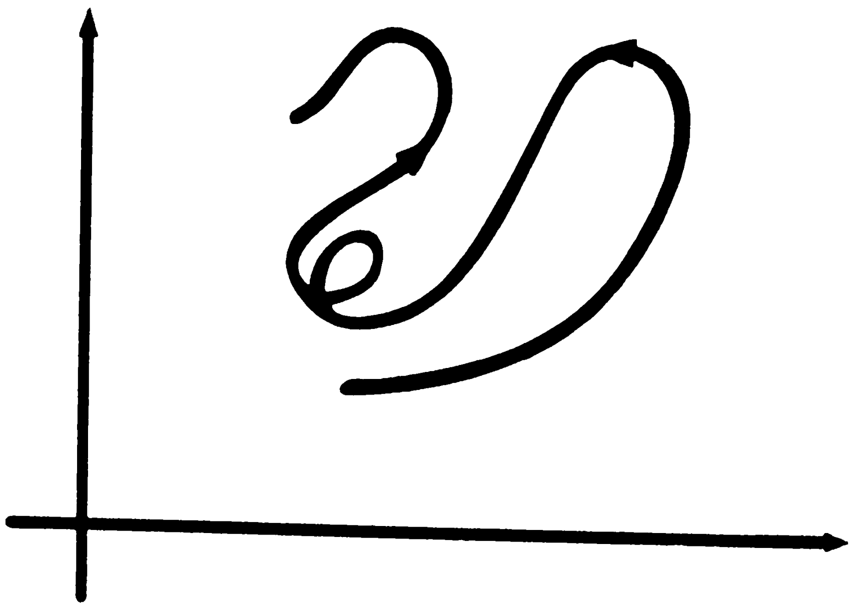
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΑΡΑΚΩΣΤΑΣ

# ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ



ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2000

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Λ. ΚΑΡΑΚΩΣΤΑΣ

# ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2000

# Πρόλογος

Το βιβλίο τούτο προορίζεται για τους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων οι οποίοι δηλώνουν το μάθημα Μιγαδικές Συναρτήσεις 1. Η διαμόρφωση και η παρουσίαση της ύλης του βασίζεται πάνω στην εμπειρία που αποκτήθηκε διδάσκοντας το μάθημα τούτο κατά τη διάρκεια της τελευταίας δωδεκαετίας. Στο βιβλίο αυτό εκτίθενται πρωτότυπες ασκήσεις υπό μορφή παραδειγμάτων, καθώς επίσης και άλυτα θέματα για την καλύτερη εξάσκηση του αναγνώστη.

Επειδή η θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων ασχολείται με τη μελέτη των συναρτήσεων που ορίζονται στο μιγαδικό επίπεδο, η κατανόηση του αντικειμένου φαίνεται δύσκολη σε κάποιον που υστερεί στα αντίστοιχα θέματα τα οποία αναφέρονται στις συναρτήσεις που ορίζονται στην πραγματική ευθεία, δηλαδή στις πραγματικές συναρτήσεις. Ο απειροστικός λογισμός, καθώς επίσης και βασικά θέματα τοπολογίας, μαθηματικής ανάλυσης και γεωμετρίας του επιπέδου είναι κατ' ανάγκην προαπαιτούμενα για το θέμα τούτο, με την έννοια ότι η μη εμπέδωσή τους δημιουργεί την εντύπωση ότι η μιγαδική ανάλυση είναι αυτό ακριβώς που το ονομά της δηλώνει, δηλαδή, σύνθετη, περίπλοκη, εξωπραγματική. Είναι, ίσως, αλήθεια ότι οι αποδείξεις ορισμένων μεγάλων θεωρημάτων απαιτούν μακροσκελείς και δύσκολες τεχνικές. Αλλά από άποψη εννοιολογική η μιγαδική ανάλυση είναι πιο εύκολη από την πραγματική ανάλυση.

Για την πιο αποτελεσματική εμπέδωση της ύλης θεωρήθηκε σκόπιμο η παρουσίαση του βιβλίου τούτου να οργανωθεί κάτω από δύο βασικές αρχές: (α) Η εισαγωγή σε κάθε παράγραφο να γίνεται με μία συνοπτική παρουσίαση της αντίστοιχης θεωρίας (έστω και με χωρίς αποδείξεις), στοιχείο απαραίτητο για την κατανόηση των παραδειγμάτων. (β) Για την καλύτερη κατανόηση νέων εννοιών χρησιμοποιείται η δομή και η γεωμετρία του επιπέδου (περιέχονται 57 επίπεδα σχήματα), ώστε να δημιουργείται μια όσο το δυνατόν πιο σαφής εικόνα, ακόμα και όταν προκειται για αναλυτικές έννοιες.

Ιωάννινα, 2000 Γ.Λ.Κ.

# Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 **Ολοκληρωτικά υπόλοιπα**

# 1 Οι μιγαδικοί αριθμοί

Πρώτος κύριος στόχος μας είναι να γνωρίσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς και όλες τις έννοιες που σχετίζονται μ' αυτούς, ώστε στα επόμενα κεφάλαια να είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε καλύτερα τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων.

## 1.1 Αλγεβρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Η **αλγεβρική μορφή** (algebraic form) ενός **μιγαδικού αριθμού** (complex number) $z$ είναι η

$$z = x + y\,i = x + i\,y\,,$$

όπου $x$ και $y$ είναι πραγματικοί αριθμοί και το $i$ είναι η λεγόμενη **φανταστική μονάδα** (imaginary unit), δηλαδή κάποιο στοιχείο ενός (αλγεβρικού) σώματος $C$ με πράξεις $+$ και $\cdot$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$i \cdot i = -1.$$

Ο αριθμός $x$ είναι το **πραγματικό μέρος** Re (real part) του μιγαδικού αριθμού $z$ και ο $y$ το **φανταστικό μέρος** Im (imaginary part) του $z$, οπότε και γράφουμε

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{και} \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 := x_1 + y_1 i$ και $z_2 := x_2 + y_2 i$ θεωρούνται **ίσοι** αν και μόνο αν ισχύουν οι ισότητες

$$\operatorname{Re} z_1 = x_1 = x_2 = \operatorname{Re} z_2 \quad \text{και} \quad \operatorname{Im} z_1 = y_1 = y_2 = \operatorname{Im} z_2.$$

Το **άθροισμα** $z_1+z_2$ και το **γινόμενο** $z_1 \cdot z_2$ των αριθμών

$$z_1 := x_1 + y_1 i \ \text{ και } \ z_2 := x_2 + y_2 i$$

είναι αντίστοιχα οι μιγαδικοί αριθμοί που ορίζονται με τους τύπους

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

και

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

Συνήθως το γινόμενο των μιγαδικών αριθμών $z_1$ και $z_2$ παριστάνεται απλούστερα και ως $z_1z_2$. Η δύναμη $z^\nu$ ορίζεται όπως ακριβώς και στο σώμα των πραγματικών αριθμών για κάθε φυσικό αριθμό ν.

**Παρατήρηση**

Δεν υπάρχει ολική διάταξη που να χαρακτηρίζει το σύνολο των μιγαδικών αριθμών **C** ως ένα διατεταγμένο σώμα, δηλαδή **δεν υπάρχει ολική διάταξη**

$$[\geq] = [=] \cup [>]$$

που να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

i) Αν $z > w$ και $z' > w'$, τότε $z + z' > w + w'$,

και

ii) αν $z > w$ και $a > 0$, τότε $a z > a w$.

Πραγματικά, αν μια τέτοια διάταξη υπάρχει, τότε θα πρέπει να ισχύει τουλάχιστον μία από τις σχέσεις

$$i = 0, \quad i > 0, \quad 0 > i.$$

Η ισότητα προφανώς δεν ισχύει. Έστω ότι ισχύει η ανισότητα $i > 0$. Τότε, σύμφωνα με την ιδιότητα (ii), θα έχουμε και

$$i \cdot i > 0,$$

δηλαδή $-1 > 0$, οπότε, πάλι, σύμφωνα με τη (ii), θα έχουμε $(-1)\cdot i > 0$, ήτοι

$$-i > 0.$$

Τότε, όμως, από την ιδιότητα (i), προκύπτει ότι

$$(-i) + i > 0 + 0,$$

δηλαδή

$$0 > 0,$$

πράγμα άτοπο. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η ανισότητα $0 > i$ είναι αδύνατη. □

Εξάλλου μπορούν να οριστούν σχέσεις ολικής διάταξης στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, **χωρίς όμως αυτές να έχουν σχέση με τις πράξεις του σώματος**. Πραγματικά, μπορούμε να ορίσουμε αρκετές σχέσεις ολικής διάταξης, όπως, για παράδειγμα, η λεξικογραφική διάταξη Σ που ορίζεται ως εξής:

$$(x+yi)\ \Sigma\ (u+vi): \quad x < u \text{ και, αν } x = u, \text{ τότε } y \le v.$$

Μια άλλη σχέση ολικής διάταξης στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δίνεται στην άσκηση 1.2.2.

### Παράδειγμα 1.1.1

Θα υπολογίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς x και y οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση

$$(3+i)x + (4-5i)y = 11 + 2i.$$

Προς τούτο γράφουμε τον μιγαδικό αριθμό που είναι στο αριστερό μέλος της εξίσωσης στην αλγεβρική του μορφή, οπότε έχουμε

$$(3x + 4y) + i(x - 5y) = 11 + 2i.$$

Έτσι θα πρέπει να επαληθεύεται το σύστημα

$$3x + 4y = 11, \quad x - 5y = 2,$$

το οποίο έχει τη λύση

$$x = \frac{63}{19} \ \text{και} \ y = \frac{5}{19}. \qquad \square$$

**1.1.1** Να προσδιοριστούν τα στοιχεία των παρακάτω συνόλων :

$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ (2x - i)(4 + i) + (2x - yi)(-2 + 3i) = 6 + 5i\},$

$B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ (x - yi)(\alpha + \beta i) = \alpha\beta i\}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ (x - i)(1 + 2i) + (x^2 + 4y)3i = 0\}.$

**1.1.2** Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί a και b που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$a^2 + b^2 = 0 \ \text{και} \ ab \neq 0.$$

**1.1.3** Αν k είναι ένας φυσικός αριθμός, να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

α) $\quad i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + ki^k,$

β) $\quad i + 1 \cdot 2i^2 + 2 \cdot 3i^3 + \ldots + (k - 1) \cdot ki^k,$

γ) $\quad i + 2^2 i^2 + 3^2 i^3 + \ldots + k^2 i^k.$

(Υπόδειξη: Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα

$$(1 - \zeta)(1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \ldots + \zeta^k) = 1 - \zeta^{k+1}$$

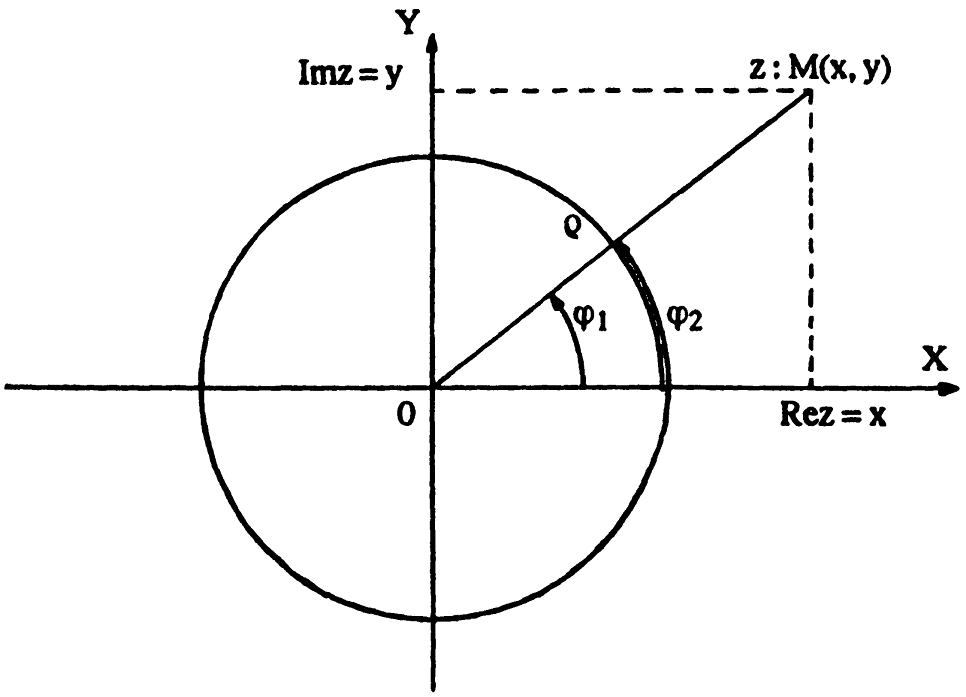
και το γεγονός ότι ο ακέραιος αριθμός k γράφεται στη μορφή 4λ, ή 4λ + 1, ή 4λ + 2, ή 4λ + 3; για κάποιον ακέραιο αριθμό λ.)

## 1.2 Το μιγαδικό επίπεδο ή επίπεδο του Gauss

Κάθε μιγαδικός αριθμός

$$z := x + yi$$

μπορεί να παρασταθεί στο λεγόμενο **μιγαδικό επίπεδο** (complex plane) ή **επίπεδο του Gauss**, για το οποίο χρησιμοποιούμε επίσης το σύμβολο **C**, με το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που έχει συντεταγμένες (x, y) ή με το διάνυσμα ΟΜ το οποίο έχει αρχή το σημείο Ο και πέρας το σημείο M(x, y).




**Απεικόνιση του μιγαδικού αριθμού z : =x + iy επί του μιγαδικού επιπέδου**

Το μήκος ϱ του διανύσματος ΟΜ είναι το **μέτρο** (modulus) ή η **απόλυτη τιμή** (absolute value) του μιγαδικού αριθμού z και παριστάνεται με $|z|$, δηλαδή

$$\varrho = |z| := (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Αν ο αριθμός z δεν είναι ο μιγαδικός αριθμός 0, τότε το σημείο M(x, y) δεν ταυτίζεται με την αρχή O των αξόνων και άρα το διάνυσμα OM είναι μη τετριμμένο. Κάθε γωνία φ μεταξύ του ημιάξονα OX και του διανύσματος OM λέγεται **όρισμα** (argument) του μιγαδικού αριθμού z και δηλώνεται με

$$\arg z.$$

Η διαφορά δύο τέτοιων γωνιών $\varphi_1$ και $\varphi_2$ είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi$. Επομένως, για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό z υπάρχει μια τέτοια γωνία που παριστάνεται με

$$\mathrm{Arg}z$$

και είναι τέτοια ώστε να ισχύει

$$-\pi \leq \mathrm{Arg}z < \pi.$$

Αυτή η γωνία λέγεται **βασικό όρισμα** (essential argument) ή **βασικός κλάδος** (essential branch) του ορίσματος ή **κύρια τιμή** (principal value) του ορίσματος του z και προφανώς ικανοποιεί τη σχέση

$$\arg z = \mathrm{Arg}z + 2k\pi, \text{ όπου } k \text{ ακέραιος.}$$

Αν $z := x + yi$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός διάφορος του 0, τότε μπορούμε να δούμε ότι αυτός δίνεται απ' τον παρακάτω τύπο:

$$\mathrm{Arg}z = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\,(y/x), & \text{αν } x > 0 \\ \pi + \mathrm{Arctan}\,(y/x), & \text{αν } x < 0 \text{ και } y \geq 0, \\ -\pi + \mathrm{Arctan}\,(y/x), & \text{αν } x < 0 \text{ και } y < 0, \\ \pi/2, & \text{αν } x = 0 \text{ και } y > 0, \\ -\pi/2, & \text{αν } x = 0 \text{ και } y < 0 \end{cases}$$

**Παράδειγμα 1.2.1**

Θα βρούμε το μέτρο και τον βασικό κλάδο του ορίσματος του μιγαδικού αριθμού

$$z := -\sin\frac{\pi}{15} - i\cos\frac{\pi}{15}.$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι

$$\arg z = \arctan\frac{-\cos\frac{\pi}{15}}{-\sin\frac{\pi}{15}} = \arctan(\cot\frac{\pi}{15}) = \arctan(\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15})) = k\pi + \frac{13\pi}{30},$$

όπου k είναι ένας οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός. Αλλά είναι γνωστό ότι

$$\operatorname{Re} z = -\sin\frac{\pi}{15} < 0 \text{ και } \operatorname{Im} z = -\cos\frac{\pi}{15} < 0,$$

οπότε θα πρέπει να ισχύει

$$-\pi < \operatorname{Arg} z < -\frac{\pi}{2}.$$

Επομένως ο βασικός κλάδος του ορίσματος του z πρέπει να είναι της μορφής

$$\operatorname{Arg} z = m\pi + \frac{13\pi}{30},$$

όπου m είναι ένας ακέραιος αριθμός που ικανοποιεί την ανισότητα

$$-\pi < m\pi + \frac{13\pi}{30} < -\frac{\pi}{2}.$$

Ισοδύναμα, θα πρέπει να έχουμε

$$-\pi - \frac{13\pi}{30} < m\pi < -\frac{\pi}{2} - \frac{13\pi}{30}$$

οπότε

$$-\frac{43}{30} < m < -\frac{28}{30},$$

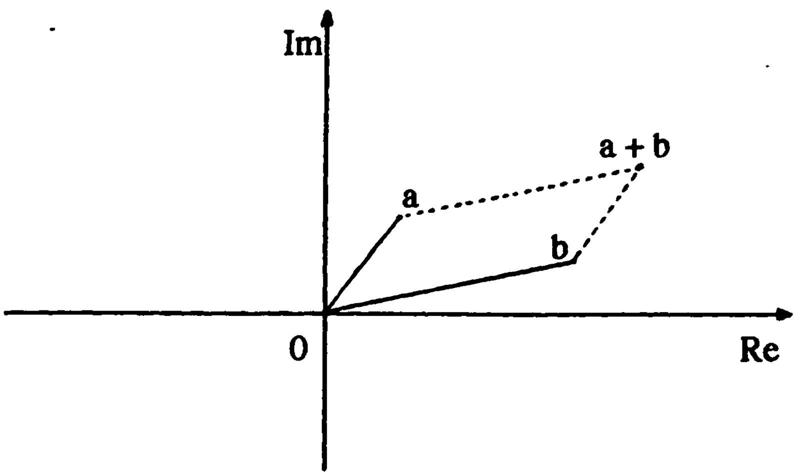
δηλαδή m =-1. Επομένως ο μιγαδικός αριθμός z που πήραμε έχει βασικό όρισμα το

$$\mathrm{Arg}z = -\pi + \frac{13\pi}{30} = -\frac{17\pi}{30}$$

και μέτρο το

$$|z| = \sqrt{(-\sin\frac{\pi}{15})^2 + (-\cos\frac{\pi}{15})^2} = 1. \qquad \square$$

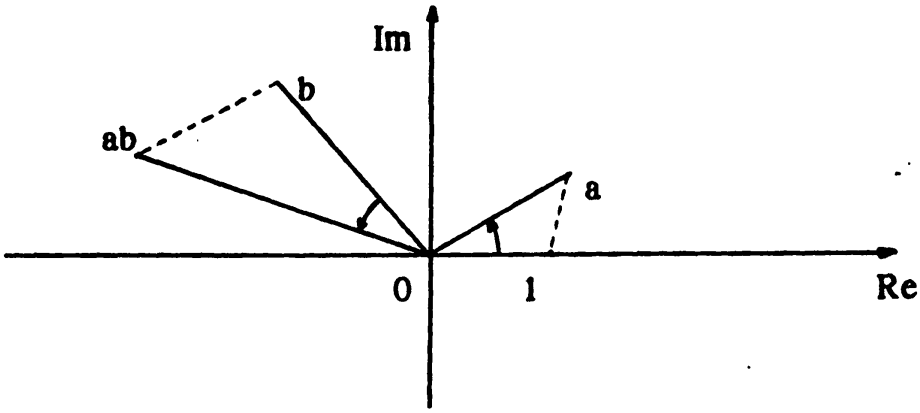
Έχοντας γνωρίσει τους μιγαδικούς αριθμούς καθώς επίσης και τον τρόπο με τον οποίο αυτοί απεικονίζονται στο επίπεδο, μπορούμε να εκτελέσουμε γεωμετρικά τις πράξεις μιγαδικών αριθμών. Πραγματικά, για το άθροισμα δύο μιγαδικών αριθμών a και b μπορούμε να πούμε ότι τούτο αντιστοιχεί στο γνωστό διανυσματικό άθροισμα όπως αυτό πραγματοποιείται πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο: Αν το διάνυσμα 0a μετακινηθεί παράλληλα έτσι ώστε το αρχικό του σημείο 0 να συμπέσει με το σημείο b, τότε το τελικό σημείο του θα συμπέσει με το άθροισμα a + b . Αν τα παραπάνω σημεία a και b δεν είναι συγγραμμικά, η προηγούμενη μέθοδος εύρεσης του αθροίσματος λέγεται κανόνας του παραλληλογράμμου, βλ. σχήμα:




**Η πρόσθεση μιγαδικών αριθμών γίνεται με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.**

Η γεωμετρική θεώρηση του γινομένου ab είναι κάπως πιο πολύπλοκη και βασίζεται στο γεγονός ότι οι ομόλογες πλευρές όμοιων τριγώνων είναι ανάλογες.

Σχηματίζουμε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία 0, 1 και a. Στη συνέχεια σχηματίζουμε άλλο ένα τρίγωνο όμοιο με το πρώτο ως εξής: το σημείο 0 να είναι η μία κορυφή του, το σημείο b να αντιστοιχεί στο σημείο 1 και να έχει τον ίδιο "προσανατολισμό" με το πρώτο τρίγωνο, με την έννοια ότι οι γωνίες των δύο τριγώνων με κορυφή το 0 να έχουν τον ίδιο "προσανατολισμό". Τότε η τρίτη κορυφή του νέου τριγώνου η οποία αντιστοιχεί στο σημείο a είναι ακριβώς ο μιγαδικός αριθμός ab, βλ. σχήμα:




**Γεωμετρική θεώρηση του γινομένου μιγαδικών αριθμών**

**1.2.1** Να βρεθούν τα μέτρα και τα βασικά ορίσματα αντίστοιχα των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

α) $z := \sqrt{3} + i$, β) $z := -\cos\varphi + i\sin\varphi$,

γ) $z := -5 - 5i$, δ) $z := -\sqrt{3} + 3i$,

ε) $z := -3 + i\sqrt{3}$, ς) $z := -1 - i\sqrt{3}$,

ζ) $z := -3 - i\sqrt{3}$, η) $z := 3 + 3i$, θ) $z := -2 + i2\sqrt{3}$, ι) $z := 2i$,

ια) $z := \dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} + i\,\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$, $(0 < \alpha < 1)$.

**1.2.2** Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε μία σχέση σ ως εξής:

$(z, w) \in \sigma$ σημαίνει ότι $|z| < |w|$ και αν $|z| = |w|$, τότε $\operatorname{Arg} z \leq \operatorname{Arg} w$.

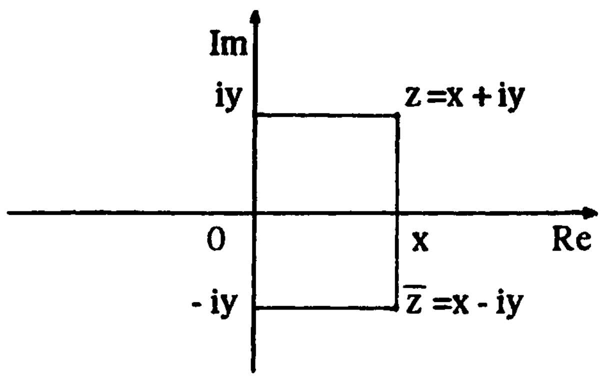
Ν' αποδειχτεί ότι η σ είναι μία σχέση ολικής διάταξης.

**1.2.3** Να παρασταθεί στο μιγαδικό επίπεδο το σύνολο των σημείων z για τα οποία ισχύει η σχέση $z + |z| \neq 0$.

## 1.3 Συζυγής μιγαδικού αριθμού

Ο **συζυγής** μιγαδικός αριθμός (conjugate complex number) $\bar{z}$ του μιγαδικού αριθμού $z := x + iy$ είναι ο μιγαδικός αριθμός ο οποίος έχει το ίδιο πραγματικό μέρος με τον z, αλλά αντίθετο φανταστικό μέρος. Δηλαδή

$$\bar{z} := x - iy.$$




**Τα σημεία που παριστάνουν οι μιγαδικοί αριθμοί z και $\bar{z}$ είναι συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.**

Απ' τόν ορισμό του συζυγούς μιγαδικού αριθμού προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\boxed{\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2} \text{ και } \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}.}$$

Αν $z_1 := x_1 + iy_1$ και $z_2 := x_2 + iy_2$ $(\neq 0)$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, το **πηλίκο** $z_1/z_2$ της διαίρεσης του $z_1$ διά του $z_2$ είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Με τη βοήθεια της έννοιας του συζυγούς μιγαδικού αριθμού, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1) $\overline{z_2 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

3) $1 : \bar{z} = \overline{1 : z}$

4) $\bar{\bar{z}} = z$,

5) $|\bar{z}| = |z|$,

6) $z\,\bar{z} = |z|^2$.

7) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ και $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

8) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

9) $|z_1 : z_2| = |z_1| : |z_2|$.

10) $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$,

11) $\big|\,|z_1|-|z_2|\,\big| \le |z_1-z_2|$,

12) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

**Παράδειγμα 1.3.1**

Την εξίσωση του κύκλου

$$x^2+y^2+4(x+y)=0$$

σε καρτεσιανές συντεταγμένες μπορούμε να τη γράψουμε στο μιγαδικό επίπεδο χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$x^2+y^2=|z|^2=z\bar{z},\quad x=\frac{z+\bar{z}}{2}\quad \text{και}\quad y=\frac{i(\bar{z}-z)}{2}.$$

Πραγματικά, αντικαθιστώντας στη δοθείσα εξίσωση παίρνουμε

$$z\bar{z}+2(z+\bar{z})+2i(\bar{z}-z)=0,$$

ή

$$|z|^2+2(1-i)z+2(1+i)\bar{z}=0. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 1.3.2**

Θα προσδιορίσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς z που ικανοποιούν τη σχέση

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Arg}(z+1-i)<\frac{3\pi}{4}.$$

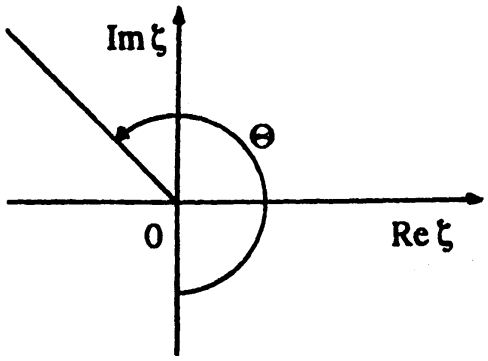
Προς τούτο, θέτουμε

$$\zeta := z+1-i,$$

οπότε πρέπει να ισχύει

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Arg}\zeta<\frac{3\pi}{4}.$$

Άρα ο μιγαδικός αριθμός ζ πρέπει να βρίσκεται μέσα στη γωνία Θ, όπως αυτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



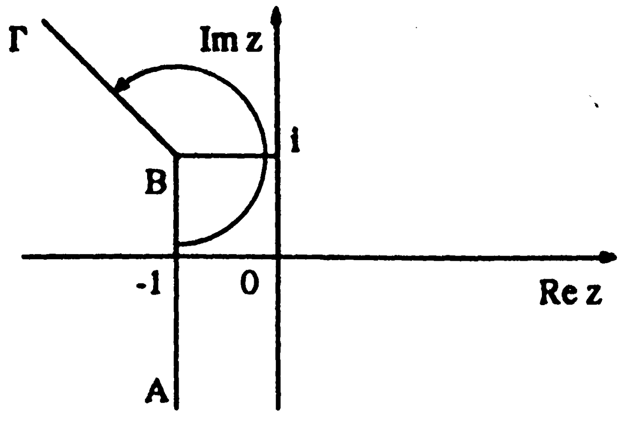

**Η εικόνα του συνόλου όλων των σημείων ζ που ικανοποιούν την ανισότητα**

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}\,\zeta < \frac{3\pi}{4}$$

Αλλά η γωνία αυτή του ζ- μιγαδικού επιπέδου απεικονίζεται μέσω του μετασχηματισμού

$$z = \zeta - 1 + i$$

στη γωνία ΑΒΓ του z - μιγαδικού επιπέδου, όπως στο σχήμα:




**Η εικόνα του συνόλου όλων των σημείων z που ικανοποιούν την ανισότητα**

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}\,(z + 1 - i) < \frac{3\pi}{4}$$



Οι μιγαδικοί αριθμοί που βρίσκονται σ' αυτό το τμήμα του επιπέδου ικανοποιούν τη δοθείσα σχέση.

**1.3.1** Να επιλυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις:

α) $\dfrac{1}{z-2i}+\dfrac{1+i}{1-i}=2,$ β) $\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{2+i}{1+i}=\sqrt{2}.$

**1.3.2** Να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο τα σύνολα των σημείων τα οποία στο καρτεσιανό επίπεδο ορίζονται με τη βοήθεια των σχέσεων:

α) $y=\alpha x+\beta,$ β) $x^2-y^2=\alpha^2,$

γ) $x^2+y^2+2x=0,$ δ) $(x-1)^2+2y^2=1.$

**1.3.3** Να επιλυθούν ως προς z οι παρακάτω σχέσεις:

α) $-\dfrac{\pi}{3}<\operatorname{Arg}(z+2-i)<\dfrac{\pi}{2},$ β) $\operatorname{Im}(z^2-\bar{z})=1-\operatorname{Im} z,$

γ) $|z-1|<|\bar{z}-i|,$ δ) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}<-\dfrac{1}{2},$

ε) $\operatorname{Re}(z^2-\bar{z})=1,$ ς) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4},$

ζ) $\bar{z}z+(2+i)z=2-i,$ η) $z^2+(\bar{z})^2=1,$

θ) $\left|\dfrac{1}{z}\right|\leq 2,$ ι) $1<|z-1-i|<3,$

ια) $|z-2-3i|<5,$ ιβ) $|z-3i|=2,$

ιγ) $1<|z+1|<2,$ ιδ) $3<|z|<4,$

ιε) $|z-1|<|z-i|$, ις) $|z|-2\,\mathrm{Im}\,z=3$,

ιζ) $|z+i|+|z-i|=4$, ιη) $\mathrm{Re}\,z^2=1$,

ιθ) $|z|-3\,\mathrm{Re}\,z=2$, κ) $|z-2|=|1-2i|$,

κα) $\mathrm{Re}(2z+i)=|z|$, κβ) $2\bar{z}=z^2+1$,

κγ) $z\bar{z}+i(z+\bar{z})=3-i$, κδ) $|z|+z=2+i$,

κε) $\bar{z}=z^2$.

**1.3.4** Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

α) $(2+i)^{-2}+(2-i)^{-2}=x+iy$,

β) $z^2(1-i)+2(1+i)z\bar{z}+2iz-2i\bar{z}-i\bar{z}^2=0$.

**1.3.5** Να αναγνωριστεί η καμπύλη που παριστάνει η εξίσωση

$$z\bar{z}-i(z-\bar{z})-2=0.$$

**1.3.6** Ν' αποδειχτεί ότι ισχύει

$$|a-b|^2\leq(1+|a|^2)(1+|b|^2),$$

όπου a, b είναι μιγαδικοί αριθμοί.

**1.3.7** Ν' αποδειχτεί ότι αν ισχύει η ισότητα

$$|a-b|=|1-\bar{a}b|,$$

τότε

$$|a|=1, \text{ ή } |b|=1$$

και, αν ισχύει

$$|a-b|<|1-\bar{a}b|,$$

τότε

$$|a|<1 \text{ και } |b|<1, \text{ ή } |a|>1 \text{ και } |b|>1.$$

**1.3.8** Ν' αποδειχτεί ότι τα σημεία $z_1$, $z_2$, $z_3$ του μιγαδικού επιπέδου είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν αυτά ικανοποιούν τη σχέση

$$\operatorname{Im} \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = 0.$$

**1.3.9** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z := 2+3i$ και $w := -1+2i$. Να γράφούν στην αλγεβρική τους μορφή οι ακόλουθοι μιγαδικοί αριθμοί :

α) $5z+9w$, β) $3|w|+iz^2$,

γ) $\dfrac{1-z}{2+w}$, δ) $\dfrac{1}{z+(1-i)w}$,

ε) $\operatorname{Im}(\bar{z}w^3) - 3i\operatorname{Re}(\dfrac{w}{iz})$, ς) $2|w-iz|+(2-3i)zw$.

**1.3.10** Ν' αποδειχτεί ότι για κάθε σύνολο αριθμών

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \quad \text{και} \quad b_1, b_2, \ldots, b_k$$

ισχύει η *ταυτότητα του Lagrange* :

$$\Big|\sum_{1\le\nu\le k} a_\nu b_\nu\Big|^2 = \Big(\sum_{1\le\mu\le k}|a_\mu|^2\Big)\Big(\sum_{1\le\nu\le k}|b_\nu|^2\Big) - \sum_{1\le\mu<\nu\le k}|a_\mu \bar{b}_\nu - a_\nu \bar{b}_\mu|^2.$$

Απ' την ισότητα αυτή, ή με άλλον τρόπο, ν' αποδειχτεί ότι ισχύει η *ανισότητα του Cauchy*

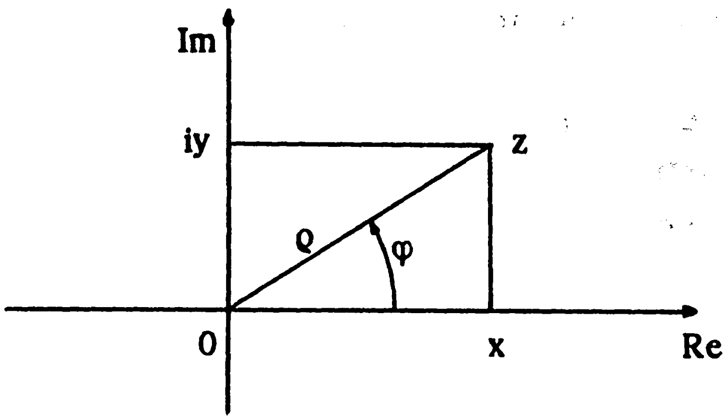
$$\Big|\sum_{1\le\nu\le k} a_\nu b_\nu\Big|^2 \le \Big(\sum_{1\le\nu\le k}|a_\nu|^2\Big)\Big(\sum_{1\le\nu\le k}|b_\nu|^2\Big).$$

## 1.4 Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού

Η **πολική μορφή** (polar form) ή η **τριγωνομετρική μορφή** (trigonometric form) του μιγαδικού αριθμού $z := x + iy$ δίνεται από την παράσταση

$$z = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

όπου $\varrho$ είναι το μέτρο και $\varphi$ το όρισμα του μιγαδικού αριθμού z, βλ. σχήμα:




**Η πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού $z := x + iy$**

**1.4.1** Να γραφούν στην πολική τους μορφή οι παρακάτω μιγαδικοί αριθμοί:

α) $z := -3$, β) $z := 5i$,

γ) $z := -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$, δ) $z := \sqrt{3} - i$,

ε) $z := 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$, $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, ς) $z := \dfrac{1+\cos\alpha - i\sin\alpha}{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}$, $(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$.

## 1.5 Εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού

Η **εκθετική μορφή** (exponential form) του μιγαδικού αριθμού $z := x + iy$ είναι η

$$z = \varrho e^{i\varphi},$$

όπου $\varrho$ είναι το μέτρο και $\varphi$ το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z$.

**Παράδειγμα 1.5.1**

Θα αποδειχτεί ότι τα σημεία $z_1$, $z_2$, $z_3$ του μιγαδικού επιπέδου σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}.$$

Προς τούτο, θέτουμε

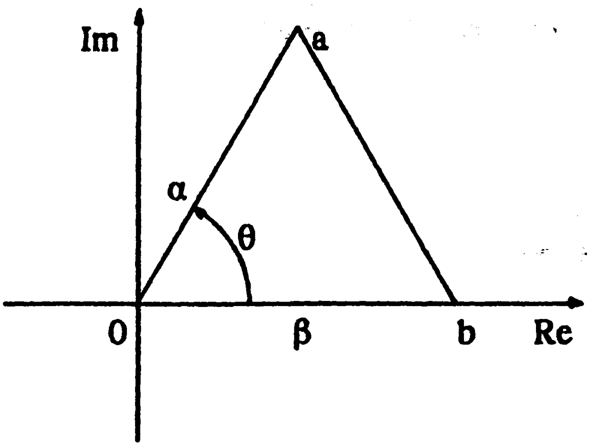
$$a := z_3 - z_1 \text{ και } b := z_2 - z_1,$$

οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\frac{a}{b} = \frac{-b}{a-b}.$$

Τούτο σημαίνει ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κορυφή $z_1$ είναι η αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου. Επίσης πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με τον μιγαδικό αριθμό $\exp(-i\varphi)$, όπου $\varphi$ είναι το όρισμα του $b$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πλευρά $0b$ του τριγώνου είναι επί του θετικού πραγματικού ημιάξονα.

Τώρα έχουμε ένα τρίγωνο $0ab$ όπως στο σχήμα,




**Το τρίγωνο 0ab είναι ισόπλευρο αν $\alpha=\beta$ και $\theta = 60^o$.**

όπου $|b| = \beta$, $\mathrm{Arg}\, b = 0$, $|a| = \alpha$, $\mathrm{Arg}\, a = \theta$ και πρέπει να δείξουμε ότι τούτο είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha e^{i\theta}}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha e^{i\theta}-\beta}.$$

Επιλύοντας τη σχέση αυτή ως προς $e^{i\theta}$ προκύπτει ότι

$$e^{i\theta} = \frac{\beta}{\alpha} e^{\pm i\pi/3}$$

Επομένως έχουμε $\alpha=\beta$ και $\theta=\pm i\pi/3$. Έτσι βλέπουμε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει την μεταξύ των ίσων πλευρών γωνία ίση με 60 μοίρες. Τούτο, βέβαια, δηλώνει ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. □

**1.5.1** Να γραφούν στην εκθετική τους μορφή οι εξής μιγαδικοί αριθμοί:

α) $z := \sqrt{3} - i$, β) $z := -\sqrt{3} - 3i$, γ) $z := \sqrt{3} + i$, δ) $z := 1 + i\sqrt{3}$,

ε) $z := \cos\theta - i\sin\theta$ $(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$.

## 1.6 Δυνάμεις μιγαδικού αριθμού

Αν δυο μιγαδικοί αριθμοί $z_1$ και $z_2$ δίνονται στην πολική τους μορφή

$$z_1 := \varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{και} \quad z_2 := \varrho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

όπου $\varphi_1$ και $\varphi_2$ είναι τα βασικά τους ορίσματα αντίστοιχα, δηλαδή

$$\varphi_1 := \operatorname{Arg} z_1 \ \text{ και } \ \varphi_2 := \operatorname{Arg} z_2,$$

τότε το **γινόμενό** τους καθορίζεται από τη σχέση

$$z_1 z_2 = \varrho_1\varrho_2\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Επομένως, αν δυο μιγαδικοί αριθμοί $z_1$ και $z_2$ πολλαπλασιάζονται, τότε τα μέτρα τους επίσης πολλαπλασιάζονται, ενώ τα ορίσματά τους προστίθενται, δηλαδή

$$|z_1 z_2| = \varrho_1\varrho_2 = |z_1|\,|z_2|,$$

και

$$\arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Το **πηλίκο** του μιγαδικού αριθμού $z_1$ δια του $z_2$ $(\neq 0)$ καθορίζεται από τη σχέση

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Επομένως, αν ο μιγαδικός αριθμός $z_1$ διαιρείται δια $z_2$, τότε το μέτρο του $z_1$

διαιρείται με το μέτρο του $z_2$ και το όρισμα του $z_2$ αφαιρείται από το όρισμα του $z_1$, δηλαδή

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\varrho_1}{\varrho_2},$$

και

$$\arg\frac{z_1}{z_2}=\varphi_1-\varphi_2+2k\pi=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2+2k\pi=\arg z_1-\arg z_2.$$

Χρησιμοποιώντας επαγωγικά τον κανόνα του γινομένου προκύπτει ότι, αν υψώσουμε έναν μιγαδικό αριθμό

$$z:=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

σε **δύναμη** με εκθέτη έναν ακέραιο n παίρνουμε τον μιγαδικό αριθμό

$$z^n=\varrho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

από όπου προκύπτει ότι

$$|z^n|=\varrho^n$$

και

$$\arg z^n=n\arg z+2k\pi\quad (k=0,\pm1,\pm2,\dots).$$

Η τελευταία σχέση δίνει τον τύπο του **de Moivre**

$$\boxed{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi,}$$

η οποία ισχύει για κάθε ακέραιο αριθμό n.

**Παράδειγμα 1.6.1**

Θα υπολογίσουμε τη δύναμη

$$\left[\frac{1-i}{1+i}\right]^8$$

με δύο τρόπους.

*1ος τρόπος :* Εκφράζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή στην πολική τους μορφή. Πραγματικά παρατηρούμε ότι

$$|1-i|=\sqrt{2},\quad \mathrm{Arg}(1-i)=-\frac{\pi}{4}\quad \text{και}\quad |1+i|=\sqrt{2},\quad \mathrm{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}.$$

Άρα

$$1-i=\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})]\quad \text{και}\quad 1+i=\sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})].$$

Έτσι, απ' τον τύπο de Moivre, προκύπτει ότι

$$[\frac{1-i}{1+i}]^8=\frac{(\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})])^8}{(\sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})])^8}=\frac{\cos(-\frac{8\pi}{4})+i\sin(-\frac{8\pi}{4})}{\cos(\frac{8\pi}{4})+i\sin(\frac{8\pi}{4})}=$$

$$=\frac{\cos(2\pi)-i\sin(2\pi)}{\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)}=\frac{1}{1}=1.$$

*2ος τρόπος :* Επειδή, προφανώς,

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{1^2-i^2}=\frac{1-2i-1}{2}=-i,$$

θα έχουμε

$$[\frac{1-i}{1+i}]^8=(-i)^8=(-i)^{2\cdot 4}=(-1)^4=1.\qquad \square$$

**Παράδειγμα 1.6.2**

Θα προσδιορίσουμε το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών που ικανοποιούν την ανισότητα

$$\mathrm{Im}\, z^2>2.$$

Προς τούτο θέτουμε $z:=x+iy$, οπότε θα πρέπει να ισχύει

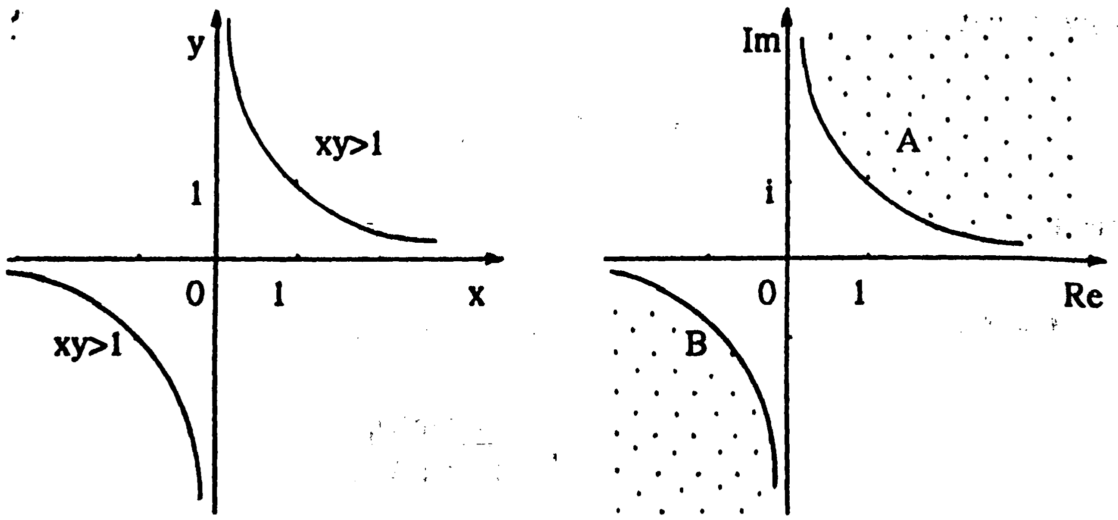
$$\mathrm{Im}(x+iy)^2>2.$$

Άρα

$$\mathrm{Im}(x^2-y^2+2ixy)=2xy>2,$$

δηλαδή

$$xy>1.$$




**Το σύνολο των σημείων z που ικανοποιούν την ανισότητα $\operatorname{Im} z^2 > 2$.**

Έτσι το σημείο (x, y) πρέπει να ανήκει "μέσα" στην υπερβολή με εξίσωση xy=1, ή, ισοδύναμα, το σημείο z πρέπει να ανήκει στον αντίστοιχο τόπο A∪B του μιγαδικού επιπέδου. □

**1.6.1** Να υπολογιστούν οι δυνάμεις

α) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{80}$, β) $(2-2i)^5$,

γ) $(\sqrt{3}-3i)^4$, δ) $(-1+i\sqrt{3})^{60}$.

**1.6.2** Ν' αποδειχτεί ότι το πολυώνυμο

$$p(x) := (\cos\beta + x\sin\beta)^{\nu} - \cos\nu\beta - x\sin\nu\beta$$

(όπου β είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός και ν είναι θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2) διαιρείται δια του $x^2+1$.

**1.6.3** Χρησιμοποιώντας τον τύπο του De Moivre να εκφραστούν οι τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών

$$\sin 3\varphi,\ \cos 3\varphi,\ \sin 4\varphi \text{ και } \cos 4\varphi$$

συναρτήσει των $\sin\varphi$ και $\cos\varphi$.

**1.6.4** Ν' αποδειχτεί ότι για κάθε $\varphi$ ισχύει η σχέση

$$\left(\frac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi}\right)^k=\frac{1+i\tan(k\varphi)}{1-i\tan(k\varphi)},$$

όπου $k$ είναι οποιοσδήποτε ακέραιος.

**1.6.5** Να επιλυθούν οι εξισώσεις

α) $(x+i)^n-(x-i)^n=0$,

β) $\cos x+i\sin x=\sin x+i\cos x$.

**1.6.6** Αν $x$ είναι πραγματικός αριθμός, να υπολογιστούν τα εξής αθροίσματα:

α) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin kx$,

β) $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos kx$,

γ) $\sin x+\sin 4x+\ldots+\sin(3k+1)x$,

δ) $\cos x+\cos 4x+\ldots+\cos(3k+1)x$,

ε) $1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos kx$,

ς) $\cos x+\cos(x+y)+\cos(x+2y)+\ldots+\cos(x+ky)$.

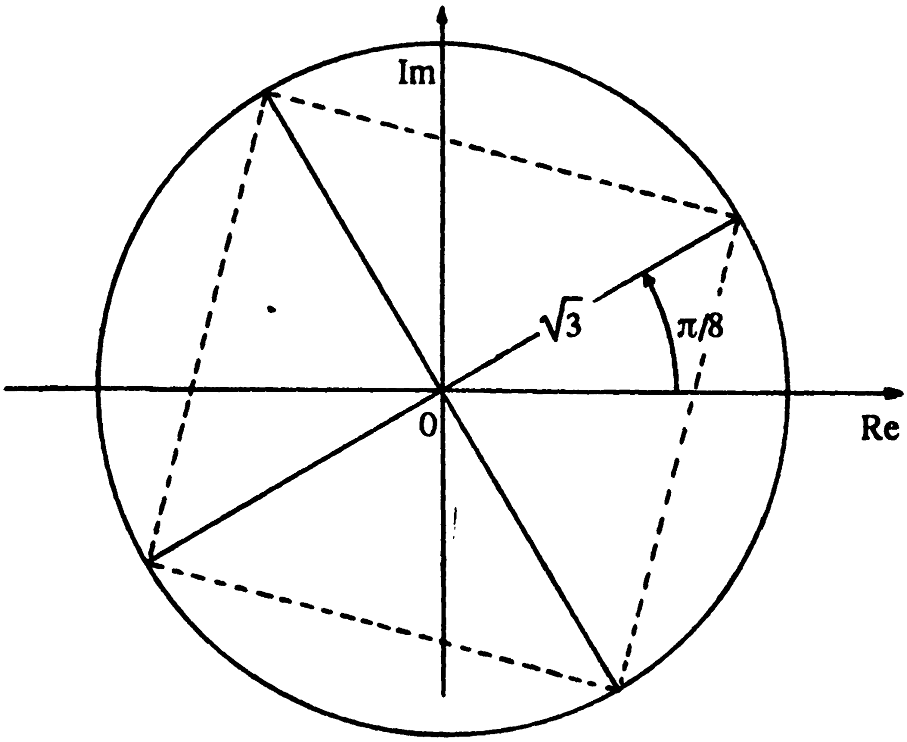
**1.6.7** Αν $0<x,\ y<\pi/2$, να βρεθεί το φανταστικό μέρος του βασικού κλάδου της δύναμης $[\sin(x+iy)]^i$.

# 1.7 Ρίζες μιγαδικού αριθμού

Οι n- στές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού $z := \varrho e^{i\varphi}$ δίνονται από τον τύπο

$$(1) \qquad \boxed{z_k := \varrho^{1/n}\, e^{i(\varphi+2k\pi)/n},\quad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

Οι n- στές ρίζες του μιγαδικού αριθμού z παριστάνονται στο μιγαδικό επίπεδο με ένα σύνολο n σημείων τα οποία αποτελούν τις κορυφές ενός κανονικού n- γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο με κέντρο το 0 και ακτίνα $|z|^{1/n}$ (βλ. άσκηση 1.7.2). Η περίπτωση του μιγαδικού αριθμού 9i απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:




**Οι εικόνες των τέταρτων ριζών του μιγαδικού αριθμού 9i**

Θέτοντας στον τύπο (1) τις τιμές $\varrho=1$ και $\varphi=0$ παίρνουμε τις n- στές ρίζες της μονάδας, δηλαδή τους μιγαδικούς αριθμούς $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\varepsilon_1\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2\varepsilon_1 = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3\varepsilon_1 = \varepsilon_4, \ \ldots, \ \varepsilon_k\varepsilon_1 = \varepsilon_{k+1}, \ \ldots, \varepsilon_{n-1}\varepsilon_1 = 1.$$

Ιδιαίτερα για τις κυβικές (n=3) ρίζες της μονάδας, δηλαδή τους αριθμούς 1, $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$, όπου

$$\varepsilon_1 := e^{i2\pi/3} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

και

$$\varepsilon_2 := e^{i4\pi/3} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

έχουμε $\varepsilon_1\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ και $\varepsilon_2\varepsilon_2 = \varepsilon_1$.

**Παράδειγμα 1.7.1**

Θα επιλύσουμε την εξίσωση

$$z^n = \bar{z},$$

όπου n είναι φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1.

Προς τούτο γράφουμε τον αριθμό z στην εκθετική μορφή $z = \varrho e^{i\varphi}$. Τότε έχουμε

$$\bar{z} = \varrho e^{-i\varphi},$$

οπότε η εξίσωση που δίνεται γράφεται

$$\varrho^n e^{in\varphi} = \varrho\, e^{-i\varphi},$$

ή

$$\varrho^{n-1} e^{i(n+1)\varphi} = 1.$$

Απ' τη σχέση αυτή βρίσκουμε $\varrho=1$ και $e^{i(n+1)\varphi}=1$. Επομένως

$$i(n+1)\varphi = 2k\pi i,$$

δηλαδή

$$\varphi = \frac{2k\pi}{n+1},$$

όπου $k = 0, 1, \ldots, n$. □

**Παράδειγμα 1.7.2**

Για να προσδιορίσουμε τον κλάδο της $\sqrt{z}$ για τον οποίο ισχύει $\sqrt{1} = -1$, εφαρμόζουμε τον τύπο που είδαμε παραπάνω για n=2. Τότε προκύπτουν οι δύο τετραγωνικές ρίζες του z:

$$z_1 := \sqrt{|z|}\, e^{i\varphi/2}$$

και

$$z_2 := \sqrt{|z|}\, e^{i(\varphi+2\pi)/2} = \sqrt{|z|} e^{i\varphi/2} e^{i\pi} = -\sqrt{|z|}\, e^{i\varphi/2}.$$

Αλλά, αν $z=1$, έχουμε $|z|=1$ και $\varphi = \mathrm{Arg} z = 0$. Άρα η σχέση $\sqrt{1}=-1$ ικανοποιείται από τον δεύτερο κλάδο της ρίζας, δηλαδή τη ρίζα $z_2$, αφού, προφανώς, ισχύει

$$-1=-\sqrt{1}\, e^{i0}=-\sqrt{1}\,(\cos 0 + i\sin 0).$$ □

**Παράδειγμα 1.7.3**

Ένα από τα πιο σημαντικά θέματα που αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια των μιγαδικών αριθμών είναι η επίλυση της τριτοβάθμιας εξίσωσης

$$(1) \qquad z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

όπου a, b, c είναι, εν γένει, μιγαδικοί αριθμοί.

Προς τον σκοπό αυτό μετασχηματίζουμε την εξίσωση (1) σε μια άλλη τριτοβάθμια εξίσωση της οποίας όμως ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι ίσος με το μηδέν. Πραγματικά θέτοντας

$$z := -\frac{a}{3} + w$$

η εξίσωση (1) μετασχηματίζεται στην

$$(2) \qquad w^3 + Aw + B = 0,$$

όπου A και B είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Τώρα, οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι δίνονται από τους **τύπους του Cardano**

$$w_1 = Z+H, \quad w_2 = \varepsilon(Z+\varepsilon H), \quad w_3 = \varepsilon^2(Z+\varepsilon^2 H),$$

$$w_3 = \zeta_3 - \frac{A}{3\zeta_3} = \varepsilon^2\zeta_1 + \zeta_2' = \varepsilon^2\zeta_1 + \varepsilon\zeta_1' = \varepsilon^2\zeta_1 + \varepsilon^4\zeta_1' = \varepsilon^2(\zeta_1 + \varepsilon^2\zeta_1'),$$

από όπου παίρνουμε το συμπέρασμα για $Z = \zeta_1$, $H = \zeta_1'$, $\theta = \eta_1$ και $\theta' = \eta_2$. □

**1.7.1** Υποθέτουμε ότι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ είναι οι n- στές ρίζες της μονάδας. Να αποδειχτεί ότι

α) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n = 0$,

β) $\varepsilon_1 . \varepsilon_2 . \ldots . \varepsilon_{n-1} = 1$.

**1.7.2** Ν' αποδειχτεί ότι οι n- στές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού z ταυτίζονται με τις κορυφές ενός κανονικού n- γώνου με κέντρο την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και ακτίνα ίση με $|z|^{1/n}$.

**1.7.3** Αν ε είναι μια n- στή ρίζα της μονάδας ($\varepsilon \neq 1$) να αποδειχτεί ότι ισχύει

$$1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^{n-1} = -\frac{n}{1-\varepsilon}.$$

**1.7.4** Να υπολογιστούν όλες οι τιμές των παρακάτω ριζών:

α) $\sqrt[4]{1-i}$, β) $\sqrt[4]{-1}$, γ) $\sqrt{-i}$,

δ) $\sqrt[3]{i}$, ε) $\sqrt[4]{-i}$, ς) $\sqrt[4]{1}$,

ζ) $\sqrt[3]{-1-i}$, η) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$, θ) $\sqrt[5]{\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})}$.

