

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000265788



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

(18)
ΜΠΛΕ

«Επίλυση προβλήματος και σχολικά μαθηματικά»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπων καθηγητής: Ευγενία Κολέζα

Μεταπτυχιακός φοιτητής: Νικόλαος Τσεκούρας

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2008



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	3
ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	4
ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ	5
ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	7
ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΠΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	9
ΕΠΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	10
ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	13
ΕΠΙΛΟΓΗ "ΚΑΛΩΝ" ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ	52
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΕΠΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	53
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ	54
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ	55
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	87



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όταν οι μαθητές αδυνατούν να λύσουν ένα πρόβλημα, οι γονείς συχνά τους κατηγορούν ότι δεν δίνουν την απαιτούμενη προσοχή στην τάξη "σίγουρα ο δάσκαλος σας έδειξε πώς να δουλέψετε το πρόβλημα!" Πώς μπορούν οι γονείς, οι μαθητές, οι συνάδελφοι, και το κοινό να ενημερωθούν περισσότερο σχετικά με τη γνήσια επίλυση προβλήματος; Πώς μπορώ ως δάσκαλος να βοηθήσω τους μαθητές και τους γονείς τους να καταλάβουν τι είναι η πραγματική κατανόηση των μαθηματικών;

Έχουν περάσει τουλάχιστον δυο δεκαετίες από τότε που πολλά κράτη καθιέρωσαν στα προγράμματα σπουδών τους την επίλυση προβλήματος ως επίκεντρο της εκπαίδευσης των μαθηματικών. Προσδιόρισαν ως κεντρικό στόχο της εκπαίδευσης μαθηματικών τη δυνατότητα ενός ατόμου να εξερευνήσει, να υποθέσει, και να συλλογιστεί λογικά, καθώς επίσης και τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν ποικίλες μαθηματικές μέθοδοι για να λυθούν αποτελεσματικά τα μη στερεότυπα προβλήματα. (National Council of Teachers of Mathematics "NCTM", 1989)

Η μετατόπιση από τη διδασκαλία με μαθηματικά γεγονότα στη διδασκαλία με έμφαση στις μαθηματικές έννοιες και τις δεξιότητες σκέψης είναι αργή και δύσκολη. Πολλοί δάσκαλοι δεν είναι πεπεισμένοι ότι οι παραδοσιακές μέθοδοι πρέπει να εγκαταλειφθούν. Από εκείνους που θέλουν να αλλάξουν, πολλοί είναι αβέβαιοι για το πώς θα γίνει αυτό.

Επιπλέον αυτό που περιπλέκει το ζήτημα είναι μια έλλειψη συναίνεσης για αυτό που εννοούμε επίλυση προβλήματος και πώς αυτή διδάσκεται και αξιολογείται καλύτερα.

Αναφέρονται στοιχεία, τα οποία οι δάσκαλοι μπορούν να δώσουν στους μαθητές τους για να υποστηρίξουν τις προσπάθειες επίλυσης προβλήματος. Επίσης, σημεία εστίασης τα οποία μπορούν να βοηθήσουν τους δασκάλους να αξιολογήσουν την απόδοση των μαθητών όσον αφορά ουσιαστικά γνωρίσματα της επίλυσης προβλήματος.

Αυτά τα ζητήματα είναι το θέμα της εργασίας. Μέσω μιας ανασκόπησης των ερευνών και της βιβλιογραφίας σχετικά με τις αποτελεσματικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, παρέχεται μια επισκόπηση της έννοιας και της θέσης της επίλυσης προβλημάτων στα σχολικά μαθηματικά.



ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Μια από τις τεκμηριώσεις της επίλυσης προβλήματος είναι οι αρχές και τα πρότυπα για τα σχολικά μαθηματικά (Εθνικό Συμβούλιο των δασκάλων των μαθηματικών [NCTM] 2000). Σε αυτή τη δημοσίευση, η επίλυση προβλήματος "είναι ένα αναπόσπαστο τμήμα όλης της εκπαίδευσης των μαθηματικών και επομένως δεν πρέπει να είναι ένα απομονωμένο μέρος του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών" (NCTM, 2000, σελ. 52). Δεδομένου ότι έχει δοθεί μια τόσο εξέχουσα θέση στην επίλυση προβλήματος, είναι απαραίτητο να υπάρξει μια κατανόηση του τι είναι μαθηματικό πρόβλημα.

Σύμφωνα με τον Kantowski (1977)

ένα άτομο βρίσκεται αντιμέτωπο με ένα πρόβλημα όταν αντιμετωπίζει μια ερώτηση που δεν μπορεί να απαντήσει ή μια κατάσταση που είναι ανίκανος να επιλύσει χρησιμοποιώντας τη διαθέσιμη γνώση. Έπειτα πρέπει να σκεφτεί έναν τρόπο για να χρησιμοποιήσει τις πληροφορίες που είναι στη διάθεσή του για να φθάσει στο στόχο, τη λύση του προβλήματος (σελ. 163).

Ο συντάκτης διαφοροποιείται μεταξύ ενός προβλήματος και μιας άσκησης. Σε αντίθεση με την άσκηση στην περίπτωση ενός προβλήματος, ο αλγόριθμος που θα οδηγήσει στη λύση δεν είναι διαθέσιμος.

Ο Mervis (1978) καθορίζει ένα πρόβλημα ως "ερώτηση ή κατάσταση που είναι δύσκολο να αντιμετωπιστεί και δεν έχει λυθεί" (σελ. 270).

Ο Lester (1980) λέει ότι "ένα πρόβλημα είναι μια κατάσταση στην οποία ένα άτομο ή μια ομάδα καλείται να εκτελέσει έναν στόχο για τον οποίο δεν υπάρχει κανένας προσιτός αλγόριθμος που να καθορίζει εντελώς τη μέθοδο επίλυσης" (Lester, 1980, σελ. 287).

Ο Buchanan (1987) καθορίζει τα μαθηματικά προβλήματα ως "μη στερεότυπα προβλήματα που απαιτούν για τη λύση τους κάτι περισσότερο από δοσμένες διαδικασίες ή αλγορίθμους" (σελ. 402).

Ο McLeod (1988) καθορίζει τα προβλήματα ως "εκείνους τους στόχους όπου η λύση ή ο στόχος δεν είναι αμέσως εφικτός και δεν υπάρχει κανένας προφανής αλγόριθμος για να χρησιμοποιήσει ο μαθητής" (σελ. 65).

Σύμφωνα με τους Blum και Niss (1991), ένα πρόβλημα είναι μια κατάσταση που έχει ορισμένες ανοικτές ερωτήσεις που "προκαλούν κάποιον διανοητικά ο οποίος δεν κατέχει άμεσες μεθόδους, διαδικασίες και αλγορίθμους, στο βαθμό που να μπορεί να απαντήσει στην ερώτηση" (σελ. 37).

Κατά συνέπεια ένα πρόβλημα είναι σχετικό με τα άτομα, δηλαδή αυτό που αποτελεί πρόβλημα για ένα άτομο μπορεί να είναι απλά μια άσκηση για κάποιον άλλο. Κοινό στοιχείο στους ορισμούς Kantowski, Lester, Buchanan, McCleod, Blum και Niss είναι ότι δεν υπάρχει κανένας γνωστός αλγόριθμος για να λυθεί ένα πρόβλημα. Ο λύτης προβλήματος πρέπει να σχεδιάσει μια μέθοδο λύσης.

Στο *Becoming a better problem solver 1* (Ohio Department of Education, 1980), δηλώνεται ότι ένα μαθηματικό πρόβλημα έχει τέσσερα στοιχεία:

1. Μια κατάσταση που περιλαμβάνει δεδομένα και έναν επιθυμητό στόχο.
2. Η κατάσταση πρέπει να περιλαμβάνει τα μαθηματικά.
3. Ένα πρόσωπο πρέπει να επιθυμήσει τη λύση.
4. Πρέπει να υπάρξει κάποια παρεμπόδιση μεταξύ των δεδομένων και των επιθυμητών στόχων (σελ. 5).

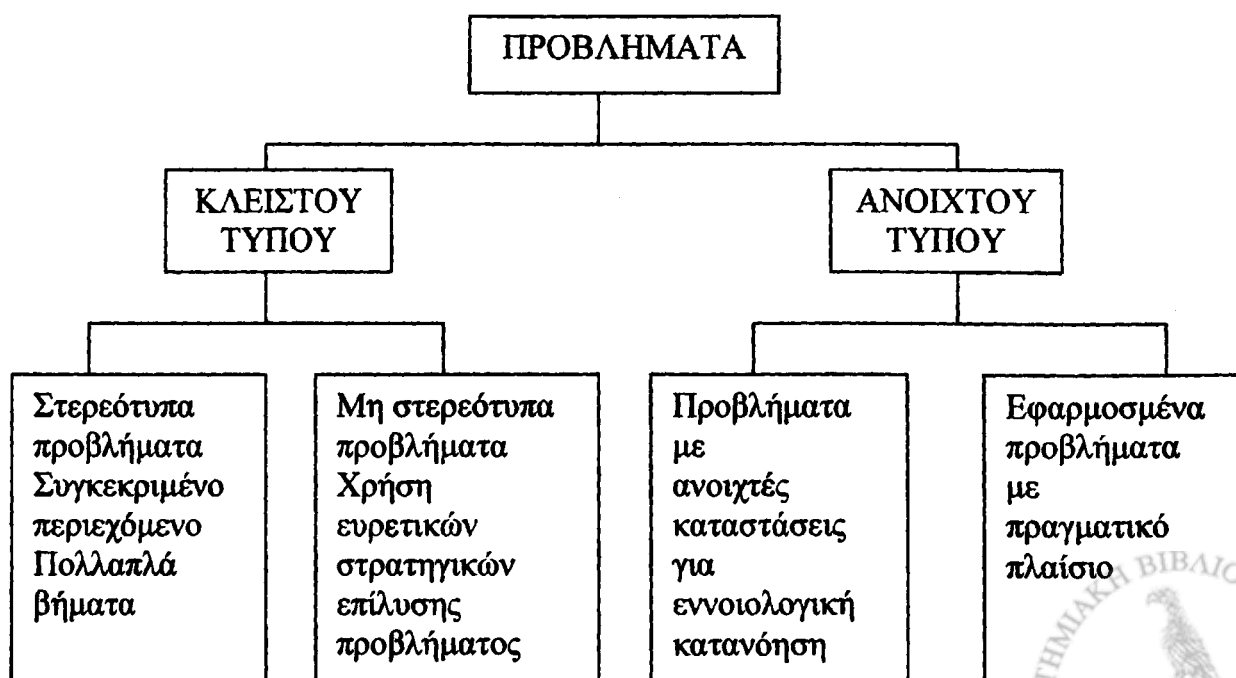


Ο Kilpatrick (1985) ορίζει ένα πρόβλημα ως "κατάσταση στην οποία ένας στόχος πρόκειται να επιτευχθεί και μια άμεση διαδρομή προς το στόχο εμποδίζεται" (σελ. 2).

Η ουσία αυτών των ορισμών είναι ότι το πρόβλημα είναι ένας στόχος ή μια εμπειρία που αντιμετωπίζεται από ένα άτομο για πρώτη φορά και επομένως, δεν υπάρχει καμία γνωστή διαδικασία για το χειρισμό του. Ο μαθητής πρέπει να σχεδιάσει τη δική του μέθοδο λύσης βασισμένη σε διάφορες δεξιότητες, γνώσεις και στρατηγικές, τις οποίες έχει διδαχθεί. Οι ενέργειες που κάνει ο μαθητής στο στάδιο της εργασίας προς μια λύση αναφέρεται ως επίλυση προβλήματος. Έτσι η έμφαση δεν είναι στην απάντηση αλλά στις σχετικές διαδικασίες. Υπό αυτήν την προοπτική πολλά στερεότυπα λεκτικά προβλήματα που εμφανίζονται στα εγχειρίδια, υποδεικνύονται εσφαλμένα ως προβλήματα, αφού δεν είναι παρά μόνο ασκήσεις.

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Για να μπορέσουν οι δάσκαλοι να συνειδητοποιήσουν το ρόλο της επίλυσης προβλήματος στο πρόγραμμα σπουδών, πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνουν τους διάφορους τύπους προβλημάτων και το ρόλο τους. Εξοπλισμένοι με τη γνώση και την κατανόηση μπορούν να επιλέξουν ή ακόμα και να κατασκευάσουν προβλήματα για τους μαθητές τους που θα προωθήσουν διάφορες μορφές δραστηριοτήτων σκέψης στα μαθηματικά. Με βάση μια συστηματική αναζήτηση της βιβλιογραφίας στην επίλυση προβλήματος και τη χρήση των προβλημάτων, ακολουθεί ένα σχήμα ταξινόμησης για τους τύπους προβλημάτων από τον Foong (1990), που προτείνονται για τους μαθητές του 21ου αιώνα. Σε αυτό το σχήμα τα περισσότερα προβλήματα μπορούν να ταξινομηθούν ως προς τη δομή τους σε "κλειστά" ή "ανοιχτά". Τα προβλήματα έχουν διαφορετικούς ρόλους στη διδασκαλία μαθηματικών όπως στη διδασκαλία για την επίλυση προβλήματος, ή στη διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλήματος.



Σχήμα 1: Σχήμα ταξινόμησης των μαθηματικών "προβλημάτων"

Κλειστά προβλήματα

Τα κλειστά προβλήματα είναι "καλά δομημένα" από την άποψη των σαφώς διατυπωμένων στόχων όπου η μια σωστή απάντηση μπορεί πάντα να καθοριστεί με μερικούς σταθερούς τρόπους από τα απαραίτητα στοιχεία που δίνονται στην κατάσταση προβλήματος. Αυτά τα κλειστά προβλήματα περιλαμβάνουν στερεότυπα προβλήματα πολλαπλών βημάτων καθώς επίσης και μη στερεότυπα προβλήματα βασισμένα στην ευρετική. Για να αντιμετωπίσουν αυτά τα προβλήματα, οι λύτες πρέπει να παραγάγουν δεξιότητες της διαδικασίας επίλυσης ή κρίσιμα βήματα στη μέθοδο λύσης μέσω της παραγωγικής σκέψης παρά της απλής ανάκλησης.

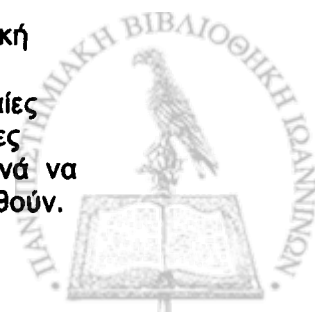
Για περισσότερη έμφαση στις δεξιότητες της διαδικασίας επίλυσης, προτείνεται η χρήση μη στερεότυπων προβλημάτων για την ανάπτυξη ευρετικών στρατηγικών επίλυσης προβλήματος, που θα βοηθήσουν στην επίλυση ένα άγνωστου προβλήματος το οποίο δεν είναι εξαρτώμενο από οποιοδήποτε θέμα της διδακτέας ύλης.

Ανοιχτά προβλήματα

Αυτή η κατηγορία προβλημάτων θεωρείται συχνά ως "κακοδομημένα προβλήματα" γιατί στερούνται τη σαφή διατύπωση, δεδομένου ότι υπάρχουν ελλιπή στοιχεία ή υποθέσεις και δεν υπάρχει καμία σταθερή διαδικασία που να εγγυάται μια σωστή λύση.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα είδη προβλημάτων ως προς τη δομή τους, οι ορισμοί, τα χαρακτηριστικά και οι επιπτώσεις τους στη διδασκαλία και την αξιολόγηση.

Τύπος προβλήματος Ορισμός	Κλειστά Στερεότυπα Προβλήματα που χρησιμοποιούν πάντα την ίδια βήμα προς βήμα επίλυση.	Κλειστά Μη στερεότυπα Προβλήματα που απαιτούν ποικίλες στρατηγικές και προσαρμογές στα ιδιαίτερα πλαίσια.	Ανοιχτά Προβλήματα με ανοιχτούς και ασαφείς στόχους. Ελάχιστοι περιορισμοί στις στρατηγικές λύσης.
Χαρακτηριστικά	• Η στρατηγική λύσης είναι συνήθως προβλέψιμη • Μια σωστή απάντηση • Όλες οι απαραίτητες πληροφορίες είναι συνήθως μέρος της εκφώνησης του προβλήματος	• Συχνά περισσότερες από μια αποδεκτές στρατηγικές λύσης • Μια σωστή απάντηση • Οι αναγκαίες πληροφορίες πρέπει συχνά να συγκεντρωθούν	• Η λύση δεν είναι καλά καθορισμένη ή προβλέψιμη. Πολλαπλές προοπτικές, στόχοι, και λύσεις • Δεν υπάρχει μια καθορισμένη με σαφήνεια και συμφωνημένη λύση και μπορεί να μην υπάρξει καθόλου μια πλήρως ικανοποιητική λύση. • Οι αναγκαίες πληροφορίες πρέπει συχνά να συγκεντρωθούν.



Επιπτώσεις στη διδασκαλία και την αξιολόγηση

- Εξάρτηση από τη δηλωτική γνώση, αλλά με το λιγότερο βάθος γνώσης.
- Οι δεξιότητες περιορίζονται σε παρόμοιους τύπους προβλημάτων. Η μεταφορά είναι φτωχή.
- Ο μαθητής απομνημονεύει απλά τη διαδικασία, οι στόχοι γίνονται συχνά αυτοματοποιημένοι με την πρακτική
- Εύκολη ενσωμάτωση στις ενισχυτικές εργασίες
- Απαιτήση για περισσότερη δηλωτική γνώση.
- Απαιτεί δεξιότητες διανοητικής διαμόρφωσης, αντιπροσώπευση προβλήματος, αναλογικός/αφηρημένος συλλογισμός, και αξιολόγηση. Η μεταφορά είναι ισχυρή.
- Ο μαθητής πρέπει να εφεύρει μια στρατηγική που να ταιριάζει στο πλαίσιο.
- Απαιτήση για εκτενή δηλωτική γνώση και εμπειρία.
- Χρήση αφηρημένου / αναλογικού / συμβολικού συλλογισμού και γνωστική ευελιξία. Η μεταφορά είναι η ισχυρότερη.
- Πρέπει να βοηθήσετε το μαθητή να καθορίσει το πλαίσιο και τους στόχους του προβλήματος.
- Παρέχετε ευκαιρίες για πρακτική (πολλές σωστές απαντήσεις).

ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Ο ρόλος της επίλυσης προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών εξαρτάται από τις πεποιθήσεις σχετικά με αυτή, των μαθητών, των δασκάλων, των γονέων, των φορέων χάραξης πολιτικής, και του ευρύ κοινού. Τα πρότυπα προγράμματος σπουδών και αξιολόγησης τονίζουν ότι "οι μαθητές πρέπει να αντιμετωπισθούν ως ικανοί να χρησιμοποιήσουν την αυξανόμενη μαθηματική γνώση τους για να κατανοήσουν τις νέες καταστάσεις προβλημάτων στον κόσμο γύρω τους" (NCTM, 1989, σελ. IX.). Προτιμάται να αναπτυχθεί στους μαθητές η αίσθηση ότι "μπορούν να το κάνουν" καθώς αντιμετωπίζουν τα προβλήματα μαθηματικών.

Ο Polya (1973) απευθυνόμενος στους εκπαιδευτικούς επισημαίνει:

Ο πρώτος κανόνας διδασκαλίας είναι να ξέρετε τι πρέπει να διδάξετε. Ο δεύτερος είναι να ξέρετε κάτι περισσότερο από αυτά που πρέπει να διδάξετε... Ακόμα δεν πρέπει να ξεχαστεί ότι ένας δάσκαλος των μαθηματικών πρέπει να ξέρει κάποια μαθηματικά και ότι ένας δάσκαλος που επιθυμεί να μεταδώσει τη σωστή ιδεολογική τοποθέτηση ως προς τα προβλήματα στους μαθητές του, πρέπει να έχει αποκτήσει αυτή την τοποθέτηση ο ίδιος (σελ. 173).

Εάν ο δάσκαλος χαρακτηρίσει τα μαθηματικά ως ανάμειξη σωστών απαντήσεων και αλάθητων και αξιόπιστων διαδικασιών, που αποτελούνται από αριθμητικές και αλγεβρικές διαδικασίες, γεωμετρικούς όρους και θεωρήματα, πιθανό είναι, η εκπαιδευτική του προσέγγιση να επικεντρωθεί στην παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών, των διαδικασιών, των γεγονότων και των θεωρημάτων με μια εστίαση των μαθητών στην εξάσκηση και στην αποστήθιση. Αφ' ετέρου, εάν δει τα μαθηματικά ως ενεργή, δημιουργική προσπάθεια που περιλαμβάνει την έρευνα και την ανακάλυψη, ακολουθώντας ένα μαθητο-κεντρικό και κονστρουκτιβιστικό ύφος στη διδασκαλία του, θα επικεντρωθεί πιθανώς στις δραστηριότητες που περιλαμβάνουν τους μαθητές στην παραγωγή και την αποκάλυψη του νοήματος και της παραγωγής



συνδέσεων. Θα δει το ρόλο του ως βοηθό, που προκαλεί τους μαθητές να εξερευνήσουν τις μαθηματικές έννοιες, να δημιουργήσουν τις στρατηγικές επίλυσης, και να κατασκευάσουν την προσωπική τους έννοια σε ένα περιβάλλον πλούσιο σε προβλήματα (Thompson, 1989).

Πολλοί δάσκαλοι αισθάνονται απροετοίμαστοι να υιοθετήσουν μια μέθοδο επίλυσης προβλήματος στη διδασκαλία των μαθηματικών. Λίγοι δάσκαλοι έμαθαν μαθηματικά οι ίδιοι κατ' αυτό τον τρόπο. Ακόμα κι αν αντιμετώπισαν την επίλυση προβλήματος στα μαθήματα της σχολής τους και μια φορά στην τάξη, προσαρμόζονται συχνά στις συμβατικές μεθόδους που επικρατούν στα περισσότερα σχολεία. Το να υποστηρίζεις την αλλαγή, όταν περιβάλλεσαι από βαθιά ριζωμένες πεποιθήσεις για τη διδασκαλία και τη μάθηση, είναι ένας ρόλος που δύσκολα εκτελείται. Οι δάσκαλοι σήμερα βρίσκονται συχνά μεταξύ της καθημερινής πίεσης από τους συναδέλφους, τους γονείς και άλλους που υποστηρίζουν την παράδοση στην τάξη και την πίεση από τους σχεδιαστές να υιοθετήσουν πρακτικές βασισμένες σε καινούργια πρότυπα (με τη συγκρουόμενη προσδοκία ότι οι μαθητές θα αποδώσουν καλύτερα στις τυποποιημένες εξετάσεις που μετρούν τις βασικές δεξιότητες, απ' ότι στις εξετάσεις που είναι βασισμένες στα πρότυπα).

Η διεύρυνση των αντιλήψεων των δασκάλων για τη φύση της επίλυσης προβλήματος και της δυνατότητάς της ως εκπαιδευτικό εργαλείο απαιτεί οι δάσκαλοι να συμμετέχουν στην επίλυση των μη στερεότυπων προβλημάτων. Αυτό σημαίνει ότι ξοδεύουν χρόνο λύνοντας μια ευρεία ποικιλία προβλημάτων.

Στην επιδίωξη των στόχων της μεταρρύθμισης, οι δάσκαλοι αισθάνονται συχνά ανήσυχoi για την αποτελεσματικότητα και τη γνώση τους. Η κίνηση στην κατεύθυνση των μεταρρυθμίσεων των μαθηματικών σημαίνει αντιμετωπίζω τις αβεβαιότητες, τις ασάφειες, και τις περιπλοκότητες του τι σημαίνει "κατανοώ" και "μαθαίνω" πραγματικά. Όταν ζητάμε από τους μαθητές να εκφράσουν τις ιδέες τους σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος, διατρέχουμε τον κίνδυνο να ανακαλύψουμε τι ξέρουν και τι δεν ξέρουν. Αυτές οι ανακαλύψεις μπορεί να είναι συνταρακτικές όταν αποκαλύπτουν ότι οι μαθητές ξέρουν πολύ λιγότερα από ότι ο δάσκαλος αναμένει ή πολύ περισσότερα από ότι ο δάσκαλος είναι έτοιμος να εξετάσει (Ball, 1996).

Χαρακτηριστικές πεποιθήσεις των μαθητών για τη φύση των μαθηματικών είναι οι εξής

- Τα προβλήματα μαθηματικών έχουν μία και μόνο μία σωστή απάντηση.
- Υπάρχει μόνο ένας σωστός τρόπος να λυθεί οποιοδήποτε πρόβλημα μαθηματικών, συνήθως αυτός που ο δάσκαλος έχει δείξει πρόσφατα στην τάξη.
- Οι συνηθισμένοι μαθητές δεν περιμένουν να καταλάβουν τα μαθηματικά αναμένουν απλά να τα απομνημονεύσουν και να εφαρμόσουν τι έχουν μάθει μηχανικά και χωρίς κατανόηση.
- Τα μαθηματικά είναι μια μοναχική δραστηριότητα, που γίνεται από τα άτομα μεμονωμένα.
- Οι μαθητές οι οποίοι έχουν καταλάβει τα μαθηματικά που έχουν μελετήσει θα είναι σε θέση να λύσουν οποιοδήποτε δοσμένο πρόβλημα σε πέντε λεπτά ή λιγότερο.
- Τα μαθηματικά που μαθαίνονται στο σχολείο έχουν μικρή ή καμία σχέση με τον πραγματικό κόσμο.



- Η επίσημη απόδειξη είναι άσχετη με τις διαδικασίες της ανακάλυψης ή της εφεύρεσης.

Αυτοί οι μαθητές δεν αναμένεται να καταλάβουν μαθηματικά αλλά μπορούν μόνο να απομνημονεύσουν και να εφαρμόσουν τις μαθηματικές διαδικασίες με ένα μηχανικό τρόπο. Αυτές οι πεποιθήσεις αναπτύσσονται κατά ένα μεγάλο μέρος από τις εμπειρίες που έχουν οι μαθητές στη σχολική τάξη και από τις τοποθετήσεις και πεποιθήσεις που προάγονται από τους δασκάλους τους.

ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Ο Polya πριν από εξήντα έτη έλεγε ότι:

ένας δάσκαλος των μαθηματικών έχει μια μεγάλη ευκαιρία. Εάν γεμίζει το διανεμημένο χρόνο του με τη εξάσκηση των μαθητών του σε στερεότυπες διαδικασίες σκοτώνει το ενδιαφέρον τους, παρακωλύει τη διανοητική ανάπτυξή τους, και κάνει κακή χρήση της ευκαιρίας του. Αλλά εάν προκαλεί την περιέργεια των μαθητών του με τον καθορισμό προβλημάτων ανάλογων με τη γνώση τους και τους βοηθά να λύσουν τα προβλήματα με ενθαρρυντικές ερωτήσεις, μπορεί να τους δώσει ένα δείγμα και μερικά μέσα της ανεξάρτητης σκέψης (1973, σελ. V.)

Αν και ο Polya παρουσίασε ένα πλαίσιο για τη διδασκαλία επίλυσης προβλήματος βασισμένο στην έρευνα, οι ιδέες του δεν έχουν ακόμη εφαρμοστεί πλήρως. Αυτό δείχνει ότι υπάρχει δυσκολία στο να γίνει αυτή η μετατόπιση στη διδασκαλία μαθηματικών.

Η διδασκαλία επίλυσης προβλήματος είναι δύσκολη για τους δασκάλους από μαθηματική, παιδαγωγική, και προσωπική άποψη. Οι δάσκαλοι πρέπει να έχουν τη μαθηματική πείρα για να καταλάβουν τις διαφορετικές μεθόδους που οι μαθητές θα υιοθετήσουν σε ένα πρόβλημα και πώς οι προσεγγίσεις θα είναι αποτελεσματικές. Πολλοί δάσκαλοι εκπαιδεύονται χωρίς εξειδίκευση στα μαθηματικά και συχνά δεν έχουν το ισχυρό μαθηματικό υπόβαθρο που απαιτείται για να διδάξουν μια προσέγγιση επίλυσης προβλήματος. Παιδαγωγικά, πρέπει να λάβουν τις σύνθετες αποφάσεις για το επίπεδο δυσκολίας των προβλημάτων που θέτουν, πότε να δώσουν βοήθεια και πώς να παρέχουν τη βοήθεια που υποστηρίζει την επιτυχία των μαθητών, εξασφαλίζοντας ότι κατέχουν τη στρατηγική επίλυσης. Μερικές φορές θα βρεθούν στη δύσκολη θέση της μη γνώσης της λύσης. Το να αφήσουν το ρόλο του "ειδικού", που οι δάσκαλοι παραδοσιακά έπαιζαν, απαιτεί εμπειρία, εμπιστοσύνη, και αυτογνωσία. Συχνά, καλούνται να διδάξουν τα μαθηματικά που δεν αντιμετώπισαν ποτέ στο σχολείο και με έναν τρόπο που διαφέρει από αυτόν που διδάχθηκαν. Για αυτούς τους λόγους, οι δάσκαλοι μπορεί να χρειαστούν πρόσθετη κατάρτιση στο περιεχόμενο και τη θεωρία των μαθηματικών, καθώς επίσης και στις μεθόδους που απαιτούνται για την επίλυση προβλήματος. (Schoenfeld, 1992)

Συχνά είναι πολύ δύσκολο για τους δασκάλους να βλέπουν τους μαθητές τους να απογοητεύονται προσπαθώντας να βρουν τη λύση του προβλήματος. Το να ξέρεις πότε να δώσεις στοιχεία και πόση βοήθεια, απαιτεί μια λεπτή μέση λύση, η οποία έρχεται με την εμπειρία και τη γνώση των ικανοτήτων των μαθητών.

Άλλη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι δάσκαλοι είναι ότι αναμένεται να καλύψουν μεγάλο μέρος ύλης κάθε έτος. Όμως το να λύνεις ελκυστικά, μη



στερεότυπα προβλήματα απαιτεί χρόνο. Συχνά ένα μόνο πρόβλημα μπορεί να απασχολήσει μια τάξη για μεγάλο χρονικό διάστημα. Επομένως, είναι ουσιαστικό ότι το περιεχόμενο και οι δεξιότητες ενσωματώνονται μέσα στο πλαίσιο της επίλυσης προβλήματος. Επιλέγοντας πλούσια, ελκυστικά προβλήματα οι δάσκαλοι μπορούν να εξασφαλίσουν ότι αξίζει να ξοδέψουν αυτό το χρόνο.

Τα εγχειρίδια τέλος, αν και βελτιώνονται, δεν παρέχουν έναν επαρκή αριθμό μη στερεότυπων προβλημάτων από τα οποία οι δάσκαλοι να μπορούν να επιλέξουν. Αν και πολλοί δάσκαλοι δεν νιώθουν άνετα να παρεκκλίνουν από τη σειρά του εγχειριδίου, πρέπει να αναπτύξουν εμπιστοσύνη στην αναζήτηση και να χρησιμοποιήσουν άλλο υλικό για να συμπληρώσουν τα κείμενά τους.

Επίσης πρέπει να προσέξουμε σχετικά με τον ισχυρισμό ότι δίνεται έμφαση στην επίλυση προβλήματος όταν στην πραγματικότητα η έμφαση δίνεται στις στερεότυπες ασκήσεις. Από τις διάφορες μελέτες που περιλαμβάνουν τη διδασκαλία επίλυσης προβλήματος, ο Suydam (1987) συμπεραίνει:

Εάν η επίλυση προβλήματος αντιμετωπίζεται ως "εφαρμόστε τη διαδικασία," τότε οι μαθητές προσπαθούν να ακολουθήσουν τους κανόνες στα επόμενα προβλήματα. Εάν διδάξετε την επίλυση προβλήματος ως προσέγγιση, όπου πρέπει να σκεφτείτε και μπορείτε να εφαρμόσετε οτιδήποτε δουλεύει, τότε οι μαθητές είναι πιθανό να είναι περισσότερο ευέλικτοι (σελ. 104).

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Οι παραδοσιακές προσεγγίσεις διδασκαλίας που περιλαμβάνουν μάθηση μέσω απομνημόνευσης και οι δάσκαλο-κεντρικές εκπαιδευτικές στρατηγικές συχνά δεν ικανοποιούν τις ανάγκες μάθησης πολλών μαθητών που μπορούν να είναι ενεργοί μαθητές ή να απαιτούν πολλαπλές εισόδους στο πρόγραμμα σπουδών.

Οι μαθητές που πρέπει να προσφύγουν στην απομνημόνευση θα στερηθούν την κατανόηση και θα αισθανθούν πιθανώς μικρή αίσθηση ικανοποίησης και ίσως σταματήσουν να μαθαίνουν γενικότερα. Στην πραγματικότητα, τα στοιχεία δείχνουν ότι εάν οι μαθητές απομνημονεύουν και εξασκούν διαδικασίες επανειλημμένα με έναν τρόπο απομνημόνευσης, είναι δύσκολο για αυτούς να επιστρέψουν αργότερα και να αποκτήσουν μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που κρύβονται κάτω από αυτές τις διαδικασίες.

Σύμφωνα με τον Polya (1973) ένα πρόβλημά εάν προκαλεί την περιέργεια των παιδιών, αναδεικνύει τις εφευρετικές τους ικανότητες και εάν το λύνουν με τα δικά τους μέσα, είναι πιθανό να δοκιμάσουν την ένταση και να απολαύσουν το θρίαμβο της ανακάλυψης. Τέτοια εμπειρία σε μια ευαίσθητη ηλικία μπορεί να δημιουργήσει μια προτίμηση για διανοητική εργασία και να αφήσει τη σφραγίδα της στο μυαλό και το χαρακτήρα για μια ζωή. (σελ. V.)

Αυτό που θα βοηθήσει τους μαθητές να είναι καλύτεροι λύτες προβλημάτων είναι η προετοιμασία όχι μόνο να σκεφτούν από μαθηματική άποψη αλλά να πλησιάσουν στις προκλήσεις της ζωής, με εμπιστοσύνη στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. Η σκέψη και οι δεξιότητες που απαιτούνται για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος μεταφέρονται και σε άλλους τομείς της ζωής.

Η εμπειρία στους μαθηματικούς τρόπους σκέψης χτίζει τη μαθηματική δύναμη, μια ικανότητα του μυαλού, που επιτρέπει σε κάποιον να διαβάσει

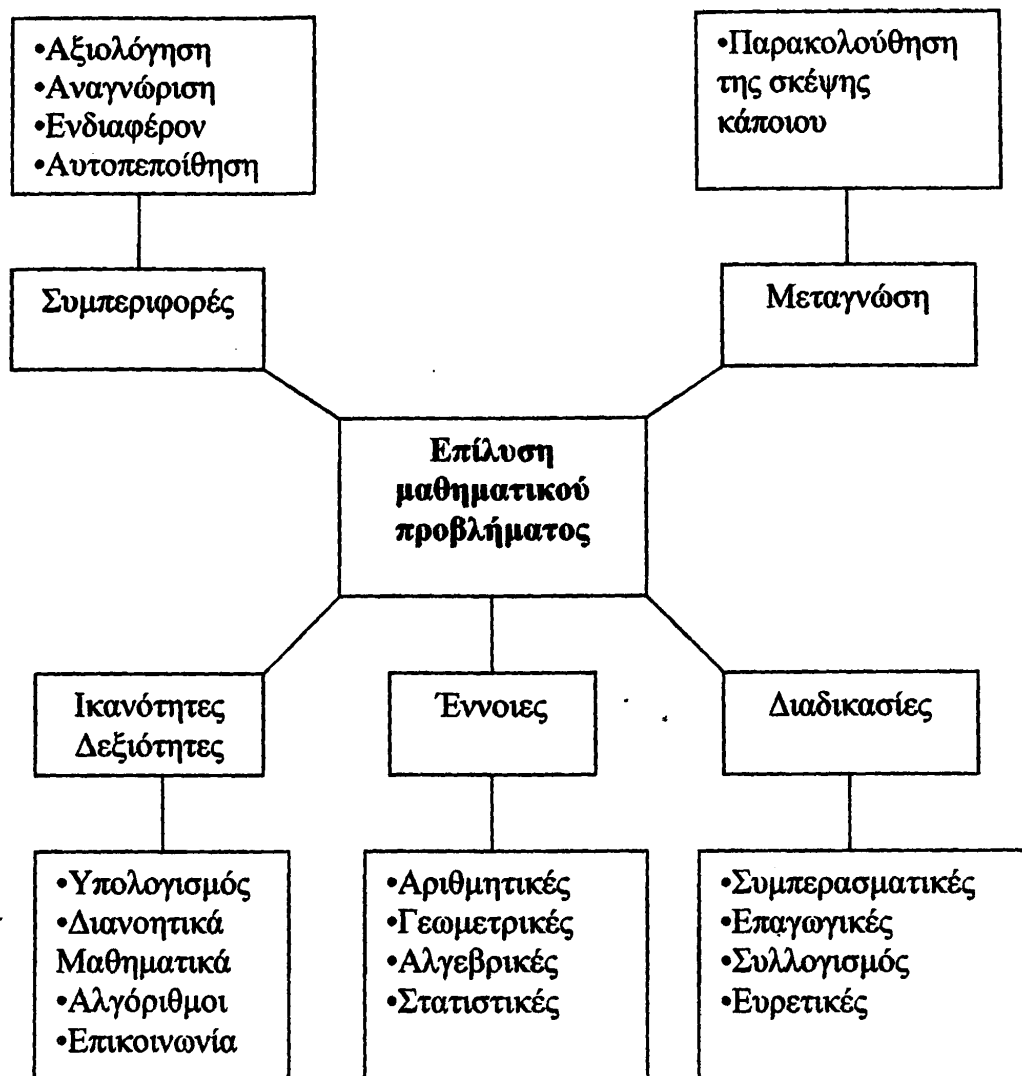


αυστηρά, να προσδιορίσει τις πλάνες, να ανιχνεύσει διαγωνίως, να αξιολογήσει τον κίνδυνο και να προτείνει εναλλακτικές λύσεις. Τα μαθηματικά μας δίνουν τη δύναμη να καταλάβουμε καλύτερα τον πληροφοριακά-φορτωμένο κόσμο στον οποίο ζούμε (National Research Council, 1989).

Πολλά κράτη καθιέρωσαν στα προγράμματα σπουδών τους την επίλυση προβλήματος ως επίκεντρο της εκπαίδευσης των μαθηματικών. Όπως προαναφέρθηκε με βάση το (NCTM, 2000) η επίλυση προβλήματος είναι αναπόσπαστο τμήμα όλης της εκπαίδευσης των μαθηματικών.

Το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών στη Σιγκαπούρη ευθυγραμμίζεται με τα βασισμένα στην μεταρρύθμιση του 21ου αιώνα οράματα της εκπαίδευσης σε όλο τον κόσμο. Υπάρχει μια τάση να μη δίνεται έμφαση στη χρήση των στερεότυπων μαθηματικών προβλημάτων που προωθούν τις βασικές αλγοριθμικές δεξιότητες. Το σχήμα 2 απεικονίζει το πλαίσιο προγράμματος σπουδών της Σιγκαπούρης (MOE, 2000) που δημιουργήθηκε στην αρχή της δεκαετίας του '90 για να χρησιμοποιήσει ως πυρήνα του τη μαθηματική επίλυση προβλήματος. Η μαθηματική επίλυση προβλήματος όπως δηλώνεται σε αυτό το πλαίσιο περιλαμβάνει τη χρήση και την εφαρμογή των μαθηματικών σε πρακτικούς στόχους, σε πραγματικά προβλήματα της ζωής. Υποστηρίζει ότι τα προβλήματα πρέπει να καλύψουν ένα ευρύ φάσμα καταστάσεων από τα στερεότυπα μαθηματικά προβλήματα έως τα προβλήματα σε άγνωστο πλαίσιο και ανοιχτή έρευνα που χρησιμοποιούν τα σχετικά μαθηματικά και τη διαδικασία σκέψης.





