ΧΡΗΣΤΟΥ ΠΕΡΔΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΚΥΜΑΤΑ

ΓΙΑΝΝΕΝΑ 2007

ΧΡΗΣΤΟΥ ΠΕΡΔΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ
ΚΑΙ ΚΥΜΑΤΑ

ΓΙΑΝΝΕΝΑ 2007

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Barker, J.R., Mechanical and Electrical Vibrations, Methuen Monograph, London, 1964.
2. Bishop, R.E.D., Vibration, Cambridge University Press, New York, 1965.
3. Bland, D. R., Vibrating Springs, Library of Mathematics Series, Routledge and Kegan Paul, London, 1960.
4. Coulson, C.A., Waves, Oliver and Boyd, Edinburg, 1941.
5. Crawford, F.S., Waves, McGraw-Hill, New York, 1968.
6. Den Hartog, J. P., Mechanical Vibrations, McGraw-Hill, New York, 1956.
7. Feather, N., Vibrations and Waves, Edinburg University Press, Edinburg, 1961.
8. French, A. P., Vibrations and Waves, Van Nostrand Reinhold (UK), 1984.
9. Lindsay, R. B., Mechanical Radiation, McGraw-Hill, New York, 1960.
10. Magnus, K., Vibrations, Blackie, London, 1965.
11. McLachlan, N., W., Theory of Vibrations, Dover, New York, 1951.
12. Pain. H. J., The Physics of Vibrations and Waves, John Wiley and Sons Ltd, London, 1968.
13. Sharman, R., V., Vibrations and Waves, Butterworth and Co. Ltd, 1963.

1

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΕΝΑ ΒΑΘΜΟ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι Μηχανικές Ταλαντώσεις είναι ένας από τους σπουδαιότερους κλάδους της Φυσικής. Κάθε μηχανικό σύστημα μπορεί να ταλαντώνεται και τα περισσότερα μπορούν να ταλαντώνονται ελεύθερα κατά πολλούς τρόπους. Μερικά κοινά παραδείγματα μηχανικών ταλαντώσεων είναι τα ακόλουθα. Η ταλάντωση των φτερών των εντόμων, η ταλάντωση του απλού μαθηματικού εκκρεμούς, η ταλάντωση ενός σώματος που βρίσκεται πάνω σε μια ελαστική δοκό στερεωμένη στο ένα άκρο και η ταλάντωση ενός σώματος που κρέμεται από ένα ελατήριο στερεωμένο στο άλλο άκρο. Το ανθρώπινο σώμα είναι ένα θησαυροφυλάκιο ταλαντώσεων και, όπως χαρακτηριστικά έχει γράψει ο R. Bishop, "Η καρδιά μας κτυπά, οι πνεύμονές μας ταλαντώνονται, τρέμουμε όταν κρυώνουμε, κάποτε ροχαλίζουμε, μπορούμε να ακούμε και να μιλάμε επειδή τα τύμπανα των αυτιών μας και ο λάρυγγάς μας ταλαντώνονται. Κινούμαστε ταλαντώνοντας τα πόδια. Δεν μπορούμε να προφέρουμε κανονικά τη λέξη "ταλάντωση", αν η άκρη της γλώσσας δεν ταλαντωθεί. Ακόμη τα άτομα από τα οποία αποτελούμαστε ταλαντώνονται".

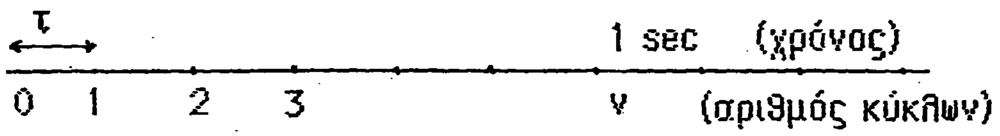
Το κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών των φαινομένων είναι η **περιοδικότητα**. Μια κίνηση λέγεται **περιοδική**, όταν επαναλαμβάνεται κατά τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα. Ακριβέστερα, μια κίνηση λέγεται περιοδική, όταν το κινητό διέρχεται με την ίδια διανυσματική ταχύτητα από το ίδιο σημείο της τροχιάς του μετά πάροδο ορισμένου και σταθερού χρόνου. **Μηχανική ταλάντωση ή απλώς ταλάντωση** λέγεται κάθε περιοδική κίνηση που γίνεται παλινδρομικά γύρω από μια θέση ισσορροπίας. Ακριβέστερα, μηχανική ταλάντωση λέγεται κάθε περιοδική κίνηση κατά την οποία το κινητό διέρχεται από το ίδιο σημείο της τροχιάς του δυο φορές κινούμενο αντίθετα εντός ορισμένου και σταθερού χρόνου. **Γραμμική ταλάντωση** λέγεται η ταλάντωση που λαμβάνει χώρα πάνω σε μια ευθεία γραμμή. **Απλή (γραμμική) αρμονική ταλάντωση** λέγεται κάθε γραμμική ταλάντωση κατά την οποία η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του ή από ένα σταθερό σημείο είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου. Ακριβέστερα, απλή αρμονική ταλάντωση λέγεται κάθε γραμμική ταλάντωση κατά την οποία η επιτάχυνση του σώματος ή η δύναμη που ενεργεί στο σώμα είναι ανάλογη προς την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας και κατευθύνεται προς τη θέση αυτή, δηλαδή η επιτάχυνση ή η δύναμη κατευθύνεται αντίθετα προς την απομάκρυνση. Από τον ορισμό της απλής αρμονικής ταλάντωσης συνεπάγεται ότι η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας μεταβάλλεται με το sin ή το cos μιας γωνίας, η οποία είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου. **Περίοδος** τ μιας ταλάντωσης λέγεται ο ελάχιστος χρόνος που παρέρχεται, πριν η κίνηση αρχίσει να επαναλαμβάνεται. **Ένας κύκλος** (ή **μια ταλάντωση**) είναι η κίνηση που συμπληρώνεται σε χρόνο μιας περιόδου και είναι αδιάστατος αριθμός. Έτσι η περίοδος μπορεί να ορισθεί ως ο χρόνος εντός του οποίου εκτελείται ένας κύκλος ή μια ταλάντωση. **Συχνότητα** ν μιας ταλάντωσης λέγεται το πηλίκο του αριθμού N των κύκλων (ταλαντώσεων) που εκτελεί το κινητό σε ορισμένο χρόνο t δια του χρόνου αυτού

$$\nu = \frac{N}{t} .$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η συχνότητα μιας ταλάντωσης εκφράζει τον αριθμό των κύκλων ανά μονάδα χρόνου. Η συχνότητα έχει διαστάσεις αντιστρόφου χρόνου (T^{-1}) και η μονάδα συχνότητας είναι 1 κύκλος Sec^{-1} ή 1Hertz. Η σχέση μεταξύ περιόδου τ και συχνότητας ν προκύπτει από την εξίσωση $\nu=N/t$, αν θέσουμε $N=1$ και $t=\tau$. Έτσι παίρνουμε

$$\nu = \frac{1}{\tau} .$$

Σύμφωνα με όσο ελέχθησαν προηγουμένως για την περίοδο, τη συχνότητα και τον κύκλο, θα μπορούσαμε να έχουμε την εικόνα του σχ. 1



Σχ. 1

Πλάτος μιας ταλάντωσης είναι η μεγίστη μετατόπιση του σώματος, γραμμική ή γωνιακή, από τη θέση ισορροπίας.

Οι μηχανικές ταλαντώσεις ταξινομούνται σε δυο μεγάλες κατηγορίες. Τις ελεύθερες ή φυσικές και τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Τόσο οι ελεύθερες όσο και οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις διαιρούνται σε δυο κατηγορίες. Τις μη αποσβεννυμένες και τις αποσβεννυμένες ταλαντώσεις. Ελεύθερες ταλαντώσεις λέγονται οι μηχανικές ταλαντώσεις που παράγονται και διατηρούνται από βαρυτικές ή και ελαστικές δυνάμεις. Από τη στιγμή που άρχισε μια ελεύθερη ταλάντωση ενός μηχανικού συστήματος, αυτό θα συνεχίσει να ταλαντώνεται με την ίδια συχνότητα. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις λέγονται οι μηχανικές ταλαντώσεις που παράγονται και διατηρούνται από μια εξωτερική δύναμη διέγερσης, η οποία είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου. Ελεύθερες μη αποσβεννυμένες ταλαντώσεις λέγονται οι ελεύθερες ταλαντώσεις κατά τις οποίες δεν λαμβάνεται υπόψη η τριβή ή η αντίσταση ενός ρευστού οποιασδήποτε μορφής. Ελεύθερες αποσβεννυμένες ταλαντώσεις λέγονται οι ελεύθερες ταλαντώσεις κατά τις οποίες λαμβάνεται υπόψη η τριβή ή η αντίσταση του ρευστού. Εδώ θα πρέπει να τονίσουμε ότι σε κάθε πραγματικό μηχανικό σύστημα θα υπάρχει πάντα απόσβεση και ότι η περίπτωση που το σύστημα θεωρείται χωρίς απόσβεση είναι μια ιδανική περίπτωση. Εξαναγκασμένες μη αποσβεννυμένες ταλαντώσεις λέγονται οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις κατά τις οποίες η τριβή ή η αντίσταση του ρευστού θεωρείται αμελητέα. Εξαναγκασμένες αποσβεννυμένες ταλαντώσεις λέγονται οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις κατά τις οποίες λαμβάνεται υπόψη η τριβή ή η αντίσταση του ρευστού.

Στις ελεύθερες μη αποσβεννυμένες ταλαντώσεις, η συνισταμένη δύναμη που ενεργεί στο μηχανικό σύστημα είναι συντηρητική. Αυτό συνεπάγεται ότι η μηχανική ενέργεια του συστήματος θα παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης (T+V=σταθ.). Συνεπώς, το πλάτος της ελεύθερης μη αποσβεννυμένης ταλάντωσης θα παραμένει σταθερό.

Στις ελεύθερες αποσβεννυμένες ταλαντώσεις, θα υπάρχει και η τριβή ή η αντίσταση του ρευστού. Όπως γνωρίζουμε, τόσο η τριβή όσο και η αντίσταση του ρευστού δεν είναι συντηρητική. Αυτό σημαίνει ότι η συνισταμένη δύναμη που δρα στο μηχανικό σύστημα δεν είναι συντηρητική και συνεπώς η μηχανική ενέργεια δεν παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης. Άρα, το πλάτος της ελεύθερης αποσβεννυμένης ταλάντωσης θα μειώνεται συνεχώς μέχρι να μηδενισθεί.

1.2 Απλή αρμονική ταλάντωση

Η απλή αρμονική ταλάντωση (Α.Α.Τ.) είναι η απλούστερη μορφή περιοδικής κίνησης και έχει ορισθεί στην §1. Η ανάγκη για μια ουσιαστική μελέτη της Α.Α.Τ. έγκειται σε δυο λόγους. Ο πρώτος λόγος είναι ότι τέτοιες ταλαντώσεις εμφανίζονται σε πάρα πολλά μηχανικά συστήματα και ιδίαιτερα όταν οι μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας είναι μικρές. Ο δεύτερος λόγος προέρχεται από το θεώρημα του J. Fourier. Το θεώρημα αυτό λέει ότι οποιαδήποτε περιοδική διατάραξη περιόδου τ μπορεί να δημιουργηθεί (ή να αναλυθεί) από άπειρο πλήθος αρμονικών ταλαντώσεων με περίοδο τ, $\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{3}, \frac{\tau}{4}, \ldots$ και κατάλληλα πλάτη.

Θεωρούμε τη γραμμή ΟΡ του σχ. 2(α), που έχει μήκος R και περιστρέφεται γύρω από το σταθερό σημείο Ο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Έστω φ η γωνία ΡΟy. Θα μελετήσουμε την κίνηση της προβολής Q, του σημείου Ρ, στον άξονα Οy.
Υποθέτουμε ότι, για $t=0$, η γραμμή ΟΡ συμπίπτει με τον άξονα Οy δηλαδή $\varphi=0$. Επειδή η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή, θα ισχύει

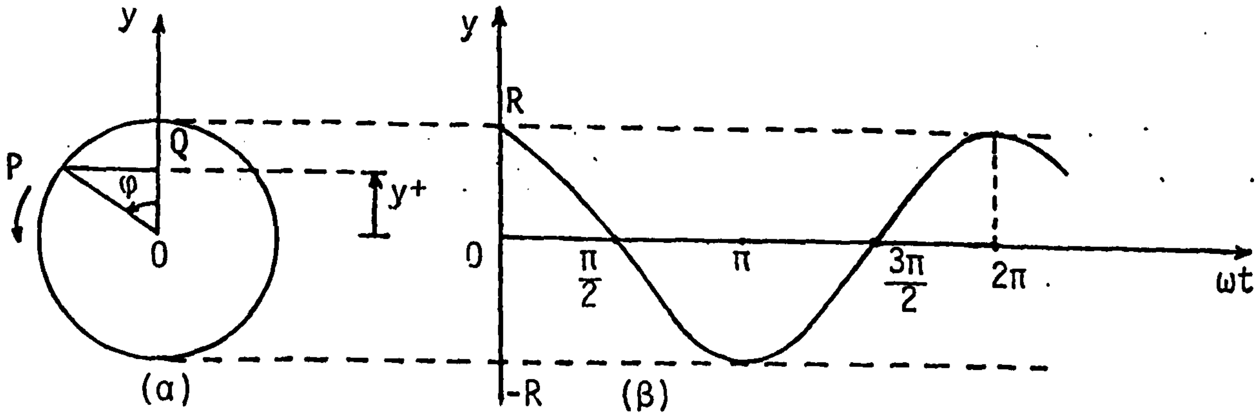
$$\dot{\varphi} = \omega = \text{σταθ.} ,$$

όπου η τελεία παριστάνει παραγώγιση ως προς το χρόνο και από την οποία προκύπτει η γωνία φ συναρτήσει του χρόνου

$$\varphi = \omega t .$$

Από το σχ. 2 φαίνεται ότι η απόσταση y του Q από το Ο είναι

$$y = R\cos\omega t \tag{1}$$



Σχ. 2

Η ταχύτητα του Q είναι

$$\dot{y} = -R\omega \sin\omega t = R\omega \cos(\omega t+\frac{\pi}{2}) , \qquad (2)$$

και η επιτάχυνση του Q είναι

$$\ddot{y} = - R\omega^2 \cos\omega t = R\omega^2 \cos(\omega t+\pi) . \qquad (3)$$

Οι γωνίες ωt, $\omega t+\pi/2$ και $\omega t+\pi$ στις σχέσεις (1), (2) και (3) αντίστοιχα λέγονται γωνίες φάσης. Οι τιμές των γωνιών αυτών, για $t=0$, λέγονται αρχικές γωνίες φάσης. Οι αρχικές γωνίες φάσης των (1), (2) και (3) είναι ο, $\frac{\pi}{2}$ και π. Η μετατόπιση y, η ταχύτητα $\dot{y}$ και η η επιτάχυνση $\ddot{y}$ του σημείου Q έχουν συνεπώς διαφορετικές γωνίες φάσης. Μεταξύ του y και $\dot{y}$ υπάρχει διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$, ενώ μεταξύ του y και $\ddot{y}$ υπάρχει διαφορά φάσης π.

Από τις εξισώσεις (1) και (3) παίρνουμε

$$\ddot{y} = -\omega^2 y ,$$

ή $\qquad\qquad\qquad\qquad$ (4)

$$\ddot{y}+\omega^2 y = 0 .$$

Η (4) δείχνει ότι η επιτάχυνση του Q είναι ανάλογη προς τη μετατόπιση του Q από το σταθερό σημείο O και κατευθύνεται προς το O. Συνεπώς, σύμφωνα με τον ορισμό, το σημείο Q εκτελεί Α.Α.Τ. και η (4) είναι η διαφορική εξίσωση της Α.Α.Τ.
Παρατηρούμε ότι, όταν η γραμμή OP έχει διαγράψει μια πλήρη περιστροφή 2π ακτινίων, το σημείο Q έχει συμπληρώσει έναν κύκλο, όπως φαίνεται στο σχ. 2(β). Επειδή όμως ο χρόνος που απαιτείται για να συμπληρωθεί ένας κύκλος είναι η περίοδος τ της ταλάντωσης του Q, έπεται ότι η περίοδος τ θα προκύψει από τη σχέση $\varphi=\omega\tau=2\pi$. Έτσι έχουμε

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} .$$

Η σχέση αυτή προκύπτει επίσης από το γεγονός ότι η συνάρτηση $\cos\omega t$ είναι περιοδική με περίοδο $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$.
Η συχνότητα της ταλάντωσης του Q είναι

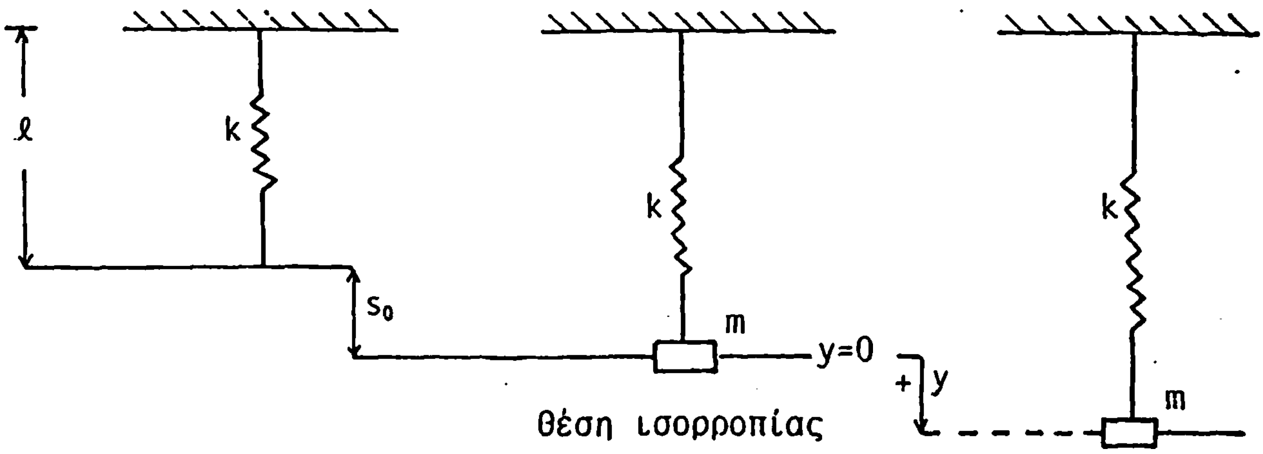
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} .$$

Επειδή η γωνιακή ταχύτητα ω συνδέεται με τη συχνότητα ν της ταλάντωσης, η γωνιακή ταχύτητα πολλές φορές λέγεται και κυκλική ή γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης.

Μπορεί να δειχθεί ότι η κίνηση την οποία εκτελεί η προβολή του P σε οποιονδήποτε άξονα, που διέρχεται από το σταθερό σημείο O, είναι επίσης Α.Α.Τ.

1.3 Ελεύθερες μη αποσβεννυμένες ταλαντώσεις

Παίρνουμε ένα ελατήριο που ανθίσταται σε θλιπτικές και εφελκυστικές δυνάμεις και το κρεμάμε κατακόρυφα από ένα σταθερό στήριγμα, σχ. 3. Στο κατώτερο άκρο του ελατηρίου θέτουμε σώμα με μάζα m . Υποθέτουμε ότι η μάζα m είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μπορούμε να παραλείψουμε τη μάζα του ελατηρίου σε σύγκριση με τη μάζα του σώματος. Αν μετατοπίσουμε λίγο το σώμα από τη θέση ισορροπίας και μετά το αφήσουμε ελεύθερο, το σώμα θα εκτελέσει μια κίνηση. Υποθέτουμε ότι η κίνηση γίνεται κατακόρυφα.



Σχ. 3

Ζητάμε να προσδιορίσουμε την κίνηση του συστήματος. Για το σκοπό αυτό εξετάζουμε τις δυνάμεις που δρουν πάνω στο σώμα κατά τη διάρκεια της κίνησης. Αυτό θα οδηγήσει σε μια διαφορική εξίσωση της οποίας η λύση θα δώσει τη μετατόπιση συναρτήσει του χρόνου. Εκλέγουμε την προς τα κάτω κατεύθυνση σαν θετική και θεωρούμε τις αλγεβρικές τιμές των δυνάμεων που δρουν προς τα κάτω σαν θετικές.

Το βάρος του σώματος έχει αλγεβρική τιμή

$$F_1 = mg \qquad (5)$$

όπου $g = 980 cmsec^{-2}$ η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Μια άλλη δύναμη που δρα πάνω στο σώμα είναι η δύναμη του ελατηρίου και εξασκείται από το ελατήριο, όταν αυτό υφίσταται επιμήκυνση ή σμίκρυνση. Αποδεικνύεται πειραματικά ότι για μικρή επιμήκυνση ή σμίκρυνση, το μέγεθος F αυτής της δύναμης είναι ανάλογο προς το μέγεθος της επιμήκυνσης ή σμίκρυνσης s του ελατηρίου, δηλαδή ισχύει ο νόμος του Hooke

$$F = ks \quad , \qquad (k>0) \,. \tag{6}$$

Η σταθερά της αναλογίας k λέγεται σταθερά ή σκληρότητα του ελατηρίου και εξαρτάται από το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένο το ελατήριο. Αν ℓ είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου, δηλαδή το μήκος που έχει το ελατήριο όταν δεν υπόκειται σε φορτίο, η (6) γράφεται

$$F = \frac{\lambda}{\ell}\, s \quad , \tag{6'}$$

όπου λ είναι το μέτρο ελαστικότητας του ελατηρίου, δηλαδή η δύναμη που παράγει μοναδιαία επιμήκυνση ή σμίκρυνση σε ελατήριο μοναδιαίου μήκους. Ο λόγος $\frac{\lambda}{\ell} = k$ είναι η σκληρότητα του ελατηρίου. Όπως φαίνεται από την (6), για δοσμένη δύναμη F, όσο πιο μικρό είναι το s τόσο πιο μεγάλο είναι το k, δηλαδή τόσο πιο σκληρό είναι το ελατήριο. Το k εξαρτάται από το φυσικό μήκος ℓ, επειδή μια μεταβολή στο ℓ θα μεταβάλλει το s αναλόγως, αν η F παραμένει αμετάβλητη. Συνεπώς το k είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το ℓ, όπως φαίνεται στην (6').

Η θέση που το σώμα ισορροπεί λέγεται θέση στατικής ισορροπίας. Προφανώς στη θέση στατικής ισορροπίας το ελατήριο είναι τεταμένο κατά ένα ποσό s_0 τέτοιο ώστε, η συνισταμένη της αντίστοιχης δύναμης του ελατηρίου και της δύναμης της βαρύτητας (5) να είναι μηδέν. Συνεπώς, η δύναμη του ελατηρίου δρα προς τα πάνω και το μέγεθός της ks_0 είναι ίσο με το μέγεθος της F_1, δηλαδή

$$ks_0 = mg \,. \tag{7}$$

Έστω $y=y(t)$ η μετατόπιση του σώματος από τη θέση στατικής ισορροπίας κατά τη χρονική στιγμή t, με τη θετική κατεύθυνση προς τα κάτω (Σχ. 3). Από το νόμο του Hooke έπεται ότι η δύναμη του ελατηρίου που αντιστοιχεί στη μετατόπιση y είναι

$$F_2 = -ks_0-ky \;, \tag{8}$$

δηλαδή, η συνισταμένη της δύναμης του ελατηρίου $-ks_0$, όταν το σώμα είναι στη θέση στατικής ισορροπίας και της επιπλέον δύναμης του ελατηρίου $-ky$ που δημιουργείται από τη μετατόπιση y. Το πρόσημο του τελευταίου όρου στην (8) είναι εκλεγμένο ορθά, διότι όταν το y είναι θετικό, το $-ky$ είναι αρνητικό, και σύμφωνα με την παρατήρηση που κάναμε προηγουμένως, παριστάνει μια δύναμη προς τα πάνω, ενώ για y αρνητικό, το $-ky$ είναι θετικό και παριστάνει μια δύναμη προς τα κάτω.

Η συνισταμένη των F_1 και F_2 είναι

$$F_1+F_2 = mg-ks_0-ky$$

και λόγω της (7)

$$F_1+F_2 = -ky \;. \tag{9}$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι πάνω στο σώμα δεν δρουν άλλες δυνάμεις εκτός από το βάρος και τη δύναμη του ελατηρίου, η διαφορική εξίσωση της κίνησης του σώματος θα προκύψει από το 2$^{\text{ο}}$ νόμο του Newton

$$m\ddot{y} = \Sigma F y = -ky \;.$$

Έτσι έχουμε

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} y . \qquad (10)$$

Αυτή η εξίσωση δείχνει ότι η επιτάχυνση του σώματος είναι ανάλογη προς τη μετατόπισή του από τη θέση ισορροπίας και κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας. Άρα το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Συγκρίνοντας τις (4) και (10) βλέπουμε ότι είναι ταυτόσημες, αν το $\frac{k}{m}$ αντικατασταθεί με το ω^2 ή το ω_0^2.
Ο δείκτης ο χρησιμοποιείται για τα ελεύθερα μη αποσβεννυμένα συστήματα. Συνεπώς η περίοδος της ελεύθερης μη αποσβεννυμένης ταλάντωσης είναι

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

και η συχνότητά της

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

Η συχνότητα της ελεύθερης μη αποσβεννυμένης ταλάντωσης πολλές φορές λέγεται και φυσική συχνότητα ή ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης.

Η (10) είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η γενική λύση είναι

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \,, \quad \text{όπου} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sigma\tau\alpha\vartheta. \qquad (11)$$

Οι ποσότητες Α και Β είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης και μπορούν να προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή από την αρχική μετατόπιση $y(o)$ και αρχική ταχύτητα $\dot{y}(o)$. Η (11) μπορεί να λάβει τη μορφή

$$y(t) = C\cos(\omega_0 t-\delta)\ . \qquad (12)$$

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

$$y(t) = A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega_0 t+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega_0 t\right)\ ,$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}(\cos\delta\cos\omega_0 t+\sin\delta\sin\omega_0 t)\ ,$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega_0 t-\delta)\ ,$$

$$= C\cos(\omega_0 t-\delta)\ ,$$

όπου η αρχική γωνία φάσης δ και το πλάτος C της ταλάντωσης δίνονται από τις σχέσεις

$$\cos\delta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\ ,\quad \sin\delta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\ ,\quad \tan\delta = \frac{B}{A}\ ,\quad 0\le\delta\le\pi\ ,$$

$$C = \sqrt{A^2+B^2}\ .$$

Οι αυθαίρετες σταθερές C και δ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Όσο μεγαλύτερο είναι το k , τόσο μεγαλύτερη είναι η ιδιοσυχνότητα που συμφωνεί με την παρατήρηση ότι όσο πιο σκληρό είναι το ελατήριο, τόσο πιο γρήγορα ταλαντώνεται το σώμα.

Οι εξισώσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του σώματος μπορούν να παραχθούν από την (12). Η ταχύτητα είναι

$$\dot{y} = -\omega_0 C\sin(\omega_0 t-\delta)\ ,$$

και το μέγεθος της μέγιστης ταχύτητας είναι

$$\dot{y}_{max} = \omega_0 C = \omega_0 \sqrt{A^2+B^2} \ .$$

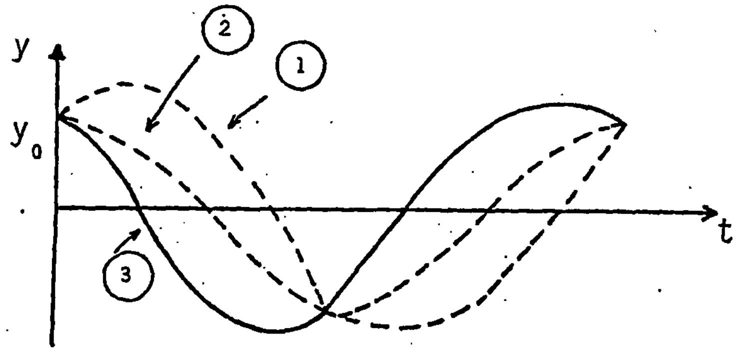
Όμοια, η επιτάχυνση είναι

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 C\cos(\omega_0 t - \delta) \ ,$$

και το μέγεθος της μέγιστης επιτάχυνσης είναι

$$\ddot{y}_{max} = \omega_0^2 C = \omega_0^2 \sqrt{A^2+B^2} \ .$$

Στο σχ. 4 φαίνονται τυπικές μορφές της (11), που αντιστοιχούν σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες.



Σχ. 4

(1) Για $t=0$, $y(0) = y_0 > 0$, $\dot{y}(0) > 0$

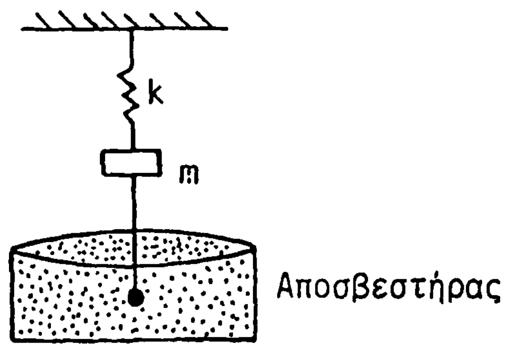
(2) Για $t=0$, $y(0) = y_0 > 0$, $\dot{y}(0) = 0$

(3) Για $t=0$, $y(0) = y_0 > 0$, $\dot{y}(0) < 0$

1.4 Ελεύθερες αποσβεννυμένες ταλαντώσεις

Ένα ταλαντούμενο σύστημα περιέχει απόσβεση, αν έχει στοιχεία που απομακρύνουν ενέργεια από το σύστημα. Ο πιο συνηθισμένος τύπος απόσβεσης είναι η ιξώδης απόσβεση, την οποία υφίστανται τα σώματα που κινούνται δια μέσου ρευστών με μικρές ταχύτητες. Αν λοιπόν συνδέσουμε το σώμα που κρέμεται από ένα ελατήριο με ένα αποσβεστήρα (σχ. 5), θα πρέπει να λάβουμε υπόψη την ιξώδη απόσβεση. Η δύναμη απόσβεσης έχει κατεύθυνση αντίθετη προς τη στιγμιαία κίνηση και είναι ανάλογη προς την ταχύτητα $\dot{y}$ του σώματος. Γενικά αυτό είναι μια καλή προσέγγιση, τουλάχιστο για μικρές ταχύτητες. Άρα η δύναμη απόσβεσης είναι της μορφής

$$F_3 = -c\dot{y} \qquad (13)$$



Σχ. 5

όπου c είναι η σταθερά απόσβεσης, που εξαρτάται από τη φύση του ρευστού και το σχήμα του σώματος που κινείται μέσα στο ρευστό. Θα δείξουμε ότι η σταθερά απόσβεσης c είναι θετική. Αν $\dot{y} > 0$, το σώμα κινείται προς τα κάτω και επειδή η δύναμη απόσβεσης έχει κατεύθυνση αντίθετη προς τη στιγμιαία κίνηση, πρέπει το $-c\dot{y}$ να είναι μια δύναμη προς τα πάνω, δηλαδή από τη συμφωνία που έχουμε κάνει, $-c\dot{y}<0$, που δίνει $c>0$. Για $\dot{y}<0$ το σώμα κινείται προς τα πάνω και το $-c\dot{y}$ πρέπει να είναι μια δύναμη προς τα κάτω, δηλαδή $-c\dot{y}>0$, που δίνει $c>0$. Η δύναμη (13) δεν είναι συντηρητική και συνεπώς δεν ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Φυσικό επακόλουθο αυτού είναι ότι οι ελεύθερες ταλαντώσεις με ιξώδη απόσβεση είναι μεταβατικές ταλαντώσεις που βαθμιαία φθίνουν σε πλάτος και τελικά εξαφανίζονται. Αν και θα μπορούσε να ισχυρισθεί κανείς ότι η μελέτη των ελεύθερων αποσβεννυμένων ταλαντώσεων έχει μικρό πρακτικό ενδιαφέρον, παρόλα αυτά παρέχει ένα επιθυμητό υπόβαθρο για τη μελέτη των εξαναγκασμένων αποσβεννυμένων ταλαντώσεων.

Η συνισταμένη των δυνάμεων που δρουν πάνω στο σώμα είναι

$$F_1+F_2+F_3=-ky-c\dot{y} \ . \tag{14}$$

Από το 2^{o} νόμο του Newton, έχουμε τη διαφορική εξίσωση της κίνησης

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=0 \ . \tag{15}$$

Η κίνηση του αποσβεννυμένου μηχανικού συστήματος διέπεται από την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (15). Η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2+\frac{c}{m}\lambda+\frac{k}{m}=0$$

της οποίας οι ρίζες είναι

$$\lambda_{1,2}=-\frac{c}{2m}\pm\frac{1}{2m}\sqrt{c^2-4km}$$

$$=-\alpha\pm\beta \ ,$$

όπου

$$\alpha=\frac{c}{2m}>0 \ , \ \beta=\frac{1}{2m}\sqrt{c^2-4km} \ , \tag{16}$$

και έτσι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι

$$\lambda_1 = -\alpha+\beta \quad , \qquad \lambda_2 = -\alpha-\beta \quad .$$

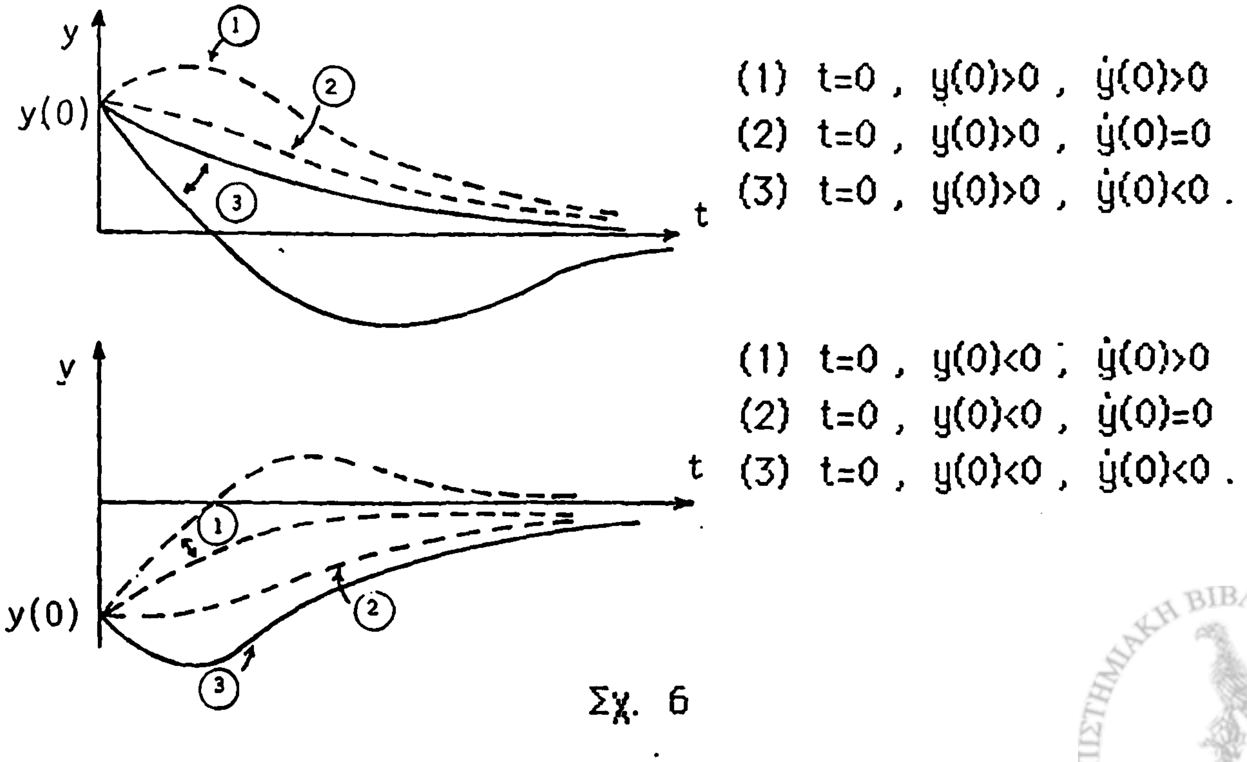
Η μορφή της λύσης της (15) θα εξαρτάται από το συντελεστή απόσβεσης c . Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

<u>1η περίπτωση</u>: $c^2>4km$, διακεκριμένες πραγματικές ρίζες λ_1,λ_2 . Μεγάλη απόσβεση ή υπεραπόσβεση.

