Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Μεταπτυχιακό Δίπλωμα στις Επιστήμες Αγωγής
Ειδίκευση : Μαθηματικά και πληροφορική στην εκπαίδευση

Χαιρέτη Μελπομένη

Τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών στα μαθηματικά και η διδακτική αξιοποίησή τους

Διπλωματική Εργασία
Επιβλέπουσα : Πουρνάρη Μαρία
Συνεπιβλέποντες : Κολέζα Ευγενία ,Μπρούζος Ανδρέας

Οκτώβριος 2009

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
026000321848

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές και ειλικρινείς ευχαριστίες μου στην κυρία Πουρνάρη, την κυρία Κολέζα και τον κύριο Μπρούζο για το χρόνο που αφιέρωσαν, και την πολύτιμη βοήθειά τους κατά τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Ιωάννινα, Οκτώβριος 2009

Αφιερώνω την εργασία αυτή στους γονείς μου και τα αδέρφια μου για την αμέριστη ηθική συμπαράστασή τους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Περίληψη

Η εργασία αυτή αποτελεί μια βιβλιογραφική επισκόπηση των πιο πρόσφατων ερευνών που έχουν γίνει πάνω στα λάθη των μαθητών στα μαθηματικά. Προσεγγίζουμε επιστημολογικά το λάθος και εξετάζουμε πώς αντιμετωπίζουν τα λάθη οι διάφορες θεωρίες μάθησης . Εξετάζουμε τους λόγους για τους οποίους χρειάζεται η ανάλυση των λαθών στα μαθηματικά αλλά και τι μπορούμε να κερδίσουμε κάνοντας χρήση των λαθών στη διδασκαλία. Στη συνέχεια καταγράφουμε τα πιο συχνά λάθη που έχουν εντοπιστεί στην πρόσφατη βιβλιογραφία σε βασικούς τομείς των μαθηματικών, όπως οι δεκαδικοί αριθμοί, τα κλάσματα, η άλγεβρα, η γεωμετρία, οι γραμμικές εξισώσεις κ.α. Συγχρόνως προσπαθούμε να αναλύσουμε πού οφείλονται αυτά τα λάθη, πως μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε αλλά και πώς μπορούμε να τα αξιοποιήσουμε διδακτικά.

Abstract

This thesis is bibliographical overview of the most recent and basic research in student's errors in mathematics. We examine students' errors from an epistemological point of view and analyze the way different learning theories approach it. We point out the necessity of a close analysis students' errors in mathematics, as well as the important benefits of a close observation and analysis. As a next step we summarize the most common errors, as they have been detected in recent literature, in mathematical domains such as, decimals, fractions, algebra and geometry. At the same time we try to look for the cause behind problem, ways to overcome it, and a didactic utilization on students' error.

Περιεχόμενα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εισαγωγή

Οι περισσότεροι μαθητές που διδάσκονται μαθηματικά, όπως και πολλοί εκπαιδευτικοί, έχουν αρνητικά συναισθήματα απέναντι στα λάθη και τα αντιμετωπίζουν ως ένδειξη έλλειψης γνώσεων ή λανθασμένης κατανόησης. Αποδείξεις μιας τέτοιας αντιμετώπισης βρίσκονται σε πολλές κοινές πρακτικές που υπάρχουν στο σχολείο, όπως το γεγονός ότι κάνοντας ένα λάθος αυτομάτως μειώνεται ο βαθμός του μαθητή στο τεστ αλλά και το γεγονός ότι η λανθασμένη απάντηση σε μία ερώτηση που έχει τεθεί από τον εκπαιδευτικό απορρίπτεται ή αγνοείται μέχρι να δοθεί η σωστή (αναμενόμενη) απάντηση. Επιπλέον οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να αναθέτουν εργασίες τις οποίες θα μπορούν οι «καλοί» μαθητές να διεκπεραιώνουν χωρίς να κάνουν λάθη(Borasi, 1996).

Τέτοιες απόψεις και πρακτικές οι οποίες εκπορεύονται από το παραδοσιακό μοντέλο μετάδοσης, αντανακλώνται στη διδασκαλία των μαθηματικών με την επίλυση τυποποιημένων ασκήσεων που λύνονται μηχανικά με τεχνικές απομνημόνευσης, ενώ παράλληλα αποδοκιμάζεται κάθε αποτυχία επίτευξης της «μοναδικής» ορθής λύσης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ένα λάθος να δημιουργεί στον μαθητή συναισθήματα απογοήτευσης και αποθάρρυνσης και αυτός να εντείνει τη προσπάθειά του για την αποφυγή του λάθους τόσο πολύ, ώστε πολλές φορές να αποφεύγει να ασχοληθεί με την επίλυση του προβλήματος (Ernest,1996).

Η δυσαρέσκεια για τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών φαίνεται από τα αποτελέσματα ερευνών που δημοσιεύονται σε επιστημονικά περιοδικά. Οι έρευνες αυτές καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι μία θετικότερη θεώρηση των λαθών θα βελτίωνε τις συνθήκες μάθησης και απόδοσης των μαθητών και έτσι θα αποτελούσε ένα σημαντικό βήμα προς την αναμόρφωση της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Τα λάθη στα μαθηματικά μπορούν να παρέχουν πολύτιμα στοιχεία σε όλους τους εκπαιδευτικούς σχετικά με τον τρόπο σκέψης των μαθητών, ενώ επιπλέον οι αρχάριοι εκπαιδευτικοί εφοδιασμένοι με τη γνώση των πιθανών λαθών που κάνουν οι μαθητές, μπορούν να βελτιώσουν την ποιότητα της διδασκαλίας τους στα μαθηματικά.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έχει παρατηρηθεί ότι ο τρόπος που αντιλαμβάνεται κάποιος ένα φαινόμενο, επηρεάζει και τη στάση του απέναντι σε αυτό. Στην περίπτωση του λάθους συναντάμε δυο βασικές αντιλήψεις.

Η πρώτη και πιο δημοφιλής αντίληψη όπως δηλώνεται από τους όρους «διάγνωση» (diagnosis) και «θεραπεία» (remediation) συνιστά δάνειο από την ιατρική. Τα λάθη στην αντίληψη αυτή θεωρούνται συμπτώματα μιας ασθένειας η οποία μπορεί να είναι η παρανόηση ή η μαθησιακή δυσκολία που προκαλεί τα λάθη.

Στη δεύτερη αντίληψη, τα λάθη εκλαμβάνονται ως «σφάλματα» (bugs) όπως χρησιμοποιούνται από την επιστήμη των ηλεκτρονικών υπολογιστών . Τα λάθη εδώ θεωρούνται «σφάλματα στον κώδικα ενός προγράμματος του υπολογιστή» και τα οποία δεν επιτρέπουν στον μαθητή να φτάσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Και οι δύο αυτές προσεγγίσεις έχουν συνεισφέρει σε μια πιο θετική και εποικοδομητική προσέγγιση των λαθών στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Για παράδειγμα και οι δύο επισημαίνουν την ανεπάρκεια τού να προσπαθείς να εξαλείψεις τα λάθη των μαθητών, απλώς με το να τους εξηγήσεις ξανά το θέμα. Την ίδια στιγμή όμως έχουν κάποιες αρνητικές σημασίες οι οποίες συνδέονται με τους όρους «ασθένειες» και «σφάλματα» , θέση που υπονοεί ότι τα λάθη δεν έχουν γνωστική χρησιμότητα. Επιπλέον, η ιατρική προσέγγιση προϋποθέτει ότι το άτομο χρειάζεται κάποιον θεραπευτή ο οποίος θα διαχειριστεί τα λάθη του χωρίς το ίδιο το άτομο να έχει ιδιαίτερα ενεργό ρόλο σε αυτήν την διαδικασία.

Η Borasi (1996) προτείνει μια νέα προσέγγιση σχετικά με τα λάθη που την ονομάζει «το να χάνεται κανείς στην πόλη»("getting lost in a city"), υποστηρίζοντας ότι οπουδήποτε και να χαθεί κανείς εξαρτάται καθαρά από αυτόν να κάνει κάτι για να βρει το δρόμο του. Η προσέγγιση αυτή προτείνει να δίνεται η ευκαιρία, ώστε οι μαθητές ενεργητικά και αυτεπίγνωστα, να αναλύουν τα λάθη τους χωρίς να περιμένουν πάντα να το κάνουν οι εκπαιδευτικοί για αυτούς.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την προσέγγιση αυτή η Borasi αναφέρει τα παρακάτω τρία σενάρια. Όταν χάνεται κάποιος σε μια πόλη αυτό που νιώθει και ο τρόπος που αντιδρά είναι διαφορετικός ανάλογα με την περίσταση.

Σενάριο 1 : Αν πρέπει κάποιος να φτάσει στον προορισμό του όσο πιο γρήγορα γίνεται – όπως για παράδειγμα όταν πρέπει να φτάσει γρήγορα στο πλησιέστερο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

νοσοκομείο- το να χαθεί προφανώς θα είναι ένα μεγάλο πρόβλημα και θα του προκαλέσει μεγάλη ενόχληση. Οι προσπάθειές του θα επικεντρωθούν στο να βρει έναν τρόπο να φτάσει στον προορισμό του χωρίς καθυστέρηση (ίσως ζητώντας από κάποιον να τον κατευθύνει ή κοιτώντας γρήγορα ένα χάρτη). Είναι εμφανές ότι στο σενάριο αυτό θα είναι αναστατωμένος και απρόθυμος να πάρει οποιοδήποτε ρίσκο που θα τον κάνει ίσως να χάσει και άλλο χρόνο.

Σενάριο 2 : Οι αντιδράσεις κάποιου θα είναι διαφορετικές αν χαθεί καθώς γυρίζει σπίτι μετά τη δουλειά ενώ έχει μετακομίσει σε μια νέα πόλη ή γειτονιά. Επειδή το δρόμο αυτόν θα τον ακολουθήσει πολλές φορές στο μέλλον, ο σκοπός του αυτή τη φορά δεν περιορίζεται στο να επιστρέψει σπίτι όσο το δυνατόν πιο γρήγορα. Τώρα ίσως μελετήσει περισσότερο το χάρτη του για να βρει εναλλακτικές διαδρομές για το σπίτι του, ίσως κοιτάξει γύρω του να βρει σημάδια που θα τον βοηθήσουν να βρίσκει το δρόμο του στο μέλλον και γενικότερα θα χρησιμοποιήσει την περίσταση αυτή σαν ευκαιρία, για να γνωρίσει καλύτερα τη γειτονιά. Με λίγα λόγια ακόμα και αν θέλει να φτάσει στον προορισμό του, σκεπτόμενος τις μακροπρόθεσμες ανάγκες του, προσπαθεί να επωφεληθεί από το γεγονός ότι χάθηκε και να μάθει ό, τι περισσότερο μπορεί.

Σενάριο 3 : Ας υποθέσουμε ότι κάποιος είναι σε διακοπές και επισκέπτεται μια πόλη για πρώτη φορά. Παρόλο που και τώρα μπορεί να έχει έναν συγκεκριμένο προορισμό στο μυαλό του, ίσως είναι πιο πρόθυμος να τον εγκαταλείψει, αν κάτι πιο ενδιαφέρον βρεθεί στο δρόμο του. Αυτό γιατί τον ενδιαφέρει να γνωρίσει την πόλη καλύτερα και συγχρόνως να περάσει καλά. Παραδόξως, όταν κάποιος είναι τουρίστας, δέχεται πολύ θετικά το γεγονός ότι μπορεί να χαθεί, καθώς είναι κάτι που μπορεί να του παρέχει απροσδόκητες ευκαιρίες για «περιπέτεια». Με τον τρόπο αυτό θα μπορέσει να γνωρίσει καλύτερα την πόλη. Στην πραγματικότητα, στο σενάριο αυτό το «να χαθεί κάποιος» χάνει το νόημά του, επειδή ο αρχικός προορισμός δεν ήταν τόσο σημαντικός.

Τα δύο τελευταία σενάρια υπονοούν ότι το λάθος στο σχολείο δεν πρέπει να γίνεται αντιληπτό ως κάτι αρνητικό που πρέπει να αποφεύγεται, γιατί ίσως παρέχει σημαντικές ευκαιρίες μάθησης. Το δεύτερο σενάριο μας δείχνει ότι αναλύοντας το λάθος κάποιου, αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μια πιο ολοκληρωμένη αντίληψη και σε μια καλύτερη κατανόηση του προβλήματος από εκείνη που υπήρχε αρχικά. Το

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τρίτο σενάριο ισχυρίζεται ουσιαστικά ότι τα λάθη μπορούν σε πολλές περιπτώσεις να παρέχουν στους μαθητές την ευκαιρία και το κίνητρο να εξοικειώνονται με τη δραστηριότητα της μαθηματικής έρευνας, η οποία μπορεί να αποδώσει πολύτιμα και απροσδόκητα οφέλη τα οποία μπορεί να μην έχουν σχέση ή να μη συνεισφέρουν στη λύση του αρχικού προβλήματος που τέθηκε.

Απ' όλα τα παραπάνω λοιπόν, συμπεραίνουμε ότι προκειμένου να καταστήσουμε ικανούς τους μαθητές να εκτιμούν και να επωφελούνται από τα λάθη τους, όπως περιγράφει το δεύτερο σενάριο, είναι ανάγκη να δημιουργηθεί το κατάλληλο μαθησιακό περιβάλλον στην τάξη. Ανάμεσα λοιπόν σε πολλά πράγματα, αυτό που απαιτείται στην μαθηματική εκπαίδευση είναι η μετατόπιση της έμφασης από το τελικό προϊόν της γνώσης, δηλαδή τις μαθηματικές προτάσεις και τα θεωρήματα , στη διαδικασία απόκτησής τους, και από την επιδίωξη του «σωστού», στην αναγνώριση της παιδαγωγικής αξίας που μπορεί να έχει το «λάθος» (Borasi,1996).

Όλα τα παραπάνω αποτέλεσαν ενδιαφέροντα ζητήματα στην παρούσα εργασία. Αν στόχος μας είναι η βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης, οφείλουμε να ασχοληθούμε εκ νέου με ζητήματα κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Η ανάλυση των λαθών μπορεί και πρέπει να γίνει ένα χρήσιμο εργαλείο στη διαδικασία κατανόησης των παραγόντων που δρουν ανασταλτικά στη διαδικασία μάθησης.

Στόχος της εργασίας αυτής είναι :

- Να καταγράψει τα συχνότερα λάθη στα μαθηματικά που έχουν εντοπιστεί στις μέχρι τώρα έρευνες .
- Να παρουσιάσει τις θεωρίες και τις απόψεις γύρω από τα λάθη, ώστε να δοθεί μια ολοκληρωμένη εικόνα επί του θέματος.
- Να παρουσιάσει συστηματικά τι έχει μελετηθεί μέχρι τώρα πάνω στα λάθη, πώς προσεγγίζονται και ερμηνεύονται τα λάθη των μαθητών και τι μένει ανοιχτό για έρευνα και μελέτη.
- Να παρουσιάσει ορισμένες εναλλακτικές απόψεις και ιδέες διδασκαλίας που αποτελούν προτάσεις έρευνας πάνω στα λάθη των μαθητών αλλά και της διδακτικής αξιοποίησής τους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια επιστημολογική προσέγγιση του λάθους. Αρχικά γίνεται αναφορά στο γαλλικό μοντέλο των διδακτικών καταστάσεων και δίνεται ο ορισμός της γνώσης, του προβλήματος, της μάθησης και του λάθους. Διακρίνουμε τριών ειδών εμπόδια ανάλογα με το είδος προέλευσής τους και ορίσουμε το επιστημολογικό εμπόδιο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια αναφορά σε δύο διδακτικά μοντέλα, το μοντέλο μετάδοσης και το μοντέλο έρευνας. Εξετάζουμε επίσης τη θέση του λάθους στις θεωρίες μάθησης του συμπεριφορισμού, του φορμαλισμού και του κονστρουκτιβισμού.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύουμε τι σημαίνει η κατανόηση μιας έννοιας. Εξετάζουμε τι μπορούμε να επιτύχουμε κάνοντας χρήση των λαθών στη διδασκαλία και διαχωρίζουμε την παρανόηση, το λάθος και την απροσεξία.

Στο τέταρτο **κεφάλαιο** γίνεται μια αναφορά στις έρευνες που έχουν γίνει πάνω στα λάθη των μαθητών στους αριθμούς. Καταγράφονται τα συχνότερα λάθη και οι παρανοήσεις που σχετίζονται με αριθμητικές διαδικασίες, με το μηδέν, με τους δεκαδικούς και τα κλάσματα . Ιδιαίτερα στους δεκαδικούς και τα κλάσματα γίνεται μια αναλυτική αναφορά των βασικότερων παρανοήσεων. Αναφέρονται αποτελέσματα από έρευνες, αλλά καταγράφονται και διδακτικές προτάσεις που έχουν γίνει πάνω στη διδασκαλία των δεκαδικών και των κλασμάτων για την αντιμετώπιση των παρανοήσεων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μια αναφορά για τις παρανοήσεις και τα λάθη στην άλγεβρα. Παρουσιάζουμε τη δομική και λειτουργική όψη της άλγεβρας και της γνωστικές της απαιτήσεις. Τέλος αναφέρουμε μια ταξινόμηση των λαθών στις απλές γραμμικές εξισώσεις.

Στο έκτο κεφάλαιο γίνεται μια αναφορά στα λάθη και τις παρανοήσεις που αφορούν τη διδασκαλία και τη μάθηση γεωμετρικών εννοιών.

Ακολουθούν συμπεράσματα όπως και προτάσεις διδακτικής αξιοποίησης των λαθών.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Επιστημολογική προσέγγιση του λάθους

1.1 Η Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων

Η θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων ενδιαφέρεται για το γνωσιακό υποκείμενο δηλαδή ενδιαφέρεται για τη σχέση του μαθητή με ένα σώμα σχολικής γνώσης το οποίο αποτελεί το αντικείμενο της διδασκαλίας. Ενδιαφέρεται, επίσης, για το γνωσιακό περιβάλλον σε όλη την πολυπλοκότητά του, αλλά κυρίως ως προς τα χαρακτηριστικά γνωρίσματά του που σχετίζονται με το συγκεκριμένο σώμα σχολικής γνώσης το οποίο αποτελεί το αντικείμενο διδασκαλίας. Αυτό το ιδιαίτερο περιβάλλον, που είναι υποσύνολο του ευρύτερου περιβάλλοντος του μαθητή, ο Brousseau το ονομάζει **μέσον (milieu)**(Brousseau,1997).

Στην περίπτωση των Μαθηματικών, η γνώση δεν είναι απλά και μόνον μια ατομική κατασκευή ,ούτε απλώς συνέπεια της αλληλεπίδρασης ενός υποκειμένου με ένα υλικό περιβάλλον, αλλά προκύπτει μέσα από τις αλληλεπιδράσεις του υποκειμένου με σημειωτικά συστήματα τα οποία παράγονται στην κοινωνική αλληλεπίδραση. Έτσι, η κατασκευή της γνώσης δεν είναι κάτι που μπορεί να αποδοθεί μόνο στο υποκείμενο, ούτε μόνο στο περιβάλλον, αλλά είναι αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης μεταξύ του υποκειμένου και του περιβάλλοντος.

Η αλληλεπίδραση αυτή είναι η απαραίτητη προϋπόθεση για την βιωσιμότητα και την εξέλιξη του συστήματος *υποκείμενο-περιβάλλον. Όταν λέμε βιωσιμότητα* εννοούμε ότι το σύστημα υποκείμενο-περιβάλλον έχει την ικανότητα να ανακτήσει μια ισορροπία μετά από μερικές διαταραχές, κάτι που υπονοεί ότι η διαταραχή (πχ αντίφαση) αναγνωρίζεται από το υποκείμενο (Κολέζα, 2009) .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ο Brousseau περιγράφει τη θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων ως εξής:

«Η θεωρία των καταστάσεων αναπτύχθηκε για να παρέχει ένα πλαίσιο για τη μελέτη και τα μέσα περιγραφής οποιασδήποτε κατάστασης στην όποια υπάρχει μια πρόθεση διδασκαλίας σε κάποιον κάποιας ακριβούς γνώσης, ανεξάρτητα από το εάν αυτό πετυχαίνει ή όχι. Η θεωρία δεν ισχυρίζεται ότι παρουσιάζει όλες τις πτυχές των καταστάσεων διδασκαλίας και ότι μπορεί να αντικαταστήσει όλες τις προσεγγίσεις: ψυχολογική, ψυχαναλυτική, γλωσσική, στατιστική, κ.λπ.... Αλλά επιχειρεί να επωφεληθεί από τη συνεισφορά όλων αυτών των προσεγγίσεων για την περιγραφή των «διδακτικών φαινομένων». Κάποιος θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει εδώ μια αναλογία με τα οικονομικά και τη σχέση τους με το εμπόριο. Τα οικονομικά (κατ' αναλογία, οι διδακτικές καταστάσεις που σχεδιάζονται με στόχο τη μάθηση) δεν ασχολούνται με την ψυχολογία του προμηθευτή ή του αγοραστή (κατ' αναλογία, με την ψυχολογία του μαθητή ή του δασκάλου), αλλά μπορούν να λάβουν υπόψη τον αντίκτυπό τους στα μακροοικονομικά φαινόμενα (κατ' αναλογία, στην διαδικασία μάθησης).

Η θεωρία των καταστάσεων δεν είναι ούτε μια ιδεολογία ούτε μια ιδιαίτερη διδακτική μέθοδος. Δεν συστήνει μια διδακτική διαδικασία. Οι θεωρητικές της έννοιες επιτρέπουν απλώς σε κάποιον (π.χ τον δάσκαλο ή τον ερευνητή) να προβλέψει το ρόλο ορισμένων παραγόντων σε μερικές περιστάσεις. Καταυτόν τον τρόπο βάζει περιορισμούς ή αλλάζει τη διδασκαλία (Κολέζα, 2009).

Σε αυτό το πλαίσιο,

1) Η γνώση ορίζεται ως μια κατάσταση δυναμικής ισορροπίας αποτέλεσμα δράσης-ανάδρασης ενός υποκειμένου με ένα μέσο κάτω από συγκεκριμένους περιορισμούς βιωσιμότητας. Μεταξύ αυτών των περιορισμών, οι πιο σημαντικοί για ένα διδακτικό σύστημα είναι ο περιορισμός του χρόνου και οι επιστημολογικοί περιορισμοί. Ο πρώτος οφείλεται στον τρόπο που οργανώνεται η εκπαίδευση (διάρκεια της σχολικής ώρας, οργάνωση του σχολικού έτους, οργάνωση των μαθημάτων, κ.λπ.). Ο δεύτερος οφείλεται στην ύπαρξη μιας «γνώσης αναφοράς», που κρύβεται κάτω από οποιοδήποτε σχολικό περιεχόμενο που διδάσκεται και που παρέχει ντε φάκτο τα κριτήρια για την αποδοχή οποιασδήποτε έκβασης μάθησης (Κολέζα, 2009).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2) Η μάθηση είναι μια διαδικασία ανάκτησης ισορροπίας του συστήματος *περιβάλλον-υποκείμενο,* η οποία έχει χαθεί λόγω διαταραχών του περιβάλλοντος, ή και του ίδιου του υποκειμένου.

3) Η διδακτική εξετάζει την περίπτωση των διαταραχών που προκαλούνται σκόπιμα με την πρόθεση να υποκινηθεί η μάθηση. Η βασική υπόθεση της διδακτικής είναι ότι μια διαδικασία μάθησης μπορεί να χαρακτηρισθεί ως μια ακολουθία αναπαραγομένων καταστάσεων που οδηγεί τους μαθητές στη μάθηση ενός ιδιαίτερου σώματος γνώσης (Κολέζα, 2009).

1.2 Το λάθος ως γνωστικό χάσμα

Ο δείκτης μιας διαταραχής είναι το χάσμα μεταξύ του αναμενόμενου αποτελέσματος μιας δράσης και της πραγματικής ανατροφοδότησής της από το μέσο. Το χάσμα αυτό αναγνωρίζεται από το υποκείμενο. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που το υποκείμενο δεν προσδιορίζει το χάσμα ενώ εμείς ως παρατηρητές προσδιορίζουμε ότι έπρεπε να έχει αναγνωριστεί.

Καλούμε αυτό το μη εγνωσμένο χάσμα **λάθος**. Το λάθος δεν είναι το αποτέλεσμα της άγνοιας, της αβεβαιότητας, της τύχης, όπως υποστηρίζουν οι μαθησιακές θεωρίες των εμπειριστών και των συμπεριφοριστών, αλλά το αποτέλεσμα προηγούμενων γνώσεων οι οποίες δεν έχουν προσαρμοστεί στα καινούρια δεδομένα.

Η κύρια διαφορά μεταξύ της συνηθισμένης αντίληψης περί λάθους (: το λάθος ως αποτέλεσμα παρερμηνείας) και εκείνης που προωθεί η θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων (: το λάθος ως γνώση) βρίσκεται στο επιστημολογικό τους νόημα. Η φύση της γνώσης, είναι διαφορετική σε κάθε περίπτωση.

- Η πρώτη θέση υπονοεί την ύπαρξη μιας «γνώσης αναφοράς», γενικής και αληθινής.
- Η δεύτερη θέση, υπονοεί ότι η οποιαδήποτε γνώση είναι το αποτέλεσμα μιας βέλτιστης προσαρμογής στο σύστημα περιβάλλον –υποκείμενο, σε σχέση με τα κριτήρια της βιωσιμότητας και της αποτελεσματικότητας. Κατά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

συνέπεια, οποιαδήποτε γνώση έχει έναν προσωρινό χαρακτήρα, ή μάλλον, οποιαδήποτε γνώση θα μπορούσε να αναθεωρηθεί, και το πεδίο εγκυρότητάς της θα μπορούσε να τροποποιηθεί ως αποτέλεσμα διαταραχών του συστήματος (Κολέζα, 2009).

1.3 Το λάθος ως εμπόδιο στη γνώση

Η φύση ενός εμποδίου είναι η ίδια με τη φύση της γνώσης, με σχέσεις, μεθόδους κατανόησης, προβλέψεις, αποδείξεις, ξεχασμένες συνέπειες κτλ. Για να ξεπεράσουμε ένα εμπόδιο πρέπει να δουλέψουμε το ίδιο όπως και στην κατάκτηση της γνώσης, το οποίο σημαίνει : επαναλαμβανόμενη αλληλεπίδραση, διαλεκτική ανάμεσα στον μαθητή και στο αντικείμενο της γνώσης .

