

ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ Κ. ΓΕΓΙΟΥ

**ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ**

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ
ΜΕΘΟΔΟΙ**

ΤΟΜΟΣ 2

ΙΩΑΝΝΙΝΑ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000287928

515.1

ΓΕΓ

Τ. 2

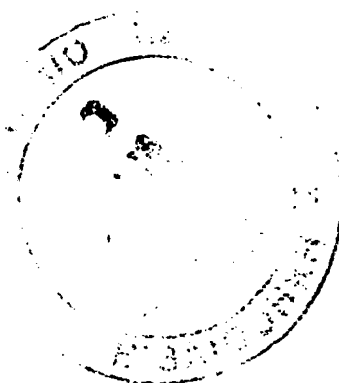


ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ Κ. ΓΕΓΙΟΥ

**ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ**

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΤΟΜΟΣ 2



ΙΩΑΝΝΙΝΑ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
 ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ:.....

ΑΡ. ΕΙΣ.: 4262.....204.....

ΕΠΙΣΤΕΥΣΗ

ΕΠΙΣΤΕΥΣΗ

ΕΠΙΣΤΕΥΣΗ

ΕΠΙΣΤΕΥΣΗ
 ΕΠΙΣΤΕΥΣΗ

ΕΠΙΣΤΕΥΣΗ



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Με τον δεύτερο αυτό τόμο ολοκληρώνεται το βιβλίο "ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ", του οποίου πρωταρχικός σκοπός είναι να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις του προγράμματος σπουδών του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων παρέχοντας μέσα από μια σειρά μαθημάτων τις απαραίτητες βασικές γνώσεις πάνω σε ένα σημαντικό κλάδο των εφαρμοσμένων Μαθηματικών, τα Αριθμητικά ή Υπολογιστικά Μαθηματικά.

Ο δεύτερος τόμος περιλαμβάνει τρία κεφάλαια (κεφ. 13,14,15) και αποτελεί συνέχεια του πρώτου τόμου (κεφ. 1 – 12). Το κεφάλαιο 13 αναφέρεται στις εξισώσεις διαφορών, ενώ τα κεφ. 14 και 15 στην αριθμητική επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων και διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, αντίστοιχα.

Η δακτυλογράφηση του κειμένου και των δύο τόμων έγινε από την κ. Λουκρητία Παπαγεωργίου – Γέγιου, την οποία ευχαριστώ ιδιαίτερα για την απόλυτα επιτυχημένη προσπάθειά της.

Ιωάννινα, Οκτώβριος 1987

Α. Κ. Γέγιος

Ανατύπωση: 1989, 1992, 1995, 1998, 2001 .



Απαγορεύεται η μετάφραση ή αναπαραγωγή σε οποιαδήποτε μορφή
οποιοδήποτε τμήματος του παρόντος βιβλίου χωρίς τη γραπτή άδεια
του συγγραφέα.



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

13.	ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ	1
13.1	Εισαγωγή	1
13.2	Επίλυση γραμμικών ομογενών εξισώσεων διαφορών (Γ.Ο.Ε.Δ.) με σταθερούς συντελεστές	3
13.3	Επίλυση γραμμικών μη ομογενών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές	8
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	12
14.	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	15
14.1	Εισαγωγή	15
14.2	Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών	19
14.3	Μέθοδοι του ενός βήματος	20
14.3.1	Μέθοδοι της σειράς Taylor	24
14.3.2	Μέθοδοι των Runge - Kutta	27
14.3.3	Σφάλματα αποκοπής στις μεθόδους ενός βήματος	34
14.3.4	Σύγκλιση των μεθόδων ενός βήματος	37
14.3.5	Σφάλματα στρογγυλεύσεως στις μεθόδους ενός βήματος. Ολικό σφάλμα	39



14.4	Μέθοδοι πολλών βημάτων	41
14.4.1	Predictor - Corrector μέθοδοι	48
14.4.2	Σφάλματα αποκοπής στις μεθόδους πολλών βημάτων	51
14.5	Ευστάθεια - Αστάθεια των μεθόδων ενός και πολλών βημάτων	53
14.6	Αριθμητική επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών	61
14.6.1	Η Shooting μέθοδος (Μέθοδος της βολής)	62
14.6.2	Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών	65
14.6.3	Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών	67
14.7	Προβλήματα ιδιοτιμών για διαφορικές εξισώσεις	70
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	75

15. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ 82

15.1	Εισαγωγή	82
15.2	Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών	84
15.3	Η μέθοδος των γραμμών (method of lines, straight - line method)	101
15.4	Η μέθοδος των χαρακτηριστικών για υπερβολικές Μ.Δ.Ε.	103
15.5	Υπολειμματικές (residual) μέθοδοι	111
15.6	Μεταβολικές (variational) μέθοδοι - μέθοδος Ritz	114
15.7	Η μέθοδος του πεπερασμένου στοιχείου (finite element)	117
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	121

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 131



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 1ου ΤΟΜΟΥ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

1. ΣΦΑΛΜΑΤΑ
 2. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ
 3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ
 4. ΣΥΝΟΛΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ
 5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ
 6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
 7. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
 8. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
 9. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ
 10. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
 11. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
 12. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ
- ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ



...
...
...
...
...
...
...

... ..

...
...
...
...
...

... ..

...
...
...
...
...

... ..

...
...
...
...
...

... ..

...
...
...
...
...

... ..

...
...
...
...
...

... ..

...
...
...
...
...



13

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

13.1 Εισαγωγή

Οι εξισώσεις διαφορών εμφανίζονται είτε άμεσα είτε έμμεσα σε πολλά πρακτικά προβλήματα. Ειδικότερα συναντώνται κατά την αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων (βλέπε επόμενο κεφάλαιο), αφού συνήθως οι αριθμητικές μέθοδοι, που χρησιμοποιούνται για τον σκοπό αυτό, μετατρέπουν πρώτα την διαφορική εξίσωση σε μια εξίσωση διαφορών. Έτσι θεωρήθηκε σκόπιμο να παρουσιαστούν στο παρόν κεφάλαιο ορισμένα βασικά στοιχεία από την θεωρία των εξισώσεων διαφορών.

Θεωρούμε μία ακολουθία εξισώσεων της μορφής:

$$f_k(y_{k+n}, y_{k+n-1}, \dots, y_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.1)$$

όπου οι f_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ είναι δοσμένες πραγματικές συναρτήσεις $n + 1$ μεταβλητών. Είναι φανερό, ότι στην ακολουθία (13.1) εμφανίζεται η ακολουθία $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \dots$. Το σύνολο των εξισώσεων (13.1) καλείται εξίσωση διαφορών τάξεως n και λύση αυτής είναι κάθε ακολουθία $\{y_i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, η οποία ικανοποιεί τις (13.1).



Παράδειγμα 13.1 i) Έστω η ακολουθία

$$f_k(y_{k+1}, y_k) = y_{k+1} - y_k - k - 1 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13.2)$$

Η (13.2) είναι μία εξίσωση διαφορών πρώτης τάξεως ($n = 1$). Είναι εύκολο να δειχθεί, ότι η ακολουθία

$$y_k = c + \frac{k(k+1)}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.3)$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά, είναι λύση της (13.2).

ii) Έστω

$$f_k(y_{k+2}, y_{k+1}, y_k) = ky_{k+2} - 2(k+1)y_{k+1} + (k+2)y_k + 2 = 0, \quad (13.4)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Η (13.4) είναι μία εξίσωση διαφορών τάξεως 2 ($n = 2$). Μία λύση αυτής είναι η $y_k = k + c$, $k = 0, 1, 2, \dots$ και c αυθαίρετη σταθερά.

iii) Έστω

$$f_k(y_{k+1}, y_k) = y_{k+1} - 2y_k^2 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13.5)$$

Μία λύση αυτής είναι η $y_k = 2^{2^{k-1}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, αφού

$$2^{2^{k+1}} - 2 \left(2^{2^k} \right)^2 = 2^{2^{k+1}} - 2 \left(2^{2^k} \right)^2 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \blacktriangle$$

Μία ειδική μορφή της (13.1) είναι η ακόλουθη

$$a_n(k)y_{k+n} + a_{n-1}(k)y_{k+n-1} + \dots + a_0(k)y_k = g(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.6)$$

όπου οι $a_i(k)$, $i = 0(1)n$ ($a_n(k) \neq 0$) και $g(k)$ είναι γενικά συναρτήσεις του k . Η (13.6) καλείται γραμμική εξίσωση διαφορών τάξεως n (βλέπε παράδειγμα 13.1 i, ii). Εάν $g(k) \equiv 0$, τότε η (13.6) καλείται γραμμική ομογενής εξίσωση διαφορών (Γ.Ο.Ε.Δ.) τάξεως n . Εάν οι συναρτήσεις $a_i(k)$, $i = 0(1)n$ είναι σταθερές (ανεξάρτητες του k), τότε η (13.6) καλείται γραμμική εξίσωση διαφορών τάξεως n με σταθε-



ρούς συντελεστές (μπορεί να είναι ομογενής ή όχι).

13.2 Επίλυση Γ.Ο.Ε.Δ. με σταθερούς συντελεστές

Μία Γ.Ο.Ε.Δ. με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή

$$a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \dots + a_0 y_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, a_n \neq 0. \quad (13.7)$$

Από την (13.7) είναι φανερό, ότι μπορούμε να βρούμε μία λύση αυτής, εάν είναι γνωστές οι τιμές των y_i , $i = 0(1)n - 1$. Πράγματι από την (13.7) για $k = 0$ μπορούμε να υπολογίσουμε την y_n . Κατόπιν από την (13.7) για $k = 1$ προσδιορίζουμε την y_{n+1} κ.ο.κ. Έτσι υπολογίζεται μονοσήμαντα μία ακολουθία y_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, που ικανοποιεί την (13.7). Επειδή μπορούμε να θέσουμε $y_i = \gamma_i$, $i = 0(1)n - 1$, όπου γ_i , $i = 0(1)n - 1$ είναι οποιεσδήποτε n τιμές, η (13.7) θα έχει μία n -παραμετρική οικογένεια λύσεων. Σκοπός μας είναι να βρούμε μία συνάρτηση $F(c_1, c_2, \dots, c_n, k)$, όπου c_i , $i = 1(1)n$ είναι παράμετροι, τέτοια ώστε κάθε συγκεκριμένη λύση της (13.7) να προκύπτει από τον γενικό τύπο

$$y_k = F(c_1, c_2, \dots, c_n, k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.8)$$

για ορισμένες τιμές των παραμέτρων c_i , $i = 1(1)n$. Η (13.8) θα καλείται τότε η γενική λύση της (13.7).

Ορισμός 13.1 Οι λύσεις $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \dots, y_k^{(m)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ της (13.7) λέγεται ότι είναι γραμμικώς εξηρημένες, εάν υπάρχουν σταθερές c_i , $i = 1(1)m$ όχι όλες ίσες με 0, έτσι ώστε $c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} + \dots + c_m y_k^{(m)} = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Διαφορετικά θα καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητες. ▲

Είναι εύκολο να δειχθεί, ότι ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 13.1 Εάν οι $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \dots, y_k^{(m)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ είναι λύσεις της (13.7), τότε και η $c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} + \dots + c_m y_k^{(m)}$ είναι



επίσης λύση αυτής, όπου c_i , $i = 1(1)m$ είναι οποιεσδήποτε m σταθερές. Δ

Για την εύρεση της γενικής λύσεως της (13.7) εργαζόμαστε ως ακολούθως:

Αναζητούμε λύσεις της (13.7) της μορφής

$$y_k = z^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.9)$$

όπου το z είναι προσδιοριστέο και ανεξάρτητο του k . Απαιτώντας η (13.9) να είναι λύση της (13.7) πρέπει να ισχύει

$$a_n z^{k+n} + a_{n-1} z^{k+n-1} + \dots + a_0 z^k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

ή ισοδύναμα

$$z^k (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13.10)$$

Η (13.10) ικανοποιείται, εάν $z = 0$ ή z είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \quad (13.11)$$

το οποίο καλείται χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (13.7). Η περίπτωση $z = 0$ οδηγεί στην τετριμμένη λύση $y_k = 0$. Έτσι, αν z_i είναι κάποια ρίζα του $P_n(z)$, τότε η $y_k = z_i^k$ είναι λύση της (13.7). Τα ακόλουθα θεωρήματα δίνονται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 13.2 Η γενική λύση y_k της (13.7) μπορεί να γραφεί υπό την μορφή

$$y_k = \sum_{i=1}^n c_i y_k^{(i)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.12)$$

όπου $y_k^{(i)}$, $i = 1(1)n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις αυτής και c_i , $i = 1(1)n$ αυθαίρετες σταθερές.

Θεώρημα 13.3 Έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_n(z)$ της (13.7) έχει m διακεκριμένες ρίζες ($1 \leq m \leq n$), τις $z_1, z_2, \dots, z_m$, με αντίστοιχες πολλαπλότητες $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$, όπου $\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_m = n$.



Τότε οι

$$\begin{aligned} y_k &= z_j^k, \\ y_k &= \kappa z_j^k, \\ y_k &= \kappa^2 z_j^k, \\ &\dots\dots\dots \\ y_k &= \kappa^{j-1} z_j^k, \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1(1)m \end{aligned} \quad (13.13)$$

είναι η γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της εξισώσεως διαφορών (13.7). Αν συμβολίσουμε με $y_k^{(i)}$, $i = 1(1)n$ τις η γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις (13.13), τότε η γενική λύση της (13.7) είναι η

$$y_k = \sum_{i=1}^n c_i y_k^{(i)}, \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.14)$$

όπου c_i , $i = 1(1)n$ αυθαίρετες σταθερές. Η γενική λύση (13.14) μπορεί να γραφεί υπό την μορφή

$$y_k = Q_1(\kappa) z_1^k + Q_2(\kappa) z_2^k + \dots + Q_m(\kappa) z_m^k, \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.15)$$

όπου το $Q_i(\kappa)$ είναι αυθαίρετο πολυώνυμο βαθμού $\ell_i - 1$, $i = 1(1)m$. Δ

Πόρισμα 13.3 Εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_n(z)$ της (13.7) έχει η διακεκριμένες ρίζες z_i , $i = 1(1)n$, τότε η γενική λύση της (13.7) είναι η

$$y_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k + \dots + c_n z_n^k, \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.16)$$

όπου c_i , $i = 1(1)n$ αυθαίρετες σταθερές. Δ

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μία λύση y_k , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ της (13.7) ορίζεται μονοσήμαντα, αν γνωρίζουμε ότι $y_i = v_i$, $i = 0(1)n - 1$, όπου v_i , $i = 0(1)n - 1$ είναι δοσμένοι αριθμοί (αρχικές τιμές). Εάν δοθούν οι αρχικές τιμές $y_i = v_i$, $i = 0(1)n - 1$, τότε για την εύρεση των τιμών των c_i , $i = 1(1)n$, ώστε η συγκεκριμένη αυτή λύση να προ-



κύπτει από την γενική λύση (13.14), σχηματίζουμε με βάση την (13.14) τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} y_0 &= c_1 y_0^{(1)} + c_2 y_0^{(2)} + \dots + c_n y_0^{(n)} = y_0 \\ y_1 &= c_1 y_1^{(1)} + c_2 y_1^{(2)} + \dots + c_n y_1^{(n)} = y_1 \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= c_1 y_{n-1}^{(1)} + c_2 y_{n-1}^{(2)} + \dots + c_n y_{n-1}^{(n)} = y_{n-1} \end{aligned} \quad (13.17)$$

Οι n εξισώσεις (13.17) αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα c_i , $i = 1(1)n$. Το σύστημα (13.17) έχει πάντοτε μία μοναδική λύση, αφού η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων είναι $\neq 0$ λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $y_k^{(i)}$, $i = 1(1)n$ (βλέπε άσκηση 4). Έτσι προσδιορίζονται τα c_i , $i = 1(1)n$.

Η εξίσωση διαφορών (13.7) λέγεται ότι ικανοποιεί την συνθήκη ευστάθειας, εάν για κάθε ρίζα z του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου ισχύει $|z| \leq 1$, όπου το $=$ μπορεί να ισχύει μόνον για απλές ρίζες. Μπορεί να αποδειχθεί, ότι οι ακόλουθες δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες.

i) Η εξίσωση διαφορών (13.7) ικανοποιεί την συνθήκη ευστάθειας.

ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k}{k} = 0$ για κάθε λύση y_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ της (13.7).

Παράδειγμα 13.2 Να βρεθεί η γενική λύση της εξισώσεως διαφορών

$$y_{k+4} - 2y_{k+2} + y_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13.18)$$

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (13.18) είναι $z^4 - 2z^2 + 1 = (z-1)^2(z+1)^2$, με ρίζες $z_1 = 1$ (διπλή) και $z_2 = -1$ (διπλή). Άρα η γενική λύση της (13.18) είναι

$$\begin{aligned} y_k &= c_1 1^k + c_2 k 1^k + c_3 (-1)^k + c_4 k (-1)^k = \\ &= c_1 + c_2 k + (c_3 + c_4 k)(-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$



όπου c_i , $i = 1(1)4$ αυθαίρετες σταθερές. Εάν θέλουμε να βρούμε την συγκεκριμένη λύση, για την οποία ισχύει $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, σχηματίζουμε το σύστημα

$$y_0 = c_1 + c_2 \cdot 0 + (c_3 + c_4 \cdot 0)(-1)^0 = 0$$

$$y_1 = c_1 + c_2 \cdot 1 + (c_3 + c_4 \cdot 1)(-1)^1 = 0$$

$$y_2 = c_1 + c_2 \cdot 2 + (c_3 + c_4 \cdot 2)(-1)^2 = 0$$

$$y_3 = c_1 + c_2 \cdot 3 + (c_3 + c_4 \cdot 3)(-1)^3 = 1$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 - c_4 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_1 + 3c_2 - c_3 - 3c_4 = 1 \end{cases},$$

από το οποίο προκύπτει $c_1 = c_4 = -\frac{1}{4}$, $c_2 = c_3 = \frac{1}{4}$ και επομένως η

ζητούμενη λύση είναι $y_k = \frac{1}{4} \left[-1 + k + (1 - k)(-1)^k \right] =$

$$= \frac{1}{4} (k - 1) \left[1 - (-1)^k \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

▲

Παράδειγμα 13.3 Να βρεθεί η γενική λύση της εξισώσεως διαφορών

$$y_{k+2} - (2\cos\theta)y_{k+1} + y_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου θ είναι σταθερά ($0 \leq \theta \leq \pi$).

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $z^2 - (2\cos\theta)z + 1$ με ρίζες $z_1 = \cos\theta + i\sin\theta$, $z_2 = \cos\theta - i\sin\theta$. Αν $\theta \neq 0, \pi$, τότε οι δύο ρίζες είναι διακεκριμένες και επομένως η γενική λύση είναι

$$y_k = c_1(\cos\theta + i\sin\theta)^k + c_2(\cos\theta - i\sin\theta)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13.19)$$



με c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές. Η (13.19) γράφεται

$$\begin{aligned} y_k &= c_1(\cos k\theta + i\sin k\theta) + c_2(\cos k\theta - i\sin k\theta) = \\ &= (c_1 + c_2)\cos k\theta + i(c_1 - c_2)\sin k\theta = \\ &= d_1\cos k\theta + d_2\sin k\theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

με d_1, d_2 αυθαίρετες σταθερές. Για $\theta = 0$ οι ρίζες είναι $z_1 = z_2 = 1$ και επομένως η γενική λύση είναι $y_k = c_1 + c_2 k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Για $\theta = \pi$ είναι $z_1 = z_2 = -1$ και η γενική λύση γίνεται

$$y_k = (c_1 + c_2 k)(-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές. ▲

13.3 Ε π ί λ υ σ η γ ρ α μ μ ι κ ώ ν μ η ο μ ο γ ε ν ώ ν ε ξ ι σ ώ σ ε ω ν δ ι α φ ο ρ ώ ν μ ε σ τ α θ ε ρ ο ύ ς σ υ ν τ ε λ ε σ τ έ ς

Η γενική μορφή μιας τέτοιας εξισώσεως διαφορών (η τάξεως) είναι

$$a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \dots + a_0 y_k = g(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad a_n \neq 0, \quad (13.20)$$

όπου a_i , $i = 0(1)n$ είναι σταθερές ανεξάρτητες του k και $g(k)$ ($\neq 0$) είναι γνωστή συνάρτηση του k (βλέπε παράδειγμα 13.1*i*). Η (13.7) καλείται η αντίστοιχη ομογενής της (13.20). Για την εύρεση της γενικής λύσεως της (13.20) βρίσκουμε πρώτα την γενική λύση της αντιστοίχου ομογενούς αυτής, την οποία συμβολίζουμε u_k , $k = 0, 1, 2, \dots$. Αν τώρα $\hat{y}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ είναι μία οποιαδήποτε συγκεκριμένη λύση της (13.20), η οποία βρίσκεται με τρόπο που θα αναφερθεί στη συνέχεια, και y_k η γενική λύση αυτής, τότε είναι φανερό, ότι η $y_k - \hat{y}_k$ είναι λύση της αντιστοίχου ομογενούς της (13.20). Επομένως η γενική λύση της (13.20) ισούται με το άθροισμα των $\hat{y}_k$ και u_k

$$y_k = u_k + \hat{y}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(13.21)



Πρέπει να σημειωθεί, ότι στην y_k υπάρχουν n αυθαίρετες σταθερές, αφού η u_k έχει n αυθαίρετες σταθερές. Αυτές μπορούν να προσδιοριστούν, αν είναι γνωστές οι $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$. Όσον αφορά την εύρεση μιας συγκεκριμένης λύσεως $\hat{y}_k$ της (13.20), θεωρούμε την περίπτωση που η $g(k)$ είναι της μορφής

$$\lambda^K [P_1(k) \cos ak + P_2(k) \sin ak], \quad (13.22)$$

όπου τα λ, a είναι σταθερές (ανεξάρτητες του k) και $P_1(k), P_2(k)$ πολυώνυμα ως προς k βαθμών p_1 και p_2 , αντίστοιχα. Έστω $s = \max\{p_1, p_2\}$. Μπορεί να αποδειχθεί, ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

i) Εάν η $\lambda + ia$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της αντιστοίχου ομογενούς της (13.20), τότε η (13.20) έχει μία συγκεκριμένη λύση της μορφής

$$\hat{y}_k = \lambda^K [Q_1(k) \cos ak + Q_2(k) \sin ak], \quad (13.23)$$

όπου $Q_1(k), Q_2(k)$ είναι πολυώνυμα βαθμού s , των οποίων οι συντελεστές βρίσκονται με την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, αφού η (13.23) αντικατασταθεί στην (13.20).

ii) Εάν η $\lambda + ia$ είναι ρίζα πολλαπλότητας m του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της αντιστοίχου ομογενούς της (13.20), τότε η (13.20) έχει μία συγκεκριμένη λύση της μορφής

$$\hat{y}_k = k^m \lambda^K [Q_1(k) \cos ak + Q_2(k) \sin ak], \quad (13.24)$$

όπου τα $Q_1(k), Q_2(k)$ είναι όπως στην περίπτωση (i).

Εάν

$$g(k) \equiv g_1(k) + g_2(k) + \dots + g_\ell(k), \quad (13.25)$$

όπου κάθε $g_i(k)$, $i = 1(1)\ell$ είναι της μορφής (13.22), τότε μία συγκεκριμένη λύση $\hat{y}_k$ της (13.20) είναι το άθροισμα των αντίστοιχων μορφών για κάθε $g_i(k)$, που προκύπτουν σύμφωνα με τις (13.23) και (13.24).

Παράδειγμα 13.4 Να βρεθεί η γενική λύση της εξισώσεως διαφορών



$$y_{k+2} - 7y_{k+1} + 6y_k = (2 + 3^k)(2^k + 3k) + k^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13.26)$$

Λύση Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $z^2 - 7z + 6$ της αντιστοιχίου ομογενούς είναι $z_1 = 1$, $z_2 = 6$. Επομένως η γενική λύση της αντιστοιχίου ομογενούς είναι $u_k = c_1 1^k + c_2 6^k = c_1 + c_2 6^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ και c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές. Είναι $g(k) = (2 + 3^k)(2^k + 3k) + k^2 = 2 \cdot 2^k + 6k + 6^k + 3k3^k + k^2 = 6^k + 2^k(2) + 3^k(3k) + 1^k(6k + k^2) = g_1(k) + g_2(k) + g_3(k) + g_4(k)$, όπου $g_1(k) = 6^k$, $g_2(k) = 2^k(2)$, $g_3(k) = 3^k(3k)$, $g_4(k) = 1^k(6k + k^2)$. Οι $g_i(k)$, $i = 1(1)4$ είναι της μορφής (13.22) (π.χ. για την $g_1(k)$ είναι $\lambda = 6$, $P_1(k) \equiv 1$, $P_2(k) \equiv 1$, $\alpha = 0$) και επειδή οι 1 και 6 είναι ρίζες απλές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της αντιστοιχίου ομογενούς, μια συγκεκριμένη λύση της δοθείσης εξισώσεως διαφορών θα έχει την μορφή

$$\hat{y}_k = k6^k d_1 + 2^k d_2 + 3^k(d_3 + d_4 k) + k1^k(d_5 + d_6 k + d_7 k^2), \quad (13.27)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, όπου d_i , $i = 1(1)7$ προσδιοριστέες σταθερές. Αντικαθιστούμε την (13.27) στο πρώτο μέλος της (13.26) και απαιτούμε να ισχύει η ισότητα των δύο μελών αυτής για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} & (k+2)6^{k+2}d_1 + 2^{k+2}d_2 + 3^{k+2}\left[d_3 + d_4(k+2)\right] + (k+2)\left[d_5 + \right. \\ & \left. + d_6(k+2) + d_7(k+2)^2\right] - 7\left[(k+1)6^{k+1}d_1 + 2^{k+1}d_2 + 3^{k+1}\left[d_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + d_4(k+1)\right] + (k+1)\left[d_5 + d_6(k+1) + d_7(k+1)^2\right]\right] + 6\left[k6^k d_1 + \right. \\ & \left. + 2^k d_2 + 3^k(d_3 + d_4 k) + k(d_5 + d_6 k + d_7 k^2)\right] \equiv 6^k + 2^k(2) + 3^k(3k) + \\ & + 1^k(6k + k^2), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα μετά τις πράξεις

$$6^k\left[30d_1\right] + 2^k\left[-4d_2\right] + 3^k\left[-6d_3 - 3d_4 - 6kd_4\right] +$$



$$+ 1^K \left(-5d_5 - 3d_6 + d_7 + \kappa(-10d_6 - 9d_7) + \kappa^2(-15d_7) \right) \equiv$$

$$\equiv 6^K + 2^K(2) + 3^K(3\kappa) + 1^K(6\kappa + \kappa^2), \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (13.28)$$

Από την (13.28) εξισώνοντας τους συντελεστές των γραμμικώς ανεξαρτήτων συναρτήσεων $6^K, 2^K, 3^K, 1^K$ στα δύο μέλη προκύπτει το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{cases} 30d_1 = 1 \\ -4d_2 = 2 \\ -6d_3 - 3d_4 = 0 \\ -6d_4 = 3 \\ -5d_5 - 3d_6 + d_7 = 0 \\ -10d_6 - 9d_7 = 6 \\ -15d_7 = 1 \end{cases},$$

η λύση του οποίου είναι

$$d_1 = \frac{1}{30}, \quad d_2 = -\frac{1}{2}, \quad d_4 = -\frac{1}{2}, \quad d_3 = \frac{1}{4}, \quad d_7 = -\frac{1}{15}, \quad d_6 = -\frac{81}{50},$$

$$d_5 = \frac{233}{750}.$$

Άρα η γενική λύση της (13.26) είναι $y_K = u_K + \hat{y}_K = c_1 + c_2 6^K +$
 $+ \frac{1}{30} \kappa 6^K - \frac{1}{2} 2^K + 3^K \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \kappa \right) + \kappa \left(\frac{233}{750} - \frac{81}{150} \kappa - \frac{1}{15} \kappa^2 \right) = c_1 +$
 $+ \left(c_2 + \frac{1}{30} \kappa \right) 6^K - 2^{K-1} + \frac{1}{4} 3^K (1 - 2\kappa) + \frac{1}{750} \kappa (233 - 405\kappa - 50\kappa^2), \quad \kappa =$
 $= 0, 1, 2, \dots \text{ με } c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$



Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Να αποδειχθεί το θεώρημα 13.1 .
2. Κάτω από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 13.3 ναδειχθεί, ότι οι (13.13) είναι λύσεις της (13.7).
3. Έστω $P_n(z)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (13.7) . i) Εάν το $P_n(z)$ έχει n διακεκριμένες ρίζες z_i , $i = 1(1)n$, ναδειχθεί, ότι οι $y_k = z_i^k$, $i = 1(1)n$, $k = 0, 1, 2, \dots$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. ii) Αν η z_1 είναι ρίζα του $P_n(z)$ πολλαπλότητας n , ναδειχθεί, ότι οι $y_k = k^{\ell} z_1^k$, $\ell = 0(1)n - 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
4. Να αποδειχθεί, ότι το σύστημα (13.17) έχει πάντοτε μία μοναδική λύση.
5. Να αποδειχθεί το θεώρημα 13.2 .
6. Να βρεθεί η γενική λύση της (13.2) .
7. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών

$$y_{k+5} - y_{k+4} + 2y_{k+3} - 2y_{k+2} + y_{k+1} - y_k = 0 , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

και να γραφεί σε πραγματική μορφή.

8. Ναλυθεί η εξίσωση διαφορών $(\Delta^2 - 2\lambda)y_{k+1} = 0$, όπου $-2 < \lambda < 0$.
9. Ναλυθούν οι εξισώσεις διαφορών:

i) $\delta^2 y_k - a y_k = 2$, όπου a σταθερά

ii) $y_{k+2} - 2a y_{k+1} + a y_k = b$, όπου a, b σταθερές με $0 < a < 1$.

Να βρεθεί το $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k$.

iii) $y_{k+1} - y_k = \frac{1}{2} (3k^2 - 1)$



- iv) $y_{k+1} - 16y_k = 2^k$
- v) $y_{k+2} - 7y_{k+1} + 12y_k = \cos k$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$
- vi) $\Delta^2 y_k - 3\Delta y_k + 2y_k = 2k + 3(-1)^k$, $y_0 = 0$, $\Delta y_0 = 1$
- vii) $y_{k+1} - 2y_k = k2^k$, $y_0 = 0$
- viii) $y_k - y_{k-1} - k = 0$
- ix) $y_k - 2y_{k-2} + y_{k-4} = 3$
- x) $(5^2 + 2)y_{k+1} = 2^{k+1}$
- xi) $y_{k+1} - ay_k = b^k$
- xii) $y_{k+2} - a^2 y_k = a^k$
- xiii) $y_{k+2} + a^2 y_k = a^k$
- xiv) $y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 2 + k^2 + 3 \cdot 2^k$
- xv) $y_{k+4} + 5y_{k+2} + 4y_k = (1 + k)\cos \pi k$
- xvi) $\Delta^2 y_k - \Delta y_{k+1} - 2y_k = 2^{\frac{k}{2}}$.

10. Να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων διαφορών

$$\begin{cases} z_{k+1} = 7z_k + 10y_k \\ y_{k+1} = z_k + 4y_k, \text{ όπου } z_0 = 3, y_0 = 2. \end{cases}$$

11. Να λυθεί η μη γραμμική εξίσωση διαφορών $y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + y_k}$ με την

βοήθεια του μετασχηματισμού $y_k = \frac{1}{z_k}$ ή του

$$y_k = \frac{z_{k+1}}{z_k} - 1.$$



12. Για την εξίσωση διαφορών $y_{k+2} = y_k - \frac{y_{k+1}}{k+1}$, $y_0 = 0$, $y_1 = -6$ να βρεθεί η y_6 και ναδειχθεί ότι $y_{2m} = -y_{2m-1}$, $m = 1, 2, 3, \dots$.

13. Ναλυθεί η εξίσωση διαφορών

$$\frac{1}{y_{k+2}} + \frac{1}{y_k} = k^2, \quad y_0 = y_1 = 1.$$

14. Ναλυθεί το σύστημα των εξισώσεων διαφορών

$$x_k + y_k = x_{k+1}$$

$$(a-1)x_k + x_{k+1} = y_{k+1}, \quad x_0 = 2a, \quad y_0 = 2a\lambda,$$

όπου a, λ πραγματικές σταθερές με $a > 0$. Να βρεθεί επίσης το

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k}{x_k}.$$



14

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

14.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μία συνήθης διαφορική εξίσωση n τάξεως είναι μία εξίσωση της μορφής

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)\right) = 0, \quad (14.1)$$

όπου $x \in [a, b]$ είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, $y(x)$ η άγνωστη συνάρτηση και F γνωστή συνάρτηση. Η πλειοψηφία σχεδόν των συνήθων διαφορικών εξισώσεων n τάξεως, που συναντώνται στις πρακτικές εφαρμογές, μπορεί να γραφεί υπό την μορφή

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right), \quad a \leq x \leq b, \quad (14.2)$$

ή συντομότερα

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right), \quad a \leq x \leq b, \quad (14.3)$$

όπου f είναι γνωστή συνάρτηση των $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Εάν $n = 1$, η (14.3) γράφεται



$$y' = f(x, y) , \quad a \leq x \leq b . \quad (14.4)$$

Ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως έχει συνήθως τη γενική μορφή

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} , \quad a \leq x \leq b , \quad (14.5)$$

όπου f_i , $i = 1(1)n$ είναι δοσμένες συναρτήσεις και $y_i(x)$, $i = 1(1)n$ οι άγνωστες συναρτήσεις. Το σύστημα (14.5), εάν θέσουμε

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} ,$$

γράφεται υπό την διανυσματική μορφή (κατ' αναλογία προς την (14.4))

$$Y' = F(x, Y) , \quad a \leq x \leq b . \quad (14.6)$$

Για $n > 1$ η (14.3) είναι δυνατόν να μετατραπεί σε μία διανυσματική συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (βλέπε (14.6)) ως εξής:

Εισάγουμε τις βοηθητικές συναρτήσεις $z_i(x)$, $i = 1(1)n$ από τις

$$y^{(k)} = z_{k+1} , \quad k = 0(1)n - 1 , \quad (14.7)$$

δηλαδή $y^{(0)} = y = z_1$, $y' = z_2$, ..., $y^{(n-1)} = z_n$, οπότε η (14.3) είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο σύστημα των n διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως



$$\begin{cases} z'_1 = z_2, z'_2 = z_3, \dots, z'_{n-1} = z_n, \\ z'_n = y^{(n)} = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n). \end{cases} \quad (14.8)$$

Εάν τώρα θέσουμε $Y = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ και $F = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ f \end{bmatrix}$, τότε το σύστημα (14.8)

μπορεί να γραφεί υπό την διανυσματική μορφή

$$Y' = F(x, Y), \quad a \leq x \leq b. \quad (14.9)$$

Είναι φανερό επομένως, ότι κάθε σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων n τάξεως ($n > 1$) της μορφής (14.3) μετατρέπεται σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως.

Λύση της (14.3) είναι κάθε συνάρτηση $y = y(x)$, η οποία είναι ορισμένη στο $[a, b]$, έχει παραγώγους μέχρι n τάξεως στο $[a, b]$ και ικανοποιεί την (14.3) για κάθε $x \in [a, b]$. Είναι γνωστό από την θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, ότι γενικά (κάτω από απλές συνθήκες για την f) υπάρχουν άπειρες λύσεις της (14.3). Εάν απαιτήσουμε η συνάρτηση $y(x)$ να ικανοποιεί τις n αρχικές συνθήκες

$$y(a) = b_0, y'(a) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}, \quad (14.10)$$

όπου b_i , $i = 0(1)n-1$ είναι δοσμένες τιμές, τότε κάτω από ορισμένες συνθήκες για την f υπάρχει μία μοναδική λύση της (14.3). Η (14.3) μαζί με τις (14.10) καλούνται πρόβλημα αρχικών τιμών n τάξεως. Για $n = 1$ το πρόβλημα αρχικών τιμών γράφεται

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \quad a \leq x \leq b \\ y(a) &= y_0, \end{aligned} \quad (14.11)$$

όπου y_0 δοσμένη τιμή. Για το πρόβλημα (14.11) ισχύει το ακόλουθο θεώ-



ρημα.

Θεώρημα 14.1 Εάν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι ορισμένη και συνεχής για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε $y \in \mathbb{R}$ και επιπλέον υπάρχει σταθερά L τέτοια ώστε

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (14.12)$$

για όλα τα $x \in [a,b]$ και όλα τα $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ (δηλαδή, η $f(x,y)$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y), τότε για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$ το πρόβλημα (14.11) έχει μία μοναδική λύση $y(x)$. ▲

Είναι εύκολο να δειχθεί χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής, ότι εάν για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει η $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ και είναι συνεχής και επιπλέον ισχύει $\left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \leq M$, τότε η (14.12) ικανοποιείται με $L = M$.