Σε αυτή την περίπτωση η γενική λύση της (15) είναι

$$y(t) = c_1e^{-(\alpha-\beta)t}+c_2e^{-(\alpha+\beta)t} \quad , \qquad (17)$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Καθώς φαίνεται από το δεύτερο μέλος της (17), το σώμα δεν ταλαντώνεται. Για $t>0$ οι εκθέτες στην (17) είναι αρνητικοί, επειδή $\alpha>0$, $\beta>0$ και $\beta^2 = \alpha^2 - \frac{k}{m} < \alpha^2$ ήτοι $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)>0$ και επειδή $\alpha+\beta>0$ έπεται $\alpha-\beta>0$. Ήτοι, $-(\alpha-\beta)t<0$, $-(\alpha+\beta)t<0$. Καθώς το $t\to\infty$, τότε και οι δυο όροι στην (17) θα προσεγγίζουν προς το μηδέν. Στην πράξη, μετά από αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα, το σώμα θα ηρεμήσει στη θέση στατικής ισορροπίας $y=0$. Στο σχ. 6 φαίνονται τυπικές μορφές της (17), που αντιστοιχούν σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες.



Σχ. 6

<u>2η περίπτωση</u> : $c^2<4km$, μιγαδικές συζυγείς ρίζες λ_1,λ_2 . Μικρή απόσβεση ή υποαπόσβεση.

Σε αυτή την περίπτωση, το β στην (16), είναι γνησίως φανταστικό

$$\beta = i\omega^* \quad \text{όπου} \quad \omega^* = \frac{1}{2m}\sqrt{4km-c^2} > 0 \quad \text{και} \quad \omega^* \le \omega_o \ . \qquad (18)$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι

$$\lambda_1 = -\alpha+i\omega^* \ , \quad \lambda_2 = -\alpha-i\omega^* \ ,$$

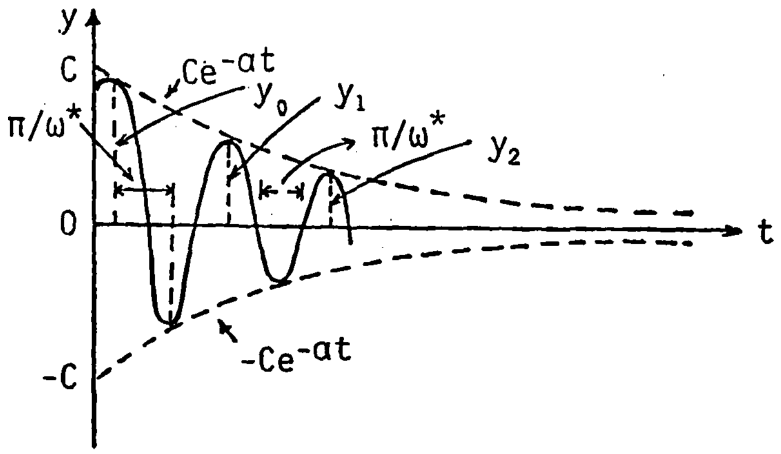
και η γενική λύση της (15) δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega^* t+B\sin\omega^* t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t-\delta) \ , \qquad (19)$$

όπου οι αυθαίρετες σταθερές A και B ή C και δ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες και όπου

$$C = \sqrt{A^2+B^2} \ , \quad \tan\delta = \frac{B}{A} \ , \quad \text{όπως στην (12)} \ .$$

Ο όρος $Ce^{-\alpha t}$ λέγεται πλάτος της ταλάντωσης. Βλέπουμε ότι το πλάτος φθίνει εκθετικά με το χρόνο, επειδή $\alpha>0$. Η λύση αυτή παριστάνει ελεύθερες αποσβεννυμένες ταλαντώσεις, όπως φαίνεται στο σχ. 7 . Καθώς $t\to\infty$, το $y\to 0$. Στην πράξη, το σώμα θα ηρεμήσει στη θέση ισορροπίας $y=0$, μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα. Επειδή το $\cos(\omega^* t-\delta)$ μεταβάλλεται στο διάστημα $[-1,1]$, η καμπύλη της λύσης κείται μεταξύ των καμπυλών $y = Ce^{-\alpha t}$ και $y = -Ce^{-\alpha t}$.



Σχ. 7

Οι τιμές του χρόνου t που δίνουν σχετικές στάσιμες τιμές (σχετικά ακρότατα) στην $y = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t-\delta)$ δίνονται από τη σχέση $\dot{y}=0$, από την οποία προκύπτει

$$\tan(\omega^* t-\delta) = -\frac{\alpha}{\omega^*} .$$

'Αρα, διαδοχικές τιμές του $\omega^* t$ που δίνουν σχετικές στάσιμες τιμές στην $y = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t-\delta)$ διαφέρουν κατά π και συνεπώς διαδοχικές τιμές του χρόνου t που δίνουν σχετικές στάσιμες τιμές στην $y = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t-\delta)$ διαφέρουν κατά π/ω^*. Μπορεί επίσης να δειχθεί ότι η μετατόπιση y μηδενίζεται κάθε π/ω^* μονάδες χρόνου (σχ. 7). Για τους λόγους αυτούς, μπορούμε να πούμε ότι η περίοδος της "ταλάντωσης" είναι $\frac{2\pi}{\omega^*}$, αν και δεν πρόκειται ουσιαστικά για ταλάντωση, αφού η κίνηση δεν επαναλαμβάνεται ποτέ κατά τον ίδιο τρόπο (§1), όπως φαίνεται από το σχ. 7. Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\frac{\omega^*}{2\pi}$. Από την (18) βλέπουμε ότι όσο πιο μικρό είναι το c, τόσο πιο μεγάλο είναι το ω^* και συνεπώς τόσο πιο μεγάλη είναι η συχνότητα, δηλαδή τόσο πιο γρήγορη γίνεται η ταλάντωση. 'Οταν $c\to 0$, $\omega^* \to \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Εάν t_n και $t_{n+1} = t_n + \frac{\pi}{\omega^*}$ είναι δυο διαδοχικές τιμές του t που δίνουν στάσιμη τιμή στην $y = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t-\delta)$, ο λόγος των αντίστοιχων σχετικών ακροτάτων είναι

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{Ce^{-\alpha(t_n+\pi/\omega^*)}\cos[\omega^*(t_n+\pi/\omega^*)-\delta]}{Ce^{-\alpha t_n}\cos(\omega^* t_n-\delta)} = -e^{-\alpha\pi/\omega^*} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Το αρνητικό πρόσημο προκύπτει επειδή το σώμα είναι διαδοχικά σε ηρεμία σε αντίθετες πλευρές της αρχής 0. Αν t_n και $t_{n+1} = t_n+2\pi/\omega^* = t_n+\tau$ είναι δυο διαδοχικές τιμές του t για τις οποίες $\cos(\omega^* t-\delta) = 1$ (ή $\cos(\omega^* t-\delta) = -1$), όπου τ είναι η περίοδος $2\pi/\omega^*$, και y_n και y_{n+1} οι αντίστοιχες σχετικές διαδοχικές μέγιστες μετατοπίσεις (διαδοχικά μέγιστα πλάτη), θα έχουμε

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{e^{-\alpha t_n}}{e^{-\alpha(t_n+\tau)}} = e^{\alpha\tau} = e^{2\pi\alpha/\omega^*} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Ο λόγος αυτός λέγεται λόγος μείωσης του πλάτους.
Αν συμβολίσουμε με $y_0, y_1, y_2, \ldots$ τα διαδοχικά μέγιστα πλάτη, η προηγούμενη σχέση δίνει

$$\frac{y_0}{y_1} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \ldots \frac{y_n}{y_{n+1}} = e^{\alpha\tau}$$

$$\text{ή} \quad y_1 = y_0 e^{-\alpha\tau}, \; y_2 = y_1 e^{-\alpha\tau} = y_0 e^{-2\alpha\tau}, \ldots, y_n = y_0 e^{-n\alpha\tau}$$

$$\text{ή} \quad y_n = y_0 e^{-\alpha t}, \; \text{όπου } t = n\tau, \; (n = 1,2, \ldots).$$

Η ποσότητα

$$\Delta = \ell n_e \left(\frac{y_n}{y_{n+1}}\right) = \alpha\tau = 2\pi\alpha/\omega^*$$

είναι σταθερά και λέγεται λογαριθμική μείωση. Η λογαριθμική μείωση δηλώνει το ρυθμό με τον οποίο μειώνεται το πλάτος. Όταν το c αυξάνεται, το α αυξάνεται, το ω^* ελαττώνεται και συνεπώς η λογαριθμική μείωση αυξάνεται. Το γεγονός αυτό έχει μεγάλη σημασία στην τεχνική.

3η περίπτωση: $c^2 = 4km$, μια πραγματική διπλή ρίζα. Κρίσιμη απόσβεση.

Σε αυτή την περίπτωση, β=0, $\lambda_1=\lambda_2=-\alpha$ και η γενική λύση της (15) είναι

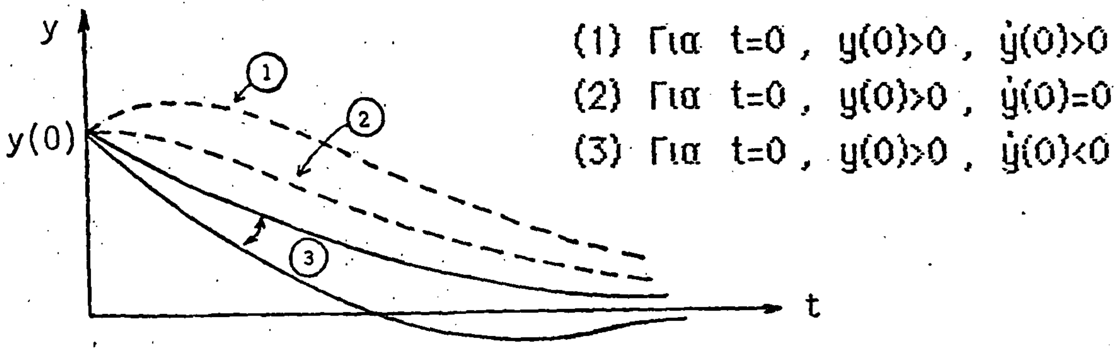
$$y(t) = (C_1 t + C_2)e^{-\alpha t}, \tag{20}$$

όπου οι σταθερές C_1 και C_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Η συμπεριφορά του συστήματος είναι πολύ όμοια με τη συμπεριφορά του στην περίπτωση της μεγάλης απόσβεσης. Καθώς το $t\to\infty$, το $y\to 0$. Πράγματι,

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{C_1 t}{e^{\alpha t}} + \lim_{t\to\infty}\frac{C_2}{e^{\alpha t}},$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{(C_1 t)'}{(e^{\alpha t})'} = \lim_{t\to\infty}\frac{C_1}{\alpha e^{\alpha t}} = 0 .$$

Στην πράξη, μετά από αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα, το σώμα θα ηρεμήσει στη θέση στατικής ισορροπίας y=0. Όπως φαίνεται από την (20), το σώμα δεν ταλαντώνεται. Επειδή η εκθετική συνάρτηση δεν είναι ποτέ μηδέν και το $C_1 t + C_2$ μπορεί να έχει το πολύ μια θετική ρίζα, έπεται ότι το σώμα μπορεί να περάσει το πολύ μια φορά από τη θέση ισορροπίας. Στο σχ. 8 φαίνονται τυπικές μορφές της (20), που αντιστοιχούν σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες.



Σχ. 8

1.5 Εξαναγκασμένες μη αποσβεννυμένες ταλαντώσεις

Όταν μια δύναμη που μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο t εφαρμόζεται σε ένα σώμα αναρτημένο σε ένα ελατήριο, θα προκύψει μια εξαναγκασμένη ταλάντωση του σώματος. Μια εξαναγκασμένη ταλάντωση ενός σώματος μπορεί επίσης να παραχθεί αν δώσουμε στο σώμα μια περιοδική κίνηση. Για παράδειγμα, αν ένα σώμα κρέμεται από ένα ελατήριο και το άλλο άκρο του ελατηρίου κινείται κατακόρυφα με μια περιοδική κίνηση, θα προκύψουν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις του σώματος. Η μεταβαλλόμενη δύναμη μεταβιβάζεται στο σώμα μέσω του ελατηρίου.

Ένα σώμα που υπόκειται σε περιοδική δύναμη και αυθαίρετες αρχικές συνθήκες θα συνδυάζει ελεύθερες και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις στην αρχή της κίνησης. Όμως, σε όλες τις πρακτικές περιπτώσεις, οι δυνάμεις απόσβεσης που πάντα υπάρχουν θα εξαλείψουν, μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα, τις ελεύθερες ταλαντώσεις (συχνά καλούμενες μεταβατικές) και η παραμένουσα ταλάντωση λέγεται ταλάντωση σταθερής κατάστασης.

Γνωρίζουμε ότι η (15) προέκυψε από την εξέταση των δυνάμεων που δρουν πάνω στο σώμα και με την εφαρμογή του 2ου νόμου του Newton. Είναι λοιπόν φανερό ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης που αντιστοιχεί στην παρούσα κατάσταση θα προκύψει από την (15) με την προσθήκη της εφαρμοσμένης περιοδικής δύναμης, έστω $r(t)$. Έτσι έχουμε

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = r(t) \ . \tag{21}$$

Η προκύπτουσα κίνηση λέγεται εξαναγκασμένη κίνηση, σε αντίθεση με την ελεύθερη κίνηση, η οποία είναι μια κίνηση κατά την απουσία μιας εξωτερικής δύναμης $r(t)$. Ιδιαιτέρου ενδιαφέροντος είναι οι περιοδικές δυνάμεις της μορφής

$$r(t) = F_0 \cos wt, \ (F_0, w > 0, \ \text{όπου } F_0 = \text{πλάτος}$$
$$\text{και } \frac{w}{2\pi} = \text{συχνότητα της δύναμης } r(t)) \ .$$

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \cos wt \ . \tag{22}$$

Θα προσδιορίσουμε και θα συζητήσουμε τη γενική λύση της (22). Επειδή η γενική λύση της ομογενούς της (22) είναι ήδη γνωστή, πρέπει να προσδιορίσουμε μια μερική της λύση $y_p(t)$. Αυτό μπορεί να γίνει με τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών. Θέτουμε στην (22)

$$y_p(t) = a \cos wt + b \sin wt \ , \tag{23}$$

και προσδιορίζουμε τις σταθερές a και b. Μετά από πράξεις παίρνουμε

$$[(k-mw^2)a+wcb]\cos wt + [-wca+(k-mw^2)b]\sin wt = F_0 \cos wt \ .$$

Η σχέση αυτή πρέπει να είναι ταυτότητα και συνεπώς οι συντελεστές του $\cos\omega t$ και $\sin\omega t$ πρέπει να είναι ίσοι με το μηδέν. Από το μηδενισμό προκύπτουν οι σχέσεις

$$a = F_0 \frac{m(\omega_0^2-\omega^2)}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}, \quad b = F_0 \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}, \qquad (24)$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ και ο παρονομαστής είναι $\neq 0$.
Η γενική λύση της (22) είναι

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) , \qquad (25)$$

όπου $y_h(t)$ η γενική λύση της ομογενούς της (21) και $y_p(t)$ δίνεται από την (23) μέσω της (24).
Θα συζητήσουμε τώρα τη συμπεριφορά του μηχανικού συστήματος, στην ιδανική περίπτωση που δεν υπάρχει απόσβεση ($c=0$). Τότε, από τις (23) και (24) παίρνουμε

$$y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t = \frac{F_0}{k[1-(\omega/\omega_0)^2]}\cos\omega t . \qquad (26)$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης της κίνησης: $\ddot{y}+\omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$ είναι

$$y(t) = C\cos(\omega_0 t-\delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t . \qquad (27)$$

Παρατηρούμε ότι η γενική λύση $y(t)$ παριστάνει την υπέρθεση (σύνθεση) των αρμονικών ταλαντώσεων $C\cos(\omega_0 t-\delta)$ και $\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t$, με συχνότητες αντίστοιχα $\omega_0/2\pi$ (συχνότητα της ελεύθερης μη αποσβεννυμένης κίνησης) και $w/2\pi$ (συχνότητα της εξωτερικής δύναμης $r(t)$. Η (27) δεν παριστάνει Α.Α.Τ. Στην περίπτωση κατά την οποία $w = \lambda w_0$, (λ=2,3,...), η (27) παριστάνει περιοδική κίνηση. Όπως έχουμε τονίσει, η παρουσία δυνάμεων απόσβεσης σε κάθε πραγματικό μηχανικό σύστημα είναι αναπόφευκτη. Η ύπαρξη των δυνάμεων αυτών έχει ως αποτέλεσμα τη βαθμιαία εξαφάνιση των ελευθέρων ταλαντώσεων. Έτσι, μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα, μπορούμε να πούμε ότι η γενική λύση της ομογενούς (που εκφράζει τις ελεύθερες ταλαντώσεις) θα έχει μηδενισθεί και η μόνη κίνηση θα είναι η εξαναγκασμένη ταλάντωση (που εκφράζεται με τη μερική λύση y_p), η οποία θα συνεχίζεται αμείωτη με συχνότητα $w/2\pi$. Όταν επιτευχθεί αυτή η συνθήκη, λέμε ότι έχουμε τη λύση σταθερής κατάστασης, η οποία εκφράζεται με τη μερική λύση y_p. Άρα, μετά από αρκετά μεγάλο χρόνο, θα υπάρχει μόνο η λύση σταθερής κατάστασης y_p, της οποίας το μέγιστο πλάτος είναι

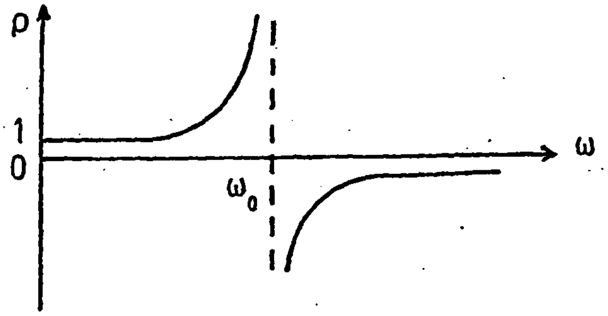
$$a_0 = \frac{F_0}{k}\rho \quad \text{όπου} \quad \rho = \frac{1}{1-(w/w_0)^2} . \tag{28}$$

Το πλάτος a_0 εξαρτάται από το w και w_0. Καθώς $w \to w_0$ από τα αριστερά, $\rho \to \infty$ και $a_0 \to \infty$. Αυτό το φαινόμενο της διέγερσης μεγάλων ταλαντώσεων, όταν η συχνότητα της $r(t)$ εξισώνεται με τη συχνότητα της ελεύθερης μη αποσβεννυμένης ταλάντωσης, είναι γνωστό ως συντονισμός και είναι βασικής σπουδαιότητας για τη μελέτη των ταλαντουμένων συστημάτων. Η ποσότητα ρ λέγεται συντελεστής συντονισμού. Η μεταβολή του συντελεστή συντονισμού συναρτήσει του w φαίνεται στο σχ. 9.

Από την (28) βλέπουμε ότι το ρ/k είναι ο λόγος των πλατών της y_p και της $r(t)$.

Στην περίπτωση του συντονισμού ($w = w_0$), η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t \quad . \tag{29}$$



Σχ. 9

Επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς της (29) έχει τη ρίζα $i\omega_0$ με πολλαπλότητα 1, μια μερική λύση y_p της (29) είναι της μορφής

$$y_p(t) = t(a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t) \quad .$$

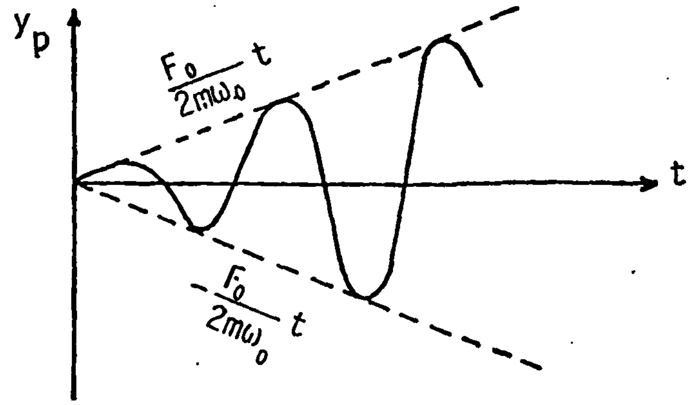
Αντικαθιστώντας αυτή στην (29) παίρνουμε $a=0$, $b=F_0/2m\omega_0$ και συνεπώς η μερική λύση y_p είναι

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0}\, t\sin\omega_0 t \quad . \tag{30}$$

Η γραφική παράσταση της μεταβολής της y_p συναρτήσει του χρόνου φαίνεται στο σχ. 10.

Ένας άλλος ενδιαφέρων και μεγάλης σπουδαιότητας τύπος ταλάντωσης λαμβάνεται, όταν το ω είναι πλησίον προς το ω_0 ($\omega \cong \omega_0$). Έστω, π.χ. η λύση, που λαμβάνεται από την (27) και αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, από τις οποίες $\delta=0$, $C = -F_0 / m(\omega_0^2-\omega^2)$, οπότε

$$y_1(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos\omega t-\cos\omega_0 t) \quad , \quad \omega\neq\omega_0 \; . \qquad (31)$$



Σχ. 10

Η λύση (31) παριστάνει τη σύνθεση δυο αρμονικών ταλαντώσεων με ίσα πλάτη και σχεδόν ίσες συχνότητες. Η (31) γράφεται

$$y_1(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin(\frac{\omega_0-\omega}{2}t)\sin(\frac{\omega_0+\omega}{2}t) \; . \qquad (31)_1$$

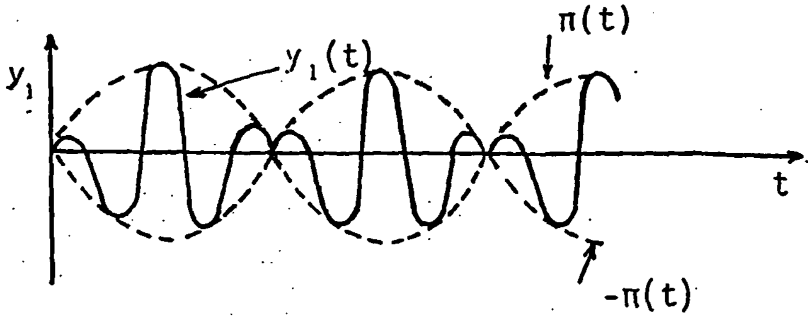
Η γραφική παράσταση της μεταβολής του y_1 συναρτήσει του χρόνου φαίνεται στο σχ. 11. Οι διακεκομμένες καμπύλες $y_1(t) = \pm\frac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin(\frac{\omega_0-\omega}{2}t)$ λαμβάνονται θέτοντας στην $(31)_1$ $\sin(\frac{\omega_0+\omega}{2}t) = \pm 1$ και αποτελούν την περιβάλλουσα της λύσης $(31)_1$.

Επειδή ισχύει $|\omega_0-\omega| \ll \omega_0+\omega$, ο όρος $\sin(\frac{\omega_0-\omega}{2}t)$ στην $(31)_1$ μεταβάλλεται πολύ αργά με το t, σε σύγκριση με τον όρο $\sin(\frac{\omega_0+\omega}{2}t)$. Για το λόγο αυτό, μπορούμε να θεωρήσουμε το

$\pi(t) = \dfrac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \sin(\dfrac{\omega_0-\omega}{2} t)$ ως το πλάτος της λύσης $y_1(t)$. Άρα, το πλάτος $\pi(t)$ της λύσης μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με το χρόνο και κυμαίνεται μεταξύ του μηδενός και του $\dfrac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$. Η λύση $(31)_1$ είναι, καθώς φαίνεται από το σχ. 11, περιοδική με συχνότητα σχεδόν ίση με τις συχνότητες των συνιστωσών ταλαντώσεων (γιατί $\dfrac{\omega_0+\omega}{2} \cong \omega_0 \cong \omega$) και λέγεται διακρότημα. Το διακρότημα είναι πρακτικής σπουδαιότητας στις τηλεπικοινωνίες και στην ηλεκτρονική και έχει φυσική έννοια μόνο αν $|\omega_0-\omega| \ll \omega_0+\omega$.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι α) Το φαινόμενο του διακροτήματος παρουσιάζεται και στην περίπτωση που οι δυο Α.Α.Τ δεν έχουν το ίδιο πλάτος. Θεωρούμε ότι οι δυο Α.Α.Τ έχουν το ίδιο πλάτος μόνο για διευκόλυνση στη Μαθηματική Ανάλυση β) ένας κύκλος του διακροτήματος περιλαμβάνει πολλούς κύκλους των συνιστωσών Α.Α.Τ γ) από το Σχ. 11 συμπεραίνουμε ότι η περίοδος του διακροτήματος είναι το μισό της περιόδου του πλάτους. Η περίοδος του πλάτους είναι $\dfrac{4\pi}{|\omega_0-\omega|}$ και συνεπώς η περίοδος του διακροτήματος είναι

$$\tau_{\delta\iota\alpha\kappa\rho} = \frac{2\pi}{|\omega_0-\omega|}$$



Σχ. 11

1.6 Εξαναγκασμένες αποσβεννυμένες ταλαντώσεις

Αν υπάρχει απόσβεση $c(>0)$, γνωρίζουμε από την §1 ότι η γενική λύση της ομογενούς της (22) προσεγγίζει προς το μηδέν καθώς το $t\to\infty$. Έστω ότι βρισκόμαστε στην περίπτωση της μικρής απόσβεσης, οπότε η γενική λύση της ομογενούς της (22) είναι της μορφής (19). Τότε η γενική λύση της (22) είναι

$$y(t) = F_0 \frac{m(\omega_0^2-\omega^2)}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}\cos\omega t + F_0 \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}\sin\omega t + \qquad (32)$$

$$+ Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t - \delta)$$

Από την (32) βλέπουμε ότι ο τρίτος όρος του δεξιού μέλους τείνει στον μηδέν καθώς το $t\to\infty$ και συνεπώς μετά από αρκετά μεγάλο χρόνο η λύση εξαρτάται μόνο από τους δυο πρώτους όρους. Επειδή οι αρχικές συνθήκες εισέρχονται στη λύση μόνο μέσω των C και δ, έπεται ότι η λύση μετά από αρκετά μεγάλο χρόνο δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Ο όρος $Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t-\delta)$ αντιπροσωπεύει παροδικά (ή μεταβατικά) φαινόμενα και λέγεται παροδικός (ή μεταβατικός) όρος ή μεταβατική λύση. Η μερική λύση

$$y_p(t) = F_0 \frac{m(\omega_0^2-\omega^2)}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}\cos\omega t + F_0 \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}\sin\omega t \;, \qquad (33)$$

που είναι η οριακή λύση μετά από αρκετά μεγάλο χρόνο, λέγεται λύση σταθερής κατάστασης. Παρατηρούμε ότι η λύση σταθερής κατάστασης είναι μια αρμονική ταλάντωση σταθερού πλάτους, η οποία δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Άρα, μετά από αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα, η λύση που αντιστοιχεί στη δύναμη $F_0\cos\omega t$ θα είναι πρακτικά μια αρμονική ταλάντωση y_p της οποίας η συχνότητα είναι εκείνη της $F_0\cos\omega t$. Αυτό συμβαίνει στην πράξη, επειδή κανένα μηχανικό σύστημα δεν είναι πλήρως μη αποσβεννυμένο.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, εκείνο που ενδιαφέρει στην πράξη είναι η λύση σταθερής κατάστασης (33), η οποία μπορεί να γραφεί

$$y_p = C^*\cos(\omega t-\eta)\ , \tag{34}$$

όπου το πλάτος C^* και η αρχική γωνία φάσης η δίνονται από τις σχέσεις

$$C^*(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}}\ ,\quad \tan\eta = \frac{\omega c}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\ . \tag{35}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι μπορούμε να μεταβάλλουμε τη συχνότητα της δύναμης $F_0\cos\omega t$. Τότε θα ζητήσουμε την τιμή του ω για την οποία το πλάτος C^* της λύσης σταθερής κατάστασης γίνεται μέγιστο. Αρκεί λοιπόν η παράσταση $m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2$ να γίνει ελαχίστη και αυτό συμβαίνει όταν

$$\omega^2 = \frac{2m^2\omega_0^2-c^2}{2m^2} \quad \text{με} \quad c^2 < 2m^2\omega_0^2\ . \tag{36}$$

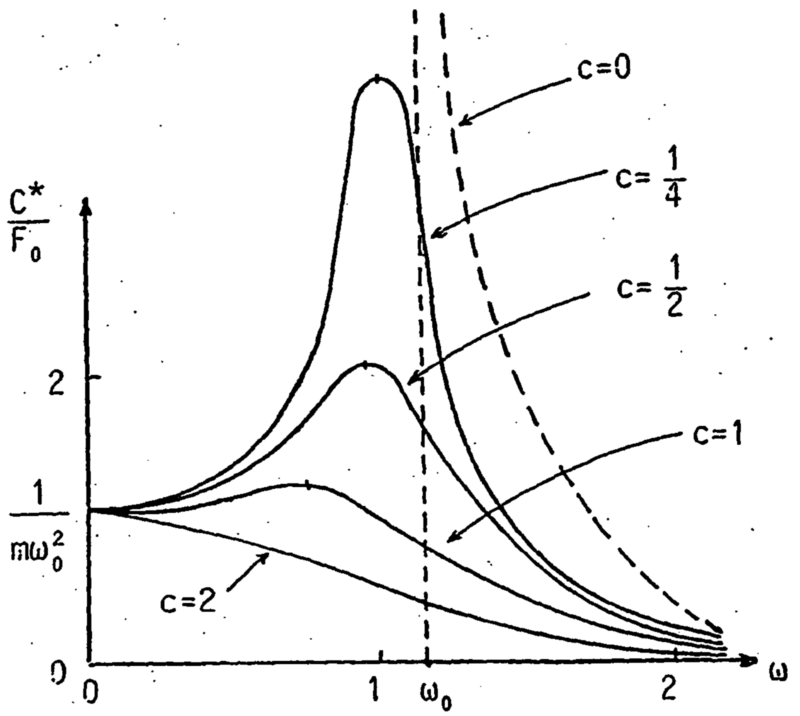
Για $c^2 > 2m^2\omega_0^2 = 2mk$, η (36) δεν έχει πραγματική λύση ως προς ω και το C^* ελαττώνεται μονότονα καθώς το ω αυξάνεται. Για $c^2 < 2m^2\omega_0^2$, η (36) έχει μια πραγματική λύση $\omega = \omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2-\dfrac{c^2}{2m^2}} < \omega_0$, η οποία αυξάνεται καθώς το c ελαττώνεται και προσεγγίζει στο ω_0 , όταν το c τείνει στο μηδέν. Το πλάτος $C^*(\omega)$ έχει μεγίστη τιμή

$$C^*(\omega_{max}) = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2-c^2}} \ , \tag{37}$$

που βρίσκεται αν θέσουμε την (36) στην (35) και λέγεται πλάτος συντονισμού. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε συντονισμό. Παρατηρούμε ότι το μέγιστο πλάτος $C^*(\omega_{max})$ είναι πεπερασμένο, όταν $c>0$. Επειδή $dC^*(\omega_{max})/dc<0$ όταν $c^2<2m^2\omega_0^2$, το πλάτος συντονισμού $C^*(\omega_{max})$ μεγαλώνει καθώς το $c(<\sqrt{2}mk)$ μικραίνει και τείνει να γίνει άπειρο όταν το c τείνει στο μηδεν. Αυτό συμφωνεί με το αποτέλεσμα της § 5. Για τυχούσα συχνότητα της $r(t)$, αν στην (34) θέσουμε $c=0$ και λόγω της (35) βρίσκουμε

$$y_p(t) = \frac{F_0}{m|\omega_0^2-\omega^2|}\cos\omega t \ . \tag{38}$$

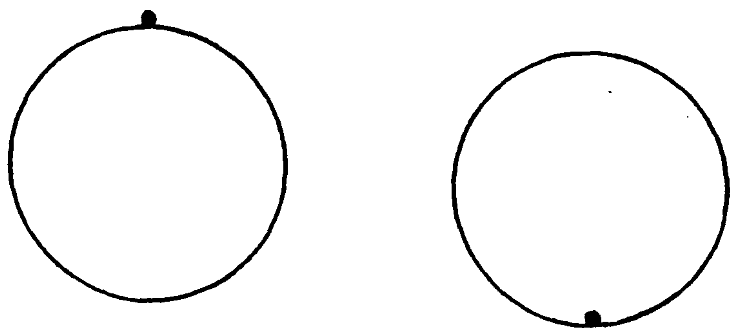
Από την (38) παρατηρούμε ότι όσο η συχνότητα της δύναμης $r(t)$ τείνει στη συχνότητα με την οποία θα εταλαντώνετο το σώμα κάτω από την επίδραση μόνο της δύναμης (9), τόσο το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνει και τείνει στο άπειρο όταν $\omega\to\omega_0$. Το πλάτος της ταλάντωσης δεν γίνεται ποτέ άπειρο, γιατί στην πράξη υπάρχει πάντοτε δύναμη απόσβεσης και συνεπώς $c\neq0$. Στο σχ. 12 παριστάνεται γραφικά η μεταβολή του λόγου C^*/F_0 των πλατών της λύσης σταθερής κατάστασης (34) και της δύναμης $r(t)$ συναρτήσει της συχνότητας της $r(t)$, για $m=1$ και $k=1$, για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης c. Βλέπουμε ότι όσο μικρότερο είναι το c, τόσο μικρότερη είναι η περιοχή για το ω στην οποία αντιστοιχούν μεγάλα πλάτη ταλάντωσης, όταν F_0 σταθερό, δηλαδή τόσο οξύτερος είναι ο συντονισμός. Για πολύ μεγάλες τιμές του c μπορεί η καμπύλη του πλάτους της ταλάντωσης να μην παρουσιάζει μέγιστο, δηλαδή να μην έχουμε συντονισμό (π.χ. για $c=2$).



