

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Δ. ΚΑΤΣΟΥΛΗ
Αναπληρωτή Καθηγητή της Μετεωρολογίας
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ


ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1990



592/98



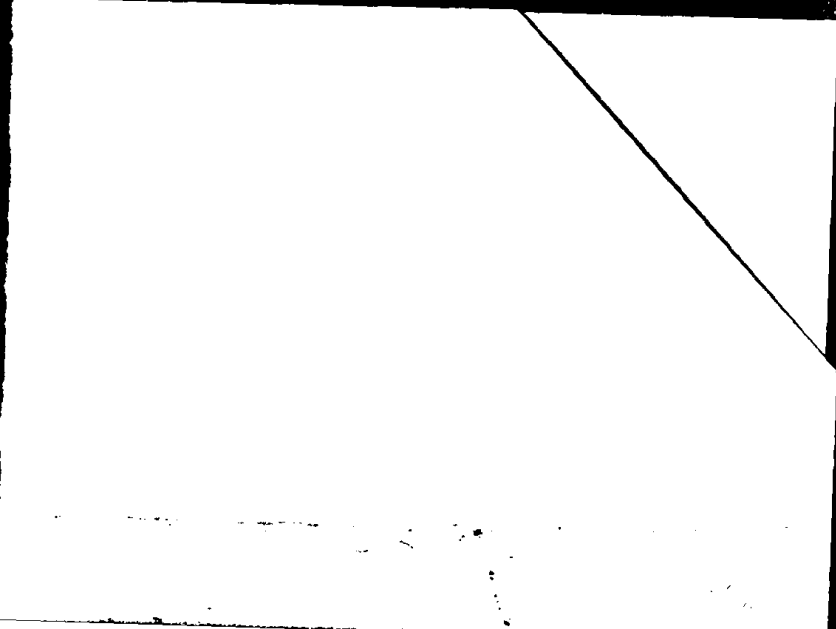
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000047296

532

KAT



ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Δ. ΚΑΤΣΟΥΛΗ

Αναπλ. Καθηγητή της Μετεωρολογίας
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων



ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 1989



Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Το παρόν βοήθημα της "Μηχανικής των Ρευστών", αποσκοπεί στη μελέτη των ασυμπίεστων και συμπιεστών ρευστών και καλύπτει το τμήμα της ύλης, την οποία πρέπει να διδάσκεται ο φοιτητής της Φυσικής. Η σύνθεση της ύλης καλύπτει βιβλιογραφικά ένα βασικό τμήμα των αναγκών του ενδιαφερομένου φυσικού (φοιτητή ή ερευνητή) και τον εισάγει βαθμιαία στα βασικά κεφάλαια του αντικειμένου.

Η διάταξη της ύλης των σημειώσεων περιλαμβάνει εννέα Κεφάλαια, διαφορετικής έκτασης και βαρύτητας. Το αντικείμενο αναπτύσσεται, κυρίως, με διανυσματικές μεθόδους, τα στοιχεία των οποίων δίδονται στο πρώτο Κεφάλαιο. Μερικά από τα σπουδαιότερα αποτελέσματα έχουν γραφεί συνοπτικά με συμβολισμούς ταχυστών, ώστε να διευκολυνθεί η περαιτέρω μελέτη του αντικειμένου σε μεταπτυχιακή στάθμη.

Οι βασικές έννοιες και οι ορισμοί των ρευστών αναπτύσσονται στο 2ο Κεφάλαιο. Ακολουθεί η Στατική και η Κινηματική των Ρευστών και μία γενική θεώρηση των ρευστών σε κίνηση. Τα επόμενα Κεφάλαια σχετίζονται με τα ασυμπίεστα ρευστά και χρησιμοποιούν ειδικές μαθηματικές μεθόδους, περιλαμβανομένων των φανταστικών και μιγαδικών μεταβλητών. Το υπόλοιπο τμήμα των σημειώσεων ασχολείται με τη δυναμική των πραγματικών ρευστών. Τα τελευταία χρόνια, τα αντικείμενα αυτά εμφανίζονται στα προπτυχιακά προγράμματα σπουδών για τους φυσικούς και είναι εμφανής η ανάγκη για εκπόνηση ενός προπτυχιακού εγχειριδίου, στο οποίο να περιλαμβάνονται και να αναπτύσσονται τα θέματα αυτά, καθώς και η χωρίς ιξώδες (ιδανική) ασυμπίεστη ροή. Το βιβλίο τελειώνει με μια εισαγωγή στη Μαγνητοϋδροδυναμική.

Επειδή, το βιβλίο αυτό γράφτηκε σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα, πιθανόν να περιέχει λάθη. Κάθε υπόδειξη τέτοιων λαθών θα είναι ευπρόσδεκτη.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω το προσωπικό του Εργαστηρίου της Μετεωρολογίας και ιδιαίτερα την κ. Β. Χρήστου-Ζώη, για την δακτυλογράφηση του κειμένου αυτών των σημειώσεων και τον κ. Κ. Τσέφο για τη σχεδίαση των Σχημάτων.

Δεκέμβριος 1985

Β. Δ. ΚΑΤΣΟΥΛΗΣ

Τομέας Αстро-Γεωφυσικής
Τμήμα Φυσικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

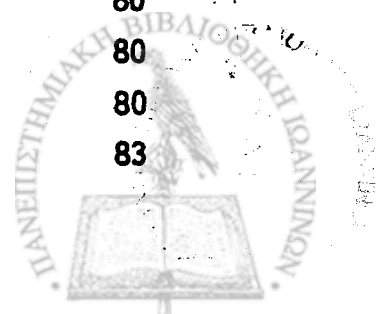


ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝΠΡΟΛΟΓΟΣΣελίδα

1.	<u>ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ</u>	1
1.1	Διανυσματικά και Μονόμετρα ή Βαθμωτά Μεγέθη	1
1.2	Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων	2
1.3	Χρήση των Συντεταγμένων	3
1.4	Εσωτερικό ή Αριθμητικό Γινόμενο Δύο Διανυσμάτων	4
1.5	Εξωτερικό ή Διανυσματικό Γινόμενο Δύο Διανυσμάτων	7
1.6	Τριπλά Γινόμενα	10
1.7	Διανυσματική Ροπή Περί Σημείο και Αριθμητική Ροπή Περί Άξονα	11
1.8	Διανυσματικά και Βαθμωτά (Αριθμητικά) Ζεύγη	12
1.9	Κεντροειδή ή Μέσα Κέντρα	13
1.10	Παραγωγή Διανυσμάτων ως προς Βαθμωτές Μεταβλητές	14
1.11	Παράσταση των Βαθμωτών και Διανυσματικών Πεδίων	15
1.12	Η Διανυσματική Βαθμίδα (grad ή ∇) και ο Διαφορικός Τελεστής Διεύθυνσης	16
1.13	Κάθετη Ροή Ενός Διανύσματος σε μία Επιφάνεια. Απόκλιση Διανύσματος	19
1.14	Γραμμικά (Επικαμπύλια) Ολοκληρώματα. Στροβιλισμός μιας Διανυσματικής Συνάρτησης	22
1.15	Μερικές Διανυσματικές Ταυτότητες	26
1.16	Σχέσεις Μεταξύ Διπλών και Τριπλών Ολοκληρωμάτων (Ολοκληρωμάτων Όγκου)	27
1.16.1	Καρτεσιανή Μορφή του Θεωρήματος της Απόκλισης (Θ. Green)	30
1.17	Σχέσεις μεταξύ Επικαμπυλίων (Γραμμικών) και Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων	31
1.18	Γενικές Ορθογώνιες Καμπυλόγραμμες Συντεταγμένες	33
1.19	Μερικοί Συμβολισμοί Καρτεσιανών Τανυστών	36
2.	<u>ΟΙ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ. ΟΡΙΣΜΟΙ</u>	42
2.1	Γενικά	42
2.2	Ορισμός του Ρευστού	42
2.3	Μονάδες Δύναμης, Μάζας και Μήκους	45
2.4	Το ιξώδες	46
2.5	Το Κινηματικό Ιξώδες	48



	<u>Σελίδα</u>	
2.6	Συνεχές Μέσον	48
2.7	Πυκνότητα, Ειδικός Όγκος, Ειδικό Βάρος, Σχετικό Ειδικό Βάρος, Πίεση, Θερμοκρασία	49
2.8	Τέλεια Αέρια	51
2.9	Μέτρο Διόγκωσης	52
2.10	Τάση Ατμών	53
2.11	Επιφανειακή Τάση. Τριχοειδή Φαινόμενα	54
3.	<u>ΣΤΑΤΙΚΗ</u>	56
3.1	Γενικά	56
3.2	Πίεση σε Σημείο	56
3.3	Βασικές Εξισώσεις της Στατικής των Ρευστών	
	I. Μεταβολή της Πίεσης Στατικών Ρευστών	58
	II. Μεταβολή της Πίεσης Συμπιεστών Ρευστών	60
	III. Ισοτροπική και Πολυτροπική Ατμόσφαιρα	61
3.4	Δυνάμεις σε Επίπεδες Επιφάνειες	63
	I. Εισαγωγή	63
	II. Οριζόντιες Επιφάνειες	63
	III. Κεκλιμένες Επιφάνειες	65
	IV. Κέντρο Πίεσης	66
	V. Το Πρίσμα Πίεσης	
	VI. Επίδραση της Ατμοσφαιρικής Πίεσης σε Επίπεδες Επιφάνειες	69
3.5	Συνιστώσες Δυνάμεις σε Καμπύλες Επιφάνειες	69
	I. Εισαγωγή	69
	II. Οριζόντια Συνιστώσα Δύναμης σε Καμπύλη Επιφάνεια	70
	III. Κάθετη Συνιστώσα Δύναμης σε Καμπύλη Επιφάνεια	71
3.6	Άνωση	73
	<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I</u>	77
1.	Στατική Ροπή. Κέντρο Βάρους	77
2.	Ροπή Αδρανείας μιας Επιφάνειας	78
4.	<u>ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ</u>	80
4.1	Πραγματικά και Ιδανικά Ρευστά	80
	I. Εισαγωγή	80
	II. Ορισμοί και Χαρακτηριστικά της Ροής	80
	III. Η φύση των Δυνάμεων στα Κινούμενα Ρευστά	83



	<u>Σελίδα</u>
4.2 Ταχύτητα σε ένα Σημείο του Ρευστού	83
4.3 Ρευματογραμμές και Διαδρομές. Στατικές και μη Στατικές Ροές	85
4.4 Δυναμικό της Ταχύτητας	86
4.5 Το Διάνυσμα της Στροβιλότητας	88
4.6 Τοπικοί και Σωματιδιακοί Ρυθμοί Μεταβολής	89
4.7 Η εξίσωση Συνεχειας	91
4.8 Επιτάχυνση ενός Ρευστού	93
4.9 Συνθήκες σε Στερεά Οριακή Επιφάνεια	95
4.10 Γενική Ανάλυση της Κίνησης Ρευστού	95
5. <u>ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΕΝΟΣ ΡΕΥΣΤΟΥ</u>	101:
5.1 Πίεση σε ένα Σημείο Ρευστού που Βρίσκεται σε Ηρεμία	101
5.2 Πίεση σε ένα Σημείο Κινούμενου Ρευστού	102
5.3 Εξισώσεις Κίνησης του Euler	105
5.4 Εξίσωση του Bernoulli	107
5.5 Μελέτη της Περίπτωσης Στατικής Κίνησης υπό την Επίδραση Συντηρητικών Εξωτερικών Δυνάμεων	108
5.6 Μερικές Ροές με Αξονική Συμμετρία	110
5.7 Μερικές Ειδικές Δισδιάστατες Ροές	111
5.8 Ωστική Κίνηση	111
5.9 Μερικές ακόμη Απόψεις για την Κίνηση Στροβίλου	113
6. <u>ΜΕΡΙΚΕΣ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΡΟΕΣ</u>	116
6.1 Εισαγωγή	116
6.2 Πηγές, Απώλειες (Καταβόθρες) και Δίπολα	116
6.3 Αξονοσυμμετρικές Ροές. Ρευματοσυνάρτηση του Stokes	119
6.3.1 Μερικές Ειδικές Μορφές της Ρευματοσυνάρτησης για Αξονοσυμμετρικές Αστρόβιλες Κινήσεις	122
7. <u>ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΡΟΕΣ</u>	127
7.1 Εισαγωγή. Σημασία της Δισδιάστατης Ροής	127
7.2 Χρήση των Κυλινδρικών Πολικών Συντεταγμένων	127
7.3 Η Ρευματοσυνάρτηση	129
7.4 Το Μιγαδικό Δυναμικό για Δισδιάστατη, Αστρόβιλη, Ασυμπύεστη Ροή	131
7.5 Μιγαδικά Δυναμικά Ταχύτητας για Τυπικές Δισδιάστατες Ροές	133



	<u>Σελίδα</u>
7.5.1 Ομοιόμορφο Ρεύμα	133
7.5.2 Γραμμικές Πηγές και Καταβόθρες	134
7.5.3 Γραμμικά Ζεύγη (Δίπολα)	136
7.5.4 Δινογραμμές	137
7.6 Το θεώρημα του Κύκλου του Milne-Thomson	140
7.7 Το θεώρημα του Blasius	142
7.8 Η χρήση του Σύμμορφου Μετασχηματισμού	144
7.8.1 Μερικές Υδροδυναμικές Απόψεις επί του Σύμμορφου Μετασχηματισμού	146
7.9 Σειρές Στροβίλων	151
7.9.1 Απλή Επάπειρη Σειρά Δινογραμμών	151
7.9.2 Ο Στροβιλόδρομος KARMAN	153
8. <u>ΡΟΗ ΙΞΩΔΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ</u>	154
8.1 Συνιστώσες Τάσης σε ένα Πραγματικό Ρευστό	154
8.2 Σχέσεις Μεταξύ Καρτεσιανών Συνιστωσών Τάσης	156
8.3 Μεταφορική Κίνηση Στοιχείου του Ρευστού	159
8.4 Ρυθμός Τετραγωνικής Παραμόρφωσης (Στρέβλωσης) και Βασικές Τάσεις	160
8.5 Μερικές Ιδιότητες του Ρυθμού της Τετραγωνικής Παραμόρφωσης	161
8.6 Ανάλυση Τάσης Ρευστού σε Κίνηση	164
8.7 Σχέσεις Μεταξύ Τάσης και Ρυθμού Παραμόρφωσης	165
8.8 Συντελεστής Ιξώδους (Εσωτερικής Τριβής) και Στρωτή Ροή	168
8.9 Οι Εξισώσεις Κίνησης των Navier-Stokes ενός Ιξώδους Ρευστού	170
8.10 Μερικά Επιλύσιμα Προβλήματα Ροής με Ιξώδες	171
8.10.1 Στατική Κίνηση μεταξύ Παραλλήλων Επιπέδων	171
8.10.2 Στατική Ροή σε Σωλήνα Ομοιόμορφης Κυκλικής Διατομής (Ροή Poiseuille)	175
8.10.3 Στατική Ροή Μεταξύ Ομοκέντρων Περιστρεφόμενων Κυλίνδρων	178
8.11 Στατική Ροή Ρευστού με Ιξώδες, σε Σωλήνες Ομοιόμορφης Διατομής	180
8.11.1 Θεώρημα Μοναδικότητας	181
8.11.2 Ροή σε Σωλήνα Ομοιόμορφης Ελλειπτικής Διατομής	182
8.11.3 Ροή σε Σωλήνα με Ισόπλευρη Τριγωνική Διατομή	184
8.11.4 Χρήση των Αρμονικών Συναρτήσεων	184
8.12 Διάχυση Στροβιλιότητας	185



	<u>Σελίδα</u>
8.13 Διασπορά Ενέργειας λόγω Εσωτερικής Τριβής (Ιξώδους)	188
8.14 Στατική Ροή Γύρω από Ακίνητη Σφαίρα	189
8.15 Διαστατική Ανάλυση, Αριθμός του Reynolds	193
8.15.1 Εισαγωγή	193
8.15.2 Το θεώρημα Π του Buckingham	194
8.15.3 Εξαγωγή των Αδιάστατων Παραμέτρων, Αριθμός Reynolds κλπ.	195
8.16 Το Οριακό Στρώμα του Prandtl	198
8.16.1 Η Ολοκληρωματική Εξίσωση του Karman	201
8.17 Μήκος Ανάμιξις του Prandtl	202
8.18 Κατανομή της ταχύτητας (profile)	206
8.19 Διάχυση	207
9. <u>ΣΥΜΠΙΕΣΙΜΗ ΡΟΗ</u>	208
9.1 Εισαγωγή	208
9.2 Η Καταστατική Εξίσωση μιας Ουσίας	208
9.3 Ο Πρώτος Νόμος της Θερμοδυναμικής	209
9.4 Συναρτήσεις της Κατάστασης. Εντροπία	212
9.5 Ταχύτητα Ηχητικού Κύματος σε ένα Αέριο. Αριθμός Mach	214
9.5.1 Γωνία, Κύμα και Κώνος Mach	217
9.6 Ισηντροπική Ροή Αερίου	218
9.7 Εκροή Αερίου δια μέσου Αγωγού Μεταβλητής Διατομής	220
9.7.1 Διερεύνηση της Μέγιστης Ροής Μάζας δια μέσου ενός Ακροφυσίου	223
9.8 Κρουστικά Κύματα	225
9.8.1 Σχηματισμός Κρουστικών Κυμάτων	225
9.8.2 Στοιχειώδης Ανάλυση Κάθετων Κρουστικών Κυμάτων	227
9.8.3 Στοιχειώδης Ανάλυση των Πλαγίων Κρουστικών Κυμάτων	233
9.9 Η Μέθοδος των Χαρακτηριστικών Εφαρμοζόμενη σε Υπερηχητικές Αστρόβιλες Ροές Αερίου	238
10. <u>ΜΑΓΝΗΤΟΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ</u>	241
10.1 Η Φύση της Μαγνητούδροδυναμικής	241
10.2 Εξισώσεις Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου του Maxwell: Μέσον σε Ηρεμία	242
10.3 Εξισώσεις Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου του Maxwell: Μέσον σε Κίνηση	244
10.4 Οι Εξισώσεις Κίνησης ενός Αγωγίμου Ρευστού	246



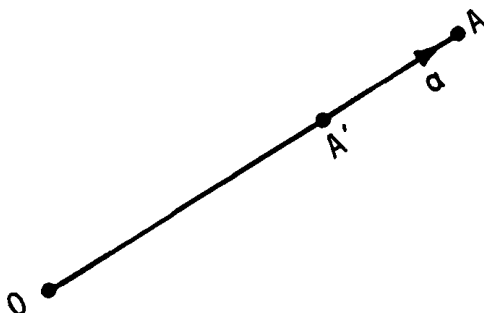
	<u>Σελίδα</u>
10.5 Ρυθμός της Ροής του Φορτίου	248
10.6 Απλοποίηση των Εξισώσεων του ΗΜ Πεδίου	249
10.7 Ο Μαγνητικός Αριθμός Reynolds	250
10.8 Θεώρημα του Αϊφνέι	252
10.9 Η Μαγνητική Δύναμη	254
10.10 Νόμος της Ισοπεριστροφής του Ferraro	256
10.11 Μαγνητοϋδροστατική	259
10.11.1 Περιορισμός του Πλάσματος με Συμπύκνωση	260
10.11.2 Ισοζύγιο Ηλιακών Κηλίδων	262
10.12 Μαγνητοϋδροδυναμικά Κύματα	263
10.13 Μαγνητοϋδροδυναμικά Κρουστικά Κύματα	265
10.13.1 Κρουστικά Κύματα σε μη-Αγώγιμο Αέριο με Ορισμένο Ιξώδες και Θερμική Αγωγιμότητα	265
10.14 Στρωματική Ροή Ενός Ιξώδους Αγώγιμου Υγρού Μεταξύ Παραλλήλων Τοίχων σ' Ένα Εγκάρσιο Μαγνητικό Πεδίο	269
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	275



1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

1.1 Διανυσματικά και Μονόμετρα ή βαθμωτά Μεγέθη

Οι φυσικές μετρήσεις είναι κυρίως δύο ειδών: (i) Μονόμετρα ή βαθμωτά μεγέθη, τα οποία έχουν μέτρα και μονάδες μέτρησης αλλά όχι διεύθυνση και (ii) Διανυσματικά μεγέθη, τα οποία έχουν και μέτρο και διεύθυνση. Παραδείγματα μονομέτρων ή βαθμωτών μεγεθών είναι η μάζα, ο όγκος και η ενέργεια. Ενώ, παραδείγματα διανυσματικών μεγεθών είναι η μετατόπιση, η ταχύτητα και η δύναμη, των οποίων ο ακριβής ορισμός απαιτεί τον καθορισμό μίας διεύθυνσης. Τα διανυσματικά μεγέθη μπορούν να παρασταθούν κατά μέτρο και διεύθυνση με κατάλληλα σχεδιασμένα τμήματα ευθείας γραμμής. Υποθέτουμε ότι το τμήμα γραμμής \vec{OA} παριστάνει ένα δεδομένο διάνυσμα κατά μέτρο και διεύθυνση (Σχ. 1.1). Αν το διάνυσμα διέρ-



Σχήμα 1.1

χεται πράγματι, από το O , λέμε ότι είναι ένα διάνυσμα θέσης στο O , αλλιώς δεν είναι διάνυσμα θέσης. Συμβολίζουμε το \vec{OA} με \vec{a} και γράφουμε $\vec{OA} \equiv \vec{a}$. Υποθέτουμε, ότι παίρνουμε ένα τμήμα $\vec{OA'}$ στη διεύθυνση του \vec{OA} μοναδιαίου μήκους, το οποίο συμβολίζουμε $\vec{OA'} \equiv \hat{a}$. Τότε το \hat{a} ορίζεται ως το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του \vec{a} . Το μέτρο του \vec{a} δηλώνεται είτε με a είτε με $|\vec{a}|$, έτσι που να ισχύει:

$$\vec{a} = a \hat{a} = |\vec{a}| \hat{a},$$

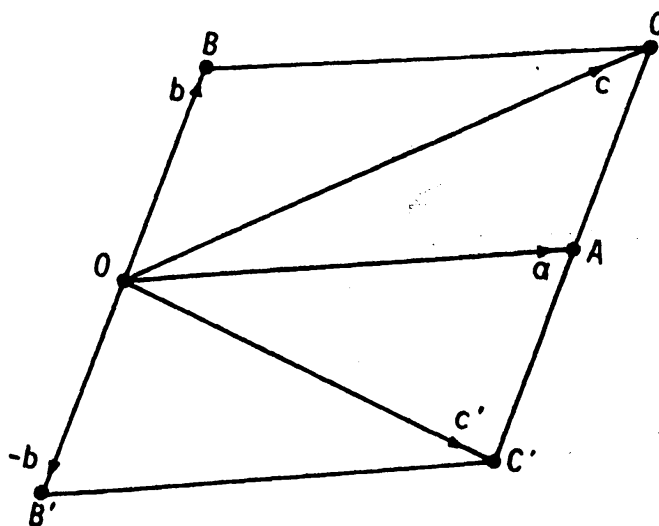
αφού η γνώση των a , \hat{a} ορίζει το \vec{a} κατά μέτρο και διεύθυνση. Το αρ-



νητικό του διανύσματος \vec{a} δηλώνεται με $-\vec{a}$ και ορίζεται με τη σχέση $\vec{AO} \equiv -\vec{a}$. Μηδενικό διάνυσμα είναι εκείνο που έχει μηδενικό μέτρο.

1.2 Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να προσθέσουμε δύο δεδομένα διανύσματα \vec{a} , \vec{b} . Από μία αρχή O σχεδιάζουμε τα $\vec{OA} \equiv \vec{a}$, $\vec{OB} \equiv \vec{b}$ (Σχ. 1.2).



Σχήμα 1.2

Είναι χωρίς σημασία αν ή όχι τα διανύσματα διέρχονται πραγματικά από το O . Η κατασκευή απλώς σημαίνει σχεδιασμό τμημάτων γραμμής \vec{OA} , \vec{OB} παραλλήλων προς τα \vec{a} και \vec{b} και καταλλήλων μηκών. Συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο $OACB$ και ορίζουμε το $\vec{OC} \equiv \vec{c}$. Τότε λέμε ότι το \vec{c} είναι το άθροισμα των \vec{a} και \vec{b} και γράφουμε:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{ή} \quad \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

Αυτός είναι ο νόμος του παραλληλογράμμου της πρόσθεσης διανυσμάτων. Αφού $\vec{AC} \equiv \vec{b}$, μπορούμε ισοδύναμα να γράψουμε $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$. Η μορφή αυτή περιέχει το νόμο του Τριγώνου για την πρόσθεση.

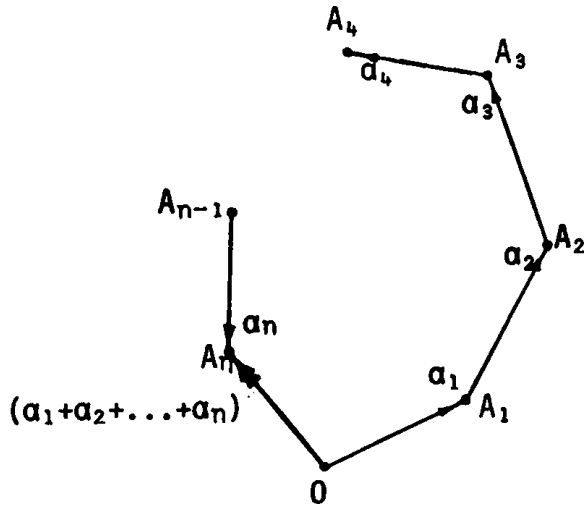
Υποθέτουμε τώρα ότι σχεδιάζουμε το $\vec{OB'} \equiv -\vec{b}$ ($\vec{OB'} = \vec{bO}$). Συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο $OAC'B'$ και έστω $\vec{OC'} \equiv \vec{c}'$. Τότε:

$$\vec{c}' = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$

η οποία δίνει τη διαφορά μεταξύ δύο διανυσμάτων.



Η διαδικασία της πρόσθεσης μπορεί να επεκταθεί σε οσαδήποτε διανύσματα. Άρα, για να προσθέσουμε τα n διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, επιλέγουμε πρώτα μία αρχή O και σχεδιάζουμε το $O\vec{A}_1 \equiv \vec{a}_1$. Έπειτα σχεδιάζουμε τα $\vec{A_1A_2} \equiv \vec{a}_2, \vec{A_2A_3} \equiv \vec{a}_3, \dots, \vec{A_{n-1}A_n} \equiv \vec{a}_n$. (Σχ. 1.3).



Σχήμα 1.3

Τότε έχουμε:

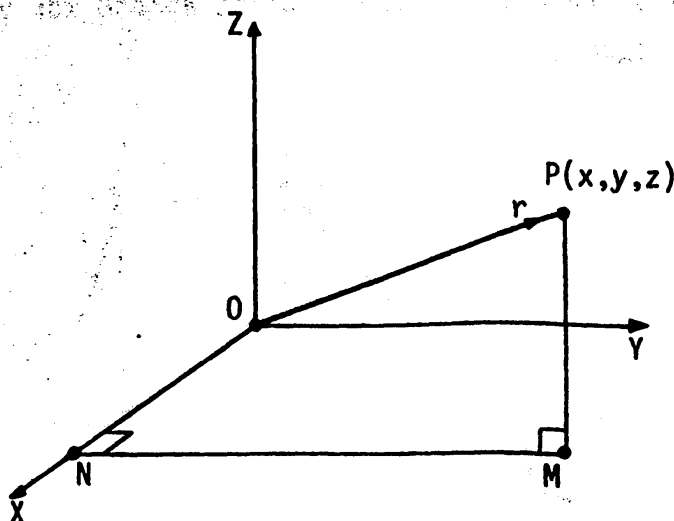
$$\begin{aligned} \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_n &= O\vec{A}_1 + A_1\vec{A}_2 + A_2\vec{A}_3 + \dots + A_{n-1}\vec{A}_n \\ &= O\vec{A}_2 + A_2\vec{A}_3 + \dots + A_{n-1}\vec{A}_n \\ &= O\vec{A}_3 + A_3\vec{A}_4 + \dots + A_{n-1}\vec{A}_n \\ &= \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &= O\vec{A}_{n-1} + A_{n-1}\vec{A}_n = O\vec{A}_n \end{aligned}$$

δείχνοντας ότι το $O\vec{A}_n$ παριστάνει το ζητούμενο άθροισμα. Αυτός είναι ο νόμος της πρόσθεσης με το πολύγωνο των διανυσμάτων.

1.3 Χρήση των Συντεταγμένων

Υποθέτουμε ότι $O\vec{P} \equiv \vec{r}$ (Σχ. 1.4). Από το O σχεδιάζουμε τρεις κάθετες μεταξύ τους γραμμές OX, OY, OZ που να σχηματίζουν ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Έστω PM ότι είναι η κάθετη από το P στο επίπεδο XOY και MN η κάθετη από το M στον άξονα OX . Αν $ON = x, NM = y, MP = z$, τότε τα (x, y, z) ορίζονται ως Καρτεσιανές συντεταγμένες του P ως προς το σύστημα. Είναι φανερό ότι τα $x, y,$





Σχήμα 1.4

x είναι οι αντίστοιχες αποστάσεις του P από τα επίπεδα συντεταγμένων YOZ , ZOX , XOY .

Έστω τώρα ότι με \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} συμβολίζονται τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις $O\vec{X}$, $O\vec{Y}$, $O\vec{Z}$. Τότε έχουμε,

$$O\vec{N} \equiv x\vec{i}, \quad N\vec{M} \equiv y\vec{j}, \quad M\vec{P} \equiv z\vec{k}$$

Επειδή

$$O\vec{P} = O\vec{N} + N\vec{M} + M\vec{P},$$

$$O\vec{P} \equiv \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1)$$

Εξάλλου,

$$OP^2 = OM^2 + MP^2 = ON^2 + NM^2 + MP^2, \quad \text{δηλαδή}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (2)$$

Η διατύπωση (1) γράφεται μερικές φορές πλο περιληπτικά $\vec{r} = [x, y, z]$, που σημαίνει ότι τα x , y , z είναι συνιστώσες του \vec{r} . Το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του \vec{r} είναι \hat{r} , όπου

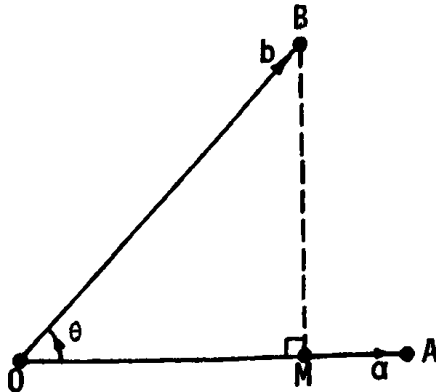
$$\hat{r} = \vec{r}/r = [x/r, y/r, z/r]$$

1.4 Εσωτερικό ή Αριθμητικό Γινόμενο Δύο Διανυσμάτων

Στο Σχ. 1.5, $O\vec{A} \equiv \vec{a}$, $O\vec{B} \equiv \vec{b}$, $\angle AOB = \theta$. Τότε το εσωτερικό γι-



νόμο του \vec{a} με το \vec{b} ορίζεται ότι είναι $ab\cos\theta$ και γράφουμε $\vec{a} \cdot \vec{b}$ έτσι που να ισχύει,



Σχήμα 1.5

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta.$$

Από τον ορισμό αυτό συνάγεται ότι,

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = bacos(2\pi - \theta) = bacos\theta = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Άρα, ο αριθμητικός πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός.

Συνάγεται εύκολα ότι,

$$\hat{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \hat{a} = b\cos\theta = OM$$

όπου OM είναι η προβολή του OB στο OA. Για κάθε διάνυσμα \vec{a} έχουμε,

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (a) \cdot (a) (\cos\theta) = a^2$$

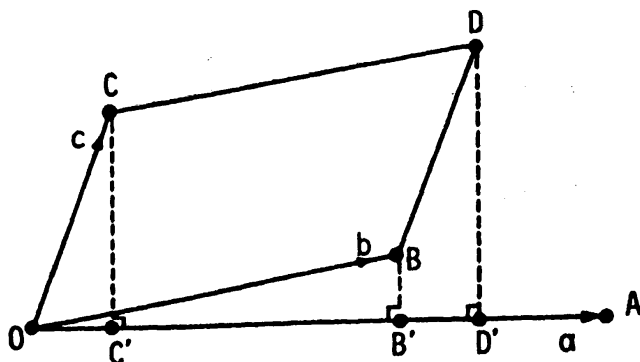
Ο αναγνώστης εύκολα μπορεί να διαπιστώσει ότι για τα μοναδιαία διανύσματα \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} στους άξονες συντεταγμένων ισχύουν:

$$\vec{i}^2 = 1, \vec{j}^2 = 1, \vec{k}^2 = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

Θα δείξουμε τώρα ότι για δεδομένα διανύσματα \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , ισχύει για το εσωτερικό γινόμενο ο επιμεριστικός νόμος ως προς την πρόσθεση, δηλαδή:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$





Σχήμα 1.6

Το αποτέλεσμα αυτό καθιστά τη διανυσματική μέθοδο χρήσιμη στην αναλυτική εργασία. Πράγματι, στο Σχ. 1.6 έστω $\vec{OA} \equiv \vec{a}$, $\vec{OB} \equiv \vec{b}$, $\vec{OC} \equiv \vec{c}$. Συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο OBDC έτσι που να ισχύει $\vec{OD} = \vec{b} + \vec{c}$. Έστω B', C', D' ότι είναι οι κάθετες προβολές των B, C, D στον OA. Τότε, από το σχήμα έχουμε,

$$OD' = OB' + B'D' = OB' + OC', \quad \text{ή}$$

$$\hat{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \hat{a} \cdot \vec{b} + \hat{a} \cdot \vec{c}$$

αφού OB' είναι η προβολή του \vec{b} στον OA κλπ. Πολλαπλασιασμός του τελευταίου αποτελέσματος με το μέτρο a παρέχει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Η χρησιμότητα του επιμεριστικού νόμου κατανοείται καλύτερα, όταν τα διανύσματα εκφράζονται σε καρτεσιανές συνιστώσες. Συνεπώς, για δεδομένα διανύσματα $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$, έχουμε:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \cdot (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$

$$= a_1\vec{i} \cdot (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) + a_2\vec{j} \cdot (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) + a_3\vec{k} \cdot (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$



Αν $[l_1, m_1, n_1]$, $[l_2, m_2, n_2]$ είναι τα διευθύνοντα συννημίτονα των δύο μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{OA}_1 \equiv \hat{a}_1$, $\vec{OA}_2 \equiv \hat{a}_2$ όπου $\angle A_1 \hat{O} A_2 = \theta$, τότε $\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2 = \cos \theta$. Αλλ' επειδή

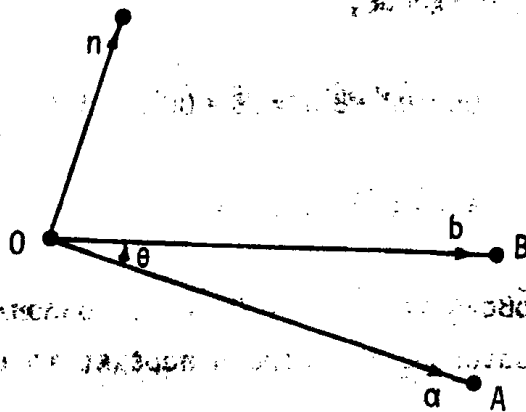
$$\hat{a}_1 = [l_1, m_1, n_1], \quad \hat{a}_2 = [l_2, m_2, n_2]$$

$$\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2 = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2, \quad \text{άρα:}$$

$$\cos \theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

1.5 Εξωτερικό ή Διανυσματικό γινόμενο Δύο Διανυσμάτων

Στο Σχ. 1.7, $\vec{OA} \equiv \vec{a}$, $\vec{OB} \equiv \vec{b}$, $\angle AOB = \theta$ και \vec{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα από το O κάθετο στο επίπεδο AOB κατά τη δεξιόστροφη έννοια από το \vec{a} στο \vec{b} . Τότε το εξωτερικό γινόμενο του \vec{a} με το \vec{b} ορίζεται ότι είναι το διάνυσμα του οποίου μέτρο είναι το $ab \sin \theta$ και



Σχήμα 1.7

του οποίου διεύθυνση είναι η διεύθυνση του \vec{n} . Συμβολίζουμε το διανυσματικό αυτό γινόμενο με $\vec{a} \wedge \vec{b}$, έτσι ώστε:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (ab \sin \theta) \vec{n} \quad \text{και} \quad \vec{b} \wedge \vec{a} = (ba \sin \theta) (-\vec{n}) = -(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

αφού $-\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη δεξιόστροφη έννοια από το \vec{b} προς το \vec{a} διά της θ . Άρα, ο διανυσματικός πολλαπλασιασμός δεν είναι αντιμεταθετικός.



Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να δείξει ότι για κάθε διάνυσμα \vec{a} , ισχύει $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$. Ακόμη, για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, έχουμε:

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0};$$

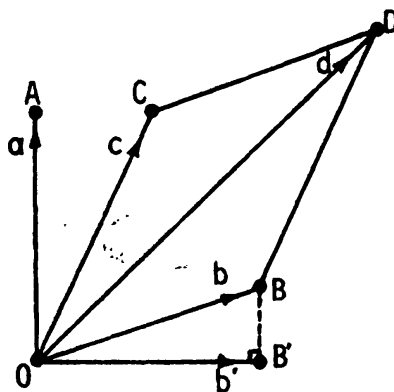
$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j};$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

Διατυπώνουμε τώρα τον επιμεριστικό Νόμο για το εξωτερικό γινόμενο, με τη μορφή:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

Έστω $\vec{OA} \equiv \vec{a}$, $\vec{OB} \equiv \vec{b}$, $\vec{OC} \equiv \vec{c}$ (Σχ. 1.8(α)). Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $OBDC$ έτσι ώστε $\vec{OD} \equiv \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. Έστω Π ότι είναι το επίπεδο που διέρχεται από το O το κάθετο στο \vec{a} και B', C', D' οι κάθετες



Σχήμα 1.8 (α)

προβολές των B, C, D στο Π και γράφουμε $\vec{OB'} \equiv \vec{b'}$, $\vec{OC'} \equiv \vec{c'}$, $\vec{OD'} \equiv \vec{d'}$.

Στο Σχ. 1.8(α), μόνο η OB' φαίνεται, αλλά το Σχ. 1.8(β) είναι ένα σχεδιάγραμμα του επιπέδου Π . Είναι φανερό ότι το παραλληλόγραμμο $OBDC$ προβάλλεται στο παραλληλόγραμμο $OB'D'C'$ έτσι, ώστε

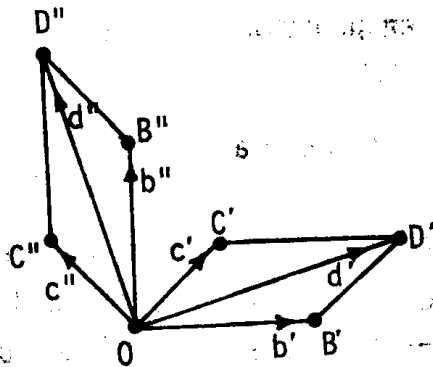
$$\vec{d'} = \vec{b'} + \vec{c'} \quad (1)$$

Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου είναι προφανές ότι:



$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}', \quad \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c}', \quad \vec{a} \wedge \vec{d} = \vec{a} \wedge \vec{d}' \quad (2)$$

Έστω $\vec{b}'' = \vec{a} \wedge \vec{b}'$, $\vec{c}'' = \vec{a} \wedge \vec{c}'$, $\vec{d}'' = \vec{a} \wedge \vec{d}'$ και $O\vec{B}'' \equiv \vec{b}''$, $O\vec{C}'' \equiv \vec{c}''$, $O\vec{D}'' \equiv \vec{d}''$. Η επίπτωση του διανυσματικού παράγοντα, ο οποίος πολλαπλασιάζει καθένα από τα συνεπίπεδα διανύσματα \vec{b}' , \vec{c}' , \vec{d}' με \vec{a} είναι να περιστρέψει καθένα από αυτά διαμέσου μιας δεξιόστροφης γωνίας κατά την ίδια έννοια στο επίπεδο Π και να πολλαπλασιάσει τα μέτρα τους με a . Άρα, το $OB''D''C''$ είναι ένα παραλληλόγραμμο και



Σχήμα 1.8 (β)

έτσι έχουμε:

$$\vec{d}'' = \vec{b}'' + \vec{c}'' \quad (3)$$

Από την (3) έχουμε,

$$\vec{a} \wedge \vec{d}' = \vec{a} \wedge \vec{b}' + \vec{a} \wedge \vec{c}', \quad \text{δηλαδή,} \quad \vec{a} \wedge \vec{d} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

ή

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

Το αποτέλεσμα αυτό δίνει τη δυνατότητα στα διανυσματικά γινόμενα να υπολογιστούν με τη βοήθεια των συνιστωσών. Έτσι, αν

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3], \quad \vec{b} = [b_1, b_2, b_3],$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \wedge (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$



$$\begin{aligned}
 &= a_1 \vec{i} \wedge (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) + a_2 \vec{j} \wedge (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) + a_3 \vec{k} \wedge \\
 &\wedge (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) \\
 &= a_1 b_2 \vec{k} - a_1 b_3 \vec{j} - a_2 b_1 \vec{k} + a_2 b_3 \vec{i} + a_3 b_1 \vec{j} - a_3 b_2 \vec{i} \\
 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}
 \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να εκφραστεί καλύτερα με μορφή οριζουσών, όπως:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

1.6 Τριπλά Γινόμενα

Η ποσότητα $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{b} \wedge \vec{c}$. Καλείται τριπλό αριθμητικό γινόμενο και συμβολίζεται με $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$. Αν συμβολίσουμε τις συνιστώσες του \vec{a} με $[a_1, a_2, a_3]$ κλπ., ο αναγνώστης εύκολα δείχνει ότι:

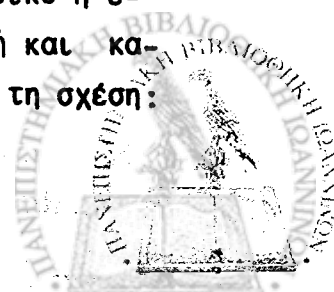
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Από στοιχειώδεις ιδιότητες των οριζουσών εύκολα συνάγεται ότι ισχύει:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \equiv [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] \equiv [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

αλλά $[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ κλπ. Συνεπώς, κυκλική εναλλαγή των γραμμάτων αφήνει το τριπλό αριθμητικό γινόμενο αμετάβλητο, αλλά αντικυκλική εναλλαγή αλλάζει το πρόσημό του.

Η ποσότητα $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$, η οποία είναι το διανυσματικό ή εξωτερικό γινόμενο του \vec{a} με το $(\vec{b} \wedge \vec{c})$, είναι διανυσματική και καλείται τριπλό διανυσματικό γινόμενο. Αποδεικνύουμε τώρα τη σχέση:



$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, έχουμε:

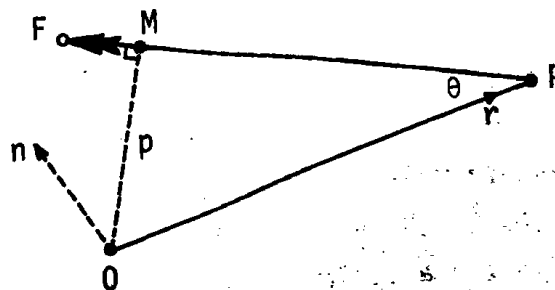
$$\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \Sigma (b_2 c_3 - b_3 c_2) \vec{i}$$

Το άθροισμα λαμβάνεται κυκλικά για τα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}; 1, 2, 3$.

Άρα,

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ (b_2 c_3 - b_3 c_2) & (b_3 c_1 - b_1 c_3) & (b_1 c_2 - b_2 c_1) \end{vmatrix} \\ &= \Sigma \{ a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3) \} \vec{i} \\ &= \Sigma (a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 \vec{i} - \Sigma (a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1 \vec{i} \\ &= \Sigma (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 \vec{i} - \Sigma (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1 \vec{i} \\ &= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \Sigma b_1 \vec{i} - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \Sigma c_1 \vec{i} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \end{aligned}$$

1.7 Διανυσματική Ροπή Περί Σημείο και Αριθμητική Ροπή Περί Άξονα



Σχήμα 1.9



Έστω ότι \vec{F} είναι μία διανυσματική ποσότητα, η οποία δρα σ'ένα σημείο P του οποίου το διάνυσμα θέσης ως προς κάποια αρχή O δίδεται από την $\vec{OP} \equiv \vec{r}$ (Σχ. 1.9). Τότε η διανυσματική ροπή \vec{G} του \vec{F} περί το O ορίζεται ότι είναι:

$$\vec{G} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Αν $p = OM$ είναι η κάθετη από το O προς την \vec{F} , τότε σημειώνοντας $\theta = \widehat{OPM}$, από τον ορισμό του διανυσματικού γινομένου, έχουμε:

$$\vec{G} = (r F \sin\theta)\vec{n} = (pF)\vec{n}$$

όπου \vec{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στο επίπεδο OPM κατά την έννοια της δεξιόστροφης περιστροφής από το \vec{r} στην \vec{F} .

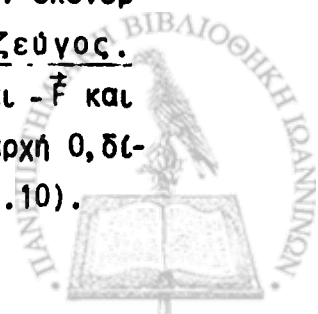
Αφού οι ροπές είναι διανύσματα μπορούμε να τις συνδέσουμε ως διανύσματα. Συνεπώς, αν έχουμε η δυνάμεις \vec{F}_k που ενεργούν σε η σημεία P_k με διανύσματα θέσης $\vec{OP}_k = \vec{r}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), τότε η ολική διανυσματική ροπή περί το O θα είναι,

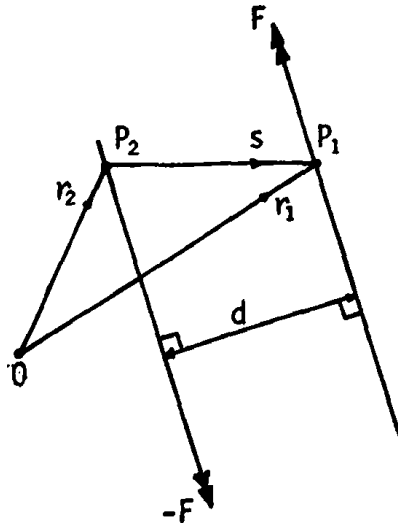
$$\vec{G} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k$$

1.8 Διανυσματικά και Βαθμωτά (Αριθμητικά) Ζεύγη

Δύο ίσα και αντίθετα διανύσματα $\pm \vec{F}$, τα οποία δεν επενεργούν στην ίδια ευθεία γραμμή λέγεται ότι συνιστούν ένα ζεύγος.

Έστω P_1, P_2 ότι είναι κάποια σημεία επιλεγμένα στα \vec{F} και $-\vec{F}$ και έστω ότι τα διανύσματα θέσης, ως προς κάποια εκλεγμένη αρχή O, δίδονται από τις $\vec{OP}_1 \equiv \vec{r}_1, \vec{OP}_2 \equiv \vec{r}_2$ και έστω $\vec{P}_2\vec{P}_1 \equiv \vec{s}$ (Σχ. 1.10).





Σχήμα 1.10

Η ολική διανυσματική ροπή περί το 0 είναι:

$$\vec{G} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F} + \vec{r}_2 \wedge (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F} = \vec{s} \wedge \vec{F}$$

Η ροπή αυτή φαίνεται ότι είναι αναλλοίωτη για οποιαδήποτε εκλογή του 0. Άρα, η διανυσματική ροπή ενός ζεύγους είναι ανεξάρτητη από την εκλογή της αρχής. Επιπλέον, αν σημειώσουμε με d την απόσταση μεταξύ των διανυσμάτων $\pm \vec{F}$, βλέπουμε ότι η φυσική ροπή είναι,

$$G = |\vec{s} \wedge \vec{F}| = dF,$$

σύμφωνα με τις στοιχειώδεις γνώσεις των ζευγών όταν τα διανύσματα $\pm \vec{F}$ ειδικά θεωρούνται ως δυνάμεις. Περαιτέρω, η διεύθυνση του G είναι κάθετη στο επίπεδο των $\pm \vec{F}$ κατά τη δεξιόστροφη έννοια της περιστροφής από το \vec{s} προς το $+\vec{F}$.

1.9 Κεντροειδή ή Μέσα Κέντρα

Υποθέτουμε ότι έχουμε m_k αριθμητικά μέτρα τα οποία συνδέονται με n σημεία P_k του χώρου και διανύσματα θέσης $O\vec{P}_k \equiv \vec{r}_k$, ως προς κάποια εκλεγείσα αρχή 0 ($k = 1, 2, \dots, n$). Συχνά στη Μηχανική οι ποσότητες m_k θα είναι σημειακές μάζες στα P_k . Τότε, με την προϋπόθεση ότι $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$, το κεντροειδές ή μέσο κέντρο των αριθμητικών μέτρων ορίζεται ότι είναι το σημείο G, με διάνυσμα θέ-



σης \vec{r} , όπου

$$\vec{OG} \equiv \vec{r} = \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k \right) / \left(\sum_{k=1}^n m_k \right)$$

Γράφοντας $\vec{r}_k = [x_k, y_k, z_k]$ ($k=1, \dots, n$), $\vec{r} = [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$, βλέπουμε ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του G δίδονται από τις σχέσεις:

$$\bar{x} = \left(\sum_{k=1}^n m_k x_k \right) / \left(\sum_{k=1}^n m_k \right), \text{ κλπ.}, \quad (1)$$

και ότι, για συνεχή συστήματα, οι αθροίσεις αυτές σε οριακή μορφή οδηγούν σε εκφράσεις ορισμένων ολοκληρωμάτων

$$\bar{x} = \left(\int x dm \right) / \int dm, \quad (2)$$

όπου οι ολοκληρώσεις εκτείνονται σ'ολόκληρο το σύστημα.

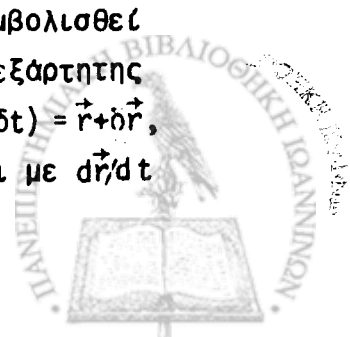
Η εξ. (2) συνάγεται ως ακολούθως. Αν έχουμε σημειακές μάζες δm σε αποστάσεις συντεταγμένων x από το επίπεδο $x=0$, τότε με τη χρήση της (1), έχουμε:

$$\bar{x} = (\sum x \delta m) / (\sum \delta m)$$

όπου οι αθροίσεις αναφέρονται σ'ολόκληρη την κατανομή των σημειακών μαζών. Λαμβάνοντας το όριο καθώς το $\delta m \rightarrow 0$, συνάγεται το αποτέλεσμα της (2).

1.10 Παραγωγή Διανυσμάτων ως προς Βαθμωτές Μεταβλητές

Ακριβώς όπως στον αριθμητικό ολοκληρωτικό λογισμό μία εξαρτημένη μεταβλητή μπορεί να είναι συνάρτηση μίας ανεξάρτητης μεταβλητής, η οποία να έχει ένα ή περισσότερους διαφορικούς συντελεστές ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή, έτσι και μία διανυσματική ποσότητα \vec{r} , μπορεί να είναι συνάρτηση μίας αριθμητικής μεταβλητής t . Μία τέτοια συναρτησιακή εξάρτηση μπορεί να συμβολισθεί με $\vec{r}(t)$. Αν, σε αντιστοιχία προς την τιμή $t+\delta t$ της ανεξάρτητης μεταβλητής, η διανυσματική συνάρτηση έχει την τιμή $\vec{r}(t+\delta t) = \vec{r} + \delta \vec{r}$, τότε ο διαφορικός συντελεστής, εάν υπάρχει, συμβολίζεται με $d\vec{r}/dt$



και ορίζεται ότι είναι:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{r}}{\delta t}$$

Αν οι \vec{r} , \vec{s} είναι συναρτήσεις της αριθμητικής μεταβλητής t , τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{s}) &= \lim_{\delta t} \frac{[(\vec{r} + \delta \vec{r}) \cdot (\vec{s} + \delta \vec{s}) - \vec{r} \cdot \vec{s}]}{\delta t} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r} \cdot \delta \vec{s} + \vec{s} \cdot \delta \vec{r} + \delta \vec{r} \cdot \delta \vec{s}}{\delta t} \\ &= \vec{r} \cdot \left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right) + \vec{s} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \end{aligned}$$

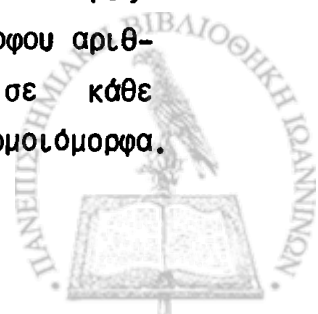
Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει ότι ισχύει:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{s}) = \vec{r} \wedge \left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right) + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \wedge \vec{s}$$

όπου η διάταξη του διανυσματικού πολλαπλασιασμού πρέπει απαραίτητα να τηρηθεί.

1.11 Παράσταση των Βαθμωτών και Διανυσματικών Πεδίων

Αν σε κάθε σημείο $P(x, y, z)$ μίας περιοχής R του χώρου, ορίζεται μία βαθμωτή (ή αριθμητική) συνάρτηση $\varphi(x, y, z)$, τότε το σύνολο αυτών των τιμών της φ στην R συνιστά ένα βαθμωτό πεδίο. Αν επιπλέον, η φ είναι μοναδική σε κάθε σημείο P της R , τότε καλείται ομοιόμορφη συνάρτηση. Για μιά τέτοια ομοιόμορφη συνάρτηση φ μπορούμε να κατασκευάσουμε επιφάνειες σε κάθε μία από τις οποίες η φ να είναι σταθερή. Αυτές καλούνται επιφάνειες στάθμης. Από κάθε σημείο P της R θα διέρχεται μία και μόνο μία επίπεδη επιφάνεια όταν το φ είναι ομοιόμορφο και ακόμη δεν μπορούν δύο επίπεδες επιφάνειες να τέμνονται. Δηλαδή, η φ θα έπρεπε να έχει περισσότερες από μία τιμές στα σημεία τομής. Ένα παράδειγμα ομοιόμορφου αριθμητικού πεδίου παρέχεται από το σύνολο των θερμοκρασιών σε κάθε σημείο ενός μεγάλου δωματίου, το οποίο δεν θερμαίνεται ομοιόμορφα.



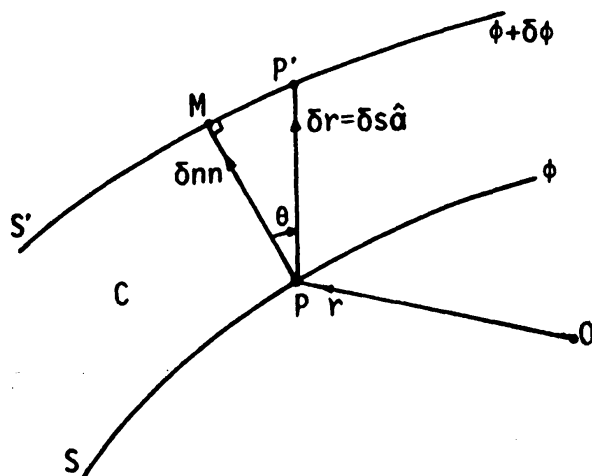
Σ'αυτή την περίπτωση οι ισόθερμες είναι οι επιφάνειες στάθμης.

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να οριστεί σε κάθε σημείο $P(x, y, z)$ της R μία μοναδική διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x, y, z)$ με το σύνολο αυτών των συναρτήσεων να συνιστά, ένα ομοιόμορφο διανυσματικό πεδίο. Οι συναρτήσεις αυτές μπορεί συχνά να εκφραστούν κατάλληλα με Καρτεσιανές συνιστώσες:

$$\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k} = [F_1, F_2, F_3]$$

όπου $F_1 = F_1(x, y, z)$, κλπ. Παράδειγμα διανυσματικού πεδίου αποτελεί το πεδίο ταχυτήτων του αέρα, ο οποίος πνέει πάνω από μία περιοχή με πολύπλοκο ανάγλυφο εδάφους.

1.12 Η Διανυσματική Βαθμίδα (grad ή ∇) και ο Διαφορικός Τελεστής Διεύθυνσης



Σχήμα 1.11

Υποθέτουμε ότι οι επιφάνειες ίσου ϕ μίας συνάρτησης $\phi(x, y, z)$ ομοιόμορφης σε μία περιοχή R , σχεδιάζονται έτσι ώστε οι S, S' να είναι δύο γειτονικές επιφάνειες στις οποίες η αριθμητική συνάρτηση υποτίθεται ότι έχει τιμές $\phi, \phi + \delta\phi$, αντιστοίχως (Σχ.1.11). Έστω P, P' ότι είναι γειτονικά σημεία στις S, S' έτσι που να ισχύει:

$$\vec{OP} \equiv \vec{r} = [x, y, z], \quad \vec{OP'} \equiv \vec{r} + \delta\vec{r} = [x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z]$$



και $\vec{pp}' \equiv \delta\vec{r} = \delta s \hat{a}$, όπου $\delta s = |\delta\vec{r}| = PP'$

Ακόμη, έστω ότι το PM είναι σχεδιασμένο κάθετα στην S' και τη συναντά στο M , έτσι, ώστε,

$$PM \equiv \delta n \vec{n}, \text{ όπου } PM = \delta n$$

Όταν οι S, S' λαμβάνονται τελικά κατά τρόπο που να ταυτίζονται, το \vec{n} ορίζει το μοναδιαίο διάνυσμα στο P το κάθετο στην S , κατά τη διεύθυνση από την S προς την S' . Υποθέτουμε $\widehat{MP}' = \theta$ ώστε $\delta n = \delta s \cos \theta$. Τότε ο ρυθμός της μεταβολής της φ ως προς το s καθώς πηγαίνουμε από τα P και S στο P' της S' , είναι:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta s} = \frac{\delta\varphi}{\delta n} \frac{\delta n}{\delta s} = \cos \theta \frac{\delta\varphi}{\delta n}$$

Άρα, καθώς το $P' \rightarrow P$ κατά μήκος του $P'P$ ισχύει:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \cos \theta \frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

και έτσι $\max |\partial\varphi/\partial s| = |\partial\varphi/\partial n|$, σε ένα εκλεγμένο σημείο P στην S . Ο μέγιστος αυτός ρυθμός της μεταβολής λαμβάνει χώρα όταν $\theta = 0$, δηλ. κατά τη διεύθυνση του \vec{n} . Η διανυσματική ποσότητα $(\partial\varphi/\partial n)\vec{n}$ προσδιορίζει πλήρως τον μέγιστο αυτό ρυθμό της μεταβολής μαζί με τη διεύθυνση και λέγεται διανυσματική βαθμίδα (ή κλίση) της φ στο P . Συμβολίζεται είτε $\text{grad}\varphi$ ή $\nabla\varphi$, έτσι ώστε:

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n} \quad (1)$$

Καθώς $\varphi = \varphi(x, y, z)$, είναι:

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \delta z = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \delta\vec{r}$$

αφού $\delta\vec{r} = [\delta x, \delta y, \delta z]$. Αλλά

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \delta n = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n} \cdot \delta\vec{r} = \nabla\varphi \cdot \delta\vec{r}$$



Συνεπώς,

$$\left\{ \nabla\varphi - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{k} \right) \right\} \cdot \delta\vec{r} = 0$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα συνεπάγεται είτε:

$$(α) \quad \nabla\varphi - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{k} \right) = 0$$

$$(β) \quad \delta\vec{r} = 0, \quad \text{ή}$$

(γ) ότι τα δύο διανύσματα είναι κάθετα. Αλλά επειδή το $\delta\vec{r}$ είναι ένα μικρό μη μηδενικό διάνυσμα αυθαίρετης διεύθυνσης, οι περιπτώσεις (β) και (γ) αποκλείονται και άρα ισχύει η (α). Επομένως, θεμελιώσαμε την έκφραση

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{k} \quad (2)$$

Οι εξ. (1) και (2) δίδουν εναλλακτικές μεθόδους υπολογισμού του φ . Συνήθως, η (2) είναι η καταλληλότερη μορφή. Από τη σχέση του ολικού διαφορικού της φ ,

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \delta z$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial s} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial s} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial s} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial s} \hat{k} \right) \\ &= \nabla\varphi \cdot \hat{a}, \end{aligned}$$

επειδή $\hat{a} = \frac{\partial x}{\partial s} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial s} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial s} \hat{k}$

Άρα, $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \hat{a} \cdot \nabla\varphi$

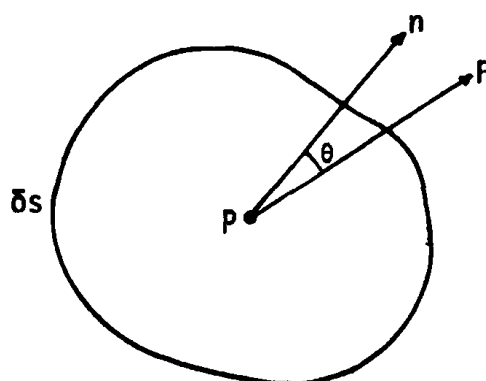
Η τελευταία αυτή σχέση θεμελιώνει την ισοδυναμία των τελεστών

$$\frac{\partial}{\partial s} \equiv \hat{a} \cdot \nabla$$



αφού και όταν ακόμη εφαρμόζεται σε μία αριθμητική συνάρτηση προκαλεί το ίδιο αποτέλεσμα. Η ποσότητα $\hat{a} \cdot \nabla$ καλείται διαφορικός τελεστής διεύθυνσης, επειδή διαφορίζει την φ κατά τη διεύθυνση του \hat{a} . Παρατηρούμε ότι ειδικότερα ισχύει $\partial/\partial n \equiv \hat{n} \cdot \nabla$.

1.13 Κάθετη Ροή Ενός Διανύσματος σε Μία Επιφάνεια. Απόκλιση Διανύσματος.



Σχήμα 1.12

Έστω \vec{F} ότι είναι μία ομοιόμορφη διανυσματική συνάρτηση, η οποία ορίζεται κατά ένα και μοναδικό τρόπο σε κάθε σημείο P μιας περιοχής R και έστω δS ότι είναι ένα στοιχείο της επιφάνειας γύρω από το P, το οποίο έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα το \vec{n} (Σχ.1.12). Τότε το $\vec{\delta S} = \delta S \vec{n}$ καλείται διανυσματική επιφάνεια του στοιχείου, η οποία συνδέεται με τη διεύθυνση του \vec{n} . Αν η \vec{F} στο P σχηματίζει μία γωνία θ με το \vec{n} , τότε ορίζουμε την κάθετη ροή της \vec{F} μέσα στη δS κατά την έννοια της διεύθυνσης του \vec{n} , ότι είναι:

$$(F \cos \theta) \delta S = \vec{F} \cdot \vec{n} \delta S = \vec{F} \cdot \vec{\delta S}$$

Πάνω σε μία ορισμένη επιφάνεια S (ανοικτή ή κλειστή), η ολική κάθετη ροή θα είναι:

$$\int_S F \cos \theta dS = \int_S \vec{n} \cdot \vec{F} dS = \int_S \vec{F} \cdot \vec{\delta S}$$



όπου κάθε ολοκλήρωμα παριστάνει ένα οριακό άθροισμα όπως το:

$$\lim_{\delta S \rightarrow 0} \sum (F \cos \theta \delta S)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το Δu συμβολίζει ένα στοιχειώδη όγκο του χώρου, ο οποίος περικλείει ένα σημείο P και είναι κλεισμένος από μία κλειστή επιφάνεια ΔS . Έστω \vec{n} ότι είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο σε κάποιο στοιχείο επιφάνειας δs της ΔS ($\delta s \ll \Delta S$) σχεδιασμένο προς τα έξω από τον όγκο Δu . Τότε η προς τα έξω διευθυνόμενη κάθετη στη ΔS ροή της \vec{F} είναι,

$$\int_{\Delta S} \vec{n} \cdot \vec{F} dS = \int_{\Delta S} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Άρα, η μέση προς τα έξω κάθετη ροή της \vec{F} ανά μονάδα όγκου είναι:

$$\frac{1}{\Delta u} \int_{\Delta S} \vec{n} \cdot \vec{F} dS$$

Διατηρώντας το P σταθερό, έστω ότι το $\Delta u \rightarrow 0$ κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η ΔS να μικραίνει γύρω από το P . Τότε αν το όριο

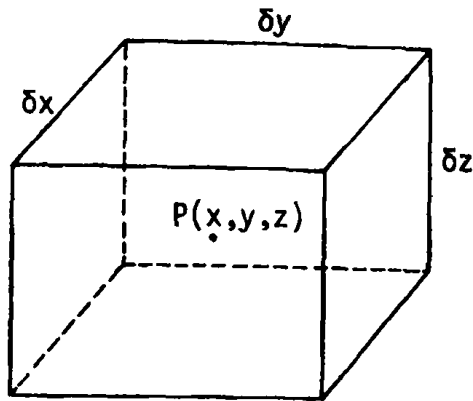
$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta u} \int_{\Delta S} \vec{n} \cdot \vec{F} dS \right\}$$

υπάρχει και έχει μία και μόνο μία τιμή, δίδει την προς τα έξω ροή της \vec{F} στο P , ανά μονάδα όγκου. Είναι μία αριθμητική ποσότητα και μπορεί ναδειχθεί ότι η τιμή της είναι ανεξάρτητη του σχήματος του όγκου Δu . Το όριο αυτό ορίζεται ως η απόκλιση της \vec{F} στο P και γράφεται $\text{div} \vec{F}$.

Για να αναπτυχθεί η $\text{div} \vec{F}$ σε καρτεσιανές, έστω $P(x, y, z)$ ότι είναι το κέντρο ενός κυβικού στοιχείου $\delta x \delta y \delta z$, έτσι ώστε $\Delta u = \delta x \delta y \delta z$ (σχ. 1.13). Αν $\vec{F} = [F_1, F_2, F_3]$, τότε η κάθετη ροή της \vec{F} μέσα από το στοιχείο $dydz\vec{i}$ της διανυσματικής επιφάνειας που περιέχει το P (δεν δείχνεται στο διάγραμμα) είναι:

$$\vec{F} \cdot (dydz\vec{i}) = F_1 \delta y \delta z$$





Σχήμα 1.13

Συνεπώς, η κάθετη ροή κατά την ίδια διεύθυνση μέσα από το παράλληλο επίπεδο με κέντρο $(x + \frac{\delta x}{2}, y, z)$, σε πρώτη προσέγγιση, είναι: $F_1 \delta y \delta z + \frac{\delta x}{2} \partial (F_1 \delta y \delta z) / \partial x$ και μέσα από το παράλληλο επίπεδο που διέρχεται από το $(x - \frac{\delta x}{2}, y, z)$ είναι $F_1 \delta y \delta z - \frac{\delta x}{2} \partial (F_1 \delta y \delta z) / \partial x$. Εκφραζόμενες ως προς τις κάθετες διευθύνσεις, μετρούμενες από το στοιχείο προς τα έξω (δηλ. κατά τα \vec{i} και $-\vec{i}$, αντιστοίχως), οι ποσότητες αυτές γίνονται $F_1 \delta y \delta z + \frac{\delta x}{2} \delta y \delta z \partial F_1 / \partial x$ και $-F_1 \delta y \delta z + \frac{\delta x}{2} \delta y \delta z \partial F_1 / \partial x$. Άρα, η ολική συνεισφορά από τις δύο επιφάνειες τις κάθετες στη διεύθυνση x είναι $\delta x \delta y \delta z \partial F_1 / \partial x$. Κατά παρόμοιο τρόπο, η ολική προς τα έξω ροή μέσα από τις επιφάνειες τις κάθετες στη διεύθυνση είναι $\delta x \delta y \delta z \partial F_1 / \partial y$ και προς τη διεύθυνση $\delta x \delta y \delta z \partial F_3 / \partial z$. Συνεπώς, προσθέτοντας τις συνεισφορές απ' όλες τις επιφάνειες, έχουμε:

$$\int_{\Delta S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \delta x \delta y \delta z \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right)$$

Επομένως,

$$\text{div} \vec{F} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta u} \int_{\Delta S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα μπορεί, επίσης, να γραφεί:

$$\text{div} \vec{F} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{i} F_1 + \vec{j} F_2 + \vec{k} F_3) = \nabla \cdot \vec{F},$$

ορίζοντας το ∇ (ανάδελτα ή διανυσματικός τελεστής Νάμπλα)



$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Η καρτεσιανή μορφή του $\nabla \cdot \vec{F}$ είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον υπολογισμό των αποκλίσεων των διανυσματικών συναρτήσεων. Έτσι, λαμβάνοντας την απλή αλλά σπουδαία περίπτωση της $\vec{r} = [x, y, z]$, έχουμε:

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Ισχύουν οι παρακάτω σημαντικές ιδιότητες για την απόκλιση:

I. Για ομοιόμορφες διανυσματικές συναρτήσεις \vec{F}, \vec{G} ,

$$\nabla \cdot (\vec{F} + \vec{G}) \equiv \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \cdot \vec{G}$$

II. Για μία ομοιόμορφη βαθμωτή συνάρτηση φ και μία ομοιόμορφη διανυσματική συνάρτηση \vec{F} ,

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{F}) \equiv \varphi \nabla \cdot \vec{F} + (\nabla \varphi) \cdot \vec{F}$$

Αν μπορούσαμε να βρούμε μία ομοιόμορφη βαθμωτή συνάρτηση φ τέτοια ώστε

$$\vec{F} = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \vec{k}$$

τότε

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi$$

όπου $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ και ο τελεστής αυτός καλείται Λαπλασιανή. Αν ειδικότερα, $\nabla^2 \varphi = 0$, τότε η φ λέμε ότι ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace και ορίζεται ως μία αρμονική συνάρτηση.

1.14 Γραμμικά (Επικαμπύλια) Ολοκληρώματα. Στροβιλισμός μιας Διανυσματικής Συνάρτησης.

Έστω C ότι είναι ένα τόξο καμπύλης, η οποία συνδέει τα σημεία A, B και υποθέτουμε P, P' ότι είναι γειτονικά σημεία σ' αυτό το τόξο όπου $\vec{OP} \equiv \vec{r}$, $\vec{OP}' \equiv \vec{r} + \delta \vec{r}$, έτσι ώστε $\vec{PP}' \equiv \delta \vec{r}$ (Σχ 1.14).



Έστω \vec{F} ότι είναι μία ομοιόμορφη διανυσματική συνάρτηση, η οποία ορίζεται σε όλα τα σημεία P του C και υποθέτουμε η \vec{F} στο P σχηματίζει γωνία θ με την εφαπτομένη στο P που διευθύνεται προς το P'. Αν τόξο AP = s, τότε τόξο AP' = s + δs , τότε τόξο PP' = $\delta s = |\delta \vec{r}|$ σε πρώτη προσέγγιση. Γράφουμε $\vec{PP}' \equiv \delta \vec{r} = \delta \vec{s}$.

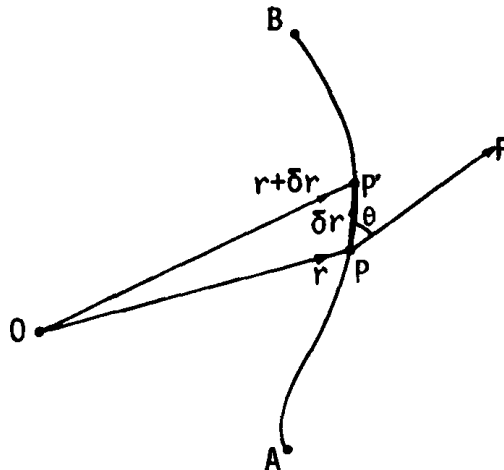
Το γραμμικό ολοκλήρωμα της \vec{F} κατά μήκος της \vec{PP}' ορίζεται ότι είναι:

$$(F \cos \theta) \delta s = \vec{F} \cdot \delta \vec{s} = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

και το ολικό γραμμικό ολοκλήρωμα της \vec{F} από το A στο B κατά μήκος του C είναι:

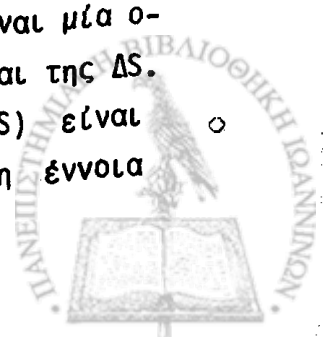
$$\int_A^B \vec{F} \cos \theta ds = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Για να δοθεί στον ορισμό συγκεκριμένη σημασία, ο αναγνώστης βλέπει εύκολα ότι αν η \vec{F} είναι μία δύναμη, οι εκφράσεις αυτές των γραμμικών ολοκληρωμάτων παριστάνουν το παραγόμενο έργο από τη δύναμη κατά την κίνηση ενός στοιχείου από το A στο B πάνω στο C, αφού $F \cos \theta$ είναι η εφαπτομενική συνιστώσα της δύναμης στο P.



Σχήμα 1.14

Υποθέτουμε, τώρα, ότι το C συμβολίζει μία κλειστή καμπύλη, η οποία περικλείει ένα μικρό στοιχείο εμβαδού ΔS και ότι η \vec{F} είναι μία ομοιόμορφη συνάρτηση που ορίζεται σε κάθε σημείο της C και της ΔS . Υποθέτουμε, ότι P είναι ένα σημείο στη ΔS και ότι $\delta S (\ll \Delta S)$ είναι ένα πολύ μικρό στοιχείο της ΔS . Ακόμη, υποθέτουμε ότι η έννοια



της διαγραφής της C είναι όπως σημειώνεται στο Σχ. 1.15. Στο P σημειώνουμε το κάθετο στη δs μοναδιαίο διάνυσμα \vec{n} , κατά την έννοια της θετικής περιστροφής γύρω από το \vec{n} , όπως γίνεται η διαγραφή της C . Τότε το ολικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ή η κυκλοφορία της \vec{F} γύρω από τη C συμβολίζεται με τη σχέση:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Άρα, η μέση κυκλοφορία ανά μονάδα επιφάνειας της ΔS είναι

$$\frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Διατηρώντας το P σταθερό (ακίνητο), έστω ότι η $\Delta S \rightarrow 0$ κατά τέτοιο τρόπο που η C να πλησιάζει το σημείο P . Τότε η οριακή τιμή της μέσης κυκλοφορίας ανά μονάδα επιφάνειας στο P , αν υπάρχει, μπορεί να δειχθεί ότι είναι ανεξάρτητη του σχήματος του C για μία δεδομένη κάθετη διεύθυνση \vec{n} . Το όριο αυτό είναι ένα μονόμετρο (βαθμωτό) μέγεθος, αλλά εξαρτάται από το κάθετο \vec{n} στην S . Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε ένα διάνυσμα του οποίου το εσωτερικό γινόμενο με το \vec{n} να δίδει το ζητούμενο όριο. Ας παραστήσουμε το διάνυσμα με $\text{curl} \vec{F}$, έτσι, ώστε

$$\vec{n} \cdot \text{curl} \vec{F} = \lim \left\{ \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \right\}$$

Η σχέση αυτή επιτρέπει την ανάπτυξη του διανύσματος $\text{curl} \vec{F}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

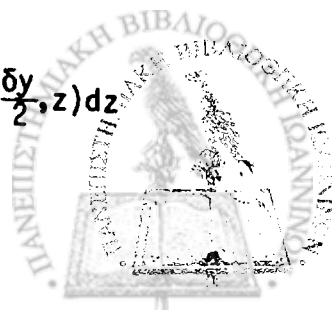
Στο Σχ. 1.16, ΔS είναι το ορθογώνιο του οποίου οι κορυφές είναι

$$A(x, y - \frac{\delta y}{2}, z - \frac{\delta z}{2}), B(x, y + \frac{\delta y}{2}, z - \frac{\delta z}{2}), C(x, y + \frac{\delta y}{2}, z + \frac{\delta z}{2})$$

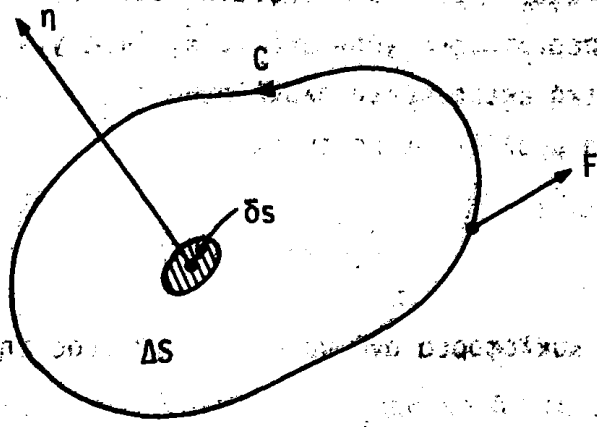
$$D(x, y - \frac{\delta y}{2}, z + \frac{\delta z}{2}), \text{ έτσι ώστε } \Delta S = \delta y \delta z, \vec{n} = \vec{i}. \text{ Λαμβάνοντας,}$$

$\vec{F} = [F_1, F_2, F_3]$, όπου $F_1 = F_1(x, y, z)$, κλπ., τότε:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{y - \frac{\delta y}{2}}^{y + \frac{\delta y}{2}} F_2(x, y, z - \frac{\delta z}{2}) dy, \int_B^C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{z - \frac{\delta z}{2}}^{z + \frac{\delta z}{2}} F_3(x, y + \frac{\delta y}{2}, z) dz$$



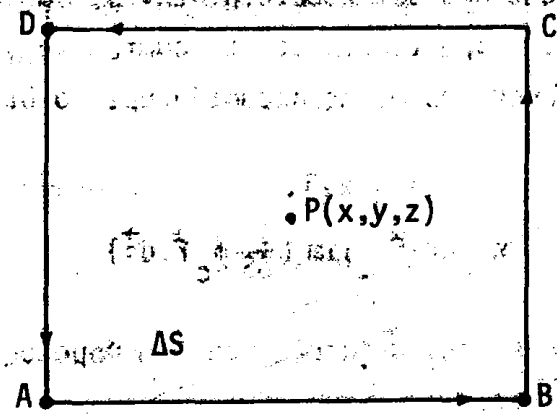
...



...

Σχήμα 1.15

...



...

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \phi = -\rho$$

Σχήμα 1.16

...



$$\int_C^D \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{y-\frac{\delta y}{2}}^{y+\frac{\delta y}{2}} F_2(x, y, z + \frac{\delta z}{2}) dy, \quad \int_D^{A'} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{z-\frac{\delta z}{2}}^{z+\frac{\delta z}{2}} F_3(x, y - \frac{\delta y}{2}, z) dz$$

όπου, κάθε ολοκλήρωμα υπολογίζεται κατά μήκος του κατάλληλου τμήματος γραμμής. Άρα, το ολικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρω από το κλειστό ορθογώνιο είναι:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{z-\frac{\delta z}{2}}^{z+\frac{\delta z}{2}} \{F_3(x, y + \frac{\delta y}{2}, z) - F_3(x, y - \frac{\delta y}{2}, z)\} dz -$$

$$- \int_{y-\frac{\delta y}{2}}^{y+\frac{\delta y}{2}} \{F_2(x, y, z + \frac{\delta z}{2}) - F_2(x, y, z - \frac{\delta z}{2})\} dy =$$

$$\int_{z-\frac{\delta z}{2}}^{z+\frac{\delta z}{2}} \{ \delta y \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial y} + \dots \} dz - \int_{y-\frac{\delta y}{2}}^{y+\frac{\delta y}{2}} \{ \delta z \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial z} + \dots \} dy =$$

$$\approx \delta y \delta z \left\{ \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right\}, \text{ σε δεύτερη προσέγγιση.}$$

Άρα, $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \right\} = \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial z}$

δηλ. $\vec{i} \cdot \text{curl} \vec{F} = \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}$. Ομοίως,

$$\vec{j} \cdot \text{curl} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \vec{k} \cdot \text{curl} \vec{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Συνεπώς,

$$\text{curl} \vec{F} = \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right]$$

Μνημοτεχνικά αυτό μπορεί να θυμόμαστε με τη μορφή:

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$



έτσι, ώστε μπορούμε να γράψουμε

$$\operatorname{curl} \vec{F} = \nabla \wedge \vec{F}$$

όπου

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

1.15 Μερικές Διανυσματικές Ταυτότητες

θα παραθέσουμε τώρα μερικές σπουδαίες διανυσματικές ταυτότητες:

(α) Αν φ είναι κάποια ομοιόμορφη παραγωγίσιμη βαθμωτή συνάρτηση, τότε

$$\operatorname{curl} \operatorname{grad} \varphi \equiv \vec{0}$$

Είναι $\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]$, άρα:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \nabla \varphi &= \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{array} \right\| \\ &= \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \right] \equiv [0, 0, 0] \end{aligned}$$

αφού $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}$ κλπ.

(β) Αν \vec{F} είναι μία ομοιόμορφη παραγωγίσιμη διανυσματική συνάρτηση, τότε $\operatorname{div} \operatorname{curl} \vec{F} \equiv 0$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η $\vec{F} = [F_1, F_2, F_3]$, άρα

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \vec{F} &= \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{array} \right\| \\ &= \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

και έτσι έχουμε:



$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{curl} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} \right) = 0\end{aligned}$$

Άλλος συμβολισμός της ίδιας ταυτότητας είναι:

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{F}) = [\nabla, \nabla, \vec{F}]$$

(γ) Με τη συνάρτηση \vec{F} όπως προηγουμένως στο (β), ισχύει:

$$\nabla \wedge (\nabla \cdot \vec{F}) \equiv \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F},$$

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \vec{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} - \nabla^2 \vec{F}$$

Η απόδειξη γίνεται με τον τύπο του τριπλού εξωτερικού γινομένου των διανυσμάτων

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}, \text{ αν εφαρμοστεί στο } \nabla \wedge (\nabla \cdot \vec{F})$$

με τα $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ αντικαθιστάμενα από τα ∇, ∇, \vec{F} .

(δ) Για ομοιόμορφες διανυσματικές συναρτήσεις \vec{F}, \vec{G} , ισχύει:

$$\operatorname{div}(\vec{F} \wedge \vec{G}) \equiv \vec{G} \cdot \operatorname{curl} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{curl} \vec{G}$$

(ε) Το $\operatorname{curl}(\vec{F} \wedge \vec{G}) \equiv (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} + \vec{F} \operatorname{div} \vec{G} - \vec{G} \operatorname{div} \vec{F}$

(ζ) $\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) \equiv (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} + (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} + \vec{G} \wedge \operatorname{curl} \vec{F} + \vec{F} \wedge \operatorname{curl} \vec{G}$

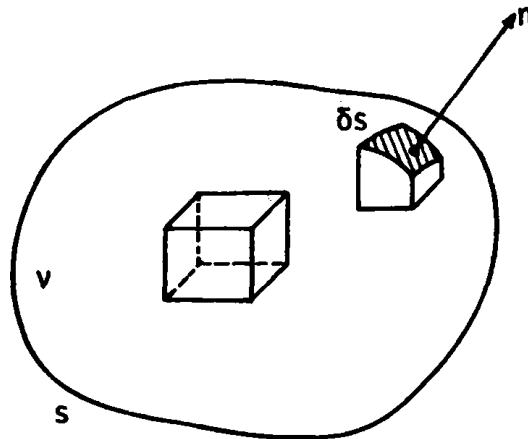
1.16 Σχέσεις Μεταξύ Διπλών και Τριπλών Ολοκληρωμάτων (Ολοκληρωμάτων Όγκου).

Στα επόμενα, το S συμβολίζει μία κλειστή επιφάνεια η οποία περιβάλλει έναν όγκο u . Το P είναι ένα σημείο είτε μέσα στον όγκο u ή πάνω στην S .

Πρώτα υποθέτουμε ότι ο όγκος διατέμνεται σε πολλούς στοι-



χειώδεις όγκους δu , από τις τρεις οικογένειες των παραλλήλων επιπέδων προς τα ακίνητα επίπεδα των Καρτεσιανών συντεταγμένων. Τότε το δu θα είναι είτε ένα κυβικό στοιχείο $\delta x \delta y \delta z$ μέσα στον u ή ένα κομμάτι από ένα τέτοιο στοιχείο αποκομμένο από το στοιχείο δS της επιφάνειας S (Σχ. 1.17)



Σχήμα 1.17

Αν \vec{F} είναι μία ομοιόμορφη παραγωγίσιμη διανυσματική συνάρτηση, η οποία ορίζεται σ'όλα τα σημεία του u και της S , τότε η προς τα έξω κάθετη ροή της \vec{F} μέσα από την επιφάνεια του δu είναι $(\text{div} \vec{F}) \delta u$. Άρα, η ολική κάθετη προς τα έξω ροή μέσα από τις επιφάνειες όλων των στοιχείων όγκου είναι,

$$\int_U \text{div} \vec{F} \, du$$

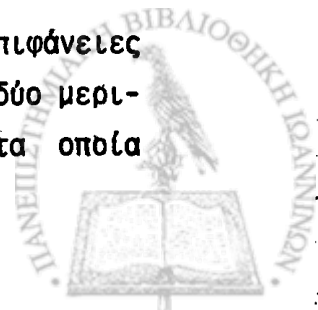
Αλλά σε πρώτη προσέγγιση ισχύει,

$$(\text{div} \vec{F}) \delta u = \int_{\Delta S} \vec{n} \cdot \vec{F} \, dS$$

όπου ΔS είναι η ολική επιφάνεια που περιβάλλει τον δu και το \vec{n} σχεδιάζεται προς τα έξω από κάθε δu . Έτσι,

$$\int_U \text{div} \vec{F} \, du = \lim \Sigma \int_{\Delta S} \vec{n} \cdot \vec{F} \, dS$$

όπου η άθροιση στο δεξιό μέλος αναφέρεται σε όλες τις επιφάνειες και για όλα τα στοιχεία δu . Η άθροιση αυτή περιλαμβάνει δύο μερικά αθροίσματα: Ένα για ολόκληρα τα κυβικά στοιχεία για τα οποία



$du = dx dy dz$ και ένα για εκείνα τα στοιχεία du , τα οποία περιβάλλονται από την επιφάνεια των στοιχείων dS . Συμβολίζοντας αυτά τα άθροισμα με \sum_1 και \sum_2 αντιστοίχως, συνάγεται ότι:

$$\sum \int_{\Delta S} \vec{n} \cdot \vec{F} dS = \sum_1 \int_{\Delta S} \vec{n} \cdot \vec{F} dS + \sum_2 \int_{\Delta S} \vec{n} \cdot \vec{F} dS$$

Το πρώτο άθροισμα στο δεξιό μέλος εξαφανίζεται λόγω του ότι υπάρχουν ίσες και αντίθετες συνεισφορές μέσα από μία κοινή επιφάνεια δύο γειτονικών κυβοειδών στοιχείων. Ακόμη,

$$\lim \sum_2 \int_{\Delta S} \vec{n} \cdot \vec{F} dS = \int_S \vec{n} \cdot \vec{F} dS$$

Συνεπώς, τελικά έχουμε:

$$\int_U \operatorname{div} \vec{F} du = \int_S \vec{n} \cdot \vec{F} dS \quad (1)$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι γνωστό ως θεώρημα της απόκλισης και οφείλεται στον Gauss. Αν στην (1) πάρουμε στη σειρά αντί της \vec{F} τις τιμές \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , έχουμε

$$\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x} du = \int_S \varphi \vec{n} \cdot \vec{i} dS, \quad \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial y} du = \int_S \varphi \vec{n} \cdot \vec{j} dS, \quad \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial z} du = \int_S \varphi \vec{n} \cdot \vec{k} dS$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις εξισώσεις κατά σειρά με \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} και προσθέτοντες, λαμβάνεται:

$$\int_U \operatorname{grad} \varphi du = \int_S \varphi \vec{n} dS = \int_S \varphi d\vec{S} \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1), (2) μπορεί να γίνουν ευκολομνημόνευτες με τις ακόλουθες ισοδύναμες μορφές:

$$\int_U \nabla \cdot \vec{F} du = \int_S \vec{n} \cdot \vec{F} dS, \quad \int_U \nabla \varphi du = \int_S \vec{n} \varphi dS$$



1.16.1 Καρτεσιανή Μορφή του θεωρήματος της Απόκλισης (Θ. Green).