Σχήμα 2: Πρόγραμμα σπουδών μαθηματικών Σιγκαπούρης

Το πλαίσιο προγράμματος σπουδών αναγνωρίζει ότι τα προβλήματα λειτουργούν και ως μέσα και ως σκοπός στη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών. Η διδασκαλία μέσω των προβλημάτων χρησιμεύει ως ένας μέσο για τους μαθητές για να κατασκευάσουν τις μαθηματικές έννοιες και να αναπτύξουν τις δεξιότητές τους. Για να λύσουν τα προβλήματα οι σπουδαστές πρέπει να παρατηρήσουν, να συσχετίσουν, να εξετάσουν, να αιτιολογήσουν και να συμπεράνουν. Η επιτυχία στην επίλυση προβλήματος αφορά στη διάθεση και στον έλεγχο των μαθητών όσον αφορά τις διαδικασίες σκέψης τους. Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών συμπεριλαμβανομένων των δασκάλων αρχίζουν να δίνουν προσοχή στο είδος των εργασιών που θέτουν στους μαθητές. Υπάρχει μια ανάγκη να εξοπλιστούν οι δάσκαλοι με μια τράπεζα μεγαλύτερης ποικιλίας μαθηματικών ερωτήσεων για την επίλυση προβλήματος που να μπορεί να ενισχύσει τις μεθόδους διδασκαλίας τους. Οι μαθητές πρέπει να αντιμετωπίσουν τα έξυπνα μαθηματικά προβλήματα όπου μπορούν να διαλογιστούν, να επικοινωνήσουν και να παρουσιάσουν τις ιδέες τους στα μαθηματικά και να βρουν τις συνδέσεις των μαθηματικών και της πραγματικής ζωής.

Στη χώρα μας με βάση το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) Μαθηματικών η επίλυση προβλημάτων στο δημοτικό



αποτελεί άξονα γνωστικού περιεχομένου με στόχο: Οι μαθητές να εξερευνούν μία κατάσταση, να κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, να διατυπώνουν διαφορετικά το ίδιο πρόβλημα, να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις, να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή και να εξοικειώνονται με τις νέες τεχνολογίες.

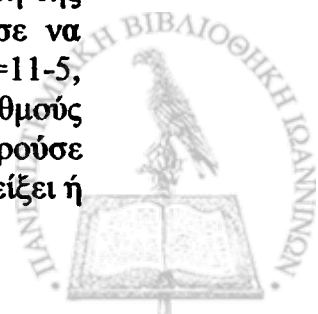
Στηριζόμενοι στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) των Μαθηματικών, σε σύνολο 120 ωρών ανά τάξη ο χρόνος που διατίθεται για τη θεματική ενότητα της επίλυσης προβλήματος είναι: Τάξη Α'(18 ώρες), Τάξη Β'(18 ώρες), Τάξη Γ'(18 ώρες), Τάξη Δ'(18 ώρες), Τάξη Ε'(26 ώρες), Τάξη ΣΤ'(24 ώρες).

Οι στόχοι που επιδιώκονται ανά τάξη είναι οι εξής:

- ◆ Να ενεργοποιούν τις υπάρχουσες γνώσεις. (Α')
- ◆ Να ενεργοποιούν, να εφαρμόζουν και να σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, για τη διατήρηση της συνέχειας και για την ομαλή μετάβαση στις νέες έννοιες. (Β', Γ', Δ', Ε', ΣΤ')
- ◆ Να εργάζονται ατομικά ή ομαδικά χωρίς καθοδήγηση για μια στερεότυπη λύση. (Γ', Δ', Ε', ΣΤ')
- ◆ Να ερευνούν προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής. (Β')
- ◆ Να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής. (Γ', Δ', Ε', ΣΤ')
- ◆ Να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις. (Α', Β', Γ', Δ', Ε', ΣΤ')
- ◆ Να ξεχωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και να επιλέγουν τα αναγκαία δεδομένα για την επίλυσή του. (Β', Γ', Δ', Ε', ΣΤ')
- ◆ Να επιχειρηματολογούν ως προς την αλήθεια μιας λύσης. (Γ', Δ', Ε', ΣΤ')
- ◆ Να παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους με σαφήνεια την απάντησή τους, η οποία περιλαμβάνει τη στρατηγική επίλυσης και το αποτέλεσμα. (Γ', Δ', Ε', ΣΤ')
- ◆ Να προβλέπουν την απάντηση του προβλήματος και διατυπώνουν υποθέσεις σχετικά με την ύπαρξη ή όχι μιας ή περισσότερων λύσεων. (Γ', ΣΤ')
- ◆ Να βρίσκουν ενδιάμεσα ερωτήματα που υποβοηθούν την πορεία προς τη λύση. (Δ', Ε', ΣΤ')
- ◆ Να θέτουν δικά τους ερωτήματα και παρόμοια προβλήματα. (Δ', ΣΤ')
- ◆ Να αυτο-αξιολογούνται στις γνώσεις και ικανότητες που απέκτησαν ώστε να γίνεται ανατροφοδότηση στη μαθησιακή διαδικασία. (Β', Γ', Δ', Ε', ΣΤ')
- ◆ Να τους δίνεται η ευκαιρία να χρησιμοποιούν τον Η/Υ με ανάλογα προγράμματα SketchPad, Cabri, Logo, Word, Paint κ.λπ. για την ευχερέστερη αντιμετώπιση των προβλημάτων. (Ε', ΣΤ')

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Μερικά προβλήματα στα μαθηματικά είναι άλυτα και έχουν αντισταθεί στις προσπάθειες για επίλυση σε μερικούς από τους καλύτερους μαθηματικούς. Ένα τέτοιο πρόβλημα ανακαλύφθηκε από τον Arthur Hamann, ένα μαθητή της πρώτης γυμνασίου. Παρατήρησε ότι κάθε ζυγός αριθμός θα μπορούσε να γραφτεί ως η διαφορά δύο μονών, παραδείγματος χάριν $2=5-3$, $4=11-7$, $6=11-5$, $8=13-5$, $10=13-3$. Αφού έδειξε ότι αυτό ίσχυε για όλους τους ζυγούς αριθμούς που είναι μικρότεροι από 250, προέβλεψε ότι κάθε ζυγός αριθμός θα μπορούσε να γραφτεί ως η διαφορά δύο μονών. Κανένας δεν ήταν σε θέση να αποδείξει ή



να ανασκευάσει αυτήν την δήλωση. Όταν μια δήλωση είναι πιθανά αληθινή αλλά δεν μπορεί να αποδειχθεί, καλείται υπόθεση.

Υπάρχουν επίσης πολλά προβλήματα που μπορούν να θεωρηθούν δύσκολα εάν επιχειρήσεις να τα επιλύσεις με μια σειρά εξισώσεων, αλλά αρκετά απλά όταν επιχειρήσεις να τα λύσεις με στρατηγικές επίλυσης προβλήματος όπως, η έρευνα για ένα μοτίβο, ο σχεδιασμός ενός διαγράμματος, η σύνταξη ενός οργανωμένου καταλόγου και τα λοιπά.

Η επίλυση προβλήματος αποτελεί το αντικείμενο μιας σημαντικής μερίδας της έρευνας και της έκδοσης στην εκπαίδευση των μαθηματικών. Ένα μεγάλο μέρος αυτής της έρευνας βρίσκεται στα γραπτά επίλυσης προβλήματος του George Polya, ενός από τους πρώτιστους μαθηματικούς του εικοστού-αιώνα. Ο Polya αφιέρωσε ένα μεγάλο μέρος της διδασκαλίας του για να βοηθήσει τους μαθητές να γίνουν καλύτεροι λύτες προβλημάτων. Το βιβλίο του *How to Solve It* έχει μεταφραστεί σε 18 γλώσσες. Σε αυτό το βιβλίο, περιγράφει την ακόλουθη διαδικασία τεσσάρων βημάτων για την επίλυση προβλημάτων.

Κατανόηση του προβλήματος. Ο Polya προτείνει ότι ένας λύτης προβλήματος πρέπει να εξοικειωθεί με ένα πρόβλημα και να δουλέψει προς μια σαφέστερη κατανόησή του πριν προχωρήσει σε μια λύση. Η αυξανόμενη κατανόηση μπορεί να επέλθει αν ο λύτης ξαναδιαβάσει τα δεδομένα του προβλήματος, αν σχεδιάσει ένα σκίτσο ή ένα διάγραμμα για να παρουσιάσει τις συνδέσεις και σχέσεις, αν επαναδιατυπώσει το πρόβλημα με δικά του λόγια, ή αν κάνει μια λογική εικασία για τη λύση για να εξοικειωθεί με τις λεπτομέρειες. Μερικές φορές η κύρια δυσκολία στην επίλυση ενός προβλήματος είναι να ξέρεις ποια ερώτηση πρέπει να απαντηθεί.

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Η πορεία από την κατανόηση ενός προβλήματος στην επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης μπορεί μερικές φορές να είναι μακριά. Τα περισσότερα ενδιαφέροντα προβλήματα δεν έχουν προφανείς λύσεις. Η εμπειρία και η πρακτική είναι οι καλύτεροι σύμβουλοι για την επινόηση των σχεδίων επίλυσης.

Εκτέλεση του σχεδίου. Το σχέδιο δίνει μια γενική περίληψη της κατεύθυνσης. Καταγράψτε τη σκέψη σας έτσι ώστε τα βήματά σας να μπορούν να ανιχνευθούν εκ νέου. Επίσης, δεν πειράζει αν κολλήσετε και εάν αυτό συμβεί, είναι καλύτερο μερικές φορές να αφήσετε το πρόβλημα για λίγο και να επιστρέψετε σε αυτό αργότερα.

Επανελέγχος. Όταν επιτευχθεί ένα αποτέλεσμα, να το ελέγξετε. Στο στάδιο της επίτευξης μιας λύσης μπορεί να εμφανιστούν άλλοι τρόποι προσέγγισης του προβλήματος. Αρκετά συχνά αφότου εξοικειωθείτε με ένα πρόβλημα, μπορεί να εμφανιστούν νέες ή ίσως νεώτερες προσεγγίσεις. Επίσης, λύνοντας ένα πρόβλημα, μπορεί να βρείτε άλλες ενδιαφέρουσες ερωτήσεις ή παραλλαγές που να αξίζουν διερεύνηση.

Ο Polya ήταν από τους πρώτους που αναφέρθηκαν σε ευρετικές στρατηγικές οι οποίες εφαρμόζονται στη λύση μαθηματικών προβλημάτων και πρότεινε ανά φάση επίλυσης τις ακόλουθες:

1. **Κατανόηση του Προβλήματος:** Ο δάσκαλος μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν μια αποτελεσματική στρατηγική υποβάλλοντας ερωτήσεις όπως:
 - ✓ Μπορείς να διατυπώσεις το πρόβλημα με δικά σου λόγια;



- ✓ Ποια είναι τα δεδομένα και ποια είναι τα ζητούμενα;
- ✓ Υπάρχουν δεδομένα που είναι περιττά ή μήπως λείπουν στοιχεία που χρειάζονται;
- ✓ Φτιάξε ένα γράφημα ή ένα διάγραμμα και πρόσθεσε όλα τα απαραίτητα σύμβολα ώστε να συγκεκριμενοποιήσεις το πρόβλημα.

2. *Επινόηση ενός Σχεδίου Επίλυσης:*

- ✓ Σκέψου ένα γνωστό πρόβλημα που είναι ανάλογο του παρόντος προβλήματος και προσπάθησε να το λύσεις.
- ✓ Σκέψου ένα γνωστό πρόβλημα που έχει τους ίδιους αγνώστους αλλά είναι απλούστερο.
- ✓ Προσπάθησε να μετατρέψεις το πρόβλημα σ' ένα άλλο τη λύση του οποίου γνωρίζεις.
- ✓ Απλοποίησε το πρόβλημα εξετάζοντας ειδικές περιπτώσεις. Προχώρησε με μια διαδικασία βήμα - βήμα.
- ✓ Κάνε το πρόβλημα πιο γενικό και προσπάθησε να το λύσεις.
- ✓ Χώρισε το πρόβλημα σε μέρη, ώστε να μπορείς να λύσεις το κάθε μέρος χωριστά.
- ✓ Κατέγραψε τα αποτελέσματα της προσπάθειας, αυτό δηλαδή που δοκιμάζεις κάθε φορά, κάτι που βοηθά στη συνοπτική αναθεώρηση και συσχέτιση.

3. *Εκτέλεση του Σχεδίου*

- ✓ Εκτέλεση όλων των πράξεων ή διαδικασιών που προβλέπονται στο σχέδιο.
- ✓ Έλεγχος κάθε βήματος καθώς προχωρεί η υλοποίηση του σχεδίου. Αυτό μπορεί να γίνει είτε με τυπικό αποδεικτικό τρόπο ή διαισθητικά.

4. *Επανελέγχος του προβλήματος και της λύσης*

- ✓ Έλεγχος του αποτελέσματος και αντιστοίχιση του προβλήματος με την πορεία επίλυσης και το αποτέλεσμα. Απαντήθηκε πράγματι το αρχικό ερώτημα;
- ✓ Μήπως υπάρχει κι άλλος τρόπος επίλυσης;
- ✓ Μπορείς να χρησιμοποιήσεις το αποτέλεσμα ή τη μέθοδο για την επίλυση ή τη διατύπωση νέων προβλημάτων;(σελ. 5-16)

Οι στρατηγικές επίλυσης προβλήματος μπορεί να ποικίλουν στην ονομασία αλλά οι περισσότερες εμπίπτουν στις εξής βασικές κατηγορίες:



- Υπολογίστε ή απλοποιήστε
- Χρησιμοποιήστε έναν τύπο
- Κάντε ένα μοντέλο ή ένα σκίτσο
- Συντάξτε έναν πίνακα, ένα διάγραμμα ή έναν κατάλογο
- Εικασία, έλεγχος & αναθεώρηση
- Εξετάστε μια απλούστερη περίπτωση
- Αποβάλετε
- Ψάξτε για μοτίβα

Στα επόμενα δύο προβλήματα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι κάποιες φορές μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες στρατηγικές από κοινού για τη λύση ενός προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Έχω στην τσέπη μου νομίσματα του 1 λεπτού, 5 λεπτών και 10 λεπτών. Εάν πάρω τρία νομίσματα από την τσέπη μου, πόσα χρήματα θα μπορούσα να έχω πάρει;

Αυτό το πρόβλημα οδηγεί τα παιδιά να υιοθετήσουν μια στρατηγική δοκιμής και λάθους. Μπορούν επίσης να εργαστούν στο πρόβλημα χρησιμοποιώντας πραγματικά νομίσματα. Τα παιδιά ελέγχουν αν οι απαντήσεις τους ικανοποιούν τους όρους του προβλήματος. Μπορούν επίσης να τεθούν οι ακόλουθες ερωτήσεις: "Είναι δυνατό να έχω 4 λεπτά; 11 λεπτά; Μπορείτε να απαριθμήσετε όλα τα πιθανά ποσά που μπορεί να έχω όταν επιλέγω τρία νομίσματα;" Η τελευταία ερώτηση παρέχει μια πρόκληση για τα μεγαλύτερα ή από μαθηματική άποψη πιο εξοικειωμένα παιδιά και προϋποθέτει τη σύνταξη ενός οργανωμένου καταλόγου, σαν αυτόν που ακολουθεί.

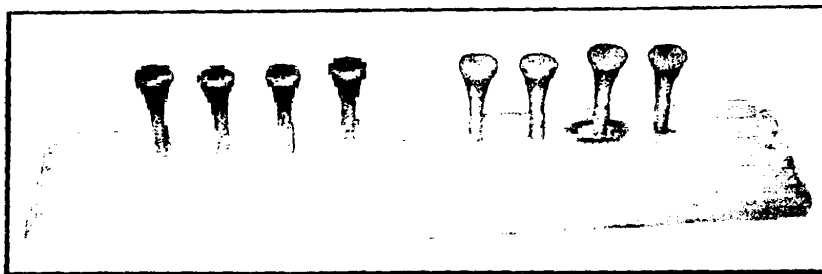
1 ΛΕΠΤΟ	5 ΛΕΠΤΑ	10 ΛΕΠΤΑ	ΣΥΝΟΛΟ
0	0	3	30
0	1	2	25
0	2	1	20
0	3	0	15
1	0	2	21
...	...	...	...

Η εργασία σε αυτό το πρόβλημα προσφέρει δεξιότητες πρακτικής. Ο σημαντικός όμως μαθηματικός στόχος αυτού του προβλήματος είναι ότι βοηθά τους μαθητές να σκεφτούν συστηματικά τις πιθανότητες, να οργανώσουν και να καταγράψουν τη σκέψη τους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Από τη μία πλευρά ενός σανιδιού υπάρχουν σε τρύπες τέσσερα κινητά κόκκινα καρφιά. Στην άλλη πλευρά υπάρχουν στις τρύπες τέσσερα κινητά πράσινα καρφιά και μια κενή τρύπα στο κέντρο. Η πρόκληση είναι να γίνει εναλλαγή των καρφιών έτσι ώστε τα κόκκινα καρφιά να καταλάβουν τις θέσεις των πράσινων καρφιών και αντίστροφα, με τις λιγότερες κινήσεις. Οι κινήσεις που μπορούν να γίνουν είναι οι εξής: Οποιοδήποτε καρφί μπορεί να κινηθεί προς μια παρακείμενη κενή τρύπα, τα καρφιά δεν κινούνται προς τα πίσω, και ένα καρφί ενός χρώματος μπορεί να πηδήσει πάνω από ένα καρφί ενός άλλου χρώματος εάν υπάρχει μια τρύπα κενή.





1. **Χρησιμοποίηση ενός προτύπου:** Σχεδιάστε εννέα τετράγωνα 1 εκατοστού και τοποθετήστε τέσσερα κόκκινα χαρτάκια στο αριστερό μέρος και τέσσερα πράσινα χαρτάκια στο δεξιό. Προσπαθήστε να λύσετε αυτό το πρόβλημα με την κίνηση των χαρτιών σύμφωνα με τους κανόνες.



2. **Επίλυση ενός απλούστερου προβλήματος:** Σχεδιάστε τρία τετράγωνα και χρησιμοποιήστε ένα κόκκινο χαρτάκι και ένα πράσινο χαρτάκι για να λύσετε αυτό το απλούστερο πρόβλημα. Κατόπιν σκιαγραφήστε πέντε τετράγωνα και λύστε το πρόβλημα με δύο χαρτάκια κάθε χρώματος.



3. **Δημιουργία ενός πίνακα:** Σχεδιάστε τον ακόλουθο πίνακα και καταγράψτε τον ελάχιστο αριθμό κινήσεων και τη στρατηγική σας όταν υπάρχουν τρία χαρτάκια σε κάθε πλευρά. Παραδείγματος χάριν, με ένα χαρτάκι σε κάθε πλευρά μπορεί να έχετε κινήσει πρώτα το κόκκινο χαρτάκι (Κ), κατόπιν να έχετε πηδήσει αυτό με ένα πράσινο (Π), και να είχατε κινήσει τέλος το κόκκινο (Κ). Έτσι η στρατηγική σας θα μπορούσε να είναι καταγεγραμμένο ΚΠΚ.

Αριθμός χαρτιών σε κάθε πλευρά	Ελάχιστος αριθμός κινήσεων	Στρατηγική
1	3	ΚΠΚ
2	8	ΚΠΠΚΚΠΠΚ
3		

4. **Εύρεση των μοτίβων:** Μπορεί να έχετε παρατηρήσει ένα ή περισσότερα μοτίβα στον πίνακά σας. Καταγράψτε τουλάχιστον ένα μοτίβο στις στρατηγικές σας. Υπάρχει επίσης ένα μοτίβο στους αριθμούς κινήσεων. Προσπαθήστε να βρείτε αυτό το μοτίβο και προβλέψτε τον αριθμό κινήσεων για τέσσερα χαρτάκια σε μια πλευρά. Κατόπιν εξετάστε τη στρατηγική για τέσσερα χαρτάκια σε κάθε πλευρά.

5. **Εκτεινόμενα μοτίβα:** Χρησιμοποιήστε ένα από τα μοτίβα που ανακαλύψατε για να προβλέψετε το μικρότερο αριθμό κινήσεων για την επίλυση του προβλήματος με πέντε ή περισσότερα χαρτάκια σε κάθε πλευρά.

Η μέθοδος επίλυσης προβλήματος που θα χρησιμοποιηθεί περιλαμβάνει τα τέσσερα στάδια της διαδικασίας μαθηματικής επίλυσης που περιγράφονται από τον Polya.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕ Η ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΤΕ

Πολλά προβλήματα είναι απλά και δεν απαιτούν τίποτα περισσότερο από την εφαρμογή των αριθμητικών κανόνων. Κατά την επίλυση των



προβλημάτων, εφαρμόστε απλά τους κανόνες και θυμηθείτε τη σειρά των διαδικασιών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Λαμβάνοντας υπόψη $(6^3)(5^4) = (N)(900)$, βρείτε το N .

Κατανόηση του προβλήματος. Τι μας ζητείται; Ποια η αξία του N που ικανοποιεί την εξίσωση;

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Οποιαδήποτε ιδιαίτερη στρατηγική θα βοηθήσει εδώ; Ναι, ο κάθε όρος στην εξίσωση αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Κατόπιν, λύστε την εξίσωση σημειώνοντας τους κοινούς παράγοντες και στις δύο πλευρές της εξίσωσης.

Εκτέλεση του σχεδίου. Αναλύστε την εξίσωση σε πρώτους παράγοντες κάθε όρου.

$$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$900 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$$

Δύο δυάρια και δύο τριάρια από την παραγοντοποίηση του 6^3 και δύο πεντάρια από την παραγοντοποίηση του 5^4 ακυρώνουν τους αντίστοιχους παράγοντες του 900. Η εξίσωση μειώνεται σε

$$2 \times 3 \times 5 \times 5 = N, \text{ έτσι } N = 150.$$

Επανελέγχος. Απαντήσαμε στην ερώτηση που υποβλήθηκε; Ναι. Η απάντησή μας έχει νόημα; Ναι, $900 = 30^2 = (2 \times 3 \times 5)^2$. Μπορέσαμε να αποβάλουμε δύο δυνάμεις του 2 του 3 και του 5 για να λάβουμε την ίδια απάντηση.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΤΕ ΕΝΑΝ ΤΥΠΟ

Στα Πρότυπα NCTM υποστηρίζεται, ότι η άλγεβρα ως ένα σκέλος του προγράμματος σπουδών του δημοτικού, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να θέσουν μια στέρεα βάση για την κατανόηση και τη δοκιμή ως προετοιμασία για πιο περίπλοκα προβλήματα στο γυμνάσιο και το λύκειο (σελ. 37).

Η άλγεβρα είναι ένα ισχυρό εργαλείο που αντιπροσωπεύει πληροφορίες και επιλύει προβλήματα. Δημιουργήθηκε στη Βαβυλωνία και την Αίγυπτο πριν από 4000 έτη. Στην αρχή δεν υπήρξε εξίσωση και χρησιμοποιήθηκαν λέξεις αντί για γράμματα για τις μεταβλητές. Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν λέξεις όπως *heap* και *aha* για τις άγνωστες ποσότητες στα λεκτικά προβλήματα τους.

Heap και ένα έβδομο *heap* είναι 19. Πόσο είναι το *heap*;

Σήμερα θα χρησιμοποιούσαμε ένα γράμμα για την άγνωστη ποσότητα και θα εκφράζαμε τις δεδομένες πληροφορίες σε μια εξίσωση.

$$x + 1/7x = 19$$

Προσπαθήστε να λύσετε αυτήν την εξίσωση. Η λύση της είναι στο παράδειγμα Δ που ακολουθεί.

Η έρευνα δείχνει ότι μερικοί μαθητές έχουν δυσκολία να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής. Η λεπτομερής κατανόηση της μεταβλητής αναπτύσσεται με το πέρασμα του χρόνου και πρέπει να στηριχτεί σε εκτενή εμπειρία.

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ένα γράμμα ή ένα σύμβολο που χρησιμοποιείται για να συμβολίσει έναν άγνωστο αριθμό καλείται μεταβλητή. Μια μέθοδος για να εξοικειωθούν οι μαθητές στα δημοτικά σχολεία με τις μεταβλητές είναι να χρησιμοποιηθούν γεωμετρικές μορφές όπως $\square$ και $\triangle$. Παραδείγματος χάριν, οι μαθητές μπορεί να



κληθούν να βρουν τον αριθμό για $\square$ έτσι ώστε $\square + 7 = 12$ ή να βρουν μερικές πιθανές τιμές για $\triangle$ και $\square$ έτσι ώστε $\triangle + \square = 15$. Αυτά τα γεωμετρικά σύμβολα είναι λιγότερο εκφοβιστικά από τα γράμματα. Οι μαθητές μπορούν να αντικαταστήσουν μια μεταβλητή με έναν αριθμό με το γράψιμο του αριθμού μέσα στη γεωμετρική μορφή, σαν να συμπληρώνουν ένα κενό.

Για να δείξουμε τις διαδικασίες της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με αριθμούς και μεταβλητές, χρησιμοποιούμε τα γνωστά σύμβολα για αυτές τις διαδικασίες παραδείγματος χάριν, $3 + x$, $x - 5$, $x \times 4$ και $x / 4$. Ένα γινόμενο υποδεικνύεται χαρακτηριστικά με το γράψιμο ενός αριθμού δίπλα σε μια μεταβλητή. Παραδείγματος χάριν, $6x$ αντιπροσωπεύει 6 φορές το x ή 6 φορές οποιονδήποτε αριθμό χρησιμοποιείται ως αντικατάσταση για το x . Μια παράσταση που περιέχει τα αλγεβρικά σύμβολα, όπως $2x + 3$ ή $(4x)(7x) - 5$, καλείται αλγεβρική παράσταση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α

Αξιολογήστε τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις για $x=14$ και $v=28$,

1. $15 + 3x$
2. $4v - 6$
3. $v / 7 + 20$
4. $6x \times 12$

Λύση

1. $15 + 3(14) = 15 + 42 = 57$, παρατηρήστε ότι όταν αντικαθίσταται η μεταβλητή, οι παρενθέσεις $3(14)$ σημαίνει 3 φορές το 14.
2. $4(28) - 6 = 112 - 6 = 106$
3. $28 / 7 + 20 = 4 + 20 = 24$
4. $6(14) / 12 = 84 / 12 = 7$

Οι στοιχειώδεις έννοιες της άλγεβρας μπορούν να παρουσιαστούν νωρίς στα σχολικά μαθηματικά. Εξετάστε το παράδειγμα Β.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β

Η Ελένη κερδίζει σε ένα παιχνίδι με βώλους και διπλασιάζει τον αριθμό των βώλων της. Εάν αργότερα κερδίσει ακόμα 55 βώλους και στο σύνολό τους είναι 127, πόσους βώλους είχε στην αρχή;

Λύση

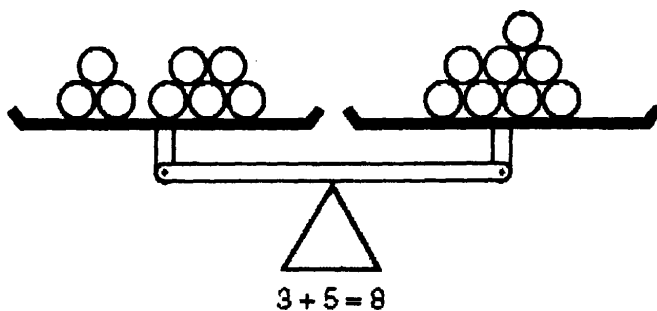
Μια δυνατότητα είναι να εργαστούμε προς τα πίσω από το τελικό σύνολο 127. Αφαιρώντας 55 βώλους μας μένουν 72, έτσι πρέπει να βρούμε τον αριθμό που παράγει 72 όταν διπλασιάζεται. Αυτός ο αριθμός είναι το 36. Μια δεύτερη προσέγγιση είναι να εργαστούμε προς τα εμπρός για να πάρουμε το 127 με εικασία. Αν υποθέσουμε ότι οι αρχικοί βώλοι ήταν 20 θα οδηγηθούμε στο $2(20) + 55 = 95$, το οποίο είναι λιγότερο από 127. Υποθέσεις των όλο και περισσότερο μεγαλύτερων αριθμών τελικά θα οδηγήσουν στη λύση των 36 βώλων.

Το παράδειγμα Β λέει ότι εάν κάποιος άγνωστος αριθμός βώλων διπλασιάζεται και προστίθενται σε αυτούς 55, το σύνολο είναι 127. Αυτές οι αριθμητικές πληροφορίες δηλώνονται στην ακόλουθη εξίσωση στην οποία το μεταβλητό x αντιπροσωπεύει τον αρχικό αριθμό βώλων.

$$2x + 55 = 127$$

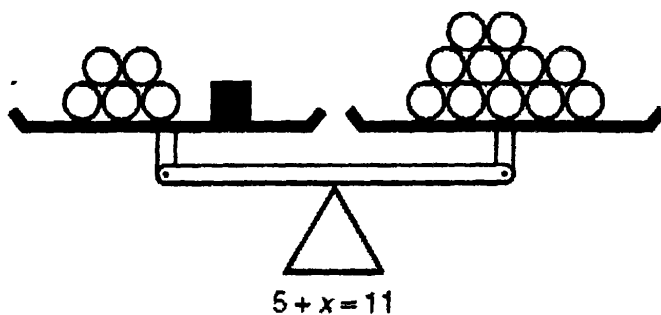


Η ζυγαριά είναι ένα πρότυπο για την εισαγωγή των εξισώσεων στο δημοτικό σχολείο. Η ιδέα της ζυγαριάς συσχετίζεται με την έννοια της ισότητας. Μια ζυγαριά με την αντίστοιχη εξίσωσή της παρουσιάζεται στο σχήμα 3. Εάν κάθε βόλος στη ζυγαριά έχει το ίδιο βάρος, το βάρος στην αριστερή πλευρά της ζυγαριάς είναι ίσο με το βάρος στη δεξιά πλευρά. Ομοίως, το άθροισμα των αριθμών στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης είναι ίσο με τον αριθμό στη δεξιά πλευρά.



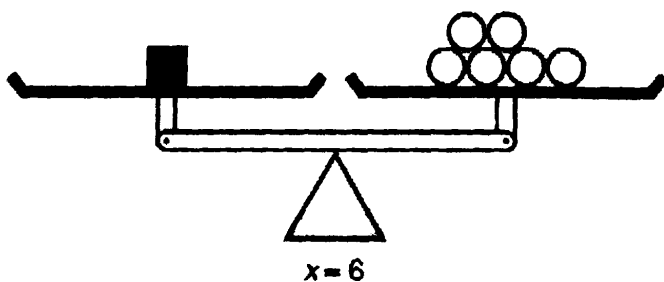
Σχήμα 3

Η ζυγαριά στο σχήμα 4 μας δείχνει ποιος αριθμός πρέπει να προστεθεί στο 5 για να πάρουμε 11. Το κουτί στην ζυγαριά μπορεί να θεωρηθεί ότι παίρνει τη θέση των βόλων που απαιτούνται για να ισορροπήσουν την ζυγαριά.



Σχήμα 4

Μια προσέγγιση στον καθορισμό του αριθμού βόλων που απαιτούνται για να ισορροπήσουν την ζυγαριά είναι η εικασία και έλεγχος. Μια άλλη προσέγγιση είναι να παρατηρήσουμε ότι με την αφαίρεση 5 βόλων και από τις δύο πλευρές της ζυγαριάς στο σχήμα 4, λαμβάνουμε την ζυγαριά που παρουσιάζεται στο σχήμα 5. Αυτή η ζυγαριά δείχνει ότι το κουτί πρέπει να αντικατασταθεί από 6 βόλους.



Σχήμα 5

Ομοίως, η εξίσωση $5 + x = 11$ μπορεί να απλοποιηθεί αν αφαιρέσουμε 5 και από τις δύο πλευρές για να πάρουμε το $x = 6$. Αυτή η απλούστερη εξίσωση δείχνει ότι η μεταβλητή πρέπει να αντικατασταθεί από το 6.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Για να λύσετε μια εξίσωση ή να βρείτε τη λύση σημαίνει να βρείτε όλες τις αντικαταστάσεις για τη μεταβλητή που καθιστούν την εξίσωση αληθή. Η συνηθισμένη προσέγγιση στην επίλυση μιας εξίσωσης είναι να αντικατασταθεί από μια απλούστερη εξίσωση οι λύσεις της οποίας είναι ίδιες με εκείνες της αρχικής εξίσωσης. Δύο εξισώσεις που έχουν ακριβώς την ίδια λύση καλούνται ισοδύναμες εξισώσεις.

Το πρότυπο της ζυγαριάς χρησιμοποιείται στο παράδειγμα Γ για να επεξηγήσει την επίλυση μιας εξίσωσης. Κάθε βήμα στην απλούστευση της ζυγαριάς αντιστοιχεί σε ένα βήμα της επίλυσης της εξίσωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ

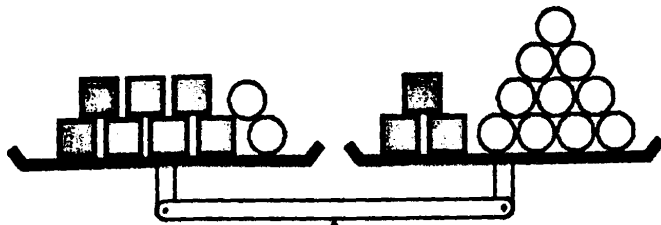
Λύστε $7x + 2 = 3x + 10$, χρησιμοποιώντας το πρότυπο της ζυγαριάς και τις εξισώσεις.

Λύση

Οπτική αναπαράσταση

Αλγεβρική αναπαράσταση

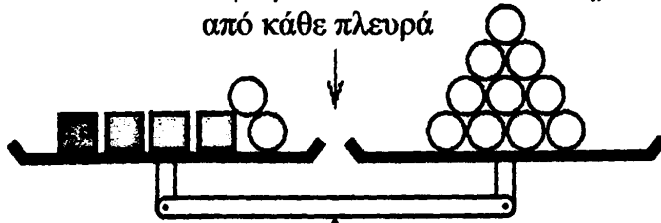




$$7x + 2 = 3x + 10$$

Αφαιρέστε 3 κουτιά
από κάθε πλευρά

Βήμα 1°



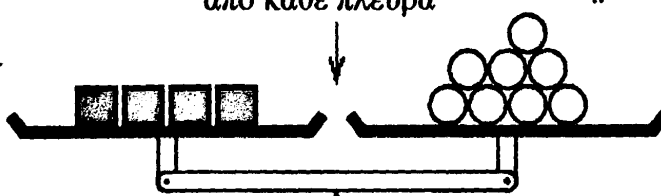
$$7x + 2 - 3x = 3x + 10 - 3x$$

Αφαιρέστε
3x από τις 2
πλευρές

$$4x + 2 = 10$$

Αφαιρέστε 2 βόλους
από κάθε πλευρά

Βήμα 2°



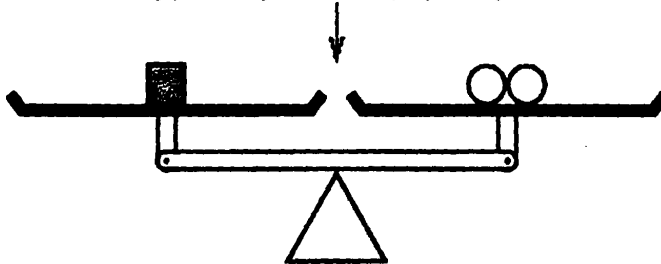
$$4x + 2 - 2 = 10 - 2$$

Αφαιρέστε
2 από τις 2
πλευρές

$$4x = 8$$

Μοιράστε και τα κουτιά και
τους βόλους σε 4 ίσες ομάδες

Βήμα 3°



$$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$$

Διαιρέστε
και τις 2
πλευρές
με 4

$$x = 2$$

Έλεγχος: Εάν κάθε κουτί στην πρώτη ζυγαριά αντικαθίσταται από 2 βόλους, η ζυγαριά θα ισορροπήσει με 16 βόλους σε κάθε πλευρά. Αντικαθιστώντας το x με 2 στην εξίσωση $7x + 2 = 3x + 10$ κάνει την εξίσωση μια αληθή δήλωση και δείχνει ότι το 2 είναι μια λύση σε αυτήν την εξίσωση.

Όταν χρησιμοποιείται το πρότυπο της ζυγαριάς, πρέπει να προστεθεί ή να αφαιρεθεί το ίδιο ποσό από κάθε πλευρά για να διατηρηθεί μια ισορροπία. Ομοίως, με μια εξίσωση, η ίδια λειτουργία πρέπει να εκτελεσθεί σε κάθε πλευρά για να διατηρηθεί μια ισότητα. Με άλλα λόγια, οτιδήποτε γίνεται σε μια πλευρά μιας εξίσωσης πρέπει να γίνει και στην άλλη πλευρά.



Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται τρεις μέθοδοι για ισοδύναμες εξισώσεις ως ιδιότητες της ισότητας.

Ιδιότητες της ισότητας

1. **Πρόσθεση ή αφαίρεση:** Προσθέστε τον ίδιο αριθμό ή αφαιρέστε τον ίδιο αριθμό και από τις δύο πλευρές μιας εξίσωσης.

2. **Πολλαπλασιασμός ή διαίρεση:** Πολλαπλασιάστε ή διαιρέστε και τις δύο πλευρές μιας εξίσωσης με τον ίδιο αριθμό διαφορετικό από το μηδέν.

3. **Απλοποίηση:** Αντικαταστήστε μια παράσταση σε μια εξίσωση από μια ισοδύναμη παράσταση.

Αυτές οι μέθοδοι των ισοδύναμων εξισώσεων διευκρινίζονται στο παράδειγμα Δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δ

Λύστε τις εξισώσεις.

1. $5x - 9 = 2x + 15$

2. $x + 1/7x = 19$ (Αυτό είναι το πρόβλημα που περιγράφεται στην πρώτη σελίδα που αναφέρεται σε αυτή την στρατηγική.)

Λύση

1.

$$5x - 9 = 2x + 15$$

$$5x - 9 - 2x = 2x + 15 - 2x \quad \text{αφαίρεση, αφαιρέστε } 2x \text{ και από τις δύο πλευρές}$$

$$3x - 9 = 15 \quad \text{απλοποίηση}$$

$$3x - 9 + 9 = 15 + 9 \quad \text{πρόσθεση, προσθέστε } 9 \text{ και στις δύο πλευρές}$$

$$3x = 24 \quad \text{απλοποίηση}$$

$$3x / 3 = 24 / 3 \quad \text{διαίρεση, διαιρέστε και τις δύο πλευρές με } 3$$

$$x = 8 \quad \text{απλοποίηση}$$

Έλεγχος: Όταν το x αντικαθίσταται από 8 στην αρχική εξίσωση (ή σε οποιοσδήποτε από τις ισοδύναμες εξισώσεις), η εξίσωση είναι αληθής.

$$5(8) - 9 = 2(8) + 15$$

$$31 = 31$$

2.

$$x + 1/7x = 19$$

$$7(x + 1/7x) = 7(19) \quad \text{πολλαπλασιασμός, πολλαπλασιάστε και τις δύο πλευρές με } 7$$

$$8x = 133 \quad \text{απλοποίηση}$$

$$8x/8 = 133/8 \quad \text{διαίρεση, διαιρέστε και τις δύο πλευρές με } 8$$

$$x = 165/8 = 16,625 \quad \text{απλοποίηση}$$

Έλεγχος: Όταν το x αντικαθίσταται από 16,625 στην αρχική εξίσωση, η εξίσωση είναι αληθής.

$$16,625 + 1/7 (16,625) = 16,625 + 2,375 = 19$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Δεν λύνονται όλα τα προβλήματα άλγεβρας από τις εξισώσεις. Εξετάστε το παράδειγμα Ε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ε

Ο Γιάννης έχει 19€ για να ξοδέψει στο λούνα παρκ. Αφού πλήρωσε στην είσοδο 3€, διαπιστώνει ότι κάθε γύρος κοστίζει 2€, Πόσους γύρους μπορεί να κάνει;



Λύση

Αυτός ο πίνακας παρουσιάζει τις συνολικές δαπάνες για τους διαφορετικούς αριθμούς γύρων. Ο Γιάννης μπορεί να κάνει οποιοδήποτε αριθμό γύρων από 0 έως 8 και να μην ξοδέψει περισσότερο από 19€.

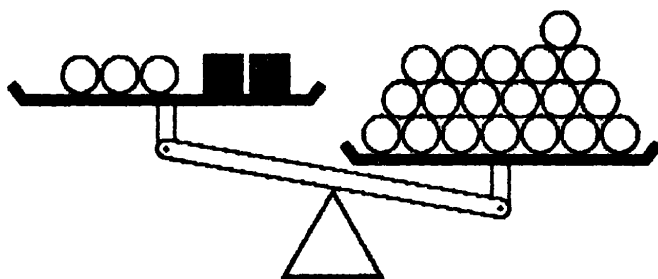
Αριθμός γύρων	Δαπάνη €
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13
6	15
7	17
8	19

Το παράδειγμα Ε λέει ότι 3€ συν κάποιος αριθμό γύρων επί 2€ πρέπει να είναι λιγότερο ή ίσο με 19€. Αυτές οι αριθμητικές πληροφορίες δηλώνονται στην ακόλουθη ανισότητα, όπου το x αντιπροσωπεύει τον άγνωστο αριθμό γύρων:

$$3 + 2x \leq 19$$

Μια ανισότητα είναι μια δήλωση που χρησιμοποιεί μια από τις ακόλουθες φράσεις: είναι λιγότερο από ($<$), είναι λιγότερο ή ίσο από ($\leq$), είναι μεγαλύτερο από ($>$), είναι μεγαλύτερο ή ίσο από ($\geq$), ή δεν είναι ίσο με ($\neq$).