Σχ. 12

1.7 Ισορροπία και ευστάθεια

Θεωρούμε ένα σωμάτιο στο ανώτερο εξωτερικό σημείο ενός σταθερού κατακόρυφου κύκλου και στο κατώτερο εσωτερικό σημείο αυτού (σχ. 13). Είναι δυνατό το σωμάτιο να ισορροπεί σε αυτές τις θέσεις και λέμε ότι είναι σε ισορροπία. Η ευστάθεια του σωματίου σε αυτές τις θέσεις αφορά στο τι συμβαίνει στο σωμάτιο, όταν του δοθεί μια μικρή ώθηση. Προφανώς στην πρώτη περίπτωση το σωμάτιο απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας, ενώ στη δεύτερη περίπτωση κινείται γύρω από τη θέση ισορροπίας. Την πρώτη περίπτωση την ονομάζουμε ασταθή ισορροπία και τη δεύτερη ευσταθή ισορροπία. Τώρα θα διατυπώσουμε μαθηματικούς ορισμούς της ευστάθειας.



Σχ. 13

Η ευστάθεια μπορεί να ορισθεί κατά πολλούς τρόπους. Ορίζουμε σαν θέση ευσταθούς ισορροπίας εκείνη στην οποία, για κάθε μικρή διατάραξη από τη θέση ισορροπίας, οι δυνάμεις που δρουν πάνω στο σύστημα τείνουν να το επαναφέρουν στη θέση αυτή. Θα δώσουμε ένα γενικό ορισμό της ευστάθειας που περιλαμβάνει την κινητική ενέργεια για συντηρητικό ή μη συντηρητικό σύστημα με οποιονδήποτε βαθμό ελευθερίας.

Έστω ότι το σύστημα ισορροπεί και του δίνεται μια μικρή κινητική ενέργεια T_0, που προκύπτει από την εφαρμογή μιας μικρής διατάραξης. Έστω T η κινητική ενέργεια του συστήματος, όταν αυτό βρίσκεται σε οποιαδήποτε θέση διαφορετική από τη θέση ισορροπίας. Αν $T<T_0$ για κάθε χρονική στιγμή, λέμε ότι η θέση ισορροπίας είναι ευσταθής. Αν η συνθήκη αυτή δεν πληρούται γενικά, η θέση ισορροπίας είναι ασταθής. Αυτό σημαίνει ότι η ισορροπία είναι ευσταθής, αν για κάθε αρκετά μικρή αρχική διατάραξη η κινητική ενέργεια μακριά από τη θέση ισορροπίας είναι μικρότερη από την αρχική κινητική ενέργεια. Η T μπορεί να ισούται με την T_0 πάλι στη θέση ισορροπίας.

Ας περιορισθούμε σε ένα σωμάτιο με μάζα m που κινείται πάνω σε μια καμπύλη. Έστω s η απόσταση κατά μήκος της καμπύλης και $s=0$ μια θέση ισορροπίας. Αν δοθεί στο σωμάτιο αρχική ταχύτητα υ, τότε $T_0 = \frac{1}{2} m u^2$ και $T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$. Ο ορισμός βεβαιώνει ότι η ισορροπία είναι ευσταθής αν $T<T_0$ ή $\dot{s}^2<u^2$, που συνεπάγεται ότι η ταχύτητα σε κάθε σημείο πρέπει να είναι μικρότερη από την αρχική ταχύτητα στη θέση ισορροπίας.

Σε πολλές περιπτώσεις η θεωρία και το πείραμα δεν συμφωνούν μεταξύ τους. Τοποθετούμε ένα σωμάτιο πάνω σε ένα οριζόντιο λείο επίπεδο. Προφανώς αυτό ισορροπεί. Αν δοθεί στο σωμάτιο μια οριζόντια ταχύτητα η κινητική ενέργεια θα διατηρηθεί, δηλαδή $T=T_0$, και σύμφωνα με τον ορισμό η θέση ισορροπίας είναι ασταθής (συχνά αυτή η κρίσιμη περίπτωση λέγεται αδιάφορη ισορροπία). Αντιθέτως, αν τοποθετήσουμε το σωμάτιο πάνω σε ένα τραχύ οριζόντιο επίπεδο, οποιαδήποτε αρχική κινητική ενέργεια θα μικραίνει λόγω της τριβής και η θέση ισορροπίας θα είναι ευσταθής σύμφωνα με τον ορισμό.

1.8 Συντηρητικό και σκληρόνομο σύστημα

Είναι γνωστό ότι για ένα σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας η θέση του προσδιορίζεται από μια γενικευμένη συντεταγμένη q . Αν $\underline{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης του τυχόντος σωματίου του συστήματος, τότε $\underline{r} = \underline{r}(q)$. Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σωματίου είναι

$$\dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{dq} \dot{q} \; ,$$

$$\ddot{\underline{r}} = \frac{d^2\underline{r}}{dq^2} \dot{q}^2 + \frac{d\underline{r}}{dq} \ddot{q} \; .$$

Σε μια θέση ισορροπίας του συστήματος θα έχουμε $\dot{\underline{r}} = \ddot{\underline{r}} = \underline{0}$, που συνεπάγεται $\dot{q} = \ddot{q} = 0$.

Επειδή το σύστημα είναι σκληρόνομο, η κινητική του ενέργεια είναι τετραγωνική μορφή της γενικευμένης ταχύτητας $\dot{q}$, δηλαδή

$$T = f(q)\dot{q}^2 = T(q,\dot{q}) .$$

Επειδή το σύστημα είναι συντηρητικό, η δυναμική του ενέργεια είναι συνάρτηση μόνο του q , δηλαδή $V=V(q)$. Όπως γνωρίζουμε, η μηχανική ενέργεια ενός συντηρητικού συστήματος διατηρείται

$$T+V = \text{σταθερό} .$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση αυτή ως προς το χρόνο, παίρνουμε

$$(T+V)^{\cdot} = 0 ,$$

ή

$$\frac{\partial T}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{dV}{dq}\dot{q} = 0$$

ή

$$f'(q)\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} + \frac{dV}{dq} = 0 , \qquad (\dot{q}\neq 0) . \qquad (39)$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση της κίνησης για συντηρητικό και σκληρόνομο σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας.
Σε μια θέση ισορροπίας είναι $\dot{q} = \ddot{q} = 0$ και η (39) συνεπάγεται $\frac{dV}{dq} = 0$ στη θέση ισορροπίας. Συνεπώς για να βρούμε τις θέσεις ισορροπίας, θα πρέπει να προσδιορίσουμε τα ακρότατα της δυναμικής ενέργειας $V(q)$. Εδώ υποτίθεται ότι η δυναμική ενέργεια είναι λεία συνάρτηση του q .

Έστω V_0 η δυναμική ενέργεια του συστήματος σε μια θέση ισορροπίας και T_0 η κινητική του ενέργεια στη θέση ισορροπίας που οφείλεται στην εφαρμογή μιας μικρής ώθησης. Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας ισχύει, επειδή το σύστημα είναι συντηρητικό, δηλαδή

$$T+V = T_0+V_0 \quad ή \quad T-T_0 = V_0-V \quad .$$

Για ευσταθή θέση ισορροπίας ισχύει $T<T_0$ και η προηγούμενη σχέση δίνει $V_0<V$. Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια πρέπει να έχει ελάχιστη τιμή στη θέση ευσταθούς ισορροπίας. Αν η V δεν έχει ελάχιστη τιμή, η θέση ισορροπίας είναι ασταθής. Υπάρχουν τρία κριτήρια για ένα ελάχιστο: Η $V(q)$ έχει ελάχιστο στο $q=q_0$, αν $V'(q_0) = 0$ και ισχύει μια από τις ακόλουθες συνθήκες:

(α) $V(q_0+h) > V(q_0)$, $V(q_0-h) > V(q_0)$, $h>0$ και αρκετά μικρό

(β) $V'(q_0+h) > 0$, $V'(q_0-h) < 0$, $h>0$ και αρκετά μικρό (40)

(γ) $V''(q_0) > 0$.

Στις εφαρμογές θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως το κριτήριο (γ). Αν $V''(q_0) = 0$, θα πρέπει να εξετάσουμε τις παραγώγους μεγαλύτερης τάξης (βλ. §10) .

1.9 Μη συντηρητικό σύστημα

Η εξίσωση της κίνησης για ένα μη συντηρητικό σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας θα είναι γενικά μια συνήθης διαφορική εξίσωση της μορφής

$$f(q,\dot{q}) = \ddot{q} \tag{41}$$

όπου η γενικευμένη συντεταγμένη q δεν παριστάνει αναγκαστικά μετατόπιση, αλλά μπορεί να είναι γωνία, εμβαδό, κ.τ.λ. . Οι θέσεις ισορροπίας θα υπάρχουν, όταν μηδενίζονται συγχρόνως τα $\dot{q}$ και $\ddot{q}$ και θα προσδιορίζονται από τη λύση της εξίσωσης $f(q,0) = 0$ ως προς q . Η ευστάθεια των θέσεων ισορροπίας θα εξαρτάται από τη συμπεριφορά της κινητικής ενέργειας στην περιοχή των θέσεων ισορροπίας και είναι αναγκαίο να ολοκληρώσουμε την $f(q,\dot{q}) = \ddot{q}$. Αν η ολοκλήρωση είναι δυνατή παίρνουμε τη σχέση $\dot{q} = \dot{q}(q)$ και συνεπώς την κινητική ενέργεια συναρτήσει του q, $T = T(q)$, από την οποία βρίσκουμε την κινητική ενέργεια T_0 στη θέση ισορροπίας και τη συγκρίνουμε με την κινητική ενέργεια $T=T(q)$.

1.10 Ανάπτυγμα της συνάρτησης V(q) σε σειρά Taylor

Θεωρούμε ένα συντηρητικό σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας, γενικευμένη συντεταγμένη q και αναπτύσσουμε τη δυναμική του ενέργεια V(q) σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο q=a . Θα έχουμε

$$V(q) = V(a)+V'(a)(q-a) + \frac{V''(a)}{2!}(q-a)^2 + \ldots + \frac{V^{(n)}(a)}{n!}(q-a)^n + \ldots$$

Αν το σημείο q=a είναι μια θέση ισορροπίας, ισχύει ως γνωστό $V'(a) = 0$. Ο γραμμικός όρος στη σειρά απαλείφεται και συνεπώς

$$V(q) = V(a) + \frac{V''(a)}{2!}(q-a)^2 + \ldots + \frac{V^{(n)}(a)}{n!}(q-a)^n + \ldots \tag{42}$$

Η ευστάθεια της ισορροπίας στο σημείο q=a εξαρτάται από τον πρώτο, μετά το V(a), μη μηδενικό όρο της (42). Αν αυτός είναι ένας όρος με άρτια δύναμη n, τότε η ισορροπία είναι ευσταθής , αν $V^{(n)}(a)$ είναι θετικό. Αν $V^{(n)}(a)$ είναι αρνητικό ή αν n είναι περιττός, τότε η ισορροπία είναι ασταθής. Η απόδειξη γίνεται ως εξής. Έστω n η τάξη του πρώτου, μετά το V(a), μη μηδενικού όρου της (42). Θα έχουμε

$$V(q) = V(a) + \frac{V^{(n)}(a)}{n!}(q-a)^n ,$$

όπου έχουμε παραλείψει τους όρους τάξης μεγαλύτερης από n ως πολύ μικρούς, αφού για την εξέταση της ευστάθειας θεωρούμε πάντα μικρές μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας. Τότε

(1) Αν n = άρτιος και $V^{(n)}(a) > 0$, θα είναι $V^{(n)}(a)(q-a)^n > 0$ για $q-a > 0$ και $q-a < 0$. Η τιμή της V αυξάνεται και στις δυο πλευρές του $q=a$, ήτοι το σημείο $q=a$ είναι θέση ελαχίστου της $V(q)$. Συνεπώς, η $V(q)$ έχει ελαχίστη τιμή στη θέση ισορροπίας $q=a$, άρα η ισορροπία είναι ευσταθής.

2) Αν n = άρτιος και $V^{(n)}(a) < 0$, θα είναι $V^{(n)}(a)(q-a)^n < 0$ για $q-a>0$ και $q-a < 0$. Η τιμή της V ελαττώνεται και στις δυο πλευρές του $q=a$, ήτοι το σημείο $q=a$ είναι θέση μεγίστου της $V(q)$ Συνεπώς, η $V(q)$ έχει μεγίστη τιμή στη θέση ισορροπίας $q=a$, ήτοι η ισορροπία είναι ασταθής.

3) Αν n = περιττός, τότε το $V^{(n)}(a)(q-a)^n$ μεταβάλλει πρόσημο με το $q-a$, οποιοδήποτε και αν είναι το πρόσημο του $V^{(n)}(a)$. Το σημείο $q=a$ είναι συνεπώς σημείο καμπής. Άρα η ισορροπία είναι ασταθής. Για παράδειγμα

α) Αν n = περιττός και $V^{(n)}(a) > 0$, τότε

$V^{(n)}(a)(q-a)^n > 0$ για $q-a > 0$,

$V^{(n)}(a)(q-a)^n < 0$ για $q-a < 0$,

δηλαδή το σημείο $q=a$ είναι σημείο καμπής

(β) Αν n = περιττός και $V^{(n)}(a) < 0$, τότε

$V^{(n)}(a)(q-a)^n > 0$ για $q-a < 0$

$$V^{(n)}(a)(q-a)^n < 0 \quad \text{για} \quad q-a > 0$$

δηλαδή το σημείο $q=a$ είναι σημείο καμπής.

Στις περισσότερες περιπτώσεις που έχουν φυσικό ενδιαφέρον είναι $n=2$, δηλαδή η $V(q)$ είναι τετραγωνική συνάρτηση της q. Αν συνεπώς μετασχηματίσουμε την αρχή μέτρησης στο σημείο $q=a$, δηλαδή θέσουμε $a=0$ και αυθαίρετα υποθέσουμε ότι $V(0)=0$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$V(q) = \frac{1}{2} V''(0)q^2 . \tag{43}$$

1.11 Ταλαντώσεις συντηρητικού και σκληρόνομου συστήματος

Στην § 8 δώσαμε τη διαφορική εξίσωση της κίνησης (39) για συντηρητικό και σκληρόνομο σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας για το οποίο η κινητική και η δυναμική ενέργεια είναι $T=f(q)\dot{q}^2$ και $V=V(q)$ αντίστοιχα. Αποδείξαμε ακόμη ότι η θέση $q=a$ είναι θέση ισορροπίας, αν $V'(a)=0$ και ότι η ισορροπία είναι ευσταθής, αν $V''(a) > 0$. Θα εξετάσουμε τώρα την κίνηση στην άμεση περιοχή μιας θέσης ευσταθούς ισορροπίας $q=a$.

Έστω $q=a+x$. Επειδή εξετάζουμε την κίνηση πολύ κοντά στη θέση a, το x θα είναι μια μικρή ποσότητα. Έστω επίσης ότι οι ποσότητες $\dot{q} = \dot{x}$ και $\ddot{q} = \ddot{x}$ είναι μικρές. Αν αναπτύξουμε τις συναρτήσεις $f(q)$, $V(q)$ σε σειρά Taylor γύρω από το $q=a$, με την υπόθεση ότι υπάρχουν οι παράγωγοι οποιασδήποτε τάξης και είναι συνεχείς, θα έχουμε

$$f(q) = f(a+x) = f(a)+xf'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \ldots ,$$

$$f'(q) = f'(a+x) = f'(a)+xf''(a) + \ldots ,$$

$$V(q) = V(a+x) = V(a) + \frac{x^2}{2!} V''(a) + \ldots ,$$

$$V'(q) = xV''(a) + \frac{x^2}{2} V'''(a) + \ldots ,$$

Αντικαθιστώντας τις σειρές αυτές στην (39), παίρνουμε

$$\dot{x}^2[f'(a)+xf''(a)+ \ldots]+2\ddot{x}[f(a)+xf'(a)+ \ldots] + [xV''(a)+ \frac{x^2}{2!} V'''(a)+ \ldots] = 0$$

Αν παραλείψουμε τους όρους δευτέρας ή μεγαλύτερης τάξης ως προς x, $\dot{x}$ και $\ddot{x}$, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$2\ddot{x}f(a) + V''(a)x = 0$$

ή

$$\ddot{x}+\omega^2 x = 0 \qquad (44)$$

όπου $\omega^2 = \dfrac{V''(a)}{2f(a)}$. Η κινητική ενέργεια $T=f(q)\dot{q}^2$ είναι πάντα θετική. Επειδή για x μικρό $f(q) \cong f(a)$ έπεται ότι $f(a) > 0$. Για ευσταθή ισορροπία ισχύει $V''(a) > 0$. Συνεπώς το ω είναι πραγματικό για μικρές κινήσεις γύρω από μια θέση ευσταθούς ισορροπίας. Η διαφορική εξίσωση (44) συνεπώς παριστάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Η λύση της είναι

$$x = C\cos(\omega t-\delta)$$

όπου C και δ αυθαίρετες σταθερές, που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες και το ω είναι η γωνιακή συχνότητα.

Στη συνέχεια δίνουμε μια άλλη διαπραγμάτευση του θέματος, που οδηγεί στα ίδια συμπεράσματα. Στην περίπτωση σκληρονόμου συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας και γενικευμένη συντεταγμένη q , η κινητική του ενέργεια είναι

$$T = f(q)\dot{q}^2 .$$

Αν η θέση q=a=0 είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας και αναπτύξουμε τη συνάρτηση f(q) σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο q=a=0 , έχουμε

$$f(q) = f(0)+f'(0)q+ \cdots .$$

Επειδή εξετάζουμε την κίνηση στην άμεση περιοχή του σημείου q=a=0, θα θεωρήσουμε ότι το q είναι αρκετά μικρό έτσι ώστε

$$f(q) \cong f(0) = \text{σταθερό} .$$

Κάνοντας χρήση της (43) η συνάρτηση Lagrange γίνεται

$$L = f(0)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}V''(0)q^2 .$$

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ γράφεται

$$\ddot{q} + \frac{V''(0)}{2f(0)} q = 0 .$$

Αυτή είναι ανάλογη με την (44).

Επειδή το q=0 είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας, θα ισχύει V''(0)>0. Επειδή η κινητική ενέργεια είναι θετική, θα ισχύει f(0)>0 . Έτσι η πιο πάνω διαφορική εξίσωση της κίνησης, στην περίπτωση που q=0 είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας, παριστάνει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $\tau = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{V''(0)}{2f(0)}}}$.

Ασκήσεις

1. Σωμάτιο με μάζα m εξαρτάται από αβαρές ελατήριο φυσικού μήκους α και σταθεράς k . Να βρεθεί η μετατόπιση του σωματίου, αν αρχικά
α) το σωμάτιο τραβηχθεί προς τα κάτω σε απόσταση ίση με το $\frac{1}{4}\alpha$ από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερο,
β) στο σωμάτιο δοθεί ταχύτητα u_0 προς τα κάτω από τη θέση ισορροπίας του,
γ) τι συμπεραίνετε για τα πλάτη, τις περιόδους και τις φάσεις των περιπτώσεων α) και β) ;

<u>Λύση</u>

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι

$$m\ddot{y}+ky = 0 \quad ,$$

ή

$$\ddot{y}+\omega_0^2 y = 0, \quad \text{όπου} \quad \omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} .$$

Η γενική λύση είναι

$$y(t) = C\cos(\omega_0 t-\delta) \quad .$$

α) Οι αρχικές συνθήκες είναι : $t=0$, $y(0) = \frac{1}{4}\alpha$, $\dot{y}(0) = 0$.

Η εφαρμογή των αρχικών συνθηκών στη γενική λύση δίνει

$$C = \frac{1}{4}\alpha \ , \quad \delta = 0 \ .$$

Συνεπώς, η κίνηση του σωματίου είναι

$$y(t) = \frac{1}{4}\alpha \ co\omega_0 t \ .$$

β) Οι αρχικές συνθήκες είναι : $t=0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = \upsilon_0$.
Η εφαρμογή των αρχικών συνθηκών στη γενική λύση δίνει

$$C = \frac{\upsilon_0}{\omega_0} \ , \quad \delta = \frac{\pi}{2} \ .$$

Συνεπώς, η κίνηση του σωματίου είναι

$$y(t) = \frac{\upsilon_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$$

ή

$$y(t) = \frac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \ .$$

γ) Από τις δυο λύσεις παρατηρούμε ότι ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες, η περίοδος των ταλαντώσεων είναι η ίδια $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.
'Ομως το πλάτος και η φάση μεταβάλλονται.

2. Σωμάτιο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους C και διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με ταχύτητα υ_0 . Να βρεθεί η περίοδος της ταλάντωσης.

Λύση

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης του σωματίου είναι

$$m\ddot{y}+ky = 0 \quad ,$$

με γενική λύση

$$y = C\cos(\omega_0 t - \delta) \ .$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} \ .$$

Αρκεί λοιπόν να προσδιορισθεί το ω_0. Αυτό θα επιτευχθεί μέσω των αρχικών συνθηκών, που από την εκφώνηση του προβλήματος είναι : $t=0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = u_0$. Η εφαρμογή των αρχικών συνθηκών δίνει

$$\omega_0 = \frac{u_0}{C} \qquad \delta = \frac{\pi}{2} \ .$$

Άρα, η περίοδος είναι $\tau = \dfrac{2\pi C}{u_0}$.

3. Δυο σωμάτια με μάζα m_1 και m_2 αντίστοιχα εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος C_1 και C_2 αντίστοιχα. Αν η μηχανική ενέργεια του πρώτου σωματίου είναι διπλάσια εκείνης του δεύτερου, να βρεθεί ο λόγος των περιόδων τους $\dfrac{\tau_1}{\tau_2}$.

Λύση

Αφού τα δυο σωμάτια εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις, η κίνησή τους δίνεται από τις σχέσεις

$$y_1 = C_1\cos(\omega_1 t-\delta_1)\,, \qquad (\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1})$$

$$y_2 = C_2\cos(\omega_2 t-\delta_2)\,, \qquad (\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2})\,.$$

Οι περίοδοι των ταλαντώσεων είναι: $\tau_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$, $\tau_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_2}$. Ο λόγος των περιόδων είναι

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}\,.$$

Για να βρούμε το ζητούμενο λόγο των περιόδων, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η μηχανική ενέργεια του πρώτου είναι διπλάσια της μηχανικής ενέργειας του δεύτερου σωματίου. Έχουμε

$$\frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}k_1y_1^2 = 2(\frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}k_2y_2^2)$$

ή

$$m_1\dot{y}_1^2+k_1y_1^2 = 2(m_2\dot{y}_2^2+k_2y_2^2)\,.$$

Αν αντικαταστήσουμε σε αυτή τις γενικές λύσεις y_1 και y_2, που εκφράζουν τις αρμονικές ταλαντώσεις, θα πάρουμε

$$m_1\omega_1^2C_1^2 = 2m_2\omega_2^2C_2^2 \ ,$$

ή

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{m_1}{2m_2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{C_1}{C_2} \ .$$

Συνεπώς, ο λόγος των περιόδων είναι

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{C_1}{C_2}\left(\frac{m_1}{2m_2}\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

4. Δυο σωμάτια εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις. Οι μέγιστες ταχύτητές τους είναι ίσες κατά μέγεθος, ενώ οι γωνιακές τους συχνότητες έχουν λόγο 1/4 . Να βρεθεί ο λόγος των πλατών.

Λύση

Η κίνηση των σωματίων δίνεται από τις σχέσεις

$$y_1 = C_1\cos(\omega_1 t-\delta_1)$$

$$y_2 = C_2\cos(\omega_2 t-\delta_2) \ .$$

Δίνεται επίσης ότι

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{4} \ .$$

Έχουμε

$$\upsilon_{1,max} = |\dot{y}_{1,max}| = C_1\omega_1 \ ,$$

$$u_{2,max} = |\dot{y}_{2,max}| = C_2\omega_2 ,$$

και επιπλέον ότι

$$u_{1,max} = u_{2,max} .$$

Συνεπώς, ο λόγος των πλατών είναι

$$\frac{C_1}{C_2} = 4 .$$

5. Μηχανικό σύστημα αποτελείται από ελατήριο σταθεράς k στο άκρο του οποίου υπάρχει σωμάτιο με μάζα m . Το σωμάτιο κινείται κατακόρυφα και εκτελεί υποαποσβεννυμένες ταλαντώσεις τέτοιες ώστε, το πλάτος δυο διαδοχικών ταλαντώσεων να είναι 5cm και 1/4 cm. Αν η γωνιακή συχνότητα ω_0 είναι 16 rad/sec, να βρεθεί η περίοδος της υποαποσβεννυμένης ταλάντωσης. Δίνεται $\ell n_e 20 \cong 3$.

Λύση

Η υποαποσβεννυμένη ταλάντωση δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t-\delta) .$$

Το πλάτος είναι

$$\Pi(t) = Ce^{-\alpha t} .$$

Αν στον χρόνο t το πλάτος της μιας ταλάντωσης είναι Π(t) = 5cm, μετά από χρόνο μιας περιόδου $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega^*}$, το πλάτος της διαδοχικής ταλάντωσης θα είναι $\Pi(t+\dfrac{2\pi}{\omega^*}) = Ce^{-\alpha(t+2\pi/\omega^*)} = \dfrac{1}{4}$ cm.

'Αρα, ο λόγος των πλατών δυο διαδοχικών ταλαντώσεων είναι

$$\frac{\Pi(t)}{\Pi(t+\dfrac{2\pi}{\omega^*})} = \frac{Ce^{-\alpha t}}{Ce^{-\alpha t}e^{-2\pi\,\alpha/\omega^*}} = \frac{5}{\dfrac{1}{4}} = 20 .$$

'Επεται ότι

$$e^{-2\pi\frac{\alpha}{\omega^*}} = \frac{1}{20} ,$$

ή

$$-2\pi\,\frac{\alpha}{\omega^*}\,\ell\eta_e e = \ell\eta_e 1 - \ell\eta_e 20 = -3 ,$$

ή

$$2\pi\alpha = 3\omega^* .$$

Αυτή γράφεται

$$\begin{aligned} 2\pi\alpha &= 3\,\frac{1}{2m}\sqrt{4km-c^2} , \\ &= 3\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} , \\ &= 3\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} , \end{aligned}$$

από την οποία έχουμε

$$4\pi^2\alpha^2 = 9(\omega_0^2-\alpha^2)$$

ή

$$\alpha = 6{,}8\ .$$

Η περίοδος της υποαποσβεννυμένης ταλάντωσης είναι

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega^*} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi\alpha}{3}} = \frac{3}{\alpha} = \frac{3}{6{,}8} \cong 0.44 \text{ sec.}$$

6. Σωμάτιο με μάζα m, το οποίο βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, συνδέεται με δυο ελατήρια με μέτρα ελαστικότητας λ_1, λ_2 και με φυσικά μήκη α_1, α_2 . Τα ελεύθερα άκρα των ελατηρίων στερεώνονται σε δυο σταθερά σημεία του επιπέδου που απέχουν κατά $\alpha_1+\alpha_2$. Στη θέση ισορροπίας το σωμάτιο υφίσταται την οριζόντια εξωτερική δύναμη $F_0\cos\omega t$. Για ποια τιμή του ω υφίσταται το σύστημα συντονισμό;

<u>Λύση</u>

Αν το σωμάτιο μετατοπισθεί κατά x από τη θέση ισορροπίας, η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι

$$V = \frac{1}{2}\frac{\lambda_1}{\alpha_1}x^2 + \frac{1}{2}\frac{\lambda_2}{\alpha_2}x^2\ .$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\left\{\frac{\lambda_1}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\right\}x^2\ .$$

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right\} - \frac{\partial L}{\partial x} = F_0 \cos\omega t$$

ή

$$\ddot{x} + \frac{1}{m}\left\{\frac{\lambda_1}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\right\} x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

'Αρα

$$\omega_0 = \left\{\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Σύμφωνα με τη θεωρία, θα έχουμε συντονισμό όταν $\omega = \omega_0$.

7. Ένα μηχανικό σύστημα με m=10, k=200 και c=25 υφίσταται την εξωτερική δύναμη $F_0 \cos\omega t$, όπου $F_0=6$. Να βρεθεί η τιμή του ω για την οποία το πλάτος της προκύπτουσας ταλάντωσης είναι μέγιστο και η αρχική γωνία φάσης της ταλάντωσης μετά από αρκετά μεγάλο χρόνο.

<u>Λύση</u>

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης που διέπει το πρόβλημα είναι

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \cos\omega t .$$

Γνωρίζουμε ότι μετά από αρκετά μεγάλο χρόνο, η γενική λύση $y(t)$ της διαφορικής εξίσωσης θα είναι μια απλή αρμονική ταλάντωση $y_p(t)$, της οποίας η συχνότητα είναι εκείνη της περιοδικής δύναμης. Αρκεί, συνεπώς, να μελετήσουμε το πλάτος της μερικής λύσης $y_p(t)$ της διαφορικής εξίσωσης.

Ως γνωστό η $y_p(t)$ μπορεί να γραφεί

$$y_p(t) = C^*\cos(\omega t-\eta)$$

όπου

$$C^* = \frac{F_o\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} ,$$

$$\tan\eta = \frac{\omega c}{k-m\omega^2} .$$

Για να βρούμε την τιμή του ω για την οποία το πλάτος παίρνει ακρότατη τιμή, θέτουμε

$$\frac{dC^*}{d\omega} = 0 ,$$

από την οποία, με $\omega \neq 0$, βρίσκουμε

$$\omega^2 = \frac{2mk-c^2}{2m^2} = \frac{2\times10\times200-625}{2\times100} = 16,875$$

ή

$$\omega = 4,1 \text{ rad/sec} .$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\frac{d^2C^*}{d\omega^2}\Big|_{\omega=4.1} < 0 ,$$

άρα το πλάτος C^* γίνεται μέγιστο, για την τιμή $\omega=4,1$. Από τη σχέση που δίνει την αρχική γωνία φάσης η , έχουμε

$$\tan\eta = \frac{25\times4{,}1}{200-168{,}1} = 3{,}2$$

ή

$$\eta = \tan^{-1} 3{,}2 = 73^{\circ} .$$

8. Σωμάτιο με μάζα m εξαρτάται από αβαρές ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί ταλάντωση με μικρή απόσβεση, η οποία είναι τέτοια ώστε $\alpha = \frac{\omega_0}{4}$. Να βρεθεί το ω^*, ο λόγος των πλατών δυο διαδοχικών ταλαντώσεων καθώς και η λογαριθμική μείωση. Δίνεται $\ell n_e 4{,}9 \cong 1{,}5$.

<u>Λύση</u>

Το ω^* δίνεται από τη σχέση

$$\omega^* = \frac{1}{2m}\sqrt{4km-c^2}$$

από την οποία προκύπτει

$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}\,\omega_0 .$$

Γνωρίζουμε ότι ο λόγος των πλατών δυο διαδοχικών ταλαντώσεων είναι σταθερός και ίσος προς

$$\frac{\Pi(t)}{\Pi(t+T)} = e^{\frac{2\pi}{\omega^*}\alpha} \text{ , όπου } T = \frac{2\pi}{\omega^*} .$$

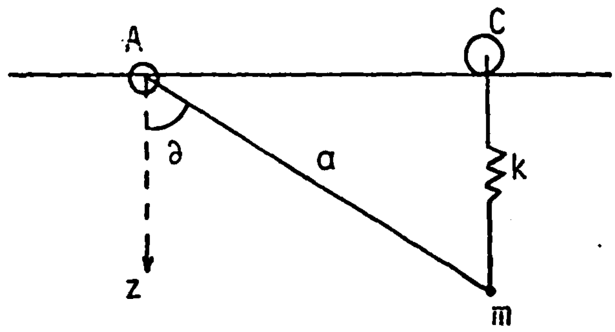
Έχουμε

$$\frac{\Pi(t)}{\Pi(t+T)} = e^{2\pi\frac{\omega_0}{4}\frac{4}{\sqrt{15}}\frac{1}{\omega_0}} = e^{\frac{2\pi}{\sqrt{15}}} = 4{,}9 \quad .$$

Άρα η λογαριθμική μείωση είναι $\Delta = \ell\eta \dfrac{\Pi(t)}{\Pi(t+T)} \cong 1{,}5$.

9. Απλό εκκρεμές αποτελείται από ένα σωμάτιο με μάζα m, που κρέμεται από αβαρή ράβδο μήκους α . Η ράβδος κινείται ελεύθερα από ένα σταθερό στήριγμα Α . Ένα ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους b συνδέεται με το σωμάτιο και με ένα τροχό C , που κινείται σε ένα οριζόντιο άξονα διερχόμενο από το Α (σχήμα). Το ελατήριο παραμένει κατακόρυφο και η κίνηση του συστήματος γίνεται σε ένα κατακόρυφο επίπεδο. Αν $mg+bk<ak$, να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας του συστήματος και η ευστάθειά τους.

Λύση



Θα πρέπει να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος σε τυχούσα θέση.
Αν πάρουμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Α , η συνολική δυναμική ενέργεια είναι

$$V = -\, mg\alpha\cos\vartheta + \frac{1}{2}k(\alpha\cos\vartheta - b)^2 = V(\vartheta) \quad ,$$

όπου ο πρώτος όρος είναι η δυναμική ενέργεια του σωματίου λόγω του βάρους του και ο δεύτερος όρος είναι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου. Οι θέσεις ισορροπίας προκύπτουν από τη σχέση

$$V'(\theta) = \sin\theta(mg\alpha - k\alpha^2\cos\theta + k\alpha b) = 0 \ ,$$

που πληρούται όταν

$$\sin\theta = 0 \quad \text{και} \quad \cos\theta = \frac{mg+kb}{\alpha k} \ .$$

Επειδή $mg+bk<\alpha k$, το $\cos\theta$ έχει έννοια.
Οι θέσεις ισορροπίας είναι

$$\theta=0 \quad \theta = \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{mg+bk}{\alpha k}\right) \ .$$

Τώρα

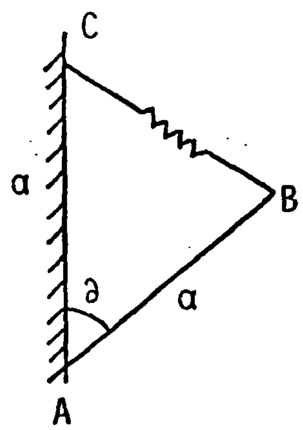
$$V''(\theta) = \cos\theta(mg\alpha - k\alpha^2\cos\theta + \alpha bk) + k\alpha^2\sin^2\theta \ .$$

Για τις θέσεις ισορροπίας $\theta=0$ και $\theta=\theta_1$:

$$V''(0) = \alpha(mg+kb-\alpha k) < 0$$
$$V''(\theta_1) = \alpha^2 k\sin^2\theta_1 > 0 \ .$$

Άρα, η θέση ισορροπίας $\theta=0$ είναι θέση ασταθούς ισορροπίας και η θέση ισορροπίας $\theta=\theta_1$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

10. Στο σύστημα του σχήματος έχουμε την ομογενή ράβδο AB με μάζα m και μήκος α, AC=α και το ελατήριο CB έχει φυσικό μήκος $\frac{1}{2}\alpha$ και μέτρο ελαστικότητας $\lambda = \frac{1}{2}mg$. Να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας του συστήματος και η ευστάθειά τους.



