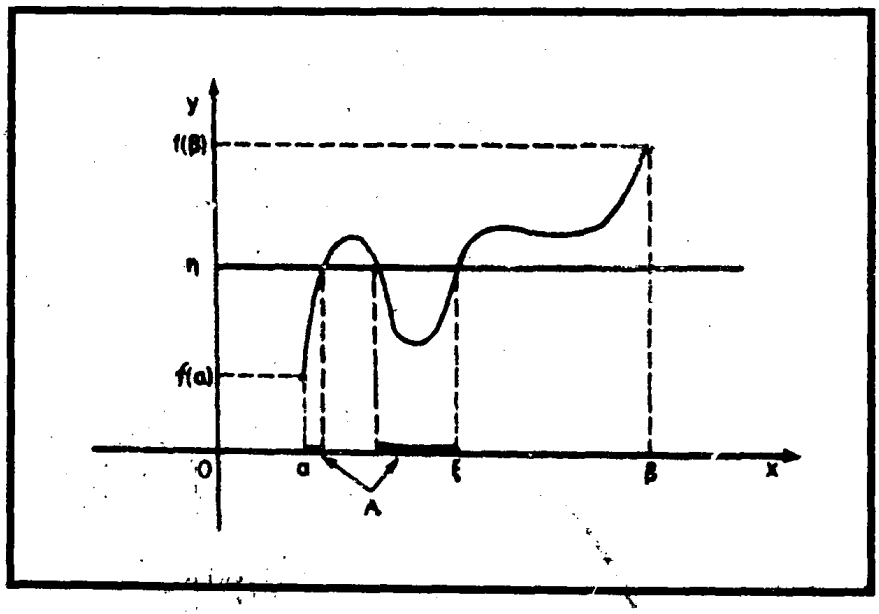
Σωτήρη Κ. Ντούγια
Καθηγητή Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

απειροστικός λογισμός 1

- ακολουθίες
- σειρές
- συναρτήσεις (όριο - συνέχεια)
- διαφορικός λογισμός



Ιωάννινα 1998

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
026000045824

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

515.15
ΝΤΟ

515.15
ΝΤΟ
τ. 1

114/2008

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

LEADER BOOKS A.E.
ΒΙΒΛΙΑ-ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ-ΧΑΡΤΙΚΑ
Π. ΚΥΡΙΑΚΟΥ 17-115 21 ΑΘΗΝΑ
ΤΗΛ: 6452825, 3811937, 6015435
FAX: 6449924

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΚΕΝΤΡΙΚΗ

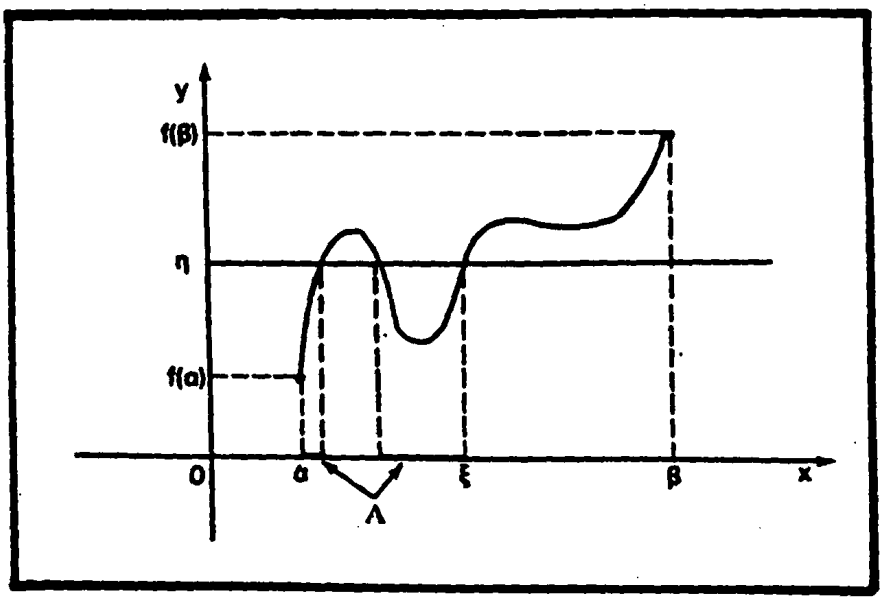
Αρ. εισ. Ε 2659/2000

Σωτήρη Κ. Ντούγια

Καθηγητή Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

απειροστικός λογισμός 1

- ακολουθίες
- σειρές
- συναρτήσεις (όριο - συνέχεια)
- διαφορικός λογισμός



Ιωάννινα 1998

Β' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
ΕΡΓΟ
"ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ-
Π.Ι."
1996 - 1999

. . .από τον συγγραφέα

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε για να χρησιμοποιηθεί ως **"διδακτικό"** για το μάθημα **"Απειροστικός Λογισμός Ι"** του Νέου Προγράμματος Σπουδών του Α' έτους του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Μια προσεκτική και εμπεριστατωμένη μελέτη του Απειροστικού Λογισμού είναι πολύ σημαντική για τον φοιτητή που θα ήθελε να χρησιμοποιήσει τα Μαθηματικά, πέρα από τον ξερό χειρισμό τύπων, για τη λύση μερικών στάνταρ προβλημάτων. Για να γίνει ικανός να χρησιμοποιήσει τις μεθόδους του Απειροστικού Λογισμού σε πιο σύνθετα προβλήματα είναι αναγκαίο να αποκτήσει μια σε βάθος γνώση των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής.

Το βιβλίο αρχίζει με ένα προκαταρκτικό Κεφάλαιο, όπου παρουσιάζεται μια μικρή περίληψη των πιο βασικών εννοιών από τα σύνολα και τις συναρτήσεις. Ιδιαίτερη έμφαση πρέπει να δοθεί στην § 0.3 όπου γίνεται μια συζήτηση για τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες. Αυτό, γιατί τα περισσότερα λάθη που γίνονται στον Απειροστικό Λογισμό οφείλονται στην σύγχυση που υπάρχει στη διάκριση μεταξύ μιας αναγκαίας και μιας ικανής συνθήκης.

Το Κεφάλαιο 1 ασχολείται με την αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών και τις ακολουθίες.

Οι σειρές πραγματικών αριθμών, με λίγα στοιχεία από τις δυναμοσειρές και τα απειρογινόμενα μελετούνται στο Κεφάλαιο 2.

Το Κεφάλαιο 3 ασχολείται με την πιο βασική έννοια της Ανάλυσης, το όριο. Δίνονται και οι δυο ορισμοί για το όριο, με την βοήθεια των ακολουθιών και με την βοήθεια των ϵ και δ.

Η συνέχεια εξετάζεται στο Κεφάλαιο 4. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων σε κλειστό διάστημα. Οι στοιχειώδεις

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

συναρτήσεις μελετούνται λεπτομερώς στην § 4.9.

Η βασική θεωρία της παραγώγου τέλος, δίνεται στο Κεφάλαιο 5.

Καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια ώστε κάθε απόδειξη να είναι πλήρως επεξεργασμένη, ενώ παράλληλα οι πολλές επεξηγήσεις που υπάρχουν στο βιβλίο υπό μορφή παρατηρήσεων, αναλύουν με λεπτομέρεια κάθε βήμα, καθορίζοντας την προβληματική και τις μεθόδους. Οι παρατηρήσεις αυτές επισημαίνουν επίσης τα σημεία που πρέπει να προσεχθούν ιδιαίτερα για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών ή επεξηγούν με αντιπαραδείγματα την αναγκαιότητα των συνθηκών. Για τον σκοπό αυτό επίσης δίνονται και αρκετά παραδείγματα. Κάθε παράγραφος, εκτός από ελάχιστες κλίνει με μερικές εφαρμογές. Οι εφαρμογές αυτές συμπληρώνουν την θεωρία με βασικές προτάσεις ή δίνουν νύξη για καινούργιες έννοιες που θα συναντήσει σε μεγαλύτερα έτη ο φοιτητής ή τέλος δίνουν μια γενική μέθοδο για τη λύση προβλημάτων.

Επειδή κανένας δεν μπορεί να ισχυριστεί ότι θα διαβάσει Απειροστικό Λογισμό χωρίς να λύσει ασκήσεις -πολλές ασκήσεις- γι' αυτό σε κάθε παράγραφο δίνεται ένας ικανός αριθμός ασκήσεων. Οι ασκήσεις αυτές ποικίλουν σε δυσκολία. Άλλες είναι ασκήσεις "ρουτίνας", εφαρμογές στους τύπους και τα Θεωρήματα και άλλες πιο σύνθετες και πιο θεωρητικές. Κάθε Κεφάλαιο κλίνει με μια σειρά ερωτήσεων με γενικό τίτλο **"σωστό ή λάθος"** και μια σειρά από ασκήσεις για επανάληψη. Οι ερωτήσεις αυτές έχουν σκοπό, με τον προβληματισμό που βάζουν, να συμβάλουν στην καλύτερη κατανόηση και κριτική εμβάθυνση της θεωρίας.

Οι απαντήσεις των ερωτήσεων καθώς και υποδείξεις ή πλήρεις λύσεις όλων των ασκήσεων υπάρχουν στο Παράρτημα που βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω το προσωπικό του Τομέα της Μαθηματικής Ανάλυσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και ιδιαίτερα τους κ.κ. Γ. Καρακώστα, Π. Παλαμίδη και Χ. Πεταλά για τις παρατηρήσεις τους, τις υποδείξεις τους και τη συμβολή τους στην τελική εμφάνιση του βιβλίου.

Ιωάννινα, Οκτώβριος 1984 Σ.Κ. Ντούγιας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0 Προκαταρκτικά 1
0.1 Σύνολα 1
0.2 Συναρτήσεις 2
0.3 Ικανές και αναγκαίες συνθήκες 6
0.4 Μαθηματική επαγωγή 7
0.5 Βασικές ταυτότητες-ανισότητες-αθροίσματα 8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Πραγματικοί αριθμοί-ακολουθίες .. 13
1.1 Αξιωματική θεμελίωση του R 13
1.2 Βασικές προτάσεις 23
1.3 Στοιχεία από την Τοπολογία του R 28
1.4 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών 33
1.5 Η έννοια της υπακολουθίας 39
1.6 Η άλγεβρα των ορίων-Βασικά θεωρήματα 42
1.7 Μονότονες ακολουθίες 49
1.8 Κιβωτισμός διαστημάτων και οι συνέπειές του 61
1.9 Απειριζόμενες ακολουθίες 66
1.10 Σημεία συσσωρεύσεως ακολουθίας 71
1.11 Ακολουθίες του Cauchy (ή βασικές ακολουθίες) 75
1.12 Ανώτερο και κατώτερο όριο ακολουθίας 84
1.13 Μια σημαντική ισοδυναμία 89

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.14 Επανάληψη του Κεφαλαίου 1 92

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Σειρές 97
2.1 Η έννοια της σειράς 97
2.2 Σύγκλιση της σειράς 99
2.3 Βασικές ιδιότητες των σειρών 104
2.4 Κριτήρια σύγκλισης σειρών 106
2.5 Σειρές με θετικούς φθίνοντες όρους 123
2.6 Εναλλασόμενες σειρές 125
2.7 Απόλυτη και υπό συνθήκη σύγκλιση 128
2.8 Κριτήρια των Abel και Dirichlet 133
2.9 Ειδικά Κριτήρια σύγκλισης σειρών 138
2.10 Ομαδοποίηση και αναδιάταξη 144
2.11 Γινόμενο σειρών 147
2.12 Απειρογινόμενο 149
2.13 Δυναμοσειρές 153
2.14 Επανάληψη του Κεφαλαίου 2 156

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Όριο συνάρτησης 161
3.1 Γενικά 161
3.2 Ακολουθιακός ορισμός της σύγκλισης 163
3.3 Ορισμός συγκλίσεως κατά Cauchy 172
3.4 Φραγμένες συναρτήσεις 186
3.5 Ιδιότητες των συγκλινουσών συναρτήσεων 189
3.6 Μερικά αξιοσημείωτα όρια 196
3.7 Συνθήκες για την ύπαρξη του ορίου 200
3.8 Επανάληψη του Κεφαλαίου 3 205

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Συνέχεια συνάρτησης 209
4.1 Γενικά 209
4.2 Ορισμοί και παρατηρήσεις 209
4.3 Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων 218
4.4 Είδη ασυνέχειας 223
4.5 Συνέχεια σε κλειστό διάστημα 228
4.6 Ομοιόμορφη συνέχεια 241
4.7 Συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης 252
4.8 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις 262

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.9 Υπερβολικές και αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις 267
4.10 Επανάληψη του Κεφαλαίου 4 273

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Παράγωγος συνάρτησης 279
5.1 Ορισμός της παραγώγου 279
5.2 Ιδιότητες της παραγώγου 288
5.3 Παράγωγοι των στοιχειωδών συναρτήσεων 294
5.4 Παράγωγοι ανώτερης τάξης 302
5.5 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου 310
5.6 Διαφορικό συνάρτησης 313
5.7 Τα βασικά θεωρήματα του διαφορικού Λογισμού -
- Θεώρημα του Darboux 317
5.8 Θεώρημα του Rolle 319
5.9 Θεώρημα Μέσης Τιμής 327
5.10 Απροσδιόριστες μορφές - κανόνες του L'Hospital 348
5.11 Τύπος του Taylor 361
5.12 Ακρότατα συνάρτησης 374
5.13 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις - σημεία καμπής 388
5.14 Ασύμπτωτες συνάρτησης 404
5.15 Μελέτη συνάρτησης και γραφική παράσταση 407
5.16 Εφαρμογές της μελέτης των συναρτήσεων στις ακολουθίες 412
5.17 Επανάληψη του Κεφαλαίου 5 422

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Απαντήσεις-υποδείξεις-
λύσεις των ασκήσεων 441
Κεφάλαιο 1 442
Κεφάλαιο 2 446
Κεφάλαιο 3 448
Κεφάλαιο 4 450
Κεφάλαιο 5 453
Βιβλιογραφία 469
Ευρετήριο 471

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Προκαταρκτικά 0

Στο εισαγωγικό αυτό Κεφάλαιο δίνεται μια μικρή περίληψη των πιο βασικών εννοιών από τα σύνολα και τις συναρτήσεις, που θα χρησιμοποιήσουμε σ' αυτό το βιβλίο. Έχει σκοπό να φέρει τον αναγνώστη σε μια πρώτη επαφή με την ορολογία και τους συμβολισμούς, που θα χρειαστούν στα επόμενα. Έχει επαναληπτικό χαρακτήρα και συνεπώς δεν πρέπει να χαθεί πολύς χρόνος γι' αυτό, αλλά να υπάρχει η δυνατότητα για συμβουλή ό,ταν χρειαστεί.

§ 0.1 ΣΥΝΟΛΑ

Η ιδέα του συνόλου είναι βασική για όλους τους κλάδους των Μαθηματικών. Αν Α είναι ένα σύνολο και x είναι ένα στοιχείο του συνόλου, τότε γράφουμε $x \in A$. Αν ένα στοιχείο x δεν ανήκει στο σύνολο, τότε γράφουμε $x \notin A$. Ένα σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο λέγεται **κενό** και συμβολίζεται με $\emptyset$. Το σύνολο Α είναι **υποσύνολο** ενός σύνόλου Β και θα γράφουμε $A \subseteq B$ αν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β, δηλαδή $x \in A \Rightarrow x \in B$. Το σύνολο Α είναι **γνήσιο υποσύνολο** του Β αν το Α είναι υποσύνολο του Β και το Β περιέχει ένα τουλάχιστο στοιχείο y με $y \notin A$. Τα σύνολα Α και Β είναι **ίσα** αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Τότε γράφουμε $A = B$.

Η **ένωση** των συνόλων Α και Β είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν στο Α ή στο Β ή και στα δυο, δηλαδή

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{ή} \quad x \in B\}.$$

Η **τομή** των συνόλων Α και Β είναι το σύνολο

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{και} \quad x \in B\}.$$

Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε τα σύνολα Α και Β λέγονται **ξένα** μεταξύ τους.

Αν Α και Β είναι σύνολα, τότε το **συμπλήρωμα** του Β ως προς το Α είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του Α που δεν ανήκουν στο Β, δηλαδή

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Το **καρτεσιανό γινόμενο** $A \times B$ δυο μη κενών συνόλων Α και Β είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (α, β) με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$:

$$A \times B = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A \quad \text{και} \quad \beta \in B\}.$$

§ 0.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω Α και Β είναι σύνολα. Μια **συνάρτηση από το Α στο Β είναι ένα σύνολο f των διατεταγμένων ζευγών του** $A \times B$ **με την ιδιότητα ότι αν** (α, β) **και** (α, β_1) **είναι στοιχεία του f, τότε** $\beta = \beta_1$. Το σύνολο όλων των στοιχείων του Α που εμφανίζονται σαν πρώτα στα στοιχεία του f λέγεται **πεδίο ορισμού** της f και συμβολίζεται με $\Delta(f)$. Το σύνολο όλων των στοιχείων του Β που εμφανίζονται σαν δεύτερα στα στοιχεία του f λέγεται **πεδίο τιμών** της f και συμβολίζεται με $\mathcal{R}(f)$.

Με άλλα λόγια μια συνάρτηση από το Α στο Β είναι ένα μη κενό υποσύνολο των διατεταγμένων ζευγών από το $A \times B$ τέτοιο ώστε όλα τα στοιχεία $x \in A$ εμφανίζονται σαν πρώτο στοιχείο και τέτοιο ώστε σε κάθε πρώτο στοιχείο $x \in A$ στο διατεταγμένο ζεύγος, να αντιστοιχεί **ένα και μόνο ένα** δεύτερο στοιχείο από το Β.

Αν το (x, y) είναι στοιχείο του f γράφουμε:

$$y = f(x) \quad \text{ή} \quad f : x \to y$$

αντί του $(x, y) \in f$.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\Delta(f) \subseteq A$ θα λέγεται **αμφιμονοσήμαντη** ή 1-1 αν και μόνον αν, για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta(f)$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta(f)$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

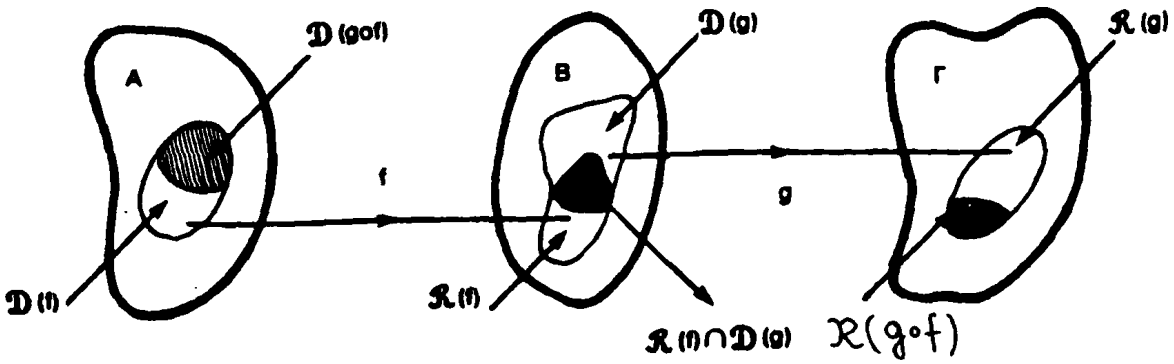
Αν f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού $\Delta(f)$ και $A_1 \subseteq \Delta(f)$ τότε η συνάρτηση f_1 με πεδίο ορισμού το A_1 που ορίζεται να είναι $f_1(x) = f(x), \forall x \in A_1$ λέγεται **περιορισμός της f στο Α** και συμβολίζεται με $f_1 | A_1$. Επίσης αν g είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού $\Delta(g)$ και $\Delta(g) \subseteq \Gamma$, τότε η συνάρτηση g_1 με πεδίο ορισμού το Γ και $g_1(x) = g(x), \forall x \in \Delta(f)$ λέγεται **επέκταση** της g στο Γ.

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού $\Delta(f) \subseteq A$ και πεδίο τιμών $\mathcal{R}(f) \subseteq B$ και g μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού $\Delta(g) \subseteq B$ και πεδίο τιμών $\mathcal{R}(g) \subseteq \Gamma$. (Βλέπε σχήμα 0.1) Η **σύνθεση** $g \circ f$ είναι η συνάρτηση από το Α στο Γ που ορίζεται ως εξής:

$$g \circ f = \{(\alpha, \gamma) \in A \times \Gamma : \text{υπάρχει ένα στοιχείο } \beta \in B$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

τέτοιο ώστε $(\alpha, \beta) \in f$ και $(\beta, \gamma) \in g\}$.



Σχήμα 0.1

Αν $x \in \Delta(f)$ για να ορίζεται η g στο στοιχείο $f(x)$ πρέπει το $f(x) \in \Delta(g)$. Έτσι πρέπει $\mathcal{R}(f) \cap \Delta(g) \neq \emptyset$. Είναι

$$\Delta(g \circ f) = \{x \in \Delta(f) : f(x) \in \Delta(g)\}.$$

Για ένα στοιχείο $x \in \Delta(g \circ f)$ η τιμή της $g \circ f$ στο x δίνεται από την $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Έστω f μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση με πεδίο ορισμού $\Delta(f) \subseteq A$ και πεδίο τιμών $\mathcal{R}(f) \subseteq B$. Αν $g = \{(\beta, \alpha) \in B \times A : (\alpha, \beta) \in f\}$ τότε η g είναι αμφιμονοσήμαντη με πεδίο ορισμού $\Delta(g) = \mathcal{R}(f) \subseteq B$ και πεδίο τιμών $\mathcal{R}(g) = \Delta(f) \subseteq A$. Η συνάρτηση g λέγεται **αντίστροφη** της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

Έστω τώρα $f : A \to B$ και $X \subseteq A$. Τότε η εικόνα του X από την f είναι το υποσύνολο $f(X)$ του B που ορίζεται ως εξής: $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$. Επίσης αν $Y \subseteq B$ τότε η **αντίστροφη εικόνα** του Y από την f είναι το υποσύνολο $f^{-1}(Y)$ του A που ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1}(Y) = \{x : f(x) \in Y\}.$$

Μια συνάρτηση f θα λέγεται **ταυτοτική** αν $f(x) = x, \forall x \in \Delta(f)$ και θα λέγεται **σταθερή** αν $f(x) = k, \forall x \in \Delta(f)$.

Μια συνάρτηση f θα λέγεται **άρτια** αν $f(-x) = f(x), \forall x, -x \in \Delta(f)$ και **περιττή** αν $f(-x) = -f(x), \forall x, -x \in \Delta(f)$. Θα λέγεται **περιοδική** με περίοδο $T \neq 0$ αν $f(x + T) = f(x), \forall x, x + T \in \Delta(f)$.

Μια συνάρτηση f θα λέγεται **φραγμένη** αν υπάρχει σταθερή M τέτοια ώστε $|f(x)| \leq M, \forall x \in \Delta(f)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μια συνάρτηση f θα λέγεται **γνήσια αύξουσα (αντ. αύξουσα)** αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta(f)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2$ (αντ. $f(x_1) \leq f(x_2)$.) Θα λέγεται **γνήσια φθίνουσα (αντ. φθίνουσα)** αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta(f)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (αντ. $f(x_1) \geq f(x_2)$.)

Μια συνάρτηση f θα λέγεται **συμμετρική ως προς την ευθεία** $x = \alpha$ αν και μόνον αν, $f(x) = f(2\alpha - x), \forall x \in \Delta(f)$.

Μια συνάρτηση f θα λέγεται **συμμετρική ως προς το σημείο** $A(\alpha, \beta)$ αν και μόνον αν, $f(x) + f(2\alpha - x) = 2\beta, \forall x \in \Delta(f)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι οι f και g είναι δυο συναρτήσεις ορισμένες σε ένα κοινό πεδίο ορισμού $\Delta \subseteq R$ και των οποίων τα πεδία τιμών είναι υποσύνολα του R. Τότε το **άθροισμα** των f και g είναι η συνάρτηση $f + g$ με $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in \Delta$. Η συνάρτηση $-g$ με τιμή $(-g)(x) = -g(x)$ λέγεται **αντίθετη** της g και η **διαφορά** των f και g είναι η συνάρτηση $f - g$ με $(f - g)(x) = f(x) - g(x), \forall x \in \Delta$. Το **γινόμενο** των f και g είναι η συνάρτηση $f.g$ με $(f.g)(x) = f(x).g(x), x \in \Delta$ και το **πηλίκο** των f και g είναι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ με $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \Delta$ για τα οποία $g(x) \neq 0$.

Ας επωφεληθούμε της ευκαιρίας να ορίσουμε και μερικές ειδικές συναρτήσεις. Ορίζουμε $(f \wedge g)(x) = min\{f(x), g(x)\}$ και $(f \vee g)(x) = max\{f(x), g(x)\}$ το **ελάχιστο** και το **μέγιστο** αντίστοιχα των f και g. Επίσης ορίζουμε το **θετικό** και **αρνητικό** μέρος μιας συνάρτησης f ως εξής:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

Προφανώς είναι $f = f^+ - f^-$ και $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$ όπου 0 είναι η μηδενική συνάρτηση στο Δ.

Τέλος είναι $f \leq g$ αν $f(x) \leq g(x), \forall x \in \Delta$. Θα είναι $f < g$ αν είναι $f(x) \leq g(x)$ με τουλάχιστο ένα σημείο του Δ για το οποίο ισχύει $f(x) < g(x)$.

Ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 0.1

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{2-x}$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$. Είναι $\Delta(f) = (-\infty, 2], \mathcal{R}(f) = [0, +\infty)$ και $\Delta(g) = (-\infty, 1], \mathcal{R}(g) = [0, +\infty)$. Για να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$ πρέπει $\mathcal{R}(f) \cap \Delta(g) \neq \emptyset$, που στην περίπτωσή μας είναι $\mathcal{R}(f) \cap \Delta(g) = [0, 1]$. Ο τύπος της είναι $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 - \sqrt{2-x}}$. Για να βρούμε το $\Delta(g \circ f)$ εργαζόμαστε ως εξής: Επειδή $[0, 1] \subseteq \mathcal{R}(f)$ αναζητούμε εκείνο το υποσύνολο του $\Delta(f)$ του οποίου το σύνολο τιμών μέσω της f είναι το $[0, 1]$, δηλ. εκείνα τα x για τα οποία είναι $0 \leq \sqrt{2-x} \leq 1$ από όπου έχουμε: $\Delta(g \circ f) = [1, 2]$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Για να προσδιορίσουμε την $f \circ g$ πρέπει $\Delta(f) \cap \mathcal{R}(g) \neq \emptyset$. Είναι $\Delta(f) \cap \mathcal{R}(g) = [0, 2]$ και άρα ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$ και $(f \circ g)(x) = \sqrt{2 - \sqrt{1-x}}$. Επίσης είναι $\Delta(f \circ g) = [-3, 1]$.

Προφανώς $g \circ f \neq f \circ g$.

Να εξετάσετε αν ορίζονται οι $f \circ f$ και $g \circ g$.

Παράδειγμα 0.2

Ας θεωρήσουμε τώρα την συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1). (Είναι π.χ $f(-2) = f(2) = 4$). Συνεπώς η f δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση. Ας θεωρήσουμε τον περιορισμό της f στο σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ δηλ. $f_1(x) = x^2, x \geq 0$. Τότε η f_1 είναι αμφιμονοσήμαντη, γιατί $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \forall x, y \in \Delta(f_1)$. Άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} με $\Delta(f_1^{-1}) = \mathcal{R}(f_1) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ και $\mathcal{R}(f_1^{-1}) = \Delta(f_1) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Επίσης είναι

$$f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}, x \geq 0.$$

Αν f_2 είναι ο περιορισμός της f στο σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ τότε η $f_2(x) = x^2, x \leq 0$ είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη και έχει αντίστροφη $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}, x \geq 0$.

Παράδειγμα 0.3

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 1$ και $g(x) = 2x^2$. Τότε

$$(f+g)(x) = 1 + x + 2x^2$$

$$(f-g)(x) = 1 + x - 2x^2$$

$$(f.g)(x) = 2(1+x)x^2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1+x}{2x^2}, x \neq 0$$

$$|f|(x) = |1+x|$$

$$(f \wedge g)(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{αν } -\frac{1}{2} < x < 1 \\ 1+x, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$(f \vee g)(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{αν } -\frac{1}{2} < x < 1 \\ 2x^2, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$f^+(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1+x, & -1 \leq x \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} -1-x, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x \end{cases}$$

$$g^+(x) = g(x), g^-(x) = 0.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

§ 0.3 ΙΚΑΝΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Οι συνθήκες είναι το κυριότερο μέρος μιας Μαθηματικής πρότασης ή ενός προβλήματος. Διαβάζοντας προσεκτικά κάποιος ένα Θεώρημα θα διαπιστώσει ότι είναι του τύπου : **"Αν ... τότε"** ή τουλάχιστο μπορεί να αναχθεί σ' αυτόν τον τύπο. Η κύρια αιτία αποτυχίας στην απόδειξη ενός Θεωρήματος είναι η μη κατανόηση της ακριβούς έννοιας των δεδομένων του. Επίσης πολλές φορές το αντίστροφο του Θεωρήματος θεωρείται ότι είναι πάντα σωστό. Και έτσι προκύπτουν παράδοξα συμπεράσματα. Η θεραπεία σ' αυτό το πράγμα είναι η ξεκάθαρη γνώση της φύσης και του τύπου των συνθηκών. Αυτό το ξεκαθάρισμα θα προσπαθήσουμε να κάνουμε.

Αν η αλήθεια μιας πρότασης εγγυάται την αλήθεια μιας άλλης πρότασης, τότε η πρώτη λέγεται **ικανή συνθήκη** για την τελευταία και η τελευταία λέγεται **αναγκαία συνθήκη** για την πρώτη. Συμβολικά αν

$$p \Rightarrow q$$

τότε η p είναι ικανή για την q και η q αναγκαία για την p.

Προσοχή! Όταν λέμε $p \Rightarrow q$ δεν δίνουμε καμμιά υπόσχεση ότι η p είναι αληθής. Αυτό που εννοούμε απλά είναι ότι αν η p είναι αληθής τότε και η q πρέπει να είναι αληθής. Αν η p είναι ψευδής, τότε δεν μπορούμε να πούμε τίποτα γαι την αλήθεια ή όχι της q[1]

Οι μορφές στις οποίες μπορεί να εμφανιστεί μια συνθήκη είναι οι παρακάτω:

1) Αναγκαία αλλά όχι ικανή (μόνο αν)

$$\mathbf{q \Leftarrow q} \quad \text{αλλά} \quad \mathbf{p \not\Rightarrow q}$$

Π.χ Ένας αριθμός είναι ρίζα ενός πραγματικού αριθμού μόνο αν αυτός είναι θετικός. Ενας αριθμος ειναι τετραγωνικη ριζα ενος φυσικου αριθμου μονο αν αυτος ειναι θετικος.

2) Ικανή αλλά όχι αναγκαία (αν)

$$\mathbf{p \Rightarrow q} \quad \text{αλλά} \quad \mathbf{q \not\Leftarrow p}$$

Π.χ. Δυο κύκλοι εφάπτονται, αν η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους, ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους.

3) Αναγκαία και ικανή (αν και μόνο αν)

$$\mathbf{p \Leftrightarrow q}$$

[1] Υπενθυμίζουμε ότι η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι ψευδής μόνον αν η p είναι αληθής και η q είναι ψευδής. Σ' όλες τις άλλες περιπτώσεις είναι αληθής.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Π.χ. Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 αν και μόνον αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.

4) Ούτε αναγκαία ούτε ικανή

$$\mathbf{p \not\Rightarrow q} \quad \text{και} \quad \mathbf{q \not\Rightarrow p}$$

Π.χ. Αφού $1 > 0$ τότε το $x - y$ είναι πρώτος.

Παρατήρηση

Πολλές φορές δεν μπορούμε να αποδείξουμε ένα θεώρημα άμεσα. Γι' αυτό κάνουμε μια τροποποίηση του θεωρήματος φέρνοντάς το σε μια διαφορετική μορφή (προφανώς ισοδύναμη). Η $p \Rightarrow q$ είναι ισοδύναμη με την $\sim q \Rightarrow \sim p$ αλλά όχι ισοδύναμη με την $q \Rightarrow p$ ή την $\sim p \Rightarrow \sim q$.

Για παράδειγμα μια συνάρτηση f λέγεται αμφιμονοσήμαντη (ή 1-1) αν

$$(\forall x_1, x_2 \in \Delta(f))\, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

που είναι ισοδύναμη με την

$$(\forall x_1, x_2 \in \Delta(f)) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Η πρώτη μορφή όμως εξυπηρετεί καλύτερα στις εφαρμογές.

§ 0.4 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Η Μαθηματική επαγωγή είναι μια πολύ σημαντική μέθοδος απόδειξης και θα την χρησιμοποιούμε συχνά σ' αυτό το βιβλίο. Είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για την απόδειξη μιας πρότασης στο σύνολο των φυσικών αριθμών.

Η Αρχή της Μαθηματικής επαγωγής έχει ως εξής:

Έστω S ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$ που έχει τις ιδιότητες: (1) $1 \in S$ και (2) αν $k \in S$ τότε $k + 1 \in S$. Τότε $S = \mathbb{N}$.

Σ' αυτό το βιβλίο η αρχή της Μαθηματικής επαγωγής θα χρησιμοποιείται με την ακόλουθη μορφή:

Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ έστω $P(\nu)$ μια πρόταση γύρω από το ν. Αποδεικνύουμε ότι η $P(1)$ είναι αληθής. Υποθέτοντας μετά ότι ισχύει η $P(k)$ αποδεικνύουμε την ισχύ της $P(k+1)$. Τότε η $P(\nu)$ είναι αληθής για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Αποδεικνύεται ότι αυτή είναι ισοδύναμη με την **Αρχή της καλής διάταξης** ότι δηλ. **κάθε μη κενό σύνολο φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

§ 0.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ-ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ-ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

1. Ταυτότητα του Lagrange

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots\beta_\nu^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots\alpha_\nu\beta_\nu)$$

$$=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)^2+\ldots+(\alpha_1\beta_\nu-\alpha_\nu\beta_1)^2+\ldots+(\alpha_{\nu-1}\beta_\nu-\alpha_\nu\beta_{\nu-1})^2.$$

2. Ταυτότητα του Euler

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)].$$

3. Διώνυμο του Newton

$$(\alpha+\beta)^\nu=\alpha^\nu+\frac{\nu}{1!}\alpha^{\nu-1}\beta+\frac{\nu(\nu-1)}{2!}\alpha^{\nu-2}\beta^2+\ldots$$

$$+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\mu+1)}{\mu!}\alpha^{\nu-\mu}\beta^\mu+\ldots+\beta^\nu,\ \mu,\nu\in\mathbb{N},\ \mu<\nu.$$

4. Χρήσιμα αθροίσματα

$$\alpha)\ 1+2+\ldots+\nu=\sum_{k=1}^{\nu}k=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$\beta)\ 1^2+2^2+\ldots+\nu^2=\sum_{k=1}^{\nu}k^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

$$\gamma)\ 1^3+2^3+\ldots+\nu^3=\sum_{k=1}^{\nu}k^2=\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2$$

$$\delta)\ 1^4+2^4+\ldots+\nu^4=\sum_{k=1}^{\nu}k^4=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)(3\nu^2+3\nu-1)}{30}$$

$$\epsilon)\ 1.2+2.3+\ldots+\nu(\nu+1)=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$$

$$\sigma\tau)\ 1.2.3+2.3.4+\ldots+\nu(\nu+1)(\nu+2)=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\zeta)\,\Sigma_\nu = \alpha + (\alpha+\omega) + \ldots + [\alpha + (\nu-1)\omega] = \frac{2\alpha + (\nu-1)\omega}{2}\nu$$

$$\eta)\,S_\nu = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \ldots + \alpha\omega^{\nu-1} = \begin{cases} \alpha\frac{\omega^\nu - 1}{\omega - 1}, & \omega \neq 1 \\ \nu\alpha, & \omega = 1 \end{cases}$$

5. Ανισότητα του Bernoulli

$$(1+\alpha)^\nu \geq 1 + \nu\alpha, \alpha > -1, \nu \in \mathbb{N}.$$

6. Ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots \beta_\nu^2) \geq (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_\nu\beta_\nu)^2,$$

$$\forall \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, \nu$$

7. Ανισότητα του Cauchy

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{\alpha_1 . \alpha_2 \ldots \alpha_\nu} \geq \frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_\nu}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

0.1 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι άρρητος.

0.2 Να αποδείξετε ότι:

α) $2^\nu \leq (\nu+1)!, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

β) $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu)\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots \frac{1}{\alpha_\nu}\right) \geq \nu^2, \alpha_i > 0, i = 1, 2, \ldots, \nu.$

γ) $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_\nu) \geq 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu, \alpha_i > 0, i = 1, 2, \ldots, \nu.$

δ) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}$

0.3 Να αποδείξετε ότι:

α) $|\frac{x}{y}| + |\frac{y}{x}| \geq 2, \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}.$

β) $\frac{|1+xy|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

γ) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δ) $|\sqrt{\alpha^2+x^2}-\sqrt{\alpha^2+y^2}| \leq |x-y|, \forall x, y \in R.$

ε) $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$

στ) $|x+\frac{1}{x}| \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}-\{0\}.$

ζ) $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$

η) $x-x^2 \leq \frac{1}{4}, \forall x \in \mathbb{R}.$

0.4 α) Αν $x>0, y>0$ και $x+y=1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$

β) Αν $x>0, y>0, z>0$ και $x+y+z=1 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$

0.5 Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y|.$

β) $\sqrt{|x|+|y|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}.$

γ) $min\{\alpha,\beta\}=\frac{1}{2}[\alpha+\beta-|\alpha-\beta|], max\{\alpha,\beta\}=\frac{1}{2}[\alpha+\beta+|\alpha-\beta|]$

0.6 Η συνάρτηση **πρόσημο του x** ορίζεται ως εξής:

$$sgn(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι: $|x|=x\,sgn(x).$

0.7 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f_\alpha(\rho)=\alpha^\rho, \rho \in Q$ είναι γνήσια αύξουσα αν $\alpha>1$ και γνήσια φθίνουσα αν $0<\alpha<1.$

0.8 Να αποδείξετε ότι η $f(x)=\frac{x}{1+|x|}, x \in \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη συνάρτηση, η οποία και να βρεθεί.

0.9 Έστω $f: \mathbb{R}-\{-1,1\} \to \mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)+f(-x)=0.$

β) $f(x)=f(-\frac{1}{x}), x \neq 0.$

γ) η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

δ) $f(x)>0$ αν $0<x<1$ και $f(x)<0$ αν $-1<x<0.$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

0.10 Να αποδείξετε ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης.

0.11 Να βρεθούν τα σύνολα:

α) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x > 2\}$, β) $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x+2} < 1\}$.

γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| < |x|\}$ δ) $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : |x| + |x+1| < 2\}$

0.12 Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $|x-2| < 1$ τότε $|x^2 - 4| < 5$.

β) Αν $|x-3| < \delta$ τότε $|x^2 - x - 6| < 5\delta$, όπου $0 < \delta < 1$.

γ) Αν $|x+1| < \delta$ τότε $|x^3 + 1| < 7\delta$, όπου $0 < \delta < 1$.

δ) Αν $|x-2| < \delta$ τότε $|\frac{x-2}{x+3}| < \frac{\delta}{4}$, όπου $0 < \delta < 1$.

0.13 Αν για κάθε μη αρνητικό ακέραιο ν ισχύει

$$|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu| \leq k|\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}|, \nu \geq 1$$

όπου α_ν πραγματικοί αριθμοί, τότε να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu| \leq k^\nu |\alpha_1 - \alpha_0|.$$

0.14 Να αποδείξετε ότι :

α) $|sin\nu x| \leq \nu |sin x|, \nu \in \mathbb{N}$.

β) $|sin\nu x| \geq sin^2 \nu x, x \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{N}$.

γ) $sinx + sin(x+\omega) + \ldots + sin[x + (\nu-1)\omega] = \frac{sin(x + \frac{\nu-1}{2}\omega) sin\frac{\nu\omega}{2}}{sin\frac{\omega}{2}}$

δ) $cosx + cos(x+\omega) + \ldots + cos[x + (\nu-1)\omega] = \frac{cos(x + \frac{\nu-1}{2}\omega) sin\frac{\nu\omega}{2}}{sin\frac{\omega}{2}}$

0.15 Έστω $0 < \theta < 1$ και $-1 < x < 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$.

β)

$$(1+\theta x)^{m-1} \begin{cases} < 1, & m > 1 \\ < (1+x)^{m-1}, & m < 1 \end{cases}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

0.16 Αν $0 < \alpha_i < 1$ και $1 \leq i \leq \nu$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\prod_{k=1}^{\nu}(1-\alpha_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k$.

β) $\prod_{k=1}^{\nu}(1-\alpha_k) < \frac{1}{\prod_{k=1}^{\nu}(1+\alpha_k)}$.

γ) $\prod_{k=1}^{\nu}(1-\alpha_k) < \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k}$.

δ) $\prod_{k=1}^{\nu}(1+\alpha_k) < \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k}$ αν $\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k < 1$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πραγματικοί αριθμοί ακολουθίες 1

§ 1.1 ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΟΥ R

Πολλές μέθοδοι έχουν χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή των πραγματικών αριθμών. Μια απ' αυτές τις μεθόδους αρχίζει με τους θετικούς ακέραιους 1,2 ... τους οποίους χρησιμοποιεί για την κατασκευή ενός μεγαλύτερου συστήματος, τους θετικούς ρητούς αριθμούς (πηλίκα θετικών ακεραίων), τους αρνητικούς των και το 0. Οι ρητοί αριθμοί χρησιμοποιούνται για την κατασκευή των άρρητων αριθμών (όπως ο $\sqrt{2}$ και ο π που δεν είναι ρητοί). Οι ρητοί και οι άρρητοι μαζί αποτελούν τους πραγματικούς αριθμούς. Επειδή όμως στον Απειροστικό Λογισμό δεν μας ενδιαφέρουν τόσο πολύ οι μέθοδοι κατασκευής των πραγματικών αριθμών, αλλά μόνο οι ιδιότητές τους, γι' αυτό δίνουμε μια αξιωματική θεμελίωση αυτών.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μη κενό σύνολο $\mathbb{R}$, που λέγεται σύνολο των πραγματικών αριθμών, που ικανοποιεί τα παρακάτω δέκα αξιώματα. Τα αξιώματα αυτά χωρίζονται σε τρεις ομάδες. **Αξιώματα σώματος, αξιώματα διάταξης και αξίωμα πληρότητας (ή αξίωμα του ελάχιστου άνω φράγματος ή αξίωμα της συνέχειας).**

I. Αξιώματα σώματος

Αξίωμα 1. $x + y = y + x, x.y = y.x$ **(αντιμεταθετικότητα)**

Αξίωμα 2. $x+(y+z) = (x+y)+z, x(y.z) = (x.y).z$ **(προσεταιριστικότητα)**

Αξίωμα 3. $x(y + z) = x.y + x.z$ **(επιμεριστικότητα)**

Αξίωμα 4. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς x και y υπάρχει πραγματικός z τέτοιος ώστε: $x + z = y$. **Συμβολίζουμε** $z = y - x$. **Το αριθμό** $x - x$ **συμβολίζουμε με 0. Γράφουμε** $-x$ **αντί** $0 - x$ **και λέμε τον** $-x$ **αρνητικό του** x.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αξίωμα 5. Υπάρχει ένας τουλάχιστο πραγματικός αριθμός $x \neq 0$. Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί με $x \neq 0$ τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός z τέτοιος ώστε: $x.z = y$. Συμβολίζουμε $z = \frac{y}{x}$. Τον αριθμό $\frac{x}{x}$ συμβολίζουμε με 1 και τον $\frac{1}{x}$ με $x \neq 0$ τον λέμε αντίστροφο του x.

II. Αξιώματα διάταξης.

Αξίωμα 6. Ισχύει ακριβώς μια από τις σχέσεις : $x = y, x < y, x > y$ (Νόμος της τριχοτομίας)

Αξίωμα 7. Αν $x < y$, τότε για κάθε z έχουμε $x + z < y + z$ (Νόμος της διαγραφής)

Αξίωμα 8. Αν $x > 0$ και $y > 0$ τότε $x.y > 0$.

Αξίωμα 9. Αν $x > y$ και $y > z$ τότε $x > z$ (Μεταβατική ιδιότητα).

III. Αξίωμα πληρότητας.

Πριν διατυπώσουμε το τελευταίο αξίωμα ας δώσουμε μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 1.1 Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbf{R}$ θα λέγεται άνω φραγμένο, αν υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε: $x \leq M, \forall x \in A$.

Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbf{R}$ θα λέγεται κάτω φραγμένο, αν υπάρχει αριθμός m τέτοιος ώστε: $m \leq x, \forall x \in A$.

Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbf{R}$ θα λέγεται φραγμένο, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Ο αριθμός M λέγεται ένα άνω φράγμα του A και ο m ένα κάτω φράγμα του A. Τα άνω και κάτω φράγματα, αν αυτά υπάρχουν, δεν είναι μοναδικά. Γιατί αν ο αριθμός M είναι άνω φράγμα του A, τότε κάθε αριθμός μεγαλύτερός του είναι επίσης άνω φράγμα. Επίσης αν ο αριθμός m είναι κάτω φράγμα του A, τότε όλοι οι αριθμοί οι μικρότεροι από τον m είναι κάτω φράγματα.

Από τον ορισμό προκύπτει ακόμα αμέσως ότι, ένα σύνολο A είναι φραγμένο, αν και μόνον αν, υπάρχει αριθμός M, τέτοιος ώστε:

$$|x| \leq M, \forall x \in A.$$

Ορισμός 1.2 Ένας αριθμός M θα λέγεται supremum ενός συνόλου $A \subseteq \mathbf{R}$ και θα συμβολίζεται με supA, αν το M είναι άνω φράγμα του A και είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε άλλο άνω φράγμα του A.

Ένας αριθμός m θα λέγεται infimum ενός συνόλου $A \subseteq \mathbf{R}$ και θα συμβολίζεται με infA, αν το m είναι κάτω φράγμα του A και είναι μεγαλύτερο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ή ίσο από κάθε άλλο κάτω φράγμα του A.

Αν ένα σύνολο δεν είναι άνω φραγμένο, τότε $supA = +\infty$ και αν δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε $infA = -\infty$. Στην εκφυλισμένη περίπτωση του κενού συνόλου θέτουμε $sup\emptyset = -\infty$ και $inf\emptyset = +\infty$

Παρατήρηση 1.3

Αν $supA \in A$ τότε αυτό λέγεται **μέγιστο** του A και συμβολίζεται με $max A$. Αντίστοιχα, αν $infA \in A$ τότε αυτό λέγεται **ελάχιστο** του A και συμβολίζεται με $min A$.

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το

Αξίωμα 10 Κάθε μη κενό υποσύνολο πραγματικών αριθμών που είναι άνω φραγμένο, έχει ελάχιστο άνω φράγμα, δηλ. έχει supremum.

Το Αξίωμα αυτό λέγεται **αξίωμα του συνεχούς ή αξίωμα του ελάχιστου άνω φράγματος ή αξίωμα της πληρότητας.**

Με πιο απλά λόγια, το Αξίωμα 10, λέει πως η ευθεία των πραγματικών αριθμών δεν έχει **"τρύπες"**. Αν υπάρχει μια τρύπα στην πραγματική ευθεία, τότε το σύνολο των αριθμών που βρίσκονται αριστερά από την τρύπα δεν έχει supremum.

Από πρώτη ματιά το αξίωμα πληρότητας φαίνεται κάπως παράξενο. Έχει διατυπωθεί μόνο για άνω φράγματα και το supremum.Τα κάτω φράγματα φαίνεται να μην αξίζουν ιδιαίτερης προσοχής. Τα πράγματα όμως δεν είναι έτσι. Το αξίωμα της πληρότητας εξασφαλίζει ότι μη κενά κάτω φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών έχουν infimum. (Βλέπε άσκηση 1.3)

Υπάρχουν πολλές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών που φαίνονται προφανείς, αλλά στην απόδειξή τους εμπλέκεται το αξίωμα της πληρότητας. Σαν μια πρώτη εφαρμογή θα δούμε την **Αρχιμήδεια ιδιότητα**, ότι το σύνολο $I\!N$ δεν είναι άνω φραγμένο στο $I\!R$.

Θεώρημα 1.4 (Αρχιμήδεια ιδιότητα) Αν $x \in R$, τότε υπάρχει $\nu \in N$ τέτοιο ώστε: $\nu > x$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε $\nu \leq x, \forall \nu \in N$ που σημαίνει ότι το x είναι άνω φράγμα του $I\!N$. Άρα (Αξίωμα 10) υπάρχει το $supI\!N = \alpha$. Αλλά αν $\nu \in I\!N \Rightarrow \nu + 1 \in I\!N \Rightarrow \nu + 1 \leq \alpha \Rightarrow \nu \leq \alpha - 1$. Δηλ. το $\alpha - 1$ είναι άνω φράγμα του $I\!N$, γνήσια μικρότερο του α, άτοπο. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πόρισμα. Αν $x, z \in \mathbf{R}$ με $y > 0, z > 0$ τότε:

α) Υπάρχει $\nu \in \mathbf{N} : z < \nu y$.

β) Υπάρχει $\nu \in \mathbf{N} : 0 < \frac{1}{\nu} < y$.

γ) Υπάρχει $\nu \in \mathbf{N} : \nu - 1 \leq z < \nu$.

Απόδειξη

α) Αφού $x = \frac{z}{y} > 0$, υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε: $\frac{z}{y} = x < \nu$ και άρα $z < \nu y$.

β) Προκύπτει από το α) για $z = 1$.

γ) Η Αρχιμήδεια ιδιότητα εγγυάται ότι το υποσύνολο $\{\mu \in \mathbb{N} : z < \mu\}$ του $\mathbb{N}$ είναι μη κενό, και άρα έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω ν. Τότε $\nu - 1 \leq z < \nu$. •

Θεώρημα 1.5 Αν $x \in \mathbf{R}$, τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος α, τέτοιος ώστε: $\alpha \leq x < \alpha + 1$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε πρώτα την ύπαρξη και μετά το μονοσήμαντο.

Ύπαρξη. Από το Θεώρημα 1.4 υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: $x < m$. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχει ακέραιος p, τέτοιος ώστε $p < x$. Πραγματικά· υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε: $-x < k \Rightarrow -k < x$. Θέτουμε λοιπόν $p = -k$ και έχουμε:

$$p < x < m \Rightarrow p < x < p + (m - p),\ p, m \in Z.$$

Ας πάρουμε τώρα το σύνολο

$$A = \{\nu \in \mathbb{N} : x < p + \nu\}.$$

Προφανώς $A \neq \emptyset$, αφού $m - p \in A$ Σαν μη κενό σύνολο λοιπόν το A, υποσύνολο του $\mathbb{N}$ θα έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το ν_0. Αν $\nu_0 = 1$ τότε έχουμε $p < x < p + 1$ και το Θεώρημα ισχύει με $p = \alpha$. Αν $\nu_0 > 1$, τότε αφού $\nu_0 - 1 < \nu_0$, και το γεγονός ότι το ν_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του A, συνεπάγεται ότι:

$$p + \nu_0 - 1 \leq x < p + \nu_0.$$

Θέτοντας $\alpha = p + \nu_0 - 1$ έχουμε ότι $\alpha + 1 = p + \nu_0$ και $\alpha \leq x < \alpha + 1$ που τελειώνει και την απόδειξη της ύπαρξης. ○

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μονοσήμαντο. Θα αποδείξουμε ότι ο ακέραιος α με την ιδιότητα $\alpha \leq x < \alpha + 1$ είναι μοναδικός. Ας υποθέσουμε ότι και ο ακέραιος α_1, ικανοποιεί το Θεώρημα. Δηλ. $\alpha_1 \leq x < \alpha_1 + 1$. Αν $\alpha_1 \neq \alpha$ θα έχουμε $\alpha_1 < \alpha$ ή $\alpha_1 > \alpha$. Στην πρώτη περίπτωση, $\alpha_1 < \alpha \leq x < \alpha_1 + 1$. Αλλά τότε $\alpha_1 < \alpha < \alpha_1 + 1$ με α και α_1 ακέραιους, πράγμα αδύνατο. Έτσι λοιπόν η περίπτωση $\alpha_1 < \alpha$ είναι αδύνατη. Με παρόμοιο σκεπτικό αποδεικνύουμε ότι και η περίπτωση $\alpha_1 > \alpha$ είναι αδύνατη. Άρα δεν είναι $\alpha_1 \neq \alpha$ αλλά $\alpha_1 = \alpha$, που τελειώνει και την απόδειξη. •

Ο ακέραιος στο προηγούμενο Θεώρημα λέγεται **ακέραιο μέρος του** x και συμβολίζεται με $[x]$. Ισχύει δηλ. $[x] \leq x < [x]+1$ και $0 \leq x-[x] < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Με βάση το Αξίωμα 10, θα αποδείξουμε τώρα ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός που το τετράγωνό του είναι ίσο με 2.

Θεώρημα 1.6 Υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε: $c^2 = 2$.

Απόδειξη

Έστω S το σύνολο που περιέχει όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x τέτοιους ώστε $x^2 < 2$, δηλ.

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \quad \text{και} \quad x^2 < 2\}.$$

Τότε $1 \in S$ και άρα το S είναι μη κενό. Επιπλέον, αν $x > 2$, τότε $x^2 > 4$ και $x \notin S$. Άρα $x \leq 2, \forall x \in S$ και έτσι το S είναι άνω φραγμένο. Από το αξίωμα της πληρότητας αυτό έχει supremum, έστω c. Θα αποδείξουμε ότι $c^2 = 2$. Θα το αποδείξουμε αποκλείοντας τις δυνατότητες $c^2 < 2$ και $c^2 > 2$.

Ας υποθέσουμε ότι $c^2 < 2$. Τότε θέτουμε

$$h = \frac{2-c^2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{c^2}{4}. \tag{1}$$

Τότε, προφανώς

$$0 < h < \frac{1}{2},$$

και επομένως

$$c < \frac{c}{1-h}. \tag{2}$$

Από την (1) έχουμε:

$$\left(\frac{c}{1-h}\right)^2 = \frac{c^2}{1-2h+h^2} < \frac{c^2}{1-2h} = \frac{c^2}{1-\left(1-\frac{c^2}{2}\right)} = 2,$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλ.

$$\left(\frac{c}{1-h}\right)^2 < 2$$

και $\frac{c}{1-h} \in S$. Αφού, από την (2), $\frac{c}{1-h} > c = supS$, αυτό είναι άτοπο, αφού δεν μπορεί να υπάρχουν στοιχεία του S μεγαλύτερα από το supremum.

Ας υποθέσουμε ότι $c^2 > 2$. Τότε θέτουμε

$$k = \frac{c^2-2}{2c^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{c^2}. \tag{3}$$

Τότε, προφανώς

$$0 < k < \frac{1}{2}$$

και επομένως

$$0 < c(1-k) < c. \tag{4}$$

Επιπλέον

$$[c(1-k)]^2 = c^2(1-2k+k^2) > c^2(1-2k) = c^2\left(1-\left\{1-\frac{2}{c^2}\right\}\right) = 2.$$

Αν $x \in S$, τότε $x^2 < 2 < [c(1-k)]^2$, και άρα $0 < x < c(1-k)$ όταν $x \in S$. Αυτό σημαίνει ότι το $c(1-k)$ είναι άνω φράγμα του S, καιμάλιστα μικρότερο του c γιατί από την (4) έχουμε $c(1-k) < c = supS$.

Αφού λοιπόν δεν ισχύει ούτε $c^2 < 2$ ούτε $c^2 > 2$, αναγκαστικά θα είναι $c^2 = 2$. •

Είδαμε παραπάνω ότι υπάρχει τουλάχιστο ένας άρρητος αριθμός, ο $\sqrt{2}$. Για την ακρίβεια υπάρχουν **περισσότεροι άρρητοι** από τους ρητούς, με την έννοια ότι το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο[1], ενώ των άρρητων δεν είναι. Πέρα από αυτήν την διαφοροποίηση όμως και το σύνολο των ρητών και το σύνολο των άρρητων είναι **πυκνά** στο $\mathbb{R}$, με την έννοια ότι μεταξύ δυο πραγματικών αριθμών υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι αριθμοί.

Θεώρημα 1.7 *Έστω* $x, y \in \mathbf{R}$ *με* $x < y$. *Τότε:*

---

[1]–Δυο σύνολα A και B λέγονται ισοδύναμα ($A \sim B$) αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $f : A \to B$.

– Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ λέγεται **πεπερασμένο**, αν υπάρχει φυσικός $\nu : A \sim \{1, \ldots, \nu\}$. Κάνουμε την σύμβαση να θεωρούμε το $\emptyset$ σύνολο ως πεπερασμένο.

–Ένα σύνολο που δεν ειναι πεπερασμένο λέγεται **απέραντο**.

–Ένα σύνολο $A \subset R$ λέγεται **αριθμήσιμο** αν $A \sim \mathbb{N}$ και **το πολύ αριθμήσιμο** αν είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

α) Υπάρχει $\rho \in \mathbf{Q} : x < \rho < y$.

β) Υπάρχει $r \in (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) : x < r < y$.

Απόδειξη

α) Έστω $0 < x < y$. Από το Θεώρημα 1.4 υπάρχει $k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k} < y - x$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\nu \in \mathbb{N} : \frac{\nu}{k} > x\}$. Προφανώς $A \neq \emptyset$, από το Πόρισμα του Θεωρήματος 1.4 και επομένως επειδή $A \subseteq \mathbb{N}$, το A έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω ν_0. Τότε $\frac{\nu_0}{k} > x$ και $\frac{\nu_0 - 1}{k} \leq x$ (γιατί διαφορετικά $\nu_0 - 1 \in A$, άτοπο). Δηλ. $\frac{\nu_0}{k} \in Q$ και

$$x < \frac{\nu_0}{k} \leq x + \frac{1}{k} < x + (y - x) = y.$$

Έστω τώρα $x \leq 0 < y$. Τότε (Θεώρημα 1.4) υπάρχει $k \in N : \frac{1}{k} < y$ δηλ. $x < \frac{1}{k} < y$. Τέλος αν $x < y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -y < -x$. Σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση υπάρχει $\rho' \in Q : -y < \rho' < -x \Rightarrow x < -\rho' < y$.

β) Σύμφωνα με το α) μεταξύ των πραγματικών $\frac{x}{\sqrt{2}}$ και $\frac{y}{\sqrt{2}}$ υπάρχει ρητός $\rho \neq 0 : \frac{x}{\sqrt{2}} < \rho < \frac{y}{\sqrt{2}} \Rightarrow x < \rho\sqrt{2} < y$ και $r = \rho\sqrt{2}$ είναι άρρητος[2]. •

Πόρισμα. Μεταξύ δυο πραγματικών αριθμών, υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι αριθμοί (άρα και άπειροι πραγματικοί αριθμοί).

Θα τελειώσουμε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύοντας ότι το **Αξίωμα 10 ισχύει μόνον στο $\mathbb{R}$ και δεν ισχύει στο Q, το σύνολο των ρητών αριθμών. Δηλαδή υπάρχουν μη κενά υποσύνολα του Q, τα οποία είναι άνω φραγμένα από ρητό αριθμό, αλλά το supremum τους δεν είναι ρητός.**

Θεώρημα 1.8 Το σύνολο των ρητών αριθμών Q δεν είναι πλήρες, δηλ. υπάρχουν άνω φραγμένα μη κενά υποσύνολα του Q, χωρίς supremum στο Q.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε το σύνολο $S = \{x \in Q : x > 0 \quad \text{και} \quad x^2 < 2\}$. Είναι $S \neq \emptyset$, αφού $1 \in S$. Επίσης το S είναι άνω φραγμένο από το 2, αφού $2^2 > 2$. Έστω A το σύνολο όλων των ρητών αριθμών α τέτοιων ώστε το α να είναι άνω φράγμα του S, δηλ.

$$A = \{\alpha \in Q : \alpha \quad \text{είναι άνω φράγμα του} \quad S\}.$$

[2]Γιατί αν $\rho\sqrt{2}$ ήταν ρητός, τότε και ο $\frac{1}{\rho}.\rho\sqrt{2} = \sqrt{2}$ θα ήταν ρητός, άτοπο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θα αποδείξουμε ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, δηλ. ότι το αξίωμα της πληρότητας δεν ικανοποιείται για το Q. Αν $\alpha \in A$ τότε $\alpha > \sqrt{2}$, γιατί αν $\alpha < \sqrt{2}$ θα υπάρχει θετικός ρητός $\frac{p}{q}$ τέτοιος ώστε: $\alpha < \frac{p}{q} < \sqrt{2}$. Αφού $\frac{p}{q} < \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 < 2 \Rightarrow \frac{p}{q} \in S$ που σημαίνει ότι το α δεν είναι άνω φράγμα του S. Δηλαδή αν $\alpha < \sqrt{2} \Rightarrow \alpha \notin A$. Συνεπώς αν $\alpha \in A$ τότε το α δεν είναι μικρότερο από το $\sqrt{2}$. Αφού ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος και όλα τα στοιχεία του A είναι ρητοί συμπεραίνουμε ότι αν $\alpha \in A$ τότε $\alpha > \sqrt{2}$.

Έστω τώρα α_1 ένα τυχαίο στοιχείο του A. Τότε $\alpha_1 > \sqrt{2}$ οπότε υπάρχει ρητός $\frac{p'}{q'}$ τέτοιος ώστε: $\alpha_1 > \frac{p'}{q'} > \sqrt{2}$. Επιπλέον αν $x \in S$ τότε $x^2 < 2 < \left(\frac{p'}{q'}\right)^2$ και έτσι ο $\frac{p'}{q'}$ είναι άνω φράγμα του S. Συνεπώς $\frac{p'}{q'} \in A$. Αυτό συνεπάγεται ότι αν α_1 είναι ένα τυχαίο στοιχείο τουA, τότε υπάρχει ένα στοιχείο $\frac{p'}{q'}$ του A με $\frac{p'}{q'} < \alpha_1$. Έτσι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Αυτό αποδεικνύει ότι το Q δεν ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας. •

Σημείωση

Μια διαφορετική απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος είναι η παρακάτω:

Ας θεωρήσουμε το σύνολο $S = \{x \in Q : x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}$. Είναι $S \neq \emptyset$, αφού $1 \in S$. Επίσης το S είναι άνω φραγμένο από το 2, αφού $2^2 > 2$. Έστω ότι ο ρητός μ είναι supremum του S. Από το Αξίωμα 6, θα ισχύει ένα από τα εξής:

$$(i) \quad \mu^2 < 2 \quad (ii) \quad \mu^2 > 2 \quad (iii) \quad \mu^2 = 2.$$

Θεωρούμε τον ρητό αριθμό $y = \frac{4+3\mu}{3+2\mu}$. Τότε παίρνουμε:

$$\mu - y = \frac{2(\mu^2 - 2)}{3 + 2\mu} \qquad \text{και} \qquad 2 - y^2 = \frac{2 - \mu^2}{(3 + 2\mu)^2}.$$

(i) Έστω $\mu^2 < 2$. Τότε $\mu - y < 0$ και $2 - y^2 > 0$. Δηλ. $\mu < y$ και $y \in S$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $\mu = supS$ και δεν μπορεί να υπάρχουν στοιχεία του S μεγαλύτερα του $supS = \mu$.

(ii) Έστω $\mu^2 > 2$. Τότε $\mu - y > 0$ και $2 - y^2 < 0$. Δηλ. $\mu > y$ και $y^2 > 2$. Αυτό σημαίνει ότι το y είναι άνω φράγμα του S, μικρότερο του $supS$, άτοπο.

(iii) Έστω $\mu^2 = 2$. Τότε $\mu = \sqrt{2}$ που δεν είναι ρητός[3]. •

[3]Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ρητός μ τέτοιος ώστε $\mu^2 = 2$ και $\mu = \frac{p}{q}$ όπου p και q

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σημείωση

Όπως είναι γνωστό ισχύουν

$$\mathbb{R} = Q \cup \mathbb{I}, \; Q \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

$$Q = Z \cup (Q - Z), \; Z \cap (Q - Z) = \emptyset$$

όπου $Q - Z$ είναι το σύνολο των γνήσιων κλασμάτων , δηλ.

$$\left\{ \frac{p}{q}, p \in Z, q \in \mathbb{N}, q \neq 1, MK\Delta(p,q) = 1 \right\}.$$

Το σύνολο των άρρητων αριθμών $\mathbb{I}$ είναι η ένωση των **αλγεβρικών άρρητων αριθμών** και των **υπερβατικών αριθμών** σύμφωνα με το επόμενο ορισμό:

Ο $x \in \mathbf{R}$ θα λέγεται αλγεβρικός άρρητος, αν και μόνον αν, υπάρχει $\nu \in \mathbf{N}$, $\nu \geq 2$ και $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbf{Z}$:

$$\alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x + \alpha_\nu = 0,$$

αλλά δεν υπάρχει γραμμική εξίσωση $\beta_0 x + \beta_1 = 0$, $\beta_0, \beta_1 \in \mathbf{Z}$ για την οποία το x να είναι λύση.

Ο $x \in \mathbf{R}$ θα λέγεται υπερβατικός, αν και μόνον αν, είναι άρρητος αλλά όχι αλγεβρικός άρρητος.

Για παράδειγμα ο $x = 3$ ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 = 9$, αλλά και την $x - 3 = 0$. Άρα δεν είναι αλγεβρικός άρρητος. Ο $x = \sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός άρρητος, γιατί $x^2 - 2 = 0$, αλλά δεν ικανοποιεί την $\beta_0 x + \beta_1 = 0$ για οποιοδήποτε β_0 και β_1.

Υπερβατικοί αριθμοί είναι π.χ οι e, π, $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ κ.τ.λ. Υπάρχουν όμως και αριθμοί που δεν είναι ακόμα γνωστό αν είναι ρητοί ή άρρητοι, όπως για παράδειγμα η σταθερή των Euler -Mascheroni

$$\gamma = lim \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu} - log\, \nu \right) = 0.57721566...$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Έστω F ένα διατεταγμένο και Αρχιμήδειο σώμα (όχι αναγκαστικά πλήρες). Να αποδείξετε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\epsilon \in \mathbf{F})(\exists \nu \in \mathbf{N}) : \frac{1}{2^\nu} < \epsilon.$$

θετικοί ακέραιοι χωρίς να έχουν κοινό παράγοντα. Τότε $(\frac{p}{q})^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$. Συνεπώς ο p^2 διαιρείται με το 2 και άρα $p = 2k$. Όμως τότε $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ και άρα ο q^2 διαιρείται με το 2 και επομένως $q = 2\lambda$. Τότε όμως α p και q έχουν κοινό παράγοντα το 2, πράγμα άτοπο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Απόδειξη

Από την Αρχιμήδειο ιδιότητα, Θεώρημα 1.4, υπάρχει $\nu \in \mathbb{N} : \nu > \frac{1}{\epsilon}$. Αλλά $2^\nu > \nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$.[4] Επομένως $2^\nu > \nu > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{2^\nu} < \epsilon$.

2.(Θεώρημα του Ευκλείδη-Αλγοριθμική διαίρεση) Αν α και β είναι ακέραιοι, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q και r τέτοιοι ώστε:

$$\alpha = \beta q + r, 0 \leq r < |\beta|.$$

Απόδειξη

Έστω $\beta > 0$. Θέτουμε $q = [\frac{\alpha}{\beta}]$. Τότε

$$q = \left[\frac{\alpha}{\beta}\right] \leq \frac{\alpha}{\beta} < \left[\frac{\alpha}{\beta}\right] + 1 = q + 1.$$

Άρα

$$\beta q \leq \alpha < \beta q + \beta.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $0 \leq \alpha - \beta q < \beta$. Αν $r = \alpha - \beta q$ τότε προφανώς οι q και r είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\alpha = \beta q + r$ και $0 \leq r < \beta$.

Θα αποδείξουμε το μονοσήμαντο των q και r. Ας υποθέσουμε ότι και $\alpha = \beta q_1 + r_1$,όπου q_1, r_1 είναι ακέραιοι και $0 \leq r_1 < \beta$. Τότε θα έχουμε:

$$\beta q + r = \beta q_1 + r_1.$$

Αυτή συνεπάγεται ότι

$$\beta(q_1 - q) = r - r_1.$$

Αφού $0 \leq r < \beta$ και $-\beta < -r_1 \leq 0$ τότε $-\beta < r - r_1 < \beta$. Επομένως

$$-\beta < \beta(q - q_1) < \beta$$

ή

$$-1 < q - q_1 < 1.$$

Αφού $q - q_1$ είναι ακέραιος θα είναι $q - q_1 = 0$ και άρα $q = q_1$. Τότε όμως και $r = r_1$ που συμπληρώνει την απόδειξη σ' αυτήν την περίπτωση.

Αν $\beta < 0$ εφαρμόζουμε τα προηγούμενα θέτοντας όπου β το $|\beta|$. •

[4]Από την ανισότητα του Bernoulli είναι $2^\nu = (1+1)^\nu \geq 1 + \nu > \nu$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

§ 1.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Θεώρημα 1.9 Το supremum και το infimum ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, όταν αυτά υπάρχουν, ορίζονται μονοσήμαντα.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $M_1 = supA$ και $M_2 = supA$. Τότε και το M_1 και το M_2 είναι άνω φράγματα του A. Αφού $M_1 = supA$ συνεπάγεται ότι το M_1 θα είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε άλλο άνω φράγμα. Άρα $M_1 \leq M_2$. Με το ίδιο όμως σκεπτικό και $M_2 \leq M_1$ και συνεπώς $M_1 = M_2$.

Παρόμοια εργαζόμαστε και για το infimum. •

Θεώρημα 1.10 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Τότε το $M \in \mathbb{R}$ είναι το supremum του A, αν και μόνον αν, το M είναι άνω φράγμα του A, και για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε: $x > M - \epsilon$. Δηλ.

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha), & x \leq M, \forall x \in A \\ \beta), & (\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A) : M - \epsilon < x. \end{cases}$$

Σημείωση

Το Θεώρημα αυτό λέει ότι υπάρχουν στοιχεία του συνόλου πολύ κοντά στο $supA$. Πιο απλά, λέει ότι αν το M είναι στα δεξιά του συνόλου A, τότε δεν υπάρχει χάσμα μεταξύ αυτού και του συνόλου A, αφού για οποιοδήποτε μικρό $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ένα στοιχείο x του A πιο κάτω από το M και πολύ κοντά του σε απόσταση ϵ. **Προσοχή, αυτή η παρατήρηση προσπαθεί να επεξηγήσει το νόημα του Θεωρήματος και σε καμμιά περίπτωση δεν αποτελεί απόδειξη.**

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.10

Έστω $M = supA$ και $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε: $M - \epsilon < x$. Ας υποθέσουμε ότι τέτοιο x δεν υπάρχει. Τότε θα έχουμε: $x \leq M - \epsilon, \forall x \in A$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το $M - \epsilon$ είναι άνω φράγμα του A γνήσια μικρότερο του M και άρα το M δεν είναι το $supA$, που είναι άτοπο γιατί αντίκειται στην υπόθεση.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το M ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος, δηλ. $x \leq M, \forall x \in A$ και $(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A) : M - \epsilon < x \leq M$. Αν το M δεν είναι το $supA$, θα υπάρχει ένα $M_0 < M$ τέτοιο ώστε: $x \leq M_0, \forall x \in A$. Έστω $\epsilon = M - M_0 > 0$. Τότε από την δεύτερη συνθήκη, υπάρχει ένα $x \in A$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

τέτοιο ώστε

$$M-(M-M_0)<x\leq M$$

δηλ. $M_0 < x$ που αντίκειται στην υπόθεση ότι το M_0 είναι άνω φράγμα του Α. Συνεπώς $M = sup\, A$ και το Θεώρημα αποδείχτηκε. •

Θεώρημα 1.11 Έστω $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}$. **Τότε το** $\mathbf{m} \in \mathbf{R}$ **είναι το infimum του A, αν και μόνον αν, το m είναι κάτω φράγμα του A, και για κάθε** $\epsilon > 0$, **υπάρχει** $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ **τέτοιο ώστε:** $\mathbf{x} < \mathbf{m} + \epsilon$. **Δηλ.**

$$\mathbf{m} = \mathbf{infA} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha), & m \leq x, \forall x \in A \\ \beta), & (\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A) : x < m + \epsilon \,. \end{cases}$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν του Θεωρήματος 1.9 και παραλείπεται (βλέπε άσκηση 1.1). •

Θεώρημα 1.12 Αν $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Z}$ **είναι άνω φραγμένο, τότε** $\mathbf{supA} \in \mathbf{A}$

Απόδειξη

Αφού $A \subseteq Z$ και το $\mathbb{R}$ είναι πλήρες (Αξίωμα 10, §1.1) το $sup\, A \in R$, υπάρχει. Υποθέτουμε ότι $sup\, A = M \notin A$. Τότε $x < M, \forall x \in A$ και από το Θεώρημα 1.9 για $\epsilon_1 = 1$ υπάρχει $x_1 \in A$ τέτοιο ώστε: $M - 1 < x_1 < M$. Επίσης από το Θεώρημα 1.9 για $\epsilon_2 = M - x_1 > 0$, υπάρχει $x_2 \in A$ τέτοιο ώστε: $M - (M - x_1) = x_1 < x_2 < M$. Έτσι λοιπόν βρήκαμε δυο διαφορετικούς ακέραιους x_1 και x_2 με διαφορά μικρότερη του 1, πράγμα άτοπο. Άρα $sup\, A \in A$. •

Θεώρημα 1.13 Έστω $A \subseteq \mathbf{R}$ **ένα μη κενό και φραγμένο σύνολο. Θέτουμε**

$$\lambda\mathbf{A} = \{\lambda x : x \in \mathbf{A}, \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Τότε

$$\mathbf{i)sup}(\lambda\mathbf{A}) = \begin{cases} \lambda inf\, A, & \lambda < 0 \\ \lambda sup A, & \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{ii)inf}(\lambda\,\mathbf{A}) = \begin{cases} \lambda inf\, A, & \lambda \geq 0 \\ \lambda sup\, A, & \lambda < 0 \end{cases}$$

Απόδειξη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

i) Έστω $M = sup A$ και $\lambda > 0$. Τότε

$$x \leq M, \forall x \in A$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists x_1 \in A) : x_1 > M - \frac{\epsilon}{\lambda}.$$

Συνεπώς για κάθε στοιχείο x' του λA έχουμε $x' \leq \lambda M$ και υπάρχει ένα στοιχείο $x_1' \in A : x_1' > \lambda M - \epsilon$. Άρα $sup \lambda A = \lambda M = \lambda sup A$.

Έστω τώρα $\lambda < 0$. Τότε θα έχουμε:

$$inf A \leq x, \forall x \in A \Rightarrow \lambda x \leq \lambda inf A, \forall x \in A$$

και υπάρχει $x_1 \in A : x_1 < inf A - \frac{\epsilon}{\lambda} \Rightarrow \lambda inf A - \epsilon < \lambda x_1$, (αφού $\lambda < 0 \Rightarrow -\lambda > 0$). Συνεπώς $sup \lambda A = \lambda inf A$.

ii) Αφήνεται για άσκηση (άσκηση 1.1). •

Παρατήρηση 1.14

Αν το Α δεν είναι φραγμένο, τότε και το λA δεν είναι φραγμένο, Έτσι οι σχέσεις i) και ii) του Θεωρήματος 1.13 ισχύουν και στην περίπτωση που το Α δεν είναι φραγμένο, αρκεί να ορίσουμε $\lambda(+\infty) = +\infty$ αν $\lambda > 0$ και $\lambda(+\infty) = -\infty$ αν $\lambda < 0$.

Παρατήρηση 1.15

Αν $\alpha < M, \forall \alpha \in A$ τότε συνεπάγεται ότι $sup A \leq M$. Π.χ αν $A = (0, 1)$ τότε $\alpha < 1, \forall \alpha \in (0, 1)$ αλλά $sup A = 1$.

Όμοια αν $\alpha > m, \forall \alpha \in A$ τότε $inf A \geq m$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το supA αν $A = \{1 - \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbf{N}\}$.

Λύση

Επειδή $\nu \in N$ τότε $\frac{1}{\nu} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{\nu} < 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\nu} < 1$. Άρα το 1 είναι άνω φράγμα του Α. Είναι όμως το 1 το $sup A$; Για δοσμένο $\epsilon > 0$ διαλέγουμε το $\nu > \frac{1}{\epsilon}$. Τότε $1 - \frac{1}{\nu} > 1 - \epsilon$ και αφού $1 - \frac{1}{\nu} \in A$, από το Θεώρημα 1.9, συνεπάγεται ότι $sup A = 1$.

2. Έστω $A \subseteq \mathbf{R}$ ένα μη κενό και φραγμένο σύνολο. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{inf A = sup\{x \in R : x \text{ είναι κάτω φράγμα του } A\}}$$

Απόδειξη

Ας θέσουμε $B = \{x \in \mathbb{R} : x$ είναι κάτω φράγμα του $A\}$. Τότε $inf A \geq y, \forall y \in B$ και συνεπώς

$$inf A \geq sup B. \tag{1}$$

Αλλά $inf A \in B$ και άρα

$$inf A \leq sup B. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι $inf A = sup B$.

3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη κενό και φραγμένο σύνολο και B ένα μη κενό υποσύνολο του A. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{infA \leq infB \leq supB \leq supA}.$$

Απόδειξη

Έστω $\alpha \in B$. Τότε $\alpha \in A$ και επομένως $inf A \leq \alpha \leq sup A, \forall \alpha \in B$, δηλ. τα $sup A, inf A$ είναι αντίστοιχα άνω και κάτω φράγματα του B. Επειδή όμως το $sup B$ είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματα και το $inf B$ είναι το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα, θα ισχύουν:

$$sup B \leq sup A \quad \text{και} \quad inf A \leq inf B. \tag{1}$$

Επειδή όμως $\forall \alpha \in B$ ισχύει $inf B \leq \alpha$ και $\alpha \leq sup B$ θα είναι

$$inf B \leq sup B. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$inf A \leq inf B \leq sup B \leq sup A.$$

4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ δυο μη κενά και φραγμένα σύνολα. Ορίζουμε

$$\mathbf{C = \{x : x = \alpha + \beta, \alpha \in A, \beta \in B\}}.$$

Να αποδείξετε ότι το $inf C$ και το $sup C$ υπάρχουν, και μάλιστα ισχύει:

i) $\mathbf{infC = infA + infB}$

ii) $\mathbf{supC = supA + supB}$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την ii) αφήνοντας την i) για άσκηση (άσκηση 1.1).

Έστω $M = sup A$ και $N = sup B$, που υπάρχουν αφού τα σύνολα A και B είναι φραγμένα. Τότε $\alpha \leq M, \forall \alpha \in A$ και $\beta \leq N, \forall \beta \in B$. Αν $x \in C$ τότε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

$x = \alpha + \beta \leq M + N$, δηλ. το $M + N$ είναι άνω φράγμα του C και άρα το $supC$ υπάρχει. Αν αυτό είναι K, τότε

$$K \leq M + N. \tag{1}$$

Θα αποδείξουμε ότι και $M + N \leq K$. Από τον ορισμό των $sup\,A$ και $sup\,B$ έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha_1 \in A) : M - \epsilon < \alpha_1$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \beta_1 \in B) : N - \epsilon < \beta_1.$$

Επομένως

$$M + N - 2\epsilon < \alpha_1 + \beta_1 \leq K$$

(αφού $\alpha_1 + \beta_1 \in C$). Δηλαδή $M + N \leq K + 2\epsilon, \forall \epsilon > 0$. Αυτό σημαίνει ότι

$$M + N \leq K. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $K = M + N$, που αποδεικνύει και το ζητούμενο.

Σημείωση

Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήθηκε το παρακάτω Λήμμα:

Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιοι ώστε $\alpha < \beta + \epsilon, \forall \epsilon > 0$ τότε $\alpha \leq \beta$.

Η απόδειξη είναι απλή. Πραγματικά· έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, δηλ. $\beta < \alpha$. Τότε διαλέγοντας ως $\epsilon = \frac{\alpha - \beta}{2} > 0$ έχουμε:

$$\beta + \epsilon = \beta + \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{\alpha + \alpha}{2} = \alpha$$

άτοπο, αφού $\beta + \epsilon > \alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1 Να αποδείξετε το Θεώρημα 1.11 και να συμπληρώσετε τις αποδείξεις του Θεωρήματος 1.13 και της εφαρμογής 4.

1.2 Να βρεθούν τα $sup\,A$ και $inf\,A$ αν το A ορίζεται ως εξής:

i) $A = \{\frac{\nu}{\nu+1} : \nu \in \mathbb{N}\}$.

ii) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| + |x + 1| < 2\}$.

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x||x + 1| < 2\}$.

1.3 Να αποδείξετε ότι κάθε μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών, το οποίο είναι κάτω φραγμένο έχει infimum.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.4 Έστω $A \subseteq IR$, $B \subseteq IR$ δυο φραγμένα και μη κενά σύνολα. Να αποδείξετε ότι:

i) $sup(A \cup B) = max\{supA, supB\}$.

ii) $inf(A \cup B) = min\{infA, infB\}$.

iii) $infB - supA = inf\{y - x : x \in A, y \in B\}$.

§ 1.3 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ R

Θα δούμε τώρα μερικές γεωμετρικές ή τοπολογικές ιδιότητες συνόλων πραγματικών αριθμών. Οι τοπολογικές αυτές ιδιότητες είναι πολύ βασικές για τον ορισμό σημαντικών εννοιών, όπως του ορίου και της συνέχειας που θα μας απασχολήσουν σε επόμενα κεφάλαια.

Διαστήματα και περιοχές στο R

Με τον όρο **φραγμένο διάστημα**, εννοούμε το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x που βρίσκονται μεταξύ δυο πραγματικών αριθμών α και β διαφορετικών μεταξύ τους. Οι αριθμοί α και β μπορούν και οι δυο να ανήκουν στο σύνολο ή και οι δυο να μην ανήκουν στο σύνολο ή ακόμα μπορεί να ανήκει ο ένας από τους δυο. Αν τα α και β δεν ανήκουν στο σύνολο, δηλ. $\alpha < x < \beta$, τότε το φραγμένο διάστημα λέγεται **ανοιχτό** και συμβολίζεται με (α, β). Αν περιέχει τα α και β λέγετα **κλειστό** και συμβολίζεται με $[\alpha, \beta]$. Είναι δυνατόν ένα φραγμένο διάστημα να μην είναι ούτε ανοιχτό, ούτε κλειστό. Τέτοια είναι η περίπτωση που ο ένας από τους αριθμούς α και β ανήκει στο σύνολο και ο άλλος όχι. Αν $\alpha \leq x < \beta$ τότε συμβολίζουμε αυτό το διάστημα με $[\alpha, \beta)$, ενώ αν $\alpha < x \leq \beta$ γράφουμε $(\alpha, \beta]$. Για όλα τα φραγμένα διαστήματα, ανοιχτά, κλειστά ή ούτε το ένα ούτε το άλλο, οι αριθμοί α και β λέγονται **άκρα του διαστήματος**.

Παρατηρούμε ότι από την απαίτηση $\alpha \neq \beta$ συνεπάγεται ότι ένα φραγμένο διάστημα δεν μπορεί να περιέχει ένα μόνο στοιχείο ή ακόμα περισσότερο δεν μπορεί να είναι κενό.

Αν $\alpha \in IR$ τότε τα σύνολα $\{x \in IR : x < \alpha\}$, $\{x \in IR : x \leq \alpha\}$, $\{x \in IR : x > \alpha\}$, $\{x \in IR : x \geq \alpha\}$ λέγονται **μη φραγμένα ή απέραντα διαστήματα**. Από αυτά τα δυο που δεν περιέχουν το α λέγονται **ανοιχτά** και τα άλλα δυο που περιέχουν το α λέγονται **κλειστά**.

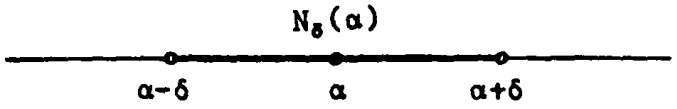
Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, δηλ το IR είναι ένα μη φραγμένο διάστημα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ένα ανοιχτό και φραγμένο διάστημα $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ όπου δ ένας θετικός πραγματικός αριθμός, λέγεται **περιοχή** του πραγματικού αριθμού α. Την συμβολίζουμε με $N_\delta(\alpha)$ όπου το α λέγεται **κέντρο** της περιοχής και το δ **ακτίνα**. Συμβολικά είναι

$$N_\delta(\alpha) = \{x \in \mathbb{R} : |x-\alpha| < \delta\}$$

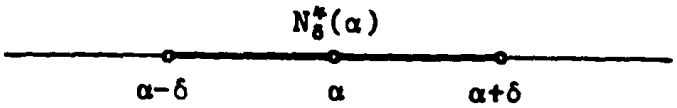
και γραφικά



Σχήμα 1.1

Αν από την περιοχή $N_\delta(\alpha)$ εξαιρέσουμε το σημείο α, τότε η περιοχή λέγεται **δακτυλική περιοχή** του α και συμβολίζεται με $N^*_\delta(\alpha)$. Είναι δηλ. $N^*_\delta(\alpha) = N_\delta(\alpha) - \{\alpha\}$ και συμβολικά και γραφικά

$$N^*_\delta(\alpha) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-\alpha| < \delta\}$$



Σχήμα 1.2

Σημεία συσσωρεύσεως

Ένας πραγματικός αριθμός α θα λέγεται σημείο συσσωρεύσεως ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν κάθε περιοχή του α περιέχει άπειρα στοιχεία του A.

Ένα σημείο συσσωρεύσεως ενός συνόλου A μπορεί να ανήκει, αλλά μπορεί και να μην ανήκει στο A.

Παράδειγμα 1.16

Έστω $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$. Τότε σημεία συσσωρεύσεως του A είναι τα στοιχεία του συνόλου $A' = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.

Παράδειγμα 1.17

Έστω $A = \{1, 2, \ldots\}$. Τότε το A δεν έχει σημεία συσσωρεύσεως. Πραγματικά· αν $\alpha = \nu \in \mathbb{N}$ τότε η περιοχή $N^*_{1/2}(\alpha)$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο του A. Αν $\alpha \neq \nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$, τότε η περιοχή $N^*_\delta(\alpha)$ με $\delta = \frac{1}{2} min\{|\alpha - x|, x \in A\}$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο του A.

$0 < |x-\alpha| < \frac{1}{2}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 1.18

Έστω $A = \{x \in \mathbb{R} : x \in [0, 1] \text{ και } x \text{ ρητός}\}$. Τότε κάθε $\alpha \in [0, 1]$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του Α, επειδή μεταξύ δυο οποιονδήποτε πραγματικών αριθμών υπάρχει ένας ρητός αριθμός (Θεώρημα 1.7).

Παράδειγμα 1.19

Έστω $A = \{1, 1 - \frac{1}{\nu}, 3 + \frac{1}{\nu}\}$. Τότε οι αριθμοί 1 και 3 είναι σημεία συσσωρεύσεως του Α.

Το ακόλουθο Θεώρημα δίνει λαβή για μια διαφορετική θεώρηση του σημείου συσσωρεύσεως.

Θεώρημα 1.20 Ένα σημείο $\alpha \in \mathbf{R}$ είναι σημείο συσσωρεύσεως ενός συνόλου $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}$, αν και μόνον αν, κάθε δακτυλική περιοχή του α περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του Α.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι το α δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του Α. Τότε υπάρχει μια δακτυλική περιοχή $N^*_{\delta_1}(\alpha)$ η οποία περιέχει το πολύ ένα πεπερασμένο υποσύνολο Β του Α. Αν $B = \emptyset$ τότε η περιοχή $N^*_{\delta_1}(\alpha)$ δεν περιέχει στοιχεία του Α. Αν $B \neq \emptyset$ τότε συμβολίζουμε με $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ τα στοιχεία του. Παίρνοντας τότε ως

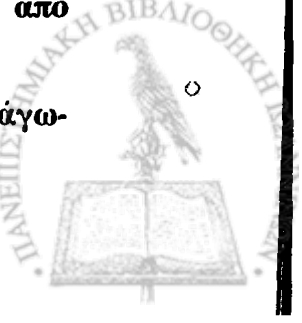
$$\delta_2 = min\{|\alpha - \beta_1|, |\alpha - \beta_2|, \ldots, |\alpha - \beta_\nu|\}$$

έχουμε ότι η δακτυλική περιοχή $N^*_{\delta_2}(\alpha)$ δεν περιέχει στοιχεία του Α. Συνεπώς το α είναι σημείο συσσωρεύσεως του Α, αν κάθε δακτυλική περιοχή του α περιέχει τουλάχιστο ένα στοιχείο του Α.

Αντίστροφα, αν το α είναι σημείο συσσωρεύσεως του Α τότε κάθε δακτυλική περιοχή του α, περιέχει άπειρα στοιχεία του Α και κατά συνέπεια, οπωσδήποτε ένα. •

Αν για ένα σημείο $\alpha \in \mathbb{R}$ και για κάθε θετικό αριθμό δ, το διάστημα $(\alpha - \delta, \alpha)$ περιέχει άπειρα στοιχεία ενός συνόλου Α, τότε το α λέγεται από **αριστερά σημείο συσσωρεύσεως του Α**. Όμοια αν το διάστημα $(\alpha, \alpha + \delta)$ περιέχει άπειρα στοιχεία ενός συνόλου Α, τότε το α λέγεται από **δεξιά σημείο συσσωρεύσεως του Α. Έτσι λοιπόν ένα σημείο α είναι σημείο συσσωρεύσεως ενός συνόλου Α, αν και μόνον αν, είναι σημείο συσσωρεύσεως ή από αριστερά ή από δεξιά ή και από τις δυο μεριές.**

Το σύνολο των σημείων συσσωρεύσεως ενός συνόλου Α, λέγεται **παράγω-**



γο σύνολο και συμβολίζεται με A'. Η ένωση του A και του A' λέγεται **θήκη** του A και συμβολίζεται με $\bar{A}$. Δηλαδή $\bar{A} = A \cup A'$.

Ένα σύυνολο $A \subseteq X$ θα λέγεται **παντού πυκνό στο X**, αν και μόνον αν, $A \cup A' = X$. Σαν συνέπεια αυτού του ορισμού έχουμε το παρακάτω

Θεώρημα 1.21 Τα σύνολα των ρητών Q και των άρρητων I είναι παντού πυκνά στο R.

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 1.7 υπάρχει ρητός μεταξύ δυο οποιονδήποτε πραγματικών αριθμών. Συνεπώς κάθε πραγματικός αριθμός είναι σημείο συσσωρεύσεως του Q, δηλαδή $Q' = \mathbb{R}$. Άρα $Q' \cup Q = \mathbb{R} \cup Q = \mathbb{R}$.

Κατά τον ίδιο τρόπο, από το Θεώρημα 1.7 παίρνουμε ότι $\mathbb{I}' = \mathbb{R}$, και άρα $\mathbb{I} \cup \mathbb{I}' = \mathbb{R} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$. •

Ένα σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα σημεία συσσωρεύσεώς του λέγεται **κλειστό**.

Παράδειγμα 1.22

Το κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι κλειστό σύνολο. Έστω ξ σημείο συσσωρεύσεως του $[\alpha, \beta]$. Θα αποδείξουμε ότι $\xi \in [\alpha, \beta]$. Ας υποθέσουμε ότι $\xi > \beta$. Θεωρούμε την περιοχή $N_{\xi-\beta}(\xi)$ και έστω $x \in N_{\xi-\beta}(\xi)$, δηλ.

$$|x - \xi| < \xi - \beta \Rightarrow \beta - \xi < x - \xi < \xi - \beta \Rightarrow x > \beta.$$

Δηλαδή αν $\xi > \beta$ τότε η περιοχή $N_{\xi-\beta}(\xi)$, συνεπώς και η δακτυλική περιοχή $N^*_{\xi-\beta}(\xi)$ του ξ δεν περιέχει σημεία του $[\alpha, \beta]$. Αυτό σημαίνει ότι αν $\xi > \beta$ τότε το ξ δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του $[\alpha, \beta]$.

Συνεπώς αν ξ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $[\alpha, \beta]$ τότε $\xi \leq \beta$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και $\alpha \leq \xi$.

Επίσης τα μη φραγμένα διαστήματα $\{x \in \mathbb{R} : x \geq \alpha\}$ και $\{x \in \mathbb{R} : x \leq \alpha\}$ είναι κλειστά σύνολα.

Παράδειγμα 1.23

Το $\mathbb{R}$ είναι κλειστό, αφού $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.24

Τυχαίο πεπερασμένο σύνολο (συμπεριλαμβανομένου του κενού) είναι κλειστό σύνολο. Πραγματικά· ένα τέτοιο σύνολο δεν έχει σημεία συσσω-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ρεύσεως και άρα $A' = \emptyset$. Επειδή $A \cup \emptyset = A$ συνεπάγεται ότι το Α είναι κλειστό.

Αν $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ και $\alpha \in A$, τότε το α μπορεί να είναι σημείο συσσωρεύσεως του Α ή να μην είναι. Αν είναι σημείο συσσωρεύσεως του Α, κάθε $N_\delta^*(\alpha)$ περιέχει τουλάχιστο ένα στοιχείο του Α. Αν το α δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του Α, τότε υπάρχει μια περιοχή $N_\delta^*(\alpha)$ η οποία δεν περιέχει κανένα στοιχείο του Α. Ένα τέτοιο σημείο λέγεται μεμονωμένο σημείο του Α. Έτσι λοιπόν:

Ένα σημείο $\alpha \in A \subseteq \mathbb{R}$ θα λέγεται μεμονωμένο σημείο του Α, αν και μόνον αν, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $N_\delta^*(\alpha) \cap A = \emptyset$.

Ένα σύνολο Α θα λέγετα **ανοιχτό** αν το συμπλήρωμά του A^c (ως προς το $\mathbb{R}$) είναι κλειστό σύνολο. Υπάρχουν σύνολα που δεν είναι ούτε ανοιχτά, ούτε κλειστά. Π.χ το διαστημα $[\alpha, \beta)$. Επίσης το $\mathbb{R}$ και το Q είναι σύνολα και ανοιχτά και κλειστά.

Ένα σημείο α θα λέγεται **εσωτερικό σημείο** ενός συνόλου Α, αν υπάρχει μια περιοχή του α που να περιέχεται στο Α. Ένα σημείο α θα λέγεται **εξωτερικό σημείο** ενός συνόλου Α, αν υπάρχει μια περιοχή του α που να περιέχεται ολόκληρη στο A^c. Ένα σημείο α θα λέγετα **συνοριακό σημείο** ενός συνόλου Α, αν κάθε περιοχή του α περιέχει ένα τουλάχιστο σημείο του Α και ένα τουλάχιστο του A^c. Το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του Α αποτελεί το **εσωτερικό** του Α, το σύνολο όλων των εξωτερικών σημείων του Α αποτελεί το **εξωτερικό** του Α, και το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων το **σύνορο** του Α.

Είναι προφανές ότι, για οποιοδήποτε σύνολο, το εσωτερικό, το εξωτερικό και το σύνορο είναι ξένα μεταξύ τους. Δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που να ανήκει σε παραπάνω από ένα από αυτά τα τρία σύνολα.

Παράδειγμα 1.25

Έστω $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Τότε το εσωτερικό του Α είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$, το σύνορο είναι το σύνολο $A_2 = \{0, 1\}$ και το εξωτερικό είναι το σύνολο $A_3 = \mathbb{R} - A_2 = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

→ Το infimum ενός μη κενού συνόλου είναι, είτε ένα στοιχείο του Α, είτε ένα σημείο συσσωρεύσεως του Α.

Απόδειξη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Έστω $m = inf A$. Αν το $m \in A$ τότε αυτό είναι το $minA$. Αν το $m \notin A$ τότε από τον ορισμό του infimum έχουμε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A) : x < m + \epsilon,$$

δηλ. η περιοχή $N_\epsilon^*(m)$ περέχει ένα τουλάχιστο στοιχείο του Α και επομένως το m είναι σημείο συσσωρεύσεως του Α. (Για την ακρίβεια είναι σημείο συσσωρεύσεως του Α από δεξιά).

Σημείωση

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το infimum ενός συνόλου, μπορεί να είναι στοιχείο του συνόλου, και ταυτόχρονα να είναι και σημείο συσσωρεύσεώς του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.5 Έστω Α ένα μη κενό και φραγμένο σύνολο. Να αποδείξετε ότι:

α) Το sup Α ανήκει στο σύνορο του Α.

β) Το sup Α είναι πάντα στοιχείο της θήκης του.

1.6 Έστω Α ένα μη κενό κλειστό και φραγμένο σύνολο. Να αποδείξετε ότι το παράγωγο σύνολο Α' είναι φραγμένο.

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 1.4 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε μια ειδική κατηγορία συναρτήσεων που έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών και το πεδίο τιμών τους είναι υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 1.26. Μια συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Με άλλα λόγια μια ακολουθία αντιστοιχεί σε κάθε φυσικό αριθμό έναν μονοσήμαντα ορισμένο πραγματικό αριθμό. Η τιμή της ακολουθίας στο ν συμβολίζεται με α_ν, αντί του $\alpha(\nu)$. Η ακολουθία συμβολίζεται με (α_ν) ή α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Ο αριθμός α_ν λέγεται ν-οστός όρος της ακολουθίας.

Πιο γενικά μπορούμε να ορίσουμε ως ακολουθία την συνάρτηση f που ορίζεται για όλους τους φυσικούς $\nu \geq \nu_0$ και της οποίας το πεδίο τιμών είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλ. αν $\alpha_\nu = f(\nu)$, $\nu \geq \nu_0$. Για λόγους ευκολίας όμως θεωρούμε $\nu_0 = 1$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μια ακολουθία μπορεί να οριστεί αν δοθεί αναλυτικός τύπος για τον ν-οστό όρο. Π.χ. ο τύπος $(\alpha_\nu) = \frac{1}{\nu}$ ορίζει την ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ της οποίας η τιμή στον φυσικό ν είναι $\frac{1}{\nu}$. Είναι $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2}$, κ. τ. λ. Επίσης μια ακολουθία μπορεί να οριστεί και με έναν **αναγωγικό τύπο** . Π.χ. οι εξισώσεις

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}(\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1}), \nu = 1, 2, \ldots$$

ορίζουν μια ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in N$, της οποίας οι πρώτοι 6 όροι είναι : $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{11}{16}$.

Το πεδίο τιμών της ακολουθίας ή το σύνολο των τιμών της συμβολίζεται με $\alpha(\mathbb{N})$ και ορίζεται ως εξής:

$$\alpha(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{R} : (\exists \nu \in \mathbb{N}) \quad \text{με} \quad \alpha_\nu = x\}.$$

Δεν πρέπει να συγχέεται το σύνολο των τιμών μιας ακολουθίας με τους όρους της ακολουθίας. Το πλήθος των όρων μιας ακολουθίας είναι άπειρο, ενώ το σύνολο των τιμών της μπορεί να είναι πεπερασμένο. Για παράδειγμα η $\alpha_\nu = k$, έχει σύνολο τιμών το μονοσύνολο $\{k\}$ (μια τέτοια ακολουθία τη λέμε **σταθερή**), ενώ το πλήθος των όρων είναι άπειρο.

Οι ακολουθίες που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και στις οποίες θα στρέψουμε τώρα την προσοχή μας είναι οι συγκλίνουσες ακολουθίες.

Ορισμός 1.27 Μια ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ θα λέμε ότι έχει όριο το ℓ ή ότι η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ συγκλίνει στο ℓ, και θα γράφουμε $\lim\alpha_\nu = \ell \in \mathbf{R}$, αν και μόνον αν, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να συνεπάγεται $|\alpha_\nu - \ell| < \epsilon$ ή συμβολικά

$$\lim\alpha_\nu = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbf{N})(\forall \nu \in \mathbf{N}) \nu > \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \epsilon.$$

Παρατήρηση 1.28

Στον παραπάνω ορισμό μπορούμε να πάρουμε $|\alpha_\nu - \ell| \leq \epsilon$ αντί του $|\alpha_\nu - \ell| < \epsilon$ και $\nu \geq \nu_0$ αντί του $\nu > \nu_0$ χωρίς να μεταβληθεί το νόημά του. Δεν είναι όμως σωστό να θεωρήσουμε $\epsilon \geq 0$ αντί του $\epsilon > 0$, γιατί τότε περιορίζεται ο ορισμός της σύγκλισης σε σταθερές ακολουθίες.

Παρατήρηση 1.29

Ο ορισμός της σύγκλισης μπορεί να παραφραστεί ως εξής: Μια ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στο ℓ, αν υπάρχει ένα στοιχείο α_{ν_0} τέτοιο ώστε αυτό και όλα τα επόμενα (δηλ. αυτά που έχουν δείκτες μεγαλύτερους του ν_0)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

να διαφέρουν από το ℓ όσο πιο λίγο επιθυμούμε. Αυτό μπορεί να γίνει αν διαλέξουμε το ν_0 αρκετά μεγάλο.

Μ' άλλα λόγια $lim\alpha_\nu = \ell$, αν στην περιοχή $N_\epsilon(\ell)$ ανήκουν σχεδόν όλοι οι όροι της ακολουθίας, δηλ. έξω από την περιοχή αν υπάρχουν όροι της α_ν, $\nu \in I\!N$, αυτοί θα είναι πεπερασμένοι το πλήθος.

Παρατήρηση 1.30

Για τον θετικό αριθμό ϵ παρατηρούμε ότι δεν βλάπτεται η γενικότητα αν τον περιορίσουμε σε ένα ανοιχτό διάστημα με αριστερό άκρο το 0. Αν για παράδειγμα οι συνθήκες στον ορισμό της σύγκλισης ικανοποιούνται για όλες τις τιμές του ϵ τέτοιες ώστε $0 < \epsilon < A$, όπου A προκαθαρισμένος θετικός αριθμός, τότε αυτές αυτόματα ικανοποιούνται για μεγαλύτερες τιμές του ϵ. Αν $|\alpha_\nu - \ell| < \epsilon$ και ϵ' είναι οποιοσδήποτε αριθμός $\geq A$ τότε και $|\alpha_\nu - \ell| < \epsilon'$.

Ακόμα η ανισότητα $|\alpha_\nu - \ell| < \epsilon$ μπορεί να αντικατασταθεί από την ανιότητα:

$$|\alpha_\nu - \ell| < k\epsilon \qquad (\star)$$

όπου k θετική σταθερή (ανεξάρτητη του ϵ). Πραγματικά· έστω ϵ_1 ένας θετικός αριθμός. Ορίζουμε $\epsilon_2 = \frac{\epsilon_1}{k}$ και παίρνουμε τον ϵ_2 σαν άλλη τιμή του ϵ. Αφού η $(\star)$ ισχύει $\forall \epsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in I\!N$ τέτοιο ώστε: $|\alpha_\nu - \ell| < k\epsilon_2$ ή $|\alpha_\nu - \ell| < \epsilon_1, \forall \nu > \nu_0$. Άρα αν ισχύει η $(\star)$ για κάθε τιμή του ϵ, τότε ισχύει και η $|\alpha_\nu - \ell| < \epsilon$.

Μια πολύ απλή, αλλά σπουδαία εφαρμογή της έννοιας **για κάθε θετικό αριθμό** ϵ δίνει η επόμενη πρόταση:

Αν μια σταθερή c είναι τέτοια ώστε $|c| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$, τότε $c = 0$. (Με απλά λόγια, ο μοναδικός μη αρνητικός αριθμός που είναι μικρότερος από όλους τους θετικούς, είναι το 0).

Πραγματικά· αν υποθέσουμε ότι $c \neq 0$, παίρνοντας ως $\epsilon = \frac{1}{2}|c|$ έχουμε το άτοπο: $|c| < \frac{1}{2}|c|$. Άρα $c = 0$.

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε και το εξής: **Αν** $|c| < k\epsilon, \forall \epsilon > 0$, **τότε** $c = 0$.

Είναι σημαντικό στα παραπάνω ότι το c είναι σταθερό. Δεν μπορούμε να συμπεράνουμε π.χ. ότι $\epsilon = 0$ επειδή $|\frac{\epsilon}{2}| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$. Δεν πρέπει ακόμα περισσότερο να γίνει σύγχυση της ανισότητας $|c| < \epsilon$ με την ανισότητα $|\alpha_\nu - \ell| < \epsilon$ που εμφανίζεται στον ορισμό της σύγκλισης. Η διαφορά $\alpha_\nu - \ell$ δεν είναι σταθερή, αλλά εξαρτάται από το ν.

Παρατήρηση 1.31

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αν στο ορισμό είναι $\ell = 0$, τότε η ακολουθία λέγεται **μηδενική**.

Παράδειγμα 1.32

Η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ έχει όριο το 0. Πραγματικά· πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{\nu}\right| < \epsilon$$

Είναι $\left|\frac{1}{\nu}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\nu} < \epsilon \Leftrightarrow \nu > \frac{1}{\epsilon}$. Επομένως παίρνοντας ως ν_0 έναν οποιοδήποτε φυσικό μεγαλύτερο από τον αριθμό $\frac{1}{\epsilon}$ (π.χ. $\nu_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$) έχουμε το συμπέρασμα.

Παράδειγμα 1.33

Θα αποδείξουμε ότι $lim\frac{5\nu-4}{2-3\nu} = -\frac{5}{3}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in N)\nu > \nu_0 \Rightarrow \left|\frac{5\nu-4}{2-3\nu} + \frac{5}{3}\right| < \epsilon.$$

Αλλά $\left|\frac{5\nu-4}{2-3\nu} + \frac{5}{3}\right| < \epsilon \Rightarrow \frac{2}{3}\left|\frac{1}{2-3\nu}\right| < \epsilon \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{1}{3\nu-2} < \epsilon$ (επειδή $2 - 3\nu < 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow \nu > \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3\epsilon} + 2\right)$. Αν λοιπόν διαλέξουμε ως ν_0 οποιοδήποτε φυσικό μεγαλύτερο από τον αριθμό $\frac{1}{3}(\frac{2}{3\epsilon} + 2)$, θα έχουμε $\forall \nu > \nu_0$ ότι $\left|\frac{5\nu-4}{2-3\nu} + \frac{5}{3}\right| < \epsilon$, που σημαίνει ότι $lim\frac{5\nu-4}{2-3\nu} = -\frac{5}{3}$.

Παράδειγμα 1.34

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu, \nu \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει. Ας υποθέσουμε το αντίθετο, ότι δηλ. η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στο αριθμό ℓ.Τότε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |(-1)^\nu - \ell| < \epsilon.$$

Για όλους τους άρτιους δείκτες τους μεγαλύτερους του ν_0 θα έχουμε: $|1-\ell| < \epsilon$. Επειδή αυτό ισχύει $\forall \epsilon > 0$ μπορούμε να πάρουμε ένα συγκεκριμένο ϵ, π.χ $\epsilon = \frac{1}{4}$. Τότε

$$|1 - \ell| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < 1 - \ell < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < \ell < \frac{5}{4}.$$

Επίσης για όλους τους περιττούς δείκτες τους μεγαλύτερους του ν_0 θα έχουμε:

$$|-1 - \ell| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < -1 - \ell < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < \ell < -\frac{3}{4}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Όμως τέτοιος αριθμός που να ικανοποιεί συγχρόνως τις σχέσεις $\frac{3}{4} < \ell < \frac{5}{4}$ και $-\frac{5}{4} < \ell < -\frac{3}{4}$ δεν υπάρχει. Άρα η υπόθεση ότι $lim\alpha_\nu = \ell$ δεν ευσταθεί και επομένως η ακολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει.

Θεώρημα 1.35 Το όριο συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $lim\alpha_\nu = \ell$ και $lim\alpha_\nu = m$ με $\ell \neq m$. Τότε από τον ορισμό έχουμε:

$$lim\alpha_\nu = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_1 \in N)(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_1 \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \epsilon. \quad (1)$$

$$lim\alpha_\nu = m \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_2 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_2 \Rightarrow |\alpha_\nu - m| < \epsilon. \quad (2)$$

Έστω $\nu_0 = max\{\nu_1, \nu_2\}$ και $\epsilon = \frac{1}{4}|\ell - m| > 0$. Από τις (1) και (2) $\forall \nu > \nu_0$ θα έχουμε:

$$|\ell - m| = |(\ell - \alpha_\nu) + (\alpha_\nu - m)| \leq |\alpha_\nu - \ell| + |\alpha_\nu - m| < 2\epsilon = \frac{1}{2}|\ell - m|$$

που είναι άτοπο. Άρα $\ell = m$ και έτσι το όριο είναι μοναδικό. •

Ορισμός 1.36. Μια ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ λέγεται φραγμένη, αν το πεδίο τιμών της είναι φραγμένο, δηλ.

$$(\exists \mathbf{M} \in \mathbf{R}) : |\alpha_\nu| \leq \mathbf{M}, \forall \nu \in \mathbf{N}.$$

Θεώρημα 1.37. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη

Έστω $lim\alpha_\nu = \ell$. Τότε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \epsilon.$$

Ειδικά για $\epsilon = 1$ παίρνουμε $|\alpha_\nu - \ell| < 1$ και

$$|\alpha_\nu| = |(\alpha_\nu - \ell) + \ell| \leq |\alpha_\nu - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|,$$

δηλ.

$$|\alpha_\nu| < 1 + |\ell|, \forall \nu > \nu_0.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παίρνοντας ως

$$M = max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{\nu_0}|, 1 + |\ell|\}$$

έχουμε ότι

$$|\alpha_\nu| \leq M, \forall \nu \in I\!N. \quad \bullet$$

Παρατήρηση 1.38

Το αντίστροφο του Θεωρήματος 1.37 δεν ισχύει. Π.χ. η ακολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in I\!N$ δεν συγκλίνει (Παράδειγμα 1.34), αλλά είναι φραγμένη αφού $|(-1)^\nu| \leq 1, \forall \nu \in I\!N$. Το Θεώρημα 1.37 χρησιμοποιείται κυρίως **αρνητικά**, δηλ. για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία δεν συγκλίνει. **Αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν είναι φραγμένη**. Π.χ η ακολουθία $\alpha_\nu = \nu$ δεν συγκλίνει, αφού δεν είναι φραγμένη. (Για να ήταν φραγμένη θα έπρεπε να ισχύει $\nu \leq M, \forall \nu \in I\!N$ που είναι αδύνατο.)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. α) Αν μια ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ συγκλίνει προς ένα μη μηδενικό όριο ℓ, τότε υπάρχουν ένας αριθμός k και ένας $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιοι ώστε:

$$\mathbf{0 < k < |\alpha_\nu|, \forall \nu > \nu_0.}$$

β) Αν επί πλέον είναι και $\alpha_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbf{N}$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{\inf\{|\alpha_\nu| : \nu \in N\} > 0.}$$

Απόδειξη

α) Έστω $k = \frac{1}{2}|\ell|$. Τότε $k > 0$, αφού $\ell \neq 0$.Επειδή $lim\alpha_\nu = \ell$, υπάρχει $\nu_0 \in I\!N$ τέτοιο ώστε: $|\alpha_\nu - \ell| < \epsilon, \forall \nu > \nu_0$. Συνεπώς $|\ell| - |\alpha_\nu| < k$ ή αφού $|\ell| = 2k$, $k < |\alpha_\nu|, \forall \nu > \nu_0$ πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Σημείωση

Η εφαρμογή αυτή λέει το εξής με απλά λόγια: Αν $lim\alpha_\nu = \ell \neq 0$ τότε υπάρχει μια περιοχή του 0 που περιέχει το πολύ ένα πεπερασμένο πλήθος όρων της α_ν, $\nu \in I\!N$. Λέμε τότε ότι η ακολουθία α_ν, $\nu \in I\!N$ είναι φραγμένη μακριά του μηδενός. Αυτό μπορεί να γενικευτεί: Αν $\lim \alpha_\nu = \ell$ και β είναι ένας αριθμός διαφορετικός από τον ℓ, τότε η α_ν, $\nu \in I\!N$ είναι φραγμένη μακριά από τον β.

β) Σύμφωνα με το α) είναι $k < |\alpha_\nu|, \forall \nu > \nu_0$. Θέτουμε

$$m = min\{k, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_{\nu_0}|\}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τότε $inf\{|\alpha_\nu| : \nu \in I\!N\} \geq m > 0$.

2. Έστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ και $\beta_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ δυο ακολουθίες και $\ell \in \mathbf{R}$. Αν για κάποιο $\mathbf{K} > \mathbf{0}$ ισχύει

$$|\alpha_\nu - \ell| < \mathbf{K}|\beta_\nu|, \forall \nu \in \mathbf{N} \quad \text{και} \quad \lim \beta_\nu = \mathbf{0},$$

τότε να αποδείξετε ότι $\lim \alpha_\nu = \ell$.

Απόδειξη

Επειδή $lim\beta_\nu = 0$ θα έχουμε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in I\!N)(\forall \nu \in I\!N)\nu > \nu_0 \Rightarrow |\beta_\nu| < \frac{\epsilon}{K}.$$

Τότε όμως έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in I\!N)(\forall \nu \in I\!N)\nu > \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < K|\beta_\nu| < K\frac{\epsilon}{K} = \epsilon,$$

που σημαίνει ότι $lim\alpha_\nu = \ell$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.7 Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha)\ lim\frac{6\nu - 1}{\frac{1}{2} - \nu} = -6 \qquad \beta)\ lim\frac{2\nu^2 + 1}{\nu^2 + 3\nu} = 2$$

1.8 Να αποδείξετε ότι οι ακολουθίες $\alpha_\nu = \sqrt{\nu}, \nu \in I\!N$ και $\alpha_\nu = (-1)^\nu.\nu, \nu \in I\!N$ δεν συγκλίνουν.

§ 1.5 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Αν παραλείψουμε μερικούς όρους μιας ακολουθίας, τότε αυτοί που απομένουν αποτελούν μια υπακολουθία. Πιο γενικά έχουμε τον

Ορισμός 1.39 Έστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $\mathbf{k}_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ μια ακολουθία φυσικών αριθμών τέτοια ώστε: $\mathbf{k}_1 < \mathbf{k}_2 < \ldots < \mathbf{k}_\nu$. Τότε η ακολουθία $\beta_\nu = \alpha_{\mathbf{k}_\nu}, \nu \in \mathbf{N}$ λέγεται υπακολουθία της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$.

Παράδειγμα 1.40

Έστω $\alpha_\nu = 2^{\nu-(-1)^\nu}, \nu \in I\!N$. Τότε οι υπακολουθίες των άρτιων και των περιττών όρων είναι αντίστοιχα οι:

$$\alpha_{2\nu} = 2^{2\nu-1} \quad \text{και} \quad \alpha_{2\nu-1} = 2^{2\nu}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 1.41

Η ακολουθία $\alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2^\nu}$ είναι υπακολουθία της α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $k_\nu = 2^\nu$.

Παράδειγμα 1.42

Αν $\alpha_\nu = cos\frac{\nu\pi}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}$ τότε έχουμε τις παρακάτω υπακολουθίες:

$$\alpha_{4\nu} = cos\frac{4\nu\pi}{2} = cos 2\nu\pi = 1, \nu \in \mathbb{N}$$

$$\alpha_{4\nu-1} = cos\frac{(4\nu-1)\pi}{2} = cos\left(2\nu\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0, \nu \in N$$

$$\alpha_{4\nu-2} = cos\frac{(4\nu-2)\pi}{2} = cos(2\nu\pi - \pi) = -1, \nu \in N$$

$$\alpha_{4\nu-3} = cos\frac{(4\nu-3)\pi}{2} = cos\left(2\nu\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = 0, \nu \in N$$

Ας δούμε τώρα μερικές βασικές προτάσεις που αφορούν τις υπακολουθίες.

Θεώρημα 1.43 Αν $\lim\alpha_\nu = \ell$, τότε κάθε υπακολουθία της α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ συγκλίνει στο ℓ.

Απόδειξη

Έστω $lim\alpha_\nu = \ell$ και α_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ μια υπακολουθία της. Τότε:

$$lim\alpha_\nu = \ell \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_0 \in \mathbb{N})(\forall\nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \epsilon \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι για την k_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει $k_\nu \geq \nu, \forall\nu \in \mathbb{N}$[5]. Τότε όμως $\forall\nu > \nu_0$ συνεπάγεται ότι $k_\nu > \nu_0$ και από την (1) έχουμε ότι: $|\alpha_{k_\nu} - \ell| < \epsilon, \forall\nu > \nu_0$. Αυτό σημαίνει ότι $lim\alpha_{k_\nu} = \ell$. •

Πόρισμα: $\lim\alpha_\nu = \ell$, αν και μόνον αν, για κάθε σταθερό k, $\lim\alpha_{k+\nu} = \ell$.

Απόδειξη

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η ακολουθία $\alpha_{k+\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι υπακολουθία της α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. •

Παρατήρηση 1.44

[5]Πραγματικά· για $\nu = 1$ ισχύει, γιατί $k_1 \in N$ και $k_1 \geq 1$. Έστω ότι ισχύει για $\nu = \mu$, δηλ. $k_\mu \geq \mu$. Τότε $k_{\mu+1} > k_\mu \geq \mu$, και άρα $k_{\mu+1} > \mu$. Από την τελευταία ανισότητα, επειδή α $k_{\mu+1}$ και μ είναι φυσικοί αριθμοί θα είναι $k_{\mu+1} \geq \mu + 1$. Άρα ισχύει $k_\nu \geq \nu, \forall\nu \in N$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αν $lim\alpha_{k_\nu} = \ell$ τότε δεν συνεπάγεται αναγκαστικά ότι και $lim\alpha_\nu = \ell$. Π. χ. αν $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ τότε $\alpha_{2\nu} = (-1)^{2\nu} = 1$ και συνεπώς $lim\alpha_{2\nu} = 1$, ενώ ξέρουμε από το Παράδειγμα 1.34 ότι η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει.

Επίσης αν μια υπακολουθία της α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει, τότε και η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει, γιατί αν συνέκλινε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.43 κάθε υπακολουθία της θα συνέκλινε, πράγμα που δεν συμβαίνει.

Αν υπάρχουν δυο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, τότε η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει. Π.χ. η $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει γιατί $\alpha_{2\nu} \to 1$ και $\alpha_{2\nu-1} \to -1$.

Παρατήρηση 1.45

Αν μια ακολουθία είναι φραγμένη, τότε και κάθε υπακολουθία της είναι φραγμένη. Επίσης αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οποιαδήποτε ακολουθία είναι υπακολουθία του εαυτού της.

Παρατήρηση 1.46

Αν ξέρουμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει, χωρίς όμως να ξέρουμε το όριό της, τότε το όριο μιας οποιαδήποτε υπακολουθίας της είναι και το όριο της ακολουθίας.

Στις εφαρμογές συνήθως χρησιμοποιείται το επόμενο Θεώρημα:

Θεώρημα 1.47. Μια ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ συγκλίνει, αν και μόνον αν, οι υπακολουθίες $\alpha_{2\nu}$, $\nu \in \mathbf{N}$ και $\alpha_{2\nu-1}$, $\nu \in \mathbf{N}$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

Απόδειξη

Αν $lim\alpha_\nu = \ell$ τότε από το Θεώρημα 1.43 $lim\alpha_{2\nu} = \ell$ και $lim\alpha_{2\nu-1} = \ell$.

Αντίστροφα, έστω ότι $lim\alpha_{2\nu} = \ell$ και $lim\alpha_{2\nu-1} = \ell$. Τότε έχουμε:

$$lim\alpha_{2\nu} = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_1 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_1 \Rightarrow |\alpha_{2\nu} - \ell| < \epsilon$$

$$lim\alpha_{2\nu-1} = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_2 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_2 \Rightarrow |\alpha_{2\nu-1} - \ell| < \epsilon.$$

Θέτουμε $\nu_0 = max\{2\nu_1, 2\nu_2 - 1\}$. Αν $\nu \in \mathbb{N}$ τότε:

αν $\nu = 2k$ τότε $\nu > \nu_0 \Rightarrow 2k > 2\nu_1 \Rightarrow k > \nu_1 \Rightarrow |\alpha_{2k} - \ell| < \epsilon \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \epsilon$.

αν $\nu = 2k - 1$ τότε $\nu > \nu_0 \Rightarrow 2k - 1 > 2\nu_2 - 1 \Rightarrow k > \nu_2 \Rightarrow |\alpha_{2k-1} - \ell| < \epsilon \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \epsilon$.

Άρα $|\alpha_\nu - \ell| < \epsilon, \forall \nu > \nu_0$ και συνεπώς $lim\alpha_\nu = \ell$. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν $\lim\alpha_\nu = \ell$ και $\lim\beta_\nu = \ell$ τότε να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_\nu, \beta_\nu, \nu \in \mathbf{N}$, που λέγεται σύνθεση των ακολουθιών α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ και β_ν, $\nu \in \mathbf{N}$, συγκλίνει επίσης στο ℓ.

Απόδειξη

Αν ονομάσουμε γ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ την ακολουθία $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_\nu, \beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ τότε παρατηρούμε ότι: $\gamma_{2\nu} = \beta_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $\gamma_{2\nu-1} = \alpha_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.47 το συμπέρασμα είναι προφανές.

ΑΣΚΗΣΗ

1.9 Αν της ακολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ οι υπακολουθίες $\alpha_{p\nu}, \alpha_{p\nu-1}, \ldots, \alpha_{p\nu-(p-1)}$ και $\alpha_{q\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνουν, όπου οι p και q είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε να αποδείξετε ότι και η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει.

§ 1.6 Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Θα δούμε τώρα μερικά Θεωρήματα που μας βοηθούν στο να βρούμε ευκολότερα το όριο μιας ακολουθίας. Έστω α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ και β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δυο ακολουθίες. Από τα στοιχεία τους μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες ακολουθίες, όπως $\alpha_\nu + \beta_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\alpha_\nu - \beta_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\alpha_\nu.\beta_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, και $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ που είναι γνωστές ως **άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο** αντίστοιχα. Στην περίπτωση του πηλίκου είναι αναγκαίο να εξαιρέσουμε το 0 από τα στοιχεία της ακολουθίας. Επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε ακολουθίες $k\alpha_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ με k τυχαία σταθερή ή $|\alpha_\nu|$, $\nu \in \mathbb{N}$ όπου τα στοιχεία είναι οι απόλυτες τιμές των όρων της α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Προκύπτει τότε το ερώτημα της σύγκλισης τέτοιων ακολουθιών. Το επόμενο Θεώρημα δίνει τις πράξεις μεταξύ συγκλινουσών ακολουθιών, **την άλγεβρα των ορίων**, όπως λέμε.

Θεώρημα 1.48 Έστω $\lim\alpha_\nu = \ell$ και $\lim\beta_\nu = m$. Τότε

α) $\lim(\alpha_\nu \pm \beta_\nu) = \ell \pm m$.

β) $\lim k\alpha_\nu = k\ell, \forall k \in \mathbf{R}$.

γ) $\lim(\alpha_\nu.\beta_\nu) = \ell m$.

δ) $\lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\ell}{m}$ με την προυπόθεση ότι $\beta_\nu \neq 0$ και $m \neq 0$[6]

[6] Η συνθήκη $m \neq 0$ δεν είναι αναγκαία για την σύγκλιση της $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$, αφού το $lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ μπορεί να υπάρχει αν και η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ και η β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μηδενικές. Π.χ. αν $\alpha_\nu = \beta_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ τότε $lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = 1$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ε) $\lim|\alpha_\nu| = |\ell|$. **Το αντίστροφο ισχύει μόνον αν** $\ell = 0$.

στ) $\lim\sqrt{\alpha_\nu} = \sqrt{\ell}$ **με την προυπόθεση ότι** $\alpha_\nu \geq 0$.

Απόδειξη

α)

$$lim\alpha_\nu = \ell \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_1 \in I\!N)(\forall\nu \in I\!N)\nu > \nu_1 \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$lim\beta_\nu = m \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_2 \in I\!N)(\forall\nu \in I\!N)\nu > \nu_2 \Rightarrow |\beta_\nu - m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Παίρνοντας $\nu_0 = max\{\nu_1, \nu_2\}$ έχουμε:

$$|\alpha_\nu + \beta_\nu - (\ell + m)| \leq |\alpha_\nu - \ell| + |\beta_\nu - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Δηλ. $lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = \ell + m$. Το ίδιο αποδεικνύεται και για την διαφορά.

β) Αν $k = 0$ το συμπέρασμα είναι προφανές. Έστω λοιπόν $k \neq 0$ και $lim\alpha_\nu = \ell$. Τότε

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_0 \in I\!N)(\forall\nu \in I\!N)\nu > \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \frac{\epsilon}{|k|}.$$

Επομένως

$$|k\alpha_\nu - k\ell| = |k||\alpha_\nu - \ell| < |k|\frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$

γ) Η $\alpha_\nu, \nu \in I\!N$ είναι φραγμένη, αφού συγκλίνει (Θεώρημα 1.37). Έστω $|\alpha_\nu| \leq K, \forall\nu \in I\!N$. Είναι:

$$lim\alpha_\nu = \ell \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_1 \in I\!N)(\forall\nu \in I\!N)\nu > \nu_1 \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \frac{\epsilon}{2(1 + |m|)}$$

$$lim\beta_\nu = m \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_2 \in I\!N)(\forall\nu \in I\!N)\nu > \nu_2 \Rightarrow |\beta_\nu - m| < \frac{\epsilon}{2K}.$$

Παίρνοντας $\nu_0 = max\{\nu_1, \nu_2\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} |\alpha_\nu.\beta_\nu - \ell.m| &\leq |\alpha_\nu.\beta_\nu - \alpha_\nu.m + \alpha_\nu.m - \ell.m| \\ &\leq |\alpha_\nu||\beta_\nu - m| + |m||\alpha_\nu - \ell| \\ &\leq K\frac{\epsilon}{2K} + |m|\frac{\epsilon}{2(1 + |m|)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι πήραμε για φράγμα της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ **το** $\frac{\epsilon}{2(1+|m|)}$ **και όχι το** $\frac{\epsilon}{2|m|}$ **επειδή το m μπορεί να είναι μηδέν.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δ) Έστω $\beta_\nu \neq 0$ και $m \neq 0$. Τότε έχουμε:

$$lim\beta_\nu = m \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_1 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_1 \Rightarrow |\beta_\nu - m| < \frac{|m|}{2}.$$

Δηλαδή

$$-\frac{|m|}{2} + m < \beta_\nu < \frac{|m|}{2} + m.$$

Αν $m > 0 \Rightarrow 0 < \frac{m}{2} < \beta_\nu < \frac{3m}{2}$. Αν $m < 0 \Rightarrow \frac{3m}{2} < \beta_\nu < \frac{m}{2} < 0$.

Άρα

$$\frac{|m|}{2} < |\beta_\nu| < \frac{3|m|}{2}.$$

Επίσης επειδή $lim\beta_\nu = m$ θα έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_2 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_2 \Rightarrow |\beta_\nu - m| < \frac{\epsilon |m|^2}{4(|\ell| + 1)}$$

και επειδή $lim\alpha_\nu = \ell$ θα έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_3 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_3 \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \frac{\epsilon |m|}{4}.$$

Διαλέγοντας $\nu_0 = max\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ έχουμε $\forall \nu > \nu_0$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} - \frac{\ell}{m}\right| &= \left|\frac{m\alpha_\nu - \ell\beta_\nu}{m\beta_\nu}\right| = \left|\frac{m(\alpha_\nu - \ell) + \ell(m - \beta_\nu)}{m\beta_\nu}\right| \\
&= \left|\frac{\alpha_\nu - \ell}{\beta_\nu} + \frac{\ell}{m\beta_\nu}(m - \beta_\nu)\right| \leq \left|\frac{\alpha_\nu - \ell}{\beta_\nu}\right| + \frac{|\ell|}{|m\beta_\nu|}|m - \beta_\nu| \\
&\leq \frac{\epsilon|m|}{4}\frac{2}{|m|} + \frac{|\ell|}{|m|}\frac{2}{|m|}\frac{\epsilon|m|^2}{4(|\ell| + 1)} < \epsilon,
\end{aligned}$$

που αποδεικνύει και το ζητούμενο.

ε) Προκύπτει εύκολα από την παρατήρηση ότι : $||\alpha_\nu| - |\ell|| \leq |\alpha_\nu - \ell|$. Το αντίστροφο δεν ισχύει, εκτός αν $\ell = 0$. Δηλ. μπορεί μια ακολουθία να συγκλίνει απόλυτα, χωρίς όμως η ίδια να συγκλίνει. Παράδειγμα η ακολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ που δεν συγκλίνει (Παράδειγμα 1.34) και όμως $|\alpha_\nu| = 1 \to 1$.

στ) Επειδή $\alpha_\nu \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ θα είναι $\ell = lim\alpha_\nu \geq 0$[7]. Θα διακρίνουμε λοιπόν δυο περιπτώσεις:

[7] Ας υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει και $\ell < 0$. Αφού $lim\alpha_\nu = \ell$ για $\epsilon = -\ell > 0$ θα έχουμε $\ell - \epsilon < \alpha_\nu < \ell + \epsilon, \forall \nu > \nu_0$. Ειδικότερα θα έχουμε $\alpha_k < \ell + \epsilon = \ell + (-\ell) = 0$, που αντίκειται στην υπόθεση ότι $\alpha_\nu \geq 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

(i) Αν $\ell = 0$, τότε $\alpha_\nu \to 0$ και έτσι

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in I\!N)(\forall \nu \in I\!N)\nu > \nu_0 \Rightarrow 0 \leq \alpha_\nu < \epsilon^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha_\nu} \to 0.$$

(ii) Έστω $\ell > 0$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} |\sqrt{\alpha_\nu} - \sqrt{\ell}| &= \frac{|(\sqrt{\alpha_\nu} - \sqrt{\ell})(\sqrt{\alpha_\nu} + \sqrt{\ell})|}{\sqrt{\alpha_\nu} + \sqrt{\ell}} \\ &= \frac{|\alpha_\nu - \ell|}{\sqrt{\alpha_\nu} + \sqrt{\ell}} \leq \frac{1}{\sqrt{\ell}}|\alpha_\nu - \ell|. \end{aligned}$$

Η σύγκλιση τώρα της $\sqrt{\alpha_\nu} \to \sqrt{\ell}$ είναι προφανής. •

Θεώρημα 1.49 (Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών) Αν $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}, \beta_\nu, \nu \in \mathbf{N}, \gamma_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ είναι τρεις ακολουθίες τέτοιες ώστε: $\alpha_\nu \leq \beta_\nu \leq \gamma_\nu, \forall \nu \in \mathbf{N}$ και $\lim \alpha_\nu = \ell = \lim \gamma_\nu$ τότε και η $\beta_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ συγκλίνει και $\lim \beta_\nu = \ell$.

Απόδειξη

$$lim\alpha_\nu = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_1 \in I\!N)(\forall \nu \in I\!N)\nu > \nu_1 \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \epsilon$$

$$lim\gamma_\nu = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_2 \in I\!N)(\forall \nu \in I\!N)\nu > \nu_2 \Rightarrow |\gamma_\nu - \ell| < \epsilon.$$

Για $\nu_0 = max\{\nu_1, \nu_2\}$ έχουμε $\forall \nu > \nu_0$:

$$\ell - \epsilon < \alpha_\nu \leq \beta_\nu \leq \gamma_\nu < \ell + \epsilon \Rightarrow \ell - \epsilon < \beta_\nu < \ell + \epsilon \Rightarrow lim\beta_\nu = \ell. \quad \bullet$$

Παράδειγμα 1.50

Θα βρούμε το $lim\frac{7\nu^3 - 6\nu^2 + 5\nu + 4}{5\nu^3 + 2\nu^2 + \nu}$. Είναι:

$$lim\frac{7\nu^3 - 6\nu^2 + 5\nu + 4}{5\nu^3 + 2\nu^2 + \nu} = lim\frac{7 - \frac{6}{\nu} + \frac{5}{\nu^2} + \frac{4}{\nu^3}}{5 + \frac{2}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}} = \frac{7}{5}.$$

Παράδειγμα 1.51

Θα αποδείξουμε ότι $lim\frac{2\nu}{\nu^2+1} = 0$. Το Θεώρημα 1.48 δ) εδώ δεν εφαρμόζεται απ' ευθείας επειδή το $lim 2\nu$ δεν υπάρχει. Αν το γράψουμε ως $\frac{2}{\nu + \frac{1}{\nu}}$ το

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 1.48 δ) πάλι δεν εφαρμόζεται γιατή η $\nu + \frac{1}{\nu}$ τώρα δεν συγκλίνει. Το Θεώρημα όμως εφαρμόζεται αν γράψουμε:

$$lim\frac{2\nu}{\nu^2+1} = lim\frac{\frac{2}{\nu}}{1+\frac{1}{\nu^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Από τα δυο παραπάνω παραδείγματα έχουμε τον εξής γενικό κανόνα:

Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με τον βαθμό του παρονομαστή, το κλάσμα έχει όριο το πηλίκο των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων, ενώ αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή, το κλάσμα έχει όριο το μηδέν.

Παράδειγμα 1.52

Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ με $|\alpha| < 1$, τότε $lim\alpha^\nu = 0$. Πραγματικά· επειδή αν $\alpha = 0$ το συμπέρασμα είναι προφανές, υποθέτουμε ότι $\alpha \neq 0$. Τότε $\frac{1}{|\alpha|} > 1$ και άρα $\frac{1}{|\alpha|} = 1 + \theta$, για κάποιο $\theta > 0$. Από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε ότι:

$$\frac{1}{|\alpha|^\nu} = (1+\theta)^\nu \geq 1 + \nu\theta > \nu\theta \Rightarrow |\alpha|^\nu < \frac{1}{\theta}\frac{1}{\nu}, \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Επειδή $\frac{1}{\nu} \to 0$ έχουμε ότι $lim|\alpha|^\nu = 0$. Συνεπώς και $lim\alpha^\nu = 0$.

Παράδειγμα 1.53

Θα αποδείξουμε τώρα ότι : αν $\alpha \in \mathbb{R}^+$, τότε $lim\sqrt[\nu]{\alpha} = 1$.

Θα διακρίνουμε τις περιπτώσεις: i) $\alpha = 1$, ii) $\alpha > 1$ και iii) $0 < \alpha < 1$. Η περίπτωση i) είναι προφανής. Έστω ότι ισχύει η ii) $\alpha > 1$. Τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} > 1 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} = 1 + \omega_\nu$ με $\omega_\nu > 0$. Από την ανισότητα του Bernoulli παίρνουμε:

$$\alpha = (1+\omega_\nu)^\nu \geq 1 + \nu\omega_\nu \Rightarrow \omega_\nu \leq \frac{\alpha - 1}{\nu}.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $lim\omega_\nu = 0$ και άρα $lim\sqrt[\nu]{\alpha} = lim(1+\omega_\nu) = 1$.

Τέλος, αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} = \frac{1}{1+\delta_\nu}$ με $\delta_\nu > 0$. Η ανισότητα του Bernoulli δίνει:

$$\alpha = \left(\frac{1}{1+\delta_\nu}\right)^\nu \leq \frac{1}{1+\nu\delta_\nu} < \frac{1}{\nu\delta_\nu} \Rightarrow 0 < \delta_\nu < \frac{1}{\nu\alpha}.$$

Άρα

$$0 < 1 - \sqrt[\nu]{\alpha} = 1 - \frac{1}{1+\delta_\nu} = \frac{\delta_\nu}{1+\delta_\nu} < \delta_\nu < \frac{1}{\nu\alpha}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΚΡΗΤΗΣ

ή

$$|\sqrt[\nu]{\alpha} - 1| < \frac{1}{\nu\alpha} \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} \to 1$$

Παράδειγμα 1.54

Είναι $lim\sqrt[\nu]{\nu} = 1$. Πραγματικά· για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι $\sqrt[2\nu]{\nu} \geq 1 \Rightarrow \sqrt[2\nu]{\nu} = 1 + \delta_\nu$, με $\delta_\nu \geq 0$. Από την ανισότητα του Bernoulli παίρνουμε:

$$\sqrt{\nu} = (1 + \delta_\nu)^\nu \geq 1 + \nu\delta_\nu > \nu\delta_\nu \Rightarrow \delta_\nu < \frac{1}{\sqrt{\nu}}.$$

Επειδή $\frac{1}{\sqrt{\nu}} \to 0$ θα είναι $lim\delta_\nu = 0$. Άρα

$$lim\sqrt[\nu]{\nu} = lim(1 + \delta_\nu)^2 = lim(1 + 2\delta_\nu + \delta_\nu^2) = 1.$$

Σημείωση. Γενικά για να υπολογίσουμε το όριο ν-οστής ρίζας παίρνουμε την k.ν ρίζα, όπου k είναι φυσικός μεγαλύτερος κατά 1 από τον βαθμό της υπόριζης ποσότητας. Π.χ. για να αποδείξουμε ότι $\sqrt[\nu]{\nu^2 + \nu} \to 1$ θα πάρουμε $\sqrt[3\nu]{\nu^2 + \nu} > 1$, αφού βέβαια $\nu^2 + \nu \geq 1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν $\alpha_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbf{N}$ και $\lim\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = k < 1$, τότε να αποδείξετε ότι $\lim\alpha_\nu = 0$.

Απόδειξη

Διαλέγουμε πρώτα έναν αριθμό λ τέτοιο ώστε $k < \lambda < 1$ και έστω $\epsilon = \lambda - k$. Τότε:

$$lim\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = k \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_0 \in \mathbb{N})(\forall\nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow \left|\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| - k\right| < \epsilon$$

Έτσι $\forall\nu > \nu_0$ έχουμε:

$$\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \left|\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| - k + k\right| \leq \left|\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| - k\right| + |k| < \epsilon + k = \lambda.$$

Δηλ.

$$|\alpha_{\nu+1}| \leq \lambda|\alpha_\nu|, \forall\nu > \nu_0.$$

Στην τελευταία σχέση θέτουμε όπου ν το $\nu_0 + 1, \nu_0 + 2, \ldots, \nu_0 + \rho - 1$ και πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις σχέσεις που θα προκύψουν. Τότε παίρνουμε:

$$|\alpha_{\nu_0+\rho}| \leq \lambda^{\rho-1}|\alpha_{\nu_0+1}|.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επειδή $0 < \lambda < 1 \Rightarrow \lambda^{\nu-1} \to 0 \Rightarrow lim\alpha_\nu = 0$.

2. Να αποδείξετε ότι: $\lim \frac{[\nu\alpha]}{\nu} = \alpha$.

Απόδειξη

Από τον ορισμό του ακέραιου μέρους πραγματικού αριθμού (Θεώρημα 1.5) έχουμε ότι:

$$\nu\alpha - 1 < [\nu\alpha] \leq \nu\alpha \Rightarrow \alpha - \frac{1}{\nu} < \frac{[\nu\alpha]}{\nu} \leq \alpha$$

οπότε από το Θεώρημα 1.49 των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών παίρνουμε το συμπέρασμα.

Σημείωση

Η εφαρμογή αυτή αποδεικνύει πως κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο ακολουθίας ρητών αριθμών. Το ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο ακολουθίας ρητών μπορεί να αποδειχθεί και ως εξής: Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ υπάρχει ρητός αριθμός x_ν με $\alpha - \frac{1}{\nu} < x_\nu < \alpha$, από το θεώρημα 1.7 Τότε $|x_\nu - \alpha| < \frac{1}{\nu} \Rightarrow x_\nu \to \alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.10 Να αποδείξετε ότι:

$\alpha) lim\left(\sqrt{(\nu+2)(\nu+3)} - \nu\right) = \frac{5}{2}$.

$\beta) lim\left(\sqrt{\nu+\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu-\sqrt{\nu}}\right) = 1$

$\gamma) lim\left[\frac{\nu^2}{\nu^2+1} + \frac{\nu^2}{\nu^2+2} + \ldots + \frac{\nu^2}{\nu^2+\nu}\right] = 1$.

1.11 Έστω α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών και $\ell \geq 0$. Υποθέτουμε ότι $lim\alpha_\nu^2 = \ell^2$. Να αποδείξετε ότι $lim\alpha_\nu = \ell$.

1.12 Έστω η ακολουθία $\alpha_\nu(x) = \sqrt[\nu]{1+x^\nu}$, $x \geq 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $0 \leq x \leq 1$ τότε $lim\alpha_\nu(x) = 1$.

ii) Αν $x > 1$ τότε $lim\alpha_\nu(x) = x$.

1.13 Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ με $0 < \alpha < 1$, τότε να αποδείξετε ότι: $lim(\nu\alpha^\nu) = 0$.

1.14 Έστω $\alpha_\nu = \sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu}$. Να αποδείξετε ότι η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ και η $\sqrt{\nu}\alpha_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνουν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

1.15 Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{x^\nu + y^\nu}$ με $0 < x < y$. Να αποδείξετε ότι: $lim\alpha_\nu = y$.

1.16 Έστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε: $lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \ell < 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός k με $0 < k < 1$ τέτοιος ώστε: $0 < \alpha_\nu < k^\nu$ για αρκετά μεγάλες τιμές του ν. Χρησιμοποιώντας αυτό να αποδείξετε ότι $lim\alpha_\nu = 0$.

1.17 Υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνουν στα ℓ και m αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ακολουθίες $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ που ορίζονται ως εξής:

$$x_\nu = max\{\alpha_\nu, \beta_\nu\}, y_\nu = min\{\alpha_\nu, \beta_\nu\}$$

συγκλίνουν.

1.18 Να αποδείξετε ότι αν $lim\alpha_\nu = 0$ και $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη (όχι αναγκαστικά και συγκλίνουσα) τότε και $lim(\alpha_\nu.\beta_\nu) = 0$.

1.19 Αν $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι μια ακολουθία θετικών αριθμών και $lim\alpha_\nu = \ell > 0$, τότε να αποδείξετε ότι $lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 1$.

1.20 Να υπολογίσετε τα όρια:

$\alpha) lim\frac{7^\nu+2^\nu}{4.7^\nu+5^\nu}$ $\beta) lim\left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{2}{\nu^2} + \ldots + \frac{\nu}{\nu^2}\right)$

$\gamma) lim\sqrt[\nu]{2+\frac{1}{\nu}}$ $\delta) lim\frac{\nu!+5^\nu}{7^\nu+\nu!}$

$\epsilon) lim\frac{\nu sin(\nu!)}{\nu^2+1}$ $\sigma\tau) lim\frac{1-(1-\frac{1}{\nu})^4}{1-(1-\frac{1}{\nu})^3}$

1.21 Έστω $P(\nu) = \alpha_0\nu^\lambda + \alpha_1\nu^{\lambda-1} + \ldots + \alpha_\lambda$ ένα πολυώνυμο του ν τέτοιο ώστε $P(\nu) > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι: $lim\sqrt[\nu]{P(\nu)} = 1$.

1.22 Αν $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 0$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$lim[\alpha_0\sqrt{\nu} + \alpha_1\sqrt{\nu+1} + \ldots + \alpha_k\sqrt{\nu+k}] = 0.$$

§ 1.7 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Είδαμε πως αν μια ακολουθία συγκλίνει, τότε αυτή είναι αναγκαστικά φραγμένη, χωρίς όμως να ισχύει και το αντίστροφο. Θα δούμε τώρα ότι μια φραγμένη ακολουθία για να συγκλίνει, αρκεί να είναι μονότονη.

Ορισμός 1.55 Μια ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ λέγεται:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

α) αύξουσα, αν και μόνον αν, $\alpha_{\nu+1} \geq \alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbf{N}$.

β) γνήσια αύξουσα, αν και μόνον αν, $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbf{N}$.

γ) φθίνουσα, αν και μόνον αν, $\alpha_{\nu+1} \leq \alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbf{N}$.

δ) γνήσια φθίνουσα, αν και μόνον αν, $\alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbf{N}$.

ε) μονότονη (αντ. γνήσια μονότονη), αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα (αντ. γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα).

Για να εξετάσουμε την μονοτονία μιας ακολουθίας, ακολουθούμε μια από τις μεθόδους που περιγράφονται στα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.56

Η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{2\nu-7}{3\nu+2}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα αφού

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \frac{2\nu-5}{3\nu+5} - \frac{2\nu-7}{3\nu+2} = \frac{25}{(3\nu+5)(3\nu+2)} > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Η ακολουθία $\beta_\nu = \frac{1}{2^\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα, γιατί

$$\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \beta_{\nu+1} < \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται εφόσον όλοι οι όροι της ακολουθίας διατηρούν σταθερό πρόσημο.

Παράδειγμα 1.57

Έστω $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{4}(2\alpha_\nu + 3)$. Τότε $\alpha_1 < \alpha_2 = \frac{5}{4}$. Υποθέτουμε ότι $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1} \Rightarrow 2\alpha_\nu < 2\alpha_{\nu+1} \Rightarrow \frac{1}{4}(2\alpha_\nu + 3) < \frac{1}{4}(2\alpha_{\nu+1} + 3) \Rightarrow \alpha_{\nu+1} < \alpha_{\nu+2} \Rightarrow \alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ γνήσια αύξουσα.

Παράδειγμα 1.58

Έστω $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \frac{4+3\alpha_\nu}{3+2\alpha_\nu}, \nu > 1$. Θέτουμε $\Delta_\nu = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ και $\Delta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} - \alpha_{\nu+1}$. Είναι:

$$\Delta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} - \alpha_{\nu+1} = \frac{4+3\alpha_{\nu+1}}{3+2\alpha_{\nu+1}} - \frac{4+3\alpha_\nu}{3+2\alpha_\nu} = \frac{\Delta_\nu}{(3+2\alpha_{\nu+1})(3+2\alpha_\nu)}.$$

Δηλαδή δυο διαδοχικές διαφορές διατηρούν το ίδιο πρόσημο και άρα η ακολουθία είναι μονότονη. Επειδή $\Delta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 > 0 \Rightarrow \Delta_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ γνήσια αύξουσα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 1.59 Μια μονότονη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει, αν και μόνον αν, αυτή είναι φραγμένη. Πιο συγκεκριμένα:

α) Αν η α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι αύξουσα και φραγμένη, τότε $\lim\alpha_\nu = \sup\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}\}$.

β) Αν η α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη, τότε $\lim\alpha_\nu = \inf\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}\}$.

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 1.37 ξέρουμε ότι μια συγκλίνουσα ακολουθία πρέπει να είναι φραγμένη. Άρα αν μια μονότονη ακολουθία συγκλίνει, τότε προφανώς είναι φραγμένη.