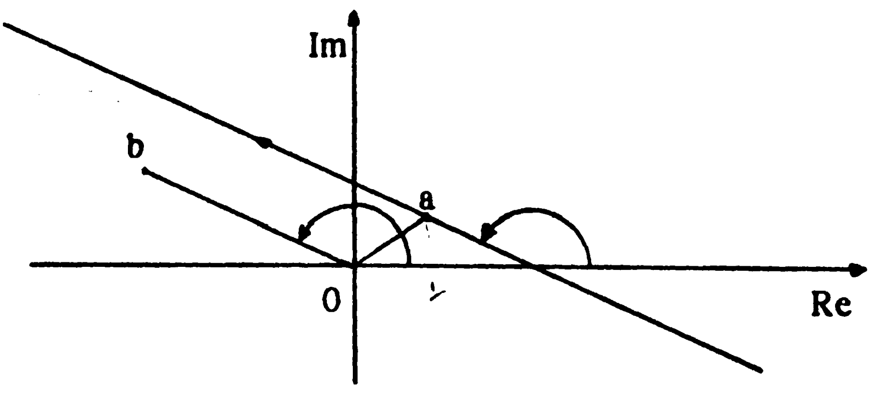
**1.7.5** Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η εξίσωση $az^2 + bz + c = 0$, (όπου a, b, c είναι μιγαδικοί αριθμοί) να έχει πραγματικές ρίζες.

**1.7.6** Αν X είναι το σύνολο όλων των n-στών ριζών της μονάδας εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού "· ", να αποδειχτεί ότι η δυάδα (X, · ) είναι μια Αβελιανή (δηλαδή αντιμεταθετική) ομάδα.

**1.7.7** Έστω $A_n(z)$ το σύνολο των n- στών ριζών του μιγαδικού αριθμού z. Να προσδιοριστεί το σύνολο όλων των σημείων z του επιπέδου που ικανοποιούν τη σχέση $A_n(z) = A_n(\bar{z})$.

## 1.8 Ευθείες γραμμές στο μιγαδικό επίπεδο

Η ευθεία που διέρχεται από ένα σημείο a του μιγαδικού επιπέδου και σχηματίζει με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα γωνία ίση με το όρισμα του μιγαδικού αριθμού b παριστάνεται με $\mathcal{E}(a, b)$. Επομένως η ευθεία $\mathcal{E}(a, b)$ είναι το προσανατολισμένο σύνολο των σημείων z του μιγαδικού επιπέδου τα οποία γράφονται στη μορφή $z = a + tb$, για κάποιον πραγματικό αριθμό t. Η διάταξη των πραγματικών αριθμών t καθορίζει και τον **προσανατολισμό** ή τη **φορά** της ευθείας.




**Η προσανατολισμένη ευθεία γραμμή $\mathcal{E}(a, b)$**

**Παράδειγμα 1.8.1**
Η προσανατολισμένη γωνία μεταξύ των ευθειών

(1) $$\mathcal{E}(1, \sqrt{3}+i) \quad \text{και} \quad \mathcal{E}(-1, 1-i)$$

του μιγαδικού επιπέδου υπολογίζεται αν γνωρίζουμε τις γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα. Έτσι, επειδή αυτές είναι αντίστοιχα ίσες με

$$\mathrm{Arg}(\sqrt{3}+i) = \mathrm{Arctan}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

και

$$\mathrm{Arg}(1-i) = \mathrm{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4},$$

έπεται ότι η προσανατολισμένη γωνία μεταξύ των δύο ευθειών (1) είναι ίση με

$$(2\pi - \frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{12}. \qquad \square$$

**1.8.1** Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός που προκύπτει αν το διάνυσμα $-\sqrt{3}+3i$ το περιστρέψουμε **θετικά** (δηλαδή, με φορά την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ωρολογίου) κατά $90^{o}$, δηλαδή κατά $+90^{o}$.

**1.8.2** Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός που προκύπτει αν το διάνυσμα $-\sqrt{3}-i$ το περιστρέψουμε κατά $-120^{o}$.

**1.8.3** Να βρεθεί η γωνία κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί το διάνυσμα $3-4i$ ώστε να συμπέσει με το $5\sqrt{2} - i5\sqrt{2}$.

**1.8.4** Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν τα παρακάτω ζεύγη ευθειών:

α) $\mathcal{E}(2i, 3+4i)$ και $\mathcal{E}(0, i)$,

β) $\mathcal{E}(-1+2i, 1-i)$ και $\mathcal{E}(2, 3i)$,

γ) $\mathcal{E}(1-i, 1+i)$ και $\mathcal{E}(1+i, -1+i)$,

δ) $\mathcal{E}(1+2i, 2-i)$ και $\mathcal{E}(2-i, 1+2i)$.

**1.8.5** Έστω T το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου με κορυφές τα μη συγγραμμικά σημεία a, b και c. Να αποδειχτεί ότι

$$T = E^{+}(a, b-a) \cap E^{+}(b, c-b) \cap E^{+}(c, a-c)$$

ή

$$T = E^{-}(a, b-a) \cap E^{-}(b, c-b) \cap E^{-}(c, a-c).$$

# 2 Η Τοπολογία του Μιγαδικού Επιπέδου

Στο κεφάλαιο τούτο θα ασχοληθούμε με τη συνήθη τοπολογία του συνόλου των μιγαδικών αριθμών, ώστε να μπορούμε να μιλούμε για τη σύγκλιση και τη συνέχεια των μιγαδικών συναρτήσεων.

## 2.1 Η τοπολογία του μιγαδικού επιπέδου

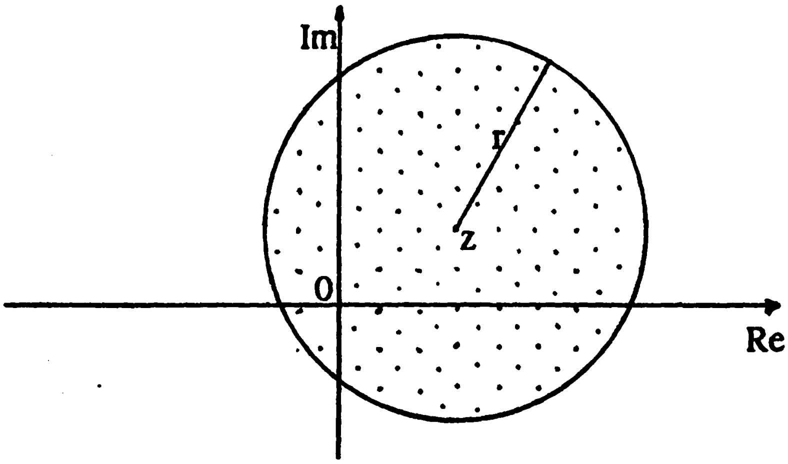
Η **απόσταση** (distance) δύο μιγαδικών αριθμών

$$z_1 := x_1 + iy_1 \text{ και } z_2 := x_2 + iy_2$$

ορίζεται να είναι ο πραγματικός αριθμός

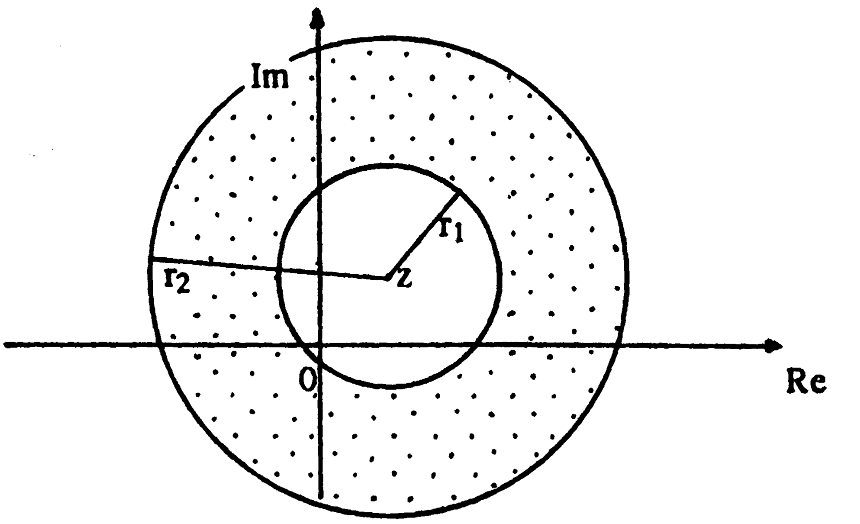
$$\boxed{|z_1 - z_2| := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.}$$

Ο **ανοικτός δίσκος** (open disc), ή **ανοικτός κύκλος** (open cycle) ή **ανοικτή κυκλική περιοχή** (open cyclic neighborhood) με κέντρο το σημείο z και ακτίνα r είναι το σύνολο που παριστάνεται με B(z, r) και που περιέχει τους μιγαδικούς αριθμούς οι οποίοι απέχουν από το z απόσταση μικρότερη του r ( βλ. σχήμα).




**Ο ανοικτός δίσκος** $B(z, r) := \{ w \in C : |z - w| < r \}$.

**Ο ανοικτός δακτύλιος** (open ring) ή **ανοικτή δακτυλική περιοχή** με κέντρο το σημείο z και ακτίνες $r_1$ και $r_2$ είναι το σύνολο που παριστάνεται με $\Delta(z, r_1, r_2)$ και περιέχει όλα τα σημεία z του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει $r_1 < |z - w| < r_2 \}$.

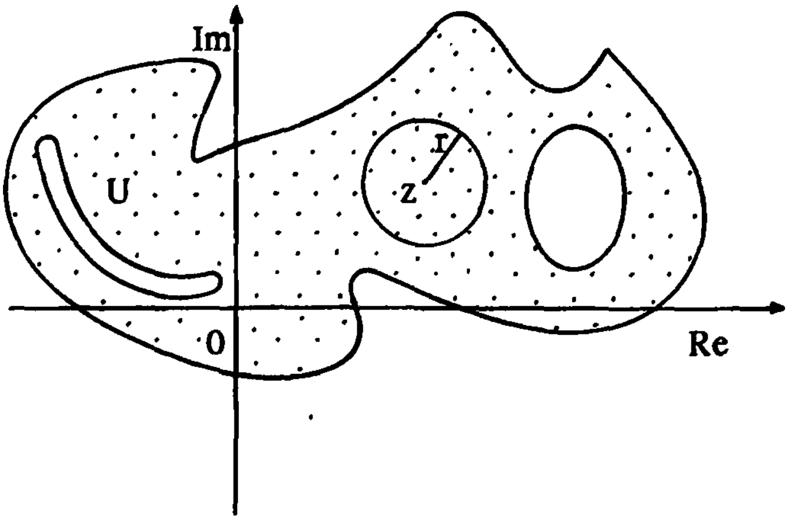



**Ο ανοικτός δακτύλιος** $\Delta(z, r_1, r_2) := \{ w \in C : r_1 < |z - w| < r_2 \}$.

Ένα υποσύνολο U του μιγαδικού επιπέδου είναι **περιοχή** (neighborhood) ενός σημείου z, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $r > 0$ τέτοιος ώστε

$$B(z, r) \subseteq U$$

Το σύνολο U είναι περιοχή του συνόλου A, αν τούτο είναι περιοχή κάθε σημείου του A.




**Το σύνολο U είναι περιοχή του σημείου z.**

Ένα σύνολο A είναι **ανοικτό** (open), αν για κάθε στοιχείο z του A υπάρχει πραγματικός αριθμός $r > 0$ τέτοιος ώστε ο ανοικτός δίσκος με κέντρο το z και ακτίνα ίση με r να περιέχεται στο A.

Η συλλογή όλων των ανοικτών υποσυνόλων του **C** λέγεται (η συνήθης, ή η κοινή) **τοπολογία** του **C**.

Ο **πυρήνας** ή το **εσωτερικό** (interior) $\Sigma^\circ$ ενός συνόλου Σ είναι η ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του Σ.

Ένα σύνολο $B \subseteq$ **C** είναι **κλειστό** (closed), αν το συμπλήρωμά του $B^c$ είναι ανοικτό υποσύνολο του **C**.

Έστω X ένα υποσύνολο του **C** και A ένα υποσύνολο του X. Το A λέγεται **ανοικτό** (αντίστοιχα, **κλειστό**) **στο** X, αν υπάρχει ανοικτό (αντίστοιχα, κλειστό) υποσύνολο U του **C** τέτοιο ώστε $A = X \cap U$.

Η **θήκη** ή το **κάλυμμα** (closure) $\overline{\Sigma}$ ενός συνόλου Σ είναι η τομή όλων των κλειστών υπερσυνόλων του Σ.

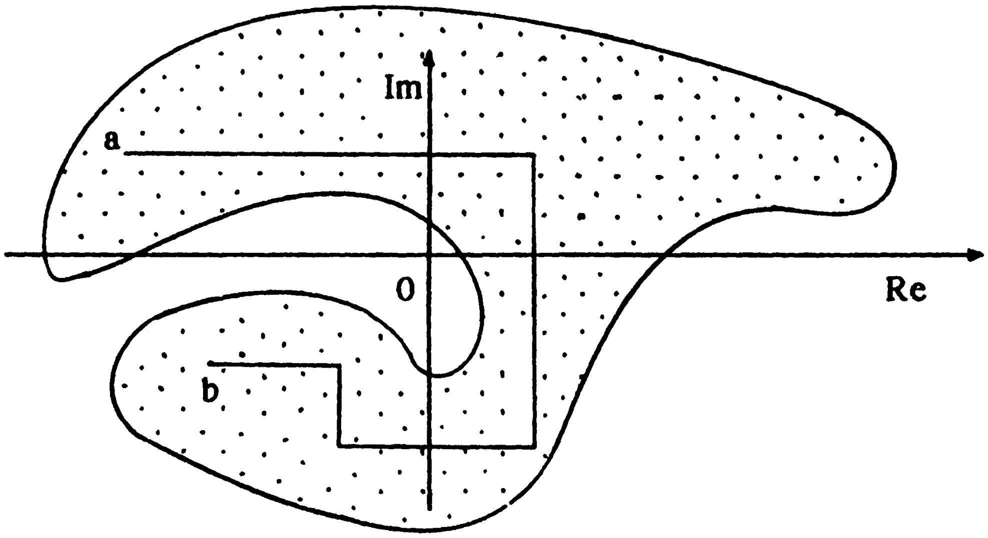
Τρ **σύνορο** (boundary) $\partial\Sigma$ ενός συνόλου $\Sigma$ είναι το σύνολο $\overline{\Sigma} - \Sigma°$.

Ένα σύνολο $\Sigma$ είναι **συνεκτικό** (connected), αν τούτο δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση δυο μη κενών ανοικτών στο $\Sigma$ ή κλειστών στο $\Sigma$ υποσυνόλων ξένων μεταξύ τους.

Ένα σύνολο $K \subseteq \mathbf{C}$ είναι **φραγμένο** (bounded), αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε το σύνολο K να περιέχεται στον ανοικτό δίσκο $B(0, r)$, δηλαδή αν ισχύει $|z| < r$, για κάθε στοιχείο z του συνόλου K.

Τέλος, ένα σύνολο είναι **συμπαγές** (compact), αν τούτο είναι κλειστό και φραγμένο.

Στη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων σπουδαίο ρόλο παίζουν οι λεγόμενοι **τόποι** (regions), δηλαδή μη κενά σύνολα τα οποία είναι ανοικτά και συνεκτικά υποσύνολα του **C**. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι δύο οποιαδήποτε σημεία ενός τόπου μπορούν να ενωθούν με μια πολυγωνική γραμμή η οποία ανήκει ολόκληρη στον τόπο και επιπλέον έχει πλευρές παράλληλες προς τους άξονες.




**Κάθε δύο σημεία a και b του τόπου μπορούν να ενωθούν με μια πολυγωνική γραμμή η οποία ανήκει στον τόπο και έχει πλευρές παράλληλες προς τους άξονες.**

**Παράδειγμα 2.1.1**

Θα εξετάσουμε αν το σύνολο

$$A := \{ z : |z^2 - 1| < 1 \}$$

είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του **C**.

Προς τούτο θεωρούμε ένα στοιχείο z στο σύνολο A. Τότε πρέπει να ισχύει

(1) $$\lambda := |z^2 - 1| < 1.$$

Για να αποδείξουμε ότι το A είναι ανοικτό σύνολο, θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $r > 0$ τέτοιος ώστε, αν κάποιος μιγαδικός αριθμός w ικανοποιεί την ανισότητα $|z - w| < r$, τότε αυτός θα ικανοποιεί επίσης την (1), δηλαδή θα ισχύει ότι

$$|w^2 - 1| < 1.$$

Έστω r ένας θετικός αριθμός τέτοιος ώστε

$$r^2 + 2r|z| < 1 - \lambda.$$

Αν το σημείο w είναι τέτοιο ώστε $|z - w| < r$, θα έχουμε

$$|w| \leq |z + w - z| \leq |z| + |w - z| < |z| + r$$

και επομένως

$$|w^2 - 1| = |w^2 - z^2 + z^2 - 1| \leq |w^2 - z^2| + |z^2 - 1| =$$

$$= |w - z||w + z| + |z^2 - 1| <$$

$$< |w - z|(|w| + |z|) + \lambda < r(2|z| + r) + \lambda < 1,$$

πράγμα που αποδεικνύει ότι το A είναι ανοικτό σύνολο.

Επίσης, αν z είναι τυχόν σημείο του συνόλου A, από την (1) παίρνουμε

$$|z|^2 - 1 < 1$$

και άρα $|z| < \sqrt{2}$, δηλαδή το σύνολο A είναι και φραγμένο. □

**2.1.1** Θεωρούμε δυο μιγαδικούς αριθμούς $z_1$ και $z_2$. Να βρεθεί ένας μιγαδικός αριθμός a ο οποίος κείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $z_1$ και $z_2$ και η απόστασή του από το $z_1$ είναι διπλάσια από την απόστασή του από το $z_2$.

**2.1.2** Αν δοθούν τα σημεία $z_1, z_2$ και $z_3$ να βρεθεί ένα σημείο $z_4$ τέτοιο ώστε τα $z_1, z_2, z_3$ και $z_4$ να είναι οι κορυφές ενός παραλληλογράμμου.

**2.1.3** Αν $z_1, z_2, z_3$ είναι μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και επιπλέον $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, ν' αποδειχτεί ότι τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς αυτούς είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο.

**2.1.4** Ν' αποδειχτεί ότι οι ανοικτοί δίσκοι και οι ανοικτές δακτυλικές περιοχές είναι τόποι.

## 2.2 Σύγκλιση ακολουθιών μιγαδικών αριθμών

Έστω $(z_n)$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ένας μιγαδικός αριθμός a είναι το **όριο** (limit) της ακολουθίας αυτής, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας δείκτης $N=N(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε κάθε όρος $z_n$ με δείκτη $n > N$ να ικανοποιεί την ανισότητα $|z_n - a| < \varepsilon$. Μια ακολουθία $(z_n)$ με όριο το σημείο a λέγεται ότι **συγκλίνει** (converges) προς τον a, γεγονός που δηλώνεται με

$$\lim z_n = a.$$

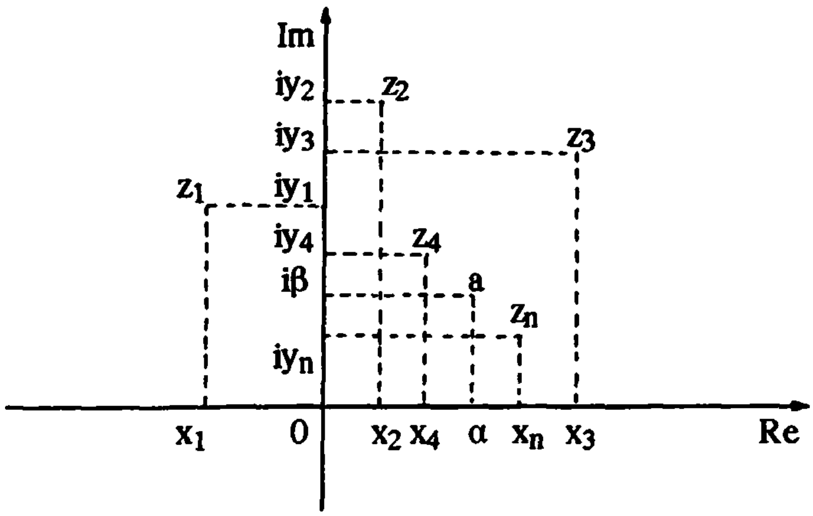
Δηλαδή

$$\lim z_n = a \text{ σημαίνει ότι } (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N=N(\varepsilon))\ n > N \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon.$$

Σε κάθε ακολουθία $(z_n)$ μιγαδικών αριθμών αντιστοιχούν δυο ακολουθίες $(x_n)$ και $(y_n)$ πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε $z_n = x_n + iy_n$, $n=1, 2, \ldots$ Έστω $a := \alpha + i\beta$ ένας μιγαδικός αριθμός. Παρατηρούμε ότι μια ακολουθία $(z_n)$ συγκλίνει προς τον μιγαδικό αριθμό a αν και μόνο αν η ακολουθία $(x_n)$ συγκλίνει προς τον α και η $(y_n)$ προς τον β. Συμβολικά

$$\lim z_n = a \Leftrightarrow \lim \mathrm{Re}\, z_n = \mathrm{Re}\, a \;\; \text{και} \;\; \lim \mathrm{Im}\, z_n = \mathrm{Im}\, a.$$

Η παρατήρηση αυτή επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τις τοπολογικές ιδιότητες του καρτεσιανού επιπέδου για να πάρουμε αντίστοιχες τοπολογικές ιδιότητες του μιγαδικού επιπέδου **C**.




**Η ακολουθία** $(z_n := x_n + iy_n)$ **συγκλίνει προς τον μιγαδικό αριθμό** $a := \alpha + i\beta$ **αν και μόνο αν η ακολουθία** $(x_n)$ **συγκλίνει προς τον** $\alpha$ **και η** $(y_n)$ **προς τον** $\beta$.

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη, δηλαδή το σύνολο των όρων της είναι φραγμένο, ενώ κάθε φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Η έννοια της βασικής ακολουθίας, ή ακολουθίας Cauchy ορίζεται ακριβώς ανάλογα με την περίπτωση ακολουθίας πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, μια ακολουθία $(z_n)$ λέμε ότι είναι **βασική**, ή **ακολουθία Cauchy,** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας δείκτης $N(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n > N(\varepsilon)$ και $m > N(\varepsilon)$ να ισχύει $| z_n - z_m | < \varepsilon$. Μια ακολουθία συγκλίνει, αν και μόνο αν αυτή είναι βασική.

Έστω $z_n := \varrho_n e^{i\varphi_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\varrho_n \to \varrho \;\; \text{και} \;\; \varphi_n \to \varphi.$$

Συνδυάζοντας την τριγωνομετρική με την εκθετική μορφή και λαμβάνοντας υπόψη τη συνέχεια των συναρτήσεων sin και cos παίρνουμε ότι

$$z_n \to \varrho\, e^{i\varphi}.$$

**Παράδειγμα 2.2.1**
Θ' αποδείξουμε ότι

$$\lim \frac{n-i}{n+1}=1.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Πρέπει να βρεθεί ένας δείκτης $N(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq N(\varepsilon)$ να ισχύει

$$\left|\frac{n-i}{n+1}-1\right|<\varepsilon.$$

Αλλά, παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{n-i}{n+1}-1\right|=\left|\frac{1+i}{n+1}\right|=\frac{\sqrt{2}}{n+1}<\frac{2}{n},$$

οπότε το πρώτο μέλος γίνεται μικρότερο του $\varepsilon$ για κάθε $n \geq N(\varepsilon)$, όπου

$$N(\varepsilon):=1+(\text{ακέραιο μέρος του } \frac{2}{\varepsilon}).$$ □

**Παράδειγμα 2.2.2**
Παρατηρούμε ότι αν $\lim z_n = a$, τότε και $\lim |z_n| = |a|$.
Πραγματικά, αν $\lim z_n = a$, τότε

$$\lim |z_n - a| = 0.$$

Αλλά, από την τριγωνική ιδιότητα της απόλυτης τιμής παίρνουμε ότι

$$\big|\, |z_n| - |a| \,\big| \leq |z_n - a|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

από όπου προκύπτει το παραπάνω συμπέρασμα. □

**Παράδειγμα 2.2.3**
Η ακολουθία μιγαδικών αριθμών

$$z_n := \operatorname{Arg}\frac{(-1)^n}{n},\ n = 1, 2, \ldots$$

δεν συγκλίνει, αφού αυτή γράφεται ως $z_n = 0$, αν n είναι άρτιος, και $z_n = \pi$, αν n είναι περιττός. □

**Παράδειγμα 2.2.4**

Αν $0 < \varrho < 1$, τότε η ακολουθία πραγματικών αριθμών

$$x_n := 1 + \varrho\cos\alpha + \varrho^2\cos 2\alpha + \ldots + \varrho^n\cos n\alpha,\ n = 1, 2, \ldots$$

συγκλίνει και θα υπολογίσουμε το όριό της.

Πραγματικά, θέτουμε

$$y_n := \varrho\sin\alpha + \varrho^2\sin 2\alpha + \ldots + \varrho^n\sin n\alpha,\ n = 1, 2, \ldots$$

και αναζητούμε το όριο της ακολουθίας $z_n := x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Θέτοντας

$$w := \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

παρατηρούμε ότι ο όρος $z_n$ γράφεται στη μορφή

$$z_n = 1 + w + w^2 + \ldots + w^n,$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ Αλλά έχουμε $|w| = \varrho < 1$, οπότε

$$z_n = \frac{1 - w^{n+1}}{1 - w} \to \frac{1}{1 - w} = \frac{1}{1 - \varrho\cos\alpha - i\varrho\sin\alpha} =$$

$$= \frac{1 - \varrho\cos\alpha + i\varrho\sin\alpha}{1 - 2\varrho\cos\alpha + \varrho^2}.$$

Επομένως ισχύει

$$\lim x_n = \operatorname{Re}\frac{1}{1-w} = \frac{1 - \varrho\cos\alpha}{1 - 2\varrho\cos\alpha + \varrho^2}.$$ □

**2.2.1** Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες μιγαδικών αριθμών που ορίζονται αντίστοιχα με τους παρακάτω τύπους:

α) $z_n := (1 + \frac{1}{n})e^{i\pi/n}$,

β) $z_n := (1+2i)^n$,

γ) $z_n := \frac{e^{in}}{n^2}$,

δ) $z_n := \frac{n+i}{2n-3i}$.

**2.2.2** Να εξεταστεί αν συγκλίνουν οι ακολουθίες που ορίζονται με τους παρακάτω αναδρομικούς τύπους:

α) $z_{n+1} := \frac{i}{2} z_n$, $z_1 := a$

β) $z_{n+1} := inz_n$, $z_1 := a$

γ) $z_{n+1} := \exp(i\theta_n)$, όπου $\theta_{n+1} := \frac{\theta_n}{1+2(\theta_n)}$, $\theta_1 := 1$

δ) $z_{n+1} := \frac{i}{n} \operatorname{Arg} z_n$, $z_1 := 1+i$.

**2.2.3** Αν α είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός και $z_n := x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\lim |z_n| = \alpha,$$

ν' αποδειχτεί ότι υπάρχει υπακολουθία $(z_{k_n})$ η οποία συγκλίνει. Τι μπορούμε να πούμε για το όριο της υπακολουθίας αυτής; Τι μπορούμε να πούμε για τη σύγκλιση των ακολουθιών $(x_n)$ και $(y_n)$;

**2.2.4** Έστω $(z_n)$ μια ακολουθία σημείων του μιγαδικού επιπέδου τέτοια ώστε

$$\sup |z_n| \leq 1$$

και για κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία $(z_{k_n})$ να ισχύει

$$\lim[\,|1- z_{k_n}|^2 - |z_{k_n}|^2] = -1.$$

Να εξετασθεί αν η ακολουθία αυτή συγκλίνει, και αν " ναι", να βρεθεί το όριό της.

## 2.3 Το κατ' εξοχήν σημείο ∞

Υποθέτουμε ότι $(z_n)$ είναι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε να ισχύει $|z_n| > M$ για κάθε δείκτη $n > N$, τότε λέμε ότι η ακολουθία $(z_n)$ **συγκλίνει** (converges) προς το λεγόμενο **κατ' εξοχήν** σημείο ή **άπειρο** (infinity) ∞, οπότε και γράφουμε

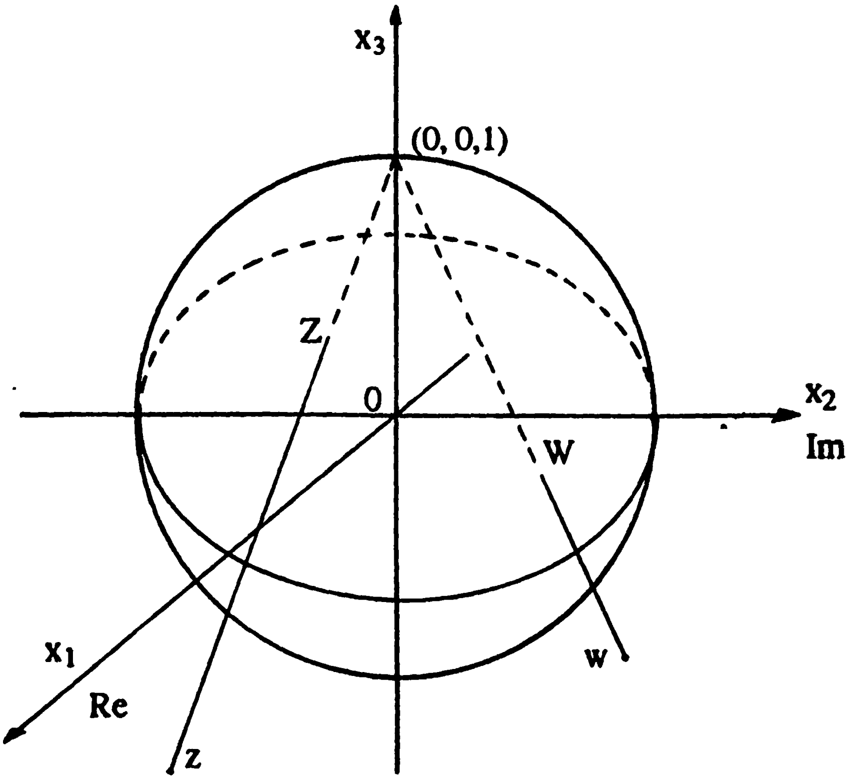
$$\lim z_n = \infty.$$

Αν στο μιγαδικό επίπεδο C ενσωματώσουμε το σημείο ∞, παίρνουμε το **επεκτεταμένο**, ή **συμπαγές μιγαδικό επίπεδο** (extended ή compact complex plane), ή απλά το **επεκτεταμένο επίπεδο**

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}.$$

Έστω $r > 0$. Το σύνολο όλων των σημείων z του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν την ανισότητα $|z| > r$, δηλαδή το σύνολο όλων των σημείων z που ανήκουν στο συμπλήρωμα του κλειστού κύκλου με κέντρο το 0 και με ακτίνα r, ονομάζεται **κυκλική περιοχή του** ∞ (neighborhood of the point at infinity) **με ακτίνα** r.

Βασιζόμενοι στη **στερεογραφική προβολή** (stereographic projection) του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου πάνω στη **σφαίρα του Riemann** (βλέπε σχήμα), ορίζουμε τη χορδική απόσταση των μιγαδικών αριθμών z και w να είναι ίση με την (ευκλείδεια) απόσταση των προβολών Z και W αντίστοιχα των σημείων αυτών πάνω στη σφαίρα του Riemann.




**Τα σημεία z και w του μιγαδικού επιπέδου απεικονίζονται στα σημεία Z και W της επιφάνειας της σφαίρας του Riemann. Η απόσταση των σημείων Z και W είναι η χορδική απόσταση των σημείων z και w.**

Χρησιμοποιώντας στοιχειώδη πράγματα από την ευκλείδεια γεωμετρία μπορούμε να βρούμε ότι η **χορδική απόσταση** των μιγαδικών αριθμών z και w είναι ίση με

$$\chi(z, w) := \begin{cases} \dfrac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, & \text{αν } z \text{ και } w \text{ είναι μιγαδικοί αριθμοί,} \\ \dfrac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}, & \text{αν } z \text{ μιγαδικός και } w = \infty. \end{cases}$$

Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο εφοδιασμένο με τη χορδική απόσταση (η οποία είναι μια μετρική) είναι ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος του οποίου υπόχωρος είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών εφοδιασμένο με την απόσταση $|\cdot - \cdot|$. Όλες οι τοπολογικές έννοιες του μιγαδικού επιπέδου μπορούν να αναφέρονται και στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο. Για παράδειγμα η **δακτυλική περιοχή** $\Delta(\infty, r_1, r_2)$ **του** $\infty$ είναι το σύνολο

$$\Delta(\infty, r_1, r_2) := \{z : r_1 < \chi(z, \infty) < r_2\}.$$

**Παράδειγμα 2.3.1**

Θα υπολογίσουμε τη χορδική απόσταση $\chi(1-i, 1+2i)$.

Προς τούτο παρατηρούμε ότι

$$|1-i-(1+2i)| = |-3i| = 3, \quad |1-i| = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad |1+2i| = \sqrt{5}.$$

Επομένως έχουμε

$$\chi(1-i, 1+2i) = \frac{2.3}{\sqrt{1+2}\sqrt{1+5}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \qquad \square$$

**2.3.1** Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(z_n := x_n + iy_n)$ συγκλίνει προς το σημείο $\infty$. Τι μπορούμε να πούμε για τη σύγκλιση των ακολουθιών $(x_n)$ και $(y_n)$;

**2.3.2** Να υπολογιστούν οι χορδικές αποστάσεις των σημείων

$$3i, \quad 1+4i, \quad 0, \quad 1-2i, \quad 1+i, \quad 1-5i, \quad \infty, \quad 1+2i, \quad -i, \quad 2-3i$$

όταν αυτά ληφθούν ανά δύο.

**2.3.3** Ν' αποδειχτεί ότι το supremum της συνάρτησης $\chi(.,.)$ ισούται με 2 και στη συνέχεια να βρεθούν δύο ακολουθίες μιγαδικών αριθμών $(z_n)$ και $(w_n)$ τέτοιες ώστε

$$\lim(z_n - w_n) = \infty \quad \text{και} \quad \lim\chi(z_n, 0) = \lim\chi(w_n, 0) = 2.$$

**2.3.4** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων z του μιγαδικού επιπέδου των οποίων η χορδική απόσταση από το 0 είναι ίση με $|z|$.

**2.3.5** Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός του διαστήματος (0, 2). Να βρεθεί το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών για τα οποία υπάρχει μιγαδικός z τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\chi(z, w) = \lambda\,|z - w|.$$

## 2.4 Σειρές μιγαδικών αριθμών

Η μελέτη της σύγκλισης και της απόλυτης σύγκλισης μιας **σειράς** (series) μιγαδικών αριθμών, δηλαδή σειράς της μορφής

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots =: \sum_{n=1}^{+\infty} z_n ,$$

όπου $z_n := x_n + iy_n$, πραγματοποιείται με τη βοήθεια σειρών πραγματικών αριθμών. Την παραπάνω σειρά τη γράφουμε και απλά ως $\sum z_n$.

**Παράδειγμα 2.4.1**

Θα αποδείξουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$$

συγκλίνει απόλυτα.

Προς τούτο παρατηρούμε ότι για κάθε n ισχύει $e^{in} = \cos n + i \sin n$ και επομένως η μελέτη σύγκλισης της αρχικής σειράς ανάγεται στη μελέτη σύγκλισης των δύο σειρών πραγματικών αριθμών

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Αλλά και οι δύο αυτές σειρές συγκλίνουν απόλυτα και επομένως και η δοθείσα σειρά συγκλίνει απόλυτα. □

**Παράδειγμα 2.4.2**
Θα εξετάσουμε αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i(\pi/n)}}{n}.$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι $e^{i(\pi/n)} = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$. Αλλά από τις δύο σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi/n)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{n}$$

συγκλίνει μόνο η δεύτερη (ενώ η πρώτη δεν συγκλίνει). Επομένως η δοθείσα σειρά μιγαδικών αριθμών δεν συγκλίνει. □

**2.4.1** Να εξεταστεί αν οι παρακάτω σειρές μιγαδικών αριθμών συγκλίνουν:

α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n\sqrt{n}}$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{(i\pi/n)}}{\sqrt{n}}$,

γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i\cosh n}{3^n}$, δ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{\sqrt{2^n}\; i\cosh n}$.

# 3 Μιγαδικές Συναρτήσεις

Εδώ θα γνωρίσουμε τις μιγαδικές συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής, δηλαδή συναρτήσεις που παίρνουν τιμές μιγαδικούς αριθμούς και το πεδίο ορισμού τους είναι κάποιο υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.

## 3.1 Μιγαδικές συναρτήσεις : Γενικά

Οι **μιγαδικές συναρτήσεις** (complex functions) παίρνουν τιμές εν γένει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών και είναι ορισμένες σε κάποιο υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.

Έστω f μια μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού $\Delta(f) \subseteq \mathbf{C}$. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z := x + iy$ η τιμή

$$w = f(z)$$

είναι ένας μιγαδικός αριθμός και άρα αυτός γράφεται στη μορφή $w = u + iv$. Τούτο σημαίνει ότι

$$u = \mathrm{Re}\, w = \mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Re}\, f(x + iy)$$

και

$$v = \mathrm{Im}\, w = \mathrm{Im}\, f(z) = \mathrm{Im}\, f(x + iy).$$

Δηλαδή οι u και v είναι πραγματικές συναρτήσεις των μεταβλητών x και y. Επομένως η συνάρτηση f γράφεται με τη μορφή

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

και λέμε ότι η πραγματική συνάρτηση u είναι το **πραγματικό μέρος** της f, ενώ η v είναι το **φανταστικό μέρος**. Έτσι η f μπορεί να προσδιοριστεί από τις δύο συναρτήσεις u και v οι οποίες έχουν κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο $\{(x, y):\ x + iy \in \Delta(f)\}$.

**Παράδειγμα 3.1.1**

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := z^2 - i\,\bar{z}.$$

Θέτοντας $z := x + iy$ και $f(z) =: w = u + iv$, βρίσκουμε

$$u + iv = (x + iy)^2 - i(x - iy) = x^2 + 2ixy - y^2 - ix - y = x^2 - y^2 - y + i(2xy - x),$$

οπότε η σχέση $w = f(z)$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα των σχέσεων

$$u = x^2 - y^2 - y \text{ και } v = 2xy - x. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 3.1.2**

Θα βρούμε την εικόνα του συνόλου $A := \{z : |z| = \varrho\}$, όπου $\varrho > 0$, μέσω της συνάρτησης f που ορίζεται με τον τύπο

$$f(z) := z^2 - i|z|^2.$$

Προς τούτο, όπως και στο Παράδειγμα 3.1.1, θέτουμε $u + iv := f(z) = f(x + iy)$, οπότε βρίσκουμε

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{και} \quad v = 2xy - x^2 - y^2 = -(x - y)^2.$$

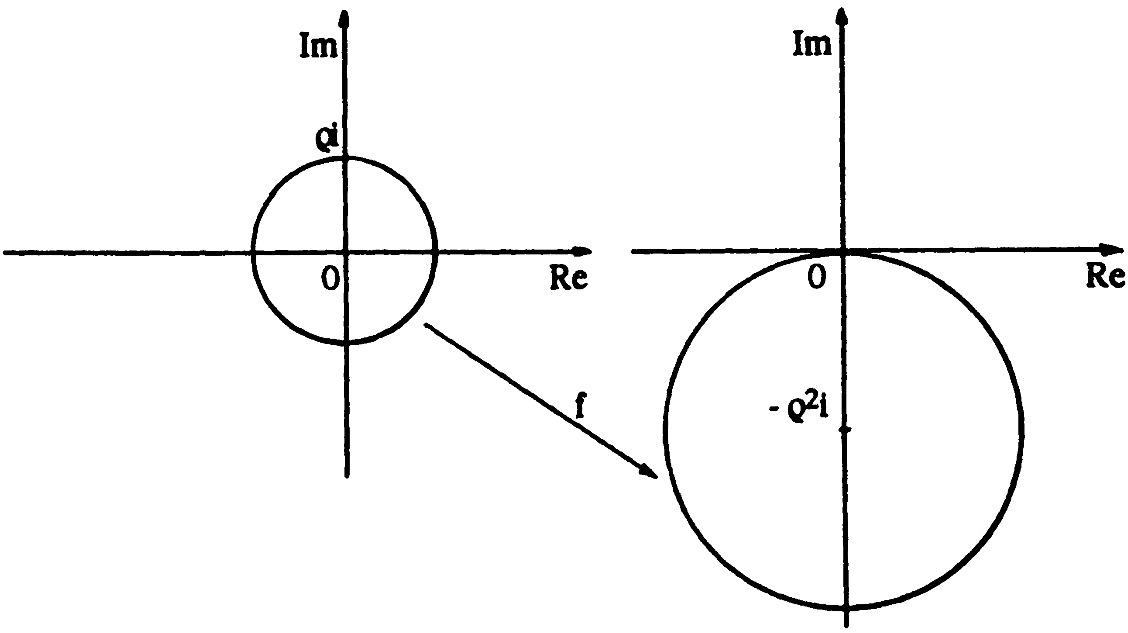
Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει εύκολα ότι οι μεταβλητές u και v πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$u^2 + v^2 = -2\varrho^2 v\,.$$

Άρα το σύνολο A απεικονίζεται στο σύνολο των σημείων (u, v) του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν τη σχέση

$$u^2 + (v + \varrho^2)^2 = \varrho^4$$

πράγμα που τελικά σημαίνει ότι η εικόνα του A μέσω της f είναι το σύνολο $B(-\varrho^2 i, \varrho^2)$, δηλαδή η περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο $-\varrho^2 i$ και ακτίνα ίση με $\varrho^2$. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η περίπτωση $\varrho > 1$.




**Η εικόνα του συνόλου $\{z : |z| = \varrho\}$ μέσω της συνάρτησης $f(z) := z^2 - ||z|^2$**
**είναι το σύνολο $\{z : |z + \varrho^2 i| = \varrho^2\}$**

□

**3.1.1** Μέσω της συνάρτησης με τύπο $f(z) := z^{-1}$ να βρεθούν οι εικόνες των παρακάτω συνόλων:

α) $\{z: |z| = \frac{1}{2}\}$, β) $\{z: \mathrm{Re}z = 0\} - \{0\}$,

γ) $\{z: |z| = z^2\} - \{0\}$, δ) $\{z: |z| + z = 0\} - \{0\}$,

ε) $\{z: \mathrm{Re}z = \mathrm{Im}z\} - \{0\}$, ς) $\{z: \mathrm{Arg}z = \frac{3\pi}{4}\}$,

ζ) $\{z: \mathrm{Arg}z^2 = -\frac{\pi}{2}\}$.

**3.1.2** Να προσδιοριστεί η εικόνα του συνόλου

$$\{z: \mathrm{Re}z = 0 \text{ ή } \mathrm{Im}z = 0\}$$

μέσω των απεικονίσεων που ορίζονται με τους παρακάτω τύπους:

α) $f(z) := \frac{z+1}{z-1}$, β) $f(z) := 1 + \frac{1}{z}$,

γ) $f(z) := z + \frac{1}{z}$, δ) $f(z) := z^2$.

**3.1.3** Να βρεθεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := z + z^2 + \frac{1}{z}.$$

## 3.2 Ρητές μιγαδικές συναρτήσεις

Η απλούστερη μορφή μιγαδικής συνάρτησης είναι αυτή της οποίας ο τύπος μπορεί να δοθεί με τη μορφή ενός **πολυωνύμου** (polynomial) όπως το

$$p(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

όπου οι συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί και $a_0 \neq 0$. Ο φυσικός αριθμός n είναι **ο βαθμός** του πολυωνύμου. Το πεδίο ορισμού κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο.

Το πηλίκο δύο συναρτήσεων που ορίζονται από πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (δηλαδή δεν έχουν κοινόν παράγοντα) ορίζει μια **ρητή συνάρτηση** (rational function), δηλαδή μια συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m}.$$

Κάθε ρητή συνάρτηση παίρνει (πεπερασμένες) μιγαδικές τιμές για κάθε μιγαδικό αριθμό z που δεν μηδενίζει τον παρονομαστή. Στις ρίζες του παρονομαστή η f παίρνει την τιμή $\infty$.

**Παράδειγμα 3.2.1**

Θα βρούμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της ρητής συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \frac{iz-1}{z+2i}.$$

Προς τούτο θέτουμε $z := x + iy$, οπότε έχουμε

$$f(z) = \frac{i(x+iy)-1}{x+iy+2i} = \frac{-(1+y)+ix}{x+i(y+2)} = \frac{-(1+y)+ix}{x+i(y+2)} \cdot \frac{x-i(y+2)}{x-i(y+2)} = \frac{x+i(x^2+y^2+3y+2)}{x^2+(y+2)^2}.$$

Επομένως το πραγματικό μέρος της f είναι το

$$u(x,y) := \frac{x}{x^2+(y+2)^2}$$

και το φανταστικό μέρος το

$$v(x,y) := \frac{x^2+y^2+3y+2}{x^2+(y+2)^2}.$$ □

**Παράδειγμα 3.2.2**

Θα αναλύσουμε το κλάσμα

$$\frac{3+i}{(z-2)(z+i)}$$

σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Προς τούτο θέτουμε

$$\frac{3+i}{(z-2)(z+i)} =: \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z+i}$$

και αναζητούμε τους μιγαδικούς αριθμούς a και b. Κάνοντας απαλειφή των παρονομαστών παίρνουμε την ταυτότητα

$$3 + i = a(z + i) + b(z - 2) = (a + b)z + ai - 2b,$$

απ' όπου προκύπτει το σύστημα

$$a + b = 0 \text{ και } ai - 2b = 3+i.$$

Επιλύοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε

$$a = -b = \frac{3+i}{2+i} = \frac{7-i}{5},$$

οπότε το αρχικό κλάσμα γράφεται ως

$$\frac{3+i}{(z-2)(z+i)} = \frac{7-i}{5}\frac{1}{z-2} - \frac{7-i}{5}\frac{1}{z+i}. \qquad \square$$

**3.2.1** Να βρεθούν τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των συναρτήσεων που ορίζονται αντίστοιχα με τους παρακάτω τύπους:

α) $f(z) := \frac{iz+1}{iz-1}$, β) $f(z) := \frac{\bar{z}}{z}$, γ) $f(z) := 3\bar{z} - iz^2$,     δ) $f(z) := i - 2z^3$,

ε) $f(z) := z^3 - i\,\bar{z}$.

**3.2.2** Να εξεταστεί για ποιές τιμές των μιγαδικών αριθμών a, b, c και d η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

είναι ένα- προς- ένα.

**3.2.3** Να αναλυθούν σε αθροίσματα απλών κλασμάτων τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\dfrac{2i}{(3-i)(3+4i)}$     β) $\dfrac{1+i}{(z-2i)(z+i)(2z-1)}$,

γ) $\dfrac{1}{(z-i)(z^2+4)}$,     δ) $\dfrac{5zi}{(z-3i)(z^2+9)}$.

## 3.3 Δυναμοσειρές στο μιγαδικό επίπεδο

Μια **δυναμοσειρά** (power series) με κέντρο το σημείο $z_0$ είναι μια σειρά μιγαδικών αριθμών της μορφής

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει στον ανοικτό δίσκο $B(z_0, R)$ του μιγαδικού επιπέδου με κέντρο το σημείο $z_0$, όπου η **ακτίνα σύγκλισης** (radius of convergence) R της δυναμοσειράς είναι ίση με

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Επίσης, στην περίπτωση κατά την οποία το όριο

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|}$$

υπάρχει, η ακτίνα σύγκλισης R μπορεί να δοθεί κι απ' τον τύπο

$$R := \lim \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Στη θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων σημαντικό ρόλο παίζουν αθροίσματα σειρών της μορφής

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n.$$

Στην περίπτωση αυτή θέτουμε

$$b_{-n} := a_n \text{ , για κάθε δείκτη } n$$

και συμφωνούμε ώστε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$$

να το γράφουμε στην ενοποιημένη μορφή

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n.$$

Η σειρά αυτή, η οποία λέγεται **σειρά Laurent**, συγκλίνει στην ανοικτή δακτυλική περιοχή $\Delta(z_0, r_1, r_2)$, όπου

$$r_1 := \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|} \qquad \text{και} \qquad r_2 := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}},$$

με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι $r_1 < r_2$. Οι τιμές των ακτίνων $r_1$ και $r_2$ μπορούν να βρεθούν και με τους τύπους

$$r_1 := \lim \frac{|b_{-n-1}|}{|b_{-n}|} \qquad \text{και} \qquad r_2 := \lim \frac{|b_n|}{|b_{n+1}|},$$

αρκεί τα όρια αυτά να υπάρχουν.

**Παράδειγμα 3.3.1**
Θα υπολογίσουμε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n} z^n.$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι οι συντελεστές της σειράς είναι οι μιγαδικοί αριθμοί

$$a_n = \frac{(-i)^n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της σειράς είναι η

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup |(-i)^n/n|^{1/n}} = \lim \sqrt[n]{n} = 1. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 3.3.2**
Θα βρούμε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1+i)^n (z-2i)^n.$$

Υπολογίζουμε πρώτα την απόλυτη τιμή του μιγαδικού αριθμού $(1+i)^n$. Πραγματικά έχουμε

$$|(1+i)^n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n = 2^{n/2}.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup (2^{n/2})^{1/n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει στον δίσκο $B(2i, \sqrt{2}/2)$. □

**Παράδειγμα 3.3.3**

Θα βρούμε τον δακτύλιο σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+2i)^n}{10^n}.$$

Η δυναμοσειρά αυτή έχει κέντρο το σημείο -2i. Επίσης ο πρώτος προσθετέος είναι η σειρά με συντελεστές

$$b_{-n} := (3+4i)^n .$$

Άρα έχουμε

$$r_1 = \lim\sup \sqrt[n]{|b_{-n}|} = |3+4i| = 5$$

κι έτσι η πρώτη σειρά συγκλίνει στον δακτύλιο $\Delta(-2i, 5, +\infty)$.

Ο δεύτερος προσθετέος έχει συντελεστές

$$b_n := \frac{1}{10^n},$$

οπότε

$$r_2 = \frac{1}{\lim\sup \sqrt[n]{|b_n|}} = 10.$$

Έτσι η δεύτερη σειρά συγκλίνει στον δίσκο $B(-2i, 10)$ και επομένως η αρχική σειρά συγκλίνει στον δακτύλιο $\Delta(-2i, 5, 10)$. □

**Παράδειγμα 3.3.4**

Θα προσδιορίσουμε τον δακτύλιο σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+1/2}}.$$

Παρατηρούμε ότι η σειρά αυτή έχει κέντρο το σημείο -1. Επίσης για την πρώτη σειρά οι συντελεστές είναι

$$b_{-n} := e^{in}.$$

Επομένως έχουμε

$$r_1 = \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|} = 1,$$

πράγμα που σημαίνει ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει στην ανοικτή δακτυλική περιοχή $\Delta(-1, 1, +\infty)$.

Για τη δεύτερη σειρά έχουμε

$$b_n := e^{-in-1/2}.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι η

$$r_2 = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}} = \lim e^{-1/2n} = 1$$

κι έτσι η δεύτερη σειρά συγκλίνει στον δίσκο $B(-1, 1)$. Επειδή η τομή των δύο συνόλων $\Delta(-1, 1, +\infty)$ και $B(-1, 1)$ είναι το κενό σύνολο, έπεται ότι το σύνολο σύγκλισης της σειράς είναι το κενό σύνολο, δηλαδή η δοθείσα σειρά δεν συγκλίνει πουθενά στο μιγαδικό επίπεδο. □

**3.3.1** Ν' αποδειχτεί ότι για κάθε στοιχείο z του ανοικτού δίσκου $B(0, 1)$ ισχύει

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

**3.3.2** Υποθέτουμε ότι οι δυναμοσειρές

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

έχουν ακτίνες σύγκλισης r και r' αντίστοιχα. Τι μπορούμε να πούμε για τις ακτίνες σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών;

α) $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n+b_n)z^n$, β) $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n-b_n)z^n$,

γ) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nb_nz^n$, δ) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}z^n$.

**3.3.3** Να προσδιοριστούν οι ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών:

α) $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in}(z-i)^n$, β) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-i}{1-2i}\right)^n$,

γ) $\sum_{n=0}^{+\infty} (i+n)^n z^n$, δ) $\sum_{n=0}^{+\infty} (in)^{-n} z^n$,

ε) $\sum_{n=0}^{+\infty} (i+n)z^n$, ζ) $\sum_{n=0}^{+\infty} i^n z^n$.

## 3.4. Η εκθετική μιγαδική συνάρτηση

Η **εκθετική μιγαδική συνάρτηση** (exponential complex function) $z \to e^z$ ή και $\exp(\cdot)$ ορίζεται ως το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\boxed{e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots}$$

και έχει πεδίο ορισμού ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο.

Η εκθετική μιγαδική συνάρτηση έχει τις εξής **ιδιότητες**:

α) $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$, όπου a, b είναι μιγαδικοί αριθμοί.

β) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ (k=0, ±1, ±2,...), δηλαδή $e^z$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2\pi i$.

γ) Αν $z = x + iy$, τότε $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ και άρα $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$.

**Παράδειγμα 3.4.1**
Θα υπολογίσουμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \exp[(\bar{z})^2].$$

Προς τούτο θέτουμε $z := x + iy$, οπότε παίρνουμε

$$f(z) = \exp[(x - iy)^2] = \exp[x^2 - y^2 - 2ixy] = \exp(x^2 - y^2)e^{-2ixy} =$$

$$= \exp(x^2 - y^2)[\cos 2xy - i\sin 2xy].$$

Επομένως

$$\mathrm{Re}f(z) = \exp(x^2 - y^2)\cos 2xy$$

και

$$\mathrm{Im}f(z) = -\exp(x^2 - y^2)\sin 2xy.$$ □

**Παράδειγμα 3.4.2**
Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $z := x + iy$ ισχύει

$$\lim \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Προς τούτο θα εφαρμόσουμε το συμπέρασμα που δίνεται στην τελευταία παρατήρηση της § 2.2. Θέτοντας

$$z_n := \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n,$$

παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|z_n| = \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{n/2}.$$

Αλλά έχουμε

$$[(1+\frac{x}{n})^2+(\frac{y}{n})^2]^{n/2} \geq [(1+\frac{x}{n})^2]^{n/2} = (1+\frac{x}{n})^n .$$

οπότε

(1) $$\liminf |z_n| \geq \lim (1+\frac{x}{n})^n = e^x.$$

Επίσης έχουμε και

$$\log [(1+\frac{x}{n})^2+(\frac{y}{n})^2]^{n/2} = \frac{n}{2}\log [(1+\frac{x}{n})^2+(\frac{y}{n})^2] =$$

$$= \frac{n}{2}\log [1+\frac{x^2+y^2}{n^2}+\frac{2x}{n}]$$

$$\leq \frac{n}{2}(\frac{x^2+y^2}{n^2}+\frac{2x}{n}) = \frac{x^2+y^2}{2n} + x,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\limsup \log |z_n| \leq x.$$

Αλλά η συνάρτηση log είναι αύξουσα, οπότε το πρώτο μέρος της ανισότητας αυτής ισούται με log lim sup $|z_n|$. Έτσι παίρνουμε ότι

$$\limsup |z_n| \leq e^x.$$

Η σχέση αυτή μαζί με την (1) συνεπάγονται ότι

$$\lim |z_n| = e^x.$$

Για τον υπολογισμό του ορίου του ορίσματος του $z_n$ παρατηρούμε ότι με εφαρμογή του γνωστού κανόνα L'Hospital για πραγματικές συναρτήσεις προκύπτει

$$\lim_{t\to+\infty} t \arctan\frac{y}{t+x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2y}{(x+t)^2+y^2} = y,$$

και κατά συνέπεια θα έχουμε και

$$\operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n \operatorname{Arg}\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right) =$$

$$= n \operatorname{Arc\,tan}\frac{y/n}{1+x/n} = n \operatorname{Arc\,tan}\frac{y}{n+x} \to y.$$

Τώρα, με βάση την τελευταία παρατήρηση της § 2.2 παίρνουμε το συμπέρασμα. □

**3.4.1** Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

α) $e^z + i = 0$, β) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$,

**3.4.2** Να βρεθεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \exp(-z) + \exp(\overline{z}).$$

**3.4.3** Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες:

α) $z_n := \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3n}\right)\right]$, β) $z_n := n \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right)$.

