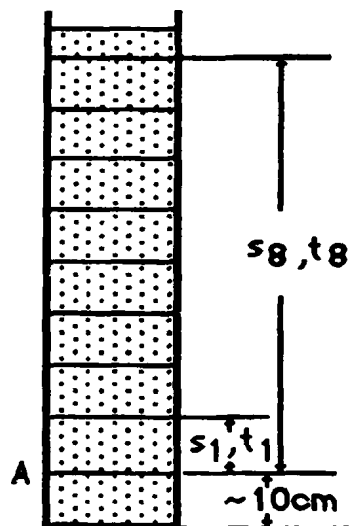
Από τις τιμές των Πινάκων 1 και 2:

Να βρεθούν οι ακτίνες των σφαιρών (μέση τιμή) για κάθε διάμετρο.



3.3 Μελέτη της Σχέσης $s = f(t)$ για $r =$ Σταθερό

Στο σωλήνα σημειώνουμε στην αρχή των διαστημάτων s_i κάποιο σταθερό σημείο A π.χ. σε απόσταση ~ 10.0 cm από τον πυθμένα, όπως φαίνεται στο Σχ. 4 και κολλάμε κυκλικά μια ταινία. Με βάση το A, σημειώνουμε προς τα πάνω 8 ίσα διαστήματα που διαφέρουν μεταξύ τους κατά ~ 7.0 cm και κολλάμε ταινίες στις αντίστοιχες θέσεις (Σχ. 4). Μετράμε μια φορά τα διαστήματα s_i και γράφουμε τις τιμές τους στον Πίνακα 3. Χρησιμοποιούμε τις 24 όμοιες σφαίρες με r_{max} του Πίνακα 1. Για κάθε διάστημα s_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) ρίχνουμε 3 σφαίρες και μετράμε με το ηλεκτρονικό χρονόμετρο το χρόνο $t_{i,n}$ ($i = 1, \dots, 8$ και $n = 1, 2, 3$). Γράφουμε τις τιμές αυτές στον Πίνακα 3.



Σχήμα 4. Κυλινδρικός σωλήνας χωρισμένος σε 8 ίσα διαστήματα.

Πίνακας 3

Μετρήσεις για τη μελέτη της σχέσης $s = f(t)$ για $r =$ σταθερό

αριθμός σφαίρας	t_1 (sec)	t_2 (sec)	t_3 (sec)	t_4 (sec)	t_5 (sec)	t_6 (sec)	t_7 (sec)	t_8 (sec)
1								
2								
3								
s_i (cm)								

Από τις τιμές του Πίνακα 3:

- 1) Να βρεθεί η μέση τιμή t_i ($i = 1, 2, \dots, 8$).



- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση της σχέσης $s = f(t)$ σε μιλιμετρέ χαρτί και να προσδιοριστεί το μέγιστο διάστημα $s_{op,max}$ για το οποίο οι σφαίρες αποκτούν ορική ταχύτητα u_{op} .

3.4 Μελέτη της Σχέσης $u_{op} = f(r)$ για $s_{op} = \text{Σταθερό}$

Κάνουμε πρόχειρα τη γραφική παράσταση $s = f(t)$ της προηγούμενης παραγράφου και προσδιορίζουμε το $s_{op,max}$.

Χρησιμοποιούμε τις 21 σφαίρες με ακτίνες $\bar{r}_{min} \leq \bar{r}_i \leq \bar{r}_{max}$ του Πίνακα 2. Για σταθερό $s_{op} (< s_{op,max})$, ρίχνουμε στη γλυκερίνη τις 3 όμοιες σφαίρες με ακτίνα r_1 και μετράμε τους αντίστοιχους χρόνους $t_{1,n}$ ($n = 1,2,3$). Γράφουμε τις τιμές τους στον Πίνακα 4. Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω και για τις υπόλοιπες 6 τριάδες σφαιρών με ακτίνες \bar{r}_i ($i = 2,3,\dots,7$) και μετράμε τους αντίστοιχους χρόνους $t_{i,n}$ ($i = 2,3,\dots,7$ και $n = 1,2,3$). Γράφουμε τις τιμές αυτές στον Πίνακα 4.

Πίνακας 4

Μετρήσεις για τη μελέτη της σχέσης $u_{op} = f(r)$ για $s_{op} = \text{Σταθερό}$

αριθμός σφαίρας	t_1 (sec)	t_2 (sec)	t_3 (sec)	t_4 (sec)	t_5 (sec)	t_6 (sec)	t_7 (sec)
1							
2							
3							
\bar{r}_i (mm)							

Από τις τιμές του Πίνακα 4:

- 1) Να βρεθεί η μέση τιμή t_i .



- 2) Να γίνει η γραφική παράσταση της σχέσης $u_{0p} = f(\bar{r})$ και να βρεθεί η μαθηματική εξίσωση αυτής.
- 3) Να υπολογισθεί το ιξώδες η της γλυκερίνης από τα αποτελέσματα του 2 ερωτήματος.

3.5 Προσδιορισμός της T_{0p} και του Re

Υπολογίζουμε την αντίσταση ιξώδους T_{0p} από τη σχέση (16.15) όταν η σφαίρα αποκτήσει ορική ταχύτητα για κάθε r_i .

Υπολογίζουμε τον αριθμό Reynold Re από τη σχέση (16.8) και το συγκρίνουμε με τον κρίσιμο αριθμό Reynold, Re_{kp} , για ροή γύρω από σφαίρα για κάθε r_i .



ΑΣΚΗΣΗ 17

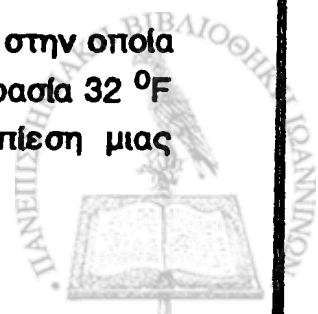
μετρηση της ειδικης θερμοτητας στερεων και υγρων

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό και προσδιορισμό της ειδικής θερμότητας είναι σκόπιμο να ξαναθυμηθούμε μερικές βασικές έννοιες απαραίτητες για τον ορισμό της ειδικής θερμότητας. Όταν λέμε ότι ένα σώμα είναι θερμό ή ψυχρό αναφερόμαστε στη θερμική κατάσταση του σώματος. Η θερμική κατάσταση μπορεί να μεταβάλλεται συνεχώς από ψυχρό σε θερμό και αντίστροφα. Για τον προσδιορισμό της θερμικής κατάστασης ενός σώματος χρησιμοποιούμε το φυσικό βαθμωτό μέγεθος που ονομάζεται θερμοκρασία. Η θερμοκρασία μετριέται με τα θερμόμετρα. Η μονάδα θερμοκρασίας είναι ο βαθμός (grad). Τα θερμόμετρα είναι στερεωμένα πάνω σε βαθμολογημένη κλίμακα. Υπάρχουν διάφορες θερμομετρικές κλίμακες:

(α) Κλίμακα του Celsius. Η απόσταση μεταξύ δύο διαιρέσεων της κλίμακας αυτής είναι ένα βαθμός Celsius και συμβολίζεται με 1°C (centigrade). Το μηδέν (0°C) της κλίμακας αυτής είναι η θερμοκρασία μίγματος πάγου και νερού σε ισορροπία 760 mmHg και το εκατό (100°C) είναι η θερμοκρασία βρασμού του απεσταγμένου νερού στην ίδια.

(β) Κλίμακα Fahrenheit. (Κυρίως Μεγάλη Βρετανία και ΗΠΑ) στην οποία η θερμοκρασία του τηκόμενου πάγου χαρακτηρίζεται σα θερμοκρασία 32°F και η θερμοκρασία βρασμού του νερού σαν 212°F σε πίεση μιας ατμόσφαιρας.



Ε
Τ
Π
α
γ
σ
κα
(θε
την
υλι
χερ
μέγ
αέρι
στερ

Η σχέση μεταξύ των κλιμάκων Fahrenheit και Celsius είναι

$$T_F = 32^\circ F + \frac{9}{5} T_C$$

Στη μελέτη της θερμοδυναμικής και της κινητικής θεωρίας των αερίων χρησιμοποιείται κυρίως η απόλυτη θερμοδυναμική κλίμακα που λέγεται κλίμακα Kelvin. Αυτή έχει ένα απόλυτο μηδέν (0 K), που ισούται με $-273.15^\circ C$. Θερμοκρασίες κάτω απ' αυτό δεν υπάρχουν.

Όταν δύο σώματα, που έχουν διαφορετικές θερμοκρασίες έρθουν σε επαφή τότε τείνουν να εξισώσουν τις θερμοκρασίες οπότε λέμε ότι βρίσκονται μεταξύ τους σε **θερμική ισορροπία**. Η τελική θερμοκρασία των δύο σωμάτων θα βρίσκεται κάπου μεταξύ των αρχικών τιμών. Η θερμική ισορροπία πετυχαίνεται με μεταφορά θερμικής ενέργειας από το θερμότερο σώμα στο ψυχρότερο. Η θερμική αυτή ενέργεια ονομάζεται **θερμότητα**. Το ποσό της θερμότητας που προσφέρεται σε ένα σώμα δεν μπορεί να μετρηθεί άμεσα με ένα όργανο μέτρησης όπως συμβαίνει με τη θερμοκρασία ενός σώματος. Η μέτρηση της θερμότητας γίνεται έμμεσα. Με τη μέτρηση των ποσοτήτων θερμότητας ασχολείται η **θερμιδομετρία**. Οι συσκευές που χρησιμοποιούνται για το σκοπό αυτό ονομάζονται **θερμιδόμετρα**.

Η απορρόφηση θερμότητας από ένα σώμα δε σημαίνει οπωσδήποτε αύξηση της θερμοκρασίας. Εξαρτάται από τη θερμοδυναμική διεργασία που γίνεται. Μέρος ή όλη της απορροφούμενης θερμότητας μπορεί να διατεθεί στην αλλαγή της φάσης του σώματος, όπως π.χ. από τη στερεά στην υγρή κατάσταση (θερμότητα τήξης) από την υγρή στην αέρια κατάσταση (θερμότητα εξαέρωσης) και από μια κρυσταλλική δομή σε άλλη.

Στην περίπτωση που δεν έχουμε μεταβολή της φάσης, η ευκολία με την οποία ένα σώμα απορροφά θερμότητα εξαρτάται από τη φύση του υλικού από το οποίο αποτελείται το σώμα και εκφράζεται με το χαρακτηριστικό για το σώμα μέγεθος, την **ειδική θερμότητα**. Το μέγεθος αυτό μπορεί να προσδιοριστεί για διάφορα σώματα στερεά, υγρά ή αέρια. Στην άσκηση αυτή θα ασχοληθούμε με την ειδική θερμότητα στερεών και υγρών σωμάτων.



2. ΘΕΩΡΙΑ

2.1 Θερμοχωρητικότητα και Ειδική Θερμότητα ενός Υλικού

Με τη βοήθεια μιας μεταβολής που συμβαίνει σ' ένα σώμα στη διάρκεια μιας ορισμένης θερμικής διεργασίας ορίζεται ποσοτικά η μονάδα θερμότητας Q . Έτσι, αν η θερμοκρασία ενός χιλιογράμμου (1 Kgr) νερού ανέβει από τους 14.5 στους 15.5 °C με θέρμανση, λέμε ότι έχει προσδοθεί στο σύστημα ένα **Kilocalorie** (Kcal) θερμότητας. Το **calorie** ($= 10^{-3}$ Kcal) χρησιμοποιείται επίσης σα μονάδα θερμότητας (1 cal = 4.187 Joule).

Ο λόγος της θερμότητας dQ που προσφέρεται σ' ένα σώμα προς την ανύψωση της θερμοκρασίας dT λέγεται **θερμοχωρητικότητα C** (σε $\frac{\text{cal}}{\text{grad}}$) του σώματος, δηλαδή

$$C = \frac{dQ}{dT} \quad (17.1)$$

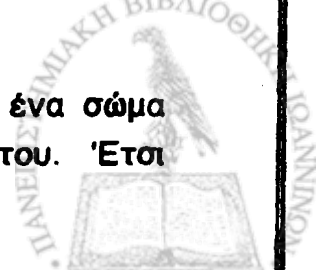
Η θερμοχωρητικότητα που αντιστοιχεί στη μονάδα της μάζας ενός σώματος λέγεται **ειδική θερμότητα c** (σε $\frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}}$):

$$c = \frac{C}{m} = \frac{dQ}{m dT} \quad (17.2)$$

όπου m η μάζα του σώματος. Από τη σχέση (17.2) προκύπτει ότι $C = mc$ που αποτελεί έναν άλλο τρόπο ορισμού της θερμοχωρητικότητας. Στις συνηθισμένες περιοχές θερμοκρασιών, οι ειδικές θερμότητες υλικών μπορούν να θεωρούνται σταθερές. Από την (17.2) προκύπτει ότι η ολική θερμότητα που πρέπει να δοθεί σ' ένα σώμα μάζας m , και ειδικής θερμότητας c , για να αυξηθεί η θερμοκρασία του από μια αρχική τιμή T_a σε μια τελική T_T δίνεται από τη σχέση

$$Q = m \int_{T_a}^{T_T} c dT = mc \Delta T \quad (17.3)$$

Το ποσό της θερμότητας dQ που απορροφάται από ένα σώμα εξαρτάται από τις συνθήκες κατά τη διάρκεια της θέρμανσής του. Έτσι



διακρίνουμε τις θερμοχωρητικότητες υπό σταθερό όγκο C_V και υπό σταθερή πίεση C_P . Οι αντίστοιχες ειδικές θερμότητες υπό σταθερό όγκο c_V και υπό σταθερή πίεση c_P γράφονται

$$c_P = \left(\frac{dQ}{m dT} \right)_P \quad \text{για } P = \text{σταθ.} \quad (17.4)$$

και

$$c_V = \left(\frac{dQ}{m dT} \right)_V \quad \text{για } V = \text{σταθ.} \quad (17.5)$$

Για μετρήσεις του c_V απαιτούνται πολύπλοκες πειραματικές διατάξεις, γιαυτό συνήθως γίνεται η κατά πολύ ευκολότερη μέτρηση του c_P σε ατμοσφαιρική πίεση.

Για μια μεγάλη περιοχή θερμοκρασιών η ειδική θερμότητα c_P δεν είναι ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία. Γιαυτό στην πράξη χρησιμοποιούμε τη Μέση Ειδική Θερμότητα \bar{c} που είναι ανεξάρτητη της θερμοκρασίας για μεγάλη περιοχή θερμοκρασιών. Στην περίπτωση σταθεράς πίεσης ($P = \text{σταθ.}$)

$$\bar{c}_P = \frac{1}{(T_T - T_a)} \int_{T_a}^{T_T} c_P(T) dT \quad (17.6)$$

όπου η $c_P(T)$ εξαρτάται από τη θερμοκρασία T . Συνηθίζεται να γράφουμε c_P αντί του \bar{c}_P εννοώντας το ίδιο πράγμα. Με την έννοια αυτή θα γράφουμε στη συνέχεια το c_P .

Κατά τη θεωρητική μελέτη θερμικών φαινομένων είναι σκόπιμο να συγκρίνουμε διάφορα υλικά που περιέχουν τον ίδιο αριθμό μορίων (ή ατόμων) αντί τον ίδιο αριθμό γραμμαρίων. Έτσι η μάζα m στη σχέση (17.2) μπορεί να αντικατασταθεί με τον αριθμό μ (σε mole) των γραμμομορίων (ή γραμμοατόμων) μιας ουσίας μάζας m (σε gr) που έχει μοριακό βάρος M (σε $\frac{\text{gr}}{\text{mole}}$). Οπότε η μοριακή θερμοχωρητικότητα c_M γράφεται

$$c_M = M c = \frac{dQ}{\mu dT} \quad (17.7)$$



όπου $\mu = \frac{m}{M}$. (Ένα γραμμομόριο οποιασδήποτε ουσίας περιέχει τον ίδιο αριθμό μορίων $N_0 = 6.023 \times 10^{23} \frac{\text{μόρια}}{\text{mole}}$ που είναι ο αριθμός Αβογαδρό). Η γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα C_m (σε $\frac{\text{cal}}{\text{mole} \cdot \text{grad}}$) ενός υλικού δεν πρέπει να συγχέεται με τη θερμοχωρητικότητα C (σε $\frac{\text{cal}}{\text{grad}}$) ενός σώματος. Όπως στην περίπτωση των ειδικών θερμοτήτων, θα μιλάμε για μοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση ($C_{M,P}$) και υπό σταθερό όγκο ($C_{M,V}$).

Ο Πρώτος Θερμοδυναμικός Νόμος εκφράζεται με τη σχέση

$$dQ = dU + PdV \quad (17.8)$$

όπου $U =$ εσωτερική ενέργεια, δηλαδή η ολική ενέργεια όλων των μορίων του σώματος. Η θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο C_V υπολογίζεται από την (17.8) σα συνάρτηση της μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας.

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V \quad (17.9)$$

και η μοριακή θερμοχωρητικότητα αντίστοιχα είναι

$$C_{M,V} = \frac{1}{\mu} \frac{dU}{dT} \quad (17.10)$$

Επίσης η μοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση $C_{M,P}$ είναι

$$C_{M,P} = \frac{1}{\mu} \frac{dQ}{dT} \quad (17.11)$$

Στην περίπτωση των ιδανικών αερίων ισχύει η καταστατική εξίσωση

$$PV = \mu RT \quad (17.12)$$

όπου R λέγεται παγκόσμια σταθερά των αερίων και έχει την ίδια τιμή για όλα τα αέρια



$$R = 8.314 \frac{\text{Joule}}{\text{mole}\cdot\text{K}} = 1.986 \frac{\text{cal}}{\text{mole}\cdot\text{K}}$$

Διαφορίζοντας την εξίσωση (17.12) προκύπτει

$$P dV + V dP = \mu R dT \quad (17.13)$$

και για σταθερή πίεση

$$P dV = \mu R dT \quad (17.14)$$

Εισάγοντες τις (17.10), (17.11) και (17.14) στην σχέση (17.8) έχουμε

$$\mu C_{M,P} dT = \mu C_{M,V} dT + \mu R dT \quad (17.15)$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$C_{M,P} - C_{M,V} = R \quad (17.16)$$

Επειδή τα R , $C_{M,P}$ και $C_{M,V}$ είναι θετικοί αριθμοί γιαυτό πάντοτε ισχύει η σχέση $C_P > C_V$.

Στα υγρά και στερεά σώματα η θερμική μεταβολή του όγκου είναι πολύ μικρή, έτσι μπορεί να θεωρηθεί ότι $C_P \equiv C_V$. Οι Γάλλοι Dulong και Petit βρήκαν ότι, σε συνηθισμένες και ψηλές θερμοκρασίες, οι μοριακές θερμοχωρητικότητες όλων σχεδόν των στερεών στοιχείων έχουν την ίδια περίπου τιμή

$$C_M = 3R = 3N_0 k \approx 6 \frac{\text{cal}}{\text{mole}\cdot\text{K}} = 24.94 \frac{\text{Joule}}{\text{mole}\cdot\text{K}}$$

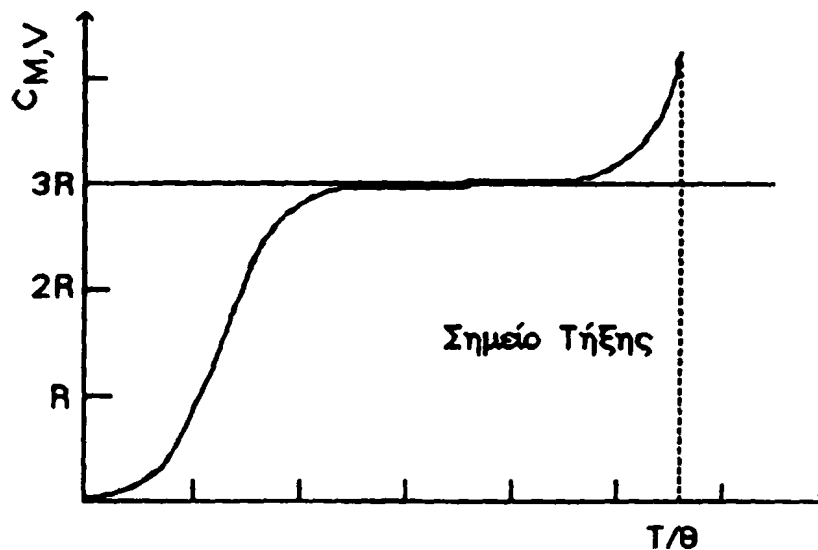
όπου k είναι η σταθερά του Boltzmann και ισούται με

$$k = \frac{R}{N_0} = \frac{8.317 \text{Joule}\cdot\text{mole}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}}{6.023 \times 10^{23} \text{mole}^{-1}} = 1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{Joule}}{\text{K}}$$



Η διαπίστωση αυτή είναι γνωστή σαν Νόμος του Dulong-Petit. Για χαμηλές όμως θερμοκρασίες η C_M μικραίνει και μηδενίζεται όταν η θερμοκρασία πλησιάζει προς το απόλυτο μηδέν. Το Σχ. 1 δείχνει τη μεταβολή της μοριακής θερμοχωρητικότητας στερεού σώματος $C_{M,V}$ σε συνάρτηση της θερμοκρασίας που προέκυψε από πειραματικά δεδομένα. Το οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα της καμπύλης εκφράζει το νόμο του Dulong και Petit.

Η πειραματική καμπύλη του Σχ. 1 δεν επαληθεύεται θεωρητικά με την κλασσική κινητική θεωρία, αλλά μόνο με την Κβαντομηχανική.

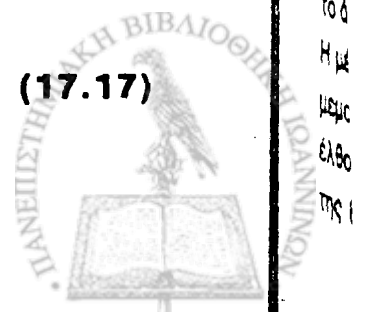


Σχήμα 1. Μεταβολή της μοριακής θερμοχωρητικότητας στερεού σώματος σε συνάρτηση της θερμοκρασίας.