Τα εμπόδια μπορεί να οφείλονται σε διάφορους παράγοντες. Παρόλα αυτά αν προσπαθούσαμε να διακρίνουμε κάποιες προελεύσεις εξετάζοντας το υποσύστημα (δάσκαλος-μαθητής-γνώση) θα διακρίναμε εμπόδια:

- οντογενετικής προέλευσης
- διδακτικής προέλευσης
- επιστημολογικής προέλευσης

Τα εμπόδια οντογενετικής προέλευσης είναι αυτά που παρουσιάζονται εξαιτίας των ορίων του μαθητή (νευροφυσιολογικά ανάμεσα σε άλλα) κατά τη διάρκεια της εξέλιξής του. Δηλαδή ο μαθητής αναπτύσσει τη γνώση του σύμφωνα με τις ικανότητές του και τους σκοπούς της συγκεκριμένης ηλικίας κάθε φορά. Η γενετική επιστημολογία(Piaget,1970) παρέχει αποδείξεις των σταδίων εξέλιξης των νοητικών ικανοτήτων(προσαρμογή και αφομοίωση) τα οποία μοιάζουν με τα στάδια εξέλιξης των εννοιών.

Τα εμπόδια διδακτικής προέλευσης είναι αυτά τα οποία εξαρτώνται μόνο από την επιλογή και τη σχεδίαση του εκπαιδευτικού συστήματος. Για παράδειγμα οι δεκαδικοί αριθμοί εξαιτίας της χρησιμότητάς τους παρουσιάστηκαν με τέτοιο τρόπο που τελικά συνδέθηκαν με το σύστημα μέτρησης και τους ακέραιους αριθμούς. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα σήμερα για τους μαθητές οι δεκαδικοί να είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ακέραιοι αριθμοί με μία υποδιαστολή. Αυτό αποτελεί ένα εμπόδιο αργότερα για την σωστή κατανόηση των πραγματικών αριθμών αφού οι μαθητές φέρνουν ένα πλήθος γνώσεων που έχουν για τους ακέραιους και προσπαθούν να το εφαρμόσουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Τα εμπόδια επιστημολογικής προέλευσης είναι αυτά από τα οποία κάποιος ούτε μπορεί ούτε θα έπρεπε να ξεφύγει, εξαιτίας του εποικοδομητικού τους ρόλου στην αναζήτηση της γνώσης(Brousseau, 1997). Βρίσκονται στην ίδια την πράξη του γιγνώσκειν, ενδόμυχα, όπου εμφανίζονται οι διαταραχές ως ένα είδος λειτουργικής αναγκαιότητας. Βρίσκονται επίσης από μόνα τους στην ιστορία των εννοιών (Bachelard,1934).

Ο Bachelard έγραψε ότι **οι αποκαλύψεις του πραγματικού είναι πάντα ανάδρομες.** ***Το πραγματικό δεν είναι ποτέ αυτό που κάποιος θα μπορούσε να πιστέψει, αλλά αυτό που θα μπορούσε να έχει σκεφτεί***, υπονοώντας ότι **η γνώση είναι πάντα υπό εξέλιξη.** Επιστρέφοντας δηλαδή σε ένα παρελθόν σφαλμάτων ανακαλύπτουμε την αλήθεια. Σύμφωνα με τον Bachelard μαθαίνουμε σε βάρος όσων ήδη ξέρουμε, γνωρίζουμε ενάντια σε μια προϋπάρχουσα γνώση, καταρρίπτοντας τις κακά θεμελιωμένες γνώσεις και υπερβαίνοντας εκείνο που, στο ίδιο το πνεύμα, αποτελεί εμπόδιο. (Bachelard,1934).

Μισό περίπου αιώνα από τότε που ο Bachelard (1934) διατύπωσε την αντίληψη για το λάθος τη δεκαετία του '80, τα λάθη αναγνωρίσθηκαν όχι μόνο ως αποτέλεσμα της άγνοιας, ή της αβεβαιότητας, αλλά ως αποτέλεσμα μιας πρότερης γνώσης που κάποτε ήταν ενδιαφέρουσα και επιτυχής, αλλά που τώρα αποκαλύπτεται ως ψευδής και μη προσαρμόσιμη (Κολέζα,2009).

Η θέση του Brousseau πηγαίνει πιο πέρα από το να αναγνωρίσει τα λάθη ως εμπόδια στη γνώση. Υποστηρίζει ότι τα λάθη είναι απαραίτητα στη διαδικασία μάθησης και αναφέρει ότι ο δρόμος της μάθησης πρέπει να περάσει από τη (προσωρινή) κατασκευή των λανθασμένων γνώσεων, επειδή η συνειδητοποίηση των λόγων για τους οποίους αυτή η γνώση είναι λανθασμένη είναι απαραίτητη στην κατασκευή και την κατανόηση της νέας γνώσης. Ακολουθώντας τον Bachelard , ο Brousseau ονομάζει **επιστημολογικά εμπόδια** (epistemological obstacles) αυτές τις υποχρεωτικές «αντιστάσεις» στη νέα κατανόηση των πραγμάτων: «Ένα κομμάτι γνώσης, όπως ένα εμπόδιο, είναι πάντα το προϊόν μιας αλληλεπίδρασης μεταξύ του

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μαθητή και του περιβάλλοντός του και ακριβέστερα μεταξύ του μαθητή και μιας κατάστασης που κάνει αυτήν τη γνώση «ενδιαφέρουσα»(Brousseau 1997). Πρέπει να έχουμε επίγνωση ότι τα εμπόδια αυτά είναι εγγενή στην ίδια την επιστημονική σκέψη .

Η νέα λοιπόν γνώση προκύπτει από και σε σύγκρουση με την προηγούμενη γνώση. Επιστημολογικό εμπόδιο είναι οι παλαιότερες γνώσεις οι οποίες αντιστέκονται στις νέες συνθήκες και τελικώς μπλοκάρουν τη διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης.

Η πρόκληση, επομένως, για την Διδακτική, είναι

- ✓ Η δημιουργία *καταστάσεων στις οποίες να βρίσκει εφαρμογή η παλιά γνώση αλλά που συγχρόνως θα υπάρχουν οι προϋποθέσεις αναθεώρησής της και*
- ✓ η κατασκευή νέας γνώσης (Κολέζα,2009).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κεφάλαιο 2

ντέλα διδασκαλίας και αντιλήψεις για το λάθος

2.1 Το μοντέλο της μετάδοσης (transmission model)

Στις περισσότερες τάξεις μαθηματικών η σειρά των δραστηριοτήτων είναι η ίδια. Πρώτα δίνονται οι απαντήσεις στις εργασίες της προηγούμενης μέρας. Οι πιο δύσκολες ασκήσεις λύνονται στον πίνακα από τον δάσκαλο ή τους μαθητές. Γίνεται μια σύντομη εξήγηση στη νέα ύλη και παραδίδονται νέες εργασίες για την επόμενη μέρα. Το υπόλοιπο του μαθήματος αφιερώνεται στο να δουλέψουν οι μαθητές την εργασία για το σπίτι ενώ ο καθηγητής περιφέρεται στην αίθουσα απαντώντας σε ερωτήσεις. Το πιο αξιοπρόσεκτο σχετικά με τις τάξεις μαθηματικών είναι η επανάληψη αυτής της ρουτίνας.

Η εμμονή των πρακτικών διδασκαλίας που περιγράφονται παραπάνω είναι οι φυσικές συνέπειες των παρακάτω αξιώσεων οι οποίες αφορούν την **παραδοσιακή διδασκαλία**:

- ☑ Τη θεώρηση της μαθηματικής γνώσης ως ένα σώμα το οποίο αποτελείται από κανόνες και τεχνικές οι οποίες είναι ιεραρχικά οργανωμένες, χωρίς επεξηγήσεις και γι' αυτό εξαιρετικά ασταθείς να περάσουν από τους ειδικούς στους αρχάριους.

- ☑ Τη θεώρηση της μάθησης ως την επιτυχημένη συγκέντρωση μεμονωμένων πληροφοριών και ικανοτήτων οι οποίες κυρίως επιτυγχάνονται με την παρατήρηση/ακοή, με την απομνημόνευση και την εξάσκηση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

☑ Τη θεώρηση της διδασκαλίας ως την απευθείας μετάδοση γνώσεων οι οποίες επιτυγχάνονται αποτελεσματικά εφόσον ο καθηγητής παρέχει καθαρές εξηγήσεις στους μαθητές, και οι μαθητές έχουν την κατάλληλη προσοχή και τις ακολουθούν με απομνημόνευση και εξάσκηση.

Το μοντέλο της μετάδοσης στη μαθηματική διδασκαλία περιγράφεται από τις παραπάνω θεωρήσεις οι οποίες χρησιμοποιούνται ως μέσο για την επίτευξη των μαθηματικών στόχων του σχολικού προγράμματος σπουδών. Οι στόχοι αυτοί εστιάζουν ουσιαστικά στο να καθιστούν ικανούς τους μαθητές να αποδίδουν σωστά και αποτελεσματικά ένα προκαθορισμένο σύνολο τεχνικών (οι οποίες αποτελούνται κυρίως από υπολογισμούς που έχουν να κάνουν με όλο και πιο πολύπλοκους τύπους αλγεβρικών συμβόλων)(Borasi,1996).

2.2 Κριτικές στο μοντέλο μετάδοσης

Μια πρώτη κριτική στο μοντέλο μετάδοσης, ιδιαίτερα δημοφιλής στις Η.Π.Α, αφορά σε οικονομικούς λόγους. Οι κριτικές τονίζουν ότι το είδος των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων, που παραδοσιακά είναι ο στόχος της άμεσης διδασκαλίας(π.χ κάποιες βασικές γνώσεις και υπολογιστικές δεξιότητες) ,δεν είναι πια αυτό που η σημερινή κοινωνία απαιτεί, δεδομένου ότι συνεχώς συμβαίνουν ραγδαίες αλλαγές αλλά και ότι υπάρχει διαθεσιμότητα όλο και περισσότερης εξειδικευμένης τεχνολογίας. Η σημερινή κοινωνία απαιτεί οι μαθητές να γίνουν πολύ καλοί στην επίλυση προβλημάτων , να αναπτύξουν την κριτική τους σκέψη , να έχουν αυτοπεποίθηση στις μαθηματικές τους ικανότητες και να είναι ικανοί να εφαρμόζουν αυτά που ξέρουν σε μια καινούρια κατάσταση .

Άλλη μία κριτική έχει γίνει από ομάδα μαθηματικών οι οποίοι υποστηρίζουν την πιο «ανθρωπιστική» πλευρά των μαθηματικών. Η ομάδα αυτή υποστηρίζει ότι προκειμένου να παρουσιάσουμε την πραγματική φύση των μαθηματικών ως ένα δομημένο σώμα, η μάθηση των μαθηματικών στο σχολείο δεν θα πρέπει να περιορίζεται σε ένα μεθοδολογικό περιεχόμενο , αλλά θα πρέπει επίσης να

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

παρουσιάζονται στοιχεία όπως η ιστορία και η φιλοσοφία των μαθηματικών, και εφαρμογές των μαθηματικών οι οποίες να αποκαλύπτουν τις κοινωνικές και πολιτικές διαστάσεις αυτού του σώματος.

Ένα δεύτερο είδος κριτικής έχει γίνει από μια φιλοσοφική οπτική. Ο Peirce(1976) υποστηρίζει ότι η αβεβαιότητα που υπάρχει στην ανθρώπινη γνώση, έχει κάποιες θετικές εφαρμογές γιατί μπορεί να προκαλέσει το είδος της «αμφιβολίας» *που προάγει* την συνεχή *έρευνα* στην *προσπάθεια* να δώσουμε όλο και περισσότερο ακριβείς εξηγήσεις για τον κόσμο που μας περιβάλλει . Έτσι ο Peirce προτείνει τη δυναμική θεώρηση της γνώσης ως μια « διαδικασία έρευνας που παρακινείται από την αβεβαιότητα».

Μία παρόμοια θεώρηση της γνώσης διατυπώνεται και από τον Dewey(1933) ο οποίος θεωρεί ότι η «στοχαστική σκέψη» περιλαμβάνει μία κατάσταση αμφιβολίας, αβεβαιότητας, πνευματικής δυσκολίας στην οποία ο στοχασμός γεννιέται. Επιπλέον η στοχαστική σκέψη περιλαμβάνει αναζήτηση και έρευνα ώστε να βρει κανείς εκείνα τα στοιχεία που θα διαλύσουν την αμφιβολία και θα αποκαταστήσουν την αβεβαιότητα.

Αυτή η δυναμική θεώρηση της γνώσης υποστηρίζεται και από τις εργασίες των Kuhn (1970), Lakatos(1976) και Kline(1980). Οι φιλόσοφοι αυτοί παρείχαν μερικά ιστορικά παραδείγματα για το πώς οι επιστημονικές θεωρίες και οι μαθηματικές έννοιες αντικρούονται και αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου. Δείχνοντας την διαψευσιμότητα των αποτελεσμάτων οι απόψεις αυτές μας προειδοποιούν ότι το σώμα της γνώσης στο οποίο επί του παρόντος στηριζόμαστε, μπορεί να μην είναι τόσο ασφαλές όσο πιστεύουμε. Στην πραγματικότητα, νέα γεγονότα και νέες ανακαλύψεις μπορεί να θέσουν υπό αμφισβήτηση αυτά που σήμερα παίρνουμε σαν δεδομένα (Borasi,1996).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2.3 Το μοντέλο της έρευνας (Inquiry model)

Το μοντέλο της έρευνας (Inquiry model) το οποίο αναδύεται από τις κριτικές στο παραδοσιακό μοντέλο βασίζεται στις παρακάτω απόψεις για τα μαθηματικά, τη γνώση, τη μάθηση και τη διδασκαλία.

- ☑ Τη θεώρηση των μαθηματικών ως μια ανθρωπιστική επιστήμη, δηλαδή την πίστη ότι η μαθηματική γνώση είναι κοινωνικά κατασκευάσιμη και διαψεύσιμη όπως επίσης και σχηματισμένη από πολιτιστικές και προσωπικές αξίες.

- ☑ Τη θεώρηση της γνώσης η οποία έχει κατασκευαστεί μέσα από μια διαδικασία έρευνας στην οποία η αβεβαιότητα, η σύγκρουση και η αμφιβολία δίνουν το κίνητρο για συνεχή έρευνα για την πιο ακριβή κατανόηση του κόσμου που μας περιβάλλει.

- ☑ Τη θεώρηση της μάθησης ως μια δημιουργική διαδικασία κατασκευής νοήματος, η οποία απαιτεί μαζί και κοινωνική αλληλεπίδραση και προσωπική κατασκευή, και αποτελείται από συγκεκριμένο περιεχόμενο και σκοπούς.

- ☑ Τη θεώρηση της διδασκαλίας ως παρακίνηση και υποστήριξη της έρευνας των μαθητών, και δημιουργώντας ένα μαθησιακό περιβάλλον το οποίο θα προωθεί την έρευνα.

Η ερευνητική προσέγγιση έχει ως στόχο να καταστήσει ικανούς τους μαθητές να εκτιμούν τα μαθηματικά, να αποκτήσουν αυτοπεποίθηση στις μαθηματικές τους ικανότητές, και να μάθουν να επιχειρηματολογούν με μαθηματικό τρόπο. Αυτό σημαίνει να μπορούν να διατυπώνουν και να διερευνούν προβλήματα, να οργανώνουν και να ταξινομούν έννοιες και δεδομένα, να συζητούν ειδικές

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

περιπτώσεις, να διερευνούν μια απόφανση ή μια λύση σε ένα πρόβλημα, να αναζητούν αντιπαραδείγματα και να είναι σε θέση να ελέγχουν τη δική τους μαθηματική δουλειά. (Borasi,1996, Κολέζα,2009).

2.4 Λάθος και θεωρίες μάθησης

Οι πρακτικές που υπάρχουν στη σημερινή μαθηματική εκπαίδευση και προκαλούν στους μαθητές αρνητικά συναισθήματα απέναντι στα λάθη δεν θα πρέπει να μας εκπλήσσουν, αφού δικαιολογούνται απόλυτα από τη θεώρηση του **συμπεριφορισμού** για τη μάθηση, ο οποίος βασίζεται στο μοντέλο μετάδοσης που αναφέραμε παραπάνω.

Οι συμπεριφοριστικές έρευνες υποστηρίζουν ότι η μάθηση εμπλουτίζεται όταν δίνονται σωστές απαντήσεις (θετική ενίσχυση) και όταν οι λανθασμένες απαντήσεις είτε τιμωρούνται (αρνητική ενίσχυση) είτε αγνοούνται. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο, οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί προφανώς δεν καλούνται να δουν τα λάθη από μια θετική οπτική, ενώ επιπλέον θεωρείται επικίνδυνο να δίνουν ιδιαίτερη σημασία στα λάθη γιατί αυτό θα μπορούσε να «επηρεάσει»(τις σωστές απαντήσεις που έχουν οι μαθητές στο μυαλό τους (Borasi, 1996, Melis,2004).

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι στη θεωρία του συμπεριφορισμού το λάθος είναι δείγμα αποτυχίας. Πρέπει να απορρίπτεται ή να αγνοείται και δεν ενδιαφέρει ποιές είναι οι βαθύτερες αιτίες που οδήγησαν σε αυτό. Σε μία τέτοια θεωρία μάθησης δίνονται πολλές ασκήσεις ίδιας μορφής με σκοπό την όσο το δυνατόν την ταχύτερη λύση αυτών. Τελικό αποτέλεσμα είναι να ενισχύεται η παπαγαλία. Δυστυχώς το μοντέλο αυτό εξακολουθεί μέχρι και σήμερα να εφαρμόζεται (Παντελέων, 2004).

Αρνητική αντίληψη του λάθους συναντάμε και στη θεωρία του **φορμαλισμού,** σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά δεν είναι παρά ο χειρισμός συμβόλων σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες. Στον φορμαλισμό λοιπόν το λάθος δεν έχει θέση. Δεν αναγνωρίζεται ως απαραίτητο συστατικό της ανθρώπινης σκέψης στην πορεία της μαθηματικής ανακάλυψης και δεν έχει καμία παιδαγωγική αξία. (Κολέζα,2006 ,Παντελέων, 2004).

Η **κονστρουκτιβιστική** θεώρηση σχετικά με το πώς αποκτιέται η γνώση, έχει σημαντικές εφαρμογές στην εκπαιδευτική προσέγγιση των λαθών. Καταρχάς, η

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αβεβαιότητα και ειδικότερα οι «ανωμαλίες», παίζουν βασικό ρόλο στην κονστρουκτιβιστική προσέγγιση. Οι «ανωμαλίες» ορίζονται ως «κάτι που δεν βγάζει νόημα» και γι' αυτό είναι πιθανόν να κινητοποιεί τη διαδικασία της έρευνας. Επειδή τα λάθη, εξορισμού, είναι αποτελέσματα που δεν ικανοποιούν τις προσδοκίες , μπορούν να θεωρηθούν ως βασικά παραδείγματα ανωμαλιών. Γι' αυτό μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως κίνητρο για στοχασμό και εξερεύνηση και ως ένα μέσο που υποστηρίζει την έρευνα.

Οι κονστρουκτιβιστές υποστηρίζουν ότι η *σύγκρουση (ή γνωστική παραφωνία)* είναι πολύ σημαντική για τη μάθηση και την εξέλιξη. Τα λάθη μπορούν από τη φύση τους να δημιουργήσουν μια κατάσταση σύγκρουσης που να οδηγήσει τους μαθητές να αντιληφθούν την ανάγκη να έχουν μια κριτική άποψη των διαδικασιών που εφαρμόζουν, να έχουν περισσότερες πληροφορίες ή ακόμα και να «προσαρμόσουν τις θεωρίες τους» (Borasi,1996).

Γενικά , ο κονστρουκτιβισμός θεωρώντας ότι η γνώση είναι κατασκευή του ανθρώπινου μυαλού, δεν θα μπορούσε να μη δεχτεί το λάθος ως φυσιολογικό συστατικό της ανθρώπινης σκέψης. Αναγνωρίζει ότι οι εικασίες και οι λανθασμένες υποθέσεις έχουν παίξει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της επιστήμης και ενδιαφέρεται για τα λάθη των μαθητών καθώς θεωρεί ότι είναι αποδοτικά για μάθηση και η ανάλυσή τους μπορεί να οδηγήσει σε νέες εξερευνήσεις αλλά και στην εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης (Παντελέων, 2004).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κεφάλαιο 3

• Η ανάλυση των λαθών στα μαθηματικά

3.1 Τι σημαίνει κατανοώ μια (μαθηματική)έννοια

Οι άνθρωποι κάνουν λάθη για πολλούς λόγους. Μερικοί μπορεί να είναι πολύ απλοί, όπως έλλειψη συγκέντρωσης, βιαστική επίλυση, ή το γεγονός ότι δεν παρατηρήθηκε ένα βασικό χαρακτηριστικό σε ένα πρόβλημα. Άλλοι λόγοι όμως ίσως είναι συμπτώματα βαθύτερης παρανόησης ή ίσως δεν είναι καν λάθη αλλά τα αποτελέσματα μιας διαφορετικής ερμηνείας ενός προβλήματος (Swan,2001).

Ένα από τα βασικότερα καθήκοντα του εκπαιδευτικού είναι να βοηθήσει τους μαθητές να ερμηνεύσουν τις μαθηματικές αναπαραστάσεις και να κατανοήσουν το νόημα των εννοιών και των σχέσεων ανάμεσα τους. Το καθήκον του εκπαιδευτικού δεν είναι μόνο να εξηγήσει μια νέα λέξη ή ένα σύμβολο αλλά να βοηθήσει τους μαθητές να δημιουργήσουν ένα πλαίσιο το οποίο θα περιλαμβάνει την δημιουργία και την εξέλιξη διασυνδέσεων.

Οι μαθηματικές έννοιες δημιουργήθηκαν σε μια προσπάθεια να εξηγήσουμε τον κόσμο και βρίσκονται υπό συνεχή εξέλιξη. Ο μικρόκοσμος της τάξης είναι ένα χαρακτηριστικό πεδίο συνεχούς εξέλιξης και εμπλουτισμού των μαθηματικών εννοιών. Ας πάρουμε για παράδειγμα τον πολλαπλασιασμό. Ένα μικρό παιδί μπορεί να εξηγήσει την πράξη 3×4με το να σκεφτεί «3 ομάδες από τέσσερα αντικείμενα» ή «4 ομάδες από 3 αντικείμενα». Ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς θεωρείται ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, και ο μαθητής γρήγορα αποκτά την πεποίθηση ότι ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει, ενώ η διαίρεση μικραίνει. (Swan,2001).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μέχρι κάποιου σημείου, η έννοια του πολλαπλασιασμού αποτελείται από διακριτές διαδικασίες, αλλά στη συνέχεια επεκτείνεται σε συνεχείς. Πως θα εξηγήσουμε γιατί ο πολλαπλασιασμός δύο αρνητικών αριθμών έχει αποτέλεσμα θετικό; Γιατί μερικές φορές ο πολλαπλασιασμός δίνει κάτι μικρότερο; Πως είναι δυνατόν να πολλαπλασιάσουμε το π και το e αν τα γράψουμε στην αναλυτική τους μορφή ; Στη συνέχεια επεκτείνουμε ακόμα περισσότερο στον πολλαπλασιασμό δύο διανυσμάτων κ.ο.κ. Η έννοια του πολλαπλασιασμού εξελίσσεται και προκαλεί νέα ερωτήματα καθώς ευρύνεται και επαναπροσδιορίζεται με νέα δεδομένα συνεχώς.

Με το παραπάνω παράδειγμα φανερώνεται η δυσκολία κατανόησης μιας μαθηματικής έννοιας. Η Sierpinska (1994) αναφέρει ότι οι άνθρωποι νιώθουν ότι έχουν κατανοήσει κάτι όταν επιτυγχάνουν την αίσθηση της τάξης και της αρμονίας και όταν μπορούν να διακρίνουν μια δομή πίσω από την έννοια. Αναφέρει λοιπόν τις τέσσερεις νοητικές λειτουργίες οι οποίες περιλαμβάνονται στην κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας :

1. **Αναγνώριση**: είμαστε ικανοί να φέρουμε την έννοια στο επίκεντρο της προσοχής, να την ονομάσουμε και να την περιγράψουμε.
2. **Διάκριση**: είμαστε ικανοί να διακρίνουμε ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα σε αυτήν την έννοια και σε άλλες.
3. **Γενίκευση**: μπορούμε να δούμε γενικές ιδιότητες της έννοιας σε ειδικές περιπτώσεις. Να εφαρμόσουμε δηλαδή τις καινούριες πληροφορίες που δεχτήκαμε για την έννοια και σε μια νέα και διαφορετική κατάσταση μάθησης.
4. **Σύνθεση**: είμαστε ικανοί να αντιληφθούμε συνθετικές αρχές. Μπορούμε δηλαδή να συνθέσουμε απομονωμένα γεγονότα και να τα οργανώσουμε σε συνεπείς ολότητες. Μπορούμε επίσης να αντιληφθούμε ποια θέση έχει η έννοια αυτή μέσα σε μια θεωρία και ποιες είναι οι εφαρμογές της(Swan,2001, Δρίβα,2005).

Στο ίδιο πνεύμα, ο Jean Piaget(1970), επικρίνοντας τις παραδοσιακές προσεγγίσεις διδασκαλίας οι οποίες περιλαμβάνουν «επεξήγηση και μίμηση», τονίζει :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

«....να κατανοήσεις σημαίνει να ανακαλύψεις ή να αναδομήσεις με το να ανακαλύψεις ξανά , και αυτό απαιτεί να διαμορφώσουμε άτομα τα οποία να είναι ικανά να παράγουν και να δημιουργούν και όχι απλά να επαναλαμβάνουν».

Ο Piaget θεωρεί ότι οι μαθητές χρειάζονται χρόνο για να αλληλεπιδράσουν με το περιβάλλον τους (συμπεριλαμβάνοντας και το κοινωνικό περιβάλλον) με σκοπό να οικοδομήσουν έννοιες μέσω της αφομοίωσης και της προσαρμογής. Η «αφομοίωση» για τον Piaget σημαίνει την απορρόφηση μιας νέας ιδέας ενώ η «προσαρμογή» αναφέρεται στην αλλαγή που πρέπει να κάνει το παιδί στην γνωστική του δομή όταν μαθαίνει κάτι καινούριο (Swan,2001).