Το πρότυπο της ζυγαριάς μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και για την επεξήγηση των ανισοτήτων. Το σχήμα 6 επεξηγεί την ανισότητα στο παράδειγμα Ε. Το κουτί μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε αριθμό βόλων αρκεί η αριστερή πλευρά να μην είναι πιο βαριά από τη δεξιά. Μερικοί δάσκαλοι που χρησιμοποιούν το πρότυπο της ζυγαριάς βάζουν τους μαθητές να μιμηθούν τη ζυγαριά. Μερικές φορές ο δάσκαλος τοποθετεί ένα μεγάλο βάρος στο ένα χέρι του μαθητή και ένα ελαφρύ στο άλλο. Αυτό βοηθά τους μαθητές να εξοικειωθούν με το γεγονός ότι το βάρος στην πλευρά της ζυγαριάς που γέρνει προς τα κάτω είναι μεγαλύτερο από το βάρος στην άλλη πλευρά της ζυγαριάς.

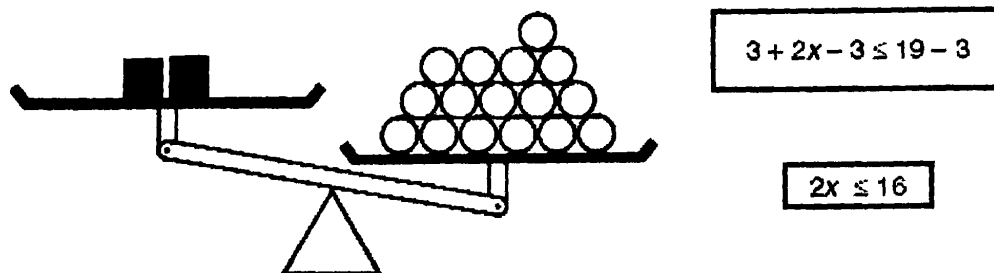


$$3 + 2x \leq 19$$

Σχήμα 6

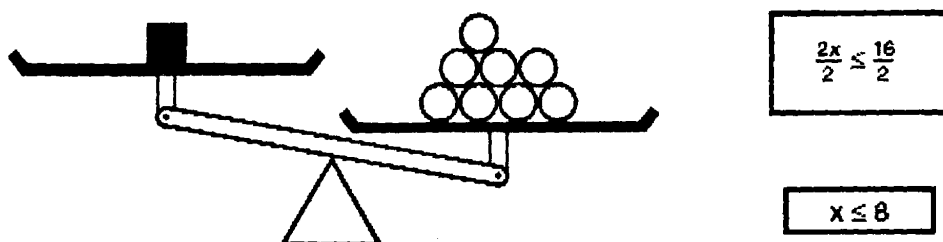
Μια μέθοδος για να βρούμε τον αριθμό βόλων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί του κουτιού στο σχήμα 6 είναι να αντικαταστήσουμε κάθε κουτί στη ζυγαριά με τον ίδιο αριθμό βόλων, κρατώντας το συνολικό αριθμό βόλων στην αριστερή πλευρά της ζυγαριάς μικρότερο ή ίσο με 19. Μια άλλη μέθοδος να απλοποιηθεί η ζυγαριά είναι να καθορίσουμε τις πιθανότητες για τον αριθμό των βόλων που αντικαθιστούν ένα κουτί. Κατ' αρχάς, μπορούμε να αφαιρέσουμε 3 βόλους και από τις δύο πλευρές για να πάρουμε τη ζυγαριά στο σχήμα 7.





Σχήμα 7

Έπειτα, μπορούμε να διαιρέσουμε τους βόλους στη δεξιά πλευρά της ζυγαριάς σε δύο ομάδες, μια ομάδα για κάθε κουτί στην αριστερή πλευρά της ζυγαριάς. Η απλουστευμένη ζυγαριά στο σχήμα 8 δείχνει ότι η αντικατάσταση του κουτιού από 7 ή λιγότερους βόλους θα κρατήσει τη ζυγαριά γερμένη προς τα κάτω στη δεξιά πλευρά και εάν το κουτί αντικατασταθεί από 8 βόλους η ζυγαριά θα ισορροπήσει.

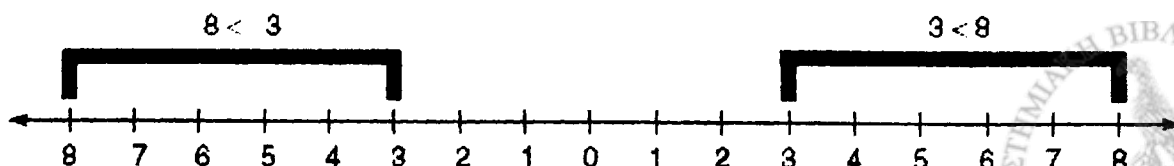


Σχήμα 8

Στα δεξιά κάθε ζυγαριάς στα παραπάνω σχήματα υπάρχει μια ανισότητα. Αυτές οι ανισότητες αντικαθίστανται από απλούστερες ανισότητες για να πάρουμε το x μικρότερο ή ίσο με 8. Για να καταστήσουμε αυτήν την ανισότητα αληθή, πρέπει να αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή με έναν αριθμό μικρότερο ή ίσο με το 8.

Να λύσουμε μια ανισότητα σημαίνει να βρούμε όλες τις αντικαταστάσεις για τη μεταβλητή που καθιστούν την ανισότητα αληθή. Οι αντικαταστάσεις που καθιστούν την ανισότητα αληθή καλούνται λύσεις. Όπως και σε μια εξίσωση, μια ανισότητα λύνεται με την αντικατάσταση της από απλούστερες ανισότητες. Δύο ανισότητες που έχουν ακριβώς την ίδια λύση ονομάζονται ισοδύναμες ανισότητες.

Οι ισοδύναμες ανισότητες μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας τα ίδια βήματα με εκείνα για τη επίλυση των ισοδύναμων εξισώσεων (εκτελώντας την ίδια λειτουργία και στις δύο πλευρές και αντικαθιστώντας μια παράσταση από μια ισοδύναμη παράσταση), με μια εξαίρεση: Ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση και των δύο πλευρών μιας ανισότητας με έναν αρνητικό αριθμό αντιστρέφει την ανισότητα. Παραδείγματος χάριν, $8 > 3$ αλλά εάν πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές της ανισότητας με -1 , λαμβάνουμε -8 και -3 , και το -8 είναι μικρότερο από το -3 , ($-8 < -3$). Αυτές οι ανισότητες διευκρινίζονται στο σχήμα 9.



Σχήμα 9

Τρεις μέθοδοι για τις ισοδύναμες ανισότητες δηλώνονται ως ιδιότητες της ανισότητας.

Ιδιότητες της ανισότητας

1. Πρόσθεση ή αφαίρεση: Προσθέστε τον ίδιο αριθμό ή αφαιρέστε τον ίδιο αριθμό και από τις δύο πλευρές μιας ανισότητας.

2. Πολλαπλασιασμός ή διαίρεση: Πολλαπλασιάστε ή διαιρέστε και τις δύο πλευρές μιας ανισότητας με τον ίδιο αριθμό διαφορετικό από το μηδέν και εάν ο αριθμός είναι αρνητικός, αντιστρέψτε το σημάδι ανισότητας.

3. Απλοποίηση: Αντικαταστήστε μια παράσταση σε μια ανισότητα με μια ισοδύναμη παράσταση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ζ

Λύστε την ανισότητα $4(3\chi) + 16 < 52$.

$$4(3\chi) + 16 < 52$$

$$12\chi + 16 < 52$$

απλοποίηση

$$12\chi + 16 - 16 < 52 - 16$$

αφαίρεση, αφαιρέστε 16 και από τις δύο πλευρές

$$12\chi < 36$$

απλοποίηση

$$12\chi/12 < 36/12$$

διαίρεση, διαιρέστε και τις δύο πλευρές με 12

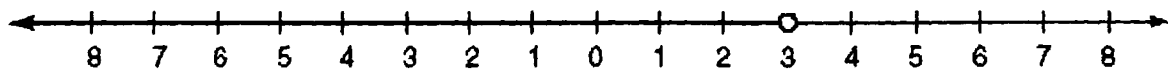
$$\chi < 3$$

απλοποίηση

Έλεγχος: Μπορούμε να πάρουμε μια ένδειξη για το εάν η ανισότητα λύθηκε σωστά με το να δοκιμάσουμε να βάλουμε έναν αριθμό μικρότερο από 3 για να δούμε εάν η λύση είναι σωστή. Όταν αντικαθιστάμε το χ με 2 στην αρχική ανισότητα μπορούμε να δούμε ότι η ανισότητα είναι αληθής.

$$4[3(2)] + 16 = 4(6) + 16 = 24 + 16 = 40 \text{ και το } 40 \text{ είναι μικρότερο από το } 52$$

Οι λύσεις για μια ανισότητα με μια μεταβλητή μπορούν να απεικονιστούν σε μια αριθμογραμμή. Οι λύσεις για την ανισότητα στο παράδειγμα Ζ παρουσιάζονται στο σχήμα 10. Ο κύκλος στο σημείο 3 δείχνει ότι αυτό το σημείο δεν είναι μέρος της λύσης. Έτσι η λύση περιλαμβάνει όλα τα σημεία στη γραμμή που επεκτείνεται αριστερά του σημείου 3.



Σχήμα 10

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Η

Λύστε την ανισότητα $11\chi - 7 \leq 3\chi + 23$, και επεξηγήστε τη λύση με τη χρησιμοποίηση μιας αριθμογραμμής.

Λύση

$$11\chi - 7 \leq 3\chi + 23$$

$$11\chi - 7 + 7 \leq 3\chi + 23 + 7$$

πρόσθεση, προσθέστε 7 και στις δύο πλευρές

$$11\chi \leq 3\chi + 30$$

απλοποίηση

$$11\chi - 3\chi \leq 3\chi - 3\chi + 30$$

αφαίρεση, αφαιρέστε 3χ και από τις δύο πλευρές

$$8\chi \leq 30$$

απλοποίηση

$$8\chi/8 \leq 30/8$$

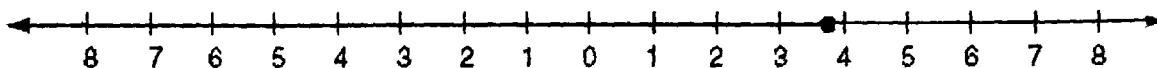
διαίρεση, διαιρέστε και τις δύο πλευρές με 8

$$\chi \leq 3 \frac{3}{4}$$

απλοποίηση



Κάθε αριθμός μικρότερος ή ίσος με $3 \frac{3}{4}$ είναι μια λύση για την αρχική ανισότητα, και αυτές οι λύσεις μπορούν να παρουσιαστούν σε μια αριθμογραμμή με τη σκίαση των σημείων αριστερά του σημείου $3 \frac{3}{4}$.



Η εφαρμογή της άλγεβρας λύνει τα προβλήματα, των οποίων οι λύσεις περιλαμβάνουν εξισώσεις και ανισότητες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Θ

Ένας κηπουρός θέλει να παραγγείλει συνολικά 138 δέντρα που αποτελούνται από δύο τύπους: Μηλιές και αχλαδιές. Κάθε μηλιά κοστίζει 156€ και κάθε αχλαδιά 114€. Εάν πρέπει να ξοδευτούν για τα δέντρα 18.000€, πόσες μηλιές θα είναι στην παραγγελία;

Λύση

Εάν το x είναι ίσο με τον αριθμό μηλιών, κατόπιν $138 - x$ θα είναι ίσο με τον αριθμό των αχλαδιών. Η ακόλουθη εξίσωση δείχνει ότι το συνολικό κόστος και των δύο τύπων δέντρων είναι 18.000€.

$$156x + 114(138 - x) = 18.000$$

$$156x + 15.732 - 114x = 18.000$$

$$42x = 2268$$

$$x = 54$$

Θα υπάρξουν 54 μηλιές στην παραγγελία.

Το παράδειγμα Ι είναι μια παραλλαγή του παραδείγματος Η, αλλά η λύση του απαιτεί μια ανισότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ι

Ένας κηπουρός θέλει να παραγγείλει πεύκα και μουριές έτσι ώστε ο αριθμός μουριών να είναι 6 φορές τον αριθμό των πεύκων. Κάθε πεύκο κοστίζει 250€ και κάθε μουριά 125€. Εάν ο προϋπολογισμός απαιτεί το συνολικό κόστος των δέντρων να είναι λιγότερο από 30.000€ και να υπάρχουν τουλάχιστον 20 πεύκα, ποιες είναι οι πιθανές τιμές του αριθμού πεύκων στην παραγγελία;

Λύση

Εάν το x είναι ίσο με τον αριθμό πεύκων, κατόπιν $6x$ είναι ο αριθμός μουριών, και η ακόλουθη ανισότητα δείχνει ότι το συνολικό κόστος των δύο τύπων δέντρων είναι λιγότερο από 30000€.

$$250x + 125(6x) < 30.000$$

$$250x + 750x < 30.000$$

$$1000x < 30.000$$

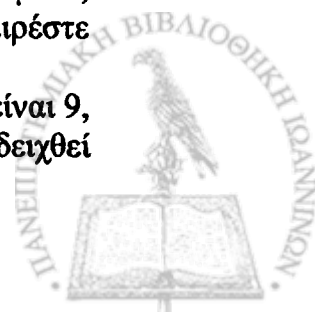
$$x < 30$$

Δεδομένου ότι υπάρχει η απαίτηση η παραγγελία να περιέχει τουλάχιστον 20 πεύκα, τα πεύκα μπορεί να είναι 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 ή 29.

Μια άλλη εφαρμογή της άλγεβρας είναι στην ανάλυση των αριθμητικών τεχνασμάτων και των αποκαλούμενων μαγικών τύπων. Επιλέξτε οποιοδήποτε αριθμό και εκτελέστε τις ακόλουθες διαδικασίες:

Προσθέστε 4 σε οποιοδήποτε αριθμό, πολλαπλασιάστε το αποτέλεσμα με 6, αφαιρέστε 9, διαιρέστε με 3, προσθέστε 13, διαιρέστε με 2 και αφαιρέστε έπειτα τον αριθμό με τον οποίο αρχίσατε.

Εάν εκτελέσετε σωστά αυτές τις διαδικασίες, η τελική απάντησή σας θα είναι 9, ανεξάρτητα από τον αριθμό που αρχίσατε. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί



χρησιμοποιώντας το μεταβλητό χ για να αντιπροσωπεύσει τον αριθμό που επιλέγεται, εκτελώντας τις ακόλουθες αλγεβρικές διαδικασίες:

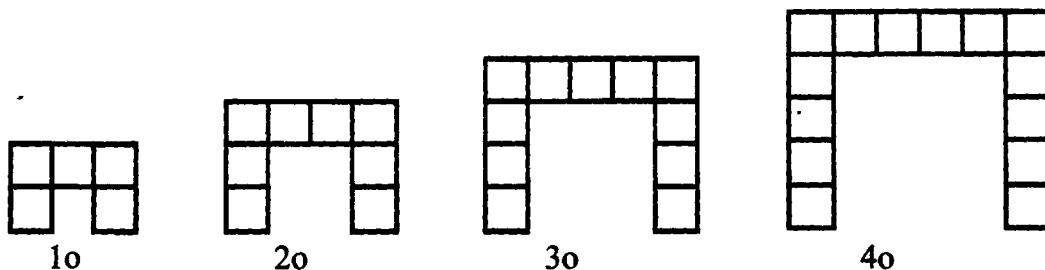
1. Επιλέξτε οποιοδήποτε αριθμό χ
2. Προσθέστε 4 $\chi + 4$
3. Πολλαπλασιάστε με 6 $6(\chi + 4) = 6\chi + 24$
4. Αφαιρέστε 9 $6\chi + 24 - 9 = 6\chi + 15$
5. Διαιρέστε με 3 $(6\chi + 15) / 3 = 2\chi + 5$
6. Προσθέστε 13 $2\chi + 5 + 13 = 2\chi + 18$
7. Διαιρέστε με 2 $(2\chi + 18) / 2 = \chi + 9$
8. Αφαιρέστε τον αριθμό χ $\chi + 9 - \chi = 9$

Τα προηγούμενα βήματα δείχνουν ότι δεν πειράζει ποιος αριθμός επιλέγεται για το χ , γιατί στο τελικό βήμα το χ αφαιρείται και το τελικό αποτέλεσμα είναι πάντα 9.

Η στρατηγική επίλυσης προβλήματος χρησιμοποιώντας άλγεβρα απεικονίζεται στη λύση του επόμενου προβλήματος.

Πρόβλημα

Σε μια τάξη μαθητών παρουσιάζονται τα ακόλουθα σχήματα που διαμορφώνονται με πλακάκια και λέγεται ότι υπάρχει ένα μοτίβο που, εάν συνεχιστεί, θα οδηγήσει σε ένα σχήμα που θα έχει 290 πλακάκια. Ποιο σχήμα θα είναι αυτό;



Κατανόηση του προβλήματος. Το τέταρτο σχήμα έχει 14 πλακάκια. Βρείτε ένα μοτίβο στο σχηματισμό των πρώτων σχημάτων, και σκιαγραφήστε το πέμπτο και έκτο σχήμα. Ερώτηση 1: Πόσα πλακάκια είναι στο πέμπτο και πόσα στο έκτο σχήμα;

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Μια προσέγγιση στην επίλυση αυτού του προβλήματος είναι να χρησιμοποιηθεί μια μεταβλητή και να γραφτεί μια αλγεβρική παράσταση για το νιοστό όρο. Αυτή η παράσταση μπορεί έπειτα να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσει ποιο σχήμα έχει 290 πλακάκια.

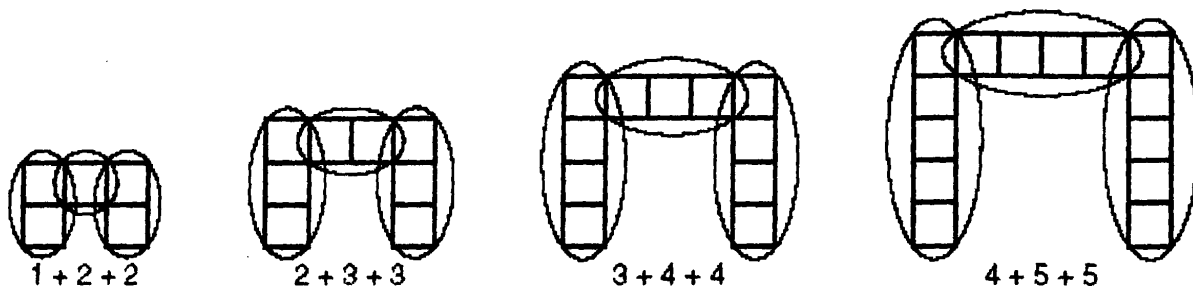
Παρατηρήστε ότι το τρίτο σχήμα έχει 3 πλακάκια σε κάθε "πόδι," 3 πλακάκια στη μέση της κορυφαίας σειράς, και 2 γωνιακά πλακάκια. Το τέταρτο σχήμα έχει 4 πλακάκια σε κάθε πόδι, 4 στη μέση της κορυφαίας σειράς, και 2 γωνιακά πλακάκια. Ερώτηση 2: Με την επέκταση αυτού του συλλογισμού, πόσα πλακάκια είναι στο 20ό σχήμα; στο 100ό;

Εκτέλεση του σχεδίου. Το νιοστό σχήμα θα έχει n πλακάκια σε κάθε πόδι, n πλακάκια στη μέση της κορυφαίας σειράς, και 2 γωνιακά πλακάκια. Έτσι η αλγεβρική παράσταση για τον αριθμό από πλακάκια στο νιοστό σχήμα είναι $n + n + n + 2$, ή $3n + 2$. Ερώτηση 3: Ποιος αριθμός για το n δίνει στην παράσταση $3n + 2$ την αξία 290;

Επανελέγχος. Ίσως εσείς είδατε έναν διαφορετικό τρόπο να ομαδοποιηθούν τα πλακάκια στα πρώτα τέσσερα σχήματα. Ερώτηση 4: Εάν είδατε το μοτίβο να



αναπτύσσεται ως εξής, ποια θα ήταν η αλγεβρική παράσταση για το νιοστό σχήμα;



Απαντήσεις στις ερωτήσεις 1–4

1. Το πέμπτο σχήμα έχει 17 πλακάκια και το έκτο έχει 20.
2. Το 20ό σχήμα έχει $20+20+20+2=62$ πλακάκια και το 100ό σχήμα έχει $100+100+100+2=302$ πλακάκια.
3. $v = 96$
4. $v + (v+1) + (v+1)$ ή $v + 2(v+1)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η Μαρία έχει συνολικά 72,00€, που αποτελούνται από έναν ίσο αριθμό νομισμάτων 1 λεπτού, 5 λεπτών, 10 λεπτών και 20 λεπτών. Πόσα νομίσματα έχει συνολικά;

Κατανόηση του προβλήματος. Θέλουμε να ξέρουμε πόσα νομίσματα έχει η Μαρία.

Πόσα χρήματα έχει συνολικά; 72,00€

Πόσα από κάθε νόμισμα έχει; Δεν ξέρουμε ακριβώς, αλλά ξέρουμε ότι έχει ίσο αριθμό κάθε νομίσματος.

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Ξέρουμε πόσο αξίζει κάθε νόμισμα και ξέρουμε πόσο αξίζουν όλα νομίσματά της συνολικά. Έτσι μπορούμε να γράψουμε μια εξίσωση που διαμορφώνει την κατάσταση.

Εκτέλεση του σχεδίου. Ορίστε το λ να είναι ο αριθμός λεπτών, π ο αριθμός των πεντάλεπτων, δ ο αριθμός των δεκάλεπτων και ε ο αριθμός των εικοσάλεπτων.

Έχουμε έπειτα την εξίσωση $\lambda + 5\pi + 10\delta + 20\varepsilon = 7200$.

Ξέρουμε ότι έχει ίσο αριθμό κάθε νομίσματος, έτσι $\lambda = \pi = \delta = \varepsilon$.

Αντικατάσταση λ για τις άλλες μεταβλητές δίνει μια εξίσωση με μόνο μια μεταβλητή. Η πιο πάνω εξίσωση γίνεται $\lambda + 5\lambda + 10\lambda + 20\lambda = 36\lambda = 7200$, έτσι $\lambda = 200$.

Η Μαρία έχει 200 λεπτά. Δεδομένου ότι έχει έναν ίσο αριθμό κάθε νομίσματος, έχει επίσης 200 πεντάλεπτα, 200 δεκάλεπτα και 200 εικοσάλεπτα. Επομένως, έχει 800 νομίσματα.

Επανελέγχος. Απαντήσαμε στην ερώτηση που υποβλήθηκε; Ναι. Η απάντησή μας φαίνεται λογική; Ναι, ξέρουμε ότι η απάντηση πρέπει να είναι λιγότερο από 7200 (ο αριθμός νομισμάτων εάν ήταν όλα λεπτά) και μεγαλύτερη από 360 (ο αριθμός νομισμάτων εάν ήταν όλα εικοσάλεπτα).

ΦΤΙΑΞΤΕ ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ

Τα μαθηματικά είναι ένας τρόπος μοντελισμού του πραγματικού κόσμου. Ένα μαθηματικό μοντέλο είναι παραδοσιακά μια μορφή εξίσωσης. Η χρήση των φυσικών μοντέλων είναι συχνά χρήσιμη στην επίλυση προβλημάτων. Μπορούν να υπάρξουν διάφορα μοντέλα κατάλληλα για ένα



δεδομένο πρόβλημα. Η επιλογή ενός συγκεκριμένου μοντέλου σχετίζεται συχνά με την προηγούμενη γνώση και την εμπειρία επίλυσης προβλήματος του μαθητή. Τα αντικείμενα και τα σχέδια μπορούν να βοηθήσουν να απεικονίσουν τις καταστάσεις του προβλήματος. Η μίμηση της κατάστασης είναι επίσης ένας τρόπος να απεικονιστεί το πρόβλημα. Το γράψιμο μιας εξίσωσης είναι ένας αφηρημένος τρόπος αναπαράστασης της κατάστασης ενός προβλήματος. Η χρήση της διαμόρφωσης παρέχει μια μέθοδο για την οργάνωση των πληροφοριών που θα μπορούσαν να οδηγήσουν στην επιλογή μιας άλλης στρατηγικής επίλυσης προβλήματος.

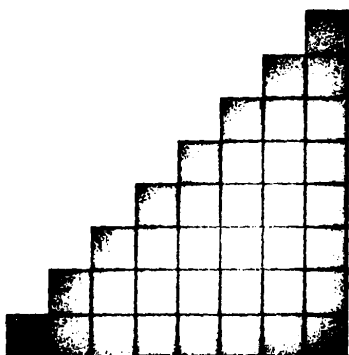
Τα πρότυπα είναι σημαντικά βοηθήματα για την απεικόνιση ενός προβλήματος και την υποβολή προτάσεων μιας λύσης. Το επόμενο πρόβλημα χρησιμοποιεί ακέραιους αριθμούς 0,1,2,3... και λύνεται με τη χρησιμοποίηση ενός προτύπου. Περιλαμβάνει μια γνωστή ιστορία για το Γερμανό μαθηματικό Karl Gauss. Όταν ο Gauss ήταν 10 ετών, ο δάσκαλος τού είπε να υπολογίσει το άθροισμα των ακέραιων αριθμών από το 1 έως το 100. Μέσα σε λίγα λεπτά ο Gauss έγραψε την απάντηση στο τετράδιό του και την έδωσε στο δάσκαλο. Προτού να διαβάσετε τη λύση στο ακόλουθο πρόβλημα, προσπαθήστε να βρείτε μια γρήγορη μέθοδο για να υπολογίσετε το άθροισμα των ακέραιων αριθμών από το 1 έως το 100.

Πρόβλημα

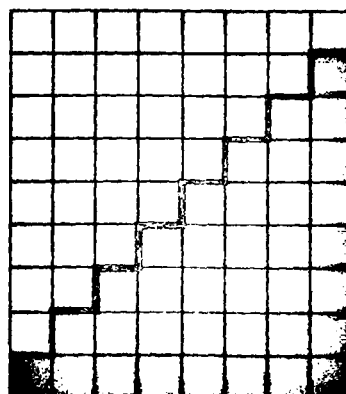
Βρείτε μια εύκολη μέθοδο για το άθροισμα διαδοχικών ακέραιων αριθμών από το 1 μέχρι οποιοδήποτε δεδομένο αριθμό.

Κατανόηση του προβλήματος. Εάν ο τελευταίος αριθμός στο άθροισμα είναι 8, το άθροισμα είναι $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$. Εάν ο τελευταίος αριθμός στο άθροισμα είναι 100, το άθροισμα είναι $1 + 2 + 3 + \dots + 100$, Ερώτηση 1: Ποιο είναι το άθροισμα των ακέραιων αριθμών από το 1 έως το 8;

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Ένας τρόπος επίλυσης είναι να κοπούν σκαλοπάτια από χαρτί γραφικών παραστάσεων. Ένας τρόπος παρουσιάζεται στο σχήμα (α) που είναι μια σκάλα από το 1 έως το 8: Υπάρχει 1 τετράγωνο στο πρώτο σκαλί, υπάρχουν 2 τετράγωνα στο δεύτερο σκαλί, και ούτω καθ' εξής, έως το τελευταίο σκαλί, στο οποίο υπάρχει μια στήλη 8 τετραγώνων. Ο συνολικός αριθμός τετραγώνων είναι το άθροισμα $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$. Με τη χρησιμοποίηση δύο αντιγράφων μιας σκάλας και την τοποθέτηση τους μαζί, όπως στο σχήμα (β), μπορούμε να πάρουμε ένα ορθογώνιο του οποίου ο συνολικός αριθμός τετραγώνων μπορεί εύκολα να βρεθεί με τον πολλαπλασιασμό του μήκους επί το πλάτος. Ερώτηση 2: Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου στο σχήμα (β) και πόσα μικρά τετράγωνα περιέχει;



1 σκάλα από το 1 έως το 8



2 σκάλες από το 1 έως το 8

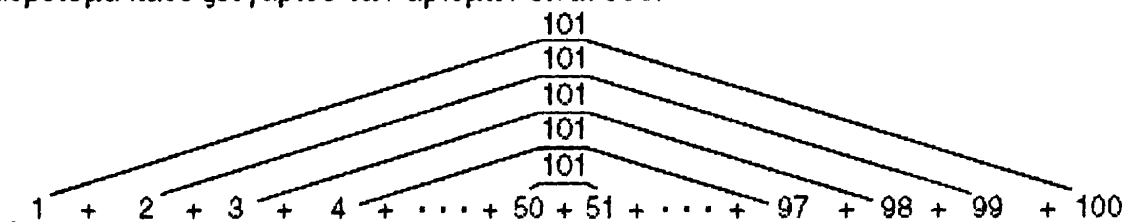


(α)

(β)

Εκτέλεση του σχεδίου. Κόψτε δύο αντίγραφα της σκάλας από το 1 έως το 8 και τοποθετήστε τα μαζί για να διαμορφώσετε ένα ορθογώνιο. Δεδομένου ότι ο συνολικός αριθμός τετραγώνων είναι 8×9 , ο αριθμός τετραγώνων σε μια από αυτές τις σκάλες είναι $(8 \times 9)/2 = 36$. Έτσι το άθροισμα των ακέραιων αριθμών από το 1 έως το 8 είναι 36. Αν τοποθετήσουμε δύο σκάλες μαζί για να διαμορφώσουμε ένα ορθογώνιο, βλέπουμε ότι ο αριθμός τετραγώνων σε μια σκάλα είναι ακριβώς ο μισός αριθμός τετραγώνων του ορθογωνίου. Αυτή η γεωμετρική προσέγγιση στο πρόβλημα δείχνει ότι το άθροισμα των διαδοχικών ακέραιων αριθμών από το 1 σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο αριθμό είναι το γινόμενο του τελευταίου αριθμού επί τον επόμενο αριθμό, διαιρεμένο δια 2. Ερώτηση 3: Ποιο είναι το άθροισμα των ακέραιων αριθμών από το 1 έως το 100;

Επανελέγχος. Μια άλλη προσέγγιση στον υπολογισμό του αθροίσματος ακέραιων αριθμών από το 1 έως το 100 προτείνεται από το ακόλουθο διάγραμμα και μπορεί να ήταν η μέθοδος που χρησιμοποίησε ο Gauss. Εάν οι αριθμοί από το 1 έως το 100 είναι ζευγαρωμένοι όπως παρουσιάζονται, το άθροισμα κάθε ζευγαριού των αριθμών είναι 101.



Ερώτηση 4: Πώς μπορεί αυτό το άθροισμα να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε το άθροισμα των ακέραιων αριθμών από το 1 έως το 100;

Απαντήσεις στις ερωτήσεις 1–4

1. 36

2. Οι διαστάσεις είναι 8 επί 9 και υπάρχουν $8 \times 9 = 72$ μικρά τετράγωνα.

3. Σκεφτείτε το συνδυασμό δύο σκαλών από 1 έως 100 σκαλιά για να ληφθεί ένα ορθογώνιο με 100×101 τετράγωνα. Το άθροισμα των ακέραιων αριθμών από το 1 έως το 100 είναι $(100 \times 101)/2 = 5050$

4. Δεδομένου ότι υπάρχουν 50 ζευγάρια αριθμών και το άθροισμα για κάθε ζευγάρι είναι 101, το άθροισμα των αριθμών από το 1 έως το 100 είναι $50 \times 101 = 5050$.

Χρησιμοποιήστε φυσικά μοντέλα

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Τέσσερις τρύπες τρυπιούνται με τρυπάνι σε μια ευθεία γραμμή σε ένα ορθογώνιο φύλλο αλουμινίου. Η απόσταση μεταξύ της τρύπας 1 και της τρύπας 4 είναι 35 εκ. Η απόσταση μεταξύ της τρύπας 2 και της τρύπας 3 είναι δύο φορές η απόσταση μεταξύ της τρύπας 1 και της τρύπας 2. Η απόσταση μεταξύ της τρύπας 3 και της τρύπας 4 είναι η ίδια με την απόσταση μεταξύ της τρύπας 2 και της τρύπας 3. Ποια είναι η απόσταση, σε εκατοστόμετρα, μεταξύ του κέντρου της τρύπας 1 και του κέντρου της τρύπας 3;

Κατανόηση του προβλήματος. Θέλουμε να ξέρουμε την απόσταση μεταξύ της τρύπας 1 και της τρύπας 3.

Ποια είναι η απόσταση από την τρύπα 1 στην τρύπα 4; 35 εκ.

Ποια είναι η απόσταση από την τρύπα 1 στην τρύπα 2; Η μισή απόσταση από την τρύπα 2 στην τρύπα 3.



Ποια είναι η απόσταση από την τρύπα 3 στην τρύπα 4; Ίδια με την απόσταση από την τρύπα 2 στην τρύπα 3.

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Κάντε ένα σχεδιασμό του προβλήματος για να καθορίσετε τις αποστάσεις.

Εκτέλεση του σχεδίου. Σημαδέψτε μια απόσταση 35 εκ. Τοποθετήστε έναν δείκτη που ονομάζεται #1 στην αρχή και ένα που ονομάζεται #4 σε απόσταση 35 εκ. Τοποθετήστε τους δείκτες #2 και #3 μεταξύ #1 και #4.

1) Κινήστε #2 και #3 μέχρι που οι αποστάσεις μεταξύ #2 & #3 και #3 & #4 να είναι ίσες.

2) Είναι η απόσταση μεταξύ #1 & #2 ίση με το μισό της απόστασης μεταξύ #2 & #3;

Ρυθμίστε τους δείκτες έως ότου ικανοποιούνται και οι δύο όροι.

Μετρήστε τις αποστάσεις και ελέγξτε ξανά. Η απόσταση μεταξύ #1 και #3 είναι 21 εκ.

Επανελέγχος. Η απάντησή μας φαίνεται λογική; Ναι, η απάντηση πρέπει να είναι λιγότερο από 35.

Αναπαραστήστε το πρόβλημα

Μπορεί να υπάρξουν φορές που θα αντιμετωπίσετε δυσκολία στην απεικόνιση ενός προβλήματος ή στην απαραίτητη διαδικασία για τη λύση του. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορεί να βρείτε χρήσιμο το να αναπαραστήσετε σωματικά την κατάσταση του προβλήματος. Να χρησιμοποιήσετε ανθρώπους ή αντικείμενα ακριβώς όπως περιγράφονται στο πρόβλημα, ή να χρησιμοποιήσετε στοιχεία που να αντιπροσωπεύουν τους ανθρώπους ή τα αντικείμενα. Η αναπαράσταση του προβλήματος μπορεί να σας οδηγήσει στην απάντηση, ή μπορεί να σας οδηγήσει στο να βρείτε μια άλλη στρατηγική που θα σας βοηθήσει να βρείτε την απάντηση. Η αναπαράσταση του προβλήματος είναι μια στρατηγική που είναι πολύ αποτελεσματική για μικρά παιδιά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Υπάρχουν πέντε άνθρωποι σε ένα δωμάτιο, και ανταλλάσσουν μεταξύ τους χειραψία μόνο μια φορά. Πόσες χειραψίες θα υπάρξουν;

Κατανόηση του προβλήματος. Καλούμαστε να καθορίσουμε το συνολικό αριθμό των χειραψιών.

Πόσοι άνθρωποι υπάρχουν; 5

Πόσες φορές κάθε πρόσωπο δίνει το χέρι του στο άλλο; Μόνο μία φορά.

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Θα ήταν δυνατό να διαμορφωθεί αυτή η κατάσταση με κάποιο τρόπο; Ναι, επιλέξτε πέντε φίλους και ζητήστε τους να αναπαραστήσουν το πρόβλημα.

Θα έπρεπε να κάνουμε τίποτ' άλλο; Κάντε έναν κατάλογο των χειραψιών.

Εκτέλεση του σχεδίου. Πάρτε πέντε φίλους για να σας βοηθήσουν σε αυτό το πρόβλημα. Συντάξτε έναν κατάλογο με το όνομα κάθε προσώπου στην κορυφή μιας στήλης. Βάλτε το πρώτο άτομο να δίνει το χέρι στους υπόλοιπους. Πόσες χειραψίες υπήρξαν; Τέσσερις. Επαναλάβετε αυτό τέσσερις φορές με τους υπόλοιπους φίλους. Γράψτε από κάτω ποιοι κάθε φορά έδωσαν τα χέρια τους. Ο πίνακάς μας πρέπει να φανεί κάπως έτσι:

Στέλλα	Νικήτας	Ηρώ	Σαλ	Πέτρος
Νικήτας	Ηρώ	Σαλ	Πέτρος	Στέλλα
Ηρώ	Σαλ	Πέτρος	Στέλλα	Νικήτας
Σαλ	Πέτρος	Στέλλα	Νικήτας	Ηρώ

Πέτρος	Στέλλα	Νικήτας	Ηρώ	Σαλ
--------	--------	---------	-----	-----

Υπήρξαν συνολικά 20 χειραψίες. Αλλά παρατηρήστε ότι κάθε πρόσωπο έδινε πραγματικά το χέρι του δύο φορές. (Παραδείγματος χάριν, η Στέλλα έδωσε το χέρι στο Νικήτα και ο Νικήτας έδωσε το χέρι στη Στέλλα.) Διαιρέστε το συνολικό αριθμό χειραψιών δια δύο για να βρείτε το συνολικό αριθμό εάν κάθε πρόσωπο είχε δώσει το χέρι σε κάθε άλλο πρόσωπο μόνο μια φορά. Υπήρξαν 10 χειραψίες.

Επανελέγχος. Απαντήσαμε στην ερώτηση; Ναι. Η απάντησή μας φαίνεται λογική; Ναι.