<u>Λύση</u>

Έστω ϑ η κλίση της ράβδου ως προς την κατακόρυφο AC . Η δυναμική ενέργεια της ράβδου, λόγω του βάρους της, είναι

$$V_1 = \frac{1}{2} mg\alpha\cos\vartheta$$

όπου θεωρούμε τη μάζα της ράβδου συγκεντρωμένη στο μέσο της (κέντρο βάρους) και σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το A . Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

$$V_2 = \frac{1}{2} k(CB - \frac{1}{2}\alpha)^2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\frac{1}{2}\alpha} (CB - \frac{1}{2}\alpha)^2 \; ,$$

$$= \frac{1}{2} \frac{mg/2}{\alpha/2} (CB - \frac{\alpha}{2})^2 \; .$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ABC το τελικό μήκος του ελατηρίου BC είναι

$$BC = 2\alpha\sin\frac{\vartheta}{2} \; .$$

Συνεπώς, η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2}\,mga\cos\vartheta + \frac{1}{2}\,mga(2\sin\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2})^2 = V(\vartheta) \quad .$$

Στις θέσεις ισορροπίας θα ισχύει

$$V'(\vartheta) = -\frac{1}{2}\,mga\sin\vartheta + mga(2\sin\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2})\cos\frac{\vartheta}{2} = 0 \quad .$$

Η σχέση αυτή μπορεί να αναχθεί στην

$$\cos\frac{\vartheta}{2}\,(\sin\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}) = 0 \quad ,$$

που δίνει

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = 0 \quad \text{και} \quad \sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \quad .$$

Οι θέσεις ισορροπίας είναι

$$\vartheta = \pi \quad \text{και} \quad \vartheta = \frac{\pi}{3} \quad .$$

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια παίρνουμε τη δεύτερη παράγωγο της V. Έχουμε

$$V''(\vartheta) = \frac{1}{4}\,mga(2\cos\vartheta + \sin\frac{\vartheta}{2}) \quad ,$$

συνεπώς

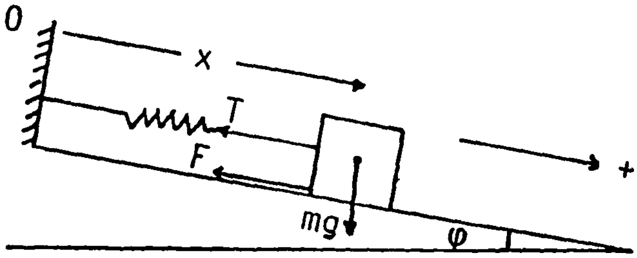
$$V''(\pi) = \frac{1}{4}\,mga(-2+1) < 0 \quad ,$$

και

$$V''(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}\,mga(1 + \frac{1}{2}) > 0 \quad .$$

Η θέση, στην οποία το B είναι ακριβώς κάτω από το A , είναι θέση ασταθούς ισορροπίας και η θέση, στην οποία το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο, είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

11. Σώμα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μάζα m διατηρείται σε τραχύ κεκλιμένο επίπεδο μέσω ενός ελατηρίου, που είναι παράλληλο προς το επίπεδο (σχήμα). Το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι α και το μέτρο ελαστικότητας είναι λ . Η τριβή είναι κατά μέγεθος ανάλογη προς την ταχύτητα του σώματος. Να βρεθεί η θέση ισορροπίας.



Λύση

Έστω x η θέση του σώματος σε κάποια χρονική στιγμή. Η διαφορική εξίσωση της κίνησης παράλληλα προς το κεκλιμένο επίπεδο είναι

$$m\ddot{x} = mg\sin\varphi - T - F \quad ,$$

όπου T η τάση του ελατηρίου και F η τριβή .

Από το νόμο του Hooke, $T = k(x-\alpha) = \frac{\lambda}{\alpha}(x-\alpha)$, όπου x-α η μεταβολή του μήκους του ελατηρίου. Από το πρόβλημα, η τριβή είναι $F = c\dot{x}$.

Έτσι

$$m\ddot{x} = mg\sin\varphi - \frac{\lambda}{\alpha}(x-\alpha) - c\dot{x} \quad ,$$

όπου c είναι γνωστή σταθερά.
Η θέση ισορροπίας προκύπτει αν θέσουμε $\dot{x} = \ddot{x} = 0$. Άρα η θέση ισορροπίας είναι

$$x = \frac{mg\alpha}{\lambda}\sin\varphi + \alpha \ .$$

12. Μηχανικό σύστημα διέπεται από τη διαφορική εξίσωση της κίνησης

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 32{,}5 \ \cos 2t \ .$$

Να βρεθεί η ταλάντωση σταθερής κατάστασης.

Λύση

Όπως γνωρίζουμε, η ταλάντωση σταθερής κατάστασης είναι η μερική λύση της δοθείσης διαφορικής εξίσωσης. Έτσι, θέτουμε

$$y_p(t) = a\cos 2t + b\sin 2t$$

και προσδιορίζουμε τις σταθερές a και b από τους γνωστούς τύπους

$$a = -0{,}5 \quad , \quad b = 4 \ .$$

Συνεπώς, η ταλάντωση σταθερής κατάστασης είναι

$$y_p(t) = -0{,}5\cos 2t + 4\sin 2t \ .$$

13. Μηχανικό σύστημα διέπεται από τη διαφορική εξίσωση της κίνησης

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = \cos t \ .$$

Να βρεθεί η μεταβατική ταλάντωση.

<u>Λύση</u>

Όπως γνωρίζουμε, η μεταβατική ταλάντωση είναι η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0 \ .$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς έχει ρίζες

$$\rho_1 = -1+i \ , \quad \rho_2 = -1-i \ ,$$

Συνεπώς η γενική λύση (μεταβατική ταλάντωση) είναι

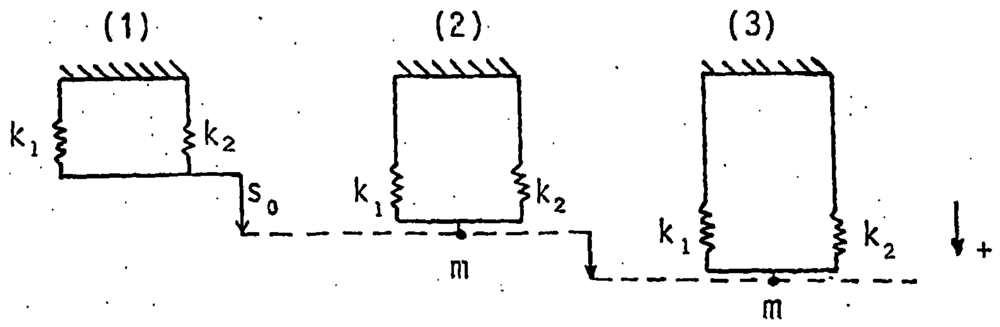
$$y_h(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t) \ .$$

14. Σωμάτιο με μάζα m εξαρτάται από δυο αβαρή ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2. Αποδείξατε ότι, αν τα ελατήρια συνδέονται "εν παραλλήλω", η περίοδος των κατακόρυφων ταλαντώσεων του σώματος είναι $2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$.

<u>Λύση</u>

Λόγω της "εν παραλλήλω" σύνδεσης, θα έχουμε στη θέση ισορροπίας (2):

$$mg = k_1 s_0 + k_2 s_0 = (k_1+k_2)s_0 ,$$



επειδή τα ελατήρια μετατοπίζονται κατά s_0. Στην τυχούσα θέση (3), η αλγεβρική τιμή των δυνάμεων που δρουν στο σωμάτιο είναι

$$F_1 = mg ,$$

$$F_2 = -(k_1+k_2)s_0 - (k_1+k_2)y .$$

Συνεπώς η συνισταμένη των δυνάμεων στη τυχούσα θέση (3) είναι

$$\Sigma F_y = F_1+F_2 = mg-(k_1+k_2)s_0-(k_1+k_2)y = -(k_1+k_2)y .$$

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι

$$m\ddot{y} = \Sigma F y = -(k_1+k_2)y .$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο

$$\tau_1 = 2\pi/\omega_0 \quad \text{όπου} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} .$$

15. Σωμάτιο με μάζα m ολισθαίνει πάνω σε λείο παραβολικό σύρμα με εξίσωση $y=4x^2$. Το σύρμα είναι σταθερό σε ένα κατακόρυφο επίπεδο. Να δειχθεί ότι το σωμάτιο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας, όταν το σωμάτιο αφήνεται από μια θέση, που είναι κοντά στη θέση ισορροπίας.

<u>Λύση</u>

Αφού το σωμάτιο κινείται πάνω σε καμπύλη, θα έχει ένα βαθμό ελευθερίας . Παίρνουμε σαν γενικευμένη συντεταγμένη, την καρτεσιανή συντεταγμένη x .
Η κινητική ενέργεια του σωματίου είναι

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \quad ,$$

$$= \frac{1}{2} m(1+64x^2)\dot{x}^2 = f(x)\dot{x}^2 \quad ,$$

όπου $f(x) = \frac{1}{2} m(1+64x^2)$.
Η δυναμική ενέργεια είναι

$$V = mgy = 4mgx^2 \quad .$$

Η θέση ισορροπίας βρίσκεται από τη σχέση,

$$V'(x) = 8mgx = 0 \quad ,$$

δηλαδή x=0 είναι θέση ισορροπίας. Επειδή $V''(x=0) = 8mg > 0$, έπεται ότι x=0 είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.
Επειδή το σωμάτιο αφήνεται από μια θέση, που είναι πλησίον της θέσης ισορροπίας x=0, έπεται ότι το x είναι αρκετά μικρό. Τότε το x^2 είναι πάρα πολύ μικρό και μπορούμε να θέσουμε $f(x)\cong f(0)= m/2$.

Η συνάρτηση Lagrange γράφεται τότε

$$L = T-V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - 4mgx^2 .$$

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι

$$\ddot{x} + 8gx = 0$$

που εκφράζει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{2g}}$.

2ος τρόπος: Σύμφωνα με τη θεωρία της §11, για μικρές κινήσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας, η οριζόντια μετατόπιση x πληρεί την (44)

$$\ddot{x}+\omega^2 x = 0 ,$$

όπου $\omega^2 = \frac{V''(o)}{2f(o)} = \frac{8mg}{m} = 8g$. Άρα προκύπτει η ίδια διαφορική εξίσωση της κίνησης.

16. Σωμάτιο μάζας $m = \frac{6}{32}$ κρέμεται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k=3$. Κατά τη χρονική στιγμή $t=0$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. Στο σωμάτιο εφαρμόζεται η περιοδική δύναμη $r(t) = 12\sin 4t$. Αν δεν ληφθούν υπόψη οι δυνάμεις απόσβεσης, να προσδιορισθεί η θέση του σωματίου συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι :

$$\frac{6}{32}\ddot{y}+3y = 12\sin 4t$$

ή

$$\ddot{y}+16y = 64\sin 4t \ .$$

Έχουμε $\omega=4$, $\omega_0=4$. Επειδή $\omega=\omega_0$, βρισκόμαστε στην περίπτωση του συντονισμού. Συνεπώς, η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y_p(t) = t(a\cos 4t+b\sin 4t) \ .$$

Η αντικατάσταση της y_p στη διαφορική εξίσωση παρέχει τις σταθερές a και b , ήτοι

$$a = -8 \ , \ b = 0 \ .$$

Άρα

$$y_p(t) = -8t\cos 4t \ .$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(t) = A\cos 4t + B\sin 4t - 8t\cos 4t$$

όπου A και B αυθαίρετες σταθερές.
Με την εφαρμογή των αρχικών συνθηκών στη γενική λύση προσδιορίζουμε τις σταθερές A και B, ήτοι

$$A = 0 \ , \ B = 2 \ .$$

Άρα, η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι

$$y_1(t) = 2\sin 4t - 8t\cos 4t \ .$$

17. Σωμάτιο προσαρτημένο στο άκρο κατακορύφου ελατηρίου, του οποίου το άλλο άκρο είναι σταθερό, υφίσταται ταλαντώσεις, σύμφωνα με τη διαφορική εξίσωση,

$$\ddot{y}+4y = 8\sin wt$$

όπου $w>0$ και y η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας. Αν για $t=0$, $y(0) = \dot{y}(0) = \dot{y}(0) = 0$, να βρεθεί η θέση του σωματίου συναρτήσει του χρόνου (διακρίνατε περιπτώσεις). Να βρεθεί η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης για την οποία συμβαίνει συντονισμός.

<u>Λύση</u>

Α) α) $w\neq 2$. Επειδή $w_0=2$, η γενική λύση είναι

$$y(t) = A\cos 2t+B\sin 2t+y_p \quad ,$$

όπου η μερική λύση $y_p(t)$ δίνεται, στην περίπτωση αυτή, από τη σχέση

$$y_p(t) = a\cos wt+b\sin wt \quad .$$

Η αντικατάσταση της μερικής λύσης στη διαφορική εξίσωση δίνει τις σταθερές a και b , ήτοι

$$a = 0 \quad , \quad b = \frac{8}{4-w^2} \quad .$$

'Αρα, η μερική λύση είναι

$$y_p(t) = \frac{8}{4-\omega^2}\sin\omega t \ .$$

Η γενική λύση γράφεται

$$y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{8}{4-\omega^2}\sin\omega t \ .$$

Από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει $A=0$, $B = -\dfrac{4\omega}{4-\omega^2}$.

'Αρα, η λύση είναι

$$y_1(t) = \frac{1}{4-\omega^2}(8\sin\omega t - 4\omega\sin 2t) \ .$$

β) $\omega=2$. Επειδή $\omega=\omega_0=2$, έχουμε συντονισμό. Η μερική λύση είναι τότε

$$y_p(t) = t(a\cos 2t + b\sin 2t) \ .$$

Η αντικατάσταση της $y_p(t)$ στη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{y}+4y = 8\sin 2t$$

δίνει $a=-2$, $b=0$. 'Ετσι η $y_p(t)$ είναι

$$y_p(t) = -2t\cos 2t \ .$$

Η γενική λύση είναι

$$y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t - 2t\cos 2t \ .$$

Η εφαρμογή των αρχικών συνθηκών στη γενική λύση δίνει $A=0$, $B=1$. 'Ετσι, η λύση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες είναι

$$y_1(t) = \sin 2t - 2t\cos 2t \ .$$

B) Η συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης είναι $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$.

Επειδή ο συντονισμός συμβαίνει όταν $\omega=\omega_0=2$, η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης για την οποία συμβαίνει συντονισμός είναι $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$.

18. Σύρμα με εξίσωση $y = \frac{x^2}{2}$ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω περί τον άξονα y, που δείχνει κατακόρυφα προς τα πάνω. Η απόσταση x, ενός σωματίου μάζας m που ολισθαίνει πάνω στο σύρμα, από τον άξονα περιστροφής, ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$(1+x^2)\ddot{x} + (g-\omega^2+\dot{x}^2)x = 0 \ .$$

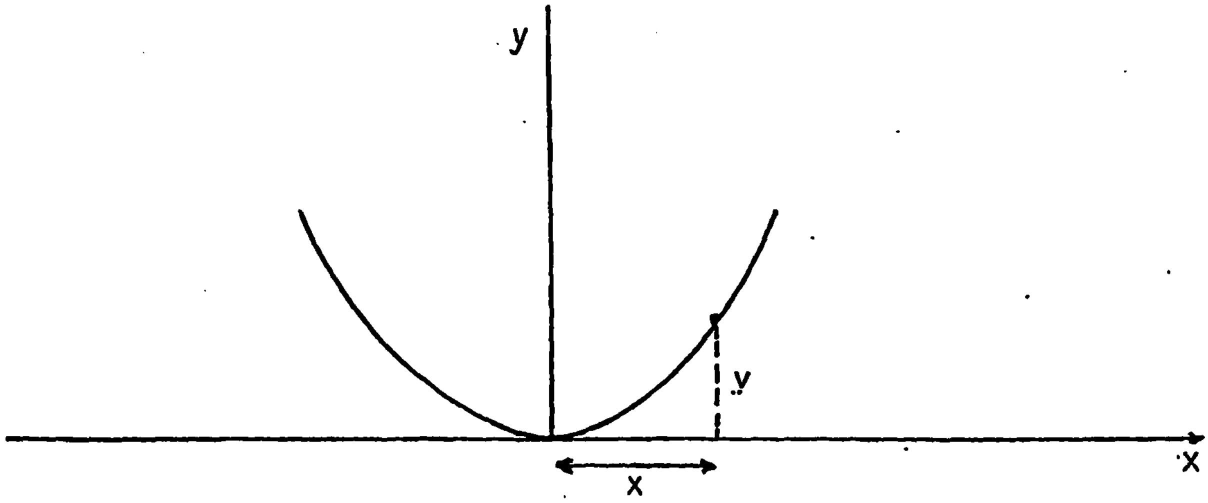
Να βρεθεί η θέση ισορροπίας και να προσδιορισθεί η ευστάθειά της σχετικά προ το σύρμα, αν $g\neq\omega^2$.

Λύση

Το σύστημα δεν είναι συντηρητικό, γιατί εκτός από το βάρος του σωματίου δρουν και οι δυνάμεις αδράνειας, λόγω της περιστροφής του σύρματος, που ως γνωστό δεν είναι συντηρητικές. Μια θέση ισορροπίας είναι τέτοια ώστε $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ και συνεπώς πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$(g-\omega^2)x = 0 \ .$$

Συνεπώς η θέση $x=0$ είναι θέση ισορροπίας, επειδή $g\neq\omega^2$.



Για να εξετάσουμε τη σχετική ευστάθεια, εξετάζουμε πρώτα την κινητική ενέργεια σχετικά προς το σύρμα. Οι συνιστώσες της ταχύτητας του σωματίου σχετικά προς το σύρμα είναι $\dot{x}$ και $\dot{y}$. Άρα

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+x^2\dot{x}^2) = \frac{1}{2}m(1+x^2)\dot{x}^2$$

Τώρα θα βρούμε τη σχέση $\dot{x} = \dot{x}(x)$. Η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται

$$(1+x^2)\frac{d\dot{x}}{dt} + (g-\omega^2+\dot{x}^2)x = 0$$

$$(1+x^2)\frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} + (g-\omega^2+\dot{x}^2)x = 0$$

$$(1+x^2)\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} + (g-\omega^2+\dot{x}^2)x = 0 .$$

Με ολοκλήρωση προκύπτει

$$\dot{x}^2 = \frac{A}{1+x^2} + \omega^2 - g = \dot{x}(x) \;.$$

Η κινητική ενέργεια γράφεται τότε

$$T = \frac{1}{2}m\left[A+(\omega^2-g)(1+x^2)\right] = T(x) \;.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $T=T_0$, όταν $x=0$, έτσι ώστε

$$T_0 = \frac{1}{2}m(A+\omega^2-g)$$

ή

$$A = \frac{2T_0}{m} - \omega^2+g \;.$$

Η διαφορά $T-T_0$ είναι

$$T-T_0 = \frac{1}{2}m\left[(\omega^2-g)x^2\right] \;.$$

Είναι $T<T_0$, για $x\neq 0$, αν $\omega^2<g$ και η θέση $x=0$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας. Αν $\omega^2>g$, για $x\neq 0$, τότε είναι $T>T_0$ και η θέση $x=0$ είναι θέση ασταθούς ισορροπίας.

2

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΟΛΛΟΥΣ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετήσαμε τις ταλαντώσεις μηχανικών συστημάτων με ένα βαθμό ελευθερίας και δείξαμε ότι οι ελεύθερες, χωρίς απόσβεση, ταλαντώσεις χαρακτηρίζονται από μια ιδιοσυχνότητα. Ένα μηχανικό σύστημα μπορεί να έχει πολλούς βαθμούς ελευθερίας και να ταλαντώνεται ελεύθερα, χωρίς απόσβεση, κατά πολλούς τρόπους. Ένα τέτοιο σύστημα χαρακτηρίζεται από πολλές διαφορετικές ιδιοσυχνότητες. Οι χαρακτηριστικές αυτές ταλαντώσεις λέγονται ιδιομορφές ταλάντωσης του συστήματος. Το πρόβλημα που τίθεται είναι να βρούμε τις ιδιομορφές ταλάντωσης και τις ιδιοσυχνότητες. Το κλειδί για τη λύση του προβλήματος βρίσκεται στο γεγονός ότι κάθε σώμα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από πάρα πολλούς αρμονικούς ταλαντωτές (σύστημα ελατηρίου-μάζας) συζευγμένους μεταξύ τους. Ένα ελαστικό σώμα, για παράδειγμα, συνίσταται από πάρα πολλά άτομα ή μόρια. Κάθε άτομο μπορεί να θεωρηθεί ότι συμπεριφέρεται ως ένας αρμονικός ταλαντωτής, που ταλαντώνεται γύρω από μια θέση ισορροπίας. Η κίνηση όμως κάθε ατόμου επηρεάζει τα γειτονικά του άτομα έτσι ώστε, τα άτομα του ελαστικού σώματος να θεωρούνται ότι είναι συζευγμένα μεταξύ τους.

Η μελέτη της ελεύθερης ταλάντωσης του συστήματος δυο συζευγμένων αρμονικών ταλαντώσεων είναι απαραίτητη, γιατί κατά τη μελέτη αυτή θα αναπτύξουμε τις αναγκαίες μεθόδους που απαιτούνται για την εξέταση του προβλήματος ενός μεγάλου πλήθους συζευγμένων ταλαντωτών, και κατ' επέκταση ενός συνεχούς ελαστικού μέσου.

2.2 Ισορροπία και ευστάθεια

Θεωρούμε ένα σωμάτιο στο ανώτερο εξωτερικό σημείο μιας ακίνητης σφαίρας και στο κατώτερο εξωτερικό σημείο αυτής. Προφανώς, ο βαθμός ελευθερίας του σωματίου είναι δυο. Το σωμάτιο μπορεί να ισορροπεί στις θέσεις αυτές και λέμε ότι είναι σε ισορροπία. Η ευστάθεια του σωματίου στις θέσεις αυτές αφορά το τι συμβαίνει στο σωμάτιο, 'οταν του δοθεί μια μικρή ώθηση. Στην πρώτη περίπτωση το σωμάτιο απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας (θέση ασταθούς ισορροπίας), ενώ στη δεύτερη περίπτωση ταλαντώνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας (θέση ευσταθούς ισορροπίας).

Στην §1.7 δώσαμε ένα γενικό ορισμό, που αφορά την ευστάθεια ενός γενικού συστήματος (συντηρητικού ή μη) με οποιονδήποτε βαθμό ελευθερίας, μέσω της κινητικής ενέργειας. Είχαμε βρει ότι για την ευστάθεια θα πρέπει να ισχύει: $T<T_0$, όπου T_0 είναι η κινητική ενέργεια, λόγω ώθησης, στη θέση ισορροπίας και T η κινητική ενέργεια σε οποιαδήποτε άλλη θέση.

Στην περίπτωση συντηρητικού και σκληρόνομου συστήματος με n βαθμούς ελευθερίας και γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2,$

$\cdots ,q_\nu$ η ευστάθεια μπορεί να ορισθεί μέσω της δυναμικής ενέργειας $V(q_1,q_2, \cdots ,q_\nu)$. Έστω V_0 η δυναμική ενέργεια του συστήματος σε μια θέση ισορροπίας και T_0 η κινητική του ενέργεια, λόγω ώθησης, στη θέση ισορροπίας. Επειδή το σύστημα είναι συντηρητικό, θα ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

$$T+V = T_0+V_0 \quad ή \quad T-T_0 = V_0-V \ ,$$

όπου V η δυναμική ενέργεια του συστήματος σε οποιαδήποτε άλλη θέση εκτός από τη θέση ισορροπίας. Για ευσταθή ισορροπία ισχύει $T<T_0$, που συνεπάγεται $V_0<V$. Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια V πρέπει να έχει ελάχιστη τιμή στη θέση ευσταθούς ισορροπίας. Αν η V δεν έχει ελάχιστη τιμή, η θέση ισορροπίας είναι ασταθής.

Οι θέσεις ισορροπίας του συντηρητικού και σκληρόνομου συστήματος η σωματίων βρίσκονται μέσω των γενικευμένων δυνάμεων

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \ , \quad k=1,2,\ldots,\nu$$

όπου F_i οι επιβεβλημένες δυνάμεις που δρουν στο σύστημα και $x_i=x_i(q_k)$ οι σχέσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις γενικευμένες συντεταγμένες.

Για συντηρητικό σύστημα ισχύει, ως γνωστό,

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \ ,$$

και συνεπώς οι γενικευμένες δυνάμεις δίνονται από τις σχέσεις

$$Q_k = - \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} . \qquad (1)$$

Αν το σύστημα ηρεμεί, θα ισχύει

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \ , \quad k=1,2,\ldots,\nu$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτουν οι θέσεις ισορροπίας του συστήματος.

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια του συντηρητικού συστήματος, εργαζόμαστε ως εξής. Αναπτύσσουμε τη δυναμική ενέργεια $V(q_1, \ldots ,q_\nu)$ σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο $(\alpha_1,\alpha_2, \ldots , \alpha_\nu)$, που λαμβάνεται σαν θέση ισορροπίας:

$$V(q_1,q_2,\ldots,q_\nu) = V(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)+\{(q_1-\alpha_1)\frac{\partial V}{\partial q_1} + \cdots +(q_\nu-\alpha_\nu)\frac{\partial V}{\partial q_\nu}\} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\{(q_1-\alpha_1)\frac{\partial V}{\partial q_1} + \cdots +(q_\nu-\alpha_\nu)\frac{\partial V}{\partial q_\nu}\}^2 + \cdots =$$

$$= V(\alpha_1,\cdots,\alpha_\nu)+\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\partial V}{\partial q_j}(q_j-\alpha_j) + \frac{1}{2!}\sum_{j,k=1}^{\nu}\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}(q_j-\alpha_j)(q_k-\alpha_k)+\cdots$$

όπου οι παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο $(q_1 = \alpha_1,\ldots,q_\nu = \alpha_\nu)$. Για μικρές μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας, οι διαφορές $q_1-\alpha_1,\ldots,q_\nu-\alpha_\nu$ είναι μικρές και μπορούμε συνεπώς να απαλείψουμε τους όρους άνω του δευτέρου βαθμού ως πολύ μικρούς σε σύγκριση με τους προηγούμενους όρους. Έτσι έχουμε

$$V(q_1,q_2,\ldots,q_\nu) = V(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)+ \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{\nu}\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}(q_j-\alpha_j)(q_k-\alpha_k) \ ,$$

αφού λάβουμε υπόψη ότι στη θέση ισορροπίας ($q_1 = \alpha_1,\dots,q_\nu = \alpha_\nu$) ισχύει $\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0$; $k=1,2,\dots,\nu$.

Αν τώρα μετατοπίσουμε την αρχή μέτρησης στο σημείο ($\alpha_1,\dots,\alpha_\nu$) , αν δηλαδή θέσουμε $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_\nu = 0$ και εκλέξουμε αυθαίρετα $V(0,0,\dots,0) = 0$, θα έχουμε

$$V(q_1, \dots ,q_\nu) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} q_j q_k \ , \qquad (2)$$

όπου οι παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο ($q_1 = 0, \dots , q_\nu = 0$) . Αν η (2) είναι θετικά ορισμένη, αν δηλαδή για κάθε μη μηδενική νάδα ($q_1, \dots , q_\nu$) η έκφραση

$\sum_{j,k=1}^{\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} q_j q_k > 0$, τότε η θέση ισορροπίας ($q_1=0, q_2=0,\dots,q_\nu = 0$) είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

2.3 Ελεύθερες μη αποσβεννυμένες ταλαντώσεις σκληρόνομων συστημάτων με δυο βαθμούς ελευθερίας

Θεωρούμε ένα σκληρόνομο μηχανικό σύστημα με δυο βαθμούς ελευθερίας του οποίου η θέση προσδιορίζεται πλήρως από τις γενικευμένες συντεταγμένες q_1 και q_2 . Ο προσδιορισμός της κίνησης του συστήματος έγκειται στην εύρεση των συναρτήσεων $q_1 = q_1(t)$ και $q_2 = q_2(t)$. Θα μελετήσουμε τις ελεύθερες μη αποσβεννυμένες ταλαντώσεις ενός τέτοιου συστήματος, δηλαδή θα υποθέσουμε ότι στο σύστημα δεν επιδρούν άλλες επιβεβλημένες δυνάμεις, παρά μόνο δυνάμεις που εμφανίζονται μέσα στο ίδιο το σύστημα. οι μεταβλητές q_1 και q_2 μετρούνται από τη θέση ισορροπίας του συστήματος. Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης θα αποτελούν ένα σύστημα δυο διαφορικών εξισώσεων τέτοιων ώστε κάθε όρος σε κάθε εξίσωση να περιλαμβάνει μόνο τις μεταβλητές q_1 , q_2 ή τις παραγώγους τους. Αφού υποθέσαμε ότι στο σύστημα δεν δρουν δυνάμεις απόσβεσης, οι πρώτες παράγωγοι των q_1 και q_2 δεν θα εμφανίζονται.

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$\begin{aligned} a\ddot{q}_1 + bq_1 + cq_2 &= 0 \ , \\ f\ddot{q}_2 + gq_2 + hq_1 &= 0 \ , \end{aligned} \tag{3}$$

όπου a,b,c,f,g και h είναι σταθερές. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (3) περιέχει έναν όρο ως προς q_2 και η δεύτερη έναν όρο ως προς q_1 . Οι (3) δεν μπορούν να λυθούν ανεξάρτητα η μια από την άλλη, αλλά συγχρόνως. Ενα τέτοιο σύστημα λέγεται συζευγμένο. Μια μέθοδος λύσης του διαφορικού συστήματος (3) είναι να απαλείψουμε το q_1 ή το q_2 . Για παράδειγμα, αντικαθιστώντας την τιμή του q_2 από την $(3)_1$ στην $(3)_2$ προκύπτει η γραμμική διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξης ως προς q_1

$$afq_1^{(4)} + (ag+bf)\ddot{q}_1 + (bg-ch)q_1 = 0 \ ,$$

από την οποία μπορεί να προσδιορισθεί το $q_1(t)$ και μετά να βρεθεί το $q_2(t)$ από την $(3)_1$.

Μια άλλη μέθοδος, που συνήθως εφαρμόζεται, είναι να υποθέσουμε μια λύση του συστήματος (3) και με άμεση αντικατάσταση αυτής στις (3) να δικαιολογήσουμε την ύπαρξή της. Επειδή περιμένουμε ότι το μηχανικό σύστημα θα εκτελέσει κάποιας μορφής ταλάντωση, υποθέτουμε λύση της μορφής

$$q_1 = A_1 \cos\omega t \quad , \quad q_2 = A_2 \cos\omega t \tag{4}$$

και εξετάζουμε αν υπάρχουν πραγματικές τιμές των A_1, A_2 και ω για τις οποίες η (4) είναι λύση του συστήματος (3). Τα A_1 και A_2 λέγονται πλάτη και το ω ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης. Η αντικατάσταση των (4), στις (3) δίνει το ομογενές γραμμικό σύστημα ως προς A_1 και A_2 :

$$\begin{aligned} &(b-\alpha\omega^2)A_1+cA_2 = 0 \ , \\ &hA_1+(g-f\omega^2)A_2 = 0 \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Για μη μηδενική λύση του συστήματος (5), πρέπει

$$\begin{vmatrix} b-\alpha\omega^2 & c \\ h & g-f\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Αυτή είναι μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς ω^2 ,

$$f\alpha\omega^4 - (g\alpha+bf)\omega^2 + (bg-ch) = 0 \ ,$$

που λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος. Άρα, αν η (4) είναι λύση του συστήματος (3), το ω πρέπει να ικανοποιεί τη χαρακτηριστική εξίσωση. Αν ω_1^2 και ω_2^2 είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής, τότε υπάρχουν δυο θετικές πραγματικές τιμές του ω, έστω ω_1 και ω_2, που λέγονται ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του συστήματος. Οι λύσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2 λέγονται ιδιομορφές ταλάντωσης.

Από τις (5) παίρνουμε τη σχέση μεταξύ των A_1 και A_2:

$$\text{όταν } \omega = \omega_1 \,, \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{\alpha\omega_1^2 - b}{c} \,,$$

και (6)

$$\text{όταν } \omega = \omega_2 \,, \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{\alpha\omega_2^2 - b}{c} \,.$$

Άρα, παίρνουμε τις δυο ιδιομορφές ταλάντωσης:

$$(\alpha) \quad q_1 = A_1\cos\omega_1 t \,, \quad q_2 = A_1 \left(\frac{\alpha\omega_1^2 - b}{c}\right) \cos\omega_1 t$$

(7)

$$(\beta) \quad q_1 = A_1^{+}\cos\omega_2 t \,, \quad q_2 = A_1^{+} \left(\frac{\alpha\omega_2^2 - b}{c}\right)\cos\omega_2 t \,.$$

Επειδή το μέγεθος του πλάτους είναι αυθαίρετο και προσδιορίζεται μόνο από τις αρχικές συνθήκες, χρησιμοποιήσαμε δυο διαφορετικά σύμβολα (δηλ. τα A_1 και A_1^{+}) για να δηλώσουμε τα πλάτη που συνδέονται με τις ιδιομορφές ταλάντωσης.

Αν υποθέταμε λύση της μορφής

$$q_1 = A_1\sin\omega t \,, \quad q_2 = A_2\sin\omega t \,,$$

θα προέκυπταν οι ίδιες ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2 και οι δυο επιπλέον ιδιομορφές ταλάντωσης:

$$(\gamma) \quad q_1 = A_1^{++}\sin\omega_1 t \,, \quad q_2 = A_1^{++} \left(\frac{\alpha\omega_1^2 - b}{c}\right) \sin\omega_1 t \,,$$

(8)

$$(\delta) \quad q_1 = A_1^{+++} \sin\omega_2 t \,, \quad q_2 = A_1^{+++} \left(\frac{\alpha\omega_2^2 - b}{c}\right) \sin\omega_2 t \,.$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε ιδιομορφή ταλάντωσης, τα q_1 και

q_2 ταλαντώνονται με την ίδια ιδιοσυχνότητα, γεγονός που αποτελεί το χαρακτηριστικό των ιδιομορφών ταλάντωσης του συστήματος. Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε ιδιομορφή παριστάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

Επειδή οι (3) είναι γραμμικές, η γενική λύση δίνεται από το άθροισμα των τεσσάρων ιδιομορφών ταλάντωσης

$$q_1(t) = A_1\cos\omega_1 t + A_1^{+}\cos\omega_2 t + A_1^{++}\sin\omega_1 t + A_1^{+++}\sin\omega_2 t \ , \tag{9}$$

$$q_2(t) = A_1 \left(\frac{\alpha\omega_1^2-b}{c}\right)\cos\omega_1 t + A_1^{+}\left(\frac{\alpha\omega_2^2-b}{c}\right)\cos\omega_2 t + A_1^{++}\left(\frac{\alpha\omega_1^2-b}{c}\right)\sin\omega_1 t + A_1^{+++}\left(\frac{\alpha\omega_2^2-b}{c}\right)\sin\omega_2 t \ ,$$

όπου οι αυθαίρετες σταθερές A_1, A_1^{+}, A_1^{++} και A_1^{+++} προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή από τις τιμές $q_1(0)$, $q_2(0)$, $\dot{q}_1(0)$ και $\dot{q}_2(0)$. Επειδή γενικά οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης ω_1 και ω_2 είναι διαφορετικές, η γενική λύση δεν παριστάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

Οι ιδιομορφές ταλάντωσης (8) συγκρινόμενες με τις ιδιομορφές (7) δεν περιγράφουν ουσιαστικά νέες φυσικές καταστάσεις. Ο σκοπός της εισαγωγής τους έγκειται κυρίως στον προσδιορισμό της γενικής κίνησης του συστήματος (9), στην οποία εμφανίζονται αναγκαστικά τέσσαρες αυθαίρετες σταθερές, όσες απαιτούνται για τη λύση του διαφορικού συστήματος (3). Μπορούμε να πούμε ότι ο αριθμός των ιδιομορφών ταλάντωσης ισούται με το βαθμό ελευθερίας του συστήματος. Αυτό προκύπτει, αν υποθέσουμε λύση της μορφής

$$q_1 = A_1\cos(\omega t-\delta) \ , \quad q_2 = A_2\cos(\omega t-\delta) \ ,$$

όπου A_1, A_2, ω και δ είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. Η αντικατάσταση της λύσης στις διαφορικές εξισώσεις κίνησης (3) δίνει το ίδιο αλγεβρικό σύστημα (5) και τις ίδιες ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης ω_1 και ω_2 . Οι λύσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοσυχνότητες $\omega=\omega_1$ και $\omega=\omega_2$ είναι οι ιδιομορφές ταλάντωσης του συστήματος.