Χαρακτηριστικό του προβλήματος αρχικών τιμών η τάξεως ((14.3), (14.10)) είναι, ότι οι n συνθήκες (14.10) δίνονται όλες στο μοναδικό σημείο $x = a$. Εάν αντί των (14.10) απαιτήσουμε η συνάρτηση $y(x)$ στην (14.3) και/ή οι πρώτες $n-1$ παράγωγοι αυτής να ικανοποιούν n συνθήκες, οι οποίες δεν δίνονται όλες στο ίδιο σημείο (π.χ. μερικές δίνονται για $x = a$ και μερικές για $x = b$), τότε το αντίστοιχο πρόβλημα που προκύπτει καλείται πρόβλημα συνοριακών τιμών η τάξεως. Οι n συνοριακές συνθήκες στη γενική περίπτωση έχουν τη μορφή:

$$g_i \left(y(x_1), y'(x_1), \dots, y^{(n-1)}(x_1), y(x_2), y'(x_2), \dots, y^{(n-1)}(x_2), \dots, y(x_k), y'(x_k), \dots, y^{(n-1)}(x_k) \right) = 0, \quad i = 1(1)n,$$

όπου g_i δοσμένες συναρτήσεις, $i = 1(1)n$ και x_j , $j = 1(1)k$ δοσμένα σημεία του $[a,b]$. Για παράδειγμα, για $n = 2$ το απλούστερο πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι

$$\begin{aligned} y'' &= f(x,y,y') \quad , \quad a \leq x \leq b \\ y(a) &= b_0, \quad y(b) = b_1, \end{aligned} \quad (14.13)$$



όπου b_0, b_1 δοσμένες τιμές.

14.2 Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε πρώτα με αριθμητικές μεθόδους για την λύση του προβλήματος (14.11) (για το οποίο θα υποθέτουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 14.1), δηλαδή για την εύρεση μιας προσεγγίσεως της λύσεως $y(x)$ αυτού. Οι μέθοδοι αυτές μπορούν εύκολα να τροποποιηθούν, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την λύση του συστήματος (14.5) με τις αρχικές συνθήκες

$$y_1(a) = d_1, y_2(a) = d_2, \dots, y_n(a) = d_n, \quad (14.14)$$

όπου $d_i, i = 1(1)n$ δοσμένες τιμές και κατά συνέπεια και για το πρόβλημα αρχικών τιμών n τάξεως ($n > 1$) των (14.3), (14.10), αφού αυτό είναι ισοδύναμο με το σύστημα (14.8) με αρχικές συνθήκες

$$z_1(a) = b_0, z_2(a) = b_1, \dots, z_n(a) = b_{n-1}. \quad (14.15)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο αριθμός των περιπτώσεων, όπου μπορούμε να βρούμε την μοναδική λύση του προβλήματος (14.11) αναλυτικά, σε κλειστή μορφή, είναι πολύ μικρός. Η λύση σε κλειστή μορφή πετυχαίνεται μόνο για ορισμένες ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων f με στοιχειώδεις ή άλλες μεθόδους. Στις περισσότερες περιπτώσεις πρακτικού ενδιαφέροντος η λύση δεν μπορεί να βρεθεί σε κλειστή μορφή ή είναι άγνωστο αν μπορεί να βρεθεί. 'Αλλά, ακόμη κι' όταν υπάρχει διαθέσιμη κλειστή μορφή για την λύση μπορεί αυτή να είναι αρκετά πολύπλοκη, με αποτέλεσμα να μην έχει πρακτική αξία. Έτσι οι αριθμητικές μέθοδοι, που θα περιγραφούν στη συνέχεια, είναι απαραίτητες και πολύ χρήσιμες για την επίλυση πολλών προβλημάτων της μορφής (14.11).

Μία αριθμητική λύση του προβλήματος (14.11), η οποία βρίσκεται χρησιμοποιώντας μία αριθμητική μέθοδο, είναι μία πεπερασμένη ακολου-



θία τιμών $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N$, οι οποίες προσεγγίζουν αντίστοιχα τις ακριβείς τιμές $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_N)$ της λύσεως $y(x)$ στα διακεκριμένα σημεία $x_k, k = 0(1)N, N \geq 1$ του διαστήματος $[a, b]$, όπου $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. (Μερικές φορές θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\psi_k \equiv \psi(x_k)$ και $y_k \equiv y(x_k)$, $k = 0(1)N$ για τις προσεγγιστικές και ακριβείς τιμές αντίστοιχα της $y(x)$ στα σημεία $x_k, k = 0(1)N$. Συνήθως τα $x_k, k = 0(1)N$ είναι ισαπέχοντα: $x_k = x_0 + kh, k = 0(1)N$, όπου $x_0 = a$ και $h = \frac{b-a}{N}$ είναι το σταθερό βήμα. Σημειώνεται ότι λαμβάνουμε $\psi_0 = y(a) = y_0$, αφού η $y(a)$ είναι γνωστή από την αρχική συνθήκη. Αφού $y_k \approx \psi_k$, χρησιμοποιώντας το σύνολο των σημείων $(x_k, \psi_k), k = 0(1)N$ μπορούμε να βρούμε μία προσέγγιση για την γραφική παράσταση της $y(x)$ στο $[a, b]$. Σε ορισμένες εφαρμογές μας ενδιαφέρει μόνον η εύρεση μιας προσεγγιστικής τιμής για την $y(\hat{x})$ όπου $\hat{x} \neq a$. Στην περίπτωση αυτή το $\hat{x}$ παίζει τον ρόλο του άκρου b του διαστήματος $[a, b]$ και επομένως με $h = \frac{\hat{x}-a}{N}$ και $x_k = a + kh, k = 0(1)N$ αναζητούμε την ψ_N . Στην πράξη, για την εύρεση της ψ_N με κάποια δεδομένη ακρίβεια, π.χ., ℓ δ.θ., αρχίζουμε με $N = 1$ και διπλασιάζουμε διαδοχικά την τιμή του N ($N = 1, 2, 4, 8, \dots$), μέχρις ότου για δύο διαδοχικές τιμές N_1, N_2 αυτού να ισχύει

$$|\psi_{N_2} - \psi_{N_1}| \leq \frac{1}{2} 10^{-\ell}.$$

Τότε η ψ_{N_2} είναι η ζητούμενη προσέγγιση.

Είναι φανερό ότι για κάθε συγκεκριμένη τιμή του h έχουμε και μία συγκεκριμένη αριθμητική λύση του προβλήματος (14.11). Μεγάλη πρακτική αξία έχει μία αριθμητική μέθοδος, εάν η αριθμητική λύση αυτής για το πρόβλημα (14.11), σαν συνάρτηση του h , συγκλίνει στην ακριβή λύση $y(x)$ αυτού καθώς το $N \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$) και μάλιστα γρήγορα.

14.3 Μ έ θ ο δ ο ι τ ο υ ε ν ό ς β ή μ α τ ο ς

Θεωρούμε το πρόβλημα (14.11) με τις προϋποθέσεις του θεωρήματος



14.1 και τα σημεία

$$x_k = a + kh, \quad k = 0(1)N$$

με $h = \frac{b-a}{N}$, όπου N είναι ένας θετικός ακέραιος. Η απλούστερη ίσως αριθμητική μέθοδος, η οποία όμως σπάνια χρησιμοποιείται στην πράξη, διότι δεν είναι τόσο ακριβής όσο άλλες μέθοδοι, είναι η μέθοδος του Euler. Παρά το γεγονός αυτό η μελέτη αυτής είναι σημαντική για την ανάλυση άλλων ακριβέστερων μεθόδων. Ένας τρόπος παραγωγής αυτής είναι ο ακόλουθος. Από το ανάπτυγμα του Taylor για την συνάρτηση $y(x)$ γύρω από το σημείο x_0 έχουμε (υποθέτουμε ότι όλες οι παράγωγοι που απαιτούνται υπάρχουν)

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}y''(\xi), \quad (14.16)$$

όπου $x_0 < \xi < x$. Έχοντας υπ' όψιν την (14.11) για $x = x_1$ η (14.16) γίνεται

$$y(x_1) = y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_0), \quad x_0 < \xi_0 < x_1. \quad (14.17)$$

Εάν τώρα η $y''(x)$ είναι φραγμένη και το h είναι μικρό, τότε παραλείποντας τον όρο $\frac{h^2}{2}y''(\xi_0)$ παίρνουμε

$$y(x_1) \approx y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) = y_0 + hf(x_0, y_0). \quad (14.18)$$

Ως προσέγγιση ψ_1 για την $y(x_1)$ μπορεί να ληφθεί τώρα (λόγω της (14.18)) το δεύτερο μέλος της (14.18), δηλαδή έχουμε

$$y(x_1) \approx \psi_1 = \psi_0 + hf(x_0, \psi_0), \quad \text{όπου } \psi_0 = y_0. \quad (14.19)$$

Αφού βρεθεί η ψ_1 , κατόπιν προσδιορίζουμε την ψ_2 (που προσεγγίζει την $y(x_2)$) ως εξής: Η (14.18), αν αντικατασταθεί το x_1 με το x_2 και το x_0 με το x_1 , γράφεται διαδοχικά λόγω της (14.19)

$$y(x_2) \approx y(x_1) + hf(x_1, y(x_1)) \approx \psi_1 + hf(x_1, \psi_1)$$



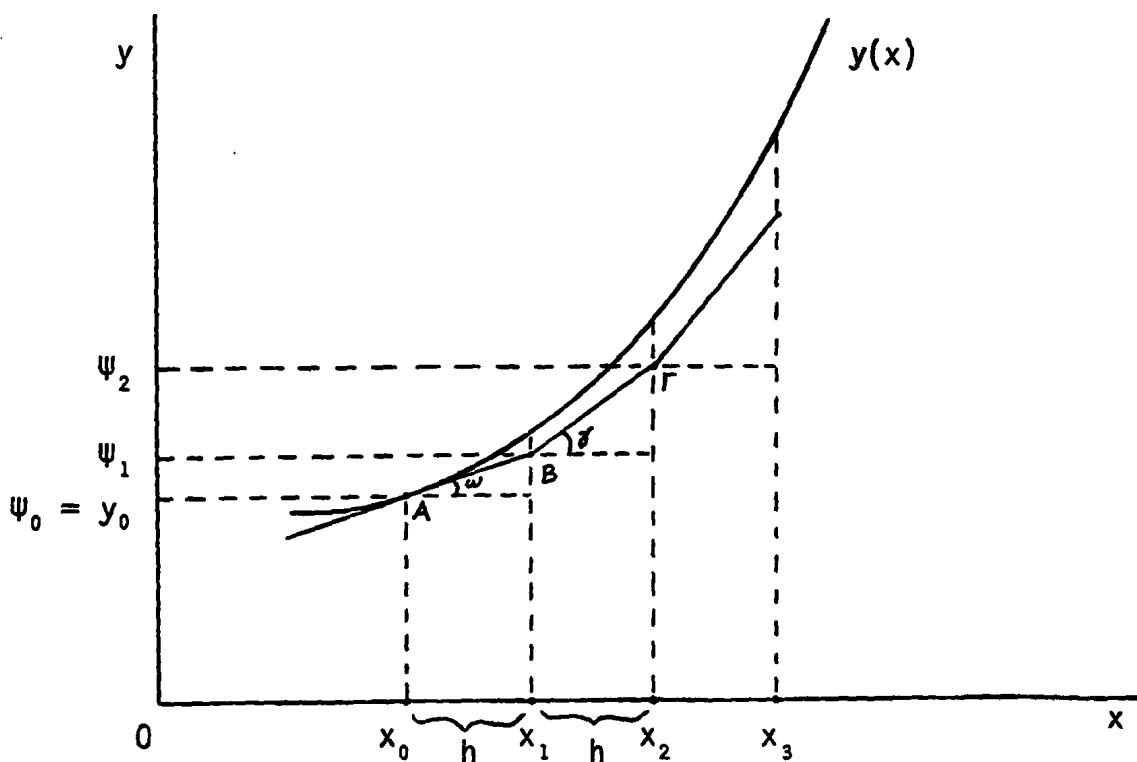
και επομένως λαμβάνουμε

$$\psi_2 = \psi_1 + hf(x_1, \psi_1) .$$

Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε, ότι οι προσεγγίσεις ψ_i , $i = 1(1)N$ υπολογίζονται από τον τύπο

$$\psi_{k+1} = \psi_k + hf(x_k, \psi_k) , \quad k = 0(1)N-1 \quad \text{και} \quad \psi_0 = y_0 , \quad (14.20)$$

που αποτελεί την μέθοδο του Euler. Συχνά θέτουμε $f_k \equiv f(x_k, \psi_k)$, οπότε η (14.20) γράφεται $\psi_{k+1} = \psi_k + hf_k$, $k = 0(1)N-1$, $\psi_0 = y_0$. Η (14.20) είναι μία εξίσωση διαφορών πρώτης τάξεως, γενικά μη γραμμική, και δικαιολογεί την ονομασία "μέθοδος ενός βήματος", αφού για τον υπολογισμό της ψ_{k+1} χρειαζόμαστε μόνον την τιμή ψ_k . Η Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου του Euler δίνεται στο σχήμα 14.1.



σχ. 14.1



Αρχίζοντας από το σημείο $A(x_0, \psi_0)$, το οποίο βρίσκεται επί της καμπύλης της ακριβούς λύσεως $y(x)$, βρίσκουμε το σημείο $B(x_1, \psi_1)$, το οποίο κείται επί της εφαπτομένης της καμπύλης $y(x)$ στο σημείο (x_0, ψ_0) , αφού $\psi_1 = \psi_0 + hf(x_0, \psi_0) = \psi_0 + hy'(x_0) = \psi_0 + h \tan \omega$. Για την εύρεση του $\Gamma(x_2, \psi_2)$ προχωρούμε κατά μήκος της ευθείας που περνά από το (x_1, ψ_1) και έχει κλίση $\tan \gamma = f(x_1, \psi_1)$, που προσεγγίζει την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y(x)$ στο σημείο $(x_1, y(x_1))$ κ.ο.κ..

Παράδειγμα 14.1 Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Euler με $N = 5$, να βρεθεί η αριθμητική λύση του προβλήματος $y' = y$, $0 \leq x \leq 0.5$, $y(0) = 1$. Να συγκριθεί αυτή με την ακριβή λύση $y(x) = e^x$.

Λύση Έχουμε $[a, b] \equiv [0, 0.5]$, $x_0 = 0$, $\psi_0 = y_0 = 1$, $h = \frac{b-a}{N} = \frac{0.5}{5} = 0.1$, $x_k = x_0 + kh = 0.1k$, $k = 0(1)5$, $f(x, y) = y$ και

$$\psi_{k+1} = \psi_k + h\psi_k = (1 + h)\psi_k, \quad k = 0(1)4. \quad (14.21)$$

Από την (14.21) βρίσκουμε διαδοχικά

$$\psi_1 = (1 + 0.1)\psi_0 = 1.1$$

$$\psi_2 = (1.1)\psi_1 = 1.21$$

$$\psi_3 = 1.331$$

$$\psi_4 = 1.4641$$

$$\psi_5 = 1.61051.$$

Οι ακριβείς τιμές στρογγυλευμένες σε 6 δ.θ. είναι $e^{0.1} \approx 1.105171$, $e^{0.2} \approx 1.221403$, $e^{0.3} \approx 1.349859$, $e^{0.4} \approx 1.491825$, $e^{0.5} \approx 1.648721$. Δ Σημειώνεται ότι η (14.21) είναι μία γραμμική ομογενής εξίσωση διαφορών πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές, της οποίας η λύση (με $\psi_0 = 1$) είναι (βλέπε Κεφ. 13) $\psi_k = (1 + h)^k$, $k = 0(1)N$. Παρατηρούμε ακόμη ότι θα μπορούσαμε να βρούμε προσεγγίσεις για τις τιμές $y(x_k)$, $k = 1(1)5$ χρησιμοποιώντας την (14.16) με την μορφή



$$y(x) \approx y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) .$$

Από αυτή θέτοντας διαδοχικά $x = x_k$, $k = 1(1)5$ παίρνουμε

$$y(0.1) \approx y_0 + 0.1y_0 = 1.1$$

$$y(0.2) \approx y_0 + 0.2y_0 = 1.2$$

$$y(0.3) \approx y_0 + 0.3y_0 = 1.3$$

$$y(0.4) \approx 1.4$$

$$y(0.5) \approx 1.5 .$$

Οι παραπάνω προσεγγίσεις είναι λιγώτερο ακριβείς από αυτές της μεθόδου Euler.

Παράδειγμα 14.2 Να εφαρμοστεί η μέθοδος του Euler με $h = 0.5$ στο πρόβλημα $y' = 2y^2 + x$, $y(0) = -1$ για την εύρεση προσεγγίσεως για την $y(1.5)$.

Λύση θεωρούμε το $[a, b] \equiv [0, 1.5]$. Έχουμε: $h = \frac{b-a}{N} = \frac{1.5}{N} = 0.5$, οπότε $N = 3$, $x_k = a + kh = 0.5k$, $k = 0(1)3$, $\psi_0 = y_0 = -1$, $f(x, y) = 2y^2 + x$ και $\psi_{k+1} = \psi_k + h(2\psi_k^2 + x_k)$, $k = 0, 1, 2$. Έτσι βρίσκουμε

$$\psi_1 = \psi_0 + 0.5(2\psi_0^2 + x_0) = -1 + 0.5(2) = 0$$

$$\psi_2 = 0.5(0.5) = 0.25 \text{ και}$$

$$\psi_3 = 0.25 + 0.5(2(0.25)^2 + 1) = 0.8125 .$$

Άρα $y(1.5) \approx \psi_3 = 0.8125$.

14.3.1 Μέθοδοι της σειράς Taylor

Με την προϋπόθεση ότι η λύση $y(x)$ του προβλήματος (14.11) είναι επαρκώς παραγωγίσιμη, τότε αντί της (14.16) θεωρούμε το ανάπτυγμα



$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} y''(x_0) + \dots +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^m}{m!} y^{(m)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{m+1}}{(m+1)!} y^{(m+1)}(\xi), \quad m > 1 \quad (14.22)$$

οπότε η αντίστοιχη της (14.17) είναι

$$y(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + \dots +$$

$$+ \frac{h^m}{m!} y^{(m)}(x_0) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y^{(m+1)}(\xi_0), \quad (14.23)$$

όπου $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ και οι $y^{(j)}(x_0)$, $j = 2(1)m$ υπολογίζονται παραγωγίζοντας επανειλημμένα την $y' = f(x, y)$. Έτσι έχουμε

$$y'' = f'(x, y) = f_x(x, y) + f_y(x, y)y' = f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y),$$

$$y''' = f''(x, y) = f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y)f(x, y) + f_{yy}(x, y)f^2(x, y) +$$

$$+ f_y(x, y)f_x(x, y) + f_y^2(x, y)f(x, y) \quad (14.24)$$

κ.ο.κ. (όπου $f_x(x, y) \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $f_y(x, y) \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ κλπ.) ,

οπότε

$$y''(x_0) = f'(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0), \quad (14.25)$$

$$y'''(x_0) = f''(x_0, y_0) = \dots, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Κατ' αναλογία προς την (14.19) η προσέγγιση ψ_1 για την $y(x_1)$ είναι τώρα

$$\psi_1 = \psi_0 + hf(x_0, \psi_0) + \frac{h^2}{2} f'(x_0, \psi_0) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m-1)}(x_0, \psi_0), \quad (14.26)$$



όπου $\psi_0 = y_0$. Γενικεύοντας την (14.26) (με τον ίδιο τρόπο που προέκυψε η (14.20)) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} = \psi_k + hf(x_k, \psi_k) + \frac{h^2}{2} f'(x_k, \psi_k) + \dots + \\ + \frac{h^m}{m!} f^{(m-1)}(x_k, \psi_k) \end{aligned} \quad (14.27)$$

ή

$$\psi_{k+1} = \psi_k + hT_m(x_k, \psi_k, h), \quad k = 0(1)N-1, \quad \psi_0 = y_0, \quad (14.28)$$

όπου

$$\begin{aligned} T_m(x_k, \psi_k, h) \equiv f(x_k, \psi_k) + \frac{h}{2} f'(x_k, \psi_k) + \dots + \\ + \frac{h^{m-1}}{m!} f^{(m-1)}(x_k, \psi_k). \end{aligned} \quad (14.29)$$

Η (14.27) καλείται μέθοδος της σειράς Taylor m -τάξεως και είναι μέθοδος ενός βήματος. Για $m = 1$ προκύπτει η μέθοδος Euler (14.20).

Οι μέθοδοι της σειράς Taylor ($m = 2, 3, \dots$) δεν χρησιμοποιούνται συχνά, αλλά μόνον σε ειδικές περιπτώσεις, αφού συνήθως οι απαιτούμενες παράγωγοι της $f(x, y)$ δεν προσδιορίζονται εύκολα.

Παράδειγμα 14.3 Για το πρόβλημα του παραδείγματος 14.1 να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της σειράς Taylor τρίτης τάξεως ($m = 3$) με $N = 5$.

Λύση Η μέθοδος της σειράς Taylor τρίτης τάξεως είναι

$$\psi_{k+1} = \psi_k + hf(x_k, \psi_k) + \frac{h^2}{2} f'(x_k, \psi_k) + \frac{h^3}{3!} f''(x_k, \psi_k), \quad k = 0(1)4,$$

όπου $\psi_0 = y_0 = 1$, $h = 0.1$, $x_k = 0.1k$, $k = 0(1)5$, $f(x, y) = y$, $f(x_k, \psi_k) = \psi_k$, $f'(x, y) = y' = f(x, y)$, $f'(x_k, \psi_k) = \psi_k$, $f''(x, y) = y'' = f'(x, y) = y$, $f''(x_k, \psi_k) = \psi_k$. Άρα $\psi_{k+1} = \psi_k + h\psi_k + \frac{h^2}{2}\psi_k + \frac{h^3}{6}\psi_k =$
 $= \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}\right)\psi_k, \quad k = 0(1)4, \quad \text{οπότε}$



$$\psi_1 = 1.105167$$

$$\psi_2 = 1.221393$$

$$\psi_3 = 1.349843 \quad (\text{στρογγυλεωμένες σε } 6 \text{ δ.θ.})$$

$$\psi_4 = 1.491802$$

$$\psi_5 = 1.648690$$

Οι παραπάνω τιμές είναι πολύ πιο ακριβείς από εκείνες της μεθόδου του Euler.

14.3.2. Μέθοδοι των Runge - Kutta

Από την (14.27) είναι φανερό ότι σε κάθε βήμα $(x_k, \psi_k) \rightarrow (x_{k+1}, \psi_{k+1})$ απαιτείται ο υπολογισμός της f και των παραγώγων $f^{(j)}$, $j = 1(1)m - 1$ αυτής. Γενικεύοντας την (14.23) παρατηρούμε, ότι η μέθοδος της σειράς Taylor m - τάξεως προέκυψε με βάση τον προσεγγιστικό τύπο

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + hf\left[x_k, y(x_k)\right] + \frac{h^2}{2} f'\left[x_k, y(x_k)\right] + \dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m-1)}\left[x_k, y(x_k)\right]. \quad (14.30)$$

Απλούστερες μέθοδοι "ενός βήματος", που απαιτούν σε κάθε βήμα τον υπολογισμό μόνον της $f(x, y)$ σε ορισμένα γνωστά σημεία, μπορούν να προκύψουν, αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + h\left[A_1 g_1 + A_2 g_2 + \dots + A_r g_r\right], \quad (14.31)$$

όπου

$$g_1 = f\left[x_k, y(x_k)\right]$$



$$\begin{aligned}
 g_2 &= f(x_K + a_2 h, y(x_K) + b_{21} h g_1) \\
 &\vdots \\
 g_r &= f(x_K + a_r h, y(x_K) + b_{r1} h g_1 + \dots + b_{r,r-1} h g_{r-1})
 \end{aligned}
 \tag{14.32}$$

και $A_1, A_2, \dots, A_r, a_2, a_3, \dots, a_r, b_{ij}, 0 < j < i \leq r$ είναι σταθερές, οι οποίες εκλέγονται έτσι ώστε, αν στην (14.31) αναπτύξουμε τις $g_i, i = 2(1)r$ σε σειρές Taylor, σαν συναρτήσεις δύο μεταβλητών, γύρω από το σημείο $(x_K, y(x_K))$ και γράψουμε το δεύτερο μέλος σαν δυναμοσειρά ως προς h , οι συντελεστές των δυνάμεων του h μέχρι και την h^m να συμφωνούν (για κάθε συνάρτηση f) με τους αντίστοιχους συντελεστές στο δεύτερο μέλος της (14.30) για όσον το δυνατόν μεγαλύτερο m . Χάριν απλότητας, θα εξετάσουμε την περίπτωση $r = 2$, οπότε πρέπει να προσδιορίσουμε τις τιμές των A_1, A_2, a_2, b_{21} .

Σύμφωνα με το θεώρημα του Taylor για δύο μεταβλητές έχουμε

$$\begin{aligned}
 g_2 &= f(x_K, y_K) + h \left[a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_{21} g_1 \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x_K, y_K) + \frac{h^2}{2} \left[a_2 \frac{\partial}{\partial x} + \right. \\
 &+ \left. b_{21} g_1 \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(x_K, y_K) + \dots = f(x_K, y_K) + h \left[a_2 f_x(x_K, y_K) + \right. \\
 &+ \left. b_{21} f(x_K, y_K) f_y(x_K, y_K) \right] + \frac{h^2}{2} \left[a_2^2 f_{xx}(x_K, y_K) + \right. \\
 &+ \left. b_{21}^2 f^2(x_K, y_K) f_{yy}(x_K, y_K) + 2a_2 b_{21} f(x_K, y_K) f_{xy}(x_K, y_K) \right] + O(h^3),
 \end{aligned}$$

οπότε το δεύτερο μέλος της (14.31) (για $r = 2$) γράφεται

$$\begin{aligned}
 y_K &+ h(A_1 + A_2) f(x_K, y_K) + h^2 \left[A_2 a_2 f_x(x_K, y_K) + \right. \\
 &+ \left. A_2 b_{21} f(x_K, y_K) f_y(x_K, y_K) \right] + \frac{h^3}{2} \left[A_2 a_2^2 f_{xx}(x_K, y_K) + \right. \\
 &+ \left. A_2 b_{21}^2 f^2(x_K, y_K) f_{yy}(x_K, y_K) + 2A_2 a_2 b_{21} f(x_K, y_K) f_{xy}(x_K, y_K) \right] + O(h^4).
 \end{aligned}
 \tag{14.33}$$



Χρησιμοποιώντας τις (14.24) στην (14.30) είναι φανερό ότι, αν απαιτήσουμε να ισχύουν οι εξισώσεις

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ A_2 a_2 = \frac{1}{2} \\ A_2 b_{21} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (14.34)$$

τότε οι συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του h μέχρι και h^2 στην (14.33) και στο δεύτερο μέλος της (14.30) ταυτίζονται (το καλύτερο που θα μπορούσε να συμβεί). Χρησιμοποιώντας στις (14.31), (14.32) τις προσεγγιστικές τιμές ψ_k αντί των ακριβών $y(x_k)$, $k = 0(1)N$ για $r = 2$ προκύπτει η ακόλουθη μέθοδος, γνωστή σαν γενική μέθοδος των Runge - Kutta δευτέρας τάξεως

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} &= \psi_k + h(A_1 g_1 + A_2 g_2) \\ g_1 &= f(x_k, \psi_k) \\ g_2 &= f(x_k + a_2 h, \psi_k + b_{21} h g_1), \\ k &= 0(1)N - 1 \text{ και } \psi_0 = y_0, \end{aligned} \quad (14.35)$$

όπου οι παράμετροι A_1, A_2, a_2, b_{21} ικανοποιούν το σύστημα (14.34). Μία λύση του συστήματος (14.34) (η μία παράμετρος μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα) είναι

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \quad a_2 = b_{21} = \frac{1}{2}.$$

Με την εκλογή αυτή από την (14.35) προκύπτει η μέθοδος

$$\psi_{k+1} = \psi_k + h f\left(x_k + \frac{1}{2} h, \psi_k + \frac{1}{2} h g_1\right), \quad (14.36)$$

$$\text{όπου } g_1 = f(x_k, \psi_k), \quad k = 0(1)N - 1 \text{ και } \psi_0 = y_0,$$

η οποία καλείται τροποποιημένη μέθοδος του Euler. Μία άλλη λύση του συστήματος (14.34) είναι



$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = b_{21} = 1,$$

η οποία οδηγεί στην μέθοδο

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{1}{2} h \left\{ f(x_k, \psi_k) + f(x_{k+1}, \psi_k + hg_1) \right\}, \quad (14.37)$$

$$\text{όπου } g_1 = f(x_k, \psi_k), \quad k = 0(1)N-1, \quad \psi_0 = y_0,$$

που είναι γνωστή σαν μέθοδος του Heun ή βελτιωμένη μέθοδος του Euler. Οι μέθοδοι (14.36) και (14.37) απαιτούν δύο μόνον υπολογισμούς της f σε κάθε βήμα. Ας σημειωθεί ότι η μέθοδος της σειράς Taylor δευτέρας τάξεως απαιτεί σε κάθε βήμα τρεις υπολογισμούς (f , f_x και f_y).

Ακολουθώντας την διαδικασία, που εφαρμόσθηκε για $r = 2$, μπορούμε να προχωρήσουμε και για $r = 3, 4$ κλπ.. Για $r = 3$ οι μέθοδοι των Runge - Kutta τρίτης τάξεως που προκύπτουν σπάνια χρησιμοποιούνται στην πράξη και γι' αυτό δεν θα αναφερθούμε σ' αυτές. Για $r = 4$ προκύπτει η ακόλουθη γενική μέθοδος των Runge - Kutta τετάρτης τάξεως

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} &= \psi_k + h \left\{ A_1 g_1 + A_2 g_2 + A_3 g_3 + A_4 g_4 \right\}, \\ g_1 &= f(x_k, \psi_k), \\ g_2 &= f(x_k + a_2 h, \psi_k + b_{21} h g_1), \\ g_3 &= f(x_k + a_3 h, \psi_k + b_{31} h g_1 + b_{32} h g_2), \\ g_4 &= f(x_k + a_4 h, \psi_k + b_{41} h g_1 + b_{42} h g_2 + b_{43} h g_3), \\ k &= 0(1)N-1 \quad \text{και} \quad \psi_0 = y_0, \end{aligned} \quad (14.38)$$

όπου οι 13 παράμετροι πρέπει να ικανοποιούν τις ακόλουθες 11 εξισώσεις

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 A_i &= 1 \\ \sum_{i=2}^4 A_i a_i &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (14.39)$$



$$\sum_{i=2}^4 A_i a_i^2 = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{i=2}^4 A_i a_i^3 = \frac{1}{4}$$

$$A_3 a_2 b_{32} + A_4 (a_2 b_{42} + a_3 b_{43}) = \frac{1}{6}$$

$$A_3 a_2^2 b_{32} + A_4 (a_2^2 b_{42} + a_3^2 b_{43}) = \frac{1}{12}$$

$$A_3 a_2 a_3 b_{32} + A_4 (a_2 b_{42} + a_3 b_{43}) a_4 = \frac{1}{8} \quad (14.39)$$

$$A_4 a_2 b_{32} b_{43} = \frac{1}{24}$$

$$a_2 = b_{21}$$

$$a_3 = b_{31} + b_{32}$$

$$a_4 = b_{41} + b_{42} + b_{43} .$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του h στα δεύτερα μέλη των (14.30) και (14.31) (για $r = 4$, με τις παραμέτρους να ικανοποιούν το σύστημα (14.39) και αφού αναπτυχθούν οι g_2, g_3, g_4) συμπίπτουν μέχρι και την h^4 . Ακόμη πρέπει να αναφερθεί, ότι για $r \leq 4$ η τιμή του r προσδιορίζει και την τάξη της μεθόδου, η οποία θα οριστεί στη συνέχεια. Για $r > 4$ η τάξη της μεθόδου είναι διαφορετική από την τιμή του r και μάλιστα μικρότερη.

Μία συγκεκριμένη και πολύ διαδεδομένη μέθοδος, που προκύπτει από την (14.38), είναι η εξής (Κλασική μέθοδος Runge – Kutta τετάρτης τάξεως)

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{6} (g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4) , \quad \text{όπου}$$

(14.40)

$$g_1 = f(x_k, \psi_k) ,$$



$$\begin{aligned}
g_2 &= f(x_k + \frac{1}{2}h, \psi_k + \frac{1}{2}hg_1), \\
g_3 &= f(x_k + \frac{1}{2}h, \psi_k + \frac{1}{2}hg_2), \\
g_4 &= f(x_k + h, \psi_k + hg_3), \quad k = 0(1)N-1 \quad \text{και} \quad \psi_0 = y_0.
\end{aligned}
\tag{14.40}$$

Η (14.40) απαιτεί 4 υπολογισμούς της f σε κάθε βήμα και χρησιμοποιείται συχνά σε συνδυασμό με άλλες μεθόδους, που εξετάζονται σε επόμενες παραγράφους.

Όλες οι παραπάνω μέθοδοι των Runge - Kutta μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως.

Παράδειγμα 14.4 Για το πρόβλημα του παραδείγματος 14.1 να χρησιμοποιηθούν κατά σειρά οι μέθοδοι: τροποποιημένη του Euler, Heun και η κλασσική Runge - Kutta τετάρτης τάξεως. Για όλες να ληφθεί $h = 0.1$.

Λύση Η μέθοδος (14.36) με $h = 0.1$, $x_k = 0.1k$, $k = 0(1)5$, $f(x,y) = y$ γίνεται:

$$\begin{aligned}
\psi_{k+1} &= \psi_k + h(\psi_k + \frac{1}{2}hg_1) = \psi_k + h(\psi_k + \frac{1}{2}h\psi_k) = \\
&= \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)\psi_k, \quad k = 0(1)4, \quad \psi_0 = y_0 = 1,
\end{aligned}
\tag{14.41}$$

δηλαδή συμπίπτει με την μέθοδο της σειράς Taylor δευτέρας τάξεως.

Από την (14.41) παίρνουμε

$$\psi_1 = 1.105000$$

$$\psi_2 = 1.221025$$

$$\psi_3 = 1.349233 \quad (\text{στρογγυλευμένες σε } 6 \text{ δ.θ.})$$

$$\psi_4 = 1.490902$$

$$\psi_5 = 1.647447.$$

Η μέθοδος Heun (14.37) γίνεται



$$\begin{aligned}\psi_{k+1} &= \psi_k + \frac{1}{2} h \left(\psi_k + \psi_k + h g_1 \right) = \psi_k + \frac{1}{2} h \left(\psi_k + \psi_k + h \psi_k \right) = \\ &= \left(1 + h + \frac{h^2}{2} \right) \psi_k, \quad k = 0(1)4, \quad \psi_0 = y_0 = 1,\end{aligned}$$

δηλαδή συμπίπτει με την (14.41).

Για την μέθοδο Runge - Kutta (14.40) έχουμε

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{6} \left(\psi_k + 2(\psi_k + \frac{1}{2} h \psi_k) + 2(\psi_k + \frac{1}{2} h g_2) + \psi_k + h g_3 \right),$$

$$\text{όπου } g_2 = \psi_k + \frac{1}{2} h \psi_k = (1 + \frac{h}{2}) \psi_k \text{ και } g_3 = \psi_k + \frac{1}{2} h g_2 = \psi_k +$$

$$+ \frac{1}{2} h (1 + \frac{h}{2}) \psi_k = (1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}) \psi_k. \quad \text{Άρα}$$

$$\begin{aligned}\psi_{k+1} &= \psi_k + \frac{h}{6} \left(\psi_k + 2(\psi_k + \frac{1}{2} h \psi_k) + 2 \left\{ \psi_k + \frac{1}{2} h (1 + \frac{h}{2}) \psi_k \right\} + \psi_k + \right. \\ &\quad \left. + h (1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}) \psi_k \right) = (1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}) \psi_k, \quad (14.42)\end{aligned}$$

$$k = 0(1)4, \quad \psi_0 = 1,$$

δηλαδή συμπίπτει με την μέθοδο της σειράς Taylor 4^{ης} τάξεως. Από την (14.42) παίρνουμε

$$\psi_1 = 1.105171$$

$$\psi_2 = 1.221403$$

$$\psi_3 = 1.349859 \quad (\text{στρογγυλευμένες σε } 6 \text{ δ.θ.})$$

$$\psi_4 = 1.491825$$

$$\psi_5 = 1.648721.$$

Οι παραπάνω τιμές συμφωνούν με τις ακριβείς τιμές σε 6 δ.θ. .