Αντίστροφα, έστω α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μια φραγμένη και μονότονη ακολουθία. Τότε αυτή θα είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

α) Ας υποθέσουμε ότι η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη και αύξουσα. Αφού η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, το σύνολο $\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο και άρα έχει supremum, έστω ℓ. Από τον ορισμό του supremum για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει όρος α_k της α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_k > \ell - \epsilon$. Έτσι επειδή η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα, για $\nu > k$ θα έχουμε:

$$\ell - \epsilon < \alpha_k \leq \alpha_\nu \leq \ell \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \epsilon \Rightarrow lim\alpha_\nu = \ell.$$

β) Ας υποθέσουμε τώρα ότι η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη και φθίνουσα. Είναι προφανές τότε ότι η ακολουθία $-\alpha_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη και αύξουσα. Σύμφωνα με το α) $lim(-\alpha_\nu) = sup\{-\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$. Από το Θεώρημα 1.48β) είναι $lim(-\alpha_\nu) = -lim(\alpha_\nu)$, ενώ από το Θεώρημα 1.13i) έχουμε:

$$sup\{-\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} = -inf\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}.$$

Συνεπώς

$$lim(\alpha_\nu) = -lim(-\alpha_\nu) = -sup\{-\alpha_\nu, \nu \in N\} = inf\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}. \quad \bullet$$

Παρατήρηση 1.60

Το παραπάνω Θεώρημα λέει πως κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Αυτό αποτελεί μια **ικανή συνθήκη για την σύγκλιση** μιας ακολουθίας, α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Ικανή, γιατί μπορεί μια ακολουθία να συγκλίνει, χωρίς να είναι μονότονη. Π.χ. $\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Με την βοήθεια του Θεωρήματος 1.49 μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω βασικό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 1.61 α) Αν $x \in \mathbf{R}$, τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία ρητών με όριο το x.

β) Έστω A ένα μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του R. Αν $\sup A \notin A$, τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ σημείων του A, με $\lim x_\nu = \sup A$.

Απόδειξη

α) Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.7 υπάρχει $r_1 \in Q : x - 1 < r_1 < x$. Διαλέγουμε έναν $r_2 \in Q : max\{r_1, x - \frac{1}{2}\} < r_2 < x$. Συνεχίζουμε μ' αυτό το σκεπτικό. Έτσι αν έχουμε διαλέξει έναν $r_\nu \in Q$, διαλέγουμε τον $r_{\nu+1} \in Q : max\{r_\nu, x - \frac{1}{\nu+1}\} < r_{\nu+1} < x$. Προφανώς η r_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα ακολουθία ρητών και αφού $x - \frac{1}{\nu} < r_\nu < x$, από το Θεώρημα 1.49 έχουμε ότι $lim r_\nu = x$.

β) Έστω $x = sup A$. Από τον ορισμό του $sup A$, υπάρχει $x_1 \in A : x_1 > x - 1$. Τότε $x_1 < x$, αφού $x \notin A$. Παρατηρούμε ότι το $max\{x - \frac{1}{2}, x_1\}$ δεν είναι άνω φράγμα του A, και έτσι υπάρχει $x_2 \in A : x_2 > max\{x - \frac{1}{2}, x_1\}$. Έτσι έχουμε $x_1 < x_2$ και $x - \frac{1}{2} < x_2 < x$. Συνεχίζουμε μ' αυτό το σκεπτικό. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε διαλέξει τα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ από το A με $x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu$. Τότε υπάρχει $x_{\nu+1} \in A : x_{\nu+1} > max\{x - \frac{1}{\nu+1}, x_\nu\}$. Τότε $x_1 < x_2 < \ldots < x_{\nu+1}$ και $x - \frac{1}{\nu+1} < x_\nu < x$ απ' όπου το συμπέρασμα είναι προφανές. •

Όπως είδαμε, αν $\alpha_{k_\nu} \to \ell$ τότε δεν συνεπάγεται αναγκαστικά ότι και $\alpha_\nu \to \ell$. Αν όμως η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μονότονη, τότε αυτό ισχύει, όπως δείχνει το επόμενο

Θεώρημα 1.62 Αν η α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι μονότονη ακολουθία πραγματικών αριθμών και κάποια υπακολουθία της συγκλίνει στο ℓ, τότε και η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ συγκλίνει στο ℓ.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα και ότι $lim \alpha_{k_\nu} = \ell$. Αφού η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα και η α_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ θα είναι αύξουσα. Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$sup\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} = sup\{\alpha_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}\}.$$

Αφού το σύνολο των στοιχείων $\{\alpha_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}\}$ περιέχεται στο σύνολο $\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$ από την εφαρμογή 3 της § 1.2 θα έχουμε:

$$sup\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \geq sup\{\alpha_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}\}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Αλλά

$$k_\nu \geq \nu \Rightarrow sup\{\alpha_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}\} \geq sup\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}.$$

Επομένως

$$\ell = sup\{\alpha_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}\} = lim\alpha_{k_\nu} = lim\alpha_\nu. \quad \bullet$$

Παράδειγμα 1.63

Θα εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 = \sqrt{k} \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \sqrt{k + \alpha_\nu}, k > 0$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Θα την εξετάσουμε ως προς την μονοτονία με επαγωγή. Είναι $\alpha_1 = \sqrt{k}$ και $\alpha_2 = \sqrt{k + \sqrt{k}} > \alpha_1$. Ας υποθέσουμε ότι $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1} \Rightarrow k + \alpha_\nu < k + \alpha_{\nu+1} \Rightarrow \sqrt{k + \alpha_\nu} < \sqrt{k + \alpha_{\nu+1}} \Rightarrow \alpha_{\nu+1} < \alpha_{\nu+2}, \forall \nu \in \mathbb{N}$ > και άρα η ακολουθία είναι γνήσια αύξουσα.

Θα αποδείξουμε ότι είναι και φραγμένη από το $1 + \sqrt{k}$. Πραγματικά· είναι $\alpha_1 = \sqrt{k} < 1 + \sqrt{k}$. Υποθέτοντας ότι $\alpha_\nu < 1 + \sqrt{k}$ έχουμε ότι $\alpha_{\nu+1} < \sqrt{k + \sqrt{k} + 1} < \sqrt{k + 2\sqrt{k} + 1} = 1 + \sqrt{k}$. Δηλ. $\alpha_\nu < 1 + \sqrt{k}, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία λοιπόν ως μονότονη και φραγμένη συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό $\ell : \ell = \sqrt{k + \ell}$. Δηλ. συγκλίνει στην θετική ρίζα της εξίσωσης $\ell^2 - \ell - k = 0$.

Παράδειγμα 1.64

Έστω α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \sqrt{2\alpha_\nu}.$$

Είναι $\alpha_1 = \sqrt{2}, \alpha_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} > \alpha_1$. Ας υποθέσουμε ότι $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1} \Rightarrow \sqrt{2\alpha_\nu} < \sqrt{2\alpha_\nu + 1} \Rightarrow \alpha_{\nu+1} < \alpha_{\nu+2}$. Δηλ. $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και άρα η ακολουθία είναι γνήσια αύξουσα.

Θα αποδείξουμε ότι είναι και φραγμένη από το 2. Πραγματικά· είναι $\alpha_1 = \sqrt{2} < 2$. Υποθέτοντας ότι $\alpha_\nu < 2$ έχουμε ότι $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2\alpha_\nu} < 2$. Δηλ. $\alpha_\nu < 2, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία λοιπόν ως μονότονη και φραγμένη συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό $\ell : \ell^2 = 2\ell \Rightarrow \ell = 0$ ή $\ell = 2$. Αλλά $\ell \neq 0$ γιατί η ακολουθία είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη από το $\sqrt{2}$ και επομένως $\ell = 2$.

Παράδειγμα 1.65

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \frac{4+3\alpha_\nu}{3+2\alpha_\nu}$ συγκλίνει. Η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένη γιατί

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{4+3\alpha_\nu}{3+2\alpha_\nu} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(3+2\alpha_\nu)} < \frac{3}{2}.$$

(Παρατηρούμε ότι $\alpha_\nu \geq 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$). Επίσης η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι γνήσια αύξουσα, από το Παράδειγμα 1.58. Ως γνήσια αύξουσα λοιπόν και φραγμένη συγκλίνει σε κάποιον θετικό αριθμό ℓ. Εύκολα βρίσκουμε από την αναδρομική σχέση ότι $\ell = \sqrt{2}$.

Παράδειγμα 1.66

Η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 = 2 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{2}{\alpha_\nu}\right),$$

συγκλίνει στο $\sqrt{2}$.

Είναι $\alpha_1 > 0$. Αν υποθέσουμε ότι $\alpha_\nu > 0$ τότε $\alpha_{\nu+1} > 0$. Άρα $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Θα εξετάσουμε την μονοτονία της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$. Έχουμε:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{2}{\alpha_\nu}\right) - \alpha_\nu = \frac{2-\alpha_\nu^2}{2\alpha_\nu}. \tag{1}$$

Πρέπει να ξέρουμε το πρόσημο της διαφοράς $2 - \alpha_\nu^2$ για να αποφανθούμε για το πρόσημο της διαφοράς $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$. Αλλά

$$2 - \alpha_{\nu+1}^2 = 2 - \frac{1}{4}\left(\alpha_\nu^2 + 4 + \frac{4}{\alpha_\nu^2}\right) = -\frac{1}{4}\left(\alpha_\nu - \frac{2}{\alpha_\nu}\right)^2 \leq 0.$$

Δηλ. $\alpha_{\nu+1}^2 \geq 2$ και αφού $\alpha_1^2 \geq 2$ θα έχουμε $\alpha_\nu^2 \geq 2, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Η (1) τότε δίνει $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu < 0$ και άρα η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα. Ως φθίνουσα λοιπόν και κάτω φραγμένη συγκλίνει σε κάποιον αριθμό $x \geq 0$. Αφού $\alpha_\nu^2 \geq 2$ και $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ θα είναι $\alpha_\nu > 1$ και άρα $x \geq 1$. Από την σχέση $x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ βρίσκουμε ότι $x = \sqrt{2}$. **(Αυτό αποδεικνύει την ύπαρξη της $\sqrt{2}$.)**.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. α) Έστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ μια αύξουσα ακολουθία και $\beta_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ μια φθίνουσα ακολουθία, τέτοιες ώστε: $\alpha_\nu \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbf{N}$. Να αποδείξετε ότι αυτές συγκλίνουν και αν ℓ_1, ℓ_2 είναι αντίστοιχα τα όρια, τότε $\ell_1 \leq \ell_2$.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\alpha_\nu = \lim\beta_\nu$ αν

$$\alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu \qquad \text{και} \qquad \beta_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

α) Επειδή $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_\nu \leq \beta_\nu \leq \ldots \leq \beta_1$ συνεπάγεται ότι οι ακολουθίες $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένες. Συνεπώς αφού είναι και μονότονες αυτές συγκλίνουν (Θεώρημα 1.59). Έστω $lim\alpha_\nu = \ell_1$ και $lim\beta_\nu = \ell_2$. Θα αποδείξουμε ότι $\ell_1 \leq \ell_2$. Ας υποθέσουμε ότι $\ell_2 < \ell_1$. Έστω $\epsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}$. Επειδή $lim\alpha_\nu = \ell_1$ και $lim\beta_\nu = \ell_2$ υπάρχουν $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε:

$$\ell_1 - \epsilon < \alpha_\nu < \ell_1 + \epsilon, \forall \nu > \nu_1$$

και

$$\ell_2 - \epsilon < \beta_\nu < \ell_2 + \epsilon, \forall \nu > \nu_2.$$

Διαλέγουμε $\nu_0 = max\{\nu_1, \nu_2\}$. Τότε $\forall \nu > \nu_0$ έχουμε:

$$\beta_\nu < \ell_2 + \epsilon = \ell_1 - \epsilon < \alpha_\nu \leq \beta_\nu$$

που είναι άτοπο. Άρα $\ell_1 \leq \ell_2$.

β) Παρατηρούμε ότι $\beta_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu . \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) = \alpha_\nu \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)$. άρα $\alpha_\nu < \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε την μονοτονία των δυο αυτών ακολουθιών. Για την $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}} = \left(\frac{1 + \frac{1}{\nu}}{1 + \frac{1}{\nu-1}}\right)^\nu \left(1 + \frac{1}{\nu - 1}\right) = \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)^\nu \frac{\nu}{\nu - 1}.$$

Από την ανισότητα του Bernoulli όμως έχουμε:

$$\left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)^\nu > 1 - \frac{\nu}{\nu^2} = \frac{\nu - 1}{\nu}$$

και συνεπώς $\alpha_{\nu-1} < \alpha_\nu$, δηλ. η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι γνήσια αύξουσα.

Για την $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{\nu-1}}{\beta_\nu} &= \left(\frac{1 + \frac{1}{\nu-1}}{1 + \frac{1}{\nu}}\right)^\nu \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) = \left(1 + \frac{1}{\nu^2 - 1}\right)^\nu \frac{\nu}{\nu + 1} \\ &> \left(1 + \frac{\nu}{\nu^2 - 1}\right) \frac{\nu}{\nu + 1} > \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \frac{\nu}{\nu + 1} = 1 \end{aligned}$$

δηλ. $\beta_\nu < \beta_{\nu-1}$ και συνεπώς $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι γνήσια φθίνουσα.

Σύμφωνα λοιπόν με το α) και οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν. Ακόμα παρατηρούμε ότι:

$$0 \leq \beta_\nu - \alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu \frac{1}{\nu} \leq \frac{4}{\nu}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γιατί $2 = \alpha_1 \leq \alpha_\nu \leq \beta_1 = 4, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Επειδή $\frac{4}{\nu} \to 0$ συνεπάγεται ότι η ακολουθία $\beta_\nu - \alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι μηδενική. Έτσι αν $lim\alpha_\nu = \ell$ τότε και $lim\beta_\nu = lim[\beta_\nu - \alpha_\nu] + \alpha_\nu = lim[\beta_\nu - \alpha_\nu] + lim\alpha_\nu = 0 + \ell = \ell$. Το κοινό όριό τους είναι ο αριθμός $e = 2,7182818\ldots$.

Σημείωση

Από το β) είναι προφανής η παρακάτω ανισότητα:

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} < e < \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}.$$

Θέτοντας στην ανισότητα αυτή όπου ν το $1, 2, \ldots, \nu - 1$ παίρνουμε:

$$2 < e < 3$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2} < e < \left(1+\frac{1}{2}\right)^{3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1} < e < \left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη καταλήγουμε στην εξής ανισότητα:

$$2.\frac{3^2}{2^2}.\ldots.\frac{\nu^{\nu-1}}{(\nu-1)^{\nu-1}} < e^{\nu-1} < 3.\frac{3^3}{2^3}.\ldots.\frac{\nu^{\nu}}{(\nu-1)^{\nu}}$$

η οποία μετά τις απλοποιήσεις γίνεται:

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\ldots.\frac{\nu^{\nu-1}}{\nu-1} < e^{\nu-1} < \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\ldots.\frac{\nu^{\nu}}{\nu-1}$$

και επομένως

$$\frac{\nu^{\nu-1}}{(\nu-1)!} < e^{\nu-1} < \frac{\nu^{\nu}}{(\nu-1)!}$$

ή

$$\frac{\nu^{\nu}}{\nu!} < e^{\nu-1} < \frac{\nu^{\nu+1}}{\nu!}$$

ή ακόμα

$$e(\nu^{\nu}e^{-\nu}) < \nu! < (e\nu)(\nu^{\nu}e^{-\nu}),\ \nu > 1.$$

2. Αν $\lim\alpha_\nu = \ell$, τότε να αποδείξετε ότι για την ακολουθία των αριθμητικών μέσων

$$\sigma_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu}{\nu}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ισχύει $\lim\sigma_\nu = \ell$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Απόδειξη

Επειδή $lim\alpha_\nu = \ell$ θα έχουμε:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_0 \in \mathbb{N})(\forall\nu \in N)\nu > \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \epsilon.$$

Αλλά

$$\begin{aligned} |\sigma_\nu - \ell| &= \left|\frac{(\alpha_1 - \ell) + (\alpha_2 - \ell) + \ldots + (\alpha_{\nu_0} - \ell)}{\nu}\right| \\ &\quad + \left|\frac{(\alpha_{\nu_0+1} - \ell) + \ldots + (\alpha_\nu - \ell)}{\nu}\right| \\ &\leq \frac{K}{\nu} + \frac{\nu - \nu_0}{\nu}\epsilon, \end{aligned}$$

όπου $K = (\alpha_1 - \ell) + (\alpha_2 - \ell) + \ldots + (\alpha_{\nu_0} - \ell)|$ είναι σταθερός αριθμός. Επειδή

$$\frac{K}{\nu} \to 0 \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_1 \in N)(\forall\nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_1 \Rightarrow \left|\frac{K}{\nu}\right| < \epsilon.$$

Διαλέγοντας λοιπόν $\nu_2 = max\{\nu_0, \nu_1\}$ θα έχουμε, αφού $\frac{\nu-\nu_0}{\nu} < 1$, ότι: $|\sigma_\nu - \ell| < 2\epsilon, \forall\nu > \nu_2$ που σημαίνει ότι $lim\sigma_\nu = \ell$.

Για το αντίστροφο, ας θεωρήσουμε την ακολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ που δεν συγκλίνει από το Παράδειγμα 1.34. Για την σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\sigma_\nu = \frac{(-1) + (-1)^2 + \ldots + (-1)^\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu}(-1)\frac{(-1)^\nu - 1}{(-1) - 1} = \frac{1}{2\nu}[(-1)^\nu - 1]$$

και $|\sigma_\nu| \leq \left|\frac{1}{2\nu}[(-1)^\nu - 1]\right| \leq \frac{2}{2\nu} \to 0$.

3. Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ με

$$\alpha_1 = 1 \qquad \text{και} \qquad \alpha_{\nu+1} = 1 + \frac{1}{1 + \alpha_\nu}, \nu \geq 1.$$

Απόδειξη

Προφανώς $\alpha_\nu > 0, \forall\nu \in \mathbb{N}$ (αφού $\alpha_1 > 0$ και αν $\alpha_\nu > 0$ τότε και $\alpha_{\nu+1} > 0$) και $1 \leq \alpha_\nu \leq 2, \forall\nu \in \mathbb{N}$. Για να εξετάσουμε την μονοτονία, εξετάζουμε το πρόσημο δυο διαδοχικών διαφορών. Έχουμε

$$\alpha_{\nu+2} - \alpha_{\nu+1} = \left(1 + \frac{1}{1 + \alpha_{\nu+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{1 + \alpha_\nu}\right) = -\frac{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu}{(1 + \alpha_\nu)(1 + \alpha_{\nu+1})}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δηλ. δυο διαδοχικές διαφορές δεν έχουν το ίδιο πρόσημο και άρα η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δεν είναι μονότονη.

Ελέγχουμε στην συνέχεια το πρόσημο της διαφοράς δυο όρων με διαφορά δεικτών 2. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha_{\nu+2} - \alpha_\nu &= \left(1 + \frac{1}{1+\alpha_{\nu+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{1+\alpha_{\nu-1}}\right) \\ &= \frac{1}{1+1+\frac{1}{\alpha_\nu}} - \frac{1}{1+1+\frac{1}{\alpha_{\nu-2}}} \\ &= \frac{\alpha_\nu - \alpha_{\nu-2}}{(3+2\alpha_\nu)(3+2\alpha_{\nu-2})}\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι οι υπακολουθίες $\alpha_{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_{2\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι μονότονες και μάλιστα η $\alpha_{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ φθίνουσα, αφού $\alpha_4 - \alpha_2 = -\frac{1}{12} < 0$ και η $\alpha_{2\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}$ αύξουσα, αφού $\alpha_3 - \alpha_1 = \frac{2}{5} > 0$. Αυτές όμως είναι και φραγμένες, αφού $|\alpha_\nu| \leq 2, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και άρα συγκλίνουν. Αν $lim\alpha_{2\nu} = \ell_1$ και $lim\alpha_{2\nu-1} = \ell_2$ θα έχουμε:

$$\alpha_{2\nu} = 1 + \frac{1}{1+\alpha_{2\nu-1}} \Rightarrow \ell_1 = 1 + \frac{1}{1+\ell_2}$$

$$\alpha_{2\nu-1} = 1 + \frac{1}{1+\alpha_{2\nu-2}} \Rightarrow \ell_2 = 1 + \frac{1}{1+\ell_1}$$

από τις οποίες προκύπτει με βάση το Θεώρημα 1.47 ότι $\ell_1 = \ell_2$, και ακόμα ότι $\ell = \sqrt{2}$.

4. Αν $\beta > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha \geq 0$, τέτοιος ώστε: $\alpha^k = \beta$.

Απόδειξη

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x^k \leq \beta\}$. Αφού $0^k < \beta$ συνεπάγεται ότι $0 \in A$, δηλαδή $A \neq \emptyset$. Επίσης αν $\gamma \in A$ και $0 \leq \alpha < \gamma$ τότε $\alpha^k < \gamma^k$ και συνεπώς $\alpha \in A$. Το A είναι άνω φραγμένο. Πραγματικά· αν $\beta \leq 1$ τότε το 1 είναι άνω φράγμα, ενώ αν $\beta > 1$ τότε το β είναι άνω φράγμα. Συνεπώς από το Αξίωμα 10 το $sup\, A$ υπάρχει. Αν $sup\, A = \alpha$, θα αποδείξουμε ότι $\alpha^k = \beta$.

Θεωρούμε την ακολουθία $y_\nu = \alpha + \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$. Τότε $y_\nu > \alpha, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $limy_\nu = \alpha$. Άρα

$$limy_\nu^k = \alpha^k \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |y_\nu^k - \alpha^k| < \epsilon.$$

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha^k < \beta$ τότε παίρνοντας $\epsilon = \beta - \alpha^k > 0$, από τον προηγούμενο ορισμό, υπάρχει $\nu_1 \in \mathbb{N} : |y_{\nu_1}^k - \alpha^k| < \beta - \alpha^k \Leftrightarrow y_{\nu_1}^k - \alpha^k <$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

$\beta - \alpha^k \Leftrightarrow y_{\nu_1}^k < \beta$. Αυτό σημαίνει ότι $y_{\nu_1} \in A$ και αφού το α είναι άνω φράγμα του A, συνεπάγεται ότι $y_{\nu_1} \leq \alpha$. Αυτό όμως αντίκειται στο ότι $y_\nu > \alpha, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Άρα $\alpha^k \geq \beta$.

Ας θεωρούμε τώρα την ακολουθία $z_\nu = \alpha - \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε $z_\nu < \alpha, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $limz_\nu = \alpha$. Άρα $limz_\nu^k = \alpha^k$. Ας υποθέσουμε ότι $\alpha^k > \beta$. Τότε υπάρχει $\nu_2 \in \mathbb{N} : |z_{\nu_2}^k - \alpha^k| < \alpha^k - \beta$, οπότε $\beta < z_{\nu_2}^k$. Έτσι $z_{\nu_2} \notin A$ και αφού $\alpha = sup A$, θα είναι $\alpha < z_{\nu_2}$. Αυτό όμως αντίκειται στο ότι $z_{\nu_2} < \alpha, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και κατά συνέπεια δεν είναι $\alpha^k < \beta$. Άρα $\alpha^k = \beta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.23 Δίνεται η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu}\right).$$

α) Να αποδείξετε ότι η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μονότονη.

β) Είναι η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνουσα; Αν ναι, ποιό είναι το όριό της;

1.24 Δίνεται η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\alpha_\nu^2}.$$

Να αποδείξετε ότι: i) $\alpha_\nu^2 - 2 < 0$ και $\alpha_{\nu+1}^2 - \alpha_\nu^2 > 0$. Να συμπεράνετε ότι η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει και να βρήτε το όριό της.

1.25 Δίνεται η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\alpha_1 = k, \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1}^2 - \alpha_{\nu-1} + 1, \nu > 1.$$

Για ποιές τιμές του k η ακολουθία είναι:

α) μονότονη; β) φραγμένη; γ) συγκλίνουσα;

1.26 Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 > 0, \alpha_1^2 > k \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \frac{k - \alpha_\nu^2}{2\alpha_\nu}, k > 0$$

συγκλίνει στο $\sqrt{k}$.

1.27 Αν $lim\alpha_\nu = \ell$ και $lim\beta_\nu = m$, να αποδείξετε ότι:

$$lim\frac{1}{\nu}(\alpha_1\beta_\nu + \alpha_2\beta_{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu\beta_1) = \ell m.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.28 Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = (\sqrt{2})^{\alpha_\nu}$$

συγκλίνει, και να βρήτε το όριό της.

1.29 Να αποδείξετε ότι $lim\sqrt[\nu]{\alpha_1^\nu + \alpha_2^\nu + \ldots + \alpha_k^\nu} = max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, όπου $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, k$.

1.30 Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_1 = \frac{5}{2}$ και $5\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu^2 + 6$.

1.31 Έστω $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_\nu \to \alpha$ με $0 < \alpha < +\infty$. Να αποδείξετε ότι $log\alpha_\nu \to log\alpha$. (Να θεωρηθεί γνωστό ότι ο $logx$ είναι αύξουσα συνάρτηση).

1.32 Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu} - log\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει.

1.33 Δίνεται η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = 2 - \frac{1}{\alpha_\nu}$, $\nu \geq 2$. Να αποδείξετε ότι συγκλίνει και να βρήτε το όριό της.

1.34 Δίνεται η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_1 = c > 0$, $\beta > \sqrt{k}$, $c^2 < k$ και

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{k + \beta\alpha_\nu}{\beta + \alpha_\nu}, \nu \geq 1.$$

Να αποδείξετε ότι συγκλίνει και να βρήτε το όριό της.

1.35 Δίνεται η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{και} \quad \alpha_\nu = 1 + \frac{1}{\alpha_{\nu-1}}, \nu > 1.$$

Να αποδείξετε ότι η υπακολουθία $\alpha_{2\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι γνήσια αύξουσα, ενώ η υπακολουθία $\alpha_{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι γνήσια φθίνουσα. Να αποδείξετε επίσης ότι οι δυο αυτές υπακολουθίες έχουν κοινό όριο, την θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 0$.

1.36 Δίνεται η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_2 > \alpha_1 > 0 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \sqrt{\alpha_\nu \alpha_{\nu-1}}, \nu > 1.$$

Να αποδείξετε ότι οι υπακολουθίες $\alpha_{2\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μονότονες και συγκλίνουν σε κοινό όριο. Να αποδείξετε ότι $lim\alpha_\nu = \sqrt[3]{\alpha_2^2 \alpha_1}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

1.37 Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 > 0, k > \alpha_1^2 + \alpha_1 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \frac{k}{1+\alpha_\nu},$$

συγκλίνει προς την θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 + x - k = 0$.

§ 1.8 ΚΙΒΩΤΙΣΜΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ

Αν για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \in \mathbb{N}$ ορίσουμε και ένα διάστημα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ τότε η ακολουθία

$$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_\nu, \beta_\nu], \ldots$$

λέγεται ακολουθία κλειστών διαστημάτων και συμβολίζεται με $\Delta_\nu = [\alpha_\nu, \beta_\nu]$, $\nu \in \mathbb{N}$. Θα ορίσουμε σ' αυτήν την παράγραφο τα κιβωτισμένα διαστήματα και θα δούμε μερικές σημαντικές ιδιότητες που θα χρησιμοποιούμε συχνά στα επόμενα.

Ορισμός 1.67. Η ακολουθία $\Delta_\nu = [\alpha_\nu, \beta_\nu]$, $\nu \in \mathbf{N}$ θα λέγεται κιβωτισμός κλειστών διαστημάτων, αν και μόνον αν,

$$\Delta_\nu \neq \emptyset \quad \text{και} \quad \Delta_{\nu+1} \subseteq \Delta_\nu, \forall \nu \in \mathbf{N}.$$

(Με άλλα λόγια, αν και μόνον αν, $\alpha_\nu \leq \alpha_{\nu+1}$, $\beta_\nu \geq \beta_{\nu+1}$ και $\alpha_\nu \leq \beta_\nu$, $\forall \nu \in \mathbf{N}$.)

Αν επί πλέον ισχύει και $\lim(\beta_\nu - \alpha_\nu) = 0$ (δηλ. η ακολουθία των μηκών $\ell(\Delta_\nu) = |\beta_\nu - \alpha_\nu|$ να είναι μηδενική) τότε ο κιβωτισμός λέγεται κιβωτισμός κλειστών διαστημάτων του Cantor.

Θεώρημα 1.68 Αν $\Delta_\nu = [\alpha_\nu, \beta_\nu]$, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι ένας κιβωτισμός κλειστών διαστημάτων του Cantor, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in \mathbf{R}$ τέτοιο ώστε: $\xi \in \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \ldots \cap \Delta_\nu \cap \ldots = \cap_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu = \{\xi\}$.

Απόδειξη

Από τον ορισμό του κιβωτισμού του Cantor έχουμε ότι $\Delta_{\nu+1} \subseteq \Delta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ δηλ. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_\nu \leq \beta_\nu \leq \beta_{\nu-1} \leq \ldots \leq \beta_2 \leq \beta_1, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Συνεπώς, από το Θεώρημα 1.59 αυτές συγκλίνουν. Ας είναι $\xi = lim\alpha_\nu$ και $\xi_1 = lim\beta_\nu$. Τότε $\alpha_\nu \leq \xi$ και $\xi_1 \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ από το Θεώρημα 1.59. Επειδή

$$\xi_1 - \xi = lim\beta_\nu - lim\alpha_\nu = lim(\beta_\nu - \alpha_\nu) = 0$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

θα έχουμε ότι $\xi_1 = \xi$. Αλλά τότε $\alpha_\nu \leq \xi \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ που σημαίνει ότι $\xi \in \cap_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu$.

Το ξ αυτό είναι και μοναδικό, γιατί αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $\zeta \neq \xi$ με $\zeta \in \cap_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu$ θα έχουμε $\alpha_\nu \leq \zeta \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Επειδή $lim(\beta_\nu - \alpha_\nu) = 0$ θα έχουμε $|\beta_\nu - \alpha_\nu| < \epsilon, \forall \nu \geq \nu_0$. Ειδικά για $\epsilon = |\xi - \zeta|$ θα έχουμε $|\beta_{\nu_0} - \alpha_{\nu_0}| < |\xi - \zeta|$. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος του $\beta_{\nu_0} - \alpha_{\nu_0}$ είναι μικρότερο του $\xi - \zeta$ και αφού $\xi \in [\alpha_{\nu_0}, \beta_{\nu_0}]$ συνεπάγεται ότι $\zeta \notin \Delta_{\nu_0}$, άρα ούτε και στην τομή $\cap_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu$, άτοπο. •

Σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα λέμε ότι κάθε ακολουθία κιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων του Cantor, **ορίζει** έναν πραγματικό αριθμό.

Αξίζει ακόμα να παρατηρήσουμε ότι το γεγονός ότι τα διαστήματα είναι κλειστά είναι ουσιώδες στο παραπάνω θεώρημα. Για παράδειγμα αν $\Delta_\nu = \left(0, \frac{1}{\nu}\right), \nu \in \mathbb{N}$ τότε η ακολουθία των διαστημάτων είναι κιβωτισμένη, αλλά δεν υπάρχει κοινό σημείο που να ανήκει σε όλα τα διαστήματα.

Το παραπάνω Θεώρημα χρησιμοποιείται και ως αξίωμα για την θεμελίωση των πραγματικών αριθμών, γνωστό ως **αξίωμα του κιβωτισμού**. Όπως δείχνει το επόμενο Θεώρημα αυτό είναι ισοδύναμο με το Αξίωμα 10, της πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

Θεώρημα 1.69 Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

α) Κάθε ακολουθία κιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων του Cantor, ορίζει έναν πραγματικό αριθμό.

β) Κάθε άνω φραγμένο και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum.

Απόδειξη

$\alpha) \Rightarrow \beta)$. Έστω ότι ισχύει το αξίωμα του κιβωτισμού και $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα άνω φραγμένο και μη κενό σύνολο. Θα αποδείξουμε ότι το $supA$ υπάρχει.

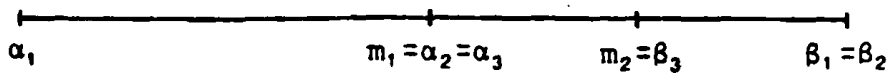
Έστω β_1 ένα άνω φράγμα του Α. Διαλέγουμε ένα $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το α_1 να μην είναι άνω φράγμα του Α. Τότε το διάστημα $\Delta_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ περιέχει ένα τουλάχιστο στοιχείο του Α. Θεωρούμε το μέσο $\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} = m_1$. Αν το m_1 είναι άνω φράγμα του Α, τότε θέτουμε $\alpha_2 = \alpha_1$ και $\beta_2 = m_1$. Αν το m_1 δεν είναι άνω φράγμα του Α, τότε θέτουμε $\alpha_2 = m_1$ και $\beta_2 = \beta_1$. Και στην μια και στην άλλη περίπτωση ορίζεται ένα διάστημα $\Delta_2 = [\alpha_2, \beta_2]$ που περιέχει ένα τουλάχιστο στοιχείο του Α και $\Delta_2 \subseteq \Delta_1$. Ακόμα είναι $\beta_2 - \alpha_2 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2}$.

Συνεχίζουμε μ' αυτόν τον τρόπο[8]. Παίρνουμε το μέσο $\frac{\alpha_2+\beta_2}{2} = m_2$ και

[8]Είναι η μαθηματική μορφή του κλασσικού αποφθέγματος: Divide et impera (Διαίρει και

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

θέτουμε $\alpha_3 = \alpha_2$ και $\beta_3 = m_2$ αν το m_2 είναι άνω φράγμα του Α, και $\alpha_3 = m_2, \beta_3 = \beta_2$ αν το m_2 δεν είναι άνω φράγμα του Α. Έτσι προκύπτει ένα διάστημα $\Delta_3 = [\alpha_3, \beta_3]$ που περιέχει τουλάχιστο ένα στοιχείο του Α και ακόμα $\Delta_2 \subset \Delta_1$ και $\beta_3 - \alpha_3 = \frac{\beta_2 - \alpha_2}{2} = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{4} = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^2}$. Το παρακάτω σχήμα δείχνει την περίπτωση που το m_1 δεν είναι άνω φράγμα του Α, ενώ το m_2 είναι.



Σχήμα 1.3

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία παίρνουμε μια ακολουθία κιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων Δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ που κάθε Δ_k περιέχει ένα τουλάχιστο στοιχείο του Α. Ο κιβωτισμός αυτός είναι κιβωτισμός του Cantor αφού $\beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{\nu-1}} \to 0$.

Σύμφωνα με την πρόταση α) υπάρχει μοναδικό $x \in \mathbb{R} : x \in \Delta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Μένει τώρα να δείξουμε ότι $x = sup A$. Από την κατασκευή που κάναμε παραπάνω παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία άνω φραγμάτων β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ που είναι κάτω φραγμένη και μια αύξουσα ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ άνω φραγμένη που οι όροι της δεν είναι άνω φράγματα του Α, που και οι δυο συγκλίνουν στο x.

Αφού όλοι οι όροι της β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι άνω φράγματα του Α, για τυχαίο $y \in A$ θα έχουμε: $y < \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ ή $y \leq lim \beta_\nu = x$, δηλ. το x είναι άνω φράγμα του Α. Για να είναι $x = sup A$ αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματα. Ας υποθέσουμε ότι x' είναι ένα άλλο άνω φράγμα του Α. Τότε $\alpha_\nu < x', \forall \nu \in \mathbb{N}$ αφού οι όροι της α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δεν είναι άνω φράγματα του Α. Τότε όμως $x = lim \alpha_\nu \leq x'$ και άρα $x = sup A$.

$\beta) \Rightarrow \alpha)$. Έστω ότι κάθε άνω φραγμένο και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum. Θεωρούμε την ακολουθία των κιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων του Cantor , $\Delta_\nu = [\alpha_\nu, \beta_\nu]$, $\nu \in \mathbb{N}$. Επειδή από τον ορισμό του κιβωτισμού έχουμε $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_\nu \leq \beta_\nu \leq \beta_{\nu-1} \leq \ldots \leq \beta_2 \leq \beta_1$, το σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots\}$ είναι άνω φραγμένο από το β_1 και συνεπώς υπάρχει το $sup A$, έστω $x = sup A$. Τότε $\alpha_\nu \leq x, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $x > \beta_{\nu_0}$, για κάποιο $\nu_0 \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό του $sup A$ για $\epsilon = x - \beta_{\nu_0}$, υπάρχει $\alpha_k \in A$ τέτοιο ώστε:

$$x - (x - \beta_{\nu_0}) < \alpha_k \leq x$$

βασίλευε!).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή $\beta_{\nu_0} < \alpha_k$ που είναι άτοπο. Άρα $\alpha_\nu \leq x \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και έτσι αποδείχτηκε ότι κάθε ακολουθία κιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων του Cantor ορίζει έναν πραγματικό αριθμό. •

Παρατήρηση 1.70

Πληροφοριακά αναφέρουμε τα εξής, σε σχέση με όσα είπαμε παραπάνω:

1. Ένα διατεταγμένο σώμα δεν είναι απαραίτητα Αρχιμήδειο. Για παράδειγμα έστω $Q(x) = \{\frac{f(x)}{g(x)} : f(x) = \alpha_0 x^\nu + \ldots + \alpha_\nu,\ g(x) = \beta_0 x^\mu + \ldots + \beta_\mu,\ \nu, \mu \in \mathbb{N},\ \alpha_i, \beta_j \in Q,\ \beta_j \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, \nu,\ j = 1, 2, \ldots, \mu,\ MK\Delta(f, g) = 1\}$. Τότε το $Q(x)$ είναι διατεταγμένο σώμα, αν ορίσουμε την εξής διάταξη: $\frac{f}{g} > 0$ αν $\alpha_0\beta_0 > 0$. Το $Q(x)$ όμως δεν είναι Αρχιμήδειο γιατί αν $f(x) = x$ και $g(x) = 1$ είναι $\forall \nu \in \mathbb{N} \quad \nu > x$, αφού ο συντελεστής του $x - \nu$ είναι θετικός.

2. Ένα διατεταγμένο και Αρχιμήδειο σώμα δεν είναι απαραίτητα πλήρες. Για παράδειγμα το Q, που είναι διατεταγμένο και Αρχιμήδειο σώμα, αλλά όχι πλήρες (Θεώρημα 1.8).

3. Ένα διατεταγμένο και Αρχιμήδειο σώμα, που έχει την ιδιότητα του κιβωτισμού είναι πλήρες και αντίστροφα, ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα είναι Αρχιμήδειο και έχει την ιδιότητα του κιβωτισμού.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. (Τομές Dedekind) Το διατεταγμένο ζεύγος (A, B) των μη κενών υποσυνόλων A, B του R ορίζει μια τομή Dedekind στο R αν:

I) $\alpha \in \mathbf{A}, \beta \in \mathbf{B} \Rightarrow \alpha < \beta$

II) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset, \mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{R}$.

Να αποδείξετε ότι το R είναι πλήρες, αν και μόνον αν, για κάθε τομή Dedekind στο R, υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbf{R} : \mathbf{x} \geq \alpha, \forall \alpha \in \mathbf{A}$ **και** $\mathbf{x} \leq \beta, \forall \beta \in \mathbf{B}$.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω ότι το $\mathbb{R}$ είναι πλήρες και (A,B) μια τομή του Dedekind. Τότε το A είναι άνω φραγμένο και άρα υπάρχει το $sup\, A$, έστω x. Αυτό το x έχει ακριβώς τις ιδιότητες που ζητάμε.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, έστω S ένα άνω φραγμένο σύνολο. Ας είναι B το σύνολο των άνω φραγμάτων του S και $A = \mathbb{R} - S$. Τότε $A, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta, \forall \alpha \in A, \beta \in B$. Άρα το (A,B) ορίζει μια τομή του Dedekind και σύμφωνα με την υπόθεση υπάρχει $x \in \mathbb{R} : x \geq \alpha, \forall \alpha \in A$ και $x \leq \beta, \forall \beta \in B$. Δηλαδή το x είναι άνω φράγμα του S και μάλιστα μικρότερο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

από όλα τα άνω φράγματα. Επομένως $x = supS$ και έτσι κάθε άνω φραγμένο και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έχει supremum.

2. Έστω δυο θετικοί αριθμοί α_1 και β_1 με $\alpha_1 < \beta_1$. Κατασκευάζουμε τις ακολουθίες $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ και $\beta_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ ως εξής:

$$\alpha_2 = \sqrt{\alpha_1\beta_1}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1)$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\alpha_2\beta_2}, \quad \beta_3 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_2)$$

και γενικά

$$\alpha_\nu = \sqrt{\alpha_{\nu-1}\beta_{\nu-1}}, \quad \beta_\nu = \frac{1}{2}(\alpha_{\nu-1} + \beta_{\nu-1}).$$

Να αποδείξετε ότι τα διαστήματα $[\alpha_\nu, \beta_\nu], \nu \in \mathbf{N}$ αποτελούν έναν κιβωτισμό κλειστών διαστημάτων του Cantor .

Απόδειξη

Προφανώς τα α_2 και β_2 βρίσκονται μεταξύ των α_1 και β_1. Επειδή

$$\beta_2 - \alpha_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 - 2\sqrt{\alpha_1\beta_1}) = \frac{1}{2}(\sqrt{\beta_1} - \sqrt{\alpha_1})^2 > 0$$

έχουμε $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \beta_1$.

Γενικά έχουμε ότι η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα, αφού

$$\alpha_{\nu+1}^2 - \alpha_\nu^2 = (\sqrt{\alpha_\nu\beta_\nu})^2 - \alpha_\nu^2 = \alpha_\nu(\beta_\nu - \alpha_\nu) > 0$$

και η $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα, αφού

$$\beta_{\nu+1} - \beta_\nu = \frac{1}{2}(\alpha_\nu + \beta_\nu) - \beta_\nu = \frac{1}{2}(\alpha_\nu - \beta_\nu) < 0.$$

[Είναι $\alpha_\nu < \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ γιατί $\alpha_\nu + \beta_\nu > 2\sqrt{\alpha_\nu\beta_\nu}$ δηλ. $\beta_{\nu+1} > \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$.]

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\beta_\nu - \alpha_\nu \to 0$. Έχουμε

$$\beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{1}{2}(\sqrt{\beta_{\nu-1}} - \sqrt{\alpha_{\nu-1}})^2 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\beta_{\nu-1}} - \sqrt{\alpha_{\nu-1}}}{\sqrt{\beta_{\nu-1}} + \sqrt{\alpha_{\nu-1}}}(\beta_{\nu-1} - \alpha_{\nu-1})$$

και άρα

$$\beta_\nu - \alpha_\nu < \frac{1}{2}(\beta_{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εφαρμόζοντας την σχέση αυτή επαγωγικά παίρνουμε ότι:

$$\beta_\nu - \alpha_\nu < \frac{1}{2^{\nu-1}}(\beta_1 - \alpha_1)$$

η οποία προφανώς είναι μηδενική. Συνεπώς τα διαστήματα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$, $\nu \in \mathbb{N}$ αποτελούν έναν κιβωτισμό κλειστών διαστημάτων του Cantor και άρα ορίζουν έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό, **τον αριθμητικο-γεωμετρικό μέσο των α_1 και β_1.**

§ 1.9 ΑΠΕΙΡΙΖΟΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Είναι χρήσιμο να ορίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια ακολουθία **τείνει στο $+\infty$ ή $-\infty$.**

Ορισμός 1.71 Μια ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ θα λέμε ότι έχει όριο το $+\infty$ (αντ. το $-\infty$) αν και μόνον αν, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος ώστε $\forall \nu > \nu_0$ να συνεπάγεται $\alpha_\nu > \frac{1}{\epsilon}$ (αντ. $\alpha_\nu < -\frac{1}{\epsilon}$).

Θεώρημα 1.72 Έστω α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ και β_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών, τέτοιες ώστε:

$$\alpha_\nu \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbf{N}.$$

(i) Αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$, τότε και $\lim \beta_\nu = +\infty$.

(ii) Αν $\lim \beta_\nu = -\infty$, τότε και $\lim \alpha_\nu = -\infty$.

Απόδειξη

(i) Είναι

$$lim\alpha_\nu = +\infty \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow \alpha_\nu > \frac{1}{\epsilon}.$$

Αλλά $\alpha_\nu \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και άρα $\beta_\nu \geq \alpha_\nu > \frac{1}{\epsilon}$, δηλ.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow \beta_\nu > \frac{1}{\epsilon}$$

που σημαίνει ότι $lim\beta_\nu = +\infty$.

(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια και αφήνεται για άσκηση. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

Θεώρημα 1.73 *Έστω* $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ *και* $\beta_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ *δυο ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών, τέτοιες ώστε:*

$$\lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \ell, \ell \in \mathbf{R}, \ell > 0.$$

Τότε $\lim \alpha_\nu = +\infty$, *αν και μόνον αν,* $\lim \beta_\nu = +\infty$.

Απόδειξη

Έχουμε

$$lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in I\!N)(\forall \nu \in I\!N)\nu > \nu_0 \Rightarrow \left|\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} - \ell\right| < \epsilon.$$

Ειδικά για $\epsilon = \frac{1}{2}\ell$ παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}\ell < \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} < \frac{3}{2}\ell \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}\ell\beta_\nu < \alpha_\nu < \frac{3}{2}\ell\beta_\nu, \forall \nu > \nu_0.$$

Η απόδειξη τώρα προκύπτει με εφαρμογή του προηγούμενου Θεωρήματος. •

Παράδειγμα 1.74

Αν $\alpha > 1$, τότε $lim\alpha^\nu = +\infty$. Πραγματικά· αφού $\alpha > 1$ θα είναι $\alpha = 1 + \beta, \beta > 0$. Τότε $\alpha^\nu = (1+\beta)^\nu \geq 1 + \nu\beta > \nu\beta$. Επειδή $lim(\nu\beta) = +\infty$, θα είναι $lim\alpha^\nu = +\infty$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το $\lim \sqrt[\nu]{4^{10} + r^\nu}$, **όπου r τυχαίος πραγματικός αριθμός.**

Απόδειξη

Αν $0 \leq r \leq 1$, τότε

$$\sqrt[\nu]{4^{10}} \leq \sqrt[\nu]{4^{10} + r^\nu} \leq \sqrt[\nu]{4^{10} + 1}.$$

Επειδή $lim\sqrt[\nu]{4^{10}} = 1$ και $lim\sqrt[\nu]{4^{10} + 1} = 1$, από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών 1.49, έχουμε ότι $lim\sqrt[\nu]{4^{10} + r^\nu} = 1$.

Έστω τώρα $r > 1$. Τότε $r^\nu \to +\infty$ και άρα υπάρχει $\nu_0 \in I\!N$ τέτοιο ώστε: $r^\nu > 4^{10}, \forall \nu > \nu_0$. Αυτό συνεπάγεται ότι για $\nu > \nu_0$ έχουμε:

$$r = \sqrt[\nu]{r^\nu} < \sqrt[\nu]{4^{10} + r^\nu} < \sqrt[\nu]{r^\nu + r^\nu} = r\sqrt[\nu]{2}.$$

Επειδή $\sqrt[\nu]{2} \to 1$ (Παράδειγμα 1.21) από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών 1.49 έχουμε ότι $lim\sqrt[\nu]{4^{10} + r^\nu} = r$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2. Να αποδείξετε ότι

α) $\frac{1}{\nu!} \leq \frac{\nu!}{\nu^\nu} \leq \frac{1}{2^{\nu-1}}$

β) $\lim\sqrt[\nu]{\nu!} = +\infty$.

γ) $\lim\frac{\nu!}{\nu^\nu} = 0$.

Απόδειξη

α) Θα αποδείξουμε ότι : $\frac{1}{\nu!} \leq \frac{\nu!}{\nu^\nu}$ ή $(\nu!)^2 \geq \nu^\nu$. Για $\nu = 1$ ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για ν δηλ. $(\nu!)^2 \geq \nu^\nu \Leftrightarrow (\nu!)^2(\nu+1)^2 \geq \nu^\nu(\nu+1)^2$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $\nu+1$, δηλ.

$$[(\nu+1)!]^2 \geq (\nu+1)^{\nu+1}.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\nu^\nu(\nu+1)^2 \geq (\nu+1)^{\nu+1} \Leftrightarrow \nu^\nu \geq (\nu+1)^{\nu-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^\nu \geq \frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)^\nu \geq \frac{1}{\nu+1}$$

που ισχύει, αφού από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε ότι:

$$\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)^\nu \geq 1-\frac{\nu}{\nu+1} = \frac{1}{\nu+1}.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι

$$\frac{\nu!}{\nu^\nu} \leq \frac{1}{2^{\nu-1}}. \qquad (1)$$

Για $\nu = 1$ ισχύει ως ισότητα. Υποθέτουμε ότι ισχύει για ν και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $\nu+1$, δηλ.

$$\frac{(\nu+1)!}{(\nu+1)^{\nu+1}} \leq \frac{1}{2^\nu} \Leftrightarrow 2^\nu\nu!(\nu+1) \leq (\nu+1)^\nu(\nu+1)$$

$$\Leftrightarrow 2^\nu\nu! \leq (\nu+1)^\nu.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $2\nu^\nu \leq (\nu+1)^\nu$ (λόγω της (1)) ή $2 \leq (1+\frac{1}{\nu})^\nu$ που ισχύει από την ανισότητα του Bernoulli γιατί $(1+\frac{1}{\nu})^\nu \geq 1+\nu\frac{1}{\nu} = 2$.

β) Από το α) $\nu^\nu \leq (\nu!)^2 \Rightarrow \sqrt{\nu} \leq \sqrt[\nu]{\nu!}$. Επειδή $\sqrt{\nu} \to +\infty \Rightarrow lim\sqrt[\nu]{\nu!} = +\infty$.

γ) Από το α) $\frac{\nu!}{\nu^\nu} \leq \frac{1}{2^{\nu-1}} \to 0$ και άρα $lim\frac{\nu!}{\nu^\nu} = 0$.

3. Αν είναι γνωστό ότι $\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = e$, **τότε να αποδείξετε ότι:**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

α) Αν k_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι τυχούσα ακολουθία φυσικών αριθμών με $\lim k_\nu = +\infty$ τότε $lim\left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu} = e$.

β) Αν x_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim x_\nu = +\infty$ τότε $\lim\left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu} = e$.

α) Αν y_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim y_\nu = -\infty$ τότε $\lim\left(1+\frac{1}{y_\nu}\right)^{y_\nu} = e$.

Απόδειξη

α) Αφού $lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = e$ θα έχουμε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_1 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in N)\nu > \nu_1 \Rightarrow \left|\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} - e\right| < \epsilon.$$

Επίσης επειδή $lim k_\nu = +\infty$ συνεπάγεται ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_2 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in N)\nu > \nu_2 \Rightarrow k_\nu > \nu_1.$$

Συνεπώς διαλέγοντας $\nu_0 = max\{\nu_1, \nu_2\}$ έχουμε ότι $\left|\left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu} - e\right| < \epsilon$ που αποδεικνύει και το ζητούμενο.

(Αν η k_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τότε προφανώς $lim\left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu} = e$, αφού η $\left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι υπακολουθία της $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$.)

β) Επειδή $x_\nu \to +\infty$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x_\nu \geq 1, \forall \nu > \nu_0$. Θέτουμε $[x_\nu] = k_\nu$. Τότε η k_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία φυσικών αριθμών και από τη σχέση

$$[x]-1 < [x] \leq x < [x]+1 \Rightarrow x_\nu - 1 < k_\nu \leq x_\nu < k_\nu + 1, \forall \nu > \nu_0 \qquad (1)$$

θα έχουμε ότι $k_\nu \to +\infty$ και ακόμα ότι:

$$\frac{1}{k_\nu+1} < \frac{1}{x_\nu} \leq \frac{1}{k_\nu}.$$

Επομένως

$$\left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{x_\nu} < \left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu} \leq \left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{x_\nu}$$

η ακόμα επειδή

$$\left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{k_\nu} \leq \left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{x_\nu} \quad \text{και} \quad \left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{x_\nu} < \left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu+1}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{k_\nu} < \left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu} \leq \left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu+1}, \forall \nu > \nu_0.$$

Έχουμε όμως με βάση το α) ότι:

$$\left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{k_\nu} = \left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{k_\nu+1}\left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{-1} \to e.1$$

και

$$\left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu+1} = \left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu}\left(1+\frac{1}{k_\nu}\right) \to e.1$$

Συνεπώς

$$lim\left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu} = e.$$

γ) Επειδή $y_\nu \to -\infty$ αν θέσουμε $y_\nu = -x_\nu - 1$ τότε η $x_\nu \to +\infty$ και επομένως βάσει της β) έχουμε διαδοχικά:

$$lim\left(1+\frac{1}{y_\nu}\right)^{y_\nu} = lim\left(1+\frac{1}{-x_\nu-1}\right)^{-x_\nu-1} = lim\left(\frac{x_\nu}{x_\nu+1}\right)^{-x_\nu-1}$$

$$= lim\left(\frac{x_\nu+1}{x_\nu}\right)^{x_\nu+1} = lim\left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu}\left(1+\frac{1}{x_\nu}\right) = e.1 = e.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.38 Έστω α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ και β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δυο ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών, τέτοιες ώστε:

$$lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \ell \quad \text{με} \quad \ell = 0 \quad \text{ή} \quad +\infty.$$

(Ι) Αν $\ell = 0$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) Αν $lim\alpha_\nu = +\infty$ τότε και $lim\beta_\nu = +\infty$.

β) Αν η β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, τότε $lim\alpha_\nu = 0$.

(ΙΙ) Αν $\ell = +\infty$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) Αν $lim\beta_\nu = +\infty$ τότε και $lim\alpha_\nu = +\infty$.

β) Αν η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, τότε $lim\beta_\nu = 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.39 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$\alpha) lim \log \nu \qquad \beta) lim \sin \sqrt{\nu}$

$\gamma) lim (1+\frac{\alpha}{\nu})^{\nu} \quad \delta) lim \left(2+\frac{3}{\nu}\right)^{3\nu} \left(2+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$

§ 1.10 ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΕΩΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Είδαμε στην § 1.5, Παρατήρηση 1.44 ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$ δεν συγκλίνει, αφού $\alpha_{2\nu} \to 1$ και $\alpha_{2\nu-1} \to -1$. Υπάρχουν όμως άπειροι όροι της ακολουθίας σε περιοχές των σημείων -1 και 1. Τότε δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.75 **Ένας αριθμός ℓ θα λέγεται σημείο συσσωρεύσεως μιας ακολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$, αν αυτός είναι όριο μιας υπακολουθίας της.**

Προφανώς δεν έχουν όλες οι υπακολουθίες σημεία συσσωρεύσεως, π.χ. η $\alpha_\nu = \nu$, $\nu \in I\!N$, που δεν είναι φραγμένη. Οι φραγμένες ακολουθίεςε όπως δείχνει το επόμενο Θεώρημα έχουν τουλάχιστο ένα σημείο συσσωρεύσεως. Μπορεί όμως να έχει σημεία συσσωρεύσεως και μια ακολουθία, χωρίς αυτή να είναι φραγμένη.

Θεώρημα 1.76 (Bolzano-Wierstrass) Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει τουλάχιστο ένα σημείο συσσωρεύσεως. (Με άλλα λόγια, κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει τουλάχιστο μια συγκλίνουσα υπακολουθία).

Απόδειξη

Έστω x_ν, $\nu \in I\!N$ μια φραγμένη ακολουθία, δηλ $|x_\nu| \leq M, \forall \nu \in I\!N$. Τότε άπειροι όροι της x_ν, $\nu \in I\!N$ βρίσκονται στο διάστημα $[-M, M]$. Αν πάρουμε τώρα τα διαστήματα $[-M, 0]$ και $[0, M]$, τότε στο ένα ή στο άλλο ή και στα δυο θα βρίσκονται άπειροι όροι της x_ν, $\nu \in I\!N$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι οι άπειροι όροι βρίσκονται στο $[0, M]$. Θέτουμε $\alpha_1 = 0$ και $\beta_1 = M$. Τότε στα διαστήματα $\left[\alpha_1, \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right]$ ή $\left[\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \beta_1\right]$ ή και στα δυο υπάρχουν άπειροι όροι της x_ν, $\nu \in I\!N$. Ονομάζουμε $[\alpha_2, \beta_2]$ εκείνο από αυτά που περιέχει τους άπειρους όρους. (Αν υπάρχει δικαίωμα επιλογής διαλέγουμε το δεξιό, όπως κάναμε και για το $[\alpha_1, \beta_1]$.) Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε μια ακολουθία κιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$, $\nu \in I\!N$ που περιέχει άπειρα στοιχεία της x_ν, $\nu \in I\!N$ και που το μήκος τους είναι:

$$\beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{\nu-1}} \to 0.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνεπώς έχουμε έναν κιβωτισμό κλειστών διαστημάτων του Cantor και από το Θεώρημα 1.68 υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $\alpha_\nu \leq \xi \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $lim\alpha_\nu = \xi, lim\beta_\nu = \xi$.

Είναι όμως το ξ σημείο συσσωρεύσεως της ακολουθίας $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$; Παίρνουμε έναν όρο $x_{k_1} \in [\alpha_1, \beta_1]$ και διαλέγουμε έναν $x_{k_2} \in [\alpha_2, \beta_2]$ με $k_2 > k_1$, έναν $x_{k_3} \in [\alpha_3, \beta_3]$ με $k_3 > k_2$ κ.ο.κ. Η επιλογή αυτή είναι δυνατή γιατί καθένα από τα διαστήματα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ περιέχει άπειρους όρους της $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$. Τότε η $x_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι μια υπακολουθία της $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_\nu \leq x_{k_\nu} \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Επειδή $lim\alpha_\nu = \xi = lim\beta_\nu$, από το Θεώρημα 1.68 έχουμε ότι $limx_{k_\nu} = \xi$. •

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1.α) Να αποδείξετε ότι ένα σημείο $\alpha \in \mathbf{R}$ είναι σημείο συσσωρεύσεως ενός συνόλου $A \subseteq \mathbf{R}$, αν και μόνον αν, υπάρχει ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ με $x_\nu \in A - \{\alpha\}$ τέτοια ώστε: $\lim x_\nu = \alpha$.

β) Να αποδείξετε ότι ένα σύνολο $A \subseteq \mathbf{R}$ είναι κλειστό, αν και μόνον αν, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία, στοιχείων του A, συγκλίνει σε ένα σημείο του A.

γ) Έστω $A \subseteq \mathbf{R}$ ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο. Να αποδείξετε ότι κάθε ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ με $\alpha_\nu \in A$ έχει υπακολουθία $\alpha_{k_\nu} \to \ell$ και $\ell \in A$.

δ) Να αποδείξετε ότι ένα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών, το οποίο είναι κλειστό και φραγμένο, έχει μέγιστο και ελάχιστο.

Απόδειξη

α) Αν υπάρχει τέτοια ακολουθία τότε, άπειροι όροι του A βρίσκονται σε μια δακτυλική περιοχή του α. Άρα υπάρχει ένα στοιχείο του A σε κάθε δακτυλική περιοχή $N_\epsilon^*(\alpha)$, και συνεπώς το α είναι σημείο συσσωρεύσεως του A.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το α είναι σημείο συσσωρεύσεως του A. Τότε $\forall \nu \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα $x_\nu \in A$ τέτοιο ώστε: $x_\nu \in \mathbb{N}_{\frac{1}{\nu}}^*(\alpha)$, δηλαδή $0 < |\alpha - x_\nu| < \frac{1}{\nu}, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι $limx_\nu = \alpha$ και $x_\nu \in A - \{\alpha\}$.

β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα σύνολο με την ιδιότητα ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στοιχείων του A συγκλίνει σε ένα σημείο του A, και x_0 σημείο συσσωρεύσεως του A. Τότε υπάρχει ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_\nu \to x_0$. Αλλά από την υπόθεση $x_0 \in A$, που σημαίνει ότι $A' \subseteq A$ και άρα το A είναι κλειστό.

Αντίστροφα, έστω ότι το A είναι κλειστό και $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_\nu \in A$ και $\alpha_\nu \to \ell \notin A$. Τότε το ℓ δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του A και άρα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

υπάρχει δακτυλική περιοχή $N_\epsilon^*(\ell)$ που δεν περιέχει σημεία του Α. Επομένως $N_\epsilon^*(\ell) \cap A = \emptyset$ το οποίο συνεπάγεται ότι $|\alpha_\nu - \ell| \geq \epsilon > 0$ και άρα η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει στο ℓ. Αυτό αντίκειται στην υπόθεση για την $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $\ell \in A$.

γ) Αφού το Α είναι φραγμένο, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|x| \leq M, \forall x \in A$. Αλλά $\alpha_\nu \in A$ και άρα $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ φραγμένη. Από το Θεώρημα Bolzano -Weirstrass η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $\alpha_{k_\nu} \to \ell$. Αφού το Α είναι κλειστό, $\ell \in A$ από το β).

δ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη κενό άνω φραγμένο και κλειστό σύνολο. Τότε το Α έχει supremum έστω $\mu = supA$. Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: $\mu - \frac{1}{\nu} < \mu$. Για αυτό το ν υπάρχει $x_\nu \in A : \mu - \frac{1}{\nu} < x_\nu \leq \mu$. Τότε $x_\nu \to \mu$. Έτσι η $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία στοιχείων του Α που συγκλίνει στο μ, και επειδή το Α είναι κλειστό $\mu \in A$, από το β). Αφού $supA \in A$ το μ είναι το μέγιστο του Α.

Η απόδειξη για το ελάχιστο είναι αντίστοιχη.

2. Αν μια ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ είναι φραγμένη και όλες οι συγκλίνουσες υπακολουθίες της συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό ℓ, τότε και η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ συγκλίνει στο ℓ.

Με άλλα λόγια, κάθε φραγμένη και μη συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει τουλάχιστο δυο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.

Απόδειξη

Αφού η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη από το Θεώρημα Bolzano -Weirstrass (Θεώρημα 1.76) υπάρχει τουλάχιστο μια υπακολουθία της $\alpha_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ που συγκλίνει, έστω $lim\alpha_{k_\nu} = \ell$. Θα αποδείξουμε ότι η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ έχει και άλλη υπακολουθία που συγκλίνει σε διαφορετικό όριο.

Έχουμε $lim\alpha_{k_\nu} = \ell$. Τότε στην περιοχή του ℓ, $(\ell-\epsilon, \ell+\epsilon)$ δεν βρίσκονται τελικά όλοι οι όροι της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$, αφού δεν συγκλίνει. Συνεπώς έξω από αυτή την περιοχή βρίσκονται άπειροι όροι της ακολουθίας. Ας υποθέσουμε, χωρίς αυτό να βλάπτει την γενικότητα, ότι $\alpha_\nu > \ell + \epsilon$ για άπειρο πλήθος δεικτών Μ, δηλ. $\alpha_\nu > \ell + \epsilon, \forall \nu \in M$. Το Μ προφανώς είναι απέραντο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Έστω $\mu_1 = min\, M$, $\mu_2 = min(M - \{\mu_1\})$ κ.ο.κ. Κατασκευάζεται έτσι μια γνήσια αύξουσα ακολουθία δεικτών $\mu_1 < \mu_2 < \ldots$ με στοιχεία από το Μ. Διαλέγουμε τότε τους όρους της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ που αντιστοιχούν σ' αυτούς τους δείκτες, έτσι ώστε $\alpha_{\mu_1} < \alpha_{\mu_2} < \ldots$ (Αυτό είναι δυνατό γιατί οι όροι της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ που είναι μεγαλύτεροι του $\ell + \epsilon$ είναι άπειροι). Αλλά τότε η $\alpha_{\mu_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι μια υπακολουθία της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ που είναι αύξουσα και φραγμένη (γιατί η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη) και συνεπώς συγκλίνει σε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

κάποιο ℓ', που προφανώς είνα $\ell' \neq \ell$.

3. (Θεώρημα Bolzano-Wierstrass για σύνολα.) Κάθε φραγμένο και απέραντο σύνολο έχει ένα τουλάχιστο σημείο συσσωρεύσεως.

Απόδειξη

Έστω S ένα φραγμένο και απέραντο σύνολο. Αφού το S είναι απέραντο, μπορούμε να διαλέξουμε μια ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ διακεκριμένων στοιχείων από το S, δηλ. $\alpha_\nu \in S, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j$. Η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη (αφού το S είναι φραγμένο) και άρα από το Θεώρημα Bolzano-Wierstrass έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω την α_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$. Ας είναι $x_0 = lim\alpha_{k_\nu}$. Θα αποδείξουμε ότι το x_0 είναι σημείο συσσωρεύσεως του S. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\alpha_{k_\nu} - x_0| < \epsilon, \forall \nu > \nu_0$. Διαλέγουμε το $\nu > \nu_0$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε $\alpha_{k_\nu} \neq x_0$ (αυτό είναι δυνατό αφού η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, και άρα και η α_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθίες με διακεκριμένα στοιχεία.) Προφανώς $|\alpha_{k_\nu} - x_0| < \epsilon$ και $\alpha_{k_\nu} \in S$ που σημαίνει ότι το x_0 είναι σημείο συσσωρεύσεως του S.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε ακολουθία έχει μια μονότονη υπακολουθία.

Απόδειξη

Έστω α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μια τυχαία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θα πρέπει να κατασκευάσουμε μια υπακολουθία α_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ η οποία να είναι ή αύξουσα ή φθίνουσα. Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

1η περίπτωση. Κάθε σύνολο $\{\alpha_\nu, \nu > \nu_0\}$ έχει μέγιστο. Σ' αυτήν την περίπτωση μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία k_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε:

$$\alpha_{k_1} = \max_{\nu > \nu_1} \alpha_\nu$$

$$\alpha_{k_2} = \max_{\nu > k_1} \alpha_\nu$$

$$\alpha_{k_3} = \max_{\nu > k_2} \alpha_\nu$$

κ.ο.κ. Προφανώς $k_1 < k_2 < \ldots$ αφού σε κάθε βήμα παίρνουμε το μέγιστο ενός μικρότερου συνόλου, από ότι στο προηγούμενο βήμα. Επομένως η α_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μια φθίνουσα υπακολουθία της α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$.

2η περίπτωση. Υποθέτουμε ότι δεν ωσστό ότι όλα τα σύνολα $\{\alpha_\nu, \nu > \nu_0\}$ έχουν μέγιστο. Τότε, για κάποιο ν_1 το σύνολο $\{\alpha_\nu, \nu > \nu_1\}$ δεν έχει μέγιστο. Αυτό συνεπάγεται ότι για τυχαίο α_m με $m > \nu_1$ μπορούμε να βρούμε ένα α_ν μετά τον α_m τέτοιο ώστε: $\alpha_\nu > \alpha_m$. (Διαφορετικά ο μεγαλύτερος από τους $\alpha_{\nu_1+1}, \ldots, \alpha_m$ θα ήταν μέγιστο για το σύνολο $\{\alpha_\nu, \nu > \nu_1\}$.) Ορίζουμε $\alpha_{k_1} = \alpha_{\nu_1+1}$ και έστω α_{k_2} είναι ο πρώτος όρος μετά τον α_{k_1} για τον οποίο $\alpha_{k_2} > \alpha_{k_1}$. Μετά έστω α_{k_3} ας είναι ο πρώτος όρος μετά τον α_{k_2} για τον οποίο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

$\alpha_{k_3} > \alpha_{k_2}$ κ.ο.κ. Κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε μια αύξουσα υπακολουθία $\alpha_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$.

Σημείωση

Το Θεώρημα των Bolzano-Weirstrass προκύπτει άμμεσα από αυτήν την εφαρμογή, αφού η μονότονη υπακολουθία θα είναι και φραγμένη και άρα συγκλίνουσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.40 Αν μια ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στο ℓ, τότε να αποδείξετε ότι το ℓ είναι το μοναδικό σημείο συσσωρεύσεως της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$.

1.41 Να αποδείξετε ότι οι ακολουθίες:

$$\alpha)\ \alpha_\nu = \frac{\nu - 7}{2\nu + 1}, \nu \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \beta)\ \alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^2}, \nu \in \mathbb{N}$$

έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες.

1.42 Να βρεθούν τα σημεία συσσωρεύσεως των ακολουθιών:

$$\alpha)\ \alpha_\nu = (-1)^{\nu+1}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right), \nu \in \mathbb{N}$$

$$\beta)\ \alpha_\nu = \begin{cases} \frac{\nu+2+1}{\nu^2+\nu+1}, & \nu \text{ περιττός} \\ \frac{\sin\nu}{\nu}, & \nu \text{ πολλαπλάσιο του } 4 \\ \frac{1}{\nu} - 1, & \nu \text{ άρτιος όχι πολλαπλάσιο του } 4 \end{cases}$$

§ 1.6 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΤΟΥ CAUCHY (ή ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ)

Για να αποδείξουμε την σύγκλιση μιας ακολουθίας με την βοήθεια του ορισμού, είναι προφανές ότι πρέπει να ξέρουμε ή τουλάχιστο να έχουμε ενδείξεις εκ των προτέρων για την τιμή του ορίου. Αυτό είναι ένα βασικό μειονέκτημα του ορισμού της σύγκλισης. Επειδή τις περισσότερες φορές δεν μας ενδιαφέρει το όριο, αυτό καθεαυτό, αλλά να ξέρουμε αν η ακολουθία συγκλίνει ή όχι, γι' αυτό δίνουμε ένα κριτήριο που είναι ισοδύναμο με τον ορισμό της σύγκλισης, αλλά με μειονέκτημα (από την άλλη μεριά) χωρίς να δίνει καμμιά πληροφορία για το ποιό μπορεί να είναι το όριο.

Ας δώσουμε πρώτα τον Ορισμό.

Ορισμός 1.77 Μια ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ θα λέγεται ακολουθία του Cauchy (ή βασική ακολουθία), αν και μόνον αν, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος ώστε για οποιουσδήποτε φυσικούς $\mu, \nu > \nu_0$ να συνεπάγεται $|\alpha_\nu - \alpha_\mu| < \epsilon$ δηλ. συντομότερα

$$\alpha_\nu \text{ βασική} \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbf{N})(\forall \nu, \mu \in \mathbf{N})$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\nu > \nu_0, \mu > \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu - \alpha_\mu| < \epsilon.$$

Παρατήρηση 1.78

Ο ορισμός 1.77 μπορεί να πάρει την παρακάτω ισοδύναμη μορφή που μερικές φορές είναι πιο απλή στις εφαρμογές.

$$\alpha_\nu \text{ βασική} \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})(\nu > \nu_0)$$
$$(\forall k \in \mathbb{N}) \Rightarrow |\alpha_{\nu+k} - \alpha_\nu| < \epsilon.$$

Θα αποδείξουμε τώρα το βασικό κριτήριο σύγκλισης:

Θεώρημα 1.79 (Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy) Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να συγκλίνει μια ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ είναι αυτή να είναι ακολουθία του Cauchy.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την εξής ισοδυναμία:

$$lim\alpha_\nu = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu, \mu \in \mathbb{N})(\nu > \nu_0, \mu > \nu_0) \Rightarrow |\alpha_\nu - \alpha_\mu| < \epsilon.$$

Και πρώτα ας αποδείξουμε το **αναγκαίο** δηλ. ότι **κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία του Cauchy.**

Έστω $lim\alpha_\nu = \ell$. Τότε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})(\nu > \nu_0) \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Διαλέγουμε έναν δείκτη $\mu > \nu_0$. Τότε $|\alpha_\mu - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα για $\mu, \nu > \nu_0$ θα έχουμε:

$$|\alpha_\nu - \alpha_\mu| \leq |\alpha_\nu - \ell| + |\alpha_\mu - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

δηλ. η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy.

Τώρα θα αποδείξουμε το **ικανό**, ότι δηλ. **αν μια ακολουθία είναι ακολουθία του Cauchy, τότε αυτή συγκλίνει.**

Έστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία του Cauchy. Για $\epsilon = 1$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$: $|\alpha_\nu - \alpha_\mu| \leq 1, \forall \mu, \nu > \nu_0$. Διαλέγουμε έναν $\nu_1 \in \mathbb{N}$ με $\nu_1 > \nu_0$ και παρατηρούμε ότι:

$$|\alpha_\nu| = |\alpha_\nu - \alpha_{\nu_1} + \alpha_{\nu_1}| \leq |\alpha_\nu - \alpha_{\nu_1}| + |\alpha_{\nu_1}| < 1 + |\alpha_{\nu_1}|, \forall \nu > \nu_0.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θέτοντας $M = max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{\nu_0}|, 1 + |\alpha_{\nu_1}|\}$ έχουμε ότι $|\alpha_\nu| \leq M, \forall \nu \in \mathbb{N}$, που σημαίνει ότι η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη. Αυτό έχει σαν συνέπεια, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.76 (Bolzano-Weirstrass) ότι η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει, έστω $lim\alpha_{k_\nu} = \ell$. Θα αποδείξουμε ότι και $lim\alpha_\nu = \ell$. Έχουμε:

$$lim\alpha_{k_\nu} = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_2 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})(\nu > \nu_2) \Rightarrow |\alpha_{k_\nu} - \ell| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1)$$

Αφού η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_3 \in \mathbb{N})(\forall \nu, \mu \in N)(\nu > \nu_3, \mu > \nu_3) \Rightarrow |\alpha_\nu - \alpha_\mu| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2)$$

Επειδή $k_\nu \geq \nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ από την (2) έχουμε:

$$\nu > \nu_3 \Rightarrow k_\nu \geq \nu_3 \Rightarrow |\alpha_\nu - \alpha_{k_\nu}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Παίρνοντας ως $\nu_4 = max\{\nu_2, \nu_3\}$ θα έχουμε για $\nu > \nu_4$

$$|\alpha_\nu - \ell| \leq |\alpha_\nu - \alpha_{k_\nu}| + |\alpha_{k_\nu} - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

που σημαίνει ότι $lim\alpha_\nu = \ell$. •

Παρατήρηση 1.80

Όπως τονίσαμε παραπάνω με το κριτήριο του Cauchy αποδεικνύουμε την σύγκλιση ή όχι μιας ακολουθίας, χωρίς όμως να μπορούμε να πούμε και ποιό θα είναι αυτό το όριο. Αν παρατηρήσουμε όμως πιο προσεκτικά την απόδειξη του ικανού του παραπάνω Θεωρήματος, διαπιστώνουμε ότι δίνει και έναν τρόπο για την εύρεση του ορίου. **Τό όριο ℓ της ακολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι το όριο μιας υπακολουθίας της α_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$.** Έτσι λοιπόν αποδεικνύοντας ότι μια ακολουθία είναι ακολουθία του Cauchy, εξασφαλίζουμε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει. Το όριο τότε μιας οποιασδήποτε υπακολουθίας της θα είναι και το όριο της ακολουθίας.

Παρατήρηση 1.81

Προσοχή χρειάζεται στην εφαρμογή του ορισμού και ειδικά στην απαίτηση $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Η αναγκαιότητα φαίνεται στο εξής παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $\alpha_\nu = \sqrt{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ που όπως διαπιστώνουμε απλά δεν συγκλίνει[9]. Έχουμε:

$$|\alpha_{\nu+k} - \alpha_\nu| = \sqrt{\nu + k} - \sqrt{\nu} = \frac{k}{\sqrt{\nu + k} + \sqrt{\nu}} < \frac{k}{2\sqrt{\nu}}.$$

[9]Παρατηρούμε ότι δεν είναι φραγμένη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για δοσμένο $\epsilon > 0$ και $k > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε: $\frac{k}{2\sqrt{\nu}} < \epsilon, \forall \nu > \nu_0$ και άρα $|\alpha_{\nu+k} - \alpha_\nu| < \epsilon, \forall \nu > \nu_0$ που σημαίνει ότι η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy, καιάρα σύμφωναμε το Θεώρημα 1.79 συγκλίνει, άτοπο. **Το άτοπο βρίσκεται στο ότι στην συνθήκη του Cauchy έχουμε πάρει ένα σταθερό k αντί του $\forall k \in N$. Αν το k δεν είναι σταθερό, τότε δεν υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{k}{2\sqrt{\nu}} < \epsilon, \forall \nu > \nu_0$ και $k > 0$. Με άλλα λόγια, αν το k είναι τυχαίος θετικός αριθμός, η ποσότητα $\frac{k}{2\sqrt{\nu}}$ δεν μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή, διαλέγοντας απλώς μια αρκετά μεγάλη τιμή του ν.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι ακολουθίες του Cauchy:

α) $\alpha_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}, \nu \in \mathbf{N}$.

β) $\alpha_\nu = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbf{N}$.

Απόδειξη

α) Έχουμε

$$|\alpha_\nu - \alpha_\mu| = \left|\frac{\nu}{\nu+1} - \frac{\mu}{\mu+1}\right| = \frac{|\nu-\mu|}{(\nu+1)(\mu+1)} \leq \frac{|\nu|+|\mu|}{(\nu+1)(\mu+1)}$$
$$< \frac{\nu+\mu}{\nu\mu} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} < \epsilon$$

αν $\mu > \nu > \frac{2}{\epsilon} = \nu_0$.

β) Έχουμε

$$|\alpha_{\nu+k} - \alpha_\nu| = \left|(-1)^\nu \frac{1}{\nu+1} + (-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu+2} + \ldots + (-1)^{\nu+k-1}\frac{1}{\nu+k}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{\nu+k}\right|$$

$$= \begin{cases} \left|\frac{1}{\nu+1} - \left(\frac{1}{\nu+2} - \frac{1}{\nu+3}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{\nu+k-1} - \frac{1}{\nu+k}\right)\right|, & k \text{ περιττός} \\ \left|\frac{1}{\nu+1} - \left(\frac{1}{\nu+2} - \frac{1}{\nu+3}\right) - \ldots - \frac{1}{\nu+k}\right|, & k \text{ άρτιος} \end{cases}$$

$$< \frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{\nu} < \epsilon$$

που σημαίνει ότι η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ με

$$\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu}$$

δεν συγκλίνει.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} |\alpha_{2\nu} - \alpha_\nu| &= \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \ldots + \frac{1}{2\nu} \\ &\geq \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2\nu} + \ldots + \frac{1}{2\nu} = \nu\frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Δηλαδή $|\alpha_{2\nu} - \alpha_\nu| \geq \frac{1}{2}$ ή $|\alpha_{\nu+k} - \alpha_\nu| \geq \frac{1}{2}$ για $\nu = k$. Αυτό σημαίνει ότι για $\epsilon = \frac{1}{2}$ η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δεν ικανοποιεί την συνθήκη του Cauchy, οπότε δεν είναι ακολουθία του cauchy και κατά συνέπεια δεν συγκλίνει.

3. Να αποδείξετε ότι η η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ με

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2 \quad \text{και} \quad \alpha_\nu = \frac{1}{2}(\alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1}), \nu > 2$$

συγκλίνει, και να βρήτε το όριό της.

Απόδειξη

Έχουμε: $1 \leq \alpha_1 \leq 2$ και $1 \leq \alpha_2 \leq 2$. Αν υποθέσουμε ότι $1 \leq \alpha_{\nu-2} \leq 2$ και $1 \leq \alpha_{\nu-1} \leq 2$ θα έχουμε $2 \leq \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} \leq 4 \Rightarrow 1 \leq \alpha_\nu \leq 2, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και άρα η η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη.

Θα εξετάσουμε αν είναι και μονότονη. Είναι:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \frac{1}{2}(\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1}) - \alpha_\nu = -\frac{1}{2}(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}) \qquad (1)$$

δηλ. δυο διαδοχικές διαφορές δεν έχουν το ίδιο πρόσημο και συνεπώς η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δεν είναι μονότονη. Από την (1) όμως έχουμε:

$$|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu| = \frac{1}{2}|\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}|.$$

Εφαρμόζοντας την σχέση αυτή για $\nu = 1, 2, \ldots, \nu$ και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις που θα προκύψουν παίρνουμε ότι:

$$|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} |\alpha_2 - \alpha_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Διαλέγουμε δυο δείκτες μ, ν με $\mu > \nu$. Τότε:

$$\begin{aligned} |\alpha_\mu - \alpha_\nu| &\leq |\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1}| + |\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu-2}| + \ldots + |\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-3} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}\left\{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-\nu-1}\right\} < \frac{1}{2^{\nu-2}}. \end{aligned}$$

Επειδή $\frac{1}{2^{\nu-2}} \to 0$ θα έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in N)\nu > \nu_0 \Rightarrow \frac{1}{2^{\nu-2}} < \epsilon.$$

Συνεπώς αν $\mu > \nu > \nu_0$ έχουμε $|\alpha_\mu - \alpha_\nu| < \epsilon$ και έτσι η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy και άρα συγκλίνει.

Για να βρούμε το όριό της, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.80 αρκεί να βρούμε το όριο μιας υπακολουθίας της[10]. Ας πάρουμε την υπακολουθία των περιττών όρων $\alpha_{2\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_{2\nu+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2\nu-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^{\nu-1}}\right\} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{4^\nu}}{1 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{2}{3}\left\{1 - \frac{1}{4^\nu}\right\}. \end{aligned}$$

Άρα $lim\alpha_\nu = lim\alpha_{2\nu+1} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

Προσοχή! Αν υποθέσουμε ότι $\lim\alpha_\nu = \ell$, οπότε και $\lim\alpha_{\nu-2} = \ell$, $\lim\alpha_{\nu-1} = \ell$ από τον αναγωγικό τύπο δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το ℓ, αφού καταλήγουμε στην ταυτότητα $2\ell = 2\ell$.

3. α) Αν $\alpha > 0$ και $\rho_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι μια μηδενική ακολουθία ρητών αριθμών, τότε $\lim\alpha^{\rho_\nu} = 1$.

β) Αν $\alpha > 0$ και $\rho_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι τυχαία ακολουθία ρητών αριθμών με $\rho_\nu \to x$, τότε η ακολουθία $\alpha^{\rho_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει προς τον ίδιο πάντοτε αριθμό.

[10] Ένας διαφορετικός τρόπος, για να βρούμε το όριο, είναι ο εξής: Από την σχέση $2\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}$ παίρνουμε: $2\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_1$, $2\alpha_4 = \alpha_3 + \alpha_2$, $2\alpha_5 = \alpha_4 + \alpha_3$, ..., $2\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}$, $2\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1}$, $2\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$, οι οποίες με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν: $2\alpha_{\nu+1} + 2\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + 2\alpha_2 + \alpha_1$ και άρα $lim\alpha_\nu = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3} = \frac{5}{3}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Απόδειξη

α) Έστω $\alpha > 1$. Επειδή $\rho_\nu \to 0$ έχουμε:

$$lim\rho_\nu = 0 \Leftrightarrow (\forall k \in I\!N)(\exists \nu_0 \in N)(\forall \nu \in I\!N)\nu > \nu_0 \Rightarrow |\rho_\nu| < \frac{1}{k}$$

ή

$$-\frac{1}{k} < \rho_\nu < \frac{1}{k}$$

και συνεπώς

$$\alpha^{-\frac{1}{k}} - 1 < \alpha^{\rho_\nu} - 1 < \alpha^{\frac{1}{k}} - 1. \tag{1}$$

Γνωρίζουμε όμως, αφού $k \in I\!N$, ότι $lim(\alpha^{-\frac{1}{k}} - 1) = 0 = lim(\alpha^{\frac{1}{k}} - 1)$ δηλαδή

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_1 \in I\!N)(\forall k \in N)k > \nu_1 \Rightarrow |\alpha^{-\frac{1}{k}} - 1| < \epsilon \tag{2}$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_2 \in I\!N)(\forall k \in N)k > \nu_2 \Rightarrow |\alpha^{\frac{1}{k}} - 1| < \epsilon. \tag{3}$$

Διαλέγοντας τώρα $\nu' = max\{\nu_0, \nu_1, \nu_2\}$ από τις (1), (2) και (3) έχουμε:

$$-\epsilon < \alpha^{-\frac{1}{k}} - 1 < \alpha^{\rho_\nu} - 1 < \alpha^{\frac{1}{k}} - 1 < \epsilon, \forall \nu > \nu'$$

δηλ. $|\alpha^{\rho_\nu} - 1| < \epsilon$ και συνεπώς $\alpha^{\rho_\nu} \to 1$.

Αν $\alpha = 1$ είναι προφανής, ενώ αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\frac{1}{\alpha} > 1$ οπότε $(\frac{1}{\alpha})^{\rho_\nu} \to 1$ ή $\alpha^{\rho_\nu} \to 1$.

β) Για να αποδείξουμε ότι η α^{ρ_ν}, $\nu \in I\!N$ συγκλίνει, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ακολουθία του Cauchy, δηλαδή

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in I\!N)(\forall \nu, \mu \in N)\nu > \nu_0, \mu > \nu_0 \Rightarrow |\alpha^{\rho_\nu} - \alpha^{\rho_\mu}| < \epsilon. \tag{4}$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\rho_\nu \to x$. Αυτό σημαίνει ότι η ρ_ν, $\nu \in I\!N$ είναι φραγμένη, δηλαδή

$$(\exists \phi \in I\!R) : |\rho_\nu| \leq \phi, \forall \nu \in I\!N$$

και ακόμα ότι η ρ_ν, $\nu \in I\!N$ είναι ακολουθία του Cauchy, δηλαδή

$$(\forall k \in I\!N)(\exists \nu_1 \in I\!N)(\forall \nu, \mu \in I\!N)\nu > \nu_1, \mu > \nu_1 \Rightarrow |\rho_\nu - \rho_\mu| < \frac{1}{k}$$

ή

$$-\frac{1}{k} < \rho_\nu - \rho_\mu < \frac{1}{k}.$$

Έστω $\alpha > 1$, οπότε $\alpha = 1 + \theta, \theta > 0$. Τότε θα έχουμε:

$$\alpha^{-\frac{1}{k}} < \alpha^{\rho_\nu - \rho_\mu} < \alpha^{\frac{1}{k}}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Είναι όμως

$$\alpha^{\frac{1}{k}} = (1+\theta)^{\frac{1}{k}} < 1 + \frac{\theta}{k},$$

αφού από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε:

$$\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k > 1 + k.\frac{\theta}{k} = 1+\theta \Leftrightarrow 1+\frac{\theta}{k} > (1+\theta)^{\frac{1}{k}}.$$

Επίσης είναι

$$\alpha^{-\frac{1}{k}} > 1 - \frac{\theta}{k}$$

αφού

$$\alpha^{-\frac{1}{k}} = (1+\theta)^{-\frac{1}{k}} = \frac{1}{(1+\theta)^{1/k}} > \frac{1}{1+\frac{\theta}{k}} > 1 - \frac{\theta}{k}.$$

Τελικά λοιπόν έχουμε:

$$1 - \frac{\theta}{k} < \alpha^{\rho_\nu - \rho_\mu} < 1 + \frac{\theta}{k} \Leftrightarrow |\alpha^{\rho_\nu - \rho_\mu} - 1| < \frac{\theta}{k}, \tag{5}$$

για κάθε $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ με $\nu > \nu_1, \mu > \nu_1$.

Έστω $\nu^* = max\{\nu_0, \nu_1\}$. Από τις (4) και (5) έχουμε:

$$|\alpha^{\rho_\nu} - \alpha^{\rho_\mu}| = \alpha^{\rho_\mu} |\alpha^{\rho_\nu - \rho_\mu} - 1| < \alpha^{\phi} \frac{\theta}{k} < \epsilon$$

για κάθε $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ με $\nu > \nu^*, \mu > \nu^*$, αν $k > \alpha^{\phi} \frac{\theta}{\epsilon}$.

Δηλαδή η ακολουθία $\alpha^{\rho_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy και άρα συγκλίνει.

Αν $\alpha = 1$, τότε $\alpha^{\rho_\nu} = 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και άρα $\alpha^{\rho_\nu} \to 1$.

Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\frac{1}{\alpha} > 1$ οπότε η $(\frac{1}{\alpha})^{\rho_\nu}$ θα συγκλίνει. Αλλά τότε θα συγκλίνει και η $1/(\frac{1}{\alpha})^{\rho_\nu} = \alpha^{\rho_\nu}$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η σύγκλιση της $\alpha^{\rho_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ανεξάρτητη από την εκλογή της ακολουθίας $\rho_\nu, \nu \in \mathbb{N}$. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι:

Αν $\rho_\nu \to x$ και $\sigma_\nu \to x$ τότε $lim\alpha^{\rho_\nu} = lim\alpha^{\sigma_\nu}$.

Αφού $\rho_\nu \to x$ και $\sigma_\nu \to x$ τότε η ακολουθία $\rho_\nu - \sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι μηδενική και συνεπώς από το α) έχουμε $\alpha^{\rho_\nu - \sigma_\nu} \to 1$. Αλλά τότε έχουμε:

$$lim\alpha^{\rho_\nu} = lim\alpha^{\rho_\nu - \sigma_\nu + \sigma_\nu} = lim\alpha^{\rho_\nu - \sigma_\nu} lim\alpha^{\sigma_\nu} = lim\alpha^{\sigma_\nu}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σημείωση

Από την παραπάνω εφαρμογή β) η δύναμη α^x με βάση θετικό αριθμό και $x \in \mathbf{R}$ ορίζεται μονοσήμαντα από τον τύπο

$$\alpha^x = \lim \alpha^{\rho_\nu}$$

όπου $\rho_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ τυχαία ακολουθία ρητών αριθμών, με $\rho_\nu \to x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.43 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες, είναι ακολουθίες του Cauchy:

$\alpha)$ $\alpha_\nu = \frac{\nu+1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$.

$\beta)$ $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^2} + \frac{2}{\nu^2} + \ldots + \frac{\nu}{\nu^2}, \nu \in \mathbb{N}$.

$\gamma)$ $\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}, \nu \in \mathbb{N}$.

$\delta)$ $\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} \ldots + \frac{1}{\nu^\nu}, \nu \in \mathbb{N}$.

1.44 Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\nu}}, \nu \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι $lim\alpha_\nu = +\infty$.

1.45 Να αποδείξετε ότι κάθε ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu| < c^\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}, 0 < c < 1$$

είναι ακολουθία του Cauchy.

1.46 Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_\nu = \frac{cos\,1}{1^2} + \frac{cos\,2}{2^2} + \ldots + \frac{cos\,\nu}{\nu^2}$$

είναι ακολουθία του Cauchy.

1.47 Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2\nu - 1}$$

δεν είναι ακολουθία του Cauchy.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.48 Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^2}$$

συγκλίνει,

α) αποδεικνύοντας ότι είναι μονότονη και φραγμένη και

β) αποδεικνύοντας ότι είναι ακολουθία του Cauchy.

1.49 Δίνονται οι ακολουθίες $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\tau_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ όπου

$$\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu \qquad \text{και}$$

$$\tau_\nu = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\nu|.$$

Να αποδείξετε ότι αν η $\tau_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy τότε και η $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.

1.50 Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1 \quad \text{και} \quad \alpha_\nu = \frac{1}{3}(\alpha_{\nu-1} + 2\alpha_{\nu-2}), \nu \geq 2$$

συγκλίνει. Ποιό είναι το όριό της;

1.51 Να αποδείξετε ότι κάθε ακολουθία του Cauchy, διάφορη της σταθερής, έχει ακριβώς ένα σημείο συσσωρεύσεως.

1.52 Αν M το σύνολο των μηδενικών, Σ των συγκλινουσών, C των ακολουθιών του Cauchy και F των φραγμένων ακολουθιών ρητών αριθμών, τότε να αποδείξετε ότι:

$$M \subset \Sigma \subset C \subset F.$$

§ 1.12 ΑΝΩΤΕΡΟ ΚΑΙ ΚΑΤΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Αν μια ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει, τότε το $lim\alpha_\nu$ δίνει κατά προσέγγιση το μέγεθος του όρου α_ν, για αρκετά μεγάλα ν. Επομένως το $lim\alpha_\nu$, είναι μια έννοια άρρηκτα συνδεδεμένη με τις συγκλίνουσες ακολουθίες. Σ' αυτήν την παράγραφο, θα γνωρίσουμε δυο άλλες έννοιες, του ανώτερου ορίου (limes superior) και του κατώτερου ορίου (limes inferior), που μπορούν να εφαρμοστούν σε όλες τις ακολουθίες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έστω A' το σύνολο των σημείων συσσωρεύσεως μιας ακολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Προφανώς το A' έχει supremum και infimum. Τότε έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.82. **Έστω α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε:**

1) Αν η α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι φραγμένη και A' είναι το σύνολο των σημείων συσσωρεύσεώς της, ορίζουμε ως

$$\lim \mathbf{inf}\alpha_\nu = \mathbf{inf}A' \qquad \text{και} \qquad \mathbf{limsup}\alpha_\nu = \mathbf{sup}A'.$$

2) Αν η α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ δεν είναι άνω φραγμένη, ορίζουμε ως $\mathbf{limsup}\alpha_\nu = +\infty$, ενώ αν δεν είναι κάτω φραγμένη, ορίζουμε $\mathbf{liminf}\alpha_\nu = -\infty$.

Από τον παραπάνω ορισμό γίνεται φανερό πως υπάρχουν υπακολουθίες της α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ που συγκλίνουν στο $\lim\inf\alpha_\nu$ και $limsup\alpha_\nu$. Το Θεώρημα που ακολουθεί δίνει έναν διαφορετικό τρόπο προσέγγισης στο $\lim\inf\alpha_\nu$ ή $limsup\alpha_\nu$, πολύ χρήσιμο στις εφαρμογές.

Θεώρημα 1.83. **Έστω α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε $\mathbf{limsup}\alpha_\nu = \ell$ (αντίστοιχα $\mathbf{liminf}\alpha_\nu = \mathbf{m}$), αν και μόνον αν, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbf{N}$, τέτοιος ώστε:**

$$\alpha_\nu < \ell + \epsilon \quad (\text{αντίστοιχα} \quad \alpha_\nu > \mathbf{m} - \epsilon), \forall \nu > \nu_0 \tag{1}$$

και υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών $\mathbf{k_1} < \mathbf{k_2} < \ldots$ τέτοια ώστε:

$$\alpha_{k_\nu} > \ell - \epsilon \quad (\text{αντίστοιχα} \quad \alpha_{k_\nu} < \mathbf{m} + \epsilon), \forall \nu \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

Απόδειξη

Έστω ότι $limsup\alpha_\nu = \ell$ και η (1) δεν ισχύει. Τότε θα υπάρχει κάποιο $\epsilon > 0$, τέτοιο ώστε: $\alpha_\nu > \ell + \epsilon$ για άπειρο πλήθος δεικτών $\nu \in \mathbb{N}$. Αλλά τότε, αφού η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένη, θα έχει ένα σημείο συσσωρεύσεως $\alpha \geq \ell + \epsilon$, που αντίκειται στον ορισμό του ℓ. Άρα η (1) ισχύει.

Αν τώρα για κάποιο $\epsilon > 0$ ήταν $\alpha_\nu > \ell - \epsilon$ για πεπερασμένο πλήθος δεικτών, θα είχαμε $sup A' \leq \ell - \epsilon$. Συνεπώς και η (2) ισχύει.

Αντίστροφα, αν οι (1) και (2) ισχύουν, τότε το ℓ είναι σημείο συσσωρεύσεως της α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Αν $\ell_1 > \ell$ ήταν ένα άλλο σημείο συσσωρεύσεως της α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, τότε παρατηρούμε ότι η (1) δεν ισχύει αν πάρουμε ως $\epsilon = \frac{\ell_1 - \ell}{2} > 0$. Έτσι το Θεώρημα αποδείχτηκε. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 1.84 Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να συγκλίνει η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι $\mathbf{limsup}\alpha_\nu = \mathbf{liminf}\alpha_\nu$.

Απόδειξη

Έστω $lim\alpha_\nu = \ell$. Τότε όλες οι υπακολουθίες της συγκλίνουν στο ℓ και αφού υπάρχουν υπακολουθίες που συγκλίνουν στο $limsup\alpha_\nu$ και $liminf\alpha_\nu$ θα έχουμε ότι $limsup\alpha_\nu = \ell = liminf\alpha_\nu$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $limsup\alpha_\nu = \ell = liminf\alpha_\nu$. Από το Θεώρημα 1.83 υπάρχουν $\nu_1, \nu_2 \in I\!N$ τέτοια ώστε:

$$\alpha_\nu < \ell + \epsilon, \forall \nu > \nu_1 \quad \text{και} \quad \alpha_\nu > \ell - \epsilon, \forall \nu > \nu_2.$$

Αν $\nu_0 = max\{\nu_1, \nu_2\}$ θα έχουμε $|\alpha_\nu - \ell| < \epsilon, \forall \nu > \nu_0$ που σημαίνει ότι $lim\alpha_\nu = \ell$. •

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν τα sup, inf, limsup και liminf της ακολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2 \quad \textbf{και για} \quad \nu > 2 \quad \alpha_\nu = \begin{cases} 1, & \nu \ \textbf{περιττός} \\ -1, & \nu \ \textbf{άρτιος} \end{cases}$$

Απόδειξη

α) $sup\alpha_\nu = sup\{\alpha_\nu, \nu \in I\!N\} = sup\alpha(N) = 2$, επειδή όλοι οι όροι είναι μικρότεροι ή ίσοι του 2, ενώ ένας τουλάχιστο όρος (ο πρώτος) είναι μεγαλύτερος του $2 - \epsilon, \forall \epsilon > 0$.

β) $inf\{\alpha_\nu, \nu \in I\!N\} = inf\alpha(N) = -2$, επειδή όλοι οι όροι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του -2, ενώ ένας τουλάχιστο όρος (ο δεύτερος) είναι μικρότερος του $-2 + \epsilon, \forall \epsilon > 0$.

γ) $limsup\alpha_\nu = 1$, επειδή άπειροι όροι της ακολουθίας είναι μεγαλύτεροι του $1 - \epsilon, \forall \epsilon > 0$ (δηλ. οι όροι περιττής τάξης), ενώ ένα πεπερασμένο πλήθος όρων είναι μεγαλύτεροι του $1 + \epsilon, \forall \epsilon > 0$ (μόνον ο πρώτος όρος).

δ) $liminf\alpha_\nu = -1$, επειδή άπειροι όροι της ακολουθίας είναι μικρότεροι του $-1 + \epsilon, \forall \epsilon > 0$ (δηλ. οι όροι άρτιας τάξης), ενώ ένα πεπερασμένο πλήθος όρων είναι μικρότεροι του $-1 - \epsilon, \forall \epsilon > 0$ (μόνον ο δεύτερος όρος).

2. Να βρεθούν τα liminf και limsup των ακολουθιών:

α) $\alpha_\nu = \cos\frac{\nu\pi}{3} + \frac{1}{\nu+1}$, $\nu \in \mathbf{N}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\beta)\alpha_\nu = \nu(1+\sin\frac{\nu\pi}{2}), \nu \in \mathbf{N}.$

$\gamma)\mathbf{1}, \frac{2}{3}, -\mathbf{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, -\mathbf{5}, \frac{1}{7}, \frac{8}{9}, -\mathbf{8}, \frac{1}{10}, \frac{11}{12}, -\mathbf{11}, \ldots$

Απόδειξη

α) $\alpha_\nu = cos\frac{2\nu\pi}{6} + \frac{1}{\nu+1}$ με $\nu = 6\lambda + \upsilon, 0 \le \upsilon \le 5$. Συνεπώς

$\upsilon = 0, \alpha_{6\lambda} = cos2\lambda\pi + \frac{1}{6\lambda+1} = 1 + \frac{1}{6\lambda+1} \Rightarrow \alpha_{6\lambda} \to 1$

$\upsilon = 1, \alpha_{6\lambda+1} = cos\left(2\lambda\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{6\lambda+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6\lambda+2} \Rightarrow \alpha_{6\lambda+1} \to \frac{1}{2}$

Όμοια βρίσκουμε:

$\upsilon = 2 \Rightarrow \alpha_{6\lambda+2} \to -\frac{1}{2}$

$\upsilon = 3 \Rightarrow \alpha_{6\lambda+3} \to -1$

$\upsilon = 4 \Rightarrow \alpha_{6\lambda+4} \to -\frac{1}{2}$

$\upsilon = 5 \Rightarrow \alpha_{6\lambda+5} \to -\frac{1}{2}$

Άρα $A' = \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$ και επομένως $liminf\alpha_\nu = -1, limsup\alpha_\nu = 1.$

β) Παρατηρούμε ότι η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη κάτω από το 0 αλλά δεν είναι άνω φραγμένη και επομένως $liminf\alpha_\nu = 0, limsup\alpha_\nu = +\infty.$

γ) Εδώ έχουμε $A' = \{0, 1\}$ γιατί η ακολουθία γράφεται:

$$\alpha_{3\nu} = -3\nu + 1, \alpha_{3\nu-2} = \frac{1}{3\nu-2}, \alpha_{3\nu-1} = \frac{3\nu-1}{3\nu}, \nu \in N.$$

Συνεπώς $liminf\alpha_\nu = -\infty, limsup\alpha_\nu = 1.$ (Αν και $infA' = 0$ το $liminf\alpha_\nu = -\infty$ γιατί η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ δεν είναι κάτω φραγμένη).

3. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\textbf{i)}\ \textbf{limsup}\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \le \textbf{limsup}\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right|$$

$$\textbf{ii)}\ \textbf{liminf}\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \le \textbf{liminf}\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|}$$

β) Αν $\lim\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \ell$ **τότε και** $\lim\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = \ell$. **Το αντίστροφο δεν ισχύει.**

Απόδειξη

α) Θα αποδείξουμε μόνο την i) γιατί η ii) αποδεικνύεται ανάλογα. Αν $limsup|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}| = +\infty$ τότε δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Έστω

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$limsup|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}| < +\infty$. Συμπεραίνουμε τότε ότι για κάθε αριθμό c με την ιδιότητα $limsup|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}| < c$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε:

$$\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \leq c, \forall \nu > \nu_0.$$

Από την σχέση αυτή για τυχαίο $k > 0$ παίρνουμε:

$$|\alpha_{\nu_0+2}| \leq c|\alpha_{\nu_0+1}|$$

$$|\alpha_{\nu_0+3}| \leq c|\alpha_{\nu_0+2}|$$

.....

$$|\alpha_{\nu_0+k+1}| \leq c|\alpha_{\nu_0+k}|$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις σχέσεις έχουμε:

$$|\alpha_{\nu_0+k+1}| \leq c^k|\alpha_{\nu_0+1}|$$

ή

$$|\alpha_\nu| \leq c^{\nu-\nu_0-1}|\alpha_{\nu_0+1}|, \forall \nu > \nu_0.$$

Άρα $\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \leq c\sqrt[\nu]{c^{-\nu_0-1}|\alpha_{\nu_0+1}|}$ και συνεπώς

$$limsup\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \leq c.limsup\sqrt[\nu]{c^{-\nu_0-1}|\alpha_{\nu_0+1}|}.$$

Αφού $c^{-\nu_0-1}|\alpha_{\nu_0+1}|$ είναι θετική σταθερά, $lim\sqrt[\nu]{c^{-\nu_0-1}|\alpha_{\nu_0+1}|} = 1$ και άρα $limsup\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \leq c$, για αυθαίρετο c, που αποδεικνύει την i).

β) Σύμφωνα με το α) έχουμε:

$$liminf\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \leq liminf\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \leq limsup\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \leq limsup\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right|.$$

Επειδή όμως υπάρχει το $lim\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right|$ συνεπάγεται ότι:

$$limsupinf\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = limsupsup\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = lim\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \ell,$$

και από την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε ότι και

$$liminf\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = limsup\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = lim|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}| = \ell.$$

Άρα υπάρχει το $lim\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|}$ και είναι $lim\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = lim|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}| = \ell$. Το ότι δεν ισχύει το αντίστροφο να το επαληθεύσετε θεωρώντας την ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_{2\nu-1} = \frac{1}{2^\nu}$ και $\alpha_{2\nu} = \frac{1}{2^{\nu-1}}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.53 Να βρεθούν τα $liminf\alpha_\nu$ και $limsup\alpha_\nu$ αν:

$\alpha)\alpha_\nu = cos\frac{2\nu\pi}{3}, \nu \in \mathbb{N}$ $\beta)\alpha_\nu = 4 + (-1)^\nu + \frac{(-1)^\nu}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$

$\gamma)\alpha_\nu = [(-1)^\nu + 1]\nu^2, \nu \in \mathbb{N}$ $\delta)\alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) cos\frac{\nu\pi}{2}, \nu \in \mathbb{N}$

$\epsilon)\alpha_\nu = \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) sin\frac{\nu\pi}{2}, \nu \in \mathbb{N}$ $\sigma\tau)\alpha_\nu = \frac{\nu+1}{\nu+2}\left(sin\frac{\nu\pi}{4} + cos\frac{\nu\pi}{4}\right), \nu \in \mathbb{N}$

1.54 Έστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και $\alpha_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ μια υπακολουθία της. Να αποδείξετε ότι:

$$liminf\alpha_\nu \leq liminf\alpha_{k_\nu} \leq limsup\alpha_{k_\nu} \leq limsup\alpha_\nu.$$

1.55 Έστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha_\nu \leq liminf\alpha_\nu$ για άπειρο πλήθος δεικτών ν και $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι μια υπακολουθία της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ που σχηματίζεται από τους όρους για τους οποίους είναι $\alpha_\nu \leq liminf\alpha_\nu$, τότε η $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στο $liminf\alpha_\nu$.

1.56 Έστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ μια φραγμένη ακολουθία και

$$X = \{x : x \leq \alpha_\nu \quad \text{για άπειρο πλήθος δεικτών} \quad \nu\}.$$

Να αποδείξετε ότι $limsup\alpha_\nu = supX$.

1.57 Αν $\alpha_\nu, \beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένες ακολουθίες, τότε να αποδείξετε ότι:

$$sup\alpha_\nu + sup\beta_\nu \geq sup(\alpha_\nu + \beta_\nu) \geq sup\alpha_\nu + inf\beta_\nu.$$

§ 1.13 ΜΙΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

Θα τελειώσουμε αυτό το Κεφάλαιο με μερικές παρατηρήσεις. Στα μαθήματα του Λυκείου η θεμελίωση των Πραγματικών αριθμών έγινε με την εισαγωγή του αξιώματος του κιβωτισμού του Cantor . Στο βιβλίο αυτό, το αξίωμα του κιβωτισμού αντικαταστάθηκε με το αξίωμα της πληρότητας, ότι κάθε άνω φραγμένο μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών έχει supremum που όπως αποδείχτηκε στο Θεώρημα 1.59 είναι ισοδύναμο με αυτό. Με την βοήθεια του αξιώματος της πληρότητας αποδείχτηκε το Θεώρημα 1.59, ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Το Θεώρημα 1.59 όμως χρησιμοποιείται πολλές φορές ως Αξίωμα, όταν δεν είναι γνωστή η έννοια του supemum. Επίσης σε πιο προχωρημένα μαθήματα η έννοια της πληρότητας ενός χώρου γενικά, δίνεται με την βοήθεια του κριτηρίου του Cauchy, ότι κάθε ακολουθία του Cauchy συγκλίνει.

Θα αποδείξουμε τώρα ένα γενικό Θεώρημα, που αφορά την ισοδυναμία ορισμένων προτάσεων (με την έννοια ότι οποιαδήποτε από αυτές μπορεί να προκύψει σαν συνέπεια κάποιας αλλης).

Έτσι, οποιαδήποτε από αυτές τις προτάσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως Αξίωμα για την θεμελίωση των πραγματικών αριθμών.

Θεώρημα 1.85 Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

α) Κάθε ακολουθία κιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων του Cantor ορίζει έναν πραγματικό αριθμό.

β) Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει.

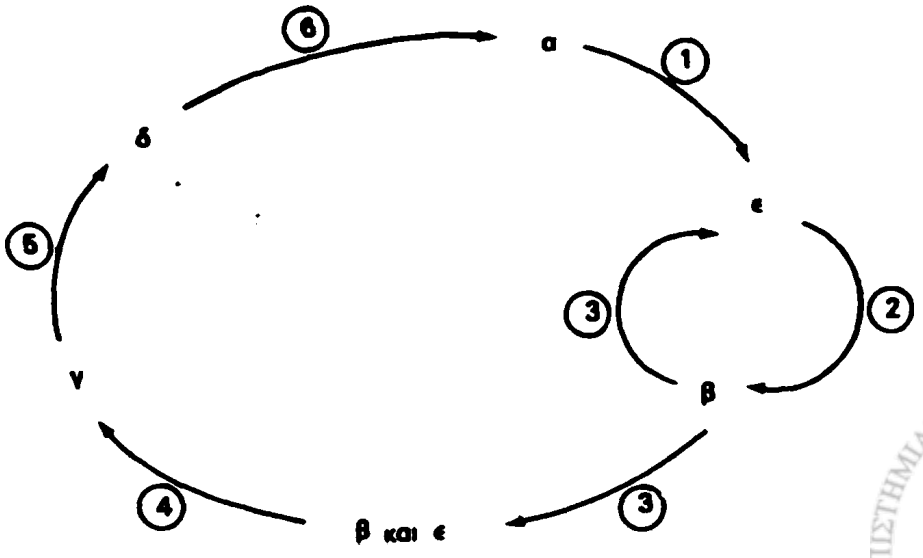
γ) Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει ένα τουλάχιστο σημείο συσσωρεύσεως.

δ) Κάθε ακολουθία του Cauchy συγκλίνει.

ε) Κάθε φραγμένο μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών έχει infimum και supemum.

Απόδειξη

Για την απόδειξη θα ακολουθήσουμε την πορεία που δείχνει το παρακάτω διάγραμμα:



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1) $\alpha \Rightarrow \epsilon$) Η απόδειξη έχει δοθεί στο Θεώρημα 1.59 μόνο για το supremum. Για το infimum ακολουθείται η ίδια ακριβώς πορεία. Μπορεί όμως να προκύψει και πιο απλά, παίρνοντας υπόψη το Θεώρημα 1.13

2) $\epsilon) \Rightarrow \beta)$ Θεώρημα 1.59.

3) $\beta) \Rightarrow \epsilon)$ Έστω Α ένα φραγμένο σύνολο. Από την κατασκευή στο 1) παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία άνω φραγμάτων $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ που είναι κάτω φραγμένη και μια αύξουσα ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ που οι όροι της δεν είναι άνω φράγματα του Α. Σύμφωνα με την β) αυτές συγκλίνουν και επειδή $\beta_\nu - \alpha_\nu \to 0$ έχουν και το ίδιο όριο, έστω x. Είναι $x = sup A$; Αυτό έχει αποδειχθεί στο 1).

4) $\beta)$ και $\epsilon) \Rightarrow \gamma)$. Έστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Από την ε) το σύνολο $\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$ έχει supremum έστω β_1. Αν το β_1 είναι σημείο συσσωρεύσεως της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ τότε η γ) ισχύει. Αν δεν είναι, τότε θα υπάρχει δείκτης $\nu_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: $\alpha_{\nu_1} = \beta_1$. Θεωρούμε το σύνολο $\{\alpha_\nu, \nu > \nu_1\}$. Το supremum αυτού του συνόλου, έστω β_2 είναι μεγαλύτερο από το β_1. Αν αυτό είναι σημείο συσσωρεύσεως της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ έχει καλά, διαφορετικά διαλέγουμε τον μεγαλύτερο δείκτη $\nu_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε: $\alpha_{\nu_2} = \beta_2$ και συνεχίζουμε κατ' αυτόν τον τρόπο. Έτσι, ή βρίσκουμε ένα β_ν που είναι σημείο συσσωρεύσεως της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ ή μια ακολουθία $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ φραγμένη και γνήσια αύξουσα. Από την β) η $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ πρέπει να συγκλίνει, και αφού κάθε β_ν είναι όρος της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συνεπάγεται ότι η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ έχει ένα σημείο συσσωρεύσεως. Έτσι από την β) και ε) παίρνουμε την γ). Αφού όμως οι β) και ε) είναι ισοδύναμες, κάθε μια μόνη της συνεπάγεται την γ).

5) $\gamma \Rightarrow \delta)$. Θεώρημα 1.76

6) $\delta \Rightarrow \alpha)$. Έστω μια ακολουθία κιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων του Cantor $\Delta_\nu = [\alpha_\nu, \beta_\nu], \nu \in \mathbb{N}$. Αφού $\alpha_\nu < \beta_\mu, \forall \mu, \nu \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι:

$$0 \leq \beta_\nu - \beta_{\nu+k} < \beta_\nu - \alpha_\nu$$

που σημαίνει ότι $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy. Από την δ) συγκλίνει, έστω $lim \beta_\nu = x$. Είναι $x \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ γιατί, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $\beta_{\nu_0} < x$, παίρνοντας $\epsilon = x - \beta_{\nu_0}$ θα είχαμε $\forall \nu > \nu_0$ ότι $|\beta_\nu - x| < x - \beta_{\nu_0}$ ή $\beta_{\nu_0} < \beta_\nu$ πράγμα άτοπο, αφού η $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα. Επίσης $\alpha_\nu \leq x, \forall \nu \in \mathbb{N}$ γιατί, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $\alpha_{\nu_0} > x$, παίρνοντας $\epsilon = \alpha_{\nu_0} - x$ θα είχαμε $\forall \nu > \nu_0$ ότι: $|\beta_\nu - x| < \alpha_{\nu_0} - x$ ή $\beta_\nu < \alpha_{\nu_0}$ που είναι άτοπο. Άρα $\alpha_\nu \leq x \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

§ 1.14 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

Παρακάτω δίνεται μια σειρά από συλλογισμούς με τον γενικό τίτλο **σωστό ή λάθος**. Να εξετάσετε αν είναι σωστοί ή όχι δίνοντας πλήρεις εξηγήσεις (αποδείξεις ή αντιπαράδειγμα όπου χρειάζεται).

Σωστό ή λάθος;

1 Αν $0 < \alpha_\nu < \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και η $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει, τότε και η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει.

2 Αν $0 < \alpha_\nu < \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $lim\beta_\nu = 0$, τότε και $lim\alpha_\nu = 0$.

3 Αν $\beta_\nu = \alpha_{\nu+1}$ και $\alpha_\nu \to \ell$, τότε και $\beta_\nu \to \ell$.

4 Αν η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει τότε $lim(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) = 0$.

5 Αν $\beta_\nu = \alpha_{2\nu}$ και η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει, τότε και η $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει.

6 Αν η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει, τότε $lim\frac{\alpha_\nu}{\nu} = 0$.

7 Αν η $\alpha_{k_\nu} \to 0$, όπου α_{k_ν} υπακολουθία της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ τότε και $\alpha_\nu \to 0$.

8 Αν η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, τότε αυτή συγκλίνει.

9 Αν η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ δεν είναι φραγμένη, τότε αυτή δεν συγκλίνει.

10 Αν $|\alpha_\nu| \to |\ell|$ τότε και $\alpha_\nu \to \ell$.

11 Αν $|\alpha_\nu| \to 0$ τότε και $\alpha_\nu \to 0$.

12 Αν $\alpha_\nu \to \ell$ τότε $\frac{1}{\alpha_\nu} \to \frac{1}{\ell}$.

13 Αν $A = \{x : \alpha < x < \beta\}$ τότε $supA = \beta$.

14 Αν $A = \{x : 0 < x \leq 1\}$ τότε $minA = 0$ και $maxA = 1$.

15 Αν $\alpha_\nu \to \ell$ τότε η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy.

16 Αν ένα σύνολο περιέχει ένα από τα άνω φράγματά του, τότε αυτό το άνω φράγμα είναι το $supA$.

17 Μια αύξουσα και φραγμένη ακολουθία είναι ακολουθία του Cauchy.

18 Αν μια ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι τέτοια ώστε : $|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu| \leq \frac{1}{\nu}, \forall \nu \in \mathbb{N}$ τότε η $\alpha_\nu, \nu \in N$ συγκλίνει.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

19 Μια ακολουθία μπορεί να έχει περισσότερα από ένα σημεία συσσωρεύσεως.

20 Οποιαδήποτε ακολουθία είναι υπακολουθία του εαυτού της.

21 Μια μη φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

22 Οποιαδήποτε ακολουθία έχει οπωσδήποτε ένα σημείο συσσωρεύσεως.

23 Αν $\alpha_\nu \to 0$ τότε και $(-1)^\nu \alpha_\nu \to 0$.

24 Αν $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy και $\alpha_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ μια υπακολουθία της με $\alpha_{k_\nu} \to \ell$, τότε $\alpha_\nu \to \ell$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.58 Αν $y \in \mathbb{R}, y > 0$ και $\nu \geq 2$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x \in \mathbb{R}, x > 0$ τέτοιο ώστε $x^\nu = y$.

1.59 α) Να αποδείξετε ότι το $\mathbb{R}$ είναι παντού πυκνό στον εαυτό του.

β) Να βρεθεί το $sup\, A$ αν $A = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 + x < \frac{1}{1-x}\right\}$.

1.60 Έστω $M = sup\, A$ και υποθέτουμε ότι $M \notin A$. Να αποδείξετε ότι για τυχαίο $\epsilon > 0$ το διάστημα $(M - \epsilon, M)$ περιέχει άπειρα στοιχεία του συνόλου A.

1.61 Έστω A και B δυο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B) x \leq y.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $sup A \leq inf B$.

β) $sup A = inf A$, αν και μόνον αν, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχουν $x(\epsilon) \in A$ και $y(\epsilon) \in B$, τέτοια ώστε: $y(\epsilon) - x(\epsilon) < \epsilon$.

1.62 Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι τέτοιο ώστε $x \geq 0, \forall x \in A$ και για τυχαίο $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_k \in A$ τέτοιο ώστε $kx_k \leq 1$, να αποδείξετε ότι $0 = inf A$.

1.63 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα φραγμένο σύνολο. Να αποδείξετε ότι:

$$sup A - inf A = sup\{x - y : x \in A, y \in A\}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.64 Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του IR άνω φραγμένο και $\alpha \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε το σύνολο $\alpha + A = \{\alpha + x : x \in A\}$. Να αποδείξετε ότι: $sup(\alpha + A) = \alpha + sup A$.

1.65 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $M = sup A$ με $M \in A$. Αν $\alpha \notin A$ να αποδείξετε ότι: $sup(A \cup \{\alpha\}) = max(M, \alpha)$.

1.66 Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά, άνω φραγμένα σύνολα με $\alpha = sup A, \beta = sup B$. Έστω $C = \{xy : x \in A, y \in B\}$. Να αποδείξετε ότι γενικά $\alpha\beta \neq supC$. Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = infC$. Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ και τα A, B έχουν μόνο θετικά στοιχεία, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = supC$.

1.67 Έστω A ένα μη κενό φραγμένο σύνολο μη αρνητικών αριθμών και

$$A_{1/2} = \{x : x^2 \in A\}.$$

Να αποδείξετε ότι το $A_{1/2}$ είναι φραγμένο και ότι

$$inf A_{1/2} = \sqrt{inf A}, sup A_{1/2} = \sqrt{sup A}.$$

1.68 Αν οι υπακολουθίες $\alpha_{2\nu}, \alpha_{2\nu-1}$ και $\alpha_{3\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνουν, τότε να αποδείξετε ότι και η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει.

1.69 Να αποδείξετε με την βοήθεια του ορισμού ότι οι ακολουθίες $\alpha_\nu = \nu + \frac{(-1)^\nu}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ και $\beta_\nu = \frac{\nu^2}{2\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}$ δεν είναι ακολουθίες του Cauchy.

1.70 Να αποδείξετε ότι το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \ldots + \frac{1}{2\nu}$ υπάρχει. Να αποδείξετε ότι το όριο αυτό είναι μικρότερο του 1, αλλά μεγαλύτερο του $\frac{1}{2}$.

1.71 Να αποδείξετε ότι η $\alpha_\nu = \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) sin\frac{\nu\pi}{2}, \nu \in \mathbb{N}$ έχει σημείο συσσωρεύσεως το 0. Είναι αυτό μοναδικό; Αν όχι να βρεθούν τα υπόλοιπα.

1.72 Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}cos\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι συγκλίνει. (Να θεωρήσετε γνωστό ότι $|cosx - cosy| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.)

1.73 Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_\nu = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^\nu \frac{1}{\nu!}$$

είναι ακολουθία του Cauchy.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.74 Έστω $x_1 < x_2$ δυο τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Για $\nu \geq 2$ ας είναι

$$x_\nu = kx_{\nu-1} + \lambda x_{\nu-2},$$

όπου k, λ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί με $k + \lambda = 1$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy, και να βρήτε το όριό της.

1.75 Δίνεται η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_1 > 0$ και $\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2+\alpha_\nu}$. Να αποδείξετε ότι:

1) Οι υπακολουθίες $\alpha_{2\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μονότονες.

2) Υπάρχει σταθερά c, η οποία και να βρεθεί, τέτοια ώστε

$$|\alpha_{\nu+2} - \alpha_{\nu+1}| \leq c|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu|, \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

3) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy.

1.76 Μια ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ λέγεται **συστολή** αν υπάρχει c με $0 < c < 1$ τέτοιο ώστε

$$|\alpha_{\nu+2} - \alpha_{\nu+1}| \leq c|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu|, \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Να αποδείξετε ότι κάθε συστολή είναι ακολουθία του Cauchy και άρα συγκλίνει. Αν $lim\alpha_\nu = \ell$ να αποδείξετε ότι:

1) $|\ell - \alpha_\nu| \leq \frac{c^{\nu-1}}{1-c}|\alpha_2 - \alpha_1|$

2) $|\ell - \alpha_\nu| \leq \frac{c}{1-c}|\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}|$

1.77 Στο εξής πρόβλημα:

Η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει αν υπάρχει r με $0 < r < 1$ ώστε να ισχύει:

$$|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu| < cr^\nu, c \in \mathbb{R}$$

δόθηκε η παρακάτω λύση.

" Επειδή $0 < r < 1$ είναι $limr^\nu = 0$, δηλ. για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $r^\nu < \frac{\epsilon}{c}, \forall \nu > \nu_0$. Τότε είναι $|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu| < \epsilon, \forall \nu > \nu_0$. Επομένως για $\mu = \nu + 1$ είναι $|\alpha_\mu - \alpha_\nu| < \epsilon, \forall \mu, \nu > \nu_0$ και συνεπώς η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy".

Να εξηγήσετε ότι η παραπάνω λύση είναι λάθος και να δώσετε τη σωστή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.78 Έστω $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία τέτοια ώστε: $\alpha < x_\nu < \beta, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $y \in (\alpha, \beta)$ με $x_\nu \neq y, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Σημείωση

Αυτό αποδεικνύει ότι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την σχέση $\alpha < x < \beta$ με $\alpha < \beta$ είναι μη αριθμήσιμοι στο πλήθος. Μ' άλλα λόγια αφού τα α και β είναι τυχαίοι, αποδεικνύει ότι το $\mathbb{R}$ είναι μη αριθμήσιμο.

1.79 Έστω Α ένα μη κενό σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών, το οποίο είναι άνω φραγμένο και

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} \in A \right\}.$$

Να αποδείξετε ότι το Β είναι κάτω φραγμένο και ότι $inf B = \frac{1}{sup A}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σειρές 2

§ 2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ

Θεωρούμε την ακολουθία των πραγματικών αριθμών α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Από αυτήν σχηματίζουμε μια νέα ακολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ως εξής:

$$\sigma_1 = \alpha_1$$

$$\sigma_2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\sigma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

.....

$$\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots + \alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k$$

Την ακολουθία αυτή σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k$ ονομάζουμε **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της ακολουθίας** α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Οι πραγματικοί αριθμοί $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$ ονομάζονται αντίστοιχα **πρώτο μερικό άθροισμα, δεύτερο μερικό άθροισμα, ... ν-οστό μερικό άθροισμα.**

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι τελείως καθορισμένη από την ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Αλλά και αντίστροφα η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι τελείως καθορισμένη από την ακολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, γιατί:

$$\alpha_1 = \sigma_1$$

$$\alpha_2 = \sigma_2 - \sigma_1$$

.....

$$\alpha_\nu = \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}$$

Δίνουμε τώρα τον επόμενο

Ορισμός 2.1 Ονομάζουμε σειρά πραγματικών αριθμών και τη συμβολίζουμε με $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ **το διατεταγμένο ζεύγος** (α_ν, σ_ν), **όπου** α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ **είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών και** $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots + \alpha_\nu$, $\nu \in \mathbf{N}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Κάθε όρος της ακολουθίας $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ λέγεται **όρος** της σειράς, ενώ κάθε όρος της ακολουθίας $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ λέγεται **μερικό άθροισμα** της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$.

Όταν σε μια σειρά ξεκινάμε από μια ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ στην οποία λαμβάνεται ως δείκτης και το 0, τότε η σειρά συμβολίζεται με $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu$. Και γενικότερα, αν ξεκινάμε από μια ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με δείκτες μεγαλύτερους ή ίσους κάποιου δείκτη ν_0, τότε η αντίστοιχη σειρά συμβολίζεται με $\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \alpha_\nu$ και έχει ν-οστό μερικό άθροισμα το $\sigma_\nu = \sum_{k=\nu_0}^{\nu} \alpha_k$.

Παράδειγμα 2.2 (Η σειρά των φυσικών αριθμών)

Το ζεύγος των ακολουθιών

$$\alpha_\nu : 1, 2, 3, \ldots, \nu$$

$$\sigma_\nu : 1, 3, 6, \ldots, \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

είναι μια σειρά που παριστάνεται με $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu = 1 + 2 + 3 + \ldots + \nu + \ldots$ και λέγεται **σειρά των φυσικών αριθμών**.

Παράδειγμα 2.3 (Η αριθμητική σειρά)

Έστω μια σειρά της οποίας οι όροι αποτελούν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο α και λόγο ω, δηλ. $\sum_{\nu=1}^{\infty} [\alpha + (\nu - 1)\omega] = \alpha + (\alpha + \omega) + \ldots$. Η σειρά αυτή λέγεται **αριθμητική σειρά** και το ν-οστό μερικό της άθροισμα είναι:

$$\sigma_\nu = \alpha + (\alpha + \omega) + \ldots + [\alpha + (\nu - 1)\omega] = \frac{2\alpha + (\nu - 1)\omega}{2}\nu.$$

Παράδειγμα 2.4 (Η γεωμετρική σειρά)

Έστω μια σειρά της οποίας οι όροι αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο α και λόγο ω, δηλ. $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha.\omega^\nu = \alpha + \alpha.\omega + \ldots$. Η σειρά αυτή λέγεται **γεωμετρική σειρά** και το ν-οστό μερικό της άθροισμα είναι:

$$\sigma_\nu = \alpha + \alpha.\omega + \ldots + \alpha.\omega^\nu = \frac{\alpha(\omega^{\nu+1} - 1)}{\omega - 1}, \omega \neq 1.$$

Παράδειγμα 2.5 (Η αρμονική σειρά)

Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu} + \ldots$ λέγεται **αρμονική σειρά**, γιατί κάθε όρος της, εκτός από τον πρώτο, είναι μέσος αρμονικός του όρου που

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

προηγείται και του όρου που ακολουθεί. $\left(\text{Ισχύει } \frac{2}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha_{\nu-1}} + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}}, \nu \geq 2.\right)$
Το ν-οστό μερικό άθροισμα της αρμονικής σειράς είναι:

$$\sigma_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu}.$$

Παράδειγμα 2.6

Έστω η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+2)} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \ldots + \frac{1}{\nu(\nu+2)}$. Ο γενικός όρος της είναι

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu(\nu+2)} = \frac{1}{2}\frac{(\nu+2)-\nu}{\nu(\nu+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+2}\right)$$

και το ν-οστό μερικό της άθροισμα είναι:

$$\begin{aligned} \sigma_\nu &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2}\right). \end{aligned}$$

§ 2.2 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την σύγκλιση μιας σειράς ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα.

Θεωρούμε την γεωμετρική σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^\nu} + \ldots$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το παραπάνω άθροισμα. Προφανώς, το άθροισμα αυτό δεν μπορεί να υπολογιστεί με την συνήθη διαδικασία της πρόσθεσης, γιατί όπως ξέρουμε η πράξη της πρόσθεσης είναι ορισμένη μόνον όταν αναφέρεται σε πεπερασμένο πλήθος προσθετέων. Συνεπώς το πρόβλημα τίθεται ως εξής: **Μπορούμε να προσεγγίσουμε αυτό το άθροισμα με έναν πραγματικό αριθμό; Ή αυτό αυξάνει απεριόριστα; Ή ελαττώνεται απεριόριστα; Ή δεν μπορούμε να αποφανθούμε τι γίνεται;**

Το ν-οστό μερικό άθροισμα της παραπάνω σειράς είναι:

$$\sigma_\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^\nu} = 1 - \frac{1}{2^\nu}.$$

Παρατηρούμε ότι αν το ν αυξάνει το $\frac{1}{2^\nu}$ μικραίνει και η διαφορά $1 - \frac{1}{2^\nu}$ πλησιάζει στην μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι αν πάρουμε όσο το δυνατό περισσότερους όρους της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu}$, τόσο πλησιάζουμε στο 1, αλλά ποτέ δεν είναι δυνατό με την συνήθη πρόσθεση, όσους όρους και να πάρουμε, να βρούμε άθροισμα 1.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ακόμα παρατηρούμε ότι $lim\sigma_\nu = 1$. Έτσι οδηγούμαστε στο να γράψουμε:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 1 = lim\sigma_\nu = lim\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^\nu}\right).$$

Δίνουμε τώρα τον γενικό ορισμό:

Ορισμός 2.7 Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό ℓ και θα γράφουμε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \ell$, αν και μόνον αν, $\lim\sigma_\nu = \ell$. Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει κατ' εκδοχή αν απειρίζεται θετικά ή αρνητικά, δηλ. αν $\lim\sigma_\nu = +\infty$ ή $-\infty$. Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ αποκλίνει ή κυμαίνεται, αν δεν υπάρχει το $\lim\sigma_\nu$.

Παρατήρηση 2.8

Δεν πρέπει να γίνει σύγχυση των εννοιών "ακολουθία" και "σειρά", αν και αποτελούνται από τους ίδιους όρους. Η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μια συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$. Στην περίπτωση της σειράς χρησιμοποιούμε τα στοιχεία της ακολουθίας, αλλά με την ευρεία έννοια της πρόσθεσης άπειρου πλήθους στοιχείων της ακολουθίας. Γι' αυτό και η σειρά λέγεται πολλές φορές και **άθροισμα με άπειρους όρους.** Δεν πρέπει όμως να συγχέουμε την έννοια της σειράς με την αλγεβρική έννοια του αθροίσματος και αυτό γιατί το άθροισμα αφορά πεπερασμένο το πλήθος όρους και ορίζει μονοσήμαντα έναν πραγματικό αριθμό, ενώ για μια σειρά το άθροισμα δεν ορίζεται πάντα, καθόσον η σειρά μπορεί να συγκλίνει κατ' εκδοχή ή και να αποκλίνει. Αλλά και αν ακόμα η σειρά συγκλίνει, το άθροισμά της δεν βρίσκεται αλγεβρικά, αλλά με την βοήθεια μιας εξωαλγεβρικής έννοιας, της έννοιας του ορίου.

Παρατήρηση 2.9

Για μια συγκλίνουσα σειρά το σύμβολο $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ παριστάνει και την σειρά και το άθροισμά της. Π.χ. αν με το σύμβολο $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu}$ εννοούμε την σειρά, έχουμε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^\nu}$, ενώ αν εννούμε το άθροισμα, έχουμε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 1$. **Μια συγκλίνουσα σειρά την συμβολίζουμε ως εξής:** $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty$.

Παρατήρηση 2.10

Πολλές φορές είναι προτιμότερο για μια σειρά, αντί του συμβολισμού $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots$ Π.χ. είναι προτιμότερο να γράφουμε $\alpha - \beta + \alpha^2 - \beta^2 + \alpha^3 - \beta^3 + \ldots$ αντί να γράφουμε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ με α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε: $\alpha_{2\nu-1} = \alpha^\nu$, $\alpha_{2\nu} = -\beta^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση την αριθμητική σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}[\alpha+(\nu-1)\omega],\ \alpha,\omega\in\mathbf{R}.$$

Απόδειξη

Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων σ_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ είναι:

$$\sigma_\nu=\alpha+(\alpha+\omega)+\ldots+[\alpha+(\nu-1)\omega]=\frac{1}{2}[\nu^2\omega+(2\alpha-\omega)\nu].$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $\omega\neq 0$. Τότε $\sigma_\nu=\omega\nu^2\left(\frac{1}{2}+\frac{2\alpha-\omega}{2\omega\nu}\right)$ και επειδή $lim\frac{2\alpha-\omega}{2\omega\nu}=0$ είναι:

$$lim\sigma_\nu=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \omega>0\\ -\infty, & \text{αν } \omega<0\end{cases}$$

β) $\omega=0$. Τότε $\sigma_\nu=\nu\alpha$ και

$$lim\sigma_\nu=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \alpha>0\\ -\infty, & \text{αν } \alpha<0\end{cases}$$

2. Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση την γεωμετρική σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha\omega^{\nu-1},\ \alpha,\omega\in\mathbf{R},\ \omega\neq\mathbf{0}.$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\sigma_\nu=\alpha+\alpha.\omega+\ldots+\alpha.\omega^{\nu-1}=\begin{cases}\nu\alpha, & \omega=1\\ \alpha\frac{\omega^\nu-1}{\omega-1}, & \omega\neq 1\end{cases}$$

Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) $|\omega|<1$. Τότε $\omega^\nu\to 0$ και άρα $lim\sigma_\nu=\frac{\alpha}{1-\omega}$.

β) $\omega>1$. Τότε $\omega^\nu\to+\infty$ (γιατί είναι γνήσια αύξουσα και μη φραγμένη, Παράδειγμα 1.74) και άρα

$$lim\sigma_\nu=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \alpha>0\\ -\infty, & \text{αν } \alpha<0\end{cases}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γ) $\omega = 1$. Τότε $\sigma_\nu = \nu\alpha$ και άρα

$$lim\sigma_\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

δ) $\omega = -1$. Τότε

$$\sigma_\nu = \alpha - \alpha + \alpha - \alpha + \ldots + (-1)^{\nu-1}\alpha = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \\ 0, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$$

οπότε $\sigma_{2\nu} \to 0$ και $\sigma_{2\nu-1} \to \alpha$, δηλ. δεν υπάρχει το $lim\sigma_\nu$ και η σειρά αποκλίνει.

ε) $\omega < -1$. Τότε $|\omega| > 1$ και $\omega = -|\omega|$. Άρα

$$\sigma_\nu = \alpha\frac{1-\omega^\nu}{1-\omega} = \alpha\frac{1-(-1)^\nu|\omega|^\nu}{1-\omega}.$$

Αφού $|\omega| > 1$ σύμφωνα με την β) $|\omega|^\nu \to +\infty$ οπότε $|\omega|^{2\nu} \to +\infty$ και $|\omega|^{2\nu-1} \to +\infty$. Τότε όμως έχουμε:

$$\sigma_{2\nu} = \alpha\frac{1-(-1)^{2\nu}|\omega|^{2\nu}}{1-\omega} = \alpha\frac{1-|\omega|^{2\nu}}{1-\omega} \to \begin{cases} -\infty, & \alpha > 0 \\ +\infty, & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{2\nu-1} = \alpha\frac{1-(-1)^{2\nu-1}|\omega|^{2\nu-1}}{1-\omega} = \alpha\frac{1+|\omega|^{2\nu-1}}{1-\omega} \to \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \\ -\infty, & \alpha < 0 \end{cases}$$

Άρα η σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει και συνεπώς η σειρά αποκλίνει.

Συμπερασματικά λοιπόν έχουμε για την γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha\omega^{\nu-1} = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\omega}, & |\omega| < 1 \\ +\infty, & \omega \geq 1, \alpha > 0 \\ -\infty, & \omega \geq 1, \alpha < 0 \\ \text{αποκλίνει}, & \omega \leq -1. \end{cases}$$

3. Να αποδείξετε ότι η αρμονική σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu} + \ldots$$

απειρίζεται θετικά.

Απόδειξη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\sigma_\nu = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία θετικών όρων, αφού $\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu = \frac{1}{\nu+1} > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και όπως έχουμε αποδείξει δεν συγκλίνει (Εφαρμογή 2 της § 1.11). Άρα $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$.

4. α) Αν $\lim\alpha_\nu = \ell$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) = \alpha_1 - \ell.$$

β) Αν $\lim\beta_\nu = +\infty$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\beta_{\nu+1} - \beta_\nu) = +\infty.$$

Αν επί πλέον $\beta_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\beta_{\nu+1}}\right) = \frac{1}{\beta_1}.$$

Απόδειξη

α) Αν σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})$, τότε θα έχουμε:

$$\sigma_\nu = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots + (\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) = \alpha_1 - \alpha_{\nu+1}.$$

Συνεπώς $lim\sigma_\nu = \alpha_1 - \lim\alpha_{\nu+1} = \alpha_1 - \ell$ ή $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) = \alpha_1 - \ell$.

β) Αν τ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\beta_{\nu+1} - \beta_\nu)$, τότε θα έχουμε:

$$\tau_\nu = (\beta_2 - \beta_1) + (\beta_3 - \beta_2) + \ldots + (\beta_{\nu+1} - \beta_\nu) = \beta_{\nu+1} - \beta_1,$$

και άρα $lim\tau_\nu = lim\beta_{\nu+1} - \beta_1 = +\infty$ ή $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\beta_{\nu+1} - \beta_\nu) = +\infty$.

Αν επί πλέον $\beta_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ τότε $\frac{1}{\beta_\nu} \to 0$ και από το α) έχουμε:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\beta_{\nu+1}}\right) = \frac{1}{\beta_1} - lim\frac{1}{\beta_{\nu+1}} = \frac{1}{\beta_1}.$$

Σημείωση

Μια σειρά της μορφής $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})$ λέγεται τηλεσκοπική σειρά.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1 Ποιάς σειράς η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι η $\sigma_\nu = \frac{\nu}{2\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$, ποιάς η $\sigma_\nu = 2 - \frac{1}{2^{\nu-1}}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και ποιάς η $\sigma_\nu = \frac{\nu^2}{\nu^2+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

2.2 Να γραφεί η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ όπου η σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι η $\sigma_{2\nu-1} = 1$ και $\sigma_{2\nu} = 0$.

2.3 Να βρεθούν τα αθροίσματα των παρακάτω σειρών:

$$\alpha) \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^\nu, \quad \beta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^\nu, \quad \gamma) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{3^\nu}, \quad \delta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2}$$

2.4 Να αποδείξετε ότι:

$$i) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+\nu-1)(\alpha+\nu)} = \frac{1}{\alpha}, \alpha > 0.$$

$$ii) \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} = 1.$$

§ 2.3 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

Θεώρημα 2.11 Αν μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει, τότε:

α) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη.

β) η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μηδενική.

Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.

Απόδειξη

α) Αφού η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει συνεπάγεται ότι υπάρχει το $\lim \sigma_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, έστω $lim\sigma_\nu = \ell$. Τότε η ακολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ως συγκλίνουσα είναι φραγμένη. Το ότι δεν ισχύει το αντίστροφο, δηλ. μπορεί η ακολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ να είναι φραγμένη χωρίς η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ να συγκλίνει, φαίνεται από το εξής παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu$ δεν συγκλίνει (εφαρμογή 2 της § 2.2) αν και η ακολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, καθόσον $|\sigma_\nu| \leq 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \ell \Leftrightarrow lim\sigma_\nu = \ell$. Αλλά $\alpha_\nu = \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}$, οπότε $lim\alpha_\nu = lim\sigma_\nu - lim\sigma_{\nu-1} = \ell - \ell = 0$. Και εδώ το αντίστροφο δεν ισχύει, αφού $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$ (εφαρμογή 3 της §2.2) ενώ $lim\frac{1}{\nu} = 0$. •

Παρατήρηση 2.12

Σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα **αναγκαία συνθήκη** για να συγκλίνει μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ είναι η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ να είναι μηδενική.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνεπώς αν $lim\alpha_\nu \neq 0$, τότε αυτό αποτελεί ικανή συνθήκη για να μην συγκλίνει η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$. Αυτό σημαίνει ότι αν για μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ είναι $lim\alpha_\nu \neq 0$, τότε αυτή δεν συγκλίνει. Δηλαδή θα προχωρούμε στην μελέτη μιας σειράς ως προς την σύγκλιση μόνον εφόσον ο γενικός όρος συγκλίνει στο μηδέν.

Θεώρημα 2.13. Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \ell$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = \mathrm{m}$, όπου $\ell, \mathrm{m} \in \mathbf{R}$ τότε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu) = \xi\ell + \eta\mathrm{m}.$$

Απόδειξη

Έστω $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k$ και $\tau_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k$. Τότε αν $s_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} (\xi\alpha_k + \eta\beta_k)$ θα έχουμε:

$$s_\nu = \xi \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k + \eta \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k = \xi\sigma_\nu + \eta\tau_\nu$$

και $lims_\nu = \xi\ell + \eta m$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ. αν το άθροισμα δυο σειρών είναι συγκλίνουσα σειρά, δεν σημαίνει ότι και κάθε μια από αυτές θα συγκλίνει. Π. χ. $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1 = +\infty$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1) = -\infty$ ενώ $\sum_{\nu=1}^{\infty} (1 + (-1)) = 0$. •

Θεώρημα 2.14 Αν σε μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ παραλείψουμε η προσθέσουμε k πρώτους όρους, τότε η σειρά που προκύπτει είναι της ίδιας φύσης με την αρχική, δηλ. σύγκλιση ή απόκλιση της μιας συνεπάγεται σύγκλιση ή απόκλιση της άλλης.

Απόδειξη

Έστω $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$ και $\tau_\nu = \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \ldots + \alpha_{k+\nu}$. Τότε $\sigma_{\nu+k} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k) + \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \ldots + \alpha_{k+\nu} = s + \tau_\nu$, όπου $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ (πεπερασμένο). Άρα $\tau_\nu = \sigma_{\nu+k} - s$. Συνεπώς

Αν $lim\sigma_\nu = \ell \Rightarrow lim\tau_\nu = \ell - s \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+k} = \ell - s$.

Αν $lim\sigma_\nu = +\infty \Rightarrow lim\tau_\nu = +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+k} = +\infty$.

Αν $lim\sigma_\nu = -\infty \Rightarrow lim\tau_\nu = -\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+k} = -\infty$.

Αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ αποκλίνει $\Leftrightarrow \lim \sigma_\nu$ δεν υπάρχει $\Leftrightarrow lim\tau_\nu$ δεν υπάρχει $\Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+k}$ αποκλίνει. •

Παρατήρηση 2.15

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για μια συγκλίνουσα σειρά η παράλειψη ή η προσθήκη όρων δεν την μεταβάλλει ως προς την σύγκλιση, αλλά το άθροισμά της ελαττώνεται ή αυξάνει κατά το άθροισμα των παραλειφθέντων ή προστεθέντων όρων.

§ 2.4 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΣΕΙΡΩΝ

Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε ορισμένα κριτήρια με την βοήθεια των οποίων μπορούμε να εξετάσουμε μια σειρά ως προς τη σύγκλιση. Όπως είδαμε, για να εξετάσουμε τη σύγκλιση μιας σειράς πρέπει να βρούμε το $lim\sigma_\nu$. Αλλά ο υπολογισμός του $lim\sigma_\nu$ δεν είναι πάντοτε εύκολος να γίνει. Γι' αυτό καταφεύγουμε σε άλλα κριτήρια. Τονίζουμε ότι το θέμα της σύγκλισης μιας σειράς είναι ένα από τα δυσκολότερα του Απειροστικού Λογισμού. Δεν υπάρχει ενιαίος τρόπος για την αντιμετώπισή του. Η πληθώρα των κριτηρίων που υπάρχουν καταμαρτυρεί αυτήν την δυσκολία.

Γενικά, τα κριτήρια που υπάρχουν μπορούμε να τα κατατάξουμε σε τρεις κατηγορίες:

1η) Κριτήρια που δίνουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες σύγκλισης (δηλ. μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ θα συγκλίνει, τότε και μόνον τότε, αν ισχύουν οι συνθήκες για τις οποίες μιλάει το κριτήριο.)

2η) Κριτήρια που δίνουν ικανές συνθήκες σύγκλισης (δηλ. αν αληθεύουν οι συνθήκες για τις οποίες μιλάει το κριτήριο τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει.)

3η) Κριτήρια που δίνουν αναγκαίες συνθήκες σύγκλισης (δηλ. αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει, τότε αληθεύουν οι συνθήκες για τις οποίες μιλάει το κριτήριο.)

Ένα κριτήριο της 1ης) κατηγορίας προκύπτει εύκολα αν εφαρμόσουμε το κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών του Cauchy στην ακολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$. Έτσι έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.16 (Κριτήριο του Cauchy) Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει, αν και μόνον αν, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων σ_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy, δηλ.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu < +\infty \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbf{N})(\forall \nu, \mu \in \mathbf{N})\nu, \mu > \nu_0 \Rightarrow |\sigma_\nu - \sigma_\mu| < \epsilon.$$

Απόδειξη

Έστω ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει. Τότε η σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει και άρα είναι ακολουθία του Cauchy. Το αντίστροφο επίσης είναι απλό. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατήρηση 2.17

Η συνθήκη στο παραπάνω Θεώρημα μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})$$

$$(\nu > \nu_0)(\forall k \in \mathbb{N}) \Rightarrow |\sigma_{\nu+k} - \sigma_\nu| < \epsilon.$$

Ειδικά για $k = 1$ αυτή δίνει $|\alpha_{\nu+1}| < \epsilon, \forall \nu > \nu_0$ αν η σειρά συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι $lim \alpha_\nu = 0$ (Θεώρημα 2.11β).

Το παραπάνω κριτήριο αν και είναι γενικό και δίνει ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνει μια σειρά, εντούτοις είναι αρκετά δύσκολο στην εφαρμογή. Η δυσκολία έγκειται στο να βρούμε αναλυτική έκφραση για την παράσταση $|\sigma_{\nu+k} - \sigma_\nu| = |\alpha_{\nu+1} + \ldots + \alpha_{\nu+k}|$ συναρτήσει του ν. Οι δυσκολίες αυτές εξάλλου είχαν εντοπισθεί και στο να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία είναι ακολουθία του Cauchy.

Υπάρχουν βέβαια κριτήρια, που άλλα δίνουν ικανές και άλλα αναγκαίες συνθήκες για την σύγκλιση μιας σειράς και είναι απλά στην εφαρμογή. Τέτοια κριτήρια θα αναφέρουμε παρακάτω, αρχίζοντας με **σειρές μη αρνητικών όρων**.

Υποθέτουμε ότι οι όροι της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ είναι μη αρνητικοί, δηλ $\alpha_\nu \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ των μερικών της αθροισμάτων είναι αύξουσα, αφού $\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu = \alpha_{\nu+1} \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.18 Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu, \alpha_\nu \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει αν η ακολουθία $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ των μερικών της αθροισμάτων είναι φραγμένη, και απειρίζεται θετικά, αν και μόνον αν, η $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ δεν είναι φραγμένη.

Παρατήρηση 2.19

Η συνθήκη $\alpha_\nu \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ του παραπάνω Θεωρήματος δεν μπορεί να παραληφθεί. (Βλέπε παράδειγμα του Θεωρήματος 2.11α)

Παράδειγμα 2.20

Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ συγκλίνει, αφού $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu(\nu+1)} > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και η $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, γιατί:

$$\sigma_\nu = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{\nu(\nu+1)}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)=1-\frac{1}{\nu+1}<1.$$

Θεώρημα 2.21 (Κριτήριο σύγκρισης σειρών) Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ **είναι δυο σειρές μη αρνητικών όρων, τέτοιες ώστε:**

$$0 \le \alpha_\nu \le M\beta_\nu, \forall \nu \ge \nu_0$$

τότε:

$$\text{i)} \sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu < +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu < +\infty$$

$$\text{ii)} \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu = +\infty.$$

Απόδειξη

Έστω $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k$ και $\tau_\nu = \sum_{k=1}^{\nu}\beta_k$. Τότε είναι:

$$\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k = \sum_{k=1}^{\nu_0-1}\alpha_k + \sum_{k=\nu_0}^{\nu}\alpha_k \le \sum_{k=1}^{\nu_0-1}\alpha_k + M\sum_{k=\nu_0}^{\nu}\beta_k \le \sum_{k=1}^{\nu_0-1}\alpha_k + M\sum_{k=1}^{\nu}\beta_k.$$

i) Έστω $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \tau_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ φραγμένη (Θεώρημα 2.18). Άρα η $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, αφού το άθροισμα $\sum_{k=1}^{\nu_0-1}\alpha_k$ είναι σταθερός αριθμός ανεξάρτητος του ν, και επειδή $\alpha_\nu \ge 0, \forall \nu \in N$, από το Θεώρημα 2.18 έχουμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει.

ii) Έστω $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = +\infty$ και ας υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ συγκλίνει. Τότε σύμφωνα με το i) σύγκλιση της $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ συνεπάγεται και σύγκλιση της $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$, πράγμα άτοπο. Άρα η $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ ως σειρά μη αρνητικών όρων και μη συγκλίνουσα, θα απειρίζεται θετικά. •

Παράδειγμα 2.22

Αν $\beta_\nu = \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ και $\alpha_\nu = \frac{1}{(\nu+1)^2}, \nu \in \mathbb{N}$ τότε $0 < \alpha_\nu < \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Συνεπώς η σύγκλιση της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)}$ (Παράδειγμα 2.20) συνεπάγεται την σύγκλιση της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)^2}$.