Όταν $\omega=\omega_1$, η πρώτη ιδιομορφή ταλάντωσης είναι

$$q_1 = A_1\cos(\omega_1 t-\delta_1)\ ,\quad q_2 = A_1\left(\frac{\alpha\omega_1^2-b}{c}\right)\cos(\omega_1 t-\delta_1)\ .$$

Όταν $\omega=\omega_2$, η δεύτερη ιδιομορφή ταλάντωσης είναι

$$q_1 = \overset{+}{A}_1\cos(\omega_2 t-\delta_2)\ ,\quad q_2 = \overset{+}{A}_1\left(\frac{\alpha\omega_2^2-b}{c}\right)\cos(\omega_2 t-\delta_2)\ .$$

Η γενική λύση των (3) είναι

$$q_1 = A_1\cos(\omega_1 t-\delta_1) + \overset{+}{A}_1\cos(\omega_2 t-\delta_2)\ ,$$

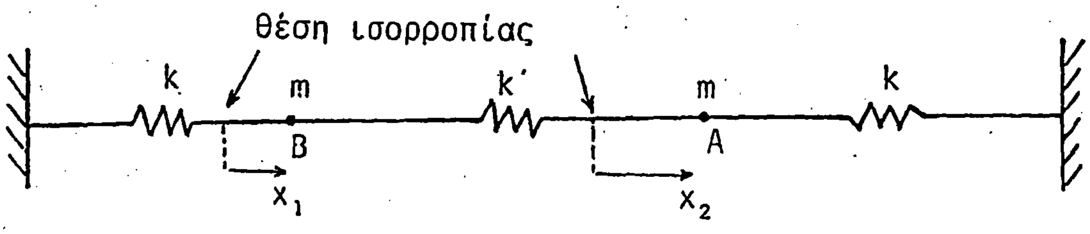
$$q_2 = A_1\left(\frac{\alpha\omega_1^2-b}{c}\right)\cos(\omega_1 t-\delta_1) + \overset{+}{A}_1\left(\frac{\alpha\omega_2^2-b}{c}\right)\cos(\omega_2 t-\delta_2)\ ,$$

όπου A_1, $\overset{+}{A}_1$, δ_1 και δ_2 είναι τέσσαρες αυθαίρετες σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Σημειώνουμε ότι η λύση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες είναι ακριβώς ίδια είτε χρησιμοποιήσουμε τέσσαρες ιδιομορφές ταλάντωσης είτε δύο. Η απόδειξη ότι ο αριθμός των ιδιομορφών ταλάντωσης συμπίπτει με το βαθμό ελευθερίας του συστήματος δίνεται στην § 8.

2.4 Σύστημα δυο συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών

Σαν εφαρμογή της § 3 θα μελετήσουμε τις ελεύθερες και μη αποσβεννυμένες ταλαντώσεις του συντηρητικού και σκληρόνομου

συστήματος με δυο βαθμούς ελευθερίας που αποτελείται από δυο όμοιους αρμονικούς ταλαντωτές, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους μέσω ενός ελατηρίου σταθεράς k' , σχ. 15 .
Το σύστημα του σχ. 15 αποτελείται από δυο σωμάτια Α και Β με μάζα m και τα οποία συνδέονται με ένα ελατήριο σταθεράς k . Τα σωμάτια συνδέονται μεταξύ τους με ένα τρίτο ελατήριο σταθεράς k' Υποθέτουμε ότι οι μάζες των ελατηρίων παραλείπονται ως πολύ



Σχ. 15

μικρές σε σύγκριση με τη μάζα των σωματίων. Επίσης, το αρχικό (απαραμόρφωτο) μήκος του μεσαίου ελατηρίου είναι ℓ και ότι στη θέση ισορροπίας του συστήματος το ελατήριο αυτό δεν υφίσταται επιμήκυνση ή σμίκρυνση. Θεωρούμε ότι τα ακραία ελατήρια, στη θέση ισορροπίας του συστήματος, δεν υφίστανται επιμήκυνση ή σμίκρυνση. Παίρνουμε σαν γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος τις μετατοπίσεις των σωματίων x_1 και x_2 από τις θέσεις ισορροπίας τους.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 \quad . \qquad (10)$$

Η δυναμική ενέργεια V του συστήματος είναι το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών των τριών ελατηρίων. Η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στο αριστερό ελατήριο με σταθερά k και μεταβολή μήκους x_1 είναι $\frac{1}{2}kx_1^2$. Ομοίως, η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στο δεξιό ελατήριο είναι $\frac{1}{2}kx_2^2$. Η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στο μεσαίο ελατήριο, βρίσκεται ως εξής. Αν το σωμάτιο Β παραμείνει ακίνητο στη θέση ισορροπίας και μετατοπίσουμε το σωμάτιο Α κατά x_2 από τη θέση ισορροπίας προς τα δεξιά, η απόσταση μεταξύ των σωματίων θα είναι $\ell+x_2$. Κρατάμε τώρα το σωμάτιο Α ακίνητο και μετατοπίζουμε το σωμάτιο Β κατά x_1 από τη θέση ισορροπίας προς τα δεξιά. Η απόσταση μεταξύ των σωματίων θα είναι τότε $\ell+x_2-x_1$. Η μεταβολή του μήκους του μεσαίου ελατηρίου, δηλαδή η διαφορά της αρχικής απόστασης ℓ του ελατηρίου αυτού από την τελική απόσταση $\ell+x_2-x_1$ αυτού, είναι x_2-x_1. Άρα, η δυναμική ενέργεια του μεσαίου ελατηρίου είναι $\frac{1}{2}k'(x_2-x_1)^2$. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k'(x_2-x_1)^2 . \qquad (11)$$

Η συνάρτηση Lagrange του συστήματος είναι

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}k'(x_2-x_1)^2 = L(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2) . \qquad (12)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \ , \quad m\ddot{x}_1 = -kx_1+k'(x_2-x_1) \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \ , \quad m\ddot{x}_2 = -kx_2-k'(x_2-x_1) \ ,$$

ή

$$\ddot{x}_1 + \frac{k+k'}{m}x_1 - \frac{k'}{m}x_2 = 0 \ ,$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{k+k'}{m}x_2 - \frac{k'}{m}x_1 = 0 \ . \qquad (13)$$

Το σύστημα (13) είναι συζευγμένο. Μια κίνηση που δίνεται στο σωμάτιο Α επηρεάζει το σωμάτιο Β και αντίστροφα. Παρατηρούμε ότι αν δεν υπήρχε το μεσαίο ελατήριο ($k'= 0$), οι (13) θα ήταν ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σωμάτιο θα εκτελούσε απλή αρμονική ταλάντωση με την ίδια ιδιοσυχνότητα. Σύμφωνα με την §3, υποθέτουμε λύση της μορφής

$$x_1 = A_1\cos\omega t \ , \quad x_2 = A_2\cos\omega t \ ,$$

ή

$$x_1 = A_1\sin\omega t \ , \quad x_2 = A_2\sin\omega t \ , \qquad (14)$$

όπου A_1 και A_2 είναι τα πλάτη των σωματίων Β και Α αντίστοιχα και εξετάζουμε αν υπάρχουν τιμές των A_1, A_2 και ω για τις οποίες η (14) είναι λύση του συστήματος (13). Αντικαθιστώντας τις (14) στις (13), παίρνουμε το γραμμικό ομογενές σύστημα ως προς τα άγνωστα πλάτη A_1 και A_2

$$\left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right)A_1 - \frac{k'}{m}A_2 = 0 \ ,$$

$$-\frac{k'}{m}A_1 + \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right)A_2 = 0 \ . \qquad (15)$$

Για μη μηδενική λύση του συστήματος (15) πρέπει

$$\begin{vmatrix} \frac{k+k'}{m} - \omega^2 & -\frac{k'}{m} \\ -\frac{k'}{m} & \frac{k+k'}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Αυτή είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος, από την οποία παίρνουμε τις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης ω_0 και ω' :

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} , \quad \omega' = \left(\frac{k+2k'}{m}\right)^{1/2} = (\omega_0^2+2\omega_c^2)^{1/2} \tag{16}$$

όπου $\omega_c^2 = \frac{k'}{m}$.

Ο λόγος των πλατών είναι :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ , για } \omega = \omega_0 ,$$

και (17)

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{-1}{1} = -1 \text{ , για } \omega = \omega' .$$

Οι τέσσερες ιδιομορφές ταλάντωσης είναι:

(α) $x_1 = A_1\cos\omega_0 t$, $x_2 = A_1\cos\omega_0 t$,

(β) $x_1 = A_1^{+}\cos\omega' t$, $x_2 = -A_1^{+}\cos\omega' t$,

(18)

(γ) $x_1 = A_1^{++}\sin\omega_0 t$, $x_2 = A_1^{++}\sin\omega_0 t$,

(δ) $x_1 = A_1^{+++}\sin\omega' t$, $x_2 = -A_1^{+++}\sin\omega' t$.

Επειδή το μέγεθος του πλάτους είναι αυθαίρετο και προσδιορίζεται μόνο από τις αρχικές συνθήκες, χρησιμοποιήσαμε τέσσερα διαφορετικά σύμβολα (δηλ. A_1, A_1^{+}, A_1^{++} και A_1^{+++}) για να δηλώσουμε τα πλάτη που συνδέονται με τις ιδιομορφές ταλάντωσης.

Επειδή $\frac{x_2}{x_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{1} = 1$, για $\omega = \omega_0$, στις ιδιομορφές (α) ή (γ) οι δυο μάζες εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με την ίδια περίοδο, το ίδιο πλάτος και κινούνται στην ίδια κατεύθυνση.

Επειδή $\frac{x_2}{x_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{-1}{1} = -1$, για $\omega = \omega'$, στις ιδιομορφές (β) ή (δ) οι δυο μάζες εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με την ίδια περίοδο, το ίδιο πλάτος και κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Από τις (18) παρατηρούμε ότι η ταλάντωση με ιδιοσυχνότητα ω_0 είναι τέτοια ώστε $x_1 = x_2$ και η ιδιομορφή λέγεται συμμετρική. Η ταλάντωση με ιδιοσυχνότητα ω' είναι τέτοια ώστε $x_1 = -x_2$ και η ιδιομορφή λέγεται αντισυμμετρική.

Η γενική λύση του συστήματος (13) είναι

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos\omega_0 t + A_1^{+}\cos\omega' t + A_1^{++}\sin\omega_0 t + A_1^{+++}\sin\omega' t \ , \\ x_2 &= A_1\cos\omega_0 t - A_1^{+}\cos\omega' t + A_1^{++}\sin\omega_0 t - A_1^{+++}\sin\omega' t \ , \end{aligned} \qquad (19)$$

όπου A_1, A_1^{+}, A_1^{++} και A_1^{+++} είναι αυθαίρετες σταθερές, που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή από τις τιμές των $x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_1(0)$ και $\dot{x}_2(0)$.

2.5 Κανονικές συντεταγμένες

Στην § 4 βρήκαμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης (13). Αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε τις (13) κατά μέλη, παίρνουμε

$$\begin{aligned} (\ddot{x_1+x_2}) + \omega_0^2(x_1+x_2) &= 0 \ , \\ (\ddot{x_1-x_2}) + \omega'^2(x_1-x_2) &= 0 \ . \end{aligned} \qquad (20)$$

Κάθε μια από τις (20) παριστάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Στην $(20)_1$, η μεταβλητή είναι x_1+x_2 και η συχνότητα είναι ω_0 . Στην $(20)_2$, η μεταβλητή είναι x_1-x_2 και η συχνότητα είναι ω'. Αυτές οι συχνότητες είναι ίσες με τις δυο ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του

συστήματος (§ 4).
Εισάγουμε δυο νέες ανεξάρτητες συντεταγμένες u_1 και u_2, που συνδέονται με τις γενικευμένες συντεταγμένες x_1 και x_2, μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού,

$$u_1 = x_1+x_2 \ , \ u_2 = x_1-x_2 \ . \tag{21}$$

Οι συντεταγμένες u_1 και u_2 χαρακτηρίζουν την κίνηση του μηχανικού συστήματος σαν σύνολο.
Από τις (20) και (21) παίρνουμε δυο ανεξάρτητες (μη συζευγμένες) διαφορικές εξισώσεις κίνησης, ως προς u_1 και u_2

$$\ddot{u}_1+\omega_0^2 u_1 = 0 \ , \quad \ddot{u}_2+\omega'^2 u_2 = 0 \ . \tag{22}$$

Μία λύση των (22), με μηδενικές αρχικές φάσεις, είναι

$$\begin{aligned} u_1 &= A\cos\omega_0 t \ , \\ u_2 &= B\cos\omega' t \ , \end{aligned} \tag{23}$$

όπου οι αυθαίρετες σταθερές A και B προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Οι (23) είναι δυο ανεξάρτητες ταλαντώσεις, που περιγράφουν με διαφορετικό τρόπο τις ιδιομορφές ταλάντωσης του συστήματος. Οι νέες συντεταγμένες u_1 και u_2 λέγονται κανονικές συντεταγμένες.

Η λύση, συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων x_1 και x_2, είναι

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 = \frac{1}{2}A\cos\omega_0 t + \frac{1}{2}B\cos\omega' t \ , \\ x_2 &= \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 = \frac{1}{2}A\cos\omega_0 t - \frac{1}{2}B\cos\omega' t \ . \end{aligned} \tag{24}$$

Η λύση (24) είναι ίδια με τη λύση που προκύπτει από τις δυο πρώτες ιδιομορφές (18).

Αν $A=0$, οι δυο μάζες ταλαντώνονται με ιδιοσυχνότητα ω'. Αν $B=0$, οι δυο μάζες ταλαντώνονται με ιδιοσυχνότητα ω_0.

Σαν γενικό συμπέρασμα μπορούμε να πούμε ότι μια κανονική συντεταγμένη είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός των γενικευμένων συντεταγμένων του μηχανικού συστήματος. Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης ως προς τις κανονικές συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες (μη συζευγμένες). Υπάρχει ακριβώς μια ιδιοσυχνότητα συνδεδεμένη με κάθε μια κανονική συντεταγμένη.

2.6 Προσδιορισμός κανονικών συντεταγμένων σκληρόνομου συστήματος με δυο βαθμούς ελευθερίας

Για σκληρόνομο μηχανικό σύστημα με δυο βαθμούς ελευθερίας και γενικευμένες συντεταγμένες q_1 και q_2 βρήκαμε ότι

$$\frac{q_1}{q_2}=\frac{A_1}{A_2}=\begin{cases} c_1 , & \text{για } \omega=\omega_1 \\ c_2 , & \text{για } \omega=\omega_2 \end{cases}$$

Οι νέες συντεταγμένες u_1 και u_2, που ορίζονται από τις σχέσεις

$$u_1 = q_1+c_1q_2 , \qquad u_2 = q_1+c_2q_2 ,$$

πρέπει να είναι οι κανονικές συντεταγμένες του συστήματος. Πράγματι, για το σύστημα των δυο συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών, όπου $c_1=1$, $c_2=-1$, οι κανονικές συντεταγμένες είναι $u_1=q_1+q_2$, $u_2=q_1-q_2$ (βλ. §5) και όπου οι γενικευμένες συντεταγμένες συνέπιπταν με τις καρτεσιανές.

2.7 Εξαναγκασμένες μη αποσβεννυμένες ταλαντώσεις των δυο συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών - Συντονισμός

Υποθέτουμε ότι μια εξωτερική περιοδική δύναμη $F_0\cos\omega t$, με πλάτος F_0 και γωνιακή συχνότητα ω εφαρμόζεται στο σωμάτιο Α του συστήματος των δυο συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών (σχ. 15). Η εμπειρία μας λέει ότι, όταν η γωνιακή συχνότητα ω της εξωτερικής δύναμης τείνει προς μια ιδιοσυχνότητα του συστήματος, τα πλάτη της ταλάντωσης θα γίνουν πάρα πολύ μεγάλα. Στο συμπέρασμα αυτό είχαμε καταλήξει σε ανάλογη περίπτωση του πρώτου κεφαλαίου. Για το λόγο αυτό, η μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος θα είναι στενά συνδεδεμένη με τη μελέτη του αναλόγου προβλήματος του απλού αρμονικού ταλαντωτή, που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης (13) γίνονται τότε

$$\ddot{x}_1 + \frac{k+k'}{m} x_1 - \frac{k'}{m} x_2 = 0 \ ,$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{k+k'}{m} x_2 - \frac{k'}{m} x_1 = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \ . \qquad (25)$$

Η $(25)_1$ είναι η διαφορική εξίσωση κίνησης του Β και συμπίπτει με την $(13)_1$, που βρήκαμε στην περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης. Η $(25)_2$ είναι η διαφορική εξίσωση κίνησης του Α που διαφέρει από την $(13)_2$ μόνο στον όρο $F_0\cos\omega t$.

Αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε τις (25) κατά μέλη, παίρνουμε

$$(\ddot{x_2+x_1})+\omega_0^2(x_2+x_1) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \ ,$$

$$(\ddot{x_2-x_1})+\omega_*^2(x_2-x_1) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \ , \qquad (26)$$

όπου $\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$, $\omega' = \left(\frac{k+2k'}{m}\right)^{1/2}$ είναι οι γνωστές ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του συστήματος (βλ. (16)).
Με την εισαγωγή των κανονικών συντεταγμένων

$$u_1 = x_2+x_1 \ , \quad u_2 = x_2-x_1 \ , \tag{27}$$

οι (26) γράφονται

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1+\omega_0^2 u_1 &= \frac{F_0}{m}\cos\omega t \ , \\ \ddot{u}_2+\omega'^2 u_2 &= \frac{F_0}{m}\cos\omega t \ . \end{aligned} \tag{28}$$

Έτσι το πρόβλημα ανάγεται στην περίπτωση δυο ανεξάρτητων αρμονικών ταλαντωτών με ιδιοσυχνότητες ω_0 και ω' (βλ. § 1.5). Οι λύσεις σταθερής κατάστασης (μερικές λύσεις των (28)) περιγράφονται από τις εξισώσεις (βλ. § 1.5)

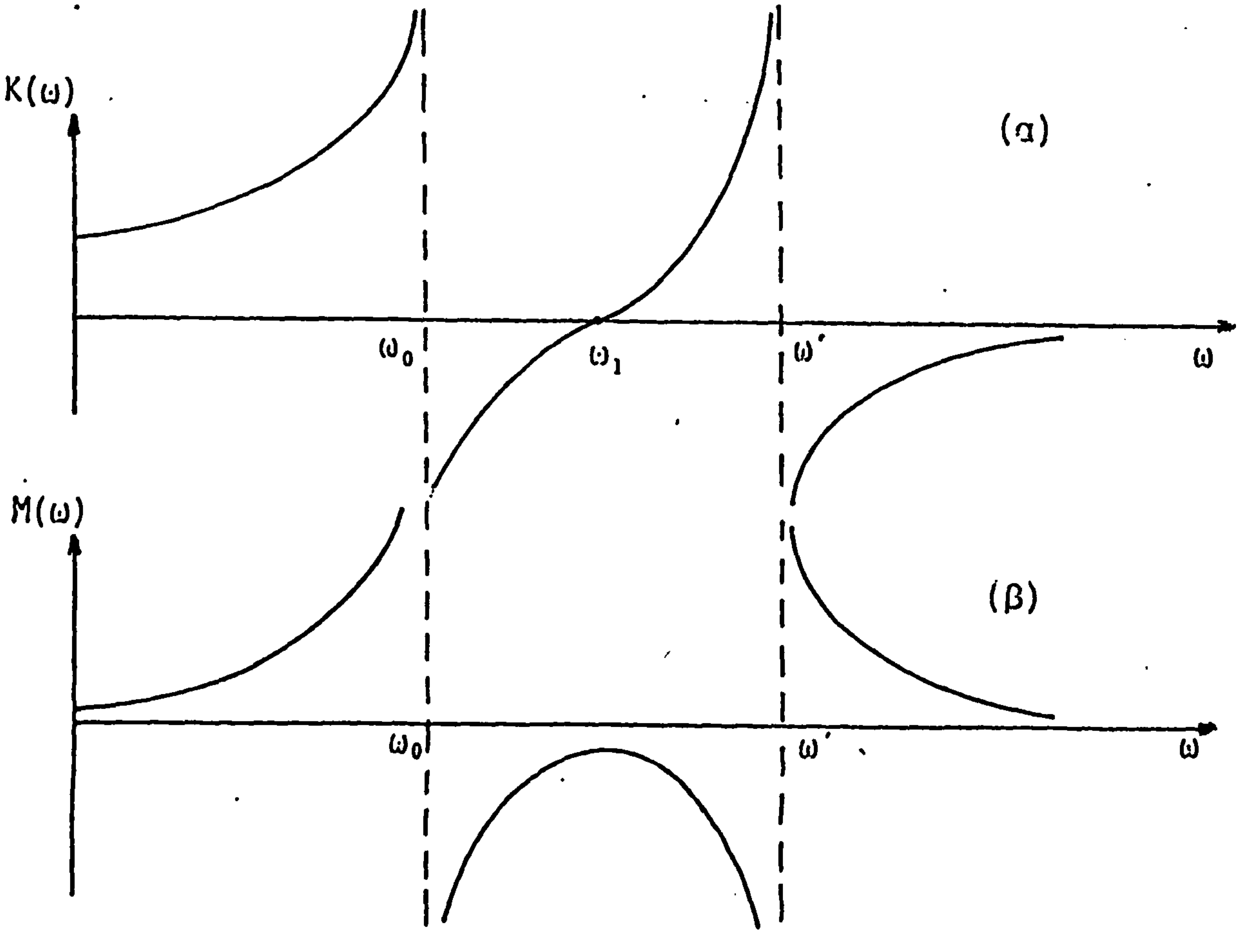
$$u_1 = C_1\cos\omega t \ , \quad u_2 = C_2\cos\omega t \ , \tag{29}$$

όπου $C_1 = C_1(\omega) = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$ και $C_2 = C_2(\omega) = \dfrac{F_0}{m(\omega'^2-\omega^2)}$ είναι τα πλάτη των λύσεων σταθερής κατάστασης.
Παρατηρούμε ότι, όταν $\omega\to\omega_0$ (ή $\omega\to\omega'$), το πλάτος $C_1\to\infty$ (ή το πλάτος $C_2\to\infty$), που σημαίνει ότι τότε βρισκόμαστε στην περίπτωση του συντονισμού.
Από τις (27) , έχουμε.

$$x_2 = \frac{1}{2}(u_1+u_2) = \frac{1}{2}(C_1+C_2)\cos\omega t = K\cos\omega t \ ,$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(u_1-u_2) = \frac{1}{2}(C_1-C_2)\cos\omega t = M\cos\omega t \ ,$$

όπου K και M είναι τα πλάτη των σωματίων A και B αντίστοιχα. Αυτά δίνονται από τις σχέσεις,



Σχ. 16

$$K = K(\omega) = \frac{F_0}{m}\,\frac{\frac{1}{2}(\omega_0^2+\omega'^2)-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)(\omega'^2-\omega^2)} = \frac{F_o}{m}\,\frac{(\omega_0^2+\omega_c^2)-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)(\omega'^2-\omega^2)} \,,$$

$$M = M(\omega) = \frac{F_0}{m}\,\frac{\frac{1}{2}(\omega'^2-\omega_0^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)(\omega'^2-\omega^2)} = \frac{F_0}{m}\,\frac{\omega_c^2}{(\omega_0^2-\omega^2)(\omega'^2-\omega^2)} \,, \qquad (30)$$

όπου $\omega'^2 = \omega_0^2+2\omega_c^2$ και $\omega_c^2 = \frac{k'}{m}$.

Η μεταβολή των πλατών Κ και Μ των σωματίων Α και Β αντίστοιχα συναρτήσει του ω φαίνεται στο σχ. 16.
Παρατηρούμε ότι, όταν η γωνιακή συχνότητα ω λάβει την τιμή

$$\omega_1 = \left(\frac{\omega_o^2+\omega'^2}{2}\right)^{1/2} , \quad \omega_o < \omega_1 < \omega' ,$$ έχουμε $K=0$ και $M\neq 0$.

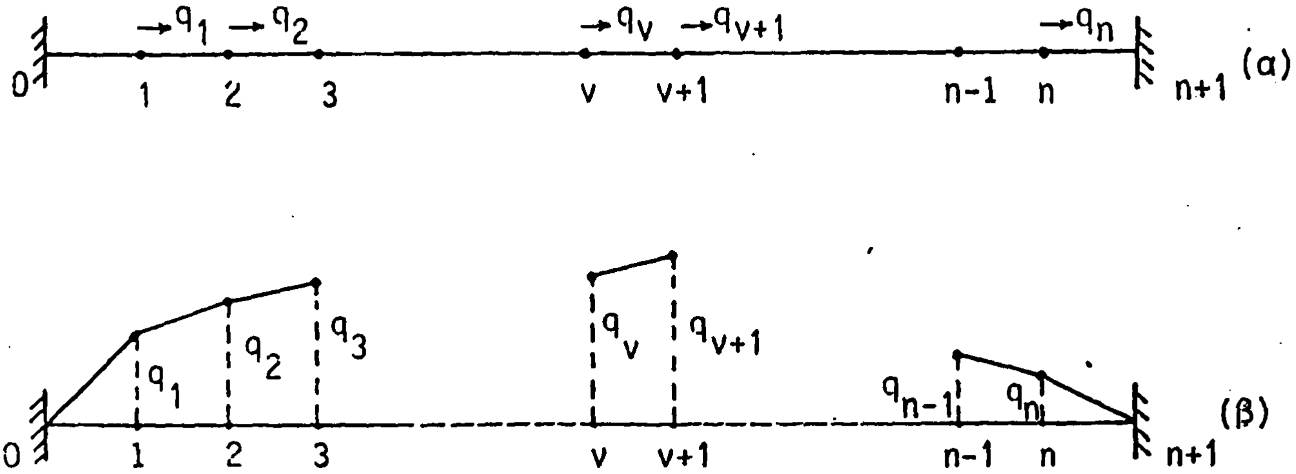
2.8 Σύστημα η συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών

Αναφέρθηκε ότι κάθε ελαστικό σώμα περιέχει πάρα πολλά σωμάτια συζευγμένα μεταξύ τους. Είναι λοιπόν φυσικό να ασχοληθούμε με το πρόβλημα των πολλών ομοίων συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών και η μέχρι τώρα ανάπτυξη του παρόντος κεφαλαίου μας δίνει τη δυνατότητα να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα. Η μελέτη ενός τέτοιου συστήματος θα μας οδηγήσει στις ταλαντώσεις ενός ελαστικού μέσου και τελικά στην ανάλυση των μηχανικών κυμάτων.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε λεπτομερώς με τη δυναμική ενός συστήματος πολλών συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών, για μονοδιάστατη κίνηση, ήταν ο J. Bernoulli.

Εδώ θα εξετάσουμε τις ελεύθερες μη αποσβεννυμένες ταλαντώσεις η συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών, δηλαδή θα θεωρήσουμε μια ομογενή, αβαρή, ελαστική χορδή, στην οποία είναι προσαρτημένα η σωμάτια, καθένα μάζας m, τα οποία απέχουν μεταξύ τους κατά h. Η χορδή στερεώνεται σε δυο σταθερά σημεία, τα οποία απέχουν κατά h από το πρώτο και το η-στο σωμάτιο αντίστοιχα (Σχ. 17).

Τα σωμάτια αριθμούνται από το 1 έως το η, ή από το 0 έως το η+1, αν θεωρήσουμε τα δυο σταθερά άκρα της χορδής ως σωμάτια μηδενικής μετατόπισης. Στην § 4 μελετήσαμε τις διαμήκεις ταλαντώσεις του συστήματος δυο συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών, όπου τα σωμάτια μετατοπίζονται κατά μήκος της γραμμής που τα συνδέει. Η μελέτη είναι ίδια για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις, όπου τα σωμάτια μετατοπίζονται κάθετα προς τη γραμμή που τα συνδέει. Στη συγκεκριμένη περίπτωση (Σχ. 17), θα υποθέσουμε ότι οι ταλαντώσεις είναι μόνο διαμήκεις ή μόνο εγκάρσιες. Ας σημειωθεί ότι με τις εγκάρσιες ταλαντώσεις έχουμε καλλίτερη εποπτεία. Για μικρές εγκάρσιες μετατοπίσεις, δηλαδή για q μικρά συγκρινόμενα με το h , υποθέτουμε ότι η αρχική τάση παραμένει σταθερή κατά την ταλάντωση των σωματίων. Οι μετατοπίσεις $q_1, q_2, \ldots, q_n$ των σωματίων από τις θέσεις ισορροπίας τους λαμβάνονται ως οι γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος.



Σχ. 17 (α) Διαμήκης ταλάντωση των σωματίων
(β) Εγκάρσια ταλάντωση των σωματίων

Ο στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε τις μετατοπίσεις $q_1, q_2, \ldots, q_n$ συναρτήσει του χρόνου t , δηλαδή τις συναρτήσεις

$$q_1 = q_1(t)\ ,\ q_2 = q_2(t), \ldots, q_n = q_n(t)\ . \tag{31}$$

Χρησιμοποιούμε το γράμμα ν για να συμβολίσουμε το τυχόν σωμάτιο του συστήματος.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n} m\dot{q}_\nu^2 \ , \qquad (32)$$

όπου $q_0=0$, γιατί το σωμάτιο 0 είναι ακίνητο.

Στην περίπτωση που έχουμε διαμήκη ταλάντωση, η μεταβολή του μήκους του τμήματος της χορδής μεταξύ των σωματίων ν και ν+1 είναι $\Delta\ell_1 = q_{\nu+1}-q_\nu$. Η δυναμική ενέργεια του τμήματος αυτού είναι

$$V_1 = \int_0^{\Delta\ell_1} T dy = \int_0^{\Delta\ell_1} K y dy = \frac{1}{2}K(q_{\nu+1}-q_\nu)^2 \ ,$$

όπου T=Ky είναι η τάση της χορδής που αντιστοιχεί στη μεταβολή y του μήκους της (νόμος του Hooke) και K η σταθερά της ομογενούς χορδής.

Στην περίπτωση που έχουμε εγκάρσια ταλάντωση, η απόσταση μεταξύ των σωματίων ν και ν+1 είναι

$$\left\{h^2+(q_{\nu+1}-q_\nu)^2\right\}^{1/2} .$$

Επειδή υποθέτουμε μικρές εγκάρσιες ταλαντώσεις, η απόσταση μεταξύ των σωματίων ν και ν+1 είναι, σύμφωνα με το διωνυμικό ανάπτυγμα, κατά προσέγγιση

$$\left\{h^2+(q_{\nu+1}-q_\nu)^2\right\}^{1/2} = h + \frac{1}{2h}(q_{\nu+1}-q_\nu)^2 \ ;$$

Συνεπώς η μεταβολή του τμήματος της χορδής μεταξύ των σωματίων

ν και ν+1 είναι, κατά προσέγγιση, $\Delta\ell_2 = \frac{1}{2h}(q_{\nu+1}-q_\nu)^2$.
Η δυναμική ενέργεια του τμήματος αυτού είναι

$$V_2 = \int_0^{\Delta\ell_2} S dy = S\Delta\ell_2 = \frac{S}{2h}(q_{\nu+1}-q_\nu)^2 ,$$

όπου η τάση S παραμένει σταθερή για μικρές εγκάρσιες ταλαντώσεις, σύμφωνα με την υπόθεση που κάναμε.

Η ολική δυναμική ενέργεια της χορδής, για τη διαμήκη ταλάντωση, είναι

$$V_3 = \frac{K}{2}\sum_{\nu=0}^{n}(q_{\nu+1}-q_\nu)^2 \ , \quad q_0 = q_{n+1} = 0 \ ,$$

όπου $q_{n+1}=0$, επειδή το σωμάτιο n+1 είναι ακίνητο .

Η ολική δυναμική ενέργεια της χορδής, για την εγκάρσια ταλάντωση, είναι

$$V_4 = \frac{S}{2h}\sum_{\nu=0}^{n}(q_{\nu+1}-q_\nu)^2 \ , \quad q_0 = q_{n+1} = 0 \ .$$

Παρατηρούμε ότι οι δυναμικές ενέργειες V_3 και V_4 έχουν την ίδια μορφή και συνεπώς μπορούν να παρασταθούν με την εξίσωση

$$V = \frac{k}{2}\sum_{\nu=0}^{n}(q_{\nu+1}-q_\nu)^2 \ , \tag{33}$$

όπου για k=K έχουμε διαμήκη ταλάντωση και για $k = \frac{S}{h}$ έχουμε εγκάρσια ταλάντωση.

Η συνάρτηση Lagrange του συστήματος είναι

$$L = \frac{1}{2}\,m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dots + \dot{q}_n^2) - \frac{k}{2}\left[q_1^2 + (q_2-q_1)^2 + \dots + (q_n-q_{n-1})^2 + q_n^2\right] ,$$

ή (34)

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}\left[m\dot{q}_\nu^2 - k(q_{\nu+1}-q_\nu)^2\right] .$$

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος - εξισώσεις Lagrange β'είδους $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = 0$, $\nu = 1,2,\dots,n$ - γράφονται

$$m\ddot{q}_1 + kq_1 - k(q_2-q_1) = 0 \;,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$m\ddot{q}_n + k(q_n-q_{n-1}) + kq_n = 0 \,.$$

Συνοπτικά, αυτές γράφονται

$$m\ddot{q}_\nu + k(q_\nu-q_{\nu-1}) - k(q_{\nu+1}-q_\nu) = 0 \;,$$

ή (35)

$$\ddot{q}_\nu + 2\omega_0^2 q_\nu - \omega_0^2(q_{\nu+1}+q_{\nu-1}) = 0 \;,\quad \nu=1,2,\dots,n \;,$$

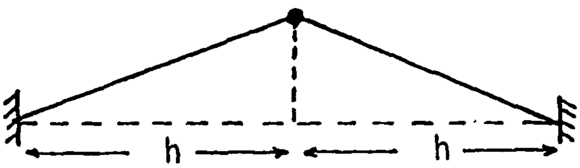
όπου $q_0 = q_{n+1} = 0$ και $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Συνεπώς έχουμε ένα ομογενές σύστημα n γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές το οποίο είναι συζευγμένο.