14.3.3 Σφάλματα αποκοπής στις μεθόδους ενός βήματος

Η γενική μορφή μιας μεθόδου ενός βήματος είναι

$$\psi_{k+1} = \psi_k + h\Phi(x_k, \psi_k, h), \quad k = 0(1)N-1, \quad \psi_0 = y_0, \quad (14.43)$$

όπου Φ είναι γνωστή συνάρτηση. Η (14.43) προκύπτει από μία αντίστοιχη εξίσωση της μορφής

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\Phi(x_k, y(x_k), h) - \tau_{k+1}, \quad k = 0(1)N-1, \quad (14.44)$$

παραλείποντας τον όρο τ_{k+1} και αντικαθιστώντας την $y(x_j)$ με ψ_j . Για παράδειγμα, στην μέθοδο της σειράς Taylor m -τάξεως είναι

$$\begin{aligned} \Phi(x_k, y(x_k), h) &= f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2!} f'(x_k, y(x_k)) + \dots + \\ &+ \frac{h^{m-1}}{m!} f^{(m-1)}(x_k, y(x_k)) \end{aligned} \quad (14.45)$$

και

$$\tau_{k+1} = -\frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y^{(m+1)}(\xi_k), \quad (14.46)$$

όπου $x_k < \xi_k < x_{k+1}$. Όπως είναι γνωστό, το ολικό σφάλμα της προσεγγιστικής τιμής (η οποία υπολογίζεται στην πραγματικότητα) ψ_{k+1} , $k = 0(1)N-1$ ισούται με το άθροισμα του σφάλματος αποκοπής (αφού η (14.44) αντικαθίσταται από την (14.43)) και του υπολογιστικού σφάλματος. Προς το παρόν θα αγνοήσουμε την ύπαρξη του υπολογιστικού σφάλματος. Αυτό θα εξεταστεί σε επόμενη παράγραφο. Έτσι θεωρούμε ότι η ψ_{k+1} έχει μόνον σφάλμα αποκοπής.

Καλείται τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου (14.43) στο σημείο x_{k+1} το σφάλμα $\psi_{k+1} - y(x_{k+1})$ της τιμής ψ_{k+1} , με την προϋπόθεση ότι η ψ_{k+1} υπολογίζεται από την (14.43) με $\psi_k = y(x_k)$, δηλαδή υποθέτοντας ότι η ψ_k ισούται με την ακριβή τιμή $y(x_k)$, οπότε



$$\psi_{k+1} = y(x_k) + h\Phi(x_k, y(x_k), h) . \quad (14.47)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (14.47) και (14.44) παίρνουμε

$\psi_{k+1} - y(x_{k+1}) = \tau_{k+1}$ = τοπικό σφάλμα αποκοπής της (14.43) στο σημείο x_{k+1} . Έτσι το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου της σειράς Taylor m -τάξεως στο σημείο x_{k+1} δίνεται από την (14.46). Για $m = 1$ (μέθοδος Euler) είναι

$$\tau_{k+1} = -\frac{h^2}{2} y''(\xi_k) , \quad x_k < \xi_k < x_{k+1} . \quad (14.48)$$

Η μέθοδος (14.43) λέγεται ότι είναι μία μέθοδος τάξεως p (όπου p θετικός ακέραιος), εάν

$$\tau_{k+1} = O(h^{p+1}) , \quad k = 0(1)N - 1 \quad (14.49)$$

ή ισοδύναμα, εάν υπάρχει σταθερά C_{k+1} (που εξαρτάται από την $f(x,y)$ και το διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ αλλά όχι από το h), τέτοια ώστε

$$|\tau_{k+1}| \leq C_{k+1} h^{p+1} , \quad k = 0(1)N - 1 . \quad (14.50)$$

Καλείται ολικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου (14.43) στο σημείο x_{k+1} το σφάλμα

$$e_{k+1} = \psi_{k+1} - y(x_{k+1}) \quad (14.51)$$

της τιμής ψ_{k+1} , $k = 0(1)N - 1$, όταν αυτή υπολογίζεται κανονικά από την (14.43), δηλαδή με την τιμή ψ_k υπολογισμένη από την μέθοδο επίσης. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \left[\psi_k + h\Phi(x_k, \psi_k, h) \right] - \left[y(x_k) + h\Phi(x_k, y(x_k), h) - \tau_{k+1} \right] = \\ &= e_k + h \left[\Phi(x_k, \psi_k, h) - \Phi(x_k, y(x_k), h) \right] + \tau_{k+1} . \end{aligned} \quad (14.52)$$



Εάν υποθέσουμε τώρα ότι η μέθοδος (14.43) είναι τάξεως p και επιπλέον η συνάρτηση $\Phi(x, y, h)$ ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz ως προς y :

$$|\Phi(x, u_1, h) - \Phi(x, u_2, h)| \leq L |u_1 - u_2|, \quad L \geq 0 \quad (14.53)$$

για κάθε $x \in [a, b]$, $h > 0$ και $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, τότε, λόγω των (14.50) και (14.53), από την (14.52) έχουμε

$$|e_{k+1}| \leq |e_k| + hL |e_k| + |\tau_{k+1}| \leq (1 + hL) |e_k| + Ch^{p+1}, \quad (14.54)$$

$\kappa = O(1)N - 1$, όπου $C = \max_i \{C_i\}$, $i = 1(1)N$. Από την (14.54) θέτοντας $hL = \delta$ και $Ch^{p+1} = B$ παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} |e_{k+1}| &\leq (1 + \delta) |e_k| + B \leq (1 + \delta)^2 |e_{k-1}| + B(1 + \delta) + B \leq \\ &\leq \dots \leq (1 + \delta)^{k+1} |e_0| + B \left[1 + (1 + \delta) + (1 + \delta)^2 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (1 + \delta)^k \right] = \\ &= \begin{cases} (\kappa + 1)B, & \text{αν } L = 0 \\ B \frac{(1 + \delta)^{\kappa+1} - 1}{\delta}, & \text{αν } L > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (14.55)$$

αφού $e_0 = \psi_0 - y(x_0) = y_0 - y_0 = 0$. Επειδή για $L > 0$ είναι $\delta > 0$

και $(1 + \delta)^{\kappa+1} \leq e^{(\kappa+1)\delta} = e^{(\kappa+1)hL} = e^{(x_{\kappa+1} - x_0)L}$, η (14.55) γίνεται τελικά ($e \approx 2.718 \dots$)

$$|e_k| \leq \begin{cases} (x_k - x_0)Ch^p, & \text{αν } L = 0 \\ \frac{Ch^p}{L} \left(e^{(x_k - x_0)L} - 1 \right), & \text{αν } L > 0, \end{cases} \quad (14.56)$$

$\kappa = O(1)N$.



Πρέπει να σημειωθεί ότι τα θεωρητικά άνω φράγματα για το $|e_k|$, που δίνονται από την (14.56), είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερα από την αληθινή τιμή του $|e_k|$. Για τον υπολογισμό αυτών απαιτείται η γνώση των σταθερών L και C , οι οποίες δύσκολα μπορούν να εκτιμηθούν στην πράξη. Στην ειδική περίπτωση της μεθόδου της σειράς Taylor τάξεως m , η (14.56) γίνεται (λόγω της (14.46))

$$|e_k| \leq \begin{cases} \frac{(x_k - x_0) h^m M_{m+1}}{(m+1)!}, & L = 0 \\ \frac{h^m M_{m+1}}{L(m+1)!} \left(e^{(x_k - x_0)L} - 1 \right), & L > 0, \end{cases} \quad (14.57)$$

$k = 0(1)N$, όπου $M_{m+1} = \max_{x \in [a, b]} |y^{(m+1)}(x)|$, με την προϋπόθεση ότι η $y^{(m+1)}(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$.

Λόγω της (14.56) μπορούμε να γράψουμε

$$e_k = O(h^p), \quad k = 1(1)N$$

για μία μέθοδο τάξεως p .

14.3.4 Σ ύ γ κ λ ι σ η τ ω ν μ ε θ ό δ ω ν ε ν ό ς β ή μ α τ ο ς

Θεωρούμε την γενική μέθοδο (14.43) για το πρόβλημα (14.11). Εάν $\hat{x}$ είναι ένα σταθερό σημείο του $(a, b]$, τότε ως γνωστόν δοθέντος κάποιου N ορίζουμε $h = \frac{\hat{x} - a}{N}$ και $x_k = a + kh$, $k = 0(1)N$, οπότε $\psi_N = \psi(x_N) = \psi(\hat{x})$ είναι η προσεγγιστική τιμή για την $y(\hat{x})$ που προκύπτει από τη μέθοδο (14.43). Λέμε ότι η μέθοδος (14.43) συγκλίνει, εάν



$$\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N = y(\hat{x}) . \quad (14.58)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι υποθέτουμε και εδώ ότι δεν υπάρχει υπολογιστικό σφάλμα στην τιμή ψ_N . Είναι φανερό ότι καθώς το $N \rightarrow \infty$ το $h \rightarrow 0$, ενώ το γινόμενο Nh παραμένει σταθερό. Η (14.58) είναι ισοδύναμη με την

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\psi_N - y(x_N)| \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} |e_N| = 0 . \quad (14.59)$$

Κάτω από τις προϋποθέσεις της προηγούμενης παραγράφου για την (14.43), βάσει των οποίων προέκυψε η (14.56), παρατηρούμε ότι η (14.59) ισχύει. Πράγματι, το άνω φράγμα για το $|e_N|$, που δίνεται από την (14.56), τείνει στο 0 καθώς το $h \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$).

Παράδειγμα 14.5 Για το πρόβλημα $y' = y$, $y(0) = 1$, $0 \leq x \leq 0.5$, να βρεθεί ένα άνω φράγμα για το απόλυτο ολικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου Euler στο σημείο $x_k = kh$, $k = 0(1)N$, $h = \frac{0.5}{N}$.

Λύση Είναι $\Phi(x, y, h) = f(x, y) = y$, οπότε η (14.53) γίνεται

$|u_1 - u_2| = 1 \cdot |u_1 - u_2| = L|u_1 - u_2|$ με $L = 1$. Από την (14.57) παίρνουμε για $m = 1$

$$|e_k| \leq \frac{hM_2}{2} \left(e^{x_k} - 1 \right) ,$$

όπου $M_2 = \max_{x \in [0, 0.5]} |y''(x)| = \max_{x \in [0, 0.5]} |e^x| = e^{0.5}$, αφού είναι γνωστή

η ακριβής λύση $y(x) = e^x$. Έτσι, τελικά έχουμε

$$|e_k| \leq \frac{h}{2} e^{0.5} \left(e^{x_k} - 1 \right) , \quad k = 0(1)N . \quad (14.60)$$

Για $N = 5$, οπότε $h = 0.1$, και για $k = 4$ βρίσκουμε



$$|e_k| < 0.041 \quad .$$

Από το παράδειγμα 14.1 έχουμε ότι $\psi_k = 1.4641$ και $y(x_k) \approx 1.491825$,
οπότε

$$|e_k| = |\psi_k - y(x_k)| \approx 0.027725 \quad .$$

Επειδή ως γνωστόν για το δοθέν πρόβλημα (βλέπε παράδειγμα 14.1) είναι $y(x) = e^x$ και $\psi_k = (1+h)^k$, $k = 0(1)N$ είναι δυνατόν (βλέπε άσκηση 19) να βρούμε ένα καλύτερο φράγμα για το $|e_k| = |\psi_k - y(x_k)| = |(1+h)^k - e^{x_k}|$ από εκείνο της (14.60). Πράγματι, ισχύει

$$|e_k| < \frac{h}{2} x_k e^{x_k} \quad . \quad (14.61)$$

Από την (14.61) για $h = 0.1$ και $k = 4$ βρίσκουμε

$$|e_k| < 0.030 \quad .$$

Όσον αφορά την σύγκλιση της αριθμητικής λύσεως της μεθόδου Euler για το δοσμένο πρόβλημα στην ακριβή λύση e^x βλέπε και άσκηση 6.

14.3.5 Σ φ ά λ μ α τ α σ τ ρ ο γ γ υ λ ε ύ σ ε ω ς σ τ ι ς μ ε θ ό δ ο υ ς ε ν ό ς β ή μ α τ ο ς — Ο λ ι κ ό σ φ ά λ μ α

Εάν δοθεί η μέθοδος (14.43), είναι φανερό, ότι στην πράξη λόγω των σφαλμάτων στρογγυλεύσεως, που υπεισέρχονται στους υπολογισμούς, δεν βρίσκουμε τις ακριβείς τιμές των ψ_i , $i = 1(1)N$, αλλά άλλες τιμές $\bar{\psi}_i$, $i = 1(1)N$, οι οποίες έχουν ένα προκαθορισμένο πλήθος σημαντικών ψηφίων ή δεκαδικών θέσεων και ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$\bar{\psi}_{k+1} = \bar{\psi}_k + h\Phi(x_k, \bar{\psi}_k, h) + \varepsilon_{k+1}, \quad k = 0(1)N-1, \quad (14.62)$$

όπου $\bar{\psi}_0 = \psi_0 = y_0$ και ε_{k+1} είναι το καλούμενο τοπικό σφάλμα στρογ-



γυλεύσεως της $\bar{\Psi}_{k+1}$, δηλαδή το παραχθέν σφάλμα κατά τον υπολογισμό της εκφράσεως $\bar{\Psi}_k + h\Phi(x_k, \bar{\Psi}_k, h)$, όπου υποθέτουμε ότι χρησιμοποιούνται οι ακριβείς τιμές των h και x_k .

Το ολικό σφάλμα στρογγυλεύσεως της τιμής $\bar{\Psi}_{k+1}$ δίνεται από την διαφορά

$$\rho_{k+1} = \bar{\Psi}_{k+1} - \Psi_{k+1}, \quad k = 0(1)N - 1. \quad (14.63)$$

Λόγω των (14.43) και (14.62), έχουμε

$$\rho_{k+1} = \rho_k + h \left[\Phi(x_k, \bar{\Psi}_k, h) - \Phi(x_k, \Psi_k, h) \right] + \varepsilon_{k+1}, \quad k = 0(1)N - 1.$$

Αν $\varepsilon = \max |\varepsilon_i|$, $i = 1(1)N$ και ισχύει η (14.53), τότε, ακολουθώντας την διαδικασία με την οποία από την (14.52) προέκυψε η (14.56), παίρνουμε τελικά για το απόλυτο ολικό σφάλμα στρογγυλεύσεως της τιμής $\bar{\Psi}_k$

$$|\rho_k| \leq \begin{cases} (x_k - x_0) \frac{\varepsilon}{h}, & L = 0 \\ \frac{\varepsilon}{hL} \left(e^{(x_k - x_0)L} - 1 \right), & L > 0, \quad k = 0(1)N. \end{cases} \quad (14.64)$$

Το ολικό σφάλμα E_k της τιμής $\bar{\Psi}_k$ δίνεται προφανώς από την διαφορά

$$E_k = \bar{\Psi}_k - y(x_k), \quad k = 0(1)N \quad (14.65)$$

και λόγω των (14.51) και (14.63) ισχύει

$$E_k = (\bar{\Psi}_k - \Psi_k) + (\Psi_k - y(x_k)) = \rho_k + e_k, \quad k = 0(1)N. \quad (14.66)$$

Έτσι για το απόλυτο ολικό σφάλμα $|E_k|$, λόγω των (14.56), (14.64) και (14.66), θα έχουμε



$$|E_k| \leq \begin{cases} (x_k - x_0) \left(Ch^p + \frac{\varepsilon}{h} \right), & \text{αν } L = 0 \\ \left(Ch^p + \frac{\varepsilon}{h} \right) \frac{1}{L} \left(e^{(x_k - x_0)L} - 1 \right), & \text{αν } L > 0, \quad k = 0(1)N \end{cases} \quad (14.67)$$

Από την (14.67) προκύπτει ότι

$$|E_k| \leq M \left(Ch^p + \frac{\varepsilon}{h} \right) \quad \text{για κάθε } k = 0(1)N,$$

όπου

$$M = \begin{cases} (x_N - x_0), & \text{αν } L = 0 \\ \frac{1}{L} \left(e^{(x_N - x_0)L} - 1 \right), & \text{αν } L > 0. \end{cases}$$

Το φράγμα $M \left(Ch^p + \frac{\varepsilon}{h} \right)$, σαν συνάρτηση του h , γίνεται ελάχιστο, εάν ελαχιστοποιήσουμε τον παράγοντα $Ch^p + \frac{\varepsilon}{h}$, πράγμα που επιτυγχάνεται λύνοντας την εξίσωση

$$\left(Ch^p + \frac{\varepsilon}{h} \right)' = 0.$$

Αυτό σημαίνει, ότι η καλύτερη εκλογή για το βήμα h για την μέθοδο (14.43) τάξεως p είναι

$$h = h_{\text{opt}} = \left(\frac{\varepsilon}{Cp} \right)^{\frac{1}{1+p}}.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα, ότι στην πράξη λόγω των σφαλμάτων στρογγυλεύσεως δεν επιτυγχάνεται σύγκλιση της μεθόδου (14.43) καθώς το $h \rightarrow 0$ ($E_k \not\rightarrow 0$ όταν $h \rightarrow 0$).

14.4 Μέθοδοι πολλών βημάτων.



Θεωρούμε πάλι το πρόβλημα αρχικών τιμών (14.11) και τα σημεία $x_k = a + kh$, $k = 0(1)N$, όπου $h = \frac{b-a}{N}$, N θετικός ακέραιος. Υποθέτουμε ότι οι προσεγγιστικές τιμές $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ ($n-1 < N$) των αντίστοιχων ακριβών τιμών $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_{n-1})$ της λύσεως $y(x)$ είναι γνωστές (έχουμε επίσης $\psi_0 = y(x_0) = y_0$). Αυτές συνήθως υπολογίζονται με την βοήθεια μιας μεθόδου ενός βήματος, π.χ. με μια μέθοδο των Runge - Kutta. Σκοπός μας είναι να βρούμε τις προσεγγιστικές τιμές ψ_{k+1} , $k = n-1(1)N-1$ με κάποια μέθοδο, η οποία για την εύρεση της ψ_{k+1} θα χρησιμοποιεί τις n προηγούμενες τιμές $\psi_k, \psi_{k-1}, \dots, \psi_{k-n+1}$ και όχι μόνον την ψ_k , όπως συμβαίνει με τις μεθόδους ενός βήματος. Μία τέτοια μέθοδος θα καλείται μέθοδος n βημάτων ή μέθοδος πολλών βημάτων ($n > 1$). Οι τιμές $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$, που είναι απαραίτητες για να μπορεί να εφαρμοστεί μια τέτοια μέθοδος, καλούνται τιμές εκκινήσεως της μεθόδου. Μία κατηγορία μεθόδων πολλών βημάτων προκύπτει με την ακόλουθη διαδικασία, που βασίζεται στην αριθμητική ολοκλήρωση.

Από την $y' = f(x, y)$ και την βασική ιδιότητα του ορισμένου ολοκληρώματος έχουμε

$$\int_{x_{k+1-m}}^{x_{k+1}} y'(x) dx = y(x_{k+1}) - y(x_{k+1-m}), \quad (14.68)$$

όπου $k \geq m-1 \geq 0$

$$\text{ή} \quad y(x_{k+1}) = y(x_{k+1-m}) + \int_{x_{k+1-m}}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx. \quad (14.69)$$

Εάν τώρα αντικαταστήσουμε την $f(x, y(x))$ με το πολυώνυμο παρεμβολής



$P_r(x)$ βαθμού το πολύ r ($r \geq 0$), με σημεία παρεμβολής τα x_k , $x_{k-1}, \dots, x_{k-r}$, δηλαδή $P_r(x_i) = f(x_i, y(x_i))$, $i = k, k-1, \dots, k-r$, παίρνουμε

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_{k+1-m}) + \int_{x_{k+1-m}}^{x_{k+1}} P_r(x) dx, \quad k \geq \max\{m-1, r\}, \quad (14.70)$$

όπου

$$P_r(x) = \sum_{i=0}^r L_i(x) f(x_{k-i}, y_{k-i}), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^r \left(\frac{x - x_{k-j}}{x_{k-i} - x_{k-j}} \right).$$

Η (14.70) γράφεται τελικά

$$y_{k+1} \approx y_{k+1-m} + h \sum_{i=0}^r A_i f(x_{k-i}, y_{k-i}), \quad (14.71)$$

όπου

$$A_i = \frac{1}{h} \int_{x_{k+1-m}}^{x_{k+1}} L_i(x) dx, \quad i = 0(1)r. \quad (14.72)$$

Αν στην (14.71) αντικαταστήσουμε τις ακριβείς τιμές y_i με τις προσεγγιστικές ψ_i και το $\approx$ με το $=$ προκύπτει ο τύπος

$$\psi_{k+1} = \psi_{k+1-m} + h \sum_{i=0}^r A_i f(x_{k-i}, \psi_{k-i}), \quad (14.73)$$

$k \geq \max\{m-1, r\}$, όπου τα A_i υπολογίζονται από την (14.72).

Από τον τύπο (14.73) για τις διάφορες τιμές των m και r προκύπτουν και διάφορες μέθοδοι πολλών βημάτων. Οι πιο σημαντικές απ' αυτές προκύπτουν για $m=1$ και $r=0,1,2,\dots$ και καλούνται μέθοδοι των



Adams — Bashforth. Η γενική μορφή αυτών είναι

$$\psi_{k+1} = \psi_k + h \sum_{i=0}^r A_i f(x_{k-i}, \psi_{k-i}), \quad k = r(1)N - 1, \quad (14.74)$$

όπου οι $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_r$ είναι γνωστές τιμές, δηλαδή η (14.74) είναι μία μέθοδος $r + 1$ βημάτων. Για $r = 0$ είναι εύκολο να δειχθεί, ότι προκύπτει η μέθοδος του Euler. Για $r = 1$ προκύπτει η μέθοδος

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{2} \left[3f(x_k, \psi_k) - f(x_{k-1}, \psi_{k-1}) \right], \quad k = 1(1)N - 1. \quad (14.75)$$

Για $r = 2$ προκύπτει η μέθοδος

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{12} \left[23f(x_k, \psi_k) - 16f(x_{k-1}, \psi_{k-1}) + 5f(x_{k-2}, \psi_{k-2}) \right], \quad (14.76)$$

$k = 2(1)N - 1$.

Για $r = 3$ προκύπτει η μέθοδος

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{24} (55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}), \quad k = 3(1)N - 1, \quad (14.77)$$

όπου $f_j \equiv f(x_j, \psi_j)$.

Μπορεί να δειχθεί ότι το τοπικό σφάλμα αποκοπής (αυτό ορίζεται στην παράγραφο 14.4.2) της μεθόδου (14.74) είναι $O(h^{r+2})$ και γι' αυτό καλείται και μέθοδος Adams — Bashforth $r + 1$ τάξεως. Είναι επίσης φανερό ότι αν η $y(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq r + 1$, τότε η μέθοδος (14.74) είναι ακριβής ($\psi_i = y(x_i)$).

Εάν στην (14.69) προσεγγίσουμε την $f(x, y(x))$ όχι με το πολυώνυμο παρεμβολής $P_r(x)$ με σημεία παρεμβολής τα $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-r}$, όπως έγινε προηγουμένως, αλλά με το πολυώνυμο παρεμβολής $P_{r+1}(x)$ βαθμού το πολύ $r + 1$ ($r \geq -1$) με σημεία παρεμβολής τα $x_{k+1}, x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-r}$, τότε η αντίστοιχη της (14.73) θα είναι



$$\psi_{k+1} = \psi_{k+1-m} + h \sum_{i=0}^{r+1} B_i f(x_{k+1-i}, \psi_{k+1-i}), \quad (14.78)$$

$k \geq \max\{m-1, r\}$, όπου

$$B_i = \frac{1}{h} \int_{x_{k+1-m}}^{x_{k+1}} L_i(x) dx, \quad i = 0(1)r+1 \quad \text{και}$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{r+1} \left(\frac{x - x_{k+1-j}}{x_{k+1-i} - x_{k+1-j}} \right), \quad i = 0(1)r+1.$$

Από την (14.78) για $m=1$ και $r=-1, 0, 1, \dots$, προκύπτει μία άλλη σημαντική κατηγορία μεθόδων πολλών βημάτων, οι καλούμενες μέθοδοι των Adams - Moulton με γενική μορφή

$$\psi_{k+1} = \psi_k + h \sum_{i=0}^{r+1} B_i f(x_{k+1-i}, \psi_{k+1-i}), \quad k \geq \max\{0, r\}, \quad (14.79)$$

όπου οι τιμές $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_r$ είναι γνωστές. Παρατηρούμε ότι στο δεύτερο μέλος της (14.79) εμφανίζεται η τιμή $f(x_{k+1}, \psi_{k+1})$, η οποία δεν είναι γνωστή, αφού για τον υπολογισμό της χρειάζεται η ψ_{k+1} , η οποία δεν είναι ακόμη γνωστή. Με άλλα λόγια η (14.79) είναι γενικά μία μη γραμμική εξίσωση ως προς την άγνωστη τιμή ψ_{k+1} , είναι δηλαδή μία implicit μέθοδος, σε αντίθεση με την (14.74) η οποία είναι μία explicit μέθοδος, αφού δεν χρειάζεται να λύσουμε κάποια εξίσωση για να υπολογίσουμε την ψ_{k+1} (η νέα τιμή ψ_{k+1} εμφανίζεται μόνον στο αριστερό μέλος της (14.74)). Είναι φανερό ότι όλες οι μέθοδοι που προκύπτουν από την (14.73) είναι explicit μέθοδοι, ενώ αυτές που προκύπτουν από την (14.78) είναι ^{γενικά} implicit μέθοδοι. Για τον υπολογισμό της ψ_{k+1} στην (14.79) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος προφανής επαναληπτικός αλγόριθμος



$$\psi_{k+1}^{(\ell+1)} = \psi_k + h \left[B_0 f(x_{k+1}, \psi_{k+1}^{(\ell)}) + \sum_{i=1}^{r+1} B_i f(x_{k+1-i}, \psi_{k+1-i}) \right], \quad (14.80)$$

$\ell = 0, 1, 2, \dots$ και $\psi_{k+1}^{(0)}$ αυθαίρετη κατάλληλη αρχική προσέγγιση της ψ_{k+1} (μπορούμε να πάρουμε π.χ. $\psi_{k+1}^{(0)} = \psi_k$). Μπορεί να δειχθεί, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις (επαρκώς μικρό h), ότι η ακολουθία $\psi_{k+1}^{(0)}, \psi_{k+1}^{(1)}, \dots$ συγκλίνει στη ζητούμενη λύση ψ_{k+1} της εξίσωσης (14.79). Έτσι η (14.79) είναι μία μέθοδος $r+1$ βημάτων και είναι ακριβής όταν η ακριβής λύση $y(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq r+2$. Μπορεί να δειχθεί ότι το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου (14.79) είναι $O(h^{r+3})$ και γι' αυτό αυτή καλείται και μέθοδος Adams - Moulton $r+2$ τάξεως.

Για $r = 0, 1, 2$ από την (14.79) παίρνουμε αντίστοιχα τις εξής μεθόδους των Adams - Moulton

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{2} \left[f(x_{k+1}, \psi_{k+1}) + f(x_k, \psi_k) \right], \quad k = 0(1)N-1, \quad (14.81)$$

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{12} \left[5f_{k+1} + 8f_k - f_{k-1} \right], \quad k = 1(1)N-1, \quad (14.82)$$

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{24} \left[9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2} \right], \quad k = 2(1)N-1. \quad (14.83)$$

Η (14.81) είναι γνωστή σαν μέθοδος του τραπεζιού.

Άλλες explicit μέθοδοι προκύπτουν από την (14.73) για $m > 1$. Για παράδειγμα, για $m = 2$ και $r = 0$ προκύπτει η μέθοδος

$$\psi_{k+1} = \psi_{k-1} + 2hf(x_k, \psi_k), \quad k = 1(1)N-1, \quad (14.84)$$

που είναι γνωστή σαν μέθοδος του μέσου. Επίσης για $m = 4$ και $r = 2$ από την (14.73) προκύπτει η μέθοδος Milne

$$\psi_{k+1} = \psi_{k-3} + \frac{4h}{3} \left[2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2} \right], \quad k = 3(1)N-1. \quad (14.85)$$



Άλλες implicit μέθοδοι προκύπτουν από την (14.78) για $m > 1$. Για παράδειγμα, για $m = 2$ και $r = 1$ παίρνουμε την μέθοδο Simpson

$$\psi_{k+1} = \psi_{k-1} + \frac{h}{3} \left(f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1} \right), \quad k = 1(1)N-1. \quad (14.86)$$

Όλες οι μέθοδοι που προκύπτουν από τους τύπους (14.73) και (14.78) είναι ειδικές περιπτώσεις των καλούμενων γραμμικών μεθόδων πολλών βημάτων, των οποίων η γενική μορφή είναι

$$\psi_{k+1} = \sum_{i=1}^q C_i \psi_{k+1-i} + h \sum_{i=0}^q D_i f(x_{k+1-i}, \psi_{k+1-i}), \quad k \geq q-1, \quad (14.87)$$

όπου C_i, D_i σταθερές (ανεξάρτητες των k και h), $|C_q| + |D_q| \neq 0$ και $q \geq 1$. Οι τιμές $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{q-2}, \psi_{q-1}$ θεωρούνται γνωστές από κάποια άλλη μέθοδο. Εάν $D_0 = 0$ η μέθοδος είναι explicit, ενώ εάν $D_0 \neq 0$ η μέθοδος είναι implicit. Ακόμη, γενικώτερη είναι η ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} = & \sum_{i=1}^q C_i \psi_{k+1-i} + h \Phi(x_{k+1}, x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k+1-q}, \psi_{k+1}, \psi_k, \dots, \\ & \psi_{k+1-q}, h), \quad k \geq q-1, \end{aligned} \quad (14.88)$$

όπου Φ γνωστή συνάρτηση, C_i σταθερές και $q \geq 1$. Οι μέθοδοι που προκύπτουν από την (14.87) (καθώς και όλες οι μέθοδοι ενός βήματος που εξετάσαμε) είναι ειδικές περιπτώσεις της (14.88). Οι $2q+1$ άγνωστες σταθερές $C_i, i = 1(1)q, D_i, i = 0(1)q$ στην (14.87) είναι δυνατόν να προσδιοριστούν έτσι ώστε η (14.87) (θέτοντας $\psi_{k+1-i} = y(x_{k+1-i}), i = 0(1)q$) να είναι ακριβής, δηλαδή τα δύο μέλη αυτής να ταυτίζονται, όταν η ακριβής λύση $y(x)$ της διαφορικής εξίσωσης $y' = f(x, y)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq 2q$ (βλέπε π.χ. άσκηση 28). Είναι εύκολο να δειχθεί ότι, αν απαιτήσουμε η (14.87) να είναι ακριβής όταν η $y(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού 0 (παίρνουμε $y(x) = 1$), προκύπτει η συνθήκη (αφού $f(x, y) = y' = 0$)



$$1 = \sum_{i=1}^q C_i . \quad (14.89)$$

Απαιτώντας η (14.87) να είναι ακριβής όταν $y(x) = x - x_{k-q}$ προκύπτει η συνθήκη

$$q + 1 = qC_1 + (q - 1)C_2 + \dots + C_q + \sum_{i=0}^q D_i . \quad (14.90)$$

Η μέθοδος (14.87) λέγεται ότι είναι συμβιβαστή, εάν ικανοποιούνται οι (14.89) και (14.90), δηλαδή εάν αυτή είναι ακριβής όταν η $y(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού ≤ 1 .

14.4.1 Predictor - Corrector μέθοδοι

Είναι φανερό, ότι η χρησιμοποίηση μιας implicit μεθόδου παρουσιάζει δυσκολία, λόγω του γεγονότος ότι η νέα τιμή ψ_{k+1} πρέπει να προσδιοριστεί λύνοντας μία μη γραμμική γενικά εξίσωση χρησιμοποιώντας συνήθως κάποια επαναληπτική μέθοδο. Εάν θεωρήσουμε για παράδειγμα την μέθοδο (14.79), τότε η ψ_{k+1} μπορεί να υπολογιστεί από την (14.80). Στην πράξη, όπου το h είναι συνήθως αρκετά μικρό, η επαναληπτική εφαρμογή της (14.80) μπορεί να αποφευχθεί, εάν συνδυάσουμε την μέθοδο (14.79) με την explicit μέθοδο (14.74) κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{k+1} = \psi_k + h \sum_{i=0}^r A_i f(x_{k-i}, \psi_{k-i}) , \end{array} \right. \quad (14.91)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{k+1} = \psi_k + h \left(B_0 f(x_{k+1}, \bar{\psi}_{k+1}) + \sum_{i=1}^{r+1} B_i f(x_{k+1-i}, \psi_{k+1-i}) \right) . \end{array} \right. \quad (14.92)$$

Δηλαδή στην ουσία σαν ψ_{k+1} παίρνουμε την πρώτη επανάληψη $\psi_{k+1}^{(1)}$, που προκύπτει από την (14.80), χρησιμοποιώντας σαν αρχική προσέγγιση $\psi_{k+1}^{(0)}$ την τιμή για την ψ_{k+1} που βρίσκεται από την (14.74). Η συνδυασμένη μορφή των τύπων (14.91) - (14.92) καλείται predictor - cor-



rector (εκτιμητής — διορθωτής) μέθοδος Adams. Η explicit μέθοδος (14.74), που χρησιμοποιείται για την εύρεση της (καλής) αρχικής προσεγγίσεως $\bar{\psi}_{k+1}$ καλείται predictor, ενώ η (14.79) corrector. Πρέπει να σημειωθεί ότι η predictor και η corrector είναι συνήθως της αυτής τάξεως, που σημαίνει ότι η τιμή του r δεν είναι κατ' ανάγκην η ίδια στις (14.91) και (14.92).

Γενικά, μία predictor — corrector μέθοδος είναι ένας συνδυασμός μιας explicit μεθόδου (predictor) και μιας implicit μεθόδου (corrector). Για κάθε τιμή του k , για την οποία και οι δύο μέθοδοι ορίζονται, με την predictor βρίσκουμε την $\bar{\psi}_{k+1}$ και θέτοντας αυτή στην θέση της ψ_{k+1} στο δεύτερο μέλος της corrector βρίσκουμε την ψ_{k+1} από την corrector.

Μία πολύ διαδεδομένη predictor — corrector μέθοδος προκύπτει από τον συνδυασμό των (14.77) και (14.83), που είναι και οι δύο τετάρτης τάξεως. Έτσι, έχουμε

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{24} (55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}) \\ \psi_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{24} (9\bar{f}_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}), \end{cases} \quad (14.93)$$

όπου $k = 3(1)N - 1$ και $\bar{f}_{k+1} \equiv f(x_{k+1}, \bar{\psi}_{k+1})$. Η (14.93) καλείται predictor — corrector μέθοδος Adams τετάρτης τάξεως.

Η predictor — corrector μέθοδος Adams δευτέρας τάξεως προκύπτει από τις (14.75) και (14.81) και είναι:

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{2} \left[3f(x_k, \psi_k) - f(x_{k-1}, \psi_{k-1}) \right] \\ \psi_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{2} \left[f(x_{k+1}, \bar{\psi}_{k+1}) + f(x_k, \psi_k) \right], \quad k = 1(1)N - 1. \end{cases} \quad (14.94)$$

Άλλες γνωστές predictor — corrector μέθοδοι είναι η μέθοδος Milne — Simpson, που προκύπτει από τις (14.85) και (14.86), και η μέθοδος Euler — τραπεζίου, που προκύπτει από τις μεθόδους Euler και τραπε-



ζίου και συμπίπτει με την βελτιωμένη μέθοδο Euler ή μέθοδο Heun (βλέπε (14.37)).

Πρέπει να σημειωθεί ότι σε μία predictor – corrector μέθοδο η τάξη της predictor μεθόδου δεν υπερβαίνει την τάξη της corrector μεθόδου. Επίσης σε κάθε βήμα: $(x_k, \psi_k) \rightarrow (x_{k+1}, \psi_{k+1})$ μιας predictor – corrector μεθόδου απαιτούνται δύο υπολογισμοί της $f(x,y)$ (ο υπολογισμός της $f_k \equiv f(x_k, \psi_k)$ και ο υπολογισμός της $\bar{f}_{k+1} \equiv f(x_{k+1}, \bar{\psi}_{k+1})$ στο δεύτερο μέλος της corrector μεθόδου), ενώ μία explicit μέθοδος απαιτεί μόνον ένα υπολογισμό της $f(x,y)$ (αυτόν της $f(x_k, \psi_k)$) στο ίδιο βήμα. Έτσι, ο αριθμός των υπολογισμών της $f(x,y)$, που απαιτούνται για να επιτύχουμε μία συγκεκριμένη ακρίβεια, αποτελεί συνήθως σημαντικό κριτήριο συγκρίσεως τέτοιων μεθόδων. Τέλος σημειώνεται, ότι οι τιμές εκκινήσεως, που απαιτούνται για μία μέθοδο πολλών βημάτων, πρέπει να υπολογίζονται με μία μέθοδο ενός βήματος που η τάξη της να είναι τουλάχιστον όση και η τάξη της μεθόδου πολλών βημάτων. Για παράδειγμα, οι τιμές ψ_1, ψ_2, ψ_3 για την (14.93) θα μπορούσαν να βρεθούν με την μέθοδο Runge – Kutta τετάρτης τάξεως (14.40).

Παράδειγμα 14.6 Για το πρόβλημα του παραδείγματος 14.1 να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Adams – Bashforth τρίτης τάξεως (14.76) με $h = 0.1$. Οι τιμές ψ_1, ψ_2 να ληφθούν από την μέθοδο της σειράς Taylor τρίτης τάξεως (βλέπε παράδειγμα 14.3).

Λύση Έχουμε $\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{12} (23\psi_k - 16\psi_{k-1} + 5\psi_{k-2})$, $k = 2(1)4$,

ή

$$\psi_{k+1} = \frac{1}{120} (143\psi_k - 16\psi_{k-1} + 5\psi_{k-2}), \quad k = 2(1)4, \quad (14.95)$$

όπου $\psi_0 = y_0 = 1$, $\psi_1 = 1.105167$, $\psi_2 = 1.221393$.