Συγκεκριμένα ο Debye, προσπαθώντας να αναπαράγει θεωρητικά την καμπύλη αυτή προσπάθησε να βρει μια έκφραση για την ειδική θερμότητα ή μοριακή θερμοχωρητικότητα. Για το σκοπό αυτό υπολόγισε την εσωτερική ενέργεια του στερεού σώματος από τη θερμική διέγερση των ταλαντώσεων του πλέγματος. Κατά τη θεωρία του Debye η εσωτερική ενέργεια στερεού σώματος δίνεται από τη σχέση

$$U = \frac{3V}{3\pi^2} \frac{(kT)^4}{h^3 u_0^3} \int_0^{x_{\max}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (17.17)$$

(17.17)



όπου $x_{\max} = \frac{\hbar u_0}{kT} \left(\frac{6\pi^2 N_0}{V} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\theta_D}{T}$, \hbar = σταθερά του Planck, k = σταθερά Boltzmann, u_0 = η ταχύτητα του ήχου στο στερεό, θ_D = θερμοκρασία Debye.

Για ψηλές θερμοκρασίες: ($T \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow 0$) η (17.17) παίρνει τη μορφή

$$U = 3N_0 kT = 3RT \quad (17.18)$$

οπότε

$$C_V = \frac{dU}{dT} = 3N_0 k = 3R \quad (17.19)$$

που είναι ουσιαστικά ο Νόμος του Dulong-Petit. Ανάλογα αποδεικνύεται από την (17.17) ότι σε χαμηλές θερμοκρασίες ($T \rightarrow 0$ K) $C_V \rightarrow 0$. Η θερμοκρασία Debye είναι μια χαρακτηριστική σταθερή θερμοκρασία για κάθε υλικό. Οι θερμοκρασίες Debye μερικών στοιχείων είναι:

$$Al \rightarrow 419 \text{ K}, \quad Cu \rightarrow 335 \text{ K}, \quad Zn \rightarrow 100 \text{ K}, \quad Fe \rightarrow 462 \text{ K}.$$

Στις επόμενες αναλύσεις υποθέτουμε ότι η ειδική θερμότητα είναι σταθερή στην εξεταζόμενη περιοχή θερμοκρασιών.

2.2 Μέθοδος Προσδιορισμού Ειδικής Θερμότητας

Για τη μέτρηση των ειδικών θερμοτήτων ή μοριακών θερμοχωρητικοτήτων στερεών, υγρών και αερίων σε μια περιοχή θερμοκρασιών χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των μιγμάτων. Το μίγμα αποτελείται από δυο σώματα το ένα είναι γνωστής ειδικής θερμότητας και το άλλο είναι το σώμα που θέλουμε να προσδιορίσουμε την ειδική θερμότητα. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην ακόλουθη αρχή: "όταν δύο θερμοδυναμικά μεμονωμένα σώματα που βρίσκονται αρχικά σε διαφορετικές θερμοκρασίες έλθουν σ' επαφή, τότε ανταλλάσσεται θερμότητα μεταξύ τους και το ποσό της θερμότητας που χάνει το θερμότερο σώμα είναι ίσο με το ποσό της



2.3 Διόρθωση των Ακραίων Θερμοκρασιών Λόγω Απωλειών Θερμότητας

Το θερμιδόμετρο δεν έχει ιδανική θερμική μόνωση. Επομένως κατά την ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ των δυο σωμάτων του μίγματος υπάρχουν απώλειες λόγω ανταλλαγής θερμότητας ανάλογα με το περιβάλλον. Έτσι οι θερμοκρασίες πριν και μετά την ανάμιξη δεν είναι σταθερές. Γιαυτό είναι ανάγκη να διορθώσουμε την αρχική και τελική θερμοκρασία του μίγματος. Έτσι υποθέτουμε ότι ισχύει ο νόμος ψύξης του Newton που λέει ότι " ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός σώματος είναι ανάλογος του ρυθμού με το οποίο το σώμα κερδίζει ή χάνει θερμότητα. Έτσι και ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας του είναι κατά προσέγγιση ανάλογος της διαφοράς μεταξύ της θερμοκρασίας-του και εκείνης του περιβάλλοντός του ". Στην περίπτωση ψύξης " ο ρυθμός ψύξης ενός σώματος είναι ανάλογος της διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ του θερμότερου T σώματος και του ψυχρότερου T_{π} περιβάλλοντός του ", δηλαδή

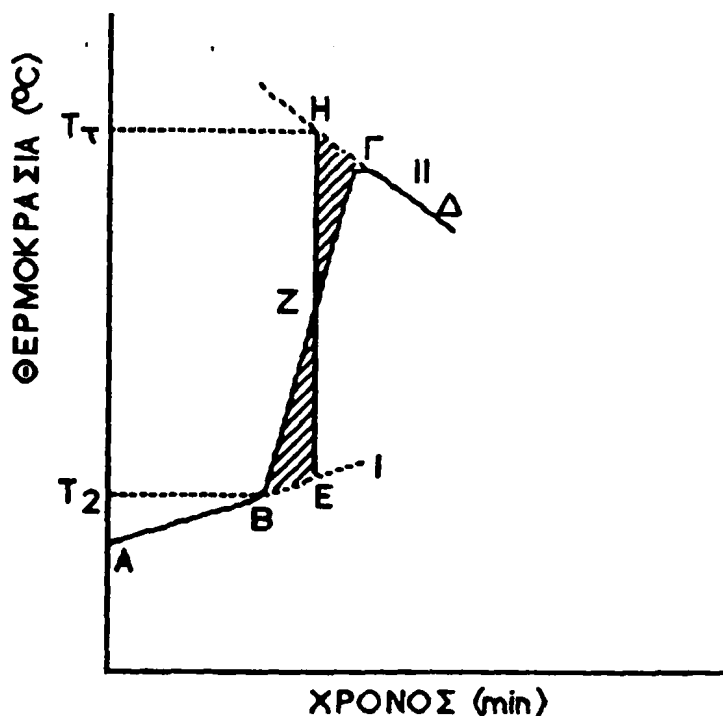
$$\frac{dT}{dt} = -B (T - T_{\pi}), \text{ για } T > T_{\pi} \quad (17.22)$$

όπου B είναι μία κατά προσέγγιση σταθερά, διαφορετική για κάθε σώμα.

Ο νόμος της ψύξης δίνει ικανοποιητικές προσεγγίσεις όταν οι διαφορές ΔT θερμοκρασιών ψυχόμενου σώματος και περιβάλλοντος είναι $\Delta T \leq 30 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Ο νόμος αυτός εφαρμόζεται και για περιπτώσεις που το σώμα είναι ψυχρότερο του περιβάλλοντός του, οπότε το σώμα απορροφά θερμότητα από το περιβάλλον. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι " ο ρυθμός ανταλλαγής θερμότητας μεταξύ ενός σώματος και του περιβάλλοντός του είναι ανάλογος της διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ τους ". Με άλλα λόγια, οι θερμοκρασίες πριν και μετά την ανάμιξη προσεγγίζουν εκθετικά τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

Ενας τρόπος να διορθώσουμε τις θερμοκρασίες του θερμιδόμετρου, της αρχικής θερμοκρασίας T_2 πριν την ανάμιξη και της τελικής θερμοκρασίας T_T μετά την ανάμιξη, είναι η μέθοδος Rowland - Ferry. Το Σχ. 2 δίνει τη γραφική παράσταση $T = f(t)$.





Σχήμα 2. Διορθώσεις της αρχικής θερμοκρασίας T_2 και της τελικής θερμοκρασίας του μίγματος T_γ στο πείραμα προσδιορισμού της ειδικής θερμότητας με τη μέθοδο των μιγμάτων.

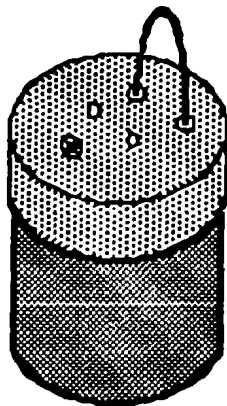
Η καμπύλη των μετρήσεων είναι ΑΒΖΓΔ. Το τμήμα ΑΒ παριστάνει τη μεταβολή της θερμοκρασίας του δοχείου με το νερό λόγω απορρόφησης θερμότητας από το θερμότερο περιβάλλον. Οι μετρήσεις παίρνονται μερικά λεπτά προτού ρίξουμε το ζεστό σώμα (που μετράμε την ειδική θερμότητα) στο θερμιδόμετρο. Από το Β στο Γ η θερμοκρασία αυξάνεται λόγω της προσφοράς θερμότητας από το ζεστό σώμα που προσθέσαμε στο θερμιδόμετρο. Το τμήμα ΓΔ παριστάνει το ρυθμό ψύξης του δοχείου με το νερό και το σώμα μετά τη θερμική ισορροπία λόγω απώλειας θερμότητας προς το ψυχρότερο τώρα περιβάλλον. Για να κάνουμε τη διόρθωση προεκτείνουμε τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ, όπως φαίνονται στο Σχ. 2 και μετά φέρνουμε μια κατακόρυφη ΕΗ έτσι ώστε τα γραμμοσκιασμένα εμβαδά ΒΕΖ και ΖΓΗ να είναι ίσα. Οι διορθωμένες θερμοκρασίες T_2 και T_γ διαβάζονται στα σημεία Ε και Η.



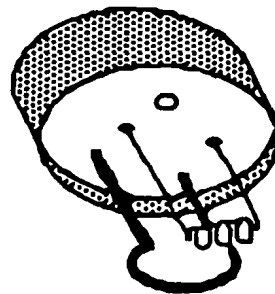
3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

3.1 Θερμιδόμετρο Νερού

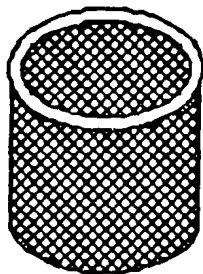
Η συσκευή που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της ειδικής θερμότητας c_p στερεών και υγρών με τη μέθοδο των μιγμάτων είναι το θερμιδόμετρο νερού που φαίνεται στο Σχ. 3. Αποτελείται από μεταλλικό (αλουμίνιο) κυλινδρικό δοχείο (Σχ. 3γ) (χωρητικότητα 500 ml) που είναι τοποθετημένο σ' ένα άλλο δοχείο (Σχ. 3δ) με θερμομονωτικά τοιχώματα. Το δοχείο καλύπτεται μ' ένα σκέπασμα (Σχ. 3β) με θερμομονωτικά τοιχώματα.



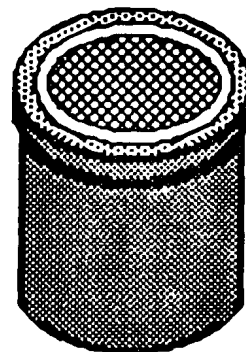
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 3. (α) Θερμιδόμετρο νερού . (β) Σκέπασμα με τον αναδευτήρα, την υποδοχή θερμομέτρου και το νήμα θέρμανσης. (γ) Το εσωτερικό δοχείο. (δ) Το εξωτερικό δοχείο μαζί με τη μόνωσή του.



Το σκέπασμα έχει τρύπες, για το θερμόμετρο (διαμέτρου 10 mm) και για τον αναδευτήρα. Ο αναδευτήρας ανεβοκατεβαίνει μέσα στο θερμιδόμετρο με τη βοήθεια μιας μεταλλικής προεξοχής όπως διακρίνεται στο (Σχ. 3α). Στο σκέπασμα είναι προσαρμοσμένες δύο ράβδοι μήκους 70 mm στις οποίες είναι στερεωμένο ένα νήμα θέρμανσης τανταλίου.

3.2 Μέτρηση Ειδικής Θερμότητας c_p Στερεών

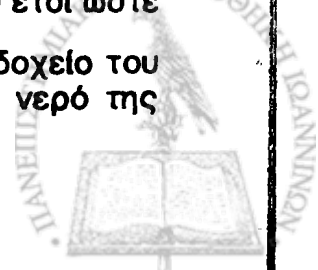
Για τη μέτρηση της ειδικής θερμότητας c_σ ενός στερεού υπό σταθερή πίεση $P = 1 \text{ atm}$, κάνουμε τα ακόλουθα. Αρχικά βρίσκουμε τη μάζα m_σ του στερεού και μετά το θερμαίνουμε στη θερμοκρασία βρασμού του νερού T_1 . Γεμίζουμε με νερό της βρύσης το εσωτερικό δοχείο του θερμιδόμετρου έτσι ώστε το νερό να καλύπτει το σώμα του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε την ειδική θερμότητα. Η μάζα $m_{\text{H}_2\text{O}}$ προσδιορίζεται και η ειδική του θερμότητα βρίσκεται από σχετικούς πίνακες ($c_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \frac{\text{cal}}{\text{gr } ^\circ\text{C}}$). Τοποθετούμε το δοχείο μέσα στο θερμομονωτικό περιβλήμα, το σκεπάζουμε και παίρνουμε τη θερμοκρασία T_2 . Το ζεστό στερεό σώμα μεταφέρεται πολύ γρήγορα στο θερμιδόμετρο, το νερό αναδευέται ελαφρά και παίρνεται η τελική θερμοκρασία T_T . Αν όλο το ποσό θερμότητας που χάνει το ζεστό σώμα απορροφάται από το νερό και το δοχείο, τότε θα ισχύει:

$$m_\sigma c_\sigma (T_1 - T_T) = m_{\text{H}_2\text{O}} c_{\text{H}_2\text{O}} (T_T - T_2) + C_\theta (T_T - T_2) \quad (17.23)$$

όπου C_θ είναι η θερμοχωρητικότητα του θερμιδόμετρου. Από τη σχέση (17.23) μπορούμε να υπολογίσουμε την ειδική θερμότητα c_σ του στερεού.

3.3 Μέτρηση Ειδικής Θερμότητας c_p Υγρών

Για τη μέτρηση της ειδικής θερμότητας c_u γίνεται μια ανάλογη διαδικασία όπως προηγούμενα. Βρίσκουμε τη μάζα m_u του υγρού έτσι ώστε να γεμίζεται το δοχείο (Σχ. 3γ) μέχρι τη μέση, το ρίχνουμε στο δοχείο του θερμιδόμετρου και παίρνουμε τη θερμοκρασία T_2 . Θερμαίνουμε νερό της



βρύσης στη θερμοκρασία βρασμού του T_1 , το ρίχνουμε πολύ γρήγορα στο δοχείο του θερμιδόμετρου μέχρι σχεδόν την κορυφή του, αναδεύουμε ελαφρά και παίρνουμε την τελική θερμοκρασία T_T . Βρίσκουμε τη μάζα του μίγματος (υγρού-νερού) και υπολογίζουμε τη μάζα του νερού m_{H_2O} . Αν όλο το ποσό θερμότητας που χάνει το ζεστό νερό απορροφάται από το υγρό και το δοχείο τότε θα ισχύει

$$m_{H_2O} c_{H_2O} (T_1 - T_T) = m_U c_U (T_T - T_2) + C_\theta (T_T - T_2) \quad (17.24)$$

όπου C_θ είναι η θερμοχωρητικότητα του θερμιδόμετρου. Από τη σχέση (17.24) υπολογίζουμε την ειδική θερμότητα του υγρού. Ένας άλλος τρόπος για τον προσδιορισμό της ειδικής θερμότητας των υγρών, είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα κομμάτι μετάλλου με γνωστά τη μάζα m_σ και την ειδική θερμότητα c_σ . Κάνουμε την ίδια εργασία που περιγράψαμε στην παράγραφο 3.2, όπου αντί για νερό έχουμε το υγρό άγνωστης ειδικής θερμότητας.

3.4 Μελέτη της θερμομονωτικής Ικανότητας του Θερμιδόμετρου

Θερμαίνουμε νερό της βρύσης σε δοχείο θέρμανσης μέχρι π.χ. τους 70°C . Απ' αυτό μετράμε με το γυάλινο ογκομετρικό σωλήνα ποσότητα ~ 200.0 gr και το αδειάζουμε στο εσωτερικό δοχείο του θερμιδόμετρου (Σχ. 3γ), όταν βρίσκεται ΕΞΩ από το θερμομονωτικό περίβλημα.

Περιμένουμε 2-3 min και ύστερα με το θερμόμετρο θ_1 αρχίζουμε να παίρνουμε τη θερμοκρασία T_1 κάθε 30 sec για συνολικό χρόνο περίπου 8 min. Γράφουμε τις θερμοκρασίες T_1 και τους χρόνους t στον Πίνακα 1.



Πίνακας 1

Μετρήσεις για τη μελέτη της θερμομονωτικής ικανότητας του
θερμιδόμετρου

a/a	t (sec)	T ₁ (°C)	T ₂ (°C)
1			
2			
3			
.			
.			
.			
24			

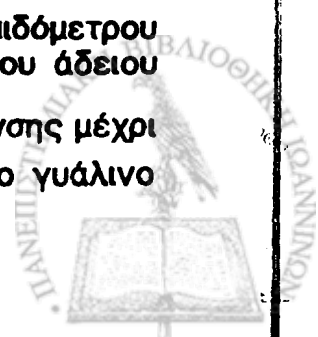
Από τις τιμές του Πίνακα 1:

Να χαραχθούν οι δύο καμπύλες ψύξης $T_1 = f(t)$ και $T_2 = f(t)$ στο ίδιο διάγραμμα και να τις συγκρίνετε.

Αδειάζουμε το νερό από το εσωτερικό δοχείο στο δοχείο θέρμανσης και επαναλαμβάνουμε τις παραπάνω μετρήσεις αλλά με το εσωτερικό δοχείο τώρα ΜΕΣΑ στο θερμομονωτικό περίβλημα. Σκεπάζουμε το θερμιδόμετρο με το σκέπασμα και περνούμε το θερμόμετρο θ_1 μέσα από την τρύπα του σκεπάσματος. Οι τιμές των θερμοκρασιών T_2 και των χρόνων t γράφονται στον Πίνακα 1.

3.5 Προσδιορισμός της θερμοχωρητικότητας του θερμιδόμετρου

Για τον προσδιορισμό της θερμοχωρητικότητας του θερμιδόμετρου παίρνουμε με το θερμόμετρο την αρχική θερμοκρασία T_2 του άδειου θερμιδόμετρου. Ζεσταίνουμε νερό της βρύσης σε δοχείο θέρμανσης μέχρι τη θερμοκρασία ~ 50 °C. Από το νερό αυτό μετράμε με το γυάλινο



ογκομετρικό σωλήνα ποσότητα m_{H_2O} περίπου 130.0 gr και το αδειάζουμε στο εσωτερικό δοχείο του θερμιδόμετρου αφού μετρήσουμε τη θερμοκρασία του (T_1). Μετράμε αμέσως και με ανάδευση συγχρόνως, την θερμοκρασία T_T του νερού κάθε 5 sec μέχρι να σταθεροποιηθεί. Οι τιμές των θερμοκρασιών T_T και των χρόνων t καταχωρούνται στον Πίνακα 2.

Με τη βοήθεια των παραπάνω μετρούμενων μεγεθών προσδιορίζουμε τη θερμοχωρητικότητα του θερμιδόμετρου που δίνεται από τη σχέση

$$c_{\theta} = c_{H_2O} m_{H_2O} \frac{T_1 - T_T}{T_T - T_2} \quad (17.25)$$

όπου η ειδική θερμότητα του νερού $c_{H_2O} = 1 \frac{cal}{gr \text{ } ^\circ C}$.

Για μεγαλύτερη ακρίβεια πρέπει να επαναληφθεί το πείραμα περίπου τρεις φορές, οπότε για κάθε πείραμα επαναλαμβάνεται ο Πίνακας 2. Για να επανέλθει πάλι το θερμιδόμετρο γρήγορα στη θερμοκρασία δωματίου γεμίζουμε με νερό της βρύσης και το αφήνουμε περίπου 5 min. Στη συνέχεια το αδειάζουμε και το στεγνώνουμε. Μετά ακολουθεί η επόμενη μέτρηση.

Η θερμοχωρητικότητα του θερμιδόμετρου μπορεί να εξαρτάται από τη στάθμη του νερού στο δοχείο. Πρέπει λοιπόν σ' όλες τις μετρήσεις η στάθμη του νερού να είναι η ίδια.

Πίνακας 2

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της θερμοχωρητικότητας του θερμιδόμετρου

a/a	t (sec)	T_T ($^\circ C$)



Από τις τιμές του Πίνακα 2 των τριών πειραμάτων:

1. Να βρεθούν οι διορθωμένες τιμές των T_2 και T_T σύμφωνα με τη μέθοδο Rowland-Ferry.
- 2) Να υπολογίσετε τις θερμοχωρητικότητες C_θ του θερμιδόμετρου από τη σχέση (17.25) για κάθε πείραμα.
- 3) Να βρείτε τη μέση τιμή της θερμοχωρητικότητας C_θ από τα τρία πειράματα.

3.6 Προσδιορισμός C_{Al} του Αλουμινίου

Βυθίζουμε ένα σώμα από αλουμίνιο γνωστής μάζας m_{Al} (το ζυγίζουμε με τον υδροστατικό ζυγό) σε δοχείο θέρμανσης που περιέχει νερό της βρύσης και το θερμόμετρο θ_2 . Θερμαίνουμε το σώμα μέχρι το σημείο βρασμού του νερού T_1 . Με τον ογκομετρικό σωλήνα μετράμε με προσοχή ποσότητα νερού της βρύσης $m_{H_2O} = 130.0 \text{ gr}$, πυκνότητας

$$\rho_{H_2O} = 1 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \text{ και } c_{H_2O} = 1.0 \frac{\text{cal}}{\text{gr } ^\circ\text{C}}, \text{ το αδειάζουμε στο}$$

εσωτερικό δοχείο του θερμιδόμετρου, το σκεπάζουμε καλά με το σκέπασμα και μετράμε τη θερμοκρασία του με το θερμόμετρο θ_1 κάθε 30 sec.

Συνεχίζουμε τις μετρήσεις αυτές μέχρι τη στιγμή που θα ρίξουμε το σώμα μέσα στο θερμιδόμετρο. Γράφουμε τις μετρήσεις των t και T στον Πίνακα 3. Όταν η θερμοκρασία του σώματος αλουμινίου σταθεροποιηθεί σε μια τιμή T_1 , όπως τη διαβάζουμε στο θερμόμετρο θ_2 , μεταφέρουμε το σώμα πολύ γρήγορα και το βυθίζουμε στο νερό του θερμιδόμετρου προσέχοντας να μην ακουμπά στο θερμόμετρο. Σκεπάζουμε το θερμιδόμετρο και τοποθετούμε το θερμόμετρο θ_1 , αναδεύουμε ελαφρά το νερό και παίρνουμε θερμοκρασίες κάθε 5 sec μέχρι να σταθεροποιηθεί σε μια τιμή. Η διαδικασία αυτή πρέπει να γίνει όσο το δυνατό πιο γρήγορα, προσέχοντας πάντα να μη μεταβάλλουμε την ποσότητα του νερού (προσθέτοντας ή αφαιρώντας). Είναι ανάγκη να γίνουν 1-2 δοκιμές προτού ληφθούν τελικές πειραματικές μετρήσεις. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 3.