Χρησιμοποιήστε σχέδια ή σκίτσα

Μια από τις χρησιμότερες στρατηγικές για την κατανόηση ενός προβλήματος και τις ιδέες για μια λύση είναι ο σχεδιασμός σκίτσων. Πιθανότατα έχετε ακούσει την έκφραση " μια εικόνα αξίζει όσο χίλιες λέξεις." Στα ακόλουθα προβλήματα, τα σκίτσα θα σας βοηθήσουν για να βρείτε τη λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Για τα γενέθλια της συζύγου του, ο κ. Παπαδόπουλος προγραμματίζει ένα δείπνο σε ένα μεγάλο χώρο. Θα υπάρξουν 22 άνθρωποι και προκειμένου να καθίσουν θα πρέπει να δανειστεί τετράγωνα μικρά τραπέζια που να χωρούν να καθίσει ένα άτομο σε κάθε πλευρά. Θέλει να τακτοποιήσει τα τραπέζια σε μια ορθογώνια μορφή έτσι ώστε να μοιάζουν με έναν μεγάλο τραπέζι. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός μικρών τραπεζιών που ο κ. Παπαδόπουλος πρέπει να δανειστεί;

Κατανόηση του προβλήματος. Τα μικρά τραπέζια πρέπει να τοποθετηθούν το ένα δίπλα στο άλλο, άκρη με άκρη, έτσι ώστε να διαμορφώνουν έναν μεγάλο ορθογώνιο τραπέζι. Ερώτηση 1: Εάν δύο μικρά τραπέζια είναι τοποθετημένο άκρη με άκρη, πόσοι άνθρωποι μπορούν να καθίσουν;

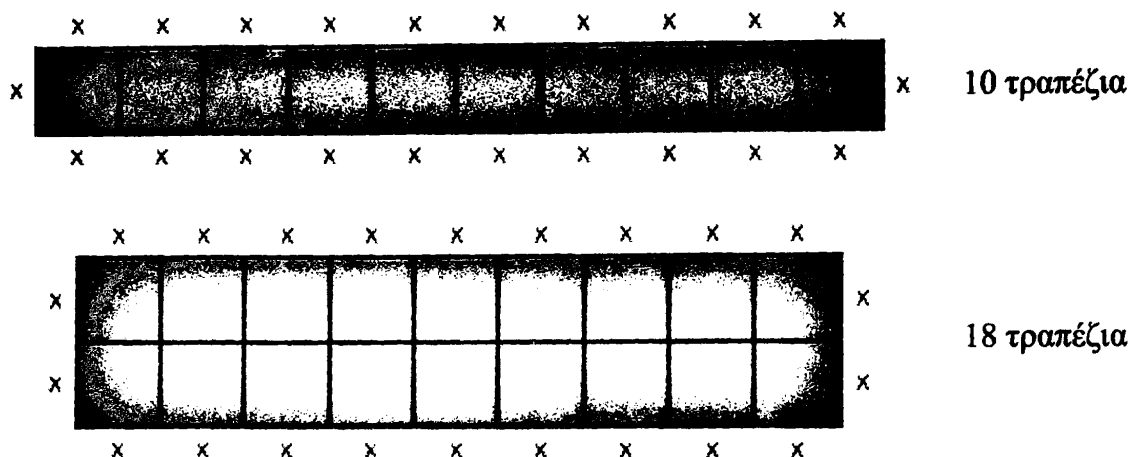


Ένα μεγάλο τραπέζι

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Ο σχεδιασμός των εικόνων των διαφορετικών ρυθμίσεων των τραπεζιών είναι μια φυσική προσέγγιση στην επίλυση αυτού του προβλήματος. Υπάρχουν μόνο μερικές δυνατότητες. Τα μικρά τραπέζια μπορούν να τοποθετηθούν σε μια μακρόστενη σειρά, μπορούν να τοποθετηθούν δίπλα-δίπλα με δύο παράπλευρα κ.λ.π. Ερώτηση 2. Πόσοι άνθρωποι μπορούν να καθίσουν σε πέντε μικρά τραπέζια εάν είναι τοποθετημένα δίπλα-δίπλα σε μια ενιαία σειρά;

Εκτέλεση του σχεδίου. Τα ακόλουθα σχέδια παρουσιάζουν δύο από τις πέντε πιθανές ρυθμίσεις που θα καθίσουν 22 άνθρωποι. Τα χ δείχνουν πώς 22 άνθρωποι μπορούν να καθίσουν σε κάθε ρύθμιση. Οι υπόλοιπες ρυθμίσεις 3 επί 8, 4 επί 7 και 5 επί 6 απαιτούν 24, 28 και 30 μικρά τραπέζια, αντίστοιχα. Ερώτηση 3: Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός μικρών τραπεζιών που απαιτούνται;





Επανελέγχος. Τα σχέδια δείχνουν ότι μια ενιαία σειρά από μικρά τραπέζια απαιτεί το μικρότερο αριθμό τραπεζιών επειδή κάθε τελικό τραπέζι έχει θέσεις για 3 ανθρώπους και κάθε ένα από τα υπόλοιπα μικρά τραπέζια έχουν θέσεις για 2 ανθρώπους. Σε όλες τις άλλες ρυθμίσεις, τα γωνιακά τραπέζια έχουν μόνο 2 καθίσματα και τα υπόλοιπα έχουν κάθισμα μόνο για 1 άτομο. Επομένως, ανεξάρτητα από τον αριθμό ανθρώπων, η ρύθμιση που χρησιμοποιεί το μικρότερο αριθμό τραπεζιών είναι μια ενιαία σειρά, υπό τον όρο ότι το δωμάτιο είναι αρκετά μακρύ. Ερώτηση 4: Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός τραπεζιών που απαιτείται για να καθίσουν 38 άνθρωποι;

Απαντήσεις στις ερωτήσεις 1 – 4

1. 6

2. 12

3. 10

4. Θα υπάρξουν 3 άνθρωποι στο πρώτο 3 στο τελευταίο τραπέζι και 32 άνθρωποι στα ενδιάμεσα. Επομένως, 2 μικρά τραπέζια στις άκρες και 16 μικρά τραπέζια ενδιάμεσα θα απαιτηθούν για να καθίσουν 38 άνθρωποι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εάν για να φάνε τέσσερις άνθρωποι χρειαζόμαστε ένα τετράγωνο κέικ με πλευρά 8 εκ., πόσα τετράγωνα κέικ πλευράς 12 εκ. απαιτούνται για 18 ανθρώπους;

Κατανόηση του προβλήματος. Πρόκειται να βρούμε πόσα 12 X 12 εκ. κέικ απαιτούνται.

Πόσο μεγάλο είναι το αρχικό κέικ; 8 X 8

Πόσοι άνθρωποι έφαγαν; 4

Πόσο μεγάλα είναι τα άλλα κέικ; 12 X 12

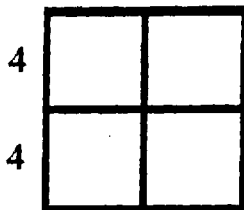
Πόσοι άνθρωποι πρέπει θα φάνε; 18

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Πώς θα έπρεπε να προσεγγίσουμε αυτό το πρόβλημα; Σχεδιάγραμμα του κέικ για να καταλάβουμε το μέγεθος των μερίδων.

Εκτέλεση του σχεδίου. Σχεδιάστε ένα κέικ 8 X 8 και κόψτε το σε 4 ίσα κομμάτια. Δεδομένου ότι κάθε κομμάτι είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 4 εκ., το εμβαδόν κάθε κομματιού είναι

$$4 \times 4 = 16 \text{ τ. εκ.}$$





Έτσι κάθε άτομο παίρνει 16 τ. εκ. του κέικ.

18 άνθρωποι επί 16 τ. εκ. ανά άτομο, απαιτούνται συνολικά 288 τ. εκ. κέικ.

Ξέρουμε ότι ένα κέικ 12 X 12 εκ. είναι 144 τ. εκ.

Τα 288 τ. εκ. που απαιτούνται για να ταΐσουν 18 ανθρώπους, διαιρούνται με 144 τ. εκ. που αποτελούν ένα κέικ. Άρα χρειαζόμαστε δύο τετράγωνα κέικ πλευράς 12 εκ.

Επανελέγχος. Απαντήσαμε σωστά στην ερώτηση και η απάντησή μας φαίνεται λογική; Ναι.

ΣΥΝΤΑΞΤΕ ΕΝΑΝ ΠΙΝΑΚΑ ΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ Η ΕΝΑΝ ΚΑΤΑΛΟΓΟ

Κάνοντας έναν πίνακα, διάγραμμα, γραφική παράσταση ή κατάλογο είναι ένας τρόπος να οργανωθούν τα στοιχεία που παρουσιάζονται σε ένα πρόβλημα. Αυτή η στρατηγική επίλυσης προβλήματος επιτρέπει στο λύτη προβλημάτων να ανακαλύψει τις σχέσεις και τα μοτίβα μεταξύ των στοιχείων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η Μαρία και η Άννα, αν και η μια δούλεψε 6 ημέρες περισσότερο από την άλλη βγάζουν τα ίδια χρήματα. Εάν η Μαρία βγάζει 36€ ανά ημέρα και η Άννα βγάζει 60€ ανά ημέρα, πόσες ημέρες δούλεψε κάθε μια;

Κατανόηση του προβλήματος. Απαντήστε σε μερικές απλές ερωτήσεις για να καταλάβετε το πρόβλημα. Ερώτηση 1: Πόσα κερδίζει η Μαρία σε 3 ημέρες; Σε 3 ημέρες κέρδισε τόσα όσα η Άννα σε 2 ημέρες; Ποια δούλεψε περισσότερες ημέρες;

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Μια μέθοδος επίλυσης αυτού του προβλήματος είναι να απαριθμηθούν οι συνολικές αποδοχές για κάθε ημέρα και κάθε πρόσωπο. Ερώτηση 2: Ποιο είναι το πρώτο άθροισμα επί του συνόλου που είναι το ίδιο για τη Μαρία και την Άννα και πόσες ημέρες χρειάστηκε η καθεμία για να κερδίσει αυτό το ποσό;

Εκτέλεση του σχεδίου. Ο πλήρης πίνακας παρουσιάζεται πιο κάτω. Υπάρχουν τρία ποσά στη στήλη της Μαρίας που είναι ίσα με τα ποσά στη στήλη της Άννας. Στη Μαρία πήρε 15 ημέρες για να κερδίσει 540€. Ερώτηση 3: Πόσες ημέρες πήρε στην Άννα για να κερδίσει 540€, και ποια είναι η διαφορά μεταξύ των αριθμών των ημερών που απαιτούνται για κάθε μια;

Ημέρες	Αμοιβές Μαρίας	Αμοιβές Άννας
1	36	60
2	72	120
3	108	180
4	144	240
5	180	300
6	216	360
7	252	420
8	288	480
9	324	540
10	360	600



11	396	660
12	432	720
13	468	780
14	504	840
15	540	900

Επανελέγχος. Μπορεί να παρατηρήσετε ότι κάθε 5 ημέρες η Μαρία κερδίζει 180€ και κάθε 3 ημέρες η Άννα κερδίζει 180€. Ερώτηση 4: Πώς αυτή η παρατήρηση προτείνει έναν διαφορετικό τρόπο να απαντηθεί η αρχική ερώτηση;

Οι απαντήσεις στις ερωτήσεις 1 – 4

1. Η Μαρία κερδίζει 108€ σε 3 ημέρες. Η Μαρία δεν κέρδισε τόσα σε 3 ημέρες όσο η Άννα σε 2 ημέρες. Η Μαρία πρέπει να απασχοληθεί περισσότερες ημέρες από την Άννα για να κερδίσει το ίδιο ποσό.

2. 180€. Στη Μαρία πήρε 5 ημέρες για να κερδίσει 180€ και στην Άννα πήρε 3 ημέρες για να κερδίσει 180€.

3. Στην Άννα πήρε 9 ημέρες για να κερδίσει 540€ και η διαφορά μεταξύ των αριθμών των ημερών εργασίας της Μαρίας και της Άννας είναι 6.

4. Όταν η Μαρία έχει απασχοληθεί 10 ημέρες και η Άννα έχει απασχοληθεί 6 ημέρες (μια διαφορά 4 ημερών), κάθε μια έχει κερδίσει 360€. Όταν έχουν δουλέψει 15 ημέρες και 9 ημέρες (μια διαφορά 6 ημερών), αντίστοιχα, κάθε μια έχει κερδίσει 540€.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Οι πελάτες σε ένα κατάστημα γαλακτοκομικών μπορούν να επιλέξουν μια από τρεις γεύσεις γιαουρτιού. Μπορούν επίσης να επιλέξουν μία από τέσσερις συσκευασίες. Πόσοι είναι οι δυνατοί συνδυασμοί γεύσης-συσκευασίας;

Κατανόηση του προβλήματος. Σε ποια ερώτηση πρέπει να απαντήσουμε; Πόσοι είναι οι δυνατοί συνδυασμοί γεύσης-συσκευασίας;

Πόσες γεύσεις είναι διαθέσιμες; 3

Πόσες συσκευασίες είναι διαθέσιμες; 4

Μπορείτε να επιλέξετε περισσότερες από μία γεύση ή μία συσκευασία; Όχι, οι συνδυασμοί πρέπει να έχουν μόνο μια γεύση και μία συσκευασία.

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Πώς θα μπορούσαμε να οργανώσουμε τους πιθανούς συνδυασμούς που βοηθούν; Με γράμματα και αριθμούς σε έναν κατάλογο.

Εκτέλεση του σχεδίου. Συντάξτε έναν οργανωμένο κατάλογο. Χρησιμοποιήστε το Γ για να δείξετε τη γεύση και το Σ για τη συσκευασία. Χρησιμοποιήστε τους αριθμούς 1 – 3 για τις διαφορετικές γεύσεις και 1 – 4 για τις διαφορετικές συσκευασίες.

Γ1Σ1, Γ1Σ2, Γ1Σ3, Γ1Σ4,

Γ2Σ1, Γ2Σ2, Γ2Σ3, Γ2Σ4,

Γ3Σ1, Γ3Σ2, Γ3Σ3, Γ3Σ4.

Τώρα μετρήστε τον αριθμό συνδυασμών. Υπάρχει 12 δυνατοί συνδυασμοί.

Επανελέγχος. Απάντησαμε στην ερώτηση που υποβλήθηκε; Ναι. Η απάντησή μας φαίνεται λογική; Ναι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Πόσες ώρες θα χρειαστεί ένα αυτοκίνητο που ταξιδεύει με 90χλμ. ανά ώρα για να φτάσει ένα αυτοκίνητο που ταξιδεύει με 60χλμ. ανά ώρα εάν το πιο αργό αυτοκίνητο ξεκίνησε μια ώρα πριν από το γρηγορότερο αυτοκίνητο;



Κατανόηση του προβλήματος. Ποια είναι η ερώτηση που εμείς πρέπει να απαντήσουμε; Πόση ώρα χρειάζεται για να φτάσει το γρηγορότερο αυτοκίνητο το πιο αργό αυτοκίνητο.

Ποια είναι η ταχύτητα του πιο αργού αυτοκινήτου; 60χλμ. ανά ώρα

Ποια είναι η ταχύτητα του γρηγορότερου αυτοκινήτου; 90χλμ. ανά ώρα

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Ποια στρατηγική θα βοηθήσει εδώ; Θα μπορούσαμε να αναπαραστήσουμε τα δεδομένα σε χαρτί, αλλά θα υπήρχε πρόβλημα ακρίβειας. Θα μπορούσαμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε εξισώσεις. Μπορείτε όμως να κάνετε έναν πίνακα με το χρόνο και την απόσταση που διανύεται μέχρι να δείξετε με ακρίβεια το τι θα συμβεί.

Εκτέλεση του σχεδίου. Κάντε έναν πίνακα με δύο γραμμές και τέσσερις στήλες. Οι γραμμές θα προσδιορίσουν τα αυτοκίνητα, και οι στήλες θα χαρακτηρίσουν τις ώρες. Όπου οι γραμμές και οι στήλες τέμνονται θα δείχνουν την απόσταση που διανύεται δεδομένου ότι η απόσταση είναι ίση με το γινόμενο της ταχύτητας επί το χρονικό διάστημα που ταξίδεψαν.

Ωρες 1 2 3 4	1	2	3	4
Αυτοκίνητο				
Αργό αυτοκίνητο	60	120	180	240
Γρήγ. αυτοκίνητο	0	90	180	270

Στο τέλος της πρώτης ώρας, ξεκίνησε το γρηγορότερο αυτοκίνητο. Στο τέλος της δεύτερης ώρας, το γρηγορότερο αυτοκίνητο είχε διανύσει 90χλμ. Στο τέλος της τρίτης ώρας, το γρηγορότερο αυτοκίνητο είχε διανύσει 180χλμ. Αυτό είναι ίσο με την απόσταση που διανύεται από το πιο αργό αυτοκίνητο σε τρεις ώρες. Έτσι, το γρηγορότερο αυτοκίνητο ταξίδεψε μόνο για δύο ώρες.

Επανελέγχος. Απάντησαμε στην ερώτηση που υποβλήθηκε; Ναι. Η απάντησή μας φαίνεται λογική; Ναι.

ΕΙΚΑΣΙΑ ΕΛΕΓΧΟΣ & ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΗ

Η στρατηγική εικασία, έλεγχος & αναθεώρηση μπορεί να είναι χρήσιμη για την επίλυση πολλών τύπων προβλημάτων. Κατά τη χρήση αυτής της στρατηγικής, οι μαθητές ενθαρρύνονται να κάνουν μια λογική εικασία, να ελέγξουν την εικασία και να την αναθεωρήσουν εάν είναι απαραίτητο. Σύμφωνα με τον Polya (1973, σελ. 99) «μια εικασία μπορεί να αποδειχθεί λανθασμένη αλλά παρ' όλα αυτά είναι χρήσιμη στο να σε οδηγήσει σε μια καλύτερη». Με την επανάληψη αυτής της διαδικασίας ένας μαθητής μπορεί να φθάσει σε μια σωστή απάντηση. Η χρησιμοποίηση αυτής της στρατηγικής δεν παράγει πάντα αμέσως μια σωστή λύση αλλά παρέχει τις πληροφορίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καταλάβουν οι μαθητές καλύτερα το πρόβλημα και να μπορούν να προτείνουν τη χρήση μιας άλλης στρατηγικής. Οι μαθητές έχουν μια φυσική τάση προς αυτή την στρατηγική και πρέπει να ενθαρρυνθούν να την χρησιμοποιούν όπου χρειάζεται.



Για να χρησιμοποιηθεί η στρατηγική εικασία, έλεγχος & αναθεώρηση, πρέπει να ακολουθηθούν τα επόμενα βήματα:

1. Κάντε μια εικασία για την απάντηση.
2. Ελέγξτε την εικασία σας. Ικανοποιεί το πρόβλημα;
3. Χρησιμοποιήστε τις πληροφορίες που λαμβάνονται κατά τον έλεγχο για να σας βοηθήσει να κάνετε μια νέα εικασία.
4. Συνεχίστε τη διαδικασία έως ότου πάρετε τη σωστή απάντηση.

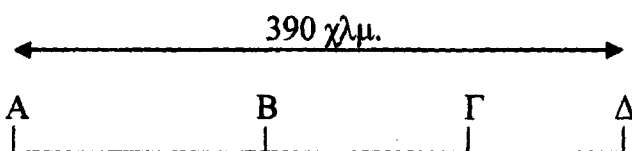
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η απόσταση από μία πόλη Α σε μία πόλη Δ περνώντας από τις πόλεις Β και Γ είναι 390 χλμ. Ποια είναι η απόσταση από την πόλη Α στην πόλη Β, αν η απόσταση από τη Β στη Γ είναι 10 χλμ. λιγότερη και η απόσταση από τη Γ στη Δ είναι 10 χλμ. λιγότερη απ' ό,τι η Β από τη Γ;

Κατανόηση του προβλήματος. Υπάρχουν διάφορα κομμάτια πληροφοριών σε αυτό το πρόβλημα. Το πρόβλημα θα μπορούσε να έχει κατανοηθεί καλύτερα με ένα διάγραμμα. Κατ' αρχάς, υποθέστε ότι αυτές οι πόλεις βρίσκονται σε μια ευθεία γραμμή, έτσι ώστε να μπορούν να εμφανιστούν στα σημεία Α, Β, Γ, και Δ, όπως φαίνεται στο σχήμα (α). Έπειτα, είναι 10 χλμ. μακρύτερα από το Α στο Β, απ' ό,τι από το Β στο Γ, έτσι μπορούμε να κινήσουμε το σημείο Β πιο κοντά προς το σημείο Γ, όπως στο σχήμα (β). Είναι επίσης 10 χλμ. μακρύτερα από το Β στο Γ απ' ό,τι από το Γ στο Δ έτσι το σημείο Γ μπορεί να κινηθεί πιο κοντά προς το σημείο Δ. Τέλος, η απόσταση από το Α στο Δ δίνεται ως 390 χλμ. Ερώτηση 1: Το πρόβλημα ποια απόσταση ζητά να βρεθεί;



(α)

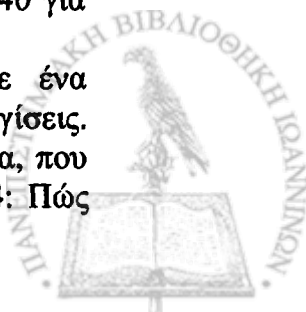


(β)

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Μια μέθοδος επίλυσης αυτού του προβλήματος είναι να γίνει μια λογική εικασία και να χρησιμοποιηθεί έπειτα το αποτέλεσμα για να κάνουμε μια καλύτερη εικασία. Εάν οι αποστάσεις ανάμεσα στις 4 πόλεις ήταν ίσες, όπως στο (α), η απόσταση μεταξύ κάθε πόλης θα ήταν 130 χλμ. ($390 / 3$). Εντούτοις, η απόσταση από την πόλη Α στην πόλη Β είναι η μέγιστη. Έτσι αρχίστε με μια εικασία 150 μιλίων για την απόσταση από το Α στο Β. Ερώτηση 2: Σε αυτήν την περίπτωση, ποια είναι η απόσταση από το Β στο Γ και από το Γ στο Δ;

Εκτέλεση του σχεδίου. Χρησιμοποιώντας μια εικασία 150 για την απόσταση από το Α στο Β παράγεται μια συνολική απόσταση από το Α στο Δ που είναι μεγαλύτερη από 390. Εάν η απόσταση από το Α στο Β είναι 145, κατόπιν η απόσταση Β - Γ είναι 135 και η απόσταση Γ - Δ είναι 125. Το άθροισμα αυτών των αποστάσεων είναι 405, το οποίο είναι ακόμα πάρα πολύ μεγάλο. Ερώτηση 3: Τι θα συμβεί εάν χρησιμοποιήσουμε μια εικασία 140 για την απόσταση από το Α στο Β;

Επανελέγχος. Ένας από τους λόγους για τους οποίους ξανακοιτάζουμε ένα πρόβλημα είναι για να εξετάσουμε τις διαφορετικές λύσεις ή προσεγγίσεις. Παραδείγματος χάριν, μπορεί να έχετε παρατηρήσει ότι η πρώτη εικασία, που παρήγαγε μια απόσταση 420 χλμ., ήταν 30 χλμ. παραπάνω. Ερώτηση 4: Πώς



μπορεί αυτή η παρατήρηση να χρησιμοποιηθεί για να οδηγήσει γρηγορότερα σε μια σωστή λύση του προβλήματος;

Απαντήσεις στις ερωτήσεις 1 –4

1. Το πρόβλημα απαιτεί να βρούμε την απόσταση από το Α στο Β.
2. Η απόσταση Β-Γ είναι 140, και η απόσταση Γ-Δ είναι 130.
3. Εάν η απόσταση Α-Β είναι 140, κατόπιν η απόσταση Β-Γ είναι 130 και η απόσταση Γ-Δ είναι 120. Δεδομένου ότι το σύνολο αυτών των αποστάσεων είναι 390, η σωστή απόσταση από το Α στο Β είναι 140 χλμ.
4. Εάν η απόσταση μεταξύ κάθε μιας από τις 3 πόλεις μειώνεται από 10 χλμ., η ανακριβής απόσταση 420 θα μειωθεί στη σωστή απόσταση 390, Επομένως, η απόσταση μεταξύ της πόλης Α και της πόλης Β είναι 140 χλμ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η Στέλλα έχει 3,40€ σε δεκάλεπτα και εικοσάλεπτα. Εάν έχει πέντε περισσότερα εικοσάλεπτα από τα δεκάλεπτα, πόσα νομίσματα από κάθε είδος έχει;

Κατανόηση του προβλήματος. Τι καλούμαστε να καθορίσουμε; Πρέπει να βρούμε πόσα δεκάλεπτα και πόσα εικοσάλεπτα έχει η Στέλλα.

Ποιο είναι το συνολικό χρηματικό ποσό; 3,40€

Τι άλλο ξέρουμε; Υπάρχουν πέντε περισσότερα εικοσάλεπτα από τα δεκάλεπτα.

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Οι συνδυασμοί λιστών θα βοηθήσουν; Ναι, αλλά η δημιουργία ενός εκτεταμένου καταλόγου πιθανών συνδυασμών δεκάλεπτων και εικοσάλεπτων είναι δύσκολο να δημιουργηθεί.

Τι άλλη στρατηγική θα λειτουργούσε; Επιλέξτε έναν αριθμό, δοκιμάστε τον και προσαρμόστε την εκτίμηση.

Εκτέλεση του σχεδίου. Δοκιμάστε 5 δεκάλεπτα. Αυτό θα σήμαινε 10 εικοσάλεπτα.

$$5 \times 0,10\text{€} + 10 \times 0,20\text{€} = 2,50\text{€}$$

Αυξήστε τον αριθμό δεκάλεπτων σε 7.

$$7 \times 0,10\text{€} + 12 \times 0,20\text{€} = 3,10\text{€}$$

Προσπαθήστε πάλι. Αυτή τη φορά χρησιμοποιήστε 8 δεκάλεπτα.

$$8 \times 0,10\text{€} + 13 \times 0,20\text{€} = 3,40\text{€}$$

Η Στέλλα έχει 8 δεκάλεπτα και 13 εικοσάλεπτα.

Επανελέγχος. Απαντήσαμε στην ερώτηση που υποβλήθηκε, και η απάντησή μας φαίνεται λογική; Ναι.

ΕΞΕΤΑΣΤΕ ΜΙΑ ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Η στρατηγική επίλυσης προβλήματος με απλοποίηση συχνά χρησιμοποιείται από κοινού με άλλες στρατηγικές. Το γράψιμο ενός απλούστερου προβλήματος είναι ένας τρόπος απλοποίησης της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος. Η επαναδιατύπωση του προβλήματος, χρησιμοποιώντας μικρότερους αριθμούς ή πιο οικεία στοιχεία μπορούν να οδηγήσουν στην κατανόηση της στρατηγικής που απαιτείται για την επίλυση. Πολλά προβλήματα μπορούν να διαιρεθούν σε απλούστερα προβλήματα που συνδυάζονται για να παραγάγουν μια λύση. Μερικά προβλήματα μπορούν να γίνουν απλούστερα δουλεύοντας προς τα πίσω.

Μερικές φορές ένα πρόβλημα είναι πάρα πολύ σύνθετο για να λυθεί με ένα βήμα. Όταν αυτό συμβαίνει, είναι συχνά χρήσιμο να απλοποιηθεί το πρόβλημα με τη διαίρεση του σε περιπτώσεις και την επίλυση καθεμίας χωριστά.



Διαιρέστε σε μικρότερα προβλήματα**ΠΡΟΒΛΗΜΑ**

Τρία σχήματα (ένας κύκλος, ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο) έχουν το ίδιο εμβαδόν. Ποιο σχήμα έχει τη μικρότερη περίμετρο;

Κατανόηση του προβλήματος. Θέλουμε να ξέρουμε ποιο από τα τρία σχήματα έχει τη μικρότερη περίμετρο.

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Οποιαδήποτε ιδιαίτερη στρατηγική θα βοηθήσει εδώ; Ναι, μπορούμε να συγκρίνουμε τις περιμέτρους των σχημάτων σε ζεύγη. Αυτό θα είναι ευκολότερο από το να υπολογίσουμε τα εμβαδά του καθενός σχήματος, δεδομένου ότι δεν δίνονται αριθμοί.

Εκτέλεση του σχεδίου. Κατ' αρχάς, συγκρίνετε την περίμετρο του κύκλου με την περίμετρο του τετραγώνου. Έχουν ίδιο εμβαδόν, έτσι το εμβαδόν του κύκλου, $\pi \rho^2$, είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου, a^2 . Συνεπώς, η περίμετρος του τετραγώνου θα είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από την περίμετρο του κύκλου.

Έπειτα, συγκρίνετε την περίμετρο του τετραγώνου με την περίμετρο του ορθογωνίου. Ένα τετράγωνο είναι το τετράπλευρο που σε συγκεκριμένο εμβαδόν έχει την ελάχιστη περίμετρο, έτσι η περίμετρος του τετραγώνου πρέπει να είναι μικρότερη από την περίμετρο του ορθογωνίου.

Από τη μεταβατική ιδιότητα, έπειτα, η περίμετρος του ορθογωνίου θα είναι μεγαλύτερη από την περίμετρο του κύκλου. Ως εκ τούτου, ο κύκλος έχει τη μικρότερη περίμετρο.

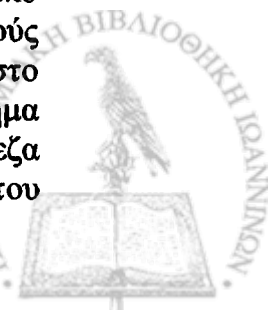
Επανελέγχος. Απάντησαμε στην ερώτηση που υποβλήθηκε; Ναι. Η απάντησή μας έχει νόημα; Ναι. Εάν επιλέξουμε αυθαίρετα 100 τ.μ. ως εμβαδόν κάθε σχήματος, η περίμετρος του κύκλου είναι κατά προσέγγιση 35,5 μ., η περίμετρος του τετραγώνου είναι 40 μ. και η περίμετρος του ορθογωνίου θα μπορούσε να είναι οποιοδήποτε ποσό μεγαλύτερο από 40 μ. και μικρότερο από 202 μ.

Εργαστείτε προς τα πίσω**ΠΡΟΒΛΗΜΑ**

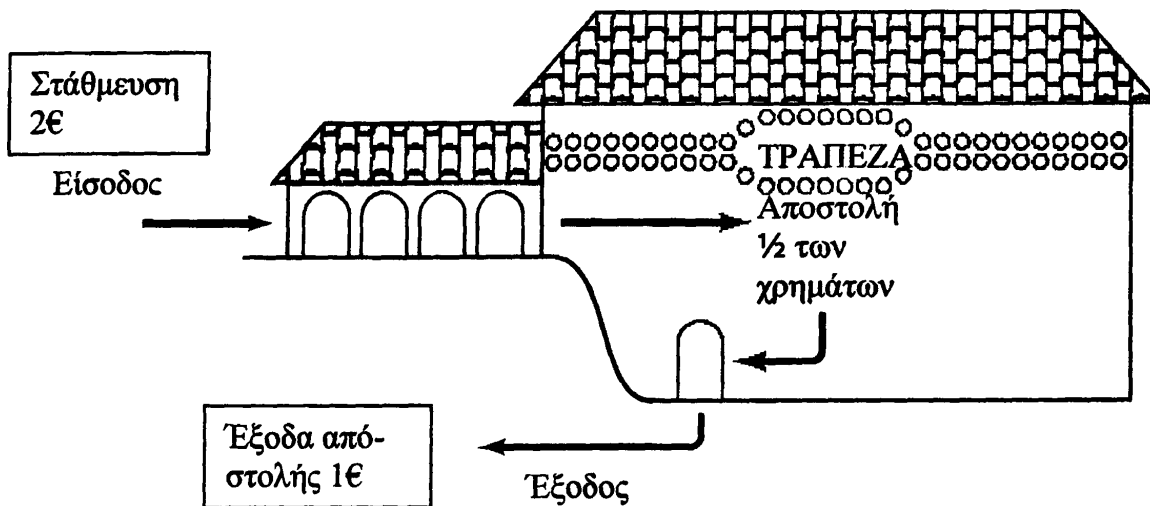
Μια επιχειρηματίας πήγε στην τράπεζα και έστειλε τα μισά από τα χρήματά της σε έναν χρηματιστή. Εκτός από μια αμοιβή στάθμευσης 2€ προτού μπει στην τράπεζα και 1€ έξοδα αποστολής αφότου έφυγε από την τράπεζα, αυτά ήταν όλα τα χρήματα που ξόδεψε. Τη δεύτερη ημέρα επέστρεψε στην τράπεζα και έστειλε τα μισά από τα υπόλοιπα χρήματά της στο χρηματιστή. Άλλη μια φορά, οι μόνες άλλες δαπάνες ήταν η αμοιβή στάθμευσης 2€ και έξοδα αποστολής 1€. Εάν της απέμειναν 182€, πόσα χρήματα είχε πριν πάει στην τράπεζα την πρώτη ημέρα;

Κατανόηση του προβλήματος. Αρχίστε με το να υποθέσετε το αρχικό χρηματικό ποσό, για παράδειγμα 800€, για να έχετε μια καλύτερη αίσθηση του προβλήματος. Ερώτηση 1: Εάν η επιχειρηματίας έχει την πρώτη ημέρα 800€, πόσα χρήματα θα έχει στο τέλος της ημέρας, μετά από την καταβολή των εξόδων αποστολής;

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Η υπόθεση για το αρχικό χρηματικό άθροισμα είναι μια πιθανή στρατηγική, αλλά αυτό απαιτεί πάρα πολλούς υπολογισμούς. Δεδομένου ότι ξέρουμε πως η επιχειρηματίας έχει 182€ στο τέλος της δεύτερης ημέρας, μια πιο κατάλληλη στρατηγική για το πρόβλημα είναι να ανιχνεύσετε εκ νέου τα βήματά της προς τα πίσω μέχρι την τράπεζα (βλ. το ακόλουθο διάγραμμα). Πρώτα λαμβάνει 1€ πίσω από την αμοιβή του



ταχυδρομείου. Συνεχίστε να λειτουργείτε μέσω της δεύτερης ημέρας στην τράπεζα. Ερώτηση 2: Πόσα χρήματα είχε η επιχειρηματίας στην αρχή της δεύτερης ημέρας;



Εκτέλεση του σχεδίου. Η επιχειρηματίας είχε 368€ στην αρχή της δεύτερης ημέρας. Συνεχίστε να εργάζεστε προς τα πίσω μέσω της πρώτης ημέρας για να καθορίσετε πόσα χρήματα είχε στην αρχή εκείνης της ημέρας. Ερώτηση 3: Ποιο ήταν αυτό το ποσό;

Επανέλεγχος. Μπορείτε τώρα να ελέγξετε τη λύση αρχίζοντας με 740€ αρχικό χρηματικό ποσό και να αφαιρέσετε τις δαπάνες και για τις δύο ημέρες για να δείτε εάν το τελικό ποσό είναι 182€. Το πρόβλημα μπορεί να ποικίλει με την αντικατάσταση των 182€ στο τέλος της δεύτερης ημέρας από οποιοδήποτε άλλο ποσό και δουλεύοντας προς τα πίσω στην αρχή της πρώτης ημέρας. Ερώτηση 4: Παραδείγματος χάριν, εάν υπήρχαν 240€ στο τέλος της δεύτερης ημέρας, ποιο ήταν το αρχικό χρηματικό ποσό;

Απαντήσεις στις ερωτήσεις 1 – 4

1. 398€

2. Το διάγραμμα που ακολουθεί δείχνει ότι η επιχειρηματίας στην αρχή της δεύτερης μέρας είχε 368€.

Τέλος 2ης μέρας

Αρχή 2ης μέρας

182€ —————> 183€
Εξοδα αποστολής 1€

—————> 366€
Αποστολή 1/2 του
χρηματικού ποσού

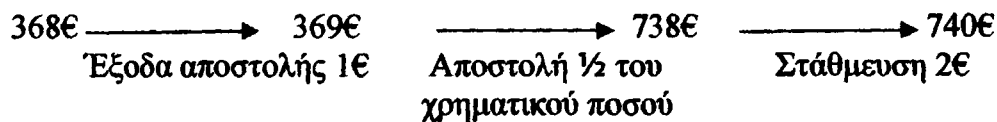
—————> 368€
Στάθμευση 2€

3. Το διάγραμμα που ακολουθεί δείχνει ότι η επιχειρηματίας στην αρχή της πρώτης μέρας είχε 740€.

Τέλος 1ης μέρας

Αρχή 1ης μέρας





4. 972€

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ένας μαθητής χρειάζεται τουλάχιστον ένα μέσο όρο 95% για να πάρει το βαθμό Α. Στα τρία πρώτα διαγωνίσματα ο μαθητής είχε κατά μέσο όρο 92%. Ποιος είναι ο ελάχιστος μέσος όρος που θα πρέπει να πάρει ο μαθητής στα επόμενα δύο διαγωνίσματα για να πάρει το βαθμό Α;

Κατανόηση του προβλήματος. Καλούμαστε να βρούμε πόσο πρέπει να πάρει κατά μέσο όρο στα δύο τελευταία διαγωνίσματα ο μαθητής για να πάρει το βαθμό Α.

Ποιος μέσος όρος απαιτείται για το Α; 95%

Πόσα διαγωνίσματα θα υπολογιστούν στο μέσο όρο; 5

Σε πόσα έχει εξεταστεί μέχρι τώρα; 3

Ποιος είναι ο μέσος όρος του στα τρία πρώτα διαγωνίσματα; 92%

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Ποια στρατηγική θα λειτουργούσε καλά σε αυτήν την περίπτωση; Δούλεψε προς τα πίσω από τον ελάχιστο απαραίτητο μέσο όρο που απαιτείται για το Α για να βρεις τα αποτελέσματα που απαιτούνται στα τελευταία δύο διαγωνίσματα.

Εκτέλεση του σχεδίου. Εργαστείτε προς τα πίσω από τον απαραίτητο μέσο όρο και στα πέντε διαγωνίσματα. Ο μέσος όρος των διαγωνισμάτων πρέπει να είναι 95%. Υπάρχουν πέντε διαγωνίσματα που ο συνολικός αριθμός βαθμών καί στα πέντε διαγωνίσματα πρέπει να είναι τουλάχιστον,
 $5 \times 95 = 475$

Μέχρι τώρα, ο μέσος όρος είναι 92% σε τρία διαγωνίσματα. Ενώ δεν ξέρουμε όλα τα μεμονωμένα αποτελέσματα, ο συνολικός αριθμός βαθμών που σημειώνονται στα τρία διαγωνίσματα πρέπει να είναι $3 \times 92 = 276$,

Οι 475 βαθμοί που απαιτούνται μείον 276 που έχουμε μέχρι τώρα είναι ίσο με 199 που απαιτούνται στα επόμενα δύο διαγωνίσματα. Οι 199 διαιρούνται δια 2 και ισούται με 99,5.

Ο μαθητής πρέπει να γράψει κατά μέσο όρο 99,5% στα επόμενα δύο διαγωνίσματα εάν θέλει να πάρει το βαθμό Α.

Επανελέγχος. Απαντήσαμε στην ερώτηση που υποβλήθηκε; Ναι. Η απάντησή μας φαίνεται λογική; Ναι, ξέραμε ότι ψάχναμε έναν αριθμό μεταξύ 95 και 100,

ΑΠΟΒΑΛΕΤΕ

Η στρατηγική της αποβολής χρησιμοποιείται συνήθως από τους ανθρώπους στην καθημερινή ζωή. Σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος, οι μαθητές πρέπει να απαριθμήσουν και έπειτα να αποβάλουν τις πιθανές λύσεις που δεν ικανοποιούνται από τις πληροφορίες που παρουσιάζονται στο πρόβλημα. Η πράξη της επιλογής μιας στρατηγικής επίλυσης προβλήματος είναι ένα παράδειγμα της διαδικασίας αποβολής. Ο λογικός συλλογισμός είναι μια στρατηγική επίλυσης προβλήματος που χρησιμοποιείται σε όλες τις καταστάσεις επίλυσης προβλήματος. Μπορεί να οδηγήσει στην αποβολή των ανακριβών απαντήσεων, ιδιαίτερα στις "εάν-τότε" περιπτώσεις και στα προβλήματα με ένα μεγάλο αριθμό πιθανών λύσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος διψήφιος αριθμός που διαιρείται με το 3 και του οποίου τα ψηφία διαφέρουν κατά 2;



Κατανόηση του προβλήματος

Τι καλούμαστε να βρούμε; Έναν συγκεκριμένο αριθμό.

Τι ξέρουμε για τον αριθμό; Ο αριθμός είναι μικρότερος από 100. Διαιρείται με το 3. Τα ψηφία του αριθμού διαφέρουν κατά 2.

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Ποια στρατηγική θα βοηθήσει εδώ; Εργαστείτε προς τα πίσω από το 99, απαριθμήστε τους αριθμούς και αποβάλετε εκείνους που δεν ικανοποιούν τις δεσμεύσεις που δίνονται. (Παρατηρήστε ότι έχουμε αποβάλει ήδη τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από 99.)

Εκτέλεση του σχεδίου.

99, 98, 97, 96, 95, 94, 93, 92, 91, 90,
89, 88, 87, 86, 85, 84, 83, 82, 81, 80,
79, 78, 77, 76, 75, 74, 73, 72, 71, 70, ...

Αποβάλετε εκείνους τους αριθμούς που δεν διαιρούνται με το 3:

99, 98, 97, 96, 95, 94, 93, 92, 91, 90,
89, 88, 87, 86, 85, 84, 83, 82, 81, 80,
79, 78, 77, 76, 75, 74, 73, 72, 71, 70, ...

Από αυτούς, αποβάλετε όλους τους αριθμούς των οποίων τα ψηφία δεν διαφέρουν κατά 2:

99, 96, 93, 90, 87, 84, 81, 78, 75, 72, ...

Το 75 είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που παραμένει.

Επανάλεγχος. Απαντήσαμε στην ερώτηση που υποβλήθηκε; Ναι. Έχουμε έναν διψήφιο αριθμό που διαιρείται με το 3 του οποίου τα ψηφία διαφέρουν κατά 2; Ναι.

ΨΑΞΤΕ ΓΙΑ ΜΟΤΙΒΑ

Τα μοτίβα διαδραματίζουν έναν σημαντικό ρόλο στη λύση των προβλημάτων σε όλους τους τομείς της ζωής. Οι ψυχολόγοι αναλύουν τα μοτίβα της ανθρώπινης συμπεριφοράς οι μετεωρολόγοι μελετούν τα καιρικά μοτίβα οι αστρονόμοι ψάχνουν τα μοτίβα στις μετακινήσεις των αστεριών και των γαλαξιών και οι ιδιωτικοί αστυνομικοί ψάχνουν για μοτίβα μεταξύ των ενδείξεων. Η εύρεση ενός μοτίβου είναι τόσο χρήσιμη στρατηγική επίλυσης προβλήματος στα μαθηματικά που μερικοί την έχουν αποκαλέσει τέχνη των μαθηματικών.