3.2 Τι μπορούμε να επιτύχουμε κάνοντας χρήση των λαθών;

Γνωστικές έρευνες προτείνουν ότι η κατάλληλη χρήση των λανθασμένων παραδειγμάτων μπορεί να προκαλούν μεταγνώση όπως αυτοεξήγηση, στοχασμό, έρευνα, κριτική σκέψη, στρατηγικές αντίστροφου λογισμού και επιστημολογικές στάσεις . Πιο αναλυτικά

- ✓ Η διαδικασία του να ψάξεις, να εξηγήσεις και να διορθώσεις το λάθος σου ή το λάθος κάποιου άλλου μπορεί να οδηγήσει στην αυτοεξήγηση.
- ✓ Η αυθόρμητη αναγνώριση του λάθους σημαίνει ότι το αποτέλεσμα ή η κατάσταση δεν ικανοποιεί τις προσδοκίες κάποιου ή δεν βγάζει νόημα. Για το λόγο αυτό η κατάσταση αυτή μπορεί να οδηγήσει σε στοχασμό και διερεύνηση.
- ✓ Τα λάθη σε δουλεμένα παραδείγματα μπορούν να παρακινήσουν τους μαθητές για ερευνητική μάθηση καθώς έχουν να ερευνήσουν το ενδεχόμενο λάθος, να σκεφτούν εναλλακτικές, να ανακαλύψουν τη δομή και την ουσία ενός δουλεμένου παραδείγματος.
- ✓ Δουλεύοντας πάνω σε λανθασμένα παραδείγματα αλλά και γενικότερα όταν χρησιμοποιούμε την αποτυχία δημιουργικά, μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

- ✓ Από τη στιγμή που ο σκοπός του να δουλεύεις με ένα λανθασμένο παράδειγμα είναι διαφορετικός από τον συνηθισμένο σκοπό της επίλυσης ενός προβλήματος, η προσοχή του μαθητή αλλάζει από την εκτέλεση στη μάθηση. Αυτό προτρέπει τους μαθητές να αναλύουν τη λύση αντί να εφαρμόζουν μνημονικούς κανόνες. Έτσι καλλιεργείται η αυτοεξήγηση, η οποία θεωρείται πολύ σημαντική για τη μάθηση.
- ✓ Οι μαθητές θα πρέπει να εκπαιδευτούν στο σκεπτικό μιας λύσης και να βρίσκουν τη λογική η οποία οδηγεί στη λύση.
- ✓ Η έρευνα και η διόρθωση ενός λάθους είναι κάτι παρόμοιο με τον ρόλο του δασκάλου, κάτι που από μόνο του αποτελεί αποτελεσματική στρατηγική μάθησης (Melis, 2004).
- ✓ Επιπλέον μία εστίαση στα λάθη μπορεί να είναι ευεργετική για τους μαθητές σε μεταγνωστικό επίπεδο: Η κριτική ανασκόπηση της όλης μαθηματικής τους δραστηριότητας με αφορμή ένα λάθος ενισχύει το αίσθημα υπευθυνότητας και τους προτρέπει σε διερεύνηση ουσιαστικών ερωτημάτων (πέρα από συγκεκριμένες θεωρίες ή διαδικασίες). Ερωτήματα όπως «Τι θα συνέβαινε αν δεχόμασταν αυτό το αποτέλεσμα;» ή σε ποιες περιπτώσεις θα μπορούσε αυτό το αποτέλεσμα να θεωρηθεί σωστό;», οδηγούν σε έναν επαναπροσδιορισμό του προβλήματος, σε βαθύτερη κατανόηση του περιεχομένου του προβλήματος αλλά και ακόμα σε κάποια απροσδόκητα και νέα αποτελέσματα (Borasi,1996)

«Όποιος ασχολείται με την επιστήμη ξέρει καλά ότι η δύναμή του δεν προέρχεται από το αλάνθαστο, αλλά αντίθετα από την ικανότητά του για συνεχή αυτοδιόρθωση»

Cipra B, 1985

3.3 Παρανόηση-Λάθος-Απροσεξία

Από μια κονστρουκτιβιστική οπτική, οι παρανοήσεις θεωρείται ότι κατέχουν πολύ σημαντική θέση στην μάθηση και τη διδασκαλία, επειδή αποτελούν ένα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μέρος των εννοιολογικών δομών της σκέψης του μαθητή οι οποίες θα αλληλεπιδράσουν με τις νέες γνώσεις και θα επηρεάσουν τη μάθηση, κυρίως με αρνητικό τρόπο, επειδή οι παρανοήσεις γεννούν τα λάθη.

Υπάρχει διαχωρισμός ανάμεσα σε απροσεξίες, λάθη και παρανοήσεις.

- Οι **απροσεξίες** είναι λάθος απαντήσεις που οφείλονται στη διαδικασία. Δεν είναι συστηματικές αλλά σποραδικά γίνονται και από έμπειρους και από αρχάριους. Είναι εύκολο να εντοπιστούν και διορθώνονται αυτόματα.
- Τα **λάθη** είναι λανθασμένες απαντήσεις εξαιτίας ενός σχεδιασμού. Είναι συστηματικά και συμβαίνουν συνήθως στις ίδιες καταστάσεις. Τα λάθη είναι τα συμπτώματα των βασικών εννοιολογικών δομών που είναι οι αιτίες των λαθών.
- Οι **παρανοήσεις** σχετίζονται με πεποιθήσεις και αρχές και βρίσκονται συνήθως πίσω από τα λάθη (Olivier,1989).

Οι Graeber και Johnson (1991) αναφέρουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά των παρανοήσεων :

- Αυταπόδεικτες (κάτι που δεν θεωρούν ότι χρειάζεται απόδειξη)
- Ανακαλούνται αυτόματα (κάτι που έρχεται αμέσως στο μυαλό χωρίς σκέψη και χρησιμοποιείται μηχανικά).
- Ευρέως διαδεδομένες (ανάμεσα σε αρχάριους μαθητές και σε μαθητές με μεγαλύτερες ικανότητες)(Steinle,2004)

Η Perso περιγράφει τη σχέση μεταξύ λάθους και παρανόησης ως εξής: "τα λάθη δεν είναι απλώς αποτυχίες των μαθητών αλλά είναι συμπτώματα του συνόλου των ιδεών οι οποίες βρίσκονται κάτω από τις μαθηματικές ενέργειες των μαθητών." Η Perso θεωρεί ότι οι λανθασμένες απαντήσεις μπορεί να οφείλονται σε μια εικασία του μαθητή ή σε χαμηλή μαθηματική κλίση αλλά οι συστηματικές λανθασμένες στρατηγικές ή κανόνες έχουν συχνά λογική προέλευση και βασίζονται σε παρανοήσεις (Yusof, 2003).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Λάθη και παρανοήσεις στους αριθμούς

4.1 Λάθη και παρανοήσεις που σχετίζονται με αριθμητικές διαδικασίες

Τα λάθη που σχετίζονται με αριθμούς εμφανίζονται σε όλη την ύλη των μαθηματικών. Αυτά τα λάθη συνδέονται κυρίως με παρανοήσεις οι οποίες συχνά οδηγούν τους μαθητές να δίνουν λανθασμένες απαντήσεις.

Για παράδειγμα, παρακάτω φαίνεται ξεκάθαρα ότι υπάρχει η παρανόηση ότι πάντα αφαιρούμε το μικρότερο αριθμό από το μεγαλύτερο.

$$5 - 13 = 8$$

Αρκετές έρευνες έχουν γίνει προκειμένου να μελετηθούν τα μαθηματικά λάθη, οι παρανοήσεις, η συχνότητά τους και η σημασία τους για το μέλλον των μαθητών. Το εύρος και ο αριθμός των λαθών είναι τεράστιος και δεν θα μπορούσε ποτέ να γίνει μία πλήρης λίστα (Yusof, 2003).

Από τις τέσσερεις αριθμητικές πράξεις, η πρόσθεση είναι αυτή που φαίνεται να δυσκολεύει λιγότερο τους μαθητές. Δύο από τα πιο κοινά λάθη σχετίζονται με τη θέση των αριθμών στην κάθετη παρουσίαση της πρόσθεσης. Και τα δύο αυτά λάθη δείχνουν την έλλειψη κατανόησης της αξίας που έχει η θέση του κάθε ψηφίου.

Στην αφαίρεση, οι Dickson (1984) και Resnick (1982) συνοψίζουν τα πιο κοινά λάθη των μαθητών

1. *στην αφαίρεση του μικρότερου από το μεγαλύτερο*
2. *στον «δανεισμό».*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Όταν λέμε στην αφαίρεση του μικρότερου από το μεγαλύτερο εννοούμε ότι οι μαθητές αφαιρούν το μικρότερο ψηφίο από το μεγαλύτερο άσχετα από τη θέση του ψηφίου .

Για παράδειγμα

$$\begin{array}{r} 543 \\ -\underline{237} \\ =314 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 23 \\ \underline{-7} \\ 24 \end{array}$$

Παραπάνω, φαίνεται ξεκάθαρα ότι ο μαθητής αφαιρεί το 3 από το 7 επειδή το 3 είναι μικρότερο. Εδώ ο μαθητής θεωρεί ότι η αφαίρεση είναι αντιμεταθετική. Μία αναφορά στην μη αντιμεταθετικότητα της αφαίρεσης ενδεχομένως θα μείωνε την εμφάνιση αυτού του λάθους.

Από τις τέσσερεις αριθμητικές πράξεις, η διαίρεση είναι αυτή που φαίνεται να δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές.

Μία παρανόηση όσον αφορά τη διαίρεση είναι ότι ο διαιρέτης πρέπει πάντα να είναι μικρότερος από το διαιρετέο. Αυτό το πρόβλημα έχει εξεταστεί από πολλούς ερευνητές. Οι Graeber και Baker (1992) έθεσαν την παρακάτω ερώτηση σε μαθητές εννέα και δέκα ετών :

"Πέντε κιλά ξηρών καρπών μοιράστηκαν ίσα σε 15 φίλους. Πόσα κιλά πήρε ο καθένας;"

24 μαθητές από μια ομάδα 30 μαθητών, έκαναν την πράξη 15÷5 και έδωσαν σαν απάντηση το 3. Το πιο ανησυχητικό όμως είναι το γεγονός ότι 42% από ένα δείγμα 65 μαθητευόμενων δασκάλων δημοτικού, έδωσαν την ίδια απάντηση 15÷5 .

Η πηγή αυτής της παρανόησης βρίσκεται ξεκάθαρα στην αρχική επαφή που είχαν οι μαθητές με τη διαίρεση. Αρχικά συναντούσαν πάντα καταστάσεις όπου ένας αριθμός διαιρείται με έναν από τους παράγοντές του. Έτσι για τα παιδιά μια διαίρεση ερμηνεύεται: «πόσο χωράει το μικρότερο στο μεγαλύτερο» (Sadi ,2007).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.2 Λάθη και παρανοήσεις με το μηδέν

Υπάρχει ένα μεγάλο εύρος συνηθισμένων λαθών που οι μαθητές κάνουν όταν αντιμετωπίζουν αριθμητικές πράξεις με το μηδέν. Ίσως το πιο συνηθισμένο είναι το πρόβλημα που έχουν οι μαθητές όταν πρέπει να «δανειστούν» από το μηδέν στην αφαίρεση. Από τη χρήση επίσης του μηδενός στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση προκύπτει μεγάλος αριθμός λαθών και παρανοήσεων στους μαθητές όλων των ηλικιών.

Πολλαπλασιάζοντας με το μηδέν

Ένα από τα πιο συνηθισμένα λάθη που κάνουν οι μαθητές με το μηδέν, είναι το γεγονός ότι δεν μπορούν να αντιληφθούν ότι όποιος αριθμός και αν πολλαπλασιαστεί με το μηδέν, μας δίνει μηδέν. Οι Rees και Barr (1984) βρήκαν ότι το 52% από 8613 άτομα σε ένα δημόσιο διαγωνισμό, έγραψαν ότι $9\times0\times8=72$. Αυτό το λάθος συμβαίνει γιατί για τους περισσότερους, το μηδέν σημαίνει «τίποτα». Έτσι θεωρούν ότι ο πολλαπλασιασμός με το μηδέν απλά αφήνει τον αριθμό αμετάβλητο.

Έχει αξία το μηδέν για να γράφεται;

Συχνά οι μαθητές μπερδεύονται όταν πρέπει να αποφασίσουν αν πρέπει να γράψουν ή να παραλείψουν το μηδέν.

Οι μαθητές έχουν μάθει ότι στο τέλος ενός δεκαδικού αριθμού, το μηδέν δεν έχει αξία και έτσι μπορεί να παραλείπεται χωρίς να αλλάξει ο αριθμός. Όντως ο αριθμός 45,80 είναι ακριβώς ίδιος με τον 45,8.

Παρόμοια, στη διαίρεση του 1632 με το 8, οι μαθητές διδάσκονται στο ξεκίνημα της διαίρεσης όταν έχουν να κάνουν $1\div8$ να μη γράφουν το «0» και να διαιρούν το 16 με το 8. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι μαθητές να μπερδεύονται και να μη μπορούν να αποφασίζουν πότε πρέπει να γράφουν το μηδέν και πότε όχι. Έτσι κάνουν λάθη όπως :

- $$\begin{array}{r|l} 1632 & 8 \\ \hline & 24 \end{array}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε τη λογική πίσω από το αποτέλεσμα. Αφού το 8 δεν διαιρεί το 3, οι μαθητές προχωρούν και διαιρούν το 8 με το 32 στο οποίο χωράει 4

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

φορές. Έτσι, αφού το μηδέν παραλείπεται το αποτέλεσμα είναι 24 αντί του 204 που είναι το σωστό (Sadi ,2007).

4.3 Λάθη και παρανοήσεις στους δεκαδικούς

4.3.1 Συνηθισμένες παρανοήσεις στους δεκαδικούς

Ποιες είναι οι πιο συνηθισμένες συγχύσεις που έχουν οι μαθητές σχετικά με τους δεκαδικούς;

- *Ο αριθμός με τα περισσότερα ψηφία είναι και ο μεγαλύτερος.*
  - *Το 134 είναι μεγαλύτερο από το 34. Άρα και το 0,134 πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το 0,34.*
- *Τοποθετώντας το μηδέν στο τέλος ενός αριθμού, ο αριθμός γίνεται 10 φορές μεγαλύτερος.*
  - *Το 150 είναι 10 φορές μεγαλύτερο από το 15, άρα και το 1,50 πρέπει να είναι 10 φορές μεγαλύτερο από το 1,5.*
- *Τοποθετώντας το μηδέν μπροστά από έναν αριθμό δεν αλλάζει κάτι.*
  - *Το 023 είναι το ίδιο με το 23. Άρα και το 0,023 πρέπει να είναι το ίδιο με το 23 ή το 0,23*
- *Όταν προσθέτεις αριθμούς, προσθέτεις όμοιας θέσης ψηφία.*
  - *Αν 9 και 1 κάνει 10, τότε και 0,9 και 0,1 κάνει 0,10*
- *Οι αριθμοί χρησιμοποιούνται για πράγματα που μπορούν να μετρηθούν*
  - *Άρα ανάμεσα στο 0 και το 1 δεν υπάρχουν αριθμοί.*
- *Οι δεκαδικοί είναι αριθμοί με ένα κόμμα. Το κόμμα χωρίζει δύο διαφορετικούς αριθμούς . Αν κάνεις κάτι στη μία πλευρά, θα πρέπει να κάνεις το ίδιο και στην άλλη*
  - *Άρα, 4,3 + 1 = 5,4 ή 1,5 x 10 = 10,50*

Άλλες παρανοήσεις σχετίζονται με το γεγονός ότι στους δεκαδικούς κάποια πράγματα είναι διαφορετικά από τους ακεραίους. Για παράδειγμα :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η αξία του κάθε ψηφίου σε έναν ακέραιο αριθμό μεγαλώνει καθώς προχωράμε προς τα αριστερά (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες κτλ). Στους δεκαδικούς όμως μετά την υποδιαστολή, ενώ και πάλι έχει μεγαλύτερη αξία το ψηφίο που βρίσκεται προς τα αριστερά, μετράμε από αριστερά προς τα δεξιά δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά κτλ. Δηλαδή εδώ ο μαθητής πρέπει να κατανοήσει ότι τα δέκατα έχουν μεγαλύτερη αξία θέσης από τα εκατοστά, κάτι που τους μπερδεύει με βάση αυτά που ήδη ξέρουν στους ακεραίους (Irwin, 2001).

Πολλά προβλήματα με τους δεκαδικούς προέρχονται από τις γνώσεις μας στους φυσικούς αριθμούς. Πολλές ιδιότητες των φυσικών αριθμών, μηχανικά επεκτείνονται και στους πραγματικούς αριθμούς και έτσι δημιουργούνται πολλές λανθασμένες απόψεις. Ανάμεσα σε αυτές είναι η ευρεία άποψη ότι με τον πολλαπλασιασμό θα πρέπει πάντα να προκύπτει ένας μεγαλύτερος αριθμός από τον αρχικό και με τη διαίρεση ένας μικρότερος.

Για το λόγο αυτό φαίνεται ακατανόητο από τους μαθητές ότι 5×0,4 δίνει 2, δηλαδή κάτι μικρότερο από το 5. Όμοια είναι δύσκολο να δεχτούν ότι 10÷0,1 κάνει 100, δηλαδή κάτι μεγαλύτερο του 10 *(Sadi,2007).*

Οι Rees και Barr (1984) βρήκαν ότι οι δεκάχρονοι μαθητές έδωσαν 100 διαφορετικές απαντήσεις στο παρακάτω :

16,36 + 1,9 + 243,075

Οι πιο κοινές (λανθασμένες) μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές όταν προσέθεταν δεκαδικούς ήταν:

- Προσέθεταν τους αριθμούς πριν την υποδιαστολή και τους αριθμούς μετά την υποδιαστολή ξεχωριστά και στη συνέχεια τους συνδύαζαν με διάφορους τρόπους και έφτιαχναν έναν αριθμό.
- Λάθη στην κάθετη ευθυγράμμιση των αριθμών (Sadi, 2007).

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση δεκαδικών αριθμών είναι ακόμα πιο δύσκολα πεδία για τους μαθητές (Sadi, 2007).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Διάταξη δεκαδικών

Ο πιο προφανής τρόπος για να καταλάβουμε τυχόν παρανοήσεις των μαθητών στους δεκαδικούς αριθμούς είναι το θέμα της διάταξης. Ένα πρόβλημα διάταξης δείχνει όχι μόνο αν οι μαθητές μπορούν να βάλουν σε σειρά τους δεκαδικούς αριθμούς, αλλά υποδεικνύουν και τον τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές σχετικά με τους δεκαδικούς αριθμούς. Δύο τυπικές συγκρίσεις είναι :

i. *Κυκλώστε τον μεγαλύτερο αριθμό στο ζεύγος : (4.8 , 4.75)*

ii. *Κυκλώστε τον μεγαλύτερο αριθμό στο ζεύγος : (4.3 , 4.65)*

Με μια πρώτη ματιά, και τα δύο ζευγάρια φαίνεται να αναφέρονται στο ίδιο κομμάτι γνώσης των δεκαδικών. Όμως, το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών δίνει μία σωστή και μία λανθασμένη απάντηση. Μια λεπτομερέστερη παρατήρηση δείχνει ότι, οι μαθητές που απαντούν το i σωστά και το ii λάθος, δηλαδή έχουν κυκλώσει το 4,8 και το 4,3, ουσιαστικά έχουν επιλέξει τον δεκαδικό με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία. Παρόμοια, οι μαθητές που απάντησαν το i λάθος και το ii σωστά, δηλαδή έχουν κυκλώσει το 4,75 και το 4,65, ουσιαστικά έχουν επιλέξει τον δεκαδικό με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία.

Έτσι λοιπόν, συναντάμε τις παρακάτω συμπεριφορές των μαθητών :

- Ο δεκαδικός αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι και ο μεγαλύτερος(Ο μακρύτερος αριθμός είναι και ο μεγαλύτερος). Τη συμπεριφορά αυτή θα την ονομάσουμε L) (longer is larger-(L) behavior).
- Ο δεκαδικός αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι ο μεγαλύτερος (Ο κοντύτερος αριθμός είναι ο μεγαλύτερος. Τη συμπεριφορά αυτή θα την ονομάσουμε S). (Shorter is larger, (S) behavior)

Στην συμπεριφορά (L) οι μαθητές θεωρούν τους δεκαδικούς ως δύο ξεχωριστούς ακέραιους αριθμούς που χωρίζονται με υποδιαστολή. Γι' αυτό το 4,10 θεωρείται ο επόμενος αριθμός του 4,9.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τρείς τρόποι σκέψης μπορεί να οδηγήσουν στην συμπεριφορά (S).

- ✓ Πρώτον, οι μαθητές που χρησιμοποιούν την αντίστροφη λογική θεωρούν ότι το 0,3 είναι μεγαλύτερο από το 0,4, κάνοντας την λανθασμένη αντιστοιχία ότι το 1/3 είναι μεγαλύτερο από το 1/4.

- ✓ Δεύτερον, οι μαθητές που χρησιμοποιούν την αρνητική λογική όμοια θεωρούν ότι το 0,3 είναι μεγαλύτερο από το 0,4. Μέσα από συνεντεύξεις φάνηκε ότι αυτοί οι μαθητές συγχέουν τους δεκαδικούς με τους αρνητικούς αριθμούς και επιλέγουν το 0,3 ως μεγαλύτερο από το 0,4 επειδή και το -3 είναι μεγαλύτερο από το -4.
- ✓ Τρίτον, οι μαθητές που χρησιμοποιούν τη λογική που εστιάζει στον παρονομαστή , επιλέγουν σωστά ότι το 0,4 είναι μεγαλύτερο από το 0,3 αλλά στη συνέχεια επιλέγουν λανθασμένα ότι το 4,3 είναι μεγαλύτερο από το 4,65. Αυτό το κάνουν γιατί θεωρούν ότι κάθε αριθμός με ένα δεκαδικό ψηφίο περιλαμβάνει μόνο δέκατα και είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό με δύο δεκαδικά ψηφία τα οποία είναι εκατοστά (Steinle, 2004).

4.3.2 Λόγοι των παρανοήσεων και των λαθών στους δεκαδικούς

Οι περισσότεροι μαθητές έχουν μεγαλύτερο πρόβλημα με τους δεκαδικούς απ' ότι με κάθε άλλο σύνολο αριθμών. Φαίνεται να υπάρχει ένα μεγάλο χάσμα ανάμεσα στην κατανόηση των φυσικών αριθμών και στην κατανόηση των δεκαδικών αριθμών. Από την εισαγωγή κιόλας των δεκαδικών αριθμών είναι σαν να αλλάζει η φύση των αριθμών με έναν θεμελιώδη τρόπο. Ο Brown (1981) βρήκε ότι περίπου οι μισοί από τους δωδεκάχρονους μαθητές και το 1/3 των δεκαπεντάχρονων έχουν δυσκολίες στην κατανόηση των δεκαδικών .

Κάνοντας μια ανασκόπηση στα σχολικά εγχειρίδια, δίνεται η εντύπωση ότι το μόνο που έχουν να κάνουν οι μαθητές για να είναι άνετοι με τους δεκαδικούς αριθμούς είναι να θυμούνται μερικούς κανόνες σχετικά με την υποδιαστολή και από εκεί και πέρα οι πράξεις γίνονται όπως και στους ακεραίους. Παρόλα αυτά δεν είναι εύκολο για τους μαθητές να εφαρμόσουν το παραπάνω (Steinle, 2004).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πολλές μελέτες έχουν γίνει σχετικά με τις δυσκολίες των μαθητών στους δεκαδικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, η τρίτη διεθνής έρευνα μαθηματικών και στατιστικής που διεξήχθη το 1999, έδειξε ότι παγκοσμίως μόνο το 50% των δεκατριάχρονων μαθητών μπορούσε να επιλέξει το μικρότερο δεκαδικό αριθμό ανάμεσα σε 5 αριθμούς. Πολλοί μαθητές ακόμα δεν γνώριζαν την ιδιότητα της πυκνότητας του συνόλου των πραγματικών (number density[1]) : δηλαδή ότι υπάρχει πάντα ένας δεκαδικός ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς δεκαδικούς. Για παράδειγμα οι Bana, Farell και McIntosh (1997) βρήκαν ότι το 23% δεκατετράχρονων Αυστραλών μαθητών θεωρούσαν ότι δεν υπάρχει αριθμός ανάμεσα στο 1,52 και 1,53. Η αιτία αυτής της παρανόησης είναι ότι ενώ οι μαθητές γνωρίζουν τους κανόνες των αριθμητικών πράξεων μεταξύ των δεκαδικών αριθμών, δεν έχουν κατανοήσει τι σημαίνει ο δεκαδικός αριθμός.

Αυτά τα προβλήματα δεν εξαφανίζονται όσο τα παιδιά μεγαλώνουν. Ο Putt (1995) βρήκε ποικίλες δυσκολίες που αντιμετώπιζαν ακόμα και αρχάριοι δάσκαλοι στους δεκαδικούς αριθμούς (Steinle, 2004).

Γιατί τόσοι πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι ο πολλαπλασιασμός κάνει κάτι μεγαλύτερο ;

- ✓ Πρώτον, πολλές καθημερινές μας εκφράσεις σημαίνουν αυτό. Όταν τα φυτά ή τα ζώα αναπαράγονται χρησιμοποιούμε και τη λέξη, «πολλαπλασιάζονται». Η λέξη «πολλαπλασιασμός» κουβαλάει από μόνη της την αίσθηση των πολλών ή του μεγαλύτερου αριθμού.

- ✓ Ο δεύτερος λόγος αυτής της παρανόησης έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι περισσότεροι μαθητές συναντούν τον πολλαπλασιασμό στο σύνολο των φυσικών αριθμών, όπου εκεί ισχύει όντως ότι ο πολλαπλασιασμός δύο αριθμών έχει σαν αποτέλεσμα ένα μεγαλύτερο αριθμό.