Σύμφωνα με τον προηγούμενο συμβολισμό, λαμβάνουμε το θεώρημα της απόκλισης με τη μορφή,

$$\int_U \nabla \cdot \vec{F} du = \int_S \vec{n} \cdot \vec{F} dS$$

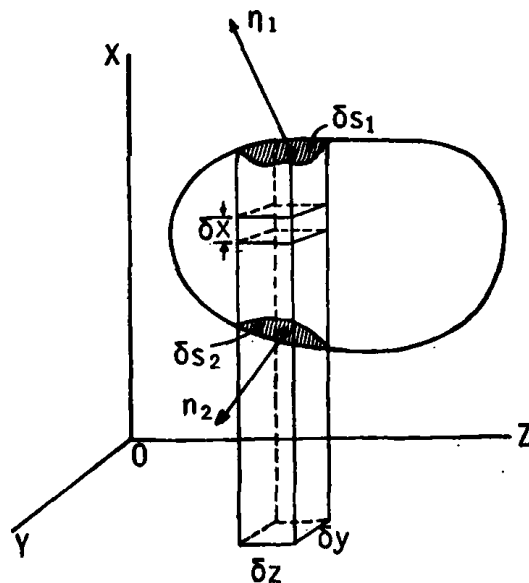
Αν $\vec{F} = [P, Q, R]$ και $\vec{n} = [1, m, n]$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες, τότε $[1, m, n]$ είναι τα διευθύνοντα συνημίτονα του προς τα έξω διευθυνόμενου διανύσματος του κάθετου προς την στοιχειώδη επιφάνεια δS . Συνεπώς, το θεώρημα της απόκλισης παίρνει τη μορφή:

$$\int_U \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) du = \int_S (1P + mQ + nR) dS$$

Το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους μπορεί να εκφραστεί, εναλλακτικά, με τη μορφή:

$$\iiint_U \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στους υπολογισμούς. Θα συνάγουμε μία ισοδύναμη μορφή για το δεξιό μέλος:



Σχήμα 1.18



θεωρούμε το Σχ. 1.18, στο οποίο το πρίσμα το κάθετο στην ορθογώνια διατομή που έχει τις τέσσερες κορυφές $(0, y \pm \frac{\delta y}{2}, z \pm \frac{\delta z}{2})$ τέμνει την επιφάνεια S σε επιφανειακά στοιχεία $\delta S_1, \delta S_2$ με κάθετα μοναδιαία διανύσματα διευθυνόμενα προς τα έξω, τα $n_1 = [l_1, m_1, n_1], n_2 = [l_2, m_2, n_2]$. Τότε, χρησιμοποιώντας τις παραδοχές του σχήματος, το οποίο δείχνει ότι το πρίσμα τέμνει την S δύο φορές, έχουμε $l_1 \delta S_1 = \delta y \delta z = -l_2 \delta S_2$. Αν ληφθεί $du = dx \times dy \times dz$ το στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο, μέσα στο πρίσμα και μεταξύ των $\delta S_1, \delta S_2$, τότε αν ολοκληρώσουμε την $\frac{\partial P}{\partial x}$ στο πρίσμα έχουμε:

$$\iiint_{\text{πρίσμα}} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \left(\int \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \delta y \delta z = (p_1 - p_2) \delta y \delta z = l_1 P_1 \delta S_1 + l_2 P_2 \delta S_2$$

Άρα,
$$\iiint_U \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \int_S (l_1 P_1 dS_1 + l_2 P_2 dS_2) = \int_S P dS$$

Ομοίως,
$$\iiint_U \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \int_S m Q dS$$

$$\iiint_U \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_S n R dS. \quad \text{Συνεπώς,}$$

$$\iiint_U \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_S (lP + mQ + nR) dS$$

Αφού, $l dS = dy dz$, κλπ., μπορούμε επίσης να γράψουμε το τελευταίο αποτέλεσμα με τη μορφή:

$$\iiint_U \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_S (P dy dz + Q dz dx + R dx dy)$$

Η μορφή αυτή του θεωρήματος, μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί για να δικαιολογήσει τη μοναδικότητα του ορισμού της $\text{div } \vec{F}$ στην ενότητα 1.13.

1.17 Σχέσεις μεταξύ Επικαμπυλίων (Γραμμικών) και Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων

Αν C είναι μία κλειστή καμπύλη, όχι αναγκαστικά επίπεδη, η οποία περικλείει μία επιφάνεια S και αν \vec{F} είναι μία ομοιόμορφη παραγωγίσιμη διανυσματική συνάρτηση ορισμένη σ' όλα τα σημεία της

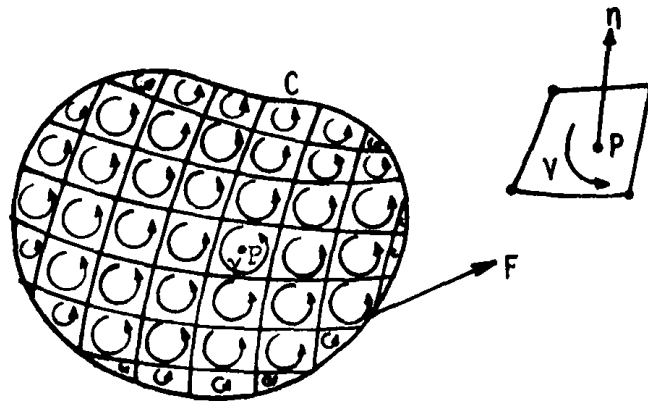


C και στην S, τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{n} \cdot \text{curl} \vec{F} \, dS$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως θεώρημα του Stokes.

Απόδειξη: Πάνω στην S τοποθετούμε ένα λεπτό δικτυωτό, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.19. Τότε το δικτυωτό διαχωρίζει την S σε ένα αριθμό κυψελών τέτοιων όπως είναι η γ, η οποία παριστάνεται μεγεθυμένη στο Σχ. 1.19(β). Έστω ότι τα όρια όλων των κυψελών διαγράφονται



Σχήμα 1.19

κατά τον τρόπο που δείχνεται στο διάγραμμα. Τότε, οι συνεισφορές στο ολικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, οι οποίες προκύπτουν από τις κοινές πλευρές των γειτονικών κυψελών αλληλοακυρώνονται, έτσι, ώστε:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{\text{όλα τα } \gamma} \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Έστω δS ότι είναι η επιφάνεια της κυψέλης γ (περίπου επίπεδη) και P ένα εσωτερικό της σημείο. Επίσης, έστω \vec{n} ότι είναι το κάθετο στη δS μοναδιαίο διάνυσμα στο P, έτσι που η θετική περιστροφή γύρω από το \vec{n} να είναι κατά την έννοια της διαγραφής της γ. Τότε, εξ ορισμού,

$$(\vec{n} \cdot \text{curl} \vec{F}) \delta S = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Άρα,



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{\alpha, \beta, \gamma} (\vec{n} \cdot \text{curl} \vec{F}) dS \rightarrow \int_S (\vec{n} \cdot \text{curl} \vec{F}) dS$$

καθώς το δικτυωτό γίνεται όλο και λεπτομερέστερο. Αυτό θεμελιώνει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

1.18 Γενικές Ορθογώνιες Καμπυλόγραμμες Συντεταγμένες

Υποθέτουμε ότι για κάθε σημείο $P(x, y, z)$ του χώρου, αναφερόμενο σ' ένα τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων, υπάρχουν τρεις ομοίμορφες βαθμωτές συναρτήσεις $\lambda(x, y, z)$, $\mu(x, y, z)$, $\nu(x, y, z)$ έτσι, ώστε οι επιφάνειες:

$$\lambda(x, y, z) = \text{σταθερά}, \mu(x, y, z) = \text{σταθερά}, \nu(x, y, z) = \text{σταθερά} \quad (1)$$

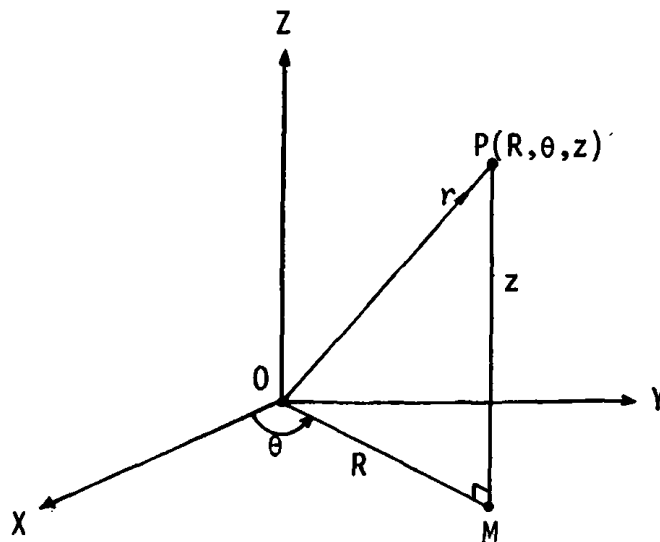
να είναι μεταξύ τους ορθογώνιες στις διατομές τους, δηλαδή, οι εφαιπτόμενες στις τρεις καμπύλες της τομής τους στο P σχηματίζουν μεταξύ τους ορθές γωνίες. Δίδοντας ειδικές τιμές στις λ, μ, ν μπορούμε να υπολογίσουμε τα x, y, z και αντιστρόφως. Συνάγεται ότι οι (λ, μ, ν) είναι ένα εναλλακτικό και ισοδύναμο σύστημα συντεταγμένων για τον ορισμό του P στο χώρο. Εδώ υποθέτουμε, ότι κάθε συντεταγμένη στο ένα σύστημα είναι μία μονότιμη συνάρτηση των τριών συντεταγμένων στο άλλο. Το (x, y, z) είναι το Καρτεσιανό σύστημα. Το σύστημα συντεταγμένων (λ, μ, ν) καλείται γενικό ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων, διότι εν γένει οι τρεις επιφάνειες των εξισώσεων (1) τέμνονται κατα καμπύλες γραμμές, οι οποίες είναι μεταξύ τους ορθογώνιες σε κάθε σημείο P . Το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) είναι το απλούστερο από όλα τα ορθογώνια συστήματα, επειδή τα τρία επίπεδα

$$x = \text{σταθερό}, \quad y = \text{σταθερό}, \quad z = \text{σταθερό}$$

που διέρχονται από κάποιο σημείο P του χώρου τέμνονται κατά τρεις γραμμές, οι οποίες είναι μεταξύ τους ορθογώνιες (κάθετες). Σε πολλά, εν τούτοις, προβλήματα θεωρίας διανυσματικού πεδίου είναι πολλές φορές χρήσιμο να εργαζόμαστε με άλλα ορθογώνια συστήματα



συντεταγμένων. Τα δύο συνηθέστερα είναι των κυλινδρικών πολικών συντεταγμένων και των σφαιρικών συντεταγμένων.



Σχήμα 1.20

Το Σχ. 1.20, δείχνει ένα σημείο P σ'ένα τρισσορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα, το οποίο ορίζεται από τους άξονες OX, OY, OZ. Η PM φέρεται κάθετη στο επίπεδο XOY. Έστω $\widehat{XOM} = \theta$, $OM = R$, $PM = z$. Τότε οι (R, θ, z) καλούνται κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες του P. Η γνώση των στοιχείων αυτών, είναι φανερό ότι δίνει τη δυνατότητα του προσδιορισμού του P κατά ένα και μοναδικό τρόπο. Οι τρεις επιφάνειες από το σημείο P

$$R = \text{σταθερό}, \theta = \text{σταθερό}, z = \text{σταθερό}$$

είναι αντίστοιχα: (α) ο δεξιόστροφος κάθετος κύλινδρος από το P, άξονα OX και ακτίνας R, (β) το επίπεδο από τον OZ που σχηματίζει γωνία θ με το επίπεδο συντεταγμένων ZOY και (γ) το επίπεδο από το P, το οποίο είναι παράλληλο προς το επίπεδο XOY των συντεταγμένων και απέχει απ'αυτό z. Είναι φανερό, ότι οι τρεις αυτές επιφάνειες τέμνονται μεταξύ τους κάθετα, οπότε το σύστημα συντεταγμένων είναι ένα ορθογώνιο. Παρατηρούμε ότι αν (x, y, z) είναι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες του P, τότε έχουμε:

$$x = R \cos \theta, y = R \sin \theta, z = z;$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \text{τοξ εφ} \left(\frac{y}{x} \right), z = z$$

Το πρώτο σύστημα των εξισώσεων εκφράζει τις Καρτεσιανές συντετα-



γμένες ως προς τις κυλινδρικές πολικές. Το δεύτερο σύστημα εξισώσεων δίδει τις κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες ως προς τις Καρτεσιανές.

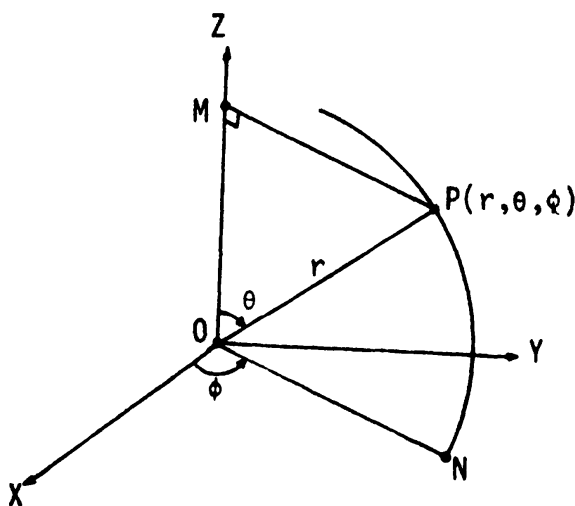
Στο Σχ. 1.21, το P είναι ένα σημείο εκλεγμένο σ'ένα Καρτεσιανό τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων OX, OY, OZ, έτσι ώστε να είναι $OP = r$, $\widehat{ZOP} = \theta$, $\varphi =$ γωνία μεταξύ επιπέδων ZOΧ, ZOP. Τότε οι (r, θ, φ) καλούνται σφαιρικές πολικές συντεταγμένες του P. Η γνώση αυτών των στοιχείων είναι φανερό, ότι παρέχει τη δυνατότητα στο P να προσδιορίζεται κατά ένα και μοναδικό τρόπο. Οι τρεις επιφάνειες από το P

$r =$ σταθερό, $\theta =$ σταθερό, $\varphi =$ σταθερό,

είναι αντιστοίχως (α) η σφαιρική επιφάνεια από το P, κέντρου O και ακτίνας r, (β) ο δεξιόστροφος κάθετος κυκλικός κώνος, κορυφής O και άξονα OZ και ημικατακόρυφης γωνίας θ , (γ) το επίπεδο από τον OZ, το οποίο σχηματίζει γωνία φ με το επίπεδο συντεταγμένων ZOΧ. Προφανώς, οι τρεις αυτές επιφάνειες τέμνονται μεταξύ τους ορθογώνια, άρα το σύστημα συντεταγμένων είναι ένα ορθογώνιο. Αν (x, y, z) είναι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες του P, τότε

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \text{τοξ συν} \{z(x^2 + y^2 + z^2)\}, \quad \varphi = \text{τοξ εφ} \left(\frac{y}{x}\right)$$



Σχήμα 1.21



1.19 Μερικοί Συμβολισμοί Καρτεσιανών Τανυστών

Στις νέες πραγματείες και μελέτες της μηχανικής των ρευστών, η χρήση των τανυστών γίνεται όλο και συχνότερη. Ουσιαστικά αυτό αποτελεί συντομότερο συμβολισμό, η χρήση του οποίου κάμνει το γράψιμο πολλών εξισώσεων λιγότερο πολύπλοκο.

Συμβολίζουμε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου P στον τριδιάστατο χώρο με (x_1, x_2, x_3) ή $x_i (i=1, 2, 3)$ έτσι που να ισχύει $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$. Οι αντίστοιχοι Καρτεσιανοί άξονες είναι Ox_1, Ox_2, Ox_3 ή $Ox_i (i=1, 2, 3)$. Σημαντικός για το λογισμό των τανυστών είναι ο συντεταγμένος συμβολισμός που χρησιμοποιείται για αθροίσεις. Σύμφωνα με αυτή τη συμβατική παραδοχή άθροισης ένας επαναλαμβανόμενος δείκτης συνεπάγεται πρόσθεση ως προς αυτόν τον δείκτη. Έτσι αν, όπως θα εξηγηθεί μια για πάντα, το καθένα από τα γράμματα i, j, k μπορεί να πάρει τις διακεκριμένες τιμές 1, 2, 3, τότε έχουμε:

$$a_{ij}x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j \quad (i=1, 2, 3)$$

Γράφοντας αναλυτικά αυτή την ιδιότητα, έχουμε τις τρεις αθροίσεις

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

όπου ο δείκτης i επιτρέπεται να διατρέχει τις τιμές 1, 2, 3.

Άλλα παραδείγματα της παραπάνω συμβατικής παραδοχής άθροισης, είναι:

$$(i) \quad a_{ij}u_iu_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}u_iu_j$$

$$(ii) \quad a_{ijk}u_iu_ju_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ijk}u_iu_ju_k$$

Παρατηρούμε ότι $a_{ij}x_j = a_{jk}x_k$, αφού κάθε μία σημαίνει $\sum_{k=1}^3 a_{jk}x_k$ και είναι ανεξάρτητες των j, k όταν γράφονται αναλυτικά. Άρα, ο επαναλαμβανόμενος δείκτης είναι ένας απρόσωπος δείκτης και μπο-



ρεί να αντικατασταθεί από κάθε άλλο γράμμα. Κανένα γράμμα δεν μπορεί να επαναληφθεί περισσότερο από μία φορά.

Το δέλτα του Kronecker ή "τανυστής αντικατάστασης" δ_{ij} ορίζεται ότι είναι,

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= 1 \quad \text{όταν } i = j \\ &= 0 \quad \text{όταν } i \neq j\end{aligned}$$

Προφανώς $\delta_{ij} = \delta_{ji}$

Παρατηρούμε, εντούτοις, ότι σύμφωνα με τη συμβατική παραδοχή άθροισης,

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι,

$$\delta_{ij} x_j = \delta_{i1} x_1 + \delta_{i2} x_2 + \delta_{i3} x_3$$

Αν $i = 1$, η παραπάνω σχέση δίδει x_1 . Αν $i = 2$, δίδει x_2 , αν $i = 3$ δίδει x_3 , δηλαδή $\delta_{ij} x_j = x_i$.

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι η επίδραση του δ_{ij} στο x_j απλώς αντικαθιστά το j με το i . Εξ αυτού και το όνομα "τανυστής αντικατάστασης".

Οι μερικές παράγωγοι συμβολίζονται ως ακολούθως:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_{,i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = u_{j,j} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Έτσι, ένα κόμμα μπροστά από το δείκτη i σημαίνει μερική παραγωγή ως προς το x_i . Παρατηρούμε ότι,

$$\varphi_{,ii} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \nabla^2 \varphi$$

$$u_{i,i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Οι ποσότητες δίνονται, $\text{grad} \varphi$ για σταθερό (ακίνητο) σύστημα αξόνων εκφράζονται με τις μορφές,



$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = A_{i,i}$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{a}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{a}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{a}_3 = \varphi_{,i} \hat{a}_i$$

Εδώ, $\vec{A} = A_i \hat{a}_i$, όπου \hat{a}_i είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον θετικό άξονα x_i . Άρα, το θεώρημα απόκλισης σε διανυσματική μορφή

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} \, du = \int_S \vec{n} \cdot \vec{A} \, dS$$

όπου $\vec{n} = n_i \hat{a}_i$, γράφεται σε μορφή τανυστή, ως εξής:

$$\int_V A_{i,i} \, du = \int_S n_i A_i \, dS$$

Τώρα υποθέτουμε ότι οι OX_i, OX'_i ($i = 1, 2, 3$) καθορίζουν πλήρως δύο ομάδες ορθογωνίων αξόνων Καρτεσιανών συντεταγμένων από το 0. Ακόμη, υποθέτουμε ότι τα διευθύνοντα συνημίτονα κάθε άξονα του ενός συστήματος ως προς τους τρεις άξονες του άλλου είναι, όπως παρέχονται στον παρακάτω πίνακα:

	OX_1	OX_2	OX_3
OX'_1	l_{11}	l_{12}	l_{13}
OX'_2	l_{21}	l_{22}	l_{23}
OX'_3	l_{31}	l_{32}	l_{33}

Ο πίνακας σημαίνει ότι, π.χ., $[l_{21}, l_{22}, l_{23}]$ είναι τα διευθύνοντα συνημίτονα του OX'_2 ως προς το σύστημα OX'_1 και ότι τα $[l_{13}, l_{23}, l_{33}]$ είναι τα διευθύνοντα συνημίτονα το OX_3 ως προς το σύστημα OX'_i ($i = 1, 2, 3$). Παρατηρούμε, ότι ισχύουν οι ακόλουθες έξη ιδιότητες των διευθυνόντων συνημιτόνων:

$$l_{11}^2 + l_{12}^2 + l_{13}^2 = 1 \quad \text{κλπ.},$$

$$l_{11} l_{21} + l_{12} l_{22} + l_{13} l_{23} = 0, \quad \text{κλπ.},$$

Οι ιδιότητες αυτές εκφράζονται κατάλληλα με τη βοήθεια της συμ-



βατικής άθροισης, με τη μορφή

$$l_{ij} l_{kj} = \delta_{ik}$$

Επίσης, έχουμε τις έξη εξισώσεις,

$$l_{11}^2 + l_{21}^2 + l_{31}^2 = 1 \quad \text{κλπ.}$$

$$l_{11} l_{12} + l_{21} l_{22} + l_{31} l_{32} = 0, \quad \text{κλπ.}$$

που συντομεύονται με τη γραφή,

$$l_{ij} l_{ik} = \delta_{jk}$$

Αν το x_i συμβολίζει τις καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου P στο σύστημα Ox_i και x'_i εκείνες του συστήματος Ox'_i ($i = 1, 2, 3$) τότε,

$$x'_i = l_{ij} x_j, \quad x_i = l_{ji} x'_j$$

Αυτές είναι οι απαιτούμενες σχέσεις μετασχηματισμού. Εύκολα γράφονται με διανυσματικό τρόπο,

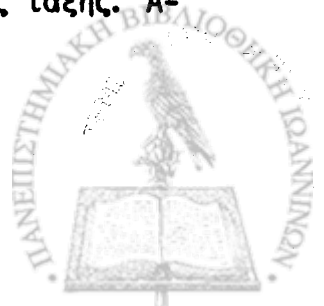
$$\vec{r} = x_1 \hat{a}_1 + x_2 \hat{a}_2 + x_3 \hat{a}_3 = x'_1 \hat{a}'_1 + x'_2 \hat{a}'_2 + x'_3 \hat{a}'_3$$

και χρησιμοποιώντας τον πίνακα έχουμε:

$$\vec{r} \cdot \hat{a}_1 = x_1 = x'_1 \hat{a}'_1 \cdot \hat{a}_1 + x'_2 \hat{a}'_2 \cdot \hat{a}_1 + x'_3 \hat{a}'_3 \cdot \hat{a}_1 = x'_1 l_{11} + x'_2 l_{21} + x'_3 l_{31}$$

Το σύνολο των τριών ποσοτήτων x_i ($i = 1, 2, 3$) καλείται ένα διάνυσμα ή τανυστής πρώτης τάξης ή βαθμού. Το σύνολο x'_i συνιστά έναν άλλο πρώτης τάξης τανυστή. Απλές ποσότητες, όπως η μάζα και η απόσταση, οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες για όλα τα σύνολα των αξόνων, καλούνται μονόμετρα μεγέθη ή τανυστές μηδενικής τάξης. Άρα, στις τρεις διαστάσεις, ισχύει:

$$x'_i = l_{ij} x_j = l_{ik} x_k$$



έτσι ώστε, $x_i x_i = (l_{ij} x_j)(l_{ik} x_k) = (l_{ij} l_{ik})(x_j x_k)$

Αλλά $l_{ij} l_{ik} = \delta_{jk}$ (από τον πίνακα των διευθυνόντων συνημιτόνων)

Άρα,

$$x'_i x'_i = \delta_{jk} x_j x_k = x_k x_k \quad \text{ή}$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Αυτό δείχνει ότι το OP^2 παραμένει αναλλοίωτο με οποιοδήποτε μετασχηματισμό αξόνων και διαφωτίζει τη χρήση και το χειρισμό της συμβατικής άθροισης.

Το σύνολο των εννέα ποσοτήτων a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) υπακούει στο νόμο του μετασχηματισμού

$$a'_{rs} = l_{ri} l_{sj} \cdot a_{ij}$$

όπου τα l είναι τα διευθύνοντα συνημίτονα, έτσι ώστε οι σχέσεις $l_{ri} l_{sj} = \delta_{rs} = l_{ir} l_{js}$ αποτελούν συνιστώσες ενός τανυστή δευτέρας τάξης.

Τα παραπάνω παραδείγματα, τα οποία δείχνουν ότι οι ποσότητες

$$a_{ii}, a_{ij} a_{ji}, a_{ij} a_{jk} a_{ki}$$

είναι αναλλοίωτες μετά από μετασχηματισμό, διευκρινίζουν περισσότερο τον αλγεβρικό χειρισμό των τανυστών. Τα αποτελέσματα αυτά είναι σημαντικά στη μαθηματική θεωρία της ελαστικότητας και πλαστικότητας.

Παραδείγματα

1. Δείξτε ότι

$$a'_{ii} = a_{ii}$$

Έχουμε

$$a'_{rs} = l_{ri} l_{sj} a_{ij}, \quad \text{έτσι ώστε}$$

$$a'_{rr} = l_{ri} l_{rj} a_{ij} = \delta_{ij} a_{ij} = a_{jj},$$

δηλαδή,

$$a'_{ii} = a_{ii}$$



2. Δείξτε ότι

Έχουμε $a'_{ij} a'_{ji} = a_{ij} a_{ji}$

$$a'_{rs} = l_{ri} l_{sj} a_{ij}$$

$$a'_{sr} = l_{sm} l_{rn} a_{mn}$$

Έτσι,

$$a'_{rs} a'_{sr} = (l_{ri} l_{sj} a_{ij})(l_{sm} l_{rn} a_{mn})$$

$$= (l_{ri} l_{rn})(l_{sj} l_{sm})(a_{ij} a_{mn})$$

$$= \delta_{in} \delta_{jm} a_{ij} a_{mn}$$

$$= \delta_{in} (a_{im} a_{mn})$$

$$= a_{nm} a_{mn}, \text{ όπως έπρεπε να συμβαίνει.}$$

3. Δείξτε ότι

$$a'_{ij} a'_{jk} a'_{ki} = a_{ij} a_{jk} a_{ki}$$

$$a'_{rs} a'_{st} a'_{tr} = (l_{ri} l_{sj} a_{ij})(l_{sm} l_{tn} a_{mn})(l_{ta} l_{rb} a_{ab})$$

$$= (l_{ri} l_{rb})(l_{sj} l_{sm})(l_{tn} l_{ta}) a_{ij} a_{mn} a_{ab}$$

$$= \delta_{ib} \delta_{jm} \delta_{na} a_{ij} a_{mn} a_{ab}$$

$$= a_{bm} a_{ma} a_{ab}, \text{ όπως έπρεπε να δειχθεί.}$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό γιατί θεμελιώνεται χωρίς τη χρήση της συμβατικής άθροισης.



2. ΟΙ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ. ΟΡΙΣΜΟΙ

2.1. Γενικά

Η Μηχανική των ρευστών, είναι μία από τις βασικές φυσικές επιστήμες. Ασχολείται με τη στατική, κινηματική και δυναμική των ρευστών, δεδομένου ότι η κίνηση ενός ρευστού προκαλείται από μη ισορροπα συστήματα δυνάμεων, τα οποία επενεργούν σ' αυτό. Οι μέθοδοι προσέγγισης του αντικειμένου της Μηχανικής των Ρευστών, ξεκινούν από την εφαρμογή των νόμων της κίνησης του Νεύτωνα, των νόμων της θερμοδυναμικής, της αρχής της διατήρησης της μάζας, των καταστατικών εξισώσεων οι οποίες συνδέουν τις ιδιότητες των ρευστών, του νόμου του ιξώδους του Νεύτωνα, των εννοιών του μήκους της ανάμιξης και των περιορισμών, οι οποίοι οφείλονται στην ύπαρξη διαφόρων οριακών συνθηκών.

Το ιξώδες και η πυκνότητα είναι οι ιδιότητες εκείνες, οι οποίες συναντώνται συχνότερα στους υπολογισμούς της ροής των ρευστών. Οι επιδράσεις της επιφανειακής τάσης είναι σημαντικές για το σχηματισμό σταγονιδίων, στις διαχωριστικές (οριακές) επιφάνειες υγρών, στερεών και αερίων και στο σχηματισμό τριχοειδών κυμάτων. Η ιδιότητα της τάσης των ατμών, στην οποία οφείλεται η αλλαγή καταστάσεως από υγρό σε αέριο, είναι σημαντική όταν παρατηρούνται χαμηλές πιέσεις.

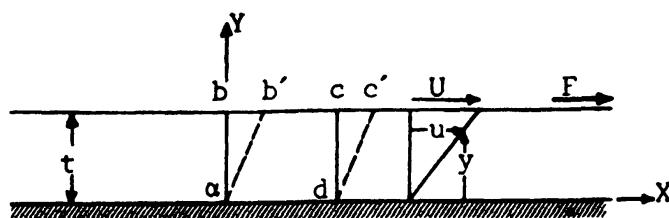
Στα επόμενα, θα υπογραμμιστεί η σπουδαιότητα των φυσικών ιδιοτήτων ενός υγρού ή αερίου. Επίσης, δίδονται μερικοί ορισμοί, ώστε να μπορούμε να μιλάμε κατα τρόπο συγκεκριμένο για την ιδιότητα, την ποσότητα ή τις παραδοχές και υποθέσεις, τις οποίες εξετάζουμε.

2.2. Ορισμός του Ρευστού

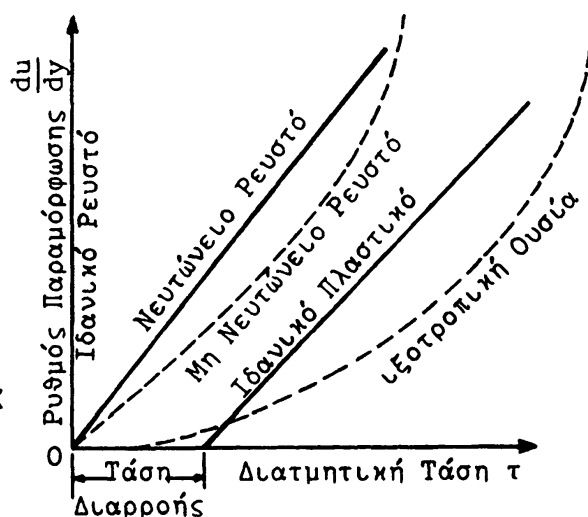
Ρευστό είναι μία ουσία, η οποία συνεχώς παραμορφώνεται όταν υπόκειται σε μια διατμητική τάση. Διατμητική δύναμη είναι η συνιστώσα δύναμη, η οποία επενεργεί κατά την εφapτομένη μιάς επιφάνειας. Ο λόγος της δύναμης αυτής προς το εμβαδό της επιφάνειας είναι η μέση διατμητική τάση της επιφάνειας. Διατμητική τάση σε



σημείο είναι το όριο του λόγου της διατμητικής δύναμης προς το εμβαδό, όταν το εμβαδό τείνει στο μηδέν (Σχ. 2.1).



Σχήμα 2.1



Σχήμα 2.2

Στο Σχ. 2.1., κάποια ουσία βρίσκεται μεταξύ δύο πλακών, οι οποίες απέχουν ελάχιστα μεταξύ τους και έχουν τέτοιο μέγεθος, ώστε η επίδραση των ακμών να είναι αμελητέα. Η κάτω πλάκα είναι σταθερή και μία δύναμη \vec{F} εφαρμόζεται στην πάνω πλάκα, η οποία ασκεί μία Διατμητική Τάση \vec{F}/S στην ουσία μεταξύ των δύο πλακών, όπου S είναι το εμβαδό της πάνω πλάκας. Όταν η δύναμη \vec{F} έχει ως αποτέλεσμα να κινείται η πάνω πλάκα με σταθερή ταχύτητα ($\vec{V} = \text{σταθερό}$), όσο μικρή και αν είναι η \vec{F} , τότε μπορεί να συμπεράνει κανείς, ότι η ουσία μεταξύ των δύο πλακών είναι ρευστό.

Το ρευστό, το οποίο βρίσκεται σε άμεση επαφή με ένα στερεό τοίχωμα, έχει την ίδια ταχύτητα με το τοίχωμα. Αυτό έχει αποδειχθεί σε άπειρα πειράματα με διαφορετικά ρευστά και τοιχώματα. Το ρευστό μετακινείται από την επιφάνεια $abcd$ στη νέα του θέση $ab'c'd$ (Σχ. 2.1), και κάθε στοιχείο του ρευστού κινείται παράλληλα προς την πλάκα, ενώ η ταχύτητα μεταβάλλεται ομοιόμορφα από 0 στην κάτω πλάκα, σε U στην πάνω πλάκα. Τα πειράματα έδειξαν ότι η δύναμη \vec{F} είναι ευθέως ανάλογη του S και αντιστρόφως ανάλογη του πάχους d , όταν οι άλλες ποσότητες παραμένουν σταθερές. Αυτό εκφράζεται από την εξίσωση:

$$\vec{F} = \mu \frac{US}{t}$$



όπου μ είναι συντελεστής, ο οποίος εξαρτάται από τη φύση του ρευστού. Αν $\tau = \frac{F}{S}$ είναι η διατμητική τάση, τότε:

$$\tau = \mu \frac{U}{\xi}$$

Ο λόγος $\frac{U}{\xi}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα της γραμμής ab , ή η ταχύτητα γωνιακής παραμόρφωσης του ρευστού, δηλαδή, η ταχύτητα με την οποία μικραίνει η γωνία bad . Η γωνιακή ταχύτητα μπορεί, επίσης να γραφεί ως $\frac{du}{dy}$, αφού το $\frac{U}{\xi}$, αλλά και το $\frac{du}{dy}$ εκφράζουν το λόγο της μεταβολής της ταχύτητας προς το μήκος, στο οποίο παρατηρείται η μεταβολή. Πάντως, το $\frac{du}{dy}$ αποτελεί γενικότερη έκφραση, αφού ισχύει και στις περιπτώσεις στις οποίες η γωνιακή ταχύτητα και η διατμητική τάση μεταβάλλονται με το y . Το $\frac{du}{dy}$ εκφράζει και το μέτρο της ταχύτητας με την οποία ένα στρώμα κινείται σε σχέση με το γειτονικό του στρώμα. Η διαφορική εξίσωση

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1)$$

δίδει τη σχέση μεταξύ της διατμητικής τάσης και της ταχύτητας γωνιακής παραμόρφωσης σε μια μονοδιάστατη ροή του ρευστού. Ο συντελεστής αναλογίας μ ονομάζεται ιξώδες του ρευστού και η εξίσωση (1) είναι ο νόμος του ιξώδους του Νεύτωνα.

Τα ρευστά μπορούν να διαιρεθούν σε Νευτώνεια και μη Νευτώνεια. Στα Νευτώνεια ρευστά η σχέση μεταξύ της διατμητικής τάσης και της ταχύτητας παραμόρφωσης είναι γραμμική ($\mu = \text{σταθερό}$), όπως φαίνεται στο Σχ 2.2. Στα μη Νευτώνεια ρευστά η σχέση διατμητικής τάσης και ταχύτητας παραμόρφωσης δεν είναι γραμμική. Τα αέρια και τα λεπτόρευστα υγρά τείνουν να είναι Νευτώνεια ρευστά, ενώ οι παχύρρευστοι με δομή μακρών αλύσεων υδρογονάνδρακες, μπορεί να μην είναι Νευτώνεια.

Συχνά στις μελέτες παραδεχόμαστε ότι ένα ρευστό δεν έχει ιξώδες. Όταν το ιξώδες είναι μηδέν η διατμητική τάση είναι μηδέν, ανεξάρτητα από την κίνηση του ρευστού. Εάν το ρευστό θεωρηθεί επιπλέον και ασυμπίεστο, τότε ονομάζεται ιδανικό και στο Σχ. 2.2 παρίσταται με τον κατακόρυφο άξονα (των τεταγμένων),



2.3. Μονάδες Δύναμης, Μάζας και Μήκους

Στο παρόν βοήθημα χρησιμοποιούνται οι μονάδες του Διεθνούς Συστήματος (SI). Το σύστημα (SI) έχει βασική μονάδα δύναμης το Newton (N), μάζας το χιλιόγραμμα (kg) και μήκους το μέτρο (m). Επίσης ως μονάδα δύναμης χρησιμοποιείται και το χιλιόγραμμα βάρους ή χιλιοπόντ (kp), όπου $9.806 \text{ N} = 1 \text{ kp}$.

Το χιλιόγραμμα βάρους ή χιλιοπόντ (kp) ορίζεται ως η έλξη της βαρύτητας, η οποία ασκείται σε μάζα ενός χιλιογράμμου (kg) στην επιφάνεια της θάλασσας. Η επιτάχυνση της βαρύτητας στη στάθμη της θάλασσας είναι $g = 9.806 \text{ m/sec}^2$. Αν ο 2ος νόμος της κίνησης του Νεύτωνα γραφεί με τη μορφή:

$$\vec{F} = \frac{m}{g_0} \vec{v} \quad (1)$$

και εφαρμοστεί για μάζα ενός χιλιογράμμου, η οποία πέφτει στο κενό, τότε:

$$1 \text{ kg}^* = \frac{1 \text{ kg}}{g_0} \times 9.806 \text{ m/sec}^2 \quad (2)$$

$$\text{όπου, } g_0 = 9.806 \text{ kg.m/kg}^*.\text{sec}^2 \quad (3)$$

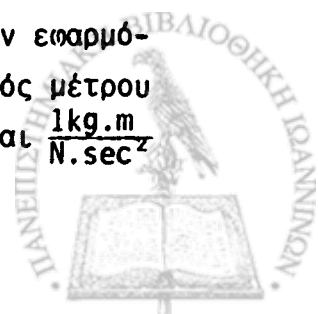
Το g_0 είναι μία σταθερά, ανεξάρτητη από τον τόπο στον οποίο εφαρμόζουμε το νόμο του Νεύτωνα και εξαρτάται μόνο από το σύστημα μονάδων που χρησιμοποιούμε. Σε κάθε τόπο η μάζα M παραμένει σταθερή, αλλά το βάρος (η δύναμη της βαρύτητας) μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$W = M \frac{g}{g_0} \quad (4)$$

Για παράδειγμα, εκεί όπου το $g = 9.0 \text{ m/sec}^2$, τα 10 kg έχουν βάρος:

$$W = \frac{(10 \text{ kg})(9.0 \text{ m/sec}^2)}{9.806 \text{ kg.m/kp}.\text{sec}^2} = 9.718 \text{ kp}$$

Το newton (N) ορίζεται, ως η δύναμη εκείνη, η οποία όταν εφαρμόζεται σε μάζα ενός χιλιογράμμου της δίδει επιτάχυνση ενός μέτρου ανά δευτερόλεπτο. Με τις μονάδες αυτές η σταθερά g_0 είναι $\frac{1 \text{ kg.m}}{\text{N}.\text{sec}^2}$



Το newton (N) μπορεί να ορισθεί και από τη σχέση:

$$1 \text{ N} \equiv 1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{sec}^2 \quad (5)$$

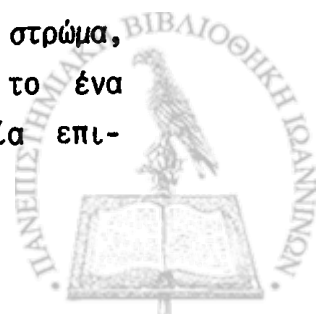
η οποία προκύπτει από την εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα, χωρίς τη σταθερά g_0 .

2.4 Το Ιξώδες

Στη μελέτη της ροής των ρευστών, το ιξώδες είναι η ιδιότητα η οποία χρειάζεται να εξεταστεί λεπτομερέστερα. Το ιξώδες είναι η ιδιότητα εκείνη του ρευστού, η οποία του προσδιορίζει την ικανότητα να ανθίσταται στη διάτμηση. Ο νόμος του ιξώδους του Νεύτωνα εξ. (1) ορίζει, ότι για μια δεδομένη ταχύτητα γωνιακής παραμόρφωσης του ρευστού, η διατμητική τάση είναι ευθέως ανάλογη προς το ιξώδες. Η πίσσα είναι παράδειγμα ρευστού με μεγάλο ιξώδες, ενώ το νερό και ο αέρας έχουν μικρό ιξώδες.

Το ιξώδες των αερίων αυξάνεται, όταν ανυψώνεται η θερμοκρασία, ενώ το ιξώδες των υγρών ελαττώνεται. Η διαφορετική αυτή συμπεριφορά με τη μεταβολή της θερμοκρασίας μπορεί να ερμηνευτεί, εάν εξετάσουμε το αίτιο που προκαλεί το ιξώδες. Πράγματι, η αντίσταση ενός ρευστού στη διάτμηση εξαρτάται από τη συνοχή του και από την ταχύτητα μεταφοράς της μοριακής ορμής. Στα υγρά, οι αποστάσεις μεταξύ των μορίων είναι μικρότερες απ'ότι στα αέρια και επομένως, οι δυνάμεις συνοχής είναι πολύ μεγαλύτερες απ'ότι στα αέρια. Στα υγρά, το ιξώδες οφείλεται κυρίως στις δυνάμεις συνοχής και επειδή οι δυνάμεις αυτές ελαττώνονται με την αύξηση της θερμοκρασίας, ελαττώνεται και το ιξώδες. Στα αέρια αντιθέτως, οι δυνάμεις συνοχής είναι πολύ μικρές. Η αντίσταση στη διάτμηση οφείλεται κατά το πλείστον στη μεταφορά μοριακής ορμής.

Σε ένα ρευστό κινούνται μόρια πάντοτε διαμέσου μιάς νοητής επιφανείας του και προς αντίθετες κατευθύνσεις. Όταν ένα στρώμα του ρευστού κινείται σε σχέση με ένα προσκείμενο στρώμα, τότε η κίνηση των μορίων του προκαλεί μεταφορά ορμής από το ένα στο άλλο και έτσι εμφανίζεται μια διατμητική τάση, η οποία επι-



φέρει αντίσταση στη σχετική κίνηση και η οποία τείνει να εξισώσει τις ταχύτητες των γειτονικών στρωμάτων. Το μέτρο της σχετικής κίνησης δύο γειτονικών στρωμάτων είναι το $\frac{du}{dy}$.

Στα αέρια η μοριακή δραστηριότητα προκαλεί διατμητικές τάσεις σημαντικότερες από τις δυνάμεις συνοχής. Επειδή δε η μοριακή κίνηση επιταχύνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία, αυξάνεται ομοίως και το ιξώδες.

Στις συνήθεις πιέσεις το ιξώδες είναι ανεξάρτητο της πίεσης και εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία. Σε πολύ μεγάλες πιέσεις, το ιξώδες μεταβάλλεται ακανόνιστα με τη μεταβολή της πίεσης στα αέρια και στα περισσότερα υγρά.

Σ' ένα ρευστό, στο οποίο δεν παρατηρείται σχετική κίνηση μεταξύ γειτονικών στρωμάτων, δεν εμφανίζονται διατμητικές τάσεις, είτε αυτό κινείται είτε όχι και ασχέτως προς το ιξώδες του, διότι το $\frac{du}{dy}$ είναι μηδέν. Επομένως, στη στατική των ρευστών δεν αντιμετωπίζονται διατμητικές τάσεις. Οι μόνες τάσεις που απομένουν είναι οι εγκάρσιες τάσεις, δηλαδή, οι πιέσεις. Το γεγονός αυτό απλοποιεί πολύ τη μελέτη της στατικής των ρευστών, αφού ασκούνται μόνο δυνάμεις βαρύτητας και δυνάμεις κάθετες σε μια επιφάνεια.

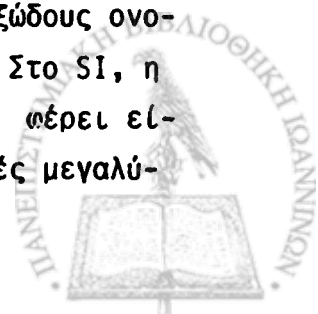
Οι διαστάσεις του ιξώδους προσδιορίζονται από το νόμο του ιξώδους του Νεύτωνα (Εξ.(1)). Εάν τη λύσουμε ως προς μ , τότε έχουμε:

$$\mu = \frac{\tau}{du/dy}$$

θέτοντας τις διαστάσεις F , L και T , της δύναμης, του μήκους και του χρόνου, αντιστοίχως,

$$\tau : F \cdot L^{-2}, \quad u : LT^{-1}, \quad y : L$$

παρατηρούμε ότι το μ έχει διαστάσεις $FL^{-2}T$. Εάν εκφράσουμε τη διάσταση της δύναμης συναρτήσει της μάζας, σύμφωνα με το 2ο νόμο της κίνησης του Νεύτωνα, $F = MLT^{-2}$, τότε οι διαστάσεις του ιξώδους εκφράζονται ως $ML^{-1}T^{-1}$. Στο σύστημα cgs, η μονάδα του ιξώδους ονομάζεται Poise (P) και είναι $1 \text{ dyn} \cdot \text{sec}/\text{cm}^2$ ή $1 \text{ g}/\text{cm} \cdot \text{sec}$. Στο SI, η μονάδα του ιξώδους είναι $1 \text{ kg}/\text{m} \cdot \text{sec}$ ή $1 \text{ N} \cdot \text{sec}/\text{m}^2$ και δε φέρει ειδική ονομασία. Η μονάδα του ιξώδους στο SI είναι 10 φορές μεγαλύτερη



τερη από το Poise.

2.5 Το Κινηματικό Ιξώδες

Το ιξώδες μ , συνήθως, αναφέρεται ως απόλυτο ιξώδες ή δυναμικό ιξώδες για να διακρίνεται από το κινηματικό ιξώδες ν , το οποίο είναι ο λόγος του ιξώδους προς την πυκνότητα της μάζας:

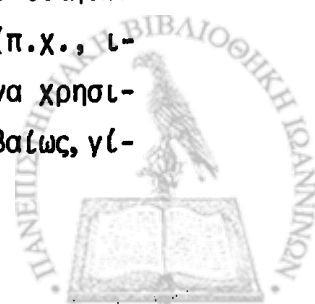
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1)$$

Το κινηματικό ιξώδες εμφανίζεται σε πολλές εφαρμογές, π.χ. στον αριθμό Reynolds VL/ν . Οι διαστάσεις του ν είναι L^2T^{-1} . Η μονάδα στο cgs είναι το $1 \text{ cm}^2/\text{sec}$ και ονομάζεται stoke (st).

Στο SI η μονάδα του κινηματικού ιξώδους είναι το $1 \text{ m}^2/\text{sec}$. Για να μετατρέψουμε το Stoke σε poise πολλαπλασιάζουμε με την πυκνότητα σε γραμμάρια ανά κυβικό εκατοστό.

2.6 Συνεχές Μέσον

Όταν εξετάζουμε τη ροή των ρευστών σε μαθηματική (αναλυτική) βάση, είμαστε υποχρεωμένοι αντί της πραγματικής μοριακής δομής, να θεωρήσουμε ένα υποθετικό συνεχές μέσο. Η ταχύτητα σε ένα σημείο του χώρου, επί παραδείγματι, είναι ακαθόριστη προκειμένου περί ενός μοριακού μέσου, αφού είναι μηδέν σε όλες τις χρονικές στιγμές, εκτός από αυτές στις οποίες ένα μόριο βρίσκεται ακριβώς στο θεωρούμενο σημείο. Επιπλέον, αντιπροσωπεύει την ταχύτητα του συγκεκριμένου αυτού μορίου και όχι τη μέση ταχύτητα των στοιχείων γύρω απ' αυτό το σημείο. Η δυσκολία αυτή υπερνικάται, εάν θεωρήσουμε ως ταχύτητα σε ένα σημείο, τη μέση ταχύτητα όλων των μορίων, τα οποία βρίσκονται γύρω από το σημείο, σε μια σφαίρα για παράδειγμα, με ακτίνα μεγάλη, σε σχέση με τη μέση απόσταση μεταξύ των μορίων. Με n μόρια ανά κυβικό εκατοστό, η μέση απόσταση μεταξύ των μορίων είναι της τάξης των $n^{-\frac{1}{3}} \text{ cm}$. Η μοριακή θεωρία πάντως πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των ιδιοτήτων των ρευστών, οι οποίες σχετίζονται με τη μοριακή κίνηση (π.χ., ιξώδες), αλλά στις εξισώσεις του συνεχούς μέσου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα των μοριακών υπολογισμών. Βεβαίως, γί-



νεται η παραδοχή, ότι η πυκνότητα, ο ειδικός όγκος, η πίεση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν συνεχή μεταβολή δια μέσου του ρευστού (ή είναι σταθερά).

2.7 Πυκνότητα, Ειδικός Όγκος, Ειδικό Βάρος, Σχετικό Ειδικό Βάρος, Πίεση, Θερμοκρασία.

Η πυκνότητα ρ ενός ρευστού ορίζεται, ως η μάζα του ανά μονάδα όγκου. Για να ορίσουμε την πυκνότητα σε ένα σημείο, διαιρούμε τη μάζα Δm του ρευστού, η οποία περιέχεται σε ένα μικρό όγκο Δv , ο οποίος περικλείει το σημείο, δια του Δv και λαμβάνεται το όριο, καθώς το Δv πλησιάζει την τιμή ϵ^3 , όπου το ϵ είναι μεγάλο σε σχέση με τη μέση απόσταση μεταξύ των μορίων:

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow \epsilon^3} \frac{\Delta m}{\Delta v} \quad (1)$$

Για το νερό σε κανονική πίεση 1 ατμόσφαιρας και θερμοκρασία 4°C , το $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Ο ειδικός όγκος α είναι το αντίστροφο της πυκνότητας ρ . Δηλαδή, είναι ο όγκος τον οποίο καταλαμβάνει η μονάδα μάζας του ρευστού. Έτσι, ισχύει:

$$\alpha\rho = 1 \quad (2)$$

Το ειδικό βάρος ϵ ενός σώματος είναι το βάρος του ανά μονάδα όγκου. Διαφέρει δε από τόπο σε τόπο:

$$\epsilon = \rho g \quad (3)$$

εξαρτώμενο από τη βαρύτητα. Είναι μία χρήσιμη ποσότητα, στη μελέτη της στατικής των ρευστών, ή των υγρών με ελεύθερη επιφάνεια.

Το σχετικό ειδικό βάρος s ενός σώματος, είναι ο λόγος του βάρους του προς το βάρος ίσου όγκου νερού σε θερμοκρασία 4°C . Μπορεί, επίσης, να εκφραστεί ως ο λόγος της πυκνότητάς του ή του ειδικού βάρους του προς την αντίστοιχη ποσότητα του νερού.

Η εγκάρσια δύναμη που ασκείται πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια διαιρούμενη με το εμβαδό της επιφάνειας δίδει τη μέση πίεση



ρ. Η πίεση σε ένα σημείο είναι ο λόγος της εγκάρσιας δύναμης προς το εμβαδόν που περικλείει το σημείο, όταν το εμβαδόν τείνει προς μία μικρή τιμή. Εάν ένα ρευστό ασκεί πίεση στο τοίχωμα ενός δοχείου, το δοχείο ασκεί μία αντίδραση, η οποία συμπιέζει το ρευστό. Η πίεση έχει τις διαστάσεις δύναμης ανά επιφάνεια και εκφράζεται στο SI σε Newtons ανά τετραγωνικό μέτρο, το οποίο ονομάζεται και Pascal (Pa). Η πίεση εκφράζεται, επίσης, και σε ύψος στήλης ρευστού, όπως θα δούμε σε άλλη ενότητα.

Η κατάσταση ενός σώματος, άρα και ενός ρευστού, χαρακτηρίζεται από την τιμή της απόλυτης θερμοκρασίας του T. Η θερμοκρασία είναι θερμοδυναμικό μονόμετρο (βαθμωτό) μέγεθος και αποτελεί μέτρο για τη χρονική μέση τιμή της κινητικής ενέργειας των μορίων του ρευστού. Τα μόρια χαρακτηρίζονται με τους βαθμούς ελευθερίας που διαθέτουν κατά την άτακτη κίνησή τους.

Κατά το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας του Boltzmann, σε κάθε βαθμό f ελευθερίας τέλειου αερίου αντιστοιχεί η μέση ενέργεια

$$E = \frac{1}{2} k T \quad (4)$$

όπου $k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K.mol}$ είναι η σταθερά του Boltzmann. Η σχέση (4) αποτελεί συγχρόνως ένα αριθμό της απόλυτης θερμοκρασίας.

Τα μόρια ενός αερίου έχουν εσωτερικούς και εξωτερικούς βαθμούς ελευθερίας. Τα μόρια των μονατομικών αερίων έχουν τρεις μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας κατά τις διευθύνσεις των συντεταγμένων x, y και z. Τα μόρια των διατομικών και πολυατομικών αερίων εκτελούν επιπλέον περιστροφική κίνηση γύρω από τους άξονες και παλμικές κινήσεις λόγω εσωτερικής ενέργειας. Έτσι, εμφανίζονται περιστροφικοί βαθμοί ελευθερίας και βαθμοί ελευθερίας ταλάντωσης. Για f βαθμούς ελευθερίας, η εσωτερική ενέργεια, όπως είναι γνωστό, είναι:

$$E = \frac{f}{2} k T \quad (5)$$

Τα μόρια των στερεών εκτελούν ταλαντώσεις, ενώ είναι δεσμευμένα στους κρυστάλλους του σώματος και έχουν τρεις βαθμούς ελευθερίας.



Τα υγρά αποτελούν μία ενδιάμεση κατάσταση, με μεγαλύτερη ομοιότητα προς τα αέρια.

2.8 Τέλεια αέρια

Στην ενότητα αυτή δίδεται ο ορισμός του τέλειου αερίου. Το τέλειο αέριο ορίζεται, ως ένα σώμα για το οποίο ισχύει ο νόμος των τελείων αερίων:

$$p\alpha = RT \quad (1)$$

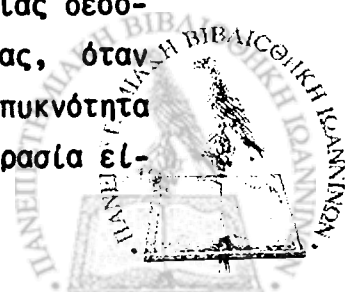
και το οποίο έχει σταθερές ειδικές θερμότητες. p είναι η απόλυτη πίεση, α ο ειδικός όγκος, R η σταθερά του αερίου και T η απόλυτη θερμοκρασία. Το τέλειο αέριο δε θα πρέπει να συγχέεται με το ιδανικό ρευστό. Το ιδανικό ρευστό δεν έχει τριβές και είναι ασυμπίεστο. Το τέλειο αέριο έχει ιξώδες και μπορεί, συνεπώς να εμφανίζει διατμητικές τάσεις και είναι συμπιεστό σύμφωνα με την εξ. (1). Η εξίσωση (1) είναι η καταστατική εξίσωση του τελείου αερίου. Μπορεί να γραφεί και με τη μορφή:

$$p = \rho RT$$

Οι μονάδες του R μπορούν να προσδιοριστούν από την εξίσωση, όταν όλες οι άλλες μονάδες είναι γνωστές. Αν το p είναι σε N/m^2 , το ρ σε kg/m^3 και το $T = (^{\circ}C + 273)$ σε βαθμούς κελβίν (°K), τότε:

$$R = (N/m^2)(m^3/kg \cdot ^{\circ}K) = m \cdot N/Kg \cdot ^{\circ}K$$

Τα πραγματικά αέρια υπακούουν, κατά προσέγγιση, στο νόμο των τελείων αερίων, όταν βρίσκονται κάτω από την κρίσιμη πίεση και πάνω από την κρίσιμη θερμοκρασία. Καθώς η πίεση αυξάνεται, η απόκλιση μεγαλώνει και είναι σημαντική κοντά στο κρίσιμο σημείο. Ο νόμος των τελείων αερίων συνδυάζει το νόμο του Charles και το νόμο του Boyle. Ο νόμος του Charles ορίζει, ότι ο όγκος μιας δεδομένης μάζας αερίου είναι ευθέως ανάλογος της θερμοκρασίας, όταν η πίεση είναι σταθερή. Ο νόμος του Boyle ορίζει, ότι η πυκνότητα είναι ευθέως ανάλογη της απόλυτης πίεσης, όταν η θερμοκρασία εί-



ναι σταθερή. Ο όγκος V μιάς μάζας αερίου m μονάδων είναι $V = m\alpha$.
Επομένως:

$$pV = mRT \quad (3)$$

Ορισμένες απλουστεύσεις είναι δυνατές, αν ο νόμος των τελείων αερίων γραφεί με βάση το γραμμομόριο (mole). Ένα γραμμομόριο αερίου είναι ο αριθμός γραμμαρίων μάζας, τα οποία ισούνται με το μοριακό του βάρος, δηλαδή ένα γραμμομόριο οξυγόνου (O_2) είναι 32 gr. Εάν $\bar{\alpha}$ είναι ο όγκος ανά mole, ο νόμος των τελείων αερίων γράφεται:

$$p\bar{\alpha} = MRT \quad (4)$$

όπου M είναι το μοριακό βάρος. Γενικότερα, αν n είναι ο αριθμός των γραμμομορίων (moles) του αερίου σε όγκο V :

$$pV = nMRT \quad (5)$$

αφού $nM = m$. Από το νόμο του Avogadro έχουμε, ότι ίσοι όγκοι αερίου στην ίδια απόλυτη θερμοκρασία και πίεση έχουν τον ίδιο αριθμό μορίων και άρα, οι μάζες τους είναι ανάλογες προς τα μοριακά τους βάρη. Από την εξισ. (5) συνάγεται ότι το $MR = R^*$ είναι σταθερό, αφού το pV/nT είναι το ίδιο για οποιοδήποτε τέλειο αέριο. Το γινόμενο $R^* = MR$ ονομάζεται παγκόσμια σταθερά των αερίων και η τιμή της εξαρτάται μόνο από τις μονάδες που χρησιμοποιούμε. Είναι δε:

$$R^* = MR = 8312 \text{ N.m/kg.Mole.}^\circ\text{K} \quad (6)$$

Η σταθερά του αερίου R συνάγεται από τη σχέση:

$$R = \frac{R^*}{M} = \frac{8312}{M} \text{ N.m/kg.}^\circ\text{K} \quad (7)$$

δηλαδή, γνωρίζοντας το μοριακό βάρος μπορούμε να υπολογίσουμε το R .

2.9 Μέτρο Διόγκωσης

Στην προηγούμενη ενότητα αποδείχθηκε, ότι ένα τέλειο αέριο συμπιέζεται σύμφωνα με το νόμο των τελείων αερίων. Στις πε-



ρισσότερες περιπτώσεις τα υγρά μπορούν να θεωρηθούν ασυμπίεστα, αλλά όταν έχουμε απότομες και μεγάλες μεταβολές πίεσης, η συμπεστικότητα είναι σημαντική. Η συμπεστικότητα των υγρών και των αερίων είναι, επίσης, σημαντική όταν μεταβάλλεται η θερμοκρασία. Η συμπεστικότητα ενός υγρού εκφράζεται με το Μέτρο Διόγκωσής του. Εάν η πίεση μιας μονάδας όγκου του υγρού αυξηθεί κατά dp ο όγκος αυτός θα μεταβληθεί κατά $-dV$. Ο λόγος $-dp/dV$ όταν αναφέρεται στη μονάδα του όγκου, είναι το Μέτρο διόγκωσης K . Αν θεωρήσουμε έναν οποιονδήποτε όγκο V υγρού, τότε:

$$K = - \frac{dp}{dV/V} \quad (1)$$

Επειδή το dV/V είναι αδιάστατο, το K έχει τις μονάδες της p . Για το νερό, σε συνήθεις θερμοκρασίες και πιέσεις, είναι $K=2068 \text{ MN/m}^2$, όπου M είναι το μέγα ($=10^6$).

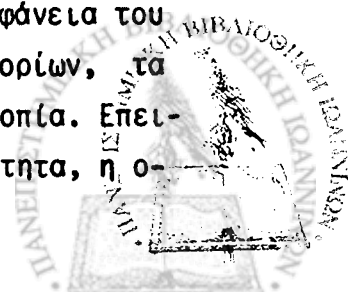
Για να πάρουμε μια ιδέα της συμπεστικότητας του νερού ας θεωρήσουμε την εφαρμογή πίεσης $p = 7 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ σε 1 m^3 νερού. Λύνοντας την εξ.(1) ως προς $-dV$, βρίσκουμε:

$$-dV = \frac{V dp}{K} = \frac{(1 \text{ m}^3)(7 \times 10^5 \text{ N/m}^2)}{2068 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = \frac{1}{3000}$$

Επομένως, η εφαρμογή πιέσεως $7 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ προκαλεί μείωση του όγκου κατά $1/3000$. Όσο ένα υγρό συμπιέζεται τόσο αυξάνεται η αντίστασή του σε περαιτέρω συμπίεση και το K , συνεπώς, αυξάνεται με την αύξηση της πίεσης.

2.10 Τάση Ατμών

Τα υγρά εξατμίζονται γιατί αποσπώνται μόρια από την ελεύθερη επιφάνειά τους. Τα μόρια του ατμού ασκούν μία μερική πίεση στο χώρο, η οποία ονομάζεται τάση ατμών. Εάν ο χώρος πάνω από το υγρό είναι περιορισμένος, μετά από ορισμένο χρόνο ο αριθμός των μορίων του ατμού, τα οποία έρχονται σε επαφή με την επιφάνεια του υγρού και συμπυκνώνονται είναι ίσος με τον αριθμό των μορίων, τα οποία αποσπώνται απ'αυτή και τελικά επέρχεται μία ισορροπία. Επειδή το φαινόμενο αυτό εξαρτάται από τη μοριακή δραστηριότητα, η ο-



ποία είναι, ως γνωστόν, συνάρτηση της θερμοκρασίας και η τάση των ατμών ενός υγρού εξαρτάται από τη θερμοκρασία και αυξάνεται μ'αυτή. Όταν η πίεση πάνω από ένα υγρό είναι ίση με την τάση των ατμών του, τότε παρατηρείται το φαινόμενο του βρασμού. Βρασμός του νερού, για παράδειγμα, μπορεί να λάβει χώρα σε ατμοσφαιρική θερμοκρασία, αν η πίεση είναι αρκετά χαμηλή. Στους 20°C το νερό (H₂O) έχει τάση ατμών 2337 N/m² και ο υδράργυρος (Hg) 0.173 N/m.

Σε πολλές περιπτώσεις ροής υγρών είναι δυνατόν να δημιουργηθούν χαμηλές πιέσεις σε ορισμένα σημεία του συστήματος και μάλιστα μικρότερες από την τάση των ατμών. Όταν συμβαίνει αυτό, τότε το υγρό εξαερώνεται σε ατμό.

2.11 Επιφανειακή Τάση. Τριχοειδή Φαινόμενα

Στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ ενός υγρού και ενός αερίου, φαίνεται ότι σχηματίζεται ένα ειδικό στρώμα (ή μεμβράνη), το οποίο οφείλεται στην έλξη των μορίων του, που είναι κάτω από την επιφάνεια. Ο σχηματισμός της μεμβράνης αυτής μπορεί να εξηγηθεί με την έννοια της επιφανειακής ενέργειας, δηλαδή, του έργου ανά μονάδα επιφάνειας, που χρειάζεται για να μεταφερθούν τα μόρια στην επιφάνεια. Η επιφανειακή τάση είναι τότε η δύναμη, η οποία χρειάζεται για το σχηματισμό της μεμβράνης και υπολογίζεται αν διαιρεθεί η επιφανειακή ενέργεια με το μήκος της μεμβράνης, σε κατάσταση ισορροπίας. Η επιφανειακή τάση του νερού μεταβάλλεται από 0.0075 kp/m στους 20°C σε 0.006 kp/m στους 100°C. Η τάση αυτή επφέρει αύξηση της πίεσης στο εσωτερικό μιας σταγόνας ή μιας φλέβας υγρού. Για μια μικρή σφαιρική σταγόνα ακτίνας r , η εσωτερική πίεση p , η οποία απαιτείται για να ισορροπήσει τη δύναμη έλξης, που οφείλεται στην επιφανειακή τάση σ , υπολογίζεται συναρτήσει των δυνάμεων, οι οποίες δρουν σε ένα ημισφαιρικό ελεύθερο σώμα:

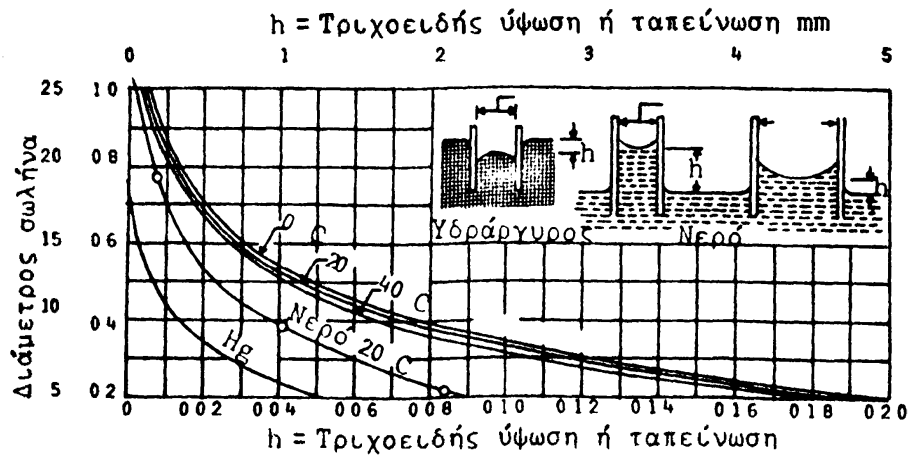
$$p \pi r^2 = 2\pi r \sigma \quad \text{ή} \quad p = \frac{2\sigma}{r}$$

Για μια κυλινδρική φλέβα υγρού, ακτίνας r , ισχύει η εξίσωση της τάσης έλξης του σωλήνα:

$$p = \frac{\sigma}{r}$$



Η τριχοειδής έλξη προκαλείται από την επιφανειακή τάση και από τη σχετική τιμή της συνάφειας μεταξύ υγρού και στερεού και της συνοχής του υγρού. Ένα υγρό το οποίο "διαβρέχει" το στερεό έχει συνάφεια μεγαλύτερη της συνοχής. Η επίδραση της επιφανειακής τάσης στην περίπτωση αυτή είναι να προξενήσει μια μικρή ανύψωση του υγρού μέσα σ'ένα λεπτό σωλήνα, ο οποίος βυθίζεται μερικώς στο υγρό. Για υγρά που δε διαβρέχουν το στερεό, η επιφανειακή τάση, τείνει να κατεβάσει το μηνίσκο στο εσωτερικό του σωλήνα. Όταν η γωνία επαφής μεταξύ υγρού και στερεού είναι γνωστή, η τριχοειδής ανύψωση του μηνίσκου μπορεί να υπολογιστεί. Το Σχ. 2.3, δίδει την τριχοειδή ανύψωση του νερού και του υδραργύρου σε κυκλικούς υάλινους σωλήνες ανοικτούς και σε επαφή με τον αέρα.



Σχήμα 2.3



3. ΣΤΑΤΙΚΗ

3.1. Γενικά

Η Στατική των Ρευστών, θα μελετηθεί σε δύο μέρη. Στο πρώτο, θα εξεταστεί η πίεση και η μεταβολή της δια μέσου ενός ρευστού και στο δεύτερο οι δυνάμεις πίεσης σε πεπερασμένες επιφάνειες. Στο Κεφάλαιο αυτό, λόγω της ομοιότητας των δυνάμεων που επενεργούν, συμπεριλαμβάνονται και ειδικές περιπτώσεις ρευστών, τα οποία κινούνται σαν ρευστά. Αφού δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ προσκειμένων στρωμάτων του ρευστού, δεν εμφανίζονται διατμητικές τάσεις. Συνεπώς, όλα τα ελεύθερα σώματα στη στατική των ρευστών υφίστανται μόνο κάθετες πιέσεις στις επιφάνειές τους.

3.2 Πίεση σε Σημείο

Η μέση πίεση υπολογίζεται διαιρώντας την κάθετη δύναμη, η οποία πιέζει μία επίπεδη επιφάνεια, δια του εμβαδού της επιφάνειας. Η πίεση σε σημείο είναι το όριο του λόγου της κάθετης δύναμης προς το εμβαδό, όταν το εμβαδό σ' αυτό το σημείο τείνει στο μηδέν. Σε ένα σημείο ρευστού σε ηρεμία, η πίεση είναι η ίδια προς όλες τις διευθύνσεις. Αυτό σημαίνει, ότι ένα στοιχείο δS μιας πολύ μικρής επιφάνειας, η οποία μπορεί να περιστραφεί ελεύθερα γύρω από κέντρο της, υφίσταται μία δύναμη σταθερού μεγέθους σε κάθε πλευρά, ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό της, όταν βυθίζεται σ' ένα ρευστό που ηρεμεί.

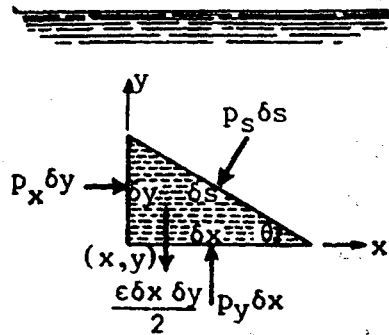
Για να το αποδείξουμε αυτό, ας θεωρήσουμε στο σημείο (x, y) ενός ρευστού σε ηρεμία, ένα μικρό τριγωνικό πρίσμα μοναδιαίου μήκους (Σχ. 3.1). Αφού δεν υπάρχουν διατμητικές δυνάμεις πίεσης και βαρύτητας, οι εξισώσεις ισορροπίας των δυνάμεων κατά τις διευθύνσεις x και y , αντιστοίχως είναι:

$$\sum F_x = p_x \delta y - p_s \delta s \sin \theta = \frac{\delta x \delta y}{2} \rho a_x = 0$$

$$\sum F_y = p_y \delta x - p_s \delta s \cos \theta - \varepsilon \frac{\delta x \delta y}{2} = \frac{\delta x \delta y}{2} \rho a_y = 0$$

όπου p_x , p_y , p_s είναι οι μέσες πιέσεις στις τρεις έδρες, ε το ειδικό βάρος του ρευστού και ρ η πυκνότητα του. Όταν η κεκλιμένη





Σχήμα 3.1

έδρα του πρίσματος πλησιάζει το σημείο (x, y) , δηλαδή, όταν δx και δy τείνουν στο μηδέν, ενώ η γωνία θ παραμένει σταθερά, αν χρησιμοποιηθούν οι τριγωνομετρικές σχέσεις:

$$\delta x = \delta s \cos \theta, \quad \delta y = \delta s \sin \theta$$

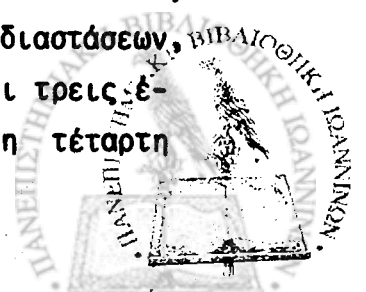
οι εξισώσεις ισορροπίας των δυνάμεων απλοποιούνται και γράφονται:

$$p_x \delta y - p_s \delta y = 0, \quad p_y \delta x - p_s \delta x - \frac{\epsilon \delta x \delta y}{2} = 0$$

Ο τελευταίος όρος της 2ης εξίσωσης είναι αμελητέος και μπορεί να διαγραφεί. Αν διαιρέσουμε τις δύο εξισώσεις με τα δy και δx , αντίστοιχως, έχουμε:

$$p_s = p_x = p_y \quad (1)$$

Αφού λάβαμε τη γωνία θ αυθαίρετα, η παραπάνω εξίσωση αποδεικνύει, ότι η πίεση σ'ένα σημείο ρευστού που ηρεμεί είναι η ίδια προς όλες τις διευθύνσεις. Αν και εξετάστηκε η περίπτωση δύο διαστάσεων, η απόδειξη μπορεί να γίνει και για την περίπτωση τριών διαστάσεων, αν θεωρήσουμε ένα μικρό τετράεδρο ρευστού, του οποίου οι τρεις έδρες του βρίσκονται στα επίπεδα των συντεταγμένων και η τέταρτη έδρα έχει μία αυθαίρετη κλίση.



Εάν το ρευστό κινείται έτσι, ώστε να υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ προσκειμένων στρωμάτων του ρευστού, εμφανίζονται διατμητικές τάσεις και οι πιέσεις σ' ένα σημείο δεν είναι κατά κανόνα ίσες προς όλες τις διευθύνσεις. Τότε, η πίεση σε σημείο ορίζεται ως η μέση τάση των τριών καθέτων μεταξύ τους εγκάρσιων τάσεων, οι οποίες επενεργούν στο σημείο:

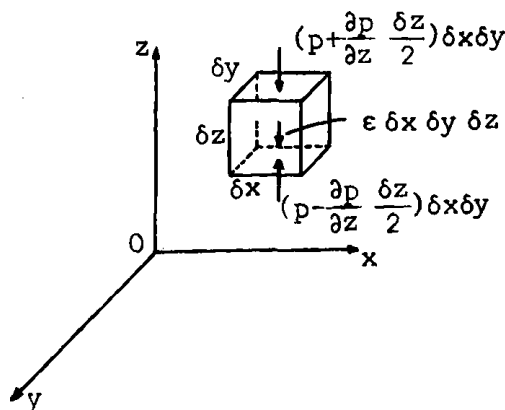
$$p = \frac{p_x + p_y + p_z}{3}$$

Σ' ένα ιδανικό ρευστό με ιξώδες μηδέν, δηλαδή, ένα ρευστό χωρίς τριβές, δεν εμφανίζονται διατμητικές τάσεις, όποια και αν είναι η κίνηση του ρευστού και άρα, η πίεση σε σημείο είναι η ίδια προς όλες τις διευθύνσεις.

3.3. Βασικές Εξισώσεις της Στατικής των Ρευστών.

I. Μεταβολή της Πίεσης Στατικών Ρευστών

Οι δυνάμεις, οι οποίες επενεργούν σ' ένα στοιχείο ρευστού, (Σχ. 3.2), το οποίο ηρεμεί, αποτελούνται από τις δυνάμεις επιφάνειας και από το βάρος του. Αν λάβουμε τον άξονα των z κατακορύφως προς τα επάνω, το βάρος ισούται με $-\rho \delta x \delta y \delta z$. Αν η πίεση στο κέντρο (x, y, z) του στοιχείου είναι p , η δύναμη η οποία ασκείται στην έδρα την κάθετη προς τον άξονα των z και την πλησιέστερη προς την αρχή 0 είναι κατά προσέγγιση:



Σχήμα 3.2



$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\delta z}{2}\right) \delta x \delta y$$

και η δύναμη, η οποία ασκείται στην απέναντι έδρα είναι:

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\delta z}{2}\right) \delta x \delta y$$

όπου $\delta z/2$ είναι η απόσταση μίας έδρας, κάθετης προς τον άξονα z , από το κέντρο του στοιχείου. Αν προσθέσουμε τις δυνάμεις κατά τη διεύθυνση του άξονα z , έχουμε:

$$\delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \delta x \delta y \delta z - \epsilon \delta x \delta y \delta z$$

Για τις διευθύνσεις x και y , επειδή δεν ενεργούν συνιστώσες του βάρους, έχουμε:

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z, \quad \delta F_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$$

Το διάνυσμα $\delta \vec{F}$ της συνισταμένης δύναμης, η οποία επενεργεί στο στοιχείο, είναι:

$$\delta \vec{F} = \vec{i} \delta F_x + \vec{j} \delta F_y + \vec{k} \delta F_z = -\left(\vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z - \vec{k} \epsilon \delta x \delta y \delta z$$

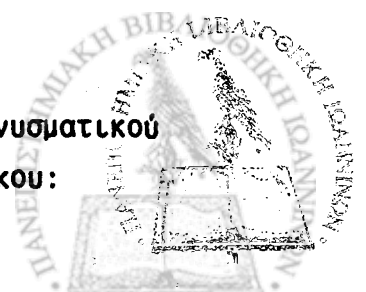
Αν το μέγεθος του κυβικού στοιχείου τείνει στο μηδέν και διαιρέσουμε δια $\delta x \delta y \delta z = \delta V$, τότε έχουμε:

$$\frac{\delta \vec{F}}{\delta V} = -\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) p - \vec{k} \epsilon \quad \lim \delta V \rightarrow 0 \quad (1)$$

Αυτή είναι η συνισταμένη δύναμη ανά μονάδα όγκου σε ένα σημείο του ρευστού σε ηρεμία και θα πρέπει να ισούται με μηδέν. Η ποσότητα που είναι μέσα στην παρένθεση, είναι η "βαθμίδα" ή "κλίση", συμβολίζεται με ∇ και ονομάζεται τελεστής ανάδελτα (Nabla):

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

Η αρνητική κλίση του p , $-\nabla p$, είναι το διάνυσμα του διανυσματικού πεδίου \vec{F} της επιφανειακής δύναμης πίεσης ανά μονάδα όγκου:



$$\vec{f} = -\nabla p \quad (3)$$

Συνεπώς, η πίεση του ρευστού μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$\vec{f} - \vec{k}\epsilon = 0 \quad (4)$$

Υπό μορφή συνιστωσών, η πίεση γράφεται:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\epsilon, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

Η πρώτη και η τρίτη από τις παραπάνω σχέσεις αποτελούν μία μορφή του νόμου του Pascal, ο οποίος ορίζει ότι η πίεση σ'ένα οριζόντιο επίπεδο συνεχούς ρευστού σε ηρεμία είναι σταθερή. Αφού η πίεση είναι συνάρτηση του z ,

$$dp = -\epsilon dz \quad (6)$$

Αυτή η απλή διαφορική εξίσωση συνδέει τη μεταβολή της πίεσης, το ειδικό βάρος και τη μεταβολή του ύψους και ισχύει τόσο για συμπιεστά όσο και για ασυμπιεστά ρευστά. Για ομοιογενή και ασυμπιεστά ρευστά, το ϵ είναι σταθερό και η εξ.(6), αν ολοκληρωθεί, δίδει:

$$p = -\epsilon z + c$$

όπου c , είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Ο υδροστατικός νόμος της μεταβολής της πίεσης συνήθως γράφεται υπό τη μορφή:

$$p = \epsilon h \quad (7)$$

όπου το h μετράται κατακόρυφα προς τα κάτω ($h = -z$) από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και p είναι η αύξηση της πίεσης ως προς την πίεση της ελεύθερης επιφάνειας.

II. Μεταβολή της Πίεσης Συμπιεστών Ρευστών

Όταν το ρευστό είναι τέλει αέριο σε ηρεμία και η θερμοκρασία του είναι σταθερή, από την εξίσωση $p = \rho RT$ συνάγεται:



$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad (8)$$

Αν αντικαταστήσουμε το ε με ρg στην εξ. (6) και γίνει απαλοιφή του ρ μεταξύ των εξισ. (6) και (8) βρίσκουμε:

$$dz = -\frac{p_0}{g\rho_0} \frac{dp}{p} \quad (9)$$

Εάν $p=p_0$, όταν $z=z_0$, ολοκληρώνοντας μεταξύ ορίων λαμβάνουμε τη σχέση:

$$\int_{z_0}^z dz = -\frac{p_0}{g\rho_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} \quad z - z_0 = -\frac{p_0}{g\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} \quad (10)$$

όπου \ln είναι ο φυσικός λογάριθμος. Τότε το p είναι:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{z - z_0}{p_0/g\rho_0}\right) \quad (11)$$

η οποία είναι η εξίσωση της μεταβολής της πίεσης συναρτήσει του ύψους σε ισόθερμη ατμόσφαιρα.

Συχνά παραδεχόμαστε, ότι η ατμόσφαιρα έχει σταθερή θερμοβαθμίδα, η οποία εκφράζεται με την εξίσωση:

$$T = T_0 + \gamma z \quad (12)$$

Για την τροπόσφαιρα είναι $\gamma = -0.65^\circ\text{C}/100\text{ m}$. Η πυκνότητα μπορεί να γραφεί συναρτήσει της πίεσης και του ύψους, από το νόμο των τελείων αερίων:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{p}{R(T_0 + \gamma z)} \quad (13)$$

Αντικαθιστώντας στην $dp = -\rho g dz$ (εξ. 6), λαμβάνουμε τη διαφορική εξίσωση από την οποία με ολοκλήρωση μπορούμε να εκφράσουμε το p συναρτήσει του z .

III. Ισεντροπική και Πολυτροπική Ατμόσφαιρα

Βελτιωμένο πρότυπο της ισόθερμης ατμόσφαιρας αποτελεί η ισεντροπική, στην οποία οι διαταραχές που προκαλούν τη μετακίνηση του αέρα στα διάφορα ύψη γίνονται ισεντροπικά, δηλαδή, ακολουθούν το νόμο του Poisson (αδιαβατική μεταβολή). Αυτό σημαίνει ότι η ανταλλαγή με το περιβάλλον και οι απώλειες τριβής είναι αμελητέες. Έτσι, εφαρμόζοντας το νόμο του Poisson



$$\rho v^\gamma = \text{σταθερό} \quad \text{ή} \quad \rho \rho^{-\gamma} = \rho_0 \rho_0^{-\gamma} \quad (14)$$

με $\gamma = 1.4$ για τον αέρα, τότε το ολοκλήρωμα εξ. (10), δίδει:

$$z - z_0 = -\frac{1}{g_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \frac{1}{(p/p_0)^{1/\gamma}} = -\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0 g_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho p^{1/\gamma}} \quad (15)$$

$$\text{ή} \quad z - z_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g_0} p_0^{(1-\gamma)/\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} (p^{(\gamma-1)/\gamma} - p_0^{(\gamma-1)/\gamma}) \quad \text{ή}$$

$$\rho = p_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{z - z_0}{p_0 / \rho_0 g_0} \right)^{\gamma/\gamma-1} \quad (16)$$

Συνδυασμός της καταστατικής εξίσωσης και της (14) δίδει τις μεταβολές της πυκνότητας και της θερμοκρασίας, με το ύψος, δηλαδή:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{z - z_0}{p_0 / \rho_0 g_0} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (17)$$

$$T = T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{z - z_0}{p_0 / \rho_0 g_0} \right) \quad (18)$$

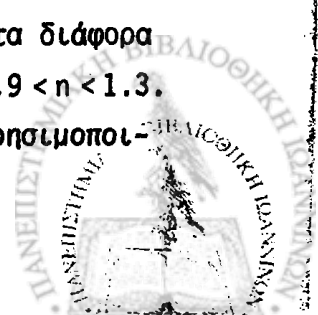
Οπότε, πάλι, βρίσκουμε ότι η θερμοκρασία ελαττώνεται με το ύψος, κατά τη βαθμίδα

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{T_0}{p_0 / \rho_0 g_0} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{g_0}{R} \quad (19)$$

η οποία είναι ανεξάρτητη από τα καταστατικά μεγέθη.

Με $R = 287 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{K}$ και $g_0 = 9.81 \text{ m/sec}^2$, η θερμοκρασία της ισοεντροπικής ατμόσφαιρας ελαττώνεται κατά την τιμή $\frac{dT}{dz} = 0.98 \text{ } ^\circ\text{K}/100\text{m}$.

Όταν αναφερόμαστε στην πολυτροπική ατμόσφαιρα, τότε αντί του ισοεντροπικού εκθέτη γ χρησιμοποιείται ο πολυτροπικός n . Έτσι, για $n = 1$, η πολυτροπική ατμόσφαιρα δίδει την ισόθερμη και για $n = 1.4$ την ισοεντροπική. Οι τιμές του n δίδονται εμπειρικά για τα διάφορα ύψη μέσα στην ατμόσφαιρα και κυμαίνονται στο διάστημα $0.9 < n < 1.3$. Οι εξ. (16), (17) και (18), των μεταβολών με το ύψος, χρησιμοποι-



ούνται για στρώματα ατμόσφαιρας πάχους της τάξης των 10 km. Αυτό είναι αναγκαίο γιατί η παραδοχή π.χ. της ισεντροπικής ατμόσφαιρας ισχύει για ορισμένο πάχος στρώματος, όπως φαίνεται και από τη σχέση (16). Αρχίζοντας από την επιφάνεια του εδάφους $z_0 = 0$ και $T_0 = 288^\circ\text{K}$, τότε στο ύψος

$$z = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{RT_0}{g_0} = 29515 \text{ m} \approx 29.5 \text{ km} \quad (20)$$

η πίεση $p(z) = 0$. Το αφύσικο αυτό αποτέλεσμα δείχνει την ανεπάρκεια του ισεντροπικού προτύπου. Η (20) δείχνει, ότι για $\gamma = n+1$, το ύψος $z \rightarrow \infty$, το οποίο βρίσκεται κοντά στη φυσική πραγματικότητα και τεκμηριώνει τη χρησιμότητα του πολυτροπικού προτύπου.

Στη Μετεωρολογία, χρησιμοποιούνται διάφορα πρότυπα και μάλιστα τυπικές προτυποποιημένες ατμόσφαιρες, λόγω της ανεπάρκειας των προηγούμενων σχέσεων για ακριβείς υπολογισμούς. Αυτά, κυρίως, βασίζονται στην ισεντροπική ατμόσφαιρα.

3.4. Δυνάμεις σε Επίπεδες Επιφάνειες

I. Εισαγωγή

Στις προηγούμενες ενότητες του Κεφαλαίου, εξετάστηκε η μεταβολή της πίεσης μέσα σε ένα ρευστό. Οι κατανεμημένες δυνάμεις, οι οποίες εξασκούνται σε μια πεπερασμένη επιφάνεια από ένα ρευστό, μπορούν να αντικατασταθούν με μία συνισταμένη δύναμη. Αυτό ειδικά συμβαίνει στην περίπτωση που εξετάζουμε τις αντιδράσεις του συστήματος των δυνάμεων. Στην ενότητα αυτή το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης και η ευθεία ενέργειά της (στο κέντρο πίεσης) εξάγονται με ολοκλήρωση, με τη βοήθεια τύπων και με τη χρήση της εννοίας του πρίσματος πίεσης.

II. Οριζόντιες επιφάνειες

Μία οριζόντια επίπεδη επιφάνεια σε ένα ρευστό σε ηρεμία δέχεται σταθερή πίεση. Το μέγεθος της δύναμης που εξασκείται στη μία πλευρά της επιφάνειας είναι:

$$\int p \, dS = p \int dS = pS$$



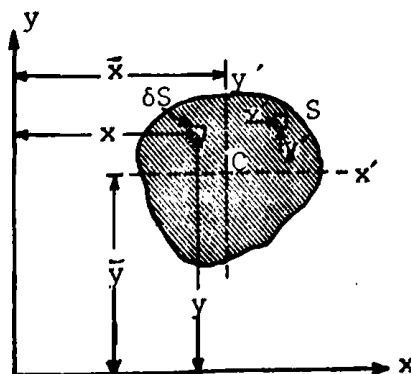
Οι στοιχειώδεις δυνάμεις $p dS$, οι οποίες δρουν στην dS είναι όλες παράλληλες και έχουν την ίδια διεύθυνση. Επομένως, το αλγεβρικό άθροισμά τους δίδει το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης. Η διεύθυνσή της είναι κάθετη στην επιφάνεια και κατευθύνεται προς αυτή εάν το p είναι θετικό. Για να καθορίσουμε την ευθεία ενεργείας της συνισταμένης, δηλαδή, το σημείο στο οποίο η ροπή των κατανεμημένων δυνάμεων γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το σημείο είναι μηδέν, μπορούμε να λάβουμε αυθαίρετως άξονες x, y όπως στο Σχ. 3.3. Τότε, αφού η ροπή της συνισταμένης θα πρέπει να ισούται με τη ροπή των συνιστωσών γύρω από ένα οποιονδήποτε άξονα, έστω τον άξονα των y :

$$p S x' = \int_S p dS$$

όπου x' είναι η απόσταση της συνισταμένης από τον άξονα των y . Αφού η p είναι σταθερή, ισχύει:

$$x' = \frac{1}{S} \int_S x dS = \bar{x}$$

όπου \bar{x} είναι η τετημημένη του γεωμετρικού κέντρου της επιφάνειας. Συνεπώς, για μία οριζόντια επιφάνεια βυθισμένη σ'ένα ρευστό το οποίο ηρεμεί, η συνισταμένη διέρχεται από το γεωμετρικό κέντρο της επιφάνειας (το κέντρο βάρους της διατομής).

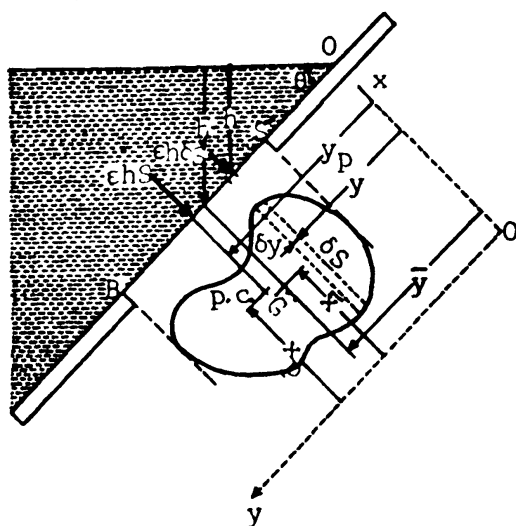


Σχήμα 3.3



III. Κεκλιμένες επιφάνειες

Στο Σχ. 3.4, μία επίπεδη επιφάνεια παρίσταται με το ίχνος της Α' Β' και σχηματίζει γωνία θ° με το οριζόντιο επίπεδο. Η τομή της επίπεδης επιφάνειας και της ελεύθερας επιφάνειας λαμβάνεται ως άξονας των x . Ο άξονας των y λαμβάνεται στο επίπεδο της επιφάνειας, με αρχή το σημείο O στην ελεύθερη επιφάνεια. Το επίπεδο xy συμπίπτει με το επίπεδο της επιφάνειας. Ζητούνται το μέγεθος, η διεύθυνση και η ευθεία ενεργείας της συνισταμένης δύναμης, η οποία ασκείται από το υγρό στη μία πλευρά της επιφάνειας.