Παράδειγμα 2.23

Είναι $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^\rho} = +\infty$ αν $\rho \le 1$. Πραγματικά· για $\rho = 1$ είναι η αρμονική σειρά (εφαρμογή 3 της § 2.2). Για $\rho < 1$ έχουμε $\frac{1}{\nu} \le \frac{1}{\nu^\rho}, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και επειδή $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu} = +\infty$ συνεπάγεται ότι και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^\rho} = +\infty$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 2.24 (Οριακό κριτήριο σύγκλισης σειρών) Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ είναι δυο σειρές με θετικούς όρους τέτοιες ώστε:

$$\lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\ell, 0<\ell<+\infty$$

τότε

$$\text{i)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu<+\infty\Leftrightarrow\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu<+\infty$$

$$\text{ii)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu=+\infty\Leftrightarrow\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu=+\infty.$$

Ειδικές περιπτώσεις:

$$\ell=0\ \text{i)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu<+\infty\Rightarrow\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu<+\infty$$

$$\text{ii)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu+=\infty\Rightarrow\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu=+\infty.$$

$$\ell=+\infty\ \text{i)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu<+\infty\Rightarrow\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu<+\infty$$

$$\text{ii)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu=+\infty\Rightarrow\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu=+\infty.$$

Απόδειξη

Είναι:

$$lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\ell\Leftrightarrow(\forall\epsilon>0)(\exists\nu_0\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N})\nu>\nu_0\Rightarrow\left|\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}-\ell\right|<\epsilon.$$

Ειδικά για $\epsilon=\frac{\ell}{2}$ έχουμε:

$$\left|\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}-\ell\right|<\frac{\ell}{2}\Leftrightarrow 0<\frac{\ell}{2}\beta_\nu<\alpha_\nu<\frac{3\ell}{2}\beta_\nu,\forall\nu>\nu_0.$$

Συνεπώς με εφαρμογή του Θεωρήματος 2.21 έχουμε το συμπέρασμα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι ειδικές περιπτώσεις προκύπτουν πάλι με εφαρμογή του Θεωρήματος 2.21 παρατηρώντας ότι:

$$\lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=0 \Leftrightarrow (\forall\epsilon>0)(\exists\nu_0\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N})\nu>\nu_0\Rightarrow\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}<\epsilon\Rightarrow 0<\alpha_\nu<\epsilon\beta_\nu$$

$$\lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=+\infty \Leftrightarrow (\forall\epsilon>0)(\exists\nu_0\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N})\nu>\nu_0$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}>\frac{1}{\epsilon}\Rightarrow\alpha_\nu>\frac{1}{\epsilon}\beta_\nu. \quad \bullet$$

Παρατήρηση 2.25

Στις εφαρμογές των κριτηρίων σύγκρισης (Θεωρήματα 2.21 και 2.24) διαλέγουμε εμείς την κατάλληλη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ της οποίας γνωρίζουμε την σύγκλιση. Συνήθως διαλέγουμε την γεωμετρική ή την αρμονική σειρά ρ-τάξεως $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^\rho}$ (Βλέπε Θεώρημα 2.26 παρακάτω) παίρνοντας το ρ κατά τέτοιο τρόπο ώστε το κλάσμα $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ να έχει όρους του ίδιου βαθμού. Πρακτικά την β_ν την βρίσκουμε από την α_ν παίρνοντας από αυτήν τις μεγαλύτερες δυνάμεις του ν. Π.χ. αν $\alpha_\nu=\frac{(2\nu+1)\sqrt[3]{\nu^3+1}}{5\nu^6+1}$ τότε παίρνουμε ως $\beta_\nu=\frac{\nu\sqrt[3]{\nu^3}}{\nu^6}$.

Θεώρημα 2.26 Για την αρμονική σειρά ρ-τάξεως ισχύει

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^\rho}=\begin{cases}+\infty, & \rho\le 1\\ \text{συγκλίνει}, & \rho>1\end{cases}$$

Απόδειξη

Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση $\rho>1$ γιατί η περίπτωση $\rho\le 1$ έχει εξεταστεί στο Παράδειγμα 2.23. Έχουμε:

$$\sigma_\nu=\frac{1}{1^\rho}+\frac{1}{2^\rho}+\ldots+\frac{1}{\nu^\rho}$$

δηλ. η σ_ν, $\nu\in N$ είναι μια αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε επειδή $2^\nu=(1+1)^\nu\ge 1+\nu$ ή $\nu\le 2^\nu-1$ έχουμε:

$$\sigma_\nu\le\sigma_{2^\nu-1}.$$

Αλλά για $\nu=1$ είναι

$$\sigma_1=1,$$

για $\nu=2$

$$\sigma_3=1+\left(\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{3^\rho}\right)<1+\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{2^\rho}=1+\frac{1}{2^{\rho-1}}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

για $\nu = 3$,

$$\sigma_7 = 1 + \left(\frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho}\right) + \left(\frac{1}{4^\rho} + \frac{1}{5^\rho} + \frac{1}{6^\rho} + \frac{1}{7^\rho}\right)$$

$$< 1 + \frac{1}{2^{\rho-1}} + 4\frac{1}{4^\rho} = 1 + \frac{1}{2^{\rho-1}} + \frac{1}{4^{\rho-1}}$$

και γενικά με επαγωγή

$$\sigma_{2^\nu-1} = \frac{1}{1^\rho} + \frac{1}{2^\rho} + \ldots + \frac{1}{(2^\nu - 1)^\rho}$$

$$< 1 + \frac{1}{2^{\rho-1}} + \frac{1}{4^{\rho-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^\nu - 1)^\rho}$$

$$< 1 + \frac{1}{2^{\rho-1}} + \left(\frac{1}{2^{\rho-1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2^{\rho-1}}\right)^{\nu-1}. \qquad (1)$$

Η (1) όμως είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο 1 και λόγο $\frac{1}{2^{\rho-1}} < \frac{1}{2} < 1$ και συνεπώς

$$\sigma_{2^\nu-1} \leq 1 + \frac{1}{2^{\rho-1}} + \left(\frac{1}{2^{\rho-1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2^{\rho-1}}\right)^{\nu-1}$$

$$\leq \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{\rho-1}}\right)^\nu}{1 - \frac{1}{2^{\rho-1}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\rho-1}}}.$$

Τελικά λοιπόν έχουμε:

$$\sigma_\nu \leq \sigma_{2^\nu-1} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\rho-1}}}, \forall \nu \in \mathbb{N},$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη και επειδή είναι και αύξουσα θα συγκλίνει. Συνεπώς και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$, $\rho > 1$ θα συγκλίνει και μάλιστα θα είναι:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} = lim\sigma_\nu \leq \frac{2^{\rho-1}}{2^{\rho-1} - 1}. \quad \bullet$$

Παράδειγμα 2.27

Είναι $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} = +\infty$, αφού $\rho = \frac{1}{2} < 1$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\nu^3}}{\nu^2\sqrt{\nu^3}} < +\infty$ αφού $\rho = \frac{11}{6} > 1$.

Παράδειγμα 2.28

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αν $\alpha_\nu = \frac{1}{2\nu-1}$ και $\beta_\nu = \frac{1}{\nu}$ τότε $lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{1}{2}$. Αφού $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu} = +\infty$ τότε και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\nu-1} = +\infty$.

Θεώρημα 2.29 (Κριτήριο πηλίκων του D' Alembert) Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$, $\alpha_\nu > 0$, $\forall \nu \in \mathbf{N}$ συγκλίνει, αν υπάρχει $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος ώστε:

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq q < 1, \forall \nu \geq \nu_0$$

και αποκλίνει θετικά αν

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \geq q > 1, \forall \nu \geq \nu_0.$$

Απόδειξη

Από την ανισότητα

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq q < 1, \forall \nu \geq \nu_0$$

παίρνουμε

$$\alpha_{\nu_0+1} \leq q\alpha_{\nu_0}$$

$$\alpha_{\nu_0+2} \leq q\alpha_{\nu_0+1}$$

.....

$$\alpha_{\nu_0+k} \leq q\alpha_{\nu_0+k-1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη παίρνουμε:

$$\alpha_{\nu_0+k} \leq q^k\alpha_{\nu_0}.$$

Συνεπώς

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu_0-1}\alpha_\nu + \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty}\alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu_0-1}\alpha_\nu + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{\nu_0+k} \leq \sum_{\nu=1}^{\nu_0-1}\alpha_\nu + \alpha_{\nu_0}\sum_{k=0}^{\infty}q^k < +\infty$$

γιατί $\sum_{\nu=1}^{\nu_0-1}\alpha_\nu$ είναι σταθερός αριθμός και $\sum_{k=0}^{\infty}q^k < +\infty$ ως γεωμετρική σειρά με λόγο $q < 1$.

Αν $q > 1$ τότε έχουμε $\alpha_{\nu+1} \geq q\alpha_\nu > \alpha_\nu, \forall \nu \geq \nu_0$, δηλ. η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι τελικά αύξουσα και συνεπώς $lim\alpha_\nu \neq 0$. Άρα η σειρά δεν συγκλίνει (Θεώρημα 2.11) και επειδή είναι σειρά θετικών όρων θα αποκλίνει θετικά. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πόρισμα: Αν για την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu, \alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbf{N}$ ισχύει:

$$\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = k \in \mathbf{R}$$

τότε:

i) Αν $0 \leq k < 1$ η σειρά συγκλίνει.

ii) Αν $k > 1$ η σειρά απειρίζεται θετικά.

iii) Αν $k = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Απόδειξη

Έχουμε:

$$lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = k \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in I\!N)(\forall \nu \in I\!N)\nu \geq \nu_0 \Rightarrow \left| \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} - k \right| < \epsilon,$$

ή

$$k - \epsilon < \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < k + \epsilon, \forall \nu \geq \nu_0. \tag{1}$$

Αν $k < 1$ διαλέγουμε το ϵ κατά τέτοιο τρόπο ώστε $k + \epsilon = q < 1$ (Π. χ. $\epsilon = \frac{1-k}{2}$). Από την (1) τότε παίρνουμε:

$$\alpha_{\nu+1} \leq q\alpha_\nu, \forall \nu \geq \nu_0 \quad \text{και} \quad 0 \leq q < 1.$$

Αν $k > 1$ διαλέγουμε το ϵ έτσι ώστε $k - \epsilon = q > 1$ (Π. χ. $\epsilon = \frac{k-1}{2}$). Από την (1) τότε παίρνουμε:

$$\alpha_{\nu+1} > q\alpha_\nu, \forall \nu \geq \nu_0 \quad \text{και} \quad q > 1.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε το συμπέρασμα. •

Έστω $k = 1$. Τό ότι δεν μπορούμε να αποφανθούμε φαίνεται από τα παρακάτω παραδείγματα:

Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ για τις οποίες ξέρουμε ότι η πρώτη συγκλίνει (Παράδειγμα 2.20) ενώ η δεύτερη απειρίζεται θετικά (Παράδειγμα 2.23). Είναι επίσης $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in I\!N$ και για τις δυο. Αλλά και γαι τις δυο είναι $lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 1$.

Παρατήρηση 2.30

Το Θεώρημα 2.29, αν θυμηθούμε τις έννοιες του liminf και limsup μπορεί να πάρει την παρακάτω ισοδύναμη μορφή:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 2.31 (Γενική μορφή του κριτηρίου πηλίκων του D' Alembert) **Αν για την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbf{N}$ ισχύει:**

$$\liminf \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = A, \limsup \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = B,$$

τότε:

i) Αν $B < 1$ η σειρά συγκλίνει.

ii) Αν $A > 1$ η σειρά απειρίζεται θετικά.

iii) Αν $A \leq 1 \leq B$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παράδειγμα 2.32

Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^\nu}{\nu!}$ συγκλίνει, αφού αν $\alpha_\nu = \frac{2^\nu}{\nu!}$ έχουμε $\alpha_\nu > 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ και

$$lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = lim \frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \frac{\nu!}{2^\nu} = \lim \frac{2}{\nu+1} = 0 < 1.$$

Παράδειγμα 2.33

Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^\nu}{\nu!}$ απειρίζεται θετικά, αφού για $\alpha_\nu = \frac{\nu^\nu}{\nu!}$ έχουμε $\alpha_\nu > 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ και

$$lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = lim \frac{\nu^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \frac{\nu!}{\nu^\nu} = lim \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu = e > 1.$$

Θεώρημα 2.34 (Κριτήριο ν-οστής ρίζας του Cauchy) **Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, $\alpha_\nu \geq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει, αν υπάρχει $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος ώστε:**

$$\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \leq q < 1, \forall \nu \geq \nu_0$$

και απειρίζεται θετικά αν

$$\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \geq q > 1, \forall \nu \geq \nu_0.$$

Απόδειξη

Από την ανισότητα

$$\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \leq q < 1, \forall \nu \geq \nu_0$$

παίρνουμε

$$\alpha_{\nu_0} \leq q^{\nu_0}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\alpha_{\nu_0+1} \leq q^{\nu_0+1}$$

.....

$$\alpha_{\nu_0+k} \leq q^{\nu_0+k}.$$

Συνεπώς

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu_0-1}\alpha_\nu + \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty}\alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu_0-1}\alpha_\nu + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{\nu_0+k} \leq \sum_{\nu=1}^{\nu_0-1}\alpha_\nu + q^{\nu_0}\sum_{k=0}^{\infty}q^k < +\infty$$

γιατί $\sum_{\nu=1}^{\nu_0-1}\alpha_\nu$ είναι σταθερός αριθμός και $\sum_{k=0}^{\infty}q^k < +\infty$ ως γεωμετρική σειρά με λόγο $q < 1$.

Αν $\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} > q > 1$ τότε έχουμε $\alpha_\nu > 1, \forall \nu \geq \nu_0$, και άρα $lim\alpha_\nu \neq 0$. Άρα η σειρά δεν συγκλίνει (Θεώρημα 2.11) και επειδή είναι σειρά θετικών όρων θα απειρίζεται θετικά. •

Πόρισμα: Αν για την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu, \alpha_\nu \geq 0, \forall \nu \in \mathbf{N}$ ισχύει:

$$\lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \mathbf{k} \in \mathbf{R}$$

τότε:

i) Αν $0 \leq k < 1$ η σειρά συγκλίνει.

ii) Αν $k > 1$ η σειρά απειρίζεται θετικά.

iii) Αν $k = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Απόδειξη

Έχουμε:

$$lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = k \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in I\!N)(\forall \nu \in I\!N)\nu \geq \nu_0 \Rightarrow |\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} - k| < \epsilon,$$

ή

$$k - \epsilon < \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} < k + \epsilon, \forall \nu \geq \nu_0. \qquad (1)$$

Αν $k < 1$ διαλέγουμε το ϵ κατά τέτοιο τρόπο ώστε $k + \epsilon = q < 1$. Από την (1) τότε παίρνουμε:

$$\alpha_\nu \leq q^\nu, \forall \nu \geq \nu_0 \quad \text{και} \quad 0 \leq q < 1.$$

Αν $k > 1$ διαλέγουμε το ϵ έτσι ώστε $k - \epsilon = q > 1$. Από την (1) τότε παίρνουμε:

$$\alpha_\nu > q^\nu, \forall \nu \geq \nu_0 \quad \text{και} \quad q > 1.$$

Με εφαρμογή του Θεωρήματος 2.34 έχουμε το συμπέρασμα. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έστω $k = 1$. Θεωρώντας τότε τις σειρές που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση iii) του πορίσματος του Θεωρήματος 2.29 βλέπουμε ότι

$$lim\sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu(\nu+1)}} = 1 \quad \text{και} \quad lim\sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu}} = 1.$$

Παρατήρηση 2.35

Όπως και στην περίπτωση του Θεωρήματος 2.29, μπορούμε και εδώ να δωσουμε μια πιο γενική μορφή για το κριτήριο της ν-οστής ρίζας, που είναι βέβαια ισοδύναμη με αυτήν του Θεωρήματος 2.34.

Θεώρημα 2.36 (Γενική μορφή του κριτηρίου ν-οστής ρίζας του Cauchy) **Αν για την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, $\alpha_\nu \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:**

$$\textbf{limsup}\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \mathbf{k},$$

τότε:

I) Αν $k < 1$ η σειρά συγκλίνει.

II) Αν $k > 1$ η σειρά απειρίζεται θετικά.

III) Αν $k = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παράδειγμα 2.37

Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{3^\nu}{\nu^\nu}$ συγκλίνει, αφού για $\alpha_\nu = \frac{3^\nu}{\nu^\nu}$ έχουμε $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και

$$lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = lim\sqrt[\nu]{\frac{3^\nu}{\nu^\nu}} = \lim\frac{3}{\nu} = 0 < 1.$$

Παράδειγμα 2.38

Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu^2} = +\infty$ αφού για $\alpha_\nu = \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu^2}$ είναι $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και

$$lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = lim\sqrt[\nu]{\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu^2}} = lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = e > 1.$$

Παρατήρηση 2.39

Τα κριτήρια 2.29 και 2.34 δηλ. των πηλίκων του D' Alembert και της ν-οστής ρίζας του Cauchy είναι αυτά που συχνότερα χρησιμοποιούνται

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στις εφαρμογές. Το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert είναι πιο απλό στην εφαρμογή, αλλά το κριτήριο της ν-οστής ρίζας του Cauchy είναι πιο ισχυρό. Όπως είναι γνωστό από τις ακολουθίες (εφαρμογή 3 της § 1.12) αν $lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \ell \Rightarrow lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \ell$ χωρίς να ισχύει το αντίστροφο. **Δηλαδή, αν υπάρχει το $\lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu}$ δεν έπεται αναγκαστικά ότι υπάρχει και το $\lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ (επομένως αν δεν υπάρχει το $\lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ δεν έπεται αναγκαστικά ότι δεν υπάρχει και το $\lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu}$). Αυτά σημαίνουν ότι το κριτήριο της ν-οστής ρίζας του Cauchy είναι πιο γενικό από εκείνο των πηλίκων του D' Alembert (με την έννοια ότι το κριτήριο της ν-οστής ρίζας του Cauchy μπορεί να εφαρμοστεί και σε περιπτώσεις που το κριτήριο των πηλίκων του D' Alembert δεν εφαρμόζεται).**

Ας σημειωθεί ότι αν βρούμε $lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 1$, τότε είναι άσκοπο να σκεφτούμε το $lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu}$ γιατί και αυτό θα είναι 1.

Παρατήρηση 2.40

Προσοχή! Οι ανισότητες $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < 1$ και $\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} < 1, \forall \nu > \nu_0$, δεν είναι ικανές γαι την σύγκλιση. Π.χ. αν $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ τότε $\frac{\nu}{\nu+1} < 1, \forall \nu > 1$ αλλά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu} = +\infty$. **Για την σύγκλιση είναι ουσιαστικό να έχουμε:**

$$lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = k < 1 \quad \text{και} \quad lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = k < 1.$$

Παρατήρηση 2.41

Αν τα κριτήρια 2.29 και 2.34 δεν δίνουν απάντηση σε θέμα σύγκλισης, τότε καταφεύγουμε σε κάποιο από τα κριτήρια συγκρίσεως. Αν και αυτά είναι δύσκολο να εφαρμοστούν, τότε καταφεύγουμε σε άλλα κριτήρια ειδικής μορφής, μερικά από τα οποία θα γνωρίσουμε σε επόμενες παραγράφους.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt[3]{\nu}}$

β) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^\nu}{\nu!\nu^\alpha}, \alpha > 0$

γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sqrt{(\nu+1)(\nu+k)}-\nu\right)^\nu, k > 0.$

Λύση

α) Ισχύει

$$\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt[3]{\nu}} > \frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}}, \forall \nu \geq 2.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αλλά

$$\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}}=\frac{1}{\sqrt{\nu}(\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu})}>\frac{1}{\sqrt{\nu}2\sqrt{\nu+1}}>\frac{1}{4\nu}.$$

Άρα

$$0<\frac{1}{4\nu}<\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}}<\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt[3]{\nu}}.$$

Επειδή $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}=+\infty$, από το Θεώρημα 2.21 έχουμε ότι:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}}=+\infty \quad \text{και} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt[3]{\nu}}=+\infty.$$

β) Εφαρμόζουμε το κριτήριο των πηλίκων του D' Alembert με $\alpha_\nu=\frac{\nu^\nu}{\nu!\nu^\alpha}>0, \forall \nu\in\mathbb{N}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} &= \lim\frac{(\nu+1)^{\nu+1}}{(\nu+1)!(\nu+1)^\alpha}\cdot\frac{\nu!\nu^\alpha}{\nu^\nu}\\ &= \lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^\alpha=e.1=e>1.\end{aligned}$$

Άρα η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^\nu}{\nu!\nu^\alpha}, \alpha>0$ απειρίζεται θετικά.

γ) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο της ν-οστής ρίζας του Cauchy με $\alpha_\nu=\left(\sqrt{(\nu+1)(\nu+k)}-\nu\right)^\nu>0, \forall\nu\in N$. Είναι:

$$\lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu}=\lim(\sqrt{(\nu+1)(\nu+k)}-\nu)=\lim\frac{(\nu+1)(\nu+k)-\nu^2}{\sqrt{(\nu+1)(\nu+k)}+\nu}=\frac{k+1}{2}.$$

Συνεπώς:

i) Αν $0<\frac{k+1}{2}<1\Leftrightarrow 0<k<1$ η σειρά συγκλίνει.

ii) Αν $\frac{k+1}{2}>1\Leftrightarrow k>1$ η σειρά απειρίζεται θετικά.

ii) Αν $\frac{k+1}{2}=1\Leftrightarrow k=1$ τότε πρόκειται για την σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sqrt{(\nu+1)^2}-\nu\right)^\nu=\sum_{\nu=1}^{\infty}1=+\infty.$$

2. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά:

$$\alpha+\beta+\alpha^2+\beta^2+\ldots+\alpha^\nu+\beta^\nu+\ldots, \quad \text{με} \quad 0<\beta<\alpha<1.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

Η παραπάνω σειρά είναι η $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ όπου η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δίνεται από τις

$$\alpha_{2\nu-1} = \alpha^\nu \quad \text{και} \quad \alpha_{2\nu} = \beta^\nu,$$

δηλ.

$$\alpha_\nu = \begin{cases} \alpha^{\frac{\nu+1}{2}}, & \nu \text{ περιττός} \\ \beta^{\frac{\nu}{2}}, & \nu \text{ άρτιος} \end{cases}.$$

Ας εφαρμόσουμε πρώτα το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert. Θα εξετάσουμε το όριο του πηλίκου, $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}$, αν αυτό υπάρχει ή όχι.

Για $k = 2\nu - 1 \Rightarrow lim\frac{\alpha_{2\nu}}{\alpha_{2\nu-1}} = lim\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu = 0.$

Για $k = 2\nu \Rightarrow lim\frac{\alpha_{2\nu+1}}{\alpha_{2\nu}} = lim\frac{\alpha_{2(\nu+1)-1}}{\alpha_{2\nu}} = lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu .\alpha = +\infty.$

Συνεπώς το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert δεν εφαρμόζεται.

Θα εφαρμόσουμε τώρα το κριτήριο της ν-οστής ρίζας του Cauchy. Θα βρούμε το όριο της $\sqrt[k]{\alpha_k}$.

Για $k = 2\nu - 1 \Rightarrow lim\sqrt[2\nu-1]{\alpha_{2\nu-1}} = lim\sqrt[2\nu-1]{\alpha^\nu} = lim\sqrt[2\nu-1]{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha})^{2\nu-1}} = \sqrt{\alpha}.$

Για $k = 2\nu \Rightarrow lim\sqrt[2\nu]{\alpha_{2\nu}} = lim\sqrt[2\nu]{\beta^\nu} = lim\sqrt[2\nu]{(\sqrt{\beta})^{2\nu}} = \sqrt{\beta}.$

Παρατηρούμε ότι το $lim\sqrt[k]{\alpha_k}$ δεν υπάρχει. Όμως είναι $limsup\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \sqrt{\alpha} < 1$ και συνεπώς η σειρά συγκλίνει, από το Θεώρημα 2.36.

3. Να αποδείξετε ότι: $\lim\frac{(\nu!)^\nu}{\nu^{\nu^2}} = 0$.

Απόδειξη

Θεωρούμε την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu!)^\nu}{\nu^{\nu^2}}$ με $\alpha_\nu = \frac{(\nu!)^\nu}{\nu^{\nu^2}} > 0, \forall\nu \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι

$$lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = lim\frac{\nu!}{\nu^\nu}. \tag{1}$$

Θεωρούμε τώρα την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu!}{\nu^\nu}$ με $\beta_\nu = \frac{\nu!}{\nu^\nu} > 0, \forall\nu \in \mathbb{N}$ για την οποία είναι:

$$lim\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = lim\frac{1}{(1+\frac{1}{\nu})^\nu} = \frac{1}{e} < 1.$$

Συνεπώς η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ συγκλίνει. Τότε όμως (Θεώρημα 2.11) είναι $lim\beta_\nu = 0$. Η (1) τότε δίνει $lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 0 < 1$ και συνεπώς η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει. Άρα (Θεώρημα 2.11) $lim\alpha_\nu = 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

4. Αν είναι γνωστό ότι: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6}$, **να αποδείξετε ότι:**

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu+1}{\nu(\nu+2)^2} = \frac{\pi^2-3}{12}.$$

Απόδειξη

Γράφουμε τον γενικό όρο στην μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\nu+1}{\nu(\nu+2)^2} &= \frac{\nu+2+\nu}{2\nu(\nu+2)^2} = \frac{\nu+2}{2\nu(\nu+2)^2} + \frac{\nu}{2\nu(\nu+2)^2} \\ &= \frac{1}{2\nu(\nu+2)} + \frac{1}{2(\nu+2)^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\nu(\nu+2)} + \frac{1}{(\nu+2)^2}\right\}. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu+1}{\nu(\nu+2)^2} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu(\nu+2)} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{(\nu+2)^2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\nu+1)} - \frac{1}{2(\nu+2)} + \sum_{\nu=3}^{k} \frac{1}{\nu^2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\nu+1)} - \frac{1}{2(\nu+2)} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu^2} - 1 - \frac{1}{4}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2(\nu+1)} - \frac{1}{2(\nu+2)} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu^2}\right\}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu+1}{\nu(\nu+2)^2} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{6}\right\} = \frac{\pi^2-3}{12}.$$

Σημείωση

Όπως είδαμε η αρμονική σειρά ρ**-τάξης** $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$ **συγκλίνει αν** $\rho > 1$. **Αν θέσουμε** $\zeta(\rho) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$, $\rho > 1$ **τότε η συνάρτηση** ζ **είναι γνωστή ως συνάρτηση** ζ **του Riemann. Είναι** $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ **και γενικά υπάρχει έκφραση της** $\zeta(\rho)$ **για** ρ **άρτιο. Όταν το** ρ **είναι περιττός δεν έχει βρεθεί μέχρι στιγμής απλή έκφραση της** $\zeta(\rho)$. **Έτσι π.χ.** $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} =$; **είναι ένα άλυτο πρόβλημα. (Τέθηκε από τον Euler το 1736).**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.5 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνουν, βρίσκοντας το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων:

$\alpha)\alpha_\nu=\frac{1}{\nu(\nu+2)}$ $\beta)\alpha_\nu=\frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2}$

$\gamma)\alpha_\nu=\frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}$ $\delta)\alpha_\nu=(-1)^\nu$

2.6 Με το κριτήριο του Cauchy (Θεώρημα 2.18) να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}x^\nu$, $|x|<1$ συγκλίνει.

2.7 Για την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}$ να αποδείξετε ότι:

$$|\sigma_{\nu+k}-\sigma_\nu|<\frac{1}{\nu+2},\forall\nu\in\mathbb{N}\quad\text{και}\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

2.8 Να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(k+\nu)!}<\frac{1}{(k+1)!}\cdot\frac{k+2}{k+1},k\in N$$

2.9 Να αποδείξετε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{2}{3+(-1)^\nu}\right]^\nu$ είναι φραγμένη. Είναι η σειρά συγκλίνουσα;

2.10 Εφαρμόζοντας το κριτήριο συγκρίσεως (Θεώρημα 2.21) να εξετάσετε αν συγκλίνουν οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ με:

$\alpha)\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ $\beta)\alpha_\nu=\frac{\nu}{(\nu+1)2^\nu}$ $\gamma)\alpha_\nu=\frac{\nu+1}{\nu!(\nu+2)}$

$\delta)\alpha_\nu=\frac{1}{\nu 2^\nu}$ $\epsilon)\alpha_\nu=\frac{1}{\nu^2+1}$ $\sigma\tau)\alpha_\nu=\frac{2\nu+1}{\nu^2+\nu}$

2.11 Σύμφωνα με το οριακό κριτήριο συγκρίσεως (Θεώρημα 2.24) να εξετάσετε αν συγκλίνουν οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ με:

$\alpha)\alpha_\nu=\frac{\nu^2}{\nu^3+1}$ $\beta)\alpha_\nu=\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{\nu^2.2^\nu}$ $\gamma)\alpha_\nu=\frac{1}{2^\nu-\nu}$

$\delta)\alpha_\nu=\frac{1}{\nu^2\log(\nu+1)}$ $\epsilon)\alpha_\nu=\frac{(2\nu+5)\sqrt{\nu^4+\nu}}{3\nu^5+1}$ $\sigma\tau)\alpha_\nu=\left(\frac{1+\nu^2}{1+\nu^3}\right)^2$

$\zeta)\alpha_\nu=sin\frac{\pi}{\nu}$ $\eta)\alpha_\nu=\frac{4\sqrt{\nu}-1}{\nu^2+2\sqrt{\nu}}$ $\theta)\alpha_\nu=\frac{\sqrt{\nu^2-1}}{\sqrt{\nu^5+1}}$

2.12 Να αποδείξετε ότι οι σειρές

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha\nu+\beta)^\rho}\quad\text{και}\quad\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha\nu^2+\beta\nu+\gamma)^{\rho/2}}$$

συγκλίνουν αν $\rho>1$ (α,β,γ θετικοί αριθμοί).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2.13 α) Για ποιές τιμές της σταθερής α η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu^2+\nu)^\alpha}$ είναι συγκλίνουσα;

β) Για ποιές τιμές του x συγκλίνει η σειρά

$$1+\frac{1}{2}(5x-3x^2)+\frac{1}{2^2}(5x-3x^2)^2+\ldots$$

γ) Για ποιές τιμές του x συγκλίνει η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(2+sin\frac{\nu\pi}{2})x^\nu$.

2.14 Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} log(1+\nu^{-\lambda}).$$

(Να θεωρήσετε γνωστό ότι $\lim_{x\to 0}\frac{log(1+x)}{x}=1$.)

2.15 Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$, εφαρμόζοντας το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert ή το κριτήριο της ν-οστής ρίζας του Cauchy, αν:

$\alpha)\alpha_\nu=\frac{(\nu!)^2}{(2\nu)!}$ $\beta)\alpha_\nu=\frac{(\nu!)^2}{2^{\nu^2}}$ $\gamma)\alpha_\nu=\frac{2^\nu.\nu!}{\nu^\nu}$

$\delta)\alpha_\nu=\frac{3^\nu.\nu!}{\nu^\nu}$ $\epsilon)\alpha_\nu=\frac{\nu!}{2^{\nu^2}}$ $\sigma\tau)\alpha_\nu=(\sqrt[\nu]{\nu}-1)^\nu$

$\zeta)\alpha_\nu=e^{-\nu^2}$ $\eta)\alpha_\nu=\frac{(\nu!)^2 2^\nu}{(2\nu+2)!}$ $\theta)\alpha_\nu=\frac{(log\nu)^2}{(log2)^\nu}$

$\iota)\alpha_\nu=\nu^2e^{-\nu}$ $\kappa)\alpha_\nu=\frac{(1+\frac{1}{\nu})^{\nu^2}}{e^\nu}$ $\lambda)\alpha_\nu=\frac{1}{3^\nu}(\frac{\nu+1}{\nu})^{\nu^2}$

2.16 Αν $|x_{\nu+1}-x_\nu|\le\alpha_{\nu+1}$ όπου $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ είναι τυχαία συγκλίνουσα σειρά, τότε να αποδείξετε ότι η x_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy.

2.17 Να εξετάσετε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ όπου

$$\alpha_{2\nu-1}=\frac{1}{2^\nu},\ \alpha_{2\nu}=\frac{1}{2^{\nu-1}}.$$

2.18 Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$, διαλέγοντας το κατάλληλο κριτήριο, αν:

$\alpha)\alpha_\nu=\nu!\,\nu^{-\nu}$ $\beta)\alpha_\nu=\frac{2+cos\nu}{\nu^2+2}$ $\gamma)\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu^{\nu+1}}}$

$\delta)\alpha_\nu=\alpha^\nu\nu^\alpha,\alpha>0$ $\epsilon)\alpha_\nu=\frac{\nu^{\nu-1}}{3^{\nu-1}(\nu-1)!}$ $\sigma\tau)\alpha_\nu=\nu^{-1/2}(\nu+1)^{-1/2}$

$\zeta)\alpha_\nu=\frac{(\nu+1)^\nu}{\nu^{2\nu}}$ $\eta)\alpha_\nu=\frac{10\nu+3}{\nu 2^\nu}$ $\theta)\alpha_\nu=\frac{3^{\nu-2}}{2^\nu}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

§ 2.5 ΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΘΕΤΙΚΟΥΣ ΦΘΙΝΟΝΤΕΣ ΟΡΟΥΣ

Όταν το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert ή το κριτήριο της ν-οστής ρίζας του Cauchy δεν δίνουν απάντηση για την σύγκλιση μιας σειράς και η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων, τότε το ακόλουθο Θεώρημα είναι εξαιρετικού ενδιαφέροντος. Η σημασία του έγκειται στο γεγονός ότι μια υπακολουθία της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ ορίζει την σύγκλιση ή τον απειρισμό της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$.

Θεώρημα 2.42 (Κριτήριο δυνάμεων του 2 ή κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy.) Αν η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων, τότε οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^\nu \alpha_{2^\nu}$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνουν ή απειρίζονται θετικά συγχρόνως.

Απόδειξη

Έστω $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\tau_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων αντίστοιχα των σειρών $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^\nu \alpha_{2^\nu}$, δηλ.

$$\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$$

$$\tau_k = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2^k \alpha_{2^k}.$$

Για $\nu < 2^k$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \sigma_\nu &\leq \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) + \ldots + (\alpha_{2^k} + \ldots + \alpha_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2^k \alpha_{2^k} = \tau_k, \end{aligned}$$

αφού η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα ($\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_{\nu+1} \geq 0$). Άρα

$$\sigma_\nu \leq \tau_k. \tag{1}$$

Αν $\nu > 2^k$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \sigma_\nu &\geq (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) + \ldots + (\alpha_{2^{k+1}-1} + \ldots + \alpha_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + 2^{k-1}\alpha_{2^k} = \frac{1}{2}\tau_k, \end{aligned}$$

δηλ.

$$2\sigma_\nu \geq \tau_k. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) συνεπάγεται ότι οι ακολουθίες $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\tau_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ ή και οι δυο είναι φραγμένες ή και οι δυο δεν είναι. Από το Θεώρημα 2.21 τότε προκύπτει το συμπέρασμα. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατήρηση 2.43

Το παραπάνω Θεώρημα δεν λέει ότι και οι δυο σειρές συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

Παράδειγμα 2.44

Θεωρούμε την αρμονική σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$. Τότε:

$$\begin{aligned} \tau_k &= 1 + \frac{2.1}{2^\rho} + \frac{2^2.1}{(2^2)^\rho} + \ldots + \frac{2^k.1}{(2^k)^\rho} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{\rho-1}} + \frac{1}{(2^{\rho-1})^2} + \ldots + \frac{1}{(2^{\rho-1})^k} \end{aligned}$$

η οποία είναι γεωμετρική σειρά με $\omega = \frac{1}{2^{\rho-1}}$ που συγκλίνει αν $\frac{1}{2^{\rho-1}} < 1$ δηλ. $\rho > 1$ και απειρίζεται θετικά αν $\frac{1}{2^{\rho-1}} \geq 1$ δηλ. $\rho \leq 1$.

Έτσι με εφαρμογή του Θεωρήματος 2.42 παίρνουμε το Θεώρημα 2.26.

Θεώρημα 2.45 (Θεώρημα του Pringsheim) Αν η α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει, τότε $\lim(\nu.\alpha_\nu) = 0$.

Απόδειξη

Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \ell$, τότε $lim\sigma_\nu = \ell = lim\sigma_{2\nu}$, δηλ. $lim(\sigma_{2\nu} - \sigma_\nu) = 0$. Αλλά

$$\sigma_{2\nu} - \sigma_\nu = \alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu+2} + \ldots + \alpha_{2\nu} \geq \alpha_{2\nu} + \alpha_{2\nu} + \ldots + \alpha_{2\nu} = \nu\alpha_{2\nu}.$$

Άρα $lim(\nu\alpha_{2\nu}) = lim(2\nu\alpha_{2\nu}) = 0$. Επειδή όμως $\alpha_{2\nu+1} \leq \alpha_{2\nu}$ θα έχουμε

$$(2\nu+1)\alpha_{2\nu+1} \leq \frac{2\nu+1}{2\nu} 2\nu\alpha_{2\nu} \Rightarrow (2\nu+1)\alpha_{2\nu+1} = 0.$$

Επομένως $lim(\nu.\alpha_\nu) = 0$. •

Παρατήρηση 2.46

Η παραπάνω συνθήκη $lim(\nu.\alpha_\nu) = 0$ είναι **αναγκαία** όχι όμως και **ικανή**. Δηλαδή, **ικανή συνθήκη για να απειρίζεται θετικά η σειρά** $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ **είναι η** $lim(\nu.\alpha_\nu) = \ell \neq 0$.

Παράδειγμα 2.47

Είναι $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\frac{1}{\nu}}} = +\infty$, αφού $lim(\nu.\alpha_\nu) = lim\left(\nu.\frac{1}{\nu.\nu^{\frac{1}{\nu}}}\right) = 1 \neq 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.19 Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\alpha)\sum_{\nu=2}^{\infty} e^{-(\log\nu)^2} \quad \beta)\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu(\log\nu)^{\rho}}$$

2.20 Για ποιες τιμές των α και β η σειρά

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(\log\nu)^{\alpha}}{\nu^{\beta}}$$

είναι συγκλίνουσα;

§ 2.6 ΕΝΑΛΛΑΣΟΜΕΝΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Μια σειρά με όρους εναλλάξ θετικούς και αρνητικούς λέγεται εναλλασόμενη. Π.χ. η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{2\nu}+\ldots$$

είναι εναλλασόμενη σειρά. Γενικά δίνουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 2.48 Μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ θα λέγεται εναλλασόμενη, αν και μόνον αν, $\alpha_\nu.\alpha_{\nu+1}<0, \forall\nu\in\mathbf{N}$.

Συνήθως ο πρώτος όρος λαμβάνεται θετικός. Γενικά έχουμε τον συμβολισμό $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$ με $\alpha_\nu>0$, αν ο πρώτος όρος είναι θετικός και $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\alpha_\nu$ με $\alpha_\nu>0$, αν ο πρώτος όρος είναι αρνητικός.

Για να αποδείξουμε την σύγκλιση μιας εναλλασόμενης σειράς, εφαρμόζουμε το κριτήριο του Cauchy (Θεώρημα 2.16) ή το επόμενο βασικό κριτήριο του Leibnitz.

Θεώρημα 2.49 (Κριτήριο του Leibnitz). Αν η α_ν, $\nu\in\mathbf{N}$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$ συγκλίνει.

Απόδειξη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έστω $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$. Για την υπακολουθία $\sigma_{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\sigma_{2\nu+2} - \sigma_{2\nu} &= \sigma_{2(\nu+1)} - \sigma_{2\nu} \\ &= \{(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \ldots + (\alpha_{2\nu-1} - \alpha_{2\nu}) \\ &\quad + (\alpha_{2\nu+1} - \alpha_{2\nu+2})\} \\ &\quad - \{(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \ldots + (\alpha_{2\nu-1} - \alpha_{2\nu})\} \\ &= \alpha_{2\nu+1} - \alpha_{2\nu+2} \geq 0\end{aligned}$$

αφού από την υπόθεση είναι $\alpha_k - \alpha_{k+1} \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι η $\sigma_{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα.

Επίσης η $\sigma_{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι και φραγμένη, αφού

$$\sigma_{2\nu} = \alpha_1 - (\alpha_2 - \alpha_3) - \ldots - (\alpha_{2\nu-2} - \alpha_{2\nu-1}) - \alpha_{2\nu} \leq \alpha_1.$$

Άρα η $\sigma_{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ ως αύξουσα και άνω φραγμένη συγκλίνει και έστω $lim\sigma_{2\nu} = \ell$.

Ακόμα έχουμε:

$$\sigma_{2\nu+1} = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \ldots + (\alpha_{2\nu-1} - \alpha_{2\nu}) + \alpha_{2\nu+1}$$

$$= \sigma_{2\nu-1} - \alpha_{2\nu} + \alpha_{2\nu+1} \leq \sigma_{2\nu-1}$$

δηλ. η $\sigma_{2\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα. Είναι όμως και φραγμένη, αφού

$$\sigma_{2\nu-1} = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \ldots + (\alpha_{2\nu-3} - \alpha_{2\nu-2}) + \alpha_{2\nu-1} \geq 0.$$

Συνεπώς η $\sigma_{2\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει και έστω $lim\sigma_{2\nu-1} = m$. Τότε αφού

$$\alpha_{2\nu} = \sigma_{2\nu-1} - \sigma_{2\nu}$$

έχουμε

$$0 = lim\alpha_{2\nu} = lim\sigma_{2\nu-1} - lim\sigma_{2\nu} = \ell - m.$$

Έτσι $\ell = m$ και άρα η $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει που σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$ συγκλίνει. •

Σημείωση

Για τις υπακολουθίες $\sigma_{2\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}$ και $\sigma_{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ είδαμε πως η $\sigma_{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα και η $\sigma_{2\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα. Ακόμα μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$\sigma_{2\mu} < \sigma_{2\nu-1}, \forall \mu, \nu \in \mathbb{N}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλ. τα σημεία της $\sigma_{2\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ βρίσκονται δεξιότερα από τα σημεία της $\sigma_{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Πραγματικά· διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) $\nu = \mu$. Τότε $\sigma_{2\nu-1} = \sigma_{2\nu} + \alpha_{2\nu} > \sigma_{2\nu}$.

2) $\nu > \mu$. Τότε $\sigma_{2\nu-1} > \sigma_{2\nu} \geq \sigma_{2\mu}$ (αφού $\sigma_{2\nu} \uparrow$)

3) $\nu < \mu$. Τότε $\sigma_{2\nu-1} > \sigma_{2\mu-1} > \sigma_{2\mu}$ (αφού $\sigma_{2\nu-1} \downarrow$).

Μ' άλλα λόγια οι υπακολουθίες $\sigma_{2\nu-1}$, $\nu \in \mathbf{N}$ και $\sigma_{2\nu}$, $\nu \in \mathbf{N}$ αποτελούν έναν κιβωτισμό κλειστών διαστημάτων του Cantor.

Παρατήρηση 2.50

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.49 έχουμε ότι:

$$\sigma_{2\nu-1} \geq \ell \quad \text{και} \quad \sigma_{2\nu} \leq \ell.$$

Δηλαδή

$$0 \leq \sigma_{2\nu-1} - \ell \leq \sigma_{2\nu-1} - \sigma_{2\nu} = \alpha_{2\nu} \quad \text{ή} \quad |\sigma_{2\nu-1} - \ell| \leq \alpha_{2\nu}.$$

Όμοια έχουμε:

$$0 \leq \ell - \sigma_{2\nu} \leq \sigma_{2\nu+1} - \sigma_{2\nu} = \alpha_{2\nu+1} \quad \text{ή} \quad |\sigma_{2\nu} - \ell| \leq \alpha_{2\nu+1}.$$

Συνεπώς έχουμε:

$$|\sigma_k - \ell| \leq \alpha_{k+1}, k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Αυτό λέει ότι αν μια εναλλασόμενη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$ συγκλίνει σε κάποιο αριθμό ℓ, τότε ισχύει η (1). Αυτό ακόμα πιο απλά λέει ότι η διαφορά μεταξύ του αθροίσματος της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$ και τυχαίου μερικού της αθροίσματος δεν μπορεί να ξεπεράσει τον πρώτο όρο που δεν περιέχεται στο μερικό άθροισμα.

Η παραπάνω απόδειξη όμως λέει και κάτι ακόμα. Λέει πως κάθε εναλλασόμενη σειρά μπορεί να αναχθεί σε σειρά με θετικούς όρους, αν αυτή είναι συγκλίνουσα. Πραγματικά· αφού $\ell = lim\sigma_{2\nu-1} = \sigma_{2\nu}$ μπορούμε να προσεγγίσουμε τη σειρά από το μερικό άθροισμα $\sigma_{2\nu}$. Τότε

$$\ell = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_{2\nu-1} - \alpha_{2\nu}).$$

Παράδειγμα 2.51

Έστω η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu}$. Αυτή συγκλίνει αφού η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών όρων (Θεώρημα 2.49).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δηλαδή είναι

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu}+\ldots=\ell.$$

Προφανώς δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το ℓ, αλλά σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.50 θα έχουμε:

$$\left|\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu}\right\}-\ell\right|\leq\frac{1}{\nu+1},\nu\in\mathbb{N}.$$

Από την άλλη μεριά

$$\ell=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{2\nu}\right]=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\nu(2\nu-1)}.$$

§ 2.7 ΑΠΟΛΥΤΗ ΚΑΙ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Έστω $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ μια σειρά πραγματικών αριθμών με όρους όχι υποχρεωτικά μη αρνητικούς. Τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$ έχει όλους τους όρους μη αρνητικούς, και προκύπτει από τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ παίρνοντας τις απόλυτες τιμές των όρων της.

Ορισμός 2.52 Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει απόλυτα, αν και μόνον αν, η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$ συγκλίνει.

Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει υπό συνθήκη, αν και μόνον αν, ενώ η ίδια συγκλίνει, η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$ δεν συγκλίνει.

Παράδειγμα 2.53

Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu}$ συγκλίνει υπό συνθήκη, αφού αυτή συγκλίνει (Παράδειγμα 2.51) ενώ $\sum_{\nu=1}^{\infty}|(-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu}|=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}=+\infty$.

Θεώρημα 2.54 Η απόλυτη σύγκλιση μιας σειράς συνεπάγεται την απλή σύγκλιση, δηλ.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|<+\infty\Rightarrow\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu<+\infty.$$

Επίσης είναι:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\right|\leq\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη 1η (Με το κριτήριο συγκρίσεως)

Έστω ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$ συγκλίνει και $\beta_\nu = |\alpha_\nu| - \alpha_\nu$. Επειδή $\alpha_\nu \leq |\alpha_\nu|, \forall \nu \in \mathbb{N}$ θα είναι:

$$0 \leq \beta_\nu = |\alpha_\nu| - \alpha_\nu \leq |\alpha_\nu| + |\alpha_\nu| = 2|\alpha_\nu|. \tag{1}$$

Από την (1) σύμφωνα με το κριτήριο συγκρίσεως (Θεώρημα 2.21) η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ συγκλίνει. Τότε όμως και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει γιατί $\alpha_\nu = |\alpha_\nu| - \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ συγκλίνουν.

Απόδειξη 2η (Με το κριτήριο του Cauchy)

Έστω $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\tau_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των σειρών $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ αντίστοιχα. Αφού η $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$ συγκλίνει η $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy (Θεώρημα 2.18) . Άρα

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in N)(\nu > \nu_0)(\forall k \in \mathbb{N}) \Rightarrow |\sigma_{\nu+k} - \sigma_\nu| < \epsilon$$

ή

$$|\alpha_{\nu+1}| + |\alpha_{\nu+2}| + \ldots + |\alpha_{\nu+k}| < \epsilon, \forall \nu > \nu_0.$$

Παρατηρούμε όμως ότι:

$$|\tau_{\nu+k} - \tau_\nu| = |\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu+2} + \ldots + \alpha_{\nu+k}|$$

$$\leq |\alpha_{\nu+1}| + |\alpha_{\nu+2}| + \ldots + |\alpha_{\nu+k}| < \epsilon$$

που σημαίνει ότι η $\tau_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy και άρα από το Θεώρημα 2.18 η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει.

Για να αποδείξουμε την δεύτερη ανισότητα παρατηρούμε ότι:

$$|\tau_\nu| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\nu| = \sigma_\nu.$$

Συνεπώς

$$lim|\tau_\nu| \leq lim\sigma_\nu \Rightarrow \left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|. \quad \bullet$$

Παρατήρηση 2.55

Για σειρές με όρους θετικούς οι έννοιες της σύγκλισης και της απόλυτης σύγκλισης είναι ταυτόσημες.

Παρατήρηση 2.56

Το αντίστροφο του Θεωρήματος 2.54 δεν ισχύει όπως φαίνεται από το Παράδειγμα 2.51. Αυτό σημαίνει ότι η σύγκλιση της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$ είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ικανή για την σύγκλιση της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, όχι όμως και **αναγκαία**. Γι' αυτό **η απόλυτη σύγκλιση είναι ισχυρότερη της απλής.**

Παρατήρηση 2.57

Είναι φανερό ότι όσα είπαμε για σειρές με όρους μη αρνητικούς ισχύουν και στην περίπτωση των σειρών που θεωρούμε τις απόλυτες τιμές των όρων τους. Γι' αυτό τα κριτήρια που αναφέραμε για σειρές με όρους μη αρνητικούς, μπορούν να διτυπωθούν πιο γενικά, θεωρώντας τις απόλυτες τιμές των όρων της σειράς. Π.χ. για το οριακό κριτήριο σύγκρισης (Θεώρημα 2.24) και το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert (Θεώρημα 2.29) θα έχουμε αντίστοιχα τις παρακάτω διατυπώσεις:

Θεώρημα 2.58 Αν για τις σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ με $\beta_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\lim \left| \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \right| = \ell$$

τότε:

Αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνει και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ θα συγκλίνει απόλυτα, ενώ αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ απειρίζεται θετικά και $\ell \neq 0$ και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$ θα απειρίζεται θετικά.

Θεώρημα 2.59 Αν της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ κανένας όρος δεν είναι μηδέν, τότε η σειρά αυτή:

I) θα συγκλίνει αν $|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}| \leq q < 1, \forall \nu \geq \nu_0$

II) θα απειρίζεται θετικά αν $|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}| \geq 1, \forall \nu \geq \nu_0$.

Για τις σειρές που συγκλίνουν υπό συνθήκη ισχύει το παρακάτω:

Θεώρημα 2.60 Αν μια σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε η σειρά των θετικών όρων της και η σειρά των απόλυτων τιμών των αρνητικών όρων της, απειρίζονται θετικά.

Απόδειξη

Έστω $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, Θ_ρ το άθροισμα των θετικών όρων που περιέχονται στην σ_ν, A_μ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

το άθροισμα των απόλυτων τιμών των αρνητικών όρων που περιέχονται στην σ_ν και τ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$. Τότε θα έχουμε:

$$\sigma_\nu = \Theta_\rho - A_\mu, \rho + \mu = \nu$$

$$\tau_\nu = \Theta_\rho + A_\mu.$$

Από την υπόθεση έχουμε: $lim\sigma_\nu = \ell$ και $lim\tau_\nu = +\infty$. Τότε έχουμε:

$$lim\Theta_\rho = lim\frac{1}{2}(\sigma_\nu + \tau_\nu) = +\infty$$

$$lim A_\mu = lim\frac{1}{2}(\tau_\nu - \sigma_\nu) = +\infty$$

πράγμα που αποδεικνύει και το Θεώρημα. •

Παρατήρηση 2.61

Αν η σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε υπάρχει το $lim\tau_\nu = T$. Τότε θα έχουμε:

$$lim\Theta_\rho = \frac{1}{2}(\ell + T) \quad \text{και} \quad lim A_\mu = \frac{1}{2}(T - \ell)$$

δηλ. η σειρά των θετικών όρων και η σειρά των αρνητικών όρων συγκλίνουν. Έτσι έχουμε, συνοψίζοντας, τα εξής:

α) Αν $\lim\Theta_\rho = A$ και $\lim A_\mu = B$ τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει απόλυτα.

β) Αν $\lim\Theta_\rho = +\infty$ και $\lim A_\mu = +\infty$ τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει υπό συνθήκη ή αποκλίνει..

γ) Αν $\lim\Theta_\rho = A$ και $\lim A_\mu = +\infty$ ή $\lim\Theta_\rho = +\infty$ και $\lim A_\mu = B$ τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 2.62

Ας εξετάσουμε την σειρά

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \ldots - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} + \ldots, \nu > 1.$$

Είναι $lim\alpha_\nu = 0$, αλλά οι απόλυτες τιμές των όρων δεν αποτελούν φθίνουσα ακολουθία και άρα το κριτήριο του Leibnitz δεν εφαρμόζεται. Η σειρά όμως των θετικών όρων $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$ συγκλίνει, ενώ η σειρά των απόλυτων τιμών των αρνητικών όρων της απειρίζεται θετικά. Συνεπώς από την Παρατήρηση 2.61γ) η δοσμένη σειρά αποκλίνει.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Η κλάση ℓ^2, είναι η κλάση όλων των ακολουθιών $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ των οποίων η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2$ συγκλίνει.

α) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha_\nu \in \ell^2$ και $\beta_\nu \in \ell^2$ τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu$ συγκλίνει απόλυτα και ισχύει η ανισότητα των Cauchy-Schwarz:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu\right| \leq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu^2\right)^{1/2}.$$

β) Να αποδείξετε την ανισότητα του Minkowski:

$$\left[\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu)\right]^{1/2} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu^2\right)^{1/2}.$$

αν $\alpha_\nu \in \ell^2$ και $\beta_\nu \in \ell^2$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ℓ^2 είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος των πραγματικών αριθμών.

Απόδειξη

α) Επειδή

$$|\alpha_\nu \beta_\nu| \leq 2|\alpha_\nu \beta_\nu| \leq |\alpha_\nu|^2 + |\beta_\nu|^2 = \alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2$$

και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2)$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu$ συγκλίνει.

Για κάθε $x \in R$ ισχύει: $\sum_{k=1}^{\nu} (x\alpha_k + \beta_k)^2 \geq 0$ ή

$$x^2 \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k^2 + 2x \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \beta_k + \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k^2 \geq 0. \tag{1}$$

Επειδή $\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k^2 \geq 0$ από την (1), αν την θεωρήσουμε ως τριώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς x, θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός, αν και μόνον αν,

$$\left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \beta_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k^2\right). \tag{2}$$

Παίρνοντας τα όρια στην (2) έχουμε την ζητούμενη ανισότητα.

β) Αν $\alpha_\nu \in \ell^2$ και $\beta_\nu \in \ell^2$ συνεπάγεται ότι: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2 < +\infty$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu^2 < +\infty$ ενώ από τα α) έχουμε ότι $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu < +\infty$. Συνεπώς $\alpha_\nu + \beta_\nu \in \ell^2$ αφού

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu)^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu^2 < +\infty. \tag{3}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εφαρμόζοντας την ανισότητα των Cauchy-Schwartz στο δεύτερο άθροισμα της (3) έχουμε:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu+\beta_\nu)^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu^2+2\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu^2\right)^{1/2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu^2$$

ή

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu+\beta_\nu)^2\le\left[\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu^2\right)^{1/2}\right]^2.$$

Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα στα δυο μέλη έχουμε το ζητούμενο.

γ) Άμεση συνέπεια των προηγούμενων, αφού αν $\alpha_\nu\in\ell^2$ και $\beta_\nu\in\ell^2$ τότε $\alpha_\nu+\beta_\nu\in\ell^2$ και $\lambda\alpha_\nu\in\ell^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.21 Να εξετάσετε με το κριτήριο του Leibnitz αν οι παρακάτω σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$ συγκλίνουν, αν:

$\alpha)\alpha_\nu=\frac{\nu}{(\nu+1)^2}$ $\beta)\alpha_\nu=\frac{3\nu+1}{2^\nu}$ $\gamma)\alpha_\nu=\frac{\nu^2}{3^\nu}$

$\delta)\alpha_\nu=\frac{1}{\nu^\rho}$ $\epsilon)\alpha_\nu=\frac{\nu+2}{2\nu+1}$

2.22 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν απόλυτα:

$\alpha)\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu(\log\nu)^2}$ $\beta)\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{\sin\nu\theta}{2^\nu}$

$\gamma)\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{\sqrt{\nu}}sin\frac{\pi}{\nu}$ $\delta)\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{cos\nu\theta}{\sqrt{\nu^2-1}}$

2.23 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν απόλυτα ή υπό συνθήκη:

$\alpha)\sum_{\nu=1}^{\infty}sin(\nu\alpha^\nu)$, $|\alpha|<1$ $\beta)\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{2^\nu}{\nu^2}$

$\gamma)\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}sin\frac{1}{\nu}$ $\delta)\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu+(-1)^\nu}}$

2.24 Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu}{2^\nu}$, όπου $c_\nu=1$ αν ν πρώτος και $c_\nu=-1$ αλλιώς, συγκλίνει.

§ 2.8 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΤΩΝ ABEL ΚΑΙ DIRICHLET

Τα κριτήρια αυτά στηρίζονται στην παρακάτω ταυτότητα, γνωστή ως **μερικό άθροισμα του Abel**.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 2.63 Έστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ και $\beta_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών και $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$. Τότε

$$\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \beta_k = \sigma_\nu \beta_{\nu+1} - \sum_{k=1}^{\nu} \sigma_k (\beta_{k+1} - \beta_k), \forall \nu \in \mathbf{N}.$$

Απόδειξη

Ορίζουμε $\sigma_0 = 0$. Αφού $\alpha_k = \sigma_k - \sigma_{k-1}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \beta_k &= \sum_{k=1}^{\nu} (\sigma_k - \sigma_{k-1}) \beta_k \\
&= \beta_1(\sigma_1 - \sigma_0) + \beta_2(\sigma_2 - \sigma_1) + \ldots \\
&\quad + \beta_{\nu-1}(\sigma_{\nu-1} - \sigma_{\nu-2}) + \beta_\nu(\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}) \\
&= \sigma_1(\beta_1 - \beta_2) + \sigma_2(\beta_2 - \beta_3) + \ldots + \sigma_{\nu-1}(\beta_{\nu-1} - \beta_\nu) \\
&\quad + \sigma_\nu \beta_\nu - \sum_{k=1}^{\nu-1} \sigma_k (\beta_{k+1} - \beta_k) + \sigma_\nu \beta_\nu - \sigma_\nu \beta_{\nu+1} \\
&\quad + \sigma_\nu \beta_{\nu+1} - \sum_{k=1}^{\nu} \sigma_k (\beta_{k+1} - \beta_k) + \sigma_\nu \beta_{\nu+1}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς το Θεώρημα αποδείχτηκε. •

Σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα για να αποδείξουμε την σύγκλιση της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu$ αρκεί να αποδείξουμε την σύγκλιση των $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu (\beta_{\nu+1} - \beta_\nu)$ και $\sigma_\nu \beta_{\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}$. Έτσι παίρνουμε τα παρακάτω κριτήρια:

Θεώρημα 2.64 (Κριτήριο του Abel) **Αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει και η ακολουθία $\beta_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ είναι μονότονη και φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu$ συγκλίνει.**

Απόδειξη

Αφού η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει, υπάρχει το $lim \sigma_\nu = A$. Επομένως η $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, δηλ. $|\sigma_\nu| \leq M, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Επίσης $lim \beta_\nu = \ell$ (μονότονη και φραγμένη). Άρα υπάρχει το $lim \sigma_\nu \beta_{\nu+1} = A\ell$. Ακόμα η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu (\beta_{\nu+1} - \beta_\nu)$ συγκλίνει απόλυτα, αφού η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει, επειδή

$$\sum_{k=1}^{\nu} |\sigma_k (\beta_{k+1} - \beta_k)| \leq M \sum_{k=1}^{\nu} |\beta_{k+1} - \beta_k| = M(\beta_1 - \beta_{\nu+1})$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(όλες οι διαφορές έχουν σταθερό πρόσημο από την μονοτονία). Με εφαρμογή του Θεωρήματος 2.63 έχουμε το συμπέρασμα. •

Παράδειγμα 2.65

Θα αποδείξουμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει, αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\nu\alpha_\nu)$ συγκλίνει. Πραγματικά· είναι: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}(\nu\alpha_\nu)$ και η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}(\nu\alpha_\nu)$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του Abel, αφού η $\frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μονότονη και φραγμένη.

Θεώρημα 2.66 (Κριτήριο του Dirichlet) Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu$ συγκλίνει, αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα και η ακολουθία β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα και μηδενική.

Απόδειξη

Αφού η $\sigma_k = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k$ είναι φραγμένη, όπως αποδείχτηκε στο προηγούμενο Θεώρημα η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu(\beta_{\nu+1} - \beta_\nu)$ συγκλίνει. Επίσης $lim\sigma_\nu\beta_{\nu+1} = 0$. Άρα από το Θεώρημα 2.63 η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu$ συγκλίνει.

Παρατήρηση 2.67

Το κριτήριο του Leibnitz (Θεώρημα 2.49) μπορεί να προκύψει από το Θεώρημα 2.66 θεωρώντας την $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$ υπό την μορφή $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu\delta_\nu$ με $\gamma_\nu = (-1)^\nu$ και $\delta_\nu = \alpha_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 2.68

Η σειρά $\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{log\nu}$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Πραγματικά· εφαρμόζουμε το κριτήριο του Dirichlet (Θεώρημα 2.66) με $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1}$ και $\beta_\nu = \frac{1}{log\nu}$, $\nu \geq 2$ Είναι $|\sigma_\nu| \leq 1, \forall\nu \in \mathbb{N}$ και η β_ν, $\nu \geq 2$ είναι φθίνουσα, αφού $\beta_{\nu+1} < \beta_\nu \Leftrightarrow log\nu < log(\nu+1) \Leftrightarrow \nu < \nu+1$ που ισχύει. Επίσης $\beta_\nu \to 0$. Άρα η σειρά $\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{log\nu}$ συγκλίνει. Απόλυτα δεν συγκλίνει, αφού

$$\left|\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{log\nu}\right| = \sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{log\,\nu} = +\infty$$

γιατί, $\frac{1}{\nu} < \frac{1}{log\nu}, \forall\nu \geq 2$ και $\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu} = +\infty$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(\nu\pi)}{\nu}$ συγκλίνει υπό συνθήκη για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έστω $\alpha_\nu = sin(\nu x), \nu \in \mathbb{N}, x \in R$ και $\beta_\nu = \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$. Τότε η $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι προφανώς φθίνουσα και μηδενική. Θα αποδείξουμε ότι τα μερικά αθροίσματα $\sum_{k=1}^{\nu} sin(kx), \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένα. Από την ταυτότητα[1]

$$2sin\frac{x}{2}\{sinx + sin2x + \ldots + sin(\nu x)\} = cos\frac{x}{2} - cos\frac{2\nu+1}{2}x$$

έχουμε, αν $sin\frac{x}{2} \neq 0$, δηλ. $x \neq 2\lambda\pi, \lambda \in Z$ ότι:

$$|\sigma_\nu| = \sum_{k=1}^{\nu} sin(kx) = \frac{|cos\frac{x}{2} - cos\frac{2\nu+1}{2}x|}{|2sin\frac{x}{2}|} \leq \frac{2}{2|sin\frac{x}{2}|} = \frac{1}{|sin\frac{x}{2}|}.$$

Συνεπώς η $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη για $x \neq 2\lambda\pi$ και συνεπώς για αυτά τα x η σειρά συγκλίνει, από το κριτήριο του Dirichlet (Θεώρημα 2.66). Για $x = 2\lambda\pi$ όμως οι όροι της σειράς μηδενίζονται και επομένως η σειρά συγκλίνει $\forall x \in R$.

Απόλυτα όμως η σειρά δεν συγκλίνει. Πραγματικά· ισχύει

$$|sinkx| \geq sin^2 kx = \frac{1 - cos2kx}{2}$$

και επομένως

$$\sum_{k=1}^{\nu} \frac{|sinkx|}{k} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu} \frac{1 - cos2kx}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu} \frac{cos2kx}{k}$$

Αλλά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{cos2\nu x}{\nu} < +\infty$ (άσκηση 2.25 β). Άρα $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|sin\nu x|}{\nu} = +\infty$.

2. Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty$, τότε να αποδείξετε ότι $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^\nu < \infty$.

Απόδειξη

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Abel (Θεώρημα 2.64). Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\beta_\nu = (1 - \frac{1}{\nu})^\nu$ είναι μονότονη και φραγμένη.

Για την μονοτονία έχουμε:

$$\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}}{\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^\nu} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}}{\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}} \frac{\nu - 1}{\nu} = \left(\frac{\nu^2}{\nu^2 - 1}\right)^{\nu+1} \frac{\nu - 1}{\nu}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\nu^2 - 1}\right)^{\nu+1} \frac{\nu - 1}{\nu} > \left(1 + \frac{\nu + 1}{\nu^2 - 1}\right) \frac{\nu - 1}{\nu} = 1$$

[1] $2sin\frac{x}{2}(sinx + sin2x + \ldots + sin\nu x) = 2sinx.sin\frac{x}{2} + 2sin2x\,sin\frac{x}{2} + \ldots + 2sin\nu x.sin\frac{x}{2} = [cos\frac{x}{2} - cos\frac{3x}{2}] + [cos\frac{3x}{2} - cos\frac{5x}{2}] + \ldots + [cos\frac{2\nu-1}{2}x - cos\frac{2\nu+1}{2}x] = cos\frac{x}{2} - cos\frac{2\nu+1}{2}x.$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλ. η β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα.

Είναι και φραγμένη, αφού $\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu < \frac{1}{e}, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Επομένως η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ συγκλίνει.

3. Μια ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ θα λέγεται "φραγμένης μεταβολής" αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu|$ συγκλίνει.

α) Να αποδείξετε ότι αν η α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι φραγμένης μεταβολής, τότε αυτή συγκλίνει.

β) Να βρήτε μια σειρά που να μην συγκλίνει και της οποίας η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ να είναι φραγμένης μεταβολής.

γ) Να αποδείξετε την ακόλουθη γενίκευση του κριτηρίου του Abel που οφείλεται στους du Bois-Reymond και Dedekind:

Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu$ συγκλίνει, αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα και η β_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι μηδενική ακολουθία φραγμένης μεταβολής.

Απόδειξη

α) Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu)$ συγκλίνει, αφού συγκλίνει απόλυτα. Αυτή όμως είναι τηλεσκοπική σειρά και συνεπώς (εφαρμογή 4 της § 2.2) αν σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της, τότε $\sigma_\nu = \alpha_{\nu+1} - \alpha_1$ ή $\alpha_{\nu+1} = \sigma_\nu + \alpha_1$. Άρα το $lim \alpha_{\nu+1}$ υπάρχει, αφού υπάρχει το $lim \sigma_\nu$.

β) Έστω $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1$.

γ) Αφού η β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένης μεταβολής, συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\beta_{\nu+1} - \beta_\nu)$ συγκλίνει απόλυτα. Τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu (\beta_{\nu+1} - \beta_\nu)$ συγκλίνει. Επειδή $\beta_\nu \to 0$ τότε και $\sigma_\nu \beta_\nu \to 0$. Άρα από το Θεώρημα 2.66 η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu$ συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.25 Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\alpha) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{sin(\nu\omega)}{\nu^\rho}, \rho > 0, \frac{\omega}{\pi} \notin Z \quad \beta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{cos(\nu\omega)}{\nu^\rho}, 0 < \rho \leq 1, \frac{\omega}{\pi} \notin Z$$

2.26 Με το κριτήριο του Abel, να αποδείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(\nu^3+1)^{1/3} - \nu}{log\nu}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

συγκλίνει.

2.27 Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{5/3}\alpha_\nu$, όπου

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \sqrt{1+\alpha_\nu}$$

συγκλίνει.

§ 2.9 ΕΙΔΙΚΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

Θα δώσουμε τώρα ορισμένα ειδικά κριτήρια, για μια όσο το δυνατό σφαιρική ενημέρωση, πάνω στο δύσκολο θέμα της σύγκλισης μιας σειράς.

Θεώρημα 2.69 (Κριτήριο των λόγων) Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ είναι δυο σειρές με θετικούς όρους και υπάρχει $\nu_0 \in \mathbf{N}$:

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq \frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}, \forall \nu \geq \nu_0$$

τότε:

1) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty.$

2) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = +\infty$

Απόδειξη

Για $\nu \geq \nu_0$ θα έχουμε;

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu_0}} = \frac{\alpha_{\nu_0+1}}{\alpha_{\nu_0}} \cdot \frac{\alpha_{\nu_0+2}}{\alpha_{\nu_0+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}} \leq \frac{\beta_{\nu_0+1}}{\beta_{\nu_0}} \cdot \frac{\beta_{\nu_0+2}}{\beta_{\nu_0+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\beta_\nu}{\beta_{\nu-1}} = \frac{\beta_\nu}{\beta_{\nu_0}}$$

δηλ. $\alpha_\nu \leq K\beta_\nu, \forall \nu \geq \nu_0$ όπου $K = \frac{\alpha_{\nu_0}}{\beta_{\nu_0}}$. Το συμπέρασμα είναι προφανές από το Θεώρημα 2.21. •

Θεώρημα 2.70 (Λογαριθμικό κριτήριο) Αν για την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\lim \left(\nu \log \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} \right) = \ell$$

τότε αυτή συγκλίνει αν $\ell > 1$ και απειρίζεται θετικά αν $\ell < 1$.

Απόδειξη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση $\ell > 1$, γιατί η άλλη εξετάζεται ανάλογα. Διαλέγουμε ένα $\epsilon > 0$, έτσι ώστε $\ell - \epsilon = k > 1$. Τότε

$$lim\left(vlog\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}\right) = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu \geq \nu_0 \Rightarrow$$

$$\ell - \epsilon < vlog\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} < \ell + \epsilon$$

Δηλ.

$$vlog\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} > k, \forall \nu > \nu_0 \Rightarrow \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} > e^{k/\nu}, \forall \nu > \nu_0. \quad (1)$$

Αλλά η $\gamma_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα και έχει όριο το e (εφαρμογή 2β της § 1.8) και επομένως

$$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu \leq e, \forall \nu \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Με την βοήθεια της (2) η (1) γίνεται

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} > \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^k \Rightarrow \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < \frac{\nu^k}{(\nu+1)^k} = \frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}$$

με $\beta_\nu = \frac{1}{\nu^k}$. Επειδή $k > 1$ η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < +\infty$ και από το Θεώρημα 2.69 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty$. •

Θεώρημα 2.71 (Κριτήριο λογαρίθμου του Catalan) **Αν για την σειρά** $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ **ισχύει**

$$\lim\left(\frac{\log\frac{1}{\alpha_\nu}}{\log \nu}\right) = \ell \in \mathbf{R}$$

τότε:

i) Αν $\ell > 1$ η σειρά συγκλίνει.

ii) Αν $0 \leq \ell < 1$ η σειρά απειρίζεται θετικά.

ii) Αν $\ell = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Απόδειξη

Έχουμε:

$$lim\left(\frac{log\frac{1}{\alpha_\nu}}{log\,\nu}\right) = \ell \in R \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu \geq \nu_0 \Rightarrow$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\ell - \epsilon < \frac{log\frac{1}{\alpha_\nu}}{log\nu} < \ell + \epsilon.$$

i) Έστω $\ell > 1$. Διαλέγουμε $\epsilon > 0$, έτσι ώστε $\ell - \epsilon = q > 1$ οπότε

$$\frac{log\frac{1}{\alpha_\nu}}{log\nu} > q > 1 \Leftrightarrow log\frac{1}{\alpha_\nu} > log\nu^q \Leftrightarrow \alpha_\nu < \frac{1}{\nu^q}, \forall \nu \geq \nu_0.$$

Από την σχέση αυτή έχουμε:

$$\alpha_{\nu+k} < \frac{1}{(\nu+k)^q}, \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Η σειρά όμως $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu+k)^q}$ συγκλίνει ως αρμονική σειρά με $q > 1$ και άρα και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει.

ii) Εργαζόμαστε ανάλογα. Αφήνεται για άσκηση. •

Θα αποδείξουμε τώρα ένα πιο ισχυρό κριτήριο από τα κριτήρια του D' Alembert και του Cauchy.

Θεώρημα 2.72 (Κριτήριο του Kummer) α) Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \alpha_\nu \neq 0, \forall \nu \in N$ συγκλίνει απόλυτα, αν υπάρχει ακολουθία θετικών όρων $\beta_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ και σταθερή $k > 0$ τέτοιες ώστε:

$$0 \leq k \leq \beta_\nu - \beta_{\nu+1}\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right|, \forall \nu \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

β) Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \ \alpha_\nu > 0, \forall \nu \in N$ απειρίζεται θετικά αν η ακολουθία $\beta_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ είναι τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_\nu}$ να απειρίζεται θετικά, και

$$\beta_\nu - \beta_{\nu+1}\left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right) \leq 0, \forall \nu \in \mathbf{N}. \quad (2)$$

Απόδειξη

Από την (1) έχουμε:

$$k|\alpha_1| \leq \beta_1|\alpha_1| - \beta_2|\alpha_2|$$

$$k|\alpha_2| \leq \beta_2|\alpha_2| - \beta_3|\alpha_3|$$

.....

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$k|\alpha_\nu| \leq \beta_\nu|\alpha_\nu| - \beta_{\nu+1}|\alpha_{\nu+1}|$$

και προσθέτοντας

$$k\sum_{i=1}^{\nu}|\alpha_i| \leq \beta_1|\alpha_1| - \beta_{\nu+1}|\alpha_{\nu+1}| \leq \beta_1|\alpha_1|.$$

Συνεπώς

$$\sum_{i=1}^{\nu}|\alpha_i| \leq \frac{\beta_1|\alpha_1|}{k}.$$

Άρα η ακολουθία $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα και φραγμένη και άρα συγκλίνουσα. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$ συγκλίνει.

β) Από την (2) έχουμε:

$$\beta_1\alpha_1 \leq \beta_2\alpha_2$$

$$\beta_2\alpha_2 \leq \beta_3\alpha_3$$

.....

$$\beta_{\nu-1}\alpha_{\nu-1} \leq \beta_\nu\alpha_\nu$$

από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{\beta_1\alpha_1}{\beta_\nu} < \alpha_\nu, \forall\nu \in \mathbb{N}.$$

Αφού $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_\nu} = +\infty$, από το κριτήριο συγκρίσεως (Θεώρημα 2.21) έχουμε ότι και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = +\infty$. •

Παρατήρηση 2.73

Από το παραπάνω κριτήριο παίρνουμε τις παρακάτω ενδιαφέρουσες περιπτώσεις:

α) Αν $\beta_\nu = 1$ τότε από το α) παίρνουμε:

$$0 \leq k \leq 1 - \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \quad \text{ή} \quad \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \leq 1 - k < 1,$$

δηλαδή το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert.

2) Αν $\beta_\nu = \nu - 1$ τότε η α) δίνει:

Θεώρημα 2.74 (Κριτήριο του Raabe) Αν για την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\ \alpha_\nu > 0, \forall\nu \in \mathbb{N}$ **ισχύει:**

$$\lim\nu\left(1 - \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right) = \ell$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τότε:

i) Αν $\ell > 1$ η σειρά συγκλίνει.

ii) Αν $\ell < 1$ η σειρά απειρίζεται θετικά.

Παράδειγμα 2.75

Ας θεωρήσουμε την σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[(2\nu)!]^3}{2^{6\nu}(\nu!)^6}.$$

Διαλέγοντας ως $\beta_\nu = \nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\beta_\nu - \beta_{\nu+1}\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \frac{1}{2} - \frac{6\nu - 5}{8(\nu+1)^2}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η ακολουθία $\frac{6\nu-5}{8(\nu+1)^2}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα και μηδενική με πρώτο όρο $\frac{11}{32}$. Συνεπώς

$$\beta_\nu - \beta_{\nu+1}\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| > \frac{1}{2} - \frac{11}{32} = \frac{5}{32} > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.72 η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα 2.76

Έστω η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1.3.5.\ldots.(2\nu-1)}{4.6.8.\ldots.(2\nu+2)}$. Επειδή είναι $lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 1$ το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert δεν εφαρμόζεται. Αλλά

$$lim\nu\left(1 - \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right) = lim\frac{3\nu}{2\nu+2} = \frac{3}{2} > 1$$

και συνεπώς η σειρά συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του Raabe (Θεώρημα 2.74).

Θεώρημα 2.77 (Κριτήριο του Gauss) Αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ έχει θετικούς όρους και

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \alpha + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma_\nu}{\nu^p},$$

όπου $\alpha > 0$, $p > 1$, γ_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ φραγμένη ακολουθία, τότε:

$$\forall \beta \in \mathbf{R} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty \quad \text{αν} \quad \alpha > 1 \quad \text{και} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu + = \infty \quad \text{αν} \quad \alpha < 1.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για $\alpha = 1$ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu < +\infty$ **αν** $\beta > 1$ **και** $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu + = \infty$ **αν** $\beta \leq 1$.

Απόδειξη

1) Είναι $lim\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \alpha$ και το συμπέρασμα προκύπτει από το κριτήριο του D' Alembert.

2) Για $\alpha = 1$ είναι $limv\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} - 1\right) = \beta$ και το συμπέρασμα είναι συνέπεια του κριτηρίου του Raabe αν $\beta \neq 1$. Μένει μόνο να εξετάσουμε την περίπτωση $\beta = 1$. Τότε:

$$\nu\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} - (\nu+1) = \frac{\gamma_\nu}{\nu^{p-1}}, \forall\nu \in I\!N.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη με $log\,\nu$ και μετά προσθέτοντας και στα δυο μέλη το $(\nu+1)log\nu - (\nu+1)log(\nu+1)$ παίρνουμε:

$$lim\left[\nu log\nu\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} - (\nu+1)log(\nu+1)\right] = -1.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\nu_0 \in I\!N$:

$$\nu log\nu\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} - (\nu+1)log(\nu+1) < 0, \forall\nu \geq \nu_0$$

ή ακόμα

$$\nu log\nu - (\nu+1)log(\nu+1)\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < 0, \forall\nu \geq \nu_0.$$

Έστω $\beta_\nu = \nu log\,\nu$. Τότε $\beta_\nu > 0, \forall\nu \in I\!N$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_\nu} = +\infty$ (Άσκηση 2.19β). Από το κριτήριο του Kummer έχουμε τότε ότι $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = +\infty$. •

Παράδειγμα 2.78

Θα εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση την **υπεργεωμετρική σειρά**

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots$$

με $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$. Παραλείποντας τον πρώτο όρο, ο οποίος δεν επηρεάζει την συμπεριφορά της σειράς, έχουμε:

$$\alpha_\nu = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{\nu!}\cdot\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)}x^\nu.$$

Τότε

$$lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = lim\frac{(\alpha+\nu)(\beta+\nu)}{(\nu+1)(\gamma+\nu)}x = x$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και επομένως η σειρά συγκλίνει αν $x < 1$ και αποκλίνει θετικά αν $x > 1$. Για $x = 1$ έχουμε:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{(\nu+1)(\gamma+\nu)}{(\alpha+\nu)(\beta+\nu)} = \frac{\nu^2+(\gamma+1)\nu+\gamma}{\nu^2+(\alpha+\beta)\nu+\alpha\beta}$$

και

$$\begin{aligned} \nu\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}-1\right) &= \frac{(\gamma+1-\alpha-\beta)\nu^2+(\gamma-\alpha\beta)\nu}{\nu^2+(\alpha+\beta)\nu+\alpha\beta} \\ &= \gamma+1-\alpha-\beta+\frac{A\nu+B}{\nu^2+(\alpha+\beta)\nu+\alpha\beta} \end{aligned}$$

όπου $A = \gamma - \alpha\beta - (\alpha+\beta)(\gamma+1-\alpha-\beta)$ και $B = \alpha\beta(\alpha+\beta-\gamma-1)$.

Επομένως

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = 1+\frac{\gamma+1-\alpha-\beta}{\nu}+\frac{A\nu+B}{\nu^3+(\alpha+\beta)\nu^2+\alpha\beta\nu} = 1+\frac{\gamma+1-\alpha-\beta}{\nu}+\frac{\gamma_\nu}{\nu^2}$$

όπου $\gamma_\nu = \frac{A+\frac{B}{\nu}}{\alpha+\frac{\alpha+\beta}{\nu}+\frac{\alpha\beta}{\nu^2}}$, $\nu \in \mathbb{N}$ η οποία είναι φραγμένη, αφού $\gamma_\nu \to A$. Το κριτήριο του Gauss τότε μας λέει ότι η σειρά συγκλίνει αν $\gamma > \alpha+\beta$ και αποκλίνει θετικά αν $\gamma \leq \alpha+\beta$.

ΑΣΚΗΣΗ

2.28 Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ με:

$\alpha)\alpha_\nu = \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2}$ $\beta)\alpha_\nu = \frac{\nu!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}$

$\gamma)\alpha_\nu = \frac{1.3\ldots(2\nu-1)}{2.4\ldots(2\nu)}\cdot\frac{1}{2\nu+1}$ $\delta)\alpha_\nu = \nu^{\log\alpha}, \alpha > 0.$

§ 2.10 ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ

Θεωρούμε την σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\frac{\nu+2}{\nu+1} = \frac{3}{2}-\frac{4}{3}-\frac{6}{5}+\frac{5}{4}-\ldots$$

Επειδή $lim|\alpha_\nu| = 1 \neq 0$ η σειρά δεν συγκλίνει. Παρατηρούμε όμως ότι:

$$\begin{aligned} \sigma_{2\nu} &= \frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-\frac{6}{5}+\ldots+\frac{2\nu+1}{2\nu}-\frac{2\nu+2}{2\nu+1} \\ &= \frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{2\nu(2\nu+1)} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

δηλ. το $lim\sigma_{2\nu} = \ell$ υπάρχει. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{2\nu+1}{2\nu}-\frac{2\nu+2}{2\nu+1}\right] = \left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{2\nu+1}{2\nu}-\frac{2\nu+2}{2\nu+1}\right)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\nu(2\nu+1)}$$

είναι συγκλίνουσα. **Μ' άλλα λόγια η εισαγωγή παρενθέσεων μετετρέπει μια μη συγκλίνουσα σειρά σε συγκλίνουσα.**

Αναφορικά με την ομαδοποίηση των όρων μιας σειράς έχουμε τα ακόλουθα Θεωρήματα

Θεώρημα 2.79 Αν οι όροι μιας συγκλίνουσας σειράς ομαδοποιηθούν με παρενθέσεις, ώστε να προκύψει μια νέα σειρά χωρίς αλλάγή της τάξης των όρων της αρχικής, τότε η σειρά που προκύπτει έχει το ίδιο άθροισμα με την αρχική.

Απόδειξη

Στη νέα σειρά τα μερικά αθροίσματα των όρων της περιέχονται στα μερικά αθροίσματα της αρχικής σειράς. Συνεπώς τα μερικά αθροίσματα της νέας σειράς συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό με τα μερικά αθροίσματα της αρχικής σειράς. •

Θεώρημα 2.80 Αν μιας σειράς οι όροι είναι αθροίσματα παρανθέσεων και συγκλίνει στο ℓ, τότε και η σειρά χωρίς παρενθέσεις συγκλίνει στο ℓ, αρκεί η αρχική σειρά να συγκλίνει με όποιο τρόπο και αν μπουν οι παρενθέσεις.

Απόδειξη

Γιατί, αν η σειρά χωρίς παρενθέσεις συγκλίνει, τότε η χρήση των παρενθέσεων δεν μεταβάλλει το άθροισμά της, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.79. •

Αν σε μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ αλλάξουμε την τάξη των όρων της τότε παίρνουμε μια καινούργια σειρά, που λέγεται **αναδιάταξη** της αρχικής σειράς. Θα δούμε ότι αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε οποιαδήποτε αναδιάταξή της δεν επηρεάζει το άθροισμά της, ενώ αν η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε η επίδραση στο άθροισμά της είναι δραστική. Πρώτα θα δώσουμε τον γενικό ορισμό της αναδιάταξης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ορισμός 2.81 Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ λέγεται αναδιάταξη της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των δεικτών ν και μ έτσι ώστε: $\beta_\nu = \alpha_\mu$ για τους αντίστοιχους δείκτες.

Θεώρημα 2.82 Αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε οποιαδήποτε ανάδιάταξή της συγκλίνει στο ίδιο άθροισμα.

Απόδειξη

Ας αποδείξουμε πρώτα το Θεώρημα στην περίπτωση που οι όροι της σειράς είναι μη αρνητικοί.

Έστω $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \ell, \alpha_\nu \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ μια αναδιάταξη της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, δηλ. περιέχει τους ίδιους όρους με την $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ αλλά με διαφορετική σειρά. Τότε:

$$\sigma_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu < \ell$$

αφού κάθε β είναι κάποιο α και το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων της $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ είναι μικρότερο από το ℓ. Αυτό σημαίνει ότι η σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη και συνεπώς από το Θεώρημα 2.18 έχει όριο $\ell_1 \leq \ell$. Αλλά αφού κάθε α είναι κάποιο β θα έχουμε και $\ell \leq \ell_1$. Άρα $\ell = \ell_1$.

Στην γενική περίπτωση μιας απόλυτα συγκλίνουσας σειράς έχουμε $\ell = A_1 - A_2$ όπου A_1, A_2 οι θετικές υποσειρές των θετικών και αρνητικών όρων αντίστοιχα. Αφού οι A_1 και A_2 μένουν αμετάβλητες σε οποιαδήποτε αναδιάταξη της αρχικής σειράς και τα μερικά αθροίσματα συγκλίνουν στο $\ell = A_1 - A_2$, το Θεώρημα αποδείχτηκε. •

Θεώρημα 2.83 (Θεώρημα του Riemann) Έστω ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Τότε υπάρχει μια αναδιάταξή της που συγκλίνει σε έναν αυθαίρετο αριθμό $x \in \mathbf{R}$ ή ακόμα και να μην συγκλίνει.

Απόδειξη

Αφού η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, από το Θεώρημα 2.60 έχουμε ότι η σειρά των θετικών όρων και η σειρά των αρνητικών όρων απειρίζοντα θετικά. Έστω $x \in R$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας είναι $x > 0$. Προσθέτουμε μερικούς θετικούς όρους ώστε το άθροισμά τους να είναι μεγαλύτερο από το x. Μετά προσθέτουμε από τους αρνητικούς όρους τόσους ώστε το καινούργιο άθροισμα να γίνει μικρότερο του x. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, από τους υπόλοιπους θετικούς όρους προσθέτουμε τόσους, ώστε το καινούργιο άθροισμα να γίνει μεγαλύτερο του x, και μετά τόσους

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

αρνητικούς ώστε να ξαναγίνει μικρότερο του x κ.ο.κ. Η διαφορά μεταξύ του μερικού αθροίσματος της σειράς που κατασκευάστηκε και του x τείνει στο μηδέν. Γενικά $|\sigma_\nu - x|$ θα είναι πάντα μικρότερο από τον τελευταίο όρο που προστίθεται. Κατά συνέπεια μπορούμε να προσεγγίσουμε το x όσο θέλουμε και έτσι το Θεώρημα αποδείχτηκε. •

Παρατήρηση 2.84

Σύμφωνα με τα προηγούμενα υπάρχει μια θεμελιώδης διαφορά μεταξύ της απόλυτης και της υπό συνθήκης σύγκλισης μιας σειράς. Στην απόλυτη σύγκλιση, οποιαδήποτε αναδιάταξη της σειράς, δεν την επηρεάζει ως προς τη σύγκλιση, ούτε ως προς το άθροισμά της, ακριβώς όπως και στην περίπτωση πεπερασμένου αθροίσματος. Στην υπό συνθήκη σύγκλιση από την άλλη μεριά, το άθροισμα της σειράς μπορεί να αλλάξει με μια κατάλληλη αναδιάταξη ή ακόμα η σειρά μπορεί να μετατραπεί σε άλλη μη συγκλίνουσα.

§ 2.11 ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΣΕΙΡΩΝ

Ορισμός 2.85 Γινόμενο των σειρών $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ ορίζουμε να είναι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu$, όπου

$$\gamma_\nu = \alpha_1\beta_\nu + \alpha_2\beta_{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu\beta_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k+1}\beta_{\nu-k}.$$

(Το γινόμενο αυτό ονομάζεται "κατά Cauchy γινόμενο" των δυο σειρών).

Παράδειγμα 2.86

Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ όπου $\alpha_\nu = \beta_\nu = (-1)^{\nu+1}\frac{1}{\sqrt{\nu}}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε κάθε μια από αυτές συγκλίνει υπό συνθήκη, και για την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu$ έχουμε;

$$\gamma_\nu = (-1)^{\nu+1}\left[\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}\right].$$

Αν αντικαταστήσουμε κάθε ρίζα στον παρονομαστή με $\sqrt{\nu}$, την μεγαλύτερη ρίζα, έχουμε:

$$|\gamma_\nu| \geq \frac{\nu}{\sqrt{\nu}\sqrt{\nu}} = 1.$$

Δηλαδή $lim\gamma_\nu \neq 0$ και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu$ δεν συγκλίνει.

Θεώρημα 2.87 Αν μια από τις σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = A$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu = B$ συγκλίνει απόλυτα, τότε το κατά Cauchy γινόμενό τους $\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu = \Gamma$ συγκλίνει και $\Gamma = A.B$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

Έστω $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k, \tau_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k, s_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_k$, $\delta_\nu = \tau_\nu - B$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu| = \alpha$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} s_\nu &= \alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \ldots + (\alpha_1\beta_\nu + \alpha_2\beta_{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu\beta_1) \\ &= \alpha_1(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu) + \alpha_2(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{\nu-1}) + \ldots + \alpha_\nu\beta_1 \\ &= \alpha_1\tau_\nu + \alpha_2\tau_{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu\tau_1 \\ &= \alpha_1(\delta_\nu + B) + \alpha_2(\delta_{\nu-1} + B) + \ldots + \alpha_\nu(\delta_1 + B) \\ &= B(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu) + \alpha_1\delta_\nu + \alpha_2\delta_{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu\delta_1 \\ &= \sigma_\nu B + \alpha_1\delta_\nu + \alpha_2\delta_{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu\delta_1 \\ &= \sigma_\nu B + \epsilon_\nu, \end{aligned}$$

όπου $\epsilon_\nu = \alpha_1\delta_\nu + \alpha_2\delta_{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu\delta_1$.

Επειδή $lim\sigma_\nu B = A.B$ για να αποδείξουμε το Θεώρημα αρκεί να αποδείξουμε ότι $lim\epsilon_\nu = 0$. Αφού $lim\delta_\nu = lim(\tau_\nu - B) = 0$ θα έχουμε:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_1 \in \mathbb{N})(\forall\nu \in N)\nu > \nu_1 \Rightarrow |\delta_\nu| < \frac{\epsilon}{2\alpha}.$$

Επίσης

$$\begin{aligned} |\epsilon_\nu| &\leq |\alpha_\nu\delta_1 + \ldots + \alpha_{\nu-\nu_1+1}\delta_{\nu_1}| + |\alpha_{\nu-\nu_1}||\delta_{\nu_1+1}| + \ldots + |\alpha_1||\delta_\nu| \\ &< |\alpha_\nu\delta_1 + \ldots + \alpha_{\nu-\nu_1+1}\delta_{\nu_1}| + \frac{\epsilon}{2\alpha}(|\alpha_{\nu-\nu_1}| + \ldots + |\alpha_1|). \end{aligned}$$

Επειδή $lim\alpha_\nu = 0$, διαλέγουμε δείκτη $\nu_2 \in N$, τέτοιο ώστε:

$$|\alpha_\nu\delta_1 + \ldots + \alpha_{\nu-\nu_1+1}\delta_{\nu_1}| < \frac{\epsilon}{2}, \forall\nu > \nu_2.$$

Αν $\nu_0 = max\{\nu_1, \nu_2\}$, αφού

$$|\alpha_{\nu-\nu_1}| + \ldots + |\alpha_1| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu| = \alpha$$

έχουμε:

$$|\epsilon_\nu| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2\alpha}.\alpha = \epsilon, \forall\nu > \nu_0$$

που σημαίνει ότι $lim\epsilon_\nu = 0$, πράγμα που αποδεικνύει και το Θεώρημα. •

Πόρισμα. Αν οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνουν απόλυτα, τότε και το κατά Cauchy γινόμενό τους συγκλίνει απόλυτα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

Σημείωση

Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_\nu = 2$ για $\nu > 1$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ με $\beta_1 = 1$ και $\beta_\nu = (-1)^{\nu+1}.2$ για $\nu > 2$. Αυτές προφανώς δεν συγκλίνουν. Για το γινόμενό τους $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu$ έχουμε:

$$\gamma_1 = 1 \quad \text{και} \quad \gamma_\nu = 2 - (-1)^{\nu+1}.2 + 4\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k+1} = 0 \quad \text{αν} \quad \nu > 1.$$

Δηλαδή η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu$ είναι η συγκλίνουσα σειρά $1+0+0+\ldots$ αν και καμμιά από τις σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ δεν συγκλίνει.

Αυτό δείχνει ότι το αντίστροφο του Θεωρήματος 2.87 δεν ισχύει.

ΑΣΚΗΣΗ

2.29 Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των σειρών $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu^{3/2}}$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu^{1/2}}$ συγκλίνει. Να εξετάσετε επίσης αν συγκλίνει απόλυτα.

§ 2.12 ΑΠΕΙΡΟΓΙΝΟΜΕΝΑ

Έστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Από αυτήν σχηματίζουμε την εξής ακολουθία $p_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με

$$p_1 = \alpha_1$$

$$p_2 = \alpha_1.\alpha_2$$

$$p_3 = \alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$$

.....

$$p_\nu = \alpha_1.\alpha_2.\alpha_3 \ldots .\alpha_\nu = \prod_{k=1}^{\nu} \alpha_k.$$

Την ακολουθία αυτή $p_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ την ονομάζουμε **ακολουθία των μερικών γινομένων της ακολουθίας** $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$. Οι πραγματικοί αριθμοί $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ ονομάζονται αντίστοιχα **πρώτο, δεύτερο, ..., ν-οστό μερικό γινόμενο.**

Δίνουμε τώρα τον επόμενο

Ορισμός 2.88 Το διατεταγμένο ζεύγος των ακολουθιών (α_ν, p_ν) λέγεται απειρογινόμενο και θα συμβολίζεται με $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3 \ldots .\alpha_\nu$ ή $\prod_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$.

Τα παραπάνω βρίσκονται σε πλήρη αναλογία με τα όσα είπαμε για τις σειρές των πραγματικών αριθμών (§2.1). Στην συνέχεια θα προσαρτήσουμε στο απειρογινόμενο και έναν πραγματικό αριθμό. Για να το κάνουμε αυτό,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

δεν θα ακολουθήσουμε την ίδια ακριβώς πορεία, όπως και στις σειρές. Αν το κάναμε, θα λέγαμε ότι το απειρογινόμενο $\prod_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει, αν η ακολουθία των μερικών γινομένων συγκλίνει. Αλλά τότε, αν ένας όρος της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ ήταν μηδέν, έστω ο $\alpha_i = 0$, όλα τα μερικά γινόμενα για $\nu > i$ θα ήταν μηδέν και η $p_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ θα συνέκλινε στο μηδέν. Γι' αυτό θα περιορίσουμε την $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ από την οποία θα σχηματίσουμε τα μερικά γινόμενα και θα θεωρούμε ακολουθίες $\alpha_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Έτσι δίνουμε τον παρακάτω

Ορισμός 2.89 Το απειρογινόμενο $\prod_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ θα λέμε ότι συγκλίνει αν α) $\alpha_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και β) $\lim p_\nu = \lim \prod_{k=1}^{\nu} \alpha_k = p$ με $p \neq 0$. Γράφουμε τότε $p = \prod_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$. Αν $\lim p_\nu$ δεν υπάρχει ή είναι μηδέν, τότε λέμε ότι το απειρογινόμενο αποκλίνει.

Παρατήρηση 2.90

Σε αναλογία με τις σειρές το σύμβολο $\prod_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ έχει διπλή έννοια. Παριστάνει την ακολουθία των μερικών γινομένων της $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ από την μια μεριά και το όριο της $p_\nu, \nu \in N$ από την άλλη. Επίσης αξίζει να παρατηρήσουμε ότι μπορεί να συμβεί $\prod_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = 0$, αλλά $\alpha_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Αυτή είναι και η βασική διαφορά στην συμπεριφορά ενός απειρογινομένου από ένα πεπερασμένο γινόμενο, γιατί όπως ξέρουμε αν $\prod_{\nu=1}^{\nu} \alpha_k = 0$, τότε κάποιο από τα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ είναι μηδέν.

Παράδειγμα 2.91

Ας θεωρήσουμε το απειρογινόμενο $\prod_{\nu=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)$. Τότε το ν-οστό μερικό γινόμενο είναι:

$$\begin{aligned} p_\nu &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) \\ &= \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\right] \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{\nu - 1}{\nu} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{\nu + 1}{\nu} = \frac{1}{2} \frac{\nu + 1}{\nu}. \end{aligned}$$

Άρα $lim p_\nu = \frac{1}{2}$ και επομένως $\prod_{\nu=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) = \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 2.92

Το απειρογινόμενο $\prod_{\nu=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)$ αποκλίνει στο 0. Πραγματικά· έχουμε

$$p_\nu = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{\nu - 1}{\nu} = \frac{1}{\nu} \to 0.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 2.93

Για το απειρογινόμενο $\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)$ έχουμε ότι:

$$p_\nu=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{\nu}\right)=2\frac{2}{3}\ldots\frac{\nu+1}{\nu}=\nu+1\to+\infty.$$

Επομένως αυτό αποκλίνει.

Θεώρημα 2.94 (Κριτήριο του Cauchy) Το απειρογινόμενο $\prod_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει, αν και μόνον αν,

$$(\forall\epsilon>0)(\exists\nu_0\in\mathbf{N})(\forall\nu\in\mathbf{N})(\nu>\nu_0)(\forall\mathbf{k}\in\mathbf{N})$$

$$\Rightarrow|\alpha_{\nu+1}\alpha_{\nu+2}\ldots\alpha_{\nu+k}-1|<\epsilon \qquad (1)$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι το απειρογινόμενο $\prod_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει. Τότε $\alpha_\nu\neq 0,\forall\nu\in$ $I\!N$ και $p=limp_\nu$, όπου $p_\nu=\alpha_1.\alpha_2\ldots\alpha_\nu$. Αφού $p\neq 0$ υπάρχει $M>0$: $|p_\nu|>M$ (εφαρμογή 1 της § 1.4). Επειδή η $p_\nu,\nu\in$ συγκλίνει, θα είναι ακολουθία του Cauchy (Θεώρημα 1.26). Συνεπώς

$$(\forall\epsilon>0)(\exists\nu_0\in I\!N)(\forall\nu\in N)(\nu>\nu_0)(\forall k\in I\!N)\Rightarrow|p_{\nu+k}-p_\nu|<\epsilon M.$$

Διαιρώντας με το $|p_\nu|$ έχουμε την (1).

Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι ισχύει η (1). Για $\epsilon=\frac{1}{2}$ θα υπάρχει ένα $\nu_1\in I\!N$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{1}{2}<|q_\nu|<\frac{3}{2} \qquad (2)$$

όπου $q_\nu=\alpha_{\nu_1+1}\alpha_{\nu_1+2}\ldots\alpha_\nu$. Αυτό σημαίνει ότι αν η $q_\nu,\nu\in I\!N$ συγκλίνει, θα συγκλίνει σε μη μηδενικό όριο. Για να αποδείξουμε ότι συγκλίνει, παρατηρούμε από την (1) ότι υπάρχει $\nu_0\in I\!N$ τέτοιος ώστε:

$$\left|\frac{q_{\nu+k}}{q_\nu}-1\right|<\frac{\epsilon}{3}.$$

Από αυτήν με την βοήθεια της (2) αν $\nu_2=max\{\nu_0,\nu_1\}$ παίρνουμε ότι:

$$|q_{\nu+k}-q_\nu|<\frac{\epsilon}{3}|q_\nu|<\frac{\epsilon}{3}.\frac{3}{2}<\epsilon,\forall\nu>\nu_2.$$

Δηλ. η $q_\nu,\nu\in I\!N$ είναι ακολουθία του Cauchy και άρα συγκλίνει. Επομένως το απειρογινόμενο συγκλίνει. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατήρηση 2.95

Θέτοντας $k = 1$ στην (1) του παραπάνω Θεωρήματος, έχουμε ότι αν το $\prod_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει, τότε $limp_\nu = 1$. Γι' αυτό συνήθως γράφουμε $\alpha_\nu = 1+u_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε $\prod_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1+u_\nu)$ και αν το $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+u_\nu)$ συγκλίνει τότε $limu_\nu = 0$. **Αυτό αποτελεί μια αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνει το** $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+u_\nu)$. **Είναι η** $limu_\nu = 0$. Αυτή δεν είναι και ικανή, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με το Παράδειγμα 2.93 όπου το $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)$ αποκλίνει, ενώ $lim\frac{1}{\nu} = 0$.

Το επόμενο Θεώρημα συσχετίζει το απειρογινόμενο $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+u_\nu)$ και την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$.

Θεώρημα 2.96 Έστω $u_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$. **Τότε το απειρογινόμενο** $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+u_\nu)$ **συγκλίνει, αν και μόνον αν, η σειρά** $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ **συγκλίνει.**

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ συγκλίνει. Έστω $\sigma_\nu = u_1 + u_2 + \ldots + u_\nu$, $p_\nu = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_\nu)$ οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων και γινομένων αντίστοιχα. Επειδή[2] $e^x \geq 1+x, \forall x > 0$ θα έχουμε:

$$p_\nu = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_\nu) \leq e^{u_1}.e^{u_2}.\ldots.e^{u_\nu} = e^{\sigma_\nu}, \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Δηλ. η p_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη. Επειδή όμως είναι και αύξουσα $\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} > 1$ θα συγκλίνει σε κάποιο όριο p, που προφανώς είναι $p \geq 1$. Έτσι λοιπόν το $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+u_\nu)$ συγκλίνει.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+u_\nu)$ συγκλίνει. Τότε $limp_\nu = p$ και $p_\nu \leq p, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Επειδή όμως

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_\nu) > 1+u_1+u_2+\ldots+u_\nu$$

(άσκηση 0.2γ) θα έχουμε: $1+\sigma_\nu \leq p_\nu \leq p, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι η $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη και επειδή $u_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$, από το Θεώρημα 2.18 η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ συγκλίνει. •

Ορισμός 2.97 Θα λέμε ότι το απειρογινόμενο $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+u_\nu)$ **συγκλίνει απόλυτα, αν το απειρογινόμενο** $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+|u_\nu|)$ **συγκλίνει.**

Θεώρημα 2.98 Αν ένα απειρογινόμενο συγκλίνει απόλυτα, τότε αυτό συγκλίνει.

---

[2] $e^x = lim\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^\nu \geq lim\left(1+\nu.\frac{x}{\nu}\right) = 1+x.$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι το απειρογινόμενο $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+u_\nu)$ συγκλίνει απόλυτα. Τότε από το Θεώρημα 2.94 θα έχουμε:

$$|(1+|u_{\nu+1}|)(1+|u_{\nu+2}|)\dots(1+|u_{\nu+k}|)-1|<\epsilon.$$

Αλλά

$$\begin{aligned}
|(1 &+ u_{\nu+1})(1+u_{\nu+2})\dots(1+u_{\nu+k})-1| \\
&= |u_{\nu+1}+u_{\nu+2}+\dots+u_{\nu+k}+\dots+u_{\nu+1}.u_{\nu+2}\dots u_{\nu+k}| \\
&\le |u_{\nu+1}|+|u_{\nu+2}|+\dots+|u_{\nu+k}|+\dots+|u_{\nu+1}||u_{\nu+2}|\dots|u_{\nu+k}| \\
&= (1+|u_{\nu+1}|)(1+|u_{\nu+2}|)\dots(1+|u_{\nu+k}|)-1 \\
&= |(1+|u_{\nu+1}|)(1+|u_{\nu+2}|)\dots(1+|u_{\nu+k}|)-1|<\epsilon.
\end{aligned}$$

που σημαίνει από το Θεώρημα 2.94 ότι το $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+|u_\nu|)$ συγκλίνει. •

Πόρισμα. Το $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+u_\nu)$ συγκλίνει απόλυτα, αν και μόνον αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ συγκλίνει απόλυτα.

Παράδειγμα 2.99

Το απειρογινόμενο $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\omega^{2\nu}), |\omega|<1$ συγκλίνει απόλυτα, αφού η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\omega^{2\nu}$ συγκλίνει απόλυτα.

ΑΣΚΗΣΗ

2.30 Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha)\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{\nu(\nu+1)}\right)=\frac{1}{3}\quad \beta)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{(\nu+1)^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$\gamma)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\right)=1\quad \delta)\prod_{\nu=2}^{\infty}\frac{\nu^3-1}{\nu^3+1}=\frac{2}{3}.$$

§ 2.13 ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Έστω $\alpha_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Οι σειρές της μορφής $\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu x^\nu, x\in R$ παίζουν έναν πολύ σημαντικό ρόλο στην Ανάλυση και λέγονται **δυναμοσειρές**. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η γεωμετρική σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty}x^\nu$ με $x\in R$ που είδαμε ότι συγκλίνει αν $|x|<1$, απειρίζεται θετικά αν $|x|\ge 1$ και αποκλίνει αν $x\le -1$. (Εφαρμογή 2 της § 2.2)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Γενικά, για κάθε δυναμοσειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ μπορεί να οριστεί ακριβώς ένα διάστημα με κέντρο το 0, τέτοιο ώστε για κάθε x που βρίσκεται σ' αυτό να συγκλίνει, ενώ για τα σημεία που βρίσκονται έξω από αυτό να μην συγκλίνει. Στα άκρα του διαστήματος μπορεί να συγκλίνει ή και να μην συγκλίνει.

Πιο αναλυτικά τώρα έχουμε:

Ορισμός 2.100 **Μια σειρά της μορφής $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ με $a_\nu, \nu \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x \in \mathbf{R}$ λέγεται δυναμοσειρά ή ακεραία σειρά.**

Θεώρημα 2.101 (Θεώρημα Cauchy-Hadamard) **Έστω $a_\nu, \nu \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε:**

i) Αν $\lim \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 0$, η δυναμοσειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ συγκλίνει απόλυτα $\forall x \in \mathbf{R}$.

ii) Αν $\lim \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \ell$, η δυναμοσειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ συγκλίνει απόλυτα για $|x| < \frac{1}{|\ell|}$ και απειρίζεται θετικά αν $|x| > \frac{1}{|\ell|}$.

iii) Αν $\lim \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = +\infty$, η δυναμοσειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ συγκλίνει μόνο για $x = 0$ και δεν συγκλίνει αν $x \neq 0$.

Απόδειξη

Είναι $\sqrt[\nu]{|a_\nu x^\nu|} = |x| \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$. Αν $\gamma_\nu = a_\nu x^\nu$ από το κριτήριο της ν-οστής ρίζας του Cauchy (Θεώρημα 2.34) ξέρουμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu$ συγκλίνει αν, $lim \sqrt[\nu]{|\gamma_\nu|} \leq k < 1$ και απειρίζεται θετικά αν $lim \sqrt[\nu]{|\gamma_\nu|} > 1$. Συνεπώς έχουμε:

i) Αν $lim \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 0$ τότε $lim \sqrt[\nu]{|\gamma_\nu|} = lim |x| \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 0 < 1$ και άρα η σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ συγκλίνει απόλυτα.

ii) Αν $lim \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \ell > 0$ τότε $lim \sqrt[\nu]{|\gamma_\nu|} = lim |x| \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = |\ell x|$. Άρα η σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ συγκλίνει αν $|\ell x| < 1$ ή $|x| < \frac{1}{|\ell|}$ και απειρίζεται θετικά αν $|x| > \frac{1}{|\ell|}$.

iii) Αν $lim \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = +\infty$ τότε $lim \sqrt[\nu]{|\gamma_\nu|} = +\infty$ αν $x \neq 0$ οπότε η σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ δεν συγκλίνει. Αν $x = 0$ τότε όλοι οι όροι της σειράς, εκτός από τον a_0 μηδενίζονται και άρα η σειρά συγκλίνει. •

Παρατήρηση 2.102

Αν $\rho = lim \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ και $0 < \rho < +\infty$, τότε ο θετικός αριθμός $R = \frac{1}{\rho}$ λέγεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς και το διάστημα $(-R, R)$ **διάστημα σύγκλισης** της δυναμοσειράς. Αν $\rho = 0$ τότε ορίζουμε διάστημα σύγκλισης το R και ακτίνα σύγκλισης το $+\infty$. Αν $\rho = +\infty$ ορίζουμε ακτίνα σύγκλισης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

το 0. Σ' αυτήν την περίπτωση το διάστημα σύγκλισης είναι κενό (δηλ. διάστημα που τα άκρα του συμπίπτουν με το 0).

Παρατήρηση 2.103

Πιο γενικά ορίζουμε ως δυναμοσειρά κάθε σειρά της μορφής $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu (x - x_0)^\nu$ με x_0 σταθερό και $x \in R$. Τότε το x_0 λέγεται **κέντρο σύγκλισης** της δυναμοσειράς. Με τον μετασχηματισμό $x - x_0 = t$ δηλ. μια μεταφορά στον άξονα Ox, η παραπάνω δυναμοσειρά ανάγεται στην $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu t^\nu$. Γι' αυτό δεν βλάπτει την γενικότητα να θεωρούμε την πιο ειδική μορφή $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu$ με κέντρο το 0.

Παρατήρηση 2.104

Όπως ξέρουμε από τις ακολουθίες (Εφαρμογή 3 της § 1.12) αν $lim|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}| = \ell$ τότε και $lim\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = \ell$ χωρίς να ισχύει το αντίστροφο. Συνεπώς αν το $lim|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}|$ υπάρχει η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu$ είναι η $R = lim\left|\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}\right|$.

Παράδειγμα 2.105

Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\sqrt[\nu]{\nu} - 1)^\nu x^\nu$. Τότε έχουμε: $lim\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = lim(\sqrt[\nu]{\nu} - 1) = 0$. Άρα (Θεώρημα 2.101i) η δυναμοσειρά συγκλίνει $\forall x \in R$. Είναι $R = +\infty$ και διάστημα σύγκλισης το $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 2.106

Για την δυναμοσειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu}$ έχουμε: $lim\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = lim\frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu}} = 1$. Άρα (Θεώρημα 2.101ii)) η δυναμοσειρά συγκλίνει αν $|x| < 1$ και απειρίζεται θετικά αν $|x| > 1$. Για $|x| = 1$ το θεώρημα δεν δίνει απάντηση. Τότε όμως για $x = 1$ έχουμε την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ που απειρίζεται θετικά, ενώ για $x = -1$ έχουμε την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{\nu}$ που συγκλίνει (Κριτήριο Leibnitz, Θεώρημα 2.49).

Έτσι λοιπόν έχουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1$ και το διάστημα σύγκλισης το $[-1, 1)$.

Παράδειγμα 2.107

Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\nu x^\nu$. Τότε $lim\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = \lim \nu = +\infty$. Άρα (Θεώρημα 2.101iii)) η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνον για $x = 0$ στον αριθμό 1.

Παράδειγμα 2.108

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για την δυναμοσειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu^2+1}$ έχουμε $lim\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = 1$. Άρα συγκλίνει για $|x| < 1$. Για $|x| = 1$ έχουμε την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu \frac{1}{\nu^2+1}$, η οποία συγκλίνει απόλυτα, αφού $|(-1)^\nu \frac{1}{\nu^2+1}| = \frac{1}{\nu^2+1} < \frac{1}{\nu^2}, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Συνεπώς το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1]$.

ΑΣΚΗΣΗ

2.31 Να βρεθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu$ αν:

$\alpha)\alpha_\nu = \nu \quad \beta)\alpha_\nu = \frac{1}{log(\nu+1)} \quad \gamma)\alpha_\nu = 2^\nu$

$\delta)\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^{1+1/\nu}} \quad \epsilon)\alpha_\nu = \frac{1}{2^\nu} sin\frac{\nu\pi}{6} \quad \sigma\tau)\alpha_\nu = \frac{(2\nu)^\nu}{(\nu+1)^{\nu+1}}$

§ 2.14 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

σωστό ή λάθος;

1 Αν $lim\alpha_\nu = 0$ τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει.

2 Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \ell$ τότε $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu = \ell + \alpha_0$.

3 Αν $\alpha_\nu = \beta_\nu - \beta_{\nu+1}$ και $lim\beta_\nu = 0$ τότε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \beta_1$.

4 Αν $|r| < 1$ τότε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha r^\nu = \frac{\alpha}{1-r}$.

5 Αν $lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \ell$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < +\infty$ τότε και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty$.

6 Αν $0 \le \alpha_\nu \le \beta_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty$ τότε και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < +\infty$.

7 Αν $0 \le \alpha_\nu \le \beta_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty$ τότε και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = +\infty$.

8 Αν $\frac{1}{\nu} \le k\alpha_\nu$ τότε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty$.

9 Αν $\beta_\nu \le \alpha_\nu \le 0$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < +\infty$ τότε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty$.

10 Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \frac{1}{\nu}$ είναι εναλλασόμενη.

11 Αν $0 < \alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu, \forall \nu > 100$ και $lim\alpha_\nu = 0$ τότε $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu \alpha_\nu < +\infty$.

12 Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty$ τότε και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2 < +\infty$.

13 Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2 < +\infty$ τότε και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty$.

14 Αν $\alpha_\nu - \beta_\nu \to 0$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < +\infty$ τότε και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

15 Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu < +\infty$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu < +\infty$ και $\alpha_\nu \le \beta_\nu \le \gamma_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ τότε και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu < +\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.32 Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ με

$$\alpha)\quad \alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)^{-\nu^{3/2}} \qquad \beta)\quad \alpha_\nu = \frac{1}{\nu^\nu}$$

2.33 Να αποδείξετε ότι η σειρά

$$1+\frac{1}{2^\beta}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\beta}+\frac{1}{5^\alpha}+\dots$$

συγκλίνει αν $\alpha > \beta > 1$, αλλά ούτε το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert ούτε το κριτήριο της ν-οστής ρίζας του Cauchy εφαρμόζονται.

2.34 Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$\alpha)$ $\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu-(-1)^\nu}$.

$\beta)$ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ με $\alpha_\nu = \begin{cases} (\nu-1)^{2-\nu}, & \nu \text{ περιττός} \\ \nu^{-\nu}, & \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$

$\gamma)$ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{5+(-1)^\nu}{2}\right\}^{-\nu}$

2.35 Είναι οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\left[\frac{1}{\sqrt{\nu}}+\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\right]$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu+1}-\frac{\nu+1}{\nu}\right]^{-\nu}$ συγκλίνουσες;

2.36 Να αποδείξετε ότι $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\beta_\nu < +\infty$ αν:

α) $lim\alpha_\nu = 0$.

β) $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu| < +\infty$.

γ) $|\beta_k+\beta_{k+1}+\dots+\beta_\nu| < M, \nu = k, k+1, \dots$.

Να εξετάσετε αν η σειρά $\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{sin\nu\theta}{\nu+(-1)^\nu}$, $\theta \neq 2k\pi$ συγκλίνει.

2.37 Δίνεται η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ με $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Έστω ακόμα ότι

$$lim\frac{\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_\nu}{\nu} = \ell \in R$$

και $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\beta_\nu = \alpha_1+2\alpha_2+\dots+\nu\alpha_\nu$. Να αποδείξετε ότι αν $lim\frac{\beta_\nu}{\nu} = 0$ τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2.38 Αν $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ με

$$\beta_\nu = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + \nu\alpha_\nu}{\nu(\nu+1)}$$

συγκλίνει και μάλιστα στον ίδιο πραγματικό αριθμό.

2.39 Αν $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ακολουθία β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\beta_\nu > 0, \forall \nu \in N$ και $\beta_\nu \to 0$ τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu$ να απειρίζεται θετικά.

2.40 Δίνεται η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}$$

όπου $\beta_\nu \geq 0$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι το $lim\alpha_\nu$ υπάρχει αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνει.

2.41 Αν $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει, τότε να αποδείξετε ότι και οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_\nu \alpha_{\nu+1}}$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha_\nu}}{\nu^2}$ συγκλίνουν.

2.42 Έστω $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ μια συγκλίνουσα σειρά. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$\beta_\nu = \alpha_1 cos\beta_1 + \alpha_2 cos\beta_2 + \ldots + \alpha_\nu cos\beta_\nu$$

συγκλίνει.

2.43 Να βρήτε συνθήκες μεταξύ των α και β ώστε η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2 + sin\frac{\nu\pi}{6}}{(\nu+1)^\alpha (\nu-1)^\beta}$$

να συγκλίνει.

2.44 Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty$ τότε να αποδείξετε ότι και η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu)^{\frac{\nu}{\nu+1}}$$

συγκλίνει.

2.45 Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < +\infty$ τότε να αποδείξετε ότι $lim_{\nu\to\infty} \sum_{k=\nu}^{\infty} \alpha_k = 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

2.46 Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

α) $1+\alpha+\alpha\beta+\alpha^2\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^2+\alpha^3\beta^3+\ldots$.

β) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{\log\nu}}$

γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{\alpha}(\sqrt{\nu+1}-2\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu-1})$.

δ) $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\cos\frac{1}{\nu}$.

2.47 **(Δεύτερο λογαριθμικό κριτήριο).** Αν για την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu, \alpha_\nu > 0, \forall\nu\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$\lim\frac{\log\frac{1}{\nu\alpha_\nu}}{\log(\log\nu)}=\ell\in\mathbb{R}$$

τότε να αποδείξετε ότι η σειρά συγκλίνει αν $\ell>1$ και απειρίζεται θετικά αν $\ell<1$.

Να γίνει εφαρμογή στην σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+\frac{1}{\log\nu}}}$.

2.48 **(Κριτήριο του Bertrand)** Αν για την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu, \alpha_\nu>0, \forall\nu\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$\lim(\log\nu)\left[\nu\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}-1\right)-1\right]=\ell\in\mathbb{R}$$

τότε να αποδείξετε ότι η σειρά συγκλίνει αν $\ell>1$ και απειρίζεται θετικά αν $\ell<1$.

2.49 Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\alpha\nu)^\nu}{\nu!}$$

συγκλίνει.

2.50 Να εξετάσετε ως πρός τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ με:

1) $\alpha_\nu=\begin{cases}2^{-\nu-\sqrt{\nu}}, & \nu \text{ άρτιος}\\ 2^{-\nu+\sqrt{\nu}}, & \nu \text{ περιττός}\end{cases}$

2) $\alpha_{2\nu-1}=\lambda^\nu,\quad \alpha_{2\nu}=k^\nu\lambda^\nu, 1<k<\frac{1}{\lambda}$.

2.51 Να αποδείξετε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu}{\nu^2}$$

είναι ακολουθία του Cauchy.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2.52 Μια συνάρτηση $d : M \times M \to [0, \infty)$ θα λέγεται μετρική αν:

(I) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(II) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M.$

(III) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M.$

1) Να αποδείξετε ότι η

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

είναι μετρική στο $\mathbb{R}$.

2) Συμβολίζουμε με ℓ^1 το σύνολο όλων των ακολουθιών α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιων ώστε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ να συγκλίνει απόλυτα.

Να αποδείξετε ότι η

$$d(\alpha_\nu, \beta_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu - \beta_\nu|$$

ορίζει μια μετρική στο ℓ^1.

3) Να αποδείξετε ότι η

$$d(\alpha_\nu, \beta_\nu) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu - \beta_\nu)^2}$$

ορίζει μια μετρική στο ℓ^2. (Ο ℓ^2 ορίστηκε στην εφαρμογή της §2.7).

4) Έστω H^∞ το σύνολο όλων των ακολουθιών α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιων ώστε $|\alpha_\nu| \leq 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Να αποδείξετε ότι η

$$d(\alpha_\nu, \beta_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\alpha_\nu - \beta_\nu|}{2^\nu}$$

ορίζει μια μετρική στον H^∞.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

όριο συνάρτησης 3

§ 3.1 ΓΕΝΙΚΑ

Στο Κεφάλαιο 1 ορίσαμε το όριο μιας ακολουθίας. Στο Κεφάλαιο αυτό θα επεκτείνουμε την έννοια του ορίου στις συναρτήσεις γενικά, δηλαδή σε συναρτήσεις που το πεδίο ορισμού δεν είναι το $\mathbb{N}$, αλλά οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θα ασχοληθούμε με πραγματικές συναρτήσεις, πραγματικής μεταβλητής, δηλαδή συναρτήσεις που το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών τους είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Η έννοια του ορίου είναι η σπουδαιότερη, αλλά και η βασικότερη της Μαθηματικής Ανάλυσης. Είναι το θεμέλιό της και πάνω σ' αυτήν στηρίζονται οι έννοιες της συνέχειας και της παραγώγου που θα ακολουθήσουν.

Στο Κεφάλαιο 1 ορίσαμε επίσης την έννοια, της περιοχής ενός πραγματικού αριθμού. Υπενθυμίζουμε ότι αν $\xi \in \mathbb{R}$ τότε η **περιοχή** του ξ ορίζεται να είναι

$$N_\delta(\xi) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \delta\},$$

όπου δ θετικός πραγματικός αριθμός και η **δακτυλική** περιοχή

$$N_\delta^*(\xi) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - \xi| < \delta\}.$$

Είναι προφανή τα εξής:

$$N_\delta(\xi) = (\xi - \delta, \xi + \delta)$$

$$N_\delta^*(\xi) = N_\delta(\xi) - \{\xi\} = (\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta).$$

Θα επεκτείνουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών ως εξής: Αν A είναι ένα υποσύνολο πραγματικών αριθμών το οποίο δεν είναι άνω φραγμένο, γράφουμε

$$sup A = +\infty,$$

και αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο γράφουμε

$$inf A = -\infty.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έτσι εισάγονται δυο σύμβολα, $-\infty$, $+\infty$. Το σύνολο

$$\tilde{I\!R} = \{-\infty\} \cup I\!R \cup \{+\infty\}$$

λέγεται **γενικευμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών.** Εισάγουμε την διάταξη στο $\tilde{I\!R}$ ως εξής:α) $-\infty < +\infty$. β) Αν $x \in I\!R$ τότε $-\infty < x < +\infty$. γ) Αν x, y είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, τότε αυτοί έχουν διάταξη στο $\tilde{I\!R}$ όπως ακριβώς και στο $I\!R$.

Επίσης ορίζουμε την **δεξιά περιοχή του** ξ

$$N_{\delta+}(\xi) = [\xi, \xi + \delta) = \{x \in I\!R : \xi \leq x < \xi + \delta\}$$

και την **αριστερή περιοχή του** ξ

$$N_{\delta-}(\xi) = (\xi - \delta, \xi] = \{x \in I\!R : \xi - \delta < x \leq \xi\}.$$

Αυτές λέγονται **πλευρικές περιοχές του** ξ. Οι αντίστοιχες δακτυλικές πλευρικές περιοχές του ξ ορίζονται ως εξής:

$$N^*_{\delta+}(\xi) = (\xi, \xi + \delta) = \{x \in I\!R : \xi < x < \xi + \delta\}$$

και

$$N^*_{\delta-}(\xi) = (\xi - \delta, \xi) = \{x \in I\!R : \xi - \delta < x < \xi\}.$$

Θα επεκτείνουμε τις έννοιες αυτές και στην περίπτωση των κατ' εκδοχή σημείων $-\infty$ και $+\infty$. Έτσι:

Περιοχή του $+\infty$ $\mathbf{N(+\infty)}$ **(αντίστοιχα του** $-\infty$ $\mathbf{N(-\infty)}$**) θα λέμε κάθε υποσύνολο του** $\tilde{\mathbf{R}}$ **της μορφής**

$$\mathbf{N(+\infty) = \{x \in \tilde{R} : x > \alpha\}}$$

$$\mathbf{(αντίστοιχα \quad N(-\infty) = \{x \in \tilde{R} : x < \alpha\})}$$

όπου α **κάποιος πραγματικός αριθμός.** Προφανώς

$$N(+\infty) = \{+\infty\} \cup (\alpha, +\infty)$$

και

$$N(-\infty) = \{-\infty\} \cup (-\infty, \alpha).$$

Οι δακτυλικές περιοχές του $\pm\infty$ ορίζονται ως εξής:

$$N^*(+\infty) = \{x \in I\!R : x > \alpha\} = (\alpha, +\infty)$$

και

$$N^*(-\infty) = \{x \in I\!R : x < \alpha\} = (-\infty, \alpha)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Αυτές είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Επίσης θα χρειαστούμε και την έννοια του σημείου συσσωρεύσεως ενός συνόλου που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 1.

Ένας πραγματικός αριθμός ξ θα λέγεται σημείο συσσωρεύσεως ενός συνόλου $A \subseteq \mathbf{R}$ αν κάθε δακτυλική περιοχή του ξ περιέχει σημεία του A, δηλ.

$$\mathbf{N}^*_\delta(\xi) \cap \mathbf{A} \neq \emptyset, \forall \delta > \mathbf{0}.$$

Όταν ένα σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x_1 \in A$ με $x_1 > \alpha$. Στην γλώσσα των περιοχών του $+\infty$ αυτό λέει ότι κάθε δακτυλική περιοχή του $+\infty$ περιέχει σημεία του A. Μ' αυτήν την έννοια, αν και το $+\infty$ δεν είναι σημείο του $\mathbb{R}$, μπορεί να ειδωθεί σαν σημείο συσσωρεύσεως του A. Όμοια αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο το $-\infty$ μπορεί να ειδωθεί σαν σημείο συσσωρεύσεως του A. Πολλές φορές αυτά λέγονται γενικευμένα σημεία συσσωρεύσεως του A.

Ένας πραγματικός αριθμός ξ θα λέγεται σημείο συσσωρεύσεως από αριστερά, αν και μόνον αν, κάθε δακτυλική περιοχή $(\xi - \delta, \xi)$ του ξ περιέχει σημεία του A και θα λέγεται σημείο συσσωρεύσεως από δεξιά, αν και μόνον αν, κάθε δακτυλική περιοχή $(\xi, \xi + \delta)$ του ξ περιέχει σημεία του A.

Έχοντας υπόψη και την εφαρμογή 1α της §1.10 μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω γενικό ορισμό:

Ορισμός 3.1 Ένα σημείο ξ θα λέγεται σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού $\Delta(f)$ μιας συνάρτησης f, αν υπάρχει ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ στοιχείων του $\Delta(f) - \{\xi\}$ τέτοια ώστε: $\lim x_\nu = \xi$.

Παρατήρηση 3.2

Στον παραπάνω ορισμό το ξ μπορεί να είναι ένα από τα κατ' εκδοχή σημεία $-\infty$ ή $+\infty$, δηλ. $\xi \in \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

§ 3.2 ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\Delta(f)$. Αν θεωρήσουμε μια ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ από το $\Delta(f)$ τότε η ακολουθία :

$$f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_\nu)$$

λέγεται **ακολουθία των τιμών της f, η αντίστοιχη της x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$.**

Έστω τώρα μια οποιαδήποτε ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ από το $\Delta(f)$, $x_\nu \neq \xi, \forall \nu \in \mathbb{N}$, όπου ξ σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$. Όπως έχουμε ξαναπεί μπορεί το $\xi \in \Delta(f)$ ή $\xi \notin \Delta(f)$. Τότε έχουμε το ακόλουθο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 3.3 Έστω ξ σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού $\Delta(\mathbf{f})$ μιας συνάρτησης $\mathbf{f}$. Αν για κάθε ακολουθία $\mathbf{x}_\nu$, $\nu \in \mathbf{N}$ με $\mathbf{x}_\nu \in \Delta(\mathbf{f}) - \{\xi\}$ και $\lim \mathbf{x}_\nu = \xi$, η αντίστοιχη ακολουθία $\mathbf{f}(\mathbf{x}_\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$ των τιμών της $\mathbf{f}$ συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει σε ένα και μοναδικό όριο.

Απόδειξη

Έστω x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ και y_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δυο τυχαίες ακολουθίες από το $\Delta(f)$ με $x_\nu \neq \xi$, $y_\nu \neq \xi$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\lim x_\nu = \xi$, $\lim y_\nu = \xi$. Ας είναι $f(x_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $f(y_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ οι αντίστοιχες ακολουθίες των τιμών της f με $\lim f(x_\nu) = \ell_1$, $\lim f(y_\nu) = \ell_2$. Αφού $x_\nu \to \xi$, $y_\nu \to \xi$ τότε η ακολουθία

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_\nu, y_\nu, \ldots$$

συγκλίνει στο ξ (εφαρμογή 1 της § 1.5). Ας ονομάσουμε ω_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ την παραπάνω ακολουθία και $f(\omega_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ την αντίστοιχη ακολουθία τιμών της f, δηλαδή την ακολουθία

$$f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots, f(x_\nu), f(y_\nu), \ldots$$

Αν $\lim f(\omega_\nu) = \ell_3$, τότε αφού οι $f(x_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $f(y_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι υπακολουθίες της $f(\omega_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ θα είναι $\ell_1 = \ell_3$ και $\ell_2 = \ell_3$. Συνεπώς $\ell_1 = \ell_2$ και άρα όλες οι ακολουθίες $f(x_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο. •

Δίνουμε τον παρακάτω γενικό ορισμό, γνωστό ως **ακολουθιακό ορισμό της σύγκλισης** που οφείλεται στον Heine.

Ορισμός 3.4 Έστω ξ σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού $\Delta(\mathbf{f})$ μιας συνάρτησης $\mathbf{f}$. Θα λέμε ότι η $\mathbf{f}$ έχει όριο το $\ell \in \tilde{\mathbf{R}}$, όταν το $\mathbf{x}$ τείνει στο ξ και θα γράφουμε

$$\lim_{\mathbf{x} \to \xi} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell$$

αν και μόνον αν, για όλες τις ακολουθίες $\mathbf{x}_\nu$, $\nu \in \mathbf{N}$ από το $\Delta(\mathbf{f}) - \{\xi\}$ που συγκλίνουν στο ξ, η αντίστοιχη ακολουθία των τιμών της συνάρτησης $\mathbf{f}(\mathbf{x}_\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$ συγκλίνει στο ℓ.

Παρατήρηση 3.5

Συμβολικά ο ορισμός 3.4 διατυπώνεται ως εξής:

$$\lim_{x \to \xi \in \tilde{R}} f(x) = \ell \in \tilde{R} \Leftrightarrow (\forall x_\nu, \nu \in \mathbb{N}, x_\nu \in \Delta(f) - \{\xi\}, x_\nu \to \xi)$$

$$\Rightarrow f(x_\nu) \to \ell.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατήρηση 3.6

Όταν στον Ορισμό 3.4 λέμε ότι $x \to \xi$ εννοούμε ότι το x πλησιάζει το ξ δηλαδή η απόσταση $|x - \xi|$ γίνεται συνεχώς και γειτονοκότερη του μηδενός, χωρίς όμως ποτέ να γίνει ίση με μηδέν. Κατά συνέπεια ο συμβολισμός $\lim_{x \to \xi} f(x)$ δεν σημαίνει ότι πρέπει να βάλουμε όπου x το ξ στον τύπο της συνάρτησης, αν και πολλές φορές τυχαίνει να είναι $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.

Παρατήρηση 3.7

Απαιτούμε στον Ορισμό 3.4 το ξ να είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$. Μπορεί δηλαδή η συνάρτηση f να μην ορίζεται στο ξ. Για να έχει νόημα η σύγκλιση για $x \to \xi \in \mathbb{R}$ πρέπει η f να ορίζεται τουλάχιστο σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, \xi) \cup (\xi, \beta) \subseteq \Delta(f)$. Όμοια για να έχει νόημα η σύγκλιση για $x \to +\infty$ πρέπει η f να ορίζεται τουλάχιστο σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty) \subseteq \Delta(f)$. Όμοια για $x \to -\infty$ πρέπει η f να ορίζεται τουλάχιστο σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha) \subseteq \Delta(f)$.

Αν το ξ είναι μεμονωμένο σημείο του Δ(f), τότε δεν έχει νόημα η έκφραση $\lim_{x \to \xi} f(x)$. Γι' αυτό, σαν παράδειγμα, στις ακολουθίες εξετάζουμε το όριο μόνον όταν $\nu \to +\infty$, γιατί το $+\infty$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathbb{N}$, ενώ όλα τα άλλα σημεία του είναι μεμονωμένα.

Παρατήρηση 3.8

Οι ακολουθίες που παίρνουμε από το $\Delta(f)$ δεν είναι κάποιες ειδικές. Θα πρέπει για κάθε ακολουθία να συμβαίνει ό,τι λέει ο ορισμός, αρκεί μόνον $x_\nu \neq \xi, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Αυτό δίνει και μια **ικανή συνθήκη για να μην υπάρχει το $\lim_{x \to \xi} f(x)$: Αν για δυο ακολουθίες $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ από το $\Delta(f) - \{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$ και $y_\nu \to \xi$ είναι $\lim f(x_\nu) \neq \lim f(y_\nu)$ τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \to \xi} f(x)$.**

Παράδειγμα 3.9

Έστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1] \cap I \\ 0, & x \in [-1, 1] \cap Q \end{cases}$$

Τότε το $\xi = 0$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $[-1, 1]$. Έστω $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ ακολουθία ρητών, $x_\nu \in [-1, 1], x_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\lim x_\nu = 0$. Έχουμε $\lim f(x_\nu) = 0$, αφού $f(x_\nu) = 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Αν τώρα $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία άρρητων, $y_\nu \in [-1, 1], y_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\lim y_\nu = 0$ τότε $\lim f(y_\nu) = 1$, αφού $f(y_\nu) = 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι το $\lim_{x \to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 3.10

Έστω $f : (-1, 0) \cup (0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x sin\frac{1}{x}$. Τότε το $\xi = 0$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $(-1, 0) \cup (0, 1]$. Έστω $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ τυχούσα ακολουθία τέτοια ώστε $x_\nu \in (-1, 0) \cup (0, 1], \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\lim x_\nu = 0$. Τότε $\lim f(x_\nu) = \lim x_\nu sin\frac{1}{x_\nu} = 0$ (γινόμενο μηδενικής επί φραγμένη, αφού $|sin\frac{1}{x_\nu}| \leq 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$). Συνεπώς $\lim_{x\to 0} x sin\frac{1}{x} = 0$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις έννοιες του από αριστερά και του από δεξιά σημείου συσσωρεύσεως, μπορούμε να ορίσουμε το όριο της f από αριστερά στο ξ, που θα το συμβολίζουμε με $\lim_{x\to\xi-} f(x)$, και το όριο της f από δεξιά στο ξ, που θα το συμβολίζουμε με $\lim_{x\to\xi+} f(x)$. Αυτά τα όρια τα λέμε **πλευρικά όρια** της f. Είναι προφανές ότι για να μιλάμε για πλευρικά όρια στο ξ πρέπει $\xi \in \mathbb{R}$. Αν $\xi = +\infty$ εννοούμε το όριο από αριστερά, ενώ αν $\xi = -\infty$ εννοούμε το όριο από δεξιά.

Ορισμός 3.11. Έστω ξ σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού $\Delta(f)$ μιας συνάρτησης f. Θα λέμε ότι η f έχει όριο το $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$, στο σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ από αριστερά (αντίστοιχα από δεξιά) αν και μόνον αν, για κάθε ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ από το $\Delta(f) - \{\xi\}$ τέτοια ώστε $x_\nu < \xi, \forall \nu \in \mathbb{N}$ (αντίστοιχα $x_\nu > \xi, \forall \nu \in \mathbb{N}$) και $\lim x_\nu = \xi$, η αντίστοιχη ακολουθία των τιμών της συνάρτησης $f(x_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στο ℓ. Θα το συμβολίζουμε με $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ (αντίστοιχα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$).

Παράδειγμα 3.12

Έστω $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Το $\xi = 1$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $[0, 2]$. Επειδή η συνάρτηση ορίζεται διαφορετικά αριστερά και δεξιά του 1, θα εξετάσουμε αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια της f στο 1. Έστω μια ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in [0, 1), \lim x_\nu = 1$ και $x_\nu < 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Μια τέτοια ακολουθία π.χ. είναι η $x_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}$. Τότε έχουμε $\lim x_\nu = 1$ και $\lim f(x_\nu) = -1$, αφού $f(x_\nu) = -1, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Άρα $\lim_{x\to 1-} f(x) = -1$.

Από την άλλη μεριά, έστω μια ακολουθία $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $y_\nu \in (1, 2], \lim y_\nu = 1$ και $y_\nu > 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Μια τέτοια ακολουθία π.χ. είναι η $y_\nu = \frac{\nu+1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$. Τότε έχουμε $\lim y_\nu = 1$ και $\lim f(y_\nu) = 1$, αφού $f(y_\nu) = 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Άρα $\lim_{x\to 1+} f(x) = 1$.

Επειδή $\lim_{x\to 1-} f(x) \neq \lim_{x\to 1+} f(x)$ το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.

Επίσης το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει, αν ένα τουλάχιστο από τα πλευρικά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

όρια δεν υπάρχει. Αν τα πλευρικά όρια στο ξ υπάρχουν και είναι ίσα, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και αντίστροφα, αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ τότε υπάρχουν και τα πλευρικά όρια και είναι ίσα, όπως δείχνει το ακόλουθο

Θεώρημα 3.13 Αν $\xi \in \mathbf{R}$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού $\Delta(\mathbf{f})$ μιας συνάρτησης f, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to\xi} \mathbf{f(x)} = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to\xi-} \mathbf{f(x)} = \ell = \lim_{x\to\xi+} \mathbf{f(x)}.$$

Απόδειξη

α) ($\Rightarrow$) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$. Τότε από τον Ορισμό έχουμε ότι, για κάθε ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in (\alpha,\xi) \cup (\xi,\beta) \subseteq \Delta(f)$ και $x_\nu \to \xi$ είναι $\lim f(x_\nu) = \ell$. Δηλαδή, για κάθε ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in (\alpha,\xi)$ και $x_\nu \to \xi$ ισχύει $\lim f(x_\nu) = \ell$. Συνεπώς $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \ell$.

Όμοια, για κάθε ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in (\xi,\beta)$ και $x_\nu \to \xi$ ισχύει $\lim f(x_\nu) = \ell$. Συνεπώς $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \ell$.

Άρα

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi} f(x) = \ell.$$

β) ($\Leftarrow$) Έστω ότι $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$. Επειδή $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \ell$, για κάθε ακολουθία $x'_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x'_\nu \in (\alpha,\xi)$ και $x'_\nu \to \xi$ ισχύει $\lim f(x'_\nu) = \ell$. Επίσης επειδή $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \ell$, για κάθε ακολουθία $x''_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x''_\nu \in (\xi,\beta)$ και $x''_\nu \to \xi$ ισχύει $\lim f(x''_\nu) = \ell$.

Έστω τώρα τυχούσα ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in (\alpha,\xi) \cup (\xi,\beta) \subseteq \Delta(f)$ και $x_\nu \to \xi$. Υπάρχουν οι εξής δυνατές περιπτώσεις:

i) Οι όροι της $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ από έναν δείκτη και πέρα ανήκουν στο (α,ξ). Τότε όμως θα είναι μια από τις ακολουθίες $x'_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και άρα $\lim f(x_\nu) = \ell$, οπότε και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$.

ii) Οι όροι της $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ από έναν δείκτη και πέρα ανήκουν στο (ξ,β). Τότε όμως θα είναι μια από τις ακολουθίες $x''_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και άρα $\lim f(x_\nu) = \ell$, οπότε και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$.

iii) Οι όροι της $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ δεν ανήκουν τελικά ούτε στο (α,ξ) ούτε στο (ξ,β). Τότε η $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι η σύνθεση δυο υπακολουθιών της $x_k, k \in \mathbb{N}$ με $x_k \in (\alpha,\xi), \forall k > \nu_0$ και της $x_\lambda, \lambda \in \mathbb{N}$ με $x_\lambda \in (\xi,\beta), \forall \lambda > \nu'_0$. Αν $\nu_1 = max\{\nu_0, \nu'_0\}$ τότε $\forall \nu > \nu_1$ οι όροι της $x_k, k \in \mathbb{N}$ θα ανήκουν στο (α,ξ) και της $x_\lambda, \lambda \in \mathbb{N}$ στο (ξ,β). Επειδή $x_\nu \to \xi$ θα είναι $x_k \to \xi$ και $x_\lambda \to \xi$. Αλλά τότε από τις i) και ii) θα έχουμε $\lim f(x_\nu) = \ell$, οπότε και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Λύση 1η

Προφανώς το 0 είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$. Θεωρούμε την ακολουθία $x_\nu = \frac{1}{\nu\pi + \frac{\pi}{2}}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε $x_\nu \to 0$ και $f(x_\nu) = sin\frac{1}{x_\nu} = sin(\nu\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^\nu$ και το $\lim f(x_\nu)$ δεν υπάρχει (Παράδειγμα 1.34). Άρα το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Λύση 2η

Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_\nu = \frac{1}{\nu\pi}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu = \frac{2}{(1+4\nu)\pi}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε $x_\nu \to 0$ και $y_\nu \to 0$ ενώ

$$\lim f(x_\nu) = \lim sin\frac{1}{x_\nu} = \lim sin(\nu\pi) = 0$$

$$\lim f(y_\nu) = \lim sin\frac{1}{y_\nu} = \lim sin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Επειδή $\lim f(x_\nu) \neq \lim f(y_\nu)$ το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Σημείωση 1

Αν για δυο γνωστές ακολουθίες $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \to \xi$ και $y_\nu \to \xi$ είναι $\lim f(x_\nu) = \lim f(y_\nu) = \ell$, δεν συνεπάγεται ότι και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$. Και αυτό γιατί ο ορισμός απαιτεί **για κάθε ακολουθία που συγκλίνει στο ξ, η αντίστοιχη ακολουθία των τιμών της συνάρτησης να συγκλίνει στο ℓ.** Γι' αυτό το κριτήριο αυτό χρησιμοποιείται **αρνητικά.** Δηλαδή, **αν για δυο ακολουθίες που συγκλίνουν στο ξ, οι αντίστοιχες ακολουθίες των τιμών της συνάρτησης συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, τότε το όριο της f στο ξ δεν υπάρχει.** Αν όμως οι αντίστοιχες ακολουθίες των τιμών της συνάρτησης συγκλίνουν στο ίδιο όριο, τότε δεν έχουμε κανένα συμπέρασμα για την ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

Σημείωση 2

Στη λύση 2 οι ακολουθίες $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ δεν είναι τυχαίες. Είναι οι λύσεις των εξισώσεων $sin\frac{1}{x} = 0$ και $sin\frac{1}{x} = 1$. Αυτό ισχύει γενικά για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Π.χ. αν $f(x) = sin\frac{\pi}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ τότε $x_\nu = \frac{1}{4\nu^2}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu = \frac{1}{4(2\nu+\frac{1}{2})^2}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

2. Έστω $f: [\alpha, +\infty) \to \mathbf{R}$ με $f(x) = \sqrt{x-\alpha}$. Να εξετάσετε ποιές από τις παρακάτω εκφράσεις έχουν νόημα:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to\alpha} f(x), \lim_{x\to\alpha-} f(x), \lim_{x\to\alpha+} f(x).$$

Λύση

Είναι $\Delta(f) = [\alpha, +\infty)$.

Δεν έχει νόημα η έκφραση $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ αφού το $-\infty$ δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$.

Έχει νόημα η έκφραση $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ γιατί το $+\infty$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$. Αν $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in [\alpha, +\infty), x_\nu \to +\infty$ τότε $f(x_\nu) = \sqrt{x_\nu - \alpha} \to +\infty$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Δεν έχει νόημα να μιλάμε για $\lim_{x\to\alpha-} f(x)$, αφού η f δεν ορίζεται σε περιοχή αριστερά του α.

Έχει όμως νόημα η έκφραση $\lim_{x\to\alpha+} f(x)$ αφού η f ορίζεται σε περιοχή δεξιά του α και το α είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$. Έστω $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu > \alpha, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $x_\nu \to \alpha$. Τότε $f(x_\nu) \to 0$ και συνεπώς $\lim_{x\to\alpha+} f(x) = 0$. Αυτό είναι και το $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ αφού η f δεν ορίζεται αριστερά του α.

3. Έστω $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} - Q) \\ 1 - x, & x \in [0,1] \cap Q \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει μόνο για $\xi = \frac{1}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

Απόδειξη

α) Έστω $\xi = \frac{1}{2}$. Τότε αυτό είναι σημείο συσσωρεύσεως του $[0, 1]$. Αν $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι τυχούσα ακολουθία με $x_\nu \in [0, 1], x_\nu \neq \frac{1}{2}, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $x_\nu \to \frac{1}{2}$ τότε:

$$\left| f(x_\nu) - \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} |x_\nu - \frac{1}{2}|, & x_\nu \in [0,1] \cap (\mathbb{R} - Q) \\ |1 - x_\nu - \frac{1}{2}|, & x_\nu \in [0,1] \cap Q \end{cases}$$

δηλ. $|f(x_\nu) - \frac{1}{2}| = |x_\nu - \frac{1}{2}| < \epsilon, \forall \nu > \nu_0$, αφού $\lim x_\nu = \frac{1}{2}$ (Δηλ. $(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in N)(\forall \nu \in N) \nu > \nu_0 \Rightarrow |x_\nu - \frac{1}{2}| < \epsilon$). Συνεπώς $\lim f(x_\nu) = \frac{1}{2}$ και άρα $\lim_{x\to 1/2} f(x) = \frac{1}{2}$.

Αν $\xi \neq \frac{1}{2}$, αλλά $\xi \in [0, 1]$, τότε το ξ εξακολουθεί να είναι σημείο συσσωρεύσεως του $[0, 1]$. Αν $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία άρρητων με $x_\nu \to \xi$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τότε $\lim f(x_\nu) = \lim x_\nu = \xi$, ενώ αν $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία ρητών με $y_\nu \to \xi$ τότε $\lim f(y_\nu) = \lim(1 - y_\nu) = 1 - \xi$. Επειδή $\xi \neq 1 - \xi$ δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ με $\xi \neq \frac{1}{2}$.

β) Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in [0, 1]$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Ας υποθέσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε για τα x_1, x_2 υπάρχουν οι εξής δυνατότητες:

1) x_1, x_2 και οι δυο άρρητοι. Τότε είναι $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$ και άρα $x_1 = x_2$, άτοπο.

2) x_1, x_2 και οι δυο ρητοί. Τότε $f(x_1) = 1 - x_1$, $f(x_2) = 1 - x_2$ και άρα $x_1 = x_2$, πάλι άτοπο.

3) x_1 άρρητος και x_2 ρητός. Τότε $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 1 - x_2$, δηλ. $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ωστε αν $x_1 \neq x_2$ τότε και $f(x_1) \neq f(x_2)$.

4) x_1 ρητός και x_2 άρρητος. Τότε $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) \neq f(x_2)$ όπως και στην περίπτωση 3).

4. Να προσδιοριστούν οι σταθερές α και β ώστε:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 - 3x + 7} - (\alpha x + \beta)) = 0.$$

Λύση

Επειδή $x^2 - 3x + 7 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ συνεπάγεται ότι $\Delta(f) = \mathbb{R}$, όπου $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 7} - \alpha x - \beta$. Άρα το $+\infty$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$. Έστω $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \to +\infty$ και $x_\nu \in (0, +\infty)$. Τότε:

$$f(x_\nu) = \sqrt{x_\nu^2\left(1 - \frac{3}{x_\nu} + \frac{7}{x_\nu^2}\right)} - \alpha x_\nu - \beta = x_\nu\left\{\sqrt{1 - \frac{3}{x_\nu} + \frac{7}{x_\nu^2}} - \alpha - \frac{\beta}{x_\nu}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim\left\{\sqrt{1 - \frac{3}{x_\nu} + \frac{7}{x_\nu^2}} - \alpha - \frac{\beta}{x_\nu}\right\} = 1 - \alpha$ οπότε

$$\lim f(x_\nu) = (+\infty)(1 - \alpha) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 1 \\ -\infty, & \alpha > 1 \end{cases}$$

Επειδή απαιτούμε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ πρέπει αναγκαστικά $\alpha = 1$. Για $\alpha = 1$ όμως έχουμε:

$$f(x_\nu) = \sqrt{x_\nu^2 - 3x_\nu + 7} - x_\nu - \beta = \frac{(-3 - 2\beta)x_\nu + 7 - \beta^2}{\sqrt{x_\nu^2 - 3x_\nu + 7} + x_\nu + \beta}$$

$$= \frac{(-3 - 2\beta) + \frac{7-\beta^2}{x_\nu}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x_\nu} + \frac{7}{x_\nu^2}} + 1 + \frac{\beta}{x_\nu}} \to \frac{-3 - 2\beta}{2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επειδή θέλουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ πρέπει $\frac{-3-2\beta}{2} = 0$ και άρα $\beta = -\frac{3}{2}$.

Σημείωση

Γενικά αν ισχύει

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (\alpha x + \beta)] = 0$$

τότε η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι τότε:

$$\alpha = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - \alpha x].$$

Αν $\alpha = 0$ τότε η ευθεία $y = \beta$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.1 Είναι τα $A_1 = (1, +\infty)$ και $A_2 = (-3, 8) \cup (12, +\infty)$ περιοχές του $+\infty$;

3.2 Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν έχει νόημα η έκφραση $\lim_{x\to\xi} f(x)$:

$\alpha) f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-3x+2}, \xi = 1, \xi = +\infty.$

$\beta) f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{x-1}{\sqrt{1+x}}}, \xi = 2, \xi = -\infty.$

$\gamma) f(x) = log\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}, \xi = 1.$

3.3 Για την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3-x}, x \leq 3$ να εξετάσετε αν υπάρχουν τα

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x), \lim_{x\to 3-} f(x), \lim_{x\to 3+} f(x), \lim_{x\to 3} f(x).$$

3.4 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$i) \lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+x+1} + x)$$

$$ii) \lim_{x\to-\infty} \frac{sinx}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{sinx}{x}.$$

3.5 Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω όρια δεν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$:

$\alpha) \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ $\beta) \lim_{x\to 0} sin\frac{1}{x^2}$

$\gamma) \lim_{x\to 1} sin\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ $\delta) \lim_{x\to+\infty} sinx$

$\epsilon) \lim_{x\to 0} sgn(x)$ όπου $sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3.6 Να βρεθούν οι σταθερές α και β έτσι ώστε:

$$i) \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha x+\beta-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=2.$$

$$ii) \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\alpha x-\beta\right)=1.$$

3.7 Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x+1$ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}, x\in\mathbb{R}.$$

§ 3.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΚΑΤΑ CAUCHY

Θα δώσουμε στην παράγραφο αυτή έναν δεύτερο ορισμό της σύγκλισης, που είναι γνωστός ως **ορισμός του Cauchy ή $\epsilon-\delta$ (έψιλον-δέλτα) ορισμός.**

Ορισμός 3.14 **Έστω $\xi\in\mathbf{R}$ σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού $\Delta(f)$ μιας συνάρτησης f. Θα λέμε ότι η f έχει όριο το $\ell\in\mathbf{R}$ στο σημείο ξ, αν και μόνον αν, για κάθε $\epsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε, για όλα τα $x\in\Delta(f)$ με $0<|x-\xi|<\delta$ να έχουμε: $|f(x)-\ell|<\epsilon$. Συμβολικά**

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=\ell \Leftrightarrow (\forall\epsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\Delta(f))0<|x-\xi|<\delta$$

$$\Rightarrow |f(x)-\ell|<\epsilon.$$

Παρατήρηση 3.15

Ο παραπάνω Ορισμός είναι όμοιος με εκείνον της σύγκλισης ακολουθίας στο $\mathbb{R}$. Η ομοιότητα αυτή φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα αναλογίας:

Ορισμός 1.4, § 1.5	Ορισμός 3.14
$\alpha_\nu, \nu\in\mathbb{N}$	f
ν	x
α_ν	$f(x)$
ℓ	ℓ
∞	ξ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

$$\begin{array}{cc} \epsilon & \epsilon \\ \nu_0 & \delta \\ \nu > \nu_0 & 0 < |x - \xi| < \delta \end{array}$$

Παρατήρηση 3.16

Οποιαδήποτε αλλαγή στην σειρά των ποσοδεικτών $(\forall\epsilon)(\exists\delta)(\forall x)$ αλλάζει και το νόημα της πρότασης. Κάθε ποσοδείκτης εξαρτάται από τους προηγούμενούς του. Ο πραγματικός αριθμός $\delta > 0$, εξαρτάται από τον αυθαίρετο αριθμό $\epsilon > 0$. Τον δ προφανώς πρέπει εμείς να προσδιορίσουμε. αλλά για το ίδιο $\epsilon > 0$ ο δ γενικά εξαρτάται και από το σημείο ξ, μεταβαλλόμενος από σημείο σε σημείο, δηλ $\delta = \delta(\epsilon, \xi)$. Αν για κάποιο $\epsilon > 0$ βρούμε ένα δ, ώστε παίρνοντας το x από το διάστημα $0 < |x - \xi| < \delta$, δηλ. από το διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, $x \neq \xi$ να επιτυγχάνουμε $|f(x) - \ell| < \epsilon$, είναι φανερό ότι αυτό το δ αρμόζει και για οποιοδήποτε ϵ μεγαλύτερο από το αρχικό, αλλά μπορεί να μην αρμόζει για μικρότερα ϵ.

Παρατήρηση 3.17

Η ανισότητα $0 < |x - \xi| < \delta$ υποδηλώνει ότι η f δεν είναι απαραίτητο να ορίζεται στο ξ. Φανερώνει δηλαδή, ότι το ενδιαφέρον μας στρέφεται σε μια περιοχή του ξ, χωρίς να μας ενδιαφέρει τι γίνεται στο σημείο ξ. Γι' αυτό η σύγκλιση είναι μια τοπική ιδιότητα. Αν η f ορίζεται στο ξ, δεν είναι αναγκαίο να είναι $f(\xi) = \ell$.

Παρατήρηση 3.18

Με την βοήθεια των περιοχών, ο ορισμός 3.14 έχει την ακόλουθη διατύπωση:

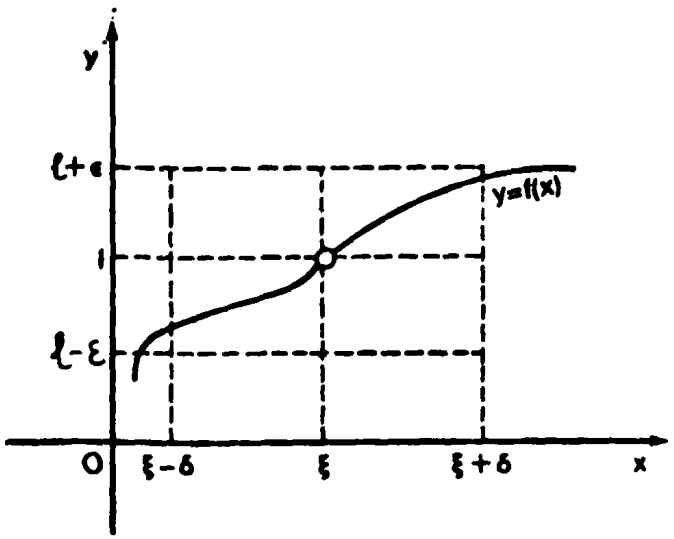
$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)\left(\forall x \in N_\delta^*(\xi) \cap \Delta(f)\right) \Rightarrow f(x) \in N_\epsilon(\ell).$$

Παρατήρηση 3.19

Η γεωμετρική ερμηνεία του Ορισμού 3.14 αποδίδεται στο επόμενο σχήμα. Δηλαδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$, αν και μόνον αν, το διάγραμμα της f, εκτός ενδεχόμενα του σημείου $(\xi, f(\xi))$, βρίσκεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ευθείες: $x = \xi - \delta, x = \xi + \delta, y = \ell - \epsilon, y = \ell + \epsilon$.



Σχήμα 3.1

Παρατήρηση 3.20

Βασικό μειονέκτημα του παραπάνω ορισμού είναι ότι αυτός δεν είναι ανεξάρτητος από την τιμή του ορίου. Γι' αυτό δεν διευκολύνει στην μελέτη της σύγκλισης, αφού δεν μπορούμε να συμπεράνουμε εκ των προτέρων αν υπάρχει το $\lim_{x \to \xi} f(x)$. Έτσι ο ορισμός κατά Heine κρίνεται προσφορότερος, μια και δεν είναι απαραίτητο να ξέρουμε εκ των προτέρων την οριακή τιμή της συνάρτησης. Για το πότε θα χρησιμοποιείται ο ένας και πότε ο άλλος ορισμός δεν υπάρχει κανόνας. Εφόσον αυτό δεν καθορίζεται, η επιλογή είναι προσωπική υπόθεση. Βέβαια, και οι δυο ορισμοί όπως θα δούμε παρακάτω είναι ισοδύναμοι. Πολλές φορές, μπορεί να χρησιμοποιηθούν, και οι δυο ορισμοί για την εύρεση του $\lim_{x \to \xi} f(x)$. Σύμφωνα με τον ορισμό κατά Heine πρέπει να αποδείξουμε ότι $\forall x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \to \xi$ η $f(x_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στον ίδιο αριθμό. Παίρνοντας μια ειδική ακολουθία $x_\nu \to \xi$ βρίσκουμε το $\lim f(x_\nu)$. Αυτό δεν θα είναι και το ζητούμενο όριο, γιατί πήραμε μια ειδική ακολουθία, ενώ στον ορισμό πρέπει να πάρουμε όλες τις ακολουθίες. Αν όμως για αυτή την οριακή τιμή της $f(x_\nu)$ εφαρμόζεται ο ορισμός κατά Cauchy, τότε αυτή είναι και το όριο της f στο σημείο ξ. (Βλέπε εφαρμογή 3 παρακάτω)

Ας δούμε μερικά παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση του Ορισμού 3.14.

Παράδειγμα 3.21

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. Έχουμε $\xi = 2, \ell = 4$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι, για δοσμένο $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ (τον οποίο και αναζητούμε) τέτοιος ώστε: $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-4| = |x^2-4| < \epsilon$.

Έχουμε $|x^2-4| = |x-2||x+2|$. Επειδή εμφανίζεται το $|x-2|$ που θα απαιτήσουμε να είναι μικρότερο κάποιου δ, αναρρωτιόμαστε πόσο μεγάλο μπορεί να είναι το $|x+2|$, ώστε το γινόμενο $|x-2||x+2|$ να είναι μικρότερο του ϵ;

Χωρίς να κάνουμε την τελική εκλογή του δ, ας θεωρήσουμε $\delta < 1$. Αυτό είναι δυνατό, γιατί ενδιαφερόμαστε για τιμές του x στην περιοχή του 2. Τότε $0 < |x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1, x \neq 2 \Rightarrow 3 < x+2 < 5$. Συνεπώς

$$|x-2||x+2| < 5|x-2|.$$

Δηλαδή όλα τα x που ικανοποιούν την ανισότητα $5|x-2| < \epsilon$ ικανοποιούν και την $|x-2||x+2| < \epsilon$. Έχουμε $|x-2| < 1$ και $|x-2| < \frac{\epsilon}{5}$. Κατά συνέπεια μπορούμε να διαλέξουμε ως δ:

$$\delta = min\left\{1, \frac{\epsilon}{5}\right\}.$$

Τότε, για τα x που ικανοποιούν την ανισότητα $0 < |x-2| < \delta$ συνεπάγεται ότι $|x^2-4| < \epsilon$. Πραγματικά·

$$0 < |x-2| < \delta < 1 \Rightarrow |x+2| < 5.$$

Άρα

$$|f(x)-4| = |x^2-4| = |x-2||x+2| < 5|x-2| < 5.\frac{\epsilon}{5} = \epsilon.$$

Ο περιορισμός $\delta < 1$ δεν είναι ουσιαστικός. Γίνεται μόνο για λόγους ευκολίας. Π.χ. μπορούμε να θεωρήσουμε $\delta < 7$ ή οποιουδήποτε άλλου αριθμού. Τότε προφανώς το δ στην τελική εκλογή θα είναι διαφορετικό. Ας δούμε ποιό θα είναι σ' αυτήν την περίπτωση. Είναι $|x-2| < 7 \Rightarrow -3 < x+2 < 11 \Rightarrow -11 < -3 < x+2 < 11 \Rightarrow |x+2| < 11$. Συνεπώς $|x-2||x+2| < 11|x-2| < \epsilon$, δηλαδή $|x-2| < 7$ και $|x-2| < \frac{\epsilon}{11}$. Διαλέγουμε τότε ως $\delta = min\left\{7, \frac{\epsilon}{11}\right\}$.

Παράδειγμα 3.22

Ας αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1} = 2$. Εδώ είναι $\xi = 3$ και $\ell = 2$. Για δοσμένο $\epsilon > 0$, πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x+1}-2| < \epsilon$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Είναι

$$|\sqrt{x+1}-2| = \frac{|(x+1)-4|}{|\sqrt{x+1}+2|} = \frac{|x-3|}{|\sqrt{x+1}+2|}.$$

Όπως και προηγούμενα θεωρούμε $\delta < 1 \Rightarrow |x-3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow 3 < x+1 < 5 \Rightarrow \sqrt{3} < \sqrt{x+1} < \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{3}+2 < \sqrt{x+1}+2 < \sqrt{5}+2$ ή

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} < \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} < \frac{1}{\sqrt{3}+2}.$$

Τότε είναι:

$$|\sqrt{x+1}-2| = \frac{|x-3|}{|\sqrt{x+1}+2|} < \frac{|x-3|}{\sqrt{3}+2} < \epsilon$$

δηλαδή $|x-3| < 1$ και $|x-3| < (\sqrt{3}+2)\epsilon$. Κατά συνέπεια μπορούμε να διαλέξουμε $\delta = min\{1, (\sqrt{3}+2)\epsilon\}$.

Παράδειγμα 3.23

Ας δούμε τώρα και ένα παράδειγμα όπου ο ορισμός 3.14 δεν εφαρμόζεται. Ας προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to 3}(2x+1) = 3.$$

Έχουμε:

$$|(2x+1)-3| = |2x-2| = |2(x-3)+4| \geq 4-2|x-3|.$$

Αν $0 < |x-3| < 1$ τότε $|(2x+1)-3| > 2$. Συνεπώς για δοσμένο $\epsilon > 0$ και $\epsilon < 2$ δεν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(2x+1)-3| < 2$, γιατί όπως δείξαμε αν $0 < |x-3| < 1$ τότε $|(2x+1)-3| > 2$. Αυτό σημαίνει ότι το $\lim_{x\to 3}(2x+1) \neq 3$.

Θα ορίσουμε τώρα τα πλευρικά όρια της f, από αριστερά και από δεξιά στο σημείο $\xi \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 3.24 **Έστω $\xi \in \mathbf{R}$ σημείο συσσωρεύσεως του συνόλου $\Delta(\mathbf{f}) \cap (-\infty, \xi)$ (αντίστοιχα $\Delta(\mathbf{f}) \cap (\xi, +\infty)$). Θα λέμε ότι ο αριθμός $\ell \in \mathbf{R}$ είναι όριο της f στο ξ από αριστερά (αντίστοιχα από δεξιά), αν και μόνον αν, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε, για όλα τα $x \in \Delta(f)$ με $\xi - \delta < x < \xi$ (αντίστοιχα $\xi < x < \xi + \delta$) να έχουμε: $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Συμβολικά**

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))\, \xi - \delta < x < \xi$$

$$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

(αντίστοιχα:

$$\lim_{x\to\xi+} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f)) \xi < x < \xi + \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Προφανώς το όριο της f στο ξ υπάρχει, τότε και μόνο τότε αν τα πλευρικά όρια της f υπάρχουν και είναι ίσα. Δηλαδή:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to\xi-} f(x) = \ell = \lim_{x\to\xi+} f(x).$$

Η απόδειξη έχει γίνει με την βοήθεια του ορισμού του Heine με τις ακολουθίες (Θεώρημα 3.13). Με την βοήθεια του ορισμού κατά Cauchy η απόδειξη είναι πιο απλή και αφήνεται για άσκηση (Βλέπε άσκηση 3.18)

Παράδειγμα 3.25

Έστω $f : [-1, 0) \cup (0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ 1 - x, & x > 0 \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Πραγματικά· έστω ϵ τέτοιο ώστε $0 < \epsilon < 1$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ με τις ιδιότητες

$$|(x^2 + 1) - 1| < \epsilon \quad \text{ή} \quad x^2 < \epsilon \tag{1}$$

για όλα τα x με $-\delta < x < 0$ και

$$|(1 - x) - 1| < \epsilon \quad \text{ή} \quad x < \epsilon \tag{2}$$

για όλα τα x με $0 < x < \delta$. Διαλέγοντας ως $\delta = \epsilon$ η (2) προφανώς ισχύει. Αλλά και η (1) ισχύει γιατί $-\delta < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < \delta = \epsilon < 1 \Rightarrow x^2 < \epsilon^2 < \epsilon$. Συνεπώς $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0+} f(x)$ και άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Παράδειγμα 3.26

Έστω $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x > 0 \\ 2x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει $\lim_{x\to 0} f(x)$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει το όριο και έστω $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{x\to 0-} f(x) = \ell = \lim_{x\to 0+} f(x)$. Δηλαδή

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f)) - \delta < x < 0$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))0 < x < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Ειδικά για $\epsilon = 1$ υπάρχουν x_1 και x_2 τέτοια ώστε: $x_1 < 0 < x_2$ και

$$|2x_1 - 1 - \ell| < 1, \quad |2x_2 + 1 - \ell| < 1.$$

Από τις ανισότητες αυτές παίρνουμε διαδοχικά:

$$-1 < 2x_1 - 1 - \ell < 1 \Rightarrow \ell < 2x_1 < 0$$

$$-1 < 2x_2 + 1 - \ell < 1 \Rightarrow 0 < 2x_2 < \ell$$

οι οποίες δείχνουν ότι τέτοιο ℓ δεν υπάρχει. Συνεπώς δεν υπάρχει το $\lim_{x \to 0} f(x)$. Αξίζει εδώ να παρατηρήσουμε ότι τα πλευρικά όρια της f στο 0 υπάρχουν. Είναι $\lim_{x \to 0-} f(x) = 1$ και $\lim_{x \to 0+} f(x) = -1$. Μπορείτε αλήθεια να το αποδείξετε;

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι ορισμοί 3.4 (για $\xi \in \mathbb{R}$ και $\ell \in \mathbb{R}$) και 3.16 είναι ισοδύναμοι.

Θεώρημα 3.29 Έστω $\xi \in \mathbf{R}$ σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού $\Delta(\mathbf{f})$ μιας συνάρτησης $\mathbf{f}$. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

$$\alpha) \forall \mathbf{x}_\nu, \nu \in \mathbf{N} \quad \text{με} \quad \mathbf{x}_\nu \in \Delta(\mathbf{f}) - \{\xi\} \quad \text{και} \quad \mathbf{x}_\nu \to \xi \Rightarrow \lim \mathbf{f}(\mathbf{x}_\nu) = \ell.$$

$$\beta)(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x} \in \Delta(\mathbf{f}))0 < |\mathbf{x} - \xi| < \delta \Rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell| < \epsilon.$$

Απόδειξη

$(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (α), οπότε $lim_{x \to \xi} f(x) = \ell$ και ας υποθέσουμε ότι η (β) δεν ισχύει, δηλαδή

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \Delta(f))0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \geq \epsilon. \qquad (1)$$

Αφού η (1) ισχύει για κάθε $\delta > 0$ διαλέγοντας ως $\delta = \frac{1}{\nu}$ παίρνουμε μια ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in \Delta(f)$ τέτοια ώστε:

$$0 < |x_\nu - \xi| < \frac{1}{\nu}, \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad |f(x_\nu) - \ell| \geq \epsilon.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Έτσι δηλαδή έχουμε ότι $x_\nu \to \xi$ αλλά η $f(x_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει στο ℓ. Αυτό όμως αντιτίθεται στο συμπέρασμα της (α) και συνεπώς η (β) ισχύει.

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ Έστω ότι ισχύει η (β), οπότε $lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$ και θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in \Delta(f) - \{\xi\}$ και $x_\nu \to \xi$. Αφού $x_\nu \to \xi$ υπάρχει $\nu_0 \in N$ τέτοιο ώστε: $0 < |x_\nu - \xi| < \delta, \forall \nu > \nu_0$, οποιοσδήποτε και αν είναι ο θετικός αριθμός δ που εμφανίζεται στην (β). Για αυτά τα x_ν θα έχουμε ότι: $|f(x_\nu) - \ell| < \epsilon, \forall \nu > \nu_0$ που σημαίνει ότι και $lim f(x_\nu) = \ell$. •

Στον Ορισμό 3.16 είχαμε $\xi \in \mathbb{R}$ και $\ell \in \mathbb{R}$. Στην περίπτωση που $\xi \in \widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ή $\ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$ έχουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 3.30

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f)) 0 < |x - \xi| < \delta$$

$$\Rightarrow f(x) > \frac{1}{\epsilon}.$$

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f)) 0 < |x - \xi| < \delta$$

$$\Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\epsilon}.$$

Ορισμός 3.31

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \Delta(f)) x > r$$

$$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \Delta(f)) x > r$$

$$\Rightarrow f(x) > \frac{1}{\epsilon}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \Delta(f)) x > r$$

$$\Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\epsilon}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ορισμός 3.32

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \Delta(f))x < -r$$

$$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \Delta(f))x < -r$$

$$\Rightarrow f(x) > \frac{1}{\epsilon}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \Delta(f))x < -r$$

$$\Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\epsilon}.$$

Παράδειγμα 3.33

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 0+} log_\alpha x = -\infty$ αν $\alpha > 1$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.30 πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))0 < x < \delta \Rightarrow log_\alpha x < -\frac{1}{\epsilon}.$$

Επειδή $\alpha > 1$ η $log_\alpha x$ είναι γνήσια αύξουσα (αντίστροφη της α^x) θα έχουμε:

$$log_\alpha x < -\frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow \alpha^{log_\alpha x} < \alpha^{-(1/\epsilon)} \Leftrightarrow x < \alpha^{-(1/\epsilon)}.$$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε ως $\delta = \alpha^{-(1/\epsilon)}$.

Παράδειγμα 3.34

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.31 πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \Delta(f))x > r \Rightarrow e^x > \frac{1}{\epsilon}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $0 < \epsilon < 1$. Τότε από την $e^x > \frac{1}{\epsilon}$ έχουμε $log e^x > log\frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow x > log\frac{1}{\epsilon}$. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε ως $r = log\frac{1}{\epsilon}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}=3\alpha^2,\ \alpha\in\mathbf{R}.$$

Απόδειξη

Αν $f(x)=\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}$ τότε $\Delta(f)=\mathbb{R}-\{\alpha\}$ και το α είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall\epsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\Delta(f))0<|x-\alpha|<\delta$$

$$\Rightarrow\left|\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}-3\alpha^2\right|<\epsilon\Leftrightarrow|x^2+\alpha x-2\alpha^2|<\epsilon.$$

Το πρόβλημα είναι να προσδιορίσουμε το κατάλληλο δ. Γενικά ακολουθούμε την παρακάτω πορεία:

Βήμα 1ον. Μετασχηματίζουμε την παράσταση $x^2+\alpha x-2\alpha^2$ ώστε να εκφραστεί με την βοήθεια του $x-\alpha$:

$$\begin{aligned}|x^2+\alpha x-2\alpha^2| &= |(x-\alpha)(x+\alpha)+\alpha(x-\alpha)|\\ &= |(x-\alpha)(x+2\alpha)|=|x-\alpha||(x-\alpha)+3\alpha|\\ &\le |x-\alpha|(|x-\alpha|+3|\alpha|)\\ &< \delta(\delta+3|\alpha|).\end{aligned}$$

Βήμα 2ον. Ας είναι $\phi(\delta)=\delta(\delta+3|\alpha|)$. Θέλουμε να πετύχουμε εκείνα τα δ για τα οποία $\phi(\delta)\le\epsilon$. Χωρίς να κάνουμε την τελική εκλογή του δ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0<\delta\le 1$, και αυτό γιατί ενδιαφερόμαστε για τις τιμές που παίρνει το x σε μια περιοχή του α και $x\neq\alpha$. Τότε $\delta^2<\delta$ και $\phi(\delta)=\delta(\delta+3|\alpha|)<\delta(1+3|\alpha|)$. Συνεπώς αναγόμαστε στο να βρούμε εκείνα τα δ ώστε: $<\delta(1+3|\alpha|)<\epsilon\Leftrightarrow\delta\le\frac{\epsilon}{1+3|\alpha|}$. Μπορούμε τότε να πάρουμε ως $\delta=min\{1,\frac{\epsilon}{1+3|\alpha|}\}$. Για $\forall\epsilon>0$ είναι δυνατόν αν $\delta_1=\frac{\epsilon}{1+3|\alpha|}$ να είναι $\delta_1\ge 1$ ή $\delta_1\le 1$. Τότε επειδή $\frac{1.\delta_1}{1+\delta_1}\le 1$ αν $\delta_1\ge 1$ ή $\frac{1.\delta_1}{1+\delta_1}\le\delta_1$ αν $\delta_1\le 1$ συνεπάγεται ότι μπορούμε να πάρουμε ως $\delta=\frac{1.\delta_1}{1+\delta_1}=\frac{\epsilon}{1+3|\alpha|+\epsilon}$.

Βήμα 3ον.Επαλήθευση. Αν $\delta=\frac{\epsilon}{1+3|\alpha|+\epsilon}$ τότε $\forall x\in\Delta(f)$ με $0<|x-\alpha|<\delta$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}|x^2+\alpha.x-2\alpha^2| &< |x-\alpha|(|x-\alpha|+3|\alpha|)<\delta(\delta+3|\alpha|)\\ &\le \delta(1+3|\alpha|)\le\frac{\epsilon(1+3|\alpha|)}{1+3|\alpha|+\epsilon}<\epsilon.\end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha)\ \lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x+3}=-\frac{1}{2}\quad \beta)\ \lim_{x\to -1}\frac{x}{2x+1}=1\quad \gamma)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{x}=1.$$

Απόδειξη

α) Πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall \epsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in \Delta(f))0<|x+1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|<\epsilon.$$

Από την τελευταία ανισότητα έχουμε:

$$\left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{2}\left|\frac{x+1}{x+3}\right|<\epsilon \quad \text{ή} \quad \left|\frac{x+1}{x+3}\right|<\frac{2\epsilon}{5}$$

και ακόμα

$$\left|\frac{2}{x+1}+1\right|>\frac{5}{2\epsilon}.$$

Αφού $|\alpha+\beta|\geq|\alpha|-|\beta|$ η τελευταία ανισότητα ικανοποιείται αν

$$\left|\frac{2}{x+1}\right|-1>\frac{5}{2\epsilon}\Rightarrow\left|\frac{1}{1+x}\right|>\frac{5+2\epsilon}{4\epsilon}$$

δηλαδή $|x+1|<\frac{4\epsilon}{5+2\epsilon}$. Έτσι η αρχική ανισότητα ικανοποιείται από όλα τα x που ικανοποιούν την τελευταία ανισότητα. Συνεπώς διαλέγουμε ως $\delta=\frac{4\epsilon}{5+2\epsilon}$.

β) Πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall \epsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in \Delta(f))0<|x+1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x}{2x+1}-1\right|<\epsilon.$$

Είναι $|\frac{x}{2x+1}-1|=\frac{|x+1|}{|2x+1|}$. Θα πρέπει τώρα να κάνουμε έναν αρχικό περιορισμό για το δ. Εδώ χρειάζεται προσοχή γιατί το $\frac{1}{|2x+1|}$ δεν είναι φραγμένο αν το x είναι κοντά στο $-\frac{1}{2}$. Έτσι το $\delta<\frac{1}{2}$ δεν αρκεί για να φράξουμε το $\frac{1}{|2x+1|}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\delta<\frac{1}{4}$. Τότε $|x+1|<\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{5}{4}<x<-\frac{3}{4}\Rightarrow -\frac{3}{2}<2x+1<-\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{2}<|2x+1|<\frac{3}{2}\Rightarrow \frac{2}{3}<\frac{1}{|2x+1|}<2$. Συνεπώς

$$\left|\frac{x}{2x+1}-1\right|=\frac{|x+1|}{|2x+1|}<2|x+1|<\epsilon$$

αν διαλέξουμε ως $\delta=min\{\frac{1}{4},\frac{\epsilon}{2}\}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γ) Πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \Delta(f))x < -r \Rightarrow \left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \epsilon.$$

Έχουμε: $\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| = \frac{1}{|x|} < \epsilon \Rightarrow |x| > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow x < -\frac{1}{\epsilon}$ (γιατί αφού $x \to -\infty$ μπορούμε να θεωρήσουμε $x < 0$). Άρα $r = \frac{1}{\epsilon}$.

3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} x.\left[\frac{1}{x}\right].$$

Απόδειξη

Θα δούμε σ' αυτήν την εφαρμογή πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τους δυο ορισμούς της σύγκλισης.

Έστω x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία από το $\Delta(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ με $x_\nu \to 0$ και $x_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Μια τέτοια ακολουθία π.χ. είναι η $x_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε $f(x_\nu) = x_\nu \left[\frac{1}{x_\nu}\right] = \frac{1}{\nu}[\nu] = \frac{\nu}{\nu} = 1$. Δηλαδή $limf(x_\nu) = 1$. Αυτό δεν σημαίνει ότι $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, γιατί δεν πήραμε όλες τις ακολουθίες, αλλά μια ειδική ακολουθία. Αν όμως το όριο υπάρχει, τότε αυτό πρέπει να είναι το 1. Θα δούμε αν για όριο το 1 εφαρμόζεται ο ορισμός του Cauchy. Θα πρέπει λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|x.\left[\frac{1}{x}\right] - 1\right| < \epsilon.$$

Έχουμε από τον ορισμό του ακέραιου μέρους πραγματικού αριθμού ότι:

$$\left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1.$$

Άρα

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}.$$

Έστω $x > 0$. Τότε

$$1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1 \Leftrightarrow -x < x\left[\frac{1}{x}\right] - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \left|x.\left[\frac{1}{x}\right] - 1\right| < |x|.$$

Έστω τώρα $x < 0$. Τότε

$$1 - x > x\left[\frac{1}{x}\right] \geq 1 \Leftrightarrow -x > x\left[\frac{1}{x}\right] - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left|x.\left[\frac{1}{x}\right] - 1\right| < |-x|.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνεπώς ο ορισμός το Cauchy εφαρμόζεται, αν διαλέξουμε ως $\delta = \epsilon$. Άρα $\lim_{x\to 0} x.\left[\frac{1}{x}\right] = 1$.

4. Έστω f : [0, 1] → R με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} - Q \\ 1, & x \in Q \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει οριακή τιμή σε κανένα σημείο του Δ(f).

Απόδειξη

Προφανώς κάθε σημείο του [0, 1] είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$, αφού σε κάθε υποσύνολο του [0, 1] υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι. Ας υποθέσουμε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$, για κάποιο $\xi \in [0, 1]$. Τότε θα έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Ειδικά για $\epsilon = \frac{1}{4}$ η παραπάνω ανισότητα θα ισχύει και για x άρρητο και για x ρητό. Αν διαλέξουμε ένα τέτοιο x τη μια φορά άρρητο, έστω α, με $0 < |\alpha - \xi| < \delta, \alpha \in [0, 1]$ και την άλλη ρητό, έστω ρ με $0 < |\rho - \xi| < \delta, \rho \in [0, 1]$ θα έχουμε

$$|f(\alpha) - \ell| < \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad |f(\rho) - \ell| < \frac{1}{4}.$$

Αλλά τότε

$$1 = |f(\alpha) - f(\rho)| \leq |f(\alpha) - \ell| + |f(\rho) - \ell| < \frac{1}{2}$$

δηλαδή $1 < \frac{1}{2}$ πράγμα άτοπο. Συνεπώς η f δεν έχει οριακή τιμή στο $\xi \in \Delta(f)$ και επειδή το ξ είναι τυχαίο δεν έχει οριακή τιμή σε κανένα σημείο του $\Delta(f)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.8 Να αποδείξετε ότι

$$\left|\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right| < \epsilon$$

αν $0 < |x| < \delta$ όπου $\delta = min\{1, 4\epsilon\}$ και $\epsilon > 0$. Να μετατρέψετε αυτό το συμπέρασμα σε μια πρόταση της μορφής $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$, επεξηγώντας αναλυτικά το κάθε τι.

3.9 Για δοσμένο $\epsilon > 0$ να βρεθεί $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $|f(x) - 4| < \epsilon > 0$, όταν $0 < |x - 2| < \delta$, όπου $f(x) = x^3 - x^2$. Τι αποδεικνύεται με αυτό;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3.10 Έστω $I = (0,\alpha), \alpha > 0$ και $f(x) = x^2, x \in I$. Να αποδείξετε ότι $|f(x) - c^2| \leq 2\alpha|x - c|$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ανισότητα να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to c} f(x) = c^2, \forall c \in I$.

3.11 Να αποδείξετε ότι αν $0 < \epsilon < 1$, τότε $10^{-1/x} < \epsilon$ όταν $0 < x < \left(\lambda o \gamma \frac{1}{\epsilon}\right)^{-1}$. Ποιό είναι το αντίστοιχα συμπέρασμα για το όριο;

3.12 Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \lim_{x\to 3}(x^2 + 2x) = 15 \quad \beta) \lim_{x\to 1}\sqrt{x+3} = 2$$

$$\gamma) \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8} = \frac{1}{3} \quad \delta) \lim_{x\to 2}\frac{x^3-4}{x^2+1} = \frac{4}{5}$$

$$\epsilon) \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{6} \quad \sigma\tau) \lim_{x\to c}\frac{1}{x} = \frac{1}{c}, c > 0$$

$$\zeta) \lim_{x\to 2}\frac{1}{1-x} = -1 \quad \eta) \lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\theta) \lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1} = +\infty \quad i) \lim_{x\to 0}\frac{x+2}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$k) \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}}{x} = +\infty \quad \lambda) \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} = 1$$

$$\mu) \lim_{x\to +\infty}\frac{2x-1}{x-3} = 2 \quad \nu) \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{2x-1} = -\infty$$

3.13 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$

δεν έχει όριο στο 0.

3.14 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in Q \\ 1, & x \notin Q \end{cases}$$

δεν έχει οριακή τιμή σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

3.15 Να αποδείξετε ότι το $\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^2+|x|}{x}, \alpha > 0$ δεν υπάρχει.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3.16 Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{2^{1/x}+3}{2^{1/x}+1}$.

3.17 Έστω $f(x)=2^{-(1/x)}$, $x\neq 0$. Να βρεθούν τα όρια:

$$\alpha)\ \lim_{x\to 0-} f(x) \quad \beta)\ \lim_{x\to 0+} f(x) \quad \gamma)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+f(x)}$$

3.18 Έστω $A\subseteq R$, $f: A\to IR$ και $\xi\in IR$ σημείο συσσωρεύσεως και των δυο συνόλων $A\cap(\xi,+\infty)$ και $A\cap(-\infty,\xi)$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to\xi-} f(x)=\ell=\lim_{x\to\xi+} f(x).$$

3.19 Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$.

3.20 Έστω $f:[0,1]\to IR$ με

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in Q \\ x^2, & x\in IR-Q \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 0+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=1$ και ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to c} f(x)$ για κανένα c με $0<c<1$.

§ 3.4 ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός 3.35 Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Δ(f) θα λέγεται φραγμένη στο A ⊆ Δ(f) αν υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε: |f(x)| ≤ M, ∀x ∈ A. Θα λέγεται άνω φραγμένη αν f(x) ≤ M και κάτω φραγμένη, αν M ≤ f(x), ∀x ∈ A.

Αν η f είναι φραγμένη σε ένα μη κενό σύνολο A, τότε το σύνολο $\{f(x): x\in A\}$ έχει supremum. Για συντομία θα το συμβολίζουμε με $\sup_A f$ ή $\sup_A f(x)$ αντί του πιο σύνθετου συμβολισμού $\sup\{f(x): x\in A\}$. Αν $A=\Delta(f)$ χρησιμοποιούμε τον πιο απλό ακόμα συμβολισμό $\sup f$ ή $\sup f(x)$. Ανάλογα ορίζονται και τα σύμβολα $\inf_A f$, $\max_A f$ και $\min_A f$.

Αν η f δεν είναι άνω φραγμένη τότε $\sup f(x)=+\infty$ και αν δεν είναι κάτω φραγμένη τότε $\inf f(x)=-\infty$.

Παράδειγμα 3.36

Έστω $f(x)=\frac{1}{x}$, $0<x<+\infty$. Θα αποδείξουμε ότι η f δεν είναι φραγμένη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα φράγμα $M>0$. Διαλέγουμε $x>0$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τέτοιο ώστε $x < \frac{1}{M}$. Τότε $f(x) = \frac{1}{x} > M$ και έτσι το M δεν είναι φραγμα της f. Η f όμως είναι κάτω φραγμένη, αφού $f(x) = \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (0, +\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι $\inf_{x>0} f(x) = 0$. Αφού $0 < f(x), \forall x \in (0, +\infty)$, το 0 είναι κάτω φράγμα της f. Έστω δ τυχαίος πραγματικός αριθμός. Αν διαλέξουμε $x > \frac{1}{\delta}$, τότε $f(x) = \frac{1}{x} < \delta$ που σημαίνει ότι το δ δεν είναι κάτω φράγμα της f. Επειδή το δ είναι τυχαίο θα έχουμε $0 = inf_{x>0} f(x)$.

Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της f στο διάστημα $(\alpha, +\infty), \alpha > 0$ τότε πάλι έχουμε $\inf_{x>0} f(x) = 0$, αλλά τώρα η f είναι φραγμένη. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι αν $x > \alpha$ τότε $f(x) = \frac{1}{x} < \frac{1}{\alpha}$ και έτσι το $\frac{1}{\alpha}$ είναι άνω φράγμα της f στο $(\alpha, +\infty)$. Αν $0 < \beta < \frac{1}{\alpha}$ τότε για τα x που ικανοποιούν την $\alpha < x < \frac{1}{\beta}$ έχουμε $f(x) = \frac{1}{x} > \beta$. Αυτό δείχνει ότι το β δεν είναι άνω φράγμα της f στο $(\alpha, +\infty)$ και επομένως $\sup_{x>\alpha} f(x) = \frac{1}{\alpha}$.

Αναφορικά με το sup και το inf μιας συνάρτησης έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.37 **Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$ δυο φραγμένες συναρτήσεις στο A (το κοινό πεδίο ορισμού). Τότε:**

$$\mathbf{1)}\ \sup\{kf(x)\} = \begin{cases} k.\sup f(x), & k > 0 \\ k.\inf f(x), & k < 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{2)}\ \inf\{kf(x)\} = \begin{cases} k.\inf f(x), & k > 0 \\ k.\sup f(x), & k < 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{3)}\ \sup\{f(x) + g(x)\} \leq \sup f(x) + \sup g(x).$$

$$\mathbf{4)}\ \inf\{f(x) + g(x)\} \geq \inf f(x) + \inf g(x).$$

Απόδειξη

Παραλείπουμε την απόδειξη των 1) και 2) γιατί είναι η ίδια με αυτήν του Θεωρήματος 1.13.

Για την 3) έχουμε: $f(x) \leq M, g(x) \leq N$ όπου M και N τα suprema των f και g αντίστοιχα. Τότε $f(x) + g(x) \leq M + N$ που σημαίνει ότι το $M + N$ είναι άνω φράγμα για το σύνολο $\{f(x) + g(x) : x \in A\}$. Άρα $\sup\{f(x) + g(x)\} \leq M + N = \sup f(x) + \sup g(x)$.

Για την 4) παρατηρούμε ότι οι $-f$ και $-g$ είναι άνω φραγμένες και σύμφωνα με την 3) $\sup\{-f(x) - g(x)\} \leq \sup\{-f(x)\} + \sup\{-g(x)\}$. Από αυτήν και τις 1) και 2) προκύπτει το ζητούμενο. •

Παρατήρηση 3.38

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στις ιδιότητες 3) και 4) της προηγούμενης πρότασης μπορεί να μην ισχύει η ισότητα. Για παράδειγμα αν $f(x) = x, g(x) = 1 - x, A = [0, 1]$ τότε $\sup\{f(x) + g(x)\} = 1$, ενώ $\sup f(x) + \sup g(x) = 2$.

Οι έννοιες του ορίου και του φραγμένου συσχετίζονται με το ακόλουθο βασικό

Θεώρημα 3.39 **Έστω $\xi \in \widetilde{\mathbb{R}}$, $\ell \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$. Τότε:**
α) η f είναι φραγμένη σε κάποια δακτυλική περιοχή του ξ.
β) αν $\ell \neq 0$, τότε υπάρχει δακτυλική περιοχή του ξ, στην οποία είναι $f(x) \neq 0$.

Απόδειξη

α) Θα δώσουμε την απόδειξη για $\xi \in \mathbb{R}$, αφήνοντας τις υπόλοιπες περιπτώσεις για άσκηση. Αφού $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$ τότε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Ειδικά για $\epsilon = 1$ έχουμε: $|f(x)| \leq 1 + |\ell|$. Αν $\xi \notin \Delta(f)$ παίρνουμε ως $M = 1 + |\ell|$, ενώ αν $\xi \in \Delta(f)$ παίρνουμε ως $M = max\{|f(\xi)|, 1 + |\ell|\}$. Αυτό συνεπάγεται ότι αν $x \in N_\delta^*(\xi) \cap \Delta(f)$ τότε $|f(x)| \leq M$, που σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη σε μια δακτυλική περιοχή του ξ.

β) Αφού $\ell \neq 0$, παίρνοντας ως $\epsilon = \frac{1}{2}|\ell|$ έχουμε ότι:

$$-\frac{1}{2}|\ell| + \ell < f(x) < \ell + \frac{1}{2}|\ell| \qquad (1)$$

i) Αν $\ell > 0$ τότε η (1) δίνει: $\frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3\ell}{2}$, δηλαδή

$$\frac{1}{2}|\ell| < |f(x)| < \frac{3}{2}|\ell|.$$

ii) Αν $\ell < 0$ τότε η (1) δίνει: $\frac{3\ell}{2} < f(x) < \frac{\ell}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\ell}{2} > -f(x) > -\frac{\ell}{2}$ δηλαδή

$$\frac{1}{2}|\ell| < |f(x)| < \frac{3}{2}|\ell|.$$

Έτσι λοιπόν αν $\ell \neq 0$, υπάρχει περιοχή του ξ, όπου

$$\frac{1}{2}|\ell| < |f(x)| < \frac{3}{2}|\ell|, \forall x \in \Delta(f) \cap N_\delta^*(\xi)$$

που σημαίνει ότι στην περιοχή $N_\delta^*(\xi)$ η $f(x) \neq 0$, και μάλιστα παίρνει τιμές ομόσημες του ορίου. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατήρηση 3.40

Η ιδιότητα β) του προηγουμένου Θεωρήματος μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: **Αν η f έχει μη μηδενικό όριο στο ξ, τότε υπάρχει μια περιοχή του ξ, $N_\delta^*(\xi)$ στην οποία η f είναι φραγμένη μακριά από το μηδέν.** Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι υπάρχει και έχει νόημα η $\frac{1}{f}$, $\forall x \in \Delta(f) \cap N_\delta^*(\xi)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.21 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x\,sinx, x \in \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένη.

3.22 Είναι η συνάρτηση $f(x) = 2x\,sin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}, 0 < x \leq 1$ φραγμένη;

3.23 Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ δυο φραγμένες συναρτήσεις με $f(x) \leq g(x), \forall x \in A$. Να αποδείξετε ότι:

$$\inf f(x) \leq \inf g(x) \quad \text{και} \quad \sup f(x) \leq \sup g(x).$$

3.24 Έστω $f, g : A \to IR$ δυο φραγμένες συναρτήσεις. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha)\ \sup\{f(x) + g(x)\} \geq \sup f(x) + \inf g(x).$$

$$\beta)\ \sup\{f(x) - g(x)\} \leq \sup f(x) - \inf g(x).$$

$$\gamma)\ \inf\{f(x) - g(x)\} \geq \inf f(x) - \sup f(x).$$

3.25 Να εξετάσετε αν είναι φραγμένες οι συναρτήσεις:

$\alpha) f(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}sin\frac{1}{x} - x^{-2/3}cos\frac{1}{x}, x \in [-1, 1] - \{0\}.$

$\beta) f(x) = \frac{x^4-3x^2+2}{2-cosx}, x \in [0, 2\pi].$

$\gamma) f(x) = \frac{5x^2+3x+1}{x^2-2}, x \in [-1, 1].$

$\delta) f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^3}, x \in [0, +\infty).$

§ 3.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω f και g δυο συναρτήσεις με πεδία ορισμού $\Delta(f)$ και $\Delta(g)$ αντίστοιχα. Ας είναι Δ το κοινό πεδίο ορισμού των f και g, δηλ. $\Delta = \Delta(f) \cap \Delta(g)$. Έστω ακόμα $\xi \in \bar{\mathbb{R}}$ σημείο συσσωρεύσεως του Δ, και A ένα σύνολο μιας των ακολούθων μορφών:

$$(\alpha, \xi) \cup (\xi, \beta), (\alpha, +\infty), (-\infty, \alpha).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι βασικές ιδιότητες των συγκλινουσών συναρτήσεων περιγράφονται στα Θεωρήματα που ακολουθούν.

Θεώρημα 3.41 Έστω $\xi \in \widetilde{\mathbf{R}}$ σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού $\Delta(f)$ μιας συνάρτησης f. Αν το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει στο $\widetilde{\mathbf{R}}$, τότε αυτό είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Ας αποδείξουμε μόνο την περίπτωση που $\xi = +\infty$, μιας και οι άλλες περιπτώσεις αποδεικνύονται ανάλογα. Θα εξετάσουμε χωριστά τις διάφορες περιπτώσεις:

α) Η f δεν μπορεί να τείνει σε ένα πεπερασμένο όριο και ένα άπειρο όριο όταν $x \to +\infty$.

Ας υποθέσουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in I\!R$. Τότε έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in A \subseteq \Delta(f))x > r \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon. \qquad (1)$$

Από την τελευταία ανισότητα, για την ειδική τιμή $\epsilon = 1$, παίρνουμε ότι: $\ell - 1 < f(x) < \ell + 1$. Αφού $f(x) < \ell + 1, \forall x > r$ η f δεν μπορεί να τείνει στο $+\infty$. Επίσης η f δεν μπορεί να τείνει στο $-\infty$, αφού $f(x) > \ell - 1, \forall x > r$. Άρα η f δεν μπορεί να τείνει σε ένα όριο $\ell \in I\!R$ και ένα άπειρο όριο.

β) Αν η f τείνει στο $+\infty$ τότε δεν μπορεί να τείνει και στο $-\infty$.

Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ τότε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r_1 > 0)(\forall x \in A \subseteq \Delta(f))x > r_1 \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\epsilon}.$$

Από την τελευταία ανισότητα, για την ειδική τιμή $\epsilon = 1$, παίρνουμε ότι: $f(x) > 1, \forall x > r_1$. Συνεπώς η f δεν μπορεί να τείνει και στο $-\infty$.

γ) Η f δεν μπορεί να τείνει σε δυο διαφορετικά πεπερασμένα όρια.

Ας υποθέσουμε ότι η f τείνει στο ℓ και επίσης τείνει και στο ℓ' διάφορο του ℓ. Αν αυτό συμβαίνει θα έχουμε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r_2 > 0)(\forall x \in A \subseteq \Delta(f))x > r_2 \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \epsilon. \qquad (2)$$

Αν $r_0 = \max\{r, r_2\}$ από τις (1) και (2) για $\epsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{2}$ θα έχουμε:

$$|f(x) - \ell| < \frac{|\ell - \ell'|}{2} \quad \text{και} \quad |f(x) - \ell'| < \frac{|\ell - \ell'|}{2}, \forall r > r_0.$$

Τότε όμως

$$|\ell - \ell'| = |(f(x) - \ell) - (f(x) - \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| < |\ell - \ell'|$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πράγμα άτοπο. Άρα η f δεν μπορεί να τείνει σε άλλο όριο $\ell' \neq \ell$. Έτσι το Θεώρημα αποδείχτηκε πλήρως. •

Θεώρημα 3.42 Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν όρια ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα στο σημείο συσσωρεύσεως ξ του κοινού πεδίου ορισμού των Δ, τότε:

α) f + g έχει όριο $\ell_1 + \ell_2$ στο ξ.

β) f.g έχει όριο $\ell_1.\ell_2$ στο ξ.

γ) |f| έχει όριο $|\ell_1|$ στο ξ και

δ) $\frac{f}{g}$ έχει όριο $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ στο ξ, αν $\ell_2 \neq 0$

με την προυπόθεση ότι οι πράξεις που σημειώνονται είναι επιτρεπτές.

Απόδειξη

Ας αποδείξουμε την περίπτωση που $\ell_1 \in \mathbb{R}$ και $\ell_2 \in \mathbb{R}$.

Έστω $\epsilon > 0$. Υποθέτουμε, χωρίς αυτό να βλάπτει την γενικότητα ότι $\epsilon < 1$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in \Delta$ με $0 < |x - \xi| < \delta$ να έχουμε: $|f(x) - \ell_1| < \epsilon$ και $|g(x) - \ell_2| < \epsilon$. Για αυτά τα x έχουμε:

$$|[f(x) + g(x)] - [\ell_1 + \ell_2]| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < 2\epsilon$$

πράγμα που αποδεικνύει το α)

$$\begin{aligned} |f(x).g(x) - \ell_1.\ell_2| &\leq |f(x)||g(x) - \ell_2| + |\ell_2||f(x) - \ell_1| \\ &\leq (|\ell_1| + \epsilon)\epsilon + |\ell_2|\epsilon < (|\ell_1| + 1 + |\ell_2|)\epsilon, \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το β) και

$$||f(x)| - |\ell_1|| \leq |f(x) - \ell_1| < \epsilon,$$

που αποδεικνύει το γ).

Για να αποδείξουμε το δ) αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\frac{1}{g}$ έχει όριο το $\frac{1}{\ell_2}$ στο ξ, γιατί τότε από το β) η $f.\frac{1}{g}$ έχει όριο $\ell_1.\frac{1}{\ell_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$. Αφού $\ell_2 \neq 0$, από το Θεώρημα 3.39, υπάρχουν θετικοί αριθμοί k και δ_1 τέτοιοι ώστε:

$$|g(x)| > k = \frac{|\ell_2|}{2}, \forall x \in \Delta \cap N^*_{\delta_1}(\xi).$$

Έστω $\delta^* = min\{\delta, \delta_1\}$. Τότε $\forall x \in \Delta \cap N^*_{\delta^*}(\xi)$ έχουμε

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell_2}\right| = \frac{|\ell_2 - g(x)|}{|g(x)||\ell_2|} < \frac{\epsilon}{k|\ell_2|}$$

που σημαίνει ότι το όριο της $\frac{1}{g}$ στο ξ ειναι το $\frac{1}{\ell_2}$. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 3.43 (Ισοσυγκλίνουσες συναρτήσεις). Αν οι συναρτήσεις f_1, f_2, f_3 είναι ορισμένες σε ένα σύνολο $A \subseteq \Delta$ (Δ το κοινό πεδίο ορισμού των), ξ σημείο συσσωρεύσεως του A και ισχύουν:

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x), \forall x \in A$$

$$\lim_{x \to \xi} f_1(x) = \lim_{x \to \xi} f_3(x) = \ell$$

τότε υπάρχει και το $\lim_{x \to \xi} f_2(x)$ και ισούται με ℓ.

Απόδειξη[1]

Αφού $\lim_{x \to \xi} f_1(x) = \ell$ και $\lim_{x \to \xi} f_3(x) = \ell$ για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$|f_1(x) - \ell| < \epsilon \quad \text{και} \quad |f_3(x) - \ell| < \epsilon$$

δηλαδή

$$\ell - \epsilon < f_1(x) \quad \text{και} \quad f_3(x) < \ell + \epsilon, \forall x \in A \cap N_\delta^*(\xi).$$

Επομένως

$$\ell - \epsilon < f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) < \ell + \epsilon \Leftrightarrow |f_2(x) - \ell| < \epsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to \xi} f_2(x) = \ell.$$

•

Θεώρημα 3.44 (Μηδενική επί φραγμένη συνάρτηση) Αν οι συναρτήσεις f_1, f_2 είναι ορισμένες σε ένα σύνολο $A \subseteq \Delta$ (Δ το κοινό πεδίο ορισμού των), ξ σημείο συσσωρεύσεως του A και ισχύουν:

i) η f_1 είναι φραγμένη στην περιοχή του ξ και

ii) $\lim_{x \to \xi} f_2(x) = 0$

τότε $\lim_{x \to \xi} [f_1(x) . f_2(x)] = 0$.

Απόδειξη

Από την i) έχουμε ότι:

$$(\exists M > 0) : |f_1(x)| \leq M, \forall x \in A \cap N_\delta^*(\xi).$$

Επειδή από την ii) $\lim_{x \to \xi} f_2(x) = 0$ έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \Delta(f)) 0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f_2(x)| < \frac{\epsilon}{M}.$$

[1] για $\ell \in \mathbb{R}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Άρα $\forall x \in A \cap N_\delta^*(\xi) \cap N_{\delta_1}^*(\xi)$ θα έχουμε: $|f_1(x).f_2(x)| < \epsilon$, που σημαίνει ότι $\lim_{x\to\xi}[f_1(x).f_2(x)] = 0$. •

Παρατήρηση 3.45

Στο παραπάνω Θεώρημα δεν υποθέτουμε την ύπαρξη του $\lim_{x\to\xi} f_1(x)$. Μας αρκεί η f_1 να είναι φραγμένη στην περιοχή του ξ. Π.χ. $\lim_{x\to 0}[x\, sin\frac{1}{x}] = 0$, αφού $|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$ και $\lim_{x\to 0} x = 0$, αν και το $\lim_{x\to 0} sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Θεώρημα 3.46 (Όριο σύνθεσης συναρτήσεων) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού Δ(f) και Δ(g) αντίστοιχα. Έστω $\mathcal{R}(f) \subseteq \Delta(g)$ και ξ, η σημεία συσσωρεύσεως των Δ(f) και Δ(g) αντίστοιχα. Υποθέτουμε ακόμα ότι $f(x) \neq \eta$ για κάποια περιοχή του ξ.

Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{y\to\eta} g(y) = \ell$ τότε και

$$\lim_{x\to\xi}(g \circ f)(x) = \lim_{x\to\xi} g(f(x)) = \ell.$$

Απόδειξη

Επειδή $\mathcal{R}(f) \cap \Delta(g) \neq \emptyset$ η σύνθεση των f και g υπάρχει. Επίσης είναι $\Delta(g \circ f) = \Delta(f)$ και άρα το ξ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(g \circ f)$. Έχουμε:

$$\lim_{y\to\eta} g(y) = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall y \in \Delta(g))$$

$$0 < |y - \eta| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - \ell| < \epsilon. \qquad (1)$$

Αφού $f(x) \neq \eta$ σε μια περιοχή του ξ, έστω την $N_\eta(\xi)$ και επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, έπεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$, άρα και για $\epsilon = \delta_1$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε: $(\forall x \in N_\eta(\xi) \cap \Delta(g \circ f)$ με $0 < |x - \xi| < \delta$ να ισχύει: $|f(x) - \eta| < \delta_1$. Τότε και $0 < |f(x) - \eta| < \delta_1$ και από την (1) έχουμε: $|g(f(x)) - \ell| < \epsilon$ δηλαδή $\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = \ell$. •

Σημείωση.

Αν δεν υπάρχει περιοχή του ξ τέτοια ώστε $f(x) \neq \eta$, τότε σ' αυτήν την περιοχή θα έχουμε $f(x) = \eta$, και άρα $g(f(x)) = g(\eta)$. Κατά συνέπεια, αν το όριο $\lim_{x\to\xi} g(f(x))$ υπάρχει, αυτό πρέπει να ισούται με $g(\eta)$.

Έτσι λοιπόν στην γενικότητά του το Θεώρημα του ορίου της σύνθεσης συναρτήσεων διατυπώνεται ως εξής:

Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to\eta} g(x) = \ell$, τότε είτε $\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = \ell$, είτε $\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = g(\eta)$, είτε το $\lim_{x\to\xi} g(f(x))$ δεν υπάρχει.

Το ότι κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις μπορεί πραγματικά να συμβεί, φαίνεται αν θεωρήσουμε ως $g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ και αντίστοιχα:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1. $f(x) = x, \xi = 0$ 2. $f(x) = [x], \xi = \frac{1}{2}$

3. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in Q \\ 0, & x \in \mathbb{R} - Q \end{cases}$ $\xi = 0.$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{h\to 0} f(\xi + h)$.

Απόδειξη

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$. Τότε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Θέτουμε $x - \xi = h$. Τότε $h \to 0$ όταν $x \to \xi$ και $(\forall \epsilon > 0)$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε όταν $0 < |h| < \delta$ να ισχύει $|f(\xi + h) - \ell| < \epsilon$ ή ακόμα

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \xi + h \in \Delta(f))0 < |(\xi + h) - \xi| < \delta \Rightarrow |f(\xi + h) - \ell| < \epsilon$$

που σημαίνει ότι $\lim_{h\to 0} f(\xi + h) = \ell$. Με τον ίδιο συλλογισμό αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

2. Έστω $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \ell.$$

Απόδειξη

θέτουμε $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to 0+} g(x) = \ell.$$

Αν $\omega(x) = \frac{1}{x}$ τότε $\lim_{x\to+\infty} \omega(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} \omega(x) = +\infty$ και ακόμα παρατηρούμε ότι: $f = g \circ \omega$ και $g = f \circ \omega$. Ας υποθέσουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Τότε από το Θεώρημα 3.46 για $\xi = 0$ και $\eta = +\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} (f \circ \omega)(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

Έστω τώρα ότι $\lim_{x\to 0+} g(x) = \ell$. Τότε πάλι από το Θεώρημα 3.46 για $\xi = +\infty$ και $\eta = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (g \circ \omega)(x) = \lim_{x\to 0+} g(x) = \ell.$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι με την πρόταση αυτή ο υπολογισμός ορίων στα κατ' εκδοχή σημεία, μεταφέρεται σε πεπερασμένα σημεία.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

3. Έστω $A \subseteq R$ και $f, g : A \to R$. Υποθέτουμε ότι $(\alpha, +\infty) \subseteq A$ για κάποιο $\alpha \in R$ και ακόμα ότι $g(x) > 0, \forall x > \alpha$. Έστω επίσης ότι:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell, \ell \in R, \ell \neq 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $\ell > 0$, τότε $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ αν και μόνον αν $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

ii) Αν $\ell < 0$, τότε $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ αν και μόνον αν $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

Απόδειξη

i) Αφού $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ συνεπάγεται ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \Delta(f))x > r \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| < \epsilon.$$

Ειδικά για $\epsilon = \frac{\ell}{2}$ έχουμε: $0 < \frac{\ell}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3\ell}{2}, \forall x > r > \alpha$ δηλ.

$$\frac{\ell}{2} g(x) < f(x) < \frac{3\ell}{2} g(x), \forall x > r > \alpha.$$

Έστω $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Τότε:

$$(\forall \epsilon^* > 0)(\exists r_1 > 0)(\forall x \in \Delta(f))x > r_1 \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\epsilon^*}.$$

Έστω $r_0 = max\{r, r_1\}$. Τότε για $\epsilon^* = \frac{2\epsilon}{3\ell}$ έχουμε $\forall r > r_0$ ότι $g(x) > \frac{2}{3}\ell^{-1} f(x) > \frac{2}{3}\ell^{-1}\frac{1}{\epsilon^*}$, δηλ.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r_0 > 0)(\forall x \in \Delta(f))x > r_0 \Rightarrow g(x) > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

Έστω τώρα $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Τότε:

$$(\forall \epsilon_1 > 0)(\exists r_2 > 0)(\forall x \in \Delta(f))x > r_2 \Rightarrow g(x) > \frac{1}{\epsilon_1}.$$

Έστω $r_3 = max\{r, r_2\}$. Τότε για $\epsilon_1 = \frac{\ell\epsilon}{2}$ έχουμε $\forall r > r_3$ ότι $f(x) > \frac{\ell}{2} g(x) > \frac{\ell}{2}\frac{1}{\epsilon_1}$, δηλ.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r_3 > 0)(\forall x \in \Delta(f))x > r_3 \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Η ii) αποδεικνύεται ανάλογα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.26 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\xi \in A$. Αν f_1 είναι ο περιορισμός της f στο A, να αποδείξετε ότι η f_1 έχει όριο στο ξ, αν και μόνον αν, η f έχει όριο στο ξ και ότι: $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} f_1(x)$.

3.27 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$ ένα κλειστό διάστημα και $\xi \in B$. Αν f_2 είναι ο περιορισμός της f στο B, να αποδείξετε ότι η f_2 έχει όριο στο ξ, αν η f έχει όριο στο ξ. Να αποδείξετε ακόμα ότι αν η f_2 έχει όριο στο ξ δεν συνεπάγεται ότι και η f έχει όριο στο ξ.

3.28 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$ σημείο συσσωρεύσεως του A. Υποθέτουμε ότι: $f(x) \leq g(x), \forall x \in A - \{\xi\}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty.$$

$$\beta) \lim_{x\to\xi} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty.$$

3.29 Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 0} x^{3/2} = 0, x > 0$ χρησιμοποιώντας κατάλληλο Θεώρημα.

3.30 Να εξετάσετε αν τα παρακάτω όρια υπάρχουν:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} sin\frac{1}{x+1}, \quad \beta) \lim_{x\to 0} sgn\left(sin\frac{1}{x}\right)$$

3.31 Έστω ξ σημείο συσσωρεύσεως του κοινού πεδίου ορισμού Δ δυο συναρτήσεων f και g. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = m$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \lim_{x\to\xi} min\{f(x), g(x)\} = min\{\ell, m\}.$$

$$\beta) \lim_{x\to\xi} max\{f(x), g(x)\} = max\{\ell, m\}.$$

§ 3.6 ΜΕΡΙΚΑ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΟΡΙΑ

$$1. \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

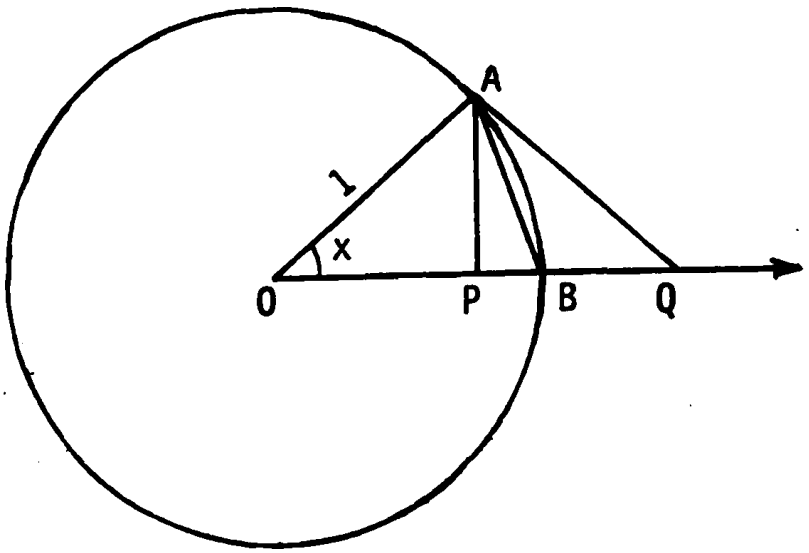
Θεωρούμε έναν κύκλο C με κέντρο Ο και ακτίνα 1. Υποθέτουμε ότι το τόξο ΑΒ του κύκλου σχηματίζει μια γωνία x ακτίνια (rad) με την ακτίνα στο Ο, όπου $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Υποθέτουμε επίσης ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Α τέμνει την προέκταση της ΟΒ στο Q και P είναι το σημείο τομής της κάθετης ΑΡ στην ΟΒ. Από την στοιχειώδη Τριγωνομετρία ξέρουμε ότι το μήκος της ΑΡ είναι το $sinx$ και το μήκος της ΑQ είναι η tgx.

Από το σχήμα 3.2 έχουμε ότι:

Εμβαδό τριγώνου OBA < Εμβαδό κυκλικού τομέα OBA < Εμβαδό τριγώνου OQA δηλ.

$$\frac{1}{2}sinx < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx.$$

Έτσι αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$,



$$sinx < x < tgx. \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ τότε $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ και άρα από την (1) θα έχουμε: $0 < sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$. Συνεπώς για $0 < x < \frac{\pi}{2}$ είναι $cosx = 1 - 2sin^2\frac{x}{2} > 1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$ και άρα από την (1) παίρνουμε:

$$1 - \frac{1}{2}x^2 < cosx < \frac{sinx}{x} < 1, 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Αφού $cos(-x) = cosx$ και $sin(-x) = -sinx$ η (2) ισχύει επίσης και για

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Έτσι αν $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, τότε

$$1 - \frac{1}{2}x^2 < cosx < \frac{sinx}{x} < 1.$$

Από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων έχουμε τότε ότι: $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$.

---

2. $\lim\limits_{x\to\beta} \alpha^x = \alpha^\beta, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Αν $\alpha = 1$ τότε $f(x) = \alpha^x = 1$ και ισχύει για κάθε x. Έστω $\alpha > 1$. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $\beta = 0$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \to 0$ η $f(x_\nu) = \alpha^{x_\nu} \to \alpha^0 = 1$.

Γνωρίζουμε ότι $lim\alpha^{1/\nu} = 1$. Έστω x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μια μηδενική ακολουθία και $\epsilon > 0$. Διαλέγουμε $\nu_0 \in N$ τέτοιο ώστε: $\alpha^{1/\nu_0} - 1 < \epsilon$ και $\nu_1 \in N$ τέτοιο ώστε: $|x_\nu| < \frac{1}{\nu_0}, \forall \nu > \nu_1$. Για $\nu > \nu_1$ θα έχουμε:

$$|f(x_\nu) - 1| = |\alpha^{x_\nu} - 1| = \begin{cases} \alpha^{x_\nu} - 1 < \alpha^{1/\nu_0} - 1 < \epsilon, & x_\nu > 0 \\ 1 - \alpha^{x_\nu} < \alpha^{-x_\nu} - 1 < \alpha^{1/\nu_0} - 1 < \epsilon, & x_\nu < 0 \\ 0 < \epsilon, & x_\nu = 0 \end{cases}$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $f(x_\nu) = \alpha^{x_\nu} \to 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \alpha^x = 1$.

Έστω τώρα $\beta \neq 0$. Αν x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μια ακολουθία με $x_\nu \to \beta$ τότε $x_\nu - \beta \to 0$ και σύμφωνα με τα προηγούμενα $f(x_\nu - \beta) \to 1 \Rightarrow \alpha^{x_\nu} \to \alpha^\beta$.

Τέλος αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\frac{1}{\alpha} > 1$ και άρα $\lim_{x\to\beta} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\beta = \frac{1}{\alpha^\beta}$.

---

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Απόδειξη

Επειδή $x \to +\infty$ θεωρούμε $x > 1$. Έστω ακολουθία $x_\nu \to +\infty$. Θέτουμε $[x_\nu] = k_\nu$. Από την σχέση

$$[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow k_\nu \leq x_\nu < k_\nu + 1$$

θα έχουμε:

$$\frac{1}{k_\nu + 1} < \frac{1}{x_\nu} \leq \frac{1}{k_\nu}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

και επομένως

$$\left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{k_\nu} < \left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu} \leq \left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu+1}.$$

Έχουμε όμως:

$$\left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{k_\nu} = \left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{k_\nu+1} \cdot \left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{-1} \to e.1$$

και

$$\left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu+1} = \left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu} \cdot \left(1+\frac{1}{k_\nu}\right) \to e.1.$$

Συνεπώς

$$lim\left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu} = e,$$

που σημαίνει ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

---

4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha.$

Απόδειξη

Για $\alpha = 0$ είναι προφανές. Για $\alpha \neq 0$ έχουμε:

$$\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\alpha}}\right)^{x/\alpha}\right]^\alpha = e^\alpha.$$

---

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\nu > -x$, δηλ. $\nu + x > 0$. Τότε είναι $1+\frac{x}{\nu} > 0$ και άρα $\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^\nu \geq 1+\nu.\frac{x}{\nu} = 1+x$, από την ανισότητα του Bernoulli. Τότε όμως έχουμε:

$$e^x = lim\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^\nu \geq lim(1+x) = 1+x \Rightarrow e^x \geq 1+x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θέτοντας στην σχέση αυτή όπου x το $-x$ έχουμε: $e^{-x} \geq 1 - x$ και για $x \in (-1, 1)$ έχουμε $e^x \leq \frac{1}{1-x}$. Επομένως

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{x-1}. \qquad (\star)$$

Αν $0 < x < 1$ η $(\star)$ δίνει $1 \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$ ενώ αν $-1 < x < 0$ $1 \geq \frac{e^x-1}{x} \geq \frac{1}{1-x}$ από τις οποίες, επειδή $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1$, παίρνουμε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1.$

Απόδειξη

Η ανισότητα $e^x \geq 1 + x$ αποδείξαμε προηγούμενα ότι ισχύει $\forall x \in R$. Επομένως θεωρώντας $x > 0$ και θέτοντας όπου x τον πραγματικό αριμό $\log x$ παίρνουμε:

$$e^{\log x} = x \geq 1 + \log x \Rightarrow \log x \leq x - 1.$$

Θέτοντας σ' αυτήν την σχέση όπου x το $\frac{1}{x}$ παίρνουμε $\log\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \log x \geq 1 - \frac{1}{x}$ δηλ.

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1, \forall x > 0. \qquad (1)$$

Από την (1) βρίσκουμε αν $x > 1$ ότι $\frac{1}{x} \leq \frac{\log x}{x-1} \leq 1$ ενώ αν $x < 1$ ότι $\frac{1}{x} \geq \frac{\log x}{x-1} \geq 1$ από τις οποίες, επειδή $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$, παίρνουμε ότι $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

§ 3.7 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Ας θυμηθούμε ότι αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται **αύξουσα** στο Α, αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $f(x_1) \leq f(x_2)$. Η συνάρτηση f θα λέγεται **γνήσια αύξουσα** στο Α, αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$. Παρόμοια η συνάρτηση $g : A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται **φθίνουσα** στο Α, αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $g(x_1) \geq g(x_2)$. Η συνάρτηση g θα λέγεται **γνήσια φθίνουσα** στο Α, αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ να έχουμε $g(x_1) > g(x_2)$.

Αν μια συνάρτηση είναι ή αύξουσα ή φθίνουσα στο Α, τότε λέμε ότι είναι **μονότονη** στο Α. Αν είναι ή γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα στο Α, τότε λέμε ότι είναι **γνήσια μονότονη** στο Α. Επίσης αν η f είναι αύξουσα στο Α τότε η $-f$ είναι φθίνουσα στο Α και αντίστροφα.

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με κριτήρια που αφορούν την ύπαρξη του ορίου. Στο πρώτο Θεώρημα θα δούμε ότι το φραγμένο και το

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

μονότονο μιας συνάρτησης (όπως και στις ακολουθίες) εξασφαλίζουν την ύπαρξη του ορίου.

Θεώρημα 3.47 Έστω $\mathbf{f} : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση. Αν η f είναι άνω φραγμένη από έναν αριθμό M, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to\beta-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{M}$. Αν η f δεν είναι άνω φραγμένη τότε $\lim_{x\to\beta-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty$.

Απόδειξη

Το φράξιμο της f συνεπάγεται την ύπαρξη του supremum

$$\sup\{f(x) : x \in (\alpha, \beta)\} = \sup_{x\in(\alpha,\beta)} f(x) = \ell \leq M.$$

Συνεπώς $f(x) \leq \ell, \forall x \in (\alpha, \beta)$ και για τυχαίο $\epsilon > 0$ υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\ell - \epsilon < f(x_1) \leq \ell.$$

Αφού η f είναι αύξουσα θα έχουμε ότι αν $\delta = \beta - x_1$ και $0 < \beta - x < \delta$, τότε $x_1 < x < \beta$ έτσι ώστε:

$$\ell - \epsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq \ell.$$

Επομένως $|f(x) - \ell| < \epsilon$ όταν $0 < \beta - x < \delta$ δηλ. όταν $\beta - \delta < x < \beta$ που σημαίνει ότι $\lim_{x\to\beta-} f(x) = \ell$.

Έστω τώρα ότι η f είναι αύξουσα και όχι άνω φραγμένη. Τότε για τυχαίο M υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_1) > M$, και επειδή η f είναι αύξουσα θα έχουμε:

$$M < f(x_1) \leq f(x) \quad \text{για} \quad x_1 < x < \beta.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι: $\lim_{x\to\beta-} f(x) = +\infty$. •

Θεώρημα 3.48 Έστω $\mathbf{f} : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση. Αν η f είναι κάνω φραγμένη από έναν αριθμό m, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to\alpha+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{m}$. Αν η f δεν είναι κάνω φραγμένη τότε $\lim_{x\to\alpha+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\infty$.

Η απόδειξη παραλείπεται γιατί είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν του Θεωρήματος 3.47.

Παρατήρηση 3.49

Στα προηγούμενα Θεωρήματα 3.47 και 3.48 μπορεί $\alpha = -\infty$ ή $\beta = +\infty$ ή ακόμα και $\alpha = -\infty$ και $\beta = +\infty$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ανάλογα Θεωρήματα ισχύουν και όταν η f είναι φθίνουσα. Η διατύπωσή τους και η απόδειξή τους αφήνεται για άσκηση.

Θα αναφέρουμε συνοπτικά τα συμπεράσματα. Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbf{R}$ μια μονότονη συνάρτηση. Τότε:

$$\lim_{x\to\beta-} f(x) = \sup_{x\in(\alpha,\beta)} f(x) \quad \text{αν η } f \text{ είναι αύξουσα}$$

$$\lim_{x\to\beta-} f(x) = \inf_{x\in(\alpha,\beta)} f(x) \quad \text{αν η } f \text{ είναι φθίνουσα}$$

$$\lim_{x\to\alpha+} f(x) = \inf_{x\in(\alpha,\beta)} f(x) \quad \text{αν η } f \text{ είναι αύξουσα}$$

$$\lim_{x\to\alpha+} f(x) = \sup_{x\in(\alpha,\beta)} f(x) \quad \text{αν η } f \text{ είναι φθίνουσα}$$

Το επόμενο Θεώρημα λέει ότι μια μονότονη συνάρτηση έχει πλευρικά όρια σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση αύξουσας συνάρτησης f έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.50 Αν μια συνάρτηση είναι αύξουσα στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to c-} f(x)$ και $\lim_{x\to c+} f(x)$ σε κάθε σημείο $c\in(\alpha,\beta)$ και ικανοποιούν τις ανισότητες:

$$\lim_{x\to c-} f(x) \le f(c) \le \lim_{x\to c+} f(x).$$

Επίσης τα όρια $\lim_{x\to\alpha+} f(x)$ και $\lim_{x\to\beta-} f(x)$ υπάρχουν και ικανοποιούν τις ανισότητες:

$$f(\alpha) \le \lim_{x\to\alpha+} f(x),\ \lim_{x\to\beta-} f(x) \le f(\beta).$$

Απόδειξη

Προκύπτει άμεσα από τα Θεωρήματα 3.47 και 3.48 αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η f είναι αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,c]$ και $[c,\beta]$. •

Το επόμενο βασικό Θεώρημα, που αφορά την ύπαρξη του ορίου, είναι αντίστοιχο με το Θεώρημα 1.79 που αφορά ακολουθίες και είναι γνωστό ως **κριτήριο του Cauchy για συναρτήσεις**

Θεώρημα 3.51 (Κριτήριο του Cauchy) Έστω $\xi\in\mathbf{R}$ σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού $\Delta(f)$ μιας συνάρτησης f. Τότε αναγκαία και ικανή συνθήκη για να υπάρχει το όριο της f στο ξ είναι:

$$(\forall\epsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x_1,x_2\in\Delta(f))\,0<|x_1-\xi|<\delta,\ 0<|x_2-\xi|<\delta$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\Rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)| < \epsilon.$$

Απόδειξη

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε όταν $0 < |x - \xi| < \delta$ να ισχύει: $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Συνεπώς υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta(f)$ με $0 < |x_1 - \xi| < \delta$, $0 < |x_2 - \xi| < \delta$ τέτοια ώστε:

$$|f(x_1) - \ell| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{και} \quad |f(x_2) - \ell| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Αλλά

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\{f(x_1) - \ell\} + \{\ell - f(x_2)\}| \leq |f(x_1) - \ell| + |f(x_2) - \ell| < \epsilon$$

που αποδεικνύει ότι η συνθήκη είναι αναγκαία.

Αντίστροφα, θα αποδείξουμε ότι η συνθήκη είναι και ικανή. Δηλαδή αν η συνθήκη ικανοποιείται, τότε το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει. Έστω ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ $x_\nu \in \Delta(f) - \{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in N$ τέτοιος ώστε:

$$0 < |x_\nu - \xi| < \delta, \forall \nu > \nu_0.$$

Αν $\nu_1 > \nu_0$ και $\nu_2 > \nu_0$ με $\nu_1, \nu_2 \in N$ θα ισχύουν

$$0 < |x_{\nu_1} - \xi| < \delta \quad \text{και} \quad 0 < |x_{\nu_2} - \xi| < \delta.$$

Από την υπόθεση τότε θα έχουμε:

$$|f(x_{\nu_1}) - f(x_{\nu_2})| < \epsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $f(x_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ η αντίστοιχη της x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, είναι ακολουθία του Cauchy και άρα συγκλίνει.

Έτσι λοιπόν έχουμε αποδείξει ότι για οποιαδήποτε ακολουθία $x_\nu \to \xi$ υπάρχει το $limf(x_\nu)$. Αυτό σημαίνει αυτόματα, από το Θεώρημα 3.3 ότι όλα αυτά τα όρια $limf(x_\nu)$ που αντιστοιχούν σε όλες τις διαφορετικές ακολουθίες που τείνουν στο ξ είναι ίσα μεταξύ τους. Αυτό συνεπάγεται ότι το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει. •

Αντίστοιχα Θεωρήματα έχουμε και για τις περιπτώσεις που $\xi = +\infty$ ή $-\infty$. Τα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη, μιας και αυτή είναι ανάλογη με την προηγούμενη.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 3.52 (Κριτήριο του Cauchy) Έστω το $+\infty$ (αντίστοιχα $-\infty$) είναι σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού $\Delta(f)$ μιας συνάρτησης f. Τότε αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad (\text{ανίστοιχα} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell)$$

είναι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x_1, x_2 \in \Delta(f))x_1 > r, x_2 > r$$

$$(\text{αντίστοιχα} \quad x_1 < -r, x_2 < -r) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Παρατήρηση 3.53

Το Θεώρημα 3.51 συνήθως στις εφαρμογές χρησιμοποιείται αρνητικά, δηλ. για να αποδείξουμε ότι το όριο μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο δεν υπάρχει. Αρκεί να αποδείξουμε την άρνηση της συνθήκης που είναι:

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_1, x_2 \in \Delta(f))0 < |x_1 - \xi| < \delta, 0 < |x_2 - \xi| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon.$$

Παράδειγμα 3.54

Ας αποδείξουμε με την βοήθεια του κριτηρίου του Cauchy ότι το $\lim_{x\to 0} \cos\frac{\pi}{x}$ δεν υπάρχει. Έστω $\epsilon = 1$ και $\delta > 0$. Τότε υπάρχει $k \in N$ τέτοιο ώστε $k > \frac{1}{2\delta}$. Έστω $x_1 = \frac{1}{2k}$ και $x_2 = \frac{1}{2k+1}$. Τότε $0 < x_1 < \delta$ και $0 < x_2 < \delta$, αλλά

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\cos 2k\pi - \cos(2k+1)\pi| = 2 > \epsilon.$$

Συνεπώς η $f(x) = \cos\frac{\pi}{x}, x \neq 0$ δεν ικανοποιεί το κριτήριο του Cauchy και άρα δεν έχει όριο στο 0.

Παράδειγμα 3.55

Έστω $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την συνθήκη:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 5\sqrt{|x_1 - x_2|}, \forall x_1, x_2 \in (0, 1).$$

Τότε το $\lim_{x\to 1-} f(x)$ υπάρχει. Πραγματικά· θα αποδείξουμε ότι η f ικανοποιεί το κριτήριο του Cauchy. Έστω $x_1, x_2 \in (0, 1)$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 5\sqrt{|x_1 - x_2|} = 5\sqrt{x_2 - x_1} \leq 5\sqrt{1 - x_1}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Αν λοιπόν $0 < 1 - x_1 < \delta$ τότε και $0 < 1 - x_2 < \delta$. Διαλέγοντας $\delta = \frac{\epsilon^2}{25}$ έχουμε:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 5\sqrt{1 - x_1} < 5\sqrt{\frac{\epsilon^2}{25}} = \epsilon.$$

§ 3.8 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

Σωστό ή λάθος;

1 Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$ τότε $f(\xi) = \ell$.

2 Αν $f(x) = g(x)$ για όλους τους πραγματικούς, εκτός από το 0, και $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$ τότε $\lim_{x\to 0} g(x) = \ell$.

3 Για πολυωνυμικές συναρτήσεις τα όρια από αριστερά και από δεξιά πάντα υπάρχουν και είναι ίσα.

4 Αν η f δεν ορίζεται για $x = \xi$ τότε το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει.

5 Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x\to\xi}[f(x) - g(x)] = 0$.

6 Αν $\lim_{x\to\xi} |f(x)| = \ell$ τότε και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$.

7 Έστω $|f(x)| \leq M, \forall x \in \Delta(f)$ και το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει. Αν $\lim_{x\to\xi} g(x) = 0$ τότε $\lim_{x\to\xi}[f(x).g(x)] = 0$.

8 Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \ell_2$ και $f(x) < g(x), \forall x$ τότε $\ell_1 < \ell_2$.

9 Αν $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x), \forall x$ και $\lim_{x\to\xi} f_1(x) = \lim_{x\to\xi} f_3(x) = \ell$ τότε και $\lim_{x\to\xi} f_2(x) = \ell$.

10 Αν τα $\lim_{x\to\xi} f(x), \lim_{x\to\xi} g(x)$ δεν υπάρχουν τότε και το $\lim_{x\to\xi}[f(x) + g(x)]$ δεν υπάρχει. Επίσης και το $\lim_{x\to\xi}[f(x).g(x)]$ δεν υπάρχει.

11 Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και το $\lim_{x\to\xi}[f(x) - g(x)]$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi} g(x)$.

12 $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))0 < |x - \xi| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \delta$.

13 $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0) : |f(x) - \ell| < \epsilon \Rightarrow 0 < |x - \xi| < \delta$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

14 $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell \Rightarrow (\exists M > 0)(\exists \delta > 0) : |f(x)| < M$ αν $0 < |x - \xi| < \delta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sqrt{x^2 - 6x + 8} + 2\sqrt{x - 2}$. Να βρεθούν τα σημεία συσσωρεύσεως και τα μεμονωμένα σημεία του $\Delta(f)$.

3.33 Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-2} = 1$.

3.34 Υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ όπου

$$f(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases};$$

3.35 Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω όρια δεν υπάρχουν:

$$\alpha) \lim_{x\to 0} \varepsilon\varphi\frac{1}{x}$$

$$\beta) \lim_{x\to 2} f(x) \quad \text{όπου} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in Q \\ 2x - 1, & x \in \mathbb{R} - Q \end{cases}$$

3.36 Για ποιές τιμές των α και β ισχύει η ισότητα:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \alpha x - \beta\right) = 1.$$

3.37 Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{kx^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}\right), k \in \mathbb{R}.$$

3.38 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια, εφόσον αυτά υπάρχουν:

$$\alpha) \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{[x]}} \quad \beta) \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1 + e^{-1/x}} \quad \gamma) \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

3.39 Για δοσμένο $\epsilon > 0$ να βρεθεί $M > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\left|\frac{9x + 4}{3x - 1} - 3\right| < \epsilon \quad \text{αν} \quad M < x.$$

Ποιο συμπέρασμα σχετικά με το όριο αποδεικνύεται μ' αυτό;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

3.40 Έστω $f:(x-\alpha,x+\alpha)\to I\!R, \alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)=\ell \Rightarrow \lim_{h\to 0}\{f(x+h)-f(x-h)\}=0.$$

Θεωρώντας την συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

να αποδείξετε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

3.41 Αν $f(x)=\alpha+(\beta-\alpha)\lim_{\nu\to+\infty} sgn(sin^2\nu!\pi x)$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha, & x\in Q\\ \beta, & x\in I\!R-Q\end{cases}$$

3.42 Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|+sin|x|}{|x|cos\frac{1}{x}}=1.$$

3.43 Έστω $f:(\alpha,\beta)\to I\!R$ μια αύξουσα συνάρτηση στο (α,β) και $\alpha<x_1<x_2<\beta$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_1+} f(x)\leq \lim_{x\to x_2-} f(x).$$

3.44 Εφαρμόζοντας την Παρατήρηση 3.49 να υπολογίσετε τα:

$$\inf\{-e^{-|x|}, x\in I\!R\} \quad \text{και} \quad \sup\left\{\frac{x}{x-2}: x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)\right\}.$$

3.45 Αν $lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell$ και $f(\nu)=\alpha_\nu, \nu\in I\!N$, τότε να αποδείξετε ότι $lim\alpha_\nu=\ell$.

Με την βοήθεια της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}+cos2\pi x, x>1$ να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.

3.46 (Ασυμπτωτική ισοδυναμία) Έστω $f,g:A\to I\!R$. Αν υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $|f(x)|\leq M|g(x))|, \forall x\in A$ τότε λέμε ότιη f **είναι Ο μεγάλο ως προς την** g και γράφουμε $f=O(g)$. Αν $g(x)\neq 0, \forall x\in A-\{\xi\}$ και $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, τότε λέμε ότι οι f **και** g **είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες όταν** $x\to\xi$ και γράφουμε $f\sim g$ όταν $x\to\xi$. Αν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, τότε λέμε ότι **η** f **είναι ο μικρό ως προς τη** g και γράφουμε $f=o(g)$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha)\sin x=O(x) \qquad \beta)\cos x-1=O(x) \quad \text{όταν} \quad x\to 0$$

$$\gamma)\sin x\sim x \quad \text{όταν} \quad x\to 0 \quad \delta)x^2+1\sim x \quad \text{όταν} \quad x\to+\infty.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

συνέχεια συνάρτησης 4

§ 4.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης είναι πολύ σημαντική, όχι μόνο από καθαρή μαθηματική σκοπιά για την μελέτη των πραγματικών συναρτήσεων, αλλά και από τον δεσπόζοντα ρόλο που παίζει σε πολλές εφαρμογές στην Φυσική και τη Μηχανική. Διαισθητικά η έννοια της συνέχειας συνδέεται με την γεωμετρική έννοια της αδιάκοπα συνεχιζόμενης ευθείας γραμμής ή καμπύλης.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την έννοια της συνέχειας και θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες με την βοήθεια των ιδιοτήτων που μάθαμε για τις συγκλίνουσες συναρτήσεις. Ειδικότερη βαρύτητα θα δοθεί στις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται σε κλειστό και φραγμένο διάστημα.

§ 4.2 ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Ορισμός 4.1 Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής στο σημείο $\xi \in \Delta(f)$, αν και μόνον αν, για κάθε θετικό αριθμό ϵ, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in \Delta(f)$ με $|x - \xi| < \delta$ να έχουμε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$.

Συμβολικά

$$f \text{ συνεχής στο } \xi \in \Delta(f) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))|x - \xi| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Ορισμός 4.2 Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής στο $\Delta(f)$ αν αυτή είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Επίσης μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής σε ένα σύνολο $A \subseteq \Delta(f)$, αν ο περιορισμός της στο A είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A. Μια συνάρτηση που δεν είναι συνεχής θα λέγεται ασυνεχής.

Παρατήρηση 4.3

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συγκρίνοντας τον Ορισμό 4.1 με τον Ορισμό 3.16 βλέπουμε ότι αυτοί στην βασική τους δομή είναι όμοιοι. Ας επισημάνουμε όμως μερικές βασικές διαφορές:

α) Στο όριο έχουμε $0 < |x - \xi| < \delta$, *δηλ.* $x \neq \xi$ *ενώ στην συνέχεια έχουμε* $|x - \xi| < \delta$, *δηλ. ο ορισμός ισχύει και για* $x = \xi$.

β) Αντί του ℓ *που είχαμε στο όριο, στην συνέχεια έχουμε το* $f(\xi)$. *Πρέπει λοιπόν απαραίτητα για την συνέχεια η συνάρτηση να ορίζεται στο* ξ. **Έτσι λοιπόν δεν έχει νόημα να μιλάμε για συνέχεια ή ασυνέχεια μιας συνάρτησης σε σημεία που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της.**

γ) Στον ορισμό του ορίου πρέπει οπωσδήποτε το ξ *να είναι σημείο συσσωρεύσεως του* $\Delta(f)$, *και άρα μπορεί να μην ανήκει στο* $\Delta(f)$, *ενώ στην συνέχεια αυτό δεν είναι αναγκαίο. Μπορεί μάλιστα το* ξ *να είναι μεμονωμένο σημείο του* $\Delta(f)$. Αυτό μας οδηγεί στα επόμενα Θεωρήματα:

Θεώρημα 4.4 **Αν** $\mathbf{f} : \Delta(\mathbf{f}) \to \mathbf{R}$, $\Delta(\mathbf{f}) \subseteq \mathbf{R}$ **και** $\xi \in \Delta(\mathbf{f})$ **είναι σημείο συσσωρεύσεως του** $\Delta(\mathbf{f})$, **τότε η f είναι συνεχής στο** ξ, **αν και μόνον αν,** $\lim_{x \to \xi} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\xi)$.

Απόδειξη

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο ξ. Θα αποδείξουμε ότι $lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$. Αφού η f είναι συνεχής στο ξ, το $f(\xi)$ υπάρχει και είναι ένας ορισμένος πραγματικός αριθμός. Επί πλέον ισχύει:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Τότε προφανώς ισχύει και

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Αυτό όμως από τον ορισμό του ορίου στο $\xi \in \Delta(f)$ σημαίνει ότι $lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.

Αντίστροφα, αν $lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$ τότε θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\xi \in \Delta(f)$. Σύμφωνα με το ορισμό του ορίου, αφού το $f(\xi)$ υπάρχει, θα έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Αλλά για $x = \xi$ θα έχουμε $|f(x) - f(\xi)| = 0 < \epsilon$ με οποιδήποτε $\epsilon > 0$ και με οποιοδήποτε $\delta > 0$, αφού $|x - \xi| = 0 < \delta$. Άρα

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon$$

πράγμα που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο $\xi \in \Delta(f)$. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 4.5 Αν f : $\Delta(f) \to \mathbf{R}$, $\Delta(f) \subseteq \mathbf{R}$ και $\xi \in \Delta(f)$ είναι μεμονωμένο σημείο του $\Delta(f)$, τότε η f είναι συνεχής στο ξ.

Απόδειξη

Από τον ορισμό του μεμονωμένου σημείου έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$N_\delta^*(\xi) \cap \Delta(f) = \{x : 0 < |x - \xi| < \delta\} \cap \Delta(f) = \emptyset.$$

Άρα έχουμε για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ ότι $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για όλα τα $x \in N_\delta(\xi) \cap \Delta(f) = \{x : |x - \xi| < \delta\} \cap \Delta(f) = \{\xi\}$. •

Παρατήρηση 4.6

Γνωρίζουμε ότι οποιοδήποτε σημείο $\xi \in \Delta(f)$ θα είναι ή μεμονωμένο ή σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$. Γι' αυτό τα θεωρήματα 4.4 και 4.5 απαιτούν προσοχή στην εφαρμογή τους.

Παράδειγμα 4.7

Έστω $f : \{0\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο $0 \in \{0\} = \Delta(f)$. Πραγματικά· έχουμε $|f(x) - f(0)| = |1 - 1| = 0 < \epsilon$, για όλα τα $x \in N_\delta(0) \cap \Delta(f)$ για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και $\delta > 0$. Το Θεώρημα 4.4 σ' αυτήν την περίπτωση δεν εφαρμόζεται αφού το 0 δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\{0\}$ και δεν έχει έννοια το $lim_{x \to 0} f(x)$.

Από το Παράδειγμα αυτό φαίνεται ότι είναι λαθεμένη η στενή αντίληψη που συνήθως επικρατεί για την συνέχεια, ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο, αν και μόνον αν, το όριο της συνάρτησης ισούται με την τιμή της συνάρτησης σ' αυτό το σημείο.

Παράδειγμα 4.8

Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$. Τότε η f είναι συνεχής από το Θεώρημα 4.5, αφού κάθε σημείο του $\mathbb{N}$ είναι μεμονωμένο.

Παράδειγμα 4.9

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Τότε η f είναι συνεχής. Για να το αποδείξουμε, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής σε οποιοδήποτε $\xi \in \mathbb{R}$ με την βοήθεια του Ορισμού 4.4. (Προφανώς αυτό το τυχαίο ξ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f) = \mathbb{R}$.) Εργαζόμαστε ως εξής, έχοντας υπόψη και τα σχετικά περί συγκλίσεως:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi)| &= |x^2 - \xi^2| = |x - \xi||x + \xi| = |x - \xi||(x - \xi) + 2\xi| \\ &\leq |x - \xi|(|x - \xi| + 2|\xi|) < \delta(\delta + 2|\xi|) \end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

για όλα τα $x \in IR$ με $|x - \xi| < \delta$. Χωρίς να κάνουμε την τελική εκλογή του δ, ας θεωρήσουμε $\delta < 1$. Τότε $\delta^2 < \delta$ και συνεπώς $\delta(\delta + 2|\xi|) < \delta(1 + 2|\xi|)$. Επειδή θέλουμε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$, για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, αρκεί να πάρουμε ως $\delta = min\left\{1, \frac{\epsilon}{1+2|\xi|}\right\}$.

Παράδειγμα 4.10

Έστω $f : IR \to IR$ με

$$f(x) = \begin{cases} xsin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Το 0 είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$. Συνεπώς έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(xsin\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$$

και σύμφωνα με το Θεώρημα 4.4 η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0.

Παρατήρηση 4.11

Ο Ορισμός 4.4 της συνέχειας, γνωστός ως ορισμός του Cauchy, μπορεί να παραφραστεί στις ακόλουθες δυο ισοδύναμες μορφές:

i) Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής στο σημείο $\xi \in \Delta(f)$ αν για δοσμένο $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα ότι το f(x) ανήκει στην περιοχή $N_\epsilon(f(\xi))$ για όλα τα x που ανήκουν στο $\Delta(f) \cap N_\delta(\xi)$.

ii) Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής στο σημείο $\xi \in \Delta(f)$ αν για δοσμένο $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $|f(\xi + h) - f(\xi)| < \epsilon$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς h με την ιδιότητα $\xi + h \in \Delta(f)$ και $|h| < \delta$.

Παρατήρηση 4.12

Η συνέχεια μιας συνάρτηση f στο σημείο $\xi \in \Delta(f)$ ερμηνεύεται γεωμετρικά ως εξής:

Έστω $y = f(x)$ μια συνάρτηση και $\xi \in \Delta(f)$ ένα σημείο στο οποίο η f είναι συνεχής. Σύμφωνα με τον ορισμό θα έχουμε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon,$$

δηλ. $\forall x \in \Delta(f)$ με $\xi - \delta < x < \xi + \delta$ να ισχύει

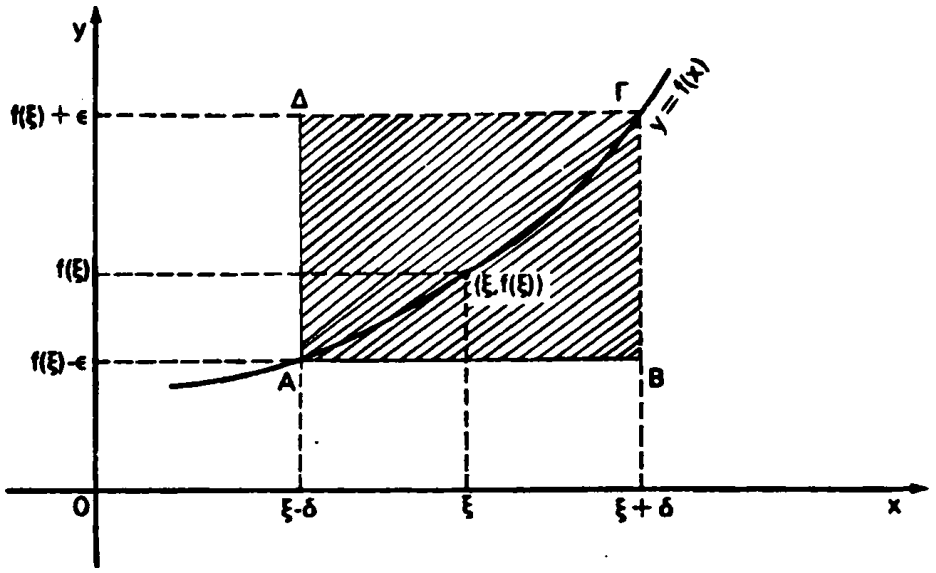
$$f(\xi) - \epsilon < f(x) < f(\xi) + \epsilon.$$

Αυτά σημαίνουν τα εξής:

Το σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι εντελώς καθορισμένο, και για τις τιμές του x από το διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ αντιστοιχούν σημεία της f, που βρίσκονται

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Όταν το x πλησιάζει το ξ το $f(x)$ πλησιάζει το $f(\xi)$, δηλ. οι διαστάσεις του ορθογωνίου μπορούν να γίνουν οσοδήποτε μικρές. Αυτό σημαίνει ότι το τμήμα της καμπύλης που βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι μια συνεχόμενη γραμμή.



Σχήμα 4.1

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε την συνέχεια μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο $\xi \in \Delta(f)$ από αριστερά ή από δεξιά. Έτσι έχουμε:

Ορισμός 4.13 Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής στο σημείο $\xi \in \Delta(f)$ από αριστερά (αντίστοιχα από δεξιά), αν και μόνον αν, για κάθε θετικό αριθμό ϵ, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in \Delta(f)$ με $\xi - \delta < x \leq \xi$ (αντίστοιχα $\xi \leq x < \xi + \delta$) να έχουμε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$.

Παρατήρηση 4.14

Αν το $\xi \in \Delta(f)$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$ από αριστερά (αντίστοιχα από δεξιά) τότε η f θα είναι συνεχής στο ξ από αριστερά (αντίστοιχα από δεξιά) αν και μόνον αν, $lim_{x \to \xi -} f(x) = f(\xi)$ (αντίστοιχα $lim_{x \to \xi +} f(x) = f(\xi)$).

Αν το $\xi \in \Delta(f)$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$ και η f είναι συνεχής και από αριστερά και από δεξιά στο ξ, τότε είναι συνεχής στο ξ.

Αν το $\Delta(f) = [\alpha, \beta]$ τότε όταν λέμε ότι η f είναι συνεχής εννοούμε ότι η f είναι συνεχής $\forall x \in (\alpha, \beta)$, συνεχής από δεξιά στο α και συνεχής από αριστερά στο β.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Όπως και στο όριο υπάρχει και για τη συνέχεια ο ορισμός με την βοήθεια των ακολουθιών, γνωστός ως **ακολουθιακός ορισμός της συνέχειας.**

Ορισμός 4.15 *Έστω* $\mathbf{f} : \Delta(\mathbf{f}) \to \mathbf{R}, \Delta(\mathbf{f}) \subseteq \mathbf{R}$ *και* $\xi \in \Delta(\mathbf{f})$ *σημείο συσσωρεύσεως του* $\Delta(\mathbf{f})$. *Η συνάρτηση* $\mathbf{f}$ *είναι συνεχής στο* $\xi \in \Delta(\mathbf{f})$ *αν και μόνον αν, για κάθε ακολουθία* $\mathbf{x}_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ *από το* $\Delta(\mathbf{f})$ *με* $\mathbf{x}_\nu \to \xi$, *η αντίστοιχη ακολουθία των τιμών της συνάρτησης* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_\nu), \nu \in \mathbf{N}$ *συγκλίνει στο* $\mathbf{f}(\xi)$.

Συμβολικά

$$\mathbf{f} \text{ συνεχής στο } \xi \in \Delta(\mathbf{f}) \Leftrightarrow (\forall \mathbf{x}_\nu, \nu \in \mathbf{N}, \mathbf{x}_\nu \in \Delta(\mathbf{f}), \mathbf{x}_\nu \to \xi)$$

$$\Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_\nu) \to \mathbf{f}(\xi).$$

Θεώρημα 4.16 Οι ορισμοί 4.1 και 4.15 είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη

4.1 $\Rightarrow$ **4.15** Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $\xi \in \Delta(f)$ και $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ τυχαία ακολουθία με $x_\nu \to \xi$. Από την σύγκλιση της $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι:

$$(\forall \epsilon^* > 0)(\exists \nu_0 \in N)(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |x_\nu - \xi| < \epsilon^*.$$

Διαλέγουμε σαν ϵ^* το δ που δίνει ο ορισμός 4.1. Τότε για αυτό το δ υπάρχει $\nu_0 \in N$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ θα έχουμε: $|x_\nu - \xi| < \delta$. Από τον ορισμό 4.1 έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in N)(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |f(x_\nu) - f(\xi)| < \epsilon$$

που σημαίνει ότι $lim f(x_\nu) = f(\xi)$.

4.15 $\Rightarrow$ **4.1** Ας υποθέσουμε ότι ισχύει ο ορισμός 4.15 και η f δεν είναι συνεχής στο ξ. Τότε θα ισχύει η άρνηση του ορισμού 4.1, δηλ.

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \Delta(f))|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| \geq \epsilon. \qquad (1)$$

Αφού η (1) ισχύει για κάθε $\delta > 0$ παίρνουμε ως $\delta = \frac{1}{\nu}$. Προκύπτει τότε ότι υπάρχει ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in \Delta(f)$ για την οποία έχουμε:

$$|x_\nu - \xi| < \frac{1}{\nu} \quad \text{και} \quad |f(x_\nu) - f(\xi)| \geq \epsilon, \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Η πρώτη ανισότητα δείχνει ότι $x_\nu \to \xi$ ενώ η δεύτερη ότι η $f(x_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει στο $f(\xi)$, που είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι ισχύει ο ορισμός 4.15. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι η στεθερή συνάρτηση $f(x) = c$ και η ταυτοτική $f(x) = x$, είναι συνεχείς στο $\mathbf{R}$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την συνέχεια στο τυχαίο $\xi \in \mathbb{R}$. Για την $f(x) = c$ έχουμε ότι και $f(\xi) = c$. Τότε $\forall \epsilon > 0$ ισχύει $|f(x) - f(\xi)| = 0 < \epsilon, \forall x, \xi \in \mathbb{R}$. Αν λοιπόν πάρουμε ως δ οποιονδήποτε θετικό αριθμό τότε $\forall x \in \mathbb{R}$ με $|x - \xi| < \delta$ θα έχουμε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ και συνεπώς η $f(x) = c$ είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$.

Για την $f(x) = x$ πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f) = \mathbb{R})|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Αλλά $|f(x) - f(\xi)| = |x - \xi|$. Επομένως αρκεί να πάρουμε $\delta = \epsilon$.

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ είναι συνεχής.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο τυχαίο $\xi \in [0, +\infty)$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [0, +\infty))|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| = |\sqrt{x} - \sqrt{\xi}| < \epsilon.$$

α) Έστω $\xi > 0$. Τότε

$$|f(x) - f(\xi)| = |\sqrt{x} - \sqrt{\xi}| = \frac{|x - \xi|}{\sqrt{x} + \sqrt{\xi}} \leq \frac{|x - \xi|}{\sqrt{\xi}}.$$

Επειδή θέλουμε να ισχύει $\frac{|x-\xi|}{\sqrt{\xi}} < \epsilon$ για όλα τα $x \in [0, +\infty)$ με $|x - \xi| < \delta$, αρκεί να πάρουμε $\delta = \epsilon\sqrt{\xi}$.

β) Έστω $\xi = 0$. Τότε πρέπει να αποδείξουμε ότι: $|\sqrt{x} - 0| < \epsilon$ για όλα τα $x \in [0, +\infty)$ με $|x - \xi| < \delta$. Αρκεί να πάρουμε $\delta = \epsilon^2$.

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} x, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

είναι συνεχής μόνο για $\mathbf{x = 0}$.

Απόδειξη

Για $x = 0$ είναι $f(x) = 0$. Για να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο 0 αρκεί να αποδείξουμε ότι $lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ ή ότι για κάθε ακολουθία

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

$x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \to 0 \Rightarrow f(x_\nu) \to 0$. Έστω $\rho_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ τυχαία ακολουθία ρητών με $\rho_\nu \to 0$. Τότε $f(\rho_\nu) = \rho_\nu \to 0$. Έστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ τυχαία ακολουθία άρρητων με $\alpha_\nu \to 0$. Τότε $f(\alpha_\nu) = 0 \to 0$.

Ας θεωρήσουμε τώρα τυχαία ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \to 0$. Τότε $f(x_\nu) \to 0$, γιατί αν πάρουμε τις δυο υπακολουθίες της $\rho_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ των ρητών και άρρητων όρων της αντίστοιχα, είναι $f(\rho_\nu) = \rho_\nu \to 0$ και $f(\alpha_\nu) = 0 \to 0$. Άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Έστω τώρα $x = \xi \neq 0$ Τότε για $\rho_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ $\rho_\nu \in Q$ και $\rho_\nu \to \xi$ έχουμε $f(\rho_\nu) = \rho_\nu \to \xi$ ενώ για $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ $\alpha_\nu \in I$ και $\alpha_\nu \to \xi$ έχουμε $f(\alpha_\nu) = 0 \to 0$. Δηλαδή $limf(\rho_\nu) \neq limf(\alpha_\nu)$ και συνεπώς το $limf(x_\nu)$ δεν υπάρχει. Κατά συνέπεια η f δεν είναι συνεχής για $x \neq 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.1 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς με την βοήθεια του $\epsilon - \delta$ ορισμού (Ορισμός 4.4):

$\alpha)$ $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$ $\quad \beta) f(x) = \frac{1}{x^2}, x \in (0, +\infty)$

$\gamma)$ $f(x) = sinx, x \in \mathbb{R}$ $\quad \delta) f(x) = cosx, x \in \mathbb{R}$.

4.2 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς με την βοήθεια του ακολουθιακού ορισμού (Ορισμός 4.4):

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^k sin\frac{1}{x}, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} sine^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|(1+x)}{x} sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{1/x}}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 1 - \frac{|x|}{x} sinx, & x > 0 \end{cases}$$

4.3 Να βρεθεί η σταθερή α έτσι ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι συνεχείς:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{\pi - x} + 2\alpha - x, & x < \pi \\ \alpha x - 1, & x \geq \pi \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} log(1 + |x|), & x < 0 \\ \alpha, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\gamma) f(x) = lim_{\nu \to +\infty} \frac{x+(\alpha+1)e^{\nu x}}{2+e^{\nu x}}$

$\delta) f(x) = lim_{\nu \to +\infty} \frac{\alpha|x-1|e^{\nu x}+x^2+1}{1+e^{\nu x}}$

4.4 α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του "Dirichlet"

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$.

β) Να βρεθούν τα σημεία στα οποία είναι συνεχής η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \text{ ρητός} \\ x+3, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

4.5 Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = [x], x \in \mathbb{R} \quad \beta) f(x) = 1 - x + [x], x \in \mathbb{R}$$

$$\gamma) f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}, x \in \mathbb{R}$$

4.6 Αν $k > 0$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

4.7 α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο μηδέν. Χρησιμοποιώντας αυτό να αποδείξετε την συνέχειά της σ' όλο το $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$i) \lim_{x \to +\infty} \alpha^x = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 1 \\ 1, & \alpha = 1 \\ 0, & 0 < \alpha < 1 \end{cases} \qquad ii) \lim_{x \to -\infty} \alpha^x = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ 1, & \alpha = 1 \\ +\infty, & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

4.8 Ορίζουμε την συνάρτηση:

$$\{x\} = min(x - [x], 1 - x + [x]), x \in \mathbb{R}$$

που λέγεται **απόσταση από τον πλησιέστερο ακέραιο.** Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \{x\} = \frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - x + [x]\right|, x \in \mathbb{R} \quad \beta) 0 \leq \{x\} \leq \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γ) η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο μηδέν.

4.9 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f(x) = inf\{|x-y|, y \in A\}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

§ 4.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΣΩΝ

Όπως στην θεωρία σύγκλισης μερικές προτάσεις διευκολύνουν την εύρεση της οριακής τιμής μιας συνάρτησης, έτσι και εδώ μερικές προτάσεις που αναφέρονται στις συνεχείς συναρτήσεις μας βοηθούν πάρα πολύ στην μελέτη της συνέχειας, κυρίως στις περιπτώσεις που οι τύποι των συναρτήσεων είναι πολύπλοκοι και δεν είναι εύκολο να εφαρμοστούν απ' ευθείας οι σχετικοί ορισμοί.

Θεώρημα 4.17 Αν η f είναι συνεχής στο $\xi \in \Delta(f)$ και $f(\xi) \neq 0$, τότε υπάρχει περιοχή του ξ στην οποία $f(x) \neq 0$. (Δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq 0, \forall x \in N_\delta(\xi) \cap \Delta(f)$). Ειδικά αν $f(\xi) > 0$ (αντίστοιχα $f(\xi) < 0$) τότε $f(x) > 0$ (αντίστοιχα $f(x) < 0$) $\forall x \in N_\delta(\xi) \cap \Delta(f)$.

Απόδειξη

Αν το ξ είναι μεμονωμένο σημείο τότε το Θεώρημα είναι προφανές. Αν το ξ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$ τότε το Θεώρημα προκύπτει από τα Θεωρήματα 3.39 και 4.4. Ας δούμε αναλυτικά τις λεπτομέρειες.

Αφού η f είναι συνεχής στο ξ θα έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Επειδή $f(\xi) \neq 0$ αν πάρουμε ως $\epsilon = \frac{1}{2}|f(\xi)|$ θα έχουμε:

$$|f(x) - f(\xi)| < \frac{1}{2}|f(\xi)|, \forall x \in \Delta(f) \quad \text{με} \quad |x - \xi| < \delta$$

ή

$$f(\xi) - \frac{1}{2}|f(\xi)| < f(x) < f(\xi) + \frac{1}{2}|f(\xi)|.$$

Άρα αν $f(\xi) > 0$ τότε $f(x) > f(\xi) - \frac{1}{2}f(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi) > 0$, ενώ αν $f(\xi) < 0$ τότε $f(x) < f(\xi) - \frac{1}{2}f(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi) < 0, \forall x \in \Delta(f)$ με $|x - \xi| < \delta$, δηλ. $\forall x \in N_\delta(\xi) \cap \Delta(f)$. •

Πόρισμα: Αν η f είναι συνεχής στο $\xi \in \Delta(f)$ και $f(\xi) \neq \eta$, τότε υπάρχει περιοχή του ξ στην οποία $f(x) \neq \eta$. Ειδικά αν $f(\xi) > \eta$ (αντίστοιχα $f(\xi) < \eta$) τότε $f(x) > \eta$ (αντίστοιχα $f(x) < \eta$) $\forall x \in N_\delta(\xi) \cap \Delta(f)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

Αρκεί να εφαρμόσουμε το προηγούμενο Θεώρημα στην συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$. Οι λεπτομέρειες αφήνονται για άσκηση. •

Παρατήρηση 4.18

Αξίζει να δώσουμε έμφαση ότι στο παραπάνω Θεώρημα η f **πρέπει να είναι συνεχής μόνον σε ένα σημείο. Τότε έχουμε ως συμπέρασμα ποιά είναι η συμπεριφορά της f σε κάποιο διάστημα που περιέχει αυτό το σημείο.**

Θεώρημα 4.19 Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο σημείο ξ του κοινού πεδίου ορισμού των Δ, τότε οι συναρτήσεις

$$\alpha)\ \mathbf{f+g} \qquad \beta)\ \mathbf{f.g} \qquad \gamma)\ \mathbf{|f|}$$

$$\delta)\ \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}, \mathbf{g}(\xi) \neq \mathbf{0} \qquad \epsilon)\ \mathbf{min\{f, g\}} \qquad \sigma\tau)\ \mathbf{max\{f, g\}}$$

είναι επίσης συνεχείς στο ξ.

Απόδειξη

Οι αποδείξεις των $\alpha) - \delta)$ προκύπτουν άμμεσα από το Θεώρημα 3.42. Οι $\epsilon), \sigma\tau)$ προκύπτουν από τις προηγούμενες, αφού όπως ξέρουμε

$$min\{f, g\} = \frac{1}{2}\{f + g - |f - g|\} \quad \text{και} \quad max\{f, g\} = \frac{1}{2}\{f + g + |f - g|\}.$$

•

Παρατήρηση 4.20

Τα αντίστροφα των περιπτώσεων $\alpha) - \delta)$ του προηγούμενου Θεωρήματος δεν ισχύουν. Έτσι αν το άθροισμα ή το γινόμενο ή το πηλίκο δυο συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα σημείο του κοινού πεδίου ορισμού τους, δεν έπεται αναγκαστικά ότι και κάθε μια από αυτές είναι συνεχής. Π.χ. αν

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

τότε οι $f + g$ και $f.g$ είναι συνεχείς στο 0, χωρίς καμμιά από τις f και g να είναι συνεχής στο 0.

Αν όμως το άθροισμα δυο συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση και η μια από αυτές είναι συνεχής, τότε και η άλλη είναι συνεχής. Αυτό δεν ισχύει για το γινόμενο ή το πηλίκο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επίσης υπάρχουν συναρτήσεις που είναι ασυνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους, που όμως η απόλυτη τιμή τους είναι συνεχής συνάρτηση. Για παράδειγμα, από την άσκηση 3.14 είναι γνωστό, ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \notin Q \end{cases}$$

δεν έχει οριακή τιμή σε κανένα σημείο $\xi \in \Delta(f) = \mathbb{R}$. Συνεπώς η f δεν είναι συνεχής. Αν όμως πάρουμε την $|f|$ τότε $|f(x)| = 1, \forall x \in R$, η οποία είναι συνεχής ως σταθερή συνάρτηση.

Θεώρημα 4.21 (Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση). Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\xi \in \Delta(f)$ και μια συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathcal{R}(f)$ και συνεχής στο $f(\xi) \in \mathcal{R}(f)$. Τότε η συνάρτηση $h = g \circ f$ είναι συνεχής στο ξ.

Απόδειξη

Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ θα έχουμε:

$$(\forall \epsilon^* > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon^*.$$

Από την συνέχεια της g στο $f(\xi)$ θα έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)((\exists \delta_1 > 0)(\forall f(x) \in \mathcal{R}(f))|f(x) - f(\xi)| < \delta_1$$

$$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(\xi))| < \epsilon.$$

Συνεπώς για $\epsilon^* = \delta_1$ θα έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)((\exists \delta_1 > 0 \quad \text{άρα και} \quad \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))|x - \xi| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(\xi))| < \epsilon,$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση $h = g \circ f$ είναι συνεχής στο ξ. •

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in Q \\ x, & x \notin Q \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $f(x) > 0, \forall x \in N_\delta(\frac{1}{2})$.

Απόδειξη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Από την εφαρμογή 3 της § 3.2 έχουμε ότι $lim_{x\to 1/2} f(x) = \frac{1}{2}$. Αφού και $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ συνεπάγεται ότι η f είναι συνεχής στο $\frac{1}{2}$. Με εφαρμογή λοιπόν του Θεωρήματος 4.17, επειδή $f(\frac{1}{2}) > 0$ θα υπάρχει περιοχή του $\frac{1}{2}$ όπου η f θα είναι θετική για όλα τα x από αυτήν την περιοχή, δηλ. δηλ. $f(x) > 0, \forall x \in N_\delta(\frac{1}{2})$ για κάποιο $\delta > 0$.

2. (ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ)

α) Η πολυωνυμική συνάρτηση

$$\mathbf{f(x) = \alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x + \alpha_\nu, \alpha_k \in R, k = 0, 1, \ldots, \nu, \nu \in N}$$

είναι συνεχής για κάθε $x \in R$.

β) Η ρητή συνάρτηση

$$\mathbf{g(x) = \frac{\alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x + \alpha_\nu}{\beta_0 x^\mu + \beta_1 x^{\mu-1} + \ldots + \beta_{\mu-1} x + \beta_\mu}}$$

είναι συνεχής για όλα τα x που δεν μηδενίζουν τον παρονομαστή.

γ) Η εκθετική συνάρτηση $h(x) = \alpha^x, \alpha > 0, x \in R$ είναι συνεχής.

δ) Η λογαριθμική συνάρτηση $\phi(x) = \log x, x > 0$ είναι συνεχής.

Απόδειξη

α) Από την εφαρμογή 1 της § 4.2 έχουμε ότι η στεθερή συνάρτηση και η ταυτοτική συνάρτηση είναι συνεχείς. Άρα και η συνάρτηση x^ν είναι συνεχής, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων πεπερασμένου πλήθους. Συνεπώς από το Θεώρημα 4.19 η f είναι συνεχής.

β) Η g είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

γ) Είναι $lim_{x\to\xi} \alpha^x = \alpha^\xi$ (§. 3.6-2.) που αποδεικνύει και το ζητούμενο. (Βλέπε και άσκηση 4.7α)

δ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ακολουθία θετικών όρων $\alpha_\nu, \nu \in N$ με $\alpha_\nu \to \alpha > 0$ ισχύει $log\alpha_\nu \to log\alpha$.

Από την ανισότητα (§3.6-6)

$$1 - \frac{1}{x} \leq log x \leq x - 1$$

έχουμε ότι

$$1 - \frac{\alpha}{\alpha_\nu} \leq log\frac{\alpha_\nu}{\alpha} \leq \frac{\alpha_\nu}{\alpha} - 1.$$

Επειδή $\frac{\alpha_\nu}{\alpha} \to 1$ και $\frac{\alpha}{\alpha_\nu} \to 1$ από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών θα έχουμε ότι $log\frac{\alpha_\nu}{\alpha} \to 0$ δηλ. $log\alpha_\nu \to log\alpha$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με

$$\mathbf{f(x) = \max\{0, \min\{x, 1 - x\}\}}$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη

Λαμβάνοντας υπόψη και τους σχετικούς ορισμούς (βλέπε και απόδειξη του θεωρήματος 4.19) έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{4}\{1 - |2x - 1| + |1 - |2x - 1|\}| = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \quad \text{ή} \quad x \geq 1 \\ x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$, $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$ η f είναι συνεχής ως σταθερή, ταυτοτική και πολυωνυμική αντίστοιχα. Απομένει ναν εξετάσουμε την συνέχεια στα σημεία όπου η f αλλάζει τύπο, δηλ. στα 0, $\frac{1}{2}$ και 1. Έχουμε:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0 = f(0), \quad \lim_{x \to 1/2-} = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to 1/2+},$$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 0 = f(1) = \lim_{x \to 1+} f(x)$$

και άρα η f είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.10 Έστω $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ και $f : B \to \mathbb{R}$. Αν g είναι ο περιορισμός της f στο A δηλ. $f(x) = g(x), \forall x \in A$ να αποδείξετε ότι:

i) Αν η f είναι συνεχής στο $\xi \in A$ τότε και η g είναι συνεχής στο ξ.

ii) Αν η g είναι συνεχής στο ξ, τότε δεν συνεπάγεται ότι και η f είναι συνεχής στο ξ.

4.11 Έστω $f : A - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in R$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\bar{f} : A \to \mathbb{R}$ με

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ \ell, & x = x_0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο x_0. **Η $\bar{f}$ λέγεται συνεχής επέκταση της f.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ επεκτείνεται συνεχώς στο 0, ενώ η συνάρτηση $g(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ όχι.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.12 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, διάφορη της σταθερής, τέτοια ώστε:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε είναι συνεχής σ' όλο το R.

4.13 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, μια μη μηδενική συνάρτηση, τέτοια ώστε:

$$f(x.y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε είναι συνεχής σ' όλο το R.

4.14 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to IR$ με

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 2, & x \neq 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι $lim_{x \to 0}(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$. Να το σχολιάετε σε σχέση με το Θεώρημα σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων (Θεώρημα 4.21).

§ 4.4 ΕΙΔΗ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο ξ του πεδίου ορισμού της, τότε λέγεται **ασυνεχής στο** ξ και το ξ λέγεται **σημείο ασυνέχειας της** f. Δηλαδή μια συνάρτηση f θα λέγεται ασυνεχής στο $\xi \in \Delta(f)$, αν και μόνον αν:

1) Το ξ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$ και δεν υπάρχει το $lim_{x \to \xi} f(x)$ ή

2) Υπάρχει το $lim_{x \to \xi} f(x)$ και είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός, αλλά είναι διαφορετικός από το $f(\xi)$.

Όταν η f ορίζεται σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε ένα σημείο ξ αυτού του διαστήματος θα λέγεται σημείο ασυνέχειας της f, αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

α) Το $\xi \in (\alpha, \beta)$ και η f δεν είναι συνεχής στο ξ,

β) $\xi = \alpha$ και η f δεν είναι συνεχής από δεξιά στο α και

γ) $\xi = \beta$ και η f δεν είναι συνεχής από αριστερά στο β.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση f είναι ασυνεχής σε ένα σημείο $\xi \in \Delta(f)$ και τα όρια στο ξ από αριστερά και από δεξιά υπάρχουν. Η ασυνέχεια τότε λέγεται **απλή ασυνέχεια ή ασυνέχεια πρώτου είδους.** Αν συμβαίνει $lim_{x\to\xi-} f(x) = lim_{x\to\xi+} f(x)$ (το $f(\xi)$ είναι τότε αναγκαστικά διαφορετικό από την κοινή τιμή των ορίων αυτών), τότε η ασυνέχεια λέγεται **εξουδετερώσιμη**. Η εξουδετέρωση γίνεται αλλάζοντας την τιμή της f στο ξ, ορίζοντας να είναι $f(\xi) = lim_{x\to\xi} f(x)$. Αν όμως $lim_{x\to\xi-} f(x) \neq lim_{x\to\xi+} f(x)$ τότε η ασυνέχεια στο ξ δεν εξουδετερώνεται και λέμε τότε ότι η f παρουσιάζει στο ξ **πήδημα**. Το πήδημα της f στο ξ ορίζεται τότε να είναι ο αριθμός:

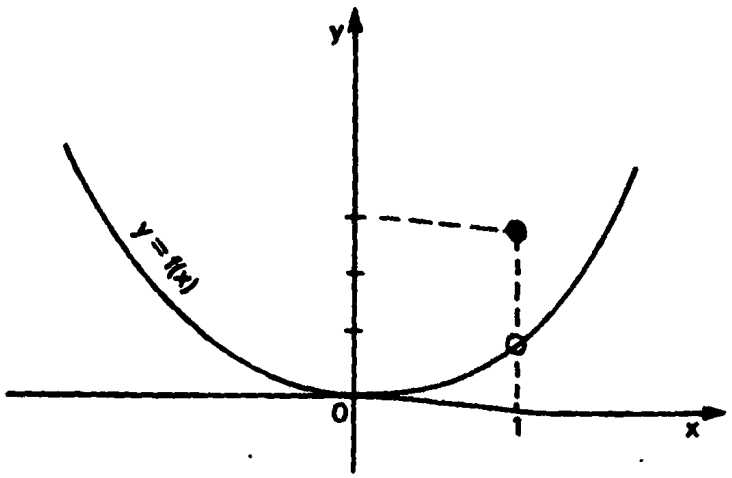
$$\text{πηδ} f_\xi = |\lim_{x\to\xi+} f(x) - \lim_{x\to\xi} f(x)| \neq 0.$$

Παράδειγμα 4.22

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

παρουσιάζει εξουδετερώσιμη ασυνέχεια στο 1. Αρκεί να αλλάξουμε την τιμή της f στο 1 από 3 σε 1. Τότε η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ είναι προφανώς συνεχής στο 1.



Σχήμα 4.2

Παράδειγμα 4.23

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

παρουσιάζει απλή ασυνέχεια στο 1, η οποία δεν εξουδετερώνεται. Πραγματικά· είναι $lim_{x\to 1-} f(x) = 1$ και $lim_{x\to 1+} f(x) = 0$ και άρα το $lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει. Το πήδημα της f στο 1 είναι

$$\text{πηδ}\, f_\xi = |lim_{x\to 1+} f(x) - lim_{x\to 1-} f(x)| = 1.$$

Έστω τώρα ένα σημείο ασυνέχειας της f και τέτοιο ώστε να είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$. Τότε αν ένα ή και τα δυο όρια $lim_{x\to\xi-} f(x)$, $lim_{x\to\xi+} f(x)$ δεν υπάρχουν η ασυνέχεια λέγεται **ουσιώδης ασυνέχεια ή ασυνέχεια δευτέρου είδους.**

Παράδειγμα 4.24

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Τότε το 0 είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$, αλλά κανένα από τα όρια $lim_{x\to 0-} f(x)$, $lim_{x\to 0+} f(x)$ δεν υπάρχει. Άρα το 0 είναι σημείο ασυνέχειας της f δευτέρου είδους.

Παρατήρηση 4.25

Αν θεωρήσουμε όρια στο $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ για την συνάρτηση του παραδείγματος 4.24 τότε είναι $lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$, και $lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$. τότε το 0 είναι σημείο ασυνέχειας της f πρώτου είδους με πήδημα $|+\infty - (-\infty)| = +\infty$.

Παράδειγμα 4.26

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ sin\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

παρουσιάζει στο 0 ουσιώδη ασυνέχεια, αφού το $lim_{x\to 0+} f(x)$ δεν υπάρχει (Εφαρμογή 1 της § 3.2).

Παρατήρηση 4.27

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Τότε ο μη αρνητικός αριθμός $T_f[\alpha, \beta]$ που ορίζεται ως εξής:

$$T_f[\alpha, \beta] = \sup_{\alpha \le x \le \beta} f(x) - \inf_{\alpha \le x \le \beta} f(x)$$

λέγεται **ταλάντωση της f στο $[\alpha, \beta]$**. Αν $x \in (\alpha, \beta)$ τότε η ταλάντωση της f στο x, ορίζεται να είναι:

$$\tau_f(x) = \lim_{h \to 0+} T_f[x - h, x + h].$$

Ειδικά για $x = \alpha$ ή $x = \beta$ ορίζουμε:

$$\tau_f(\alpha) = \lim_{h \to 0+} T_f[\alpha, \alpha + h], \quad \tau_f(\beta) = \lim_{h \to 0+} T_f[\beta - h, \beta].$$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = sinx, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ τότε

$$T_f\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] = supf(x) - inf f(x) = 1 - (-1) = 2.$$

Επίσης αν $f(x) = |x - \frac{1}{4}|$, τότε $T_f[0, 1] = \frac{3}{4}$.

Η ταλάντωση έχει σχέση με την συνέχεια ή την ασυνέχεια μιας συνάρτησης, όπως δείχνει η επόμενη πρόταση (άσκηση 4.16β)):

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Τότε η f είναι ασυνεχής στο $\xi \in [\alpha, \beta]$, αν και μόνον αν, $\tau_f(\xi) > 0$ ή η f είναι συνεχής στο $\xi \in [\alpha, \beta]$, αν και μόνον αν, $\tau_f(\xi) = 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ άρρητος} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, p, q \in N, M.K.\Delta(p, q) = 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής σε κάθε άρρητο σημείο, ενώ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους σε κάθε ρητό σημείο.

β) Να αποδείξετε ότι το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ δεν υπάρχει.

Απόδειξη

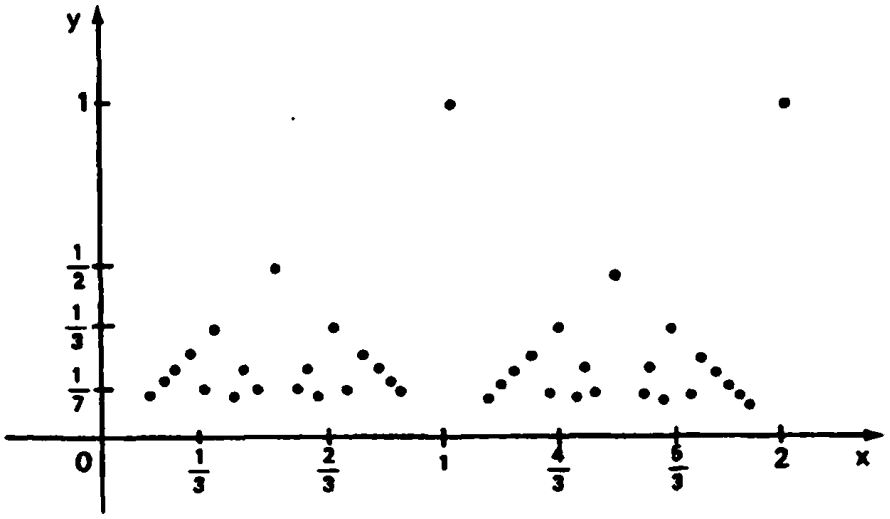
α) Έστω $\alpha > 0$ ρητός και $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ ακολουθία άρρητων από το $[0, 1]$ με $limx_\nu = \alpha$. Τότε $limf(x_\nu) = 0$, ενώ $f(\alpha) > 0$. Άρα η f είναι ασυνεχής στο α.

Έστω τώρα β ένας άρρητος αριθμός και $\epsilon > 0$. Τότε, από την Αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχει φυσικός ν_0, τέτοιος ώστε: $\frac{1}{\nu_0} < \epsilon$. Υπάρχει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός ρητών με παρονομαστή μικρότερο του ν_0 στο διάστημα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

$(\beta - 1, \beta + 1)$. Συνεπώς μπορούμε να διαλέξουμε $\delta > 0$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε στην περιοχή $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ να μην περιέχονται ρητοί με παρονομαστή μικρότερο του ν_0. Αυτό τότε συνεπάγεται ότι για $|x - \beta| < \delta$, $x \in [0, 1]$ έχουμε: $|f(x) - f(\beta)| = |f(x)| \leq \frac{1}{\nu_0} < \epsilon$. Έτσι λοιπόν η f είναι συνεχής στους άρρητους αριθμούς β.

Η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω.



Σχήμα 4.3

β) Θα χρησιμοποιήσουμε ακολουθίες. Διαλέγουμε λοιπόν δυο ακολουθίες, μια με όλους τους όρους ρητούς και την άλλη με άρρητους. Έστω $x_\nu = \frac{2\nu-1}{2}, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu = \nu\sqrt{2}, \nu \in \mathbb{N}$. Προφανώς $limx_\nu = +\infty, limy_\nu = +\infty$ και $x_\nu > 0, y_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι η $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$ και $f(x_\nu) = \frac{1}{2}$. Από τον ορισμό $f(y_\nu) = 0$. Δηλαδή $limf(x_\nu) = \frac{1}{2} \neq 0 = limf(y_\nu)$ που σημαίνει ότι η f δεν έχει όριο όταν $x \to +\infty$.

Σημείωση

Αυτό το παράδειγμα δείχνει πως η διαισθητική έννοια για την συνέχεια δεν οδηγεί πάντα και σε σωστό συμπέρασμα. **Έτσι μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε ένα σημείο, δεν είναι αναγκαστικά συνεχής και σε μια περιοχή αυτού του σημείου.**

Δείχνει όμως και κάτι άλλο· μια συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε ένα πυκνό σύνολο και ασυνεχής σε ένα άλλο πυκνό σύνολο. Τέλος δείχνει πως δεν χρειάζεται να βρούμε έναν τύπο που να δίνει το δ συναρτήσει του ϵ. Αρκεί να αποδειχθεί η ύπαρξη τέτοιου δ, για κάθε δοσμένο $\epsilon > 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.15 Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις παρουσιάζουν στο αντίστοιχο σημείο ασυνέχεια α' ή β' είδους. Να εξετάσετε επίσης ποιες από τις ασυνέχειες α' είδους είναι εξουδετερώσιμες:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 2 \\ x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{στο} \quad x = 2$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{στο} \quad x = 0$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{στο} \quad x = 0$$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 1 \\ \frac{2}{x-1}, & x > 1 \end{cases} \quad \text{στο} \quad x = 1$$

4.16 α) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

$$T_f[\alpha, \beta] = sup\{|f(x_1) - f(x_2)|, x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]\}.$$

β) Να αποδείξετε την Πρόταση της Παρατήρησης 4.27.

4.17 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-e^{1/x}}, & x \neq 0 \quad \text{και} \quad x \neq \frac{1}{log2} \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \quad \text{και} \quad x = \frac{1}{log2} \end{cases}$$

παρουσιάζει ασυνέχεια α' είδους για $x = 0$ και ασυνέχεια β' είδους για $x = \frac{1}{log2}$.

4.18 Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια την συνάρτηση:

$$f(x) = max\{x, 1-x, 2x-3\}.$$

§ 4.5 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Εκτός από τις ιδιότητες που αναφέραμε στην παράγραφο 4.3 υπάρχουν και μερικές ακόμα πολύ ενδιαφέρουσες και χρήσιμες στις εφαρμογές, που αναφέρονται σε συναρτήσεις που ορίζονται σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Αυτές τις ιδιότητες θα αναφέρουμε τώρα.

Θεώρημα 4.28 Αν η f : $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη 1η

Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$. Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε δυο μέρη. Τότε τουλάχιστο στο ένα από αυτά η f δεν είναι φραγμένη. Το συμβολίζουμε με $[\alpha_1, \beta_1]$. Αν η f δεν είναι φραγμένη και στα δυο διαλέγουμε το αριστερό και το συμβολίζουμε με $[\alpha_1, \beta_1]$. Μετά δουλεύουμε με το $[\alpha_1, \beta_1]$ το οποίο χωρίζουμε στα δυο και παίρνουμε ένα διάστημα $[\alpha_2, \beta_2]$ στο οποίο η f δεν είναι φραγμένη. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε ένα διάστημα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ στο οποίο η f δεν είναι φραγμένη.

Προφανώς

$$\alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \ldots \leq \alpha_\nu \leq \beta$$

$$\beta \geq \beta_1 \geq \beta_2 \ldots \geq \beta_\nu \geq \alpha$$

και

$$\beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{\beta - \alpha}{2^\nu} \to 0.$$

Συνεπώς έχουμε έναν κιβωτισμό κλειστών διαστημάτων του Cantor και από το Θεώρημα 1.68 υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$\lim \alpha_\nu = \xi, lim\beta_\nu = \xi, \alpha_\nu \leq \xi \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \xi \in [\alpha, \beta].$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ θα είναι συνεχής και στο ξ. Δηλ.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [\alpha, \beta])|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon$$

ή

$$f(\xi) - \epsilon < f(x) < f(\xi) + \epsilon$$

για όλα τα x του $[\alpha, \beta]$ με $\xi - \delta < x < \xi + \delta$.

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη στο $(\xi - \delta, \xi + \delta)$. Επίσης επειδή $\lim \alpha_\nu = \xi = lim\beta_\nu$, υπάρχει $\nu_0 \in N$ τέτοιος ώστε:

$$\xi - \delta < \alpha_{\nu_0} < \beta_{\nu_0} < \xi + \delta.$$

Αυτό όμως περιέχει μια αντίφαση. Ενώ η f είναι φραγμένη στο $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, δεν είναι φραμένη στο $(\alpha_{\nu_0}, \beta_{\nu_0})$.

Συνεπώς η υπόθεση ότι η f δεν είναι φραγμένη δεν ευσταθεί και επομένως το Θεώρημα αποδείχτηκε.

Απόδειξη 2η

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$(\exists M > 0)(\forall x \in [\alpha, \beta]) : |f(x)| \leq M.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε θα έχουμε:

$$(\forall M > 0)(\exists x \in [\alpha, \beta]) : |f(x)| > M.$$

Ειδικά για $M = \nu$ υπάρχει ακολουθία $x_\nu \in [\alpha, \beta]$ με $|f(x_\nu)| > \nu$.

Η ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, αφού $\alpha \leq x_\nu \leq \beta, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Συνεπώς από το Θεώρημα Bolzano-Weirstrass έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει, έστω την $x_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ με $\lim x_{k_\nu} = \xi$. Επειδή $\alpha \leq x_\nu \leq \beta, \forall \nu \in \mathbb{N}$ θα είναι και $\alpha \leq x_{k_\nu} \leq \beta, \forall \nu \in \mathbb{N}$ που σημαίνει ότι $\xi \in [\alpha, \beta]$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\xi \in [\alpha, \beta]$ η f θα είναι συνεχής στο ξ. Τότε $\lim f(x_{k_\nu}) = f(\xi) \in \mathbb{R}$. Έτσι η $f(x_{k_\nu}), \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει και άρα είναι φραγμένη. Αυτό όμως συγκρούεται με την ιδιότητα $|f(x_{k_\nu})| > k_\nu \geq \nu$. Άρα η f είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$. •

Παρατήρηση 4.29

Η υπόθεση ότι το διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι κλειστό δεν μπορεί να παραληφθεί. Π.χ. αν

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

τότε η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, 1)$, αλλά δεν είναι φραγμένη σ' αυτό το διάστημα, γιατί αν $x_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0$ τότε $f(x_\nu) = \nu \to +\infty$.

Θεώρημα 4.30 Αν η f : $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει μέγιστο και ελάχιστο στο $[\alpha, \beta]$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.28 η f είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$. Άρα έχει infimum και supremum, έσω m και M αντίστοιχα.

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν x_ϵ και x_μ στο $[\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε: $f(x_\epsilon) = m$ και $f(x_\mu) = M$. Πραγματικά· αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει $x_\mu \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_\mu) = M$ θα πρέπει να ισχύει $f(x) < M, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Τότε η $M - f(x)$ είναι θετική και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Άρα η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, x \in [\alpha, \beta]$$

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επομένως είναι φραγμένη. Επειδή είναι θετική θα έχει και supremum θετικό, έστω το K. Δηλαδή

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq K, x \in [\alpha, \beta]$$

που συνεπάγεται ότι $f(x) \leq M - \frac{1}{K}, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $M - \frac{1}{K}$ είναι άνω φράγμα του $\mathcal{R}(f)$ γνήσια μικρότερο του M, πράγμα άτοπο, αφού $M = sup f$.

Συνεπώς πάρχει x_μ στο $[\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε: $f(x_\mu) = M$. Η απόδειξη για το infimum είναι εντελώς ανάλογη και γι' αυτό αφήνεται για άσκηση. •

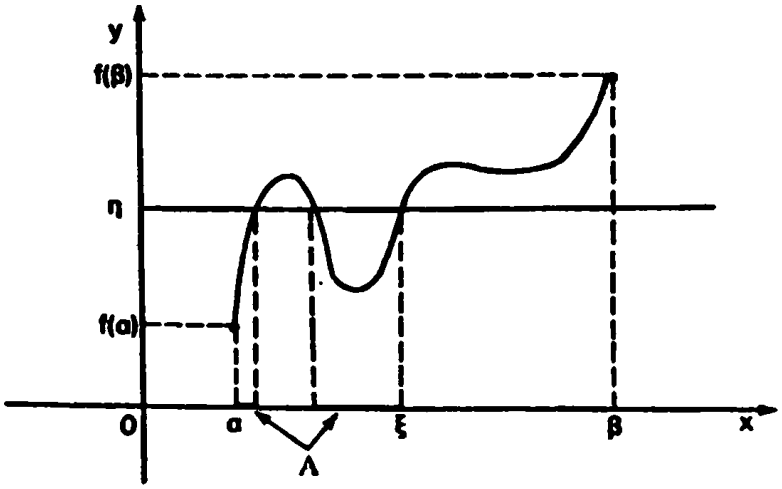
Μια πολύ σημαντική ιδιότητα των συνεχών συανρτήσεων σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι η λεγόμενη **ιδότητα των ενδιάμεσων τιμών**. Η ιδιότητα αυτή λέει ότι **μια συνεχής συνάρτηση σε κλειστό και φραγμένο διάστημα παίρνει κάθε τιμή μεταξύ δυο οιονδήποτε τιμών της**. Έτσι έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.31 Αν f : I → R είναι συνεχής σε ένα διάστημα I, τότε η f έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών στο I, δηλαδή όταν $\alpha, \beta \in$ I με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε για κάθε η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \eta$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$ και $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.(Η περίπτωση $f(\alpha) > f(\beta)$ εξετάζεται ανάλογα.)

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in [\alpha, \beta] : f(x) \leq \eta\}$. (Βλέπε σχήμα 4.4).



Σχήμα 4.4

. Τότε $\alpha \in A$ και άρα $A \neq \emptyset$. Επίσης το A είναι άνω φραγμένο από το β. Άρα υπάρχει το supremum του A και έστω $sup A = \xi$. Θα αποδείξουμε ότι $\alpha < \xi < \beta$ και $f(\xi) = \eta$.

Πρώτα ας αποδείξουμε ότι $\alpha < \xi < \beta$. Η f είναι συνεχής στο α. Επειδή $f(\alpha) < \eta$ θα είναι $f(x) < \eta, \forall x \in [\alpha, \alpha + \delta)$ (Πόρισμα του Θεωρήματος 4.17). Επομένως $f(\alpha + \frac{\delta}{2}) < \eta \Rightarrow \alpha + \frac{\delta}{2} \in A \Rightarrow \alpha + \frac{\delta}{2} \leq \xi \Rightarrow \alpha < \xi$. Επίσης η f

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

είναι συνεχής στο β. Επειδή $f(\beta) > \eta$ θα είναι $f(x) > \eta, \forall x \in (\beta - \delta, \beta]$. Δηλ. τα x για τα οποία ισχύει $\beta - \delta < x \leq \beta$ δεν ανήκουν στο Α. Άρα $x \in A \Rightarrow \alpha \leq x \leq \beta - \delta < \beta \Rightarrow \xi \leq \beta - \delta < \beta \Rightarrow \xi < \beta$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $f(\xi) = \eta$. Θα το αποδείξουμε με δυο τρόπους.

1ος τρόπος Έστω $f(\xi) > \eta$. Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, συνεπάγεται ότι $f(x) > \eta, \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \Rightarrow f(x) > \eta$ για $\xi - \delta < x \leq \xi$. Αυτό σημαίνει ότι το $\xi - \delta$ είναι άνω φράγμα του Α, μικρότερο του ξ, άτοπο αφού $\xi = supA$.

Έστω $f(\xi) < \eta$. Από την συνέχεια της f στο ξ, συνεπάγεται ότι $f(x) < \eta, \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \Rightarrow f(x) < \eta$ για $\xi \leq x < \xi + \delta$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν τιμές του x μεγαλύτερες του ξ που ανήκουν στο Α, για τις οποίες ισχύει $f(x) < \eta$ και συνεπώς το ξ δεν είναι το $supA$, άτοπο.

Άρα αναγκαστικά $f(\xi) = \eta$.

2ος τρόπος Αφού $\xi = supA$ συνεπάγεται ότι υπάρχει ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in A$ τέτοια ώστε: $\xi - \frac{1}{\nu} < x_\nu \leq \xi$. Τότε είναι $f(x_\nu) \leq \eta$, αφού $x_\nu \in A$. Αλλά η f είναι συνεχής στο ξ και $x_\nu \to \xi$ και άρα $f(\xi) = limf(x_\nu) \leq \eta$, δηλ.

$$f(\xi) \leq \eta. \tag{1}$$

Αν $\beta \geq x > \xi = supA$ τότε $x \notin A$ και $f(x) > \eta$. Αφού η f είναι συνεχής στο ξ θα έχουμε $f(\xi) = \lim_{x \to \xi+} f(x) \geq \eta$ δηλ.

$$f(\xi) \geq \eta. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $f(\xi) = \eta$. •

Παρατήρηση 4.32

Το ξ στο παραπάνω Θεώρημα δεν είναι μοναδικό (Βλέπε σχήμα 4.5). Το Θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός τουλάχιστο.

Πόρισμα 1. **Έστω $f : I = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και $k \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε:**

$$\mathbf{inff(I) \leq k \leq supf(I)}.$$

Τότε υπάρχει $\xi \in I$, τέτοιος ώστε: $f(\xi) = k$.

Με άλλα λόγια, κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό και φραγμένο διάστημα, παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ της μικρότερης και της μεγαλύτερης τιμής σ' αυτό το διάστημα.

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 4.30 έχουμε ότι υπάρχουν x_ϵ και x_μ στο I τέτοια ώστε:

$$inff(I) = f(x_\epsilon) \leq k \leq f(x_\mu) = supf(I).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Το συμπέρασμα τώρα προκύπτει από το Θεώρημα 4.31. •

Στην ειδική περίπτωση που $\eta = 0$ παίρνουμε το παρακάτω Πόρισμα, γνωστό ως **Θεώρημα του Bolzano**.

Πόρισμα 2 Αν η $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha).f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = 0$.

Παρατήρηση 4.33

Το Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, στην γλώσσα της Γεωμετρίας ερμηνεύεται ως εξής: **αν το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης περνάει από το ένα μέρος μιας οριζόντιας ευθείας στο άλλο, πρέπει να τέμνει κάπου την ευθεία.**

Επίσης το Θεώρημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: **Αν η $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \neq \eta, \forall x \in [\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) < \eta$ (αντίστοιχα $f(\alpha) > \eta$) τότε και $f(\beta) < \eta$ (αντίστοιχα $f(\beta) > \eta$).**

Αυτό με απλά λόγια λέει ότι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης η οποία δεν τέμνει μια οριζόντια ευθεία, πρέπει να μένει από το ένα μέρος της.