Για να βρούμε τα μοτίβα, πρέπει να συγκρίνουμε και να αντιπαραβάλουμε. Πρέπει να συγκρίνουμε για να βρούμε τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα που παραμένουν σταθερά και να αντιπαραβάλουμε για να βρούμε εκείνα που αλλάζουν. Τα μοτίβα εμφανίζονται με πολλές μορφές. Υπάρχουν αριθμητικά, γεωμετρικά και λεκτικά μοτίβα. Προσπαθήστε ένα βρείτε ένα μοτίβο σε κάθε μια από τις επόμενες ακολουθίες, και γράψτε ή σκιαγραφήστε τον επόμενο όρο.

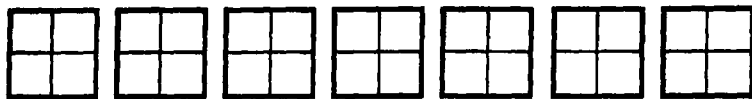
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α

1, 2, 4, ...

Λύση.

Κάθε όρος είναι διπλάσιος του προηγούμενου. Ο επόμενος όρος είναι 8.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β



Λύση.

Σε κάθε σχήμα ένα από τα 4 μικρά τετράγωνα που αποτελούν ένα μεγάλο τετράγωνο είναι σκιασμένο. Η σειρά των σκιασμένων τετραγώνων είναι πάνω αριστερά, πάνω δεξιά, κάτω αριστερά και κάτω δεξιά. Ο επόμενος όρος σε αυτήν την ακολουθία έχει το σκιασμένο τετράγωνο στην κάτω δεξιά γωνία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ

Άννα, Βασίλης, Γεωργία, Δημήτρης

Λύση.

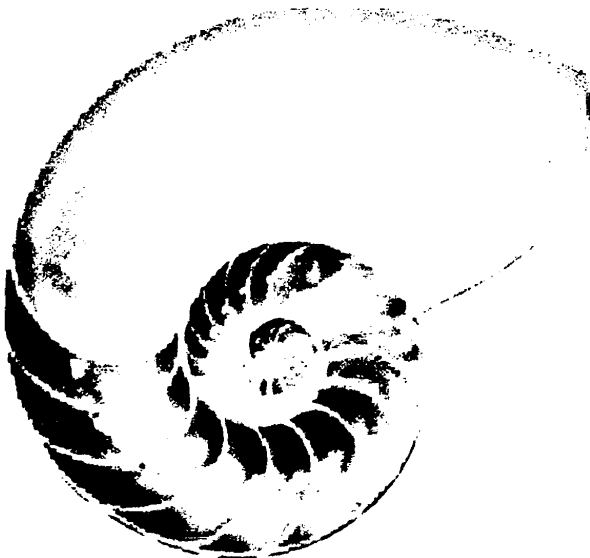
Τα πρώτα γράμματα των ονομάτων είναι διαδοχικά γράμματα της αλφαβήτου.

Το επόμενο όνομα αρχίζει με το γράμμα Ε.

Η εύρεση ενός μοτίβου απαιτεί να γίνουν κάποιες εικασίες. Κάνετε μια υπόθεση για το ποιο είναι το μοτίβο βασισμένοι σε κάποια παρατήρηση, ενώ μια διαφορετική παρατήρηση μπορεί να οδηγήσει σε ένα άλλο μοτίβο. Στο παράδειγμα Α, η διαφορά μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου όρου είναι 1 και η διαφορά μεταξύ του δεύτερου και του τρίτου είναι 2. Έτσι χρησιμοποιώντας τις διαφορές μεταξύ των διαδοχικών όρων ως βάση του μοτίβου, μεταξύ του τρίτου και του τέταρτου όρου θα είχαμε μια διαφορά 3 και έτσι ο τέταρτος όρος θα ήταν 7 και όχι 8. Στο παράδειγμα Γ θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το μοτίβο των εναλλασσόμενων αρσενικών και θηλυκών ονομάτων.

ΜΟΤΙΒΑ ΣΤΗ ΦΥΣΗ

Η σπείρα είναι ένα κοινό μοτίβο στη φύση. Βρίσκεται στους ιστούς της αράχνης, στα κοχύλια, στα φυτά, στα ζώα, στα καιρικά μοτίβα και στις μορφές των γαλαξιών. Η συχνή εμφάνιση των σπειρών στα ζωντανά όντα μπορεί να εξηγηθεί από τα διαφορετικά ποσοστά αύξησης. Οι οργανισμοί αυτοί κυρτώνουν επειδή η εξωτερική επιφάνεια αναπτύσσεται με γρηγορότερο ρυθμό από ότι η εσωτερική. Ένα παράδειγμα μιας σπείρας είναι το κοχύλι (σχήμα 11). Καθώς μεγαλώνει, το πλάσμα ζει στα διαδοχικά μεγαλύτερα διαμερίσματα.



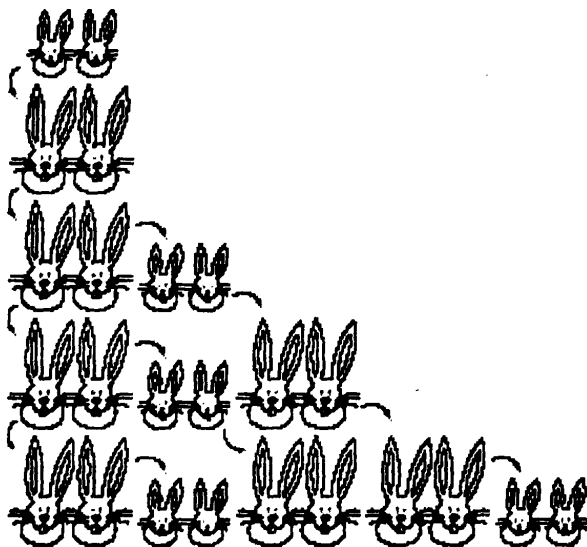
Σχήμα 11



Ποικίλα μοτίβα εμφανίζονται στα φυτά και τα δέντρα. Πολλά από αυτά τα μοτίβα συσχετίζονται με μια διάσημη ακολουθία αριθμών αποκαλούμενων ως **αριθμούς Fibonacci**. Μετά από τους πρώτους δύο αριθμούς αυτής της ακολουθίας, που είναι 1 και 1, κάθε διαδοχικός αριθμός μπορεί να ληφθεί με την πρόσθεση των δύο προηγούμενων αριθμών 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...

Οι αριθμοί Fibonacci ανακαλύφθηκαν από τον Ιταλό μαθηματικό Leonardo Fibonacci (περίπου 1175–1250) ενώ μελετούσε το ρυθμό γέννησης των κουνελιών. Υποθέστε ότι ένα ζευγάρι από μωρά κουνέλια είναι πάρα πολύ νέο τον πρώτο μήνα για να γεννήσει, αλλά γεννάει έκτοτε ένα ζευγάρι από μωρά κάθε μήνα. Κάθε νέο ζευγάρι κουνελιών θα ακολουθήσει τον ίδιο κανόνα. Τα ζευγάρια των κουνελιών για τους πρώτους 5 μήνες παρουσιάζονται πιο κάτω. Οι αριθμοί ζευγαριών των κουνελιών για τους πρώτους 5 μήνες είναι οι Fibonacci αριθμοί 1, 1, 2, 3, 5. Εάν αυτό το μοτίβο του ρυθμού αναπαραγωγής συνεχίζεται, οι αριθμοί ζευγαριών των κουνελιών τους επόμενους μήνες θα είναι αριθμοί Fibonacci. Η συνειδητοποίηση ότι οι αριθμοί Fibonacci θα μπορούσαν να εφαρμοστούν στην επιστήμη των φυτών και των δέντρων εμφανίστηκε αρκετά έτη μετά από την ανακάλυψη αυτής της ακολουθίας αριθμού.

ΚΟΥΝΕΛΙΑ



ΜΗΝΕΣ

1ος

2ος

3ος

4ος

5ος

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΜΟΤΙΒΑ

Τα αριθμητικά μοτίβα έχουν συναρπάσει τους ανθρώπους από την αρχή της καταγεγραμμένης ιστορίας. Ένα από τα πιο πρόωρα μοτίβα που αναγνωρίζονται οδήγησε στη διάκριση μεταξύ των ζυγών αριθμών 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... και των περιττών αριθμών 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

Το παιχνίδι μονός και ζυγός παίζεται εδώ και γενεές. Για να παιχτεί αυτό το παιχνίδι, ένα άτομο παίρνει μερικές πέτρες, και ένα δεύτερο πρόσωπο μαντεύει εάν ο αριθμός πετρών είναι μονός ή ζυγός. Εάν η εικασία είναι σωστή, το δεύτερο πρόσωπο κερδίζει.

Το τρίγωνο PASCAL

Το τριγωνικό σχήδιο αριθμών που παρουσιάζεται στο σχήμα 12 είναι το τρίγωνο PASCAL. Εμφανίστηκε στην Κίνα το 1303 και αποτελεί ενδιαφέρον για τους μαθηματικούς εδώ και εκατοντάδες χρόνια. Αυτό το τρίγωνο πήρε το όνομά του από το Γάλλο μαθηματικό Blaise Pascal (1623–1662) ο οποίος έγραψε ένα βιβλίο για μερικές από τις χρήσεις του.



Σειρά 0	1
Σειρά 1	1 1
Σειρά 2	1 2 1
Σειρά 3	1 3 3 1
Σειρά 4	1 4 6 4 1

Σχήμα 12

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δ

1. Βρείτε ένα μοτίβο που να εξηγεί την αρίθμηση των σειρών ως 0, 1, 2, 3 κ.λπ.
2. Στην τέταρτη σειρά, κάθε ένας από τους αριθμούς 4, 6 και 4 μπορεί να ληφθεί με την πρόσθεση των δύο παρακείμενων αριθμών από την πάνω του σειρά. Ποιοι αριθμοί είναι στην πέμπτη σειρά του τριγώνου PASCAL;

Λύση

1. Εκτός από τη σειρά 0, ο δεύτερος αριθμός σε κάθε σειρά είναι ο αριθμός της σειράς.

2. 1, 5, 10, 10, 5, 1

Αριθμητική ακολουθία.

Ακολουθίες αριθμών παράγονται συχνά από τα μοτίβα. Οι ακολουθίες 1, 2, 3, 4, 5, ... και 2, 4, 6, 8, 10, ... είναι μεταξύ των πρώτων που μαθαίνουν τα παιδιά. Σε τέτοιες ακολουθίες, κάθε νέος αριθμός της ακολουθίας λαμβάνεται από τον προηγούμενο με την πρόσθεση ενός επιλεγμένου αριθμού. Αυτός ο επιλεγμένος αριθμός καλείται κοινή διαφορά και η ακολουθία καλείται αριθμητική ακολουθία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ε

7, 11, 15, 19, 23, ...

172, 256, 340, 424, 508, ...

Η πρώτη αριθμητική ακολουθία έχει μια κοινή διαφορά 4. Ποια είναι η κοινή διαφορά για τη δεύτερη ακολουθία; Γράψτε τους επόμενους τρεις όρους σε κάθε ακολουθία.

Λύση

Οι επόμενοι τρεις όροι στην πρώτη ακολουθία είναι 27, 31 και 35. Η κοινή διαφορά για τη δεύτερη ακολουθία είναι 84 και οι επόμενοι τρεις όροι είναι 592, 676 και 760.

Γεωμετρική ακολουθία

Σε μια γεωμετρική ακολουθία, κάθε νέος αριθμός λαμβάνεται με τον πολλαπλασιασμό του προηγούμενου αριθμού με έναν επιλεγμένο αριθμό. Αυτός ο επιλεγμένος αριθμός καλείται κοινή αναλογία και η προκύπτουσα ακολουθία καλείται γεωμετρική ακολουθία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ζ

3, 6, 12, 24, 48, ...

1, 5, 25, 125, 625, ...

Η κοινή αναλογία στην πρώτη ακολουθία είναι 2. Ποια είναι η κοινή αναλογία στη δεύτερη ακολουθία; Γράψτε τους επόμενους δύο όρους σε κάθε ακολουθία.

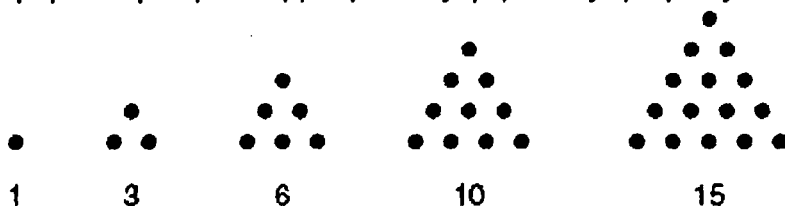
Λύση

Οι επόμενοι δύο όροι στην πρώτη ακολουθία είναι 96 και 192. Η κοινή αναλογία για τη δεύτερη ακολουθία είναι το 5 και οι επόμενοι δύο όροι είναι 3125 και 15.625.



Τρίγωνοι αριθμοί.

Η ακολουθία αριθμών που διευκρινίζονται στο σχήμα 13 δεν είναι ούτε αριθμητική ούτε γεωμετρική. Αυτοί οι αριθμοί καλούνται τρίγωνοι αριθμοί λόγω της ρύθμισης των κουκίδων που συνδέονται με κάθε αριθμό. Δεδομένου ότι κάθε τρίγωνος αριθμός είναι το άθροισμα ακέραιων αριθμών αρχίζοντας από το 1, ο τύπος για το άθροισμα διαδοχικών ακέραιων αριθμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε τους τρίγωνους αριθμούς.



Σχήμα 13

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Η

Ο πρώτος τρίγωνος αριθμός είναι το 1 και ο πέμπτος τρίγωνος αριθμός είναι το 15. Ποιος είναι ο έκτος τρίγωνος αριθμός;

Λύση

Ο έκτος τρίγωνος αριθμός είναι το 21.

Πεπερασμένες διαφορές

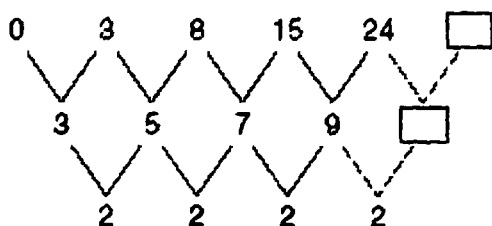
Συχνά κάποιες ακολουθίες αριθμών δεν φαίνεται να έχουν ένα μοτίβο. Εντούτοις, μερικές φορές τα αριθμητικά μοτίβα μπορούν να βρεθούν με την εξέταση των διαφορών μεταξύ των διαδοχικών όρων. Αυτή η προσέγγιση καλείται μέθοδος πεπερασμένων διαφορών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Θ

Εξετάστε την ακολουθία 0, 3, 8, 15, 24, ... Βρείτε ένα μοτίβο και καθορίστε τον επόμενο όρο.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, μπορούμε να λάβουμε μια δεύτερη ακολουθία αριθμών με τον υπολογισμό των διαφορών μεταξύ των αριθμών της αρχικής ακολουθίας, όπως παρουσιάζεται πιο κάτω. Κατόπιν λαμβάνεται μια τρίτη ακολουθία με τον υπολογισμό των διαφορών από τη δεύτερη ακολουθία. Η διαδικασία σταματά όταν όλοι οι αριθμοί στην ακολουθία διαφορών είναι ίσοι. Σε αυτό το παράδειγμα, όταν η ακολουθία αποτελείται συνέχεια από το 2, σταματάμε και επιστρέφουμε προς τα πίσω από την κατώτατη σειρά στην αρχική ακολουθία. Υποθέτοντας ότι το μοτίβο 2 συνεχίζεται, αφού ο προηγούμενος αριθμός είναι 9 ο επόμενος αριθμός είναι 11. Έτσι ο επόμενος αριθμός μετά από το 24 είναι το 35.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ι**

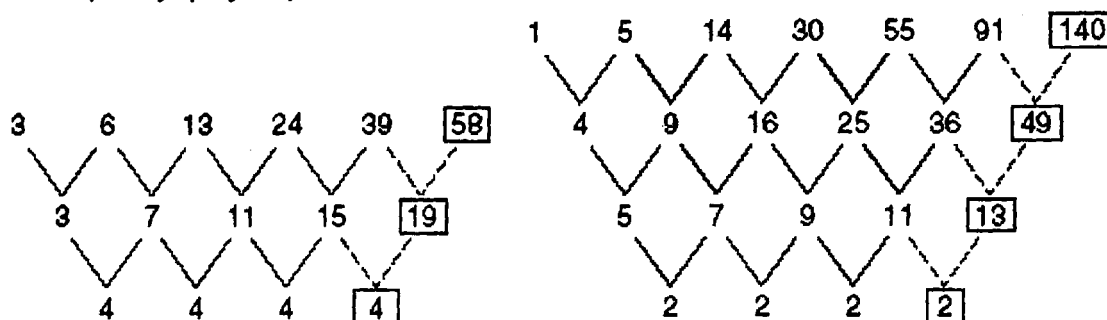
Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για να καθορίσετε τον επόμενο όρο σε κάθε ακολουθία.



1. 3, 6, 13, 24, 39
2. 1, 5, 14, 30, 55, 91

Λύση

1. Ο επόμενος όρος στην ακολουθία είναι 58.
2. Ο επόμενος όρος στην ακολουθία είναι 140.



ΕΠΑΓΩΓΙΚΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ

Η διαδικασία της παραγωγής συμπερασμάτων βάσει των μοτίβων, των παρατηρήσεων, των παραδειγμάτων ή των πειραμάτων καλείται επαγωγικός συλλογισμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Κ

Κάθε άθροισμα τριών διαδοχικών ακέραιων αριθμών διαιρείται με το 3.

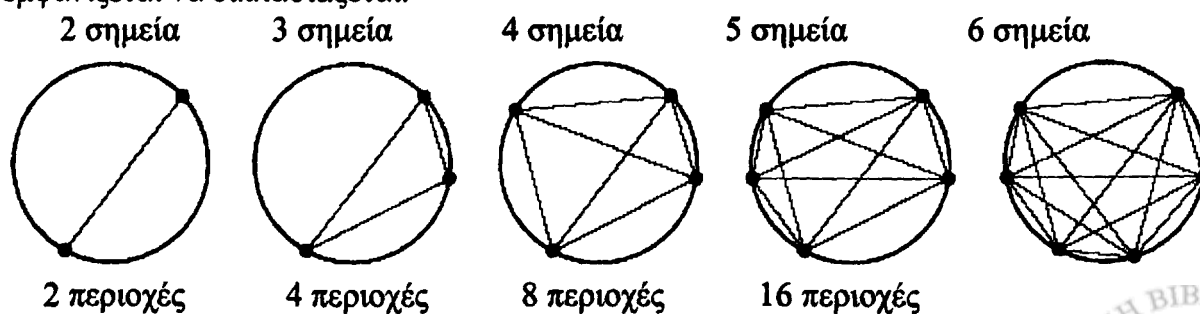
$$4 + 5 + 6 = 15 \quad 2 + 3 + 4 = 9 \quad 7 + 8 + 9 = 24$$

Εάν καταλήξουμε στο συμπέρασμα, βάσει αυτών των αθροισμάτων, ότι το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι διαιρετό με το 3, χρησιμοποιούμε τον επαγωγικό συλλογισμό.

Ο επαγωγικός συλλογισμός μπορεί να θεωρηθεί ως μια "ενημερωμένη εικασία." Αν και αυτός ο τύπος συλλογισμού είναι σημαντικός στα μαθηματικά, μερικές φορές οδηγεί σε ανακριβή αποτελέσματα. Επειδή πολλές εργασίες των μαθητών δημοτικού και γυμνασίου στηρίζονται στον επαγωγικό συλλογισμό, οι δάσκαλοι πρέπει να γνωρίζουν ότι οι μαθητές μπορεί να αναπτύξουν μια λανθασμένη προσδοκία ότι τα μοτίβα γενικεύουν πάντα με τρόπο που θα αναμενόταν βάσει της συχνότητας που βρίσκεται στους πρώτους όρους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Λ

Εξετάστε τον αριθμό περιοχών που μπορούν να ληφθούν σε έναν κύκλο ενώνοντας σημεία στην περιφέρεια του κύκλου. Η σύνδεση 2 σημείων παράγει 2 περιοχές, η σύνδεση 3 σημείων παράγει 4 περιοχές, και τα λοιπά. Κάθε φορά που χρησιμοποιείται ένα νέο σημείο στον κύκλο, ο αριθμός περιοχών εμφανίζεται να διπλασιάζεται.



Οι αριθμοί περιοχών στους κύκλους που παρουσιάζονται είναι η αρχή της γεωμετρικής ακολουθίας 2, 4, 8, 16, ... και είναι δελεαστικό να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι 6 σημεία θα παραγάγουν 32 περιοχές. Εντούτοις,



ανεξάρτητα από το πώς τα 6 σημεία βρίσκονται στον κύκλο, δεν θα υπάρξουν περισσότερες από 31 περιοχές.

Το παράδειγμα εξαίρεση στον κανόνα

Ένα παράδειγμα που παρουσιάζει μια δήλωση για να είναι ψευδής καλείται παράδειγμα εξαίρεση στον κανόνα. Εάν έχετε μια γενική δήλωση, την εξετάζετε για να δείτε εάν ισχύει για μερικές ειδικές περιπτώσεις. Μπορεί να είστε σε θέση να βρείτε ένα παράδειγμα εξαίρεση στον κανόνα για να δείξετε ότι η δήλωση δεν είναι αληθής, ή ότι μια υπόθεση δεν μπορεί να αποδειχθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Μ

Βρείτε δύο ακέραιους αριθμούς για τους οποίους η ακόλουθη δήλωση είναι ψευδής: Το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε ακέραιων αριθμών είναι διαιρετό με το 2.

Λύση

Αυτό δεν ισχύει για 7 και 4, δεδομένου ότι $7 + 4 = 11$ και το 11 δεν διαιρείται με το 2. Υπάρχουν ζευγάρια ακέραιων αριθμών για τα οποία η δήλωση ισχύει. Παραδείγματος χάριν, $3 + 7 = 10$, και το 10 διαιρείται με το 2.

Εντούτοις, το παράδειγμα εξαίρεση στον κανόνα του αθροίσματος 7 και 4 δείχνει ότι η δήλωση δεν ισχύει για όλα τα ζευγάρια των ακέραιων αριθμών.

Τα παραδείγματα εξαιρέσεις στον κανόνα μπορούν να μας βοηθήσουν για να επαναδιατυπώσουμε μια υπόθεση. Η δήλωση στο παράδειγμα Μ είναι ψευδής, αλλά εάν αλλαχτεί ως εξής "το άθροισμα δύο περιττών αριθμών διαιρείται με το 2," γίνεται μια αληθής δήλωση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ν

Για ποιες από τις ακόλουθες δηλώσεις υπάρχει ένα παράδειγμα εξαίρεση στον κανόνα; Εάν μια δήλωση είναι ψευδής, αλλάξτε έναν όρο για να παραγάγετε μια αληθή δήλωση.

1. Το άθροισμα οποιωνδήποτε τεσσάρων ακέραιων αριθμών διαιρείται με το 2.
2. Το άθροισμα οποιωνδήποτε δύο ζυγών αριθμών διαιρείται με το 2.
3. Το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών ακέραιων αριθμών διαιρείται με το 2.

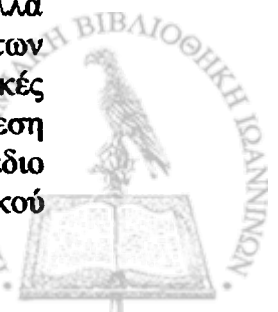
Λύση

1. Το ακόλουθο παράδειγμα εξαίρεση στον κανόνα δείχνει ότι η δήλωση 1 είναι ψευδής: $4 + 12 + 6 + 3 = 25$, το οποίο δεν διαιρείται με το 2. Εάν ο όρος "τέσσερις ακέραιοι αριθμοί" αντικατασταθεί με "τέσσερις ζυγοί αριθμοί" η δήλωση γίνεται αληθής.

2. Η δήλωση 2 είναι αληθής.

3. Το ακόλουθο παράδειγμα εξαίρεση στον κανόνα δείχνει ότι η δήλωση 3 είναι ψευδής: $8 + 9 + 10 = 27$, το οποίο δεν διαιρείται με το 2. Εάν ο όρος "τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί" αντικατασταθεί από "τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί που αρχίζουν με έναν περιττό αριθμό," η δήλωση γίνεται αληθής.

Στο πρόβλημα των χειρασιών που είδαμε πριν εισάγονται οι στρατηγικές επίλυσης ενός απλούστερου προβλήματος και εύρεσης ενός μοτίβου. Η απλούστευση ενός προβλήματος ή η επίλυση ενός σχετικού αλλά ευκολότερου προβλήματος μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση των δεδομένων πληροφοριών και την επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Μερικές φορές οι αριθμοί σε ένα πρόβλημα είναι μεγάλοι ή ενοχλητικοί και η εύρεση μιας λύσης με μικρότερους αριθμούς μπορεί να οδηγήσει σε ένα σχέδιο επίλυσης ή να αποκαλύψει ένα μοτίβο για την επίλυση του αρχικού

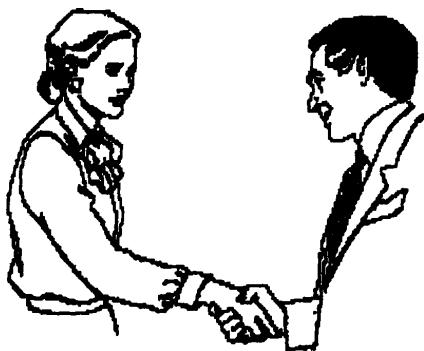


προβλήματος. Διαβάστε αυτό το πρόβλημα και προσπαθήστε να το λύσετε. Κατόπιν διαβάστε την ακόλουθη λύση τεσσάρων βημάτων και να την συγκρίνετε με τη λύση σας.

Πρόβλημα

Υπάρχουν 15 άνθρωποι σε ένα δωμάτιο και κάθε πρόσωπο δίνει το χέρι ακριβώς μία φορά σε κάθε έναν. Πόσες χειραψίες πραγματοποιούνται;

Κατανόηση του προβλήματος. Για κάθε ζευγάρι ανθρώπων, θα υπάρξει 1 χειραψία. Παραδείγματος χάριν, εάν η Μαρία και ο Παύλος κάνουν χειραψία, αυτό μετρείται ως 1 χειραψία. Κατά συνέπεια, το πρόβλημα είναι να καθοριστεί ο συνολικός αριθμός διαφορετικών τρόπων που 15 άνθρωποι μπορούν να ζευγαρωθούν. Ερώτηση 1: Πόσες χειραψίες θα γίνουν όταν δίνουν 3 άνθρωποι τα χέρια;

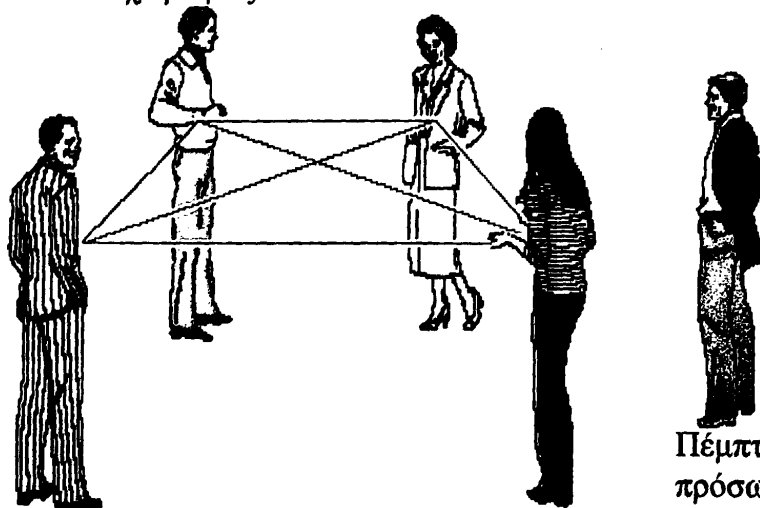


Μαρία

Παύλος

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Δεκαπέντε άτομα είναι πολλά για να εργαστούμε και να το κατανοήσουμε. Απλοποιήστε το πρόβλημα και μετρήστε τον αριθμό χειραψιών για μικρές ομάδες ανθρώπων. Η επίλυση αυτών των ειδικών περιπτώσεων μπορεί να μας δώσει μια ιδέα για την επίλυση του αρχικού προβλήματος. Ερώτηση 2: Ποιος είναι ο αριθμός χειραψιών σε μια ομάδα 4 ανθρώπων;

Εκτέλεση του σχεδίου. Ήδη έχουμε παρατηρήσει ότι υπάρχει 1 χειραψία για 2 ανθρώπους, 3 χειραψίες για 3 ανθρώπους, και 6 χειραψίες για 4 ανθρώπους. Το ακόλουθο σχήμα επεξηγεί πώς θα υπάρξουν 6 χειραψίες μεταξύ 4 ανθρώπων. Υποθέστε ότι ένα πέμπτο πρόσωπο προσχωρεί στην ομάδα. Αυτό το πρόσωπο θα δώσει το χέρι του σε κάθε έναν από τους πρώτους 4 ανθρώπους, που αποτελεί 4 χειραψίες επιπλέον.

Πέμπτο
πρόσωπο

Ομοίως, εάν φέρουμε ένα 6ο πρόσωπο, αυτό το πρόσωπο θα δώσει το χέρι του στους πρώτους 5 ανθρώπους και έτσι θα υπάρξουν 5 νέες χειραψίες. Ξαφνικά μπορούμε να δούμε ένα μοτίβο: Το 5ο πρόσωπο προσθέτει 4 νέες χειραψίες, το 6ο πρόσωπο προσθέτει 5 νέες χειραψίες, το 7ο πρόσωπο προσθέτει 6 νέες χειραψίες, και ούτω καθ' εξής έως το 15ο πρόσωπο που προσθέτει 14 νέες χειραψίες. Ερώτηση 3: Πόσες χειραψίες θα υπάρξουν για 15 ανθρώπους;

Επανελέγχος. Εξετάζοντας ειδικές περιπτώσεις με αριθμούς μικρότερους από 15, αποκτήσαμε μια καλύτερη κατανόηση του προβλήματος και μια άποψη για την επίλυσή του. Το μοτίβο που βρήκαμε δείχνει μια μέθοδο για τον καθορισμό του αριθμού χειραψιών για οποιοδήποτε αριθμό ανθρώπων: Προσθέστε ακέραιους αριθμούς από το 1 έως τον αριθμό που είναι κατά 1 λιγότερος από τον αριθμό των ανθρώπων. Μπορείτε να θυμηθείτε από το πρώτο πρόβλημα στην ενότητα «φτιάξε ένα μοντέλο» ότι οι σκάλες χρησιμοποιήθηκαν για να αναπτύξουν έναν τύπο για τον υπολογισμό ενός τέτοιου αθροίσματος. Ερώτηση 4: Πώς μπορεί αυτός ο τύπος να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσει τον αριθμό χειραψιών για 15 ανθρώπους;

Απαντήσεις στις ερωτήσεις 1 – 4

1. 3

2. 6

3. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 105$

4. Το άθροισμα των ακέραιων αριθμών από το 1 έως το 14 είναι $(14 * 15)/2 = 105$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Παρατηρήσαμε σε ένα εργαστήριο την αναπαραγωγή της αμοιβάδας. Μία αμοιβάδα σε πέντε λεπτά διχοτομήθηκε και έγιναν δύο. Στα επόμενα πέντε λεπτά οι δύο αμοιβάδες έγιναν τέσσερις. Μετά από πόση ώρα από την αρχή της παρατήρησής μας οι αμοιβάδες έγιναν 128;

Κατανόηση του προβλήματος

Πρέπει να βρούμε πότε οι αμοιβάδες θα γίνουν 128.

Πόσες αμοιβάδες είχαμε στην αρχή; 1

Πόσες αμοιβάδες είχαμε σε πέντε λεπτά; 2

Πόσες αμοιβάδες είχαμε σε δέκα λεπτά; 4

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Αναπτύσσεται ένα μοτίβο; Ναι, κάθε πέντε λεπτά είναι διπλάσιες αμοιβάδες απ' ό,τι το προηγούμενο πεντάλεπτο. Κάντε έναν πίνακα για να μετρήσετε τις αμοιβάδες συστηματικά.

Εκτέλεση του σχεδίου. Σχεδιάστε έναν πίνακα με δύο γραμμές. Η πάνω γραμμή είναι ο αριθμός των λεπτών μετά από την αρχή της παρατήρησής μας και η κάτω γραμμή είναι ο αριθμός των αμοιβάδων στο συγκεκριμένο χρόνο.

Λεπτά	0	5	10	15	20	25	30	35
Αμοιβάδες	1	2	4	8	16	32	64	128

Οι αμοιβάδες θα είναι 128, σε 35 λεπτά από την αρχή της παρατήρησής μας.

Επανελέγχος. Διαβάστε την ερώτηση πάλι. Απαντήσαμε σε όλη την ερώτηση; Ναι. Η απάντησή μας φαίνεται λογική; Ναι. Ποια υπόθεση κάνουμε; Υποθέτουμε ότι το μοτίβο (ο αριθμός των αμοιβάδων διπλασιάζεται κάθε πέντε λεπτά) συνεχίζεται κατά τρόπο αόριστο.



ΕΠΙΛΟΓΗ "ΚΑΛΩΝ" ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Η δυσκολία που αποτελεί ένα πρόβλημα για ένα μαθητή μπορεί να είναι μόνο μια εύκολη άσκηση για έναν άλλο. Ο Schoenfeld (1985) συλλαμβάνει αυτήν την σχετική φύση των προβλημάτων όταν λέει:

Ένα "πρόβλημα" δεν είναι μια ενυπάρχουσα ιδιότητα ενός μαθηματικού στόχου. Μάλλον, είναι μια ιδιαίτερη σχέση μεταξύ του ατόμου και του στόχου που έχει, πράγμα που κάνει το στόχο ένα πρόβλημα για αυτό το πρόσωπο. Τα λεκτικά προβλήματα χρησιμοποιούνται εδώ υπό αυτήν τη σχετική έννοια, ως στόχος που είναι δύσκολος για το άτομο που προσπαθεί να τον λύσει. Επιπλέον, αυτή η δυσκολία πρέπει να είναι ένα διανοητικό αδιέξοδο παρά ένα υπολογιστικό. (σελ. 74)

Παραδείγματος χάριν, ο καθορισμός του αριθμού των ανθρώπων που βρίσκονται σε 3 αυτοκίνητα όταν κάθε αυτοκίνητο περιέχει 5 ανθρώπους μπορεί να είναι ένα πρόβλημα για μερικούς μαθητές του δημοτικού σχολείου. Μπορούν να λύσουν αυτό το πρόβλημα με την τοποθέτηση αντικειμένων σε κουτιά ή με την παραγωγή ενός μοτίβου που να αντιπροσωπεύει κάθε αυτοκίνητο και κάθε πρόσωπο (σχήμα 14) και έπειτα να τα μετρήσουν για να καθορίσουν το συνολικό αριθμό ανθρώπων.



Σχήμα 14

Λόγω της σχετικότητας του προβλήματος, είναι σημαντικό κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και της αξιολόγησης της επίλυσης προβλημάτων των μαθητών, οι στόχοι να είναι προσεκτικά επιλεγμένοι έτσι ώστε να υπάρχει το σωστό επίπεδο δυσκολίας για το μαθητή. Τα προβλήματα πρέπει να είναι αρκετά δύσκολα για να παρουσιάσουν πρόκληση χωρίς όμως την ύπαρξη τόσης δυσκολίας ώστε να γίνονται μυστήριο.

Ενώ η επίλυση στερεότυπων προβλημάτων μπορεί να χρησιμεύσει για να διδαχθούν οι μαθητές πώς να εφαρμόσουν τις συγκεκριμένες διαδικασίες, μόνο μέσω της χρήσης των μη στερεότυπων προβλημάτων (απαιτώντας κάποιο βαθμό ανεξαρτησίας, κρίσης, πρωτοτυπίας και δημιουργικότητας) μπορούν να αναπτύξουν τις δυνατότητες επίλυσης προβλήματος.

"Καλές" εργασίες επίλυσης προβλήματος:

- ♦ Δεσμεύστε και προκαλέστε το ενδιαφέρον των μαθητών
- ✓ Εφαρμόστε τις εργασίες στον πραγματικό κόσμο
- ✓ Συνδέστε τις με τα ενδιαφέροντα των μαθητών
- ✓ Να είναι εξίσου ενδιαφέρουσες για όλους τους μαθητές
- ✓ Προωθήστε την ενεργό συμμετοχή

- ♦ Να περιλάβετε σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο
- ✓ Συνδέστε τις εργασίες με άλλα προβλήματα και έννοιες μαθηματικών
- ✓ Ευθυγραμμίστε τις με το τρέχον πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών
- ✓ Ενσωματώστε άλλες θεματικές περιοχές

- ♦ Είναι ανοιχτά ή μη στερεότυπα
- ✓ Επιτρέψτε τις πολλαπλές προσεγγίσεις και λύσεις
- ✓ Δεν είναι εύκολη η επίλυση με τη χρησιμοποίηση ενός πρόσφατα διδαγμένου αλγορίθμου



- ◆ Είναι προκλητικές αλλά προσιτές στους μαθητές
- ✓ Απαιτήστε την επιμονή
- ✓ Επιτρέψτε την είσοδο στο πρόβλημα

- ◆ Να είναι καλά επεξεργασμένες
- ✓ Να περιέχετε σαφή διατύπωση
- ✓ Περιγράψτε τις προσδοκίες
- ✓ Αποσπάστε τις απαντήσεις που μπορεί να προκύψουν

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

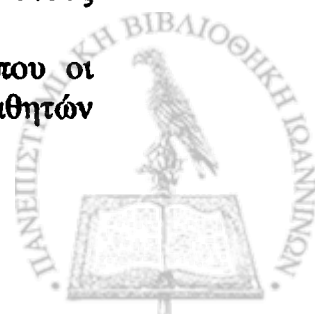
Καθώς αυξάνει η έμφαση που δίνεται στην επίλυση προβλήματος στη διδασκαλία των μαθηματικών, η ανάγκη για την αξιολόγηση της προόδου και της διδασκαλίας της επίλυσης προβλήματος γίνονται πιο αναγκαίες. Δεν αρκεί πλέον για μας να ξέρουμε ποια είδη προβλημάτων είναι σωστά ή λάθος λυμένα από τους σπουδαστές. Όπως ο Schoenfeld (1988) περιγράφει:

Όλοι πάρα πολύ συχνά εστιάζουμε σε μια στενή συλλογή των καθορισμένων με σαφήνεια στόχων και εκπαιδεύουμε τους μαθητές να εκτελέσουν αυτούς τους στόχους με στερεότυπο, αν όχι αλγοριθμικό τρόπο. Κατόπιν εξετάζουμε τους μαθητές στους στόχους που είναι πολύ κοντά σε αυτούς που έχουν διδαχθεί. Εάν πετύχουν σε αυτά τα προβλήματα, συγχαίρουμε ο ένας τον άλλον επειδή έχουν μάθει μερικές ισχυρές μαθηματικές τεχνικές. Στην πραγματικότητα, μπορεί να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν τέτοιες τεχνικές μηχανικά αλλά στερούνται μερικές στοιχειώδεις δεξιότητες σκέψης. Είναι παραπλανητικό και ψευδές να επιτραπεί σε αυτούς και σε εμάς, να πιστέψουμε ότι "καταλαβαίνουν" τα μαθηματικά (σελ. 147).

Όπως συστήνεται σε μια ημερήσια διάταξη του NCTM (1980), "η επιτυχία των προγραμμάτων μαθηματικών και της εκπαίδευσης των μαθητών [πρέπει να] αξιολογείται από ένα ευρύτερο φάσμα μέτρων και όχι από τις συμβατικές εξετάσεις" (σελ. 1). Αν και αυτή η σύσταση γίνεται ευρέως αποδεκτή μεταξύ των εκπαιδευτικών των μαθηματικών, δεν έχει ερευνηθεί αρκετά η αξιολόγηση της επίλυσης προβλήματος μέσα στο περιβάλλον των τάξεων.

Οι εξετάσεις, δυστυχώς, οδηγούν συχνά το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. Τα περισσότερα κριτήρια των παραδοσιακών εξετάσεων και η εξέταση των κανόνων είναι αντίθετες με την επίλυση προβλήματος. Οι εξετάσεις δίνουν έμφαση στην παραγωγή απάντησης και οδηγούν στην πίεση κάλυψης της ύλης ώστε οι δάσκαλοι να πιέζονται να αποποιηθούν την επίλυση προβλήματος. Μπορεί να ξέρουν ότι η επίλυση προβλήματος και η ανάπτυξη της κατανόησης είναι επιθυμητές και σημαντικές, αλλά δεν υπάρχει αρκετός χρόνος για όλα αυτά και για να ετοιμαστούν για τις εξετάσεις. Αν και οι υπεύθυνοι για την ανάπτυξη των τεστ, αρχίζουν να εξετάζουν εναλλακτικές ερωτήσεις εξέτασης, θα πάρει χρόνο να εμφανιστούν αυτές οι αλλαγές. Με την εισαγωγή της επίλυσης προβλήματος μέσα στις τάξεις μας, θα τονιστεί περαιτέρω η ανάγκη για αλλαγές στον τρόπο εξέτασης ενώ θα παρέχεται στους μαθητές μας ανεκτίμητη εμπειρία των μαθηματικών.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, παρατίθενται κάποια σημεία που οι δάσκαλοι μπορούν να εστιάσουν όταν αξιολογούν τις ικανότητες των μαθητών στην επίλυση προβλήματος.