Πίνακας 3
Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της ειδικής θερμότητας c_{Al} του
Αλουμινίου

a/a	t (sec)	T_T ($^{\circ}C$)

Από τις τιμές του Πίνακα 3:

1. Να χαραχθεί η καμπύλη $T = f(t)$ και να γίνουν οι σχετικές διορθώσεις των T_2 και T_T σύμφωνα με τη μέθοδο Rowland-Ferry.
- 2) Να υπολογίσετε την ειδική θερμότητα c_{Al} του αλουμινίου και να την συγκρίνετε με αυτή που υπάρχει στη βιβλιογραφία.

3.7 Προσδιορισμός της Ειδικής Θερμότητας c_{Fe} του Σιδήρου

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία της παραγράφου 3.6 αλλά με το σώμα του σιδήρου μάζας m_{Fe} (ζυγίζεται με το ζυγό). Οι μετρήσεις γράφονται στον Πίνακα 4.



Πίνακας 4

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της ειδικής θερμότητας $c_{F\bullet}$ του σιδήρου

a/a	t (sec)	T_T ($^{\circ}\text{C}$)

Από τις τμές του Πίνακα 4:

1. Να χαραχθεί η καμπύλη $T = f(t)$ και να γίνουν οι διορθώσεις των T_2 και T_T σύμφωνα με τη μέθοδο Rowland-Ferry.
- 2) Να υπολογίσετε την ειδική θερμότητα $c_{F\bullet}$ του σιδήρου και να την συγκρίνετε με αυτή που υπάρχει στη βιβλιογραφία.

3.8 Προσδιορισμός της ειδικής θερμότητας c_K ενός κράματος

Επαναλαμβάνεται και πάλι η διαδικασία της παραγράφου 3.6 αλλά με το σώμα ενός κράματος μάζας m_K . Το κράμα είναι ορείχαλκος με σύνθεση 67%Cu + 33%Zn. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 5.



Πίνακας 5
Μετρήσεις για τον προσδιορισμό της ειδικής θερμότητας c_K ενός
κράματος

a/a	t (sec)	T_T ($^{\circ}\text{C}$)

Από τις τιμές του Πίνακα 5:

1. Να χαραχθεί η καμπύλη $T = f(t)$ και να γίνουν οι διορθώσεις των T_2 και T_T .
- 2) Να υπολογίσετε την ειδική θερμότητα c_K ενός κράματος και να την συγκρίνετε με αυτή που υπάρχει στη βιβλιογραφία.

3.9 Επαλήθευση του Νόμου των Dulong-Petit

Από τις τιμές των ειδικών θερμοτήτων c_p που μετρηθήκανε πιο πάνω να γίνει η διαπίστωση της ισχύος του νόμου Dulong-Petit για τη Γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα των στερεών στις συνηθισμένες θερμοκρασίες.

Δίνεται ένας πίνακας τιμών από τη βιβλιογραφία για μερικά υλικά όπου φαίνονται οι ειδικές θερμότητες, τα μοριακά βάρη και οι μοριακές θερμοχωρητικότητες σε περιοχές θερμοκρασιών.



Πίνακας 6

		\bar{c}_p ($\frac{\text{cal}}{\text{gr } ^\circ\text{C}}$)	Περιοχή Θερμοκρασιών ($^\circ\text{C}$)	Μοριακό Βάρος ($\frac{\text{gr}}{\text{mole}}$)	$\bar{C}_{M,P}(=M\bar{c}_p)$ ($\frac{\text{cal}}{\text{mole } ^\circ\text{C}}$)
Be	Βηρύλλιο	0.470	20-100	9.01	4.24
C	Άνθρακας	0.168	26-76	12.0	2.02
Al	Αλουμίνιο	0.217	17-100	27.0	5.86
Cr	Χρώμιο	0.111	20-100	52.0	5.77
Fe	Σίδηρος	0.115	15-100	55.9	6.43
Cu	Χαλκός	0.093	15-100	63.5	5.90
Ag	Άργυρος	0.056	15-100	107.9	6.04
W	Βολφράμιο	0.034	20-100	183.9	6.25
Au	Χρυσός	0.032	0-100	197.0	6.30
Hg	Υδράργυρος	0.033	0-100	200.8	6.62
Pb	Μόλυβδος	0.031	20-100	207.2	8.42
67%Cu+33%Zn	Ορείχαλκος	0.093	15-100		

ΑΣΚΗΣΗ 18

θερμιδομετρία με τη μεθοδο της ηλεκτρικής θερμανσης (φαινομενο Joule)

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Από την πείρα-μας γνωρίζουμε ότι το έργο που παράγεται κατά τις τριβές ή κατά τη σύγκρουση δυο σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα δηλ. η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα. Αντίθετα οι θερμικές μηχανές μετατρέπουν θερμική ενέργεια σε μηχανική ενέργεια. Επομένως η θερμότητα και η μηχανική ενέργεια είναι δυο μορφές ενέργειας, που μπορούν να μετατρέπονται η μια στην άλλη. Ομοίως, ηλεκτρική, χημική και ένα σωρό άλλες μορφές ενέργειας είναι δυνατό να μετατρέπονται σε θερμότητα και αντίστροφα.

Ο James P. Joule (1818-1889) είναι αυτός που πρώτος μέτρησε με προσοχή το μηχανικό ισοδύναμο της θερμικής ενέργειας, δηλαδή πόσα Joule ισοδυναμούν με μια θερμίδα (Calorie). Για το σκοπό αυτό έκανε διάφορα πειράματα. Ένα από αυτά είναι η γνωστή διάταξη του Joule στην οποία βάρη που πέφτουν προκαλούν την περιστροφή πτερυγίων τα οποία αναδεύουν το νερό σε ένα δοχείο με αποτέλεσμα να ανεβεί η θερμοκρασία του. Ο Henry A. Rowland έκανε το 1879 ένα επίπονο προσδιορισμό του μηχανικού ισοδύναμου της θερμότητας που διαφέρει κατά 1 μόνο μέρος στα 2000 από τη σημερινή παραδεχτή τιμή η οποία είναι



$$1 \text{ Kcal} = 1000 \text{ cal} = 4186 \text{ Joules}$$

δηλαδή 4186 Joules μηχανικού έργου, όταν μετατραπούν σε θερμότητα θα ανεβάσουν τη θερμοκρασία 1 Kgr νερού από 14.5 σε 15.5 °C. Γενικά η ισοδυναμία θερμότητας Q και μηχανικής ή άλλης μορφής ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$W = J \cdot Q \quad (18.1)$$

όπου το J ονομάζεται **μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας** και ισούται με $4.186 \frac{\text{Joule}}{\text{Cal}}$.

Στη σύγχρονη θερμιδομετρία, η θέρμανση ενός υγρού που βρίσκεται σε λουτρό ή θερμιδόμετρο γίνεται με ηλεκτρική ενέργεια, δηλαδή με διέλευση ρεύματος μέσα σε μια αντίσταση που είναι βυθισμένη στο θερμιδόμετρο. Στην περίπτωση αυτή το ισοδύναμο της θερμότητας ονομάζεται ηλεκτρικό ισοδύναμο. Με βάση την ισοδυναμία της θερμικής και ηλεκτρικής ενέργειας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ηλεκτρική θέρμανση για τον προσδιορισμό της θερμοχωρητικότητας ή ειδικής θερμότητας ενός υγρού.

Στην άσκηση αυτή θα ασχοληθούμε (1) με την επαλήθευση της σχέσης (18.1) μετρώντας το ηλεκτρικό ισοδύναμο της θερμότητας J κατά την ηλεκτρική θέρμανση του νερού και (2) με τον προσδιορισμό της θερμοχωρητικότητας ή ειδικής θερμότητας ενός υγρού.

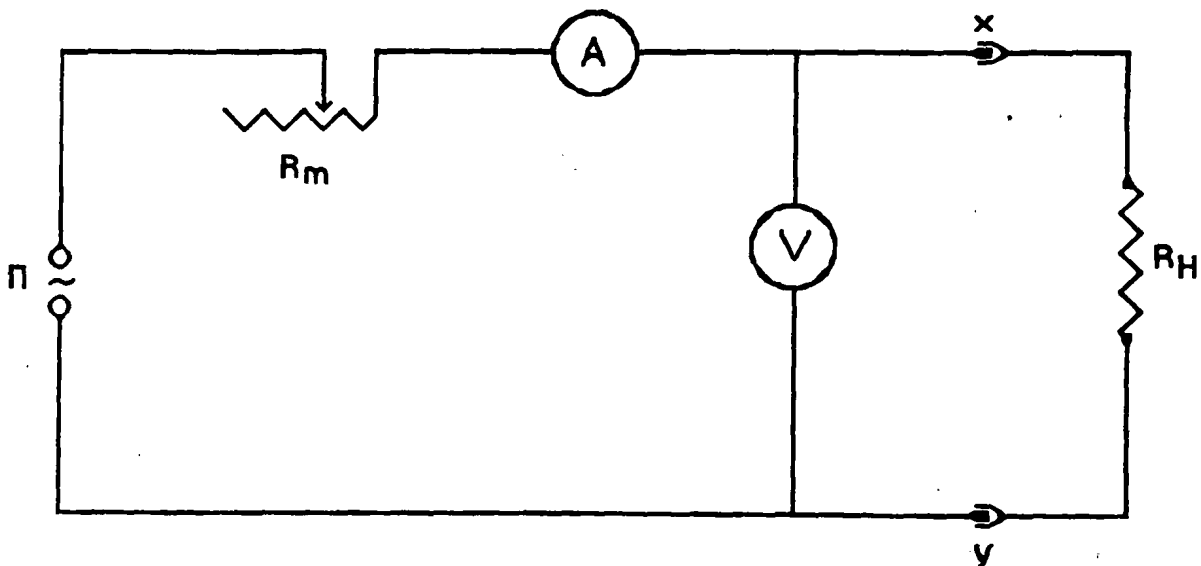
2. ΘΕΩΡΙΑ

2.1 Προσδιορισμός της Ειδικής Θερμότητας C_v με Ηλεκτρική Θέρμανση

Για τον προσδιορισμό των ειδικών θερμοτήτων των υγρών, π.χ. του νερού, της αλκοόλης κ.ά., η θερμική ενέργεια προσφέρεται με θερμαινόμενη ηλεκτρική αντίσταση (σπείρα) σε μια ποσότητα του υγρού γνωστής μάζας και θερμοκρασίας. Από την μετρούμενη ενέργεια που προσφέρεται στο υγρό και

τη σχετική αύξηση της θερμοκρασίας μπορούμε να υπολογίσουμε την ειδική θερμότητα του υγρού.

Η σχηματική διάταξη του ηλεκτρικού κυκλώματος που χρησιμοποιείται για τη θέρμανση της μεταλλικής σπείρας στο υγρό δίνεται στο Σχ. 1, όπου Π είναι πηγή εναλλασσόμενης τάσης, A αμπερόμετρο, V βολτόμετρο, R_M μεταβλητή αντίσταση και R_H η αντίσταση της θερμαινόμενης σπείρας που πρέπει να είναι βυθισμένη στο υγρό του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε την ειδική θερμότητα. Συνήθως τα άκρα x και y της θερμαινόμενης σπείρας είναι προσαρμοσμένα πάνω στο καπάκι του θερμιδόμετρου. Σχετικά με την περιγραφή του θερμιδόμετρου θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο.



Σχήμα 1. Σχηματική διάταξη του κυκλώματος που χρησιμοποιείται για τη θέρμανση του υγρού.

Η ηλεκτρική ενέργεια $W_{\eta\lambda.}$ που προσφέρεται σε θερμική ενέργεια Q_{Δ} από τη θερμαινόμενη σπείρα είναι

$$W_{\eta\lambda.} = Q_{\Delta} = U \cdot I \cdot t = R_H \cdot I^2 \cdot t$$

(18.2)



όπου U η τάση κατά μήκος της θερμαινόμενης σπείρας, I η ένταση του ρεύματος που διέρχεται από τη σπείρα και t ο χρόνος θέρμανσης. Η θερμική ενέργεια που παίρνεται από το υγρό και το θερμιδόμετρο είναι

$$Q_{\pi} = (C_U + C_{\theta}) (T_2 - T_1) \quad (18.3)$$

όπου C_U η θερμοχωρητικότητα του υγρού, C_{θ} η θερμοχωρητικότητα του θερμιδόμετρου, T_1 και T_2 οι θερμοκρασίες του υγρού προ και μετά την ηλεκτρική θέρμανση αντίστοιχα.

Σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ενέργειας

$$U \cdot I \cdot t = (C_U + C_{\theta}) (T_2 - T_1) \quad (18.4)$$

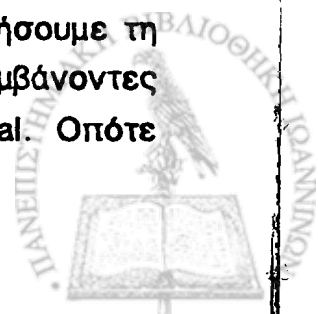
Όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, ένα ποσό θερμότητας μπορεί να διαφεύγει από το θερμιδόμετρο στον περιβάλλοντα χώρο κατά τη διάρκεια της θέρμανσης. Η διαρροή αυτή θερμότητας έχει σαν αποτέλεσμα να μετράμε μικρότερη τελική θερμοκρασία από εκείνη που απαιτεί η προσφερόμενη ηλεκτρική ενέργεια. Επομένως, στην περίπτωση αυτή πρέπει να κάνουμε διόρθωση της θερμοκρασίας κατά μια ποσότητα ε ώστε να εξουδετερώσουμε τις απώλειες θερμότητας. Έτσι η (18.4) ξαναγράφεται

$$U \cdot I \cdot t = (C_U + C_{\theta}) (T_2 + \varepsilon - T_1) \quad (18.5)$$

Επομένως η θερμοχωρητικότητα C_U και η ειδική θερμότητα c_U του υγρού δίνονται από τις σχέσεις

$$C_U = \frac{U \cdot I \cdot t}{(T_2 + \varepsilon - T_1)} - C_{\theta}, \quad c_U = \frac{C_U}{m_U} \quad (18.6)$$

Εάν το U μετριέται σε Volts, I σε Amperes, t σε δευτερόλεπτα (sec) και m_U σε γραμμάρια (gr) τότε η ηλεκτρική ενέργεια $U \cdot I \cdot t$ βρίσκεται σε Joule. Για να ισχύει η (18.4) από άποψη μονάδων θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τη μετρούμενη ηλεκτρική ενέργεια με την ισοδύναμη θερμότητα, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (18.1) δηλαδή ότι $1 \text{ Joule} = \frac{1}{4.186} \text{ cal} = 0.239 \text{ cal}$. Οπότε



η ειδική θερμότητα προσδιορίζεται σε $\frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}}$. Η διόρθωση της τελικής θερμοκρασίας T_2 γίνεται με το παρακάτω συμπληρωματικό πείραμα: Χρησιμοποιούμε τον ίδιο όγκο υγρού που είχαμε κατά τη διάρκεια του πειράματος. Θερμαίνουμε ηλεκτρικά το υγρό, μέσα στο θερμιδόμετρο, μέχρις ότου η θερμοκρασία φθάσει την τιμή $T_\mu = \frac{T_1 + T_2}{2}$, όπου T_1 και T_2 είναι η αρχική και η τελική θερμοκρασία που μετρήσαμε στο πείραμα. Αμέσως διακόπτουμε την ηλεκτρική θέρμανση και μετά από χρόνο t που είναι ο χρόνος που χρειάστηκε να ανέβει η θερμοκρασία από την T_1 έως την T_2 , μετράμε τη θερμοκρασία T'_2 . Η διόρθωση της τελικής θερμοκρασίας ϵ θα ισούται

$$T'_2 - T_\mu = \epsilon \quad (18.7)$$

Οι ειδικές θερμότητες μερικών υγρών είναι:

Αιθυλική αλκοόλη $0.574 \text{ cal/gr}^\circ\text{C}$

Μεθυλική αλκοόλη $0.59 \text{ cal/gr}^\circ\text{C}$

2.2 Προσδιορισμός της θερμοχωρητικότητας C_θ του θερμιδόμετρου

Για τον προσδιορισμό της θερμοχωρητικότητας του θερμιδόμετρου C_θ χρησιμοποιούμε υγρό γνωστής ειδικής θερμότητας, οπότε η εξίσωση (18.6) γράφεται

$$C_\theta = \frac{U \cdot I \cdot t}{(T_2 + \epsilon - T_1)} - m_u c_u \quad (18.8)$$

Πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι η ηλεκτρική ενέργεια $U \cdot I \cdot t$ πρέπει να μετατραπεί σε θερμίδες ή η ειδική θερμότητα του υγρού c_u πρέπει να εκφραστεί σε μονάδες $\frac{\text{Joule}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}}$.



2.3 Προσδιορισμός του Ηλεκτρικού Ισοδύναμου της Θερμότητας

Στην περίπτωση που θα θέλαμε να βρούμε την ισοδύναμη θερμότητα που αντιστοιχεί στην ηλεκτρική ενέργεια $U \cdot I \cdot t$ δηλαδή να προσδιορίσουμε το ηλεκτρικό ισοδύναμο της θερμότητας, χρησιμοποιούμε υγρό γνωστής ειδικής θερμότητας, όπως το νερό και θερμιδόμετρο γνωστής θερμοχωρητικότητας C_{θ} . Ξεκινάμε από τη σχέση (18.1) και έχουμε

$$J = \frac{W_{\eta\lambda}}{Q_{\pi}} = \frac{U \cdot I \cdot t}{(C_U + C_{\theta}) (T_2 + \epsilon - T_1)} \quad (18.9)$$

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

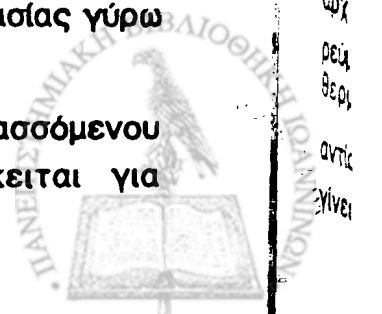
3.1 Γενικά

Το θερμιδόμετρο καθώς και η αντίσταση (σπείρα) που είναι προσαρμοσμένη στο καπάκι του θερμιδόμετρου δείχνονται στο Σχ. 3 της άσκησης 17.

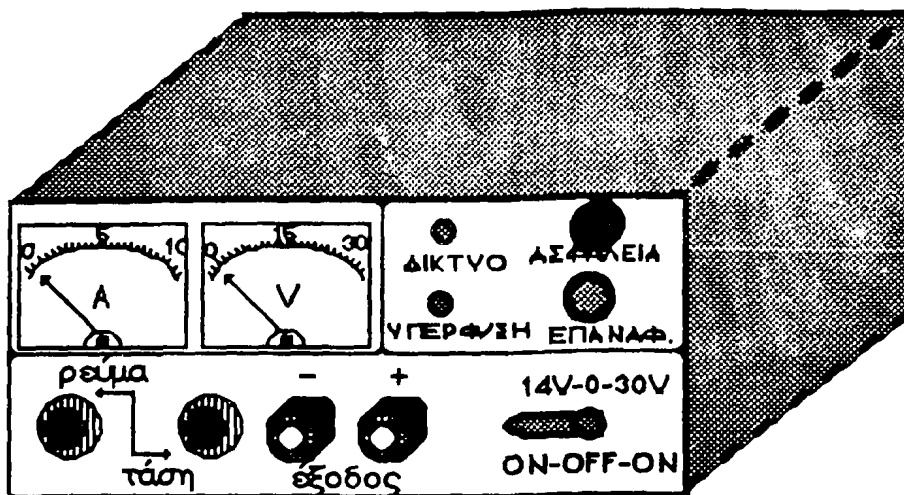
Στο θερμιδόμετρο πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τέτοια υγρά (π.χ. αλκοόλες) ώστε να μην προσβάλλονται τα διάφορα μέρη του θερμιδόμετρου. Για να αποφεύγεται η διάβρωση των θερμαινόμενων σωμάτων πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο εναλλασσόμενο ρεύμα. Συνιστάται η χρησιμοποίηση καθαρού (απεσταγμένου) νερού. Κατά τη διάρκεια του πειράματος η θερμαινόμενη αντίσταση πρέπει να βυθιστεί τελείως μέσα στο νερό, έτσι ώστε να εμποδιστεί από το κάψιμο, όταν εφαρμόζεται πολύ μεγάλη ισχύ.

Το θερμιδόμετρο περιέχει περίπου 200 ml υγρού που είναι αρκετό σε κάθε περίπτωση. Επιπλέον για να αποκλείσουμε τον ανεπιθύμητο σχηματισμό αερίου ή ατμού, η σταθερή ισχύ (60 W) δεν πρέπει να ξεπερνιέται. Θα πρέπει να λαμβάνεται πρόνοια ώστε να υπάρχει συνεχής ανάδευση, έτσι ώστε να αποφεύγεται η τοπική αύξηση θερμοκρασίας γύρω από τη θερμαινόμενη αντίσταση.

Η ηλεκτρική ενέργεια δίνεται μ' ένα τροφοδοτικό εναλλασσόμενου ρεύματος που δείχνεται στο Σχ. 2. Ανεξάρτητα αν πρόκειται για



προσδιορισμό της ειδικής θερμότητας ή της θερμοχωρητικότητας ή του ηλεκτρικού ισοδύναμου η διαδικασία του πειράματος είναι η ίδια.



Σχήμα 2. Σχηματική διάταξη του τροφοδοτικού ηλεκτρικής ενέργειας.

Αρχικά συνδέουμε τα άκρα της αντίστασης που είναι προσαρμοσμένα στο καπάκι του θερμιδόμετρου με την έξοδο του εναλλασσόμενου ρεύματος του τροφοδοτικού. Ο διακόπτης Δ πρέπει να παραμείνει κλειστός.