Από την (14.95) βρίσκουμε διαδοχικά

$$\psi_3 = 1.34980$$

$$\psi_4 = 1.49171 \quad (\text{στρογγυλευμένες σε 5 δ.θ.})$$

$$\psi_5 = 1.64854.$$



Παράδειγμα 14.7 Για το ίδιο πρόβλημα, όπως και προηγουμένως, να χρησιμοποιηθεί η predictor - corrector μέθοδος Adams δευτέρας τάξεως με $h = 0.1$. Η ψ_1 να ληφθεί από την μέθοδο της σειράς Taylor δευτέρας τάξεως (βλέπε παράδειγμα 14.4).

Λύση Είναι $\psi_1 = 1.1050000$, $\psi_0 = 1$ και οι $\psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5$ θα βρεθούν χρησιμοποιώντας την (14.94) με $k = 1(1)4$.

Έτσι, από τις

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{k+1} = \psi_k + \frac{1}{20} (3\psi_k - \psi_{k-1}) \\ \psi_{k+1} = \psi_k + \frac{1}{20} (\bar{\psi}_{k+1} + \psi_k) \end{cases}, k = 1(1)4$$

βρίσκουμε

$$\begin{array}{l|l} \psi_2 = 1.221288 & \psi_4 = 1.491865 \\ \psi_3 = 1.349813 & \psi_5 = 1.648866 \end{array} \quad (\text{στρογγυλευμένες σε 6 δ.θ.})$$

14.4.2 Σφάλματα αποκοπής στις μεθόδους πολλών βημάτων

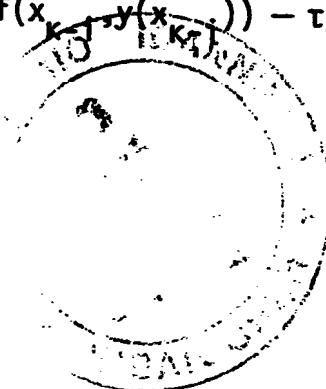
Αν θεωρήσουμε τη γενική μορφή (14.73) μιας explicit μεθόδου, τότε το τοπικό σφάλμα αποκοπής αυτής στο σημείο x_{k+1} κατ' αναλογία προς τις μεθόδους ενός βήματος ορίζεται από την διαφορά $\psi_{k+1} - y(x_{k+1})$, όπου υποθέτουμε ότι η ψ_{k+1} υπολογίζεται από την

$$\psi_{k+1} = y(x_{k+1-m}) + h \sum_{i=0}^r A_i f(x_{k-i}, y(x_{k-i})) \quad (14.96)$$

(Η (14.96) είναι αντίστοιχη της (14.47)). Η (14.71) εξ άλλου γράφεται

$$y(x_{k+1}) = y(x_{k+1-m}) + h \sum_{i=0}^r A_i f(x_{k-i}, y(x_{k-i})) - \tau_{k+1}, \quad (14.97)$$

όπου



$$\tau_{k+1} = h \sum_{i=0}^r A_i f(x_{k-i}, y(x_{k-i})) - \int_{x_{k+1-m}}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx \quad (14.98)$$

είναι το σφάλμα αποκοπής του τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης που χρησιμοποιείται. Έτσι αφαιρώντας κατά μέλη τις (14.96) και (14.97) προκύπτει ότι το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου (14.73) στο σημείο x_{k+1} δίνεται από την (14.98). Μπορεί να δειχθεί (βλέπε Κεφ. 5 Αριθμητική ολοκλήρωση) ότι τα τοπικά σφάλματα αποκοπής των μεθόδων (14.75), (14.76) και (14.77) στο σημείο x_{k+1} είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} & -\frac{5}{12} h^3 y'''(\xi_k), \quad x_{k-1} < \xi_k < x_{k+1} \\ & -\frac{3h^4}{8} y^{(4)}(\xi_k), \quad x_{k-2} < \xi_k < x_{k+1} \\ & -\frac{251h^5}{720} y^{(5)}(\xi_k), \quad x_{k-3} < \xi_k < x_{k+1}. \end{aligned} \quad (14.99)$$

Επίσης, για τις μεθόδους (14.84) και (14.85) είναι αντίστοιχα

$$\begin{aligned} & -\frac{h^3}{3} y'''(\xi_k), \quad x_{k-1} < \xi_k < x_{k+1} \\ & -\frac{14h^5}{45} y^{(5)}(\xi_k), \quad x_{k-3} < \xi_k < x_{k+1}. \end{aligned} \quad (14.100)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο το τοπικό σφάλμα αποκοπής της γενικής implicit μεθόδου (14.78) στο σημείο x_{k+1} δίνεται από την

$$\tau_{k+1} = h \sum_{i=0}^{r+1} B_i f(x_{k+1-i}, y(x_{k+1-i})) - \int_{x_{k+1-m}}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx \quad (14.101)$$

(πρέπει να σημειωθεί ότι σαν αντίστοιχη της (14.96) λαμβάνεται τώρα η

$$\psi_{k+1} = y(x_{k+1-m}) + h \sum_{i=0}^{r+1} B_i f(x_{k+1-i}, y(x_{k+1-i})).$$



Μπορεί ναδειχθεί ότι για την μέθοδο του τραπεζίου (14.81) είναι

$$\tau_{k+1} = \frac{h^3}{12} y''(\xi_k) \quad , \quad x_k < \xi_k < x_{k+1} \quad , \quad (14.102)$$

για την μέθοδο (14.82) είναι

$$\tau_{k+1} = \frac{h^4}{24} y^{(4)}(\xi_k) \quad , \quad x_{k-1} < \xi_k < x_{k+1} \quad , \quad (14.103)$$

ενώ για την (14.83) έχουμε

$$\tau_{k+1} = \frac{19h^5}{720} y^{(5)}(\xi_k) \quad , \quad x_{k-2} < \xi_k < x_{k+1} \quad . \quad (14.104)$$

Επίσης, για την μέθοδο Simpson (14.86) είναι

$$\tau_{k+1} = \frac{h^5}{90} y^{(5)}(\xi_k) \quad , \quad x_{k-1} < \xi_k < x_{k+1} \quad . \quad (14.105)$$

Το ολικό σφάλμα αποκοπής μιας μεθόδου πολλών βημάτων στο σημείο x_{k+1} ορίζεται όπως και στις μεθόδους ενός βήματος και μπορούμε να βρούμε ένα απόλυτο άνω φράγμα γι' αυτό με αντίστοιχη διαδικασία. Μπορεί ναδειχθεί κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις για την $f(x,y)$ και την $y(x)$, ότι αν μία μέθοδος πολλών βημάτων από αυτές που εξετάστηκαν είναι p τάξεως, δηλαδή $\tau_{k+1} = O(h^{p+1})$, τότε το ολικό σφάλμα αποκοπής είναι $O(h^p)$ (υποτίθεται ότι οι τιμές εκκινήσεως προέρχονται από μία μέθοδο p τάξεως).

14.5 Ευστάθεια — Ασταθία των μεθόδων ενός και πολλών βημάτων

Όπως τονίστηκε στο κεφάλαιο 1, ένα πρόβλημα του οποίου η ακριβής λύση είναι πολύ ευαίσθητη σε οποιεσδήποτε μικρές μεταβολές των αρχικών δεδομένων καλείται ασταθές. Έτσι, εάν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών είναι ασταθές, είναι πολύ δύσκολο να βρούμε μία αξιόπιστη αριθμητι-



κή λύση αυτού με οποιαδήποτε αριθμητική μέθοδο, αφού λόγω των σφαλμάτων αποκοπής και στρογγυλεύσεως που υπεισέρχονται η λύση που τελικά υπολογίζεται μπορεί να θεωρηθεί σαν η ακριβής λύση ενός διαταραγμένου προβλήματος, δηλαδή του υπ' όψιν προβλήματος όπου έχουν μεταβληθεί ελαφρώς οι αρχικές συνθήκες. Πρέπει να σημειωθεί ότι όλα τα προβλήματα αρχικών τιμών πρώτης τάξεως είναι ευσταθή.

Ένα παράδειγμα ασταθούς προβλήματος αρχικών τιμών δευτέρας τάξεως είναι το ακόλουθο:

$$y'' - 10y' - 11y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad x \geq 0. \quad (14.106)$$

Η αναλυτική λύση του (14.106) είναι $y(x) = e^{-x}$. Εάν αντί της αρχικής συνθήκης $y(0) = 1$ θεωρήσουμε την $y(0) = 1 + \varepsilon$, όπου $|\varepsilon|$ είναι ένας μικρός αριθμός, τότε η ακριβής λύση του διαταραγμένου προβλήματος είναι

$$y(x) = \left(1 + \frac{11}{12} \varepsilon\right) e^{-x} + \frac{\varepsilon}{12} e^{11x}. \quad (14.107)$$

Είναι φανερό ότι, ενώ η λύση του (14.106) τείνει στο 0 για $x \rightarrow \infty$, η λύση (14.107) με $\varepsilon > 0$ οσονδήποτε μικρό τείνει στο ∞ καθώς το $x \rightarrow \infty$. Αλλά, ακόμη και όταν ένα δοσμένο πρόβλημα αρχικών τιμών είναι ευσταθές (όπως συμβαίνει με τα πρώτης τάξεως που εξετάζουμε), είναι δυνατόν κατά την αριθμητική επίλυσή του να λαμβάνουμε αναξιόπιστα αποτελέσματα και αυτό να οφείλεται αποκλειστικά στην συγκεκριμένη αριθμητική μέθοδο που χρησιμοποιούμε. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε παρουσιάζει αστάθεια (είναι ασταθής). Τονίζεται εδώ ότι μία ασταθής μέθοδος μπορεί να δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα σε ορισμένα προβλήματα αλλά όχι σε όλα. Παρακάτω θα δοθούν ειδικότεροι ορισμοί για ευσταθείς και ασταθείς μεθόδους. Γενικά, μία αριθμητική μέθοδος προσεγγίζει την ακριβή λύση μιας διαφορικής εξίσωσης αντικαθιστώντας την διαφορική εξίσωση με μία εξίσωση διαφορών. Σε μία ασταθή μέθοδο το ολικό σφάλμα των τιμών ψ_k , που υπολογίζονται από την εξίσωση διαφορών για επαρκώς μικρό, σταθερό h , σε ορισμένες περιπτώσεις αυξάνει εκθετικά καθώς το $k \rightarrow \infty$. Για παράδειγμα, ας



θεωρήσουμε το ευσταθές πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = -2y + 1, \quad y(0) = 1, \quad x \geq 0, \quad (14.108)$$

του οποίου η ακριβής λύση είναι

$$y(x) = \frac{1}{2} (e^{-2x} + 1). \quad (14.109)$$

Σημειώνεται ότι αν αντί της $y(0) = 1$ χρησιμοποιηθεί η $y(0) = 1 + \varepsilon$, τότε η ακριβής λύση είναι

$$y(x) = \frac{1}{2} (1 + e^{-2x}) + \varepsilon e^{-2x}. \quad (14.110)$$

Για την εύρεση μιας αριθμητικής λύσεως του (14.108) χρησιμοποιούμε την μέθοδο του μέσου (14.84)

$$\psi_{k+1} = \psi_{k-1} + 2hf(x_k, \psi_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (14.111)$$

όπου $\psi_0 = 1$ και η ψ_1 θεωρείται γνωστή. Το βήμα $h > 0$ θεωρείται σταθερό (είναι επαρκώς μικρό) και $x_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Σαν ψ_1 παίρνουμε την ακριβή τιμή $y(x_1) = y(h)$, δηλαδή $\psi_1 = \frac{1}{2} (e^{-2h} + 1)$ (λόγω της (14.109)). Αφού $f(x, y) = -2y + 1$, από την (14.111) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} &= \psi_{k-1} + 2h(-2\psi_k + 1), \quad \text{ή} \\ \psi_{k+1} + 4h\psi_k - \psi_{k-1} &= 2h, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (14.112)$$

όπου $\psi_0 = 1$ και $\psi_1 = \frac{1}{2} (e^{-2h} + 1)$. Η (14.112) είναι μία γραμμική μη ομογενής εξίσωση διαφορών τάξεως 2 με σταθερούς συντελεστές (αφού μπορεί να γραφεί με την ισοδύναμη μορφή

$$\psi_{k+2} + 4h\psi_{k+1} - \psi_k = 2h, \quad k = 0, 1, 2, \dots),$$

της οποίας η λύση σύμφωνα με το κεφάλαιο 13 είναι (βλέπε άσκηση 32)



$$\begin{aligned} \psi_k = & \frac{1}{4} \left(1 + \frac{e^{-2h} + 2h}{\sqrt{1 + 4h^2}} \right) \left(-2h + \sqrt{1 + 4h^2} \right)^k + \\ & + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{e^{-2h} + 2h}{\sqrt{1 + 4h^2}} \right) (-1)^k \left(2h + \sqrt{1 + 4h^2} \right)^k + \frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (14.113)$$

Από την (14.113) είναι φανερό λόγω των $0 < -2h + \sqrt{1 + 4h^2} < 1$ και $2h + \sqrt{1 + 4h^2} > 1$, ότι για $k \rightarrow \infty$ (οπότε $x_k \rightarrow \infty$) η $\psi_k \rightarrow \pm \infty$. Εξ άλλου η ακριβής λύση (14.109) τείνει στο $\frac{1}{2}$ όταν $x \rightarrow \infty$. Δηλαδή, η συμπεριφορά της αριθμητικής λύσεως (14.113) είναι τελείως διαφορετική από αυτή της ακριβούς λύσεως για πολύ μεγάλο x . Το γεγονός αυτό δεν μπορεί να αποφευχθεί ακόμη κι αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν σφάλματα στρογγυλεύσεως. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο συντελεστής

$1 - \frac{e^{-2h} + 2h}{\sqrt{1 + 4h^2}}$ στην (14.113) είναι μικρός για μικρό h , αλλά πάντοτε $\neq 0$ για $h \neq 0$. Από την (14.113) για $h = 0.1$ και $k = 50$ ($x_k = 5$) βρίσκουμε $\psi_{50} \approx 5.9$, ενώ για $h = 0.1$ και $k = 100$ ($x_k = 10$) βρίσκουμε $\psi_{100} \approx 111966.4$. Ας σημειωθεί ότι από την (14.109) για $x = 5$ και $x = 10$ είναι $y(5) \approx 0.5000227$ και $y(10) \approx 0.5000000$. Έτσι, η μέθοδος του μέσου, όταν εφαρμόζεται στο πρόβλημα (14.108) για την εύρεση μιας προσεγγίσεως της $y(x)$ για μεγάλο σχετικά x , παρουσιάζει αστάθεια. Πρέπει να σημειωθεί ότι το συμπέρασμα για την αστάθεια της (14.111) προέκυψε γνωρίζοντας την ακριβή λύση του (14.108) και την λύση της εξισώσεως διαφορών (14.112).

Εάν θεωρήσουμε μία γραμμική μέθοδο πολλών βημάτων (βλέπε (14.87)), τότε συνηθίζεται να αποφαινόμαστε για την ευστάθεια ή αστάθεια αυτής ως προς κάποιο πρόβλημα αρχικών τιμών πρώτης τάξεως εφαρμόζοντας αυτή στο απλούστερο πρόβλημα

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad x \geq 0, \quad (14.114)$$

όπου λ είναι παράμετρος (σταθερά) από την οποία εξαρτάται η συμπε-



ριφορά της λύσεως του (14.114). Η αναλυτική λύση του (14.114) είναι $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$ και επομένως έχουμε: i) αν $\lambda > 0$, τότε $y(x) \rightarrow \pm\infty$ καθώς το $x \rightarrow \infty$, ii) αν $\lambda < 0$, τότε $y(x) \rightarrow 0$ για $x \rightarrow \infty$ και iii) αν $\lambda = 0$, τότε $y(x) = y_0 \forall x$.

Για μια μεγάλη κλάση διαφορικών εξισώσεων η γενική συμπεριφορά των λύσεων έχει σαν μοντέλο αυτήν της λύσεως του (14.114). Επίσης, όταν μία γραμμική μέθοδος πολλών βημάτων εφαρμόζεται στο πρόβλημα (14.114), είναι φανερό ότι προκύπτει μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, της οποίας η αναλυτική λύση μπορεί να βρεθεί και να μελετηθεί σύμφωνα με την θεωρία του κεφαλαίου 13. Εάν η (14.87) εφαρμοστεί στο πρόβλημα (14.114), είναι φανερό ότι προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$\psi_{k+1} = \sum_{i=1}^q C_i \psi_{k+1-i} + h\lambda \sum_{i=0}^q D_i \psi_{k+1-i}, \quad \text{ή}$$

$$(1 - \lambda h D_0) \psi_{k+1} - \sum_{i=1}^q (C_i + \lambda h D_i) \psi_{k+1-i} = 0, \quad (14.115)$$

όπου οι τιμές $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{q-1}$ θεωρούνται γνωστές, $k \geq q-1$ και $\psi_0 = y_0$. Θέτοντας

$$M_0 = 1 - \lambda h D_0 \quad \text{και} \quad M_i = C_i + \lambda h D_i, \quad i = 1(1)q, \quad (14.116)$$

η (14.115) γράφεται

$$M_0 \psi_{k+1} - M_1 \psi_k - M_2 \psi_{k-1} - \dots - M_q \psi_{k+1-q} = 0. \quad (14.117)$$

Υποτίθεται ότι το h είναι επαρκώς μικρό, ώστε $M_0 \neq 0$. Η (14.117) είναι μία γραμμική ομογενής εξίσωση διαφορών τάξης q με σταθερούς συντελεστές και ας υποθέσουμε ότι $z_1, z_2, \dots, z_q$ είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$M_0 z^q - M_1 z^{q-1} - \dots - M_q = 0 \quad (14.118)$$



αυτής. Είναι φανερό από την (14.116) ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} M_0 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{h \rightarrow 0} M_i = C_i, \quad i = 1(1)q. \quad (14.119)$$

Εάν θεωρήσουμε τώρα την οριακή εξίσωση διαφορών, που προκύπτει από την (14.117) όταν $h \rightarrow 0$, δηλαδή την

$$\psi_{k+1} - C_1 \psi_k - C_2 \psi_{k-1} - \dots - C_q \psi_{k+1-q} = 0 \quad (14.120)$$

και υποθέσουμε ότι η (14.87) είναι συμβιβαστή, τότε λόγω της (14.89) το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (14.120)

$$z^q - C_1 z^{q-1} - \dots - C_q \quad (14.121)$$

έχει μία ρίζα ίση με 1. Έστωσαν $\hat{z}_1 = 1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_q$ οι ρίζες του (14.121). Επειδή οι ρίζες ενός πολυώνυμου είναι συνεχείς συναρτήσεις των συντελεστών του, προκύπτει ότι για $h \rightarrow 0$ οι ρίζες του (14.118) θα συγκλίνουν στις ρίζες του (14.121). Έτσι μία ρίζα του (14.118), έστω η z_1 , θα συγκλίνει στην ρίζα $\hat{z}_1 = 1$ του (14.121). Έχοντας υπ' όψιν την παραπάνω ανάλυση οι ακόλουθοι ορισμοί εισάγονται για την συμβιβαστή γραμμική μέθοδο πολλών βημάτων (14.87).

1. Η μέθοδος είναι ισχυρά ευσταθής (strongly stable), εάν $q = 1$ ή εάν $q > 1$ και

$$|\hat{z}_i| < 1, \quad i = 2(1)q.$$

2. Η μέθοδος είναι ευσταθής υπό συνθήκας (conditionally stable), εάν

$$|\hat{z}_i| \leq 1, \quad i = 1(1)q,$$

όπου όλες οι ρίζες με μέτρο 1 είναι απλές και εάν αυτή δεν είναι ισχυρά ευσταθής.

2α) Η μέθοδος είναι ασθενώς ευσταθής (weakly stable), εάν για ε-παρκώς μικρό h



$$|z_i| \leq |z_1|, \quad i = 2(1)q.$$

2β) Η μέθοδος είναι ασθενώς ασταθής (weakly unstable), εάν για κάθε $h_0 > 0$ υπάρχει $0 < h < h_0$, τέτοιο ώστε για κάποιο $i \neq 1$ έχουμε

$$|z_i| > |z_1|.$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η κατάταξη μιας ευσταθούς υπό συνθήκας μεθόδου στις περιπτώσεις (2α) και (2β) μπορεί να εξαρτάται από το λ . Εάν η μέθοδος δεν ανήκει στις περιπτώσεις 1 και 2, τότε είναι ισχυρά ασταθής.

Εάν θεωρήσουμε την περίπτωση που οι ρίζες z_i , $i = 1(1)q$ του (14.118) είναι διακεκριμένες, τότε η λύση της (14.117) είναι

$$\psi_k = \beta_1 z_1^k + \beta_2 z_2^k + \dots + \beta_q z_q^k, \quad k = q, q+1, \dots, \quad (14.122)$$

όπου οι σταθερές β_i , $i = 1(1)q$ προσδιορίζονται από τις $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{q-1}$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι, εάν η μέθοδος είναι ισχυρά ή ασθενώς ευσταθής, τότε για επαρκώς μικρό h η προσεγγιστική λύση (14.122) συμπεριφέρεται όπως η ακριβής λύση του (14.114) (δηλαδή αποτελεί καλή προσέγγιση αυτής), ενώ στις περιπτώσεις αστάθειας αυτό δεν ισχύει. Αντίστοιχα συμπεράσματα ισχύουν και όταν οι ρίζες του (14.118) δεν είναι διακεκριμένες.

Η παραπάνω θεωρία για την ευστάθεια ή αστάθεια μιας μεθόδου ισχύει και για τις μεθόδους του ενός βήματος που εξετάστηκαν στην παράγραφο 14.3, αφού η εφαρμογή μιας τέτοιας μεθόδου στο πρόβλημα (14.114) οδηγεί σε μία εξίσωση διαφορών της μορφής (14.117) με $q = 1$. Έτσι, αυτές είναι ισχυρά ευσταθείς. Είναι εύκολο να δειχθεί (βλέπε άσκηση 34) ότι οι μέθοδοι των Adams — Bashforth και οι μέθοδοι των Adams — Moulton είναι ισχυρά ευσταθείς. Για παράδειγμα, εάν εφαρμόσουμε την (14.75) στο πρόβλημα (14.114) προκύπτει η εξίσωση διαφορών

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{h}{2} (3\lambda \psi_k - \lambda \psi_{k-1}), \quad \text{ή}$$



$$\psi_{\kappa+1} - \left(1 + \frac{3h\lambda}{2}\right)\psi_{\kappa} + \frac{h\lambda}{2}\psi_{\kappa-1} = 0, \quad \kappa = 1, 2, \dots \quad (14.123)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (14.123) είναι

$$z^2 - \left(1 + \frac{3h\lambda}{2}\right)z + \frac{h\lambda}{2}$$

και το οριακό χαρακτηριστικό πολυώνυμο για $h \rightarrow 0$ είναι $z^2 - z$ με ρίζες $\hat{z}_1 = 1$, $\hat{z}_2 = 0$ και $|\hat{z}_2| < 1$.

Για την μέθοδο του μέσου η αντίστοιχη της (14.123) είναι

$$\psi_{\kappa+1} - 2h\lambda\psi_{\kappa} - \psi_{\kappa-1} = 0, \quad \kappa = 1, 2, \dots,$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $z^2 - 2h\lambda z - 1$, του οποίου οι ρίζες είναι

$$\begin{aligned} z_1 &= h\lambda + \sqrt{(h\lambda)^2 + 1}, \quad (z_1 \rightarrow 1 \text{ για } h \rightarrow 0) \\ z_2 &= h\lambda - \sqrt{(h\lambda)^2 + 1}. \end{aligned} \quad (14.124)$$

Οι ρίζες του οριακού χαρακτηριστικού πολυωνύμου $z^2 - 1$ είναι $\hat{z}_1 = 1$, $\hat{z}_2 = -1$. Έτσι, η μέθοδος του μέσου είναι υπό συνθήκας ευσταθής. Εάν $\lambda \geq 0$ είναι φανερό από τις (14.124) ότι $|z_2| \leq |z_1|$ και επομένως η μέθοδος θα είναι ασθενώς ευσταθής. Εάν $\lambda < 0$, τότε $|z_2| > |z_1|$ και η μέθοδος θα είναι ασθενώς ασταθής. Η τελευταία περίπτωση παρουσιάστηκε προηγουμένως στο πρόβλημα (14.108).

Είναι φανερό ότι οι ισχυρά ή ασθενώς ασταθείς μέθοδοι δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται στην πράξη. Τέλος, όσον αφορά την μέθοδο (14.87), είναι γνωστό ότι αυτή συγκλίνει εάν και μόνον εάν είναι συμβιβαστή και ισχυρά ή υπό συνθήκας ευσταθής (Η σύγκλιση της (14.87) ορίζεται με τρόπο ανάλογο αλλά ασφαλώς πιο πολύπλοκο από αυτόν για τις μεθόδους του ενός βήματος).



14.6 Αριθμητική επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών

Στην παρούσα παράγραφο θα ασχοληθούμε με την αριθμητική επίλυση του απλού προβλήματος συνοριακών τιμών δευτέρας τάξεως που δίνεται από την (14.13), δηλαδή

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y') , \quad a \leq x \leq b \\ y(a) &= b_0 , \quad y(b) = b_1 . \end{aligned} \quad (14.125)$$

Αν και το πρόβλημα αυτό μοιάζει πολύ με το πρόβλημα αρχικών τιμών δευτέρας τάξεως:

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y') , \quad a \leq x \leq b \\ y(a) &= b_0 , \quad y'(a) = b_1 , \end{aligned} \quad (14.126)$$

οι μέθοδοι που εξετάστηκαν μέχρι τώρα δεν μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα για την επίλυσή του, αφού σε κανένα από τα άκρα a, b του διαστήματος $[a, b]$ δεν υπάρχουν οι απαιτούμενες πληροφορίες. Συχνά στην πράξη σε προβλήματα συνοριακών τιμών δευτέρας τάξεως οι συνοριακές συνθήκες έχουν πιο γενική μορφή, όπως π.χ. στο πρόβλημα:

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y') , \quad a \leq x \leq b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= b_0 \\ a_3 y(b) + a_4 y'(b) &= b_1 , \end{aligned} \quad (14.127)$$

όπου a_i , $i = 1(1)4$ και b_0, b_1 είναι γνωστά με $|a_1| + |a_2| > 0$, $|a_3| + |a_4| > 0$. Το πρόβλημα (14.125) μπορεί να έχει μία μοναδική λύση, άπειρες λύσεις ή καμμία λύση. Για παράδειγμα, η διαφορική εξίσωση

$$y'' = -y , \quad (14.128)$$

με τις συνοριακές συνθήκες $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ έχει την μοναδική λύση $y(x) = \sin x$. Η (14.128) με τις συνοριακές συνθήκες $y(0) = 0$,



$y(\pi) = 0$ έχει τις άπειρες λύσεις $y(x) = C_1 \sin x$, όπου C_1 αυθαίρετη σταθερά, ενώ η (14.128) με τις συνοριακές συνθήκες $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$ δεν έχει λύση (Η γενική λύση της (14.128) είναι $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, όπου C_1, C_2 αυθαίρετες σταθερές).

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι το πρόβλημα (14.125) έχει μία μοναδική λύση. Υπάρχουν θεωρήματα που παρέχουν ικανές συνθήκες για την ύπαρξη μοναδικής λύσεως του (14.125). Ένα τέτοιο σε μια ειδική περίπτωση είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 14.2 Εάν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής και ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y στο σύνολο $S = \{(x,y) : a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ και επιπλέον $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \geq 0$ για κάθε $(x,y) \in S$, τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' = f(x,y), \quad x \in [a,b]$$

$$y(a) = b_0, \quad y(b) = b_1$$

έχει μία μοναδική λύση για κάθε $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$

14.6.1 Η Shooting μέθοδος (Μέθοδος της βολής)

Ας υποθέσουμε ότι δίνεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών (14.125). Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι η ακόλουθη. Θεωρούμε το ακόλουθο σχετιζόμενο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} y'' &= f(x,y,y') \quad , \quad a \leq x \leq b \\ y(a) &= b_0, \quad y'(a) = \lambda, \end{aligned} \tag{14.129}$$

όπου λ είναι παράμετρος και προσπαθούμε να προσδιορίσουμε την τιμή $\hat{\lambda}$ αυτής για την οποία η ακριβής λύση $y(x,\lambda)$ του (14.129) ικανοποιεί την $y(b,\hat{\lambda}) = b_1$. Τότε, η λύση του προβλήματος (14.129) με $\lambda = \hat{\lambda}$, δηλαδή η $y(x,\hat{\lambda})$ είναι η ζητούμενη λύση του προβλήματος (14.125).



αφού ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Υποθέτουμε βεβαίως ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις, ώστε το πρόβλημα (14.129) να έχει μία μοναδική λύση.

Μία αριθμητική λύση του προβλήματος (14.129) για κάποια γνωστή τιμή του λ μπορεί να βρεθεί με τις μεθόδους που αναφέρθηκαν στο παρόν κεφάλαιο, αφού αυτό ισοδυναμεί με ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως με αρχικές συνθήκες. Μια τυπική εφαρμογή της μεθόδου της βολής (η οποία καλείται έτσι επειδή μία ανάλογη τεχνική χρησιμοποιείται στο πυροβολικό για τον κανονισμό της βολής επί σταθερού στόχου) περιέχει τα ακόλουθα τρία βασικά βήματα:

1. Εκλέγουμε μία αρχική τιμή λ_0 για το λ (Μία καλή εκλογή είναι $\lambda_0 = \frac{b_1 - b_0}{b - a}$). 2. Εκλέγοντας $h = \frac{b - a}{N}$, $x_k = a + kh$, $k = 0(1)N$ βρίσκουμε την αριθμητική λύση $\psi_k^{(0)} \equiv \psi(x_k, \lambda_0)$, $k = 0(1)N$ του προβλήματος (14.129) με $\lambda = \lambda_0$ με μία από τις γνωστές μεθόδους. 3. Εάν η τιμή $\psi_N^{(0)} \equiv \psi(b, \lambda_0)$ (που προσεγγίζει την $y(b, \lambda_0)$) δεν είναι επαρκώς κοντά στην τιμή b_1 , τότε εκλέγουμε κατάλληλα νέα τιμή λ_1 για το λ και επιστρέφουμε στο βήμα 2 (όπου το λ_0 θα αντικατασταθεί από το λ_1) κ.ο.κ. για $\lambda = \lambda_2, \lambda_3, \dots$. Εάν για $\lambda = \lambda_m$ η τιμή $|\psi(b, \lambda_m) - b_1|$ είναι επαρκώς μικρή, τότε η διαδικασία σταματά και η αριθμητική λύση του προβλήματος (14.125) είναι η $\psi_k^{(m)} \equiv \psi(x_k, \lambda_m)$, $k = 0(1)N$.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι στην πραγματικότητα ψάχνουμε να βρούμε μία ρίζα της (γενικά) μη γραμμικής εξισώσεως

$$g(\lambda) = 0, \quad (14.130)$$

όπου

$$g(\lambda) \equiv \psi(b, \lambda) - b_1. \quad (14.131)$$

Η $g(\lambda)$ δεν είναι γνωστή αναλυτικά, αλλά για κάθε συγκεκριμένη τιμή του λ η τιμή $g(\lambda)$ υπολογίζεται από την (14.131), αφού πρώτα υπολογιστεί η τιμή $\psi(b, \lambda)$. Δηλαδή, για την εύρεση της τιμής $g(\lambda)$ για



κάποιο λ απαιτείται η αριθμητική λύση του (14.129). Η λύση της εξίσωσης (14.130) επιτυγχάνεται με μία από τις αριθμητικές μεθόδους του κεφαλαίου 6, π.χ. με την μέθοδο της διχοτομήσεως, την μέθοδο Regula - Falsi ή την μέθοδο της τέμνουσας.

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου η συνάρτηση f στην (14.125) είναι της μορφής

$$f(x, y, y') = -p(x)y' - q(x)y + r(x), \quad (14.132)$$

όπου οι $p(x)$, $q(x)$ και $r(x)$ είναι δοσμένες συναρτήσεις, συνεχείς στο $[a, b]$, δηλαδή η f είναι γραμμική ως προς y και y' . Η λύση $y(x)$ του προβλήματος (14.125), όπου η f δίνεται από την (14.132), μπορεί να βρεθεί ως εξής. Θεωρούμε τα ακόλουθα δύο προβλήματα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} u'' = -p(x)u' - q(x)u, & a \leq x \leq b \\ u(a) = 0, & u'(a) = 1 \end{cases} \quad (14.133)$$

και

$$\begin{cases} z'' = -p(x)z' - q(x)z + r(x), & a \leq x \leq b \\ z(a) = b_0, & z'(a) = 0 \end{cases} \quad (14.134)$$

Εάν $u(x)$, $z(x)$ είναι οι λύσεις των (14.133) και (14.134) αντίστοιχα, που προσεγγίζονται αριθμητικά με τις γνωστές μεθόδους, τότε είναι

$$y(x) = z(x) + \frac{b_1 - z(b)}{u(b)} u(x), \quad u(b) \neq 0. \quad (14.135)$$

Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned} y'' &= z'' + \frac{b_1 - z(b)}{u(b)} u'' = \\ &= -p(x)z' - q(x)z + r(x) + \frac{b_1 - z(b)}{u(b)} (-p(x)u' - q(x)u) = \end{aligned}$$



$$= -p(x) \left(z' + \frac{b_1 - z(b)}{u(b)} u' \right) - q(x) \left(z + \frac{b_1 - z(b)}{u(b)} u \right) + r(x) =$$

$$= -p(x)y' - q(x)y + r(x) \quad \text{και}$$

$$y(a) = z(a) + \frac{b_1 - z(b)}{u(b)} u(a) = b_0 + \frac{b_1 - z(b)}{u(b)} \cdot 0 = b_0 ,$$

$$y(b) = z(b) + \frac{b_1 - z(b)}{u(b)} u(b) = b_1 .$$

Η παραπάνω διαδικασία για την εύρεση της $y(x)$ καλείται μέθοδος της υπερθέσεως (superposition).

14.6.2 Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών

Θεωρούμε πάλι το πρόβλημα (14.125). Εάν $\Phi_i(x)$, $i = 0(1)m$ είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες δύο φορές (συνήθως πολυώνυμα), τέτοιες ώστε

$$\Phi_0(a) = b_0 , \quad \Phi_0(b) = b_1 ,$$

$$\Phi_i(a) = \Phi_i(b) = 0 , \quad i = 1(1)m ,$$

τότε για την συνάρτηση $\Phi(x) = \Phi_0(x) + \sum_{i=1}^m a_i \Phi_i(x)$, όπου a_i , $i = 1(1)m$ αυθαίρετες σταθερές, ισχύει προφανώς $\Phi(a) = b_0$ και $\Phi(b) = b_1$. Οι συντελεστές a_i , $i = 1(1)m$ πρέπει να προσδιοριστούν έτσι ώστε η $\Phi(x)$ να προσεγγίζει, υπό κάποια έννοια, επαρκώς την λύση $y(x)$ του προβλήματος (14.125). Για τον σκοπό αυτό ένας τρόπος είναι ο εξής. Εκλέγουμε m διακεκριμένα σημεία x_i , $i = 1(1)m$ στο $[a, b]$ και απαιτούμε η $\Phi(x)$ να ικανοποιεί ακριβώς την διαφορική εξίσωση (14.125) στα σημεία x_i , $i = 1(1)m$, δηλαδή τα a_i , $i = 1(1)m$ προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$\Phi''(x_i) - f(x_i, \Phi(x_i), \Phi'(x_i)) = 0 , \quad i = 1(1)m . \quad (14.136)$$



Το σύστημα (14.136) είναι γενικά μη γραμμικό και μπορεί να λυθεί με τις μεθόδους του κεφαλαίου 8 .

Παράδειγμα 14.8 Για το πρόβλημα $y'' = y + 1$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών με $m = 2$ και $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{3}{4}$.