Στην περίπτωση που υπάρχει μόνο ένα σωμάτιο στη χορδή (n=1) η (35) γράφεται

$$\ddot{q}_1+2\omega_0^2q_1 = 0 \quad ,$$

όπου $q_2=0$, γιατί δεν υπάρχει δεύτερο σωμάτιο. Η εξίσωση αυτή παριστάνει αρμονική ταλάντωση με ιδιοσυχνότητα $\omega = \sqrt{2}\omega_0$. Αν η ταλάντωση είναι εγκάρσια, η ιδιοσυχνότητα είναι $\omega = \sqrt{\frac{2S}{mh}}$ και η ιδιομορφή ταλάντωσης φαίνεται στο σχ. 18



Σχ. 18 n=1, $\omega = \sqrt{\frac{2S}{mh}}$. Μία ιδιομορφή ταλάντωσης

Στην περίπτωση που υπάρχουν δυο σωμάτια στη χορδή (n=2), η (35) δίνει τις εξισώσεις

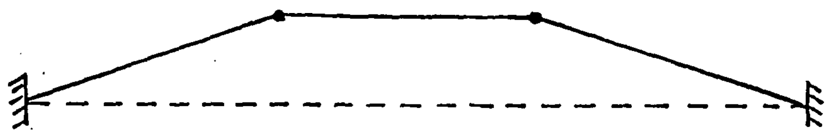
$$\ddot{q}_1+2\omega_0^2q_1-\omega_0^2q_2 = 0 \quad ,$$

$$\ddot{q}_2+2\omega_0^2q_2-\omega_0^2q_1 = 0 \quad ,$$

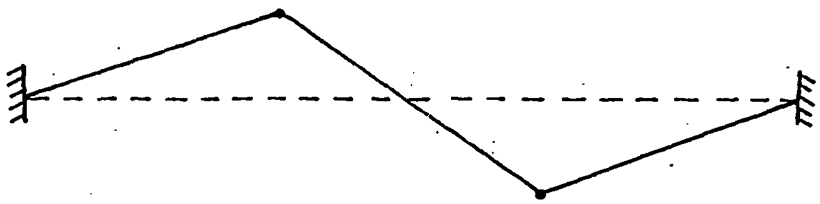
όπου $q_3=0$, γιατί δεν υπάρχει τρίτο σωμάτιο. Οι εξισώσεις αυτές είναι ακριβώς ίδιες με τις (13), για το σύστημα των δυο συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών (§ 4) που εκτελεί διαμήκεις ταλαντώσεις, με την παρατήρηση ότι τώρα στις (13) θα ισχύει k'=k . Οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του συστήματος των δυο σωματίων στη χορδή δίνονται μέσω των (16): $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega'=\sqrt{3}\ \omega_0 = \sqrt{3\frac{k}{m}}$. Αν η ταλάντωση είναι εγκάρσια, οι ιδιοσυχνότητες είναι $\omega_0 = \sqrt{\frac{S}{mh}}$,

$\omega' = \sqrt{\dfrac{3S}{mh}}$ και οι δυο ιδιομορφές ταλάντωσης φαίνονται στο σχ. 19. [Πράγματι, για την εγκάρσια ταλάντωση θα έχουμε ιδιομορφές ανάλογες με τις ιδιομορφές $(18)_{1,2}$

και για $\omega = \omega_0 = \sqrt{\dfrac{S}{mh}}$ τα σωμάτια θα ταλαντώνονται με την ίδια περίοδο, το ίδιο πλάτος και στην ίδια κατεύθυνση, ενώ για $\omega = \omega' = \sqrt{\dfrac{3S}{mh}}$ θα ταλαντώνονται με την ίδια περίοδο, το ίδιο πλάτος και σε αντίθετες κατευθύνσεις].



Σχ. 19(α) η=2 , $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{S}{mh}}$ Πρώτη ιδιομορφή ταλάντωσης



Σχ. 19(β) η=2 , $\omega' = \sqrt{\dfrac{3S}{mh}}$ Δεύτερη ιδιομορφή ταλάντωσης

Ας επανέλθουμε τώρα στο σύστημα (35). Για τη λύση του συστήματος αυτού θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μέθοδο. Υποθέτουμε λύση της μορφής

$$q_\nu = \alpha_\nu \cos\omega t \quad , \quad \nu = 1,2,\ldots,n \quad , \qquad (36)$$

τέτοια ώστε κάθε σωμάτιο να ταλαντώνεται με την ίδια συχνότητα ω, όπου α_ν είναι το πλάτος του ν-οστού σωματίου. Τα α_ν και ω πρέπει να προσδιορισθούν.
Από τις (35) και (36) παίρνουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, ως προς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$(-\omega^2+2\omega_o^2)\alpha_\nu-\omega_o^2(\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu+1}) = 0 \; , \quad \nu = 1,2,\ldots,n \qquad (37)$$

Επειδή $q_0 = q_{n+1} = 0$, από την (36) έχουμε τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος

$$\alpha_0 = \alpha_{n+1} = 0 \; . \qquad (38)$$

Το σύστημα (37) γράφεται αναλυτικά

$$\begin{aligned}
(-\omega^2+2\omega_o^2)\alpha_1-\omega_o^2\alpha_2 \qquad\qquad &= 0 \; , \\
-\omega_o^2\alpha_1+(-\omega^2+2\omega_o^2)\alpha_2-\omega_o^2\alpha_3 &= 0 \; , \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad &= 0 \; , \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad & \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad & \\
-\omega_o^2\alpha_{n-1}+(-\omega^2+2\omega_o^2)\alpha_n &= 0 \; .
\end{aligned}$$

Για λύση του συστήματος διαφορετική της μηδενικής, πρέπει

$$\begin{vmatrix}
(-\omega^2+2\omega_0^2) & -\omega_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\
-\omega_0^2 & (-\omega^2+2\omega_0^2) & -\omega_0^2 & \cdots & 0 \\
 & & & & \\
 & & & & \\
0 & \cdots & & -\omega_0^2 & (-\omega^2+2\omega_0^2)
\end{vmatrix} = 0 \; , \qquad (39)$$

που είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος. Η (39) είναι n-οστού βαθμού ως προς ω^2. Αν ω_1^2, ω_2^2, ... , ω_n^2 είναι οι ρίζες της (39), τότε υπάρχουν n θετικές πραγματικές τιμές του ω, έστω $\omega_1, \omega_2, \ldots,$ ω_n, που είναι οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του συστήματος. Επειδή η λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι δύσκολη, ιδιαίτερα όταν ο αριθμός των σωματίων είναι πολύ μεγάλος, δεν θα επιχειρήσουμε να τη λύσουμε, αλλά θα χρησιμοποιήσουμε ένα τέχνασμα για τον προσδιορισμό των ιδιοσυχνοτήτων. Υποθέτουμε ότι το πλάτος του ν-οστού σωματίου μπορεί να εκφρασθεί με τη μορφή

$$\alpha_\nu = A\sin\nu\theta\ , \tag{40}$$

όπου θ είναι κάποια γωνία και A σταθερά. Για τα πλάτη των σωματίων ν−1 και ν+1, θα έχουμε από την (40)

$$\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu+1} = A[\sin(\nu-1)\theta+\sin(\nu+1)\theta] = 2A\sin\theta\cos\theta\ .$$

Η (37) τότε δίνει

$$(-\omega^2+2\omega_0^2)A\sin\nu\theta = 2\omega_0^2A\sin\nu\theta\cos\theta\ ,$$

από την οποία προσδιορίζεται το ω:

$$\omega = 2\omega_0\sin\frac{\theta}{2} \tag{41}$$

Η (41) δίνει τις ιδιοσυχνότητες συναρτήσει της γωνίας θ, η οποία πρέπει να προσδιορισθεί. Πρέπει να πούμε εδώ ότι θα προέκυπτε η ίδια σχέση (41), αν είχαμε χρησιμοποιήσει τη σχέση $\alpha_\nu = A\cos\nu\theta$ ή τη σχέση $\alpha_\nu = Ae^{i\nu\theta}$. Όμως, χρησιμοποιούμε τη (40), γιατί μόνο αυτή ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $\alpha_0=0$. Για να προσδιορίσουμε την τιμή της γωνίας θ, χρησιμοποιούμε τη συνοριακή συνθήκη $\alpha_{n+1} = 0$. Από την (40) έχουμε

$$\alpha_{n+1} = A\sin(n+1)\theta ,$$

και η συνθήκη $\alpha_{n+1} = 0$ ικανοποιείται αν

$$\theta = \frac{N\pi}{n+1}, \quad N = 1,2,3,\ldots . \tag{42}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή της γωνίας θ στη (40) παίρνουμε

$$\alpha_{\nu} = A\sin\left(\frac{\nu N\pi}{n+1}\right). \tag{43}$$

Οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης δίνονται από τη (41), μέσω της (42),

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left[\frac{N\pi}{2(n+1)}\right]. \tag{44}$$

Από τη (44) παρατηρούμε ότι οι ιδιοσυχνότητες εξαρτώνται από το φυσικό αριθμό N. Συνεπώς, πρέπει να συμβολίσουμε την ιδιοσυχνότητα και κατ'επέκταση την ιδιομορφή με το γράμμα N. 'Ετσι, οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης δίνονται από τη σχέση

$$\omega_N = 2\omega_0 \sin\left[\frac{N\pi}{2(n+1)}\right] . \tag{45}$$

Είναι χεχονός ότι η κίνηση ενός δοθέντος σωματίου εξαρτάται τόσο από τον αριθμό ν που φέρει κατά μήκος της χορδής όσο και από τον αριθμό N της ιδιομορφής . Το πλάτος της κίνησης του σωματίου μπορεί, συνεπώς, να χραφεί

$$\alpha_{\nu N} = A_N \sin\left(\frac{\nu N\pi}{n+1}\right) , \tag{46}$$

όπου A_N ορίζει το πλάτος με το οποίο διεγείρεται η συγκεκριμένη ιδιομορφή N . Η μετατόπιση του ν-οστού σωματίου, όταν το σύστημα ταλαντώνεται με τη N-οστή ιδιομορφή, προσδιορίζεται από τη σχέση

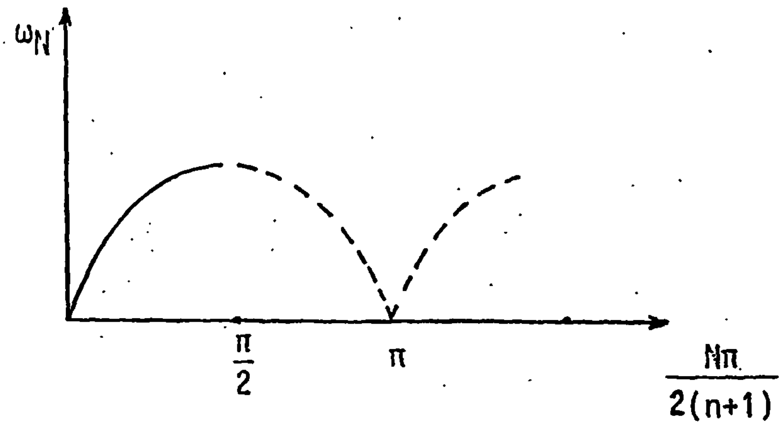
$$q_{\nu N}(t) = \alpha_{\nu N}\cos\omega_N t\,, \qquad (47)$$

όπου ω_N και $\alpha_{\nu N}$ δίνονται από τις (45) και (46) αντίστοιχα. Γενικά, μπορούμε στη θέση των (47) να έχουμε τις σχέσεις

$$q_{\nu N}(t) = \alpha_{\nu N}\cos(\omega_N t - \delta_N)\,, \qquad (47)_1$$

όπου δ_N είναι η αρχική φάση κάθε ιδιομορφής. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να ικανοποιήσουμε αυθαίρετες αρχικές μετατοπίσεις και ταχύτητες των σωματίων του συστήματος. Οι $(47)_1$ είναι οι ιδιομορφές ταλάντωσης του συστήματος.

Επειδή ο N παίρνει άπειρες θετικές ακέραιες τιμές, θα υπάρχουν και άπειρες ιδιοσυχνότητες; Για το σύστημα των δυο συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών δείξαμε ότι υπάρχουν μόνο δυο ιδιοσυχνότητες. Θα δείξουμε ότι για το σύστημα των n συζευγμένων ταλαντωτών υπάρχουν ακριβώς n ιδιοσυχνότητες. Από την (45), η μεταβολή του ω_N συναρτήσει του $\frac{N\pi}{2(n+1)}$, ($\omega_N > 0$) φαίνεται στο σχ. 20 .



Σχ. 20

Όταν το N μεταβάλλεται από το 1 μέχρι το n, παίρνουμε n διαφορετικές ιδιοσυχνότητες $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Για $N = n+1$, που αντιστοιχεί στο $\frac{\pi}{2}$, έχουμε τη μέγιστη ιδιοσυχνότητα $\omega_{max} = 2\omega_0$. Από την (46) όμως διαπιστώνουμε ότι, για $N = n+1$, όλα τα πλάτη $\alpha_{\nu N}$ μηδενίζονται, δηλαδή στη μέγιστη ιδιοσυχνότητα δεν αντιστοιχεί μια δυνατή κίνηση. Για $N = n+2$, μπορεί να δειχθεί ότι $\omega_{n+2} = \omega_n$. Επίσης, αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι σχέσεις $\omega_{n+3} = \omega_{n-1}$, $\omega_{n+4} = \omega_{n-2}$ κ.τ.λ. , δηλαδή ξαναπαίρνουμε τις ιδιοσυχνότητες $\omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_1$. 'Αρα, υπάρχουν ακριβώς n ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης.

<u>Πράγματι</u> , για $N = n+2$, η (45) γράφεται

$$\omega_{n+2} = 2\omega_0 \sin\left[\frac{(n+2)\pi}{2(n+1)}\right]$$

$$= 2\omega_0 \sin\left[\pi - \frac{n\pi}{2(n+1)}\right] = 2\omega_0 \sin\left[\frac{n\pi}{2(n+1)}\right] = \omega_n \, .$$

Τίθεται τώρα το ερώτημα. Πόσες είναι οι ιδιομορφές ταλάντωσης του συστήματος; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα δοθεί από τη σχέση (46). Αρκεί να δείξουμε ότι τα πλάτη των σωματίων, σε μια ιδιομορφή ταλάντωσης, επαναλαμβάνονται. Για παράδειγμα, από την (46), για $N=n+2$ έχουμε

$$\alpha_{\nu,n+2} = A_{n+2}\sin\left(\frac{\nu(n+2)\pi}{n+1}\right) = A_{n+2}\sin\left(2\nu\pi - \frac{\nu n\pi}{n+1}\right)$$

$$= - A_{n+2}\sin\left(\frac{\nu n\pi}{n+1}\right) = - \frac{A_{n+2}}{A_n}\,\alpha_{\nu,n} \, .$$

'Αρα, το πλάτος του ν-οστού σωματίου στην ιδιομορφή n+2 είναι ανάλογο του πλάτους του ν-οστού σωματίου στην ιδιομορφή n, γιατί ο λόγος $\frac{A_{n+2}}{A_n}$ είναι σταθερός για δοσμένο αριθμό σωματίων n.

Μπορεί επίσης να δειχθεί ότι ανάλογες σχέσεις ισχύουν για κάθε $N>n+1$. Αυτό σημαίνει ότι η(46) για $N>n$ δεν περιγράφει ουσιαστικά κάποια νέα φυσική κατάσταση. 'Αρα, οι ιδιομορφές ταλάντωσης του συστήματος είναι πλήθους n. Η γενική κίνηση του συστήματος είναι ένας γραμμικός συνδυασμός όλων των ιδιομορφών ταλάντωσης και δίνονται από τη σχέση

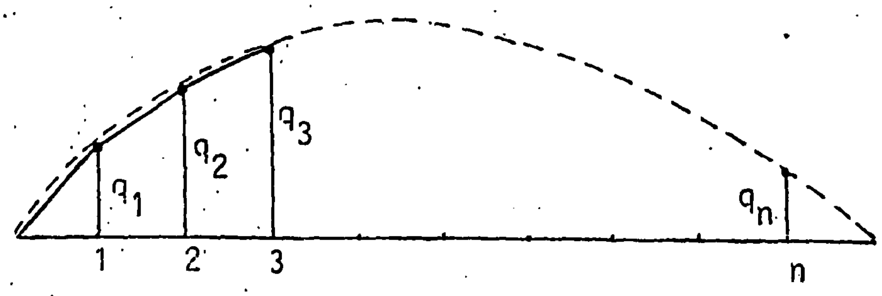
$$q_\nu(t) = \sum_{N=1}^{n} A_N \sin\left(\frac{\nu N\pi}{n+1}\right)\cos(\omega_N t-\delta_N) ,$$

όπου A_N και δ_N είναι 2n αυθαίρετες σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Θα εξετάσουμε τώρα πώς φαίνεται η πρώτη ιδιομορφή (N=1). Από τη (47) παίρνουμε τις μετατοπίσεις των σωματίων του συστήματος

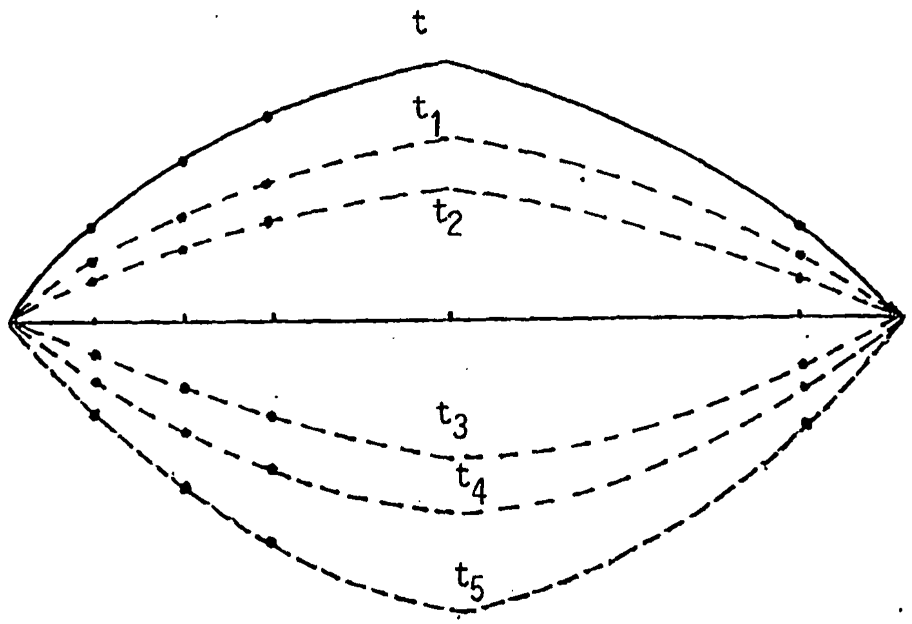
$$q_{\nu 1}(t) = \alpha_{\nu 1}\cos\omega_1 t = A_1 \sin\left(\frac{\nu\pi}{n+1}\right)\cos\omega_1 t \ , \ (\nu=1,2,\ldots,n) .$$

Παρατηρούμε ότι για κάποιο t = σταθ. και για όλα τα σωμάτια του συστήματος, ο όρος $A_1\cos\omega_1 t$ είναι ο ίδιος. Το μόνο που διακρίνει τις μετατοπίσεις των διαφορετικών σωματίων του συστήματος είναι ο όρος $\sin\left(\frac{\nu\pi}{n+1}\right)$. Η καμπύλη του σχ. 21 παριστάνει τη μεταβολή του $\sin\left(\frac{\nu\pi}{n+1}\right)$ συναρτήσει του ν, τα δε σωμάτια είναι στις θέσεις που ορίζονται από τις τιμές ν=1,2,...,n και συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα της χορδής.



Σχ. 21

Με τη μεταβολή του χρόνου, κάθε σωμάτιο ταλαντώνεται εγκάρσια με την ίδια ιδιοσυχνότητα ω_1. Στο σχ. 22 φαίνονται μερικές ημιτονοειδείς καμπύλες σε διαφορετικούς χρόνους και οι θέσεις μερικών σωματίων του συστήματος.



Σχ. 22

Κατά τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να πάρουμε ανάλογα σχήματα για τις ιδιομορφές $N = 2,3, \ldots ,n$ για εγκάρσιες ταλαντώσεις.

Η ίδια ανάλυση εφαρμόζεται, όπως είπαμε, και στην περίπτωση των διαμήκων ταλαντώσεων του συστήματος. Θα ήταν πάντως προτιμότερο αν, αντί της χορδής, συνδέαμε τα n σωμάτια με όμοια ελατήρια κατά μήκος μιας ευθείας, για τη μελέτη των διαμήκων ταλαντώσεων. Και αυτό γιατί ένα σύνολο ατόμων ενός κρυστάλλου που σχηματίζουν μια ευθεία γραμμή παριστάνεται με ένα τέτοιο μοντέλο.

Είναι σημαντικό να εξετάσουμε τις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης, όταν ο αριθμός n των σωματίων του συστήματος είναι πολύ μεγάλος, σε σύγκριση με τον αριθμό N της ιδιομορφής. Για παράδειγμα, μια χορδή αποτελείται από πάρα πολλά σωμάτια, που απέχουν ελάχιστα μεταξύ τους. Τότε, η απόσταση h μεταξύ των διαδοχικών σωματίων θα είναι πολύ μικρή, το μήκος όμως της χορδής παραμένει σταθερό και ίσο με $\ell = (n+1)h$. Θα πρέπει να ελαττώσουμε επίσης τη μάζα κάθε σωματίου, ώστε η ολική μάζα nm να είναι σταθερή. Αν λοιπόν το n είναι πολύ μεγάλο, οι ιδιοσυχνότητες (45) μπορούν να γραφούν, κατά προσέγγιση,

$$\omega_N = N\frac{\pi\omega_o}{n+1}$$

Επειδή για $N=1$, $\omega_1 = \dfrac{\pi\omega_o}{n+1}$, προκύπτει

$$\omega_N = N\omega_1 \quad , \tag{48}$$

που σημαίνει ότι οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης είναι ακέραια πολλαπλάσια της μικρότερης ιδιοσυχνότητας ω_1.

Για εγκάρσιες ταλαντώσεις, $\omega_o = \sqrt{\dfrac{S}{mh}}$, και συνεπώς οι ιδιοσυχνότητες είναι, κατά προσέγγιση

$$\omega_N = \sqrt{\frac{S}{mh}}\;\frac{N\pi}{n+1} = \sqrt{\frac{S}{m/h}}\;\frac{N\pi}{(n+1)h} = \sqrt{\frac{S}{\rho}}\;\frac{N\pi}{\ell} \;,$$

όπου $\rho = m/h$ η γραμμική πυκνότητα της χορδής. Άρα, οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης είναι, κατά προσέγγιση,

$$\omega_N = N\,\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{S}{\rho}} \;.$$

Για $N=1$, $\omega_1 = \dfrac{\pi}{\ell}\sqrt{\dfrac{S}{\rho}}$ και συνεπώς οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης είναι ακέραια πολλαπλάσια της μικρότερης ιδιοσυχνότητας ω_1,

$$\omega_N = N\omega_1 \;. \tag{49}$$

Είναι προφανές ότι οι σχέσεις (48) και (49) γίνονται πιο ακριβείς, καθώς ο αριθμός n των σωματίων αυξάνει.

Στην περίπτωση που ο αριθμός των σωματίων είναι πολύ μεγάλος, μπορούμε να προσδιορίσουμε την απόσταση x του σωματίου ν από το σταθερό άκρο της χορδής, αντί να συμβολίζουμε το σωμάτιο με την τιμή του ν. Η απόσταση x συνδέεται με το σωμάτιο ν μέσω της σχέσης

$$x = \nu h .$$

Ισχύει

$$\frac{\nu N\pi}{n+1} = \frac{\nu N\pi h}{(n+1)h} = \frac{N\pi x}{\ell} .$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να γράψουμε $q_N(x,t)$, στη θέση του $q_{\nu N}(t)$. Με το συμβολισμό $q_N(x,t)$ εννοούμε τη μετατόπιση q του σωματίου που βρίσκεται στη θέση x στο χρόνο t, όταν η χορδή ταλαντώνεται με την N-οστή ιδιομορφή. Η σχέση (47) γράφεται τότε

$$q_N(x,t) = A_N \sin\left(\frac{N\pi x}{\ell}\right)\cos\omega_N t ,$$

ή γενικότερα $\qquad N=1,2,\ldots$

$$q_N(x,t) = A_N \sin\left(\frac{N\pi x}{\ell}\right)\cos(\omega_N t-\delta_N) .$$

Καθώς ο αριθμός των σωματίων τείνει στο ∞, οι τιμές x που προσδιορίζουν τη θέση των σωματίων πλησιάζουν πάρα πολύ μεταξύ τους και έτσι το x γίνεται μια συνεχής μεταβλητή που παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, \ell]$. Η συνεχής καμπύλη στο Σχ. 22 παριστάνει το πραγματικό σχήμα της χορδής, όταν αυτή ταλαντώνεται με μια ιδιομορφή. Παρατηρούμε από την (45) ότι, όταν ο αριθμός της ιδιομορφής συμπίπτει με τον αριθμό των σωματίων (N=n), προκύπτει η μεγίστη τιμή της ιδιοσυχνότητας. Όταν επιπλέον το n είναι πολύ μεγάλο, η μεγίστη ιδιοσυχνότητα είναι κατά προσέγγιση

$$\omega_{max} = 2\omega_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}\right) = 2\omega_0 .$$

Είναι αυτονόητο ότι, όταν $n\to\infty$, ο αριθμός των ιδιομορφών ταλάντωσης της χορδής είναι άπειρος, δηλαδή η χορδή μπορεί να ταλαντώνεται κατά άπειρους τρόπους. Η πραγματική κίνηση της χορδής προσδιορίζεται πλήρως από τη σχέση

$$q(x,t) = \sum_{N=1}^{\infty} A_N \sin\left(\frac{N\pi x}{\ell}\right)\cos(\omega_N t-\delta_N) ,$$

που αποτελεί τη σύνθεση (υπέρθεση) όλων των ιδιομορφών ταλάντωσης της χορδής.

2.9 Ελεύθερες μη αποσβεννυμένες ταλαντώσεις συντηρητικών και σκληρόνομων συστημάτων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας.

Θεωρούμε ένα σκληρόνομο συντηρητικό σύστημα με n σωμάτια, ν βαθμούς ελευθερίας και γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \dots , q_\nu$. Γνωρίζουμε ότι η κινητική του ενέργεια T είναι τετραγωνική συνάρτηση των γενικευμένων ταχυτήτων $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots ,\dot{q}_\nu$ και δίνεται από τη σχέση

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{\nu} \mu_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k , \qquad (50)$$

όπου

$$\mu_{jk} = \sum_{i=1}^{3n} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \mu_{jk}(q_1, \dots ,q_\nu) ,$$

οι καρτεσιανές συντεταγμένες x_i συνδέονται με τις γενικευμένες μέσω των σχέσεων

$$x_i = x_i(q_1,q_2, \dots ,q_\nu) , \quad (i = 1,2, \dots ,3n)$$

και οι συντελεστές μ_{jk} είναι, όπως φαίνεται, συμμετρικοί

$$\mu_{jk} = \mu_{kj} .$$

Αν υποθέσουμε ότι η θέση $q_1 = q_2 = \ldots = q_\nu = 0$ είναι μια θέση ισορροπίας και αναπτύξουμε κατά Taylor τη συνάρτηση μ_{jk} γύρω από αυτή τη θέση, θα έχουμε

$$\mu_{jk}(q_1, \ldots, q_\nu) = \mu_{jk}(0, \ldots, 0) + \left[q_1 \frac{\partial \mu_{jk}}{\partial q_1} + \ldots + q_\nu \frac{\partial \mu_{jk}}{\partial q_\nu} \right] + \ldots .$$

Επειδή ενδιαφερόμαστε για μικρές μετατοπίσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας, η παραπάνω σχέση δίνει κατά προσέγγιση

$$\mu_{jk}(q_1, \ldots, q_\nu) = \mu_{jk}(0, \ldots, 0) \doteq \text{σταθ.}$$ = σταθ

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος $V(q_1, \ldots, q_\nu)$ δίνεται από τη (2)

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{\nu} K_{jk}\, q_j q_k ,$$

όπου

$$K_{jk} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}$$

και οι παράγωγοι υπολογίζονται στη θέση ισορροπίας. Προφανώς, οι συντελεστές K_{jk} είναι συμμετρικοί και σταθεροί

$$K_{jk} = K_{kj} = \text{σταθ.} .$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{\nu} (\mu_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - K_{jk}q_jq_k) \qquad (51)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης, $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, γράφονται

$$\mu_{11}\ddot{q}_1 + K_{11}q_1 + \mu_{21}\ddot{q}_2 + K_{21}q_2 + \ldots + \mu_{\nu 1}\ddot{q}_\nu + K_{\nu 1}q_\nu = 0 \ ,$$

$$\mu_{12}\ddot{q}_1 + K_{12}q_1 + \mu_{22}\ddot{q}_2 + K_{22}q_2 + \ldots + \mu_{\nu 2}\ddot{q}_\nu + K_{\nu 2}q_\nu = 0 \ ,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\mu_{1\nu}\ddot{q}_1 + K_{1\nu}q_1 + \mu_{2\nu}\ddot{q}_2 + K_{2\nu}q_2 + \ldots + \mu_{\nu\nu}\ddot{q}_\nu + K_{\nu\nu}q_\nu = 0 \ ,$$

ή συνοπτικά

$$\sum_{j=1}^{\nu} (\mu_{jk}\ddot{q}_j + K_{jk}q_j) = 0 \ . \qquad (52)$$

Αυτές αποτελούν ένα συζευγμένο ομογενές σύστημα ν γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με ν αγνώστους $q_1, \ldots, q_\nu$. Όπως εργαστήκαμε σε ανάλογες περιπτώσεις, υποθέτουμε λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$q_j = A_j\cos\omega t \ , \quad (j = 1,2, \ldots ,\nu) \ . \qquad (53)$$

Η αντικατάσταση της λύσης στις (52) δίνει

$$\sum_{j=1}^{\nu} (-\mu_{jk}\omega^2 + K_{jk})A_j = 0 \ , \quad (k=1,2, \ldots ,\nu) \ , \qquad (54)$$

που αποτελεί ένα ομογενές γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με αγνώστους $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$.
Για λύση του συστήματος (54) διαφορετική από τη μηδενική, πρέπει

$$\begin{vmatrix} -\mu_{11}\omega^2+K_{11} & -\mu_{12}\omega^2+K_{12} & \cdots & -\mu_{1\nu}\omega^2+K_{1\nu} \\ -\mu_{21}\omega^2+K_{21} & -\mu_{22}\omega^2+K_{22} & \cdots & -\mu_{2\nu}\omega^2+K_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\mu_{\nu1}\omega^2+K_{\nu1} & -\mu_{\nu1}\omega^2+K_{\nu2} & \cdots & -\mu_{\nu\nu}\omega^2+K_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0\,, \quad (55)$$

που είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος. Η (55) είναι ν-οστού βαθμού ως προς ω^2 και συνεπώς υπάρχουν ν τιμές του ω^2 που την πληρούν. Οι ν θετικές ρίζες της είναι οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του συστήματος.

Από την Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι, αν οι συντελεστές α_{jk} και b_{jk} δυο τετραγωνικών μορφών $\sum_{j,k=1}^{\nu} \alpha_{jk}x_jx_k$, $\sum_{j,k=1}^{\nu} b_{jk}x_jx_k$ είναι συμμετρικοί

$$\alpha_{jk} = \alpha_{kj}\,, \quad b_{jk} = b_{kj}$$

και μια από αυτές είναι θετικά ορισμένη, τότε υπάρχει ένα σύνολο συντεταγμένων $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, που δίνονται μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού

$$x_k = \sum_{j=1}^{\nu} C_{kj}u_j\,, \quad (C_{kj} = \text{σταθερές, πλήθους } \nu^2,\ k=1,2,\ldots,\nu)$$

τέτοιο ώστε κάθε τετραγωνική μορφή να ανάγεται σε άθροισμα τετραγώνων, ως προς τις $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, δηλαδή

$$\sum_{j,k=1}^{\nu} a_{jk}x_jx_k = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k u_k^2 ,$$

$$\sum_{j,k=1}^{\nu} b_{jk}x_jx_k = \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k u_k^2 ,$$

όπου α_k και β_k είναι σταθερές. Οι συντεταγμένες $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ είναι οι κανονικές συντεταγμένες.

Επειδή στο εξεταζόμενο μηχανικό σύστημα η T είναι θετικά ορισμένη και οι συντελεστές μ_{jk} και K_{jk} είναι συμμετρικοί, θα υπάρχουν κανονικές συντεταγμένες $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, που δίνονται μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού

$$q_k = \sum_{j=1}^{\nu} C_{kj}u_j \ , \ (C_{kj}=\text{σταθ.}, \ k=1,2,\ldots,\nu) \ , \qquad (56)$$

έτσι ώστε η κινητική και δυναμική ενέργεια να ανάγονται σε άθροισμα τετραγώνων ως προς $\dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_\nu$ και $u_1, \ldots, u_\nu$ αντίστοιχα

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu} \mu_k \dot{u}_k^2 \qquad (57)$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu} K_k u_k^2 \ , \qquad (58)$$

όπου μ_k και K_k σταθερές.

Η συνάρτηση Lagrange, ως προς u_k, είναι

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu} (\mu_k \dot{u}_k^2 - K_k u_k^2) \ ,$$

και οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_k} = 0$, γράφονται

$$\mu_k\ddot{u}_k+K_k u_k = 0 \quad , \quad \text{για κάποιο } k = 1,2, \ldots ,\nu \quad , \qquad (59)$$

όπου οι επαναλαμβανόμενος δείκτης k δεν σημαίνει εδώ άθροιση ως προς k .