3.2 Προσδιορισμός Ηλεκτρικού Ισοδύναμου της Θερμότητας με Σταθερό Χρόνο Θέρμανσης

Μετράμε μ' ένα ογκομετρικό σωλήνα ποσότητα νερού 150 ml και το ρίχνουμε στο θερμιδόμετρο. Σκεπάζουμε το θερμιδόμετρο με το καπάκι οπότε βυθίζεται και η θερμαινόμενη αντίσταση. Με το θερμόμετρο μετράμε την αρχική θερμοκρασία T_1 του νερού. Στη συνέχεια ανοίγουμε το διακόπτη του τροφοδοτικού και ρυθμίζουμε τάση 2 Volt. Ταυτόχρονα αρχίζουμε τη χρονομέτρηση με το χρονόμετρο. Μετράμε το αντίστοιχο ρεύμα I . Μετά από χρόνο θέρμανσης $t = 3$ min περίπου μετράμε την τελική θερμοκρασία T_2 του νερού. Μετά τη διαδικασία αυτή κρυώνουμε την αντίσταση καθώς και το νερό που υπάρχει στο θερμιδόμετρο. (Μπορεί να γίνει γρήγορα αν αδειάσουμε το ζεστό νερό, βάλουμε κρύο και



τοποθετήσουμε την αντίσταση μέσα). Μετράμε πάλι 150 gr νερού και το ρίχνουμε στο θερμιδόμετρο. Επαναλαμβάνουμε τις ίδιες μετρήσεις με τάση $V = 2,4, 6, 8, 10, 12$ Volt. Για τη μεγαλύτερη τάση να βρεθεί η διόρθωση της θερμοκρασίας ϵ σύμφωνα με τη παράγρ. 2.1. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό του ηλεκτρικού ισοδύναμου της θερμότητας με σταθερό χρόνο θέρμανσης

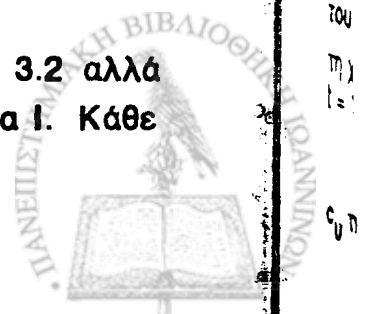
α/α	V (Volt)	I (Amp)	T ₁ (°)	T ₂ (°)

Από τις τιμές του Πίνακα 1:

- 1) Να βρεθούν η ηλεκτρική ενέργεια καθώς και η θερμική ενέργεια.
- 2) Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό ισοδύναμο θερμότητας.
- 3) Να γίνει η γραφική παράσταση $W_{\eta\lambda} = f(Q)$ και να βρεθεί από την κλίση της ευθείας το ηλεκτρικό ισοδύναμο της θερμότητας.

3.3 Προσδιορισμός Ηλεκτρικού Ισοδύναμου της Θερμότητας με Σταθερό Ηλεκτρικό Ρεύμα

Κάνουμε την ίδια διεργασία όπως στην παράγραφο 3.2 αλλά κρατάμε σταθερή την τάση $V = 5$ Volt και αντίστοιχα το ρεύμα I . Κάθε



50 sec μετράμε τη θερμοκρασία T_2 μέχρι τα 600 sec. Οι μετρήσεις καταχωρούνται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό του ηλεκτρικού ισοδύναμου της θερμότητας με σταθερό ρεύμα

a/a	t (sec)	I (Amp)	T_1 ($^{\circ}$)	T_2 ($^{\circ}$)

Από τον Πίνακα 2:

Να γίνει η γραφική παράσταση $T_2 = f(t)$ και να βρεθεί από την κλίση της ευθείας το ηλεκτρικό ισοδύναμο της θερμότητας.

3.4 Μέτρηση της Ειδικής Θερμότητας της Μεθυλικής Αλκοόλης

Μετράμε μ' ένα ογκομετρικό σωλήνα ποσότητα αλκοόλης (μεθυλική αλκοόλη) 150 ml και τη ρίχνουμε στο θερμιδόμετρο. Σκεπάζουμε με το καπάκι οπότε βυθίζεται και η θερμαινόμενη αντίσταση. Με το θερμόμετρο μετράμε την αρχική θερμοκρασία T_1 της αλκοόλης. Ανοίγουμε το διακόπτη του τροφοδοτικού και κανονίζουμε τάση 4 Volt. Ταυτόχρονα αρχίζουμε τη χρονομέτρηση. Μετράμε και το αντίστοιχο ρεύμα I. Μετά από χρόνο $t = 100$ sec περίπου μετράμε την τελική θερμοκρασία T_2 της αλκοόλης.

Να υπολογιστούν η θερμοχωρητικότητα C_U και η ειδική θερμότητα c_U της αλκοόλης σύμφωνα με τις σχέσεις (18.6).



ΑΣΚΗΣΗ 19

προσδιορισμός του $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με την Άσκηση 18, οι μοριακές θερμοχωρητικότητες ενός σώματος υπό σταθερή πίεση και σταθερό όγκο συνδέονται με τις αντίστοιχες ειδικές θερμότητες με τις σχέσεις $C_p = M c_p$ και $C_v = M c_v$, όπου M το μοριακό βάρος του σώματος. (Επειδή στην άσκηση αυτή δεν θα αναφέρουμε τα μεγέθη των θερμοχωρητικοτήτων, για λόγους ευκολίας, θα συμβολίζουμε τις μοριακές θερμοχωρητικότητες με C_p και C_v αντί των $C_{M,p}$ και $C_{M,v}$). Οπότε ο λόγος γ γράφεται

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{M c_p}{M c_v} = \frac{c_p}{c_v}$$

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη άσκηση, πάντοτε $C_p > C_v$. Για τα στερεά και υγρά σώματα μπορεί να θεωρηθεί ότι $C_p \approx C_v$ διότι ο συντελεστής θερμικής διαστολής-τους είναι μικρός. Έτσι για τα στερεά και υγρά μπορούμε αντί της C_v να προσδιορίσουμε τη C_p υπό ατμοσφαιρική πίεση. Όπως είδαμε στην Άσκηση 18, ο υπολογισμός του C_p για στερεά και υγρά είναι σχετικά εύκολος. Αυτό όμως δεν μπορούμε να το κάνουμε για τα αέρια διότι ο συντελεστής θερμικής διαστολής-τους είναι σχετικά μεγάλος ($C_p > C_v$). Από την άλλη μεριά, για τον πειραματικό προσδιορισμό του C_v των αερίων αντιμετωπίζουμε τεράστια πειραματικά προβλήματα επειδή τα αέρια εξασκούν μεγάλες πιέσεις στα δοχεία που τα περιέχουν (V =σταθ.)

όταν η θερμοκρασία αυξηθεί μόνο κατά μερικούς βαθμούς. Έτσι, τα δοχεία πρέπει να είναι μεγάλης αντοχής. Το γεγονός αυτό κάνει σχεδόν αδύνατη την άμεση μέτρηση του c_v για τα αέρια. Για να παρακάμψουμε τις δυσκολίες αυτές στην πράξη μετράμε το c_p , π.χ. με τη μέθοδο των μιγμάτων και το λόγο $\frac{c_p}{c_v}$ με κάποιο άλλο τρόπο, οπότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το c_v έμμεσα. Ο προσδιορισμός του γ είναι απαραίτητος όταν πρόκειται να μελετήσουμε μια αδιαβατική διεργασία ενός ιδανικού αερίου που περιγράφεται με τη σχέση $PV^\gamma = \text{σταθερό}$.

Ο Rüchardt επενόησε μια μέθοδο για τον προσδιορισμό του λόγου $\frac{c_p}{c_v}$ την οποία δημοσίευσε το 1929 (Phys. Zeitschr XXX, 1929, σελ. 58-59).

Η ίδια μέθοδος είναι επίσης κατάλληλη για πειράματα που αναφέρονται στην εσωτερική τριβή των αερίων. Αργότερα ο Rinkel διαφοροποίησε τη μέθοδο του Rüchardt και έκανε πιο απλό τον προσδιορισμό του γ με την ίδια ακριβώς συσκευή. Οι μέθοδοι αυτοί θα χρησιμοποιηθούν στην άσκηση αυτή.

2. ΘΕΩΡΙΑ

2.1 Γενικά

Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής θεωρείται ότι ισχύει για κάθε διεργασία στη φύση, που γίνεται μεταξύ καταστάσεων ισορροπίας. Όπως αναφέραμε στην άσκηση 17, η διαφορική μορφή του νόμου δίνεται με την έκφραση

$$dQ = dU + dW \quad (19.1)$$

όπου dQ είναι το απειροστό ποσό θερμότητας που απορροφάται από το σύστημα στο οποίο γίνεται η διεργασία, $dW = p dV$ είναι το απειροστό έργο που παράγει το σύστημα και dU η απειροστή μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος.



Μια διεργασία που γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να μη ρέει θερμότητα προς ή από το σύστημα λέγεται **αδιαβατική διεργασία**. Έτσι για μια αδιαβατική διεργασία $dQ = 0$, οπότε η (19.1) γίνεται

$$dU = - dW \quad (19.2)$$

δηλαδή το ποσό του έργου που παράγεται πάνω στο σύστημα είναι ίσο με την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος ή το ποσό του έργου που παράγεται από το σύστημα είναι ίσο με την ελάττωση της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος.

Ο λόγος $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ είναι χαρακτηριστικό μέγεθος της σχέσης

$PV^\gamma = \text{σταθερό}$, η οποία ισχύει για ένα ιδανικό αέριο που δέχεται μια αδιαβατική διεργασία. Θεωρείται σκόπιμο να αποδείξουμε τη σχέση αυτή για να κατανοήσουμε τη σημασία του λόγου και να δούμε πως επηρεάζεται στη σχέση αυτή. Πέρα από αυτό, η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για τον προσδιορισμό του γ βασίζεται στην αδιαβατική συμπίεση και εκτόνωση ενός αερίου. Ξεκινάμε από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής:

$$dQ = dU + dW = dU + PdV \quad (19.3)$$

Για μια αδιαβατική διεργασία $dQ = 0$. Από τη σχέση (17.10) της άσκησης 18 έχουμε $dU = \mu C_v dT$ οπότε η σχέση (19.3) γράφεται

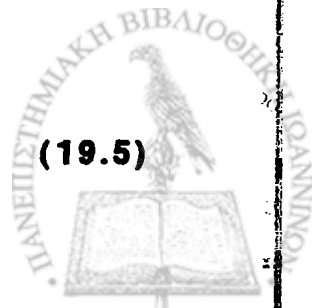
$$0 = \mu C_v dT + PdV$$

$$\text{ή} \quad dT = - \frac{PdV}{\mu C_v} \quad (19.4)$$

Διαφορίζοντας την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων $PV = \mu RT$ προκύπτει ότι

$$PdV + VdP = \mu R dT$$

$$\text{ή} \quad dT = \frac{PdV + VdP}{\mu R} \quad (19.5)$$



Εξισώνοντας τις εκφράσεις του dT των εξισώσεων (19.4), (19.5) και χρησιμοποιώντας τη σχέση $R = C_p - C_v$ παίρνουμε

$$P C_p dV + V C_v dP = 0 \quad (19.6)$$

Διαιρώντας με $P V C_v$ και θέτοντας $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \text{σταθερό}$, έχουμε

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad (19.7)$$

που ολοκληρώνοντας γράφεται

$$\ln P + \gamma \ln V = \text{σταθερό}$$

$$\text{ή} \quad P V^\gamma = \text{σταθερό} \quad (19.8)$$

2.2 Θεωρητικός Υπολογισμός του γ

Όπως αναφέραμε στην άσκηση 17, στα στερεά και υγρά $C_p \cong C_v$, δηλαδή το $\gamma \cong 1$. Για τα ιδανικά αέρια και με μεγάλη προσέγγιση για τα φυσικά αέρια η τιμή του γ εξαρτάται από το πλήθος των ατόμων στα μόρια του αερίου. Έτσι για μονοατομικό αέριο, που περιέχει N μόρια και κάθε μόριο έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας, η εσωτερική ενέργεια δίνεται από τη γνωστή σχέση

$$U = 3N \frac{kT}{2} = 3\mu \left(\frac{1}{2} RT\right) \quad (19.9)$$

όπου $k = \text{σταθερά Boltzmann}$ και $\mu = \text{αριθμός γραμμομορίων}$. Διαφορίζοντας την (19.9) και συνδυάζοντας-την με τις σχέσεις $dU = \mu C_v dT$ και $R = C_p - C_v$ έχουμε

$$dU = 3\mu \left(\frac{1}{2} R dT\right) = \frac{3}{2} \mu (C_p - C_v) dT = \mu C_v dT$$

$$\text{ή} \quad \frac{3}{2} (C_p - C_v) = C_v \quad \text{και} \quad \frac{3}{2} C_p = \frac{5}{2} C_v$$



Οπότε
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3} = 1.67 \quad (19.10)$$

Για διατομικά αέρια κάθε μόριο έχει 5 βαθμούς ελευθερίας, έτσι έχουμε

$$U = 5N \frac{kT}{2} = 5\mu \left(\frac{1}{2} RT\right)$$

και
$$dU = 5\mu \left(\frac{1}{2} R dT\right) = \mu C_V dT$$

ή
$$\frac{5}{2} (C_P - C_V) = C_V$$

Οπότε
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1.40 \quad (19.11)$$

Οι θεωρητικές αυτές τιμές για τα μονοατομικά και διατομικά μόρια είναι πολύ κοντά μ' αυτές των φυσικών αερίων του Πίνακα 1.

Για πολυατομικά αέρια κάθε μόριο έχει 6 βαθμούς ελευθερίας έτσι

$$U = 6\mu \left(\frac{1}{2} RT\right), \quad dU = 6\mu \left(\frac{1}{2} R dT\right) = \mu C_V dT$$

ή
$$\frac{6}{2} (C_P - C_V) = C_V \quad \text{και} \quad \frac{6}{2} C_P = \frac{8}{2} C_V$$

οπότε
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{4}{3} = 1.33 \quad (19.12)$$

Τα φυσικά αέρια του Πίνακα 1 δείχνουν μεγάλες αποκλίσεις από την τιμή αυτή, οι οποίες αυξάνουν όσο τα μόρια έχουν μεγαλύτερο αριθμό ατόμων. Αυτό οφείλεται στο ότι στο θεωρητικό μοντέλο δεν λήφθηκαν υπόψη οι συνεισφορές ενέργειας από τις ταλαντώσεις των ατόμων στα πολυατομικά μόρια.



Πίνακας 1

Τιμές του $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ για μονοατομικά, διατομικά και πολυατομικά φυσικά αέρια

P = 1 atm.,		T = 20°C				
Τύπος Αερίου	Αέριο	Όνομα	C_p ($\frac{\text{cal}}{\text{mole}\cdot^\circ\text{C}}$)	C_v ($\frac{\text{cal}}{\text{mole}\cdot^\circ\text{C}}$)	$C_p - C_v$ ($\frac{\text{cal}}{\text{mole}\cdot^\circ\text{C}}$)	$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v}$
Μ ο ν ο α τ ο μ ι κ ά	He	Ήλιον	4.97	2.98	1.99	1.67
	Ne	Νέον	4.96	3.02	1.94	1.64
	Ar	Αργόν	4.99	2.98	2.01	1.67
	Xe	Ξένο	-	-	-	1.66
Δ ι α τ ο μ ι κ ά	H ₂	Υδρογόνο	6.87	4.88	1.99	1.41
	N ₂	Άζωτο	6.95	4.96	1.99	1.40
	O ₂	Οξυγόνο	7.03	5.03	2.00	1.40
		Αέρας	6.95	4.96	1.99	1.40
	CO	Μονοξείδιο Ανθρακος	6.97	4.98	1.99	1.40
	NO	Μονοξείδιο Αζώτου	-	-	-	1.40
	HCl	Υδροχλωριο	7.07	5.01	2.06	1.41
Cl ₂	Χλώριο	8.29	6.15	2.14	1.35	
Π ο λ υ α τ ο μ ι κ ά	H ₂ S	Υδρόθειο	8.27	6.20	2.10	1.34
	N ₂ O	Υποξείδιο Αζώτου	8.85	6.81	2.04	1.30
	CO ₂	Διοξείδιο Ανθρακος	8.83	6.80	2.03	1.30
	SO ₂	Διοξείδιο Θείου	9.65	7.50	2.15	1.29
	NH ₃	Αμμωνία	8.80	6.65	2.15	1.31
	CH ₄	Μεθάνιο	-	-	-	1.31
	C ₂ H ₂	Ακετυλένιο	9.96	7.91	2.05	1.26
	C ₂ H ₄	Αιθυλένιο	10.05	7.90	2.06	1.25
	C ₂ H ₆	Αιθάνιο	12.35	10.30	2.05	1.20
	C ₂ H ₄ O		-	-	-	1.14
	C ₆ H ₆	Βενζίνη	25.4	23.1	2.3	1.10
	C ₄ H ₁₀ O		-	-	-	1.08
n-C ₆ H ₁₄	n-Εξάνιο	31.4	29.1	2.3	1.08	

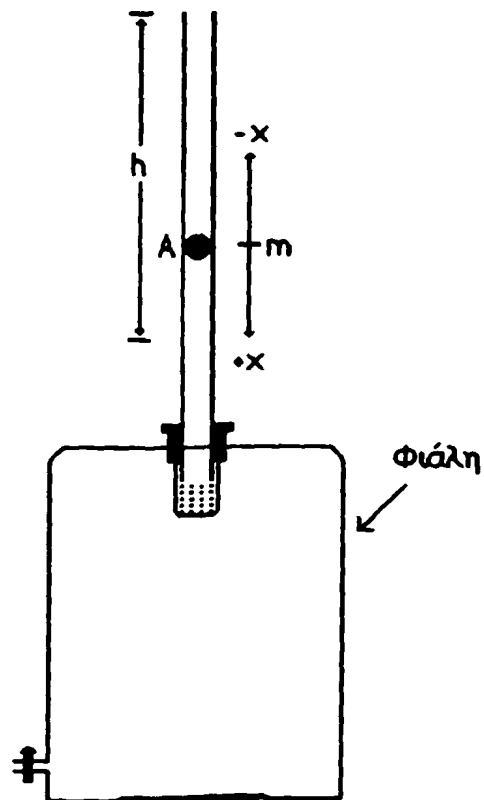


2.3 Μέθοδος Προσδιορισμού του $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ για Αέρια

Όπως είπαμε και στην εισαγωγή θα χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους των Rüchardt και Rinkel. Και οι δυο μέθοδοι χρησιμοποιούν τα ίδια ακριβώς όργανα και βασίζονται στην αδιαβατική συμπίεση και εκτόνωση ενός αερίου που προκαλείται από την περιοδική ταλάντωση μιας σφαίρας μέσα σ' ένα κατακόρυφο γυάλινο σωλήνα γεμάτο με αέριο, όπως φαίνεται στο Σχ. 1. Η διατομή A του σωλήνα είναι ελάχιστα μεγαλύτερη από τη μέγιστη διατομή της σφαίρας. Οι τριβές κατά την κίνηση της σφαίρας είναι αμελητέες και τα καθαρά τοιχώματα του δοχείου θεωρούνται αδιαβατικά δηλαδή δεν επιτρέπουν ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον.

Όταν ο γυάλινος σωλήνας κρατιέται κατακόρυφα και κλείσουμε το κάτω άκρο-του με το δάκτυλο πριν αφήσουμε τη σφαίρα να πέσει μέσα στο σωλήνα, αυτή θα προχωρήσει πολύ αργά προς τα κάτω. Αυτό οφείλεται στο ότι ο αέρας που είναι κλεισμένος μεταξύ του δάκτυλου και της σφαίρας συμπιέζεται με την πτώση της σφαίρας και διαφεύγει αργά από το στενό πέρασμα σφαίρας-σωλήνα.

Αν πρώτα αφήσουμε τη σφαίρα να πέσει μέσα στο σωλήνα και αμέσως μετά κλείσουμε το άνω άκρο με το δάκτυλό μας (το κάτω παραμένει ανοικτό) η σφαίρα θα κινείται πάλι αργά προς τα κάτω. Αυτό οφείλεται στον αέρα που βρίσκεται μεταξύ σφαίρας-δάκτυλου. Όσο η σφαίρα κατέρχεται, ο αέρας αυτός γίνεται αραιότερος, έτσι ώστε η ατμοσφαιρική πίεση στο ανοικτό κάτω άκρο να είναι μεγαλύτερη από την πίεση του κλειστού χώρου. Κατά την κίνηση της σφαίρας ένα μικρό



Σχήμα 1. Συσκευή προσδιορισμού του ..

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \text{ για τα αέρια}$$



ποσοστό αέρα μπορεί να μπει στον κλειστό χώρο από το στενό πέρασμα σφαίρας-σωλήνα.

Στην περίπτωση που η σφαίρα αφήνεται να πέσει στο σωλήνα και τα δυο άκρα είναι ανοιχτά, τότε η σφαίρα πέφτει πολύ γρήγορα. Αν κατά τη διάρκεια της πτώσης της σφαίρας κλείσουμε απότομα το ένα από τα δυο άκρα με το δάκτυλό μας, η σφαίρα θα σταματήσει απότομα και θα αναπηδήσει μερικές φορές πάνω-κάτω πριν συνεχίσει την αργή κίνηση-της προς τα κάτω. Αυτό οφείλεται πάλι στη διαφυγή μέρους του αέρα του σωλήνα μεταξύ σφαίρας και δάκτυλου.

Το αέριο του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε το γ βρίσκεται σε μια μεγάλη φιάλη Φ όγκου V , όπως φαίνεται στο Σχ. 1. Στο πείραμα-μας θα χρησιμοποιήσουμε ατμοσφαιρικό αέρα.

Όπως δείχνει το Σχ. 1, ένα τμήμα του σωλήνα εισέρχεται στο εσωτερικό της φιάλης, διαμέσου ελαστικού πώματος. Κοντά στον πυθμένα της φιάλης υπάρχει μια γυάλινη στρόφιγγα Σ για την εισαγωγή του αερίου που θέλουμε να μετρήσουμε το γ . Κατά τη διάρκεια του πειράματος η στρόφιγγα πρέπει να είναι πάντα κλειστή. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε πολλές μεταλλικές σφαίρες, τοποθετούμε στον πυθμένα της φιάλης ένα χοντρό καθαρό πλαστικό που να μην βγάζει χνούδι. Επειδή στη συσκευή του εργαστηρίου υπάρχει μόνο μια σφαίρα γιαυτό στο κάτω άκρο του πώματος έχουμε στερεώσει ένα μεταλλικό δικτυωτό "καλαθάκι" στο οποίο σταματάει η σφαίρα μετά την πτώση της. Με τον τρόπο αυτό την ξαναπαίρνουμε με ευκολία για τη συνέχιση του πειράματος.

Εάν η σφαίρα πέσει μέσα στο γυάλινο σωλήνα, εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις με την επίδραση του αέρα που περιέχεται στο σύστημα. Οι ταλαντώσεις είναι αποσβενυμένες (ή φθίνουσες) και αυτό οφείλεται στις αναπόφευκτες απώλειες ενέργειας λόγω τριβής.