Σχήμα 3.4

Θεωρούμε ως στοιχείο της επιφάνειας μία λωρίδα πλάτους δy και εμβαδού δS , της οποίας οι μακρύτερες πλευρές είναι οριζόντιες. Το μέγεθος της δύναμης $\delta \vec{F}$, η οποία επενεργεί στο στοιχείο είναι:

$$\delta \vec{F} = \rho \delta S = \rho g h \delta S = \rho g y \sin \theta \delta S \quad (1)$$

Επειδή, όλα αυτά τα στοιχεία των δυνάμεων είναι παράλληλα, το επιφανειακό ολοκλήρωμα δίδει το μέγεθος της δύναμης \vec{F} , η οποία επενεργεί στη μία πλευρά της:

$$\vec{F} = \int \rho \delta S = \rho g \sin \theta \int y \delta S = \rho g \sin \theta \bar{y} S = \rho g \bar{h} S = P_G S \quad (2)$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις $\bar{y} \sin \theta = \bar{h}$ και $P_G = \rho g \bar{h}$. P_G είναι η πίεση στο γεωμετρικό κέντρο της επιφάνειας. Με απλή διατύπωση,



το μέγεθος της δύναμης, η οποία ασκείται στη μία πλευρά μιας επιφάνειας βυθισμένης σ'ένα υγρό, είναι το γινόμενο του εμβαδού της με την πίεση στο γεωμετρικό της κέντρο. Θα πρέπει να σημειωθεί, ότι με τη μορφή αυτή δεν είναι απαραίτητη η ύπαρξη ελεύθερης επιφάνειας. Οποιαδήποτε μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό της πίεσης στο γεωμετρικό κέντρο. Η δύναμη έχει τέτοια διεύθυνση ώστε να πιέζει την επιφάνεια, αν η P_G είναι θετική. Αφού όλα τα στοιχεία της δύναμης είναι κάθετα προς την επιφάνεια, η ευθεία ενεργείας της συνισταμένης είναι, επίσης, κάθετη προς την επιφάνεια. Μια επιφάνεια μπορεί να περιστραφεί γύρω από τον άξονα, ο οποίος διέρχεται από το γεωμετρικό της κέντρο χωρίς να αλλάζει το μέγεθος της συνισταμένης, αρκεί ολόκληρη η επιφάνεια να παραμείνει βυθισμένη στο στατικό υγρό.

IV. Κέντρο Πίεσης

Η ευθεία ενέργειας της συνισταμένης δύναμης τέμνει την επιφάνεια σ'ένα σημείο, το οποίο ονομάζεται Κέντρο Πίεσης και έχει συντεταγμένες (x_p, y_p) (βλ. Σχ. 3.4). Αντίθετα προς την περίπτωση μιας οριζόντιας επιφάνειας, το κέντρο μιας κεκλιμένης επιφάνειας δε συμπίπτει με το γεωμετρικό της κέντρο. Για να βρούμε το κέντρο πίεσης, οι ροπές των συνισταμένων $x_p F$, $y_p F$ εξισώνονται με τις ροπές των συνιστωσών γύρω από τους άξονες των y και x , αντιστοίχως. Έτσι, έχουμε:

$$x_p F = \int_S x p dS \quad (3)$$

$$y_p F = \int_S y p dS \quad (4)$$

Το στοιχείο της επιφάνειας στην εξ. (3) πρέπει να είναι το $\delta x \delta y$ και όχι η λωρίδα του Σχ. 3.4.

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις ως προς τις συντεταγμένες του κέντρου πίεσης, έχουμε τις σχέσεις:

$$x_p = \frac{1}{F} \int_S x p dS \quad (5)$$

$$y_p = \frac{1}{F} \int_S y p dS \quad (6)$$



Σε πολλές εφαρμογές τα ολοκληρώματα (5) και (6) υπολογίζονται με γραφικές μεθόδους. Για επιφάνειες με απλό σχήμα οι εξισώσεις μπορούν να μετασχηματιστούν σε γενικούς τύπους, όπως (βλ. παράρτημα Ι):

$$x_p = \frac{1}{\rho g \bar{y} S \sin \theta} \int_S x \rho g y \sin \theta dS = \frac{1}{\bar{y} S} \int_S x y dS = \frac{I_{xy}}{\bar{y} \cdot S} \quad (7)$$

Στις εξ. (I.10) του παραρτήματος και (7) το x_p είναι:

$$x_p = \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y} S} + \bar{x} \quad (8)$$

Όταν ένας άξονας του γεωμετρικού κέντρου $x = \bar{x}$ ή $y = \bar{y}$, είναι άξονας συμμετρίας της επιφάνειας, το γινόμενο αδράνειας \bar{I}_{xy} είναι μηδέν και το κέντρο πίεσης κείται στον $x = \bar{x}$. Επειδή το \bar{I}_{xy} μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό, το κέντρο πίεσης μπορεί να κείται είτε από τη μία είτε από την άλλη πλευρά της γραμμής $x = \bar{x}$. Για να καθορίσουμε το y_p με τον τύπο, αυτός εξάγεται από τις εξ. (2) και (6):

$$y_p = \frac{1}{\rho g \bar{y} S \sin \theta} \int_S y \rho g y \sin \theta dS = \frac{1}{\bar{y} S} \int_S y^2 dS = \frac{I_x}{\bar{y} S} \quad (9)$$

Αλλά με βάση το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (του Steiner) έχουμε:

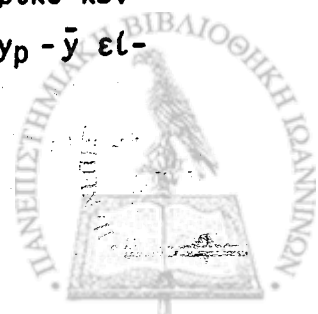
$$I_x = I_G + \bar{y}^2 S$$

όπου I_G η ροπή αδράνειας της επιφάνειας ως προς τον οριζόντιο άξονα του κέντρου βάρους. Απαλείφοντας το I_x από την εξ. (9) βρίσκουμε:

$$y_p = \frac{I_G}{\bar{y} S} + \bar{y} \quad (10)$$

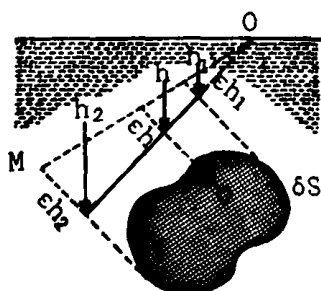
$$\eta \quad y_p - \bar{y} = \frac{I_G}{\bar{y} S} \quad (11)$$

Το I_G είναι πάντοτε θετικό. Επομένως, το $y_p - \bar{y}$ είναι πάντοτε θετικό και το κέντρο πίεσης κείται πάντοτε κάτω από το γεωμετρικό κέντρο της επιφάνειας. Θα πρέπει να τονίσουμε, ότι τα \bar{y} και $y_p - \bar{y}$ είναι αποστάσεις στο επίπεδο της επιφάνειας.



V. Το πρίσμα πίεσης

Η έννοια του πρίσματος πίεσης παρέχει άλλον ένα τρόπο προσδιορισμού του μεγέθους και του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης δύναμης σε μία κεκλιμένη επιφάνεια. Ο όγκος του πρίσματος πίεσης δίδει το μέγεθος της δύναμης και η συνισταμένη δύναμη διέρχεται από το γεωμετρικό κέντρο του πρίσματος. Η επιφάνεια λαμβάνεται ως βάση του πρίσματος και το ύψος του σε κάθε σημείο καθορίζεται από την πίεση $p = \epsilon h$, αφού χρησιμοποιηθεί κατάλληλη κλίμακα (Σχ. 3.5).



Σχήμα 3.5

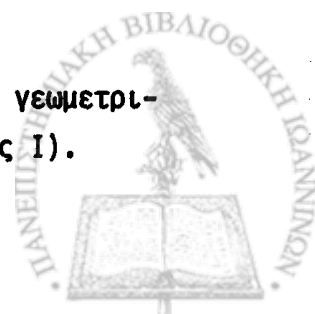
Επειδή η πίεση μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια, η πάνω επιφάνεια του πρίσματος κείται σε ένα επίπεδο του οποίου το ίχνος OM φαίνεται στο Σχ. 3.5. Η δύναμη, η οποία επενεργεί στο στοιχείο επιφάνειας δS είναι:

$$\delta \vec{F} = \epsilon h \delta S = \epsilon \delta V \quad (12)$$

Αυτό όμως είναι ένα στοιχείο του όγκου του πρίσματος. Μετά την ολοκλήρωση έχουμε, $\vec{F} = \epsilon V$, δηλαδή ο όγκος του πρίσματος πίεσης ισούται με το μέτρο της συνισταμένης δύναμης, η οποία ασκείται στη μία πλευρά της επιφάνειας. Από τις εξ. (5) και (6) βρίσκουμε:

$$x_p = \frac{1}{V} \int x dV \quad y_p = \frac{1}{V} \int y dV \quad (13)$$

οι οποίες δείχνουν ότι τα x_p , y_p είναι οι αποστάσεις του γεωμετρικού κέντρου του πρίσματος πίεσης (βλ. εξ. I.5 παραρτήματος I).



Επομένως, η ευθεία ενέργειας διέρχεται από το γεωμετρικό κέντρο του πρίσματος πίεσης. Για μερικές επιφάνειες απλού σχήματος είναι καλύτερα να χρησιμοποιούμε το πρίσμα πίεσης παρά ολοκλήρωμα ή τύπο. Για παράδειγμα μία ορθογώνια επιφάνεια με τη μία ακμή στην ελεύθερη επιφάνεια αποτελεί ένα σφηνοειδές πρίσμα πίεσης. Το γεωμετρικό του κέντρο απέχει από τη βάση του το ένα τρίτο του ύψους του. Άρα, το κέντρο πίεσης απέχει το ένα τρίτο του ύψους από την κάτω πλευρά.

VI. Επίδραση της ατμοσφαιρικής πίεσης σε επίπεδες επιφάνειες

Όταν εξετάσαμε τις δυνάμεις πίεσης δεν είπαμε σε τί πιέσεις αναφερόμαστε. Οι πιέσεις υπολογίστηκαν από τη σχέση $p = \rho h$, όπου h είναι η κατακόρυφη απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια. Συνεπώς, αναφερθήκαμε στην τοπική ατμοσφαιρική πίεση. Αν η άλλη πλευρά της επιφάνειας είναι σε επαφή με την ατμόσφαιρα, ασκείται σ' αυτή από την ατμόσφαιρα μία δύναμη ίση με το γινόμενο της ατμοσφαιρικής πίεσης P_0 επί το εμβαδό, δηλαδή $P_0 S$. Η δύναμη, η οποία ασκείται στην πλευρά του υγρού είναι:

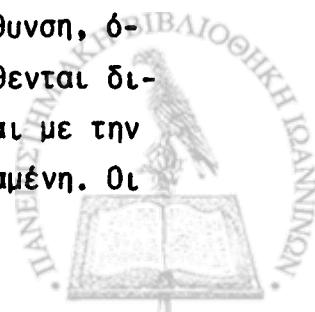
$$\int (p_0 + \rho h) dS = p_0 S + \rho \int h dS$$

Η δύναμη $p_0 S$, η οποία οφείλεται στην επίδραση της ατμόσφαιρας ασκείται εξίσου στις δύο πλευρές και δεν επηρεάζει με κανένα τρόπο τη συνισταμένη δύναμη ή το σημείο εφαρμογής της. Εφόσον λαμβάνουμε την ίδια πίεση για όλες τις πλευρές ενός ελεύθερου σώματος, η συνισταμένη δύναμη και η ροπή της μπορούν να καθοριστούν αν κατασκευαστεί μία ελεύθερη επιφάνεια, όπου θεωρούμε ότι η πίεση είναι μηδέν και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω μεθόδους.

3.5. Συνιστώσες Δυνάμεις σε Καμπύλες Επιφάνειες

I. Εισαγωγή

Όταν οι στοιχειώδεις δυνάμεις $p \delta S$ αλλάζουν διεύθυνση, όπως στην περίπτωση καμπύλης επιφάνειας, πρέπει να προστίθενται διανυσματικά. Με δύο οριζόντιες συνιστώσες σε ορθή γωνία και με την τρίτη συνιστώσα κατακόρυφη μπορεί να καθοριστεί η συνισταμένη. Οι



ευθείες επενέργειας των συνιστωσών βρίσκονται εύκολα και άρα, η συνισταμένη και η ευθεία ενεργείας της μπορούν να καθοριστούν πλήρως.

II. Οριζόντια Συνιστώσα Δύναμης σε Καμπύλη Επιφάνεια.

Η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης πίεσης σε καμπύλη επιφάνεια ισούται με τη δύναμη πίεσης, η οποία εξασκείται σε μία προβολή της καμπύλης επιφάνειας. Το κατακόρυφο επίπεδο προβολής είναι κάθετο προς τη διεύθυνση της συνιστώσας. Η επιφάνεια του Σχ. 3.6, παριστά μία τυχούσα τρισδιάστατη επιφάνεια και ένα στοιχείο της δs στο οποίο η κάθετη σχηματίζει γωνία θ με την αρνητική διεύθυνση του x . Τότε η

$$\delta \vec{F}_x = p \delta S \cos \theta$$

είναι η συνιστώσα κατά τη διεύθυνση x της δύναμης, η οποία ασκείται στην ίδια πλευρά του δS . Αθροίζοντας όλες τις συνιστώσες κατά τη διεύθυνση x , έχουμε:

$$\vec{F}_x = \int_S p \cos \theta \delta S \quad (1)$$

όπου $\cos \theta \delta S$ είναι η προβολή του δS σ'ένα επίπεδο κάθετο προς τον x . Η στοιχειώδης δύναμη επί της προβολής της επιφάνειας είναι $p \cos \theta \delta S$, η οποία έχει, επίσης, τη διεύθυνση του x . Προβάλλοντας κάθε στοιχείο της επιφάνειας σ'ένα επίπεδο κάθετο προς τον x , είναι το ίδιο με το να προβάλλουμε όλη την επιφάνεια στο κατακόρυφο επίπεδο. Συνεπώς, η δύναμη που εφαρμόζεται στην προβολή αυτή της καμπύλης επιφάνειας είναι η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης, η οποία ασκείται στην καμπύλη επιφάνεια, σε διεύθυνση κάθετη προς το επίπεδο προβολής. Για να βρούμε την οριζόντια συνιστώσα, την κάθετη προς τη διεύθυνση του x , προβάλλουμε την καμπύλη επιφάνεια σ'ένα κατακόρυφο επίπεδο παράλληλο προς τον x και προσδιορίζουμε τη δύναμη που ασκείται στην προβολή.

Όταν αναζητούμε την οριζόντια συνιστώσα της δύναμης σ'ένα κλειστό σώμα, η προβολή της καμπύλης επιφάνειάς του σ'ένα κατακόρυφο επίπεδο είναι πάντοτε μηδέν, αφού οι προβολές δύο στοιχει-



ων της επιφάνειας, τα οποία βρίσκονται οριζοντίως απέναντι έχουν αντίθετα πρόσημα, όπως δείχνει το Σχ. 3.7. Έστω, ότι ένας μικρός κύλινδρος εμβαδού διατομής δS , με άξονα κατά τη διεύθυνση x , τέμνει το κλειστό σώμα στα Β και C. Αν το στοιχείο επιφάνειας του σώματος που τέμνεται από το κυλινδρικό πρίσμα στο Β, είναι δS_B , και στο C είναι δS_C , τότε:

$$\delta S_B \cos \theta_B = -\delta S_C \cos \theta_C = \delta S$$

αφού το $\cos \theta_C$ είναι αρνητικό. Άρα, με ίση πίεση σε κάθε άκρο του κυλίνδρου, έχουμε:

$$p \delta S_B \cos \theta_B + p \delta S_C \cos \theta_C = 0$$

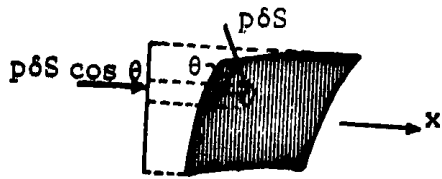
πράγμα το οποίο ισχύει και για όλα τα άλλα στοιχεία της επιφάνειας.

Για να βρούμε την ευθεία επενέργεια μιας οριζόντιας συνιστώσας σε μία καμπύλη επιφάνεια, απαιτείται να γνωρίζουμε τη συνισταμένη του συστήματος των παραλλήλων δυνάμεων, οι οποίες αποτελούνται από τις συνιστώσες δυνάμεις κάθε στοιχείου της επιφάνειας. Αυτή ακριβώς είναι η συνισταμένη της δύναμης, η οποία ασκείται στην προβολή της επιφάνειας, αφού τα δύο συστήματα δυνάμεων έχουν την ίδια κατανομή οριζοντίων συνιστωσών των στοιχειωδών δυνάμεων. Επομένως, το κέντρο πίεσης μεταφέρεται επί της προβολής και βρίσκεται με τη χρήση των μεθόδων της ενότητας 3.4.

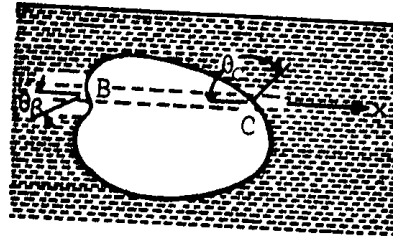
III. Κατακόρυφη Συνιστώσα Δύναμης σε Καμπύλη Επιφάνεια

Η κάθετη συνιστώσα της δύναμης πίεσης σε μία καμπύλη επιφάνεια ισούται με το βάρος του υγρού που περιέχεται κατακόρυφα, μεταξύ της καμπύλης επιφάνειας και της ελεύθερης επιφάνειας. Η κάθετη συνιστώσα της δύναμης σε καμπύλη επιφάνεια μπορεί να προσδιοριστεί, αν αθροίσουμε τις κάθετες συνιστώσες της δύναμης πίεσης των στοιχείων δS της επιφάνειας. Στο Σχ. 3.8, απεικονίζεται ένα στοιχείο επιφάνειας και η δύναμη $p \delta S$, η οποία εφαρμόζεται κάθετα σ' αυτή. Έστω θ η γωνία μεταξύ της κάθετης προς το στοιχείο επιφάνειας και της κατακόρυφης. Τότε η κάθετη συνιστώσα της δύναμης, η οποία

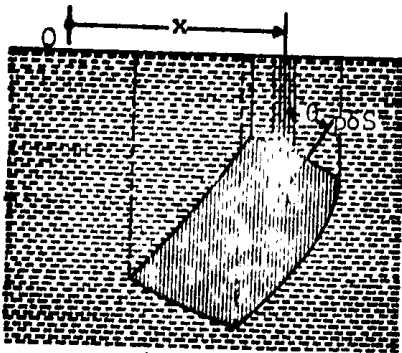




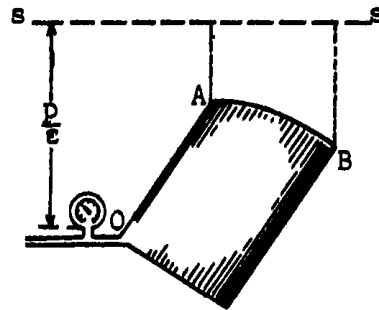
Σχήμα 3.6



Σχήμα 3.7



Σχήμα 3.8



Σχήμα 3.9

ασκείται στο στοιχείο επιφάνειας, είναι $p\delta S \cos \theta$ και η κάθετη συνιστώσα, η οποία ενεργεί σε ολόκληρη την καμπύλη επιφάνεια, είναι:

$$\vec{F}_z = \int_S p dS \cos \theta \quad (2)$$

Όταν το p αντικατασταθεί με ϵh , όπου h είναι η απόσταση του στοιχείου επιφάνειας από την ελεύθερη επιφάνεια και $\delta S \cos \theta$ είναι η προβολή του δS σ'ένα οριζόντιο επίπεδο, η εξ. (2) γράφεται:

$$\vec{F}_z = \epsilon \int_S h \delta S \cos \theta = \epsilon \int_V \delta V \quad (3)$$

όπου δV είναι ο όγκος του πρίσματος ύψους h και βάσης $\delta S \cos \theta$, ή ο όγκος του υγρού, ο οποίος βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το στοιχείο. Ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε:

$$\vec{F}_z = \epsilon V \quad (4)$$

Όταν το υγρό βρίσκεται κάτω από την καμπύλη επιφάνεια (Σχ.3.9) και γνωρίζουμε την πίεση σε κάποιο σημείο, π.χ. στο O , μπορούμε να κατασκευάσουμε μία φανταστική ή ισοδύναμη ελεύθερη επιφάνεια $s-s$, η οποία να απέχει $\frac{p}{\epsilon}$ από το O , ώστε το γινόμενο του ειδικού βάρους επί την κατακόρυφη απόσταση τυχόντος σημείου του δοχείου να ισούται με την πίεση στο σημείο αυτό. Με ένα φανταστικό υγρό πάνω από την επιφάνεια, η πίεση σ'ένα σημείο της καμπύλης επιφάνειας είναι ίση και στις δύο πλευρές, αλλά οι κάθετες συνιστώσες των στοιχειωδών δυνάμεων έχουν αντίθετα πρόσημα. Επομένως, η διεύθυνση της κάθετης συνιστώσας αντιστρέφεται, όταν θεωρούμε ένα φανταστικό υγρό πάνω από την επιφάνεια.

Η ευθεία εφαρμογής της κάθετης συνιστώσας βρίσκεται αν εξισώσουμε τις ροπές των στοιχειωδών καθέτων συνιστωσών γύρω από κατάλληλο άξονα, με τη ροπή της συνισταμένης δύναμης. Αν πάρουμε τον άξονα στο O (Σχ. 3.8), έχουμε:

$$\vec{F}_z \bar{x} = \epsilon \int_V x dV$$

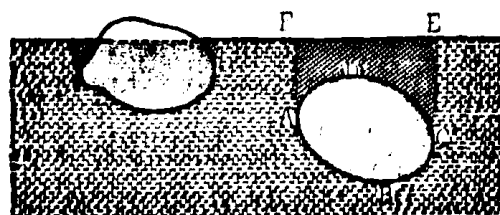
όπου x είναι η απόσταση της ευθείας ενεργείας από το O . Τότε, α-



φού $\bar{F}_z = \epsilon V$ το $\bar{x} = \frac{1}{V} \int x dV$, το οποίο είναι η απόσταση του γεωμετρικού κέντρου του όγκου από το 0. Συνεπώς, η ευθεία ενεργείας της κάθετης συνιστώσας διέρχεται από το γεωμετρικό κέντρο του όγκου, πραγματικού ή φανταστικού, ο οποίος βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης επιφάνειας και της ελεύθερης επιφάνειας.

3.6. Άνωση

Η συνισταμένη δύναμη, η οποία ασκείται από ένα στατικό ρευστό σε ένα σώμα που είναι βυθισμένο ή επιπλέει σ' αυτό ονομάζεται άνωση. Η άνωση ασκείται πάντοτε κατακόρυφα προς τα πάνω. Δεν μπορεί να υπάρξει οριζόντια συνιστώσα, γιατί η προβολή του βυθισμένου σώματος ή τμήματος του σε ένα κατακόρυφο επίπεδο είναι πάντοτε μηδέν. Η άνωση σε ένα σώμα βυθισμένο είναι η διαφορά μεταξύ της κάθετης συνιστώσας της δύναμης πίεσης στο κάτω τμήμα του και της κάθετης συνιστώσας της δύναμης πίεσης στο πάνω τμήμα του. Στο Σχ. 3.10, η προς τα πάνω δύναμη που δρα στην κάτω πλευρά του σώματος, ισούται με το βάρος του υγρού, το οποίο βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από την επιφάνεια ABC, δηλαδή του υγρού, το οποίο περικλείεται στον όγκο ABCEFA. Η προς τα κάτω δύναμη, η οποία δρα στην πάνω επιφάνεια, ισούται με το βάρος του υγρού ADCEFA. Η διαφορά των δύο δυνάμεων είναι μία δύναμη κατακόρυφη προς τα πάνω και ίση με το βάρος του υγρού, το οποίο εκτοπίζεται από το σώμα. Με μορφή εξίσωσης, έχουμε:



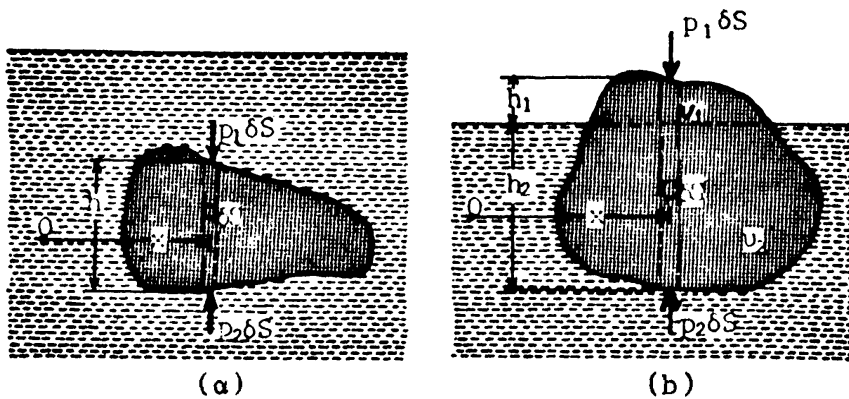
Σχήμα 3.10



$$\vec{F}_A = V\varepsilon \quad (1)$$

όπου \vec{F}_A είναι η άνωση, V όγκος του υγρού που εκτοπίζεται από το στερεό και ε είναι το ειδικό βάρος του υγρού.

Ο ίδιος τύπος ισχύει και για σώματα που επιπλέουν (Σχ. 3.11). Στο Σχ. 3.11(α), η κάθετη δύναμη, που ασκείται σε ένα στοιχείο του σώ-



Σχήμα 3.11

ματος σε σχήμα κατακόρυφου πρίσματος διατομής δS , είναι:

$$\delta\vec{F}_A = (p_2 - p_1)\delta S = \varepsilon h\delta S = \varepsilon\delta V$$

όπου δV είναι ο όγκος του πρίσματος. Αν ολοκληρώσουμε για ολόκληρο τον όγκο του σώματος, έχουμε:

$$\vec{F}_A = \varepsilon \int_V dV = \varepsilon V$$

όπου το ε είναι σταθερό σ'ολόκληρο τον όγκο.

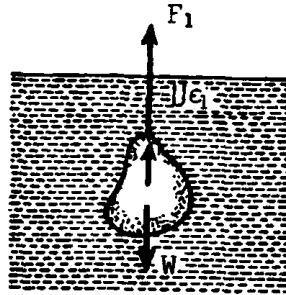
Για να βρούμε την ευθεία ενεργείας της άνωσης, λαμβάνουμε τις ροπές ως προς ένα κατάλληλο άξονα O και τις εξισώνουμε με τη ροπή της συνισταμένης. Έτσι, έχουμε:

$$\varepsilon \int x dV = \varepsilon V \bar{x} \quad \text{ή} \quad \bar{x} = \frac{1}{V} \int x dV$$

όπου \bar{x} είναι η απόσταση της ευθείας ενεργείας από τον άξονα. Η εξίσωση αυτή δίνει τη θέση του γεωμετρικού κέντρου του όγκου. Συνε-

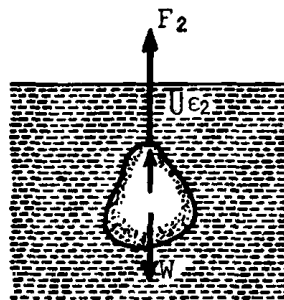


πώς, η άνωση δρα στο γεωμετρικό κέντρο του εκτοπιζόμενου όγκου του ρευστού, το οποίο ονομάζεται Κέντρο Άνωσης.



Σχήμα 3.12

Όταν το σώμα επιπλέει σε ένα στατικό σύστημα δύο υγρών (Σχ. 3.11(β)), η άνωση σε ένα κατακόρυφο πρίσμα διατομής δS είναι:



Σχήμα 3.13

$$\delta \vec{F}_A = (p_2 - p_1) \delta S = (\epsilon_2 h_2 + \epsilon_1 h_1) \delta S$$

όπου ϵ_1 , ϵ_2 είναι τα ειδικά βάρη του ελαφρύτερου και βαρύτερου ρευστού, αντιστοίχως. Αν ολοκληρώσουμε για όλη την επιφάνεια, έχουμε:

$$\vec{F}_A = \epsilon_2 \int h_2 dS + \epsilon_1 \int h_1 dS = \epsilon_2 V_2 + \epsilon_1 V_1$$

όπου V_1 είναι ο εκτοπιζόμενος όγκος του ελαφρύτερου και V_2 του βα-



ρύτερου ρευστού. Για να καθορισθεί η ευθεία επενέργειας της άνωσης, λαμβάνουμε τις ροπές:

$$\bar{F}_A \bar{x} = \epsilon_1 \int x dV_1 + \epsilon_2 \int x dV_2 \quad \eta$$

$$\bar{x} = \frac{\epsilon_1 \int x dV_1 + \epsilon_2 \int x dV_2}{\epsilon_1 V_1 + \epsilon_2 V_2} = \frac{\epsilon_1 \bar{x}_1 V_1 + \epsilon_2 \bar{x}_2 V_2}{\epsilon_1 V_1 + \epsilon_2 V_2}$$

όπου \bar{x}_1 , \bar{x}_2 αναφέρονται στα γεωμετρικά κέντρα των όγκων V_1 και V_2 , αντιστοίχως. Η συνισταμένη δε διέρχεται κατά κανόνα από το γεωμετρικό κέντρο ολόκληρου του όγκου των δύο ρευστών.

Η ζύγιση ενός σώματος ακαθορίστου σχήματος, σε δύο διαφορετικά ρευστά, μας δίνει αρκετά στοιχεία για να καθορίσουμε το βάρος του, τον όγκο του, το ειδικό βάρος του κλπ. Τα σχήματα 3.12 και 3.13, δείχνουν δύο διαγράμματα ομοιόμορφων και ισοβαρών ελευθέρων σωμάτων, τα οποία ζυγίζονται σε δύο ρευστά. Έστω, ότι F_1 και F_2 είναι τα φαινομενικά βάρη των βυθιζόμενων σωμάτων και W , U , τα βάρη και οι όγκοι των σωμάτων, τα οποία ζητούνται. Τότε, από τις εξισώσεις ισορροπίας, έχουμε:

$$F_1 + U\epsilon_1 = W, \quad F_2 + U\epsilon_2 = W$$

Λύνοντας ως προς U και W , βρίσκουμε

$$U = \frac{F_1 - F_2}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \quad \text{και} \quad W = \frac{F_1 \epsilon_2 - F_2 \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1}$$



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

1. Στατική Ροπή. Κέντρο Βάρους.

Η στατική ροπή μιας επιφάνειας S περί τον άξονα y (Σχ.3.3ή Ι.1) εκφράζεται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα,

$$\int_S x \, dS$$

Για να προσδιοριστεί η ροπή γύρω από παράλληλο άξονα, έστω τον $x = \kappa$, γράφουμε:

$$\int_S (x - \kappa) \, dS = \int_S x \, dS - \kappa S \quad (I.1)$$

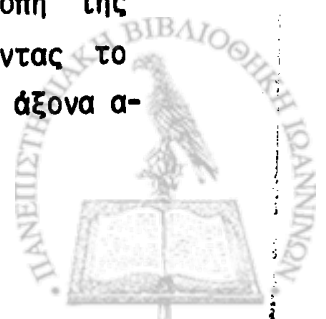
και δείχνει ότι πάντοτε υπάρχει ένας παράλληλος άξονας $x = \bar{x}$, γύρω από τον οποίο η ροπή είναι μηδέν. Ο άξονας αυτός είναι ο άξονας του κέντρου βάρους και ορίζεται από την εξ. (I.1), αν την εξισώσουμε με το μηδέν και λύσουμε ως προς \bar{x} , δηλαδή:

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_S x \, dS \quad (I.2)$$

Ένας άλλος άξονας κέντρου βάρους, κάθετος προς τον x καθορίζεται από τη σχέση,

$$\bar{y} = \frac{1}{S} \int_S y \, dS \quad (I.3)$$

Το σημείο τομής των αξόνων κέντρου βάρους, ονομάζεται κέντρο βάρους της επιφάνειας S . Εύκολα αποδεικνύεται, με περιστροφή των αξόνων, ότι η ροπή γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο βάρους είναι μηδέν. Όταν μία επιφάνεια έχει άξονα συμμετρίας, αυτός είναι άξονας κέντρου βάρους, αφού οι ροπές των αντιστοίχων στοιχείων της επιφάνειας σε κάθε πλευρά του άξονα είναι ίσες και αντίθετες. Όταν γνωρίζουμε τον άξονα κέντρου βάρους, η ροπή της επιφάνειας εξάγεται εύκολα για οποιονδήποτε άξονα λαμβάνοντας το γινόμενο του εμβαδού της επιφάνειας και της απόστασης του άξονα από το κέντρο βάρους, δηλαδή:



$$\int_S z \, dS = \bar{z} S \quad (I.4)$$

Ομοίως, έχουμε ότι η στατική ροπή του όγκου U γύρω από ένα επίπεδο, έστω το yz , ορίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$\bar{x} = \frac{1}{U} \int_U x \, dU \quad (I.5)$$

και με τον ίδιο τρόπο, το κέντρο μάζας ενός σώματος είναι,

$$x_m = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

όπου dm είναι ένα στοιχείο της μάζας και M η ολική μάζα του σώματος.

2. Ροπή Αδρανείας μιας Επιφάνειας

Η ροπή αδρανείας μιας επιφάνειας S γύρω από τον άξονα y είναι:

$$I_y = \int_S x^2 \, dS \quad (I.6)$$

και είναι πάντοτε θετική αφού το dS θεωρείται θετικό. Η μεταφορά σε παράλληλο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο βάρους C , δίνει ροπή

$$I_C = \int_S (x - \bar{x})^2 \, dS = \int_S x^2 \, dS - 2\bar{x} \int_S x \, dS + \bar{x}^2 \int_S dS$$

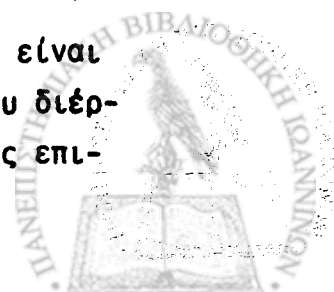
Αλλά επειδή ισχύουν,

$$\int_S x \, dS = \bar{x}S, \quad \int_S x^2 \, dS = I_y, \quad \int_S dS = S$$

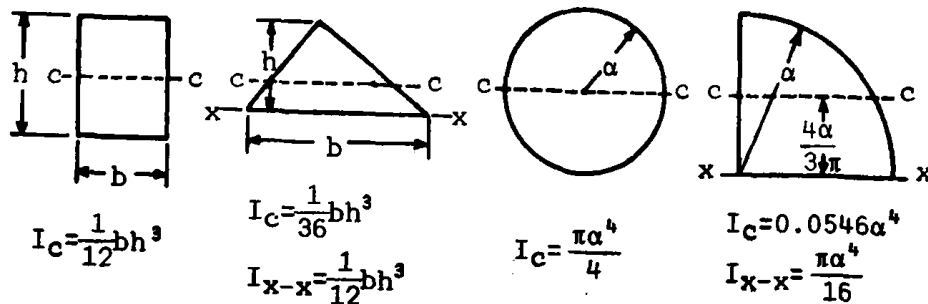
λαμβάνουμε:

$$I_C = I_y - \bar{x}^2 S, \quad I_y = I_C + \bar{x}^2 S \quad (I.7)$$

Δηλαδή, η ροπή αδρανείας μιας επιφάνειας S γύρω από άξονα είναι το άθροισμα της ροπής αδρανείας γύρω από παράλληλο άξονα που διέρχεται από το κέντρο βάρους και του γινομένου του εμβαδού της επι-



φάνειας επί το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ των δύο αξόνων. Στο Σχ. 1.2, δίδονται οι ροπές αδρανείας τεσσάρων απλών επιφανειών.



Σχήμα 1.2

Το γινόμενο αδρανείας I_{xy} μιας επιφάνειας δίδεται από τη σχέση:

$$I_{xy} = \int_S xy dS \quad (1.8)$$

σύμφωνα με το συμβολισμό του σχήματος 3.3. Μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Αν γράψουμε τη σχέση του γινομένου της αδρανείας \bar{I}_{xy} , γύρω από άξονες κέντρου βάρους παράλληλους προς τους x, y έχουμε τη σχέση:

$$\bar{I}_{xy} = \int_S (\bar{x} + x')(\bar{y} + y') dS = \bar{x}\bar{y}S + \int_S x'y' dS + \bar{x} \int_S y' dS + \bar{y} \int_S x' dS$$

Αν την απλοποιήσουμε και λύσουμε ως προς I_{xy} , λαμβάνουμε:

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}S \quad (1.9)$$

Όταν ένας από τους άξονες είναι άξονας συμμετρίας της επιφάνειας, το γινόμενο αδρανείας είναι μηδέν. Το γινόμενο αδρανείας I_{xy} , π.χ., ενός τριγώνου με πλευρές β και h κατά μήκος των θετικών αξόνων των συντεταγμένων, είναι $\beta^2 h^2 / 24$.



4. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

4.1. Πραγματικά και Ιδανικά Ρευστά

I. Εισαγωγή

Τα ρευστά, όπως είναι γνωστό, μπορούν να διαιρεθούν σε δύο είδη: (i) Υγρά, τα οποία είναι ασυμπίεστα, δηλαδή, οι όγκοι δε μεταβάλλονται, όταν μεταβάλλεται η πίεση και (ii) Αέρια, τα οποία είναι συμπιεστά ρευστά και υπόκεινται σε μεταβολή του όγκου τους οποτεδήποτε μεταβάλλεται η πίεση.

Όταν η ύλη υποβάλλεται σε εξέταση στο μικροσκόπιο ή σε μοριακή κλίμακα, διαπιστώνεται ότι συνίσταται από μόρια σε τυχαία κίνηση και τα οποία διαχωρίζονται μεταξύ τους από αποστάσεις, οι οποίες είναι τουλάχιστον συγκρίσιμες με το μοριακό μέγεθος. Στην περίπτωση των αερίων, οι αποστάσεις διαχωρισμού είναι μεγάλες: στην περίπτωση των υγρών είναι μικρότερες και στην περίπτωση των στερεών ακόμη μικρότερες.

Για το σκοπό της μικροσκοπικής ανάλυσης, εντούτοις, η μοριακή δομή της ύλης δεν έχει, γενικά, ενδιαφέρον. Είναι, άρα, χρήσιμο να θεωρείται ότι το ρευστό έχει συνεχή δομή, έτσι ώστε σε κάθε σημείο να μπορούμε να προσδιορίζουμε μια και μόνη ταχύτητα, πίεση, πυκνότητα κλπ. Επιπλέον, για ένα συνεχές ή ιδανικό ρευστό μπορούμε να ορίσουμε ένα στοιχείο ρευστού, ως το ρευστό που περιέχεται μέσα σ'ένα απειροστό όγκο του οποίου το μέγεθος είναι τόσο μικρό, ώστε να θεωρείται ως γεωμετρικό σημείο.

II. Ορισμοί και Χαρακτηριστικά της Ροής

Η ροή ρευστού μπορεί να ταξινομηθεί με βάση ορισμένα κριτήρια και αναλόγως να χαρακτηριστεί στρωτή (γραμμική) ή τυρβώδης (αναταρακτική), πραγματική ή ιδανική, αντιστρεπτή ή μη αντιστρεπτή, μόνιμη (στατική) ή μεταβαλλόμενη, ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη και στροβιλή ή αστρόβιλη. Στη στρωτή ροή, τα στοιχεία του ρευστού κινούνται κατά στρώματα και το ένα στρώμα γλιστρά ομαλά πάνω στο άλλο. Στην τυρβώδη ροή, τα στοιχεία του ρευστού ακολουθούν ακανόνιστες διαδρομές προκαλώντας ανταλλαγή ορμής από μία περιοχή του ρευστού σε άλλη, κατά παρόμοιο τρόπο με αυτόν που συμβαίνει μεταξύ των μορίων, αλλά σε μεγαλύτερη κλίμακα. Για την τυρβώδη ροή



μπορούμε να γράψουμε μία εξίσωση ανάλογη με την εξίσωση του νόμου του ιξώδους του Νεύτωνα:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad (1)$$

Ο συντελεστής η δε χαρακτηρίζει μόνο το ρευστό, αλλά εξαρτάται ακόμη από την κίνηση και την πυκνότητά του και ονομάζεται στροβιλική τριβή (στροβιλοτξώδες). Πολλές φορές στην πράξη οι διατμητικές τάσεις οφείλονται, σε συνδυασμό ιξώδους και στροβιλότητας:

$$\tau \approx (\mu + \eta) \frac{du}{dy} \quad (2)$$

Το ιδανικό ρευστό, δεν έχει τριβές, είναι ασυμπύεστο και δεν πρέπει να συγχέεται με το τέλειο αέριο.

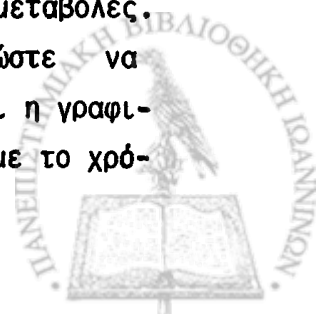
Το στρώμα του ρευστού που πρόσκειται σε ένα φυσικό όριο (τοιχώμα), του οποίου η ταχύτητα, εν σχέσει με το τοίχωμα, επηρεάζεται από ιξώδεις διατμήσεις ονομάζεται οριακό στρώμα. Αυτό μπορεί να είναι στρωτό ή τυρβώδες, ανάλογα με το μήκος του, το ιξώδες, την ταχύτητα ροής και την τραχύτητα του τοιχώματος.

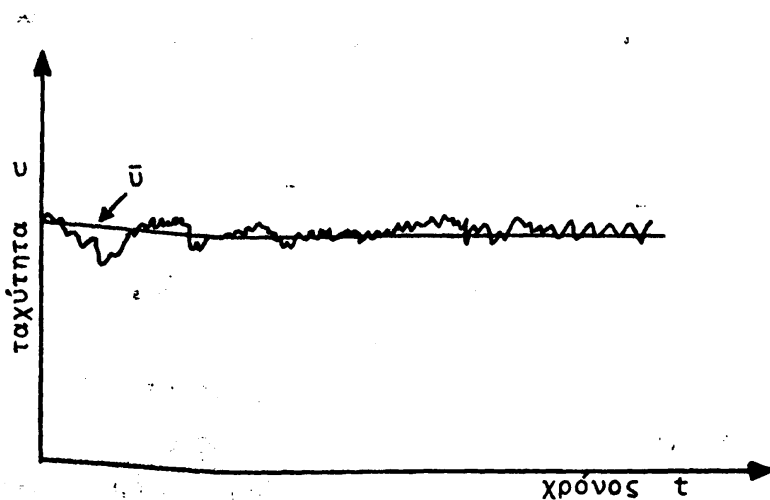
Αδιαβατική, λέγεται η ροή εκείνη κατά την οποία δε μεταφέρεται θερμότητα προς ή από το ρευστό. Η αδιαβατική και αντιστρεπτή ροή καλείται ισεντροπική.

Μόνιμη (στατική) ροή, έχουμε όταν οι συνθήκες σε οποιαδήποτε σημείο του ρευστού δε μεταβάλλονται με το χρόνο. Αυτό μπορεί να εκφραστεί με τη σχέση $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, όπου το σημείο ή πιο συγκεκριμένα οι συντεταγμένες του (x, y, z) παραμένουν σταθερές. Στη μόνιμη ροή η πυκνότητα ρ , η πίεση p ή η θερμοκρασία T , παραμένουν σταθερές, δηλαδή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Στην τυρβώδη (αναταρακτική) ροή, λόγω ακανόνιστης κίνησης των στοιχείων του ρευστού, παρατηρούνται σ'όλα τα σημεία μικρές μεταβολές. Γιαυτό, ο ορισμός της μόνιμης ροής πρέπει να γενικευθεί ώστε να περιλάβει και τις μικρές μεταβολές. Στο Σχ. 4.1, δίδεται η γραφική παράσταση, η οποία δείχνει τη μεταβολή της ταχύτητας με το χρό-





Σχήμα 4.1

νο σε κάποιο σημείο τυρβώδους ροής. Όταν η μέση ταχύτητα,

$$\bar{u}_t = \frac{1}{t} \int_0^t u dt,$$

η οποία απεικονίζεται με την οριζόντια γραμμή στο σχήμα, δε μεταβάλλεται με το χρόνο η ροή είναι μόνιμη. Η ίδια γενίκευση ισχύει και για τις άλλες παραμέτρους (ρ , μ , T κλπ.), όταν αντικαταστήσουν το u στον παραπάνω τύπο.

Η ροή είναι μεταβαλλόμενη, όταν οι συνθήκες σε οποιοδήποτε σημείο μεταβάλλονται με το χρόνο, δηλαδή, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0$.

Η ομοιόμορφη ροή, εμφανίζεται όταν σε κάθε σημείο του ρευστού το διάνυσμα της ταχύτητας παραμένει σταθερό (κατά μέτρο και διεύθυνση) οποιαδήποτε χρονική στιγμή, δηλ. $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \eta} = 0$, όπου ο χρόνος παραμένει σταθερός και η είναι μία μετατόπιση προς κάθε διεύθυνση.

Στην ανομοιόμορφη ροή, το διάνυσμα της ταχύτητας μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, σε κάθε χρονική στιγμή, δηλ. $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \eta} \neq 0$.

Αν τα στοιχεία ενός ρευστού περιστρέφονται γύρω από ένα άξονα, έστω τον z , η ροή ονομάζεται στροβιλή. Στην αντίθετη περίπτωση, η ροή ονομάζεται αστρόβιλη.

Μονοδιάστατη ροή, είναι εκείνη της οποίας οι μεταβολές της ταχύτητας, της πίεσης κλπ., οι κάθετες προς την κυρία διεύθυνση είναι αμελητέες. Η ροή σε σωλήνα, π.χ., μπορεί να χαρακτηριστεί



μόνοδιάστατη. Πολλά πρακτικά προβλήματα μπορούν να επιλυθούν με αυτή τη μέθοδο ανάλυσης. Είναι απλούστερη από τη δισδιάστατη και τρισδιάστατη αναλυτική μέθοδο.

Στη δισδιάστατη ροή, όλα τα στοιχεία του ρευστού θεωρείται ότι ρέουν σε παράλληλα επίπεδα και ότι ακολουθούν τις ίδιες διαδρομές σε καθένα από τα επίπεδα αυτά. Δηλαδή, δεν υπάρχουν μεταβολές κάθετες προς τα επίπεδα ροής.

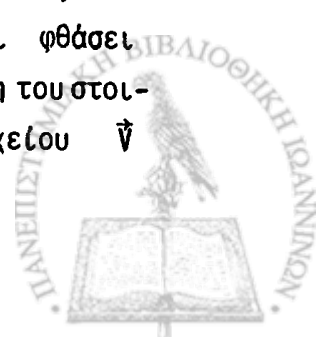
Η τρισδιάστατη ροή είναι η γενική περίπτωση ροής, όπου οι κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες της ταχύτητας u , v , w είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων του χώρου και του χρόνου (x, y, z και t).

III. Η Φύση των Δυνάμεων στα Κινούμενα Ρευστά

Κλείνουμε αυτή την εισαγωγική ενότητα του Κεφαλαίου υπενθυμίζοντας περιληπτικά τη φύση των διαφόρων τύπων δυνάμεων, οι οποίες συμμετέχουν στο παιχνίδι των κινουμένων ρευστών. Υποθέτουμε ότι δύο στοιχεία του ρευστού, τα οποία κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες, έχουν μία κοινή οριακή επιφάνεια. Τότε δια μέσου της οριακής επιφάνειας θα συμβεί ανταλλαγή ορμής (ενέργειας). Η κάθετη μεταφορά των μορίων δια μέσου της οριακής επιφάνειας θα οδηγήσει σε μία κάθετη δύναμη. Στην περίπτωση ρευστού με ιξώδες, υπάρχει τριβή μεταξύ των σωματιδίων: αυτό εκδηλώνεται με τη μορφή ίσων και αντίθετων εφασπτομενικών ή διατμητικών δυνάμεων σε κάθε στοιχείο στην κοινή οριακή επιφάνεια. Στην περίπτωση υγρών χωρίς ιξώδες, εν τούτοις, δεν υπάρχει τριβή και κατ' ακολουθίαν δεν υφίστανται εφασπτομενικές ή διατμητικές δυνάμεις. Όλα τα πραγματικά ρευστά έχουν εσωτερική τριβή, αλλά σε πολλές περιπτώσεις, όπως εκείνες οι οποίες εμφανίζονται όταν οι τιμές της μεταβολής της ταχύτητας του ρευστού με τις αποστάσεις είναι μικρές, οι επιπτώσεις του ιξώδους μπορεί να αγνοούνται.

4.2. Ταχύτητα σ' ένα σημείο του ρευστού

Κατά το χρόνο t ένα στοιχείο του ρευστού είναι στο P , όπου $\vec{OP} \equiv \vec{r}$ και κατά το χρόνο $(t + \delta t)$ το ίδιο στοιχείο έχει φθάσει στο P' , όπου $\vec{OP}' = \vec{r} + \delta\vec{r}$. Άρα, στο διάστημα δt η μετακίνηση του στοιχείου είναι $\vec{PP}' \equiv \delta\vec{r}$ (Σχ.4.2) και έτσι η ταχύτητα του στοιχείου \vec{v} στο P είναι:



$$\vec{V} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta \vec{r}}{\delta t} \right) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

με την προϋπόθεση, ότι ένα τέτοιο όριο υπάρχει και είναι ένα και μόνο ένα. Η υπόθεση αυτή είναι λογική, εάν παραδεχτούμε ότι το ρευστό είναι συνεχές. Είναι φανερό ότι εν γένει το \vec{V} εξαρτάται τόσο από το \vec{r} , όσο και από το t , έτσι ώστε μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$$

Εναλλακτικά, εάν το P έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) ως προς ένα σταθερό τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο σημείο O, τότε μπορούμε να γράψουμε

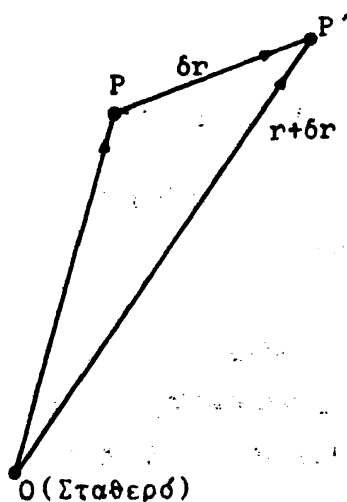
$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

Ας υποθέσουμε ακόμη ότι $\{u, v, w\}$ είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες της \vec{V} σ' αυτό το σύστημα. Τότε:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

Εξάλλου, αφού $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$, έτσι ώστε,

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}$$



Σχήμα 4.2



4.3. Ρευματογραμμές και Διαδρομές ή τροχιές Στατικές και μη Στατικές Ροές.

Υποθέτουμε, ότι σε κάποιο χρόνο t γνωρίζουμε την ταχύτητα $\vec{V} = \{u, v, \omega\}$ σε κάθε σημείο $P(x, y, z)$ του ρευστού. Περαιτέρω, υποθέτουμε, ότι σε κάθε τέτοιο σημείο P για κάθε δεδομένη στιγμή t μπορούμε να σχεδιάσουμε μία καμπύλη C στο ρευστό τέτοια, ώστε η διεύθυνση της εφαπτομένης της C στο P να συμπίπτει με τη διεύθυνση της \vec{V} στο P . Τότε η C ορίζεται ως ρευματογραμμή. Συνεπάγεται ότι οι ρευματογραμμές είναι οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{\omega} \quad (1)$$

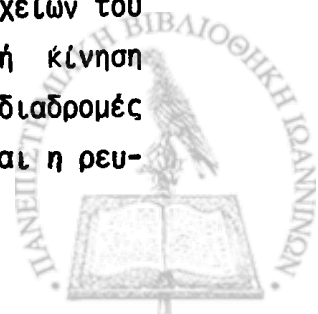
Οι εξισώσεις αυτές παρέχουν ένα διπλό άπειρο λύσεων. Γνωρίζοντας το \vec{V} σε διαδοχικά σημεία μιας ρευματογραμμής για κάθε στιγμή t , παρέχεται η δυνατότητα ώστε η ρευματογραμμή να προσεγγίζεται με μικρά τμήματα ευθείας γραμμής. Άρα στο Σχ. 4.3, αν με $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots$, συμβολίζονται οι ταχύτητες σε γειτονικά σημεία P_1, P_2, P_3, \dots



Σχήμα 4.3

της ρευματογραμμής, τότε τα μικρά τμήματα $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \dots$, σχεδιάζονται κατά τις διευθύνσεις $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots$ αντίστοιχα.

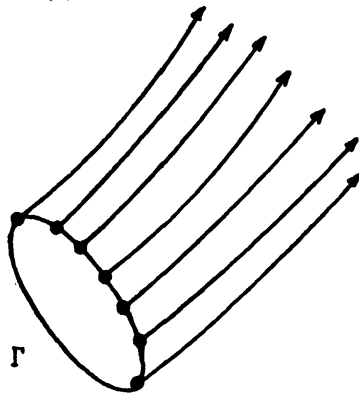
Όταν η κίνηση είναι στατική έτσι, ώστε η μορφή της ροής να μη μεταβάλλεται με το χρόνο, οι διαδρομές των στοιχείων του ρευστού ταυτίζονται με τις ρευματογραμμές. Στη μη στατική κίνηση όμως, η μορφή της ροής μεταβάλλεται με το χρόνο και οι διαδρομές των στοιχείων δεν συμπίπτουν με τις ρευματογραμμές, αν και η ρευ-



ματογραμμή από κάθε σημείο P εφάπτεται της διαδρομής (τροχιάς) που διέρχεται από το P. Οι διαδρομές είναι οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w \quad (2)$$

Οι εξισώσεις αυτές έχουν ένα τριπλό απειράριθμο σύνολο λύσεων. Για να φωτογραφηθούν οι ρευματογραμμές μιας στατικής ροής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ορισμένο χρονικό διάστημα, ενώ για τη μη στατική ροή απαιτείται στιγμιαία φωτογράφιση. Στην περίπτωση ενός υγρού τα σωματίδια φωτίζονται με αιώρηση σκόνης αλουμινίου. Διαφορετικά τα στοιχεία του υγρού μπορούν να χρωματιστούν και να γίνουν ορατά με τη βοήθεια κρυστάλλων υπερμαγνητικού καλίου. Για ένα αέριο, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ρεύματα καπνού. Εάν σχεδιάσουμε τις ρευματογραμμές, οι οποίες διέρχονται από κάθε σημείο μιας κλειστής καμπύλης Γ στο ρευστό λαμβάνουμε ένα ρευματοσωλήνα, όπως στο Σχ. 4.4.

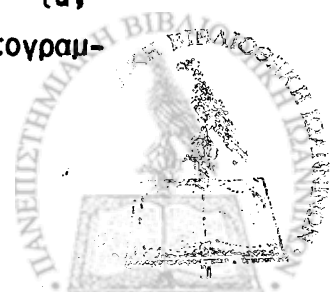


Σχήμα 4.4

4.4. Δυναμικό της Ταχύτητας

Όταν η ταχύτητα του ρευστού κατά το χρόνο t είναι $\vec{V} = \{u, v, w\}$, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, οι εξισώσεις των ρευματογραμμών τη χρονική εκείνη στιγμή, είναι:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (1)$$



Οι καμπύλες αυτές τέμνουν τις επιφάνειες

$$u dx + v dy + w dz = 0 \quad (2)$$

ορθοκανονικά. Τώρα υποθέτουμε ότι κατά τη θεωρούμενη στιγμή t , μπορούμε να βρούμε μια βαθμωτή συνάρτηση $\varphi(x, y, z, t)$, ομοιόμορφη σε όλη την έκταση του πεδίου ροής και τέτοια, ώστε,

$$-d\varphi = u dx + v dy + w dz \quad (3)$$

Τότε η έκφραση στο δεξιό μέλος της (3) είναι ένα τέλειο διαφορικό και ισχύουν:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, & v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, & w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \text{ή} & & \vec{V} &= -\nabla \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Το φ ορίζεται ως το δυναμικό της ταχύτητας. Με τα δεδομένα του διανυσματικού λογισμού, η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να ισχύουν οι (4) είναι:

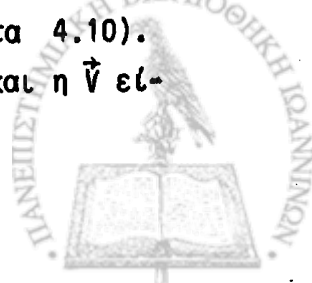
$$\text{curl } \vec{V} = 0 \quad (5)$$

Οι επιφάνειες $\varphi(x, y, z, t) = \text{σταθερά}$, (6)

ονομάζονται ισοδυναμικές. Οι εξισώσεις (1) και (2) δείχνουν, ότι σε όλα τα σημεία του πεδίου ροής οι ισοδυναμικές επιφάνειες τέμνονται από τις ρευματογραμμές ορθοκανονικά.

Το αρνητικό σημείο στην εξίσωση $\vec{V} = -\nabla \varphi$ είναι συμβατικό. Βεβαιώνει ότι η ροή λαμβάνει χώρα από το μεγαλύτερο στο μικρότερο δυναμικό, αλλά μερικοί συγγραφείς υιοθετούν την αντίθετη συμβατική παραδοχή.

Όταν ισχύει η (5), η ροή λέγεται ότι είναι δυναμικού είδους. Λέγεται, επίσης, ότι είναι αστρόβιλη για λόγους οι οποίοι θα αναπτυχθούν αργότερα σ' αυτό το Κεφάλαιο (ενότητα 4.10). Για μια τέτοια ροή το πεδίο της \vec{V} είναι συντηρητικό και η \vec{V} είναι ένα ελασματικό διάνυσμα.



4.5 Το διάνυσμα της στροβιλότητας

θεωρούμε τώρα ροές για τις οποίες το $\text{curl } \vec{V} \neq 0$. Το διάνυσμα:

$$\vec{\zeta} \equiv \nabla \wedge \vec{V} \quad (1)$$

καλείται διάνυσμα στροβιλότητας. Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για δυναμική ροή μπορεί να εκφραστεί με $\vec{\zeta} = \vec{0}$. Στροβιλογραμμή, είναι μία καμπύλη σχεδιασμένη στο ρευστό, έτσι ώστε η εφαπτομένη σ'αυτή σε κάθε σημείο έχει την ίδια διεύθυνση με το διάνυσμα στροβιλότητας $\vec{\zeta}$. Αν οι καρτεσιανές συνιστώσες του $\vec{\zeta}$ είναι $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$, τότε οι εξισώσεις των στροβιλογραμμών δίδονται από τις ισοότητες:

$$\frac{dx}{\zeta_1} = \frac{dy}{\zeta_2} = \frac{dz}{\zeta_3} \quad (2)$$

Γενικά οι γραμμές αυτές δεν συμπίπτουν με τις ρευματογραμμές. Όπως και στην ενότητα 4.3, Σχ. 4.4, μπορούμε να σχεδιάσουμε τις στροβιλογραμμές απ'όλα τα σημεία μιας κλειστής καμπύλης Γ και να σχηματίσουμε ένα στροβιλοσωλήνα. Έστω, ότι $\delta S_1, \delta S_2$ είναι δύο τομές ενός στροβιλοσωλήνα και έστω ότι \vec{n}_1, \vec{n}_2 είναι τα μοναδιαία διανύσματα τα κάθετα σ'αυτές τις τομές σχεδιασμένα έτσι ώστε να διευθύνονται προς το εξωτερικό του ρευστού που βρίσκεται μεταξύ των τομών αυτών. Επίσης, έστω δS ότι είναι η καμπύλη επιφάνεια του στροβιλοσωλήνα, $\Delta S = \delta S_1 + \delta S + \delta S_2 = \eta$ ολική επιφάνεια του στοιχείου και $\Delta u = 0$ ολικός όγκος τον οποίο περιβάλλει η ΔS . Τότε έχουμε:

$$\int_{\Delta S} \vec{n} \cdot \vec{\zeta} dS = \int_{\Delta u} \nabla \cdot \vec{\zeta} du = 0$$

αφού, $\nabla \cdot \vec{\zeta} = \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{V}) \equiv 0$. Συνεπώς,

$$\int_{\delta S_1} \vec{n}_1 \cdot \vec{\zeta} dS + \int_{\delta S} \vec{n} \cdot \vec{\zeta} dS + \int_{\delta S_2} \vec{n}_2 \cdot \vec{\zeta} dS = 0$$

Σε κάθε σημείο της δS , $\vec{n} \cdot \vec{\zeta} = 0$, αφού το $\vec{\zeta}$ είναι εφαπτομενικό προς την καμπύλη επιφάνεια. Άρα, σε πρώτη προσέγγιση, η τελευταία εξίσωση δίδει:

$$(\vec{n}_1 \cdot \vec{\zeta}_1) \delta S_1 + (\vec{n}_2 \cdot \vec{\zeta}_2) \delta S_2 = 0 \quad (3)$$



Η εξίσωση (3) δείχνει ότι η $|\vec{n} \cdot \vec{\zeta}| \delta S$ είναι σταθερά σε κάθε τομή δS του στροβιλοσωλήνα. Η τιμή της καλείται ένταση του στροβιλοσωλήνα. Ένας στροβιλοσωλήνας του οποίου η ένταση είναι ένα, καλείται μοναδιαίος στροβιλοσωλήνας.

Τώρα υποθέτουμε, ότι S είναι κάθε κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει έναν όγκο V . Τότε ισχύει:

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{\zeta} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{\zeta} du = 0 \quad (4)$$

Η εξ. (4) δείχνει, ότι η ολική ένταση των στροβιλοσωλήνων, η οποία εξέρχεται από την S είναι ίση με εκείνη η οποία εισέρχεται στην S . Αυτό σημαίνει ότι οι στροβιλογραμμές και οι στροβιλοσωλήνες δεν μπορούν να εκκινούν ή να τερματίζουν σε εσωτερικά σημεία του ρευστού. Μπορούν μόνο να σχηματίζουν κλειστές καμπύλες ή να καταλήγουν στα οριακά τοιχώματα. Στην περίπτωση δακτυλίων καπνού, οι στροβιλογραμμές σχηματίζουν κλειστές καμπύλες. Από την άλλη πλευρά, οι στροβιλογραμμές σ'ένα στρόβιλο καταλήγουν στα οριακά τοιχώματα του ρευστού.

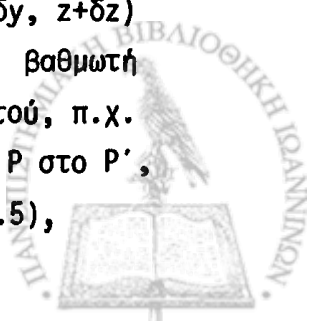
Εάν C είναι μία κλειστή καμπύλη σχεδιασμένη σ'ένα κινούμενο ρευστό και αν το S συμβολίζει μία περιοχή που περιβάλλεται από τη C , τότε η κυκλοφορία Γ του ρευστού ταχύτητας \vec{V} ορίζεται ότι είναι

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{n} \cdot \vec{\zeta} dS$$

αφού $\vec{\zeta} = \text{curl} \vec{V}$. Για δυναμική ροή η κυκλοφορία γύρω από κάθε κλειστό κύκλωμα είναι, προφανώς, μηδέν. Αργότερα, θα έχουμε γενικότερες συνθήκες, κάτω από τις οποίες η Γ είναι σταθερή (ενότητα 5.9).

4.6 Τοπικοί και Σωματιδιακοί Ρυθμοί Μεταβολής

Υποθέτουμε, ότι ένα στοιχείο (σωματίδιο) του ρευστού κινείται από το $P(x, y, z)$ κατά το χρόνο t στο $P'(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ κατά το χρόνο $t+\delta t$. Έστω $f(x, y, z, t)$, ότι είναι μία βαθμωτή συνάρτηση, η οποία συνδέεται με κάποια ιδιότητα του ρευστού, π.χ. την πυκνότητα. Τότε κατά την κίνηση του στοιχείου από το P στο P' , η ολική μεταβολή της f δίδεται από την ισότητα (βλ.σχ.4.5),



$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t$$

Άρα, ολικός ρυθμός της μεταβολής της f στο σημείο P κατά το χρόνο t της κίνησης του στοιχείου είναι ίσος με:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

αν $\vec{V} = \{u, v, w\}$ είναι η ταχύτητα του στοιχείου του ρευστού στο P .
Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{df}{dt} = \vec{V} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1)$$

Ομοίως, για μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x, y, z, t)$, η οποία συνδέεται με κάποια ιδιότητα του ρευστού, π.χ. την ταχύτητά του, μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει:

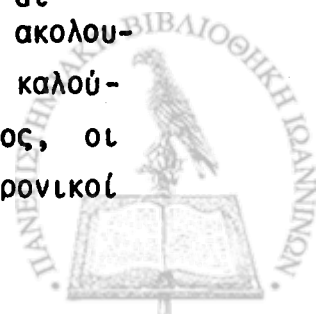
$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{V} \cdot \nabla \vec{F} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \quad (2)$$

Συνεπώς, τόσο για βαθμωτές, όσο και για διανυσματικές συναρτήσεις έχουμε θεμελιώσει την ισοδυναμία των τελεστών:

$$\frac{d}{dt} \equiv \vec{V} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \quad (3)$$

η οποία είναι εφαρμόσιμη τόσο για βαθμωτές, όσο και για διανυσματικές συναρτήσεις, θέσης και χρόνου με την προϋπόθεση ότι αυτές οι συναρτήσεις συνδέονται με ιδιότητες του κινούμενου ρευστού.

Για τη λήψη των εξ.(1) και (2), θεωρήσαμε την ολική μεταβολή της f ή \vec{F} , όταν το στοιχείο του ρευστού κινείται από το $P(x, y, z)$ στο $P'(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ κατά το χρόνο δt . Άρα, $\frac{df}{dt}$, $\frac{d\vec{F}}{dt}$ είναι οι ολικές παράγωγοι ως προς το χρόνο, οι οποίες ακολουθούν την κίνηση του σωματιδίου (στοιχείου) του ρευστού και καλούνται ρυθμοί μεταβολής του σωματιδίου. Από το άλλο μέρος, οι μερικές παράγωγοι ως προς το χρόνο $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$ είναι μόνο οι χρονικοί



ρυθμοί μεταβολής στο σημείο $P(x, y, z)$, θεωρουμένου σταθερού στο χώρο. Είναι οι τοπικές παράγωγοι ή τοπικοί ρυθμοί μεταβολής. Συνάγεται ότι οι $\vec{\nabla} \cdot \nabla f$ ή $\vec{\nabla} \cdot \nabla \vec{F}$ παριστάνουν το ρυθμό της μεταβολής που οφείλεται μόνο στην κίνηση του σωματιδίου κατά μήκος της διαδρομής του. Αυτό το σημείο μπορεί, επίσης, να φανεί συμβολίζοντας το μήκος του τόξου της διαδρομής με s και το PP' με δs . Τότε αν $\vec{r}' \equiv \delta s \hat{s}$, $\vec{V} = V \delta \hat{s}$, όπου $V = |\vec{V}|$, έχουμε:

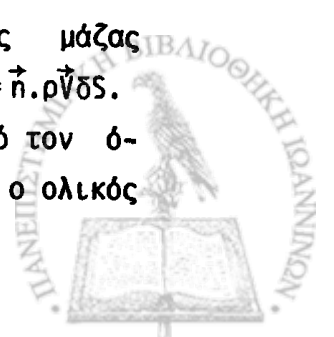
$$\vec{V} \cdot \nabla f = V \delta \hat{s} \cdot \nabla f = V \frac{\partial f}{\partial s}$$

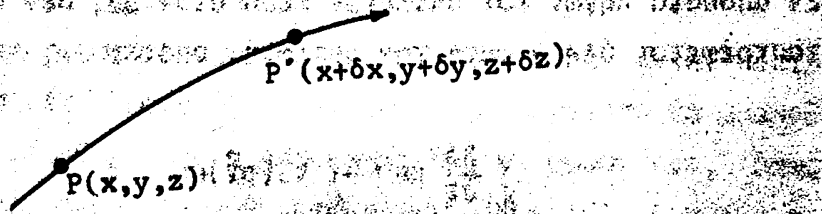
με παρόμοια αποτελέσματα για τη διανυσματική συνάρτηση \vec{F} . Εδώ χρησιμοποιούμε $\delta \hat{s} \cdot \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial s}$.

4.7 Η Εξίσωση Συνεχειας

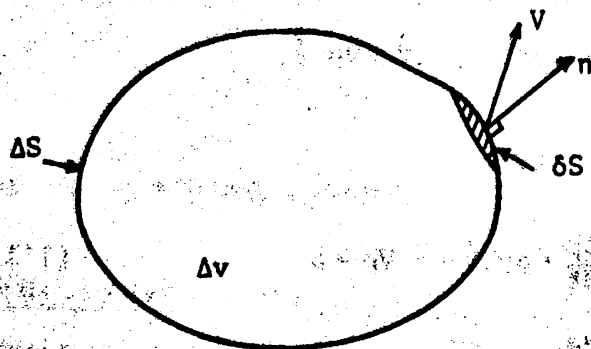
Όταν μία περιοχή ενός ρευστού δεν περιλαμβάνει ούτε πηγές ούτε απώλειες (καταβόθρες), δηλαδή, όταν δεν υπάρχουν ούτε είσοδοι ούτε έξοδοι μέσω των οποιών το ρευστό μπορεί να εισέρχεται ή να εξέρχεται από την περιοχή, η ποσότητα του ρευστού μέσα στην περιοχή διατηρείται σταθερά, σύμφωνα με την αρχή της διατήρησης της ύλης. Θα προσπαθήσουμε τώρα να σχηματοποιήσουμε την αρχή αυτή, μαθηματικώς, μέσω της καλουμένης εξίσωσης συνεχειας (βλ.σχ.4.6).

Έστω ΔS , ότι είναι μία κλειστή επιφάνεια, η οποία έχει σχεδιαστεί μέσα στο ρευστό και έχει ληφθεί σταθερή στο χώρο. Υποθέτουμε ότι αυτή περικλείει έναν όγκο Δu του ρευστού και έστω $\rho = \rho(x, y, z, t)$ ότι είναι η πυκνότητα του ρευστού σε κάθε σημείο του (x, y, z) μέσα στον όγκο Δu , για κάθε χρονική στιγμή t . Υποθέτουμε ακόμη, ότι \vec{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο σε κάθε στοιχείο δS της επιφάνειας ΔS (όπου $\delta S \ll \Delta S$) και το οποίο διευθύνεται προς τα έξω του Δu . Τότε, αν \vec{V} είναι η ταχύτητα του ρευστού στο στοιχείο δS , η κάθετη συνιστώσα της \vec{V} , η οποία μετρείται προς τα έξω από τον όγκο Δu , είναι $\vec{n} \cdot \vec{V}$. Άρα, ο ρυθμός της εκροής μάζας του ρευστού ανά μονάδα χρόνου δια μέσου της δS είναι $\delta S = \vec{n} \cdot \rho \vec{V} \delta S$. Συνεπώς, ο ολικός ρυθμός εκροής της μάζας του ρευστού από τον όγκο Δu δια μέσου της ΔS είναι $\Delta S = \int_{\Delta S} \vec{n} \cdot (\rho \vec{V}) dS$. Αντιθέτως, ο ολικός

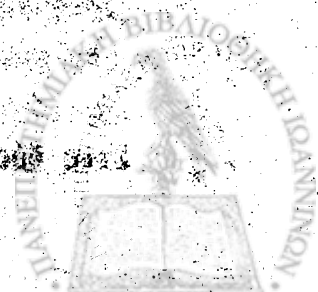




Σχήμα 4.5



Σχήμα 4.6



ρυθμός της εισροής μάζας του ρευστού στον όγκο Δu είναι

$$\Delta u \cong - \int_{\Delta S} \vec{n} \cdot (\rho \vec{V}) dS = - \int_{\Delta u} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) du$$

Κατά το χρόνο t , η μάζα του ρευστού μέσα στο στοιχείο είναι $\int_{\Delta u} \rho du$.
Ο τοπικός ρυθμός της αύξησης της μάζας μέσα στον όγκο Δu είναι,

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta u} \rho du = \int_{\Delta u} \frac{\partial \rho}{\partial t} du$$

Εν απουσία πηγών και απωλειών μέσα στον Δu , δεν παράγεται ούτε καταστρέφεται ύλη σ' αυτή την περιοχή, οπότε:

$$\int_{\Delta u} \frac{\partial \rho}{\partial t} du = - \int_{\Delta u} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) du \quad \text{ή}$$

$$\int_{\Delta u} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right\} du = 0$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής για όλους τους όγκους Δu εάν

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) είναι η γενική εξίσωση της συνέχειας, η οποία πρέπει πάντοτε να ισχύει σ' όλα τα σημεία ενός ρευστού απαλλαγμένου από πηγές και απώλειες (καταβόθρες). Αφού

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \rho \nabla \cdot \vec{V} + \nabla \rho \cdot \vec{V},$$

άλλες μορφές της (1) είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (1')$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1'')$$

$$\frac{d}{dt} (\log \rho) + \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1''')$$

Στις δύο τελευταίες σχέσεις, το $\frac{d}{dt}$ δηλοί διαφορίση ακολουθούσα την



κίνηση του ρευστού και χρησιμοποιήθηκε η ισοδυναμία των τελεστών

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla.$$

Στην ειδική περίπτωση της στατικής ροής, στην οποία η μορφή της ροής δε μεταβάλλεται με το χρόνο σε κανένα σημείο $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ και η (1) δίδει:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2)$$

Για ένα ασυμπέστο ρευστό η πυκνότητα κάθε σωματιδίου είναι αμετάβλητη με το χρόνο, έτσι ώστε $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Σ' ένα τέτοιο ρευστό θα μπορούσε να συμβεί μία μεταβολή της ρ από σωματίδιο σε σωματίδιο, όπως στην περίπτωση ενός ανομοιογενούς ασυμπέστου ρευστού. Για ένα ομοιογενές και ασυμπέστο ρευστό το ρ είναι σταθερό σ' όλη την έκταση του ρευστού. Και στις δύο περιπτώσεις η (1") δείχνει ότι η εξίσωση της συνεχείας είναι,

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3)$$

Από τώρα και στο εξής, εκτός και αν σημειώνεται αλλιώς, ο όρος "ασυμπέστο ρευστό" θα θεωρείται ότι σημαίνει ένα ρευστό το οποίο είναι όχι μόνο ασυμπέστο αλλά, επίσης, ομοιογενές. Εάν πέρα από την εξ. (3), η ροή είναι δυναμικού είδους, τότε υφίσταται ένα δυναμικό ταχύτητας φ τέτοιο, ώστε $\vec{V} = -\nabla\varphi$ και η (3) γίνεται:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (4)$$

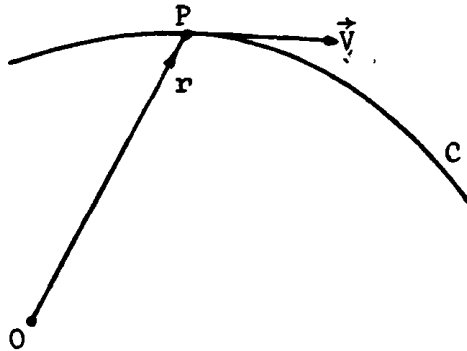
η οποία είναι και η εξίσωση Laplace.

4.8 Επιτάχυνση ενός Ρευστού

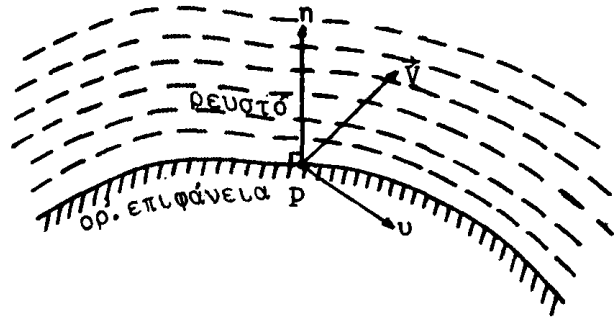
Το Σχ. 4.7 δείχνει ένα στοιχείο ρευστού κινούμενου κατά μήκος μιας καμπύλης C. Τη χρονική στιγμή t, η θέση του P ορίζεται από το $O\vec{P} \equiv \vec{r}$ και η ταχύτητα του \vec{V} , κατά μήκος της εφαπτομένης της C, στο P, έχει τη διεύθυνση της κίνησης του στοιχείου (σωματιδίου). Τότε η στιγμιαία επιτάχυνση γ στο P είναι:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (1)$$





Σχήμα 4.7



Σχήμα 4.8

Λαμβάνοντας ως Καρτεσιανές συντεταγμένες της \vec{V} , τις $\{u, v, w\}$, οι συνιστώσες της επιτάχυνσης είναι:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

Σε μορφή τανυστή, με συντεταγμένες x_i και συνιστώσες της ταχύτητας u_i ($i=1, 2, 3$), το σύνολο των εξισώσεων (2) μπορεί να γραφεί:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \quad (3)$$

Επανερχόμενοι στη διανυσματική μορφή (1), ο όρος $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ μπορεί να αναπτυχθεί σε μία μορφή πιο κατάλληλη για ορισμένες περιπτώσεις.

Άρα,

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \sum \{ (\vec{V} \cdot \vec{i}) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \}$$

Αφού,

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

$$(A \cdot B)C = (A \cdot C)B - A \wedge (B \wedge C)$$

έτσι ώστε,



$$(\vec{V} \cdot \vec{r}) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = (\vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}) \vec{r} - \vec{V} \wedge (\vec{r} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}) = \vec{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) - \vec{V} \wedge (\vec{r} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x})$$

$$\begin{aligned} \text{και } (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} &= \sum \vec{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) - \vec{V} \wedge \sum (\vec{r} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}) \\ &= \nabla \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) - \vec{V} \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) \end{aligned}$$

Άρα, η (1) μπορεί να αναπτυχθεί στη μορφή:

$$\vec{r} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) - \vec{V} \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) \quad (4)$$

Η εξ. (4) είναι ειδικά χρήσιμη για δυναμική ροή για την οποία $\nabla \wedge \vec{V} = \vec{0}$. Επίσης, η (4) μπορεί να είναι πιο χρήσιμη από την (1) για γενικές ορθοκανονικές καμπυλόγραμμας συντεταγμένες.

4.9 Συνθήκες σε Στερεά Οριακή Επιφάνεια

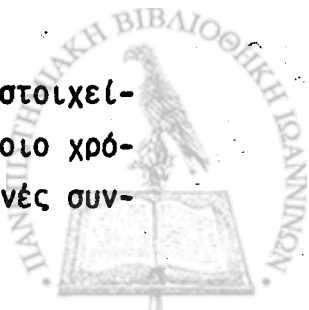
Το P είναι ένα σημείο στην οριακή επιφάνεια, όπου η ταχύτητα του ρευστού είναι \vec{V} και όπου η οριακή επιφάνεια έχει ταχύτητα \vec{U} . Εάν το \vec{n} ορίζει ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο P κάθετης διεύθυνσης, τότε επειδή στο P δεν πρέπει να υπάρχει σχετική κάθετη ταχύτητα, μεταξύ οριακής επιφάνειας και του ρευστού, πρέπει να έχουμε τις δύο κάθετες συνιστώσες ίσες, σχ.4.8 δηλαδή:

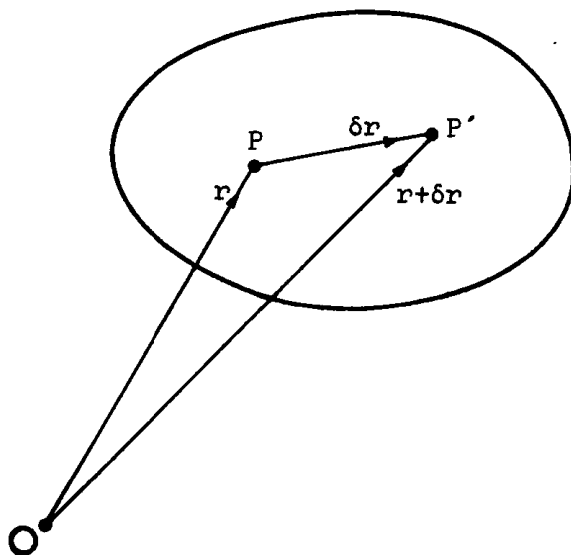
$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \vec{n}$$

Στην περίπτωση ρευστού χωρίς ιξώδες αυτή είναι η μόνη συνθήκη. Για ρευστό με ιξώδες, στο οποίο δεν συμβαίνει ολίσθηση, οι εφαπτομενικές συνιστώσες πρέπει να είναι, επίσης, ίσες. Στην περίπτωση που η οριακή επιφάνεια είναι σε ηρεμία (όπως συνήθως συμβαίνει) απαιτούμε να ισχύει $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$, σε κάθε σημείο της.

4.10 Γενική Ανάλυση της Κίνησης Ρευστού

Έστω P, P' ότι είναι δύο γειτονικά σημεία σε ένα στοιχείο ο ρευστού, το οποίο κινείται με το ρευστό έτσι, που σε κάποιο χρόνο t έχουμε, $\vec{O}P \equiv \vec{r}$, $\vec{O}P' \equiv \vec{r} + \delta \vec{r}$ και τα P, P' έχουν καρτεσιανές συν-





Σχήμα 4.9

τεταγμένες (x, y, z) , $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$, αντιστοίχως (Σχ. 4.9).
 Ακόμη, έστω ότι είναι $\vec{V} = \{u, v, \omega\}$, $\vec{V} + \delta\vec{V} = \{u + \delta u, v + \delta v, \omega + \delta\omega\}$
 οι ταχύτητες των P, P' κατά το θεωρούμενο χρόνο t . Αφού $u = u(x, y, z, t)$ κλπ. και ο t δε μεταβάλλεται, έχουμε:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z$$

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \quad (1)$$

$$\delta \omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \omega}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \omega}{\partial z} \delta z$$

Οι εξισώσεις αυτές μπορεί να γραφούν σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}$$

Αν τώρα συμβολίσουμε με

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial u}{\partial z}$$



$$f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right), \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Τότε, ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 0 & -\xi \\ -\eta & \xi & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ή}$$

$$A = A_1 + A_2$$

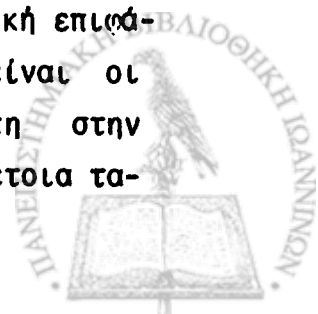
Συνεπώς, ο πίνακας A εκφράζεται ως το άθροισμα ενός συμμετρικού πίνακα A_1 και ενός κυρτού συμμετρικού A_2 . Εξετάζουμε τώρα, τη σπουδαιότητα των δύο αυτών πινάκων. Παρατηρούμε πρώτα, ότι:

$$\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\delta x + h\delta y + g\delta z \\ h\delta x + b\delta y + f\delta z \\ g\delta x + f\delta y + c\delta z \end{bmatrix} \quad (3)$$

θεωρούμε στη συνέχεια την τετραγωνική επιφάνεια

$$a(\delta x)^2 + b(\delta y)^2 + c(\delta z)^2 + 2f\delta y\delta z + 2a\delta z\delta x + 2h\delta x\delta y = \text{σταθερά} \quad (4)$$

στην οποία τα $(\delta x, \delta y, \delta z)$ λαμβάνονται ως οι τρέχουσες συντεταγμένες και οι συντελεστές a, b, \dots, f, \dots είναι σταθεροί ως προς αυτές τις συντεταγμένες, οπότε η (4) είναι ένα τετράγωνο, του οποίου το P είναι κέντρο. Τότε, η μερική παραγωγή του αριστερού μέλους της (4) ως προς $\delta x, \delta y, \delta z$ επιβεβαιώνει ότι η διανυσματική στήλη στο δεξιό μέλος της (3) είναι κάθετη στην τετραγωνική επιφάνεια (4). Γράφοντας $\delta \vec{V}_1 = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + \omega_1 \vec{k}$, όπου u_1, u_2, ω_1 είναι οι συνιστώσες της (3), φαίνεται ότι η $\delta \vec{V}_1$ είναι παντού κάθετη στην τετραγωνική επιφάνεια (4) που έχει το P ως κέντρο. Μιά τέτοια τα-



χύτητα $\vec{\delta V}_1$ μπορεί να αποδοθεί σε μία κίνηση η οποία καλείται καθαρή τάση. Το τετράγωνο καλείται ρυθμός της τετραγωνικής τάσης. Με κατάλληλη στροφή των αξόνων συντεταγμένων, η εξίσωση της τετραγωνικής επιφάνειας (4) ανάγεται στη μορφή,

$$a'(\delta x')^2 + b'(\delta y')^2 + c'(\delta z')^2 = \text{σταθερά},$$

στην οποία οι άξονες συντεταγμένων ταυτίζονται με τους βασικούς άξονες του τετραγώνου. Οι συνιστώσες της ταχύτητας λόγω της καθαρής τάσης οι παράλληλες προς τους άξονες του τετραγώνου είναι αντιστοίχως $\{a'\delta x', b'\delta y', c'\delta z'\}$. Οι γραμμές οι παράλληλες προς τους βασικούς άξονες υπόκεινται σε επιμηκύνσεις με ομοιόμορφους ρυθμούς. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 0 & -\xi \\ -\eta & \xi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta\delta z - \zeta\delta y \\ \zeta\delta x - \xi\delta z \\ \xi\delta y - \eta\delta x \end{bmatrix} \quad (5)$$

Γράφοντας $\vec{\delta V}_2 = u_2\vec{i} + u_2\vec{j} + \omega_2\vec{k}$, όπου u_2, u_2, ω_2 είναι οι συνιστώσες του πίνακα του δεξιού μέλους της (5) και $\vec{\omega} = \xi\vec{i} + \eta\vec{j} + \zeta\vec{k}$, βλέπουμε ότι:

$$\vec{\delta V}_2 = \vec{\omega} \wedge \vec{\delta r} \quad (6)$$

Αυτό δείχνει ότι η $\vec{\delta V}_2$ μπορεί να αποδοθεί σε μία περιστροφή ενός στερεού σώματος με γωνιακή ταχύτητα ω . Ακόμη, η αντικατάσταση των ξ, η, ζ οδηγεί στη σχέση,

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{cur } \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{\zeta} \quad (7)$$

όπου $\vec{\zeta}$ είναι το διάνυσμα της στροβιλότητας. Άρα, η στροβιλογραμμή δια μέσου του στοιχείου του ρευστού είναι ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής. Η ανάλυση αυτή δικαιολογεί την ορολογία "αστρόβιλη" για εκείνες τις ροές για τις οποίες $\text{cur } \vec{V} = 0$ οδηγώντας στη γνωστή σχέση

$$\vec{V} = -\nabla\phi$$



Μπορούμε, τώρα, να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα της προηγηθείσας ανάλυσης της γενικής κίνησης ενός στοιχείου του ρευστού, με τον ακόλουθο τρόπο:

(i) Υπάρχει μία μεταφορική ταχύτητα \vec{V} για κάθε σημείο P του στοιχείου.

(ii) Σε σχέση με το P , υπάρχει μία συνιστώσα ταχύτητας $\delta\vec{V}_1$ του P' , η οποία πρέπει να αποδοθεί σε καθαρή τάση με την έννοια, ότι για όλα τα άλλα σημεία P' του στοιχείου η συνιστώσα $\delta\vec{V}_1$ είναι κάθετη σε μία ορισμένη τετραγωνική επιφάνεια με κέντρο στο P . Αυτός ο τύπος της κίνησης προϋποθέτει ότι το ρευστό είναι παραμορφώσιμο.

(iii) Σε σχέση με το P , υπάρχει μία συνιστώσα της ταχύτητας $\delta\vec{V}_2$ του P' , η οποία πρέπει να αποδοθεί σε μία στερεού σώματος περιστροφή του στοιχείου. Αυτό σημαίνει, ότι αν το ρευστό του στοιχείου απότομα πάγωνε, τότε το στερεό θα μπορούσε προς στιγμήν να περιστραφεί με διανυσματική γωνιακή ταχύτητα $\frac{1}{2} \text{cur } l\vec{V}$.