- Η ερμηνεία του προβλήματος από το μαθητή που χρησιμοποιεί μαθηματικές αντιπροσωπεύσεις και διαδικασίες, απεικονίζει ακριβώς τις βασικές μαθηματικές έννοιες;
- Υπάρχουν στοιχεία ότι ο μαθητής προχώρησε από το σχεδιασμό, εφάρμοσε τις κατάλληλες στρατηγικές, και ακολούθησε μια λογική και επαληθεύσιμη διαδικασία προς μια λύση;
- Μπορεί κάποιος εύκολα να καταλάβει τη σκέψη του μαθητή ή είναι απαραίτητο να κάνει υποθέσεις για αυτό που ο μαθητής προσπαθούσε να κάνει;
- Λαμβάνοντας υπόψη τη μέθοδο που ο μαθητής υιοθέτησε για να λύσει το πρόβλημα, η λύση (συμπεριλαμβανομένων όλων των βημάτων της διαδικασίας) εκτελείται κατά τρόπο ακριβές και πλήρες;
- Ο μαθητής αντιλαμβάνεται τη βαθύτερη δομή του προβλήματος και κατανοεί πώς η διαδικασία που χρησιμοποιείται για να λύσει αυτό το πρόβλημα συνδέεται με άλλα προβλήματα ή "πραγματικές" εφαρμογές;

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Ενώ υπάρχει μια απέραντη βιβλιογραφία σχετικά με την επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά, παρόλα αυτά υπάρχει ένα πλήθος ερωτήσεων που μελετώνται, αναπτύσσονται και γράφονται προκειμένου να γίνουν οι γνήσιες δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος ένα αναπόσπαστο τμήμα της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η αλλαγή αυτή απαιτεί αναδομημένα εγχειρίδια και υλικό και τη δημιουργία από το δάσκαλο του κατάλληλου πλαισίου για να ακμάσει η επίλυση προβλήματος και οι μαθητές να γίνουν λύτες προβλημάτων. Ο πρώτος στην τάξη που θα γίνει λύτης προβλημάτων πρέπει να είναι ο δάσκαλος.

Η μεταβαλλόμενη μαθηματική εκπαίδευση θα απαιτήσει τον ανασχηματισμό της κουλτούρας των σχολικών μαθηματικών και της επιστημολογικής άποψης των δασκάλων. Οι ευρέως υπάρχουσες πεποιθήσεις (όπως ότι η μαθηματική δυνατότητα είναι έμφυτη και επομένως πάνω από τη δυνατότητα μερικών ανθρώπων, όπου η κάλυψη του περιεχομένου και η συσσώρευση μαθηματικών γεγονότων είναι σημαντικότερες από το να διδαχθούν οι μαθητές πώς να σκεφτούν και να λύσουν τα προβλήματα και ότι το περισσότερο που μπορούμε να αναμένουμε από τους μαθητές είναι να *κάνουν* μαθηματικά, *χωρίς να τα καταλαβαίνουν*) επηρεάζουν το τι διδάσκουν τα σχολικά μαθηματικά και πώς αυτά διδάσκονται σε αυτή τη χώρα. Οι μαθητές και οι δάσκαλοι μοιράζονται ακόμα την πεποίθηση ότι τα προβλήματα πρέπει να λυθούν γρήγορα και ότι, προκειμένου να λυθεί ένα πρόβλημα, οι μαθητές πρέπει να έχουν δει παρόμοιους τύπους επίλυσης των προβλημάτων για να βρουν έναν αλγόριθμο που θα τους δώσει γρήγορα την απάντηση. Σπάνια απαιτείται από τους μαθητές "να εφεύρουν" μια διαδικασία για την επίλυση ενός προβλήματος ή να θέσουν δικά τους προβλήματα βασισμένα στην αξιολόγηση μιας κατάστασης ή ενός στοιχείου. Κατά συνέπεια, πολλοί μαθητές βλέπουν τα μαθηματικά ως στερεότυπο, στατικό σύνολο γεγονότων και κανόνων που μαθαίνονται πρώτιστα μέσω της αποστήθισης, παρά ως εξέλιξη, επέκταση της έρευνας και του πειραματισμού, που ανακαλύπτεται και δημιουργείται μέσω της υπόθεσης. Η τελευταία άποψη δημιουργεί έμπνευση, είναι οικία και ενδιαφέρουσα στους περισσότερους μαθητές, καθώς προκαλεί λιγότερη επιβολή και εκφοβισμό. Επιτυγχάνεται σημαντική βελτίωση των προτύπων και των προσδοκιών, στοχεύοντας στην ανάπτυξη του τρόπου



σκέψης και την εμπιστοσύνη στις δυνατότητες των μαθητών να λύσουν πρωτότυπα προβλήματα.

Οι μαθητές στις τάξεις που δεν δίνουν έμφαση στην επίλυση προβλήματος στερούνται, τα συναισθήματα ικανοποίησης και ενδυνάμωσης που προέρχονται από τη λύση ενός δύσκολου προβλήματος. Δεν αναπτύσσουν τα εργαλεία και την εμπιστοσύνη που απαιτούνται για να αντιμετωπίσουν τους τύπους προβλημάτων που θα εμφανιστούν στην εργασία και τις προσωπικές ζωές τους. Αποτυγχάνουν συχνά να κερδίσουν μια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση που προέρχεται από την κατασκευή των μαθηματικών αληθειών μέσω βαθιάς σκέψης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

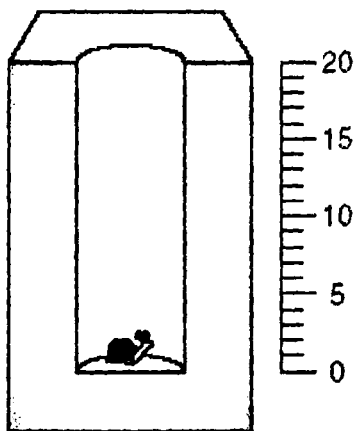
Τα προβλήματα που ακολουθούν περιλαμβάνουν τις στρατηγικές που παρουσιάστηκαν. Μερικά από αυτά τα προβλήματα αναλύονται με τη διαδικασία τεσσάρων βημάτων του Polya. Μπορείτε να βρείτε και να χρησιμοποιήσετε και άλλες στρατηγικές. Συχνά ένα καλό πρόβλημα απαιτεί διάφορες στρατηγικές.

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΕΝΟΣ ΣΧΕΔΙΟΥ

1. Ένα πηγάδι έχει βάθος 20 μέτρα. Ένα σαλιγκάρι που βρίσκεται στο κατώτατο σημείο αναρριχείται 4 μέτρα κάθε ημέρα και γλιστρά πίσω 2 μέτρα κάθε νύχτα. Πόσες ημέρες θα πάρει στο σαλιγκάρι για να φθάσει στην κορυφή του πηγαδιού;

Κατανόηση του προβλήματος. Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φθάνει το σαλιγκάρι κατά τη διάρκεια των πρώτων 24 ωρών; Πόσο επάνω θα είναι το σαλιγκάρι στο τέλος των πρώτων 24 ωρών;

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Ένα σχέδιο επίλυσης που επιλέγεται συνήθως είναι να υπολογίσετε $20/2$, δεδομένου ότι φαίνεται πως το σαλιγκάρι ανεβαίνει 2 μέτρα κάθε ημέρα. Εντούτοις, 10 ημέρες δεν είναι η σωστή απάντηση. Ένα δεύτερο σχέδιο επίλυσης είναι να γίνει ένα σχεδιάγραμμα και να σχεδιαστεί η καθημερινή πρόοδος του σαλιγκαριού. Ποιο είναι το μέγιστο ύψος του σαλιγκαριού κατά τη διάρκεια της δεύτερης ημέρας;



Εκτέλεση του σχεδίου. Ανιχνεύστε την καθημερινή πρόοδο του σαλιγκαριού, και μαρκάρετε τη θέση του στο τέλος κάθε ημέρας. Ποια ημέρα το σαλιγκάρι βγαίνει από το πηγάδι;

Επανέλεγχος. Υπάρχει μια "έκπληξη στο τέλος" στην κορυφή του πηγαδιού, επειδή το σαλιγκάρι δεν γλιστρά πίσω την ένατη ημέρα. Φτιάξτε ένα νέο πρόβλημα σαλιγκαριών με την αλλαγή των αριθμών έτσι ώστε να υπάρξει μια παρόμοια έκπληξη στην κορυφή του πηγαδιού.



2. Πέντε άνθρωποι συμμετέχουν σε ένα πρωτάθλημα σκάκι, στο οποίο κάθε πρόσωπο πρέπει να παίζει με κάθε άλλο πρόσωπο μόνο μία φορά. Καθορίστε το συνολικό αριθμό παιχνιδιών που θα παιχτούν.

3. Όταν δύο κομμάτια σχοινιού είναι τοποθετημένα άκρη με άκρη, το συνολικό μήκος τους είναι 130 μέτρα. Όταν τα δύο κομμάτια τοποθετούνται δίπλα δίπλα, το ένα είναι 26 μέτρα μακρύτερο από το άλλο. Ποια είναι τα μήκη των δύο κομματιών;

4. Στο δημοτικό σχολείο υπάρχουν 560 μαθητές τρίτης και τετάρτης τάξης. Εάν οι μαθητές της τρίτης είναι 80 περισσότεροι από τους μαθητές της τετάρτης, πόσοι είναι οι μαθητές της τρίτης τάξης;

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

1. Μια τράπεζα που έχει χρεώσει μια μηνιαία αμοιβή υπηρεσιών 2€ για τους απολογισμούς ελέγχου συν 15 λεπτά για κάθε έλεγχο αναγγέλλει ότι θα αλλάξει τη μηνιαία αμοιβή σε 3€ και ότι κάθε έλεγχος θα κοστίζει 8 λεπτά. Η τράπεζα ισχυρίζεται ότι το νέο σχέδιο θα εξοικονομήσει τα χρήματα των πελατών. Πόσους ελέγχους το μήνα πρέπει να κάνει ένας πελάτης πριν το νέο μοτίβο να είναι φτηνότερο από το παλαιό μοτίβο;

Κατανόηση του προβλήματος. Δοκιμάστε μερικούς αριθμούς για να καταλάβετε καλύτερα το πρόβλημα. Υπολογίστε το κόστος 10 ελέγχων στο πλαίσιο του παλαιού μοτίβου και στο πλαίσιο του νέου μοτίβου. Ποιο μοτίβο είναι φτηνότερο για έναν πελάτη που κάνει 10 ελέγχους το μήνα;

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Μια μέθοδος για τη λύση αυτού του προβλήματος είναι να γίνει ένας πίνακας που παρουσιάζει το κόστος 1 ελέγχου, 2 ελέγχων, κ.λπ., όπως αυτός που παρουσιάζεται εδώ. Πόσο περισσότερο κοστίζει το νέο μοτίβο από το παλαιό μοτίβο για 6 ελέγχους;

Έλεγχοι	Κόστος με βάση το παλιό μοτίβο, €	Κόστος με βάση το νέο μοτίβο, €
1	2,15	3,08
2	2,30	3,16
3	2,45	3,24
4	2,60	3,32
5	2,75	3,40
6		
7		
8		

Εκτέλεση του σχεδίου. Επεκτείνετε τον πίνακα έως ότου φθάσετε σε ένα σημείο στο οποίο το νέο μοτίβο να είναι φτηνότερο από το παλαιό μοτίβο. Πόσοι έλεγχοι πρέπει να γίνουν το μήνα για να είναι φτηνότερο το νέο μοτίβο;

Επανελέγχος. Για τους πελάτες που κάνουν 1 έλεγχο το μήνα, η διαφορά στο κόστος μεταξύ του παλαιού μοτίβου και του νέου μοτίβου είναι 93 λεπτά. Τι συμβαίνει στη διαφορά όσο ο αριθμός ελέγχων αυξάνεται; Πόσους ελέγχους το μήνα πρέπει να κάνει ένας πελάτης πριν το νέο μοτίβο να είναι 33 λεπτά φτηνότερο;

2. Ο Κώστας και ο Πέτρος πουλούσαν τη λεμονάδα 25 λεπτά το μισό ποτήρι και 50 λεπτά το γεμάτο ποτήρι. Στο τέλος της ημέρας είχαν μαζέψει 15€ και είχαν χρησιμοποιήσει 37 ποτήρια. Πόσα γεμάτα και πόσα μισά ποτήρια πούλησαν;



3. Ο Περικλής έστειλε γράμματα σε 15 ανθρώπους και το κόστος των ταχυδρομικών τελών ήταν 4,71€. Εάν κόστισε 23 λεπτά για να ταχυδρομήσει κάθε κάρτα και 37 λεπτά για να ταχυδρομήσει κάθε επιστολή, πόσες κάρτες έγραψε;

4. Είχα μερικά νομίσματα του 1, 5, 10 και 20 λεπτών στην τσέπη μου. Έβγαλα μερικά και ήταν λιγότερα από 10, των οποίων η αξία ήταν 42 λεπτά. Ποιες είναι όλες οι πιθανότητες για τα νομίσματα που είχα στο χέρι μου;

ΕΙΚΑΣΙΑ ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΗ

1. Υπάρχουν δύο 2ψηφίοι αριθμοί που ικανοποιούν τους ακόλουθους όρους: (1) Κάθε αριθμός έχει τα ίδια ψηφία, (2) το άθροισμα των ψηφίων σε κάθε αριθμό είναι 10 και (3) η διαφορά μεταξύ των 2 αριθμών είναι 54. Ποιοι είναι οι δύο αριθμοί;

Κατανόηση του προβλήματος. Οι αριθμοί 58 και 85 είναι 2ψηφίοι αριθμοί που έχουν τα ίδια ψηφία, και το άθροισμα των ψηφίων σε κάθε αριθμό είναι 13. Βρείτε δύο αριθμούς 2ψηφίους έτσι ώστε το άθροισμα των ψηφίων να είναι 10 και οι δύο αριθμοί να έχουν τα ίδια ψηφία.

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Δεδομένου ότι υπάρχουν μόνο εννέα 2ψηφίοι αριθμοί των οποίων τα ψηφία έχουν άθροισμα 10, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί εύκολα με την εικασία. Ποια είναι η διαφορά των δικών σας δύο 2ψηφίων αριθμών που βρήκατε; Εάν αυτή η διαφορά δεν είναι 54, μπορεί να παρέχει τις πληροφορίες για την επόμενη εικασία σας.

Εκτέλεση του σχεδίου. Συνεχίστε να υποθέτετε και να ελέγχετε. Ποιο ζευγάρι αριθμών έχει διαφορά 54;

Επανέλεγχος. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να επεκταθεί με την αλλαγή της απαίτησης, το άθροισμα των δύο ψηφίων να είναι ίσο με 10. Λύστε το πρόβλημα για την περίπτωση στην οποία τα ψηφία έχουν άθροισμα 12.

2. Όταν δύο αριθμοί πολλαπλασιάζονται, το γινόμενο τους είναι 759 και όταν ο ένας αφαιρείται από τον άλλο, η διαφορά τους είναι 10. Ποιοι είναι αυτοί οι δύο αριθμοί;

3. Όταν ένας μαθητής ρωτήθηκε πώς κάποιος μπορεί να μετρήσει 1 λίτρο νερού με ένα δοχείο 4 λίτρων και ένα δοχείο 9 λίτρων, χρησιμοποίησε αυτήν την "εικόνα."

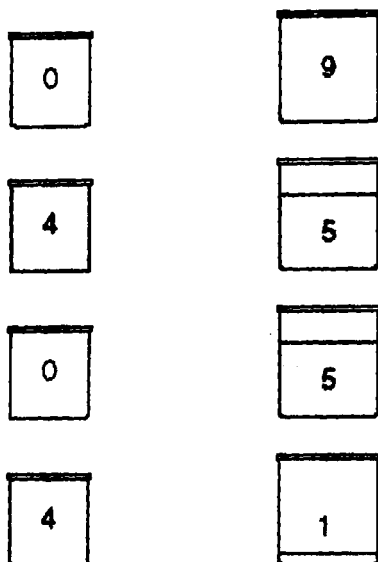
α. Εν συντομία περιγράψτε τι μπορεί να έχει παρουσιάσει ο μαθητής σε αυτό το σκίτσο.

β. Χρησιμοποιήστε ένα παρόμοιο σκίτσο για να δείξετε πώς μπορούν να μετρηθούν 6 λίτρα με τη χρησιμοποίηση αυτών των ίδιων δοχείων.

Δοχείο
4 λίτρων

Δοχείο
9 λίτρων



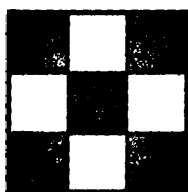


4. Η Σοφία άνοιξε τον κουμπαρά της και βρήκε ότι είχε 13,65€. Εάν είχε μόνο νομίσματα των 5,10 και 20 λεπτών και ίσο αριθμό νομισμάτων κάθε είδους, πόσα νομίσματα είχε συνολικά;

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΕΝΟΣ ΠΡΟΤΥΠΟΥ

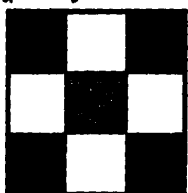
1. Υποθέστε ότι έχετε αρκετά κόκκινα, μπλε, πράσινα, και κίτρινα τετράγωνα πλακάκια. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός διαφορετικών χρωμάτων που απαιτείται για να σχεδιάσετε ένα τετράγωνο από πλακάκια 3 X 3 έτσι ώστε κανένα πλακάκι να μην αγγίζει ένα άλλο πλακάκι του ίδιου χρώματος σε οποιοδήποτε σημείο;

Κατανόηση του προβλήματος. Γιατί η τετράγωνη διάταξη από πλακάκια που παρουσιάζεται εδώ δεν είναι η σωστή λύση;



Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Ένα σχέδιο επίλυσης είναι να επιλεγεί ένα πλακάκι για το κέντρο του πλέγματος και να τοποθετηθούν έπειτα γύρω από αυτό άλλα έτσι ώστε να μην έχουν το ίδιο χρώμα με το κεντρικό. Γιατί πρέπει το κεντρικό πλακάκι να είναι διαφορετικό χρώμα από τα άλλα οκτώ πλακάκια;

Εκτέλεση του σχεδίου. Υποθέστε ότι βάζετε ένα μπλε πλακάκι στο κέντρο και ένα κόκκινο πλακάκι σε κάθε γωνία, όπως παρουσιάζεται εδώ. Γιατί χρειάζονται δύο ακόμα χρώματα για τα υπόλοιπα τετράγωνα;

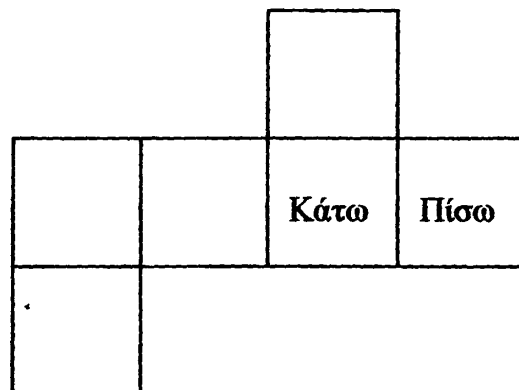
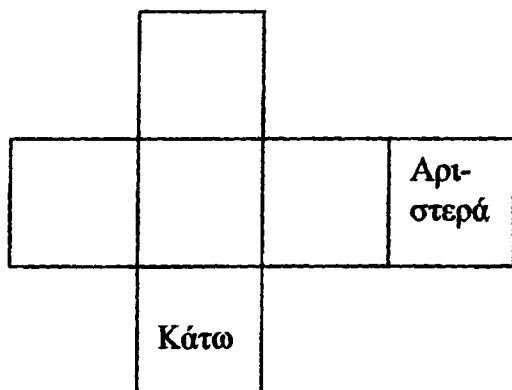


Επανελέγχος. Υποθέστε ότι το πρόβλημα είχε ζητήσει το μικρότερο αριθμό χρωμάτων για να διαμορφωθεί ένα τετράγωνο από 9 πλακάκια έτσι ώστε κανένα πλακάκι να μην αγγίζει ένα άλλο πλακάκι του ίδιου χρώματος κατά μήκος μιας ολόκληρης πλευράς. Μπορεί να γίνει με λιγότερα χρώματα και αν ναι, με πόσα;

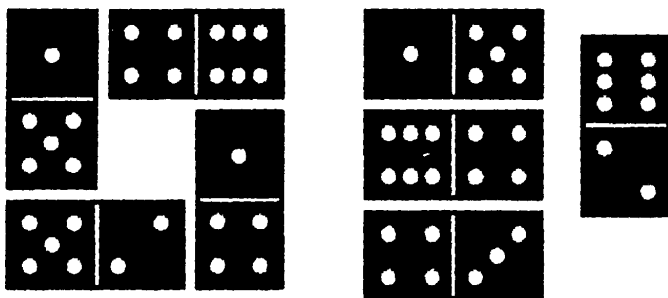


2. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός διαφορετικών χρωμάτων από πλακάκια που χρειάζονται για να φτιάξουμε ένα τετράγωνο 4×4 έτσι ώστε κανένα πλακάκι να μην αγγίζει άλλο του ίδιου χρώματος κατά μήκος μιας ολόκληρης πλευράς;

3. Τα ακόλουθα σχέδια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να διαμορφώσουν έναν κύβο. Ένας κύβος έχει έξι έδρες. Έχουν ονομαστεί δύο πλευρές σε κάθε ένα από τα ακόλουθα σχέδια. Ονομάστε τις υπόλοιπες τέσσερις έδρες σε κάθε σχέδιο έτσι ώστε όταν σχηματιστεί ο κύβος με τις ετικέτες στο εξωτερικό μέρος του, κάθε πλευρά να είναι στη σωστή θέση.



4. Στο αριστερό μέρος του ακόλουθου σχεδίου φτιάξαμε ένα τετράγωνο που αποτελείται από 4 ντόμινο με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε πλευρά να έχει 11 κουκίδες. Τοποθετήστε τα τέσσερα ντόμινο που βρίσκονται στα δεξιά, έτσι ώστε να φτιάξετε ένα τετράγωνο που να έχει και στις 4 πλευρές 12 κουκίδες.



ΕΡΓΑΣΤΕΙΤΕ ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ

1. Τρία παιδιά παίζουν τρεις γύρους ενός παιχνιδιού. Σε κάθε γύρο υπάρχουν δύο νικητές και ένας ηττημένος. Το παιδί που χάνει σε έναν γύρο πρέπει να διπλασιάσει τους πόντους που έχουν κάθε ένα από τα άλλα παιδιά δίνοντας από τους πόντους που έχει. Κάθε παιδί χάνει ένα γύρο. Στο τέλος τριών γύρων, κάθε παιδί έχει 40 πόντους. Πόσους πόντους είχε κάθε παιδί στην αρχή του παιχνιδιού;

Κατανόηση του προβλήματος. Επιλέξτε μερικούς αριθμούς για να κατανοήσετε αυτό το παιχνίδι. Υποθέστε ότι το παιδί Α, το παιδί Β και το παιδί Γ έχουν 70, 30 και 20 πόντους αντίστοιχα και το παιδί Α χάνει τον πρώτο γύρο. Το παιδί Β και το παιδί Γ θα λάβουν τους πόντους από το παιδί Α και έτσι ο αριθμός των πόντους τους θα διπλασιαστεί. Πόσους πόντους θα έχει κάθε παιδί μετά από αυτόν τον γύρο;

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Δεδομένου ότι ξέρουμε το τελικό αποτέλεσμα (κάθε παιδί τελείωσε με 40 πόντους), μια φυσική στρατηγική είναι να εργαστείτε προς τα πίσω. Υποθέστε ότι το παιδί Γ χάνει τον τρίτο γύρο. Πόσους πόντους είχε κάθε παιδί στο τέλος του δεύτερου γύρου;



	A	B	Γ
Αρχή			
Τέλος 1 ^{ου} γύρου			
Τέλος 2 ^{ου} γύρου			
Τέλος 3 ^{ου} γύρου	40	40	40

Εκτέλεση του σχεδίου. Υποθέστε ότι το παιδί *B* χάνει το δεύτερο γύρο και το παιδί *A* χάνει τον πρώτο γύρο. Συνεχίστε δουλεύοντας προς τα πίσω για να καθορίσετε τον αριθμό πόντων που είχε κάθε ένα από τα παιδιά στην αρχή του παιχνιδιού.

Επανελέγχος. Ελέγξτε την απάντησή σας δουλεύοντας τώρα από την αρχή. Το παιδί με τους περισσότερους πόντους στην αρχή αυτού του παιχνιδιού έχασε τον πρώτο γύρο. Θα μπορούσε το παιδί με τους λιγότερους πόντους στην αρχή του παιχνιδιού να έχει χάσει τον πρώτο γύρο; Δοκιμάστε το.

2. Η Ελένη και η Δήμητρα έχουν και οι δύο 510€ στους λογαριασμούς τους. Άνοιξαν τους λογαριασμούς τους την ίδια ημέρα και η Ελένη άρχισε με 70€ περισσότερα από τη Δήμητρα. Από τότε η Ελένη πρόσθετε 10€ στον λογαριασμό της κάθε εβδομάδα και η Δήμητρα έβαζε 20€ κάθε εβδομάδα. Με πόσα χρήματα άνοιξε το λογαριασμό της η Ελένη;

3. Ο Πέτρος πήρε μια συλλογή χρωματισμένων κεραμιδιών από ένα κιβώτιο. Η Αλεξάνδρα πήρε 13 κεραμίδια από τη συλλογή του και η Σοφία πήρε τα μισά από εκείνα που έμειναν. Στον Πέτρο έμειναν 11. Πόσα κεραμίδια είχε η συλλογή;

4. Η Αντωνία είχε 6 περισσότερα κόκκινα κεραμίδια από ότι κίτρινα. Έδωσε τα μισά από τα κόκκινα κεραμίδια της στην Έφη και τα μισά από τα κίτρινα κεραμίδια της στο Λάμπρο. Εάν ο Λάμπρος έχει 7 κίτρινα κεραμίδια, πόσα κεραμίδια έχει η Αντωνία;

ΨΑΞΤΕ ΓΙΑ ΜΟΤΙΒΑ

Ο προσδιορισμός του πυρήνα ενός μοτίβου βοηθά τα παιδιά να ενημερωθούν για τη δομή του. Παραδείγματος χάριν, σε μερικά μοτίβα υπάρχει ένας πυρήνας που επαναλαμβάνεται, όπως στην άσκηση 1α. Σε μερικά μοτίβα υπάρχει ένας πυρήνας που αυξάνεται, όπως στην άσκηση 2β. Ταξινομήστε κάθε μια από τις ακολουθίες στις ασκήσεις 1 και 2 όπως, έχοντας έναν πυρήνα που επαναλαμβάνεται ή που αυξάνεται και καθορίστε τα επόμενα στοιχεία σε κάθε ακολουθία.

1. α.	▲+○▲+○▲+○▲+○...
β.	××+×××+×××+×...
γ.	○*○○○*○○○○*○○○○○...

2. α.	ΓΓΓ┐┐┐┐┐┐┐┐┐...
-------	-----------------

β. 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, ...

γ. 2, 3, 5, 7, 2, 3, 5, 7, 2, 3, 5, 7, ...

Μερικές ακολουθίες έχουν ένα μοτίβο, αλλά δεν έχουν έναν πυρήνα. Καθορίστε τους επόμενους τρεις αριθμούς σε κάθε μια από τις ακολουθίες στις ασκήσεις 3 και 4.



3. α. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ...

β. 13, 16, 19, 23, 27, 32, 37, 43, ...

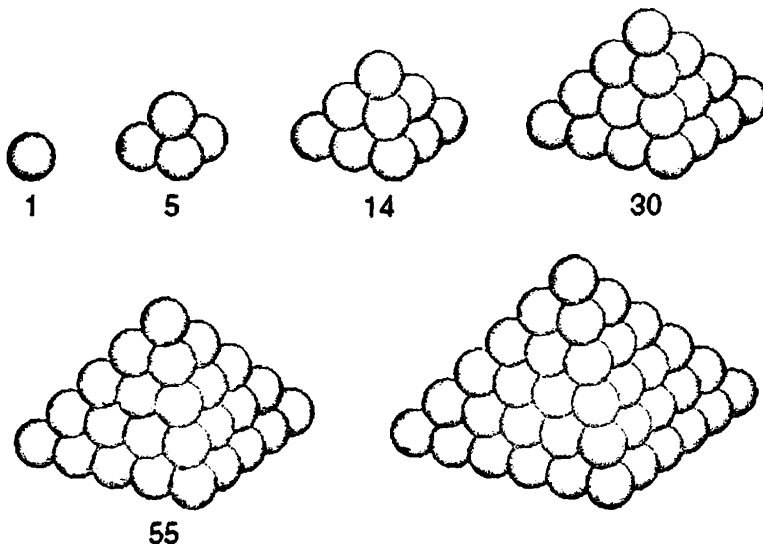
γ. 17, 22, 20, 25, 23, 28, 26, 31, ...

4. α. 31, 28, 25, 22, 19, 16, ...

β. 46, 48, 50, 54, 58, 64, 70, 78, 86, ...

γ. 43, 46, 49, 45, 41, 44, 47, 43, 39, ...

Μια μέθοδος για να τοποθετούνται μπάλες κανονιού είναι να διαμορφωθεί μια πυραμίδα με μια τετράγωνη βάση. Παρουσιάζονται οι πρώτες έξι τέτοιες πυραμίδες. Χρησιμοποιήστε αυτούς τους αριθμούς στις ασκήσεις 5 και 6.



5. α. Πόσες μπάλες κανονιού είναι στο έκτο σχήμα;

β. Μπορεί η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί ο αριθμός μπαλών κανονιού στο έκτο σχήμα;

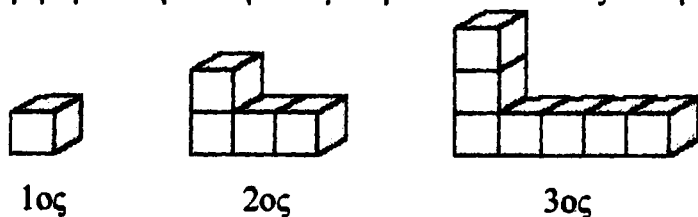
γ. Περιγράψτε τη 10η πυραμίδα, και καθορίστε τον αριθμό μπαλών κανονιού.

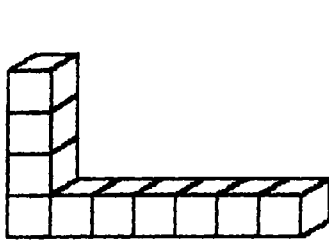
6. α. Περιγράψτε την έβδομη πυραμίδα, και καθορίστε τον αριθμό μπαλών κανονιού.

β. Οι αριθμοί μπαλών κανονιού σε διαδοχικά σχήματα διαμορφώνουν μια αριθμητική ακολουθία;

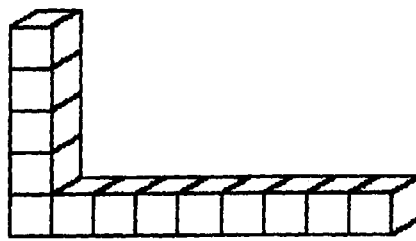
γ. Γράψτε μια έκφραση για τον αριθμό μπαλών κανονιού στο 20ό σχήμα (σημείωση: δεν είναι απαραίτητο να υπολογιστεί ο αριθμός.)

Χρησιμοποιήστε την επόμενη ακολουθία στις ασκήσεις 7 και 8.





4ος



5ος

7. α. Ποιος τύπος ακολουθίας διαμορφώνεται από τους αριθμούς κύβων στα διαδοχικά σχήματα;

β. Περιγράψτε το 20ό σχήμα και καθορίστε τον αριθμό κύβων.

8. α. Μπορεί η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσει τον αριθμό κύβων στο 6ο σχήμα;

β. Περιγράψτε το 100ό σχήμα και καθορίστε τον αριθμό κύβων.

γ. Γράψτε μια έκφραση για τον αριθμό κύβων στο n σχήμα, για οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό n .

Υπάρχουν πολλά μοτίβα και αριθμητικές σχέσεις που μπορούν να ανακαλυφθούν εύκολα σε ένα ημερολόγιο. Μερικά από αυτά τα μοτίβα εξερευνούνται στις ασκήσεις 9 μέχρι 11.

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ						
2002						
Κ	Δ	Τ	Τ	Π	Π	Σ
						1 2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

9. Το άθροισμα των τριών κυκλωμένων αριθμών στο προηγούμενο ημερολόγιο είναι 45. Για οποιοδήποτε άθροισμα τριών διαδοχικών αριθμών, υπάρχει μια γρήγορη μέθοδος για τον υπολογισμό του. Εξηγήστε πώς αυτό μπορεί να γίνει. Δοκιμάστε τη μέθοδό σας για να βρείτε τρεις διαδοχικούς αριθμούς το άθροισμα των οποίων είναι 54.

10. Εάν ξέρετε το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών παρακείμενων αριθμών από μια στήλη, είναι δυνατό να καθορίσετε τους τρεις αριθμούς. Εξηγήστε πώς αυτό μπορεί να γίνει, και να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδό σας για να βρείτε τους αριθμούς των οποίων το άθροισμα είναι 48.

11. Το άθροισμα των αριθμών στο 3×3 πλαίσιο που υπάρχει στο προηγούμενο ημερολόγιο είναι 99. Υπάρχει μια σύντομη μέθοδος για να βρείτε τους αριθμούς στο 3×3 πλαίσιο. Εξηγήστε πώς αυτό μπορεί να γίνει. Προσπαθήστε να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδό σας για να βρείτε τους αριθμούς 3×3 με άθροισμα 198.



12. Εδώ είναι οι πρώτοι αριθμοί Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. Υπολογίστε τα αθροίσματα που παρουσιάζονται πιο κάτω, και συγκρίνετε τις απαντήσεις με τους αριθμούς Fibonacci. Βρείτε ένα μοτίβο και εξηγήστε πώς αυτό το μοτίβο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρείτε τα αθροίσματα των διαδοχικών αριθμών Fibonacci.

$$1 + 1 + 2 =$$

$$1 + 1 + 2 + 3 =$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 =$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 =$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 =$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 =$$

13. Τα αθροίσματα των τετραγώνων των διαδοχικών αριθμών Fibonacci, όταν γράφονται ως γινόμενο δύο αριθμών διαμορφώνουν ένα μοτίβο.

α. Συμπληρώστε τα ποσά που λείπουν και βρείτε ένα μοτίβο.

β. Χρησιμοποιήστε το μοτίβο σας για να εξηγήσετε πώς μπορεί να βρεθεί το άθροισμα των τετραγώνων των πρώτων διαδοχικών αριθμών Fibonacci.

$$1^2 + 1^2 = 1 \times 2$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \times 3$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \times 5$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 =$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 =$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 =$$

Μια ακολουθία τύπου Fibonacci μπορεί να αρχίσει με οποιουσδήποτε δύο αριθμούς. Κατόπιν κάθε διαδοχικός αριθμός διαμορφώνεται με την πρόσθεση των δύο προηγούμενων αριθμών. Κάθε αριθμός μετά το 3 και το 4 στην ακολουθία 3, 4, 7, 11, 18, 29, κ.λ.π. διαμορφώθηκε με την πρόσθεση των προηγούμενων δύο αριθμών. Βρείτε τους αριθμούς που λείπουν μεταξύ των πρώτων 10 αριθμών των ακολουθιών τύπου Fibonacci στις ασκήσεις 14 και 15.

14. α. 10, __, 24, __, __, 100, __, __, __, 686

β. 2, __, __, 16, 25, __, __, __, __, 280

γ. Το άθροισμα των πρώτων 10 αριθμών στην ακολουθία α είναι ίσο με 11 φορές τον έβδομο αριθμό της ακολουθίας. Ποιο είναι αυτό το άθροισμα;

δ. Μπορεί να υπολογιστεί το άθροισμα των πρώτων 10 αριθμών στην ακολουθία β με πολλαπλασιασμό του έβδομου αριθμού με το 11;

ε. Υποθέστε ότι το άθροισμα των πρώτων 10 αριθμών σε οποιαδήποτε ακολουθία τύπου Fibonacci θα είναι πάντα 11 φορές ο έβδομος αριθμός. Δοκιμάστε μερικές άλλες ακολουθίες τύπου Fibonacci για να υποστηρίξετε το συμπέρασμά σας.

15. α. 1, __, __, 11, __, __, __, __, 118, __

β. 14, __, 20, 26, __, __, 118, __, __, 498

γ. Το άθροισμα των πρώτων 10 αριθμών στην ακολουθία α είναι ίσο με 11 φορές τον έβδομο αριθμό. Είναι αυτό αληθές για την ακολουθία β;

δ. Στην ακολουθία Fibonacci το άθροισμα των πρώτων 10 αριθμών είναι ίσο με 11 φορές τον έβδομο αριθμό της ακολουθίας. Ισχύει αυτό στην ακολουθία β;

ε. Διαμορφώστε μια υπόθεση βασισμένη στις παρατηρήσεις σας στα ερωτήματα γ και δ.

16. Τα γινόμενα του 1089 παράγουν μερικά ενδιαφέροντα αριθμητικά μοτίβα. Περιγράψτε ένα από αυτά τα μοτίβα. Αυτό το μοτίβο θα συνεχιστεί εάν το 1089 πολλαπλασιαστεί με το 5, 6, 7, 8, και 9;



$$1 \times 1089 = 1089$$

$$2 \times 1089 = 2178$$

$$3 \times 1089 = 3267$$

$$4 \times 1089 = 4356$$

$$5 \times 1089 =$$

17. α. Βρείτε ένα μοτίβο στις ακόλουθες εξισώσεις και χρησιμοποιήστε το μοτίβο σας για να γράψετε την επόμενη εξίσωση.

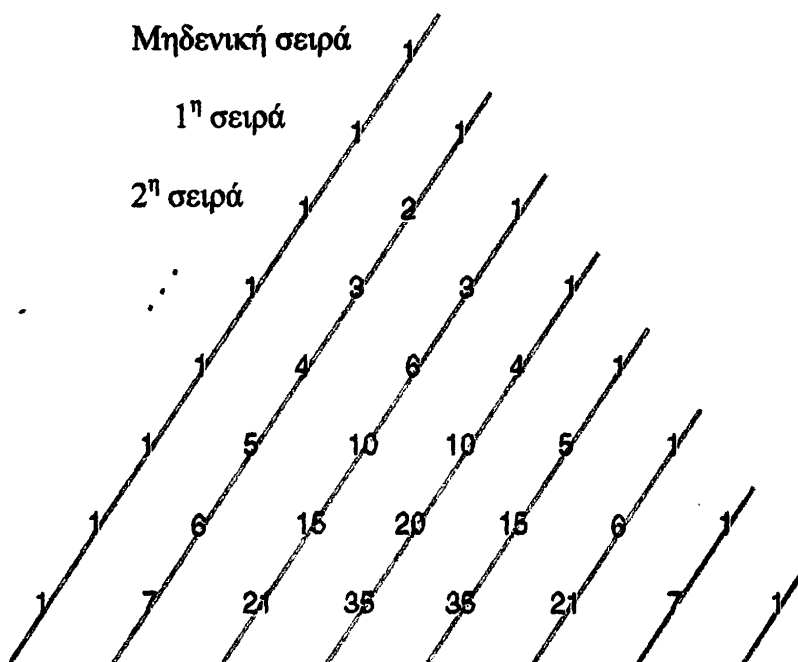
β. Εάν το μοτίβο στις πρώτες τρεις εξισώσεις συνεχίζεται, ποια θα είναι η 10η εξίσωση;

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

Στο τρίγωνο PASCAL, υπάρχουν πολλά μοτίβα. Χρησιμοποιήστε αυτό το τρίγωνο αριθμών στις ασκήσεις 18 μέχρι 20.



18. Η τρίτη διαγώνιος στο τρίγωνο PASCAL έχει τους αριθμούς 1, 3, 6...