Λύση Έστω $\Phi_0(x) = 1 + x$, $\Phi_1(x) = x(x - 1)$, $\Phi_2(x) = x^2(x - 1)$, οπότε

$$\Phi(x) = 1 + x + a_1 x(x - 1) + a_2 x^2(x - 1) .$$

Έχουμε

$$\Phi'(x) = 1 + a_1(2x - 1) + a_2(3x^2 - 2x) \text{ και}$$

$$\Phi''(x) = 2a_1 + 6a_2x - 2a_2 = 2a_1 + 2a_2(3x - 1) .$$

Έτσι, το σύστημα (14.36) είναι

$$\begin{cases} \Phi''(x_1) - \Phi(x_1) - 1 = 0 \\ \Phi''(x_2) - \Phi(x_2) - 1 = 0 \end{cases} ,$$

ή

$$\begin{cases} 140a_1 + 31a_2 = 150 \\ 140a_1 + 169a_2 = 176 \end{cases} .$$

Η λύση του συστήματος αυτού είναι $a_1 = \frac{9947}{9660} \approx 1.029710$, $a_2 = \frac{13}{69} \approx 0.188406$. Άρα,

$$y(x) \approx \Phi(x) = 1 + x + x(x - 1)(a_1 + a_2x) \approx 0.188406x^3 + 0.841304x^2 - 0.029710x + 1 .$$



14.6.3 Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών

Η πιο γνωστή ίσως αριθμητική μέθοδος επιλύσεως του προβλήματος (14.125) είναι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών. Για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής θεωρούμε πάλι τα ισαπέχοντα σημεία $x_k = a + kh$, $k = 0(1)N$ του διαστήματος $[a, b]$, όπου $h = \frac{b-a}{N}$ και N θετικός ακέραιος (το βήμα h εκλέγεται επαρκώς μικρό). Σύμφωνα με το κεφάλαιο 3 μπορούμε να προσεγγίσουμε τις τιμές $y'(x_k)$ και $y''(x_k)$, $k = 1(1)N-1$, π.χ. από τους τύπους (βλέπε (3.34), (3.38))

$$y'(x_k) = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}))}{2h} + O(h^2), \quad (14.137)$$

$$y''(x_k) = \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1}))}{h^2} + O(h^2), \quad (14.138)$$

$k = 1(1)N-1$. Λόγω των (14.137) και (14.138), από την διαφορική εξίσωση $y'' = f(x, y, y')$ του (14.125), όπου το x θα αντικατασταθεί με το x_k , παίρνουμε (θέτοντας $y(x_k) \equiv y_k$)

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O(h^2) = f(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O(h^2)), \quad k = 1(1)N-1, \quad (14.139)$$

όπου $y_0 \equiv y(x_0) = y(a) = b_0$ και $y_N \equiv y(x_N) = y(b) = b_1$.

Από την (14.139) παραλείποντας τους όρους $O(h^2)$ και αντικαθιστώντας τις ακριβείς τιμές y_k με τις προσεγγιστικές ψ_k , $k = 0(1)N$ ($\psi_0 = y_0$ και $\psi_N = y_N$) παίρνουμε την εξίσωση διαφορών

$$\psi_{k+1} - 2\psi_k + \psi_{k-1} = h^2 f\left(x_k, \psi_k, \frac{\psi_{k+1} - \psi_{k-1}}{2h}\right), \quad (14.140)$$

$k = 1(1)N-1$.



Οι (14.140) αποτελούν ένα σύστημα $N - 1$ εξισώσεων με τους $N - 1$ αγνώστους ψ_k , $k = 1(1)N - 1$, το οποίο είναι γενικά μη γραμμικό. Λύνοντας το σύστημα αυτό (υποθέτοντας ότι υπάρχει λύση) με κάποια από τις μεθόδους του κεφαλαίου 8 βρίσκουμε μία αριθμητική λύση του προβλήματος (14.125), δηλαδή τις τιμές ψ_k , $k = 1(1)N - 1$ ($y_k \approx \psi_k$).

Εάν περιοριστούμε στην ειδική και πιο συνηθισμένη περίπτωση που η f είναι της μορφής (14.132), τότε η (14.140) γίνεται

$$\psi_{k+1} - 2\psi_k + \psi_{k-1} + h^2 q(x_k) \psi_k + \frac{h}{2} p(x_k) (\psi_{k+1} - \psi_{k-1}) = h^2 r(x_k),$$

$$k = 1(1)N - 1, \text{ ή} \quad (14.141)$$

$$\left(1 - \frac{h}{2} p(x_k)\right) \psi_{k-1} + (h^2 q(x_k) - 2) \psi_k + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_k)\right) \psi_{k+1} =$$

$$= h^2 r(x_k), \text{ όπου} \quad (14.142)$$

$\psi_0 = b_0$, $\psi_N = b_1$, $k = 1(1)N - 1$. Οι σχέσεις (14.142) αποτελούν τώρα ένα γραμμικό σύστημα $N - 1$ εξισώσεων με αγνώστους ψ_k , $k = 1(1)N - 1$. Το σύστημα αυτό έχει πίνακα συντελεστών τριδιαγώνιο και είναι εύκολο να λυθεί με τις μεθόδους του κεφαλαίου 10 (π.χ. μέθοδοι παραγοντοποιήσεως).

Αν θέσουμε

$$\gamma_k = - \left(1 - \frac{h}{2} p(x_k)\right), \quad \delta_k = - \left(h^2 q(x_k) - 2\right),$$

$$\theta_k = - \left(1 + \frac{h}{2} p(x_k)\right), \quad r_k = r(x_k),$$

$$(14.143)$$

$k = 1(1)N - 1$, τότε το σύστημα (14.142) γράφεται υπό μορφή πινάκων ως εξής:



$$\begin{bmatrix} \delta_1 & \theta_1 & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \delta_2 & \theta_2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \theta_{N-2} \\ & & & & & \delta_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{N-2} \\ \psi_{N-1} \end{bmatrix} = -h^2 \begin{bmatrix} r_1 + \frac{v_1 b_0}{h^2} \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{N-2} \\ r_{N-1} + \frac{\theta_{N-1} b_1}{h^2} \end{bmatrix} \quad (14.144)$$

Εάν υποθέσουμε ότι

$$q(x) < 0 \quad \forall x \in [\bar{a}, \bar{b}] \quad \text{και} \quad \frac{h}{2} |p(x_k)| \leq 1, \quad k = 1(1)N-1, \quad (14.145)$$

τότε θα δειχθεί ότι

$$|\delta_k| > |v_k| + |\theta_k|, \quad k = 2(1)N-2,$$

$$|\delta_1| > |\theta_1|, \quad |\delta_{N-1}| > |v_{N-1}|.$$

Πράγματι, έχουμε

$$|\delta_1| = |h^2 q(x_1) - 2| = 2 - h^2 q(x_1) > 2,$$

$$|\theta_1| = |1 + \frac{h}{2} p(x_1)| \leq 1 + \frac{h}{2} |p(x_1)| \leq 2.$$

Ομοίως είναι $|\delta_{N-1}| > |v_{N-1}|$. Επίσης, για $k = 2(1)N-2$ είναι

$$|\delta_k| = |h^2 q(x_k) - 2| = 2 - h^2 q(x_k) > 2,$$

$$|v_k| = |1 - \frac{h}{2} p(x_k)|,$$

$$|\theta_k| = |1 + \frac{h}{2} p(x_k^*)| \quad \text{και} \quad |v_k| + |\theta_k| = 2 < |\delta_k|.$$

Άρα, ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος (14.144) κάτω από τις



προϋποθέσεις (14.145) είναι αυστηρά διαγώνια υπέρτερος και επομένως ομαλός, οπότε το σύστημα (14.144) έχει μία μοναδική λύση.

Παράδειγμα 14.9 Δίνεται το πρόβλημα $y'' + 2y'y = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0.5$, $0 \leq x \leq 1$. Να εφαρμοστεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών με $h = \frac{1}{3}$ (Η ακριβής λύση αυτού είναι $y(x) = \frac{1}{1+x}$).

Λύση Είναι $f(x, y, y') = -2y'y$, $[a, b] = [0, 1]$, $b_0 = 1$, $b_1 = 0.5$, $h = \frac{b-a}{N} = \frac{1}{3}$, οπότε $N = 3$ και επομένως η (14.140) γίνεται $(x_k = kh = k \frac{1}{3}, k = 0(1)3)$

$$\psi_{k+1} - 2\psi_k + \psi_{k-1} = -\frac{1}{3} \psi_k (\psi_{k+1} - \psi_{k-1}), \quad k = 1, 2,$$

όπου $\psi_0 = 1$, $\psi_3 = 0.5$. Έτσι, προκύπτει το μη γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \psi_2 - 2\psi_1 + 1 + \frac{1}{3} \psi_1 (\psi_2 - 1) = 0 \\ \frac{1}{2} - 2\psi_2 + \psi_1 + \frac{1}{3} \psi_2 (\frac{1}{2} - \psi_1) = 0, \end{cases}$$

του οποίου οι λύσεις είναι $\psi_1 = 0.75$, $\psi_2 = 0.6$ και $\psi_1 = -7$, $\psi_2 = 13$. Σημειώνεται ότι $y(\frac{1}{3}) = y_1 = \frac{3}{4} = 0.75$ και $y(\frac{2}{3}) = y_2 = \frac{3}{5} = 0.6$, αφού $y(x) = \frac{1}{1+x}$, δηλαδή η μία λύση του συστήματος συμπίπτει με τις ακριβείς τιμές.

14.7 Πρόβλήματα ιδιοτιμών για διαφορικές εξισώσεις

Συχνά στις εφαρμογές παρουσιάζεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$y'' = f(x, y, y', \lambda), \quad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0,$$

(14.146)



όπου λ είναι άγνωστη παράμετρος και πρέπει να προσδιορίσουμε εκείνες τις τιμές του λ , τις οποίες καλούμε ιδιοτιμές, για τις οποίες το πρόβλημα (14.146) έχει αντίστοιχες μη τετριμμένες ($\neq 0$) λύσεις, οι οποίες καλούνται ιδιοσυναρτήσεις, και τις οποίες πρέπει να προσδιορίσουμε στη συνέχεια. Το παραπάνω πρόβλημα (14.146) καλείται πρόβλημα ιδιοτιμών. Σαν παράδειγμα θεωρούμε το απλό πρόβλημα

$$y'' = -\lambda y, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (14.147)$$

το οποίο μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Η γενική λύση της $y'' = -\lambda y$ είναι $y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)$ και λόγω της $y(0) = 0$ παίρνουμε $C_2 = 0$. Άρα, $y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x)$. Ζητούμε τις τιμές του λ για τις οποίες έχουμε μη τετριμμένες αντίστοιχες λύσεις, δηλαδή $C_1 \neq 0$. Από την $y(1) = 0$ προκύπτει ότι πρέπει να ισχύει $\sin \sqrt{\lambda} = 0$ και επομένως πρέπει να είναι $\lambda = m^2 \pi^2$, όπου $m = 1, 2, 3, \dots$. Άρα, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_m = m^2 \pi^2$, $m = 1, 2, \dots$ και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $y_m(x) = C_1 \sin(m\pi x)$, $m = 1, 2, \dots$ (Η C_1 είναι αυθαίρετη σταθερά και μπορεί να ληφθεί ίση με 1).

Γενικά, οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος (14.146) δεν μπορούν να προσδιοριστούν αναλυτικά, αλλά μπορούμε να τις προσεγγίσουμε χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών της παραγράφου 14.6.3 για το πρόβλημα (14.146), όπου η f είναι της μορφής

$$f(x, y, y', \lambda) = (p(x) - \lambda r(x))y, \quad (14.148)$$

όπου $p(x) \geq 0$ και $r(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (βλέπε (14.140)) τότε υπ' όψιν πρόβλημα προσεγγίζεται από τις εξισώσεις

$$\psi_{k+1} - 2\psi_k + \psi_{k-1} = h^2(p(x_k) - \lambda r(x_k))\psi_k, \quad k = 1(1)N-1, \quad (14.149)$$

όπου $\psi_0 = \psi_N = 0$, $h = \frac{b-a}{N}$, $x_k = a + kh$, $k = 0(1)N$.



Σκοπός μας τώρα είναι να βρούμε εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες το ομογενές γραμμικό σύστημα των $N - 1$ εξισώσεων (14.149) με αγνώστους τους ψ_k , $k = 1(1)N - 1$ έχει μη τετριμμένη λύση. Οι (14.149) γράφονται

$$\psi_{k-1} - (2 + h^2 p(x_k))\psi_k + \psi_{k+1} = -\lambda h^2 r(x_k)\psi_k, \quad k = 1(1)N - 1,$$

ή

$$\frac{-1}{h^2 r(x_k)} \psi_{k-1} + \frac{2 + h^2 p(x_k)}{h^2 r(x_k)} \psi_k - \frac{1}{h^2 r(x_k)} \psi_{k+1} = \lambda \psi_k, \quad k = 1(1)N - 1,$$

ή υπό μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & \theta_1 & & & \\ v_2 & \delta_2 & \theta_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \theta_{N-2} \\ & & & & & \delta_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{N-2} \\ \psi_{N-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{N-2} \\ \psi_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (14.150)$$

όπου θέσαμε $\delta_k = \frac{2 + h^2 p(x_k)}{h^2 r(x_k)}$, $v_k = -\frac{1}{h^2 r(x_k)}$, $\theta_k = -\frac{1}{h^2 r(x_k)} = v_k$

$k = 1(1)N - 1$. Γράφοντας την (14.150) συνοπτικά

$$A\psi = \lambda\psi \quad (14.151)$$

βλέπουμε ότι οι (14.149) ισοδυναμούν με το πρόβλημα ιδιοτιμών (14.151) για τον τριδιαγώνιο πίνακα A . Δηλαδή, οι ιδιοτιμές $\bar{\lambda}_m$, $m = 1(1)N - 1$ του πίνακα A , που μπορούν να προσδιοριστούν με τις μεθόδους του κεφαλαίου 11, αποτελούν προσεγγίσεις ιδιοτιμών του προβλήματος (14.146) - (14.148), ενώ οι συνιστώσες των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων του A προσεγγίζουν τις ιδιοσυναρτήσεις στα σημεία



$$x_k, \quad k = 1(1)N - 1.$$

Παράδειγμα 14.10 Να προσεγγιστούν οι ιδιοτιμές του προβλήματος (14.147) με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών με $N = 4$.

Λύση Είναι $h = \frac{1}{4}$ και $x_k = kh = \frac{k}{4}$, $k = 0(1)4$, $p(x) \equiv 0$ και $r(x) \equiv 1$, $0 \leq x \leq 1$. Επομένως, ο πίνακας A της (14.151) είναι

$$\begin{bmatrix} 32 & -16 & 0 \\ -16 & 32 & -16 \\ 0 & -16 & 32 \end{bmatrix}$$

και οι ιδιοτιμές αυτού είναι $\bar{\lambda}_1 = 16(2 - \sqrt{2}) \approx 9.3726$, $\bar{\lambda}_2 = 32$, $\bar{\lambda}_3 = 16(2 + \sqrt{2}) \approx 54.6274$. Ας σημειωθεί ότι οι πρώτες τρεις ακριβείς ιδιοτιμές του (14.147) είναι $\lambda_1 = \pi^2 \approx 9.8696$, $\lambda_2 = 4\pi^2 \approx 39.4784$ και $\lambda_3 = 9\pi^2 \approx 88.8264$. ▲

Για το πρόβλημα (14.147) θα δειχθεί τώρα, ότι εφαρμόζοντας την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών με $h = \frac{1}{N}$ μπορούμε να βρούμε αναλυτικές εκφράσεις για τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A στην (14.151). Η αντίστοιχη της (14.149) για το πρόβλημα (14.147) είναι

$$\psi_{k+1} - (2 - \lambda h^2)\psi_k + \psi_{k-1} = 0, \quad k = 1(1)N - 1, \quad \psi_0 = \psi_N = 0. \quad (14.152)$$

Η (14.152) είναι μία ομογενής εξίσωση διαφορών δευτέρας τάξεως, της οποίας η λύση είναι

$$\psi_k = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k, \quad k = 0(1)N, \quad (14.153)$$

όπου C_1, C_2 σταθερές, οι οποίες θα προσδιοριστούν χρησιμοποιώντας τις



$\psi_0 = \psi_N = 0$ και z_1, z_2 οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$z^2 - (2 - \lambda h^2)z + 1 = 0 .$$

Είναι φανερό ότι $z_1 z_2 = 1$ ή $z_2 = z_1^{-1}$, οπότε $\psi_k = C_1 z_1^k + C_2 z_1^{-k}$.
Οι σταθερές C_1, C_2 ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1 z_1^N + C_2 z_1^{-N} &= 0 . \end{aligned} \quad (14.154)$$

Επειδή θέλουμε η λύση (14.153) να μην είναι τετριμμένη, πρέπει το σύστημα (14.154) να έχει λύση μη μηδενική, πράγμα που συμβαίνει εάν και μόνον εάν

$$z_1^{-N} - z_1^N = 0 . \quad (14.155)$$

Από την εξίσωση (14.155) προκύπτει ότι

$$z_1 = e^{\frac{2m\pi i}{2N}} = e^{\frac{m\pi i}{N}}, \quad m \text{ ακέραιος},$$

οπότε $z_2 = e^{-\frac{m\pi i}{N}}$. Επειδή $z_1 + z_2 = 2 - \lambda h^2$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \lambda \equiv \bar{\lambda}_m &= \frac{2 - z_1 - z_2}{h^2} = \frac{1}{h^2} \left(2 - e^{\frac{m\pi i}{N}} - e^{-\frac{m\pi i}{N}} \right) = \\ &= \frac{1}{h^2} \left(2 - 2 \cos \frac{m\pi}{N} \right) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{m\pi}{2N} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{m\pi h}{2} . \end{aligned} \quad (14.156)$$

Λαμβάνοντας $C_1 = \frac{1}{2i}$, οπότε $C_2 = -C_1 = -\frac{1}{2i}$, έχουμε από την (14.153)

$$\psi_k \equiv \psi_{k,m} = \frac{1}{2i} \left(e^{\frac{mk\pi i}{N}} - e^{-\frac{mk\pi i}{N}} \right) = \sin \frac{mk\pi}{N} , \quad (14.157)$$

$$k = 1(1)N - 1 .$$



Από την (14.156) για $m = 1(1)N - 1$ προκύπτουν $N - 1$ διακεκριμένες τιμές που είναι οι ιδιοτιμές του $(N - 1) \times (N - 1)$ πίνακα A , δηλαδή οι

$$\bar{\lambda}_m = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{m\pi h}{2} = 4N^2 \sin^2 \frac{m\pi}{2N}, \quad m = 1(1)N - 1. \quad (14.158)$$

Οι συνιστώσες του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος της $\bar{\lambda}_m$ είναι

$$\psi_{k,m} = \sin \frac{mk\pi}{N}, \quad k = 1(1)N - 1.$$

Παρατηρούμε ότι (αφού $y_m(x) = \sin m\pi x$, $m = 1, 2, \dots$ είναι οι ακριβείς ιδιοσυναρτήσεις) ισχύει $y_m(x_k) = \sin m\pi x_k = \sin m\pi kh =$

$$= \sin \frac{mk\pi}{N} = \psi_{k,m}, \quad m = 1(1)N - 1, \quad k = 1(1)N - 1. \text{ Από την (14.158)}$$

π.χ. για $N = 100$ βρίσκουμε $\bar{\lambda}_1 \approx 9.8688$, $\bar{\lambda}_2 \approx 39.4654$, $\bar{\lambda}_3 \approx 88.7607$, κ.ο.κ. .

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Να μετατραπεί η διαφορική εξίσωση $y'' + xy = 0$ σε μια διανυσματική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.
2. Να γραφεί το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'' = 2y' + y^2 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

σαν σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως με αρχικές συνθήκες.

3. Να μετατραπεί το σύστημα
$$\begin{cases} y'' = f_1(x, y, z, y', z') \\ z'' = f_2(x, y, z, y', z') \end{cases}$$
 σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως.

4. Να δειχθεί, ότι τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών:



i) $y' = \frac{1}{1+y^2}$, $a \leq x \leq b$, $y(a) = y_0$

ii) $y' = Ay$, $a \leq x \leq b$, $y(a) = y_0$, $A = \text{σταθ.}$

έχουν μία μοναδική λύση $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ και $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

5. Να δειχθεί, ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών: $y' = \frac{y}{x-1}$, $0 \leq x \leq b < 1$, $y(0) = y_0$ έχει μία μοναδική λύση ($\forall y_0 \in \mathbb{R}$).
6. Δίνεται το πρόβλημα $y' = y$, $y(0) = 1$. Έστω $\hat{x} > 0$ ένα συγκεκριμένο σημείο. θεωρώντας το διάστημα $[a, b] \equiv [0, \hat{x}]$ να βρεθεί η προσέγγιση Ψ_N για την $y(\hat{x})$ με την μέθοδο του Euler. Να δειχθεί, ότι $\lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_N = y(\hat{x}) = e^{\hat{x}}$.
7. Δίνεται το πρόβλημα $y' = f(x)$, $a \leq x \leq b$, $y(a) = y_0$. Να βρεθεί με την μέθοδο Euler η προσέγγιση Ψ_N για την $y(b)$ ($b \equiv x_N$).
8. Δίνεται το πρόβλημα $y' = 2y - 2x - 1$, $y(0) = 2$. Να προσεγγιστεί η $y(1)$ με την μέθοδο Euler χρησιμοποιώντας $h = \frac{1}{4}$.
9. Για το πρόβλημα $y' = \frac{5y}{1+xy}$, $y(1) = -\frac{1}{2}$ να προσεγγιστεί η $y(0.6)$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο Euler με $h = -0.2$.
10. Να γραφεί η μέθοδος του Euler για το σύστημα $\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases}$, $a \leq x \leq b$, $y(a) = y_0$, $z(a) = z_0$. Στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί αυτή με $h = 0.1$ για την εύρεση της αριθμητικής λύσεως του συστήματος: $y' = z$, $z' = -y$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$.
11. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της σειράς Taylor δευτέρας τάξεως ($m = 2$) με $h = 0.5$ να βρεθεί η αριθμητική λύση του προβλήματος $y' = 1 - \frac{y}{x}$, $1 \leq x \leq 5$, $y(1) = 1.5$. Να συγκριθεί αυτή με την ακριβή λύση: $y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.



12. Να δειχθεί, ότι το πρόβλημα $y' = ax$, $y(x_0) = y_0$, x_0, y_0 γνωστά $a = \text{σταθ.}$ λύνεται ακριβώς με την τροποποιημένη μέθοδο του Euler.
13. Για το πρόβλημα $y' = 1 - xy^2$, $y(0) = 0$ να προσεγγιστεί η $y(0.5)$: i) με την μέθοδο της σειράς Taylor τετάρτης τάξεως και ii) με την κλασσική μέθοδο Runge-Kutta τετάρτης τάξεως. Να ληφθεί $h = 0.5$ και για τις δύο μεθόδους.
14. Εάν η $f(x, y)$ δεν εξαρτάται από το y , να δειχθεί, ότι η μέθοδος Runge-Kutta (14.40) είναι ισοδύναμη με τον κανόνα του Simpson (με βήμα $\frac{h}{2}$).
15. Για το πρόβλημα $y' = -y$, $y(0) = 1$ να βρεθεί μία αναλυτική έκφραση για την $y(h)$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο Runge-Kutta (14.40) (h είναι το βήμα της μεθόδου). Να συγκριθεί αυτή με την ακριβή λύση $y(h) = e^{-h}$.
16. Για το σύστημα:
$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases}, \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = y_0, \quad z(a) = z_0$$
 να γραφεί η μέθοδος Runge-Kutta (14.40).
17. Για την μέθοδο Euler να δειχθεί ότι $\left| \sum_{i=1}^K \tau_i \right| \leq A$, όπου το τ_i δίνεται από την (14.48) και A είναι το άνω φράγμα για το $|e_K|$, που δίνεται από την (14.57) για $m = 1$.
18. Να βρεθεί ένα άνω φράγμα για το απόλυτο ολικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου Euler στο σημείο $x_K = kh$, $k = 0(1)N$, $h = \frac{1}{N}$ για το πρόβλημα: $y' = \frac{1}{1 + y^2}$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = 1$.
19. Να αποδειχθεί η (14.61).
20. Να βρεθεί ένα άνω φράγμα για το απόλυτο τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου Euler στο σημείο x_{K+1} για το πρόβλημα: $y' = y \cos x + \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, $y(0) = 1$.



21. Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου (14.37) στο σημείο x_{k+1} .
22. Να βρεθεί η μέθοδος, που προκύπτει από την (14.78) για $m = 2$ και $r = 0$.
23. Για το πρόβλημα $y' = y$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = 1$ να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του τραπεζίου με $h = 0.1$.
24. Να γραφεί η μέθοδος Adams – Bashforth τετάρτης τάξεως για το σύστημα:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}, \quad a \leq x \leq b, \quad \begin{matrix} y(a) = y_0 \\ z(a) = z_0 \end{matrix}.$$

25. Για το πρόβλημα $y' = x + e^x y$, $y(0) = 1$ να βρεθεί η ψ_1 με την μέθοδο του τραπεζίου χρησιμοποιώντας $h = 0.1$.
26. Να δειχθεί, ότι στις (14.73), (14.78) ισχύουν αντίστοιχα οι σχέσεις:

$$\sum_{i=0}^r A_i = m, \quad \sum_{i=0}^{r+1} B_i = m.$$

27. Για το πρόβλημα $y' = 20(y - 1)x^2$, $y(1) = 1$ να βρεθεί μία προσέγγιση για την $y(2)$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο του μέσου με $h = 0.1$ και $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = 1 + \varepsilon$ (ακριβής λύση: $y(x) = 1$). Να γίνει εφαρμογή για $\varepsilon = 10^{-7}$.
28. Να προσδιοριστούν οι σταθερές A_1, A_2, B_1, B_2 , έτσι ώστε η ακόλουθη μέθοδος πολλών βημάτων:
- $$\psi_{k+1} = A_1 \psi_k + A_2 \psi_{k-1} + h \left[B_1 f(x_k, \psi_k) + B_2 f(x_{k-1}, \psi_{k-1}) \right], \quad k \geq 1$$
- να είναι όσον το δυνατόν περισσότερο ακριβής.

29. Εάν $f(x, y) = c_1 x + c_2 y + c_3$ (γραμμική ως προς x και y), να δειχθεί ότι η predictor-corrector μέθοδος Euler-τραπεζίου είναι ισοδύναμη με την μέθοδο της σειράς Taylor δευτέρας τάξεως.



30. Αν $\tau_{k+1}^{(p)}$ είναι το τοπικό σφάλμα αποκοπής της explicit μεθόδου πολλών βημάτων (βλέπε (14.73)):

$$\psi_{k+1} = \psi_{k+1-l} + h \sum_{i=0}^r A_i f(x_{k-i}, \psi_{k-i}) \quad (1)$$

και $\tau_{k+1}^{(c)}$ το τοπικό σφάλμα αποκοπής της implicit μεθόδου πολλών βημάτων (βλέπε (14.78)):

$$\psi_{k+1} = \psi_{k+1-m} + h \sum_{i=0}^{q+1} B_i f(x_{k+1-i}, \psi_{k+1-i}), \quad (2)$$

να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής της predictor-corrector μεθόδου των (1), (2) .

31. Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής των predictor-corrector μεθόδων: i) Milne-Simpson και ii) Adams τετάρτης τάξεως.
32. Να δειχθεί ότι η λύση της (14.112) δίνεται από την (14.113).
33. Να εξετασθούν ως προς την ευστάθεια οι μέθοδοι: 1) Milne 2) Simpson
 3) $3\psi_{k+1} = 2\psi_k + \psi_{k-1} + 4hf_k$ 4) $5\psi_{k+1} = 4\psi_k + \psi_{k-1} +$
 $+ h(2f_{k+1} + 4f_k)$ 5) $\psi_{k+1} = 5\psi_{k-1} - 4\psi_k + h(4f_k + 2f_{k-1})$
 6) $\psi_{k+1} = 3\psi_k - 2\psi_{k-1} + \frac{h}{2}(f_{k+1} + 2f_k + f_{k-1})$ 7) $\psi_{k+1} =$
 $= \frac{1}{2}(\psi_k + \psi_{k-1}) + \frac{3h}{4}(3f_k - f_{k-1})$.
34. Να δειχθεί ότι οι μέθοδοι (14.76), (14.77), (14.81), (14.82) και (14.83) είναι ισχυρά ευσταθείς.
35. Δίνεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών: $y'' = -\pi^2 y$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = b_1$. Να δειχθεί ότι, εάν $b_1 \neq 0$, αυτό δεν έχει λύση, ενώ για $b_1 = 0$ έχει άπειρες λύσεις.
36. Να δειχθεί, ότι η ακριβής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών: $y'' + y' + y = -(x^2 + x + 1)$, $y(0) = y(1) = 0$ είναι $y(x) = x(1-x)$.
37. Να γραφεί η αντίστοιχη της (14.141), εάν αντί της (14.137) χρησιμο-



ποιηθεί η

$$y'(x_k) \approx \begin{cases} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} & , \text{ εάν } p(x_k) \geq 0 \\ \frac{y_k - y_{k-1}}{h} & , \text{ εάν } p(x_k) < 0 . \end{cases}$$

Εάν $q(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b]$, να δειχθεί, ότι ο πίνακας των συντελεστών του αντίστοιχου συστήματος (14.144) είναι αυστηρά διαγώνια υπέρτερος ανεξάρτητα από την τιμή του h .

38. Για το πρόβλημα $y'' = x^2 y' + y$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$, $1 \leq x \leq 2$, να εφαρμοστεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών με $N = 5$.

39. Να εφαρμοστεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στα ακόλουθα προβλήματα:

i) $y'' - xy' + y = 1$, $y(0) = y(2) = 0$, $0 \leq x \leq 2$ (με $h = 1$)

ii) $y'' = y$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $0 \leq x \leq 1$ (με $h = 0.2$)

iii) $y'' + y' = y^2$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $0 \leq x \leq 1$ (με $h = 0.1$)

iv) $xy'' + y = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 2$, $1 \leq x \leq 2$ (με $h = \frac{1}{2}$)

v) $y'' = x^2 + xy$, $y(1) = 2$, $y(2) = 1$, $1 \leq x \leq 2$ (με $h = \frac{1}{4}$) .

40. Να εφαρμοστεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών για το πρόβλημα:

$$y'' = f(x, y, y') , \quad a \leq x \leq b , \quad y'(a) = b_0 , \quad y'(b) = b_1 .$$

41. Αν στην (14.132) είναι $P(x) \equiv 0$, να δειχθεί, ότι ο πίνακας A του συστήματος (14.144) είναι συμμετρικός. Αν επιπλέον ισχύει $q(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, να δειχθεί, ότι ο A είναι και θετικά ορισμένος. Να βρεθεί ο πίνακας A στην περίπτωση: $p(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0$.

42. Για το πρόβλημα ιδιοτιμών $y'' = -\lambda xy$, $y(0) = y(1) = 0$, $0 \leq x \leq 1$ να εφαρμοστεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών με $h = \frac{1}{4}$.



43. Το πρόβλημα $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$, $x \geq 0$ έχει την μη τετριμμένη λύση $y(x) = \frac{x^2}{4}$. Να εφαρμοστεί η μέθοδος Euler. Ποια λύση βρίσκει αυτή και γιατί;
44. Να εφαρμοστεί η μέθοδος Euler στα ακόλουθα προβλήματα:
- i) $y' = x^2 - y^3$, $y(0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$ (με $h = 0.1$)
 - ii) $y' = e^y$, $y(0) = -1$, $0 \leq x \leq 1$ (με $h = 0.1$)
 - iii) $y'' + yy' - y^2 = x + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $0 \leq x \leq 1$
(με $h = \frac{1}{2}$).
45. Να εφαρμοστούν οι μέθοδοι της σειράς Taylor για $m = 2, 3$ στα ακόλουθα προβλήματα:
- i) $y' = xy + y^2$, $y(0) = 1$, $0 \leq x \leq 1$ (με $h = 0.1$)
 - ii) $yy' + 2(xy - 1) = 0$, $y(1) = 1$, $1 \leq x \leq 2$ (με $h = \frac{1}{2}$).
46. Να εφαρμοστεί η κλασσική μέθοδος Runge-Kutta τετάρτης τάξεως στα ακόλουθα προβλήματα:
- i) $y'' = x + yy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $0 \leq x \leq 2$ (με $h = 2$)
 - ii) $y' = x + \frac{1}{y}$, $y(1) = 1$, $1 \leq x \leq 2$ (με $h = 1$)
 - iii) $y'' = 2y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$, $1 \leq x \leq 2$ (με $h = \frac{1}{2}$)
 - iv) $y' = y^2 - 4x + 4$, $y(1) = 2$, $1 \leq x \leq 2$ (με $h = \frac{1}{2}$).



15

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

15.1 Ε ι σ α γ ω γ ή

Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί μία εισαγωγή στις πιο γνωστές αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων, που περιέχουν διαφορικές εξισώσεις μέ μερικές παραγώγους (Μ.Δ.Ε.). Η αριθμητική επίλυση τέτοιων προβλημάτων είναι ένα από τα σημαντικότερα και πολυπλοκότερα θέματα της Αριθμητικής Αναλύσεως και παρουσιάζει τεράστιο ενδιαφέρον από πρακτικής πλευράς. Είναι γνωστό, ότι η μαθηματική περιγραφή (μαθηματικά μοντέλα) φυσικών καταστάσεων και διαδικασιών γίνεται κυρίως με Μ.Δ.Ε. και ότι μό-
νον για μερικές απλές Μ.Δ.Ε. μπορεί να βρεθεί αναλυτικά (σε κλειστή μορφή) η γενική λύση, με αποτέλεσμα να καταφεύγουμε συνήθως σε αριθμητικές μεθόδους.

Ένας μεγάλος αριθμός από τα σπουδαιότερα προβλήματα, που παρουσιάζονται σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους (π.χ. Φυσική, Χημεία, Μετεωρολογία, Μηχανική), περιέχει Μ.Δ.Ε. δευτέρας τάξεως. Μία Μ.Δ.Ε. δευτέρας τάξεως με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές (στις οποίες θα περιοριστούμε χάριν απλότητας) είναι μία εξίσωση της μορφής:



$$F(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) = 0, \quad (15.1)$$

η οποία συνδέει την άγνωστη πραγματική συνάρτηση $u = u(x,y)$, τις παραγώγους (μέχρι δευτέρας τάξεως) αυτής και τις ανεξάρτητες μεταβλητές x,y . Μία σημαντική κατηγορία των Μ.Δ.Ε. (15.1) είναι οι γραμμικές. Η πιο γενική μορφή αυτών είναι (ο συμβολισμός $u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ κλπ. θα χρησιμοποιείται συχνά στα ακόλουθα)

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (15.2)$$

όπου A,B,C,D,E,F και G είναι δοσμένες συναρτήσεις των x,y . Σε ένα τυπικό πρόβλημα, που περιέχει την (15.2), δίνεται μία περιοχή R του επιπέδου xy , φραγμένη ή μή, στην οποία οι συναρτήσεις $A,B,\dots,G$ είναι συνεχείς, S είναι το σύνορο αυτής και ζητείται να βρεθεί μία συνάρτηση-λύση $u(x,y)$ η οποία: i) είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και ικανοποιεί την (15.2) στην R ii) είναι συνεχής στο σύνολο $R \cup S$ και iii) ικανοποιεί προκαθορισμένες (βοηθητικές) συνθήκες στο σύνορο S .

Η (15.2) καλείται ελλειπτική, υπερβολική, παραβολική στην περιοχή που θεωρούμε, εάν η διακρίνουσα $B^2 - AC$ είναι αντίστοιχα < 0 , > 0 , $= 0$ στην περιοχή αυτή. Για παράδειγμα η εξίσωση δυναμικού ή εξίσωση του Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$ είναι ελλειπτική, η εξίσωση κύματος: $u_{xx} - u_{yy} = 0$ είναι υπερβολική και η εξίσωση διαχύσεως: $u_{xx} - u_y = 0$ είναι παραβολική.

Όπως με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, δύο σημαντικές κατηγορίες προβλημάτων με Μ.Δ.Ε. είναι τα προβλήματα αρχικών τιμών και τα προβλήματα συνοριακών τιμών. Σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών η ζητούμενη συνάρτηση $u(x,y)$ πρέπει να ικανοποιεί την (15.2) σε μία μη φραγμένη περιοχή R του επιπέδου xy και επιπλέον να ικανοποιεί βοηθητικές (αρχικές και συνοριακές) συνθήκες στο σύνορο S της R . Σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών η περιοχή R είναι φραγμένη και η ζητούμενη συνάρτηση $u(x,y)$ πρέπει να ικανοποιεί την (15.2) στην R καθώς και βοηθητικές (συνοριακές) συνθήκες στο σύνορο S της R . Ένα πρόβλημα αρχικών ή



συνοριακών τιμών θα καλείται ελλειπτικό, υπερβολικό, παραβολικό, εάν η (15.2) είναι του αντίστοιχου τύπου. Υπάρχουν τρεις κύριοι τύποι βοηθητικών συνθηκών. Εάν στις βοηθητικές συνθήκες καθορίζεται μόνον η $u(x,y)$ στο σύνορο S , τότε έχουμε συνθήκες Dirichlet. Εάν δίνεται μόνον η κάθετος παράγωγος $\frac{\partial u}{\partial n}$ στο S , έχουμε συνθήκες Neumann, ενώ αν δίνονται οι $u(x,y)$ και $\frac{\partial u}{\partial n}$ στο S , τότε έχουμε συνθήκες Cauchy. Τέλος, αν δίνεται ένας γραμμικός συνδυασμός των $u(x,y)$ και $\frac{\partial u}{\partial n}$ στο S , τότε έχουμε συνθήκες μικτού τύπου.