Παρατηρούμε, ότι η ολική ταχύτητα του P' σε σχέση με το P , είναι $\delta\vec{V}_1 + \delta\vec{V}_2$.

Παρόμοια ανάλυση μπορεί να ληφθεί συντομότερα και περιεκτικότερα χρησιμοποιώντας μεθόδους ανάλυσης Καρτεσιανού τανυστή. Έτσι, αν το P έχει συντεταγμένες x_i και συνιστώσες ταχύτητας u_i και το P' $x_i + \delta x_i$ και $u_i + \delta u_i$ ($i = 1, 2, 3$), τότε κατ'αντιστοιχίαν προς τις εξ.(4), έχουμε:

$$\delta u_i = u_{i,j} \delta x_j \quad \text{και} \quad u_{i,j} = e_{ij} + \omega_{ij}$$

όπου
$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}),$$

έτσι, που το e_{ij} είναι ένας συμμετρικός τανυστής 2ας τάξης και το ω_{ij} είναι ένας κυρτοσυμμετρικός τανυστής, επίσης, 2ας τάξης. Άρα, αν γράψουμε,

$$\delta u_i = \overset{(1)}{\delta u_i} + \overset{(2)}{\delta u_i}$$

όπου $\overset{(1)}{\delta u_i} = e_{ij} \delta x_j, \quad \overset{(2)}{\delta u_i} = \omega_{ij} \delta x_j$

Τότε η $\overset{(1)}{\delta u_i}$ φαίνεται, ότι είναι κάθετη στο τετράγωνο



$$e_{ij} \delta x_i \delta x_j = \text{σταθερά},$$

το οποίο είναι ο ρυθμός της τετραγωνικής τάσης με κέντρο στο Ρ. Ε-
πίσης, έχουμε:

$$\{\delta u_1^{(2)}, \delta u_2^{(2)}, \delta u_3^{(2)}\} = \{(\omega_{13} \delta x_3 - \omega_{21} \delta x_2), (\omega_{21} \delta x_1 - \omega_{32} \delta x_3), (\omega_{32} \delta x_2 - \omega_{13} \delta x_1)\}$$

$$= \begin{vmatrix} \omega_{32} & \omega_{13} & \omega_{21} \\ \delta x_1 & \delta x_2 & \delta x_3 \end{vmatrix}$$

το οποίο είναι το διανυσματικό (εξωτερικό) γινόμενο των

$$\{\omega_{32}, \omega_{13}, \omega_{21}\} \quad \text{και} \quad \{\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3\}$$

δείχνοντας ότι η συνιστώσα $\delta u_1^{(2)}$ παριστάνει μία περιστροφή στερεού
σώματος. Παρατηρούμε ακόμη, ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_m} (\omega_{ij}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{im}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (e_{jm}) = 0, \text{ αν κάθε } e_{ij} = 0. \end{aligned}$$

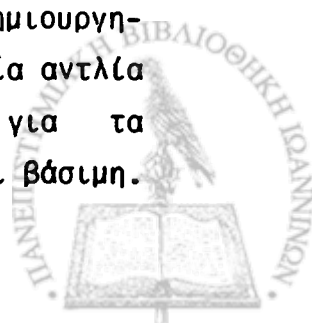
Αυτό δείχνει, ότι αν κάθε $e_{ij} = 0$ παντού, τότε οι ω_{ij} είναι σταθε-
ρές, δηλαδή, η περιστροφή είναι η ίδια παντού. Η εξαφάνιση του e_{ij}
είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για το ρευστό να κινείται χω-
ρίς τάση.



5. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΕΝΟΣ ΡΕΥΣΤΟΥ

5.1. Πίεση σε ένα Σημείο Ρευστού που Βρίσκεται σε Ηρεμία

Ας υποθέσουμε κατ'αρχήν ότι ένα ρευστό βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας. Τότε σε κάθε σημείο P μέσα στο ρευστό υπάρχει μία υδροστατική πίεση λόγω της πυκνότητάς του. Για να εξηγήσουμε την ύπαρξη αυτής της πίεσης, είναι απαραίτητο να καταφύγουμε σε μοριακές θεωρήσεις. Αν στο P παρεμβάλουμε μία μικρή στερεά επίπεδη επιφάνεια δS , τότε κάθε πλευρά της δS θα βομβαρδίζεται επαναληπτικά με μόρια του ρευστού, κινούμενα τυχαία προς όλες τις διευθύνσεις. Καθώς τα μόρια του ρευστού προσκρούουν στη μία πλευρά της επιφάνειας, μεταφέρουν ορμή προς την επιφάνεια για ένα ορισμένο χρόνο και έτσι ασκείται μία δύναμη $\delta \vec{F}$ στην επιφάνεια. Μία ίση και αντίθετη δύναμη ασκείται στο ρευστό από αυτή την πλευρά της επιφάνειας. Εάν υποθέσουμε τις γραμμικές διαστάσεις της δS , ότι είναι μεγάλες σε σύγκριση με τα μοριακά μεγέθη, αλλά μικρές συγκρινόμενες με τα μακροσκοπικά μήκη του ρευστού, τότε η δS είναι σε ηρεμία σε σχέση με το κύριο σώμα του ρευστού και η μόνη κίνηση η οποία υπάρχει είναι ή μοριακής κλίμακας, την οποία μόλις παραπάνω αναφέραμε. Σ'αυτές τις περιπτώσεις ανεξάρτητα από το αν το ρευστό είναι ιξώδες ή χωρίς ιξώδες, η $\delta \vec{F}$ θα δρα κάθετα στη δS . Επιπλέον, η μέση δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας, η οποία ασκείται στη μία πλευρά της δS θα είναι $\delta \vec{F} / \delta S$. Τώρα, υποθέτουμε ότι η δS γίνεται εξαιρετικά μικρή στο P . Τότε, αν εμείς θέλαμε να αντικαταστήσουμε το μοριακό μας μοντέλο με ένα συνεχές ρευστό, θα ήταν λογικό να υποθέσουμε, ότι στο P , η τιμή του $\lim_{\delta S \rightarrow 0} (\delta \vec{F} / \delta S)$ που θα υπήρχε θα ήταν μία και μόνη. Θα υποθέσουμε, ότι, πράγματι, αυτό συμβαίνει. Στην τελευταία αναδρομή, η φαινομενική αντινομία μεταξύ αυτού και του μοριακού μοντέλου ενός ρευστού, ως συνιστάμενου από διακεκριμένα μόρια που κινούνται τυχαίως, πρέπει να λυθεί με πείραμα. Πράγματι, για ένα ρευστό με πολύ αραιή πυκνότητα, η παραπάνω προϋπόθεση πιθανώς θα καταρριπτόταν. (Ένα τέτοιο ρευστό μπορεί να δημιουργηθεί στην προσπάθεια να εκκενωθεί ένα κλειστό βαρέλι με μία αντλία μεγάλης αποτελεσματικότητας). Εν τούτοις για τα υγρά και για τα περισσότερα αέρια πιστεύεται, ότι η προϋπόθεση αυτή είναι βάσιμη.



Σε αυτές τις περιστάσεις, εάν το p δηλοί την τιμή αυτού του μοναδικού ορίου, τότε το p καλείται η υδροστατική πίεση στο P .

Προτού περάσουμε στην περίπτωση πιέσεων σε κινούμενα ρευστά, θα υπενθυμίσουμε λίγα από τα σπουδαιότερα αποτελέσματα υδροστατικής. Αυτά είναι τα ακόλουθα:

(i) Όταν το ρευστό βρίσκεται σε ηρεμία, η πίεση σε ένα εσωτερικό σημείο P είναι η ίδια σε όλες τις διευθύνσεις. Άρα, στην ανωτέρω περιγραφή ο προσανατολισμός της δS είναι χωρίς αντικείμενο.

(ii) Η πίεση σε όλα τα σημεία στο ίδιο βάθος κάτω από την ελεύθερη οριζόντια επιφάνεια του ρευστού που βρίσκεται σε ηρεμία είναι η ίδια. Σε ένα σημείο P , που απέχει h κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια, η πίεση είναι $p_0 + \rho gh$, όπου p_0 είναι η ατμοσφαιρική πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια, ρ η πυκνότητα του ρευστού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

(iii) Αν κάποια πίεση ασκείται στην ελεύθερη επιφάνεια ενός ρευστού, αυτή μεταφέρεται ισοδύναμα σε όλα τα μέρη του ρευστού.

Αυτά τα αποτελέσματα, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, συνιστούν τους νόμους του Pascal για στατικά ρευστά.

5.2. Πίεση σε ένα Σημείο Κινούμενου Ρευστού

Έστω P , ότι είναι ένα σημείο σε ένα χωρίς ιξώδες ρευστό, το οποίο κινείται τοπικά με την ταχύτητα \vec{V} . Όπως στην τελευταία ενότητα, παρεμβάλλουμε μία μικρή επίπεδη στερεή επιφάνεια δS μέσα στο ρευστό στο P , αλλά αντί να την έχουμε ακίνητη, έστω ότι κινείται με την τοπική ταχύτητα \vec{V} του ρευστού στο P . Τότε η μόνη ανταλλαγή ορμής μεταξύ ρευστού και επίπεδου είναι η μοριακής κλίμακας και, όπως προηγουμένως, εάν $\delta \vec{F}$ παριστά τη δύναμη που ασκείται στη μία πλευρά της δS , από αυτή την ανταλλαγή ορμής, τότε η δύναμη αυτή είναι η κάθετη στη δS και υποθέτοντας ότι υπάρχει ένα και μόνο ένα όριο, λαμβάνουμε:

$$\lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}}{\delta S} = p$$

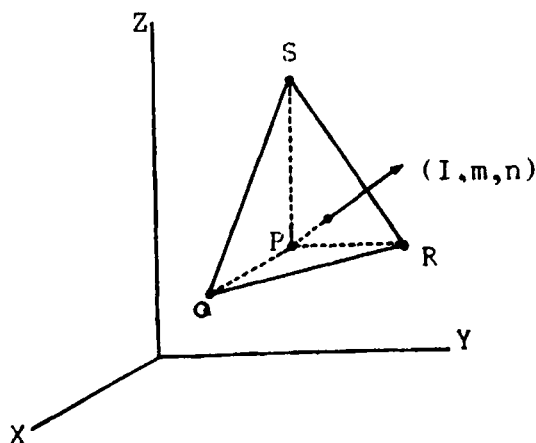
το οποίο είναι η πίεση του ρευστού στο P . Θα δείξουμε ότι η p είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού της δS . Είναι σημαντι-



κό, εντούτοις, ότι η δS είναι ακίνητη σε σχέση προς το τοπικό ρευστό, δηλ. ότι έχει την ίδια ταχύτητα με εκείνη του ρευστού στο P . Είτε βρίσκεται η δS ακίνητη, είτε κινείται με κάποια ταχύτητα \vec{v} άλλη από τη \vec{V} , το τοπικό ρευστό θα πρέπει να αχθεί σε ηρεμία ή στην ταχύτητα \vec{v} και η απαίτηση αυτή επιφέρει μία επιπρόσθετη ανταλλαγή ορμής μεταξύ ρευστού και οριακής επιφάνειας.

Είδαμε, ότι στην περίπτωση ενός χωρίς ιξώδες ρευστού, όταν η δS τοποθετείται εφαπτομενικά προς την τοπική ταχύτητα του ρευστού στο P , η μόνη ανταλλαγή ορμής μεταξύ ρευστού και επιφάνειας είναι τυχαίου μοριακού τύπου. Έτσι, σε αυτόν τον ειδικό προσανατολισμό, η δύναμη $\delta \vec{F}$ θα ήταν η ίδια, άσχετα του αν η δS βρίσκεται ακίνητη, κινούμενη με την τοπική ταχύτητα του ρευστού \vec{V} , ή με κάποια άλλη ταχύτητα. Βεβαίως, για ένα ρευστό με ιξώδες, οι διαφορετικές ταχύτητες της δS θα συνεπάγονταν διαφορετικές δυνάμεις τριβής, οι οποίες θα καλούνταν να συμμετέχουν στην όλη διαδικασία. Επίσης, για ένα ρευστό με ιξώδες θα υφίστανται δυνάμεις τριβής, ακόμη και όπου υπάρχει σχετική ηρεμία μεταξύ επιφάνειας και τοπικού ρευστού, με την προϋπόθεση βεβαίως, ότι υπάρχει μία βαθμίδα ταχύτητας κατά μήκος της καθέτου. Θα επιστρέψουμε σε αυτό στο Κεφάλαιο 8.

Έτσι, θεμελιώσαμε ότι η πίεση p στο σημείο P κινούμενου χωρίς ιξώδες ρευστού είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού της δS . Με το δεδομένο αυτό θεωρούμε την κίνηση ενός στοιχειώδους τετραέδρου $PQRS$ του ρευστού (Σχ. 5.1). Οι ακμές PQ , PR , PS λαμβάνονται



Σχήμα 5.1



παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων OX, OY, OZ και έχουν μήκη δx , δy , δz κατά τη χρονική στιγμή t . Το τετράεδρο κινείται με την τοπική ταχύτητα \vec{V} του ρευστού στο P.

Έστω p , ότι είναι η πίεση στο τρίγωνο QRS και δS η επιφάνειά του. Ακόμη, υποθέτουμε ότι τα διευθύνοντα συνημίτονα της καθέτου στη δS , σχεδιασμένα να κατευθύνονται προς τα έξω από το τετράεδρο, είναι $\{l, m, n\}$. Τότε, η ολική δύναμη που ασκείται από το ρευστό που είναι έξω από το τετράεδρο στην επιφάνεια QRS είναι:

$$-p\delta S(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}) = -\frac{1}{2} p (\delta y\delta z\vec{i} + \delta z\delta x\vec{j} + \delta x\delta y\vec{k}),$$

αφού

$$\delta S \equiv \text{εμβαδό της επιφάνειας PRS} = \frac{1}{2} \delta y\delta z, \text{ κλπ.}$$

Ακόμη υποθέτουμε ότι, p_x , p_y , p_z είναι οι πιέσεις στα επίπεδα PRS, PQS, PRQ. Αφού τα εμβαδά αυτών των επιφανειών είναι $\frac{1}{2} \delta y\delta z$, $\frac{1}{2} \delta z\delta x$, $\frac{1}{2} \delta x\delta y$, οι δυνάμεις οι οποίες ασκούνται σε αυτές από το εξωτερικό ρευστό είναι, αντιστοίχως

$$\frac{1}{2} p_x \delta y\delta z\vec{i}, \quad \frac{1}{2} p_y \delta z\delta x\vec{j}, \quad \frac{1}{2} p_z \delta x\delta y\vec{k}$$

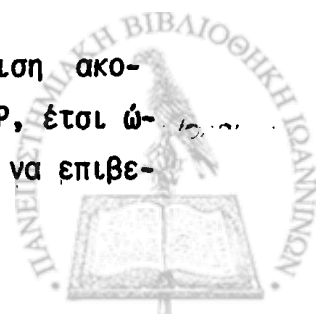
Άρα, η ολική επιφανειακή δύναμη στο τετράεδρο είναι:

$$\frac{1}{2} \{ (p_x - p)\delta y\delta z\vec{i} + (p_y - p)\delta z\delta x\vec{j} + (p_z - p)\delta x\delta y\vec{k} \}$$

Επιπλέον των επιφανειακών δυνάμεων, το στοιχείο του ρευστού μπορεί να υπόκειται σε δυνάμεις, οι οποίες οφείλονται σε εξωτερικά αίτια, όπως η βαρύτητα. Έστω \vec{F} , ότι είναι η μέση δύναμη που ασκείται ανά μονάδα μάζας εντός του τετράεδρου. Οπότε, $\frac{1}{6} \rho \vec{F} \delta x\delta y\delta z$ είναι η ολική δύναμη, όπου ρ είναι η μέση πυκνότητα του ρευστού. Τότε η συνισταμένη δύναμη, η οποία ενεργεί στο στοιχείο είναι:

$$\frac{1}{2} \{ (p_x - p)\delta y\delta z\vec{i} + (p_y - p)\delta z\delta x\vec{j} + (p_z - p)\delta x\delta y\vec{k} \} + \frac{1}{6} \rho \vec{F} \delta x\delta y\delta z$$

Τώρα, έστω \vec{V} ότι είναι η ταχύτητα στο P. Τότε $\frac{d\vec{V}}{dt}$ (διαφορίση ακολουθούσα την κίνηση του ρευστού) είναι η επιτάχυνση του P, έτσι ώστε, εάν η μάζα $\frac{1}{6} \rho \delta x\delta y\delta z$ μένει σταθερή (το οποίο μπορεί να επιβε-



βαιωθεί παρακολουθώντας ένα σωματίδιο αμετάβλητης μάζας) η εξίσωση της κίνησης είναι:

$$\frac{1}{2} \{ (p_x - p) \delta y \delta z \vec{i} + (p_y - p) \delta z \delta y \vec{j} + (p_z - p) \delta x \delta y \vec{k} \} + \frac{1}{6} \rho \vec{F} \delta x \delta y \delta z =$$

$$= \frac{1}{6} \rho \delta x \delta y \delta z \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Η εξίσωση αυτή περιλαμβάνει ποσότητες δευτέρας και τρίτης τάξης μικρών ποσοτήτων. Όταν λάβουμε τις ακμές του τετραέδρου απειροστά μικρές έχουμε, με προσέγγιση 2ας τάξεως τη σχέση:

$$\frac{1}{2} \{ (p_x - p) \delta y \delta z \vec{i} + (p_y - p) \delta z \delta x \vec{j} + (p_z - p) \delta x \delta y \vec{k} \} = \vec{0}$$

έτσι ώστε εξισώνοντας τους συντελεστές των μοναδιαίων διανυσμάτων, αυτή δίδει, αμέσως:

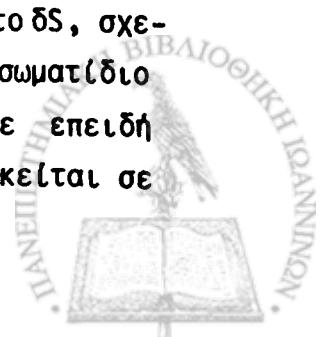
$$p_x = p_y = p_z = p$$

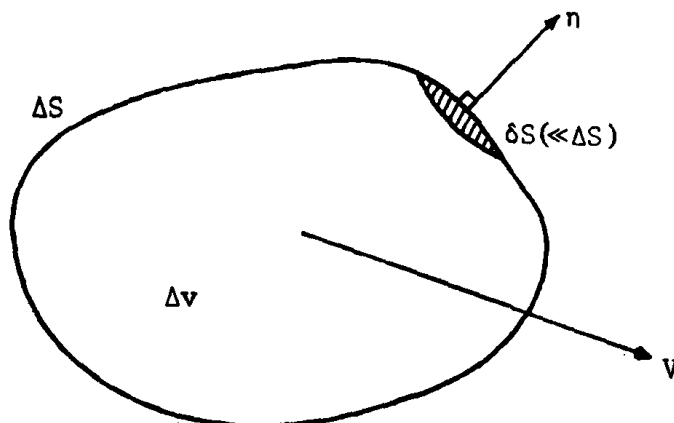
Δεδομένου ότι η επιλογή των αξόνων είναι εντελώς αυθαίρετη, η σχέση αυτή θεμελιώνει το γεγονός ότι σε κάθε σημείο P ενός κινούμενου και χωρίς ιξώδες ρευστού η πίεση p είναι η ίδια προς όλες τις διευθύνσεις. Αυτό, βέβαια, επικαλύπτει το αντίστοιχο αποτέλεσμα για στατικά ρευστά.

5.3 Εξισώσεις Κίνησης του Euler

Κατά τη χρονική στιγμή t , υποθέτουμε ότι το ΔS συμβολίζει την κλειστή επιφάνεια ενός σωματιδίου σε ένα κινούμενο ρευστό, το σωματίδιο κινούμενο μαζί με το ρευστό με ταχύτητα \vec{V} . Λαμβάνουμε το σωματίδιο ότι αποτελείται από σταθερή μάζα $\rho \Delta u$, όπου ρ είναι η πυκνότητα και Δu ο όγκος. Τελικά, τα ΔS και Δu πρόκειται να γίνουν απείρως μικρά.

Υποθέτουμε ότι δS ($\ll \Delta S$) είναι ένα επιφανειακό στοιχείο της ΔS και ότι \vec{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στο δS , σχεδιασμένο έτσι ώστε να διευθύνεται προς τα έξω από το σωματίδιο (Σχ. 5.2). Εάν p δηλοί την πίεση του ρευστού στο δS , τότε επειδή το δS κινείται τοπικά μαζί με το ρευστό, η δύναμη που ασκείται σε





Σχήμα 5.2

αυτό λόγω του ρευστού που βρίσκεται έξω από το σωματίδιο (στοιχείο) είναι $-\rho \delta S \vec{n}$. Άρα, η ολική δύναμη στην επιφάνεια του σωματιδίου του ρευστού, λόγω των δράσεων του περιβάλλοντος ρευστού είναι:

$$-\int_{\Delta S} \vec{n} p dS = -\int_{\Delta v} \nabla p du$$

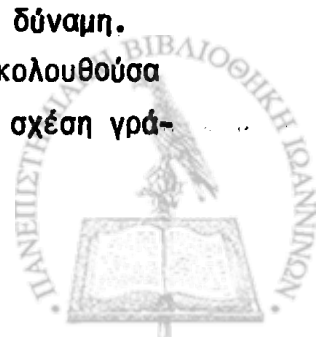
Έστω \vec{F} η εξωτερική δύναμη ανά μονάδα μάζας σε κάθε στοιχειώδους $\delta u (\ll \Delta u)$ του σωματιδίου. Τότε $\rho \vec{F} \delta u$ είναι η εξωτερική δύναμη που ασκείται στο στοιχείο δu και έτσι, η ολική δύναμη σε ολόκληρο το σωματίδιο είναι:

$$\int_{\Delta v} \rho \vec{F} du$$

Επειδή, η μάζα του στοιχειώδους όγκου δu είναι $\rho \delta u$, η μάζα ολόκληρου του στοιχείου του ρευστού είναι $\int_{\Delta v} \rho du$. Αλλά η μάζα αυτή είναι σταθερή. Συνεπώς, η εξίσωση της κίνησης του στοιχείου του ρευστού είναι:

$$\int_{\Delta v} (\rho \vec{F} - \nabla p) du = \frac{d\vec{V}}{dt} \int_{\Delta v} \rho du$$

Οι όροι στο αριστερό μέλος, παριστάνουν την ολική δράση δύναμη. Η $\frac{d\vec{V}}{dt}$ είναι η επιτάχυνση του στοιχείου του ρευστού η ακολουθούσα την κίνησή του. Σε προσέγγιση, πρώτης τάξης, η παραπάνω σχέση γράφεται:



$$(\rho \vec{F} - \nabla p) \Delta u = \frac{d\vec{V}}{dt} \rho \Delta u$$

έτσι ώστε, στο όριο καθώς $\Delta u \rightarrow 0$, λαμβάνουμε:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1)$$

Η εξ. (1) είναι γνωστή ως η εξίσωση κίνησης του Euler.

Άλλες μορφές της, με τη χρήση των αποτελεσμάτων της ενότητας 4.8, είναι:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) - \vec{V} \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3)$$

Σε μορφή τανυστή, με x_i ως συντεταγμένες, u_i ως συνιστώσες ταχύτητας, F_i ως συνιστώσες των εξωτερικών δυνάμεων ($i = 1, 2, 3$), οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} = F_i - \frac{1}{\rho} p_{,i} \quad (4)$$

5.4 Εξίσωση του Bernoulli

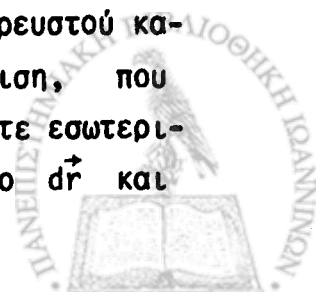
Ας υποθέσουμε, ότι οι εξωτερικές δυνάμεις του ρευστού είναι συντηρητικές και ότι η ροή είναι δυναμικού είδους. Τότε υπάρχουν βαθμωτές συναρτήσεις Ω, φ τέτοιες ώστε,

$$\vec{F} = -\nabla \Omega, \quad \vec{V} = -\nabla \varphi$$

Εξάλλου, $\nabla \wedge \vec{V} = \vec{0}$ και η εξίσωση (3) της προηγούμενης ενότητας γίνεται:

$$-\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \nabla \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) = -\nabla \Omega - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Έστω \vec{r} , ότι είναι το διάνυσμα θέσης του στοιχείου του ρευστού κατά το χρόνο t και έστω $d\vec{r}$ ότι είναι η στιγμιαία μετατόπιση, που προκαλείται στη θέση του στοιχείου, κατά το χρόνο t . Τότε εσωτερικός (αριθμητικός) πολ/σμός της τελευταίας εξίσωσης με το $d\vec{r}$ και



χρησιμοποίηση της ιδιότητας $d\vec{r} \cdot \nabla \Omega = d\Omega$, κλπ., οδηγούν στην εξίσωση:

$$-d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + d\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) = -d\Omega - \frac{1}{\rho} dp$$

υποχρεώνοντας το t σε σταθερότητα. Αναδιάταξη των όρων και ολοκλήρωση της δίδει:

$$\frac{\vec{V}^2}{2} + \Omega + \int \frac{dp}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t) \quad (1)$$

όπου $f(t)$ είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση του t , η οποία προκύπτει από την ολοκλήρωση, στην οποία το t διατηρείται σταθερό. Η εξ.(1) είναι η εξίσωση του Bernoulli στην πιο γενική της μορφή. Άλλες μορφές της εξίσωσης του Bernoulli, συχνά σε χρήση στην επίλυση προβλημάτων, μπορεί να εξαχθούν από τη μορφή (1). Άρα, για στατική κίνηση $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \cong 0$ και η $f(t)$ είναι σταθερή, έτσι ώστε:

$$\frac{\vec{V}^2}{2} + \Omega + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const.} \quad (2)$$

Αν επιπλέον, το ρευστό είναι ομοιογενές και ασυμπλέστο, έτσι ώστε το ρ να είναι σταθερό, η (2) γίνεται

$$\frac{\vec{V}^2}{2} + \Omega + \left(\frac{P}{\rho}\right) = \text{const.} \quad (3)$$

5.5 Μελέτη της Περίπτωσης Στατικής Κίνησης υπό την Επίδραση Συντηρητικών Εξωτερικών Δυνάμεων

Η εξίσωση του Bernoulli εξήχθη για δυναμικές ροές κάτω από την επίδραση συντηρητικών εξωτερικών δυνάμεων. Τώρα μελετάμε περιπτώσεις οι οποίες ανακύπτουν όταν η ροή δεν είναι πλέον δυναμικού είδους αλλά είναι στατική. Οι εξωτερικές δυνάμεις του ρευστού υποτίθενται ακόμη ότι είναι συντηρητικές. Θα δούμε ότι όταν επικρατούν τέτοιες συνθήκες αρχίζουν να εμφανίζονται εξισώσεις που να μοιάζουν με την εξίσωση του Bernoulli. Η εξίσωση της κίνησης του Euler μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) - \vec{V} \wedge \zeta$$



όπου $\vec{\xi} = \text{curl} \vec{V}$, το διάνυσμα στροβιλότητας. Εάν οι δυνάμεις είναι συντηρητικές, τότε $\vec{F} = -\nabla\Omega$, έτσι ώστε όταν η ροή είναι στατική, να ισχύει:

$$\nabla\left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \Omega + \int \frac{dp}{\rho}\right) = \vec{V} \wedge \vec{\xi}$$

Εσωτερικός πολλαπλασιασμός της εξίσωσης με $d\vec{r}$, δηλαδή με μία χρονικά ανεξάρτητη μεταβολή του διανύσματος θέσης \vec{r} του στοιχείου του ρευστού, δίδει:

$$d\left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \Omega + \int \frac{dp}{\rho}\right) = d\vec{r} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{\xi}) \quad (1)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση I: $\vec{V} \wedge \vec{\xi} = 0$

Αυτό σημαίνει, ότι είτε

(i) Τα \vec{V} και $\vec{\xi}$ είναι παράλληλα, δηλ. όταν οι ρευματογραμμές και οι στροβιλογραμμές συμπίπτουν. Για τέτοιες κινήσεις, το \vec{V} ορίζεται ως ένα διάνυσμα Beltrami, ή

(ii) Όταν $\vec{\xi} = \vec{0}$, που είναι η συνθήκη για δυναμική ροή. Σ' αυτές τις περιπτώσεις έχουμε:

$$d\left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \Omega + \int \frac{dp}{\rho}\right) = 0$$

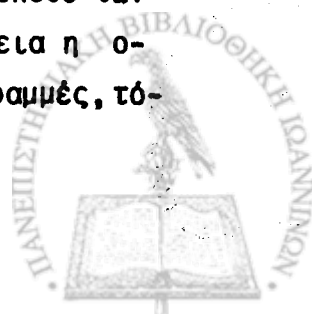
σε κάθε χρονική στιγμή, δια μέσου του πεδίου ροής. Τότε:

$$\frac{\vec{V}^2}{2} + \Omega + \int \frac{dp}{\rho} = \text{σταθερά} \quad (2)$$

σε ολόκληρο το πεδίο ροής. Η σταθερά είναι η ίδια σε ολόκληρο το πεδίο, αφού το διαφορικό $d\vec{r}$ της εξ. (1) είναι κάθε αυθαίρετη μικρή μεταβολή του διανύσματος θέσης \vec{r} στο πεδίο.

Περίπτωση II: $\vec{V} \wedge \vec{\xi} \neq 0$

Τότε το $\vec{V} \wedge \vec{\xi}$ είναι κάθετο στα διανύσματα \vec{V} , $\vec{\xi}$. Άρα, αν $d\vec{r} \neq \vec{0}$, τότε $d\vec{r} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{\xi}) = 0$ οποτεδήποτε το $d\vec{r}$ κείται στο επίπεδο των \vec{V} , $\vec{\xi}$. Συνεπώς, αν πάρουμε τη μεταβολή του $d\vec{r}$ στην επιφάνεια η οποία περικλείει και τις ρευματογραμμές και τις στροβιλογραμμές, τό-



τε η (1) δείχνει, ότι ισχύει:

$$d\left(\frac{V^2}{2} + \Omega + \int \frac{dp}{\rho}\right) = 0$$

σε μία τέτοια επιφάνεια, ή

$$\frac{V^2}{2} + \Omega + \int \frac{dp}{\rho} = \text{σταθερά} \quad (3)$$

σε μία επιφάνεια, η οποία περιέχει τις ρευματογραμμές και τις στροβιλογραμμές. Παρατηρούμε, ότι η σταθερά στην (3) είναι η ίδια παντού σε οποιαδήποτε από αυτές τις επιφάνειες, αλλά η τιμή της μεταβάλλεται από επιφάνεια σε επιφάνεια. Επίσης, η εξ. (3) ισχύει ανεξάρτητα του αν η κίνηση είναι στροβιλή ή αστρόβιλη.

5.6 Μερικές Ροές με Αξονική Συμμετρία

Έστω $\varphi(r, \theta, \psi)$, ότι είναι το δυναμικό της ταχύτητας σε κάθε σημείο, το οποίο έχει σφαιρικές πολικές συντεταγμένες (r, θ, ψ) , σε ένα πεδίο στατικής αστρόβιλης ασυμπύεστης ροής. Τότε σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, η εξίσωση Laplace $\nabla^2\varphi = 0$ γίνεται:

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \right) = 0$$

Όταν υπάρχει συμμετρία ως προς τη γραμμή $\psi = 0$, το $\varphi = \varphi(r, \theta)$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1)$$

Είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί με άμεση αντικατάσταση ότι μερικές λύσεις της (1) είναι:

$$\varphi = r \cos \theta, \quad \varphi = \left(\frac{1}{r^2} \right) \cos \theta$$

Άρα, μία γενικότερη λύση της (1) είναι η:

$$\varphi(r, \theta) = (Ar + Br^{-2}) \cos \theta \quad (2)$$



5.7 Μερικές Ειδικές Δισδιάστατες Ροές

Υποθέτουμε, ότι ένα ρευστό κινείται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε οι κινήσεις του σε όλα τα επίπεδα τα παράλληλα σε ένα δεδομένο επίπεδο του ρευστού έχουν την ίδια μορφή σε κάθε χρονική στιγμή. Τέτοια κίνηση λέγεται ότι είναι δισδιάστατη, αφού η γνώση της κίνησης σε κάθε τέτοιο επίπεδο προσδιορίζει και την κίνηση του σώματος του ρευστού. Επίσης, εκεί δεν υπάρχει κίνηση κάθετη σε ένα τέτοιο επίπεδο.

Για μία τέτοια δύο διαστάσεων κίνηση, έστω ότι ο άξονας των z λαμβάνεται κάθετος σε κάθε ένα από τα παράλληλα επίπεδα στα οποία οι μορφές της ροής είναι του αυτού ρυθμού κάθε στιγμή. Τότε, για την αστρόβιλη ασυμπίεστη ροή, η εξίσωση συνεχείας σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) είναι:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

και σε κυλινδρικές πολικές (R, θ, z) , αυτή είναι:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2)$$

Οι δύο αυτές μορφές και οι λύσεις τους θα μελετηθούν λεπτομερέστερα στο Κεφάλαιο 7. Εδώ μελετάμε μερικές από τις απλούστερες λύσεις, οι οποίες προκύπτουν από την εξ. (2).

Μερικές ειδικές λύσεις της (2) μπορούν να βρεθούν με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών. Αυτό μελετάται λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 7. Εδώ, περιοριζόμαστε στα ευκόλως επαληθεύσιμα γεγονότα, ότι οι $\varphi = R \cos \theta$, $\varphi = \left(\frac{1}{R}\right) \cos \theta$ είναι μερικές λύσεις. Συνεπώς, αφού η εξίσωση είναι γραμμική ένας γενικότερος τύπος λύσης είναι:

$$\varphi = (AR + BR^{-1}) \cos \theta \quad (3)$$

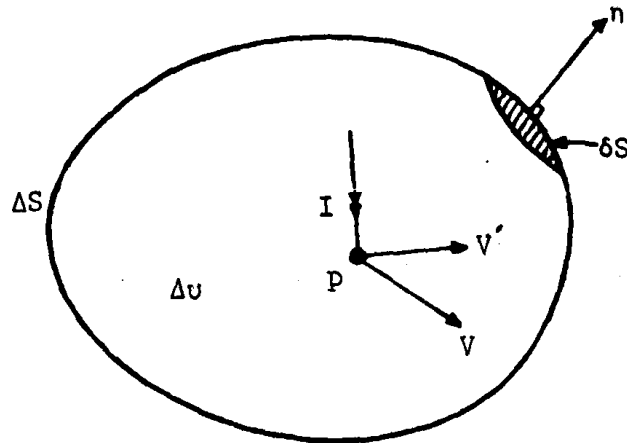
5.8 Ωστική Κίνηση

Υποθέτουμε, ότι στις οριακές περιοχές σε ένα ασυμπίεστο ρευστό, προκαλούνται απότομες μεταβολές της ταχύτητας ή ότι εφαρμό-



ζονται ωστικές δυνάμεις στο εσωτερικό του. Τότε οι διαταραχές που παράγονται και στις δύο περιπτώσεις μεταδίδονται την ίδια στιγμή σε όλο το ρευστό.

Για να τεθεί το πρόβλημα σε ποσοτική βάση, θεωρούμε το ασυμπλέστο στοιχείο του ρευστού όγκου Δu , ότι περιβάλλεται από μία κλειστή επιφάνεια ΔS (Σχ. 5.3). Υποθέτουμε ότι το στοιχείο κινεί-



Σχήμα 5.3

ται αρχικά με ταχύτητα \vec{V} και ότι υπόκειται σε μία απότομη εξωτερική ωστική δύναμη σώματος \vec{I} , ανά μονάδα μάζας. Έστω, ότι αυτή η ώση αλλάζει την ταχύτητα του στοιχείου, για μία στιγμή, από \vec{V} σε \vec{V}' και έστω, ότι αυτή προκαλεί ωστική πίεση στην οριακή επιφάνεια ΔS . Εάν συμβολίσουμε την ωστική πίεση στο στοιχείο δS της ΔS (όπου $\delta S \ll \Delta S$), με p , τότε αφού η ώση σε ένα στοιχείο όγκου δu του Δu είναι $\vec{I}\rho\delta u$ και εκείνη στο δS (το οποίο έχει κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα, διευθυνόμενο προς τα έξω το \vec{n}) είναι $-\vec{n}\rho\delta S$, η ολική ώση, η οποία ενεργεί στο στοιχείο του ρευστού είναι:

$$\int_{\Delta u} \rho \vec{I} du - \int_{\Delta S} \vec{n} \rho \delta S = \int_{\Delta u} (\rho \vec{I} - \nabla p) du$$

Η μεταβολή της ορμής είναι:

$$\int_{\Delta u} \rho (\vec{V}' - \vec{V}) du$$

Άρα,

$$\int_{\Delta u} (\rho \vec{I} - \nabla p) du = \int_{\Delta u} \rho (\vec{V}' - \vec{V}) du$$



Επειδή ο Δu είναι ένας αυθαίρετος μικρός όγκος, η συνήθης μας υπόθεση της συνέχειας του ρευστού οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\rho \vec{f} - \nabla p = \rho(\vec{V}' - \vec{V}) \quad (1)$$

για κάθε σημείο P του ρευστού. Όταν δεν υπάρχουν εξωτερικά εφαρμοζόμενες ώσεις, η (1) δίδει:

$$-\nabla p = \rho(\vec{V}' - \vec{V})$$

Αν η κίνηση είναι αστρόβιλη και $\vec{V} = -\nabla\phi$, $\vec{V}' = -\nabla\phi'$, τότε το τελευταίο αποτέλεσμα ικανοποιείται από τη σχέση:

$$p = \rho(\phi' - \phi) \quad (2)$$

αγνοώντας τις χωρίς σημασία σταθερές ολοκλήρωσης.

5.9 Μερικές ακόμη Απόψεις για την κίνηση Στροβιλισμού

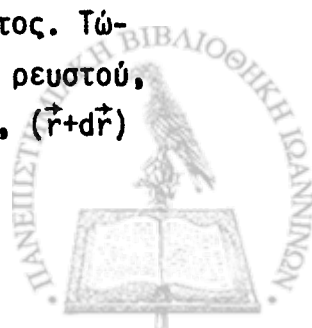
Πρώτα θεμελιώνουμε το θεώρημα του Kelvin, το οποίο εκφράζει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η κυκλοφορία γύρω από ένα κλειστό κύκλωμα, των στοιχείων του ρευστού, τα οποία κινούνται μαζί με το ρευστό, είναι σταθερή.

Για ένα χωρίς ιξώδες ρευστό η κυκλοφορία γύρω από κάθε κλειστό κύκλωμα στοιχείων του ρευστού, τα οποία κινούνται μαζί με αυτό, παραμένει σταθερή, με την προϋπόθεση ότι οι εξωτερικές δυνάμεις είναι συντηρητικές και η πίεση είναι μία μονότιμη συνάρτηση της πυκνότητας.

Απόδειξη: Με το συμβολισμό που χρησιμοποιήθηκε μέχρι τώρα, η εξίσωση κίνησης του Euler είναι:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p = -\nabla\Omega - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

αν Ω είναι το δυναμικό των συντηρητικών δυνάμεων του σώματος. Τώρα, έστω C ότι είναι το κλειστό κύκλωμα των στοιχείων του ρευστού, τα οποία κινούνται μαζί με το ρευστό και υποθέτουμε ότι \vec{r} , $(\vec{r}+d\vec{r})$



είναι τα διανύσματα θέσης των γειτονικών στοιχείων P, P' της C , αναφερόμενα σε ένα σταθερό σημείο O . Τότε, η ταχύτητα του P είναι $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Επίσης, η κυκλοφορία γύρω από τη C είναι:

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

Η παράγωγος της Γ ως προς το χρόνο, η ακολουθούσα την κίνηση του ρευστού, είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \oint_C \frac{d}{dt} (\vec{V} \cdot d\vec{r}) = \oint_C \left\{ \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} + \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} (d\vec{r}) \right\} \\ &= \oint_C \left\{ \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} (d\vec{r}) - \nabla \Omega \cdot d\vec{r} - \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{r} \right\} \end{aligned}$$

θα δείξουμε τώρα ότι

$$\left(\frac{d}{dt} \right) (d\vec{r}) = d \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = d\vec{V}$$

Το αποτέλεσμα αυτό, αν και προφανές, χρειάζεται προσεκτική θεμελίωση. Τη χρονική στιγμή t , τα P, P' έχουν ως διανύσματα θέσης τα $\vec{r}, (\vec{r} + d\vec{r})$, ως προς το O . Κατ'ακολουθίαν, κατά το χρόνο $(t + dt)$, τα διανύσματα θέσης είναι:

$$\vec{r} + \frac{d\vec{r}}{dt} dt, \quad (\vec{r} + d\vec{r}) + \left\{ \frac{d}{dt} (\vec{r} + d\vec{r}) \right\} dt$$

Αλλά επειδή το $d\vec{r}$ δηλοί μία μεταβολή του στοιχείου του ρευστού από το P μέχρι το P' , το διάνυσμα θέσης του P' κατά το χρόνο $(t + dt)$ μπορεί να γραφεί:

$$\vec{r} + \frac{d\vec{r}}{dt} dt + d \left(\vec{r} + \frac{d\vec{r}}{dt} dt \right)$$

Σύγκριση των δύο μορφών οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Έτσι έχουμε:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C (\vec{V} \cdot d\vec{V} - \nabla \Omega \cdot d\vec{r} - \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{r})$$

όπου τα διαφορικά σημαίνουν μεταβολές κατά μήκος του τόξου της C από το P ως το P' .



Εκφραζόμενο διαφορετικά, δίδει:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C (d(\frac{\vec{V}^2}{2}) - d\Omega - \frac{1}{\rho} dp) = -\oint \frac{dp}{\rho}$$

Εάν τώρα p είναι μία μονότιμη συνάρτηση του ρ , το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μηδέν και έχουμε, ότι η Γ = σταθερή στο κινούμενο κύκλωμα. Από το θεώρημα του Kelvin προκύπτουν τα ακόλουθα πορίσματα:

1. Σ' ένα κλειστό κύκλωμα στοιχείων του ρευστού C , τα οποία κινούνται κάτω από τις ίδιες συνθήκες, όπως προηγουμένως, το $\int \vec{n} \cdot \vec{\xi} dS$ είναι σταθερό, όπου S είναι μία ανοικτή επιφάνεια, με το C σαν ένα δακτυλίδι.

Απόδειξη: Για $\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{n} \cdot \vec{\xi} dS$, το οποίο οδηγεί στο αποτέλεσμα, αφού η Γ είναι σταθερή.

2. Εφ' όσον ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες, ένα τμήμα του κινούμενου ρευστού, αν κάποια στιγμή γίνει αστρόβιλο, τότε παραμένει σε αυτή την κατάσταση, για όλες τις επακολουθούσες στιγμές.

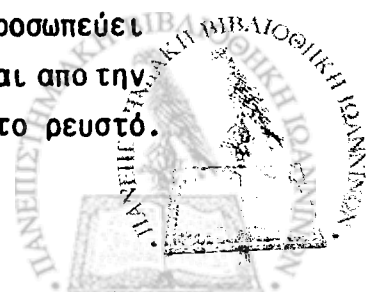
Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι σε κάποια στιγμή το ρευστό στην S γίνεται αστρόβιλο. Τότε $\vec{\xi} = \vec{0}$ σε όλα τα σημεία της S και το τελευταίο αποτέλεσμα δείχνει ότι $\Gamma = 0$, στη δεδομένη χρονική στιγμή και άρα, σε όλες τις επακολουθούσες χρονικές στιγμές. Άρα, σε κάθε μετέπειτα στάδιο, έχουμε:

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{\xi} dS = 0$$

Εάν θεωρήσουμε την S ότι είναι ένα μη μηδενικό απειροστό στοιχείο,ας πούμε ΔS , τότε σε πρώτη προσέγγιση $\Delta S \vec{n} \cdot \vec{\xi} = 0$, πράγμα το οποίο δείχνει ότι γενικά $\vec{\xi} = \vec{0}$ σε κάθε σημείο της ΔS , δηλαδή, ότι η κίνηση παραμένει αστρόβιλη.

3. Με τις παραπάνω συνθήκες, οι στροβιλογραμμές κινούνται μαζί με το ρευστό.

Απόδειξη: Για μία επιφάνεια S , η οποία κινείται με το ρευστό είδαμε ότι ισχύει $\int_S \vec{n} \cdot \vec{\xi} dS = \text{σταθερό}$. Το ολοκλήρωμα αντιπροσωπεύει την ολική ένταση των στροβιλοσωλήνων, οι οποίοι διέρχονται από την S . Αυτό δείχνει, ότι οι στροβιλοσωλήνες κινούνται μαζί με το ρευστό.



6. ΜΕΡΙΚΕΣ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΡΟΕΣ

6.1. Εισαγωγή

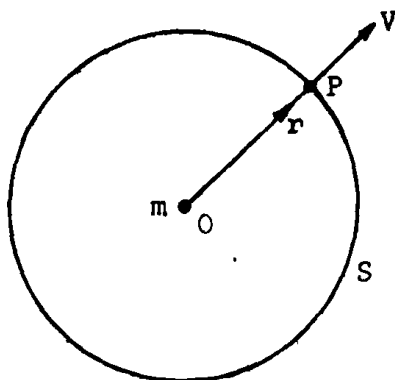
Στο προηγούμενο Κεφάλαιο, μελετήσαμε έναν αριθμό προβλημάτων, τα οποία ήταν κυρίως του τύπου των τριών διαστάσεων. Τώρα θα αναπτύξουμε ειδικές μεθόδους χειρισμού άλλων προβλημάτων στις τρεις διαστάσεις. Οι ροές οι οποίες μελετώνται σε αυτό το Κεφάλαιο είναι απολύτως ασυμπίεστες, με την έννοια ότι τα ρευστά έχουν σε όλη τους την έκταση σταθερή πυκνότητα.

6.2 . Πηγές, Απώλειες (Καταβόθρες) και Δίπολα

Υποθέτουμε, ότι σε ένα σημείο O του ρευστού η ροή είναι τέτοια, ώστε κατευθύνεται ακτινικά προς τα έξω από το O προς όλες τις διευθύνσεις και με τρόπο συμμετρικό. Τότε ρευστό εισέρχεται στο σύστημα από το O , το οποίο ορίζεται ως μία απλή πηγή. Αν στο O ο όγκος του ρευστού που εισέρχεται στο σύστημα ανά μονάδα χρόνου είναι $4\pi m$, όπου m είναι μία σταθερά, τότε η ένταση της πηγής ορίζεται ότι είναι m .

Αν εντούτοις, η ροή είναι τέτοια, ώστε το ρευστό να κατευθύνεται ακτινικά προς το O από όλες τις διευθύνσεις, κατά ένα συμμετρικό τρόπο, τότε το ρευστό εγκαταλείπει το σύστημα στο σημείο O , το οποίο ορίζεται ως μία απλή απώλεια ή καταβόθρα (ρουφήχτρα). Μία καταβόθρα έντασης m είναι μία πηγή έντασης $-m$.

Το Σχ. 6.1, δείχνει μία απλή πηγή έντασης m στο O σε ένα



Σχήμα 6.1



ρευστό, το οποίο προϋποτίθεται ότι δεν περικλείει άλλες πηγές ή καταβόθρες και το οποίο αλλιώς θα ήταν σε ηρεμία. S είναι η επιφάνεια της σφαίρας κέντρου O και ακτίνας r και P είναι ένα πεδίο της S τέτοιο, ώστε $\vec{OP} \equiv \vec{r}$. Τότε η ταχύτητά του ρευστού στο P είναι \vec{V} κατά μήκος του OP και το μέτρο της \vec{V} είναι παντού σταθερό πάνω στην S . Ο όγκος του ρευστού, το οποίο διασχίζει την S ανά μονάδα χρόνου είναι, συνεπώς, $4\pi r^2 V$: εκείνο που εκπέμπεται από το O στη μονάδα του χρόνου είναι $4\pi m$. Αλλά αφού το ρευστό είναι ασυμπίεστο, αυτές οι δύο ποσότητες είναι ίσες, λόγω του νόμου της συνεχείας. Άρα,

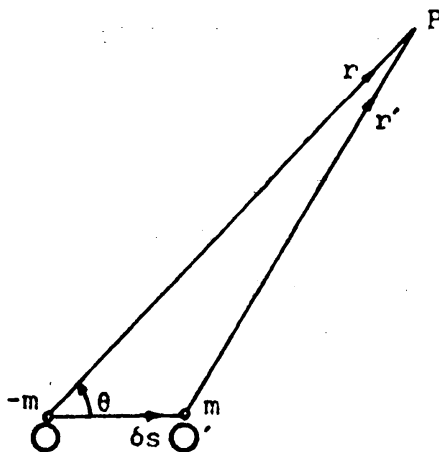
$$V = \frac{m}{r^2} \quad \text{ή} \quad \vec{V} = \frac{m}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το $\text{curl} \vec{V} = \vec{0}$ (εκτός από την περίπτωση $r=0$), έτσι ώστε η ροή είναι δυναμικού είδους. Έστω φ , ότι είναι το δυναμικό της ταχύτητας στο σημείο P . Από συλλογισμούς συμμετρίας, $\varphi = \varphi(r)$ και από το διανυσματικό λογισμό (Κεφ. 1, ενότητα 1.12),

$$\nabla \varphi = \varphi'(r) \hat{r}$$

Άρα, $\varphi'(r) = -m/r^2$ και συνεπώς, $\varphi(r) = m/r$ (2)

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε απλές πηγές έντασης $-m$ στο O και m στο O' σε ένα ρευστό (Σχ. 6.2), όπου $\vec{OO'} \equiv \delta \vec{s}$. Έστω P , ότι είναι κάθε άλλο σημείο στο ρευστό, τέτοιο ώστε $\vec{OP} \equiv \vec{r}$, $\vec{O'P} \equiv \vec{r}'$. Στη συνέχεια,



Σχήμα 6.2



θα χρησιμοποιούμε $r = |\vec{r}|$, $r' = |\vec{r}'|$, $\delta s = |\delta \vec{s}|$. Έστω, επίσης, $\mu = m\delta s$. Υποθέτουμε ακόμη, ότι $m \rightarrow \infty$, $\delta s \rightarrow 0$ κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το μ να παραμένει ορισμένο και σταθερό. Τότε, οι δύο πηγές $\pm m$, απείρως μεγάλου μέτρου και ταυτιζόμενες στο O , λέμε ότι συνιστούν στο όριο ένα τρισδιάστατο ζεύγος ή ένα δίπολο στο O . Η ποσότητα $\vec{\mu} = \mu \hat{a}$, όπου \hat{a} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση $O\vec{O}'$, καλείται η διανυσματική ροπή του ζεύγους. Επίσης, η διεύθυνση του \hat{a} είναι εκείνη του άξονα του ζεύγους.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το δυναμικό της ταχύτητας στο P , λόγω του ζεύγους στο O . Για το σχηματισμό που δείχνεται, αν υποθέσουμε ότι η ροή οφείλεται αποκλειστικά στην $-m$ του O και m του O' , το δυναμικό της ταχύτητας στο P είναι:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{m}{r'} - \frac{m}{r} = \frac{m(r - r')}{rr'} = \frac{m(r^2 - r'^2)}{rr'(r+r')} \\ &= \frac{m(\vec{r} - \vec{r}')(\vec{r} + \vec{r}')}{rr'(r+r')} = \frac{m\delta \vec{s} \cdot (\vec{r} + \vec{r}')}{rr'(r+r')} = \frac{\vec{\mu} \cdot (\vec{r} + \vec{r}')}{rr'(r+r')} \end{aligned}$$

Αν διατηρηθεί το O ακίνητο και το $O' \rightarrow 0$, έτσι ώστε $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}$, το μ μένει σταθερό. Τότε στο όριο έχουμε

$$\varphi = (\vec{\mu} \cdot \vec{r}) r^{-3} \quad (3)$$

Με τη $\rho\hat{O}O' = \theta$, άλλες ισοδύναμες μορφές του φ είναι

$$\varphi = (\vec{\mu} \cdot \hat{r}) r^{-2} = \mu r^{-2} \cos \theta \quad (3')$$

Η τελευταία μορφή δείχνει ότι $\varphi = \varphi(r, \theta)$, έτσι ώστε ο άξονας του ζεύγους είναι ένας άξονας συμμετρίας όπως είναι, φυσικά, προφανές.

Λαμβάνοντας το P να έχει σφαιρικές πολικές συντεταγμένες (r, θ, ψ) ανεφερόμενες στον άξονα του διπόλου ως αρχικής γραμμής, το δυναμικό της ταχύτητας τότε στο P θα είναι $\varphi(r, \theta) = (\mu \cos \theta) / r^2$, οπότε βρίσκουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας στο P ότι είναι:

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2\mu \cos \theta}{r^3}$$



$$V_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\mu \sin \theta}{r^3}$$

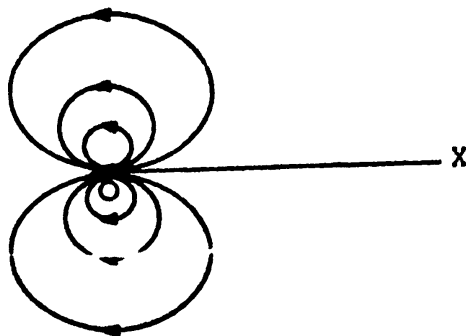
$$V_{\psi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = 0$$

Στην περίπτωση αυτή, οι εξισώσεις των ρευματογραμμών είναι:

$$\psi = \text{const.}, \quad r = A \sin^2 \theta$$

Άρα, οι ρευματογραμμές κείνται στα επίπεδα, τα οποία διέρχονται από τον άξονα του ζεύγους. Είναι συμμετρικές όχι μόνο ως προς τον OX αλλά, επίσης και ως προς το επίπεδο $\theta = \frac{\pi}{2}$. Το Σχ. 6.3, δείχνει ένα τέτοιο διάγραμμα ρευματογραμμών.

Η μορφή $\varphi(r, \theta) = (\mu \cos \theta)/r^2$ δείχνει ότι το φ , σε σημεία άλλα εκτός από το 0, πρέπει να ικανοποιεί την αξονικά συμμετρική, σφαιρική πολική μορφή της εξίσωσης Laplace.

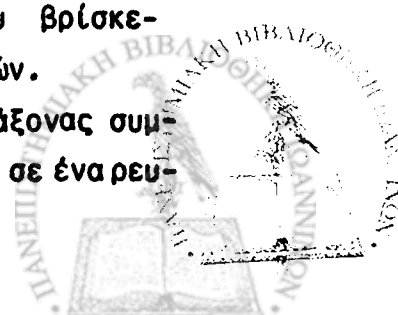


Σχήμα 6.3

6.3 Αξονοσυμμετρικές Ροές. Ρευματοσυνάρτηση του Stokes.

Συναντήσαμε αυτόν τον τύπο της ροής στην ενότητα 5.6. Άρα, η ομοιόμορφη ροή που διέρχεται από μία στάσιμη σφαίρα ή μία σφαίρα που κινείται με ομοιόμορφη ταχύτητα σε ένα ρευστό που βρίσκεται σε ηρεμία παρέχουν παραδείγματα αξονοσυμμετρικών ροών.

Υποθέτουμε, ότι ο άξονας του z λαμβάνεται, ως άξονας συμμετρίας σε μία αξονοσυμμετρική ροή και ότι ένα σημείο P σε ένα ρευ-



στό μπορεί να προσδιοριστεί με κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες (R, θ, z) . Τότε, στο P όλες οι βαθμωτές και διανυσματικές συναρτήσεις, οι οποίες συνδέονται με τη ροή είναι ανεξάρτητες του θ . Η εξίσωση της συνεχείας $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, για ασυμπλέστη ροή, λαμβάνει τη μορφή:

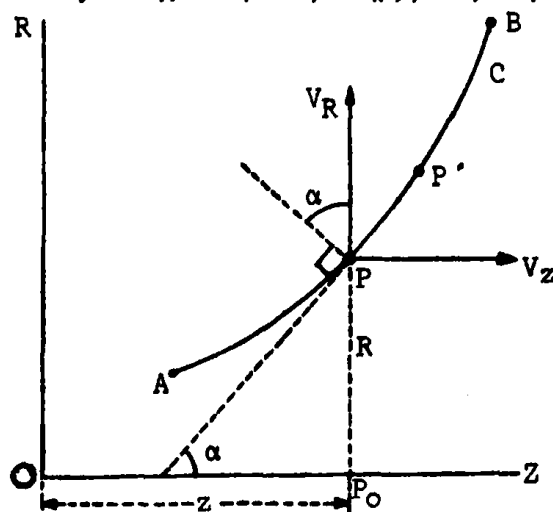
$$\frac{\partial}{\partial R} (RV_R) + \frac{\partial}{\partial z} (RV_z) = 0 \quad (1)$$

όπου $\vec{V} = V_R \hat{R} + V_z \hat{k}$. Αν μπορέσουμε να βρούμε μία βαθμωτή συνάρτηση $\psi(R, z)$ τέτοια ώστε:

$$V_R = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (2)$$

τότε, αντικαθιστώντας την εξ. (2) στην (1), βρίσκουμε ότι αυτή ικανοποιείται ταυτοτικά. Μία τέτοια συνάρτηση ψ καλείται ρευματοσυνάρτηση του Stokes. Στη συνέχεια, θα δώσουμε μία φυσική σημασία της ψ .

Το Σχ. 6.4., δείχνει μία μεσημβρινή τομή του τύπου της ρο-



Σχήμα 6.4

ής που μελετάμε. Δεν υπάρχει κάθετη συνιστώσα ταχύτητας προς το μεσημβρινό επίπεδο. Στην τομή, AB είναι ένα τόξο μίας καμπύλης C του επιπέδου, ενώ P είναι ένα σημείο σε αυτό, το οποίο απέχει R από τον OZ και z από την OR. Το τμήμα PP' είναι μήκους δs . Ψάχνουμε να βρούμε τον όγκο του ρευστού που διασχίζει την επιφάνεια της περιστροφής του AB γύρω από τον OZ, ανά μονάδα χρόνου, από δεξιά προς αριστερά. Σημειώνοντας με α τη γωνία την οποία σχηματίζει η

εφαπτομένη της C στο P με τον OZ, η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο P από δεξιά προς τα αριστερά, είναι:

$$V_R \cos \alpha - V_Z \sin \alpha = \frac{1}{R} \left(\cos \alpha \frac{\partial \psi}{\partial z} + \sin \alpha \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

Συνεπώς, ο όγκος του ρευστού, το οποίο διασχίζει την εκ περιστροφής επιφάνεια στο PP' γύρω από τον OZ, ανά μονάδα χρόνου, είναι:

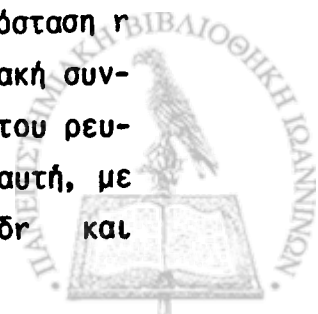
$$\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial s} \times 2\pi R \delta s = 2\pi \delta s \frac{\partial \psi}{\partial s} = 2\pi \delta \psi,$$

όπου $\delta \psi \equiv \psi_{p'} - \psi_p$. Άρα, ο ολικός όγκος του ρευστού που διασχίζει την εκ περιστροφής επιφάνεια του τόξου AB γύρω από τον OZ, ανά μονάδα χρόνου, από δεξιά προς αριστερά είναι:

$$\int_A^B 2\pi \delta \psi = 2\pi (\psi_B - \psi_A)$$

Η ποσότητα αυτή εξαρτάται μόνο από τις θέσεις των A και B στη μεσημβρινή τομή και καθόλου από το σχήμα της C. Αν η C πέφτει στον άξονα OZ, είναι χρήσιμο να ληφθεί $\psi_A = 0$ έτσι, ώστε ο όγκος που περιβάλλεται από την εκ περιστροφής του AP επιφάνεια, ανά μονάδα χρόνου, από δεξιά προς αριστερά, είναι $2\pi \psi$. Πολλοί συγγραφείς λαμβάνουν το τελευταίο ως ορισμό της ρευματοσυνάρτησης. Από τις εξ. (2) συμπεραίνουμε, ότι οι διαστάσεις της ψ είναι $L^3 T^{-1}$ και εκείνες του δυναμικού ϕ είναι $L^2 T^{-1}$. Περαιτέρω, παρατηρούμε ότι καθώς δεν διέρχεται ρευστό από μία ρευματογραμμή, το $\psi =$ σταθερό κατά μήκος μιας ρευματογραμμής. Επίσης, $\psi =$ σταθερό πάνω σε μία ρευματοεπιφάνεια, την επιφάνεια εκ περιστροφής μιας ρευματογραμμής γύρω από τον άξονα συμμετρίας.

Είναι, συχνά, χρήσιμο να λαμβάνουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας ως προς τις σφαιρικές πολικές συντεταγμένες και τις παραγώγους της ρευματοσυνάρτησης. Το Σχ. 6.5, δείχνει μία μεσημβρινή τομή κατά τον άξονα συμμετρίας OZ της ροής, με το P σε απόσταση r από το O και σε γωνιακή απόσταση θ από τον OZ. Η αζιμουθιακή συντεταγμένη εδώ περισεύει. Οι συντεταγμένες της ταχύτητας του ρευστού στο P είναι V_r κατά μήκος του \vec{OP} και V_θ η κάθετη σε αυτή, με την έννοια του αυξανόμενου θ . Τα μήκη PP_1 και PP_2 είναι δr και

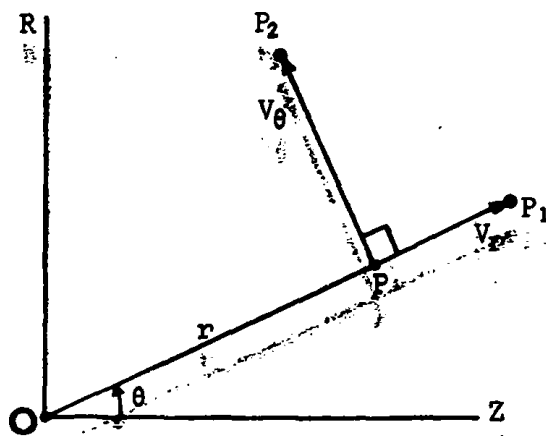


$r\delta\theta$, αντιστοίχως (Το θ δεν πρέπει να συγχέεται με τη γωνιακή συντεταγμένη που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως για τις κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες).

Αν στην αρχή πάρουμε $\delta s = \delta r$, το εμβαδό της εκ περιστροφής επιφάνειας του δs γύρω από τον OZ είναι $2\pi \sin\theta \delta r$ και ο όγκος του ρευστού που τη διασχίζει στη μονάδα του χρόνου από δεξιά προς τα αριστερά είναι $2\pi r \sin\theta \delta r V_\theta$. Άρα, αν ψ είναι η ρευματοσυνάρτηση στο P, τότε

$$2\pi \delta\psi = 2\pi r \sin\theta \delta r V_\theta, \quad \text{έτσι ώστε:}$$

$$V_\theta = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (3)$$



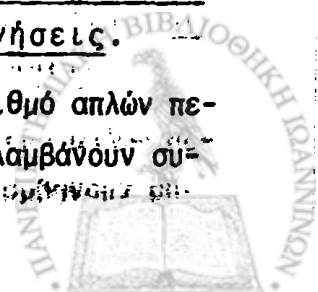
Σχήμα 6.5

Αν τώρα πάρουμε το $\delta s = r\delta\theta$, το εμβαδό της εκ περιστροφής επιφάνειας γύρω από τον OZ είναι $2\pi r \sin\theta \cdot r\delta\theta = 2\pi r^2 \sin\theta \delta\theta$. Ο όγκος του ρευστού που τη διασχίζει στη μονάδα του χρόνου από δεξιά προς τα αριστερά είναι $(2\pi r^2 \sin\theta \delta\theta)(-V_r)$ και έτσι,

$$2\pi \delta\psi = (2\pi r^2 \sin\theta \delta\theta)(-V_r) \quad \text{ή} \quad V_r = - \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad (4)$$

6.3.1. Μερικές Ειδικές Μορφές της Ρευματοσυνάρτησης για Αξονοσυμμετρικές Αστρόβιλες Κινήσεις.

Η συνάρτηση ψ μπορεί να εκτιμηθεί για έναν αριθμό απλών περιπτώσεων. Η τιμή της ψ για προβλήματα τα οποία περιλαμβάνουν συ-



νιστώσες τέτοιων τυπικών κατανομών μπορεί τότε να ληφθεί με επαλληλία των τιμών της ψ , για τις χωριστές συνιστώσες. Η δικαιολόγηση της επαλληλίας των τιμών της ψ εξαρτάται εκ του γεγονότος ότι η ψ ικανοποιεί μία 2ας τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώνους, της μορφής

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

σε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες (R, θ, z) όταν η ροή είναι αστρόβιλη. Η εξίσωση αυτή συνάγεται από τις εξισώσεις (2) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$V_R = \frac{\partial \phi}{\partial R}, \quad V_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \text{έτσι ώστε}$$

$$\frac{\partial V_R}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial R}$$

Το δυναμικό της ταχύτητας ϕ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, με τη μορφή:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

Σύγκριση των εξ. (5) και (6) δείχνει ότι η ψ δεν είναι αρμονική συνάρτηση.

Η χρησιμότητα υπολογισμού της ψ για ένα δεδομένο σύστημα, το οποίο απαρτίζεται από τυπικές συνιστώσες, για κάθε μία από τις οποίες η ψ είναι χωριστά γνωστή, βρίσκεται στο γεγονός ότι δίδεται η δυνατότητα οι ρευτογραμμές ή οι ρευματοεπιφάνειες να βρίσκονται γρήγορα από την $\psi = \text{σταθερά}$. Σε όλες τις περιπτώσεις μία ρευματοεπιφάνεια $\psi = \text{σταθερά}$ μπορεί να αντικατασταθεί με μία στερεά επιφάνεια. Επίσης, οι εξισώσεις (2), (3) και (4) επιτρέπουν τον υπολογισμό των συνιστωσών της ταχύτητας σε κυλινδρικές και σφαιρικές πολικές συντεταγμένες. Διακρίνουμε ορισμένες συγκεκριμένες περιπτώσεις:

(i) Ομοιόμορφο Ρεύμα

Υποθέτουμε, ότι έχουμε μία ροή της οποίας η ταχύτητα είναι $-U\vec{k}$, όπου U είναι μία σταθερά. Έστω P , ότι είναι ένα σημείο



στο ρεύμα, το οποίο έχει κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες (R, θ, z) και έστω P_0 , ότι είναι η προβολή του στον άξονα z . Οι μετατοπίσεις των αξόνων συντεταγμένων είναι όπως δείχνονται στο Σχ. 6.4. Λαμβάνοντας το ψ ότι είναι η ρευματοσυνάρτηση, η οποία συνδέεται με το P και μηδέν εκείνη του σημείου P_0 , επειδή ο όγκος που ρέει από δεξιά προς αριστερά δια μέσου του κυκλικού δίσκου που λαμβάνεται δια περιστροφής της PP_0 γύρω από τον άξονα z είναι $\pi R^2 U$, έπεται ό-
τι:

$$2\pi\psi = \pi R^2 U \quad \text{ή} \quad \psi = \frac{1}{2} R^2 U$$

Αυτό εκφράζεται με άμεσο τρόπο σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες λαμβάνοντας $R = r \sin \hat{P_0Z}$, όπου $r = OP$

(ii) Απλή Πηγή

Για μία απλή πηγή έντασης m στην αρχή, η τιμή της ψ σε ένα σημείο P μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3) και (4). Στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιήθηκε έχουμε: $V_r = m/r^2$, $V_\theta = 0$ έτσι, αυτές οι εξισώσεις δίδουν

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -m \sin \theta$$

Άρα;
$$d\psi(r, \theta) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)dr + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)d\theta = -m \sin \theta d\theta \quad \text{Συνεπώς;}$$

$$\psi(r, \theta) = m \cos \theta, \text{ σε απλούστερη μορφή.}$$

(iii) Ζεύγος Πηγών ή Διπόλο στο 0, Άξονας κατά Μήκος του 0Z

Σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες το δυναμικό της ταχύτητας στο P είναι

$$\varphi(r, \theta) = \frac{M \cos \theta}{r^2}$$

όπου M είναι η ένταση του ζεύγους των πηγών (διπόλου). Τότε ισχύουν:

$$V_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2M \cos \theta}{r^3}, \quad V_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{M \sin \theta}{r^3}$$

Άρα, οι εξ. (3) και (4) δίδουν,



$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{M \sin^2 \theta}{r^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{2M \sin \theta \cos \theta}{r}$$

και έτσι,

$$d\psi(r, \theta) = M\{(r^{-2} \sin^2 \theta) dr - 2r^{-1} \sin \theta \cos \theta d\theta\}$$

δίδοντας: $\psi(r, \theta) = (M/r) \sin^2 \theta$

(iv) Ομοιόμορφη Γραμμική Πηγή κατά Μήκος του ΟΖ

Το Σχ. 6.6, παριστάνει μία ομοιόμορφη γραμμική πηγή του ρευστού, η οποία εκτείνεται κατά μήκος του ΟΖ από το 0 στο Α. Έστω Q, Q', ότι είναι γειτονικά σημεία στο ΟΑ, όπου ΟQ = z, ΟQ' = z + dz. Ακόμη, υποθέτουμε QP = r, PQA = θ. Εάν το m δηλοί την ένταση της γραμμικής πηγής ανά μονάδα μήκους, τότε το QQ' είναι τελικά μία απλή πηγή στο Q έντασης m dz. Άρα, η συνεισφορά προς την ψ στο P από την πηγή αυτή είναι δψ, όπου δψ = m dz cos θ, με τη χρήση της (ii) παραπάνω. Συμβολίζοντας με ΟΑ = 1, ΑΜ = b, ΡΜ = R, τα οποία είναι όλα σταθερά στοιχεία στην παρακάτω διαδικασία ολοκλήρωσης έχουμε:

$$\delta\psi = m dz (1+b-z) \{(1+b-z)^2 + R^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\psi = m \int_0^1 \frac{(1+b-z)}{\{(1+b-z)^2 + R^2\}^{\frac{1}{2}}} dz = m \left[\{(1+b)^2 + R^2\}^{\frac{1}{2}} - \{b^2 + R^2\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

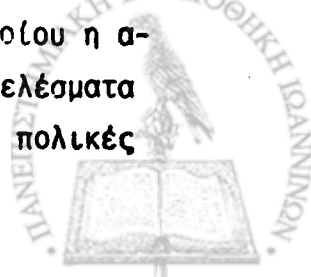
$$= \underline{m(OP - AP)}$$

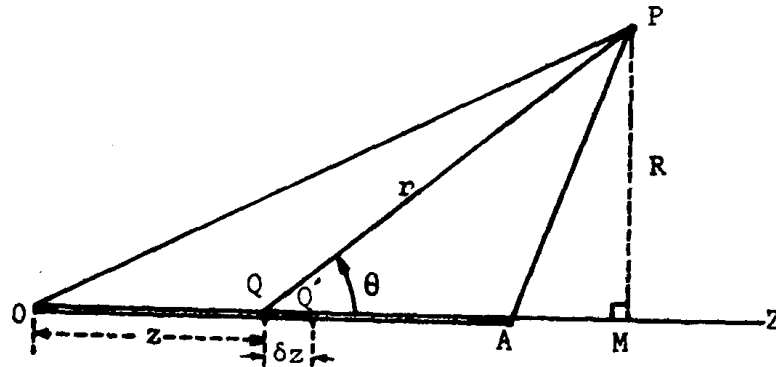
Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι οι ρευματοεπιφάνειες, ψ = σταθερά, δίδονται από την OP - AP = σταθερό.

Αυτά είναι συνεστιακά υπερβολοειδή εκ περιστροφής γύρω από τον ΟΖ, τα οποία έχουν το 0 και το Α ως εστίες.

(v) Ζεύγος Πηγών (Δίπολο) σε Ομοιόμορφο Ρεύμα

Υποθέτουμε, ότι το ζεύγος (δίπολο) που προσδιορίστηκε στην περίπτωση (iii) αναφέρεται σε ένα ομοιόμορφο ρεύμα του οποίου η αδιατάρακτη ταχύτητα είναι $-U\hat{k}$. Τότε, συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των (i) και (iii), η ρευματοσυνάρτηση στο P σε σφαιρικές πολικές





Σχήμα 6.6

είναι:

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{2} Ur^2 \sin^2 \theta - (M/r) \sin^2 \theta$$

Άρα, η ρευματοεπιφάνεια είναι:

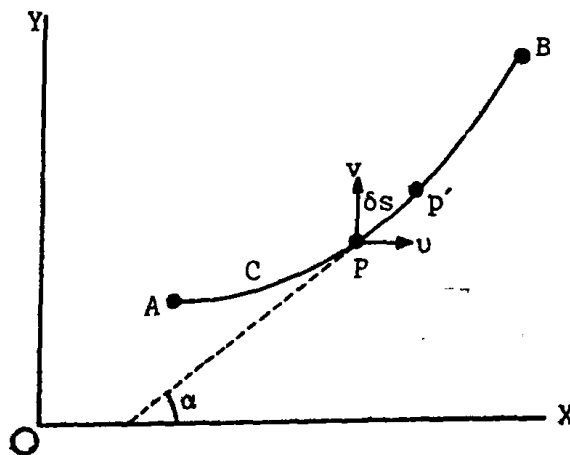
$$\left\{ \frac{1}{2} Ur^2 - (M/r) \right\} \sin^2 \theta = \text{σταθερά}$$

Ειδικότερα, οι επιφάνειες για τις οποίες είναι $\psi = 0$, δίδονται από

$$\sin \theta = 0$$

$$r = (2M/U)^{1/3}$$

Η πρώτη είναι ο άξονας των z ($\theta \cong 0, \pi$), η δεύτερη η σφαίρα με κέντρο O και ακτίνα $(2M/U)^{1/3}$. Το αποτέλεσμα αυτό ελήφθη και προηγουμένως στην ενότητα 6.2.



Σχήμα 7.1



7. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΡΟΕΣ

7.1. Εισαγωγή. Σημασία της Δισδιάστατης Ροής.

Υποθέτουμε ότι ένα ρευστό κινείται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε σε μία δεδομένη στιγμή η μορφή της ροής σε ένα ορισμένο επίπεδο είναι η ίδια με εκείνη όλων των άλλων παραλλήλων επιπέδων μέσα στο ρευστό. Τότε η ροή λέμε ότι είναι δισδιάστατη. Αν πάρουμε κάποιο από τα παράλληλα επίπεδα ότι είναι το επίπεδο $z = 0$, τότε σε κάθε σημείο του ρευστού, το οποίο έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) , όλες οι φυσικές ποσότητες (ταχύτητα, πίεση, πυκνότητα κλπ.), οι οποίες σχετίζονται με το ρευστό είναι ανεξάρτητες του z .

Στο Κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε ειδικές μεθόδους αντιμετώπισης αυτής της κατηγορίας των προβλημάτων. Περιοριζόμαστε σε ασυμπιεστα χωρίς ιξώδες ρευστά.

7.2. Χρήση των Κυλινδρικών Πολικών Συντεταγμένων

Αν η ροή είναι αστρόβιλη, τότε η εξίσωση που ικανοποιείται από το δυναμικό της ταχύτητας φ , σε κάθε σημείο, το οποίο έχει κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες (R, θ, z) , είναι:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

η οποία είναι η εξίσωση Laplace σε αυτές τις συντεταγμένες. Αν η κίνηση είναι δισδιάστατη και οι άξονες συντεταγμένων έχουν εκλεγεί έτσι, ώστε οι φυσικές ποσότητες, οι οποίες συνδέονται με τη ροή να είναι ανεξάρτητες του z , τότε ισχύει:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

Για να ληφθούν ειδικές λύσεις αυτής της εξίσωσης, θα προσπαθήσουμε να διαχωρίσουμε τις μεταβλητές, θέτοντας $\varphi = f(R)g(\theta)$, οπότε γίνεται:

$$g(\theta) \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \{ R f'(R) \} + \frac{1}{R^2} f(R) g''(\theta) = 0 \quad \eta$$



$$\frac{R\left(\frac{d}{dR}\right)\{Rf'(R)\}}{f(R)} = \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} \quad (2)$$

Το αριστερό μέλος της εξ. (2) είναι συνάρτηση μόνο του R: Το δεξιό μέλος της είναι συνάρτηση μόνο του θ. Άρα, το καθένα είναι ίσο με μία σταθερά. Έστω η^2 ότι είναι η τιμή της σταθεράς. Τότε λαμβάνουμε τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

$$R^2 f''(R) + Rf'(R) - \eta^2 f(R) = 0 \quad (3)$$

$$g''(\theta) + \eta^2 g(\theta) = 0 \quad (4)$$

Η εξ. (3) είναι του τύπου των ομοιογενών του Euler και λύνεται θέτοντας $R = e^t$, οπότε η εξίσωση ανάγεται στην

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - \eta^2 f = 0$$

δίδοντας τις λύσεις $f = e^{\pm \eta t}$ ή $f(R) = R^{\pm \eta}$ ($\eta \neq 0$)

Η εξ. (4) έχει τις ειδικές λύσεις

$$g(\theta) = \sin(\eta\theta) \quad \text{και} \quad g(\theta) = \cos(\eta\theta) \quad (\eta \neq 0)$$

Άρα, ειδικές λύσεις της εξ. (1) είναι:

$$\varphi(R, \theta) = (A_\eta R^\eta + B_\eta R^{-\eta})(C_\eta \cos \eta\theta + E_\eta \sin \eta\theta)$$

Ένας γενικότερος τύπος λύσης λαμβάνεται με επάλληλη πρόσθεση:

$$\varphi(R, \theta) = \sum_{\eta} (A_\eta R^\eta + B_\eta R^{-\eta})(C_\eta \cos \eta\theta + E_\eta \sin \eta\theta)$$

Αυτή η πρόσθεση για η τιμές, μπορεί να είναι ορισμένη ή άπειρη και δε χρειάζεται να περιορίζεται σε ακέραιες τιμές του η . Στην ειδική περίπτωση του $\eta = 0$, η οποία απορρίφτηκε στην παραπάνω ανάπτυξη,

$$f = k_1 + k_2 t = k_1 + k_2 \log R, \quad g = k_3 + k_4 \theta$$

οπότε,



$$\varphi = (k_1 + k_2 \log R)(k_3 + k_4 \theta)$$

Η ειδική περίπτωση του $\eta = 1$, παρέχει τις πολύ σημαντικές ειδικές λύσεις

$$\varphi = R \cos \theta, \quad \varphi = R \sin \theta, \quad \varphi = \frac{1}{R} \cos \theta, \quad \varphi = \frac{1}{R} \sin \theta$$

7.3. Η Ρευματοσυνάρτηση

Το C είναι ένα τόξο μίας καμπύλης στο επίπεδο (x, y) , το οποίο συνδέει δύο σημεία A, B (Σχ. 7.1). Το ρευστό (συμπιεστό ή ασυμπιεστό) περιορίζεται να ρέει σε δισδιάστατη στατική κίνηση παράλληλη προς το επίπεδο αυτό. Στο $P(x, y)$ της καμπύλης οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι $[\bar{u}, \bar{v}]$. Το P' είναι ένα γειτονικό σημείο $(x + \delta x, y + \delta y)$ στη C , έτσι ώστε $PP' = \delta s$. Αν η εφαπτομένη της C στο P σχηματίζει γωνία α με τον Ox , τότε η συνιστώσα της ταχύτητας στο P κατά μήκος της κάθετης από δεξιά προς τα αριστερά, καθώς κινούμεθα από το A προς το B είναι $u \cos \alpha - v \sin \alpha$. Συνεπώς, η μάζα του ρευστού, η οποία διασχίζει τη μονάδα πάχους του στοιχείου της επιφάνειας δια του PP' κάθετως προς το επίπεδο της ροής, ανά μονάδα χρόνου είναι:

$$\rho(u \cos \alpha - v \sin \alpha) \delta s = \rho(u \delta x - v \delta y)$$

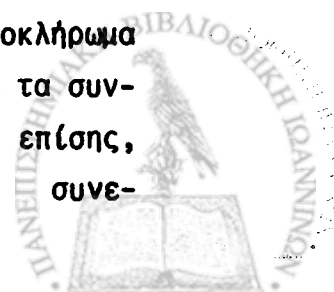
Αυτή η ροή μάζας είναι σταθερή και τη συμβολίζουμε με $\delta \psi$. Τότε έχουμε:

$$\delta \psi = \rho(u \delta x - v \delta y) \quad \text{ή} \quad d\psi = \rho(udx - vdy) \quad (1)$$

Η ολική ροή μάζας ανά μονάδα πάχους και ανά μονάδα χρόνου από δεξιά προς τα αριστερά, που διέρχεται από το τόξο AB , θα είναι:

$$\psi_B - \psi_A = \int_A^B \rho(udx - vdy) \quad (2)$$

Είναι προφανές, ότι όταν τα A και B είναι σταθερά, το ολοκλήρωμα (2) είναι ανεξάρτητο του σχήματος της καμπύλης C , η οποία τα συνδέει. Άρα, η $d\psi$ είναι ένα τέλειο διαφορικό. Αυτό μπορεί, επίσης, να φανεί από το γεγονός ότι για στατική ροή η εξίσωση της συνε-



χείλας $\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$ γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad \text{Συνεπώς,}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \rho u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\rho v \quad (3)$$

Υποθέτουμε τώρα, ότι η καμπύλη C είναι μία ρευματογραμμή. Τότε, δε διασχίζει ρευστό το όριό της. Άρα αφού $\psi_B - \psi_A$ είναι η ροή μάζας ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα πάχους της AP,

$$\psi_B - \psi_A = 0 \quad \text{ή} \quad \psi = \text{σταθερά κατά μήκος της C.}$$

Συνάγεται, συνεπώς, ότι η οικογένεια των καμπυλών $\psi = \text{σταθερά}$, είναι οι ρευματογραμμές στο επίπεδο $z = 0$. Για το λόγο αυτό η συνάρτηση $\psi(x, y)$ ονομάζεται ρευματοσυνάρτηση.

Όταν το ρευστό είναι ασυμπλέστο, η εξίσωση της συνεχείας είναι $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, ακόμη και αν η μορφή της ροής είναι μη στατική. Αν τώρα το $\delta\psi$ συμβολίζει τον όγκο του ρευστού, το οποίο διασχίζει τη μονάδα πάχους του PP' από δεξιά προς τα αριστερά, ανά μονάδα χρόνου, οι εξ.(1), (2), (3) γίνονται:

$$d\psi = u dx - v dy \quad (1')$$

$$\psi_B - \psi_A = \int_A^B (u dx - v dy) \quad (2')$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -v \quad (3')$$

Αν, ακόμη, υποθέσουμε, ότι η ροή είναι αστρόβιλη, τότε υπάρχει ένα δυναμικό της ταχύτητας ϕ τέτοιο ώστε,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4)$$

Η εξίσωση της συνεχείας είναι,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)$$



Οι εξ. (3')(4)(5) τότε οδηγούν στα ακόλουθα σημαντικά αποτελέσματα:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

Συνεπώς, για αστρόβιλη ασυμπέσθη δισδιάστατη ροή (στατική ή μη στατική), οι $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ είναι αρμονικές συναρτήσεις και οι οικογένειες των καμπυλών $\varphi = \text{σταθερά}$ (ισοδυναμικές) και $\psi = \text{σταθερά}$ (ρευματογραμμές) τέμνονται ορθογώνια. Το τελευταίο αποτέλεσμα συνάγεται από το γεγονός ότι η (9) εκφράζει την καθετότητα των διανυσμάτων $\nabla \varphi$, $\nabla \psi$.

7.4. Το Μιγαδικό Δυναμικό για Δισδιάστατη, Αστρόβιλη, Ασυμπέσθη Ροή.

Σε αυτό το στάδιο εισάγουμε την έννοια της συνάρτησης μιας μιγαδικής μεταβλητής. Θα δούμε, ότι η μιγαδική συνάρτηση $\omega = \varphi + i\psi$ έχει ιδιότητες, οι οποίες διευκολύνουν τη λύση πολλών τύπων προβλημάτων δισδιάστατης ροής. Θα δώσουμε πρώτα κάποια στοιχειώδη θεωρία συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής. Ο αναγνώστης θα βρεί μία πληρέστερη ανάπτυξη, π.χ., στα βιβλία "Functions of a Complex Variable" του E. G. Phillips και "Ανάλυσις Fourier και Μιγαδική παράσταση των κυμάτων", του Β. Κατσούλη.

Υποθέτουμε, ότι $z = x + iy$

$$\omega = f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

όπου x, y, φ, ψ είναι όλα πραγματικά και $i = \sqrt{-1}$.



Γράφουμε,

$\varphi = R e(\omega)$, $\psi = I_m(\omega)$. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι φ και ψ και οι παράγωγοι πρώτης τάξης είναι παντού συνεχείς, σε μία δεδομένη περιοχή. Αν σε κάθε σημείο της περιοχής, το οποίο ορίζεται από το z , η παράγωγος $d\omega/dz = f'(z)$ είναι μία και μόνη, τότε η ω λέμε ότι είναι αναλυτική ή κανονική σε αυτό το σημείο. Αν η παράγωγος είναι μία και μόνη για ολόκληρη την περιοχή, τότε η ω είναι αναλυτική ή κανονική στην περιοχή. Εξ ορισμού, η παράγωγος της ω στο z , είναι

$$\frac{d\omega}{dz} = f'(z) = \lim_{\delta x, \delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{\delta\varphi + i\delta\psi}{\delta x + i\delta y} \right\}$$

όπου $\delta\varphi = \varphi(x + \delta x, y + \delta y) - \varphi(x, y)$, $\delta\psi = \psi(x + \delta x, y + \delta y) - \psi(x, y)$. Το όριο αυτό μπορεί να εκτιμηθεί με απείρως πολλούς τρόπους, σύμφωνα με τη φύση των διαφορικών δx , δy . Αν πρώτα διατηρήσουμε το y σταθερό, έτσι ώστε $\delta y = 0$, τότε

$$\frac{d\omega}{dz} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\delta\varphi + i\delta\psi}{\delta x} \right\} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (1)$$

Εάν, πάλι, διατηρήσουμε το x σταθερό, ώστε το $\delta x = 0$, τότε

$$\frac{d\omega}{dz} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{\delta\varphi + i\delta\psi}{i\delta y} \right\} = -i \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Αν η ω είναι μία αναλυτική συνάρτηση, οι δύο τιμές της $\frac{d\omega}{dz}$, που εκφράζονται από τις (1) και (2), πρέπει να είναι ίσες. Τότε, εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη, έχουμε αμέσως τις σχέσεις:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = - \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (3)$$

Οι εξ. (3) καλούνται εξισώσεις Cauchy - Riemann. Μπορεί ναδειχθεί ότι (με την προϋπόθεση ότι όλες οι 1ης τάξης παράγωγοι είναι συνεχείς) αυτές εκφράζουν τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ω , να είναι αναλυτική σε ένα σημείο. Αν ισχύουν σε όλα τα σημεία μιας περιοχής, εκφράζουν τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ω να είναι αναλυτική σε ολόκληρη την περιοχή. Οι συναρτήσεις φ , ψ ορίζονται ως συζυγείς συναρτήσεις.



Αν τώρα προσδώσουμε στα ϕ και ψ την έννοια του δυναμικού της ταχύτητας και της ρευματοσυνάρτησης για δισδιάστατη, αστρόβιλη, ασυμπλέστη και χωρίς ιξώδες ροή, τότε η $\omega = \phi + i\psi$ καλείται μιγαδικό δυναμικό της ταχύτητας. Άρα, τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της ω είναι αντιστοίχως, το δυναμικό της ταχύτητας και η ρευματοσυνάρτηση. Επίσης, η εξ.(1) παραπάνω δείχνει ότι

$$\frac{d\omega}{dz} = -u + iu$$

αφού,

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Επίσης, έχουμε:

$$\left| \frac{d\omega}{dz} \right| = \sqrt{(u^2 + v^2)} = \dot{V}$$

δίδοντας την ταχύτητα του ρευστού σε κάθε σημείο.

7.5. Μιγαδικά Δυναμικά Ταχύτητας για Τυπικές Δισδιάστατες Ροές.

Για περαιτέρω αναπτύξεις της παραπάνω θεωρίας, είναι χρήσιμο να εκτιμηθεί το μιγαδικό δυναμικό ω για μερικούς από τους πιο συνήθεις τύπους δισδιάστατων ροών. Θεωρούμε στη σειρά τις μορφές ροής λόγω ενός ομοιόμορφου ρεύματος, μιας γραμμικής πηγής και καταβόθρας και ενός γραμμικού ζεύγους. Σε αυτή την ενότητα η ροή υποτίθεται ότι είναι άνευ ιξώδους, αστρόβιλη, ασυμπλέστη και δισδιάστατη.