- ✓ Ένας τρίτος λόγος αναφέρεται από τους Graeber και Campbell (1993). Ο πολλαπλασιασμός συχνά εξηγείται στους μαθητές ως επαναλαμβανόμενη

[1] Στον απειροστικό λογισμό αυτό ονομάζεται αξίωμα πληρότητας και αναφέρει ότι «Κάθε μη κενό υποσύνολο πραγματικών αριθμών που είναι άνω φραγμένο, έχει ελάχιστο άνω φράγμα, δηλ. έχει supremum». Με λίγα λόγια το αξίωμα πληρότητας λέει πως η ευθεία των πραγματικών αριθμών δεν έχει " τρύπες" (Ντούγιας, 1998 : 15)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πρόσθεση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να βγάζουν το συμπέρασμα ότι ο πολλαπλασιασμός οδηγεί σε κάτι μεγαλύτερο. Επίσης έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να έχουν δυσκολίες στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, αλλά και στον πολλαπλασιασμό με μικρούς αριθμούς *(Sadi ,2007)*.

Εξωσχολική και σχολική εμπειρία

Η Irwin έκανε μια έρευνα στη Νέα Ζηλανδία και βρήκε ότι οι μαθητές σε σχολεία χαμηλών κοινωνικών στρωμάτων (low decile shools)[2] είχαν μεγαλύτερη δυσκολία στους δεκαδικούς αριθμούς απ' ότι οι μαθητές σε σχολεία υψηλών κοινωνικών στρωμάτων (higher decile schools). Μία πιθανή εξήγηση για αυτό είναι οι διαφορετικές εμπειρίες που είχαν αυτά τα παιδιά (Irwin, 2001).

Στην ίδια έρευνα η Irwin πήρε συνέντευξη από 84 μαθητές από σχολεία χαμηλών κοινωνικών στρωμάτων (lower decile shools) και εξέτασε τι γνωρίζουν ήδη για τους δεκαδικούς. Μία ομάδα οκτάχρονων μαθητών ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν αριθμούς με υποδιαστολή σε αθλητικά αποτελέσματα, σε διαγράμματα, σε ψώνια, σε μία επιταγή, στην τράπεζα, στην αριθμομηχανή, σε βιβλία , στο 1,5 λίτρο αναψυκτικού.

Ενδιαφέρον ήταν το γεγονός ότι παιδιά 10 ή 12 ετών μπορούσαν να σκεφτούν περιορισμένες περιπτώσεις που είχαν δει δεκαδικούς αριθμούς. Κυρίως ανέφεραν παραδείγματα από το σχολείο ή από χρήματα, κλασσικά δηλαδή παράδειγμα που χρησιμοποιούν οι δάσκαλοι για να βοηθήσουν τα παιδιά να καταλάβουν του δεκαδικούς.

Γενικότερα λοιπόν, από την έρευνα φάνηκε ότι μαθητές κάτω των δεκατεσσάρων οι οποίοι δεν έχουν διδαχτεί στο σχολείο δεκαδικούς μπορούν να αναφέρουν πολλά παραδείγματα από μέρη που βλέπουν δεκαδικούς αριθμούς. Αντίθετα οι μεγαλύτεροι μαθητές περιορίζονται στα παραδείγματα που

---

[2] Σε κάθε σχολείο στη Νέα Ζηλανδία δίνεται ένας βαθμός από το 1 έως το 10 από το υπουργείο παιδείας. Ο βαθμός αυτός δείχνει σε ποιο βαθμό το σχολείο ελκύει μαθητές από χαμηλά κοινωνικό-οικονομικά στρώματα. Ο βαθμός αυτός εξαρτάται από παράγοντες όπως το οικογενειακό εισόδημα, η απασχόληση, αριθμός μελών οικογένειας κ.α.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αναφέρονται στο σχολείο. Φαίνεται λοιπόν ότι η σχολική εμπειρία και η εμπειρία εκτός σχολείου δεν συνδυάζονται καλά για τα παιδιά που έχουν διδαχτεί δεκαδικούς. Τελικά, μια διδακτική προσέγγιση που θα βασιζόταν στις εμπειρίες των μαθητών θα τους βοηθούσε να κατανοήσουν τους δεκαδικούς καλύτερα (Irwin, 2001).

Σύγχυση ακέραιων και δεκαδικών

Την περίοδο που οι μαθητές διδάσκονται τους δεκαδικούς αριθμούς στο σχολείο, έχουν ήδη κατανοήσει αρκετά καλά το σύστημα των ακέραιων αριθμών. Γνωρίζουν ότι οι αριθμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην καθημερινότητα. Ξέρουν να γράφουν και να διαβάζουν αριθμούς με εκατοντάδες και χιλιάδες. Έχουν βασικές γνώσεις για τα κλάσματα και γνωρίζουν τους βασικούς αλγορίθμους της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, πως προσθέτω το μηδέν, πως πολλαπλασιάζω έναν αριθμό με δυνάμεις του 10. Έτσι λοιπόν φέρνουν ένα πλήθος γνώσεων που έχουν για τους ακεραίους και προσπαθούν να τις εφαρμόσουν και στους δεκαδικούς. Όμως αρκετά από αυτά που γνωρίζουν δεν ισχύουν και στους δεκαδικούς αριθμούς, γεγονός που τους προκαλεί σύγχυση .

Ο βασικός τρόπος για να κατανοήσουν οι μαθητές τη διαφορά των δεκαδικών από τους ακεραίους είναι να καταλάβουν ότι οι δεκαδικοί είναι πάντα το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης. Ο μαθητής για να χρησιμοποιήσει τα δέκατα θα πρέπει να αντιληφθεί ότι μία μονάδα διαιρείται σε 10 ίσα κομμάτια. Όμοια και τα εκατοστά είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης μιας μονάδας σε 100 ίσα μέρη. Ο δεκαδικός 0,1 λέγεται « ένα δέκατο», αλλά στην πραγματικότητα είναι «ένα δέκατο της μονάδας», κάτι που δεν αναφέρεται ούτε από τα σχολικά εγχειρίδια, ούτε από τους περισσότερους εκπαιδευτικούς(Sadi ,2007).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.3.3 Πως μπορούμε να ξεπεράσουμε τις παρανοήσεις στους δεκαδικούς

Αποτελέσματα μακροχρόνιας έρευνας έδειξαν ότι πολλοί μαθητές διατηρούν τις παρανοήσεις πηγαίνοντας από τη μια τάξη στην άλλη. Για το λόγο αυτό γίνεται ξεκάθαρο ότι ο συνηθισμένος τρόπος διδασκαλίας φαίνεται να είναι ανεπαρκής για να διώξει τις παρανοήσεις των μαθητών. Ο Hiebert (1987) υποστήριξε ότι παρουσιάζοντας τους δεκαδικούς αριθμούς, λέγοντας « οι πράξεις είναι όπως τους ακεραίους αν στοιχίσεις την υποδιαστολή», είναι ένας γρήγορος τρόπος να έχεις μια καλή επίδοση σε γρήγορο χρονικό διάστημα, αλλά μακροπρόθεσμα είναι αντιπαραγωγικό. Όλες οι έρευνες μάς ενθαρρύνουν να υιοθετήσουμε μια μακροπρόθεσμη θεώρηση της διδασκαλίας των δεκαδικών (Steinle, 2004).

1. *Κατάλληλα προβλήματα*

Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν παραδείγματα με χρήματα ή αθλητικές επιδόσεις. Αυτό σίγουρα είναι ένα πρώτο βήμα. Όμως, για πολλούς μαθητές τα παραδείγματα αυτά δεν είναι αρκετά για να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις τους. Τα παραδείγματα με χρήματα ή με αθλητικές αποδόσεις επιτρέπουν στους μαθητές να λειτουργούν με τον ίδιο τρόπο που λειτουργούν και στους ακεραίους. Τα παραδείγματα αυτά μπορεί να εξοικειώνουν τους μαθητές με τους δεκαδικούς αριθμούς, αλλά ίσως τους κάνουν να πιστεύουν πιο έντονα ότι οι πράξεις στους δεκαδικούς αριθμούς είναι ακριβώς όπως και στους ακέραιους. Για παράδειγμα στοιχίζοντας σωστά την υποδιαστολή η πρόσθεση είναι ίδια με αυτή των ακεραίων (Irwin, 2001).

Η Irwin (2001) στην έρευνά της έδωσε στους μαθητές προβλήματα όπως :

Προβλήματα στα οποία φαίνεται ότι ο μεγαλύτερος αριθμός δεν είναι αυτός με τα περισσότερα ψηφία

- *Ένα αναψυκτικό πωλείται σε διάφορα μεγέθη. Ένα είναι 1,5 lit και ένα άλλο 355 ml*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

O John είπε ότι το 355 ml είναι μεγαλύτερο γιατί ο αριθμός 355 είναι μεγαλύτερος.

Είναι αυτό σωστό;

Γιατί ναι ή γιατί όχι;

Η Amoura λέει ότι το 1,5 lit είναι μεγαλύτερο γιατί είναι σε μεγαλύτερο μπουκάλι.

Είναι σωστό αυτό;

Γιατί ναι ή γιατί όχι;

Τι νομίζεις εσύ;

- Υπάρχει περισσότερο αναψυκτικό σε ένα μπουκάλι 2 lit ή σε 6 κουτιά των 335 ml;

  Υπολόγισέ το.

  Επαλήθευσέ το με την αριθμομηχανή σου

Προβλήματα που περιλαμβάνουν πως λειτουργεί το 0 στους δεκαδικούς

- O Mark αφαίρεσε $1,15 από $1,65 στην αριθμομηχανή του και είχε ως αποτέλεσμα το .5

  O Mark θεώρησε ότι η αριθμομηχανή έκανε λάθος γιατί ήταν σίγουρος ότι το αποτέλεσμα θα έπρεπε να είναι περισσότερο από 5 cents.

  Δίνει η αριθμομηχανή σου το ίδιο αποτέλεσμα;

  Ποιο ήταν το πρόβλημα;

- Η Louise πήγε να αγοράσει λάστιχο για παιχνίδι. Κάθε ένα είναι 2,3 μέτρα και αυτή χρειάζεται 10. Πολλαπλασιάζει να δει πόσα πρέπει να αγοράσει. Πήρε 20,30 μέτρα.

  Πώς πήρε τόσα;

  Ήταν σωστή;

  Όταν πήγε στο κατάστημα το έκαναν στην αριθμομηχανή και της είπαν ότι χρειαζόταν 23 μέτρα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Γιατί το είπαν αυτό;

Γιατί ήταν η μία από της δύο παραπάνω απαντήσεις λάθος;

Ποια ήταν η σωστή απάντηση;

Προβλήματα που σχετίζονται με τη σχέση δεκαδικών και ακεραίων αριθμών.

- *Αν πάς μια εκδρομή και ξοδέψεις 78,9 cents σε ένα λίτρο πετρελαίου και $4,95 σε ένα γεύμα πόσα θα έχεις ξοδέψει.*

Τέτοιου είδους προβλήματα βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τους δεκαδικούς γιατί φέρνουν την υπάρχουσα παρανόηση σε σύγκρουση με τη γνώση τους από την καθημερινότητα. Μέσα από αυτή τη σύγκρουση κατανοούν καλύτερα τον τρόπο που λειτουργούν οι δεκαδικοί.

Τα παραπάνω προβλήματα μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις τους γιατί το περιεχόμενό τους είναι αρκετά οικείο για τους μαθητές και έτσι μπορούν να αντιληφθούν όταν μια απάντηση είναι φανερά λάθος. Διαφορετικά προβλήματα θα πρέπει να δοθούν για άλλους μαθητές. Για παράδειγμα, η έρευνα της Irwin περιελάμβανε μια ομάδα μαθητών οι οποίοι ήταν οικείοι με το συνάλλαγμα επειδή ταξίδευαν συχνά. Παρόμοιο πρόβλημα δε θα είχε νόημα για μαθητές που δεν έχουν τέτοιες εμπειρίες (Irwin, 2001).

Πολλές έρευνες επίσης περιλαμβάνουν τη χρήση κονστουκτιβιστικών παιχνιδιών στον υπολογιστή, όπως για παράδειγμα οι McIntosh, Stacey, Tromp Lightfoot (2000) (Steinle, 2004).

2. *Η προσεκτική χρήση της γλώσσας*

Οι περισσότεροι ενήλικες αναγνωρίζουν ότι οι μαθητές πρέπει να ξεκαθαρίσουν τη διαφορά μεταξύ των γραμμάτων (α έως ω) και των λέξεων που δημιουργούνται από συνδυασμούς των γραμμάτων αυτών. Οι μαθητές όμως συχνά δεν διακρίνουν τα ψηφία (0 έως 9) και τους αριθμούς που δημιουργούνται από τους συνδυασμούς των ψηφίων. Θα πρέπει στην τάξη να χρησιμοποιούμε ξεκάθαρη γλώσσα η οποία

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

θα βοηθάει τους μαθητές να εστιάζουν είτε στο «δάσος», είτε συγκεκριμένα στο «δέντρο» (Steinle, 2004).

Όταν ζητάμε από τους μαθητές να λύσουν ένα πρόβλημα θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί στη γλώσσα που χρησιμοποιούμε. Ιδιαίτερα αν λάβουμε υπόψη μας ότι η γλώσσα του παιδιού απέχει από τη γλώσσα του ενηλίκου. Αυτό γίνεται ακόμα πιο έντονο όταν έχουμε να κάνουμε με παιδιά δημοτικού. Ο δάσκαλος δεν πρέπει να θεωρεί ότι η απόσταση ανάμεσα στις λέξεις «εξετάστε» και «αποδείξτε» είναι φανερή στους μαθητές 15 και 16 ετών (Οικονόμου, 1984).

Ο Page τονίζει πως

> *όταν τα παιδιά δίνουν λάθος απαντήσεις δεν σημαίνει πάντα ότι έχουν κάνει λάθος αλλά μπορεί και να σημαίνει ότι τα παιδιά απαντούν σε άλλη ερώτηση.*

Εκτός όμως από τη μετάφραση ενός προβλήματος από τον μαθητή, υπάρχει και η μετάφραση της απάντησης από τον εκπαιδευτικό. Ο Holt αναφέρεται σε ένα γνωστό πείραμα του Piaget οποίος ζήτησε από ένα παιδί να παρατηρήσει δύο ραβδάκια ίδιου μήκους, τα οποία τοποθέτησε παράλληλα ώστε τα άκρα τους να βρίσκονται στο ίδιο ύψος, και του ζήτησε να πει ποιο είναι το μακρύτερο. Το παιδί απάντησε ότι ήταν ίσα. Στη συνέχεια ο Piaget μετακίνησε ένα ραβδάκι ώστε τα άκρα τους τώρα να μη βρίσκονται στο ίδιο ύψος και έκανε την ίδια ερώτηση στο παιδί. Αυτή τη φορά το παιδί απάντησε ότι το ένα ήταν μικρότερο. Όσες φορές επανέλαβε το πείραμα είχε τα ίδια αποτελέσματα. Το πείραμα αυτό συνέβαλε στο να διατυπώσει ο Piaget την άποψη ότι τα παιδιά σε ηλικία 5 ετών δεν ήταν σε θέση να συλλάβουν τη σταθερότητα του μήκους. Όπως όμως αναφέρει ο Holt, ο Piaget δε σκέφτηκε ότι το παιδί θα μπορούσε να είχε καταλάβει την ερώτηση διαφορετικά. Θα μπορούσε δηλαδή τη φράση «πιο μακρύ» το παιδί να την είχε μεταφράσει ως «ποιο προεξέχει» (Οικονόμου, 1984).

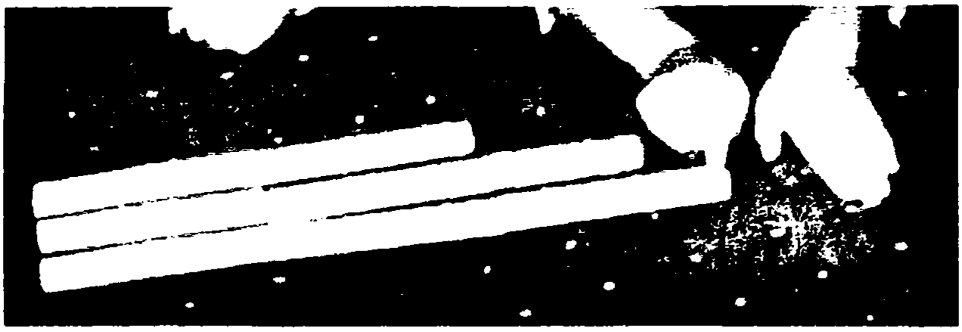
Όπως αναφέρει και ο Mialaret

« Ένα πρόβλημα καλά διατυπωμένο, είναι ένα πρόβλημα λυμένο κατά το ήμισυ»

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3. *Γραμμικά αριθμητικά μπλοκ (LAB,Linear Arithmetic Blocks) και η αριθμογραμμή*

Τα γραμμικά αριθμητικά μπλοκ (LAB) είναι ένα μοντέλο για να δημιουργείς δεκαδικούς αριθμούς. Στην εικόνα 1 φαίνονται οι αριθμοί 0.2, 0.26, 0.3 φτιαγμένοι από κομμάτια ενός σωλήνα τα οποία παριστάνουν τα δέκατα και τα εκατοστά. Για παράδειγμα ο αριθμός 0.26 αποτελείται από 2 δέκατα και 6 εκατοστά.



Εικόνα 1 : Συγκρίνοντας 2 δέκατα(0.2) , 2 δέκατα + 6 εκατοστά (0.26) και 3 δέκατα (0.3)

Εικόνα 2: Συγκρίνοντας 2 δέκατα (0.2) με 13 εκατοστά (0.13)

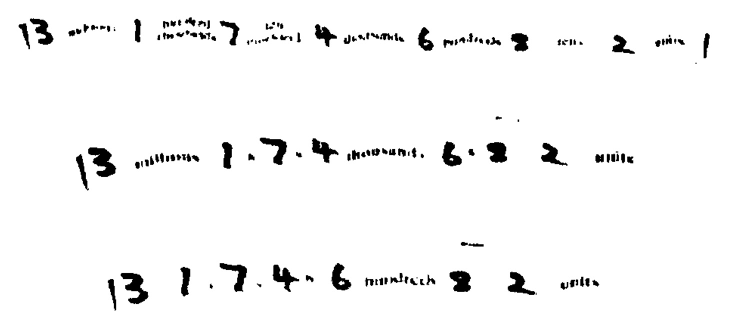
Η χρήση της αριθμογραμμής συνιστάται για χρήση στην τάξη καθώς ενσωματώνει πολλά σύνολα αριθμών τα οποία υπάρχουν στο πρόγραμμα σπουδών, όπως τους δεκαδικούς αριθμούς, τους ακέραιους, τους αρνητικούς και τα γνήσια κλάσματα. Οι μαθητές χρειάζονται βοήθεια με την έννοια της αλλαγής μονάδας : τα 3 δέκατα είναι ίσα με 30 εκατοστά. Με το LAB αυτό φαίνεται ξεκάθαρα. Η εικόνα 1 δείχνει ότι ο αριθμός 0.26 είναι πιο κοντά στο 0.3 απ' ότι ο αριθμός 0.2 που

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δικαιολογεί πλήρως γιατί στην στρογγυλοποίηση στην πιο κοντινή δεκάδα το 0.26 γίνεται 0.3. Η εικόνα 2 δείχνει ότι το 0.2 είναι μεγαλύτερο από το 0.13 γεγονός που βοηθάει τους μαθητές να δουν παραστατικά ότι η συμπεριφορά (L) (στην οποία θεωρούν ότι το 0.13 είναι μεγαλύτερο από το 0.2) που αναφέραμε προηγουμένως είναι λάθος (Steinle, 2004).

4. *Οι αριθμητικές ταινίες (number expanders)δείχνουν διάφορα αναπτύγματα*

Οι αριθμητικές ταινίες χρησιμοποιούνται για να δείξουν ότι το 682 είναι 6 εκατοντάδες + 8 δεκάδες +2 μονάδες και δίνει έμφαση στην προσθετική δομή που αναφέραμε παραπάνω. Στην εικόνα 3 φαίνεται αναπτυγμένος ο αριθμός 3174682 : 3 εκατομμύρια + 1 εκατοντάδα χιλιάδα + 7 δεκάδες χιλιάδες + 4 χιλιάδες +6 εκατοντάδες +8 εκατοντάδες + 2 μονάδες ή 3 εκατομμύρια + 174 χιλιάδες +682 μονάδες ή 31746 εκατοντάδες και 82 μονάδες .



Εικόνα 3: Διαφορετικά αναπτύγματα του 3174682

- ✓ *Ποιο ψηφίο βρίσκεται στην στήλη των εκατοντάδων; (Απάντηση : 6)*
- ✓ *Πόσες εκατοντάδες βρίσκονται στον αριθμό 3174682; (Απάντηση : 31746 εκατοντάδες και μένουν και 82 μονάδες).*

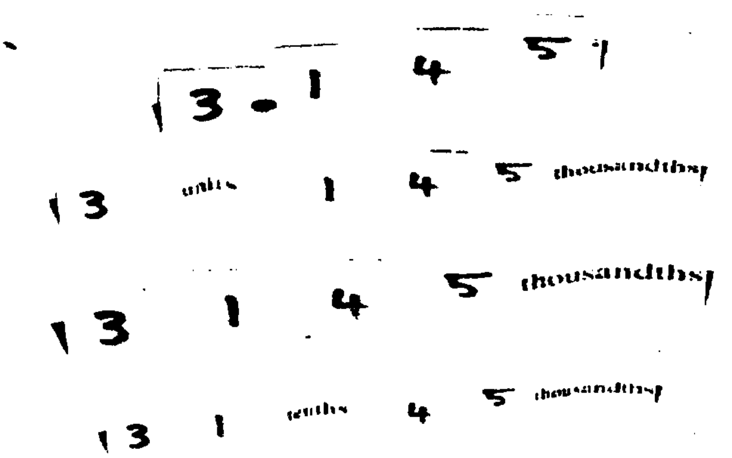
Η τελευταία ερώτηση δίνει έμφαση στην μετατροπή μονάδων (4 χιλιάδες = 40 εκατοντάδες) και είναι μία προετοιμασία για προβλήματα διαίρεσης, όπως :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

- ✓ *Η διαίρεση του 3174682 με το 100 : (Απάντηση : είναι 31746 εκατοντάδες και μένουν 82 μονάδες. Άρα η διαίρεση δίνει 31746 $\frac{82}{100}$ ή 31746,82).*

Παρόμοια στους δεκαδικούς αριθμούς όπως φαίνεται στην εικόνα 4 ο αριθμός 3,145 είναι 3 μονάδες + 145 χιλιοστά ή 3145 χιλιοστά ή 31 δέκατα + 45 χιλιοστά. Σχετικές ερωτήσεις θα μπορούσαν να είναι :

- ✓ *Ποιο ψηφίο βρίσκεται στην στήλη των δέκατων; (Απάντηση : 1)*
- ✓ *Πόσα δέκατα βρίσκονται στον αριθμό 3,145 ; (Απάντηση : 31 δέκατα και μένουν 45 χιλιοστά)*
- ✓ *Διαίρεσε τον αριθμό 3,145 με ένα δέκατο.(Απάντηση : 31,45) (Steinle, 2004).*

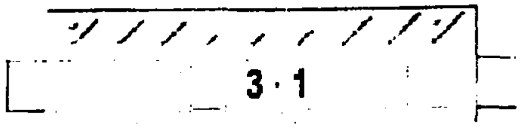
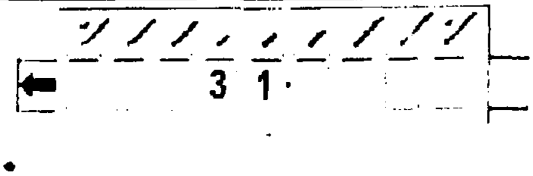
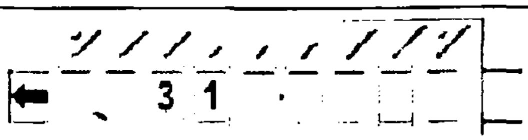
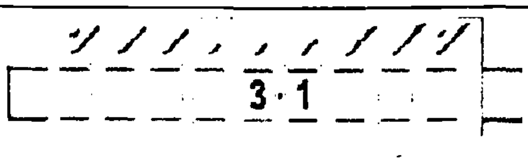
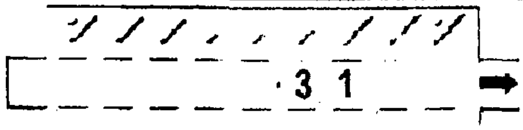
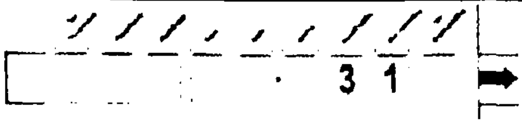


Εικόνα 4 : Διαφορετικά αναπτύγματα του 3,145

5. Μοντέλο αριθμητικών ταινιών για πολλαπλασιασμό και διαίρεση με το 10,100,1000 κτλ (Number slides model multiplication and division by 10,100,1000)

Το μοντέλο αριθμητικών ταινιών είναι άλλο ένα χρήσιμο μοντέλο το οποίο αποτελείται από ένα πλαίσιο φτιαγμένο από χαρτόνι στο οποίο είναι γραμμένα οι θέσεις αξίας των ψηφίων και η υποδιαστολή. Τα ψηφία που αποτελούν τον αριθμό είναι γραμμένα σε μία λωρίδα χαρτί η οποία περνάει μέσα από το πλαίσιο. Το μοντέλο αυτό χρησιμεύει στο να υπενθυμίσει στους μαθητές τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με τις δυνάμεις του 10.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Το μοντέλο	Ο αριθμός	Σχόλια
	3,1	Ο αρχικός αριθμός
	31	Μετά τον πολλαπλασιασμό με το 10. Εδώ η υποδιαστολή μπορεί να παραληφθεί καθώς δεν υπάρχει δεκαδικό μέρος.
	310	Πολλαπλασιάζοντας το 31 ξανά με το 10. Εδώ χρειάζεται να τοποθετήσουμε το μηδέν στη στήλη των μονάδων.
	3,1	Μετά από διαίρεση του 310 με το 10. Πίσω στον αρχικό μας αριθμό
	0,31	Μετά από διαίρεση με το 10. Εδώ πρέπει να τοποθετήσουμε το 0 στην στήλη των μονάδων.
	0,031	Μετά τη διαίρεση του 0,31 με το 10. Εδώ πρέπει να τοποθετήσουμε το 0 στη στήλη των μονάδων και των δέκατων.