## 3.5 Οι τριγωνομετρικές μιγαδικές συναρτήσεις

Οι **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** (trigonometric functions) **ημίτονο** (sinus) sin και **συνημίτονο** (cosinus) cos ορίζονται αντίστοιχα από τις δυναμοσειρές

$$\boxed{\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots}$$

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

οι οποίες συγκλίνουν απόλυτα για κάθε τιμή του μιγαδικού αριθμού z και επομένως οι συναρτήσεις sin και cos έχουν πεδίο ορισμού ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο. Επίσης, αυτές είναι περιοδικές με περίοδο τον πραγματικό αριθμό 2π και έχουν μόνο (πραγματικές) ρίζες στα σημεία kπ και π/2 + kπ, αντίστοιχα, όπου k = 0, ±1, ±2, ...

Οι συναρτήσεις **εφαπτομένη** (tangent) tan και **συνεφαπτομένη** (cotangent) cot ορίζονται, όπως αναμένεται, με τους τύπους

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{και} \quad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Από αυτές η tan ορίζεται παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός των σημείων που μηδενίζουν το cos, δηλαδή εκτός των αριθμών της μορφής π/2 + kπ, όπου k = 0, ±1, ±2, ... Η συνάρτηση cot ορίζεται στο μιγαδικό επίπεδο εκτός των σημείων που μηδενίζουν το sin, δηλαδή εκτός των σημείων της μορφής kπ, όπου k = 0, ±1, ±2,...

Όλοι οι τύποι-ταυτότητες της τριγωνομετρίας που ισχύουν για τις γνωστές τριγωνομετρικές συναρτήσεις με μεταβλητή πραγματικό αριθμό εξακολουθούν να ισχύουν και για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής.

Τέλος, οι συναρτήσεις $e^z$, sinz και cosz συσχετίζονται μεταξύ τους με τον τύπο του **Euler**:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z,$$

από όπου παίρνουμε

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

**Παράδειγμα 3.5.1**

Θα υπολογίσουμε το μέτρο και το βασικό όρισμα του μιγαδικού αριθμού

$$\sin(2i).$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους, έχουμε

$$\sin(2i) = \frac{e^{i2i} - e^{-i2i}}{2i} = \frac{e^{-2} - e^{2}}{2i} = \frac{e^4 - 1}{2e^2} i,$$

οπότε

$$|\sin(2i)| = \frac{e^4 - 1}{2e^2} \quad \text{και} \quad \mathrm{Arg}\sin(2i) = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

**3.5.1** Να υπολογιστούν τα μέτρα και τα βασικά ορίσματα των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

α) $\tan \pi i$, β) $\sin(i \sin 1)$,

γ) $\cos(\pi + i \ln 2)$, δ) $\sin(1 + i\frac{\pi}{2})$,

ε) $\sin(\frac{\pi}{2} + i \ln 2)$, ς) $\tan(\frac{1+i}{1-i})$.

**3.5.2** Να υπολογιστεί το μέτρο του μιγαδικού αριθμού

$$\sin[\pi - i \ln(2 + \sqrt{5})].$$

**3.5.3** Να βρεθεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \sin(z + i) + \cos(z - i).$$

**3.5.4** Να επιλυθεί η εξίσωση

$$\left| \sin(\frac{\pi}{2} + ix) \right| = 1.$$

**3.5.5** Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία

$$z_n := n \sin(\frac{i}{n}),\ n = 1, 2, \ldots$$

**3.5.6** Να εξεταστεί αν οι παρακάτω σειρές μιγαδικών αριθμών συγκλίνουν:

α) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos in}{2^n}$, β) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos in^2}{3n^2}$,

γ) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n \sin in}{4^n}$, δ) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{2\sqrt{2}\cos in}$.

**3.5.7** Να προσδιοριστεί η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών:

α) $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\frac{\pi i}{n})(z+2i)^n$, β) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\sin^n(1+2in)}$.

**3.5.8** Να επιλυθεί η εξίσωση

$$\sin z = 5.$$

## 3.6. Οι υπερβολικές μιγαδικές συναρτήσεις

Οι **υπερβολικές μιγαδικές συναρτήσεις** (hyperbolic complex functions) sinh, cosh, tanh και coth ορίζονται με τους τύπους

**υπερβολικό ημίτονο** (hyperbolic sinus): $\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$,

**υπερβολικό συνημίτονο** (hyperbolic cosinus): $\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$,

**υπερβολική εφαπτομένη** (hyperbolic tangent): $\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}$,

**υπερβολική συνεφαπτομένη** (hyperbolic cotangent): $\coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z}$.

Το πεδίο ορισμού των δύο πρώτων υπερβολικών συναρτήσεων είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο. Η υπερβολική εφαπτομένη ορίζεται παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία που μηδενίζουν το cosh, δηλαδή εκτός από τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής $i(2k+1)\pi/2$, όπου k είναι τυχών ακέραιος. Η υπερβολική συνεφαπτομένη ορίζεται παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία που μηδενίζουν το sinh, δηλαδή εκτός από τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής $ik\pi$, όπου k είναι τυχών ακέραιος.

Οι τριγωνομετρικές και οι υπερβολικές συναρτήσεις συνδέονται με τους εξής τύπους:

| | |
|---|---|
| $\sin z = -i \sinh iz,$ | $\sinh z = -i \sin iz$ |
| $\cos z = \cosh iz,$ | $\cosh z = \cos iz,$ |
| $\tan z = -\,i \tan iz,$ | $\tanh z = -\,i \tan iz,$ |
| $\cot z = i \coth iz,$ | $\coth z = i \cot iz.$ |

**Παράδειγμα 3.6.1**

Θα επιλύσουμε την εξίσωση

$$\sin z = 2.$$

Προς τούτο θέτουμε $z := x + iy$, οπότε βρίσκουμε

$$2 = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με το σύστημα των εξισώσεων

$$\sin x \cosh y = 2, \qquad \cos x \sinh y = 0.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$\cos x = 0 \text{ ή } \sinh y = 0.$$

Αν ισχύει η σχέση

$$\sinh y = 0,$$

τότε $y = 0$ και από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι $\sin x = 2$, πράγμα αδύνατο. Άρα ισχύει $\cos x = 0$, οπότε

$$x = k\pi + \pi/2 \text{ (k ακέραιος)}.$$

Τότε, από την πρώτη εξίσωση, προκύπτει ότι

$$\cosh y = 2(-1)^k.$$

Αλλά $\cosh y > 0$, οπότε πρέπει $k = 2m$ και

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = 2, \text{ ή } e^y + e^{-y} = 4 \text{ , ή } e^{2y} - 4e^y + 1 = 0.$$

Θέτουμε $\lambda := e^y$ και επιλύουμε την εξίσωση

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0,$$

η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς $2 \pm \sqrt{3}$. Έτσι παίρνουμε

$$y = \log[2 \pm \sqrt{3}]$$

και επομένως η δοθείσα εξίσωση έχει λύσεις τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής

$$z = 2m\pi + \frac{\pi}{2} + i \log[2 \pm \sqrt{3}],$$

όπου m ακέραιος. □

**Παράδειγμα 3.6.2**

Θα υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos in) z^n.$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι οι συντελεστές της δυναμοσειράς είναι οι μιγαδικοί αριθμοί

$$a_n := \cos in = \frac{e^n + e^{-n}}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Επομένως η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι η

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{e^n + e^{-n}}{e^{n+1} + e^{-n-1}} = \lim \frac{1+e^{-2n}}{e+e^{-2n-1}} = \frac{1}{e} = e^{-1}. \qquad \square$$

**3.6.1** Να αποδειχτούν οι παρακάτω σχέσεις:

α) $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$,

β) $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$,

γ) $\tan(x + iy) = \dfrac{\tan x + i \tanh y}{1 - i \tan x \tanh y}$,

δ) $\sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$,

ε) $\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y - i \sinh x \sin y$,

ς) $\tanh(x + iy) = \dfrac{\tanh x + i \tan y}{1 - i \tanh x \tan y}$.

**3.6.2** Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία

$$z_n := \frac{\cosh(in)}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

## 3.7 Η λογαριθμική μιγαδική συνάρτηση

Η **λογαριθμική μιγαδική συνάρτηση** (logarithmic complex function) log ή ln ορίζεται να είναι η αντίστροφη της εκθετικής μιγαδικής συνάρτησης και δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{\log z := \log|z| + i \arg z = \log|z| + i\, \mathrm{Arg}\, z + 2k\pi i \quad (k=0, \pm1, \pm2, \ldots)}$$

όπου Argz είναι το βασικό όρισμα του μιγαδικού αριθμού z. Ας σημειωθεί ότι η τιμή logz **δεν ορίζεται για** $z = 0$, δηλαδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης log είναι το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών εκτός του 0. Η συνάρτηση αυτή είναι πλειότιμη και η **πρωτεύουσα** ή **κύρια τιμή** της (principal value) είναι η συνάρτηση

$$\boxed{\mathrm{Log}\, z := \log|z| + i\, \mathrm{Arg}\, z,}$$

Προφανώς ισχύει ότι

$$\mathrm{Log}\, z = \log z + 2k\pi i \quad (k=0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Επίσης ισχύουν οι σχέσεις

$$\log (z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$$

και

$$\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2.$$

**Παράδειγμα 3.7.1**

Θα επιλύσουμε την εξίσωση

$$\sin z = 2,$$

(βλ. και Παράδειγμα 3.6.1). Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ημιτόνου η δοθείσα σχέση γράφεται ως

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i.$$

Θέτοντας $\zeta := e^{iz}$ προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\zeta^2 - 4i\zeta - 1 = 0.$$

Οι ρίζες αυτής είναι οι αριθμοί

$$\zeta := 2i \pm i\sqrt{3},$$

από όπου παίρνουμε ότι

$$iz = \log(2i \pm i\sqrt{3}).$$

Έτσι τελικά η λύση της αρχικής εξίσωσης είναι η

$$z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - i\log(2 \pm \sqrt{3}),$$

που προφανώς ταυτίζεται με την τιμή που βρέθηκε στο παράδειγμα 3.6.1. □

**Παράδειγμα 3.7.2**

Θα γραφεί στην αλγεβρική του μορφή ο αριθμός

$$\mathrm{Log}\,(1 + 2i - e^{i}).$$

Παρατηρούμε ότι η αλγεβρική μορφή του μιγαδικού αριθμού $1+2i-e^{i}$ είναι

$$1+2i-e^{i} = 1+2i-\cos 1 - i\sin 1 = (1-\cos 1) + i(2-\sin 1),$$

οπότε ο βασικός κλάδος του λογαρίθμου του ισούται με

$$\mathrm{Log}(1+2i-e^{i}) = \log|1+2i-e^{i}| + i\,\mathrm{Arg}(1+2i-e^{i}) =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left((1-\cos 1)^2 + (2-\sin 1)^2\right) + i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2-\sin 1}{1-\cos 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(6 - 2\cos 1 - 2\sin 1\right) + i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2-\sin 1}{1-\cos 1}. \quad \square$$

**3.7.1** Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι των παρακάτω αριθμών:

$$-1-i, \quad \frac{\pi}{2}+i\ln 2, \quad 3-2i+e^{2i}, \quad \cos(1-i), \quad \sin(e^{i}), \quad \mathrm{Log}(1+i).$$

## 3.8. Η μιγαδική συνάρτηση δύναμη

Η μιγαδική **συνάρτηση δύναμη** (power complex function) $z \to z^{a}$, όπου a είναι ένας μιγαδικός αριθμός ορίζεται με τον τύπο

$$\boxed{z^{a} := e^{a\ln z}.}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι πλειότιμη, και η πρωτεύουσα τιμή της (ή ο βασικός κλάδος της) είναι η

$$\boxed{\{z^{a}\} := e^{a\mathrm{Log}z},}$$

η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών.

Η γενική **εκθετική μιγαδική συνάρτηση** (general exponential complex function) $z \to a^{z}$ (a είναι ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός) ορίζεται με τον τύπο

$$\boxed{a^{z} := e^{z\log a}.}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι επίσης πλειότιμη και η πρωτεύουσα τιμή της (ή ο βασικός κλάδος της) είναι η

$$\boxed{\{a^{z}\} := e^{z\mathrm{Log}a},}$$

η οποία ορίζεται παντού στο μιγαδικό επίπεδο.

**Παράδειγμα 3.8.1**

Θα γραφεί στην αλγεβρική του μορφή ο βασικός κλάδος της δύναμης

$$z = i^{i}.$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι

$$\{i^i\} = e^{iLog(i)} = e^{i(\log|i| + iArg i)} = e^{i(0 + i\pi/2)} = e^{-\pi/2}. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 3.8.2**

Αν $\{a^b\}$ παριστάνει τον βασικό κλάδο της δύναμης $a^b$, θα υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \{i^i\}\{(2i)^{(2i)}\}\{(3i)^{(3i)}\}\ldots\{(ni)^{(ni)}\}.$$

Για τον σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν ο βασικός κλάδος της δύναμης $(\nu i)^{(\nu i)}$ είναι ο

$$\{(\nu i)^{(\nu i)}\} = \exp(\nu i \ \ Log\,(\nu i)\,) = \exp(\,\nu i\,[\,\log \nu + i\ Arg\,(\nu i)]\,)$$

$$= \exp(\nu i\,[\,\log \nu + i\frac{\pi}{2}\,]\,) = \exp(-\,\nu\frac{\pi}{2} + i\nu \log \nu),$$

οπότε αυτός έχει μέτρο ίσο με

$$|\{(\nu i)^{(\nu i)}\}| = \exp(-\,\nu\frac{\pi}{2}).$$

Επομένως το δοθέν γινόμενο έχει μέτρο ίσο με

$$|\{i^i\}\{(2i)^{(2i)}\}\{(3i)^{(3i)}\}\ldots\{(ni)^{(ni)}\}| = \exp\big(-\,[1+2+3+\ldots+n]\,\frac{\pi}{2}\big),$$

το οποίο τείνει προς το 0 όταν ο φυσικός αριθμός n τείνει προς το άπειρο. Το γεγονός τούτο, προφανώς, συνεπάγεται ότι το ζητούμενο όριο είναι το 0. □

**Παράδειγμα 3.8.3**

Θα λυθεί η εξίσωση

$$\{(2i)^z\} = 1 + i\,.$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$e^{zLog(2i)} = 1 + i,$$

δηλαδή την

$$e^{z[\log 2 + i(\pi/2)]} = 1 + i.$$

Θέτουμε $z := x + iy$ οπότε βρίσκουμε το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων

$$\exp[x \log 2 - y \frac{\pi}{2}] \cos[y \log 2 + x \frac{\pi}{2}] = 1$$

$$\exp[x \log 2 - y \frac{\pi}{2}] \sin[y \log 2 + x \frac{\pi}{2}] = 1.$$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει η εξίσωση

$$y \log 2 + x \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

οπότε αντικαθιστώντας στη μία από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$x \log 2 - y \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \log 2.$$

Επιλύουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων και τελικά έχουμε τη λύση

$$x := \frac{1}{4} \frac{\log^2 2 + \frac{\pi^2}{4} + 2\mu\pi^2}{\log^2 2 + \frac{\pi^2}{4}}$$

και

$$y := -\frac{1}{2\pi} \log 2 \frac{\log^2 2 + \frac{\pi^2}{4} + 2\mu\pi^2}{\log^2 2 + \frac{\pi^2}{4}},$$

όπου μ είναι τυχών ακέραιος αριθμός. □

**3.8.1** Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι των εξής αριθμών:

α) $i^i(1+i)(1+2i)$, β) $(2-i)^i$,

γ) $(1-i)^{3-2i}$, δ) $2^{3i-1}$.

**3.8.2** Αν $0<x, y<\pi/2$, να βρεθεί το φανταστικό μέρος του βασικού κλάδου της δύναμης $(\sin(x+iy))^i$.

**3.8.2** Να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας των βασικών κλάδων της ακολουθίας των δυνάμεων

$$(1+i)^{ni}.$$

## 3.9 Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές μιγαδικές συναρτήσεις

Οι λεγόμενες **αντίστροφες τριγωνομετρικές μιγαδικές συναρτήσεις** (inverse trigonometric complex functions) arcsin, arccos, arctan και arccot, ορίζονται αντίστοιχα ως οι αντίστροφες συναρτήσεις των sin, cos, tan και cot. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι $\sin w = z$, τότε w είναι το τόξο ημιτόνου του z και γράφουμε $w = \arcsin z$. Όλες αυτές οι συναρτήσεις είναι πλειότιμες και μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια της λογαριθμικής συνάρτησης ως εξής:

$$\arcsin z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm i\mathrm{Log}(z \pm i\sqrt{1-z^2}),$$

$$\arccos z = 2k\pi \pm i\mathrm{Log}(z \pm i\sqrt{1-z^2}),$$

$$\arctan z = -\frac{i}{2}\log\frac{1+iz}{1-iz},$$

$$\mathrm{arccot} z = -\frac{i}{2}\log\frac{z+i}{z-i}.$$

Οι **πρωτεύουσες τιμές** Arcsin, Arccos, Arctan και Arccot αντίστοιχα των συναρτήσεων αυτών ορίζονται μέσω των πρωτευουσών τιμών των αντίστοιχων λογαριθμικών συναρτήσεων.

**Παράδειγμα 3.9.1**
Θεωρούμε την εξίσωση

$$\sin z = 2$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\arcsin 2 = z.$$

Με βάση τους παραπάνω τύπους έχουμε

$$z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{Log}\,(2 + i\sqrt{1-2^2}) = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + i\log(2 \pm \sqrt{3}),$$

δηλαδή το ίδιο συμπέρασμα που βρήκαμε και στα Παραδείγματα 3.6.1, 3.7.1. □

**Παράδειγμα 3.9.2**
Θα γραφεί στην αλγεβρική του μορφή ο μιγαδικός αριθμός

$$\arctan(1-i).$$

Προς τούτο εφαρμόζουμε τον παραπάνω σχετικό τύπο, οπότε προκύπτει

$$\arctan(1-i) = -\frac{i}{2}\log\frac{1+i(1-i)}{1-i(1-i)} = -\frac{i}{2}\log\frac{2+i}{-i} = -\frac{i}{2}\log(-1+2i).$$

Εξάλλου έχουμε

$$\log(-1+2i) = \log|-1+2i| + i\arg(-1+2i) = \log\sqrt{5} + i(\pi - \mathrm{Arctan}2 + 2k\pi) =$$

$$= \frac{1}{2}\log 5 + i(2k+1)\pi - i\,\mathrm{Arctan}2.$$

Έτσι, τελικά,

$$\arctan(1-i)=\frac{1}{2}\left(-\mathrm{Arctan}2+2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)-i\,\frac{1}{4}\log 5,$$

όπου k είναι ένας οποιοσδήποτε ακέραιος. □

**3.9.1** Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $4\cos z+5=0$, β) $\sin z=\pi i$,

γ) $\sin z=i\dfrac{\pi}{2}$, δ) $\tan z-\pi i=0$,

ε) $e^{ix}=\cos\pi x$ (x είναι πραγματικός αριθμός).

# 4 Παράγωγοι Μιγαδικών Συναρτήσεων

Οι γνωστές έννοιες του ορίου και της παραγώγου πραγματικής συνάρτησης επεκτείνονται και στις μιγαδικές συναρτήσεις. Ιδιαίτερα η παράγωγος είναι μια πολύ "ισχυρή" έννοια και, όπως θα δούμε αργότερα, κάθε παραγωγίσιμη μιγαδική συνάρτηση έχει πλούσιες ιδιότητες.

## 4.1 Όριο μιγαδικής συνάρτησης

Υποθέτουμε ότι f είναι μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη τουλάχιστον σε μια δακτυλική περιοχή της μορφής $\Delta(z_0, 0, r)$. Ένας μιγαδικός αριθμός L είναι το **όριο** (limit) της f στο σημείο $z_0$, αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε αντιστοιχεί ένας αριθμός $\delta = \delta(\varepsilon)$ θετικός, τέτοιος ώστε για όλα τα σημεία z της δακτυλικής περιοχής $\Delta(z_0, 0, r)$, που ικανοποιούν τη συνθήκη $0 < |z - z_0| < \delta$, να έχουμε $|f(z) - L| < \varepsilon$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

Ανάλογα δίνεται και ο ορισμός του ορίου της f όταν $L = \infty$ και/ ή $z_0 = \infty$.

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $(z_n)$ του δακτυλίου $\Delta(z_0, 0, r)$, που συγκλίνει προς το σημείο $z_0$, η αντίστοιχη ακολουθία $(f(z_n))$ των τιμών της συνάρτησης συγκλίνει προς το σημείο L του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου, αν και μόνο αν ισχύει

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

Το παραπάνω γεγονός λαμβάνεται πολλές φορές και ως ορισμός του ορίου μιγαδικής συνάρτησης.

Αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει την παράσταση

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

και επίσης ότι για κάποιο σημείο $z_0 := x_0 + iy_0$ ισχύει

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

όπου

$$L := a + ib,$$

τότε ισχύουν και οι σχέσεις

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = a \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = b.$$

Όλες οι γνωστές ιδιότητες των ορίων πραγματικών συναρτήσεων ισχύουν και για το όριο μιγαδικής συνάρτησης. Πραγματικά, αν έχουμε

$$\lim_{z \to z_0} f(z) =: A \quad \text{και} \quad \lim_{z \to z_0} g(z) =: B,$$

τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

α) $\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B,$

β) $\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = A \cdot B,$

γ) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}$, αν $B \neq 0$

με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι οι παραπάνω πράξεις είναι επιτρεπτές.

Η έννοια της συνέχειας μπορεί εύκολα να δοθεί ως συνήθως με τη βοήθεια του ορίου της συνάρτησης. Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι **συνεχής** (continuous) σε ένα σημείο a του πεδίου ορισμού της, αν ισχύει

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(a),$$

ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε σημείο z του πεδίου ορισμού της f με $|z - a| < \delta$ να ισχύει η ανισότητα $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$.

Μπορεί να διαπιστωθεί ότι πάνω σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

α) Όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις.

β) Ο κάθε κλάδος της εκθετικής συνάρτησης $z \to a^z$.

γ) Οι δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις sin και cos.

δ) Οι δύο υπερβολικές συναρτήσεις sinh και cosh.

ε) Κάθε συνάρτηση η οποία προέρχεται από τη σύνθεση, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό συναρτήσεων όπως οι παραπάνω.

Επίσης οι βασικοί κλάδοι των συναρτήσεων arg και log, δηλαδή οι συναρτήσεις που παριστάνονται με Arg και Log αντίστοιχα, είναι συνεχείς σε κάθε μιγαδικό αριθμό ο οποίος δεν βρίσκεται πάνω στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα, δηλαδή αυτές είναι συνεχείς στο σύνολο

$$\{z : z + |z| \neq 0\}.$$

**Παράδειγμα 4.1.1**

Για να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{z\to \pi/4} \frac{\cos 2z}{\cosh iz + i\sinh iz}$$

παρατηρούμε ότι

$$\frac{\cos 2z}{\cosh iz + i\sinh iz} = \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\cos z - \sin z} = \cos z + \sin z.$$

Τώρα, λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων cos και sin, το ζητούμενο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{z \to \pi/4} (\cos z + \sin z) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 4.1.2**

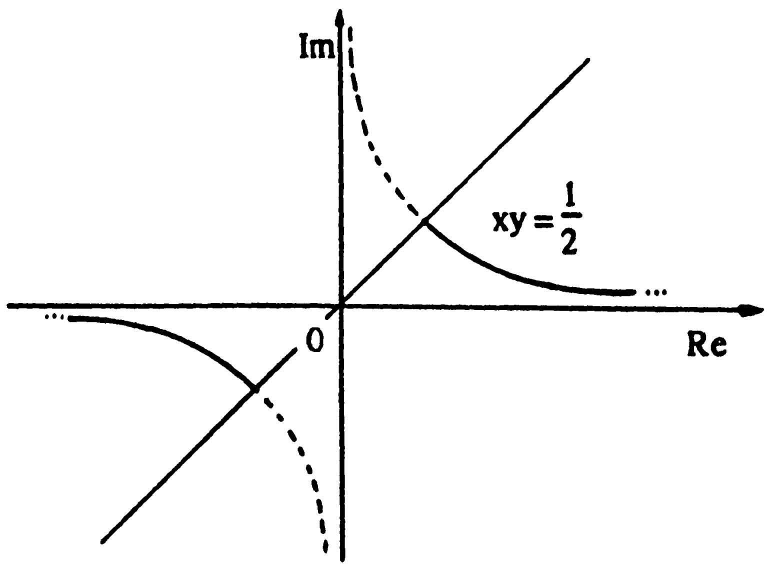
Θα προσδιορίσουμε το σύνολο των σημείων συνέχειας της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \mathrm{Arg}(i - z^2).$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι, όπως είναι γνωστό, η συνάρτηση Argζ είναι συνεχής παντού εκτός απ' τα σημεία ζ που ικανοποιούν τη σχέση $\zeta + |\zeta| = 0$. Έτσι, η δοθείσα συνάρτηση είναι συνεχής παντού εκτός απ' τα σημεία z για τα οποία ισχύει

$$i - z^2 + |i - z^2| = 0.$$

Επιλύοντας την εξίσωση αυτή βρίσκουμε, τελικά, ότι το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι συνεχής είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία του συνόλου όλων των μιγαδικών αριθμών $z := x + iy$ που ικανοποιούν τις σχέσεις $2xy = 1$ και $x^2 \geq y^2$




**Η συνάρτηση με τύπο $f(z) := \mathrm{Arg}(i - z^2)$ είναι συνεχής παντού εκτός από τα σημεία της συνεχούς γραμμής.**

$\square$

**Παράδειγμα 4.1.3**

Θέλουμε να υπολογίσουμε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \bar{z} + \mathrm{Log}(z\bar{z} + \bar{z})$$

είναι συνεχής.

Προς τούτο παρατηρούμε ότι ο πρώτος προσθετέος ορίζει μία συνάρτηση συνεχή σε κάθε σημείο του μιγαδικού επιπέδου. Ο δεύτερος προσθετέος, δηλαδή η συνάρτηση

$$z \rightarrow \mathrm{Log}(z\bar{z} + \bar{z})$$

δεν είναι συνεχής στα σημεία για τα οποία ισχύει $\zeta + |\zeta| = 0$, όπου $\zeta := z\bar{z} + \bar{z}$. Από την τελευταία σχέση έχουμε

$$z\bar{z} + \bar{z} + |z\bar{z} + \bar{z}| = 0,$$

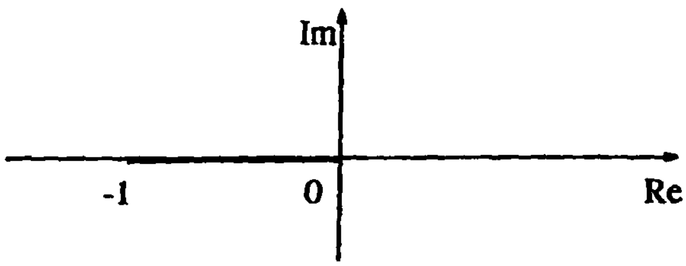
ή

$$x^2 + y^2 + x - iy + |x^2 + y^2 + x - iy| = 0,$$

από όπου προκύπτει ότι $y = 0$ και $x^2 + x + |x^2 + x| = 0$, ή $y = 0$ και $x^2 + x \leq 0$, δηλαδή

$$y = 0 \text{ και } -1 \leq x \leq 0.$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι παντού συνεχής στο μιγαδικό επίπεδο εκτός απ' τα σημεία του πραγματικού άξονα που ικανοποιούν την ανισότητα $-1 \leq x \leq 0$, βλ. σχήμα.




**Η συνάρτηση με τύπο $f(z) := \bar{z} + \mathrm{Log}(z\bar{z} + \bar{z})$ είναι συνεχής παντού εκτός από τα σημεία της παχειάς γραμμής.**

□

**4.1.1** Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2+2iz-1}{2z+1}$, β) $\lim\limits_{z\to -i\pi/2z_0}\dfrac{e^{2z}+1}{e^z+1}$,

γ) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{\sinh iz}$, δ) $\lim\limits_{z\to 0}\ \mathrm{Im}(z^2+2z+e^z)$.

**4.1.2** Με χρήση του ε- δ- ορισμού ν' αποδειχτεί ότι οι συναρτήσεις με τύπους

α) $f(z) := z^3$, β) $f(z) := \mathrm{Re}\,(z^2)$,

γ) $f(z) := \mathrm{Im}\, z$, δ) $f(z) := z\sin z$,

είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του μιγαδικού επιπέδου.

**4.1.3** Να βρεθεί το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου στα οποία οι συναρτήσεις με τύπους

α) $f(z) := \mathrm{Arg}(1-z^2)$,

β) $f(z) := \mathrm{Arg}(1+i-z^2)$,

γ) $f(z) := 2+3i-z^2+\mathrm{Log}(2+3i-z^2)$

είναι συνεχείς.

## 4.2 Καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο

Μία **καμπύλη** (curve) $\gamma$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι η συνεχής εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο ενός διαστήματος $I := [\alpha, \beta]$ της πραγματικής ευθείας. Δηλαδή, αν

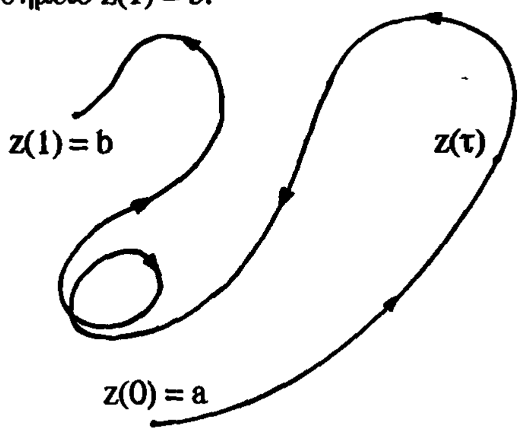
$$z(t) := x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta]$$

είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε το σύνολο των τιμών της είναι μια καμπύλη γ στο μιγαδικό επίπεδο. Η ίδια η συνάρτηση z( . ) λέγεται **παραμετρική παράσταση** (parametric representation) της καμπύλης γ.

Αν $t_1 < t_2$, τότε το σημείο $z(t_1)$ **προηγείται** του σημείου $z(t_2)$. Με τη διάταξη αυτή πάνω στα σημεία της γ ορίζεται **ο προσανατολισμός** ή **η φορά** (orientiation) της καμπύλης γ η οποία στο σχήμα δηλώνεται με ένα βέλος. Το σημείο z(α) είναι το **αρχικό** σημείο (initial point) της καμπύλης και το z(β) είναι το **τελικό** της σημείο (final point). Αν αλλάξουμε τη φορά της καμπύλης γ παίρνουμε την καμπύλη - γ, η οποία έχει αρχικό σημείο το z(β) και τελικό το z(α). Αν το τελικό σημείο ταυτίζεται με το αρχικό τότε η καμπύλη είναι **κλειστή** (closed curve).

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, μια καμπύλη είναι απλά ένας **δρόμος** στο επίπεδο τον οποίο διανύουμε ξεκινώντας από το αρχικό σημείο της καμπύλης μέχρι το τελικό. Ο τρόπος που διανύεται ο δρόμος αυτός φαίνεται από την παραμετρική παράσταση της καμπύλης.

Για παράδειγμα, αν για την καμπύλη γ δίνεται η παραμετρική παράσταση $z = z(t), t \in [0, 1]$, τότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτή περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μετακινούμαστε πάνω στην καμπύλη διανύοντάς την από το αρχικό σημείο μέχρι το τελικό. Δηλαδή, στον χρόνο $t = 0$ είμαστε στο αρχικό σημείο $z(0) =: a$, στον τυχαίο χρόνο $t = \tau$ (για ένα οποιοδήποτε $\tau \in [0, 1]$) είμαστε στο σημείο $z(\tau)$ και στον χρόνο $t = 1$ φτάνουμε στο τελικό σημείο $z(1) = b$.




**Η καμπύλη είναι ένας δρόμος. Από το αρχικό σημείο a φτάνουμε στο τελικό σημείο b, διανύοντας την καμπύλη με τρόπο που καθορίζεται από την παραμετρική παράσταση.**



Αν η συνάρτηση $z(t), t \in [\alpha, \beta)$ είναι ένα- προς- ένα, τότε η καμπύλη γ είναι **απλή** (simple curve). Μια απλή κλειστή καμπύλη λέγεται **κλειστή καμπύλη του Jordan**. Προφανώς, η καμπύλη γ του παραπάνω σχήματος δεν είναι απλή.

**Παράδειγμα 4.2.1**

Θα περιγραφεί η καμπύλη γ με παραμετρική παράσταση τη συνάρτηση

$$z(t) := t+2+it^2, \quad t \in [0, 1].$$

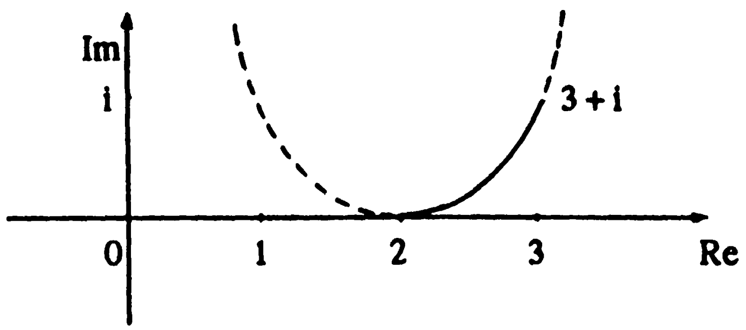
Προς τούτο παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in [0, 1]$ ισχύει

$$\text{Re}z(t) = x = t + 2 \;\; \text{και} \;\; \text{Im}z(t) = y = t^2.$$

Απ' την πρώτη απ' αυτές προκύπτει ότι όταν το t μεταβάλλεται στο διάστημα [0,1], τότε το x μεταβάλλεται στο διάστημα [2, 3]. Τώρα, μεταξύ των δύο αυτών σχέσεων απαλείφουμε το t, οπότε προκύπτει η σχέση

$$y = (x - 2)^2,$$

όπου η μεταβλητή x παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα [2, 3]. Επομένως η καμπύλη γ είναι το συνεχές τμήμα της παραβολής, όπως στο ακόλουθο σχήμα:




**Η καμπύλη γ είναι το συνεχές τμήμα της παραβολής $y = (x - 2)^2$**

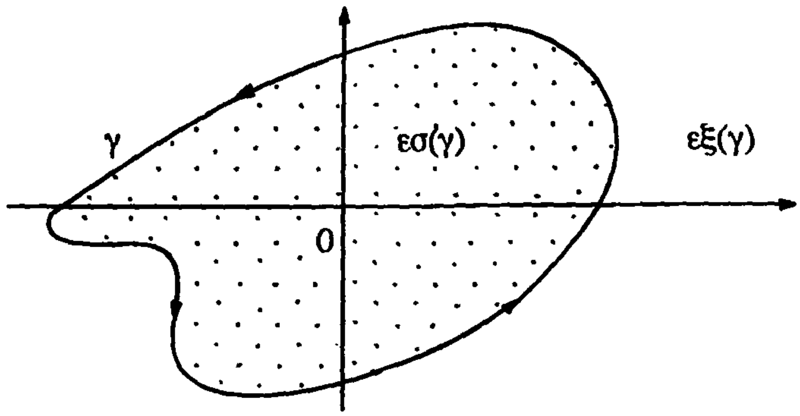
□

Κάθε κλειστή καμπύλη χωρίζει το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο σε ξένα ανά δύο συνεκτικά σύνολα. Το συνεκτικό εκείνο σύνολο που περιέχει το κατ' εξοχήν σημείο ∞ είναι το **εξωτερικό** (exterior) της καμπύλης και παριστάνεται με το σύμβολο

$$εξ(γ).$$

Αν η καμπύλη είναι και απλή, δηλαδή αν η γ είναι μια **κλειστή καμπύλη του Jordan,** τότε αυτή χωρίζει το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο σε δυο συνεκτικά υποσύνολα, το εξ(γ) και το **εσωτερικό** (interior) της γ που παριστάνεται με το σύμβολο

$$εσ(γ).$$




**Κάθε κλειστή καμπύλη του Jordan, χωρίζει το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο σε δυο συνεκτικά υποσύνολα το εξ(γ) και το εσ(γ).**

Μια **αναπαραμέτρηση** (reparametrization) της καμπύλης γ είναι μια καμπύλη γ* η οποία ταυτίζεται με την καμπύλη γ ως σύνολο σημείων του μιγαδικού επιπέδου και έχει παραμετρική παράσταση

$$z^*(s) := z(t),$$

όπου η

$$t = \psi(s), \ \ s \in [\alpha^*, \beta^*],$$

είναι μία αμφιμονοσήμαντη συνεχής συνάρτηση του $[\alpha^*, \beta^*]$ επί του $[\alpha, \beta]$. Έτσι, επειδή πρόκειται για καμπύλες, θα πρέπει το αρχικό σημείο και το τελικό σημείο της καμπύλης γ* να ταυτίζονται με τα αντίστοιχα σημεία της καμπύλης γ. Τούτο σημαίνει ότι θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha = \psi^*(\alpha^*) \quad \text{και} \quad \beta = \psi^*(\beta^*)$$

και επομένως

$$z(\alpha) = z^*(\alpha^*) \qquad \text{και} \qquad z(\beta) = z^*(\beta^*).$$

**Παράδειγμα 4.2.2**

Δίνεται μία καμπύλη γ με παραμετρική παράσταση

$$z = z(t),\ t \in [-1, 8].$$

Θα βρούμε μια αναπαραμέτρηση $\gamma^*$ της καμπύλης αυτής με παραμετρική παράσταση $z = z^*(s),\ s \in [1, 4]$.

Αν βρούμε μια συνεχή συνάρτηση $t = \psi(s),\ s \in [1, 4]$, η οποία θα απεικονίζει αμφιμονοσήμαντα το διάστημα $[1, 4]$ επί του διαστήματος $[-1, 8]$, κατά τέτοιον τρόπο ώστε $\psi(1) = -1$ και $\psi(4) = 8$, τότε η συνάρτηση

$$z = z(\psi(s)) = z^*(s),\ s \in [1, 4]$$

είναι μία τέτοια αναπαραμέτρηση. Άρα, προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα, θα πρέπει να βρούμε μια τέτοια συνάρτηση ψ. Προς τούτο μπορούμε να ακολουθήσουμε πολλούς τρόπους.

*1ος τρόπος*: Θέτουμε

$$t := \alpha s + \beta$$

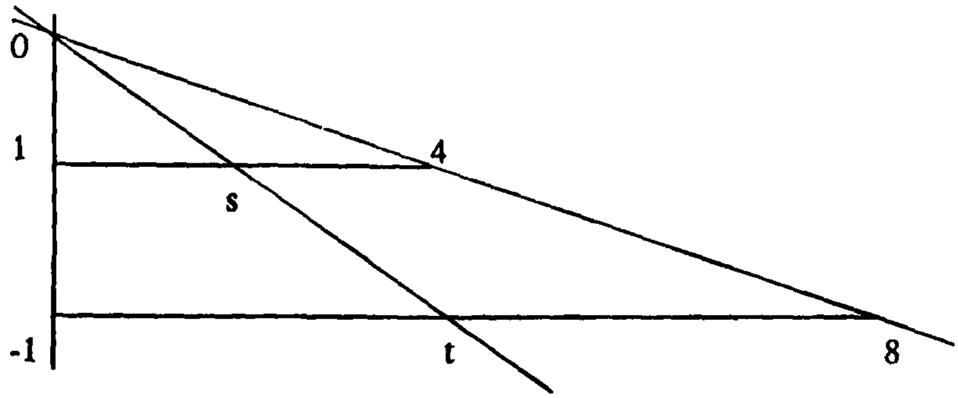
και προσπαθούμε από τα δεδομένα να προσδιορίσουμε τους συντελεστές α και β. Πραγματικά έχουμε τις δύο εξισώσεις

$$-1 = 1\,\alpha + \beta \ \text{ και } 8 = 4\alpha + \beta.$$

Επιλύοντας ως προς α και β, βρίσκουμε $\alpha = 3$ και $\beta = -4$. Άρα η ζητούμενη συνάρτηση ψ έχει τύπο

$$t =: \psi(s) = 3s - 4,\ s \in [1, 4].$$

*2ος τρόπος*: Παίρνουμε δύο παράλληλα άνισα ευθύγραμμα τμήματα, όπου στο πρώτο απεικονίζουμε το διάστημα $[1, 4]$ και στο άλλο το $[-1, 8]$.



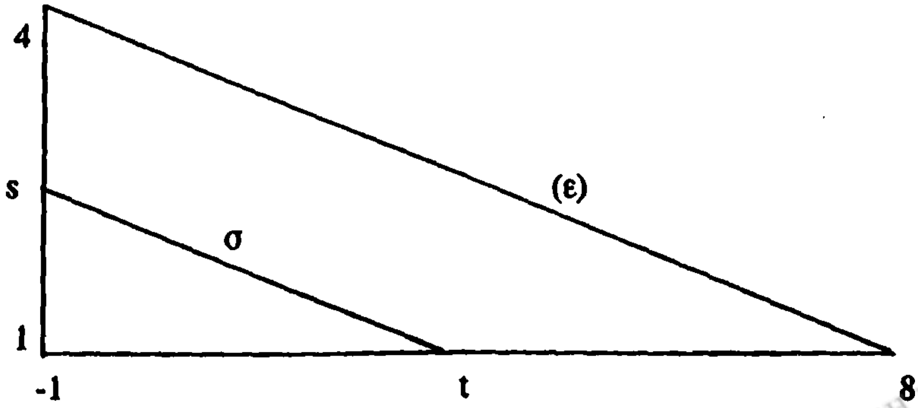

**Έχουμε τη δέσμη των ευθειών 0 1 (-1), 0 s t και 0 4 8 που τέμνεται από τις παράλληλες ευθείες 1 4 και -1 8.**

Ενώνοντας τα αντίστοιχα άκρα βρίσκουμε το σημείο τομής 0, το οποίο θεωρούμε ως το κέντρο προβολής του [1, 4] επί του [-1, 8]. Δηλαδή το τυχόν σημείο s του [1, 4] το ενώνουμε με την κορυφή 0 και προεκτείνουμε την αντίστοιχη ευθεία. Αυτή τέμνει ττο τμήμα [-1, 8] στο σημείο t. Από την αναλογία των τμημάτων, έχουμε

$$\frac{t-(-1)}{s-1}=\frac{8-(-1)}{4-1},$$

οπότε προκύπτει ότι η συνάρτηση ψ έχει τύπο όπως αυτός βρέθηκε με τον 1ο τρόπο.

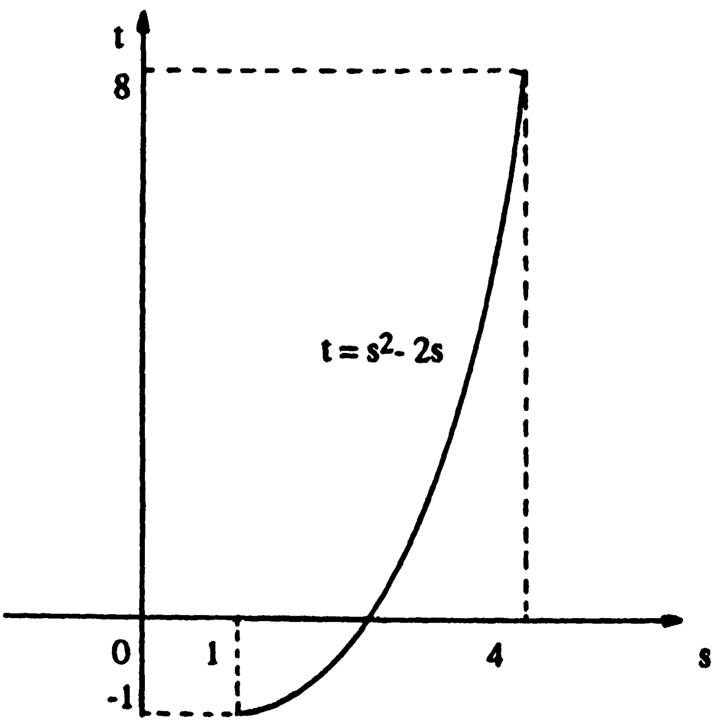
*3ος τρόπος*: Πάνω σε δύο άξονες που τέμνονται κάθετα απεικονίζουμε τα δύο διαστήματα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




**Έχουμε τα όμοια τρίγωνα s 1 t και 4 1 8, όπου τα σημεία 1 και -1 ταυτίζονται.**

Ενώνουμε τα άκρα 8 και 4 με μια ευθεία γραμμή (ε) και στη συνέχεια από κάθε σημείο s του διαστήματος [1, 4] φέρουμε ευθεία γραμμή (σ) παράλληλη προς την (ε). Η (σ) τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα [-1, 8] σε ένα σημείο t. Από τα δύο όμοια τρίγωνα που σχηματίζονται μπορούμε αμέσως να πάρουμε την ίδια αναλογία όπως και στην πρώτη περίπτωση και άρα και την ίδια συνάρτηση ψ.

*4ος τρόπος:* Με τις παραπάνω μεθόδους βρίσκουμε συναρτήσεις ψ που είναι γραμμικές. Μπορούμε όμως να αναζητήσουμε μη γραμμικές τέτοιες συναρτήσεις, οπότε ακολουθούμε καθαρά αναλυτικό τρόπο. Δηλαδή θεωρούμε το καρτεσιανό επίπεδο στο οποίο απεικονίζουμε τα διαστήματα [1, 4] και [-1, 8]. Επειδή αναζητούμε συνεχή αναπαραμέτρηση της καμπύλης, αναγκαστικά θα πρέπει να κατασκευάσουμε μια συνεχή αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση φ του διαστήματος [1, 4] επί του διαστήματος [-1, 8] . Άρα θα πρέπει να έχουμε μια συνεχή μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα) συνάρτηση. Στο σχήμα φαίνεται η αύξουσα συνάρτηση $t = \varphi(s) := s^2 - 2s$ η οποία, προφανώς, έχει τις ιδιότητες που θέλουμε.




**Η συνάρτηση με τύπο $t := s^2 - 2s$ δίνει μια άλλη αναπαραμέτρηση**

□

Έστω γ μια καμπύλη με παραμετρική παράσταση

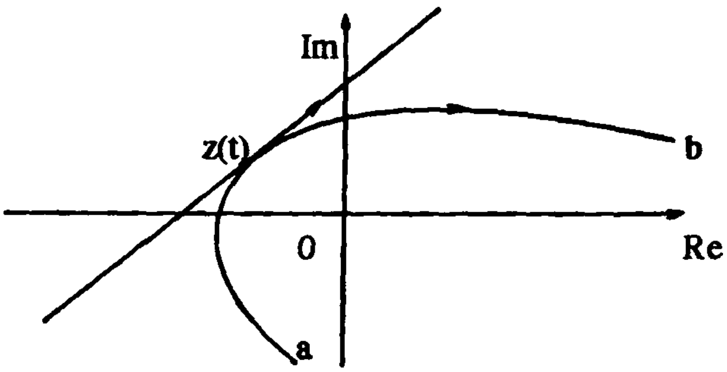
$$z = z(t) := x(t) + iy(t),\ t \in [\alpha, \beta].$$

Η καμπύλη γ είναι **διαφορίσιμη** (differentiable) ή **ομαλή** (regular) σε ένα σημείο $t_0$ του διαστήματος $[\alpha, \beta]$, αν οι συναρτήσεις x( ) και y( ) έχουν συνεχείς παραγώγους στο σημείο $t_0$ Αν η καμπύλη γ είναι διαφορίσιμη σε όλα τα σημεία της λέμε ότι είναι **διαφορίσιμη**.

Η καμπύλη γ είναι **λεία στο σημείο** $t_0$ (smooth at the point $t_0$) αν αυτή είναι διαφορίσιμη στο $t_0$ και επιπλέον ισχύει ότι

$$|z'(t_0)| = |x'(t_0) + iy'(t_0)| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2} \neq 0.$$

Η γ είναι λεία, αν αυτή είναι λεία σε κάθε σημείο της. Μία λεία καμπύλη έχει εφαπτόμενη ευθεία γραμμή σε κάθε σημείο της, βλέπε παρακάτω σχήμα. Η ευθεία αυτή προφανώς είναι η $\mathcal{E}(z(t), z'(t))$.




**Η καμπύλη έχει εφαπτόμενη ευθεία γραμμή στο σημείο z(t).**

### Παράδειγμα 4.2.3

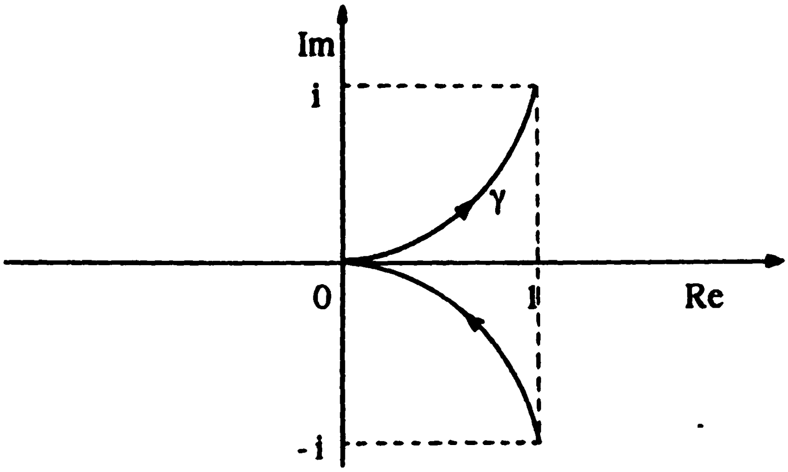
Θα εξετάσουμε αν η καμπύλη γ με παραμετρική παράσταση

$$z = t^2 + it^3,\ t \in [-1, 1]$$

είναι λεία.

Προς τούτο, παρατηρούμε ότι η σχέση $|z'(t)| = 0$, ισχύει όταν $t = 0$, οπότε η γ δεν είναι λεία στο σημείο 0. Για να δούμε τι συμβαίνει στο σημείο αυτό, θέτουμε $x := t^2$

και $y := t^3$. Απαλείφοντας το t προκύπτει η σχέση $x = y^{2/3}$, $y \in [-1, 1]$, η οποία παριστάνει την καμπύλη του σχήματος.




**Στο σημείο 0 η καμπύλη γ έχει μόνο εφαπτομένη ημιευθεία, την 0x**

Εδώ παρατηρούμε ότι στο σημείο 0 δεν υπάρχει εφαπτομένη ευθεία γραμμή παρά μόνο εφαπτομένη ημιευθεία, η 0x. □

Η καμπύλη γ είναι **κατά τμήματα διαφορίσιμη** (piecewise differentiable) (αντίστοιχα **λεία**) (piecewise smooth) αν αυτή μπορεί να διασπαστεί σε ένα πεπερασμένο πλήθος διαφορίσιμων (αντίστοιχα, λείων) καμπυλών.

**Διαφορίσιμη αναπαραμέτρηση** της καμπύλης γ είναι μια αναπαραμέτρηση της γ για την οποία η αντίστοιχη συνάρτηση ψ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο.

Το **μήκος** (length) μ(γ) της καμπύλης γ είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\boxed{\mu(\gamma) := \int_\alpha^\beta |z'(t)|dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}dt\,.}$$

Αν το τελικό σημείο της καμπύλης $\gamma_1$ ταυτίζεται με το αρχικό σημείο της καμπύλης $\gamma_2$, τότε οι δύο καμπύλες "**προστίθενται**" με την έννοια ότι υπάρχει μία καμπύλη γ την οποία παριστάνουμε με $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, τέτοια ώστε

α) το αρχικό σημείο της γ είναι το αρχικό σημείο της $\gamma_1$,

β) το τελικό σημείο της γ είναι το τελικό σημείο της $\gamma_2$.

γ) αν $z_1(t)$, $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ είναι μία παραμετρική παράσταση της $\gamma_1$ και $z_2(t)$, $t \in [\alpha_2, \beta_2]$ είναι μία παραμετρική παράσταση της $\gamma_2$, τότε υπάρχει μία παραμετρική παράσταση $z(s)$, $s \in [\sigma, \tau]$ της $\gamma$, ένα σημείο $\upsilon$ του (ανοικτού) διαστήματος $(\sigma, \tau)$ καθώς επίσης και αναπαραμετρήσεις $z = z_1^*(s)$, $s \in [\sigma, \upsilon]$ της καμπύλης $\gamma_1$ και $z = z_2^*(s)$, $s \in [\upsilon, \tau]$ της καμπύλης $\gamma_2$ τέτοιες ώστε να ισχύει

$$z(s) = \begin{cases} z_1^*(s), & s \in [\sigma, \upsilon] \\ z_2^*(s), & s \in [\upsilon, \tau]. \end{cases}$$

**Παράδειγμα 4.2.4**

Θεωρούμε τις καμπύλες $\gamma_1$ και $\gamma_2$ με παραμετρικές παραστάσεις αντίστοιχα τις συναρτήσεις

$$z_1 := \frac{1+i}{2} t - 2 - i, \quad t \in [2, 4]$$

και

$$z_2 := \frac{t}{3}(2-i) + \frac{2}{3}(1+i), \quad t \in [-1, 2].$$

Εδώ παρατηρούμε ότι οι δύο καμπύλες προστίθενται, αφού το τελικό σημείο $z_1(4) = i$ της καμπύλης $\gamma_1$ ταυτίζεται με το αρχικό σημείο $z_2(-1)$ της $\gamma_2$. Θέλουμε να βρούμε το άθροισμα $\gamma$ των δύο καμπυλών με παραμετρική παράσταση $z(\ )$ ορισμένη, ας πούμε, στο διάστημα $[0, 1]$. Προς τούτο παίρνουμε ένα σημείο του διαστήματος $(0, 1)$, έστω το $1/2$, καθώς επίσης και

$$z_1^*(s), \quad s \in [0, 1/2] \text{ μία αναπαραμέτρηση της } \gamma_1$$

και

$$z_2^*(s), \quad s \in [1/2, 1] \text{ μία αναπαραμέτρηση της } \gamma_2.$$

Για παράδειγμα, χρησιμοποιούμε έναν από τους τρόπους που είδαμε στο παράδειγμα 4.2.2 και βρίσκουμε

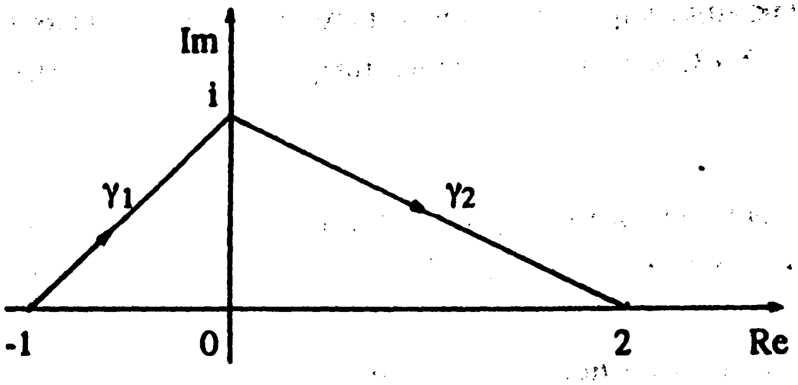
$$z_1^*(s) = \frac{1+i}{2}(4s+2) - 2 - i = 2(1+i)s - 1, \quad s \in [0, 1/2]$$

και

$$z_2^*(s) = \frac{6s-4}{3}(2-i) + \frac{2}{3}(1+i) = 2(2-i)s - 2(1-i), \quad s \in [1/2, 1].$$

Επομένως το άθροισμα των δύο καμπυλών είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$z(s) := \begin{cases} 2(1+i)s - 1, & s \in [0, 1/2] \\ 2(2-i)s - 2(1-i), & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$




**Το άθροισμα $\gamma_1 + \gamma_2$ των καμπυλών $\gamma_1$ και $\gamma_2$**

□

**4.2.1** Να περιγραφούν στο μιγαδικό επίπεδο οι καμπύλες των οποίων οι παραμετρικές παραστάσεις δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

α) $z(t) := 1 - 2it, \quad 0 \leq t \leq 2,$

β) $z(t) := t^2 + it, \quad t \in [-3, 3]$

γ) $z(t) := t + (i/t), \quad t \in [0, 1],$

δ) $z(t) := t + i\sqrt{1-t^2}, \quad t \in [-1, 1]$

ε) $z(t) := \lambda(t + i - ie^{-it}), \quad t \in [-1, 2]$ και $\lambda > 0$.