7.5.1. Ομοιόμορφο Ρεύμα

(i) Πρώτον θεωρούμε, ότι το ομοιόμορφο ρεύμα έχει ταχύτητα $-U\hat{i}$. Αυτό δίδει ένα δυναμικό ταχύτητας $\phi = Ux$. Είναι φανερό, ότι αφού $x = \text{Re}(z)$, $\omega = Uz = U(x + iy)$.

Η ρευματοσυνάρτηση $\psi = \text{Im}(\omega) = Uy$, έτσι ώστε οι γραμμές $y = \text{σταθερά}$, είναι οι ρευματογραμμές.

(ii) Δεύτερον, υποθέτουμε ότι το ομοιόμορφο ρεύμα προσπίπτει στο θετικό άξονα των x με μία γωνία α οπότε:



$$\vec{V} = [-U \cos \alpha, -U \sin \alpha]$$

Η ροή είναι προφανώς αστρόβιλη και μπορούμε να βρούμε ένα φ τέτοιο, ώστε $\vec{V} = -\nabla\varphi$ και άρα,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = U \cos \alpha, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = U \sin \alpha$$

Συνεπώς,

$$d\varphi = (U \cos \alpha)dx + (U \sin \alpha)dy,$$

οπότε,

$$\varphi(x, y) = U(x \cos \alpha + y \sin \alpha), \text{ σε απλούστερη μορφή.}$$

Επίσης, αφού,

$$\vec{V} = \left[-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x} \right], \quad d\psi = (-U \sin \alpha)dx + (U \cos \alpha)dy$$

ή

$$\psi = U(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

Άρα,

$$\omega = \varphi + i\psi = U(xe^{-i\alpha} + iye^{-i\alpha}) = Uze^{-i\alpha}$$

Με άλλο τρόπο, το ω μπορεί να βρεθεί πιο απλά ως εξής:

$$\omega'(z) = -u + iu = U \cos \alpha - iU \sin \alpha = Ue^{-i\alpha}$$

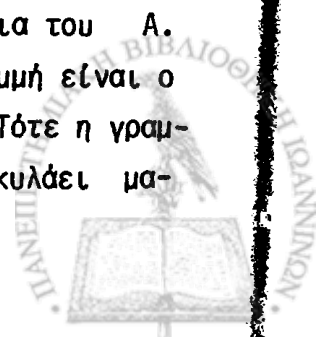
οπότε,

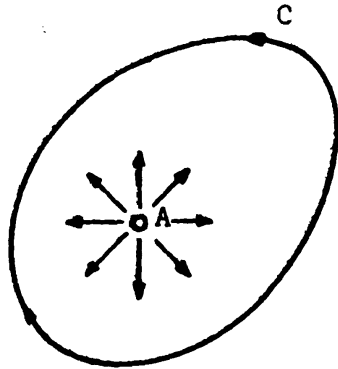
$$\omega(z) = Uze^{-i\alpha}$$

Η προηγούμενη προσέγγιση είναι πιο γενική.

7.5.2. Γραμμικές Πηγές και Καταβόθρες

Στο Σχ. 7.2, A είναι οποιοδήποτε σημείο στο θεωρούμενο επίπεδο ροής και C είναι κάποια καμπύλη, η οποία το περιβάλλει. Έστω, ότι σχεδιάζονται, άπειρες παράλληλες γραμμές που να διέρχονται από το A και από κάθε σημείο της C , έτσι που όλες να είναι κάθετες προς το επίπεδο της ροής. Υποθέτουμε, ότι το ρευστό εκπέμπεται συμμετρικά από όλα τα σημεία της άπειρης γραμμής δια του A . Ο ρυθμός εκπομπής από όλα αυτά τα σημεία A σε κάθε γραμμή είναι ο ίδιος παντού και παράλληλος προς το επίπεδο της ροής. Τότε η γραμμή δια του A καλείται γραμμική πηγή. Αν το ρευστό κυλάει μα-





Σχήμα 7.2

κρια από μία τέτοια πηγή και κάτω από τις ίδιες συνθήκες συμμετρίας, τότε η γραμμή καλείται γραμμική καταβόθρα (ρουφήχτρα).

Υποθέτουμε, ότι η άπειρη γραμμή από το A είναι μία πηγή και ότι εκπέμπει ρευστό στο ρυθμό των $2\pi\rho r$ μονάδων μάζας, ανά μονάδα μήκους της πηγής και ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα μήκους του άπειρου κυλίνδρου του οποίου ίχνος στο επίπεδο ροής είναι η κλειστή καμπύλη C και του οποίου οι γεννήτορες είναι κάθετοι σε αυτό το επίπεδο. Ορίζουμε την ένταση της γραμμικής πηγής ότι είναι m . Αν τώρα πάρουμε ως C τον κύκλο κέντρου A και ακτίνας r , τότε η ταχύτητα ροής V είναι παντού η ίδια στη C και η ροή μάζας είναι τώρα $2\pi r\rho V$, ανά μονάδα μήκους. Άρα,

$$2\pi\rho r = 2\pi r\rho V \quad \eta$$

$$V = \frac{m}{r}$$

Σε ένα τέτοιο κύκλο, το δυναμικό της ταχύτητας είναι $\phi(r)$, έτσι ισχύει,

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{m}{r} \quad \eta \quad \phi = -m \log r$$

σε απλούστερη μορφή.

Αν το θεωρούμενο σημείο P του πεδίου στον κύκλο έχει πολικές συντεταγμένες (r, θ) ως προς το A και αν $\vec{OP} \equiv z = re^{i\theta}$, τότε αφού



$\log r = \log |z|$, βλέπουμε αμέσως ότι το μιγαδικό δυναμικό της ταχύτητας της γραμμικής πηγής, που διέρχεται από το A και είναι ομοιόμορφης έντασης m, δίδεται από τη σχέση:

$$\omega = -m \log z = -m(\log r + i\theta)$$

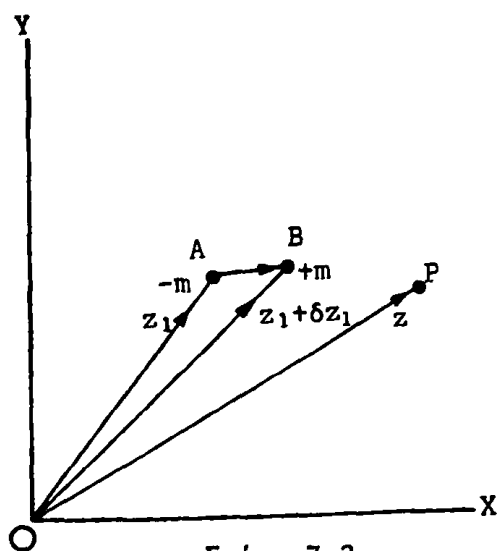
Συνεπώς, $\psi = -m\theta$, πράγμα που σημαίνει ότι οι ρευματογραμμές $\psi = \text{σταθερά}$, σε κάθε επίπεδο της ροής, είναι οι ευθείες γραμμές $\theta = \text{σταθερό}$, οι ισοδυναμικές, $\varphi = \text{σταθερό}$ και είναι ομόκεντροι κύκλοι με $r = \text{σταθερό}$ και κέντρο στο A.

Αν η γραμμική πηγή έντασης m ήταν στη θέση $z = z_1$ αντί του $z = 0$, αφού από τα παραπάνω είναι $r = [z - z_1]$, θα έπρεπε να έχουμε για το μιγαδικό δυναμικό της ταχύτητας

$$\omega = -m \log (z - z_1)$$

7.5.3. Γραμμικά Ζεύγη (Δίπολα)

Το Σχ. 7.3, δείχνει μία ομοιόμορφη γραμμική πηγή έντασης



Σχήμα 7.3

$-m$ στο A, μία έντασης $+m$ στο B και το θεωρούμενο σημείο P του πεδίου, όλα στο ίδιο επίπεδο ροής, όπου

$$\vec{OA} \equiv z_1, \vec{OB} \equiv z_1 + \delta z_1, \vec{OP} \equiv z$$

Τότε $\vec{AP} \equiv z - z_1, \vec{BP} \equiv z - z_1 - \delta z_1$. Άρα, το μιγαδικό δυναμικό στο P,



λόγω των δύο γραμμικών πηγών στα A, B, είναι:

$$\omega = m \log(z - z_1) - m \log(z - z_1 - \delta z_1)$$

Αλλά,

$$\log(z - z_1 - \delta z_1) = \log(z - z_1) - \delta z_1 \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) [\log(z - z_1)] +$$

$$+ O\{(\delta z)^2\} = \log(z - z_1) - \delta z_1 (z - z_1)^{-1} + O\{(\delta z)^2\}$$

Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι $|\delta z_1|$ είναι πολύ μικρό οπότε τα $|\delta z_1|^2$, $|\delta z_1|^3$, είναι αμελητέα, τότε σε πρώτη προσέγγιση:

$$\omega = -m \delta z_1 (z - z_1)^{-1} = m |\delta z_1| e^{i\alpha} (z - z_1)^{-1}$$

αν η AB σχηματίζει γωνία α με τον OX. Τώρα ας υποθέσουμε, ότι το m γίνεται πολύ μεγάλο και το $|\delta z_1|$ πολύ μικρό, αλλά κατά ένα τέτοιο τρόπο που η ποσότητα $\mu \equiv m |\delta z_1|$ να παραμένει ορισμένη και σταθερή. Τότε οι αντιπαραιθέμενες ίσες και αντίθετες γραμμικές πηγές στο A λέγεται ότι συνιστούν ένα γραμμικό ζεύγος έντασης μ , ανά μονάδα μήκους. Η \vec{AB} δίδει τη διεύθυνση του άξονα του ζεύγους. Άρα, στο όριο, το μιγαδικό δυναμικό στο P, είναι:

$$\omega = \mu e^{i\alpha} (z - z_1)^{-1}$$

7.5.4. Δινογραμμές

Αν για μία δισδιάστατη ροή η $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$, όπου $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, τότε το διάνυσμα στροβιλότητας $\vec{\zeta}$ δίδεται από τη σχέση:

$$\vec{\zeta} = \nabla \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \vec{k}$$

Δείχνοντας ότι σε δισδιάστατη ροή το διάνυσμα στροβιλότητας είναι κάθετο στο επίπεδο ροής.

Θα μελετήσουμε τώρα τη δισδιάστατη ροή για την οποία

$$\omega = \left(\frac{i\kappa}{2\pi}\right) \log z$$

όπου κ είναι μία πραγματική σταθερά. Θέτοντας $z = r e^{i\theta}$ έχουμε:



$$\varphi = -\frac{\kappa\theta}{2\pi}, \quad \psi = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \log r$$

Συνεπώς, οι ρευματογραμμές στο επίπεδο της ροής είναι ομόκεντροι κύκλοι με $r = \text{σταθερά}$ και οι ισοδυναμικές είναι τα ακτινικά διανύσματα $\theta = \text{σταθερά}$, που διέρχονται από την αρχή. Οι δύο οικογένειες είναι μεταξύ τους ορθογώνιες και φ, ψ είναι αρμονικές συναρτήσεις. Οι ακτινικές και λοξές συνιστώσες της ταχύτητας είναι:

$$V_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\kappa}{2\pi r}$$

Η κυκλοφορία Γ γύρω από μία κλειστή καμπύλη C που περιβάλλει το αρχικό σημείο O και βρίσκεται στο επίπεδο της ροής, δίδεται από τη σχέση:

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

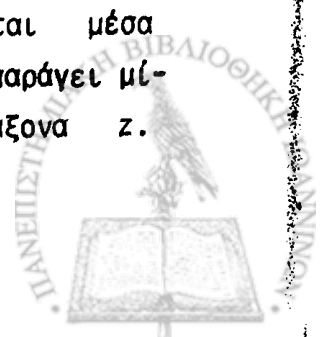
Λαμβάνοντας, $\vec{V} = \hat{\theta} \left(\frac{\kappa}{2\pi r}\right)$, $d\vec{s} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta}$, έχουμε:

$$\vec{V} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) d\theta$$

και έτσι,

$$\Gamma = \frac{\kappa}{2\pi} \oint_C d\theta = \frac{\kappa}{2\pi} \times 2\pi = \kappa.$$

Αν η C δεν περικλείει το O , τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι η Γ είναι μηδέν. Άρα, δείξαμε ότι, μία δισδιάστατη κατανομή, η οποία έχει ένα μιγαδικό δυναμικό ταχύτητας $\omega = \left(\frac{i\kappa}{2\pi}\right) \log z$ (όπου κ είναι μία πραγματική σταθερά), δίδει μία κυκλοφορία γύρω από κάθε κλειστή καμπύλη C στο επίπεδο ροής, η οποία περικλείει την αρχή O , ποσού κ . Επίσης, γύρω από κάθε άλλη καμπύλη στο επίπεδο της ροής, η οποία δεν περικλείει το O , η κυκλοφορία είναι μηδέν. Περαιτέρω, οι ρευματογραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι με $r = \text{σταθερά}$ και οι ισοδυναμικές οι γραμμές $\theta = \text{σταθερά}$ που διέρχονται από το O . Μία τέτοια μορφή λαμβάνεται σε κάθε επίπεδο κάθετο στον άξονα z . Κάμνοντας την επιφάνεια η οποία περιέχεται μέσα στη C απειροστά μικρή βλέπουμε ότι η κατανομή, η οποία παράγει μία τέτοια ροή πρέπει να είναι ομοιόμορφη κατά μήκος του άξονα z .



Μία τέτοια κατανομή κατά μήκος του άξονα καλείται ομοιόμορφος γραμμικός στρόβιλος έντασης κ (ομοιόμορφη δινογραμμή έντασης κ).

Φθάνουμε τότε στον ακόλουθο ορισμό μιας ομοιόμορφης δινογραμμής. Είναι μία ομοιόμορφη κατανομή κατά μήκος μιας απείρως εκτεινόμενης γραμμής έτσι, ώστε η κυκλοφορία γύρω από κάθε καμπύλη C που βρίσκεται σε κάποιο επίπεδο κάθετο σε αυτή τη γραμμή να είναι μία σταθερά κ, όταν η C περικλείει την τομή της γραμμής και του επιπέδου και να είναι μηδέν, όταν η C δεν περικλείει την τομή. Η ένταση μιας τέτοιας ομοιόμορφης δινογραμμής ορίζεται ότι είναι κ και το μιγαδικό δυναμικό της ταχύτητας είναι $(\frac{i\kappa}{2\pi}) \log z$, όταν η αρχή λαμβάνεται στην τομή του επιπέδου με τη γραμμή. Όταν η γραμμή τέμνει το επίπεδο στο $z = z_0$, το μιγαδικό δυναμικό εύκολα φαίνεται ότι είναι:

$$\omega = (\frac{i\kappa}{2\pi}) \log (z - z_0)$$

Αυτό προκύπτει με τη μετακίνηση της αρχής στο $z = z_0$. Παρεμπιπτόντως παρατηρούμε ότι για την κατανομή $\omega = (i\kappa/2\pi) \log z$ η κυκλοφορία Γ γύρω από κάθε κλειστή καμπύλη C, όχι αναγκαστικά επίπεδη και όχι αναγκαστικά σε κάθε επίπεδο της ροής, είναι ακόμη κ, όταν η C περιβάλλει τον άξονα z και μηδέν όταν όχι. Γι αυτή την περίπτωση ισχύει:

$$\vec{V} = \hat{\theta}(\frac{\kappa}{2\pi r}), \quad d\vec{s} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + dz\hat{k}$$

έτσι που $\vec{V} \cdot d\vec{s} = (\frac{\kappa}{2\pi}) d\theta$, όπως προηγουμένως.

Για την κατανομή $\omega = (\frac{i\kappa}{2\pi}) \log z$, βλέπουμε ότι οι ρευματογραμμές στο επίπεδο ροής είναι οι ομόκεντροι κύκλοι $r = \text{σταθερά}$, κέντρου O. Αυτό συνεπάγεται, ότι μπορούμε να εισάγουμε μία στερεά οριακή επιφάνεια στον κύκλο $r = a$. Άρα, το μιγαδικό δυναμικό της ταχύτητας:

$$\omega = (\frac{i\kappa}{2\pi}) \log z, \quad |z| \geq a$$

θα δώσει αστρόβιλη ροή έξω από τον κύλινδρο $|z| = a$ άπειρου μήκους,



ενώ το ρευστό ευρισκόμενο σε ηρεμία στο άπειρο, θα έχει κυκλοφορία κ γύρω από τον κύλινδρο.

7.6. Το θεώρημα του Κύκλου του Milne-Thomson

Αν ένας όρθιος κυκλικός κύλινδρος απείρου μήκους εισαχθεί σε μία δεδομένη δισδιάστατη ροή, ο άξονας του οποίου είναι ευθυγραμμισμένος με τον άξονα συντεταγμένων τον κάθετο στο επίπεδο της ροής, είναι δυνατόν να εξαχθεί μία γενική έκφραση για το νέο δυναμικό της ταχύτητας έξω από τον κύλινδρο. Σε αυτή την περίπτωση θεμελιώνουμε ένα σημαντικό θεώρημα που οφείλεται στον καθηγητή L. M. Milne-Thomson. Πρώτα εξηγούμε κάποια ορολογία η οποία περιλαμβάνει συζυγείς των μιγαδικών συναρτήσεων.

Υποθέτουμε, ότι t είναι μία πραγματική μεταβλητή και ότι

$$f(t) = U(t) + i V(t)$$

$U(t)$, $V(t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις, όταν το t είναι πραγματικό. Τότε η $f(t)$ είναι εδώ μία μιγαδική συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής t . Η συζυγής της $f(t)$ ορίζεται ότι είναι:

$$\bar{f}(t) = U(t) - i V(t)$$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε την πραγματική μεταβλητή t με τη μιγαδική $z = x + iy$, τότε οι $f(z)$, $\bar{f}(z)$ ορίζονται ότι είναι:

$$f(z) = U(z) + i V(z)$$

$$\bar{f}(z) = U(z) - i V(z)$$

Ακόμη, οι συναρτήσεις $f(\bar{z})$, $\bar{f}(\bar{z})$ δίδονται από τις σχέσεις:

$$f(\bar{z}) = U(\bar{z}) + i V(\bar{z})$$

$$\bar{f}(\bar{z}) = U(\bar{z}) - i V(\bar{z})$$

Αν συγκρίνουμε τους παραπάνω τύπους για τις $f(z)$, $\bar{f}(\bar{z})$, βλέπουμε



ότι, αφού $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, η τιμή της $\bar{f}(\bar{z})$ λαμβάνεται από την $f(z)$ δι'αντικατάσταση του i σε αυτή με το $-i$. Με άλλα λόγια $\bar{f}(\bar{z})$ είναι η συζυγής μιγαδική της $f(z)$ και μπορούμε να γράψουμε $\bar{f}(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Μετά, εισάγουμε την ιδέα των ιδιομορφιών σε δισδιάστατες υδροδυναμικές ροές. Θα ξαναθυμηθούμε, ότι τα μιγαδικά δυναμικά, λόγω μιας γραμμικής πηγής, ενός γραμμικού ζεύγους και μιας στροβιλογραμμής, έχουν το καθένα τις αντίστοιχες μορφές:

$$-m \log(z - z_1), \quad \frac{\mu e^{i\alpha}}{z - z_1}, \quad \frac{i\kappa}{2\pi} \log(z - z_1)$$

με το συνήθη συμβολισμό. Κάθε μία από τις συναρτήσεις αυτές έχει μία ιδιομορφία στο $z = z_1$: Σε κάθε άλλο σημείο κάθε μία από αυτές είναι αναλυτική. Στην παραπάνω περίπτωση οι ιδιομορφίες της $f(z)$ είναι εκείνες των $U(z)$ και $V(z)$ και άρα, είναι επίσης ίδιες και για την $\bar{f}(z)$. Η διατύπωση του θεωρήματος του κύκλου είναι:

Έστω $f(z)$, ότι είναι το μιγαδικό δυναμικό της ταχύτητας για μία ροή, η οποία δεν έχει στερεά όρια και τέτοια που να μην υπάρχουν ιδιομορφίες της ροής μέσα στον κύκλο $|z| = a$. Τότε, με την εισαγωγή του στερεού κυκλικού κυλίνδρου $|z| = a$ μέσα στη ροή, το νέο μιγαδικό δυναμικό ταχύτητας δίδεται από τη σχέση:

$$\omega = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right) \quad \text{για} \quad |z| \geq a$$

Απόδειξη: Όλες οι ιδιομορφίες της $f(z)$ (στις οποίες γραμμικές πηγές, καταβόθρες, ζεύγη ή δίνες μπορεί να είναι παρόντα) συμβάλουν στην περιοχή $|z| > a$ και έτσι, οι ιδιομορφίες της $\bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$ κείνται στην περιοχή $|z| < a$. Άρα, οι ιδιομορφίες της $f\left(\frac{a^2}{z}\right)$ κείνται, επίσης, στην $|z| < a$. Κατά συνέπεια οι $f(z)$ και $f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$ έχουν τις ίδιες ιδιομορφίες στην περιοχή $|z| > a$ και έτσι, και οι δύο συναρτήσεις, θεωρούμενες ως μιγαδικά δυναμικά ταχύτητας μπορούν να αποδίδονται στις ίδιες υδροδυναμικές κατανομές στην περιοχή $|z| > a$.

Στον κύκλο $|z| = a$, λαμβάνουμε $z = ae^{i\theta}$. Έπειτα $\frac{a^2}{z} = ae^{-i\theta}$ και έτσι,

$$\omega = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right) = f(ae^{i\theta}) + \bar{f}(ae^{-i\theta}) = f(ae^{i\theta}) + \overline{f(ae^{i\theta})}$$



Επομένως, στον $|z| = a$, το ω είναι το άθροισμα μίας μιγαδικής ποσότητας και της συζυγούς μιγαδικής της και είναι, άρα, πραγματικός αριθμός. Συνεπώς, $\psi = \text{Im}(\omega) = 0$ στον $|z| = a$. Αυτό δείχνει, ότι το κυκλικό όριο είναι μία ρευματογραμμή που δε διατρέχεται από ροή ρευστού. Άρα, το $|z| = a$ είναι ένα πιθανό όριο για τη νέα ροή και $\eta \cdot \omega = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$ είναι το κατάλληλο μιγαδικό δυναμικό της ταχύτητας για τη νέα ροή.

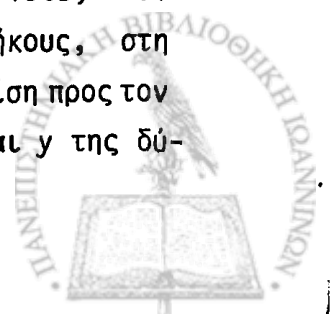
7.7. Το θεώρημα του Blasius

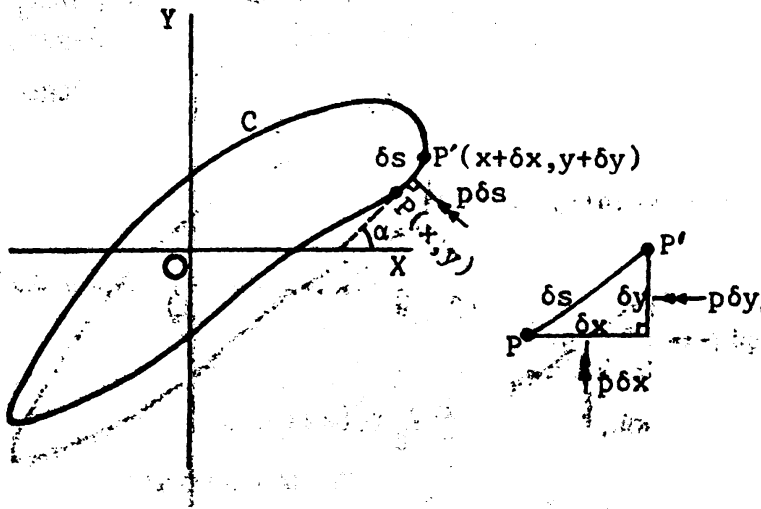
Όταν ένας μακρύς κύλινδρος τοποθετείται με τους γεννήτορές του κάθετους προς το προσπίπτον ρεύμα ενός κινούμενου ρευστού, που περικλείει υδροδυναμικές ιδιομορφίες, ο κύλινδρος υπόκειται σε δυνάμεις που τείνουν να παράγουν μεταφορά και περιστροφή του. Αυτές οι επιδράσεις υπολογίζονται με τη χρήση του παρακάτω θεωρήματος που οφείλεται στον Blasius. Ο κύλινδρος μπορεί να είναι οποιασδήποτε γενικής διατομής. Στην πράξη μπορεί να είναι μία αεροδυναμική τομή. Περιορίζουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση που το ρευστό είναι ασυμπύεστο.

Ένα ασυμπύεστο ρευστό κινείται στατικά και αστρόβιλα χωρίς την επίδραση εξωτερικών παραλλήλων προς το επίπεδο z δυνάμεων, διαβρέχει ένα ακίνητο κύλινδρο του οποίου η διατομή σε αυτό το επίπεδο περιβάλλεται από μία κλειστή καμπύλη C . Το μιγαδικό δυναμικό της ροής είναι ω . Τότε η δράση της πίεσης του ρευστού στον κύλινδρο είναι ισοδύναμη με μία δύναμη, ανά μονάδα μήκους η οποία έχει συνιστώσες $[X, Y]$ και ένα ζεύγος ανά μονάδα μήκους, ροπής M , όπου

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \oint_C \left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2 dz; \quad M = \text{Re}\left\{-\frac{\rho}{2} \oint_C z \left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2 dz\right\}$$

Απόδειξη: Το Σχ 7.4, δείχνει τη διατομή C του κυλίνδρου στο επίπεδο $XO\psi$. Το PP' είναι στοιχείο τόξου της C μήκους δs . Τότε, αν το p συμβολίζει την πίεση στο P , η δύναμη ανά μονάδα μήκους, στη διατομή δs είναι $p\delta s$ και κάθετη στη C . Αν α είναι η κλίση προς τον $O\bar{X}$ της εφαπτομένης της C στο P , τότε οι συνιστώσες x και y της δύ-





Σχήμα 7.4

ναυης αυτής είναι:

$$- \rho \delta s \sin \alpha = -\rho \delta y; \quad \rho \delta s \cos \alpha = \rho \delta x$$

Άρα, $X = -\oint_C \rho dy;$ $Y = \oint_C \rho dx,$ οπότε,

$$Y + iX = \oint_C \rho (dx - idy)$$

Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση του Bernoulli γράφεται:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\vec{V}^2}{2} = C$$

όπου \vec{V} είναι η ταχύτητα του ρευστού, p η πίεση, ρ η πυκνότητα

Συνεπώς,

$$p = \rho C - \frac{\rho \vec{V}^2}{2}$$

$$Y + iX = \rho C \oint_C (dx - idy) - \frac{\rho}{2} \oint_C \vec{V}^2 (dx - idy) =$$

$$= -\frac{\rho}{2} \oint_C \vec{V}^2 \left(\frac{dx}{ds} - i \frac{dy}{ds} \right) ds = -\frac{\rho}{2} \oint_C V^2 (\cos \alpha - i \sin \alpha) ds$$

Αλλά $\frac{d\omega}{dz} = -u + iv = -ve^{-i\alpha}$. Συνεπώς, $\vec{V}^2 = e^{2i\alpha} \left(\frac{d\omega}{dz} \right)^2$ και έτσι,

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \oint_C \left(\frac{d\omega}{dz} \right)^2 e^{i\alpha} ds = -\frac{\rho}{2} \oint_C \left(\frac{d\omega}{dz} \right)^2 dz$$



Η ροπή ως προς το 0 των συνιστωσών της δύναμης $[-p\delta y, p\delta x]$ είναι δM , όπου

$$\delta M = p x \delta x + p y \delta y$$

έτσι, η ολική ροπή ως προς το 0 είναι:

$$\begin{aligned} M &= \oint_C p(xdx + ydy) = \oint_C \left(pC - \frac{\rho V^2}{2} \right) (xdx + ydy) \\ &= -\frac{\rho}{2} \oint_C V^2 (xdx + ydy) \end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} z \left(\frac{d\omega}{dz} \right)^2 dz &= (x + iy) V^2 e^{-2i\alpha} (dx + i dy) \\ &= (x + iy) V^2 e^{-2i\alpha} e^{i\alpha} ds \\ &= V^2 (x + iy) (\cos \alpha - i \sin \alpha) ds \\ &= V^2 (x + iy) (dx - i dy) \\ &= V^2 (xdx + ydy) + i V^2 (ydx - xdy) \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$M = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{\rho}{2} \oint_C z \left(\frac{d\omega}{dz} \right)^2 dz \right\}$$

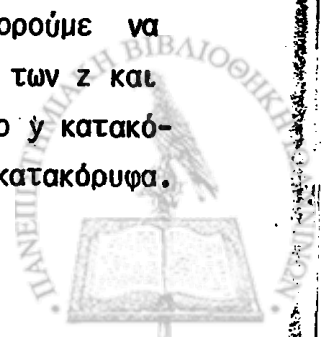
Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων για τα $\gamma + i\chi$ και M , πραγματοποιείται με το λογισμό των υπολοίπων.

7.8. Η Χρήση του Σύμμορφου Μετασχηματισμού.

Υποθέτουμε, ότι z και t είναι δύο μιγαδικές μεταβλητές, οι οποίες ορίζονται από τις ισότητες:

$$z = x + iy, \quad t = \xi + i\eta$$

όπου x, y, ξ, η είναι πραγματικές μεταβλητές. Τότε, μπορούμε να σχηματίσουμε δύο διαγράμματα του Argand για τους τύπους των z και t . Στο πρώτο διάγραμμα το x σχεδιάζεται οριζόντια και το y κατακόρυφα. Στο δεύτερο, το ξ σχεδιάζεται οριζόντια και το η κατακόρυφα.



Τώρα, υποθέτουμε, ότι το z διαγράφει μία ορισμένη καμπύλη C στο επίπεδο x, y και ότι το t συνδέεται με το z μέσω του μετασχηματισμού

$$t = g(z)$$

Αν η $g(z)$ είναι μία μονότιμη συνάρτηση του z , τότε σε κάθε σημείο του επιπέδου z μπορούμε να έχουμε ένα αντίστοιχο σημείο στο επίπεδο t . Με αυτόν τον τρόπο η καμπύλη C στο επίπεδο z μπορεί να απεικονιστεί στην καμπύλη C' του επιπέδου t .

Μπορούμε, τώρα, να κάνουμε την υπόθεση ότι η συνάρτηση $g(z)$ είναι αναλυτική και ότι τα P, P_1, P_2 είναι γειτονικά σημεία στο επίπεδο z , τέτοια ώστε:

$$\vec{OP} \equiv z, \quad \vec{OP}_1 \equiv z + \delta z_1, \quad \vec{OP}_2 \equiv z + \delta z_2$$

Κάτω από το δοθέντα μετασχηματισμό $t = g(z)$, υποθέτουμε ότι τα P, P_1, P_2 απεικονίζονται στα σημεία Q, Q_1, Q_2 του επιπέδου t , όπου:

$$\vec{OQ} \equiv t, \quad \vec{OQ}_1 \equiv t + \delta t_1, \quad \vec{OQ}_2 \equiv t + \delta t_2$$

Υποτίθεται, ότι τα $|\delta z_1|, |\delta z_2|, |\delta t_1|, |\delta t_2|$ είναι μικρά. Τα σημεία δείχνονται στο Σχ. 7.5 (1), (1i).

Αφού η $g(z)$ είναι αναλυτική, η $\frac{dt}{dz}$ είναι μία και μόνη στο P . Έτσι, σε πρώτη προσέγγιση σμίκρυνσης, ισχύει:

$$\frac{\delta t_1}{\delta z_1} = \frac{\delta t_2}{\delta z_2} \quad \text{ή} \quad \frac{\delta t_1}{\delta t_2} = \frac{\delta z_1}{\delta z_2}$$

Συνεπώς,

$$\left| \frac{\delta t_1}{\delta t_2} \right| = \left| \frac{\delta z_1}{\delta z_2} \right| \quad (1)$$

και

$$\text{ορσ } \delta t_1 - \text{ορσ } \delta t_2 = \text{ορσ } \delta z_1 - \text{ορ } \delta z_2 \quad (2)$$

Από την (1), βλέπουμε ότι

$$\frac{QQ_1}{QQ_2} = \frac{PP_1}{PP_2} \quad (1')$$



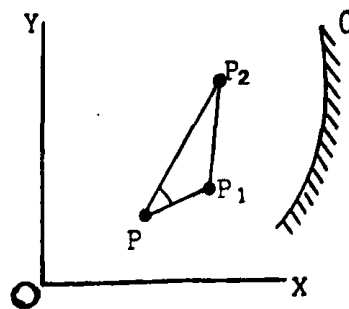
και από την (2), αντιστρέφοντας τα πρόσημα σε κάθε μέλος,

$$Q_2 \hat{Q}Q_1 = P_2 \hat{P}P_1 \quad (2')$$

Οι εξ. (1'), (2') δείχνουν ότι τα τρίγωνα Q_2Q_1Q , P_2P_1P είναι όμοια. Διαφορετική διατύπωση μπορεί να είναι η εξής: Μέσα στη γειτονική περιοχή κάθε σημείου P του επιπέδου z και στην αντίστοιχη απεικόνισή της στο επίπεδο t , οι γωνίες παραμένουν αμετάβλητες (βλέπε εξ. (2')) και το ίδιο γίνεται με τους λόγους των αντιστοίχων γραμμικών διαστάσεων, όταν η απεικόνιση λαμβάνει χώραν κάτω από ένα μετασχηματισμό της μορφής $t = g(z)$, όπου η $g(z)$ είναι αναλυτική στο P και μέσα στη γειτονική του περιοχή. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός λέγεται σύμμορφος.

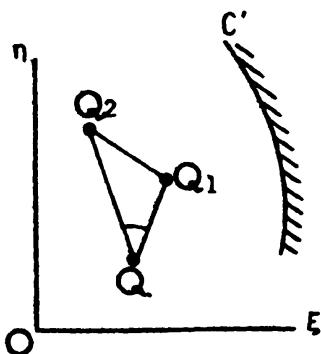
7.8.1. Μερικές Υδροδυναμικές Απόψεις επί του Σύμμορφου Μετασχηματισμού.

Υποθέτουμε, ότι έχουμε μία δισδιάστατη ασυμπιεστή ροή, με επίπεδο ροής το επίπεδο z του Σχ. 7.5 (i). Εφαρμόζοντας το σύμμορφο μετασχηματισμό $t = g(z)$, νέο επίπεδο ροής είναι το επίπεδο t του Σχ. 7.5 (ii). Έστω ρ , ότι είναι η πυκνότητα του ρευστού και στις δύο περιπτώσεις. Υποθέτουμε ακόμη ότι η C είναι μία στερεά οριακή επιφάνεια στο επίπεδο z , η οποία απεικονίζεται στην καμπύλη C' του



Σχήμα 7.5 (i)





Σχήμα 7.5 (ii)

επιπέδου t . Έστω ότι το μιγαδικό δυναμικό της ταχύτητας για το επίπεδο z , είναι:

$$\omega = f(z) = \varphi + i\psi$$

όπου οι πραγματικές συναρτήσεις $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ είναι το γνωστό δυναμικό της ταχύτητας και η ρευματοσυνάρτηση, αντιστοίχως. Με το μετασχηματισμό $t = g(z)$ μπορούμε να εκφράσουμε το ω ως μία συνάρτηση $\bar{f}(t)$ της μορφής

$$\omega = \bar{f}(t) = \bar{\varphi} + i\bar{\psi},$$

όπου $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\xi, \eta)$, $\bar{\psi} = \bar{\psi}(\xi, \eta)$. Στα αντίστοιχα σημεία t, z , το ω λαμβάνει τις ίδιες τιμές, οπότε:

$$\varphi = \bar{\varphi}, \quad \psi = \bar{\psi}$$

Η C είναι ένα στερεό όριο και το ίδιο είναι μία ρευματογραμμή για την οποία ισχύει $\psi = \text{σταθερά}$. Άρα, κατά μήκος της C' , η $\bar{\psi} = \text{σταθερά}$, δείχνει ότι η C' είναι μία ρευματογραμμή και συνεπώς, επίσης, μία στερεά οριακή επιφάνεια.

Στη θεωρία η ω μπορεί να εκφραστεί ως μία συνάρτηση του t απαλείφοντας το z από τις $\omega = f(z)$ και $t = g(z)$ αλλά είναι πρακτικότερο να χρησιμοποιείται το αποτέλεσμα,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{1}{g'(z)} \cdot \frac{d\omega}{dz}$$



Συνεπώς,

$$\left| \frac{d\omega}{dz} \right|^2 = \left| \frac{d\omega}{dt} \right|^2 \left| \frac{dt}{dz} \right|^2$$

Αναφερόμενοι στο Σχ. 7.5 (i), η κινητική ενέργεια της μονάδας του βάθους του υγρού στοιχείου μέσα στο τρίγωνο PP_1P_2 , είναι:

$$\begin{aligned} \delta T &= \frac{1}{2} \rho \times \text{εμβαδό τριγώνου } PP_1P_2 \times (\text{ταχύτητα του } P)^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho (\text{τριγ. } PP_1P_2) \cdot \left| \frac{d\omega}{dz} \right|^2 = \frac{1}{2} \rho (\text{τριγ. } PP_1P_2) \left| \frac{d\omega}{dt} \right|^2 \left| \frac{dt}{dz} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho (\text{τριγ. } QQ_1Q_2) \left| \frac{d\omega}{dt} \right|^2 \end{aligned}$$

Η τελευταία έκφραση είναι η κινητική ενέργεια της μονάδας του βάθους του υγρού στοιχείου μέσα στο τρίγωνο QQ_1Q_2 του Σχ. 7.5 (ii). Πρόσθεση για ολόκληρες τις περιοχές του ρευστού στα επίπεδα z και t , δίδει:

$$\begin{aligned} \text{Ολική Κ. Ε. του υγρού στο επίπεδο } z \text{ (ανά μονάδα βάθους)} &= \\ &= \text{Ολική Κ. Ε. του υγρού στο επίπεδο } t \text{ (ανά μονάδα βάθους)}. \end{aligned}$$

Γενικά,

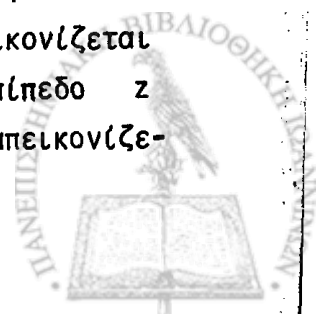
$$\left| \frac{d\omega}{dz} \right| \neq \left| \frac{d\omega}{dt} \right|$$

ώστε οι ταχύτητες στα αντίστοιχα σημεία των επιπέδων z και t δεν είναι ίσες. Οι ολικές Κ.Ε των αντιστοίχων επιφανειών είναι ίδιες, αλλά είναι διαφορετικά κατανεμημένες στις αντίστοιχες επιφάνειες.

Θεμελιώνουμε τώρα μερικά θεωρήματα, τα οποία αφορούν το σύμμορφο μετασχηματισμό των γραμμικών πηγών.

Θεώρημα I: Με το σύμμορφο μετασχηματισμό μία ομοιόμορφη γραμμική πηγή απεικονίζεται σε μία άλλη ομοιόμορφη γραμμική πηγή της ίδιας έντασης.

Απόδειξη: Έστω, ότι υπάρχει μία ομοιόμορφη γραμμική πηγή έντασης m , ανά μονάδα μήκους, η οποία διέρχεται από το σημείο $z = z_0$ και υποθέτουμε, ότι ο σύμμορφος μετασχηματισμός $t = g(z)$ γίνεται από το επίπεδο z στο t , έτσι που το σημείο $z = z_0$ να απεικονίζεται στο $t = t_0$. Έστω C , ότι είναι μία κλειστή καμπύλη στο επίπεδο z και περικλείει το σημείο $z = z_0$ και υποθέτουμε, ότι η C απεικονίζε-



ται στη C' του επιπέδου t . Τότε, το $t = t_0$ κείται μέσα στη C' . Το μιγαδικό δυναμικό ω είναι το ίδιο και για τα δύο συστήματα και έχει τη μορφή,

$$\begin{aligned}\omega &= \varphi + i\psi \quad \text{για το επίπεδο } z \\ &= \varphi' + i\psi' \quad \text{για το επίπεδο } t\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\varphi = \varphi'$, $\psi = \psi'$. Επειδή, το ψ είναι το ίδιο στα αντίστοιχα σημεία των C και C' , ισχύει:

$$\oint_C d\psi = \oint_{C'} d\psi' \quad (1)$$

Τώρα, στο επίπεδο z είναι:

$$\omega = -m \log(z - z_0), \quad d\omega = -m \frac{dz}{z - z_0}$$

Άρα,

$$\oint_C d\omega = -m \oint_C \frac{dz}{z - z_0} = -m \times 2\pi i$$

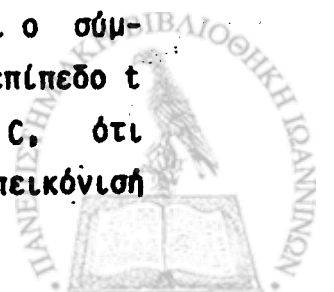
αφού το ολοκλήρωμα έχει υπόλοιπο 1 στο $z = z_0$. Αλλά, $d\omega = d\varphi + i d\psi$, έτσι ώστε, εξέλιξη των φανταστικών μερών δίδει:

$$\oint_C d\psi = -2\pi m \quad (2)$$

Η αριθμητική τιμή αυτού είναι ο όγκος του ρευστού που διασχίζει τη μονάδα πάχους της C , ανά μονάδα χρόνου. Συνεπώς οι εξ. (1) και (2) δείχνουν, ότι ο ίδιος όγκος διασχίζει τη μονάδα πάχους της C' , ανά μονάδα χρόνου, το οποίο συνεπάγεται μία ίση γραμμική πηγή έντασης m , ανά μονάδα μήκους που διέρχεται από το σημείο $t = t_0$.

Θεώρημα II: Με σύμμορφο μετασχηματισμό μία ομοιόμορφη στροβιλογραμμή απεικονίζεται σε μία άλλη ομοιόμορφη στροβιλογραμμή της ίδιας έντασης.

Απόδειξη: Έστω, ότι μία ομοιόμορφη στροβιλογραμμή έντασης k , ανά μονάδα μήκους, από το σημείο $z = z_0$ και υποθέτουμε, ότι ο σύμμορφος μετασχηματισμός $t = g(z)$ γίνεται από το επίπεδο z στο επίπεδο t έτσι, που το σημείο $z = z_0$ απεικονίζεται στο $t = t_0$. Έστω C , ότι είναι μία κλειστή καμπύλη περικλείουσα το $z = z_0$ και C' η απεικόνισή



της στο επίπεδο t . Τότε, η C' περικλείει το $t=t_0$. Το μιγαδικό δυναμικό είναι το ίδιο και για τα δύο συστήματα και έχει τις μορφές:

$$\begin{aligned}\omega &= \varphi + i\psi && \text{για το επίπεδο } z \\ &= \varphi' + i\psi' && \text{για το επίπεδο } t\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\varphi = \varphi'$, $\psi = \psi'$. Αφού το φ είναι το ίδιο σε αντίστοιχα σημεία των C , C' ,

$$\oint_C d\varphi = \oint_{C'} d\varphi' \quad (1)$$

Τότε, στο επίπεδο z το μιγαδικό δυναμικό είναι

$$\omega = \left(\frac{i\kappa}{2\pi}\right) \log(z - z_0)$$

οπότε,

$$\oint_C d\omega = \frac{i\kappa}{2\pi} \oint_C \frac{dz}{z - z_0} = \frac{i\kappa}{2\pi} 2\pi i = -\kappa$$

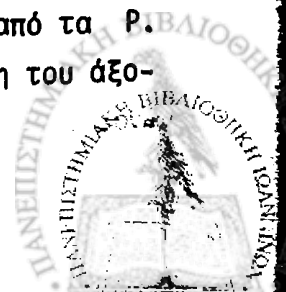
Εξισώνοντας τα πραγματικά μέρη έχουμε:

$$-\oint_C d\varphi = +\kappa \quad (2)$$

Το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους είναι η κυκλοφορία γύρω από τη C . Οι εξ. (1), (2), άρα, δείχνουν ότι η κυκλοφορία γύρω από τη C' είναι επίσης κ . Συνεπώς, λόγω της αυθαίρετης επιλογής των C και C' , η γραμμική πηγή που διέρχεται από το $z = z_0$ έντασης κ , ανά μονάδα μήκους απεικονίζεται σε μία ίση γραμμική πηγή που διέρχεται από το $t = t_0$.

Θεώρημα III: Με σύμμορφο μετασχηματισμό ένα γραμμικό ζεύγος απεικονίζεται σε ένα ομοιόμορφο γραμμικό ζεύγος διαφορετικής έντασης.

Απόδειξη: Έστω, ότι έχουμε ένα ομοιόμορφο γραμμικό ζεύγος έντασης μ , ανά μονάδα μήκους από το P όπου $z = z_0$ και υποθέτουμε ότι με το σύμμορφο μετασχηματισμό $t = g(z)$, το P απεικονίζεται στο Ω , όπου $t = t_0$. Έστω, ότι το γραμμικό ζεύγος αντικαθίσταται από ισοδύναμες γραμμικές πηγές έντασεως $-m$ και $+m$, ανά μονάδα μήκους από τα P , P' , όπου $PP' \equiv \delta z$, $\mu = m|\delta z|$ και το \vec{PP}' έχει τη διεύθυνση του άξο-



να του γραμμικού ζεύγους. Υποθέτουμε, ότι το P' απεικονίζεται στο Q' . Τότε, οι γραμμικές πηγές εντάσεων $-m$, $+m$, ανά μονάδα μήκους, από τα P , P' , απεικονίζονται σε πηγές με εντάσεις $-m$, $+m$, ανά μονάδα μήκους από τα Q, Q' . Αν $Q\bar{Q}' \equiv \delta t$, τότε $\delta t = g'(z)\delta z$, έτσι ισχύει:

$$|\delta t| = |g'(z)| \cdot |\delta z|, \quad \text{ορσ } \delta t = \text{ορσ.} g'(z) + \text{ορσ } \delta z$$

Άρα, οι δύο γραμμικές πηγές από τα Q, Q' δίδουν ένα γραμμικό ζεύγος στο Q έντασης μ' , όπου

$$\mu' = m|\delta t| = \mu|g'(z)|$$

Η κλίση του άξονα του γραμμικού ζεύγους προς τον πραγματικό άξονα αυξάνεται κατά $\text{ορσ } g'(z)$.

7.9. Σειρές Στροβίλων

Όταν ένα σώμα κινείται αργά δια μέσου ενός υγρού, σειρές στροβίλων (δινών) σχηματίζονται στο αυλάκι πίσω του. Οι δίνες αυτές μπορούν πολλές φορές να φωτογραφηθούν. Έδώ, θεωρούμε άπειρα συστήματα παραλλήλων δινογραμμών και θα προϋποθέσουμε δισδιάστατη ροή.

7.9.1. Απλή επάπειρη Σειρά Γραμμικών Δινών

Πρώτα, θεωρούμε την περίπτωση μίας απλής άπειρης σειράς δινών καθεμία από τις οποίες έχει ένταση κ στα σημεία

$$z = 0, \pm a, \pm 2a, \dots, \pm na, \dots$$

Το μιγαδικό δυναμικό της ταχύτητας λόγω των $(2n+1)$ πλησιεστέρων στην αρχή οινων, είναι:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \left(\frac{i\kappa}{2\pi}\right) \{ \log z + \log(z-a) + \log(z-2a) + \dots + \log(z-na) \\ &+ \log(z+a) + \log(z+2a) + \dots + \log(z+na) \} \\ &= \left(\frac{i\kappa}{2\pi}\right) \log \{ z(z^2-a^2)(z^2-4a^2) \dots (z^2-n^2a^2) \} \end{aligned}$$



$$= \frac{i\kappa}{2\pi} \log \left\{ \frac{\pi z}{a} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4a^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{n^2 a^2}\right) \right\} + \text{σταθερά}$$

Ο τελευταίος όρος δεν είναι τίποτε άλλο παρά μία άνευ σημασίας σταθερά. Αγνοώντας την και θέτοντας $\eta \rightarrow \infty$ λαμβάνουμε το μιγαδικό δυναμικό της ταχύτητας με τη μορφή:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{i\kappa}{2\pi} \log \left\{ \frac{\pi z}{a} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4a^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{\eta^2 a^2}\right) \dots \right\} \\ &= \left(\frac{i\kappa}{2\pi}\right) \log \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right), \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή μορφή του άπειρου γινομένου:

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{\eta^2 \pi^2}\right) \dots$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας βρίσκονται από τη σχέση:

$$-u + iu = \frac{d\omega}{dz} = \left(\frac{i\kappa}{2a}\right) \text{ συντεμν}\left(\frac{\pi z}{a}\right) = \left(\frac{i\kappa}{2a}\right) \frac{\cos\left\{\frac{\pi(x+iy)}{a}\right\} \cdot \sin\left\{\frac{\pi(x-iy)}{a}\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi(x+iy)}{a}\right\} \cdot \sin\left\{\frac{\pi(x-iy)}{a}\right\}}$$

όπου

$$u = \frac{\kappa \cdot \sin h(2\pi y/a)}{2a \cdot \cos h(2\pi y/a) - \cos(2\pi x/a)}$$

$$u = \frac{\kappa \cdot \sin(2\pi x/a)}{2a \cdot \cos h(2\pi y/a) - \cos(2\pi x/a)}$$

Εύκολα φαίνεται από τις σχέσεις αυτές, ότι όλες οι δίνες παραμένουν σε ηρεμία. Επίσης, μπορούμε εύκολα να δούμε, ότι καθώς το $y \rightarrow \infty$,

$$u = \bar{v} \left(\frac{\kappa}{2a}\right), \quad u \rightarrow 0$$

με το αρνητικό πρόσημο να ισχύει στην περιοχή $y > 0$ και το θετικό στην περιοχή $y < 0$. Άρα, πάνω από τη σειρά των δινών έχουμε ένα ομοιόμορφο ρεύμα ταχύτητας $\left(\frac{\kappa}{2a}\right)$ προς την αρνητική διεύθυνση του άξονα των x και κάτω από αυτήν ένα ομοιόμορφο ρεύμα ταχύτητας $\left(\frac{\kappa}{2a}\right)$ προς τη θετική διεύθυνση του x . Η κίνηση είναι κατά τέτοιο τρόπο σαν να έχουμε δύο στερεές τροχαλίες, οι οποίες γλιστρούν πάνω από ένα στρώμα κυλίνδρων που τις διαχωρίζει.



Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί, επίσης, να λυθεί με τη χρήση του σύμμορφου μετασχηματισμού $z = \sin\left(\frac{\pi Z}{a}\right)$. Έστω ότι υπάρχει μία στροβιλογραμμή έντασης κ που διέρχεται από το $z = 0$ στο επίπεδο z . Τότε, ο μετασχηματισμός απεικονίζει ολόκληρο το επίπεδο z στη λωρίδα $-\frac{a}{2} < \operatorname{Re}(z) \leq \frac{a}{2}$. Επίσης, και στις παράλληλες λωρίδες στο επίπεδο z . Η στροβιλογραμμή που διέρχεται από το $z = 0$, απεικονίζεται σε ίσες στροβιλογραμμές που διέρχονται από τα σημεία $z = 0, \pm a, \pm 2a, \dots$. Επίσης,

$$\omega = \frac{i\kappa}{2\pi} \log z = \frac{i\kappa}{2\pi} \log \sin\left(\frac{\pi Z}{a}\right)$$

7.9.2. Ο Στροβιλόδρομος του KARMAN

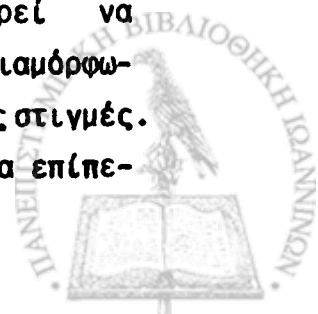
Υποθέτουμε, ότι έχουμε δύο παράλληλες σειρές, κάθε μία από τις οποίες περικλείει άπειρο αριθμό στροβιλογραμμών, διαταγμένων ως ακολούθως: Η πρώτη σειρά συνίσταται από στροβιλογραμμές έντασης κ στα σημεία, τα οποία έχουν καρτεσιανές συντεταγμένες $(n a, \frac{b}{2})$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Η δεύτερη σειρά συνίσταται από στροβιλογραμμές έντασης $-\kappa$ στα σημεία $(\frac{1}{2} \cdot 2n + 1 a, -\frac{b}{2})$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Μία τέτοια διάταξη καλείται στροβιλόδρομος του Karman. Το μιγαδικό δυναμικό της ταχύτητας μπορεί να βρεθεί είτε από πρώτες αρχές ή με τη χρήση του αποτελέσματος, το οποίο ελήφθη για μία απλή σειρά. Βρέθηκε ότι είναι:

$$\omega = \frac{i\kappa}{2\pi} \log \sin \frac{\pi}{a} \left(z - \frac{ib}{2}\right) - \frac{i\kappa}{2\pi} \log \sin \frac{\pi}{a} \left(z - \frac{a}{2} + \frac{ib}{2}\right).$$

Καμία από τις σειρές δε δίδει ταχύτητα. Η ταχύτητα του στροβίλου στο $z = \frac{a}{2} - \frac{ib}{2}$ δίδεται από τη

$$-u + iv = \frac{i\kappa}{2\pi} \frac{d}{dz} \left\{ \log \sin \frac{\pi}{a} \left(z - \frac{ib}{2}\right) \right\} \Big|_{(a-ib)/2} = -\frac{\kappa}{2a} \tanh\left(\frac{\pi b}{a}\right)$$

Παρομοίως, μπορούμε να δείξουμε, ότι κάθε άλλος στρόβιλος στην ίδια σειρά, κινείται με την ίδια ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι ολόκληρη η χαμηλότερη σειρά προχωρεί στη θετική διεύθυνση του x με ταχύτητα $(\kappa/2a) \tanh(\pi b/a)$. Ολόκληρη η ανώτερη σειρά μπορεί να δειχθεί, ότι προχωρεί με την ίδια ταχύτητα, έτσι, που η διαμόρφωση του στροβίλου παραμένει αμετάβλητη σε όλες τις χρονικές στιγμές. Ένας στροβιλόδρομος του Karman συχνά κατανοείται, όταν ένα επίπεδο πιάτο κινείται ανοικτό μέσα στο ρευστό.



8. ΡΟΗ ΙΞΩΔΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

8.1. Συνιστώσες Τάσης σ ένα Πραγματικό Ρευστό

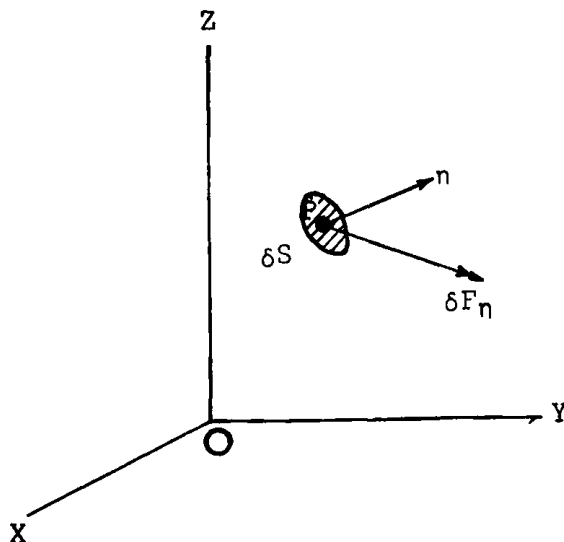
Έστω δS , ότι είναι μία μικρή στερεά επίπεση επιφάνεια, η οποία παρεμβάλλεται σε ένα σημείο P, μέσα σε ένα υγρό με ιξώδες. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) αναφέρονται σε ένα σύστημα σταθερών αξόνων Ox, Oy, Oz , (Σχ. 8.1). Υποθέτουμε, ότι $\delta \vec{F}_\eta$ είναι η δύναμη που ασκείται από το κινούμενο ρευστό στη μία πλευρά της δS , και $\vec{\eta}$ το μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο λαμβάνεται για να καθοριστεί η κάθετη, στο σημείο P, επί της δS σε αυτή την πλευρά. Γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση ρευστού χωρίς ιξώδες, η $\delta \vec{F}_\eta$ είναι ευθυγραμμισμένη με το $\vec{\eta}$. Για ένα ρευστό με ιξώδες, εντούτοις, εμφανίζονται δυνάμεις τριβής μεταξύ του ρευστού και της επιφάνειας έτσι, ώστε η $\delta \vec{F}_\eta$ θα έχει, επίσης, μία συνιστώσα εφαπτομένη της δS . Υποθέτουμε, ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες της $\delta \vec{F}_\eta$ είναι:

$$[\delta F_{\eta x}, \delta F_{\eta y}, \delta F_{\eta z}]$$

οπότε ισχύει:

$$\delta \vec{F}_\eta = \delta F_{\eta x} \vec{i} + \delta F_{\eta y} \vec{j} + \delta F_{\eta z} \vec{k}$$

Τότε, οι συνιστώσες της τάσης, οι παράλληλες προς τους άξονες ορίζονται ότι είναι $P_{\eta x}, P_{\eta y}, P_{\eta z}$, όπου:



Σχήμα 8.1



$$P_{nx} = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\delta F_{nx}}{\delta S} \right) = \frac{dF_{nx}}{dS}$$

$$P_{ny} = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\delta F_{ny}}{\delta S} \right) = \frac{dF_{ny}}{dS}$$

$$P_{nz} = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\delta F_{nz}}{\delta S} \right) = \frac{dF_{nz}}{dS}$$

Στις συνιστώσες P_{nx} , P_{ny} , P_{nz} , ο πρώτος δείκτης η δηλώνει τη διεύθυνση της κάθετης στο στοιχειώδες επίπεδο δS : ο 2ος δείκτης x , y ή z , δηλοί τη διεύθυνση κατά την οποία μετρείται η συνιστώσα. Αν ταυτίσουμε το \vec{n} στη σειρά με τα μοναδιαία διανύσματα \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} κατά τους άξονες $O\vec{X}$, $O\vec{Y}$, $O\vec{Z}$ (πράγμα που επιτυγχάνεται με κατάλληλο αναπροσανατολισμό της δS), λαμβάνουμε τα ακόλουθα τρία σύνολα συνιστωσών της τάσης:

$$P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}$$

$$P_{yx}, P_{yy}, P_{yz}$$

$$P_{zx}, P_{zy}, P_{zz}$$

Τα διαγώνια στοιχεία P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} της διάταξης αυτής καλούνται κάθετες ή άμεσες τάσεις. Τα έξη στοιχεία που απομένουν καλούνται διατμητικές τάσεις. Για ένα χωρίς ιξώδες ρευστό ισχύει:

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = -p$$

$$P_{xy} = P_{xz} = \dots = 0$$

Εδώ, θεωρούμε τις άμεσες τάσεις ως θετικές, όταν αυτές είναι τανυστικές και αρνητικές, όταν είναι συμπιεστικές, έτσι ώστε το p είναι η υδροστατική πίεση.

Ο πίνακας:

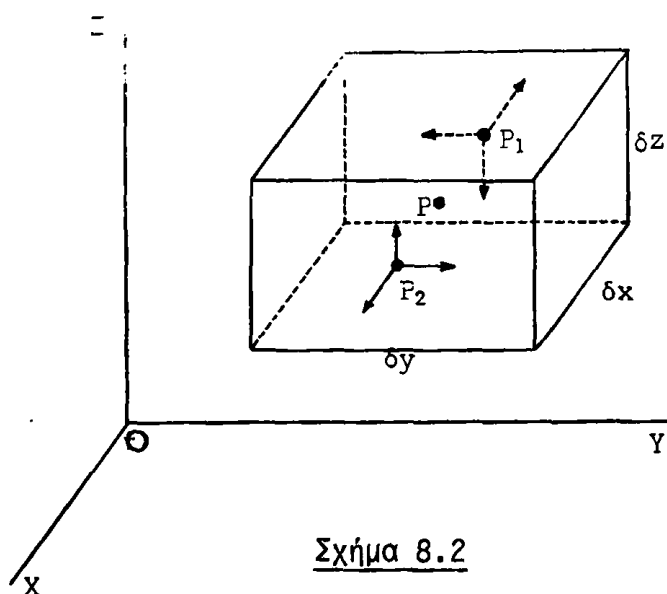
$$\begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{bmatrix}$$



καλείται πίνακας τάσης. Η γνώση των συνιστωσών της, μας δίδει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τις ολικές δυνάμεις για κάθε επιφάνεια σε κάθε επιλεγόμενο σημείο. Οι ποσότητες P_{ij} ($i, j = x, y, z$) καλούνται συνιστώσες του τανυστή τάσης, του οποίου ο πίνακας είναι της παραπάνω μορφής. Είναι φανερό, ότι οι P_{ij} αποτελούν ένα 2ας τάξης τανυστή.

8.2. Σχέσεις μεταξύ Καρτεσιανών Συνιστωσών Τάσης.

Θεωρούμε την κίνηση ενός μικρού ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου από ιξώδες ρευστό, με κέντρο $P(x, y, z)$ και του οποίου οι ακμές έχουν μήκη $\delta x, \delta y, \delta z$ παράλληλα προς τους ακίνητους Καρτεσιανούς άξονες (Σχ. 8.2). Η μάζα του στοιχείου του ρευστού $\rho \delta x \delta y \delta z$ παραμένει σταθερή και το στοιχείο προϋποτίθεται ότι κινείται μαζί με



Σχήμα 8.2

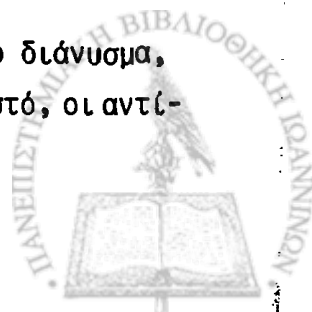
το ρευστό. Στο διάγραμμα τα σημεία P_1, P_2 έχουν συντεταγμένες

$$\left(x - \frac{\delta x}{2}, y, z\right), \left(x + \frac{\delta x}{2}, y, z\right)$$

Στο $P(x, y, z)$, οι συνιστώσες της δύναμης οι παράλληλες προς τους Ox, Oy, Oz που ασκούνται στην επιφάνεια εμβαδού $\delta y \cdot \delta z$ που διέρχεται από το P και έχει το \vec{i} ως μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, είναι:

$$[p_{xx} \delta y \delta z, p_{xy} \delta y \delta z, p_{xz} \delta y \delta z]$$

Στο $P_2(x + \frac{\delta x}{2}, y, z)$, αφού το \vec{i} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, το οποίο μετρείται με κατεύθυνση προς τα έξω από το ρευστό, οι αντί-



στοιχες συνιστώσες της δύναμης από το παράλληλο επίπεδο εμβαδού $\delta y \times \delta z$, είναι:

$$\left\{ p_{xx} + \frac{\delta x}{2} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \right) \right\} \delta y \delta z, \left\{ p_{xy} + \frac{\delta x}{2} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} \right) \right\} \delta y \delta z, \left\{ p_{xz} + \frac{\delta x}{2} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} \right) \right\} \delta y \delta z$$

Για το παράλληλο επίπεδο από το $P_1(x - \frac{\delta x}{2}, y, z)$ αφού \vec{i} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που σχεδιάζεται προς τα έξω από το στοιχείο του ρευστού, οι αντίστοιχες συνιστώσες είναι:

$$\left\{ -p_{xx} - \frac{\delta x}{2} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \right) \right\} \delta y \delta z, \left\{ -p_{xy} - \frac{\delta x}{2} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} \right) \right\} \delta y \delta z, \left\{ -p_{xz} - \frac{\delta x}{2} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} \right) \right\} \delta y \delta z$$

Οι δυνάμεις στα παράλληλα επίπεδα που διέρχονται από τα P_1 και P_2 είναι ισοδύναμες προς μία απλή δύναμη από το P , με συνιστώσες,

$$\left[\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}, \frac{\partial p_{xy}}{\partial x}, \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} \right] \delta x \delta y \delta z$$

μαζί με ζεύγη των οποίων οι ροπές (σε τρίτη προσέγγιση είναι:

$$-p_{xz} \delta x \delta y \delta z \quad \text{ως προς τον } Oy,$$

$$+p_{xy} \delta x \delta y \delta z \quad \text{ως προς τον } Oz$$

Ομοίως, το ζεύγος των επιφανειών των κάθετων στον άξονα y δίδει μία δύναμη στο P , η οποία έχει συνιστώσες

$$\left[\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}, \frac{\partial p_{yy}}{\partial y}, \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} \right] \delta x \delta y \delta z$$

με ζεύγη ροπών

$$-p_{yx} \delta x \delta y \delta z \quad \text{ως προς τον } Oz$$

$$+p_{yz} \delta x \delta y \delta z \quad \text{ως προς τον } Ox$$

Το ζεύγος των εδρών το κάθετο στον άξονα z , δίδει στο P μία δύναμη, η οποία έχει συνιστώσες

$$\left[\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}, \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}, \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z$$



με ζεύγη ροπών

$$- P_{zy} \delta x \delta y \delta z \quad \text{ως προς τον } ox,$$

$$+ P_{zx} \delta x \delta y \delta z \quad \text{ως προς τον } oy$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις επιφανειακές δυνάμεις και για τις έξη έδρες του παραλληλεπιπέδου, βλέπουμε ότι ανάγονται σε μία απλή δύναμη στο P, η οποία έχει συνιστώσες

$$\left[\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) \right] \delta x \delta y \delta z$$

με ένα διανυσματικό ζεύγος, το οποίο έχει καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\left[(p_{yz} - p_{zy}), (p_{zx} - p_{xz}), (p_{xy} - p_{yx}) \right] \delta x \delta y \delta z$$

Υποθέτουμε, τώρα, ότι οι εξωτερικές δυνάμεις, οι οποίες ενεργούν στο P είναι $[X, Y, Z]$ ανά μονάδα μάζας έτσι, ώστε η ολική εξωτερική δύναμη που δρα στο στοιχείο έχει συνιστώσες $[X, Y, Z] \rho \delta x \delta y \delta z$. Λαμβάνουμε ροπές ως προς τη διεύθυνση του \vec{i} , το οποίο διέρχεται από το P. Τότε οι ολικές δυνάμεις ροπής = Ροπή αδράνειας ως προς άξονα \times Γωνιακή Επιτάχυνση, δηλαδή,

$$(p_{yz} - p_{zy}) \delta x \delta y \delta z + 0_4 = 0_5$$

Εδώ το $0_η$ συμβολίζει μία ποσότητα σμίκρυνσης για τα $\delta x, \delta y, \delta z$ η τάξης. Άρα, η τρίτης τάξης σμίκρυνση είναι,

$$(p_{yz} - p_{zy}) \delta x \delta y \delta z = 0$$

έτσι, καθώς το στοιχείο γίνεται απειροστά μικρό λαμβάνουμε,

$$p_{yz} = p_{zy}$$

παρομοίως,

$$p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx}$$



Συνεπώς, ο πίνακας τάσης είναι διαγωνιακά συμμετρικός και περιλαμβάνει μόνο 6 αγνώστους.

8.3. Μεταφορική Κίνηση Στοιχείου του Ρευστού.

Λαμβάνοντας υπόψη και τις επιφανειακές και τις εξωτερικές δυνάμεις, η ολική συνισταμένη δύναμη στην \vec{i} διεύθυνση, η οποία δρα στο στοιχείο της τελευταίας ενότητας, είναι:

$$\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z + \rho \delta x \delta y \delta z$$

Καθώς η μάζα $\rho \delta x \delta y \delta z$ θεωρείται αμετάβλητη, αν η ταχύτητα του Ρ είναι, $\vec{V} = [u, v, \omega]$ κατά το χρόνο t , τότε η εξίσωση κίνησης κατά τη διεύθυνση \vec{i} , είναι:

$$\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z + \rho \delta x \delta y \delta z = (\rho \delta x \delta y \delta z) \frac{du}{dt}$$

ή

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} + \rho \chi = \rho \frac{du}{dt}$$

Αλλά $u = u(x, y, z, t)$, οπότε ισχύει:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z}$$

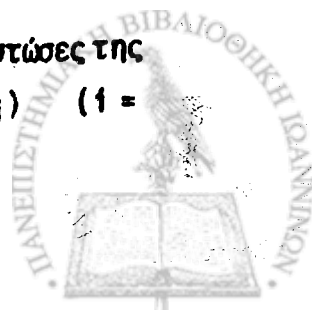
Συνεπώς, με κυκλική εναλλαγή λαμβάνουμε τις τρεις εξισώσεις της κίνησης κατά τις διευθύνσεις \vec{j} , \vec{k}

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z} = \chi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right)$$

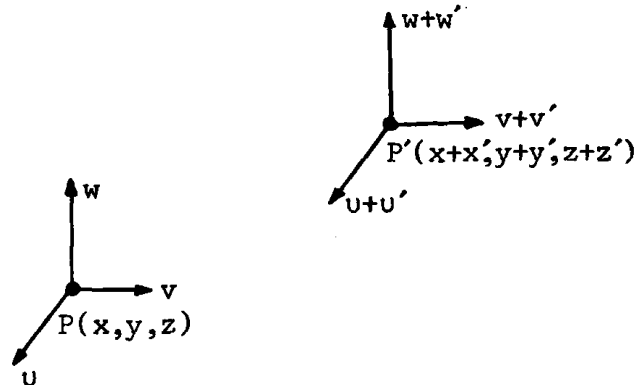
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} = \zeta + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right)$$

Σε μορφή τανυστή, αν οι συντεταγμένες είναι (x_i) , οι συνιστώσες της ταχύτητας (u_i) , οι συνιστώσες της δύναμης του σώματος (X_i) ($i = 1, 2, 3$), οι εξισώσεις της κίνησης μπορεί να γραφούν:



$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} = \chi_i + \frac{1}{\rho} p_{j i, j} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

8.4. Ρυθμός Τετραγωνικής Παραμόρφωσης (στρέβλωσης) και Βασικές Τάσεις



Σχήμα 8.3

Στο Σχ. 8.3, τα $P(x, y, z)$, $P(x+x', y+y', z+z')$ είναι γειτονικά σημεία σε ένα κινούμενο ρευστό, στο οποίο οι αντίστοιχες ταχύτητες έχουν καρτεσιανές συνιστώσες $[u, v, w]$, $[u+u', v+v', w+w']$, με τις τονούμενες ποσότητες πολύ μικρές. Τότε, από την ενότητα 4.10 έχουμε ότι ο ρυθμός της τετραγωνικής παραμόρφωσης (στρέβλωσης) για το P είναι:

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + 2fy'z' + 2gz'x' + 2hx'y' = \text{σταθερό}$$

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, 2f = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right), \dots$$

Επιπλέον, οι αυξήσεις της ταχύτητας λόγω καθαρής παραμόρφωσης είναι:

$$[(ax' + by' + gz'), (hx' + by' + fz'), (gx' + fy' + cz')]$$

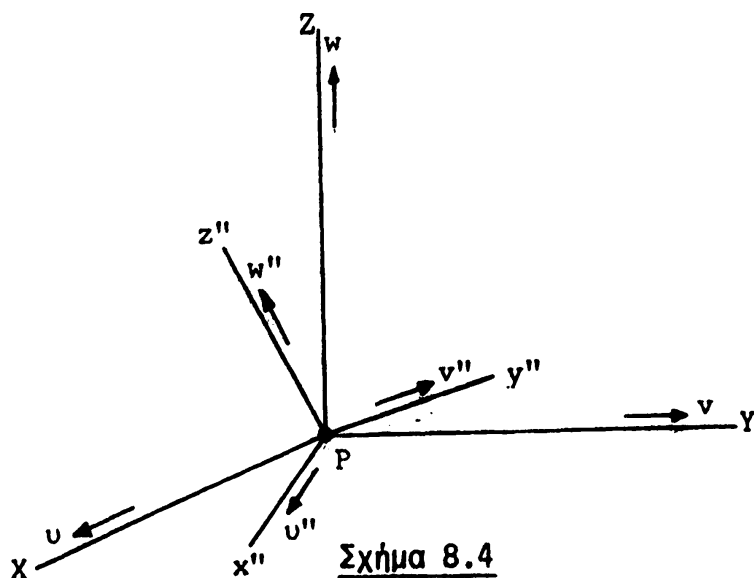
Όταν ο ρυθμός της τετραγωνικής παραμόρφωσης αναφέρεται στους βασικούς άξονες, τότε έχει τη μορφή,

$$Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 = \text{σταθερό},$$



και οι αυξήσεις της ταχύτητας, λόγω καθαρής παραμόρφωσης, οι αναφερόμενες στους βασικούς άξονες είναι $[Ax'', By'', Cz'']$. Οι τάσεις στο στοιχείο του ρευστού είναι ανεξάρτητες από τη μεταφορά και περιστροφή και εξαρτώνται εξολοκλήρου από την παραμόρφωσή του, η οποία οφείλεται στους ρυθμούς παραμόρφωσης. Για κάθε σημείο P του κινούμενου ρευστού υπάρχει ένας και μόνο ρυθμός τετραγωνικής παραμόρφωσης, του οποίου οι άξονες είναι κατά τις διευθύνσεις των γραμμών που συνδέουν το P με τα γειτονικά στοιχεία επί των αξόνων και υπόκεινται σε επιμηκύνσεις κατά μήκος αυτών των αξόνων. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι οι τάσεις πάνω στα αξονικά ή βασικά επίπεδα του ρυθμού της τετραγωνικής παραμόρφωσης είναι κάθετες σ'αυτά. Τέτοιες τάσεις καλούνται βασικές τάσεις και θα συμβολίζονται με p_1, p_2, p_3 .

8.5. Μερικές Ιδιότητες του Ρυθμού της Τετραγωνικής Παραμόρφωσης



Προτού προχωρήσουμε περαιτέρω στην ανάλυση της κίνησης των ιξωδών ρευστών είναι αναγκαίο να αναφέρουμε μερικές ακόμη ιδιότητες του ρυθμού τετραγωνικής παραμόρφωσης.

Έστω P , ότι είναι ένα σημείο στο ρευστό κινούμενο με ταχύτητα \vec{V} και P_x, P_y, P_z οι άξονες από το P , οι παράλληλοι προς τους σταθερούς καρτεσιανούς άξονες (Σχ. 8.4). Αν $[u, v, w]$ είναι οι συνιστώσες της \vec{V} ως προς τους άξονες αυτούς τότε, σύμφωνα με την ενότητα 4.10, ο ρυθμός της τετραγωνικής παραμόρφωσης με



ντρο το P έχει εξίσωση

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = \text{σταθερό} \quad (1)$$

όπου $a = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p, \dots, 2f = \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_p + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_p, \dots$

Το σημείο (x, y, z) είναι ένα γειτονικό σημείο του P. Αν Px'', Py'', Pz'' είναι οι βασικοί άξονες της τετραγωνικής αυτής επιφάνειας και $[u'', v'', w'']$ οι συνιστώσες της \vec{V} κατά μήκος των αξόνων αυτών τότε, η εξίσωση του ρυθμού της τετραγωνικής παραμόρφωσης η αναφερόμενη στους βασικούς της άξονες είναι:

$$Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 = \text{σταθερό} \quad (2)$$

όπου $A = \left(\frac{\partial u''}{\partial x''}\right)_p, \dots$

Αν υποθέσουμε, ότι οι Px'', Py'', Pz'' έχουν διευθύνοντα συνημίτονα $[l_1, m_1, n_1], [l_2, m_2, n_2], [l_3, m_3, n_3]$, ως προς τους άξονες P_x, P_y, P_z , τότε ο P_x έχει διευθύνοντα συνημίτονα $[l_1, l_2, l_3]$ κλπ., ως προς τους βασικούς άξονες. Τα δεδομένα αυτά φαίνονται καλύτερα στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας των συνημιτόνων διεύθυνσης

Άξονες	P_x	P_y	P_z
P_x''	l_1	m_1	n_1
P_y''	l_2	m_2	n_2
P_z''	l_3	m_3	n_3

Προφανώς ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \text{ κλπ.}$$

$$l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0$$

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$



Συνολικά υπάρχουν 12 τέτοιες εξισώσεις:

Χρησιμοποιούμε τις παραπάνω ιδιότητες για να υπολογίσουμε τα a , b , c , f , g , h ως προς τα A , B , C και τα διευθύνοντα συννημίτονα. Δεδομένου, ότι

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x''}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x''} + \frac{\partial y''}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y''} + \frac{\partial z''}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z''}$$

$$= l_1 \frac{\partial}{\partial x''} + l_2 \frac{\partial}{\partial y''} + l_3 \frac{\partial}{\partial z''} \quad \text{και}$$

$$u = l_1 u'' + l_2 u'' + l_3 \omega'',$$

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} = l_1^2 \frac{\partial u''}{\partial x''} + l_2^2 \frac{\partial u''}{\partial y''} + l_3^2 \frac{\partial \omega''}{\partial z''}$$

αφού $(\frac{\partial u''}{\partial z''}) + (\frac{\partial \omega''}{\partial y''}) = 0$, κλπ.

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν για τα b , c οπότε έχουμε:

$$a = l_1^2 A + l_2^2 B + l_3^2 C$$

$$b = m_1^2 A + m_2^2 B + m_3^2 C \quad (3)$$

$$c = n_1^2 A + n_2^2 B + n_3^2 C$$

Προσθέτοντες τις εξισώσεις (3), λαμβάνουμε:

$$a+b+c = A+B+C,$$

δείχνοντας, ότι το $a+b+c$ είναι μία αναλλοίωτη για κάθε σημείο και για όλους τους άξονες προσανατολισμού. Αυτό είναι προφανές αφού:

$$a+b+c = \text{div } \vec{V}$$

Παρατηρούμε ακόμη, ότι

$$2f = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= (m_1 \frac{\partial}{\partial x'} + m_2 \frac{\partial}{\partial y'} + m_3 \frac{\partial}{\partial z'}) (n_1 u' + n_2 u' + n_3 \omega) +$$

$$+ (n_1 \frac{\partial}{\partial x'} + n_2 \frac{\partial}{\partial y'} + n_3 \frac{\partial}{\partial z'}) (m_1 u' + m_2 u' + m_3 \omega)$$

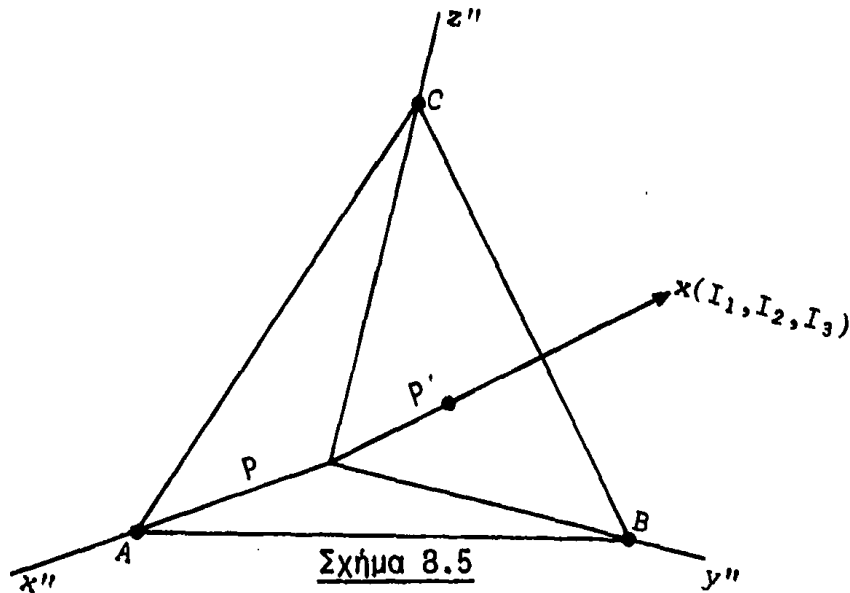
$$= 2(m_1 n_1 \frac{\partial u'}{\partial x'} + m_2 n_2 \frac{\partial u'}{\partial y'} + m_3 n_3 \frac{\partial \omega'}{\partial z'})$$



Με κυκλική εναλλαγή βρίσκουμε δύο παρόμοιες σχέσεις, οπότε τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} f &= m_1 n_1 A + m_2 n_2 B + m_3 n_3 C, \\ g &= n_1 l_1 A + n_2 l_2 B + n_3 l_3 C, \quad (4) \\ h &= l_1 m_1 A + l_2 m_2 B + l_3 m_3 C. \end{aligned}$$

8.6. Ανάλυση Τάσης Ρευστού σε Κίνηση



Με τους συμβολισμούς της ενότητας 8.5, ένα επίπεδο κάθετο στον Px τέμνει τους βασικούς άξονες Px'' , Py'' , Pz'' του ρυθμού της τετραγωνικής παραμόρφωσης στα σημεία A , B , C και σχηματίζεται ένα μικρό τετράεδρο ρευστού, το $PABC$ (Σχ. 8.5). Αν το δS συμβολίζει το εμβαδό της επιφάνειας ABC , τότε τα $l_1 \delta S$, $l_2 \delta S$, $l_3 \delta S$ είναι τα εμβαδά των επιφανειών PBC , PCA , PAB . Επειδή, τα τρία τελευταία είναι βασικά επίπεδα, χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της ενότητας 8.4, συνεπάγεται ότι οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται σε αυτά είναι, $p_1 l_1 \delta S$, $p_2 l_2 \delta S$, $p_3 l_3 \delta S$. Οι δυνάμεις στην επιφάνεια ABC κατά τις διευθύνσεις x , y , z , είναι $p_{xx} \delta S$, $p_{xy} \delta S$, $p_{xz} \delta S$

Η εξίσωση της κίνησης κατά τη διεύθυνση x (υποθέτοντας ότι το στοιχείο είναι ένα σωματίδιο σταθερής μάζας που κινείται με το ρευστό) είναι:

$$p_{xx} \delta S - l_1 (p_1 l_1 \delta S) - l_2 (p_2 l_2 \delta S) - l_3 (p_3 l_3 \delta S) = 0_3,$$

όπου 0_3 είναι ένας όρος 3ης τάξης. Άρα, στο όριο

καθώς ο ό-



γκος του στοιχείου τείνει στο μηδέν, λαμβάνουμε:

$$p_{xx} = l_1^2 p_1 + l_2^2 p_2 + l_3^2 p_3$$

και κατά τον ίδιο τρόπο

$$p_{yy} = m_1^2 p_1 + m_2^2 p_2 + m_3^2 p_3 \quad (1)$$

$$p_{zz} = n_1^2 p_1 + n_2^2 p_2 + n_3^2 p_3$$

Προσθέτοντες τις εξισώσεις (1), βρίσκουμε:

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_1 + p_2 + p_3 = -3p \quad (\text{ας πούμε})$$

Συνεπώς, το άθροισμα των κάθετων τάσεων σε οιαδήποτε τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα σε ένα σημείο είναι μία αναλλοίωτος. Συμβολίζουμε το άθροισμα αυτό με $-3p$, οπότε το p δηλοί τη μέση πίεση στο σημείο.

Αναλύοντας τις τάσεις κατά τη διεύθυνση P_y και παραλείποντας τους όρους 3ης τάξης, έχουμε:

$$p_{xy} = l_1 m_1 p_1 + l_2 m_2 p_2 + l_3 m_3 p_3$$

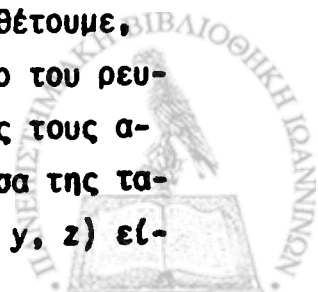
και ομοίως $p_{yz} = m_1 n_1 p_1 + m_2 n_2 p_2 + m_3 n_3 p_3 \quad (2)$

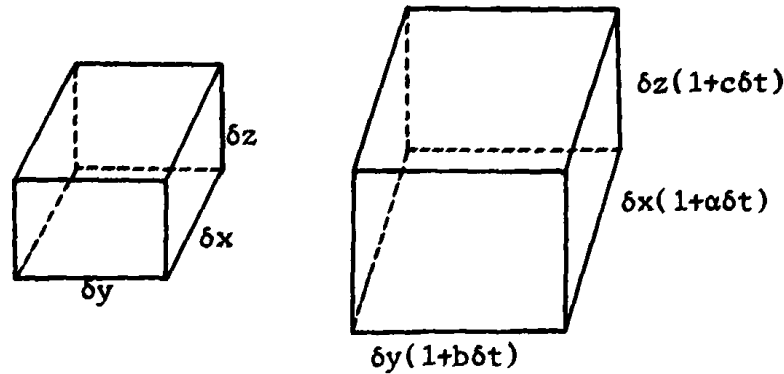
$$p_{zx} = n_1 l_1 p_1 + n_2 l_2 p_2 + n_3 l_3 p_3$$

Άρα, οι εξισώσεις (1) και (2) εκφράζουν τις έξη διακεκριμένες συνιστώσες του πίνακα τάσης ως προς τις βασικές τάσεις.

8.7. Σχέσεις μεταξύ Τάσης και Ρυθμού Παραμόρφωσης

Χρησιμοποιώντας τις αναλύσεις των προηγουμένων ενοτήτων, συνδέουμε τώρα τις τάσεις και τους ρυθμούς παραμόρφωσης σε ένα κινούμενο ιξώδες ρευστό. Για να φθάσουμε στο στόχο μας υποθέτουμε, ότι το σχ. 8.6(i) παριστάνει ένα παραλληλεπίπεδο στοιχείο του ρευστού κατά το χρόνο t , με ακμές δx , δy , δz παράλληλες προς τους ακίνητους καρτεσιανούς άξονες. Κατά το χρόνο t , η συνιστώσα της ταχύτητας στη γωνία (x, y, z) είναι u και στη γωνία $(x+\delta x, y, z)$ εί-





Σχήμα 8.6 (i), (ii)

ναι $u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta x$ ή $u + a\delta x$. Άρα, κατά το χρόνο $(t + \delta t)$, η ακμή δx αυξήθηκε και έχει μήκος $\delta x + a\delta x\delta t$, αφού $a\delta x$ είναι η σχετική αύξηση μεταξύ των δύο άκρων. Ομοίως, οι ακμές δy , δz αποκτούν μήκη $\delta y(1+b\delta t)$, $\delta z(1+c\delta t)$, αντιστοίχως (Σχ.8.6(ii)). Συνεπώς, η ογκομετρική αύξηση στο διάστημα δt είναι

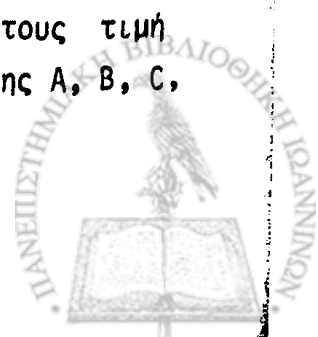
$$\delta x\delta y\delta z(1+a\delta t)(1+b\delta t)(1+c\delta t) - \delta x\delta y\delta z \approx (a+b+c)\delta x\delta y\delta z,$$

η οποία δίδει μία διαστολή ή ογκομετρική αύξηση σε χρόνο δt ίση με $(a+b+c)\delta t$. Επομένως, το χρόνο t ο ρυθμός διαστολής είναι Δ , όπου

$$\Delta = a+b+c = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \text{div } \vec{V}$$

Αυτή η ποσότητα έχει δειχθεί ότι είναι αναλλοίωτη σε κάθε σημείο του ρευστού. Η τιμή της είναι, επίσης, $A+B+C$, ως προς τους βασικούς ρυθμούς παραμόρφωσης. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της συνεχείας για ένα ασυμπλέστο ρευστό είναι $\Delta = 0$, αλλά για ένα συμπίεσιμο είναι $\Delta \neq 0$. Θα μελετήσουμε τις δύο περιπτώσεις χωριστά.

Στην περίπτωση ενός ασυμπέστου ρευστού, υποθέτουμε ότι οι βασικές τάσεις p_1, p_2, p_3 διαφέρουν από τη μέση τους τιμή $-p$ κατά ποσότητες ανάλογες προς τους ρυθμούς παραμόρφωσης A, B, C , κατά τις βασικές διευθύνσεις. Συνεπώς, γράφουμε:



$$p_1 = -p + 2\mu A, \quad p_2 = -p + 2\mu B, \quad p_3 = -p + 2\mu C, \quad (1)$$

όπου μ είναι μία σταθερά.

Στην περίπτωση συμπιέσιμου ρευστού, έχουμε το επιπρόσθετο αποτέλεσμα του ρυθμού της διαστολής Δ , ο οποίος εκδηλώνεται ισοδύναμα προς όλες τις διευθύνσεις. Το αποτέλεσμα αυτό το παριστάνουμε με την προσθήκη στο δεξιό μέλος καθεμιάς από τις εξισώσεις (1) της ποσότητας $\lambda\Delta$, όπου λ είναι μία σταθερά, οπότε στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

$$\begin{aligned} p_1 &= -p + 2\mu A + \lambda\Delta \\ p_2 &= -p + 2\mu B + \lambda\Delta \\ p_3 &= -p + 2\mu C + \lambda\Delta \end{aligned} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις (2) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\Delta = A+B+C$, βρίσκουμε

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

αφού $p_1+p_2+p_3 = -3p$ και $\Delta \neq 0$.