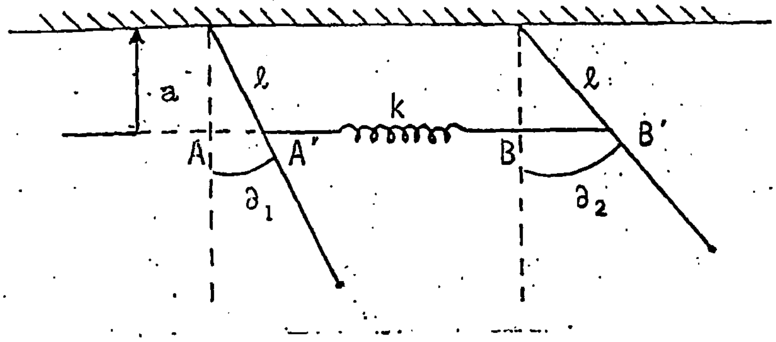
Οι (59) αποτελούν ένα μη συζευγμένο σύστημα ν διαφορικών εξισώσεων με αγνώστους $u_1,u_2, \ldots ,u_\nu$. Οι λύσεις των (59) είναι

$$u_k = A_k\cos\omega_k t \ , \quad \omega_k = \left(\frac{K_k}{\mu_k}\right)^{1/2} \ , \quad (k=1,2, \ldots ,\nu) \ , \qquad (60)$$

όπου οι αυθαίρετες σταθερές A_k προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες και ω_k είναι οι ιδιοσυχνότητες. Οι (60) είναι ν ανεξάρτητες ταλαντώσεις που παριστάνουν τις ιδιομορφές ταλάντωσης του συστήματος. Όπως είπαμε, οι ιδιοσυχνότητες μπορούν γενικά να προσδιορισθούν από την (55), όπου δεν απαιτείται ο προσδιορισμός των κανονικών συντεταγμένων. Συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων q_k , οι λύσεις δίνονται μέσω των (56) και (60).

Ασκήσεις

1. Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος (σχήμα). Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του συστήματος, για μικρές γωνιακές μετατοπίσεις θ_1 και θ_2. Να προσδιορισθούν οι ιδιομορφές ταλάντωσης και η γενική λύση . Η κίνηση του συστήματος γίνεται σε κατακόρυφο επίπεδο και a, k , ℓ είναι σταθερές.



Λύση

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος θα βρεθούν από τις εξισώσεις Lagrange β' είδους. Το σύστημα έχει δυο βαθμούς ελευθερίας και γενικευμένες συντεταγμένες ϑ_1 και ϑ_2. Το σύστημα είναι συντηρητικό και σκληρόνομο. Η ολική κινητική ενέργεια είναι

$$T = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\vartheta}_2^2 = \frac{1}{2} m\ell^2(\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2) .$$

Η ολική δυναμική ενέργεια είναι το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών των σωματίων, λόγω του βάρους και του ελατηρίου,

$$V = mg\ell(1-\cos\vartheta_1) + mg\ell(1-\cos\vartheta_2) + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2$$

όπου

$$\Delta\ell = BB' - AA' = a(\tan\vartheta_2 - \tan\vartheta_1)$$

και έχουμε πάρει σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τις θέσεις ισορροπίας των σωματίων.

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = \frac{1}{2} m\ell^2(\dot{\vartheta}_1^2+\dot{\vartheta}_2^2) - mg\ell(2-\cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2) - \frac{1}{2} ka^2(\tan\vartheta_2-\tan\vartheta_1)^2 .$$

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης δίνονται, μέσω των εξισώσεων Lagrange β' είδους $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_i}) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta_i} = 0 \quad i=1,2$ από τις σχέσεις

$$m\ell^2\ddot{\vartheta}_1 + mg\ell\sin\vartheta_1 - ka^2(\tan\vartheta_2-\tan\vartheta_1)\frac{1}{\cos^2\vartheta_1} = 0$$

$$m\ell^2\ddot{\vartheta}_2 + mg\ell\sin\vartheta_2 + Ka^2(\tan\vartheta_2-\tan\vartheta_1)\frac{1}{\cos^2\vartheta_2} = 0 \ .$$

Για μικρές γωνιακές μετατοπίσεις, θα έχουμε

$$\tan\vartheta_i \cong \vartheta_i \quad , \quad \sin\vartheta_i \cong \vartheta_i \quad , \quad \cos\vartheta_i \cong 1 \quad (i = 1,2)$$

έτσι ώστε οι διάφορικές εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$m\ell^2\ddot{\vartheta}_1 + (mg\ell + ka^2)\vartheta_1 - ka^2\vartheta_2 = 0 \ ,$$

$$m\ell^2\ddot{\vartheta}_2 + (mg\ell + ka^2)\vartheta_2 - ka^2\vartheta_1 = 0 \ .$$

Υποθέτουμε λύση της μορφής

$$\vartheta_1 = A_1\cos\omega t \quad , \quad \vartheta_2 = A_2\cos\omega t \ ,$$

ή

$$\vartheta_1 = A_1\sin\omega t \quad , \quad \vartheta_2 = A_2\sin\omega t \ .$$

Η αντικατάσταση των ϑ_1, ϑ_2 στις διαφορικές εξισώσεις δίνει το αλγεβρικό σύστημα ως προς A_1, A_2

$$(-m\ell^2\omega^2 + mg\ell + ka^2)A_1 - ka^2A_2 = 0 \ ,$$

$$-ka^2A_1 + (-m\ell^2\omega^2 + mg\ell + ka^2)A_2 = 0 \ .$$

Για λύση του αλγεβρικού συστήματος διαφορετική της μηδενικής, η ορίζουσα των συντελεστών πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή

$$\omega^4 - 2\left(\frac{g}{\ell} + \frac{ka^2}{m\ell^2}\right)\omega^2 + \left(\frac{g^2}{\ell^2} + \frac{2ka^2g}{m\ell^3}\right) = 0 .$$

Αυτή είναι η χαρακτηριστική εξίσωση, από την οποία παίρνουμε τις ιδιοσυχνότητες

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2ka^2}{m\ell^2}} .$$

Από το αλγεβρικό σύστημα προκύπτει

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{1} = 1 \quad , \text{ για } \quad \omega = \omega_1 \quad ,$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \text{για} \quad \omega = \omega_2 \quad .$$

Οι ιδιομορφές ταλάντωσης του συστήματος είναι

α) $\theta_1 = A_1\cos\omega_1 t \quad , \qquad \theta_2 = A_1\cos\omega_1 t$

β) $\theta_1 = A_1^{+}\cos\omega_2 t \quad , \qquad \theta_2 = -A_1^{+}\cos\omega_2 t$

γ) $\theta_1 = A_1^{++}\sin\omega_1 t \quad , \qquad \theta_2 = A_1^{++}\sin\omega_1 t$

δ) $\theta_1 = A_1^{+++}\sin\omega_2 t \quad , \qquad \theta_2 = -A_1^{+++}\sin\omega_2 t \quad .$

Η γενική λύση είναι

$$\theta_1 = A_1\cos\omega_1 t + A_1^{+}\cos\omega_2 t + A_1^{++}\sin\omega_1 t + A_1^{+++}\sin\omega_2 t \quad ,$$

$$\theta_2 = A_1\cos\omega_1 t - A_1^{+}\cos\omega_2 t + A_1^{++}\sin\omega_1 t - A_1^{+++}\sin\omega_2 t \quad ,$$

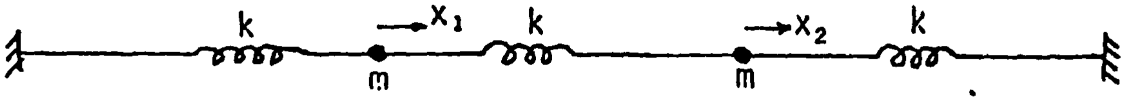
όπου A_1, A_1^{+}, A_1^{++} και A_1^{+++} είναι αυθαίρετες σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

2. Δίνεται το γνωστό μηχανικό σύστημα των δυο συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών (σχήμα). Γνωρίζουμε ότι οι ιδιοσυχνότητες δίνονται από τις σχέσεις

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega' = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

α) Να βρεθούν οι μετατοπίσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$, αν η ταλάντωση του συστήματος προήλθε από αρχική μετατόπιση του αριστερού σωματίου από τη θέση ισορροπίας κατά $x_1(0) = x_0$,

β) Να βρεθούν κατάλληλες αρχικές συνθήκες τέτοιες ώστε το σύστημα να ταλαντώνεται με την ιδιοσυχνότητα ω_0 ή την ιδιοσυχνότητα ω'.



Λύση

Γνωρίζουμε ότι η γενική λύση του συστήματος αυτού είναι

$$x_1 = A_1\cos\omega_0 t + A_1^{+}\cos\omega' t + A_1^{++}\sin\omega_0 t + A_1^{+++}\sin\omega' t$$

$$x_2 = A_1\cos\omega_0 t - A_1^{+}\cos\omega' t + A_1^{++}\sin\omega_0 t - A_1^{+++}\sin\omega' t$$

α) Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$x_1(o) = x_0 \quad , \quad \dot{x}_1(o) = x_2(o) = \dot{x}_2(o) = 0 .$$

Εφαρμόζοντας αυτές στη γενική λύση, παίρνουμε το σύστημα

$$A_1 + A_1^{+} = x_0 \ ,$$
$$A_1 - A_1^{+} = 0 \ ,$$
$$A_1^{++}\omega_0 + A_1^{+++}\omega' = 0 \ ,$$
$$A_1^{++}\omega_0 - A_1^{+++}\omega' = 0 \ ,$$

από το οποίο προσδιορίζουμε τα A_1, A_1^{+}, A_1^{++} και A_1^{+++}. Έχουμε

$$A_1 = \frac{x_0}{2}, \quad A_1^{+} = \frac{x_0}{2}, \quad A_1^{++} = A_1^{+++} = 0 \ .$$

Η λύση, που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες, είναι

$$x_1 = \frac{x_0}{2}\left[\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t\right],$$

$$x_2 = \frac{x_0}{2}\left[\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t\right].$$

β) Από τη γενική λύση, παίρνουμε το σύστημα

$$x_1(0) = A_1 + A_1^{+} \ ,$$
$$x_2(0) = A_1 - A_1^{+} \ ,$$
$$\dot{x}_1(0) = A_1^{++}\omega_0 + A_1^{+++}\omega' \ ,$$
$$\dot{x}_2(0) = A_1^{++}\omega_0 - A_1^{+++}\omega' \ ,$$

από το οποίο βρίσκουμε

$$A_1 = \frac{x_1(0)+x_2(0)}{2} \ , \quad A_1^{+} = \frac{x_1(0)-x_2(0)}{2} \ ,$$

$$A_1^{++} = \frac{\dot{x}_1(0)+\dot{x}_2(0)}{2\omega_0} \;, \quad A_1^{+++} = \frac{\dot{x}_1(0)-\dot{x}_2(0)}{2\omega'} \;.$$

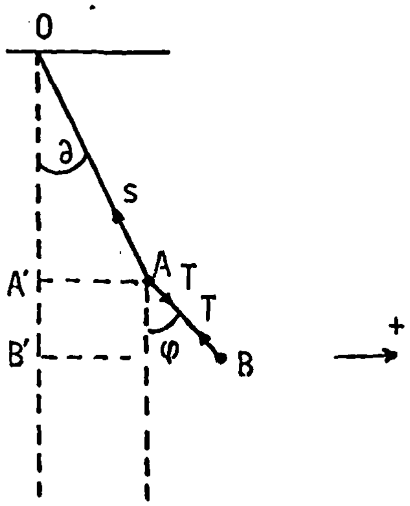
Για να ταλαντώνεται το σύστημα με την ιδιοσυχνότητα ω_0, θα πρέπει $A_1^{+} = A_1^{+++} = 0$ (από τη γενική λύση). 'Αρα, από τις προηγούμενες σχέσεις, παίρνουμε τις ζητούμενες αρχικές συνθήκες

$$x_1(0) = x_2(0) \;, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) \;.$$

Για να ταλαντώνεται το σύστημα με την ιδιοσυχνότητα ω', θα πρέπει $A_1 = A_1^{++} = 0$ και συνεπώς οι ζητούμενες αρχικές συνθήκες είναι

$$x_1(0) = -x_2(0) \;, \quad \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0) \;.$$

3. Δίνεται αβαρής μη εκτατή χορδή ΟΑΒ μήκους 17α τέτοια ώστε ΟΑ=13α. Σωμάτιο με μάζα 4m προσαρτάται στη χορδή στο Α και ένα άλλο με μάζα 9m στο Β (σχήμα). Το σύστημα εκτελεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από την κατακόρυφο που διέρχεται από το Ο έτσι ώστε, οι γωνίες θ και φ να είναι μικρές. Να βρεθούν οι ιδιομορφές ταλάντωσης, η γενική λύση και η λύση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$.



Λύση

Επειδή πρόκειται για μικρές ταλαντώσεις, θεωρούμε ότι δεν υπάρχει κατακόρυφη κίνηση, αλλά μόνο οριζόντια. Οι τάσεις, συνεπώς, στα τμήματα ΟΑ και ΑΒ θα είναι κατά προσέγγιση,

$$T = 9mg \quad , \quad S = 4mg + T = 13mg \; .$$

Οι οριζόντιες αποστάσεις ΑΑ' και ΒΒ' είναι, κατά προσέγγιση,

$$AA' = 13a\theta \; , \quad BB' = 13a\theta + 4a\phi \; .$$

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης των σωματίων βρίσκονται από το β' Νόμο του Newton

$$4m(\ddot{AA'}) = T\sin\phi - S\sin\theta$$
$$9m(\ddot{BB'}) = -T\sin\phi$$

ή κατά προσέγγιση

$$52a\ddot{\theta} + 13g\theta - 9g\phi = 0$$
$$13a\ddot{\theta} + 4a\ddot{\phi} + g\phi = 0 \; .$$

Υποθέτουμε λύση της μορφής

$$\theta = A_1\cos\omega t \quad , \quad \phi = A_2\cos\omega t \quad ,$$

ή

$$\theta = A_1\sin\omega t \quad , \quad \phi = A_2\sin\omega t \; .$$

Με αντικατάσταση στις διαφορικές εξισώσεις κίνησης παίρνουμε το αλγεβρικό σύστημα ως προς A_1, A_2

$$(-52a\omega^2 + 13g)A_1 - 9gA_2 = 0 \quad ,$$

$$-13\alpha\omega^2 A_1 + (-4\alpha\omega^2+g)A_2 = 0 \; .$$

Για λύση του συστήματος διαφορετική της μηδενικής, πρέπει να ισχύει η χαρακτηριστική εξίσωση

$$16\alpha^2\omega^4 - 17\alpha g\omega^2 + g^2 = 0 \; ,$$

από την οποία παίρνουμε τις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης

$$\omega_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{\alpha}} \; , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \; .$$

Από το αλγεβρικό σύστημα προκύπτει

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{13}{12} \quad \text{για} \quad \omega = \omega_1 \; ,$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{-13}{3} \quad \text{για} \quad \omega = \omega_2 \; .$$

Οι ιδιομορφές ταλάντωσης του συστήματος είναι

$$(\alpha) \quad \theta = A_1\cos\omega_1 t \; , \quad \varphi = \frac{13}{12} A_1\cos\omega_1 t$$

$$(\beta) \quad \theta = A_1^{+}\cos\omega_2 t \; , \quad \varphi = -\frac{13}{3} A_1^{+}\cos\omega_2 t$$

$$(\gamma) \quad \theta = A_1^{++}\sin\omega_1 t \; , \quad \varphi = \frac{13}{12} A_1^{++}\sin\omega_1 t$$

$$(\delta) \quad \theta = A_1^{+++}\sin\omega_2 t \; , \quad \varphi = -\frac{13}{3} A_1^{+++}\sin\omega_2 t \; .$$

Η γενική λύση είναι

$$\theta = A_1\cos\omega_1 t + A_1^{+}\cos\omega_2 t = A_1^{++}\sin\omega_1 t + A_1^{+++}\sin\omega_2 t$$

$$\varphi = \frac{13}{12}A_1\cos\omega_1 t - \frac{13}{3}A_1^{+}\cos\omega_2 t + \frac{13}{12}A_1^{++}\sin\omega_1 t - \frac{13}{3}A_1^{+++}\sin\omega_2 t \ .$$

Αν εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες στη γενική λύση, παίρνουμε το σύστημα

$$A_1 + A_1^{+} = \vartheta_0 \ ,$$

$$A_1^{++}\omega_1 + A_1^{+++}\omega_2 = 0 \ ,$$

$$\frac{13}{12}A_1 - \frac{13}{3}A_1^{+} = 0 \ ,$$

$$\frac{13}{12}\omega_1 A_1^{++} - \frac{13}{3}\omega_2 A_1^{+++} = 0 \ ,$$

του οποίου η λύση είναι

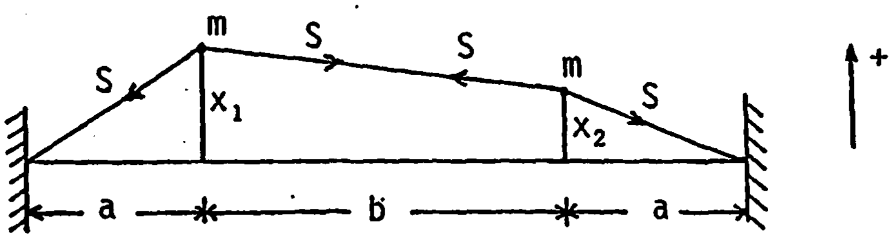
$$A_1 = \frac{4}{5}\vartheta_0 \ , \quad A_1^{+} = \frac{1}{5}\vartheta_0 \ , \quad A_1^{++} = A_1^{+++} = 0 \ .$$

Άρα, η λύση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες είναι

$$\vartheta = \frac{4}{5}\vartheta_0\cos\omega_1 t + \frac{1}{5}\vartheta_0\cos\omega_2 t \ ,$$

$$\varphi = \frac{13}{15}\vartheta_0\cos\omega_1 t - \frac{13}{15}\vartheta_0\cos\omega_2 t \ .$$

4. Δυο σωμάτια με μάζα m εκτελούν μικρές εγκάρσιες ταλαντώσεις (σχήμα). Η τάση S της χορδής διατηρείται σταθερή κατά την κίνηση. Να βρεθούν οι κανονικές συντεταγμένες του συστήματος.



Λύση

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης, για μικρές ταλαντώσεις, είναι

$$m\ddot{x}_1 = -S\,\frac{x_1}{a} - S\,\frac{x_1-x_2}{b} = -S\,\frac{a+b}{ab}\,x_1 + \frac{S}{b}\,x_2 \ ,$$

$$m\ddot{x}_2 = S\,\frac{x_1-x_2}{b} - S\,\frac{x_2}{a} = \frac{S}{b}\,x_1 - S\,\frac{a+b}{ab}\,x_2 \ ,$$

ή

$$\ddot{x}_1 + \frac{S}{m}\,\frac{a+b}{ab}\,x_1 - \frac{S}{mb}\,x_2 = 0 \ ,$$

$$\ddot{x}_2 - \frac{S}{mb}\,x_1 + \frac{S}{m}\,\frac{a+b}{ab}\,x_2 = 0 \ .$$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε

$$(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2) + (A-B)(x_1+x_2) = 0 \ ,$$

$$(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2) + (A+B)(x_1-x_2) = 0 \ ,$$

όπου

$$A = \frac{S}{m}\,\frac{a+b}{ab} \ , \quad B = \frac{S}{mb} \ .$$

Συνεπώς, οι κανονικές συντεταγμένες είναι

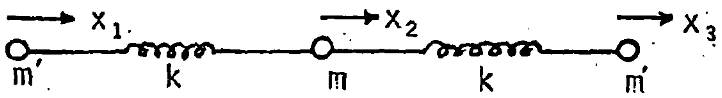
$$q_1 = x_1+x_2\ ,\quad q_2 = x_1-x_2\ ,$$

γιατί προκύπτουν οι ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις κίνησης

$$\ddot{q}_1+\omega_1^2 q_1 = 0\ ,\quad \ddot{q}_2+\omega_2^2 q_2 = 0\ ,$$

όπου $\omega_1^2 = A-B$, $\omega_2^2 = A+B$.

5. Το μόριο του CO_2 μπορεί να εξομοιωθεί με ένα μηχανικό σύστημα που αποτελείται από μια κεντρική μάζα m συνδεδεμένη με ίσα ελατήρια σταθεράς k, στα άκρα των οποίων υπάρχουν δυο ίσες μάζες m' (σχήμα). Να προσδιορισθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος, αν οι μάζες ταλαντώνονται κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα κέντρα τους. Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης.



Λύση

Το σύστημα έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας και εκτελεί ελεύθερες μη αποσβεννυμένες ταλαντώσεις. Η κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m'(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2)$$

$$V = \frac{1}{2} k(x_2-x_1)^2 + \frac{1}{2} k(x_3-x_2)^2 .$$

Η συνάρτηση Lagrange γράφεται

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m'(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2) - \frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2 - \frac{1}{2}k(x_3-x_2)^2 .$$

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης, που προκύπτουν από τις εξισώσεις Lagrange β'είδους $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ (i=1,2,3), είναι

$$\ddot{x}_1 - \frac{k}{m'}(x_2-x_1) = 0 ,$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{k}{m}(2x_2-x_1-x_3) = 0 ,$$

$$\ddot{x}_3 + \frac{k}{m'}(x_3-x_2) = 0 .$$

Υποθέτουμε λύση της μορφής

$$x_1 = A_1\cos\omega t , \quad x_2 = A_2\cos\omega t , \quad x_3 = A_3\cos\omega t$$

και αντικαθιστώντας αυτή στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, παίρνουμε το αλγεβρικό σύστημα ως προς A_1, A_2, A_3

$$(-\omega^2 + \frac{k}{m'})A_1 - \frac{k}{m'}A_2 = 0 ,$$

$$-\frac{k}{m}A_1 + (-\omega^2 + \frac{2k}{m})A_2 - \frac{k}{m}A_3 = 0 ,$$

$$-\frac{k}{m'}A_2 + (-\omega^2 + \frac{k}{m'})A_3 = 0 .$$

Για να υπάρχει λύση του αλγεβρικού συστήματος διαφορετική της μηδενικής, πρέπει

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{m'}-\omega^2 & -\frac{k}{m'} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m'} & \frac{k}{m'}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

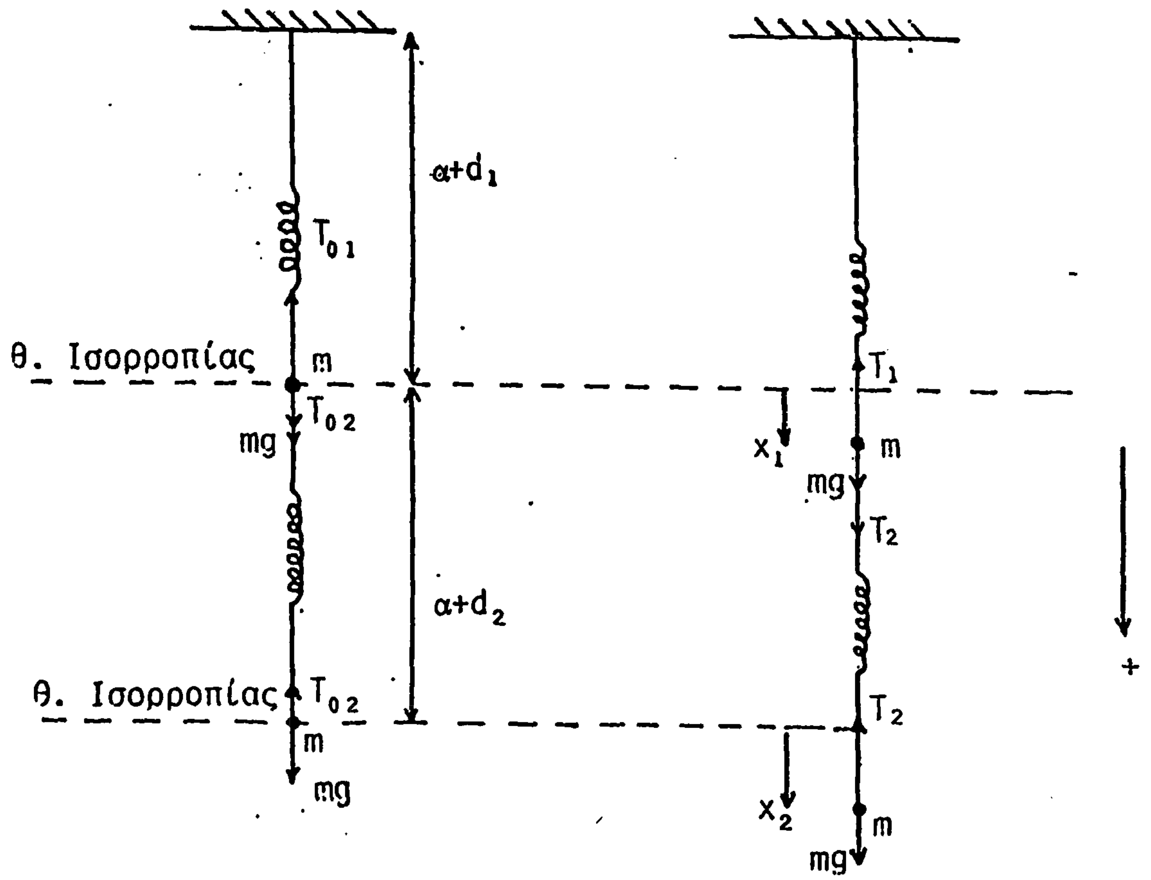
Αυτή είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος, η οποία γράφεται

$$\omega^2\left(\frac{k}{m'}-\omega^2\right)\left[\omega^2-\left(\frac{2k}{m}+\frac{k}{m'}\right)\right]=0 ,$$

από την οποία προκύπτουν οι τρεις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του συστήματος

$$\omega_1 = 0 , \quad \omega_2 = \left(\frac{k}{m'}\right)^{1/2} , \quad \omega_3 = \left(\frac{k}{m'}+\frac{2k}{m}\right)^{1/2} .$$

6. Δυο σωμάτια με ίσες μάζες m προσαρτώνται σε δυο ελατήρια φυσικού μήκους a και μέτρου ελαστικότητας λ . Το σύστημα κρέμεται από ένα σταθερό σημείο (σχήμα). Οι επιμηκύνσεις των ελατηρίων, στη θέση ισορροπίας του συστήματος, είναι d_1 και d_2 . Να προσδιορισθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος, οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης, οι ιδιομορφές ταλάντωσης και η γενική λύση. Το σύστημα ταλαντώνεται κατακόρυφα.



Λύση

Στη θέση ισορροπίας του συστήματος έχουμε

$$T_{01}-T_{02} = mg \quad , \quad T_{02} = mg$$

όπου T_{01} και T_{02} είναι οι τάσεις στα δυο ελατήρια. Από το Νόμο του Hooke, έχουμε

$$T_{01} = \frac{\lambda}{\alpha} d_1 \, , \quad T_{02} = \frac{\lambda}{\alpha} d_2$$

και οι προηγούμενες εξισώσεις γίνονται

$$\frac{\lambda}{\alpha}(d_1-d_2) = mg \, , \quad \frac{\lambda}{\alpha} d_2 = mg \; .$$

Αν x_1 και x_2 είναι οι μετατοπίσεις των σωματίων από τις θέσεις ισορροπίας τους, ο β' νόμος του Newton δίνει τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης

$$m\ddot{x}_1 = T_2 - T_1 + mg \ ,$$

$$m\ddot{x}_2 = -T_2 + mg \ ,$$

όπου οι τάσεις T_1 και T_2 δίνονται τώρα, μέσω του Νόμου του Hooke, από τις σχέσεις

$$T_1 = \frac{\lambda}{\alpha}(d_1 + x_1) \ , \ T_2 = \frac{\lambda}{\alpha}(d_2 + x_2 - x_1) \ .$$

'Αρα, οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης είναι

$$\ddot{x}_1 + 2\frac{\lambda}{\alpha m}x_1 - \frac{\lambda}{\alpha m}x_2 = 0 \ ,$$

$$\ddot{x}_2 - \frac{\lambda}{\alpha m}x_1 + \frac{\lambda}{\alpha m}x_2 = 0 \ .$$

Θεωρούμε λύση της μορφής

$$x_1 = A_1\cos\omega t \ , \quad x_2 = A_2\cos\omega t$$

ή

$$x_1 = A_1\sin\omega t \ , \quad x_2 = A_2\sin\omega t \ .$$

Το αλγεβρικό σύστημα ως προς A_1, A_2 που προκύπτει είναι

$$(\omega^2 - 2\beta)A_1 + \beta A_2 = 0 \ ,$$

$$\beta A_1 + (\omega^2 - \beta)A_2 = 0 \ ,$$

όπου $\beta = \dfrac{\lambda}{m\alpha}$.

Για μη μηδενική λύση του αλγεβρικού συστήματος, παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$\omega^4 - 3\beta\omega^2 + \beta^2 = 0 \ .$$

Οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης είναι

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})\beta}{2}} \ , \ \omega_2 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})\beta}{2}} \ .$$

Από το αλγεβρικό σύστημα προκύπτει

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{για} \quad \omega = \omega_1 \ ,$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{για} \quad \omega = \omega_2 \ .$$

Οι ιδιομορφές ταλάντωσης του συστήματος είναι

$$\begin{aligned}
&(\alpha) \quad x_1 = A_1\cos\omega_1 t \ , \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} A_1\cos\omega_1 t \\
&(\beta) \quad x_1 = A_1^{+}\cos\omega_2 t \ , \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} A_1^{+}\cos\omega_2 t \\
&(\gamma) \quad x_1 = A_1^{++}\sin\omega_1 t \ , \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} A_1^{++}\sin\omega_1 t \\
&(\delta) \quad x_1 = A_1^{+++}\sin\omega_2 t \ , \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} A_1^{+++}\sin\omega_2 t \ .
\end{aligned}$$

Η γενική λύση είναι

$$x_1 = A_1\cos\omega_1 t + A_1^{+}\cos\omega_2 t + A_1^{++}\sin\omega_1 t + A_1^{+++}\sin\omega_2 t \ ,$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} A_1 \cos\omega_1 t + \frac{1+\sqrt{5}}{2} A_1^{+} \cos\omega_2 t + \frac{1-\sqrt{5}}{2} A_1^{++} \sin\omega_1 t + \frac{1+\sqrt{5}}{2} A_1^{+++} \sin\omega_2 t \quad ,$$

όπου A_1, A_1^{+}, A_1^{++} και A_1^{+++} προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

3

ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

3.1 Η φύση των κυμάτων

Κύμα, γενικά, είναι κάθε διαταραχή που διαδίδεται με την πάροδο του χρόνου από μια περιοχή του χώρου σε μια άλλη. Παραδείγματα κυμάτων συναντούμε σε πολλούς κλάδους της Φυσικής. Αναφέρουμε τα υδάτινα, ηχητικά, φωτεινά και ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα κύματα που διαδίδονται σε συνεχή ελαστικά μέσα και λέγονται μηχανικά κύματα. Ένα μέσο λέγεται ελαστικό, όταν παραμορφώνεται κάτω από την επίδραση δυνάμεων και ξαναπαίρνει το αρχικό σχήμα και όγκο μόλις πάψει ή επίδραση των δυνάμεων. Ελαστικά θεωρούνται όλα τα υλικά μέσα (στερεά, υγρά και αέρια). Με τον όρο διαταραχή εννοούμε, γενικά, τη μεταβολή ενός φυσικού μεγέθους, όπως η μετατόπιση των σωματίων ελαστικού μέσου, η πίεση αερίου, η ένταση ηλεκτρικού πεδίου κ.τ.λ. Τα μηχανικά κύματα προέρχονται από τη μετατόπιση ενός τμήματος του ελαστικού μέσου από τη θέση ισορροπίας του, λόγω εξωτερικού αιτίου, που το αναγκάζει να ταλαντωθεί γύρω από αυτή τη θέση. Επειδή το μέσο είναι ελαστικό, η διαταραχή διαδίδεται από το ένα στρώμα του μέσου στο επόμενο και έτσι η διαταραχή ή κύμα προχωρεί στο μέσο. Πρέπει να τονισθεί ότι το μέσο σαν σύνολο δεν μεταφέρεται, αλλά παίζει το ρόλο του ενδιάμεσου με το οποίο μεταβιβάζονται τα μηχανικά κύματα. Είναι προφανές ότι για να δημιουργηθεί ένα κύμα πρέπει να δοθεί ενέργεια στο μέσο. Συνεπώς, ένα κύμα μπορεί να μεταφέρει ενέργεια από μια περιοχή σε μια άλλη. Η ενέργεια στα κύματα οφείλεται στην κινητική και δυναμική ενέργεια της ύλης. Το γεγονός ότι τα κύματα των ωκεανών έχουν καταστροφικά αποτελέσματα, μας πείθει ότι είναι φορείς ενέργειας.

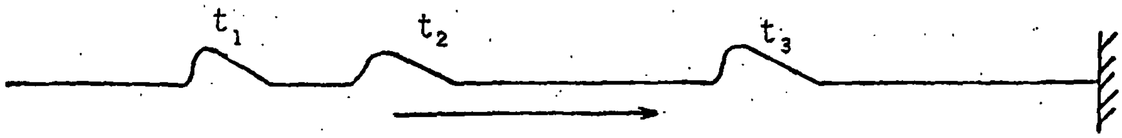
Αποδεικνύεται ότι τα κύματα διαδίδονται με σταθερή πεπερασμένη ταχύτητα σε ομογενή και ισότροπα μέσα. Η ταχύτητα εξαρτάται από την ελαστικότητα του μέσου και την ογκομετρική, επιφανειακή ή γραμμική πυκνότητα του μέσου ανάλογα αν το μέσο είναι τριδιάστατο, διδιάστατο ή μονοδιάστατο.

Θα χρησιμοποιήσουμε σαν πρότυπο του κύματος τη διάδοσή του σε ένα συνεχές μονοδιάστατο μέσο π.χ. το τεντωμένο νήμα. Το ένα άκρο ενός μακριού νήματος είναι σταθερό, το δε άλλο άκρο κινείται κάθετα προς το νήμα, ενώ η τάση του νήματος διατηρείται σταθερή (Σχ. 23)

Σχ. 23 Δημιουργία ενός παλμού

Με το νήμα αρχικά σε ηρεμία, κινούμε γρήγορα το ελεύθερο άκρο προς τα πάνω και μετά πίσω στην αρχική του θέση. Η κίνηση που προκύπτει λέγεται παλμός και είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε το σχήμα του νήματος σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, μέσω κινητής φωτογραφικής μηχανής (Σχ.24) . Κάθε σωμάτιο του νήματος παραμένει ακίνητο μέχρι τη στιγμή της άφιξης του παλμού, οπότε κινείται για μικρό χρονικό διάστημα και ύστερα μένει ακίνητο.
Αν οι εσωτερικές τριβές στο νήμα δεν ληφθούν υπόψη, τότε ο παλμός διατηρεί το σχήμα του, καθώς κινείται κατά μήκος του

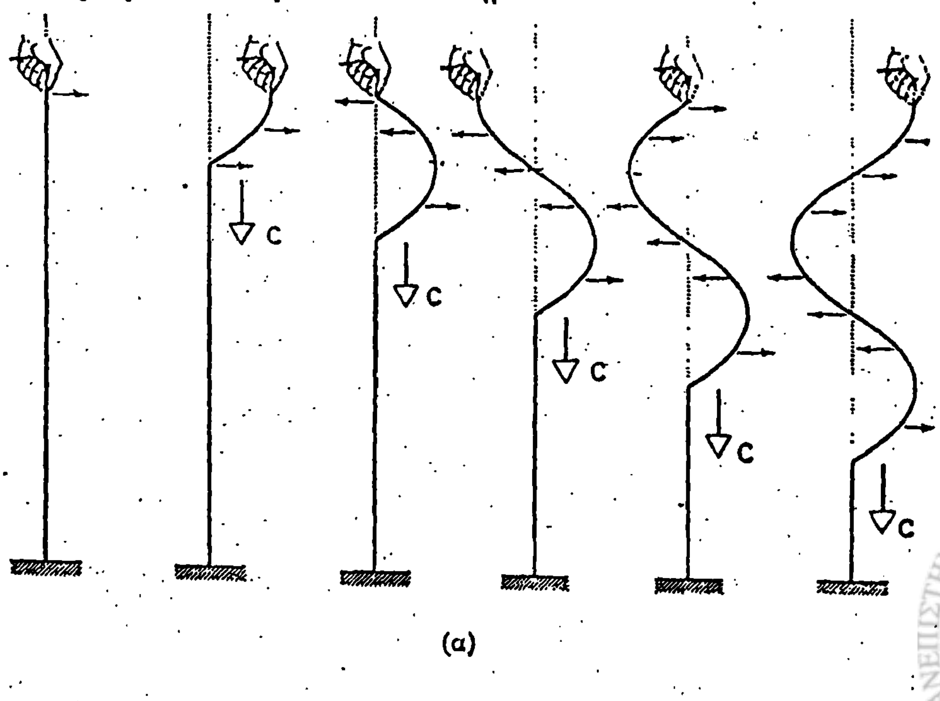
νήματος. Επίσης αποδεικνύεται ότι η ταχύτητα του παλμού είναι ανεξάρτητη του σχήματός του.