Εικόνα 5 : Αριθμητική ταινία : δείχνει πως το 3,1 πολλαπλασιάζεται και διαιρείται με το 10 και το 100.

Η εικόνα 5 δείχνει πως το μοντέλο (number slide) χρησιμοποιείται και δείχνει τα αποτελέσματα του πολλαπλασιασμού του αριθμού 3,1 με το 10 και με το 100. Μετά δείχνει και τη διαίρεση του 3,1 με το 10 και το 100. Τα βέλη δείχνουν πως μετακινείται η χάρτινη λωρίδα (Steinle, 2004).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

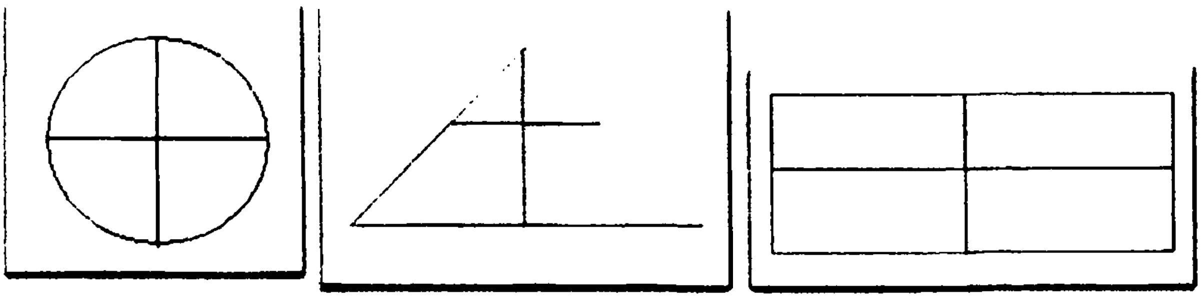
4.4 Λάθη και παρανοήσεις στα κλάσματα

4.4.1 Συνηθισμένα λάθη και παρανοήσεις στα κλάσματα

Λάθη και παρανοήσεις στην έννοια του κλάσματος

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, ένας από τους λόγους που γίνονται πολλά λάθη στα κλάσματα είναι ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζεται αρχικά το περιεχόμενο των κλασμάτων στους μαθητές και στο οποίο παρουσιάζεται περιορισμένη ποικιλία κλασμάτων (συνήθως δεύτερα και τέταρτα). Τα λάθη προκύπτουν από την αρχική διδασκαλία των κλασμάτων η οποία ενθαρρύνει τους μαθητές να παράγουν μνημονικές «συνταγές», για παράδειγμα να θεωρούν ότι το κλάσμα αποτελείται από τον αριθμητή, την κλασματική γραμμή και τον παρονομαστή.

Οι Newstead και Murray (1998) ανέφεραν ότι στην εισαγωγή των κλασμάτων χρησιμοποιούνται συνήθως διαμερίσεις γεωμετρικών σχημάτων, γεγονός που φαίνεται σε απαντήσεις των μαθητών όπως οι παρακάτω. Για παράδειγμα στην ερώτηση « Δείξε το κλάσμα 3/4 με τουλάχιστον 3 διαφορετικούς τρόπους», το 12% των μαθητών της τετάρτης τάξης και το 10% των μαθητών της έκτης τάξης απάντησαν με τα παρακάτω σχήματα :

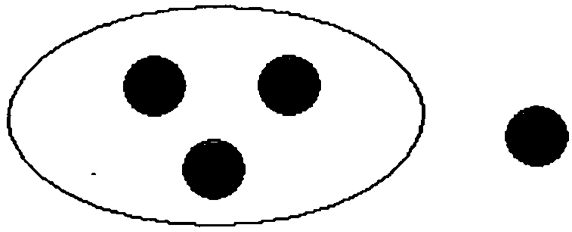


Εικόνα 6 : Απάντηση μαθητών στην ερώτηση «Δείξε το κλάσμα 3/4 με τουλάχιστον 3 διαφορετικούς τρόπους»,

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του τριγώνου οι μαθητές γενικεύουν λανθασμένα την διαμέριση κύκλου ή ορθογωνίου (που συνήθως χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία). Επίσης παρατηρούμε ότι σε όλα τα παραπάνω σχήματα το κλάσμα αντιπροσωπεύει ένα μέρος του όλου. Μόνο το 2% των μαθητών της

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

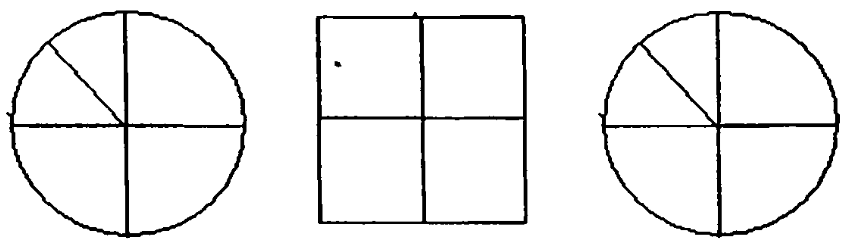
τετάρτης τάξης και το 3% των μαθητών της έκτης τάξης έδωσαν το παρακάτω παράδειγμα



Εικόνα 7 : Αναπαράσταση του $\frac{3}{4}$ από μαθητές.

Η παραπάνω εξήγηση θεωρεί το 3/4 μια συλλογή ξεχωριστών αντικειμένων.

Σε μια παρόμοια έρευνα που διεξάχθηκε από τους Reys, Kim και Bay (1999) με μαθητές της πέμπτης τάξης, μία ερώτηση ζητούσε από τους μαθητές να δείξουν το κλάσμα $\frac{2}{5}$ με ένα διάγραμμα. Οι απαντήσεις σε 7 από τους είκοσι μαθητές αποκάλυπταν βασικές παρανοήσεις και ελλείψεις σχετικά με τα κλάσματα (για παράδειγμα το γεγονός ότι στα κλάσματα μιλάμε για ίσα πάντα μέρη μιας ποσότητας). Τρείς μαθητές σχεδίασαν έναν κύκλο και τον χώρισαν σε 4 ίσα μέρη ενώ στη συνέχεια χώρισαν το ένα από αυτά τα μέρη στα δυο για να βρουν το $\frac{1}{5}$. Όταν στη συνέχεια ρωτήθηκαν αν υπήρχε διαφορά για το ποια τμήματα του κύκλου θα σκίαζαν, δύο μικρά ή δύο μεγάλα, οι μαθητές απάντησαν ότι δεν υπήρχε καμιά διαφορά. Οι μαθητές δεν συνειδητοποιούσαν ότι η κάθε επιλογή θα οδηγούσε σε διαφορετική αναπαράσταση του κλάσματος $\frac{2}{5}$.



Εικόνα 8 : Αναπαράσταση του $\frac{2}{5}$ από μαθητές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι δύο παραπάνω έρευνες αποκαλύπτουν ότι οι παρανοήσεις στα κλάσματα υπάρχουν ακόμα και σε μεγαλύτερους μαθητές που έχουν διδαχτεί περισσότερο την έννοια του κλάσματος.

Λάθη και παρανοήσεις στην ισοδυναμία κλασμάτων

Η ισότητα των κλασμάτων έχει διερευνηθεί εκτενώς τα τελευταία χρόνια Τα ισοδύναμα κλάσματα χρειάζονται σε πολλές εφαρμογές που περιέχουν κλάσματα. Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να βρούμε πιο από τα κλάσματα $\frac{3}{5}$ και $\frac{4}{7}$ είναι μεγαλύτερο, ένας τρόπος είναι να βρούμε ισοδύναμα κλάσματα με τα αρχικά τα οποία να έχουν ίδιο παρονομαστή (Sadi, 2007).

Πολλοί μαθητές, όλων των ηλικιών, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην προσπάθειά τους να βρουν ισοδύναμα κλάσματα. Η Hart (1980) βρήκε ότι μόνο το 66% των δεκαπεντάχρονων μαθητών μπορούσαν να αναγνωρίσουν ότι το 3/10 είναι μεγαλύτερο από το 1/5. Σε αμερικάνικη έρευνα (NAEP) μόνο το 3% των δεκατριάχρονων μαθητών μπορούσαν να βρουν ποιο από τα κλάσματα $\frac{1}{4},\frac{5}{32},\frac{5}{16},\frac{3}{8}$ βρίσκεται πιο κοντά στο $\frac{3}{16}$ (Sadi, 2007).

Οι Behr και Post (1998), Ashlock (1994), Morris (1995) και Mack (1998), βρήκαν ότι ένα συνηθισμένο λάθος που κάνουν η μαθητές όταν τους δίνεται ένα κλάσμα και τους ζητείται να βρουν ένα ίσο με αυτό, είναι ότι χρησιμοποιούν πρόσθεση αντί για πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα $\frac{1}{3}=\frac{;}{6}$ οι μαθητές δίνουν την απάντηση 4. Θεωρούν δηλαδή ότι το 6 προέκυψε από την πρόσθεση 3+3, οπότε και ο αριθμητής θα προκύψει από την πρόσθεση 1+3 = 4 (Yusof,2003).

Η ισοδυναμία μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα που ζητείται να βρούμε ένα κλάσμα που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο άλλα. Για παράδειγμα όταν θέλουμε να βρούμε ένα κλάσμα που βρίσκεται ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{3}$.

Η Hart(1981) βρήκε ότι μόνο το 21% των δεκαπεντάχρονων μαθητών μπορούσαν να βρουν ένα τέτοιο κλάσμα. Βρήκε επίσης ότι οι μαθητές συχνά δεν αντιλαμβάνονται ότι ανάμεσα σε δύο κλάσματα, στην αριθμογραμμή, υπάρχουν άπειρα άλλα κλάσματα (Sadi ,2007).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι Cramer, Post και DelMas (2002) υποστηρίζουν ότι στη διδασκαλία της ισότητας δύο κλασμάτων οι μαθητές δε θα πρέπει να μαθαίνουν απλά μια διαδικασία να δημιουργούν ίσα κλάσματα. Η διδασκαλία θα πρέπει να είναι πλούσια σε συνδέσεις μεταξύ συμβόλων, μοντέλων, εικόνων και πλαισίων (Yusof,2003).

Λάθη και παρανοήσεις στη σύγκριση ή διάταξη κλασμάτων

Μία συνηθισμένη παρανόηση που συναντάμε στη σύγκριση κλασμάτων είναι ότι το κλάσμα με τους μικρότερους αριθμούς είναι και το μικρότερο. Υπάρχουν όμως και μαθητές που αντίστοιχα θεωρούν ότι τα κλάσματα που έχουν μεγάλους αριθμούς, είναι και τα μικρότερα. Ο Womersley (2000) σε έρευνά του βρήκε ότι στη σύγκριση των κλασμάτων $\left(\frac{1}{1000},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ το 80% των μαθητών ηλικίας 11 ετών απάντησαν σωστά ότι το μικρότερο κλάσμα είναι το $\frac{1}{1000}$. Όμως το 13% των ίδιων μαθητών δεν μπορούσαν να απαντήσουν για το αν είναι μεγαλύτερο το $\frac{1}{4}$ ή το $\frac{1}{3}$ (Yusof,2003).

Λάθη και παρανοήσεις στην πρόσθεση κλασμάτων

Η πρόσθεση των κλασμάτων θέτει ένα άλλο είδος προβλήματος στους μαθητές. Ενώ οι περισσότεροι μαθητές δεν έχουν πρόβλημα να κατανοήσουν το νόημα της πράξης $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$, δυσκολεύονται να βρουν το σωστό αποτέλεσμα. Όταν οι μαθητές έχουν να κάνουν μια πρόσθεση κλασμάτων προσπαθούν να βρουν τον πιο «εύκολο τρόπο». Αντί λοιπόν να ψάξουν για ισοδύναμα κλάσματα που έχουν ίδιους παρονομαστές, αυτοί απλώς προσθέτουν τους αριθμητές και τους παρονομαστές ακολουθώντας τον κανόνα :

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μερικοί από τους λόγους αυτής της συμπεριφοράς είναι :

1. Οι μαθητές συγχέουν την πρόσθεση με τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων.
2. Οι μαθητές βλέπουν τους τέσσερεις αριθμούς που περιλαμβάνονται στην πρόσθεση κλασμάτων σαν δύο αριθμητές και δύο παρονομαστές. Θεωρούν λοιπόν ότι ένας ικανοποιητικός τρόπος να κάνουν πρόσθεση είναι να προσθέσουν «όμοια αντικείμενα», που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι οι αριθμητές και οι παρονομαστές. Η άποψη αυτή προέρχεται από τους ακέραιους αριθμούς όπου οι μαθητές μαθαίνουν να προσθέτουν μονάδες με μονάδες, δεκάδες με δεκάδες κτλ. Οπότε και τώρα οι μαθητές το γενικεύουν και προσθέτουν αριθμητές με αριθμητές κ.ο.κ.
3. Υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις καθημερινότητας, στις οποίες ένας τέτοιος τρόπος πρόσθεσης είναι σωστός. Αν αντί για κλάσματα έχουμε λόγους. Για παράδειγμα στην άσκηση 1 έχουν σωστά 3/5(3 στα 5), στην άσκηση 2 έχουν σωστά 2/3(2 στα 3) άρα συνολικά έχουν σωστά 5/8(5 στα 8).

Αυτό που ουσιαστικά συμβαίνει στο παραπάνω λάθος είναι ότι οι μαθητές προσπαθούν να αφομοιώσουν έναν νέο αλγόριθμο πάνω σε κάποιον ήδη γνωστό (Yusof,2003).

Η Hart (1981) βρήκε ότι το 30% των δεκατριάχρονων μαθητών έκαναν αυτό το λάθος και τόνισε ότι και οι δεκαπεντάχρονοι μαθητές είναι το ίδιο πιθανόν να κάνουν αυτό το λάθος (Sadi ,2007).

Λάθη και παρανοήσεις στην αφαίρεση κλασμάτων

Όπως και στην πρόσθεση έτσι και στην αφαίρεση οι μαθητές κάνουν το ίδιο λάθος, θεωρούν δηλαδή ξεχωριστούς ακέραιους αριθμούς τον αριθμητή και τον παρονομαστή και κάνουν την αφαίρεση ως εξής :

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σε έρευνες όπως των Huinker(1998) και Johnson (1999) φαίνεται ότι ενώ αρχικά οι μαθητές είναι ικανοί να κάνουν αφαίρεση με ομώνυμα κλάσματα, όταν αργότερα συναντούν ετερώνυμα κλάσματα αρχίζουν οι δυσκολίες. Συχνά λάθη που έκαναν οι μαθητές σε έρευνα του Ashlock (1994) είναι :

$$\frac{4}{6}-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}$$

$$5\frac{2}{3}-2\frac{5}{8}=3\frac{3}{5}$$

Ενώ άλλος ένας τύπος λάθους είναι :

$$\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=\frac{1}{30}$$

$$\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

Στη βιβλιογραφία φαίνεται ότι πολλοί μαθητές τείνουν να πιστεύουν ότι δεν γίνεται να αφαιρέσουμε κλάσμα από έναν ακέραιο αριθμό. Μία έρευνα που έγινε από τον Leong(1997) έδειξε ότι για τους μαθητές της πέμπτης τάξης του δημοτικού η αφαίρεση $1-\frac{1}{3}$ ήταν κάτι πολύ δύσκολο . Μόνο το 13% του δείγματος μπόρεσε να κάνει την παραπάνω πράξη. Οι περισσότεροι μαθητές έδωσαν απαντήσεις όπως $1\frac{0}{3}$ και $\frac{0}{3}$(Yusof,2003).

Λάθη και παρανοήσει στον πολλαπλασιασμός κλασμάτων

Έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν πρόβλημα στον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων. Για παράδειγμα οι Cramer και Bezuk (1991) βρήκαν ότι ακόμα και οι μαθητές με χαμηλότερη επίδοση, δεν αντιμετώπιζαν δυσκολίες στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Παρόλα αυτά η ίδια έρευνα έδειξε ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει καθόλου τι σημαίνει ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στους ακέραιους αριθμούς οι μαθητές κατανοούν τον πολλαπλασιασμό ως την επανάληψη της πρόσθεσης. Έτσι όταν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

026000321848

έρχονται αντιμέτωποι με την πράξη $\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}$ οι μαθητές δεν μπορούν να αποδώσουν νόημα στην πράξη.

Εξαιτίας της δυσκολίας που έχουν οι μαθητές να κατανοήσουν την πράξη του πολλαπλασιασμού κλασμάτων, θα έπρεπε οι εκπαιδευτικοί όταν διδάσκουν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων να εστιάζουν σε πραγματικές καταστάσεις οι οποίες βοηθούν στην εξήγηση του γιατί ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων γίνεται με αυτόν τον τρόπο (Sadi ,2007).

Μερικά πολύ κοινά λάθη που κάνουν οι μαθητές στον πολλαπλασιασμό εμφανίζονται στις έρευνες των Ashlock (1994) και Raber (1999) :

$$\alpha)\ \frac{7}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{7}{8}\times\frac{6}{8}=\frac{42}{8}$$

$$\beta)\ 4\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=4\frac{2}{12}$$

$$\gamma)\ 5\frac{1}{3}\times6\frac{3}{4}=30\frac{3}{12}$$

$$\delta)\ 2\frac{1}{2}\times1\frac{3}{10}=2\frac{5}{10}\times1\frac{13}{10}=2\frac{65}{10}$$

Τα παραπάνω παραδείγματα δείχνουν τους διαφορετικούς τύπους λαθών που κάνουν οι μαθητές στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Πολλοί είναι οι παράγοντες που επιδρούν και οδηγούν τους μαθητές σε αυτά τα αποτελέσματα. Στα παραδείγματα α και δ είναι φανερή η επιρροή των μαθητών από την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων. Οι μαθητές προσπαθούν να φτιάξουν κλάσματα με τον ίδιο παρονομαστή και στη συνέχεια κάνουν τον πολλαπλασιασμό αλλά αφήνουν τον ίδιο παρονομαστή όπως στην πρόσθεση και στην αφαίρεση.

Όταν οι μαθητές δουλεύουν με κλάσματα θα πρέπει να κατανοήσουν ότι δουλεύουν με ίσα μέρη και ότι το μέγεθος ενός μέρους σχετίζεται με το μέγεθος της μονάδας (Yusof,2003).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Λάθη και παρανοήσεις στη διαίρεση κλασμάτων

Η διαίρεση των κλασμάτων φαίνεται να είναι πιο μπερδεμένη για τους μαθητές. Τους φαίνεται εξαιρετικά δύσκολο να φανταστούν τη διαίρεση $\frac{3}{4}$ προς $\frac{1}{2}$. Επιπλέον, συχνά οι μαθητές αποτυγχάνουν να κατανοήσουν τη λογική πίσω από την αντιστροφή του δευτέρου κλάσματος όταν κάνουν την πράξη της διαίρεσης (Sadi ,2007).Γι' αυτό και η διαίρεση κλασμάτων θεωρείται ίσως η πιο μηχανική πράξη για τους μαθητές και συγχρόνως αυτή που κατανοούν λιγότερο. Στη διαίρεση κλασμάτων όπως « Ποιο είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης του $\frac{1}{2}$ με το $\frac{1}{4}$;», παραδοσιακά οι μαθητές διδάσκονται να εφαρμόζουν τον κανόνα «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» τον οποίον απομνημονεύουν χωρίς να τον κατανοούν. Έτσι οι μαθητές γράφουν

$$\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{1}=\frac{4}{2}=2$$ (Yusof,2003).

Ας δούμε τώρα πως θα μπορούσε να παρουσιαστεί η παραπάνω διαίρεση καλύτερα, ώστε να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της διαίρεσης κλασμάτων.

$$=\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}\left(\text{Πόσα } \frac{1}{4} \text{ υπάρχουν στο } \frac{1}{2};\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}\times\frac{\frac{4}{1}}{\frac{4}{1}}\left(\text{Ρητοποίησε τους παρονομαστές}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{1}=\frac{4}{2}=2\left(\text{Υπάρχουν 2 τέταρτα στο μισό}\right)$$

Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας γίνεται φανερό ότι μερικές παρανοήσεις των μαθητών προέρχονται από λανθασμένες διαισθήσεις των

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μαθητών και από άτυπες εμπειρίες. Αυτό φαίνεται στα αποτελέσματα της έρευνας των Newstead και Murray (1998) στην οποία φαίνεται η αδυναμία των μαθητών να μεταφράσουν την έκφραση $2 \div \frac{1}{2}$ σαν «πόσα $\frac{1}{2}$ υπάρχουν στο 2». Η αδυναμία αυτή δείχνει μια έλλειψη κατασκευής της γνώσης η οποία προέρχεται από τις εμπειρίες της καθημερινότητας. Γενικότερα η διαίρεση κλασμάτων συγκρούεται με την ιδέα που έχουν οι περισσότεροι μαθητές για τη διαίρεση, καθώς παράγει έναν αριθμό μεγαλύτερο από τον αριθμό ο οποίος διαιρείται και αντίθετα με τους ακέραιους αριθμούς δεν μπορεί να θεωρηθεί ως διαδικασία «διαμέρισης».

Η Hart (1981) αναφέρει ότι πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι η πράξη της διαίρεσης είναι αντιμεταθετική. Έτσι θεωρούν ότι $1 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ επειδή $1 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$. Η Hart εξηγεί επιπλέον ότι το παραπάνω λάθος μπορεί να έχει και διαφορετική αιτία. Για παράδειγμα οι μαθητές απαντούν ότι $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = 2$ γιατί μπορεί να εφαρμόζουν λανθασμένα τον αλγόριθμο της διαίρεσης, δηλαδή $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{1} \times \frac{1}{2} = 2$.

Το λάθος μπορεί επίσης να προέρχεται από την διαισθητική αντίληψη ότι στην πράξη της διαίρεσης ο διαιρετέος πρέπει να είναι πάντα μεγαλύτερος από τον διαιρέτη.

Ερευνητές όπως ο Fischbein (1985) και οι Bell, Greer, Grimison και Mangan (1989) έχουν επίσης γράψει για τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να διαλέξουν τη σωστή πράξη και να γράψουν τη σωστή αριθμητική πρόταση σε προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, όταν οι παράγοντες ή οι διαιρέτες είναι μικρότεροι της μονάδας ή όταν ο διαιρετέος είναι μικρότερος του διαιρέτη. Για παράδειγμα θεωρούν ότι οι εκφράσεις $3 \div 6$ και $6 \div 3$ είναι το ίδιο. Το παραπάνω φαινόμενο παρατηρήθηκε στους νεότερους μαθητές από τον Bell και τον Fischbein αλλά και άλλοι ερευνητές όπως οι Greer και Mangan (1986) και Tirosh και Graeber (1990) παρατήρησαν την ίδια δυσκολία και σε φοιτητές πανεπιστημίου.

Επιπλέον, πολλοί μαθητές στην έρευνα του Brown (1981) και Ekenstam και Greger (1983), πίστευαν ότι :

i. *Ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει.*

ii. *Η διαίρεση πάντα μικραίνει.*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

iii. *Η διαίρεση ενός μικρότερου αριθμού με έναν μεγαλύτερο δεν επιτρέπεται* (Yusof,2003).

Λάθη και παρανοήσεις στα ποσοστά

Τα ποσοστά, οι λόγοι και οι αναλογίες είναι έννοιες που οι μαθητές θεωρούν ιδιαίτερα δύσκολες και τους προκαλούν σύγχυση. Οι Rees και Barr (1984) βρήκαν ότι μόνο οι μισοί από ένα δείγμα 8600 υποψηφίων δασκάλων μπορούσαν να υπολογίσουν το νέο τους μισθό όταν η αύξηση του μισθού δίνεται σε ποσοστό. Σε ένα άλλο τεστ, μόνο το 26% από δωδεκάχρονους μαθητές μπόρεσαν να υπολογίσουν πόσο θα κόστιζε ένα τζιν αν η αρχική του τιμή ήταν 45 € και έχει έκπτωση 20%. Στην παραπάνω ερώτηση δόθηκαν 13 διαφορετικές απαντήσεις (Sadi, 2007).

Οι παρανοήσεις στα μαθηματικά είναι πάρα πολλές. Όλοι οι ερευνητές συμφωνούν ότι είναι δύσκολο να ξεπεράσουμε αυτές τις δυσκολίες των μαθητών. Παρόλα αυτά είναι σημαντικό οι δάσκαλοι να γνωρίζουν τις γνωστικές περιοχές που είναι πιθανόν οι μαθητές να δημιουργήσουν παρανοήσεις (Sadi,2007)

4.4.2 Λόγοι των λαθών και των παρανοήσεων στα κλάσματα

Η έννοια των κλασμάτων είναι από τις πιο βασικές στα μαθηματικά, όμως είναι και ανάμεσα στις πιο δύσκολες για τους μαθητές όλων των βαθμίδων. Η Hanson (2001) ανέφερε ότι ο βασικός λόγος που οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα είναι ότι προσπαθούν να απομνημονεύσουν τύπους και αλγορίθμους αντί να τα κατανοήσουν. Οι μαθητές έχουν δυσκολία να αναγνωρίσουν πότε δύο κλάσματα είναι ίσα, να διατάξουν κλάσματα και να κατανοήσουν ότι το κλάσμα παριστάνει έναν αριθμό. Γι' αυτό είναι ανάγκη οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος πριν κάνουν πράξεις με αυτά.

Στην πραγματικότητα τα κλάσματα δεν είναι δύσκολα μόνο για τους μαθητές αλλά και πολλοί εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι είναι από τα πιο δύσκολα θέματα για να το διδάξουν. Η Hanson (2001) έγραψε ότι η μελέτη των κλασμάτων και ιδιαίτερα οι πράξεις που περιλαμβάνουν κλάσματα προκαλούν μεγάλη σύγχυση και στους εκπαιδευτικούς και στους μαθητές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σε μια έρευνα που διεξάχθηκε από τον Barwell (1998) παρατηρήθηκε ότι από όλες τις θεματικές περιοχές των μαθηματικών, τα κλάσματα φαίνεται να προκαλούν στους δασκάλους του δημοτικού τα περισσότερα προβλήματα. Πάνω από το 1/5 των εκπαιδευτικών (μαθηματικών) που πήραν μέρος στην έρευνα ανέφεραν τα κλάσματα σαν ένα από τα πιο δύσκολα κομμάτια της διδασκαλίας.