2.3.1 Μέθοδος του Rüchardt

Η μάζα της σφαίρας είναι m , η τομή του γυάλινου σωλήνα είναι A και ο όγκος του περιεχόμενου αερίου είναι V . Η σφαίρα βρίσκεται σε ισορροπία



εάν η πίεση P μέσα στη φιάλη είναι ίση με το άθροισμα της ατμοσφαιρικής πίεσης P_0 και της πίεσης που οφείλεται στο βάρος της σφαίρας, δηλαδή

$$P = P_0 + \frac{m g}{A} \quad (19.13)$$

Όταν η σφαίρα απομακρύνεται κατά x από τη θέση ισορροπίας η πίεση αλλάζει κατά ΔP . Από την πίεση αυτή μια δύναμη $F(x) = A \Delta P$ εφαρμόζεται στη σφαίρα που αποκτά μια επιτάχυνση $\frac{d^2 x}{dt^2}$. Ο δεύτερος νόμος του

Νεύτωνα γράφεται

$$F(x) = A \Delta P = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (19.14)$$

Κατά την ταλάντωση της σφαίρας έχουμε συμπίεση και εκτόνωση του αερίου που πρακτικά μπορούν να θεωρηθούν σαν αδιαβατικές διεργασίες που υπακούουν στη σχέση

$$P V^\gamma = \text{σταθερό} \quad (19.8)$$

Διαφορίζοντας την (19.8) έχουμε

$$V^\gamma dP + P \gamma V^{\gamma-1} dV = 0 \quad (19.15)$$

$$\text{ή} \quad dP = - \frac{\gamma P}{V} dV \quad (19.16)$$

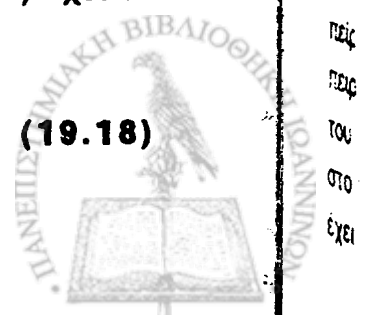
ή κατά προσέγγιση

$$\Delta P = - \frac{\gamma P}{V} \Delta V \quad (19.17)$$

Η απομάκρυνση της σφαίρας κατά x από τη θέση ισορροπίας ($x=0$) έχει σα συνέπεια την αλλαγή του όγκου κατά

$$\Delta V = A x \quad (19.18)$$

Εισάγοντες την (19.18) στην (19.17) προκύπτει



$$\Delta P = - \frac{\gamma P A x}{V} \quad (19.19)$$

οπότε η δύναμη επαναφοράς στη σφαίρα είναι

$$F(x) = - \frac{A^2 \gamma P x}{V} \quad (19.20)$$

Εισάγοντες την (19.20) στην (19.14) έχουμε

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\gamma P A^2}{m V} x = 0 \quad (19.21)$$

Αυτή είναι η εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή από την οποία προκύπτει η γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma P A^2}{m V}} \quad (19.22)$$

Από την (19.22) βρίσκεται η περίοδος της αρμονικής ταλάντωσης της σφαίρας

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m V}{\gamma P A^2}} \quad (19.23)$$

και από αυτή λύνοντας ως προς το ζητούμενο γ βρίσκουμε

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{4\pi^2 m V}{A^2 P T^2} \quad (19.24)$$

Η μάζα m της σφαίρας, ο όγκος V της φιάλης, η διατομή A του σωλήνα και η πίεση ισορροπίας $P = P_0 + \frac{m g}{A}$ του αερίου μετρούνται πριν ή μετά το πείραμα. Μόνο η περίοδος T της ταλάντωσης είναι ανάγκη να μετρηθεί πειραματικά για τον προσδιορισμό του γ από τη σχέση (19.24). Η ακρίβεια του γ εξαρτάται από την προσεκτική μέτρηση του T , γιατί η τιμή υψώνεται στο τετράγωνο. Επομένως το πειραματικό σφάλμα της μέτρησης του T θα έχει διπλάσιο σφάλμα στον υπολογισμό του γ . Γιαυτό μετράμε το χρόνο

τουλάχιστον πέντε πλήρων αιωρήσεων και μετά παίρνουμε τη μέση αριθμητική τιμή του T που χρησιμοποιείται στην (19.24) για τον υπολογισμό του γ . Τον ολικό όγκο V του αερίου τον παίρνουμε ίσο με τον όγκο της φιάλης.

2.3.2 Μέθοδος του Rinkel

Κρατάμε τη σφαίρα στο ανώτατο άκρο του σωλήνα (Σχ. 1) όπου η πίεση του αερίου είναι ακριβώς ίση με την ατμοσφαιρική πίεση. Την αφήνουμε να πέσει και μετράμε το μέγιστο βάθος h στο οποίο φθάνει η σφαίρα προτού αρχίσει να επιστρέφει προς τα πάνω. Κατά την κίνηση της σφαίρας από το ανώτατο σημείο μέχρι το κατώτατο σημείο της διαδρομής της μέσα στο σωλήνα μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια U κατά

$$U(x) - U(x_0) = - \int_{x_0}^x F(x) dx = W \quad (19.25)$$

όπου W το έργο που παράγεται κατά την αδιαβατική συμπίεση του αερίου από μια αρχική θέση x_0 σε κάποια τυχαία θέση x , και $F(x)$ είναι η δύναμη επαναφοράς της σφαίρας. Αν θεωρήσουμε το κατώτατο σημείο της διαδρομής της σφαίρας σα σημείο αναφοράς με μηδενική δυναμική ενέργεια, τότε στο ανώτατο σημείο η δυναμική ενέργεια θα είναι ίση με mgh . Θα έχουμε δηλαδή

$$U(x_0) = 0 \quad \text{και} \quad U(x=h) = mgh \quad (19.26)$$

Με το ίδιο σκεπτικό της (19.20) βρίσκω το

$$F(x) = -\gamma \frac{P_0 A^2}{V} \quad (19.27)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (19.26) και (19.27) στην (19.25) προκύπτει

$$mgh = - \int_0^h \left(-\gamma \frac{P_0 A^2}{V} \right) x dx = \gamma \frac{P_0 A^2}{V} \frac{h^2}{2}$$



απ' όπου τελικά βρίσκουμε

$$\gamma = \frac{2mgV}{P_0 A^2 h} \quad (19.28)$$

Όλα τα μεγέθη στην (19.28), εκτός από το h , μετριοούνται πριν ή μετά το πείραμα. Το μέγιστο βάθος h είναι ανάγκη να μετρηθεί πειραματικά με τη συσκευή του Σχ. 1 για τον προσδιορισμό του γ .

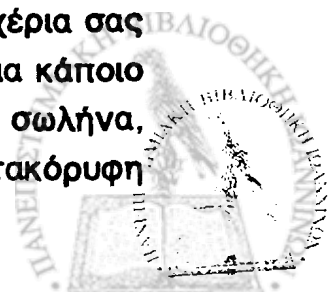
Η μέθοδος του Rinkel πλεονεκτεί αυτής του Rüchardt στο ότι το μήκος h μπορεί να μετρηθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια από την περίοδο T . Επιπλέον το πειραματικό σφάλμα στη μέτρηση του h προσδίδει κάποιο σφάλμα στο γ που προσδιορίζεται από την πρώτη δύναμη του h , ενώ το πειραματικό σφάλμα στη μέτρηση του T θα προσδώσει διπλάσιο σφάλμα στο γ που προσδιορίζεται από τη δεύτερη δύναμη. Είναι απαραίτητο να τονισθεί ότι η μέθοδος Rinkel είναι ευαίσθητη στην παρουσία τριβών.

Είναι δυνατό κατά τη ρίψη της σφαίρας στο σωλήνα να μετρηθούν ταυτόχρονα, το μέγιστο βάθος h και η περίοδος ταλάντωσης T , οπότε προσδιορίζουμε δυο τιμές του γ εφαρμόζοντας αντίστοιχα τις σχέσεις (19.24), (19.28).

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

3.1 Υπολογισμός της Μάζας της Σφαίρας και Καθαριότητα των Οργάνων

Με τον υδροστατικό ζυγό ζυγίζουμε 10 φορές τη μάζα m της χαλύβδινης σφαίρας. Οι τιμές γράφονται στον Πίνακα 2. Με το μικρότερο μετράμε και φορά τη διάμετρο της σφαίρας και τη συγκρίνουμε με την εσωτερική διάμετρο $D = 16.00$ mm του γυάλινου σωλήνα. Καθαρίζουμε τη σφαίρα με αλκοόλη (ή ακετόνη) την ξηραίνουμε πολύ καλά με τον ηλεκτρικό στεγνωτήρα και την αφήνουμε σε καθαρό μέρος να κρυώσει. (Τα χέρια σας να είναι καθαρά και ξηρά). Κλείνουμε τη γυάλινη στρόφιγγα Σ αν για κάποιο λόγο ανοίχτηκε. Με μεγάλη προσοχή τοποθετούμε το γυάλινο σωλήνα, μήκους 60 cm, στη γυάλινη φιάλη (χωρητικότητας 10 Bt) σε κατακόρυφη



θέση με τη βοήθεια ενός αλφαδιού. (Πρέπει το πώμα νάναι πιεσμένο αρκετά στο στόμιο της φιάλης με προσοχή όμως να μη σπάσει ο γυάλινος σωλήνας).

Αρχικά ρίχνουμε στο γυάλινο σωλήνα τη χαλύβδινη σφαίρα και βλέπουμε αν αυτή εκτελεί μερικές (πάνω από πέντε) ταλαντώσεις. Προσπαθούμε 3-4 φορές. Αν η σφαίρα δεν ταλαντώνεται τότε πρέπει να καθαρίσουμε το γυάλινο σωλήνα. Ο καθαρισμός γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως κάναμε με τη σφαίρα, δηλαδή με αλκοόλη ή ακετόνη. Τον στεγνώνουμε σε όλο του το μήκος με το στεγνωτήρα και τον ξανατοποθετούμε στη φιάλη. Στη συνέχεια ξαναρίχνουμε τη σφαίρα και βλέπουμε αν κάνει ταλαντώσεις. Σε περίπτωση πάλι που δεν ταλαντώνεται (πάνω από πέντε ταλαντώσεις) ξανακαθαρίζουμε το γυάλινο σωλήνα και τη σφαίρα.

Πίνακας 2

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της μάζας της σφαίρας

a/a	
m (gr)	

Από τις τιμές του Πίνακα 2:

Να βρεθεί η μέση τιμή \bar{m} της μάζας καθώς και το μέσο σφάλμα της $\sigma(\bar{m})$.

3.2 Προσδιορισμός του γ για τον Αέρα με τη Μέθοδο Rüchardt

Μετά το τελικό καθάρισμα ρίχνουμε τη σφαίρα στον κατακόρυφο γυάλινο σωλήνα και μετράμε το χρόνο t πέντε πλήρων ταλαντώσεων. Βγάζουμε τη σφαίρα από το σωλήνα προσέχοντας να μένει καθαρή και την ξαναρίχνουμε. Παίρνουμε πάλι το χρόνο πέντε ταλαντώσεων. Οι μετρήσεις γίνονται δέκα φορές και καταχωρούνται στον Πίνακα 3.



Πίνακας 3

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό του γ με τη μέθοδο Rüchardt

a/a	
t = 5T (sec)	

Από τις τιμές του Πίνακα 3:

- 1) Να βρεθεί η μέση τιμή της περιόδου \bar{T} καθώς και το μέσο σφάλμα της $\sigma(\bar{T})$.
- 2) Να υπολογιστεί η μέση τιμή του γ καθώς και το μέσο σφάλμα του. Να συγκριθεί με την τιμή που βρίσκεται στη βιβλιογραφία.

3.3 Προσδιορισμός του γ για τον Αέρα με τη Μέθοδο Rinkel

Ρίχνουμε πάλι τη σφαίρα μέσα στον κατακόρυφο σωλήνα και μετράμε με μεγάλη παρατηρητικότητα το μέγιστο βάθος h που φθάνει. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία δέκα φορές. Οι παραπάνω τιμές γράφονται στον Πίνακα 4.

Πίνακας 4

Μετρήσεις για τον προσδιορισμό του γ με τη μέθοδο Rinkel

a/a	
h (cm)	

Από τις τιμές του Πίνακα 4:

- 1) Να βρεθεί η μέση τιμή του βάθους \bar{h} καθώς και το μέσο σφάλμα-του $\sigma(\bar{h})$.
- 2) Να υπολογιστεί η μέση τιμή του γ καθώς και το μέσο σφάλμα-του. Να συγκριθεί με την τιμή που βρίσκεται στη βιβλιογραφία.



ΑΣΚΗΣΗ 20

προσδιορισμός της θερμότητας εξαέρωσης

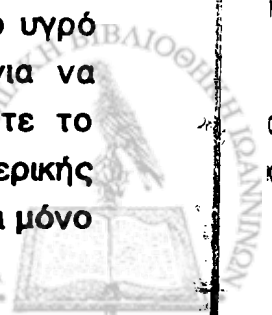
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις προηγούμενες ασκήσεις θερμότητας είπαμε ότι, όταν προσφέρεται θερμότητα σε ένα σώμα η θερμοκρασία του σώματος μεταβάλλεται. Αυτό δεν συμβαίνει πάντοτε, κατά τη διάρκεια της μεταβολής ενός σώματος από μια φυσική κατάσταση σε άλλη η θερμοκρασία του σώματος παραμένει σταθερή, όπως συμβαίνει στις περιπτώσεις τήξης και εξαέρωσης διαφόρων σωμάτων.

Στην άσκηση αυτή θα περιοριστούμε στην εξαέρωση του νερού.

2. ΘΕΩΡΙΑ

Η μεταβολή ενός υγρού σε αέριο ονομάζεται **εξαέρωση**. Η εξαέρωση ενός υγρού γίνεται είτε με εξάχνωση είτε με βρασμό. Στη διάρκεια του βρασμού, ενώ συνεχώς προσφέρεται ποσό θερμότητας, η θερμοκρασία του υγρού διατηρείται σταθερή έως ότου εξαερωθεί όλη η μάζα του. Επομένως το υγρό που βράζει απορροφά θερμότητα που δεν προκαλεί αύξηση της θερμοκρασίας του. Η θερμότητα που παίρνει τότε το υγρό δαπανάται μόνο για τη μεταβολή της καταστάσεως, δηλαδή για να καταστραφούν οι δυνάμεις συνεχώς μεταξύ των μορίων οπότε το υγρό μετατρέπεται σε αέριο, με αποτέλεσμα τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας. Είναι γνωστό ότι η τάση των ατμών ενός υγρού εξαρτάται μόνο



από τη θερμοκρασία. Όσο αυξάνει η θερμοκρασία αυξάνει και η τάση. Όταν η τάση εξισωθεί με την πίεση που εξασκείται στην επιφάνεια του υγρού τότε το υγρό αρχίζει και βράζει. Επομένως το σημείο βρασμού ενός υγρού εξαρτάται από την εξωτερική πίεση, συνήθως την ατμοσφαιρική πίεση.

Έστω V_U ο όγκος του υγρού και V_G ο όγκος των ατμών στους οποίους μετατρέπεται το υγρό. Θεωρούμε ότι, με κάποιο τρόπο οι παραγόμενοι ατμοί διατηρούνται σε σταθερή πίεση P . Το έργο που παράγεται κατά τη διαστολή της ουσίας από τον όγκο του υγρού V_U στον όγκο των ατμών V_G με σταθερή πίεση, είναι

$$W = P (V_G - V_U) \quad (20.1)$$

Εάν ένα υγρό έχει μάζα m και εξαερώνεται με σταθερή θερμοκρασία T τότε απορροφά θερμότητα:

$$Q = mL \quad (20.2)$$

όπου L η ειδική ή λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης, δηλαδή το ποσό της θερμότητας που χρειάζεται για κάθε γραμμάριο να μετατραπεί μια ουσία από υγρό σε ατμούς με σταθερή θερμοκρασία και πίεση. Από την (20.2) προκύπτει ότι η μονάδα ειδικής θερμότητας εξαέρωσης είναι 1 Cal/gr . Από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής έχουμε

$$\Delta U = Q - W \quad (20.3)$$

Εισάγοντες τις (20.1) και (20.2) στην (20.3) προκύπτει

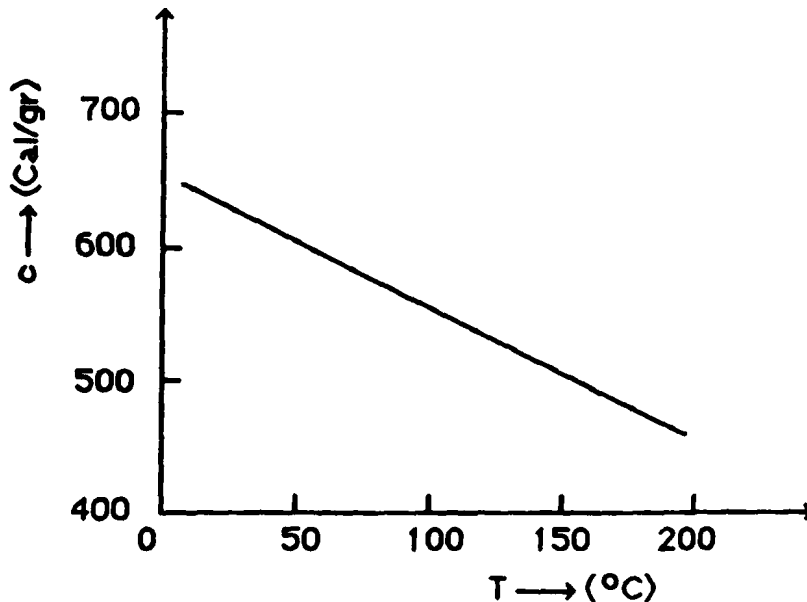
$$\Delta U = mL - p (V_G - V_U) \quad (20.4)$$

η οποία περιγράφει θερμοδυναμικά τη διεργασία της εξαέρωσης.

Η ειδική θερμότητα εξαέρωσης ενός υγρού είναι σταθερή για μια ορισμένη θερμοκρασία, έχει όμως διαφορετική τιμή όταν η μεταβολή της κατάστασης γίνεται σε διάφορες θερμοκρασίες. Έχει βρεθεί πειραματικά ότι



σε θερμοκρασίες από 0° έως 200°C η λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης του νερού ελαττώνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία.



Σχήμα 1. Εξάρτηση της ειδικής θερμότητας εξαέρωσης από τη θερμοκρασία στην οποία γίνεται η εξαέρωση (Από τις Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής, Οικονόμου, Σπιριδέλη).

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

3.1 Διάταξη

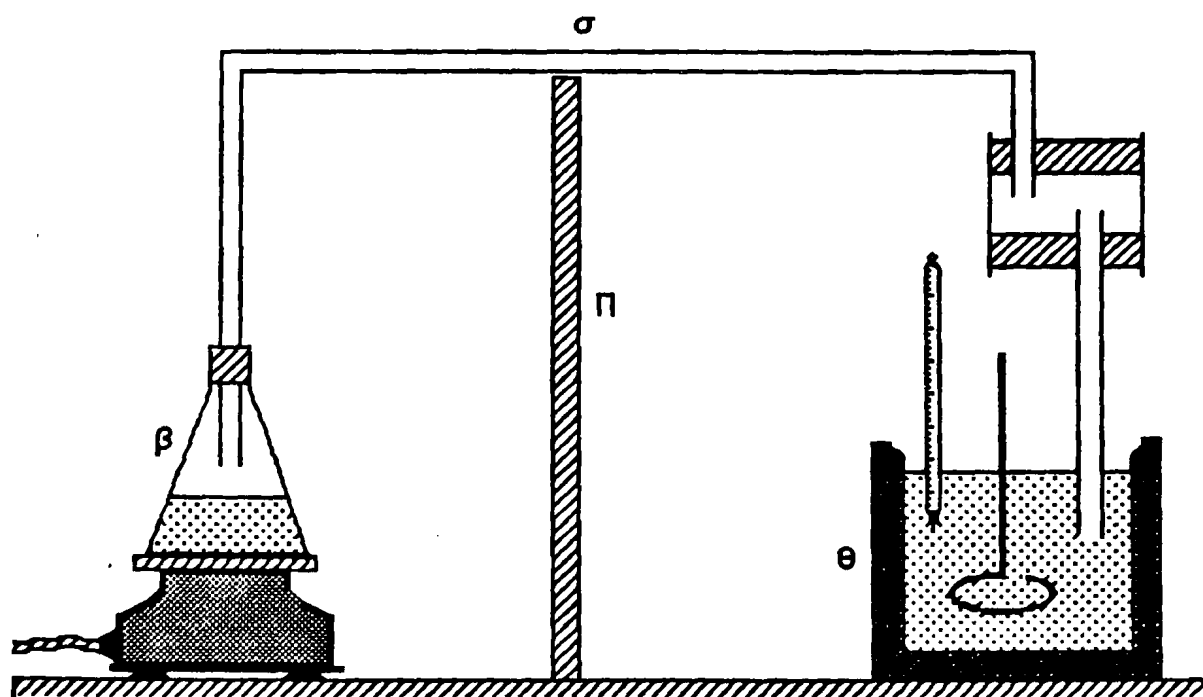
Στην άσκηση αυτή θα προσδιορίσουμε πειραματικά την ειδική θερμότητα εξαέρωσης του νερού. Ο προσδιορισμός γίνεται θερμοδυναμικά με τη συμπύκνωση γνωστής μάζας ατμών, που προέκυψαν από εξαέρωση νερού και τη μέτρηση της αντίστοιχης αύξησης της θερμοκρασίας του θερμιδόμετρου, όπως δείχνει το Σχ. 2.