Τέλος το θεώρημα του Bolzano (Πόρισμα 2) μεταφράζεται ως εξής: **αν μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ παίρνει στα άκρα του διαστήματος ετερόσημες τιμές, τότε έχει τουλάχιστο μια ρίζα σ' αυτό το διάστημα.**

Παρατήρηση 4.34

Μπορεί μια συνάρτηση να έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών χωρίς να είναι συνεχής. Αυτό συμβαίνει π.χ. με την συνάρτηση $f : IR \to IR$ με

$$f(x) = \begin{cases} sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Για να ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος 4.31 χρειάζεται και μια ακόμα συνθήκη. Πρέπει η f να είναι μονότονη. (Βλέπε εφαρμογή 4 παρακάτω).

Το επόμενο Θεώρημα περικλείει το βασικό συμπέρασμα αυτής της παραγράφου. Λέει ότι η εικόνα ενός κλειστού και φραγμένου διαστήματος κάτω από μια συνεχή συνάρτηση είναι επίσης κλειστό και φραγμένο διάστημα. **Τα άκρα αυτού του διαστήματος είναι το απόλυτο (ολικό) ελάχιστο και το απόλυτο (ολικό) μέγιστο της συνάρτησης.**

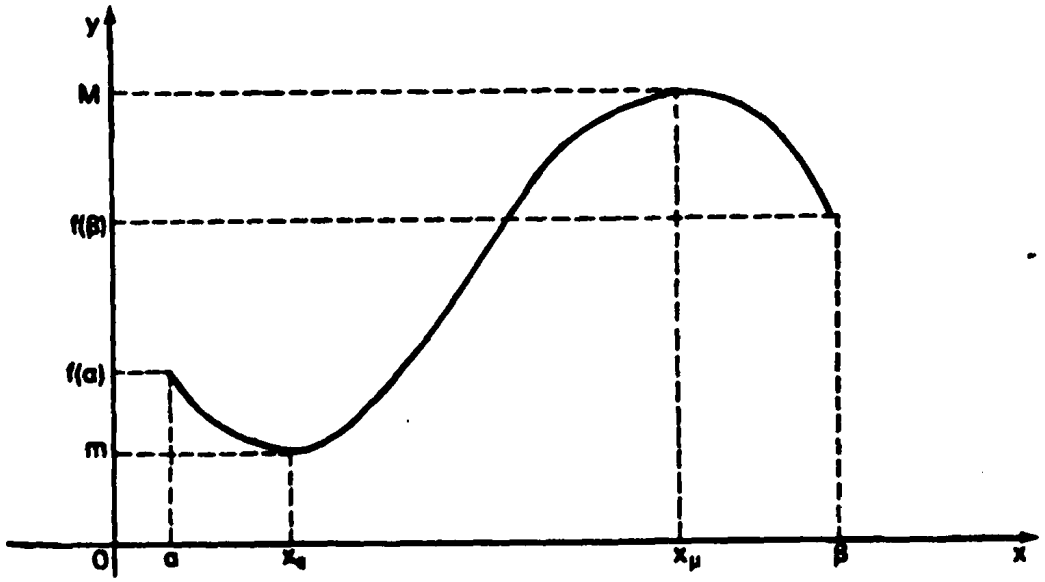
Θεώρημα 4.35 Έστω I ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα και $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I. Τότε το σύνολο $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

Αν η f είναι σταθερή το συμπέρασμα είναι προφανές, αφού το $f(I)$ είναι μονοσύνολο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η f δεν είναι σταθερή και ας είναι $m = inf f(I)$, $M = sup f(I)$. Αυτά υπάρχουν και μάλιστα είναι τιμές της συνάρτησης από το Θεώρημα 4.30. Επομένως $f(I) \subseteq [m, M]$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλ. ότι ισχύει $[m, M] \subseteq f(I)$. Αν $k \in [m, M]$ από το Πόρισμα 1 του Θεωρήματος 4.31 υπάρχει $\xi \in I$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = k$. Άρα $k \in f(I)$ και επομένως $[m, M] \subseteq f(I)$. Συνεπώς $f(I) = [m, M]$. •

Προσοχή! Αν $I = [\alpha, \beta]$ και $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I, έχουμε αποδείξει ότι το f(I) είναι το διάτημα [m, M]. Δεν έχουμε αποδείξει ότι το f(I) είναι το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνον αν η f είναι αύξουσα. (Βλέπε και σχήμα 4.5).



Σχήμα 4.5

Το προηγούμενο Θεώρημα λέει πως η συνεχής εικόνα ενός κλειστού και φραγμένου διαστήματος είναι ένα σύνολο του ίδιου τύπου. Το επόμενο Θεώρημα επεκτείνει αυτό το συμπέρασμα σε οποιαδήποτε διαστήματα. Για να το αποδείξουμε θα χρειαστούμε το επόμενο Λήμμα που χαρακτηρίζει τα διαστήματα.

Λήμμα: Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη κενό σύνολο με την ιδιότητα

$$\text{αν} \quad x, y \in E \quad \text{και} \quad x < y \Rightarrow [x, y] \subseteq E \qquad (A)$$

Τότε το E είναι διάστημα.

Απόδειξη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θα διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Το E είναι φραγμένο. Ας είναι $\alpha = inf E$ και $\beta = supE$. Τότε αν $x \in E$ θα έχουμε ότι και $x \in [\alpha, \beta]$. Επομένως $E \subseteq [\alpha, \beta]$, αφού το x είναι τυχαίο.

Αντίστροφα τώρα, θα αποδείξουμε ότι και $[\alpha, \beta] \subseteq E$. Πραγματικά· αν $z \in (\alpha, \beta)$ δηλ. $\alpha < z < \beta$ από τον ορισμό του supremum και του infimum υπάρχουν αντίστοιχα y και x του Ε τέτοια ώστε: $z < y \leq \beta = supE$ και $inf E = \alpha \leq x < z$. Αυτά σημαίνουν ότι $z \in [x, y]$ που σημαίνει ακόμα με την βοήθεια της (Α) ότι $[x, y] \subseteq E$, και αφού το z είναι τυχαίο στοιχείο του (α, β), συμπεραίνουμε ότι $(\alpha, \beta) \subseteq E$.

Ειδικότερα αν $\alpha \notin E$ και $\beta \notin E$ τότε $E = (\alpha, \beta)$, ενώ αν $\alpha \notin E$ και $\beta \in E$ τότε $E = (\alpha, \beta]$, και αν $\alpha \in E$ και $\beta \notin E$ τότε $E = [\alpha, \beta)$.

2η περίπτωση: Το E είναι μόνο άνω φραγμένο. Τότε αν $\beta = supE$ και $x \in E$ θα έχουμε: $x \leq \beta$ δηλ. $E \subseteq (-\infty, \beta]$. Αντίστροφα, αν $x \in (-\infty, \beta]$ τότε υπάρχει $y \in E$ τέτοιο ώστε: $z < y \leq \beta$. Αφού το Ε δεν είναι κάτω φραγμένο υπάρχει $x \in E$ με $x < z < y$. Δηλ. $z \in [x, y]$ που σημαίνει από την (Α) ότι $[x, y] \subseteq E$ ή $(-\infty, \beta] \subseteq E$. Επομένως $E = (-\infty, \beta]$ αν $\beta \in E$ και $E = (-\infty, \beta)$ αν $\beta \notin E$.

3η περίπτωση: Το E είναι μόνο κάτω φραγμένο. Τότε αν $\alpha = inf E$ όπως και στην 2η περίπτωση βρίσκουμε ότι $E = [\alpha, +\infty)$ αν $\alpha \in E$ και $E = (\alpha, +\infty)$ αν $\alpha \notin E$.

4η περίπτωση: Το E δεν είναι φραγμένο. Εφαρμόζοντας τότε τις δυο προηγούμενες περιπτώσεις βρίσκουμε ότι $E = (-\infty, +\infty)$. •

Θεώρημα 4.36 Έστω I ένα διάστημα και f : I → R συνεχής στο I. Τότε το σύνολο f(I) είναι διάστημα.

Απόδειξη

Έστω $y_1, y_2 \in f(I)$ με $y_1 < y_2$. Τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in I$ τέτοια ώστε: $f(\alpha) = y_1$ και $f(\beta) = y_2$. Από το Θεώρημα 4.31, των ενδιάμεσων τιμών, αν $k \in [y_1, y_2]$ υπάρχει $\xi \in I$ με $k = f(\xi) \in f(I)$. Συνεπώς $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$ που δείχνει ότι το $f(I)$ έχει την ιδιότητα (Α) του προηγούμενου Λήμματος. Άρα το $f(I)$ είναι διάστημα. •

Παρατήρηση 4.37

Αποδείξαμε στο Θεώρημα 4.36 ότι η εικόνα ενός διαστήματος κάτω από συνεχή συνάρτηση είναι διάστημα. Αυτό δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι η εικόνα θα έχει την ίδια μορφή με το αρχικό διάστημα. Για παράδειγμα η εικόνα ενός ανοιχτού διαστήματος κάτω από συνεχή συνάρτηση δεν είναι ανοιχτό διάτημα και η εικόνα ενός μη φραγμένου κλειστού διαστήματος δεν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χρειάζεται να είναι κλειστό διάστημα. Πραγματικά· έστω $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$. Προφανώς η f είναι συνεχής (εφαρμογή 2 της § 4.3). Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $I_1 = (-1, 1)$ τότε $f(I_1) = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ που δεν είναι ανοιχτό διάστημα. Επίσης αν $I_2 = [0, +\infty)$ τότε $f(I_2) = (0, 1]$ το οποίο δεν είναι κλειστό διάστημα.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε το " Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας", ότι: κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, έχει τουλάχιστο μια πραγματική ρίζα.

Απόδειξη

Έστω $f(x) = \alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x + \alpha_\nu$ με $\alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, \nu$ και $\alpha_0 \neq 0$, $\nu = 2\rho - 1, \rho \in N$. Τότε παρατηρούμε ότι:

$$\frac{f(x)}{\alpha_0 x^\nu} = 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\cdot\frac{1}{x} + \ldots + \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_0}\frac{1}{x^{\nu-1}} + \frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}\frac{1}{x^\nu}$$

έχει όριο το 1 όταν $x \to +\infty$ ή $-\infty$. Συνεπώς υπάρχει $k > 0$ τέτοιο ώστε $\forall p > k$ να έχουμε

$$\frac{f(p)}{\alpha_0 p^\nu} > \frac{1}{2} > 0. \tag{1}$$

Επίσης υπάρχει $k' > 0$ τέτοιο ώστε $\forall q < -k'$ να έχουμε

$$\frac{f(q)}{\alpha_0 q^\nu} > \frac{1}{2} > 0. \tag{2}$$

Αν $\alpha_0 > 0$ τότε η (1) συνεπάγεται ότι $f(p) > 0$, αφού $p^\nu > 0$ και η (2) συνεπάγεται ότι $f(q) < 0$ αφού $\nu = 2\rho - 1$ και $q^\nu < 0$. Αν $\alpha_0 < 0$ τότε η (1) συνεπάγεται ότι $f(p) < 0$ και η (2) $f(q) > 0$. Δηλαδή $f(p).f(q) < 0$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano (Πόρισμα 2 του Θεωρήματος 4.31) υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

2. Έστω $\mathbf{f} : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ μια συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε: $\mathbf{f}(\xi) = \xi$.

Απόδειξη

Θεωρούμε την συνάρτηση $F : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ με $F(x) = f(x) - x$. Τότε

$$F(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \geq 0 \quad \text{και} \quad F(\beta) = f(\beta) - \beta \leq 0,$$

αφού $f(\alpha) \in [\alpha, \beta]$ και $f(\beta) \in [\alpha, \beta]$.

Αν $F(\alpha) = 0$, τότε το ζητούμενο σημείο είναι το α.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

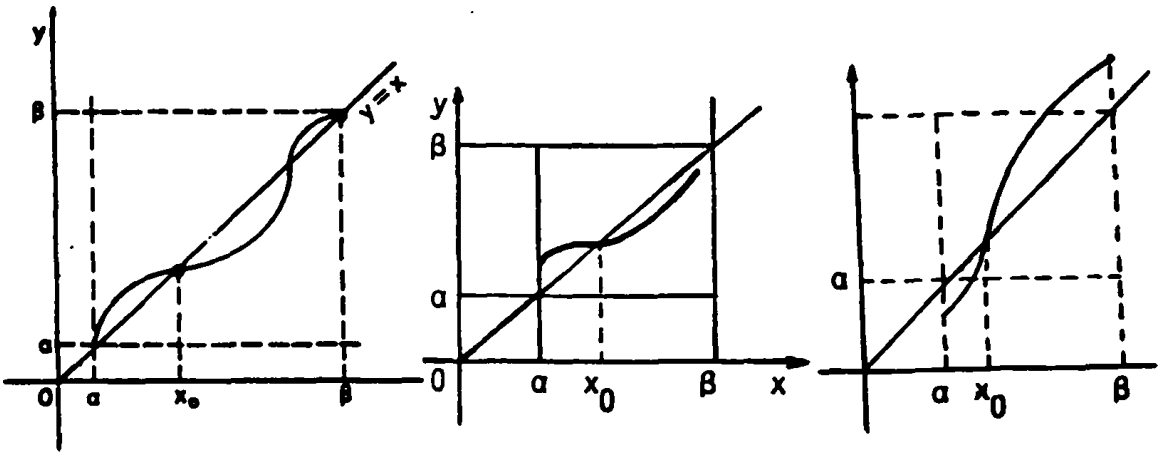
Αν $F(\beta) = 0$, τότε το ζητούμενο σημείο είναι το β.

Αν $F(\alpha) \neq 0$ και $F(\beta) \neq 0$ τότε $F(\alpha).F(\beta) < 0$ και συνεπώς από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε: $F(\xi) = 0$ δηλ. $f(\xi) = \xi$.

Παρατήρηση 4.38

Αν υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$, τότε το ξ λέγεται σταθερό σημείο της f. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι η διχοτόμος της πρώτης γωνίας των αξόνων $y = x$ τέμνει τουλάχιστο μια φορά το γράφημα της f. (Βλέπε Σχήμα 4.6).

Αξίζει εδώ να παρατηρήσουμε ότι το συμπέρασμα της προηγούμενης



Σχήμα 4.6

Σχήμα 4.7

εφαρμογής ισχύει και αν το πεδίο τιμών της f δεν είναι το $[\alpha, \beta]$, αλλά το πεδίο τιμών της f περιέχει το $[\alpha, \beta]$ ή ακόμα και αν το πεδίο τιμών της f περιέχεται στο $[\alpha, \beta]$. (Βλέπε Σχήμα 4.7 α).

3. Να αποδείξετε ότι αν δεν ισχύουν ταυτόχρονα $\alpha < 0$ και ν άρτιος τότε υπάρχει μια ν-οστή ρίζα του πραγματικού αριθμού α.

(Υπενθυμίζουμε ότι αν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ με $\alpha.\beta \geq 0$ και $\beta^\nu = \alpha$, $\nu \in \mathbb{N}$ τότε και μόνον τότε το β λέγεται ν-οστή ρίζα του α).

Απόδειξη

i) Έστω $\alpha \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$. Επειδή $\sqrt[\nu]{0} = 0$ υποθέτουμε $\alpha > 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^\nu, x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι προφανώς συνεχής στο διάστημα $[0, \alpha+1]$. Επειδή $f(0) = 0 < \alpha$ και $f(1+\alpha) = (1+\alpha)^\nu \geq 1+\nu\alpha > \alpha$, από το Θεώρημα 4.31, των ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $\beta \in (0, 1+\alpha)$ τέτοιο ώστε $f(\beta) = \alpha$, δηλ. $\beta^\nu = \alpha$.

ii) Έστω $\alpha < 0$ και ν περιττός. Θεωρούμε πάλι την συνάρτηση $f(x) =$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$x^\nu, x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι προφανώς συνεχής στο διάστημα $[0, 1-\alpha]$. Επειδή $f(0) = 0 < -\alpha$ και $f(1-\alpha) = (1-\alpha)^\nu \geq 1-\nu\alpha > -\alpha$, από το Θεώρημα 4.31, των ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $-\beta \in (0, 1-\alpha)$ τέτοιο ώστε $f(-\beta) = -\alpha$, δηλ. $(-\beta)^\nu = -\alpha$ ή $\beta^\nu = \alpha$, αφού ν περιττός. Συνεπώς υπάρχει η ν-οστή ρίζα του α. (Βλέπε και εφαρμογή 4 της § 1.7).

4.Να αποδείξετε ότι αν η f : $[\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ είναι μονότονη στο $[\alpha, \beta]$ και έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών, τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.
(Αυτό αποδεικνύει το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.31)

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 3.50 η f δεν έχει ασυνέχειες β' είδους. Θα αποδείξουμε ότι η f δεν έχει ούτε ασυνέχειες α' είδους. Ας υποθέσουμε το αντίθετο, ότι δηλ. η f έχει ασυνέχεια α' είδους στο $\xi \in [\alpha, \beta]$. Τότε $\lim_{x\to\xi-} f(x) \neq f(\xi)$ ή $\lim_{x\to\xi+} f(x) \neq f(\xi)$ ή και τα δυο. Έστω ότι $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \ell < f(\xi)$. (Οι άλλες περιπτώσεις εξετάζονται ανάλογα). Προφανώς $\ell \in \mathbb{R}$, αφού η ασυνέχεια είναι α' είδους. Θα έχουμε:

$$\lim_{x\to\xi+} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [\alpha, \beta])\xi < x < \xi + \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

δηλ.

$$\forall x \in (\xi, \xi + \delta) \Rightarrow f(x) < \ell + \epsilon. \tag{1}$$

Διαλέγουμε ως $\epsilon = \frac{1}{2}(f(\xi) - \ell) > 0$. Τότε $f(\xi) = \ell + 2\epsilon > \ell + \epsilon$.

Σταθεροποιούμε ένα $x_1 \in (\xi, \xi + \delta)$. Τότε από την (1) θα έχουμε: $f(x_1) < \ell + \epsilon$. Διαλέγουμε ένα $y \in (\ell + \epsilon, f(\xi)) \subseteq (f(x_1), f(\xi))$. Αφού κάθε $x \in (\xi, x_1)$ ικανοποιεί την (1) είναι φανερό πως δεν υπάρχει $x \in (\xi, x_1) : f(x) = y$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού η f έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών. Επομένως η f δεν έχει ούτε ασυνέχειες α' είδους, και άρα είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

5. Έστω f : $(\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, συνεχής στο (α, β) και τέτοια ώστε:

$$\lim_{x\to\alpha+} \mathbf{f(x)} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta-} \mathbf{f(x)} = +\infty.$$

Να αποδείξετε ότι η f παίρνει ελάχιστο στο (α, β).

Απόδειξη

Αν $\xi \in (\alpha, \beta)$ και $f(\xi)$ είναι η τιμή της f στο ξ, επειδή $\lim_{x\to\alpha+} f(x) = +\infty$ θα υπάρχει διάστημα $(\alpha, \xi_1), \xi_1 < \xi$ τέτοιο ώστε $\forall x \in (\alpha, \xi_1)$ να είναι $f(x) > f(\xi)$ (1).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επίσης επειδή $\lim_{x\to\beta-} f(x) = +\infty$ υπάρχει διάστημα $(\xi_2, \beta), \xi_2 > \xi$ τέτοιο ώστε $\forall x \in (\xi_2, \beta)$ να έχουμε $f(x) > f(\xi)$ (2).

Επειδή η f είναι συνεχής στο (α, β) θα είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2] \subseteq (\alpha, \beta)$ και επομένως από το Θεώρημα 4.30 θα παίρνει ελάχιστο στο $[\xi_1, \xi_2]$ έστω το m. Δηλαδή $\forall x \in [\xi_1, \xi_2]$ είναι $f(x) \geq m$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) παίρνουμε ότι $f(x) \geq m, \forall x \in (\alpha, \beta)$ και συνεπώς η f παίρνει ελάχιστο στο (α, β).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.19 α) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $K > 0$, τέτοιος ώστε $f(x) \geq K, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

β) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο x_0 και $f(x_0) > K$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $f(x) > K, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

γ) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι η f έχει infimum θετικό.

4.20 Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x sin\frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|}, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι φραγμένες στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[-1, 0]$ αντίστοιχα.

4.21 Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{x}{x^2+1}, x \in [0, 1] \quad \beta) f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}, x \in \mathbb{R}$$

4.22 Έστω $\alpha < \beta < \gamma$ και συναρτήσεις f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και g συνεχής στο $[\beta, \gamma]$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [\alpha, \beta] \\ g(x), & x \in (\beta, \gamma] \end{cases}$$

Ποιά συνθήκη χρειάζεται ακόμα ώστε η h να είναι συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$.

4.23 Να βρεθεί το supremum και το infimum των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = 1 - |2x - 1|, 0 < x < 1, \quad \beta) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & 0 \leq x < 1 \\ -7, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{8}{1-x}, & x > 2 \end{cases}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.24 Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, συνεχής στο (α, β) και τέτοια ώστε:

$$\lim_{x \to \alpha+} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta-} f(x) = -\infty.$$

Να αποδείξετε ότι η f παίρνει μέγιστο στο (α, β).

4.25 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in [\alpha, \beta] : f(x) < 0\}$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο A είναι μη κενό, φραγμένο και ότι $f(supA) = 0$. Χρησιμοποιώντας αυτό να δώσετε μια άλλη απόδειξη του Θεωρήματος 4.31.

4.26 Μπορεί η συνάρτηση $f(x) = 3 - sinx + \frac{x^3}{4}$, $x \in \mathbb{R}$ να πάρει την τιμή $\frac{7}{3}$ μέσα στο διάστημα $[-2, 2]$;

4.27 Αν η συνάρτηση $f : [1, 2] \to [0, 3]$ είναι συνεχής με $f(1) = 0$ και $f(2) = 3$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [1, 2]$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \xi$.

4.28 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x = cosx$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

4.29 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $p(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ έχει τουλάχιστο δυο πραγματικές ρίζες. Γενικά, να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο άρτιου βαθμού που παίρνει τουλάχιστο μια τιμή με αντίθετο πρόσημο από αυτό του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου, έχει τουλάχιστο δυο πραγματικές ρίζες.

4.30 Έστω $f : [0, 1] \to IR$ συνεχής με $f(0) = f(1)$. να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{2}\right)$.

Πιο γενικά να αποδείξετε ότι:

Αν η $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x, y \in [\alpha, \beta]$ με $|y - x| = \frac{\beta - \alpha}{2}$ και $f(x) = f(y)$.

4.31 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x = \alpha sinx + \beta, 0 < \alpha < 1, \beta > 0$ έχει τουλάχιστο μια θετική πραγματική ρίζα μικρότερη ή ίση του $\alpha + \beta$.

4.32 Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, όπου A είναι ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο. Να αποδείξετε ότι το $\mathcal{R}(f)$ είναι κλειστό και φραγμένο.

§ 4.6 ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε κάθε σημείο ενός διαστήματος Δ. Τότε για ένα σταθερό $\xi \in \Delta$ και ένα προκαθορισμένο $\epsilon > 0$, υπάρχει αριθμός $\delta > 0$, τέτοιος ώστε: $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ όταν $|x - \xi| < \epsilon$. Ο αριθμός δ εξαρτάται όχι μόνο από την εκλογή του θετικού αριθμού ϵ, αλλά και από το σημείο ξ στο οποίο εξετάζουμε την συνέχεια. Είναι δηλαδή $\delta = \delta(\xi, \epsilon)$.

Ας εξετάσουμε το εξής πρόβλημα: **Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί μια τιμή του δ που αντιστοιχεί σε κάποιο συγκεκριμένο ξ και ένα προκαθορισμένο $\epsilon > 0$. Τότε αν μεταβάλλουμε το ξ, το δ θα παραμείνει το ίδιο;** Γενικά η απάντηση είναι ότι σε διαφορετικές τιμές του ξ θα αντιστοιχεί διαφορετική τιμή του δ. Για να γίνουν πιο κατανοητά ας πάρουμε για παράδειγμα την συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Παράδειγμα 4.9). Τότε για $\epsilon = 2$ και $\delta = \frac{1}{2}$ η απαίτηση

$$|f(x) - f(\xi)| < \epsilon \quad \text{όταν} \quad |x - \xi| < \frac{1}{2} \tag{1}$$

αληθεύει για $\xi = 1$. Πραγματικά· $f(x) - f(\xi) = x^2 - 1$ και $|x - \xi| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ και άρα $-\frac{3}{4} < f(x) - f(\xi) < \frac{5}{4}$.

Εντούτοις η απαίτηση (1) είναι ψευδής για $\xi = 10$, γιατί τότε $f(x) - f(\xi) = x^2 - 100$ και $|x - 10| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{19}{2} < x < \frac{21}{2}$. Ένα τέτοιο x π.χ. είναι το $10\frac{1}{4}$. Τότε όμως $f(x) - f(\xi) = (10\frac{1}{4})^2 - 100 = 5\frac{1}{16} > 2$.

Έτσι λοιπόν, αν και η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\xi = 10$ (όπως ακριβώς και για $\xi = 1$) ο αριθμός $\delta = \frac{1}{2}$ αρμόζει στο σημείο $\xi = 1$, όχι όμως και στο $\xi = 10$ (για το ίδιο $\epsilon = 2$).

Μπορούμε να αποδείξουμε και γενικά ότι δεν υπάρχει θετικός αριθμός δ, τέτοιος ώστε η απαίτηση $|f(x) - f(\xi)| < 2$ όταν $|x - \xi| < \delta$, να αληθεύει για όλα τα $\xi \in \mathbb{R}$. Πραγματικά· έστω $0 < \theta < \delta$ και $x = \theta + \frac{1}{\theta}$, $y = \frac{1}{\theta}$. Τότε $|x - \xi| = \theta < \delta$ αλλά $|f(x) - f(\xi)| = 2 + \theta^2 > 2 = \epsilon$.

Συμπερασματικά λοιπόν για την $\mathbf{f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}}$ δεν υπάρχει ένας τουλάχιστο θετικός αριθμός δ που να αντιστοιχεί στον τυχαίο, αλλά ορισμένο θετικό αριθμό ϵ, για όλα τα $\xi \in \mathbb{R}$ συγχρόνως.

Αν μια συνάρτηση είναι τέτοια ώστε, όταν δοθεί ένα $\epsilon > 0$, μπορούμε να εκλέξουμε ένα $\delta > 0$ που να εξαρτάται μόνο από το $\epsilon > 0$ και όχι και από το ξ, τότε λέμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι **ομοιόμορφα συνεχής.**

Ορισμός 4.39 Μια συνάρτηση f θα λέγεται ομοιόμορφα συνεχής, αν και μόνον αν, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε για όλα τα ζεύγη σημείων x και y του $\Delta(f)$ με $|x - y| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δηλαδή f ομοιόμορφα συνεχής ⇔

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in \Delta(f))|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Παρατήρηση 4.40

Το ουσιώδες της ομοιόμορφης συνέχειας είναι, όπως είπαμε, η ανεξαρτησία των δ και ξ. Ακόμα η συνέχεια είναι μια ιδιότητα που αναφέρεται σε σημείο, ενώ η ομοιόμορφη συνέχεια είναι ιδιότητα που αναφέρεται σε διάστημα. Προφανώς αν μια συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι και συνεχής, γιατί ο ορισμός 4.39 για $y = \xi$ ταυτίζεται με τον ορισμό της συνέχειας στο ξ. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει, όπως είδαμε με την $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.41

Η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in [0, 1]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πραγματικά· πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in [0, 1])|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \epsilon.$$

Έχουμε:

$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq 2|x - y| < 2\delta$$

το οποίο είναι μικρότερο του ϵ, αν εκλέξουμε $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

Παράδειγμα 4.42

Η συνάρτηση $f(x) = sinx, x \in \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πραγματικά· για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, θέτοντας $\delta = \epsilon$ θα έχουμε $\forall x, y \in \mathbb{R}$ με $|x - y| < \delta$ ότι:

$$|sinx - siny| = \left|2sin\frac{x-y}{2}cos\frac{x+y}{2}\right| \leq 2\frac{|x-y|}{2}.1 = |x - y| < \delta = \epsilon.$$

Παράδειγμα 4.43

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, 1)$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θα αποδείξουμε ότι ο ορισμός 4.39 δεν ισχύει. Θα αποδείξουμε δηλ. ότι ισχύει η άρνησή του:

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, y \in (0, 1))|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

Για $\epsilon = 1$ και για οποιοδήποτε δ με $0 < \delta < 1$ παίρνοντας $x = \delta$ και $y = \frac{\delta}{2}$ έχουμε:

$$|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta \quad \text{και} \quad |f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{\delta} > 1.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνεπώς η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Είδαμε ότι η ομοιόμορφη συνέχεια συνεπάγεται την συνέχεια, χωρίς να ισχύει το αντίστροφο. Η μορφή του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης παίζει σημαντικό ρόλο στην ομοιόμορφη συνέχεια. Το επόμενο Θεώρημα δίνει μια **ικανή συνθήκη** για να ισχύει το αντίστροφο, δηλ. για να είναι μια συνεχής συνάρτηση και ομοιόμορφα συνεχής. **Είναι το πεδίο ορισμού να είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα.** Όπως φαίνεται και από το Παράδειγμα 4.42 η συνθήκη αυτή δεν είναι και αναγκαία.

Θεώρημα 4.44 Αν $\mathbf{f}: [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε θα έχουμε:

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, y \in [\alpha, \beta])|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

Ειδικά για $\delta = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ προκύπτει ότι υπάρχουν ακολουθίες x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ και y_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε:

$$x_\nu \in [\alpha, \beta], y_\nu \in [\alpha, \beta], |x_\nu - y_\nu| < \frac{1}{\nu} \Rightarrow |f(x_\nu) - f(y_\nu)| \geq \epsilon.$$

Η ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη. Συνεπώς από το Θεώρημα Bolzano-Weirstrass έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει, έστω την x_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\lim x_{k_\nu} = \xi \in [\alpha, \beta]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, άρα και στο ξ, θα έχουμε: $\lim f(x_{k_\nu}) = f(\xi)$. Από την σχέση $|x_{k_\nu} - y_{k_\nu}| < \frac{1}{k_\nu} \leq \frac{1}{\nu}$ έχουμε ότι και $\lim y_{k_\nu} = \xi$ και από την συνέχεια της f ότι και $\lim f(y_{k_\nu}) = f(\xi)$. Συνεπώς $\lim[f(x_{k_\nu}) - f(y_{k_\nu})] = 0$ που είναι άτοπο γιατί $|f(x_{k_\nu}) - f(y_{k_\nu})| \geq \epsilon > 0$. •

Θεώρημα 4.45 Έστω $\mathbf{f}: \Delta \to \mathbf{R}$, $\Delta \subseteq \mathbf{R}$ διάστημα. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο Δ, αν και μόνον αν, για δυο οποιεσδήποτε ακολουθιες $\mathbf{x}_\nu$, $\nu \in \mathbf{N}$ και $\mathbf{y}_\nu$, $\nu \in \mathbf{N}$ από το Δ τέτοιες ώστε $\lim(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{y}_\nu) = \mathbf{0}$ να έχουμε $\lim(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_\nu)) = \mathbf{0}$.

Απόδειξη

Έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta)|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon. \quad (1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεωρούμε δυο ακολουθίες $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ από το Δ τέτοιες ώστε $lim(x_\nu - y_\nu) = 0$. Τότε

$$(\forall \delta > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |x_\nu - y_\nu| < \delta.$$

Από την (1) τότε θα έχουμε:

$$|f(x_\nu) - f(y_\nu)| < \epsilon, \forall \nu > \nu_0$$

που σημαίνει ότι $lim(f(x_\nu) - f(y_\nu)) = 0$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, y \in \Delta)|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

Άρα για $\delta = \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ υπάρχουν ακολουθίες $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ από το Δ τέτοιες ώστε:

$$|x_\nu - y_\nu| < \frac{1}{\nu} \quad \text{και} \quad |f(x_\nu) - f(y_\nu)| \geq \epsilon > 0.$$

Δηλαδή οι ακολουθίες $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ από το Δ είναι τέτοιες ώστε:

$$lim(x_\nu - y_\nu) = 0 \quad \text{αλλά} \quad lim(f(x_\nu) - f(y_\nu)) \neq 0.$$

Έτσι λοιπόν συμπεραίνουμε ότι αν για δυο οποιεσδήποτε ακολουθιες $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ από το Δ τέτοιες ώστε $lim(x_\nu - y_\nu) = 0$ να έχουμε $lim(f(x_\nu) - f(y_\nu)) = 0$ τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. •

Από την παραπάνω απόδειξη προκύπτει εύκολα το επόμενο:

Πόρισμα (Κριτήριο μη ομοιόμορφης συνέχειας): Μια συνάρτηση f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής σε ένα διάστημα Δ, αν υπάρχουν $\epsilon > 0$ και δυο ακολουθιες $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ από το Δ τέτοιες ώστε

$$\lim(x_\nu - y_\nu) = 0 \quad \text{και} \quad |f(x_\nu) - f(y_\nu)| \geq \epsilon > 0.$$

Για παράδειγμα η $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\Delta = (0, +\infty)$, γιατί αν $x_\nu = \frac{1}{\nu}, y_\nu = \frac{1}{\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}$ τότε $lim(x_\nu - y_\nu) = 0$ αλλά $|f(x_\nu) - f(y_\nu)| = 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Επίσης η $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, γιατί αν $x_\nu = \nu + \frac{1}{\nu}, y_\nu = \nu, \nu \in \mathbb{N}$ τότε $lim(x_\nu - y_\nu) = 0$ αλλά $|g(x_\nu) - g(y_\nu)| = 2 + \frac{1}{\nu^2} > 2, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Θεώρημα 4.46 **Έστω $\mathbf{f} : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (α, β), αν και μόνον αν, τα**

$$\lim_{x \to \alpha+} \mathbf{f}(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta-} \mathbf{f}(x)$$

υπάρχουν.

Απόδειξη

Έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (α, β). Τότε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (\alpha, \beta))|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon. \qquad (1)$$

Για το παραπάνω δ, παίρνουμε $x_1, x_2 \in N^*_{\delta/2}(\alpha) \cap (\alpha, \beta)$. Τότε $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ και

$$|x_1 - x_2| \leq |x_1 - \alpha| + |x_2 - \alpha| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Από την (1) τότε έχουμε: $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ δηλ.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in (\alpha, \beta))|x_1 - \alpha| < \delta, |x_2 - \alpha| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon,$$

πράγμα που σημαίνει από το Θεώρημα 3.51 (Κριτήριο του Cauchy) ότι το $\lim_{x \to \alpha+} f(x)$ υπάρχει.

Με το ίδιο ακριβώς σκεπτικό αποδεικνύουμε και την ύπαρξη του $lim_{x \to \beta-} f(x)$.

Αντίστροφα τώρα. Ας υποθέσουμε ότι τα $\lim_{x \to \alpha+} f(x)$ και $lim_{x \to \beta-} f(x)$ υπάρχουν. Ορίζουμε την συνάρτηση $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (\alpha, \beta) \\ \lim_{x \to \alpha+} f(x), & x = \alpha \\ \lim_{x \to \beta-} f(x), & x = \beta \end{cases}$$

Τότε η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, άρα και ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ από το Θεώρημα 4.44. Αλλά οι f και g ταυτίζονται στο (α, β) και επομένως και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (α, β). •

Θεώρημα 4.47 **Έστω $\mathbf{f} : [\mathbf{0}, +\infty) \to \mathbf{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha, +\infty)$ για κάποιο $\alpha > \mathbf{0}$. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[\mathbf{0}, +\infty)$.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και επομένως ο περιορισμός της στο $[0,\alpha]$ είναι συνεχής. Επειδή το $[0,\alpha]$ είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,\alpha]$, από το Θεώρημα 4.44. Έτσι έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x, y \in [0,\alpha])|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon. \quad (1)$$

Η f είναι συνεχής στο α και άρα

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in [0,\infty))|x-\alpha| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(\alpha)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2)$$

Επίσης η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$, οπότε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_3 > 0)(\forall x, y \in [\alpha,\infty))|x-y| < \delta_3 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon. \quad (3)$$

Έστω $u, v \in [0,\infty)$ με $|u-v| < \delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

1η $u, v \leq \alpha$. Τότε από την (1) έχουμε $|u-v| < \delta \leq \delta_1 \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \epsilon$.
2η $u, v > \alpha$. Τότε από την (3) έχουμε $|u-v| < \delta \leq \delta_3 \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \epsilon$.
3η $u \leq \alpha$ και $v > \alpha$. Επειδή $|u-v| < \delta$ θα είναι από την (2):

$$|u-\alpha| < \delta \leq \delta_2 \Rightarrow |f(u)-f(\alpha)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|v-\alpha| < \delta \leq \delta_2 \Rightarrow |f(v)-f(\alpha)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Συνεπώς

$$|f(u)-f(v)| \leq |f(u)-f(\alpha)| + |f(v)-f(\alpha)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν θα έχουμε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall u, v \in [0,\infty))|u-v| < \delta \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \epsilon,$$

που σημαίνει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,\infty)$. •

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0,+\infty)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη 1η

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in [0,+\infty))|x-y| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}| < \epsilon$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ή ισοδύναμα

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in [0, +\infty))|x^2 - y^2| < \delta \Rightarrow |x - y| < \epsilon.$$

(Το τελευταίο προκύπτει αν θέσουμε $\sqrt{x} = \omega$, $\sqrt{y} = \phi$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής). Τότε είναι $|x - y| \leq |x + y|$, αφού $x \geq 0, y \geq 0$ και συνεπώς για $\delta = \epsilon^2$ έχουμε:

$$|x^2 - y^2| < \epsilon^2 \Rightarrow |x - y||x + y| < \epsilon^2 \Rightarrow |x - y| < \epsilon.$$

Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη 2η

Έστω $\epsilon > 0$. Διαλέγουμε $\delta = \epsilon^2$. Αν $x, y \in [0, +\infty)$ τότε υπάρχουν δυο δυνατότητες: ή $x, y \in [0, \delta)$ ή ένα τουλάχιστο από τα x και y είναι μεγαλύτερο ή ίσο του δ.

Στην πρώτη περίπτωση $\sqrt{x}, \sqrt{y} \in [0, \epsilon) \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < |\epsilon - 0| = \epsilon$, ενώ στην δεύτερη

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \geq \sqrt{\delta} = \epsilon \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \leq \frac{1}{\epsilon}|x - y| < \frac{\delta}{\epsilon} = \epsilon.$$

Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη 3η

Η απόδειξη μπορεί να γίνει επίσης με την βοήθεια της ανισότητας $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, αφού πρώτα την αποδείξετε (άσκηση 0.3 ε). Αφήνεται για άσκηση.

Απόδειξη 4η (Με την βοήθεια του Θεωρήματος 4.47)

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, +\infty)$ γιατί

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \leq \frac{1}{2}|x - y| < \epsilon$$

αν $\delta = 2\epsilon$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $[0, \infty)$ από την Εφαρμογή 2 της § 4.2. Σύμφωνα λοιπόν με το Θεώρημα 4.47 η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \infty)$.

2. α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = x, x \in R$ και $g(x) = \sin x, x \in R$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς, ενώ το γινόμενο f.g δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

β) Να αποδείξετε γενικά ότι το γινόμενο δυο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αν οι συναρτήσεις αυτές είναι φραγμένες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

α) Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής από το Παράδειγμα 4.42. Το ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής προκύπτει αμέσως από τον Ορισμό, διαλέγοντας $\delta = \epsilon$. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x) = x.sinx, x \in IR$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Έστω $\epsilon = 1$ και $\delta > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν $x, y \in IR$ με $|x - y| < \delta$ ενώ $|f(x) - f(y)| \geq 1$. Διαλέγουμε $x = \nu\pi + \frac{\delta}{2}, y = \nu\pi$, για φυσικό ν με $\nu > \frac{1}{\pi sin\frac{\delta}{2}}$. Τότε $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ και

$$\begin{aligned} |xsinx - ysiny| &= \left|\left(\nu\pi + \frac{\delta}{2}\right)sin\left(\nu\pi + \frac{\delta}{2}\right) - \nu\pi sin(\nu\pi)\right| \\ &= \left|\left(\nu\pi + \frac{\delta}{2}\right)sin\left(\nu\pi + \frac{\delta}{2}\right)\right| > \left|\nu\pi sin\frac{\delta}{2}\right| > 1 = \epsilon. \end{aligned}$$

β) Ας υποθέσουμε ότι $|f(x)| \leq M, \forall x \in \Delta$ και $|g(x)| \leq M, \forall x \in \Delta$. Επειδή οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο Δ θα έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x, y \in \Delta)|x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2M}$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x, y \in \Delta)|x - y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Τότε $\forall \epsilon > 0$, υπάρχει $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\ &< M.\frac{\epsilon}{2M} + M.\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon \end{aligned}$$

δηλ. η συνάρτηση $f.g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3. Έστω $A \subseteq R$ και $f : A \to R$. Αν υπάρχει σταθερή $k > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in A$$

τότε λέμε ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz. Να αποδείξετε ότι αν η $f : A \to R$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Απόδειξη

Πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in A)|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επειδή η f ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz, διαλέγοντας ως $\delta = \frac{\epsilon}{k}$ όταν $|x-y| < \delta$ θα έχουμε: $|f(x)-f(y)| < k.\frac{\epsilon}{k} = \epsilon$.

Το ότι δεν ισχύει το αντίστροφο, δηλ. ότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση δεν ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz, ας το διαπιστώσουμε με ένα παράδειγμα. Έστω $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 2]$. Αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής από το Θεώρημα 4.44, αφού είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Δεν ικανοποιεί όμως την συνθήκη του Lipschitz, αφού δεν υπάρχει $k > 0$ τέτοιο ώστε:

$$|\sqrt{x}| \leq k|x|, \forall x \in [0, 2].$$

4. Έστω $A \subseteq \mathbf{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόρφα συνεχής στο A. Να αποδείξετε ότι αν x_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι μια ακολουθία του Cauchy στο A, τότε η $f(x_\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι μια ακολουθία του Cauchy στο R.

Αντίστροφα, αν το A είναι φραγμένο σύνολο και η f μετασχηματίζει ακολουθίες του Cauchy από το A σε ακολουθίες του Cauchy, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι ομοιόρφα συνεχής.

Απόδειξη

Αφού η f είναι ομοιόρφα συνεχής στο A θα έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in A)|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon. \quad (1)$$

Έστω x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία του Cauchy στο A. Τότε

$$(\forall \epsilon^* > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu, \mu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0, \mu > \nu_0 \Rightarrow |x_\nu - x_\mu| < \epsilon^*. \quad (2)$$

Η (2) για $\delta = \epsilon^*$ δίνει $|x_\nu - x_\mu| < \delta$ η οποία λόγω της (1) οδηγεί στην $|f(x_\nu) - f(x_\mu)| < \epsilon$. Δηλαδή

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu, \mu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0, \mu > \nu_0 \Rightarrow |f(x_\nu) - f(x_\mu)| < \epsilon$$

που σημαίνει ότι η $f(x_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μια ακολουθία του Cauchy στο $\mathbb{R}$.

Θα αποδείξουμε τώρα το αντίστροφο. Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο φραγμένο σύνολο A. Τότε θα έχουμε

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, y \in A)|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \geq \epsilon. \quad (3)$$

Ειδικά για $\delta = \frac{1}{\nu}$ θα υπάρχουν ακολουθίες x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ και y_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ από το A τέτοιες ώστε:

$$|x_\nu - y_\nu| < \frac{1}{\nu} \Rightarrow |f(x_\nu) - f(y_\nu)| \geq \epsilon. \quad (4)$$

Οι x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ και y_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένες, αφού το A είναι φραγμένο. Άρα από το Θεώρημα Bolzano-Weirstrass έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

έστω $x_{k_\nu} \to x_0$ και $y_{k_\nu} \to y_0$. (Τα x_0, y_0 μπορεί να μην ανήκουν στο Α.(Πότε θα ανήκουν;)). Οι $x_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθίες του Cauchy. Επειδή

$$|x_{k_\nu} - y_{k_\nu}| \leq \frac{1}{k_\nu} < \frac{1}{\nu}$$

συμπεραίνουμε ότι $x_0 = y_0$. Δηλ. $x_{k_\nu} \to x_0$ και $y_{k_\nu} \to x_0$. Τότε όμως ξέρουμε ότι και η σύνθεσή τους

$$x_{k_1}, y_{k_1}, x_{k_2}, y_{k_2}, \ldots, x_{k_\nu}, y_{k_\nu}, \ldots \tag{5}$$

συγκλίνει επίσης στο x_0 και άρα είναι ακολουθία του Cauchy. Αν συμβολίσουμε την (5) με $\omega_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ θα είναι

$$\omega_{2\nu-1} = x_{k_\nu}, \quad \omega_{2\nu} = y_{k_\nu}.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι η $f(\omega_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy. Άρα

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_1 \in \mathbb{N})(\forall \lambda, \rho \in \mathbb{N})\lambda > \nu_1, \rho > \nu_1 \Rightarrow |f(\omega_\lambda) - f(\omega_\rho)| < \epsilon.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί από την (4) έχουμε $\forall \nu_1$ ότι

$$|f(\omega_{2\nu_1-1}) - f(\omega_{2\nu_1})| = |f(x_{k_{\nu_1}}) - f(y_{k_{\nu_1}})| \geq \epsilon.$$

Επομένως η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

5. *Μια συνάρτηση* $\mathbf{g} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$, *όπου* $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$ *είναι ένα διάστημα, θα λέγεται* **κλιμακωτή** *συνάρτηση στο* $\mathbf{I}$, *αν το* $\mathbf{I}$ *είναι ένωση πεπερασμένου αριθμού διαστημάτων* $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \ldots, \mathbf{I}_k$ *τέτοιων ώστε ο περιορισμός της* $\mathbf{g}$ *σε κάθε διάστημα* $\mathbf{I}_\mu, \mu = 1, 2, \ldots, k$ *να είναι σταθερή συνάρτηση.*

Μια συνάρτηση $\phi : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$, *όπου* $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$ *είναι ένα διάστημα, θα λέγεται* **κατά τμήματα γραμμική** *συνάρτηση στο* vl, *αν το* vl *είναι ένωση πεπερασμένου αριθμού διαστημάτων* $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \ldots, \mathbf{I}_k$ *τέτοιων ώστε ο περιορισμός της* ϕ *σε κάθε διάστημα* $\mathbf{I}_\mu, \mu = 1, 2, \ldots, k$ *να είναι γραμμική συνάρτηση.*

Έστω $\mathbf{f} : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ **μια συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:**

α) αν $\epsilon > 0$ **τότε υπάρχει μια κλιμακωτή συνάρτηση** $\mathbf{g}_\epsilon : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ **τέτοια ώστε:** $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_\epsilon(\mathbf{x})| < \epsilon, \forall \mathbf{x} \in [\alpha, \beta]$.

β) αν $\epsilon > 0$ **τότε υπάρχει μια κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση** $\phi_\epsilon : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ **τέτοια ώστε:** $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \phi_\epsilon(\mathbf{x})| < \epsilon, \forall \mathbf{x} \in [\alpha, \beta]$.

Απόδειξη

α) Αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, από το Θεώρημα 4.44 θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, δηλ.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in [\alpha, \beta])|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{1}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Διαιρούμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ίσα υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$, διαλέγοντας το ν τόσο μεγάλο, ώστε $h < \delta$. Έστω

$$I_k = [\alpha + (k-1)h, \alpha + kh], k = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Ορίζουμε:

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} f(\alpha + (k-1)h), & x \in [\alpha + (k-1)h, \alpha + kh) \\ f(\beta), & x = \beta \end{cases}$$

Τότε $\forall x \in (\alpha, \beta)$ υπάρχει k τέτοιο ώστε $x \in [\alpha + (k-1)h, \alpha + kh)$ και άρα $x - \alpha - (k-1)h < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\alpha + (k-1)h)| = |f(x) - g_\epsilon(x)| < \epsilon$, ενώ αν $x = \beta$ είναι $f(x) - g_\epsilon(x) = 0$. Δηλαδή $|f(x) - g_\epsilon(x)| < \epsilon, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

β) Όπως και στην απόδειξη του α) διαιρούμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ίσα υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$, διαλέγοντας το ν τόσο μεγάλο, ώστε $h < \delta$. Σε κάθε διάστημα $I_k, k = 1, 2, \ldots, \nu$ ορίζουμε ϕ_ϵ να είναι η συνάρτηση που συνδέει τα σημεία

$$(\alpha + (k-1)h, f(\alpha + (k-1)h)) \quad \text{και} \quad (\alpha + kh, f(\alpha + kh)), k = 1, 2, \ldots, \nu$$

Αυτή προφανώς είναι συνεχής κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει η σχέση $|f(x) - \phi_\epsilon(x)| < \epsilon$. Ας κάνουμε την απόδειξη για το $I_1 = [\alpha, \alpha + h]$. Ανάλογη είναι η απόδειξη για το $I_k, k = 2, \ldots, \nu$. Για το I_1 λοιπόν είναι:

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}(x - \alpha) + f(\alpha)$$

και

$$\begin{aligned} |f(x) - \phi_\epsilon(x)| &= |f(x) - \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}(x - \alpha) - f(\alpha)| \\ &\leq |f(x) - f(\alpha)| + |f(\alpha + h) - f(\alpha)| \left|\frac{x - \alpha}{h}\right| \\ &\leq |f(x) - f(\alpha)| + |f(\alpha + h) - f(\alpha)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Σημείωση

Σύμφωνα με το α) μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, μπορεί να προσεγγιστεί από κλιμακωτές συναρτήσεις. Οι κλιμακωτές συναρτήσεις, αν και είναι πολύ απλές, έχουν το μειονέκτημα να μην είναι συνεχείς. Σύμφωνα εξάλλου με το β) μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, μπορεί να προσεγγιστεί από πιο απλές συνεχείς συναρτήσεις.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επίσης μπορούμε να προσεγγίσουμε μια συνεχή συνάρτηση και με πολυωνυμικές συναρτήσεις, σύμφωνα με το ακόλουθο σημαντικό Θεώρημα, γνωστό ως **Θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass:**

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ τότε υπάρχει ένα πολυώνυμο $P_\epsilon : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ τέτοιο ώστε: $|f(x) - P_\epsilon(x)| < \epsilon, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.33 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς, με την βοήθεια του ορισμού:

$\alpha) f(x) = x^3, -1 \le x \le 1$ $\quad \beta) f(x) = x^4, -3 \le x \le 2$

$\gamma) f(x) = \frac{x}{x+2}, |x| \le 1$ $\quad \delta) f(x) = \frac{x}{x^2+1}, -2 \le x \le 0$

$\epsilon) f(x) = \sqrt{x}, 1 \le x \le 4$ $\quad \sigma\tau) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \ge 1$

4.34 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς:

$\alpha) f(x) = \frac{1}{x}, x \in [1, +\infty)$ $\quad \beta) f(x) = \frac{1}{1+x^2}. x \in \mathbb{R}$

$\gamma) f(x) = \frac{x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$ $\quad \delta) f(x) = \frac{x}{1+|x|}, x \in \mathbb{R}$

4.35 Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, x > 0, \quad h(x) = logx, x > 0, \quad \text{και} \quad g(x) = sin\frac{1}{x}, x > 0$$

δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο διάστημα $(0, 1)$.

4.36 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$, $\alpha > 0$.

§ 4.7 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θα εξετάσουμε τώρα αν η αντίστροφη μιας συνεχούς συνάρτησης είναι συνεχής. Όπως είναι γνωστό μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα διάστημα, έχει αντίστροφη, αν και μόνον αν, είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1). Δηλαδή $\forall x, y \in I, x \ne y \Rightarrow f(x) \ne f(y)$. Επίσης γνωρίζουμε ότι μια γνήσια μονότονη συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη και άρα έχει αντίστροφη συνάρτηση. Στο επόμενο Θεώρημα θα αποδείξουμε ότι μια γνήσια μονότονη και συνεχής συνάρτηση $f : I = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, έχει αντίστροφη f^{-1} στο $J = f(I)$ η οποία είναι γνήσια μονότονη και συνεχής. Η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 4.48 Έστω $\mathbf{f}: \mathbf{I} = [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ **γνήσια μονότονη και συνεχής στο I. Τότε η f έχει αντίστροφη η οποία είναι γνήσια μονότονη και συνεχής στο f(I).**

Απόδειξη

Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που η f είναι γνήσια αύξουσα στο I, αφήνοντας για άσκηση την περίπτωση της γνήσιας φθίνουσας. Τότε προφανώς $f(I) = [f(\alpha), f(\beta)]$. Επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα, είναι αμφιμονοσήμαντη και άρα η αντίστροφη υπάρχει. Αυτή είναι γνήσια αύξουσα. Πραγματικά· έστω $y_1, y_2 \in f(I)$ με $y_1 < y_2$. Τότε $y_1 = f(x_1)$ και $y_2 = f(x_2)$ για κάποια $x_1, x_2 \in I$. Πρέπει να έχουμε $x_1 < x_2$, γιατί διαφορετικά αν $x_1 \geq x_2$ θα έπρεπε $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ που αντίκειται στην υπόθεση ότι $y_1 < y_2$. Συνεπώς έχουμε:

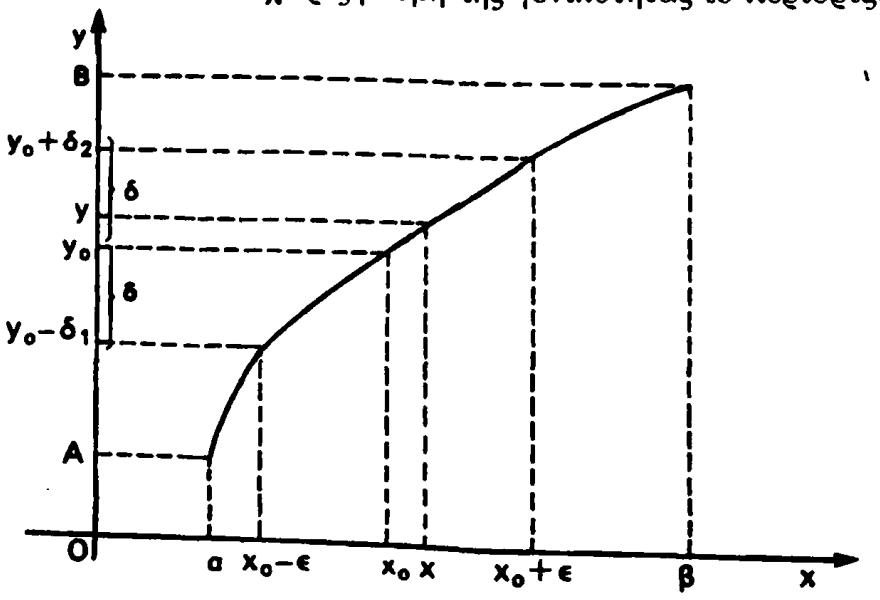
$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2).$$

Αφού y_1, y_2 είναι τυχαία στοιχεία του $f(I)$ με $y_1 < y_2$ συμπεραίνουμε ότι η f^{-1} είναι γνήσια αύξουσα στο $f(I)$.

Μένει τώρα να αποδείξουμε την συνέχεια της f^{-1} στο $J = f(I) = [f(\alpha), f(\beta)] = [A, B]$. Θα το αποδείξουμε με πολλούς τρόπους.

1. Με την βοήθεια του ορισμού.

Έστω $y_0 \in [A, B]$. Τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = y_0$. Έστω $\epsilon > 0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας το περιορίζουμε έτσι ώστε:



Σχήμα 4.8

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\epsilon \leq min\{x_0 - \alpha, \beta - x_0\}.$$

Τότε τα σημεία $x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon$ ανήκουν στο $[\alpha, \beta]$. Άρα σ' αυτά αντιστοιχούν τα σημεία $y_0 - \delta_1$ και $y_0 + \delta_2$ του $[A, B]$, όπου $\delta_1, \delta_2 > 0$ και

$$f(x_0 - \epsilon) = y_0 - \delta_1, f(x_0 + \epsilon) = y_0 + \delta_2.$$

Έστω $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Τότε για όλα τα $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ έχουμε: $y_0 - \delta_1 < y < y_0 + \delta_2$. Αφού η f^{-1} είναι γνήσια αύξουσα θα είναι:

$$x_0 - \epsilon = f^{-1}(y_0 - \delta_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta_2) = x_0 + \epsilon$$

ή

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| < \epsilon.$$

Αυτή όμως είναι η συνθήκη για να είναι η f^{-1} συνεχής στο y_0.

Για να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο άκρο Α π.χ. διαλέγουμε $\epsilon \leq \beta - \alpha$ και θέτουμε $A + \delta_2 = f(\alpha + \epsilon)$. Τότε για όλα τα $y \in [A, A + \delta_2)$ έχουμε:

$$A \leq y < A + \delta_2 \leq B$$

έτσι ώστε

$$\alpha = f^{-1}(A) \leq f^{-1}(y) < \alpha + \epsilon$$

δηλ.

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(A)| < \epsilon.$$

Συνεπώς η f^{-1} είναι συνεχής δεξιά του Α. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι είναι συνεχής αριστερά του Β.

2. Με την βοήθεια των ακολουθιών.

Έστω $y_0 \in [A, B]$ και τυχαία ακολουθία $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $y_\nu \to y_0$. Θέτουμε $x_0 = f^{-1}(y_0)$ και $x_\nu = f^{-1}(y_\nu)$ οπότε $y_0 = f(x_0)$ και $y_\nu = f(x_\nu)$. Η συνέχεια της f^{-1} στο y_0 θα έχει αποδειχθεί αν αποδείξουμε ότι $x_\nu \to x_0$.

Ας υποθέσουμε το αντίθετο, ότι δηλ. η $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει στο x_0. Τότε

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \nu_0 \in \mathbb{N})(\exists \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |x_\nu - x_0| \geq \epsilon.$$

Αποσπούμε μια υπακολουθία $x^*_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ της $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε: $|x^*_\nu - x_0| \geq \epsilon$. Προφανώς η $x^*_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, αφού $x^*_\nu \in [\alpha, \beta]$. Σαν φραγμένη ακολουθία από το Θεώρημα των Bolzano-Weierstrass η $x^*_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει, έστω την $\tilde{x}_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\tilde{x}_\nu \to x'$ και $|\tilde{x}_\nu - x_0| \geq \epsilon$ για κάθε ν. Προφανώς $x_0 \neq x'$. Από την συνέχεια της f στο x' έχουμε ότι $f(\tilde{x}_\nu) \to f(x')$. Αλλά η $f(\tilde{x}_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ είναι υπακολουθία

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

της $f(x_\nu) = y_\nu$ και $y_\nu \to y_0 = f(x_0)$. Επομένως πρέπει $f(x') = f(x_0)$. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί η f είναι αμφιμονοσήμαντη και άρα πρέπει η x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ να συγκλίνει στο x_0. Συνεπώς η f^{-1} είναι συνεχής. •

Το παραπάνω Θεώρημα αποδείχτηκε στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι το κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Το παραπάνω Θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει (με την ίδια ακριβώς απόδειξη 1) αν αντικατασταθεί το διάστημα $[\alpha, \beta]$ με οποιονδήποτε τύπο διαστήματος, πεπερασμένο ή απέραντο. Έτσι μπορούμε να διατυπώσουμε το επόμενο γενικό Θεώρημα:

Θεώρημα 4.49 Έστω $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ **διάστημα, γνήσια μονότονη και συνεχής στο I. Τότε η f έχει αντίστροφη η οποία είναι γνήσια μονότονη και συνεχής στο f(I).**

Είδαμε προηγούμενα, στην Παρατήρηση 4.37, πως η εικόνα ενός ανοιχτού (αντίστοιχα κλειστού) συνόλου κάτω από συνεχή συνάρτηση δεν είναι ανοιχτό (αντίστοιχα κλειστό) σύνολο. **Όμως η αντίστροφη εικόνα, κάτω από συνεχή συνάρτηση, ενός ανοιχτού (αντίστοιχα κλειστού) συνόλου, είναι ανοιχτό (αντίστοιχα κλειστό) σύνολο.** Σε μαθήματα Τοπολογίας ως συνεχείς συναρτήσεις ορίζονται εκείνες που οι αντίστροφες εικόνες ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτά σύνολα. Γενικά ισχύει το επόμενο Βασικό Θεώρημα:

Θεώρημα 4.50 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:**

(α) η f είναι συνεχής στο R.

(β) η αντίστροφη εικόνα τυχαίου κλειστού υποσυνόλου του R είναι κλειστό στο R.

(γ) η αντίστροφη εικόνα τυχαίου ανοιχτού υποσυνόλου του R είναι ανοιχτό στο R.

Η υπόθεση στο Θεώρημα 4.48 ότι η f είναι γνήσια μονότονη είναι πολύ ισχυρή. Συνεπώς είναι φυσικό να αναρωτηθούμε αν είναι και αναγκαία. Θα αποδείξουμε ότι αυτό είναι απαραίτητο και πιο συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι μια αμφιμονοσήμαντη συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα είναι γνήσια μονότονη.

Θεώρημα 4.51 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ **μια αμφιμονοσήμαντη και συνεχής συνάρτηση στο** $[\alpha, \beta]$. **Τότε η f είναι γνήσια μονότονη.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

Αφού η f είναι αμφιμονοσήμαντη στο $[\alpha, \beta]$ θα έχουμε $f(\alpha) < f(\beta)$ ή $f(\alpha) > f(\beta)$. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$ και θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. (Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν $f(\alpha) > f(\beta)$ τότε η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$).

Θα αποδείξουμε ότι αν $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$. Προφανώς $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$. Οι δυνατότητες που μπορούν να παρουσιαστούν είναι οι εξής:

(1) $f(x_2) < f(\alpha) < f(\beta)$ (2) $f(x_1) < f(\alpha) < f(\beta)$

(3) $f(\alpha) < f(\beta) < f(x_2)$ (4) $f(\alpha) < f(\beta) < f(x_1)$

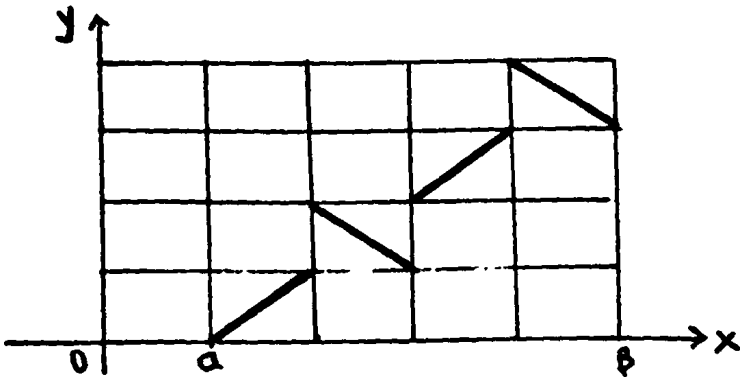
(5) $f(\alpha) < f(x_2) < f(x_1) < f(\beta)$ (6) $f(\alpha) < f(x_1) < f(x_2) < f(\beta)$

Θα αποδείξουμε ότι αποκλείονται οι πρώτες πέντε. Αν ισχύει η (1) τότε από το Θεώρημα 4.31, εφαρμοζόμενο στο διάστημα $[x_2, \beta]$ θα υπάρχει $x \in (x_2, \beta) : f(x) = f(\alpha)$, άτοπο αφού η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

Από το ίδιο Θεώρημα αν ισχύει η (2) θα υπάρχει $x' \in (x_1, \beta) : f(x') = f(\alpha)$, άτοπο. Αν ισχύει η (3) θα υπάρχει $x'' \in (\alpha, x_2) : f(x'') = f(\beta)$, άτοπο. Αν ισχύει η (4) θα υπάρχει $x^* \in (\alpha, x_1) : f(x^*) = f(\beta)$, άτοπο. Τέλος αν ισχύει η (5) θα υπάρχει $x^{**} \in (x_2, \beta) : f(x^{**}) = f(x_1)$, που είναι πάλι άτοπο. Άρα η μόνη δυνατότητα είναι η (6) που αποδεικνύει και το Θεώρημα. •

Σημείωση

Μπορεί μια συνάρτηση να έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών πεπερασμένα σύνολα, να είναι αμφιμονοσήμαντη, αλλά όχι μονότονη στο πεδίο ορισμού της. Ένα τέτοιο παράδειγμα δείχνει το σχήμα 4.9.



Σχήμα 4.9

Προφανώς αυτή η συνάρτηση δεν είναι συνεχής.

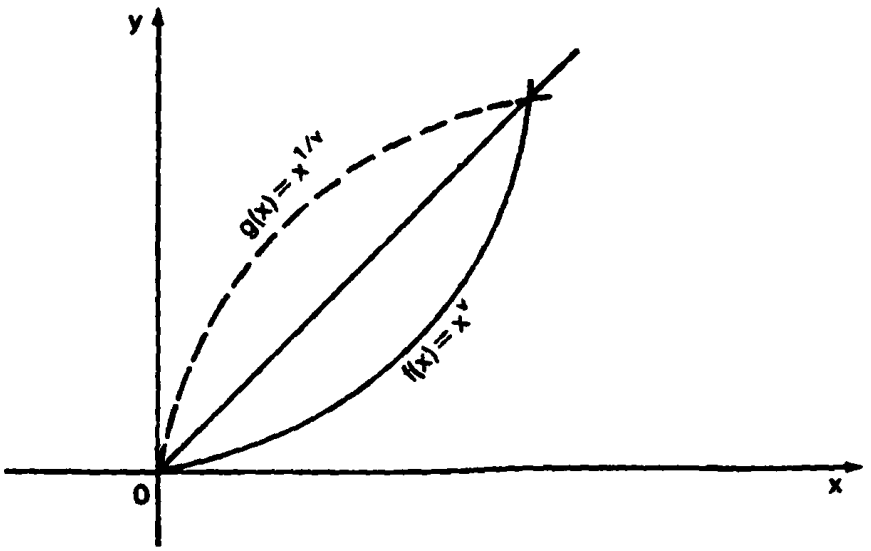
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 4.52

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.47 για να μελετήσουμε την συνάρτηση $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Η f είναι συνεχής (εφαρμογή 2, της § 4.3) και γνήσια αύξουσα στο $[0, \infty)$, αφού

$$x_1^\nu - x_2^\nu = (x_1 - x_2)(x_1^{\nu-1} + x_1^{\nu-2}x_2 + \ldots + x_2^{\nu-1}) < 0$$

αν $x_1 < x_2$. Επίσης $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, αφού $x^\nu = x^{\nu-1}.x \geq x$ αν $\nu \geq 1$ και $x \geq 1$. Επομένως για ν άρτιο η f είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο $[0, \infty)$ με $f(0) = 0$ και $\sup_{x\in[0,\infty)} f(x) = +\infty$. Από το θεώρημα 4.36 έχουμε ότι $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$. Επομένως από το Θεώρημα 4.49 υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο $[0, \infty)$. Γράφουμε $g(x) = x^{1/\nu}, x \geq 0$ ή $g(x) = \sqrt[\nu]{x}, x \geq 0$ και ν άρτιο.(Βλέπε σχήμα 4.10)

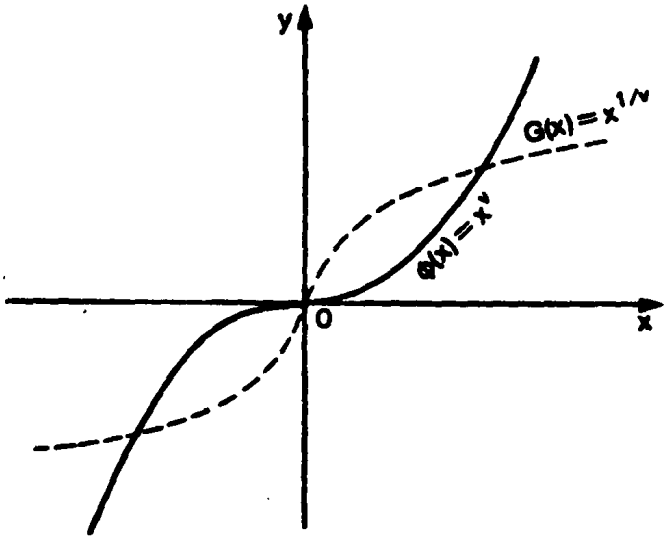


Σχήμα 4.10

Αν το ν είναι περιττός τότε η f είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -\infty, sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty$. Επομένως η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$, ν περιττός απεικονίζει το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ δηλ. $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και από το Θεώρημα 4.49 έχει αντίστροφη συνάρτηση G η οποία είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Γράφουμε $G(x) = x^{1/\nu}, x \in \mathbb{R}$ ή $G(x) = \sqrt[\nu]{x}, x \in \mathbb{R}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και ν περιττός. (Βλέπε σχήμα 4.11).



Σχήμα 4.11

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Έστω μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση f που απεικονίζει το κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο κλειστό και φραγμένο διάστημα [A, B], δηλ. $f([\alpha, \beta]) = [A, B]$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Απόδειξη

Έστω τυχαίο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα το αντίστοιχο σημείο $y_0 = f(x_0)$ θα ανήκει στο (A, B), δηλ. $A < y_0 < B$. Έστω $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε: $A < y_0 - \epsilon < y_0 < y_0 + \epsilon < B$. Από την υπόθεση υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $y_0 - \epsilon = f(x_1)$ και $y_0 + \epsilon = f(x_2)$. Το διάστημα (x_1, x_2) μπορεί να θεωρηθεί σαν περιοχή του x_0. Επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα για $x \in (x_1, x_2)$ θα έχουμε:

$$y_0 - \epsilon = f(x_1) < f(x) < f(x_2) = y_0 + \epsilon \quad \text{ή} \quad |f(x) - y_0| < \epsilon$$

δηλ. $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ που αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x_0 και άρα και στο (α, β).

Με το ίδιο σκεπτικό αποδεικνύουμε την συνέχεια της f στο α ή στο β.

Με την βοήθεια της εφαρμογής αυτής να δώσετε μια ακόμα απόδειξη του Θεωρήματος 4.47.

2 Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο μια συνεχής συνάρτηση x = x(y) που ικανοποιεί την εξίσωση του Kepler

$$\mathbf{x - q\sin x = y, 0 < q < 1.}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι η $y(x)$ είναι γνήσια αύξουσα. Έστω $x_1 < x_2$ με $x_1, x_2 \in IR$. Τότε

$$y(x_2) - y(x_1) = (x_2 - qsinx_2) - (x_1 - qsinx_1) = (x_2 - x_1) - q(sinx_2 - sinx_1).$$

Αλλά

$$\begin{aligned} |sinx_2 - sinx_1| &= 2\left|sin\frac{x_2 - x_1}{2}\right|\left|cos\frac{x_2 + x_2}{2}\right| \\ &\leq 2\left|sin\frac{x_2 - x_1}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x_2 - x_1}{2}\right| = |x_2 - x_1| = x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Αφού $0 < q < 1$ θα είναι : $q|sinx_2 - sinx_1| < x_2 - x_1$ και συνεπώς $y(x_2) - y(x_1) > 0$. Επειδή η $y(x)$ είναι συνεχής στο R και γνήσια αύξουσα θα υπάρχει η αντίστροφή της $x = x(y)$ η οποία θα είναι και συνεχής.

3 α) Έστω f και g δυο συναρτήσεις συνεχείς στο R τέτοιες ώστε: $f(x) = g(x), \forall x \in Q$. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = g(x), \forall x \in R$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και μονότονη στο Q, τότε να αποδείξετε ότι είναι μονότονη στο R, με το ίδιο είδος μονοτονίας.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x, x \in R$ και $\alpha > 0$ για $\alpha \neq 1$ είναι γνήσια μονότονη και μάλιστα γνήσια αύξουσα αν $\alpha > 1$ και γνήσια φθίνουσα αν $0 < \alpha < 1$.

Απόδειξη

α) Έστω $x \in (Q - IR)$. Τότε υπάρχει ακολουθία ρητών $x_\nu, \nu \in IN$ με $x_\nu \to x$. Αλλά $f(x_\nu) = g(x_\nu)$, αφού $x_\nu \in Q$. Τότε όμως έχουμε: $limf(x_\nu) = limg(x_\nu) \Rightarrow f(limx_\nu) = g(limx_\nu) \Rightarrow f(x) = g(x), \forall x \in R$.

β) Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα στο Q, δηλ. αν $x, y \in Q$ με $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ και θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο IR. Έστω $\alpha, \beta \in IR$ με $\alpha < \beta$. Όπως είναι γνωστό (Θεώρημα 1. 61) υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες ρητών $x_\nu, \nu \in IN$ και $y_\nu, \nu \in IN$ με $x_\nu \to \alpha$ και $y_\nu \to \beta$. Επειδή $\alpha < \beta$ υπάρχει $\nu_0 \in IN$ τέτοιο ώστε:

$$x_\nu < \alpha < y_{\nu_0} < y_{\nu_0+1} < y_\nu < \beta, \forall \nu > \nu_0.$$

Άρα

$$f(x_\nu) < f(y_{\nu_0}) < f(y_{\nu_0+1}) < f(y_\nu), \forall \nu > \nu_0$$

και συνεπώς

$$f(\alpha) = limf(x_\nu) < f(y_{\nu_0}) < f(y_{\nu_0+1}) < limf(y_\nu) = f(\beta).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γ) Σύμφωνα με το β), αφού γνωρίζουμε (εφαρμογή 2γ της § 4.3) ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x, x \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$ είναι συνεχής, αρκεί να θεωρήσουμε τον περιορισμό της στο Q και να εξετάσουμε εκεί την μονοτονία. Έστω λοιπόν $f(\rho) = \alpha^\rho, \rho \in Q$ και $\alpha > 1$. Τότε είναι: $\sqrt[\nu]{\alpha} > 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και άρα

$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^{k_1} < (\sqrt[\nu]{\alpha})^{k_2}, k_1 < k_2 \in Z.$$

Έστω $\frac{\mu}{\nu} = \rho < \rho_1 = \frac{\mu_1}{\nu_1}$ με $\nu, \nu_1 \in N$ και $\mu, \mu_1 \in Z$. Τότε $\mu\nu_1 < \mu_1\nu$ και $\mu\nu_1, \mu_1\nu \in Z$. Άρα

$$\alpha^\rho = \alpha^{\mu/\nu} = \alpha^{\mu\nu_1/\nu\nu_1} = (\sqrt[\nu\nu_1]{\alpha})^{\mu\nu_1} < (\sqrt[\nu\nu_1]{\alpha})^{\nu\mu_1} = \alpha^{\nu\mu_1/\nu\nu_1} = \alpha^{\mu_1/\nu_1} = \alpha^{\rho_1},$$

που σημαίνει ότι η $f(\rho) = \alpha^\rho, \rho \in Q$ και $\alpha > 1$ είναι γνήσια αύξουσα στο Q.

Η περίπτωση $0 < \alpha < 1$ αφήνεται για άσκηση.

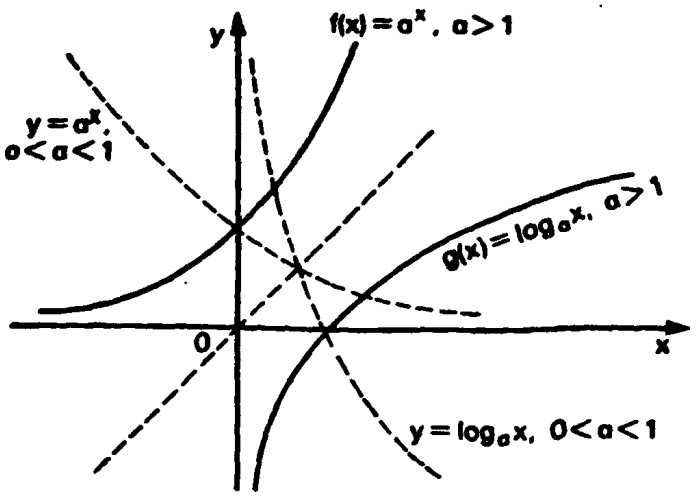
Επίσης το πεδίο τιμών της $\mathcal{R}(f) = (0, +\infty)$ (άσκηση 4.7). Συνεπώς από το Θεώρημα 4.49 έχουμε ότι υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση, που παριστάνεται με $log_\alpha x$ και λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση** α.

Αν $g(x) = log_\alpha x$ τότε $\Delta(g) = (0, +\infty)$ και $\mathcal{R}(g) = \mathbb{R}$. Η g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f δηλ. είναι γνήσια αύξουσα αν $\alpha > 1$ και γνήσια φθίνουσα αν $0 < \alpha < 1$.

Εξ ορισμού λοιπόν έχουμε την ισοδυναμία:

$$y = log_\alpha x \Leftrightarrow x = \alpha^y, 0 < \alpha \neq 1.$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \alpha^x, x \in \mathbb{R}$ και $g(x)$



Σχήμα 4.12

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$= log_\alpha x, x \in (0, +\infty)$ αποδίδονται στο σχήμα 4.12.

4. Έστω f : $[\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ μια μονότονη συνάρτηση. Αν α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι μια ακολουθία με $\alpha_1 \in [\alpha, \beta]$ και $\alpha_{\nu+1} = f(\alpha_\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$ να αποδείξετε ότι:

α) Αν η f είναι αύξουσα η α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ συγκλίνει στο R σε αριθμό $\xi \in [\alpha, \beta]$.

α_1) Αν η f είναι και συνεχής τότε $\xi = f(\xi)$.

β) Αν η f είναι φθίνουσα τότε οι υπακολουθίες της $\alpha_{2\nu}$, $\nu \in \mathbf{N}$ και $\alpha_{2\nu-1}$, $\nu \in \mathbf{N}$ είναι μονότονες και συγκλίνουν.

β_1) Αν η f είναι και συνεχής και $\alpha_{2\nu} \to \xi_1 \in [\alpha, \beta]$, $\alpha_{2\nu-1} \to \xi_2 \in [\alpha, \beta]$ τότε $\xi_2 = f(\xi_1)$ και $\xi_1 = f(\xi_2)$.

Απόδειξη

α) Αφού $\alpha_1 \in [\alpha, \beta]$ αν υποθέσουμε ότι $\alpha_\nu \in [\alpha, \beta]$, τότε επειδή το πεδίο τιμών της f είναι το $[\alpha, \beta]$ το $f(\alpha_\nu) \in [\alpha, \beta]$, δηλ. $\alpha_{\nu+1} \in [\alpha, \beta]$. Συνεπώς όλοι οι όροι της α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ανήκουν στο $[\alpha, \beta]$. Η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι προφανώς φραγμένη.

Θα διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$$\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_1 = \alpha_2, \alpha_1 > \alpha_2.$$

Θα εξετάσουμε μόνον την πρώτη, γιατί οι άλλες εξετάζονται ανάλογα. Τότε $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow f(\alpha_1) < f(\alpha_2) \Rightarrow \alpha_2 < \alpha_3$. Αν υποθέσουμε ότι $\alpha_{\nu-1} < \alpha_\nu$ τότε $f(\alpha_{\nu-1}) < f(\alpha_\nu)$ ή $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$. Άρα η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα και άρα συγκλίνει σε κάποιο $\xi \in [\alpha, \beta]$.

α_1) Αν η f είναι και συνεχής τότε $\alpha_\nu \to \xi \Rightarrow f(\alpha_\nu) \to f(\xi)$ και από τον αναδρομικό τύπο $\alpha_{\nu+1} = f(\alpha_\nu)$ παίρνουμε $\xi = f(\xi)$.

β) Αν η f είναι φθίνουσα τότε η $f \circ f$ θα είναι αύξουσα. Επειδή $\alpha_{2\nu+2} = f(\alpha_{2\nu+1}) = f(f(\alpha_{2\nu}))$ και $\alpha_{2\nu+1} = f(\alpha_{2\nu}) = f(f(\alpha_{2\nu-1}))$ συνεπάγεται ότι οι υπακολουθίες $\alpha_{2\nu+2}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_{2\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μονότονες και άρα συγκλίνουν. Ας υποθέσουμε ότι $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Τότε η $\alpha_{2\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα και η $\alpha_{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα. Πραγματικά· αν $\alpha_1 \leq \alpha_3$ και υποθέσουμε ότι $\alpha_{2\nu-1} \leq \alpha_{2\nu+1}$ τότε θα έχουμε: $f(f(\alpha_{2\nu-1})) \leq f(f(\alpha_{2\nu+1}))$ δηλ. $f(\alpha_{2\nu}) \leq f(\alpha_{2\nu+2})$ ή $\alpha_{2\nu+1} \leq \alpha_{2\nu+3}$. Όμοια εργαζόμαστε για την $\alpha_{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

β_1) Αν $\alpha_{2\nu-1} \to \xi_2$ και $\alpha_{2\nu} \to \xi_1$ από την συνέχεια της f θα έχουμε : $limf(\alpha_{2\nu-1}) = f(\xi_2)$ και $limf(\alpha_{2\nu}) = f(\xi_1)$, δηλ. $\xi_1 = lim\alpha_{2\nu} = limf(\alpha_{2\nu-1}) = f(\xi_2)$ και $\xi_2 = lim\alpha_{2\nu-1} = limf(\alpha_{2\nu}) = f(\xi_1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.37 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής, μονότονη και να ορίσετε την f^{-1}.

4.38 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x.2^x = 1$ έχει ακριβώς μια θετική πραγματική ρίζα μικρότερη της μονάδας.

4.39 Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη της ασυνεχούς συνάρτησης $f(x) = (1+x^2)sgn(x), x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

4.40 Να αποδείξετε ότι για κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \alpha_0 x^{2\nu+1} + \alpha_1 x^{2\nu} + \alpha_2 x^{2\nu-3} + \ldots + \alpha_\nu x + \alpha_{\nu+1}$$

οπου $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu+1}$ θετικοί αριθμοί, υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση που είναι συνεχής και αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

4.41 Να αποδείξετε ότι:

$\alpha) \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{k}{x})^x = e^k \quad \beta) \lim_{x\to 0}\frac{\alpha^x-1}{x} = log\alpha$

$\gamma) \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty \quad \delta) \lim_{x\to+\infty}\frac{logx}{x} = 0$

$\epsilon) \lim_{x\to 0}(xlogx) = 0 \quad \sigma\tau) \lim_{x\to 0}\frac{log(1+x)}{x} = 1$

$\zeta) \lim_{x\to 1}\frac{logx}{x-1} = 1 \quad \eta) \lim_{x\to+\infty}(logx)^{1/x} = 1$

§ 4.8 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θα θεωρήσουμε γνωστά τα περί εκθετικών, λογαριθμικκών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων, και θα μελετήσουμε τις αντίστροφες τριγωνομετρικές, τις υπερβολικές συναρτήσεις και τις αντιστρόφους των. Όλες αυτές μαζί με τις σταθερές, την ταυτοτική συνάρτηση και όσες μπορούν να προκύψουν από όλες αυτές με πεπερασμένο το πλήθος προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς , διαιρέσεις και συνθέσεις (όπως οι πολυωνυμικές και ρητές) λέγονται **στοιχειώδεις συναρτήσεις** (για το λόγο ότι είναι γνωστές στον καθένα!)

Μια συνάρτηση f θα λέγεται αλγεβρική αν ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\mathbf{P_\nu(x)[f(x)]^\nu + P_{\nu-1}(x)[f(x)]^{\nu-1} + \ldots + P_1(x)f(x) + P_0(x) = 0}$$

όπου $P_k, k = 0, 1, \ldots, \nu$ οποιεσδήποτε πολυωνυμικές συναρτήσεις. Κάθε στοιχειώδης συνάρτηση που δεν είναι αλγεβρική, λέγεται υπερβατική.

Αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$.

Όπως είναι γνωστό το sin είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το $[-1, 1]$, δηλ. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ με $f(x) = sinx$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατηρούμε ότι κάθε $x \in [-1, 1]$ δεν είναι εικόνα ενός μόνο $x \in \mathbb{R}$, γιατί η εξίσωση $sinx = y$ με $|y| \leq 1$ δεν έχει μόνο μια λύση. Για παράδειγμα αν $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ τότε η λύση της εξίσωσης $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι η $x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$, $k \in Z$. Αυτό σημαίνει ότι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της συνάρτησης sin δεν υπάρχει.

Αν όμως περιοριστούμε σε διαστήματα της μορφής $\Delta_k = \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, $k \in Z$ τότε η συνάρτηση sin είναι αμφιμονοσήμαντη. Πραγματικά· έστω $x_1, x_2 \in \Delta_k$ με $x_1 \neq x_2$. Θα αποδείξουμε ότι $sinx_1 \neq sinx_2$. Ας υποθέσουμε το αντίθετο, ότι δηλ. $sinx_1 = sinx_2$. Τότε $x_1 = 2\rho\pi + x_2$ ή $x_1 = (2\rho + 1)\pi - x_2$, και συνεπώς έχουμε:

$$x_1 - x_2 = 2\rho\pi, \rho \in Z \tag{1}$$

$$x_1 + x_2 = 2\rho\pi + \pi, \rho \in Z \tag{2}$$

Αλλά

$$k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x_2 \leq k\pi + \frac{\pi}{2},$$

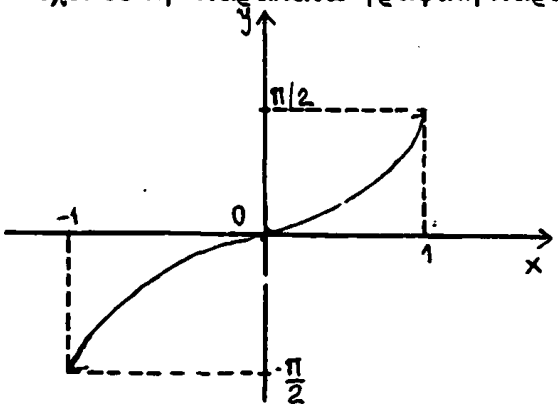
$$-\pi \leq x_1 - x_2 \leq \pi \quad (3), \quad 2k\pi - \pi \leq x_1 + x_2 \leq 2k\pi + \pi \tag{4}$$

Από την (3) με την βοήθεια της (1) έχουμε $-\pi \leq 2\rho\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \rho \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, άτοπο. Από την (4) με την βοήθεια της (2) έχουμε: $k - 1 \leq \rho \leq k$ το οποίο είναι αδύνατο. Άρα για $x_1 \neq x_2$ είναι $sinx_1 \neq sinx_2, \forall x_1, x_2 \in \Delta_k$, δηλ. η συνάρτηση sin είναι αμφιμονοσήμαντη. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.49 υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση, η οποία συμβολίζεται με $arc_k sin$ και λέγεται **τόξο ημιτόνου.**

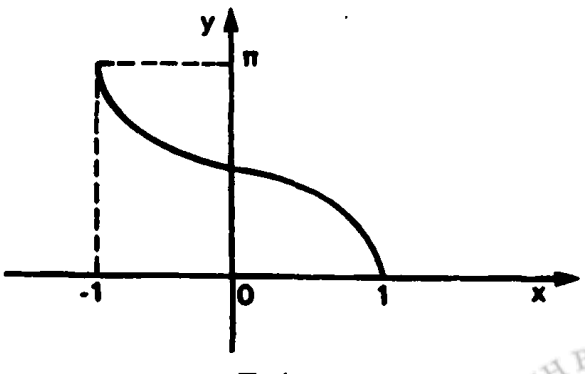
Ειδικά για $k = 0$ έχουμε τον βασικό κλάδο της συνάρτησης $arc_k sin$ που συμβολίζεται με $Arcsin$ αντί του $arc_0 sin$. Είναι λοιπόν:

$$Arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Η συνάρτηση $Arcsin$ είναι συνεχής από το Θεώρημα 4.49 και γνήσια αύξουσα, έχει δε την παρακάτω γραφική παράσταση.



Σχήμα 4.13



Σχήμα 4.13α

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Από τον Ορισμό της συνάρτησης $arc_k sin$ προκύπτουν άμμεσα οι παρακάτω βασικές ταυτότητες:

1. $sin(arc_k sinx) = x, \forall x \in [-1, 1]$.

2. $arc_k sinx = k\pi + (-1)^k Arcsinx, \forall x \in [-1, 1], k \in Z$.

3. $Arcsin(-x) = -Arcsinx, \forall x \in [-1, 1]$.

4. $Arcsinx + Arcsiny = Arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1$.

Ας αποδείξουμε την (4). Αφού $x^2 + y^2 < 1$ συνεπάγεται ότι $x < 1, y < 1$ και $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} < 1$ και συνεπώς και τα δυο μέλη έχουν έννοια. Θέτουμε:

$$Arcsinx = \alpha, Arcsiny = \beta, Arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) = \gamma.$$

Τότε $x = sin\alpha, y = sin\beta, x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = sin\gamma$. Η (4) γράφεται: $\alpha + \beta = \gamma$. Τότε $sin(\alpha + \beta) = sin\gamma$ ή

$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + sin\beta cos\alpha = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = sin\gamma.$$

Από την τελευταία σχέση για να προκύψει $\alpha + \beta = \gamma$ πρέπει να αποδείξουμε ότι $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ επειδή $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Αλλά είναι $x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow sin^2\alpha + sin^2\beta < 1 \Rightarrow sin^2\alpha < 1 - sin^2\beta = cos^2\beta \Rightarrow |sin\alpha| < |cos\beta| \Rightarrow sin\alpha < cos\beta = sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

Αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = cosx, x \in R$.

Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση $cos : IR \to [-1, 1]$ είναι συνεχής αλλά όχι αμφιμονοσήμαντη. Επομένως δεν υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση. Όπως και στην περίπτωση του sin αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση cos στα διαστήματα της μορφής $[k\pi, k\pi + \pi], k \in Z$ είναι αμφιμονοσήμαντη και άρα υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση που την συμβολίζουμε με $arc_k cos$ και λέγεται **τόξο συνημιτόνου.**

Ειδικά για $k = 0$ παίρνουμε τον **βασικό της κλάδο** που συμβολίζεται με $Arccos$. Είναι

$$Arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Αυτή είναι γνήσια φθίνουσα και έχει την γραφική παράσταση του σχ.4.13α.

Από τον Ορισμό άμμεσα επίσης προκύπτουν οι παρακάτω ταυτότητες:

1. $cos(arc_k cosx) = x, \forall x \in [-1, 1]$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2. $arc_k cos x = k\pi + (-1)^k Arccos x + \{1 - (-1)^k\}\frac{\pi}{2}$.

3. $Arccos(-x) = \pi - Arccos x, \forall x \in [-1, 1]$.

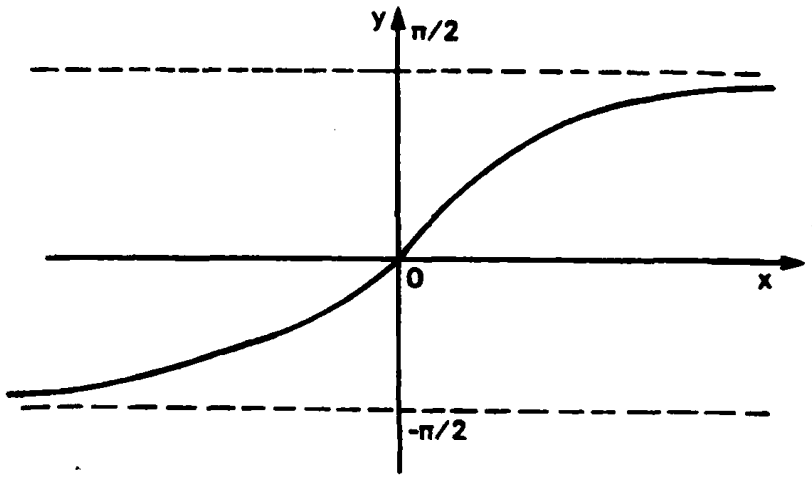
Αντίστροφη συνάρτηση της f(x) = tgx, x ∈ R.

Η συνάρτηση $tg : \mathbb{R} - \{x : x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\} \to \mathbb{R}$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντη και άρα δεν υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση. Εύκολα αποδεικνύεται ότι στα διαστήματα της μορφής $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in Z$ η tg είναι αμφιμονοσήμαντη και άρα υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση που συμβολίζεται με $arc_k tg$ και λέγεται **τόξο εφαπτομένης**.

Ειδικά για $k = 0$ παίρνουμε τον **βασικό της κλάδο** που συμβολίζεται με $Arctg$. Είναι

$$Arctg : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Αυτή είναι γνήσια αύξουσα και έχει την παρακάτω γραφική παράσταση:



Σχήμα 4.14

Επίσης προκύπτουν ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες:

1. $tg(arc_k tg x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $arc_k tg x = k\pi + Arctg x$.

3. $Arctg(-x) = -Arctg x, \forall x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

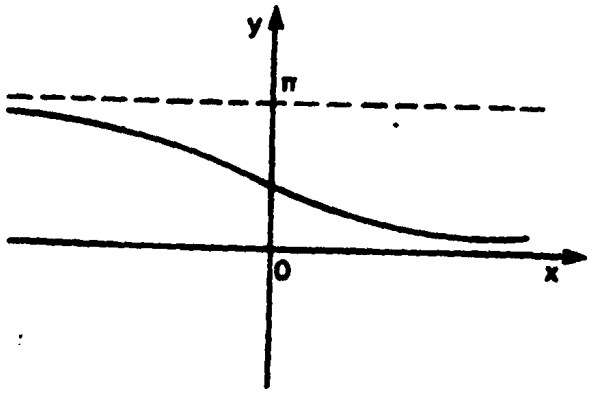
Αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = ctgx$, $x \in \mathbf{R}$.

Η συνάρτηση $ctg : \mathbb{R} - \{x : x = k\pi, k \in Z\} \to \mathbb{R}$ είναι αμφιμονοσήμαντη στα διαστήματα $(k\pi, k\pi + \pi), k \in Z$ και άρα υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση που συμβολίζεται με $arc_k ctg$ και λέγεται **τόξο συνεφαπτομένης**.

Ειδικά για $k = 0$ παίρνουμε τον **βασικό της κλάδο** που συμβολίζεται με $Arcctg$. Είναι

$$Arcctg : \mathbb{R} \to (0, \pi).$$

Αυτή είναι συνεχής, γνήσια φθίνουσα και έχει την παρακάτω γραφική παράσταση:



Σχήμα 4.15

Επίσης προκύπτουν ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες:

1. $ctg(arc_k ctgx) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $arc_k ctgx = k\pi + Arcctgx, \forall x \in \mathbb{R}$.

3. $Arctg(-x) = \pi - Arcctgx, \forall x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.42 Των παρακάτω συναρτήσεων να βρεθεί το $\Delta(f)$:

$\alpha) f(x) = Arcsin(|x| - 3)$.

$\beta) f(x) = \frac{1}{x} + 2^{Arcsin x} + \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

$\gamma) f(x) = Arcsin\frac{x-3}{2} - log(4 - x)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.43 Έστω $f(x) = Arccos(1-2x^2)$ και $g(x) = Arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$. Να αποδείξετε ότι $\Delta(f) = \Delta(g) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$.

4.44 Να αποδείξετε ότι:

$\alpha) arc_k tgx + arc_k tgy = k\pi + arc_k tg\frac{x+y}{1-xy}, \forall x, y \in \mathbb{R}, k \in Z.$

$\beta) 2Arctg\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = Arcsinx, 0 < |x| < 1.$

$\gamma) \frac{\pi}{2} - 2Arctg\sqrt{\frac{1-x}{x+4}} = Arcsin\frac{2x+3}{5}.$

§ 4.9 ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται ως εξής:

Υπερβολικό ημίτονο $\mathbf{sinhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in R}$

Υπερβολικό συνημίτονο $\mathbf{coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in R}$

Υπερβολική εφαπτομένη $\mathbf{tghx = \frac{sinhx}{coshx} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}, x \in R}$

Υπερβολική συνεφαπτομένη $\mathbf{ctghx = \frac{coshx}{sinhx} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}, x \in R - \{0\}}$

Για τις συναρτήσεις αυτές αποδεικνύονται εύκολα οι παρακάτω ταυτότητες:

1 $cosh^2x - sinh^2x = 1.$

2 $sinh(-x) = -sinhx$

3 $cosh(-x) = coshx.$

4 $sinh(x \pm y) = sinhxcoshy \pm coshxsinhy$

5 $cos(x \pm y) = coshxcoshy \pm sinhxsinhy$

6 $tgh(x \pm y) = \frac{tghx \pm tghy}{1 \pm tghxtghy}$

7 $sinh2x = 2sinhxcoshx$

8 $cosh2x = cosh^2x + sinh^2x = 1 + 2sinh^2x = 2cosh^2x - 1$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

9 $tgh2x = \frac{2tghx}{1+tgh^2x}$

10 $(sinhx + coshx)^\nu = sinh(\nu x) + cosh(\nu x) = e^{\nu x}, \nu = 0, 1, 2, \ldots$

11 $sinhx + sinhy = 2sinh\frac{x+y}{2}cosh\frac{x-y}{2}$

12 $coshx + coshy = 2cosh\frac{x+y}{2}cosh\frac{x-y}{2}$

13 $coshx - coshy = 2sinh\frac{x+y}{2}sinh\frac{x-y}{2}$

Απόδειξη της 1.

$$\begin{aligned} cosh^2x - sinh^2x &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 1 \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $x = cosht, y = sinht$ τότε από την 1 έχουμε $x^2 - y^2 = 1$. Δηλαδή το σημείο $(cosht, sinht)$ βρίσκεται σε μια υπερβολή. Σ' αυτό ακριβώς το γεγονός οφείλουν και την ονομασία τους σε υπερβολικές συναρτήσεις. Ας θυμηθούμε ότι το σημείο $(cost, sint)$ ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ και γι' αυτό οι συναρτήσεις sin και cos λέγονται κυκλικές ή τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Απόδειξη της 4.

Αφού ισχύει η 2 αρκεί να την αποδείξουμε μόνο για το $x + y$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} sinhx.coshy &+ sinhy.coshx = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) \\ &+ \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} \\ &+ e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = sinh(x + y). \end{aligned}$$

Οι αποδείξεις των υπολοίπων αφήνονται για άσκηση.

Ας μελετήσουμε τώρα κάπως πιο διεξοδικά τις υπερβολικές συναρτήσεις και ας ορίσουμε τις αντιστρόφους των.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

α) Υπερβολικό ημίτονο sinh.

1. Είναι $\Delta(sinh) = \mathbb{R}$ και $\mathcal{R}(sinh) = R$.

2. Είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής.

3. Είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Πραγματικά· έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Αφού η εκθετική συνάρτηση είναι αύξουσα έχουμε $e^{x_1} < e^{x_2}$ (α). Τότε $e^{-x_1} > e^{-x_2}$ και $-e^{x_1} < -e^{x_2}$ (β). Προσθέτοντας τις (α) και (β) και διαιρώντας δια 2 έχουμε:

$$\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} < \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \quad \text{δηλ.} \quad sinhx_1 < sinhx_2.$$

Επειδή $sinh0 = 0$ συνεπάγεται ότι:

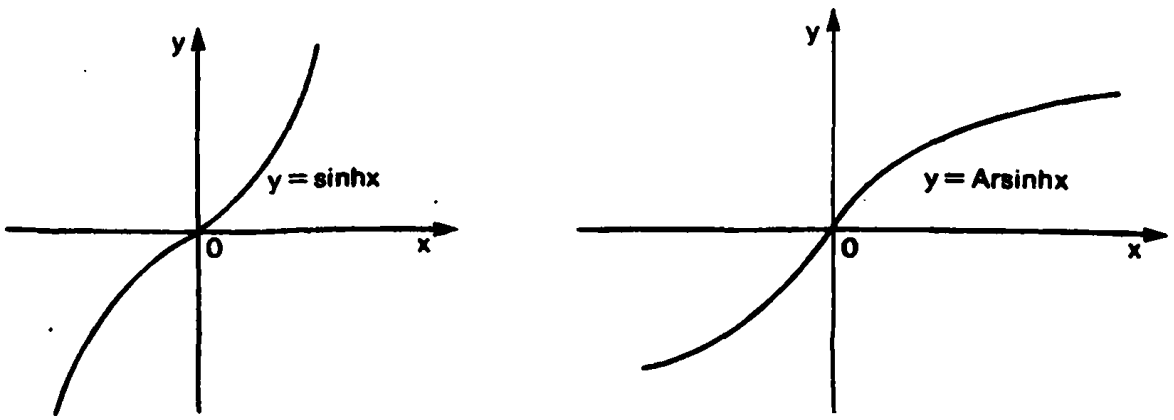
$$sinhx > 0 \quad \text{αν} \quad x > 0 \quad \text{και} \quad sinhx < 0 \quad \text{αν} \quad x < 0.$$

4. Αφού το $sinh$ είναι γνήσια αύξουσα σ' όλο το $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση που την συμβολίζουμε με $Arcsinh$ και λέγεται **τόξο υπερβολικού ημιτόνου.** Είναι $\Delta(Arcsinh) = \mathbb{R}$ και $\mathcal{R}(Arcsinh) = \mathbb{R}$. Επί πλέον ισχύει ο τύπος:

$$Arcsinhx = log(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbb{R}.$$

Πραγματικά· έστω $y = Arcsinhx \Leftrightarrow x = sinhy \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \Leftrightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Επειδή $|x| < \sqrt{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R}$ και $e^y > 0, \forall y \in \mathbb{R}$ έχουμε $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ή $y = log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

5. Οι γραφικές παραστέσεις των $sinh$ και $Arcsinh$ απόδίδονται στα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 4.16

6. Είναι $\lim_{x \to +\infty} sinhx = +\infty$ και $\lim_{x \to -\infty} sinhx = -\infty$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

β) Υπερβολικό συνημίτονο cosh.

1. Είναι $\Delta(cosh) = I\!R$ και $\mathcal{R}(cosh) = [1, +\infty)$. Πραγματικά· από την ταυτότητα $\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha.\beta}$ έχουμε: $\frac{e^x+e^{-x}}{2} \geq \sqrt{e^x.e^{-x}} = 1$, δηλ. $coshx \geq 1, \forall x \in I\!R$, που σημαίνει ότι το πεδίο τιμών του $cosh$ είναι το $[1, +\infty)$.

2. Είναι συνεχής στο $I\!R$.

3. Ας εξετάσουμε την μονοτονία της $cosh$. Έχουμε από την ταυτότητα 13 ότι

$$coshx_1 - coshx_2 = 2sinh\frac{x_1 + x_2}{2} sinh\frac{x_1 - x_2}{2}. \qquad (\star)$$

Επειδή $sinhx > 0$ αν $x > 0$ και $sinhx < 0$ αν $x < 0$ φαίνεται από την παραπάνω σχέση ότι η $cosh$ δεν είναι μονότονη σ' όλο το $I\!R$. Αυτή είναι γνήσια αύξουσα στο $[0, +\infty)$ αφού αν $0 \leq x_1 \leq x_2$ η $(\star)$ δίνει $coshx_1 < coshx_2$ και γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ αφού αν $x_1 \leq x_2 \leq 0$ η $(\star)$ δίνει $coshx_1 > coshx_2$.

4. Αφού λοιπόν η $cosh$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντη δεν υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση. Οι περιορισμοί όμως, όπως αποδείξαμε παραπάνω $cosh|(-\infty, 0]$ και $cosh|[0, +\infty)$ έχουν αντίστροφες συναρτήσεις, που τις συμβολίζουμε με Arc_cosh και Arc_+cosh[1]. Είναι:

$$\Delta(Arc_cosh) = [1, +\infty) \quad \text{και} \quad \mathcal{R}(Arc_cosh) = (-\infty, 0].$$

$$\Delta(Arc_+cosh) = [1, +\infty) \quad \text{και} \quad \mathcal{R}(Arc_cosh) = [0, +\infty).$$

Επί πλέον ισχύουν οι τύποι:

$$Arc_coshx = log(x - \sqrt{x^2 - 1}, x \in [1, +\infty).$$

$$Arc_+coshx = log(x + \sqrt{x^2 - 1}, x \in [1, +\infty).$$

Πραγματικά· έστω $x = coshy = \frac{e^y+e^{-y}}{2} \Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0 \Leftrightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$.

Παρατηρούμε ότι για $y \geq 0$ είναι $e^y \geq 1$ και για $y \leq 0$ είναι $0 < e^y \leq 1$. Επειδή[2]

$$x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1 \quad \text{και} \quad 0 < x - \sqrt{x^2 - 1} \leq 1$$

θα έχουμε:

$$y = Arc_coshx = log(x - \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$$

αντίστροφη της $y = coshx$ στο $(-\infty, 0]$ και

$$y = Arc_+coshx = log(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$$

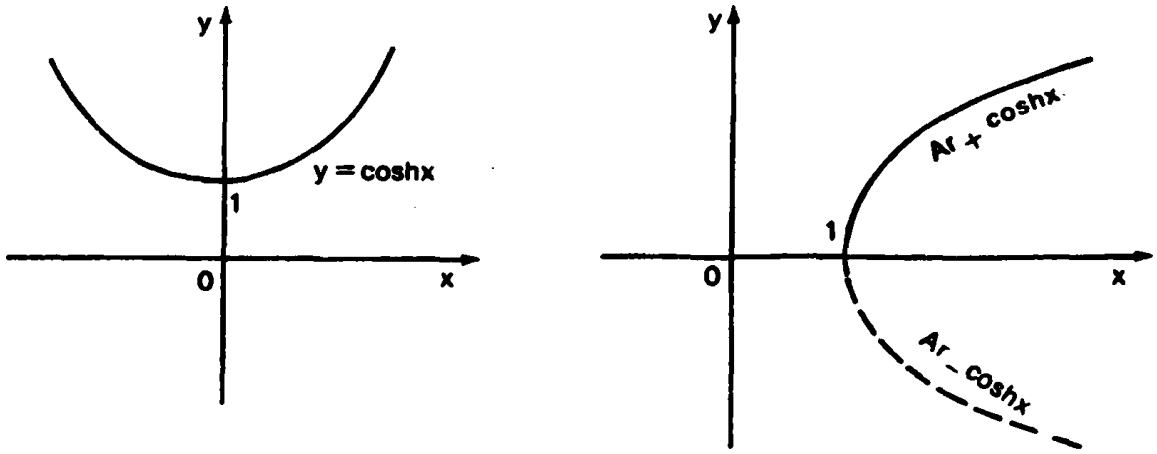
[1] Όπου στα επόμενα θα γράφουμε $Arccosh$ θα εννοούμε το Arc_+cosh

[2] Για $x \geq 1$ είναι $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} < 0$ και $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} > 0$. Πολλαπλασιάζοντας κάθε μια από τις ανισότητες αυτές με $\sqrt{x-1}$ παίρνουμε τις ζητούμενες ανισότητες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αντίστροφη της $y = cosh x$ στο $[0, +\infty)$.

5. Οι γραφικές παραστάσεις των $cosh$, $Arc_{-}cosh$, $Arc_{+}cosh$ αποδίδονται στο σχήμα 4.17.



Σχήμα 4.17

6. Είναι $\lim_{x \to -\infty} cosh x = +\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} cosh x = +\infty$.

γ) Υπερβολική εφαπτομένη tgh.

1. Είναι $\Delta(tgh) = \mathbb{R}$ και $\mathcal{R}(tgh) = (-1, 1)$ γιατί αν $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} > 0$ και $y \neq 1 \Leftrightarrow y \in (-1, 1)$.

2. Είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3. Είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού για $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$tgh x_1 - tgh x_2 = \frac{sinh(x_1 - x_2)}{cosh x_1 . cosh x_2} < 0.$$

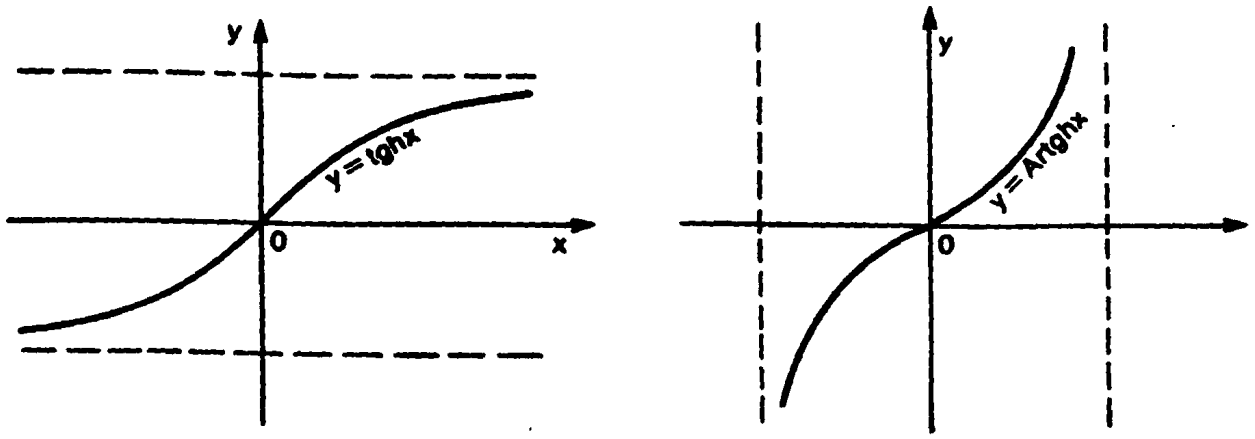
4. Συνεπώς υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση που την συμβολίζουμε με $Arctgh$ και λέγεται **τόξο υπερβολικής εφαπτομένης**. Αυτή είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα και $\Delta(Arctgh) = (-1, 1)$ και $\mathcal{R}(Arctgh) = \mathbb{R}$. Επίσης ισχύει ο τύπος:

$$Arctgh x = \frac{1}{2} log \frac{1+x}{1-x}, \; |x| < 1.$$

Πραγματικά· αν $y = Arctgh x \Leftrightarrow x = tgh y = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} log \frac{1+x}{1-x}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5. Οι γραφικές παραστάσεις των *tgh* και *Arctgh* αποδίδονται στο επόμενο σχήμα: :



Σχήμα 4.18

δ) Υπερβολικό συνεφαπτομένη ctgh.

1. Είναι $\Delta(ctgh) = \mathbb{R} - \{0\}$ και $\mathcal{R}(ctgh) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

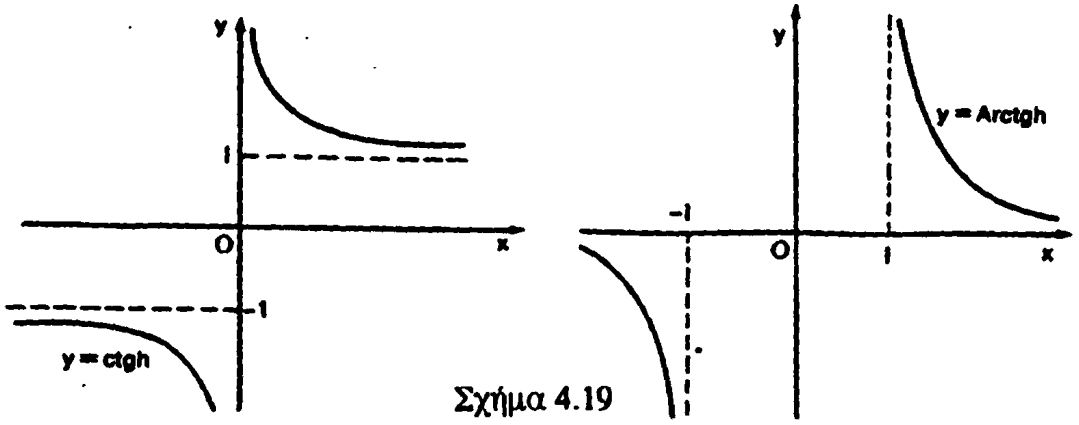
2. Είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$.

3. Είναι γνήσια φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

4. Υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση που την συμβολίζουμε με *Arcctgh* και λέγεται **τόξο υπερβολικής συνεφαπτομένης**. Αυτή είναι συνεχής και γνήσια φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$. Επίσης ισχύει ο τύπος:

$$Arcctghx = \frac{1}{2} log \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1.$$

5. Οι γραφικές παραστάσεις των *tgh* και *Arctgh* είναι οι παρακάτω:



Σχήμα 4.19

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.45 Αν $sinhx = 1$ και $coshy = 3$ τότε να αποδείξετε ότι: $y = \pm 2x$.

4.46 Αν $e^x = ctghy$ τότε να αποδείξετε ότι: $e^{2y} = ctgh\frac{x}{2}$.

4.47 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$ είναι περιττή και ότι: $f(x) = \frac{1}{2}ctgh\frac{x}{2}$.

4.48 Έστω $f(x) = Arctghx, x \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f έχει αντίστροφη f^{-1} η οποία και να βρεθεί.

β) Αν $0 \leq \alpha < 1$ και $0 \leq \beta < 1$ και θέσουμε $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha.\beta}$ τότε $0 \leq \gamma < 1$ και $f(\gamma) = f(\alpha) + f(\beta)$.

γ) Για κάθε ζευγάρι θετικών αριθμών x_1 και x_2 ισχύει:

$$f^{-1}(x_1 + x_2) = \frac{f^{-1}(x_1) + f^{-1}(x_2)}{1 + f^{-1}(x_1).f^{-1}(x_2)}.$$

§ 4.10 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

Σωστό ή λάθος;

1 Αν $\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell$ και $f(\xi) = \ell$ τότε η f είναι συνεχής.

2 Αν $f(x) = g(x)$ για $x \neq \xi$ και $f(\xi) \neq g(\xi)$ τότε ή η f ή η g πρέπει να είναι ασυνεχής στο ξ.

3 Αν η f είναι συνεχής στο $(\alpha, \beta]$ τότε η f παίρνει μέγιστο και ελάχιστο στο $(\alpha, \beta]$.

4 Αν η f είναι συνεχής στο x_0 τότε και η $\frac{1}{f}$ είναι συνεχής στο x_0.

5 Αν η f παίρνει θετική τιμή σε κάποιο σημείο $\xi \in \Delta(f)$, τότε υπάρχει ολόκληρη περιοχή του ξ όπου η f παίρνει θετική τιμή.

6 Η συνάρτηση $g(x) = f(x^2 + x^3)$ είναι συνεχής.

7 Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

8 Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι και συνεχής.

9 Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι φραγμένη.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

10 Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

ικανοποιεί το Θεώρημα του Bolzano, αφού $f(0).f(3) < 0$.

11 Αν η $|f|$ είναι συνεχής, τότε και η f είναι συνεχής.

12 Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 1, f(\beta) > 1$. Τότε υπάρχει $c \in (\alpha, \beta) : f(c) = 0$.

13 Μια συνεχής και φραγμένη συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.

14 Η $g \circ f$ είναι συνεχής στο ξ ακόμα και αν η f ή η g ή και οι δυο δεν είναι συνεχείς στο ξ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.49 α) Αν $f(x) = x^\nu$ να βρεθεί $\delta > 0$ που να εξαρτάται από το x_0 τέτοιο ώστε:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon, \quad \text{όταν} \quad |x - x_0| < \delta.$$

β) Να εξετάσετε το ίδιο πρόβλημα αν f είναι το πολυώνυμο

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0, \alpha_\nu \neq 0.$$

4.50 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & -1 \le x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 2^x - 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

είναι φραγμένη στο διάστημα $[-1, 1]$, αλλά δεν παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

4.51 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x - [x]$ σε τυχαίο διάστημα με μήκος μικρότερο του 1, παίρνει ελάχιστο αλλά όχι μέγιστο.

4.52 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to IR$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) = 0$ για όλους τους ρητούς x του $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι η f είναι εκ ταυτότητος μηδέν στο $[\alpha, \beta]$.

4.53 Έστω $f : [\alpha, \infty) \to IR$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in IR$, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha, \infty)$. Ισχύει το αντίστροφο;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.54 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = Arctgx$, $x \in IR$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} Arctgx = \frac{\pi}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$Arctgx - Arctgy = Arctg\frac{x-y}{1+x.y}, \forall x, y \in IR_0^+.$$

γ) Να βρεθεί το άθροισμα των ν πρώτων όρων της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ με $\alpha_\nu = Arctg\frac{1}{2\nu^2}$, $\nu \in IN$ και να αποδείξετε ότι: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \frac{\pi}{4}$.

4.55 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to IR$ μια συνεχής συνάρτηση, όπου $\alpha, \beta \in IR^+$ και $\alpha \neq \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\alpha f(\alpha) + \beta f(\beta) = (\alpha + \beta)g(c).$$

4.56 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to IR$ μια συνεχής συνάρτηση και $\gamma, \delta \in [\alpha, \beta]$ με $\gamma < \delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση

$$\phi(x) = f(\gamma) + (x - \gamma)\frac{f(\delta) - f(\gamma)}{\delta - \gamma}$$

είναι μονότονη στο $[\alpha, \beta]$.

β) Αν $\eta \in [\gamma, \delta]$ τότε υπάρχει $\xi \in [\gamma, \delta]$ τέτοιο ώστε: $\phi(\eta) = f(\xi)$.

4.57 Έστω $f : IR \to IR$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in IR, 0 \leq k < 1.$$

Για $x_1 \in IR$ ορίζουμε την ακολουθία x_ν, $\nu \in IN$ με

$$x_{\nu+1} = f(x_\nu).$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) η x_ν, $\nu \in IN$ είναι ακολουθία του Cauchy.

γ) υπάρχει $\xi \in IR : f(\xi) = \xi$.

4.58 Έστω $f : [0, 1] \to Q$ μια συνεχής συνάρτηση με $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in [0, 1]$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.59 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $c \in (\alpha, \beta)$ με $f(c) > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ανοιχτό διάστημα (γ, δ) που περιέχει το c ώστε $f(x) > 0$. Αν (γ, δ) είναι το μεγαλύτερο τέτοιο διάστημα να αποδείξετε ότι αν $\alpha < \gamma$ τότε $f(\gamma) = 0$ και αν $\delta < \beta$ τότε $f(\delta) = 0$.

4.60 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)2^{-(1/|x|+1/x)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

στο διάστημα $[-2, 2]$ παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ $f(-2)$ και $f(2)$ αν και είναι ασυνεχής.

4.61 Έστω f μια αύξουσα, συνεχής και φραγμένη συνάρτηση σε ένα διάστημα I. Να αποδείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4.62 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία υποθέτουμε ότι $\forall y \in f([\alpha, \beta])$ υπάρχουν ακριβώς δυο $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε: $f(x_1) = f(x_2) = y$. Να αποδείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

4.63 Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αν το A είναι φραγμένο, να αποδείξετε ότι η f είναι φραγμένη.

4.64 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Να αποδείξετε ότι αν x_0 είναι σημείο συσσωρεύσεως του A, τότε υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Ισχύει το αντίστροφο;

4.65 Έστω I_1, I_2 δυο κλειστά διαστήματα. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στα I_1, I_2 τότε να αποδείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $I_1 \cup I_2$.

4.66 Να αποδείξετε ότι μια συνεχής περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη στο R.

4.67 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί την συνθήκη

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο R.

4.68 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in [\alpha, \beta]$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ πραγματικοί αριθμοί όλοι του ίδιου προσήμου. Να

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αποδείξετε ότι:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i f(x_i) = f(c) \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i$$

για κάποιο $c \in [\alpha, \beta]$.

4.69 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και

$$g(x) = sup\{f(t) : \alpha \leq t \leq x\}.$$

Να αποδείξετε ότι $g(\alpha) = f(\alpha)$ και ότι η g είναι αύξουσα και συνεχής στο α.

4.70 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο β, αν και μόνον αν, $f(\beta) = sup\{f(x) : x \in [\alpha, \beta)\}$.

4.71 Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι φραγμένη.

4.72 Έστω $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $g \circ f = f \circ g$. Υποθέτουμε ακόμα ότι η f είναι αύξουσα. Να αποδείξετε ότι οι f και g έχουν ένα κοινό σταθερό σημείο.

4.73 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ μια συνάρτηση, τέτοια ώστε:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|, \forall x, y \in [\alpha, \beta].$$

Για $x_1 \in [\alpha, \beta]$ ορίζουμε την ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$x_{\nu+1} = \frac{1}{2}[x_\nu + f(x_\nu)].$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) $x_\nu \in [\alpha, \beta], \forall \nu \in \mathbb{N}$.

γ) η x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy.

δ) υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \xi$.

4.74 Έστω $f : [0, 1] \to [0, 1]$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$ και τέτοια ώστε:

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \forall x, y \in [0, 1].$$

1) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq x, \forall x \in [0, 1]$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2) Με $x_1 \in [0, 1]$ ορίζουμε την ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$x_{\nu+1} = f(x_\nu).$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό ξ.

β) $f(\xi) = \xi$.

γ) $f(x) = x, \forall x \in [0, 1]$.

4.75 Μια συνάρτηση $f : (A, B) \to \mathbb{R}$ θα λέγεται κυρτή, αν

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y), \forall x, y \in (A, B), 0 < \lambda < 1.$$

(Αυτό σημαίνει ότι αν P, Q και R είναι τρία σημεία στο γράφημα της f, με το Q μεταξύ των P και R, τότε το Q βρίσκεται πάνω ή κάτω από την χορδή PR.)

Να αποδείξετε ότι κάθε κυρτή συνάρτηση είναι συνεχής.

4.76 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Είναι η f ομοιόμορφα συνεχής;

4.77 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ σημεία του $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{1}{\nu}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_\nu)].$$

4.78 Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$f(1) = \alpha_1 f(\xi_1) + \alpha_2 f(\xi_2) + \ldots + \alpha_\mu f(\xi_\mu)$$

όπου $0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_\mu < 1$ και οι σταθερές $\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, \mu$ είναι όλες θετικές ή όλες αρνητικές. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\xi_1, \xi_\mu]$ τέτοιο ώστε:

$$f(1) = \alpha f(\xi), \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu.$$

4.79 Μια συνάρτηση $f : R \to \mathbb{R}$ θα λέγεται υποπροσθετική αν

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι αν η f είναι υποπροσθετική, συνεχής στο 0 με $f(0) = 0$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράγωγος συνάρτησης 5

§ 5.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ και υποθέουμε ότι $\alpha \in \Delta$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του Δ. Τότε για όλα τα $x \in \Delta - \{\alpha\}$ ορίζεται η συνάρτηση

$$F(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

και το α είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta - \{\alpha\}$. Επομένως έχει νόημα να θεωρήσουμε το όριο της F όταν $x \to \alpha$.

Ορισμός 5.1. Αν $f : \Delta \to \mathbf{R}$, $\Delta \subseteq \mathbf{R}$ και $\alpha \in \Delta$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του Δ και αν το

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

υπάρχει, τότε η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο α και ο αριθμός

$$f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

λέγεται παράγωγος της f στο α.

Παρατήρηση 5.2

Ο λόγος που βάζουμε τις συνθήκες για το α είναι προφανής. Πρέπει πρώτα το $\alpha \in \Delta$ για να έχει έννοια το $f(\alpha)$. Επίσης το α πρέπει να είναι σημείο συσσωρεύσεως του Δ, γιατί όπως έχουμε τονίσει το όριο της F ορίζεται στο α, μόνο αν το α είναι σημείο συσσωρεύσεως του Δ.

Παρατήρηση 5.3

Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης υπάρχει, τότε αυτή είναι μοναδική. Αυτό είναι άμμεση συνέπεια της μοναδικότητας του ορίου (Θεώρημα 3.41). Βλέπε και εφαρμογή 1 παρακάτω.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μπορεί στο σημείο $\alpha \in \Delta$ η συνάρτηση F να μην έχει όριο, αλλά να έχει πλευρικά όρια. Τότε ορίζουμε τις πλευρικές παραγώγους της f στο α ως εξής: Αν το $\lim_{x\to\alpha-} F(x)$ υπάρχει, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο α από αριστερά και ο αριθμός $f'_-(\alpha)$ λέγεται **παράγωγος της f στο α από αριστερά**. Ανάλογα αν το $\lim_{x\to\alpha+} F(x)$ υπάρχει, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο α από δεξιά και ο αριθμός $f'_+(\alpha)$ λέγεται **παράγωγος της f στο α από δεξιά**.

Σύμφωνα με τα γνωστά από τα όρια η f θα παραγωγίζεται στο $\alpha \in \Delta$, αν και μόνο αν, υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι στο α και είναι ίσες.

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $A \subseteq \Delta$, τότε η f λέγεται **παραγωγίσιμη στο A**. Τότε η συνάρτηση f' που ορίζεται να έχει τιμή $f'(x), \forall x \in A$ λέγεται **παράγωγος της f στο A**. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ τότε λέμε απλά ότι η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Ειδικά αν $\Delta = [\alpha, \beta]$ τότε λέγοντας ότι η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, εννοούμε ότι (i) υπάρχει η $f'(x), \forall x \in (\alpha, \beta)$ (ii) υπάρχει η $f'_+(\alpha)$ και (iii) υπάρχει η $f'_-(\beta)$.

Παρατήρηση 5.4.

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω χρειάζεται προσοχή στη διάκριση των δυο εννοιών: **παράγωγος της f στο α, που είναι πραγματικός αριθμός και παράγωγος της f, που είναι συνάρτηση.**

Παρατήρηση 5.5.

Αντί του συμβολισμού $f'(x)$ για την παράγωγο της f, χρησιμοποιούνται και οι συμβολισμοί *(γνωστοί ως συμβολισμοί του Leibnitz)*:

$$\frac{d}{dx} f(x), \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{df}{dx}$$

Προσοχή στο ότι αυτά είναι σύμβολα. Το τελευταίο π.χ. δεν σημαίνει το γινόμενο των δυο αριθμών d και f που διαιρείται με τογινόμενο των αριθμών d και x.

Παρατήρηση 5.6.

Πολλές φορές στις εφαρμογές, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο για την παράγωγο της f στο $\alpha \in \Delta$:

$$f'(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}.$$

Ο τύπος αυτός προκύπτει από τον ορισμό 5.1 αν θέσουμε $x - \alpha = h$, οπότε $x = \alpha + h$ και $h \to 0$ όταν $x \to \alpha$. Πρέπει βέβαια $\alpha + h \in \Delta$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατήρηση 5.7.

Αν θυμηθούμε τον ακολουθιακό ορισμό της συγκλίσεως, μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό για την παράγωγο της f στο $\alpha \in \Delta$:

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\alpha \in \Delta$ αν και μόνο αν, για κάθε ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ με $x_\nu \to \alpha$

$$\lim \frac{f(x_\nu) - f(\alpha)}{x_\nu - \alpha} = f'(\alpha).$$

Αν λοιπόν για δυο ακολουθίες x_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ και y_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ με $x_\nu, y_\nu \in \Delta - \{\alpha\}$ και $x_\nu \to \alpha$, $y_\nu \to \alpha$ έχουμε ότι

$$\lim \frac{f(x_\nu) - f(\alpha)}{x_\nu - \alpha} \neq \lim \frac{f(y_\nu) - f(\alpha)}{y_\nu - \alpha}$$

τότε η f δεν παραγωγίζεται στο α.

Παράδειγμα 5.8.

Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ και $\Delta = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \}$. Τότε $f'(0) = 1$. Πραγματικά· το 0 είναι σημείο συσσωρεύσεως του Δ, και για κάθε ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in \Delta - \{0\}$ και $x_\nu \to 0$ έχουμε:

$$f'(0) = lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = lim \frac{f(x_\nu) - f(0)}{x_\nu - 0} = lim \frac{x_\nu - 0}{x_\nu - 0} = 1.$$

Παράδειγμα 5.9.

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x| + |x + 1|$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. Πραγματικά· παρατηρούμε πρώτα ότι:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \leq -1 \\ 1, & -1 < x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Τότε για $x < -1$ είναι:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2x - 2h - 1 + 2x + 1}{h} = -2.$$

Για $-1 < x < 0$ είναι:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - 1}{h} = 0.$$

Για $x > 0$ είναι:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x + 2h + 1 - 2x - 1}{h} = 2.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για $x = -1$ έχουμε:

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1-} \frac{-2x - 1 - 1}{x+1} = -2$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1+} \frac{1-1}{x+1} = 0.$$

Δηλαδή $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$ και συνεπώς η $f'(-1)$ δεν υπάρχει. Παρόμοια αποδεικνύουμε ότι και η $f'(0)$ δεν υπάρχει.

Ο ορισμός 5.1 μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή, έχοντας υπόψη τον ορισμό σύγκλισης του Cauchy (ορισμός 3.16).

Θα λέμε ότι ο αριθμός $f'(\alpha)$ είναι η παράγωγος της f στο α, αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon)$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in \Delta$ με $0 < |x - \alpha| < \delta$ να ισχύει:

$$\left| \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f'(\alpha) \right| < \epsilon. \tag{1}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $\lambda_\alpha : \Delta - \{\alpha\} \to \mathbb{R}$ με

$$\lambda_\alpha(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f'(\alpha). \tag{2}$$

Τότε, από την (1) έχουμε ότι $\lim_{x \to \alpha} \lambda_\alpha(x) = 0$.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω μπορούμε να δώσουμε τον επόμενο χαρακτηρισμό για την παράγωγο, που είναι πολύ χρήσιμος για γενίκευση της έννοιας της παραγώγου σε διανυσματικές συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής από την μια μεριά, και για την απλούστερη απόδειξη των θεωρημάτων που θα ακολουθήσουν από την άλλη.

Θεώρημα 5.10. Η συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha \in \Delta$ όπου α σημείο συσσωρεύσεως του Δ, αν και μόνο αν, υπάρχουν ένας αριθμός $f'(\alpha) \in \mathbf{R}$, ένα $\delta > 0$ και μια συνάρτηση $\lambda_\alpha : \Delta - \{\alpha\} \to \mathbf{R}$ με την ιδιότητα ότι $\lim_{x \to \alpha} \lambda_\alpha(x) = 0$, τέτοια ώστε για όλα τα $x \in \Delta$ με $0 < |x - \alpha| < \delta$ να ισχύει:

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) + \lambda_\alpha(x)(x - \alpha). \tag{3}$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (3). Τότε από την (2) έχουμε ότι η $f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ υπάρχει.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει η $f'(\alpha)$. Τότε ισχύει η (1) και συνεπώς η λ_α που ορίζεται από την (2) ικανοποιεί την συνθήκη του θεωρήματος. •

Η συνάρτηση του παραδείγματος 5.9 είναι συνεχής, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία -1 και 0. **Άρα κάθε συνεχής συνάρτηση δεν είναι αναγκαστικά και παραγωγίσιμη.** Το αντίστροφο όμως είναι σωστό, όπως δείχνει το επόμενο

Θεώρημα 5.11. **Έστω f : $\Delta \to \mathbf{R}$ και α σημείο συσσωρεύσεως του Δ. Αν η $f'(\alpha)$ υπάρχει, τότε η f είναι συνεχής στο α.**

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 5.10 υπάρχει συνάρτηση $\lambda_\alpha : \Delta - \{\alpha\} \to R$ τέτοια ώστε:

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) + \lambda_\alpha(x - \alpha),$$

όπου $\lim_{x\to\alpha} \lambda_\alpha(x) = 0$. Αφού $\lim_{x\to\alpha} f'(\alpha)(x-\alpha) = 0$ και $\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha) = 0$ έχουμε ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο α. •

Παρατήρηση 5.12

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.11 αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής σ'αυτό το σημείο, χωρίς να ισχύει το αντίστροφο[1]. **Αν όμως μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη σ' αυτό το σημείο.** Έτσι για παράδειγμα η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ sin\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού δεν είναι συνεχής στο 0 (Βλέπε παράδειγμα 4.25). Επίσης η συνάρτηση $f(x) = [x]$ δεν παραγωγίζεται στο 2, γιατί είναι ασυνεχής.

Παρατήρηση 5.13.

Αν $f : \Delta \to \mathbb{R}$, $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ τότε γράφουμε:
$f \in C(\Delta)$, αν και μόνο αν, η f είναι συνεχής στο Δ.
$f \in C^1(\Delta)$ αν και μόνο αν, η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ.

---

[1] Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς σ' όλο το R και δεν είναι παραγωγίσιμες σε κανένα σημείο του. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η γνωστή συνάρτηση του **Weirstrass** που ορίζεται από την σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} cos(3^\nu x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τότε το Θεώρημα 5.11 γίνεται:

$$f \in C^1(\Delta) \Rightarrow f \in C(\Delta).$$

Ειδικά $f \in C^1(\alpha, \beta) \Rightarrow f \in C(\alpha, \beta)$, $f \in C^1[\alpha, \beta] \Rightarrow f \in C[\alpha, \beta]$ και $f \in C^1[\alpha, \beta) \Rightarrow f \in C[\alpha, \beta)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε, με την βοήθεια του Θεωρήματος 5.10, ότι αν η $f'(\alpha)$ υπάρχει, τότε αυτή είναι μοναδική.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η $f'(\alpha)$ δεν ορίζεται μονοσήμαντα, δηλ. έστω ότι και η $\phi'(\alpha)$ είναι παράγωγος της f στο α με $\phi'(\alpha) \neq f'(\alpha)$. Τότε από το θεώρημα 5.10 έχουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις λ_α και μ_α με την ιδιότητα $\lim_{x\to\alpha} \lambda_\alpha = 0$ και $\lim_{x\to\alpha} \mu_\alpha = 0$ και τέτοιες ώστε:

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) + \lambda_\alpha(x)(x-\alpha)$$

$$f(x) - f(\alpha) = \phi'(\alpha)(x-\alpha) + \mu_\alpha(x)(x-\alpha).$$

Από τις σχέσεις αυτές έχουμε ότι:

$$f'(\alpha)(x-\alpha) + \lambda_\alpha(x)(x-\alpha) = \phi'(\alpha)(x-\alpha) + \mu_\alpha(x)(x-\alpha)$$

ή

$$f'(\alpha) - \phi'(\alpha) = \mu_\alpha(x) - \lambda_\alpha(x).$$

Αν στην τελευταία σχέση πάρουμε τα όρια όταν $x \to \alpha$ θα έχουμε:

$$\lim_{x\to\alpha}(f'(\alpha) - \phi'(\alpha)) = \lim_{x\to\alpha}(\mu_\alpha(x) - \lambda_\alpha(x)) = 0$$

δηλ. $f'(\alpha) - \phi'(\alpha) = 0$, άτοπο αφού $f'(\alpha) \neq \phi'(\alpha)$.

2. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ορίζουμε ως συμμετρική παράγωγο της f στο σημείο α το όριο

$$f'_s(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha-h)}{2h}$$

αν αυτό υπάρχει.

α) Αν υπάρχουν οι $f'_-(\alpha)$ και $f'_+(\alpha)$ να εκφράσετε συναρτήσει αυτών την $f'_s(\alpha)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

έχει συμμετρική παράγωγο στο 0, αλλά όχι και πλευρικές παραγώγους.

Απόδειξη

α) Επειδή ο λόγος $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{2h}$ μένει αμετάβλητος αν στην θέση του h βάλουμε το $-h$, συνεπάγεται ότι:

$$f'_s(\alpha) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{2h}.$$

Επειδή υπάρχουν οι $f'_-(\alpha)$ και $f'_+(\alpha)$ έχουμε:

$$f'_-(\alpha) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \lim_{-h\to 0+} \frac{f(\alpha-h)-f(\alpha)}{-h}$$

$$f'_+(\alpha) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}.$$

Από τις σχέσεις αυτές παίρνουμε:

$$\begin{aligned} f'_s(\alpha) &= \lim_{h\to 0+} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}+\{f(\alpha)-f(\alpha-h)\}}{2h} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to 0+} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} + \lim_{-h\to 0+} \frac{f(\alpha-h)-f(\alpha)}{-h}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\{f'_-(\alpha)+f'_+(\alpha)\}. \end{aligned}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο α, τότε η συμμετρική παράγωγος ταυτίζεται με την παράγωγο της f στο α.

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h\sin\frac{1}{h} - \left[-h\sin\left(-\frac{1}{h}\right)\right]}{2h} = 0. \end{aligned}$$

Η f όμως δεν έχει πλευρικές παραγώγους στο 0, γιατί ξέρουμε ότι η $\sin\frac{1}{x}$ δεν έχει όριο στο 0 (εφαρμογή 1 της 3.2) και είναι

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3. Έστω $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε η $f'(0)$ να υπάρχει. Έστω επίσης δυο ακολουθίες x_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ και y_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ τέτοιες ώστε

$$-1<x_\nu<0<y_\nu<1,\quad \lim x_\nu=0=\lim y_\nu$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim\frac{f(y_\nu)-f(x_\nu)}{y_\nu-x_\nu}=f'(0)$$

Απόδειξη

Έστω $\epsilon>0$. Αν $0<\delta<1$ επειδή υπάρχει η $f'(0)$ θα έχουμε

$$(\forall\epsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in[-1,1])0<|x|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)\right|<\epsilon \tag{1}$$

Επειδή $\lim x_\nu=0=\lim y_\nu$ θα έχουμε:

$$(\forall\epsilon^*>0)(\exists\nu_0\in N)(\forall\nu\in\mathbb{N})\nu>\nu_0\Rightarrow 0<|x_\nu|<\epsilon^*,\ 0<|y_\nu|<\epsilon^*$$

Διαλέγουμε $\epsilon^*=\delta$. Τότε $|x_\nu|<\delta$, $|y_\nu|<\delta$, $\forall\nu>\nu_0$. Για $\nu>\nu_0$ η (1) δίνει:

$$\left|\frac{f(x_\nu)-f(0)}{x_\nu}-f'(0)\right|<\epsilon,\quad \left|\frac{f(y_\nu)-f(0)}{y_\nu}-f'(0)\right|<\epsilon$$

Αλλά

$$\begin{aligned}|f(y_\nu)-f(x_\nu)-(y_\nu-x_\nu)f'(0)| &\le |(f(y_\nu)-f(0)-y_\nu f'(0))\\ &\quad -(f(x_\nu)-f(0)-x_\nu f'(0))|\\ &\le \epsilon|y_\nu|+\epsilon|x_\nu|=\epsilon(y_\nu-x_\nu),\quad x_\nu<0<y_\nu\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι

$$\lim\frac{f(y_\nu)-f(x_\nu)}{y_\nu-x_\nu}=f'(0)$$

Προσοχή! Το συμπέρασμα της παραπάνω εφαρμογής δεν είναι αναγκαστικά σωστό, αν δεν απαιτήσουμε $x_\nu<0<y_\nu$ Π. χ. $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $x_\nu=\frac{1}{\nu}$, $y_\nu=\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.1 Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις:

$$\alpha)\ f(x)=|x|^3,\ x\in\mathbb{R},\quad \beta)\ g(x)=|\log(1+x)|,\ x>-1$$

$$\gamma)\ \phi(x)=|\sin x|,\ x\in\mathbb{R}\quad \delta)\quad h(x)=e^{|x|},\ x\in\mathbb{R}$$

είναι παραγωγίσιμες στο 0.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.2 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Για ποιές τιμές της σταθερής $\alpha \in \mathbb{R}^+$ η f είναι παραγωγίσιμη στο 0;

5.3 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x Arctg\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad \beta) g(x) = \begin{cases} \frac{x(e^{1/x}-1)}{e^{1/x}+1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι πλευρικές παράγωγοι στο 0.

5.4 Για ποιές τιμές των α και $\beta \in \mathbb{R}$ η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{x^2 + (\alpha x^2 + \beta + 1)e^{\nu x}}{2 + e^{\nu x}}$$

είναι παραγωγίσιμη στο 0;

5.5 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |cos x|$ είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$.

5.6 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο 1.

5.7 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to IR$ με $f(x) = x - [x]$ είναι παραγωγίσιμη στα σημεία -1 και 1.

5.8 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

5.9 Αν η f παραγωγίζεται στο α, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{xf(x) - \alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = f(\alpha) - \alpha f'(\alpha).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.10 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^\nu, & x \geq 0, \nu \in \mathbb{N} \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Για ποιές τιμές του ν:

α) Η f' είναι συνεχής στο 0.

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο 0.

5.11 Αν η f είναι παραγωγίσιμη και περιοδική με περίοδο T, να αποδείξετε ότι και η f' είναι περιοδική με την ίδια περίοδο.

5.12 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f(x + y) = f(x).f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(0) = 1$ καιη f είναι παραγωγίσιμη στο 0, να αποδείξετε ότι η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και μάλιστα: $f'(x) = f(x).f'(0), \forall x \in \mathbb{R}$.

5.13 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in Q \\ 0, & x \in (\mathbb{R} - Q) \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = 0$.

5.14 Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\xi \in (\alpha, \beta)$ και ακολουθίες $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$, $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε:

$$\alpha < x_\nu < \xi < y_\nu < \beta, \quad \lim x_\nu = \xi = \lim y_\nu.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim \frac{f(y_\nu) - f(x_\nu)}{y_\nu - x_\nu} = f'(\xi).$$

§ 5.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Υπάρχουν μερικές βασικές ιδιότητες της παραγώγου, οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες για τον υπολογισμό των παραγώγων σύνθετων συναρτήσεων. Αυτές τις ιδιότητες θα μελετήσουμε στα θεωρήματα που ακολουθούν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 5.14. Έστω $\Delta \subseteq \mathbf{R}$ ένα διάστημα. Έστω επίσης $\alpha \in \Delta$ και $\mathbf{f}: \Delta \to \mathbf{R}, \mathbf{g}: \Delta \to \mathbf{R}$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο α. Τότε:

α) Αν $\mathbf{k} \in \mathbf{R}$ τότε η συνάρτηση $\mathbf{kf}$ είναι παραγωγίσιμη στο α, και

$$(\mathbf{kf})'(\alpha) = \mathbf{kf}'(\alpha).$$

β) Η συνάρτηση $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο α και

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})'(\alpha) = \mathbf{f}'(\alpha)+\mathbf{g}'(\alpha).$$

γ) Η συνάρτηση $\mathbf{f}.\mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο α και

$$(\mathbf{f}.\mathbf{g})'(\alpha) = \mathbf{f}'(\alpha)\mathbf{g}(\alpha) + \mathbf{f}(\alpha)\mathbf{g}'(\alpha).$$

δ) Αν $\mathbf{g}(\alpha) \neq \mathbf{0}$, τότε η συνάρτηση $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$ είναι παραγωγίσιμη στο α και

$$\left(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right)'(\alpha) = \frac{\mathbf{f}'(\alpha)\mathbf{g}(\alpha) - \mathbf{f}(\alpha)\mathbf{g}'(\alpha)}{\mathbf{g}^2(\alpha)}.$$

Απόδειξη

Αφού οι f και g παραγωγίζονται στο α, από το Θεώρημα 5.10 έχουμε:

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) + \lambda_\alpha(x)(x-\alpha) \tag{1}$$

$$g(x) - g(\alpha) = g'(\alpha)(x-\alpha) + \mu_\alpha(x)(x-\alpha) \tag{2}$$

για όλα τα $x \in \Delta(f)$ με $0 < |x-\alpha| < \delta_1$ και όλα τα $x \in \Delta(g)$ με $0 < |x-\alpha| < \delta_2$ όπου $\lim_{x\to\alpha}\lambda_\alpha(x) = 0$ και $\lim_{x\to\alpha}\mu_\alpha(x) = 0$. Συνεπώς έχουμε:

$$\alpha) \quad kf(x) - kf(\alpha) = kf'(\alpha)(x-\alpha) + k\lambda_\alpha(x)(x-\alpha)$$

με $\lim_{x\to\alpha} k\lambda_\alpha(x) = k\lim_{x\to\alpha}\lambda_\alpha(x) = 0$. Άρα από το Θεώρημα 5.10

$$(kf)'(\alpha) = kf'(\alpha).$$

β) Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$[f(x)+g(x)]-[f(\alpha+g(\alpha)]) = [f'(\alpha)+g'(\alpha)](x-\alpha)+[\lambda_\alpha(x)+\mu_\alpha(x)](x-\alpha).$$

Επειδή $\lim_{x\to\alpha}[\lambda_\alpha(x)+\mu_\alpha(x)] = 0$ έχουμε

$$(f+g)'(\alpha) = f'(\alpha)+g'(\alpha).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(\alpha)g(\alpha) &= [f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) \\ &\quad +\lambda_\alpha(x)(x-\alpha)][g(\alpha) + g'(\alpha)(x-\alpha) + \mu_\alpha(x)(x-\alpha)] \\ &\quad - f(\alpha)g(\alpha) \\ &= [f(\alpha)g'(\alpha) + f'(\alpha)g(\alpha)](x-\alpha) \\ &\quad +[f(\alpha)\mu_\alpha(x) + f'(\alpha)g'(\alpha)(x-\alpha) + f'(\alpha)\mu_\alpha(x) \\ &\quad +\lambda_\alpha(x)g'(\alpha)(x-\alpha) + \lambda_\alpha(x)\mu_\alpha(x)(x-\alpha)](x-\alpha) \end{aligned}$$

όπου προφανώς

$$\lim_{x\to\alpha}[f(\alpha)\mu_\alpha(x) + f'(\alpha)g'(\alpha)(x-\alpha) + f'(\alpha)\mu_\alpha(x)$$

$$+\lambda_\alpha(x)g'(\alpha)(x-\alpha) + \lambda_\alpha(x)\mu_\alpha(x)(x-\alpha)](x-\alpha) = 0.$$

Συνεπώς:

$$(fg)'(\alpha) = f(\alpha)g'(\alpha) + f'(\alpha)g(\alpha).$$

δ) Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} &= \frac{[f(x)-f(\alpha)]g(\alpha) - [g(x)-g(\alpha)]f(\alpha)}{g^2(\alpha)} \times \\ &\quad \times\left\{1 - \frac{g(x)-g(\alpha)}{g(x)}\right\} \\ &= A(x) + B(x) \end{aligned}$$

όπου

$$A(x) = \frac{[f(x)-f(\alpha)]g(\alpha) - [g(x)-g(\alpha)]f(\alpha)}{g^2(\alpha)}$$

$$B(x) = -A(x)\frac{g(x)-g(\alpha)}{g(x)}.$$

Όμως

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{g^2(\alpha)}[[f'(\alpha)(x-\alpha) + \lambda_\alpha(x)(x-\alpha)]g(\alpha) \\ &\quad -[g'(\alpha)(x-\alpha) + \mu_\alpha(x)(x-\alpha)]f(\alpha)\} \\ &= \frac{f'(\alpha)g(\alpha) - g'(\alpha)f(\alpha)}{g^2(\alpha)}(x-\alpha) \\ &\quad +\frac{\lambda_\alpha(x)g(\alpha) - \mu_\alpha(x)f(\alpha)}{g^2(\alpha)}(x-\alpha). \end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνεπώς:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} &= \frac{f'(\alpha)g(\alpha)-g'(\alpha)f(\alpha)}{g^2(\alpha)}(x-\alpha)\\ &+\left[\frac{\lambda_\alpha(x)g(\alpha)-\mu_\alpha(x)f(\alpha)}{g^2(\alpha)}(x-\alpha)\right.\\ &\quad -\frac{f'(\alpha)g(\alpha)-g'(\alpha)f(\alpha)}{g^2(\alpha)}(x-\alpha)\frac{g(x)-g(\alpha)}{g(x)}\\ &\quad \left.-\frac{\lambda_\alpha(x)g(\alpha)-\mu_\alpha(x)f(\alpha)}{g^2(\alpha)}\frac{g(x)-g(\alpha)}{g(x)}\right](x-\alpha)\end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι η παράσταση στην αγκύλη έχει όριο μηδέν όταν $x \to \alpha$. Αυτό όμως συμβαίνει γιατί η g είναι παραγωγίσιμη στα α και άρα αναγκαστικά συνεχής στο α, δηλ. $\lim_{x\to\alpha} g(x) = g(\alpha)$. •

Πόρισμα: Αν $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ είναι συναρτήσεις από το Δ στο R παραγωγίσιμες στο $\alpha \in \Delta$ τότε:

α) Η συνάρτηση $f_1 + f_2 + \ldots + f_\nu$ είναι παραγωγίσιμη στο α και

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_\nu)'(\alpha) = f_1'(\alpha) + f_2'(\alpha) + \ldots + f_\nu'(\alpha).$$

β) Η συνάρτηση $f_1.f_2.\ldots.f_\nu$ είναι παραγωγίσιμη στο α και

$$(f_1.f_2.\ldots.f_\nu)'(\alpha) = f_1'(\alpha).f_2(\alpha).\ldots.f_\nu(\alpha) + \ldots + f_1(\alpha).f_2(\alpha).\ldots.f_\nu'(\alpha)$$

ή συμβολικά

$$\left(\prod_{i=1}^{\nu} f_i\right)'(\alpha) = \sum_{i=1}^{\nu} f_i'(\alpha)\prod_{j=1}^{\nu} f_j(\alpha), \quad i \neq j, \quad \nu \geq 2.$$

Παρατήρηση 5.15

Αν η συνάρτηση $f + g$ έχει παράγωγο στο $\alpha \in \Delta(f) \cap \Delta(g)$ δεν σημαίνει ότι και οι f και g θα παραγωγίζονται στο α. Δηλ. το να υπάρχουν οι παράγωγοι των f και g στο α είναι **ικανή συνθήκη** για να παραγωγίζεται η $f + g$, **όχι όμως και αναγκαία**. Με άλλα λόγια, το αντίστροφο του θεωρήματος 5.14 β) δεν ισχύει. Τα ίδια ισχύουν και για το γινόμενο $f.g$. Ας πάρουμε για παράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και $g(x) = -f(x)$. Τότε η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, αλλά ούτε η f ούτε η g είναι παραγωγίσιμες στο 0. Επίσης αν $f(x) = |x|$ και $g(x) = -|x|$ τότε $f(x)g(x) = -x^2$ που είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν και οι f και g δεν είναι.