α. Ποιος είναι ο 10ος αριθμός σε αυτήν την διαγώνιο;

β. Ποιος είναι ο 10ος αριθμός στην τέταρτη διαγώνιο;

19. Υπολογίστε τα αθροίσματα των αριθμών σε μερικές από τις πρώτες σειρές του τριγώνου PASCAL. Ποιο είδος ακολουθίας (αριθμητικής ή γεωμετρικής) διαμορφώνουν αυτά τα αθροίσματα;

20. Ποιο θα είναι το άθροισμα των αριθμών στη 12η σειρά του τριγώνου PASCAL;

Προσδιορίστε κάθε μια από τις ακολουθίες στις ασκήσεις 21 και 22 ως αριθμητική ή γεωμετρική. Διαμορφώστε έναν κανόνα για το πως σχηματίζεται κάθε αριθμός με βάση τον προηγούμενο. Ποιος είναι ο 12ος αριθμός σε κάθε ακολουθία;

21. α. 280, 257, 234, 211, ...

β. 17, 51, 153, 459, ...

γ. 32, 64, 128, 256, ...

δ. 87, 102, 117, 132, ...



22. α. 4, 9, 14, 19, ...
 β. 15, 30, 60, 120, ...
 γ. 24, 20, 16, 12, ...
 δ. 4, 12, 36, 108, ...

Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιείται στις ασκήσεις 23 και 24. Αυτή η μέθοδος μερικές φορές θα σας βοηθήσει να βρείτε τον επόμενο αριθμό σε μια ακολουθία αλλά όχι πάντα.

23. α. Γράψτε τους πρώτους οκτώ αριθμούς μιας γεωμετρικής ακολουθίας και προσπαθήστε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών να βρείτε τον ένατο αριθμό. Θα λειτουργήσει αυτή η μέθοδος;

β. Επαναλάβετε για μια αριθμητική ακολουθία. Υποστηρίξτε τα συμπεράσματά σας.

24. α. Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών θα παραγάγει τον επόμενο αριθμό στις διαγώνιες του τριγώνου PASCAL; Υποστηρίξτε τα συμπεράσματά σας με παραδείγματα.

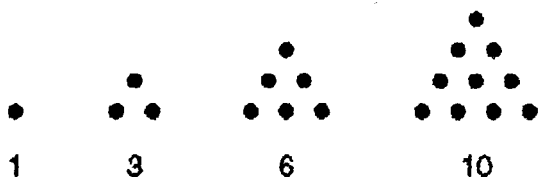
β. Τα αθροίσματα των αριθμών στις πρώτες σειρές του τριγώνου PASCAL είναι 1, 2, 4, 8, ... Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών θα παραγάγει τον επόμενο αριθμό σε αυτήν την ακολουθία;

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών στις ασκήσεις 25 και 26 για να βρείτε τον επόμενο αριθμό σε κάθε ακολουθία.

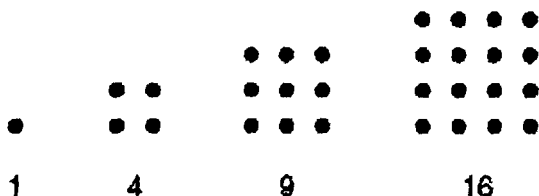
25. α. 3, 7, 13, 21, 31, 43, ...
 β. 215, 124, 63, 26, 7, ...
 26. α. 1, 2, 7, 22, 53, 106, ...
 β. 1, 3, 11, 25, 45, 71, ...

Από το 500 π.Χ. οι Έλληνες ενδιαφέρθηκαν για αριθμούς οι οποίοι συνδέονταν με σχέδια από κουκίδες με τη μορφή γεωμετρικών σχημάτων. Γράψτε τους επόμενους τρεις αριθμούς και τον 100ό αριθμό σε κάθε ακολουθία στις ασκήσεις 27 και 28.

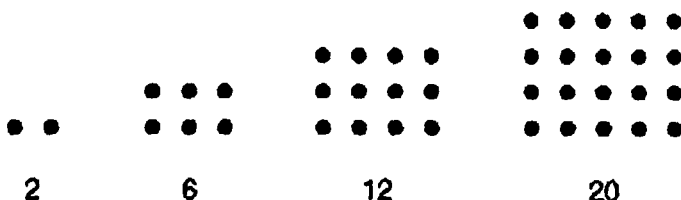
27. Τρίγωνοι αριθμοί:



28. Τετράγωνοι αριθμοί:



Οι Έλληνες ονόμασαν τους αριθμούς που αντιπροσωπεύονται από τις ακόλουθες σειρές κουκίδων ορθογώνιους αριθμούς. Χρησιμοποιήστε αυτό το μοτίβο στις ασκήσεις 29 και 30.



29. α. Ποιος είναι ο επόμενος ορθογώνιος αριθμός;

β. Ποιος είναι ο 20ός ορθογώνιος αριθμός;

30. α. Μπορεί η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί ο αριθμός σημείων στον 5ο ορθογώνιο αριθμό;

β. Ποιος είναι ο 25ος ορθογώνιος αριθμός;

31. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για να δημιουργήσετε μια νέα ακολουθία αριθμών για την ακόλουθη ακολουθία τετραγωνικών αριθμών. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

α. Ποιο είδος ακολουθίας είναι;

β. Πώς μπορεί ένα τετράγωνο από κουκίδες (βλ. την άσκηση 28) να χρησιμοποιηθεί για να δείξει ότι η διαφορά δύο διαδοχικών τετράγωνων αριθμών θα είναι ένας μονός αριθμός;

32. Συνεχίστε το μοτίβο των ζυγών αριθμών που εμφανίζονται εδώ.



2

4

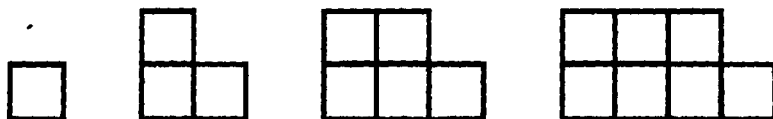
6

8

α. Ο τέταρτος ζυγός αριθμός είναι το 8. Σχεδιάστε το σχέδιο για τον ένατο ζυγό αριθμό και καθορίστε αυτόν τον αριθμό.

β. Ποιος είναι ο 45ος ζυγός αριθμός;

33. Συνεχίστε το μοτίβο των μονών αριθμών που εμφανίζονται εδώ.



1

3

5

7

α. Ο τέταρτος μονός αριθμός είναι το 7. Σχεδιάστε τον σχέδιο για το 12ο μονό αριθμό.

β. Ποιος είναι ο 35ος μονός αριθμός;

34. Εάν αρχίσουμε με τον αριθμό 6, κατόπιν το διπλασιάζουμε για να γίνει 12, και μετά τοποθετήστε το 12 και το 6 δίπλα-δίπλα, το αποτέλεσμα είναι 126. Αυτός ο αριθμός είναι διαιρετός από το 7. Δοκιμάστε αυτήν την διαδικασία για μερικούς άλλους αριθμούς. Βρείτε ένα παράδειγμα που να είναι εξαίρεση στον κανόνα και να δείχνει ότι το αποτέλεσμα είναι δεν πάντα τέλεια διαιρετό με το 7.

Βρείτε ένα παράδειγμα εξαίρεση στον κανόνα για κάθε μια από τις δηλώσεις στις ασκήσεις 35 και 36.

35. α. Κάθε ακέραιος αριθμός που είναι μεγαλύτερος από 4 και μικρότερος από 20 είναι το άθροισμα δύο ή περισσότερων διαδοχικών ακέραιων αριθμών.

β. Κάθε ακέραιος αριθμός ανάμεσα από το 25 και το 50 είναι το γινόμενο δύο ακέραιων αριθμών μεγαλύτερων από 1.

36. α. Το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε ακέραιων αριθμών είναι τέλεια διαιρετό από το 2.

β. Κάθε ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος από το 5 είναι το άθροισμα είτε δύο είτε τριών διαδοχικών ακέραιων αριθμών, παραδείγματος χάριν, $11 = 5 + 6$ και $18 = 5 + 6 + 7$.

Καθορίστε ποιες δηλώσεις στις ασκήσεις 37 και 38 είναι ψευδείς, και παρουσιάστε ένα παράδειγμα εξαίρεση στον κανόνα για κάθε ψευδή δήλωση.



Εάν μια δήλωση είναι ψευδής, αλλάξτε έναν από τους όρους για να λάβετε μια αληθή δήλωση.

37. α. Το γινόμενο οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι διαιρετό από το 2.

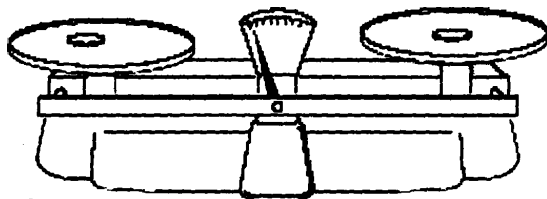
β. Το άθροισμα οποιωνδήποτε δύο διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι διαιρετό από το 2.

38. α. Το άθροισμα οποιωνδήποτε τεσσάρων διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι διαιρετό από το 4.

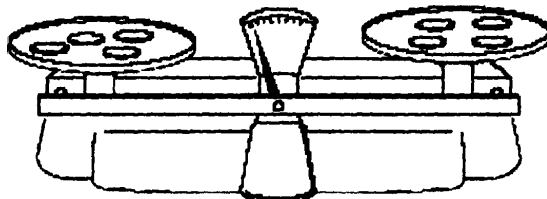
β. Κάθε ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος από το 0 και μικρότερος από το 15 είναι είτε ένας τρίγωνος αριθμός είτε το άθροισμα δύο ή τριών τριγωνων αριθμών.

39. Σας δίνονται οκτώ νομίσματα και μια ζυγαριά. Τα νομίσματα φαίνονται όμοια, αλλά κάποιο είναι κάλπικο και ελαφρύτερο από τα άλλα. Βρείτε το κάλπικο νόμισμα, χρησιμοποιώντας μόνο δύο ζυγίσματα στη ζυγαριά.

Κατανόηση του προβλήματος. Εάν υπήρχαν μόνο δύο νομίσματα και κάποιο ήταν κάλπικο και ελαφρύτερο, το κάλπικο νόμισμα θα μπορούσε να καθοριστεί μόνο με ένα ζύγισμα. Η ζυγαριά παρουσιάζει αυτήν την κατάσταση. Το κάλπικο νόμισμα είναι στην αριστερή ή τη δεξιά πλευρά της ζυγαριάς;



Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Μια μέθοδος επίλυσης αυτού του προβλήματος είναι να υποθέσουμε και να ελέγξουμε. Είναι φυσικό να ξεκινήσουμε με τέσσερα νομίσματα σε κάθε πλευρά της ζυγαριάς. Εξηγήστε γιατί με αυτήν την προσέγγιση δεν θα βρούμε το κάλπικο νόμισμα μόνο με δύο ζυγίσματα. Μια άλλη μέθοδος είναι να απλοποιηθεί το πρόβλημα και να προσπαθήσουμε να το λύσουμε με λιγότερα νομίσματα.



Εκτέλεση του σχεδίου. Εξηγήστε πώς το κάλπικο νόμισμα μπορεί να βρεθεί με ένα ζύγισμα εάν υπάρχουν μόνο τρία νομίσματα και με δύο ζυγίσματα εάν υπάρχουν έξι νομίσματα. Ήδη μπορεί να έχετε μια ιδέα για την επίλυση του αρχικού προβλήματος. Πώς μπορεί το κάλπικο νόμισμα να βρεθεί σε δύο ζυγίσματα;

Επανελέγχος. Εξηγήστε πώς το κάλπικο νόμισμα μπορεί να βρεθεί σε δύο ζυγίσματα όταν υπάρχουν εννέα νομίσματα.

40. Η Σοφία ξεκίνησε μια λέσχη υπολογιστών και αρχικά ήταν το μόνο μέλος. Προγραμματίσε να βάζει κάθε μέλος να βρίσκει δύο νέα μέλη κάθε μήνα. Μέχρι το τέλος του πρώτου μήνα είχε βρει δύο νέα μέλη. Εάν το σχέδιό της πραγματοποιηθεί, πόσα μέλη θα έχει η λέσχη στο τέλος των επόμενων περιόδων;

α. 6 μήνες β. 1 έτος



41. Για αρκετά έτη ο Κώστας φυτεύει δέντρα σε ένα κτήμα που έχει. Τα δέντρα φυτεύονται σε μια τετραγωνική σειρά (οι τετραγωνικές σειρές παρουσιάζονται στην άσκηση 28). Αυτό το έτος φύτεψε 87 νέα δέντρα κατά μήκος δύο παρακείμενων πλευρών του τετραγώνου για να διαμορφώσει ένα μεγαλύτερο τετράγωνο. Πόσα δέντρα είναι στο νέο τετράγωνο;

42. Εκατό ογδόντα δέντρα πρόκειται να φυτευτούν σε μια ευθεία γραμμή έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ δύο παρακείμενων δέντρων να είναι 12 μέτρα. Ποια είναι η απόσταση από το πρώτο δέντρο έως το 180ο δέντρο;

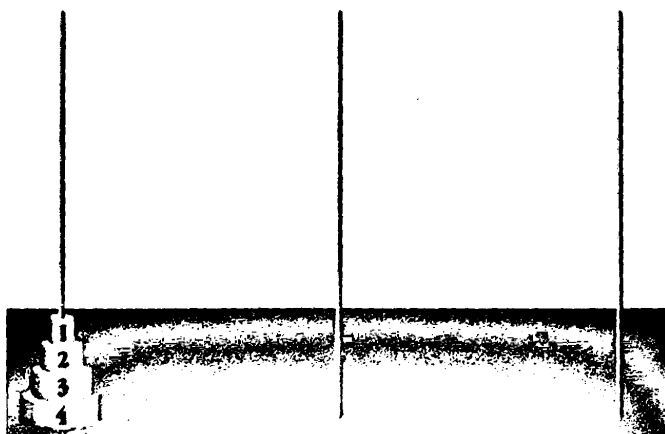
43. Σε μια αυτοκινητοπομπή ένα αυτοκίνητο είναι το 147ο από την αρχή της ουράς, και μετρώντας από το τέλος της ουράς, είναι το 198ο αυτοκίνητο. Πόσα αυτοκίνητα είναι στη γραμμή;

44. Εάν 255 τετράγωνα πλακάκια χρώματος μπλε, κόκκινου, πράσινου και κίτρινου τοποθετούνται δίπλα δίπλα σε μια ενιαία σειρά έτσι ώστε δύο πλακάκια του ίδιου χρώματος να μην είναι το ένα δίπλα στο άλλο, ποιος είναι ο μέγιστος πιθανός αριθμός κόκκινων πλακιδίων;

45. Έχουμε μια τράπουλα με 500 χαρτιά που είναι αριθμημένα με ακέραιους αριθμούς από το 1 έως το 500. Πόσα από αυτά τα χαρτιά έχουν τουλάχιστον ένα 6 τυπωμένο επάνω τους;

46. Μια τράπουλα από 300 χαρτιά είναι αριθμημένη με ακέραιους αριθμούς από το 1 έως το 300, και κάθε κάρτα έχει μόνο έναν αριθμό. Πόσα από αυτά τα χαρτιά δεν έχουν το 4 τυπωμένο επάνω τους;

47. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός κινήσεων για να μεταφέρετε τέσσερις δίσκους από έναν στύλο σε έναν άλλον εάν μπορεί να κινηθεί ένας μόνο δίσκος κάθε φορά και ένας δίσκος δεν μπορεί να τοποθετηθεί πάνω από έναν μικρότερο δίσκο; Εδώ, θα λύσετε ένα αρχαίο πρόβλημα με την εύρεση των μοτίβων για να καθορίσετε τον ελάχιστο αριθμό κινήσεων για τη μεταφορά ενός αυθαίρετου αριθμού δίσκων.



48. Εδώ είναι οι πρώτοι τέσσερις όροι μιας ακολουθίας που αποτελείται από τραπέζια και παραλληλόγραμμα.



α Βρείτε ένα μοτίβο και ανακαλύψτε τον πέμπτο όρο. Ζωγραφίστε αυτόν τον όρο.

β. Εάν το μοτίβο συνεχίζεται, πόσα τραπέζια και παραλληλόγραμμα θα είναι στον 10ο όρο;

γ. Ποια σχήματα είναι στην κάθε άκρη του 35ου όρου της ακολουθίας και πόσα σχήματα είναι σε αυτό τον όρο;



δ. Καθορίστε το συνολικό αριθμό σχημάτων στον 75ο όρο και γράψτε μια εξήγηση περιγράφοντας πώς συναγάγατε το συμπέρασμά σας.

49. Τα σχήματα 1, 3, 5 και 7 παρουσιάζονται σε μια ακολουθία χρησιμοποιώντας εξάγωνα, τετράγωνα και τρίγωνα.

1ος

3ος

5ος

7ος



α. Βρείτε ένα μοτίβο και σχεδιάστε τον 8ο και 9ο όρο.

β. Δώστε μια περιγραφή του 20ού όρου.

γ. Δώστε μια περιγραφή του 174ου, 175ου, και 176ου όρου, που να περιλαμβάνει τον αριθμό εξαγώνων, τετραγώνων και τριγώνων σε κάθε έναν από αυτούς τους όρους.

50. Χρησιμοποιήστε σχήματα για να φτιάξετε τον 8ο και 9ο όρο της επόμενης ακολουθίας.

1ος

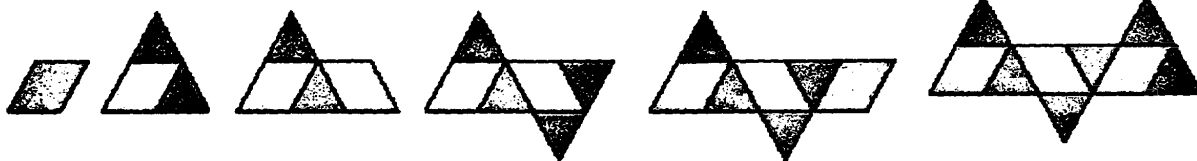
2ος

3ος

4ος

5ος

6ος



α. Περιγράψτε το μοτίβο με το οποίο επεκτείνεται η ακολουθία. Καθορίστε τον αριθμό τριγώνων και παραλληλογράμμων στο 20ό όρο.

β. Πόσα σχήματα είναι στον 45ο όρο;

γ. Ο πέμπτος όρος στην ακολουθία έχει 7 σχήματα. Ποιος όρος έχει 87 σχήματα; Εξηγήστε το συλλογισμό σας.

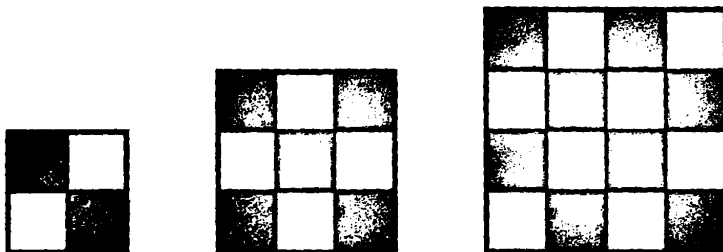
51. Αυτά τα σπέρτα φτιάχνουν 4 τετράγωνα. Εάν το μοτίβο των τετραγώνων συνεχίζεται, πόσα σπέρτα θα χρειαστούν για να φτιαχτούν 60 τετράγωνα;



Επέκταση του μοτίβου με πλακάκια

Υλικά: Χρωματιστά πλακάκια

52. Εδώ είναι οι πρώτοι τρεις όροι σε μια ακολουθία. Βρείτε ένα μοτίβο και φτιάξτε τον τέταρτο όρο.



1ος

2ος

3ος

α. Για κάθε έναν από τους πρώτους πέντε όρους, καθορίστε πόσα πλακάκια κάθε χρώματος υπάρχουν.

β. Βρείτε ένα μοτίβο και καθορίστε τον αριθμό από πλακάκια κάθε χρώματος για το 10ο όρο.

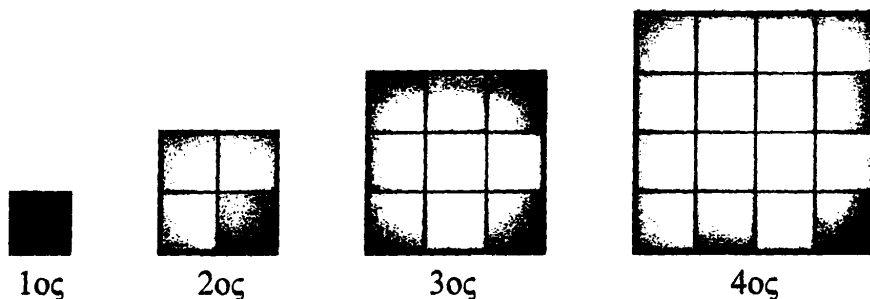
γ. Ποιος είναι ο συνολικός αριθμός από πλακάκια για το 10ο όρο;



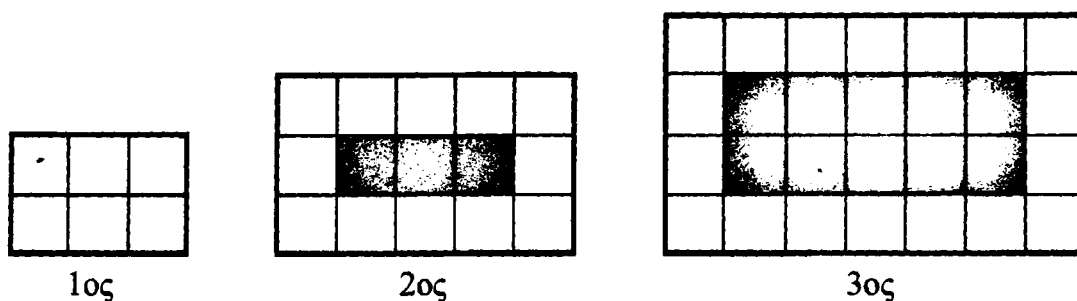
δ. Γράψτε μια περιγραφή του 25ου όρου έτσι ώστε κάποιος που τη διαβάζει να μπορεί να τον φτιάξει. Περιλάβετε στην περιγραφή σας τον αριθμό από πλακάκια με κάθε ένα από τα διαφορετικά χρώματα και το συνολικό αριθμό από πλακάκια στον όρο.

53. Επεκτείνετε κάθε μια από τις ακόλουθες ακολουθίες έως τον πέμπτο όρο και καταγράψτε τους αριθμούς από πλακάκια διαφορετικού χρώματος σε κάθε όρο. Βρείτε ένα μοτίβο που να σας επιτρέπει να καθορίσετε τους αριθμούς από πλακάκια διαφορετικού χρώματος στο 10ο και 25ο όρο κάθε ακολουθίας. Περιγράψτε το συλλογισμό σας.

α.



β.



ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΤΕ ΕΝΑΝ ΤΥΠΟ

Οι τύποι είναι ένα από τα ισχυρότερα μαθηματικά εργαλεία που έχουμε στη διάθεσή μας. Συχνά, η λύση σε ένα πρόβλημα περιλαμβάνει την αντικατάσταση τιμών σε έναν τύπο ή την επιλογή χρήσης του κατάλληλου τύπου. Αν η λύση ενός προβλήματος απαιτεί τη χρήση αυτής της στρατηγικής, τότε το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με έναν τύπο. Όταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα για τα οποία δεν ξέρουν έναν κατάλληλο τύπο, πρέπει να ενθαρρυνθούν να ανακαλύψουν τον τύπο μόνοι τους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ο τύπος $F = 1.8C + 32$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετατρέψουμε τις θερμοκρασίες βαθμών Fahrenheit (F) σε βαθμούς Celsius (C). Πόσοι βαθμοί Κελσίου είναι οι -22°F ;

Κατανόηση του προβλήματος. Τι προσπαθούμε να βρούμε; Θέλουμε να ξέρουμε μια θερμοκρασία στους βαθμούς Κελσίου αντί των βαθμών fahrenheit.

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Δεδομένου ότι έχουμε έναν τύπο που αφορά τις θερμοκρασίες Κελσίου και fahrenheit, αντικαταστήστε το F στον τύπο με την αξία που δίνεται για τους βαθμούς fahrenheit.

Εκτέλεση του σχεδίου. Ο τύπος που δίνεται είναι $F = 1.8C + 32$. Αντικατάσταση του F στην πρώτη θέση της εξίσωσης με -22 στην ακόλουθη λύση:

$$-22 = 1.8C + 32$$

$$-22 - 32 = 1.8C$$



$$-30 = C$$

Η απάντηση είναι $-30^{\circ} C$.

Επανελέγχος. Είναι η απάντησή μας λογική; Ναι.

1. α. Η κανονική πίεση αίματος ενός ανθρώπου αυξάνεται με την ηλικία και προσεγγίζεται από το $\chi / 2 + 110$, όπου το χ είναι η ηλικία του ατόμου. Μεταξύ ποιων δύο αριθμών πρέπει να είναι η πίεση αίματος για τους ανθρώπους μεταξύ 20 και 30 ετών;

β. Ο μέγιστος αριθμός χτύπων της καρδιάς ενός ανθρώπου είναι $220 - \chi$, όπου το χ είναι η ηλικία του ανθρώπου. Ο αριθμός χτύπων κατά την αεροβική δραστηριότητα πρέπει να είναι μεταξύ του $7(220 - \chi)$ και $8(220 - \chi)$. Μεταξύ ποιων δύο αριθμών πρέπει να είναι ο αριθμός χτύπων ενός 20χρονου ατόμου κατά την αεροβική δραστηριότητα;

2. Ο αριθμός λέξεων στο λεξιλόγιο ενός παιδιού για τα παιδιά μεταξύ 20 και 50 μηνών είναι $60\chi - 900$, όπου το χ είναι η ηλικία του παιδιού σε μήνες. Ποιος είναι ο αριθμός λέξεων για ένα παιδί του οποίου η ηλικία είναι 20 μήνες; 35 μήνες; 4 έτη;

3. Τα εισιτήρια για το θέατρο κοστίζουν 28€ για τα καθίσματα στην πλατεία και 19€ για τα καθίσματα στον εξώστη. Το χ αντιπροσωπεύει τον αριθμό εισιτηρίων που πωλούνται για τα καθίσματα της πλατείας και το ψ αντιπροσωπεύει τον αριθμό εισιτηρίων που πωλούνται για τα καθίσματα του εξώστη. Γράψτε μια αλγεβρική παράσταση για τα ακόλουθα αθροίσματα.

α. Το κόστος σε € όλων των καθισμάτων πλατείας που πωλήθηκαν

β. Ο συνολικός αριθμός καθισμάτων που πωλήθηκαν για την παράσταση

γ. Η διαφορά σε € ανάμεσα στο χρηματικό ποσό που καταβάλλεται για όλα τα καθίσματα πλατείας και το ποσό που καταβάλλεται για όλα τα καθίσματα εξώστη, εάν το ποσό για όλα τα καθίσματα πλατείας ήταν το μεγαλύτερο των δύο ποσών.

4. Στην λαϊκή του Σαββάτου, τα πεπόνια κοστίζουν 1,20€ το ένα και τα καρπούζια κοστίζουν 1,45€ το ένα. Το χ αντιπροσωπεύει τον αριθμό πεπονιών που πωλούνται κατά τη διάρκεια της ημέρας, και το ψ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των καρπουζιών. Γράψτε μια αλγεβρική παράσταση για κάθε ένα από τα ακόλουθα ζητούμενα.

α. Ο συνολικός αριθμός πεπονιών και καρπουζιών που πωλούνται

β. Το κόστος όλων των καρπουζιών που πωλούνται

γ. Το συνολικό κόστος όλων των πεπονιών και των καρπουζιών που πωλούνται

5. Γράψτε μια εξίσωση χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές χ και ψ για να αντιπροσωπεύσετε την ακόλουθη δήλωση: "Σε αυτό το σχολείο υπάρχουν 6 φορές περισσότεροι μαθητές από τους καθηγητές." Χρησιμοποιήστε το χ για τον αριθμό των μαθητών και το ψ για τον αριθμό των καθηγητών.

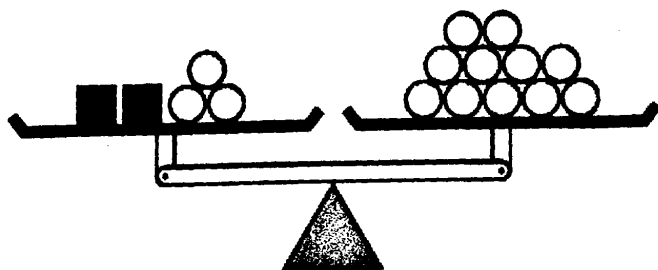
α. Ποια είναι η σωστή εξίσωση;

β. Η πιο κοινή λανθασμένη απάντηση ήταν $6\chi = \psi$. Δώστε μια πιθανή εξήγηση για αυτό.

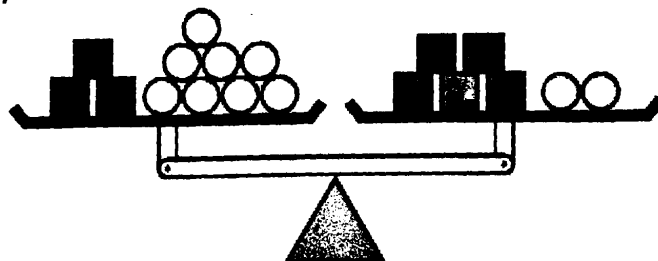
Καθορίστε τον αριθμό βώλων που απαιτούνται για να αντικαταστήσουν κάθε κουτί στις ζυγαριές στις ασκήσεις 6 και 7. Κατόπιν χρησιμοποιώντας το χ για να αντιπροσωπεύσει τον αριθμό βώλων για κάθε κουτί, γράψτε την αντίστοιχη εξίσωση που αντιπροσωπεύει κάθε ζυγαριά και λύστε την εξίσωση.

6. α.

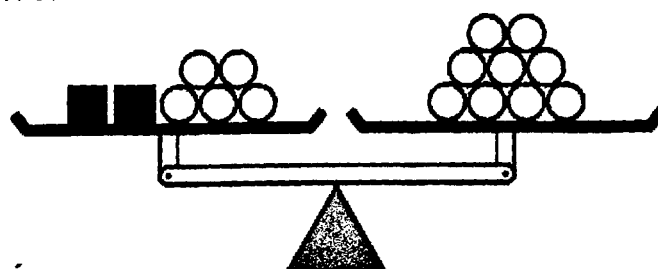




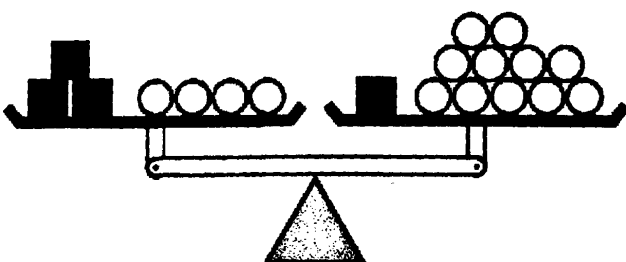
β.



7. α.



β.



Κάθε μια από τις εξισώσεις στις ασκήσεις 8 και 9 έχει αντικατασταθεί από μια παρόμοια ισοδύναμη εξίσωση. Γράψτε την ιδιότητα της ισότητας που έχει χρησιμοποιηθεί σε κάθε βήμα.

8. α.

$$6x - 14 = 2x$$

$$6x - 14 + 14 = 2x + 14 \text{ (βήμα 1)}$$

$$6x = 2x + 14 \text{ (βήμα 2)}$$

$$6x - 2x = 2x + 14 - 2x \text{ (βήμα 3)}$$

$$4x = 14 \text{ (βήμα 4)}$$

$$4x / 4 = 14 / 4 \text{ (βήμα 5)}$$

$$x = 3 \frac{1}{2} \text{ (βήμα 6)}$$

β.

$$42x + 102 = 6(3x + 45)$$

$$42x + 102 = 18x + 270 \text{ (βήμα 1)}$$

$$42x + 102 - 18x = 18x + 270 - 18x \text{ (βήμα 2)}$$

$$24x + 102 = 270 \text{ (βήμα 3)}$$

$$24x + 102 - 102 = 270 - 102 \text{ (βήμα 4)}$$

$$24x = 168 \text{ (βήμα 5)}$$



$$24x/24 = 168/24 \text{ (βήμα 6)}$$

$$x = 7 \text{ (βήμα 7)}$$

9. α.

$$6(2x-5) = 7x+15$$

$$12x-30 = 7x+15 \text{ (βήμα 1)}$$

$$12x-30+30 = 7x+15+30 \text{ (βήμα 2)}$$

$$12x = 7x+45 \text{ (βήμα 3)}$$

$$12x-7x = 7x+45-7x \text{ (βήμα 4)}$$

$$5x = 45 \text{ (βήμα 5)}$$

$$5x/5 = 45/5 \text{ (βήμα 6)}$$

$$x = 9 \text{ (βήμα 7)}$$

β.

$$11(3x) + 2 = 35$$

$$33x+2 = 35 \text{ (βήμα 1)}$$

$$33x+2-2 = 35-2 \text{ (βήμα 2)}$$

$$33x = 33 \text{ (βήμα 3)}$$

$$33x/33 = 33/33 \text{ (βήμα 4)}$$

$$x = 1 \text{ (βήμα 5)}$$

Λύστε τις εξίσωση στις ασκήσεις 10 και 11,

10. α. $2x+30 = 18+5x$

β. $3x-17 = 22$

γ. $13(2x)+20 = 6(5x+2)$

δ. $8(x/2-5) = 2x-6$

11. α. $43x-281 = 17x+8117$

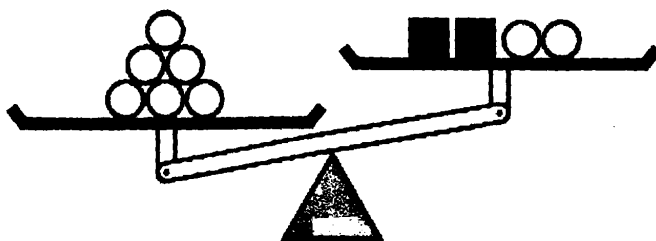
β. $17(3x-4) = 25x+218$

γ. $56(x+1)+7x = 45.353$

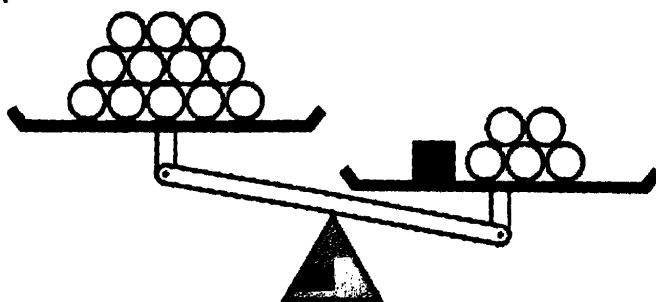
δ. $3x+5 = 2(2x-7)$

Καθορίστε τον αριθμό βόλων για κάθε κουτί που θα κρατήσει τις ζυγαριές στις ασκήσεις 12 και 13 με τη μια άκρη προς τα κάτω όπως φαίνεται στην εικόνα. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το x ως μεταβλητή, γράψτε την αντίστοιχη ανισότητα για κάθε ζυγαριά και λύστε την ανισότητα.

12. α.

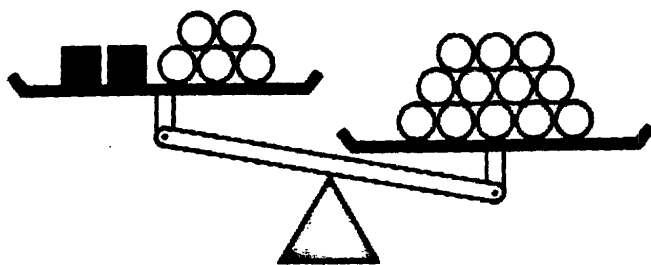


β.

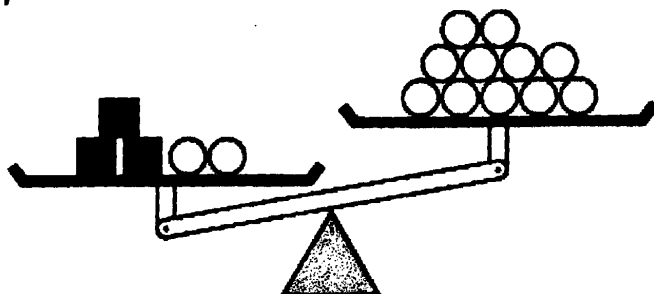


13. α.





β.



Κάθε μια από τις ανισότητες στις ασκήσεις 14 και 15 έχει αντικατασταθεί από μια παρόμοια ισοδύναμη ανισότητα. Γράψτε την ιδιότητα της ανισότητας που έχει χρησιμοποιηθεί σε κάθε βήμα.

14. α.

$$3x + 14 < 55$$

$$3x + 14 - 14 < 55 - 14 \text{ (βήμα 1)}$$

$$3x < 41 \text{ (βήμα 2)}$$

$$3x / 3 < 41 / 3 \text{ (βήμα 3)}$$

$$x < 13\frac{2}{3} \text{ (βήμα 4)}$$

β.

$$10x < 55$$

$$10x / 10 < 55 / 10 \text{ (βήμα 1)}$$

$$x < 5\frac{1}{2} \text{ (βήμα 2)}$$

15. α.

$$6x + 11 > 2x + 19$$

$$6x + 11 - 2x > 2x + 19 - 2x \text{ (βήμα 1)}$$

$$4x + 11 > 19 \text{ (βήμα 2)}$$

$$4x + 11 - 11 > 19 - 11 \text{ (βήμα 3)}$$

$$4x > 8 \text{ (βήμα 4)}$$

$$4x / 4 > 8 / 4 \text{ (βήμα 5)}$$

$$x > 2 \text{ (βήμα 6)}$$

β.

$$2x > 3x - 12$$

$$2x - 3x > 3x - 12 - 3x \text{ (βήμα 1)}$$

$$-x > -12 \text{ (βήμα 2)}$$

$$(-1)(-x) < (-1)(-12) \text{ (βήμα 3)}$$

$$x < 12 \text{ (βήμα 4)}$$

Λύστε τις ανισότητες στις ασκήσεις 16 και 17 και επεξηγήστε τη λύση με τη χρησιμοποίηση μιας αριθμογραμμής.

16. α. $3x + 5 < x + 17$

β. $3(2x + 7) > 36$

17. α. $6(x + 5) > 11x$

β. $5(x + 8) - 6 > 44$



18. Ο κ. Κώστας αγόρασε μερικές αγκινάρες προς 80 λεπτά την κάθε μία και τους διπλάσιους ανανάδες προς 95 λεπτά τον κάθε ένα. Συνολικά ξόδεψε 18,90€. Αν το χ αντιπροσωπεύει τον αριθμό αγκινάρων, γράψτε μια αλγεβρική παράσταση για κάθε ένα από τα ζητούμενα α έως γ.

α. Το συνολικό κόστος σε € που έδωσε για τις αγκινάρες.

β. Ο αριθμός ανανάδων

γ. Το συνολικό κόστος σε € για τους ανανάδες.

δ. Το άθροισμα των δαπανών στα ζητούμενα α και γ είναι 18,90€. Γράψτε και λύστε μια εξίσωση για να καθορίσετε τον αριθμό αγκινάρων που αγόρασε ο κ. Κώστας.

19. Στην Κατερίνα κόστισε 24 λεπτά για να ταχυδρομήσει μία κάρτα και 39 λεπτά για να ταχυδρομήσει ένα γράμμα. Έστειλε σε 18 ανθρώπους είτε μια κάρτα είτε ένα γράμμα σε κάθε έναν και ξόδεψε 5,22€. Αν το χ αντιπροσωπεύει τον αριθμό καρτών που έγραψε, γράψτε μια αλγεβρική παράσταση για τα ζητούμενα α έως γ.

α. Το συνολικό κόστος σε € για τις κάρτες

β. Ο αριθμός γραμμάτων

γ. Το συνολικό κόστος σε € για τα γράμματα

δ. Το άθροισμα των δαπανών στα ζητούμενα α και γ είναι 5,22€. Γράψτε και λύστε μια εξίσωση για να καθορίσετε τον αριθμό καρτών που ταχυδρόμησε η Κατερίνα.

20. Η Τερέζα αγόρασε στυλό με 50 λεπτά το κάθε ένα και μολύβια με 25 λεπτά το κάθε ένα. Αγόρασε 10 περισσότερα μολύβια από ότι στυλό και έδωσε στον υπάλληλο έναν χαρτονόμισμα των πέντε €, το οποίο ήταν αρκετά περισσότερο από το συνολικό κόστος. Αν το χ αντιπροσωπεύει τον αριθμό στυλό, γράψτε μια αλγεβρική παράσταση για τα ζητούμενα α έως γ.

α. Το συνολικό κόστος σε € των στυλό.

β. Ο αριθμός μολυβιών.