**4.2.2** Να δοθούν παραμετρικές παραστάσεις των παρακάτω καμπυλών:

α) Της καμπύλης P(1- i, 2i, -3 +4i, - 4 - 2i), δηλαδή της τεθλασμένης γραμμής με κορυφές τα σημεία 1- i, 2i, -3 +4i και - 4 - 2i, διαδοχικά.

β) Της καμπύλης που είναι τμήμα της υπερβολής $y=1/x$, έχει αρχικό σημείο το $1+i$ και τελικό το $\frac{1}{3}+3i$.

γ) Της καμπύλης που είναι τμήμα της παραβολής $x = 2y^2 - 1$, έχει αρχικό σημείο το -1 και τελικό το 1+i.

δ) Της καμπύλης που είναι η περίμετρος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία 1-i, 2 +i και -2 +3i και με φορά όπως αυτή ορίζεται με τη σειρά των κορυφών που δόθηκαν.

**4.2.3** Να δοθεί παράδειγμα μιας καμπύλης στο μιγαδικό επίπεδο η οποία να είναι όχι διαφορίσιμη, όχι λεία, αλλά κατά τμήματα διαφορίσιμη.

**4.2.4** Έστω γ η καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$z(t) := t^2 + 2it - 3i, \; t \in [0, 1].$$

Να δοθεί μια λεία αναπαραμέτρηση της γ ώστε η νέα παραμετρική παράσταση να έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [-2, 5].

**4.2.5** Να βρεθεί το άθροισμα των καμπυλών που δίνονται με τις παραμετρικές παραστάσεις

$$z_1(t) := 3it^2 - 5t + (1 - 2i)\sin \pi t, \; t \in [-2, 3]$$

και

$$z_2(t) := (2i - 1)t + 3(3i - 2), \; t \in [9, 10].$$

**4.2.6** Να δοθεί μια παραμετρική παράσταση της κλειστής τεθλασμένης καμπύλης ΑΒΓΑ, όπου

$$A := 1 - i, \; B := 2+3i \text{ και } \Gamma := -2+i.$$

**4.2.7** Να αποδειχτεί ότι η εικόνα ενός τόπου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης δεν μπορεί να είναι καμπύλη.

## 4.3 Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης

Μια συνάρτηση $f(z)$, $z \in T$, όπου $T$ είναι ένας τόπος του μιγαδικού επιπέδου είναι **παραγωγίσιμη** (differentiable) σε ένα σημείο $z_0 \in T$ αν το όριο

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},}$$

ή ισοδύναμα το

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},}$$

υπάρχει και είναι ένας μιγαδικός αριθμός. Το όριο αυτό παριστάνεται με $f'(z_0)$ και ονομάζεται **παράγωγος** (derivative) της συνάρτησης $f$ στο σημείο $z_0$. Ανάλογα ορίζεται και η παράγωγος n- τάξης $f^{(n)}(z_0)$ στο σημείο $z_0$, όπου $n$ είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Όλοι οι κανόνες και ιδιότητες (πλην των ανισοτικών) που έχουν οι παράγωγοι πραγματικών συναρτήσεων εξακολουθούν να ισχύουν κι εδώ. Επίσης οι παράγωγοι των στοιχειωδών συναρτήσεων είναι ακριβώς οι ίδιες με εκείνες των αντίστοιχων πραγματικών συναρτήσεων.

**Παράδειγμα 4.3.1**

Θα υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \frac{z^2 - 3zi + 6}{1 + z + \sin z},$$

στο σημείο $z = 0$.

Προς τούτο μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο τρόπους.

*1ος τρόπος*: Παρατηρούμε ότι το πηλίκο διαφορών στο σημείο $z = 0$ έχει αριθμητή την ποσότητα

$$f(z) - f(0) = \frac{z^2 - 3zi + 6}{1 + z + \sin z} - 6 = \frac{z^2 - 3(2+i)z - 6\sin z}{1 + z + \sin z} =$$

$$= z\frac{z - 3(2 + i)}{1 + z + \sin z} - \frac{6 \sin z}{1 + z + \sin z}.$$

Επομένως το πηλίκο διαφορών της f στο σημείο $z = 0$ είναι το

$$\frac{f(z) - f(0)}{z-0} = \frac{z - 3(2 + i)}{1 + z + \sin z} - \frac{6}{1 + z + \sin z}\left[1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots\right]$$

και άρα

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = -3(2+i) - 6 = -12-3i.$$

*2ος τρόπος:* Έχουμε

$$f'(z) = \frac{(1 + z + \sin z)(2z - 3i) - (1 + \cos z)(z^2 - 3zi + 6)}{(1 + z + \sin z)^2},$$

Άρα

$$f'(0) = \frac{1(-3i) - 12}{1} = -12 - 3i,$$

τιμή την οποία βρήκαμε και με τον πρώτο τρόπο. □

Αν για κάθε $z := x + iy$ θέσουμε $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$, τότε, σε κάθε τέτοιο σημείο z όπου η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, έχουμε τις εξής δύο ισότητες, που είναι γνωστές ως

**συνθήκες Cauchy-Riemann** (Cauchy-Riemann conditions):

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.}$$

Αντίστροφα, αν σε κάποιο σημείο $(x, y)$ οι συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι παραγωγίσιμες ως προς x και y με συνεχείς παραγώγους και επιπλέον οι συνθήκες Cauchy- Riemann ικανοποιούνται, τότε η συνάρτηση με τύπο $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $z = x + iy$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \text{ και } y = \frac{z-\bar{z}}{2i},$$

μπορούμε να θεωρήσουμε τις μεταβλητές x και y ως συναρτήσεις των z και $\bar{z}$, οπότε η συνάρτηση f μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση των z και $\bar{z}$. Στην περίπτωση αυτή παίρνουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] + i\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right],$$

οπότε, αν ισχύουν οι συνθήκες Cauchy- Riemann, θα ισχύει η σχέση

$$(1) \qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.}$$

Επομένως, αν η συνάρτηση f έχει παράγωγο σε ένα σημείο z, τότε στο σημείο αυτό θα επαληθεύεται η σχέση (1). Ο τύπος αυτός μπορεί χωρίς επιφυλάξεις να εφαρμοστεί αντί των συνθηκών Cauchy-Riemann.

Για τις μιγαδικές συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής ισχύει ο Κανόνας του L' Hospital γνωστός από τις πραγματικές συναρτήσεις:

**Κανόνας του L' Hospital:**

(L' Hospital' s rule): *Αν για δύο μιγαδικές συναρτήσεις* f *και* g *είναι γνωστό ότι αυτές*

*i) είναι ορισμένες σε έναν τόπο **T**,*

*ii) είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο* $z_0$ *του **T***

*iii) ισχύει* $g'(z_0) \neq 0$ *και*

$$f(z_0) = 0 = g(z_0),$$

*τότε ισχύει και ότι*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

**Παράδειγμα 4.3.2**

Για να εξετάσουμε αν υπάρχουν σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := x - iy$$

είναι παραγωγίσιμη, γράφουμε αυτή στη μορφή $f(z) = \bar{z}$. Τώρα παρατηρούμε ότι ισχύει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1,$$

το οποίο είναι πάντοτε διάφορο του μηδενός. Άρα δεν υπάρχουν σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία η f παραγωγίζεται. □

**Παράδειγμα 4.3.3**

Θα εξεταστεί αν υπάρχουν σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := |z - 2i|^2 + |z - 1|^2$$

παραγωγίζεται.

Πραγματικά γράφουμε τη συνάρτηση στη μορφή

$$f(z) = (z-2i)\,\overline{(z-2i)} + (z-1)\,\overline{(z-1)} = (z-2i)(\bar{z}+2i) + (z-1)(\bar{z}-1),$$

οπότε, αν υπάρχουν σημεία όπου αυτή παραγωγίζεται, θα πρέπει να ικανοποιούν την τυπική εξίσωση

$$\partial f/\partial \bar{z} = 0, \text{ δηλαδή την εξίσωση } (z-2i) + (z-1) = 0,$$

η οποία έχει λύση τη

$$z_0 := \frac{1}{2} + i.$$

Τώρα θα πρέπει να ελέγξουμε αν στο σημείο αυτό η δοθείσα συνάρτηση παραγωγίζεται. Έστω $h := \alpha + i\beta$. Έχουμε

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{(z_0+h-2i)((\overline{z_0+h})+2i)+(z_0+h-1)((\overline{z_0+h})-1)-\frac{5}{2}}{h}=$$

$$=\frac{|\frac{1}{2}+\alpha+i(\beta-1)|^2+|-\frac{1}{2}+\alpha+i(\beta+1)|^2-|\frac{1}{2}-i|^2-|-\frac{1}{2}+i|^2}{h}=$$

$$=\frac{(\frac{1}{2}+\alpha)^2+(\beta-1)|^2+(\frac{1}{2}-\alpha)^2+(\beta+1)|^2-2(\frac{1}{4}+1)}{h}=$$

$$=\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{h}=2\bar{h}.$$

Έτσι το όριο του πηλίκου διαφορών στο 0 $z_0$ είναι ίσο με το 0 κι επομένως η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο σημείο ~~0~~ $z_0$. □

### Παράδειγμα 4.3.4

Θα εξεταστεί αν υπάρχουν σημεία του δίσκου $B(0, 3/2)$ στα οποία η συνάρτηση f με τύπο

$$f(z) := |z|^2 + \sin|z|^2 + 3-2i,$$

είναι παραγωγίσιμη.

Προς τούτο παρατηρούμε ότι, αν υπάρχουν τέτοια σημεία, θα πρέπει σ' αυτά να επαληθεύεται η εξίσωση $\partial f/\partial\bar{z} = 0$. Αλλά έχουμε

$$f(z) = z\bar{z} + \sin(z\bar{z}) + 3-2i,$$

οπότε

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z + z\cos(z\bar{z}) = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τις λύσεις $z = 0$ και $\cos|z|^2 = -1$, δηλαδή $|z|^2 = (2k+1)\pi$, όπου k είναι τυχών ακέραιος αριθμός. Από αυτές η μικρότερη θετική τιμή του $|z|$ είναι η $\sqrt{\pi} > 3/2$. Επομένως η μόνη τιμή του z μέσα στον κύκλο B(0, 3/2) για την οποία μπορεί ενδεχομένως να υπάρχει η παράγωγος της f είναι η $z = 0$. Για να βεβαιωθούμε αν πράγματι τούτο συμβαίνει, εξετάζουμε το πηλίκο διαφορών της f στο $z = 0$. Πραγματικά έχουμε

$$\left|\frac{f(z) - f(0)}{z - 0}\right| = \left|\frac{|z|^2 + \sin|z|^2}{z}\right| \leq 2|z|,$$

το οποίο τείνει προς το 0 όταν το z τείνει προς το 0. Άρα το μόνο σημείο του κύκλου B(0, 3/2) στο οποίο η δοθείσα συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη είναι το $z=0$. □

**Παράδειγμα 4.3.5**

Θα αποδειχτεί ότι υπάρχει το πολύ ένα σημείο $z := x+iy$ όπου η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := |z - i|^{-2} \exp(z|z|^2)$$

παραγωγίζεται. Επίσης θα αποδειχτεί ότι το σημείο τούτο βρίσκεται στο τετράγωνο

$$T := \{z = x + iy: \frac{1}{3} < x < 1 \ \text{και} \ -1 < y < -\frac{1}{3}\}.$$

Πραγματικά γράφουμε πρώτα τον τύπο της συνάρτησης στη μορφή

$$f(z) = (z - i)^{-1}(\bar{z} + i)^{-1} \exp(z^2 \bar{z}),$$

Αν υπάρχει σημείο $z := x + iy$ στο οποίο η f παραγωγίζεται, θα πρέπει αυτό να ικανοποιεί την τυπική εξίσωση

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,$$

από την οποία παίρνουμε

$$(\bar{z} + i)\, z^2 = 1$$

(αφού το σημείο $z = i$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης). Από τη σχέση αυτή προκύπτει το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων

(1) $x|z|^2 = 2xy+1$

και

(2) $$y|z|^2 = y^2 - x^2.$$

Από αυτές παίρνουμε ότι $xy \neq 0$ και $|x| \neq |y|$, ενώ διαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε

$$x|z|^2 = -y.$$

Αυτή μαζί με τη (2) δίνει την εξίσωση

(3) $$(x+1)y^2 = x^3,$$

ενώ μαζί με την (1) δίνει την

(4) $$y(1+2x) = 0.$$

Λύνοντας την (4) ως προς y, αντικαθιστούμε στην (3), οπότε βρίσκουμε την

$$x^3(2x+1)^2 - x - 1 = 0.$$

Διερευνώντας την ύπαρξη λύσεων της εξίσωσης αυτής (π.χ. γράφοντάς την στη μορφή

$$x^3 = \frac{x+1}{(2x+1)^2}$$

εύκολα συμπεραίνουμε ότι έχει μόνο μία ρίζα η οποία μάλιστα είναι στο διάστημα (1/3, 1). Απ' την (4) προκύπτει ότι το y ανήκει στο διάστημα (-1, -1/3). □

**Παράδειγμα 4.3.6**

Θα βρεθεί η μιγαδική συνάρτηση f αν γνωρίζουμε ότι το πραγματικό μέρος της είναι η συνάρτηση με τύπο

$$u(x,y) := 3e^x \cos y$$

και επιπλέον ότι ισχύει $f(0) = 3$.

Προς τούτο, από την πρώτη συνθήκη Cauchy- Riemann έχουμε

Προς τούτο, από την πρώτη συνθήκη Cauchy- Riemann έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=3e^{x}\cos y,$$

οπότε με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$v(x,y)=\int 3e^{x}\cos y\,dy=3e^{x}\sin y+\varphi(x),$$

όπου πρέπει να προσδιοριστεί η συνάρτηση φ. Υπολογίζοντας την παράγωγο της v(x, y) ως προς x και χρησιμοποιώντας τη δεύτερη συνθήκη Cauchy - Riemann, βρίσκουμε

$$3e^{x}\sin y+\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=3e^{x}\sin y,$$

και άρα $\varphi(x)=c$ (σταθερά). Επομένως η συνάρτηση f είναι της μορφής

$$f(z)=3e^{x}\cos y+i(3e^{x}\sin y+c)=3e^{x}e^{iy}+ic=3e^{z}+ic.$$

**Απ΄ την $f(0)=3$ παίρνουμε $c=0$, οπότε, τελικά, η ζητούμενη συνάρτηση είναι η**

$$f(z):=3e^{z}. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 4.3.7**

**Θα υπολογιστεί το όριο στο σημείο 0 της παράστασης**

$$f(z):=\frac{z-e^{z}+1-\sin z}{z+\sinh z}.$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι στο σημείο 0 η παράσταση αυτή παίρνει την απροσδιόριστη μορφή 0 : 0. Επίσης παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις στον αριθμητή και παρονομαστή είναι παραγωγίσιμες στην περιοχή του μηδενός και τέτοιες ώστε

$$\lim_{z\to 0}(z-e^{z}+1-\sin z)'=\lim_{z\to 0}(1-e^{z}-\cos z)=1-1-1=-1,$$

και

$$\lim_{z\to 0}(z+\sinh z)' = \lim_{z\to 0}(1+\cosh z) = 1+1=2.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hospital, παίρνουμε ότι

$$\lim_{z\to 0}\frac{z - e^z + 1 - \sin z}{z+\sinh z} = \lim_{z\to 0}\frac{1 - e^z - \cos z}{1+\cosh z} = \frac{-1}{2}. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 4.3.8**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := f(x+iy) = x^2 + iy^2.$$

Θα βρεθεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

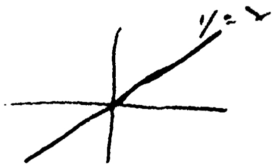
$$f'(z) = z + \bar{z}.$$

Πραγματικά, παρατηρούμε ότι το πραγματικό και φανταστικό μέρος της f είναι αντίστοιχα οι συναρτήσεις

$$u(x,y) := x^2 \quad \text{και} \quad v(x,y) := y^2.$$

Έτσι θα έχουμε

$$u_x = 2x,\ u_y = 0,\ v_x = 0 \text{ και } v_y = 2y.$$



$\Rightarrow y=x$

Άρα οι συνθήκες Cauchy-Riemann δίνουν $2x = 2y$ και $0 = 0$, οπότε, αν η f παραγωγίζεται σε κάποιο σημείο $z := x + iy$, θα πρέπει να ισχύει $x = y$, δηλαδή το σημείο z θα έχει τη μορφή $z = x + ix$, όπου x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Θα εξετάσουμε αν υπάρχει η παράγωγος της f στο τυχαίο σημείο $z = x + ix$. Πραγματικά έχουμε

$h = a + bi$

$f(z_0 + h) - f(z_0)$

$$\frac{f(x+ix+\alpha+i\beta) - f(x+ix)}{\alpha+i\beta} = \frac{(x+\alpha)^2 + i(x+\beta)^2 - x^2 - ix^2}{\alpha+i\beta} =$$

$h$

$$= \frac{2\alpha x + \alpha^2 + 2i\beta x + i\beta^2}{\alpha+i\beta} = 2x + \frac{\alpha^2 + i\beta^2}{\alpha+i\beta},$$

$f'(z) = 2x = z + \bar{z}$

$f'(z) = u_x + i v_x = 2x$

ποσότητα η οποία τείνει προς το 2x όταν α+iβ τείνει προς το 0, αφού ισχύει ότι

$$\left|\frac{\alpha^2+i\beta^2}{\alpha+i\beta}\right| = \frac{|\alpha^2+i\beta^2|}{|\alpha+i\beta|} = \sqrt{\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha^2+\beta^2}} \le \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |\,\alpha+i\beta\,|.$$

Επομένως η συνάρτηση f έχει παράγωγο σε κάθε σημείο της μορφής $z = x + ix$ ίση με $2x = z + \bar{z}$, δηλαδή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $f'(z) = z + \bar{z}$ είναι το

$$\{z : z = x + ix \text{, όπου } x \text{ τυχαίος πραγματικός αριθμός}\}. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 4.3.9**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(z) := 1 + |\,z\,|^{2\lambda} + i(\mathrm{Re}z)^{\lambda},$$

όπου λ είναι ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός. Θα εξετάσουμε αν για τις διάφορες τιμές του λ υπάρχουν σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη.

Κάθε σημείο z στο οποίο η f παραγωγίζεται θα ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Γράφοντας τη συνάρτηση f στη μορφή

$$f(z) = 1 + z^{\lambda}(\bar{z})^{\lambda} + \frac{i}{2^{\lambda}}(z + \bar{z})^{\lambda},$$

παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \lambda\, z^{\lambda}(\bar{z})^{\lambda-1} + \lambda \frac{i}{2^{\lambda}}(z + \bar{z})^{\lambda-1},$$

και εξισώνουμε την ποσότητα αυτή με το 0. Στο σημείο αυτό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Υποθέτουμε πρώτα ότι $\lambda \neq 1$. Τότε, για $z := x + iy$, παίρνουμε το σύστημα των σχέσεων

$$x(x^2+y^2)^{\lambda-1}=0, \quad y(x^2+y^2)^{\lambda-1}+\frac{1}{2}x^{\lambda-1}=0.$$

Για κάθε τιμή της παραμέτρου λ έχουμε τη λύση x = y = 0, ήτοι z = 0. Έτσι μόνο στο σημείο z = 0 μπορεί η δοθείσα συνάρτηση να παραγωγίζεται. Για να βεβαιωθούμε, παίρνουμε το πηλίκο διαφορών

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{|z|^{2\lambda}+i(\mathrm{Re}\, z)^{\lambda}}{z}.$$

Όταν το λ είναι τέτοιο ώστε $0<\lambda<1$ και $z=x$ (πραγματικός αριθμός), παρατηρούμε ότι το πηλίκο

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=x^{2\lambda-1}+ix^{\lambda-1}$$

δεν έχει όριο όταν x τείνει προς το 0, διότι η ποσότητα $x^{\lambda-1}$ δεν έχει πεπερασμένο όριο όταν το x τείνει προς το 0. Άρα για $0<\lambda<1$ η συνάρτηση δεν παραγωγίζεται σε κανένα σημείο.

Έστω $\lambda>1$. Τότε έχουμε

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{z-0}\right|=\left|\frac{|z|^{2\lambda}+i(\mathrm{Re}\, z)^{\lambda}}{z}\right|\leq\frac{|z|^{2\lambda}+|z|^{\lambda}}{|z|}=|z|^{2\lambda-1}+|z|^{\lambda-1}$$

το οποίο τείνει προς το 0, όταν το z τείνει προς το 0. Έτσι η παράγωγος της f υπάρχει μόνο στο 0 και είναι ίση με το 0.

Τέλος, έστω $\lambda=1$. Τότε η f γίνεται

$$f(z)=1+z\,(\bar{z})+\frac{i}{2}(z+\bar{z}),$$

οπότε και

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=z+\frac{i}{2},$$

η οποία μηδενίζεται στο σημείο $z=-\frac{i}{2}$. Στο σημείο αυτό το πηλίκο διαφορών γίνεται

$$\frac{f(z)-f(-\frac{i}{2})}{z+\frac{i}{2}}=\frac{|z|^2+\frac{i}{2}(z+\bar{z})-\frac{1}{4}}{z+\frac{i}{2}}=\frac{(z+\frac{i}{2})(\bar{z}+\frac{i}{2})}{z+\frac{i}{2}}=\bar{z}+\frac{i}{2},$$

ποσότητα η οποία τείνει προς το σημείο i όταν το z τείνει προς το $-i/2$. Έτσι, στην περίπτωση όπου $\lambda=1$, η συνάρτηση f παραγωγίζεται μόνο στο σημείο $-i/2$ και έχει παράγωγο σ' αυτό ίση με i. □

**4.3.1** Να βρεθούν τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες:

α) $f(z):=z^2\bar{z}$, β) $f(z):=ze^z$,

γ) $f(z):=|z|^2\mathrm{Re}z$, δ) $f(z):=\bar{z}\,\mathrm{Im}\,z$,

ε) $f(z):=\sin 2z-2i$, ς) $f(z):=(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2$.

ζ) $f(z):=\bar{z}\,\mathrm{Re}z$, η) $f(z):=|z-2i|^2+|z-1|^2$,

θ) $f(z):=\cosh z$, ι) $f(z):=z(\mathrm{Re}\,z)+\mathrm{Im}\,z$,

ια) $f(z):=(z+1)|z|^2$, ιβ) $f(z):=-z|z|^2+\exp(|z|^2)$,

ιγ) $f(z):=z+(z+1+i)\bar{z}$, ιδ) $f(z):=|z-2i|^2+|z|^2$.

ιε) $f(z)=f(x+iy):=\dfrac{x-iy+1}{x^2+y^2+x+iy+1}$.

**4.3.2** Να αποδειχτεί ότι σε πολικές συντεταγμένες $(\rho,\varphi)$ οι συνθήκες Cauchy-Riemann παίρνουν τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varrho} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

**4.3.3** Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{\sin z}$, β) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z^4 - 3z^3}{z - \sin z}$.

**4.3.4** Να εξεταστεί αν αληθεύει η παρακάτω Πρόταση: Αν μια μιγαδική συνάρτηση f παραγωγίζεται σε ένα σημείο $z_0$ τότε ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial \overline{f}(z_0)}{\partial z} = 0.$$

**4.3.5** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(z) := (1 + |z|^2)(z + \lambda i\,|z|^2)$, όπου λ είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $|\lambda| > \sqrt{2}/4$. Να εξεταστεί αν υπάρχουν σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη και αν "ναι" να βρεθεί η παράγωγος σ' αυτά.

## 4.4 Ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις

Μια μιγαδική συνάρτηση $f: T \to \mathbb{C}$ λέγεται **ολόμορφη** (holomorphic) ή **αναλυτική** (analytic) σε ένα σημείο $z_0 \in T$, αν υπάρχει περιοχή $U(z_0)$ του σημείου $z_0$ τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παραγωγίζεται σε κάθε $z \in U(z_0)$. Μια συνάρτηση είναι ολόμορφη ή αναλυτική στον τόπο $T$, αν αυτή είναι ολόμορφη σε όλα τα σημεία του τόπου $T$. Για κάθε ολόμορφη συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ισχύει πάντοτε

$$\frac{d}{dz}f(z) = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Μια συνάρτηση που είναι ολόμορφη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο λέγεται **ακεραία συνάρτηση** (entire function).

**Παράδειγμα 4.4.1**

Θα αποδείξουμε ότι η εκθετική συνάρτηση exp είναι ακεραία. Προς τούτο θέτουμε $z := x + iy$, οπότε έχουμε

$$\exp(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y),$$

και άρα

$$u(x, y) = e^x\cos y \text{ και } v(x, y) = e^x\sin y.$$

Οι συναρτήσεις u και v, ως συναρτήσεις των πραγματικών μεταβλητών x και y, είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο (x, y) (αυτές έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης) και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy- Riemann. Επομένως η συνάρτηση $e^z$ είναι ολόμορφη σ' ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή αυτή είναι ακεραία. Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$(e^z)' = \frac{\partial(e^x\cos y)}{\partial x} + i\frac{\partial(e^x\sin y)}{\partial x} =$$

$$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^z. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 4.4.2**

Θα προσδιορίσουμε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου στα οποία η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \begin{cases} z, & \text{αν } |z| < 1 \\ e^{i\mathrm{Arg}z}, & \text{αν } |z| \geq 1, \end{cases}$$

είναι ολόμορφη.

Προς τούτο παρατηρούμε πρώτα ότι η f στον ανοικτό δίσκο B(0, 1) ταυτίζεται με την ταυτοτική συνάρτηση $f(z) = z$, οπότε στο σύνολο αυτό είναι ολόμορφη.

Για να δούμε τι γίνεται στο υπόλοιπο πεδίο ορισμού της f θεωρούμε έναν μιγαδικό αριθμό a τέτοιον ώστε $|a| \geq 1$ και θέτουμε $\varphi := \mathrm{Arg}a$. Άρα, $f(a) = e^{i\varphi}$. Αν η συνάρτηση f ήταν ολόμορφη στο σημείο a θα ήταν παραγωγίσιμη και στο a με παράγωγο, έστω d. Τούτο σημαίνει ότι το όριο του πηλίκου διαφορών της f στο a υπάρχει και είναι ίσο με

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = d.$$

Για να προσδιορίσουμε το όριο αυτό υποθέτουμε πρώτα ότι z τείνει προς το a κατά μήκος της ακτίνας που συνδέει το 0 με το a, δηλαδή υποθέτουμε ότι το σημείο z έχει τη μορφή

$$re^{i\varphi}, \text{ όπου } r \geq 1 \text{ είναι τέτοιο ώστε } r \to |a|.$$

Τότε έχουμε $z \to a$ και συνεπώς

$$d = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} = \lim_{r\to|a|} \frac{f(re^{i\varphi}) - f(a)}{(r - |a|)e^{i\varphi}} = \lim_{r\to|a|} \frac{e^{i\varphi} - e^{i\varphi}}{(r - |a|)e^{i\varphi}} = 0.$$

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι το σημείο z τείνει προς το a κατά μήκος της περιφέρειας του δίσκου $B(0, |a|)$, δηλαδή υποθέτουμε ότι τούτο είναι της μορφής

$$|a|\, e^{i(\omega+\varphi)}, \text{ όπου } \omega \to 0.$$

Τότε $z \to a$ και

$$d = \lim_{h\to a} \frac{f(h) - f(a)}{h - a} = \lim_{\omega\to 0} \frac{e^{i(\omega+\varphi)} - e^{i\varphi}}{|a|(e^{i(\omega+\varphi)} - e^{i\varphi})} = \frac{1}{|a|},$$

τιμή η οποία για κανένα σημείο a δεν συμφωνεί με εκείνη που βρήκαμε αμέσως παραπάνω. Άρα η συνάρτηση f δεν είναι ολόμορφη στα σημεία z με $|z| \geq 1$. □

### Παράδειγμα 4.4.3

Θέλουμε να βρούμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να πληρούν οι μιγαδικοί αριθμοί a και b ώστε η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := f(x + iy) = ax^3 + bx^2y + ibxy^2 - iay^3$$

να είναι ακεραία.

Προς τούτο υποθέτουμε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί a και b είναι οι $a =: \alpha + i\alpha'$ και $b =: \beta + i\beta'$. Τότε η δοθείσα συνάρτηση παίρνει τη μορφή

$$f(z) = f(x + iy) = [\alpha x^3 + \beta x^2 y - \beta' xy^2 + \alpha' y^3] + i[\alpha' x^3 + \beta' x^2 y + \beta xy^2 - \alpha y^3] =$$

$$=: u(x, y) + iv(x, y),$$

Επομένως οι συνθήκες Cauchy-Riemann δίνουν

$$3\alpha x^2 + 2\beta xy - \beta' y^2 = \beta' x^2 + 2\beta xy - 3\alpha y^2$$

και

$$\beta x^2 - 2\beta' xy + 3\alpha' y^2 = -3\alpha' x^2 - 2\beta' xy - \beta y^2$$

για κάθε x και y. Τούτο συνεπάγεται ότι $3\alpha = \beta'$ και $\beta = -3\alpha'$, δηλαδή

$$b = \beta + i\beta' = -3\alpha' + i3\alpha = 3i(\alpha + i\alpha') = 3ia,$$

που είναι μια αναγκαία συνθήκη για την παραγώγιση της f. Επίσης είναι και ικανή συνθήκη, αφού αν αυτή ισχύει, τότε ισχύουν οι συνθήκες Cauchy - Riemann και οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων u και v, ως πολυωνυμικές, είναι συνεχείς συναρτήσεις. □

**4.4.1** N' αποδειχτεί ότι στον τόπο $\{z : z + |z| \neq 0\}$ η συνάρτηση $f(z) := \text{Log } z$ είναι ολόμορφη. Στη συνέχεια να βρεθεί ο τόπος στον οποίο οι συναρτήσεις που ορίζονται με τους παρακάτω τύπους είναι ολόμορφες:

α) $f(z) := \text{Log}(2z - 3i)$, β) $f(z) := \text{Log}(iz^2 + z - i)$,

γ) $f(z) := \text{Log}(\sin z - iz)$, δ) $f(z) := \text{Log}(e^z + iz)$.

**4.4.2** N' αποδειχτεί ότι αν δυο ολόμορφες συναρτήσεις f και g ικανοποιούν τη σχέση $f'(z) = g'(z)$ για κάθε z, τότε ισχύει και $f(z) = g(z) + c$, όπου c είναι μία οποιαδήποτε σταθερά.

**4.4.3** N' αποδειχτεί ότι αν μια ολόμορφη συνάρτηση f(z) ικανοποιεί τη σχέση $\text{Im} f(z) = 0$, για κάθε z, τότε αυτή είναι σταθερή.

**4.4.4** N' αποδειχτεί ότι αν μια συνάρτηση $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$ είναι ολόμορφη σε έναν τόπο $T$, τότε στον τόπο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in T\}$ ισχύει

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

ή με άλλα λόγια οι οικογένειες των καμπυλών $u(x, y) =$ σταθ. και $v(x, y) =$ σταθ. είναι ορθογώνιες.

**4.4.5** Ν' αποδειχτεί ότι το μέτρο R και το όρισμα Φ μιας ολόμορφης συνάρτησης

$$f(z) = R(x, y)e^{i\Phi(x, y)}$$

συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

## 4.5 Αρμονικές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $\varphi(x, y)$ λέγεται **αρμονική** (harmonic) σε έναν τόπο $T$, αν στον τόπο αυτόν η φ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι τουλάχιστον δεύτερης τάξης και ικανοποιεί την **εξίσωση του Laplace**

$$\boxed{\nabla^2\varphi := \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.}$$

Αν μια συνάρτηση με τύπο $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$ είναι ολόμορφη στον τόπο $T$, τότε και οι δύο συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι αρμονικές στον $T$. Όμως αν δίνονται δυο αρμονικές συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$, τότε η συνάρτηση $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$ μπορεί να μην είναι ολόμορφη, διότι για να συμβαίνει τούτο, θα πρέπει οι δυο συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ να ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy - Riemann. Δυο αρμονικές συναρτήσεις u, v που ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy - Riemann λέγονται **συζυγείς αρμονικές** (conjugate harmonic) συναρτήσεις. Η διάταξη στο ζεύγος (u, v) είναι ουσιαστική.

**Παράδειγμα 4.5.1**

Έστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε όλες τις πραγματικές συναρτήσεις ψ πραγματικής μεταβλητής για τις οποίες η πραγματική συνάρτηση με τύπο

$$u(x, y) := \psi(x^2 - y^2)$$

είναι αρμονική.

Για να επιτύχουμε τούτο χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι, επειδή η συνάρτηση u είναι αρμονική, θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace. Άρα θα έχουμε

$$\nabla^2 u := \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Θέτουμε

$$s := x^2 - y^2.$$

Τότε έχουμε

$$u = \psi(s),$$

όπου s είναι συνάρτηση των x και y. Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης βρίσκουμε

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \psi'(s)\frac{\partial s}{\partial x} = 2x\psi'(s),$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \psi'(s)\frac{\partial s}{\partial y} = -2y\psi'(s),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = 2\psi'(s) + 2x\psi''(s)\frac{\partial s}{\partial x} = 2\psi'(s) + 4x^2\psi''(s),$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -2\psi'(s) - 2y\psi''(s)\frac{\partial s}{\partial y} = -2\psi'(s) + 4y^2\psi''(s).$$

Άρα

$$\nabla^2 u = 2\psi'(s) + 4x^2\psi''(s) - 2\psi'(s) + 4y^2\psi''(s) = 4(x^2 + y^2)\psi''(s) = 0,$$

από όπου παίρνουμε $\psi''(s) = 0$. Λύνοντας αυτή τη διαφορική εξίσωση προκύπτει η συνάρτηση

$$\psi(s) = \alpha + \beta s,$$

όπου α και β είναι δύο τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. □

**4.5.1** Αφού αποδειχτεί ότι οι συναρτήσεις με τύπους

α) $u(x, y) := \ln(x^2 + y^2)$, β) $u(x, y) := \operatorname{Arctan} \dfrac{y}{x}$,

γ) $u(x, y) := \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, δ) $u(x, y) := \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$,

είναι αρμονικές, να βρεθούν οι συζυγείς αρμονικές τους συναρτήσεις.

**4.5.2** Αν α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί να εξεταστεί πότε είναι αρμονική η πραγματική συνάρτηση με τύπο

$$u(x, y) := \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

**4.5.3** Αν μια συνάρτηση u είναι αρμονική σε έναν τόπο του καρτεσιανού επιπέδου και έχει παραγώγους κάθε τάξης, να αποδειχτεί ότι κάθε παράγωγος της u είναι επίσης αρμονική στον τόπο αυτόν.

**4.5.4** Αν $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι ένα ζεύγος συζυγών αρμονικών συναρτήσεων σε έναν τόπο του καρτεσιανού επιπέδου, να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι στον τόπο αυτόν αρμονικές:

α) $w(x, y) := Au(x, y) + Bv(x, y)$, όπου A και B είναι σταθεροί μιγαδικοί αριθμοί,

β) $w(x, y) := u^2(x, y) - v^2(x, y)$,

γ) $w(x, y) := e^{u(x, y)} \cos v(x, y)$.

**4.5.5** Να βρεθούν όλες οι πραγματικές συναρτήσεις $\psi$, αν είναι γνωστό ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αρμονικές σε όλο το καρτεσιανό επίπεδο:

α) $u(x, y) := \psi(xy)$.

β) $u(x, y) := \psi(\frac{y}{x})$.

γ) $u(x, y) := \psi(\alpha x + \beta y)$.

δ) $u(x, y) := \psi(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

ε) $u(x, y) := \psi(\frac{x^2 + y^2}{x})$.

**4.5.6** Ν' αποδειχτεί ότι το άθροισμα δυο αρμονικών συναρτήσεων σε έναν τόπο του καρτεσιανού επιπέδου, είναι συνάρτηση αρμονική στον τόπο αυτόν. Το ίδιο ισχύει και για το γινόμενο, αρκεί αυτές να είναι συζυγείς αρμονικές. Πιο γενικά : Αν οι συναρτήσεις $u_n$, $v_n$ $(n=1, 2, ..., k)$ είναι συζυγείς αρμονικές, και έχουν συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης, ν' αποδειχτεί ότι και οι συναρτήσεις

$$u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + ... + u_k + v_k \quad \text{και} \quad u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_kv_k$$

είναι αρμονικές.

**4.5.7** Έστω $u(x, y)$ μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σε έναν τόπο G του καρτεσιανού επιπέδου. Αν η u είναι αρμονική, να εξεταστεί αν η συζυγής αρμονική της είναι αρμονική συνάρτηση στον τόπο G.

## 4.6 Ορισμός ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης όταν είναι γνωστό το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος της

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Cauchy- Riemann, είναι δυνατόν να βρούμε μία ολόμορφη συνάρτηση f αν γνωρίζουμε το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος της. Και τούτο γιατί, αν γνωρίζουμε το ένα από αυτά, τότε βρίσκουμε και το άλλο επιλύοντας τις σχετικές διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν από τις συνθήκες Cauchy-Riemann. Όμως με τους παρακάτω τύπους η συνάρτηση f μπορεί να οριστεί αμέσως χωρίς τη διαδικασία αυτή με μόνο το πραγματικό μέρος της ή μόνο το φανταστικό μέρος της.

Πραγματικά, υποθέτουμε ότι

$$f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$$

είναι μια ολόμορφη συνάρτηση σε έναν τόπο $T$. Τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις (βλ. Παράδειγμα 8.1.4):

$$\boxed{f(z) = 2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - \overline{f(z_0)},}$$

και

$$\boxed{f(z) = 2iv\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - \overline{f(z_0)}.}$$

Επαναλαμβάνουμε ότι για την εφαρμογή των τύπων αυτών θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση u (ή η v) που μας δίνεται να είναι αρμονική. Επίσης, όπως φαίνεται από τους τύπους αυτούς, απαραίτητο γνωστό στοιχείο για τον υπολογισμό της f(z) είναι η τιμή $\overline{f(z_0)}$.

**Παράδειγμα 4.6.1**

Για να βρεθεί η ολόμορφη συνάρτηση f της οποίας το πραγματικό μέρος είναι η συνάρτηση με τύπο

$$u(x, y) := 3(x^2 - y^2)$$

και ικανοποιεί τη σχέση $f(0) = i$, χρησιμοποιούμε τα προηγούμενα στοιχεία ως εξής: Επειδή, όπως εύκολα αποδεικνύεται, η συνάρτηση u είναι αρμονική, τέτοια συνάρτηση, έστω f, υπάρχει. Τώρα εφαρμόζοντας τον προηγούμενο τύπο και έχοντας υπόψη ότι $z_0 = 0$, παίρνουμε

$$f(z) = 2\cdot 3\left[\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{2i}\right)^2\right] - (-i) = 3z^2 + i. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 4.6.2**

Θα βρεθεί η ολόμορφη συνάρτηση f αν γνωρίζουμε ότι ισχύει $f(0) := 0$ και ακόμη ότι το φανταστικό μέρος της είναι η συνάρτηση με τύπο

$$v(x, y) := 2(2\sinh x \sin y + xy)$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι η v είναι αρμονική συνάρτηση. Έτσι, εάν εφαρμόσουμε τον παραπάνω σχετικό τύπο, παίρνουμε ότι

$$f(z) = 2i \cdot 2\left(2\sinh\frac{z}{2}\sin\frac{z}{2i} + \frac{z}{2}\,\frac{z}{2i}\right) =$$

$$= 8i\sinh\frac{z}{2}\sin\frac{z}{2i} + z^2 =$$

$$= 2(e^{z/2} - e^{-z/2})^2 + z^2 =$$

$$= 4\cosh z + z^2 - 4. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 4.6.3**

Έστω ότι ζητούνται όλες οι ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις f των οποίων το πραγματικό μέρος είναι η συνάρτηση με τύπο

$$u(x, y) := x^2 - y^2 - 2y$$

και επιπλέον ικανοποιούν τη σχέση $[f(i)]^3 = -1 + i$.

Για την επίλυση του προβλήματος αυτού από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι ο μιγαδικός αριθμός $f(i)$ είναι μία από τις κυβικές ρίζες $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ του $-1+i$. Έτσι θα πρέπει ο αριθμός $f(i)$ να είναι ένας απ' τους αριθμούς

$$\eta_1 = 2^{-1/3}(1 + i),$$

$$\eta_2 = -2^{-4/3}\,(1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})),$$

$$\eta_3 = -2^{-4/3}\,(1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})).$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω σχετικό τύπο παίρνουμε ότι οι ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις που έχουν πραγματικό μέρος τη συνάρτηση u έχουν τη μορφή

$$f(z) = 2\left(\frac{z-i}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{z+i}{2i}\right)^2 - 4\,\frac{z+i}{2i} - \bar{\eta} =$$

$$= \frac{1}{2}(z-i)^2 + \frac{1}{2}(z+i)^2 + 2i(z+i) - \bar{\eta} =$$

$$= z^2 + 2iz - 3 - \bar{\eta},$$

όπου η είναι ένας οποιοσδήποτε από τους αριθμούς $\eta_1, \eta_2, \eta_3$. □

**Παράδειγμα 4.6.4**

Θα υπολογίσουμε όλες τις ολόμορφες συναρτήσεις f που ικανοποιούν τη σχέση

$$f^4(0) + if^2(0) = -2$$

και έχουν πραγματικό μέρος τη συνάρτηση με τύπο

$$u(x, y) = x \sin x \cosh y - y \sinh y \cos x.$$

Προς τούτο παρατηρούμε πρώτα ότι η συνάρτηση u είναι αρμονική. Επιλύοντας τη διτετράγωνη εξίσωση $a^4 + ia^2 + 2 = 0$ βρίσκουμε τις ρίζες

$$a_1 = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right), \quad a_2 = \exp\left(\frac{5\pi i}{4}\right), \quad a_3 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{-\pi i}{4}\right), \quad a_4 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right).$$

Έτσι εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο προκύπτουν οι ολόμορφες συναρτήσεις $f_j(z)$, $j=1, 2, 3, 4$, όπου

$$f_j(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - \overline{a_j} =$$

$$= 2\,\frac{z}{2}\sin\frac{z}{2}\cosh\frac{z}{2i} - 2\,\frac{z}{2i}\sinh\frac{z}{2i}\cos\frac{z}{2} - \overline{a_j} =$$

$$= z(\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}+\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}) - \overline{a_j} = z\sin z - \overline{a_j}. \qquad \square$$

**4.6.1** Να βρεθούν οι ολόμορφες συναρτήσεις f, αν είναι γνωστό ότι μια τιμή $f(z_0)$ και το πραγματικό μέρος u(x, y), ή το φανταστικό μέρος v(x, y) δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

α) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$,

β) $u(x, y) = \operatorname{Arc}\tan\dfrac{y}{x}$, $f(1) = 0$,

γ) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$, $f(i) = 1$,

δ) $u(x, y) = 2\sin x\cos y - x$, $f(0) = 0$,

ε) $v(x, y) = 2\cos x\cosh y - x^2 + y^2$, $f(0) = 3$,

ς) $v(x, y) = -2\sin 2x\sinh 2y + y$, $f(0) = 1$,

ζ) $v(x, y) = 2(\sinh x\sin y + xy)$, $f(0) = i$,

η) $u(x, y) = [(x^2 - y^2)\cos y - 2xy\sin y]e^x$.

## 4.7 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου μιγαδικής συνάρτησης

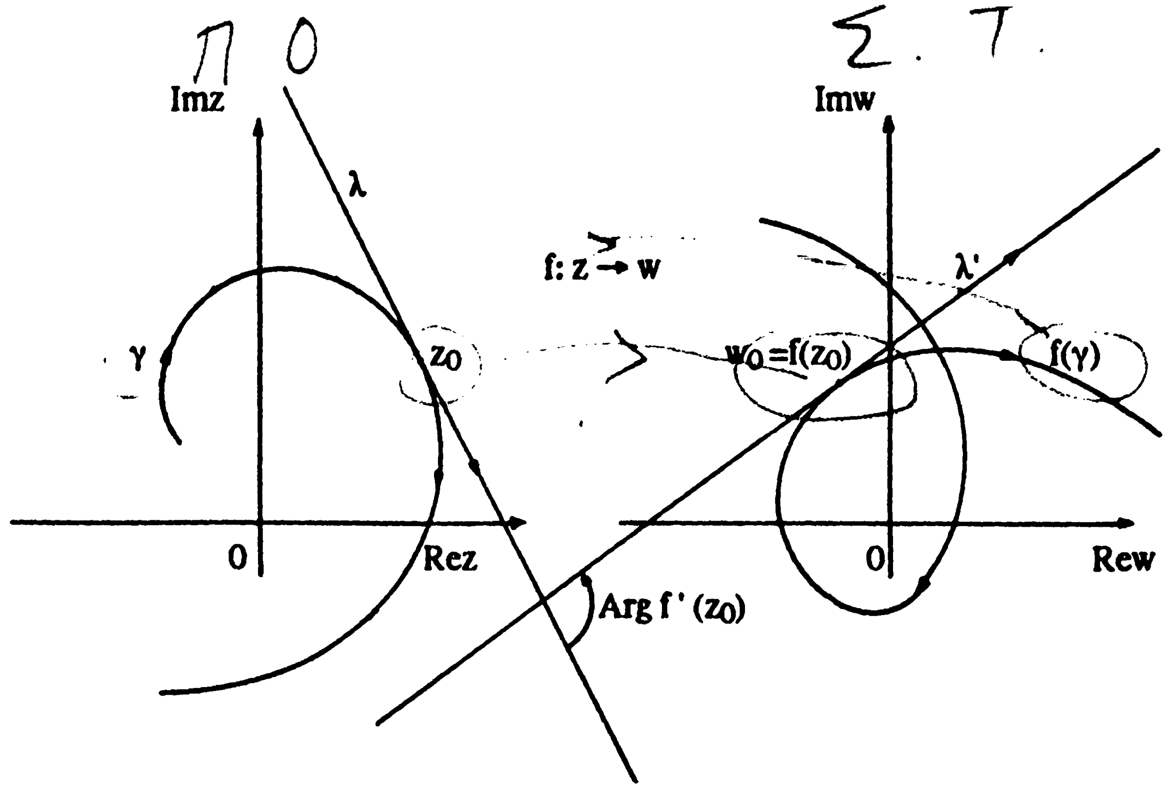
Υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση f είναι ολόμορφη σε ένα σημείο $z_0$ και ακόμη ότι ισχύει $f'(z_0) \neq 0$.

Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού f '$(z_0)$, δηλαδή ο πραγματικός αριθμός |f '$(z_0)$| είναι ο **συντελεστής διαστολής ή συστολής** στο σημείο $z_0$ όταν το μιγαδικό z-επίπεδο απεικονιστεί στο μιγαδικό w- επίπεδο μέσω του μετασχηματισμού w = f(z). Μάλιστα έχουμε

**διαστολή** (expansion), όταν ισχύει |f '$(z_0)$| > 1, και

**συστολή** (contraction), όταν ισχύει |f '$(z_0)$| < 1.

Το όρισμα του μιγαδικού αριθμού f '$(z_0)$ είναι η γωνία κατά την οποία μία ευθεία γραμμή λ που είναι εφαπτόμενη στο σημείο $z_0$ μιας τυχαίας λείας καμπύλης γ που διέρχεται από το σημείο $z_0$ στο μιγαδικό z- επίπεδο (βλέπε σχήμα) πρέπει να στραφεί ώστε να λάβει τη θέση της ευθείας γραμμής λ' που είναι εφαπτόμενη στο σημείο f$(z_0)$ της καμπύλης f(γ) στο μιγαδικό w- επίπεδο, λαμβάνοντας υπόψη τη φορά των καμπυλών γ και f(γ).




**Η ευθεία λ που είναι εφαπτόμενη στο σημείο $z_0$ της γ στρέφεται ώστε να λάβει τη θέση της ευθείας λ' που είναι εφαπτόμενη στο σημείο f$(z_0)$ της f(γ)**

**Παράδειγμα 4.7.1**

Θα προσδιορίσουμε τον συντελεστή διαστολής και τη γωνία στροφής του μιγαδικού επιπέδου στο σημείο $z_0 := \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ κάτω από τον μετασχηματισμό

$$w = z^2 .$$

Προς τούτο θέτουμε $f(z) := z^2$, οπότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, πρέπει να βρούμε το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $f'(z_0)$. Αλλά έχουμε

$$f'(z_0) = 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 4(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

Τούτο σημαίνει ότι

$$|f'(z_0)| = 4 \quad \text{και} \quad \operatorname{Arg} f'(z_0) = \frac{\pi}{4}.$$

Δηλαδή βλέπουμε ότι ο συντελεστής διαστολής είναι ίσος με 4, και η γωνία στροφής είναι ίση με π/4. □

**4.7.1** Να υπολογιστεί ο συντελεστής συστολής ή διαστολής καθώς επίσης και η γωνία στροφής του μιγαδικού επιπέδου κάτω από τους εξής μετασχηματισμούς στα αντίστοιχα σημεία:

α) $f(z) := e^z$, στο σημείο $z_0 := \log 2 + i\pi/4$.

β) $f(z) := \sin z$, στο σημείο $z_0 := 1+i$.

γ) $f(z) := z^3$, στο σημείο $z_0 := 1 + i\pi/2$.

**4.7.2** Να βρεθεί το τμήμα του μιγαδικού επιπέδου το οποίο συστέλλεται και το τμήμα που διαστέλλεται κάτω από τους εξής μετασχηματισμούς:

α) $f(z) = e^z$, β) $f(z) = \operatorname{Log} z$,

γ) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, δ) $f(z) = z^3$.

## 4.8 Εικόνα καμπύλης και τόπου μέσα από ολόμορφη συνάρτηση

Πολλές φορές αντιμετωπίζουμε το θέμα του μετασχηματισμού μιας καμπύλης ή ενός τόπου, δηλαδή την απεικόνιση τούτων μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης, ή όπως λέμε, μέσω ενός μετασχηματισμού.