Θεώρημα 5.16. (Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης). Αν $\mathbf{f}: \Delta(\mathbf{f}) \to \mathbf{R}, \mathbf{g}: \mathcal{R}(\mathbf{f}) \to \mathbf{R}$ $(\Delta(\mathbf{f}) \subseteq \mathbf{R})$ αν α είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(\mathbf{f})$ και $\mathbf{f}(\alpha) = \beta$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{R}(\mathbf{f})$ και επί πλέον οι $\mathbf{f}'(\alpha)$ και $\mathbf{g}'(\beta)$ υπάρχουν, τότε η συνάρτηση $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}: \Delta(\mathbf{f}) \to \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο α και μάλιστα

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\alpha) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\alpha))\mathbf{f}'(\alpha).$$

Απόδειξη

Αφού υπάρχουν οι $f'(\alpha)$ και $g'(\beta)$, από το Θεώρημα 5.10 υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ τέτοια ώστε:

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) + \lambda_\alpha(x)(x-\alpha) \tag{1}$$

$$g(y) - g(\beta) = g'(\beta)(y-\beta) + \mu_\beta(y)(y-\beta) \tag{2}$$

$\forall x \in \Delta(f)$ με $0 < |x-\alpha| < \delta_1$ και $\forall y \in \Delta(g)$ με $0 < |y-\beta| < \delta_2$ όπου $\lim_{x\to\alpha} \lambda_\alpha(x) = 0$ και $\lim_{y\to\beta} \mu_\beta(y) = 0$.

Ορίζουμε

$$\mu_\beta(\beta) = 0. \tag{3}$$

Αλλά $g(\beta) = g(f(\alpha)) = h(\alpha)$ και για $y = f(x)$ έχουμε $g(y) = g(f(x) = h(x)$. Συνεπώς από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} h(x) - h(\alpha) &= g(y) - g(\beta) = g'(\beta)(y-\beta) + \mu_\beta(y)(y-\beta) \\ &= g'(\beta)[f'(\alpha)(x-\alpha) + \lambda_\alpha(x)(x-\alpha)] \\ &\quad + \mu_\beta(y)[f'(\alpha)(x-\alpha) + \lambda_\alpha(x)(x-\alpha)] \\ &= g'(\beta)f'(\alpha)(x-\alpha) \\ &\quad + [g'(\beta)\lambda_\alpha(x) + \mu_\beta(y)f'(\alpha) + \mu_\beta(y)\lambda_\alpha(x)](x-\alpha). \end{aligned}$$

Είναι όμως

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\alpha}[g'(\beta)\lambda_\alpha(x) &+ \mu_\beta(y)f'(\alpha) + \mu_\beta(y)\lambda_\alpha(x)] \\ &= \lim_{x\to\alpha}[g'(f(\alpha))\lambda_\alpha(x) + \mu_\beta(f(x))f'(\alpha) \\ &\quad + \mu_\beta(f(x))\lambda_\alpha(x)] = 0 \end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γιατί $\lim_{x\to\alpha}\lambda_\alpha(x) = 0$ και από την συνέχεια της f στο α (αφού είναι παραγωγίσιμη στο α) και την (3) έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\alpha}\mu_\beta(f(x))f'(\alpha) = \mu_\beta(f(\alpha))f'(\alpha) = \mu_\beta(\beta)f'(\alpha) = 0.$$

Άρα από το Θεώρημα 5.10 έχουμε ότι υπάρχει η $h'(\alpha)$ και είναι

$$h'(\alpha) = g'(f(\alpha))f'(\alpha). \quad \bullet$$

Θεώρημα 5.17 (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης). Έστω $I \subseteq \mathbf{R}$ ένα διάστημα και $f : I \to \mathbf{R}$ μια γνήσια μονότονη και συνεχής συνάρτηση στο I. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha \in I$ και $f'(\alpha) \neq 0$ τότε η αντίστροφή της συνάρτηση $f^{-1} : f(I) \to \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\beta = f(\alpha)$ και μάλιστα

$$(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\beta))}.$$

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 4.49 η f^{-1} υπάρχει και είναι συνεχής στο $f(I)$, δηλ. $\lim_{y\to\beta} f^{-1}(y) = f^{-1}(\beta)$. Επίσης η f^{-1} είναι γνήσια μονότονη και μάλιστα έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f. Αν $y = f(x)$ και $\beta = f(\alpha)$ θα έχουμε $y \neq \beta \Rightarrow f^{-1}(y) \neq f^{-1}(\beta)$ και ακόμα $y \to \beta \Rightarrow f^{-1}(y) \to f^{-1}(\beta) \Rightarrow x \to \alpha$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(\beta) &= \lim_{y\to\beta}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\beta)}{y - \beta} \\ &= \lim_{x\to\alpha}\frac{x-\alpha}{f(x)-f(\alpha)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{1}{\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}} = \frac{1}{f'(\alpha)}. \quad \bullet\end{aligned}$$

Σημείωση

Με τον συμβολισμό του Leibnitz (Παρατήρηση 5.5), αν y είναι η συνάρτηση και $\frac{dy}{dx}$ η παράγωγός της, τότε αν η y έχει παραγωγίσιμη αντίστροφη, η σχέση μεταξύ της παραγώγου της y και της αντίστροφής της γράφεται συχνά ως εξής:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}, \quad \text{όπου} \quad x = f^{-1}(y).$$

Παρατήρηση 5.18

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η υπόθεση στο παραπάνω Θεώρημα 5.17 ότι $f'(\alpha) \neq 0$ είναι ουσιώδης. Γενικά, αν $f'(\alpha) = 0$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\beta = f(\alpha)$. Πραγματικά· αν η f^{-1} ήταν παραγωγίσιμη στο β, αφού η f είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f^{-1} εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.17 στην f^{-1} συμπεραίνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha = f^{-1}(\beta)$ και ότι $1 = f'(\alpha)(f^{-1})'(\beta) = 0$, που είναι άτοπο. Η συνάρτηση $f(x) = x^3$, είναι ένα τέτοιο παράδειγμα με $\alpha = 0$.

§ 5.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, ορισμός 5.1 και τα Θεωρήματα της § 5.2 θα υπολογίσουμε τις παραγώγους των στοιχειωδών συναρτήσεων.

1. Εκθετικές συναρτήσεις. Είναι

$$\boxed{(\alpha^x)' = \alpha^x . \log\alpha,\ x \in \mathbf{R},\ \alpha > 0.}$$

Πραγματικά·

$$(\alpha^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha^{x+h} - \alpha^x}{h} = \lim_{h\to 0} \alpha^x \frac{\alpha^h - 1}{h} = \alpha^x \log\alpha$$

από την άσκηση 4.41β.

Ειδικά $(e^x)' = e^x$.

Από το Θεώρημα 5.16 έχουμε γενικά

$$(\alpha^{f(x)})' = \alpha^{f(x)} . \log\alpha . f'(x).$$

2. Λογαριθμικές συναρτήσεις. Είναι:

$$\boxed{(\log|x|)' = \tfrac{1}{x},\ x \in \mathbf{R} - \{0\}.}$$

Έστω $x > 0$ και $y = \log x$. Όπως είναι γνωστό αυτή έχει αντίστροφη την $x = e^y$. Από το Θεώρημα 5.17, της παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης και την 1) έχουμε:

$$(\log x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Αν τώρα $x < 0$, θέτουμε $t = -x > 0$, οπότε $\log|x| = \log t$ και από το Θεώρημα 5.16 της παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης έχουμε:

$$(\log|x|)' = (\log t)'t' = \frac{1}{-x}.(-1) = \frac{1}{x}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνεπώς $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ έχουμε $(log|x|)' = \frac{1}{x}$ και γενικά

$$(log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

3. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Είναι:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbf{R}.}$$

Πραγματικά·

$$\begin{aligned}(sinx)' &= \lim_{h\to 0}\frac{sin(x+h)-sinx}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2sin\frac{h}{2}cos(x+\frac{h}{2})}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = cosx,\end{aligned}$$

επειδή $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$, από την § 3.3.
Επίσης είναι:

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbf{R}}$$

γιατί $(cosx)' = [sin(\frac{\pi}{2} - x)]' = cos(\frac{\pi}{2} - x)(\frac{\pi}{2} - x)' = cos(\frac{\pi}{2} - x)(-1) = -sinx$.

Από το Θεώρημα 5.16 έχουμε γενικά

$$(sinf(x))' = f'(x).cosf(x) \quad \text{και} \quad (cosf(x))' = -f'(x).sinf(x).$$

Ακόμα από το Θεώρημα 5.14 δ) έχουμε:

$$\boxed{(\mathrm{tg}x)' = \tfrac{1}{\cos^2 x},\ x \neq 2k\pi + \tfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.}$$

$$\boxed{(\mathrm{ctg}x)' = -\tfrac{1}{\sin^2 x},\ x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}}$$

αφού

$$\begin{aligned}(tgx)' &= \left(\frac{sinx}{cossx}\right)' = \frac{(sinx)'cosx - sinx(cosx)'}{cos^2x}\\ &= \frac{1}{cos^2x}, x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z.\end{aligned}$$

$$(ctgx)' = \left(\frac{1}{tgx}\right)' = -\frac{(tgx)'}{tg^2x} = -\frac{1}{sin^2x}, x \neq k\pi, k \in Z.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4. Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\boxed{(\mathbf{Arcsin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.}$$

Θέτουμε $Arcsinx = y$ οπότε $x = siny$ και από το Θεώρημα 5.17 και την 3) έχουμε:

$$(Arcsinx)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{(siny)'} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Για οποιονδήποτε άλλο κλάδο θα έχουμε:

$$(arcsinx)' = (k\pi + (-1)^k Arcsinx)' = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$\boxed{(\mathbf{Arccos}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.}$$

Θέτουμε $Arccosx = y$, οπότε $x = cosy$ και άρα

$$(Arccosx)' = \frac{1}{(cosy)'} = \frac{1}{-siny} = \frac{1}{-\sqrt{1-cos^2y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\boxed{(\mathbf{Arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbf{R}.}$$

Θέτουμε $Arctgx = y$, οπότε $x = tgy$ και άρα

$$(Arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{1+tg^2y} = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{(\mathbf{Arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbf{R}.}$$

Αποδεικνύεται όπως προηγούμενα.

5. Υπερβολικές συναρτήσεις

$$\boxed{(\mathbf{sinh}x)' = \mathbf{cosh}x, x \in \mathbf{R}.}$$

Είναι $(sinhx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = coshx$. Παρόμοια βρίσκουμε:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\boxed{(\mathbf{coshx})' = \mathbf{sinhx},\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}.}$$

$$\boxed{(\mathbf{tghx})' = \frac{1}{\mathbf{cosh^2 x}},\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}.}$$

$$\boxed{(\mathbf{ctghx})' = -\frac{1}{\mathbf{sinh^2 x}},\ \mathbf{x} \in \mathbf{R} - \{\mathbf{0}\}.}$$

6. Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\boxed{(\mathbf{Arcsinhx})' = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x^2+1}}},\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}.}$$

Θέτουμε $Arcsinhx = y$, οπότε $x = sinhy$ και άρα

$$(Arcsinhx)' = \frac{1}{(sinhy)'} = \frac{1}{coshy} = \frac{1}{\sqrt{1+sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in I\!R.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε:

$$\boxed{(\mathbf{Arc_+coshx})' = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x^2-1}}},\ \mathbf{x} \in (\mathbf{1}, +\infty).}$$

$$\boxed{(\mathbf{Arc_coshx})' = -\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x^2-1}}},\ \mathbf{x} \in (\mathbf{1}, +\infty).}$$

$$\boxed{(\mathbf{Arctghx})' = \frac{1}{\mathbf{1-x^2}},\ \mathbf{x} \in (-\mathbf{1}, \mathbf{1}).}$$

$$\boxed{(\mathbf{Arcctghx})' = \frac{1}{\mathbf{1-x^2}},\ \mathbf{x} \in (-\infty, -\mathbf{1}) \cup (\mathbf{1}, +\infty).}$$

Παρακάτω δίνουμε έναν συγκεντρωτικό πίνακα των παραγώγων των στοιχειωδών συναρτήσεων, για πιο εύκολη χρήση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πίνακας των παραγώγων των στοιχειωδών συναρτήσεων

α/α	Συνάρτηση	Παράγωγος	Πεδίο ορισμού
1	c	0	$x \in \mathbb{R}$
2	e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
3	α^x	$\alpha^x log\alpha$	$x \in \mathbb{R}, \alpha > 0$
4	$log\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R} - \{0\}$
5	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R}$
6	$sinx$	$cosx$	$x \in \mathbb{R}$
7	$cosx$	$-sinx$	$x \in \mathbb{R}$
8	tgx	$\frac{1}{cos^2 x}$	$x \in \mathbb{R} - \{x : x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$
9	$ctgx$	$-\frac{1}{sin^2 x}$	$x \in \mathbb{R} - \{x : x = k\pi\}$
10	$Arcsinx$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
11	$Arccosx$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
12	$Arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
13	$Arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
14	$sinhx$	$coshx$	$x \in \mathbb{R}$
15	$coshx$	$sinhx$	$x \in \mathbb{R}$
16	$tghx$	$\frac{1}{cosh^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
17	$ctghx$	$-\frac{1}{sinh^2 x}$	$x \in \mathbb{R} - \{0\}$
18	$Arcsinhx$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in \mathbb{R}$
19	Arc_+coshx	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1, \infty)$
20	Arc_-coshx	$-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1, \infty)$
21	$Arctghx$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1, 1)$
22	$Arcctghx$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Έστω $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχής $\forall x \in \mathbf{R}$. Υποθέτουμε ότι η ϕ δεν παραγωγίζεται σε κανένα σημείο. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $f(x) = x\phi(x)$ παραγωγίζεται μόνο στο 0 και μάλιστα $f'(0) = \phi(0)$.

Απόδειξη

Από τον Ορισμό 5.1 για $\alpha = 0$ έχουμε:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x\phi(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \phi(x) = \phi(0)$$

επειδή η ϕ είναι συνεχής στο 0. Η f όμως παραγωγίζεται μόνο στο 0.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πραγματικά για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\phi(x+h)-x\phi(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{ x\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} + \phi(x+h) \right\} \end{aligned}$$

Το πρώτο όριο στην αγκύλη δεν υπάρχει, αφού η ϕ δεν είναι παραγωγίσιμη και συνεπώς η $f'(x), x \neq 0$ δεν υπάρχει.

Αυτό δείχνει ότι μια συνάρτηση μπορεί να έχει παραγωγο σε ένα μόνο σημείο.

2.Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} kx + x^2 sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, k \in R \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

α) Να μελετήσετε την συνέχεια της f, καθώς επίσης και την ύπαρξη και την συνέχεια της f'.

β) Αν $|\mathbf{k}| \in (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ να αποδείξετε ότι η f' αλλάζει πρόσημο μέσα στα διαστήματα $(-\mathbf{h}, \mathbf{0})$ και $(\mathbf{0}, \mathbf{h}), \mathbf{h} > \mathbf{0}$.

Απόδειξη

α) Η f για $x \neq 0$ είναι συνεχής σαν γινόμενο και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Για $x = 0$ είναι συνεχής, γιατί

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(kx + x^2 sin\frac{1}{x} \right) = 0 = f(0)$$

από το Θεώρημα 3.44 (Μηδενική επί φραγμένη).

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη. Για $x \neq 0$ προφανώς είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα είναι:

$$f'(x) = k + 2xsin\frac{1}{x} + x^2 cos\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)' = k + 2xsin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}.$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{kx + x^2 sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(k + xsin\frac{1}{x} \right) = k,$$

δηλαδή

$$f'(x) = \begin{cases} k + 2xsin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, k \in \mathbb{R} \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για να είναι η f' συνεχής στο 0 πρέπει να ισχύει: $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$. Αλλά το $\lim_{x\to 0} f'(x)$ δεν υπάρχει, γιατί δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}$ (Παράδειγμα 3.54). Άρα η f' δεν είναι συνεχής.

β) Για κάθε $h > 0$, υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε: $\frac{1}{\nu\pi} < h$. Άρα τα σημεία $x_1 = \frac{1}{\nu\pi}$ και $x_2 = \frac{1}{(\nu+1)\pi}$ ανήκουν στο $(-h, h)$. Τότε έχουμε:

$$f'(x_1) = f'\left(\frac{1}{\nu\pi}\right) = (-1)^{\nu+1} + k$$

$$f'(x_2) = f'\left(\frac{1}{(\nu+1)\pi}\right) = (-1)^{\nu} + k.$$

Επειδή $|k| < 1$ συνεπάγεται ότι $f'(x_1).f'(x_2) = k^2 - 1 < 0$ και συνεπώς από το θεώρημα του Bolzano (Πόρισμα 2 του Θεωρήματος 4.31) η f' (που είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$) έχει ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2). Άρα η f' αλλάζει πρόσημο στο διάστημα (x_1, x_2).

Το ίδιο ισχύει και για το διάστημα $(-h, 0)$.

3. Αν f, ϕ, g και h είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και

$$\mathbf{F(x)} = \begin{vmatrix} f(x) & \phi(x) \\ g(x) & h(x) \end{vmatrix}$$

να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{F'(x)} = \begin{vmatrix} f'(x) & \phi'(x) \\ g(x) & h(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & \phi(x) \\ g'(x) & h'(x) \end{vmatrix}$$

Απόδειξη

Είναι $F(x) = f(x)h(x) - \phi(x)g(x)$. Συνεπώς

$$F'(x) = f'(x)h(x) + f(x)h'(x) - \phi'(x)g(x) - \phi(x)g'(x)$$

$$= \{f'(x)h(x) - \phi'(x)g(x)\} + \{f(x)h'(x) - \phi(x)g'(x)\}$$

$$= \begin{vmatrix} f'(x) & \phi'(x) \\ g(x) & h(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & \phi(x) \\ g'(x) & h'(x) \end{vmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.15 Μια συνάρτηση f ορισμένη στο R^+ είναι παραγωγίσιμη και $f(x^2) = x^3, \forall x > 0$. Να υπολογίσετε την $f'(4)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.16 Των παρακάτω συναρτήσεων να βρεθεί η f' καθώς και τα $\Delta(f)$ και $\Delta(f')$:

$\alpha) f(x) = 2^{tg(x\log x)}$ $\quad \beta) f(x) = Arcsin\frac{x}{x^2+1} + log(1+x+|x|)$

$\gamma) f(x) = Arccos(x^3+1) + e^{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad \delta) f(x) = Arcsin(x^2-1) + x^{x\log x}$

$\epsilon) f(x) = |sinx|^x$ $\quad \sigma\tau) f(x) = |x|^{\log|x|}$

5.17 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = log\frac{1}{1+x}$, $x > -1$ επαληθεύει την εξίσωση:

$$xf'(x) + 1 = e^{f(x)}.$$

5.18 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ με $f'(0) > 0$. Επίσης να αποδείξετε ότι η f' δεν είναι φραγμένη στο διάστημα $[-1, 1]$. Είναι η f' συνεχής;

5.19 Για τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq c \\ \alpha x + \beta, & x > c \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x| > c \\ \alpha + \beta x^2, & |x| \leq c \end{cases}$$

να προσδιοριστούν τα α και β ώστε να υπάρχουν οι $f'(c)$ και $g'(c)$.

5.20 Να εξετάσετε αν πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης (Θεώρημα 5.17) για την συνάρτηση $f(x) = 4x + e^{sinx}$, $x \in \mathbb{R}$ και αν ναι, να υπολογιστεί η παράγωγος της f^{-1} στο σημείο $y = 1$.

5.21 Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Να βρεθεί η $(f^{-1})'(y)$ για όλα τα $y \in (0, +\infty)$.

5.22 Έστω $f(x) = x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(t) = \begin{cases} t + t^2 sin\frac{\pi}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Αν $F(t) = f(g(t))$ να υπολογίσετε την $F'(0)$.

5.23 Να γενικεύσετε την εφαρμογή 3 της §5.3 για ορίζουσα ν-τάξης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

§ 5.4 ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Η παράγωγος της συνάρτησης $f'(x)$, αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της** f και συμβολίζεται με $f''(x)$. Η τρίτη, τέταρτη κ.ο.κ. παράγωγος ορίζεται επαγωγικά σαν η παράγωγος της προηγούμενης παραγώγου. Γενικά η **ν-οστή παράγωγος** $f^{(\nu)}(x), \nu \in \mathbb{N}$ ορίζεται να είναι η παράγωγος της $(\nu-1)$-τάξης παραγώγου, δηλ. $f^{(\nu)}(x) = (f^{(\nu-1)}(x))'$. Για να ορίζεται η ν-οστή παράγωγος μιας συνάρτησης f στο $\alpha \in \Delta(f)$ θα πρέπει η $(\nu-2)$-τάξης παράγωγος της f να είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του α, ούτως ώστε το α να είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της παραγώγου $(\nu-1)$-τάξης. Η ύπαρξη της $f^{(\nu)}(x)$ συνεπάγεται την ύπαρξη και την συνέχεια των $f^{(\nu-1)}(x), \ldots, f'(x), f(x)$. Η εύρεση της ν-οστής παραγώγου δεν είναι πάντα εύκολη. Θα δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα εύρεσης της ν-οστής παραγώγου μερικών συναρτήσεων που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα.

Παράδειγμα 5.19

Αν $f(x) = (x-\alpha)^m, m \in R$ τότε

$$f^{(\nu)}(x) = m(m-1)\ldots(m-\nu+1)(x-\alpha)^{m-\nu} \tag{1}$$

Πραγματικά· η αποδειξη θα γίνει με επαγωγή. Για $\nu = 1$ έχουμε

$$f'(x) = [(x-\alpha)^m]' = m(x-\alpha)^{m-1}$$

δηλ. η (1) ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για ν και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $\nu+1$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f^{(\nu+1)}(x) &= (f^{(\nu)}(x))' = (m(m-1)\ldots(m-\nu+1)(x-\alpha)^{m-\nu})' \\ &= m(m-1)\ldots(m-\nu+1)(m-\nu)(x-\alpha)^{m-\nu+1} \\ &= m(m-1)\ldots(m-\nu+1)[m-(\nu+1)+1](x-\alpha)^{m-(\nu+1)} \end{aligned}$$

δηλ. ισχύει η (1) για $\nu+1$. Άρα ισχύει $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Ειδικά για $\alpha = 0$ έχουμε:

$$(x^m)^{\nu} = m(m-1)\ldots(m-\nu+1)x^{m-\nu}. \tag{2}$$

Για $m = \frac{1}{2}$ και $\alpha = -1$ έχουμε:

$$(\sqrt{1+x})^{(\nu)} = (-1)^{\nu-1}\frac{1.3\ldots(2\nu-3)}{2^{\nu}}(1+x)^{1/2-\nu} \tag{3}$$

Παράδειγμα 5.20

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αν $f(x) = \alpha^x$ τότε

$$f^{(\nu)}(x) = \alpha^x (log\alpha)^\nu \tag{4}$$

Πραγματικά· έχουμε $f'(x) = \alpha^x log\alpha$, $f''(x) = \alpha^x (log\alpha)^2$ κ.ο.κ. $f^{(\nu)}(x) = \alpha^x (log\alpha)^\nu$.

Ειδικά για $\alpha = e$ έχουμε

$$(e^x)^{(\nu)} = e^x \tag{5}$$

Παράδειγμα 5.21

Αν $f(x) = sinx$ και $g(x) = cosx$ τότε

$$(sinx)^{(\nu)} = sin\left(x + \nu\frac{\pi}{2}\right) \tag{6}$$

$$(cosx)^{(\nu)} = cos\left(x + \nu\frac{\pi}{2}\right) \tag{7}$$

Ας αποδείξουμε μόνο την (6). Για $\nu = 1$ έχουμε $(sinx)' = cosx = sin(x + \frac{\pi}{2})$. Αν υποθέσουμε ότι ο τύπος (6) ισχύει για ν θα έχουμε: $(sinx)^{(\nu+1)} = [(sinx)^{(\nu)}]' = cos\left(x + \nu\frac{\pi}{2}\right) = sin\left(x + \nu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = sin\left(x + (\nu+1)\frac{\pi}{2}\right)$, δηλ. ισχύει και για $\nu + 1$.

Παράδειγμα 5.22

Θα αποδείξουμε τώρα ότι:

$$(logx)^{(\nu)} = (-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{x^\nu} \tag{8}$$

Είναι $(logx)' = \frac{1}{x}$. Τότε:

$$(logx)^{(\nu)} = (x^{-1})^{(\nu-1)} = (-1)(-2)\ldots[-(\nu-1)]x^{-1-(\nu-1)} = (-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{x^\nu}$$

από την (2).

Έστω f και g δυο συναρτήσεις ν-φορές παραγωγίσιμες. Τότε ο γραμμικός συνδυασμός τους $kf + \lambda g$, $k, \lambda \in R$ είναι ν-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα $(kf + \lambda g)^{(\nu)} = kf^{(\nu)} + \lambda g^{(\nu)}$. Επίσης το γινόμενο $f.g$ είναι ν-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και ισχύει ο επόμενος **τύπος του Leibniz**:

$$\begin{aligned}(f.g)^{(\nu)} &= f^{(\nu)}g + \frac{\nu}{1!}f^{(\nu-1)}g' + \frac{\nu(\nu-1)}{2!}f^{(\nu-2)}g'' + \ldots + f.g^{(\nu)} \\ &= \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}f^{(\nu-k)}g^{(k)} \quad \text{όπου} \quad \binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}.\end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η απόδειξη του παραπάνω τύπου γίνεται με επαγωγή. Για $\nu = 1$ προφανώς ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για ν. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $\nu + 1$. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
(f.g)^{(\nu+1)} &= [(f.g)^{(\nu)}]' = \left[\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k} f^{(\nu-k)} g^{(k)}\right]' \\
&= \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\left\{f^{(\nu-k+1)} g^{(k)} + f^{(\nu-k)} g^{(k+1)}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k} f^{(\nu-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k} f^{(\nu-k)} g^{(k+1)} \\
&= \binom{\nu}{0} f^{(\nu+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k} f^{(\nu-k+1)} g^{(k)} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\nu-1}\binom{\nu}{k} f^{(\nu-k)} g^{(k+1)} + \binom{\nu}{\nu} f^{(0)} g^{(\nu+1)} \\
&= f^{(\nu+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k} f^{(\nu-k+1)} g^{(k)} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k-1} f^{(\nu-k+1)} g^{(k)} + f^{(0)} g^{(\nu+1)} \\
&= f^{(\nu+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{\nu}\left[\binom{\nu}{k} + \binom{\nu}{k-1}\right] f^{(\nu-k+1)} g^{(k)} + f^{(0)} g^{(\nu+1)} \\
&= \binom{\nu+1}{0} f^{(\nu+1)} g^{0} + \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu+1}{k} f^{(\nu-k+1)} g^{(k)} + f^{(0)} g^{(\nu+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\nu+1}\binom{\nu+1}{k} f^{(\nu-k+1)} g^{(k)}
\end{aligned}
$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει τις σχέσεις:

$$\binom{\nu+1}{0} = \binom{\nu+1}{\nu+1} = 1 \quad \text{και} \quad \binom{\nu}{k} + \binom{\nu}{k-1} = \binom{\nu+1}{k}.$$

Παράδειγμα 5.24

Έχουμε αν $f(x) = x.sinx$ ότι:

$$(x.sinx)^{(100)} = x.sin\left(x + 100\frac{\pi}{2}\right) + 100.1.sin\left(x + 99\frac{\pi}{2}\right) = xsinx - 100cosx.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 5.24

Θα βρούμε την ν-οστή παράγωγο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x cos x$. Επειδή από τα παραδείγματα 5.20 και 5.21 έχουμε ότι $(e^x)^{(\nu)} = e^x$ και $(cos x)^{(\nu)} = cos(x + \nu\frac{\pi}{2})$ εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibniz παίρνουμε:

$$\begin{aligned}(e^x cos x)^{(\nu)} &= \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} (e^x)^{(\nu-k)} (cos x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} e^x cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \\ &= e^x \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Η μορφή αυτή όμως της ν-οστής παραγώγου δεν είναι εύχρηστη. Μπορούμε να βρούμε μια πιο εύχρηστη μορφή αν εργαστούμε ως εξής:

Έχουμε

$$f'(x) = e^x cos x - e^x sin x = e^x(cos x - sin x) = \sqrt{2}e^x cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

γιατί

$$\begin{aligned}cos x - sin x &= sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - sin x = 2sin\frac{\frac{\pi}{2} - x - x}{2} cos\frac{\frac{\pi}{2} - x + x}{2} \\ &= \sqrt{2} sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Συνεπώς υπάρχει η υποψία ότι η ν-οστή παράγωγος θα είναι της μορφής

$$f^{(\nu)}(x) = (\sqrt{2})^\nu e^x cos\left(x + \nu\frac{\pi}{4}\right).$$

Πραγματικά· αφού ισχύει για $\nu = 1$ αν υποθέσουμε ότι ισχύει για ν θα έχουμε:

$$\begin{aligned}f^{(\nu+1)}(x) &= (\sqrt{2})^\nu e^x cos\left(x + \nu\frac{\pi}{4}\right) - (\sqrt{2})^\nu e^x sin\left(x + \nu\frac{\pi}{4}\right) \\ &= (\sqrt{2})^\nu e^x \left\{cos(x + \nu\frac{\pi}{4}) - sin(x + \nu\frac{\pi}{4})\right\} \\ &= (\sqrt{2})^\nu e^x \left\{\sqrt{2} cos(x + \nu\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})\right\} \\ &= (\sqrt{2})^{\nu+1} e^x cos\left(x + (\nu+1)\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δηλαδή ισχύει και για $\nu+1$, άρα ισχύει $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Συνεπώς

$$f^{(\nu)}(x) = (\sqrt{2})^{\nu} e^{x} \cos\left(x + \nu\frac{\pi}{4}\right).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}$, $\nu \in \mathbf{N}$. Να αποδείξετε ότι:

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f'(1)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(1)}{\nu!} = 2^{\nu}.$$

Απόδειξη

Έχουμε $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, $f''(x) = \nu(\nu-1)x^{\nu-2}, \ldots, f^{(k)}(x) = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)x^{\nu-k}$ με $k \in N$, $k < \nu$ και $f^{(\nu)}(x) = \nu!$. Συνεπώς

$$\frac{f'(x)}{1!} = \frac{\nu}{1!}x^{\nu-1}, \frac{f''(x)}{2!} = \frac{\nu(\nu-1)}{2!}x^{\nu-2}, \ldots$$

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)}{k!}x^{\nu-k}.$$

Άρα

$$f(x) + \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} = x^{\nu} + \frac{\nu}{1!}x^{\nu-1} + \ldots + 1 = (x+1)^{\nu}$$

από την οποία για $x = 1$ παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

2. Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα του Legendre

$$P_{\nu}(x) = \frac{1}{2^{\nu}\nu!}\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}(x^2-1)^{\nu}$$

ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(x^2-1)P_{\nu}''(x) + 2xP_{\nu}'(x) - \nu(\nu+1)P_{\nu}(x) = 0.$$

Απόδειξη

Θέτουμε

$$z(x) = (x^2-1)^{\nu} \qquad (1)$$

Τότε $P_{\nu}(x) = \frac{1}{2^{\nu}\nu!}\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}z(x)$ ή

$$z^{(\nu)}(x) = 2^{\nu}\nu!P_{\nu}(x). \qquad (2)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Από την (1) έχουμε: $z'(x) = \nu(x^2-1)^{\nu-1}.2x = 2\nu x(x^2-1)^{\nu}(x^2-1)^{-1}$ $\Rightarrow (x^2-1)z'(x) = 2\nu x z(x) \Rightarrow (x^2-1)z' - 2\nu xz = 0.$

Με την βοήθεια του τύπου του Leibniz, παίρνοντας την $(\nu+1)$-τάξη παράγωγο έχουμε:

$$\{(x^2-1)z'\}^{(\nu+1)} - 2\nu\{xz\}^{(\nu+1)} = 0$$

ή

$$\{z^{(\nu+2)}(x^2-1) + (\nu+1)z^{(\nu+1)}2x + \frac{\nu(\nu+1)}{2!}z^{(\nu)}.2\}$$
$$-\{z^{(\nu+1)} + (\nu+1)z^{(\nu)} = 0$$

ή

$$\{(x^2-1)z^{(\nu+2)}\} + 2xz^{(\nu+1)} - \nu(\nu+1)z^{(\nu)} = 0.$$

η οποία με την βοήθεια και της (2) δίνει:

$$(x^2-1)2^{\nu}.\nu!\,P_{\nu}'' + 2x.2^{\nu}\nu!\,P_{\nu}' - \nu(\nu+1)2^{\nu}.\nu!P_{\nu} = 0.$$

Διαιρώντας με $2^{\nu}.\nu!$ έχουμε τη ζητούμενη σχέση.

3. Αν $y = Arctgx$, $x \in R$ να αποδείξετε ότι:

$$y^{(\nu)} = (\nu-1)!\cos^{\nu}y.\sin\nu\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

Απόδειξη

Αν $y = Arctgx$ τότε $x = tgy$ και

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+tg^2y} = cos^2y = cosy.sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$$

δηλαδή ο τύπος ισχύει για $\nu = 1$. Υποθέτοντας ότι ισχύει για ν έχουμε:

$$\begin{aligned} y^{(\nu+1)} &= (\nu-1)!\{-\nu.cos^{\nu-1}y\,siny.sin\nu\left(y+\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad +cos^{\nu}ycos\nu\left(y+\frac{\pi}{2}\right).(\nu)\}y' \\ &= (\nu-1)!y'\nu.cos^{\nu-1}y\{-siny.sin\nu\left(y+\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad +cosycos\,\nu(y+\frac{\pi}{2})\} \\ &= \nu!cos^2ycos^{\nu-1}ycos\left(y+\nu y+\nu\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \nu!cos^{\nu+1}ysin\left[(\nu+1)\left(y+\nu\frac{\pi}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή ισχύει και για $\nu+1$, άρα ισχύει $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.24 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ 1+x+x^2, & x>0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} e^{2x+1}, & x\le 0 \\ 1+2x+2x^2, & x>0 \end{cases}$$

Μέχρι ποιά τάξη υπάρχουν οι παράγωγοι των f και g στο 0;

5.25 Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha)\frac{d^2}{dx^2}\left\{xf\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=x^{-3}f''\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\beta)\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{x^2+k}=k(x^2+k)^{-3/2}.$$

5.26 Αν $(\alpha+\beta x)e^{\frac{1}{x}f(x)}=x$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$x^3f''(x)=(xf'(x)-f(x))^2.$$

5.27 Δίνεται η συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η $f''(0)$ υπάρχει αν και μόνο αν $\alpha>2+\beta$ και η f'' είναι συνεχής αν και μόνο αν, $\alpha>2+2\beta$.

5.28 Να αποδείξετε την **ταυτότητα του Lagrange:**

$$\frac{d}{dx}[fg'-f'g]=fg''-f''g.$$

5.29 Να υπολογίσετε την ν-οστή παράγωγο των συναρτήσεων:

$\alpha) f(x)=(\alpha+\beta x)^\mu$ $\beta) f(x)=\frac{1}{\alpha+\beta x}$ $\gamma) f(x)=\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta x}}$

$\delta) f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\epsilon) f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ $f(x)=e^x.\sin x$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.30 Να υπολογιστεί η $f^{(\nu)}$ αν:

$$\alpha) f(x) = x^3 e^{\alpha x} \quad \beta) f(x) = x^{\nu-1} log(1+x).$$

5.31 Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \quad \text{Αν} \quad f(x) = cos^2 x, \quad \text{τότε} \quad f^{\nu}(x) = 2^{\nu-1} cos\left(2x + \nu\frac{\pi}{2}\right)$$

$\beta)$ Αν $f(x) = sinx, x \in IR$ τότε $f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}$.

$\gamma)$ Αν $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}, x > -1$ τότε:

$$f^{(\nu)}(0) = (-1)^{\nu-1}\nu \frac{1.3.5.\ldots.(2\nu-3)}{2^{\nu-1}}, \nu \geq 2.$$

5.32 Να αποδείξετε ότι τα **πολυώνυμα του Chebyshev**:

$$T_\nu(x) = \frac{1}{2^{\nu-1}} cos(\nu Arccos x),$$

ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(1-x^2)T_\nu''(x) - xT_\nu'(x) + \nu^2 T_\nu(x) = 0.$$

5.33 Να αποδείξετε ότι τα **πολυώνυμα του Laguerre**:

$$L_\nu(x) = e^x \frac{d^\nu}{dx^\nu}(x^\nu e^{-x})$$

ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xL_\nu''(x) + (1-x)L_\nu'(x) + \nu L_\nu(x) = 0.$$

5.34 Να αποδείξετε ότι η ν-οστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in IR$ έχει την μορφή

$$f^{(\nu)}(x) = e^{-x^2} H_\nu(x)$$

όπου $H_\nu(x)$ πολυώνυμο ν βαθμού που λέγεται **πολυώνυμο των Chebyshev - Hermite**. Να αποδείξετε επίσης ότι:

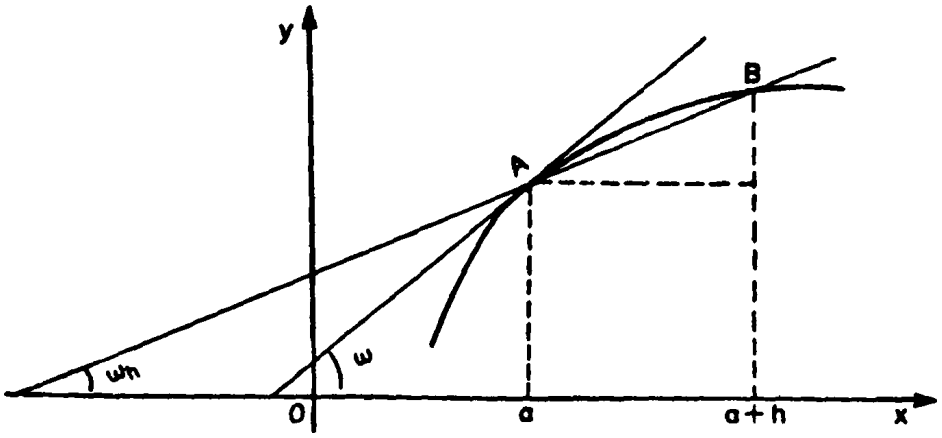
$$\alpha) H_{\nu+1}(x) + 2H_\nu(x) + 2\nu H_{\nu-1}(x) = 0$$

$$\beta) H_\nu''(x) - 2xH'\nu(x) + 2\nu H_\nu = 0.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

§ 5.5 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσμη στο σημείο $\alpha \in \Delta$.



Σχήμα 5.1

Αν $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\alpha + h, f(\alpha + h))$ είναι δυο σημεία του γραφήματος της f τότε η ευθεία AB έχει εξίσωση:

$$y - f(\alpha) = \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}(x - \alpha). \tag{1}$$

Η ευθεία αυτή λέγεται τέμνουσα της καμπύλης. Όταν το h μεταβάλλεται ώστε $\alpha + h \in \Delta$ τότε η (1) δίνει όλες τις τέμνουσες που περνούν από το $A(\alpha, f(\alpha))$. Αν υποθέσουμε ότι $h \to 0$ τότε το B τείνει να συμπέσει με το A, οπότε η τέμνουσα σ' αυτή την οριακή περίπτωση θα έχει με το γράφημα της f ένα μόνο κοινό σημείο και λέγεται **εφαπτόμενη** της f στο σημείο α. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο α από την (1) έχουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha).$$

Δηλαδή, η παράγωγος $f'(\alpha)$ σε ένα σημείο α μιας συνάρτησης f είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ευθείας στο γράφημα της f στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$. Είναι επομένως $f'(\alpha) = \varepsilon\varphi\omega = \lim_{h\to 0} \varepsilon\varphi\omega_h$.

Με την βοήθεια των παραπάνω μπορούμε να ερμηνεύσουμε και την μη ύπαρξη της παραγώγου σε ένα σημείο. Έτσι η παράγωγος $f'(\alpha)$ δεν θα υπάρχει αν δεν υπάρχει εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$ ή υπάρχει η εφαπτομένη, αλλά είναι κάθετη στον άξονα των x (οπότε $\varepsilon\varphi\omega = +\infty$ ή $-\infty$.)

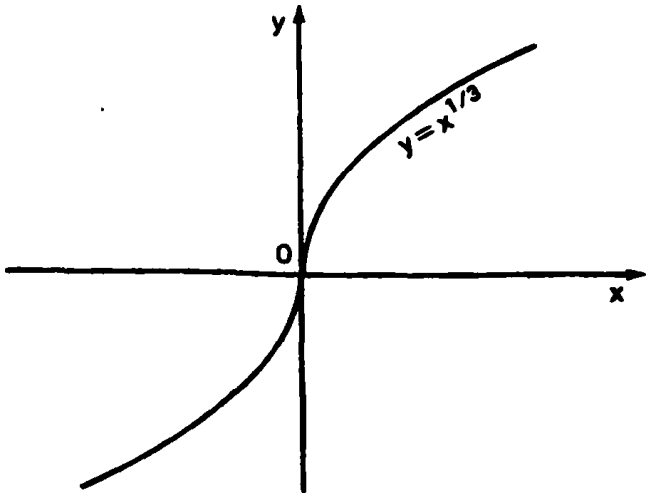
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 5.25

Η συνάρτηση $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού στο σημείο (0, 0) δεν υπάρχει εφαπτομένη.

Παράδειγμα 5.26

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{1/3}$. Τότε η f έχει εφαπτομένη στο 0 κάθετη στον άξονα $0x$ όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2

Είναι εύκολο να δούμε ότι η $f'(0)$ δεν υπάρχει. Πραγματικά· είναι

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{-2/3} = +\infty.$$

Παρατήρηση 5.27

Είδαμε στο παράδειγμα 5.26 ότι $f'(0) = +\infty$. Αυτό μας δίνει αφορμή να επεκτείνουμε τον ορισμό της παραγώγου, λέγοντας ότι η f **παραγωγίζεται κατ' εκδοχή** στο $\alpha \in \Delta$ αν

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = +\infty \quad \text{ή} \quad -\infty.$$

Σύμφωνα μ'αυτήν την σύμβαση η συνάρτηση του παραδείγματος 5.26 έχει εφαπτομένη στο 0. Μπορεί όμως μια συνάρτηση να έχει κατακόρυφη εφαπτομένη σε ένα σημείο και να μην είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό το σημείο ούτε κατ'εκδοχή, όπως δείχνει το παράδειγμα 5.28. Επίσης μια συνάρτηση μπορεί να παραγωγίζεται κατ' εκδοχή και να μην είναι συνεχής.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

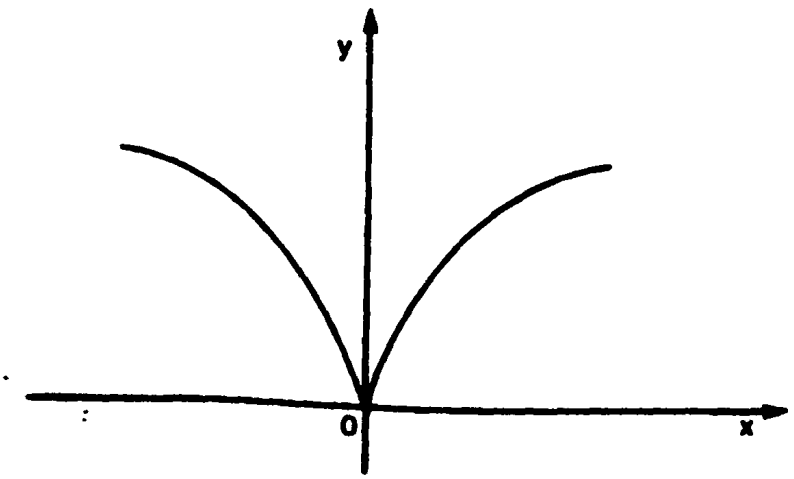
Δηλαδή η έννοια της κατ'εκδοχήν παραγώγου μπορεί να ανατρέψει το γεγονός ότι η συνέχεια είναι αναγκαία συνθήκη για παραγωγισιμότητα. Βλέπε παράδειγμα 5.29.

Παράδειγμα 5.28

Έστω $f : IR \to IR$ με $f(x) = \sqrt{|x|}$, δηλαδή

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Τότε το γράφημα της f έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο 0. Είναι όμως:



Σχήμα 5.3

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x \to 0-} -\frac{1}{\sqrt{-x}} = -\infty.$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Δηλαδή η f δεν παραγωγίζεται στο 0, ούτε κατ' εκδοχή.

Παράδειγμα 5.29

Έστω $f : IR \to IR$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Προφανώς η f δεν είναι συνεχής στο 0. Παραγωγίζεται όμως κατ' εκδοχή στο 0 αφού

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{-1}{x} = +\infty \quad \text{και} \quad f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

δηλ. $f'(0) = +\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.35 Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στην παραβολή $3y = x^2 - 3x + 3$ που είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = x$.

5.36 Μια ευθεία με κλίση 1 είναι κάθετη στην έλλειψη $4x^2 + y^2 = 4$. Ποιά είναι η εξίσωσή της;

5.37 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |\sqrt[3]{x}|$. Να αποδείξετε ότι: $f'_-(0) = -\infty$ και $f'_+(0) = +\infty$.

5.38 Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του διαγράμματος της

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

στο 0 είναι κατακόρυφη.

5.39 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/3}, & x \leq 0 \\ 1 + x^{1/3}, & x > 0 \end{cases}$$

είναι κατ' εκδοχή παραγωγίσιμη στο 0, αλλά δεν είναι συνεχής στο 0.

§ 5.6 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Η έννοια του διαφορικού μιας συνάρτησης είναι εξ ίσου σημαντική με την έννοια της παραγώγου. Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε το διαφορικό μιας συνάρτησης, αρχίζοντας με την έννοια της γραμμικής συνάρτησης.

Ορισμός 5.30 Μια συνάρτηση $\ell : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ θα λέγεται γραμμική, αν και μόνο αν:

1. Είναι προσθετική, δηλ. $\ell(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \ell(\mathbf{x}) + \ell(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}$.

2. Είναι ομογενής, δηλ. $\ell(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\ell(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$ και δοσμένο $\alpha \in \mathbf{R}$.

Επειδή $x = x.1$ η γενική μορφή μιας γραμμικής συνάρτησης $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η $\ell(x) = \ell(x.1) = x\ell(1) = m.x, x \in \mathbb{R}$ αν $\ell(1) = m$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θα θεωρήσουμε την παράγωγο $f'(\alpha)$ της συνάρτησης f στο σημείο α ως γραμμική συνάρτηση $f'(\alpha) : I\!R \to I\!R$ που ορίζεται ως $f'(\alpha)(h) = f'(\alpha)h$. Μπορούμε τότε να επαναδιατυπώσουμε το Θεώρημα 5.10 ως εξής:

Θεώρημα 5.31 **Έστω $f : \Delta \to \mathbf{R}$, $\Delta \subseteq \mathbf{R}$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha \in \Delta$ όπου α σημείο συσσωρεύσεως του Δ αν και μόνο αν υπάρχουν, μια γραμμική συνάρτηση $\ell_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ και μια συνάρτηση $\lambda_\alpha : \Delta - \{\alpha\} \to \mathbf{R}$ με $\lim_{x \to \alpha} \lambda_\alpha(x) = 0$ τέτοιες ώστε:**

$$f(x) - f(\alpha) = \ell_\alpha(x - a) + \lambda_\alpha(x)(x - \alpha) \qquad (1)$$

για όλα τα $x \in \Delta$ με $0 < |x - \alpha| < \delta$, για κάποιο $\delta > 0$, όπου η συνάρτηση ℓ_α δίνεται από τον τύπο $\ell_\alpha(h) = f'(\alpha)h$, $\forall h \in \mathbf{R}$.

Απόδειξη

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο α, με παράγωγο $f'(\alpha)$, από το Θεώρημα 5.10 θα έχουμε:

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) + \lambda_\alpha(x)(x - \alpha)$$

για όλα τα $x \in \Delta$ με $0 < |x - \alpha| < \delta$, για κάποιο $\delta > 0$, και $\lim_{x \to \alpha} \lambda_\alpha(x) = 0$.

Αν $\ell_\alpha : I\!R \to I\!R$ με $\ell_\alpha(h) = f'(\alpha)h$ τότε αυτή προφανώς είναι μια γραμμική συνάρτηση και συνεπώς $f'(\alpha)(x - \alpha) = \ell_\alpha(x - \alpha)$. Άρα η (1) ισχύει.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι η (1) ισχύει. Τότε από την ομογένεια της ℓ_α έχουμε ότι $\ell_\alpha(x - \alpha) = (x - \alpha)\ell_\alpha(1)$ και άρα

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \ell_\alpha(1) + \lambda_\alpha(x).$$

Παίρνοντας τα όρια όταν $x \to \alpha$ έχουμε ότι η $f'(\alpha)$ υπάρχει και $f'(\alpha) = \ell_\alpha(h)$. •

Παρατήρηση 5.32

Έχουμε ότι $\lim_{x \to \alpha} \lambda_\alpha(x) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι: για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ (ίσως διαφορετικό από το δ του Θεωρήματος 5.31) τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in \Delta$ με $0 < |x - \alpha| < \delta$ να έχουμε: $|\lambda_\alpha(x)| < \epsilon$. Παρατηρούμε επίσης ότι το αριστερά μέλος της (1) μηδενίζεται για $x = \alpha$. Οι παρατηρήσεις αυτές μας οδηγούν στο επόμενο

Πόρισμα: Έστω $f : \Delta \to \mathbf{R}$, $\Delta \subseteq \mathbf{R}$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha \in \Delta$ όπου α σημείο συσσωρεύσεως του Δ αν και μόνο αν υπάρχουν, μια γραμμική συνάρτηση $\ell_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ και για κάθε $\epsilon > 0$, ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε:

$$|f(x) - f(\alpha) - \ell_\alpha(x - \alpha)| < \epsilon|x - \alpha|$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

για όλα τα $x \in \Delta$ με $0 < |x - \alpha| < \delta$ και $\ell_\alpha(h) = f'(\alpha)h, \forall h \in \mathbf{R}$.

Ύστερα από τα παραπάνω δίνουμε τον ορισμό:

Ορισμός 5.33 Αν η συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbf{R}$, $\Delta \subseteq \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη για όλα τα $x \in A \subseteq \Delta$ τότε η συνάρτηση $df : A \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ που ορίζεται ως

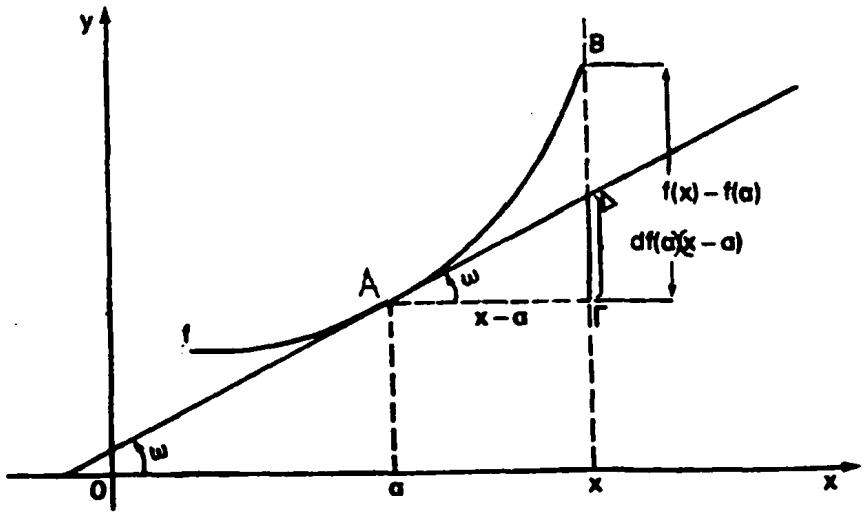
$$df(x)(h) = f'(x)h, \ x \in A, \ h \in \mathbf{R} \tag{2}$$

λέγεται διαφορικό της f στο x με αύξηση h.

Παρατήρηση 5.34

Αξίζει να επισημάνουμε ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο α είναι πραγματικός αριθμός, ενώ το διαφορικό της f στό α είναι μια συνάρτηση, που η τιμή της σε κάθε h δίνεται από τον τύπο $df(\alpha)(h) = f'(\alpha)h$.

Δηλαδή το διαφορικό μιας συνάρτησης δεν είναι μια απείρως μικρή ποσότητα, όπως (λαθεμένα) πολλοί τό θεωρούν.



Σχήμα 5.4

Ας κάνουμε μια εκτενέστερη συζήτηση, για να ξεκαθαρίσουμε την έννοια του διαφορικού, δίνοντας συγχρόνως και την γεωμετρική του ερμηνεία. Θεωρούμε το γράφημα της f και το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$. Φέρνουμε την εφαπτόμενη στο σημείο A. Αν $B(x, f(x))$ είναι ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο τότε έχουμε: $B\Gamma = f(x) - f(\alpha)$ και $\Gamma\Delta = tg\omega . A\Gamma = f'(\alpha)(x - \alpha) = df(\alpha)(x - \alpha) = \ell_\alpha(x - \alpha)$. Δηλαδή το σημείο $(x, f(\alpha) + df(\alpha)(x - \alpha))$ βρίσκεται πάνω στην εφαπτομένη και συνεπώς το διαφορικό της f στο α είναι η συνάρτηση της οποίας το γράφημα είναι η εφαπτομένη στο $A(\alpha, f(\alpha))$. Όταν τώρα το $x \to \alpha$ το B τείνει στο A και $\Gamma B \to 0$. Άρα και το $\Gamma\Delta \to 0$. Από την (1) έχουμε ότι όταν $x \to \alpha$ ο όρος $\lambda_\alpha(x).(x - \alpha)$ είναι γινόμενο δύο όρων, που καθένας τείνει στο 0. Λέμε τότε ότι το γινόμενο αυτό είναι **απειροστό**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ανώτερης τάξης ως προς την διαφορά $f(x) - f(\alpha)$. Τότε ο όρος $\ell_\alpha(x-\alpha)$ στην (1) είναι μια προσέγγιση στην $f(x) - f(\alpha)$ όταν τα απειροστά ανώτερης τάξης παραλειφθούν. Μια τέτοια προσέγγιση λέγεται **γραμμική προσέγγιση.** Αφού όπως είδαμε παραπάνω $\ell_\alpha(x-\alpha) = df(\alpha)(x-\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$ λέμε ότι το $f'(\alpha)(x-\alpha)$ είναι μια γραμμική προσέγγιση στην $f(x) - f(\alpha)$.

Αν αντικαταστήσουμε στην (1) το $df(\alpha)(x-\alpha)$ αντί του $\ell_\alpha(x-\alpha)$ έχουμε:

$$f(x) - f(\alpha) = df(\alpha)(x-\alpha) + \lambda_\alpha(x)(x-\alpha). \tag{3}$$

Από την (3) συμπεραίνομε ότι:

$$f(x) - f(\alpha) \to df(\alpha)(x-\alpha) \quad \text{όταν} \quad x \to \alpha.$$

Αυτό μας λέει ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την καμπύλη του γραφήματος σε μια μικρή περιοχή του α με ένα τμήμα της εφαπτόμενης στο α.

Ας πάρουμε την ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$. Τότε το διαφορικό της στο σημείο x είναι η συνάρτηση με τύπο

$$(dx)(h) = f'(x)h = 1h = h.$$

Δηλαδή το διαφορικό της ταυτοτικής συνάρτησης είναι πάλι η ταυτοτική συνάρτηση. Θέτοντας στην (2) $h = (dx)(h)$ έχουμε

$$df(x)(h) = f'(x)(dx)(h)$$

δηλαδή

$$df(x) = f'(x)dx. \tag{4}$$

Ο τύπος (4) δίνει το διαφορκό μιας συνάρτησης στο σημείο x. Έτσι το διαφορικό μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x είναι το γινόμενο της παραγώγου $f'(x)$ στο x επί το διαφορικό της ταυτοτικής συνάρτησης. Είναι φανερό ότι το διαφορικό μιας συνάρτησης σε ένα σημείο υπάρχει όταν και η παράγωγος στο ίδιο σημείο υπάρχει. Ας σημειωθεί τέλος ότι η σχέση (4) είναι ισότητα συναρτήσεων και όχι τιμών συναρτήσεων. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και διαφορικά ανώτερης τάξης.

Παράδειγμα 5.35

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3) θα βρούμε μια προσέγγιση στην $\sqrt[4]{17}$ και στο $\cos 31^0$. Η (3) δίνει

$$f(x) - f(\alpha) \sim f'(\alpha)(x-\alpha).$$

Έστω $f(x) = x^{1/4}$. Τότε για $\alpha = 16$ και $x = 17$ έχουμε:

$$\sqrt[4]{17} \sim \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4}16^{-3/4} = 2 + \frac{1}{32} = 2,031250.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επίσης

$$cos31^0 = cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \sim cos\frac{\pi}{6} - sin\frac{\pi}{6}\frac{\pi}{180} \sim \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{180} = 0,851.$$

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

§ 5.7 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ DARBOUX

Θα ασχοληθούμε τώρα με τα βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού. Και πρώτα θα δούμε ένα θεώρημα το οποίο είναι πολύ χρήσιμο στις εφαρμογές. Αυτό λέει ότι μια ιδιότητα που έχει μια συνάρτηση σε ένα σημείο, μεταφέρεται σε ένα διάστημα.

Θεώρημα 5.36 **Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο c του $[\alpha, \beta]$, δηλ. $c \in (\alpha, \beta)$. Τότε:**

α) Αν $f'(c) > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) > f(c)$ αν $x \in (c, c+\delta)$ και $f(x) < f(c)$ αν $x \in (c-\delta, c)$.

β) Αν $f'(c) < 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) > f(c)$ αν $x \in (c-\delta, c)$ και $f(x) < f(c)$ αν $x \in (c, c+\delta)$.

Απόδειξη

Επειδή η παράγωγος της f στο c υπάρχει, συνεπάγεται ότι θα υπάρχει το $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [\alpha, \beta])0 < |x - c| < \delta \Rightarrow$$

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)\right| < \epsilon.$$

Παίρνοντας ως $\epsilon = \frac{1}{2}|f'(c)| > 0$ έχουμε:

$$f'(c) - \frac{1}{2}|f'(c)| < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \frac{1}{2}|f'(c)|. \qquad (1)$$

α) Έστω $f'(c) > 0$. Τότε η (1) γίνεται

$$\frac{1}{2}f'(c) < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < \frac{3}{2}f'(c)$$

για όλα τα $x \in [\alpha, \beta]$ με $0 < |x - c| < \delta$. Συνεπώς είναι $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$, αφού βρίσκεται μεταξύ δύο θετικών αριθμών. Άρα $f(x) - f(c) > 0$ ή $f(x) > f(c)$ αν $x \in (c, c+\delta)$ και $f(x) < f(c)$ αν $x \in (c-\delta, c)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

β) Έστω $f'(c) < 0$. Από την (1) έχουμε:

$$\frac{3}{2}f'(c) < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < \frac{1}{2}f'(c)$$

ή

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0, \forall x \in (\alpha, \beta) \quad \text{με} \quad 0 < |x-c| < \delta$$

από την οποία το συμπέρασμα είναι προφανές. •

Παρατήρηση 5.37

Υποθέσαμε στο παραπάνω θεώρημα ότι $c \in (\alpha, \beta)$. Στα άκρα του διαστήματος θα έχουμε αντίστοιχα:

1) Αν $c = a$, τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\alpha) > 0 \Rightarrow f(x) > f(\alpha), \forall x \in (\alpha, \alpha + \delta)$$

$$f'(\alpha) < 0 \Rightarrow f(x) < f(\alpha), \forall x \in (\alpha, \alpha + \delta)$$

2) Αν $c = \beta$, τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\beta) > 0 \Rightarrow f(x) < f(\beta), \forall x \in (\beta - \delta, \beta)$$

$$f'(\beta) < 0 \Rightarrow f(x) > f(\beta), \forall x \in (\beta - \delta, \beta)$$

Παρατήρηση 5.38

Το αντίστροφο του θεωρήματος 5.36 δεν ισχύει, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στην συνάρτηση $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$. Είναι $f(x) < 0$ για $x < 0$, $f(x) > 0$ για $x > 0$, αλλά $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως το εξής: Αν $f(x) < f(c)$ για $x < c$ και $f(x) > f(c)$ για $x > c$, τότε $f'(c) \geq 0$. Πραγματικά από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε για $x \neq c$ ότι: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ δηλ. $f'(c) \geq 0$. Παρόμοια έχουμε: Αν $f(x) > f(c)$ για $x < c$ και $f(x) < f(c)$ για $x > c$, τότε $f'(c) \leq 0$.

Θα εφαρμόσουμε τώρα το Θεώρημα 5.36 για να πάρουμε ένα πολύ ενδιαφέρον συμπέρασμα, γνωστό ως Θεώρημα του Darboux. Αυτό λέει ότι, **αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο ενός διαστήματος Δ, τότε η συνάρτηση f' έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών**. Δηλαδή αν η f' παίρνει σαν τιμές τα A και B, τότε επίσης παίρνει και όλες τις τιμές μεταξύ των A και B. Η ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών ήταν μια σημαντική συνέπεια της συνέχειας μιας συνάρτησης σε κλειστό διάστημα. Το αξιοσημείωτο εδώ είναι ότι οι παράγωγοι, που δεν χρειάζεται να είναι συνεχείς συναρτήσεις, έχουν αυτή την ιδιότητα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Θεώρημα 5.39 (Θεώρημα του Darboux): Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f'(\alpha) \neq f'(\beta)$ και k είναι ένας αριθμός μεταξύ των $f'(\alpha)$ και $f'(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστο ένα $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(c) = k$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f'(\alpha) < k < f'(\beta)$. (Η περίπτωση $f'(\alpha) > k > f'(\beta)$ εξετάζεται ανάλογα). Θεωρούμε την συνάρτηση: $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - kx$. Προφανώς η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $g'(x) = f'(x) - k$. Άρα

$$g'(\alpha) = f'(\alpha) - k < 0$$

$$g'(\beta) = f'(\beta) - k > 0.$$

Αφού $g'(\alpha) < 0$, υπάρχει $\delta_1 > 0$, τέτοιο ώστε:

$$g(x) < g(\alpha), \forall x \in (\alpha, \alpha + \delta_1). \tag{1}$$

Επίσης, αφού $g'(\beta) > 0$, υπάρχει $\delta_2 > 0$, τέτοιο ώστε:

$$g(x) < g(\beta), \forall x \in (\beta - \delta_2, \beta). \tag{2}$$

Αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, συνεπάγεται ότι θα είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Συνεπώς θα είναι φραγμένη και θα παίρνει μέγιστο και ελάχιστο (Θεώρημα 4.30). Έτσι αν $m = inf g(x)$, υπάρχει $c \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε: $g(c) = m$. Είναι προφανές, από τις (1) και (2) ότι $c \neq \alpha$ και $c \neq \beta$ γιατί αν συνέβαινε $c = \alpha$ ή $c = \beta$ θα υπήρχαν τιμές της g μικρότερες από το $g(c)$ που αντίκειται στον ορισμό του infimum. Άρα $c \in (\alpha, \beta)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι: $g'(c) = 0$.

Αν $g'(c) < 0$, τότε υπάρχει $\delta_3 > 0$, τέτοιο ώστε: $g(x) < g(c), \forall x \in (c, c + \delta_3)$. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί $m = g(c) = inf g(x)$.

Αν $g'(c) > 0$, τότε υπάρχει $\delta_4 > 0$, τέτοιο ώστε: $g(x) < g(c), \forall x \in (c - \delta_4, c)$ που πάλι είναι άτοπο.

Συνεπώς $g'(c) = 0$, που σημαίνει ότι $f'(c) - k = 0$ ή $f'(c) = k$. •

§ 5.8 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ROLLE

Θεώρημα 5.40 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και τέτοια ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Τότε υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = 0$.

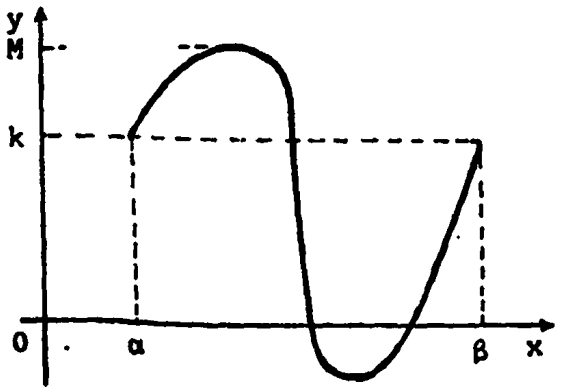
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ θα είναι φραγμένη και θα παίρνει μέγιστο και ελάχιστο στο $[\alpha, \beta]$ (Θεώρημα 4.30). Ας είναι m και M αντίστοιχα το infimum και το supremum της f και $f(\alpha) = f(\beta) = k$. Τότε πρέπει να έχουμε: $m \leq k \leq M$.

α) Αν $m = k = M$, τότε $f(x) = k$ και άρα $f'(\xi) = 0, \forall \xi \in (\alpha, \beta)$.

β) Αν $m \neq M$ τότε $m < k$ ή $k < M$. Ας υποθέσουμε ότι $k < M$. (Βλέπε σχήμα). Θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f(\xi) = M$ από το Θεώρημα 4.30. Επίσης η $f'(\xi)$ υπάρχει, επειδή $\alpha < \xi < \beta$. Ακόμα είναι $f(x) \leq M, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Έτσι αν $\alpha \leq x < \xi$, τότε



$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \frac{f(x) - M}{x - \xi} \geq 0.$$

Επομένως

$$\lim_{x \to \xi-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0 \Rightarrow f'_-(\xi) \geq 0.$$

Αν $\xi < x \leq \beta$ τότε

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \frac{f(x) - M}{x - \xi} \leq 0.$$

Επομένως

$$\lim_{x \to \xi+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0 \Rightarrow f'_+(\xi) \leq 0.$$

Δηλ. $0 \leq f'_-(\xi) = f'(\xi) = f'_+(\xi) \leq 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0$.

Η περίπτωση $m < k$ εξετάζεται ανάλογα. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πόρισμα 1. **Αν $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = 0$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ τότε $f(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$.**

Πόρισμα 2. **Μεταξύ δύο ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης, υπάρχει τουλάχιστο μια ρίζα της παραγώγου.**

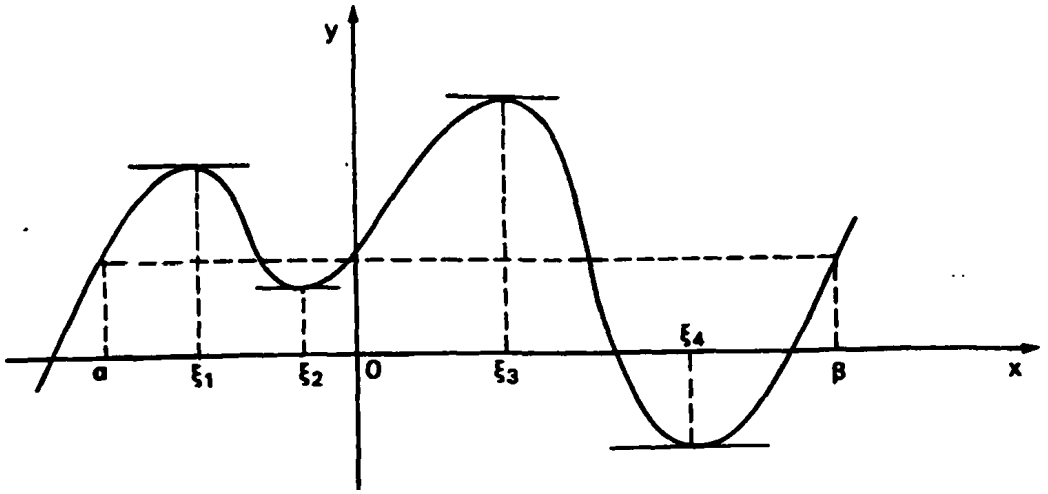
Παρατήρηση 5.41

Λαμβάνοντας υπόψη την παρατήρηση 5.13 το θεώρημα του Rolle μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Αν $f \in C[\alpha, \beta]$, $f' \in C(\alpha, \beta)$ και $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε $f'(\xi) = 0$.

Παρατήρηση 5.42

Το θεώρημα του Rolle δέχεται την παρακάτω γεωμετρική ερμηνεία:



Σχήμα 5.5

Μεταξύ δυο σημείων με ίσες τεταγμένες στο γράφημα της f, υπάρχει τουλάχιστο ένα σημείο, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $0x$. Βλέπε σχήμα 5.5.

Προφανώς το ξ δεν είναι μοναδικό, όπως δείχνει και το σχήμα.

Παράδειγμα 5.43

Έστω $f : \left[0, \frac{1}{\pi}\right] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x.sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν για την f ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος του Rolle.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

α) Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{1}{\pi}]$ γιατί στο διάστημα $(0, \frac{1}{\pi}]$ είναι συνεχής σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, ενώ στο 0 η συνέχεια προκύπτει από το ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x.sin\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$ (γινόμενο μηδενικής επί φραγμένη).

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{1}{\pi})$ σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. (Παρατηρούμε ότι η $f'(0)$ δεν υπάρχει, εφαρμογή 2 της § 5.1. Το Θεώρημα του Rolle όμως απαιτεί την παραγωγισιμότητα στο ανοιχτό διάστημα).

γ) Είναι $f(0) = f\left(\frac{1}{\pi}\right)$.

Άρα ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος του Rolle και συνεπώς υπάρχει $\xi \in (0, \frac{1}{\pi})$: $f'(\xi) = 0$ δηλ. $sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}cos\frac{1}{x} = 0$. Προφανώς υπάρχουν άπειρα τέτοια ξ. Είναι $\xi = \frac{1}{\alpha}$ όπου α οποιαδήποτε θετική ρίζα της εξίσωσης $tg\alpha = \alpha$.

Παρατήρηση 5.44

Καμμιά από τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle δεν μπορεί να παραληφθεί, ούτε και να εξασθενίσει όπως δείχνουν τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 5.45

Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x - [x]$, δηλαδή

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Τότε η συνάρτηση f ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$, είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό $(0, 1)$ και $f(0) = f(1) = 0$. Αλλά είναι $f'(x) = 1, \forall x \in (0, 1)$, δηλ. δεν μηδενίζεται για κανένα $x \in (0, 1)$. Αυτό συμβαίνει γιατί η f δεν είναι συνεχής στο $[0, 1]$, αφού $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1 \neq f(1) = 0$. **Συνεπώς η υπόθεση της συνέχειας στο κλειστό διάστημα δεν μπορεί να παραληφθεί.**

Παράδειγμα 5.46

Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Τότε η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με $f(0) = f(1) = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\frac{1}{2} \in (0, 1)$ γιατί:

$$f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to 1/2-} \frac{x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = 1, f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to 1/2+} \frac{1 - x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = -1.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

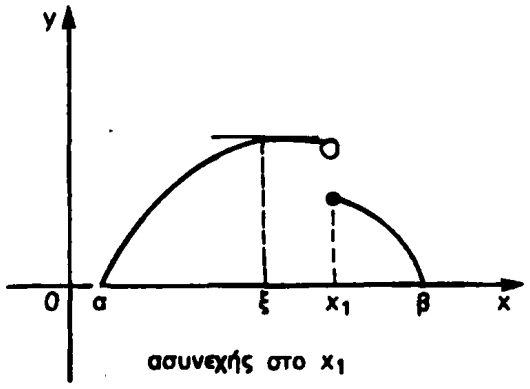
Συνεπώς δεν υπάρχει $\xi \in (0, 1) : f'(\xi) = 0$. **Άρα ούτε η παραγωγισιμότητα στο ανοιχτό διάστημα μπορεί να παραληφθεί.**

Παράδειγμα 5.47

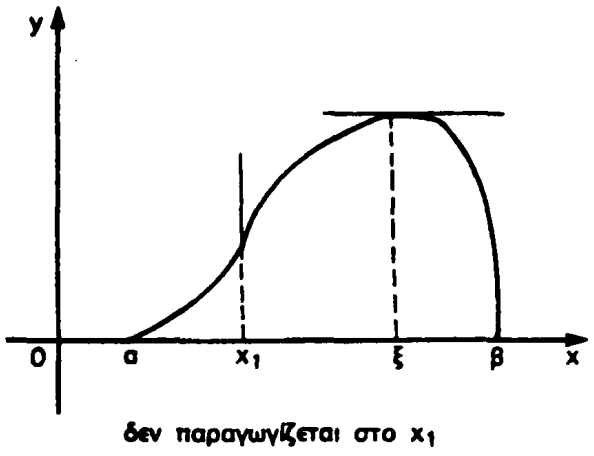
Έστω $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Τότε η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, αλλά $f'(x) \neq 0, \forall x \in (1, 2)$. Αυτό συμβαίνει γιατί $f(1) = 1 \neq 4 = f(2)$. **Άρα ούτε η συνθήκη $f(\alpha) = f(\beta)$ μπορεί να παραληφθεί.**

Παρατήρηση 5.48

Οι συνθήκες του Θεωρήματος του Rolle είναι **ικανές** για τον μηδενισμό της παραγώγου σε κάποιο σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$, αλλά όχι και **αναγκαίες**. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί για μια συνάρτηση να μην ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle, αλλά το συμπέρασμα να ισχύει. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ δεν ικανοποιεί την συνθήκη $f(\alpha) = f(\beta)$ αλλά $f'(x) = 0$ για $x = 0 \in (-1, 2)$. Παρακολουθήστε και τα επόμενα σχήματα:



Σχήμα 5.6



Σχήμα 5.7

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. α) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν η παράγωγος f' δεν έχει ρίζα στο διάστημα (α, β), τότε να αποδείξετε ότι η f έχει το πολύ μια ρίζα σ' αυτό το διάστημα.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x - k\sin x + 1 = 0$ με $0 < k < 1$, έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

α) Ας υποθέσουμε ότι η f έχει δύο ρίζες, τις ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$. Τότε στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2] \subseteq (\alpha, \beta)$ η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) και $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Άρα από το Θεώρημα του Rolle, η f' πρέπει να έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2), που είναι άτοπο, αφού $f'(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$. Συνεπώς η f έχει το πολύ μια ρίζα (δηλαδή ή θα έχει μια ρίζα ή δεν θα έχει καμμιά).

β) Έστω $f(x) = x - ksinx + 1, x \in \mathbb{R}$. Προφανώς η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$, άρα και σε οποιοδήποτε διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$. Επειδή $f'(x) = 1 - kcosx > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, αφού $0 < k < 1$ συνεπάγεται ότι η f' δεν έχει ρίζα στο (α, β). Σύμφωνα τότε με το α) η f έχει το πολύ μια ρίζα. Για να αποδείξουμε ότι έχει ακριβώς μια ρίζα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι έχει τουλάχιστο μια. Επειδή $f(0) = 1 > 0$ και $f(-\pi) = -\pi + 1 < 0$, από το θεώρημα του Bolzano (Πόρισμα 2 του Θεωρήματος 4.31) έχουμε ότι η f έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο $(-\pi, 0)$. Άρα η εξίσωση $x - ksinx + 1 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα και αυτή μέσα στο διάστημα $(-\pi, 0)$.

Σημείωση

Η πρόταση αυτή γενικεύεται. Έτσι π.χ. αν η f' έχει μοναδική ρίζα, τότε η f έχει το πολύ δυο ρίζες κ.ο.κ.

2. Αν οι συναρτήσεις f, ϕ και οι παράγωγοί τους f', ϕ' είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και είναι $f\phi' - f'\phi \neq 0$ σ'αυτό το διάστημα, να αποδείξετε ότι μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της f, υπάρχει ρίζα της ϕ.

Να το βεβαιώσετε στην περίπτωση που $f(x) = \sin x, \phi(x) = \cos x, x \in [0, 2\pi]$.

Απόδειξη

Έστω x_1 και x_2 δυο διαδοχικές ρίζες της $f(x) = 0$. Αν $\phi(x) \neq 0$ για $x \in [x_1, x_2]$ τότε ορίζεται η συνάρτηση $w(x) = \frac{f(x)}{\phi(x)}$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ και $w(x_1) = w(x_2) = 0$. Συνεπώς από το Θεώρημα του Rolle πρέπει $w'(\xi) = 0$ για κάποιο $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$. Δηλαδή πρέπει $f'(\xi)\phi(\xi) - f(\xi)\phi'(\xi) = 0$, πράγμα άτοπο, αφού από την υπόθεση $f\phi' - f'\phi \neq 0$. Συνεπώς $\phi(x) = 0$ για κάποιο $x \in (x_1, x_2)$. Άλλη ρίζα η ϕ δεν μπορεί να έχει στο (x_1, x_2) γιατί αν είχε και άλλη ρίζα τότε θα έπρεπε η f να είχε ρίζα στο (x_1, x_2), που είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι οι x_1 και x_2 είναι διαδοχικές ρίζες της f.

3. Αν η f'' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$f(c) - \frac{\beta - c}{\beta - \alpha} f(\alpha) - \frac{c - \alpha}{\beta - \alpha} f(\beta) = \frac{1}{2}(c - \alpha)(c - \beta) f''(\xi)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου c και ξ ανήκουν στο διάστημα (α, β).

Απόδειξη

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$(\beta-\alpha)f(c)-(\beta-c)f(\alpha)-(c-\alpha)f(\beta)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(c-\alpha)(c-\beta)f''(\xi).$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\phi(x)=(\beta-\alpha)f(x)-(\beta-x)f(\alpha)-(x-\alpha)f(\beta)-(\beta-\alpha)(x-\alpha)(x-\beta).A \quad (1)$$

όπου το A το διαλέγουμε έτσι, ώστε $\phi(c)=0$. Παρατηρούμε ότι $\phi(\alpha)=0=\phi(\beta)$. Επειδή η ϕ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσμη στο $[\alpha,\beta]$ και $c\in(\alpha,\beta)$ τότε από το Θεώρημα του Rolle, εφαρμοζόμενο στα διαστήματα $[\alpha,c]$ και $[c,\beta]$, συνεπάγεται ότι υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,c)$ και $\xi_2\in(c,\beta)$ τέτοια ώστε: $\phi'(\xi_1)=0$ και $\phi'(\xi_2)=0$. Τότε πάλι απότο Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε: $\phi''(\xi)=0$. Από την (1) έχουμε:

$$\phi'(x)=(\beta-\alpha)f'(x)+f(\alpha)-f(\beta)-A(\beta-\alpha)[2x-\beta-\alpha]$$

$$\phi''(x)=(\beta-\alpha)f''(x)-A(\beta-\alpha).2.$$

Συνεπώς

$$\phi''(\xi)=0\Rightarrow f''(\xi)=2A\Rightarrow A=\frac{1}{2}f''(\xi) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε το συμπέρασμα.

4 Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ συνεχής για $x\geq 0$, παραγωγίσιμη για $x>0$ με $f(0)=0$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c\in(0,+\infty): f'(c)=0$.

Απόδειξη

Αν $f=0$ το συμπέρασμα είναι προφανές. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει $x_0\in[0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)\neq 0$, και ας είναι $f(x_0)>0$. Από το Θεώρημα των Ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_1\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε: $f(x_1)=\frac{1}{2}f(x_0)$.

Αφού $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ υπάρχει $y>x_0$ τέτοιο ώστε: $f(y)<\frac{1}{2}f(x_0)$. Τότε πάλι από το Θεώρημα των Ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_2\in(x_0,y)$ τέτοιο ώστε: $f(x_2)=\frac{1}{2}f(x_0)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}f(x_0), x\in[x_1,x_2]$. Επειδή $g(x_1)=g(x_2)=0$, από το Θεώρημα του Rolle υπάρχει $c\in(x_1,x_2): g'(c)=f'(c)=0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.40 Να εξετάσετε αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle, και το συμπέρασμα για τις συναρτήσεις:

$\alpha) f(x) = \sqrt{x-\alpha}\sqrt{\beta-x}, \alpha \le x \le \beta.$

$\beta) \phi(x) = \begin{cases} \frac{\beta-x}{x-\alpha}, & \alpha < x \le \beta \\ 0, & x = \alpha \end{cases}$

$\gamma) g(x) = sinx - \frac{2x}{\pi}, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$

$\delta) h(x) = \begin{cases} 2x-1, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ (x-2)^2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

$\epsilon) \sigma(x) = \begin{cases} x, & -2 \le x \le 0 \\ x - x^2 sin\frac{\pi}{x}, & 0 < x \le 2 \end{cases}$

5.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-\alpha)^m (x-\beta)^n$ με m, n θετικούς ακέραιους. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει το συμπέρασμα του Θεωρήματος του Rolle και μάλιστα το ξ αυτό διαιρεί το μήκος $[\alpha, \beta]$ σε λόγο $\frac{m}{n}$.

5.42 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xe^x - e^x + 1 = 0$ δεν έχει ούτε θετική, ούτε αρνητική πραγματική ρίζα.

5.43 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(1-x)cosx - sinx = 0$ έχει πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

5.44 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - xsinx - cosx = 0$ έχει ακριβώς δυο πραγματικές ρίζες στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

5.45 Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη. Αν υποθέσουμε ότι η f μηδενίζεται για τρία διακεκριμένα σημεία, να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f''(c) = 0$.

5.46 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο του Legendre $P_\nu(x) = \frac{1}{2^\nu \cdot \nu!} \cdot \frac{d^\nu}{dx^\nu}(x^2-1)^\nu$ έχει ν διακεκριμένες πραγματικές ρίζες και όλες ανήκουν στο διάστημα $[-1, 1]$.

5.47 Αν η συνάρτηση f είναι τέτοια ώστε, η παράγωγός της f' να είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\beta) = f(\alpha) + (\beta-\alpha) f'(\alpha) + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2 f''(c).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

5.48 Έστω $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη με $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ και $g''(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης

$$F(t) = g(x)(t-\alpha)(t-\beta) - g(t)(x-\alpha)(x-\beta), \alpha < x < \beta$$

μηδενίζεται τουλάχιστο μια φορά στο διάστημα (α, β). Από αυτό να συμπεράνετε ότι $g(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$.

5.49 Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x) = f(x) + (\beta - x)f'(x) + A\{g(x) + (\beta - x)g'(x)\}$ με f' και g' παραγωγίσιμες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Διαλέγοντας κατάλληλα την σταθερή A, να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha) - (\beta - \alpha)f'(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha) - (\beta - \alpha)g'(\alpha)} = \frac{f''(c)}{g''(c)}.$$

§ 5.9 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Τα θεωρήματα Μέσης τιμής είναιαπό τα πιο σημαντικά συμπεράσματα στην Ανάλυση και συσχετίζουν τις τιμές μιας συνάρτησης με τις τιμές της παραγώγου της.

Θεώρημα 5.49 (Θεώρημα Μέσης τιμής του Lagrange): Έστω f : $[\alpha, \beta] \to$ R συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β). Τότε υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)f'(\xi).$$

Απόδειξη 1η

Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha).$$

Η συνάρτηση αυτή g προκύπτει ως εξής:

Ας είναι G το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης στο $[\alpha, \beta]$. Από τυχαίο σημείο x του (α, β) φέρνουμε κάθετη στον άξονα OX, που τέμνει την χορδή AB στο Γ και την καμπύλη στο Δ. Τότε είναι:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \Gamma x = f(x) - f(\alpha) - (x - \alpha)tg\omega \\ &= f(x) - f(\alpha) - (x - \alpha)\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

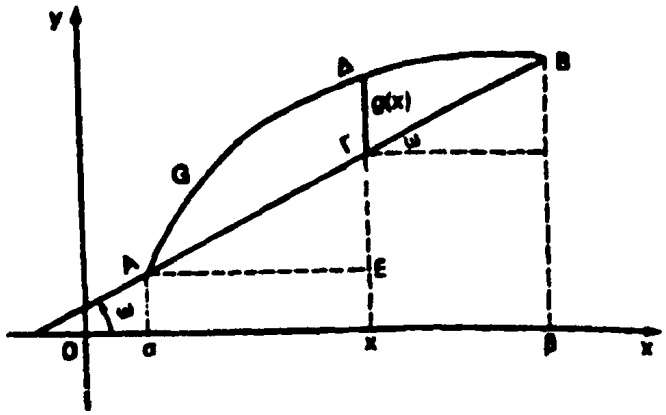
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle ικανοποιούνται για την g, αφού η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $g(\alpha) = 0 = g(\beta)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

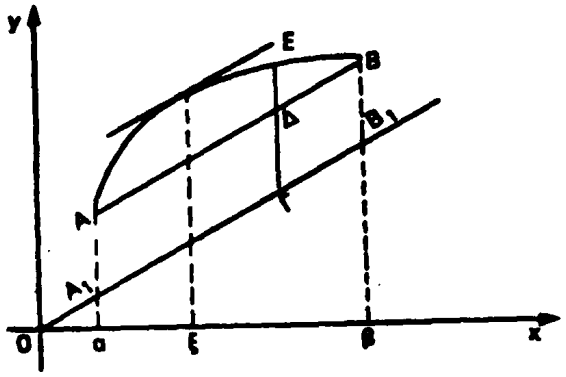
$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Συνεπώς

$$f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha) f'(\xi).$$



Σχήμα 5.8



Σχήμα 5.9

Απόδειξη 2η

Θεωρούμε την συνάρτηση $F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = f(x) - \lambda x$$

δηλαδή αφαιρούμε από την $f(x)$ μια γραμμική συνάρτηση $y = \lambda x$ το γράφημα της οποίας είναι μια ευθεία παράλληλη στην χορδή AB. Οι τιμές της βοηθητικής συνάρτησης F παριστάνονται από το μήκος ΓE που είναι ίσο με το σταθερό μήκος $\Gamma\Delta = AA_1 = BB_1$ και το ΔE. Έτσι η χορδή που ενώνει τα άκρα του τόξου που αντιστοιχεί στην καινούργια συνάρτηση θα είναι παράλληλη στον άξονα OX. Το λ είναι η κλίση της ευθείας A_1B_1 που είναι ίση με την κλίση της χορδής AB, δηλ. $\lambda = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Για την συνάρτηση f ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle, αφού είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $F(\alpha) = \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha} = F(\beta)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda = f'((\xi) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}. \quad \bullet$$

Πόρισμα: Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \alpha + h]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα $(\alpha, \alpha + h)$, τότε υπάρχει τουλάχιστο ένας αριθμός θ, $0 < \theta < 1$ τέτοιος ώστε:

$$f(\alpha + h) - f(\alpha) = hf'(\alpha + \theta h).$$

Απόδειξη

Θέτουμε $\beta = \alpha + h$ στο θεώρημα Μέσης τιμής και έχουμε:

$$f(\alpha + h) - f(\alpha) = hf'(\xi),$$

όπου $\alpha < \xi < \alpha + h \Rightarrow 0 < \xi - \alpha < h \Rightarrow 0 < \frac{\xi - \alpha}{h} < 1$. Θέτοντας $\frac{\xi - \alpha}{h} = \theta$ έχουμε $\xi = \alpha + \theta h$ και $0 < \theta < 1$, και έτσι το πόρισμα αποδείχτηκε.

Παρατήρηση 5.50

Όπως και στο θεώρημα του Rolle, έτσι και στο θεώρημα Μέσης τιμής οι συνθήκες για την ύπαρξη του ξ είναι **ικανές**, αλλά όχι **αναγκαίες**. Γεωμετρικά το θεώρημα ερμηνεύεται ως εξής: Υπάρχει ένα σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την χορδή που ενώνει τα σημεία $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$.

Παρατήρηση 5.51

Το θεώρημα της Μέσης τιμής είναι γενίκευση του θεωρήματος του Rolle στην περίπτωση που $f(\alpha) \neq f(\beta)$, και φέρνει και την ονομασία **Θεώρημα των πεπερασμένων αυξήσεων**. Είναι προφανές επίσης ότι το θεώρημα της Μέσης τιμής ισχύει όχι μόνο για $\alpha < \beta$ αλλά επίσης και για $\alpha > \beta$.

Παράδειγμα 5.52

Έστω $f : IR \to IR$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε ότι το θεώρημα Μέσης τιμής εφαρμόζεται για την f στο διάστημα $[0, 2]$. Πραγματικά, έχουμε:

α) Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, αφού

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{3 - x^2}{2} = 1, \quad \lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{1}{x} = 1$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και $f(1) = 1$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, αφού

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x-1} = -1, \quad f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x-1} = -1.$$

Άρα έχουμε:

$$f(2) - f(0) = (2-0)f'(\xi), 0 < \xi < 2$$

ή

$$f'(\xi) = -\frac{1}{2}.$$

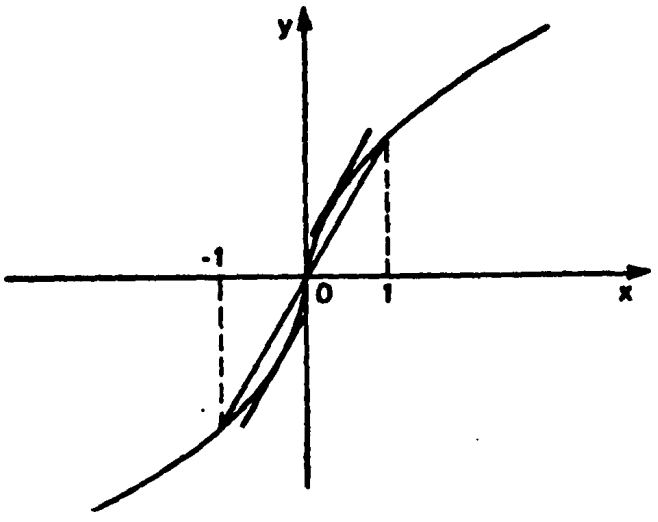
Αλλά

$$f'(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Συνεπώς υπάρχουν δύο τιμές του ξ, $\xi_1 = \frac{1}{2}$ για $x < 1$ και $\xi_2 = \sqrt{2}$ για $x \geq 1$.

Παράδειγμα 5.53

Έστω $f : IR \to IR$ με $f(x) = x^{1/3}$. Τότε η f στο διάστημα $[-1, 1]$



Σχήμα 5.10

είναι συνεχής, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ αφού η $f'(0)$ δεν υπάρχει (Παράδειγμα 5.26).

Δηλαδή οι υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης τιμής δεν ικανοποιούνται για την f. Αλλά όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.10 υπάρχουν $\xi \in (-1,1)$ που ικανοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος Μέσης τιμής. Είναι εύκολο να δούμε ότι $\xi_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ αν $x > 0$ και $\xi_2 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$ αν $x < 0$. Από το παράδειγμα αυτό φαίνεται καθαρά ότι οι συνθήκες για την ύπαρξη του ξ στο θεώρημα Μέσης τιμής είναι **ικανές**, αλλά όχι και **αναγκαίες**.

Το θεώρημα της Μέσης τιμής μας επιτρέπει να βγάλουμε συμπεράσματα για την φύση της συνάρτησης f, από πληροφορίες γύρω από την παράγωγο f'. Τα θεωρήματα που ακολουθούν είναι μερικές από τις άμμεσες συνέπειες του θεωρήματος Μέσης τιμής.

Θεώρημα 5.54 Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Τότε:

i) Αν $f'(x)>0, \forall x\in(\alpha,\beta)$ τότε $f(\beta)>f(\alpha)$

ii) Αν $f'(x)<0, \forall x\in(\alpha,\beta)$ τότε $f(\beta)<f(\alpha)$.

Απόδειξη

Από το θεώρημα 5.49 της Μέσης τιμής η διαφορά $f(\beta)-f(\alpha)$ έχει το ίδιο πρόσημο με την $f'(\xi)$, αφού $\beta-\alpha>0$. Από την παρατήρηση αυτή τα i) και ii) είναι προφανή. •

Πόρισμα 1: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $f(\alpha)=0$ και $f'(x)>0$ (αντίστοιχα $f'(x)<0$), $\forall x\in(\alpha,\beta)$ τότε $f(x)>0$ (αντίστοιχα $f(x)<0$), $\forall x\in(\alpha,\beta)$.

Πόρισμα 2: Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και ισχύει $f(\alpha)=g(\alpha)$ και $f'(x)>g'(x)$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$ τότε $f(x)>g(x)$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$.

Παράδειγμα 5.55

Θα αποδείξουμε ότι

$$\log x > \frac{2(1-x)}{1+x}, \quad x>1.$$

Από το Πόρισμα 1, αν $f(x)=\log x-\frac{2(1-x)}{1+x}$ έχουμε $f(1)=0$ και $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{4}{(1+x)^2}>0$ για $x>1$. Άρα $f(x)>0, \forall x>1$.

Εξάλλου εφαρμόζοντας το Πόρισμα 2 με $f(x)=\log x$ και $g(x)=\frac{2(1-x)}{1+x}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

έχουμε $f(1) = g(1) = 0$ και $f'(x) = \frac{1}{x} > -\frac{4}{(1+x)^2} = g'(x)$. Άρα πάλι $f(x) > g(x), \forall x > 1$.

Θεώρημα 5.56 Έστω $\mathbf{f} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), με $\mathbf{f'(x) = 0}, \forall \mathbf{x} \in (\alpha, \beta)$. Τότε η f είναι σταθερή στο $[\alpha, \beta]$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι $f(x) = f(\alpha), \forall x \in [\alpha, \beta]$. Πραγματικά, αν $x \in [\alpha, \beta], x > \alpha$ εφαρμόζοντας το θεώρημα Μέσης τιμής στο διάστημα $[\alpha, x]$, έχουμε ότι υπάρχει ξ (που εξαρτάται από το x) στο (α, x) τέτοιο ώστε: $f(x) - f(\alpha) = f'(\xi)(x - \alpha)$. Αφού, από την υπόθεση, $f'(\xi) = 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) = f(\alpha), \forall x \in [\alpha, \beta]$. •

Πόρισμα: Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) και $\mathbf{f'(x) = g'(x)}, \forall \mathbf{x} \in (\alpha, \beta)$ τότε υπάρχει μια σταθερή c τέτοια ώστε: $\mathbf{f(x) = g(x) + c}, \forall \mathbf{x} \in [\alpha, \beta]$.

Παρατήρηση 5.57

Το Θεώρημα 5.56 (και το Πόρισμα) εφαρμόζεται και στην περίπτωση που έχουμε: $f : I \to \mathbb{R}$ με I ένα οποιοδήποτε διάστημα ανοιχτό, κλειστό ή ούτε ανοιχτό, ούτε κλειστό.

Παράδειγμα 5.58

Η συνάρτηση $f : (-1, 0) \cup (0, 1) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0) \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

έχει την ιδιότητα ότι $f'(x) = 0, \forall x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ χωρίς η f να είναι σταθερή στο πεδίο ορισμού της. Το Θεώρημα 5.56 δεν εφαρμόζεται στην προκειμένη περίπτωση, επειδή το πεδίο ορισμού δεν είναι διάστημα.

Θεώρημα 5.59 Έστω $\mathbf{f} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν $\lim_{x \to \alpha+} \mathbf{f'(x)} = \ell$, τότε η $\mathbf{f'_+(\alpha)}$ υπάρχει και ισούται με ℓ.

Απόδειξη

Αν $x \in (\alpha, \beta)$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha, x]$ και παραγωγίσιμη στο (α, x). Άρα από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\xi) \quad \text{με} \quad \alpha < \xi < x. \tag{1}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\lim_{y\to\alpha+} f'(y) = \ell$ δηλαδή

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in [\alpha, \beta])\alpha < y < \alpha + \delta \Rightarrow |f'(y) - \ell| < \epsilon. \quad (2)$$

Αν τώρα το $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$ από την (1) έχουμε ότι και το $\xi \in (\alpha, \alpha + \delta)$. Τότε όμως από την (2) έχουμε ότι:

$$|f'(\xi) - \ell| < \epsilon \quad \text{ή} \quad \left|\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - \ell\right| < \epsilon$$

που σημαίνει ότι $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \ell$ ή $f'_+(\alpha) = \ell$. •

Παράδειγμα 5.60

Έστω $f(x) = \sqrt{x.sinx}, x \in [0, \pi]$. Για $x \neq 0, \pi$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{sinx + x.cosx}{2\sqrt{x.sinx}} = \frac{\sqrt{sinx}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{sinx}}.\frac{cosx}{2}$$

και $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 1$. Συνεπώς από το Θεώρημα 5.59 είναι $f'_+(0) = 1$.

Σημείωση

Δεν είναι αναγκαίο για την ύπαρξη της $f'(\alpha)$ να υπάρχει το $\lim_{x\to\alpha} f'(x)$ ή ακόμα να υπάρχει η $f'(x)$ για $x \neq \alpha$. (Βλέπε εφαρμογή 2α και εφαμογή 1 αντίστοιχα της § 5.3).

Το θεώρημα Μέσης τιμής μας οδηγεί σε ένα απλό κριτήριο για να εξετάσουμε την μονοτονία μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης. Το κριτήριο αυτό μας το δίνει το ακόλουθο

Θεώρημα 5.61 Αν f : I → R είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα I, τότε:

i) η f είναι αύξουσα στο I, αν και μόνο αν, f'(x) ≥ 0, ∀x ∈ I.

ii) η f είναι φθίνουσα στο I, αν και μόνο αν, f'(x) ≤ 0, ∀x ∈ I.

Απόδειξη

i) Ας υποθέσουμε ότι $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$. Έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$. Τότε από το θεώρμα Μέσης τιμής στο διάστημα $[x_1, x_2]$, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi).$$

Αφού $f'(\xi) \geq 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε ότι $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Άρα $f(x_1) \leq f(x_2)$ και αφού $x_1 < x_2$ είναι αυθαίρετα σημεία του I, συμπεραίνουμε ότι η f είναι αύξουσα στο I.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη και αύξουσα στο I. Για οποιοδήποτε $c \in I$ θα έχουμε είτε για $x > c$ είτε για $x < c$ ότι

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

Συνεπώς και

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'(c) \geq 0.$$

Αφού το c είναι τυχαίο σημείο του I, έχουμε ότι $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια και γι' αυτό παραλείπεται.

Ακολουθώντας την ίδια πορεία με αυτήν της απόδειξης του Θεωρήματος 5.14 μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 5.62 Αν $f : I \to \mathbf{R}$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα I, τότε αν $f'(x) > 0$ (αντίστοιχα $f'(x) < 0$), $\forall x \in I$ η f είναι γνήσια αύξουσα (αντίστοιχα γνήσια φθίνουσα) στο I.

Προσοχή! Το αντίστροφο του Θεωρήματος 5.62 δεν ισχύει. Αν δηλαδή μια συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα, δεν συνεπάγεται ότι η παράγωγός της θα είναι γνήσια θετική. Π.χ. η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$ είναι γνήσια αύξουσα, αλλά $f'(0) = 0$.

Επίσης, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν $f'(c) > 0$ τότε δεν συνεπάγεται ότι η συνάρτηση είναι αύξουσα σε μια περιοχή του σημείου c. Αυτό φαίνεται για παράδειγμα από την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

που μελετήσαμε στην εφαρμογή 2 της § 5.3. Είναι $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ αλλά η f δεν είναι αύξουσα στην περιοχή του 0. Ισχύει όμως το εξής (από το Θεώρημα 4.17):

Αν $f'(c) > 0$ και η f' είναι συνεχής στο c, τότε η f είναι γνήσια αύξουσα σε μια περιοχή του c.

Πόρισμα: Αν $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) > 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ τότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα 5.63

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η συνάρτηση $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{sinx}{x}$ είναι γνήσια φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Για να το αποδείξουμε αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(x) < 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Είναι

$$f'(x) = \frac{xcosx - sinx}{x^2.} \tag{1}$$

Αν θεωρήσουμε τώρα την συνάρτηση $g(x) = tgx$ στο διάστημα $[0, x]$ με $0 < x < \frac{\pi}{2}$, από το θεώρημα Μέσης τιμής θα έχουμε:

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(\xi) \quad \text{με} \quad 0 < \xi < x$$

ή

$$\frac{tgx}{x} = \frac{1}{cos^2\xi} > 1 \Rightarrow tgx > x \Rightarrow sinx > x.cosx$$

(αφού $cosx \neq 0$ στο $[0, x]$) δηλ.

$$xcosx - sinx < 0. \tag{2}$$

Από την (1) με την βοήθεια της (2) παίρνουμε ότι $f'(x) < 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και συνεπώς η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Σημείωση

Αντί να χρησιμοποιήσουμε το "τρύκ" για να αποδείξουμε ότι $f'(x) < 0$, θεωρώντας την συνάρτηση g, μπορούμε να εργαστούμε ως εξής: Από την (1) έχουμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή αφού $x^2 > 0$. Έστω $\phi(x) = xcosx - sinx, \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Επειδή $\phi(0) = 0$ και $\phi'(x) = -xsinx < 0$, συνεπάγεται ότι η ϕ είναι γνήσια φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Συνεπώς $x > 0 \Rightarrow \phi(x) < \phi(0) = 0$. Άρα από την (1) έχουμε $f'(x) < 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Παρατήρηση 5.64

Το Θεώρημα 5.62, σε συνδιασμό με το Θεώρημα 5.17, είναι πολύ σημαντικό για την εύρεση της παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης. Για να γίνει καλύτερα κατανοητό ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x + e^{sinx}$. Τότε $f(0) = 1$ και $f'(x) = 2 + e^{sinx}.cosx$. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(0) = 3$, από το Θεώρημα 4.17, θα είναι $f'(x) > 0$ για όλα τα x που ανήκουν σε μια περιοχή του 0, δηλ. $f'(x) > 0, \forall x \in N_\delta(0)$ για κάποιο $\delta > 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο περιορισμός της f στην $N_\delta(0)$ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση και άρα είναι αμφιμονοσήμαντη. Συνεπώς είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να βρεθεί μια αναλυτική έκφραση για την f^{-1}.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τελειώνοντας αυτή την παράγραφο, θα δώσουμε μια γενίκευση του θεωρήματος Μέσης τιμής, που οφείλεται στον Cauchy, και είναι γνωστή ως **Γενικευμένο θεώρημα της Μέσης τιμής**.

Θεώρημα 5.65 (Θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy): Έστω f και g δυο συναρτήσεις, συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο ανοιχτό διάστημα (α, β) με $\mathbf{g'(x) \neq 0}, \forall \mathbf{x} \in (\alpha, \beta)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{\mathbf{f}(\beta) - \mathbf{f}(\alpha)}{\mathbf{g}(\beta) - \mathbf{g}(\alpha)} = \frac{\mathbf{f'}(\xi)}{\mathbf{g'}(\xi)}.$$

Απόδειξη 1η

Όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος Μέσης τιμής θα θεωρήσουμε μια βοηθητική συνάρτηση, στην οποία να εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle. Πρώτα παρατηρούμε ότι αφού $g'(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ από το Θεώρημα του Rolle έχουμε $g(\alpha) \neq g(\beta)$.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)}(g(x) - g(\alpha)).$$

Τότε η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $h(\alpha) = h(\beta) = 0$. Άρα από το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} g'(\xi).$$

Αφού $g'(\xi) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ διαιρώντας με $g'(\xi)$ έχουμε το συμπέρασμα. •

Απόδειξη 2η

Θεωρούμε την συνάρτηση $H : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με

$$H(x) = f(x) - \lambda g(x)$$

όπου το λ το διαλέγουμε έτσι, ώστε $H(\alpha) = H(\beta)$. Τις λεπτομέρειες τις αφήνουμε για άσκηση.

Πόρισμα: Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \alpha + \mathbf{h}]$, παραγωγίσιμες στο $(\alpha, \alpha + \mathbf{h})$ με $\mathbf{g'(x) \neq 0}, \forall \mathbf{x} \in (\alpha, \alpha + \mathbf{h})$, τότε υπάρχει τουλάχιστο ένας αριθμός θ, $\mathbf{0 < \theta < 1}$ τέτοιος ώστε:

$$\frac{\mathbf{f}(\alpha + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\alpha)}{\mathbf{g}(\alpha + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\alpha)} = \frac{\mathbf{f'}(\alpha + \theta\mathbf{h})}{\mathbf{g'}(\alpha + \theta\mathbf{h})}, \mathbf{0 < \theta < 1}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατήρηση 5.66

Το θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy είναι γενίκευση του θεωρήματος Μέσης τιμής, αφού το τελευταίο προκύπτει από το πρώτο στην ειδική περίπτωση $g(x) = x$.

Παρατήρηση 5.67

Το θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy δεν προκύπτει από το θεώρημα Μέσης τιμής, αν το εφαρμόσουμε χωριστά στις συναρτήσεις f και g και μετά διαιρέσουμε κατά μέλη, γιατί, τότε θα πάρουμε

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$$

για το οποίο δεν υπάρχει κανένας λόγος να υποθέσουμε ότι $\xi_1 = \xi_2$. Γενικά είναι $\xi_1 \neq \xi_2$.

Παρατήρηση 5.68

Το θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy, δέχεται την παρακάτω γεωμετρική ερμηνεία: Τις συναρτήσεις f και g μπορούμε να τις θεωρήσουμε ότι ορίζουν στο επίπεδο μια καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = f(t), y = g(t), t \in [\alpha, \beta]$. Τότε το συμπέρασμα λέει ότι υπάρχει ένα σημείο $(f(\xi), g(\xi))$ στην καμπύλη, για κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η κλίση $\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}$ της εφαπτομένης της καμπύλης σ' αυτό το σημείο, είναι ίση με την κλίση της χορδής που ενώνει τα άκρα της καμπύλης.

Παράδειγμα 5.69

Θα αποδείξουμε ότι αν $0 < \alpha < \theta < \beta < \frac{\pi}{2}$ τότε

$$\frac{sin\alpha - sin\beta}{cos\beta - cos\alpha} = ctg\theta.$$

Έστω $f(x) = sinx$ και $g(x) = cosx$. Τότε οι f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) με $g'(x) = -sinx \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$. Συνεπώς από το θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy έχουμε:

$$\frac{sin\beta - sin\alpha}{cos\beta - cos\alpha} = \frac{cos\theta}{-sin\theta}, \alpha < \theta < \beta \Rightarrow \frac{sin\alpha - sin\beta}{cos\beta - cos\alpha} = ctg\theta.$$

Παράδειγμα 5.70

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2$ με $x \in [-1, 3]$. Τότε και η f' και η g' μηδενίζονται για $x = 0$. Άρα οι υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης τιμής του Cauchy δεν ικανοποιούνται. Εν τούτοις το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει, δηλαδή υπάρχει $\xi \in (-1, 3)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(3) - f(-1)}{g(3) - g(-1)} = \frac{3\xi^2}{2\xi} \Rightarrow \xi = \frac{7}{3}.$$

Αυτό δείχνει ότι και στο θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy οι συνθήκες για την ύπαρξη του ξ είναι **ικανές**, αλλά όχι και **αναγκαίες**.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και για κάποιο $c \in (\alpha, \beta)$ είναι $f(c) > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f''(\xi) < 0$.

Απόδειξη

Αφού η f'' υπάρχει, τότε και η f' και η f είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αφού $c \in (\alpha, \beta)$ εφαρμόζοντας το θεώρημα Μέσης τιμής αντίστοιχα στα διαστήματα $[\alpha, c]$ και $[c, \beta]$ παίρνουμε:

$$\frac{f(c) - f(\alpha)}{c - \alpha} = f'(\xi_1), \alpha < \xi_1 < c$$

$$\frac{f(\beta) - f(c)}{\beta - c} = f'(\xi_2), c < \xi_2 < \beta.$$

Αλλά $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, οπότε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c)}{c - \alpha}, \quad f'(\xi_2) = -\frac{f(c)}{\beta - c}, \alpha < \xi_1 < c < \xi_2 < \beta.$$

Επειδή η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\xi_1, \xi_2]$, πάλι από το θεώρημα Μέσης τιμής έχουμε:

$$\frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = f''(\xi), \xi_1 < \xi < \xi_2.$$

Συνεπώς υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} f''(\xi) &= \frac{1}{\xi_2 - \xi_1}\left[-\frac{f(c)}{\beta - c} - \frac{f(c)}{c - \alpha}\right] = \frac{-f(c)}{\xi_2 - \xi_1}\left[\frac{1}{\beta - c} + \frac{1}{c - \alpha}\right] \\ &= \frac{-(\beta - \alpha) f(c)}{(\xi_2 - \xi_1)(\beta - c)(c - \alpha)} < 0. \end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2. Έστω $\mathbf{f} : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε: $|\mathbf{f}'(\mathbf{x})| \leq \mathbf{M}, \forall \mathbf{x} \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

Απόδειξη

Αν $x, y \in (\alpha, \beta)$ τότε στο διάστημα $[x, y]$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Συνεπώς από το θεώρημα Μέσης τιμής έχουμε:

$$f(x) - f(y) = (x - y) f'(\xi),$$

για κάποιο ξ μεταξύ των x και y. Τότε

$$|f(x) - f(y)| = |x - y||f'(\xi)| \leq M|x - y|.$$

Για δοσμένο $\epsilon > 0$, διαλέγουμε $\delta = \frac{\epsilon}{M}$. Δηλαδή

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in (\alpha, \beta))|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

που σημαίνει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ. αν η συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής, δεν σνεπάγεται ότι θα έχει φραγμένη παράγωγο. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, \infty)$ που είναι ομοιόμορφα συνεχής (Εφαρμογή 1 της § 4.6) αλλά η $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x \in (0, \infty)$ δεν είναι φραγμένη στο 0[1].

3. (Αντιμετώπιση ανισοτήτων). Να αποδείξετε ότι: $\alpha)$ $(1 + \mathbf{x})^{\alpha} \geq 1 + \alpha\mathbf{x}$ **με** $\alpha \geq 1$ **ή** $\alpha \leq 0$ **και** $\mathbf{x} > -1$

$\beta)$ $\mathbf{e}^{\mathbf{x}} > 1 + \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}^2}{2}, \mathbf{x} > 0$.

Απόδειξη

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$. Θα την μελετήσουμε χωριστά στα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, +\infty)$, αφού για $x = 0$ ισχύει ως ισότητα. Επίσης υποθέτουμε ότι $\alpha \neq 0$, γιατί για $\alpha = 0$ ισχύει πάλι ως ισότητα.

Έστω τυχαίο διάστημα $[x, 0] \subseteq [-1, 0]$. Τότε από το θεώρημα Μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (x, 0)$, τέτοιο ώστε

$$f(x) - f(0) = xf'(\xi) \quad \text{ή} \quad (1 + x)^{\alpha} - 1 = \alpha x(1 + \xi)^{\alpha - 1}. \tag{1}$$

Αν $\alpha \geq 1$ τότε $\alpha x(1 + \xi)^{\alpha - 1} > \alpha x$, αφού $\alpha x < 0$, οπότε η (1) γίνεται: $(1 + x)^{\alpha} - 1 > \alpha x$ ή $(1 + x)^{\alpha} > 1 + \alpha x$.

Αν $\alpha < 0$ τότε $\alpha x(1 + \xi)^{\alpha - 1} > \alpha x$, αφού $\alpha x > 0$. Συνεπώς παίρνουμε πάλι την (1).

[1] γιατί αν $x_{\nu} = \frac{1}{\nu^2} \to 0 \Rightarrow f'(x_{\nu}) = \frac{1}{2}\nu \to +\infty$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έστω τώρα τυχαίο διάστημα $[0, x] \subseteq (0, +\infty)$. Τότε πάλι από το θεώρημα Μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε:

$$(1+x)^{\alpha} - 1 = \alpha x(1+\xi)^{\alpha-1}. \tag{2}$$

Για $\alpha \geq 1$ ή $\alpha < 0$ είναι $\alpha x(1+\xi)^{\alpha-1} > \alpha x$ οπότε η (2) γίνεται $(1+x)^{\alpha}-1 > \alpha x$ ή $(1+x)^{\alpha} > 1+\alpha x$.

Σημείωση

Η παραπάνω ανισότητα είναι γενίκευση της ανισότητας του Bernoulli.

β) Θα εφαρμόσουμε εδώ μια άλλη μέθοδο, γνωστή ως **μέθοδος του προσήμου των παραγώγων**.

Έστω $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}, x \geq 0$. Τότε $f'(x) = e^x - 1 - x$, $f''(x) = e^x - 1$, $f'''(x) = e^x > 0$. Επειδή $f'''(x) > 0$ συνεπάγεται ότι η f'' είναι γνήσια αύξουσα. Άρα $x > 0 \Rightarrow f''(x) > f''(0) = 0$. Άρα $f''(x) > 0$ που σημαίνει ότι η f' είναι γνήσια αύξουσα. Δηλ. $x > 0 \rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$. Ώστε $f'(x) > 0, \forall x > 0$ και συνεπώς η f είναι γνήσια αύξουσα. Δηλ. $f(x) > f(0) = 0$ ή $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} > 0, \forall x > 0$ ή $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}, \forall x > 0$.

4. Έστω $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbf{R}$.

α) Αν $|f'(x)| \leq k < 1, \forall x \in \mathbf{R}$ τότε να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο (δηλ. η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα).

β) Η ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ που ορίζεται από δοσμένο x_1 και την αναδρομική σχέση $x_{\nu+1} = f(x_\nu), \nu \in \mathbf{N}$ συγκλίνει στο σταθερό σημείο της f.

γ) Θεωρώντας την συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{1+e^x}, x \in \mathbf{R}$ να αποδείξετε ότι αν $|f'(x)| < 1, \forall x \in \mathbf{R}$ τότε η f έχει το πολύ ένα σταθερό σημείο.

δ) Να αποδείξετε ότι αν υπάρχουν δυο τουλάχιστο ρίζες της $f(x) = x$ στο διάστημα (α, β), τότε θα είναι $f'(x) = 1$, για ένα τουλάχιστο $x \in (\alpha, \beta)$.

Απόδειξη

α) Θέτουμε $g(x) = x - f(x), x \in \mathbb{R}$. Θεωρώντας ένα τυχαίο διάστημα $[0, x]$, από το θεώρημα Μέσης τιμής (του οποίου οι προϋποθέσεις προφανώς ικανοποιούνται) θα έχουμε:

$$g(x) - g(0) = xg'(\xi_x), 0 < \xi_x < x$$

ή

$$x - f(x) + f(0) = x(1 - f'(\xi_x)), 0 < \xi_x < x. \tag{1}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Από την (1), αφού $x \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{x - f(x)}{x} = 1 - f'(\xi_x) - \frac{f(0)}{x}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} > 0,$$

αφού $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(0)}{x} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι για αρκετά μεγάλες τιμές του x ή για αρκετά μικρέξη συνάρτηση $\frac{g(x)}{x}$ παίρνει θετικές τιμές. Έτσι αν $A > 0$ τότε $\frac{g(A)}{A} > 0$ και αν $B < 0$ τότε $\frac{g(B)}{B} > 0$. Συνεπώς $g(A) > 0$ και $g(B) < 0$. Άρα από το Θεώρημα του Bolzano (Πόρισμα 2 του Θεωρήματος 4.31) υπάρχει $\alpha \in (A, B)$ τέτοιο ώστε: $g(\alpha) = 0$, δηλ. $\alpha - f(\alpha) = 0$ ή $f(\alpha) = \alpha$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο. Αυτό είναι και το μοναδικό, γιατί αν υποθέσουμε ότι η f έχει και ένα ακόμα σταθερό σημείο, έστω το β, θα υπήρχε από το θεώρημα Μέσης τιμής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ένα $\xi^* \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)| = |\alpha - \beta| . |f'(\xi^*)| < |\alpha - \beta|$$

πράγμα άτοπο.

β) Αφού η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη $\forall x \in IR$ συνεπάγεται ότι θα είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο τυχαίο διάστημα $[x_\nu, \alpha]$, όπου α το σταθερό σημείο της f. Από το θεώρημα Μέσης τιμής τότε θα έχουμε:

$$f(x_\nu) - f(\alpha) = (x_\nu - \alpha) f'(\xi), x_\nu < \xi < \alpha$$

ή

$$|x_{\nu+1} - \alpha| = |x_\nu - \alpha| |f'(\xi)| \leq |x_\nu - \alpha|. \tag{2}$$

Από την (2) για $\nu = 1, 2, \ldots$ έχουμε:

$$|x_2 - \alpha| \leq k|x_1 - \alpha|$$

$$|x_3 - \alpha| \leq k|x_2 - \alpha|$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|x_{\nu+1} - \alpha| \leq k|x_\nu - \alpha|$$

από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη παίρνουμε:

$$|x_{\nu+1} - \alpha| \leq k^\nu |x_1 - \alpha|.$$

Επειδή $0 < k < 1$, θα είναι $\lim k^\nu = 0$ και άρα $\lim x_\nu = \alpha$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γ) $f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, οπότε $|f'(x)| < 1, \forall x \in IR$. Η εξίσωση όμως $f(x) = x$ δεν έχει λύση. **Έτσι η υπόθεση ότι $|f'(x)| \leq k < 1$, είναι ουσιώδης για την ύπαρξη σταθερού σημείου της f.**

δ) Οι ρίζες της $f(x) = x$ είναι ρίζες της $g(x) = x - f(x)$. Ας υποθέσουμε ότι ξ_1, ξ_2 είναι οι ρίζες αυτές. Τότε αφού η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), από το Θεώρημα του Rolle θα υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = 1$.

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: (-1, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ με

$$\mathbf{f(x) = \frac{x - \log(1 + x)}{x^2}}$$

είναι γνήσια φθίνουσα στα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Απόδειξη

Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(1 - \frac{1}{1+x}x^2\right) - 2x[x - log(1+x)]}{x^4} \\ &= \frac{2(1+x)log(1+x) - 2x - x^2}{x^3(1+x)}. \end{aligned}$$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της

$$g(x) = 2(1+x)log(1+x) - 2x - x^2, x > -1.$$

Είναι $g'(x) = 2log(1+x) - 2x$. Το πρόσημο της g' είναι το ίδιο με το πρόσημο της

$$\phi(x) = log(1+x) - x, x > -1.$$

Αλλά $\phi'(x) = -\frac{x}{1+x}$, οπότε:

1) αν $x > 0$ τότε $\phi'(x) < 0$ και άρα η ϕ είναι γνήσια φθίνουσα, δηλ. $x > 0 \Rightarrow \phi(x) < \phi(0) = 0$.

2) αν $-1 < x < 0$ τότε $\phi'(x) > 0$ και άρα η ϕ είναι γνήσια αύξουσα, δηλ. $x < 0 \Rightarrow \phi(x) < \phi(0) = 0$.

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση είναι $\phi(x) < 0$ που σημαίνει ότι $g'(x) < 0$. Άρα η g είναι γνήσια φθίνουσα. Τότε αν $x > 0 \Rightarrow g(x) < g(0) = 0$ και άρα $f'(x) < 0, \forall x > 0$. Δηλαδή η f είναι γνήσια φθίνουσα για $x > 0$.

Αν $-1 < x < 0$ τότε $g(x) > g(0) = 0$ και άρα $f'(x) < 0$ αφού $x^3 < 0$. Άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0)$.

6. Έστω $\mathbf{F(x) = \{f(x) - f(\alpha)\}\{g(\beta) - g(x)\}}$ όπου f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β) με $\mathbf{g'(x) \neq 0, \forall x \in}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(α, β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{\mathbf{f}(\xi) - \mathbf{f}(\alpha)}{\mathbf{g}(\beta) - \mathbf{g}(\xi)} = \frac{\mathbf{f}'(\xi)}{\mathbf{g}'(\xi)}.$$

Απόδειξη

Η F είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $F(\alpha) = 0 = F(\beta)$. Συνεπώς από το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi)\{g(\beta) - g(\xi)\} - g'(\xi)\{f(\xi) - f(\alpha)\}.$$

δηλ. το συμπέρασμα.

7. Έστω $\mathbf{f}: [\alpha, +\infty) \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη στο $(\alpha, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $\lim_{x\to+\infty} \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = +\infty$ τότε και $\lim_{x\to+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty$

ii) Αν $\lim_{x\to+\infty} \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \ell$ τότε και $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} = \ell$. Αν επί πλέον είναι $\ell > 0$ τότε και $\lim_{x\to+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty$.

Απόδειξη

i) Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ συνεπάγεται ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists A \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})x > A \Rightarrow f'(x) > \frac{1}{\epsilon}. \tag{1}$$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[A, x]$ με $A > \alpha$. Άρα από το θεώρημα Μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (A, x)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) - f(A) = (x - A) f'(\xi).$$

Τότε έχουμε

$$f(x) = f(A) + (x - A) f'(\xi) > f(A) + \frac{x - A}{\epsilon}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη και άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ii) Αφού $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$ συνεπάγεται ότι:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f'))x > r \Rightarrow |f'(x) - \ell| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2}$$

Στο διάστημα $[r, x], r > \alpha$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης τιμής. Συνεπώς υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in (r, x)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) - f(r) = (x - r) f'(\xi) \Rightarrow f(x) = f(r) + (x - r) f'(\xi).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τότε:

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\ell\right| = \left|\frac{f(r)}{x}+(1-\frac{r}{x})f'(\xi)-\ell\right| \le \left|\frac{f(r)}{x}\right| + |f'(\xi)-\ell| + r\left|\frac{f'(\xi)}{x}\right|. \quad (3)$$

Όμως $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(r)}{x}=0 \Rightarrow |\frac{f(r)}{x}|<\frac{\epsilon}{3}$ αρκεί να πάρουμε $x>\frac{3|f(r)|}{\epsilon}=r_1$.

Επίσης $\lim_{x\to+\infty} r|\frac{f'(\xi)}{x}|=0 \Rightarrow |\frac{f'(\xi)}{x}|<\frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $x>r_2=\frac{3r|f'(\xi)|}{\epsilon}$.

Άρα, για κάθε $\epsilon>0, \exists M\in\mathbb{R}$ με $M=max\{r,r_1,r_2,0\}$ τέτοιος ώστε για κάθε $x>M$ να έχουμε: $|\frac{f(x)}{x}-\ell|<\epsilon$, που σημαίνει ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ell$.

Έστω τώρα $\ell>0$. Τότε αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ell$ θα έχουμε $\ell-\epsilon<\frac{f(x)}{x}<\ell+\epsilon$ ή $(\ell-\epsilon)x<f(x)<(\ell+\epsilon)x$. Επειδή $\ell>0$ διαλέγοντας το ϵ έτσι ώστε: $0<\epsilon<\ell$ θα έχουμε $\ell-\epsilon>0$ οπότε $(\ell-\epsilon)x\to+\infty$. Άρα και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.50 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{|x|}, x\in[-1,\beta]-\{0\}, \beta\ge 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης τιμής.

β) Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος Μέσης τιμής, αν και μόνο αν, $\beta>1+\sqrt{2}$.

5.51 Να βρεθεί το λάθος στην παρακάτω απόδειξη: Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη για κάθε x. Από το θεώρημα Μέσης τιμής στο διάστημα $[0,x]$ έχουμε:

$$x^2 sin\frac{1}{x}=x\left(2\xi sin\frac{1}{\xi}-cos\frac{1}{\xi}\right), 0<\xi<x$$

ή

$$cos\frac{1}{\xi}=2\xi sin\frac{1}{\xi}-xsin\frac{1}{x}, 0<\xi<x.$$

Όταν $x\to 0$ τότε και $\xi\to 0$. Παίρνοντας τα όρια έχουμε:

$$\lim_{\xi\to 0} cos\frac{1}{\xi}=0.$$

Αλλά ξέρουμε ότι το $\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. Τι συμβαίνει λοιπόν;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.52 Να αποδείξετε ότι αν η $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ έχει φραγμένη παράγωγο στο (α, β), τότε και η f είναι φραγμένη στο (α, β).

5.53 Με την βοήθεια του πορίσματος του Θεωρήματος 5.49 να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\frac{x}{1+x} < log(1+x) < x, -1 < x < 0 \quad \text{ή} \quad x > 0.$$

5.54 Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0, 1]$. Αν $f(x) > 0, \forall x \in [0, 1]$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $(\exists M > 0)(\forall x \in [0, 1]) \Rightarrow f'(x) \geq M$.

β) Αν επί πλέον $f(0) = 0$ τότε $(\exists M > 0)(\forall x \in [0, 1]) \Rightarrow f(x) \geq Mx$.

5.55 Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = cos^3 x, x \in R, g(x) = \frac{1}{x}, x \leq h, h < 0$ και η $\phi(x) = x sin\frac{1}{x}, x \neq 0$ και $\phi(0) = 0$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

5.56 Υποθέτουμε ότι για την συνάρτηση f υπάρχει η f'' στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ότι $f(\alpha) > 0, f(\beta) = f'(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι $f''(\xi) > 0$ για ένα τουλάχιστο $\xi \in (\alpha, \beta)$.

5.57 Να αποδείξετε το θεώρημα της Μέσης τιμής θεωρώντας την βοηθητική συνάρτηση

$$\phi(x) = f(x) - f(\alpha) - A(x - \alpha), x \in [\alpha, \beta]$$

διαλέγοντας κατάλληλα τη σταθερή A.

5.58 Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha - h, \alpha + h]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha - h, \alpha + h)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\phi(t) = f(\alpha + th) + f(\alpha - th), t \in [0, 1]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης τιμής και άρα υπάρχει $\theta, 0 < \theta < 1$ τέτοιο ώστε:

$$f(\alpha - h) - 2f(\alpha) + f(\alpha + h) = h\{f'(\alpha + \theta h) - f'(\alpha - \theta h)\}.$$

5.59 Με την βοήθεια του θεωρήματος Μέσης τιμής να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

α) $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$ με $0 < \alpha < 1$ και $x > 0$ ή $-1 < x < 0$

β) $(\alpha + \beta)^\rho \leq \alpha^\rho + \beta^\rho, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.

γ) $1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}, -1 < x < 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δ) $\frac{y-x}{c\sigma\upsilon\nu^2 x} \leq tgy - tgx \leq \frac{y-x}{c\sigma\upsilon\nu^2 y}, 0 \leq x, y < \frac{\pi}{2}$

ε) $\frac{y-x}{1+y^2} < Arctgy - Arctgx < \frac{y-x}{1+x^2}, x \neq y, 0 < x, y$

στ) $(y-x)\alpha^x log\alpha < \alpha^y - \alpha^x < (y-x)\alpha^y log\alpha, y \neq x, \alpha > 1.$

ζ) $\nu y^{\nu-1} \leq \frac{x^\nu - y^\nu}{x-y} \leq \nu x^{\nu-1}, 0 < y < x, \nu \in N$

η) $x \leq Arcsinx \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, 0 \leq x < 1.$

θ) $\frac{logx}{x} < \frac{logy}{x} + \frac{1}{y}, 0 < y < x.$

5.60 Να αποδείξετε ότι οι ακολουθίες α) $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = 1 - e^{-\alpha_\nu}$ και

β) $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_1 = 1$ και $x_{\nu+1} = Arctgx_\nu$

συγκλίνουν.

5.61 Έστω $f : R \to \mathbb{R}$. Αν η f έχει παραγώγους μέχρι τρίτης τάξης και ικανοποιεί την σχέση:

$$2f(x) = x(1 + f'(x)), x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι η f'' είναι σταθερή.

5.62 Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = 2Arctg\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} - Arcsinx, 0 < |x| < 1$$

$$\beta) g(x) = Arccos\frac{\alpha cosx + \beta}{\alpha + \beta cosx} - 2Arctg\left\{\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\right\}, 0 \leq \beta \leq \alpha, x \geq 0$$

είναι σταθερές. Ποιά είναι η τιμή τους;

5.63 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι:

$\alpha) f'(x)f(y) = f(x)f'(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\beta)(\exists c \in \mathbb{R}) : f'(x) = cf(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

$\gamma) f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}.$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.64 Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

β) $g(x) = \frac{log(1+x)}{x}, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

γ) $h(x) = x^{1/x}, x > 0$.

5.65 Με την βοήθεια του προσήμου των παραγώγων να αποδείξετε ότι:

α) $sinx > x - \frac{1}{6}x^3, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

β) $x + 2 + (x-2)e^x > 0, x > 0$

γ) $(x+2)log(1+x) - 2x > 0, x > 0$

δ) $tgx > x + \frac{x^3}{3}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

ε) $\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) sinx > \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) cosx, 0 < x < \pi$.

5.66 Να αποδείξετε ότι για $x > 0$ οι συναρτήσεις $f(x) = (1-x)e^x$ και $g(x) = (1+x)e^{-x}$ είναι φθίνουσες και για κάθε x ισχύει:

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}.$$

5.67 Αν η f είναι συνεχής για $x \geq 0$ με $f(0) = 0$ και παραγωγίσιμη για $x > 0$ με την f' γνήσια αύξουσα, να αποδείξετε ότι για $x > 0$ ισχύουν:

α) $f(x) = xf'(\theta x), 0 < \theta < 1$.

β) $f(x) < xf'(x)$.

γ) η $\frac{f(x)}{x}$ είναι γνήσια αύξουσα.

5.68 Να αποδείξετε ότι:

α) $xlogx - \alpha log\alpha - (x-\alpha)\left(1 + log\frac{\alpha+x}{2}\right) < 0, 0 < \alpha < x$

β) $cosx < e^{-(1/2)x^2}, 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$

γ) $\frac{d^2}{dx^2}(x\, Arctghx) > 0, -1 < x < 1$

δ) $\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - (1+x)e^{-x}\right) > 0, x > 0$.

5.69 Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy στις περιπτώσεις που:

α) $f(x) = e^x, g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \alpha = -2, \beta = 2$

β) $f(x) = cos\pi x, g(x) = x^2, \alpha = -1, \beta = \frac{1}{2}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.70 Αν $f(x) = log(1+x), g(x) = \sqrt{1+x}, \alpha = 1, \beta = x > 1$ να βρεθεί το όριο του πηλίκου $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}$ όταν $x \to 1$.

5.71 Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\alpha \geq 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy με συνάρτηση $g(x) = x$ ή x^2 ή x^3, να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2, ξ_3 στο (α, β) τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = (\beta+\alpha)\frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2} = (\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)\frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}.$$

5.72 Έστω f και ϕ δυο συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha-h, \alpha+h]$ και παραγωγίσιμες στο $(\alpha-h, \alpha+h)$. Θεωρούμε την $F : [\alpha-h, \alpha+h]$ με

$$F(x) = Af(x) + B\phi(x) + \Gamma x + \Delta$$

όπου τις σταθερές A, B, Γ και Δ τις διαλέγουμε, έτσι ώστε:

$$F(\alpha+h) = F(\alpha) = F(\alpha-h) = 0.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha-h, \alpha+h)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(\alpha+h)-2f(\alpha)+f(\alpha-h)}{\phi(\alpha+h)-2\phi(\alpha)+\phi(\alpha-h)} = \frac{f''(\xi)}{\phi''(\xi)}.$$

Αν οι σταθερές εκλεγούν έτσι ώστε $F(\alpha+h) = F(\alpha) = F'(\alpha) = 0$ τότε υπάρχει $\eta \in (\alpha, \alpha+h)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)-hf'(\alpha)}{\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)-h\phi'(\alpha)} = \frac{f''(\eta)}{\phi''(\eta)}.$$

5.73 Έστω $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $c_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε: $f'(c_1) = 1$.

β) υπάρχει $c_2 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε: $f'(c_2) = 0$.

γ) υπάρχει $c \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε: $f'(c) = \frac{1}{3}$.

§ 5.10 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ ΤΟΥ L'HOSPITAL

Στο κεφάλαιο 3 μελετήσαμε την έννοια του ορίου και είδαμε μεθόδους για τον υπολογισμό του. Έτσι αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \ell_2$ με $\ell_2 \neq 0$ τότε και $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$. Το ερώτημα που μπαίνει, είναι τι συμβαίνει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

στην περίπτωση που $\ell_1 = 0$ και $\ell_2 = 0$; Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το όριο του πηλίκου $\frac{f}{g}$ είναι μια **απροσδιόριστη μορφή**. Αυτό σημαίνει ότι το όριο μπορεί να υπάρχει, μπορεί όμως και να μην υπάρχει. Χρησιμοποιούμε τότε το συμβολισμό $\frac{0}{0}$ για να δηλώσουμε αυτή την απροσδιόριστη μορφή. Άλλες τέτοιες απροσδιόριστες μορφές είναι οι $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞ και ∞^0. Θα δούμε σ' αυτήν την παράγραφο μεθόδους υπολογισμού τέτοιων ορίων. Οι ειδικές αυτές μέθοδοι είναι γνωστές ως **κανόνες του L'Hospital**.

Πρέπει να γίνει κατανοητό, ότι στα επόμενα δεν θα βρούμε την τιμή $\frac{0}{0}$ ή οποιαδήποτε άλλη από τις απροσδιόριστες μορφές. Θα βρούμε τα όρια συναρτήσεων, που έχουν αυτές τις μορφές, αν πάρουμε χωριστά τα όρια. Η προσοχή μας θα στραφεί στις απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{\infty}{\infty}$ γιατί οι υπόλοιπες, όπως θα δούμε, ανάγονται σ' αυτές.

α) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$

Το παρακάτω θεώρημα στηρίζεται στον ορισμό της παραγώγου.

Θεώρημα 5.71 **Έστω f και g ορισμένες στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ και $g(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$. Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο α, και αν $g'(\alpha) \neq 0$, τότε το όριο της $\frac{f}{g}$ στο α υπάρχει και είναι ίσο με $\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$. Δηλαδή**

$$\lim_{x \to \alpha+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

Απόδειξη

Αφού $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$, το πηλίκο $\frac{f}{g}$ γράφεται:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}}{\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}}, \alpha < x < \beta.$$

Επειδή οι f και g παραγωγίζονται στο α έχουμε:

$$\lim_{x \to \alpha+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to \alpha+} \frac{f(x)-f(\alpha}{x-\alpha}}{\lim_{x \to \alpha+} \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}. \quad \bullet$$

Το επόμενο θεώρημα είναι γνωστό ως **κανόνας του L'Hospital**.

Θεώρημα 5.72 **(Κανόνας του L'Hospital): Έστω f και g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) με $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$, και $g'(x) \neq 0, \forall x \in$**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(α, β). Τότε, αν το $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbf{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ τότε και $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Απόδειξη

α) Έστω $\ell \in \mathbb{R}$. Επειδή $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για $\alpha < x < \alpha + \delta$ να έχουμε:

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \epsilon. \tag{1}$$

Για κάθε x με $\alpha < x < \alpha + \delta$, από το θεώρημα 5.65 της Μέσης τιμής του Cauchy, υπάρχει $\xi_x \in (\alpha, x)$, τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

ή

$$\frac{f(x)}{f(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \tag{2}$$

Αφού $\alpha < \xi_x < \alpha + \delta$ η (2) με την βοήθεια της (1) γίνεται:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| = \left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - \ell\right| < \epsilon.$$

Αυτό όμως συμβαίνει για όλα τα x με $\alpha < x < \alpha + \delta$ και συνεπώς $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

β) Έστω $\ell = \infty$. Επειδή $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ συνεπάγεται ότι για κάθε $r > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για $\alpha < x < \alpha + \delta$ να έχουμε: $\frac{f'(x)}{g'(x)} > r$. Για κάθε τέτοιο x, από το θεώρημα 5.65 της Μέσης τιμής του Cauchy, υπάρχει $\xi_x \in (\alpha, x)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} > r.$$

Συνεπώς $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Η περίπτωση $\ell = -\infty$ εξετάζεται ανάλογα. •

Παρατήρηση 5.73

1. Στο Θεώρημα 5.71 η συνθήκη $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ μπορεί να αντικατασταθεί από την συνθήκη $\lim_{x\to\alpha+} f(x) = \lim_{x\to\alpha+} g(x) = 0$. Πραγματικά· αφού οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο α, αυτές είναι αναγκαστικά συνεχείς στο α, οπότε $\lim_{x\to\alpha+} f(x) = f(\alpha) = 0$ και $\lim_{x\to\alpha+} g(x) = g(\alpha) = 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

2. Το ίδιο ισχύει και για το Θεώρημα 5.72. Η απόδειξη τότε πρέπει να τροποποιηθεί. Ας δούμε πως θα γίνει για την περίπτωση που $\ell \in \mathbb{R}$.

Επειδή $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για $\alpha < x < \alpha + \delta$ να έχουμε:

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \ell - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \ell + \frac{\epsilon}{2}. \tag{1'}$$

Έστω τυχαίο x_1 με $\alpha < x_1 < x < \alpha + \delta$. Τότε από το θεώρημα 5.65 της Μέσης τιμής του Cauchy, υπάρχει ξ_x με $\alpha < x_1 < \xi_x < x < \alpha + \delta$, τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

ή από την (1')

$$\ell - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} < \ell + \frac{\epsilon}{2}.$$

Παίρνοντας τα όρια ότα $x_1 \to \alpha+$ έχουμε:

$$\ell - \epsilon < \ell - \frac{\epsilon}{2} \le \frac{f(x)}{g(x)} \le \ell + \frac{\epsilon}{2} < \ell + \epsilon$$

και συνεπώς $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

3. Ακόμα η υπόθεση της συνέχειας στο Θεώρημα 5.72 μπορεί να παραληφθεί. Τότε αν $\lim_{x\to\alpha+} f(x) = 0 = \lim_{x\to\alpha+} g(x)$ και οι f και g δεν ορίζονται στο α, όσα είπαμε στην απόδειξη τα εφαρμόζουμε στις συνεχείς συναρτήσεις F και G που ορίζονται:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (\alpha, \beta) \\ \lim_{x\to\alpha+} f(x), & x = \alpha \end{cases}$$

και

$$G(x) = \begin{cases} g(x), & x \in (\alpha, \beta) \\ \lim_{x\to\alpha+} g(x), & x = \alpha \end{cases}$$

4. Ακόμα παρατηρούμε ότι δεν βάλαμε την υπόθεση $g(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$, αφού αυτή προκύπτει από την $g'(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$. Αν ήταν $g(y) = 0$ για κάποιο $y \in (\alpha, \beta)$ τότε αφού και $g(\alpha) = 0$, από το Θεώρημα του Rolle η παράγωγος θα μηδενιζόταν στο (α, β), άτοπο.

Παράδειγμα 5.74

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\cos x = 0$ (μηδενική επί φραγμένη).

Το Θεώρημα 5.71 δεν εφαρμόζεται εδώ γιατί η $\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 5.75

Έστω f και $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

και $g(x) = sinx$.

Τότε $f(0) = g(0) = 0$ και

$$f'(x) = \begin{cases} 2x sin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$g'(x) = cosx$. Είναι $g'(x) \neq 0, \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Άρα από το Θεώρημα 5.71 έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Το θεώρημα όμως 5.72 δεν εφαρμόζεται, αφού το $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει. Παρατηρούμε όμως ότι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 sin\frac{1}{x}}{sinx} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{sinx} . x sin\frac{1}{x} = 0.$$

Αυτό δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Δηλαδή αν υπάρχει το $\lim_{x \to \alpha+} \frac{f(x)}{g(x)}$ δεν συνεπάγεται ότι θα υπάρχει και το $\lim_{x \to \alpha+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Τα παραπάνω θεωρήματα λοιπόν, όπως και αυτά που θα ακολουθήσουν για τις απροσδιόριστες μορφές, δίνουν ικανές συνθήκες για την ύπαρξη του ορίου, αλλά όχι και αναγκαίες.

Τα Θεωρήματα 5.71 και 5.72 αφορούν την περίπτωση που είχαμε όριο στο α από δεξιά. Τα ίδια προφανώς ισχύουν και στην περίπτωση του ορίου στο β από αριστερά. Συνδιασμός και των δυο συνεπάγεται την ισχύ των θεωρημάτων για οποιοδήποτε $\xi \in (\alpha, \beta)$ ή για οποιοδήποτε $\xi \in \Delta$ όπου Δ ένα διάστημα που ορίζονται οι f και g και ξ σημείο συσσωρεύσεως του Δ. Θα επεκτείνουμε τώρα τα συμπεράσματα στην περίπτωση ορίων στο άπειρο.

Θεώρημα 5.76 Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \infty)$ με $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ και $g'(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \infty)$. Τότε

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αν το τελευταίο όριο υπάρχει.

Απόδειξη

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{1}{x}$ και θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$F(t) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{t}\right), & 0 < t \leq \frac{1}{\alpha} \\ 0, & t = 0 \end{cases} \quad G(t) = \begin{cases} g\left(\frac{1}{t}\right), & 0 < t \leq \frac{1}{\alpha} \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε τότε ότι:

$$\lim_{t \to 0+} F(t) = \lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{t \to 0+} G(t) = \lim_{x \to \infty} g(x).$$

Επειδή $F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)$ και $G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)$ για $0 < t < \frac{1}{\alpha}$ από το Θεώρημα 5.72, εφαρμοζόμενο στις F και G, έχουμε:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \bullet$$

Παρατήρηση 5.77

Αν $g'(x) = 0$ για κάποιο $x \in (\alpha, \beta)$ και γι'αυτό το x είναι και $f'(x) = 0$, τότε το πηλίκο $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Σ'αυτήν την περίπτωση εφαρμόζουμε πάλι τα θεωρήματα που είπαμε. Γενικά έχουμε το ακόλουθο

Πόρισμα: Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ν-φορές παραγωγίσιμες στο διάστημα (α, β) με $\mathbf{g^{(k)}(x) \neq 0}$, $\forall \mathbf{x} \in (\alpha, \beta)$, $\mathbf{k = 1, 2, \ldots \nu}$ και $\lim_{x \to \alpha+} \mathbf{f(x)} = \lim_{x \to \alpha+} \mathbf{f'(x)} = \ldots = \lim_{x \to \alpha+} \mathbf{f^{(\nu-1)}(x)} = \mathbf{0}$,
$\lim_{x \to \alpha+} \mathbf{g(x)} = \lim_{x \to \alpha+} \mathbf{g'(x)} = \ldots = \lim_{x \to \alpha+} \mathbf{g^{(\nu-1)}(x)} = \mathbf{0}$, τότε:

$$\lim_{x \to \alpha+} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \lim_{x \to \alpha+} \frac{\mathbf{f^{(\nu)}(x)}}{\mathbf{g^{(\nu)}(x)}}$$

στην περίπτωση που το τελευταίο όριο υπάρχει.

Παράδειγμα 5.78

Είναι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^x - \log(1+x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{xe^x + e^x - \frac{1}{1+x}}{2x} \quad \left(\text{Μορφή } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{xe^x + 2e^x + \frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$

Αν $\lim_{x\to\alpha+} f(x) = +\infty = \lim_{x\to\alpha+} g(x)$ τότε το $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$. Για μια τέτοια περίπτωση έχουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 5.79 *Έστω* **f** *και* **g** *δυο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο διάστημα* (α, β) *με* $g'(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ *και* $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbf{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$. *Αν* $\lim_{x\to\alpha+} g(x) = +\infty$ *τότε και* $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Απόδειξη

Επειδή $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ (θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που $\ell \in \mathbb{R}$ αφήνοντας τις υπόλοιπες για άσκηση) για κάθε $\epsilon > 0, 0 < \epsilon < 1$ θα υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για $\alpha < x < \alpha + \delta$ να έχουμε:

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \epsilon.$$

Παίρνουμε ένα σταθερό $x_0 \in (\alpha, \alpha + \delta)$ και τυχαίο $x \in (\alpha, x_0)$ δηλ. $\alpha < x < x_0 < \alpha + \delta$.

Επειδή $\lim_{x\to\alpha+} g(x) = +\infty$ υπάρχει θετικός αριθμός $\delta_1 \leq \delta$ τέτοιος ώστε $g(x) > 0$ και $g(x) > g(x_0), \forall x \in (\alpha, \alpha+\delta_1)$. (Γιατί αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \alpha + \delta_1)$ τέτοιο ώστε $g(x_1) \leq g(x_0)$ τότε αφού $\lim_{x\to\alpha+} g(x) = +\infty$ υπάρχει $x_2 < x_1$ τέτοιο ώστε: $g(x_2) \geq g(x_0)$. Από το θεώρημα της Ενδιάμεσης τιμής τότε υπάρχει c με $\alpha < x_2 \leq c \leq x_1$ τέτοιο ώστε $g(c) = g(x_0)$. Τότε όμως από το Θεώρημα του Rolle θα υπάρχει d με $c < d < \beta$ και $g'(d) = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $g'(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$.) Από το Θεώρημα 5.65 της Μέσης τιμής του Cauchy, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha + \delta_1)$ τέτοιο ώστε:

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - \ell\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell\right| < \epsilon$$

ή

$$(\ell - \epsilon)\{g(x) - g(x_0)\} + f(x_0) < f(x) < (\ell + \epsilon)\{g(x) - g(x_0)\} + f(x_0)$$

από την οποία διαιρώντας με g(x) παίρνουμε:

$$(\ell - \epsilon)\left\{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right\} + \frac{f(x_0)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < (\ell + \epsilon)\left\{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right\} + \frac{f(x_0)}{g(x)}.$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε ότι:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| \leq \epsilon + (|\ell| + \epsilon)\left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right| \qquad (1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επειδή x_0 σταθερό και $\lim_{x\to\alpha+} g(x) = +\infty$ είναι:

$$\lim_{x\to\alpha+} \frac{g(x_0)}{g(x)} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x_0)}{g(x)} = 0.$$

Συνεπώς υπάρχει $\delta_2 > 0$, $\delta_2 < \delta_1$ τέτοιος ώστε:

$$\left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right| < \epsilon \quad \text{και} \quad \left|\frac{f(x_0)}{f(x)}\right| < \epsilon.$$

Τότε η (1) δίνει:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| \leq \epsilon + (|\ell| + \epsilon)\epsilon + \epsilon = 2\epsilon + |\ell|\epsilon + \epsilon^2 < (|\ell| + 3)\epsilon$$

για όλα τα x με $\alpha < x < \delta_2 + \alpha$. Αφού το $\epsilon > 0$ είναι αυθαίρετο συμπεραίνουμε ότι: $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. •

Παρατήρηση 5.80

Αξίζει να επισημάνουμε ότι το σημαντικό στο παραπάνω θεώρημα είναι ότι απαιτούμε μόνο $\lim_{x\to\alpha+} g(x) = +\infty$ και όχι και $\lim_{x\to\alpha+} f(x) = +\infty$. Αν είναι και $\lim_{x\to\alpha+} f(x) = +\infty$ τότε το $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)}{g(x)}$ μπορεί να αναχθεί στην περίπτωση $\frac{0}{0}$, αν γράψουμε $\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha+} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ με την προϋπόθεση ότι το τελευταίο πηλίκο έχει έννοια.