γ. Το συνολικό κόστος σε € των μολυβιών

δ. Το άθροισμα των δαπανών στα ζητούμενα α και γ είναι λιγότερο από 5,00€. Γράψτε και λύστε μια ανισότητα για να καθορίσετε τις πιθανές λύσεις για τον αριθμό στυλό και μολυβιών που αγόρασε η Τερέζα.

21. Η Μαρία ξόδεψε 10,50€ για κάθε CD και 8€ για κάθε κασέτα. Αγόρασε τρεις περισσότερες κασέτες από ότι CD και το συνολικό χρηματικό ποσό που ξόδεψε ήταν λιγότερο από 12€. Αν το χ αντιπροσωπεύει τον αριθμό CD που αγόρασε, γράψτε μια αλγεβρική παράσταση για τα ζητούμενα α έως γ.

α. Το συνολικό κόστος σε € των CD.

β. Ο αριθμός κασετών.

γ. Το συνολικό κόστος σε € των κασετών

δ. Το άθροισμα των δαπανών στα ζητούμενα α έως γ είναι λιγότερο από 120€. Γράψτε και λύστε μια ανισότητα για να καθορίσετε τις πιθανές λύσεις για τον αριθμό CD που αγόρασε η Μαρία.

Λύστε τα προβλήματα 22 έως 24 με το γράψιμο μιας εξίσωσης με μια μεταβλητή για να αντιπροσωπεύσει τις δεδομένες πληροφορίες και λύστε έπειτα την εξίσωση.

22. Η Σοφία ξοδεύει 60€ από το μισθό της σε ρούχα και το μισό των υπόλοιπων χρημάτων της σε τρόφιμα. Εάν της έχουν μείνει 80€, πόσος ήταν ο μισθός της;

23. Ο Βασίλης έχει ένα φράκτη 350 μέτρων. Περιέφραξε μια τετράγωνη περιοχή και τώρα του μένουν 110 μέτρα φράκτη να περιφράξει. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου;



24. Ο Παντελής παρατήρησε ότι εάν στην ηλικία του, προσθέσει 24, διαιρέσει το αποτέλεσμα με 2 και αφαιρέσει έπειτα 6, ανάκτησε πάλι την ηλικία του. Ποια είναι η ηλικία του;

Λύστε τα προβλήματα 25 και 26 με το γράψιμο μιας ανισότητας με μια μεταβλητή και λύστε έπειτα την ανισότητα.

25. Εάν προσθέσετε 14 σε ένα αριθμό, το άθροισμα είναι 3 φορές λιγότερο από τον αριθμό. Για ποιους αριθμούς είναι αυτό αληθές;

26. Το μήκος της πρώτης πλευράς ενός τριγώνου είναι ένας ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος από το 3. Η δεύτερη πλευρά είναι 3 μέτρα μεγαλύτερη από την πρώτη και η τρίτη πλευρά είναι 3 μέτρα μεγαλύτερη από τη δεύτερη. Πόσα τέτοια τρίγωνα έχουν περιμέτρους μικρότερες από 36 μέτρα;

27. Πώς μπορεί το 350 να γραφτεί ως άθροισμα τεσσάρων διαδοχικών ακέραιων αριθμών;

Κατανόηση του προβλήματος. Εάν το 75 είναι ο πρώτος από τους τέσσερις διαδοχικούς αριθμούς, κατόπιν οι άλλοι είναι 76, 77 και 78. Εάν το n είναι ο πρώτος αριθμός, γράψτε μια αλγεβρική παράσταση για κάθε έναν από τους άλλους τρεις.

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Ένας τρόπος είναι να αφήσουμε το n να είναι ο πρώτος από τους τέσσερις διαδοχικούς αριθμούς, να γραφεί μια αλγεβρική παράσταση για το άθροισμα τους και να καθοριστεί ποιος αριθμός για το n δίνει σε εκείνη την παράσταση την αξία 350. Εάν το n είναι ο πρώτος από τους τέσσερις διαδοχικούς αριθμούς, ποια είναι η αλγεβρική παράσταση για το άθροισμα τους;

Εκτέλεση του σχεδίου. Ποιος αριθμός για το n δίνει ένα άθροισμα 350;

Επανελέγχος. Μπορεί το 350 να γραφτεί ως άθροισμα άλλων διαδοχικών ακέραιων αριθμών; Χρησιμοποιήστε αλγεβρικές παραστάσεις για να καθορίσετε εάν το 350 μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα τριών διαδοχικών αριθμών ή πέντε διαδοχικών αριθμών.

28. Ο δάσκαλος ζητά από την τάξη να επιλέξει ένα τετράγωνο 4×4 αριθμών από το 10×10 διάγραμμα αριθμών και να χρησιμοποιήσουν μόνο εκείνους τους αριθμούς για τη διαδικασία τεσσάρων βημάτων που περιγράφεται εδώ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



1. Κυκλώστε οποιοδήποτε αριθμό και διαγράψτε τους υπόλοιπους αριθμούς στη σειρά και τη στήλη του.
2. Κυκλώστε έναν άλλο αριθμό που δεν έχει διαγραφεί και διαγράψτε τους υπόλοιπους αριθμούς στη σειρά και τη στήλη του.
3. Επαναλάβετε το βήμα 2 έως ότου υπάρχουν τέσσερις κυκλωμένοι αριθμοί.
4. Προσθέστε τους τέσσερις κυκλωμένους αριθμούς.

Ανεξάρτητα από το άθροισμα που ένας μαθητής βρίσκει, ο δάσκαλος θα είναι σε θέση να προβλέψει τον αριθμό στην πάνω αριστερή γωνία του τετραγώνου του μαθητή αφαιρώντας 66 από το άθροισμα και διαιρώντας το αποτέλεσμα με 4. Δείξτε γιατί αυτός ο τύπος λειτουργεί.

Κατανόηση του προβλήματος. Πραγματοποιήστε τα βήματα στο τετράγωνο 4×4 που παρουσιάζεται πιο πάνω. Ο πρώτος αριθμός είναι το 46 και οι υπόλοιποι αριθμοί στη σειρά και τη στήλη του έχουν διαγραφεί. Ο επόμενος αριθμός είναι το 38, συνεχίστε τη διαδικασία των τεσσάρων βημάτων. Ο τύπος του δασκάλου παράγει τον αριθμό στην πάνω αριστερή γωνία αυτού του τετράγωνα 4×4 ;

Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με την άλγεβρα. Εάν αντιπροσωπεύουμε τον αριθμό στην πάνω αριστερή γωνία με το x , οι υπόλοιποι αριθμοί μπορούν να αντιπροσωπευθούν με το x . Ολοκληρώστε τις επόμενες δύο σειρές του τετραγώνου 4×4 των αλγεβρικών παραστάσεων που παρουσιάζονται εδώ.

x	$x+1$	$x+2$	$x+3$
$x+10$	$x+11$	$x+12$	$x+13$

Εκτέλεση του σχεδίου. Πραγματοποιήστε τη διαδικασία τεσσάρων βημάτων στο τετράγωνο 4×4 των αλγεβρικών παραστάσεων που ολοκληρώσατε στην επινόηση του σχεδίου επίλυσης. Δείξτε ότι ο τύπος του δασκάλου λειτουργεί.

Επανελέγχος. Μια παραλλαγή είναι να αλλάξετε το μέγεθος του τετραγώνου που ο μαθητής επιλέγει. Παραδείγματος χάριν, ποιο τύπο θα χρησιμοποιήσει ο δάσκαλος εάν επιλεγεί ένα τετράγωνο 3×3 από το 10×10 διάγραμμα; (χρησιμοποιήστε ένα τετράγωνο αλγεβρικών παραστάσεων 3×3 .) Μια άλλη παραλλαγή είναι να αλλάξετε το διάγραμμα αριθμών. Υποθέστε ότι ένα τετράγωνο 3×3 επιλέγεται από ένα ημερολόγιο. Ποιος είναι ο τύπος σε αυτήν την περίπτωση;

29. Πολλά tricks αριθμών μπορούν να εξηγηθούν από την άλγεβρα. Επιλέξτε οποιοδήποτε αριθμό και εκτελέστε τα βήματα για να δείτε ποιον αριθμό λαμβάνετε. Προσθέστε 221 στον αριθμό, πολλαπλασιάστε με 2652, αφαιρέστε 1326, διαιρέστε με 663, αφαιρέστε 870, διαιρέστε με 4, και αφαιρέστε τον αρχικό αριθμό. Χρησιμοποιήστε την άλγεβρα για να δείξετε ότι τα βήματα οδηγούν πάντα στον ίδιο αριθμό.

30. Ζητήστε από ένα πρόσωπο να γράψει τον αριθμό του μήνα της γέννησής του /της και εκτελέστε τις ακόλουθες διαδικασίες: Πολλαπλασιάστε με 5, προσθέστε 6, πολλαπλασιάστε με 4, προσθέστε 9, πολλαπλασιάστε με 5 και προσθέστε τον αριθμό της ημέρας της γέννησης. Όταν αφαιρείται από αυτόν τον αριθμό το 165, το αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός που αντιπροσωπεύει το μήνα και την ημέρα της γέννησης του προσώπου. Δοκιμάστε το.

Ανάλυση: Το η και το μ αντιπροσωπεύουν ημέρα και μήνα, αντίστοιχα. Τα πρώτα τρία από τα προηγούμενα βήματα αντιπροσωπεύονται από τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις. Συνεχίστε αυτές τις παραστάσεις για να δείξετε ότι η τελική παράσταση είναι ίση με $100\mu + \eta$. Αυτό δείχνει ότι τα δύο τελευταία



ψηφία του τελικού αποτελέσματος είναι η ημέρα και τα υπόλοιπα ψηφία είναι ο μήνας.

5 μ

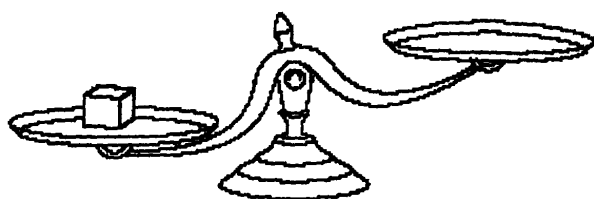
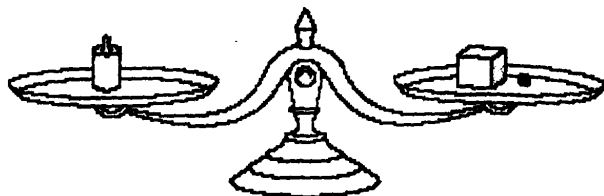
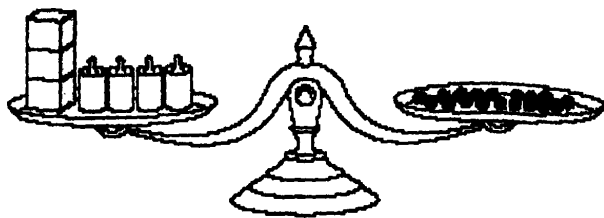
5 μ + 6.

$$4(5 \mu + 6) = 20 \mu + 24$$

31. Χρησιμοποιήστε τις πληροφορίες που παρουσιάζονται από τις δύο πρώτες ζυγαριές για να καθορίσετε τον αριθμό καρφιών που απαιτούνται για να ισορροπήσουν έναν κύβο (σημείωση: υπάρχουν 8 καρφιά στη δεξιά πλευρά της πρώτης ζυγαριάς.)



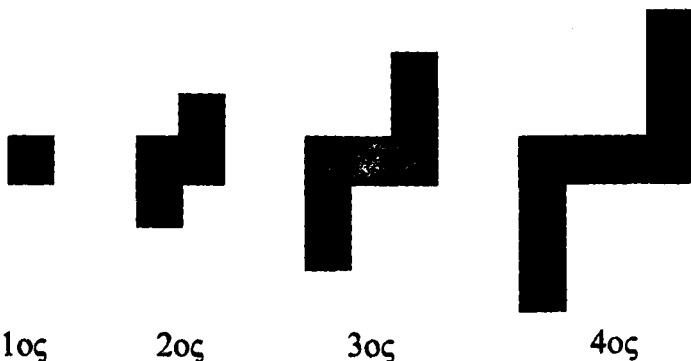
32. Χρησιμοποιήστε τις πληροφορίες στις δύο πρώτες ζυγαριές για να καθορίσετε τον αριθμό βόλων που απαιτούνται για να ισορροπήσουν έναν κύβο (σημείωση: υπάρχουν 18 βόλοι στη δεξιά πλευρά της πρώτης ζυγαριάς.)



33. Στην οδήγηση από την πόλη Α στην πόλη Δ, περνάτε πρώτα μέσω της πόλης Β και έπειτα μέσω της πόλης Γ. Είναι 10 φορές μακρύτερα από την πόλη Α στην πόλη Β απ' ό,τι από τις πόλεις Β στην Γ και 10 φορές μακρύτερα από τις πόλεις Β στη Γ απ' ό,τι από τις πόλεις Γ στη Δ. Εάν από την πόλη Α έως την πόλη Δ είναι 1332 χλμ., ποια είναι η απόσταση από την πόλη Α στην πόλη Β; (Ορίστε τη μεταβλητή x να αντιπροσωπεύσει την απόσταση από την πόλη Γ στην πόλη Δ.)

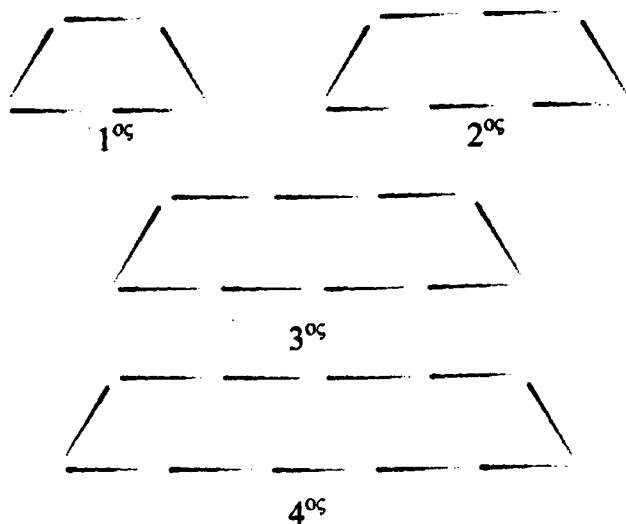
34. Το κόστος ενός μπουκαλιού κολόνιας είναι 28,90€. Η τιμή καθορίστηκε από το κόστος του μπουκαλιού συν το κόστος του αρώματος. Εάν το άρωμα κοστίζει 14,10€ περισσότερο από το μπουκάλι, πόσο κοστίζει το μπουκάλι; (Ορίστε τη μεταβλητή x να αντιπροσωπεύσει το κόστος του μπουκαλιού.)

35. Εάν τα ακόλουθα σχήματα από πλακάκια συνεχίζονται, θα υπάρξει ένας όρος με 8230 πλακάκια; Σε αυτή την περίπτωση, ποιος θα είναι αυτός όρος; Αν όχι, ποιος όρος θα είναι πιο κοντά στα 8230; (γράψτε μια αλγεβρική παράσταση για τον νιοστό όρο και θέστε τον ίσο με 8230)

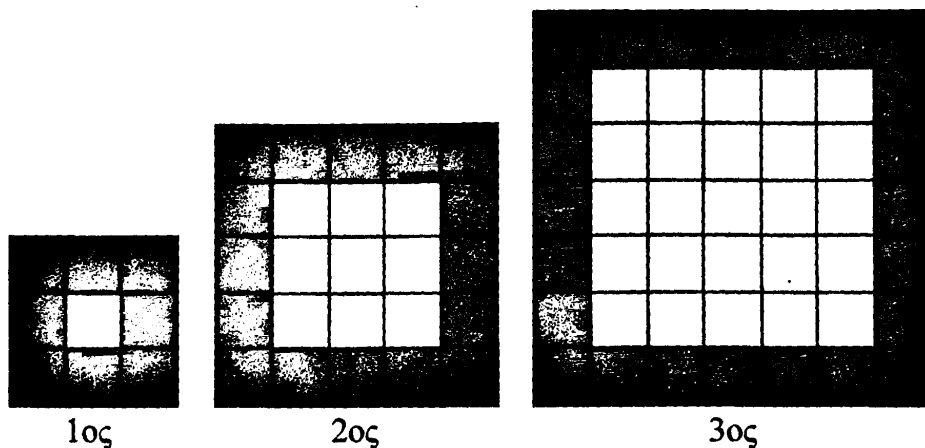


36. Βρείτε ένα μοτίβο για να επεκτείνετε το σχήμα με τις οδοντογλυφίδες. Καθορίστε τον αριθμό οδοντογλυφίδων στον 50ό όρο και γράψτε μια αλγεβρική παράσταση για τον αριθμό οδοντογλυφίδων στον νιοστό όρο.





37. Εδώ είναι οι πρώτοι τρεις όροι μιας ακολουθίας που διαμορφώνονται από χρωματιστά πλακάκια.



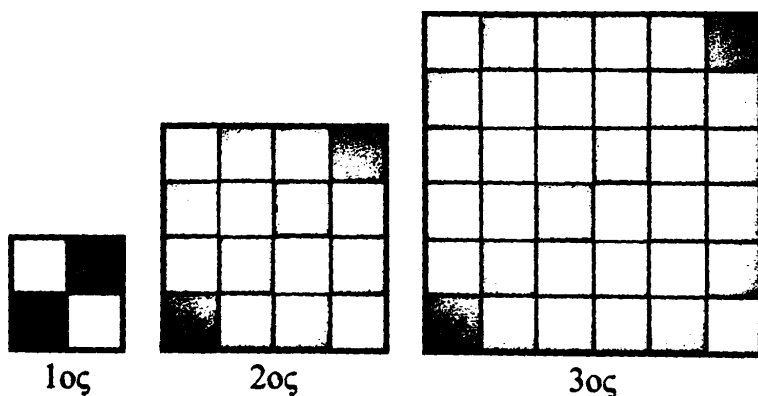
α. Βρείτε ένα μοτίβο και περιγράψτε τους επόμενους δύο όρους στην ακολουθία. Κατόπιν καθορίστε πόσα πλακάκια κάθε χρώματος χρησιμοποιούνται στον πέμπτο όρο. Απαντήστε σε αυτήν την ερώτηση για κάθε έναν από τους πρώτους τέσσερις όρους.

β. Περιγράψτε το 100ό όρο. Η περιγραφή να περιλαμβάνει τον αριθμό από πλακάκια κάθε χρώματος και το συνολικό αριθμό από πλακάκια στον όρο.

γ. Γράψτε τις αλγεβρικές παραστάσεις του νιοστού όρου για

- (1) τα κίτρινα πλακάκια
- (2) τα κόκκινα πλακάκια
- (3) το συνολικό αριθμό από πλακάκια

38. Αυτοί οι τρεις όροι διαμορφώθηκαν από χρωματιστά πλακάκια.



α. Βρείτε ένα μοτίβο και περιγράψτε τους δύο επόμενους όρους που βρίσκονται στην ακολουθία. Πόσα πλακάκια διαφορετικού χρώματος είναι στον πέμπτο όρο; Απαντήστε σε αυτήν την ερώτηση για κάθε έναν από τους πρώτους τέσσερις όρους.

β. Περιγράψτε τον 100ό όρο και καθορίστε

- (1) τα κίτρινα πλακάκια
- (2) τα πράσινα πλακάκια
- (3) τα μπλε πλακάκια
- (4) το συνολικό αριθμό από πλακάκια

γ. Γράψτε τις αλγεβρικές παραστάσεις του νιοστού όρου για

- (1) τα κίτρινα πλακάκια
- (2) τα πράσινα πλακάκια
- (3) τα μπλε πλακάκια
- (4) το συνολικό αριθμό από πλακάκια

39. Οι αριθμοί στα ακόλουθα αθροίσματα προέκυψαν με τη χρησιμοποίηση των αριθμών Fibonacci που είναι κυκλωμένοι.

① 1 ② 3 ⑤ 8 ⑬ 21 ③④

$$1 + 2 =$$

$$1 + 2 + 5 =$$

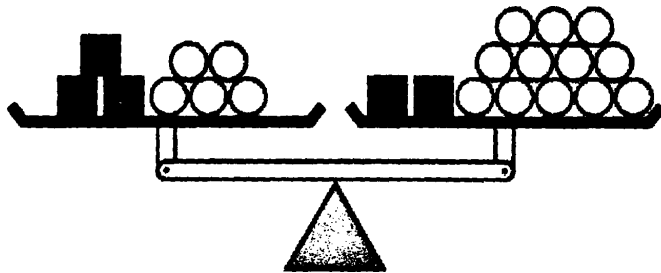
$$1 + 2 + 5 + 13 =$$

$$1 + 2 + 5 + 13 + 34 =$$

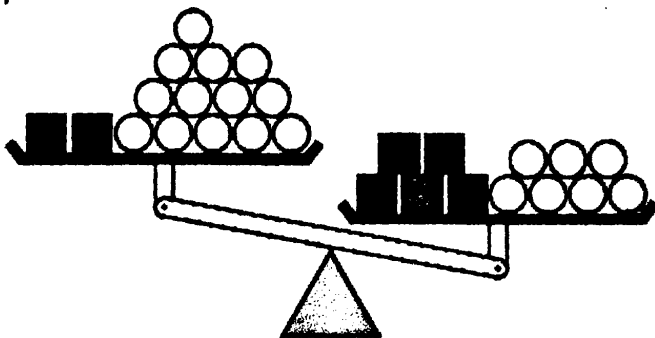
Υπολογίστε αυτά τα αθροίσματα. Ποια είναι η σχέση μεταξύ αυτών των αθροισμάτων και των αριθμών Fibonacci;

40. Καθορίστε τον αριθμό βόλων που απαιτούνται για κάθε κουτί για να μείνει η ζυγαριά στη δεδομένη θέση.

α.



β.



Λύστε τα προβλήματα 41 μέχρι 46, και προσδιορίστε τη στρατηγική ή τις στρατηγικές που χρησιμοποιείτε.

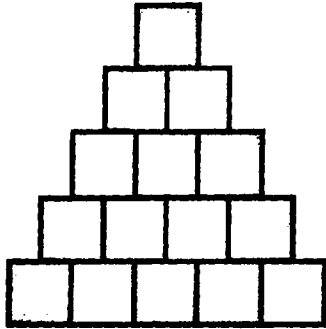
41. Σε ένα φράκτη που έχει μήκος 2000 μέτρα υπάρχουν στύλοι που είναι τοποθετημένοι ανά 10 μέτρα δηλαδή η απόσταση μεταξύ δύο παρακείμενων



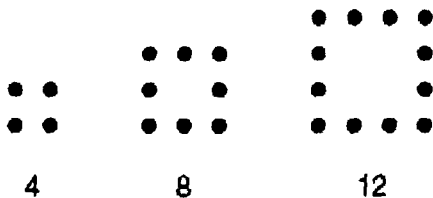
στύλων είναι 10 μέτρα. Εάν ο φράκτης αρχίζει με ένα στύλο και τελειώνει με ένα στύλο, καθορίστε τον αριθμό στύλων σε όλο το φράκτη.

42. Σε ένα παιχνίδι βόλων, η Λιάνα έχασε μισούς από τους βόλους της στον πρώτο γύρο. Έπειτα κέρδισε 50 βόλους, κατόπιν έχασε τους μισούς από τους συνολικούς της βόλους, και κέρδισε τέλος 80 βόλους. Τελείωσε το παιχνίδι με 170 βόλους. Πόσους βόλους είχε στην αρχή του παιχνιδιού;

43. Ο ακόλουθος πύργος έχει στη βάση του 5 πλακάκια και 5 σειρές από πλακάκια. Πόσα πλακάκια θα χρειαστούν για να φτιαχτεί ένας πύργος που να έχει 25 πλακάκια κατά μήκος της βάσης του και 25 σειρές από πλακάκια; Γράψτε μια αλγεβρική παράσταση για τον αριθμό από πλακάκια σε έναν πύργο με n πλακάκια κατά μήκος της βάσης του και n σειρές από πλακάκια.



44. Παρουσιάζονται πιο κάτω τρία τετράγωνα σε ένα μοτίβο. Κάθε τετράγωνο έχει μία περισσότερη κουκίδα σε κάθε πλευρά από το προηγούμενο τετράγωνο.



α. Πόσες κουκίδες υπάρχουν στο τέταρτο τετράγωνο;

β. Πόσες κουκίδες υπάρχουν στο 50ό τετράγωνο;

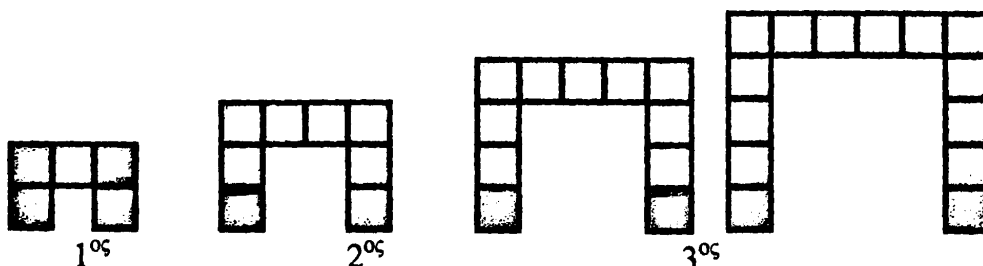
γ. Γράψτε την αλγεβρική παράσταση για τον αριθμό κουκίδων στο νιοστό τετράγωνο.

45. Δύο άντρες και δύο αγόρια θέλουν να διασχίσουν έναν ποταμό, χρησιμοποιώντας ένα μικρό κανό. Το κανό μπορεί να μεταφέρει δύο αγόρια ή έναν άντρα. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός φορών που το κανό πρέπει να διασχίσει τον ποταμό για να τους μεταφέρει όλους στην άλλη πλευρά;

46. Βρείτε ένα μοτίβο για να επεκτείνετε τους ακόλουθους όρους από πλακάκια.

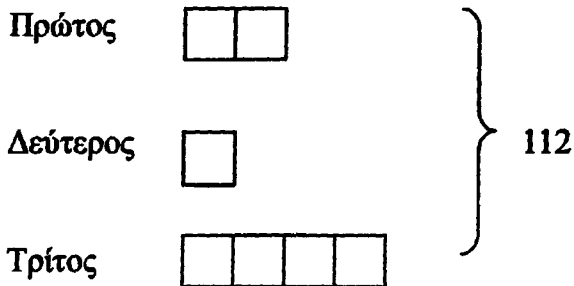
α. Πόσα πλακάκια θα υπάρξουν στον 5^ο όρο; Στον 150^ο όρο;

β. Γράψτε μια αλγεβρική παράσταση για τον αριθμό από πλακάκια στον νιοστό όρο.



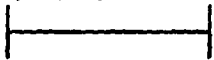
Κάθε ένα από τα προβλήματα 47 έως 50 συνοδεύεται από ένα σκίτσο ή ένα διάγραμμα που χρησιμοποιήθηκαν από έναν μαθητή για να λύσει το πρόβλημα. Περιγράψτε πώς πιστεύετε ότι ο μαθητής χρησιμοποίησε το διάγραμμα και χρησιμοποιήστε αυτήν τη μέθοδο για να λύσετε το πρόβλημα.

47. Υπάρχουν τρεις αριθμοί. Ο πρώτος αριθμός είναι διπλάσιος του δεύτερου αριθμού. Ο τρίτος είναι διπλάσιος του πρώτου αριθμού. Το άθροισμα τους είναι 112. Ποιοι είναι οι αριθμοί;



48. Ο Μιχάλης έχει τριπλάσια νομίσματα των 5 λεπτών από τα νομίσματα των 10 λεπτών του Παναγιώτη. Ο Μιχάλης έχει 45 λεπτά περισσότερα από τον Παναγιώτη. Πόσα χρήματα έχει ο Μιχάλης;

Αριθμός των 10λεπτών του Παναγιώτη



Αριθμός των 5λεπτών του Μιχάλη



Αριθμός των 5λεπτών του Παναγιώτη
(αν ανταλλάξει τα 10λεπτα με 5λεπτα)



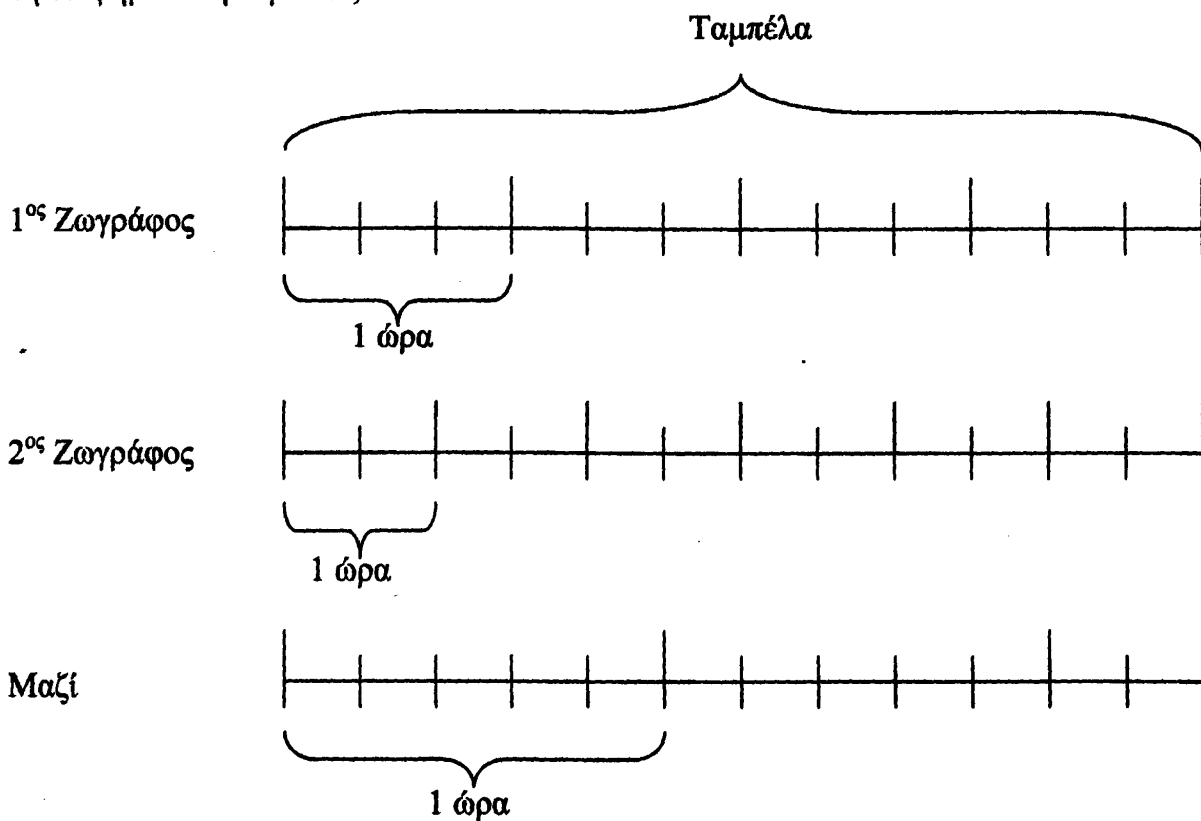
Επιπλέον 45 λεπτά που είχε ο Μιχάλης

49. Στην καφετέρια του Κώστα 1 καφές και 3 ντόνατς κοστίζουν 0,90€ και 2 καφέδες και 2 ντόνατς κοστίζουν 1,00€. Πόσο κοστίζει 1 καφές; 1 ντόνατς;





50. Ένας ζωγράφος μπορεί να ζωγραφίσει μια διαφημιστική ταμπέλα σε 4 ώρες και ένας άλλος θέλει 6 ώρες. Πόση ώρα θα τους πάρει για να ζωγραφίσουν μαζί τη διαφημιστική ταμπέλα;



Τα προβλήματα από το 51 μέχρι το 60 μπορούν να λυθούν με τη χρησιμοποίηση των στρατηγικών που παρουσιάστηκαν. Ενώ επιλύετε το πρόβλημα, προσπαθήστε να καταγράψετε τις στρατηγικές που χρησιμοποιείτε. Εάν χρησιμοποιείτε μια στρατηγική διαφορετική από αυτές που παρουσιάστηκαν, προσπαθήστε να τις προσδιορίσετε και να τις καταγράψετε

51. Σε μια έκθεση σκαφών υπήρχαν σκάφη με 3 πανιά και σκάφη με 4 πανιά. Η Αμαλία στα 8 σκάφη που είδε μέτρησε συνολικά 30 πανιά. Πόσα από αυτά τα σκάφη είχαν 4 πανιά;

52. Όταν ένας δάσκαλος χώρισε τους μαθητές του σε ομάδες των 4, υπήρξαν 2 μαθητές που περίσσευαν. Όταν τους χώρισε σε ομάδες των 5, περίσσεψε 1 μαθητής. Εάν 15 από τους μαθητές του ήταν κορίτσια και είχε περισσότερα κορίτσια από αγόρια, πόσους μαθητές είχε;



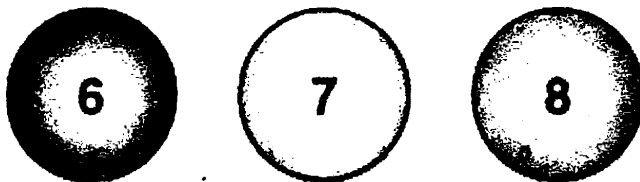
53. Το video club στο οποίο πηγαίνει η Κατερίνα της δίνει ένα δωρεάν dvd για κάθε τρία dvd που νοικιάζει. Εάν πληρώνει 3€ για κάθε dvd και πλήρωσε 132€ κατά τη διάρκεια μιας περιόδου τεσσάρων μηνών, πόσα δωρεάν dvd πήρε;

54. Η Χρύσα είχε ένα καλάθι με μήλα. Έδωσε τα μισά από τα μήλα που είχε σε έναν γείτονα, κατόπιν 8 μήλα στη μητέρα της, έπειτα τα μισά από τα υπόλοιπα μήλα στον καλύτερο φίλο της, και κράτησε 3 μήλα για αυτήν. Πόσα μήλα είχε αρχικά στο καλάθι;

55. Τέσσερις άνθρωποι θέλουν να διασχίσουν έναν ποταμό. Υπάρχει μόνο μια βάρκα διαθέσιμη, και μπορεί να μεταφέρει το πολύ 200 κιλά. Τα βάρη των τεσσάρων ανθρώπων είναι 190,170,110, και 90 κιλά. Πώς μπορούν όλοι να κατορθώσουν να διασχίσουν τον ποταμό και ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός διαδρομών;

56. Ένας αγρότης πρέπει να μεταφέρει μια αλεπού, μια χήνα, και μια τσάντα καλαμπόκι με μια βάρκα που χωράει μόνο αυτόν και ένα από αυτά τα τρία στοιχεία. Δεν θέλει να αφήσει την αλεπού μόνη με τη χήνα ούτε τη χήνα μόνη με το καλαμπόκι. Πώς μπορεί να μεταφέρει όλα αυτά τα στοιχεία;

57. Τρεις κυκλικοί δίσκοι από χαρτόνι γράφουν αριθμούς στις μπροστινές και στις πίσω πλευρές τους. Οι αριθμοί των μπροστινών πλευρών είναι:



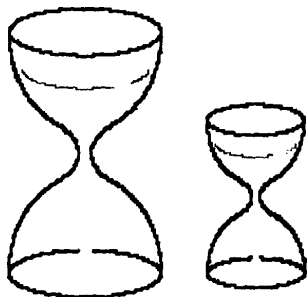
Με τη ρίψη και των τριών δίσκων και την πρόσθεση των αριθμών που φαίνονται στις πάνω πλευρές, μπορούμε να λάβουμε αυτά τα σύνολα: 15,16,17,18,19,20,21 και 22. Ποιοι αριθμοί γράφονται στις πίσω πλευρές αυτών των δίσκων;

58. Με την κίνηση των παρακείμενων δίσκων δύο κάθε φορά, μπορείτε να αλλάξετε τη ρύθμιση των μεγάλων και μικρών δίσκων που παρουσιάζονται πιο κάτω σε μια ρύθμιση στην οποία 3 μεγάλοι δίσκοι βρίσκονται δίπλα-δίπλα από τους 3 μικρούς δίσκους.

Περιγράψτε τα βήματα.

A δ B ε Γ ζ

59. Πώς μπορεί ένας αρχιμάγειρας να χρησιμοποιήσει μια 11λεπτη και μια 7λεπτη κλεψύδρα για να χρονομετρήσει τα λαχανικά που πρέπει να βράσουν στον ατμό για 15 λεπτά;



60. Ο υπεύθυνος ασφαλείας μιας έκθεσης τέχνης θέλει να τοποθετήσει τους φρουρούς κατά μήκος των τεσσάρων τοίχων μιας μεγάλης αίθουσας συνεδριάσεων, έτσι ώστε κάθε τοίχος να έχει τον ίδιο αριθμό φρουρών. Όποιος



φρουρός τοποθετείται σε μια γωνία μπορεί να προσέξει τους δύο παρακείμενους τοίχους αλλά κάθε ένας από τους άλλους φρουρούς μπορεί να προσέξει μόνο τον τοίχο στον οποίο τοποθετείται.

α. Σχεδιάστε ένα σκίτσο για να επιδείξετε πώς αυτό μπορεί να γίνει με 6 φρουρούς.

β. Δείξτε πώς αυτό μπορεί να γίνει για κάθε έναν από τους ακόλουθους αριθμούς φρουρών: 7, 8, 9, 10, 11 και 12.

γ. Απαριθμήστε όλους τους αριθμούς λιγότερο από 100 που είναι λύσεις σε αυτό το πρόβλημα.

61. Οι ερωτήσεις τεχνάσματος όπως οι ακόλουθες είναι διασκεδαστικές και μπορούν να βοηθήσουν να βελτιώσετε τη δυνατότητα επίλυσης προβλήματος επειδή απαιτούν από κάποιον να ακούει και να σκέφτεται προσεκτικά σχετικά με τις πληροφορίες και την ερώτηση.

α. Πάρτε 2 μήλα από 3 μήλα, τι έχετε;

β. Ένας αγρότης είχε 17 πρόβατα και πέθαναν όλα εκτός από 9. Πόσα πρόβατα του μείνανε;

γ. Έχω δύο νομίσματα που συμπληρώνουν συνολικά 30 λεπτά. Ένα δεν είναι 10λεπτο. Ποια είναι τα δύο νομίσματα;

δ. Ένα μπουκάλι αναψυκτικό κοστίζει 86 λεπτά. Το αναψυκτικό κοστίζει 60 λεπτά περισσότερο από το μπουκάλι. Πόσο κοστίζει το μπουκάλι;

ε. Πόσο νερό υπάρχει σε μια δεξαμενή με μήκος 3 μέτρα, πλάτος 2 μέτρα και βάθος 2 μέτρα;

στ. Μια κότα ζυγίζει 3 κιλά συν το μισό της βάρος. Πόσο ζυγίζει;

ζ. Υπάρχουν εννέα αδελφοί σε μια οικογένεια και κάθε αδελφός έχει μια αδελφή. Πόσα παιδιά είναι στην οικογένεια;



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ball, D.L. (1996). Teacher learning and the mathematics reforms: What we think we know and what we need to learn. *Phi Delta Kappan*, 77(7), 500-508.
- Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to the other subjects--state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.
- Buchanan, N. K. (1987). Factors contributing to mathematical problem-solving performance: An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 399- 415.
- Foong, P.Y. (1990). *A metacognitive-heuristic approach to mathematical problem solving*. Unpublished doctoral dissertation. Monash University. Australia.
- Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(3), 163-180.
- Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 1-15).
- Lester, F. K. (1980). Research in mathematical problem solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 286-323). Reston, VA: NCTM.
- McLeod, D. B. (1988). Research on learning and instruction in mathematics: The role of affect. In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 60-89). Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research, University of Wisconsin.
- Mervis, D. (1978). Problem solving and the child. *School Science and Mathematics*, 78, 270-272.
- MOE (2000), *Revised syllabus for primary mathematics*. Curriculum Planning and Development Division. Ministry of Education. Singapore.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics in the 1980s*. Reston, VA: The Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.



- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.
- Ohio Department of Education. (1980). *Becoming a better problem solver 1 & 2*. Columbus: Ohio Department of Education.
- Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press. (Originally copyrighted in 1945).
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Students' beliefs about mathematics and their effects on mathematical performance: A questionnaire analysis*. Paper presented at the 69th Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.
- Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well taught" mathematics classes. *Educational Psychologist*, 23, 145-166.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-368). New York, NY: Macmillan.
- Suydam, M. (1987). Indications from research on problem solving. In F. R. Curcio (Ed.), *Teaching and learning: A problem solving focus*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Thompson, A.G. (1989). Learning to teach mathematical problem solving: Changes in teachers' conceptions and beliefs. In R.I. Charles & E.A. Silver (Eds.) *Research agenda for mathematics education: Vol. 3. The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 232-243). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, & Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