Οι ατμοί από το βραστήρα β , που θερμαίνεται στο ηλεκτρικό μάτι μ , οδηγούνται με το σωλήνα σ στο θερμιδόμετρο θ όπου υπάρχει ορισμένη μάζα m_1 ψυχρού νερού θερμοκρασίας T_1 . Οι ατμοί συμπυκνώνονται μέσα στο νερό του θερμιδόμετρου ενώ συγχρόνως αποβάλλουν ποσό θερμότητας

m_2L , όπου m_2 η μάζα των ατμών που συμπυκνώνονται και L η λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης. Μετά τη συμπύκνωση η θερμοκρασία στο θερμιδόμετρο θα ανέλθει στο T_2 . Εξισώνοντας τη θερμότητα που δίνεται από τους ατμούς με τη θερμότητα που παίρνεται από το θερμιδόμετρο έχουμε

$$m_2L + m_2C_u (T_2 - T_2) = m_1C_u (T_2 - T_1) + K (T_2 - T_1) \quad (20.5)$$

όπου C_u η ειδική θερμότητα του νερού, και T_2 το σημείο βρασμού του. Αυτό εξαρτάται από την ατμοσφαιρική πίεση και βρίσκεται από τους πίνακες, K είναι η θερμοχωρητικότητα του θερμιδόμετρου (δοχείο + αναδευτήρα). Από τη σχέση (20.5) μπορούμε να υπολογίσουμε τη λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης L . Συνήθως τοποθετούμε ένα μονωτικό πέτασμα Π ανάμεσα στο θερμαινόμενο βραστήρα και το θερμιδόμετρο για να μην επηρεάζεται θερμικά το τελευταίο επειδή συνήθως βρίσκονται πολύ κοντά.



Σχήμα 2. Πειραματική διάταξη προσδιορισμού της ειδικής θερμότητας εξαέρωσης του νερού.



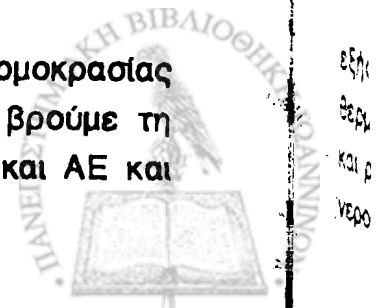
Εκτός από τα σφάλματα ζύγισης και μέτρησης της θερμοκρασίας έχουμε και το σφάλμα της θερμικής μόνωσης. Το σφάλμα της ατελούς θερμικής μόνωσης διορθώνεται με τη μέθοδο που έχουμε περιγράψει στις ασκήσεις 17 και 18. Είναι σκόπιμο εδώ να αναφέρουμε ένα απλό αριθμητικό παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας ανά 0.5 min κατά τη διάρκεια των μετρήσεων της L δίνεται από τον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

Μεταβολή της θερμοκρασίας ανά 0.5 min κατά τη διάρκεια μέτρησης της λανθάνουσας θερμότητας

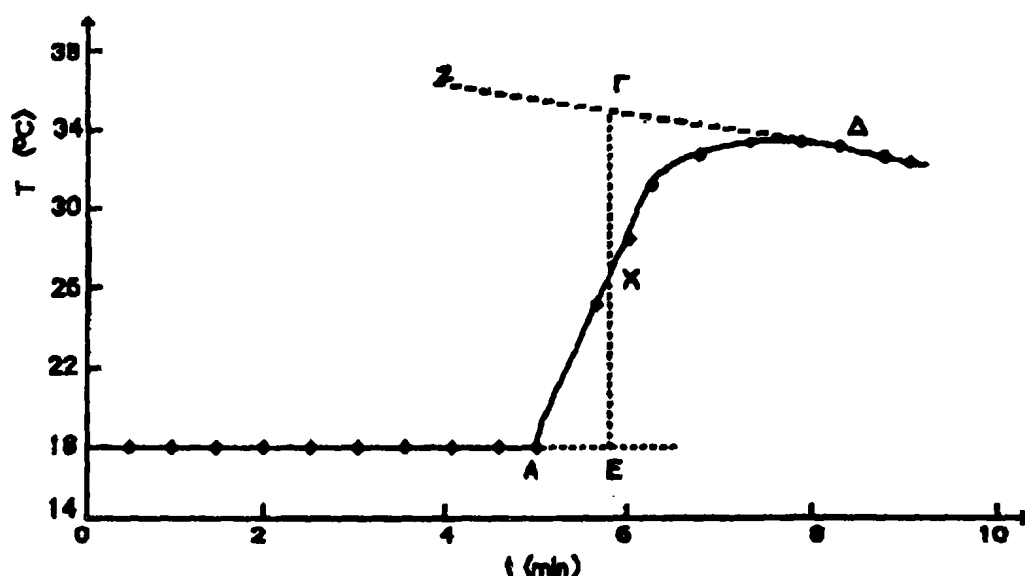
t (min)	T °C προ της διοχέτευσης ατμών	t (min)	T °C κατά τη διοχέτευση ατμών	t (min)	T °C μετά τη διακοπή διοχέτευσης ατμών
0.0	18.15	5.5	28.50	10.0	35.90
0.5	18.15	6.0	34.30	10.5	35.70
1.0	18.20	6.5	36.00	11.0	35.55
1.5	18.20	7.0	36.50	11.5	35.75
2.0	18.20	7.5	36.60	12.0	35.15
2.5	18.25	8.0	36.55	12.5	35.00
3.0	18.25	8.5	36.45	13.0	34.80
3.5	18.30	9.0	36.25		
4.0	18.30	9.5	36.10		
4.5	18.35				
5.0	18.35				

Το Σχ. 3 μας δίνει τη γραφική απόδοση της μεταβολής της θερμοκρασίας αρχίζοντας 5 min προ της διοχέτευσης των ατμών. Για να βρούμε τη διορθωμένη διαφορά θερμοκρασίας φέρουμε τις ευθείες ΔΖ και ΑΕ και



ακολουθώντας την κατακόρυφη ΕΓ, έτσι ώστε τα δυο εμβαδά ΑΕΧ και ΧΓΔ να είναι ίσα. Από την καμπύλη βλέπουμε ότι η τελική θερμοκρασία T_2 δηλαδή η μεγαλύτερη, δεν είναι 36.6 αλλά η 37.6 που αντιστοιχεί στο σημείο Γ.

Αρχική θερμοκρασία δεν είναι η 18.35 αλλά η 18.4 που αντιστοιχεί στο σημείο Ε.



Σχήμα 3. Παράδειγμα καμπύλης θερμοκρασίας-χρόνου για τη διόρθωση του σφάλματος θερμικής μόνωσης (οι τιμές είναι από τον Πίνακα 1).

3.2 Διεργασία

Αρχικά ζυγίζουμε το θερμιδόμετρο και τον αναδευτήρα. Γεμίζουμε το δοχείο του θερμιδόμετρου κατά τα 2/3. Θερμαίνουμε το νερό του βραστήρα στο ηλεκτρικό μάτι έως ότου βράσει χωρίς να συνδέσουμε το σωλήνα με το θερμιδόμετρο.

Για να πετύχουμε τη διόρθωση της θερμοκρασίας εργαζόμαστε ως εξής: Επί 5 min και ανά 0.5 min μετράμε τη θερμοκρασία του θερμιδόμετρου. Συνδέουμε το σωλήνα του βραστήρα με το θερμιδόμετρο και ρυθμίζουμε την παροχή των ατμών έτσι ώστε να μην εκτινάσσεται το νερό του θερμιδόμετρου. Συνεχίζουμε τη μέτρηση της θερμοκρασίας χωρίς

ΑΣΚΗΣΗ 21

θερμική διαστολή

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα πιο συνηθισμένα αποτελέσματα που παρατηρούνται κατά τη θέρμανση των σωμάτων είναι μεταβολές στις διαστάσεις και τις καταστάσεις αυτών.

Στην προηγούμενη άσκηση αναφερθήκαμε στις μεταβολές των καταστάσεων και συγκεκριμένα μελετήσαμε πειραματικά την εξαέρωση του νερού. Στην άσκηση αυτή θα ασχοληθούμε με τη μεταβολή των διαστάσεων των υλικών όταν μεταβάλλεται η θερμοκρασία τους, δηλαδή με τη μελέτη της θερμικής διαστολής των υλικών.

Η θερμική διαστολή των σωμάτων, παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον διότι, πέρα από το θεωρητικό ενδιαφέρον έχει ένα πλήθος εφαρμογών στην καθημερινή μας ζωή. Στις περισσότερες κατασκευές (γέφυρες, δρόμους, σπίτια κ.ά.) πρέπει να λαμβάνεται πρόνοια ώστε να αποφεύγονται καταστροφές λόγω της θερμικής διαστολής.

Η θερμική διαστολή παρατηρείται στα σώματα όλων των καταστάσεων στερεά, υγρά και αέρια. Διακρίνεται κυρίως σε γραμμική διαστολή, δηλαδή αύξηση σε μια μόνο διάσταση, διαστολή εμβαδού και διαστολή όγκου. Η σχετική αύξηση των διαστάσεων ενός υλικού για ορισμένη αύξηση της θερμοκρασίας του εξαρτάται από τη φύση του υλικού και χαρακτηρίζεται από ένα συντελεστή, το συντελεστή γραμμικής διαστολής ή συντελεστή διαστολής επιφάνειας ή συντελεστή



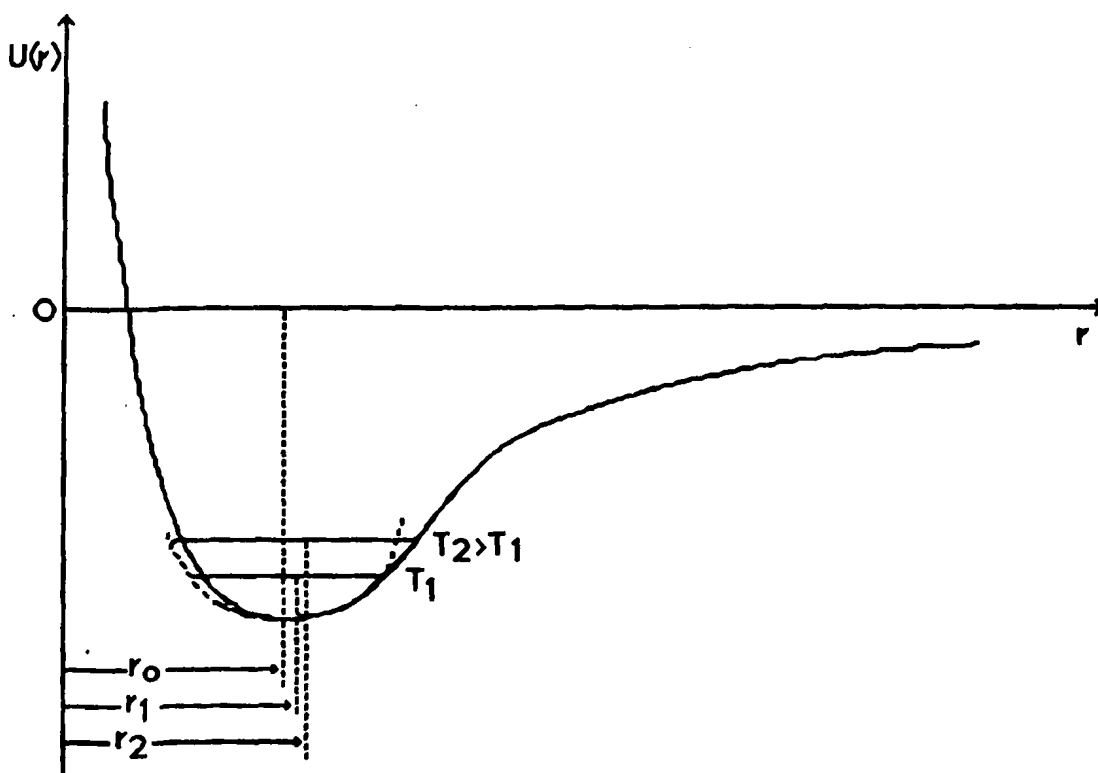
διαστολής όγκου αν αναφερόμαστε σε μια, δυο ή τρεις διαστάσεις αντίστοιχα.

Στην άσκηση αυτή θα περιοριστούμε στον προσδιορισμό του συντελεστή γραμμικής διαστολής στερεών και διαστολή όγκου υγρών.

2. ΘΕΩΡΙΑ

Πριν προχωρήσουμε στις μαθηματικές σχέσεις που αναφέρονται στη θερμική διαστολή είναι σκόπιμο να εξηγήσουμε γιατί διαστέλλονται τα σώματα όταν θερμανθούν. Θεωρούμε την απλή περίπτωση ενός ιοντικού κρυστάλλου. Τα άτομα (ιόντα) στον κρύσταλλο κρατούνται μεταξύ τους με ελκτικές δυνάμεις ηλεκτροστατικής φύσης (Coulomb) και απωστικές δυνάμεις, που είναι αρκετά πολύπλοκες και ενεργούν μεταξύ των ιόντων για να διατηρήσουν την απόσταση ισορροπίας μεταξύ τους. Οι δυνάμεις δεσμού μεταξύ των ατόμων είναι ανάλογες με τις ελαστικές δυνάμεις που θα εξασκούνταν αν τα άτομα ήταν συνδεδεμένα με ελατήρια. Σε οποιαδήποτε θερμοκρασία τα άτομα εκτελούν ταλαντώσεις γύρω από μια θέση ισορροπίας. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι περίπου 10^{-9} cm και η συχνότητα περίπου 10^{13} sec. Αύξηση της θερμοκρασίας T προκαλεί αύξηση του πλάτους ταλάντωσης των ατόμων στο κρυσταλλικό πλέγμα του στερεού. Στην περιοχή χαμηλών θερμοκρασιών οι ταλαντώσεις είναι σχετικά μικρού πλάτους οπότε κατά προσέγγιση τα άτομα συμπεριφέρονται σαν απλοί αρμονικοί ταλαντωτές. Στην περίπτωση αυτή η δυναμική ενέργεια δεσμού μεταξύ των ατόμων υπακούει στο νόμο του Hooke ($F=-kx$) και η δυναμική ενέργεια δεσμού είναι $E = \frac{1}{2} kx^2$. Επειδή οι σχετικές μετατοπίσεις $\frac{\Delta r}{r_0}$ των ατόμων είναι της τάξης του 10^{-5} μπορούμε να πούμε ότι η προσέγγιση είναι λογική. Η καμπύλη δυναμικής ενέργειας δεσμού για δυο γειτονικά άτομα στο κρυσταλλικό στερεό, σα συνάρτηση της μεταξύ των πυρήνων απόστασης (Σχ. 1), αντιστοιχεί μόνο για πρώτη προσέγγιση (που είναι ο νόμος του Hooke) σε μια παραβολή του αρμονικού ταλαντωτή (διακεκομμένη καμπύλη). Γενικά όμως όταν η απόσταση μεταξύ των ατόμων μεγαλώνει η καμπύλη πλαταίνει και γίνεται ασύμμετρη, όπως η συνεχής καμπύλη του Σχ. 1. Όταν τα άτομα πλησιάζουν μεταξύ τους και η απόστασή

τους γίνεται μικρότερη από την απόσταση ισορροπίας r_0 εμφανίζεται η ισχυρή απωστική δύναμη οπότε η δυναμική καμπύλη ανεβαίνει απότομα ($F = - \frac{dU}{dr}$). Όταν τα άτομα απομακρύνονται και η μεταξύ τους απόσταση γίνεται μεγαλύτερη από την τιμή ισορροπίας r_0 εμφανίζονται οι ασθενέστερες ελκτικές δυνάμεις και η κλίση της δυναμικής καμπύλης γίνεται μικρότερη. Επειδή η καμπύλη είναι ασύμμετρη η μέση απόσταση r_0 μεταξύ των ατόμων μεγαλώνει με την αύξηση της θερμοκρασίας και στις αυξημένες θερμοκρασίες, π.χ., T_1 και T_2 γίνεται r_1 και r_2 αντίστοιχα. Έτσι η μέση απόσταση μεταξύ των ατόμων αυξάνεται με τη θερμοκρασία και το στερεό στο σύνολο του διαστέλλεται. Επομένως η θερμική διαστολή είναι μια άμεση συνέπεια της απόκλισης από τη συμμετρία της καμπύλης δυναμικής ενέργειας δεσμού μεταξύ των ατόμων του στερεού.



Σχήμα 1. Καμπύλη δυναμικής ενέργειας δεσμού μεταξύ δυο ατόμων ενός κρυσταλλικού υλικού σε συνάρτηση της απόστασης μεταξύ των ατόμων. Όπου r_0 η απόσταση ισορροπίας σε σχετικά χαμηλή θερμοκρασία και r_1 , r_2 σε αυξημένες θερμοκρασίες.



Στα **ισότροπα** στερεά η σχετική μεταβολή $\frac{\Delta l}{l_0}$ του μήκους για μια δοσμένη μεταβολή θερμοκρασίας είναι η ίδια για όλες τις διευθύνσεις του στερεού. Υπάρχουν όμως μερικά κρυσταλλικά στερεά σε ορισμένες περιοχές θερμοκρασιών, που μπορούν να συστέλλονται, σε μια ή δυο διευθύνσεις, με την αύξηση της θερμοκρασίας. Παρόμοιες περιπτώσεις εξηγούνται αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν μόνο διαμήκεις μορφές ταλαντώσεων ή ότι οι μορφές αυτές είναι οι επικρατέστερες.

Τα αέρια διαστέλλονται εύκολα όταν μεταβάλλεται η θερμοκρασία ή η πίεση. Τα υγρά διαστέλλονται επίσης με την αύξηση της θερμοκρασίας. Αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί μεγαλύτερες θερμικές δονήσεις των μορίων ενός υγρού, από ότι σε ένα στερεό. Έτσι η διαστολή του όγκου τους είναι γενικά δεκαπλάσια περίπου εκείνης των στερεών. Εδώ πρέπει να αναφέρουμε την ανωμαλία του νερού. Το νερό δεν συμπεριφέρεται σαν τα άλλα υγρά αλλά παρουσιάζει μια ανωμαλία στην περιοχή 0-4 °C. Το νερό διαστέλλεται καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία πάνω από τους 4 °C. Όταν η θερμοκρασία ελαττώνεται από τους 4 °C στους 0 °C το νερό διαστέλλεται αντί να συστέλλεται. Η πυκνότητά του είναι μέγιστη στους 4 °C. Η συμπεριφορά αυτή του νερού είναι η αιτία που οι λίμνες παγώνουν στην πάνω επιφάνειά τους.

Όπως εξηγήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, όταν αυξάνεται η θερμοκρασία αυξάνεται η μέση απόσταση μεταξύ των ατόμων με αποτέλεσμα τη διαστολή ολόκληρου του στερεού σώματος με την αύξηση της θερμοκρασίας. Η μεταβολή μιας οποιασδήποτε διάστασης (μήκους, πλάτους, ύψους) λέγεται γραμμική διαστολή. Αν το αρχικό ολικό μήκος μιας γραμμικής διάστασης είναι l_0 στην αρχική θερμοκρασία T_0 και l το τελικό μήκος όταν η θερμοκρασία αυξηθεί στην τελική θερμοκρασία T , βρίσκουμε πειραματικά ότι, όταν η μεταβολή $\Delta T = T - T_0$ είναι σχετικά μικρή, η μεταβολή του μήκους $\Delta l = l - l_0$ είναι ανάλογη προς τη μεταβολή της θερμοκρασίας ΔT και προς το αρχικό μήκος l_0 . Οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta T$$

(21.1)



$$\eta \quad l - l_0 = \alpha l_0 (T - T_0)$$

$$\eta \quad l = l_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (21.2)$$

όπου α λέγεται συντελεστής γραμμικής διαστολής, εξαρτάται από τη φύση του υλικού και δίνεται από την (21.1) με την έκφραση

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0} \frac{1}{\Delta T} = \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l}{\Delta T} \quad (21.3)$$

Δηλαδή ο συντελεστής γραμμικής διαστολής α ενός σώματος είναι η σχετική μεταβολή του μήκους ανά βαθμό μεταβολής θερμοκρασίας.

Εάν θεωρήσουμε μια πλάκα εμβαδού A_0 και αμελητέου πάχους τότε με την αύξηση της θερμοκρασίας κατά ΔT αυξάνεται το εμβαδόν (δηλαδή και οι δυο διαστάσεις) της πλάκας κατά ΔA . Εάν το στερεό είναι ισότροπο τότε

$$\Delta A = 2\alpha A_0 \Delta T \quad (21.4)$$

όπου 2α η σχετική μεταβολή του εμβαδού ανά βαθμό μεταβολής θερμοκρασίας. Στην περίπτωση που μεταβάλλεται η θερμοκρασία ενός τρισδιάστατου ισότροπου σώματος αρχικού όγκου V_0 κατά ΔT τότε αυξάνεται ο όγκος του κατά

$$\Delta V = 3\alpha V_0 \Delta T \quad (21.5)$$

Εδώ 3α είναι ο συντελεστής διαστολής όγκου και ισούται με τη σχετική μεταβολή του όγκου V ανά βαθμό μεταβολής θερμοκρασίας.

Αν συμβολίσουμε με β το συντελεστή διαστολής όγκου ενός υγρού τότε ανάλογα πρέπει να έχουμε ότι

$$\beta = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta T} \quad (21.6)$$

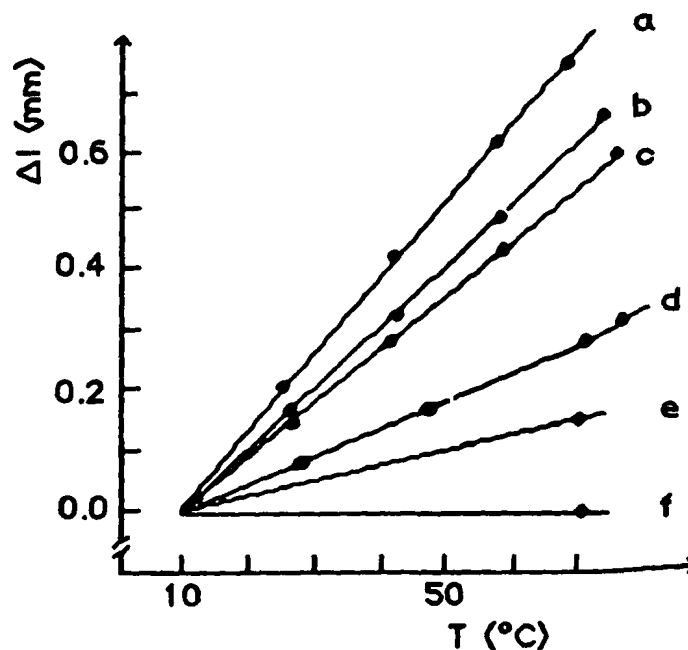


Για μικρές μεταβολές της θερμοκρασίας, δηλαδή όταν $\Delta T \rightarrow 0$ τότε η (21.6) μπορεί να γραφεί με τη διαφορική μορφή

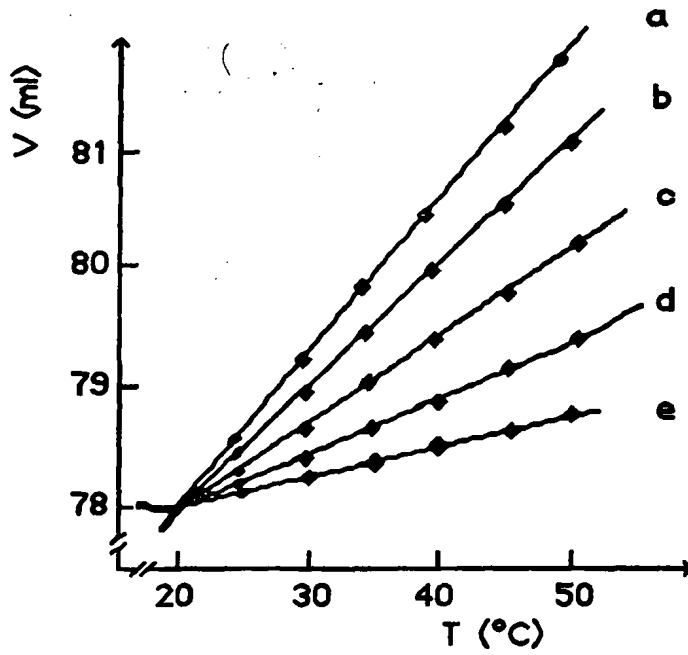
$$\theta = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (21.7)$$

Η σχέση αυτή ισχύει και για τα αέρια εφόσον η πίεση του αερίου παραμένει σταθερή.