Υπάρχουν πολλοί παράγοντες που τα παιδιά στο δημοτικό έχουν μεγάλη δυσκολία στην κατανόηση των κλασμάτων. Οι τρεις βασικότεροι λόγοι είναι:

1. Ο τρόπος και η σειρά με την οποία παρουσιάζεται αρχικά το περιεχόμενο των κλασμάτων στους μαθητές. Συγκεκριμένα οι μαθητές εκτίθενται αρχικά σε περιορισμένη ποικιλία κλασμάτων (συνήθως μόνο δεύτερα και τέταρτα).
2. Το περιβάλλον της τάξης στο οποίο οι λανθασμένες ιδέες και η άτυπη (καθημερινή) έννοια των κλασμάτων δεν αναλύονται.
3. Η λανθασμένη εφαρμογή της έννοιας των ακεραίων αριθμών θεωρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή ξεχωριστούς ακέραιους αριθμούς.

Η Neimi (1996) ανέφερε τα αποτελέσματα από την διεθνή αξιολόγηση εκπαιδευτικής προόδου (National Assesement of Educational Progress), η οποία έδειξε ότι τα προβλήματα κλασμάτων βασανίζουν τους μαθητές καθ' όλη τη διάρκεια της φοίτησής τους στο γυμνάσιο.

Πιο πρόσφατα, η Sophian (2000) ανέφερε ότι η διδασκαλία των κλασμάτων στις μεσαίες τάξεις του δημοτικού είναι ένα σημείο μετάβασης στο οποίο πολλοί μαθητές αρχίζουν να έχουν σοβαρές δυσκολίες με τα μαθηματικά. Συχνά αναφέρεται ότι τα κλάσματα είναι δύσκολα επειδή δεν ταιριάζουν με τις αρχικές ιδέες που έχουν τα παιδιά σχετικά για τους αριθμούς. Μία αιτία γι' αυτό είναι ότι στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στους ακέραιους αριθμούς με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην προετοιμάζονται για τη μετάβαση στα κλάσματα και στην έννοια των πραγματικών αριθμών.

Γιατί οι μαθητές όταν μαθαίνουν τα κλάσματα αποκτούν τόσες παρανοήσεις και κάνουν τόσα λάθη;

Μερικοί λόγοι είναι :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1. Όπως αναφέρουν οι Reys, Kim και Bay (1999), η δυσκολία των μαθητών με τα κλάσματα είναι αποτέλεσμα της διδασκαλίας. Αυτό που σκέφτονται οι μαθητές πολλές φορές δεν συμπίπτει με το στόχο που έχει κατά νου ο δάσκαλος. Για παράδειγμα αν οι μαθητές συγκρίνοντας δυο κλάσματα σκέφτονται το συμπλήρωμα της ακέραιας μονάδας αλλά η διδασκαλία στην τάξη εστιάζει στην εύρεση ίδιων παρονομαστών τότε οι μαθητές δυσκολεύονται να ενσωματωθούν στη διδασκαλία της τάξης. Πολλοί μαθητές μάλιστα όταν βρίσκονται αντιμέτωποι με μια τέτοια διδασκαλία και δεν καταλαβαίνουν τίποτα, προσπαθούν να μάθουν παπαγαλία αυτό που διδάσκεται στην τάξη.
2. Όπως αναφέρουν οι έρευνες του Gearhart κ.ά (1999) και Alcaro κ.ά (2000) τα σχολικά εγχειρίδια και άλλα διδακτικά υλικά ευθύνονται πολλές φορές για τα λάθη των μαθητών. Υποστηρίζουν δηλαδή ότι τα σχολικά εγχειρίδια αλλά και πολλά διδακτικά υλικά, παρουσιάζουν τα κλάσματα μόνο σαν μέρη μιας πίτας ή ενός κύκλου, μια πρακτική που τονίζει μόνο τη σχέση μέρους-όλου.
3. Άλλος ένας λόγος είναι ο τρόπος αξιολόγησης των μαθητών. Η Neimi(1996) αναφέρει ότι τα συνηθισμένα τεστ δεν επιτρέπουν στους εκπαιδευτικούς να δουν κατά πόσο οι μαθητές έχουν αναπτύξει μια σωστή ιδέα για την έννοια του κλάσματος. Στη έρευνά της η Neimi αναφέρει ότι ένας αριθμός μαθητών έγραψε ότι το κλάσμα είναι ένα κομμάτι από κάτι που τρώμε. Αυτές οι απαντήσεις δεν μπορούν να θεωρηθούν λάθος. Είναι κάτι που προκύπτει από την εμπειρία που έχουν οι μαθητές για τα κλάσματα στην τάξη(κάτι που επιβεβαιώνει τον δεύτερο λόγο που αναφέραμε παραπάνω). Χαρακτηριστικό είναι ότι στην έρευνα της Neimi το 54% των μαθητών μπορούσε να λύσει ένα πρόβλημα με πίτσα ενώ μόνο το 38% μπορούσε να λύσει ένα ανάλογο πρόβλημα που περιελάμβανε μήκη.

Οι μαθητές θα πρέπει να ξέρουν ότι το κλάσμα δεν αναπαριστά αναγκαστικά το μέρος μιας περιοχής αλλά μπορεί να αναπαριστά και το μέρος μιας συνεχούς ποσότητας ή το μέρος μιας συλλογής αντικειμένων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.4.3 Τρόποι να ξεπεράσουμε τις παρανοήσεις στα κλάσματα

Η έννοια του κλάματος φαίνεται να είναι αφηρημένη ιδιαίτερα στους μικρότερους μαθητές. Είναι ανάγκη λοιπόν να σχεδιάζουμε δραστηριότητες που έχουν σαν σκοπό να παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες να χτίσουν ένα θεμελιώδες υπόβαθρο από το να διδάσκουν τα κλάσματα παραδοσιακά.

Για παράδειγμα:

Έχεις το 1/2 μιας τεράστιας σοκολάτας. Δίνεις στην φίλη σου το 1/4 του κομματιού που έχεις. Πόσο μέρος από όλη τη σοκολάτα έδωσες στην φίλη σου;

Το πρόβλημα μπορεί να αναπαρασταθεί μαθηματικά ως εξής

"$\frac{1}{4}$ του $\frac{1}{2}$ της 1 μονάδας" ή "$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$"

Για να κατανοήσουν καλύτερα οι μαθητές την διαδικασία « παίρνω το μέρος ενός μέρους της μονάδας» θα ήταν καλό να παρουσιάσουμε και να ερμηνεύσουμε ένα παράδειγμα με πολλαπλασιασμό κλάσματος με έναν ακέραιο μεγαλύτερο του 1, με το 1 και με ένα κλάσμα μικρότερο του 1.

Για παράδειγμα :

- $\frac{3}{4}\times 6$. Θεωρούμε ότι ξεκινάμε με έξι αντικείμενα ή μονάδες. Τα μοιράζω σε τέσσερα ίσα μέρη, έτσι παίρνω το 1/4. Στη συνέχεια παίρνω τρία από τα τέσσερα κομμάτια. Η απάντηση $4\frac{1}{2}$ αναφέρεται σε ολόκληρη τη μονάδα.
- $\frac{3}{4}\times 1$. Θεωρούμε ότι έχω ένα κομμάτι ή μία μονάδα. Την μοιράζω σε τέσσερα ίσα μέρη, έτσι παίρνω το $\frac{1}{4}$ της μονάδας. Στη συνέχεια παίρνω τρία από τα τέσσερα ίσα κομμάτια. Η απάντηση $\frac{3}{4}$ αναφέρεται σε ολόκληρη τη μονάδα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

- $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$. Έστω ότι έχω το μισό μιας μονάδας. Χωρίζω αυτό το μισό σε τέσσερα ίσα μέρη και στη συνέχεια επιλέγω τα τρία. Η απάντηση $\frac{3}{8}$ αναφέρεται σε ολόκληρη τη μονάδα.

Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές κατανοούν καλύτερα την έννοια του πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Yusof,2003).

Ο Battista (1999) προτείνει ότι για να βοηθήσουμε τους μαθητές να αναπτύξουν μια δυναμική μαθηματική σκέψη , η διδασκαλία θα πρέπει να εστιάζει στην καθοδήγηση και στήριξη της προσωπικής κατασκευής μιας έννοιας. Μια τέτοια διδασκαλία ενθαρρύνει τους μαθητές να ανακαλύψουν, να δοκιμάσουν και να βελτιώσουν τις δικές τους ιδέες απ' ότι να ακολουθήσουν τυφλά διαδικασίες που τους δίνουν άλλοι(Yusof,2003).

4.5 Σύγχυση μεταξύ δεκαδικών, κλασμάτων και αρνητικών.

Οι Markovitz και Sowder (1991) ερεύνησαν τους τύπους λαθών που έκαναν οι μαθητές στη σχέση ανάμεσα σε κλάσματα και δεκαδικούς. Στην έρευνα και τα κλάσματα και οι δεκαδικοί παρουσιάζονταν συμβολικά. Τα αποτελέσματα έδειξαν ελλιπή κατανόηση της σημασίας των συμβόλων που χρησιμοποιούνται αλλά και μεγάλες δυσκολίες στην κατανόηση της σχέσης ανάμεσα σε δεκαδικούς και κλάσματα (Yusof,2003).

Οι Stacey και Steinle (1999) σε έρευνά τους συνειδητοποίησαν ότι οι μαθητές που κάνουν συνεχώς λάθη στις συγκρίσεις δεκαδικών πιθανότατα ερμηνεύουν τους δεκαδικούς ως αντίστροφους αριθμούς των ακεραίων ή σαν άλλα κλάσματα. Για παράδειγμα, οι μαθητές θεωρούν ότι το 0,3 είναι το ίδιο με το $\frac{1}{3}$ και ότι το 2,64 είναι 2 και $\frac{1}{64}$ ή ίδιο με το κλάσμα $\frac{2}{64}$. Αποδείξεις ότι οι πολλοί μαθητές σκέφτονται με αυτόν τον τρόπο υπάρχουν στην έρευνα της Irwin (1996) αλλά και άλλων. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το ποσοστό των μαθητών (ανά τάξη) οι οποίοι ερμηνεύουν τους δεκαδικούς σαν αντίστροφα κλάσματα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

	Ποσοστό μαθητών που ερμηνεύουν τους δεκαδικούς σαν αντίστροφα κλάσματα					
Τάξη	5	6	7	8	9	10
	(N=963)	(N=1465)	(N=2297)	(N=2102)	(N=1645)	(1066)
Ποσοστό	7.2%	4.8%	5.2%	7.1%	4.3%	3.3%

Εικόνα 9 : Πίνακας από έρευνα της Irwin (1996). Στον πίνακα φαίνεται το ποσοστό των μαθητών (ανά τάξη) οι οποίοι ερμηνεύουν τους δεκαδικούς σαν αντίστροφα κλάσματα.

Αρκετές φορές, οι μαθητές συγχέουν τους δεκαδικούς με τους αρνητικούς αριθμούς. Σε 553 φοιτητές παιδαγωγικού τμήματος τεσσάρων πανεπιστημίων της Αυστραλίας και της Νέας Ζηλανδίας ζητήθηκε να συγκρίνουν το 0,6 με το 0, το 0,22 με το 0 και το 0,00 με το 0,134. Το 13% έκανε τουλάχιστον ένα λάθος ενώ το 9% έκανε 2 ή και 3 λάθη. Το 1% ταυτοποίησε πλήρως τους δεκαδικούς με τα κλάσματα. Το 7%, ενώ μπορούσε να συγκρίνει δεκαδικούς που δεν είχαν μηδενικές μονάδες, θεωρούσαν ότι δεκαδικοί όπως το 0,6 και το 0,22 ήταν μικρότεροι από το 0.

Οι δυσκολίες των μαθητών να κάνουν συγκρίσεις δεκαδικών με το μηδέν έχουν επίσης αναφερθεί και σε άλλες έρευνες. Η Irwin (1996) αναφέρει ότι παιδιά από 11 έως 13 χρονών τοποθετούν τους δεκαδικούς που ξεκινούν με το 0, πριν από το μηδέν στον άξονα των πραγματικών αριθμών(Stacey, Helme & Steinle,2001).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κεφάλαιο 5

Παρανοήσεις και λάθη στην άλγεβρα-Μια ;ινόμηση λαθών στις απλές γραμμικές εξισώσεις

5.1 Δομική (Structural) και διαδικαστική(procedural) όψη της φύσης της άλγεβρας

Θα ήταν καλό πριν την μελέτη επίλυσης γραμμικών εξισώσεων να προηγείται μια λειτουργική προσέγγιση της γραμμικής εξίσωσης. Μια τέτοια προσέγγιση θα ήταν για παράδειγμα οι μαθητές να ελέγχουν διάφορους αριθμούς για το αν είναι λύσεις της εξίσωσης.

Όπως τονίζει και η Kieran (1992) στη φάση της μελέτης της επίλυσης μιας εξίσωσης όπως η 2x+1=5 θα ήταν καλό ο εκπαιδευτικός να κατευθύνει τους μαθητές από μια διαδικαστική προσέγγιση προς μια δομική. Με τον όρο δομική προσέγγιση εννοούμε ένα σύνολο λειτουργιών που εκτελούνται όχι στους αριθμούς αλλά στην αλγεβρική έκφραση. Για παράδειγμα η λύση της εξίσωσης

$$3x+2=15$$

μπορεί να περιλαμβάνει το βήμα

$$3x+2-2=15-2$$

εντούτοις, όπως επισημαίνει η Kieran «ο βαθύτερος στόχος της άλγεβρας που διδάσκεται στο σχολείο είναι δομικός». Γι' αυτό ο στόχος του εκπαιδευτικού θα πρέπει να είναι η μετάβαση από τη λειτουργική προς την δομική όψη (Hall,2002).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.2 Λάθη και παρανοήσεις στην άλγεβρα.

Η Perso (1991) έκανε μια εκτεταμένη έρευνα σχετικά με τις παρανοήσεις στην άλγεβρα. Βρήκε 19 διαφορετικά λάθη τα οποία στη συνέχεια ομαδοποίησε σε 4 κατηγορίες:

- Στην βασική κατανόηση των γραμμάτων και τη θέση τους στα μαθηματικά, και ιδιαίτερα στην άλγεβρα.
- Στον πολλαπλασιασμό των μεταβλητών και των γραμμάτων.
- Στην χρήση των κανόνων του πολλαπλασιασμού για την επίλυση εξισώσεων.
- Στη χρήση της γνώσης της αλγεβρικής δομής ώστε να σχηματίσουν εξισώσεις.

Επιπλέον, στην βιβλιογραφία σχετικά με τη διδασκαλία της άλγεβρας προτείνεται ότι οι μαθητές πριν ξεκινήσουν να μελετούν την άλγεβρα θα πρέπει να έχουν κατανοήσει μια σειρά εννοιών. Για παράδειγμα για την επίλυση της εξίσωσης $\frac{2}{5}(x-\alpha)=-\frac{3}{4}(2-x)$ είναι αναγκαίο ο μαθητής να έχει κατανοήσει :

- ✓ Την έννοια της ισότητας
- ✓ Τους ακέραιους αριθμούς
- ✓ Τα κλάσματα
- ✓ Την προτεραιότητα πράξεων
- ✓ Την έννοια των μεταβλητών

Οι Norton και Cooper(1999) τόνισαν ότι αν υπάρχει έλλειψη κατανόησης σε ένα από τα παραπάνω η διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης είναι σχεδόν αδύνατη (Yusof, 2003)

5.3 Οι έμφυτες γνωστικές απαιτήσεις της άλγεβρας

Στην βιβλιογραφία επισημαίνεται ότι συμπεριλαμβάνονται πολύπλοκες ψυχολογικές διαδικασίες, για την κατανόηση των κανόνων της άλγεβρας. Για παράδειγμα, ο Kuchemann βρήκε ότι ένα πολύ μικρό ποσοστό παιδιών μεταξύ 13

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και 15 ετών ήταν ικανά να αντιλαμβάνονται ένα γράμμα (μεταβλητή) ως έναν γενικευμένο αριθμό.

Η Kieran επισημαίνει ότι το γενικό συμπέρασμα στο οποίο μπορούμε να καταλήξουμε μετά από έρευνα σε μαθητές άλγεβρας είναι ότι η πλειονότητα δεν αποκτούν καμία αίσθηση της δομικής όψης της άλγεβρας.

Αυτή η υψηλή γνωστική απαίτηση εξηγείται και από τον Piaget σαν ένα κομμάτι ενός ανώτερου επιπέδου της γνωστικής διαδικασίας (Hall,2002).

5.4 Η χρήση των αλγορίθμων

Ο Matz (1979) θεωρεί ότι κατά τη διαδικασία επίλυσης μίας πρωτοβάθμιας εξίσωσης με έναν άγνωστο, χρησιμοποιούνται δύο διαδικασίες, «αφαίρεση (deduction)» και «αναγωγή (reduction)». Η διαδικασία της «αφαίρεσης» περιλαμβάνει την εκτέλεση της ίδιας διαδικασίας και στα δύο μέλη. Η διαδικασία της «αναγωγής», την αντικατάσταση μιας έκφρασης από μία άλλη ισοδύναμη. Για παράδειγμα

$$3x + 7 = 2x$$
$$3x + 7 - 2x = 2x - 2x \qquad \text{(αφαίρεση)}$$
$$x + 7 = 0 \qquad \text{(αναγωγή)}$$
$$x + 7 - 7 = 0 - 7 \qquad \text{(αφαίρεση)}$$
$$\chi = -7 \qquad \text{(αναγωγή)}$$

Ο αλγόριθμος της αφαίρεσης - αναγωγής μπορεί να μπερδέψει τους αρχάριους μαθητές της άλγεβρας. Ιδιαίτερα οι αδύναμοι μαθητές μπορεί να μπερδευτούν και να μην ξέρουν ποιο βήμα είναι αυτό που κάνουν κάθε φορά αλλά ούτε ποιο θα είναι το επόμενο. Ένας λόγος που οι μαθητές αποφεύγουν τις εξισώσεις είναι ότι βρίσκουν τον αλγόριθμο αυτόν πολύ δύσκολο. Η Hart(1981) ανέφερε « διδάσκουμε αλγορίθμους τόσο νωρίς...και θεωρούμε ότι οι μαθητές αν τους διδαχτούν μία φορά θα τους θυμούνται. Έχουμε όμως επαρκής αποδείξεις ότι είτε δεν τους θυμούνται είτε τους θυμούνται σε μια τέτοια μορφή που ποτέ δεν τη διδάχτηκαν» (Hall,2002).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.5 Λανθασμένη χρήση του συμβόλου =

Ένα από τα πιο συνηθισμένα λάθη που συναντάμε στην άλγεβρα είναι η λανθασμένη χρήση του συμβόλου της ισότητας. Το σύμβολο της ισότητας θα έπρεπε να διαβάζεται σε όλες του τις χρήσεις ως «είναι ισοδύναμο με». Μερικοί μαθητές θεωρούν ότι το ίσον (=) σημαίνει «και το επόμενο βήμα μου είναι» ή «αυτό συνεπάγεται ότι», το οποίο είναι λάθος.

Ας δούμε για παράδειγμα μια λανθασμένη χρήση του ίσον (=) :

λάθος : $\frac{3x}{2}=2=3x=4=x=\frac{4}{3}$

Το πρόβλημα στο παραπάνω παράδειγμα είναι ότι το σύμβολο του ίσον(=) κάποιες φορές χρησιμοποιείται ως «συνεπάγεται ότι» και κάποιες φορές «είναι ισοδύναμο με». Με λίγα λόγια ο μαθητής παραπάνω εννοεί :

$\frac{3x}{2}=2$ το οποίο συνεπάγεται $3x=4$ το οποίο συνεπάγεται $x=\frac{4}{3}$

Αυτό θα μπορούσε καλύτερα να παρουσιαστεί με τον ακόλουθο τρόπο με τον οποίο φαίνεται στο πλάι τι γίνεται σε κάθε βήμα.

$\frac{3x}{2}=2$

$3x=4$ πολλαπλασιάζω την ισότητα με το 2

$x=\frac{4}{3}$ λύνω ως προς χ.

Οι φράσεις αυτές δίπλα από κάθε βήμα βοηθάνε αυτόν που επιλύει την εξίσωση να ακολουθεί σωστά τη διαδικασία (McQuarrie, 2003).

5.6 Μια ταξινόμηση λαθών στις απλές γραμμικές εξισώσεις

Οι γραμμικές εξισώσεις αποτελούν ένα κεντρικό κομμάτι των μαθηματικών , ιδιαίτερα στις μικρότερες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Δεν εμφανίζονται μόνο σαν ένα ξεχωριστό κομμάτι αλλά αποτελούν και ένα αναπόσπαστο τμήμα σε αλγεβρικά, γεωμετρικά και τριγωνομετρικά προβλήματα. Ειδικά στη φυσική, όπως και σε άλλες επιστήμες, οι γραμμικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων. Για παράδειγμα, η πυκνότητα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ορίζεται ως το πηλίκο της μάζας προς τον όγκο. Ο ορισμός οδηγεί στην γραμμική εξίσωση d=m/v. Όμοια και η ταχύτητα (v=s/t), η επιτάχυνση (α=v/t), η ένταση (I=w/v) και πολλές άλλες έννοιες όπου οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις σε ένα πρόβλημα της φυσικής, από τον πραγματικό κόσμο. Με άλλα λόγια έχουν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά σαν εργαλείο. Παρακάτω παρουσιάζουμε μια ταξινόμηση των λαθών στις απλές γραμμικές εξισώσεις (Hall, 2002).

5.6.1 Το λάθος της διαγράφης (The Deletion Error)

Ένα λάθος που έχει συχνά παρατηρηθεί είναι η απλοποίηση που γίνεται σε μία παράσταση. Για παράδειγμα η παράσταση 2yz-2y να είναι ίση με 2z. Στην περίπτωση αυτή το 2yz-2y λανθασμένα εξισώνεται με το 2y + z – 2y = z.

Στην έρευνά τους σχετικά με τις διαδικασίες επίλυσης μιας εξίσωσης, οι Carry, Lewis και Bernard (1980) βρήκαν αυτό το είδος λάθους και το οποίο ονόμασαν «Το λάθος της διαγραφής» (The Deletion Error). Παρατήρησαν ότι αυτό ήταν το πιο διαδεδομένο από τα λάθη που έκαναν οι μαθητές όταν απλοποιούσαν εκφράσεις κατά την διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης. Συζητώντας αυτό το λάθος, ο Carry ανέφερε ότι κάποιοι μαθητές υπεργενικεύουν συγκεκριμένες μαθηματικές διαδικασίες φτάνοντας σε μία γενική διαδικασία απαλοιφής, η οποία συχνά παράγει λανθασμένα αποτελέσματα.

Το λάθος της διαγραφής του Carry εμφανίζεται και στον Matz, ο οποίος ανέφερε μια λίστα 33 λαθών στην άλγεβρα, και σαν 29^o αναφέρει την εξίσωση της παράστασης 3x+5=y+3 με την x+5=y (δηλαδή το 3x-3 γίνεται απλά x (Hall,2002).

5.6.2 Το λάθος της αντίστροφης πράξης (the other inverse error)

Στο λάθος αυτό για παράδειγμα η παράσταση 4x=1 γίνεται x=1-4. Στο παράδειγμα αυτό ο μαθητής αντί να κάνει την αντιστροφή του πολλαπλασιασμού έκανε μια άλλη αντιστροφή, της πρόσθεσης. Το λάθος της αντίστροφης πράξης είναι παρόμοιο με το λάθος της διαγραφής και ίσως και τα δύο παράγονται από τον ίδιο μηχανισμό. Θα συνέβαινε δηλαδή το ίδιο αν στην παράσταση 3x-3 ο μαθητής έκανε το λάθος της διαγραφής και μετέτρεπε την παράσταση σε x. Στην περίπτωση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αυτή, ο μαθητής βλέπει τους αριθμούς 3 και -3 σαν αντίθετους και τους διώχνει σαν να ήταν ο ένας δίπλα στον άλλον και να μην υπήρχε το x.

5.6.3 Το λάθος της αναδιανομής και της λανθασμένης πρόσθεσης στην ισότητα (The redistribution and switching addends error)

Όταν οι μαθητές προσπαθούν να εφαρμόσουν τη διαδικασία που έχουν διδαχτεί, κάνοντας το ίδιο και στα δύο μέλη μιας ισότητας, δύο βασικά λάθη εμφανίζονται.

- **Το λάθος της αναδιανομής**, όπου η εξίσωση $x+37=150$ θεωρείται ίδια με την x+37-10=150+10 .

- **το λάθος της πρόσθεσης** (switching addends error), όπου η παράσταση $x+37=150$ θεωρείται ότι έχει την ίδια λύση με την $x=37+150$.

Η Kieran (1984) στην έρευνά της βρήκε ότι οι μαθητές που κάνουν αυτά τα δύο λάθη είναι μαθητές που περισσότερο «μετακινούν» μηχανικά, παρά «δοκιμάζουν τιμές και βελτιώνουν». Οι μαθητές αυτοί δεν είναι σίγουροι για την δομή που υπάρχει πίσω από την ισότητα.

Τα παραπάνω εμφανίζονται και σε μία άλλη έρευνα. Ο Greeno (1982) τονίζει ότι οι αρχάριοι μαθητές της άλγεβρας συχνά δεν μπορούν να επαληθεύσουν μία λυμένη εξίσωση, παρά μόνο αν επαναλαμβάνουν συνεχώς την ίδια διαδικασία. Φαίνεται να έχουν άγνοια ότι η λύση μπορεί να μπει στη θέση του αγνώστου και να ελέγξουν αν επαληθεύει την αρχική εξίσωση(και γενικά κάθε εξίσωση στην αλυσίδα της επίλυσης). Αυτό συμφωνεί με την ιεραρχία του Bloom στην οποία ο έλεγχος/αξιολόγηση φαίνεται να είναι υψηλότερα στην σειρά των ικανοτήτων απ' ότι η εφαρμογή της διαδικαστικής γνώσης. Στην έρευνα του Greeno φαίνεται ότι οι αρχάριοι μαθητές έχουν έλλειψη της δομικής κατανόησης μιας γραμμικής εξίσωσης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Από ψυχολογική άποψη, φαίνεται ότι οι μαθητές υιοθετούνε δύο διαφορετικές στάσεις κατά τη διάρκεια της επίλυσης ενός προβλήματος. Αντιλαμβάνονται διαφορετικά ένα πρόβλημα κατά την επίλυση του και διαφορετικά κατά την επαλήθευση του. Παρουσιάζεται δηλαδή μια γνωστική ασυνέχεια στην μάθηση της άλγεβρας.