Πρέπει να σημειωθεί ότι, πρίν εφαρμόσουμε μία αριθμητική μέθοδο, πρέπει να εξετάσουμε εάν το δοθέν πρόβλημα M.D.E. είναι ή όχι καλώς τεθέν (well posed or properly posed). Ένα πρόβλημα λέμε ότι είναι καλώς τεθέν, εάν έχει μία μοναδική λύση και είναι και ευσταθές, που σημαίνει ότι η λύση εξαρτάται συνεχώς από τις βοηθητικές συνθήκες, δηλαδή μικρές μεταβολές στις δοσμένες βοηθητικές συνθήκες μπορούν να προκαλέσουν μόνον μία αντίστοιχη μικρή μεταβολή στη λύση $u(x,y)$. Σαν κανόνες, τα ελλειπτικά προβλήματα συνοριακών τιμών με συνθήκες Dirichlet ή Neumann, τα υπερβολικά προβλήματα αρχικών τιμών με συνθήκες Cauchy και τα παραβολικά προβλήματα αρχικών τιμών με συνθήκες Dirichlet ή Neumann έχουν μοναδική λύση και είναι ευσταθή. Όλα τα προβλήματα που εξετάζονται στο παρόν κεφάλαιο είναι καλώς τεθέντα.

15.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Μία από τις πιο γνωστές και σημαντικές αριθμητικές μεθόδους επιλύσεως M.D.E. είναι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών, που χρησιμοποιήθηκε ήδη και σε προβλήματα συνοριακών τιμών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (βλέπε παράγραφο 14.6.3). Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών σε μερικά απλά προβλήματα M.D.E. .

I. Θεωρούμε πρώτα το ακόλουθο ελλειπτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών με συνθήκες Dirichlet, που περιέχει την εξίσωση του Poisson:

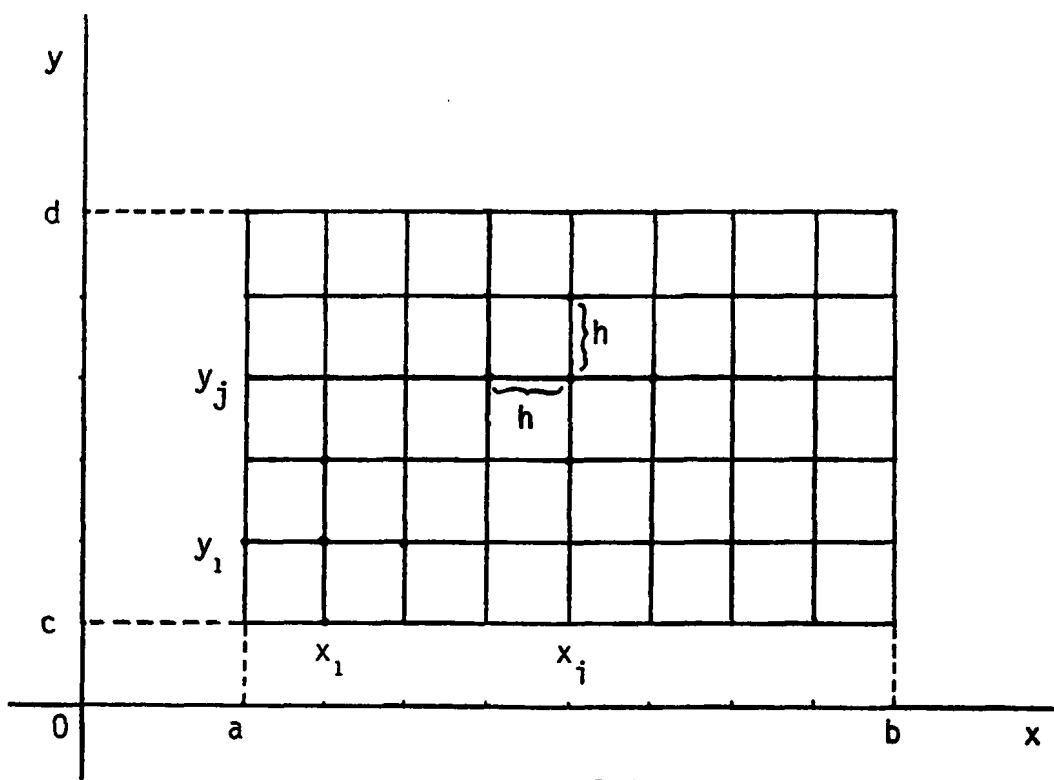


$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = G(x,y), \quad a < x < b, \quad c < y < d \quad \text{με}$$

$$u(a,y) = g_1(y), \quad u(b,y) = g_2(y) \quad \text{για} \quad c \leq y \leq d, \quad (15.3)$$

$$u(x,c) = f_1(x), \quad u(x,d) = f_2(x) \quad \text{για} \quad a \leq x \leq b,$$

όπου G, g_1, g_2, f_1, f_2 είναι δοσμένες συναρτήσεις. Στο πρόβλημα αυτό η περιοχή R είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο επίπεδο xy και η $u(x,y)$ είναι γνωστή στις πλευρές αυτού (βλέπε σχ. 15.1).



σχ. 15.1

Καλύπτουμε την περιοχή R με ένα δικτυωτό από οριζόντιες και κάθετες γραμμές (βλέπε σχ. 15.1), δηλαδή με τετράγωνα πλευράς h υποθέτοντας ότι $b - a = mh$ και $d - c = nh$, όπου m, n θετικοί ακέραιοι και h θετικός αριθμός. Θεωρούμε τα σημεία (x_i, y_j) , $i = 0(1)m$, $j = 0(1)n$, όπου $x_i = a + ih$, $y_j = c + jh$ ($x_0 = a$, $x_m = b$, $y_0 = c$, $y_n = d$). Με την μέθοδο των διαφορών προσπαθούμε να βρούμε προσεγγιστικές τιμές για την λύση $u(x,y)$ στα σημεία τομής των γραμμών του δικτυωτού, δηλα-



δή στα σημεία (x_i, y_j) , $i = 1(1)m - 1$, $j = 1(1)n - 1$ πλήθους $(m - 1)(n - 1)$, τα οποία καλούνται κόμβοι. Συμβολίζουμε με U_{ij} , $i = 0(1)m$, $j = 0(1)n$ τις προσεγγιστικές τιμές των αντίστοιχων ακριβών τιμών $u(x_i, y_j) \equiv u_{ij}$ της λύσεως. Κατ' αναλογία προς την (14.138) μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) \quad (15.4)$$

και

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} + O(h^2) . \quad (15.5)$$

Αντικαθιστώντας τις (15.4), (15.5) στη δοθείσα Μ.Δ.Ε. (15.3) στο σημείο (x_i, y_j) παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} + O(h^2) = \\ & = G(x_i, y_j) \equiv G_{ij} , \end{aligned} \quad (15.6)$$

$i = 1(1)m - 1, j = 1(1)n - 1$. Παραλείποντας τους όρους $O(h^2)$ και αντικαθιστώντας τις ακριβείς τιμές u_{ij} με τις προσεγγιστικές U_{ij} παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

$$4U_{ij} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1} = -h^2 G_{ij} , \quad (15.7)$$

$$i = 1(1)m - 1 , j = 1(1)n - 1 ,$$

όπου οι τιμές U_{0j} , U_{mj} , U_{i0} , U_{in} είναι γνωστές λόγω των συνοριακών συνθηκών (βλέπε (15.3)). Συγκεκριμένα έχουμε

$$\begin{aligned} U_{0j} &= u_{0j} \equiv u(x_0, y_j) = u(a, y_j) = g_1(y_j) \\ U_{mj} &= u_{mj} \equiv u(x_m, y_j) = u(b, y_j) = g_2(y_j) \end{aligned} \quad (15.8)$$



$$U_{i0} = u_{i0} \equiv u(x_i, y_0) = u(x_i, c) = f_1(x_i) \quad (15.8)$$

$$U_{in} = u_{in} \equiv u(x_i, y_n) = u(x_i, d) = f_2(x_i) .$$

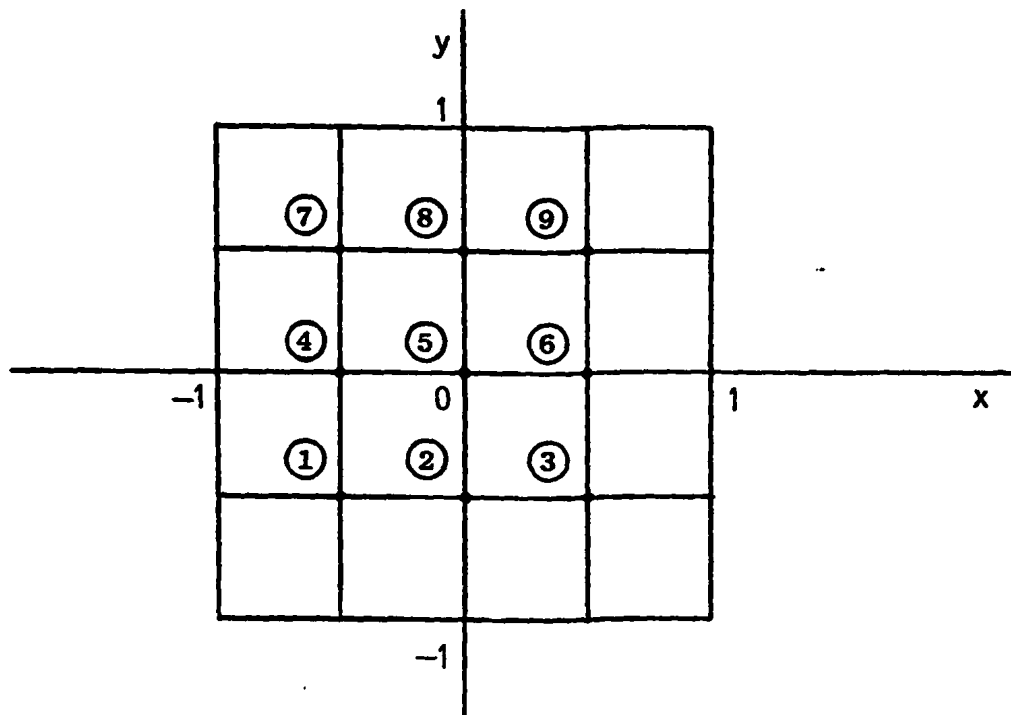
Οι (15.7) αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα, όπου ο αριθμός των εξισώσεων είναι ίσος με τον αριθμό των κόμβων του δικτυωτού, δηλαδή ένα σύστημα $(m-1)(n-1)$ αγνώστων με ισάριθμες εξισώσεις. Οι άγνωστοι είναι οι U_{ij} , $i = 1(1)m-1$, $j = 1(1)n-1$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το σύστημα αυτό έχει μία μοναδική λύση, η οποία μπορεί να υπολογισθεί με τις μεθόδους του κεφαλαίου 10. Χρησιμοποιώντας επαρκώς μικρό h είναι λογικό να περιμένουμε ότι η λύση U_{ij} , $i = 1(1)m-1$, $j = 1(1)n-1$ του συστήματος (15.7) θα προσεγγίζει επαρκώς τις ακριβείς τιμές u_{ij} , $i = 1(1)m-1$, $j = 1(1)n-1$. Στα πρακτικά προβλήματα ο αριθμός των κόμβων του δικτυωτού, δηλαδή ο αριθμός των αγνώστων, είναι πολύ μεγάλος (μεγάλα γραμμικά συστήματα με αραιό πίνακα συντελεστών των αγνώστων) και συχνά οι επαναληπτικές μέθοδοι (βλέπε κεφ. 10) προτιμώνται για την επίλυση τέτοιων συστημάτων.

Σημείωση Στην προηγούμενη ανάλυση της μεθόδου διαφορών για το πρόβλημα (15.3) υποθέσαμε ότι η περιοχή R καλύφθηκε με ένα δικτυωτό αποτελούμενο από τετράγωνα πλευράς h . Μπορεί να γίνει ανάλογη ανάλυση χρησιμοποιώντας δικτυωτό αποτελούμενο από ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαστάσεων h και k με $h = \frac{b-a}{m}$, $k = \frac{d-c}{n}$, όπου m, n θετικοί ακέραιοι (ασκ. 10).

Παράδειγμα 15.1 Να εφαρμοσθεί η μέθοδος των διαφορών στο πρόβλημα (15.3), όπου $G(x, y) \equiv 0$ (εξίσωση Laplace), $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 1$, $g_1(y) = g_2(y) = y^2$, $f_1(x) = f_2(x) = x^2$ χρησιμοποιώντας $h = \frac{1}{2}$.

Λύση Είναι $m = n = \frac{1 - (-1)}{h} = 4$ και στην περίπτωση αυτή έχουμε το ακόλουθο σχήμα (σχ. 15.2)





σχ. 15.2

Λόγω των (15.8) έχουμε $U_{0j} = y_j^2$, $U_{4j} = y_j^2$, $j = 1(1)3$, όπου $y_j = -1 + jh$. Άρα

$$U_{01} = \frac{1}{4}, U_{02} = 0, U_{03} = \frac{1}{4} \text{ και } U_{41} = \frac{1}{4}, U_{42} = 0, U_{43} = \frac{1}{4}. \quad (15.9)$$

Επίσης $U_{i0} = U_{i4} = x_i^2 = (-1 + ih)^2$, $i = 1(1)3$, δηλαδή

$$U_{10} = \frac{1}{4}, U_{20} = 0, U_{30} = \frac{1}{4}, U_{14} = \frac{1}{4}, U_{24} = 0, U_{34} = \frac{1}{4}. \quad (15.10)$$

Από την (15.7) παίρνουμε ένα σύστημα 9 εξισώσεων με τους 9 αγνώστους U_{ij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$. Εάν αριθμήσουμε με ①, ②, ..., ⑨ τους 9 κόμβους του δικτυωτού, όπως φαίνεται στο σχήμα 15.2, και συμβολίσουμε με Y_K τον άγνωστο, που αντιστοιχεί στον κόμβο ⑥, $K = 1(1)9$, δηλαδή θέσουμε

$$Y_1 = U_{11}, Y_2 = U_{21}, Y_3 = U_{31}, Y_4 = U_{12}, Y_5 = U_{22}, \\ Y_6 = U_{32}, Y_7 = U_{13}, Y_8 = U_{23}, Y_9 = U_{33},$$



τότε το σύστημα αυτό μπορεί να γραφεί υπό μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ Y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (15.11)$$

ή συνοπτικά $AY = W$. Ο πίνακας A του συστήματος (15.11) είναι συμμετρικός και ασθενώς διαγώνια υπέρτερος. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτός είναι και θετικά ορισμένος και επομένως ομαλός. Η λύση του συστήματος (15.11) είναι: $Y_1 = Y_3 = Y_7 = Y_9 = \frac{3}{16}$ και $Y_2 = Y_5 = Y_6 = Y_4 = Y_8 = \frac{1}{8}$. $\blacktriangle$

Σημείωση Το πρόβλημα:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y) , (x,y) \in R \equiv \{(x,y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \\ u(x,y) = 0 \text{ για } (x,y) \in S = \text{σύνορο της } R , \end{cases}$$

όπου $f(x,y)$ δοσμένη συνεχής συνάρτηση στο $R \cup S$, καλείται model problem (πρόβλημα υπόδειγμα).

II. Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο παραβολικό πρόβλημα αρχικών τιμών με εξίσωση (εξίσωση διαχύσεως)

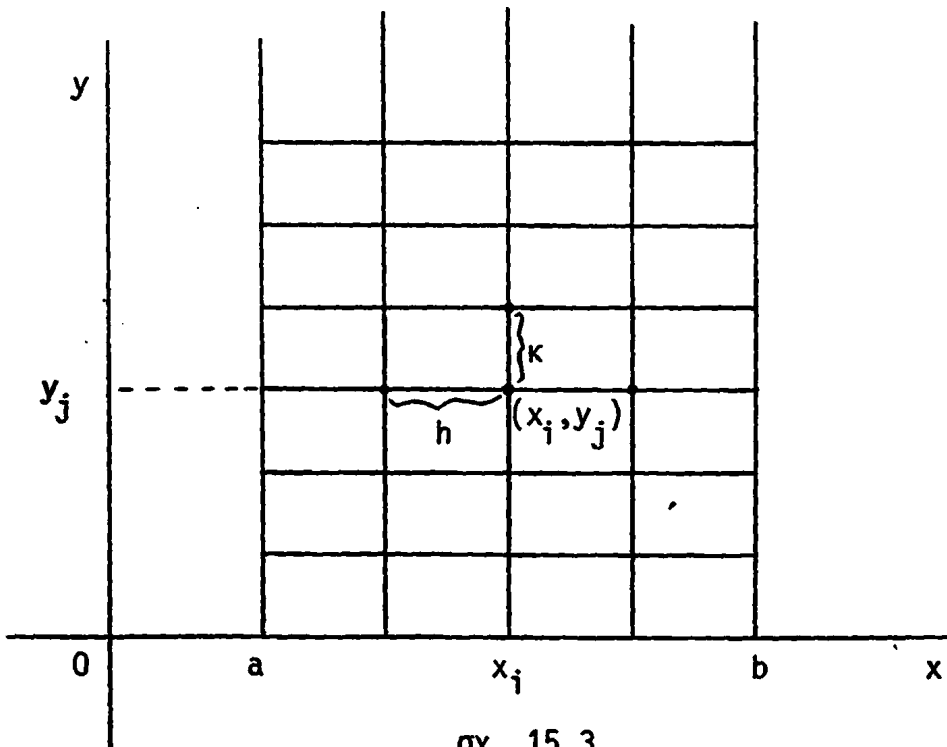
$$\frac{\partial u}{\partial y} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \quad a < x < b , \quad y > 0 , \quad c^2 = \text{σταθ.} \quad (15.12)$$



με τις βοηθητικές συνθήκες Dirichlet:

$$\begin{aligned} \text{αρχική συνθήκη:} \quad u(x,0) &= f(x), \quad a \leq x \leq b \\ \text{συνοριακές συνθήκες:} \quad u(a,y) &= g_1(y), \quad u(b,y) = g_2(y), \quad y \geq 0, \end{aligned} \quad (15.13)$$

όπου f, g_1, g_2 είναι δοσμένες συναρτήσεις. Για την εφαρμογή της μεθόδου των διαφορών στο πρόβλημα (15.12)–(15.13) καλύπτουμε την περιοχή R με ένα δικτυωτό από ορθογώνια διαστάσεων h και k , όπως φαίνεται στο σχήμα 15.3, όπου h, k είναι σταθεροί θετικοί αριθμοί, $h = \frac{b-a}{n}$, $n = \text{θετικός ακέραιος}$.



σχ. 15.3

θεωρούμε τα σημεία (x_i, y_j) , όπου $x_i = a + ih$, $i = 0(1)n$ και $y_j = a + jk$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Χρησιμοποιώντας τους ακόλουθους τύπους για τις μερικές παραγώγους στο σημείο (x_i, y_j) :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{k} + O(k), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (15.14)$$

$$i = 0(1)n$$



(τύπος προς τα εμπρός διαφορών),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + O(h^2), \quad (15.15)$$

$i = 1(1)n - 1, j = 0, 1, 2, \dots$ και παραλείποντας τους όρους $O(\kappa)$ και $O(h^2)$, από την (15.12) προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις για τις προσεγγιστικές τιμές U_{ij} των u_{ij} :

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{ij}}{\kappa} = c^2 \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h^2}, \quad i = 1(1)n - 1, j \geq 0. \quad (15.16)$$

Θέτοντας $\frac{c^2 \kappa}{h^2} = r$ η (15.16) γίνεται

$$U_{i,j+1} = rU_{i-1,j} + (1 - 2r)U_{ij} + rU_{i+1,j}, \quad i = 1(1)n - 1, j \geq 0, \quad (15.17)$$

όπου λόγω των (15.13) έχουμε

$$\begin{aligned} U_{i0} &= u(x_i, 0) = f(x_i), \quad i = 1(1)n - 1, \\ U_{0j} &= g_1(y_j), \quad U_{nj} = g_2(y_j), \quad j \geq 0. \end{aligned} \quad (15.18)$$

Χρησιμοποιώντας τις (15.17) και (15.18) μπορούμε να προσδιορίσουμε απ' ευθείας τις ζητούμενες προσεγγιστικές τιμές U_{ij} , $i = 1(1)n - 1, j = 1, 2, \dots$ της λύσεως $u(x, y)$ στους κόμβους του δικτυωτού με την ακόλουθη σειρά: $U_{i1}, i = 1(1)n - 1, U_{i2}, i = 1(1)n - 1, \kappa.ο.κ.$

Η μέθοδος διαφορών (15.17) με τις (15.18) καλείται προς τα εμπρός μέθοδος διαφορών και είναι μη πεπλεγμένη (explicit), αφού οι άγνωστοι μπορούν να βρεθούν απ' ευθείας.

Η ποσότητα $r = \frac{c^2 \kappa}{h^2}$ καλείται λόγος του δικτυωτού και μπορεί να αποδειχθεί ότι, εάν $0 < r \leq \frac{1}{2}$, δηλαδή

$$\kappa \leq \frac{h^2}{2c^2}, \quad (15.19)$$



τότε για ένα οποιοδήποτε σταθερό σημείο $(\hat{x}, \hat{y})$ της περιοχής R η προσεγγιστική τιμή $U(\hat{x}, \hat{y})$ της $u(\hat{x}, \hat{y})$ στο σημείο αυτό, που προκύπτει από την (15.17), συγκλίνει στην ακριβή τιμή $u(\hat{x}, \hat{y})$ καθώς το $h \rightarrow 0$. Συγκεκριμένα ισχύει $U(\hat{x}, \hat{y}) - u(\hat{x}, \hat{y}) = O(h^2)$. Η (15.19) καλείται συνθήκη ευστάθειας της μεθόδου (15.17). Για $r > \frac{1}{2}$ η μέθοδος (15.17) έχει το μειονέκτημα της αστάθειας. Σημειώνεται εδώ ότι η ευστάθεια μεθόδων για Μ.Δ.Ε. ορίζεται κατά τρόπο όμοιο, όπως για μεθόδους συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η δυσκολία με την explicit μέθοδο (15.17) είναι ότι, εάν το h είναι αρκετά μικρό, πράγμα που συμβαίνει συνήθως στην πράξη, λόγω της (15.19) το κ πρέπει να είναι πάρα πολύ μικρότερο και επομένως η μέθοδος απαιτεί πολλά βήματα ως προς y . Η θεραπεία της δυσκολίας αυτής γίνεται με την χρησιμοποίηση πεπλεγμένων (implicit) μεθόδων, που εξετάζονται στη συνέχεια. Σημειώνεται επίσης ότι, εάν εκλεγεί $\kappa = \frac{h^2}{2c^2}$, τότε είναι $r = \frac{1}{2}$ και η (15.17) απλοποιείται στην

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2} (U_{i-1,j} + U_{i+1,j}), \quad i = 1(1)n - 1, \quad j \geq 0. \quad (15.20)$$

Θεωρούμε πάλι το πρόβλημα (15.12) – (15.13) και το δικτυωτό όπως και προηγουμένως (βλέπε σχ. 15.3). Χρησιμοποιούμε τώρα τις ακόλουθες προσεγγίσεις στο σημείο (x_i, y_{j+1}) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (x_i, y_{j+1}) \approx \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}, \quad i = 1(1)n - 1, \quad j \geq 0 \quad (15.21)$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial y} (x_i, y_{j+1}) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\kappa} \quad (\text{τύπος προς τα πίσω διαφορών}), \quad (15.22)$$

$i = 0(1)n$, $j \geq 0$. Θέτοντας $\frac{c^2 \kappa}{h^2} = m$ η αντίστοιχη της (15.17) θα είναι τώρα η

$$(1 + 2m)U_{i,j+1} - m(U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j+1}) = U_{i,j}, \quad i = 1(1)n - 1, \quad j \geq 0, \quad (15.23)$$



όπου

$$\begin{aligned} U_{i0} &= f(x_i), \quad i = 1(1)n-1, \quad U_{0,j+1} = g_1(y_{j+1}), \\ U_{n,j+1} &= g_2(y_{j+1}), \quad j \geq 0. \end{aligned} \quad (15.24)$$

Η μέθοδος των (15.23)–(15.24) είναι μία πεπλεγμένη (implicit) μέθοδος, αφού για τον προσδιορισμό των αγνώστων για κάθε τιμή του j πρέπει να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα. Υπό μορφή πινάκων οι (15.23) γράφονται

$$\begin{bmatrix} 1+2m & -m & & & \\ -m & 1+2m & -m & & \\ & -m & 1+2m & -m & \\ & & -m & 1+2m & -m \\ & & & -m & 1+2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ \vdots \\ U_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1,j} + mg_1(y_{j+1}) \\ U_{2,j} \\ \vdots \\ U_{n-2,j} \\ U_{n-1,j} + mg_2(y_{j+1}) \end{bmatrix}, \quad j \geq 0 \quad (15.25)$$

ή συνοπτικά

$$AU^{(j+1)} = \bar{U}^{(j)}, \quad j \geq 0, \quad (15.26)$$

δηλαδή έχουμε να λύσουμε πολλά συστήματα με τον ίδιο πίνακα συντελεστών A . Ο πίνακας A είναι τριδιαγώνιος και αυστηρά διαγώνια υπέρτερος (αφού $m > 0$) και επομένως ομαλός, οπότε για κάθε j το σύστημα (15.26) έχει μία μοναδική λύση.

Πρέπει να σημειωθεί, ότι για την μέθοδο διαφορών (15.23) δεν απαιτείται η συνθήκη ευστάθειας (15.19) και ότι αυτή είναι άνευ όρων (απολύτως) ευσταθής.

Θα ασχοληθούμε τώρα με την εύρεση μιας άλλης πεπλεγμένης μεθόδου διαφορών για το πρόβλημα (15.12)–(15.13), που είναι γνωστή σαν μέθοδος των Crank-Nicholson.



Από την (15.12) έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_{j+1}) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_{j+1}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \right] \quad (15.27)$$

Χρησιμοποιώντας τις (15.14), (15.15), (15.21), (15.22) και τις προσεγγιστικές τιμές U_{ij} η (15.27) γίνεται

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{ij}}{\kappa} + \frac{U_{i,j+1} - U_{ij}}{\kappa} = c^2 \left[\frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h^2} \right] \quad \text{ή}$$

$$U_{i,j+1} - U_{ij} = \frac{c^2 \kappa}{2h^2} \left[U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j} \right] .$$

Θέτοντας $\frac{c^2 \kappa}{2h^2} = m$ παίρνουμε

$$(1 + 2m)U_{i,j+1} + (2m - 1)U_{ij} - m \left[U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j+1} \right] = 0 , \quad (15.28)$$

$i = 1(1)n - 1, j = 0, 1, 2, \dots$, όπου ισχύουν οι (15.18). Η (15.28) γράφεται επίσης ως εξής:

$$(1 + 2m)U_{i,j+1} - mU_{i+1,j+1} - mU_{i-1,j+1} = (1 - 2m)U_{ij} + m(U_{i-1,j} + U_{i+1,j}) , \quad (15.29)$$

$i = 1(1)n - 1, j = 0, 1, 2, \dots$ ή υπό μορφή πινάκων



$$\begin{bmatrix}
 1+2m & -m & & & \\
 -m & 1+2m & -m & & \\
 & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup \\
 & & -m & 1+2m & \\
 & & & &
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_{1,j+1} \\
 U_{2,j+1} \\
 \vdots \\
 U_{n-2,j+1} \\
 U_{n-1,j+1}
 \end{bmatrix} =
 \begin{bmatrix}
 (1-2m)U_{1j} + m(U_{0j} + U_{2j}) + mU_{0,j+1} \\
 (1-2m)U_{2j} + m(U_{1j} + U_{3j}) \\
 \vdots \\
 (1-2m)U_{n-2,j} + m(U_{n-3,j} + U_{n-1,j}) \\
 (1-2m)U_{n-1,j} + m(U_{n-2,j} + U_{nj}) + mU_{n,j+1}
 \end{bmatrix}, \quad (15.30)$$

$j \geq 0$. Έτσι για κάθε τιμή του j γνωρίζοντας τις τιμές U_{ij} , $i = 1(1)n - 1$ μπορούμε να βρούμε τις $U_{i,j+1}$, $i = 1(1)n - 1$ από το σύστημα (15.30). Σημειώνεται τέλος ότι η μέθοδος Crank-Nicholson (15.29) - (15.18) είναι επίσης άνευ όρων ευσταθής και πιο ακριβής από την μέθοδο (15.23)-(15.24).

Παράδειγμα 15.2 Για το πρόβλημα

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -1 < x < 1, \quad y > 0$$

$$u(x,0) = 1 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$u(-1,y) = y, \quad u(1,y) = 0, \quad y \geq 0$$

να προσεγγιστεί η $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ με τις μεθόδους διαφορών (15.17), (15.23)



και (15.29) χρησιμοποιώντας $h = \frac{1}{2}$ και $\kappa = \frac{1}{8}$.

Λύση Για το πρόβλημα αυτό είναι $c^2 = 1$, $n = \frac{1 - (-1)}{h} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$,
 $x_i = -1 + ih = -1 + \frac{i}{2}$, $i = 0(1)4$, $y_j = j\kappa = \frac{j}{8}$, $j = 0, 1, 2, \dots$,
 $U_{i0} = 1 - x_i^2$, $i = 0(1)4$, $U_{0j} = y_j$, $U_{4j} = 0$, $j \geq 0$, και ζητούμε
 την U_{31} . Για την μέθοδο (15.17) είναι $r = \frac{1}{2}$ και από την (15.20)
 παίρνουμε για $i = 3$ και $j = 0$: $U_{31} = \frac{1}{2} (U_{20} + U_{40}) = \frac{1}{2} (1 - x_2^2 +$
 $+ 1 - x_4^2) = \frac{1}{2} (2 - 0 - 1) = \frac{1}{2}$.

Για την μέθοδο (15.23) είναι $m = \frac{1}{2}$ και το σύστημα (15.25) για
 $j = 0$ γίνεται

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \\ U_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{10} + \frac{1}{2} y_1 \\ U_{20} \\ U_{30} + \frac{1}{2} 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{16} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}. \quad (15.31)$$

Η λύση του συστήματος (15.31) είναι $U_{11} = \frac{271}{448} \approx 0.605$, $U_{21} = \frac{356}{448} \approx$
 ≈ 0.795 , $U_{31} = \frac{257}{448} \approx 0.574$.

Για την μέθοδο (15.29) έχουμε $m = \frac{1}{4}$ και το σύστημα (15.30)
 για $j = 0$ γίνεται

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \\ U_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} U_{10} + \frac{1}{4} (U_{00} + U_{20}) + \frac{1}{4} U_{01} \\ \frac{1}{2} U_{20} + \frac{1}{4} (U_{10} + U_{30}) \\ \frac{1}{2} U_{30} + \frac{1}{4} (U_{20} + U_{40}) + \frac{1}{4} U_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{32} \\ \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}. \quad (15.32)$$

Η λύση του συστήματος (15.32) είναι $U_{11} = \frac{923}{1632} \approx 0.566$, $U_{21} = \frac{627}{816} \approx$
 ≈ 0.768 , $U_{31} = \frac{889}{1632} \approx 0.545$. ▲

III. Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο υπερβολικό πρόβλημα αρχικών τιμών
 (εξίσωση κύματος)



$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a < x < b, \quad y > 0 \quad (15.33)$$

με τις βοηθητικές συνθήκες Cauchy:

$$\begin{aligned} \text{συνοριακές συνθήκες: } u(a, y) &= g_1(y), \quad u(b, y) = g_2(y), \quad y \geq 0 \\ \text{αρχικές συνθήκες: } u(x, 0) &= f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f_2(x), \quad a \leq x \leq b, \end{aligned} \quad (15.34)$$

όπου $c^2 = \text{σταθ.}$ Χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2} + O(h^2), \\ u_{yy}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{\kappa^2} + O(\kappa^2) \end{aligned} \quad (15.35)$$

και εργαζόμενοι όπως και στο προηγούμενο παραβολικό πρόβλημα προκύπτει η ακόλουθη explicit μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για το πρόβλημα (15.33)-(15.34):

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{\kappa^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (15.36)$$

$i = 1(1)n - 1, j = 0, 1, 2, \dots$, όπου $x_i = a + ih$, $y_j = j\kappa$, $h = \frac{b-a}{n}$,
 $i = 0(1)n, j = 0, 1, 2, \dots$ (βλέπε σχ. 15.4) και

$$u_{i0} = u_{i0} = f_1(x_i), \quad u_{0j} = g_1(y_j), \quad u_{nj} = g_2(y_j), \quad i = 0(1)n, \quad j \geq 0. \quad (15.37)$$

θέτοντας $\frac{c^2 \kappa^2}{h^2} = r$ η (15.36) γράφεται

$$u_{i,j+1} = ru_{i-1,j} + 2(1-r)u_{ij} + ru_{i+1,j} - u_{i,j-1}, \quad i = 1(1)n - 1, \quad j \geq 0. \quad (15.38)$$

Για την εύρεση της $u_{i,-1}$, που απαιτείται στην (15.38) ($j = 0$), χρησι-



μποιούμε τον τύπο (βλέπε και (15.34))

$$f_2(x_i) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, \kappa) - u(x_i, -\kappa)}{2\kappa} + o(\kappa^2) . \quad (15.39)$$

Ο τύπος (15.39) δίνει

$$\frac{U_{i1} - U_{i,-1}}{2\kappa} = f_2(x_i) \quad \text{ή}$$

$$U_{i,-1} = U_{i1} - 2\kappa f_2(x_i) . \quad (15.40)$$

Από την (15.38) για $j = 0$ παίρνουμε

$$U_{i1} = rU_{i-1,0} + 2(1-r)U_{i0} + rU_{i+1,0} - U_{i,-1} . \quad (15.41)$$

Η (15.41) λόγω των (15.37) και (15.40) γίνεται

$$U_{i1} = rf_1(x_{i-1}) + 2(1-r)f_1(x_i) + rf_1(x_{i+1}) - [U_{i1} - 2\kappa f_2(x_i)] \quad \text{ή}$$

$$U_{i1} = \frac{1}{2} rf_1(x_{i-1}) + (1-r)f_1(x_i) + \frac{1}{2} rf_1(x_{i+1}) + \kappa f_2(x_i), \quad (15.42)$$

$i = 1(1)n - 1$. Αφού βρεθούν από την (15.42) οι U_{i1} , $i = 1(1)n - 1$, μετά χρησιμοποιούμε την (15.38) διαδοχικά για $j = 1, 2, 3, \dots$. Η εργασία απλοποιείται σημαντικά αν $f_2(x) \equiv 0$ και $r = 1$. Η μέθοδος διαφορών (15.38)-(15.37)-(15.40) είναι ευσταθής, εάν $0 < r \leq 1$ ($0 < \kappa \leq h$).

Εάν αντί της (15.39) χρησιμοποιήσουμε την

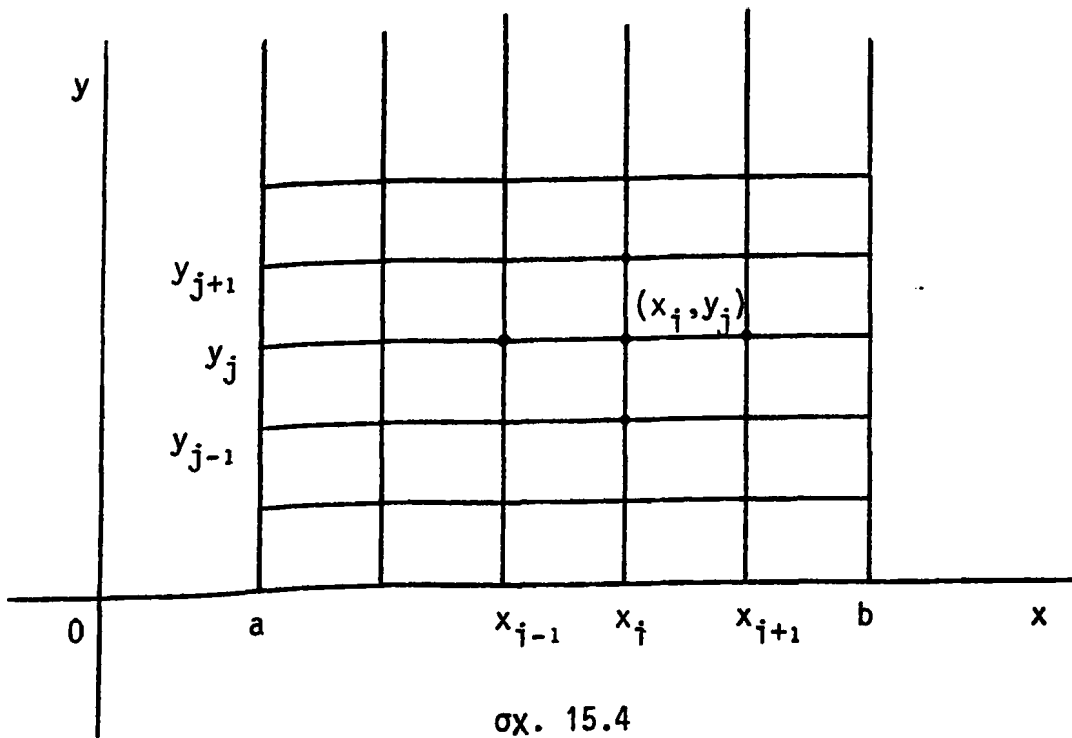
$$f_2(x_i) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, \kappa) - u(x_i, 0)}{\kappa} + o(\kappa) , \quad (15.43)$$

τότε είναι

$$\frac{U_{i1} - U_{i0}}{\kappa} = f_2(x_i) \quad \text{ή} \quad U_{i1} = U_{i0} + \kappa f_2(x_i), \quad i = 1(1)n - 1 \quad \text{και}$$

οι $U_{i2}, U_{i3}, \dots, i = 1(1)n - 1$ υπολογίζονται από την (15.38) ($j \geq 1$). Εάν αντί της (15.39) χρησιμοποιηθεί η





σχ. 15.4

$$f_2(x_i) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, 0) - u(x_i, -\kappa)}{\kappa} + o(\kappa),$$

τότε είναι $\frac{U_{i0} - U_{i,-1}}{\kappa} = f_2(x_i)$ ή $U_{i,-1} = U_{i0} - \kappa f_2(x_i)$ και οι U_{ij} ,
 $i = 1(1)n-1, j = 1, 2, 3, \dots$ υπολογίζονται από την (15.38).