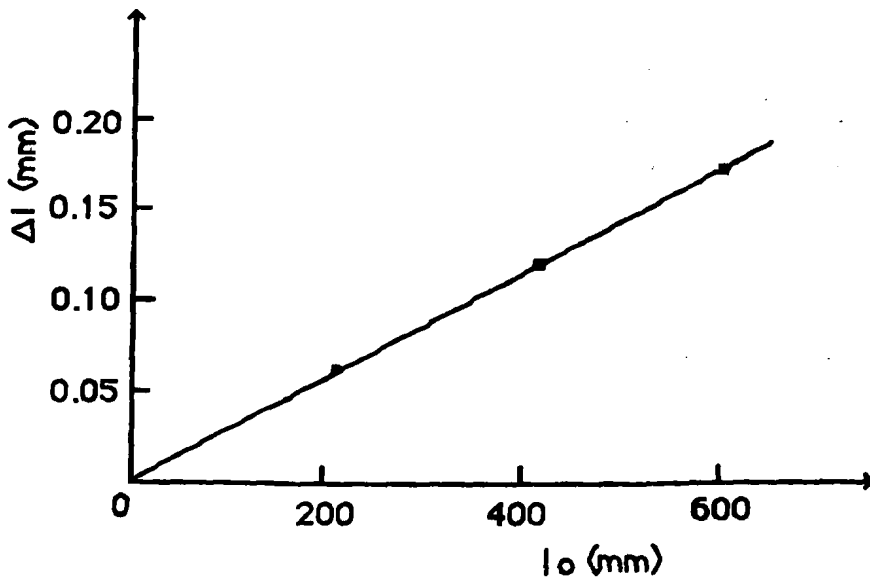
Για να έχει ο αναγνώστης μια αίσθηση της μεταβολής των διαστάσεων των διαφόρων σωμάτων σε συνάρτηση της θερμοκρασίας και των αρχικών διαστάσεων δείχνονται στα Σχ. 2, 3 και 4.



Σχήμα 2. Μεταβολή του μήκους Δl σε συνάρτηση της θερμοκρασίας T για
 a) αλουμίνιο, b) μπρούτζο, c) χαλκό, d) χάλυβα, e) γυαλί και
 f) χαλαζίας ($l_0 = 300$ mm).



Σχήμα 3. Σχέση μεταξύ όγκου V και θερμοκρασίας T για α) οξικό αιθυλεστέρα ($C_4H_8O_2$), β) μεθυλική αλκοόλη, γ) ελαιόλαδο, δ) γλυκερίνη και ε) νερό.



Σχήμα 4. Μεταβολή του μήκους Δl σε συνάρτηση του αρχικού μήκους l_0 για το αλουμίνιο $\Delta T = 15 K$.



Πίνακας 1

Συντελεστής διαστολής διαφόρων υγρών	
	$\beta/10^{-3} \text{ K}^{-1}$
Νερό	0.20
Γλυκερίνη	0.50
Ελαιόλαδο	0.72
Μεθυλική Αλκοόλη	1.11
Οξικός Αιθυλεστέρας	1.37

Πίνακας 2

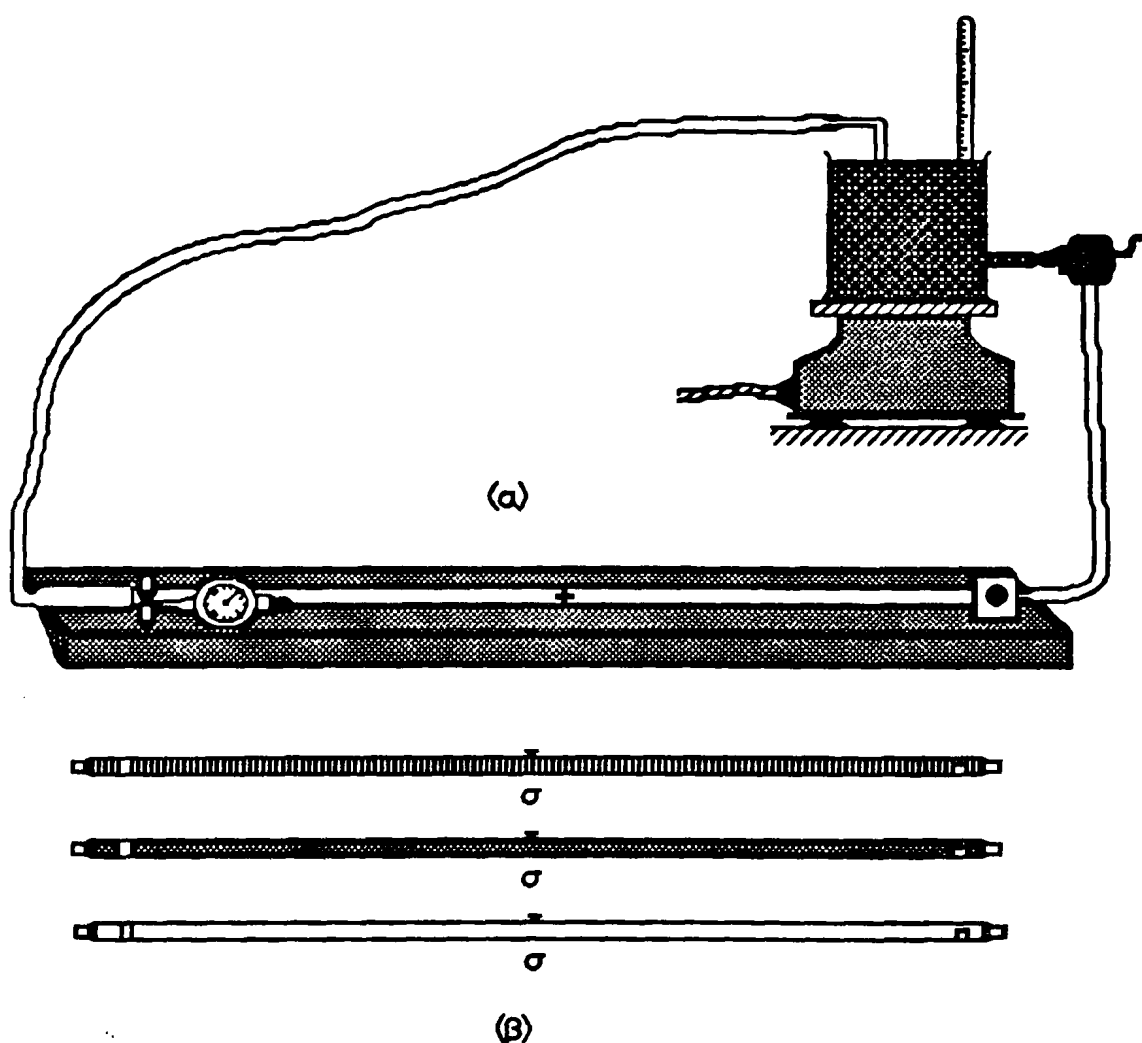
Γραμμικός συντελεστής διαστολής διαφόρων στερεών	
	$\alpha/10^{-5} \text{ K}^{-1}$
Αλουμίνιο	2.2
Μπρούτζος	1.8
Χαλκός	1.6
Χάλυβας	1.1
Γυαλί	0.32
Χαλαζίας	0.046

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

3.1 Γραμμική Διαστολή Στερεών

Για τη μέτρηση της γραμμικής διαστολής των διαφόρων στερεών χρησιμοποιούμε τη συσκευή μέτρησης γραμμικής διαστολής στερεών (διαστολόμετρο), δ, που φαίνεται στο Σχ. 5(β). Το στερεό υλικό που θέλουμε να μετρήσουμε το συντελεστή γραμμικής διαστολής α , πρέπει να έχει μορφή σωλήνα σαν και αυτούς, που δείχνονται με σ στο Σχ. 5(β). Όπως φαίνεται στο Σχ. 5(β), οι σωλήνες είναι διαμορφωμένοι στα άκρα τους έτσι ώστε να είναι δυνατή η προσαρμογή μεταλλικών ή ελαστικών σωλήνων. Τόσο η σωληνωτή μορφή του δείγματος όσο και η προσαρμογή εξωτερικών σωλήνων είναι απαραίτητα ώστε να περνά υγρό επιθυμητής θερμοκρασίας το οποίο θα θερμαίνει ομοιόμορφα το σωλήνα. Το υγρό θα ανακυκλώνεται συνεχώς με τη βοήθεια μιας αντλίας σαν αυτή που δείχνει το Σχ. 5(α). Ο θερμοστάτης θερμαίνει το υγρό και με τη βοήθεια μιας μικρής αντλίας το διοχετεύει στο σωλήνα ο οποίος αποκτά τη θερμοκρασία του. Η θερμοκρασία καθορίζεται με ένα κουμπί στην εστία θερμάνσεως και μετριέται με ένα θερμόμετρο που είναι προσαρμοσμένο στο δοχείο θέρμανσης. Το υγρό είναι συνήθως νερό.

Η θερμική διαστολή των υλικών μετριέται με μια κλίμακα που έχει 100 διαιρέσεις και κάθε μια διάφραση αντιστοιχεί σε γραμμική διαστολή 0.01 mm. Η διαστολή των σωλήνων διαδίδεται με τη βοήθεια οδοντωτού τροχού σε ένα δείκτη που κινείται στην κλίμακα του μετρητή.



Σχήμα 5. (α) Κυκλοφοριακός θερμοστάτης που χρησιμοποιείται για τη θέρμανση δειγμάτων που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση θερμικής διαστολής.
(β) Συσκευή μέτρησης γραμμικής διαστολής στερεών.

Αρχικά μετράμε το μήκος l_0 στη θερμοκρασία του δωματίου και μετά καταχωρούμε στον Πίνακα 3 τις επιμηκύνσεις Δl σε συνάρτηση της



μεταβολής της θερμοκρασίας ΔT . Επαναλαμβάνουμε τις μετρήσεις για τρεις σωλήνες διαφορετικού υλικού.

Πίνακας 3

Γραμμική διαστολή στερεών

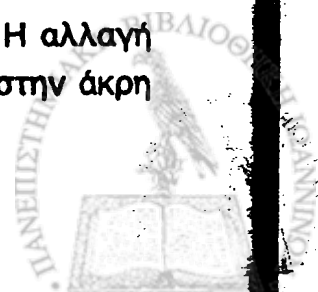
a/a	ΔT (K)	Δl (mm)
1		
2		
3		
.		
.		
.		

Από τις τιμές του Πίνακα 3 να βρεθούν:

- 1) Οι καμπύλες της επιμήκυνσης Δl σε συνάρτηση της μεταβολής της θερμοκρασίας ΔT για τα τρία διαφορετικά υλικά.
- 2) Η τιμή του α από την κλίση της καμπύλης της σχετικής μεταβολής Δl σε συνάρτηση της ΔT . Να σχολιάσετε.

3.2 Διαστολή Όγκου Υγρών

Για τη μέτρηση της διαστολής όγκου των υγρών χρησιμοποιούμε ένα πυκνόμετρο ή μια λήκυθο. Χύνουμε το υγρό που θέλουμε να μετρήσουμε τη θερμική διαστολή στο πυκνόμετρο ή τη λήκυθο χωρίς να το γεμίσουμε τελείως ώστε να μη ξεχυλίζει το υγρό όταν θερμανθεί. Το πυκνόμετρο (ή η λήκυθος) γεμάτο με το υγρό τοποθετείται στο δοχείο θέρμανσης το οποίο γεμίζεται με νερό μέχρι την κλίμακα του πυκνομέτρου της ληκύθου. Η θερμοκρασία του δοχείου ρυθμίζεται από την εστία θέρμανσης. Η αλλαγή στον όγκο του υγρού διαβάζεται στην κλίμακα του πυκνόμετρου στην άκρη του στόμιου ή το λαϊμό της ληκύθου.



Αρχικά μετράμε τον όγκο του υγρού V_0 και μετά καταχωρούμε στον Πίνακα 4 τις αυξήσεις του όγκου του υγρού ΔV σε συνάρτηση της μεταβολής της θερμοκρασίας ΔT .

Πίνακας 4

Θερμική διαστολή όγκου για υγρά

α/α	ΔT (K)	ΔV (mm ³)
1		
2		
3		
.		
.		
.		

Από τις πμές του Πίνακα 4:

- 1) Να γίνει η γραφική παράσταση του όγκου ΔV του υγρού σε συνάρτηση της θερμοκρασίας ΔT .
- 2) Να βρεθεί ο συντελεστής διαστολής όγκου β του υγρού από τα αποτελέσματα του ερωτήματος 2.



ΑΣΚΗΣΗ

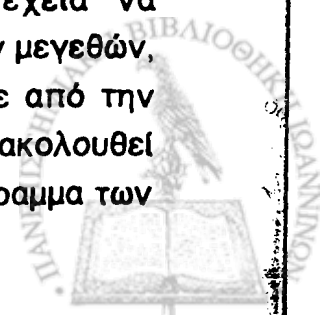
22

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κινητική θεωρία εξετάζει τη μικροσκοπική συμπεριφορά των αερίων για την κατανόηση διαφόρων θερμοδυναμικών εννοιών, όπως είναι η πίεση, η θερμοκρασία, η ειδική θερμότητα, η εσωτερική ενέργεια κ.ά. Εξετάζει τη συμπεριφορά των ατόμων εφαρμόζοντας τους βασικούς νόμους της μηχανικής. Κανένας από τους υπάρχοντες ηλεκτρονικούς υπολογιστές δεν θα μπορούσε να λύσει το πρόβλημα εφαρμόζοντας τους νόμους της μηχανικής ξεχωριστά σε κάθε άτομο ενός αερίου. Εάν όμως εφαρμόσουμε τη μαθηματική στατιστική μπορούμε να βρούμε τις μέσες τιμές των ατομικών ιδιοτήτων. Έτσι ενώ είναι αδύνατο να βρούμε άμεσα την ταχύτητα κάθε ατόμου χωριστά σε ένα αέριο, μπορούμε να προσδιορίσουμε στατιστικά το μέσο τετράγωνο των ταχυτήτων. Η κατανομή των ταχυτήτων ακολουθεί τη στατιστική κατανομή του Maxwell.

Κατά τη διάσπαση διαφόρων ραδιενεργών στοιχείων παράγονται ακτινοβολίες, όπως, α , β και γ . Η εκπομπή των σωματιδίων είναι τυχαίο φαινόμενο και ακολουθεί την κατανομή Poisson από την οποία είναι δυνατό να βρεθεί ο μέσος αριθμός των εκπεμπομένων σωματιδίων. Έτσι αν γνωρίζουμε την καμπύλη κατανομής μπορούμε στη συνέχεια να προσδιορίσουμε τις αριθμητικές τιμές ωρισμένων χαρακτηριστικών μεγεθών, όπως π.χ. η μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής. Όπως γνωρίζουμε από την παράγραφο 2.8 του Κεφαλαίου 2, η χάραξη μιας καμπύλης που ακολουθεί την κατανομή Poisson πετυχαίνει αφού πρώτα σχεδιαστεί το ιστόγραμμα των



μετρήσεων. Όπως βλέπουμε η στατιστική μεθοδολογία είναι απαραίτητη για τη μελέτη ενός μεγάλου μέρους του φυσικού κόσμου.

Στην άσκηση αυτή θα προσδιοριστεί πειραματικά (με τη βοήθεια του ιστογράμματος συχνότητων) η κατανομή Poisson που διέπει το τυχαίο φαινόμενο της ραδιενεργούς διάσπασης καθώς και τα χαρακτηριστικά της μεγέθη. Για την πραγματοποίηση του πειράματος αυτού απαιτείται: (1) ένα ηλεκτρονικό συγκρότημα που περιέχει α) μονάδα υψηλής τάσης με καλώδιο και μετρητή Geiger-Müller και β) καταγραφέα παλμών. (2) Ένα χρονόμετρο και (3) Ραδιενεργό πηγή ακτινοβολίας. Επειδή ο χρόνος της μισής ζωής της ραδιενεργούς πηγής που χρησιμοποιείται είναι πολύ μεγάλη, η ραδιενέργεια της πηγής είναι δυνατό να θεωρείται σταθερή κατά τη διάρκεια του πειράματος. Συνιστάται η μελέτη της παραγράφου 2.8 του Κεφ. 2.

2. ΘΕΩΡΙΑ

2.1 Απαριθμητής Geiger

Αρχικά είναι σκόπιμο να πούμε δυο λόγια για τον απαριθμητή Geiger. Πρόκειται για μια ηλεκτρονική συσκευή που παράγει κλικς ή καταγράφει παλμούς σε ψηφιακό μετρητή, όταν σωματίδια που εκπέμπονται από ραδιενεργά υλικά εισέρχονται στον απαριθμητή. Ένας απαριθμητής στην απλούστερη μορφή του περιέχει ένα σωλήνα γεμάτο αέριο με ένα σύρμα που διατρέχει όλο το μήκος του σωλήνα. Μεταξύ του σύρματος και των εσωτερικών τοιχωμάτων του σωλήνα υπάρχει ένα υψηλό ηλεκτρικό δυναμικό. Όταν ένα σωματίδιο από ραδιενεργό υλικό περάσει τα τοιχώματα του σωλήνα πέφτει στο αέριο και ionίζει τα άτομα του αερίου. Τα ηλεκτρόνια που απομακρύνονται από τα άτομα έλκονται από το θετικά φορτισμένο σύρμα προκαλώντας ένα παλμό ρεύματος που πηγαίνει σε μια ηλεκτρονική συσκευή και καταγράφεται στον ψηφιακό μετρητή που μετράει τη ροή του ρεύματος.

Η τάση των απαριθμητών μεταβάλλεται με βαθμολογημένο ποτενσιόμετρο από 250 V έως 500 V. Η αρχή και το τέλος των μετρήσεων γίνονται πιέζοντας τα κουμπιά START και STOP. Μετά από κάθε μέτρηση οι κρούσεις διαγράφονται πιέζοντας το κουμπί Reset.

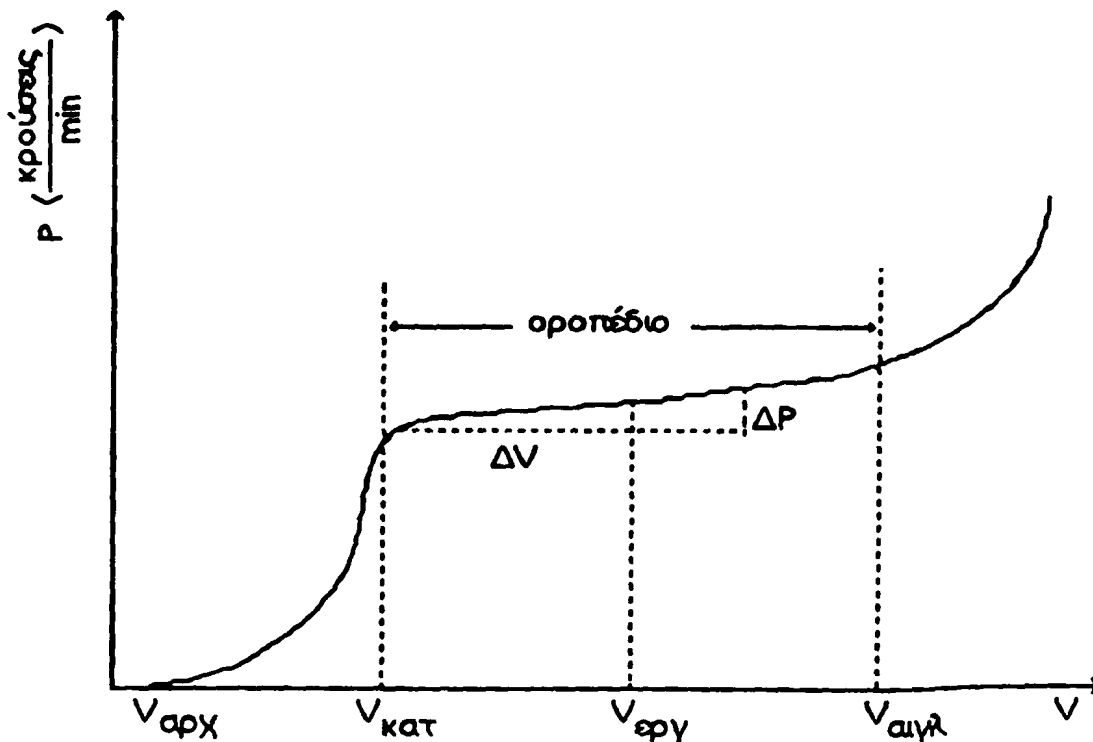


2.2 Οροπέδιο Απαριθμητή Geiger

Ο ρυθμός κρούσεων:

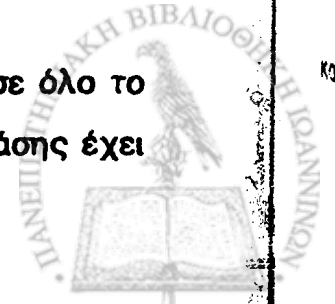
$$P = \frac{N}{t} \quad (22.1)$$

για σταθερό αριθμό σωματιδίων που εισέρχονται στον απαριθμητή ανά μονάδα χρόνου, μεταβάλλεται σε συνάρτηση της εφαρμοζόμενης τάσης V . Κάτω από την αρχική τάση $V_{\text{αρχ}}$ (Σχ. 1) ο ιονισμός που προκαλείται από το σωματίδιο είναι εντοπισμένος σε μικρή περιοχή και οι δημιουργούμενες ωθήσεις τάσης είναι πολύ μικρές ώστε δεν μπορούν να καταμετρηθούν. Όταν η τάση αυξηθεί περισσότερο η έκταση του ιονισμού εξαρτάται από την τάση του απαριθμητή και αυξάνεται με αυτή.