Για παράδειγμα, ένας μαθητής που έχει διδαχτεί να επιλύει μια εξίσωση με ένα συγκεκριμένο τρόπο τότε ακολουθεί την τεχνική της μετακίνησης ή μετάθεσης («the transposing technique»), και απορρίπτει την τεχνική της «δοκιμής και βελτίωσης» («trial and improvement»). Ο ίδιος μαθητής αναμένεται ότι για να επαληθεύσει το αποτέλεσμα θα επαναυιοθετήσει την τεχνική της «δοκιμής και βελτίωσης» και θα απορρίψει την τεχνική της μετάθεσης. Είναι σημαντικό ότι μέσω αυτής της γνωστικής σύγκρουσης ανάμεσα στην «τεχνική της μετάθεσης» και στην τεχνική της «δοκιμής και βελτίωσης», μπορούμε να εξάγουμε πολύτιμες πληροφορίες για το τη δυσκολία που εμφανίζουν οι μαθητές όταν πρέπει να υιοθετήσουν διαφορετικές προσεγγίσεις για διαφορετικούς σκοπούς μέσα στο ίδιο πρόβλημα (Hall,2002).

5.6.4 Το λάθος της μετατόπισης (The transposing error)

Υπάρχουν αποδείξεις που δείχνουν ότι πολλοί μαθητές που κάνουν μεταφορά από το ένα μέλος μιας εξίσωσης στο άλλο, δεν χειρίζονται την εξίσωση ως ένα μαθηματικό αντικείμενο, αλλά εφαρμόζουν τελείως τυφλά τον κανόνα «όταν αλλάζω μέλος, αλλάζω πρόσημο».

Έτσι λοιπόν, με βάση τα παραπάνω μια ισότητα που περιέχει παρονομαστή γίνεται $\frac{x}{2}+3=5 \Rightarrow x+3=10$ Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι μαθητές υπεργενικεύουν τον κανόνα που χρησιμοποιούν πολύ συχνά και που είναι απόλυτα σωστός σε απλές εξισώσεις όπως

$$\frac{x}{3}=3 \Rightarrow x=6$$

Οι μαθητές κατασκευάζουν έναν δικό τους μηχανισμό, τοποθετώντας τον παρονομαστή στο άλλο μέλος και θεωρώντας ότι αυτό μπορεί να γίνεται πάντα,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γιατί είναι κάτι που το χρησιμοποιούν πολύ συχνά. Αυτό επιβεβαιώνει τους Hiebert & Carpenter που υποστηρίζουν ότι οι μαθητές κατασκευάζουν την δική τους μαθηματική γνώση και δεν υιοθετούν πάντα αυτό που λέγεται από τους καθηγητές ή το βιβλίο.

Το πώς οι μαθητές κατασκευάζουν τη γνώση , εξαρτάται από τις προηγούμενές τους γνώσεις και την εμπειρία τους. Όπως αναφέρει και ο Ausubel «**Ο πιο σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει τη μάθηση είναι αυτό που ήδη ο μαθητής γνωρίζει**». Αυτό ίσως μας βοηθήσει να εξηγήσουμε τον μεγάλο αριθμό αυτού του λάθους που γίνεται από μεγαλύτερους μαθητές.

Ο Richard Hall στην έρευνά του, τονίζει ότι το λάθος της μετατόπισης είναι το πιο συχνό λάθος. Μια εξήγηση για αυτό είναι ότι οι μαθητές βρίσκουν ευκολότερο να μεταθέσουν απ' ότι να κάνουν το ίδιο και στα δύο μέλη μιας ισότητας. Μάλιστα ο κανόνας, «αλλάζω μέλος, αλλάζω πρόσημο» εξαιτίας της απλότητάς του, φαίνεται να έλκει περισσότερο τους λιγότερα καλούς μαθητές της άλγεβρας.

Οι ερευνητές φαίνεται όλο και περισσότερο να αποτρέπουν τους μαθητές από το να χρησιμοποιούν την μέθοδο της μετάθεσης(από το ένα μέλος στο άλλο) για δύο κυρίως λόγους

- Πρώτον, φαίνεται να μην υπάρχει κατανόηση από τους μαθητές που εφαρμόζουν την μετάθεση σχετικά με τη δομή και το νόημα της εξίσωσης.

- Δεύτερον, αυτή η έλλειψη κατανόησης, συνδέεται με την επιθυμία πολλών μαθητών να κάνουν τα πράγματα όσο το δυνατόν πιο απλά με αποτέλεσμα πολύ συχνά να υπεραπλουστεύουν τον κανόνα « όταν αλλάζω μέλος αλλάζω πρόσημο » (Hall,2002).

5.6.5 Το λάθος της εξάντλησης (Exhaustion error)

Το λάθος της εξάντλησης(Exhaustion error), είναι ένα λάθος που συμβαίνει στο τέλος μιας άσκησης. Οι ερευνητές παρατήρησαν ότι το λάθος αυτό συμβαίνει τόσο συχνά που μπορεί να αποτελέσει από μόνο του μια κατηγορία. Ας δώσουμε ένα παράδειγμα :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x+4}{x+1}=\frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)(x+1)}+\frac{(x+4)(x+2)}{(x+1)(x+2)}=$$

$$\frac{x^2+4x+3+x^2+6x+8}{(x+1)(x+2)}=\frac{2x^2+10x+11}{x^2+3x+2}=$$

$$\frac{10+11}{3}\ldots(\text{λάθη})..=7$$

Προφανώς ο μαθητής έχει απλοποιήσει το x^2, το x και το 2. Είναι σημαντικό εδώ να παρατηρήσουμε ότι το λάθος δεν έγινε στην αρχή της άσκησης, όπου υπήρχε η ευκαιρία να γίνει. Μερικοί λόγοι για τους οποίους οι μαθητές κάνουν το λάθος αυτό είναι

- Από την εμπειρία τους ξέρουν ότι η άσκηση δεν λύνεται σε ένα ή δύο βήματα (πολλοί μαθητές φαίνεται να δίνουν αυτή την εξήγηση).
- Θυμούνται το πρώτο βήμα σωστά επειδή έχουν χρησιμοποιήσει πολύ συχνά τη συγκεκριμένη διαδικασία.
- Όταν οι μαθητές φτάνουν στη μέση της άσκησης, συχνά χρησιμοποιούν δικές τους μεθόδους απλοποίησης(όπως να απλοποιούν έναν ίδιο αριθμό σε αριθμητή και παρονομαστή, χωρίς αυτός να είναι παράγοντας), απλά για να τελειώσουν την άσκηση.

Οι μαθητές εφαρμόζουν αλγεβρικούς κανόνες με έναν αντιφατικό τρόπο. Για πάρα πολλούς μαθητές η άλγεβρα παραμένει ένα αντικείμενο χωρίς νόημα, στο οποίο οι κανόνες εφαρμόζονται τυχαία στην προσπάθειά τους να ευχαριστήσουν τους εκπαιδευτικούς.

Το λάθος αυτό, να μεταφέρεις μια διαδικασία αρχικά σωστά και αργότερα λάθος, ονομάζεται λάθος εξάντλησης (Hall,2002).

5.6.6 Λανθασμένη εφαρμογή της αντίστροφης πράξης (The misuse of additive inverse error)

Το λάθος αυτό είναι ένα πολύ κοινό λάθος ιδιαίτερα σε αρχάριους μαθητές της άλγεβρας. Για παράδειγμα

$$x+6=9$$
$$x+6+6=9+6$$
$$x=15$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Το λάθος αυτό εμφανίζεται αρκετά επίμονα, ίσως γιατί δεν προκαλεί τη σύγκρουση μεταξύ νέας και υπάρχουσας γνώσης- σύμφωνα με τον Piaget μια τέτοια σύγκρουση κρίνεται απαραίτητη για τη μάθηση. Προκειμένου λοιπόν ο μαθητής να αναγνωρίσει ότι υπάρχει αυτή η σύγκρουση, θα πρέπει να δει ότι οι μέθοδος που ακολουθεί, παράγει αποτελέσματα που δεν ικανοποιούν την αρχική εξίσωση.

5.6.7 Το λάθος της παράλειψης (Omission error)

Παράδειγμα τέτοιου λάθους είναι

$$5x + x + 2 = 3x + 12$$
$$6x + 2 - 2 = 3x + 12$$

Το λάθος αυτό συμβαίνει συνήθως στη μέση της επίλυσης μιας εξίσωσης.

5.6.8 Το λάθος της διαίρεσης (Division error)

$$3x = 10$$
$$x = 3,1$$

Το λάθος της διαίρεσης μπορεί να μοιάζει ασήμαντο για την επίλυση μιας γραμμικής εξίσωσης. Όμως, καθώς τέτοιες διαιρέσεις είναι κυρίαρχες στις γραμμικές εξισώσεις, οι μαθητές έχουν συχνά δυσκολία να υπολογίσουν ένα πηλίκο που δεν είναι ακέραιος αριθμός.

5.6.9 Ανικανότητα απομόνωσης της μεταβλητής (Inability to isolate variable error)

Πολλές φορές οι μαθητές φτάνουν την εξίσωση στο σημείο 3x=10 και σταματούν εκεί. Υπάρχει δηλαδή μια αδυναμία των μαθητών να απομονώσουν την μεταβλητή της εξίσωσης. Το λάθος αυτό εμφανίζεται γιατί

1. Οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι πρέπει να διαιρέσουν και τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό. Οι μαθητές δεν βλέπουν ότι όπως μπορούν να

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

προσθέσουν και στα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό, μπορούν και να διαιρέσουν.

2. Μια δεύτερη εξήγηση είναι ότι οι μαθητές δεν κατανοούν ότι το 3x σημαίνει 3 φορές το x. Αυτή η αδυναμία να αναγνωρίσουν την πράξη του πολλαπλασιασμού εξηγεί και την αδυναμία των μαθητών να εφαρμόσουν την αντίστροφη πράξη, δηλαδή τη διαίρεση.

3. Μια τρίτη εξήγηση είναι ότι οι μαθητές ξέρουν ότι το 3x σημαίνει 3 φορές το x , αλλά δεν αντιλαμβάνονται ότι σε αυτό το σημείο, πρέπει να διαιρέσουν και τα δύο μέλη με το 3.

4. Μια τέταρτη εξήγηση είναι ότι φοβούνται μήπως κάνουν το λάθος στη διαίρεση και προτιμάνε να αφήσουν την άσκηση σε αυτό το σημείο.

5. Μια πέμπτη εξήγηση είναι ότι ο μπερδεύονται αφού περιμένουν μια ακέραια λύση, κάτι που έχουν συνηθίσει από άλλες εξισώσεις (Hall,2002).

Με βάση λοιπόν τις παραπάνω εξηγήσεις μπορούμε να πούμε ότι το λάθος ανικανότητας της απομόνωσης της μεταβλητής σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με το λάθος της διαίρεσης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συχνά λάθη στις γραμμικές εξισώσεις		
Λάθος Διαγραφής(Deletion error) $x+6=9$ $x+6+6=9+6$ $x=15$	**Λάθος της αναδιανομής (Redistribution error)** $5x+x+2=3x+12$ $5x+2-2x=2x+12-2x$ $3x+2+2=12-2$	**(Λανθασμένη πρόσθεση στην ισότητα)Switching Addends error** $5x+x+2=3x+12$ $6x+2=3x+12$ $9x=14$
Λάθος της εξάντλησης (Exhaustion error) $5x+x+2=3x+12$ $6x+2-2=3x+12-2$ $6x=3x+10$ $6x+3x=10$	**Λάθος της παράλειψης (Omission error)** $5x+x+2=3x+12$ $6x+2-2=3x+12$	**Λανθασμένη εφαρμογή της αντίστροφης πράξης(Misuse of Additive Inverse error)** $5x+x+2=3x+12$ $3x-3+2=12-3$ $x+2=9$
Ανικανότητα απομόνωσης μεταβλητής (Inability to isolate variable error) $3x=10$ $\kappa\varepsilon\nu\acute{o}$	**Λάθος της διαίρεσης (Devision error)** $3x=10$ $x=3{,}1$	**Το λάθος της αντίστροφης πράξης (The other inverse error)** $3x=1$ $x=1-3$
	Λάθος μετατόπισης (Transposing error) $\frac{x}{2}+3=5$ $x+3=10$	

Μερικοί καθηγητές ωθούν τους μαθητές όταν λύνουν την εξίσωση $2x+3=x+8$ να σκέφτονται ως εξής «θα μετακινήσω το 3 στο άλλο μέλος και θα του αλλάξω πρόσημο». Περιμένουν έτσι ότι οι μαθητές θα γράψουν $2x=x+8-3$. Η προσέγγιση αυτή όμως θεωρεί τα μαθηματικά σαν μια συλλογή μικρών, χωρίς νόημα κανόνων. Γιατί να μετακινήσουμε το 3 στο άλλο μέλος; Σίγουρα αν θέλουμε οι μαθητές να θεωρούν ότι τα μαθηματικά αποτελούνται από λογικές ενέργειες, θα ήταν καλύτερα να τους ενθαρρύναμε να σκέφτονται ως εξής «μπορώ να αφαιρέσω το 3 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης, χωρίς να αλλάξει η ισότητά μου». Αν οι μαθητές έχουν την εικόνα της ισορροπίας σε μία ισότητα, τότε θα μπορούν αμέσως να σκεφτούν την ιδέα της αφαίρεσης της ίδιας ποσότητας και από τα δύο μέλη(Hall,2002).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κεφάλαιο 6

Λάθη και παρανοήσεις στη γεωμετρία

Η σχολική γεωμετρία δεν είναι απλά η μελέτη των σχημάτων. Σύμφωνα με τον Freudenthal (1973), η γεωμετρία ασχολείται με το χώρο στον οποίο ζει, αναπνέει και κινείται το παιδί και τον οποίο πρέπει να γνωρίσει, να εξερευνήσει και να κατακτήσει προκειμένου να ζήσει καλύτερα μέσα σ' αυτόν (Κολέζα,2009).

Οι βασικότεροι σκοποί της διδασκαλίας της γεωμετρίας είναι η εξέλιξη της χωρικής γνώσης, της γεωμετρικής διαίσθησης και της ικανότητας οπτικοποίησης, η ανάπτυξη του συμπερασματικού λογισμού και της απόδειξης, αλλά και η μελέτη των αντικειμένων του χώρου· (δυσδιάστατων και τρισδιάστατων) (Jones,2000, Κολέζα,2009).

Η γεωμετρία θεωρείται ένα δύσκολο αντικείμενο για τους μαθητές μιας και εδώ δεν αρκούν οι μηχανικές διαδικασίες. Δεν υπάρχουν δηλαδή αλγόριθμοι τους οποίους μπορεί να εφαρμόσει ο μαθητής χωρίς να έχει κατανοήσει. Ενώ στην άλγεβρα κυριαρχεί η οργανωμένη σκέψη, στη γεωμετρία κυριαρχεί η οπτική σκέψη. Η γεωμετρική σκέψη είναι το σύνολο των γνωστικών διαδικασιών με τις οποίες ο μαθητής κατασκευάζει και διαχειρίζεται νοητικές αναπαραστάσεις των αντικειμένων του χώρου, των σχέσεων και των μετασχηματισμών τους (Κολέζα 2009).

Οι μαθητές συναντούν ένα πλήθος δυσκολιών κατά τη μάθηση της γεωμετρίας οι οποίες κυμαίνονται από την ορολογία και την ικανότητα αντίληψης του χώρου, μέχρι τη δημιουργία συλλογισμών και την κατασκευή αποδείξεων για τις διάφορες γεωμετρικές προτάσεις. Στις μικρότερες τάξεις, όπου διδάσκεται η περιγραφική ή πρακτική γεωμετρία, έρευνες δείχνουν ότι ενώ οι μαθητές μπορούν σχετικά εύκολα να αναγνωρίζουν γεωμετρικά σχήματα, δυσκολεύονται στη μάθηση των ιδιοτήτων τους καθώς επίσης και στην ειδική ορολογία που χρησιμοποιείται για την

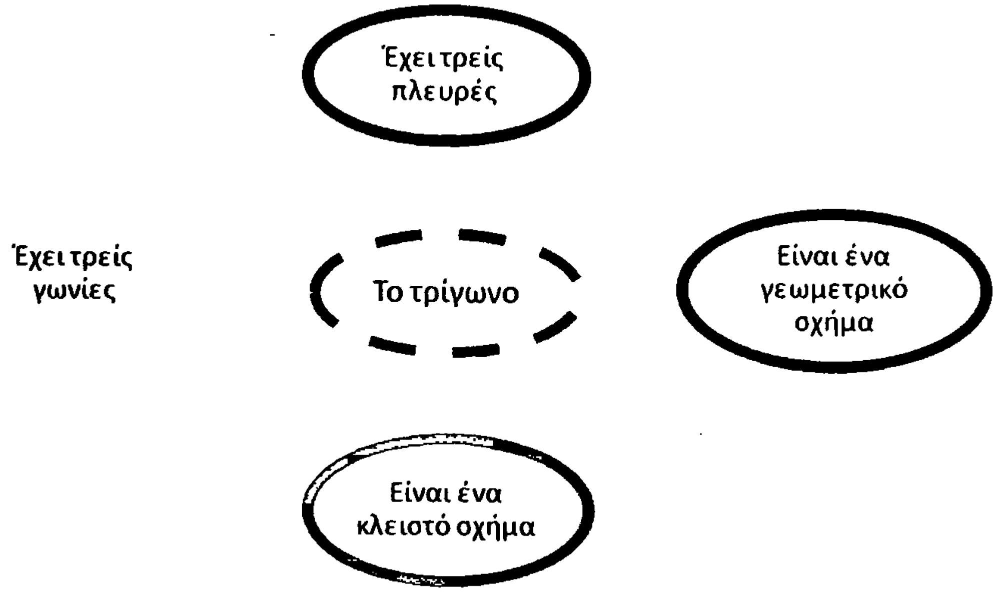
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

περιγραφή τους. Στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση οι μαθητές δυσκολεύονται να εφαρμόσουν τη θεωρία για την επίλυση ασκήσεων(Τούμασης,2002).

Η έννοια του γεωμετρικού σχήματος εμπεριέχει τρεις οντότητες: **τον ορισμό** (definition), **την εικόνα** (image) που στηρίζεται στην αισθησιο-αντιληπτική εμπειρία και **τη σχηματική έννοια** (figural concept). Για παράδειγμα ο κύκλος είναι μια σχηματική έννοια η οποία καθορίζεται πλήρως από έναν ορισμό. Αυτή η σχηματική έννοια διαμορφώνεται και εμπλουτίζεται σταδιακά από το σύνολο όλων των εικόνων (concept imagery), που έχουν συσχετισθεί στο νου ενός ατόμου σχετικά με αυτό το σχήμα (Κολέζα,2009).

Ορισμός τριγώνου

Στην έρευνα των Cutugno & Spagnolo (2002) οι μαθητές έδωσαν τις περιγραφές που φαίνονται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα όσον αφορά την έννοια του τριγώνου



Οι βασικές παρανοήσεις που είχαν οι μαθητές για την έννοια του τριγώνου ήταν :

- Το νοητικό σχήμα του τριγώνου ως : « αυτό που έχει ίσες πλευρές και γωνίες». Το 59% των μαθητών σχεδίαζαν ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

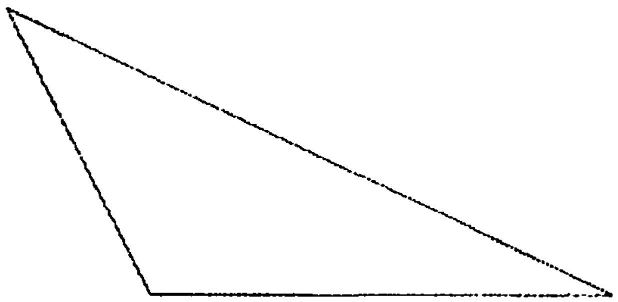
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

- Μία πολύ ισχυρή νοητική εικόνα, η οποία αφορούσε σχεδόν όλους τους μαθητές ήταν ότι η βάση του τριγώνου πρέπει να είναι οριζόντια (Cutugno & Spagnolo,2002).

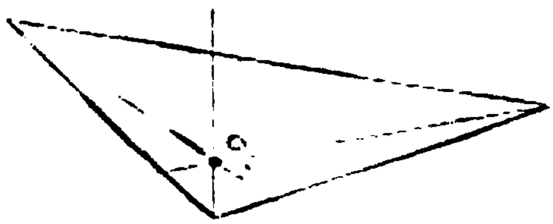
Ύψος τριγώνου

Στην έρευνα του Blanco (2001) σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο δόθηκε στους μαθητές η παρακάτω δραστηριότητα

- Όρισε το ύψος ενός τριγώνου
- Όρισε το ορθόκεντρο ενός τριγώνου
- Σχεδίασε το ορθόκεντρο στο διπλανό τρίγωνο



Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στην παραπάνω δραστηριότητα παρουσιάζει μια ενδιαφέρουσα αλληλοσυγκρουόμενη κατάσταση. Οι περισσότεροι μαθητές γράφουν σωστά τον ορισμό του ύψους ενός τριγώνου και του ορθόκεντρου. Σχεδιάζουν τα ύψη όμως λάθος και συνεπώς και το ορθόκεντρο. Για παράδειγμα στην παραπάνω δραστηριότητα σχεδιάζουν το ορθόκεντρο μέσα στο τρίγωνο όπως δείχνει η εικόνα 1



Εικόνα 1 . Φωτοτυπία της απάντησης ενός μαθητή στην δραστηριότητα 1 για το σχεδιασμό του ορθόκεντρου.

Το ενδιαφέρον είναι ότι οι μαθητές έχουν άγνοια της αναντιστοιχίας που παρουσιάζει η απάντησή τους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στην έρευνα των Cutugno & Spagnolo (2002) το δείγμα των μαθητών παρουσίασε τρείς βασικές παρανοήσεις όσον αφορά το ύψος

1. Το ύψος είναι μια κάθετη γραμμή. Αυτή η άποψη δεν επιτρέπει στους μαθητές να σχεδιάσουν το ύψος αν το τρίγωνο δεν έχει οριζόντια βάση. (Το 91% των μαθητών σχεδίασαν τρίγωνα με οριζόντια βάση)
2. Το ύψος πρέπει να σχεδιάζεται μέσα στο τρίγωνο.
3. Το ύψος πρέπει να χωρίζει την πλευρά σε δύο ίσα μέρη.

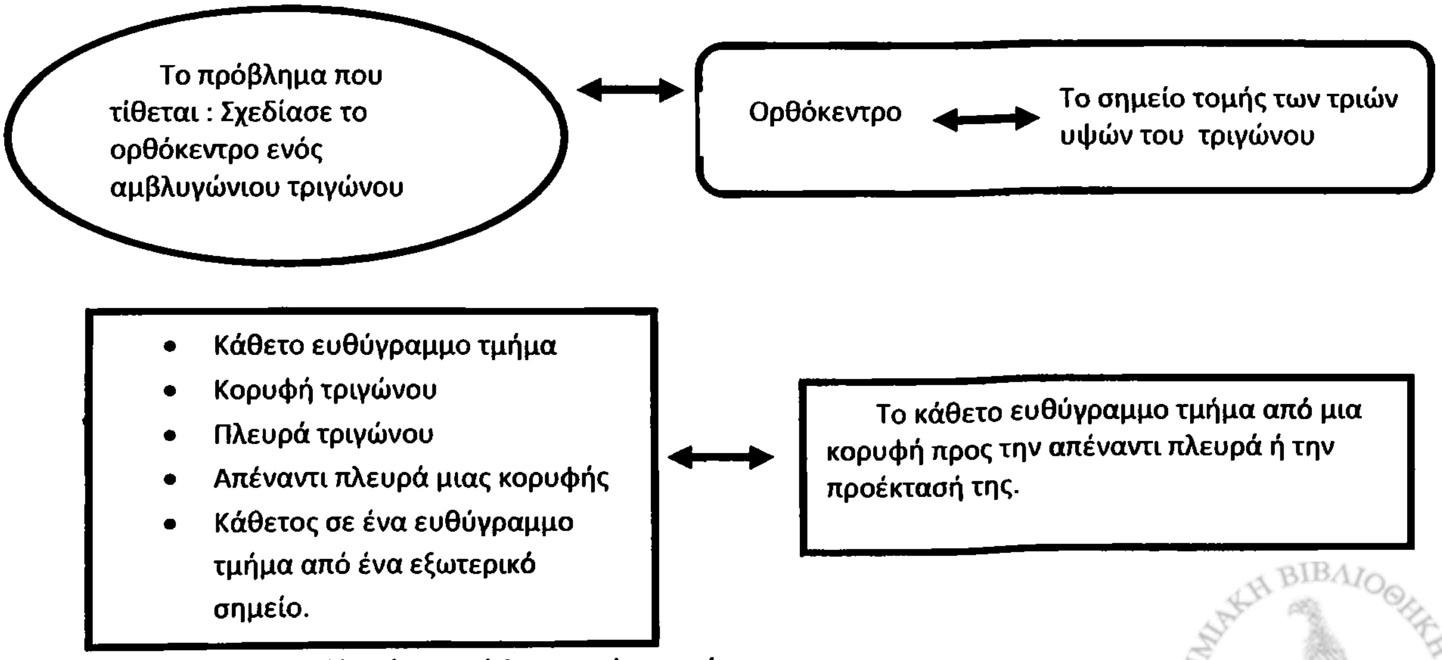
Τα παραπάνω ίσως να απορρέουν από το καθημερινό νόημα που έχει το ύψος (Cutugno & Spagnolo,2002).

Ανάλυση της κατάστασης. Ορισμός και αναπαράσταση μιας γεωμετρικής έννοιας

Η ανάλυση των παραπάνω καταστάσεων δείχνει ότι τα λάθη των μαθητών έχουν κοινά στοιχεία τα οποία αξίζει να έρθουν στην επιφάνεια.