Παράδειγμα 15.3 Για το πρόβλημα $u_{yy} = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $y > 0$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad y \geq 0$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

να προσεγγιστούν οι $u(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}), u(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ με την μέθοδο διαφορών (15.38)-(15.37)-(15.42) χρησιμοποιώντας $h = \kappa = \frac{1}{4}$.

Λύση Έχοντας υπ' όψιν τις (15.33), (15.34) για το πρόβλημά μας είναι $c^2 = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $g_1(y) \equiv 0$, $g_2(y) \equiv 0$, $f_1(x) = \sin \pi x$, $f_2(x) \equiv 0$. Είναι $r = 1$, $n = \frac{1-0}{h} = 4$, $x_i = \frac{i}{4}$, $i = 0(1)4$, $y_j = \frac{j}{4}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $U_{i0} = \sin \pi x_i$, $U_{0j} = 0$, $U_{4j} = 0$, $i = 0(1)4$,



$j \geq 0$ και ζητούμε τις U_{32}, U_{33} .

Η (15.38) γίνεται

$$U_{i,j+1} = U_{i-1,j} + U_{i+1,j} - U_{i,j-1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j \geq 1 \quad (15.44)$$

και από την (15.42) παίρνουμε

$$U_{i1} = \frac{1}{2} \sin \pi x_{i-1} + \frac{1}{2} \sin \pi x_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (15.45)$$

Από την (15.45) βρίσκουμε $U_{11} = \frac{1}{2} (\sin 0 + \sin \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$,

$$U_{21} = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad U_{31} = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi) = \frac{1}{2}.$$

Από την (15.44) για $j = 1$ παίρνουμε $U_{i2} = U_{i-1,1} + U_{i+1,1} - U_{i0}$,

$$i = 1, 2, 3, \text{ τότε } U_{12} = U_{01} + U_{21} - U_{10} = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad U_{22} = U_{11} + U_{31} - U_{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0, \quad U_{32} = U_{21} + U_{41} - U_{30} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Ομοίως από την (15.44) για $j = 2$, $i = 1, 2, 3$ βρίσκουμε $U_{13} = -\frac{1}{2}$,

$$U_{23} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad U_{33} = -\frac{1}{2}. \text{ Σημειώνεται, ότι η αναλυτική λύση του δοθέντος προβλήματος είναι } u(x, y) = \sin \pi x \cos \pi y, \text{ τότε } u(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad u(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) = \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}. \text{ Άρα οι } U_{32}, U_{33}$$

συμπίπτουν με τις ακριβείς τιμές. ▲

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο πρέπει να σημειωθεί, ότι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών μπορεί να εφαρμοσθεί με ανάλογο τρόπο και σε γενικότερα και δυσκολότερα προβλήματα Μ.Δ.Ε. αρχικών και συνοριακών τιμών. Βεβαίως, η πολυπλοκότητα και η δυσκολία στην εφαρμογή της μεθόδου αυξάνει, όταν υπεισέρχεται ένας ή περισσότεροι από τους ακόλουθους παράγοντες: i) περισσότερες από 2 ανεξάρτητες μεταβλητές ii) Μ.Δ.Ε. δευτέρας τάξεως μη γραμμικές iii) Μ.Δ.Ε. ανωτέρας της δευτέρας τάξεως iv) η περιοχή R , στην οποία ζητείται η λύση της Μ.Δ.Ε., είναι πολύπλοκη (δεν έχει μορφή απλού γεωμετρικού σχήματος) v) οι βοηθητικές συνθήκες είναι πολύπλοκες (μικτού τύπου) vi) Σύστημα Μ.Δ.Ε. .



15.3 Η μέθοδος των γραμμών (method of lines, straight-line method)

θεωρούμε πρώτα πάλι το πρόβλημα (15.3). Στη μέθοδο αυτή αντικαθιστούμε το διάστημα $[a, b]$ του x με το σύνολο των διακεκριμένων σημείων $x_i = a + ih$, $i = 0(1)n$, όπου $h = \frac{b-a}{n}$, και κατασκευάζουμε τις ευθείες γραμμές $x = x_i$, $i = 0(1)n$. Αν $u(x, y)$ είναι η ακριβής λύση του προβλήματος (15.3), τότε από την Μ.Δ.Ε. για $x = x_i$, $i = 1(1)n-1$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο των κεντρικών διαφορών για την

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y)$ προκύπτει

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y) + \frac{u(x_{i+1}, y) - 2u(x_i, y) + u(x_{i-1}, y))}{h^2} + O(h^2) = G(x_i, y), \quad (15.46)$$

$i = 1(1)n - 1$. Ζητούμε να βρούμε $n - 1$ συναρτήσεις: $U_1(y)$, $U_2(y)$, ..., $U_{n-1}(y)$, τέτοιες ώστε

$$u(x_i, y) \approx U_i(y), \quad i = 1(1)n - 1, \quad c < y < d \quad (15.47)$$

όπου η $U_i(y)$ ορίζεται κατά μήκος της $x = x_i$. Από την (15.46) προκύπτει παραλείποντας τον όρο $O(h^2)$, ότι μπορούμε να βρούμε τέτοιες συναρτήσεις λύνοντας το ακόλουθο γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως:

$$U_i''(y) = \frac{1}{h^2} [2U_i(y) - U_{i-1}(y) - U_{i+1}(y)] + G(x_i, y), \quad (15.48)$$

$$i = 1(1)n - 1,$$

όπου

$$\begin{aligned} U_i(c) &= f_1(x_i) = f_1(a + ih) \\ U_i(d) &= f_2(x_i) = f_2(a + ih), \quad i = 1(1)n - 1 \\ U_0(y) &= g_1(y), \quad U_n(y) = g_2(y), \quad c \leq y \leq d, \end{aligned} \quad (15.49)$$



λόγω των συνοριακών συνθηκών. Για την λύση του συστήματος (15.48) με τις συνοριακές συνθήκες (15.49) μπορεί να εφαρμοσθεί κάποια από τις μεθόδους της παραγράφου 14.6 του προηγούμενου κεφαλαίου.

Η μέθοδος των γραμμών εφαρμόζεται συνήθως σε προβλήματα αρχικών τιμών. Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε αυτή στο παραβολικό πρόβλημα (15.12) - (15.13). Με ανάλογο τρόπο μπορεί να εφαρμοσθεί και για το πρόβλημα (15.33) - (15.34).

Έχοντας υπ' όψιν τις (15.12), (15.13) και προσεγγίζοντας την

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y)$ όπως και προηγουμένως, όπου $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0(1)n$, η αντίστοιχη της (15.48) για το πρόβλημά μας θα είναι

$$U'_i(y) = \frac{c^2}{h^2} [U_{i+1}(y) - 2U_i(y) + U_{i-1}(y)] \quad , \quad i = 1(1)n-1, \quad (15.50)$$

όπου $U_0(y) = g_1(y)$, $U_n(y) = g_2(y)$, $y \geq 0$ και

$$U_i(0) = f(x_i) = f(a + ih) \quad , \quad i = 1(1)n-1 \quad (15.51)$$

λόγω των αρχικών και συνοριακών συνθηκών (15.13). Οι (15.50) με τις (15.51) αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως με αρχικές συνθήκες, το οποίο υπό διανυσματική μορφή γράφεται

$$V'(y) = BV(y) + D(y) \quad , \quad V(0) = F \quad , \quad y > 0 \quad , \quad (15.52)$$

όπου

$$V(y) = \begin{bmatrix} U_1(y) \\ U_2(y) \\ \vdots \\ U_{n-1}(y) \end{bmatrix} \quad , \quad V'(y) = \begin{bmatrix} U'_1(y) \\ U'_2(y) \\ \vdots \\ U'_{n-1}(y) \end{bmatrix} \quad , \quad B = -\frac{c^2}{h^2} A \quad ,$$



$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ο πίνακας A είναι $(n-1) \times (n-1)$ τριδιαγώνιος, συμμετρικός),

$$D(y) = \frac{c^2}{h^2} \begin{bmatrix} g_1(y) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_2(y) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad F = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Το πρόβλημα αρχικών τιμών (15.52) μπορεί να λυθεί με τις μεθόδους του προηγούμενου κεφαλαίου. Οι τιμές της συναρτήσεως $U_i(y)$ προσεγγίζουν την λύση $u(x,y)$ κατά μήκος της ευθείας γραμμής $x = x_i$, $i = 1(1)n-1$. Είναι εύκολο ναδειχθεί (βλέπε άσκηση 31) ότι, εάν στο πρόβλημα (15.52) εφαρμοσθεί η μέθοδος Euler, τότε προκύπτει η explicit μέθοδος (15.17)–(15.18), ενώ αν εφαρμοσθεί σ' αυτό η μέθοδος του τραπεζίου (βλέπε (14.81)), τότε προκύπτει η μέθοδος Crank-Nicholson.

15.4 Η μέθοδος των χαρακτηριστικών για υπερβολικές Μ.Δ.Ε.

Με την μέθοδο αυτή η Μ.Δ.Ε. μετασχηματίζεται πρώτα σε ένα ισοδύναμο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, το οποίο στη συνέχεια λύνεται αριθμητικά με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Με σκοπό να εξετάσουμε την μέθοδο αυτή θεωρούμε την ακόλουθη Μ.Δ.Ε. δευτέρας τάξεως



$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F, \quad (x,y) \in R \quad (15.53)$$

όπου $u = u(x,y)$ και A,B,C,F είναι γνωστές συναρτήσεις των $x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$. Η (15.53) καλείται σχεδόν-γραμμική (quasi-linear) και προφανώς η μορφή (15.2) είναι ειδική περίπτωση της (15.53). Υποθέτουμε ότι μία λύση $u(x,y)$ της (15.53) καθώς και οι $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ αυτής είναι γνωστές (δίνονται) κατά μήκος μιας καμπύλης Γ του επιπέδου xy , που περιέχεται στην περιοχή R , με παραμετρικές εξισώσεις: $x = x(\omega), y = y(\omega)$ ($(\frac{dx}{d\omega})^2 + (\frac{dy}{d\omega})^2 > 0$). Θέτοντας

$$p = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

το πρόβλημα που θα εξετάσουμε τώρα είναι κατά πόσον μπορούμε να προσδιορίσουμε τις r,s,t κατά μήκος της Γ χρησιμοποιώντας την (15.53). Οι r,s,t κατά μήκος της Γ συνδέονται με τις τρεις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{cases} Ar + 2Bs + Ct = F \\ rdx + sdy = dp \\ sdx + tdy = dq \end{cases} \quad (15.54)$$

όπου όλα τα διαφορικά λαμβάνονται κατά μήκος της Γ . Οι (15.54) αποτελούν ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα για τους αγνώστους r,s,t με ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = A(dy)^2 - 2B(dx)(dy) + C(dx)^2. \quad (15.55)$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις: i) $D \neq 0$ για κάθε σημείο



της Γ . Τότε οι r, s, t προσδιορίζονται μονοσήμαντα κατά μήκος της Γ .
 ii) $D \equiv 0$ στην Γ . Τότε λόγω της υπάρχουσας λύσεως $u(x, y)$ πρέπει το σύστημα (15.54) να είναι συμβιβαστό, δηλαδή να έχει άπειρες λύσεις. Με άλλα λόγια οι τιμές των r, s, t σε κάθε σημείο της Γ δεν προσδιορίζονται μονοσήμαντα. Στην περίπτωση αυτή η καμπύλη Γ καλείται η χαρακτηριστική της (15.53) για την δοθείσα λύση και λόγω της (15.55) προκύπτει, ότι κατά μήκος αυτής ισχύει η εξίσωση

$$A(dy)^2 - 2B(dx)(dy) + C(dx)^2 = 0, \quad \text{ή}$$

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0, \quad (15.56)$$

από την οποία παίρνουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (15.57)$$

Εάν $B^2 - AC < 0$, τότε η (15.53) καλείται ελλειπτική, εάν $B^2 - AC = 0$, τότε η (15.53) καλείται παραβολική, ενώ αν $B^2 - AC > 0$, περίπτωση με την οποία και θα ασχοληθούμε αποκλειστικά στη συνέχεια, τότε η (15.53) καλείται υπερβολική.

Εάν $B^2 - AC > 0$, τότε η (15.57) ορίζει δύο πραγματικές μονοπαμετρικές οικογένειες καμπύλων. Αυτές καλούνται η πρώτη και δεύτερα χαρακτηριστικές οικογένειες (καμπύλων) για την δοθείσα λύση $u(x, y)$ της (15.53). Από κάθε σημείο της περιοχής R διέρχεται μία μόνον καμπύλη από κάθε οικογένεια. Από την προηγούμενη ανάλυση είναι φανερό ότι η δοθείσα λύση $u(x, y)$ της υπερβολικής εξισώσεως (15.53) επί των χαρακτηριστικών οικογενειών ικανοποιεί την (15.57). Επί πλέον, αφού στο σύστημα (15.54) είναι $D = 0$ και αυτό έχει άπειρες λύσεις ως προς r, s, t , συνεπάγεται ότι ο πίνακας

$$T = \begin{bmatrix} A & 2B & C & F \\ dx & dy & 0 & dp \\ 0 & dx & dy & dq \end{bmatrix} \quad (15.58)$$



έχει $\text{rank}(T) < 3$, δηλαδή όλες οι 3×3 υποορίζουσες του πίνακα T πρέπει να μηδενίζονται επί των χαρακτηριστικών οικογενειών. Από τον μηδενισμό των οριζουσών αυτών (υπάρχουν 3 εκτός της D) και χρησιμοποιώντας την (15.57) για να απαλείψουμε το dy προκύπτει τελικά μόνον η σχέση

$$(Adp - Fdx)(B \pm \sqrt{B^2 - AC}) + ACdq = 0. \quad (15.59)$$

Οι (15.57), (15.59) και η προφανής σχέση

$$du = pdx + qdy \quad (15.60)$$

καλούνται χαρακτηριστικές εξισώσεις. Θέτοντας

$$\lambda_1 = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \lambda_2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (15.61)$$

οι (15.57), (15.59) και (15.60) γράφονται

$$\begin{cases} dy - \lambda_{2,1} dx = 0 \\ (Adp - Fdx)\lambda_{2,1} + Cdq = 0 \\ du = pdx + qdy \end{cases} \quad (15.62)$$

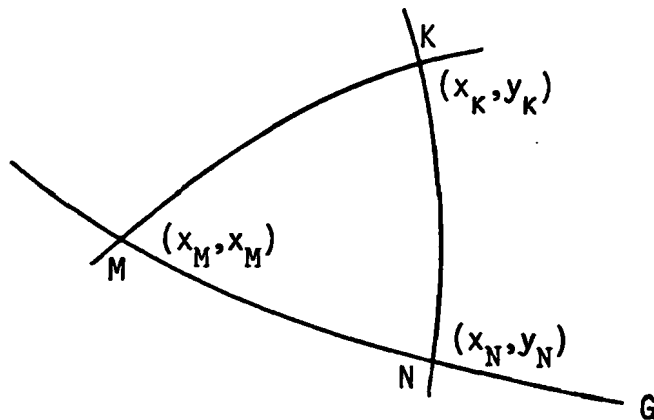
Λόγω της $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{C}{A}$ οι (15.62) είναι ισοδύναμες με τις ακόλουθες δύο οικογένειες χαρακτηριστικών εξισώσεων:

$$\text{I οικογένεια: } \begin{cases} dy - \lambda_1 dx = 0 \\ A(dp + \lambda_2 dq) - Fdx = 0 \\ du = pdx + qdy \end{cases}, \quad (15.63)$$

$$\text{II οικογένεια: } \begin{cases} dy - \lambda_2 dx = 0 \\ A(dp + \lambda_1 dq) - Fdx = 0 \\ du = pdx + qdy \end{cases} \quad (15.64)$$



Η αριθμητική επίλυση των χαρακτηριστικών εξισώσεων συνίσταται στην κατασκευή του δικτύου των χαρακτηριστικών καμπύλων και στην εύρεση προσεγγιστικών τιμών της λύσεως $u(x,y)$ στους κόμβους του δικτύου αυτού, δηλαδή στα σημεία τομής των χαρακτηριστικών καμπύλων. Για τον σκοπό αυτό ας υποθέσουμε ότι η λύση $u(x,y)$ της υπερβολικής εξισώσεως (15.53) και οι p, q είναι γνωστές κατά μήκος μιας αρχικής καμπύλης G της περιοχής R , που δεν ανήκει στις χαρακτηριστικές οικογένειες καμπύλων. Επί της G θεωρούμε δύο γειτονικά σημεία τα $M(x_M, y_M)$ και $N(x_N, y_N)$. Θεωρούμε την χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας I , που διέρχεται από το M , και την χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας II , που διέρχεται από το N . Αυτές θα τέμνονται σε ένα σημείο $K(x_K, y_K)$ (βλέπε σχήμα 15.5).



σχ. 15.5

Θα βρούμε τώρα μία ακολουθία $x_K^{(1)}, y_K^{(1)}, p_K^{(1)}, q_K^{(1)}, u_K^{(1)}, x_K^{(2)}, y_K^{(2)}, p_K^{(2)}, q_K^{(2)}, u_K^{(2)}, \dots$ προσεγγιστικών τιμών για τις ακριβείς τιμές x_K, y_K, p_K, q_K, u_K , όπου $p_K \equiv p(x_K, y_K)$, $q_K \equiv q(x_K, y_K)$, $u_K \equiv u(x_K, y_K)$, $p_K^{(1)} \equiv p(x_K^{(1)}, y_K^{(1)})$, $q_K^{(1)} \equiv q(x_K^{(1)}, y_K^{(1)})$, $u_K^{(1)} \equiv u(x_K^{(1)}, y_K^{(1)})$ κ.ο.κ. . Από την πρώτη των (15.63) και (15.64) αντικαθιστώντας τα διαφορικά με πεπερασμένες διαφορές παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$y_K^{(1)} - y_M = \lambda_1(x_M, y_M)(x_K^{(1)} - x_M)$$

$$y_K^{(1)} - y_N = \lambda_2(x_N, y_N)(x_K^{(1)} - x_N) .$$

(15.65)



Από τις (15.65) υπολογίζονται οι τιμές $x_K^{(1)}, y_K^{(1)}$. Αντικαθιστούμε τώρα τα διαφορικά με πεπερασμένες διαφορές στις δεύτερη και τρίτη των (15.63), (15.64) και παίρνουμε ένα σύστημα εξισώσεων για την εύρεση των $p_K^{(1)}, q_K^{(1)}, u_K^{(1)}$ ως ακολούθως:

Η δεύτερη των (15.63) αντικαθίσταται από την εξίσωση:

$$A_M \left[p_K^{(1)} - p_M + \lambda_2(x_M, y_M)(q_K^{(1)} - q_M) \right] - F_M(x_K^{(1)} - x_M) = 0, \quad (15.66)$$

όπου $A_M \equiv A(x_M, y_M)$, $p_M \equiv p(x_M, y_M)$, $q_M \equiv q(x_M, y_M)$, $F_M \equiv F(x_M, y_M)$, και η δεύτερη των (15.64) από την

$$A_N \left[p_K^{(1)} - p_N + \lambda_1(x_N, y_N)(q_K^{(1)} - q_N) \right] - F_N(x_K^{(1)} - x_N) = 0, \quad (15.67)$$

όπου $A_N \equiv A(x_N, y_N)$, $p_N \equiv p(x_N, y_N)$, $q_N \equiv q(x_N, y_N)$, $F_N \equiv F(x_N, y_N)$.

Τέλος, η τρίτη των (15.63) και η τρίτη των (15.64) αντικαθίστανται αντίστοιχα από τις

$$u_K^{(1)} - u_M = p_M(x_K^{(1)} - x_M) + q_M(y_K^{(1)} - y_M), \quad (15.68)$$

$$u_K^{(1)} - u_N = p_N(x_K^{(1)} - x_N) + q_N(y_K^{(1)} - y_N). \quad (15.69)$$

Προσθέτοντας τις (15.68), (15.69) κατά μέλη και λύνοντας ως προς $u_K^{(1)}$ παίρνουμε

$$u_K^{(1)} = \frac{1}{2} (u_M + u_N) + \frac{1}{2} \left[p_M(x_K^{(1)} - x_M) + q_M(y_K^{(1)} - y_M) + p_N(x_K^{(1)} - x_N) + q_N(y_K^{(1)} - y_N) \right]. \quad (15.70)$$

Από το σύστημα των (15.66), (15.67) και (15.70) υπολογίζονται οι $p_K^{(1)}, q_K^{(1)}, u_K^{(1)}$. Αντί της (15.70) μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ακόλουθη:

$$u_K^{(1)} = u_M + \frac{1}{2} (p_M + p_K^{(1)})(x_K^{(1)} - x_M) + \frac{1}{2} (y_K^{(1)} - y_M)(q_M + q_K^{(1)}), \quad (15.71)$$

η οποία προκύπτει από την (15.68), αν αντικατασταθεί η p_M με



$\frac{1}{2} (p_M + p_K^{(1)})$ και η q_M με $\frac{1}{2} (q_M + q_K^{(1)})$.

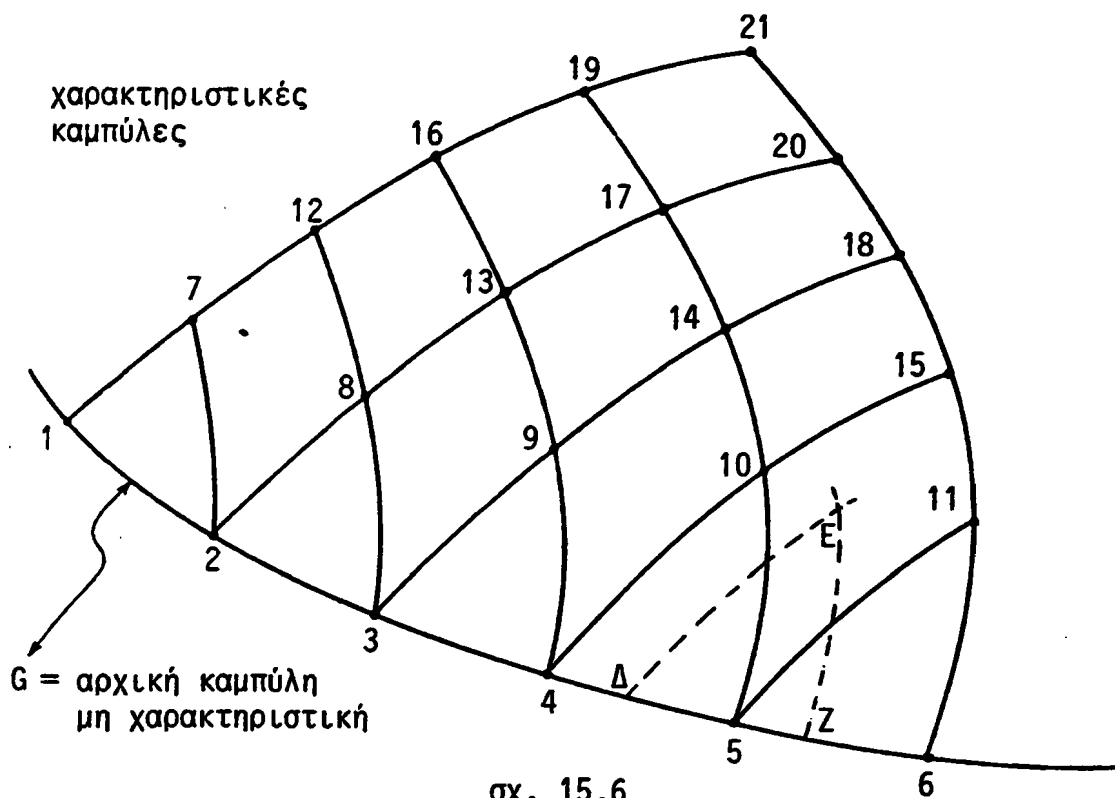
Με σκοπό να βρούμε τις βελτιωμένες προσεγγίσεις $x_K^{(2)}, y_K^{(2)}, p_K^{(2)}, q_K^{(2)}, u_K^{(2)}$ μπορούμε να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιώντας όμως αντί της $\lambda_1(x_M, y_M)$ την τιμή $\frac{1}{2} [\lambda_1(x_M, y_M) + \lambda_1(x_K^{(1)}, y_K^{(1)})]$,

αντί της $\lambda_2(x_N, y_N)$ την τιμή $\frac{1}{2} [\lambda_2(x_N, y_N) + \lambda_2(x_K^{(1)}, y_K^{(1)})]$,

αντί της A_M την $\frac{1}{2} [A_M + A(x_K^{(1)}, y_K^{(1)})]$ κ.ο.κ. .

Η διαδικασία ευρέσεως νέων βελτιωμένων προσεγγίσεων συνεχίζεται μέχρις ότου δύο διαδοχικές προσεγγίσεις των x_K, y_K, p_K, q_K, u_K συμφωνούν στην προκαθορισμένη ακρίβεια.

Χρησιμοποιώντας έτσι πολλά γειτονικά σημεία της αρχικής καμπύλης G , π.χ. τὰ 1,2,3,4,5,6, στο σχήμα 15.6, μπορούμε να προσεγγίσουμε την λύση $u(x,y)$ στους κόμβους του δικτυωτού των χαρακτηριστικών καμπύλων, δηλαδή στα σημεία 7-11, 12-15, 16-18, 19,20,21 του σχήματος 15.6.



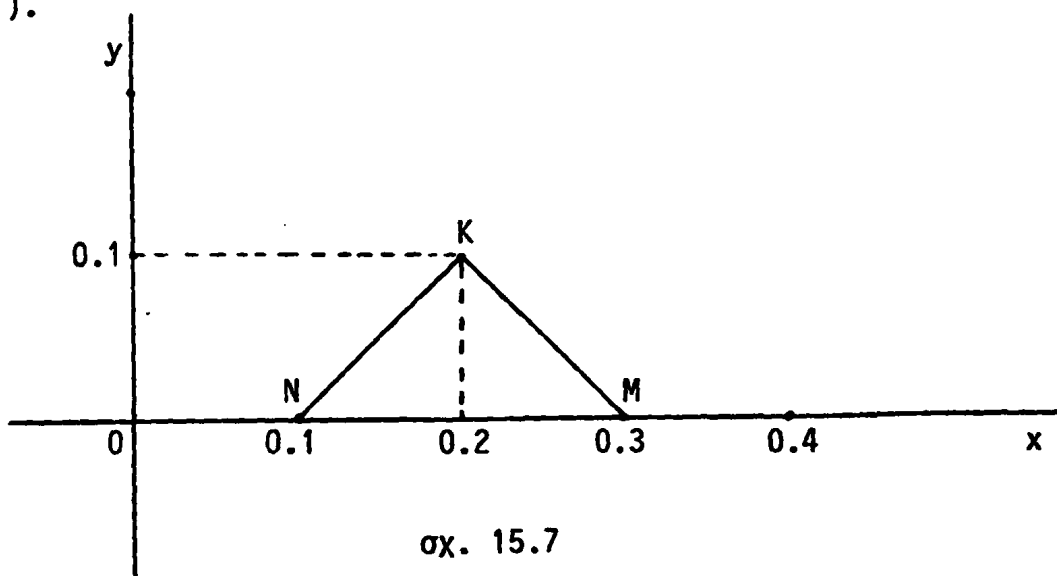
Πρέπει να σημειωθεί, ότι όταν δοθεί ένα σημείο, π.χ. το E στο σχήμα 15.6, και ζητούμε να προσεγγίσουμε την λύση $u(x,y)$ στο σημείο αυτό, τότε εργαζόμαστε αντίστροφα, δηλαδή πρέπει να βρούμε τα σημεία Δ, Z , στα οποία οι χαρακτηριστικές, που διέρχονται από το E , τέμνουν την αρχική καμπύλη G .

Παράδειγμα 15.4 Για το πρόβλημα $u_{xx} - u_{yy} = 0$, $0 < x < 1$, $y > 0$

$$u(x,0) = x^2, \quad u_y(x,0) = e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

να προσεγγιστεί η $u(0.2, 0.1)$ με την μέθοδο των χαρακτηριστικών εφαρμόζοντας αυτή μια φορά.

Λύση Είναι $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $F = 0$. Η αρχική καμπύλη G στην περίπτωση μας είναι η $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$ και $u_x(x,0) = 2x$. Επίσης έχουμε $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, οπότε από την (15.57) προκύπτει ότι οι δύο χαρακτηριστικές οικογενείες καμπύλων είναι οι: $y = x + c_1$, και $y = -x + c_2$, όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές. Η χαρακτηριστική καμπύλη της πρώτης οικογενείας, που διέρχεται από το σημείο $K(0.2, 0.1)$, είναι η $y = -x + 0.3$ και η χαρακτηριστική καμπύλη της δευτέρας οικογενείας, που διέρχεται από το K , είναι η $y = x - 0.1$ (βλέπε σχήμα 15.7).



Είναι $M(0.3,0)$, $N(0.1,0)$. Με $x_K^{(1)} = 0.2$, $y_K^{(1)} = 0.1$ από τις (15.66), (15.67) παίρνουμε τις εξισώσεις

$$p_K^{(1)} - p_M + q_K^{(1)} - q_M = 0 \quad \text{και} \quad p_K^{(1)} - p_N - q_K^{(1)} + q_N = 0. \quad (15.72)$$

Αλλά $p_M = \frac{\partial u}{\partial x}(0.3,0) = 0.6$, $q_M = \frac{\partial u}{\partial y}(0.3,0) = e^{-0.3} \approx 0.740818$, $p_N = \frac{\partial u}{\partial y}(0.1,0) = 0.2$ και $q_N = \frac{\partial u}{\partial x}(0.1,0) = e^{-0.1} \approx 0.904837$, οπότε οι (15.72) γίνονται

$$\begin{cases} p_K^{(1)} + q_K^{(1)} = 1.340818 \\ p_K^{(1)} - q_K^{(1)} = -0.704837 \end{cases} \quad (15.73)$$

Η λύση του (15.73) είναι $p_K^{(1)} \approx 0.317990$, $q_K^{(1)} \approx 1.022828$. Από την (15.71) τώρα παίρνουμε

$$\begin{aligned} u_K^{(1)} &= (0.3)^2 + \frac{1}{2} (0.6 + 0.317990)(0.2 - 0.3) + \\ &+ \frac{1}{2} (0.1 - 0)(0.740818 + 1.022828) \approx 0.132282. \quad \text{Άρα} \\ u(0.2,0.1) &\approx 0.132282. \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι η ακριβής λύση του δοθέντος προβλήματος είναι $u(x,y) = x^2 + y^2 + e^{-x} \sinh y$, από την οποία προκύπτει ότι $u(0.2, 0.1) \approx 0.13201$ (με ακρίβεια 5 δ.θ.).

15.5 Υπολειμματικές (residual) μέθοδοι

Στην παράγραφο αυτή και σε αυτές που ακολουθούν θα δοθεί η βασική ιδέα και μία σύντομη μαθηματική περιγραφή ορισμένων άλλων γνωστών μεθόδων για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων Μ.Δ.Ε. . Οι μέθοδοι αυτές και ειδικότερα η μέθοδος του πεπερασμένου στοιχείου (finite element method) έχει αναπτυχθεί πολύ τις τελευταίες δεκαετίες και είναι ευρύτατα διαδεδομένη λόγω της αποτελεσματικότητάς της σε πολλά προβλήματα.



Μία γενική κατηγορία μεθόδων για προβλήματα Μ.Δ.Ε. είναι οι καλούμενες υπολειμματικές (residual) μέθοδοι. Με σκοπό να εξετάσουμε την εφαρμογή των μεθόδων αυτών, ας θεωρήσουμε το ακόλουθο (καλώς τεθέν) πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$Lu(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in R \subset \mathbb{R}^2 \quad (15.74)$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S = \text{σύνορο της } R, \quad (15.75)$$

όπου L είναι γραμμικός (στο πεδίο ορισμού του) διαφορικός τελεστής μερικών παραγώγων (π.χ. $L \equiv -\Delta$). Η (15.75) περιγράφει τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (ομογενής Dirichlet συνοριακή συνθήκη). Έστω Ω ο κατάλληλος χώρος των πραγματικών συναρτήσεων, στον οποίο ανήκει η ακριβής λύση $u(x,y)$ του προβλήματος (15.74)-(15.75). Θεωρούμε ένα υπόχωρο Ω_n του Ω , πεπερασμένης διαστάσεως n , και έστω $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \dots, \varphi_n(x,y)$ μία βάση του Ω_n , όπου $\varphi_i(x,y)$, $i = 1(1)n$ είναι γνωστές (επιλεγμένες) συναρτήσεις, που καλούνται συναρτήσεις βάσεως και οι οποίες ικανοποιούν την (15.75), δηλαδή έχουμε

$$\varphi_i(x,y) = 0, \quad i = 1(1)n, \quad (x,y) \in S. \quad (15.76)$$

Οι συναρτήσεις βάσεως είναι συνήθως κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις ή spline συναρτήσεις. Ζητούμε τώρα να προσδιορίσουμε μία συνάρτηση $u^{(n)}(x,y) \in \Omega_n$, η οποία να προσεγγίζει την $u(x,y)$. Προφανώς, $u^{(n)}(x,y) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x,y)$, όπου c_i είναι προσδιοριστέες σταθερές. Λόγω της (15.76) έχουμε $u^{(n)}(x,y) = 0$, $(x,y) \in S$, δηλαδή η $u^{(n)}(x,y)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Η $u^{(n)}(x,y)$ αντικαθίσταται στην (15.74) στην θέση της $u(x,y)$ και οι c_i προσδιορίζονται απαιτώντας η προκύπτουσα $Lu^{(n)}(x,y) = f(x,y)$ να ισχύει προσεγγιστικά. Συγκεκριμένα, για τον προσδιορισμό των n αγνώστων c_i , $i = 1(1)n$ πρέπει να δημιουργηθούν n εξισώσεις και για το σκοπό αυτό απαιτούμε η προσεγγιστική λύση $u^{(n)}$ να ικανοποιεί n συνθήκες, οι οποίες μπορούν να εκλεγούν με πολλούς τρόπους. Ένας προφανής και απλός τρόπος είναι να απαιτήσουμε να ισχύει

$$r(u^{(n)}(x_i, y_i)) \equiv Lu^{(n)}(x_i, y_i) - f(x_i, y_i) = 0, \quad i = 1(1)n, \quad (15.77)$$



όπου (x_i, y_i) , $i = 1(1)n$ είναι η κατάλληλα εκλεγμένα (γνωστά) σημεία της περιοχής R , που καλούνται σημεία παρεμβολής. Σημειώνεται ότι η διαφορά $Lu^{(n)}(x, y) - f(x, y) \equiv r(u^{(n)}(x, y))$ καλείται υπόλοιπο (υπόλειμμα) της Μ.Δ.Ε. Έτσι τα c_i προσδιορίζονται από το σύστημα:

$$\sum_{i=1}^n c_i L\varphi_i(x_j, y_j) = f(x_j, y_j), \quad j = 1(1)n. \quad (15.78)$$

Μία άλλη εκλογή των n συνθηκών για την $u^{(n)}$ προκύπτει με την ελαχιστοποίηση του συναρτησοειδούς:

$$\begin{aligned} \iint_R r^2(u^{(n)}) dx dy &= \iint_R (Lu^{(n)} - f)^2 dx dy = \\ &= \iint_R \left[\sum_{i=1}^n c_i L\varphi_i(x, y) - f(x, y) \right]^2 dx dy \equiv I(c_1, c_2, \dots, c_n). \end{aligned} \quad (15.79)$$

Στην περίπτωση αυτή η residual μέθοδος καλείται μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων και τα c_i προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial I(c_1, c_2, \dots, c_n)}{\partial c_j} = \iint_R \frac{\partial}{\partial c_j} \left[\sum_{i=1}^n c_i L\varphi_i(x, y) - f(x, y) \right]^2 dx dy = \\ &= 2 \iint_R (Lu^{(n)} - f) L\varphi_j(x, y) dx dy = 2 \sum_{i=1}^n c_i \iint_R (L\varphi_i(x, y)) (L\varphi_j(x, y)) dx dy - \\ &- 2 \iint_R f(x, y) L\varphi_j(x, y) dx dy, \quad j = 1(1)n, \text{ δηλαδή από το σύστημα} \\ \sum_{i=1}^n c_i \iint_R (L\varphi_i(x, y)) (L\varphi_j(x, y)) dx dy &= \iint_R f(x, y) L\varphi_j(x, y) dx dy, \quad j = 1(1)n. \end{aligned} \quad (15.80)$$

Μία άλλη συνηθισμένη εκλογή των n συνθηκών είναι η ακόλουθη:

$$\iint_R r(u^{(n)}) \varphi_j dx dy = \iint_R (Lu^{(n)} - f) \varphi_j(x, y) dx dy = 0, \quad j = 1(1)n \quad (15.81)$$



ή ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^n c_i \iint_R (L\varphi_i(x,y)) \varphi_j(x,y) dx dy = \iint_R f(x,y) \varphi_j(x,y) dx dy, \quad j = 1(1)n. \quad (15.82)$$

Υπό μορφή πινάκων η (15.82) γράφεται

$$AC = F, \quad (15.83)$$

όπου

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \iint_R (L\varphi_j) \varphi_i dx dy, \quad i, j = 1(1)n, \quad (15.84)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad f_i = \iint_R f(x,y) \varphi_i(x,y) dx dy, \quad i = 1(1)n.$$

Σημειώνεται ότι όταν ο τελεστής L είναι συμμετρικός (self-adjoint), τότε ο πίνακας A είναι συμμετρικός. Επιπλέον, οι συναρτήσεις βάσεως μπορούν να εκλεγούν, έτσι ώστε ο πίνακας A να είναι τριδιαγώνιος. Όταν χρησιμοποιείται για την εύρεση των c_i το γραμμικό σύστημα (15.83), η residual μέθοδος καλείται μέθοδος Bubnov-Galerkin ή απλώς μέθοδος Galerkin.