Σχήμα 1. Καμπύλη μεταβολής ρυθμού κρούσεων P σε συνάρτηση της τάσης V του απαριθμητή.

Πέρα από την τάση του κατωφλιού $V_{\text{κατ}}$ ο ιονισμός εκτείνεται σε όλο το μήκος του σύρματος (ανόδου) του απαριθμητή και αύξηση της τάσης έχει



ελάχιστη επίδραση στο ρυθμό των κρούσεων. Τελικά για τάσεις μεγαλύτερες της τάσης αίγλης $V_{\text{αιγλ}}$ έχουμε συνεχή αυτοτελή εκκένωση. ΠΡΟΣΟΧΗ, στην περίπτωση αυτή ο απαριθμητής καταστρέφεται. Η περιοχή μεταξύ $V_{\text{κατ}}$ και $V_{\text{αιγλ}}$ καλείται οροπέδιο του απαριθμητή. Το εύρος $V_{\text{αιγλ}} - V_{\text{κατ}}$ του οροπέδιου ενός καινούργιου απαριθμητή κυμαίνεται περίπου μεταξύ 100 V - 200 V, ανάλογα με τον τύπο του απαριθμητή.

Το εύρος και η κλίση του οροπέδιου εξαρτώνται από το μέγεθος του απαριθμητή, το είδος του αερίου που περιέχει, την πίεση κ.ά. Η τάση εργασίας $V_{\text{εργ}}$ εκλέγεται περίπου στο μέσο του οροπέδιου.

Η επί τοις εκατό μέση κλίση K του οροπέδιου ορίζεται σαν το πηλίκο της σχετικής μεταβολής του ρυθμού κρούσεων $\frac{\Delta P}{P}$ δια της αντιστοίχου μεταβολής της τάσης του απαριθμητή ΔV , δηλαδή

$$K = \frac{\Delta P}{P} \frac{100}{\Delta V} \quad (\% / \text{Volt}) \quad (22.2)$$

όπου \bar{P} ο μετρούμενος ρυθμός για $V = V_{\text{εργ}}$. Η κλίση ενός καλού απαριθμητή είναι της τάξης 0.2 % / Volt.

2.3 Στατιστικές Διακυμάνσεις του Αριθμού των Κρούσεων

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή η εκπομπή σωματιδίων από ραδιενεργούς πυρήνες είναι στατιστικό φαινόμενο. Έτσι αν έχουμε ραδιενεργό πηγή σταθερής ραδιενέργειας και μετρήσουμε διαδοχικά πολλές φορές, με τις ίδιες πάντοτε συνθήκες και για ωρισμένο χρόνο τον αριθμό των κρούσεων θα βρούμε ότι ο αριθμός αυτός κυμαίνεται γύρω από μια μέση τιμή \bar{N} που ακολουθεί ωρισμένο στατιστικό νόμο. Όπως αναφέραμε στο Κεφ. 2, μια τυχούσα μέτρηση έχει πιθανότητα 67% να διαφέρει από τη μέση τιμή κατά $\pm \sqrt{\bar{N}}$. Δηλαδή από 100 μετρήσεις που παίρνονται με τις ίδιες



συνθήκες οι 67 πρέπει να βρίσκονται στο διάστημα $\bar{N} \pm \sqrt{\bar{N}}$ ή αλλιώς, η τυπική απόκλιση $\sigma(\bar{N})$ μιας μέτρησης είναι

$$\sigma(\bar{N}) = \pm \sqrt{\bar{N}} \quad (22.3)$$

Επειδή η μέτρηση της μέσης τιμής απαιτεί πολύ χρόνο παίρνουμε κατά προσέγγιση

$$\sigma(N) = \pm \sqrt{N} \quad (22.4)$$

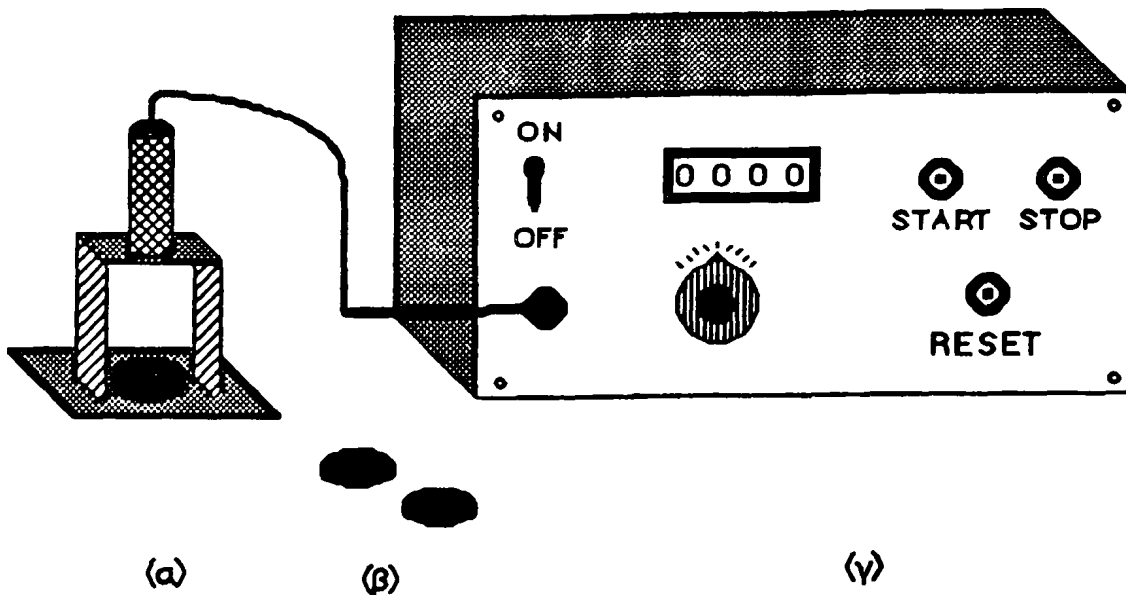
όπου N ο μετρούμενος αριθμός κρούσεων.

3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Διαδικασία

Τοποθετούμε το μετρητή κοντά στο ραδιενεργό υλικό όπως φαίνεται στο Σχ. 2. Φροντίζουμε η τάση λειτουργίας να αντιστοιχεί στο οροπέδιο του απαριθμητή. Αρχίζουμε τη λειτουργία του καταγραφέα παλμών για ωρισμένο χρονικό διάστημα, κυρίως 15 sec. Καταχωρούμε τον αριθμό N των παλμών στον Πίνακα 1 και επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση 200 περίπου φορές. Η απόσταση της ραδιενεργούς πηγής από τον απαριθμητή παίρνεται ανάλογα με το πλήθος των παλμών που θέλουμε να καταγράψει ο μετρητής μέσα στο καθορισμένο χρονικό διάστημα το οποίο δίνεται παρακάτω στα ζητούμενα. Ο προσδιορισμός της μέσης τιμής των παλμών \bar{N} , της τυπικής απόκλισης $\sigma(\bar{N})$ καθώς και η χάραξη της καμπύλης κατανομής των μετρήσεων γίνονται με τη βοήθεια ιστογράμματος συχνότητων (βλέπε παράγραφο 2.8, Κεφ. 2). Σε ένα άλλο Πίνακα 2 όμοιο με τον Πίνακα 1 (που δεν χρειάζεται να τον απεικονίσουμε εδώ) καταχωρούνται κατά αυξανόμενη τάξη οι τιμές του Πίνακα 1.





Σχήμα 2. (α) Απαριθμητής Geiger (β) Ραδιενεργός πηγή,
(γ) Μετρητής παλμών.

Έστω N_{min} και N_{max} η μικρότερη και η μεγαλύτερη αντίστοιχα μετρούμενη τιμή ραδιενέργειας. Το διάστημα $N_{max} - N_{min}$ διαφείται σε 20 ίσα τμήματα και ομαδοποιούνται οι μετρήσεις του Πίνακα 2 με βάση τα 20 αυτά διαδοχικά διαστήματα. Στη συνέχεια χαράσσεται το ιστόγραμμα των μετρήσεων αυτών.

Η παραπάνω διαδικασία των 200 μετρήσεων επαναλαμβάνεται για μια διαφορετική απόσταση ραδιενεργού πηγής-απαριθμητή.

Πίνακας 1
Καταγραφή παλμών από το μετρητή Geiger

a/a	N	a/a	N	a/a	N
	Αριθμός παλμών		Αριθμός παλμών		Αριθμός παλμών

Ζητούνται:

- 1) (a) Να σχεδιαστεί το ιστόγραμμα συχνοτήτων και η καμπύλη κατανομής για τις 200 μετρήσεις της ραδιενέργειας της πηγής με χρόνο κάθε μέτρησης 15sec. Η απόσταση πηγής-μετρητή να είναι τέτοια ώστε στο χρόνο των 15sec να καταγράφονται από το μετρητή περίπου 100 παλμοί.
- (β) Να γίνει ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών μεγεθών \bar{N} και $\sigma(\bar{N})$ των μετρήσεων αυτών.
- 2) (a) Να σχεδιαστεί το ιστόγραμμα συχνοτήτων για 200 μετρήσεις της ραδιενέργειας της πηγής. Τώρα όμως ο χρόνος των μετρήσεων και η απόσταση της πηγής παίρνονται έτσι ώστε να καταγράφονται από το μετρητή 1000 περίπου παλμοί σε κάθε μέτρηση (ο χρόνος των μετρήσεων διατηρείται σταθερός).
- (β) Να υπολογισθούν τα \bar{N} και $\sigma(\bar{N})$ των μετρήσεων.



ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ	ΤΙΜΗ
Μέση Επιτάχυνση της Βαρύτητας	g	$9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$
Ταχύτητα του Φωτός	c	$3.00 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$
Σταθερά του Planck	h	$6.630 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec}$
Σταθερά του Planck	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.06 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec}$
Αριθμός Avogadro	N_0	$6.02 \times 10^{26} \frac{\text{μόρια}}{\text{Kg} \cdot \text{mole}} =$
		$6.02 \times 10^{23} \frac{\text{μόρια}}{\text{gr} \cdot \text{mole}}$
Παγκόσμια Σταθερά των Αερίων	R	$8.31 \frac{\text{J}}{\text{gr} \cdot \text{mole} \cdot \text{K}}$
Σταθερά του Boltzmann	$k = \frac{R}{N_0}$	$1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$
Σταθερά Βαρύτητας	G	$6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{Kg}^2}$
Όγκος Γραμμομορίου Ιδανικού αερίου	V_0	$2.24 \times 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{gr} \cdot \text{mole}}$
Πυκνότητα του Αέρα στους 0° C και 1 atm		$1.29 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$
Φορτίο Ηλεκτρονίου	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ Coul}$
Μάζα Ηλεκτρονίου	m	$0.911 \times 10^{-30} \text{ Kg}$
Μάζα Πρωτονίου	m_p	$1.673 \times 10^{-27} \text{ Kg}$
Διηλεκτρική Σταθερά του Κενού	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{Coul}}{\text{V} \cdot \text{m}}$
Μαγνητική Διαπερατότητα του Κενού	μ_0	$1.26 \times 10^{-6} \frac{\text{V} \cdot \text{sec}}{\text{A} \cdot \text{m}}$



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. F.W. Sears and M.W. Zemansky, *University Physics*
Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1955
2. G.B. Thomas, Jr, *Calculus and Analytic Geometry*,
Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1961
3. M.R. Spiegel, *Theory and Problems of Statistics*,
Shaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Co., 1961
4. D. Halliday and R. Resnick, *Physics I*,
John Wiley and Sons, Inc. 1962
5. Κ.Δ. Αλεξοπούλου, *Γενική Φυσική, Θερμότητα*
Αθήνα, 1962
6. R.A. Fisher, *Statistical Method for Research Workers*,
Oliver and Boyd, 1967
7. M.W. Zemansky, *Heat and Thermodynamics*,
McGraw-Hill Book Company, 1968
8. R.A. Levy, *Principle of Solid State Physics*,
Academic Press, 1968
9. F. Bueche, *Introduction to Physics for Scientists and Engineering*,
McGraw-Hill Book Company, 1969
10. T.W. Williams III, *Experiments on an air track*,
The Ealing Scientific, Ltd, 1969
11. M. Alonso and E.J. Finn, *Fields and Waves, Vol. II*,
Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1970
12. Leybold -Heraus, GMBH Co. Köln, Gerätekarte 12/1970 A
13. Δ. Τριχόπουλος, *Στοιχεία Ιατρικής Στατιστικής*,
Αθήνα, 1971
14. J. Topping, *Errors of Observation and their Treatment*,
Latimer Trend and Co. Ltd., Whitstable, 1972
15. K.W. Ford, *Classical and Modern Physics, Vol. 1, Vol. 2*,
Xerox College Publishing Co., 1972



16. R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *Lectures of Physics*, Addison Lesley Publishing Company, 1972
17. Η.-Ι. Γάγγας, *Φυσική-Σωμάτια*, Ιωάννινα, 1973
18. Η.Ν. Κουμέλης και Σ.Δ. Μουρίκης, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής* Αθήνα, 1975
19. A.C. Melissinos and F. Lobkowitz, *Physics for Scientists and Engineers, Vol. I*, W.B.Saunders Company, 1975
20. C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Mechanics Berkeley Physics Course, Volume I*, 1976
21. A.M. Portis and H.D. Young, *Berkeley Physics Laboratory 2nd Edition Mechanics*, Hickok teaching system Inc., 1977
22. Μ.Ι. Καραγιάννης, *Επεξεργασία, Αξιολόγηση και Παρουσίαση Αναλυτικών δεδομένων*, Αθήνα, 1978
23. Δ.Ι. Χατζόπουλος, *Ανώτερα Μαθηματικά, Τόμος Ι*, Θεσσαλονίκη, 1978
24. Π. Ασημακόπουλος, *Βασικές Μετρήσεις Ηλεκτρισμού, Τόμος Ι*, Ιωάννινα, 1979
25. Ν.Α. Οικονόμου, *Εισαγωγή στη Φυσική, Τόμος Ι*, Θεσσαλονίκη, 1980
26. Παπαδημητράκη-Χλίχλια και Σ. Διονυσίου-Κουϊμτζή, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Ηλεκτρισμού*, Θεσσαλονίκη, 1980
27. Heine/Holzer, *University Laboratory Experiments Physics, Vol. 2*, PHYWE Aktiengesellschaft Götting, 1982



ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

- Αεροτροχιά, 125,130
 Ακρίβεια, 24
 Αλουμίνιο, 346
 Αντισυμμετρικός τρόπος
 ταλάντωσης, 254
 Άνωση, 306
 Απαριθμητής Geiger, 393
 Απλό εκκρεμές, 274
 Απόλυτη θερμοδυναμική
 κλίμακα, 331
 Απομονωμένο σύστημα, 202
 Αραιόμετρα, 308
 Αριθμός Reynolds, 320
 Αρμονική κίνηση, 235
 Αρμονικός ταλαντωτής, 235
 Αρχή του Αρχιμήδη, 306
 Αφαίρεση, 29

 Βαθμολόγηση κλίμακας, 33
 Βερνιέρος, 111
 Βήμα σφαιρόμετρου, 117
 Boltzmann, 335

 Gauss, 44
 Geiger, 393
 Γραμμική διαστολή, 381
 Γραμμομοριακή
 θερμοχωρητικότητα, 334

 Διαίρεση, 30
 Διακριτική ικανότητα, 25
 Διαστημόμετρο, 110
 Διαστολή, 381

 Διαστολή επιφάνειας, 381
 Διαστολή όγκου, 381
 Διαφορικά, 16
 Debye, 337
 Doulong, 335
 Δυνάμεις απόσβεσης, 219
 Δυνάμεις Van der Waals, 314
 Δυναμική, 133
 Δυναμική ενέργεια, 166

 Ειδική θερμότητα, 330,331
 Ειδικό βάρος, 305
 Εκθετικές καμπύλες, 85
 Εκκρεμές, 274
 Εκταση, 35, 42
 Ελκυσμός, 296
 Ενέργεια, 161
 Εξαέρωση, 374
 Εξαναγκασμένη
 ταλάντωση, 236,261
 Εξισώσεις καμπυλών, 80
 Επιτάχυνση, 133, 136
 Επιτάχυνση της
 βαρύτητας g , 274
 Επιτρόχια επιτάχυνση, 283
 Εργο, 161
 Εσωτερική τριβή, 314
 Ευθεία Γραμμή, 81
 Εύρος, 35, 42
 Εύρος καμπύλης
 συντονισμού, 265

 Ζυγός, 109,120



- Ηλεκτρικό ισοδύναμο της θερμότητας, 352
- Θερμιδομετρία, 331, 351
 Θερμιδόμετρα, 331
 Θερμική διαστολή, 381
 Θερμική ισορροπία, 331
 Θερμοδυναμικός νόμος (πρώτος), 334
 Θερμοκρασία, 330
 Θερμόμετρα, 330
 Θερμοστάτης, 388
 Θερμότητα, 330, 331
 Θερμότητα εξαέρωσης, 375
 Θερμοχωρητικότητα, 332
 Θεώρημα Έργου-Ενέργειας, 165
 Θλίψη, 296
- Ιξώδες, 320
 Ισότροπα, 384
 Ιστόγραμμα, 41
- Calorie, 332
 Cavendish, 295
 Καμπύλες κατανομής, 41
 Καμπύλη, 77
 Κάμψη, 296
 Κανονικός τρόπος ταλάντωσης, 255
 Κατανομή Gauss, 44
 Κατανομή Poisson, 44
 Κεκλιμένη αεροτροχιά, 131
 Κεκλιμένο επίπεδο, 140
 Κέντρο μάζας, 134
 Κεντρομόλος δύναμη, 283
- Κεντρομόλος επιτάχυνση, 283
 Κινηματική, 133
 Κινητική ενέργεια, 165
 Κλίμακα απόλυτη, 331
 Κλίμακα του Celsius, 330
 Κλίμακα Fahrenheit, 330
 Κλίση της ευθείας, 82
 Κυκλική κίνηση, 283
 Κυκλική συχνότητα, 238
 Κράμα, 348
 Κρούσεις, 189
- Λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης, 375
 LEGENDRE, 38
 Λογαριθμικές καμπύλες, 83
 Λογάριθμοι, 18
- Μαγνητική ενέργεια, 181
 Mac-Laurin, 14
 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων, 89
 Μερικοί Παράγωγοι, 13
 Μέση απόκλιση, 37
 Μέση Ειδική Θερμότητα, 333
 Μέσο Σφάλμα, 38
 Μέσος Όρος, 36
 Μετάθεση μηδενός, 113, 115, 118
 Μετρητής Geiger-Müller, 393
 Μέτρο στρέψης, 296
 Μηχανική Ενέργεια, 166
 Μηχανικό ισοδύναμο θερμότητας, 351
 Μικρόμετρο, 114



- Μισή ζωή, 253, 393
Μοριακή θερμοχωρητικότητα, 333
- Νεύτωνας, 138, 239
Νόμος Dulong-Petit, 336
Νόμος Νεύτωνα, 138
Νόμος ψύξης του Newton, 239
Νόμος Stokes, 320
- Ολικό Σφάλμα, 57
Ομαλή κυκλική κίνηση, 283
Όργανα μέτρησης διαστάσεων, 109
Ορική αντίσταση, 323
Ορική ταχύτητα, 322
Ορμή, 150
Οροπέδιο απαριθμητή, 395
- Παγκόσμια σταθερά αερίων, 334
Παράγοντας ποιότητας, 252
Παράγωγοι, 3
Περίοδος, 237
Petit, 335
Πιστότητα, 24
Poise, 318
Poisson, 44
Πολλαπλασιασμός, 29
Πρόσθεση, 28
Πρώτος Θερμοδυναμικός νόμος, 334
Πυκνόμετρα, 308
Πυκνότητα, 304
- Ραδιενεργή διάσπαση, 393
- Ρεύμα μετατόπισης, 222
Reynold, 321
Rinkel, 361
Rowland - Ferry, 339
Rüchardt, 361
- Σειρές Taylor και Mac-Laurin, 14
Σημαντικά ψηφία, 25
Σίδηρος, 347
Σταθερά απόσβεσης, 221
Σταθερά Βερνιέρου, 111
Σταθερά μικρόμετρου, 115
Σταθερά σφαιρόμετρου, 118
Σταθμισμένες μέσες τιμές, 72
Στατική ισορροπία, 315
Στατιστικά φαινόμενα, 392
Σπγμιαία επιτάχυνση, 138
Σπγμιαία ταχύτητα, 135
Stokes, 315
Στρέψη, 296
Στροφική απλή αρμονική κίνηση, 295
Στροφική σταθερά, 298
Στροφικό εκκρεμές, 295
Στρωτή ροή, 316
Σύζευξη ταλαντωτών, 258
Συμμετρικός τρόπος ταλάντωσης, 255
Συντελεστής διαστολής, 381
Συντελεστής εσωτερικής τριβής ή ιξώδους, 314, 318
Συντελεστής κρούσης, 192
Συντηρητικές δυνάμεις, 161
Συντονισμός, 261, 264
Συστηματικά σφάλματα, 32



- Συχνότητα, 238
 Συχνότητα συντονισμού, 261
 Σφαιρόμετρο, 117
 Σφάλμα ανάγνωσης, 113, 115
 Σφάλμα μέσου όρου, 50
 Σφάλματα, 30
 Σχετικό σφάλμα, 51
- Taylor, 15
 Ταχύτητα, 3, 133, 134
 Τυπική απόκλιση, 38, 39, 62
 Τυρβώδης ροή, 316, 321
 Τυχαία σφάλματα, 34
- Υδροστατικός ζυγός, 371
- Φαινομενο Joule, 351
 Φθίνουσα αρμονική κίνηση, 249
 Φθίνουσα αρμονική
 ταλάντωση, 250
 Φθορά οργάνου, 33
 Φυγόκεντρος δύναμη, 289
 Φυσική συχνότητα, 261
- Χρόνος αφησυχασής, 252
 Χρόνος μισής ζωής, 253, 393
 Χρονόμετρα, 109, 122
- Ψύξη Newton, 239
- Ώθηση, 150, 151





Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο
με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ
Τυπογραφείο