Για να κατανοήσουμε μια κατάσταση με την οποία ερχόμαστε αντιμέτωποι, θα πρέπει να αναλύσουμε τις έννοιες που περιλαμβάνονται σε αυτήν την κατάσταση και τις διαφορετικές υποέννοιες από τις οποίες κατασκευάζονται αυτές οι έννοιες.

Παράδειγμα:



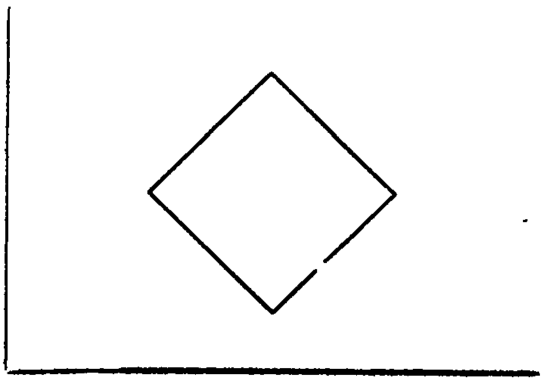
Εικόνα 2 : Μεταβλητές του ύψους ενός τριγώνου

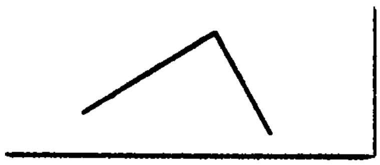
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έχοντας στο μυαλό τον χάρτη που παρουσιάζεται στην εικόνα 2, πρέπει οι μαθητές να αναγνωρίσουν καθεμία από τις έννοιες και τις υποέννοιες που αναφέρονται, δίνοντας έμφαση στην σωστή αναπαράσταση.

Παρατηρείται συχνά το γεγονός οι μαθητές να γράφουν σωστά τον ορισμό, αλλά η γραφική παράσταση να μη συμφωνεί με τον ορισμό. Η κατάσταση αυτή μας επιτρέπει να μιλήσουμε για διαφορά ανάμεσα στον **ορισμό** και την **αναπαράσταση** μιας έννοιας και συνεπώς ψάχνουμε για βαθύτερες νοητικές εικόνες οι οποίες σχετίζονται με την έννοια του ύψους του τριγώνου.

Δραστηριότητα : Αναγνώρισε το σχήμα





Εικόνα 3

Εικόνα 4

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το βασικότερο εμπόδιο για τη συγκρότηση της γεωμετρικής σκέψης είναι η τάση των μαθητών να αγνοούν τον ορισμό κάτω από την έντονη επίδραση που ασκούν οι ιδιαιτερότητες του σχήματος (Κολέζα, 2009)

Στο γεγονός αυτό οφείλεται η αδυναμία των μαθητών να αναγνωρίσουν το σχήμα της εικόνας 3 ως τετράγωνο ή να αναγνωρίσουν την ορθή γωνία της εικόνας 4.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συμπεράσματα-προτάσεις

Το λάθος και η αναζήτηση του λάθους είναι αναπόσπαστο κομμάτι της μαθηματικής έρευνας. Τα λάθη και οι αντιφάσεις πρέπει να έχουν το ρόλο τους μέσα στη σχολική τάξη και να αποτελούν κομμάτι της μαθηματικής διδασκαλίας. Αν στόχος μας είναι η βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης, η ασχολία με τα λάθη των μαθητών και η κατανόηση των παρανοήσεών τους είναι ένα πρώτο βήμα (Χαραλαμπίδου,2008).

Υπάρχει συνεπώς η ανάγκη να περάσουμε από τις πρακτικές τις παραδοσιακής διδασκαλίας, οι οποίες συνεχίζουν να εφαρμόζονται στην σχολική τάξη, στο διδακτικό μοντέλο της έρευνας, θεωρώντας τα μαθηματικά ως μια ανθρωπιστική επιστήμη και όχι σαν ένα σώμα το οποίο αποτελείται μόνο από κανόνες και τεχνικές. Μέσα σε ένα τέτοιο πλαίσιο είναι ανάγκη να δεχτούμε το λάθος ως εγγενές συστατικό της ανθρώπινης σκέψης και να περάσουμε από τη συνηθισμένη αντίληψη του λάθους ως αποτέλεσμα παρερμηνείας, στην αντίληψη ότι **το λάθος είναι γνώση** (Κολέζα,2009).

Στις έρευνες που καταγράψαμε αναφέρονται ως βασικότεροι λόγοι των λαθών και των παρανοήσεων στη διδασκαλία, ο τρόπος ο οποίος παρουσιάζεται μια έννοια στα σχολικά εγχειρίδια και ο τρόπος αξιολόγησης που δεν επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να έχουν μια σωστή εικόνα αυτού που έχει κατανοήσει ο μαθητής.

Ο Ausubel αναφέρει ότι «**Ο πιο σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει τη μάθηση είναι αυτό που ήδη ο μαθητής γνωρίζει**». Αυτό ίσως μας βοηθάει να εξηγήσουμε τα περισσότερα λάθη ιδιαίτερα στην άλγεβρα. Το λάθος δηλαδή σε πολλές περιπτώσεις είναι το αποτέλεσμα προηγούμενων γνώσεων οι οποίες δεν έχουν προσαρμοστεί στα καινούρια δεδομένα.

Οι περισσότερες έρευνες που αναφέρθηκαν στην εργασία αυτή, εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στην καταγραφή των λαθών και των παρανοήσεων [Yusof(2003) Graeber και Baker (1992), Rees και Barr (1984) Sadi(2007) κ.α],στις αιτίες που αυτά δημιουργούνται [Sadi (2007), Graeber και Campbell (1993) ,Gearhart κ.ά (1999) ,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Alcaro κ.ά (2000) (Yusof, 2003) κ.α], στον τρόπο που μπορούμε να τις ξεπεράσουμε[(Irwin(2001), Peled (2003), Swan (1983),Steinle (2004) (Yusof, 2003) κ.α] και στην ταξινόμηση που θα μπορούσαμε να κάνουμε στα λάθη σε συγκεκριμένου τομείς των μαθηματικών[Carry, Lewis και Bernard (1980), Hall(2002)].

Η εργασία όμως δίνει αφορμή για περαιτέρω έρευνα. Πέρα από την καταγραφή, τη «διάγνωση» και τη «θεραπεία» των λαθών, θα ήταν χρήσιμο να εξετάσουμε, με ποιόν τρόπο μπορούμε να αξιοποιήσουμε διδακτικά αυτά τα λάθη και τις παρανοήσεις.

Δύο προτάσεις τέτοιας διδακτικής αξιοποίησης των λαθών κάνουν η Borasi(1996) και ο Swan(2001) τις οποίες αναφέρουμε παρακάτω :

Διδακτικό σενάριο 1

Η Borasi (1996) δίνει ένα παράδειγμα για το πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα λάθη ως αφετηρία για έρευνα.

Όταν οι μαθητές μαθαίνουν αρχικά να προσθέτουν κλάσματα, συχνά κάνουν το λάθος να προσθέτουν αριθμητές και παρονομαστές ξεχωριστά, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα :

$$\frac{3}{4}+\frac{6}{7}=\frac{9}{11} \qquad \frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{7}{10}$$

Στην βιβλιογραφία της διδακτικής των μαθηματικών έχει δοθεί μεγάλη προσοχή στο παραπάνω λάθος εξαιτίας της μεγάλης συχνότητάς του αλλά και των πολλών αιτιών που μπορούν να οδηγήσουν στο λάθος αυτό.

Τι μπορούμε να κάνουμε λοιπόν όταν ένα τέτοιο λάθος συμβεί ;

Σε μια πρώτη φάση, να προσπαθήσουμε να το κατανοήσουμε:

Υπάρχουν άλλες πράξεις με κλάσματα στις οποίες οι αριθμητές και οι παρονομαστές λειτουργούν ως ξεχωριστές οντότητες; (ναι, στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση).

Υπάρχουν καταστάσεις στην πραγματικότητα οι οποίες περιγράφονται με αυτόν τον τρόπο πρόσθεσης; (ναι, αν ο ρητός δεν είναι κλάσμα, αλλά λόγος)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Το πρώτο ερώτημα μας οδηγεί να υποθέσουμε μια εσφαλμένη γενίκευση εκ μέρους των μαθητών του αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού. Οπότε, με κατάλληλες δραστηριότητες μπορούμε να επιχειρήσουμε την αποσαφήνιση.

Η δεύτερη ερώτηση, έχει θετική απάντηση $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)$ στην περίπτωση των λόγων. Για παράδειγμα :

- Στο Baseball : Αν ένας παίχτης πετύχει με το ρόπαλο 3 χτυπήματα στις 4 φορές σε ένα παιχνίδι και 6 χτυπήματα στις 7 φορές σε ένα άλλο παιχνίδι τότε συνολικά ο μέσος όρος του είναι 9 στα 11 (και όχι $\frac{45}{28}$ που θα ήταν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των κλασμάτων $\frac{3}{4}$ και $\frac{6}{7}$).
- Στα αποτελέσματα ενός παιχνιδιού : Αν κέρδισα 2 από τα 3 παιχνίδια χθες και 5 από τα 7 παιχνίδια σήμερα, συνολικά έχω κερδίσει 7 παιχνίδια από τα 10 (και όχι $\frac{29}{21}=\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$).

Από τη στιγμή που αντιλαμβανόμαστε ότι τα κλάσματα και οι λόγοι είναι ξεχωριστές μαθηματικές οντότητες έχει ενδιαφέρον να εξετάσουμε λεπτομερέστερα ποιες είναι οι διαφορές τους και τι είδος του «αριθμητικού συστήματος» αποτελούν οι λόγοι;

Συγκεκριμένα:

- Πότε δύο λόγοι θεωρούνται ίσοι;
- Πως ορίζονται οι πράξεις σε αυτό το σύστημα;
- Θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε περισσότερο αυτό το σύστημα; π.χ θα είχε νόημα να μιλήσουμε για «αρνητικούς» λόγους;

Οι ερωτήσεις αυτές μας οδηγούν στη δημιουργία ενός νέου συστήματος αριθμών, κάτι που και στο παρελθόν πρέπει να είχαν κάνει και οι μαθηματικοί όταν συνέλαβαν την ιδέα «νέων» αριθμών όπως οι αρνητικοί, οι άρρητοι, οι φανταστικοί κτλ. Αυτό το δημιουργικό επιχείρημα μπορεί να μας φέρει μπροστά σε εκπλήξεις(όπως να αντιληφθούμε ότι οι λόγοι δεν μπορούν να διαταχθούν εύκολα,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ή το γεγονός ότι ενώ το 0/0 δεν ορίζεται στα κλάσματα, το 0:0 στους λόγους έχει νόημα). Αυτά τα μη αναμενόμενα αποτελέσματα μας καλούν να επανεξετάσουμε τις ιδιότητες ενός συστήματος αριθμών που θεωρούσαμε ως δεδομένο (Borasi,1996).

Στην διαδικασία κατά την οποία προσπαθούμε να παρουσιάσουμε συγκεκριμένες πράξεις με λόγους ή να κατανοήσουμε καλύτερα και να συνδέσουμε τα αποτελέσματα σχετικά με τους νέους αυτούς «αριθμούς» προκύπτουν κάποια ερωτήματα όπως :

- Ποιο είναι το νόημα του πολλαπλασιασμού σε διάφορα αριθμητικά συστήματα;
- Πως ορίζεται η διάταξη σε αυτό το αριθμητικό σύστημα; Υπάρχουν κάποια αριθμητικά συστήματα στα οποία δεν ισχύει η διάταξη;
- Πως ένα υπάρχον αριθμητικό σύστημα μπορεί να επεκτείνεται επιτυχώς από τους μαθηματικούς και γιατί;

Συνειδητοποιώντας ότι αυτό που αρχικά θεωρείται εμφανώς λάθος ίσως να είναι αποδεκτό κάτω από διαφορετικά δεδομένα, μπορεί να γεννηθούν οι παρακάτω ερωτήσεις σχετικά με τους μαθηματικούς κανόνες και τα μαθηματικά αποτελέσματα.

- Υπάρχουν άλλες περιπτώσεις στα μαθηματικά που κάτι είναι σωστό και λάθος την ίδια στιγμή;
- Πώς μπορούμε να αποφασίσουμε πότε ένας δοσμένος κανόνας είναι σωστός ή λάθος στα μαθηματικά; Είναι πάντα δυνατόν να το κάνουμε;
- Μπορεί το ίδιο σύμβολο στα μαθηματικά να σημαίνει διαφορετικά πράγματα; Αν ναι γιατί;

Παρατηρούμε πως όλες αυτές οι ερωτήσεις περιλαμβάνουν όχι τόσο τεχνικές διερευνήσεις αλλά συλλογισμούς και συζητήσεις σχετικά με τη φύση των μαθηματικών. Όλα αυτά τα ερωτήματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά για την αποσαφήνιση συνηθισμένων παρανοήσεων που έχουν οι μαθητές σχετικά με τη φύση των μαθηματικών, οι οποίες έχουν προκαλέσει απροθυμία και δυσαρέσκεια απέναντι στα μάθημα των μαθηματικών (Borasi,1996).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Διδακτικό σενάριο 2

Ο Malcolm Swan για πάνω από 20 χρόνια δούλευε μαζί με συναδέλφους του μια μεθοδολογία διδασκαλίας που την ονόμαζαν " διαγνωστική διδασκαλία". Στη μέθοδο αυτή οι ιδέες και οι μέθοδοι των μαθητών αναγνωρίζονται και συζητούνται πριν γίνει η διδασκαλία. Οι παρανοήσεις που αποκαλύπτονται χρησιμοποιούνται ώστε να δημιουργηθεί σύγκρουση και να γίνει συζήτηση με μικρές ομάδες . Ο βασικός σκοπός της διδακτικής αυτής μεθόδου είναι να διαλευκάνει τις παρανοήσεις των μαθητών και προτείνει τον ανάλογο διδακτικό σχεδιασμό για το σκοπό αυτό .

Οι βασικές αρχές από τη "διαγνωστική διδασκαλία" είναι :

1. **Πριν τη διδασκαλία, ο εκπαιδευτικός πρέπει να αξιολογήσει το εννοιολογικό πλαίσιο των μαθητών.**

   Συνήθως οι εκπαιδευτικοί αξιολογούν τους μαθητές με "τεστ" στο τέλος της διδασκαλίας. Εδώ γίνεται προσπάθεια να αξιολογηθούν οι διαισθητικές ερμηνείες και μέθοδοι των μαθητών πριν τη διδασκαλία. Αυτό γίνεται θέτοντας μερικές ερωτήσεις κρίσεως. Γίνεται επίσης προσπάθεια να μιλήσουμε στους μαθητές σχετικά με το σκεπτικό που χρησιμοποίησαν στην άσκηση. Αυτό γίνεται με ζευγάρια μαθητών έτσι ώστε οι εξηγήσεις να προκύπτουν με έναν φυσικό τρόπο.

2. **Ο εκπαιδευτικός κάνει τις υπάρχουσες έννοιες και τις μεθόδους σαφείς στην τάξη.**

   Στο ξεκίνημα του μαθήματος ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές ένα πρόβλημα το οποίο εστιάζει σε ένα γνωστό εννοιολογικό εμπόδιο. Αυτό έχει σαν σκοπό να κάνει τους μαθητές να εκφράσουν τις δικές τους διαισθητικές ερμηνείες και μεθόδους και να πράξουν τα συνηθισμένα τους λάθη και τις παρανοήσεις. Ζητείται από τους μαθητές να προσπαθήσουν να επιλύσουν το πρόβλημα μόνοι τους, χωρία καμιά βοήθεια από τον εκπαιδευτικό. Σε αυτό το στάδιο δεν γίνεται καμιά προσπάθεια από τον εκπαιδευτικό να διδάξει οτιδήποτε καινούριο ή να κάνει τους μαθητές να γνωρίσουν τα λάθη τους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3. **Ο εκπαιδευτικός παραθέτει προς σύγκριση μεθόδους και αποτελέσματα και προσπαθεί να προκαλέσει καταιγισμό ιδεών.**

Αυτό μπορεί να γίνει με έναν από τους παρακάτω τρόπους.

- Ζητώντας από τους μαθητές να συγκρίνουν τις απαντήσεις τους με αυτές άλλων μαθητών.
- Ζητώντας από τους μαθητές να επαναλάβουν τις δραστηριότητες χρησιμοποιώντας μία ή περισσότερες εναλλακτικές μεθόδους.
- Χρησιμοποιώντας λυμένες δραστηριότητες τις οποίες μπορούν τα ίδια τα παιδιά να επαληθεύσουν.

Αν το πρόβλημα είναι καλά σχεδιασμένο, αυτή η ανάδραση συχνά παράγει μια γνωστική σύγκρουση καθώς οι μαθητές αρχίζουν να αντιλαμβάνονται και να αντιμετωπίζουν της ανακολουθίες μόνοι τους. Αφιερώνεται χρόνος σε ομάδες για να συζητήσουν τη φύση της «σύγκρουσης». Ζητείται από τους μαθητές να περιγράψουν τις ανακολουθίες και πιθανόν τις αιτίες των λαθών.

4. **Ο εκπαιδευτικός λύνει τη «διαμάχη» μέσω συζήτησης και διατυπώνει νέες έννοιες και μεθόδους.**

Ακολουθεί μια συζήτηση. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να μιλήσουν για τις απόψεις τους σε μια μη κριτική ατμόσφαιρα και ανασχηματίζουν τις ιδέες τους.

5. **Ο εκπαιδευτικός ενισχύει τη μάθηση κάνοντας χρήση νέων εννοιών και μεθόδων μέσω της επίλυσης προβλημάτων.**

- Προσφέροντας περισσότερα προβλήματα για μελέτη.
- Καλώντας τους μαθητές να δημιουργήσουν και να επιλύσουν τα δικά τους προβλήματα χωρίς να τους δεσμεύεις.
- Ζητώντας από τους μαθητές να αναλύσουν μια ολοκληρωμένη άσκηση και να βρουν τις αιτίες των λαθών μόνοι τους.

Έρευνες έχουν δείξει ότι αν και οι παραδοσιακή αλλά και η διαγνωστική διδασκαλία επιτυγχάνουν βραχυπρόθεσμα κέρδη, μόνο η διαγνωστική διδασκαλία επιτυγχάνει σημαντικά μακροπρόθεσμα κέρδη. Η μεγάλη αποτελεσματικότητα της μεθόδου συζήτησης ίσως οφείλεται σε μερικούς παράγοντες όπως :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

- Η αναγνώριση αλλά και η εστίαση σε συγκεκριμένα εννοιολογικά εμπόδια.
- Η έμφαση στην προφορική παρά στην γραπτή δικαιολόγηση.
- Το αυξημένο επίπεδο των προκλήσεων που προσφέρονται.
- Η ένταση της συζήτησης και η εμπλοκή που δημιουργείται.
- Η αξία που δίνεται στις διαισθητικές μεθόδους.

Πολλές έρευνες που έχουν γίνει έδειξαν ότι οι συγκρουσιακή συζήτηση μπορεί να είναι πιο αποτελεσματική απ' ότι άλλες μέθοδοι διδασκαλίας(Swan, 2001).

Μετά τις δύο αυτές διδακτικές προτάσεις αξιοποίησης των λαθών και των παρανοήσεων ανακύπτουν ερωτήματα όπως:

- Πως πρέπει να σχεδιαστεί ένα αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών ώστε να επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να εστιάσει στα λάθη των μαθητών και να τα αξιοποιήσει διδακτικά;
- Το ίδιο το σημερινό πρόγραμμα σπουδών, με τον περιορισμό του χρόνου και την πίεση της ύλης επιτρέπει στον εκπαιδευτικό μια τέτοια προσέγγιση;

Επίλογος

Συνοπτικά θα λέγαμε ότι η ενασχόληση του μαθητή με το λάθος μπορεί να προκαλέσει κριτική σκέψη, στοχασμό, έρευνα και μεταγνώση. Τα λάθη μπορούν να αποτελέσουν ένα ισχυρό εργαλείο διάγνωσης των μαθησιακών δυσκολιών ενώ ο εκπαιδευτικός γνωρίζοντας τα τυπικά λάθη των μαθητών και τους λόγους για τους οποίους αυτά δημιουργήθηκαν, μπορεί να κατανοήσει ευκολότερα τους στόχους της διδασκαλίας του (Hall,2002).

Η επεξεργασία του λάθους δεν αποτελεί μόνο ένα χρήσιμο παιδαγωγικό εργαλείο, αλλά αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό και της ίδιας της ανάπτυξης της επιστημονικής γνώσης. Για αυτούς τους λόγους είναι χρήσιμο οι εκπαιδευτικοί να παροτρύνουν τους μαθητές να επωφεληθούν από τα λάθη τους και να τα δουν σαν ευκαιρίες μάθησης(Borasi,1996). Όπως τονίζει ο Papert « η διαδικασία διόρθωσης του σφάλματος είναι ένα βασικό τμήμα της διεργασίας κατανόησης του προβλήματος». Εξάλλου, « Όποιος ασχολείται με την επιστήμη ξέρει καλά ότι η δύναμή του δεν προέρχεται από το αλάνθαστο, αλλά αντίθετα από την ικανότητά του για συνεχή αυτοδιόρθωση» (Cipra,1985)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Βιβλιογραφία

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Bachelard, G (1934/1984). The New Scientific Spirit. Boston: Beacon Books.

[2] Borasi, R. (1996). *Reconveining mathematics instruction : A focus on errors.* Norwood, NJ : Ablex publishing corporation.

[3] Blanco, L.J.(2001). *Errors in the teaching/learning of basic concepts of Geometry misconceptions* [Electronic Version]. Retrieved 10/09/2009 from http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/lberrgeo.pdf

[4] Brousseau,G.(1997). *Theory of didactical situations in mathematics : Didactique des mathematics,1970-1990* (N.Balacheff, M.Cooper, R.Sutherland & V. Warfield, Trans & Ed). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

[5] Cutugno,P & Spagnolo,F.(2002). Misconceptions about triangle in Elementary school.

[6] Dewey,J.(1933). How we think. Boston. MA: D.C.Health.

[7] Ernest,P.(1996). *The nature of mathematics and teaching.* Philosophy of mathematics education, 9.

[8] Hall, R.(2002). *An analysis of errors made in solutions of simple linear equations.* Philosophy of mathematics education journal ,15.

[9] Irwin, K.C.(1999). *Difficulties with Decimals And using everyday Knowledge to Overcome Them.* Research information for teachers, 2, 1-4.

[10] Jones, K. (2000), *Critical Issues in the Design of the Geometry Curriculum. In*: Bill Barton (Ed), Readings in Mathematics Education. Auckland, New Zealand: University of Auckland (pp. 75-90).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

[11] Kline,M.(1980). Mathematics: The loss of certainty. New York: Oxford University Press.

[12] Kuhn,T.(1970).The structure of scientific revolutions. Chicago: The University of Chicago Press.

[13] Lakatos,I(1976). *Αποδείξεις και ανασκευές Η λογική της μαθηματικής ανακάλυψης*, Αθήνα, εκδ Τροχαλία

[14] Lakatos,I.(1978). *Mathematics, science and epistemology,* Cambridge university press

[15] Leu,Y.-C., & Wu,C.-J.(2005). *Investigation on an elementary teacher's mathematics pedagogical values through her approach to students' errors.* Paper presented at the 29th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education.

[16] Melis,E.(2004). Erroneous Examples as a Source of Learning in Mathematics. CELDA 2004: 311-318

[17] Olivier,A.(1989).*Handling pupil's misconceptions* [Electronic Version]. Retrieved 28/01/2009 from http://www.sun.ac.za/mathed/MALATI/Files/Misconceptions.pdf

[18] Peirce,C.S.(NEM). The new elements of mathematics by Charles S.Peirce, I-IV(1976),Mouton/Humanities,N.J: The Hague-Paris/Atlantic Highlands.

[19] Piaget,J.(1970). Genetic Epistemology. New York: W.W.Norton.

[20] Sadi, A.(2007). Misconceptions in numbers. UGRU journal,5.

[21] Sierpinska,A. (1994).Understanding in mathematics. London: The Falmer Press.

[22] Stacey, K., Helme, S. & Steinle, V. (2001). Confusions between decimals, fractions and negative numbers: A consequence of the mirror as a conceptual metaphor in three different ways. In M. van de Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 4, (pp. 217-224). Utrecht: PME

[23] Steinle, V. (2004). Detection and Remediation of Decimal Misconceptions. In B. Tadich, S. Tobias, C. Brew, B. Beatty, & P. Sullivan

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(Eds.), ***Towards Excellence in Mathematics*** (pp. 460-478). Brunswick: The Mathematical Association of Victoria.

[24] Swan, M. (2001). Dealing with Misconceptions in Mathematics. In P. Gates (Ed.), ***Issues in Mathematics Teaching.*** London: RoutledgeFalmer (pp. 147-165).

[25] Yusof, J.(2003). Mathematical errors in fractions work : A longitudinal study of primary level pupils in Brunei [Electronic Version]. Retrieved in 18/12/2008 from http://adt.curtin.edu.au/theses/available/adtWCU20040812.091203/unrestricted/01Front.pdf

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[26] Δρίβα,Α.(2005). *Δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της συνάρτησης*, Διπλωματική, Αθήνα.

[27] Κολέζα,Ε.(2006). *Μαθηματικά και σχολικά μαθηματικά Επιστημολογική και κοινωνιολογική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης*, Αθήνα, εκδ Ελληνικά Γράμματα.

[28] Κολέζα,Ε.(2009). Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών, Αθήνα, εκδ Τόπος.

[29] Ντούγιας,Σ.(1998). Απειροστικός λογισμός 1,Ιωάννινα,εκδ Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

[30] Οικονόμου,Π.(1984). Η αντιμετώπιση του λάθους από τον καθηγητή των μαθηματικών, Μαθηματική Επιθεώριση,27(6),79-94

[31] Παντελέων,Γ. (2004). *Η σημασία του λάθους στην ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης και στη διδακτική*, Αθήνα, διπλωματική εργασία.

[32] Τουμάσης ,Μ.(2002). Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών, Αθήνα, εκδ Gutenberg.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

[33] Χαραλαμπίδου,Γ.(2008). Η χρήση των λαθών για μια αλάνθαστη διδασκαλία και στις τρεις βαθμίδες εκπαίδευσης, Αθήνα, Διπλωματική εργασία.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