Αφού βρεθούν τα c_i εφαρμόζοντας μία από τις παραπάνω μεθόδους, τότε για ένα οποιοδήποτε σημείο $(\hat{x}, \hat{y})$ της περιοχής R θα έχουμε

$$u(\hat{x}, \hat{y}) \approx u^{(n)}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(\hat{x}, \hat{y}). \quad (15.85)$$

15.6 Μεταβολικές (variational) μέθοδοι - μέθοδος Ritz

Θεωρούμε χάριν απλότητας πάλι το διαφορικό πρόβλημα (15.74)-(15.75),



όπου ο γραμμικός τελεστής L έχει επιπλέον τις ιδιότητες:

$$i) \iint_R (Lv) w dx dy = \iint_R (Lw) v dx dy, \quad v, w \in \Omega \quad (\text{συμμετρικός})$$

$$ii) \iint_R (Lv) v dx dy > 0, \quad v \in \Omega, \quad v \neq 0. \quad (\text{θετικά ορισμένος}).$$

Όπως προκύπτει από την θεωρία του λογισμού μεταβολών, ισοδύναμο με το πρόβλημα αυτό είναι το ακόλουθο variational πρόβλημα: Να βρεθεί η συνάρτηση $v = v(x, y)$, που ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές

$$I(v) = (Lv, v) - 2(f, v) \equiv \iint_R \left[(Lv(x, y)v(x, y) - 2f(x, y)v(x, y)) \right] dx dy, \\ v(x, y) \in \Omega. \quad (15.86)$$

Αν $u(x, y) \in \Omega$ είναι η ακριβής λύση του προβλήματος (15.74)-(15.75), τότε είναι γνωστό ότι

$$\min_{v \in \Omega} I(v) = I(u). \quad (15.87)$$

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση του ισοδύναμου προβλήματος $\min_{v \in \Omega} I(v)$ καλούνται variational μέθοδοι. Η ελαχιστοποίηση του (15.86) δεν επιτυγχάνεται (εκτός από εξαιρέσεις) με αναλυτικές μεθόδους και έτσι καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές μεθόδους.

Με σκοπό να προσδιορίσουμε μία προσέγγιση της λύσεως $u(x, y)$, αντί για το $\min_{v \in \Omega} I(v)$ ζητούμε να βρούμε το

$$\min_{v^{(n)} \in \Omega_n} I(v^{(n)}) \quad (15.88)$$

(οι χώροι Ω, Ω_n ορίζονται όπως και στην παράγραφο 15.5). Αν $\varphi_i(x, y)$, $i = 1(1)n$ είναι τώρα συναρτήσεις βάσεως του Ω_n (αυτές ικανοποιούν την (15.76)), τότε



$$v^{(n)} = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x, y),$$

όπου c_i , $i = 1(1)n$ είναι σταθερές. Έτσι η (15.88) γίνεται

$$\min_{c_i} \iint_R \left(L\left(\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i\right) - 2f \right) \left(\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right) dx dy \equiv \min_{c_i} I(c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (15.89)$$

Αν η $v_{\min}^{(n)} = \sum_{i=1}^n c_i^* \varphi_i(x, y) \in \Omega_n$ είναι τέτοια ώστε

$$\min_{v^{(n)} \in \Omega_n} I(v^{(n)}) = I(v_{\min}^{(n)}), \quad (15.90)$$

τότε

$$u(x, y) \approx v_{\min}^{(n)}(x, y). \quad (15.91)$$

Για τον προσδιορισμό της $v_{\min}^{(n)}$, δηλαδή για την εύρεση των c_i^* , $i = 1(1)n$, δημιουργούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial c_i} I(v^{(n)}) = \frac{\partial}{\partial c_i} I(c_1, c_2, \dots, c_n) = \\ &= \frac{\partial}{\partial c_i} \left[L\left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i\right], \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \right] - 2 \left(f, \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial c_i} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j (L\varphi_i, \varphi_j) - 2 \sum_{i=1}^n c_i (f, \varphi_i) \right] = \\ &= 2 \left[\sum_{j=1}^n c_j (L\varphi_i, \varphi_j) - (f, \varphi_i) \right], \quad i = 1(1)n, \quad \text{ή ισοδύναμα} \end{aligned}$$



$$\sum_{j=1}^n c_j \iint_R (L\varphi_i)\varphi_j dx dy = \iint_R f \varphi_i dx dy, \quad i = 1(1)n. \quad (15.92)$$

θέτοντας $a_{ij} \equiv \iint_R (L\varphi_i)\varphi_j dx dy$, $f_i \equiv \iint_R f\varphi_i dx dy$, $i, j = 1(1)n$ το γραμμικό σύστημα (15.92) υπό μορφή πινάκων γράφεται

$$Ac = F, \quad (15.93)$$

όπου $A = (a_{ij})$, $c = (c_i)$, $F = (f_i)$, $i = 1(1)n$. Λόγω των ιδιοτήτων του τελεστού L ο πίνακας A του (15.93) είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η λύση του (15.93) ελαχιστοποιεί πράγματι το $I(v^{(n)})$. Η παραπάνω variational μέθοδος που χρησιμοποιεί το γραμμικό σύστημα (15.93) για την εύρεση των c_i^* , $i = 1(1)n$ είναι γνωστή σαν μέθοδος του Ritz.

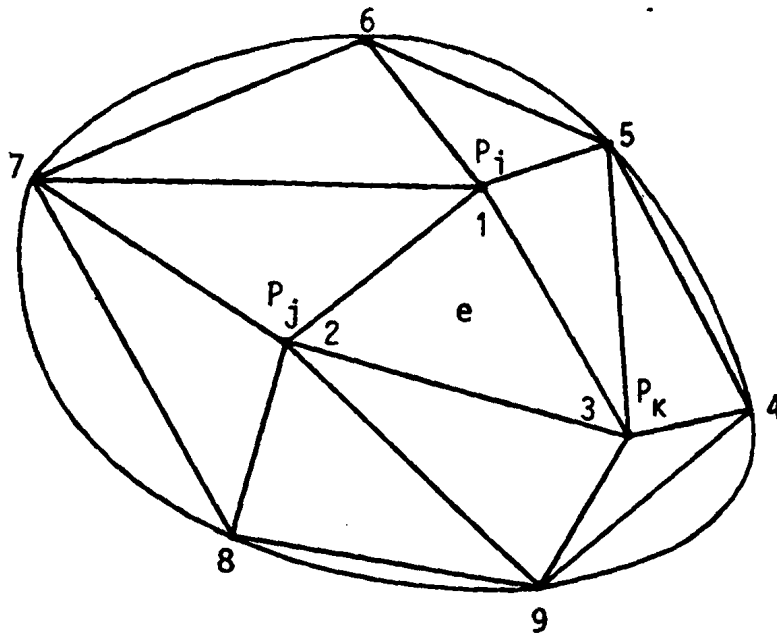
15.7 Η μέθοδος του πεπερασμένου στοιχείου (finite element)

Η μέθοδος του πεπερασμένου στοιχείου μπορεί να θεωρηθεί σαν μία τροποποίηση των residual και variational μεθόδων, όπου οι συναρτήσεις βάσεως $\varphi_i(x, y)$, $i = 1(1)n$ είναι ειδικής μορφής. Χρησιμοποιείται κυρίως σε προβλήματα συννοριακών τιμών, όπου η περιοχή R έχει πολύπλοκο σχήμα, και για τον προσδιορισμό μιας προσεγγιστικής λύσεως οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα, του οποίου ο πίνακας των συντελεστών είναι αραιός. Με σκοπό να δοθεί μια σύντομη περιγραφή της μεθόδου στην απλούστερη περίπτωση, θεωρούμε πάλι το πρόβλημα (15.74)-(15.75).

Η βασική ιδέα της μεθόδου του πεπερασμένου στοιχείου είναι να υποδιαιρέσουμε (διαμερίσουμε) την φραγμένη περιοχή R του προβλήματος σε ένα πεπερασμένο αριθμό μη επικαλυπτομένων στοιχείων (elements) R_i , $i = 1(1)p$, τα οποία είναι συνήθως τρίγωνα (τριγωνικά στοιχεία), έτσι ώστε $\bigcup_{i=1}^p R_i = R \cup S$ και δύο οποιαδήποτε τρίγωνα είτε είναι ξένα μεταξύ



τους είτε έχουν ακριβώς μία κοινή κορυφή ή έχουν μία πλευρά κοινή (βλέπε σχήμα 15.8). Πρέπει να σημειωθεί ότι υποθέτουμε εδώ ότι η περιοχή R του προβλήματος είναι πολυγωνική περιοχή (εάν το σύνορο S της R δεν αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα, τότε μπορούμε πάντοτε να προσεγγίσουμε την R από μία πολυγωνική περιοχή).



σχ. 15.8

Οι κορυφές όλων των τριγώνων καλούνται κόμβοι (στο σχήμα 15.8 υπάρχουν 10 τρίγωνα και 9 κόμβοι). Έτσι δύο οποιαδήποτε τρίγωνα έχουν είτε κανένα, είτε ένα ή δύο κοινούς κόμβους. Έστω n το πλήθος των κόμβων, τους οποίους συμβολίζουμε P_i , $i = 1(1)n$, αντίστοιχων συντεταγμένων (x_i, y_i) , $i = 1(1)n$, εκ των οποίων οι P_i , $i = 1(1)m$ ($m < n$) κείνται στην περιοχή R (όχι στο σύνορο S) και καλούνται εσωτερικοί κόμβοι (στο σχ. 15.8 υπάρχουν τρεις εσωτερικοί κόμβοι). Για κάθε εσωτερικό κόμβο P_i ($i = 1(1)m$) ορίζεται μία συνάρτηση $\varphi_i(x, y)$, η οποία στην απλούστερη περίπτωση έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1) Η $\varphi_i(x, y)$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού (γραμμική ως προς x και y) εντός εκάστου στοιχείου (τριγώνου), δηλαδή τμηματικά γραμμική.



$$2) \quad \varphi_i(P_i) \equiv \varphi_i(x_i, y_i) = 1, \quad i = 1(1)m \quad \text{και}$$

$$3) \quad \varphi_i(P_j) \equiv \varphi_i(x_j, y_j) = 0 \quad \text{για } j \neq i, \quad j = 1(1)n.$$

Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις $\varphi_i(x, y)$, $i = 1(1)m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (συναρτήσεις βάσεως) και ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη (15.75). Λόγω της μορφής τους οι φ_i , $i = 1(1)m$ καλούνται πυραμίδες συναρτήσεις και είναι εύκολο να δειχθεί, ότι η $\varphi_i(x, y)$ εντός του τριγώνου με κορυφές P_i, P_j, P_k δίνεται από την ακόλουθη έκφραση

$$\varphi_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta} \left[(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y \right],$$

$$(x, y) \in P_i P_j P_k, \quad (15.94)$$

όπου

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = (x_j y_k - x_k y_j) + (x_k y_i - x_i y_k) + (x_i y_j - x_j y_i).$$

Επιπλέον για κάθε (x, y) , που δεν ανήκει σε κάποιο τρίγωνο του οποίου μία κορυφή είναι ο κόμβος P_i , έχουμε $\varphi_i(x, y) = 0$. Όπως προκύπτει από την (15.94) η $\varphi_i(x, y)$ είναι διαφορετική σε κάθε τρίγωνο του οποίου μία κορυφή είναι ο κόμβος P_i . Ζητούμε τώρα να προσδιορίσουμε την συνάρτηση

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x, y), \quad (x, y) \in R, \quad (15.95)$$

όπου c_i , $i = 1(1)m$ προσδιοριστέες σταθερές, ώστε να προσεγγίζει την λύση $u(x, y)$ στην περιοχή R . Η συνάρτηση $U(x, y)$ καλείται δοκιμαστική συνάρτηση (trial function) και εντός του τυπικού τριγώνου

$e \equiv P_i P_j P_k$ (βλέπε σχήμα 15.8) έχει την μορφή



$$U(x,y) = c_i \varphi_i(x,y) + c_j \varphi_j(x,y) + c_k \varphi_k(x,y), \quad (x,y) \in e, \quad (15.96)$$

αφού στο τρίγωνο e μόνον οι $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k$ είναι $\neq 0$. Από την (15.96) προκύπτει ότι

$$U(P_i) = c_i, \quad U(P_j) = c_j, \quad U(P_k) = c_k, \quad (15.97)$$

δηλαδή οι άγνωστες σταθερές $c_i, i = 1(1)m$ στην (15.95) είναι οι τιμές της προσεγγιστικής λύσεως $U(x,y)$ στους εσωτερικούς κόμβους $P_i, i = 1(1)m$. Είναι φανερό ότι η προσεγγιστική λύση (15.95) είναι τμηματικά γραμμική (γραμμική εντός εκάστου τριγώνου) και ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη (15.75). Για την εύρεση των $c_i, i = 1(1)m$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες εξισώσεις σύμφωνα με την μέθοδο Galerkin (βλέπε (15.81)):

$$\iint_R (LU(x,y) - f(x,y)) \varphi_j(x,y) dx dy = 0, \quad j = 1(1)m. \quad (15.98)$$

Είναι φανερό ότι για ένα συγκεκριμένο j ($j = 1(1)m$) ή $\varphi_j(x,y)$ στην (15.98) είναι $\neq 0$ μόνον στα τρίγωνα των οποίων μία κορυφή είναι ο κόμβος $P_j \equiv (x_j, y_j)$ και επομένως η ολοκλήρωση γίνεται μόνον στα τρίγωνα αυτά, στα οποία βεβαίως η μορφή της $U(x,y)$ είναι γνωστή. Με σκοπό η προσεγγιστική λύση $U(x,y)$ να προσεγγίζει καλύτερα την ακριβή λύση $u(x,y)$ του προβλήματος πρέπει τα τριγωνικά στοιχεία να γίνουν όσον το δυνατόν μικρότερα (συνήθως ένας ομοιόμορφος τριγωνισμός της περιοχής R χρησιμοποιείται), που σημαίνει ότι το τελικό γραμμικό σύστημα θα είναι μεγάλης τάξεως με αραιό πίνακα συντελεστών.



Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x,y) = F(x + iy) + G(x - iy)$, όπου F, G είναι αυθαίρετες συναρτήσεις, είναι λύση της εξίσωσης

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

2. Δίνεται το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_y = cu_{xx}, & 0 < x < b, \quad y > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(0,y) = u(b,y) = 0, & y \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq b. \end{cases} \quad (3)$$

Να δειχθεί ότι: i) Η συνάρτηση

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{\kappa^2 \pi^2 c y}{b^2}} \sin \frac{\kappa \pi x}{b}, \text{ όπου } A_k \text{ αυθαίρετες σταθε-}$$

ρές, ικανοποιεί τις (1), (2). ii) Η συνάρτηση

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{b} \int_0^b f(z) \sin \frac{\kappa \pi z}{b} dz \right] e^{-\frac{\kappa^2 \pi^2 c y}{b^2}} \sin \frac{\kappa \pi x}{b} \right\}$$

ικανοποιεί τις (1), (2), (3).

3. Δίνεται το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_y = cu_{xx}, & 0 < x < b, \quad y > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_x(0,y) = u_x(b,y) = 0, & y \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq b. \end{cases} \quad (3)$$

Να δειχθεί ότι: i) Η συνάρτηση

$$u(x,y) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{\kappa^2 \pi^2 c y}{b^2}} \cos \frac{\kappa \pi x}{b}, \quad (4)$$



όπου A_0, A_k αυθαίρετες σταθερές, ικανοποιεί τις (1), (2). ii) Η (4),

όπου $A_0 = \frac{1}{b} \int_0^b f(x) dx$, $A_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(x) \cos \frac{k\pi x}{b} dx$, ικανοποιεί τις

(1), (2), (3).

4. Δίνεται το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_{yy} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < b, \quad y > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(0, y) = u(b, y) = 0, & y \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq b. \end{cases} \quad (3)$$

Να δειχθεί ότι: i) η συνάρτηση (λύση D'Alembert)

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \left[f(x + cy) + f(x - cy) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-cy}^{x+cy} g(\xi) d\xi$$

ικανοποιεί τις (1) και (3). ii) Η συνάρτηση

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi cy}{b} + B_k \sin \frac{k\pi cy}{b} \right) \sin \frac{k\pi x}{b},$$

όπου A_k, B_k αυθαίρετες σταθερές, ικανοποιεί τις (1) και (2).

iii) Η συνάρτηση

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{b} \int_0^b f(z) \sin \frac{k\pi z}{b} dz \right] \cos \frac{k\pi cy}{b} \sin \frac{k\pi x}{b} + \right. \\ \left. + \left[\frac{2}{k\pi c} \int_0^b g(z) \sin \frac{k\pi z}{b} dz \right] \sin \frac{k\pi cy}{b} \sin \frac{k\pi x}{b} \right\},$$

ικανοποιεί τις (1), (2), (3).

5. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x, y) = F(x + cy) + G(x - cy)$, όπου



F, G είναι αυθαίρετες συναρτήσεις, είναι λύση της εξίσωσης $u_{yy} = c^2 u_{xx}$.

6. Λόγω των (15.4), (15.5) είναι

$$(u_{xx} + u_{yy})|_{i,j} = \frac{1}{h^2} [u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}] + O(h^2). \quad (1)$$

Να δειχθεί επίσης ότι:

$$(u_{xx} + u_{yy})|_{i,j} = \frac{1}{2h^2} [u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1}] + O(h^2). \quad (2)$$

Εάν χρησιμοποιηθεί το ημίαθροισμα των τύπων (1), (2), προκύπτει ο γνωστός ως τύπος των 9 σημείων.

7. Να εφαρμοστεί η μέθοδος των διαφορών στην εξίσωση Laplace σε ένα ορθογώνιο με $u(x,y) = M = \text{σταθ. στις πλευρές του ορθογωνίου. Να δειχθεί ότι } u_{ij} = M \text{ στους κόμβους (σημειώνεται ότι η ακριβής λύση είναι } u(x,y) = M).$

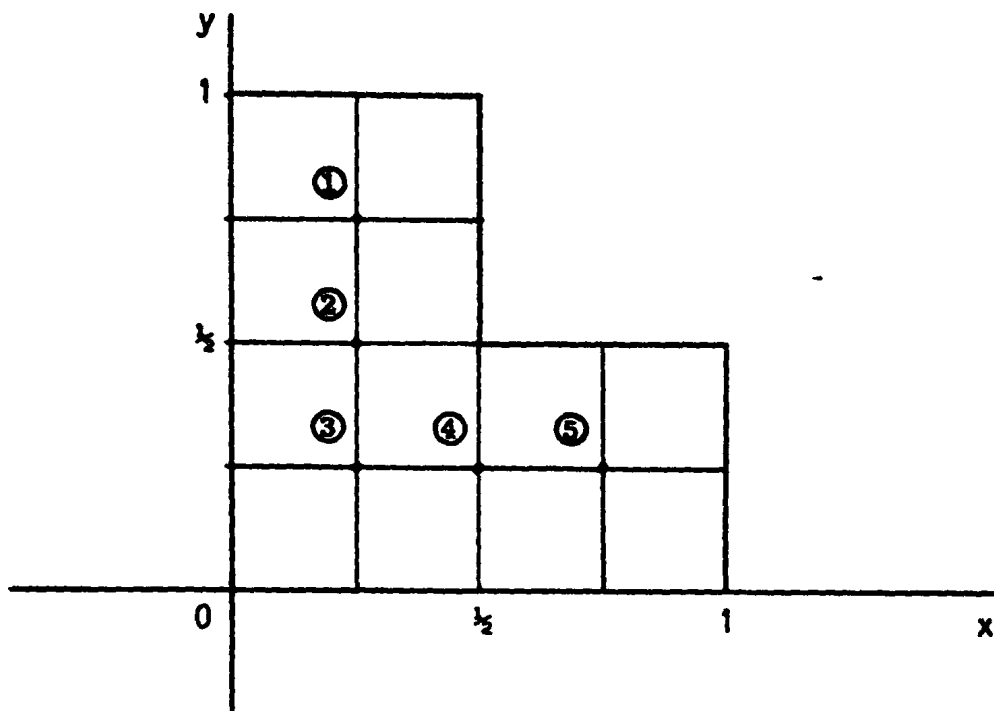
8. Να εφαρμοστεί η μέθοδος των διαφορών στο πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 2, & 0 < y < 2 \\ u(0,y) = 1, & u(2,y) = 1, & 0 < y < 2 \\ u(x,0) = 0, & u(x,2) = 6, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

με $h = \frac{1}{2}$.

9. Δίνεται η εξίσωση Laplace στην περιοχή R του σχήματος με συνοριακές συνθήκες: $u(0,y) = y(1-y)$, $u(x,0) = x(1-x)$, $u(x,y) = 0$ στις άλλες πλευρές του συνόρου S της R .





Να εφαρμοστεί η μέθοδος των διαφορών με $h = \frac{1}{4}$.

10. Να μελετηθεί η μέθοδος των διαφορών για το πρόβλημα (15.3) λαμβάνοντας υπ' όψιν την σημείωση της σελίδας 87 ($h \neq \kappa$).

11. Για το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, & 0 < y < 1 \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & 0 \leq y \leq 1 \\ u(x,0) = x(1-x), & u(x,1) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

να εφαρμοστεί η μέθοδος των διαφορών με $h = \frac{1}{4}$.

12. Ομοίως για το:

$$\begin{cases} -(u_{xx} + u_{yy}) = 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y, & 0 < x < 1, & 0 < y < 1 \\ u(x,y) = 0 & \text{στο σύνορο} \end{cases}$$

(ακριβής λύση: $u(x,y) = \sin \pi x \sin \pi y$) ($h = \frac{1}{4}$).



13. Ομοίως για τα ακόλουθα προβλήματα:

$$i) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, & 0 < y < 1 \\ u(x,1) = 1000, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,y) = 0 & \text{στο υπόλοιπο σύνορο } (y \neq 1) \end{cases} \quad (h = \frac{1}{3})$$

$$ii) \begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{y} u_y + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, & 0 < y < 1 \\ u(x,1) = 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,y) = 0 & \text{στο υπόλοιπο σύνορο } (y \neq 1) \end{cases} \quad (h = \frac{1}{3})$$

$$iii) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 2, & 0 < y < 1 \\ u(x,0) = x, & u(x,1) = \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ u(0,y) = 0, & u(2,y) = 2, & 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (h = \frac{1}{3})$$

$$iv) \begin{cases} (1 + \frac{x^2}{2})u_{xx} + u_{yy} = 2\sin y, & (x,y) \in R \\ u(0,y) = 0, & u(x,0) = 0 \\ u(x,y) = (1-y)^2 \sin y, & \text{για } x = 1-y, \end{cases} \quad (h = \frac{1}{4})$$

όπου R είναι η τριγωνική περιοχή με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$ και $(0,1)$ (ακριβής λύση $u(x,y) = x^2 \sin y$).

14. Να προσεγγισθεί η λύση για $y = 1$ στο ακόλουθο πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_y - 2u_{xx} = 0, & 0 < x < 2, & y > 0 \\ u(x,0) = x, & 0 \leq x \leq 2 \\ u(0,y) = y, & u(2,y) = 2, & y \geq 0, \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας την προς τα εμπρός μέθοδο διαφορών με $h = 1$, $\kappa = 0.2$.



15. Ομοίως για το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_y - 0.1u_{xx} = 0.25, & 0 < x < 2, y > 0 \\ u(x,0) = x(2-x), & 0 \leq x \leq 2 \\ u(0,y) = 0, u(2,y) = 0, & y \geq 0, \end{cases}$$

να προσεγγισθεί η λύση για $y = 2$ ($h = \kappa = \frac{1}{2}$).

16. Να προσεγγιστεί η λύση στο σημείο $(0.4, 0.02)$ του προβλήματος:

$$\begin{cases} u_y = u_{xx}, & 0 < x < 1, y > 0 \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & y \geq 0 \\ u(x,0) = x(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας τις μεθόδους διαφορών (15.17), (15.23) και (15.29) με $h = 0.2$, $\kappa = 0.01$.

17. Να εξεταστεί η μέθοδος διαφορών, που προκύπτει για το πρόβλημα (15.12) – (15.13), αν αντί της (15.14) χρησιμοποιηθεί ο τύπος:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1}))}{2\kappa} + O(\kappa^2), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ i = 0(1)n.$$

18. Να μελετηθεί η μέθοδος των διαφορών για τις εξισώσεις:

$$i) u_y - c^2 u_{xx} = f(x, y) \quad ii) u_t - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0.$$

19. Να δειχθεί ότι το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου διαφορών (15.17) στο σημείο (x_i, y_j) είναι $E = O(\kappa) + O(h^2)$. Για $r = \frac{1}{6}$ να δειχθεί ότι $E = O(h^4)$.

20. Να δειχθεί ότι το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου (15.23) στο σημείο (x_i, y_{j+1}) είναι $E = O(\kappa) + O(h^2)$, ενώ της μεθόδου Crank - Nicholson είναι $E = O(\kappa^2) + O(h^2)$.



21. Να προσεγγιστεί η $u(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ για το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_y = u_{xx} , & 0 < x < 1 , & y > 0 \\ u(x, 0) = 1 , & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y) = 0 , & u_x(1, y) = 1 , & y > 0 \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας τις μεθόδους (15.23) και (15.29) με $h = \frac{1}{3}$,
 $\kappa = \frac{1}{6}$.

22. Να προσεγγιστεί η $u(1, 3)$ για το πρόβλημα:

$$\begin{cases} 9u_{yy} - u_{xx} = 0 , & 0 < x < 2 , & y > 0 \\ u(0, y) = 0 , & u(2, y) = 0 , & y \geq 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{για } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{για } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \\ u_y(x, 0) = 0 , & 0 \leq x \leq 2 , \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας την μέθοδο διαφορών με $h = \kappa = \frac{1}{2}$.

23. Να προσεγγιστεί η $u(\frac{1}{2}, 1)$ για το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_{yy} = u_{xx} , & 0 < x < 1 , & y > 0 \\ u(0, y) = 1 - y^2 , & u(1, y) = 0 , & y \geq 0 \\ u(x, 0) = 1 - x^2 , & u_y(x, 0) = 0 , & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας την μέθοδο διαφορών με $h = \kappa = \frac{1}{4}$.

24. Να εξετασθεί η μέθοδος διαφορών για το πρόβλημα (15.33) – (15.34), όπου οι συνοριακές συνθήκες αντικαθίστανται από τις:

$$u_x(a, y) = g_1(y) , \quad u_x(b, y) = g_2(y) , \quad y \geq 0 .$$

25. Για το πρόβλημα:



$$\begin{cases} u_{yy} = u_{xx} , & 0 < x < 1 , & y > 0 \\ u(x,0) = 100x^2 , & u_y(x,0) = 200x , & 0 \leq x \leq 1 \\ u(1,y) = 100(1+y)^2 , & u_x(0,y) = 200y , & y \geq 0 \end{cases}$$

να εφαρμοστεί η μέθοδος διαφορών με $h = k = \frac{1}{2}$. Να δειχθεί ότι η U_{ij} συμπίπτει με την ακριβή τιμή $u_{ij} = 100(x_i + y_j)^2$ (ακριβής λύση: $u(x,y) = 100(x+y)^2$).

26. Να βρεθεί η implicit μέθοδος διαφορών για το πρόβλημα (15.33) – (15.34), αν αντί της πρώτης των (15.35) χρησιμοποιηθεί η:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i, y_j) &\approx \frac{1}{2} \left\{ u_{xx}(x_i, y_{j+1}) + u_{xx}(x_i, y_{j-1}) \right\} \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{i-1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}}{h^2} \right\} . \end{aligned}$$

27. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των χαρακτηριστικών στα ακόλουθα προβλήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} u_{xx} - uu_{yy} = x^2 - 1 , & 0 < x < 1 , & y > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) , & u_y(x,0) = 0 , & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,y) = u(1,y) = 0 , & y \geq 0 \end{cases}$$

(να ληφθεί βήμα $h = 0.2$ ως προς x).

$$\text{ii) } \begin{cases} u_{xx} - u^2 u_{yy} = 0 , & 0 < x < 1 , & y > 0 \\ u(x,0) = 0.2 + 5x^2 , & u_y(x,0) = 3x , & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(να ληφθεί βήμα $h = 0.1$ ως προς x).



$$\text{iii)} \begin{cases} u_{xx} - u_{yy} - u_y = 0, & 0 < x < 1, y > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_y(x, 0) = -1, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y) = \sin \frac{5\pi y}{6}, & u(1, y) = 0, & y \geq 0 \end{cases}$$

(να ληφθεί βήμα $h = 0.1$ ως προς x).

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ και το διάστημα $[a, b]$. Θεωρούμε τα ισαπέχοντα σημεία $x_i = a + ih$, $i = 0(1)n$, $h = \frac{b-a}{n}$. Στο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0(1)n-1$ η $f(x)$ προσεγγίζεται από το πολυώνυμο παρεμβολής πρώτου βαθμού με σημεία παρεμβολής τα x_i , x_{i+1} . Έτσι στο $[a, b] \equiv [x_0, x_n]$ η $f(x)$ προσεγγίζεται από μία συνάρτηση $P(x)$ που είναι τμηματικά γραμμική (γραμμική εντός εκάστου υποδιαστήματος), δηλαδή $f(x) \approx P(x)$, $x \in [a, b]$. Να δεί-
χθεί ότι $P(x) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(x) f_i$, όπου

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, & x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0, & x_1 \leq x \leq x_n \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x_0 \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x_{i+1} \leq x \leq x_n \end{cases}, \quad i = 1(1)n-1$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & x_0 \leq x \leq x_{n-1} \\ \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$



29. Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (βλέπε (15.94)) για τις $\varphi_i(x,y)$, $\varphi_j(x,y)$, $\varphi_k(x,y)$ εντός του τριγώνου $P_i P_j P_k$, να δειχθεί ότι για κάθε $(x,y) \in P_i P_j P_k$ είναι $\varphi_i + \varphi_j + \varphi_k = 1$. Επίσης να δειχθεί ότι η (15.96) είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{vmatrix} x & y & U & 1 \\ x_i & y_i & c_i & 1 \\ x_j & y_j & c_j & 1 \\ x_k & y_k & c_k & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

30. Δίνεται το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -2, & -1 < x < 1, & -1 < y < 1 \\ u(\pm 1, y) = u(x, \pm 1) = 0, & -1 \leq x \leq 1, & -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

και προτείνεται η προσεγγιστική λύση $u^{(1)}(x,y) = c_1(1-x^2)(1-y^2)$.

Να προσδιοριστεί η σταθερά c_1 με την μέθοδο Galerkin. Δοθέντος ότι το παραπάνω πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το variational πρόβλημα: $\min_u I(u)$, όπου

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{u_x^2 + u_y^2 - 4u\} dx dy,$$

να υπολογιστεί η c_1 με την μέθοδο Ritz.

31. Να δειχθεί ότι, εάν στο πρόβλημα (15.52) εφαρμοστεί η μέθοδος Euler, τότε προκύπτει η μέθοδος (15.17)-(15.18), ενώ αν εφαρμοστεί σ' αυτό η μέθοδος του τραπεζίου, τότε προκύπτει η μέθοδος Crank-Nicholson.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ALLEN SMITH W., "Elementary Numerical Analysis", Harper & Row, 1979.
2. AMES W.F., "Numerical methods for partial differential equations", 2d ed., Academic Press, 1977.
3. BEREZIN I.S. and ZHIDKOV N.P., "Computing Methods", Vol. 1-2, Pergamon Press, 1965.
4. BLUM E.K., "Numerical Analysis and Computation: Theory and Practice", Addison - Wesley, 1972.
5. CARRIER G. and PEARSON C., "Partial differential equations: Theory and Technique", Academic Press, 1976.
6. COHEN A.M., et al. "Numerical Analysis", McGraw - Hill, 1973.
7. COLLATZ L., "The numerical treatment of differential equations", 3rd ed., Springer - Verlag, 1966.
8. DANIEL J.W. and MOORE R., "Computation and theory in ordinary differential equations", W.H. Freeman, 1970.
9. FORSYTHE G.E. and WASOW W.R., "Finite difference methods for partial differential equations", J. Wiley & Sons, 1960.
10. FRIED I., "Numerical solution of differential equations", Academic Press, 1979.
11. GEAR C.W., "Numerical initial value problems in ordinary differe-



ntial equations", Prentice - Hall, 1971.

12. GERALD C.F., "Applied Numerical analysis", Addison - Wesley, 1970.
13. GLADWELL J. and WAIT R., "A survey of numerical methods for partial differential equations", Oxf. Univ. Press, 1979.
14. HADJIDIMOS A., "Numerical Analysis II", Ioannina, 1979.
15. HENRICI P., "Discrete variable methods in ordinary differential equations", J. Wiley & Sons, 1962.
16. ISAACSON E. and KELLER H.B., "Analysis of Numerical Methods", Wiley, 1966.
17. JOHNSON L.W., and RIESS R.D., "Numerical Analysis", Addison - Wesley, 1977.
18. LAMBERT J.D., "Computational methods in ordinary differential equations", J. Wiley & Sons, 1973.
19. LAPIDUS L. and SEINFELD J.H., "Numerical solution of ordinary differential equations", Academic Press, 1971.
20. MEIS T. and MARCOWITZ U., "Numerical solution of partial differential equations", Springer - Verlag, 1981.
21. MITCHELL A.R., "Computational methods for partial differential equations", J. Wiley & Sons, 1969.
22. ORTEGA J.M. and POOLE W.G., Jr., "An Introduction to Numerical Methods for Differential Equations", Pitman Publ. Inc., 1981.
23. PHILLIPS G.M., and TAYLOR P.J., "Theory and applications of Numerical Analysis", Academic Press, 1973.
24. RECTORYS K., (ed.) "Survey of Applicable Mathematics", Iliffe Books Ltd., 1969.
25. RICE J.R., "Numerical Methods, Software and Analysis", McGraw - Hill, 1983.
26. RICHTMYER R.D. and MORTON K.W., "Difference methods for initial value problems", 2d ed., Interscience - Wiley, 1967.
27. SMITH G.D., "Numerical solution of partial differential equations", Clarendon Press, 2d ed., 1978.



28. SPIEGEL M.R., "Theory and problems of Calculus of finite differences and difference equations", Schaum's outline Series, McGraw - Hill, 1971.
29. STEPHENSON G., "Partial differential equations for Scientists and Engineers", Longman, 3rd ed., 1985.
30. STOER J. and BULIRSCH R., "Introduction to Numerical Analysis", Springer - Verlag, 1980, 1983.
31. STRANG G. and FIX G., "Analysis of the finite element method", Prentice - Hall, 1973.
32. STROUD A.H., "Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations", Springer - Verlag, 1974.
33. SZIDAROVSKY F. and YAKOWITZ S., "Principles and Procedures of Numerical Analysis", Plenum Press, 1978.
34. VANDERGRAFT J.S., "Introduction to Numerical Computations", Academic Press, 1978. Second edition 1983.
35. WAIT R. and MITCHELL A.R., "Finite element analysis and applications", J. Wiley & Sons, 1985.
36. YOUNG D.M. and GREGORY R.T., "A survey of Numerical Mathematics" Volumes I - II, Addison - Wesley, 1972, 1973.





Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο
με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ
Τυπογραφείο

Διανέμεται Δωρεάν στους φοιτητές.





ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԱՆՍՏԱԿԱՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ

ՕՐՅԱԾԳՐԱՆ

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԱՆՍՏԱԿԱՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ



ΝΑΥΤΙΚΑΛΟ
ΕΡΕΥΝΑ
ΡΟΜΠΟΤΕΙΟ