Οι εξ. (1), (2) συνδέουν τις βασικές τάσεις με τους βασικούς ρυθμούς παραμόρφωσης. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις μη βασικές τάσεις p_{xx}, \dots, p_{yz} ως προς τους μη βασικούς ρυθμούς παραμόρφωσης. Στην ενότητα 8.6, (εξ.(1)) δείξαμε ότι, είναι:

$$p_{xx} = l_1^2 p_1 + l_2^2 p_2 + l_3^2 p_3$$

Χρησιμοποιώντας τις εξ.(2) της ενότητας αυτής, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) + 2\mu(l_1^2 A + l_2^2 B + l_3^2 C) + \lambda\Delta(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) \\ &= -p + 2\mu\alpha + \lambda\Delta \quad (\text{από την ενότητα 8.5}) \\ &= -p + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \lambda\Delta \end{aligned}$$

Η εναλλαγή των συμβόλων δίδει τις τρεις εξισώσεις:



$$p_{xx} = -p + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \lambda\Delta$$

$$p_{yy} = -p + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda\Delta \quad (3')$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right) + \lambda\Delta$$

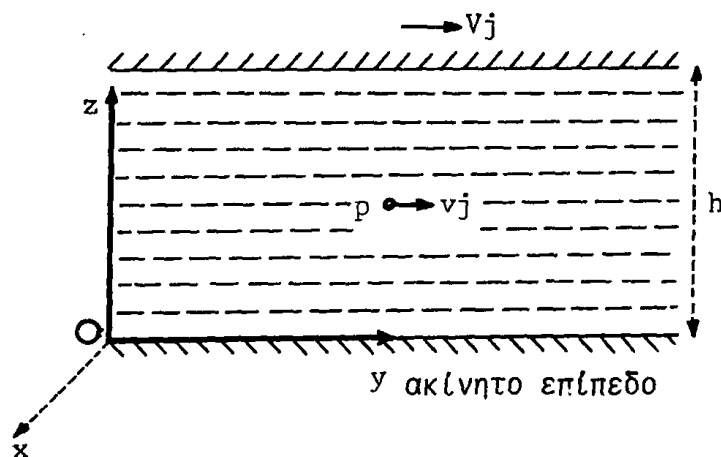
όπου $\Delta = \text{div } \vec{V}$, $\Delta = 0$ για ασυμπιέστη ροή και $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ για συμπίεσιμη ροή.

Επιπλέον, από την ενότητα 8.6, εξισώσεις (2), έχουμε:

$$p_{yz} = m_1 n_1 p_1 + m_2 n_2 p_2 + m_3 n_3 p_3 = (-p + \lambda\Delta)(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 + 2\mu(m_1 n_1 A + m_2 n_2 B + m_3 n_3 C)) = 2\mu f \quad (\text{από την ενότητα 8.5})$$

$$\cong \mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Συνεπώς, λαμβάνουμε τις τρεις εξισώσεις:



Σχήμα 8.7



$$\begin{aligned} p_{yz} = p_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ p_{zx} = p_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \\ p_{xy} = p_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

οι οποίες είναι αληθείς για συμπίεσιμα και ασυμπίεστα ρευστά. Οι εξισώσεις (3) και (4) μπορούν να συνδυαστούν καταλλήλως σε τανυστική μορφή. Πράγματι, αν (x_i) δηλοί τις καρτεσιανές συντεταγμένες, (u_i) τις συνιστώσες της ταχύτητας ($i = 1, 2, 3$), τότε τα δύο συστήματα των εξισώσεων μπορούν να γραφούν

$$p_{ij} = (\lambda \Delta - p) \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5)$$

όπου, $\Delta = u_{i,i}$, $p = -\frac{1}{3} p_{i,i}$, $\Delta = 0$ για ασυμπίεστη ροή και $\lambda = -\frac{2}{3} \mu$ για συμπίεσιμη ροή.

8.8. Συντελεστής Ιξώδους (Εσωτερικής Τριβής) και Στρωτή Ροή

Το Σχ. 8.7 δείχνει δύο παράλληλα επίπεδα $z = 0$, $z = h$, που απέχουν μικρή ποσότητα h , με το χώρο μεταξύ τους να περιέχει ένα λεπτό στρώμα ρευστού με ιξώδες. Το επίπεδο $z = 0$ κρατείται σταθερά ακίνητο, ενώ στο ανώτερο επίπεδο δίδεται μία σταθερή ταχύτητα προς τα δεξιά μεγέθους $V \vec{j}$. Τότε με την προϋπόθεση ότι η V , δεν είναι υπερβολικά μεγάλη, τα στρώματα του υγρού σε επαφή με το $z = 0$ βρίσκονται σε ηρεμία, ενώ εκείνα που βρίσκονται σε επαφή με το $z = h$ κινούνται με ταχύτητα $V \vec{j}$, δηλαδή, δεν υπάρχει ολίσθηση μεταξύ ρευστού και επιφάνειας. Έτσι, δημιουργείται μία βαθμίδα ταχύτητας στο ρευστό μεταξύ των επιπέδων. Σε κάποιο σημείο $P(x, y, z)$ μεταξύ των επιπέδων η ταχύτητα του ρευστού θα είναι $u \vec{j}$, όπου $0 < u < V$ και η u είναι ανεξάρτητη των (x, y) . Άρα, όταν το z είναι ακίνητο, το u είναι σταθερό, δηλαδή, το ρευστό κινείται σε στρώματα παράλληλα προς τα δύο επίπεδα. Μία τέτοια ροή ορίζεται ως στρωτή ή ελασματική. Λόγω του ιξώδους του ρευστού υπάρχει τριβή μεταξύ των παραλλήλων στρωμάτων.

Η πειραματική εργασία δείχνει, ότι η διατμητική τάση πάνω



στο κινούμενο επίπεδο είναι ανάλογη προς το V/h , όταν το h είναι αρκετά μικρό. Έτσι, γράφουμε αυτή την τάση με τη μορφή $\mu' V/h$, όπου μ' είναι μία σταθερά που ονομάζεται συντελεστής του ιξώδους. Υποθέτουμε, ότι το $h \rightarrow 0$. Τότε, η τάση στο ακίνητο επίπεδο είναι:

$$P_{zy} = \mu' \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{V}{h} \right) = \mu' \frac{du}{dz} \quad (1)$$

Στις εξισώσεις (4) της ενότητας 8.7 θέτουμε $u = 0$, $\omega = 0$, $v = v(z)$, οπότε λαμβάνουμε:

$$P_{zy} = \mu \left(\frac{dv}{dz} \right), \quad P_{xz} = 0, \quad P_{yx} = 0, \quad (2)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις (1) και (2) δείχνουν καθαρά ότι,

$$\mu' \equiv \mu \quad (3)$$

δηλαδή, η σταθερά μ της ενότητας 8.7 είναι ο συντελεστής του ιξώδους.

Από την (1) εύκολα βρίσκουμε τις διαστάσεις του μ . Έτσι,

$$[\mu] = \frac{[P_{zy}]}{[dv/dz]} = \frac{(MLT^{-2})/L^2}{(LT^{-1})L^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}, \quad (4)$$

όπου τα M , L , T συμβολίζουν τη μάζα, το μήκος και το χρόνο (βλέπε και ενότητα 2.4).

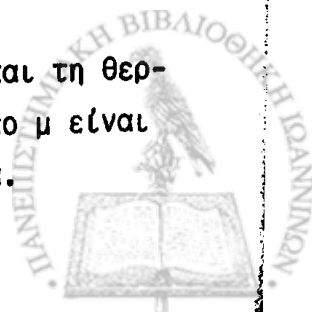
Στην αεροδυναμική και τη Μετεωρολογία, μία πιο σημαντική ποσότητα είναι ο κινηματικός συντελεστής του ιξώδους ν , ο οποίος, όπως είναι γνωστό (βλέπε ενότητα 2.5), ορίζεται από τη σχέση:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (5)$$

Συνεπώς

$$[\nu] = L^2T^{-1} \quad (6)$$

Για τα περισσότερα ρευστά το μ εξαρτάται από την πίεση και τη θερμοκρασία. Για τα αέρια, σύμφωνα με τη κινητική θεωρία, το μ είναι ανεξάρτητο της πίεσης αλλά ελαττώνεται με τη θερμοκρασία.



8.9. Οι εξισώσεις Κίνησης των Navier - Stokes ενός Ιξώδους Ρευστού.

Στην ενότητα 8.3 βγάλαμε τη μεταφορική εξίσωση κίνησης με τη μορφή:

$$\frac{du}{dt} = \chi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right)$$

Αντικαθιστώντας τα p_{xx} , p_{yx} και p_{zx} , έχουμε:

$$\frac{du}{dt} = \chi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + \left(\nu + \frac{\lambda}{\rho} \right) \frac{\partial \Delta}{\partial x}$$

Αφού $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ για ένα συμπιεστό ρευστό και επειδή $\Delta = 0$ για ένα ασυμπιεστό, η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί αδιαμφισβήτητα για τις δύο περιπτώσεις με τη μορφή:

$$\frac{du}{dt} = \chi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \Delta}{\partial x}$$

Συνεπώς, οι εξισώσεις κίνησης για τις τρεις διευθύνσεις μπορούν να γραφούν με τη μορφή:

$$\frac{du}{dt} = \chi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \Delta}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} = \gamma - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \Delta}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} = \zeta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \Delta}{\partial z}$$

Η μορφή του τανυστή των εξισώσεων αυτών είναι:

$$\frac{du_i}{dt} = \chi_i - \frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu u_{i,jj} + \frac{1}{3} \nu \Delta_{,i} \quad (1')$$

Γράφοντας $\vec{V} = [x, y, z]$, $\vec{F} = [\chi, \gamma, \zeta]$ η διανυσματική μορφή των εξισώσεων (1) είναι προφανώς η,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \nabla \int \frac{dp}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (2)$$

Αλλά,



$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right) + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right) + \nabla\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) - \vec{V} \wedge (\nabla \wedge \vec{V}),$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$$

Έτσι η (2) μπορεί επίσης, να γραφεί:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) - \vec{V} \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) = \vec{F} - \nabla \int \frac{dp}{\rho} + \frac{4}{3} \nu \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nu \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) \quad (3)$$

Κάθε μία από τις μορφές (1), (2), (3) καλούνται εξισώσεις κίνησης των Navier-Stokes, για πραγματικά ρευστά.

Για ασυμπλέστη ροή, οι μορφές (2) και (3) δίδουν

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) \quad (4)$$

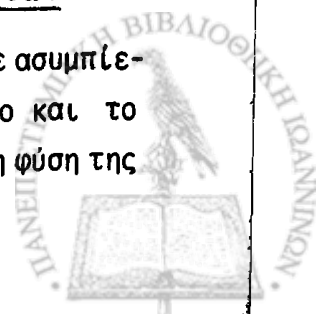
όπου, όπως προηγουμένως, η $\frac{d\vec{V}}{dt}$ μπορεί να αναπτυχθεί στη μορφή του αριστερού μέλους της (3). Η εξ. (4) δείχνει ότι για ασυμπλέστη ροή η εξίσωση της κίνησης διαφέρει από την εξίσωση κίνησης του Euler για ροή χωρίς ιξώδες, κατά τον όρο $-\nu \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{V})$. Ο όρος αυτός, λόγω του ιξώδους, αυξάνει τη δυσκολία γιατί αυξάνει την τάξη της διαφορικής εξίσωσης. Άρα, απαιτείται μία επιπρόσθετη οριακή συνθήκη. Αυτή παρέχεται από την παραδοχή ότι δεν πρέπει να υπάρξει ολίσθηση μεταξύ του ρευστού με ιξώδες και της οριακής επιφάνειας. Γι αυτόν το λόγο, δεν μπορούμε να έχουμε τη λύση της αντίστοιχης χωρίς ιξώδες ροής λύνοντας την εξίσωση (4) και θέτοντας το $\nu \rightarrow 0$.

8.10 Μερικά Επιλύσιμα Προβλήματα με Ιξώδες

Δεν υπάρχει γενική λύση στις εξισώσεις Navier-Stokes. Εντούτοις, υπάρχουν μερικά ειδικά προβλήματα, τα οποία μπορούν να λυθούν. Θα εξετάσουμε μερικά εδώ. Τα προβλήματα αυτά σχετίζονται με ασυμπλέστα ρευστά.

8.10.1 Στατική Κίνηση Μεταξύ Παραλλήλων Επιπέδων

Η περιοχή $0 \leq z \leq h$ μεταξύ των επιπέδων $z=0$, $z=h$ γεμίζει με ασυμπλέστο ιξώδες ρευστό (Σχ.8.8). Το επίπεδο $z=0$ κρατείται ακίνητο και το $z=h$ κινείται με σταθερή ταχύτητα V_j^+ . Ζητείται να καθορισθεί η φύση της



ροής, όταν οι συνθήκες είναι στατικές, υποθέτοντας ότι δε συμβαίνει ολίσθηση μεταξύ του ρευστού και κάθε μίας από τις οριακές επιφάνειες, ενώ αγνοούνται οι εξωτερικές δυνάμεις του ρευστού.

Έστω $P(x, y, z)$, ότι είναι κάποιο σημείο μέσα στο ρευστό. Τότε, η ταχύτητα \vec{V} στο P θα είναι της μορφής:

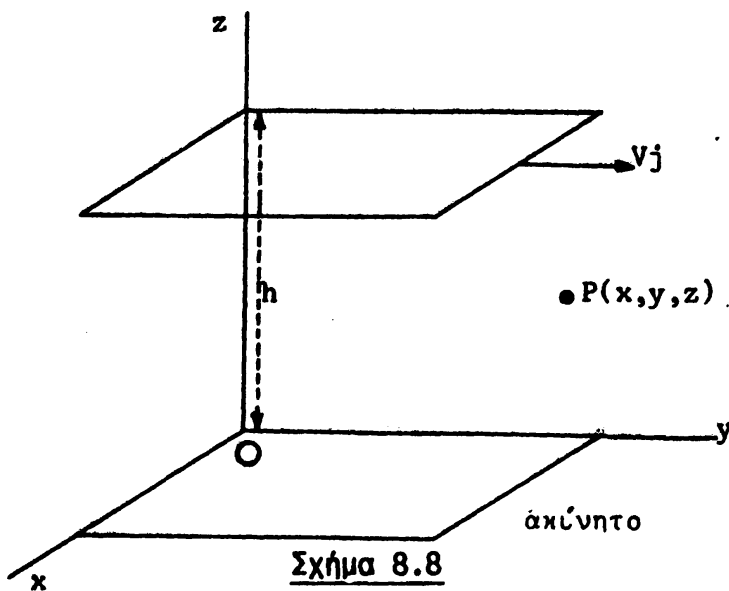
$$\vec{V} = u(y, z)\vec{j} \quad (1)$$

Η εξίσωση της συνεχείας, $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, δίνει:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

και από τις εξ. (1) και (2) συνάγουμε, ότι:

$$\vec{V} = u(z)\vec{j} \quad (3)$$



Χωρίς εξωτερικές δυνάμεις, η διανυσματική εξίσωση της κίνησης των Navier-Stokes μπορεί να ληφθεί με τη μορφή:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (4)$$

Η μορφή (4) είναι κατάλληλη εδώ, αφού ασχολούμαστε με άξονες ακίνητους στο χώρο. Επειδή, η ροή είναι στατική, $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$. Επίσης,

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \left(u \frac{\partial}{\partial y}\right)u(z)\vec{j} = \vec{0} ; \quad \text{και}$$



$$\nabla^2 \vec{V} = u''(z) \vec{j}$$

Άρα, η εξ.(4) δίδει:

$$\vec{0} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}\right) + \mu u''(z) \vec{j}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των μοναδιαίων διανυσμάτων, έχουμε:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (5), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad (6), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

Οι εξ. (5), (7) δείχνουν ότι $p = p(y)$. Άρα, η (6) γίνεται:

$$\frac{dp(y)}{dy} = \mu \frac{d^2 u(z)}{dz^2} \quad (8)$$

Το αριστερό μέλος της (8) είναι μία συνάρτηση του y , το δεξιό της μέλος μία συνάρτηση του z μόνο. Άρα, καθεμία είναι μία σταθερά. Καθώς το ρευστό κινείται στη θετική y διεύθυνση, η πίεση $p(y)$ θα πρέπει να αυξάνει καθώς αυξάνει το y . Συνεπώς, $\frac{dp}{dy} < 0$ και έτσι, λαμβάνουμε:

$$\frac{dp(y)}{dy} = \frac{\mu d^2 u(z)}{dz^2} = -P,$$

όπου $P > 0$. Λύνοντας ως προς u , συνάγεται:

$$u(z) \cong A + Bz - \left(\frac{P}{2\mu}\right)z^2 \quad (9)$$

Όταν $z = 0$, $u = 0$ και όταν $z = h$, $u = V$. Άρα, βρίσκουμε:

$$u(z) = \left(\frac{V}{h} + \frac{Ph}{2\mu}\right)z - \frac{P}{2\mu}z^2 \quad (10)$$

Η εξ.(10) δείχνει ότι η μεταβολή της ταχύτητας μεταξύ των πλακών είναι παραβολική.

Η ολική ροή ανά μονάδα πλάτους μέσα από ένα επίπεδο κάθετο στον Oy , είναι:

$$\int_0^h u(z) dz = \frac{1}{2} V h + \frac{1}{12} \frac{Ph^3}{\mu}$$



και η μέση ταχύτητα μέσα από μία τέτοια διατομή είναι

$$\frac{1}{h} \int_0^h u(z) dz = \frac{V}{2} + \frac{1}{12} \frac{Ph^2}{\mu}$$

Η εφαπτομενική τάση σε κάθε σημείο $P(x, y, z)$ είναι:

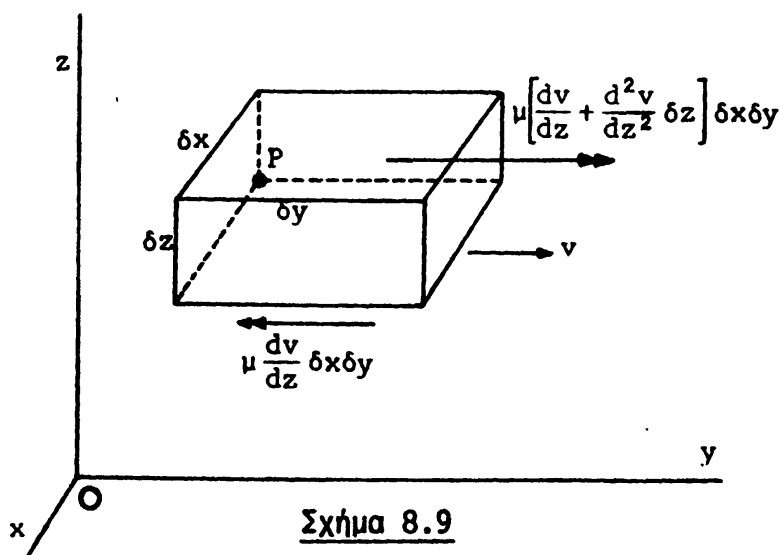
$$\mu \frac{du}{dz} = \frac{V}{h} + \frac{Ph}{2\mu} - \frac{Pz}{\mu}$$

Συνεπώς, η αντίσταση ανά μονάδα επιφάνειας στο κατώτερο επίπεδο είναι

$$\left(\frac{V}{h}\right) + \left(\frac{Ph}{2\mu}\right)$$

και στο ανώτερο επίπεδο, είναι $\left(\frac{V}{h}\right) - \left(\frac{Ph}{2\mu}\right)$.

Το πρόβλημα μπορεί να εξεταστεί χωρίς τη χρήση των εξισώσεων Navier-Stokes. Το Σχ. 8.9, δείχνει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στοι-

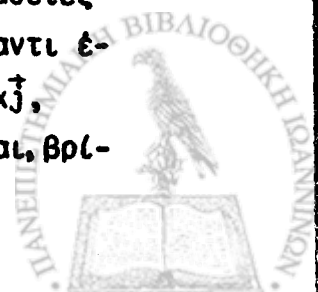


Σχήμα 8.9

χείο του ρευστού $\delta x \times \delta y \times \delta z$, όπου το σημείο P είναι το (x, y, z) . Η δύναμη του ιξώδους στο κατώτερο επίπεδο, του οποίου η ταχύτητα είναι $u(z)\vec{j}$, είναι $-\mu\left(\frac{du}{dz}\right)\delta x\delta y\vec{j}$ και στο ανώτερο επίπεδο είναι

$$\mu\left\{\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\delta z\right\}\delta x\delta y\vec{j}$$

Οι δυνάμεις πίεσης στις τρεις έδρες που ορίζουν το P , οι κάθετες στα \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} είναι $p\delta y\delta z\vec{i}$, $p\delta z\delta x\vec{j}$, $p\delta x\delta y\vec{k}$. Εκείνες στις απέναντι έδρες του στοιχείου είναι $-(p + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta x)\delta y\delta z\vec{i}$, $-(p + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\delta y)\delta z\delta x\vec{j}$, $-(p + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\delta z)\delta x\delta y\vec{k}$. Δεδομένου ότι το στοιχείο δεν επιταχύνεται, βρι-



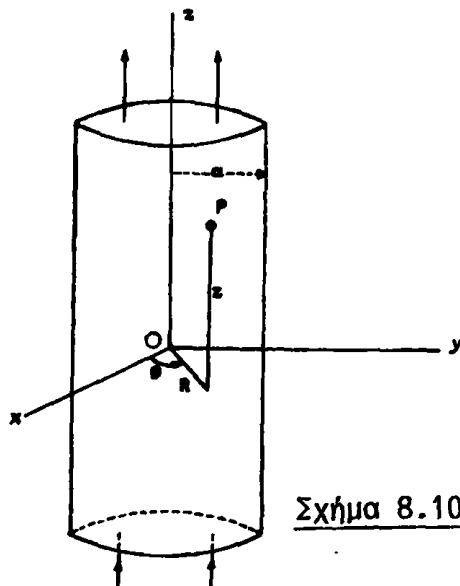
σκουμε αναλύοντας στις τρεις διευθύνσεις,

$$\begin{aligned} - \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \mu \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

όπως προηγουμένως.

8.10.2. Στατική Ροή σε Σωλήνα Ομοιόμορφης Κυκλικής Διατομής (Ροή Poiseuille)

Το Σχ. 8.10, διαφωτίζει τη μελέτη της στατικής ροής ενός χωρίς ιξώδες ασυμπλέστου ρευστού, μέσα σ'ένα σωλήνα ακτίνας a . Το



P είναι ένα σημείο στο ρευστό, το οποίο έχει κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες (R, θ, z) ως προς το αρχικό σημείο O στον άξονα του σωλήνα, ο οποίος λαμβάνεται ως άξονας z . Υποθέτουμε ότι δεν υφίστανται εξωτερικές δυνάμεις. Τότε εφαρμογή της συνέχειας σ'ένα ομόκεντρο στοιχείο κυλίνδρου ακτίνων $R, R+\delta R$ του ρευστού δείχνει, ότι η ταχύτητα του ρευστού είναι της μορφής

$$\vec{V} = w(R)\vec{k} \quad (1)$$

Ας πάρουμε τη διανυσματική εξίσωση των Navier-Stokes με τη μορφή



$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - v \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) \quad (2)$$

Εδώ, αυτή η μορφή υιοθετείται με τον τελευταίο όρο $-v \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{V})$ και όχι $+v \nabla^2 \vec{V}$ όπως στην προηγούμενη περίπτωση, γιατί οι άξονες δεν είναι ακίνητοι στο χώρο. Για την ίδια αιτία η μορφή που δίδεται στο αριστερό μέλος είναι πιο χρήσιμη από την $\frac{d\vec{V}}{dt}$. Τότε έχουμε:

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = w \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) [w(R) \vec{k}] = \vec{0}$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial R} \hat{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}$$

Σημ. Ανωτέρω, ο όρος $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ είναι εύκολο να εκτιμηθεί, αφού ο τελευταίος περιλαμβάνει το σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα \vec{k} . Επίσης,

$$\nabla \wedge \vec{V} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \hat{R} & R\hat{\theta} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & w(R) \end{vmatrix} = -w'(R) \hat{\theta}$$

Συνεπώς,

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \hat{R} & R\hat{\theta} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -Rw'(R) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dR} (Rw') \vec{k}$$

Άρα, η εξ. (2) γίνεται:

$$\vec{0} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial R} \hat{R} + \frac{\partial p}{R \partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right] + \frac{v}{R} \frac{d(Rw')}{dR} \vec{k}$$

Εξίσωση των συντελεστών των μοναδιαίων διανυσμάτων, δίδει:

$$\frac{\partial p}{\partial R} = 0 \quad (3), \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad (4) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu}{R} \frac{d(Rw')}{dR} \quad (5)$$

Οι (3), (4) δείχνουν ότι $p = p(z)$, οπότε η (5) γίνεται,



$$\frac{dp(z)}{dz} = \frac{\mu}{R} \frac{d}{dR} [R\omega'(R)] \quad (6)$$

Το αριστερό μέλος της (6) είναι συνάρτηση μόνο του z . Το δεξιό μέλος είναι μία συνάρτηση μόνο του R . Άρα, το καθένα είναι σταθερό. Καθώς η ροή υποτίθεται ότι συμβαίνει κατά τη θετική διεύθυνση, υποθέτουμε $\frac{dp}{dz} < 0$. Λαμβάνεται κάθε μέλος της εξ. (6), ότι είναι $-P$, όπου P είναι μία θετική σταθερά. Τότε:

$$\frac{d}{dR} (R\omega') = - \frac{PR}{\mu} \quad \text{ή}$$

$$\frac{Rd\omega}{dR} = A - \frac{PR^2}{2\mu}$$

Άρα,

$$\frac{d\omega}{dR} = \frac{A}{R} - \frac{1}{2} \frac{PR}{\mu} \quad \text{και έτσι,}$$

$$\omega(R) = B + A \log R - \frac{1}{4} \left(\frac{PR^2}{\mu} \right) \quad (7)$$

Το ω είναι ορισμένο στο $R=0$. Συνεπώς, απαιτούμε το $A=0$. Επίσης, για $R=\alpha$, $\omega=0$, αφού δε συμβαίνει ολίσθηση. Τότε $B = \frac{1}{4} \left(\frac{P\alpha^2}{\mu} \right)$. Άρα,

$$\omega(R) = \frac{1}{4} \left(\frac{P}{\mu} \right) (\alpha^2 - R^2) \quad (8)$$

Η μορφή της εξ.(8) δείχνει, ότι η μεταβολή της ταχύτητας είναι παραβολική, δηλ. η καμπύλη του ω ως προς το R , από $R=0$ μέχρι α , είναι παραβολικής μορφής.

Ο όγκος του ρευστού που εξέρχεται από κάθε διατομή ανά μονάδα χρόνου είναι:

$$Q = \int_0^\alpha \omega(R) \cdot 2\pi R \, dR = \frac{\pi P \alpha^4}{8\mu}$$

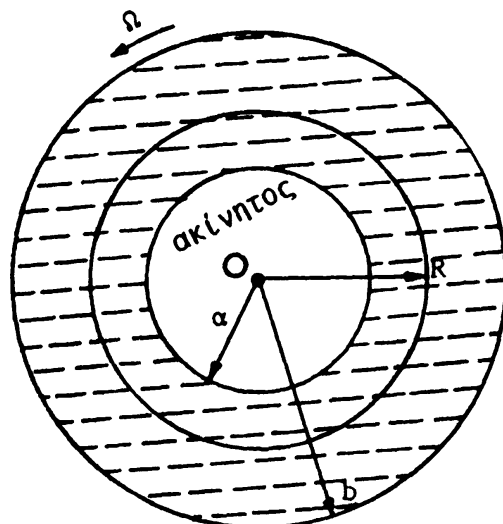
Αν το p δηλοί τη διαφορά πίεσης σε δύο σημεία του άξονα του σωλήνα που απέχουν κατά l , τότε

$$P = p/l$$



8.10.3. Στατική Ροή μεταξύ Ομοκέντρων Περιστροφόμενων Κυλίνδρων

Το Σχ. 8.11, δείχνει δύο εκτεινόμενους στο άπειρο ομόκεντρους κυλίνδρους ακτίνων $a, b (b > a)$ με ιξώδες (γλοιώδες) υγρό με-



Σχήμα 8.11

ταξύ τους. Ο εσωτερικός κύλινδρος κρατείται ακίνητος, ενώ ο εξωτερικός περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω . Έστω (R, θ, z) ότι είναι οι κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες στο σημείο P του υγρού ως προς κάποιο σημείο O του άξονα συμμετρίας. Τότε, όταν η κίνηση είναι στατική η ταχύτητα στο P θα είναι της μορφής:

$$\vec{V} = R\omega(R)\hat{\theta} \quad (1)$$

όπου $\omega(R)$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του υγρού σε ακτινική απόσταση R . Η πίεση στο P θα είναι προφανώς της μορφής

$$p = p(R) \quad (2)$$

Αυτή τη φορά λαμβάνουμε τη διανυσματική εξίσωση των Navier-Stokes με τη μορφή:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) - \vec{V} \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) \quad (3)$$

Η μορφή του αριστερού μέλους που επελέγη εδώ, είναι προτιμότερη από εκείνη του τελευταίου παραδείγματος, γιατί η μορφή $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ εί-



ναι δύσκολο να υπολογιστεί απευθείας, καθώς το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\theta}$, που χρησιμοποιήθηκε στην (1) δεν είναι σταθερό. Για στατική ροή, $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$. Επίσης, αφού

$$\nabla \equiv \hat{R}\left(\frac{\partial}{\partial R}\right) + \hat{\theta}\left(\frac{\partial}{R\partial\theta}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\nabla\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) = \hat{R} \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{R^2\omega^2}{2}\right) = \{R^2\omega \frac{d\omega}{dR} + R\omega^2\}\hat{R}$$

Έχουμε

$$\nabla \wedge \vec{V} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \hat{R} & R\hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & R^2\omega & 0 \end{vmatrix} = \left(R \frac{d\omega}{dR} + 2\omega\right)\hat{k}$$

$$\vec{V} \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) = R\omega\hat{\theta} \wedge \left(R \frac{d\omega}{dR} + 2\omega\right)\hat{k} = R\omega \left(R \frac{d\omega}{dR} + 2\omega\right)\hat{R}$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \hat{R} & R\hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & R \frac{d\omega}{dR} + 2\omega \end{vmatrix} = -\left(R \frac{d^2\omega}{dR^2} + 3 \frac{d\omega}{dR}\right)\hat{\theta}$$

Άρα, η εξ.(3) γίνεται:

$$-R\omega^2\hat{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dR} \hat{R} + \nu \left(R \frac{d^2\omega}{dR^2} + 3 \frac{d\omega}{dR}\right)\hat{\theta}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των μοναδιαίων διανυσμάτων, λαμβάνουμε,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dR} = R\omega^2 \quad (4)$$

$$R \frac{d^2\omega}{dR^2} + 3 \frac{d\omega}{dR} = 0 \quad (5)$$

Από την (5) έχουμε, δια πολλαπλασιασμού με R^2 ,

$$\frac{d}{dR} \left(R^3 \frac{d\omega}{dR} \right) = 0$$



συνεπώς,

$$\frac{d\omega}{dR} = \frac{A}{R^3} \quad \omega = B - \left(\frac{A}{2R^2}\right)$$

Λαμβάνοντας $\omega = 0$ όταν $R = a$, $\omega = \Omega$ όταν $R = b$, βρίσκουμε

$$\omega(R) = \Omega b^2 (1 - a^2 R^{-2})(b^2 - a^2)^{-1} \quad (6)$$

Η ταχύτητα του ρευστού σε απόσταση ακτίνας R έχει μέγεθος

$$V = R \omega(R) = \Omega b^2 (R^2 - a^2 R^{-1})(b^2 - a^2)^{-1}$$

Επομένως, η τάση λόγω ιξώδους σε αυτή τη θέση είναι:

$$\mu \frac{dV}{dR} = \mu \Omega b^2 (1 + a^2 R^{-2})(b^2 - a^2)^{-1}$$

Άρα, το ζεύγος ανά μονάδα μήκους, στον εσωτερικό κύλινδρο λόγω αντίστασης του ιξώδους έχει ροπή:

$$(2\pi a \times 1) \times a \times \{2\mu \Omega b^2 (b^2 - a^2)^{-1}\} = 4\pi a^2 b^2 \Omega (b^2 - a^2)^{-1}$$

Το αποτέλεσμα αυτό παρέχει τη βάση μέτρησης του μ για μερικά υγρά με τη χρήση ενός ιξωδομέτρου περιστροφής.

8.11. Στατική Ροή Ρευστού με Ιξώδες, σε Σωλήνες Ομοιόμορφης Διατομής

Προτού αφήσουμε το αντικείμενο των προβλημάτων ροής με ιξώδες, τα οποία λύνονται σχετικά εύκολα, μελετούμε την περίπτωση στατικής ασυμπίεστης, μη επιταχυνόμενης ροής μέσα σε ένα σωλήνα οποιασδήποτε ομοιόμορφης διατομής. Αγνοούμε τις εξωτερικές δυνάμεις του σώματος. Άρα, με $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$, $\vec{F} = \vec{0}$, η διανυσματική εξίσωση των Navier - Stokes γίνεται:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right) \nabla p - \nu \nabla^2 \vec{v} = \vec{0} \quad (1)$$

Ας εργαστούμε με σταθερό σύστημα αξόνων Ox , Oy , Oz , με τον Oz πα-



ράλληλο προς τη ροή έτσι που να ισχύει:

$$\vec{V} = \omega(x, y)\vec{k}$$

Τότε, η εξ. (1) δίδει:

$$\nabla p = \mu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)\vec{k} \quad (2)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των μοναδιαίων διανυσμάτων έχουμε,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \quad (5)$$

Οι εξ. (3), (4) δείχνουν $p = p(z)$, έτσι που η (5) δίδει:

$$\frac{dp(z)}{dz} = \mu\left(\frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2}\right) \quad (6)$$

Το αριστερό μέλος της (6) είναι συνάρτηση μόνο του z , ενώ το δεξιό είναι συνάρτηση μόνο των x και y , Άρα, το καθένα είναι σταθερό, έστω $-P$, το αρνητικό πρόσημο λαμβάνεται καθώς αναμένουμε το p να ελαττώνεται όσο αυξάνει το z . Τότε το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{P}{\mu} \quad (7)$$

με το ω να τείνει να μηδενιστεί στα τοιχώματα του σωλήνα.

8.11.1. Θεώρημα μοναδικότητας

Για να λάβουμε λύσεις της (7), οι οποίες είναι πρακτικές, είναι χρήσιμο να θεμελιωθεί ένα θεώρημα μοναδικότητας. Μία μορφή η οποία είναι λίγο πιο γενική από αυτή που επιζητείται εδώ είναι η ακόλουθη:

Αν $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = f(x, y)$ σε όλα τα σημεία (x, y) μιας περιοχής S στο επίπεδο Ox, Oy , η οποία ορίζεται από μία κλειστή καμπύλη C και αν η f ορίζεται σε κάθε σημείο (x, y) της S και η ω σε κάθε σημείο της C ,



τότε κάθε λύση $\omega = \omega(x, y)$, η οποία ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες είναι μοναδική.

Απόδειξη:

Έστω $\omega = \omega_1(x, y)$, $\omega = \omega_2(x, y)$, ότι είναι δύο λύσεις που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = f(x, y)$$

στην S μαζί με τις προσδιορισμένες οριακές συνθήκες στη C . Αποδειχνουμε ότι $\omega_1 = \omega_2$. Με αυτά τα δεδομένα, γράφουμε

$$W(x, y) = \omega_1(x, y) - \omega_2(x, y)$$

Τότε

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = f - f = 0$$

Επίσης, στη C , $W = 0$, αφού $\omega_1 = \omega_2$ στη C . Τώρα, θεωρούμε το

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + W \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right\} dx dy = \\ &= \iint_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(W \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(W \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right\} dx dy = \oint_C \left(W \frac{\partial W}{\partial x} dy - W \frac{\partial W}{\partial y} dx \right) = 0, \end{aligned}$$

αφού $W = 0$ στη C .

Αλλά $\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \geq 0$. Αφού $I=0$, $\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 = 0$ στην S , το οποίο θα αληθεύει μόνο αν $\frac{\partial W}{\partial x} = 0 = \frac{\partial W}{\partial y}$, σε κάθε σημείο της S .

Αυτό δείχνει, ότι $W = \text{σταθερό}$ στην S . Αφού $W = 0$ στη C , συνάγουμε από τη συνέχεια της W , ότι $W = 0$ σε όλη την S . Αυτό θεμελιώνει και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

8.11.2. Ροή σε Σωλήνα Ομοιόμορφης Ελλειπτικής Διατομής

Υποθέτουμε ότι η διατομή του σωλήνα έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Τότε, πρέπει να λύσουμε τη σχέση:



$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = -\frac{p}{\mu}$$

με $\omega = 0$, σε αυτή την περίπτωση.

Παρατηρούμε, πρώτα, ότι η συνάρτηση $\omega = k(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})$ είναι με κατάλληλες προϋποθέσεις μηδέν στο όριο. θεωρώντας το k ως σταθερό, αντικαθιστώντας το ω στη διαφορική εξίσωση με μερική παράγωγο, έχουμε:

$$k(-\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}) = -\frac{p}{\mu} \quad \text{ή}$$

$$k = \frac{Pa^2b^2}{2\mu(a^2 + b^2)}$$

Άρα,

$$\omega(x, y) = \frac{Pa^2b^2}{2\mu(a^2 + b^2)} (1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})$$

Το θεώρημα της μοναδικότητας δείχνει ότι αυτή είναι η ζητούμενη λύση.

Η εκκένωση του όγκου δια του σωλήνα, ανά μονάδα χρόνου, είναι:

$$Q = \int_S \omega(x, y) dS$$

Αυτό μπορεί εύκολα να υπολογιστεί με διπλή ολοκλήρωση στην επιφάνεια της διατομής. Εντούτοις, η ακόλουθη διαδικασία είναι γρηγορότερη. Παρατηρούμε ότι η ω είναι σταθερή γύρω από τα όρια της έλλειψης,

$$x = \lambda a \cos \theta, \quad y = \lambda b \sin \theta \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

όπου, πράγματι,

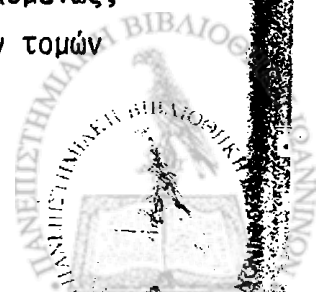
$$\omega = \frac{Pa^2b^2(1 - \lambda^2)}{2\mu(a^2 + b^2)}$$

Το εμβαδό αυτής της έλλειψης και της έλλειψης

$$x = (\lambda + \delta\lambda) a \cos \theta, \quad y = (\lambda + \delta\lambda) b \sin \theta$$

είναι $\pi(\lambda + \delta\lambda)^2 ab - \pi\lambda^2 ab \approx 2\pi ab \lambda \delta\lambda$ σε πρώτη προσέγγιση. Επομένως, ο όγκος ροής ανά μονάδα χρόνου, μεταξύ των δύο ελλειπτικών τομών είναι

$$\frac{\pi Pa^3 b^3 (1 - \lambda^2) \lambda \delta\lambda}{\mu(a^2 + b^2)}$$



έτσι, που ο ολικός εκκενούμενος όγκος ανά μονάδα χρόνου είναι:

$$Q = \frac{\pi R a^3 b^3}{\mu(a^2 + b^2)} \int_0^1 (1 - \lambda^2) \lambda d\lambda = \frac{\pi R a^2 b^2}{4\mu(a^2 + b^2)}$$

Λαμβάνοντας $b = a$, ανακαλύπτουμε ότι βρίσκεται ο τύπος για το Q , για κυκλική διατομή, της ενότητας 8.10.2.

8.11.3 Ροή σε Σωλήνα με Ισόπλευρη Τριγωνική Διατομή

Υποθέτουμε, ότι η διατομή του σωλήνα είναι ισόπλευρο τρίγωνο που ορίζεται από τις γραμμές.

$$x = a, \quad y = \pm 3^{-\frac{1}{2}} x$$

Τότε, αν λάβουμε $\omega = k(x - a)(y^2 - \frac{1}{3}x^2)$, το $\omega = 0$ στα οριακά τοιχώματα, με κατάλληλες προϋποθέσεις. Αντικαθιστώντας το ω στην

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = -\frac{P}{\mu}$$

βρίσκουμε

$$k = \frac{3P}{(4\mu a)}$$

Συνεπώς,

$$\omega = \frac{3P(x - a)(y^2 - \frac{1}{3}x^2)}{(4\mu a)}$$

Η λύση αυτή είναι μοναδική σε αναφορά προς το θεώρημα της μοναδικότητας. Ο όγκος που αδειάζει στη μονάδα του χρόνου είναι:

$$Q = \int_S \omega dS = 2 \int_0^a dx \int_0^{3^{-\frac{1}{2}}x} \omega dy = \frac{P a^4}{60 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \mu}$$

8.11.4 Χρήση των Αρμονικών Συναρτήσεων

Είναι δυνατό, μερικές φορές, να δούμε μία ειδική ολοκληρωτική συνάρτηση $\omega = \omega(x, y)$ για τη σχέση

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = -\frac{P}{\mu}, \text{ στην } S$$

η οποία μπορεί να μην ικανοποιεί την $\omega = 0$ σε ολόκληρο το όριο της



C. Στις περιπτώσεις αυτές μπορεί κανείς να προχωρήσει ψάχνοντας για μια κατάλληλη αρμονική συνάρτηση $\omega = \omega_1(x, y)$ η οποία να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \quad \text{στην } S$$

έτσι, που η $\omega = \omega_1 + k\omega_2$ να είναι μία λύση της αρχικής εξίσωσης του τύπου του Poisson. Αν κάποιος μπορέσει να προσδιορίσει το k και όποιες άλλες σταθερές που ικανοποιούν την $\omega = 0$ σε ολόκληρη την οριακή καμπύλη, τότε, η $\omega = \omega_1 + k\omega_2$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος. Είναι, κατά συνέπεια, χρήσιμο να μελετηθούν μερικές λύσεις της αρμονικής εξίσωσης. Με αντικατάσταση της $\omega = X(x)Y(y)$ στην εξίσωση Laplace και χωρίζοντας τις μεταβλητές, εύκολα δείχνουμε, ότι οι τυπικές αρμονικές συναρτήσεις είναι:

$$\omega(x, y) = \sinh nx \sin ny \quad \text{ή} \quad e^{\pm nx} \sin ny$$

$$\omega(x, y) = \cosh nx \cos ny \quad \text{ή} \quad e^{\pm nx} \cos ny$$

$$\omega(x, y) = \sin nx \sinh ny \quad \text{ή} \quad e^{\pm ny} \sin nx$$

$$\omega(x, y) = \cos nx \cosh ny \quad \text{ή} \quad e^{\pm ny} \cos nx$$

Καθώς η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους είναι γραμμική, κατάλληλοι συνδυασμοί αυτών μπορεί να συνδυαστούν με κάθε αποδεκτή ειδική ολοκληρωτική συνάρτηση, για να σχηματιστεί η κατάλληλη λύση. Τέτοια διαδικασία, συνήθως, οδηγεί σε αναπτύξεις σειρών Fourier.

8.12 Διάχυση Στροβιλότητας

Θεωρείστε τη διανυσματική εξίσωση Navier-Stokes, για ένα ασυμπλέστο ιξώδες ρευστό, με τη μορφή:

$$\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right) + \nabla \left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) - \vec{V} \wedge \vec{\zeta} = \vec{F} - \nabla \int \frac{dp}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{V}$$

Αν οι εξωτερικές δυνάμεις του σώματος είναι συντηρητικές έτσι, ω -



στε $\nabla \wedge \vec{F} = \vec{0}$, λαμβάνοντας το στροβιλισμό (curl) και των δύο μελών της εξίσωσης, βρίσκουμε:

$$\nabla \wedge \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) - \nabla \wedge (\vec{V} \wedge \vec{\zeta}) = \nu \nabla \wedge \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$$

Αλλά

$$\nabla \wedge \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \wedge \vec{V}) = \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t}, \quad \nabla \wedge (\vec{V} \wedge \vec{\zeta}) = (\vec{\zeta} \cdot \nabla) \vec{V} - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\zeta}$$

χρησιμοποιώντας το $\nabla \cdot \vec{\zeta} = \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{V}) = 0$ και $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. Ακόμη,

$$\nabla \wedge (\nabla^2 \vec{V}) = \nabla^2 (\nabla \wedge \vec{V}) = \nabla^2 \vec{\zeta}$$

Έτσι, η (1) γίνεται:

$$\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\zeta} - (\vec{\zeta} \cdot \nabla) \vec{V} = \nu \nabla^2 \vec{\zeta} \quad \text{ή} \quad \frac{d\vec{\zeta}}{dt} = (\vec{\zeta} \cdot \nabla) \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{\zeta} \quad (2)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της (2) παριστάνει το ρυθμό με τον οποίο το $\vec{\zeta}$ μεταβάλλεται για ένα σωματίδιο όταν οι στροβιλογραμμές κινούνται μαζί με το ρευστό και οι εντάσεις των δινών παραμένουν σταθερές. Για αργή κίνηση, ο όρος αυτός είναι αμελητέος και η (2) προσεγγίζει προς την

$$\frac{d\vec{\zeta}}{dt} = \nu \nabla^2 \vec{\zeta} \quad (3)$$

Στην περίπτωση δισδιάστατης κίνησης, αν πάρουμε,

$$\vec{V} = u(x, y) \vec{i} + v(x, y) \vec{j} \quad (\text{ακίνητοι άξονες})$$

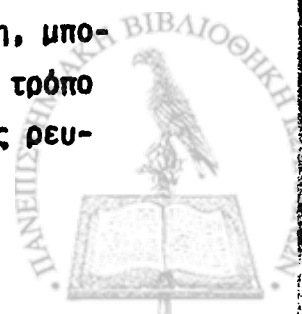
τότε

$$\vec{\zeta} = \nabla \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad \text{και}$$

$$(\vec{\zeta} \cdot \nabla) \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{V} = 0$$

οπότε η (2) ανάγεται στην (3) ακριβώς.

Άρα, για αργή τρισδιάστατη κίνηση, ή για δισδιάστατη κίνηση, μπορούμε να θεωρούμε την (3) ως μία εξίσωση που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η στροβιλότητα μεταβιβάζεται μέσα σε ένα ιξώδες ρευσ-



στό. Η εξίσωση αυτή, όταν διασπάται στις συνιστώσες της, δίδει αριθμητικές εξισώσεις, οι οποίες είναι της ίδιας μορφής, όπως η εξίσωση της αγωγής της θερμότητας σε ένα ρευστό. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι η στροβιλότητα διαχέεται, μέσα σε ένα υγρό, κατά παρόμοιο τρόπο, όπως η θερμότητα. Κατά αναλογία, τότε, εμείς συνάγουμε ότι η στροβιλότητα δε μπορεί να δημιουργηθεί στο εσωτερικό ενός ιξώδους ρευστού. Στην πραγματικότητα μεταφέρεται από τα τοιχώματα μέσα στο ρευστό. Για διευκρίνηση, κάποιος μπορεί να θυμηθεί, ότι ένα σκάφος ιστιοπλοίας θα δημιουργήσει δίνες στο αυλάκι της διαδρομής του, οι οποίες προέρχονται από τον σκελετό που τον αποτελεί ένα κινούμενο οριακό τοίχωμα. Με την πάροδο του χρόνου, η διαταραχή γρήγορα ηρεμεί καθώς οι δίνες διαχέονται μέσα στο νερό. Στην ειδική περίπτωση, όταν η κίνηση είναι δισδιάστατη και σε κύκλους με κέντρα στον άξονα z , σε κάθε σημείο που έχει κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες (R, θ, z) , όταν η ροή είναι μη στατική, είναι:

$$v = v(R, z)\hat{\theta}, \quad \text{έτσι που έχουμε,}$$

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \hat{R} & \hat{R}\hat{\theta} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & RV & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(RV)\vec{k}$$

Δεδομένου, ότι

$$\nabla \equiv \hat{R}\left(\frac{\partial}{\partial R}\right) + \hat{\theta}\left(\frac{\partial}{R\partial\theta}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\zeta} = \vec{k} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2(Rv)}{\partial\theta\partial R} = 0$$

Άρα,

$$\frac{d\vec{\zeta}}{dt} = \frac{\partial\vec{\zeta}}{\partial t}$$

Αφού $\vec{\zeta} = \zeta(R, t)\vec{k}$, είναι $\frac{\partial\vec{\zeta}}{\partial t} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}\vec{k}$ και $\nabla^2\vec{\zeta} = (\nabla^2\zeta)\vec{k}$

Επιπλέον,

$$\nabla^2\zeta = \left(\frac{1}{R}\right) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial R}\right) \left(\frac{R\partial\zeta}{\partial R}\right) \right\} = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial R^2}\right) + \left(\frac{1}{R}\right) \left(\frac{\partial\zeta}{\partial R}\right)$$



Άρα, η εξίσωση (3) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial R} \right) \quad (4)$$

Από τη γνωστή τυπική θεωρία της θερμότητας δια αγωγής, η λύση της (4), είναι:

$$\zeta = \frac{k}{8\pi\nu t} \exp\left(\frac{-R^2}{4\nu t}\right) \quad (5)$$

όπου k είναι μία σταθερά. Η (5) δείχνει, ότι το ζ μικραίνει γρήγορα με την πάροδο του χρόνου.

8.13 Διασπορά Ενέργειας λόγω Εσωτερικής Τριβής (Ιξώδους).

Αν ακολουθήσουμε ένα στοιχείο ύλης από ιξώδες ρευστό ορισμένης μάζας $\rho \delta u$ και το οποίο κινείται σε κάθε χρονική στιγμή t με ταχύτητα \vec{V} , τότε η κινητική του ενέργεια είναι $\frac{1}{2}(\rho \delta u)\vec{V}^2$. Συνεπώς, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας κατά το χρόνο t , καθώς ακολουθούμε το στοιχείο είναι:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}(\rho \delta u)\vec{V}^2 \right\} = \rho \delta u \vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Άρα, ο ολικός ρυθμός απόκτησης κινητικής ενέργειας από ολόκληρο το ρευστό (όγκου U) είναι

$$\int_U \rho \vec{V} \cdot \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right) du = \rho \int_U \vec{V} \cdot \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right) du$$

για ένα ασυμπύεστο ρευστό. Τώρα, για ένα τέτοιο ρευστό, η διανυσματική εξίσωση των Navier - Stokes μπορεί να λάβει τη μορφή:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \nabla \int \frac{dp}{\rho} - \nu \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{V})$$

Επομένως, ο ρυθμός διασποράς της ενέργειας λόγω εσωτερικής τριβής (ιξώδους) είναι,

$$W = \mu \int_U \vec{V} \cdot (\nabla^2 (\nabla \cdot \vec{V})) du$$



Αλλά,

$$\nabla \cdot \{ \vec{V} \wedge \text{cur } \Gamma \vec{V} \} = (\text{cur } \Gamma \vec{V})^2 - \vec{V} \cdot \{ \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) \}$$

σύμφωνα με όσα εξετάθησαν στο Κεφάλαιο 1. Άρα,

$$\begin{aligned} W &= \mu \int_U (\nabla \wedge \vec{V})^2 du - \mu \int_U \nabla \cdot (\vec{V} \wedge \text{cur } \Gamma \vec{V}) du \\ &= \mu \int_U (\nabla \wedge \vec{V})^2 du - \int_S \vec{n} \cdot (\vec{V} \wedge \text{cur } \Gamma \vec{V}) dS \end{aligned}$$

όπου S είναι η ολική επιφάνεια που περικλείει τον όγκο U . Στην περίπτωση, που η οριακή επιφάνεια (τοιχώματα) S βρίσκονται σε ηρεμία και δεν υπάρχει ολίσθηση μεταξύ ρευστού και τοιχώματος, $\vec{V} = \vec{0}$ στην S , οπότε:

$$W = \mu \int_U \zeta^2 du$$

8.14 Στατική Ροή γύρω από Ακίνητη Σφαίρα

Υποθέτουμε, ότι μία στερεά σφαίρα ακτίνας a κρατείται με το κέντρο της στην αρχή ενός ομοιόμορφου ρεύματος ιξώδους ασυμπίεστου υγρού, το οποίο έχει αδιατάρακτη ταχύτητα $\vec{U} = -U\vec{i}$. Εδώ, η U υποτίθεται μικρή. Τότε στη γειτονική περιοχή της σφαίρας η ταχύτητα του ρευστού \vec{V} θα διαφέρει από την περιβάλλουσα ταχύτητα \vec{U} , αλλά θα είναι ακόμη μικρού μέτρου. Η διανυσματική εξίσωση των Navier-Stokes, στη συνήθη γραφή της είναι:

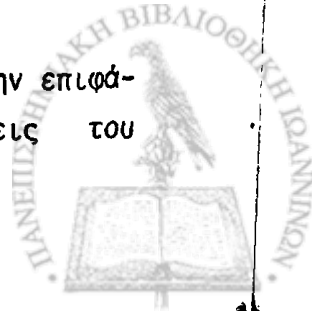
$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{V})$$

Όταν η ροή είναι στατική, $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$. Αφού η \vec{V} είναι παντού μικρή, η $\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$ μπορεί να υποτεθεί επίσης μικρή συγκρινόμενη με $[\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{V})]$.

Άρα, θα υποθέσουμε την προσέγγιση,

$$\vec{F} - \left(\frac{1}{\rho}\right) \nabla p - \nu \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{V}) = \vec{0} \quad (1)$$

για αργή στατική ροή, όπου $\vec{V} \rightarrow -U\vec{i}$ στο άπειρο και $\vec{V} = \vec{0}$ στην επιφάνεια $r = a$. Θα υποθέσουμε, ακόμη, ότι οι εξωτερικές δυνάμεις του



σώματος διατηρούνται αναλλοίωτες, έτσι ώστε έχουμε, $\nabla \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας το curl και των δύο πλευρών της (1), βρίσκουμε:

$$\text{curl } \text{curl } \text{curl } \vec{V} = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση της συνεχείας είναι $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. Αυτή ικανοποιείται από μία διανυσματική συνάρτηση \vec{A} (ένα διανυσματικό δυναμικό) όπου:

$$\vec{V} = \nabla \wedge \vec{A} \quad (3)$$

Από τις (2) και (3)

$$\text{curl } \text{curl } \text{curl } \text{curl } \vec{A} = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \nabla \wedge (\vec{V} \wedge \vec{r}) &= \sum \left\{ \vec{r} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (\vec{V} \wedge \vec{r}) \right\} = \sum \left\{ \vec{r} \wedge \left(\vec{V} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right) \right\} \\ &= \sum \left\{ \vec{r} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{r}) \right\} = \vec{V} (\sum \vec{r} \cdot \vec{r}) - \sum (\vec{V} \cdot \vec{r}) \vec{r} \\ &= 3\vec{V} - \vec{V} = 2\vec{V} \end{aligned}$$

Άρα, όταν $r \rightarrow \infty$, $\vec{V} \rightarrow \frac{1}{2} \nabla \wedge (\vec{V} \wedge \vec{r})$, η οποία ικανοποιείται από την $\vec{A} \rightarrow \frac{1}{2} (\vec{V} \wedge \vec{r})$. Ας προσπαθήσουμε να βρούμε λύσεις της (4), της μορφής

$$\vec{A} = r^{-n} \vec{V} \wedge \vec{r} \quad (5)$$

Το n εδώ είναι ένας άγνωστος. Είναι φανερό ότι αναμένουμε $n = 0$ να είναι μία λύση, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες στο άπειρο. Έχουμε,

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{A} &= \sum \left\{ \vec{r} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (r^{-n} \vec{V} \wedge \vec{r}) \right\} \\ &= \sum \left\{ \vec{r} \wedge \left(-nr^{-n-1} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \vec{V} \wedge \vec{r} + r^{-n} \vec{V} \wedge \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right) \right) \right\} \\ &= -nr^{-n-2} \sum \left\{ x \vec{r} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{r}) \right\} + r^{-n} \sum \left\{ \vec{r} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{r}) \right\} \\ &= r^{-n} \left\{ \sum \vec{V} - \sum (\vec{V} \cdot \vec{r}) \vec{r} \right\} - nr^{-n-2} \vec{r} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{r}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\approx 2r^{-n}\vec{U} - nr^{-n-2}(r^2\vec{U} - (\vec{U}\cdot\vec{r})\vec{r}) \\ &= (2-n)r^{-n}\vec{U} + nr^{-n-2}(\vec{U}\cdot\vec{r})\vec{r} \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{A}) &= (2-n)\Sigma\{i\wedge(\frac{\partial}{\partial x})(r^{-n}U)\} + n\Sigma\{i\wedge(\frac{\partial}{\partial x})\cdot\{r^{-n-2}(\vec{U}\cdot\vec{r})\vec{r}\}\} \\ &= (2-n)\Sigma\{i\wedge(-nr^{-n-1}\times\frac{\vec{U}}{r})\} + n\Sigma\{i\wedge\{-(n+2)r^{-n-3}(\frac{x}{r}) \\ &\quad (\vec{U}\cdot\vec{r})\vec{r} + r^{-n-2}(\vec{U}\cdot\vec{r})\vec{r} + r^{-n-2}(\vec{U}\cdot\vec{r})i\}\} = \\ &= -n(2-n)r^{-n-2}(\vec{r}\wedge\vec{U}) + nr^{-n-2}(\vec{U}\wedge\vec{r}) = n(3-n)r^{-n-2}(\vec{U}\wedge\vec{r}) \end{aligned}$$

Συνεπώς, αφού $\vec{A} = r^{-n}\vec{U}\wedge\vec{r}$,

$$\begin{aligned} \text{cur } 1 \text{ cur } 1 \text{ cur } 1 \text{ cur } 1 \vec{A} &= n(3-n)\nabla\wedge[\nabla\wedge\{r^{-n-2}(\vec{U}\wedge\vec{r})\}] = \\ &= n(3-n)(n+2)(1-n)r^{-n-4}(\vec{U}\wedge\vec{r}) \end{aligned}$$

Επομένως, η (4) ικανοποιείται από μία συνάρτηση της μορφής (5) για $n = -2, 0, 1$ ή 3 . Με επαλληλία μπορούμε να έχουμε μία γενικότερη λύση,

$$\vec{A} = (\vec{U}\wedge\vec{r})\left(k_1 r^2 + k_2 + \frac{k_3}{r} + \frac{k_4}{r^3}\right) \quad (6)$$

Αφού $\vec{A} \rightarrow \frac{1}{2}(\vec{U}\wedge\vec{r})$ καθώς $r \rightarrow \infty$, απαιτούμε $k_1 = 0, k_2 = \frac{1}{2}$, έτσι ώστε

$$\vec{A} = (\vec{U}\wedge\vec{r})\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{k_3}{r}\right) + \left(\frac{k_4}{r^3}\right)\right] \quad (7)$$

Αλλά,

$$\vec{V} = \nabla\wedge\vec{A} = \frac{1}{2}\nabla\wedge(\vec{U}\wedge\vec{r}) + k_3\nabla\wedge(r^{-1}\vec{U}\wedge\vec{r}) + k_4\nabla\wedge(r^{-3}\vec{U}\wedge\vec{r})$$

και όπως έχουμε δείξει,

$$\nabla\wedge(r^{-n}\vec{U}\wedge\vec{r}) = (2-n)r^{-n}\vec{U} + nr^{-n-2}(\vec{U}\cdot\vec{r})\vec{r},$$

$$\vec{V} = \vec{U} + k_3\{r^{-1}\vec{U} + r^{-3}(\vec{U}\cdot\vec{r})\vec{r}\} + k_4\{-r^{-3}\vec{U} + 3r^{-5}(\vec{U}\cdot\vec{r})\vec{r}\}$$



$$= (1+k_3r^{-1}-k_4r^{-3})\vec{U} + (k_3r^{-3}+3k_4r^{-5})(\vec{U}\cdot\vec{r})\vec{r} \quad (8)$$

Για $r=a$, $\vec{V}=\vec{0}$ παντού, έτσι ώστε,

$$1+k_3a^{-1}-k_4a^{-3}=0=k_3a^{-3}+3k_4a^{-5}$$

Βρίσκουμε $k_3=-\frac{3}{4}a$, $k_4=\frac{a^3}{4}$ έτσι, που η (8) δίδει την ταχύτητα του ρευστού,

$$\vec{V} = \left(1 - \frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right)\vec{U} + \frac{3}{4}\left(\frac{a^3}{r^5} - \frac{a}{r^3}\right)(\vec{U}\cdot\vec{r})\vec{r} \quad (9)$$

και το διανυσματικό δυναμικό είναι:

$$\vec{A} = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\frac{a}{r} + \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right)(\vec{U}\cdot\vec{r}) \quad (10)$$

Το διάνυσμα στροβιλότητας είναι:

$$\vec{\zeta} = \nabla \wedge \vec{V} = \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A})$$

Αφού δείξαμε ότι

$$\nabla \wedge [\nabla \wedge (r^{-n} \vec{U} \wedge \vec{r})] = n(3-n)r^{-n-2}(\vec{U} \wedge \vec{r})$$

$$\vec{\zeta} = -\frac{3}{2}ar^{-3}\vec{U} \wedge \vec{r} \quad (11)$$

Συνεπώς, στο σημείο του ρευστού, το οποίο έχει σφαιρικές πολικές συντεταγμένες (r, θ, ψ) η αρχή των οποίων είναι το κέντρο της σφαίρας και η γραμμή που διέρχεται από αυτό κατά τη διεύθυνση \vec{r} και προσδιορίζει το $\theta=0$, το μέτρο της στροβιλότητας είναι:

$$\zeta = \frac{3}{2}ar^{-2}U \sin \theta \quad (12)$$

Από την ενότητα Β.8, είναι γνωστό ότι ο ρυθμός διασποράς της ενέργειας λόγω στροβιλότητας, όταν τα όρια της σφαίρας βρίσκονται σε ηρεμία, είναι:

$$W = \mu \int_V \zeta^2 dV$$



όπου V είναι ολόκληρος ο όγκος του ρευστού έξω από τη σφαίρα.

Έτσι,

$$W = \mu \int_0^\pi \int_a^\infty 2 \pi r^2 \sin \theta \cdot \zeta^2 dr$$
$$= \frac{9}{2} \mu \pi U^2 a^2 \int_a^\infty r^{-2} dr \cdot \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 6 \mu \pi U^2 a$$

Αν το D συμβολίζει την ολική αντίσταση του ιξώδους του ρευστού στη σφαίρα, τότε $W = DU$. Άρα,

$$D = 6 \pi \mu a U \quad (13)$$

Προφανώς, αν η σφαίρα κινείται με σταθερή ταχύτητα U μέσα σε ρευστό που βρίσκεται σε ηρεμία, ο ίδιος τύπος ισχύει για το συντελεστή αντίστασης λόγω του ιξώδους. Στην ειδική περίπτωση που μία στερεά σφαίρα ακτίνας a και πυκνότητας σ πέφτει κατακόρυφα μέσα σε ένα υγρό πυκνότητας ρ ($\rho < \sigma$), η αντίσταση του ιξώδους δημιουργεί μία τερματική ταχύτητα, ας πούμε, U . Όταν επιτυγχάνεται αυτή, αν εξισώσουμε το βάρος της σφαίρας με την άνοση και το συντελεστή αντίστασης της τριβής, έχουμε:

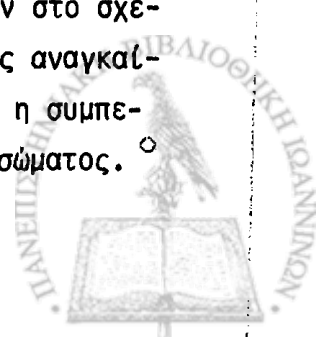
$$\frac{4}{3} \pi a^3 \sigma g = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho g + 6 \pi a \mu U \quad \text{ή}$$

$$U = \frac{2}{9} (\sigma - \rho) a^2 \left(\frac{g}{\mu} \right) \quad (14)$$

8.15 Διαστατική Ανάλυση, Αριθμός του Reynolds

8.15.1 Εισαγωγή

Μέχρι τώρα έχουμε, κυρίως, ερευνήσει εκείνα τα προβλήματα ιξώδους ροής, τα οποία είναι αναλυτικά εύχρηστα, αν και είδαμε στην τελευταία ενότητα, ότι πρέπει να γίνουν προσεγγίσεις για να προσδιοριστεί ο συντελεστής αντίστασης λόγω της εσωτερικής τριβής του ρευστού σε ακίνητη στερεά σφαίρα μέσα σε ένα ομοιόμορφο ρεύμα. Στις πρακτικές εφαρμογές, όπως εκείνες που ανακύπτουν στο σχεδιασμό, πλοίων, αεροσκαφών, υποβρυχίων κλπ., είναι συνήθως αναγκαίο να εκτελεστούν πειράματα με μοντέλα και να συσχετιστεί η συμπεριφορά τους με εκείνη του πρωτότυπου κανονικού μεγέθους σώματος.



Στη γενική περίπτωση, αυτό απαιτεί όχι μόνο να είναι το μοντέλο και το σώμα γεωμετρικά όμοια σώματα, αλλά επίσης, όσο είναι δυνατόν κάποιος να διαπιστώνει ότι τα δύο κέκτηνται δυναμική ομοιότητα, με την έννοια ότι οι λόγοι των αντιστοιχών δυναμικών ποσοτήτων στις αντίστοιχες θέσεις θα πρέπει να είναι ίσοι. Έτσι, για παράδειγμα, αν θέλουμε να προσομοιάσουμε την κίνηση ενός πλοίου, μπορεί να είναι επιθυμητό να εξασφαλιστεί, ότι πλησίον του πλοίου, ο λόγος των δυνάμεων τριβής προς τις δυνάμεις αδρανείας θα πρέπει να είναι ίδιος για ολόκληρο το σώμα και το μοντέλο. Θα αναπτύξουμε τώρα κριτήρια, τα οποία δίνουν τη δυνατότητα στις συνθήκες της δυναμικής ομοιότητας να λαμβάνονται μεταξύ του πλήρους σώματος και του μοντέλου. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται περιλαμβάνει την οικοδόμηση γενικών ή αδιάστατων εξισώσεων και μορφοποιεί την επιστήμη της διαστατικής ανάλυσης.

8.15.2 Το θεώρημα Π του Buckingham

Το θεώρημα Π του Buckingham αποδεικνύει ότι σε ένα φυσικό πρόβλημα που εξαρτάται από n παραμέτρους που έχουν m διαστάσεις οι παράμετροι μπορούν να περιοριστούν σε $n-m$ ανεξάρτητες αδιάστατες παραμέτρους. Αν A_1, A_2, \dots, A_n είναι οι σχετικές παράμετροι, π.χ., πίεση, εσωτερική τριβή, ταχύτητα κλπ., επειδή όλες αυτές οι ποσότητες είναι θεμελιώδεις για την επίλυση του προβλήματος, θα πρέπει να υπάρχει μία συνάρτηση της μορφής, $F(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0$, η οποία παριστά το φυσικό πρόβλημα.

Αν Π_1, Π_2, \dots , παριστάνουν αδιάστατες ομάδες των παραμέτρων $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, τότε, αν ο αριθμός των διαστάσεων είναι m , υπάρχει μία εξίσωση της μορφής

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0$$

για το φυσικό πρόβλημα.

Η απόδειξη του θεωρήματος Π, δίδεται σε σχετικά με τη διαστατική ανάλυση εγχειρίδια (βλέπε βιβλιογραφία). Η μέθοδος προσδιορισμού των παραμέτρων Π έχει ως εξής: Επιλέγουμε m από τις παραμέτρους A_n με διαφορετικές διαστάσεις, ώστε να περιέχουν όλες τις διαστά-



σεις m και τις χρησιμοποιούμε ως επαναλαμβανόμενες μεταβλητές μαζί με μία από τις υπόλοιπες ποσότητες A_n για κάθε Π_{n-m} . Επί παραδείγματι, έστω ότι οι A_1, A_2, A_3 περιέχουν τις διαστάσεις M, L και T , όχι απαραίτητα καθεμία χωριστά, αλλά συνολικά. Τότε, η πρώτη παράμετρος Π_1 έχει τη μορφή:

$$\Pi_1 = A_1^{x_1} A_2^{y_1} A_3^{z_1} A_4$$

η δεύτερη $\Pi_2 = A_1^{x_2} A_2^{y_2} A_3^{z_2} A_5$ κ.ο.κ., μέχρι την

$$\Pi_{n-m} = A_1^{x_{n-m}} A_2^{y_{n-m}} A_3^{z_{n-m}} A_n$$

Οι εκθέτες των παραπάνω εξισώσεων θα πρέπει να προσδιοριστούν έτσι, ώστε κάθε Π_{n-m} να είναι αδιάστατο. Οι παράμετροι A_n αντικαθίστανται από τις διαστάσεις τους και οι εκθέτες M, L και T εξισώνονται με το μηδέν, αντιστοίχως. Έτσι, προκύπτουν τρεις εξισώσεις με τρεις αγνώστους για κάθε Π , από τις οποίες βρίσκονται οι εκθέτες x, y, z και άρα και το Π .

Αν περιέχονται δύο μόνο διαστάσεις, τότε επιλέγουμε δύο από τις παραμέτρους A_n ως επαναλαμβανόμενες μεταβλητές και σχηματίζουμε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους εκθέτες για κάθε Π .

Σε μερικές περιπτώσεις, οι αδιάστατες παράμετροι είναι προφανείς και δε χρειάζεται να καταφύγει κανείς σε εξισώσεις. Η απλούστερη περίπτωση είναι εκείνη, όπου δύο ποσότητες έχουν τις ίδιες διαστάσεις π.χ. μήκους. Τότε, ο λόγος των δύο αυτών ποσοτήτων είναι η παράμετρος Π .

Η όλη διαδικασία γίνεται καλύτερα κατανοητή με παραδείγματα.

8.15.3 Εξαγωγή των αδιάστατων Παραμέτρων, Αριθμός Reynolds κλπ.

Στην ενότητα 8.9, η εξίσωση κίνησης των Navier-Stokes ενός ιξώδους ασυμπύεστου ρευστού κατά τη διεύθυνση x είναι,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \chi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$



Υποθέτουμε, ότι τα L , V , P συμβολίζουν ένα χαρακτηριστικό μήκος, ταχύτητα και πίεση, αντιστοίχως. Τότε τα μήκη, οι ταχύτητες και οι πιέσεις στην (1) μπορούν να εκφραστούν ως προς αυτά τα μεγέθη.

Έτσι, γράφουμε:

$$x = Lx', \quad y = Ly', \quad z = Lz' \quad (2)$$

$$u = Vu', \quad v = Vu', \quad \omega = V\omega' \quad (3)$$

$$p = Pp' \quad (4)$$

όπου όλες οι τονούμενες ποσότητες είναι καθαροί αριθμοί χωρίς διαστάσεις. Τότε, αφού L/V είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος, έχουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (Vu')}{\partial (LV^{-1}t')} = \frac{V^2}{L} \frac{\partial u'}{\partial t'}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = (Vu') \frac{\partial (Vu')}{\partial (Lx')} = \frac{V^2}{L} u' \frac{\partial u'}{\partial x'}, \text{ κλπ.}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (Pp')}{\partial (Lx')} = \frac{P}{\rho L} \frac{\partial p'}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (Vu')}{\partial (Lx')^2} = \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}$$

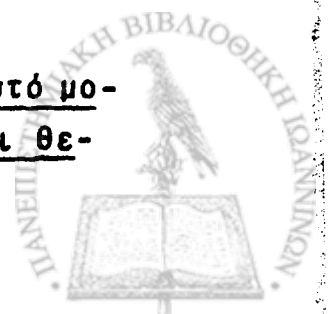
Αντικαθιστώντας αυτούς τους όρους στην (1) και απλοποιώντας, λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + \omega' \frac{\partial u'}{\partial z'} = \frac{LX}{V^2} - \frac{P}{\rho V^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{V}{VL} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) \quad (5)$$

Στην εξ (5), το αριστερό μέλος είναι εξ ολοκλήρου αδιάστατο. Άρα, και το δεξιό μέλος θα πρέπει να είναι αδιάστατο. Συνάγεται, ότι οι τρεις ποσότητες

$$\frac{LX}{V^2}, \quad \frac{P}{\rho V^2}, \quad \frac{V}{VL}$$

πρέπει να είναι αδιάστατες. Για να κατασκευαστεί ένα πιστό μοντέλο μιας δεδομένης ασυμπίεστης ιξώδους ροής, είναι θε-



μελειακό οι τρεις αυτοί αριθμοί να διατηρηθούν σταθεροί. Ο πρώτος αριθμός ($\frac{LX}{V^2}$) μας λέει πως να κλιμακώσουμε τις εξωτερικές δυνάμεις του σώματος (Αριθμός Froude). Ο δεύτερος αριθμός ($\frac{P}{\rho V^2}$) εξασφαλίζει τη δυναμική ομοιότητα στις δύο ροές, σε σημεία που η εσωτερική τριβή είναι άνευ σημασίας. Τέτοια σημεία μπορούν να υπάρχουν σε απομεμακρυσμένες από τα όρια θέσεις (Αριθμός Weber). Ο τρίτος αριθμός εξασφαλίζει δυναμική ομοιότητα σε αντίστοιχα σημεία πλησίον των οριακών τοιχωμάτων, όπου επικρατούν οι επιδράσεις του ιξώδους. Καλείται αριθμός Reynolds και συμβολίζεται με R, δηλαδή,

$$R = \frac{VL}{\nu} \quad (6)$$

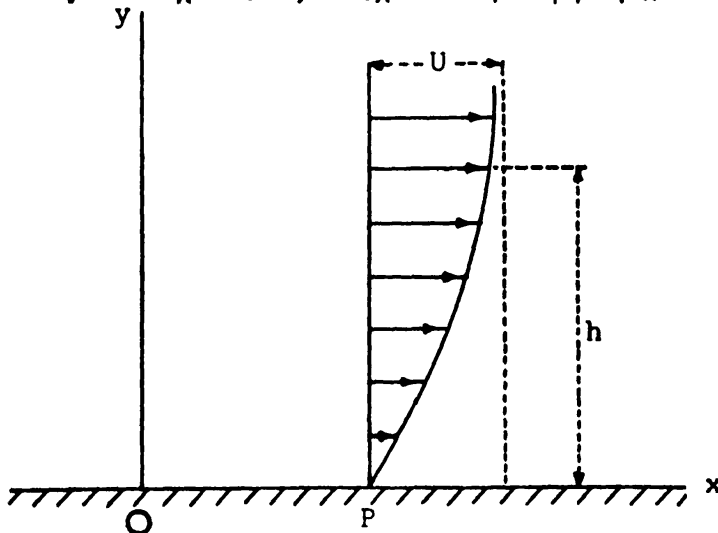
Θα πρέπει να σημειωθεί, εντούτοις, ότι στην πράξη, όταν προσομοιάζεται μία δεδομένη ροή, είναι σχεδόν, αν και όχι πάντοτε, δυνατόν να διατηρούνται και οι τρεις αριθμοί σταθεροί και επίσης να διατηρούν γεωμετρική ομοιότητα. Σε τέτοιες περιπτώσεις κάποιος πρέπει να αποφασίσει προηγουμένως ποιοί πρέπει να είναι οι κύριοι σκοποί της προσομοίωσης. Αν, π.χ., η μελέτη είναι κυρίως για την αντίσταση της εσωτερικής τριβής στα πλοία, τότε είναι σημαντικό να διατηρηθεί ο αριθμός Reynolds σταθερός όταν προτυποποιείται ολόκληρο το σκάφος. Αν δεν είναι επίσης, δυνατόν να διατηρηθεί ο ($\frac{P}{\rho V^2}$) σταθερός, τότε αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο δεν είναι πιστό αντίγραφο του πρωτοτύπου σε θέσεις μεμακρυσμένες από το όριο, όπου οι επιπτώσεις της τριβής είναι ασήμαντες.

Ο αριθμός Reynolds είναι χρήσιμος για τη μελέτη σημαντικών χαρακτηριστικών μιας ροής. Έτσι, ένας μεγάλος αριθμός R υποδηλοί ότι το ρευστό είναι μικρού ιξώδους. Ένας μικρός R υποδηλοί πολύ μεγάλο ιξώδες (εσωτερική τριβή). Το νερό και ο αέρας είναι ρευστά μικρής εσωτερικής τριβής και κατά την κίνηση δίδουν μεγάλους αριθμούς Reynolds. Επίσης, είναι γνωστό από πειράματα ότι αν η τιμή του $\frac{VL}{\nu}$ υπερβαίνει μία ορισμένη κρίσιμη τιμή, η ροή παύει να είναι στρωτή κοντά στα οριακά τοιχώματα. Στις περιπτώσεις αυτές η ροή γίνεται ακανόνιστη γιατί σχηματίζονται δίνες ή στρόβιλοι πλησίον του ορίου: Τέτοια ροή καλείται τυρβώδης (ή αναταρακτική)



8.16 Το οριακό στρώμα του Pradt1

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε στρωτή ροή ενός ρευστού σε μεγάλο αριθμό Reynolds πάνω σε ομαλή στερεά οριακή επιφάνεια, όπως είναι μία επίπεδη πλάκα. Αν το οριακό τοίχωμα είναι ακίνητο, τότε το ρευστό σε επαφή με αυτό, θα είναι επίσης ακίνητο. Καθώς κινούμαστε προς τα έξω κατά μήκος της καθέτου, η ταχύτητα του ρευστού θα αυξηθεί βαθμιαία μέχρις ότου επιτευχθεί τελικά η τελική ταχύτητα του ρεύματος. Μιλώντας ρεαλιστικά μπορούμε να πούμε, ότι αυτό προσεγγίζεται ασυμπτωτικά, αλλά οι μεγαλύτεροι ρυθμοί μεταβολής της ταχύτητας συμβαίνουν μέσα σε ένα λεπτό στρώμα του ρευστού σε επαφή με τα οριακά τοιχώματα. Αυτό καλείται οριακό στρώμα. Είναι μία περιοχή στην οποία οι δυνάμεις του ιξώδους (εσ. τριβής) και οι δυνάμεις αδρανείας είναι συγκρίσιμων μεγεθών. Έξω από αυτό το στρώμα, οι δυνάμεις του ιξώδους είναι πολύ μικρότερες από τις αδρανειακές. Το Σχ. 8.12, δείχνει στρωτή ροή πάνω σε μία επί-



Σχήμα 8.12

πέδη επιφάνεια. Ο Ox λαμβάνεται στην επιφάνεια, ο Oy κάθετος σε αυτή και η κάθετη στην επιφάνεια σχεδιάζεται στο P . Σε διάφορα σημεία αυτής της κάθετης, τα διανύσματα σχεδιάζονται παράλληλα προς την επιφάνεια και με κατάλληλα μήκη, για να παριστάνουν τις ταχύτητες του ρευστού στα σημεία αυτά. Μπορούμε να ορίσουμε το πάχος h του οριακού στρώματος, ως την περιοχή στην οποία η συνιστώσα x της ταχύτητας μεταβάλλεται από 0 σε $0.99 U$. Το ανώτερο όριο έχει οριστεί αυθαίρετα. Ένα άλλο όριο παρόμοιου μεγέθους θα έδιδε μία



συγκρίσιμη τιμή για το h . Η θεωρία του Pradt υποθέτει ότι οι δυνάμεις του ιξώδους είναι σημαντικές στην περιοχή $0 < y \leq h$ αλλά αμελητέες για $y > h$. Τέτοιες υποθέσεις, επιτρέπουν να γίνονται προσεγγιστικοί υπολογισμοί για το h .

Στο Σχήμα 8.12, υποθέτουμε, ότι η ροή είναι δισδιάστατη και ότι σε ένα σημείο $P(x, y)$ του οριακού στρώματος, η ταχύτητα του ρευστού είναι $\vec{V} = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}$. Τότε παραλείποντας τις επιπτώσεις της συμπίεστικότητας, η εξίσωση της συνέχειας γίνεται:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

και εν απουσία εξωτερικών δυνάμεων, οι εξισώσεις των Navier-Stokes είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Έστω, L ότι είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος κατά τη διεύθυνση Ox . Τότε, οι εξισώσεις (1) - (3) μπορούν να γίνουν γενικές θέτοντας:

$$\bar{u} = \frac{u}{U}, \quad \bar{v} = \frac{v}{hU}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad \bar{t} = \frac{Ut}{L}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho U^2}$$

Οπότε, μετά τις απλοποιήσεις, λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (1')$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \left(\frac{L}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right\} \quad (2')$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\left(\frac{L}{h}\right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \left(\frac{L}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right\} \quad (3')$$

όπου R είναι ο αριθμός Reynolds $\frac{UL}{\nu}$

Στη (2'), αφού $\left(\frac{L}{h}\right)^2 \gg 1$, μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση



$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{L^2}{Rh^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (4)$$

Σε ένα σημείο του οριακού στρώματος, αλλά όχι στην επιφάνεια, φαίνεται λογικό να υποθέσουμε, ότι

$$\bar{u} = 0(1), \quad \bar{x} = 0(1), \quad \bar{y} = 0(1), \quad \xi = 0(1), \quad \bar{p} = 0(1)$$

όπου το 0 συμβολίζει την τάξη μεγέθους των μεταβλητών αυτών. Άρα:

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\right) = 0(1), \quad \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right) = 0(1), \quad \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\right) = 0(1)$$

Οπότε,

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \left(\frac{L\bar{v}}{hU}\right) \left(\frac{uh}{Uy}\right) = 0(1)$$

Επίσης,

$$\bar{u} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right) = 0(1), \quad \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) = 0(1)$$

έτσι, η (4) δίδει:

$$0(1) + 0(1) + 0(1) = 0(1) + \left(\frac{L^2}{Rh^2}\right)0(1), \quad \text{δείχνοντας ότι,}$$

$$h = 0(LR^{-\frac{1}{2}}) = 0\left(\nu \frac{L}{U}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Για τον αέρα, αν πάρουμε ως τυπική τιμή την

$$\nu = 0.145 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{sec}^{-1}, \quad \text{και } L = 1.122 \text{ m}, \quad U = 61.8 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$$

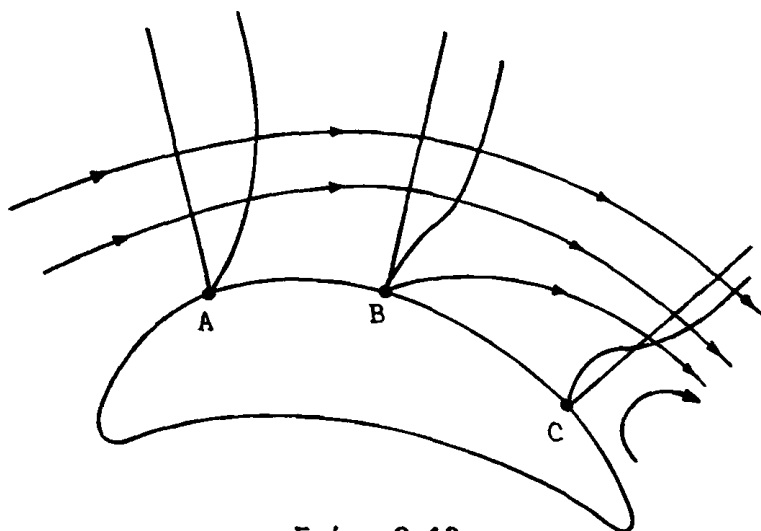
τότε, η (5) δίδει, ότι:

$$h \sim 5.4 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

Συμβαίνει συχνά για αρκετά μεγάλες ταχύτητες του ρεύματος, το οριακό στρώμα που σχηματίστηκε σε μία στερεά επιφάνεια να διασπαστεί και να επεκταθεί μακριά από το σημείο στο οποίο συμβαίνει η διάσπαση σχηματίζοντας μία περιοχή πολύ τυρβώδους ροής, προς την κατεύθυνση κίνησης του ρεύματος. Ένα τέτοιο χαρακτηριστικό παρατηρείται, όταν πνέει αέρας πάνω από μία αεροτομή. Στο οριακό στρώ-



μα, λόγω της μεγάλης βαθμίδας ταχύτητας της κάθετης προς το τοίχωμα, θα σχηματιστεί στροβιλότητα. Στην πραγματικότητα στην παραπάνω δισδιάστατη περίπτωση, το μέτρο της στροβιλότητας είναι περίπου $\frac{\partial u}{\partial y}$, αφού $\frac{\partial u}{\partial x}$ είναι μικρό. Η στροβιλότητα αυτή μεταφέρεται μακριά από το ρεύμα και διαχέεται προς τα έξω από το τοίχωμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη διεύρυνση του οριακού στρώματος. Επιπλέον, μπορεί να συμβεί ροή έξω από το οριακό στρώμα να επιβραδύνεται με επακόλουθο την αύξηση της πίεσης. Η βαθμίδα της πίεσης (βαροβαθμίδα) μπορεί να μεταφερθεί προς το οριακό στρώμα και στην περίπτωση υποηχητικής ροής, μπορεί να μεταφερθεί πίσω προς το οριακό στρώμα. Η επακολουθούσα εμφάνιση πίεσης στο οριακό στρώμα, μαζί με την απώλεια ενέργειας λόγω στροβιλότητας, μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα την αναστροφή της ταχύτητας του ρευστού σε κάποιο σημείο του οριακού τοιχώματος. Σε ένα τέτοιο σημείο το οριακό στρώμα διασπάται και αποκολλάται από την επιφάνεια αφήνοντας πίσω του στην αώτερη επιφάνεια μιάς αεροτομής. Κατά μήκος των καθέτων από τα ση-



Σχήμα 8.13

σημεία A, B, C, σχεδιάζονται οι μορφές της μεταβολής της ταχύτητας σε διάφορα σημεία. Διάσπαση του οριακού στρώματος συμβαίνει στο B.

8.16.1 Η ολοκληρωτική εξίσωση του Karman

Αναφερόμενοι πάλι στις εξισώσεις (1) και (2) της ενότητας



8.16, στην οποία η ρ υποτίθεται σταθερή ή στο οριακό στρώμα, οπότε και το ν είναι εκεί σταθερό, παρατηρούμε ότι:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(uu)}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial y} = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(uu)}{\partial y}$$

με την χρήση της (1). Άρα, η εξ. (2) γίνεται:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uu)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

αν παραλείψουμε τον όρο $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Αν το οριακό στρώμα περιορίζεται στο στρώμα $0 \leq y \leq h$, τότε ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση από $y=0$ μέχρι $y=h$, αυτή δίδει:

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial t} dy + \int_0^h \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dy + [uu]_0^h = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p h}{\partial x} + \nu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_h - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \right\}$$

Αλλά, αν $u = U$ όταν $y = h$, τότε

$$[uu]_0^h = Uu_h = U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial y} dy = -U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, όταν $y = h$

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy = -\frac{h}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0$$

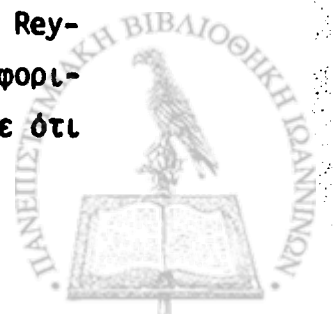
Η ολοκληρωματική αυτή εξίσωση οφείλεται στον Kármán.

8.17 Μήκος ανάμιξης του Prandtl

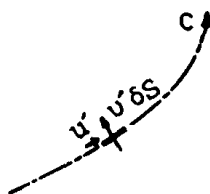
Είδαμε σε προηγούμενη ενότητα, ότι δύο καταστάσεις ροής χαρακτηρίζονται δυναμικά όμοιες όταν:

- (i) Είναι γεωμετρικά όμοιες, δηλαδή, οι αντίστοιχες γραμμικές διαστάσεις έχουν λόγο σταθερό και
- (ii) Οι αντίστοιχες γραμμές ροής είναι γεωμετρικά όμοιες ή οι πιέσεις σε αντίστοιχα σημεία έχουν λόγο σταθερό.