Υποθέτουμε ότι f είναι μια ολόμορφη συνάρτηση που απεικονίζει έναν τόπο $T$ σε έναν τόπο $T^*$ κατά μονοσήμαντο τρόπο, δηλαδή η απεικόνιση

$$f: T \to T^*$$

είναι ένα- προς- ένα. Επιπλέον, έστω γ μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στον τόπο $T$ με παραμετρική παράσταση

$$z(t) := x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Τότε η συνάρτηση $f(z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ είναι η παραμετρική παράσταση μιας κατά τμήματα διαφορίσιμης καμπύλης $\Gamma := f(\gamma)$ στον τόπο $T^*$. Η νέα καμπύλη Γ έχει μήκος

$$\mu(\Gamma) = \int_\alpha^\beta |f'(z(t))|\,|z'(t)|dt = \int_\alpha^\beta |f'(x(t)+iy(t))|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt\,.$$

**Παράδειγμα 4.8.1**

Θεωρούμε την περιφέρεια γ του κύκλου με παραμετρική παράσταση

$$z(t) := re^{it} = r\cos t + i\, r\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

και με **θετική** (positive) φορά, δηλαδή τη φορά που είναι αντίθετη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ωρολογίου. Θα βρεθεί η καμπύλη Γ που είναι η εικόνα της γ μέσω της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := z / \bar{z}\,.$$

Προς τούτο υποθέτουμε ότι $w = u(t) + iv(t)$ είναι η παραμετρική παράσταση της ζητούμενης καμπύλης Γ. Θέτουμε $z := x + iy$ για την καμπύλη γ, οπότε βρίσκουμε

$$x = r\cos t \text{ και } y = r\sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

Επομένως έχουμε

$$u + iv = z/\bar{z} = z^2/z\bar{z} = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2},$$

από όπου προκύπτουν οι τιμές

$$u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ και } v = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Αντικαθιστώντας τα x, y με τις εκφράσεις τους από την παράσταση της καμπύλης γ, βρίσκουμε

$$u(t) = \cos 2t \text{ και } v=\sin 2t,\ \ 0 \le t \le 2\pi,$$

ή, θέτοντας $s := 2t$,

$$u(s) = \cos s \text{ και } v(s) = \sin s,\ \ 0 \le s \le 4\pi.$$

Από τις τιμές αυτές και από το γεγονός ότι ισχύει $u^2 + v^2 = 1$, συμπεραίνουμε ότι η ζητούμενη καμπύλη είναι η περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου διαγεγραμμένη δύο φορές με τη θετική φορά, όπως τούτο φαίνεται από το γεγονός ότι $0 \le s \le 4\pi$. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η καμπύλη γ ορίζεται από την πεπλεγμένη σχέση

$$F(x, y)=0.$$

Για να βρούμε την παραμετρική παράσταση της καμπύλης Γ: =f(γ), θέτουμε

$$w := u + iv = f(z)$$

και απαλείφουμε τα x και y μεταξύ των σχέσεων

$$u = u(x, y),\ \ v = v(x, y) \quad \text{και} \quad F(x, y)=0.$$

**Παράδειγμα 4.8.2**

Ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη γ ορίζεται από την πεπλεγμένη σχέση

$$|\sin x| + \cos^2 x = y^2$$

και έστω ότι δίνεται η συνάρτηση με τύπο f(z) :=exp(iz). Για να βρούμε την παραμετρική παράσταση της καμπύλης Γ: =f(γ), θέτουμε

$$w := u + iv = f(z) = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$$

και απαλείφουμε τα x και y μεταξύ των σχέσεων

$$u = e^{-y}\cos x\,,$$

$$v = e^{-y}\sin x\,,$$

$$|\sin x| + \cos^2 x = y^2.$$

Δηλαδή από τις δύο πρώτες με διαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε

$$\tan x = \frac{v}{u},$$

οπότε και

$$\cos^2 x = \frac{u^2}{u^2 + v^2}.$$

Από την πρώτη των τριών σχέσεων προκύπτει

$$y = -\frac{1}{2}\log(u^2 + v^2).$$

οπότε, τελικά, παίρνουμε ότι η καμπύλη Γ δίνεται στο w- μιγαδικό επίπεδο απ' την πεπλεγμένη σχέση

$$\frac{|v|}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{u^2}{u^2+v^2} = \frac{1}{4}\log^2(u^2+v^2).$$ □

Τώρα, έστω $\boldsymbol{K}$ ένα απλά συνεκτικό υποσύνολο του $\boldsymbol{T}$. Μια συνάρτηση f ορισμένη στον τόπο $\boldsymbol{T}$ απεικονίζει το σύνολο $\boldsymbol{K}$ του z - μιγαδικού επιπέδου στο σύνολο

$$\boldsymbol{K}^* = f(\boldsymbol{K})$$

του w - μιγαδικού επιπέδου. Στην περίπτωση αυτή το εμβαδόν $\mathcal{S}(\boldsymbol{K}^*)$ του συνόλου $\boldsymbol{K}^*$ δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{K}^*) = \iint_{\boldsymbol{K}} |f'(x+iy)|^2 \, dxdy.$$

**Παράδειγμα 4.8.3**

Έστω ότι δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := z^2.$$

Θα βρεθεί η εικόνα του τόπου

$$\boldsymbol{K} := \{z: |\mathrm{Re}z| > |\mathrm{Im}z|\}$$

μέσω της f και στη συνέχεια θα υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης Γ η οποία είναι η εικόνα της γ που δίνεται με την παραμετρική παράσταση

$$z(t) := 2 + it, \quad t \in [-1,1].$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι η εικόνα του τόπου $\boldsymbol{K}$ μέσω της απεικόνισης

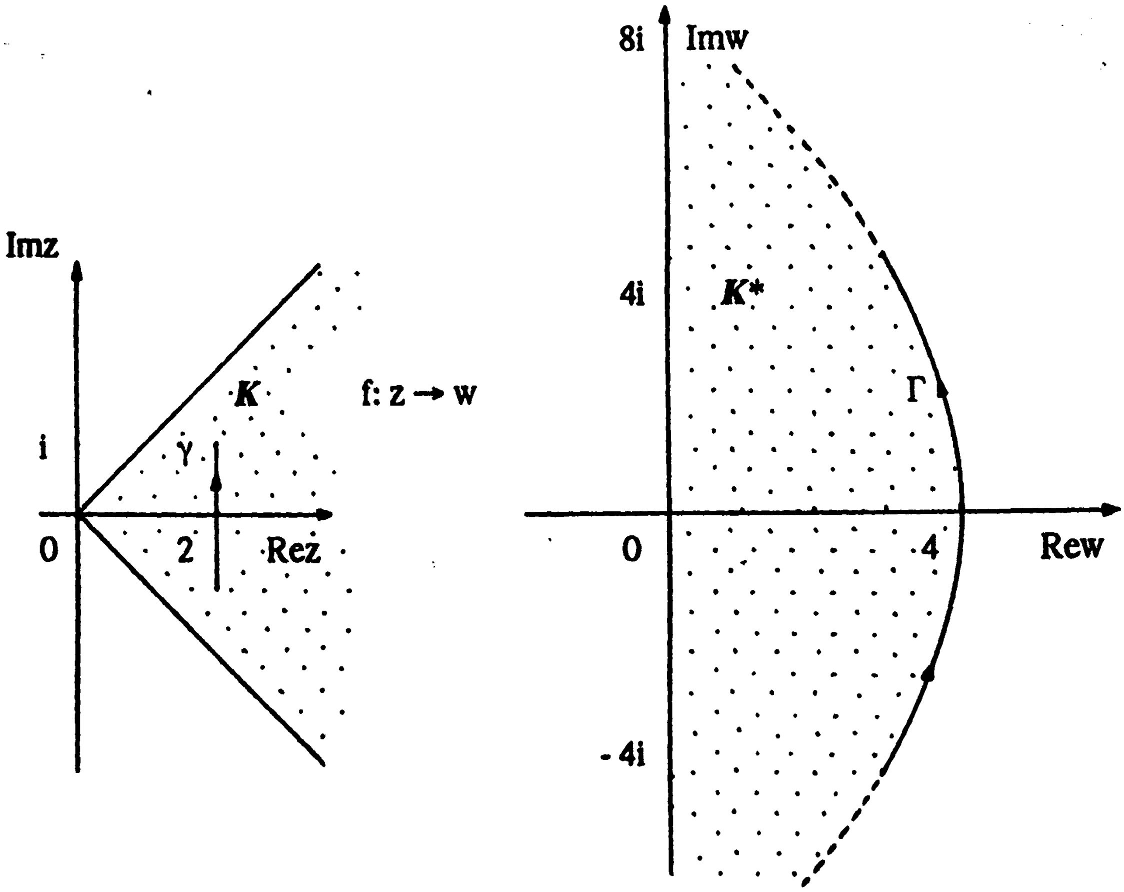
$$w = z^2$$

είναι ο τόπος

$$\boldsymbol{K}^* = \{w: \mathrm{Re}w > 0\}.$$

Επίσης η καμπύλη γ ανήκει στον τίοπο $\boldsymbol{K}$ και απεικονίζεται στην καμπύλη Γ (που είναι τόξο παραβολής) και έχει παραμετρική παράσταση

$$w(t) = 4 - t^2 + 4it, \quad t \in [-1, 1].$$




**Η εικόνα του τόπου *K* μέσω της f είναι ο τόπος *K** και η εικόνα της καμπύλης γ είναι η καμπύλη Γ.**

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος του αντίστοιχου τόξου της νέας καμπύλης εφαρμόζουμε τον σχετικό τύπο και βρίσκουμε

$$\mu(\Gamma) = \int_{-1}^{1} |2z(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{4+t^2}\, dt =$$

$$= 4\int_{0}^{1}\sqrt{4+t^2}\, dt = \sqrt{5} + 2\log\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 4.8.4**

Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του επιπέδου τμήματος που είναι η εικόνα του τετραγώνου

$$K := \{z : |1-\mathrm{Re}z| \le \alpha \ \text{και}\ |\mathrm{Im}z| \le \alpha\},$$

(όπου α είναι ένας σταθερός θετικός πραγματικός αριθμός,) μέσω της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := e^z.$$

Προς τούτο υποθέτουμε ότι $z := x+iy$ είναι ένα σημείο του συνόλου ***K***. Τότε θα πρέπει να έχουμε

$$1-\alpha \le x \le 1+\alpha \text{ και } -\alpha \le y \le \alpha.$$

Επομένως εφαρμόζοντας τον προηγούμενο τύπο παίρνουμε ότι

$$\mathcal{S}(K^*) = \iint_K |f'(x+iy)|^2 dxdy = \iint_K e^{2x} dxdy$$

$$= \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^{2x} dx \int_{-\alpha}^{\alpha} dy = 2\alpha e^2 \sinh 2\alpha. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 4.8.5**

Έστω ***K*** * η εικόνα του ορθογωνίου παραλληλογράμμου

$$K := \{z : 1 \le \operatorname{Re} z \le 2 \text{ και } 0 \le \operatorname{Im} z \le 10\}$$

μέσω της συνάρτησης

$$w = f(z) := e^z.$$

Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν του με στοιχειώδη τρόπο.

Προς τούτο υποθέτουμε ότι $z := x+iy$ είναι ένα σημείο που ανήκει στο σύνολο ***K***. Τότε θα πρέπει να έχουμε

$$1 \le x \le 2 \text{ και } 0 \le y \le 10.$$

Επομένως, επειδή $2\pi < 10$, η εικόνα $K^*$ του συνόλου ***K*** μέσω του δοθέντος μετασχηματισμού είναι ο κλειστός κυκλικός δακτύλιος

$$K^* := \{w : e \le |w| \le e^2\}$$

του οποίου το εμβαδό είναι ίσο με $\pi(e^4 - e^2)$.

Από την άλλη μεριά, αν εφαρμόσουμε τον σχετικό τύπο παίρνουμε ότι το εμβαδόν τούτο πρέπει να ισούται με $5\,(e^4 - e^2)$, γεγονός το οποίο δεν συμφωνεί με το προηγούμενο συμπέρασμα. Το **λάθος** οφείλεται στο ότι ο σχετικός τύπος δεν μπορεί να εφαρμοστεί, αφού η συνάρτηση f δεν απεικονίζει το σύνολο $\boldsymbol{K}$ στο $\boldsymbol{K}^*$ κατά μονοσήμαντο τρόπο, δηλαδή **δεν είναι ένα-προς-ένα.** Πραγματικά, παρατηρούμε ότι τα σημεία $x + 0i$ και $x + 2\pi i$ του συνόλου $\boldsymbol{K}$ έχουν την ίδια εικόνα $w = e^x + 0i$ στο σύνολο $\boldsymbol{K}^*$ για κάθε x με $1 \le x \le 2$. □

**4.8.1** Να υπολογιστεί το εμβαδόν καθώς επίσης και το μήκος του συνόρου του τόπου που είναι η εικόνα του τετραγώνου $\{z\colon 0 \le \operatorname{Re}z \le 1,\ 0 \le \operatorname{Im}z \le 1\}$ μέσω της απεικόνισης $w = z^2$.

**4.8.2** Να υπολογιστεί το εμβαδόν της εικόνας μέσω του μετασχηματισμού $w = \cos z$ του τετραγώνου

$$\{z\colon \frac{\pi}{6} \le \operatorname{Re} z \le \frac{\pi}{3} \ \text{και}\ \frac{\pi}{6} \le \operatorname{Im} z \le \frac{\pi}{3}\}.$$

**4.8.3** Να υπολογιστεί το εμβαδόν της εικόνας μέσω του μετασχηματισμού $w = z^2$ του δακτυλικού τμήματος

$$\{z\colon 1 \le z \le 2 \ \text{και}\ -\frac{\pi}{3} \le \operatorname{Arg} z \le \frac{\pi}{3}\}.$$

**4.8.4** Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης που είναι η εικόνα μέσω του μετασχηματισμού $w = e^z$ του ευθυγράμμου τμήματος $y = x,\ 0 \le x \le 2\pi$.

**4.8.5** Να βρεθούν οι εικόνες μέσω του μετασχηματισμού $w=1/z$ των καμπυλών του z - μιγαδικού επιπέδου με τις εξής παραμετρικές παραστάσεις:

α) $z(t) := t+2i(1-t),\ \ 0 \le t \le 1,$

β) $z(t) := \sin t - i\cos t,\ \ 0 \le t \le 2\pi,$

γ) $z(t) := \cosh t + i\sinh t,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$

**4.8.6** Να βρεθούν οι εικόνες του κύκλου με κέντρο το 0 και ακτίνα r (>0) μέσω των μετασχηματισμών:

α) $f(z) := z + \frac{1}{z}$,     β) $f(z) := z - \frac{1}{z}$.

# 5 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Εδώ θα γνωρίσουμε τα λεγόμενα επικαμπύλια ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων κατά μήκος καμπυλών οι οποίες είναι τουλάχιστον κατά τμήματα διαφορίσιμες.

## 5.1 Ορισμός

Έστω

$$\varphi(t) := x(t) + iy(t),\ t \in [\alpha, \beta]$$

μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής. Τούτο σημαίνει ότι οι πραγματικές συναρτήσεις x και y είναι συνεχείς. Ορίζουμε το **ολοκλήρωμα** της φ με τον τύπο

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)dt := \int_{\alpha}^{\beta} x(t)dt + i\int_{\alpha}^{\beta} y(t)dt,$$

και παρατηρούμε ότι τούτο έχει τις ίδιες γραμμικές ιδιότητες που έχει και το ολοκλήρωμα πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής.

**Παράδειγμα 5.1.1**
Θα δείξουμε ότι ισχύει η εξής σχέση:

$$\left| \int_\alpha^\beta \varphi(t)dt \right| \leq \int_\alpha^\beta |\varphi(t)|dt.$$

Προς τούτο θεωρούμε δύο τυχαία στοιχεία t και s του διαστήματος [α, β] και εφαρμόζουμε τη γνωστή ανισότητα Cauchy - Schwartz στα 2 - διάστατα διανύσματα

$$(x(t), y(t)) \text{ και } (x(s), y(s)).$$

Τότε έχουμε

$$x(t)\,x(s) + y(t)\,y(s) \leq \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\,\sqrt{x^2(s)+y^2(s)}.$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη ως προς τη μεταβλητή t από το α μέχρι το β παίρνουμε την ανισότητα

$$\int_\alpha^\beta x(t)dt\; x(s) + \int_\alpha^\beta y(t)dt\; y(s) \leq \int_\alpha^\beta \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\,dt\; \sqrt{x^2(s)+y^2(s)}.$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας και ως προς s παίρνουμε

$$\int_\alpha^\beta x(t)dt \int_\alpha^\beta x(s)ds + \int_\alpha^\beta y(t)dt \int_\alpha^\beta y(s)ds \leq \int_\alpha^\beta \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\,dt \int_\alpha^\beta \sqrt{x^2(s)+y^2(s)}\,ds,$$

ή

$$\left[\int_\alpha^\beta x(t)\,dt\right]^2 + \left[\int_\alpha^\beta y(t)\,dt\right]^2 \leq \left[\int_\alpha^\beta \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\,dt\right]^2$$

οπότε

$$\sqrt{\left[\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt\right]^2+\left[\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,dt\right]^2} \leq \left[\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\,dt\right],$$

που είναι η ζητούμενη ανισότητα. □

Υποθέτουμε ότι γ είναι μία κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο με παραμετρική παράσταση $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ και θεωρούμε μια συνεχή μιγαδική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο των σημείων της καμπύλης. Το ολοκλήρωμα

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z)dz := \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt}$$

είναι το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** (line integral) της συνάρτησης f κατά μήκος της καμπύλης γ. Αυτό είναι ένας μιγαδικός αριθμός ο οποίος δεν εξαρτάται από την παραμετρική παράσταση της καμπύλης γ. Το ολοκλήρωμα τούτο έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

α) Αν $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ είναι μια διαμέριση της καμπύλης γ, τότε έχουμε

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

β) Αν f, g είναι δυο συνεχείς συναρτήσεις και a, b είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

$$\int_{\gamma} (af(z) + bg(z))dz = a\int_{\gamma} f(z)dz + b\int_{\gamma} g(z)dz.$$

γ) Αν μ(γ) είναι το μήκος της καμπύλης γ και Μ είναι ένα άνω φράγμα της συνάρτησης $|f(z)|$, $z \in \gamma$, τότε ισχύει

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq M\mu(\gamma).$$

δ) Υποθέτουμε ότι f και F είναι δυο συναρτήσεις ορισμένες σε έναν τόπο $T$ του μιγαδικού επιπέδου τέτοιες ώστε

$$F'(z) = f(z), \quad \text{για κάθε } z \in T.$$

Τότε για κάθε κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη γ με αρχικό σημείο a και τελικό σημείο b ισχύει ο **τύπος των Newton-Leibnitz:**

$$\int_\gamma f(z)dz = F(b) - F(a).$$

Επομένως για κάθε κατά τμήματα διαφορίσιμη κλειστή καμπύλη γ που ανήκει στον τόπο $T$ ισχύει

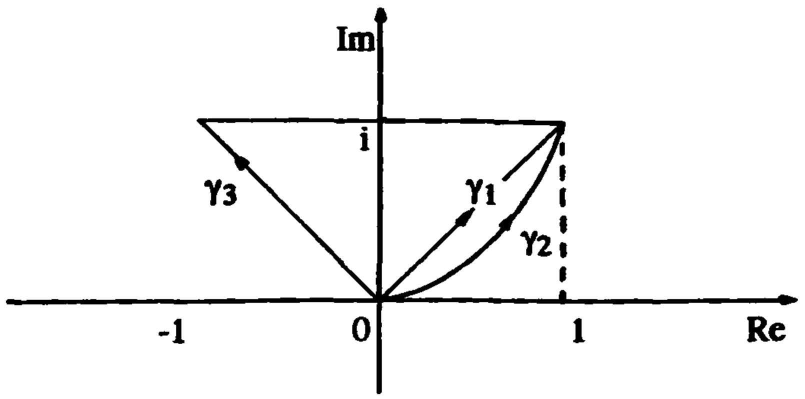
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

**Παράδειγμα 5.1.2**

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma [1+2i - 2\bar{z}]\, dz,$$

όπου γ είναι μία από τις καμπύλες $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ του παρακάτω σχήματος που έχουν αρχικό σημείο το 0 και τελικό το σημείο 1+i:




**Οι καμπύλες $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ έχουν αρχικό σημείο το 0 και τελικό το 1 +i**

Δηλαδή

α) $\gamma_1$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία 0 και 1+i,

β) $\gamma_2$ είναι τμήμα της παραβολής $y = x^2$ που ενώνει τα σημεία 0 και 1+i, και

γ) $\gamma_3$ είναι η πολυγωνική γραμμή P(0, -1+i, 1+i), δηλαδή η τεθλασμένη γραμμή η οποία αποτελείται από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν αντίστοιχα τα σημεία 0 , -1+i και -1+i , 1+i .

Προς τούτο θα πάρουμε τις τρεις περιπτώσεις διαδοχικά.

α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $\gamma = \gamma_1$. Μια παραμετρική παράσταση της καμπύλης αυτής δίνεται από τη συνάρτηση

$$z(t) := t + it,\ t \in [0, 1].$$

Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{\gamma_1} (1+2i - 2\bar{z})dz = \int_0^1 (1+2i-2(t-it))(1+i)dt =$$

$$=(1+i)\Big((1+2i)\int_0^1 dt - 2(1-i)\int_0^1 tdt\Big) = (1+i)\Big((1+2i)-(1-i)\Big) =$$

$$=3i(1+i) = -3(1-i).$$

β) Έστω ότι $\gamma = \gamma_2$. Μια παραμετρική παράσταση της καμπύλης είναι η

$$z(t) := t + it^2,\ t\in[0, 1],$$

οπότε το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\int_{\gamma_2} (1 +2i - 2\bar{z})dz = \int_0^1 (1 +2i- 2(t- it^2))(1 +2it)dt =$$

$$= \int_0^1 (1+2it +2i- 4t - 2t- 4it^2 +2it^2- 4t^3)dt =$$

$$= \int_0^1 (1 + 2i - 6t - 4t^3 + 2it - 2it^2)dt =$$

$$= 1+2i - 3 - 1 + i - \frac{2}{3}i =$$

$$= -3 + \frac{7}{3}i.$$

γ) Τέλος, έστω ότι $\gamma = \gamma_3$. Εδώ παρατηρούμε ότι η καμπύλη αυτή διασπάται σε δυο άλλες καμπύλες $\gamma'$ και $\gamma''$ οι οποίες είναι τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα σημεία $0$ , $-1+i$ και $-1+i$ , $1+i$ αντίστοιχα. Μια παραμετρική παράσταση της καμπύλης $\gamma'$ είναι η

$$z(t) := -t + it, \quad t \in [0,1],$$

και της $\gamma''$ η

$$z(t) := t + i, \quad t \in [-1,1].$$

Επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{\gamma_3} [1+2i - 2\bar{z}]dz = \int_{\gamma'} [1+2i - 2\bar{z}]dz + \int_{\gamma''} [1+2i - 2\bar{z}]dz =$$

$$= \int_0^1 [1+2i - 2(-t - it)](-1+i)dt + \int_{-1}^1 [1+2i - 2(t - i)](1)dt =$$

$$= (-1+i)\int_0^1 [1+2i - 2t + 2it]dt + \int_{-1}^1 [1+4i - 2t]dt =$$

$$= (-1+i)[1+2i-1+i] + (1+4i)2 = (-1+i)3i + 2 + 8i =$$

$$= -1+5i.$$ □

**Παράδειγμα 5.1.3**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma}[z+\sqrt{z}]dz,$$

όπου γ είναι η άνω ημιπεριφέρεια του μοναδιαίου κύκλου με θετική φορά και όπου $\sqrt{z}$ είναι εκείνος ο κλάδος της τετραγωνικής ρίζας του z για τον οποίο ισχύει $\sqrt{1}=-1$.

Πραγματικά, μια παραμετρική παράσταση της καμπύλης γ είναι η

$$z(t):=e^{it},\ t\in[0,\pi]$$

και για κάθε t οι δυο τετραγωνικές ρίζες του z(t) είναι οι

$$e^{i(t/2)} \quad \text{και} \quad e^{i(t/2)+i\pi}.$$

Από τους δυο αυτούς κλάδους κρατάμε τον δεύτερο, αφού για t=0, έχουμε

$$e^{i(0/2)+i\pi}=e^{i\pi}=-1.$$

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{\gamma}[z+\sqrt{z}]dz=\int_{0}^{\pi}[e^{it}+e^{i(t/2)+i\pi}]\,ie^{it}\,dt=i\int_{0}^{\pi}e^{2it}dt+ie^{i\pi}\int_{0}^{\pi}e^{i(3t/2)}dt=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2it}\Big|_{0}^{\pi}-\frac{2}{3}e^{i(3t/2)}\Big|_{0}^{\pi}=\frac{1}{2}(e^{2i\pi}-e^{0})-\frac{2}{3}(e^{i(3\pi/2)}-e^{0})=$$

$$=-\frac{2}{3}(0-i-1)=\frac{2}{3}(1+i).$$

□

**Παράδειγμα 5.1.4**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma}(z^{2}+3z+2)dz,$$

όπου γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο 1- i με το -1+2i.

Προς τούτο παρατηρούμε ότι ισχύει

$$z^2 +3z +2 = \frac{d}{dz}\left(\frac{z^3}{3} + \frac{3z^2}{2} + 2z\right),.$$

οπότε εφαρμόζοντας τον τύπο Newton - Leibnitz παίρνουμε

$$\int_\gamma (z^2+3z +2)dz = -\frac{(1-i)^3}{3} - \frac{3(1-i)^2}{2} - 2(1-i) +$$

$$+\frac{(-1+2i)^3}{3} + \frac{3(-1+2i)^2}{2} + 2(-1+2i) = -\frac{25}{6} + 3i.$$ □

**Παράδειγμα 5.1.5**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{\log^3 z}{z} dz,$$

όπου γ είναι το μικρότερο τόξο της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου με αρχικό σημείο το 1 και τελικό το i.

Το πρόβλημα τούτο θα το λύσουμε με δύο τρόπους:

*1ος τρόπος*: Παρατηρούμε ότι η καμπύλη γ δεν τέμνει το σύνολο

$$\{z : z + |z| = 0\}$$

και άρα η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι ολόμορφη σε μια περιοχή της καμπύλης γ και τέτοια ώστε

$$\frac{\ln^3 z}{z} = \frac{d}{dz}\left(\frac{\log^4 z}{4}\right).$$

Επομένως το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\int_\gamma \frac{\log^3 z}{z} dz = \frac{\mathrm{Log}^4 i}{4} - \frac{\mathrm{Log}^4 1}{4} = \frac{\mathrm{Log}^4 i}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{i\pi}{2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{64}.$$

*2ος τρόπος*: Επειδή κάθε σημείο z της καμπύλης γ έχει μέτρο ίσο με 1, μπορούμε να θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό

$$z := e^{i\theta},$$

όπου η πραγματική μεταβλητή θ μεταβάλλεται στο διάστημα μεταξύ 0 και π/2. Τότε παίρνουμε και

$$\log z = i\theta\ ,\ dz = i\, e^{i\theta}d\theta,$$

οπότε έχουμε

$$\int_\gamma \frac{\lambda o\gamma^3 z}{z}dz = \int_0^{\pi/2} \frac{i^3\theta^3 e^{i\theta} i d\theta}{e^{i\theta}} = \int_0^{\pi/2} \theta^3\, d\theta = \frac{\pi^4}{64}. \qquad \square$$

**5.1.1** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma (z^2+3|z|^2)dz,$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο το σημείο 0.

**5.1.2** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \exp(\bar{z}\,)dz,$$

όπου γ είναι

α) το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο 0 με το π- iπ, και

β) το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο - iπ με το π.

**5.1.3** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma (2z^2 +3z-1+i)dz,$$

όπου γ είναι η πολυγωνική καμπύλη P(0, 1- i, 2 + i), δηλαδή η καμπύλη που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το 0 με το 1- i και το 1- i με το 2+i.

**5.1.4** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma (\sin z + z\cos z)dz,$$

όπου γ είναι η πολυγωνική καμπύλη P(1, 0, i).

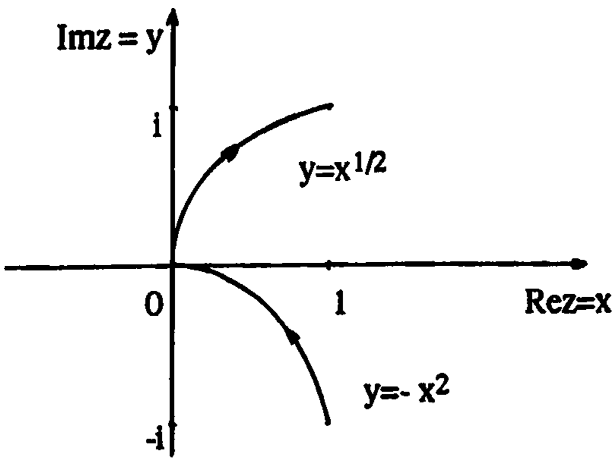
**5.1.5** Για κάθε ακέραιο $\nu > 1$ και $k \in \{0, 1, ..., \nu-1\}$ έστω $z_{(k)}$ ο k- κλάδος της ν-οστής ρίζας του μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού z. Αν γ είναι μια οποιαδήποτε διαφορίσιμη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδειχτεί ότι ισχύει

$$\sum_{k=0}^{\nu} \int_\gamma \frac{dz}{z_{(k)}} = 0.$$

**5.1.6** Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma (z^{2000} + \sin z)dz,$$

όπου γ είναι η καμπύλη του παρακάτω σχήματος:




**Η γ έχει αρχικό σημείο το 1 - i και τελικό το 1 + i.**

**5.1.7** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma z \,\mathrm{Im}\, z^2 \, dz$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$z(t) := e^{it}, \quad t \in [-\pi, 0].$$

**5.1.8** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma z \,\mathrm{Re}\, z \, dz$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση $z(t) := e^{it}, \ t \in [0, 2\pi]$.

**5.1.9** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{1}{z^{3/4}} \, dz$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση $z(t) := e^{it}, \ t \in [0, \pi]$ και ο κλάδος της τέταρτης ρίζας του z είναι εκείνος για τον οποίο ισχύει

$$\sqrt[4]{1} = 1.$$

**5.1.10** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{\sqrt{\sin z}} \, dz$$

όπου γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο - 1 με το i και ο κλάδος της ρίζας του sin z είναι εκείνος για τον οποίο ισχύει

$$\sqrt{\sin(-1)} = i\sqrt{\sin 1}.$$

## 5.2 Ολοκλήρωση σειρών μιγαδικών συναρτήσεων

Υποθέτουμε ότι

$$\Sigma f_n$$

είναι μια σειρά συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων τουλάχιστον πάνω σε μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη γ. Αν η σειρά αυτή **συγκλίνει ομοιόμορφα** πάνω στη γ, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της σειράς είναι ίσο με τη σειρά των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων, δηλαδή ισχύει ότι

$$\int_\gamma \left[\Sigma f_n(z)\right] dz = \Sigma \int_\gamma f_n(z)\, dz.$$

Μια εφαρμογή του παραπάνω γεγονότος μπορούμε άμεσα να έχουμε στην περίπτωση των δυναμοσειρών. Πραγματικά, υποθέτουμε ότι

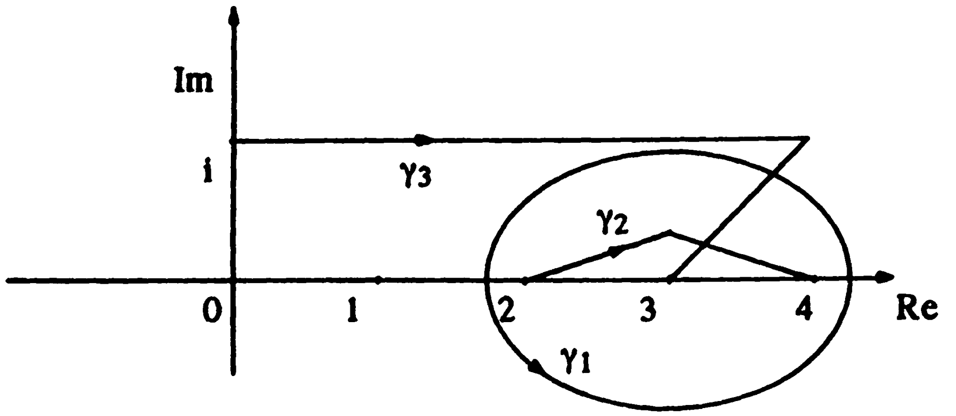
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

είναι μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης R και ότι γ είναι μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στον δίσκο $B(z_0, R)$ με αρχικό σημείο a και τελικό σημείο b. Άρα η καμπύλη γ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του συνόλου σύγκλισης της δυναμοσειράς. Τούτο σημαίνει ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα πάνω στο σύνολο των σημείων της καμπύλης και έτσι εφαρμόζεται ο προηγούμενος τύπος.

$$\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{(b - z_0)^{n+1} - (a - z_0)^{n+1}}{n+1}.$$

**Παράδειγμα 5.2.1**

Αν γ είναι μία από τις καμπύλες του σχήματος




Η $\gamma_1$ είναι έλλειψη και οι $\gamma_2$, $\gamma_3$ είναι πολυγωνικές καμπύλες

θα εξετάσουμε αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-3)^n dz$$

υπάρχει, και, στην περίπτωση που υπάρχει, θα υπολογιστεί τούτο.

Πραγματικά, παρατηρούμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-3)^n$$

είναι ίση με 2, οπότε η δυναμοσειρά συγκλίνει όταν το σημείο z ανήκει στην ανοικτή κυκλική περιοχή B(3, 2). Επίσης παρατηρούμε ότι οι καμπύλες $\gamma_1$ και $\gamma_2$ ανήκουν ολόκληρες μέσα στην περιοχή αυτή, ενώ η $\gamma_3$ έχει ένα τμήμα της εκτός της περιοχής. Άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπάρχει μόνο κατά μήκος των δύο πρώτων καμπυλών. Μάλιστα δε εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο βρίσκουμε

$$\int_{\gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-3)^n dz = 0,$$

διότι η καμπύλη $\gamma_1$ είναι κλειστή.

Για την καμπύλη $\gamma_2$ έχουμε

$$\int_{\gamma_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-3)^n\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\,\frac{(4-3)^{n+1} - (2-3)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{(n+1)2^n},$$

διότι η καμπύλη αυτή έχει αρχικό σημείο το 2 και τελικό το 4. □

**5.2.1** Δίνονται οι καμπύλες $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ και $\gamma_4$, όπου

$\gamma_1$ είναι η πολυγωνική καμπύλη P(i, -1, -1- i, -i),

$\gamma_2$ είναι η αρνητικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο -i και ακτίνα ίση με 1/2,

$\gamma_3$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει το σημείο i με το 3+i,

$\gamma_4$ είναι η θετικά προσανατολισμένη ημιπεριφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα ίση με 5.

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα παρακάτω επικαμπύλια ολοκληρώματα και αν "ναι", να υπολογιστούν αυτά κατά μήκος των καμπυλών $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$, $\gamma_4$:

α) $\displaystyle\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{3}\right)^n dz$, β) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{(z-2i)^n}{n!} dz$,

γ) $\displaystyle\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z+1+i}{2}\right)^n dz$.

# 6 Δείκτης στροφής

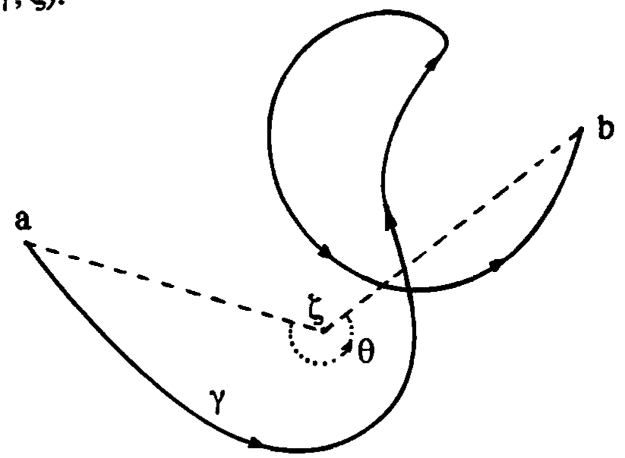
Μία από τις σπουδαιότερες έννοιες της μιγαδικής ανάλυσης είναι αυτή του δείκτη στροφής μιας καμπύλης ως προς ένα σημείο του επιπέδου εκτός της καμπύλης.

## 6.1 Ορισμός

Ας υποθέσουμε ότι διεξάγεται ένας αγώνας ταχύτητας μοτοσυκλετών σε κλειστό χώρο, όπου το σημείο τερματισμού είναι το ίδιο με το σημείο εκκίνησης. Τοποθετούμε το παρατηρητήριό μας σε κάποιο σημείο το οποίο, προφανώς, δεν θα είναι πάνω στην πίστα από όπου διέρχονται οι μοτοσυκλέτες. Έτσι, κατά τη διάρκεια του αγώνα, στρέφουμε το κεφάλι μας ώστε να μπορούμε να παρακολουθούμε τις μοτοσυκλέτες να ακολουθούν την προγραμματισμένη διαδρομή. Ο αριθμός των πλήρων περιστροφών που θα κάνουμε παρακολουθώντας την κίνηση των μοτοσυκλετών είναι ο δείκτης στροφής της τροχιάς - καμπύλης που διαγράφουν οι μοτοσυκλέτες ως προς το σημείο όπου έχουμε το παρατηρητήριο. Προφανώς όταν η διαδρομή των μοτοσυκλετών είναι χαραγμένη μέσα σε ένα γήπεδο ποδοσφαίρου κι εμείς είμαστε πάνω στις κερκίδες, τότε ο δείκτης στροφής είναι μηδέν.

Πιο συγκεκριμένα δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Έστω $\gamma$ μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο και $\zeta$ ένα σημείο το οποίο δεν ανήκει πάνω στην καμπύλη. Υποθέτουμε ότι ένας παρατηρητής στέκεται στο σημείο ζ και παρατηρεί ένα κινητό το οποίο διαγράφει την καμπύλη γ από το αρχικό σημείο a μέχρι το τελικό της σημείο b. Τότε το βλέμμα του παρατηρητή γράφει μια γωνία θ. Το πηλίκο της γωνίας αυτής μετρημένης σε ακτίνια δια του αριθμού 2π, (ή μετρημένης σε μοίρες και διαιρούμενη με το 360), είναι ακριβώς το τμήμα του κύκλου που διαγράφει το βλέμμα του παρατηρητή. Τούτο είναι ο **δείκτης στροφής** (winding number, ή index) της καμπύλης γ ως προς το σημείο ζ και συνήθως παριστάνεται με Ι(γ, ζ).




**Το πηλίκο της γωνίας θ μετρημένης σε ακτίνια δια του αριθμού 2π είναι ο δείκτης στροφής της καμπύλης γ ως προς το σημείο ζ.**

Ο δείκτης στροφής θεωρείται **θετικός**, αν η κίνηση του βλέμματος του παρατηρητή εκτελείται από δεξιά προς τα αριστερά, ενώ αν εκτελείται από αριστερά προς τα δεξιά, τότε αυτός θεωρείται **αρνητικός**. Δηλαδή ο δείκτης στροφής είναι θετικός όταν κινούμενοι επί της καμπύλης έχουμε το σημείο παρατήρησης στο αριστερό μας χέρι και είναι αρνητικός στην αντίθετη περίπτωση.

Ο μαθηματικός ορισμός του δείκτη στροφής είναι ο εξής:

$$\boxed{I(\gamma, \zeta) := \frac{1}{2\pi i}\left[ \ln \frac{|a - \zeta|}{|b - \zeta|} + \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \zeta} \right].}$$

Επομένως, αν η καμπύλη γ είναι κλειστή, τότε ο δείκτης στροφής της γ ως προς κάθε σημείο ζ που δεν ανήκει πάνω στη γ είναι

$$\boxed{I(\gamma,\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z-\zeta}\,.}$$

Στην περίπτωση που η καμπύλη γ είναι κλειστή, ο δείκτης στροφής είναι πάντοτε ένας ακέραιος αριθμός. Μάλιστα δε ισχύει

$$I(\gamma,\zeta)=0,\ \text{ για κάθε } \zeta\in \varepsilon\xi(\gamma).$$

Αν η καμπύλη γ είναι απλή και κλειστή, τότε επιπλέον ισχύει ότι

$$I(\gamma,\zeta)=\pm 1,\ \text{ για κάθε } \zeta\in \varepsilon\sigma(\gamma).$$

Αν έχουμε την τιμή +1, η καμπύλη έχει θετική φορά και αν τη -1, αυτή έχει την αρνητική φορά.

**Παράδειγμα 6.1.1**

Έστω γ μια κατά τμήματα διαφορίσιμη (όχι κατ' ανάγκη κλειστή) καμπύλη και έστω ζ ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου το οποίο δεν ανήκει επί της καμπύλης γ. Αν αναλύσουμε τη γ σε άθροισμα δύο άλλων καμπυλών $\gamma_1$ και $\gamma_2$, δηλαδή αν έχουμε

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2,$$

τότε ισχύει ότι

$$I(\gamma_1+\gamma_2,\zeta)=I(\gamma,\zeta)=I(\gamma_1,\zeta)+I(\gamma_2,\zeta),$$

δηλαδή η συνάρτηση που απεικονίζει την καμπύλη γ στον δείκτη στροφής $I(\gamma,\zeta)$ είναι προσθετική.

Πραγματικά, έστω a και b αντίστοιχα το αρχικό και το τελικό σημείο της γ. Υποθέτουμε ότι c είναι το τελικό σημείο της $\gamma_1$ το οποίο ταυτίζεται με το αρχικό σημείο της $\gamma_2$. Άρα η $\gamma_1$ έχει αρχικό σημείο το a και τελικό το c, ενώ η $\gamma_2$ έχει αρχικό το σημείο c και τελικό το b και συνεπώς θα έχουμε

$$I(\gamma_1,\zeta)+I(\gamma_2,\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\Big[\log\frac{|a-\zeta|}{|c-\zeta|}+\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z-\zeta}\Big]+\frac{1}{2\pi i}\Big[\log\frac{|c-\zeta|}{|b-\zeta|}+\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z-\zeta}\Big]=$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\Big[ \log\frac{|a-\zeta|}{|c-\zeta|} + \log\frac{|c-\zeta|}{|b-\zeta|} + \int_{\gamma_1}\frac{dz}{z-\zeta} + \int_{\gamma_2}\frac{dz}{z-\zeta}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\Big[ \log\frac{|a-\zeta|}{|c-\zeta|}\cdot\frac{|c-\zeta|}{|b-\zeta|} + \int_{\gamma_1+\gamma_2}\frac{dz}{z-\zeta}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\Big[ \log\frac{|a-\zeta|}{|b-\zeta|} + \int_{\gamma}\frac{dz}{z-\zeta}\Big] = I(\gamma, \zeta). \qquad \square$$

**Παράδειγμα 6.1.2**

Θα υπολογιστεί ο δείκτης στροφής της καμπύλης γ με παραμετρική παράσταση

$$z(t) := 3e^{i\pi t}, \quad t \in [0, \tfrac{1}{2}]$$

ως προς το σημείο 0.

Τούτο μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

*1ος τρόπος:* Το σημείο 0 δεν ανήκει πάνω στην καμπύλη γ και η καμπύλη είναι διαφορίσιμη. Άρα ο δείκτης στροφής υπάρχει και ισούται με

$$I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\Big[ \log\frac{|a|}{|b|} + \int_{\gamma}\frac{dz}{z-\zeta}\Big] = \frac{1}{2\pi i}\Big[ \log\frac{3}{3} + \int_0^{1/2}\frac{3i\pi e^{i\pi t}dt}{3e^{i\pi t}}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\Big[0 + \pi i \frac{1}{2}\Big] = \frac{1}{4}.$$

*2ος τρόπος:* Η καμπύλη γ είναι το πρώτο τέταρτο της θετικά προσανατολισμένης περιφέρειας του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα ίση με 3. Άρα ο δείκτης στροφής της γ ως προς το κέντρο του κύκλου αυτού είναι

$$I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}. \qquad \square$$

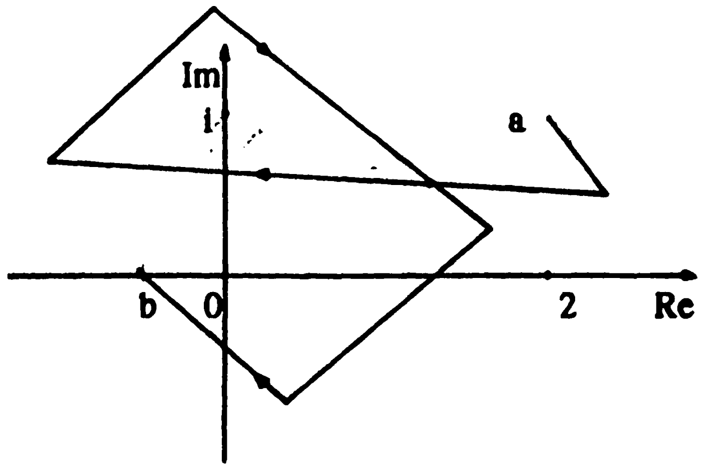
**Παράδειγμα 6.1.3**

Αν θέλουμε να κατασκευάσουμε μία κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη γ που έχει δείκτη στροφής ως προς το σημείο i ίσον με - 4/3, εργαζόμαστε ως εξής:

Ο αριθμός 4/3 δηλώνει ότι αν σταθούμε στο σημείο i και παρατηρήσουμε ένα κινητό που διαγράφει την καμπύλη, τότε πρέπει τελικά να στραφούμε προς τα δεξιά κατά μια γωνία ίση με

$$\frac{4}{3} \times 360^\circ = 360^\circ + 120^\circ.$$

Επίσης το πρόσημο "- " σημαίνει ότι βαδίζοντας πάνω στην καμπύλη έχουμε το σημείο (παρατήρησης) i προς τα δεξιά μας. Άρα μια τέτοια καμπύλη μπορεί να είναι όπως στο σχήμα, όπου το αρχικό σημείο είναι το a=2 + i και τελικό το b=-$\sqrt{3}/3$.




**Ο δείκτης στροφής της καμπύλης γ ως προς το σημείο i είναι - 4/3.**

□

**Παράδειγμα 6.1.4**

Υποθέτουμε ότι $\gamma_1$ και $\gamma_2$ είναι δύο κλειστές διαφορίσιμες καμπύλες με παραμετρικές παραστάσεις $z_1(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ και $z_2(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, τέτοιες ώστε να ισχύει

$$|z_1(t) - z_2(t)| < |z_2(t)|, \text{ για κάθε } t \in [\alpha, \beta].$$

Θα αποδειχτεί ότι

$$I(\gamma_1, 0) = I(\gamma_2, 0).$$

Προς τούτο παρατηρούμε πρώτα ότι αν για κάποιο $\tau \in [\alpha, \beta]$ είχαμε $z_2(\tau) = 0$, τότε από τη δοθείσα σχέση θα έπρεπε να έχουμε $|z_1(t)| < 0$, άτοπο. Επομένως η $z_2(t)$ δεν μηδενίζεται για καμμία τιμή του t. Έτσι, θέτοντας

$$z(t) := \frac{z_1(t)}{z_2(t)}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

παίρνουμε μία συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση

$$|z(t) - 1| < 1, \text{ για κάθε } t \in [\alpha, \beta].$$

Επομένως η z(t) παριστάνει μία κλειστή διαφορίσιμη καμπύλη γ που βρίσκεται μέσα στον κύκλο με κέντρο 1 και ακτίνα 1, οπότε το σημείο 0 ανήκει στο εξωτερικό της καμπύλης γ. Τούτο σημαίνει ότι ο δείκτης στροφής της καμπύλης γ ως προς το σημείο 0 θα είναι ίσος με μηδέν, δηλαδή $I(\gamma, 0) = 0$. Άρα έχουμε

$$0 = I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - \zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{z'(t)dt}{z(t) - 0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{z_1'(t)dt}{z_1(t)} - \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{z_2'(t)dt}{z_2(t)} =$$

$$= I(\gamma_1, 0) - I(\gamma_2, 0).$$ □

### Παράδειγμα 6.1.5

Έστω γ μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο η οποία δεν διέρχεται από το σημείο 0 και η οποία έχει παραμετρική παράσταση $z(t) := x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$x(\alpha)\, y(\beta) = x(\beta)\, y(\alpha).$$

Θα αποδείξουμε ότι ο δείκτης στροφής της καμπύλης γ ως προς το σημείο 0 είναι ένας ακέραιος αριθμός.

Πραγματικά, έστω a το αρχικό και b το τελικό σημείο της καμπύλης γ. Είναι προφανές ότι για να είναι ο δείκτης στροφής $I(\gamma, 0)$ ένας ακέραιος αριθμός, θα πρέπει οι δύο προσανατολισμένες ευθείες $\mathcal{E}(0, a)$ και $\mathcal{E}(0, b)$ να ταυτίζονται. Τούτο θα συμβαίνει αν και μόνο αν η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές είναι ίση με το 0, αφού και οι δυο ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο 0. Αλλά η γωνία αυτή είναι ίση με

$$\arg b - \arg a = \arctan \frac{y(\beta)}{x(\beta)} - \arctan \frac{y(\alpha)}{x(\alpha)} = 0,$$

λόγω της συνθήκης που δόθηκε. Άρα, πραγματικά, οι δύο ευθείες ταυτίζονται και το συμπέρασμα αποδείχτηκε. □

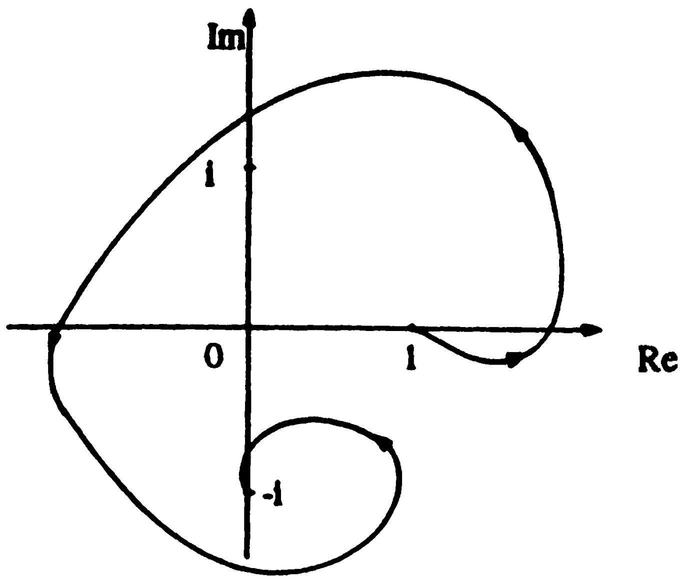
**Παράδειγμα 6.1.6**

Να βρεθούν σημεία a, b, c, d, e, f, g του μιγαδικού επιπέδου τέτοια ώστε

$$I(\Gamma,\ a) = 0, \quad I(\Gamma,\ b) = 1, \quad I(\Gamma,\ c) = \frac{1}{2}, \quad I(\Gamma,\ d) = \frac{3}{4},$$

$$I(\Gamma,\ e) = \frac{1}{4}, \quad I(\Gamma,\ f) = \frac{1}{8}, \quad I(\Gamma,\ g) = \frac{3}{2}, \quad I(\Gamma,\ h) = -\frac{1}{12},$$

όπου Γ είναι η καμπύλη με αρχικό σημείο το 1 και τελικό το - i, όπως στο παρακάτω σχήμα:

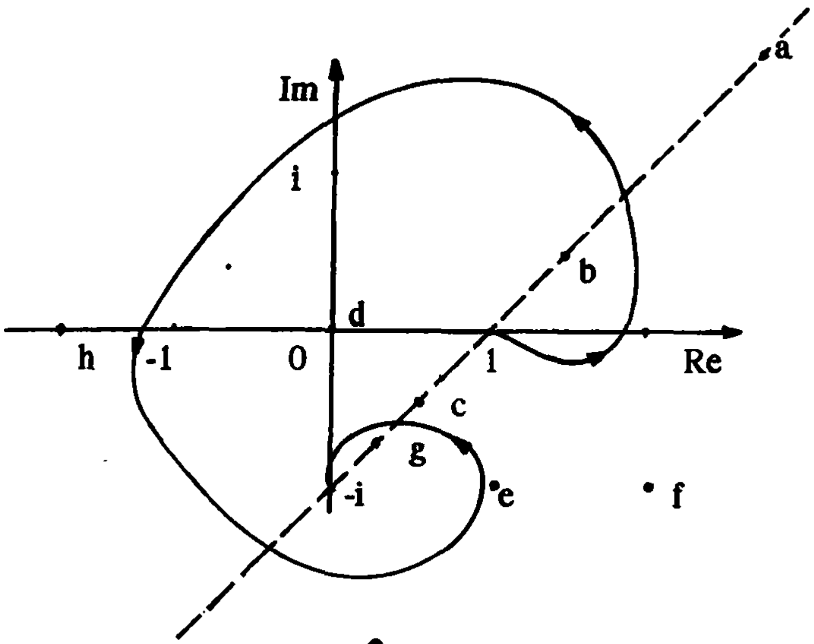



Πραγματικά τέτοια σημεία υπάρχουν πάρα πολλά. Για παράδειγμα τα

$$a:=3+2i,\quad b:=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i,\quad c:=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i,\quad d:=0,$$

$$e:=1-i,\quad f:=2-i,\quad g:=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i,\quad h=-\sqrt{3}$$

είναι σημεία που προφανώς ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προβλήματος, βλ. επόμενο σχήμα:




□

**6.1.1** Να δοθεί παράδειγμα απλής μη κλειστής καμπύλης γ που να ικανοποιεί τη σχέση

$$I(2\gamma, i) + I(-\gamma, 0) = 2.$$

**6.1.2** Να δοθεί παράδειγμα απλής μη κλειστής καμπύλης γ που να ικανοποιεί τη σχέση

$$I(\gamma, i) + I(\gamma, -i) = -5.$$

**6.1.3** Να δοθεί παράδειγμα μιας απλής καμπύλης γ που να ικανοποιεί τη σχέση

$$I(\gamma, 1+i) = 3{,}25.$$

**6.1.4** Έστω γ μια κατά τμήματα διαφορίσιμη κλειστή καμπύλη και έστω a ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου το οποίο απέχει από την καμπύλη γ απόσταση d, δηλαδή

$$d = \min\{|a - z| : z \in \gamma\}.$$

Ν' αποδειχτεί ότι ισχύει η σχέση

$$\mu(\gamma) \geq 2\pi d\, |I(\gamma, a)|,$$

όπου μ(γ) είναι το μήκος της καμπύλης γ.

## 6.2 Αλυσίδες καμπυλών

Μία **αλυσίδα καμπυλών**, ή απλά **αλυσίδα** (chain) Γ στο μιγαδικό επίπεδο είναι μια πεπερασμένη συλλογή καμπυλών $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$, γεγονός που το δηλώνουμε γράφοντας

(1) $$\Gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n .$$

Το άθροισμα δυο αλυσίδων είναι η αλυσίδα που αποτελείται από όλες τις καμπύλες και των δύο αλυσίδων. Επίσης για κάθε μη μηδενικό ακέραιο αριθμό λ γράφουμε λγ και εννοούμε την αλυσίδα εκείνη που έχει την καμπύλη γ τόσες φορές όσες δηλώνει ο ακέραιος λ έχοντας τη φορά της γ, αν $\lambda > 0$ και την αντίθετη της γ, αν $\lambda < 0$.

Το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** μιας μιγαδικής συνάρτησης f που είναι ορισμένη και συνεχής κατά μήκος μιας αλυσίδας Γ της μορφής (1) ορίζεται με τον τύπο

$$\int_\Gamma f(z)dz := \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)dz,$$

και (επομένως) ο **δείκτης στροφής** $I(\Gamma, \zeta)$ της αλυσίδας ως προς ένα σημείο ζ που δεν ανήκει σε καμμιά καμπύλη της αλυσίδας ορίζεται να είναι ο αριθμός

$$I(\Gamma, \zeta) := I(\gamma_1, \zeta) + I(\gamma_2, \zeta) + \ldots + I(\gamma_n, \zeta).$$

Μια κλειστή αλυσίδα Γ, δηλαδή μια αλυσίδα της οποίας όλες οι καμπύλες μπορούν να ενωθούν και να γίνουν κλειστές, είναι **ομόλογη μηδέν** σε έναν τόπο ***T***, αν ο δείκτης στροφής της αλυσίδας ως προς κάθε σημείο που δεν ανήκει στον τόπο ***T*** είναι ίσος με το μηδέν. Τούτο δηλώνεται γράφοντας

$$\Gamma \sim 0 \quad \text{στον } \boldsymbol{T}.$$

Δυο αλυσίδες $c_1$ και $c_2$ είναι **ομόλογες** σε έναν τόπο ***T*** και γράφουμε

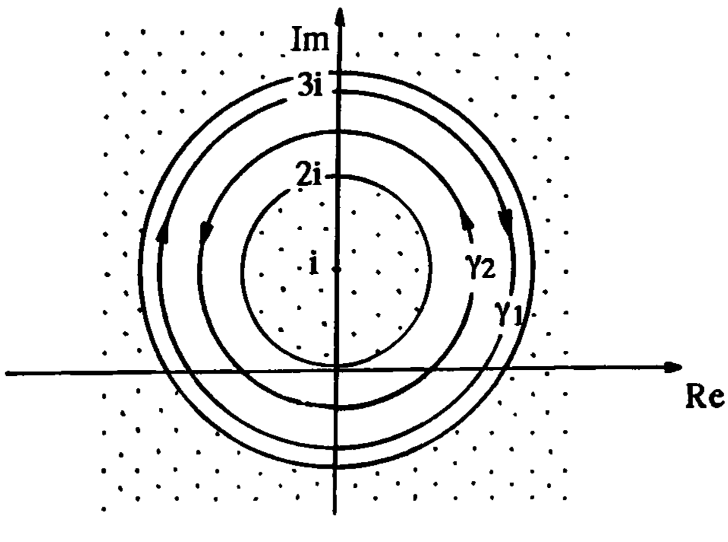
$$\Gamma_1 \sim \Gamma_2 \quad \text{στον } \boldsymbol{T},$$

όταν η αλυσίδα $\Gamma_1 - \Gamma_2 := \Gamma_1 + (-\Gamma_2)$ είναι ομόλογη μηδέν στον τόπο ***T***.

**Παράδειγμα 6.2.1**

Μέσα στον ανοικτό δακτύλιο Δ(i, 1, 2) θα κατασκευαστεί μια κλειστή αλυσίδα Γ $=\gamma_1 + \gamma_2$, (όπου οι δυο καμπύλες $\gamma_1$ και $\gamma_2$ είναι κλειστές) τέτοια ώστε η Γ να είναι ομόλογη μηδέν στο σύνολο Δ(i,1,2), αλλά οι ίδιες οι καμπύλες να μην είναι ομόλογες μηδέν στο σύνολο αυτό.

Πραγματικά θα πρέπει να ισχύει $I(\Gamma, \zeta) = 0$, ή ισοδύναμα, $I(\gamma_1, \zeta) + I(\gamma_2, \zeta) = 0$, για κάθε ζ που δεν ανήκει στη δακτυλική περιοχή Δ(i,1,2) και επιπλέον να υπάρχουν σημεία ζ τέτοια ώστε να ισχύει $I(\gamma_1, \zeta) = -I(\gamma_2, \zeta) \neq 0$. Επομένως μια τέτοια αλυσίδα θα μπορούσε να είναι όπως στο παρακάτω σχήμα:



**Παράδειγμα 6.2.2**

Θα βρεθεί ο δείκτης στροφής ως προς το σημείο $\zeta := 1 + i$ της αλυσίδας

$$\Gamma := \gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 + 5\gamma_4,$$

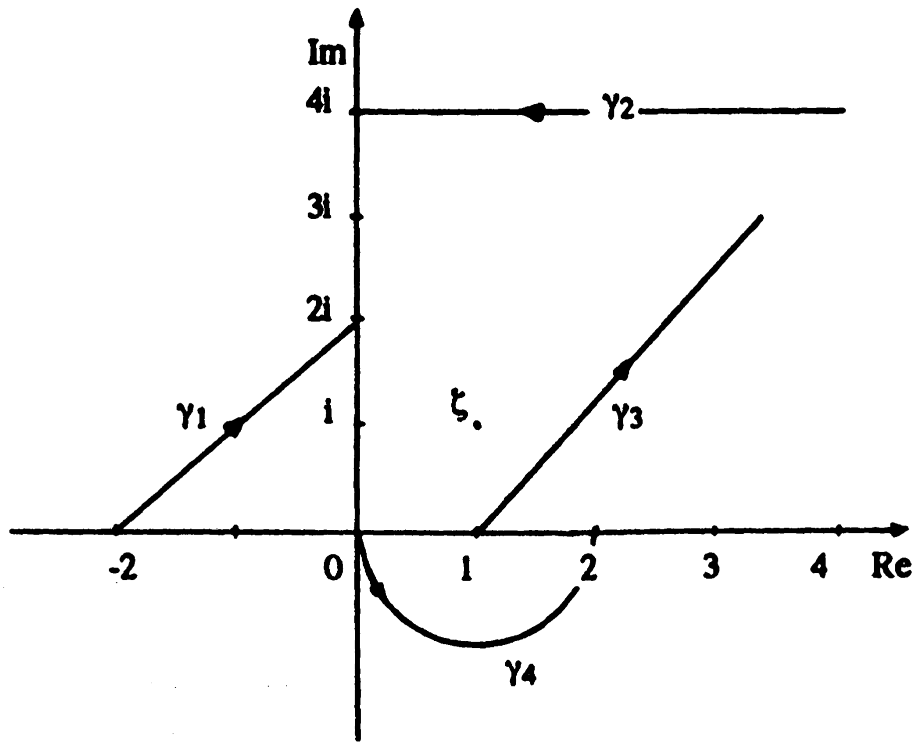
όπου

$\gamma_1$: είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο -2 με το 2i,

$\gamma_2$: είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο 4+4i με το 4i,

$\gamma_3$: είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο 1 με το 3+3i, και

$\gamma_4$: είναι η κάτω ημιπεριφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 1, ακτίνα 1, αρχικό σημείο το 0 και τελικό το 2. Βλ. σχήμα:




Για την επίλυση του προβλήματος εργαζόμαστε ως εξής: Από τον ορισμό του δείκτη στροφής της αλυσίδας Γ έχουμε

$$I(\Gamma, \zeta) = I(\gamma_1, \zeta) + I(\gamma_2, \zeta) - 2I(\gamma_3, \zeta) + 5I(\gamma_4, \zeta),$$

όπου $\zeta = 1 + i$.