Παράδειγμα 5.81

Αν $\alpha > 0$, τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

Με λόγια, **η δύναμη x^α, $\alpha > 0$ πηγαίνει στο άπειρο πολύ πιο "γρήγορα" από τον $\log x$, και αυτό αδιάφορο αν το α είναι μικρό, ή ισοδύναμα ο $\log x$ απειρίζεται πιο "αργά" από το x^α.**

γ) Άλλες απροσδιόριστες μορφές

1) Μορφή $\infty - \infty$. Αυτή ανάγεται στην μορφή $\frac{0}{0}$ αν γράψουμε $f - g = (\frac{1}{g} - \frac{1}{f}) : \frac{1}{fg}$. Μπορεί επίσης να αναχθεί και στην μορφή $\frac{\infty}{\infty}$.

Παράδειγμα 5.82

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{sin^2x}\right)$ Είναι της μορφής $\infty-\infty$ Άρα το γράφουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{sin^2x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{sin^2x-x^2}{x^2.sin^2x} \quad (\text{Μορφή } \frac{0}{0})\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{sin2x-2x}{2xsin^2x+x^2sin2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{cos2x-1}{sin^2x+2xsin2x+x^2cos2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-cos2x}{3cos2x-4xsinx-x^2cos2x}=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

2) Μορφή $0.\infty$. Ανάγεται στην μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ αντίστοιχα αν γράψουμε

$$f(x).g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{ή} \quad f(x).g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Παράδειγμα 5.83

Είναι $\lim_{x\to 0+}(x^\alpha logx)=0, \alpha>0$. Πραγματικά· στο διάστημα $I=(0,+\infty)$ είναι $\lim_{x\to 0+}x^\alpha=0$ και $\lim_{x\to 0+}logx=-\infty$. Άρα το ζητούμενο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $0.(-\infty)$ και συνεπώς:

$$\lim_{x\to 0+}(x^\alpha logx)=\lim_{x\to 0+}\frac{logx}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^{-1}}{\alpha x^{-\alpha-1}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^\alpha}{-\alpha}=0.$$

3) Μορφές $0^0, 1^\infty, \infty^0$. Έστω $y=f(x)^{g(x)}$ με $f(x)>0$ σε μια περιοχή του σημείου στο οποίο ζητούμε το όριο της f. Τότε έχουμε $\lim_{x\to 0+}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to 0+}g(x)logf(x)}$ αφού η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής. Έτσι αναγόμαστε στην απροσδιόριστη μορφή $0.\infty$ που εμφανίζεται στον εκθέτη. Οι μέθοδοι θα αναλυθούν στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 5.84

Ας υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0+}(x^2)^x$ που είναι απροσδιόριστη μορφή 0^0. Επειδή $(x^2)^x=e^{xlogx^2}=e^{2xlog|x|}$ και η εκθετική συνάρτηση e^y είναι συνεχής στο 0, από το παράδειγμα 5.83 έχουμε:

$$\lim_{x\to 0+}(x^2)^x=e^{\lim_{x\to 0+}2xlog|x|}=e^0=1.$$

Παράδειγμα 5.85

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Αυτό είναι απροσδιόριστη μορφή 1^∞. Επειδή

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

και

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}(-x)^{-2})}{-x^{-2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1\end{aligned}$$

από την συνέχεια της e^y για $y=1$, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Παράδειγμα 5.86

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}\right)^{\sin x}$$

που είναι της μορφής ∞^0. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}\right)^{\sin x} &= e^{\lim_{x\to 0}\sin x.\log(1-\cos x)}\\ &= e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\log(1-\cos x)}{1/\sin x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)^{-1}}\\ &= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}.\frac{1}{\cos x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}}\\ &= e^{\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x\cos x}{\sin x}} = e^{3\lim_{x\to 0}\sin x.\cos x} = e^0 = 1\end{aligned}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^\alpha.e^{-x}) = 0, \forall\alpha\in\mathbf{R}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

α) Αν το $\alpha < 0$ τότε $\lim_{x\to+\infty}(x^{\alpha}.e^{-x}) = 0.0 = 0$.

β) Αν $\alpha = 0$ τότε $\lim_{x\to+\infty}(x^{\alpha}.e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

γ) Έστω $\alpha > 0$. Τότε είναι απροσδιόριστη μορφή $\infty.0$ που ανάγεται στην μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ γράφοντας $x^{\alpha}.e^{-x} = \frac{x^{\alpha}}{e^{x}}$.

γ_1) Υποθέτουμε πρώτα ότι $\alpha \in \mathbb{N}$ Τότε με ν διαδοχικές εφαρμογές του κανόνα του L'Hospital έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{e^{x}} = \ldots = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha!}{e^{x}} = 0.$$

γ_2) Έστω τώρα ότι $\alpha = m - \theta$ όπου m θετικός ακέραιος και $0 < \theta < 1$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{m}}{e^{x}}.\frac{1}{x^{\theta}} = 0.0 = 0.$$

Συνεπώς $\lim_{x\to+\infty}(x^{\alpha}.e^{-x}) = 0, \alpha \in \mathbb{R}$ και με λόγια **η εκθετική συνάρτηση e^{x} απειρίζεται πολύ πιο "γρήγορα" από την δύναμη x^{α}, αδιάφορο από το πόσο μεγάλο είναι το $\alpha > 0$.**

2. Δίνεται η συνάρτηση (γνωστή ως "συνάρτηση του Cauchy")

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} e^{-(1/x^2)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{f^{(\nu)}(x) = \frac{P_{\nu}(x)}{x^{3\nu}} e^{-(1/x^2)}, \; x \neq 0}$$

όπου $\mathbf{P_{\nu}}$ πολυώνυμο βαθμού $2\nu - 2$. Επίσης να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{P_{\nu+1}(x) = x^3 P'_{\nu}(x) + (2 - 3\nu x^2) P_{\nu}(x).}$$

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει παραγώγους κάθε τάξης στο 0 και $\mathbf{f^{(\nu)}(0) = 0, \forall \nu \in \mathbb{N}}$.

Απόδειξη

α) Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Για $\nu = 1$ έχουμε: $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-(1/x^2)}$ με $P_1(x) = 2$ βαθμού $2.1 - 2 = 0$. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει για ν τότε:

$$\begin{aligned} f^{(\nu+1)}(x) &= \frac{\left\{P'_{\nu}(x)e^{-(1/x^2)} + P_{\nu}(x)e^{-(1/x^2)}\frac{2}{x^3}\right\}x^{3\nu} - P_{\nu}(x)e^{-(1/x^2)}3x^{3\nu-1}}{x^{6\nu}} \\ &= \frac{x^3 P'_{\nu}(x) + (2 - 3\nu x^2) P_{\nu}(x)}{x^{3(\nu+1)}} e^{-(1/x^2)} \end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή ισχύει και για $\nu+1$. Προφανώς $P_{\nu+1}(x) = x^3 P'_\nu(x) + (2-3\nu x^2)P_\nu(x)$.

β) Είναι:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-(1/x^2)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{v}{e^{v^2}} \quad \text{θέτοντας} \quad v = \frac{1}{x}$$
$$= 1 \quad \text{από την εφαρμογή 1.}$$

Επίσης

$$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2v^4}{e^{v^2}} = 0$$

και γενικά σύμφωνα με το α), υποθέτοντας ότι $f^{(\nu)}(0) = 0$ έχουμε:

$$f^{(\nu+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(\nu)}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{P_\nu\left(\frac{1}{v}\right)v^{3\nu+1}}{e^{v^2}} = 0.$$

3. Να βρεθούν οι σταθερές α και β ώστε το

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\alpha\cos x)-\beta\sin x}{x^3}$$

να ισούται με 1.

Λύση

Έστω $f(x) = x(1-\alpha\cos x) - \beta\sin x$ και $g(x) = x^3$. Τότε το ζητούμενο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Επειδή $g'(x) = 3x^2, g''(x) = 6x$ και $g'''(x) = 6$ για να υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ πρέπει να εφαρμόζεται ο κανόνας του L'Hospital, δηλαδή πρέπει: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ και $f'''(0) = 6$. Από τις σχέσεις αυτές παίρνουμε: $1+\alpha-\beta = 0$ και $-3\alpha+\beta = 6$, οπότε $\alpha = -\frac{5}{2}$ και $\beta = -\frac{3}{2}$.

4. Να αποδείξετε ότι $lim\frac{log\nu}{\nu} = 0$.

Απόδειξη

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{logx}{x}, x \geq 1$ της οποίας ο περιορισμός στο $\mathbb{N}$ είναι η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{log\nu}{\nu}$. Είναι όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{logx}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και συνεπώς και $lim\alpha_\nu = 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.74 Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in Q \\ 0, & x \in (\mathbb{R} - Q) \end{cases}, \qquad g(x) = sinx, x \in \mathbb{R}.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.71 να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Να εξηγήσετε γιατί το Θεώρημα 5.72 δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

5.75 Να αποδείξετε ότι τα όρια

$$\alpha) \lim_{x\to 0} \frac{x^2 sin\frac{1}{x}}{sinx} \quad \beta) \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 sin\frac{1}{x}}{tgx}$$

υπάρχουν, αλλά ούτε το Θεώρημα 5.71 ούτε το 5.72 εφαρμόζονται. Να εξηγήσετε το φαινόμενο.

5.76 Έστω $f(x) = e^{-2x}(cosx + 2sinx), x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^{-x}(sinx + cosx), x \in \mathbb{R}$. Τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} g(x)$. Να αποδείξετε ότι ενώ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$ το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ δεν υπάρχει. Αντιφάσκει αυτό με το Θεώρημα 5.76; Να δώσετε εξηγήσεις.

5.77 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$\alpha)$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{tgx-1}{Arcsin(tgx)-\frac{\pi}{4}}$ $\beta)$ $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+logx}$

$\gamma)$ $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{logx} - \frac{\alpha}{x^\alpha - 1}\right), \alpha \in \mathbb{R}$ $\delta)$ $\lim_{x\to+\infty}\left(x - x^2 log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$

$\epsilon)$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - Arctgx\right)^{1/logx}$ $\sigma\tau)$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx.log\frac{2-\pi+2x}{2}\right)$

$\zeta)$ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\right)^{1/(1-cosx)}$ $\eta)$ $\lim_{x\to\alpha}\left(2 - \frac{x}{\alpha}\right)^{tg(\pi x/2\alpha)}$

$\theta)$ $\lim_{x\to 1}(1 - x^2)^{1/log(1-x)}$ $\iota)$ $\lim_{x\to 0}\left(ctg^2 x - \frac{1}{x^2}\right)$

5.78 Για ποιές τιμές των σταθερών α και β οι συναρτήσεις: $f(x) = x^{-2}(e^{\alpha x} - e^x - x), x \neq 0$ και $g(x) = x^{-4}(1 + \alpha cos2x + \beta cos4x), x \neq 0$ έχουν πεπερασμένα όρια όταν $x \to 0$;

5.79 Για ποια τιμή της σταθερής k, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(1+x)} - \frac{log(1+x)}{x^2}, & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty) \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, 2]$;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.80 Έστω f συνεχής στο $[\alpha, +\infty)$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha, +\infty)$ με $f'(x) \neq 0, \forall x > \alpha$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > f(\alpha), \forall x > \alpha$.

β) Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και $f(x) > 0, \forall x > \alpha$ τότε $f'(x) < 0, \forall x > \alpha$.

§ 5.11 ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ TAYLOR

Μια πολύ χρήσιμη τεχνική στην μελέτη των συναρτήσεων στην Ανάλυση είναι η προσέγγιση των συναρτήσεων από πολυώνυμα. Σ' αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε ένα βασικό θεώρημα προς αυτήν την κατεύθυνση που οφείλεται στον Taylor. Το θεώρημα του Taylor, όπως θα δούμε και σε επόμενες παραγράφους, έχει πολλές εφαρμογές. Είναι ένα πολύ ισχυρό συμπέρασμα.

Το θεώρημα του Taylor είναι μια γενίκευση του θεωρήματος Μέσης τιμής σε παραγώγους ανώτερης τάξης. Έτσι ενώ το θεώρημα Μέσης τιμής συσχετίζει τις τιμές της συνάρτησης και της παραγώγου της, το θεώρημα του Taylor συσχετίζει τις τιμές της συνάρτησης με τις παραγώγους ανώτερης τάξης.

Έστω μια συνάρτηση f που έχει παραγώγους ν-τάξης σε ένα σημείο α. Ας αντιμετωπίσουμε το εξής πρόβλημα:

Να βρεθεί ένα πολυώνυμο ν-οστού βαθμού

$$\mathbf{P_\nu(x) = A_0 + A_1(x-\alpha) + A_2(x-\alpha)^2 + \ldots + A_\nu(x-\alpha)^\nu} \qquad (1)$$

τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{P_\nu(\alpha) = f(\alpha), P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha), k = 1, 2, \ldots, \nu} \qquad (2)$$

Η παράσταση (1) λέγεται ανάπτυγμα του πολυωνύμου $P_\nu(x)$ κατά τις δυνάμεις του $x - \alpha$. Παραγωγίζοντας διαδοχικά την (1) έχουμε:

$$P'_\nu(x) = A_1 + 2A_2(x-\alpha) + 3A_3(x-\alpha)^2 + \ldots$$

$$P''_\nu(x) = 2A_2 + 3.2A_3(x-\alpha) + 4.3A_4(x-\alpha)^2 + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$P^{(k)}(x) = k!\,A_k + (k+1)k\ldots 2A_{k+1}(x-\alpha) + \ldots$$

Θέτοντας $x = \alpha$ στην τελευταία σχέση έχουμε: $P^{(k)}(\alpha) = k!A_k, k = 1, 2, \ldots, \nu$. Αφού $P_\nu(\alpha) = A_0$, θέτοντας $P^{(0)}(\alpha) = P_\nu(\alpha)$ και $0! = 1$ έχουμε με βάση και τις (2) ότι:

$$A_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}, k = 0, 1, \ldots, \nu.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έτσι το ζητούμενο πολυώνυμο είναι

$$P_\nu(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu \quad (3)$$

Ο τύπος (3) λέγεται "**τύπος του Taylor για το $P_\nu(x)$ στο σημείο α**". Αν η f είναι πολυώνυμο και αυτή ν-οστού βαθμού τότε $f(x) - P_\nu(x) = F(x)$ είναι ένα πολυώνυμο για το οποίο $F(\alpha) = F'(\alpha) = \ldots = F^{(\nu)}(\alpha) = 0$. Συνεπώς αν η F τεθεί στην μορφή (1) όλοι οι συντελεστές μηδενίζονται και άρα $F(x) = 0$ ή $P_\nu(x) = f(x)$. Αν όμως η f δεν είναι πολυώνυμο τότε για να ορίσουμε καλύτερα το προσεγγιστικό πολυώνυμο, είναι αναγκαίο να έχουμε πληροφορίες σχετικά με το υπόλοιπο $R_\nu(x) = f(x) - P_\nu(x)$. Τέτοιες πληροφορίες μας δίνει το επόμενο βασικό

Θεώρημα 5.87. (Τύπος του Taylor): Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε η $f^{(\nu-1)}(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και η $f^{(\nu)}(x)$ υπάρχει στο (α, β). Αν $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τότε για οποιοδήποτε $x \in [\alpha, \beta]$ υπάρχει ένας αριθμός ξ μεταξύ των x και x_0 τέτοιος ώστε:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots$$

$$+\frac{(x-x_0)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu-1)}(x_0) + R_\nu(x)$$

όπου

$$R_\nu(x) = \frac{(x-\xi)^{\nu-p}.(x-x_0)^p}{p(\nu-1)!}f^{(\nu)}(\xi) \quad \text{και} \quad p \quad \text{θετικός ακέραιος.}$$

Απόδειξη

Πρώτα απ' όλα παρατηρούμε ότι η συνέχεια της $f^{(\nu-1)}(x)$ συνεπάγεται την ύπαρξη όλων των παραγώγων $f', f'', \ldots, f^{(\nu-1)}$ και την συνέχειά τους στο $[\alpha, \beta]$. Ας ονομάσουμε J το κλειστό διάστημα με άκρα x και x_0. (Αυτό επειδή δεν ξέρουμε πιο από τα δυο είναι μεγαλύτερο). Θεωρούμε την συνάρτηση $\phi : J \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(t) = f(t) + (x-t)f'(t) + \ldots + \frac{(x-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu-1)}(t) + A(x-t)^p$$

όπου A μια σταθερή, την οποία διαλέγουμε έτσι ώστε $\phi(x) = \phi(x_0)$. Έχουμε:

$\phi(x) = f(x)$

$\phi(x_0) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu-1)}(x_0) + A(x-x_0)^p$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

από τις οποίες παίρνουμε ότι:

$$R_\nu(x) = A(x - x_0)^p. \qquad (\star)$$

Επειδή οι $f, f', \ldots, f^{(\nu-1)}$ είναι όλες συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση ϕ είναι επίσης συνεχής στο J. Επίσης επειδή οι $f, f', \ldots, f^{(\nu-1)}$ και $(x-t)^p$ είναι παραγωγίσιμες στο (α, β) και η συνάρτηση ϕ είναι παραγωγίσιμη στο J. Αφού και $\phi(x) = \phi(x_0)$, από το θεώρημα του Rolle υπάρχει ένα ξ μεταξύ των x και x_0 τέτοιο ώστε: $\phi'(\xi) = 0$. Αλλά

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= f'(t) + \{-f'(t) + (x-t)f''(t)\} + \{-(x-t)f''(t) \\ &+ \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)\} + \ldots + \left\{-\frac{(x-t)^{\nu-2}}{(\nu-2)!}f^{(\nu-1)}(t)\right. \\ &+ \left.\frac{(x-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu)}(t)\right\} - Ap(x-t)^{p-1}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος κάθε παρένθεσης απλοποιείται με τον προηγούμενο, οπότε:

$$0 = \phi'(\xi) = \frac{(x-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu)}(\xi) - Ap(x-\xi)^{p-1}.$$

Συνεπώς $A = \frac{(x-\xi)^{\nu-p}}{p(\nu-1)!}f^{(\nu)}(\xi)$ και η $(\star)$ δίνει

$$R_\nu(x) = \frac{(x-\xi)^{\nu-p}}{p(\nu-1)!}(x-x_0)^p f^{(\nu)}(\xi)$$

που αποδεικνύει και το θεώρημα. •

Παρατήρηση 5.88

Το $R_\nu(x)$ στο παραπάνω θεώρημα λέγεται **"υπόλοιπο κατά Schlomilch και Roche"**. Ειδικά:

• για $p = 1$ έχουμε:

$$R_\nu(x) = \frac{(x-x_0)(x-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu)}(\xi)$$

που λέγεται **"υπόλοιπο κατά Cauchy"**.

• για $p = \nu$ έχουμε:

$$R_\nu(x) = \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(\xi)$$

που λέγεται **"υπόλοιπο κατά Lagrange"**.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατήρηση 5.89

Θέτοντας $x_0 = 0$ στο Θεώρημα 5.87 έχουμε:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \ldots + \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu-1)}(0) + R_\nu(x)$$

που λέγεται "**τύπος του Mac- Laurin**". Το R_ν τότε θα έχει τις μορφές:

1) $R_\nu(x) = \frac{(x-\xi)^{\nu-p}x^p}{p(\nu-1)!}f^{(\nu)}(\xi)$ (Schlomilch και Roche)

2) $R_\nu(x) = \frac{x(x-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu)}(\xi)$ (Cauchy)

3) $R_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(\xi)$ (Langrange).

Επειδή κάθε αριθμός ξ μεταξύ 0 και x μπορεί να πάρει την μορφή $\xi = \theta x$ με $0 < \theta < 1$, οι παραπάνω τύποι που δίνουν τα υπόλοιπα, παίρνουν τις παρακάτω μορφές, χρήσιμες στις εφαρμογές:

1*) $R_\nu(x) = \frac{x^\nu(1-\theta)^{\nu-p}}{p(\nu-1)!}f^{(\nu)}(\theta x), 0 < \theta < 1$

2*) $R_\nu(x) = \frac{x^\nu(1-\theta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu)}(\theta x), 0 < \theta < 1$

3*) $R_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu!}.f^{(\nu)}(\theta x), 0 < \theta < 1$

Παρατήρηση 5.90

Είπαμε στην αρχή της παραγράφου ότι ο τύπος του Taylor είναι γενίκευση του θεωρήματος Μέσης τιμής και γι' αυτό φέρνει και την ονομασία "**Γενικό θεώρημα Μέσης τιμής**". Στην ειδική περίπτωση δηλ. $\nu = 1$ ο τύπος του Taylor είναι το θεώρημα Μέσης τιμής. Μπορεί ο τύπος του Taylor να εξαχθεί και από το θεώρημα Μέσης τιμής (βλέπε εφαρμογή 1 παρακάτω).

Παράδειγμα 5.91

Ας βρούμε ένα προσεγγιστικό πολυώνυμο για την συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{1+x}, x > -1$ με την βοήθεια του τύπου του Mac Laurin. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3},\ f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3},\ f'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}$$

οπότε $f'(0) = \frac{1}{3}$ και $f''(0) = -\frac{2}{9}$. Άρα

$$f(x) = P_2(x) + R_3(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + R_2(x)$$

όπου $R_3(x) = \frac{5}{81}(1+\xi)^{-8/3}.x^3$ για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x. Το R_3 είναι το σφάλμα που έχουμε κάνει στην προσέγιση

$$\sqrt[3]{1+x} \sim 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 5.92

Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε πόσους όρους πρέπει να πάρουμε στον τύπο του Mac Laurin για την συνάρτηση $f(x) = e^x$ ούτως ώστε να πάρουμε ένα προσεγγιστικό πολυώνυμο για αυτήν την συνάρτηση στο διάστημα $[-1, 1]$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Είναι $f^{(\nu)}(x) = e^x, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και άρα

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(\nu-1)}(0) = 1, f^{(\nu)}(\xi) = e^{\xi} = e^{\theta x}, 0 < \theta < 1.$$

Συνεπώς

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + R_\nu$$

όπου

$$R_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu!} e^{\theta x}.$$

Αφού $|x| \leq 1$ και $0 < \theta < 1$ είναι $|R_\nu(x)| = \frac{|x|^\nu}{\nu!} e^{\theta x} < \frac{1}{\nu!} e < \frac{3}{\nu!}$. Συνεπώς αν ικανοποιείται η ανισότητα $\frac{3}{\nu!} \leq 0,001$ τότε και $|R_\nu(x)| \leq 0,001$. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $\nu \geq 7$.

Αν η συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης σε μια περιοχή του σημείου x_0, δηλ. είναι απείρως παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x_0 τότε η σειρά

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \tag{1}$$

λέγεται **"σειρά του Taylor με κέντρο x_0"** ή **"δυναμοσειρά με κέντρο x_0"**. Η σειρά αυτή που παριστάνεται για συντομία με

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu$$

μπορεί, για δοσμένες τιμές των x_0 και x, να συγκλίνει ή να μην συγκλίνει. Η περίπτωση που η σειρά Taylor μιας συνάρτησης f συγκλίνει προς την ίδια την συνάρτηση είναι εξαιρετικού ενδιαφέροντος. Σ'αυτήν την περίπτωση το άθροισμα της σειράς ισούται με $f(x)$.

Η σειρά Taylor συγκλίνει προς την f, αν και μόνο αν, το υπόλοιπο του τύπου του Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_\nu(x) = S_\nu(x) + R_\nu(x) \tag{2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τείνει στο 0 όταν $\nu \to +\infty$. Πραγματικά· αν $limR_\nu(x) = 0$ τότε $limS_\nu(x) = f(x)$ από την (2) και αφού $S_\nu(x)$ είναι το άθροισμα των ν πρώτων όρων της σειράς (1), η σειρά συγκλίνει και έχει την $f(x)$ σαν άθροισμά της, δηλ.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots . \qquad (3)$$

Αντίστροφα, αν είναι γνωστό ότι ισχύει η (3) τότε $limS_\nu(x) = f(x)$ και η (2) δίνει: $limR_\nu(x) = 0$. Έτσι αποδείχτηκε το επόμενο

Θεώρημα 5.93 **Έστω ότι η συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης σε ένα διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Αν για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ το υπόλοιπο $R_\nu(x)$ του τύπου του Taylor τείνει στο μηδέν, τότε η συνάρτηση f αναπτύσσεται σ'αυτό το διάστημα σε μια δυναμοσειρά της μορφής**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots$$

Παρατήρηση 5.94

Τα προβλήματα που παρουσιάζονται εδώ είναι δυο ειδών:

α) Όταν ζητείται να γραφεί ο Τύπος του Taylor σε ένα σημείο και να εκφραστεί το υπόλοιπο $R_\nu(x)$ σε κάποια από τις τρείς μορφές, και

β) Όταν ζητείται να αναπτυχθεί μια συνάρτηση σε σειρά κατά Taylor ή Mac Laurin. Σ'αυτήν την περίπτωση πρέπει να γράψουμε τον τύπο του Taylor και να αποδείξουμε ότι $limR_\nu(x) = 0$. Το να αποδείξουμε ότι $limR_\nu(x) = 0$ δεν είναι πάντα πράγμα εύκολο. Αυτό υποδηλώνουν και οι πολλές μορφές που έχουμε για το υπόλοιπο. Ένα κριτήριο, για να είναι $limR_\nu(x) = 0$, δίνεται από το

Θεώρημα 5.95 **Έστω ότι η συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης σε ένα διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ οι παράγωγοι κάθε τάξης είναι φραγμένες από τον ίδιο αριθμό (είναι όπως λέμε ομοιόμορφα φραγμένες), τότε η συνάρτηση f αναπτύσσεται σε σειρά κατά Taylor με κάντρο το x_0.**

Απόδειξη

Έχουμε από την υπόθεση ότι:

$$(\forall \nu \in \mathbb{N})(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))|f^{(\nu)}(x)| \le M \qquad (1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.93 αρκεί να αποδείξουμε ότι η (1) συνεπάγεται την σχέση $lim R_\nu(x) = 0$. Παίρνοντας το υπόλοιπο του τύπου του Taylor κατά Lagrange, έχουμε:

$$0 \leq |R_\nu(x)| \leq \frac{|x - x_0|}{\nu!} M.$$

Επειδή $lim \frac{|x-x_0|^\nu}{\nu!} = 0$, έχουμε $lim R_\nu(x) = 0$. •

Ας εφαρμόσουμε τα προηγούμενα για να αναπτύξουμε σε σειρά κατά Mac Laurin τις βασικότερες συναρτήσεις.

1. Η εκθετική σειρά: Για κάθε $x \in IR$

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \ldots \qquad \textbf{(A)}}$$

Έστω $f(x) = e^x$. Τότε $f^{(\nu)}(x) = e^x$ και $f^{(\nu)}(0) = 1$. Συνεπώς

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + R_\nu(x)$$

όπου το κατά Lagrange υπόλοιπο $R_\nu(x)$ είναι: $R_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu!} e^{\theta x}$ με $0 < \theta < 1$. Επειδή το $e^{\theta x}$ βρίσκεται μεταξύ $e^0 = 1$ και e^x, το $e^{\theta x}$ είναι φραγμένο με φράγμα $max\{1, e^x\}$. Άρα από το θεώρημα 5.95 έχουμε $lim R_\nu(x) = 0$ και από το Θεώρημα 5.93 παίρνουμε το συμπέρασμα. Το ότι $lim R_\nu(x) = 0$ μπορεί να αποδειχτεί και ανεξάρτητα από το Θεώρημα 5.95. Πραγματικά· είναι $0 < R_\nu(x) < \frac{x^\nu e^x}{\nu!}$ αν $x > 0$ και $|R_\nu(x)| < \frac{|x|^\nu}{\nu!}$ αν $x < 0$. Επειδή $lim \frac{|x|^\nu}{\nu!} = 0$ (γιατί αν $\alpha_\nu = \frac{|x|^\nu}{\nu!}$ είναι $lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 0 < 1$) έχουμε ότι $lim R_\nu = 0$.

2. Οι σειρές ημιτόνου και συνημιτόνου: Για κάθε $x \in IR$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} \qquad \textbf{(B)}}$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} \qquad (\Gamma)}$$

Αν $f(x) = sinx$ τότε $f^{(\nu)}(x) = sin\left(x + \nu\frac{\pi}{2}\right)$ και

$$f^{(\nu)}(0) = sin\nu\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \nu = 2k \\ (-1)^{k-1}, & \nu = 2k-1 \end{cases}$$

Συνεπώς το ανάπτυγμα κατά Mac Laurin της f θα περιέχει μόνο περιττές

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δυνάμεις και άρα:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + R_{\nu}(x).$$

Αφού $|f^{(\nu)}(x)| \leq 1, \forall x \in I\!R$ από το Θεώρημα 5.95 έχουμε ότι $lim\, R_{\nu}(x) = 0$ (Είναι $|R_{\nu}(x)| \leq \frac{|x|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$).

Αν τώρα $g(x) = cosx$ τότε $g^{(\nu)}(x) = cos\left(x + \nu\frac{\pi}{2}\right)$ και

$$g^{(\nu)}(0) = cos\nu\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \nu = 2k-1 \\ (-1)^k, & \nu = 2k \end{cases}$$

Άρα

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu-2}}{(2\nu-2)!} + R_{\nu}(x).$$

Αφού πάλι $|g^{(\nu)}(x)| \leq 1, \forall x \in I\!R$ είναι $lim\, R_{\nu}(x) = 0$. Συνεπώς από το Θεώρημα 5.93 παίρνουμε τις (Β) και (Γ).

3. Η λογαριθμική σειρά: Για $-1 < x \leq 1$

$$\boxed{\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{x^{\nu}}{\nu} \qquad (\Delta)}$$

Έστω $f(x) = log(1+x)$. Τότε $f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{(1+x)^{\nu}}$, από το παράδειγμα 5.22 και $f^{(\nu)}(0) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!$. Άρα

$$log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{\nu-2}\frac{x^{\nu-1}}{\nu-1} + R_{\nu}(x)$$

όπου το υπόλοιπο $R_{\nu}(x)$ κατά Lagrange και κατά Cauchy είναι αντίστοιχα:

$R_{\nu}^{L}(x) = \frac{x^{\nu}}{\nu!}(-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{(1+\theta x)^{\nu}} = (-1)^{\nu-1}\frac{x^{\nu}}{\nu}\frac{1}{(1+\theta x)^{\nu}}$

$R_{\nu}^{C}(x) = \frac{x^{\nu}(1-\theta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}(-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{(1+\theta x)^{\nu}} = (-1)^{\nu-1}x^{\nu}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{\nu-1}\frac{1}{1+\theta x}.$

1η περίπτωση: $0 \leq x \leq 1$. Τότε $\frac{1}{1+\theta x} \leq 1$ και συνεπώς

$$|R_{\nu}^{L}(x)| = \frac{1}{\nu}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{\nu} \leq \frac{x^{\nu}}{\nu} \leq \frac{1}{\nu} \to 0$$

2η περίπτωση: $-1 < x < 0$. Τότε $\frac{1}{1+\theta x} > 1$ και το υπόλοιπο κατά Lagrange δεν εξυπηρετεί. Παίρνουμε το υπόλοιπο κατά Cauchy και θέτουμε $x = -x_1$. Τότε $0 < x_1 < 1$ και

$$|R_{\nu}^{C}(x)| = \frac{x_1^{\nu}}{1-\theta x_1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x_1}\right)^{\nu-1}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

Επειδή $0 < 1-\theta < 1-\theta x_1$ και $\frac{1}{1-\theta x} < \frac{1}{1-x_1}$ έχουμε:

$$|R_\nu^C(x)| = \frac{x_1^\nu}{1-\theta x_1} < \frac{x_1^\nu}{1-x_1} \to 0.$$

Άρα $\forall x \in (-1, 1)$ είναι $lim\, R_\nu(x) = 0$ και έτσι αποδείχτηκε η (Δ).

4. Η διωνυμική σειρά: Για $-1 < x < 1$

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-\nu+1)}{(\nu-1)!}x^\nu} \quad \textbf{(E)}$$

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+ = 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-\nu+1)}{(\nu-1)!}x^\nu \tag{E}$$

Έστω $f(x) = (1+x)^m$. Τότε $f^{(\nu)}(x) = m(m-1)\ldots(m-\nu+1)(1+x)^{m-\nu}$ και $f^{(\nu)}(0) = m(m-1)\ldots(m-\nu+1)$. Άρα

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-\nu+2)}{(\nu-1)!}x^{\nu-1}+R_\nu(x)$$

όπου

$R_\nu^L(x) = \frac{x^\nu}{\nu!}A_\nu(1+\theta x)^{m-\nu}, A_\nu = m(m-1)\ldots(m-\nu+1)$

$R_\nu^C(x) = \frac{x^\nu(1-\theta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}A_\nu(1+\theta x)^{m-\nu}.$

1η περίπτωση: $0 \le x < 1$. Τότε $\frac{1}{(1+\theta x)^{\nu-m}} \le 1$ αν $\nu > m$ και

$$R_\nu^L(x) = \frac{x^\nu}{\nu!}A_\nu\frac{1}{(1+\theta x)^{\nu-m}} \to 0$$

γιατί αν $\alpha_\nu = \frac{A_\nu}{\nu!}x^\nu$ τότε:

$$\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \left|\frac{m-\nu}{\nu+1}\right||x| \to |x| < 1.$$

2η περίπτωση: $-1 < x < 0$. Τότε $\frac{1}{1+\theta x} > 1$ και το υπόλοιπο κατά Lagrange δεν εξυπηρετεί. Παίρνουμε το υπόλοιπο κατά Cauchy

$$|R_\nu^C(x)| = \frac{x^\nu}{(\nu-1)!}A_\nu\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{\nu-1}(1+\theta x)^{m-1}.$$

Παρατηρούμε ότι αφού $-1 < x < 0$ είναι $0 < 1-\theta < 1+\theta x$ και συνεπώς $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$. Επίσης είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$(1+\theta x)^{m-1} < 1$ αν $m > 1$ και $(1+\theta x)^{m-1} < (1+x)^{m-1}$ αν $m < 1$.

Έτσι αν $M = max\{1, (1+x)^{m-1}\}$ έχουμε:

$$|R_\nu^C(x)| \leq \frac{x^\nu}{(\nu-1)!} A_\nu \left(\frac{1-\theta}{(1+\theta x)}\right)^{\nu-1} M \to 0$$

γιατί αν $\beta_\nu = \frac{x^\nu}{(\nu-1)!} A_\nu$ έχουμε $lim \left|\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}\right| = |x| < 1$, και $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{\nu-1} \to 0$. Άρα $\forall x \in (-1, 1)$ είναι $lim R_\nu(x) = 0$ που αποδεικνύει την (Ε).

Παρατήρηση 5.96

Μια συνάρτηση f της οποίας η σειρά κατά Taylor με κέντρο x_0 συγκλίνει προς την f σε μια περιοχή του σημείου x_0, λέγεται **"αναλυτική συνάρτηση"**. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις e^x, $sinx$ και $cosx$ είναι αναλυτικές για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενώ οι συναρτήσεις $log(1+x)$ και $(1+x)^m$ είναι αναλυτικές στο διάστημα $(-1, 1)$. Ας κάνουμε μια παρατήρηση ακόμα. Αν παραγωγίσουμε και τα δυο μέλη της (Β), παραγωγίζοντας την σειρά όρο προς όρο, παίρνουμε:

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

δηλαδή την (Γ). **Αυτή είναι μια πολύ χαρακτηριστική ιδιότητα των αναλυτικών συναρτήσεων, ότι η σειρά τους κατά Taylor μπορεί να παραγωγιστεί όρο προς όρο στο διάστημα σύγκλισής της.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχθεί ο τύπος του Taylor με υπόλοιπο κατά Caushy με την βοήθεια του θεωρήματος Μέσης τιμής.

Απόδειξη

Εξυπακούεται ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 5.87 ισχύουν. Θεωρούμε την συνάρτηση $F : J \to \mathbb{R}$ όπου J το κλειστό διάστημα με άκρα τα x και x_0, που ορίζεται ως εξής:

$$F(t) = f(t) + (x-t)f'(t) + \ldots + \frac{(x-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu-1)}(t).$$

Η F είναι συνεχής στο J ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα με άκρα x και x_0, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Συνεπώς από το θεώρημα Μέσης τιμής υπάρχει αριθμός ξ μεταξύ των x και x_0, τέτοιος ώστε:

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)F'(\xi). \qquad (1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αλλά (βλέπε και απόδειξη του Θεωρήματος 5.87)

$$F'(\xi) = \frac{(x-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu)}(\xi).$$

Επειδή

$F(x) = f(x)$

$F(x_0) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu-1)}(x_0)$

η (1) δίνει:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu-1)}(x_0)$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu)}(\xi).$$

2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός e είναι άρρητος.

Απόδειξη

Από την (Α) έχουμε:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \frac{x^\nu}{\nu!} e^{\theta x}, 0 < \theta < 1.$$

Για $x = 1$ παίρνουμε

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(\nu-1)!} + \frac{1}{\nu!} e^\theta, 0 < \theta < 1.$$

Για να αποδείξουμε ότι ο e είναι άρρητος, αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι p και q, τέτοιοι ώστε: $e = \frac{p}{q}$ δηλ.

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(\nu-1)!} + \frac{e^\theta}{\nu!} = \frac{p}{q} \quad \text{με} \quad \nu \geq q+1 \quad \text{και} \quad \nu \geq 3.$$

Πολλαπλασιάζοντας με το $(\nu-1)!$ έχουμε:

$$(\nu-1)!\frac{p}{q} - (\nu-1)!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(\nu-1)!}\right) = \frac{e^\theta}{\nu}.$$

Η σχέση όμως αυτή δεν αληθεύει, γιατί το πρώτο μέλος είναι ακέραιος, ενώ το δεύτερο όχι, αφού είναι $0 < \theta < 1 \Rightarrow e^0 < e^\theta < e \Rightarrow 1 < e^\theta < 3$, δηλ. $0 < \frac{e^\theta}{\nu} < 1$. Συνεπώς ο e είναι άρρητος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός θ που εμφανίζεται στον τύπο του Mac Laurin με υπόλοιπο κατά Lagrange έχει όριο στο 0 το $\frac{1}{\nu+1}$, αρκεί η $f^{(\nu+1)}(x)$ να είναι συνεχής και $f^{(\nu+1)}(0) \neq 0$.

Απόδειξη

Παίρνοντας τον τύπο του Mac Laurin για ν και $\nu+1$ όρους αντίστοιχα, έχουμε:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \ldots + \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu-1)}(0) + \frac{x^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(\theta x),\ 0 < \theta < 1$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \ldots + \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu-1)}(0) + \frac{x^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(0) + \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}f^{(\nu+1)}(\theta_1 x),\ 0 < \theta_1 < 1.$$

Εξισώνοντας τις δυο αυτές σχέσεις παίρνουμε:

$$\frac{x^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(\theta x) = \frac{x^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(0) + \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}f^{(\nu+1)}(\theta_1 x)$$

ή

$$f^{(\nu)}(\theta x) - f^{(\nu)}(0) = \frac{x}{\nu+1}f^{(\nu+1)}(\theta_1 x).$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Μέσης τιμής στο αριστερό μέλος έχουμε:

$$\theta x f^{(\nu+1)}(\theta_2 \theta x) = \frac{x}{\nu+1}f^{(\nu+1)}(\theta_1 x),\ 0 < \theta_2 < 1$$

ή

$$\theta = \frac{1}{\nu+1}\frac{f^{(\nu+1)}(\theta_1 x)}{f^{(\nu+1)}(\theta_2 \theta x)}.$$

Άρα $\lim_{x\to 0}\theta = \frac{1}{\nu+1}$ αφού $f^{(\nu+1)}(0) \neq 0$.

4. Αν η f'' υπάρχει στο διάστημα $[\alpha - h, \alpha + h]$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha - h, \alpha + h)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\alpha + h) + f(\alpha - h) - 2f(\alpha) = h^2 f''(\xi).$$

Απόδειξη

Αφού η f'' υπάρχει στο $[\alpha - h, \alpha + h]$ η f' και η f είναι συνεχείς στο $[\alpha - h, \alpha + h]$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = f(\alpha + x) + f(\alpha - x) - 2f(\alpha), G(x) = x^2, x \in [0, h].$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Από το θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy, επειδή $F(0) = G(0) = 0$ έχουμε ότι υπάρχει $\zeta \in (0, h)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{F(h)}{G(h)} = \frac{F'(\zeta)}{G'(\zeta)} = \frac{f'(\alpha+\zeta) - f'(\alpha-\zeta)}{2\zeta}.$$

Από το θεώρημα Μέσης τιμής για την f' έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha-h, \alpha+h)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\alpha+\zeta) - f'(\alpha-\zeta) = 2\zeta f''(\xi).$$

Συνεπώς

$$\frac{F(h)}{h^2} = f''(\xi) \quad \text{ή} \quad f(\alpha+h) + f(\alpha-h) - 2f(\alpha) = h^2 f''(\xi).$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι όταν $h \to 0$, τότε το $\xi \to \alpha$ και άρα

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h) + f(\alpha-h) - 2f(\alpha)}{h^2} = f''(\alpha)$$

αν η $f''(\alpha)$ υπάρχει. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει, δηλ. το όριο μπορεί να υπάρχει, χωρίς η f να έχει δεύτερη παράγωγο στο α. Π.χ. η $f(x) = x|x|$ στο $\alpha = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.81 Να γραφεί ο τύπος του Taylor για την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ στο σημείο $x_0 = 1$ με υπόλοιπο εκφρασμένο κατά Lagrange και κατά Cauchy.

5.82 Να αναπτυχθούν σε σειρά κατά Mac-Laurin οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}$ β) $f(x) = e^x \cos x, x \in \mathbb{R}$

γ) $f(x) = \frac{1}{1+x}, x \in (-1, 1)$ δ) $f(x) = \sqrt{1+x}, x \in (-1, 1)$

ε) $f(x) = \log(1+2x), x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

5.83 Με την βοήθεια του τύπου του Taylor, να αποδείξετε ότι:

α) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}, x > 0$

β) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 > 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{36}, 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

5.84 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots - \frac{1}{2k}x^{2k} < \log(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

§ 5.12 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης και θα δώσουμε μεθόδους για την εύρεσή των, με εφαρμογή του τύπου του Taylor.

Ορισμός 5.97 *Έστω* $\mathbf{f} : \mathcal{D} \to \mathbf{R}, \mathcal{D} \subseteq \mathbf{R}$. **Θα λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο (αντ. ελάχιστο) στο** $\alpha \in \mathcal{D}$, **αν και μόνον αν, υπάρχει ένα** $\delta > 0$ **τέτοιο ώστε** $\mathbf{f}(\alpha) \geq \mathbf{f}(\mathbf{x})$ **(αντ.** $\mathbf{f}(\alpha) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x})$**) για κάθε** $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\delta(\alpha) \cap \mathcal{D}$, **δηλ. για κάθε** $\mathbf{x} \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap \mathcal{D}$.

Ο πραγματικός αριθμός $f(\alpha)$ λέγεται τότε **τοπικό μέγιστο** (αντ. **ελάχιστο**) της f στη θέση $x = \alpha \in \mathcal{D}$. Το τοπικό μέγιστο και το τοπικό ελάχιστο της f λέγονται **τοπικά ακρότατα της** f. Έτσι σε ένα σημείο $\alpha \in \mathcal{D}$ που η f έχει τοπικό ακρότατο η διαφορά $f(x) - f(\alpha)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για όλα τα x στην περιοχή $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και το $\mathcal{D}$ είναι κλειστό διάστημα, έστω $\mathcal{D} = [A, B]$, τότε ξέρουμε από τα θεωρήματα για τις συνεχείς συναρτήσεις ότι υπάρχουν x_ϵ και x_μ στο $[A, B]$ τέτοια ώστε: $f(x_\epsilon) = minf(x), \forall x \in [A, B]$ και $f(x_\mu) = maxf(x), \forall x \in [A, B]$. Τότε είναι: $f(x_\epsilon) \leq f(x), \forall x \in [A, B]$ και $f(x_\mu) \geq f(x), \forall x \in [A, B]$. Η τιμή $f(x_\epsilon)$ που είναι μικρότερη από όλες τις τιμές της f για $x \in [A, B]$ λέγεται **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο** της f. Αντίστοιχα η $f(x_\mu)$ λέγεται **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο** της f.

Μια αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ακροτάτου δίνει το **Θεώρημα του Fermat** που ακολουθεί:

Θεώρημα 5.98 *Έστω ότι η* $\mathbf{f} : \mathcal{D} \to \mathbf{R}, \mathcal{D} \subseteq \mathbf{R}$, **παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο** $\alpha \in \mathcal{D}$, **όπου** α **εσωτερικό σημείο του** $\mathcal{D}$. **Τότε αν υπάρχει η** $\mathbf{f}'(\alpha)$, **αναγκαστικά θα πρέπει** $\mathbf{f}'(\alpha) = \mathbf{0}$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f'(\alpha) > 0$.Τότε από το Θεώρημα 5.36, υπάρχει $\epsilon > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) < f(\alpha)$ αν $x \in (\alpha - \epsilon, \alpha)$ και $f(x) > f(\alpha)$ αν $x \in (\alpha, \alpha + \epsilon)$. Αλλά τότε στο α η f δεν παρουσιάζει ακρότατο.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $f'(\alpha) < 0$, πάλι από το Θεώρημα 5.36, υπάρχει $\epsilon > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) > f(\alpha)$ αν $x \in (\alpha - \epsilon, \alpha)$ και $f(x) < f(\alpha)$ αν $x \in (\alpha, \alpha + \epsilon)$ οπότε η f δεν παρουσιάζει στο α ακρότατο. •

Παρατήρηση 5.99

Ο μηδενισμός της παραγώγου σε ένα σημείο του $\mathcal{D}$, έστω και εσωτερικό,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι το σημείο αυτό είναι και θέση ακροτάτου. Η συνθήκη $f'(\alpha) = 0$ είναι **αναγκαία** για την ύπαρξη ακροτάτου, όχι όμως και **ικανή**. Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(0) = 0$, αλλά στο 0 η f δεν παρουσιάζει ακρότατο, αφού η f είναι γνήσια αύξουσα.

Παρατήρηση 5.100

Η συνάρτηση f μπορεί να παρουσιάζει ακρότατο στο $\alpha \in \mathcal{D}$ αλλά η $f'(\alpha)$ να μην υπάρχει. Παράδειγμα η $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ που παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0, αφού $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ αλλά η $f'(0)$ δεν υπάρχει. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι στα σημεία που η παράγωγος δεν υπάρχει η f θα παρουσιάζει ακρότατο. Μπορεί να συμβεί σε ένα σημείο που η f δεν έχει παράγωγο να μην έχει και ακρότατο. Για παράδειγμα η $f(x) = x^{1/3}, x \in [-1, 1]$. Αυτή δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 (Παράδειγμα 5.53) αλλά στο 0 δεν έχει ούτε ακρότατο, αφού είναι γνήσια αύξουσα.

Παρατήρηση 5.101

Ο περιορισμός ότι το α είναι εσωτερικό σημείο του $\mathcal{D}$ δεν είναι ουσιώδης. Το Θεώρημα και η απόδειξη είναι τα ίδια αν υποθέσουμε ότι το α είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}$ και από αριστερά και από δεξιά. Αν όμως το α είναι σημείο συσσωρεύσεως από την μια μεριά- π.χ άκρο του διαστήματος- τότε τα πράγματα διαφέρουν. Αν το α είναι σημείο συσσωρεύσεως από αριστερά, τότε η ύπαρξη τοπικού μεγίστου στο α συνεπάγεται ότι $f'(\alpha) \geq 0$. Επίσης η ύπαρξη τοπικού ελαχίστου στο α συνεπάγεται ότι $f'(\alpha) \leq 0$. Ανάλογα ισχύουν και αν το α είναι σημείο συσσωρεύσεως από δεξιά.

Από τις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν έγινε φανερό ότι **πιθανά σημεία** στα οποία η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο είναι εκείνα για τα οποία:

α) Υπάρχει η παράγωγος και είναι μηδέν, και

β) Δεν υπάρχει η παράγωγος.

Τα σημεία αυτά λέγονται **κρίσιμα σημεία της** f.

Θα δώσουμε τώρα **ικανές συνθήκες** για την ύπαρξη τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα αρχίσουμε με ένα κριτήριο, γνωστό ως **κριτήριο της πρώτης παραγώγου.**

Θεώρημα 5.102 *Έστω* $\mathbf{f} : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ **μια συνεχής συνάρτηση και** $\mathbf{x_0}$ **ένα εσωτερικό σημείο του** $[\alpha, \beta]$. **Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στα** $(\alpha, \mathbf{x_0})$ **και** $(\mathbf{x_0}, \beta)$. **Τότε:**

(i) Αν υπάρχει μια περιοχή $(\mathbf{x_0} - \delta, \mathbf{x_0} + \delta) \subseteq [\alpha, \beta]$ **τέτοια ώστε** $\mathbf{f'(x) \geq 0}$ **για** $\mathbf{x_0} - \delta < \mathbf{x} < \mathbf{x_0}$ **και** $\mathbf{f'(x) \leq 0}$ **για** $x_0 < x < x_0 + \delta$ **τότε η f έχει τοπικό**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μέγιστο στο x_0.

(ii) Αν υπάρχει μια περιοχή $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε $f'(x) \leq 0$ για $x_0 - \delta < x < x_0$ και $f'(x) \geq 0$ για $x_0 < x < x_0 + \delta$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Απόδειξη

Ας αποδείξουμε μόνο την (i) μιας και η απόδειξη της (ii) είναι παρόμοια. Αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ από το θεώρημα Μέσης τιμής, υπάρχει $\xi_x \in (x, x_0)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) - f(x) = (x_0 - x)f'(\xi_x)$. Αφού $f'(\xi_x) \geq 0$ και $x_0 - x > 0$ έχουμε $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

Παρόμοια αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ τότε από το θεώρημα Μέσης τιμής υπάρχει $\zeta_x \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε: $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(\zeta_x)$. Αφού $f'(\zeta_x) \leq 0$ και $x - x_0 > 0$ έχουμε $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ θα παίρνει κάθε τιμή μεταξύ δυο οποιονδήποτε τιμών της. Συνεπώς $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0. •

Παράδειγμα 5.103

Ας βρούμε τα ακρότατα της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$$

ενώ η $f'(1)$ δεν υπάρχει, αφού

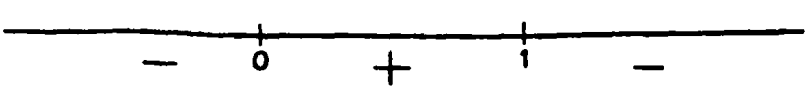
$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

και

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{2 - x - 1}{x - 1} = -1$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα 0 (που μηδενίζεται η παράγωγος) και 1 (που δεν υπάρχει η παράγωγος).

Παρατηρούμε ότι $f'(x) < 0$ για $x < 0$ και $f'(x) > 0$ για $0 < x < 1$. Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 συνεπάγεται ότι η f παρουσιάζει στο 0 τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$. Επίσης επειδή $f'(x) > 0$ για $0 < x < 1$ και $f'(x) < 0$ για $x > 1$ και η f είναι συνεχής στο 1 θα παρουσιάζει στο 1 τοπικό μέγιστο το $f(1) = 1$. Για το πρόσημο της f' μπορούμε να κάνουμε το παρακάτω σχήμα από το οποίο έχουμε τον ακόλουθο πρακτικό κανόνα:



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Όταν η παράγωγος μιας συνεχούς συναρτήσεως αλλάζει πρόσημο σε ένα σημείο από − σε + τότε παρουσιάζει σ'αυτό το σημείο τοπικό ελάχιστο, ενώ όταν αλλάζει από + σε − παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Αυτό σημαίνει ότι στα σημεία που παρουσιάζει ακρότατα αλλάζει η μονοτονία της συναρτήσεως.

Παρατήρηση 5.104

Η υπόθεση της συνέχειας στο Θεώρημα 5.102 δεν μπορεί να παραληφθεί. Π.χ. για την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

είναι $f'(x) = 2x, x \neq 0$ που είναι θετική για $x > 0$ και αρνητική για $x < 0$, αλλά στο 0 δεν παρουσιάζει ακρότατο, αφού στο 0 δεν είναι συνεχής.

Παρατήρηση 5.105

Το αντίστροφο του θεωρήματος 5.102 δεν ισχύει. Η αλλαγή του προσήμου της f' δεν είναι γενικά αναγκαίο κριτήριο για την ύπαρξη ακροτάτου. Για παράδειγμα αν η f ταλαντώνεται στην περιοχή του σημείου x_0 δεν μπορούμε να μιλάμε για αλλαγή προσήμου της $f'(x)$ όταν το x είναι κοντά στο x_0, αφού η f δεν είναι μονότονη στην περιοχή του x_0. Σε κάθε τέτοια περιοχή η f' έχει τιμές με διαφορετικό πρόσημο και την ίδια στιγμή στο x_0 μπορεί να παρουσιάζει ακρότατο. Ας δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.106

Έστω $f : IR \to IR$ με

$$f(x) = \begin{cases} \left(2 - sin\frac{1}{x}\right)|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι είναι $f(x) > 0, \forall x \neq 0$ και $f(0) = 0$, δηλ. $f(x) \geq f(0) = 0$. Συνεπώς η f παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο. Για $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = 2 - sin\frac{1}{x} + \frac{1}{x}cos\frac{1}{x}.$$

Τότε $f'\left(\frac{1}{2\pi\nu}\right) = 2 + 2\pi\nu > 0$ και $f'\left(\frac{1}{(2\nu+1)\pi}\right) = 2 - (2\nu\pi + \pi) < 0$ δηλ.

$$f'\left(\frac{1}{2\nu\pi}\right) \cdot f'\left(\frac{1}{(2\nu+1)\pi}\right) < 0$$

που σημαίνει ότι η f' αλλάζει πρόσημο σε μια δεξιά περιοχή του μηδενός. Το ίδιο συμβαίνει και για $x < 0$. Έτσι η f' παίρνει και από τις δυο μεριές του $x_0 = 0$ και θετικές και αρνητικές τιμές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Το Θεώρημα 5.102 εφαρμόζεται κυρίως για να εξετάσουμε τα ακρότατα μιας συναρτήσεως στα σημεία που δεν είναι παραγωγίσιμη. Αν η συνάρτηση έχει παραγώγους ανώτερης τάξης, τότε το παρακάτω κριτήριο είναι πολύ χρήσιμο.

Θεώρημα 5.107 (Κριτήριο ν-οστής παραγώγου). Έστω $f : I \to R$ όπου I ένα διάστημα και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του I. Υποθέτουμε ότι η $f^{(\nu)}$, $\nu \geq 2$ υπάρχει και είναι συνεχής σε μια περιοχή του x_0 και ακόμα ότι

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(\nu-1)}(x_0) = 0 \quad \text{αλλά} \quad f^{(\nu)}(x_0) \neq 0.$$

Τότε:

i) Αν ν άρτιος και $f^{(\nu)}(x_0) > 0$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

ii) Αν ν άρτιος και $f^{(\nu)}(x_0) < 0$ η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

iii) Αν ν περιττός η f δεν έχει ακρότατο στο x_0.

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε τον τύπο του Taylor στο x_0 και έχουμε για $x \in I$ ότι:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{\nu-1}}{(\nu - 1)!} f^{(\nu-1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu)}(\xi)$$

ή

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu)}(\xi) \tag{1}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των x_0 και x. Τον τύπο του Taylor παραπάνω τον πήραμε με υπόλοιπο κατά Lagrange. Αφού η $f^{(\nu)}$ είναι συνεχής σε μια περιοχή του x_0 και $f^{(\nu)}(x_0) \neq 0$, από το Θεώρημα 4.17 υπάρχει μια περιοχή $N_\delta(x_0)$ τέτοια ώστε $f^{(\nu)}(x) \neq 0$. Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f^{(\nu)}(x) \neq 0, \forall x \in N_\delta(x_0)$ ή $f^{(\nu)}(x) \neq 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Αν πάρουμε το x να ανήκει σ'αυτήν την περιοχή $N_\delta(x_0)$ τότε και $\xi \in N_\delta(x_0)$. Κατά συνέπεια οι $f^{(\nu)}(\xi)$ και $f^{(\nu)}(x_0)$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

(i) Αν ν άρτιος και $f^{(\nu)}(x_0) > 0$ τότε για $x \in N_\delta(x_0)$ έχουμε $f^{(\nu)}(\xi) > 0$ και $(x - x_0)^{\nu} \geq 0$. Άρα η (1) δίνει $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in N_\delta(x_0) \cap I$ που σημαίνει ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

(ii) Αν ν άρτιος και $f^{(\nu)}(x_0) < 0$ τότε $f^{(\nu)}(\xi) < 0$ και $(x - x_0)^{\nu} \geq 0$. Άρα η (1) δίνει $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in N_\delta(x_0) \cap I$ που σημαίνει ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(iii) Αν ν περιττός τότε το $(x-x_0)^\nu$ είναι γνήσια θετικό αν $x > x_0$ και γνήσια αρνητικό αν $x < x_0$. Κατά συνέπεια αν $x \in N_\delta(x_0)$ το $\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} \cdot f^{(\nu)}(\xi)$ θα έχει αντίθετα πρόσημα αριστερά και δεξιά του x_0. Πιο αναλυτικά αν $f^{(\nu)}(x_0) > 0$ τότε $f(x) \leq f(x_0)$ για $x_0 - \delta < x < x_0$ και $f(x) \geq f(x_0)$ για $x_0 < x < x_0 + \delta$. Άρα στο x_0 δεν έχει ακρότατο. Παρόμοια αν $f^{(\nu)}(x_0) < 0$. •

Πόρισμα: Έστω $f : I \to \mathbf{R}$ όπου I ένα διάστημα και x_0 εσωτερικό σημείο του I. Υποθέτουμε ότι η f'' υπάρχει και είναι συνεχής σε μια περιοχή του x_0, και ακόμα ότι $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) \neq 0$. Τότε αν $f''(x_0) > 0$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 και αν $f''(x_0) < 0$ η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Απόδειξη

Θα δώσουμε μια απόδειξη ανεξάρτητη από το Θεώρημα 5.107. Αφού $f'(x_0) = 0$ από τον ορισμό της $f''(x_0)$ έχουμε:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Υποθέτουμε ότι $f''(x_0) < 0$. Τότε

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Τότε θα έχουμε $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Από το Θεώρημα 5.102 έχουμε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Η περίπτωση $f''(x_0) > 0$ εξετάζεται ανάλογα. •

Παράδειγμα 5.108

Θα εξετάσουμε αν η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5, x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατα. Έχουμε $f'(x) = 3x^2$ και $f'(x) = 0$ όταν $x = 0$. Επειδή $f''(x) = 6x$ και $f''(0) = 0$ το παραπάνω πόρισμα δεν εφαρμόζεται. Όμως $f'''(x) = 6 > 0$, δηλ. η πρώτη μη μηδενιζόμενη παράγωγος ανώτερης τάξης είναι περιττού βαθμού. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.107, (iii) η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο 0.

Παράδειγμα 5.109

Έστω $f(x) = cosx - 1 + \frac{1}{2}x^2, x \in \mathbb{R}$. Τότε είναι: $f(x) = -sinx + x$, $f''(x) = -cosx + 1$, $f'''(x) = sinx$, $f^{(4)}(f) = cosx$. Προφανώς $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$ και $f^{(4)}(0) = 1$. Έτσι η πρώτη μη μηδενιζόμενη παράγωγος ανώτερης τάξης είναι άρτιου βαθμού. Άρα η f παρουσιάζει στο 0 τοπικό ακρότατο που είναι τοπικό ελάχιστο, αφού $f^{(4)}(0) > 0$.

Παράδειγμα 5.110

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έστω $f(x) = x^x, x > 0$. Τότε $f'(x) = x^x(1 + logx)$ και $f'(x) = 0$ για $x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$. Συνεπώς σύμφωνα με το πόρισμα η f παρουσιάζει στο $x = \frac{1}{e}$ τοπικό ελάχιστο ίσο με $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$.

Ένα άλλο πρόβλημα σχετικό με τα ακρότατα είναι η εύρεση της μικρότερης και της μεγαλύτερης τιμής μιας συνάρτησης που ορίζεται σε ένα διάστημα. Με άλλα λόγια είναι το πρόβλημα της εύρεσης του infimum και του supremum της f. Για το πρόβλημα αυτό εργαζόμαστε ως εξής, διακρίνοντας δυο περιπτώσεις, αν το διάστημα είναι ανοιχτό ή κλειστό:

1) Το διάστημα (α, β) είναι ανοιχτό

Έστω ότι υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός ριζών της $f'(x) = 0$ και ότι $\alpha < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu < \beta$. Υποθέτουμε ότι p από αυτές τις τιμές δίνουν τοπικά μέγιστα και q τοπικά ελάχιστα, όπου $p + q \leq \nu$. Έστω M_0 το μεγαλύτερο από τα p τοπικά μέγιστα και m_0 το μικρότερο από τα q τοπικά ελάχιστα. Τότε το M_0 είναι το supf και το m_0 το inff στο διάστημα $[x_1, x_\nu]$. Για να βρούμε τότε το supremum και το infimum της f στο (α, β) πρέπει να εξετάσουμε τα ακραία διαστήματα (α, x_1) και (x_ν, β). Σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα η f είναι μονότονη και συνεπώς τα $\lim_{x \to \alpha+} f(x) = A$ και $\lim_{x \to \beta-} f(x) = B$ υπάρχουν στο $\tilde{R}$ (είναι πραγματικοί αριθμοί ή $\pm\infty$). Τότε

$$M = \sup_{\alpha < x < \beta} f(x) = max\{M_0, A, B\}$$

$$m = \inf_{\alpha < x < \beta} f(x) = min\{m_0, A, B\}.$$

Αν η f' δεν έχει ρίζες στο (α, β) τότε η f είναι μονότονη και $M = max(A, B)$ και $m = min(A, B)$.

2) Το διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι κλειστό.

Τότε αν η f είναι και συνεχής θα παίρνει την μικρότερη και την μεγαλύτερη τιμή σε κάποιο από τα κρίσιμα σημεία ή στα άκρα του διαστήματος. Δηλαδή θα είναι $M = max\{f(\alpha), f(\beta), M_0\}$ και $m = min\{f(\alpha), f(\beta), m_0\}$. Όπως είναι γνωστό τα M και m είναι τιμές της συναρτήσεως.

Σημείωση

Αν το διάστημα είναι από τη μια μεριά κλειστό και από την άλλη ανοιχτό, εφαρμόζουμε αντίστοιχα τις παραπάνω περιπτώσεις.

Επίσης ένα κριτήριο για την ύπαρξη ολικών ακροτάτων μπορούμε να πάρουμε από το Πόρισμα του Θεωρήματος 5.107.

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα I, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I και $f'(x_0) = 0$ για ένα εσωτερικό σημείο του I. Τότε αν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$f'(x) < 0$, για όλα τα x στο εσωτερικό του I το $f(x_0)$ είναι ολικό μέγιστο και αν $f'(x) > 0$, για όλα τα x στο εσωτερικό του I το $f(x_0)$ είναι ολικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 5.111

Ας αποδείξουμε με την βοήθεια των ακροτάτων την ανισότητα:

$$x^\alpha - 1 \geq \alpha(x-1), \alpha > 1, x > 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1, x > 0$. Τότε $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Είναι $f'(x) = 0$ για $x = 1$ και $f''(1) = \alpha(\alpha-1) > 0$. Συνεπώς η f παρουσιάζει για $x = 1$ τοπικό ελάχιστο το $f(1) = 0$. Αυτό όμως είναι και ολικό γιατί $f'(x) < 0$ αν $0 < x < 1$ και $f'(x) > 0$ αν $x > 1$. Άρα είναι $f(x) \geq f(1) = 0, \forall x > 0$, δηλ. $x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \geq 0$ ή $x^\alpha - 1 \geq \alpha(x-1)$.

Προσοχή: Οι ανισότητες αποδεικνύονται βρίσκοντας τα ολικά ακρότατα και όχι τα τοπικά.

Παράδειγμα 5.112

Έστω $f(x) = tghx, x \in \mathbb{R}$. Τότε είναι $f'(x) = \frac{1}{cosh^2 x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η f είναι γνήσια αύξουσα και δεν έχει ακρότατα. Για την f έχουμε:

$$supf(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \quad inff(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1.$$

Παρατήρηση 5.113

Θα κάνουμε τώρα μια γενική παρατήρηση που αφορά την μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης.

Τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατα και τα διαστήματα μονοτονίας δεν αλλάζουν αν η f πολλαπλασιαστεί με θετική σταθερά και απλώς αντιστρέφεται η φύση τους αν η f πολλαπλασιαστεί με αρνητική σταθερά.

Τα διαστήματα μονοτονίας μιας σύνθετης συναρτήσεως $f[\phi(x)]$ είναι τα ίδια με αυτά της $\phi(x)$ αν η f είναι μονότονη. Τα ακρότατα είναι τα ίδια αν η $f(u)$ είναι αύξουσα και αντίθετης φύσης αν η $f(u)$ είναι φθίνουσα.

Το αλγεβρικό άθροισμα συναρτήσεων της ίδιας μονοτονίας είναι μονότονη συνάρτηση. Το γινόμενο συναρτήσεων της ίδιας μονοτονίας, που έχουν παντού το ίδιο πρόσημο είναι μονότονη συνάρτηση κ.τ.λ.

Π.χ. για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = log\left(e^x + \frac{x}{logx}\right)$ είναι αύξουσα για $x > e$, αρκεί μόνο να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{logx}$ έχει αυτή την ιδιότητα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για να εξετάσουμε τα ακρότατα της $f(x) = e^{\sqrt[3]{(x\,sinx)^2}}, x \in \mathbb{R}$ αρκεί να βρούμε τα ακρότατα της $g(x) = (xsinx)^2$ αφού η $u = \sqrt[3]{x}$ και η e^u είναι και οι δυο αύξουσες συναρτήσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δυο διαδοχικών τοπικών μεγίστων μιας συνεχούς συνάρτησης υπάρχει ένα ελάχιστο.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι στα x_1 και x_2 του πεδίου ορισμού της, η συνάρτηση f παίρνει μέγιστα. Τότε υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $f'(x) < 0, \forall x \in (x_1, x_1 + \delta)$ και $f'(x) > 0, \forall x \in (x_2 - \delta, x_2)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_1, x_2]$ θα παίρνει ελάχιστο σε κάποιο σημείο x_0, που σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι διάφορο των x_1 και x_2.

2. Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ και $f(\alpha) < f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}, & \alpha < x \leq \beta \\ 0, & x = \alpha \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \beta]$ με $g'(\beta) < 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η g παίρνει το μέγιστο σε ένα εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$ και να συμπεράνετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(\alpha)}{c - \alpha}.$$

Απόδειξη

α) Έχουμε:

$$\lim_{x \to \alpha} g(x) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha)$$

και άρα η g είναι συνεχής στο α. Επειδή είναι συνεχής και στο $(\alpha, \beta]$, αφού η f είναι συνεχής σ'αυτό, συνεπάγεται ότι η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Για να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \beta]$ αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο β. Έχουμε:

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - \alpha) - f(x) + f(\alpha)}{(x - \alpha)^2}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Άρα:

$$g'(\beta) = -\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{(\beta-\alpha)^2} \quad (\text{αφού} \quad f'(\beta)=0)$$

$$= -\frac{g(\beta)}{\beta-\alpha} < 0 \quad (\text{αφού} \quad f(\alpha) < f(\beta))$$

β) Αφού $g'(\beta) < 0$, από το Θεώρημα 5.36 υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $g(x) > g(\beta), \forall x \in (\beta-\delta, \beta)$. Επειδή $g(\beta) > 0$ έχουμε $g(x) > g(\beta) > 0 = g(\alpha)$. Άρα η g δεν παίρνει μέγιστο στα α και β. Αφού όμως είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ θα παίρνει το μέγιστο σε κάποιο εσωτερικό σημείο $c \in (\alpha, \beta)$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat θα είναι $g'(c) = 0$. Αλλά

$$g'(c) = \frac{f'(c)}{c-\alpha} - \frac{f(c)-f(\alpha)}{(c-\alpha)^2}$$

οπότε

$$f'(c) = \frac{f(c)-f(\alpha)}{c-\alpha}.$$

Σημείωση 1.

Η υπόθεση $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ δεν είναι ουσιαστική, γιατί αν $f'(\alpha) = f'(\beta) \neq 0$ τότε θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) - xf'(\alpha)$.

Σημείωση 2.

Η παραπάνω εφαρμογή είναι γνωστή ως **Θεώρημα Μέσης τιμής του Flett** που συνήθως διατυπώνεται ως εξής:

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{f'(c) = \frac{f(c)-f(\alpha)}{c-\alpha}}.$$

3. Ποιές από τις εφαπτόμενες της έλλειψης

$$\mathbf{x^2 + xy + y^2 = 3} \qquad (E)$$

απέχουν περισσότερο από την αρχή των αξόνων;

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο (x_0, y_0) είναι η

$$(2x_0 + y_0)x + (x_0 + 2y_0)y - 6 = 0.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η απόσταση της από την αρχή των αξόνων είναι η

$$\frac{6}{\sqrt{(2x_0 + y_0)^2 + (x_0 + 2y_0)^2}} = \frac{6}{\sqrt{15 + 3x_0 y_0}}. \tag{1}$$

Αφού ο αριθμητής στην (1) είναι σταθερός, μεγιστοποίηση της (1) σημαίνει ελαχιστοποίηση του παρονομαστή. Ακόμα η παράσταση $\sqrt{15 + 3x_0 y_0}$ θα έχει την μικρότερη τιμή όταν το $15 + 3x_0 y_0$ έχει την μικρότερη τιμή, και αυτό θα συμβαίνει όταν το $x_0 y_0$ έχει την μικρότερη τιμή. Το $x_0 y_0$ μπορεί να είναι αρνητικό αλλά είναι φραγμένο κάτω αφού το $15 + 3x_0 y_0$ είναι αναγκαστικά θετικό όταν το (x_0, y_0) ανήκει στην έλλειψη. Άρα το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το εξής:

όταν δοθεί ένα σημείο (x, y) που να ικανοποιεί την (Ε) να βρεθεί το ελάχιστο της $p = xy$.

Έχουμε

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y} \quad \text{και} \quad p' = 2\frac{y^2 - x^2}{x + 2y}.$$

Εξισώνοντας με το 0 την p' βρίσκουμε ότι η p θα έχει ακρότατα στα σημεία τομής των ευθειών $y = x$ και $y = -x$ με την έλλειψη. Αυτά τα σημεία είναι τα $(1, 1), (-1, -1)$ για την πρώτη και $(\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ για την δεύτερη. Οι αντίστοιχες τιμές του p είναι 1 και -3. Είναι προφανές ότι η πρώτη δίνει μέγιστο και η δεύτερη ελάχιστο, το οποίο και ζητάμε. Άρα οι εφαπτόμενες στα σημεία $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, και $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ είναι οι ζητούμενες. Από την (1) έχουμε ότι και οι δυο βρίσκονται σε απόσταση $\sqrt{6}$.

4. Για την μεταφορά εμπορεύματος από έναν τόπο Α σε έναν άλλο Β (βλέπε σχήμα 5.11) χρησιμοποιούμε δυο διαφορετικά συγκοινωνιακά μέσα. Από το Α μέχρι το Σ καταβάλλουμε δ_1 δραχμές κατά τόννο και χιλιόμετρο και από το Σ στο Β δ_2 δραχμές. Να βρεθεί η θέση του Σ ώστε η συνολική δαπάνη μεταφοράς ενός τόννου εμπορεύματος από το Α στο Β να είναι η ελάχιστη δυνατή.

Λύση

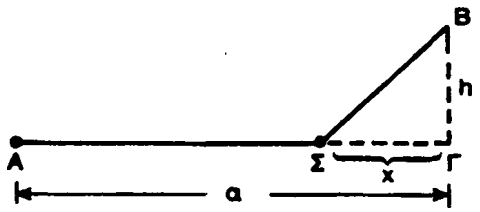
Η συνολική δαπάνη μεταφοράς είναι

$$\delta_1(\alpha - x) + \delta_2\sqrt{x^2 + h^2}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στο να βρούμε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x) = \delta_1(\alpha - x) + \delta_2\sqrt{x^2 + h^2}, 0 \leq x \leq \alpha.$$



Σχήμα 5.11

Είναι

$$f'(x) = -\delta_1 + \delta_2\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

που μηδενίζεται στο σημείο $x = \frac{\delta_1 h}{\sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2}}$, $\delta_2 > \delta_1$. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι για αυτήν την τιμή του x η f'' είναι θετική. Συνεπώς για αυτό το x παρουσιάζει ελάχιστο και μάλιστα ολικό. Για να είναι $0 \leq x \leq \alpha$ πρέπει: $\delta_1 h \leq \alpha\sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.85 Να εξετάσετε αν ισχύει το Θεώρημα του Fermat για τις συναρτήσεις $f(x) = 3x^2 - 1, x \in [1, 2]$ και $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt[5]{x^2}}, x \in [-1, 1]$.

5.86 Να βρεθούν το τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = |x^2 - 1|, -2 \leq x \leq 2$ β) $f(x) = 1 - (x - 1)^{2/3}, 0 \leq x \leq 2$

γ) $f(x) = x^4 e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$ δ) $f(x) = \begin{cases} x\log|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ε) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)Arctgx - \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{x-1}{2}, x \in \mathbb{R}$

στ) $f(x) = \begin{cases} x^2\left(1 + sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ζ) $f(x) = (1 - x)^{1-x}.x^x, 0 < x < 1$

η) $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ |x|, & -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{\pi x}{2}, & \frac{1}{2} < x \leq 4 \end{cases}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.87 Να εξετάσετε αν στο 0 παρουσιάζουν τοπικό ακρότατο οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = sinx + \frac{1}{6}x^3, x \in \mathbb{R}$

β) $f(x) = e^x + e^{-x} + 2cosx, x \in \mathbb{R}$

γ) $f(x) = sinx - x + \frac{x^3}{3}, x \in \mathbb{R}$

5.88 Να αποδείξετε ότι για $x = 0$ η $f(x) = \alpha cosx + xsinx$ έχει τοπικό ελάχιστο αν $\alpha < 2$ και τοπικό μέγιστο αν $\alpha \geq 2$.

5.89 Να αποδείξετε ότι η

$$f(x) = (tgx)^{sinx - cosx}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

έχει τοπικό ελάχιστο για $x = \frac{\pi}{4}$.

5.90 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3}, & x > 0 \\ 3x^2, & x \leq 0 \end{cases}$$

έχει ολικό ελάχιστο στο 0, αλλά η f' δεν αλλάζει πρόσημο στην περιοχή του 0.

5.91 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2\left(1 - sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

έχει ολικό μέγιστο στο 0, αλλά η f δεν είναι μονότονη σε κάθε περιοχή του 0.

5.92 Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = Artg\frac{1-x}{1+x}, x \in [0, 1]$ β) $f(x) = e^{x^2} - x, x \in [0, 2]$

γ) $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+2}, x \in [0, 2]$ δ) $f(x) = |1 - x^2| + |x|, -1 \leq x \leq 2$

ε) $f(x) = \begin{cases} ctgx - \frac{1}{x}, & 0 < |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

5.93 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{cosh x} - tghx, x \in \mathbb{R}$$

έχει μέγιστη τιμή ίση με $\sqrt{2}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

5.94 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \log x, x \in \mathbb{R}^+.$$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ολικό ελάχιστο της f.

β) Να αποδείξετε ότι:

$i) f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ $ii)$ $0 < \frac{\log x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$, $iii)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$

5.95 Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \quad x^\alpha |\log x| \leq \frac{1}{\alpha . e}, 0 < x < 1, \alpha > 0.$$

$$\beta) \quad x^{1/x} \leq 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}, \forall x \in [1, e].$$

5.96 Να αποδείξετε ότι:

$$xy \leq e^{x-1} + y\log y, \forall x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Πότε ισχύει το =;

5.97 α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\log x = \alpha x, x > 0$$

έχει λύση, αν και μόνο αν, $\alpha e \leq 1$. Η λύση αυτή είναι μοναδική αν $2\alpha e = 1$. Επίσης να αποδείξετε ότι

$$e\log x \leq x, x > 0$$

και ότι η ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με

$$x_1 > e \quad \text{και} \quad x_{\nu+1} = e\log x_\nu$$

συγκλίνει στο e.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\log x = \alpha x^2, x > 0$$

έχει λύση, αν και μόνο αν, $2\alpha e \leq 1$. Η λύση αυτή είναι μοναδική αν $2\alpha e = 1$. Επίσης να αποδείξετε ότι η ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με

$$x_1 > \sqrt{e} \quad \text{και} \quad x_{\nu+1} = \sqrt{2e\log x_\nu}$$

συγκλίνει στο $\sqrt{e}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.98 Έστω f μια μη αρνητική συνάρτηση που έχει παραγώγους μέχρι 3ης τάξης στο διάστημα $(0, 1)$. Να αποδείξετε ότι αν η f έχει τουλάχιστο δυο ρίζες στο διάστημα $(0, 1)$, τότε η τρίτη παράγωγος f''' έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

5.99 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο α, τότε $f'(\alpha) \geq 0$, ενώ αν παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο β τότε $f'(\beta) \leq 0$.

β) Αν $f'(\alpha) < 0 < f'(\beta)$, τότε υπάρχει $c \in (\alpha, \beta) : f'(c) = 0$.

5.100 Δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια άλλη ευθεία AB. Από ένα σημείο Γ της μιας παράλληλης φέρνουμε μια ευθεία η οποία τέμνει την AB στο P και την άλλη παράλληλη στο Q. Πως πρέπει να εκλεγεί αυτή η ευθεία ώστε το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων $A\Gamma P$ και QPB να είναι ελάχιστο; **(Γνωστό ως πρόβλημα του Viviani, μαθητή του Γαλιλαίου).**

5.101 Έστω $AB\Gamma$ ένα ισοσκελές τρίγωνο ($AB = B\Gamma$) και P ένα σημείο του ύψους BO. Για ποιά θέση του P το άθροισμα των αποστάσεων του P από τις κορυφές είναι ελάχιστο;

5.102 Δίνεται μια ευθεία (ε) και δυο σημεία P_1 και P_2 προς το ίδιο μέρος της (ε). Να βρεθεί σημείο P στην (ε) έτσι ώστε το άθροισμα $PP_1 + PP_2$ να είναι ελάχιστο. **(Αρχή της ελάχιστης δράσης του Fermat).**

5.103 Να βρεθεί ο μεγαλύτερος όρος της ακολουθίας: $\alpha_\nu = \frac{\nu^2}{\nu^3+200}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

5.104 Να βρεθεί το μέγιστο σφάλμα στην προσέγγιση: $\sqrt{x} \sim \frac{4}{15} + \frac{4}{5}x$, $0 < x < 1$.

§ 5.13. ΚΥΡΤΕΣ ΚΑΙ ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ- ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

Η έννοια της κυρτής συνάρτησης παίζει πολύ σημαντικό ρόλο σε πολλούς τομείς των Μαθηματικών και ειδικά στην μοντέρνα θεωρία της βελτιστοποίησης. Θα δώσουμε την έννοια της κυρτής συνάρτησης και θα δούμε ποιά είναι η σχέση της με την παραγώγιση. Πρώτα απ' όλα θα αναφέρουμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα του διαστήματος. Έστω το διάστημα (x_1, x_2) και ένα $x \in (x_1, x_2)$. Θέτοντας $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ έχουμε ότι $\lambda \in (0, 1)$ και $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

Αντίστροφα, αν $\lambda \in (0, 1)$ τότε κάθε x που γράφεται ως $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ ανήκει στο (x_1, x_2), αφού $x_1 < \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 < x_2$. Λέμε τότε ότι κάθε $x \in (x_1, x_2)$ **παριστάνεται με έναν κυρτό συνδυασμό των άκρων** x_1 **και** x_2.

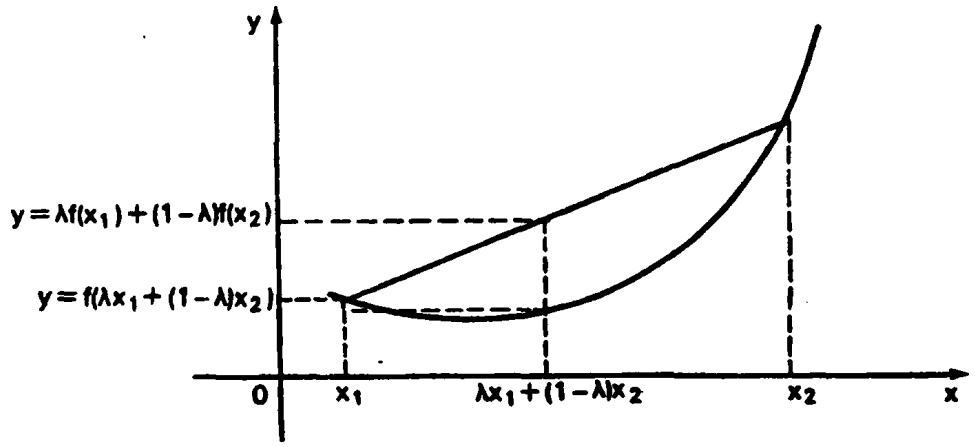
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ορισμός 5.114 Έστω $I \subseteq \mathbf{R}$ ένα διάστημα. Μια συνάρτηση $f : I \to \mathbf{R}$ λέγεται κυρτή στο I αν για κάθε λ με $0 \leq \lambda \leq 1$ και οποιαδήποτε x_1 και x_2 στο I ισχύει

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Η f θα λέγεται κοίλη αν η $-f$ είναι κυρτή.

Έτσι αν η f είναι κυρτή και $x_1, x_2 \in I$ τότε η χορδή που συνδέει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ του γραφήματος της f βρίσκεται πάνω από το γράφημα της f (βλέπε σχήμα 5.12).



Σχήμα 5.12

Παράδειγμα 5.115

Η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ είναι κυρτή. Πραγματικά· για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in [0, 1]$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= \lambda^2 x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 \\ &\leq \lambda^2 x_1^2 + \lambda(1-\lambda)(x_1^2 + x_2^2) + (1-\lambda)^2 x_2^2 \\ &\quad (\text{αφού} \quad 2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2) \\ &= \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \end{aligned}$$

Θεώρημα 5.116 Μια συνάρτηση $f : I \to \mathbf{R}$ θα είναι κυρτή στο διάστημα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

I, αν και μόνο αν, $\forall x_1, x_2 \in I$ ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2), \forall x \in [x_1, x_2] \qquad (1)$$

Απόδειξη

Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Παίρνουμε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και έστω $x \in [x_1, x_2]$. Τότε υπάρχει μοναδικό $\lambda \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε : $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Επομένως θα έχουμε $\lambda = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$ και

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \\ &= f(x_2) + \lambda[f(x_1) - f(x_2)] = f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2). \end{aligned}$$

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (1) και έστω $x_1, x_2 \in I$ και $\lambda \in [0, 1]$. Επίσης έστω $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Αν $x_1 = x_2$ τότε $x_1 = x = x_2$ και $f(x) = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$. Έστω λοιπόν $x_1 \neq x_2$. Τότε:

1) αν $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 \leq x \leq x_2$ και η (1) δίνει:

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &= f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2) \\ &= f(x_2) + \lambda[f(x_1) - f(x_2)] \\ &= \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2). \end{aligned}$$

2) αν $x_1 > x_2 \Rightarrow x_2 \leq x \leq x_1$ και η (1) δίνει:

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &= f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ &= f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2) \\ &\quad \text{(κάνοντας τις πράξεις, προσθαφαιρώντας το } x_2 f(x_2)) \\ &= \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2). \bullet \end{aligned}$$

Μια κυρτή συνάρτηση δεν χρειάζεται να είναι παραγωγίσιμη. Σαν παράδειγμα αναφέρουμε την $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$. Τα επόμενα θεωρήματα δείχνουν την σχέση κυρτότητας και παραγωγισιμότητας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα 5.117 Έστω $\mathbf{f : I \to R}$ μια κυρτή συνάρτηση στο διάστημα **I** και $\mathbf{x_0 \in I}$. Τότε η συνάρτηση

$$\mathbf{g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \; x \neq x_0, \; x \in I}$$

είναι αύξουσα.

Απόδειξη

Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του I και $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

α) $x_0 < x_1 < x_2$ ή β) $x_1 < x_2 < x_0$ ή γ) $x_1 < x_0 < x_2$.

Έστω ότι ισχύει η α) δηλ. $x_0 < x_1 < x_2$. Θέτουμε $\lambda = \frac{x_1 - x_2}{x_0 - x_2}$ οπότε $x_1 = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_2$. Από την κυρτότητα της f παίρνουμε: $f(x_1) \leq \lambda f(x_0) + (1 - \lambda) f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_0) \leq (1 - \lambda)[f(x_2) - f(x_0)]$

$\Rightarrow f(x_1) - f(x_0) \leq \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}[f(x_2) - f(x_0)]$

Διαιρώντας με $x_1 - x_0 > 0$ παίρνουμε:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

δηλ. $g(x_1) \leq g(x_2)$ που σημαίνει ότι η g είναι αύξουσα.

Η περίπτωση β) εξετάζεται ανάλογα. (Αφήνεται για άσκηση). Έστω ότι ισχύει η γ) δηλ. $x_1 < x_0 < x_2$. Από το Θεώρημα 5.116 ισχύει:

$$f(x_0 \leq f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x_0 - x_2) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} [f(x_0) &- f(x_2)](x_1 - x_2) \geq [f(x_1) - f(x_2)](x_0 - x_2) \quad (x_1 - x_2 < 0) \\ &= [f(x_1) - f(x_0) - \{f(x_2) - f(x_0)\}](x_0 - x_2) \end{aligned}$$

ή

$$[f(x_0 - f(x_2)](x_1 - x_0) \geq [f(x_1) - f(x_0)](x_0 - x_2).$$

Διαιρώντας με $(x_1 - x_0)(x_0 - x_2) > 0$ παίρνουμε:

$$g(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \geq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = g(x_1)$$

και άρα η g είναι αύξουσα. •

Θεώρημα 5.118 Αν η $\mathbf{f : I \to R}$ είναι κυρτή στο **I**, τότε έχει πλευρικές παραγώγους σε κάθε εσωτερικό σημείο $\mathbf{x_0 \in I}$ και μάλιστα $\mathbf{f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα η $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0}{x-x_0}$ είναι αύξουσα. Αφού x_0 εσωτερικό σημείο του I, υπάρχουν $x_1, x_2 \in I : x_1 < x_0 < x_2$. Το συμπέρασμα είναι προφανές, από το Θεώρημα 3.50. •

Πόρισμα. Αν η f : I → R είναι κυρτή στο I, τότε είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.

Απόδειξη

Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του I. Από το προηγούμενο θεώρημα η f έχει πλευρικές παραγώγους στο x_0. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x_0 από αριστερά και από δεξιά και συνεπώς η f είναι συνεχής στο x_0. •

Θεώρημα 5.119 Έστω f : I → R, I ανοιχτό διάστημα, μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε η f είναι κυρτή στο I, αν και μόνο αν, η f' είναι αύξουσα στο I.

Απόδειξη

Έστω ότι η f' είναι αύξουσα στο I. Αν $x_1 < x < x_2$, από το Θεώρημα μέσης τιμής έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi), \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\eta)$$

όπου $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$. Αφού η f' είναι αύξουσα, $f'(\xi) \leq f'(\eta)$ δηλ.

$$\begin{aligned}(x_2 - x)[f(x) - f(x_1)] &\leq (x - x_1)[f(x_2) - f(x)] \\ &\leq (x - x_1)[f(x_2) - f(x_1) - \{f(x) - f(x_1)\}]\end{aligned}$$

από όπου παίρνουμε:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Επομένως από το Θεώρημα 5.116 η f είναι κυρτή στο I.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η f είναι κυρτή στο I και $x_1 < x < x_2$. Από το Θεώρημα 5.116 έχουμε ότι:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Παίρνοντας τα όρια όταν $x \to x_1+$ και $x \to x_2-$ έχουμε ότι $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ που σημαίνει ότι η f' είναι αύξουσα. •

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στην περίπτωση που η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, υπάρχει ένα πιο απλό κριτήριο για την κυρτότητα, που δίνεται στο επόμενο

Θεώρημα 5.120 Έστω $\mathbf{f : I \to R}$ μια συνάρτηση, για την οποία υποθέτουμε ότι υπάρχει η $\mathbf{f'}$ για κάθε $\mathbf{x}$ του ανοιχτού διαστήματος $\mathbf{I}$. Τότε η $\mathbf{f}$ είναι κυρτή στο $\mathbf{I}$, αν και μόνο αν, $\mathbf{f'(x) \geq 0, \forall x \in I}$.

Απόδειξη

Άμεση συνέπεια των Θεωρημάτων 5.61 και 5.119. •

Το επόμενο θεώρημα δίνει έναν άλλο χαρακτηρισμό για την κυρτότητα, για παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα 5.121 Έστω $\mathbf{f : I \to R}$ συνεχής στο $\mathbf{I}$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του $\mathbf{I}$. Τότε η $\mathbf{f}$ είναι κυρτή στο $\mathbf{I}$, αν και μόνο αν, το γράφημα της $\mathbf{f}$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιαδήποτε σημείο του γραφήματός της.

Απόδειξη

Έστω ότι η f είναι κυρτή. Τότε $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$ (Θεώρημα 5.120), δηλ. η f' είναι αύξουσα. Η εφαπτομένη του γραφήματος στο τυχαίο σημείο $(x_0, f(x_0))$, όπου $x_0 \in I$ είναι η $g(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x) \geq g(x), \forall x \in I$. Από το Θεώρημα μέσης τιμής θα έχουμε ότι:

αν $x < x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0), x < \xi < x_0$ (αφού $f'(\xi) \leq f'(x_0)$ και $x - x_0 < 0$)

αν $x > x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(\eta)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0), x_0 < \eta < x$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το γράφημα της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο τυχαίο σημείο του I. Έστω x_1, x_2 στο εσωτερικό του I με $x_1 < x_2$. Τότε: $f(x_1) \geq f(x_2) + (x_1 - x_2) f'(x_2)$ και $f(x_2) \geq f(x_1) + (x_2 - x_1) f'(x_1)$.

Οι ανισότητες αυτές, αφού $x_2 - x_1 > 0, x_1 - x_2 < 0$ δίνουν

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η f' είναι αύξουσα και άρα η f είναι κυρτή σύμφωνα με το Θεώρημα 5.120. •

Παράδειγμα 5.122

Ας αναζητήσουμε να βρούμε που είναι κυρτή και που είναι κοίλη η συνάρτηση $f(x) = x.e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.120 αρκεί να

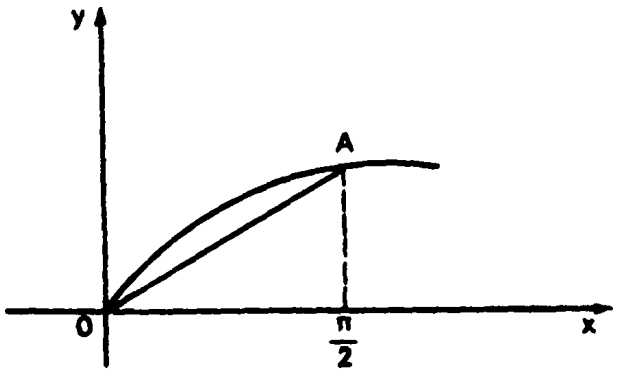
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

εξετάσουμε το πρόσημο της f''. Είναι $f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$ και $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^3-3x)$.

Συνεπώς $f''(x) > 0$ αν $x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$ και $f''(x) < 0$ αν $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Άρα η f είναι κυρτή στο σύνολο $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$ και κοίλη στο $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Παράδειγμα 5.123

Η συνάρτηση $f(x) = sinx, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι κοίλη στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ αφού $f''(x) = -sinx \leq 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Σχήμα 5.13

Άρα η χορδή OA βρίσκεται κάτω από το τόξο της καμπύλης $f(x) = sinx, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η εξίσωση της χορδής είναι $y = \frac{2}{\pi}x$ και συνεπώς έχουμε την πολύ χρήσιμη ανισότητα στην Ανάλυση:

$$\frac{2}{\pi}x \leq sinx, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η f'' υπάρχει και είναι συνεχής στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και μηδενίζεται για πεπερασμένο πλήθος σημείων. Τότε το διάστημα (α, β) χωρίζεται σε περασμένο αριθμό υποδιαστημάτων σε καθένα από τα οποία η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο. Έτσι σε καθένα από αυτά τα υποδιαστήματα εφαρμόζεται το Θεώρημα 5.120. Το ζήτημα που μπαίνει είναι τι συμβαίνει στα σημεία (αν υπάρχουν) όπου η f'' αλλάζει πρόσημο. Στο σημείο αυτό δίνουμε τον επόμενο

Ορισμός 5.124 **Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη. Το σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα λέγεται σημείο καμπής της f αν $f''(x_0) = 0$ και $f''(x_0 - h).f''(x_0 + h) < 0$ για $h \neq 0$ τέτοιο ώστε: $x_0 - h, x_0 + h \in I$.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατήρηση 5.125

Η συνθήκη $f''(x_0) = 0$ μόνη της δεν είναι ικανή για να είναι το $(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής. Π.χ. η $f(x) = x^4, x \in \mathbb{R}$ δεν έχει το $(0, 0)$ σημείο καμπής, αν και $f''(0) = 0$. Δεν αλλάζει εδώ πρόσημο η f''.

Επίσης μπορεί $f'(x_0) = 0$, αλλά η f'' να μην υπάρχει $\forall x \in I$. Τότε αν η $f'(x_0)$ υπάρχει και η f'' αλλάζει πρόσημο στην περιοχή του x_0, το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

Από γεωμετρική σκοπιά, αν $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής τότε η εφαπτομένη του γραφήματός της στο x_0, διαπερνά το γράφημα της f.

Για τα σημεία καμπής ισχύει το επόμενο

Θεώρημα 5.126 Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ όπου I ένα ανοιχτό διάστημα και $x_0 \in I$. Υποθέτουμε ότι η $f^{(\nu)}$, $\nu \geq 3$ υπάρχει και είναι συνεχής σε μια περιοχή του x_0 και ακόμα ότι:

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(\nu-1)}(x_0) = 0, \quad \text{αλλά} \quad f^{(\nu)}(x_0) \neq 0.$$

Τότε αν ν περιττός το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f.

Απόδειξη

Θέτουμε $g(x) = f'(x)$. Τότε $g'(x) = f''(x)$, $g''(x) = f'''(x), \ldots, g^{(\nu-2)}(x) = f^{(\nu-1)}(x)$ και $g^{(\nu-1)}(x) = f^{(\nu)}(x)$. Επειδή

$$g'(x_0) = g''(x_0) = \ldots = g^{(\nu-2)}(x_0) = 0 \quad \text{και} \quad g^{(\nu-1)}(x_0) \neq 0$$

με $\nu - 1$ άρτιο, από το Θεώρημα 5.107 η g παρουσιάζει στο x_0 ακρότατο. Συνεπώς η g' αλλάζει πρόσημο στην περιοχή του x_0. Αλλά $g'(x) = f''(x)$ και άρα η f'' αλλάζει πρόσημο στην περιοχή του x_0, που σημαίνει ότι το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής. •

Παρατήρηση 5.127

Το Θεώρημα 5.126 μπορεί να ενσωματωθεί στο Θεώρημα 5.107, αν το τελευταίο συμπληρωθεί ως εξής: **(iii) αν ν περιττός τότε η f δεν έχει ακρότατο στο x_0, αλλά έχει σημείο καμπής.**

Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.114 η f θα είναι κυρτή σε ένα διάστημα I, αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ και $\lambda \in [0, 1]$ ισχύει:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αν θέσουμε $k = \lambda$ και $\mu = 1 - \lambda$ έχουμε

$$f(kx_1 + \mu x_2) \leq kf(x_1) + \mu f(x_2) \quad \text{με} \quad k + \mu = 1.$$

Αυτό εύκολα μπορεί να γενικευτεί όπως δείχνει το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 5.128 Η f είναι κυρτή σε ένα διάστημα I, αν και μόνον αν, $\forall x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in I$, $\nu \geq 2$ και $\alpha_i \geq 0$, $1 \leq i \leq \nu$ με $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = 1$ έχουμε:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_\nu f(x_\nu) \qquad (A)$$

ή

$$f\left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k f(x_k).$$

Απόδειξη

Έστω ότι ισχύει η (A). Αφού ισχύει $\forall \nu \geq 2$ θα ισχύει και για $\nu = 2$ και άρα από τον Ορισμό η f είναι κυρτή.

Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι κυρτή και θα αποδείξουμε ότι ισχύει η (A). Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Για $\nu = 2$ ισχύει. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x_{\nu+1} \in I$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu + \lambda_{\nu+1} = 1, \lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq \nu + 1$.

Θέτουμε

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu, \quad \mu = 1 - \lambda.$$

Τότε $\mu = \lambda_{\nu+1}$.

Αν $\lambda = 0$ τότε $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 0$, $\mu = 1 = \lambda_{\nu+1}$ και

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu + \lambda_{\nu+1} x_{\nu+1}) = f(x_{\nu+1})$$

$$f(x_{\nu+1}) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_\nu f(x_\nu) + \lambda_{\nu+1} f(x_{\nu+1})$$

απ' την οποία προκύπτει ότι η (A) ισχύει με το ίδιο για $\nu + 1$.

Αν $\lambda > 0$ θέτουμε:

$$m = min\{x_1, x_2, \ldots, x_\nu\}$$

$$M = max\{x_1, x_2, \ldots, x_\nu\}$$

και

$$y_1 = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu}{\lambda}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

Προφανώς

$$m = \frac{m\lambda}{\lambda} = \frac{m(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu)}{\lambda}$$

$$\leq \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu}{\lambda} \leq \frac{M(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu)}{\lambda} = M,$$

δηλ.

$$m \leq y_1 \leq M.$$

Οι M και m ανήκουν στο I, αφού είναι κάποια από τα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Επόμενως $y_1 \in I$.

Θέτουμε $y_2 = x_{\nu+1}$. Αφού η f είναι κυρτή θα έχουμε:

$$f(\lambda y_1 + \mu y_2) \leq \lambda f(y_1) + \mu f(y_2), \lambda + \mu = 1, \lambda > 0,$$

δηλ.

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu + \lambda_{\nu+1} x_{\nu+1}) \leq$$

$$\lambda f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu}{\lambda}\right) + \lambda_{\nu+1} f(x_{\nu+1}) \qquad (B)$$

Αλλά

$$1 = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu}{\lambda} = \frac{\lambda_1}{\lambda} + \ldots + \frac{\lambda_\nu}{\lambda}$$

και $0 \leq \frac{\lambda_i}{\lambda}$. Άρα από επαγωγή

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu}{\lambda}\right) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_\nu}{\lambda} f(x_\nu)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}[\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_\nu f(x_\nu)]$$

Η (B) δίνει

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu + \lambda_{\nu+1} x_{\nu+1}) \leq$$

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_\nu f(x_\nu) + \lambda_{\nu+1} f(x_{\nu+1}). \quad \bullet$$

Οι ανισότητες του τύπου του Θεωρήματος 5.128 είναι γνωστές ως **"ανισότητες του Jensen's"** και έχουν πολλές και ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Η πιο απλή μορφή είναι αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, οπότε γίνεται

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x_1) + f(x_2).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας πάρουμε σαν παράδειγμα την $f(x) = logx, x > 0$ η οποία είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ αφού $f''(x) < 0, \forall x \in (0, \infty)$. Τότε για $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{R}^+$ με $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = 1$ θα έχουμε:

$$\lambda_1 logx_1 + \lambda_2 logx_2 + \ldots + \lambda_\nu logx_\nu \leq log(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu)$$

ή

$$log(x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_\nu^{\lambda_\nu}) \leq log(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu).$$

Συνεπώς:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu \geq x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_\nu^{\lambda_\nu}.$$

Ειδικά αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = \frac{1}{\nu}$ παίρνουμε

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{x_1 x_2 \ldots x_\nu}$$

που είναι η ανισότητα του Cauchy.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι αν η f' είναι συνεχής, τότε μεταξύ ενός τοπικού μεγίστου και ενός τοπικού ελαχίστου (που είναι συνεχόμενα) ή μεταξύ ενός τοπικού ελαχίστου και ενός τοπικού μεγίστου αντίστοιχα, η f έχει σημείο καμπής.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f στο x_1 παίρνει μέγιστο και στο x_2 ελάχιστο. Τότε $f''(x_1) < 0$ και $f''(x_2) > 0$. Επειδή η f'' είναι συνεχής, από το Θεώρημα του Bolzano θα έχει ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2). Δηλαδή $f''(x_3) = 0, x_1 < x_3 < x_2$. Επίσης στην περιοχή του x_3 η f'' αλλάζει πρόσημο. Συνεπώς το $(x_3, f(x_3))$ είναι σημείο καμπής.

2. α) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f''(x) > 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

β) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ και $0 \leq x \leq 1$ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^x . \beta^{1-x} \leq \alpha x + (1 - x)\beta.$$

γ) Αν οι σειρές

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|^p, \sum_{\nu=1}^{\infty} |\beta_\nu|^q$$

συγκλίνουν, όπου

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τότε και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu$ **συγκλίνει απόλυτα και**

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu \beta_\nu| \leq \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} |\beta_\nu|^q \right\}^{1/q}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν υπάρχει ένας σταθερός θετικός αριμός μ **τέτοιος ώστε:** $|\beta_\nu| = \mu |\alpha_\nu|, \forall \nu \in \mathbf{N}$.

Απόδειξη

α) Αφού $f''(x) > 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ συνεπάγεται ότι η f' είναι γνήσια αύξουσα στο (α, β). Επειδή όμως $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ από το Θεώρημα του Rolle υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(c) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$f'(x) < 0, \alpha < x < c \quad \text{και} \quad f'(x) > 0, c < x < \beta.$$

Δηλαδή η f είναι γνήσια φθίνουσα στο (α, c) και γνήσια αύξουσα στο (c, β) και άρα $f(x) < f(\alpha) = 0$ και $f(x) < f(\beta) = 0$. Επομένως $f(x) < 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ και επειδή $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ θα έχουμε $f(x) \leq 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

β) Θεωρούμε την διαφορά ως καινούργια συνάρτηση, δηλ.

$$f(x) = \alpha^x . \beta^{1-x} - \alpha x + (1 - x)\beta, 0 \leq x \leq 1.$$

Τότε:

$$f'(x) = \alpha^x log \alpha \beta^{1-x} + \alpha^x . \beta^{1-x} log \beta - \alpha + \beta$$

$$= \alpha^x . \beta^{1-x} log \frac{\alpha}{\beta} - \alpha + \beta$$

$$f''(x) = log \frac{\alpha}{\beta} \{ \alpha^x . log \alpha \beta^{1-x} + \alpha^x . \beta^{1-x} log \beta \}$$

$$= \alpha^x . \beta^{1-x} \left(log \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 > 0.$$

Συνεπώς η f είναι κυρτή για $0 < x < 1$. Επειδή όμως $f(0) = f(1) = 0$ η f θα είναι αρνητική, δηλ. $f(x) \leq 0, \forall x \in [0, 1]$ που αποδεικνύει και την ανισότητα. Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta$.

γ) Θέτοντας

$$\alpha = |\alpha_\nu|^p, \beta = |\beta_\nu|^q, x = \frac{1}{p}, 1 - x = \frac{1}{q}$$

στην β) έχουμε:

$$|\alpha_\nu \beta_\nu| \leq \frac{1}{p} |\alpha_\nu|^p + \frac{1}{q} |\beta_\nu|^q.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αθροίζοντας ως προς ν παίρνουμε:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu \beta_\nu| \leq \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|^p + \frac{1}{q} \sum_{\nu=1}^{\infty} |\beta_\nu|^q. \tag{1}$$

Η ανισότητα αυτή, που από μόνη της παρουσιάζει ενδιαφέρον, αποδεικνύει ότι η σειρά στο αριστερό μέλος συγκλίνει.

Για να αποδείξουμε την ζητούμενη ανισότητα θέτουμε:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|^p = A, \sum_{\nu=1}^{\infty} |\beta_\nu|^q = B, \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu \beta_\nu| = C.$$

Αν αντικαταστήσουμε τις α_ν και β_ν αντίστοιχα με

$$\lambda \alpha_\nu \quad \text{και} \quad \frac{1}{\lambda} \beta_\nu$$

το C δεν ματαβάλλεται ενώ τα A και B αντικαθίστανται από τα

$$\lambda^p A \quad \text{και} \quad \lambda^{-q} B$$

αντίστοιχα. Η (1) τότε γίνεται

$$C \leq \frac{1}{p} A \lambda^p + \frac{1}{q} B \lambda^{-q} = H(t). \tag{2}$$

Αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $\lambda > 0$. Ειδικότερα ισχύει για το *minimum* της H. Αφού

$$H'(\lambda) = A\lambda^{p-1} - B\lambda^{-q-1},$$

η εξίσωση $H'(\lambda) = 0$ έχει μοναδική λύση

$$\lambda = \lambda_0 = \left(\frac{B}{A}\right)^{1/(p+q)} = \left(\frac{B}{A}\right)^{1/(pq)}.$$

Από την μορφή της H' βλέπουμε ότι είναι γνήσια φθίνουσα αριστερά και γνήσια αύξουσα δεξιά του λ_0. Έτσι η H έχει ολικό ελάχιστο και

$$\begin{aligned} H(\lambda_0) &= \frac{1}{p} A \left(\frac{B}{A}\right)^{1/q} + \frac{1}{q} B \left(\frac{B}{A}\right)^{-1/p} \\ &= \frac{1}{p} A^{1-(1/q)} B^{1/q} + \frac{1}{q} A^{1/p} B^{1-(1/p)} \\ &= \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) A^{1/p} B^{1/q} = A^{1/p} B^{1/q}. \end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Αφού

$$C \leq H(\lambda_0) = A^{1/p} B^{1/q},$$

η ζητούμενη ανισότητα αποδείχτηκε.

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει να έχουμε

$$C = H(\lambda_0) = \frac{1}{p} A\lambda_0^p + \frac{1}{q} B\lambda_0^{-q}.$$

Όμως

$$|\alpha_\nu \beta_\nu| \leq \frac{1}{p}|\alpha_\nu|^p \lambda_0^p + \frac{1}{q}|\beta_\nu|^q \lambda_0^{-q}, \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες θα πάρουμε την προηγούμενη ισότητα αν και μόνον αν κάθε ανισότητα είναι ακριβώς μια ισότητα. Αυτό δίνει

$$|\alpha_\nu|\lambda_0 = |\beta_\nu|\lambda_0^{-1}, \forall \nu \in \mathbb{N}$$

ή

$$|\beta_\nu| = \lambda_0^2 |\alpha_\nu|, \nu \in \mathbb{N}.$$

Θέτοντας $\mu = \lambda_0^2$ έχουμε το συμπέρασμα.

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[\nu]{sinx_1.sinx_2 \ldots sinx_\nu} \leq \sin \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$$

αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in (0, \pi)$.

Από αυτήν να συμπεράνετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\sin A . \sin B . \sin \Gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = logsinx$. Τότε: $f'(x) = \frac{cosx}{sinx} = ctgx$, $f''(x) = -\frac{1}{sin^2 x} < 0, \forall x \in (0, \pi)$. Άρα η f είναι κοίλη και συνεπώς από την Θεώρημα 5.128 θα έχουμε:

$$\begin{aligned} logsin\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu} &\geq \frac{logsinx_1 + logsinx_2 + \ldots + logsinx_\nu}{\nu} \\ &= log\sqrt[\nu]{sinx_1.sinx_2 \ldots sinx_\nu} \end{aligned}$$

δηλ.

$$\sqrt[\nu]{sinx_1.sinx_2 \ldots sinx_\nu} \leq sin\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Από αυτήν για $\nu = 3$ και $x_1 = A, x_2 = B, x_3 = \Gamma$ παίρνουμε:

$$sinA\,sinB.sin\Gamma \leq sin^3\frac{A+B+\Gamma}{3} = \left(sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

4. (Μέθοδος των Newton-Raphson) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to R]$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Υποθέτουμε ότι $f'(x) \geq m > 0$ και $0 \leq f''(x) \leq M, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα ξ στο (α, β).

β) Ορίζουμε την ακολουθία $x_\nu, \nu \in N$ με $x_1 \in (\xi, \beta)$ και

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)}.$$

Να αποδείξετε ότι $\lim x_\nu = \xi$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $t_\nu \in (\xi, x_\nu)$ τέτοιο ώστε:

$$x_{\nu+1} - \xi = \frac{f''(t_\nu)}{2f'(x_\nu)}(x_\nu - \xi)^2.$$

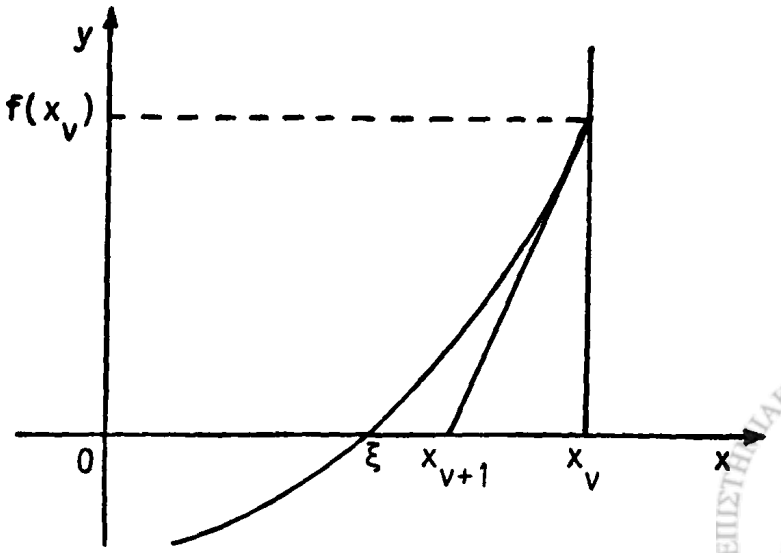
δ) Να αποδείξετε ότι:

$$0 \leq x_{\nu+1} - \xi \leq \frac{1}{c}[c(x_1 - \xi)]^{2^\nu}, \quad \text{όπου} \quad c = \frac{M}{2m}.$$

ε) Να χρησιμοποιήσετε την παραπάνω μέθοδο για να προσεγγίσετε την θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$.

Απόδειξη

α) Αφού $f(\alpha)f(\beta) < 0$ η f έχει τουλάχιστο μια ρίζα $\xi \in (\alpha, \beta)$ από το Θεώρημα του Bolzano. Αυτή είναι και μοναδική, αφού $f'(x) \neq 0$ (εφαρμογή 1 της § 5.8).



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

β) Είναι

$$x_{\nu+1} - x_\nu = -\frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)} < 0 \Rightarrow x_{\nu+1} < x_\nu$$

δηλ. η x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα. Επίσης, επειδή $f''(x) > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$ η f είναι κυρτή και από το Θεώρημα 5.121 έχουμε:

$$f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu) \geq f'(x_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu) = -f(x_\nu)$$

δηλ. $f(x_{\nu+1}) \geq 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\xi \leq x_{\nu+1} < x_\nu$, και συνεπώς η x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι κάτω φραγμένη. Άρα συγκλίνει, έστω $limx_\nu = \ell$. Λόγω της συνέχειας $f(x_\nu) \to f(\ell)$ και επειδή η f' είναι αύξουσα θα είναι και $limf'(x_\nu) = f'(\ell)$. Επομένως $f(\ell) = 0$ και άρα $\ell = \xi$.

γ) Εφαρμόζοντας τον τύπο του Taylor στο σημείο x_ν έχουμε:

$$0 = f(\xi) = f(x_\nu) + f'(x_\nu)(x_\nu - \xi) + \frac{f''(t_\nu)}{2}(x_\nu - \xi)^2, \xi < t_\nu < x_\nu.$$

Τότε

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)} = \xi + \frac{f''(t_\nu)}{2f'(x_\nu)}(x_\nu - \xi)^2.$$

δ) Από το γ) αν $c = \frac{M}{2m}$ έχουμε: $x_{\nu+1} - \xi \leq c(x_\nu - \xi)^2, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Από την σχέση αυτή με επαγωγή προκύπτει εύκολα η ζητούμενη σχέση.

ε) Είναι $f'(x) = 2x$ και $x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{x_\nu^2 - 1}{2x_\nu} = \frac{1}{2}\left(x_\nu + \frac{2}{x_\nu}\right)$. Έτσι για $x_1 = 1$ βρίσκουμε π.χ. $x_5 = 1,414213....$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.105 Των παρακάτω συναρτήσεων να βρεθούν: (i) τα διαστήματα μονοτονίας (ii) τα ακρότατα (iii) τα διαστήματα κοιλότητας ή κυρτότητας (iv) τα σημεία καμπής

α) $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$ β) $f(x) = xlogx, x > 0$

γ) $f(x) = sinx + cosx, x \in \mathbb{R}$ δ) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$.

5.106 α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(\omega) = \omega log\omega, \omega > 0$ είναι κυρτή. Από αυτό να συμπεράνετε ότι, αν $x, y \in \mathbb{R}^+$ με $x + y = 1$ τότε $x^x y^y \geq \frac{1}{2}$.

β) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $r \geq 0$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha + \beta|^r \leq c_r(|\alpha|^r + |\beta|^r)$$

όπου

$$c_r = \begin{cases} 1, & r \leq 1 \\ 2^{r-1}, & r > 1 \end{cases}$$

γ) Αν $0 < \alpha < 1, x > 0$ με $x \neq 1$ τότε $(x+1)^{\alpha-1} > \frac{x^\alpha - 1}{x-1}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.107 Να βρεθούν τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

α) $f(x) = xsin(logx), x > 0$ β) $f(x) = 2 - |x^5 - 1|, x \in \mathbb{R}$

5.108 Για ποια εκλογή του h η **"συνάρτηση πιθανότητας"**

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}, h > 0$$

έχει σημείο καμπής για $x = \pm\sigma$;

5.109 α) Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο με θετικούς συντελεστές, το οποίο είναι άρτια συνάρτηση είναι παντού κυρτή.

β) Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού ($\nu \geq 3$) έχει τουλάχιστο ένα σημείο καμπής.

5.110 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη, κυρτή και φραγμένη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

5.111 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, για την οποία υποθέτουμε ότι υπάρχει η $f''(x), \forall x \in (\alpha, \beta)$. Έστω ακόμα ότι το γράφημα της f και το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ τέμνονται σε ένα σημείο $(x_0, f(x_0))$ με $\alpha < x_0 < \beta$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha)$, για κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$.

β) Υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f''(c) = 0$.

γ) Υπάρχει $\zeta \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(\alpha)}{\zeta - \alpha}$.

§ 5.14. ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Κατά την μελέτη μιας συναρτήσεως και κυρίως για να σχεδιάσουμε το γράφημά της, παρουσιάζονται περιπτώσεις κατά τις οποίες είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την συμπεριφορά της συναρτήσεως σε ένα σημείο ή ακόμα αν πλησιάζει κάποια ευθεία. Αυτές τις περιπτώσεις θα μελετήσουμε τώρα.

Ορισμός 5.129 Μια ευθεία θα λέγεται ασύμπτωτη μιας καμπύλης f, αν η απόσταση ενός μεταβλητού σημείου της καμπύλης από την ευθεία τείνει στο μηδέν, όταν αυτό πλησιάζει το άπειρο κινούμενο κατά μήκος κάποιου κλάδου της καμπύλης.

Τις ασύμπτωτες τις διακρίνουμε σε τρείς κατηγορίες: α) κατακόρυφες β) οριζόντιες και γ) πλάγιες ασύμπτωτες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

α) Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Ορισμός 5.130 Μια ευθεία $x = \xi$ θα λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f, όπου το $\xi \in \mathbf{R}$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού της $\Delta(f)$ αν και μόνον αν, $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$.

Η θέση του διαγράμματος της f ως προς μια κατακόρυφη ασύμπτωτη εξαρτάται από το εάν το ξ είναι από δεξιά ή αριστερά ή και τις δυο μεριές σημείο συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$.

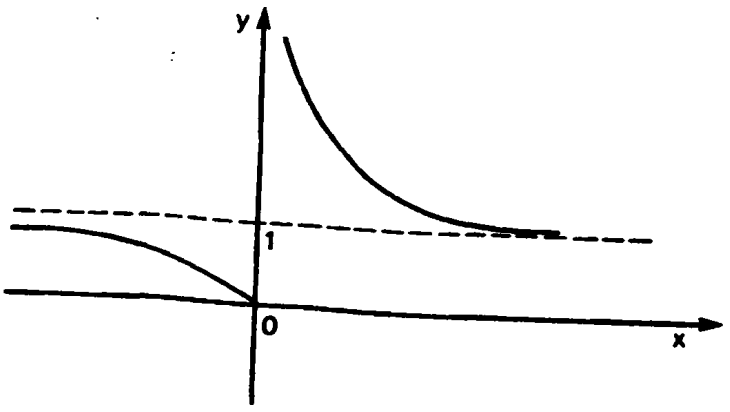
β) Οριζόντιες ασύμπτωτες

Ορισμός 5.131 Μια ευθεία $y = \lambda$ θα λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη μιας συναρτήσεως f, αν και μόνο αν, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lambda$ με την προϋπόθεση ότι το $+\infty$ ή το $-\infty$ ή και τα δυο είναι σημεία συσσωρεύσεως του $\Delta(f)$.

Να κάνετε πρόχειρα σχήματα που να δείχνουν την θέση της f ως προς μια οριζόντια ασύμπτωτη.

Παράδειγμα 5.132

Ας εξετάσουμε αν η συνάρτηση $f(x) = e^{1/x}$, $x \neq 0$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη. Είναι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη. Επειδή για $x > 0$ είναι $e^{1/x} > 1$ και για $x < 0$ είναι $e^{1/x} < 1$ θα έχουμε το ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 5.14

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γ) Πλάγιες ασύμπτωτες

Σύμφωνα με τον ορισμό 5.129 μια ευθεία $y = \alpha x + \beta$ θα λέγεται ασύμπτωτη της f αν η απόσταση ενός μεταβλητού σημείου της f από την ευθεία τείνει στο 0. Η εξίσωση της ευθείας στην κανονική μορφή είναι:

$$\frac{y - \alpha x - \beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = 0.$$

Άρα η απόσταση του σημείου $(x, f(x))$ από την ευθεία είναι

$$d(x) = \frac{f(x) - \alpha x - \beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Επειδή $\lim_{x \to +\infty} d(x) = 0$ έχουμε: $\lim_{x \to +\infty}[f(x) - \alpha x - \beta] = 0$. Κατά συνέπεια

$$\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - \alpha - \frac{\beta}{x}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - \alpha\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \alpha.$$

Έτσι έχουμε τον ακόλουθο

Ορισμός 5.133 Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ θα λέγεται πλάγια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f, αν και μόνο αν,

$$\alpha = \lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{x \to +\infty}[f(x) - \alpha x]$$

ή

$$\alpha = \lim_{x \to -\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{x \to -\infty}[f(x) - \alpha x].$$

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι έχουμε **ασύμπτωτη στο $+\infty$** ενώ στη δεύτερη ότι έχουμε **ασύμπτωτη στο $-\infty$.**

Παρατήρηση 5.134

Αν $\alpha = 0$ τότε η ευθεία $y = \beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη, με την προϋπόθεση ότι το β υπάρχει.

Επίσης στην περίπτωση που η f είναι παραγωγίσιμη, από την εφαρμογή 7 της § 5.9 έχουμε ότι $\alpha = \lim_{x \to +\infty} f'(x)$ που σε ορισμένες περιπτώσεις είναι πιο απλό από το $\lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Παράδειγμα 5.135

Έστω $f : IR - \{0\} \to IR$ με $f(x) = \frac{1}{x} + x + e^{-x}$. Τότε

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(-\frac{1}{x^2} + 1 - e^{-x}\right) = 1$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}+1-e^{-x}\right) = +\infty$$

Άρα $\alpha = 1$ και $\beta = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+e^{-x}\right] = 0$. Συνεπώς η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.112 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = xe^{1/x}, x \neq 0$ β) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}, x \neq -1$

γ) $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \neq 0$ δ) $f(x) = \sqrt{1+x^2}\sin\frac{1}{x}, x \neq 0$

ε) $f(x) = \frac{2x^4+x^3+1}{x^3}, x \neq 0$ στ) $f(x) = \sqrt[3]{2x-x^3}, x \in IR$

§ 5.15. ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Με την βοήθεια της παραγώγου μπορούμε να κάνουμε λεπτομερή μελέτη της συμπεριφοράς μιας συναρτήσεως και να χαράξουμε το γράφημά της. Τα διάφορα στάδια μελετήθηκαν στις παραγράφους που προηγήθηκαν. Ανακεφαλαιώνοντας, για να κάνουμε τη μελέτη και τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως f, ακολουθούμε την παρακάτω πορεία:

1 . *Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f, εφ' όσον αυτό δεν δίνεται.*

2 *Εξετάζουμε την f ως προς την συνέχεια.*

3 *Εξετάζουμε αν η f είναι περιοδική ή συμμετρική (άρτια ή περιττή). Η μελέτη τότε μπορεί να γίνει σε ένα υποσύνολο του $\Delta(f)$. Αν η f είναι περιοδική η μελέτη γίνεται σε διάστημα μήκους μιας περιόδου. Αν είναι άρτια ή περιττή γίνεται στο $\Delta(f) \cap IR^+$. Αν είναι άρτια θα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy, ενώ αν είναι περιττή θα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.*

4 *Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της f πρώτης και δεύτερης τάξης.*

5 *Εξετάζουμε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.*

6 *Βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη. Επίσης βρίσκουμε τα σημεία καμπής.*

7 *Βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της f.*

Όλα τα παραπάνω τα βάζουμε σε έναν πίνακα μεταβολών και με την βοήθεια αυτού χαράζουμε το διάγραμμα της f. Μπορούν ακόμα να χρησιμοποιηθούν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και άλλα συμπληρωματικά στοιχεία για περισότερη ακρίβεια στην χάραξη του διαγράμματος, όπως για παράδειγμα τα σημεία τομής της f με τους άξονες. Παρακολουθήστε τις λεπτομέρειες στις εφαρμογές που ακολουθούν:

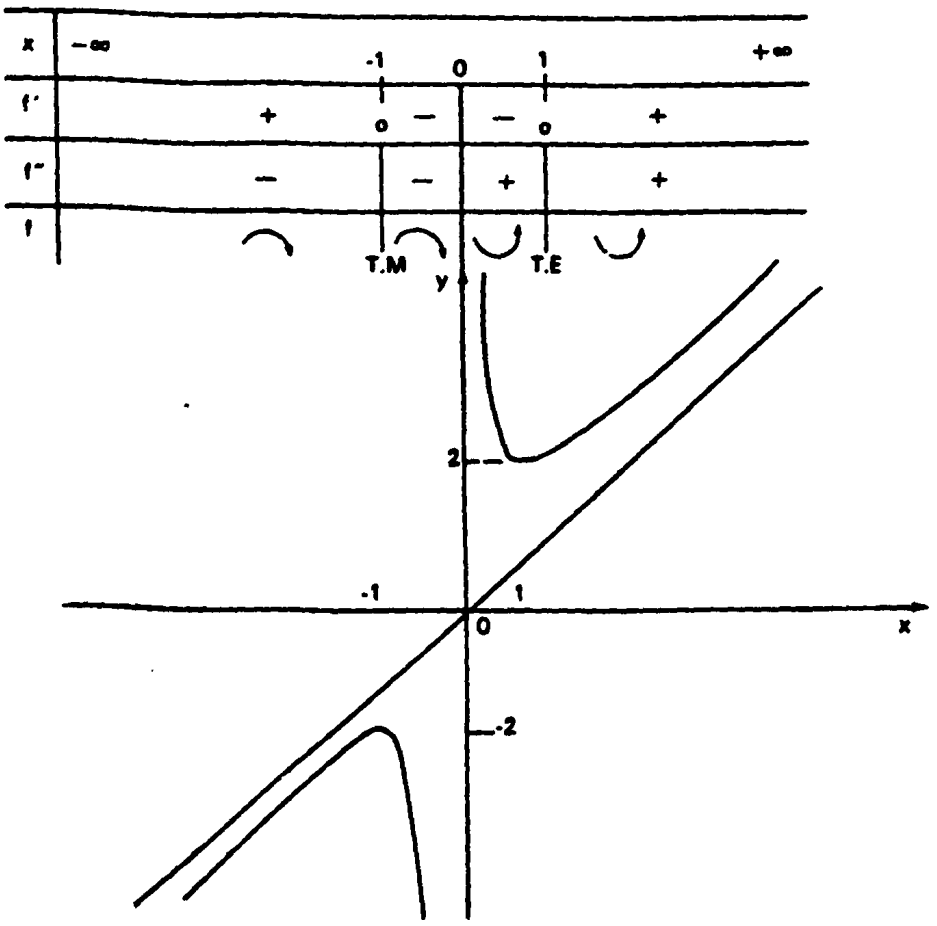
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση:

$$\mathbf{f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0.}$$

Λύση

1) Είναι $\Delta(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.



Σχήμα 5.15

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2) Είναι συνεχής $\forall x \in \Delta(f)$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

3) Η f δεν είναι περιοδική. Επειδή $f(-x) = -x - \frac{1}{x} = -f(x)$ η f είναι περιττή. Αρκεί λοιπόν να την μελετήσουμε μόνο για $x > 0$.

4) Έχουμε: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, x \neq 0$ και $f''(x) = \frac{2}{x^3}, x \neq 0$.

5) Είναι $f'(x) = 0$ όταν $x = 1$. (**Μην ξεχνάτε ότι εξετάζουμε μόνο για** $x > 0$). Επειδή $f'(x) < 0$ για $0 < x < 1$ και $f'(x) > 0$ για $x > 1$ η f είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1)$ και γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$. Συνεπώς για $x = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1) = 2$.

6) Είναι $f''(x) > 0, \forall x > 0$ και συνεπώς η f είναι κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$. Επειδή $f''(x) \neq 0, \forall x > 0$ η f δεν έχει σημεία καμπής.

7) Επειδή $\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$ η ευθεία $x = 0$, δηλ. ο άξονας των y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. Οριζόντια ασύμπτωτη δεν υπάρχει, αφού $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Επειδή $\alpha = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 1$ και $\beta = \lim_{x \to +\infty}[f(x) - x] = 0$ η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη.

Έτσι έχουμε τον πίνακα μεταβολών και την γραφική παράσταση της f που δίνονται στο σχήμα 5.15.

2. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση

$$\mathbf{f(x) = x^{1/3}(x + 4), x \in R.}$$

Λύση

1) Είναι $\Delta(f) = \mathbb{R}$.

2) Είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$.

3) Δεν είναι περιοδική, ούτε συμμετρική.

4) Είναι $f'(x) = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x + 1), x \neq 0$. Για $x = 0$ δεν υπάρχει η παράγωγος. Επίσης είναι $f''(x) = \frac{4}{9}x^{-5/3}(x - 2), x \neq 0$.

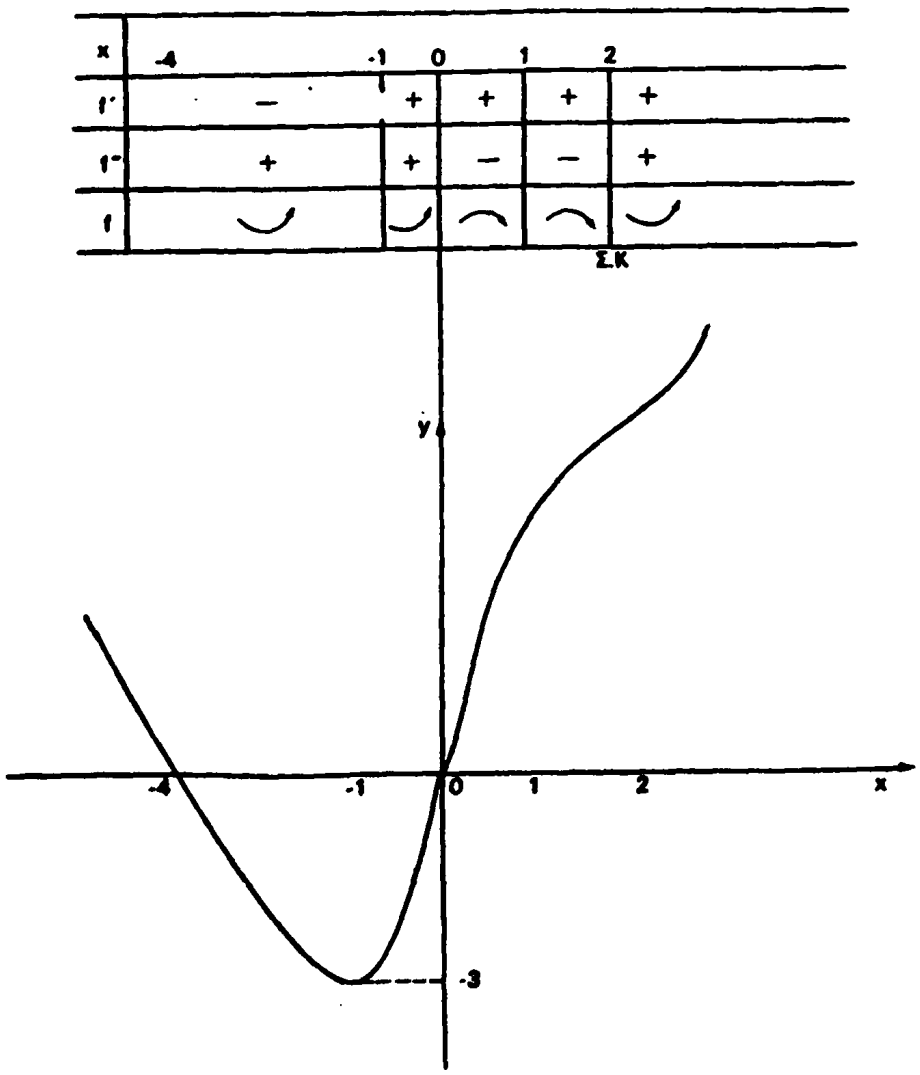
5) Είναι $f'(x) = 0$ για $x = -1$ και $f'(x) > 0$ για $x > -1$ και $f'(x) < 0$ για $x < -1$. Συνεπώς η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1)$ και αύξουσα στο $(-1, +\infty)$ και άρα για $x = -1$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(-1) = -3$. Στο 0 που δεν υπάρχει η παράγωγος δεν έχουμε ακρότατο αφού η f' δεν αλλάζει πρόσημο στην περιοχή του 0.

6) Είναι $f''(x) < 0$ για $x \in (0, 2)$ και $f''(x) > 0$ για $x < 0$ και $x > 2$. Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $(0, 2)$ και κυρτή στο $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Για $x = 2$ είναι $f''(x) = 0$ και άρα το 2 είναι σημείο καμπής. Επίσης και το 0 όπου δεν υπάρχει η f'' είναι σημείο καμπής επειδή η f'' στην περιοχή του 0 αλλάζει πρόσημο.

7) Επειδή $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ η f δεν έχει ασύμπτωτες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τον πίνακα μεταβολών και το διάγραμμα της f που δίνονται στο σχήμα 5.16.



Σχήμα 5.16

3. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Λύση

1) $\Delta(f) = \mathbb{R}$.

2) Η f είναι συνεχής στο R γιατί για $x \neq 0$ προφανώς είναι συνεχής, ενώ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{x \log |x|} = e^0 = 1 = f(0).$$

3) Δεν είναι περιοδική, ούτε συμμετρική.

4) Η f είναι παραγωγίσιμη για $x \neq 0$ με $f'(x) = |x|^x(1 + log|x|)$. Για $x = 0$ έχουμε:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{xlog|x|} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{xlog|x|} - 1}{xlog|x|} log|x| = -\infty$$

που σημαίνει ότι η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο 0 είναι κατακόρυφη, δηλ. είναι ο άξονας $0y$. Για $x \neq 0$ είναι

$$f''(x) = |x|^x \left\{(1 + log|x|)^2 + \frac{1}{x}\right\}.$$

5) Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + log|x| = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}, x = -e^{-1}$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -e^{-1}$ ή $x > e^{-1}$, ενώ $f'(x) < 0$ αν $-e^{-1} < x < e^{-1}$. Συνεπώς η f είναι αύξουσα στα $(-\infty, -e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$ και η f είναι φθίνουσα στο $(-e^{-1}, e^{-1})$. Για $x = -e^{-1}$ έχει max το $f_{max} = e^{1/e}$ και για $x = e^{-1}$ έχει min το $f_{min} = e^{-1/e}$.

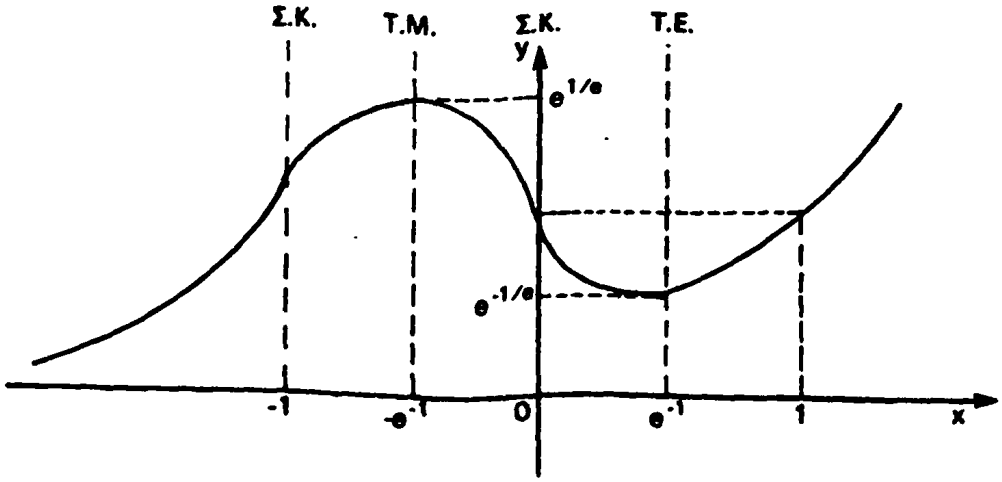
6) Ρίζες της f'' είναι οι ρίζες της $g(x) = x(1 + log|x|)^2 + 1$. Ας βρούμε το max και min της g. Είναι $g'(x) = (1 + log|x|)(3 + log|x|)$. Η g είναι θετική για $x > 0$. Έχει max για $x = -\frac{1}{e}$, $g_{max} = 1$ και min για $x = \frac{-1}{e^3}$, $g_{min} = 1 - 4e^{-3} > 0$. Επειδή και $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ η g έχει μια ρίζα $x = x_1 < -\frac{1}{e}$. (Παρατηρούμε ότι $x_1 = -1$). Συνεπώς $f''(x) > 0$ για $x > 0$ και $x < -1$ ενώ $f''(x) < 0$ για $-1 < x < 0$. Δηλ. η f είναι κυρτή στο $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ και κοίλη στο $(-1, 0)$. Τα σημεία $-1, 0$ είναι σημεία καμπής.

7) Επειδή $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

x	$-\infty$		$-e^{-1}$	0	e^{-1}	$+\infty$
F'	−	+	−	−	+	
F''	+	−	−	+	+	
F						

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έτσι έχουμε τον πίνακα και την γραφική παράσταση του σχήματος 5.17.



Σχήμα 5.17

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.113 Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ β) $f(x) = \frac{x|x|}{|x+1|}$

γ) $f(x) = e^{-x^2}$ δ) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$

ε) $f(x) = x - sinx$ στ) $f(x) = x^{2/3}(x-1)^{1/3}$

ζ) $f(x) = xlog|x|$ η) $f(x) = x^{2/3}(x+5)$ θ) $f(x) = 4sinx + cos2x.$

§ 5.16. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ένα από τα σημαντικά προβλήματα της Ανάλυσης είναι ο εντοπισμός των ριζών μιας συνεχούς συνάρτησης. Αυτό μπορεί να γίνει με την βοήθεια του Θεωρήματος της Ενδιάμεσης Τιμής, και ιδιαίτερα του Θεωρήματος του Bolzano.

Ένα άλλο ενδιαφέρον πρόβλημα είναι η εύρεση των σταθερών σημείων μιας συνάρτησης f. Αν $f : S \to S$ είναι μια συνάρτηση, ένα **σταθερό σημείο της** f είναι απλά ένα σημείο $\xi \in S$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \xi$. Μ' αλλα λόγια, ένα σταθερό σημείο της f δεν είναι τίποτε άλλο από μια λύση της συναρτησιακής εξίσωσης

$$f(x) = x, x \in S.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τα Θεωρήματα σταθερού σημείου έχουν χρησιμοποιηθεί στην Ανάλυση για την επίλυση διαφόρων ειδών προβλημάτων, κυρίως στις διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις. Ας αρχίσουμε με ένα απλό Θεώρημα.

Θεώρημα 5.136 Έστω $\mathbf{f} : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε: $\mathbf{f}(\xi) = \xi$. Μ' άλλα λόγια η f έχει σταθερό σημείο στο $[\alpha, \beta]$.

Απόδειξη

Βλέπε εφαρμογή 2 της § 4.5.

Το σταθερό σημείο στο παραπάνω Θεώρημα δεν είναι μοναδικό. Για να είναι μοναδικό πρέπει η συνάρτηση f να είναι συστολή.

Μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ λέγεται συστολή, αν

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in [\alpha, \beta], k \in (0, 1).$$

Όπως δείχνει το επόμενο Θεώρημα κάθε συστολή έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Θεώρημα 5.137 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ και

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in [\alpha, \beta], k \in (0, 1).$$

Τότε η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο, δηλ. υπάρχει μοναδικό $\xi \in [\alpha, \beta] : f(\xi) = \xi$.

Απόδειξη

Παρατηρούμε πρώτα ότι κάθε συστολή είναι συνεχής συνάρτηση. Πραγματικά για σταθερό $y \in [\alpha, \beta]$ έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta = \frac{\epsilon}{k} > 0)(\forall x \in R)|x - y| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(y)| < k|x - y| < k.\frac{\epsilon}{k} = \epsilon,$$

το οποίο σημαίνει ότι η f είναι συνεχής. Σύμφωνα τότε με το Θεώρημα 5.136 η f έχει σταθερό σημείο στο $[\alpha, \beta]$.

Ας υποθέσουμε ότι και $f(\zeta) = \zeta$. Τότε

$$|\xi - \zeta| = |f(\xi) - f(\zeta)| \leq k|\xi - \zeta|$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αφού εξασφαλιστεί η ύπαρξη του σταθερού σημείου, ένα πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι ο εντοπισμός αυτού του σταθερού σημείου. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας διαδοχικές προσεγγίσεις. Σαν μια πρώτη προσέγγιση διαλέγουμε έναν αριθμό $x_1 \in [\alpha, \beta]$. Ορίζουμε την ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$x_{\nu+1} = f(x_\nu).$$

Τότε $\alpha \leq x_\nu \leq \beta, \forall \nu \in \mathbb{N}$ αφού $\alpha \leq f(x) \leq \beta, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Αν η ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στο ξ τότε $\alpha \leq \xi \leq \beta$ και $f(x_\nu) \to f(\xi)$ επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αφού η ακολουθία δεν μπορεί να έχει παραπάνω από ένα όριο, πρέπει $f(\xi) = \xi$. Συνεπώς η $x = \xi$ είναι ρίζα της $f(x) = x$ αν η x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει.

Η συνέχεια της f είναι βασική προϋπόθεση για τη σύγκλιση μιας ακολουθίας της μορφής $\alpha_{\nu+1} = f(\alpha_\nu)$, όπως δείχνει το επόμενο

Παράδειγμα 5.138

Έστω η ακολουθία x_ν, $\nu \in N$ με

$$x_1 = 1 \quad \text{και} \quad x_\nu = \frac{x_{\nu-1}}{2} + \frac{1}{[x_{\nu-1}]}, \nu > 1$$

όπου $[x_{\nu-1}]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του $x_{\nu-1}$. Τότε:

1) $1 \leq x_\nu < 2, \forall \nu \in N$.

2) Η ακολουθία είναι αύξουσα.

3) Η ακολουθία είναι συγκλίνουσα, και να βρεθεί το όριό της.

Πραγματικά·

1) Θα αποδείξουμε ότι $1 \leq x_\nu < 2$ με επαγωγή. Για $\nu = 1$ είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι $1 \leq x_{k-1} < 2$. Τότε $[x_{k-1}] = 1$ και

$$1 \leq \frac{1}{2} + 1 \leq \frac{x_{k-1}}{2} + 1 = \frac{x_{k-1}}{2} + \frac{1}{[x_{k-1}]} < \frac{2}{2} + 1 = 2$$

και επομένως $1 \leq x_k < 2$. Άρα με επαγωγή αποδείχτηκε η ζητούμενη ανισότητα.

2) Παρατηρούμε από το 1) ότι $1 \leq x_{\nu-1} < 2$ οπότε $[x_{\nu-1}] = 1$. Τότε έχουμε:

$$x_\nu - x_{\nu-1} = \left(\frac{x_{\nu-1}}{2} + \frac{1}{[x_{\nu-1}]}\right) - x_{\nu-1} = 1 - \frac{x_{\nu-1}}{2} > 0$$

που αποδεικνύει ότι η ακολουθία είναι αύξουσα.

3) Σαν φραγμένη λοιπόν και μονότονη η ακολουθία συγκλίνει. Αν ονομάσουμε x το όριο αυτό, θα έχουμε:

$$x_\nu = \frac{x_{\nu-1}}{2} + \frac{1}{[x_{\nu-1}]} \Rightarrow x = \frac{x}{2} + \frac{1}{[x]} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{[x]}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

3) Σαν φραγμένη λοιπόν και μονότονη η ακολουθία συγκλίνει. Αν ονομάσουμε x το όριο αυτό , θα έχουμε:

$$x_\nu = \frac{x_{\nu-1}}{2} + \frac{1}{[x_{\nu-1}]} \Rightarrow x = \frac{x}{2} + \frac{1}{[x]} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{[x]}.$$

Η τελευταία όμως εξίσωση δεν έχει λύση! Η παραπάνω ακολουθία γράφεται ως

$$x_{\nu+1} = f(x_\nu)$$

για κάποια συνάρτηση f. Όταν $x_\nu \to x$ τότε $f(x_\nu) \to f(x)$ **μόνον όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής**. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα όμως η f δεν είναι συνεχής.

Η σύγκλιση της ακολουθίας x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εξασφαλίζεται αν η συνάρτηση είναι **συστολή**, όπως δείχνει το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 5.139 **Έστω $f : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε:**

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in [\alpha, \beta], 0 \leq k < 1.$$

Για $x_1 \in [\alpha, \beta]$ ορίζουμε την ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$x_{\nu+1} = f(x_\nu).$$

Τότε η ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στο σταθερό σημείο της f.

Απόδειξη

Για σταθερό $y \in [\alpha, \beta]$ έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta = \frac{\epsilon}{k} > 0)(\forall x \in R)|x - y| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(y)| < k|x - y| < k.\frac{\epsilon}{k} = \epsilon,$$

το οποίο σημαίνει ότι η f είναι συνεχής. Σύμφωνα τότε με το Θεώρημα 5.136 η f έχει σταθερό σημείο στο $[\alpha, \beta]$.

Είναι $\alpha_\nu \in [\alpha, \beta], \forall \nu \in \mathbb{N}$. Πραγματικά, αφου $x_1 \in [\alpha, \beta]$, υποθέτοντας ότι $x_\nu \in [\alpha, \beta]$ θα έχουμε $\alpha \leq x_\nu \leq \beta$ και $\alpha \leq f(x_\nu) \leq \beta$ (επειδή από την υπόθεση $f : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$).

Για την ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$|x_{\nu+2} - x_{\nu+1}| = |f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu)| \leq k|x_{\nu+1} - x_\nu|.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θέτοντας στην παραπάνω ανισότητα όπου $\nu = 1,2,\ldots$ και πολ/ζοντας κατά μέλη τις σχέσεις που θα προκύψουν, παίρνουμε:

$$|x_{\nu+2} - x_{\nu+1}| \leq k^{\nu}|x_2 - x_1|.$$

Έστω δυο δείκτες μ και ν με $\mu > \nu$. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} |x_\mu - x_\nu| &\leq |x_\mu - x_{\mu-1}| + |x_{\mu-1} - x_{\mu-2}| + \ldots + |x_{\nu+1} - x_\nu| \\ &\leq \left(k^{\mu-2} + k^{\mu-3} + \ldots + k^{\nu-1}\right)|x_2 - x_1| \\ &= k^{\nu-1}\left(1 + k + \ldots + k^{\mu-\nu-1}\right)|x_2 - x_1| \\ &\leq k^{\nu-1}\frac{1}{1-k}|x_2 - x_1|, \end{aligned}$$

και επειδή $k < 1, k^{\nu} \to 0$, που σημαίνει ότι η ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy.

Επομένως θα συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό, έστω ξ. Επειδή όμως η f είναι συνεχής $lim f(x_\nu) = f(\xi)$. Από τον αναδρομικό τύπο τότε θα έχουμε: $\xi = f(\xi)$.

Αυτό το ξ είναι μοναδικό, γιατί αν υπάρχει και άλλο ξ' τότε

$$|\xi - \xi'| = |f(\xi) - f(\xi')| \leq k|\xi - \xi'|$$

που είναι άτοπο, αφού $k < 1$. •

Για παραγωγίσιμες συναρτήσεις μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα (βλέπε και εφαρμογή 4 της § 5.9) το ακόλουθο συμπέρασμα, πολύ χρήσιμο στις εφαρμογές.

Θεώρημα 5.140 **Έστω $f : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε η f είναι συστολή στο $[\alpha, \beta]$, αν και μόνον αν, υπάρχει σταθερή $k < 1$ τέτοια ώστε:**

$$|f'(x)| \leq k < 1, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από την συμπεριφορά των συναρτήσεων για να απλοποιήσουμε την μελέτη των ακολουθιών. Θα θεωρήσουμε ακολουθίες της μορφής $\alpha_1 = k$ και $\alpha_{\nu+1} = f(\alpha_\nu)$ όπου f μια δοσμένη συνάρτηση. Θα δούμε ότι μερικά πράγματα μπορούν να απλοποιηθούν. Δες και εφαρμογή 4 της § 4.7.