Θεωρώντας δύο καταστάσεις ροής γεωμετρικά όμοιες ο Reynolds συμπέρανε, ότι είναι δυναμικά όμοιες αν οι γενικές διαφορικές εξισώσεις των δύο ροών είναι ταυτόσημες. Έτσι, ανακάλυψε ότι



οι δύο ροές είναι όμοιες όταν η αδιάστατη παράμετρος $R = \frac{VL}{\nu}$ είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις. Ο αριθμός αυτός (του Reynolds) μπορεί να θεωρηθεί ως ο λόγος της διατμητικής τάσεως τ_0 , λόγω στροβιλισμού προς τη διατμητική τάση τ_ν , λόγω ιξώδους. Εφαρμόζοντας την εξίσωση της ορμής σε μία στοιχειώδη επιφάνεια δS (Σχ. 8.14),



Σχήμα 8.14

μπορούμε να βρούμε τη διατμητική τάση λόγω στροβιλισμού. Αν η διακύμανση ταχύτητας μεταξύ των δύο πλευρών της επιφάνειας είναι u' και η ταχύτητα η κάθετη στην δS , u , τότε, από την εξίσωση της γραμμικής ορμής έχουμε ότι η διατμητική δύναμη $\delta \vec{F}$ είναι

$$\delta \vec{F} \cong \rho u' u \delta S$$

όπου $\rho u \delta S$ η μάζα της μεταβαλλόμενης ορμής στη μονάδα του χρόνου και u' η διαφορά της αρχικής από την τελική ταχύτητα, κατά τη διεύθυνση s . Διαιρώντας δια του δS λαμβάνουμε τη διατμητική τάση τ_0 λόγω στροβιλισμού, δηλαδή:

$$\tau_0 = \rho u' u \quad (1)$$

Η διατμητική τάση λόγω ιξώδους μπορεί να γραφεί:

$$\tau_u = \frac{\mu u'}{L},$$

όπου u' η απόκλιση της ταχύτητας στην απόσταση L , κάθετα προς την ταχύτητα. Τότε ο λόγος

$$\frac{\tau_0}{\tau_u} = \frac{u' L \rho}{\mu}$$



έχει τη μορφή του αριθμού Reynolds.

Εξάλλου, η φαινόμενη διατμητική τάση στην τυρβώδη ροή, δίδεται από τη σχέση,

$$\tau = (\mu + n) \frac{du}{dy} \quad (2)$$

η οποία περιλαμβάνει και την επενέργεια του ιξώδους. Ο Prandtl ανέπτυξε μία χρήσιμη θεωρία στροβιλισμού, τη θεωρία του μήκους ανάμιξης. Στη θεωρία αυτή τα u' και u'' εκφράζονται συναρτήσει ενός μήκους ανάμιξης l και της κλίσης της ταχύτητας $\frac{du}{dy}$, όπου το l είναι ο χρονικός μέσος όρος της ταχύτητας και το y μετρείται κάθετα προς τη διεύθυνση του u . Στα αέρια, κάθε μόριο προτού συγκρουστεί με άλλο μόριο διανύει μία απόσταση που λέγεται μέση ελευθέρη διαδρομή. Κατ'αναλογία (Σχ. 8.15), ο Prandtl υπέθεσε ότι ένα στροβιλιζόμενο σωματίδιο ρευστού διανύει απόσταση l προτού χάσει τη στροβιλική στροφορμή του και κινηθεί αστρόβιλα. Τότε, η διακύμανση u' είναι:

$$u' \approx l \frac{du}{dy}$$

Αυτό σημαίνει, ότι το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας εξαρτάται από τη χρονική μέση τιμή της, μεταξύ δύο σημείων που απέχουν απόσταση l , κατά τη διεύθυνση της y . Από την εξίσωση συνεχείας, ο Prandtl συμπέρανε ότι τα u' και u'' είναι ανάλογα, δηλαδή:

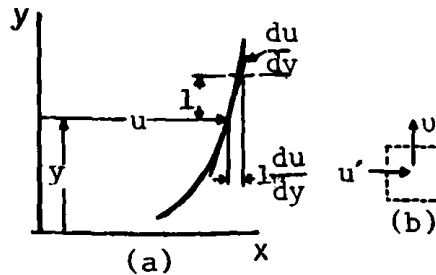
$$u'' \approx u' \approx l \frac{du}{dy}$$

Αντικαθιστώντας τα u' και u'' στην εξ.(1) και ενσωματώνοντας τη σταθερά της αναλογίας στο l λαμβάνουμε την εξίσωση, η οποία ορίζει το μήκος ανάμιξης,

$$\tau_0 = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (3)$$

Το τ_0 ενεργεί πάντοτε κατά φορά που αναγκάζει την κατανομή της ταχύτητας να γίνεται περισσότερο ομοιόμορφη. Σύγκριση της εξ. (3) και της εξ. (1), της ενότητας (4.1 II), δίδει:





Σχήμα 8.15

$$\eta = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right) \quad (4)$$

Το η δεν εκφράζει κάποια ιδιότητα του ρευστού, όπως το μ , αλλά εξαρτάται από την πυκνότητα ρ , την κλίση της ταχύτητας και το μήκος ανάμιξης l .

Στην τυρβώδη (ή αναταρακτική) ροή το η , το οποίο αναφέρεται πολλές φορές ως στροβιλική τριβή (δινοϊξώδες), είναι πολύ μεγαλύτερο από το μ . Μπορεί να ορισθεί και ο λόγος $\epsilon = \frac{\eta}{\rho}$ που είναι μία ιδιότητα της ροής, είναι ανάλογο με το κινηματικό ιξώδες και ονομάζεται συντελεστής κινηματικής στροβιλικής τριβής (κινηματικό δινοϊξώδες).

Ο Von Kármán, αφού μελέτησε σχέσεις δυναμικής ομοιότητας στην αναταρακτική ροή, εισηγήθηκε τη σχέση

$$l = k \frac{du/dy}{d^2u/dy^2} \quad (5)$$

όπου $k = 0.41$, είναι μία γενική σταθερά της αναταρακτικής (τυρβώδους) ροής, ανεξάρτητη της διάταξης του οριακού τοιχώματος ή του αριθμού Reynolds.



8.18 Κατανομή της ταχύτητας (Profile)

Η έννοια του μήκους ανάμιξης χρησιμοποιείται για να μελετηθεί η κατανομή της ταχύτητας μετά του ύψους, σε μία τυρβώδη ροή πάνω από επίπεδη πλάκα και μέσα σε αγωγό. Στην τυρβώδη ροή πάνω από λεία επίπεδη επιφάνεια (π.χ. ροή ανέμου σε λείο έδαφος), η διατμητική τάση στο ρευστό είναι σταθερή, έστω τ_0 . Η εξίσωση (2) της προηγούμενης ενότητας ισχύει, αλλά το η τείνει στο μηδέν κοντά στην επιφάνεια και η επίδραση του μ είναι αμελητέα μακριά από αυτή. Αν το η είναι αμελητέο σε στρώμα πάχους $y = d$ όπου υπερισχύει το μ , η εξ. (2) της ενότητας 8.17, γράφεται:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{u}{y} = \nu \frac{u}{y}, \quad y \leq d \quad (1)$$

Ο όρος $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_*$, έχει διαστάσεις ταχύτητας και ονομάζεται ταχύτητα διατμητικής τάσης ή ταχύτητα τριβής.

Επομένως,

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu} \quad y \leq d \quad (2)$$

και αποτελεί μία γραμμική σχέση μεταξύ u και y στη ροή.

Για $y > d$, το μ είναι αμελητέο και η εξ. (2) της ενότητας 8.17 γράφεται:

$$\tau_0 = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (3)$$

Το l από διαστατική άποψη πρέπει να είναι ανάλογο του y , δηλαδή $l = ky$. Αντικαθιστώντας στην (3) και με αναδιάταξη της σχέσης, έχουμε:

$$\frac{du}{u_*} = \frac{1}{k} \frac{dy}{y} \quad (4)$$

Ολοκληρώνοντας την εξ. (4), έχουμε:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln y + \text{σταθερά} \quad (k = 0.41 \text{ σταθερά Karman}) \quad (5)$$

Η εξ. (5) συμφωνεί με τα πειραματικά αποτελέσματα και είναι πολύ χρήσιμη όταν το τ είναι συνάρτηση του y , γιατί η μεγαλύτερη μετα-



βολή της ταχύτητας εμφανίζεται πλησίον των οριακών τοιχωμάτων, όπου το τ είναι πρακτικώς μηδέν. Η εξ. (5) ισχύει και για τυρβώδη ροή μέσα σε σωλήνα.

8.19 Διάχυση

Η απότομη ανταλλαγή σωματιδίων ρευστού σε ένα στροβιλισμό μεταφέρει και διαχέει κάθε μορφή συγκέντρωσης μέσα σε αυτό, π.χ. συγκέντρωση αλάτων, ιζημάτων, χρωμάτων, ρύπων, θερμοκρασίας, κλπ. Οι μελέτες έδειξαν, ότι ο συντελεστής διασκορπισμού (μεταφοράς) είναι ανάλογος προς την στροβιλική τριβή (δινοϊξώδες) των στροβιλοειδών διαχύσεων των συγκεντρώσεων, πέραν εκείνων της ορμής.

Αν T είναι η θερμοκρασία, H η μεταφορά θερμότητας, ανά μονάδα επιφανείας και χρόνου και c_p η ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση, τότε

$$H = -c_p \eta \frac{\partial T}{\partial y} = -c_p \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1)$$

όπου η c_p είναι η στροβιλική αγωγιμότητα. Για μεταφορά ουσιών, αν C είναι η συγκέντρωση ανά μονάδα όγκου και c ο ρυθμός μεταφοράς, ανά μονάδα επιφανείας, τότε

$$c = -\epsilon_c \frac{\partial C}{\partial y}$$

με το ϵ_c ανάλογο του ϵ , δηλαδή ανάλογο του χαρακτηριστικού ύψους των προεξοχών των οριακών τοιχωμάτων, τα οποία καθορίζουν τη φύση της τραχύτητας.



9. ΣΥΜΠΙΕΣΙΜΗ ΡΟΗ

9.1. Εισαγωγή

Στα προηγούμενα εξετάσαμε, κυρίως, την ασυμπύεστη ροή. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξεταστεί η συμπίεσιμη ροή, στην οποία υπεισέρχεται μία νέα μεταβλητή, η πυκνότητα και χρησιμοποιείται μία επιπλέον εξίσωση, η καταστατική εξίσωση, η οποία συνδέει την πίεση με την πυκνότητα. Είναι ευνόητο, ότι για την ανάλυση της συμπίεσιμης ροής, είναι απαραίτητες και οι άλλες εξισώσεις που διέπουν τη Μηχανική και Δυναμική των ρευστών, δηλαδή, η εξίσωση της συνεχείας, η εξίσωση της κίνησης και οι νόμοι της θερμοδυναμικής.

Ειδικότερα, στην αρχή θα εξεταστούν ορισμένα θέματα θερμοδυναμικής και στη συνέχεια, μερικά θέματα δυναμικής των αερίων.

9.2. Η καταστατική εξίσωση μιας ουσίας

Οι μετρήσιμες ποσότητες μιας συμπίεστης ουσίας είναι η πίεση p , η πυκνότητα ρ και η θερμοκρασία της T . Οι τρεις αυτές ποσότητες βρέθηκε, ότι συνδέονται με μία συναρτησιακή σχέση της μορφής

$$F(p, \rho, T) = 0 \quad (1)$$

όπου F είναι μία μονότιμη συνάρτηση των μεταβλητών p, ρ, T . Μία τέτοια εξίσωση είναι γνωστή ως εξίσωση της κατάστασης της ουσίας. Η μορφή της F εξαρτάται από τη φύση της ουσίας και για ορισμένα αέρια είναι απλή, ενώ για άλλες ουσίες είναι εξαιρετικά πολύπλοκη.

Είδαμε στο κεφάλαιο 5, ότι η πίεση σε ένα ρευστό οφείλεται στη μεταβολή της ορμής των μορίων του από στρώμα σε στρώμα. Εξάλλου, τα κινούμενα μόρια έχουν κάποια κινητική ενέργεια λόγω της τυχαίας τους κίνησης. Η θερμοκρασία αποτελεί μέτρο αυτής της κινητικής ενέργειας της τυχαίας μοριακής κίνησης.

Εδώ, θα περιοριστούμε στη μελέτη των αερίων ουσιών. Σε μερικές περιπτώσεις, τα μόρια ενός αερίου έχουν αμελητέο όγκο και ουσιαστικά δεν υπάρχουν αμοιβαίες έλξεις μεταξύ των μορίων. Ένα τέτοιο αέριο λέμε ότι είναι τέλειο αέριο και η εξίσωση της κα-



τάστασής του είναι:

$$p = R \rho T \quad (2)$$

όπου R είναι η ειδική σταθερά του αερίου. Αν το R αναφέρεται σε 1 γραμμομόριο του αερίου, τότε είναι το ίδιο για όλα τα τέλεια αέρια και ορίζεται ως παγκόσμια σταθερά των αερίων. Στην περίπτωση αυτή το $\frac{1}{\rho}$ είναι ο όγκος ενός γραμμομορίου.

Αέρια, όπως ο αέρας, το οξυγόνο, το υδρογόνο, το άζωτο κλπ., για ένα μεγάλο διάστημα τιμών των p , ρ , T είναι σχεδόν τέλεια και για τις περισσότερες περιπτώσεις η εξ.(1) μπορεί να ληφθεί ως καταστατική εξίσωση. Όταν όμως τα μόρια έχουν όγκο και υφίστανται ενδομοριακές έλξεις, η ορθή εξίσωση της κατάστασης είναι:

$$(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = RT \quad (3)$$

όπου $v = \frac{1}{\rho}$, a = σταθερά, b = ο όγκος των μορίων.

Η εξ. (3) αναφέρεται ως εξίσωση του van der Waals.

Άλλες εξισώσεις της κατάστασης που έχουν προταθεί για πραγματικά αέρια, είναι οι εξής:

$$\{p + (\frac{a}{T v^2})\}(v - b) = RT \quad \text{του Clausius και οι}$$

$$\{p + (\frac{a}{v h})\}(v - b) = RT$$

$$p(v - b) = RT \exp\{-\frac{c}{(RTv)}\} \quad \text{του Dieterici}$$

9.3. Ο Πρώτος Νόμος της Θερμοδυναμικής

Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής επιβεβαιώνει την αμοιβαία ισοδυναμία μεταξύ θερμότητας και μηχανικού έργου και, όπως είναι γνωστό, εκφράζεται με τη μορφή:

$$dQ = dU + dW \quad (1)$$

όπου dQ , η προστιθέμενη ή αφαιρούμενη θερμότητα σε ένα σύστημα,



dU , η μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας και dW , το παραγόμενο ή (καταναλισκόμενο) έργο. Η εξ.(1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$dQ = dU + p du \quad (2)$$

Η εσωτερική ενέργεια μπορεί να εκφραστεί ως προς τις ποσότητες p , ρ , T , δηλαδή, ως συνάρτηση των δύο από αυτές με τη βοήθεια της καταστατικής εξίσωσης. Πράγματι, έστω, $U = U(u, T)$, όπου $u = \frac{1}{\rho}$ ο όγκος της μονάδας της μάζας. Τότε, όταν τα u , T μεταβληθούν κατά δu , δT , η επακολουθούσα μεταβολή της U , είναι:

$$\delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)_T \delta u + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_u \delta T \quad (3)$$

όπου $\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)_T$ σημαίνει, ότι το T διατηρείται σταθερό κατά τη διαφορίση κλπ.

Αν υποθέσουμε, ότι το σύστημα είναι μεμονωμένο τότε, η $\delta T = 0$, οπότε η (3) δίνει:

$$\delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)_T \delta u \quad (4)$$

Ακόμη, αν το σύστημα δεν τροφοδοτείται από έξω με θερμότητα και δεν παράγεται εξωτερικό έργο, τότε $\delta U = 0$. Άρα, η (4) δίνει:

$$0 = \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)_T \delta u \quad (5)$$

Αφού $\delta u \neq 0$, η (5) δείχνει ότι $\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)_T = 0$ και άρα, $U = U(T)$.

Η σχέση $U = U(T)$ ισχύει για τὰ τέλεια αέρια, αλλά όχι για τα πραγματικά, όπου η εσωτερική ενέργεια είναι συνάρτηση όχι μόνο της κινητικής ενέργειας των μορίων, αλλά και της ενέργειας που οφείλεται σε άλλα αίτια, όπως στην περιστροφή των μορίων, στη δόνησή τους, στη δυναμική τους ενέργεια κλπ.

Αν dQ είναι το ποσό της θερμότητας που προστίθεται στη μονάδα μάζας μιας ουσίας και προκαλεί μία αύξηση της θερμοκρασίας T , τότε ο ρυθμός αύξησης της προστιθέμενης θερμότητας ως προς την αύξηση της θερμοκρασίας είναι $\frac{dQ}{dT}$. Αυτό ορίζει μία ποσότητα γνω-



στή ως ειδική θερμότητα της ουσίας και είναι η απαιτούμενη προσθήκη θερμότητας στη μονάδα της μάζας για να αυξηθεί η θερμοκρασία της κατά μία μονάδα. Αν p είναι η πίεση και u ο όγκος της μονάδας της μάζας μιας συμπιέσιμης ουσίας τότε, ορίζεται η ειδική θερμότητα σε σταθερή πίεση c_p και η ειδική θερμότητα σε σταθερό όγκο c_u , από τις σχέσεις:

$$c_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p, \quad c_u = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_u$$

Από τις εξ. (2), (3) έχουμε:

$$dQ = p du + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_u dT + \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)_T du$$

Άρα,

$$c_u = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_u = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_u = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_u = \left(\frac{dU}{dT}\right)_u \quad (6)$$

Για να λάβουμε τη c_p , έχουμε,

$$c_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_u + \left\{p + \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)_T\right\} \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p$$

Συνεπώς,

$$c_p = c_u + \left\{p + \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)_T\right\} \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p \quad (7)$$

Οι εξ. (6) και (7) δείχνουν ότι $c_p \neq c_u$ και εφαρμόζονται για κάθε ουσία. Αν τις εφαρμόσουμε στα τέλεια αέρια, για τα οποία $U = U(T)$, τότε η (6) δείχνει, ότι

$$c_u = \frac{dU}{dT} \quad (8)$$

και η (7) δίνει,

$$c_p = c_u + p \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p \quad (9)$$

Ακόμη, η καταστατική εξίσωση ενός τελείου αερίου είναι

$$pu = RT, \quad \text{οπότε} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p} \quad \text{και η (9) γίνεται:}$$



$$c_p = c_u + R \quad (10)$$

Επίσης, για τα τέλεια αέρια, η κινητική θεωρία δείχνει, ότι η εσωτερική ενέργεια U είναι ευθέως ανάλογη της θερμοκρασίας T και αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η c_u είναι σταθερά. Η εξ. (10) δείχνει, ότι η c_p είναι επίσης σταθερά και άρα,

$$\frac{c_p}{c_u} = \gamma \quad (11)$$

όπου γ είναι μία σταθερά που ορίζεται ως αδιαβατική σταθερά. Από τις (10) και (11) αμέσως έχουμε:

$$c_u = \frac{R}{\gamma-1} \quad (12) \quad \text{και} \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1} \quad (13)$$

Για τον αέρα και τα περισσότερα διατομικά αέρια (O_2 , H_2 , N_2), είναι $\gamma \approx 1.4$.

Σημειώστε, ότι για ένα τέλει αέριο η (8) συνεπάγεται, ότι:

$$U(T) = c_u T$$

αν η κλίμακα της θερμοκρασίας εκλεγεί έτσι, ώστε $U(0) = 0$. Οπότε, δεν υπάρχει εσωτερική ενέργεια όταν $T = 0$. Η θερμοκρασία αυτή καλείται απόλυτο μηδέν και η αντίστοιχη θερμοκρασιακή κλίμακα καλείται απόλυτη ή κλίμακα Kelvin

9.4. Συναρτήσεις της Κατάστασης. Εντροπία.

Έστω ϕ , ότι είναι μία θερμοδυναμική συνάρτηση μιας ουσίας, που εκφράζεται ως προς τις δύο από τις τρεις μετρήσιμες ποσότητες p , ρ , T . Αν εκφράσουμε τη ϕ ως προς τις p και u (ας πούμε) τότε, κατά τη μεταβολή από την κατάσταση A στην κατάσταση B η τιμή της ϕ εξαρτάται μόνο από τις συνθήκες στα A και B και καθόλου από τις διαδρομές που τα συνδέουν. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η ϕ ορίζεται ως μία συνάρτηση της κατάστασης.

Υποθέτουμε, ότι το διαφορικό της ϕ εκφράζεται ως προς τα dp και du , από τη σχέση:



$$d\varphi = M(p, u)dp + N(p, u)du \quad (1)$$

Αν η $\varphi_B - \varphi_A$ είναι ανεξάρτητη της διαδρομής της μεταβολής από την κατάσταση Α στη Β, τότε το φ πρέπει να είναι τέλειο διαφορικό. Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να ισχύει αυτό, είναι:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)_p = \left(\frac{\partial N}{\partial p}\right)_u \quad (2)$$

Η (2) ισχύει, όταν η $\varphi(p, u)$ είναι συνάρτηση της κατάστασης. Η μαθηματική έκφραση του πρώτου νόμου της θερμοδυναμικής δίδεται από τη σχέση:

$$dQ = p du + dU$$

Για ένα τέλειο αέριο,

$$dU = c_p dT = \left(\frac{c_u}{R}\right)d(pu)$$

με τη χρήση της καταστατικής εξίσωσης $pu = RT$. Συνεπώς, για ένα τέτοιο αέριο,

$$dQ = \left\{1 + \left(\frac{c_u}{R}\right)\right\}p du + \left(\frac{c_u}{R}\right)u dp = \frac{(c_p p du + c_u u dp)}{R}$$

Ταυτίζοντας το dQ με το $d\varphi$, έχουμε $M = \left(\frac{c_u}{R}\right)u$, $N = \left(\frac{c_p}{R}\right)p$

Τότε:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)_p = \frac{c_u}{R}, \quad \left(\frac{\partial N}{\partial p}\right)_u = \frac{c_p}{R}$$

Αφού, $c_p \neq c_u$, η εξ.(2) καταστρατηγείται δείχνοντας, ότι το dQ δεν είναι ακριβές διαφορικό. Αυτό σημαίνει ότι η Q που προστέθηκε στη μονάδα μάζας του αερίου δεν είναι συνάρτηση της κατάστασης: εξαρτάται από την εκλεγείσα διαδρομή κατά τη μεταβολή από την κατάσταση Α στη Β. Χρησιμοποιώντας $pu = RT$, η σχέση του dQ για ένα τέλειο αέριο μπορεί να γραφεί με την εναλλακτική μορφή:

$$ds = \left(\frac{c_p}{u}\right)du + \left(\frac{c_u}{p}\right)dp \quad (3)$$

όπου $ds = \frac{dQ}{T}$. Οπότε, είναι:



$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{c_p}{U} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{c_u}{p} \right) = 0$$

και

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{c_p}{U} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{c_u}{p} \right)$$

Αυτό δείχνει, ότι το ds είναι ένα τέλειο διαφορικό. Μπορούμε να ολοκληρώσουμε το διαφορικό αυτό, το οποίο δίδει,

$$s - s_0 = c_p \log u + c_u \log p \quad (4)$$

ή

$$\log(pu^\gamma) = \frac{(s - s_0)}{c_u}$$

Συνεπώς,

$$pu^\gamma = \exp\left\{\frac{(s - s_0)}{c_u}\right\} \quad (\text{2ος νόμος θερμοδυναμικής}) \quad (5)$$

Η ποσότητα s καλείται εντροπία, ανά μονάδα μάζας και το ds το διαφορικό της εντροπίας. Ροές για τις οποίες το s είναι σταθερό καλούνται ισεντροπικές. Η εξ. (5) δείχνει, ότι χαρακτηρίζονται από τη σχέση,

$$pu^\gamma = \text{σταθερό} \quad (6)$$

θα επανέλθουμε στις ισηντροπικές ροές πάλι στην ενότητα 9.6.

9.5. Ταχύτητα Ηχητικού Κύματος σε ένα Αέριο.

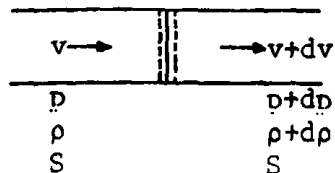
Αριθμός Mach.

Η ταχύτητα μιας μικρής διαταραχής σε ένα αγωγό μπορεί να προσδιοριστεί αν εφαρμόσουμε τις εξισώσεις της κίνησης και της συνεχείας. Ας δούμε πρώτα, πως μπορεί να εμφανιστεί μία μικρή στατική μεταβολή της ταχύτητας, της πίεσης και της πυκνότητας σε ένα ανοικτό αγωγό. Αναφερόμενοι στο Σχ. 9.1, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση συνεχείας με τη μορφή

$$\rho V S = (\rho + d\rho)(V + dV)S$$

όπου S το εμβαδό της διατομής του ανοικτού αγωγού.





Σχ. 9.1

Η-εξίσωση μετά τις αναγωγές, γράφεται:

$$\rho dV + V d\rho = 0$$

Εξάλλου, εφαρμόζοντας την εξίσωση της κίνησης στον όγκο που περι-κλείεται από τις διακεκομμένες γραμμές έχουμε:

$$pS - (p + dp)S = \rho VS(V + dV - V)$$

$$dp = -\rho V dV \quad \text{ή} \quad V^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (1)$$

Άρα, μία μικρή διαταραχή ή απότομη μεταβολή σε στατική ροή μπορεί να εμφανιστεί, όταν η ταχύτητα στον αγωγό γίνει $V = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$. Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται ταχύτητα του ήχου μέσα στο μέσο που εξετάζουμε και συμβολίζεται με c . Η διαταραχή που πηγάζει από ένα σημείο προκαλεί την εκπομπή ενός σφαιρικού κύματος, αλλά σε κάποια απόσταση από την πηγή το μέτωπο του κύματος μπορεί να θεωρηθεί γραμμικό ή μονοδιάστατο. Μεγάλες διαταραχές μπορούν να έχουν ταχύτητα μεγαλύτερη της ηχητικής (π.χ. μία έκρηξη βόμβας). Η εξίσωση της ταχύτητας του ήχου

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (2)$$

μπορεί να γραφεί σε διάφορες χρήσιμες μορφές.



Όπως γνωρίζουμε, το μέτρο διόγκωσης ορίζεται από τη σχέση:

$$k = -\frac{dp}{\frac{dU}{U}}$$

όπου U ο όγκος του ρευστού που υφίσταται μεταβολή πίεσης κατά dp .
Αλλά, επειδή ισχύει,

$$\frac{dU}{U} = \frac{dU_s}{U_s} = -\frac{dp}{\rho}$$

το k μπορεί να γραφεί

$$k = \frac{\rho dp}{dp}$$

Τότε, από την εξ. (2) είναι:

$$c = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (3)$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για υγρά και αέρια.

Αν η μεταβολή είναι αντιστρεπτή, τότε $ds = \frac{dQ}{T}$ ή $T ds = dQ$. Αν είναι και αδιαβατική $dQ = 0$. Επομένως, για μία αντιστρεπτή καταστατική μεταβολή $ds = 0$ ή $s = \text{σταθερό}$. Δηλαδή, μία αντιστρεπτή αδιαβατική μεταβολή είναι ισεντροπική. Τότε από την εξίσωση (5) της 9.4 έχουμε, $s - s_0 = 0$ $s = s_0$ και

$$\rho u^\gamma = \rho_0 u_0^\gamma \quad (4)$$

Αν οι μεταβολές της θερμοκρασίας και της πίεσης λόγω διέλευσης ηχητικού κύματος είναι μικρές, η αλλαγή της κατάστασης είναι σχεδόν αντιστρεπτή και αδιαβατική. Τότε, στο όριο η μεταβολή μπορεί να θεωρηθεί ισεντροπική και η εξ. (6) της 9.4, δηλαδή $\rho u^\gamma = \text{σταθερό}$, δίνει $\frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho}$ και

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad \text{ή με τη βοήθεια της } p = \rho RT,$$

$$c = \sqrt{\gamma RT} \quad (5)$$



η οποία δείχνει, ότι η ταχύτητα του ήχου σε ένα τέλειο αέριο εξαρτάται μόνο από την απόλυτη θερμοκρασία του. Έτσι, κατά τη ροή ενός αερίου σε αγωγό η ταχύτητα του ήχου μεταβάλλεται μεταξύ των διατομών του, αφού μεταβάλλεται η θερμοκρασία του λόγω μεταβολής της πυκνότητας και λόγω τριβών. Στην ισόθερμη μεταβολή της ροής η ταχύτητα του ήχου παραμένει σταθερή.

Ο αριθμός Mach είναι ένας αδιάστατος αριθμός και ορίζεται ως λόγος της ταχύτητας ενός ρευστού προς την τοπική ταχύτητα του ήχου στο ρευστό, δηλαδή:

$$M = \frac{V}{c} \quad (6)$$

Υψώνοντας τον αριθμό Mach στο τετράγωνο λαμβάνουμε $\frac{V^2}{c^2}$, που εκφράζει το λόγο της κινητικής προς τη θερμική ενέργεια του ρευστού, δεδομένου ότι η κινητική ενέργεια είναι ανάλογη του V και η θερμική ανάλογη του T . Ο αριθμός Mach αποτελεί μέτρο για τη σπουδαιότητα της συμπίεσότητας. Για ένα ασυμπίεστο ρευστό το k είναι άπειρο και άρα, $M = 0$. Για τα τέλεια αέρια, ισχύει:

$$k = \gamma p \quad (7)$$

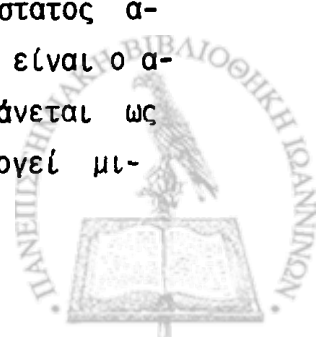
επειδή η μεταβολή (συμπύεση) είναι ισηντροπική.

Όταν στον αριθμό Mach είναι $V = c$, τότε $M = 1$ και η ροή λέγεται ηχητική. Όταν $M > 1$, τότε $V < c$ και η ροή είναι υποηχητική.

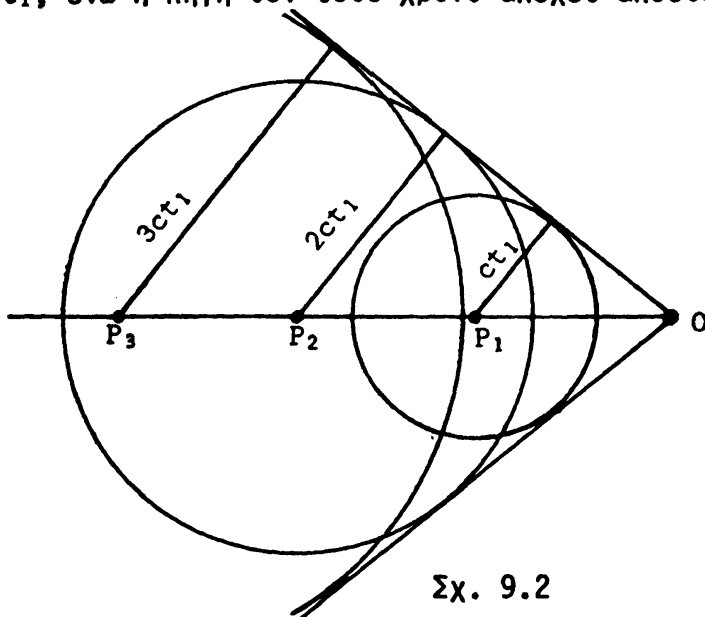
Όταν $M > 1$, τότε $V > c$ και η ροή είναι υπερηχητική, δηλαδή η ταχύτητα της ροής του αερίου είναι μεγαλύτερη από την τοπική ταχύτητα του ήχου. Ο όρος διηχητική ροή συναντάται στην αεροδυναμική και λαμβάνεται κάπως αυθαίρετα να καλύψει το διάστημα των αριθμών Mach $0.8 < M < 1.2$. Η υπερυπερηχητική ροή λαμβάνει χώρα σε πολύ μεγάλους αριθμούς Mach, ας πούμε $M > 5$.

9.5.1. Γωνία, Κύμα και Κώνος Mach

Όπως είδαμε προηγουμένως, ο σπουδαιότερος αδιάστατος αριθμός της Μηχανικής των Ρευστών (Δυναμικής των αερίων) είναι ο αριθμός Mach (M), δηλαδή, ο $M = \frac{V}{c}$ και συνηθίζεται να λαμβάνεται ως μέτρο των μεγάλων ταχυτήτων. Έστω, ότι μία πηγή δημιουργεί μι-



κρές αυξήσεις πίεσης (ήχο) και κινείται με $M > 1$. Κατά το χρόνο $t = 0$ έστω, ότι αρχίζει να κινείται ένα δακτυλιοειδές κύμα με ηχητική ταχύτητα (Σχ. 9.2). Κατά το χρόνο t_1 το κύμα έχει ακτίνα $r_1 = ct_1$, ενώ η πηγή τον ίδιο χρόνο απέχει απόσταση $S_1 = vt_1$. Σε διπλά-



Σχ. 9.2

σιο χρόνο $t_2 = 2t_1$, τα αντίστοιχα στοιχεία του κύματος και της απόστασης της πηγής θα είναι $r_2 = ct_2 = 2ct_1$ και $s_2 = vt_2 = 2vt_1$ κ.ο.κ. Η περιβάλλουσα ευθεία τα κυκλικά αυτά κύματα είναι το λεγόμενο κύμα Mach. Από το σχήμα, τότε, έχουμε:

$$\sin \mu = \frac{ct_1}{vt_1} = \frac{3ct_1}{3vt_1} \quad \text{ή}$$

$$\sin \mu = \frac{c}{v}$$

Ο κώνος που σχηματίζεται από τις περιβάλλουσες τα κυκλικά κύματα που αντιστοιχούν στους διαφόρους χρόνους, λέγεται κώνος του Mach.

9.6. Ισεντροπική Ροή Αερίου.

Στο Κεφάλαιο 5, δόθηκε η εξίσωση της συνεχείας:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

για ένα κινούμενο συμπιεστό ρευστό και η εξίσωση της κίνησης:



$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \left(\frac{1}{\rho}\right) \nabla p$$

Στην περίπτωση στατικής κίνησης, με απουσία εξωτερικών δυνάμεων, αυτές οι εξισώσεις γίνονται:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\left(\frac{1}{\rho}\right) \nabla p$$

Επίσης, η εξίσωση του Euler, για τέτοια ροή, γίνεται:

$$\vec{V}^2 + \int \frac{dp}{\rho} = \text{σταθερό} \quad (1)$$

Στην ειδική περίπτωση ισεντροπικής ροής - για την οποία η εντροπία κάθε σωματιδίου μένει σταθερή κατά μήκος κάθε ρευματογραμμής - $p = k\rho^\gamma$ και η (1) ανάγεται στην

$$\frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{c^2}{(\gamma-1)} = \text{σταθερό κατά μήκος μιας ρευματογραμμής.}$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής δείχνει, ότι η μέγιστη τιμή της \vec{V} επιτυγχάνεται όταν $c=0$ και την συμβολίζουμε με \vec{V}_{\max} . Αυτή είναι σίγουρα μία θεωρητική τιμή την οποία δεν μπορούμε να πετύχουμε στην πράξη. Εισάγουμε, επίσης, την κρίσιμη ταχύτητα του ήχου c_* , η οποία ορίζεται ότι είναι η τιμή της c , όταν $V=c$. Τότε, η εξίσωση Bernoulli της ισεντροπικής ροής κατά μήκος μιας ρευματογραμμής μπορεί να γραφεί με τις μορφές:

$$\frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{\vec{V}_{\max}^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} c_*^2 = \frac{c_0^2}{\gamma-1}$$

όπου c_0 είναι η τιμή της c στη ρευματογραμμή όταν $V=0$, δηλαδή, είναι η στάσιμη ταχύτητα του ήχου. Άλλη μορφή αυτής της εξίσωσης είναι:

$$\frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{\gamma p}{\rho(\gamma-1)} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}$$

όπου ο δείκτης ο αναφέρεται σε συνθήκες στασιμότητας.
Για ένα τέλειο αέριο,



$$\frac{\gamma p}{\rho(\gamma-1)} = \frac{\gamma RT}{\gamma-1} = c_p T$$

όπου $c_p = \frac{R\gamma}{\gamma-1}$ είναι η ειδική θερμότητα σε σταθερή πίεση.

Άρα, η εξίσωση του Βερνούλλι κατά μήκος ρευματογραμμής μπορεί να γραφεί:

$$\frac{\bar{V}^2}{2} + c_p T = c_p T_0$$

Διαιρώντας την τελευταία εξίσωση με $c_p T$, δίνει:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\bar{V}^2}{2} \frac{\rho(\gamma-1)}{\gamma p} = 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M^2$$

όπου M είναι ο αριθμός Mach με

$$M^2 = \frac{V^2}{c^2} = \left(\frac{V^2 \rho}{\gamma p}\right)$$

Για ισοεντροπική ροή έχουμε τις σχέσεις:

$$\frac{c_p^2}{c^2} = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right) \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\gamma p}{\rho}\right) = \frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \frac{(\gamma-1)}{\gamma} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1}$$

οπότε,

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left\{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M^2\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{p_0}{p} = \left\{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M^2\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Στις ηχητικές ή κρίσιμες ταχύτητες ($M=1$), $p = p_*$, $\rho = \rho_*$, $T = T_*$, $\gamma = 1.4$, έχουμε:

$$\frac{p_*}{p_0} \approx 0.528, \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} \approx 0.630, \quad \frac{T_*}{T_0} \approx 0.833 \quad \text{για τον αέρα}$$

9.7. Εκροή Αερίου δια μέσου Αγωγού Μεταβλητής Διατομής

Το Σχ. 9.3, απεικονίζει μία δεξαμενή η οποία περιέχει στάσιμο αέριο σε υψηλή πίεση p_0 , πυκνότητα ρ_0 και θερμοκρασία T_0 . Στη δεξαμενή προσαρμόζεται ένας αξονικά συμμετρικός αγωγός, ο οποίος καταλήγει σε άνοιγμα και υποθέτουμε, ότι το αέριο εκρέει στατικά και ισοεντροπικά έξω στον αέρα, όπου η πίεση είναι μικρότερη της



ρ_0 . Έστω, ότι η διατομή του αγωγού μεταβάλλεται αργά κατά τέτοιο τρόπο ώστε, σε πρώτη προσέγγιση η ταχύτητα είναι σταθερή δια μέσου οποιασδήποτε διατομής. Τότε, για κάθε σκοπό η ροή είναι μονοδιάστατη.

Έστω, ότι p είναι η πίεση, ρ η πυκνότητα και u η ταχύτητα του αερίου σε μία διατομή S του αγωγού. Για στατική ροή η εξίσωση συνεχείας είναι $\rho u S = \text{σταθερά}$ και η λογαριθμική παραγωγή αυτής δίδει:

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dS}{S} = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση Bernoulli

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{σταθερά}$$

σε διαφορική μορφή είναι:

$$u \, du + \left(\frac{dp}{\rho}\right) = 0 \quad (2)$$

θέτοντας $dp = c^2 d\rho$ στη (2) και απαλείφοντας το $\frac{dp}{\rho}$ με τη βοήθεια της (1), η (2) δίδει:

$$(1 - M^2) \frac{du}{u} = -\frac{dS}{S} \quad (3)$$

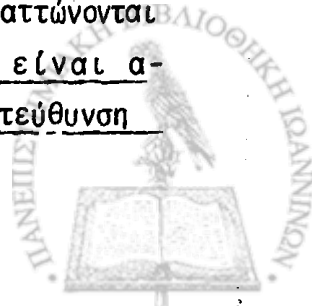
όπου $M = \frac{u}{c}$, ο αριθμός Mach. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για συζήτηση:

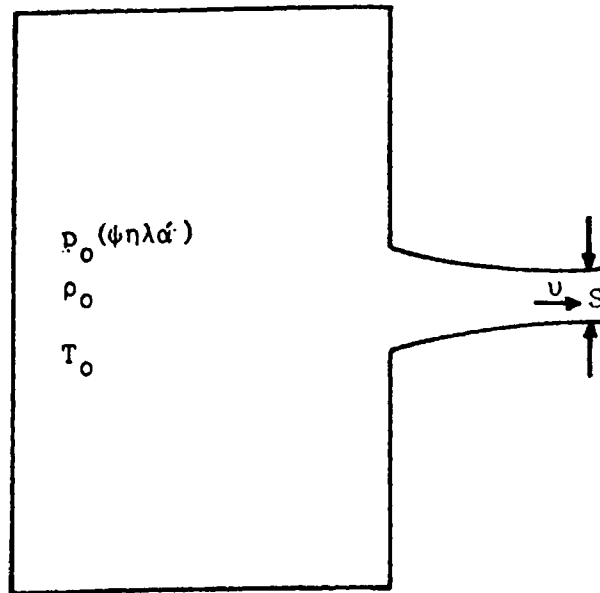
I. Περίπτωση, όταν $M < 1$

Η εξ. (3) δείχνει, ότι μία ελάττωση της S προκαλεί μία αύξηση της u και αντιστρόφως. Έτσι, για να επιταχυνθεί η υποηχητική ροή δια μέσου αγωγού είναι αναγκαίο να ελαττωθεί η διατομή του S προς την κατεύθυνση της ροής.

II. Περίπτωση, όταν $M > 1$

Η εξ. (3) δείχνει, ότι η S και u αυξάνονται ή ελαττώνονται μαζί. Άρα, για να επιταχυνθεί η υπερηχητική ροή είναι αναγκαίο να διευρύνουμε τον αγωγό προς την κατεύθυνση





Σχ. 9.3

της ροής.

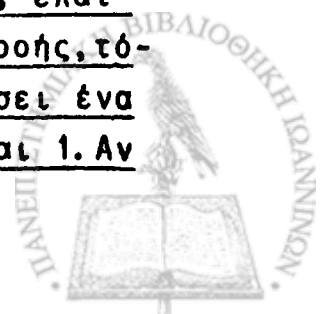
Επανερχόμενοι στην εξ. (2), θέτοντας $dp = c^2 dp$ λαμβάνουμε:

$$\frac{dp}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u} \quad (4)$$

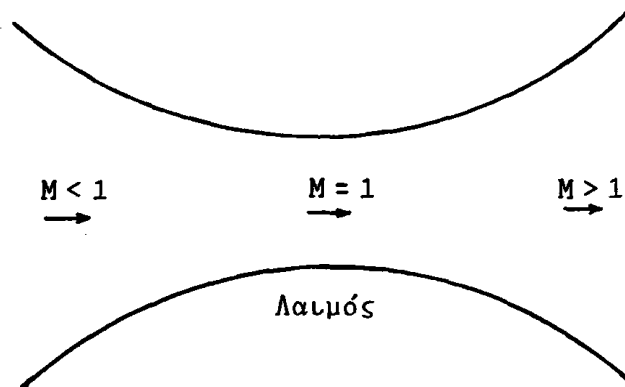
Η εξ. (4) δίδει τη δυνατότητα σε κάποιον να διακρίνει πως μεταβάλλεται η πυκνότητα του ρευστού με τη μεταβολή του αριθμού Mach. Πράγματι, η εξίσωση αυτή δείχνει ότι, για δεδομένη αύξηση της ταχύτητας συμβαίνει πτώση της πυκνότητας, της οποίας το μέτρο αυξάνει με την αύξηση του αριθμού Mach. Ακόμη, για $M > 1$ η πτώση της πυκνότητας είναι τόσο μεγάλη που ο αγωγός πρέπει να διασταλεί για να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις της εξίσωσης συνεχείας.

Από την εξ. (3), αν $\frac{dS}{S} = 0$, τότε $M = 1$ ή $du = 0$. Η περίπτωση $du = 0$ γίνεται καταληπτή σε ασυμπλέστη ροή όταν η ταχύτητα της ροής φθάνει ένα μέγιστο στο στάδιο εκείνο κατά το οποίο η διατομή του αγωγού καθίσταται ελάχιστη. Για συμπλέσιμα ρευστά, ο M μπορεί να είναι μονάδα όταν η διατομή S είναι ελάχιστη.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να πούμε, ότι αν, αρχίζοντας με υποηχητική ροή σε ένα αγωγό, ελαττώσουμε τη διατομή του προς την κατεύθυνση της ροής, τότε η ροή επιταχύνεται μέχρις ότου η διατομή φθάσει ένα ορισμένο ελάχιστο, στο οποίο ο αριθμός Mach είναι 1. Αν



πέραν αυτού του ελαχίστου της διατομής διευρύνουμε τον αγωγό, τότε η ροή μπορεί να επιταχυνθεί και πάλι πέρα από αυτή και να δημιουργήσει υπερηχητική ροή. Αυτό αποτελεί την αρχή της ροής δια μέσου ενός ακροφυσίου (άκρου σωλήνα). Η ελάχιστη διατομή ορίζεται ως λαιμός (Σχ. 9.4).



Σχ. 9.4

9.7.1. Διερεύνηση της μέγιστης Ροής Μάζας δια μέσου ενός Ακροφυσίου.

Θεωρούμε, όπως προηγουμένως, ισηντροπική συμπίεσιμη ροή από μία δεξαμενή, όπου επικρατούν συνθήκες στασιμότητας, δια μέσου ενός αγωγού μεταβαλλόμενης διατομής. Η ροή είναι μονοδιάστατη. Ο αγωγός υποτίθεται, ότι στενεύει βαθμιαία και καταλήγει σε μία ελάχιστη διατομή στην έξοδο.

Έστω S , ότι είναι η διατομή στην έξοδο του αγωγού, όπου η ταχύτητα είναι u , η πίεση p και η πυκνότητα ρ . Τότε, εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματογραμμής από τη δεξαμενή μέχρι τη διατομή S , έχουμε:

$$\frac{u^2}{2} + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{p}{\rho} = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{p_0}{\rho_0}$$

οπότε

$$u = \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{p}{p_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Αφού $\frac{p_0}{\rho} = \left(\frac{p_0}{\rho}\right)^{1/\gamma}$



$$u = \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Η ροή μάζας μέσα από τη διατομή S , ανά μονάδα χρόνου, είναι:

$$m = \rho u S = \rho_0 u S \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \quad (2)$$

Απαλείφοντας το u από την (1), η (2) δίδει:

$$m = S \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} p_0 \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{2/\gamma} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Για να βρεθούν οι στάσιμες τιμές του m για σταθερό S και μεταβλητό $\frac{p}{p_0}$, γράφουμε $p = \frac{p}{p_0}$, οπότε

$$m^2 = k \left(p^{2/\gamma} - p^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right) \quad (k = \text{σταθερό}) \quad (4)$$

Από την (4), με διαφώριση, έχουμε:

$$2 m \frac{dm}{dp} = \frac{k(\gamma+1)}{\gamma} p^{\frac{(2-\gamma)}{\gamma}} \left\{ \left(\frac{2}{\gamma+1} \right) - p^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}} \right\} \quad (5)$$

Η εξ. (5) δείχνει, ότι $\frac{dm}{dp} = 0$, όταν $p = \left\{ \frac{2}{\gamma+1} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, $\frac{dm}{dp} < 0$, όταν

$p > \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ και $\frac{dm}{dp} > 0$, όταν $p < \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$.

Οι ανισότητες εξαρτώνται από την υπόθεση, ότι για κάθε αέριο είναι $\gamma > 1$. Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν, ότι το m είναι μέγιστο όταν

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (6)$$

και τότε είναι:

$$m_{\max} = S \left\{ \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} \right) p_0 \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Η εξ. (6) σημαίνει, ότι $p = p_*$ (βλέπε ενότητα 9.6) και άρα, ότι για τη μέγιστη ισοεντροπική ροή μάζας, οι συνθήκες στο

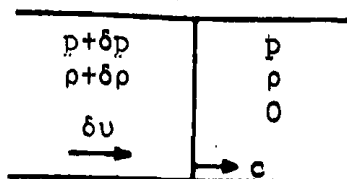


επίπεδο εξόδου είναι ηχητικές.

9.8. Κρουστικά Κύματα

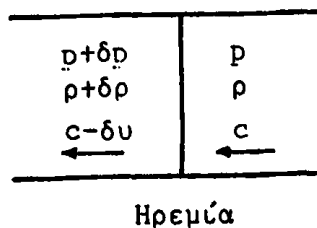
9.8.1. Σχηματισμός Κρουστικών Κυμάτων

Θεωρούμε πρώτα ένα ηχητικό κύμα ταχύτητας c κινούμενο μέσα σε ένα αέριο σε ηρεμία (Σχ. 9.5 (i)). Η πίεση μπροστά από το



Σχ. 9.5(i)

κύμα είναι p , η πυκνότητα ρ και η ταχύτητα ενός υλικού σημείου 0 . Η πίεση αμέσως πίσω από το κύμα είναι $p + \delta p$ και η ταχύτητα ενός υλικού σημείου 0 . Η πίεση αμέσως πίσω από το κύμα είναι $p + \delta p$, η πυκνότητα $\rho + \delta \rho$ και η ταχύτητα ενός υλικού σημείου του δu , όπου τα $\delta p, \delta \rho, \delta u$ είναι πολύ μικρά, αφού η διαταραχή είναι ασθενής. Το Σχ. 9.5(ii) δεί-



Σχ. 9.5(ii)



χνει, το ισοδύναμο πρότυπο που λαμβάνεται όταν το ηχητικό κύμα φέρεται σε ηρεμία προσδίδοντας στο σύστημα μία προς τα πίσω ταχύτητα c . θεωρώντας το Σχ. 9.5(ii), αν εφαρμόσουμε την εξίσωση συνεχείας στο στάσιμο κύμα, λαμβάνουμε:

$$\rho a \cong (\rho + \delta\rho)(c - \delta u)$$

όπου ελήφθη υπόψη η ροή μάζας ανά μονάδα χρόνου, μέσα από τη μοναδιαία επιφάνεια του κύματος. Άρα,

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{du}{c}$$

Αλλά

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma \left(\frac{p_0}{\rho_0}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$$

Συνεπώς,

$$du = c \frac{d\rho}{\rho} = \gamma^{\frac{1}{2}} p_0^{\frac{1}{2}} \rho_0^{-\frac{\gamma}{2}} \rho^{\frac{(\gamma-3)}{2}} d\rho, \quad \text{και έτσι,}$$

$$u = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} du = \frac{2}{\gamma-1} \cdot \frac{\gamma^{\frac{1}{2}} p_0^{\frac{1}{2}}}{\rho_0^{\frac{\gamma}{2}}} \left(\rho^{\frac{(\gamma-1)}{2}} - \rho_0^{\frac{(\gamma-1)}{2}} \right) = \left(\frac{2c_0}{\gamma-1} \right) \left\{ \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{(\gamma-1)}{2}} - 1 \right\}$$

Επομένως,

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{(\gamma-1)}{2}} = 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} \left(\frac{u}{c_0} \right) \quad (1)$$

όπου c_0 είναι η ταχύτητα του ήχου στο αδιατάρακτο αέριο. Εξάλλου,

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \left(\frac{\gamma p}{\rho} \right) \left(\frac{\rho_0}{\gamma p_0} \right) = \left(\frac{p_0}{\rho} \right) \left(\frac{\rho}{p_0} \right) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}$$

Άρα,

$$c = c_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{(\gamma-1)}{2}} = c_0 + \frac{(\gamma-1)}{2} u \quad (2)$$

με τη χρήση της (1). Κάθε μικρή διαταραχή εκπέμπεται με μία ταχύτητα ίση προς την τοπική ταχύτητα του ήχου, σε σχέση προς το ρευστό. Άρα, αν το ρευστό κινείται με ταχύτητα u , ισχύει:



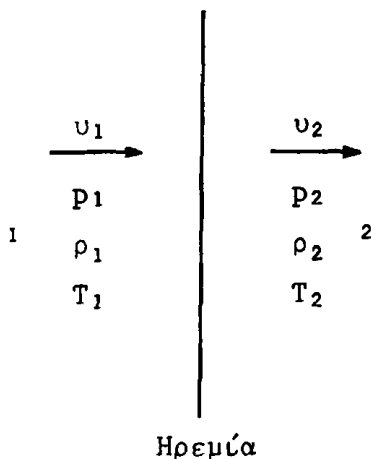
$$\text{ταχύτητα εκπομπής της διαταραχής} = u+c = u_0 + \frac{(\gamma+1)}{2} u$$

Συνεπώς, σε ένα μικρό χρονικό διάστημα τ , η απόσταση που διανύθηκε από τη διαταραχή είναι:

$$(u+c)\tau = \left\{ c_0 + \frac{(\gamma+1)}{2} u \right\} \tau$$

9.8.2. Στοιχειώδης Ανάλυση Κάθετων Κρουστικών Κυμάτων

Εδώ, θα ασχοληθούμε με την περίπτωση μιας στάσιμης κάθετης κρουστικής διαταραχής. Το Σχ. 9.6 δείχνει ένα τέτοιο στάσιμο μέτωπο κρουστικής διαταραχής, το οποίο διαχωρίζει δύο ομοιόμορφες αέριες περιοχές 1, 2. Στην περιοχή 1, η πίεση, η πυκνότητα, η θερμοκρασία και η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι αντιστοίχως, p_1 , ρ_1 , T_1 , u_1 και ανάλογα για την περιοχή 2. Προυποθέτουμε, ότι τα στοιχεία στην περιοχή 1 είναι γνωστά και το πρόβλημα είναι να βρούμε εκείνα της περιοχής 2. Για το σκοπό αυτό πρέπει να θυμηθούμε τη συνέχεια, την ορμή και την ενέργεια κάθε στοιχείου. Στο Σχ. 9.6,



Σχ. 9.6

η ροή μάζας του αερίου ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας, η οποία διασχίζει το κύμα από την περιοχή 1 είναι $\rho_1 u_1$. Αυτή που εισέρχεται στην περιοχή 2 είναι $\rho_2 u_2$. Δεδομένου, ότι δεν παράγεται ούτε καταστρέφεται αέριο μέσα στο μέτωπο, θα ισχύει:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = m \quad (\text{ας πούμε}) \quad (1)$$



Επειδή, η τελική δύναμη της κρούσης στη μονάδα της επιφάνειας από την 1 στη 2 είναι $p_1 - p_2$ και το κέρδος σε ορμή της μονάδας της διασχιζόμενης επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου από την 1 στη 2 είναι, $m(u_2 - u_1)$, θα είναι:

$$p_1 - p_2 = m(u_2 - u_1) \quad \text{ή} \quad p_1 + mu_1 = p_2 + mu_2 \quad (2)$$

Εξάλλου, ο ρυθμός κατά τον οποίο οι πιέσεις επιδρούν στη ροή της μάζας m είναι $p_1 u_1 - p_2 u_2$ και είναι ίσος με τον ολικό ρυθμό κέρδους σε ενέργεια από τη μάζα m . Η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του αερίου στην περιοχή 1 οφείλεται σε δύο αιτίες: στην κινητική και την εσωτερική ενέργεια. Οι αντίστοιχες συνεισφορές τους είναι

$$\frac{u_1^2}{2} \quad \text{και} \quad c_u T_1 = \frac{RT_1}{(\gamma-1)} = \frac{p_1}{\rho_1(\gamma-1)}$$

Άρα, η ολική μεταβολή της ενέργειας ανά μονάδα μάζας από την 1 στη 2, είναι:

$$\left(\frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{(\gamma-1)\rho_2}\right) - \left(\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{(\gamma-1)\rho_1}\right)$$

και έτσι, ο ολικός ρυθμός της μεταβολής της ενέργειας για τη ροή μάζας m είναι m φορές η παραπάνω μεταβολή. Άρα, με το νόμο διατήρησης της ενέργειας, έχουμε:

$$p_1 u_1 - p_2 u_2 = m\left(\frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{(\gamma-1)\rho_2}\right) - m\left(\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{(\gamma-1)\rho_1}\right)$$

Αλλά επειδή $m = \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$, η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί στη συμμετρική μορφή:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (3)$$

Οι εξισώσεις (1) - (3) επαρκούν για να βρεθούν τα p_2 , ρ_2 , u_2 , ως προς τα p_1 , ρ_1 , u_1 . Η θερμοκρασία T_2 μπορεί, τότε, να βρεθεί από την καταστατική εξίσωση $p_2 = R \rho_2 T_2$.

Από τις (1), (2), έχουμε:



$$p_1 - p_2 = m(u_2 - u_1) = m^2 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right)$$

Από τις (1), (3), έχουμε:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2) = \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις λαμβάνουμε

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_1/\rho_1 - p_2/\rho_2}{p_1 - p_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right)$$

όπου,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma-1)\rho_1 - (\gamma+1)\rho_2}{(\gamma-1)\rho_2 - (\gamma+1)\rho_1} \quad (4)$$

ή

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2}{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2} \quad (5)$$

Οι εξ. (4) και (5) καλούνται εξισώσεις Rankine-Hugoniot. Θα υποθέσουμε, ότι το αέριο σε μία διαταραχή είναι συμπιεστό. Αυτό θα θεμελιωθεί παρακάτω με την εντροπία και το 2ο νόμο της θερμοδυναμικής. Για $\gamma = 1.4$, η (4) δίδει:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 - 6(p_2/p_1)}{(p_2/p_1) - 6}$$

και το Σχ. 9.7, δείχνει το διάγραμμα του λόγου $\frac{p_2}{p_1}$ ως προς τον $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, για την περίπτωση αυτή, μαζί με την ισηντροπική εξίσωση

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1.4} \quad \text{για} \quad 1 \leq \frac{\rho_2}{\rho_1} \leq 6$$

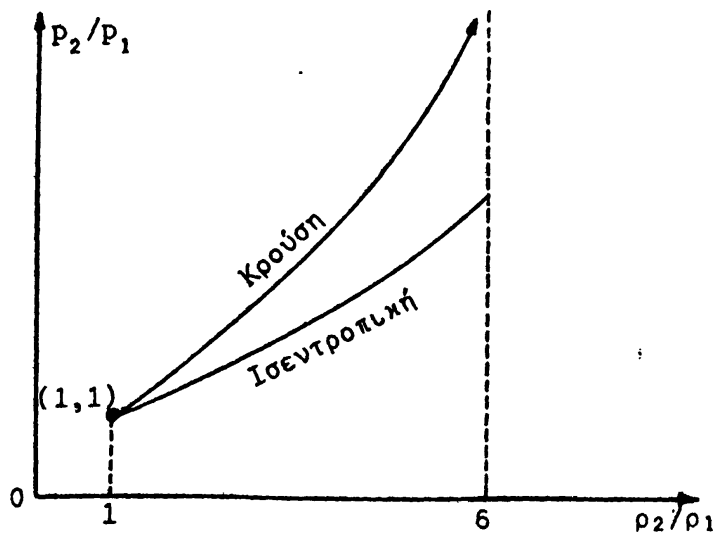
Προφανώς, το αέριο δεν μπορεί να συμπιεστεί, από μία κάθετη κρούση, σε πυκνότητα μεγαλύτερη από έξη φορές εκείνης του προσπίπτοντος ρεύματος.

Η εξίσωση (3) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\sigma_1^2}{(\gamma-1)} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{(\gamma-1)} \quad (3')$$



Η μορφή της (3') είναι ακριβώς ίδια με την εξίσωση Bernoulli για



Σχ. 9.7

συμπιέσιμη ισεντροπική ροή, όταν δεν υπάρχει κρουστικό κύμα. Άρα, η κρίσιμη ταχύτητα (c_*) είναι η ίδια στις δύο πλευρές της κρούσης και κάθε μέλος της εξ. (3') είναι ίσο με

$$\left\{ \frac{(\gamma+1)c_*^2}{2(\gamma-1)} \right\}$$

Το ίδιο ισχύει και για την (3) και αυτό, δίδει:

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} c_*^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} u_1^2$$

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} c_*^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} u_2^2$$

Από την εξ.(2), έχουμε:

$$u_2 - u_1 = \frac{p_1 - p_2}{m} = \frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} c_*^2 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma} (u_2^2 - u_1^2)$$

Αν υποθέσουμε $u_2 \neq u_1$, τότε μετά από απλοποιήσεις, λαμβάνουμε τη σχέση του Prandtl:

$$u_1 u_2 = c_*^2 \quad (6)$$

Από την $u_1^2 + \left\{ \frac{a_1^2}{(\gamma-1)} \right\} = \left\{ \frac{(\gamma+1)c_*^2}{2(\gamma-1)} \right\}$, έχουμε:



$$u_1^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)M_1^2} \right\} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} c_*^2 \quad (M_1 = \frac{u_1}{c_1})$$

ή

$$\left(\frac{u_1}{c_*} \right)^2 = \frac{\gamma+1}{(\gamma-1) + (2/M_1^2)}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο έχουμε:

$$\left(\frac{u_2}{c_*} \right)^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1 + (2/M_2^2)} \quad (M_2 = \frac{u_2}{c_2})$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις και χρησιμοποιώντας την (6), μετά τις απλοποιήσεις, λαμβάνουμε την:

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{(\gamma-1)}{2}} \quad (7)$$

η οποία εκφράζει τη σχέση των αριθμών Mach δια μέσου της κρουστικής διαταραχής.

Είναι συχνά χρήσιμο να εκφράζεται το κλάσμα της πίεσης $\frac{p_2}{p_1}$ ως προς τον αριθμό Mach M_1 του προσπίπτοντος ρεύματος. Από την (4), έχουμε:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

και χρησιμοποιώντας την (1), αυτή δίνει:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{u_1}{u_2} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{u_1}{u_2}} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{u_1^2}{c_*^2} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{u_1^2}{c_*^2}}$$

Χρησιμοποιώντας την

$$\left(\frac{u_1}{c_*} \right)^2 = \frac{\gamma+1}{(\gamma-1) + (2/M_1^2)}$$

μετά τις απλοποιήσεις, η τελευταία γίνεται:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (8)$$



Συνδυασμός των (5) και (8), δίδει:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \quad (9)$$

Θα μελετήσουμε τώρα, περαιτέρω συνέπειες της σχέσης (6) του Prandtl. Η σχέση συνεπάγεται, ότι:

- (i) αν $u_1 > c_*$, τότε $u_2 < c_*$
- (ii) αν $u_1 < c_*$, τότε $u_2 < c_*$

Πρέπει να διαφανεί ποία από τις δύο αυτές εναλλακτικές περιπτώσεις είναι βάσιμη. Οι σχέσεις Rankine - Hugoniot είναι ανεπαρκείς για να δώσουν απάντηση στο πρόβλημα. Γιαυτό, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί το δεδομένο, ότι πρέπει να συμβαίνει αύξηση της εντροπίας μέσα στην κρούση, με βάση τον 2ο νόμο της θερμοδυναμικής. Έστω, ότι s_1, s_2 είναι οι ειδικές εντροπίες, ανά μονάδα μάζας, σε κάθε πλευρά της κρούσης. Τότε, από τον ορισμό της ενότητας 9.4 (εξ.(5)) είναι εύκολο να δεί κανείς ότι:

$$s_2 - s_1 = c_u \log \left\{ \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right\}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (8) και (9), βρίσκουμε:

$$\frac{s_2 - s_1}{c_u} = \log \left[\left(\frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \right) \left\{ \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right\}^\gamma \right]$$

Θέτουμε $M_1^2 = 1+m$, όπου το m είναι μικρό. Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{s_2 - s_1}{c_u} &= \log \left\{ \left(1 + \frac{2\gamma m}{\gamma + 1} \right) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} m \right)^\gamma (1+m)^{-\gamma} \right\} \\ &= \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) m - \frac{1}{2} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right)^2 m^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right)^3 m^3 - \dots \\ &+ \gamma \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} m - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^2 m^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^3 m^3 - \dots \right) - \gamma \left(m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \dots \right) \\ &= \frac{2}{3} \gamma (\gamma - 1) (\gamma + 1)^{-2} m^3 + \dots \end{aligned}$$



Επειδή $\frac{(s_2 - s_1)}{c_u} > 0$, $\gamma > 1$, αυτό συνεπάγεται $m > 0$ και άρα, $M_1 > 1$.
Συνεπώς:

$$\left(\frac{u_1}{c_*}\right)^2 = \frac{\gamma+1}{(\gamma-1) + (2/M_1^2)} > \frac{\gamma+1}{(\gamma-1) + 2} = 1$$

ή $u_1 > c_*$ και έτσι, $u_2 < u_*$. Άρα, η περίπτωση (i) ισχύει και η (ii) είναι λανθασμένη. Κατά παρόμοιο τρόπο δείχνεται, ότι $M_2 < 1$. Με άλλα λόγια δείξαμε, ότι για μία στάσιμη κάθετη κρούση, η αρχική ροή είναι υπερηχητική αλλά η διέλευσή της από την κρουστική διαταραχή την ανάγει σε υποηχητική. Με $M_1 > 1$, η (8) δείχνει ότι $p_2 > p_1$ και η (9) ότι $\rho_2 > \rho_1$. Επομένως, κατά τη διέλευση του αερίου από μία διαταραχή, αυτό υπόκειται σε συμπίεση.

9.8.3. Στοιχειώδης Ανάλυση των Πλαγίων Κρουστικών Κυμάτων

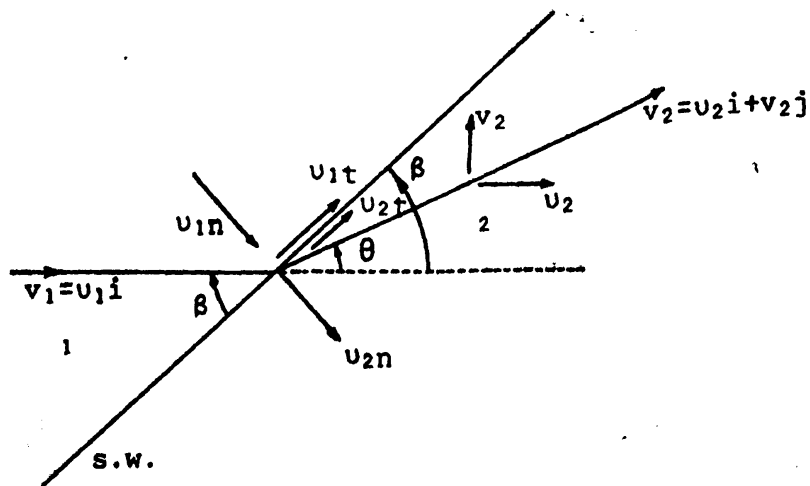
Το Σχ. 9.8, δείχνει ένα προσπίπτον αέριο ρεύμα, ταχύτητας $\vec{V}_1 = u_1 \vec{i}$, το οποίο αποκλίνει κατά τη γωνία θ από ένα πλάγιο κρουστικό κύμα και σχηματίζει γωνία β με τη διεύθυνση της προσπίπτουσας ροής που καθορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{i} . Μετά την εκτροπή η νέα ταχύτητα είναι $\vec{V}_2 = u_2 \vec{i} + u_2 \vec{j}$, όπου \vec{j} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο προς το \vec{i} στο επίπεδο της ροής. Το κρουστικό κύμα χωρίζει το πεδίο στις περιοχές 1, 2. Θέλουμε να βρούμε τη ροή στην περιοχή 2 ως προς τα δεδομένα της περιοχής 1. Οι συνιστώσες \vec{V}_1 και \vec{V}_2 , η κάθετη και η εφαπτομενική στο κρουστικό κύμα, καθορίζονται από τις επιμέρους συνιστώσες $[u_{1n}, u_{1t}]$, $[u_{2n}, u_{2t}]$ κατά την έννοια που φαίνεται στο σχήμα.

Η εξίσωση της συνεχείας εφαρμοζόμενη μέσα στην κρούση είναι:

$$\rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n} = m \quad (\text{ας πούμε}) \quad (1)$$

όπου m είναι η ροή μάζας μέσα από τη μοναδιαία επιφάνεια της κρούσης στη μονάδα του χρόνου. Αλλά η κάθετη δύναμη, στη μονάδα της επιφάνειας της κρουστικής διαταραχής, η οποία κινεί το αέριο από την περιοχή 1 στη 2 είναι $(p_1 - p_2)$ και ο ρυθμός της μεταβολής της ορμής κατά την κάθετη διεύθυνση από την 1 στη 2 είναι $m(u_{2n} - u_{1n})$,





Σχ. 9.8

οπότε εξισώνοντας τις δύο, έχουμε:

$$p_1 + mu_{1n} = p_2 + mu_{2n} \quad (2)$$

Καθώς δεν υπάρχει επαπτομενική δύναμη, η εξίσωση της ορμής αν εφαρμοστεί επαπτομενικά στην κρούση, δίδει:

$$mu_{1t} = mu_{2t} \quad \text{ή} \quad u_{1t} = u_{2t} \quad (3)$$

Με συλλογισμούς παρόμοιους με αυτούς που χρησιμοποιήθηκαν για τις κάθετες κρούσεις, η εξίσωση ενεργείας είναι:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\gamma p_2}{(\gamma-1)\rho_2} = \frac{1}{2} \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} c_*^2 \quad (4)$$

ή

$$\frac{(u_{1n}^2 + u_{1t}^2)}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)c_*^2}{2(\gamma-1)} = \frac{(u_{2t}^2 + u_{2n}^2)}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των p_1 , p_2 ως προς τη c_* που βρέθηκαν από την (4) στη (2) και χρησιμοποιώντας την (1), μετά τις απλοποιήσεις, βρίσκουμε:

$$u_{2n} \{ c_*^2 + u_{1n}^2 - \frac{(\gamma-1)}{\gamma+1} u_{1t}^2 \} = u_{1n} \{ c_*^2 + u_{2n}^2 - \frac{(\gamma-1)}{\gamma+1} u_{2t}^2 \}$$



Επειδή, $u_{1t} = u_{2t}$, έχουμε:

$$u_{2n} \left\{ c_*^2 + u_{1n}^2 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) u_{1t} u_{2t} \right\} = u_{1n} \left\{ c_*^2 + u_{2n}^2 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) u_{1t} u_{2t} \right\}$$

ή

$$(u_{2n} - u_{1n}) \left\{ c_*^2 - u_{1n} u_{2n} - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) u_{1t} u_{2t} \right\} = 0$$

Αν $u_{2n} = u_{1n}$, τότε αφού $u_{2t} = u_{1t}$, οι ροές στις περιοχές 1 και 2 είναι ταυτόσημες. Γιαυτό $u_{2n} \neq u_{1n}$ και έτσι,

$$u_{1n} u_{2n} = c_*^2 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) u_{2t}^2 \quad (5)$$

Αλλά

$$u_{1n} = u_1 \sin \beta, \quad u_{2n} = u_2 \sin \beta - u_2 \cos \beta, \quad u_{2t} = u_2 \cos \beta + u_2 \sin \beta$$

Άρα, αντικαθιστώντας στην (5), μετά από αναγωγή, λαμβάνουμε:

$$u_1 \varepsilon \phi \beta (u_2 \varepsilon \phi \beta - u_2) = c_*^2 \tan^2 \beta - (\gamma-1)(\gamma+1)^{-1} (u_2 + u_2 \varepsilon \phi \beta) \quad (6)$$

Αφού

$$u_{1t} = u_{2t}, \quad u_1 \cos \beta = u_2 \cos \beta + u_2 \sin \beta, \quad \text{τότε}$$

$$\varepsilon \phi \beta = \frac{(u_1 - u_2)}{u_2} \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας την $\varepsilon \phi \beta$ από την (7) στην (6) λαμβάνουμε:

$$u_2^2 = (u_1 - u_2)^2 \cdot \frac{u_1 u_2 - c_*^2}{\frac{2u_1^2}{\gamma+1} - u_1 u_2 + c_*^2} \quad (8)$$

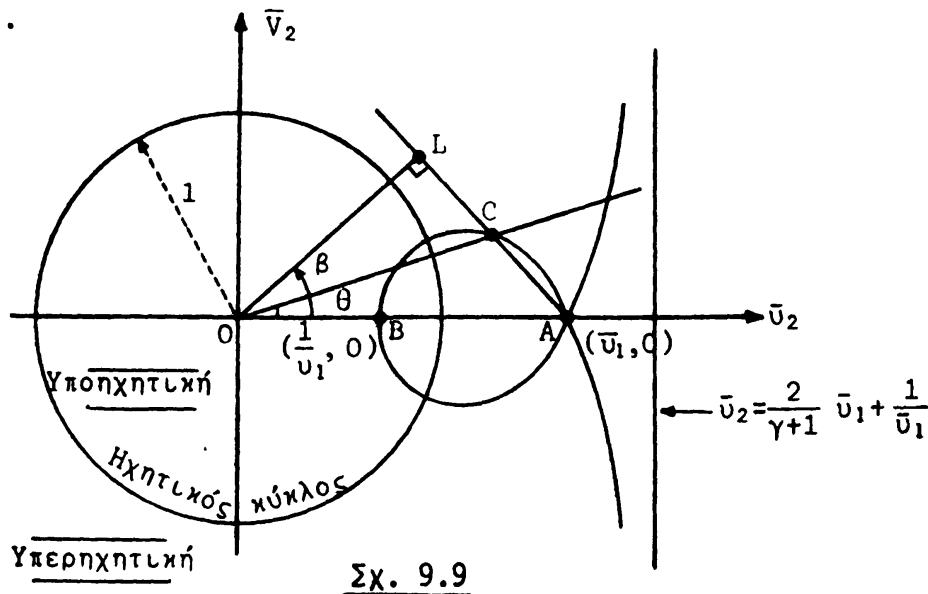
Αν εισάγουμε τις αδιάστατες μεταβλητές:

$$\bar{u}_1 = \frac{u_1}{c_*}, \quad \bar{u}_2 = \frac{u_2}{c_*}, \quad \bar{u}_2 = \frac{u_2}{c_*}, \quad \text{τότε:}$$

$$\bar{u}_2^2 = (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 \cdot \frac{\bar{u}_1 \bar{u}_2 - 1}{\frac{2\bar{u}_1^2}{\gamma+1} - \bar{u}_1 \bar{u}_2 + 1} \quad (9)$$



Όταν το \bar{u}_1 είναι σταθερό μπορούμε να σχεδιάσουμε το \bar{u}_2 ως προς το \bar{u}_1 . Η λαμβανόμενη καμπύλη καλείται πολική κρούση. Το Σχ. 9.9, παριστάνει μία τέτοια καμπύλη. Είναι αποτέλεσμα της αρχής του Des-cartes.



Σχ. 9.9

Από την (9), $\bar{u}_2 = 0$ όταν $\bar{u}_2 = \bar{u}_1$ και $\bar{u}_2 = \frac{\bar{u}_1}{2}$. Άρα, υπάρχουν δύο κύματα που δίδουν εκτροπή της ροής μηδέν. Αυτά χαρακτηρίζονται από τα σημεία A, B και είναι αντίστροφα στον κύκλο κέντρου (0, 0) και μοναδιαίας ακτίνας. Ο κύκλος αυτός διαιρεί το επίπεδο σε δύο περιοχές. Έξω από τον κύκλο η ροή είναι παντού υπερηχητική και μέσα στον κύκλο υποηχητική. Στην περιφέρεια η ροή είναι ηχητική. Άρα, ο μοναδιαίος κύκλος ορίζεται ως ηχητικός κύκλος.

Μία διανυσματική ακτίνα από το O κεκλιμένη κατά τη γωνία θ ως προς τον άξονα OBA μπορεί να τμήσει την πολική κρούση σε τρία σημεία D, C, E. Η ταχύτητα που αντιστοιχεί στο E δεν είναι καταληπτή αφού είναι μεγαλύτερη από εκείνη που αντιστοιχεί στο A, την προσιπτούσα ταχύτητα του ρεύματος. Η OC δίδει μικρότερη ελάττωση ταχύτητας από ότι η OD. Άρα, το C αντιστοιχεί σε μία ασθενή κρούση και το D σε ισχυρή. Το πείραμα φαίνεται να δείχνει, ότι στις περισσότερες περιπτώσεις η ασθενέστερη κρούση συμβαίνει για μία δεδομένη γωνία εκτροπής, θ . Πιστεύεται, αλλά ίσως δεν επιβεβαιώθηκε ακόμη, ότι η ισχυρότερη κρούση είναι ασταθής. Λαμβάνοντας το C να έχει συντεταγμένες (\bar{u}_2, \bar{u}_2) , οι οποίες αντιστοιχούν στις αδιάστατες ταχύτητες της περιοχής 2, βλέπουμε ότι:

$$\text{Η κλίση της AC} = \frac{\bar{u}_2}{(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)}$$



οπότε αν η OL σχεδιαστεί κάθετα στην A , όπως στο Σχ. 9.9,

$$\eta \text{ κλίση της OL} = \frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)}{u_2}$$

Από την εξ.(7), $\epsilon\phi \beta = \frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)}{\bar{u}_2} = \frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)}{\bar{u}_2}$. Άρα: $\hat{L}\hat{O}\hat{B} = \beta$.

Επομένως, συμπεραίνεται, ότι αν μία διανυσματική ακτίνα σχεδιασμένη ώστε να διέρχεται από το O, σχηματίζει γωνία θ με τον OBA και κόβει την πολική κρούση στα D, C, E όπως στο Σχ. 9.9, τότε η \overline{OC} παριστάνει την αδιάστατη ταχύτητα προς την κατεύθυνση κίνησης της κρούσης για μία δεδομένη εκτροπή θ της ροής και η γωνία μεταξύ του OBA και της καθέτου OL προς την AC δίδει τη γωνία β, στην οποία η πλάγια κρούση έχει τη διεύθυνση του προσπίπτοντος ρεύματος στην περιοχή 1.

Από την (9) με διαφόριση, βρίσκουμε:

$$\frac{d\bar{u}_2}{d\bar{u}_2} = \frac{(\gamma+1)^{-1} \bar{u}_1^4 - 3(\gamma+1)^{-1} \bar{u}_1^3 \bar{u}_2 + \bar{u}_1^2 \bar{u}_2^2 + 2(\gamma+1)^{-1} \bar{u}_1^2 - 2\bar{u}_1 \bar{u}_2 + 1}{(\bar{u}_1 \bar{u}_2 - 1)^{1/2} \{2(\gamma+1)^{-1} \bar{u}_1^2 - \bar{u}_1 \bar{u}_2 + 1\}^{3/2}}$$

Στο A είναι, $\bar{u}_2 = \bar{u}_1$, $\bar{u}_2 = 0$ και έτσι, δεν παρατηρείται μεταβολή της ταχύτητας στο A και αναμένουμε το A να αντιστοιχεί σε ένα πολύ ασθενές κύμα. Επίσης, στο A βρίσκουμε:

$$\left(\frac{d\bar{u}_2}{d\bar{u}_2}\right)_A = -\frac{(\bar{u}_1^2 - 1)^{1/2}}{\{(1-\gamma)(1+\gamma)^{-1} \bar{u}_1^2 + 1\}^{1/2}}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

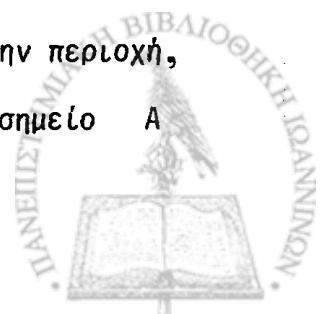
$$\bar{u}_1^2 = \left(\frac{u_1}{c_*}\right)^2 = \frac{\gamma+1}{(\gamma-1) + (2/M_1^2)}$$

βρίσκουμε:

$$\left(\frac{d\bar{u}_2}{d\bar{u}_2}\right)_A = -(M_1^2 - 1)^{1/2} = \text{συντεμ } \mu_1$$

όπου μ_1 είναι η γωνία Mach για το υπερηχητικό ρεύμα στην περιοχή,

1. Αυτό δείχνει, ότι καθώς το $C \rightarrow A$, $\beta \rightarrow \mu_1$, δηλαδή, το σημείο A



στην πολική κρούση αντιστοιχεί σε ένα κύμα Mach κεκλιμένο κατά τη γωνία μ_1 ως προς τὸ προσπίπτον ρεῦμα. Ακόμη, από την έκφραση για το $d\bar{u}_2/d\bar{u}_2$, βρίσκουμε

$$\left(\frac{d\bar{u}_2}{d\bar{u}_2}\right)_B = \infty$$

οπότε, καθώς $C \rightarrow B$, το $\beta \rightarrow 0$. Άρα, το σημείο B στην πολική κρούση αντιστοιχεί σε μία κάθετη κρούση.

9.9. Η μέθοδος των χαρακτηριστικών εφαρμοζόμενη σε Υπερηχητικές Ομοιοεντροπικές Αστρόβιλες Ροές Αερίου

Στην ενότητα 9.6, καταλήξαμε στην εξίσωση (3')

$$\vec{V} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \text{σταθερά} \quad (1)$$

Σ' αυτή η σταθερά είναι η ίδια κατά μήκος κάθε ρευματογραμμής αλλά, εκτός και αν η ροή είναι ομοιοεντροπική, θα μεταβάλλεται από ρευματογραμμή σε ρευματογραμμή. Η συνθήκη για σταθερή εντροπία ενός υλικού σημείου του ρευστού στην κίνησή του κατά μήκος μιας ρευματογραμμής εκφράζεται από την εξίσωση:

$$(\vec{V} \cdot \nabla) s = 0 \quad (2)$$

αφού για στατική ροή, η $\vec{V} \cdot \nabla$ παριστάνει την εκτέλεση της χρονικής διαφορίσης, η οποία ακολουθεί το στοιχείο του ρευστού. Επιπλέον, η εξίσωση της κατάστασης μπορεί να ληφθεί με μία από τις ακόλουθες μορφές:

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (3)$$

ή

$$p = F(\rho, s) \quad (3')$$

όταν τα f, F είναι γνωστά. Η εξ. (2') είναι καταλληλότερη για μελέτες περιπτώσεων ισηντροπικών και ομοιοεντροπικών ροών.



Στα παραπάνω, οι εξισώσεις, (1), (2) και (3') δίδουν τα ρ , ρ , \vec{V} , s . Η εξίσωση Bernoulli συνάγεται από την εξίσωση κίνησης, αλλά η εξ. (1) είναι πολύ χρήσιμη, όπως θα δούμε. Έτσι, το πρόβλημα της ροής του ρευστού είναι προσδιοριστέο.

Επειδή, $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla(\frac{\vec{V}^2}{2}) - \vec{V} \wedge \zeta$, αν υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο της

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -(\frac{1}{\rho}) \nabla p \quad (4)$$

με την \vec{V} έχουμε:

$$\vec{V} \cdot \nabla(\frac{\vec{V}^2}{2}) = -(\frac{1}{\rho}) \vec{V} \cdot \nabla p$$

Χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση με τη μορφή (3') έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla p &= \sum \vec{i} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \sum \vec{i} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial s}{\partial x} \right\} \\ &= c^2 \nabla \rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \nabla s \end{aligned}$$

Για ομοιοεντροπική ροή, $\nabla p = c^2 \nabla \rho$ και η (4) γίνεται:

$$\vec{V} \cdot \nabla(\frac{\vec{V}^2}{2}) = -(\frac{c^2}{\rho}) (\nabla \rho) \cdot \vec{V}$$

και η εξίσωση συνεχείας η $(\frac{\partial \rho}{\partial t}) + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$ δίδει:

$$\rho \nabla \cdot \vec{V} + (\nabla \rho) \cdot \vec{V} = 0$$

και έτσι

$$\vec{V} \cdot \nabla(\frac{\vec{V}^2}{2}) = c^2 \nabla \cdot \vec{V} \quad (5)$$

Η εξ.(5) είναι ένα σημαντικό αποτέλεσμα, με \vec{V} την τοπική ταχύτητα του υλικού σημείου του αερίου και c την ταχύτητα του ήχου. Υποθέτουμε ότι η ροή είναι αστρόβιλη. Τότε, υπάρχει ένα δυναμικό φ της ταχύτητας τέτοιο, ώστε:

$\vec{V} = -\nabla \varphi$ και η (5) γίνεται:

$$c^2 \nabla^2 \varphi + \vec{V} \cdot \nabla(\frac{\vec{V}^2}{2}) = 0 \quad (6)$$



$$\text{Όμως, } \vec{V} \cdot \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) = \left(u \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial z} \right) (u^2 + v^2 + \omega^2)$$

$$= u \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)$$

$$+ u \left(u \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)$$

$$+ \omega \left(u \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)$$

$$= -(u^2 \varphi_{xx} + v^2 \varphi_{yy} + \omega^2 \varphi_{zz} + 2u\omega \varphi_{yz} + 2\omega u \varphi_{zx} + 2uv \varphi_{xy})$$

όπου $\varphi_x \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ κλπ. Άρα, η (6) γίνεται:

$$(c^2 - u^2) \varphi_{xx} + (c^2 - v^2) \varphi_{yy} + (c^2 - \omega^2) \varphi_{zz} - 2u\omega \varphi_{yz} - 2\omega u \varphi_{zx} - 2uv \varphi_{xy} = 0 \quad (7)$$

Η εξίσωση (7) είναι μία 2ας τάξης διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους του φ . Δεν είναι γραμμική, εκτός από την περίπτωση $c = \infty$, η οποία αντιστοιχεί σε ασυμπλέστη ροή (η οποία τότε ανάγεται στην $\nabla^2 \varphi = 0$). Η εξίσωση (7), λύνεται σε ειδικές περιπτώσεις με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών, η οποία είναι μία γνωστή τεχνική επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους.



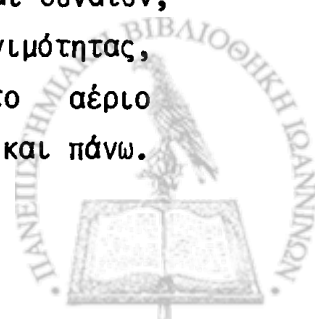
10. ΜΑΓΝΗΤΟΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

10.1. Η Φύση της Μαγνητοϋδροδυναμικής

Όταν ένας αγωγός ο οποίος μεταφέρει ένα ηλεκτρικό ρεύμα μετακινείται σ'ένα μαγνητικό πεδίο, δέχεται μια δύναμη που τείνει να τον κινήσει κάθετα προς το ηλεκτρικό πεδίο. Αντιστρόφως, όταν ένας αγωγός κινείται σ'ένα μαγνητικό πεδίο, δημιουργείται ένα ρεύμα (εξ'επαγωγής) στον αγωγό σε διεύθυνση κάθετη τόσο στο πεδίο όσο και στη διεύθυνση της κίνησης. Αυτές οι δύο προτάσεις διατυπώθηκαν για πρώτη φορά από τον Faraday και αποτελούν τους νόμους του ηλεκτρομαγνητισμού. Η πρώτη είναι η βασική αρχή του ηλεκτρικού κινητήρα (μοτέρ). Η δεύτερη είναι η αρχή της μετατροπής της ενέργειας σε ηλεκτρική (δυναμό). Δεν υπάρχει τίποτε σ' αυτές τις αρχές που να υπονοεί ότι ο αγωγός πρέπει να είναι ένα στερεό. Στην πραγματικότητα είχε προταθεί ότι η κίνηση των θαλασσών θα δημιουργούσε διαταραχή στο γήινο μαγνητικό πεδίο. Επιπλέον, τα παλιρροϊκά κύματα τα οποία σαρώνουν την εκβολή ενός ποταμού, θα τμήσουν τις γήινες δυναμικές γραμμές και θα δημιουργήσουν ένα ρεύμα, το οποίο μπορεί να αποκαλυφθεί μ'ένα καλώδιο το οποίο συνδέει δύο ηλεκτρόδια τοποθετημένα στις απέναντι όχθες του ποταμού.

Στην περίπτωση κατά την οποία ο αγωγός είναι είτε υγρό είτε αέριο, θα παράγονταν ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις, οι οποίες μπορούν να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις υδροδυναμικές ή τις δυνάμεις αδρανείας. Έτσι, οι εξισώσεις κίνησης θα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους αυτές τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις, όπως ακριβώς και τις άλλες δυνάμεις. Η επιστήμη που πραγματεύεται αυτά τα φαινόμενα καλείται μαγνητοϋδροδυναμική (ΜΥΔ). Διάφορες άλλες ονομασίες είναι: υδρομαγνητική, μαγνητο-ρευστοδυναμική, μαγνητο-αεριοδυναμική, κλπ.

Τα περισσότερα υγρά και αέρια είναι κακοί αγωγοί του ηλεκτρισμού. Ως επακόλουθο οι κινήσεις τους μπορούν κανονικά να περιγραφούν απ' τις βασικές αρχές της ρευστοδυναμικής, οι οποίες έχουν μελετηθεί μέχρι τώρα σ' αυτό το βιβλίο. Παρόλα αυτά, είναι δυνατόν, να κάνουμε μερικά αέρια να είναι εξαιρετικά μεγάλης αγωγιμότητας, εάν τα ιονίσουμε. Για να φέρει αποτέλεσμα ο ιονισμός, το αέριο πρέπει να είναι πολύ θερμό - σε θερμοκρασίες από 5000⁰Κ και πάνω.



Τέτοια ιονισμένα αέρια καλούνται πλάσματα (plasmas). Η ύλη μέσα σ'ένα άστρο είναι πλάσμα εξαιρετικά μεγάλης αγωγιμότητας και υπάρχει μέσα σ'ένα δυνατό μαγνητικό πεδίο. Ως επακόλουθο αναμένουμε να αναγνωριστούν μέσα στα άστρα ΜΥΔ επιδράσεις. Περαιτέρω, σε επίπεδο μηχανικής, έχουν γίνει πειράματα για την παραγωγή ηλεκτρικής ισχύος, περνώντας ιονισμένο αέριο μεταξύ των πόλων ισχυρού ηλεκτρομαγνήτη, έτσι που θα μπορούσε να παραχθεί ένα ηλεκτρικό ρεύμα καθέτως προς το μαγνητικό πεδίο και τη διεύθυνση ροής του πλάσματος, το οποίο ρεύμα θα συλλεγόταν από δύο καταλλήλως τοποθετημένα στο χώρο ηλεκτρόδια τα οποία είναι κάθετα στη διεύθυνση ροής του ρεύματος. Προς το παρόν ΜΥΔ γεννήτριες δεν είναι πρακτικώς δυνατόν να κατασκευαστούν, εξαιτίας των δυσκολιών παραγωγής καταλλήλως αποτελεσματικού και σταθερού πλάσματος και αρκετά δυστήκτων υλικών για να αντισταθούν στις μεγάλες θερμοκρασίες του πλάσματος.