Χρησιμοποιώντας απλά στοιχεία από την ευκλείδεια γεωμετρία βρίσκουμε ότι

$$I(\gamma_1, \zeta) = I(\gamma_1, 1+i) = -\frac{1}{2\pi}[\text{Arctan}\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}],$$

$$I(\gamma_2, \zeta) = I(\gamma_2, 1+i) = \frac{1}{2\pi}[\text{Arctan}\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}],$$

$$I(\gamma_3, \zeta) = I(\gamma_3, 1+i) = \frac{1}{2\pi}[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}] = \frac{3}{8},$$

$$I(\gamma_4, \zeta) = I(\gamma_4, 1+i) = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

Επομένως έχουμε

$$I(\Gamma, 1+i) = I(\gamma_1, 1+i) + I(\gamma_2, 1+i) - 2I(\gamma_3, 1+i) + 5I(\gamma_4, 1+i) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}[\text{Arctan}\,\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}] + \frac{1}{2\pi}[\text{Arctan}\,\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}] + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{5}{8}.$$ □

**6.2.1** Δίνεται η αλυσίδα $\Gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, όπου $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ και $\gamma_4$, είναι οι εξής καμπύλες:

$\gamma_1$: είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο $-3i$ με το σημείο 3,

$\gamma_2$: είναι το μεγαλύτερο τόξο της περιφέρειας του κύκλου με κέντρο το σημείο 0, ακτίνα 1, αρχικό σημείο το 1 και τελικό το $-i$.

$\gamma_3$: είναι το τμήμα της παραβολής $x=4-y^2$, με αρχικό σημείο το 4 και τελικό το $2i$, και

$\gamma_4$: είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο $2i$ με το σημείο $-i$.

Να βρεθεί ο δείκτης στροφής της αλυσίδας Γ ως προς τα σημεία

$$1-i, \quad -1+i, \quad 2-2i \quad \text{και} \quad 3+2i.$$

**6.2.2** Να δοθεί παράδειγμα μιας αλυσίδας $\Gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, με την ιδιότητα ότι $I(\Gamma,\ 2i) = -\frac{7}{3}$.

# 7 Θεωρήματα του Cauchy

Το κεντρικό θεώρημα της μιγαδικής ανάλυσης είναι το λεγόμενο θεώρημα του Cauchy για το ολοκλήρωμα ολόμορφης συνάρτησης. Με χρήση του θεωρήματος αυτού παίρνουμε πολλά χρήσιμα συμπεράσματα για τις ιδιότητες των ολόμορφων συναρτήσεων.

## 7.1 Θεώρημα του Cauchy για το ολοκλήρωμα ολόμορφης συνάρτησης

Υποθέτουμε ότι f είναι μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε έναν τόπο $T$. Η f είναι **τοπικά φραγμένη** (locally bounded) σε ένα σημείο a του τόπου $T$, αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\varepsilon > 0$ και $M > 0$ τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$|f(z)| < M, \text{ για κάθε } z \text{ με } |z - a| < \varepsilon.$$

Αν το όριο της συνάρτησης f στο σημείο a υπάρχει και είναι ένας (πεπερασμένος) μιγαδικός αριθμός, τότε αυτή είναι τοπικά φραγμένη στο a.

**Θεώρημα του Cauchy για το Ολοκλήρωμα Ολόμορφης Συνάρτησης**

*Θεωρούμε μια συνάρτηση η οποία είναι ορισμένη και ολόμορφη σε έναν τόπο* $T$

*του μιγαδικού επιπέδου εκτός από τα σημεία* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *του τόπου* ***T****, στα οποία όμως η συνάρτηση* f *είναι τοπικά φραγμένη. Αν* Γ *είναι μια κλειστή αλυσίδα που βρίσκεται στον τόπο*

$$T - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

*και είναι ομόλογη μηδέν στον τόπο* ***T****, τότε ισχύει ότι*

$$\boxed{\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 0.}$$

Άμεσο πόρισμα του θεωρήματος αυτού είναι το παρακάτω συμπέρασμα το οποίο είναι πολύ χρήσιμο στις εφαρμογές:

Θεωρούμε μια συνάρτηση η οποία είναι ορισμένη και ολόμορφη σε έναν τόπο ***T*** του μιγαδικού επιπέδου εκτός από τα σημεία $a_1, a_2, \ldots, a_n$ του τόπου ***T***, στα οποία όμως η f είναι τοπικά φραγμένη. Αν $\Gamma_1$ και $\Gamma_2$ είναι δύο κλειστές αλυσίδες που βρίσκονται στον τόπο ***T***- $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ και είναι ομόλογες στον τόπο ***T***, τότε ισχύει ότι

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz .$$

**Παράδειγμα 7.1.1**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \begin{cases} \dfrac{z+1}{z(z^2-16)}, & \text{αν } |z| < \dfrac{5}{2} \\[2ex] \dfrac{7z}{120}, & \text{αν } |z| \geq \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

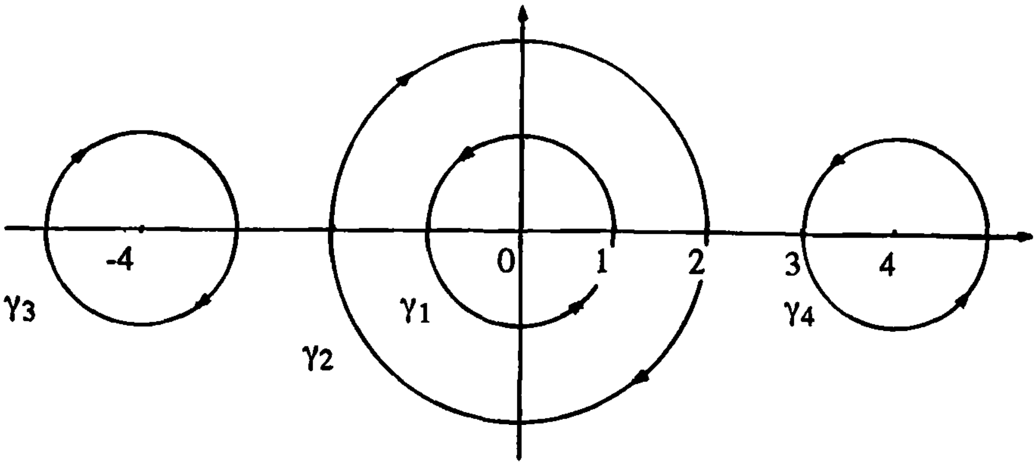
κατά μήκος της αλυσίδας των καμπυλών $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ και $\gamma_4$, όπου

$\gamma_1$ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα 1,

$\gamma_2$ είναι η αρνητικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα 2,

$\gamma_3$ είναι η αρνητικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο -4 και ακτίνα 1 και

$\gamma_4$ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο 4 και ακτίνα 1, βλ. σχήμα:




Προς τούτο, θεωρούμε τα ανοικτά σύνολα

$$A := \{z : |z| < \frac{5}{2}\} \text{ και } B := \{z : |z| > \frac{5}{2}\}.$$

Μέσα στο σύνολο A, όπου η συνάρτηση ορίζεται με τον πρώτο κλάδο, το μοναδικό σημείο στο οποίο απειρίζεται η f είναι το σημείο 0 και τούτο ανήκει στο εσωτερικό και των δύο καμπυλών $\gamma_1$ και $\gamma_2$ οι οποίες είναι οι περιφέρειες κύκλων με κοινό κέντρο το 0 και ακτίνες 1 και 2 αντίστοιχα. Σε κάθε άλλο σημείο του A η f είναι ολόμορφη. Αλλά επειδή οι δύο αυτές καμπύλες έχουν αντίθετη φορά, η αλυσίδα $\gamma_1+\gamma_2$ θα είναι ομόλογη 0 στο A. Άρα, με εφαρμογή του Θεωρήματος του Cauchy, το ολοκλήρωμα της συνάρτησης κατά μήκος της αλυσίδας $\gamma_1 + \gamma_2$ θα είναι ίσο με το 0.

Επίσης οι δύο καμπύλες που είναι οι περιφέρειες κύκλων με κέντρα τα σημεία -4 και 4 και ακτίνα 1 ανήκουν στο σύνολο B, όπου η συνάρτηση f είναι προφανώς παντού ολόμορφη. Άρα και πάλι με εφαρμογή του Θεωρήματος του Cauchy έπεται ότι το ολοκλήρωμα της f κατά μήκος και των δύο αυτών καμπυλών είναι ίσο με το 0. Έτσι, τελικά, το ολοκλήρωμα της δοθείσης συνάρτησης κατά μήκος της αλυσίδας των καμπυλών του σχήματος είναι ίσο με το 0. □

**Παράδειγμα 7.1.2**

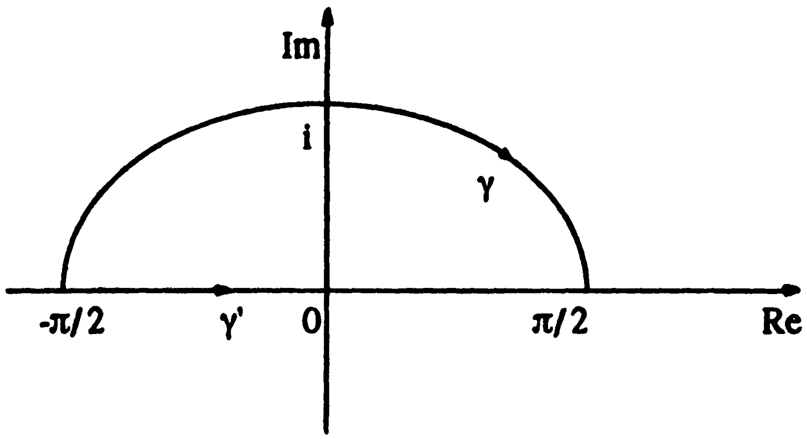
Θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \sin^2 z \, dz$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$z(t) := t + i\cos t, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Προς τούτο παρατηρούμε πρώτα ότι η συνάρτηση $\sin^2 z$ είναι ολόμορφη παντού στο μιγαδικό επίπεδο. Άρα, το παραπάνω θεώρημα του Cauchy εφαρμόζεται για τις καμπύλες γ και γ', όπου γ' είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $-\pi/2$ και $\pi/2$, βλέπε σχήμα:




**Η καμπύλη γ - γ' είναι κλειστή, οπότε εφαρμόζεται ο τύπος του Cauchy**

Έτσι, επειδή μια παραμετρική παράσταση της καμπύλης γ' είναι η

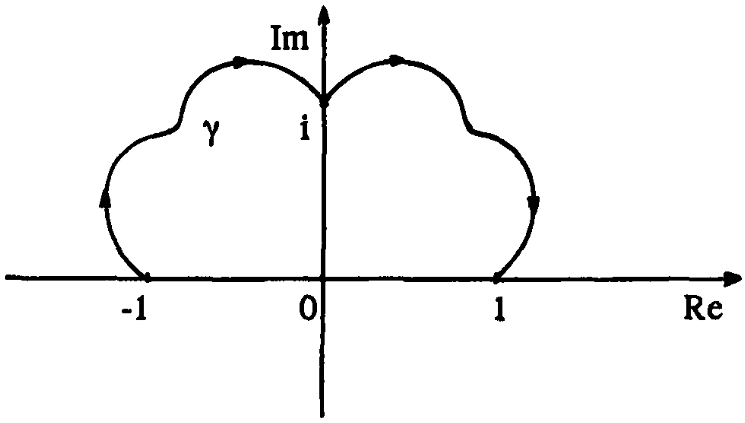
$$z(t) := t, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

θα έχουμε

$$\int_{\gamma} \sin^2 z dz = \int_{\gamma'} \sin^2 z dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

**7.1.1** Αν γ είναι η καμπύλη με αρχικό σημείο το -1 και τελικό το σημείο 1, όπως στο παρακάτω σχήμα, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

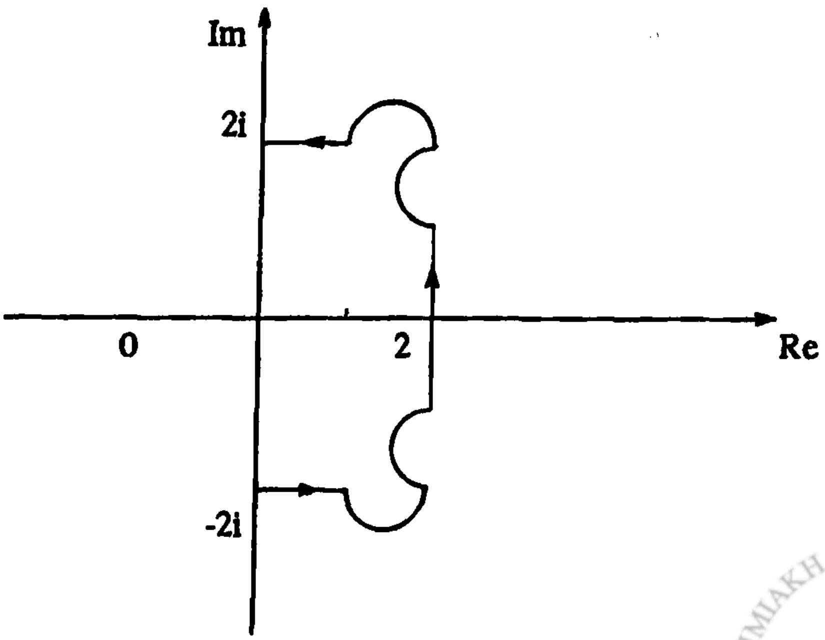
$$\int_{\gamma} \frac{dz}{4+z^2}.$$




**Η καμπύλη γ έχει αρχικό σημείο το -1 και τελικό το 1.**

**7.1.2** Αν γ είναι η καμπύλη με αρχικό σημείο το -2i και τελικό το σημείο 2i, όπως στο παρακάτω σχήμα, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} z \cos z \, dz .$$

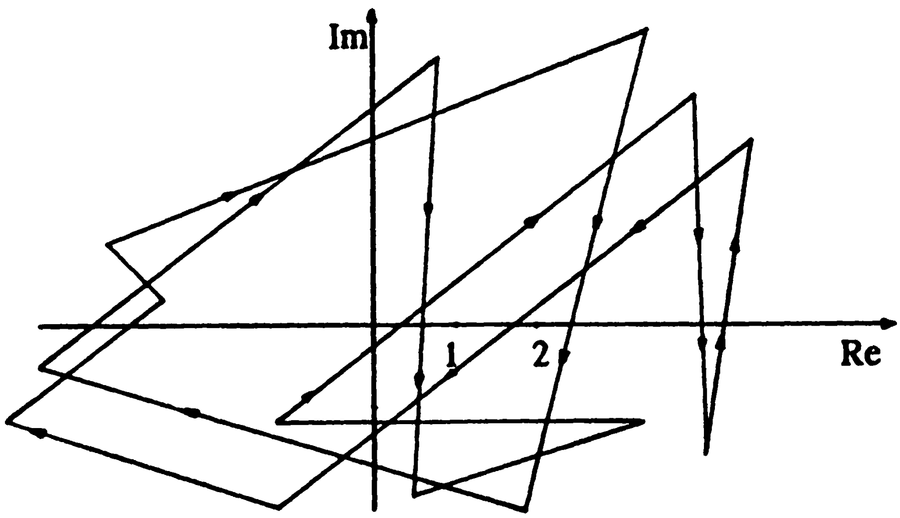



**Η καμπύλη γ έχει αρχικό σημείο το -2i και τελικό το 2i.**

**7.1.3** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της συναρτήσεως

$$f(z):=\frac{\exp(z^2)}{z^2[z^2 - z(2 - i) - 2i]}$$

κατά μήκος της καμπύλης όπως στο παρακάτω σχήμα:




**Η τεθλασμένη καμπύλη γ είναι κλειστή.**

## 7.2 Τύπος του Cauchy για την παράσταση ολόμορφης συνάρτησης

Αν f είναι μια ολόμορφη συνάρτηση σε έναν τόπο $T$ του μιγαδικού επιπέδου και Γ είναι μια κλειστή αλυσίδα ομόλογη μηδέν στον τόπο $T$, τότε ισχύει ο

**τύπος του Cauchy για την παράσταση ολόμορφης συνάρτησης με ολοκλήρωμα:**

$$\boxed{I(\Gamma, z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,, \text{ για κάθε } z \in T - \Gamma.}$$

Επομένως, αν έχουμε μια απλή κλειστή καμπύλη γ θετικά προσανατολισμένη, ισχύει

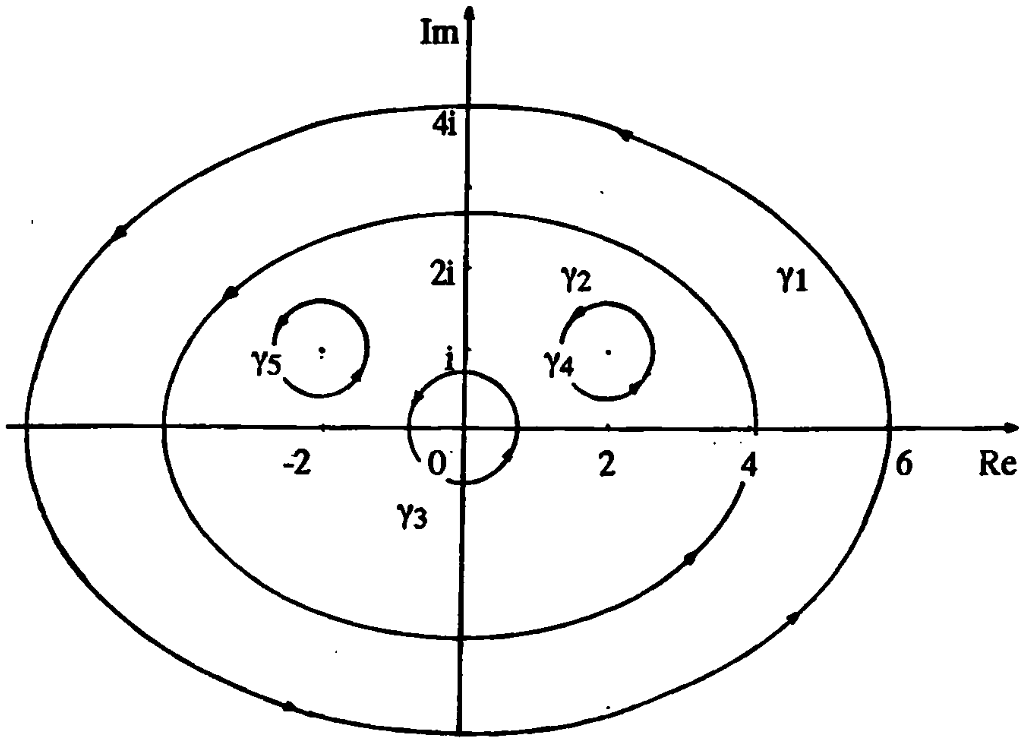
$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\,, \text{ για κάθε } z \in \varepsilon\sigma(\gamma).}$$

**Παράδειγμα 7.2.1.**

Θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \frac{z+1}{iz^3+2z^2-5iz}$$

κατά μήκος των ελλείψεων $\gamma_1$ και $\gamma_2$ που δίνονται στο παρακάτω σχήμα:




**Η αλυσίδα $\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5$ και οι καμπύλες $\gamma_1$ και $\gamma_2$ είναι μεταξύ τους ομόλογες στον τόπο *T*.**

Προς τούτο παρατηρούμε ότι η συνάρτηση που δίνεται είναι ολόμορφη παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία 0, 2+i και -2+i, τα οποία μηδενίζουν τον παρονομαστή. Άρα, ο τόπος όπου η συνάρτηση είναι ολόμορφη, είναι το σύνολο

$$\boldsymbol{T} := \mathbb{C} - \{0, 2+i, -2+i\}.$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα κατά μήκος της καμπύλης $\gamma_2$ κατασκευάζουμε κύκλους με κέντρα τα σημεία $0$, $2+i$ και $-2+i$ και ακτίνες τόσο μικρές ώστε οι κύκλοι να μην έχουν κοινά σημεία. Ονομάζουμε $\gamma_3$, $\gamma_4$ και $\gamma_5$ αντίστοιχα τις θετικά προσανατολισμένες περιφέρειες των κύκλων αυτών και θεωρούμε την αλυσίδα $\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5$. Η αλυσίδα αυτή και η καμπύλη $\gamma_2$ είναι κλειστές και ομόλογες στον τόπο $\boldsymbol{T}$. Πραγματικά, για κάθε σημείο $\zeta \in \{0, 2+i, -2+i\}$ έχουμε

$$I(\gamma_2, \zeta) = 1,$$

αφού και τα τρία σημεία $0$, $2+i$ και $-2+i$ είναι στο εσωτερικό της καμπύλης $\gamma_2$, και η καμπύλη αυτή έχει τη θετική φορά. Επίσης έχουμε

$$I(\gamma_3, 0) + I(\gamma_4, 0) + I(\gamma_5, 0) = 1 + 0 + 0 = 1,$$

$$I(\gamma_3, 2+i) + I(\gamma_4, 2+i) + I(\gamma_5, 2+i) = 0 + 1 + 0 = 1,$$

και

$$I(\gamma_3, -2+i) + I(\gamma_4, -2+i) + I(\gamma_5, -2+i) = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο τύπος του Cauchy για το ολοκλήρωμα ολόμορφης συνάρτησης εφαρμόζεται, οπότε παίρνουμε ότι

$$\int_{\gamma_2} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} = \int_{\gamma_3} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} + \int_{\gamma_4} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} + \int_{\gamma_5} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz}.$$

Έτσι, αρκεί να υπολογίσουμε τα τρία ολοκληρώματα του δεύτερου μέλους. Προς τούτο γράφουμε

$$\frac{(z+1)}{iz^3+2z^2-5iz} = \frac{(z+1)}{iz(z-2-i)(z+2-i)},$$

οπότε, με εφαρμογή του τύπου του Cauchy για την παράσταση ολόμορφης συνάρτησης, παίρνουμε

$$\int_{\gamma_3} \frac{(z+1)}{iz^3+2z^2-5iz}\,dz = \int_{\gamma_3} \frac{(z+1)}{iz(z-2-i)(z+2-i)}\,dz =$$

$$= \int_{\gamma_3} \frac{\frac{(z+1)}{i(z-2-i)(z+2-i)}}{z}\,dz =$$

$$= 2\pi i\, I(\gamma_3, 0)\, \frac{1}{i(0-2-i)(0+2-i)} =$$

$$=-\frac{2\pi}{5},$$

$$\int_{\gamma_4} \frac{(z+1)}{iz^3+2z^2-5iz}\,dz = \int_{\gamma_4} \frac{(z+1)}{iz(z-2-i)(z+2-i)}\,dz = \int_{\gamma_4} \frac{\frac{(z+1)}{iz(z+2-i)}}{(z-2-i)}\,dz =$$

$$= 2\pi i\ I(\gamma_4, 2+i)\ \frac{(2+i+1)}{i(2+i)(2+i+2-i)} = \frac{\pi}{10}(2-i)(3+i) =$$

$$=\frac{\pi}{10}(7-i),$$

και

$$\int_{\gamma_5} \frac{(z+1)}{iz^3+2z^2-5iz}\,dz = \int_{\gamma_5} \frac{(z+1)}{iz(z-2-i)(z+2-i)}\,dz = \int_{\gamma_5} \frac{\frac{(z+1)}{iz(z-2-i)}}{(z+2-i)}\,dz =$$

$$= 2\pi i\ I(\gamma_5, -2+i)\ \frac{(-2+i+1)}{i(-2+i)(-2+i-2-i)} = \frac{\pi}{10}(2+i)(-1+i)$$

$$=\frac{\pi}{10}(-3+i).$$

Επομένως έχουμε

$$\int_{\gamma_2} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} = -\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10}(7-i) + \frac{\pi}{10}(-3+i) = 0.$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι οι καμπύλες $\gamma_1$ και $\gamma_2$ είναι ομόλογες στον τόπο ***T***, οπότε σύμφωνα πάλι με το θεώρημα του Cauchy για το ολοκλήρωμα ολόμορφης συνάρτησης, θα έχουμε

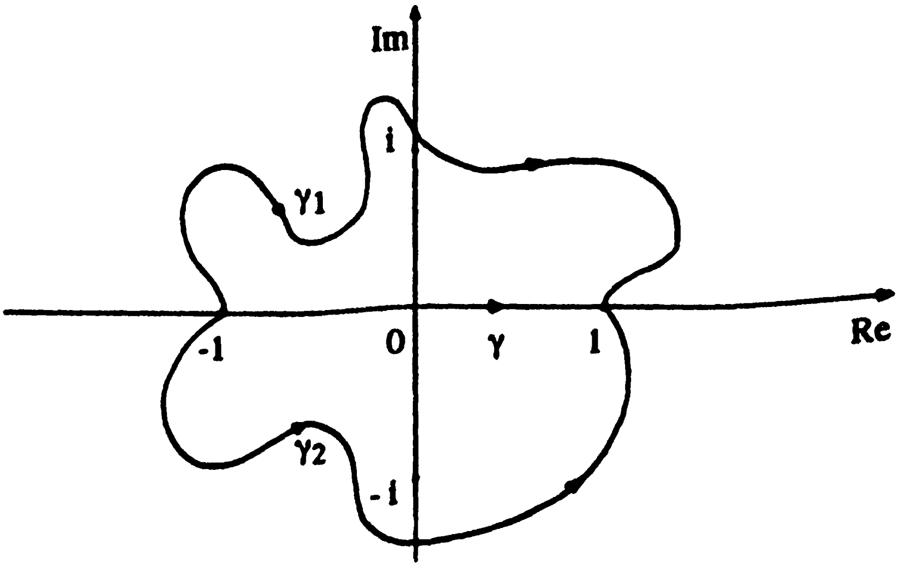
$$\int_{\gamma_1} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} = \int_{\gamma_2} \frac{(z+1)dz}{iz^3+2z^2-5iz} = 0. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 7.2.2**

Θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \frac{z-2i}{z^2+1}$$

κατά μήκος των καμπυλών $\gamma_1$, $\gamma_2$, οι οποίες έχουν αρχικό σημείο το -1, τελικό το 1 και είναι όπως στο παρακάτω σχήμα:




**Το σημείο i ανήκει στο** $\varepsilon\sigma(\gamma_1-\gamma)$ **και το -i ανήκει στο** $\varepsilon\sigma(\gamma_2-\gamma)$

Προς τούτο σημειώνουμε ότι η συνάρτηση είναι ολόμορφη στον τόπο $\mathbb{C}-\{-i, i\}$. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα γ που ενώνει το σημείο -1 με το 1 με παραμετρική παράσταση $z(t) := t,\ t \in [-1, 1]$.

Θεωρούμε την απλή κλειστή καμπύλη $\gamma_1 - \gamma$ και παρατηρούμε ότι το σημείο i ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης. Έτσι, εφαρμόζοντας τον τύπο του Cauchy για την παράσταση της ολόμορφης συνάρτησης g(z) που ορίζεται με τον τύπο

$$g(z) := \frac{z-2i}{z+i},$$

έχουμε

$$g(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - \gamma} \frac{g(z)dz}{z-i}.$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\frac{i-2i}{i+i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - \gamma} \frac{z-2i}{z^2+1} dz,$$

οπότε

$$\int_{\gamma_1} \frac{z-2i}{z^2+1} dz = \int_{\gamma} \frac{z-2i}{z^2+1} dz - \pi i = \int_{-1}^{1} \frac{t-2i}{t^2+1} dt - \pi i = \int_{-1}^{1} \frac{tdt}{t^2+1} - 2i \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2+1} - \pi i =$$

$$= 0 - 2i\,[\text{Arctan } 1 - \text{Arctan } (-1)] - \pi i = -2\pi i - \pi i = -3\pi i.$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο για την κάτω καμπύλη $\gamma_2$ έχουμε

$$\frac{-i-2i}{-i-i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2 - \gamma} \frac{z-2i}{z^2+1} dz,$$

απ' όπου, όπως και παραπάνω, βρίσκουμε

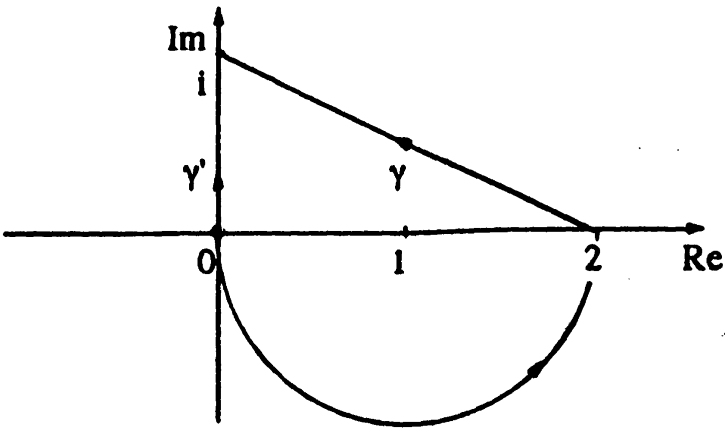
$$\int_{\gamma_2} \frac{z-2i}{z^2+1} dz = \int_{\gamma} \frac{z-2i}{z^2+1} dz + 3\pi i = -2\pi i + 3\pi i = \pi i. \quad \square$$

**Παράδειγμα 7.2.3**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{z-1} dz,$$

όπου γ είναι η καμπύλη με αρχικό σημείο το 0 και τελικό το i και η οποία είναι όπως στο σχήμα:




**Το σημείο 1 ανήκει στο** εσ(γ- γ' )

Το πρόβλημα επιλύεται ως εξής: Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα γ' το οποίο ενώνει το σημείο 0 με το i. Τούτο έχει μια παραμετρική παράσταση

$$z(t) := it, \ t\in[0, 1].$$

Επίσης παρατηρούμε ότι η αλυσίδα γ - γ' είναι μια κατά τμήματα κλειστή καμπύλη που περιέχει στο εσωτερικό της το σημείο 1 με αντίστοιχο δείκτη στροφής ίσο με 1. Επομένως θα έχουμε

$$\int_{\gamma-\gamma'} \frac{z^2}{z-1} dz = 2\pi i \, z^2 \,|_{z=1} = 2\pi i.$$

Αλλά ισχύει ότι $\gamma = (\gamma - \gamma') + \gamma'$, οπότε και

$$\int_\gamma \frac{z^2}{z-1}\,dz = \int_{\gamma-\gamma'} \frac{z^2}{z-1}\,dz + \int_{\gamma'} \frac{z^2}{z-1}\,dz = 2\pi i + \int_0^1 \frac{(it)^2}{it-1}\,i\,dt =$$

$$= 2\pi i + i\int_0^1 \frac{t^2(1+it)}{1+t^2}\,dt = 2\pi i + i\int_0^1 \frac{1+t^2-1+it(1+t^2)-it}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 2\pi i + i - i\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \log\sqrt{2} = -\frac{1}{2} + \log\sqrt{2} + i\left(1+\frac{7\pi}{4}\right). \qquad \square$$

**Παράδειγμα 7.2.4**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{\cosh iz}{z^2+4z+3}\,dz,$$

όπου $\gamma$ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το 0 και ακτίνα 2.

Προς τούτο παρατηρούμε ότι οι ρίζες του παρονομαστή είναι οι αριθμοί -1 και -3, οπότε μέσα στον κύκλο ο παρονομαστής μηδενίζεται στο σημείο -1. Επιπλέον η συνάρτηση

$$\frac{\cosh iz}{z+3}$$

είναι ολόμορφη σε μια περιοχή του εν λόγω κύκλου, οπότε θα έχουμε

$$\int_\gamma \frac{\cosh iz}{z^2+4z+3}\,dz = \int_\gamma \frac{\cosh iz}{(z+3)(z+1)}\,dz = \int_\gamma \frac{\frac{\cosh iz}{z+3}}{z+1}\,dz = 2\pi i \left.\frac{\cosh iz}{z+3}\right|_{z=-1} =$$

$$= 2\pi i\,\frac{\cosh(-i)}{2} = \pi i \cosh i = \pi i \cos 1. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 7.2.5**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} z^2 \tan z \, dz,$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση $z(t) := 4 + e^{2it}$, $t \in [0, 3\pi]$.

Πραγματικά, είναι εύκολο να δούμε ότι αν γ' είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 4 και ακτίνα 1, τότε η καμπύλη γ θα είναι ίση με 3γ'. Στο σύνολο εσ(γ) η συνάρτηση $z^2\tan z$ είναι ολόμορφη εκτός από το σημείο $3\pi/2$, αφού ισχύει

$$\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0 \text{ και } 3 < \frac{3\pi}{2} < 5 .$$

Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$\cos z = \sin(\frac{\pi}{2} - z) = -\sin(\pi + \frac{\pi}{2} - z) = -\sin(\frac{3\pi}{2} - z) = \sin(z - \frac{3\pi}{2}) = (z - \frac{3\pi}{2})\, h(z),$$

όπου η συνάρτηση

$$h(z) := 1 - \frac{1}{2!}(z - \frac{3\pi}{2})^2 + \frac{1}{3!}(z - \frac{3\pi}{2})^4 - + \ldots$$

είναι ολόμορφη και τέτοια ώστε $h(\frac{3\pi}{2}) = 1$. Επομένως το δοθέν ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\int_{\gamma} z^2 \tan z \, dz = \int_{3\gamma'} \frac{\frac{z^2 \sin z}{h(z)}dz}{(z - \frac{3\pi}{2})} = 2\pi i \, I(3\gamma', \frac{3\pi}{2}) \frac{z^2 \sin z}{h(z)} \Big|_{z=3\pi/2} =$$

$$= 2\pi i \, 3 \, (\frac{3\pi}{2})^2 = \frac{27\pi^3}{2} i. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 7.2.6**

Έστω γ μια καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$z(t) := \pi(1+2e^{it}),\ t \in [0, 2\pi]$$

και έστω f μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη και ολόμορφη σε έναν τόπο που περιέχει την καμπύλη γ μαζί με το εσωτερικό της. Να αποδειχτεί ότι ισχύει η ανισότητα

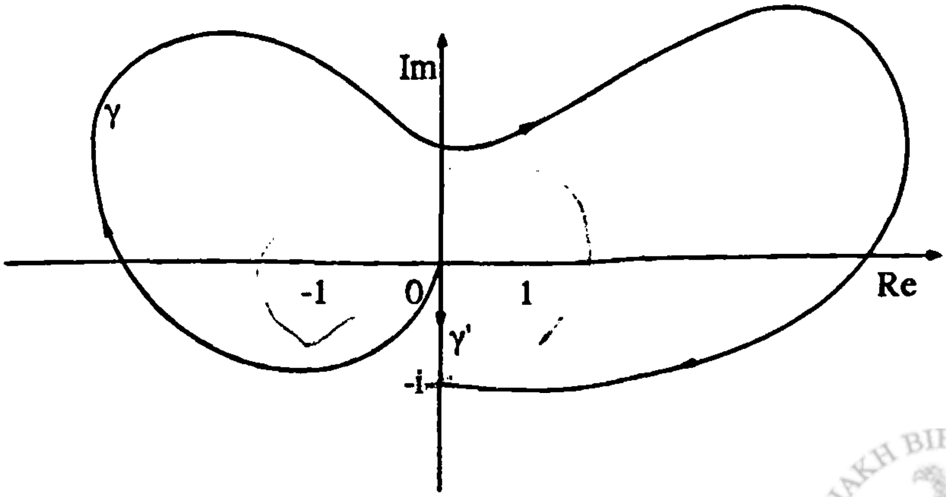
$$|f(2\pi)| \leq \frac{1}{2\pi^2} \int_\gamma |f(z)|\,|dz| .$$

Από την παραμετρική παράσταση της καμπύλης γ, δηλαδή την $z(t) = \pi+2\pi e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, παρατηρούμε ότι αυτή είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο π και ακτίνα 2π. Τούτο σημαίνει ότι $I(\gamma, 2\pi) = 1$ και επιπλέον ότι για κάθε σημείο ζ της γ ισχύει $|\zeta - 2\pi| \geq \pi$. Έτσι, από τον τύπο του Cauchy για την παράσταση της τιμής f(2π) με ολοκλήρωμα, παίρνουμε

$$|f(2\pi)| = \frac{1}{2\pi}\left| \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - 2\pi} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - 2\pi|} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi^2} \int_\gamma |f(z)|\,|dz| . \qquad \square$$

**Παράδειγμα 7.2.7**

Αν γ είναι η καμπύλη του παρακάτω σχήματος η οποία έχει αρχικό σημείο το 0 και τελικό το - i




**Τα σημεία 1 και -1 ανήκουν στο εσ(γ - γ')**

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2-1}.$$

Προς τούτο θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα, έστω γ', που έχει αρχικό σημείο το 0 και τελικό το -i, με παραμετρική παράσταση $z(t) = -it$, $t \in [0, 1]$. Τότε, προφανώς, η $\gamma - \gamma'$ είναι μια κλειστή, αρνητικά προσανατολισμένη κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη. Επίσης παρατηρούμε ότι αυτή στο εσωτερικό της έχει τα σημεία -1 και 1 στα οποία δεν ορίζεται η προς ολοκλήρωση συνάρτηση. Έτσι έχουμε

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2-1} - \int_{\gamma'} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{\gamma-\gamma'} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2} \int_{\gamma-\gamma'} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2} \int_{\gamma-\gamma'} \frac{dz}{z+1} = \frac{1}{2}\, 2\pi i\,(-1) - \frac{1}{2}\, 2\pi i\,(-1)$$

$$= 0,$$

οπότε τελικά προκύπτει ότι

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{\gamma'} \frac{dz}{z^2-1} = \int_0^1 \frac{-i\,dt}{(-it)^2-1} = i \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = i\,\mathrm{Arctan}\,1 =$$

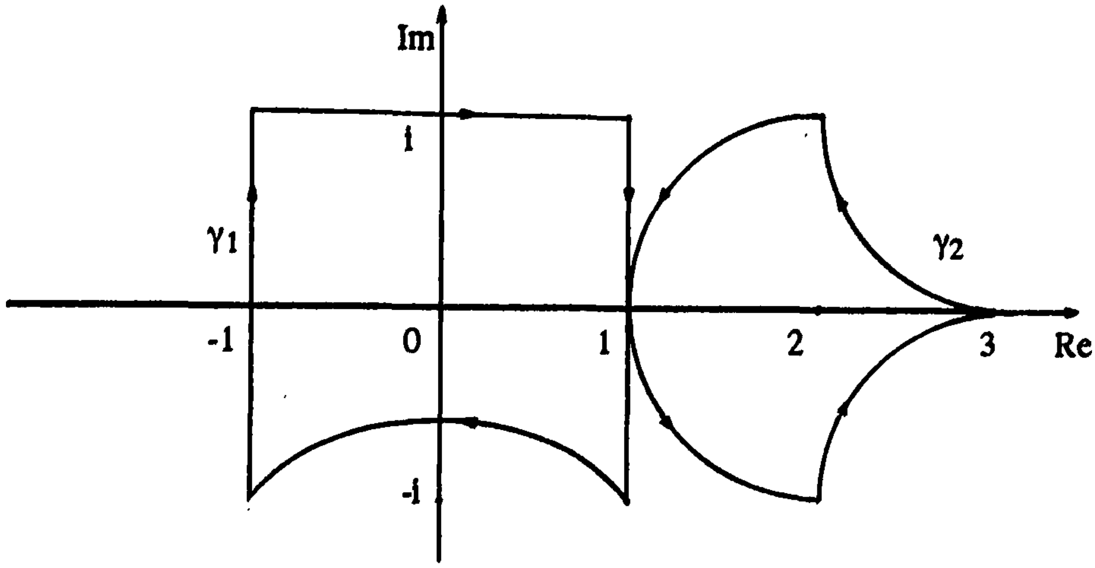
$$= \frac{\pi i}{4}.$$

□

**7.2.1** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \frac{z-1}{z(z^4-16)}$$

κατά μήκος της αλυσίδας $\gamma_1 + \gamma_2$ των δύο καμπυλών του παρακάτω σχήματος:

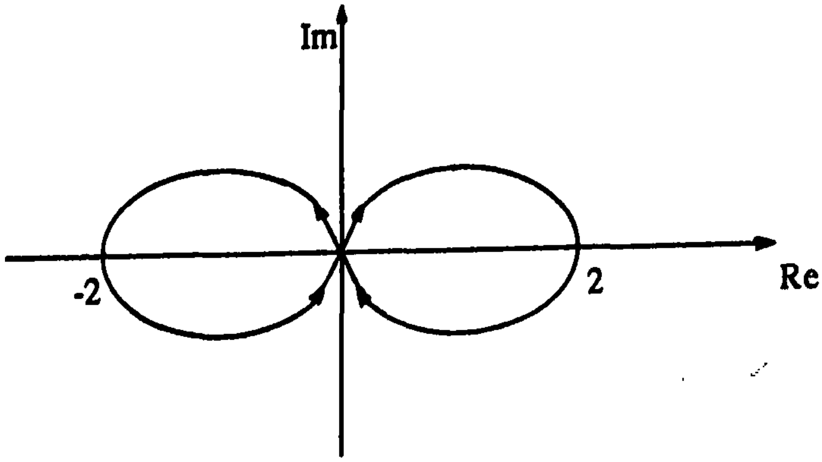



**Το σημείο 0 ανήκει στο εσ $\gamma_1$ και το 2 στο εσ $\gamma_2$.**

**7.2.2** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{z^4-1}dz,$$

όπου γ είναι η κλειστή καμπύλη όπως στο σχήμα:




**7.2.3** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{2z+i}{z(z^4-16)}dz,$$

όπου γ είναι η καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου με παραμετρική παράσταση

$$z(t) := (1+2\sin^2 2t)e^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

**7.2.4** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2-3iz-2}dz$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περίμετρος του τριγώνου στο μιγαδικό επίπεδο με κορυφές τα σημεία 2, 3i και -1.

**7.2.5** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z^8-1)},$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση

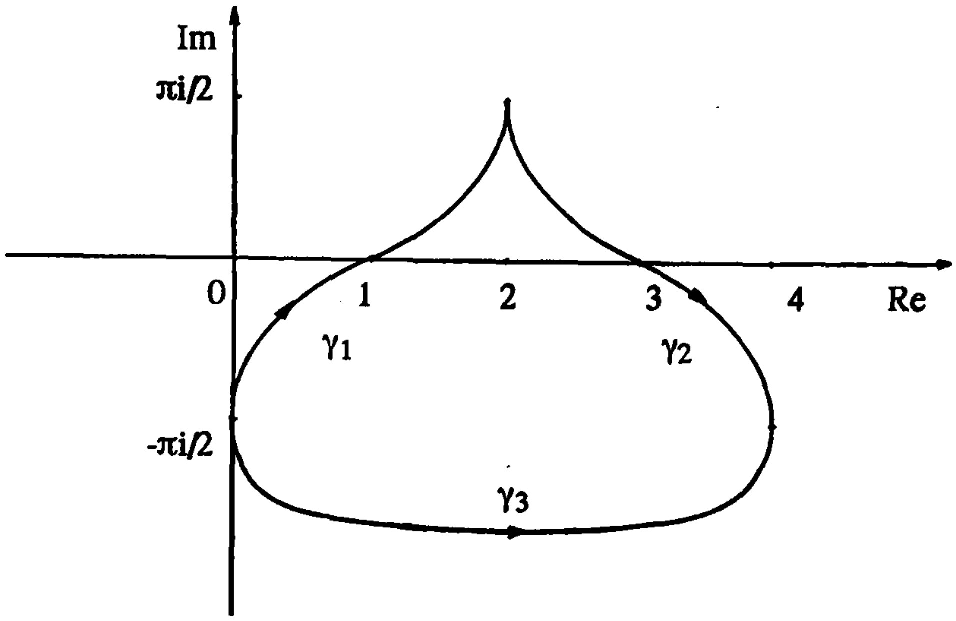
$$z(t) := \frac{1}{2} + |\sin 4t|,\ t \in [0, 2\pi].$$

**7.2.6** Αν $\Gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ είναι η αλυσίδα των καμπυλών $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ (βλέπε σχήμα) με παραμετρικές παραστάσεις αντίστοιχα

$\gamma_1$: $z_1(t) := -t + i\mathrm{Arcsin}(-t-1),\ t \in [-2, 0]$,

$\gamma_2$: $z_2(t) := -t + i\mathrm{Arcsin}(t+3),\ t \in [-4, -2]$,

$\gamma_3$: $z_3(t) := t - i[\frac{\pi}{2} + \sin(\frac{\pi}{4}t)],\ t \in [0, 4]$,




**Η αλυσίδα Γ είναι μια κλειστή καμπύλη θετικά προσανατολισμένη**

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\Gamma}\frac{\exp(z^2)}{z^2-2z}dz.$$

**7.2.7** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz,$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο i και ακτίνα 1.

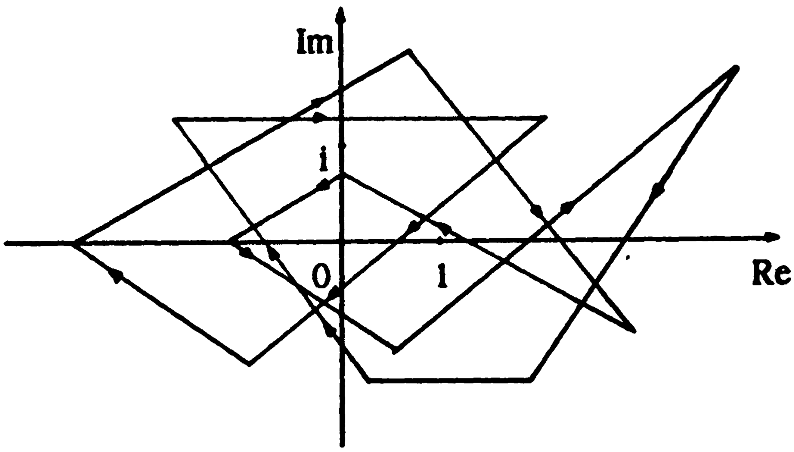
**7.2.8** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma}\frac{\tan z}{ze^{1/(z+2)}}dz,$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο

0 και ακτίνα 1.

**7.2.9** Αν γ είναι η καμπύλη του παρακάτω σχήματος




**Η καμπύλη γ είναι κλειστή**

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)^4(z-i)}.$$

**7.2.10** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

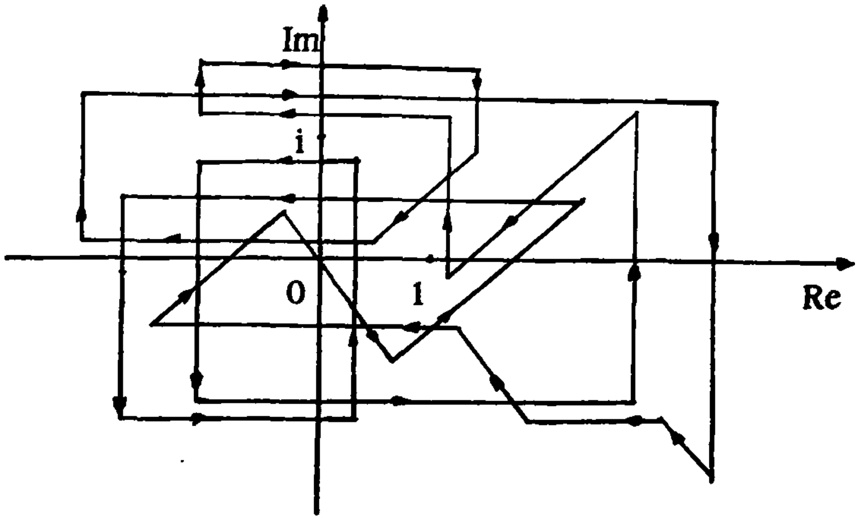
$$\int_\gamma \frac{\sin z \sin(z-1)}{z(z-1)}dz,$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα 1.

**7.2.11** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)^{14}(z-i)},$$

όπου γ είναι η καμπύλη του παρακάτω σχήματος




Η καμπύλη γ είναι κλειστή

**7.2.12** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{z^2+3z+e^z}{z^3-4z^2+4z}dz,$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$z(t) := (2 + \cos t)e^{it}, \ t \in [0, 2\pi].$$

## 7.3 Τύπος του Cauchy για την παράσταση των παραγώγων ολόμορφης συνάρτησης

Αν f είναι μια συνάρτηση ολόμορφη σέ έναν τόπο *T* και γ είναι μια θετικά προσανατολισμένη απλή κλειστή καμπύλη που περιέχεται μαζί με το εσωτερικό της στον τόπο *T*, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει η n - τάξεως παράγωγος της f σε κάθε σημείο $z \in \varepsilon\sigma(\gamma)$ και μάλιστα δίνεται από τον παρακάτω τύπο που είναι γνωστός ως

**τύπος του Cauchy για την παράσταση με ολοκλήρωμα των παραγώγων ολόμορφης συνάρτησης**

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta\,.}$$

Το γεγονός ότι μια ολόμορφη συνάρτηση παραγωγίζεται άπειρες φορές έχει ως συνέπεια και τα εξής :

Αν $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι, αντίστοιχα, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $f(z)$, όπου $z := x + iy$, τότε, όπως γνωρίζουμε, ισχύει

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = u_y(x, y) + iv_y(x, y).$$

Αλλά και η δεύτερη παράγωγος $f''(z)$ υπάρχει, οπότε και η $f'$ είναι ολόμορφη. Άρα και οι μερικές παράγωγοι $u_{xx}$, $u_{xy}$, $u_{yx}$, $u_{yy}$, $v_{xx}$, $v_{xy}$, $v_{yx}$, $v_{yy}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο σύνολο όλων των σημείων $(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου για τα οποία ισχύει $x + iy \in T$. Επαγωγικά, τώρα, συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $u$ και $v$ έχουν μερικές παραγώγους κάθε τάξης ως προς $x$ και $y$. Μάλιστα δε, αν $\mu$ και $\nu$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και παραστήσουμε με $u_{x(\mu)y(\nu)}$ τη συνάρτηση η οποία προκύπτει αν παραγωγίσουμε την $u$ $\mu$ φορές ως προς $x$ και $\nu$ φορές ως προς $y$, ανεξάρτητα από τη σειρά παραγώγισης, τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n f(z)}{dz^n} = u_{x(\mu)y(\nu)}(x, y) + iv_{x(\mu)y(\nu)}(x, y),$$

όπου $z = x + iy$ και $n = \mu + \nu$.

**Παράδειγμα 7.3.1**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\, dz\,,$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο - i και ακτίνα 1.

Προς τούτο παρατηρούμε ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση ορίζεται παντού εκτός από τα σημεία + i και - i. Από αυτά, μόνο το σημείο - i ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης γ. Επομένως έχουμε

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz = \int_{\gamma} \frac{\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}}{(z-(-i))^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\frac{d}{dz}\Big[\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\Big]\Big|_{z=-i} = 0,$$

όπου στη μεσαία ισότητα εφαρμόσαμε τον τύπο του Cauchy για την παράσταση της 1ης παραγώγου της ολόμορφης συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{(z-i)^{-2}}. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 7.3.2**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z^2-1)^2}\,dz,$$

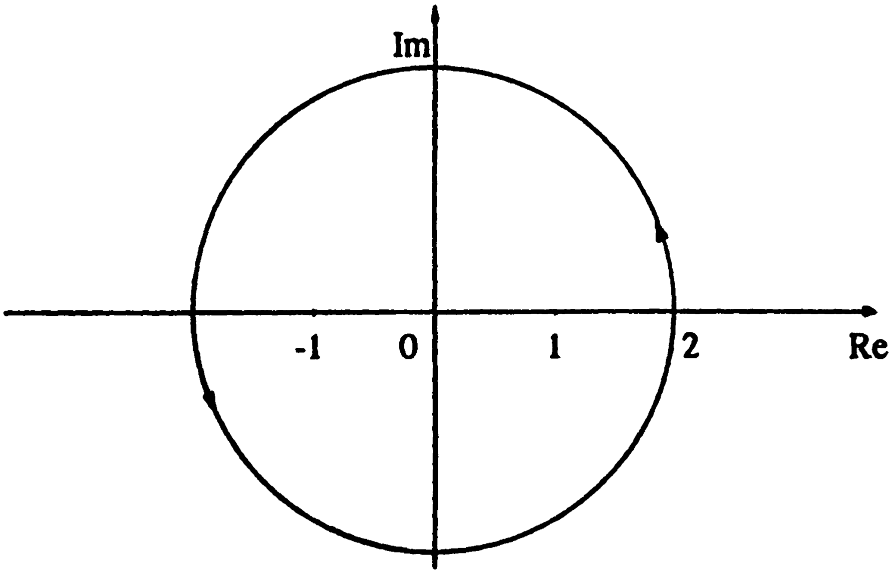
όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 1 και ακτίνα 1.

Για την επίλυση του προβλήματος παρατηρούμε ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση ορίζεται παντού εκτός από τα σημεία +1 και - 1. Από αυτά τα σημεία μόνο το +1 ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης γ. Έτσι έχουμε

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z^2-1)^2}\,dz = \int_{\gamma} \frac{\frac{\sin z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\frac{d}{dz}\Big[\frac{\sin z}{(z+1)^2}\Big]\Big|_{z=1} = i\pi\,\frac{\cos 1 - \sin 1}{2}. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 7.3.3**

Έστω γ η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα 2.