Παράδειγμα 5.141

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ **με**

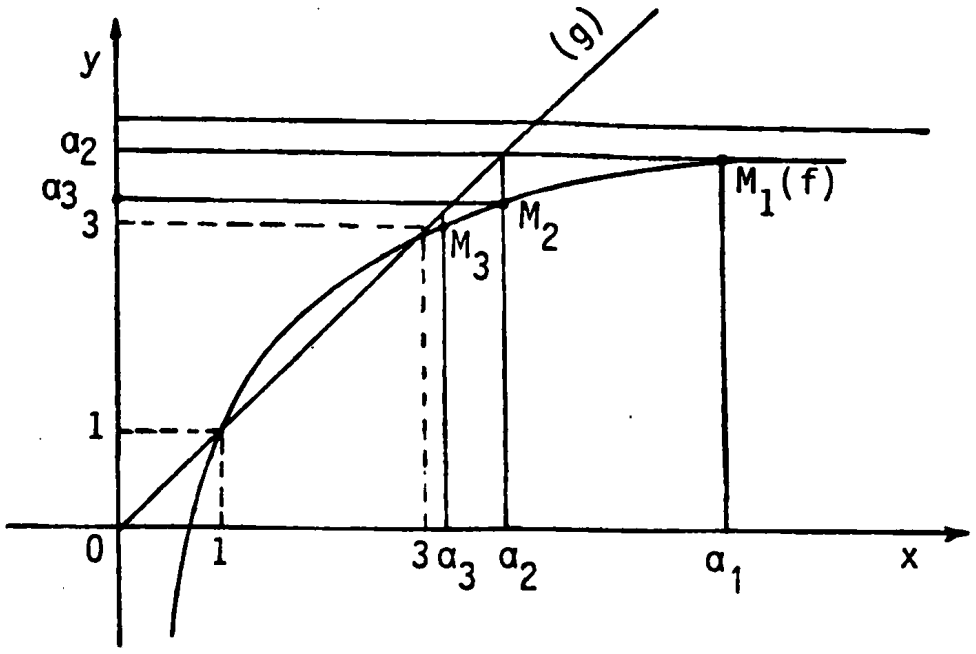
$$\alpha_1 = 6 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \frac{4\alpha_\nu - 3}{\alpha_\nu}$$

Κατασκευάζουμε τις καμπύλες

$$f(x) = \frac{4x-3}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = x.$$

Η καμπύλη που αντιστοιχεί στο γράφημα της (f) είναι μια υπερβολή με ασύμπτωτες ευθείες $x = 0$ και $y = 4$. Οι καμπύλες αυτές τέμνονται στα σημεία $A(1, 1)$ και $B(3, 3)$, δηλ. η εξίσωση $f(x) = x$ έχει λύσεις τις $x = 1$ και $x = 3$. Αυτά είναι τα σταθερά σημεία της f.

Οι όροι της ακολουθίας ορίζονται γραφικά ως εξής:



Ορίζουμε πάνω στον άξονα Ox ένα σημείο που να αντιστοιχεί στον πρώτο όρο α_1 της ακολουθίας. Στο σημείο αυτό φέρνουμε κάθετο στον άξονα Ox μέχρι να τμήσει την καμπύλη (f). Από το σημείο τομής με την (f) φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα Ox μέχρι να τμήσει την διχοτόμο (g). Από το σημείο αυτό της τομής με τη διχοτόμο φέρνουμε κάθετο στον άξονα Ox και έτσι ορίζεται πάνω στον Ox η θέση του όρου α_2. Η τομή της κάθετης αυτής με την (f) ορίζει ένα σημείο από το οποίο πάλι φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα Ox μέχρι να τμήσει την διχοτόμο. Από το σημείο αυτό της διχοτόμου φέρνουμε πάλι κάθετο στον άξονα Ox και έτσι ορίζεται

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πάνω στον Ox ο όρος α_3 κ.ο.κ. Με τον τρόπο αυτό χρησιμοποιώντας τις δυο καμπύλες έχουμε έναν τρόπο κατασκευής των όρων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ της α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$.

Η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{3}{x}$ είναι αύξουσα και συνεχής από το $[3, 4]$ με τιμές στο $[3, 4]$. Επομένως $lim\alpha_\nu = 3$.

Παράδειγμα 5.142

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 > 0 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2+\alpha_\nu}$$

Θεωρούμε όπως και προηγούμενα τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{3}{2+x} \quad \text{και} \quad g(x) = x, x \in \mathbb{R}^+.$$

Τα σταθερά σημεία της f είναι τα $-1 \pm \sqrt{2}$ και επειδή όλοι οι όροι είναι θετικοί, αν συγκλίνει, θα συγκλίνει στο $-1 + \sqrt{2}$. Η f είναι φθίνουσα και συνεχής και άρα (εφαρμογή 4 της § 4.7) οι υπακολουθίες $\alpha_{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_{2\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μονότονες και συγκλίνουν. Αν $lim\alpha_{2\nu} = \ell_1$ και $lim\alpha_{2\nu-1} = \ell_2$ θα έχουμε

$$\alpha_{2\nu} = \frac{1}{2+\alpha_{2\nu-1}} \Rightarrow \ell_1 = \frac{1}{2+\ell_2}$$

$$\alpha_{2\nu-1} = \frac{1}{2+\alpha_{2\nu-2}} \Rightarrow \ell_2 = \frac{1}{2+\ell_1}$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $\ell_1 = \ell_2$. Από την αναδρομική σχέση τότε παίρνουμε: $\ell = lim\alpha_\nu = -1 + \sqrt{2}$.

Παράδειγμα 5.143

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{2}{\alpha_\nu}\right).$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right), x \in (0, \infty)$$

Αυτή είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Προφανώς είναι $f(x) > 0$ αν $x > 0$. Επομένως με επαγωγή υποθέτοντας ότι $\alpha_\nu > 0$ θα έχουμε $\alpha_{\nu+1} = f(\alpha_\nu) > 0$. Έτσι αφού και $\alpha_1 > 0$ θα έχουμε ότι $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Βρίσκουμε τα ακρότατα της f. Επειδή $f'(x) = 0$ αν $x = \sqrt{2}$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = \sqrt{2}$, το οποίο είναι και ολικό επειδή $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Αυτό σημαίνει ότι

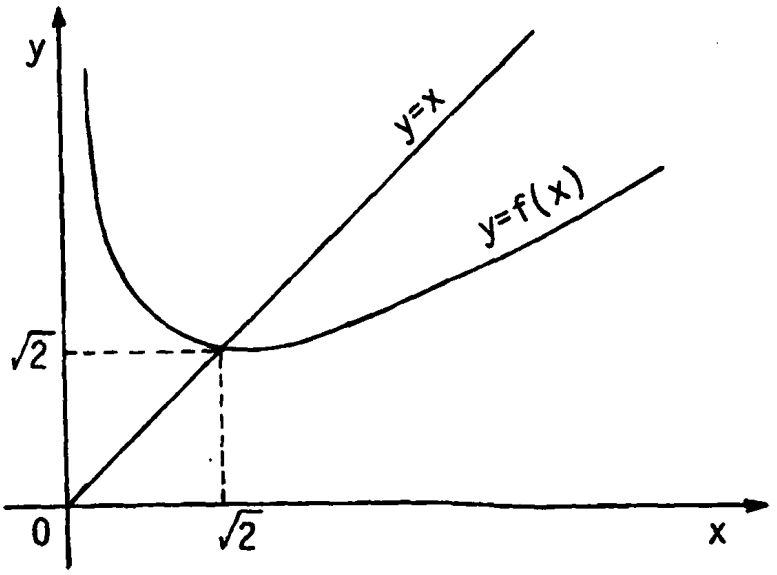
$$f(x) \geq \sqrt{2}, \forall x \in (0, +\infty).$$

Από αυτήν παρατηρούμε ότι $\alpha_{\nu+1} = f(\alpha_\nu) \geq \sqrt{2}, \forall \nu \geq 1$ και άρα $\alpha_\nu \geq \sqrt{2}, \forall \nu \geq 2$.

Επίσης έχουμε ότι

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = f'(\xi_\nu)(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1})$$

όπου ξ_ν μεταξύ των $\alpha_{\nu-1}$ και α_ν από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής. Συνεπώς $\xi_\nu \geq \sqrt{2}, \forall \nu \geq 3$ και άρα $f'(\xi_\nu) \geq 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι οι δυο διαδοχικές διαφορές $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ και $\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Αφού $\alpha_2 = \frac{3}{2}$ και $\alpha_3 = \frac{17}{12}$ βλέπουμε ότι μετά τον δεύτερο όρο η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη κάτω από το 0. Άρα συγκλίνει και αν $\alpha_\nu \to \alpha$ τότε το α ικανοποιεί την $\alpha = f(\alpha) \Rightarrow \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha_\nu \to \sqrt{2}$.



Αυτό μπορούμε να το δούμε και από το γράφημα της f, αφού αν $x \geq \sqrt{2}$, $f(x) \leq x$ και άρα $\alpha_\nu \geq \sqrt{2} \Rightarrow \alpha_{\nu+1} \leq \alpha_\nu$. Έτσι ορίζοντας το α_ν στον άξονα Ox βρίσκουμε το σημείο τομής της ευθείας $x = \alpha_\nu$ με το γράφημα της f και φέρνουμε την οριζόντια ευθεία από αυτό το σημείο $(\alpha_\nu, f(\alpha_\nu))$ στην ευθεία $y = x$ και βρίσκουμε το σημείο $(f(\alpha_\nu), f(\alpha_\nu))$, δηλ. $(\alpha_{\nu+1}, \alpha_{\nu+1})$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Φέρνοντας από αυτό το σημείο την κάθετο στον άξονα Ox βρίσκουμε την θέση του $\alpha_{\nu+1}$.

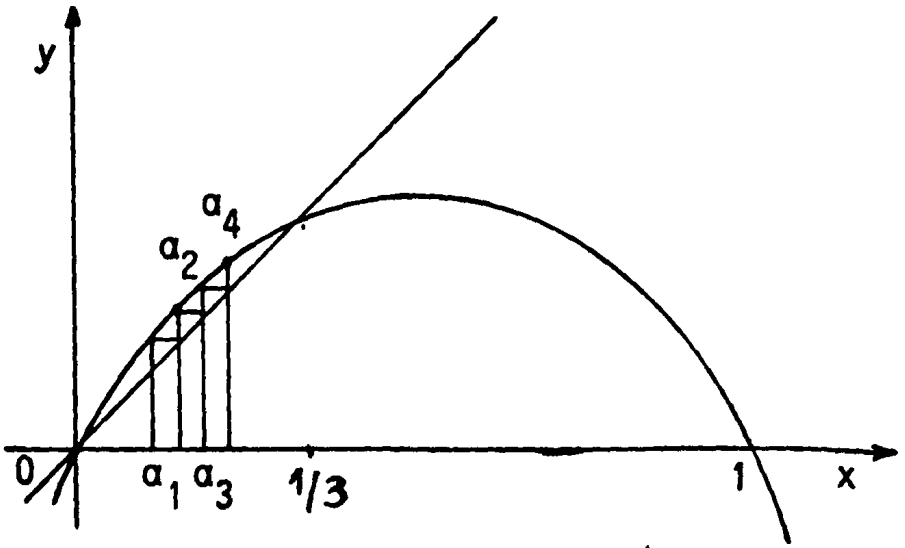
Αυτή η μέθοδος είναι πάρα πολύ χρήσιμη, αλλά χρειάζεται προσοχή στην όσο το δυνατόν ακριβή σχεδίαση του γραφήματος της f. Είναι σημαντικό να ξέρουμε αν το ακρότατο βρίσκεται στα αριστερά ή στα δεξιά του σημείου τομής του γραφήματος της f με την ευθεία $y = x$. Αυτό θα αναλυθεί διεξοδικά στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 5.144

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \frac{3}{2}\alpha_\nu(1-\alpha_\nu).$$

Θεωρώντας την συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{2}x(1-x)$ βλέπουμε ότι $f(x) = x$ αν και μόνον αν $x = 0$ ή $x = \frac{1}{3}$, οπότε τα μόνα πιθανά όρια είναι το 0 και το $\frac{1}{3}$. Παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει για $x = \frac{1}{2}$ ολικό μέγιστο ίσο με $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$. Με επαγωγή επίσης αποδεικνύεται εύκολα ότι $0 \le \alpha_\nu \le 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$.



Αφού η μέγιστη τιμή της f παίρνεται για $x = \frac{1}{2}$ βλέπουμε ότι:

$$0 \le x \le \frac{1}{3} \Rightarrow f'(x) \ge 0 \Rightarrow f \quad \text{αύξουσα στο} \quad \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Άρα

$$0 \le x \le \frac{1}{3} \Rightarrow 0 = f(0) \le f(x) \le f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha_\nu \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow \alpha_{\nu+1} \in \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

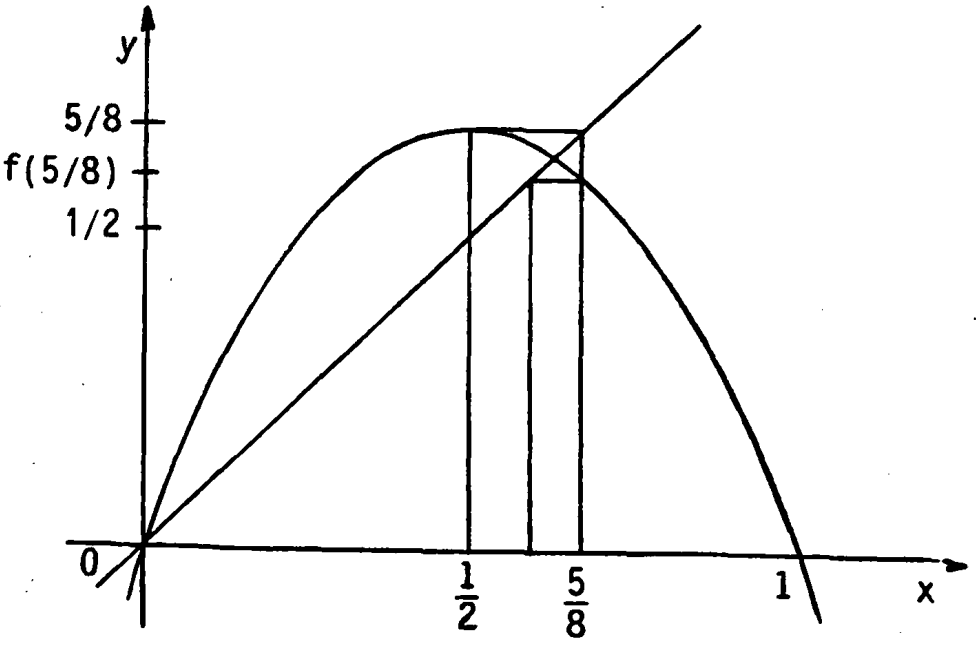
Συνεπώς $lim\alpha_\nu = \frac{1}{3}$.

Παράδειγμα 5.145

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \frac{5}{2}\alpha_\nu(1 - \alpha_\nu).$$

Θεωρώντας την συνάρτηση $f(x) = \frac{5}{2}x(1-x)$ βλέπουμε ότι $f(x) = x$ αν και μόνον αν $x = 0$ ή $x = \frac{3}{5}$, οπότε τα μόνα πιθανά όρια είναι το 0 και το $\frac{3}{5}$.



Αφού $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$ έχουμε:

$$\alpha_\nu \le \frac{5}{8}, \forall \nu \ge 2.$$

Επί πλέον $f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{75}{128} > \frac{1}{2}$ οπότε αφού η f είναι φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$ έχουμε:

$$\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{8} \Rightarrow f\left(\frac{5}{8}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{5}{8}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έτσι αν

$$\alpha_\nu \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right] \Rightarrow \alpha_{\nu+1} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right].$$

Αν $0 < \alpha_\nu \leq \frac{3}{5}$ τότε $\alpha_{\nu+1} \geq \alpha_\nu$ και αφού $0 < \alpha_1 < \frac{3}{5}$ συνεπάγεται ότι ή η α_ν είναι αύξουσα ή υπάρχει $\nu_0 : \alpha_{\nu_0} > \frac{3}{5}$. Αφού $\alpha_\nu \leq \frac{5}{8}, \forall \nu \geq 2$ η πρώτη περίπτωση συνεπάγεται ότι η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα και φραγμένη άνω και άρα συγκλίνει σε κάποιο όριο. Αυτό το όριο θα ικανοποιεί την $f(x) = x$ και άρα θα είναι ή 0 ή $\frac{3}{5}$ και αφού το όριο δεν μπορεί να είναι μικρότερο του α_1 (αφού $\alpha_\nu \geq \alpha_1, \forall \nu \in \mathbb{N}$) αυτό θα είναι $\frac{3}{5}$.

Στην δεύτερη περίπτωση παρατηρούμε ότι $\alpha_\nu \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right], \forall \nu \geq \nu_0$. Τότε

$$|\alpha_{\nu+1} - c| = |f(\alpha_\nu) - f(c)| = |f'(\xi_\nu||\alpha_\nu - c|, c = \frac{3}{5}. \qquad (\star)$$

για κάποιο ξ μεταξύ c και α_ν και άρα στο $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$. Αφού $f'(x) = \frac{5}{2} - 5x \Rightarrow |f'(x)| \leq |f'\left(\frac{5}{8}\right)| = \frac{5}{8}, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$. Από την $(\star)$ έχουμε:

$$|\alpha_{\nu+1} - c| \leq \frac{5}{8}|\alpha_\nu - c|, \forall \nu \geq \nu_0$$

που συνεπάγεται την

$$|\alpha_\nu - c| \leq \left(\frac{5}{8}\right)^{\nu-\nu_0} |\alpha_{\nu_0} - c|, \forall \nu \geq \nu_0$$

και επομένως $\alpha_\nu \to c$.

Σημείωση

Τα δυο τελευταία παραδείγματα αφορούν την ακολουθία, με γενικό τύπο

$$\alpha_1 = k \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \mu\alpha_\nu(1 - \alpha_\nu), 0 \leq k \leq 1, 0 < \mu \leq 2.$$

Η συμπεριφορά τέτοιων ακολουθιών και άλλων σαν αυτή δεν έχουν ακόμα πλήρως μελετηθεί και αυτό το είδος των προβλημάτων αποτελεί πεδίο έρευνας. Ακολουθίες σαν αυτές χρησιμοποιούνται ως Μαθηματικά μοντέλα σε διάφορες επιστήμες, όπως τη Βιολογία, την Κοινωνιολογία, την Οικονομία κ.τ.λ. Η παραπάνω ακολουθία προκύπτει από την **"λογιστική εξίσωση διαφορών"**

$$N_{t+1} = N_t(a - bN_t)$$

θέτοντας $X = \frac{bN}{a}$. Για μεγάλες τιμές του μ η συμπεριφορά αυτής της ακολουθίας γίνεται **χαοτική**.

§ 5.17. ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

Σωστό ή λάθος;

1 Αν $f(x) = 1/3x$ τότε $f'(x) = -3x^{-2}$.

2 $\frac{d}{dx}[\sqrt{cx}] = c\frac{d}{dx}[\sqrt{x}]$

3 Αν $f(x) = \pi^2$ τότε $f'(x) = 2\pi$.

4 Αν $f(x) = \sqrt{2x}$ τότε $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

5 Αν $f(x) = \sqrt{\alpha x}$ τότε $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha x}}$

6 Αν η f είναι συνεχής για $x = c$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη για $x = c$.

7 Αν μια συνάρτηση έχει παραγώγους από δεξιά και αριστερά σε ένα σημείο τότε είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό το σημείο.

8 Αν το γράφημα μιας συνάρτησης έχει εφαπτομένη γραμμή σε ένα σημείο τότε είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό το σημείο.

9 Αν $y = f(x)g(x)$ τότε $y'' = f.g'' + g.f''$.

10 Η παράγωγος ρητής συνάρτησης είναι ρητή συνάρτηση.

11 Αν f' και g' υπάρχουν για $x = c$ τότε η $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ υπάρχει για $x = c$.

12 Αν $y = (1-x)^{1/2}$ τότε $y' = \frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}$.

14 Το Θεώρημα Μέσης τιμής μπορεί να εφαρμοστεί στη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{|x|}, x[-1, 1] - \{0\}$.

15 Αν $0 < \alpha < \beta < 1$ και f παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

16 Αν f συνεχής στο (α, β) και τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχουν τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha\cdot, \beta]$.

17 Αν f' είναι αύξουσα στο (α, β) τότε η f είναι αύξουσα στο (α, β).

18 Αν $f(x) = \alpha x^3 + \beta$ και f αύξουσα στο $(-1, 1)$ τότε $\alpha > 0$.

19 Αν f αύξουσα στο (α, β) τότε $f'(x) > 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

20 Αν η f είναι φθίνουσα και συνεχής στο (α, β) τότε η f παραγωγίζεται στο (α, β).

21 Αν f' δεν ορίζεται για $x = c$ τότε το c είναι κρίσιμο της σημείο της f.

22 Αν $\alpha < c < \beta$ και c κρίσιμο σημείο της f τότε η f έχει τοπικό ακρότατο στο (α, β).

23 Αν f και g είναι παραγωγίσιμες και $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ τότε και $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$.

24 Αν f αύξουσα στο (α, β) τότε η f δεν έχει τοπικά ακρότατα στο (α, β).

25 Αν $f'(c) = 0$ τότε το γράφημα της f έχει σημείο καμπής στο $(c, f(c))$.

26 Για την $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι $f''(x) > 0$ για $x > 0$ και $f''(x) < 0$ για $x < 0$. Άρα το γράφημα της f έχει σημείο καμπής στο 0.

27 Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $|f(x)| \leq |x|$ τότε $f'(0) = 0$.

28 Η παράγωγος συνεχούς συνάρτησης υπάρχει εκεί που η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή.

29 $\frac{d}{dx} sin x^0 = cos x^0$.

30 Το σημείο καμπής μιας συνάρτησης f είναι ακρότατο για την συνάρτηση f'.

31 Αν οι $f'_-(\alpha)$ και $f'_+(\alpha)$ υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικές μεταξύ τους τότε η f είναι συνεχής στο α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.114 Να βρεθεί η $g'(0)$ αν $g(x) = (x^2 + 2x + 3) f(x)$ και είναι γνωστό ότι $f(0) = 5$ και $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-5}{x} = 4$.

5.115 Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{1+|x|}, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^{1/3}, x \in \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς, ενώ οι συναρτήσεις $f_1(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \begin{cases} sin(log(1+x^3), & -1 < x \leq 1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$ όχι.

5.116 Έστω $k > 0$ και

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - x^k}{log x}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 0 \\ 1 - k, & x = 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Είναι η f ομοιόμορφα συνεχής; Είναι η f φραγμένη;

5.117 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, φραγμένη, αλλά δεν παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Να αποδείξετε επίσης ότι η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ότι η f^{-1} υπάρχει, η οποία και να βρεθεί.

5.118 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$. Υποθέτουμε ότι $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και ότι η f αλλάζει πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι η $g(x) = f'(x) + 2f(x)$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

5.119 α) Να βρεθούν τα όρια:

$$\lim_{x \to 0-} e^{1/x}, \quad \lim_{x \to 0+} e^{1/x}.$$

β) Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}+4}, & \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Είναι η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο 0;

5.120 Να αποδείξετε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2\left(1 + sin^2\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ με ασυνεχή παράγωγο και ότι δεν είναι μονότονη στην περιοχή του μηδενός.

5.121 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = min(x, 1 - x)$ είναι συνεχής στο R, αλλά όχι παραγωγίσιμη.

5.122 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 2x^4 + x^4 sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο 0, αλλά η παράγωγος παίρνει γνήσια θετικές και γνήσια αρνητικές τιμές σε κάθε περιοχή του 0.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.123 α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + \lambda$ δεν μπορεί να έχει δυο ρίζες στο $[0, 1]$.

β) Αν $\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{\nu+1} = 0$ με $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_\nu x^\nu$ έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα.

5.124 Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$. Να αποδείξετε ότι αν $f(0) = 0$ και $f'(x) \geq M > 0, \forall x \in [0, 1]$ τότε ισχύει: $f(x) \geq \frac{1}{2}M, \forall x : \frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

5.125 Αν $f(0) = f'(0) = 0$ και υπάρχει η f'' στο $0 \leq x \leq h$ να αποδείξετε ότι

$$f(h) = \frac{1}{2}h^2 f''(\xi), 0 < \xi < h.$$

5.126 Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = log(1 + \sqrt{1 + x^2}) \quad \text{και} \quad g(x) = Arcsinhx.$$

α) Να μελετηθούν οι f και g ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι: $xe^{g(x)}\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]' + g'(x) = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι: $g(x) < x, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

5.127 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$ η δε παράγωγός της για x ακέραιο, από αριστερά είναι $\frac{1}{2}$ και από δεξιά δεν υπάρχει.

5.128 Έστω ότι: i) η $f'(x)$ υπάρχει για αρκετά μεγάλες τιμές του x. ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$. iii) $\lim_{x\to\infty} f'(x) = m$.

Να αποδείξετε ότι $m = 0$.

Να αποδείξετε ακόμα ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{-1}sinx^3, x > 0$ ικανοποιεί τα δυο πρώτα, αλλά όχι και το τρίτο.

5.129 Αν $\alpha < c < \beta$ και η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ακόμα ότι:

$$\frac{f(\beta) - f(c)}{\beta - c} = \frac{f(c) - f(\alpha)}{c - \alpha}$$

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : f''(\xi) = 0$.

5.130 Αν η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(\alpha) \geq 0$ και $f''(x) > 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ να αποδείξετε ότι $f(\beta) > f(\alpha)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.131 α) Αν $f'(c) > 0$ και η f' είναι συνεχής στο c, τότε η f είναι γνήσια αύξουσα σε μια περιοχή του c.

β) Αν $f'(c) > 0$, τότε δεν σημαίνει ότι υπάρχει περιοχή του c όπου η f είναι αύξουσα.

γ) Να αποδείξετε ότι είναι αδύνατο να βρούμε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(0) > 0$ και $f'(x) < 0, \forall x \in (0, \alpha), \alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι $f'(0) > 0$ και για τυχαίο $\alpha > 0$ υπάρχουν αριθμοί στο διάστημα $(0, \alpha)$ για τους οποίους είναι $f'(x) < 0$.

5.132 Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $f(x) = x^{\nu-1}e^{1/x}$ τότε $f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu}\frac{f(x)}{x^{2\nu}}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

β) Αν $f(x) = x^2 e^{-(x/\alpha)}$ τότε $f^{\nu}(0) = \frac{(-1)^{\nu}\nu(\nu-1)}{\alpha^{\nu-2}}$, $\nu \geq 2$.

5.133 Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} xsin\frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

μηδενίζεται άπειρες φορές στο διάστημα (0, 1).

5.134 Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x} + x + e^{-x}, x \neq 0.$$

5.135 Αν $f(x) > 0$, $f''(x) > 0$ και $\phi(x) = e^x f(e^{-2x})$ τότε να αποδείξετε ότι $\phi''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Επίσης να συμπεράνετε ότι:

$$2f(e^{-2x}) \leq e^{-x}f(1) + e^x f(e^{-4x}).$$

5.136 Να αποδείξετε ότι:

α) $e^x \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση $f(x) = xlog(1 - \frac{1}{x})$ είναι αύξουσα $\forall x > 1$.

γ) Η ακολουθία $\alpha_\nu = (1+\alpha)(1+\alpha^2)\dots(1+\alpha^\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει αν $0 \leq \alpha < 1$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.137 Να αποδείξετε ότι:

α) $x - \frac{x^2}{2} < log(1+x) < x, \forall x > 0.$

β) $lim\alpha_\nu = \sqrt{e}$ όπου $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)\left(1+\frac{2}{\nu^2}\right)\cdots\left(1+\frac{\nu}{\nu^2}\right), \nu \in \mathbb{N}.$

5.138 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

α) Να προσδιορίσετε το α ώστε η f να είναι συνεχής στο 0.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει συνεχείς παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης.

γ) Αν $\bar{x}$ είναι σημείο όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε $|f(\bar{x})| = (1+\bar{x}^2)^{-1/2}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $|f(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει το ίσον;

ε) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \frac{2}{\pi}$ αν $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

5.139 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^\alpha - \alpha x, x \geq 0, 0 < \alpha < 1.$

α) Να βρεθεί το $maxf$.

β) Να αποδείξετε ότι $1 - \alpha \geq x^\alpha - \alpha x, \forall x \geq 0.$

γ) Να αποδείξετε ότι $x_1^\alpha . x_2^\beta \leq \alpha x_1 + \beta x_2, \forall x_1, x_2 \in R^+$ και $\alpha + \beta = 1.$

δ) Να αποδείξετε ακόμα ότι:

i) $x_1^{1/p} . x_2^{1/q} \leq \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q}, p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

ii) $AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$

5.140 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν ορίζεται για $-1 \leq x \leq 0.$

β) Να βρεθούν τα $\lim_{x\to 0+} f(x), \lim_{x\to\pm\infty} f(x).$

γ) Να αποδείξετε ότι $f'(x) > 0$ για $x < -1$ και $0 < x.$

δ) Να παραστήσετε γραφικά την f για $x < -1$ και $0 < x.$

5.141 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x - sinx, x \in \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη f^{-1}. Να αποδείξετε επίσης ότι:

$$\lim_{y\to 0} \frac{f^{-1}(y)}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{6}.$$

5.142 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} (x^2)^x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

β) Έχει η f μέγιστα, ελάχιστα και σημεία καμπής;

γ) Να παραστήσετε την f γραφικά.

5.143 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f'(x) \leq 0$ για $\alpha \leq x < \xi$, $f'(x) \geq 0$ για $\xi < x \leq \beta$, να αποδείξετε ότι η f δεν είναι ποτέ μικρότερη από το $f(\xi)$.

5.144 Για ποιά τιμή της θετικής σταθεράς α, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^\alpha e^{2\alpha - x}$, $x > 0$ γίνεται ελάχιστη;

5.145 Έστω $f : R - \{0\} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{sin(x^2)}{x}.$$

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ αλλά το $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ δεν υπάρχει.

5.146 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $x = x_0$ και έστω ότι το $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ υπάρχει. Τότε η f' πρέπει να είναι συνεχής στο x_0. Μ' άλλα λόγια η $f'(x_0)$ υπάρχει και είναι ίση με $\lim_{x \to x_0} f'(x)$. Θεωρώντας τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

να αποδείξετε ότι δεν είναι αναγκαίο για την ύπαρξη της $f'(0)$ να υπάρχει το $\lim_{x \to 0} f'(x)$.

5.147 Έστω ότι: $f''(x) + p(x)f(x) = 0$, $g''(x) + p(x)g(x) = 0$, $\alpha < x < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι η $w(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ είναι σταθερή.

β) Να αποδείξετε ότι αν $w(x) \neq 0$ και $f(x_1) = f(x_2) = 0$ για $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ τότε $\exists c \in (x_1, x_2) : g(c) = 0$.

γ) Να γίνει εφαρμογή για $f(x) = sinx$, $g(x) = cosx$, $p(x) = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = \pi$.

5.148 α) Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-2, 1]$.

β) Για ποιά τιμή του c η συνάρτηση $f(x) + cx$ είναι αύξουσα $\forall x \in \mathbb{R}$;

γ) Για ποιά τιμή του c η συνάρτηση $f(x) - cx$ είναι φθίνουσα $\forall x \in \mathbb{R}$;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.149 Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών και είναι παραγωγίσιμη στο (α, β). Να αποδείξετε ότι για την f ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle.

5.150 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} Arc\,ctg\left(|x|^{-\alpha}\right), & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο στο 0 για $\alpha > 0$.

β) Να βρεθεί η f' και να βρεθεί το $\lim_{x\to 0} f'(x)$ για τις διάφορες τιμές του α.

5.151 Αν

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \sqrt{|x|} + x.$$

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ενώ το $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g(x)}$ δεν υπάρχει.

5.152 α) Αν $0 < x < 1$ και $\rho > 0$ να αποδείξετε ότι η παράσταση $\frac{1-x^\rho}{1-x}$ περιέχεται μεταξύ 1 και ρ.

β) Έστω $x > y > 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\rho y^{\rho-1} < \frac{x^\rho - y^\rho}{x-y} < \rho x^{\rho-1}, \rho > 1$

ii) $\rho x^{\rho-1} < \frac{x^\rho - y^\rho}{x-y} < \rho y^{\rho-1}, 0 < \rho < 1.$

5.153 Για ποια x ισχύει $exp\left(\frac{x-1}{x}\right) \leq x^2$;

5.154 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} - x\right)(4 - 3x^2), x \in \mathbb{R}$$

έχει ακριβώς ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο που διαφέρουν κατά $\frac{4}{9}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3$. Ποιά είναι η μικρότερη τιμή της διαφοράς για τις διάφορες τιμές του α;

5.155 Να βρεθεί ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς:

$$1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots, \sqrt[\nu]{\nu}.$$

5.156 Να αποδείξετε ότι το αντίστροφο του θεωρήματος των ενδιαμέσων τιμών ισχύει για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο διάστημα (α, β), αν αυτή έχει φραγμένη παράγωγο στο διάστημα (α, β).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

5.157 Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία υπάρχει η f'' και είναι θετική $\forall x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ είναι γνήσια αύξουσα $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

5.158 Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και η $f(x) = \alpha x - \frac{x^3}{1+x^2}$ είναι αύξουσα $\forall x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\alpha \geq \frac{9}{8}$.

5.159 Θεωρούμε την ακολουθία $x_\nu, \nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $x_0 = 0$ και $x_{\nu+1} = \alpha + \lambda sinx_\nu, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $|sinx - siny| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

β) $|x_{\nu+1} - x_\nu| \leq |\alpha||\lambda^\nu|, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

γ) $|x_\mu - x_\nu| \leq \frac{|\alpha||\lambda|^\nu}{1-|\lambda|}$, αν $|\lambda| < 1, \mu > \nu$. Να αποδείξετε ότι αν $|\lambda| < 1$ η $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει και το όριό της είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $x = \alpha + \lambda sinx$.

5.160 Αν $f(x) = \frac{1}{sinx - sin\alpha} - \frac{1}{(x-\alpha)cos\alpha}$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{\lim_{x\to\alpha} f(x)\right\} - \lim_{x\to\alpha} f'(x) = \frac{3}{4}\frac{1}{cos^3\alpha} - \frac{5}{12}\frac{1}{cos\alpha}.$$

5.161 Αν $f(0) = \alpha, f(\alpha) = \beta, f'(0) = -1$ και $|f''(x)| < \frac{1}{4|\alpha|}, x \in [-2\alpha, 2\alpha]$ να αποδείξετε ότι:

i) $|1 + f'(x)| < \frac{1}{2}, x \in (-2\alpha, 2\alpha)$.

ii) $|f(\alpha + \beta)| < \frac{1}{2}|f(\alpha)| < \frac{1}{4}|\alpha|$.

5.162 Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

1) $x - x^2 \leq log(1 + x) \leq x - \frac{1}{3}x^2, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

2) $-log(cosx) < \frac{1}{2}sinx.tgx, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

3) $logx < \nu(x^{1/\nu} - 1), 0 < x, x \neq 1, \forall \nu > 0$

4) $\frac{x^p-1}{p} \geq \frac{x^q-1}{q}, p > q > 0, x > 0$

5) $\frac{log(1+y)}{y} < \frac{log(1+x)}{x}, 0 < x < y$

6) $(1 + x)^\lambda + (1 - x)^\lambda - 2^\lambda \leq 0, \lambda \geq 1$ και $0 < x < 1$

7) $\left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(1 + x^p), p \geq 2, 0 < x < 1$

8) $2sinx + tgx > 3x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

9) $x > \frac{(\alpha+\beta)sinx}{\alpha+\beta.cosx}, \alpha > 2\beta > 0, 0 < x < \pi$

10) $\alpha e^{-\beta x} - \beta e^{-\alpha x} > \alpha - \beta, 0 < \alpha < \beta, x > 0$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

11) $\frac{\lg y}{\lg x} > \frac{y}{x}, 0 < x < y < \frac{\pi}{2}$

12) $\frac{1}{x+\frac{1}{2}} < log\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}, x > 0.$

13) $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+\alpha x} \leq \frac{\sqrt{\alpha}-1}{\sqrt{\alpha}+1}, \alpha > 1, x \geq 1$

14) $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu} + \left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^{\nu} \geq \frac{5^{\nu}}{2^{\nu-1}}, \nu \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+}$ με $\alpha+\beta=1.$

15) $\sqrt[\nu]{\alpha+\beta} \leq \sqrt[\nu]{\alpha} + \sqrt[\nu]{\beta}, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+}$

16) $\alpha^{\beta} + \beta^{\alpha} > 1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+}$

5.163 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε

$$f'(\alpha) < \mu < f'(\beta) \quad \text{και} \quad \mu \neq \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$f(c)-f(\alpha) = \mu(c-\alpha) \quad \text{ή} \quad f(c)-f(\beta) = \mu(c-\beta)$$

για κάποιο $c \in (\alpha, \beta)$.

5.164 Έστω $f : [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(\alpha, +\infty)$ με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell < +\infty$ και $|f''(x)| \leq M, \forall x \in (\alpha, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

5.165 Θα λέμε ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz τάξης α στο $x_0 \in \Delta(f)$ αν υπάρχει σταθερή $k > 0$ τέτοια ώστε:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|^{\alpha}$$

για όλα τα x σε μια περιοχή του x_0, $x \neq x_0$.

α) Αν $\alpha > 0$ και η f ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz τάξης α στο x_0 τότε να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 και αν $\alpha > 1$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

β) Να δώσετε παράδειγμα συνάρτησης f που να είναι Lipschitz τάξης 1, αλλά η f' να μην υπάρχει.

5.166 α) Αν f είναι αύξουσα και g φθίνουσα, τότε να αποδείξετε ότι η $f \circ g$ είναι φθίνουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$ είναι αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\nu\left\{1-\cos\frac{1}{\nu}\right\}$ συγκλίνει.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ

5.167 α) Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x^{1/x}, x > 0$.

β) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\nu^{1/\nu} - 1\right) cos\nu x, \nu \in \mathbb{N}.$$

5.168 Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τέτοιες ώστε:

$$f'(x) = -g(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x g(x)] = x f(x).$$

Να αποδείξετε ότι μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της g υπάρχει ρίζα της f και ότι μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της f υπάρχει ρίζα της g.

5.169 Έστω $f : [0, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \beta)$. Αν $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) f'(\xi) = \frac{[f(\beta)]^2}{2\beta}.$$

5.170 Να αποδείξετε ότι:

$$(1+x)^{\alpha} \leq 1 + x^{\alpha} \leq 2^{1-\alpha}(1+x)^{\alpha}, 0 \leq x \leq 1, 0 < \alpha < 1.$$

5.171 Θεωρούμε τις παρακάτω προτάσεις:

(α) η συνάρτηση $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ είναι γνήσια αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(0, \infty)$.

(β) $\frac{1}{1+x} < log\left(\frac{x+1}{x}\right)$ για $x < -1$ και $x > 0$.

(γ) $1 + x \leq e^x, x > -1$ και το $=$ ισχύει αν $x = 0$,

(δ) Έστω $\alpha_k > 0, k = 1, 2, \ldots, n$. Τότε

$$(\alpha_1 . \alpha_2 \cdots \alpha_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n).$$

και η ισότητα ισχύει αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$.

Να αποδείξετε ότι είναι ισοδύναμες, αποδεικνύοντας ότι:

$$(\alpha) \Rightarrow (\beta) \Rightarrow (\gamma) \Rightarrow (\delta) \Rightarrow (\alpha)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.172 α) Έστω $f : (\alpha, \beta) \to IR$, για την οποία υποθέτουμε ότι υπάρχει η f''' και είναι αύξουσα στο (α, β). Να αποδείξετε ότι

$$f(x-1) - 2f(x) + f(x+1) > f'(x), x \in (\alpha+1, \beta-1).$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$(x-1)log(x-1) - 2xlogx + (x+1)log(x+1) > \frac{1}{x}, x > 0.$$

5.173 Να αποδείξετε ότι:

$$e^{t(\alpha-1)} \leq \alpha(1-e^{-t}) + e^{-t}, t \geq 0, \alpha \in [0,1].$$

5.174 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x = T(x)$ όπου $T(x) = \frac{1}{2}\left[cos\frac{x}{2} - |x - \frac{1}{2}|\right]$ έχει ακριβώς μια λύση στο $[\alpha, \beta] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

5.175 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x + x^3 sin^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in IR$.

β) Ισχύουν για την f' οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$;

5.176 Να αποδείξετε ότι μεταξύ δυο ριζών της $e^x sinx = 1$, υπάρχει τουλάχιστο μια ρίζα της $e^x cosx + 1 = 0$.

5.177 Αν $f(0) = 0$ και η $f''(x)$ υπάρχει για $x > 0$, να αποδείξετε ότι

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}xf''(\xi), 0 < \xi < x.$$

Επίσης να αποδείξετε ότι αν $f''(x) > 0, \forall x > 0$ τότε η $\frac{f(x)}{x}$ είναι γνήσια αύξουσα.

5.178 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = log|x|, x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $lim_{x \to -1/2} f'(x) = -2$, με την βοήθεια του $(\epsilon - \delta)$ ορισμού.

β) Να αποδείξετε ότι η f' δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0)$, ενώ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, -2)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

γ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Μέσης τιμής στην συνάρτηση $g(x) = f(1+x), x > -1$ στο διάστημα $[0, \frac{1}{\nu}]$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\nu+1} < log\left(1+\frac{1}{\nu}\right) < \frac{1}{\nu}.$$

Επίσης να αποδείξετε ότι οι ακολουθίες $\gamma_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu} - log\,\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $\delta_\nu = \gamma_\nu - \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνουν, και μάλιστα στο ίδιο όριο.

5.179 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}, & \alpha < x \leq \beta \\ k, & x = \alpha \end{cases}$$

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο α, να βρεθεί η σταθερή k ώστε η g να είναι συνεχής. Αν ακόμα ισχύει $f'(\alpha) < \mu < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) - f(\alpha) = \mu(\xi - \alpha).$$

β) Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και γνήσια κυρτή στο (α, β), τότε να αποδείξετε ότι η g είναι γνήσια αύξουσα στο (α, β).

γ) Αν η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει συνεχή πρώτη παράγωγο.

5.180 Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f έχει παράγωγο f' μονότονη, τότε η f' είναι συνεχής.

5.181 Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $(\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3)$ οι τρεις πραγματικές ρίζες ενός πολυωνύμου τρίτου βαθμού. Να αποδείξετε:

α) Υπάρχει $c \in (\alpha_1, \alpha_2) : f'(c) = 0$.

β) Αυτό το c είναι πιο κοντά στο α_1 παρά στο α_2.

5.182 Έστω $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)h(x)$ όπου h και h' είναι μη μηδενικές, αντιθέτου προσήμου στο $[\alpha_1, \alpha_2]$ και η h' είναι συνεχής στο $[\alpha_1, \alpha_2]$. Να αποδείξετε ότι η f' έχει ρίζα μεταξύ των α_1 και $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$.

5.183 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 cos\frac{\pi}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ με $f'(0) > 0$.

β) Η f' δεν είναι φραγμένη στο διάστημα $[-1, 1]$.

γ) $f\left(\frac{1}{2\nu}\right) - f\left(\frac{1}{2\nu+1}\right) < 0, \forall \nu \in N$

δ) Η f δεν είναι μονότονη στην περιοχή του μηδενός.

5.184 Έστω $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) + g'(\xi) f(\xi) = 0$.

β) Για κάθε μη μηδενικό πραγματικό αριθμό r υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$: $rf'(c) + f(c) = 0$.

5.185 Έστω $f : R \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) > 0$ και $f'(x) < \frac{1}{2}, \forall x > 0$. Θεωρώντας την συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός c, τέτοιος ώστε $f(c) = c$.

5.186 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν x_1, x_2 με $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ και

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$$

5.187 Έστω $[\alpha, \beta]$ ένα διάστημα με $0 \notin [\alpha, \beta]$ και $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\zeta \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta} = f(\zeta) - \zeta f'(\zeta).$$

5.188 Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

5.189 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \gamma) \cup (\gamma, \beta]$ (δηλ. παραγωγίσιμη στο (α, β) εκτός από το σημείο γ). Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leq |f'(\xi)|(\beta - \alpha).$$

β) Υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με $\alpha < \xi_1 < \xi_2 < \beta$ και θετικοί πραγματικοί αριθμοί λ_1, λ_2 με $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ τέτοιοι ώστε:

$$f(\beta) - f(\alpha) = [\lambda_1 f'(\xi_1) + \lambda_2 f'(\xi_2)](\beta - \alpha).$$

5.190 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$ και $f'(x) > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι αμφιμονοσήμαντη στο $[\alpha, \beta]$ και να βρήτε το $I = f([\alpha, \beta])$.

β) Η f' έχει γνήσια θετικό ελάχιστο m στο $[\alpha, \beta]$.

γ) Η f έχει αντίστροφη f^{-1} στο I και ισχύει:

$$|f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)| \leq \frac{1}{m}|y_2 - y_1|, \forall y_1, y_2 \in I.$$

δ) Η f^{-1} είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I, παραγωγίσιμη στο I με παράγωγο $(f^{-1})'$ συνεχή στο I.

5.191 Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{x} < \frac{x-1}{\log x} < \frac{1}{e}x^{\frac{1}{x-1}} < \frac{x+1}{2}, \quad x > 1$$

5.192 Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \geq \beta > 0$ τότε $\alpha^\alpha + \beta^\beta \geq \alpha^\beta + \beta^\alpha$

5.193 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

Να την εξετάσετε ως προς την μονοτονία.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.194 Έστω f μια συνάρτηση για την οποία υποθέτουμε ότι υπάρχει η f'' στο διάστημα (α, β) και ότι $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f''(c) \geq \frac{4}{(\beta - \alpha)^2}[f(\beta) - f(\alpha)].$$

5.195 Αν η συνάρτηση f είναι τέτοια ώστε η f'' να υπάρχει και $|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B, \forall x > r$, όπου A και B θετικές σταθερές, τότε να αποδείξετε ότι:

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{AB}, \forall x > r$$

5.196 α) Να αποδείξετε ότι: $0 \leq x - log(1 + x) \leq \frac{x^2}{2}, x > 0$.

β) Έστω $\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu} - log(\nu + 1)$. Να αποδείξετε ότι η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα και φραγμένη. Να συμπεράνετε ότι και η $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu} - log\,\nu$ συγκλίνει.

5.197 Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(\alpha) = 0, f(\beta) > 0, f'(\beta) < 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta) : f'(c) = 0$.

5.198 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x.log\,x + e^x - 1.$$

Να αποδείξετε ότι: α) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, 1]$.

β) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει και αυτή μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

5.199 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x.e^{-x} = k, 0 < k < \frac{1}{e}$$

έχει ακριβώς δυο πραγματικές ρίζες u, v με $0 < u < 1 < v$.

5.200 Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x^2 sin^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο 0, αλλά η f' αλλάζει πρόσημο στην περιοχή του 0.

5.201 Έστω ότι η f ορίζεται στο διάστημα $(0, 1]$ και έχει φραγμένη παράγωγο στο διάστημα αυτό. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in N$ με $\alpha_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)$ συγκλίνει.

5.202 Να αποδείξετε ότι:

1. Αν η f είναι κυρτή στο I και $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in I$ τότε

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_\nu)}{\nu}.$$

2. Αν η f είναι κυρτή στο (α, β) και $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι θετικοί αριθμοί, τότε:

$$f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_\nu x_\nu}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu}\right) \leq \frac{\alpha_1 f(x_1 + \alpha_2 f(x_2 + \ldots + \alpha_\nu f(x_\nu)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu}$$

όπου $\alpha < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_\nu < \beta$.

3. Αν η f είναι κυρτή στο (α, β) και $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι όλοι θετικοί αριθμοί, τότε:

$$\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu}{\frac{\alpha_1}{x_1} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{x_\nu}} \leq exp\left(\frac{\alpha_1 log x_1 + \ldots + \alpha_\nu log x_\nu}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu}\right) \leq \frac{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_\nu x_\nu}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu}$$

4. Αν η f είναι κυρτή στο (α, β) και $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι όλοι θετικοί αριθμοί, τότε:

$$\frac{\nu}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_\nu}} \leq (x_1 . x_2 . \ldots . x_\nu)^{1/\nu} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}.$$

5. Για κάθε φυσικό ν ισχύει:

$$\left(\frac{\nu}{log\nu e}\right)^\nu \leq \nu! \leq \left(\frac{\nu + 1}{2}\right)^\nu.$$

6. Αν $p > 1$ τότε:

$$\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_\nu^p}{\nu} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}\right)^p.$$

7. Αν $q > p > 1$ και $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ θετικοί τότε:

$$\left(\frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_\nu^q}{\nu}\right)^{1/q} \geq \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_\nu^p}{\nu}\right)^{1/p}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

8. Αν $0 < q_r < 1, r = 1, 2, \ldots, \nu, \sum_{r=1}^{\nu} q_r = 1$ και $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ θετικοί τότε:

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_\nu x_\nu \geq x_1^{q_1} . x_2^{q_2} \ldots x_\nu^{q_\nu}.$$

9. Έστω x, y, p, q θετικοί με $p + q = 1$. Τότε: $x^p y^q \leq px + qy$.

10. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ θετικοί. Τότε:

$$\sum_{r=1}^{\nu} \alpha_r^p \beta_r^q \leq \left(\sum_{r=1}^{\nu} \alpha_r\right)^p \left(\sum_{r=1}^{\nu} \beta_r\right)^q.$$

11. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ θετικοί. Τότε:

$$\left(\sum_{r=1}^{\nu} \alpha_r \beta_r\right)^2 \leq \left(\sum_{r=1}^{\nu} \alpha_r^2\right) \left(\sum_{r=1}^{\nu} \beta_r^2\right).$$

(Ανισότητα του Cauchy).

12. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ θετικοί. Τότε αν $0 < p < 1, 0 < q < 1, p + q = 1$ ισχύει:

$$\sum_{r=1}^{\nu} \alpha_r \beta_r \leq \left(\sum_{r=1}^{\nu} \alpha_r^{1/p}\right)^p \left(\sum_{r=1}^{\nu} \beta_r^{1/q}\right)^q$$

13. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ θετικοί. Τότε:

$$\sum_{r=1}^{\nu} \alpha_r \beta_r \leq \left(\sum_{r=1}^{\nu} \alpha_r^k\right)^{1/k} \left(\sum_{r=1}^{\nu} \beta_r^\lambda\right)^{1/\lambda}$$

14. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ θετικοί και $p > 1$. Τότε:

$$\left(\sum_{r=1}^{\nu} (\alpha_r + \beta_r)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{r=1}^{\nu} \alpha_r^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{r=1}^{\nu} \beta_r^p\right)^{1/p}.$$

(Ανισότητα του Minkowski)

15. Αν $x_i, y_i, i = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε:

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k \geq \ldots x_\nu \quad \text{και} \quad y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_k \geq \ldots y_\nu \qquad (1)$$

τότε

$$\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i \geq \left(\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i\right) \left(\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} y_i\right). \qquad (2)$$

• Η ισότητα ισχύει αν $x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu$ ή $y_1 = y_2 = \ldots = y_\nu$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράρτημα

- απαντήσεις
- υποδείξεις
- λύσεις των ασκήσεων

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κεφάλαιο 1

1.2 $i) sup A = 1$, $ii) inf A = -\frac{3}{2}$, $sup A = \frac{1}{2}$ $iii) inf A = -2$.

1.4 Είναι $A \subseteq A \cup B \Rightarrow$ εφαρμογή 3 της §1.4, $sup A \leq sup(A \cup B)$.

1.9 Αν $\alpha_{p\nu} \to \ell_1, \alpha_{p\nu-1} = \ell_{-1}, \ldots, \alpha_{p\nu-(p-1)} \to \ell_{-p-1)}$ και $\alpha_{q\nu} \to \ell_2$ να αποδείξετε ότι $\ell_1 = \ell_{-1} = \ldots = \ell_{-(p-1)}$. Π.χ. $\alpha_{q(p\nu)} \to \ell_2$ ως υπακολουθία της $\alpha_{q\nu}$. Αλλά $\alpha_{p(q\nu)} = \alpha_{p(q\nu)} \to \ell_1$ ως υπακολουθία της $\alpha_{p\nu}$. Άρα $\ell_1 = \ell_2$. Όμοια $\alpha_{q(\nu p+1)} \to \ell_2$ και $\alpha_{\nu pq+q} = \alpha_{p(q\nu+\frac{1+q}{p})-1} \to \ell_{-1}$. Άρα $\ell_2 = \ell_{-1}$ κ.τ.λ.

1.11 Να διακρίνετε τις περιπτώσεις $\ell = 0, \ell > 0$. Αν $\ell > 0 \Rightarrow |\alpha_\nu^2 - \ell^2| = |\alpha_\nu - \ell|(\alpha_\nu + \ell) \geq |\alpha_\nu - \ell|.\ell$.

1.12 $i) 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt[\nu]{1 + x^\nu} \leq \sqrt[\nu]{2}$.

ii) $x > 1 \Rightarrow x = \sqrt[\nu]{x^\nu} < \sqrt[\nu]{1 + x^\nu} < \sqrt[\nu]{2}.x$.

1.13 $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \to 0$.

1.14 $\alpha_\nu \to 0, \sqrt{\nu}\alpha_\nu \to \frac{1}{2}$.

1.15 $y^\nu < x^\nu + y^\nu < 2y^\nu$.

1.17 $x_\nu = \frac{1}{2}[\alpha_\nu + \beta_\nu - |\alpha_\nu - \beta_\nu|], y_\nu = \frac{1}{2}[\alpha_\nu + \beta_\nu + |\alpha_\nu - \beta_\nu|]$

1.19 $|\alpha_\nu - \ell| < \epsilon = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \sqrt[\nu]{\ell/2} < \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} < \sqrt[\nu]{3\ell/2}, \forall \nu > \nu_0$.

1.20 α) $\frac{1}{4}$, β) $\frac{1}{2}$, γ) 1, δ) 1, ε) 0 στ) $\frac{4}{3}$.

1.21 $\sqrt[\nu]{P(\nu)} = \sqrt[\nu]{\nu^\lambda}\sqrt[\nu]{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\nu} + \cdots + \frac{\alpha_\lambda}{\nu}}$. Να αποδείξετε ότι $\sqrt[\nu]{\nu^\lambda} \to 1$ και να χρησιμοποιήσετε την 1.19.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

1.22 $\gamma_\nu = \alpha_0\sqrt{\nu} + \ldots + \alpha_k\sqrt{\nu+k} = \sqrt{\nu}\left\{\alpha_0 + \alpha_1\sqrt{1+\frac{1}{\nu}} + \ldots + \alpha_k\sqrt{1+\frac{k}{\nu}}\right\}$
$= \sqrt{\nu}\left\{\alpha_0 - \alpha_0 + \alpha_1\left(\sqrt{1+\frac{1}{\nu}} - 1\right) + \ldots + \alpha_k\left(\sqrt{1+\frac{k}{\nu}} - 1\right)\right\} \Rightarrow |\gamma_\nu| \leq$
$\sqrt{\nu}A\left(\frac{1}{\nu} + \ldots + \frac{k}{\nu}\right) \leq \frac{Ak(k+1)}{2\sqrt{\nu}} \to 0,\ A = max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_k|\}.$

1.23 α) $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -\frac{1}{\nu(\nu+1)^2}\{1 + (\nu+1)\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu}\right)\} < 0.$

β) $lim\alpha = 0$, εφαρμογή 3 της §1.5.

1.24 $\ell = \sqrt{2}.$

1.25 α) αύξουσα αν $k \neq 0, 1$. Αν $k = 0, 1$ α_ν σταθερή.

β) φραγμένη αν $0 \leq k \leq 1$.

1.26 $\alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(\alpha_{\nu-1} + \frac{k}{\alpha_{\nu-1}}\right) \geq \sqrt{\alpha_{\nu-1}\cdot\frac{k}{\alpha_{\nu-1}}} = \sqrt{k}.$

$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \frac{k-\alpha_\nu^2}{2\alpha_\nu} \leq 0.$

1.27 Θέτουμε $\gamma_\nu = \alpha_\nu - \ell \Rightarrow \gamma_\nu \to 0$ και $\frac{\gamma_1\beta_\nu + \gamma_2\beta_{\nu-1} + \cdots + \gamma_\nu\beta_1}{\nu} = \frac{\alpha_1\beta_\nu + \cdots + \alpha_\nu\beta_1}{\nu} - \frac{\ell(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu}{\nu}$. Αλλά $\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu}{\nu} \to m$, εφαρμογή 3 της §1.5. Αρκεί να αποδειχθεί ότι $\frac{\eta\beta_\nu + \cdots + \gamma_\nu\beta}{\nu} \to 0.$

1.28 Με επαγωγή να αποδείξετε ότι είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το 2.

1.29 Να εργαστείτε όπως στην 1.15 υποθετοντας ότι $max(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \alpha_1$.

1.30 Με επαγωγή να δείξετε ότι $2 < \alpha_\nu < 3$. Επίσης να δείξετε ότι $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu < 0$. Είναι $\ell = 2$.

1.31 $log\alpha_\nu - log\alpha = log\left(1 + \frac{\alpha_\nu - \alpha}{\alpha}\right) = log(1 + x_\nu), x_\nu = \frac{\alpha_\nu - \alpha}{\alpha}$. Αρκεί να αποδείξετε ότι $log(1 + x_\nu) \to 0$.

1.32 Από την εφαρμογή 1 της § 1.7, Σημείωση να αποδείξετε πρώτα ότι: $\frac{1}{\nu+1} < log\frac{\nu+1}{\nu} < \frac{1}{\nu}$.

1.33 $\ell = 1$.

1.34 Να αποδείξετε ότι $\alpha_{\nu+1}^2 - k < 0, \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu > 0$. Είναι $\ell = \sqrt{2}$.

1.35 Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3 της §1.7.

1.36 $\frac{\alpha_{\nu+2}}{\alpha_{\nu+1}} = \sqrt{\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}}$. Με επαγωγή να αποδείξετε ότι $\alpha_{\nu+2} = \sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2^2}{\alpha_{\nu+1}}}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.39 α) $+\infty$, β) Δεν υπάρχει, γ) e^{α}, δ) e^{s}.

1.40 $\alpha_\nu \to \ell \Rightarrow \alpha_\nu \in (\ell-\epsilon, \ell+\epsilon)$ για άπειρο πλήθος δεικτών $\Rightarrow \ell$ σ.σ. της α_ν, $\nu \in N$. Να υποθέσετε ότι έχει και άλλο $\ell' \neq \ell$ και να καταλήξετε σε άτοπο.

1.41 $\alpha_\nu = \frac{1-\frac{2}{\nu}}{2+\frac{1}{\nu}}$. Πιθανό άνω φράγμα το $\frac{1}{2}$. Να παρατηρήσετε ότι $|\alpha_\nu| \leq \frac{1}{2}$, ισχύει για $\nu \geq 4$ και να πάρετε ως φράγμα $\phi = max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, |\alpha_3|, \frac{1}{2})$.

β) Είναι $|\alpha_\nu| \leq 2$. Να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\frac{1}{\nu^2} < \frac{1}{(\nu-1)\nu} = \frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu}$.

1.42 α) $A' = \{-1, 1\}$ β) $A' = \{-1, 0, 1\}$.

1.43 γ) Αν $\mu > \nu \Rightarrow |\alpha_\mu - \alpha_\nu| = \frac{1}{(\nu+1)!} + \cdots + \frac{1}{\mu!}$

$= \frac{1}{(\nu+1)!}\left\{1 + \frac{1}{\nu+2} + \cdots + \frac{1}{(\nu+2)(\nu+3)\cdots\mu}\right\}$

$< \frac{1}{(\nu+1)!}\left\{1 + \frac{1}{\nu+1} + \cdots + \frac{1}{(\nu+1)^{\mu-\nu-1}}\right\}$

δ) $|\alpha_{\nu+k} - \alpha_\nu| = \frac{1}{(\nu+1)^{\nu+1}} + \cdots + \frac{1}{(\nu+k)^{\nu+k}} \leq \frac{1}{2^{\nu+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{\nu+k}} \leq \frac{1}{2^\nu}$.

1.48 α) $|\alpha_{\nu+k} - \alpha_\nu| = \frac{1}{(\nu+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(\nu+k)^2} < \frac{1}{\nu(\nu+1)} + \cdots + \frac{1}{(\nu+k-1)(\nu+k)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+k} < \frac{1}{\nu}$.

β) $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \frac{1}{(\nu+1)^2} > 0$ και $|\alpha_\nu| \leq 2$ από την άσκηση 1.12β.

1.49 $|\sigma_\mu - \sigma_\nu| \leq |\alpha_{\nu+1}| + \cdots + |\alpha_\mu| = (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_\mu|) - (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_\nu|) < \epsilon$, αφού τ_ν, $\nu \in N$ ακολουθία του Cauchy.

1.50 Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3 της § 1.8.

1.51 Να υποθέσετε ότι έχει δύο, έστω α και β. Τότε $\exists \alpha_{k_\nu} \to \alpha, \alpha_{\lambda_\nu} \to \beta$. Για $\epsilon = |\alpha - \beta| > 0$ είναι: $\epsilon = |\alpha-\beta| \leq |\alpha - \alpha_{k_\nu}| + |\alpha_{k_\nu} - \alpha_{\lambda_\nu}| + |\alpha_{\lambda_\nu} - \beta| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$.

1.52 Κάθε μηδενική ακολουθία συγκλίνει στο 0. Υπάρχει όμως συγκλίνουσα ακολουθία που δεν συγκλίνει στο 0, π.χ. $\alpha_\nu = \frac{\nu^2}{3\nu^2+1}$. Άρα $M \subset \Sigma$. Επίσης υπάρχει ακολουθία του Cauchy μη συγκλίνουσα στο Q, άσκηση 1.26. Επίσης η $\alpha_\nu = (-1)^\nu$ είναι φραγμένη, αλλά όχι ακολουθία του Cauchy.

1.53 $liminf\alpha_\nu$: α) $-\frac{1}{2}$, β)3, γ)0, δ) -1, ε) -1, στ) $-\sqrt{2}$

$limsup\alpha_\nu$: α)1, β)5, γ) $+\infty$, δ)1, ε)1, στ)$\sqrt{2}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

1.54 $liminf\alpha_\nu = lim(\inf_{p\geq 1}\alpha_{\nu+p}) = lim(\inf_{p\geq 1}\alpha_{k_\nu}+p)$ αφού α_{k_ν} υπακολουθία της α_ν και $\inf_{p\geq 1}\alpha_{k_\nu}+p \leq \inf_{p\geq 1}\alpha_{k_\nu+p}$.

1.55 Από άσκηση 1.54 $liminf\alpha_\nu \leq liminf\beta_\nu$. Αφού $\beta_\nu \leq liminf\alpha_\nu \Rightarrow limsup\beta_\nu \leq liminf\alpha_\nu \Rightarrow limsup\beta_\nu = liminf\beta_\nu = liminf\alpha_\nu$.

1.56 $(\forall\epsilon>0)(\exists x\in X): x > supX-\epsilon \Rightarrow \alpha_\nu \geq x > supX-\epsilon$ για άπειρο πλήθος δεικτών $\Rightarrow limsup\alpha_\nu = lim(supa_{\nu+p}) \geq supX-\epsilon$ (1). Επίσης $supX+\epsilon \notin X \Rightarrow (\exists\nu_0\in N): \alpha_\nu < supX+\epsilon, \forall\nu>\nu_0 \Rightarrow limsup\alpha_\nu \leq supX+\epsilon$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.

1.57 Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του sup και του inf.

Σωστό ή λάθος;

1)Λ, $\alpha_\nu = 2+(-1)^\nu, \beta_\nu = \frac{4\nu+1}{\nu}$ 2)Σ 3)Σ 4)Σ 5)Σ
6)Σ 7)Λ, $\alpha_\nu = 1+(-1)^\nu, \alpha_{2\nu-1}\to 0$ 8)Λ 9)Σ 10)Λ 11)Σ
12)Λ 13)Σ 14)Λ 15)Σ 16)Σ 17)Σ 18)Λ 19)Σ
20Σ 21)Σ, $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \ldots$ 22)Λ, $\alpha_\nu = \nu$ 23)Σ 24)Σ

1.59 β) $supA = 1$

1.62 $x\geq 0, \forall x\in A \Rightarrow 0$ κάτω φράγμα του Α. Για δοσμένο $\epsilon>0, \exists x\in A: x<0+\epsilon$ δηλ. $x_k\in A: kx_x \leq 1$ αν $k>\frac{1}{\epsilon}$. Άρα από Θ. 1.2 $0 = inf A$.

1.63 Για όλα τα $x, y\in A: supA\geq x, -inf A\geq -y \Rightarrow x-y\leq supA-inf A$. Για δοσμένο $\epsilon>0, \exists v, w\in A, v+\frac{\epsilon}{2} > supA, \frac{\epsilon}{2}-w > -inf A \Rightarrow (v-w)+\epsilon > supA-inf A$.

1.66 $A=(-10,-1), B=\left(0,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \alpha=-1, \beta=\frac{1}{2}$ και $\alpha\beta=-\frac{1}{2}$ ενώ $C=(-5,0)$ με $supC=0$. Έστω $\alpha<0, \beta<0$ και $x\in A, y\in B \Rightarrow x\leq\alpha, y\leq\beta \Rightarrow -x\geq-\alpha\geq 0, -y\geq-\beta\geq 0 \Rightarrow xy\geq\alpha\beta$. Αν δοθεί $\epsilon>0, \exists x\in A, y\in B: \alpha\beta > xy-\epsilon$ ή $|\alpha\beta-xy|<\epsilon$. Διαλέγουμε τα x και y έτσι ώστε: $\alpha < x+\frac{\epsilon}{2(|\beta|+1)}, \beta < y+\frac{\epsilon}{2|\alpha|}$ και $\beta<y+1$. Τότε $|\alpha\beta-xy|\leq|\alpha\beta-\alpha y|+|\alpha y-\alpha x| < |\alpha|\frac{\epsilon}{2|\alpha|}+\frac{\epsilon}{2(|\beta|+1)}.(|\beta|+1)=\epsilon$.

1.68 Άσκηση 1.9 με $p=2, q=3$.

1.70 $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu = \frac{1}{2\nu+2}+\frac{1}{2\nu+1}-\frac{1}{\nu} < \frac{1}{2\nu}+\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{\nu}=0 \Rightarrow \alpha_\nu$ γνήσια φθίνουσα. Επίσης $\alpha_\nu < \frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\cdots+\frac{1}{\nu}=1$ και $\alpha_\nu \geq \frac{1}{2\nu}+\frac{1}{2\nu}+\cdots+\frac{1}{2\nu}=\frac{1}{2}$.

1.71 $\alpha_{4\nu}\to 0, \alpha_{4\nu-1}\to 1, \alpha_{4\nu-2}\to 0, \alpha_{4\nu-3}\to -1$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.72 $|\alpha_{\nu+2}-\alpha_{\nu+1}| = \frac{1}{2}|cos\alpha_{\nu+1}-cos\alpha_{\nu}| \leq \frac{1}{2}|\alpha_{\nu+1}-\alpha_{\nu}|$ και με επαγωγή $|\alpha_{\nu+1}-\alpha_{\nu}| \leq \frac{1}{2^{\nu}}, \forall \nu \in NN$. Να αποδείξετε ότι η $\alpha_{\nu}, \nu \in NN$ είναι ακολουθία του Cauchy.

1.73 $|\alpha_{\nu+k}-\alpha_{\nu}| < \frac{1}{(\nu+1)!}+\cdots+\frac{1}{(\nu+k)!}$. (Βλέπε άσκηση 1.15γ).

1.76 $|\alpha_{\mu}-\alpha_{\nu}| \leq |\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu-1}|+\cdots+|\alpha_{\nu+1}-\alpha_{\nu}| \leq (c^{\mu-2}+c^{\mu-3}+\cdots+c^{\nu-1})|\alpha_2-\alpha_1|$
$= c^{\nu-1}\frac{1-c^{\mu-\nu}}{1-c}|\alpha_2-\alpha_1| \leq c^{\nu-1}\frac{1}{1-c}|\alpha_2-\alpha_1|$.

1.77 Το λάθος βρίσκεται στο ότι το κριτήριο του Cauchy απαιτεί η σχέση $|\alpha_{\mu}-\alpha_{\nu}| < \epsilon$ να ικανοποιείται $\forall \mu, \nu > \nu_0$ και όχι όπως εδώ για μια ειδική τιμή του $\mu = \nu+1$. Η σωστή λύση βάσει της άσκησης 1.43.

1.78 Αν $X = x : \alpha < x < \beta$ και $r \in IR$, υπάρχουν $\gamma, \delta \in IR : \alpha < \gamma < \delta < \beta$ και $r < \gamma$ ή $r > \delta$, δηλ. $r \notin \{x : \gamma < x < \delta\}$. Ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς p_1, q_1 έτσι ώστε: $\alpha < p_1 < q_1 < \beta$ και $x_1 \notin \{x : p_1 < x < q_1\}$. Γενικά αν έχουν οριστεί οι $p_1, q_1, p_2, q_2, p_{\nu-1}, q_{\nu-1}$ ορίζουμε τους p_{ν}, q_{ν} με $p_{\nu-1} < p_{\nu} < q_{\nu} < q_{\nu-1}$ και $x_{\nu} \notin \{x : p_{\nu} < x < p_{\nu}\}$.

Έστω $y = supp_{\nu}$. Τότε: α) Αφού y άνω φράγμα για όλα τα p_{ν}, $y \geq p_{\nu+1}$. Αλλά $p_{\nu+1} > p_{\nu} \Rightarrow y > p_{\nu}, \forall \nu \in NN$. β) Με επαγωγή $p_{\nu} < q_{\nu+1}, \forall \nu \in NN$. Έτσι $y < q_{\nu+1}$. Αλλά $q_{\nu+1} < q_{\nu} \Rightarrow y < q_{\nu}, \forall \nu \in NN$.

Από α) και β) $p_{\nu} < y < q_{\nu}$ και έτσι $\alpha < y < \beta$ και $y \notin x_{\nu}, \forall \nu \in NN$ αφού $x_{\nu} \notin \{x : p_{\nu} < x < q_{\nu}\}$.

Κεφάλαιο 2

2.1 $\alpha_{\nu} = \sigma_{\nu} - \sigma_{\nu-1}$. Οι σειρές αντίστοιχα είναι: $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu-1}}$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu-1}{(\nu^2+1)(\nu^2-2\nu+2)}$.

2.2 $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}$.

2.3 α) 2 β) $\frac{3}{2}$ γ) $\frac{1}{2}$ δ) 1.

2.4 Εφαρμογή 4 της §2.2 με $\beta_{\nu} = \alpha+\nu-1$ και $\alpha_{\nu} = (-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu}$.

2.5 α) Παράδειγμα 2.5 β) $\sigma_{\nu} = \sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = 1-\frac{1}{(\nu+2)^2} \to 1$ γ) $\sigma_{\nu} =$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}\right\}\to\frac{1}{4}$ δ) δεν υπάρχει όριο.

2.6 $|\sigma_\mu-\sigma_\nu|=r^{\nu+1}+\cdots+r^{\nu}|\le|r|^{\nu+1}1+|r|+\cdots+|r|^{\mu-\nu-1}<\frac{|r|^{\nu+1}}{1-|r|}$.

2.8 $(k+2)(k+3)\cdots(k+\nu)>(k+2)^{\nu-1}$ και $\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{(k+2)^{\nu-1}}=\frac{k+2}{k+1}$.

2.9 $\sigma_\nu=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^\nu}\le 2$.

2.10 α) Απειρίζεται θετικά, β), γ), δ), ε) Συγκλίνουν, στ) Απειρίζεται θετικά.

2.11 Οι α) και ζ) απειρίζονται θετικά. Οι υπόλοιπες συγκλίνουν.

2.12 Να τις συγκρίνετε με την αρμονική σειρά.

2.13 Να εργαστείτε όπως στην 2.12, πρέπει $\alpha>\frac{1}{2}$.

2.14 Συγκλίνουν αν $\lambda>1$ και απειρίζονται θετικά αν $0<\lambda\le 1$.

2.15 Οι 4), 5) και 9) απειρίζονται θετικά. Οι υπόλοιπες συγκλίνουν.

2.17 Συγκλίνει. Να εφαρμόσετε το κριτήριο της ν-οστής ρίζας.

2.18 1) Συγκλίνει (Θ. 2.29) 2) Συγκλίνει (Θ. 2.24 με $\beta_\nu=\frac{1}{\nu^2}$) 3) Απειρίζεται θετκά. Είναι $\sqrt[\nu]{\nu}\to 1\Rightarrow\sqrt[\nu]{\nu}<M\Rightarrow\frac{1}{\nu}<\frac{M}{\nu\sqrt[\nu]{\nu}}$. 4) Συγκλίνει αν $\alpha<1$ και απειρίζεται θετικά αν $\alpha>1$ (Θ. 2.29). 5) Συγκλίνει (Θ. 2.29) 6) Απειρίζεται θετικά. 7) Συγκλίνει (Θ. 2.34) 8) Συγκλίνει (Θ. 2.24 με $\beta_\nu=\frac{1}{2^\nu}$). 9) Απειρίζεται θετικά (Θ. 2.29).

2.19 Να εφαρμόσετε το Θ. 2.42.

2.20 $\beta>1$ και οποιοδήποτε α, $\beta=1$ και $\alpha<-1$.

2.21 α), β), γ) και δ) συγκλίνουν, ενώ η ε) όχι ($lim|\alpha_\nu|\neq 0$).

2.23 α) Συγκλίνει απόλυτα, $|sin(\nu\alpha^\nu)|<|\nu\alpha^\nu|$ και η $\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu|\alpha|^\nu$ συγκλίνει (Θ. 2.29). β) Δεν συγκλίνει $lim|\alpha_\nu|\neq 0$. γ) Υπό συνθήκη αν $0<s\le 1$, απειρίζεται θετικά αν $s>1$ και δεν συγκλίνει αν $s\le 0$. δ) Απειρίζεται θετικά.

2.24 Συγκλίνει απόλυτα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2.29 Δεν συγκλίνει απόλυτα, αφού $|\gamma_\nu| = |(-1)^{\nu+1} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k^{3/2}(\nu+1-k)^{1/2}}| \geq \frac{\nu}{\nu^2} = \frac{1}{\nu}$.

Σωστό ή λάθος

1) Λ 2) Σ 3) Σ 4) Λ, πρέπει να αρχίζει από $\nu = 0$ 5) Λ 6) Λ 7) Λ 8) Σ 9) Σ 10) Λ 11) Σ 12) Σ 13) Λ 14) Λ 15) Σ

2.32 1) Συγκλίνει (Θ. 2.34) 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_\nu < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu-1}} = 2$.

2.33 Να την συγκρίνετε με την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$.

2.34 α) Απειρίζεται θετικά β) Συγκλίνει γ) Συγκλίνει.

2.35 $\beta_\nu = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu) + (\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_\nu) + (\alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu) + \alpha_\nu = (\nu+1)\sigma_\nu - (\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_\nu)$.

Κεφάλαιο 3

3.1 Ναι

3.2 α) Το 1 είναι μεμονωμένο σημείο του $\Delta(f)$. Στο $+\infty$ έχει νόημα. β) $\Delta(f) = [2, +\infty)$ γ) $\Delta(f) = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

3.3 Δεν έχουν νόημα: $\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to 3+} f(x)$.

3.4 i) $+\infty$ ii) 0.

3.5 α) $x_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0 \Rightarrow f(x_\nu) = \nu$ δεν συγκλίνει, αφού δεν είναι φραγμένη. β) και γ) να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 1 της §3.2.

3.6 i) $\alpha = 1, \beta = 2$ ii) $\alpha = 1, \beta = 1$.

3.7 Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 4 της §3.2.

3.9 $\delta = min\left\{1, \frac{\epsilon}{14}\right\}$.

3.10 $\delta = \frac{\epsilon}{2\alpha}$.

3.12 α) $\delta = min\left\{1, \frac{\epsilon}{9}\right\}$ β) $\delta = min1, 3\epsilon$ γ) $\delta = min\left\{1, \frac{3\epsilon}{4}\right\}$. Να παρατηρήσετε ότι: $x^2 + 2x + 4 > 1, \forall x \in \Delta(f)$. δ) $\delta = min\left\{1, \frac{2\epsilon}{15}\right\}$ ε) $\delta = \frac{36\epsilon}{1+6\epsilon}$ στ) $\delta = min\left\{\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c^2\epsilon\right\}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

3.13 Να εργαστείτε όπως στο παράδειγμα 3.8.

3.14 Να υποθέσετε ότι το όριο υπάρχει και να εφαρμόσετε τον ορισμό για $\epsilon = \frac{1}{4}$ και διαλέγοντας το x ρητό πρώτα και μετά άρρητο.

3.15 Να εργαστείτε όπως στο παράδειγμα 3.8.

3.16 Όχι.

3.17 α) $+\infty$ β) 0 γ) Δεν υπάρχει.

3.19 Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3 της §3.2 παίρνοντας ως $x_\nu = \nu$.

3.20 Έστω $\lim_{x\to c} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$. Έστω $\epsilon = \frac{c(1-c)}{2} > 0$. Τότε υπάρχουν ρητός $\rho \in (c, c+\delta)$ και άρρητος $\alpha \in (c-\delta, c)$ τέτοιοι ώστε: $|\rho - \ell| < \epsilon$ και $|\alpha^2 - \ell| < \epsilon$. Τότε όμως έχουμε: $c < \rho < \ell + \epsilon = \ell - \epsilon + 2\epsilon < \alpha^2 + 2\epsilon < c^2 + 2\epsilon = c$, άτοπο.

3.21 $f\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) = \nu\frac{\pi}{2}, \nu = 1, 5, 9, \ldots, \quad f\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\nu\pi}{2}, \nu = 3, 7, 11, \ldots$

3.22 Ναι, $|f(x)| \leq 3$.

3.25 α) $f\left(\frac{1}{2\nu\pi}\right) = -\sqrt[3]{4\nu^2\pi^2}$ β) $f(x) \leq (2\pi - 1)(2\pi + 1)(4\pi^2 - 2)$.

3.29 $x^2 \leq fx) \leq x^{3/2} \leq x$.

3.30 α) 0 β) Δεν υπάρχει.

3.31 Να λάβετε υπόψη τους ορισμούς $min\{f, g\}$ και $max\{f, g\}$.

Σωστό ή λάθος;

1) Λ 2) Σ 3) Σ 4) Λ 5) Λ 6) Λ 7) Σ
8) Λ 9) Σ 10) Λ 11) Σ 12) Λ 13) Λ 14) Σ

3.32 $\Delta(f) = 2 \cup [4, +\infty)$.

3.33 $\delta = min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right\}$.

3.34 Να εργαστείτε όπως στο παράδειγμα 3.12.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3.35 α) $x_\nu = \frac{1}{2\pi\nu}, y_\nu = \frac{1}{2\pi\nu+\frac{\pi}{4}}$ β) $x_\nu \to 2, x_\nu \in Q \Rightarrow f(x_\nu) \to 4$ και $y_\nu \to 2, y_\nu \in I \Rightarrow f(y_\nu) \to 3$.

3.36 $\alpha = 1, \beta = -2$.,

3.37 Να διακρίνετε τις περιπτώσεις: $k < 0, k \in [0, 1], k = 1, \hat{1} > 1$.

3.38 α) 1 β) 1 γ) Δεν υπάρχει.

3.39 $M = max\left\{\frac{1}{3}, \frac{7+\epsilon}{3\epsilon}\right\}$.

3.40 $\lim_{h\to 0}(x+h) = \ell \Rightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))0 < |h| < \delta \Rightarrow |f(x+h) - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$.

3.42 $\delta = max\left\{\frac{4}{\epsilon}, \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}, 1\right\}$.

Κεφάλαιο 4

4.1 α) $|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x-x_0|}{xx_0} < \frac{\delta}{xx_0}$. Να πάρετε $\delta < \frac{x_0}{2}$ οπότε $\frac{\delta}{xx_0} < \frac{2\delta}{x_0^2}$ και αρκεί $\delta = min\left\{\frac{x_0}{2}, \frac{\epsilon x_0^2}{2}\right\}$. β) $\delta = \left\{1, \frac{\epsilon\alpha^2}{1+2x_0}\right\}$ αν $x_0, x > \alpha > 0$. γ) και δ) $\delta = \epsilon$.

4.2 α) Συνεχής β) Συνεχής γ) Ασυνεχής στο 0 δ) Συνεχής.

4.3 α) $\alpha = -1$.

4.4 Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3 της §4.2.

4.5 α) Έστω $x = \xi \in (\mathbb{R} - Z)$ και $x_\nu \in \Delta(f)$ με $x_\nu \to \xi \Rightarrow [x_\nu] = [\xi] \to [\xi]$ και $f(x_\nu) = [x_\nu] \to [\xi] = f(\xi) \Rightarrow f$ συνεχής. Έστω $x = \xi \in Z$. Αν $x_\nu \to \xi- \Rightarrow [x_\nu] = \xi - 1$ και $f(x_\nu) \to \xi - 1$ ενώ αν $x_\nu \to \xi+ \Rightarrow [x_\nu] = \xi$ και $f(x_\nu) \to \xi \Rightarrow f$ ασυνεχής. β) και γ) να εργαστείτε ανάλογα.

4.6 $\delta = \frac{\epsilon}{k}$.

4.9 α) Έστω $x_\nu \in (0, +\infty)$ με $x_\nu \to +\infty$. Θέτουμε $[x_\nu] = k_\nu$. Επειδή $k_\nu \le x_\nu < k_\nu + 1$ και $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha = 1 + \theta, \theta > 0$ και $\alpha^{x_\nu} \ge (1+\theta)^{k_\nu} \ge 1 + \theta k_\nu > \theta k_\nu \to +\infty$, κ.τ.λ.

4.10 ii) Έστω $f(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $A = [0, 1]$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.12 Να θέσετε $x = x_0 + h$. Τότε $x \to x_0$ όταν $h \to 0$.

4.13 Να θέσετε $x = x_0 h$. Τότε $x \to x_0$ όταν $h \to 1$.

4.14 Η g δεν είναι συνεχής στο $1 = f(0)$.

4.18 $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + |x - \frac{1}{2}| + \frac{1}{2}|x - 3|$.

4.19 Να εφαρμόσετε το Θ. 4.28 στην $\frac{1}{f}$.

4.20 Να εφαρμόσετε το Θ. 4.28.

4.21 α) $f_{min} = 0$, $f_{max} = \frac{1}{2}$ β) $\mathcal{R}(f) = [\frac{1}{3}, 3]$.

4.22 $\lim_{x \to \beta+} g(x) = f(\beta)$.

4.23 α) $inf f = 0, sup f = 1$ β) $inf f = -8$, f δεν είναι άνω φραγμένη.

4.24 Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 5 της §4.5.

4.25 Για το τελευταίο να θεωρήσετε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$.

4.26 Ναι, αφού $f(-2) < \frac{7}{3} < f(2)$.

4.27 Να εφαρμόσετε το Θ. 4.31 στην $F(x) = f(x) - x$.

4.29 Για μεγάλες τιμές του x, ένα πολυώνυμο άρτιου βαθμού έχει το ίδιο πρόσημο με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου. Άρα το πολυώνυμο αλλάζει πρόσημο τουλάχιστο δυο φορές.

4.30 Να θεωρήσετε την συνάρτηση $F(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right), x \in [0, \frac{1}{2}]$.

4.31 $f(0) = -\beta < 0$, $f(\alpha + \beta) > 0$.

4.32 Το $\mathcal{R}(f)$ είναι φραγμένο. Για το κλειστό να θεωρήσετε $y_\nu \in \mathcal{R}(f)$, $y_\nu \to y \Rightarrow \exists x_\nu \in I : y_\nu = f(x_\nu) \Rightarrow x_\nu$ φραγμένη $\Rightarrow \exists x_{k\nu} \to \ell \in I$, αφού I κλειστό. Να αποδείξετε ότι $y = f(\ell)$.

4.33 α) $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ β) $\delta = \frac{\epsilon}{108}$ γ) $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ δ) $\delta = \epsilon$ ε) $\delta = 2\epsilon$ στ) $\delta = 2\epsilon$.

4.34 α) $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{y-x}{xy}| \le |y-x|$ β) $f(x) - f(y) = \frac{(x+y)(y-x)}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Να αποδείξετε ότι $\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \le 2, \forall x, y \in IR$. γ) $|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y||1-xy|}{(1+x^2)(1+y^2)} \le |x - y|\frac{1+|xy|}{(1+x^2)(1+y^2)} < |x - y|$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.35 Να εργαστείτε όπως στο Πόρισμα του Θ. 4.35. Για την β΄ π.χ. να πάρετε $x = \frac{2}{k\pi}, y = \frac{2}{3k\pi}$.

4.37 $f^{-1}(x) = x|x|$.

4.38 Να εφαρμόσετε το Θ. 4.31 στην $f(x) = x\,2^x - 1, x \in [0, 1]$, η οποία να αποδείξετε ότι είναι γνήσια μονότονη.

4.39 $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x-1}, & x < -1 \\ 0, & x = 0 \\ \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

4.40 Οι συναρτήσεις $x, x^3, x^5, \ldots, x^{2\nu+1}$ είναι αύξουσες στο $\mathbb{R}$.

4.41 α) Να θέσετε $x = kz$ (εφαρμογή 3 της §4.7) β) Να θέσετε $a^x - 1 = z$ γ) $[x_\nu] = k_\nu \Rightarrow \frac{e^{x_\nu}}{x_\nu} \geq \frac{e^{k_\nu}}{k_\nu + 1} \geq \frac{e^{k_\nu}}{2k_\nu}$ αν $x_\nu > 1$. δ) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y}$ ε) $\lim_{x \to +\infty}(x.\log x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{-\log t}{t}$ στ) Να θέσετε $\frac{1}{x} = z$.

4.42 α) $[-4, -2] \cup [2, 4]$ β) $\emptyset$ γ) $[1, 4)$.

4.43 $-1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1$ για την f και $-1 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1$ και $1 - x^2 \geq 0$ για την g.

4.44 α) Να θέσετε $arc_k tg\, x = \alpha$ και $arc_k tg\, y = \beta$.

β) Έστω $\omega = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}, 0 < |x| < 1 \Rightarrow sin(2Arctg\,\omega)$
$= 2tg(Arctg\,\omega)cos^2(Arctg\,\omega) = 2\frac{tg(Arctg\,\omega)}{1+tg^2(Arctg\,\omega)} = 2.\frac{\omega}{1+\omega^2} = x.$

4.45 Να υπολογίσετε το $sinh(x \pm 2y)$.

4.48 §4.9 γ).

Σωστό ή λάθος;

1) Σ 2) Σ 3) Λ, $f(x) = x, x \in (0, 1]$ 4) Λ, $f(x) = x, x_0 = 0$
5) Λ, f συνεχής 6) Λ, πρέπει f συνεχής 7) Λ 8) Σ 9) Λ
10) Λ, ασυνεχής στο 1 11) Λ 12) Λ

4.49 α) $|x^\nu - x_0^\nu| = |x - x_0||x^{\nu-1} + x_0 x^{\nu-2} + \ldots + x^{\nu-1}| \leq \delta\{(|x_0 + 1)^{\nu-1} + (|x_0| + 1)^{\nu-2} + \cdots) \leq \delta\{(|x_0| + 1)^{\nu-1} + (|x_0| + 1)^{\nu-1} + \ldots\}$ αν $\delta < 1$. Άρα $\delta = min\left\{1, \frac{\epsilon}{\nu(|x_0|+1)^{\nu-1}}\right\}$

β) Να εφαρμόσετε το α) $\delta = min\left\{1, \frac{\epsilon}{A\nu^2(|x_0|+1)^{\nu-1}}\right\}$, $A = max|\alpha_k|, k = 1, 2, \ldots \nu$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

4.50 Στο διάστημα $[-1,0)$ είναι αύξουσα και στο $(0,1]$ φθίνουσα. Είναι ασυνεχής στο 0.

4.51 $0 \leq f(x) < 1$.

4.52 Έστω $\xi \in [\alpha,\beta]$ όπου $\xi \neq 0 \Rightarrow \xi$ άρρητος. Έστω $f(\xi) = \alpha \neq 0$ και $\epsilon = \frac{1}{2}\cdot|\alpha|$. Αφού f συνεχής $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f))|x-\xi| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(\xi)| < \epsilon$. Έστω x' ρητός με $|x'-\xi| < \delta$. Τότε $|\alpha| = |f(x')-f(\xi)| < \epsilon = \frac{1}{2}|\alpha|$, άτοπο.

4.54 γ) $Arctg\frac{1}{2\nu^2} = Arctg\frac{(2\nu+1)-(2\nu-1)}{1+(2\nu+1)(2\nu-1)} = Arctg(2\nu+1) - Arctg(2\nu-1)$.

4.55 f συνεχής στο $[\alpha,\beta] \Rightarrow f$ παίρνει μέγιστο και ελάχιστο, $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow (\alpha+\beta)m \leq \alpha f(\alpha)+\beta f(\beta) \leq (\alpha+\beta)M \Rightarrow m \leq \frac{\alpha f(\alpha)+\beta f(\beta)}{\alpha+\beta} \leq M$ (Πόρισμα 1 του Θ. 4.31.).

4.57 2. α) $|x_{\nu+1}-x_\nu| < k|x_\nu - x_{\nu-1}|, \forall \nu \in N$. Εφαρμόζοντας την σχέση αυτή για $\nu = 1,2,\ldots$ και πολ/ζοντας κατά μέλη θα έχετε: $|x_{\nu+1}-x_\nu| \leq k^\nu|x_1-x_0|$. Άρα $|x_{\nu+k}-x_\nu| \leq |x_{\nu+1}-x_\nu| + \cdots + |x_{\nu+k}-x_{\nu+k-1}| \leq \frac{k^\nu}{1-k}|x_1-x_0| \to 0$.

4.58 Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ με $f(x_0) \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 \neq \frac{1}{2}$. Έστω η άρρητος μεταξύ $f(x_0)$ και $\frac{1}{2}$. Από Θ. 4.31 υπάρχει $\xi \in \left(x_0, \frac{1}{2}\right) : f(\xi) = \eta$, άτοπο.

4.59 Αν $\alpha < \gamma \Rightarrow f(\gamma) \not> 0$ γιατί τότε η f θα ήταν θετική σε μεγαλύτερο διάστημα. Όμοια $f(\gamma) \not< 0$ γιατί τότε η f θα ήταν αρνητική σε περιοχή του γ.

4.60 Είναι $f(x) = \begin{cases} x+1, & -2 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ (x+1)2^{-2/x}, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$ Να αποδείξετε ότιη f είναι αύξουσα στο $[-2,0)$ και $[0,2]$. Να εφαρμόσετε το Θ. 4.31 στα διαστήματα $[-2,-1]$ και $[0,2]$. Η f είναι ασυνεχής στο 0.

Κεφάλαιο 5

5.1 $|log(1+x)| = \begin{cases} log(1+x), & x \geq 0 \\ -log(1+x), & -1 < x < 0 \end{cases}$,

$$|sinx| = \begin{cases} sinx, & 0 \le x \le \pi \\ -sinx, & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$

5.2 $\alpha > 1$.

5.3 $f'_-(0) = -\frac{\pi}{2}$, $f'_+(0) = \frac{\pi}{2}$, $g'_-(0) = -1, g'_+(0) = 1$.

5.5 Όχι. $f'\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{|sinh|}{h}$.

5.6 $f'(1) = \frac{1}{2}$.

5.7 Να παρατηρήσετε ότι $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

5.8 Δεν παραγωγίζεται για $x = 1$.

5.9 Να προσθαφαιρέσετε στον αριθμητή το $\alpha f(\alpha)$.

5.10 α) $\nu \ge 2$ β) $\nu \ge 3$.

5.11 Να αποδείξετε με τον ορισμό ότι $f'(x+T) = f'(x)$.

5.12 $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x).f(h)-f(x)}{h} = f(x)\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = f(x).f'(0)$.

5.13 $\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$

5.14 $\frac{f(\beta_\nu)-f(\alpha_\nu)}{\beta_\nu-\alpha_\nu} - f'(x) = \lambda_\nu \left\{\frac{f(\beta_\nu)-f(x)}{\beta_\nu-x} - f'(x)\right\} + (1-\lambda_\nu)\left\{\frac{f(\alpha_\nu)-f(x)}{\alpha_\nu-x} - f'(x)\right\}$, $\lambda_\nu = \frac{\beta_\nu-x}{\beta_\nu-\alpha_\nu}$.

5.15 $f'(4) = 3$.

5.16 α) $f'(x) = f(x).\frac{(1+logx)log2}{cos^2(xlogx)}$, $\Delta(f) = \Delta(f') = \{x > 0 : x^x \ne e^{k\pi+\pi/2}, k \in Z\}$

β) $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{(x^2+1)^2-x^2}} + \begin{cases} \frac{2}{1+2x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, $\Delta(f) = \Delta(f') = R$.

γ) $f'(x) = -\frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}} + e^{\sqrt{x^2+1}}.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\Delta(f) = [-\sqrt[3]{2}, 0]$, $\Delta(f') = (-\sqrt[3]{2}, 0)$.

δ) $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} + x^{xlogx}\{2logx + (logx)^2\}$, $\Delta(f) = (0, \sqrt{2}]$, $\Delta(f') = (0, \sqrt{2})$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ε) $f'(x) = f(x)\{log|sinx| + xctgx\}$, $\Delta(f) = R$, $\Delta(f') = R - \{x : x = k\pi, k \in Z\}$ στ) $f'(x) = f(x)\{\frac{1}{x}.2log|x|\}$, $D(f) = D(f') = -\{0\}$.

5.17 $xf'(x) + 1 = \frac{1}{x+1}$.

5.18 $f'(x) = \begin{cases} 2xsin\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Αφού $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2\nu\pi}}\right) = -\sqrt{2\nu\pi}$ η f' δεν είναι φραγμένη σε οποιαδήποτε περιοχή του 0.

5.19 Για την f : $\alpha = 2c, \beta = -c^2$. Για την g : $\alpha = \frac{3}{2c}, \beta = -\frac{1}{2c^3}$.

5.20 Να παρατηρήσετε ότι $y = 1$ όταν $x = 0$. Είναι $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5}$.

5.21 $\frac{1}{2\sqrt{y}}$.

5.22 2.

5.24 Η f έχει μόνο μια παράγωγο στο 0, $f'(0) = 1$.

5.25 α) $\left([xf\left(\frac{1}{x}\right)]'\right)' = \left\{f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right\}'$.

5.26 $\beta e^{(1/x)f(x)} + (\alpha + \beta x)e^{(1/x)f(x)}.\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = 1 \Rightarrow xf'(x) - f(x) = x - \beta x e^{1/x)f(x))} = \alpha e^(1/x) f(x)$. Να παραγωγίσετε ακόμα μια φορά.

5.27 $f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}sin\frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1}cos\frac{1}{x^\beta}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

5.29 α) $\mu(\mu-1)\cdots(\mu-\nu+1)\beta^\nu(\alpha+\beta x)^{\mu-\nu}$ β) $\frac{(-1)^\nu\nu!\beta^\nu}{(\alpha+\beta x)^{\nu+1}}$ (η α) για $\mu = -1$.)

γ) η α) για $\mu = -\frac{1}{2}$ δ) η α) για $\alpha = 0, \beta = 1, \mu = -\frac{1}{2}$

ε) $2(-1)^\nu\nu!(1+x)^{-\nu-1}$, στ) $(\sqrt{2})^\nu e^x sin\left(x + \nu\frac{\pi}{4}\right)$.

5.30 α) $e^{\alpha x}\alpha^{\nu-3}\{\alpha^3x^3 + 3\nu\alpha^2x^2 + 3\nu(\nu-1)\alpha x + \nu(\nu-1)(\nu-2)\}$

β) $\sum_{\mu=0}^{\nu}(\nu-1)!(-1)^{\mu-1}\frac{x^{\mu-1}}{(1+x)^\mu}$.

5.31 α) $cos^2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x$ και $(cos\alpha x)^{(\nu)} = \alpha^\nu.cos\left(\alpha x + \nu\frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Να εφαρμόσετε τον τύπο του Leibnitz με $f(x) = x$ και $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

5.32 Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 2 της §5.4.

5.33 Όμοια όπως προηγούμενα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.34 Όμοια όπως προηγούμενα.

5.35 $y - x + 2 = 0$.

5.36 $y - x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ή $-\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

5.38 Βλέπε εφαρμογή 3 της §5.15.

5.40 α) $\xi = \frac{\alpha+\beta}{2}$ β) η ϕ δεν είναι συνεχής στο α.

γ) $\xi = Arccos\frac{2}{\pi}$ δ) Δεν υπάρχει η $f'(1)$.

5.41 $\xi = \frac{n\alpha+m\beta}{m+n}$.

5.42 Να υποθέσετε ότι έχει ρίζα θετική (αρνητική) και με εφαρμογή του Θ. Rolle να καταλήξετε σε άτοπο. (Να παρατηρήσετε ότι $f(0) = 0$).

5.43 Να παρατηρήσετε ότι η εξίσωση που δίνεται είναι η παράγωγος της $F(x) = (1 - x)sinx$.

5.44 Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 1 της §5.8. Είναι $f(-\pi) > 0$, $f(0) < 0$, $f(\pi) > 0$.

5.45 Να εφαρμόσετε το Θ. Rolle στα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ με $\alpha < x_1 < x_2 < x_3 < \beta$ και $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

5.46 Να εφαρμόσετε το Θ. Rolle στην $f(x) = (x^2 - 1)^\nu$.

5.47 Να εφαρμόσετε το Θ. Rolle στην συνάρτηση $\phi(x) = f(\beta) - f(x) - (\beta - x)f'(x) - (\beta - x)^2 A$, με το A διαλεγμένο έτσι ώστε $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$.

5.48 Να παρατηρήσετε ότι η F μηδενίζεται για $t = \alpha, \beta, x$.

5.49 Να διαλέξετε το A έτσι ώστε $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$.

5.50 α) Το πεδίο ορισμού δεν είναι διάστημα.

β) Να διαπιστώσετε ότι πρέπει να ισχύει $0 < \xi < \beta$.

5.51 Από την σωστή ισότητα $\lim_{\xi\to 0} cos\frac{1}{\xi} = 0$, $0 < \xi < x$, όπου το ξ ορίζεται από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, δεν συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x} = 0$, αφού το ξ δεν παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές σε μια περιοχή του 0, όταν $x \to 0$. Υπάρχει μια ακολουθία τιμών του ξ για τις οποίες $limcos\frac{1}{\xi} = 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.52 Αν $|f'(x)| \leq k, \forall x \in (\alpha, \beta)$ από Θ.Μ.Τ. στο $[x, x_0]$ με $x, x_0 \in (\alpha, \beta)$, x_0 σταθεροποιημένο, έχουμε: $|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|k \leq |\beta - \alpha|.k.$

5.53 $f(x) = logx, x = 1, h = x.$

5.54 α) f' συνεχής στο $[0, 1] \Rightarrow$ παίρνει ελάχιστο και έστω $f'(c) = M.$

β) Θ.Μ.Τ. στο $[0, x]$ με $x \in (0, 1]$.

5.55 Εφαρμογή 2 της § 5.9.

5.56 Θ.Μ.Τ. $f'(t^*) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < 0 \Rightarrow \exists \tilde{t} \in (t^*), \beta) : f''(\tilde{t}) = \frac{f'(\beta)-f'(t^*)}{\beta-t^*} = -\frac{f'(t^*)}{\beta-t^*} > 0.$

5.57 Να διαλέξετε το A έτσι ώστε $\phi(\alpha) = \phi(\beta).$

5.59 α) Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3 της § 5.9.

β) $\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\rho} \leq 1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\rho} \Rightarrow (1+x)^{\rho} \leq 1+x^{\rho}, f(x) = (1+x)^{\rho} - 1 - x^{\rho}$

γ) $f(x) = \sqrt{1+x}$ στο $[x, 0]$.

δ) $f(x) = tgx$ στο $[x, y]$ $(cos \downarrow$ στο $(0, \frac{\pi}{2}))$

ε) $f(x) = Artgx$ στο $[x, y]$ κ.λ.π.

5.61 Να αποδείξετε ότι $f'''(x) = 0.$

5.62 Να αποδείξετε ότι $f'(x) = g'(x) = 0.$

5.63 α) Να παραγωγίσετε πρώτα ως προς x και μετά ως προς y.

β) Να θέσετε $y = 0$ στην α), $c = f'(0)$.

γ) Να πάρετε την συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-cx}$ και να αποδείξετε ότι είναι σταθερή.

5.64 Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 5 της § 5.9 α) γνήσια αύξουσα β) γνήσια φθίνουσα γ) Αύξουσα για $0 < x < e$ και φθίνουσα για $x > e$.

5.65 Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3β της § 5.9.

5.66 $f(x) < f(0) = 1, g(x) < g(0) = 1 \Rightarrow 1 - x < e^{-x} < \frac{1}{1+x}$. Να θέσετε όπου x το x^2.

5.67 α) Θ.Μ.Τ. στο $[0, x]$. β) $f(x) = xf'(\theta x) < xf'(x)$ αφού f γνήσια αύξουσα. γ) Να χρησιμοποιήσετε το β).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.68 α) Να αποδείξετε ότι $f', f'' < 0$.

β) Να πάρετε ως $f(x) = e^{(1/2)x^2}.cosx$ και να αποδείξετε ότι η f' έχει το πρόσημο της $\phi(x) = xcosx - sinx$.

5.69 α) Όχι αφού $g(-2) = g(2)$.

β) Ναι, αν και $f'(x)$ και $g'(x)$ μηδενίζεται στο 0. (Παράδειγμα 5.25.).

5.70 $\lim_{x\to 1} \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{f'(\xi)} = \sqrt{2}$.

5.73 Να εφαρμόσετε το Θ. Darboux (Θ. 5.39) στα συμπεράσματα α) και β).

5.74 Να παρατηρήσετε ότι $f'(0) = 0$, αλλά η $f'(x)$ δεν υπάρχει για $x \neq 0$.

5.75 α) 0 β) 1. Τα όρια των παραγώγων δεν υπάρχουν.

5.76 Να παρατηρήσετε ότι $g'(x) = 0$ για $x = \pi\nu$.

5.77 α) 0 β) -2 γ) $\frac{\alpha}{2}$ δ) $\frac{1}{2}$ ε) e στ) -1 ζ) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ η) $e^{2/\pi}$.

5.78 Για την f $\alpha = 2$ και την g : $\alpha = -\frac{4}{3}, \beta = \frac{1}{3}$.

5.79 Αρκεί να είναι συνεχής στο 0, $k = -\frac{1}{2}$.

5.80 α) Έστω $x_1 > \alpha$: $f(x_1) \leq f(\alpha)$. Επειδή $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists x_2 > x_1 : f(x_2) \geq f(\alpha)$. Να εφαρμόσετε το Θ. 4.31 στο $[x_1, x_2]$ και μετά το Θ. Rolle σε κατάλληλο διάστημα.

5.81 $R_\nu^c = \frac{(x-1)(x-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}(-1)^\nu \frac{1.3...(2\nu-1)}{2^\nu} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{(1/2)+\nu}}$.

5.82 α) $f^{(\nu)}(x) = e^x(x+\nu)$, $R_\nu^c = \frac{x^\nu}{\nu!}e^{\theta x}(\theta x+\nu)$, $|R_\nu^c| \leq \frac{|x|^\nu}{\nu!}e^x|\theta x+\nu| \to 0$ γιατί αν $\alpha_\nu = \frac{|x|^\nu(\theta x+\nu)}{\nu!}$ τότε $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \to 0 < 1$.

β) $R_\nu^c = \frac{(\sqrt{2}x)^\nu}{\nu!}e^{\theta x}cos\left(\theta x + \frac{\nu\pi}{4}\right) \to 0$ γιατί $|e^{\theta x}cos\left(\theta x + \frac{\nu\pi}{4}\right)| \leq e^{\theta x}$ και $\frac{(\sqrt{2}x)^\nu}{\nu!} \to 0$

γ) και δ) Να εργαστείτε όπως στην διωνυμική σειρά.

ε) Να εργαστείτε όπως στην λογαριθμική σειρά.

5.83 α) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots > 1 + x + \frac{x^2}{2}$

β) $sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \Rightarrow \left(\frac{sinx}{x}\right)^2 > \left(1 - \frac{x}{6}\right)^2$ αν $x^2 < 6$.

5.84 Να λάβετε υπόψη την λογαριθμική σειρά.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.85 Όχι η f είναι αύξουσα στο $[1,2]$ και παίρνει τα ακρότατα στα άκρα.

5.86 γ) Για $x=-\sqrt{2}, x=\sqrt{2}$ έχει μέγιστο το $\frac{4}{e^2}$. Για $x=0$ έχει ελάχιστο το 0.

στ) Η f' δεν είναι συνεχής στο 0, άρα δεν υπάρχει η $f''(0)$. Επειδή $f(x)\geq 0, \forall x\in R$ η f έχει ολικό ελάχιστο στο 0.

ζ) Για $x=\frac{1}{2}$ ολικό ελάχιστο $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

η) Για $x=0,3$ και $\forall x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ τοπικά ελάχιστα. Για $x=1,4$ και $\forall x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right]$ τοπικά μέγιστα.

5.87 α) Όχι β) τοπικό ελάχιστο γ) όχι.

5.88 $f'(0)=0$, $f''(0)=2-\alpha \Rightarrow$ ελάχιστο για $\alpha<2$ και μέγιστο για $\alpha>2$. Για $\alpha=2$, $f''(0)=0$. Να πάρετε παραγώγους ανώτερης τάξης.

5.89 Να αποδείξετε ότι $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$.

5.92 α) $0, \frac{\pi}{4}$ β) $e^{-1/4}, e^2$ γ) $f\downarrow$ στο $[0,2]$

δ) $f(x)=\begin{cases}1-x^2-x, & -1\leq x\leq 0\\ 1-x^2+x, & 0<x\leq 1\\ x^2-1+x, & 1<x\leq 2\end{cases}$ ε) $-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}$.

5.93 $f'(x)=\frac{-1-\sinh x}{\cosh^2 x}$, $f'(x)=0$ για $\widehat{x}=log(-1+\sqrt{2})$ και $f''(\widehat{x})<0, lim_{x\to+\infty}f(x)=-1, f(\widehat{x})=\sqrt{2}$.

5.94 α) $f'(x)=0$ για $x=1$, $f'(x)>0, \forall x>1$, $f'(x)<0, \forall x: 0<x<1$.

β) i) $f(x)\geq f(1)=2>0, \forall x\in R^+$. ii) Για $x>1\Rightarrow 0<\frac{logx}{x}$ και $2\sqrt{x}-logx>0$.

5.95 $f(x)=-x^{\alpha}logx$, $f'(x)=0$ για $x=e^{-1/\alpha}$ στο οποίο παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

5.96 $f(x)=xy-e^{x-1}-ylogy$, $f'(x)>0$ ή $<$ αν $x>1+logy$ ή $x<1+logy$. Το ίσον ισχύει για $x=1+logy$.

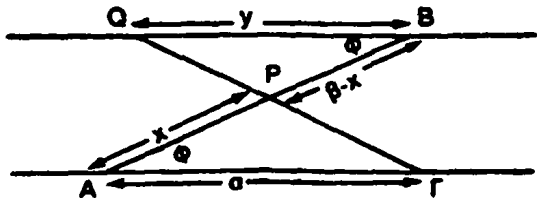
5.97 Να αποδείξετε ότι f είναι γνήσια αύξουσα στο $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right]$ και f γνήσια φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{2\alpha}},+\infty\right)$.

5.98 Έστω $f(x_1)=f(x_2)=0$, $0<x_1<x_2<1\Rightarrow\Theta$. Rolle στο $[x_1,x_2]$, υπάρχει $x_3\in(x_1,x_2)$: $f'(x_3)=0$. Αφού $f(x)\geq 0\Rightarrow f'(x_1)=f'(x_2)=0$. Να εφαρμόσετε το Θ. Rolle διαδοχικά στην f' και f''.

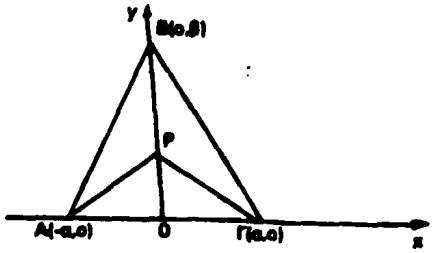
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.100 Τρίγωνο PBQ όμοιο προς το $AP\Gamma \Rightarrow y = \alpha\frac{\beta - x}{x}$

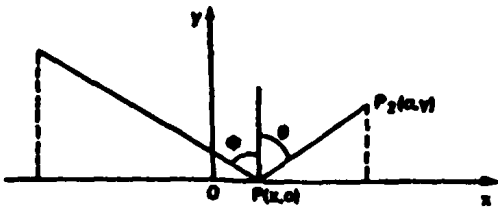
$E = \frac{1}{2}\alpha sin x + \frac{(\beta-x)^2}{x}$ $f(x) = x + \frac{(\beta-x)^2}{x}$. Ελάχιστο για $\frac{\sqrt{2}}{2}\beta$.



5.101 $F(y) = \beta - y + 2\sqrt{y^2 + \alpha^2}, y < \beta$. Ελάχιστο για $y = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$



5.102 $s = \sqrt{(x+\alpha)^2 + \beta^2} + \sqrt{(x-\alpha)^2 + \gamma^2}$ $s' = 0 \Rightarrow sin\phi = sin\theta \Rightarrow \phi = \theta$.



5.103 Αν $f(x) = \frac{x^2}{x^3+200}, x \geq 1$ τότε η f έχει μέγιστο για $x = \sqrt[3]{400}$. Μεγαλύτερος όρος ο α_7.

5.104 Να βρεθεί το μέγιστο της $f(x) = \sqrt{x} - \frac{4}{5}x - \frac{4}{15}, 0 < x < 1$.

5.105 α) αύξουσα στα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$, φθίνουσα στα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$. Μέγιστο $(-1, -2)$, ελάχιστο $(1, 2)$. Δεν έχει σημείο καμπής. Κυρτή για $x > 0$ κοίλη για $x < 0$.

γ) $f(x) = \sqrt{2}sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Φθίνουσα στα $\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{4}, 2\nu\pi + \frac{5\pi}{4}\right), \nu \in Z$, αύξουσα σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα. Μέγιστα $\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{4}, 1\right)$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ελάχιστα $\left(2\nu\pi + \frac{5\pi}{4}, -1\right)$. Σημεία καμπής $\left(\nu\pi + \frac{3\pi}{4}, 0\right)$. Κοίλη στα $\left(2\nu\pi - \frac{\pi}{4}, 2\nu\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$, κυρτή αλλού.

5.106 Να εφαρμόσετε τον ορισμό 5.114 για $x_1 = x, x_2 = y$ και $\lambda = \frac{1}{2}$.

5.107 α) $x_k = e^{(\pi/4)+k\pi}, k \in Z$ β) 0.

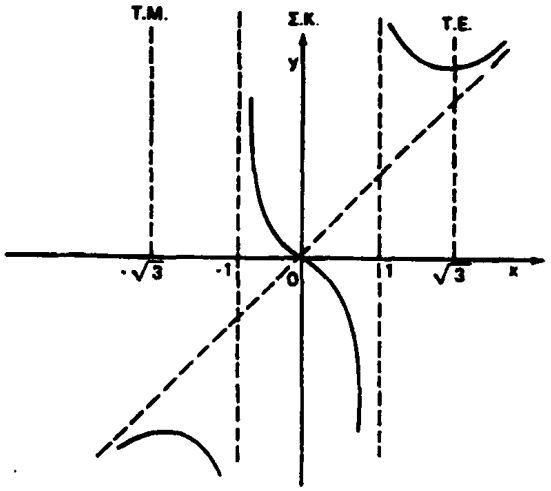
5.108 $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$.

5.112 α) $x = 0$ κατακόρυφη, $y = x + 1$ πλάγια ε) $y = 2x + 1$ πλάγια.

5.113

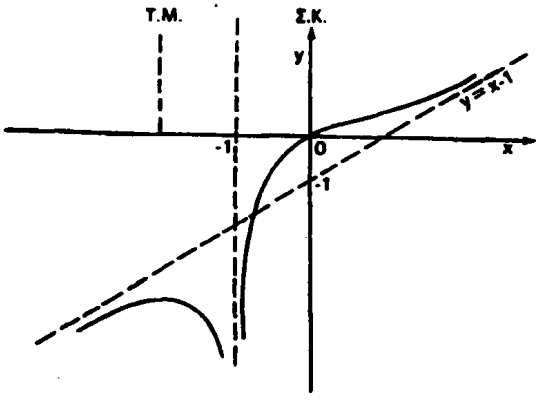
α)

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
F′	+	−	−	−	−	−	+
F″	−	−		0	−	+	+
F	∩	∩	∩	∩	∩	∪	∪



β)

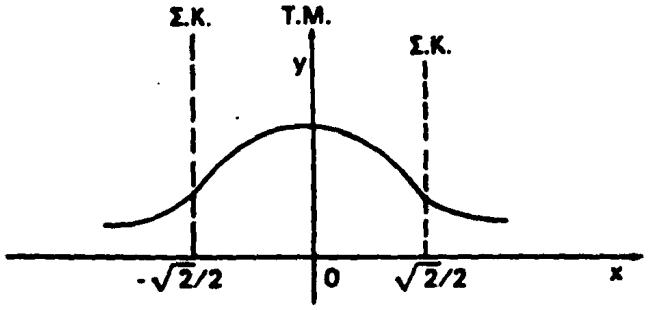
x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f′		−	+	+	
f″	−	−	−	+	
f	∩	∩	∩	∪	



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

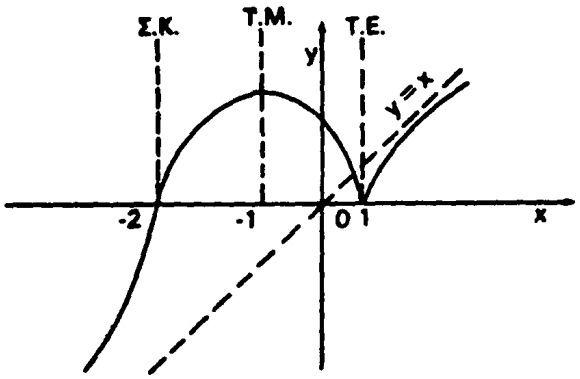
γ)

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	$+\infty$
f′	+	+	−	−	
f″	+	−	−	+	
f	+	+	+	+	

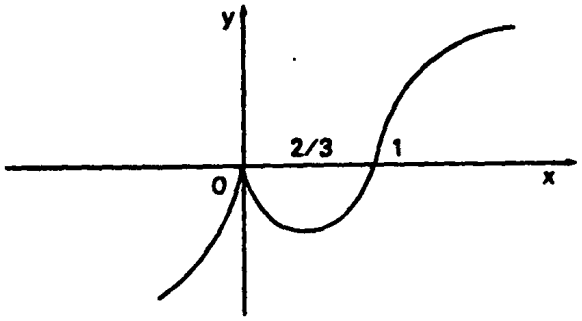


δ)

x	$-\infty$	−2	−1	1	$+\infty$
f(x)	−	0 +	+	0 +	
f′(x)	+	+	−	+	
f″(x)	+	−	−	−	



στ)



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σωστό ή λάθος;

1) Λ 2) Λ 3) Λ 4) Σ 5) Λ 6) Λ, $f(x)=\sqrt{x}, x=0$
7) Λ, $f(x)=\frac{|x|}{x}$ 8) Λ, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ έχει εφαπτόμενη στο (0, 0)
9) Λ 10) Σ 11) Λ, $f(x)=x, g(x)=x-1, c=1$
12) Λ 13) Λ, 19ου βαθμού 14) Λ
15) Σ 16) Λ, $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,1\\ 0, & x=0,1\end{cases}$
17) Λ, $f(x)=x^2, x\in(-1,0)$
18) Σ 19) Λ, $f(x)=x^3, x\in(-1,1)$ 20) Λ, $f(x)=-\sqrt[3]{x}, x\in(-1,1)$
21) Λ, $c\in D(f)$ 22) Λ, $f(x)=x^3, c=0$ 23) Λ, $f(x)=x, g(x)=x+1$
24) Σ 25) Λ, $f(x)=x^4$
26) Λ, $0\notin D(f)$ 27) Λ, $f(x)=|x|$ 28)Λ, $f(x)=-|x|$ 29) Λ 30) Σ
31) Σ.

5.114 $g'(0)=2f(0)+3f'(0)=10+12=22.$

5.115 Στην f να εφαρμόσετε τον ορισμό. Η g να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο [0, 1] και έχει φραγμένη παράγωγο για $x>1$. Για την f_1 να πάρετε $x=y+\frac{1}{\nu}$ και να δείξετε ότι $|f(x)-f(y)|\geq\frac{3\nu^2}{\nu}$. Η g_1 δεν είναι συνεχής.

5.116 $\lim_{x\to 0+}f(x)=0, \lim_{x\to 1-}f(x)=1-k$ (L'Hospital) $\Rightarrow$ f συνεχής στο [0, 1] $\Rightarrow$ f ομοιόμ. συνεχής $\Rightarrow$ φραγμένη.

5.117 Είναι $|f(x)|<1, \forall x\in\mathbb{R}, sup f(x)=1, inf f(x)=-1, f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}$.

5.118 f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Άρα παίρνει μέγιστο και ελάχιστο. Να εφαρμόσετε το Θ. 4.31 στην g στα σημεία ακροτάτων.

5.119 α) 0, ∞. β) Συνεχής στο 0 αλλά όχι παραγωγίσιμη ($f'_-(0)=\frac{1}{4}, f'_+(0)=1$).

5.121 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leq\frac{1}{2}\\ 1-x, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$ $f'_-\left(\frac{1}{2}\right)=1, f'_+\left(\frac{1}{2}\right)=-1.$

5.122 $f'\left(\frac{1}{2\nu\pi}\right)<0, \nu\geq 2$ και $f'\left(\frac{2}{(2\nu+1)\pi}\right)>0, \nu\geq 1.$

5.123 α) Εφαρμογή 1 της §5.8

β) Να εφαρμόσετε το Θ. Rolle στη συνάρτηση

$$F(x)=\alpha_0 x+\frac{\alpha_1}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha_\nu}{\nu+1}x^{\nu+1}, x\in[0,1].$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.124 $f(x) - f(0) = xf'(c), 0 < c < x \leq 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geq M$ αφού $f'(c) \geq M \Rightarrow f(x) \geq \frac{M}{2}$ γιατί $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow Mx \geq \frac{M}{2}$.

5.125 Άσκηση 5.47.

5.126 α) f γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$, γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$, g γνήσια αύξουσα στο R.

γ) Αν $F(x) = g(x) - x \Rightarrow F'(x) < 0, \forall x > 0$ και $F(0) = 0$.

5.127 Η συνέχεια έχει αποδειχτεί (άσκ. 4.5γ)

$f'_+(\xi) = \lim_{x \to \xi +} \frac{\xi + \sqrt{x-\xi} - \xi}{x - \xi} = +\infty$

$f'_-(\xi) = \lim_{x \to \xi +} \frac{\xi - 1 + \sqrt{x-\xi+1} - \xi}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi +} \frac{1 + \sqrt{x-\xi+1}}{x-\xi} = \frac{1}{2}$ (L' Hospital).

5.128 ii $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists r_1 > 0)(\forall x \in D(f))x > r_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\epsilon}{4}$

iii) $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists r_2 > 0)(\forall x \in D(r'))x > r_2 \Rightarrow |f'(x) - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$.

Έστω $x > r_1, r_2 \Rightarrow |f(x+1) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ οπότε $|f'(c)| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|f'(c) - m| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |m| < \epsilon \forall \epsilon > 0 \Rightarrow m = 0$.

5.129 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ με $\xi \in (\alpha, c), \xi_2 \in (c, \beta) \Rightarrow \Theta$.Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$.

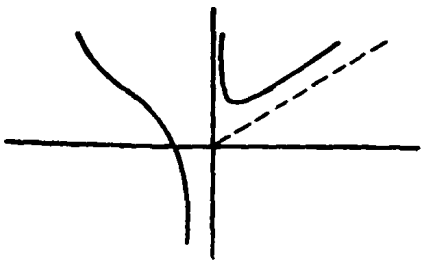
5.130 $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)f'(\xi) > (\beta - \alpha)f'(\alpha) \geq 0, \alpha < \xi < \beta$ (αφού f' αύξουσα).

5.131 Αν $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) < f(0)$ οπότε $\frac{f(x) - f(0)}{x} < 0, x \in (0, \alpha) \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \to 0=} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 0$.

5.132 α) Αν $f(x) = u_\nu$ να δείξετε ότι $u'_\nu = (\nu - 1)u_{\nu-1} - u_{\nu-2}$ και να χρησιμοποιήσετε μαθηματική επαγωγή.

β) Να εφαρμόσετε τον τύπο του Leibnitz με $f(x) = e^{-1/\alpha}, g(x) = x^2$.

5.133 $f(x) = 0$ αν $\frac{\pi}{x} = k\pi \Rightarrow x = \frac{1}{k}, k = 1, 2, \ldots$. Θ. Rolle στα διαστήματα $\left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \ldots, \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$.



5.134

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.135 $\phi''(x) = e^x f\left(e^{-2x}\right) + 4e^{-3x} f''\left(e^{-2x}\right) > 0$ δηλ. η f κυρτή και άρα $2\phi(x) \leq \phi(0) + \phi(2x)$.

5.136 α) Αν $f(x) = e^x - 1 - x$ να εφαρμόσετε την μέθοδο της εφαρμογής 3 της § 5.9.

β) $f'(x) = log\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} - log\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \geq 0$, εφαρμόζοντας το α), δηλ. $y - log(1+y) \geq 0$ με $y = \frac{1}{x-1}$.

γ) $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 1 + \alpha^{\nu+1} > 1 \Rightarrow \alpha_\nu$ γνήσια αύξουσα και φραγμένη γιατί από το α) $\alpha_\nu \leq e^{\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^\nu}$.

5.137 α) Να εφαρμόσετε την μέθοδο της εφαρμογής 3 της § 5.9.

β) $log\alpha_\nu = log\left(1 + \frac{1}{\nu^2}\right) + log\left(1 + \frac{2}{\nu^2}\right) + \ldots + log\left(1 + \frac{\nu}{\nu^2}\right)$ και να λάβετε υπόψη την α).

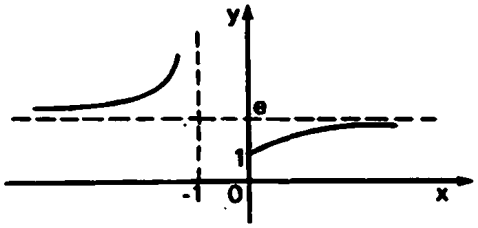
5.138 α) $\alpha = 1$. β) Να εφαρμόσετε τον κανόνα του L' Hospital. γ) $f'(\bar{x}) = 0$ και $f(\bar{x}) = \frac{sin\bar{x}}{\bar{x}}$. δ) Θ.Μ.Τ στο $[0, x]$. ε) Είναι γνήσια φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ (Παράδειγμα 5. 123).

5.139 α, β) Να αποδείξετε ότι για $x = 1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

γ) Να θέσετε στην β) $x = \frac{x_1}{x_2}$.

δ) i) Να θέσετε στην γ) $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$. ii) Να θέσετε στην γ) $x_1 = A^p$, $x_2 = B^q$.

5.140 α) $\Delta(f) = \{x \in RR : \frac{x+1}{x} > 0\} = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. β) $1, e$ (L' Hospital) γ) άσκηση 5.64α). δ)



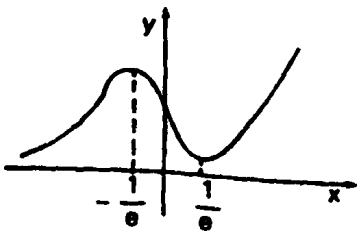
5.141 Να βρείτε το $lim_{y\to 0}\frac{(f^{-1}(y))^3}{y}$.

5.142 α) $lim_{x\to 0} f(x) = lim_{x\to 0} e^{2x log|x|} = 1$ (L' Hospital)

β) Μέγιστο για $x = -\frac{1}{e}$, ελάχιστο για $x = \frac{1}{e}$ και σημαία καμπής τα 0 και τα x που ικανοποιούν την εξίσωση $(2 + logx^2)^2 + \frac{2}{x} = 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γ)



5.143 Θ.Μ.Τ. στο $\alpha \leq x < \xi$ και $\xi < x \leq \beta$.

5.144 Μέγιστο ολικό για $x = \alpha$ το $f(\alpha) = \alpha^\alpha e^\alpha$, $f'(\alpha) = \alpha^\alpha e^\alpha (log\alpha + 2), \alpha = e^{-2}$.

5.146 Θ.Μ.Τ. $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0+\theta h)$. Να πάρετε τα όρια των δυο μελών.

5.147 α) $w' = f''g - fg'' = -pfg + pfg = 0$.

β) Αν $g(x) \neq 0$ τότε η $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ικανοποιεί το Θ. Rolle $\Rightarrow \phi'(c) = 0, c \in (x_1, x_2)$ δηλ. $w'(c) = 0$ άτοπο.

5.148 α) Ελάχιστο για $x = 2$, $f(2) = \frac{1}{5}$, μέγιστο για $x = 0$, $f(0) = 1$.

β) Αν $g(x) = f(x) + cx \Rightarrow g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + c > 0 \Rightarrow \omega(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} < c$. Να βρείτε το ελάχιστο της ω. Είναι $\omega_{min} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

5.149 Αν f σταθερή, προφανές. Έστω ότι υπάρχει c με $f(c) \neq f(\alpha)$. Υποθέτουμε ότι $f(c) > f(\alpha)$. Παίρνουμε ένα y τέτοιο ώστε: $f(\alpha) < y < f(c)$. Από το Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών υπάρχουν x_1, x_2 με $\alpha < x_1 < c$ και $f(x_1) = y$ και $c < x_2 < \beta$ και $f(x_2) = y$. Να εφαρμόσετε το Θ. Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Η συνέχεια σ' αυτό το διάστημα εξασφαλίζεται από την παραγωγισιμότητα.

5.150 $f'(x) = -\frac{|x|^{\rho-1}}{|x|^\rho+1} sgn\, x$. Τα όρια είναι $0 (\alpha > 1), -1 (\alpha = 1), -\infty (\alpha < 1)$.

5.151 $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}sgn x|x|^{-1/2}+1} = \frac{|x|^{1/2}sin\frac{1}{x} - sgn x|x|^{-1/2}cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}sgn x + |x|^{1/2}}$. Το όριο του παρονομαστή είναι $\pm\frac{1}{2}$, του αριθμητή δεν υπάρχει.

5.152 α) Έστω $A = \frac{1-x^\rho}{1-x} = \rho\xi^{\rho-1}, x < \xi < 1$.

1) $\rho > 1 \Rightarrow x^\rho < x, A > 1, \rho - 1 > 0, \xi^{\rho-1} < 1 \Rightarrow A < \rho$.

2) $\rho, 1 \Rightarrow x^\rho > x, A, 1, \rho - 1 < 0, \xi^{\rho-1} > 1 \Rightarrow A > \rho$. β) $\frac{x^\rho - y^\rho}{x-y} = \rho\xi^{\rho-1}, y < \xi < x$.

i) $\rho > 1 \Rightarrow y^{\rho-1} < \xi^{\rho-1} < x^{\rho-1}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ii) $0 < \rho < 1 \Rightarrow x^{\rho-1} < \xi^{\rho-1} < y^{\rho-1}$.

5.153 Έστω $f(x) = 2logx + \frac{1}{x} - 1$. Πρέπει $f(x) \geq 0$, $f'(x) < 0$ στο $(0, \frac{1}{2})$ και $f'(x) > 0$ στο $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Επειδή $f(1) = 0$ είναι $f(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$. Η $f(x) = 0$ έχει ρίζα x_0 στο $(0, \frac{1}{2})$. Άρα η ανισότητα ισχύει στα $(0, x_0]$ και $[1, +\infty)$.

5.155 Να βρείτε το μέγιστο της $f(x) = \sqrt[x]{x}, x > 0$. Μεγαλύτερος ο $\sqrt[3]{3}$.

5.156 f συνεχής στο (α, β). Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής δεξιά του α, υποθέτουμε ότι $|f'(x)| < k, x \in (\alpha, \beta)$ και παίρνουμε $\alpha < x < \alpha + \frac{\epsilon}{2k}$. Αν $f(x) \neq f(\alpha)$ διαλέγουμε $\gamma (= f(\xi))$ μεταξύ των $f(x)$ και $f(\alpha)$ έτσι ώστε: $|\gamma - f(\alpha)| < \frac{\epsilon}{2}$. Τότε $|f(x) - f(\alpha)| \leq |f(x) - f(\xi)| + |\gamma - f(\alpha)| < |x - \xi|k + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

5.157 Πρέπει να δείξουμε ότι αν $x_1 > x_2$ τότε $\frac{f(x_1)-f(\alpha)}{x_1-\alpha} > \frac{f(x_2)-f(\alpha)}{x_2-\alpha}$ ή αν $g(x) = f(x) - f(\alpha)$, $(x_2 - \alpha)g(x_1) > (x_1 - \alpha)g(x_2)$ ή ακόμα $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} > \frac{g(x_2)}{x_2-\alpha}$ Θ.Μ.Τ $(g(\alpha) = 0$ και $g'' = f'' > 0)$ $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = g'(\xi_1)$, $\frac{g(x_2)}{x_2-\alpha} = g'(\xi_2), \alpha < \xi_2 < x_2 < \xi_1 < x_1$.

5.158 $f'(x) = \alpha - \frac{3x^2+x^4}{(x+x^2)^2} \Rightarrow \alpha \geq \frac{3x^2+x^4}{(x+x^2)^2} = \omega(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(1+x^2)^2}$. Η ω παρουσιάζει μέγιστο όταν $x^2 = 3$ και $\omega_{max} = \frac{9}{8}$.

5.159 α) Θ.Μ.Τ στο $[x, y]$. β) $|x_{\nu+1} - x_\nu| \leq |\lambda||x_\nu - x_{\nu-1}|, \forall \nu \in NN$. Γράφοντας τις ανισότητες για $\nu = 1, 2, \ldots$ και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη παίρνουμε: $|x_{\nu+1} - x_\nu| \leq |\lambda|^\nu |x_1 - x_0| = |\alpha||\lambda|^\nu$.

γ) $|x_\mu - x_\nu| \leq |x_\mu - x_{\mu-1}| + \cdots + |x_{\nu+1} - x_\nu| \leq |\alpha||\lambda|^\nu (1 + |\lambda| + \cdots + |\lambda|^{\mu-\nu-1}) = |\alpha||\lambda|^\nu \frac{1-|\lambda|^{\mu-\nu-1}}{1-|\lambda|} \leq \frac{|\alpha||\lambda|^\nu}{1-|\lambda|}$.

5.160 Θ.Μ.Τ $|f'(x) + 1| = |f'(x) - f'(0)| = |xf''(c)| < \frac{1}{2}$. Αφού $f(\alpha) - \alpha = f(\alpha) - f(0) = \alpha f'(\xi) \Rightarrow |f(\alpha)| = |\alpha||1 + f'(\xi)| < \frac{1}{2}|\alpha|$, $|\alpha + \beta| = |\alpha + f(\alpha)| < \frac{3}{2}|\alpha| \Rightarrow \alpha + \beta \in [-2\alpha, 2\alpha] \Rightarrow f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + \beta f'(\zeta) = f(\alpha)(1 + f'(\zeta)) \Rightarrow |f(\alpha + \beta)| < \frac{1}{2}|f(\alpha)| < \frac{1}{4}|\alpha|$.

5.161 1) Αν $f(x) = x - x^2 - log(1 + x), g(x) = log(1 + x) - x + \frac{1}{3}x^2$ να εφαρμόσετε το Θεώρημα 5.54.

2) $f(x) = -log(cosx) - \frac{1}{2}sinx.tgx$, $f(0) = 0$ και $f'(x) = -\frac{sinx}{2cos^2x}(cosx - 1)^2 \leq 0$.

3) Για $\nu = 1$, $f(x) = logx - x + 1$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 0$. Αφού ισχύει $\forall x > 0, x \neq 1$, να θέσετε όπου x το $x^{1/\nu}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4) Έστω $f(t) = \frac{x^t-1}{t}$. Τότε η $f'(t)$ έχει το ίδιο πρόσημο με την $\phi(t) = tx^t logx - x^t + 1$. Είναι $\phi(0) = 0$ και $\phi'(t) > 0$.

5) Άσκηση 5.64β).

6) $f(x) = (1+x)^\lambda + (1-x)^\lambda - 2^\lambda$, $f'(x) = \lambda(1+x)^{\lambda-1} - \lambda(1-x)^{\lambda-1} \geq 0$, $f(1) = 0$.

7) $f(x) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p - \frac{1}{2}(1+x^p)$, $\phi(x) = \frac{2^p}{x^p} f(x)$, $\phi'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}}\left\{(1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - 2^{p-1}\right\} \geq 0$ από την 6).

8) $f(x) = tgx + 2sinx - 3x$, $f'(x) = \frac{(cosx-1)^2(2cosx+1)}{cos^2x} > 0$, $f(0) = 0$.

9) $f(x) = (\alpha+\beta cosx)x - (\alpha+\beta)sinx$, $f'(x) = 2\alpha sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}\left(tg\frac{x}{2} - \frac{2\beta}{\alpha}\frac{x}{2}\right) > 0$.

10) $\alpha e^{-\beta x} - \beta e^{-\alpha x}.\alpha - \beta \Leftrightarrow \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha} > \frac{1-e^{-\beta x}}{\beta}$. Αν $f(x) = \frac{1-e^{-kx}}{x} \Rightarrow f'(x) < 0$.

11) Η $f(x) = \frac{tgx}{x}$ είναι αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

12) Να θέσετε $y = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2y}{y+2} < log(1+y) < y$.

13) $\frac{\sqrt{\alpha}-1}{\sqrt{\alpha}+1} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{\alpha x+1} = \frac{(\sqrt{\alpha}-1)(\sqrt{\alpha}x-1)^2}{(\sqrt{\alpha}+1)(x+1)(\alpha x+1)}$.

14) Να αποδείξετε ότι η $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^\nu, 0 < x < 1$ είναι κυρτή και τότε $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\{f(x_1) + f(x_2)\}$ με $x_1 = \alpha, x_2 = \beta$.

15) Άσκηση 5.59β) με $\rho = \frac{1}{\nu}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

Βιβλιογραφία

1 T. Apostol, Calculus, Vol. I, Xerox, Wattham, 1967 (Ελληνική μετάφραση έκδοση Σ. Πεχλιβανίδη)

2 T. Apostol, Mathematical Analysis, Addison-Wesley publ. Co., 1974.

3 R. Bartle-D. Sherbert, Introduction to Real Analysis, John Wiley & sons, inc. 1982.

4 G. Berman, A problem book in Mathematical Analysis, Mir Publishers Moscow, 1977.

5 A. Bermant, A course of Mathematical Analysis, Part I, Pergamon Press, 1963.

6 F. Bowman-F. Gerand, Higher Calculus, Cambridge University Press, 1967.

7 L. Brand, Advanced Calculus, John Wiley & sons, 1965 (Ελληνική μετάφραση E.M.E.)

8 C. Burrill -J. Knudsen, Real variables, Host, Rinehart and Winston, inc., 1969.

9 R. Courant- F. John, Introduction to Calculus and Analysis, Vol. I, Interscience Publ., 1965.

10 H. Eggleston, Elementary Real Analysis, Cambridge University Press, 1962.

11 B. Gelbaum-J. Olmest, Counterexamples in Analysis, Holden-Day, 1964.

12 R. Golberg, Methods of Real Analysis, Blaisdel, 1964.

13 R. Goodstein, A text Book of Mathematical Analysis, Oxford University Press, 1949.

14 E. Hille, Analysis, Vol. I, Blaisdell Publ. Co., 1964.

15 J. Hyslop, Real variables, Oliver and Bound, 1960.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

16 Δ. Κάππος, Απειροστικός Λογισμός, Αθήνα 1962.

17 R. Larson- R. Hostetler, Calculus, Heath Co., 1979.

18 J. Marsden, Elementary Classical Analysis, W, H. Freeman and Co., 1974.

19 I. Maron, Problems in Calculus of one variable, Mir Publishers Moscow, 1975.

20 S. Nikolski, A course of Mathematical Analysis, Mir Publishers Moscow, 1981.

21 D. Quadling, Mathematical Analysis, Oxford University Press, 1966.

22 R. Rankin, An Introduction to Mathematical Analysis, Pergamon Press, 1963.

23 H. Sagan, Advanced Calculus, Houghton Mifflin Co., 1974.

24 Β. Στάϊκος, Σημειώσεις Απειροστικού Λογισμού, Ιωάννινα 1980.

25 O. Stanaitis, An Introduction to sequences, series and Improper Integrals, Holden-Day, 1967.

26 Δ. Στρατηγόπουλος, Ανώτερα Μαθηματικά, Τόμος 1ος, τεύχος 1ο, Πάτρα 1973.

27 A. Taylor, Advanced Calculus, Blaisdell Publ. Co., 1955.

28 W. Trench, Advanced Calculus, Harper & Row Publ., New York, 1978.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Ευρετήριο όρων

Άθροισμα συναρτήσεων 4
ακολουθία, sequence 33
- αύξουσα, increasing 50
- βασική, 75
- Cauchy, 75
- μερικών αθροισμάτων, of partial sums 97
- μηδενική, null 36
- μονότονη, monotone 50
- συστολή, contraction 95
- τιμών συναρτήσεως, 163
-φθίνουσα, decreasing 50
- φραγμένη, bounded 37
- φραγμένης μεταβολής, bounded variation 137
ακρότατο, ολικό, extremum, global 374
- τοπικό, local (relative) 374
ακτίνα σύγκλισης δυναμοσειράς, 154
αναδιάταξη σειράς, rearrangement of series 144
ανισότητα (inequality) Bernoulli, 9, 340
- Cauchy-Schwarz, 9, 132
- Jensen's, 397
- Minkowski, 132
αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, inverse trigonometric functions 262
- υπερβολικές συναρτήσεις, hyperbolic functions 267
απειρογινόμενα, infinite products 149
απροσδιόριστες μορφές, indeterminate forms 349
Αρχιμήδειος ιδιότητα, Archimedian property 15
ασύμπτωτος, asymptote 404
- κατακόρυφη, vertical 405 - οριζόντια, horizontial 405
- πλάγια, 406
ασυνέχεια, discontinuous 223
- α΄ είδους, first kind 224
- β΄ είδους, second kind 225

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Γινόμενο σειρών, product of series 147
- συναρτήσεων 4
γραφική παράσταση συνάρτησης, 407

Διάστημα, interval 28
- ανοιχτό, open 28
- απέραντο, infinite 28
- κλειστό, closed 28
- μη φραγμένο, unbounded 28
- σύγκλισης δυναμοσειράς, of convergence of power series 154
- φραγμένο, bounded 28
διαφορά συναρτήσεων, defference of functions 4
διαφορικό συνάρτησης, differential of functions 315
δυναμοσειρά, power series 154

Ελάχιστο συνάρτησης, minimum of function 374
- ολικό, global 374
- τοπικό, local (relative) 374
- συνόλου, of a set 15

Θεώρημα Bolzano, 233
- Bolzano-Weierstras, 71, 74
- Cauchy-Hadamard, 154
- Darboux, 317
- Fermat, 374
- ενδιάμεσων τιμών, intermediate value theorem 231
- ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, 45
- - συναρτήσεων, 192
- θεμελιώδες της Άλγεβρας, fundamental theorem of algebra 236
- Μέσης Τιμής του Lagrange, mean value theorem 327
- - του Cauchy, 336
- πεπερασμένων αυξήσεων, increment 329
- Pringsheim, 124
- Riemann, 146
- Rolle, 319

Infimum συνάρτησης, 186

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

- συνόλου, 14

Κανόνας του L'Hospital, L' Hospital's rule 349
Κιβωτισμός διαστημάτων του Cantor, nested intervals 61
Κριτήριο Abel, 134
- Dirichlet, 135
- du Bois-Reymond και Dedekind, 137
-Gauss, 142 - Kummer, 140
- Leibnitz, 125
- λογαρίθμου του Catalan, logarithmic test 139
- ν-οστής ρίζας του Cauchy, of nth root of Cauchy 114, 116
- οριακό συγκρίσεως, limit comparison test 109
- πηλίκων του D'Alembert, ratio test of D' Alembert 112, 114
- Raade, 141
- συγκλίσεως Cauchy, Cauchy convergence test 106, 202
- συγκρίσεως σειρών, comparison test for series 108
- συμπύκνωσης του Cauchy, Cauchy condesation test 123

Μέγιστο συνάρτησης, maximum of function 374
- - ολικό, global 374
- - τοπικό, local 374
- συνόλου, 15

Ομαδοποίηση σειράς, 144
όριο ακολουθίας, limit of sequence 34
- ανώτερο, upper 85
- κατώτερο, lower 85
- συνάρτησης, 164
- σύνθεσης συναρτήσεων, of composite functions 193

Παράγωγος, derivative 279
- από αριστερά, from the left 280
- από δεξιά, from the right 280
- αντίστροφης συνάρτησης, of inverse function 293
- ανώτερης τάξης, 302
- κατ' εκδοχή, 311
- συμμετρική, symmetric 284
- σύνθετης συνάρτησης, chain rule 292
περιοχή, neighborhood 29

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

- δακτυλική, deleted 29
πολυώνυμα Chebychev, polynomial of 309
- Hermite, 309
- Laguerre, 309
- Legendre, 306

Σημείο εξωτερικό, exterior point 32
- καμπής συνάρτησης, inflection point 394
- κρίσιμο συνάρτησης, critical point of a function 375
- μεμονωμένο συνόλου, 32
- σταθερό συνάρτησης, fixed point of function 237
- συνοριακό, boundary point 32
- συσσωρεύσεως ακολουθίας, accumulation point of sequence 75
- - συνάρτησης, of functions 163
- - συνόλου, of a set 30
σειρά, series 97
- απόλυτα, συγκλίνουσα, absolutely convergent 128
- αριθμητική, arithmitic 98
- αρμονική, harmonic 98
- γεωμετρική, geometric 98
- διωνυμική, 369
- εκθετική, exponential 367
- εναλλάσσουσα, alternating 125
- ημιτόνου, sine 367
- λογαριθμική, logarithmic 368
- συγκλίνουσα υπό συνθήκη, conditionally convergent 128
-συνημιτόνου, cosine 367
-τηλεσκοπική, telescopic 103
- υπεργεωμετρική, hypergeometric 143
- φυσικών αριθμών, of natural numbers 98
συνάρτηση, function 2
- αμφιμονοσήμαντη, 2
- αναλυτική, analytic 370
- αντίστροφη, inverse 3
- άρτια, even 3
- αύξουσα, increasing 4, 200
- γραμμική, linear 313
- ζήττα, zeta 120
- κατά τμήματα γραμμική, 250
- κλιμακωτή, step 250
- κοίλη, concave 389

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

- κυρτή, convex 389
- μονότονη, monotone 4, 200
- ομοιόμορφα συνεχής, uniform continuity 241
- περιοδική, periodic 3
- περιττή, odd 3
- σταθερή, constant 3
- συμμετρική, symmetric 4
- συνεχής, continuous 209
- ταυτοτική, indentical 3
- φθίνουσα, decreasing 4, 200
-φραγμένη, bounded 3, 186
- Weierstrass, 283
συνθήκη Lipschitz, condition 248
σύνολο ανοιχτό, open set 32
- άνω φραγμένο, upper bounded 14
- κάτω φραγμένο, lower bounded 14
- κενό, empty 1
- κλειστό, closed 31
- παντού πυκνό, everywhere dence 31
- παράγωγο, derived 30
- συμπληρωματικό, complementary 1
supremum συνάρτησης, 186
- συνόλου, 14

Ταυτότητα Euler, indentity 8
- Langrange, 8, 308
τύπος Leibnitz, formula 303
- Mac Laurin, 364
- Taylor, 362

Υπακολουθία, sub sequence 39
υπερβολικές συναρτήσεις, hyperbolic functions 267
υπόλοιπο κατά Cauchy, remainder 363
- - Lagrange, 363
- - Roche, 363
- - Schlomilch, 363

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ευρετήριο ονομάτων

Abel, 134

Bolzano, 71, 74, 233

Cantor, 61
Catalan, 139
Cauchy, 9,114,123, 132, 154, 336

D' Alembert, 112, 114
Darboux, 317
Dedekind, 64, 137
Dirichlet, 135
du Bois-Reymond, 137

Fermat, 374

Hadamard, 154
Heine, 164
Hermite, 309

Jensen, 397

Kummer, 140
Lagrange, 8, 327, 363
Laguerre, 309
Legendre, 309
Leibnitz, 125
Lipschitz, 303
L' Hospital, 349

Mac-Laurin, 364
Minkowski, 132

Newton, 8, 402

Pringsheim, 124

Raabe, 141
Riemann, 120, 146
Roche, 363
Rolle, 319

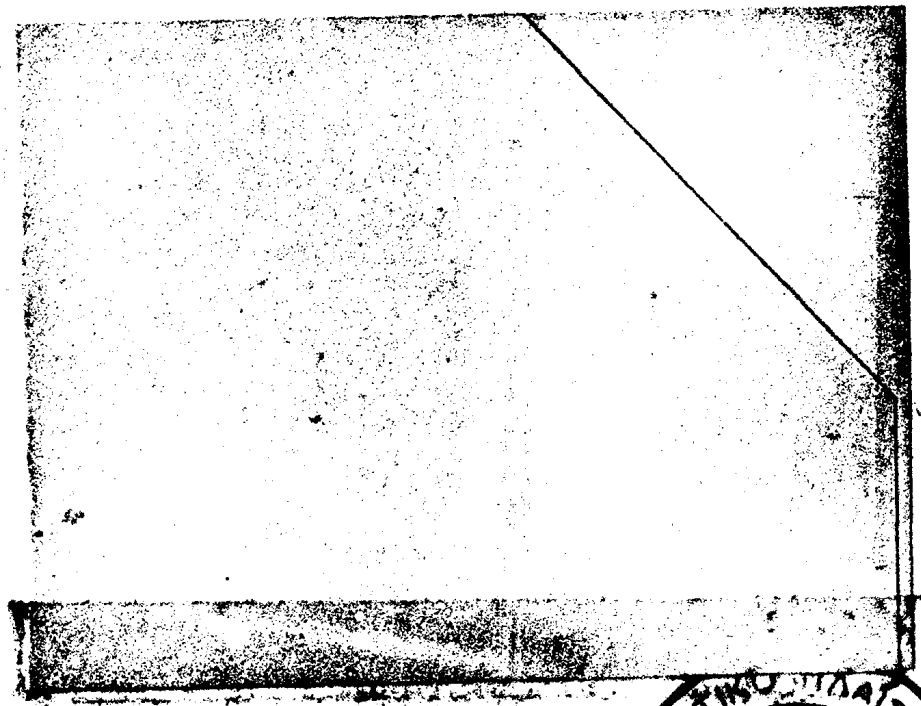
Schlomilch, 363
Schwartz, 132

Taylor, 362

Weierstrass, 71, 74, 283

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6450.



Β' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
ΕΡΓΟ
"ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ-Π.Ι."
1996 - 1999

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ΕΚΤΥΠΩΣΗ
Τυπογραφείο
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