ΜΥΔ επιδράσεις σε αγωγή υγρά έχουν μελετηθεί στο εργαστήριο από τους Hartmann και Williams. Θα περιγράψουμε στην παράγραφο 10.14, πως το ιξώδες του υδραργύρου φαίνεται να εμφανίζεται όταν η ροή λαμβάνει χώρα διαμέσου ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Επίσης, τα ΜΥΔ αποτελέσματα έχουν αξιοποιηθεί στην περίπτωση του λειωμένου νατρίου το οποίο κινείται σε μαγνητικό πεδίο και στον σχεδιασμό ηλεκτρομαγνητικών αντλιών και οργάνων μέτρησης της ροής.

10. 2. Εξισώσεις Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου του Maxwell: Μέσον σε Ηρεμία.

Πριν ασχοληθούμε με τη μαθηματική θεωρία της ΜΥΔ, συνοψίζουμε τις εξισώσεις του Maxwell για το ΗΜ πεδίο. Η εξαγωγή τους μπορεί να βρεθεί σε κάθε κλασσικό βιβλίο, το οποίο πραγματεύεται την ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Εργαζόμαστε καθόλη τη διάρκεια με ηλεκτρομαγνητικές μονάδες. Ορισμένες γνώσεις θα θεωρηθούν γνωστές απ'τη στοιχειώδη ΗΜ θεωρία.

Οι εξισώσεις του ΗΜ πεδίου για ομοιόμορφης αγωγιμότητας μέσον σε ηρεμία είναι,

$$\nabla \cdot \vec{E} = (4\pi/\epsilon)q \quad (1)$$



$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\mu(\partial \vec{H} / \partial t), \quad (3)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = 4\pi \vec{j} + \varepsilon(\partial \vec{E} / \partial t), \quad (4)$$

όπου \vec{E} είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, ε η διηλεκτρική σταθερά του μέσου, \vec{H} η ένταση του μαγνητικού πεδίου, μ η διαπερατότητα, \vec{j} το διάνυσμα πυκνότητας του ρεύματος αγωγιμότητας, q η πυκνότητα φορτίων του μέσου ανά μονάδα όγκου και t δηλώνει το χρόνο.

Επιπλέον, ο νόμος του Ohm για το αγώγιμο μέσον, διατυπώνεται μαθηματικά με τη σχέση,

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (5)$$

όπου σ είναι η αγωγιμότητα του μέσου.

Το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής \vec{B} και το διάνυσμα της ηλεκτρικής μετατόπισης \vec{D} , δίδονται απ' τις βασικές εξισώσεις

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (6)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (7)$$

Επίσης, αφού τα μ , ε είναι και τα δύο σε e.m.u.,

$$c = (\mu\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στο μέσον.

Για το κενό, $c \approx 3 \times 10^{10}$ cmsec⁻¹

Οι εξισώσεις (1), (2) συνάγονται με εφαρμογή του θεωρήματος Gauss για κλειστή επιφάνεια. Η εξίσωση (3) είναι η μαθηματική διατύπωση του νόμου της επαγωγής του Faraday, που αναφέρει ότι όταν η ροή της ηλεκτρικής επαγωγής διαμέσου ενός κλειστού κυκλώματος μεταβάλλεται, η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη είναι ανάλογη με το ρυθμό εξασθένισης της ροής. Η εξίσωση (4) περιγράφει πώς το μαγνητικό πεδίο H εξαρτάται από το αγώγιμο ρεύμα \vec{j} και από το "ρεύμα μετατόπισης" $(\varepsilon/4\pi)\partial \vec{E}/\partial t$ που οφείλεται στη μεταβολή του διανύσματος μετατόπισης \vec{D} στο διηλεκτρικό μέσον. Είναι γνωστό απ' τη θεωρία, ότι οι ΗΜ διαταραχές διαδίδονται σαν κύματα στο διηλεκτρικό μέσον, με την ταχύτητα του φωτός c . Γι αυτόν το λόγο τα κύματα φωτός θεωρούνται ως ηλεκτρομαγνητικού εί-



δους.

Ένα άλλο εξαγόμενο απ'την ΗΜ θεωρία, είναι η έκφραση για τη δύναμη Lorentz πάνω σε κινούμενο φορτίο. Μια τέτοια δύναμη \vec{F} πάνω σε φορτίο e που κινείται με ταχύτητα \vec{v} , δίδεται απ'την σχέση,

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{H}) \quad (9)$$

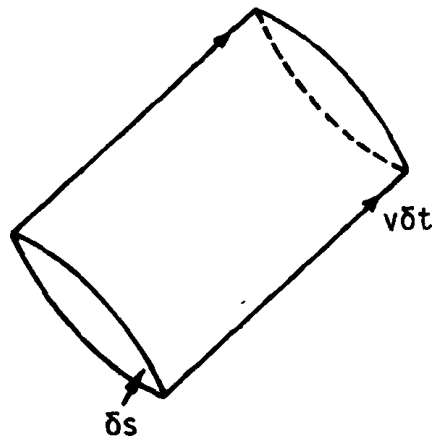
όπου όλες οι μονάδες είναι e.m.u., όπως και στις προηγούμενες εξισώσεις, όταν το αγώγιμο διηλεκτρικό μέσον είναι σε κίνηση.

10. 3. Εξισώσεις Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου του Maxwell: Μέσον σε Κίνηση.

Υποθέτουμε τώρα, ότι το διηλεκτρικό μέσον είναι ένα κινούμενο ρευστό, όπως ένα ιονισμένο αέριο. Όπως στην ανάπτυξη της υδροδυναμικής θεωρίας, υποθέτουμε ότι το μέσον είναι συνεχές και διατηρεί ισοτροπικές ιδιότητες σ'όλα τα σημεία. Μια τέτοια υπόθεση είναι λογική, όταν οι μέσες ελεύθερες διαδρομές των σωματιδίων είναι πάρα πολύ μικρότερες απ'τα τυπικά μήκη που συνδέονται με το θεωρούμενο σύστημα. Θα μπορεί, εντούτοις, να τονιστεί ότι υπάρχουν πλάσματα, για τα οποία αυτή η υπόθεση είναι αβάσιμη. Σ'αυτές τις περιστάσεις, το μέσον δεν μπορούμε να το χειριστούμε σαν μια συνεχή ουσία. Η ανάλυση πρέπει να προχωρήσει θεωρώντας διακριτές τις κινήσεις των σωματιδίων. Ο κλάδος της ΜΥΔ, στον οποίο το μέσον δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν συνεχές συχνά καλείται δυναμική πλάσματος. Στην Αστροφυσική κανείς ασχολείται με μεταβολές σε εξαιρετικά μεγάλες αποστάσεις και αφού οι τροχιές των σωματιδίων είναι πολύ μικρότερες, θεωρείται ως αρκετά ακριβές να χειριζόμαστε την ανάλυση μακροσκοπικά.

Έστω ότι είναι \vec{v} η τοπική ταχύτητα του πλάσματος. Τότε πέραν από το αγώγιμο ρεύμα, υπάρχει και ένα ρεύμα που οφείλεται στην κατακόρυφη μεταφορά. Θα υπολογίσουμε πρώτα την πυκνότητα του ρεύματος μεταφοράς. Το σχήμα 10.1 δείχνει ότι σε χρόνο δt , η τοπική κίνηση του μέσου είναι $\vec{v}\delta t$. Συνεπώς, ο όγκος που γεννάται από την κίνηση ενός στοιχείου κάθετης διατομής δS (κάθετη στην κίνηση) είναι $|\vec{v}|\delta t\delta S$. Το φορτίο μέσα σ'αυτόν τον όγκο είναι $q|\vec{v}|\delta t\delta S$. Άρα, ο ρυθμός της ροής του φορτίου διά της διατομής δS





Σχ. 10.1

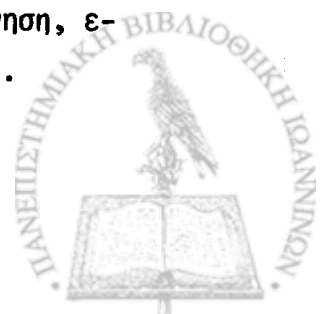
-είναι $q|\vec{v}|\delta S$ στη διεύθυνση της \vec{v} . Επομένως, η πυκνότητα του ρεύματος ανά μονάδα εμβαδού, λόγω κατακόρυφης μεταφοράς είναι $q|\vec{v}|$. Αφού η διεύθυνση της ροής του ρεύματος που οφείλεται στην κατακόρυφη μεταφορά είναι εκείνη της \vec{v} , συνεπάγεται ότι το διάνυσμα της πυκνότητας του ρεύματος λόγω μεταφοράς είναι $q\vec{v}$. Το διάνυσμα της πυκνότητας του ρεύματος αγωγιμότητας είναι \vec{j} . Άρα, το ολικό διάνυσμα της πυκνότητας του ρεύματος που οφείλεται τόσο στην αγωγιμότητα όσο και στη μεταφορά είναι $\vec{j}+q\vec{v}$. Συνεπώς, τροποποιούμε την εξίσωση (4) του Maxwell της ενότητας 9.2 στη μορφή:

$$\nabla \wedge \vec{H} = 4\pi(\vec{j} + q\vec{v}) + \epsilon(\partial\vec{E}/\partial t) \quad (1)$$

Στην (1) εμφανίζονται τρεις τύποι ρεύματος:

- (i) Το ρεύμα αγωγιμότητας \vec{j} ,
- (ii) Το ρεύμα μεταφοράς $q\vec{v}$ που οφείλεται στην κίνηση του μέσου
- (iii) Το ρεύμα μετατόπισης $(\epsilon/4\pi)\partial\vec{E}/\partial t$ ή $(1/4\pi)\partial\vec{D}/\partial t$, που οφείλεται στη μεταβολή του χρόνου της ηλεκτρικής επαγωγής \vec{D} μέσα στο μέσον.

Θα δείξουμε αργότερα ότι σε πολλές περιπτώσεις μόνο το (i) είναι σημαντικό και ότι τα (ii) και (iii) είναι συχνά αμελητέα. Οι άλλες τρεις εξισώσεις του Maxwell ((1), (2), (3) της ενότητας(10.2) παραμένουν αμετάβλητες για ένα μέσο που βρίσκεται σε κίνηση, επειδή δεν περιλαμβάνουν ηλεκτρικά ρεύματα κανενός είδους.



Επιπλέον, ο τύπος για το νόμο του Ohm, εξίσωση (5) της ενότητας 10.2 πρέπει να τροποποιηθεί για ένα κινούμενο μέσο. Για μια μονάδα φορτίου που κινείται τοπικά μαζί με το μέσον με ταχύτητα \vec{v} , η δύναμη Lorentz είναι $\vec{E} + \mu\vec{v} \wedge \vec{H}$. Επομένως, ο νόμος του Ohm παίρνει τη μορφή:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \mu\vec{v} \wedge \vec{H}) \quad (2)$$

Ανακεφαλαιώνοντας, μπορούμε να πούμε ότι οι εξισώσεις του ΗΜ-πεδίου του Maxwell για ένα κινούμενο μέσον, δίδονται απ' τις εξισώσεις (1), (2), (3) της ενότητας 10.2 και απ' την (1) της ενότητας 10.3. Επιπροσθέτως, η εξίσωση (2) της ενότητας 10.3 εκφράζει το νόμο του Ohm.

10. 4. Οι Εξισώσεις Κίνησης ενός Αγώγιμου Ρευστού

Μέχρι τώρα χειριστήκαμε τις εξισώσεις του ΗΜ πεδίου για ένα κινούμενο αγώγιμο ρευστό. Τώρα θα συναγάγουμε τις κατάλληλες υδροδυναμικές εξισώσεις της κίνησης.

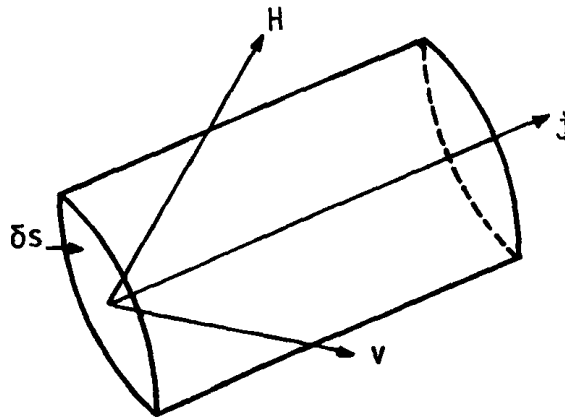
Στο κεφάλαιο 8, ενότητα 8.9, εξαγάγαμε την διανυσματική εξίσωση της κίνησης των Navier-Stokes για ένα ιξώδες ρευστό. Μια αμυδρή προσαρμογή των αποτελεσμάτων δίδει

$$\rho(d\vec{v}/dt) = \vec{F} - \nabla p + \frac{1}{3} \rho \nu \nabla \cdot \vec{v} + \rho \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (1)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, \vec{v} η ταχύτητα του ρευστού, \vec{F} η εξωτερική δύναμη ανά μονάδα όγκου, p η πίεση του ρευστού, ν ο κινηματικός συντελεστής του ιξώδους. (Ο συντελεστής του ιξώδους θα δηλώνεται με $\rho\nu$ και όχι με μ , αφού το τελευταίο σύμβολο χρειάζεται για τη μαγνητική διαπερατότητα του ρευστού).

Όταν το ρευστό κινείται σ' ένα ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, η εξωτερική δύναμη ανά μονάδα όγκου \vec{F} συνίσταται από τρία μέρη: το βαρυτικό, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό. Η δύναμη βαρύτητας ανά μονάδα όγκου είναι $\rho\vec{g}$, όπου \vec{g} είναι η επιτάχυνση που οφείλεται στη βαρύτητα. Ένας στοιχειώδης όγκος δu του ρευστού, θα περιείχε ένα φορτίο ποσότητας $q\delta u$ οπότε η δύναμη πάνω σ' αυτό, που οφείλεται στο ηλεκτρικό πεδίο έντασης \vec{E} θα είναι $(q\delta u)\vec{E}$. Άρα, η ηλεκτρική δύναμη ανά μονάδα όγκου είναι $q\vec{E}$.





Σχ. 10.2

Για να ευρεθεί η μαγνητική δύναμη ανά μονάδα όγκου, γνωρίζουμε ότι το ολικό διάνυσμα της πυκνότητας είναι $\vec{j} + q\vec{v}$, αλλά στην οικοδόμηση των εξισώσεων των Navier-Stokes το εκλεγέν στριχείο του ρευστού ήταν ένα κινητό στοιχείο, κινούμενο μαζί με την τοπική ταχύτητα \vec{v} . Άρα, η αγώγιμη συνιστώσα \vec{j} παρέχει μια αποτελεσματική συνεισφορά στη μαγνητική δύναμη, αλλά όχι το τμήμα της κατακόρυφης μεταφοράς $q\vec{v}$. Στο σχήμα 10.2, δs είναι η κάθετη διατομή ενός στοιχείου του ρευστού, του οποίου το μήκος δs είναι κατά τη διεύθυνση του \vec{j} . Το στοιχείο αυτό κινείται με την τοπική ταχύτητα του ρευστού \vec{v} , σ'ένα μαγνητικό πεδίο έντασης \vec{H} . Άρα, το ρεύμα που ρέει δια μέσου του στοιχείου είναι $i = |\vec{j}|\delta s$. Από την ΗΜ θεωρία, ο νόμος των Biot-Savart δίνει ως μαγνητική δύναμη στο στοιχείο

$$\begin{aligned} \delta\vec{F} &= i \delta\vec{s} \wedge \vec{B} \\ &= |\vec{j}| \delta s \delta s \wedge \vec{B} \\ &= (\vec{j} \wedge \vec{B}) \delta s \delta s \end{aligned}$$

δίδοντας μια μαγνητική δύναμη ανά μονάδα όγκου

$$\vec{j} \wedge \vec{B} = \mu \vec{j} \wedge \vec{H}$$

Συνοπτικά, τότε, η ολική δύναμη ανά μονάδα όγκου είναι:

$$\vec{F} = \rho\vec{g} + \mu\vec{j} \wedge \vec{H} + q\vec{E} \quad (2)$$

και η εξίσωση (1) μπορεί να ξαναγραφτεί



$$\rho(d\vec{v}/dt) = -\nabla p + \rho\vec{g} + \mu\vec{j} \wedge \vec{H} + q\vec{E} + \frac{1}{3}\rho\nabla\nabla\cdot\vec{v} + \rho\nabla^2\vec{v} \quad (3)$$

Επιπλέον, η εξίσωση της συνεχείας είναι

$$(\partial\rho/\partial t) + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \quad (4)$$

10. 5. Ρυθμός της Ροής του Φορτίου

Παίρνοντας την απόκλιση και των δύο μελών της εξίσωσης (1) της ενότητας 10.3, έχουμε:

$$0 = 4\pi\nabla\cdot\vec{j} + 4\pi(q\nabla\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla q) + \epsilon(\partial/\partial t)\nabla\cdot\vec{E}$$

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή $d/dt \equiv \partial/\partial t + \vec{v}\cdot\nabla$, την εξίσωση (1) της ενότητας 10.2 και την εξίσωση (2) της ενότητας 10.3, αυτή γίνεται,

$$\frac{dq}{dt} + q\nabla\cdot\vec{v} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} q + \mu\sigma\nabla\cdot(\vec{v} \wedge \vec{H}) = 0 \quad (1)$$

μια εξίσωση που εκφράζει το ρυθμό της ροής του φορτίου, που κινείται μαζί με το ρευστό. Δύο περιπτώσεις ανακύπτουν για συζήτηση.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ι: ΡΕΥΣΤΟ ΣΕ ΗΡΕΜΙΑ (ΑΚΙΝΗΣΙΑ)

Παίρνοντας $\vec{v} = \vec{0}$, η εξίσωση (1) γίνεται

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{q}{\tau} = 0 \quad (2)$$

όπου $\tau = \epsilon/(4\pi\sigma)$, μια ποσότητα που έχει διαστάσεις χρόνου και καλείται χρόνος χαλάρωσης (the relaxation time). Το τ είναι συνήθως πολύ μικρό, αφού $\tau = 1/(4\pi\mu\sigma^2)$, όπου $\mu \sim 1$ και σ, c^2 είναι αμφότερα πολύ μεγάλα. Η λύση της (2) είναι:

$$q = q_0 \exp(-t/\tau) \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) δείχνει ότι σε κάθε σημείο μέσα σε ένα αγώγιμο ρευστό σε ακινησία, το φορτίο φθίνει πολύ γρήγορα με εκθετικό τρόπο. Η ηλεκτροστατική θεωρία βεβαιώνει ότι όταν επικρατούν στατικές συνθήκες, το ηλεκτρικό φορτίο μένει αποκλειστικά στα εξωτερικά όρια του αγωγού. Άρα, το φορτίο μέσα σε ένα αγώγιμο ρευστό



σε ακινησία φθίνει εκθετικά στα εσωτερικά σημεία και κατανέμεται στα εξωτερικά όρια.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙ: ΡΕΥΣΤΟ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

Γενικά η (1) δεν είναι ολοκληρώσιμη. Μπορούμε να δείξουμε εντούτοις, χρησιμοποιώντας διαστατικές θεωρήσεις, ότι σε μερικές σημαντικές περιπτώσεις ο όρος $q\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ είναι αμελητέος. Μ' αυτό το δεδομένο υποθέτουμε ότι το L είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος, με την έννοια ότι είναι της ίδιας τάξης μεγέθους όπως μία απόσταση στην οποία οι μεταβλητές στην εξίσωση αλλάζουν κατά αισθητές αναλογίες. Τότε:

$$O\left(\frac{4\pi\sigma q}{\epsilon}\right) = \frac{\sigma q}{\epsilon}$$

$$O\{\mu\sigma\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{H})\} = \mu\sigma H/L$$

Αν αυτές οι δύο είναι συγκρίσιμοι μεγέθους, τότε

$$q \sim \frac{\mu\epsilon u H}{L} = \frac{uH}{Lc^2} \quad (4)$$

Όταν αληθεύει η (4),

$$q\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \sim \left(\frac{uH}{Lc^2}\right) \times \left(\frac{u}{L}\right) = \frac{u^2 H}{L^2 c^2}$$

Συνεπώς,

$$\frac{O\{q\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\}}{O\{\mu\sigma\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{H})\}} = \frac{u^2 H L}{L^2 c^2 \mu\sigma H} = \frac{u}{\sigma L \mu c^2} = \frac{\epsilon u}{\sigma L} \sim \frac{\tau}{(L/u)}$$

όπου $\tau = \epsilon/(4\pi\sigma)$. Ο χρόνος χαλάρωσης τ είναι πολύ μικρός και γενικά έχει βρεθεί ότι $(L/u) \gg \tau$. Αυτό δείχνει ότι ο όρος $q\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ μπορεί να παραληφθεί όταν ισχύει η (4).

10. 6. Απλοποίηση των Εξισώσεων του ΗΜ Πεδίου

Το αποτέλεσμα $q \sim uH/(Lc^2)$ της τελευταίας ενότητας επιτρέπει στην εξίσωση του πεδίου

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 4\pi\vec{j} + 4\pi q\vec{v} + \epsilon(\partial\vec{E}/\partial t)$$

να απλοποιηθεί. Για



$$O(|\nabla \wedge \vec{H}|) = H/L$$

$$O(|q\vec{v}|) = u^2 H / (Lc^2),$$

και έτσι:

$$\frac{O(|q\vec{v}|)}{O(|\nabla \wedge \vec{H}|)} = \left(\frac{u}{c}\right)^2$$

Για μη σχετιστικές ταχύτητες, $(u/c)^2 \ll 1$, έτσι ώστε ο όρος $4\pi q\vec{v}$ είναι αμελητέος

Ακόμη,

$$O\left(\left|\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|\right) = \frac{\epsilon E}{L/u} = \frac{\epsilon u E}{L} = \frac{u E}{\mu c^2 L}$$

και έτσι

$$\frac{O\left(\left|\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|\right)}{O(|q\vec{v}|)} = \frac{u E}{\mu c^2 L} \times \frac{L c^2}{u^2 H} = \frac{E}{\mu H u}$$

Αυτός ο λόγος είναι πεπερασμένου μεγέθους. Επομένως, ο όρος $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ είναι επίσης αμελητέος.

Άρα, μπορούμε να αγνοήσουμε τα κατακόρυφα ρεύματα μεταφοράς και μετατόπισης και λαμβάνουμε,

$$\nabla \wedge \vec{H} = 4\pi \vec{j} = 4\pi \sigma (\vec{E} + \mu \vec{v} \wedge \vec{H})$$

οποτεδήποτε ισχύει $q \sim uH / (Lc^2)$ και οι ταχύτητες είναι μη σχετικιστικής τάξης.

10. 7. Ο Μαγνητικός Αριθμός Reynolds

Λαμβάνοντας τον στροβιλισμό και των δύο μελών της εξίσωσης

$$\nabla \wedge \vec{H} = 4\pi \sigma (\vec{E} + \mu \vec{v} \wedge \vec{H})$$

έχουμε

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = 4\pi \sigma \{ \nabla \wedge \vec{E} + \mu \nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{H}) \}$$

ή αφού

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{H}) + n \nabla^2 \vec{H} \quad (1)$$

όπου

$$n = 1 / (4\pi \mu \sigma) \quad (2)$$

Έστω ότι το L συμβολίζει ένα χαρακτηριστικό μήκος και το u μια



χαρακτηριστική ταχύτητα. Τότε

$$O(|\nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{H})|) = uH/L,$$

$$O(|n\nabla^2 \vec{H}|) = nH/L^2,$$

έτσι ώστε,

$$\frac{O(|\nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{H})|)}{O(|n\nabla^2 \vec{H}|)} = \frac{uL}{n} = R_m$$

Η αδιάστατη ποσότητα

$$R_m = uL/n = 4\pi\mu\sigma L \quad (3)$$

καλείται Μαγνητικός αριθμός Reynolds, λόγω της ομοιότητάς του με τον αριθμό Reynolds της θεωρίας του ιξώδους ρευστού. Η εξίσωση (1) δεν επιτρέπει ακριβή αναλυτική λύση, αλλά μπορεί κανείς να συζητήσει τα κύρια χαρακτηριστικά της για μικρές και μεγάλες τιμές του R_m .

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ I

- $R_m \ll 1$, αντιστοιχεί σε χαμηλή αγωγιμότητα.

Η εξίσωση (1) προσεγγίζει την εξίσωση της διάχυσης

$$\partial \vec{H} / \partial t = n \nabla^2 \vec{H} \quad (4)$$

Για μια εξίσωση αυτού του τύπου, ο ρυθμός που φθίνει το μαγνητικό πεδίο είναι πολύ γρήγορος. Σ'έναν κακό αγωγό, όπως είναι ένα υγρό, το φαινόμενο αυτό είναι εμφανές. Είναι ένας λόγος για τον οποίο τα πειράματα με υγρά, που γίνονται σε εργαστηριακή κλίμακα, είναι δύσκολο να εκτελεστούν.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ II

$R_m \gg 1$, αντιστοιχεί σε υψηλή αγωγιμότητα.

Η εξίσωση (1) τώρα προσεγγίζει προς την

$$\partial \vec{H} / \partial t = \nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{H}) \quad (5)$$

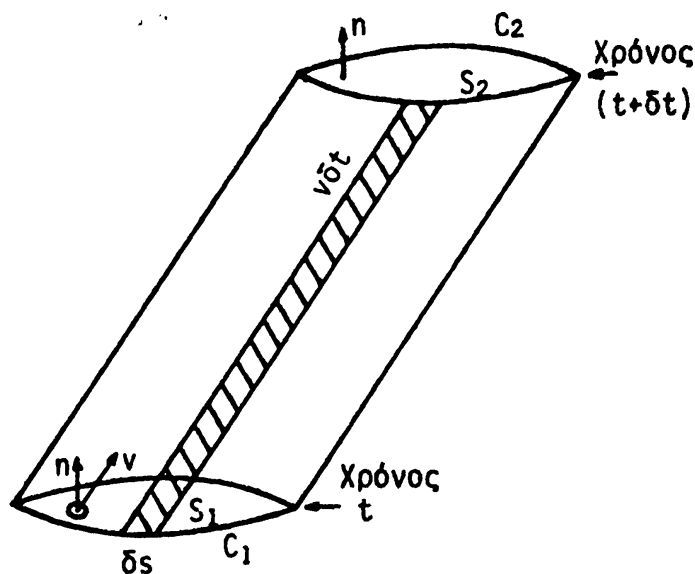
Αυτή η συνθήκη επικρατεί μέσα στην ύλη ενός αστέρα, η οποία είναι ένα πλάσμα σχεδόν τέλει αγωγιμότητας. Μια τέτοια περίπτωση οδη-



γεί στο θεώρημα που ακολουθεί και που οφείλεται στον Αλφνέη και διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1942. Σχηματοποιεί τη θεωρητική βάση των περισσότερων απ' τις νεώτερες εξελίξεις στην ΜΥΔ, οι οποίες έχουν γίνει μεταγενέστερα.

10. 8. Θεώρημα του Αλφνέη

Για ένα τέλειο αγώγιμο ρευστό, η ροή της έντασης του μαγνητικού πεδίου διαμέσου οποιουδήποτε κλειστού κυκλώματος στοιχείων του ρευστού που κινούνται μαζί με το ρευστό παραμένει σταθερή.



Σχ. 10.3

Απόδειξη

Το σχήμα 10.3 δείχνει τις θέσεις C_1 , C_2 ενός κινούμενου κυκλώματος σωματιδίων του ρευστού κατά τους χρόνους t , $(t+\delta t)$, όπου S_1 , S_2 είναι οι επιφάνειες που περιλαμβάνουν. Τη χρονική στιγμή t , η κάθετη ροή του \vec{H} μέσω της S_1 είναι

$$N_1 = \int_{S_1} \vec{n} \cdot \vec{H}(t) dS, \quad (\vec{n} = \text{μοναδιαίο διάνυσμα})$$

και στη χρονική στιγμή $(t + dt)$ η κάθετη ροή διαμέσου της S_2 είναι

$$N_2 = \int_{S_2} \vec{n} \cdot \vec{H}(t + \delta t) dS$$



Έτσι, το χρόνο t , ο ρυθμός της αλλαγής της ροής διαμέσου της C_1 είναι,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{N_2 - N_1}{\delta t} \right) = \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{S_2} \vec{n} \cdot \vec{H}(t + \delta t) dS - \int_{S_1} \vec{n} \cdot \vec{H}(t) dS \right\} \right] \end{aligned}$$

Αλλά το χρόνο t , με το θεώρημα της απόκλισης του Gauss,

$$\int_{S_2} \vec{n} \cdot \vec{H}(t) dS - \int_{S_1} \vec{n} \cdot \vec{H}(t) dS + \oint_{C_1} \vec{H} \cdot (d\vec{s} \wedge \vec{v} \partial t) = \int_{\Delta u} \nabla \cdot \vec{H}(t) du$$

όπου Δu είναι ο όγκος που παράγεται απ' το κινούμενο κύκλωμα σε χρόνο δt , με το αριστερό μέλος να είναι η ολική προς τα έξω κάθετη ροή του \vec{H} στην επιφάνεια που περικλείει ο Δu . Αλλά $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, έτσι ώστε

$$\int_{S_1} \vec{n} \cdot \vec{H}(t) dS = \int_{S_2} \vec{n} \cdot \vec{H}(t) dS + \oint_{C_1} \vec{H} \cdot (d\vec{s} \wedge \vec{v} \delta t)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta t} \int_{S_2} \vec{n} \cdot \{ \vec{H}(t + \delta t) - \vec{H}(t) \} dS - \oint_{C_1} \vec{H} \cdot (d\vec{s} \wedge \vec{v}) \right] \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\int_{S_2} \vec{n} \cdot \left\{ \frac{\vec{H}(t + \delta t) - \vec{H}(t)}{\delta t} \right\} dS \right] - \oint_{C_1} d\vec{s} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{H}) \\ &= \int_{S_1} \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} dS - \int_{S_1} \vec{n} \cdot \text{curl}(\vec{v} \wedge \vec{H}) dS \\ &= \int_{S_1} \vec{n} \cdot \left\{ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \text{curl}(\vec{v} \wedge \vec{H}) \right\} dS \\ &= 0, \text{ αφού } \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{curl}(\vec{v} \wedge \vec{H}) \end{aligned}$$

Συνεπώς, $N = \text{σταθερά}$ διαμέσου του κινούμενου κυκλώματος του ρευστού. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Το θεώρημα του Αλφνέ επιτρέπει σπουδαίες ερμηνείες. Το παραπάνω αποτέλεσμα δείχνει ότι οι δυναμικές γραμμές κινούνται μαζί με το ρευστό. Απ' αυτή την άποψη, μοιάζουν με στροβιλογραμμές σε μη ιξώδη ροή. Ο Αλφνέ μίλησε για τις μαγνητικές δυναμικές



γραμμές, σαν να ήταν "παγωμένες" μέσα στο ρευστό. Αυτό σημαίνει ότι το ρευστό μπορεί εύκολα να γλιστρήσει κατά μήκος των δυναμικών γραμμών αλλά οποιαδήποτε κίνηση κάθετη στις δυναμικές γραμμές, θα τις μεταφέρει μαζί με το ρευστό, δηλαδή οι δυναμικές γραμμές μεταφέρονται απ' το ρευστό κατά την κίνησή του. Βλέποντας αυτό κατ' άλλον τρόπο, μπορούμε να πούμε ότι η κίνηση του ρευστού διαμέσου των δυναμικών γραμμών, θα προκαλέσει ρεύματα τα οποία θα είναι πολύ μεγάλα για ένα τέλεια αγώγιμο ρευστό. Άρα, για να είναι τα προκαλούμενα ρεύματα πεπερασμένα, η κάθετη συνιστώσα της σχετικής ταχύτητας θα πρέπει να είναι μικρή, δείχνοντας το συνεκτικό αποτέλεσμα που έχει το πεδίο πάνω στο ρευστό. Θα συζητήσουμε διάφορες όψεις του θεωρήματος του Αλφνέν, αλλά πρώτα θα επιστρέψουμε στην εξίσωση των Navier-Stokes, για να δώσουμε μια σημαντική ερμηνεία του όρου της μαγνητικής δύναμης.

10. 9. Η Μαγνητική Δύναμη

Η εξίσωση της κίνησης του ρευστού (§10.4, εξίσωση (3)) γίνετε,

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + q\vec{E} + \frac{\mu}{4\pi} (\nabla \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H} + \frac{1}{3} \rho \nu \nabla \cdot \vec{v} + \rho \nu \nabla^2 \vec{v}$$

όταν χρησιμοποιούμε την προσέγγιση $\text{curl} \vec{H} = 4\pi \vec{j}$ που ελήφθη στην ενότητα 10.6. Επομένως, η μαγνητική δύναμη ανά μονάδα όγκου είναι $(\mu/4\pi)(\nabla \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H}$.

Αλλά,

$$\begin{aligned} (\nabla \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H} &= -\vec{H} \wedge \Sigma \{ \vec{j} \wedge (\partial \vec{H} / \partial x) \} \\ &= -\Sigma \{ (\vec{H} \cdot \partial \vec{H} / \partial x) \vec{j} \} + \Sigma \{ (\vec{H} \cdot \vec{j}) \partial \vec{H} / \partial x \} \\ &= -\Sigma \{ \vec{j} (\partial / \partial x) (\frac{1}{2} \vec{H}^2) \} + \vec{H} \cdot (\Sigma \vec{j} \partial / \partial x) \vec{H} \\ &= -\nabla (\frac{1}{2} \vec{H}^2) + (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} \end{aligned}$$

Για να ερμηνευθεί η μαγνητική δύναμη, ολοκληρώνουμε την $(\mu/4\pi)(\nabla \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H}$ σε όγκο Δv που περικλείεται από κλειστή επιφάνεια ΔS . Τότε απ' την παραπάνω ταυτότητα,

$$\int_{\Delta v} (\nabla \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H} dv = \int_{\Delta v} (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} dv + \int_{\Delta S} \vec{n} \cdot (-\frac{1}{2} \vec{H}^2) dS \quad (1)$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι:



$$\int_{\Delta U} (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} du = \int (\vec{H} \cdot \vec{n}) \vec{H} dS$$

Έστω ότι \vec{a} είναι ένα αυθαίρετο, σταθερό, μη μηδενικό διάνυσμα. Τότε,

$$\vec{a} \cdot \int_{\Delta U} (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} du = \int_{\Delta U} \vec{a} \cdot \{(\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H}\} du$$

Εξάλλου,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \{(\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H}\} &= \vec{a} \cdot \Sigma \{(\vec{H} \cdot \vec{i}) (\partial \vec{H} / \partial x)\} \\ &= \Sigma \{(\vec{H} \cdot \vec{i}) (\partial / \partial x) (\vec{H} \cdot \vec{a})\} \\ &= \vec{H} \cdot \{\Sigma \vec{i} (\partial / \partial x)\} (\vec{H} \cdot \vec{a}) \\ &= \vec{H} \cdot \nabla (\vec{H} \cdot \vec{a}) \\ &= \vec{H} \cdot \nabla (\vec{H} \cdot \vec{a}) + (\nabla \cdot \vec{H}) (\vec{H} \cdot \vec{a}) \\ &= \nabla \cdot \{\vec{H} (\vec{H} \cdot \vec{a})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα,} \quad \vec{a} \cdot \int_{\Delta U} (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} du &= \int_{\Delta U} \nabla \cdot \{\vec{H} (\vec{H} \cdot \vec{a})\} du \\ &= \int_{\Delta S} \vec{n} \cdot \{\vec{H} (\vec{H} \cdot \vec{a})\} dS \\ &= \int_{\Delta S} (\vec{a} \cdot \vec{H}) (\vec{n} \cdot \vec{H}) dS \\ &= \vec{a} \cdot \int_{\Delta S} \vec{H} (\vec{n} \cdot \vec{H}) dS \end{aligned}$$

Αφού το \vec{a} είναι αυθαίρετο και μη μηδενικό, αυτό δείχνει ότι

$$\int_{\Delta U} (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} du = \int_{\Delta S} (\vec{n} \cdot \vec{H}) \vec{H} dS \quad (2)$$

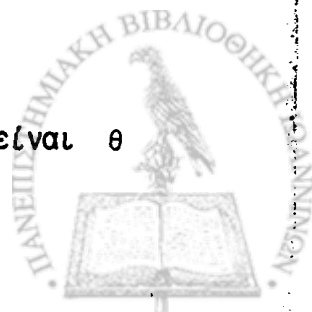
Από τις (1), (2) η μαγνητική δύναμη επί του ΔU είναι,

$$\frac{\mu}{4\pi} \int_{\Delta U} (\nabla \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H} du = \int_{\Delta S} \frac{\mu \vec{H}}{4\pi} (\vec{n} \cdot \vec{H}) dS + \int_{\Delta S} \left(-\frac{\mu}{8\pi}\right) \vec{H}^2 \vec{n} dS \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) δείχνει ότι η πραγματική δύναμη είναι ισοδύναμη με δύο ειδών επιφανειακές δυνάμεις σε κάθε επιφανειακό στοιχείο dS , δηλαδή

$$\frac{\mu \vec{H}}{4\pi} \vec{n} \cdot \vec{H} dS \quad \quad \quad -\frac{\mu \vec{H}^2}{8\pi} \vec{n} dS$$

Για να ερμηνευθεί η πρώτη επιφανειακή δύναμη, έστω ότι, είναι θ



η γωνία μεταξύ \vec{n} και \vec{H} , έτσι ώστε $\vec{n} \cdot \vec{H} = H \cos \theta$. Επίσης, έστω ότι είναι $\delta S' = \delta S \cos \theta$, η προβολή του δS στο \vec{n} . Τότε, αν $\vec{H} = H \hat{H}$

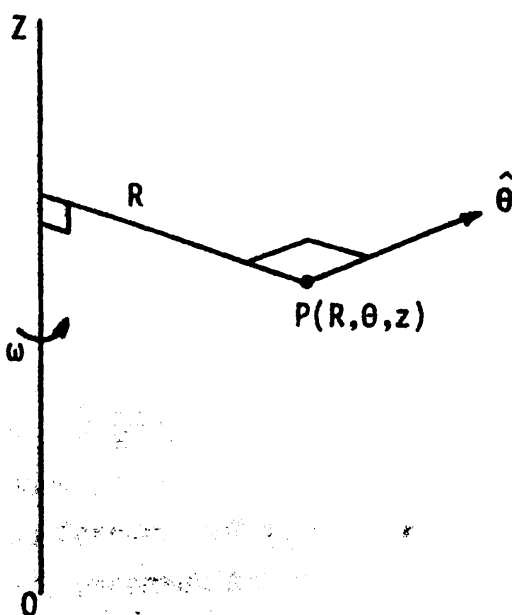
$$\frac{\mu \vec{H}}{4\pi} \vec{n} \cdot \vec{H} \delta S = \frac{\mu H^2}{4\pi} \delta S' \hat{H}$$

η οποία δείχνει ότι η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας είναι $(\mu H^2/4\pi)$ στη διεύθυνση του \vec{H} . Αυτή παριστάνει μια δύναμη τάσης ανά μονάδα επιφάνειας ποσότητας $(\mu H^2/4\pi)$ κατά τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.

Η επιφανειακή δύναμη $(-\mu \vec{H}^2/8\pi) \vec{n} \delta S$ δίδει μια δύναμη $(\mu \vec{H}^2/8\pi)$ ανά μονάδα επιφάνειας στη διεύθυνση $-\vec{n}$. Αυτή είναι μια υδροστατική πίεση $(\mu \vec{H}^2/8\pi)$.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε, ότι για ένα αγώγιμο ρεύστο μέσα σ'ένα μαγνητικό πεδίο, η μαγνητική δύναμη ανά μονάδα όγκου, δηλαδή $(\mu/4\pi)(\nabla \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H}$, είναι ισοδύναμη με μια τάση $(\mu/8\pi)\vec{H}^2$ εγκάρσια σ'αυτές. Το δεύτερο αποτέλεσμα είναι το ίδιο με μια τάση Maxwell, σ'ένα διηλεκτρικό.

10. 10. Νόμος της Ισοπεριστροφής του Ferraro



Σχ. 10.4



Στο σχήμα 10.4, Oz είναι ο άξονας συμμετρίας ενός αστέρα υψηλής ηλεκτρικής αγωγιμότητας, περιστρεφόμενου γύρω απ'τον άξονα αυτόν με γωνιακή ταχύτητα ω . Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Alfven, οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι παγωμένες (ακίνητες) μέσα στην ύλη. Το P έχει κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες (R, θ, z) . Όλες οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες του θ και όταν η κατάσταση είναι στατική είναι ανεξάρτητες και του t . Θα πρέπει να υποθέσουμε στατική περιστροφή, έτσι ώστε $\partial/\partial\theta \equiv 0$, $\partial/\partial t \equiv 0$.

Παίρνουμε τις κυλινδρικές πολικές συνιστώσες του \vec{H} να είναι της μορφής

$$\vec{H} = \{H_R(R, z), 0, H_z(R, z)\}$$

Αφού $\nabla \cdot \vec{H} = 0$,

$$\frac{1}{R} \left\{ -\frac{\partial}{\partial R} (RH_R) + \frac{\partial}{\partial z} (RH_z) \right\} = 0$$

Το αποτέλεσμα αυτό υπονοεί ότι υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση $\Psi(R, z)$ τέτοια ώστε,

$$H_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (1)$$

Καλούμε την Ψ μαγνητική ρευματοσυνάρτηση, λόγω της μεγάλης ομοιότητας με την ρευματοσυνάρτηση Ψ της υδροδυναμικής.

Υποθέτουμε την ταχύτητα του ρευστού στο $P(R, \theta, z)$

$$\vec{v} = R \omega \hat{\theta}$$

όπου $\omega = \omega(R, z)$. Αφού \vec{H} είναι ανεξάρτητη του χρόνου, η εξίσωση $\partial \vec{H} / \partial t = \nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{H})$ δίδει

$$\nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{H}) = \vec{0}$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} \vec{v} \wedge \vec{H} &= R \omega \hat{\theta} \wedge \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \hat{k} \right) \\ &= \omega \frac{\partial \Psi}{\partial R} \hat{R} + \omega \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{k} \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\text{το } \nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{H}) = \frac{1}{1 \cdot R \cdot 1} \begin{vmatrix} \hat{R} & R\hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega \frac{\partial \Psi}{\partial R} & 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{vmatrix}$$



$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\omega \partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\omega \partial \Psi}{\partial R} \right) = 0$$

δηλαδή, $\frac{\partial \omega}{\partial R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0$

ή $\frac{\partial \omega}{\partial R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0$

$$\frac{\partial \omega}{\partial R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0$$

δηλαδή, $\frac{\partial(\omega, \Psi)}{\partial(R, z)} = 0$

$$\frac{\partial(\omega, \Psi)}{\partial(R, z)} = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) δείχνει ότι $\omega = f(\Psi)$

$$\omega = f(\Psi) \quad (4)$$

ή ότι η ω είναι σταθερή στην επιφάνεια $\Psi = \text{σταθερή}$.

Εξάλλου, οι εξισώσεις των δυναμικών γραμμών είναι

$$\frac{dR}{H_R} = R \frac{d\theta}{H_\theta} = \frac{dz}{H_z}$$

δηλαδή,

$$\frac{dR}{-(1/R)(\partial \Psi / \partial z)} = \frac{R d\theta}{0} = \frac{dz}{(1/R)(\partial \Psi / \partial R)}$$

ή $d\theta = 0$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial R} dR + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz = 0$$

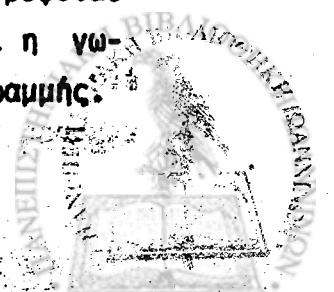
Αυτές ολοκληρώνονται για να δώσουν

$$\theta = \text{σταθερή}$$

$$\Psi = \text{σταθερή}$$

ως μαγνητικές δυναμικές γραμμές. Άρα, η επιφάνεια $\Psi = \text{σταθ.}$ είναι η επιφάνεια που παράγεται περιστρέφοντας μια μαγνητική δυναμική γραμμή, μια φορά πλήρως γύρω απ'τον άξονα συμμετρίας. Μια τέτοια επιφάνεια καλείται "μαγνητική επιφάνεια". Η εξίσωση (4) δείχνει ότι $\omega = \text{σταθερά}$, πάνω σε μια τέτοια επιφάνεια.

Ο Νόμος του Ferraro για την ισοπεριστροφή, όπως εκφράζεται, απ'την εξίσωση (4), υποδηλοί ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή σε μια μαγνητική ρευστοεπιφάνεια, όταν το άστρο περιστρέφεται στατικά γύρω απ'τον άξονα συμμετρίας του. Συνεπάγεται ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής.



Μπορεί κανείς να δει αυτό το αποτέλεσμα πλό απλοϊκά ως εξής. Αν η γωνιακή ταχύτητα δεν ήταν σταθερή κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής, διαφορετικά τμήματα της δυναμικής γραμμής θα χρειαζόταν διαφορετικούς χρόνους για να διαγράψουν μια πλήρη περιστροφή. Θα μπορούσαν να δημιουργηθούν διατμητικά αποτελέσματα σε σημεία κατά μήκος των γραμμών και αφού οι δυναμικές γραμμές κινούνται με το ρευστό, αυτό θα μπορούσε να δημιουργήσει μια εξαρτημένη απ'το χρόνο συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου κατά την αζιμουθιακή διεύθυνση, με συνέπεια την παραβίαση της υπόθεσης των συνθηκών στατικής κατάστασης. Στην πραγματικότητα ο Ferraro ανακάλυψε αυτόν το νόμο στα 1937, προτού ο Alfven δημοσιεύσει τη θεωρία του περί του παγώματος - στα πεδία.

10. 11. Μαγνητουδροστατική

Όταν το ρευστό είναι σε ηρεμία (ακινησία) και η πυκνότητα όγκου του φορτίου είναι μηδέν, η εξίσωση (3) της ενότητας 10.4 γίνεται,

$$\nabla p - \rho \vec{g} = \mu \vec{j} \wedge \vec{H} \quad (1)$$

όπου $\vec{j} \equiv (1/4) \nabla \wedge \vec{H}$ και η εξίσωση (1) της 10.7 γίνεται,

$$\partial \vec{H} / \partial t = n \nabla^2 \vec{H} \quad (2)$$

η οποία είναι η εξίσωση διάχυσης η οποία φαίνεται ότι ισχύει για μικρούς μαγνητικούς αριθμούς Reynolds.

Για ένα υγρό, η ρ είναι σταθερά και αφού το πεδίο του \vec{g} είναι συντηρητικό, μπορούμε να βρούμε μια βαθμωτή συνάρτηση δυναμικού Ω τέτοια ώστε $\vec{g} = -\nabla \Omega$. Τότε η (1) δίδει

$$\nabla(p + \rho \Omega) = \mu \vec{j} \wedge \vec{H} \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) δείχνει ότι και τα δύο διανύσματα \vec{j} , \vec{H} βρίσκονται στην οικογένεια των επιφανειών

$$p + \rho \Omega = \text{σταθερά} \quad (4)$$

ένα αποτέλεσμα που συνδέεται στενά με την περίπτωση της στατικής κίνησης του ρευστού κάτω από συντηρητικές δυνάμεις, που μελετήθη-



κε στην ενότητα 5.5, όπου δείξαμε ότι οι ρευματογραμμές και οι στροβιλογραμμές βρίσκονται μέσα σε καθορισμένες επιφάνειες.

Η μαγνητική δύναμη ανά μονάδα όγκου του αγωγίμου ρευστού είναι $(\mu/4\pi)(\nabla \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H}$. Αν αυτή είναι μηδέν, το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο λέγεται ότι είναι ελεύθερο δύναμης και γράφεται ως

$$(\nabla \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H} = \vec{0} \quad (5)$$

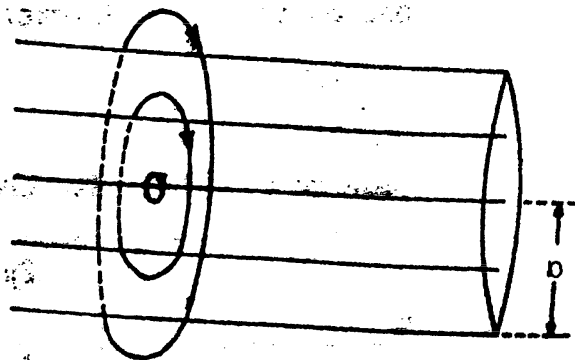
Η εξίσωση (5) έχει τις ειδικές λύσεις

$$\vec{H} = \vec{0}, \quad \nabla \wedge \vec{H} = \vec{0}, \quad \nabla \wedge \vec{H} = \vec{H} = \alpha \vec{H}$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μερικά απλά προβλήματα της μαγνητοδυναμικής.

10.11.1. Περιορισμός του Πλάσματος με Συμπύκνωση

Ο περιορισμός ενός πλάσματος είναι μεγάλης σπουδαιότητας στην πυρηνική τεχνολογία. Εμείς εδώ θα περιγράψουμε μια διαδικασία βασισμένη στο "αποτέλεσμα συστολής".



Σχ. 10.5

Το πλάσμα είναι κατά τη μορφή ενός μακρού κυλίνδρου και μεταφέρει ρεύμα κατά τη διεύθυνση του γεωγραφικού μήκους (σχ.10.5) Υποτίθεται ότι είναι ομοιόμορφο, έτσι που το διάνυσμα της πυκνότητας ρεύματος \vec{j} να είναι το ίδιο σ'όλα τα εσωτερικά σημεία. Μια τέτοια συνθήκη είναι αντιληπτή όταν η αγωγιμότητα είναι πεπερα- σμένη, έτσι που το ρεύμα να μπορεί γρήγορα να διαχυθεί διαμέσου



του υλικού. Τότε το μαγνητικό πεδίο \vec{H} τόσο μέσα όσο και έξω απ' το πλάσμα αποτελείται από κυκλικούς βρόχους, των οποίων τα κέντρα είναι πάνω στον άξονα του κυλίνδρου και τα επίπεδά τους κάθετα σ' αυτόν. Είναι πολύ γνωστή η ιδιότητα της ηλεκτροδυναμικής ότι παράλληλα σύρματα που μεταφέρουν ρεύματα που ρέουν στην ίδια διεύθυνση, τείνουν να έλξουν το ένα το άλλο. Κατά τον ίδιο τρόπο, τα διαμήκη νήματα του πλάσματος τείνουν να έλξουν το ένα το άλλο άρα προκαλείται μια τάση προς συστολή. Αυτό είναι το "αποτελεσμα συστολής". Εάν αγνοήσουμε τις δυνάμεις βαρύτητας, η εξίσωση (3) δίδει

$$\nabla p = \mu \vec{j} \wedge \vec{H} \quad (6)$$

Έστω (R, θ, z) ότι είναι οι κυλινδρικές συντεταγμένες οποιοδήποτε σημείου με τον άξονα z να ταυτίζεται με τον άξονα του κυλίνδρου. Τότε προφανώς,

$$p = p(R), \quad \vec{H} = H(R)\hat{\theta}$$

Αν το ολικό ρεύμα ροής είναι I και αν a είναι η ακτίνα της τομής, τότε $\vec{j} = \vec{k}I/(\pi a^2)$. Το ρεύμα που ρέει σε μια τομή με ακτίνα $R \leq a$ είναι $\pi R^2 j = (R/a)^2 I$. Έστω C ότι είναι ένας κύκλος ακτίνας R , του οποίου το κέντρο βρίσκεται στον άξονα z . Τότε, απ' την ΗΜ θεωρία

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = 4\pi(R/a)^2 I$$

αφού το C συνδέει ένα ρεύμα $(R/a)^2 I$. Συνεπώς,

$$2\pi R H(R) = 4\pi(R/a)^2 I$$

ή

$$\vec{H} = H(R)\hat{\theta} = (2R/a^2) I \hat{\theta}$$

Η εξίσωση (6) τότε δίδει,

$$\frac{dp}{dR} \hat{R} = -\mu \frac{2RI^2}{\pi a^4} \hat{R}$$

ή

$$\frac{dp}{dR} = -\frac{2RI^2\mu}{\pi a^4}$$

Επομένως,

$$p - p_0 = (I^2\mu/\pi a^4)(a^2 - R^2) \quad (7)$$



όπου p_0 είναι η πίεση ακριβώς έξω απ'τη στήλη του πλάσματος.

Όταν η στήλη του πλάσματος είναι καμπυλωμένη, οι δυναμικές γραμμές συγκλίνουν στην κοίλη πλευρά και αποκλίνουν στην κυρτή πλευρά. Αυτό σημαίνει ότι η μαγνητική πίεση είναι αυξημένη στην κοίλη μεριά και μειωμένη στην κυρτή. Άρα, η τάση παράγει μεγαλύτερη παραμόρφωση. Αυτό δείχνει ότι η διαμόρφωση είναι ασταθής.

10.11.2. Ισοζύγιο Ηλιακών Κηλίδων

Οι ηλιακές κηλίδες είναι σκοτεινές σκιές που περιβάλλονται από λιγότερο σκοτεινές σκιές, στη φωτόσφαιρα, δηλαδή τα ορατά στρώματα του ήλιου. Εκτείνονται μέσα στη φωτοσφαιρική ύλη με τη μορφή μακρών κυλινδρικών στηλών. Οι ηλιακές κηλίδες συμβαίνουν περιοδικά, μπορεί να διαρκέσουν για ένα μήνα περίπου, έχουν θερμοκρασίες γύρω στους 4500°K όταν είναι σε πλήρη ωριμότητα και μπορεί να έχουν μαγνητικά πεδία έντασης 2000 gauss τα οποία σχετίζονται μ'αυτές. Η θερμοκρασία της φωτόσφαιρας είναι γύρω στους 5500°K , έτσι που η θερμοκρασία σε μια κηλίδα να είναι κατά πολύ μικρότερη από εκείνη της φωτόσφαιρας.

Όταν μια ηλιακή κηλίδα είναι σε ισορροπία, αν υποθέσουμε ότι οι πυκνότητες πλάσματος εντός και εκτός της κηλίδας είναι ίσες και επίσης, ισχύει η καταστατική εξίσωση (p = πίεση, ρ = θερμοκρασία, T = θερμοκρασία, R = σταθ.), τότε η ελαττωμένη θερμοκρασία εντός της κηλίδας συνεπάγεται μια ελαττωμένη πίεση. Θα περίμενε κανείς όμως, ότι το θερμότερο περιβάλλον πλάσμα να ρεύσει μέσα στην κηλίδα από την έξω περιοχή και έτσι να την καλύψει. Αυτό πιθανώς συμβαίνει όταν η κηλίδα εξασθενίζει, αλλά όταν είναι σε ισορροπία θεωρείται ότι η ισχυρή ένταση του μαγνητικού πεδίου μέσα στην ύλη της ηλιακής κηλίδας παράγει μια αρκετά υψηλή πίεση, για να αποτρέψει αυτό το ενδεχόμενο. Έτσι, αν p_i είναι η πίεση μέσα στη στήλη της ηλιακής κηλίδας και p_0 στο εξωτερικό υλικό, τότε όταν η κηλίδα είναι σε ισορροπία, ισχύει:

$$p_i + (\mu \vec{H}^2 / 8\pi) = p_0$$

εάν υποθέσουμε μια ομοιόμορφη ένταση του μαγνητικού πεδίου \vec{H} , μέσα στη στήλη. Εδώ χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα ότι η \vec{H} δίδει το



έναυσμα για ένα σύστημα τάσης Maxwell ισοδύναμου προς μια υδροστατική πίεση ($\mu\vec{H}^2/8\pi$) και μία τάση ανά μονάδα επιφάνειας ($\mu\vec{H}^2/4\pi$) κατά μήκος των δυναμικών γραμμών.

10. 12. Μαγνητοϋδροδυναμικά Κύματα

Στο κεφάλαιο 9, είδαμε ότι ένα μη αγώγιμο συμπιεστό ρευστό θα μπορούσε να μεταδώσει διαμήκη ηχητικά κύματα. Δεν είναι δυνατή η περίπτωση μιας εγκάρσιας διάδοσης, για ένα τέτοιο ρευστό. Επιπλέον, ένα ασυμπιεστο ρευστό που είναι μη-αγώγιμο δεν μπορεί καθόλου να υποστηρίξει κανενός είδους κίνηση κύματος. Όταν το ρευστό είναι αγώγιμο, εντούτοις, είναι δυνατή εγκάρσια κίνηση κύματος διαμέσου αυτού, οποτεδήποτε είναι παρόν ένα μαγνητικό πεδίο. Πρώτα διευκρινίζουμε αυτό το διακριτικό χαρακτηριστικό της ΜΥΔ με ένα απλό μοντέλο.

Υποθέτουμε ότι το ρευστό είναι άπειρης αγωγιμότητας, ούτως ώστε σε συμφωνία με το θεώρημα του Alfven, οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι κολλημένες στα στοιχεία του ρευστού. Υποθέτουμε \vec{H}_0 ότι είναι η αδιατάρακτη ένταση του πεδίου σ'ένα σωλήνα μαγνητικής δύναμης με διατομή δA . Τότε η μάζα ανά μονάδα μήκους ενός τέτοιου σωλήνα είναι m , όπου $m = \rho \delta A$. Οι μαγνητικές δυνάμεις που δρουν στο σωλήνα είναι ισοδύναμες με μια υδροστατική πίεση $\mu\vec{H}_0^2/8\pi$ και μια τέτοια τάση ανά μονάδα επιφάνειας $\mu\vec{H}_0^2/4\pi$ κατά μήκος των δυναμικών γραμμών. Η πρώτη εξισορροπείται από μία ελάττωση της πίεσης του ρευστού, που κρατά τους σωλήνες σε τάση. Άρα, η τάση T κατά μήκος της δυναμικής γραμμής είναι: $T = \mu\vec{H}_0^2 \delta A/4\pi$. Αν το ρευστό είναι ασυμπιεστο, οι δυναμικές γραμμές είναι όπως οι τεντωμένες χορδές σε τάση T και μάζα m ανά μονάδα μήκους. Αυτό υποδεικνύει ότι όταν είναι διαταραγμένες, δίδοντας στα στοιχεία του ρευστού μια μικρή συνιστώσα ταχύτητας, κάθετη σ'αυτές, οι δυναμικές γραμμές θα εκτελέσουν εγκάρσιες δονήσεις με τα κύματα ώστε να έχουν ταχύτητα διάδοσης

$$\left(\frac{T}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{\mu H_0^2}{4\pi\rho}\right)^{1/2} = v_A$$

Τέτοια κύματα είναι γνωστά ως κύματα Alfven, αφού ο Alfven πρώ-



τος υπογράμμισε την αναλογία τους με τη χορδή, το 1942. Η V_A ονομάζεται ταχύτητα Alfven.

Τώρα υποθέτουμε ότι το τέλει αγώγιμο ρευστό είναι ασυμπύεστο. Τότε η διαμήκης διάδοση είναι, επίσης, δυνατή. Η φύση της κίνησης των κυμάτων που παράγεται εξαρτάται από τη διεύθυνση του \vec{H} ως προς την ταχύτητα \vec{V} των στοιχείων του ρευστού.

Αν η ταχύτητα των σωματιδίων και η διεύθυνση της διάδοσης των κυμάτων είναι αμφοτέρως παράλληλες προς το \vec{H}_0 , τότε δεν εμφανίζονται καθόλου μαγνητικές επιδράσεις, αφού το ρευστό κινείται κατά μήκος των δυναμικών γραμμών. Άρα, μεταβιβάζονται μικρές διαδόσεις ως κοινά επίπεδα ηχητικά κύματα με την ταχύτητα διάδοσης να είναι α, δηλαδή την ταχύτητα του ήχου στο ρευστό.

Αν η ταχύτητα των σωματιδίων είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση της διάδοσης και κάθετα είναι κάθετη προς την \vec{H}_0 , την αδιατάρακτη ένταση του μαγνητικού πεδίου, μπορούμε να δείξουμε ότι ένας νέος τύπος κύματος έχει διεγερθεί. Για ένα τέλει αγώγιμο ρευστό, αν \vec{H} είναι η ένταση του πεδίου το χρόνο t και \vec{v} η ταχύτητα του σωματιδίου, τότε

$$\partial \vec{H} / \partial t = \nabla (\vec{v} \wedge \vec{H})$$

Παίρνοντας $\vec{v} = u(x)\vec{i}$, $\vec{H} = H(x)\vec{j}$, λαμβάνουμε $\vec{v} \wedge \vec{H} = uH\vec{k}$

$$\nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{H}) = \vec{i} \wedge \left(\frac{d}{dx} \right) (uH\vec{k}) = - \left(\frac{d}{dx} \right) (uH)\vec{j}$$

Συνεπώς, για σταθερή κίνηση, $\partial \vec{H} / \partial t = \vec{0}$ και έτσι,

$$(d/dx)(uH) = 0$$

ή $uH = \text{σταθ.}$

Αλλά η μονοδιάστατη εξίσωση συνεχείας $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ δίδει

$$\rho u = \text{σταθ.}$$

Απ' τις τελευταίες δύο εξισώσεις

$$\frac{H}{\rho} = \text{σταθ.} = \frac{H_0}{\rho_0}, \text{ όπου}$$

ο δείκτης ο αναφέρεται σε αδιατάρακτες συνθήκες. Αφού η μαγνητική πίεση είναι $\mu \vec{H}^2 / 8\pi$, η ενεργός πίεση είναι \vec{p} , όπου



$$\vec{p} = p + (\mu H^2 / 8\pi)$$

έτσι ώστε,

$$\frac{d\bar{p}}{d\rho} = \frac{dp}{d\rho} + \frac{\mu H}{4\pi} \frac{dH}{d\rho}$$

και

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

Επομένως,

$$\frac{d\bar{p}}{d\rho} = a^2 + \frac{\mu H^2}{4\pi\rho} = a^2 + V_A^2$$

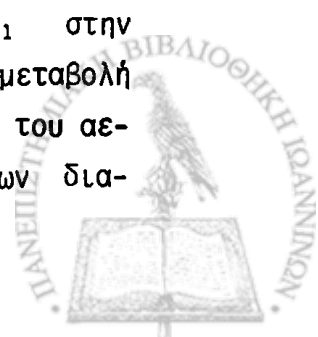
όπου V_A είναι η ταχύτητα Αλφνέη. Συνεπώς, η ταχύτητα της διάδοσης είναι $\sqrt{(a^2 + V_A^2)}$. Ένα τέτοιο κύμα ονομάζεται μαγνητουδροδυναμικό κύμα. Τα κύματα Αλφνέη είναι εγκάρσια και διαδίδονται σε αγώγιμα ασυμπέστα ρευστά, αλλά τα ΜΥΔ κύματα είναι διαμήκη και η διάδοσή τους χρειάζεται ένα αγώγιμο ασυμπέστο ρευστό.

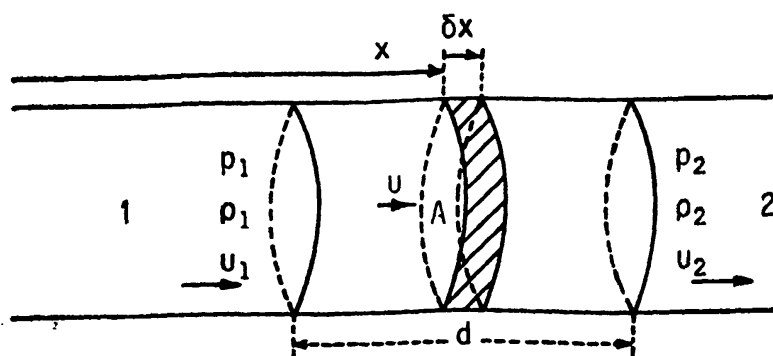
10. 13. Μαγνητουδροδυναμικά Κρουστικά Κύματα

Στο κεφάλαιο 9, μελετήθηκαν κρουστικά κύματα σε αέρια, αγνοώντας τις επιδράσεις του ιξώδους και της θερμικής αγωγιμότητας. Εδώ, πρώτα εξετάζουμε αυτές τις επιδράσεις σε μονοδιάστατο κρουστικό σχηματισμό κατά την περίπτωση ενός μη αγώγιμου αερίου και μετά εισάγουμε κατάλληλες τροποποιήσεις που να ανταποκρίνονται σ'ένα αγώγιμο αέριο σ'ένα εγκάρσιο μαγνητικό πεδίο. Υποθέτουμε η ζώνη κρούσης ότι είναι μια λεπτή περιοχή και όχι απλά ένα επίπεδο ασυνέχειας όπως πριν.

10.13.1. Κρουστικό Κύμα σε μη-Ανώνιμο Αέριο με Ορισμένο Ιξώδες και Θερμική Αγωγιμότητα

Το σχήμα 10.6 δείχνει το σχηματισμό μιας στατικής κρουστικής ζώνης πάχους d σ'ένα σωλήνα ομοιόμορφης διατομής A . Η ροή είναι μονοδιάστατη και η ζώνη κρούσης είναι μια ζώνη μετάβασης στην οποία η πίεση p , η πυκνότητα ρ , η ταχύτητα των σωματιδίων u και η θερμοκρασία T μεταβάλλονται συνέχεια από p_1, ρ_1, u_1, T_1 στην περιοχή 1, σε p_2, ρ_2, u_2, T_2 στην περιοχή 2. Η συνεχής μεταβολή οφείλεται στο ορισμένο ιξώδες και τη θερμική αγωγιμότητα του αερίου και το πάχος d είναι της τάξης ολίγων μέσων ελευθέρων δια-





Σχ. 10.6

δρομών των μορίων του αερίου. Μέσα στη ζώνη κρούσης, θεωρούμε την κίνηση ενός στοιχείου σταθερής μάζας $\rho A \delta x$, το οποίο κινείται μαζί με την ταχύτητα u του ρευστού. Η ροή είναι στατική και μονοδιάστατη.

Η εξίσωση της διατήρησης της μάζας είναι $(d/dx)(\rho u) = 0$, από την οποία έχουμε,

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = m \text{ ως πούμε} \quad (1)$$

Η γενική εξίσωση της κίνησης ενός ιξώδους ρευστού των Navier-Stokes που κινείται με ταχύτητα \vec{v} , όπως είναι γνωστό είναι,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \nabla \int \frac{dp}{\rho} + \frac{\nu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

Λαμβάνοντας $\vec{v} = u\vec{i}$, την εξωτερική δύναμη ανά μονάδα μάζας $\vec{F} = \vec{0}$ και στατικές συνθήκες, έχουμε:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{du}{dx}, \quad \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \frac{d^2u}{dx^2} \vec{i}, \quad \nabla^2 \vec{v} = \frac{d^2u}{dx^2} \vec{i}$$

και έτσι

$$u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{4}{3} \nu \frac{d^2u}{dx^2}$$

από την οποία προκύπτει

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \frac{4}{3} \rho \nu \frac{d^2u}{dx^2}$$

Ενθυμούμενοι ότι τα ρ_u , ρ_ν είναι σταθερά, η εξίσωση αυτή ολοκληρώνεται για να δώσει



$$\left[(\rho u)u + p - \frac{4}{3} (\rho \nu) (du/dx) \right]_1^2 = 0$$

ή αφού $du/dx = 0$, έξω απ'τη ζώνη μετάδοσης

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \quad (2)$$

Ας καταστρώσουμε τώρα την εξίσωση ισοζυγίου της ενέργειας για την κίνηση του στοιχείου του ρευστού σταθερής μάζας $\rho A \delta x$ στο σχήμα 10.6. Έστω λ ότι είναι η θερμική αγωγιμότητα και T η θερμοκρασία στο "επίπεδο x ". Τότε,

Ο ρυθμός της ροής θερμότητας διαμέσου του "επιπέδου x " ανά μονάδα χρόνου στη διεύθυνση

$$x = - \lambda A dT/dx$$

Ο ρυθμός της ροής θερμότητας διαμέσου του "επιπέδου $(x+\delta x)$ " στη διεύθυνση

$$x = - \lambda A \frac{dT}{dx} - \delta x \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda A dT}{dx} \right)$$

Ο καθαρός ρυθμός της θερμότητας δι'αγωγής ανά μονάδα χρόνου μέσα στο στοιχείο $= \lambda A \delta x (d^2 T/dx^2)$.

Η παραγωγή της εξίσωσης κίνησης δείχνει ότι η ενεργός πίεση του ρευστού στο "επίπεδο x " κατά τη διεύθυνση x είναι

$$p - \frac{4}{3} \rho \nu (du/dx)$$

Η δύναμη στο "επίπεδο x " που οφείλεται στο στοιχείο του ρευστού

$$= -(p - \frac{4}{3} \rho \nu du/dx) A$$

Ο ρυθμός του έργου αυτής της δύναμης

$$= -(p u - \frac{4}{3} \rho \nu u du/dx) A$$

Ο ρυθμός του έργου της ενεργού δύναμης στο "επίπεδο $(x+\delta x)$ "

$$= (p u - \frac{4}{3} \rho \nu u \frac{du}{dx}) A + \delta x \frac{d}{dx} (p u - \frac{4}{3} \rho \nu u \frac{du}{dx}) A$$

Ο ολικός ρυθμός του έργου της πίεσης του ρευστού στο στοιχείο

$$= A \delta x \frac{d}{dx} (p u - \frac{4}{3} \rho \nu u \frac{du}{dx})$$



Η εσωτερική ενέργεια του αερίου στο στοιχείο

$$\begin{aligned} &= (\rho A \delta x) c_v T \\ &= \frac{RT}{\gamma-1} (\rho A \delta x) = \frac{P}{(\gamma-1)\rho} (\rho \delta x) \end{aligned}$$

Ο ρυθμός κέρδους της εσωτερικής ενέργειας

$$= \frac{\rho \delta x}{\gamma-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{\rho \delta x u}{\gamma-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{P}{\rho} \right)$$

Η κινητική ενέργεια του στοιχείου

$$= \frac{1}{2} (\rho A \delta x) u^2$$

Ο ρυθμός κέρδους της κινητικής ενέργειας του στοιχείου

$$= (\rho A \delta x) u \frac{du}{dt} = (\rho A \delta x) u^2 \frac{du}{dx}$$

Ο ρυθμός της προμήθειας θερμότητας στο στοιχείο με αγωγιμότητα = ρυθμό της εκτέλεσης εξωτερικού έργου + το ρυθμό κέρδους της κινητικής ενέργειας.

$$\lambda A \delta x \frac{d^2 T}{dx^2} = A \delta x \frac{d}{dx} \left(\rho u - \frac{4}{3} \rho \nu u \frac{du}{dx} \right) + \frac{\rho \delta x}{\gamma-1} u \frac{d}{dx} \left(\frac{P}{\rho} \right) + (\rho A \delta x) u \left(u \frac{du}{dx} \right)$$

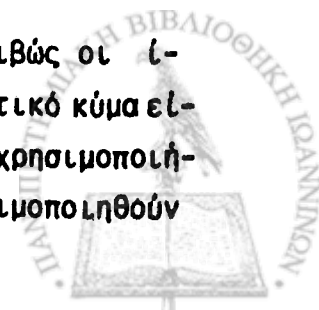
Αφού $\rho u = \text{σταθ.}$, διαιρώντας με $\rho u A \delta x$ δίνει

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} - \frac{4}{3} \nu \frac{du}{dx} - \frac{\lambda}{\rho u} \frac{dT}{dx} + \frac{1}{2} u^2 \right) = 0$$

Ολοκληρώνοντας διαμέσου της ζώνης μετάβασης και χρησιμοποιώντας $du/dx = 0$, $dT/dx = 0$ στις περιοχές 1,2

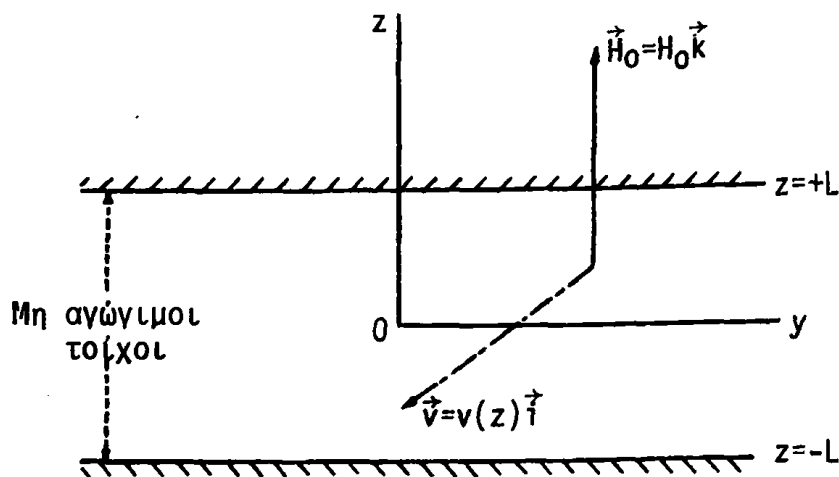
$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2 \quad (3)$$

Να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις (1), (2), (3) είναι ακριβώς οι ίδιες μ' εκείνες που ελήφθησαν υποθέτοντας ότι το κρουστικό κύμα είναι ένα επίπεδο ασυνεχείας. Εντούτοις, οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εξαγωγή τους, μπορούν επίσης, να χρησιμοποιηθούν



για να θεμελιωθούν συνθήκες μέσα στην καθορισμένη ζώνη κρούσης και να ληφθεί μία εκτίμηση του πάχους της.

10.14 Στρωματική Ροή Ενός Ιξώδους Αγώγιμου Υγρού
Μεταξύ Παραλλήλων Τοίχων σ' Ένα Εγκάρσιο
Μαγνητικό Πεδίο



Σχ. 10.7

Έχει δειχθεί (ενότητα 8.10.1) ότι η μεταβολή της ταχύτητας με το ύψος, ενός ιξώδους ρευστού, που ρέει μεταξύ δύο παραλλήλων πλακών είναι παραβολή. Εδώ θα διεξέλθουμε την περίπτωση ενός υψηλής αγωγιμότητας ιξώδους υγρού, όπως είναι ο υδράργυρος, που ρέει μεταξύ δύο παραλλήλων μη αγώγιμων επιπέδων, σ' ένα ομοιόμορφο εγκάρσιο πεδίο, το οποίο είναι κάθετο στα επίπεδα. Καθώς τα στοιχεία του ρευστού τείνουν να δεθούν μεταξύ τους με το μαγνητικό πεδίο, είναι προφανές ότι το πεδίο θα εμποδίσει με κάποιο τρόπο την κίνηση του υγρού. Η κίνηση θα δημιουργήσει τάση στις δυναμικές γραμμές, αλλά λόγω της πεπερασμένης αγωγιμότητας, αυτές μπορούν να επανέλθουν στις αρχικές τους θέσεις.

Λαμβάνουμε τα επίπεδα να είναι $z = \pm L$ και το μαγνητικό πεδίο διαμέσου αυτών $\vec{H}_0 = H_0 \vec{k}$ (σχ. 10.7). Η κίνηση του ρευστού διαμέσου του πεδίου θα προκαλέσει ηλεκτρικό ρεύμα κάθετο στην ταχύτητα $\vec{v} = v(z) \vec{i}$ του ρευστού και στο ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $\vec{H}_0 = H_0 \vec{k}$ και η δύναμη Lorentz στο κινούμενο ρεύμα θα αντιδράσει στην κίνηση μαζί με τις δυνάμεις τριβής. Η ταχύτητα ικανοποιεί



την εξίσωση συνεχείας $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

Η κίνηση του υγρού θα δημιουργήσει μία ένταση του διαταραγμένου πεδίου $\vec{h} = h(z)\vec{z}$, όπως είναι η τάση για το υγρό να ανθίσταται στις δυναμικές γραμμές κατά μήκος της διεύθυνσης της κίνησής του. Άρα, το ολικό πεδίο είναι,

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$$

Αυτή ικανοποιεί την $\nabla \cdot \vec{H} = 0$.

Υποθέτουμε ότι η πίεση στο υγρό είναι της μορφής

$$p = p_0(x) + p_1(z)$$

Ο όρος $p_0(x)$ προκαλεί μια βαθμίδα $-dp_0/dx$, στη διεύθυνση της κίνησης: $p_1(z)$ είναι αυτή που μπορεί να αποδοθεί σε υδροστατικά αίτια.

Για στατική ροή $\partial \vec{H} / \partial t = \vec{0}$ και η μαγνητική εξίσωση επαγωγής γίνεται,

$$\nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{H}) + \eta \nabla^2 \vec{H} = \vec{0} \quad (\eta = 1/4\pi\sigma)$$
 (1)

Η γενική εξίσωση κίνησης,

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \frac{\mu}{4\pi} (\nabla \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H} + \frac{1}{3} \rho \nu \nabla \cdot \vec{v} + \rho \nu \nabla^2 \vec{v}$$

δίδει, για στατικές συνθήκες,

$$\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla(p_0 + p_1) - \rho g \vec{k} + (\mu/4\pi) (\nabla \wedge \vec{h}) \wedge \vec{H} + \rho \nu \nabla^2 \vec{v}$$
 (2)

Αφού

$$\vec{v} \wedge \vec{H} = -u(z) H_0 \vec{z}$$

$$\nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{H}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -H_0 u(z) & 0 \end{vmatrix} = H_0 u'(z) \vec{z}$$

Άρα η (1) δίδει,

$$\frac{d^2 h}{dz^2} + 4\pi\sigma \mu H_0 \frac{du}{dz} = 0$$
 (3)

Η εξίσωση (2) δίδει,



$$\vec{0} = -\frac{dp_0}{dx} \vec{i} - \frac{dp_1}{dz} \vec{k} - \rho g \vec{k} + \frac{\mu}{4\pi} h'(z) \vec{j} \wedge (h \vec{i} + H_0 \vec{k}) + \rho v \frac{d^2 u}{dz^2} \vec{i},$$

από την οποία έχουμε,

$$-\frac{dp_0}{dx} + \frac{\mu H_0}{4\pi} \frac{dh}{dz} + \rho v \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{dp_1}{dz} + \rho g + \frac{\mu}{4\pi} h(z) \frac{dh}{dz} = 0 \quad (5)$$

Από την (4) συνάγεται,

$$\frac{\mu H_0}{4\pi} \frac{dh}{dz} + \rho v \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{dp_0}{dx} = -p, \text{ μία σταθερά} \quad (6)$$

Άρα, για στατική στρωματική ροή, η βαροβαθμίδα κατά τη διεύθυνση της κίνησης είναι σταθερή παντού μέσα στο υγρό. Από την (5)

$$p_1(z) = C_1 - (\mu h^2/8\pi) - \rho g z \quad (7)$$

Ολοκληρώνοντας την (3),

$$(dh/dz) + 4\pi\mu H_0 u = C_2 \quad (8)$$

Από τις εξισώσεις $\nabla \wedge \vec{H} = 4\pi \vec{j}$, $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \mu \nabla \wedge \vec{H})$, $\nabla \wedge \vec{H} = h'(z) \vec{j}$,

$\nabla \wedge \vec{H} = -H_0 u(z) \vec{j}$ και λαμβάνοντας $\vec{j} = [j_1, j_2, j_3]$

$$j_1 = \sigma E_1 = 0 \quad (9)$$

$$j_2 = \sigma(E_2 - \mu H_0 u) = (1/4\pi)(dh/dz) \quad (10)$$

$$j_3 = \sigma E_3 = 0 \quad (11)$$

Συνεπώς,

$$\vec{E} = [0, E_2, 0] \quad (12)$$

όπου

$$E_2 = \mu H_0 u + (1/4\pi\sigma)(dh/dz) = (C_2/4\pi\sigma)$$

από την (8). Άρα, η (8) δίδει

$$(dh/dz) + 4\pi\mu H_0 u = 4\pi\sigma E_2 \quad (13)$$



Η εξίσωση (4) τώρα δίδει,

$$-\frac{d\rho_0}{dx} + \frac{\mu H_0}{4\pi} (4\pi\sigma E_2 - 4\pi\mu\sigma H_0 u) + \rho\nu \frac{d^2u}{dz^2} = 0$$

ή

$$\rho\nu(d^2u/dz^2) - \sigma\mu^2H^2u = -(P + \mu\sigma H_0 E_2) = \text{σταθ.} \quad (14)$$

Καθώς δεν υπάρχει ολίσθηση στα οριακά τοιχώματα, $u=0$ όταν $z = \pm L$. Επίσης, υποθέτοντας τους τοίχους ότι είναι μη αγώγιμοι απαιτούμε $j_3 = 0$ στα $z = \pm L$. Αυτές οι τελευταίες συνθήκες ικανοποιούνται μαζί με την (11). Η απαιτούμενη λύση της (14) είναι τώρα

$$u(z) = \frac{(P + \mu\sigma H_0 E_2) \{chM - ch(Mz/L)\}}{\sigma\mu^2 H_0^2 chM} \quad (15)$$

όπου M είναι μια αδιάστατη ποσότητα που καλείται αριθμός Hartmann και ορίζεται από την ισότητα

$$M = \mu H_0 L \sqrt{(\sigma/\rho\nu)} \quad (16)$$

Αν δεν υπάρχει εξωτερικά διοχετευόμενο ρεύμα, τότε

$$\int_{-L}^L j_2 dz = 0$$

Από την (10),

$$j_2 = \sigma(E_2 - \mu H_0 u)$$

$$= \sigma \left[E_2 - \frac{\mu H_0 (P + \mu\sigma H_0 E_2) \{chM - ch(Mz/L)\}}{\sigma\mu^2 H_0^2 chM} \right]$$

Ολοκληρώνοντας αυτήν από $-L$ μέχρι L και εξισώνοντας με το μηδέν, βρίσκουμε

$$E_2 = (P/\mu\sigma H_0) (M \coth M - 1) \quad (17)$$

από την οποία η (15) δίδει

$$u(z) = (PM/\sigma\mu^2 H_0^2 \text{sh} M) \{chM - ch(Mz/L)\} \quad (18)$$



Η εξίσωση (13) ολοκληρώνεται για να δώσει

$$h(z) = \frac{4\pi PL}{\mu H_0} \left\{ \frac{\text{sh}(Mz/L)}{\text{sh}M} - \frac{z}{L} \right\} \quad (19)$$

επιλέγοντας $h = 0$ στα $z = \pm L$ για να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις της συνεχείας του \vec{H} στα όρια.

Από την (18), η μέση ταχύτητα στη διατομή είναι

$$\bar{u} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) dz = \frac{P(M \text{ch}M - \text{sh}M)}{\sigma \mu^2 H_0^2 \text{sh}M}$$

κι έτσι,

$$u(z) = \frac{\bar{u}M \{ \text{ch}M - \text{ch}(Mz/L) \}}{M \text{ch}M - \text{sh}M} \quad (20)$$

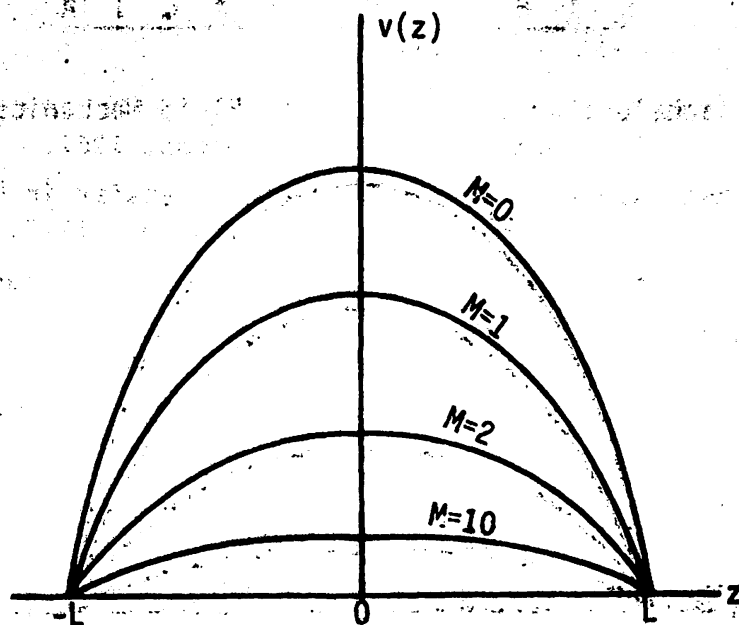
Για ένα ασθενές μαγνητικό πεδίο, $M \sim 0$. Ας βρούμε την $u(z)$ όταν $M = 0$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow 0} \frac{M \{ \text{ch}M - \text{ch}(Mz/L) \}}{M \text{ch}M - \text{sh}M} \\ &= \lim_{M \rightarrow 0} \frac{\text{ch}M - \text{ch}(Mz/L) + M \{ \text{sh}M - (z/L) \text{sh}(Mz/L) \}}{M \text{sh}M} \\ &= \lim_{M \rightarrow 0} \frac{2 \{ \text{sh}M - (z/L) \text{sh}(Mz/L) \} + M \{ \text{ch}M - (z/L)^2 \text{ch}(Mz/L) \}}{\text{sh}M + M \text{ch}M} \\ &= \lim_{M \rightarrow 0} \frac{3 \{ \text{ch}M - (z/L)^2 \text{ch}(Mz/L) \} + M \{ \text{sh}M - (z/L)^3 \text{sh}(Mz/L) \}}{2 \text{ch}M + M \text{sh}M} \\ &= \frac{3}{2} \{ 1 - (z/L)^2 \} \end{aligned}$$

Συνεπώς $u(z) = \frac{3}{2} \bar{u} \{ 1 - (z/L)^2 \}$, όταν $M = 0$. Αυτή η σχέση επαναφέρει την παραβολική μορφή της ταχύτητας (προφίλ), που ελήφθη για ιξώδη στρωματική ροή εν απουσία μαγνητικού πεδίου.

Το σχήμα 10.8 δίδει ένα σκίτσο της μορφής της ταχύτητας για διάφορες τιμές του αριθμού Hartmann.





Σχ. 10.8



B I B Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

1. G.K. Bachelor: "An Introduction to Fluid Mechanics", Cambridge University Press, London, 1967.
2. T. Cebeci and P. Bradshaw: "Momentum Transfer in Boundary Layers", Hemisph. Publ. Corporation, 1977.
3. F. Chorlton: "Textbook of Dynamics", Van Nostrand, London, 1963.
4. F. Chorlton: "Textbook of Fluid Dynamics", Van Nostrand, London, 1967.
5. S. Eskinazi: "Vector Mechanics of fluids and Magnetofluids" Sussex Acad. Press, London, 1967.
6. H.P. Greenspan: "The theory of Rotating Fluids". Cambridge Univ. Press, 1969.
7. Β.Δ. Κατσούλη: "Ατμοσφαιρική Ανατάραξις" Αθήνα, 1972.
8. Β.Δ. Κατσούλη: "Ανάλυσις Fourier και Μικραδική Παράστασις των Ταλαντώσεων και των Κυμάτων", Αθήνα, 1975.
9. Ν.Γ. Καρούσια: "Ρευστομηχανική", Πάτρα, 1983.
10. B.S. Massey: "Mechanics of Fluids", Van Nostrand Rein. Co., London, 1975.
11. L.M. Milne - Thomson: "Theoretical Hydrodynamics", MacMillan Press Ltd, London, 1976.
12. Δ.Γ. Παπανίκα: "Εφαρμοσμένη Ρευστομηχανική", Πάτρα, 1978.
13. H. Schlichting: "Boundary Layer Theory", McGraw-Hill, New York, 1968.
14. I.N. Sneddon: "Elements of Partial Differential Equations", McGraw-Hill, New York, 1963.
15. V.L. Streeter: "Fluid Mechanics", McGraw-Hill, New York, 1967.
16. V.L. Streeter and E.B. Wylie: "Fluid Mechanics", McGraw-Hill, 1975.
17. P.A. Thompson: "Compressible-Fluid Dynamics", McGraw-Hill, New York, 1972.
18. J. Vialar: "Cours de Mecanique des fluides", Tome I, Direction de la Meteor. Nat., Paris, 1964.
19. N.B. White: "Viscous Fluid Flow", McGraw-Hill, New York, 1974.



Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο με δαπάνη
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Κ.Α. Πανεπιστημιακού Τυπογραφείου.

Τυπογράφοι : Σούλα Αναγνώστου και Ένμα Γκούρα

Copyright : Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Απαγορεύεται η μερική ή ολική ανατύπωση, καθώς και η
λήψη φωτοαντιγράφων από το βιβλίο χωρίς τη γραπτή
άδεια του Τμήματος Δημοσιευμάτων του Πανεπιστημίου
Ιωαννίνων και του συγγραφέα.

Διατίθεται και στο Βιβλιοπωλείο του Πανεπιστημίου
Ιωαννίνων, Δομόπηλη, 451 10 Ιωάννινα τηλ. 21801.

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ στους φοιτητές.