**Τα σημεία 1 και -1 ανήκουν στο εσ γ.**

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z-1)(z+1)^3}dz.$$

Παρατηρούμε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί που μηδενίζουν τον παρονομαστή είναι οι 1 και -1 και βρίσκονται στο εσ(γ). Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο τρόπους:

*1ος τρόπος:*

Αναλύουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων και βρίσκουμε

$$\frac{1}{(z-1)(z+1)^3} = \frac{1}{8}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)^3},$$

οπότε το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{(z-1)(z+1)^3}dz = \frac{1}{8}\int_\gamma \frac{\cosh z}{z-1}dz - \frac{1}{8}\int_\gamma \frac{\cosh z}{z+1}dz - \frac{1}{4}\int_\gamma \frac{\cosh z}{(z+1)^2}dz - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{\cosh z}{(z+1)^3}dz.$$

Υπολογίζοντας τα επί μέρους ολοκληρώματα έχουμε

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{(z-1)}dz = 2\pi i \cosh 1,$$

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{(z+1)}dz = 2\pi i \cosh(-1) = 2\pi i \cosh 1,$$

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{(z+1)^2}dz = 2\pi i(\cosh z)'\Big|_{z=-1} = -2\pi i \sinh 1,$$

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{(z+1)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}(\cosh z)''\Big|_{z=-1} = \pi i \cosh 1,$$

οπότε τελικά παίρνουμε

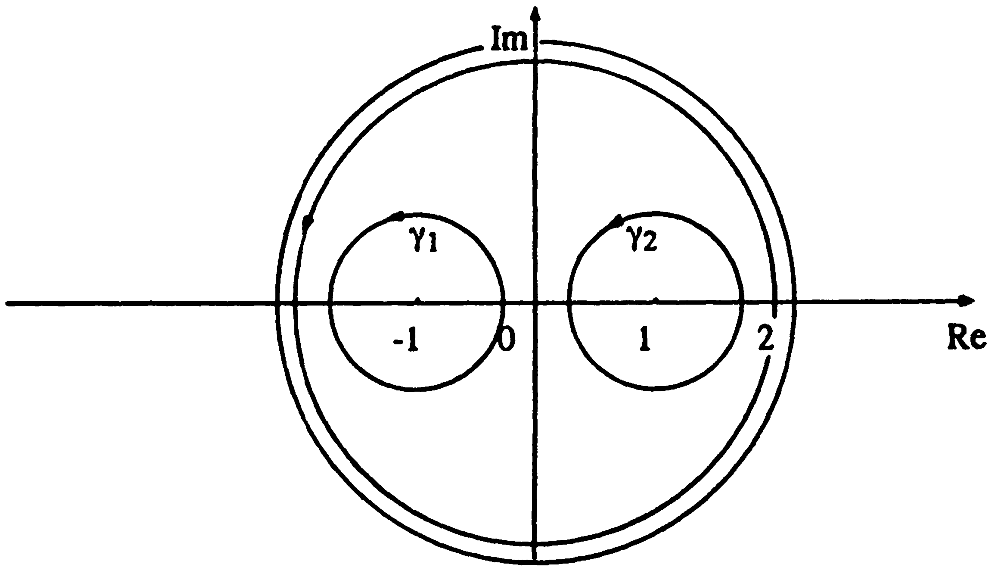
$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{(z-1)(z+1)^3}dz = \frac{1}{8}2\pi i \cosh 1 - \frac{1}{8}2\pi i \cosh 1 - \frac{1}{4}(-2\pi i \sinh 1) - \frac{1}{2}\pi i \cosh 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\pi i \sinh 1 - \frac{1}{2}\pi i \cosh 1 =$$

$$= -\pi i \frac{\cosh 1 - \sinh 1}{2} = -\frac{\pi i}{2e}.$$

*2ος τρόπος:*

Κατασκευάζουμε δυο κύκλους $\gamma_1$ και $\gamma_2$ με κέντρα αντίστοιχα τα σημεία -1 και 1, θετικά προσανατολισμένους, τόσο μικρούς ώστε να μην τέμνονται και να βρίσκονται ολόκληροι στο εσ(γ). Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε στον τόπο $B(0, 2+\varepsilon) - \{-1, 1\}$ η καμπύλη γ είναι ομόλογη της αλυσίδας $\gamma_1 + \gamma_2$.




**Οι κύκλοι με κέντρα τα σημεία 1 και -1 περιέχονται στο εσ γ.**

Από το θεώρημα του Cauchy για την παράσταση των παραγώγων ολόμορφης συνάρτησης, παίρνουμε ότι

$$\int_{\gamma}\frac{\cosh z}{(z-1)(z+1)^3}dz=\int_{\gamma_1}\frac{\cosh z}{(z-1)(z+1)^3}dz+\int_{\gamma_2}\frac{\cosh z}{(z-1)(z+1)^3}dz=$$

$$=\int_{\gamma_1}\frac{\frac{\cosh z}{(z-1)}}{(z+1)^3}dz+\int_{\gamma_2}\frac{\frac{\cosh z}{(z+1)^3}}{(z-1)}dz=$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{\cosh z}{z-1}\right]''\Big|_{z=-1}+2\pi i\,\frac{\cosh z}{(z+1)^3}\Big|_{z=1}=$$

$$=-\pi i\,\frac{2e^{-1}+\cosh 1}{4}+\pi i\,\frac{\cosh 1}{4}=-\frac{\pi i}{2e}.$$

□

**7.3.1** Έστω f μια μιγαδική συνάρτηση ολόμορφη σε έναν τόπο *T* ο οποίος περιέχει τον ανοικτό δίσκο B(0, 1). Να αποδειχτεί ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ και θετικό ακέραιο n ισχύει η ανισότητα

$$\max_{|z| \le \lambda} |f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{(1-\lambda)^{\nu+1}} \cdot \max_{0 \le \theta \le 2\pi} |f(e^{i\theta})|.$$

**7.3.2** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz,$$

όπου γ είναι η καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$z(t) := \left(\frac{1}{2} + 2\sin t\right)e^{it},\ t \in [0,\ 2\pi].$$

**7.3.3** Αν γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα 2, να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos^3 z}{z^3} dz,$  β) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sinh^2 z}{z^3} dz,$

γ) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\sinh z}{(z^2-1)^2} dz,$  δ) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sinh^2 z}{z(z-1)} dz.$

**7.3.4** Αν γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 2 και ακτίνα 3, να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_{\gamma}\frac{\sin(\pi z/4)}{(z-1)^2}dz,$ β) $\displaystyle\int_{\gamma}\frac{z}{(z-2)^3(z-6)}dz,$

γ) $\displaystyle\int_{\gamma}\frac{z\sinh z}{z^3-4z^2}dz,$ δ) $\displaystyle\int_{\gamma}\frac{\sinh z}{z(z^2-1)^2}dz.$

## 7.4 Θεωρήματα Cauchy-Liouville και Picard

**Πρώτο Θεώρημα Cauchy-Liouville :**

*Έστω* f *μια ακεραία συνάρτηση, δηλαδή μια συνάρτηση που είναι ολόμορφη σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο. Αν επιπλέον η* f *είναι και φραγμένη, τότε αυτή είναι σταθερά, δηλαδή υπάρχει* $a \in C$, *τέτοιο ώστε* $f(z) = a$, *για κάθε* $z \in C$.

**Δεύτερο Θεώρημα Cauchy-Liouville :**

*Έστω* f *μια ακεραία συνάρτηση για την οποία γνωρίζουμε ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί* M *και* ε *καθώς επίσης και φυσικός αριθμός* n *τέτοιοι ώστε να ισχύει*

$$|f(z)| \leq M|z^n|, \text{ για κάθε } z \in C, \text{ με } |z| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

*Τότε η συνάρτηση* f *ταυτίζεται με ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ* n.

**Θεώρημα του Picard :**

*Αν μια ακεραία συνάρτηση* f *δεν είναι σταθερά, το σύνολο τιμών της είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο* C, *ή το σύνολο* $C - \{a\}$, *όπου* a *είναι κάποιος μιγαδικός αριθμός.*

**Παράδειγμα 7.4.1**

Αν f(z) και g(z) είναι δυο ακεραίες μιγαδικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε να ισχύει

$$|f(z)| < |g(z)|, \text{ για κάθε } z,$$

τότε ισχύει και

$$f(0)g(z) = f(z)g(0), \text{ για κάθε } z.$$

Πραγματικά, αν για κάποιο a είχαμε g(a)=0, τότε $|f(a)| < 0$, άτοπο. Άρα η g δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου και επομένως η συνάρτηση με τύπο

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$$

είναι ακεραία και φραγμένη, αφού $|h(z)| < 1$, για κάθε μιγαδικό αριθμό z. Άρα από το πρώτο θεώρημα των Cauchy- Liouville προκύπτει ότι η h είναι σταθερά, οπότε h(z) = h(0), που ισοδυναμεί με τη ζητούμενη σχέση. □

**Παράδειγμα 7.4.2**

Θα αποδείξουμε ότι η μόνη ακεραία συνάρτηση f που για κάθε μιγαδικό αριθμό z ικανοποιεί τη σχέση

$$|f(z) - i| < |f(z)| \exp(\operatorname{Re} z)$$

είναι η σταθερά συνάρτηση f(z) = i.

Αν για κάποιο z είχαμε f(z) = 0, τότε θα είχαμε επίσης και f(z) = i, άτοπο. Άρα η f δεν μηδενίζεται πουθενά. Έτσι η συνάρτηση

$$h(z) := \frac{f(z)-i}{f(z)\exp z}$$

είναι ακεραία και φραγμένη. Τούτο σημαίνει ότι υπάρχει μιγαδικός αριθμός a τέτοιος ώστε να ισχύει

$$f(z) - i = a\, f(z) \exp z, \text{ για κάθε } z.$$

Αν $a \neq 0$, θέτουμε

$$w := \operatorname{Log}(1/a),$$

οπότε βρίσκουμε $f(w) - i = f(w)$, άτοπο. Άρα πρέπει $a = 0$, οπότε και $f(z) = i$. □

**Παράδειγμα 7.4.3**

Θα αποδειχτεί ότι η μόνη ακεραία συνάρτηση f που για κάθε z ικανοποιεί τη σχέση

$$|f(z)| \le |z|^{3/2}$$

είναι η σταθερά συνάρτηση $f(z) = 0$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(z)\, z^{-2}$ είναι φραγμένη στην περιοχή $B(\infty, 1)$ του απείρου. Άρα η f θα είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2, δηλαδή θα έχουμε $f(z) = a + bz + cz^2$ για κάθε z, όπου a, b, c είναι μιγαδικοί αριθμοί. Τότε θα πρέπει να ισχύει και

$$(1) \qquad |a + bz + cz^2| \le |z|^{3/2}, \quad \text{για κάθε } z.$$

Θέτοντας $z=0$ παίρνουμε $a = 0$, οπότε η σχέση (1) γίνεται

$$|bz + cz^2| \le |z|^{3/2},$$

για κάθε z. Διαιρώντας με το z και στη συνέχεια θέτοντας πάλι $z=0$, βρίσκουμε $b=0$. Έτσι θα πρέπει για κάθε z να ισχύει $|cz^2| \le |z|^{3/2}$, ή ισοδύναμα

$$|c|^2 |z| \le 1,$$

πράγμα που ισχύει για κάθε z μόνο όταν $c = 0$. Επομένως πρέπει $f(z) = 0$. □

**Παράδειγμα 7.4.4**

Θ' αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν πολυωνυμικές μιγαδικές συναρτήσεις P και Q οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση

$$|e^z + P(z) - Q(z)| < e^{\mathrm{Re}\, z}, \text{ για κάθε } z.$$

Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι τέτοιες συναρτήσεις υπάρχουν. Διαιρώντας και τα δύο μέλη της ανισότητας με το $|e^z|$ έχουμε

$$|1 + e^{-z}[P(z) - Q(z)]| < 1, \text{ για κάθε } z.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι η παράσταση που είναι μέσα στην απόλυτη τιμή ορίζει μια ακεραία συνάρτηση η οποία είναι φραγμένη. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα των Cauchy-Liouville αυτή είναι σταθερά. Τούτο σημαίνει ότι υπάρχει σταθερός μιγαδικός αριθμός c τέτοιος ώστε να ισχύει

$$1 + e^{-z}[P(z) - Q(z)] = c, \text{ για κάθε } z,$$

οπότε και

$$P(z) - Q(z) = (c-1)e^{z}, \text{ για κάθε } z.$$

Αν $c=1$, τότε $P(z) = Q(z)$, για κάθε z, οπότε, από τη δοθείσα σχέση, θα είχαμε

$$|e^{z}| < e^{\mathrm{Re}z}$$

και κατά συνέπεια και για $z = 0$, $1 < 1$, άτοπο. Έτσι πρέπει $c \neq 1$. Τούτο δηλώνει ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $P(z) - Q(z)$ είναι ίση με ένα μη (μηδενικό) πολλαπλάσιο της εκθετικής συνάρτησης $e^{z}$, ενώ αυτή, ως διαφορά δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων, πρέπει να είναι πολυωνυμική. Τούτο, βέβαια, είναι άτοπο. □

**7.4.1** Ν' αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει μη σταθερή ακεραία μιγαδική συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει

$$|f(z)| < |1 + f(z)|, \text{ για κάθε } z.$$

**7.4.2** Ν' αποδειχτεί ότι αν για κάποιο μιγαδικό αριθμό a και θετικό ακέραιο n η ακεραία συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^{n}} = a,$$

τότε η f είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού το πολύ n.

**7.4.3** Ν' αποδειχτεί ότι δεν υπάρχουν μη σταθερές ακέραιες συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε για κάποιο $b \neq 0$ να ισχύει η σχέση

$$f(z)\,[b - f(z)]\,g(z) = 1, \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

**7.4.4** Να εξεταστεί αν υπάρχει ακεραία μιγαδική συνάρτηση f τέτοια ώστε f(-i) = 4-3i και να ικανοποιεί τη συνθήκη: για κάθε ε > 0 υπάρχει ρ > 0 τέτοιο ώστε για κάθε z με $|z| > \rho$ να ισχύει

$$|f(z)\,[1-f(z)]| < \varepsilon.$$

# 8 Σειρές Taylor και Laurent

Μεγάλο ρόλο στη μελέτη των μιγαδικών συναρτήσεων παίζουν οι λεγόμενες σειρές Taylor και Laurent. Μια ολόμορφη συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά Taylor σε μια κυκλική περιοχή κάθε σημείου ολομορφίας. Για την περίπτωση της σειράς Laurent τα πράγματα είναι λίγο διαφορετικά. Ανάπτυγμα σε τέτοια σειρά έχει, όπως θα δούμε, μια συνάρτηση που είναι ολόμορφη τουλάχιστον σε μια δακτυλική περιοχή ενός σημείου.

## 8.1 Σειρές Taylor και Laurent

Υποθέτουμε ότι f είναι μια ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε έναν τόπο $T$ και θεωρούμε ένα σημείο a στον τόπο $T$ το οποίο απέχει από το σύνορο $\partial T$ του τόπου $T$ απόσταση ίση με r. Τότε στον ανοικτό δίσκο B(a, r) η συνάρτηση f έχει ένα μοναδικό ανάπτυγμα σε **σειρά Taylor με κέντρο το σημείο** a, δηλαδή υπάρχει μια μοναδική δυναμοσειρά $\Sigma\, b_n(z-a)^n$ τέτοια ώστε

$$f(z) = \Sigma\, b_n(z-a)^n, \text{ για κάθε } z \in B(a, r).$$

Οι συντελεστές $b_n$, n = 0, 1, 2, ... της δυναμοσειράς δίνονται από τους τύπους

$$\boxed{b_n := \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta ,}$$

όπου γ είναι μία θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο a και ακτίνα $\rho < r$.

**Παράδειγμα 8.1.1**

Θα αναπτύξουμε σε σειρά Taylor με κέντρο το σημείο $z_0=1$ στον δίσκο B(1, 1) τη συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \frac{i}{z^2 - iz}.$$

Προς τούτο αναλύουμε πρώτα το κλάσμα που μας δίνεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων, ήτοι

$$f(z) = \frac{i}{z^2-iz} = \frac{i}{(z-i)z} = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z-i}.$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι ο τόπος $T := \mathbb{C} - \{0, i\}$ με σύνορο το σύνολο $\{0, i\}$. Η απόσταση του σημείου $z_0=1$ από το σύνορο είναι ίση με

$$\inf\{|1-0|,\ |1-i|\}=1.$$

Επομένως η συνάρτηση f έχει ανάπτυγμα Taylor μέσα στον ανοικτό δίσκο B(1, 1).

Τώρα, έστω z ένα τυχαίο σημείο του δίσκου αυτού. Θα έχουμε $|z - 1| < 1$, οπότε

$$\frac{-1}{z} = \frac{-1}{1-(1-z)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n$$

και

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{(1-i)-(1-z)} = \frac{1}{1-i}\ \frac{1}{1-\frac{1-z}{1-i}}.$$

Αλλά παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{1-z}{1-i}\right| = \frac{|1-z|}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

και επομένως

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-z}{1-i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-i)^{-(n+1)}(-1)^n(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(i-1)^{-(n+1)}(z-1)^n.$$

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε, τελικά, το ανάπτυγμα

$$f(z)=\frac{i}{z^2-iz}=\frac{i}{(z-i)z}=\frac{-1}{z}+\frac{1}{z-i}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(i-1)^{-(n+1)}(z-1)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-(i-1)^{-(n+1)}\right](z-1)^n,$$

για καθε μιγαδικό αριθμό z του δίσκου B(1, 1). □

**Παράδειγμα 8.1.2**

Θα αναπτυχθεί σε σειρά Taylor στον δίσκο B(0, 1) του μιγαδικού επιπέδου η συνάρτηση με τύπο

$$f(z):=z(z-i)^{-2}.$$

Προς τούτο αναπτύσσουμε πρώτα την $(z-i)^{-1}$ σε σειρά Taylor. Στον δίσκο B(0, 1) έχουμε $|z|<1$, οπότε είναι

$$\text{(1)}\qquad \frac{1}{z-i}=\frac{i}{1-\frac{z}{i}}=i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}i^{-n+1}z^n.$$

Επειδή η σύγκλιση της σειράς μέσα στον δίσκο είναι κανονική (δηλαδή η σειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα πάνω σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του δίσκου), μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της (1). Τότε βρίσκουμε

$$-\frac{1}{(z-i)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)i^{-n}z^n,$$

οπότε τελικά

$$\frac{z}{(z-i)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)i^{-n+2}z^{n+1}.$$ □

**Παράδειγμα 8.1.3**

Έστω f μια μιγαδική συνάρτηση ολόμορφη σε έναν τόπο $\boldsymbol{T}$. Θα αποδειχτεί ότι

α) το σύνολο A όλων των σημείων z του τόπου $\boldsymbol{T}$ για τα οποία ισχύει

$$f^{(n)}(z) = 0 \ \text{ για κάθε } n = 0, 1, 2, \ldots$$

είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\boldsymbol{T}$,

β) το σύνολο $\boldsymbol{T}$- A είναι επίσης ένα ανοικτό σύνολο, και

γ) το σύνολο A, όταν είναι διάφορο του κενού συνόλου, ταυτίζεται με ολόκληρο τον τόπο $\boldsymbol{T}$.

Θα αποδείξουμε πρώτα το

α) Έστω w ένα σημείο του A. Τότε το w είναι και σημείο του ανοικτού συνόλου $\boldsymbol{T}$. Άρα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η f να έχει ανάπτυγμα Taylor στον δίσκο B(w, r). Δηλαδή η f θα γράφεται ως

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - w)^n \,, \ \text{ για κάθε } z \in B(w, r).$$

Αλλά όλοι οι συντελεστές του αναπτύγματος αυτού είναι ίσοι με το μηδέν, αφού για κάθε n = 0, 1, 2, ... ισχύει

$$a_n = \frac{f^{(n)}(w)}{n!} = 0.$$

Επομένως, για κάθε $z \in B(w, r)$, έχουμε $f(z) = 0$. Τούτο σημαίνει ότι το σύνολο A μαζί με το σημείο w περιέχει και ολόκληρη την περιοχή B(w, r). Άρα το A είναι ανοικτό σύνολο.

β) Τώρα έστω w ένα σημείο του συνόλου $\boldsymbol{T}$ - A. Τούτο σημαίνει ότι το w είναι στοιχείο του $\boldsymbol{T}$ και υπάρχει θετικός ακέραιος αριθμός k τέτοιος ώστε $f^{(k)}(w) \neq 0$. Θέτοντας

$$\varphi(z) := f^{(k)}(z),$$

παρατηρούμε ότι η συνάρτηση φ είναι ορισμένη και συνεχής στον τόπο $\boldsymbol{T}$. Επιπλέον ισχύει $\varphi(w) \neq 0$. Αλλά τότε το σύνολο

$$\boldsymbol{T} \cap \varphi^{-1}(C - \{0\})$$

είναι ανοικτό (αφού το C- {0} είναι ανοικτό) και περιέχει το σημείο w. Άρα υπάρχει ανοικτός δίσκος B(w, ϱ) που να περιέχεται στο σύνολο $T \cap \varphi^{-1}(C\text{-}\{0\})$. Τούτο, βέβαια, συνεπάγεται ότι για κάθε z του B(w, ϱ) θα ισχύει $z \in T$ και $\varphi(z) \neq 0$, δηλαδή $f^{(k)}(z) \neq 0$. Αυτό ακριβώς δηλώνει ότι το σύνολο B(w, ϱ) είναι υποσύνολο του *T*- A και άρα το τελευταίο είναι ανοικτό σύνολο.

γ) Τώρα βλέπουμε ότι το σύνολο *T* γράφεται ώς ένωση των δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων A και *T*- A, τα οποία από τα ερωτήματα α) και β) αντίστοιχα είναι ανοικτά σύνολα. Επειδή όμως το *T* είναι συνεκτικό σύνολο (ως τόπος), έπεται ότι κάποιο από τα δύο σύνολα A και *T*- A, είναι το κενό. Από την υπόθεση που έχουμε το σύνολο A είναι διάφορο του κενού, οπότε προκύπτει ότι το σύνολο *T*- A είναι κενό. Επομένως πρέπει να ισχύει ότι *T* = A. □

**Παράδειγμα 8.1.4**

Έστω $f(z) := u(x, y) + iv(x, y) : T \to C$ μια ολόμορφη συνάρτηση και έστω $z_0$ ένα σημείο του τόπου *T*. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις σχέσεις

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - \overline{f(z_0)}$$

και

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - \overline{f(z_0)}$$

για κάθε z του τόπου *T*. (Αυτοί είναι οι τύποι της παραγράφου 4.6, όπου είδαμε την παράσταση ολόμορφης συνάρτησης με βάση το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος της.)

Πρώτα ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(z) := f(z) - 2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) + \overline{f(z_0)},\ z \in T$$

και παρατηρούμε ότι αυτή είναι ολόμορφη στο πεδίο ορισμού της. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Cauchy - Riemann, μπορούμε να δούμε ότι για κάθε ακέραιο αριθμό n = 0, 1, 2, ... ισχύει $g^{(n)}(z_0) = 0$. Άρα από το ανάπτυγμα Taylor της g με κέντρο το σημείο $z_0$ (βλέπε και παράδειγμα 8.1.3) προκύπτει ότι g(z) = 0, για κάθε z στον ανοικτό δίσκο $B(z_0, \varrho)$, όπου $\varrho$ είναι η απόσταση του $z_0$ από το σύνορο του τόπου $\boldsymbol{T}$. Αλλά επειδή ο τόπος αυτός είναι συνεκτικό σύνολο, εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση g είναι παντού μηδέν στον τόπο $\boldsymbol{T}$. Τούτο, βέβαια, αποδεικνύει την πρώτη ισότητα.

Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται ανάλογα. □

Υποθέτουμε ότι f είναι ολόμορφη σε μια ανοικτή δακτυλική περιοχή

$$\Delta(a, r_1, r_2), \text{ όπου } 0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty.$$

Τότε η f έχει ένα μοναδικό ανάπτυγμα σε **σειρά Laurent με κέντρο το σημείο** a, δηλαδή η f μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-a)^n,$$

για κάθε $z \in \Delta(a, r_1, r_2)$. Οι συντελεστές $b_n$, $n=0, \pm1, \pm2, \dots$ δίνονται από τον τύπο

$$\boxed{b_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta,}$$

όπου γ είναι μια οποιαδήποτε θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο a και ακτίνα r τέτοια ώστε $r_1 < r < r_2$.

Η σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-a)^n$$

είναι το **κύριο μέρος** (principal part) της σειράς Laurent και η

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

το **κανονικό μέρος** (regular part).

**Παράδειγμα 8.1.5**

Θα αναπτύξουμε σε σειρά Laurent τη συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \frac{1}{z^2+1}$$

στους δακτυλίους

α) $\Delta(0, 1, +\infty)$ και

β) $\Delta(i, 0, 2)$.

Προς τούτο αναλύουμε τον τύπο της f σε άθροισμα απλών κλασμάτων, οπότε βρίσκουμε

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{-i}{2(z-i)} + \frac{i}{2(z+i)}.$$

α) Έστω $z \in \Delta(0, 1, +\infty)$. Τότε τούτο θα ικανοποιεί την ανισότητα $|z| > 1$, οπότε θα ισχύει και

$$\left|\frac{i}{z}\right| < 1.$$

Επομένως για κάθε τέτοιο z έχουμε

$$f(z) = \frac{-i}{2(z-i)} + \frac{i}{2(z+i)} = \frac{-i}{2z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}} + \frac{i}{2z}\frac{1}{1+\frac{i}{z}} =$$

$$= \frac{-i}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n + \frac{i}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2(n+1)}}.$$

β) Αν $z \in \Delta(i, 0, 2)$, θα έχουμε $0 < |z-i| < 2$ και άρα

$$\left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1.$$

Επομένως για κάθε τέτοιο z η f(z) γράφεται ως

$$f(z) = \frac{1}{2(z-i)} - \frac{1}{2(z+i)} = \frac{1}{2(z-i)} - \frac{1}{4i\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2(z-i)} - \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n = \frac{1}{2(z-i)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n,$$

όπου $a_n := \frac{i^{n+1}}{2^{n+2}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ □

**Παράδειγμα 8.1.6**

Θα αναπτυχτεί σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο 0 η συνάρτηση με τύπο

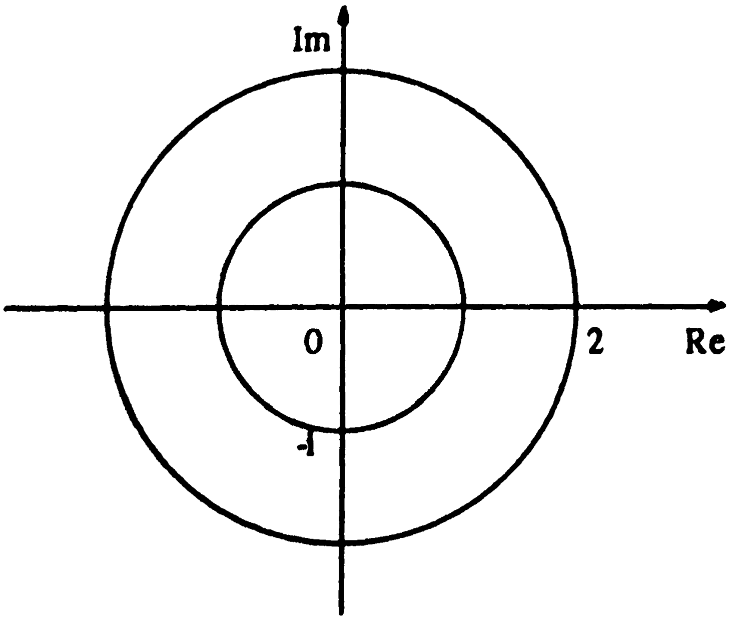
$$f(z) := \frac{2i}{(z-2)(z+i)}.$$

Πραγματικά η συνάρτηση f είναι ορισμένη και ολόμορφη στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία 2 και - i τα οποία μηδενίζουν τον παρονομαστή. Έτσι η συνάρτηση αναπτύσσεται

α) στον δίσκο B(0, 1) σε σειρά Taylor με κέντρο το 0,

β) στον δακτύλιο Δ(0, 1, 2) σε σειρά Laurent με κέντρο το 0, και

γ) στον δακτύλιο Δ(0, 2, +∞) σε σειρά Laurent με κέντρο το 0.




**Στον δίσκο η συνάρτηση f έχει ανάπτυγμα Taylor**
**και στους δακτυλίους αυτή έχει αναπτύγματα Laurent.**

Γράφουμε τον τύπο της συνάρτησης ως άθροισμα απλών κλασμάτων

$$f(z) = \frac{2i}{(z-2)(z+i)} = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z+i},$$

όπου $a =- b : =2(1 +2i)/5$, και εξετάζουμε διαδοχικά τις παραπάνω περιπτώσεις :

α) Αν $|z|<1$, τότε

$$\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \quad \text{και} \quad \left|\frac{z}{i}\right| < 1.$$

Άρα έχουμε

$$\frac{a}{z-2} = -\frac{a}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{a}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n =- a\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}z^n$$

και

$$\frac{b}{z+i} = -ib\,\frac{1}{1+\frac{z}{i}} = -ib\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{i}\right)^n =-ib\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n,$$

οπότε το ανάπτυγμα Taylor της f με κέντρο το 0 μέσα στον δίσκο B(0, 1) είναι το

$$f(z) = -a\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}z^n - ib\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

όπου οι συντελεστές της δυναμοσειρές είναι οι εξής:

$$a_n : = \frac{2(1+2i)}{5}(-2^{-n-1} + i^{n+1}),\ n=0, 1, 2, ...$$

β) Αν $1 < |z| < 2$, τότε

$$\left|\frac{z}{2}\right| <1 \quad \text{και} \quad \left|\frac{i}{z}\right| <1.$$

Άρα έχουμε

$$\frac{a}{z-2} = -\frac{a}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{a}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n =- a\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}z^n$$

και

$$\frac{b}{z+i} = \frac{b}{z}\,\frac{1}{1+\frac{i}{z}} = \frac{b}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n = b\sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} z^{-n-1} = b\sum_{n=-\infty}^{-1} i^{n+1} z^n,$$

οπότε το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το σημείο 0 στη δακτυλική περιοχή Δ(0,1, 2) είναι το

$$f(z) = -\frac{2(1+2i)}{5}\sum_{n=-\infty}^{-1} i^{n+1}z^n - \frac{1+2i}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}z^n.$$

γ) Αν $2 < |z|$, τότε

$$\left|\frac{2}{z}\right| < 1 \quad \text{και} \quad \left|\frac{i}{z}\right| < 1.$$

Άρα έχουμε

$$\frac{a}{z-2} = \frac{a}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{a}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = a\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1} z^n$$

και

$$\frac{b}{z+i} = \frac{b}{z}\,\frac{1}{1+\frac{i}{z}} = \frac{b}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n = b\sum_{n=-\infty}^{-1} i^{n+1}z^n,$$

οπότε το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το σημείο 0 στη δακτυλική περιοχή Δ(0, 2, +∞) είναι το

$$f(z) = -\frac{2(1+2i)}{5}\sum_{n=-\infty}^{-1} i^{n+1}z^n - \frac{1+2i}{5}\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n}z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n z^n,$$

όπου

$$b_n := -\frac{1+2i}{5}(2i^{n+1} + 2^{-n}),\ n=0, 1, 2, \ldots \qquad \square$$

**Παράδειγμα 8.1.7**

Θα υπολογιστεί ο συντελεστής $b_{-2}$ του αναπτύγματος σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο 1 της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \frac{e^z}{z^2(z-1)}.$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή αναπτύσσεται σε σειρά Laurent στα σύνολα $\Delta(1, 0, 1)$ και $\Delta(1, 1, +\infty)$.

Θεωρούμε πρώτα τον ανοικτό δακτύλιο $\Delta(1, 0, 1)$. Όμως παρατηρούμε ότι η συνάρτηση με τύπο

$$g(z) := (z-1)\, f(z)$$

είναι ολόμορφη στον δίσκο $B(1, 1)$, αφού αυτή γράφεται ως

$$g(z) = \frac{e^z}{z^2}\,.$$

Επομένως έχει ένα ανάπτυγμα Taylor της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$, δηλαδή έχουμε

$$(z-1)\, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n\,.$$

Διαιρώντας με τον παράγοντα $(z-1)$ προκύπτει ότι ο συντελεστής $b_{-2}$ του αναπτύγματος της $f$ σε σειρά Laurent είναι ίσος με 0.

Τώρα θεωρούμε τον δακτύλιο $\Delta(1,1, +\infty)$. Γράφουμε τον αριθμητή στη μορφή

$$e^z = e e^{z-1} = e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}.$$

Κάθε σημείο του δακτυλίου αυτού ικανοποιεί τη σχέση $|z-1| > 1$, οπότε $|(z-1)^{-1}| < 1$ και άρα

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1+(z-1)^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{z-1}\left[1-(z-1)^{-1}+(z-1)^{-2}-(z-1)^{-3}+\ldots\right] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^{-n}\,.$$

Επομένως, με παραγώγιση, παίρνουμε

$$\frac{1}{z^2} = -\frac{d}{dz}\frac{1}{z} = -\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1}(z-1)^{-n-1}.$$

Επίσης γράφουμε και τον αριθμητή στη μορφή

$$e^z = ee^{z-1} = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^k}{k!}.$$

Έτσι, στον δακτύλιο $\Delta(1, 1, +\infty)$ έχουμε το ανάπτυγμα

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)} = -e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^k}{k!}\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1}(z-1)^{-n-1}\frac{1}{(z-1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e\,n(-1)^n}{k!}\right](z-1)^{k-n-2}.$$

Τώρα θέτουμε $\lambda := k - n - 2$, οπότε βρίσκουμε

$$f(z) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} b_\lambda (z-1)^\lambda,$$

όπου

$$b_\lambda := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e}{k!}(k-\lambda-2)(-1)^{k-\lambda}.$$

Έτσι έχουμε

$$b_{-2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e}{k!}k(-1)^k = e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}(-1)^k = -e\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(-1)^m = -ee^{-1} = -1. \qquad \square$$

**8.1.1** Να αναπτυχτούν σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο 0 οι συναρτήσεις με τύπους

α) $f(z) := \dfrac{2z-1}{z^2-z-2}$, β) $f(z) := \dfrac{1}{z^2+z}$, γ) $f(z):=\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$, δ) $f(z):=\dfrac{2z}{z^2+iz+2}$,

ε) $f(z):=\dfrac{z+1}{z^2+z-2}$, ς) $f(z):=\dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$,

ζ) $f(z):=\dfrac{z}{z^2+i}$, η) $f(z):=\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$,

θ) $f(z):=\dfrac{\sin^2 z}{z}$, ι) $f(z):=z^3e^{1/z}$,

ια) $f(z):=z^5\cos\dfrac{1}{z}$, ιβ) $f(z):=\dfrac{1+\cos z}{z^3}$.

ιγ) $f(z):=\dfrac{2zi}{(z+2)(z-2i)}$, ιδ) $f(z):=\dfrac{e^{iz}}{z(z+2)^2}$.

**8.1.2** Να αναπτυχτεί σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο i η συνάρτηση με τύπο

$$f(z):=\frac{e^{iz}}{z(iz+1)^2}.$$

**8.1.3** Να αναπτυχτούν σε σειρά Laurent οι παρακάτω συναρτήσεις στις αντίστοιχες περιοχές:

α) $f(z):=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $\Delta(-1, 0, 1)$

β) $f(z):=\dfrac{z}{z^2-5z+6}$, $\Delta(0, 2, 3)$ και $\Delta(0, 3, +\infty)$

γ) $f(z):=\dfrac{2}{(z^2+1)(z+2)}$, $\Delta(0, 1, 4)$ και $\Delta(0, 4, +\infty)$

δ) $f(z):=\dfrac{1}{z^2-1}$, $\Delta(-2, 1, 3)$

ε) $f(z) := \dfrac{1}{z^2+2z-8}$, $\Delta(-2, 1, 4)$

ς) $f(z) := \dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$, $\Delta(1, 2, +\infty)$

ζ) $f(z) := \dfrac{z^5}{(z^2-4)^2}$, $\Delta(0, 2, +\infty)$

η) $f(z) := \dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$, $\Delta(0, 1, 2)$

## 8.2 Ρίζες ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης

Υποθέτουμε ότι f είναι μια ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε έναν τόπο $T$ και θεωρούμε ένα σημείο a του τόπου $T$. Αν το σημείο a είναι **ρίζα** (root, ή zero) της f, δηλαδή, αν ισχύει ότι $f(a) = 0$ και η f δεν είναι η σταθερά συνάρτηση 0, τότε υπάρχει μοναδικός φυσικός αριθμός k και μια ολόμορφη συνάρτηση h ορισμένη σε μια κυκλική περιοχή $B$ του τόπου $T$ τέτοια ώστε $h(a) \neq 0$ και

$$\boxed{f(z) = (z - a)^k\, h(z), \text{ για κάθε } z \in B.}$$

Ο αριθμός k είναι η **πολλαπλότητα** ή η **τάξη** (multiplicity) της ρίζας a ως προς τη συνάρτηση f.

Το σημείο a είναι ρίζα της f πολλαπλότητας k, αν και μόνο αν το ανάπτυγμα της f σε σειρά Taylor με κέντρο το σημείο a είναι της μορφής

$$b_k(z - a)^k + b_{k+1}(z - a)^{k+1} + b_{k+2}(z - a)^{k+2} + \dots,$$

όπου $b_k \neq 0$. Τούτο συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f^{(n)}(a) = 0\,,\ n = 0, 1, \dots, k-1 \ \text{ και } f^{(k)}(a) = k! = b_k \neq 0.$$

**Παράδειγμα 8.2.1**

Θα αποδειχτεί ότι κάθε πολυώνυμο

$$P(z) := a_0 + a_1 z + ... + a_{k-1} z^{k-1} + z^k,$$

$k \geq 1$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Προς τούτο υποθέτουμε ότι το P δεν έχει καμμία ρίζα.

*1ος τρόπος*:

Η συνάρτηση P(z) είναι μη σταθερά και ακεραία, οπότε από το Θεώρημα του Picard, υπάρχει μια ακολουθια $(z_n)$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$(1) \qquad |P(z_n)| < \frac{1}{n}, \text{ για κάθε } n = 1, 2, ...$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(z_n)$ είναι φραγμένη. Πραγματικά, αν όχι, τότε υπάρχει υπακολουθία της, έστω, επίσης, $(z_n)$, τέτοια ώστε $\lim z_n = \infty$. Από την ανισότητα (1) παίρνουμε ότι

$$|z_n| < \frac{1}{n|z_n|^{k-1}} + \frac{|a_0|}{|z_n|^{k-1}} + \frac{|a_1|}{|z_n|^{k-2}} + ... + |a_{k-1}|,$$

οπότε μεταβαίνοντας στα όρια προκύπτει $+\infty \leq |a_{k-1}|$, άτοπο. Άρα η ακολουθία $(z_n)$ είναι φραγμένη και, από το θεώρημα του Bolzano, αυτή έχει ένα σημείο συσσώρευσης, έστω a. Τότε, από την (1), έπεται ότι $P(a) = 0$, πράγμα που αποδεικνύει ότι το σημείο a είναι ρίζα του P(z).

*2ος τρόπος*:

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι ισχύει

$$(2) \qquad \lim_{z \to \infty} P(z) = \infty.$$

Πραγματικά, έχουμε

$$|P(z)| = |z^k| \left| \left[1 + \frac{a_{k-1}}{z} + \frac{a_{k-2}}{z^2} + ... + \frac{a_1}{z^{k-1}} + \frac{a_0}{z^k}\right]\right|$$

$$\geq |z^k| \left[1 - \left|\frac{a_{k-1}}{z}\right| - \left|\frac{a_{k-2}}{z^2}\right| - ... - \left|\frac{a_1}{z^{k-1}}\right| - \left|\frac{a_0}{z^k}\right|\right].$$

Έστω $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in \Delta(0, M, +\infty)$ να ισχύει

$$\left| \frac{a_m}{z^m} \right| < \frac{1}{2k}, \text{ για όλα τα } m = 0, 1, ..., k-1 .$$

Επομένως για κάθε $z \in \Delta(0, M, +\infty)$ θα ισχύει και

$$|P(z)| > |z^k| \frac{1}{2},$$

από όπου προκύπτει η (2). Αυτή συνεπάγεται ότι η ακεραία συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \frac{1}{P(z)}$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$$

και άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z)| < 1$, για κάθε $z \in \Delta(0, \varepsilon^{-1}, +\infty)$. Αλλά, λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της συνάρτησης f πάνω στον κλειστό δίσκο με κέντρο το 0 και ακτίνα το $\varepsilon^{-1}$, αυτή είναι φραγμένη στον δίσκο. Έστω K ένα τέτοιο φράγμα. Τότε θα έχουμε ότι

$$|f(z)| < \max\{1, K\},$$

για κάθε μιγαδικό αριθμό z. Το Πρώτο Θεώρημα Cauchy-Liouville συνεπάγεται ότι η f είναι σταθερά, πράγμα που σημαίνει ότι ο βαθμός του P(z) είναι 0, άτοπο. □

Από το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει και το

**Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας:**
*Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού k έχει k το πλήθος ρίζες, όπου κάθε ρίζα λαμβάνεται υπόψη τόσες φορές όσες είναι η πολλαπλότητά της.*

**Παράδειγμα 8.2.2.**
Θα βρεθεί η τάξη της ρίζας $z = 0$ για τη συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \frac{z^4}{z - \sin z}.$$

Γράφουμε τον παρονομαστή στη μορφή

$$z - \sin z = z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) =$$

$$= z^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \ldots\right),$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης γίνεται

$$f(z) = z\, h(z),$$

όπου παρατηρούμε ότι η συνάρτηση h ορίζεται με τον τύπο

$$h(z) := \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \ldots},$$

είναι ολόμορφη σε μια περιοχή του 0 και επιπλέον h(0) = 6. Έτσι προκύπτει ότι το σημείο z = 0 είναι ρίζα 1ης τάξης. □

**Παράδειγμα 8.2.3**

Θα βρούμε την τάξη των ριζών της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := (z^2 + 1)^2 \sinh z$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι οι ρίζες της συνάρτησης είναι τα σημεία -i, i και kπi, όπου k είναι τυχών ακέραιος αριθμός. Τώρα παρατηρούμε ότι η f(z) γράφεται ως

$$f(z) = (z+i)^2 h(z),$$

όπου η

$$h(z) := (z - i)^2 \sinh z$$

είναι ολόμορφη συνάρτηση και τέτοια ώστε

$$h(-i) = 4i^2 \sinh(-i) = -4i\sin 1,$$

το οποίο είναι διάφορο από το 0. Άρα το σημείο - i είναι ρίζα τάξης 2. Παρόμοια προκύπτει ότι και η ρίζα i είναι τάξης 2. Για τις ρίζες της μορφής kπi παρατηρούμε ότι η παράγωγος

$$f'(z) = 4z(z^2+1)\sinh z + (z^2+1)^2\cosh z$$

παίρνει στο σημείο kπi τιμή διάφορη από το μηδέν και άρα η ρίζα kπi είναι πρώτης τάξης. □

**Παράδειγμα 8.2.4**

Θα βρεθούν οι ρίζες της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := z^2 \sin z$$

και θα προσδιοριστεί η πολλαπλότητά τους.

Προς τούτο επιλύουμε την εξίσωση $z^2\sin z = 0$ και βρίσκουμε τις ρίζες της f να είναι τα σημεία kπ, όπου k είναι τυχών ακέραιος. Για να προσδιορίσουμε την πολλαπλότητά τους χρησιμοποιούμε τις παραγώγους της f.

Έχουμε $f(k\pi) = 0$ και

$$f'(k\pi) = 2(k\pi)\sin(k\pi) + (k\pi)^2\cos(k\pi) = 0, \quad \text{αν } k=0,$$

ενώ

$$f'(k\pi) \neq 0, \text{ αν } k \neq 0.$$

Επίσης έχουμε

$$f''(0) = 2\cdot\sin 0 + 4\cdot 0\cdot \cos 0 - 0^2\cdot\sin 0 = 0$$

και

$$f'''(0) = 6\cdot\cos 0 - 4\cdot 0\cdot\sin 0 - 2\cdot 0\cdot \sin s\cdot 0 - 0^2\cdot\cos 0 = 6 \neq 0.$$

Επομένως το σημείο 0 είναι ρίζα τρίτης τάξης και τα σημεία της μορφής kπ, όπου k ακέραιος διάφορος του 0, είναι ρίζες πρώτης τάξης. □

**8.2.1** Να βρεθούν οι ρίζες των συναρτήσεων με τους παρακάτω τύπους και να προσδιοριστεί η πολλαπλότητά τους:

α) $f(z) := z^4+4z^2$, β) $f(z) := \dfrac{\sin z}{z}$,

γ) $f(z) := \dfrac{\sinh^2 z}{z}$, δ) $f(z) := 1+\cosh z$,

ε) $f(z) := \dfrac{(1-\sinh z)^2}{z}$, ς) $f(z) := (z+\pi i)\sinh z$,

ζ) $f(z) := \cos z^4$, η) $f(z) := (z^2+\pi^2)(1+e^{-z})$.

**8.2.2** Να εξεταστεί αν το σημείο z=0 είναι ρίζα των παρακάτω συναρτήσεων και αν "ναι", να προσδιοριστεί η τάξη της:

α) $f(z) := z^6 \dfrac{1}{(\frac{z}{2})^2 - \sin^2(\frac{z}{2})}$ β) $f(z) := \dfrac{z^3}{1+z-e^z}$,

γ) $f(z) := 2(\sinh z-1) - z^2$, δ) $f(z) := \dfrac{(1-\cos 2z)^2}{z-\sinh z}$,

# 8.3 Αρχή ταυτότητας ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων

Ένα από τα βασικότερα συμπεράσματα της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων είναι η λεγόμενη

**Αρχή Ταυτότητας Ολόμορφων Μιγαδικών Συναρτήσεων:**
*Θεωρούμε δυο ολόμορφες συναρτήσεις ορισμένες σε έναν τόπο* **T**. *Αν υπάρχει*

*φραγμένη ακολουθία* $(a_n)$ *στον τόπο* **T** *με όρους διαφορετικούς ανά δύο τέτοια ώστε*

$$f(a_n) = g(a_n), \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots,$$

*τότε ισχύει και* $f(z) = g(z)$, *για κάθε* $z \in T$.

**Παράδειγμα 8.3.1**

Θα δοθεί παράδειγμα μιγαδικής συνάρτησης μιγαδικής μεταβλητής που έχει ρίζες (τουλάχιστον) τα σημεία

$$a_n := \frac{i}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

και δεν είναι εκ ταυτότητος μηδέν. Επίσης θα εξεταστεί αν υπάρχει ακεραία μη τετριμμένη τέτοια συνάρτηση.

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό θεωρούμε μια πραγματική συνάρτηση φ που έχει ως ρίζες τα σημεία που δίνονται. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να λάβουμε τη συνάρτηση με τύπο

$$\varphi(x) := \begin{cases} x \sin(\pi i/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

Η φ είναι ορισμένη παντού στην πραγματική ευθεία και επομένως μια μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής που έχει ρίζες τα σημεία $a_n$ είναι η

$$f(z) := \begin{cases} z \sin(\pi i/z), & \text{αν } z \neq 0 \\ 0, & \text{αν } z = 0. \end{cases}$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μια ακεραία συνάρτηση F που έχει ρίζες τα σημεία αυτά, τότε θα έχουμε $F(a_n) = 0$ και, επειδή η ακολουθία $(a_n)$ είναι φραγμένη, σύμφωνα με την αρχή ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων, θα πρέπει να ισχύει $F(z) = 0$, για κάθε z. Δηλαδή μόνο η μηδενική συνάρτηση μπορεί να έχει την παραπάνω ιδιότητα. □



**Παράδειγμα 8.3.2**

Έστω f μια ακεραία μιγαδική συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε μιγαδικό αριθμό ζ, με $|ζ - 3|=1$, να ισχύει η σχέση

$$f(ζ)e^{iζ} = \sin ζ.$$

Θα υπολογιστεί η τιμή

$$f(0) + f(\pi) + f'(0) + f'(\pi).$$

Προς τούτο παρατηρούμε πρώτα ότι το σύνολο των σημείων ζ με την ιδιότητα ότι $|ζ- 3|=1$ είναι η περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 3 και ακτίνα 1. Επομένως τούτο είναι ένα απέραντο υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου. Πάνω στο σύνολο αυτό η ακεραία συνάρτηση f(z) ταυτίζεται με την επίσης ακεραία συνάρτηση $e^{-iz} \sin z$, οπότε αυτές ταυτίζονται παντού στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή έχουμε

$$f(z) = e^{-iz} \sin z.$$

Έτσι

$$f(0) = 0, \ f(\pi) = 0, f'(0) =1 \text{ και } f'(\pi) =1$$

οπότε η δοθείσα παράσταση έχει την τιμή $0 +0 +1 +1 =2$. □

**Παράδειγμα 8.3.3**

Έστω φ μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής τέτοια ώστε

$$φ(e^{-n}) = 1, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots \text{ και } φ(2)=0.$$

Θα εξεταστεί αν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ τέτοια ώστε $f(x) = φ(x)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση f, θα πρέπει να είναι ακεραία και να ταυτίζεται με την επίσης ακεραία σταθερή συνάρτηση $g(z) = 1$ πάνω στα σημεία της μορφής $e^{-n}$, που είναι οι όροι μιας φραγμένης ακολουθίας. Άρα τότε, σύμφωνα με την αρχή ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων, η συνάρτηση f θα ταυτίζεται με τη σταθερά συνάρτηση $g(z) = 1$, οπότε θα ισχύει και

$$1 = g(2) = f(2) = φ(2) = 0,$$

άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια ολόμορφη επέκταση της φ. □

**Παράδειγμα 8.3.4**

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν μη σταθερές ακεραίες συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε για κάποιον μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό b να ισχύει η σχέση

$$(1) \qquad |f(z)\,g(z)| < |b - f(z)|,$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Πραγματικά, έστω ότι υπάρχουν τέτοιες ακεραίες μη σταθερές συναρτήσεις f και g. Αν για κάποιο σημείο $\zeta$ είχαμε $f(\zeta) = b$, τότε επίσης θα είχαμε και $|f(\zeta)\,g(\zeta)| < 0$, πράγμα άτοπο. Άρα για κάθε z έχουμε $f(z) \neq b$, δηλαδή το σημείο b δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f(z). Τούτο σημαίνει ότι η συνάρτηση με τύπο

$$h(z) := \frac{f(z)g(z)}{b - f(z)}$$

είναι ακεραία και φραγμένη (αφού από την (1) έχουμε $|h(z)| < 1$, για κάθε z). Το θεώρημα Cauchy-Liouville συνεπάγεται ότι αυτή είναι σταθερά. Άρα υπάρχει σημείο a τέτοιο ώστε να ισχύει

$$h(z) = a, \text{ για κάθε } z, \text{ ή } f(z)g(z) = a(b - f(z)), \text{ για κάθε } z.$$

Ισχυριζόμαστε ότι $f(z) \neq 0$, για κάθε z. Πραγματικά, αν για κάποιο $z_0$ είχαμε $f(z_0) = 0$, τότε, από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $a = 0$. Άρα $f(z)g(z) = 0$, για κάθε z, πράγμα που συνεπάγεται ότι $f(z) = 0$, ή $g(z) = 0$, για κάθε z. Έτσι, κάποιο από τα σύνολα

$$\{z : |z| \leq 1 \text{ και } f(z) = 0\} \text{ και } \{z : |z| \leq 1 \text{ και } g(z) = 0\}$$

είναι απέραντο, οπότε, από την αρχή ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων, προκύπτει ότι $f(z) = 0$ για κάθε z, ή $g(z) = 0$ για κάθε z. Άρα η f ή / και η g είναι σταθερά, άτοπο. Έτσι ο ισχυρισμός $f(z) \neq 0$, για κάθε z, αληθεύει.

Διαπιστώσαμε, λοιπόν, ότι τα σημεία b και 0 δεν ανήκουν στο σύνολο τιμών της ακεραίας συνάρτησης f, γεγονός που αντίκειται προς το θεώρημα του Picard. Επομένως δεν υπάρχουν τέτοιες συναρτήσεις f και g. □

**Παράδειγμα 8.3.5**

Θα εξεταστεί αν υπάρχει μη σταθερά ακεραία μιγαδική συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$\operatorname{Re} f(z) \leq 0, \text{ για κάθε μιγαδικό αριθμό } z.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια τέτοια μιγαδική συνάρτηση.

*1ος τρόπος.*

Αν θέσουμε

$$f(z) := f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

τότε πρέπει να ισχύει $u(x, y) \leq 0$ και επιπλέον η συνάρτηση με τύπο

$$g(z) := \exp(f(z))$$

θα είναι επίσης ακεραία και μη σταθερά. Αλλά παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|g(z)| = \exp u(x, y) \leq 1,$$

δηλαδή η g είναι φραγμένη, άρα σταθερά, άτοπο.

*2ος τρόπος.*

Μια τέτοια συνάρτηση παίρνει τιμές μόνο στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, πράγμα που αντίκειται προς το θεώρημα του Picard. □

**Παράδειγμα 8.3.6**

Έστω $\lambda \geq 2$. Θα εξετάσουμε αν υπάρχει συνάρτηση f που είναι ολόμορφη στην κυκλική περιοχή $B(i, 1+\varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$|f''(i)| = \lambda \quad \text{και} \quad \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(i+e^{it})| = 1.$$

Υποθέτουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση υπάρχει. Από τον τύπο του Cauchy για την παράσταση της δεύτερης παραγώγου της f στο σημείο i έχουμε

$$f''(i) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - i)^3} d\zeta,$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο i και ακτίνα ίση με 1. Επομένως θα έχουμε

$$\lambda = |f''(i)| = \left| \frac{2!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - i)^3} d\zeta \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_\gamma \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - i|^3} |d\zeta| \leq \frac{1}{\pi} 2\pi = 2 .$$

Επομένως, αν $\lambda > 2$, δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

Έστω ότι $\lambda = 2$. Τότε στην παραπάνω σχέση ισχύει παντού η ισότητα. Άρα, λόγω της συνέχειας της $|f(z)|$, θα πρέπει να έχουμε

$$|f(z)| = 1, \text{ για κάθε } z \text{ πάνω στην καμπύλη } \gamma\cdot$$

δηλαδή για κάθε σημείο $t$ στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ θα πρέπει να ισχύει

$$|f(i + e^{it})| = 1.$$

Θέτουμε

$$\theta(t) := \operatorname{Arg} f(i + e^{it}).$$

Άρα για κάθε τέτοιο $t$ θα έχουμε

$$f(i + e^{it}) = e^{i\theta(t)}.$$

Έστω $z$ ένα σημείο της $\gamma$. Τότε το $z$ γράφεται στη μορφή $i+e^{it}$, όπου

$$t = \operatorname{Arg}(z - i).$$

Έτσι βλέπουμε ότι η συνάρτηση $f$ έχει τη μορφή

$$f(z) = (z - i)^{g(z - i)},$$

όπου

$$g(\zeta) := \frac{1}{\operatorname{Arg}(\zeta)} \theta(\operatorname{Arg}(\zeta)) .$$

Στο σημείο αυτό προχωρούμε να προσδιορίσουμε κάποια συνάρτηση $g$. Η απλούστερη περίπτωση είναι να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $g$ παίρνει σταθερή πραγματική τιμή, έστω, $\alpha$, δηλαδή για κάθε σημείο $z$ της $\gamma$ θα έχουμε

$$f(z) = (z - i)^{\alpha}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f(z) και $(z - i)^{\alpha}$ είναι ολόμορφες στον δίσκο B(i, 1+ε) και αυτές ταυτίζονται πάνω στα σημεία της περιφέρειας του κύκλου με κέντρο το σημείο i και ακτίνα ίση με 1, σύμφωνα με την αρχή ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων, η f έχει παντού την ίδια μορφή, δηλαδή ισχύει

$$f(z) = (z - i)^{\alpha} \text{ για κάθε } z \text{ στην περιοχή } B(i, 1+\varepsilon).$$

Επομένως, θα πρέπει να ισχύει

$$2 = |f''(i)| = |\alpha|,$$

δηλαδή α = 2, ή α = -2. Όμως η τιμή α =- 2 απορρίπτεται, διότι η συνάρτηση

$$f(z) = (z - i)^{-2}$$

δεν είναι ολόμορφη στο σημείο i. Έτσι, τελικά, πρέπει α = 2, οπότε συμπεραίνουμε ότι μία συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος δίνεται από τον τύπο

$$f(z) := (z - i)^2 \qquad \square$$

**Παράδειγμα 8.3.7**

Αν $f_1, f_2, \ldots, f_k$ είναι ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις ορισμένες επί ενός τόπου $T$ και τέτοιες ώστε

$$f_1(z) . f_2(z) \ldots f_k(z) = 0, \text{ για κάθε } z \in T,$$

θα αποδειχτεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας δείκτης $\nu \in \{1, 2, \ldots, k\}$ τέτοιος ώστε η αντίστοιχη συνάρτηση $f_\nu$ να είναι εκ ταυτότητος ίση με το μηδέν επί του T.

Προς τούτο παρατηρούμε ότι, επειδή ο τόπος $T$ είναι ένα ανοικτό σύνολο μπορούμε να θεωρήσουμε μια φραγμένη ακολουθία σημείων $(z_n)$ στον $T$ με όρους διαφορετικούς ανά δύο. Τότε θα ισχύει και

$$f_1(z_n) . f_2(z_n) \ldots f_k(z_n) = 0, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \ldots$$

Για κάθε $\nu = 1, 2, \ldots, k$ ορίζουμε τα σύνολα

$$A_\nu := \{n : f_\nu(z_n) = 0\}.$$

Τότε, επειδή η ένωση όλων αυτών των συνόλων είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\{1, 2, \ldots\}$ και επειδή τούτο είναι απέραντο, θα υπάρχει κάποιο από τα σύνολα $A_\nu$ το οποίο θα είναι επίσης απέραντο. Αλλά τότε η αντίστοιχη συνάρτηση $f_\nu$ θα έχει μια φραγμένη ακολουθία ριζών και, επειδή η συνάρτηση αυτή είναι ακεραία, θα είναι εκ ταυτότητος ίση με το μηδέν. □

**Παράδειγμα 8.3.8**

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο A των μιγαδικών αριθμών οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση

$$\sin 5z + \cos z(1 - z) = - i$$

δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα απέραντο και φραγμένο.

Πραγματικά, αν το A ήταν απέραντο και φραγμένο σύνολο, θα περιείχε μια συγκλίνουσα ακολουθία με όρους διακεκριμένους, άρα και ένα σημείο συσσώρευσης. Επομένως η ακεραία συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \sin 5z + \cos z(1 - z) + i,$$

θα είχε τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης ριζών, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι αυτή θα ήταν η σταθερά μηδενική συνάρτηση. Τούτο όμως δεν ισχύει, οπότε το σύνολο A δεν μπορεί να έχει τις ιδιότητες που αναφέρονται. □

**8.3.1** Έστω φ μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής τέτοια ώστε να ισχύει

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \ldots$$

και $\varphi(4) = 0$. Να εξεταστεί αν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ τέτοια ώστε

$f(x) = \varphi(x)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

**8.3.2** Να αποδειχτεί ότι η μοναδική ακεραία μιγαδική συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση

$$2\sin k + if(i\sin k) = 0, \; k = 0, 1, 2, \ldots, \text{ είναι η } f(z) = 2z.$$

**8.3.3** Να εξεταστεί αν υπάρχει ακεραία μιγαδική συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση

$$f(\cos v) + \sin^2 v = 2\cos v \text{ και } f(0) = e.$$

## 8.4 Ανώμαλα σημεία ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων

Ένα σημείο a είναι **(μεμονωμένο) ανώμαλο σημείο** (isolated singular point) για μια συνάρτηση f, αν η f είναι ολόμορφη τουλάχιστον σε μια δακτυλική περιοχή της μορφής $\Delta(a, 0, r)$, για κάποιο $r > 0$. Η μελέτη τέτοιων σημείων ανάγεται στην εξέταση της ύπαρξης ή μη του ορίου της f στα σημεία αυτά.

Θεωρούμε έναν δακτύλιο της μορφής $\Delta(a, 0, r)$ στο μιγαδικό επίπεδο και μια συνάρτηση f ολόμορφη και ορισμένη στον δακτύλιο αυτό. Αν η f ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{z \to a} f(z) = b,$$

όπου b είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τότε το a είναι **αναιρέσιμο** ή **απαλείψιμο** (removable) ανώμαλο σημείο και η f είναι τοπικά φραγμένη σ' αυτό. Τούτο συμβαίνει αν και μόνο αν στο ανάπτυγμα της f σε σειρά Laurent με κέντρο το a δεν εμφανίζονται (μη μηδενικοί) όροι με αρνητικό δείκτη, δηλαδή το κύριο μέρος της σειράς είναι μηδέν.

Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty,$$

τότε το σημείο a είναι **πόλος** (pole) της f. Τούτο συμβαίνει αν και μόνο αν υπάρχει $r_1 \in (0, r)$, ένας μοναδικός φυσικός αριθμός k και μια ολόμορφη συνάρτηση h ορισμένη στον δακτύλιο $\Delta(a, 0, r_1)$, τέτοια ώστε $h(a) \neq 0$ και

$$f(z) = (z - a)^{-k} h(z), \text{ για κάθε } z \in \Delta(a, 0, r_1).$$

Ο αριθμός k είναι η **πολλαπλότητα**, ή η **τάξη** (multiplicity) του πόλου a της f.

Το σημείο a είναι πόλος της συνάρτησης f με πολλαπλότητα k, αν και μόνο αν το ανάπτυγμα της f σε σειρά Laurent είναι της μορφής

$$\frac{b_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{b_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \ldots + b_0 + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + \ldots$$

όπου $b_{-k} \neq 0$.

**Μερόμορφη** (meromorphic) είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε έναν τόπο $\boldsymbol{T}$, αν για κάθε $z \in \boldsymbol{T}$ η f είναι ολόμορφη στο z, ή το z είναι πόλος της f.

Αν η συνάρτηση f δεν έχει όριο στο σημείο a, τότε το a είναι ένα **ουσιωδώς ανώμαλο σημείο** (essentially singular point) για την f. Τούτο συμβαίνει αν και μόνο αν στο ανάπτυγμα της f σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο a υπάρχουν άπειροι το πλήθος όροι με αρνητικό δείκτη.

**Θεώρημα των Cassorati - Weierstrass:**

*Έστω* f *μια ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε έναν δακτύλιο της μορφής* $\Delta(a, 0, r)$ *και έστω ότι το κέντρο του δακτυλίου, δηλαδή το σημείο* a, *είναι ουσιωδώς ανώμαλο σημείο για την* f. *Τότε για κάθε μιγαδικό αριθμό* L *υπάρχει μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών* $(z_n)$ *με όρους διαφορετικούς ανά δύο τέτοια ώστε τέτοια ώστε*

$$\lim z_n = a \text{ και } \lim f(z_n) = L.$$

**Παράδειγμα 8.4.1**

Θα αποδειχτεί ότι η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \frac{1}{\sin z}$$

είναι μερόμορφη στο μιγαδικό επίπεδο και θα βρεθεί το σύνολο των πόλων της. Επίσης θα εξετάσουμε αν υπάρχει επέκταση της f στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο η οποία είναι μερόμορφη.

Πραγματικά, έστω τυχών μιγαδικός αριθμός z. Αν sinz = 0, τότε το όριο της f στο z είναι το σημείο ∞. Άρα το σημείο z είναι πόλος της f. Έτσι λοιπόν οι πόλοι της f είναι οι ρίζες της συνάρτησης sin. Επομένως το σύνολο των πόλων της f είναι το σύνολο

$$A := \{ k\pi, \text{ όπου } k \text{ ακέραιος αριθμός} \}.$$

Τέλος, αν υπάρχει επέκταση F της f στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο η οποία είναι επίσης μερόμορφη, τότε αυτή θα έχει πόλους τουλάχιστον τα σημεία του συνόλου A (και πιθανόν και το κατ' εκδοχήν σημείο). Τούτο όμως είναι άτοπο, γιατί κάθε συνάρτηση μερόμορφη στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο έχει πεπερασμένο πλήθος πόλων, ή ακόμη γιατί μερόμορφες συναρτήσεις στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο είναι μόνο οι ρητές συναρτήσεις. □

**Παράδειγμα 8.4.2.**

Θα χαρακτηρίσουμε το σημείο π ως προς τη συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \frac{\sin z}{z-\pi}.$$

Προς τούτο, θέτουμε $\zeta := z - \pi$ και παρατηρούμε ότι

$$f(z) = \frac{1}{\zeta}\sin(\zeta+\pi) = -\frac{1}{\zeta}\sin z = -\frac{1}{\zeta}\left[\zeta - \frac{\zeta^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right] =$$

$$= -1 + \frac{\zeta^2}{3!} - \ldots - (-1)^n\frac{\zeta^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots =$$

$$= -1 + \frac{(z-\pi)^2}{3!} - \ldots - (-1)^n\frac{(z-\pi)^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

που είναι το ανάπτυγμα της f σε δυνάμεις του z- π, δηλαδή το ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το σημείο π. Το γεγονός τούτο σημαίνει ότι το σημείο π είναι αναιρέσιμο σημείο για την f. □

**Παράδειγμα 8.4.3**

Θα προσδιορίσουμε τον τύπο του ανώμαλου σημείου π για τη συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \frac{1+\cos z}{z-\pi}.$$

Προς τούτο θέτουμε $\zeta := z - \pi$ και παρατηρούμε ότι

$$f(z) = \frac{1+\cos z}{z-\pi} = \frac{1-\cos\zeta}{\zeta} = \frac{1-\left(1-\frac{\zeta^2}{2!}+\frac{\zeta^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{\zeta^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)}{\zeta} =$$

$$= \frac{\zeta}{2!}-\frac{\zeta^3}{4!}+\ldots-(-1)^n\frac{\zeta^{2n-1}}{(2n)!}+\ldots = (z-\pi)h(z),$$

όπου ο τύπος

$$h(z) := \frac{1}{2!} - \frac{(z-\pi)^2}{4!} + \ldots - (-1)^n \frac{(z-\pi)^{2n-2}}{(2n)!} + \ldots$$

ορίζει μια ολόμορφη συνάρτηση τέτοια ώστε $h(\pi) = 1/2$. Άρα το σημείο π είναι ρίζα 1ης τάξης για τη συνάρτηση που μας δόθηκε. □

**Παράδειγμα 8.4.4**

Θα δοθεί παράδειγμα μιγαδικής συνάρτησης που έχει το σημείο $1 + i$ πόλο 2ης τάξης, το σημείο $1-2i$ ουσιωδώς ανώμαλο σημείο και είναι ολόμορφη σε κάθε άλλο σημείο του μιγαδικού επιπέδου.

Πραγματικά, η απλούστερη συνάρτηση που έχει το σημείο $1+i$ πόλο 2ης τάξης έχει τύπο

$$f_1(z) := \frac{1}{(z-1-i)^2}.$$

Επίσης μια συνάρτηση που έχει το σημείο $1-2i$ ουσιωδώς ανώμαλο σημείο έχει τύπο

$$f_2(z) := \exp\left[\frac{1}{z-1+2i}\right].$$

Επομένως μια συνάρτηση που έχει τις ζητούμενες ιδιότητες είναι η

$$f(z) := f_1(z)+f_2(z) = \frac{1}{(z-1-i)^2} + \exp[\frac{1}{z-1+2i}]. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 8.4.5**

Θα χαρακτηριστεί το σημείο $z_0 := 1$ ως προς τη συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \frac{\sin \pi z}{2e^{z-1}-z^2-1}.$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι ο αριθμητής γράφεται ως

$$\sin \pi z = \sin(\pi - \pi z) = -\sin \pi(z-1) =$$

$$= -\pi(z-1) + \frac{(\pi(z-1))^3}{3!} - \frac{(\pi(z-1))^5}{5!} + \frac{(\pi(z-1))^7}{7!} - \ldots =$$

$$= \pi(z-1)\Big[-1 + \frac{(\pi(z-1))^2}{3!} - \frac{(\pi(z-1))^4}{5!} + \frac{(\pi(z-1))^6}{7!} - \ldots\Big].$$

γεγονός που σημαίνει ότι για τον αριθμητή το σημείο 1 είναι ρίζα 1ης τάξης.

Επίσης για τον παρονομαστή παρατηρούμε ότι

$$2e^{z-1} - z^2 - 1 = 2(1+(z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{(z-1)^4}{4!} + \ldots) - z^2 - 1 =$$

$$= 1 - z^2 + 2((z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{(z-1)^4}{4!} + \ldots) =$$

$$= (z-1)(-1-z+2 + \frac{2}{2!}(z-1) + \frac{2}{3!}(z-1)^2 + \frac{2}{4!}(z-1)^3 + \ldots) =$$

$$= (z-1)^2(-1+1 + \frac{2}{3!}(z-1) + \frac{2}{4!}(z-1)^2 + \ldots) =$$

$$= (z-1)^3(\frac{2}{3!} + \frac{2}{4!}(z-1) + \frac{2}{5!}(z-1)^2 + \ldots),$$

και επομένως για τον παρονομαστή το σημείο 1 είναι ρίζα τρίτης τάξης. Άρα το σημείο τούτο είναι πόλος 2ης τάξης για τη συνάρτηση, διότι αυτή γράφεται ως

$$f(z) = \frac{\sin\pi z}{2e^{z-1}-z^2-1} =$$

$$= \frac{\pi(z-1)[-1+\frac{(\pi(z-1))^2}{3!}-\frac{(\pi(z-1))^4}{5!}+\frac{(\pi(z-1))^6}{7!}-\dots]}{(z-1)^3(\frac{2}{3!}+\frac{2}{4!}(z-1)+\frac{2}{5!}(z-1)^2+\dots)} =$$

$$= (z-1)^{-2}h(z),$$

όπου

$$h(z) := \frac{\pi(-1+\frac{(\pi(z-1))^2}{3!}-\frac{(\pi(z-1))^4}{5!}+\frac{(\pi(z-1))^6}{7!}-\dots)}{\frac{2}{3!}+\frac{2}{4!}(z-1)+\frac{2}{5!}(z-1)^2+\dots}$$

είναι μια συνάρτηση ολόμορφη στο σημείο $z_0=1$ και τέτοια ώστε $h(1) = -3\pi \neq 0$. □

**Παράδειγμα 8.4.6.**

Θα βρεθεί η τάξη του πόλου $z=0$ της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \frac{1-\cos z}{z^5}.$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής γράφεται ως

$$1-\cos z = 1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\dots\right) =$$

$$= z^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{z^{2(n-1)}}{(2n)!}+\dots\right).$$

Άρα, τελικά, η $f(z)$ γράφεται στη μορφή

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^5} = z^{-3}\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{z^{2(n-1)}}{(2n)!}+\dots\right),$$

από όπου προκύπτει ότι το σημείο $z=0$ είναι πόλος 3ης τάξης. □

**Παράδειγμα 8.4.7**

Θα χαρακτηριστούν τα σημεία 0, $\pi/2$ και $\pi$ του μιγαδικού επιπέδου ως προς τη συνάρτηση με τύπο

$$f(z):=\frac{\sin z}{z}+\tan^2 z+\cos\left(\frac{1}{z-\pi}\right).$$

Προς τούτο θέτουμε

$$f_1(z):=\frac{\sin}{z},\quad f_2(z):=\tan^2 z \text{ και } f_3(z):=\cos\left(\frac{1}{z-\pi}\right).$$

Στο σημείο 0 η συνάρτηση $f_1$ είναι τοπικά φραγμένη, αφού το όριό της σ' αυτό είναι ίσο με 1. Άρα αυτή έχει μια ολόμορφη επέκταση στο 0, οπότε το 0 είναι σημείο ολομορφίας για την $f_1$. Προφανώς το 0 είναι σημείο ολομορφίας και για τις συναρτήσεις $f_2$ και $f_3$, οπότε, εύκολα προκύπτει ότι τούτο είναι σημείο ολομορφίας και για την $f$.

Το σημείο $\pi/2$ είναι σημείο ολομορφίας για τις συναρτήσεις $f_1$ και $f_3$, αλλά πόλος 2ης τάξης για την $f_2$, αφού αυτή γράφεται στη μορφή

$$\tan^2(z)=\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}=\frac{\sin^2 z}{\sin^2(\frac{\pi}{2}-z)}$$

$$=[z-\frac{\pi}{2}]^{-2}\left[1-\frac{(z-\frac{\pi}{2})^2}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{(z-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots\right]^{-2}\sin^2 z.$$

Επομένως το σημείο αυτό είναι πόλος 2ης τάξης για την $f$.

Τέλος, το σημείο $\pi$ είναι ουσιωδώς ανώμαλο για την $f$, επειδή τούτο είναι σημείο ολομορφίας για τις συναρτήσεις $f_1$ και $f_2$ και ουσιωδώς ανώμαλο σημείο για την $f_3$, αφού παρατηρούμε ότι

$$f_3(z)=\cos\left(\frac{1}{z-\pi}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-\pi}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{z-\pi}\right)^4-\dots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{1}{z-\pi}\right)^{2n}+\dots$$

$$=\dots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\,\frac{1}{(z-\pi)^{2n}}+\dots\frac{1}{4!}\,\frac{1}{(z-\pi)^4}-\frac{1}{2!}\,\frac{1}{(z-\pi)^2}+1. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 8.4.8**

Θα αποδειχτεί ότι υπάρχει ακολουθία $(z_n)$ τέτοια ώστε

$$\lim z_n=0 \quad \text{και} \quad \lim \exp\left(\frac{1}{z_n}\right)=3+7i.$$

Πραγματικά στο ανάπτυγμα της $\exp(z^{-1})$ σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο 0 υπάρχουν άπειροι το πλήθος όροι με αρνητικό δείκτη, και άρα το σημείο 0 είναι ουσιωδώς ανώμαλο σημείο για την exp. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα των Cassorati - Weierstrass, ο μιγαδικός αριθμός 3+7i είναι το όριο μιας ακολουθίας $(f(z_n))$ για κάποια ακολουθία $(z_n)$ η οποία συγκλίνει προς το 0. $\square$

**Παράδειγμα 8.4.9**

Θα αποδείξουμε ότι το πηλίκο δύο μερόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων είναι επίσης μερόμορφη συνάρτηση.

Προς τούτο υποθέτουμε ότι f και g είναι δύο μερόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις σε έναν τόπο $T$ και θεωρούμε ένα σημείο $a\in T$. Απλοποιώντας τους κοινούς παράγοντες των δύο συναρτήσεων ( αν τέτοιοι υπάρχουν) μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι δύο συναρτήσεις δεν έχουν κοινές ρίζες. Διακρίνουμε τις παρακάτω έξι περιπτώσεις:

α) Το a είναι σημείο ολομορφίας των f, g και η g δεν έχει ρίζα το a. Τότε το πηλίκο $f(z)\,/\,g(z)$ είναι καλά ορισμένο σε μια περιοχή του a και είναι συνάρτηση ολόμορφη στο a.

β) Το a είναι σημείο ολομορφίας των f, g και η g έχει το a ρίζα τάξης k. Τότε το πηλίκο έχει το a πόλο k τάξης.

γ) Το a είναι σημείο ολομορφίας των f, g και η g έχει το a πόλο τάξης n. Τότε το a είναι ρίζα του πηλίκου τάξης n και άρα το πηλίκο είναι συνάρτηση ολόμορφη στο a.

δ) Το a είναι πόλος της f τάξης m και σημείο ολομορφίας της g, αλλά όχι ρίζα της g. Τότε το a είναι πόλος του πηλίκου τάξης m.

ε) Το a είναι πόλος της f τάξης m και ρίζα της g τάξης k. Τότε το a είναι πόλος του πηλίκου τάξης m + k.

ς) Το a είναι πόλος της f τάξης m και πόλος της g τάξης n. Αν $m > n$ , το a είναι πόλος του πηλίκου τάξης $m - n$ και, αν $m \leq n$, τότε τούτο είναι σημείο ολομορφίας του πηλίκου.

Έτσι σε κάθε περίπτωση προκύπτει ότι το τυχόν σημείο του τόπου ***T*** είναι σημείο ολομορφίας του πηλίκου ή πόλος και επομένως το πηλίκο είναι μερόμορφη συνάρτηση στον τόπο ***T***. □

**8.4.1** Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ανώμαλα σημεία για τις συναρτήσεις με τύπους

α) $f(z) := \dfrac{1+\cos z}{(z-\pi)^2}$, β) $f(z) := \dfrac{\sin z}{z^2(i-z)}$

γ) $f(z) := \dfrac{\sinh z}{z}$, δ) $f(z) := \dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+3z^4}$,

ε) $f(z) := \cos\dfrac{1}{z+2i}$, ς) $f(z) := \dfrac{\ln(1+z^4)}{z^3}$,

ζ) $f(z) := \cos\dfrac{1}{z+1} + \sin\dfrac{2-\pi z}{3(z+1)}$.

**8.4.2** Να χαρακτηριστεί το σημείο 0 για τις συναρτήσεις με τύπους

α) $f(z) := \dfrac{1}{e^{-z}-1}$, β) $f(z) := z\sinh\dfrac{1}{z}$,

γ) $f(z) := \exp(-\dfrac{1}{z^2}) + 3\dfrac{1}{z^{1995}}$.

**8.4.3** Να εξεταστεί αν υπάρχουν ακολουθίες μιγαδικών αριθμών $(z_n)$ και $(w_n)$ τέτοιες ώστε να ισχύει

$$\lim z_n = 0,\ \lim w_n = 0 \text{ και } \lim \exp(\frac{1}{z_n}) = \lim\cos(\frac{1}{w_n}) = 1 - i.$$

**8.4.4** Να εξεταστεί αν υπάρχουν ακολουθίες μιγαδικών αριθμών $(z_n)$ και $(w_n)$ τέτοιες ώστε να ισχύει

$$\lim z_n = 0,\ \lim w_n = 0 \ \text{ και } \lim \left[\exp\left(\frac{1}{z_n}\right) + \sin\left(\frac{1}{w_n}\right)\right] = 1 + i.$$

**8.4.5** Να δοθεί παράδειγμα μιγαδικής συνάρτησης που έχει το σημείο $1+i$ ουσιωδώς ανώμαλο σημείο, το σημείο $2+i$ πόλο 3ης τάξης, είναι ολόμορφη σε κάθε άλλο σημείο του μιγαδικού επιπέδου και της οποίας το ολοκληρωτικό υπόλοιπο ως προς το σημείο $1+i$ είναι 0.

**8.4.6** Να αποδειχτεί ότι το άθροισμα, η διαφορά και το γινόμενο δύο μερόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων είναι επίσης μερόμορφη συνάρτηση.

**8.4.7** Να εξεταστεί αν η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \frac{z}{\sin z}$$

είναι μερόμορφη.

**8.4.8** Να δοθεί παράδειγμα μιγαδικής συνάρτησης $f$ που έχει τα σημεία $i$, $3i$, $5i$ πόλους 3ης τάξης, τα σημεία $2i$, $4i$ ουσιωδώς ανώμαλα σημεία και η $f$ να είναι ολόμορφη σε κάθε άλλο σημείο του μιγαδικού επιπέδου.

# 9 Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Η έννοια των ολοκληρωτικών υπολοίπων παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στις εφαρμογές της θεωρίας των μιγαδικών συναρτήσεων και ιδιαίτερα στον υπολογισμό πολλών ορισμένων ολοκληρωμάτων πραγματικών συναρτήσεων.

## 9.1 Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Το **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** (residuum, ή residue) σε ένα σημείο a μιας συνάρτησης f η οποία είναι ολόμορφη σε έναν δακτύλιο της μορφής Δ(a, 0, r) του μιγαδικού επιπέδου είναι ο μιγαδικός αριθμός που ορίζεται με τον τύπο:

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz,}$$

**Γενικός τύπος του ολοκληρωτικού υπολοίπου**

όπου γ είναι μια οποιαδήποτε θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο a και ακτίνα ρ τέτοια ώστε $0 < \rho < r$.

Αν γνωρίζουμε το ανάπτυγμα της f σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο a, τότε ο συντελεστής $b_{-1}$ του όρου $(z - a)^{-1}$ της σειράς ισούται με το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο σημείο a, δηλαδή έχουμε

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = b_{-1}\,.}$$

**Τύπος του ολοκληρωτικού υπολοίπου όταν είναι γνωστό το ανάπτυγμα Laurent**

Αν το σημείο a είναι πόλος της f πολλαπλότητας k, τότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο a δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\,[(z-a)^k f(z)]^{(k-1)}.}$$

**Τύπος του ολοκληρωτικού υπολοίπου όταν το σημείο a είναι πόλος πολλαπλότητας k.**

**Παράδειγμα 9.1.1.**

Θα υπολογίσουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}$$

στα σημεία -1 και 2.

Παρατηρούμε ότι το σημείο -1 είναι πόλος 2ης τάξης, ενώ το σημείο 2 είναι πόλος 1ης τάξης. Έτσι, εφαρμόζοντας τον παραπάνω σχετικό τύπο παίρνουμε

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{(z-2)}\right] = -\frac{4}{9e}$$

και ακόμη

$$\underset{z=2}{\mathrm{Res}}\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}=\lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 2}\frac{e^z}{(z+1)^2}=\frac{e^2}{9}. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 9.1.2**

Θα υπολογίσουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της συνάρτησης με τύπο

$$f(z):=\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$$

στα σημεία 0 και $\pi/4$.

Για το σημείο 0 έχουμε

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi},$$

πράγμα που σημαίνει ότι το 0 είναι αναιρέσιμο σημείο. Έτσι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο σημείο 0 είναι μηδέν, αφού στο ανάπτυγμα Laurent με κέντρο το 0 δεν υπάρχουν όροι με αρνητικό δείκτη.

Για το σημείο $\pi/4$ παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z\to\pi/4} f(z)=\infty$$

και επομένως τούτο είναι πόλος της f και μάλιστα 1ης τάξης. Άρα έχουμε

$$\underset{z=\pi/4}{\mathrm{Res}}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\lim_{z\to\pi/4}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\lim_{z\to\pi/4}\frac{\sin z^2}{z^2}=\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 9.1.3**

Θα υπολογιστεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := z^3 \sin\frac{1}{z^2},$$

στο σημείο 0.

Παρατηρούμε ότι το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης αυτής με κέντρο το σημείο 0 είναι το

$$f(z) = z^3\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \ldots\right) = z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^7} - \ldots$$

από όπου αμέσως προκύπτει ότι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης στο σημείο 0 είναι ίσο με 0. □

**Παράδειγμα 9.1.4**

Θα υπολογιστεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := z^2 \cos\frac{1}{z^2},$$

στο σημείο 0.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι άρτια. Επομένως στο ανάπτυγμα της f σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο 0 όλοι οι όροι με περιττό δείκτη είναι ίσοι με το μηδέν. Τούτο, βέβαια, δηλώνει ότι και

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_{-1} = 0.$$ □

**Παράδειγμα 9.1.5**

Θα υπολογιστεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \frac{\sin 5z - 5\sin z}{(\sin z - z)\sin z},$$

στο σημείο 0.

Προς τούτο πρέπει να χαρακτηρίσουμε το σημείο 0 ως προς τη συνάρτηση f. Πραγματικά, παρατηρούμε ότι ο αριθμητής γράφεται ως

$$\sin 5z - 5\sin z = 5z - \frac{(5z)^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{(5z)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots - 5\left(z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{5^3 - 5}{3!}z^3 + \frac{5^5 - 5}{5!}z^5 - \ldots = z^3 h(z),$$

όπου η συνάρτηση με τύπο

$$h(z):=-\frac{5^3-5}{3!}+\frac{5^5-5}{5!}z^2-\dots$$

είναι ολόμορφη και τέτοια ώστε

$$h(0)=-(5^3-5)/3!=-20\neq 0.$$

Επίσης ο παρονομαστής γράφεται ως

$$(\sin z-z)\sin z=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots-z\right)\left(z-\frac{z^3}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots\right)=$$

$$=z^4\left(-\frac{1}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!}+\dots\right)\left(1-\frac{z^2}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\dots\right)=$$

$$=z^4\,g(z),$$

όπου η συνάρτηση με τύπο

$$g(z):=\left(-\frac{1}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!}+\dots\right)\left(1-\frac{z^2}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\dots\right)$$

είναι ολόμορφη και τέτοια ώστε $g(0)=-1/6$.

Ύστερα από τα παραπάνω έχουμε

$$f(z)=\frac{\sin 5z-5\sin z}{(\sin z-z)\sin z}=\frac{z^3h(z)}{z^4\,g(z)}=z^{-1}\,G(z),$$

όπου η

$$G(z):=\frac{h(z)}{g(z)}$$

είναι μια συνάρτηση ολόμορφη σε μια περιοχή του μηδενός και τέτοια ώστε $G(0)=120$. Το γεγονός τούτο σημαίνει ότι το σημείο 0 είναι πόλος της συνάρτησης f και μάλιστα 1ης τάξης. Άρα έχουμε

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin 5z - 5\sin z}{(\sin z - z)\sin z} = \lim_{z\to 0} G(z) = G(0) = 120. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 9.1.6**

Θα υπολογίσουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := \frac{e^{1/z}}{1-z},$$

στα ανώμαλα σημεία της.

Προς τούτο παρατηρούμε ότι τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης αυτής είναι τα σημεία 1 και 0. Επειδή το σημείο 1 είναι πόλος 1ης τάξης θα έχουμε

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} (z-1)\frac{e^{1/z}}{1-z} = - e^{1/1}, = -e.$$

Για το σημείο 0 παίρνουμε το ανάπτυγμα της συνάρτησης κατά Laurent με κέντρο το σημείο τούτο. Έχουμε

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z} = e^{1/z}\frac{1}{1-z} = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right)\left(1 + z + z^2 + z^3 + \dots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right)\frac{1}{z} + (\text{ΛΟΙΠΟΙ ΟΡΟΙ}) =$$

$$= \frac{b_{-1}}{z} + (\text{ΛΟΙΠΟΙ ΟΡΟΙ}),$$

οπότε

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_{-1} = \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) = e - 1. \qquad \square$$

**9.1.1** Να υπολογιστούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των παρακάτω συναρτήσεων στα ανώμαλα σημεία τους :

α) $f(z) := z^3 e^{1/z}$, β) $f(z) := \dfrac{\cosh z}{(z^2+1)(z-2)}$,

γ) $f(z) := \dfrac{e^z}{\frac{1}{4} - \sin^2 z}$, δ) $f(z) := \dfrac{z^2}{(z+1)^2(z-2)^3}$,

ε) $f(z) := \cos\frac{1}{z} + z^5$, ς) $f(z) := \dfrac{\sin z}{(z+2i)(z-\frac{i}{2})}$,

ζ) $f(z) := 1 - \cos z, z^3 - z^2)$, η) $f(z) := \sin z \cos\frac{1}{z}$,

θ) $f(z) := \dfrac{z^{2k}}{(1-z)^k}$, ι) $f(z) := e^{z/(1-z)}$,

ια) $f(z) := \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{i}{z-i}$.

**9.1.2** Να δοθεί παράδειγμα μιγαδικής συνάρτησης που έχει το σημείο 0 ουσιωδώς ανώμαλο σημείο, το σημείο -2i πόλο 3ης τάξης, είναι ολόμορφη σε κάθε άλλο σημείο του μιγαδικού επιπέδου και της οποίας το ολοκληρωτικό υπόλοιπο ως προς το σημείο 0 είναι 1+i.

## 9.2 Θεώρημα του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Για τις εφαρμογές της θεωρίας των μιγαδικών συναρτήσεων στον υπολογισμό επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων μιγαδικών συναρτήσεων αλλά και γενικευμένων κατά Riemann ολοκληρωμάτων πραγματικών συναρτήσεων χρησιμοποιείται το παρακάτω

**Θεώρημα του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα:**
*Υποθέτουμε ότι* $T$ *είναι ένας τόπος στο μιγαδικό επίπεδο και* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *είναι ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του* $T$. *Αν* f *είναι μια ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη στον τόπο*

$$T - \{a_1, a_2, \ldots, a_k\},$$

*τότε για κάθε τυχαία κλειστή αλυσίδα Γ κατά τμήματα διαφορίσιμων καμπυλών που βρίσκεται στον τόπο **T**- {a₁, a₂, ..., a_k} και είναι ομόλογη μηδέν στον τόπο **T** ισχύει ο τύπος*

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{k} I(\Gamma, a_n) \underset{z=a_n}{\text{Res}} f(z).}$$

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a} dz$$

**Τύπος του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα**

**Παράδειγμα 9.2.1**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα 5.

Προς τούτο παρατηρούμε ότι στο εσ(γ) η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι παντού ολόμορφη εκτός από τα σημεία 0 και -1. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα, θα έχουμε

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \left[I(\gamma, 0) \underset{z=0}{\text{Res}} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} + I(\gamma, -1) \underset{z=-1}{\text{Res}} \frac{e^z - 1}{z^2 + z}\right].$$

Αλλά το σημείο 0 είναι ένα αναιρέσιμο ανώμαλο σημείο, αφού ισχύει

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} = 1$$

και επομένως

$$\underset{z=0}{\text{Res}} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = 0.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a}\left[(z-a)^k f(z)\right]^{(k-1)}$$

Επίσης το σημείο -1 είναι πόλος 1ης τάξης, οπότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο -1 είναι

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{e^z-1}{z^2+z} = \lim_{z\to -1} (z+1)\frac{e^z-1}{z^2+z} = 1-e^{-1}.$$

Έτσι, τελικά, προκύπτει ότι

$$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^2+z}dz = 2\pi i\,(1-e^{-1}). \qquad \square$$

**Παράδειγμα 9.2.2**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \tan z\, dz$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα 3.

Μέσα στον δίσκο B(0, 3) η συνάρτηση tanz είναι ολόμορφη παντού εκτός από τα σημεία $\pi/2$ και $-\pi/2$, τα οποία είναι πόλοι 1ης τάξης. Για τα σημεία αυτά έχουμε

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi/2} \tan z = \lim_{z\to\pi/2} (z-\pi/2)\frac{\sin z}{\cos z} =$$

$$= \lim_{z\to\pi/2} \sin z \frac{z-\pi/2}{\cos z} = \lim_{z\to\pi/2} \sin z \frac{1}{-\sin z} = -1,$$

όπου στην προτελευταία ισότητα εφαρμόσαμε τον κανόνα L' Hospital. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\operatorname*{Res}_{z=-\pi/2} \tan z = -1.$$

Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα, θα έχουμε

$$\int_\gamma \tan z\, dz = 2\pi i \left[ I(\gamma, \frac{\pi}{2}) \operatorname*{Res}_{z=\pi/2} \tan z + I(\gamma, -\frac{\pi}{2}) \operatorname*{Res}_{z=-\pi/2} \tan z \right] =$$

$$= 2\pi i(-1-1) = -4\pi i. \qquad \square$$

**Παράδειγμα 9.2.3**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} \exp[\frac{1}{z^2}] dz$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια της έλλειψης με εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες την $x^2 + 16y^2 = 4$.

Τα ανώμαλα σημεία της προς ολοκλήρωση συνάρτησης είναι τα 0, i, και -i. Από αυτά όμως μόνο το σημείο 0 ανήκει στο εσωτερικό της έλλειψης. Επιπλέον παρατηρούμε ότι τούτο είναι ένα ουσιωδώς ανώμαλο σημείο της συνάρτησης. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα τούτο θα εφαρμόσουμε τον τύπο του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Έτσι έχουμε

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} \exp[\frac{1}{z^2}] dz = 2\pi i\, I(\gamma, 0) \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{1+z^2} \exp[\frac{1}{z^2}] = 0,$$

διότι η συνάρτηση είναι άρτια και επομένως το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο 0 είναι μηδέν. □

**9.2.1** Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα, κατά μήκος των αντίστοιχων καμπυλών (οι οποίες θεωρείται ότι έχουν τη θετική φορά):

α) $\int_\gamma \frac{z}{(z-1)^2(z+3)} dz$, γ: $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$.

β) $\int_\gamma \frac{e^z}{z^4+2z^2+1}dz$, γ: {z: |z - i|=1}.

γ) $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}dz$, γ: {z: |z|=4}.

δ) $\int_\gamma \frac{\sin\pi z}{z^2-z}dz$, γ: {z: |z|=3}.

ε) $\int_\gamma z^2\sin\frac{1}{z}dz$, γ: {z: |z|=1}.

ς) $\int_\gamma \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}dz$, γ: $4x^2+9y^2=36$.

## 9.3 Ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt$, *όπου* R(x, y) *είναι μια ρητή συνάρτηση*

Υποθέτουμε ότι έχουμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$I := \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt,$$

όπου R(x, y) είναι μια ρητή συνάρτηση των πραγματικών μεταβλητών x και y.

Για να υπολογίσουμε ένα τέτοιο ολοκλήρωμα εργαζόμαστε ως εξής :
Θέτουμε

$$z := e^{it},\ t \in [0,2\pi],$$

οπότε βρίσκουμε

$$\sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),\quad \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ και } dt = -i\frac{dz}{z}.$$

Έτσι για το δοθέν ολοκλήρωμα έχουμε

$$\boxed{I = -i\int_{\gamma} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z},}$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο το σημείο 0. Αν η ρητή συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

δεν έχει πόλους πάνω στην περιφέρεια γ, εφαρμόζουμε το θεώρημα του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

**Παράδειγμα 9.3.1**

Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha > \beta > 0$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\alpha + \beta\cos x)^2}.$$

Προς τούτο εκτελούμε τον μετασχηματισμό

$$z := e^{it},\ t \in [0, 2\pi],$$

όπως στη γενική περίπτωση, οπότε παίρνουμε

$$I=\frac{4}{i}\int_{\gamma}\frac{zdz}{(\beta z^2+2\alpha z+\beta)^2}.$$

όπου γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου. Τα σημεία

$$z_1:=\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta} \quad \text{και} \quad z_2:=\frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}$$

είναι οι πόλοι της ρητής συνάρτησης

$$f(z):=\frac{z}{(\beta z^2+2\alpha z+\beta)^2}$$

και μάλιστα αυτοί είναι 2ης τάξης. Μέσα στον μοναδιαίο κύκλο ανήκει μόνο ο πόλος $z_1$, οπότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης f στο $z_1$ είναι

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{z}{(\beta z^2+2\alpha z+\beta)^2}=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z(z-z_1)^2}{\beta^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right)=\frac{\alpha}{4}(\alpha^2-\beta^2)^{-3/2}.$$

Επομένως η τιμή του αρχικού ολοκληρώματος είναι

$$I=\frac{4}{i}\int_{\gamma}\frac{zdz}{(\beta z^2+2\alpha z+\beta)^2}=\frac{4}{i}\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{z}{(\beta z^2+2\alpha z+\beta)^2}=\frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2-\beta^2)^{3/2}}.$$ □

**9.3.1** Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2\lambda\cos x+\lambda^2},\qquad 0<\lambda<1.$

β) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2x\,dx}{1-2\lambda\cos x+\lambda^2}, \qquad 0<\lambda<1.$

γ) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2x\,dx}{1-2\lambda\cos x+\lambda^2}, \qquad \lambda>1.$

δ) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x\,dx}{1-2\lambda\cos x+\lambda^2}, \qquad 0<\lambda<1.$

ε) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{a+b\cos x}, \qquad 0<b<a.$

## 9.4 Ολοκληρώματα της μορφής $PV\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Υποθέτουμε ότι f είναι μια μερόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε έναν τόπο ο οποίος περιέχει τουλάχιστον το άνω κλειστό ημιεπίπεδο

$$E^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι η συνάρτηση f έχει πεπερασμένο πλήθος πόλων

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_k \text{ στο σύνολο } E^+,$$

αλλά κανένα από αυτά τα σημεία δεν βρίσκεται πάνω στον πραγματικό άξονα.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί την οριακή σχέση

$$\lim_{z\to\infty} [\, z\, f(z)\,] = 0.$$

Τότε ισχύει ο τύπος

$$\boxed{PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=a_n} f(z),}$$

όπου το πρώτο μέλος παριστάνει την κατά Cauchy πρωτεύουσα τιμή (Principal Value) του ολοκληρώματος που, ως γνωστόν, ορίζεται να είναι η ποσότητα

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{+r} f(x)dx\,,$$

αρκεί το όριο στο δεύτερο μέλος να υπάρχει.

Αν η f είναι ρητή συνάρτηση τέτοια ώστε ο βαθμός του παρονομαστή να είναι τουλάχιστον κατά δύο μονάδες μεγαλύτερος από τον βαθμό του αριθμητή, τότε υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

και ταυτίζεται με την πρωτεύουσα τιμή του ολοκληρώματος. Στην περίπτωση αυτή ισχύει ο τύπος

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=a_n} f(z).}$$

**Παράδειγμα 9.4.1**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι η ρητή συνάρτηση με τύπο

$$R(z):=\frac{z^2+1}{z^4+1}$$

έχει παρονομαστή με βαθμό 4 που είναι (τουλάχιστον) κατά δύο μονάδες μεγαλύτερος από τον βαθμό 2 του αριθμητή. Άρα το παραπάνω ολοκλήρωμα υπάρχει και ταυτίζεται με την πρωτεύουσα τιμή του. Οι πόλοι της R(z) είναι οι μιγαδικοί αριθμοί

$$a_1:=\exp(i\frac{\pi}{4}),\qquad a_2:=\exp(i\frac{3\pi}{4}),$$

$$a_3:=\exp(i\frac{5\pi}{4}),\qquad a_4:=\exp(i\frac{7\pi}{4}).$$

Οι αριθμοί αυτοί είναι πόλοι 1ης τάξης και μόνον οι δύο πρώτοι έχουν θετικό φανταστικό μέρος.

Επομένως, σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο, θα έχουμε

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\Big[PV\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\Big]=$$

$$=\pi i\Big[\operatorname*{Res}_{z=a_1}\frac{z^2+1}{z^4+1}+\operatorname*{Res}_{z=a_2}\frac{z^2+1}{z^4+1}\Big].$$

Επειδή τα σημεία $a_1$ και $a_2$ είναι πόλοι, τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα σ' αυτά είναι

$$\operatorname*{Res}_{z=a_1}\frac{z^2+1}{z^4+1}=\lim_{z\to a_1}(z-a_1)\frac{z^2+1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}=$$

$$= \frac{a_1{}^2+1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)} =$$

$$= \frac{i+1}{e^{i\frac{\pi}{4}}(1 - e^{i\frac{\pi}{2}})e^{i\frac{\pi}{4}}(1 - e^{i\pi})\, e^{i\frac{\pi}{4}}(1 - e^{3i\frac{\pi}{2}})}$$

$$= - i\,\frac{\sqrt{2}}{4}$$

και

$$\operatorname*{Res}_{z=a_2} \frac{z^2+1}{z^4+1} = \lim_{z \to a_2} (z - a_2)\frac{z^2+1}{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)} =$$

$$= \frac{a_2{}^2+1}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)} =$$

$$= - i\,\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Επομένως το δοθέν ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \pi i\ [ - i\,\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}] =$$

$$= \pi\sqrt{2}.$$

□

**9.4.1** Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}$,  β) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$,

γ) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}dx}{(1+x^{2n})}$,  δ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$,

ε) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$,  $(a>0,\ b>0)$.

**9.4.2** Να αποδειχτεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει η σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{1\cdot 3\cdot \ldots\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots\cdot (2n)}\pi.$$

## 9.5 Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{i\omega x}dx$, όπου η ρητή συνάρτηση R(z) δεν έχει πόλους στην πραγματική ευθεία

Υποθέτουμε ότι R(z) είναι μια ρητή συνάρτηση η οποία δεν έχει πόλους πάνω στον πραγματικό άξονα, ενώ οι πόλοι της με θετικό φανταστικό μέρος είναι οι αριθμοί

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k.$$

Αν ο βαθμός του παρονομαστή της R(z) είναι τουλάχιστον κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από τον βαθμό του αριθμητή, τότε για κάθε ω > 0 ισχύει ο τύπος

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\omega x}dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=a_n} [R(z)\, e^{i\omega z}].}$$

**Παράδειγμα 9.5.1**
Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}dx .$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι το πραγματικό μέρος του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+9}dx ,$$

το οποίο, προφανώς, υπάρχει διότι της ρητής συνάρτησης

$$R(x) := \frac{1}{x^2+9}$$

ο βαθμός 2 του παρονομαστή είναι (τουλάχιστον) κατά δύο μονάδες μεγαλύτερος από τον βαθμό 0 του αριθμητή. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θεωρούμε τη μιγαδική συνάρτηση

$$R(z) := \frac{1}{z^2+9}$$

η οποία έχει μόνο το σημείο 3i πόλο με θετικό φανταστικό μέρος. Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+9} e^{i\omega x} dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=3i} \left[\frac{e^{iz}}{z^2+9}\right] =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to 3i} \left[(z-3i)\frac{e^{iz}}{(z+3i)(z-3i)}\right] =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-3}}{6i} = \frac{\pi e^{-3}}{3} =$$

$$= \frac{\pi}{3e^3}.$$

Έτσι, τελικά, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9} dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+9} e^{i\omega x} dx = \mathrm{Re}\, \frac{\pi}{3e^3} =$$

$$= \frac{\pi}{3e^3}.$$

□

**Παράδειγμα 9.5.2**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+2)^2+9} dx .$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με το φανταστικό μέρος του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x+2)^2+9} dx ,$$

το οποίο υπάρχει, διότι της ρητής συνάρτησης

$$R(x) := \frac{1}{(x+2)^2+9}$$

ο βαθμός 2 του παρονομαστή είναι (τουλάχιστον) κατά δύο μονάδες μεγαλύτερος από τον βαθμό 0 του αριθμητή.

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος θεωρούμε τη μιγαδική συνάρτηση

$$R(z) := \frac{1}{(z+2)^2+9},$$

η οποία έχει μόνο το σημείο -2+3i πόλο με θετικό φανταστικό μέρος. Έτσι παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+2)^2+9}\,dx = \mathrm{Im}\{2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2+3i} [\frac{e^{iz}}{(z+2)^2+9}]\} =$$

$$= \mathrm{Im}\{2\pi i \lim_{z \to -2+3i} [(z+2-3i)\frac{e^{iz}}{(z+2+3i)\,(z+2-3i)}]\}=$$

$$= \mathrm{Im}\{\frac{\pi}{3}e^{-3}\, e^{-2i}\}=$$

$$= -\frac{\pi}{3}e^{-3}\sin 2.$$ □

**9.5.1** Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}dx$, β) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x+1)^2+1}dx$.

γ) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$, δ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^2+16}$

ε) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x\,dx}{(1+x^2+x^4)}$, ς) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\sin\lambda x\,dx}{(x^2+1)^2}$, $\lambda \neq 0$.

## 9.6 Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\omega x\,dx$, όπου η ρητή συνάρτηση $R(z)$ έχει το σημείο 0 πόλο 1ης τάξης

Υποθέτουμε ότι πάνω στον πραγματικό άξονα ο μόνος πόλος για τη ρητή συνάρτηση R είναι το 0 και μάλιστα αυτός είναι πόλος 1ης τάξης. Αν επιπλέον η συνάρτηση R έχει πόλους με θετικό φανταστικό μέρος τα σημεία $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\lim_{z\to\infty} R(z) = 0,$$

τότε για κάθε πραγματικό αριθμό ω ισχύει ο τύπος

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\omega x\,dx = \operatorname{Im}\Big[\,2\pi i\,\Big(\sum_{n=1}^{k}\operatorname*{Res}_{z=a_n}[R(z)\,e^{i\omega z}] + \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=0}[R(z)e^{i\omega z}]\Big)\Big].}$$

**Παράδειγμα 9.6.1**

Θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{x(5+4x+x^2)}.$$

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι της παραπάνω μορφής, αφού η μιγαδική συνάρτηση με τύπο

$$R(z) := \frac{1}{z(5+4z+z^2)}$$

έχει το σημείο $z = 0$ του πραγματικού άξονα πόλο 1ης τάξης. Επίσης ο μοναδικός πόλος της R με θετικό φανταστικό μέρος είναι το σημείο $-2 + i$ και μάλιστα αυτό είναι πόλος 1ης τάξης. Έτσι εφαρμόζοντας τον προηγούμενο τύπο παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{x(5+4x+x^2)} = \mathrm{Im}\Big[\, 2\pi i \Big( \operatorname*{Res}_{z=-2+i} [R(z)\, e^{i2z}] + \frac{1}{2} \operatorname*{Res}_{z=0} [R(z)\, e^{i2z}]\Big)\Big].$$

Αλλά έχουμε

$$\operatorname*{Res}_{z=-2+i} [R(z)\, e^{i2z}] = \lim_{z \to -2+i} [(z+2-i) \frac{1}{z(5+4z+z^2)}\, e^{i2z}] =$$

$$= \lim_{z \to -2+i} [\frac{1}{z(z+2+i)}\, e^{i2z}] = -\frac{e^{-2}e^{-4i}}{2(1+2i)}$$

και

$$\operatorname*{Res}_{z=0}[R(z)e^{i2z}] = \lim_{z \to 0} [z \frac{1}{z(5+4z+z^2)}\, e^{i2z}] = \frac{1}{5},$$

οπότε τελικά βρίσκουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{x(5+4x+x^2)} = \operatorname{Im}\left[ 2\pi i\left(- \frac{e^{-2}e^{-4i}}{2(1+2i)} + \frac{1}{10}\right)\right] = \frac{\pi e^{-2}}{5}(2\sin 4 - \cos 4) + \frac{\pi}{5}. \quad \square$$

**9.6.1** Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+\lambda^2)}dx,$ β) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^4+3x^2+2)}dx,$

γ) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin kx}{x(x^2+a^2)}dx,$ δ) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x(1+x+x^2)}dx.$

ε) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x\, dx}{x(x+1)^2+x},$ ς) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{x(x-1)^2+x}.$

ζ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 6x\, dx}{x(x-1)^2+2x}.$

## 9.7 Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha}R(x)dx$, όπου $0 < \alpha < 1$.

Υποθέτουμε ότι R είναι μια ρητή μιγαδική συνάρτηση, η οποία πάνω στον πραγματικό άξονα μπορεί να έχει πόλο μόνο το σημείο 0 και μάλιστα $1^{ης}$ τάξης. Αν η συνάρτηση R ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\lim_{z\to\infty} [zR(z)] = 0,$$

τότε, για κάθε α, με $0 < \alpha < 1$, ισχύει ο τύπος

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^{\alpha}R(x)dx = \frac{4\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}} \sum_{n=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=a_n} [e^{\pi\alpha i}(ze^{-i\pi/2})^{2\alpha} zR(z^2)],}$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι οι πόλοι της συνάρτησης

$$f(z) := e^{\pi\alpha i}(ze^{-i\pi/2})^{2\alpha} zR(z^2)$$

που έχουν θετικό φανταστικό μέρος.

**Παράδειγμα 9.7.1**

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3}}{1+x^2}dx.$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό γράφεται ως

$$\int_0^{+\infty} x^{1/3}\frac{1}{1+x^2}dx$$

και επομένως εφαρμόζεται ο παραπάνω τύπος. Οι πόλοι (που είναι μάλιστα 1ης τάξης) της συνάρτησης

$$e^{\pi i/3}\,(z\,e^{-i\pi/2})^{2/3}\,z\,\frac{1}{1+z^4}=e^{\pi i/3}\,(z\,e^{-i\pi/2})^{2/3}\,\frac{z}{1+z^4}$$

είναι τα σημεία

$$z_1:=e^{i(\pi/4)},\quad z_2:=e^{i(3\pi/4)},\quad z_3:=e^{i(5\pi/4)},\quad z_4:=e^{i(7\pi/4)},$$

από τα οποία μόνο τα δύο πρώτα έχουν θετικό φανταστικό μέρος. Επομένως έχουμε

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}\left[e^{\pi i/3}(ze^{-i\pi/2})^{2/3}\frac{z}{1+z^4}\right]=$$

$$=e^{\pi i/3}\lim_{z\to z_1}(z-z_1)(ze^{-i\pi/2})^{2/3}\frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}=$$

$$=e^{\pi i/3}(z_1e^{-i\pi/2})^{2/3}\frac{z_1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}=\frac{e^{-\pi i/3}}{4}$$

και

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2}\left[e^{\pi i/3}(ze^{-i\pi/2})^{2/3}\frac{z}{1+z^4}\right]=$$

$$=e^{\pi i/3}\lim_{z\to z_2}(z-z_2)(ze^{-i\pi/2})^{2/3}\frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}=$$

$$=e^{\pi i/3}(z_2e^{-i\pi/2})^{2/3}\frac{z_2}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)}=-\frac{1}{4}.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο έχουμε

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{1/3}}{1+x^2}dx=\frac{4\pi i}{1-e^{2\pi i/3}}\Big[\operatorname*{Res}_{z=z_1}\left[e^{\pi i/3}(ze^{-i\pi/2})^{2/3}\frac{z}{1+z^4}\right]+$$

$$+\Big[\operatorname*{Res}_{z=z_2}\left[e^{\pi i/3}(ze^{-i\pi/2})^{2/3}\frac{z}{1+z^4}\right]\Big]=$$

$$= \frac{4\pi i}{1-e^{2\pi i/3}}\left[\frac{e^{-\pi i/3}}{4} - \frac{1}{4}\right] = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}. \qquad \square$$

**9.7.1** Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}$, β) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x(1+x)}$,

γ) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x+x^2}$, δ) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}dx}{1+x^2}$,

ε) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{2+2x+x^2}$, ς) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}dx}{2+2x+x^2}$.

## 9.8 Υπολογισμός αθροίσματος σειράς με τη βοήθεια των ολοκληρωτικών υπολοίπων

Υποθέτουμε ότι f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο και ολόμορφη παντού εκτός από τα σημεία $a_1, a_2, ..., a_n$ τα οποία είναι πόλοι και μάλιστα κανένα από αυτά δεν συμπίπτει με κάποιο από τα 0, ±1, ±2, ... Αν υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί ε και Μ τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$|z^2 f(z)| < M, \text{ για κάθε } z \text{ με } |z| > \frac{1}{\varepsilon},$$

τότε ισχύει ο τύπος

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{n=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=a_n} [f(z) \cot\pi z] .}$$

**Παράδειγμα 9.8.1**

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2},$$

όπου α είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Προς τούτο θεωρούμε σκόπιμο να υπολογίσουμε πρώτα το άθροισμα της σειράς

(1) $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2}.$$

Προς τούτο παίρνουμε τη συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \frac{1}{z^2 + \alpha^2},$$

που είναι ολόμορφη παντού εκτός από τα σημεία $\alpha i$ και $-\alpha i$, τα οποία είναι πόλοι 1ης τάξης. Τώρα παρατηρούμε ότι

$$|z^2 f(z)| = \left| \frac{z^2}{z^2 + \alpha^2} \right| \leq \frac{|z|^2}{|z|^2 - |\alpha|^2} \leq 2,$$

για κάθε $z$ με $|z| \geq \alpha\sqrt{2}$, και επομένως για τον υπολογισμό του αθροίσματος της σειράς (1) μπορεί να εφαρμοστεί ο παραπάνω τύπος. Έτσι έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}=-\pi\Big[\operatorname*{Res}_{z=\alpha i}\Big[\frac{1}{z^2+\alpha^2}\cot\pi z\Big]+\operatorname*{Res}_{z=-\alpha i}\Big[\frac{1}{z^2+\alpha^2}\cot\pi z\Big]\Big].$$

Αλλά τα σημεία ai και - ai είναι πόλοι 1ης τάξης της συνάρτησης

$$\frac{1}{z^2+a^2}\cot\pi z,$$

οπότε έχουμε

$$\operatorname*{Res}_{z=ai}\Big[\frac{1}{z^2+a^2}\cot\pi z\Big]=\lim_{z\to ai}(z-ai)\Big[\frac{1}{z^2+a^2}\cot\pi z\Big]=\frac{\cot\pi ai}{2ai}$$

και

$$\operatorname*{Res}_{z=-ai}\Big[\frac{1}{z^2+a^2}\cot\pi z\Big]=\lim_{z\to -ai}(z+ai)\Big[\frac{1}{z^2+a^2}\cot\pi z\Big]=\frac{\cot\pi ai}{2ai}.$$

Επομένως το άθροισμα της σειράς (1) είναι ίσο με

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=-\pi\,\frac{\cot\pi ai}{ai}=\frac{\pi}{a}\coth\pi a.$$

Τώρα έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{a^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2},$$

οπότε τελικά προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{a}\coth\pi a-\frac{1}{2}\frac{1}{a^2}=$$

$$=\frac{\pi a\coth\pi a-1}{2a^2}. \qquad \square$$

**9.8.1** Να υπολογιστούν τα αθροίσματα των παρακάτω σειρών:

α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+3)^2}$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n+1)^2}$.

**9.8.2** Αν $a$ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός όχι ακέραιος, να υπολογιστούν τα αθροίσματα των παρακάτω σειρών:

α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-a^2}$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+a)^2}$,

γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3-a^3}$, δ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4-a^4}$.

Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο
με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟ
Διανέμεται Δωρεάν στους φοιτητές.