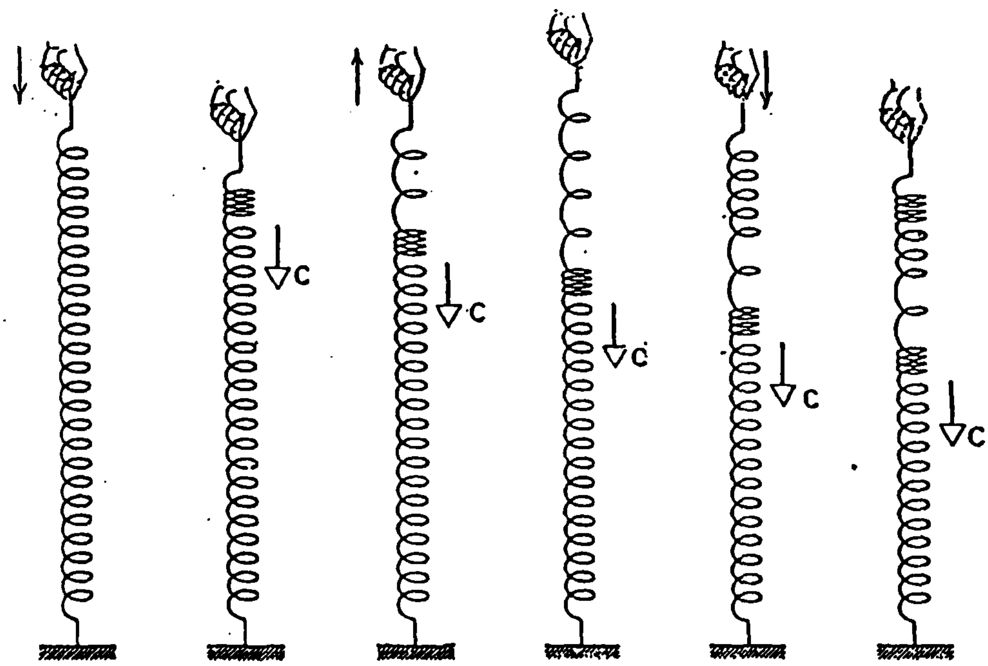
Σχ. 24 Κίνηση παλμού κατά μήκος του νήματος

3.2 Τύποι κυμάτων

Τα κύματα διαιρούνται σε δυο κατηγορίες. Τα εγκάρσια και τα διαμήκη. Αν η κίνηση των σωματίων του μέσου που μεταφέρουν το κύμα είναι κάθετη προς την διεύθυνση διάδοσης του κύματος, τότε το κύμα λέγεται εγκάρσιο. Αν η κίνηση των σωματίων είναι στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, τότε το κύμα λέγεται διαμήκες. Για παράδειγμα, όταν το ένα άκρο ενός κατακόρυφα τεντωμένου νήματος ταλαντώνεται κάθετα προς τη διεύθυνση του νήματος, τότε κατά μήκος του νήματος διαδίδεται ένα εγκάρσιο κύμα. Τα σωμάτια του νήματος ταλαντώνονται κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος (Σχ. 25α). Όταν το ελεύθερο άκρο ενός κατακόρυφα τεντωμένου ελατηρίου ταλαντώνεται πάνω-κάτω,



(α)



(β)

Σχ. 25(α) Στο εγκάρσιο κύμα τα σωμάτια του νήματος κινούνται κάθετα προς την διεύθυνση διάδοσης του κύματος.
(β) Στο διαμήκες κύμα τα σωμάτια του ελατηρίου κινούνται στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

τότε κατά μήκος του ελατηρίου διαδίδεται ένα διαμήκης κύμα. Οι σπείρες ταλαντώνονται στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος κατά μήκος του ελατηρίου (Σχ. 25β) .

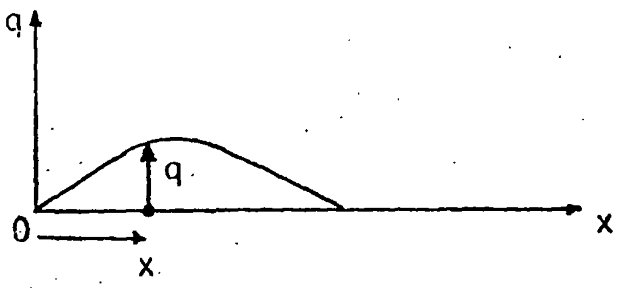
Τα κύματα ταξινομούνται επίσης σε τρεις κατηγορίες. Τα μονοδιάστατα, διδιάστατα και τριδιάστατα, ανάλογα με τον αριθμό των διαστάσεων στις οποίες μεταφέρουν ενέργεια. Τα κύματα του Σχ. 25 είναι μονοδιάστατα. Τα κύματα στην επιφάνεια μιας ήρεμης λίμνης είναι διδιάστατα. Τριδιάστατα είναι τα ηχητικά κύματα που διαδίδονται ακτινικά από μια μικρή ηχητική πηγή.

3.3 Μαθηματική περιγραφή μονοδιάστατων κυμάτων

Είναι γνωστό ότι η θέση ενός σωματίου στο χώρο προσδιορίζεται πλήρως αν δοθούν οι συντεταγμένες x,y,z αυτού ως προς ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων Oxyz. Η κίνηση του σωματίου προσδιορίζεται πλήρως, αν δοθούν οι συναρτήσεις

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \ .$$

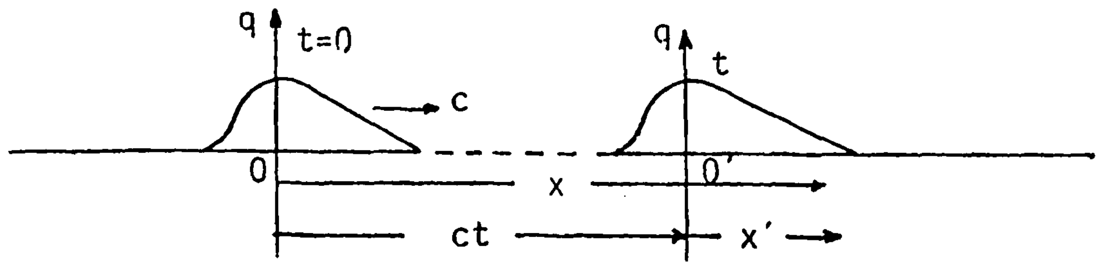
Η μαθηματική περιγραφή ενός μονοδιάστατου κύματος δεν είναι τόσο απλή. Για παράδειγμα, για να περιγράψουμε ένα εγκάρσιο κύμα σε ένα νήμα, σε κάθε στιγμή, πρέπει να προσδιορίσουμε τη θέση κάθε σωματίου του νήματος και όχι ενός ή μερικών σωματίων. Το σχήμα του κύματος σε κάθε στιγμή μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας συνάρτησης. Στο Σχ. 26, ο άξονας x συμπίπτει με τη θέση



Σχ. 26 Η μετατόπιση q ενός σωματίου του νήματος στη θέση ισορροπίας x .

ισορροπίας του νήματος. Αν x είναι η θέση ισορροπίας του τυχόντος σωματίου και q η μετατόπισή του, τότε η θέση του νήματος τη στιγμή t_1 μπορεί να δοθεί από τη σχέση $q = f_1(x)$. Τη χρονική στιγμή $t_2 \neq t_1$, η θέση του νήματος δίνεται από τη σχέση $q = f_2(x)$, όπου $f_1(x) \neq f_2(x)$. Είναι φανερό ότι η διαδικασία αυτή είναι επίπονη, επειδή απαιτείται μια διαφορετική συνάρτηση για κάθε στιγμή. Αν όμως υποθέσουμε ότι το κύμα διατηρεί το σχήμα του, τότε η καμπύλη που παριστάνει τη συνάρτηση $f_2(x)$ έχει το ίδιο σχήμα με την καμπύλη που παριστάνει τη συνάρτηση $f_1(x)$. Η μόνη διαφορά είναι ότι η καμπύλη αυτή έχει μετατοπισθεί κατά μήκος του άξονα x σε απόσταση ίση με εκείνη που το κύμα έχει διανύσει εντός του χρόνου t_2-t_1 , δηλαδή σε απόσταση $c(t_2-t_1)$, όπου c είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

Για να προσδιορίσουμε τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι συναρτήσεις σε διαφορετικούς χρόνους, εργαζόμαστε ως εξής. Θεωρούμε έναν παλμό τη χρονική στιγμή t=0 (Σχ. 27) .



Σχ. 27 Στο χρόνο t ο παλμός διανύει απόσταση ct .

Στο χρόνο t , ο παλμός έχει διανύσει απόσταση ct. Εισάγουμε ένα νέο σύστημα αξόνων O'x'q με αρχή O' μετατοπισμένη προς τα δεξιά σε απόσταση ct ως προς το O . Αν η συνάρτηση $q = f(x)$ περιγράφει τον παλμό στο χρόνο t=0 ως προς το O, τότε η ίδια συνάρτηση f περιγράφει τον παλμό στο χρόνο t ως προς το O'. Συνεπώς, ο παλμός περιγράφεται στο χρόνο t ως προς το O' με τη συνάρτηση $q = f(x')$.

Τα δυο συστήματα συντεταγμένων συνδέονται με τη σχέση

$$x' = x-ct \quad .$$

Άρα, ένας παλμός που περιγράφεται ως προς το O στο χρόνο t=0 με τη συνάρτηση $q = f(x)$, περιγράφεται ως προς το O στο χρόνο t με τη συνάρτηση $q = f(x-ct)$. Η μέθοδος αυτή μας δίνει την εξίσωση του παλμού για κάθε t, αν γνωρίζουμε την εξίσωσή του στο χρόνο t=0. Η μέθοδος συνίσταται στην αντικατάσταση του x με το x-ct . Θα πρέπει να τονισθεί ότι η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε κάθε μονοδιάστατο κύμα οποιουδήποτε σχήματος, επειδή η συνάρτηση f δεν έχει καθορισθεί. Το σχήμα του κύματος προσδιορίζεται ακριβώς, αν δοθεί η συνάρτηση f .

Γενικά, κάθε συνάρτηση $q = f(x,t)$ που περιέχει το x και t μόνο στο συνδυασμό $x-ct$, όπου c είναι σταθερά, παριστάνει ένα μονοδιάστατο κύμα, που διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση (+x), χωρίς να μεταβάλλεται το σχήμα του.

Με την ίδια μέθοδο μπορεί να δειχθεί ότι κάθε συνάρτηση $q = f(x,t)$ που περιέχει το x και t μόνο στο συνδυασμό $x+ct$, όπου c είναι σταθερά, παριστάνει ένα μονοδιάστατο κύμα, που διαδίδεται κατά την αρνητική κατεύθυνση (-x), χωρίς να μεταβάλλεται το σχήμα του.

Μπορούμε να πάρουμε πολλές πληροφορίες από τη συνάρτηση που περιγράφει ένα μονοδιάστατο κύμα. Για παράδειγμα, η ταχύτητα και η επιτάχυνση της εγκάρσιας κίνησης ενός σωματίου του νήματος στη θέση x, σε κάθε χρόνο t, δίνονται από τις σχέσεις

$$υ(x,t) = \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} , \quad α = \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} .$$

Η κλίση του νήματος σε κάθε θέση x είναι $\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}$.

Αποδεικνύεται ότι η κλίση συνδέεται με την ταχύτητα με τη σχέση

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \mp \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial t} ,$$

όπου το - αντιστοιχεί στην περίπτωση ενός κύματος που μεταδίδεται κατά την θετική κατεύθυνση και το + στην περίπτωση διάδοσης κατά την αρνητική κατεύθυνση. Πράγματι, αν θέσουμε $u = x \mp ct$, για τις περιπτώσεις που το κύμα διαδίδεται κατά τη θετική ή την αρνητική κατεύθυνση , τότε έχουμε

$$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{dq}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dq}{du}\ ,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{dq}{du}\frac{\partial u}{\partial t}=\mp c\,\frac{dq}{du}\ .$$

Με απαλοιφή του $\frac{dq}{du}$ παίρνουμε

$$\frac{\partial q}{\partial x}=\mp\frac{1}{c}\frac{\partial q}{\partial t}\ .$$

3.4 Διαφορική εξίσωση μονοδιάστατου κύματος - Λύση D' Alembert

Αν πάρουμε τη δεύτερη μερική παράγωγο ως προς x της εξίσωσης του κύματος

$$q = q(x\pm ct)\ ,$$

έχουμε

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}=q''\ ,$$

όπου ο τόνος φανερώνει συνήθη παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή $x\pm ct$. Αν παραγωγίσουμε μερικώς την εξίσωση του κύματος δυο φορές ως προς t παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}=c^2q''\ .$$

Με απαλοιφή του q'' προκύπτει η σχέση

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} .$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση ενός μονοδιάστατου κύματος, που διαδίδεται κατά μήκος του x με ταχύτητα c. Αυτή πληρούται από κάθε συνάρτηση της μορφής $q = f(x-ct)$ και επίσης από κάθε συνάρτηση της μορφής $q = g(x+ct)$. Επειδή η διαφορική εξίσωση του κύματος είναι γραμμική β' τάξης με μερικές παραγώγους, η γενική λύση θα περιέχει δυο αυθαίρετες συναρτήσεις. Άρα, η γενική λύση γράφεται

$$q(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) ,$$

όπου οι αυθαίρετες συναρτήσεις f και g προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Η γενική λύση παριστάνει, συνεπώς, την υπέρθεση (πρόσθεση) δυο κυμάτων που διαδίδονται αντίθετα με την ίδια ταχύτητα. Η λύση αυτή λέγεται λύση του D' Alembert και προκύπτει αναλυτικά ως εξής:

Θέτουμε $x+ct = u$, $x-ct = z$. Τότε η $q(x,t)$ γίνεται συνάρτηση των μεταβλητών u και z ,

$$q(x,t) = q\left(\frac{u+z}{2}, \frac{u-z}{2c}\right) = q(u,z) .$$

Έχουμε

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial z} ,$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2 q}{\partial u \partial z} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\ .$$

Επίσης

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = c\,\frac{\partial q}{\partial u} - c\,\frac{\partial q}{\partial z} = c\left(\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right) = c\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial z}\right)$$

$$= c\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial t}\right]$$

$$= c\left[c\left(\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial u \partial z}\right) - c\left(\frac{\partial^2 q}{\partial u \partial z} - \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\right)\right]$$

$$= c^2\left(\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} - 2\,\frac{\partial^2 q}{\partial u \partial z} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\right)$$

Η διαφορική εξίσωση του κύματος παίρνει τότε τη μορφή

$$\frac{\partial^2 q}{\partial u \partial z} = 0\ .$$

Με ολοκλήρωση προκύπτει

$$\frac{\partial q}{\partial u} = h(u)\ ,$$

όπου h μια αυθαίρετη συνάρτηση του u και με μια δεύτερη ολοκλήρωση παίρνουμε

$$q = \int h(u)du + f(z) = g(u) + f(z) \; ,$$

όπου f και g αυθαίρετες συναρτήσεις των z και u αντίστοιχα. 'Αρα, η λύση του D' Alembert είναι

$$q = q(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \; .$$

3.5 Ταλάντωση συνεχούς χορδής

Επανερχόμαστε στην § 2.8 και εξετάζουμε την κίνηση του συστήματος, όταν ο αριθμός των σωματίων τείνει στο άπειρο και συνεπώς η απόσταση h μεταξύ των διαδοχικών σωματίων στη θέση ισορροπίας γίνεται απειροστή. Στην πραγματικότητα μελετούμε την κίνηση της ομογενούς συνεχούς ελαστικής χορδής. Η εξ. (2.35) γράφεται

$$m\ddot{q}_\nu(t) = kh\left[\left(\frac{q_{\nu+1}(t) - q_\nu(t)}{h}\right) - \left(\frac{q_\nu(t) - q_{\nu-1}(t)}{h}\right)\right] ,$$

όπου $q_\nu(t)$ είναι η μετατόπιση και $\ddot{q}_\nu(t)$ η επιτάχυνση του ν-οστού σωματίου στο χρόνο t. Επειδή το h' είναι απειροστό, μπορούμε να αντιστοιχήσουμε σε κάθε σωμάτιο έναν αριθμό και έτσι να εισάγουμε μια συνεχή μεταβλητή x που να παριστάνει την απόσταση του ν-οστού σωματίου από το σταθερό αριστερό άκρο της χορδής, δηλαδή θα έχουμε $x = \nu h$, όπου ν φυσικός αριθμός και $x \in [0, \ell]$. 'Ετσι, η συνάρτηση $q_\nu(t)$ με ανεξάρτητη μεταβλητή t αντιστοιχεί στη συνάρτηση $q(x,t)$ με ανεξάρτητες μεταβλητές x και t.

Η συνάρτηση $q(x,t)$ παριστάνει τη μετατόπιση q του σωματίου που βρίσκεται στη θέση x στο χρόνο t.

Τότε, η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$m\,\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} = kh\left[\frac{q(vh+h,t)-q(vh,t)}{h} - \frac{q(vh,t)-q(vh-h,t)}{h}\right]$$

$$= kh\left[\frac{q(x+h,t)-q(x,t)}{h} - \frac{q(x,t)-q(x-h,t)}{h}\right].$$

Από το θεώρημα της μέσης τιμής, για κάποια χρονική στιγμή t, ισχύει

$$q(x+h,t) = q(x,t) + h\,\frac{\partial q(x+\frac{h}{2},t)}{\partial x}\,,$$

$$q(x,t) = q(x-h,t) + h\,\frac{\partial q(x-\frac{h}{2},t)}{\partial x}\,.$$

Τότε έχουμε

$$m\,\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} = kh\left(\frac{\partial q(x+\frac{h}{2},t)}{\partial x} - \frac{\partial q(x-\frac{h}{2},t)}{\partial x}\right).$$

Από το θεώρημα της μέσης τιμής ισχύει επίσης

$$\frac{\partial q(x+\frac{h}{2},t)}{\partial x} = \frac{\partial q(x-\frac{h}{2},t)}{\partial x} + h\,\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}$$

και τελικά έχουμε

$$\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}\,,$$

όπου $c^2 = \frac{kh^2}{m}$. Όπως είδαμε στην § 4, αυτή είναι η διαφορική εξίσωση ενός κύματος που διαδίδεται κατά μήκος του x με ταχύτητα c.

3.6 Υπολογισμός της ταχύτητας κύματος στη συνεχή χορδή

(α) Εγκάρσιο κύμα. Στην § 2.8 αποδείξαμε ότι η σταθερά k για την εγκάρσια κίνηση της φορτισμένης χορδής είναι

$$k = \frac{S}{h} ,$$

όπου S η σταθερή τάση της χορδής και h η απόσταση δυο διαδοχικών σωματίων. Στην περίπτωση της συνεχούς ομογενούς χορδής, επειδή το h είναι απειροστό, εισάγουμε τη γραμμική πυκνότητα ρ (μάζα ανά μονάδα μήκους)

$$\rho = \frac{m}{h}$$

και έχουμε την έκφραση της ταχύτητας διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων στην ομογενή συνεχή χορδή

$$c^2 = \frac{S}{\rho} .$$

β) Διαμήκες κύμα. Η σταθερά k , για τη διαμήκη κίνηση της φορτισμένης χορδής είναι k = K (§ 2.8), όπου K η σταθερά της χορδής. Στην περίπτωση της συνεχούς ομογενούς χορδής, η σταθερά K μπορεί να γραφεί

$$K = \frac{\lambda}{h} ,$$

όπου λ είναι το μέτρο ελαστικότητας της χορδής. Η ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων στην ομογενή συνεχή χορδή δίνεται από τη σχέση

$$c^2 = \frac{\lambda}{\rho} \, .$$

Βλέπουμε ότι, σε κάθε περίπτωση, η ταχύτητα του κύματος στη συνεχή χορδή εξαρτάται από την ελαστικότητα και τη γραμμική πυκνότητα της χορδής.

3.7 Συχνότητα κύματος

Συχνότητα ενός κύματος λέγεται η συχνότητα με την οποία ταλαντώνονται τα σωμάτια του μέσου τα οποία μεταφέρουν το κύμα και ισούται με τη συχνότητα του εξωτερικού αιτίου (πηγής) από το οποίο παράγεται το κύμα. Για παράδειγμα, όταν ένα κύμα διαδίδεται σε μια χορδή, η οποία συνίσταται τμηματικά από διαφορετικά υλικά, η συχνότητα του κύματος δεν μεταβάλλεται, αλλά ισούται πάντα με τη συχνότητα της πηγής, παρότι η ταχύτητα του κύματος αλλάζει. Το συμπέρασμα συνεπώς είναι ότι η συχνότητα του κύματος καθορίζεται από το εξωτερικό αίτιο και όχι από το ελαστικό μέσο.

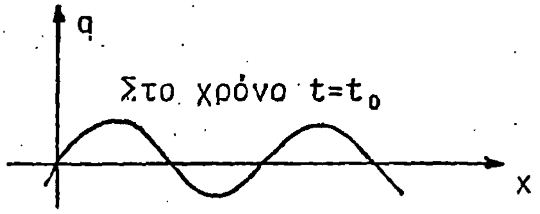
3.8 Αρμονικά κύματα

Αποδείξαμε ότι η γενική εξίσωση μονοδιάστατου κύματος, οποιουδήποτε σχήματος, που κινείται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα c είναι

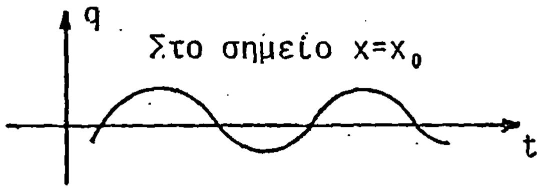
$$q = f(x-ct) \, .$$

Παρατηρούμε ότι το q είναι συνάρτηση δυο μεταβλητών, της χρονικής μεταβλητής t και της χωρικής μεταβλητής x . Είναι δυνατό να εξετάσουμε αμέσως τι συμβαίνει, όταν μια από τις δυο μεταβλητές παραμένει σταθερή. Στην περίπτωση του νήματος, για

$t = t_0$ = σταθ., η εξίσωση δίνει το q συναρτήσει μόνο του x . Η εξίσωση αυτή ορίζει μια καμπύλη που παριστάνει το πραγματικό σχήμα ή στιγμιότυπο του νήματος τη χρονική στιγμή t_0 . Μπορούμε να το φανταστούμε σαν μια φωτογραφία του νήματος στο χρόνο t_0 . Αν τοποθετηθούμε σε ένα σημείο $x = x_0$ = σταθ., η εξίσωση δίνει το q συναρτήσει μόνο του t . Η εξίσωση αυτή ορίζει μια καμπύλη που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η μετατόπιση q μεταβάλλεται με το χρόνο, στο σημείο x_0 (Σχ. 28,29).



Σχ. 28



Σχ. 29

Θεωρούμε τώρα ένα μονοδιάστατο κύμα της μορφής

$$q = a\sin k(x-ct) \ ,$$

όπου α είναι το πλάτος του κύματος, k μια σταθερά προς προσδιορισμό και c η ταχύτητα του κύματος. Ένα τέτοιο κύμα λέγεται αρμονικό και παράγεται σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο (π.χ. νήμα), όταν το εξωτερικό αίτιο εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Αποδεικνύεται ότι όλα τα σωμάτια του μέσου εκτελούν αρμονική ταλάντωση με πλάτος α . Πράγματι, αν στην εξίσωση του αρμονικού κύματος θέσουμε x = σταθ., προκύπτει ότι το q ταλαντώνεται αρμονικά με το χρόνο με πλάτος α . Θα πρέπει να τονισθεί ότι το πλάτος α ισούται με το πλάτος της ταλάντωσης του εξωτερικού αιτίου. Παρατηρούμε επίσης ότι το κύμα αυτό είναι περιοδικό όχι μόνο στο χρόνο αλλά και στο χώρο. Αυτό φαίνεται, αν στην εξίσωση του κύματος θέσουμε t = σταθ. Άρα, θα υπάρχει μια χωρική και μια χρονική περίοδος. Η χωρική περίοδος λέγεται μήκος κύματος, συμβολίζεται με το λ και ισούται με την απόσταση μεταξύ κάθε δυο διαδοχικών τιμών του x που έχουν την ίδια μετατόπιση q και την ίδια κλίση, για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό του μήκους κύματος, για κάποια σταθερή χρονική στιγμή t_1, μια αύξηση του x κατά λ πρέπει να αφήνει αμετάβλητο το q . Άρα, θα ισχύει

$$q = \alpha\sin k(x-ct_1) = \alpha\sin k[(x+\lambda)-ct_1] = \alpha\sin[k(x-ct_1)+2\pi]$$

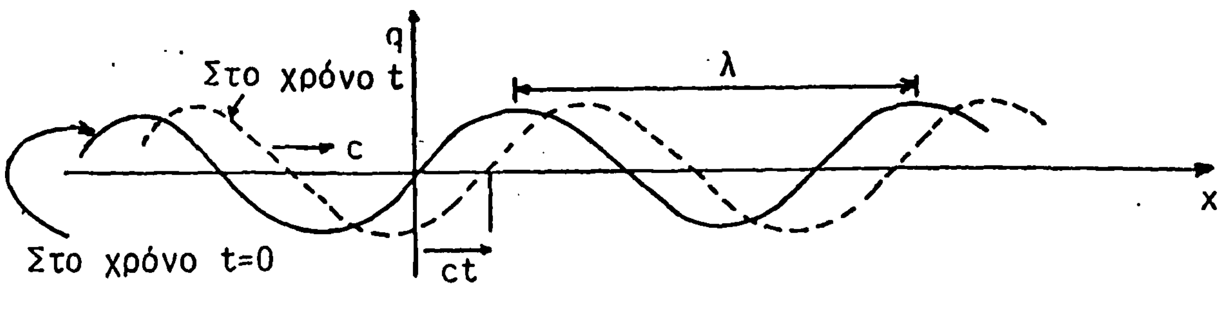
από την οποία προκύπτει η τιμή της σταθεράς k ,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} .$$

Η σταθερά k λέγεται σταθερά διάδοσης και το αντίστροφο του μήκους κύματος λ^{-1} κυματαριθμός. Η εξίσωση του αρμονικού κύματος γράφεται τότε

$$q = \alpha\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct) .$$

Στο σχ. 30 φαίνεται το αρμονικό κύμα, που κινείται προς τα δεξιά, κατά τις χρονικές στιγμές t = 0 και t = t .



Σχ. 30

Η εξίσωση του κύματος στο χρόνο $t = 0$ είναι

$$q = \alpha \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \ .$$

Παρατηρούμε ότι το q παραμένει σταθερό στα σημεία x, $x+\lambda$, $x+2\lambda$, ... , σύμφωνα με τον ορισμό του μήκους κύματος.
Η χρονική περίοδος τ είναι ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει το κύμα απόσταση ίση με το μήκος κύματος. Αφού το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα c, θα ισχύει

$$\lambda = c\tau \ .$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ένας ακόμη ορισμός του μήκους κύματος. Μήκος κύματος είναι η απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου. Συνεπώς, αν η πηγή κάνει μια ταλάντωση εντός μιας περιόδου τ, το κύμα θα διανύσει απόσταση λ στον ίδιο χρόνο τ. Η εξίσωση του κύματος στο χρόνο t γράφεται τότε

$$q = \alpha \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right) .$$

Από εδώ φαίνεται ότι το q παραμένει σταθερό στα σημεία x, $x+\lambda$, $x+2\lambda$, ... , για κάθε σταθερή χρονική στιγμή, σύμφωνα με τον ορισμό του μήκους κύματος. Επίσης το q παραμένει σταθερό κατά τις χρονικές στιγμές t, $t+\tau$, $t+2\tau$, ... , για κάθε σταθερή θέση x.
Η εξίσωση του αρμονικού κύματος μπορεί να λάβει τη μορφή

$$q = \alpha \sin(kx - \omega t) \quad ,$$

όπου $\omega = \dfrac{2\pi}{\tau}$ είναι η γωνιακή συχνότητα.

Η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά είναι

$$q = a\sin(kx+\omega t) \ .$$

Από τις σχέσεις

$$\lambda = c\tau \ , \ k = \frac{2\pi}{\lambda} \ , \ \omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu \ ,$$

όπου ν η συχνότητα του κύματος, προκύπτει ότι η ταχύτητα του κύματος δίνεται με τις εξισώσεις

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda\nu = \frac{\omega}{k} \ .$$

Από τη σχέση $\lambda = \frac{c}{\nu}$ συμπεραίνουμε ότι το μήκος κύματος εξαρτάται από την ελαστικότητα του μέσου, τη γραμμική πυκνότητα του μέσου (αν αυτό είναι γραμμικό) και από τη συχνότητα του εξωτερικού αιτίου.

Στο αρμονικό κύμα που μελετούμε, υποθέτουμε ότι η μετατόπιση q μηδενίζεται στο σημείο $x=0$ στο χρόνο $t=0$. Φυσικά, η υπόθεση αυτή δεν είναι απαραίτητη. Η γενική εξίσωση ενός μονοδιάστατου αρμονικού κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά είναι της μορφής

$$q = a\sin(kx-\omega t-\delta) \ ,$$

όπου δ είναι η σταθερή γωνία φάσης του κύματος.

Συμπερασματικά, αν το ένα άκρο του νήματος εκτελεί αρμονική ταλάντωση λόγω εξωτερικού αιτίου, τότε κάθε σωμάτιο του νήματος εκτελεί αρμονική ταλάντωση, κατά τη χρονική στιγμή που προσδιορίζεται από την απόσταση του σωματίου από το ταλαντούμενο άκρο του νήματος και την ταχύτητα του κύματος, με το πλάτος και την περίοδο του εξωτερικού αιτίου. Το σχήμα του νήματος σε κάθε χρονική στιγμή περιγράφεται από ένα αρμονικό κύμα. Τα μεγέθη που περιγράφουν ένα μονοδιάστατο κύμα είναι η περίοδος, η ταχύτητα του κύματος και το μήκος κύματος.

3.9 Στάσιμα κύματα

Επειδή η μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση του κύματος είναι γραμμική β' τάξης, μπορούμε να έχουμε οποιονδήποτε αριθμό λύσεων, μέσω γραμμικών συνδυασμών δυο γνωστών λύσεων της διαφορικής εξίσωσης του κύματος. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο γραμμικός συνδυασμός, που λαμβάνεται από την υπέρθεση δυο κυμάτων ίδιας συχνότητας, ταχύτητας και πλάτους, τα οποία διαδίδονται σε αντίθετη κατεύθυνση κατά μήκος π.χ μιας χορδής. Αν

$$q_1 = \alpha\sin(kx-\omega t)\ ,\quad q_2 = \alpha\sin(kx+\omega t)$$

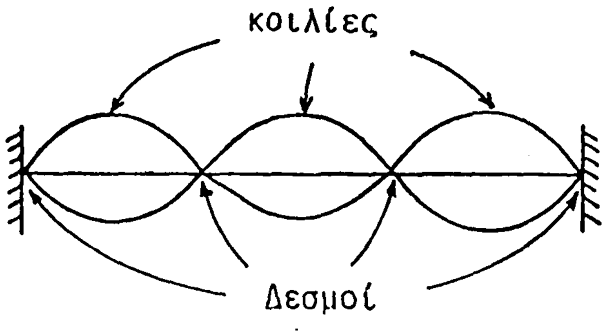
είναι δυο τέτοια κύματα, η υπέρθεσή τους μπορεί να γραφεί

$$q = q_1+q_2 = 2\alpha\sin kx\cos\omega t$$

και παριστάνει ένα "στάσιμο κύμα" (Σχ. 31) .
Παρατηρούμε ότι ένα σωμάτιο της χορδής σε οποιαδήποτε σταθερή θέση x_0 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, γιατί τότε θα ισχύει $q = A\cos\omega t$, όπου $A = 2\alpha\sin kx_0$ = σταθ. και ότι όλα τα σωμάτια ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα. Παρατηρούμε επίσης ότι το πλάτος $2\alpha\sin kx$ του "στασίμου κύματος" δεν είναι σταθερό, αλλά μεταβάλλεται με το x . Συνεπώς, το πλάτος δεν είναι το ίδιο για τα σωμάτια της χορδής. Για τις τιμές $x = N\frac{\lambda}{2}$, $N = 0,1,2,\ldots$, το πλάτος μηδενίζεται. Τα σημεία της χορδής που αντιστοιχούν στις τιμές $x = N\frac{\lambda}{2}$ λέγονται δεσμοί. Για τις τιμές $x = (2N+1)\frac{\lambda}{4}$, $N = 0,1,2,\ldots$, το πλάτος έχει τη μέγιστη τιμή 2α . Τα σημεία της χορδής που αντιστοιχούν στις τιμές $x = (2N+1)\frac{\lambda}{4}$ λέγονται κοιλίες.

Η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών, ή δυο διαδοχικών κοιλιών, είναι $\lambda/2$. Η απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της αμέσως επομένης ή προηγουμένης κοιλίας είναι $\frac{\lambda}{4}$.

Στην πραγματικότητα ένα "στάσιμο κύμα" δεν είναι ένα κύμα που διαδίδεται σε ένα μέσο, γιατί η εξίσωσή του δεν είναι της μορφής $q = f(x \pm ct)$. Η χρησιμοποίηση του όρου "κύμα" έγκειται στο γεγονός ότι, μπορούμε να το θεωρήσουμε ως σύνθεση (υπέρθεση) δυο κυμάτων που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Επειδή το "στάσιμο κύμα" δεν είναι κύμα, δεν μπορεί να μεταφέρει ενέργεια από μια περιοχή σε μια άλλη. Συνεπώς, η ενέργεια διατηρείται "στάσιμη" στη χορδή και είναι άθροισμά της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας της χορδής. Ένα "στάσιμο κύμα" είναι στην πραγματικότητα μια ιδιομορφή ταλάντωσης της χορδής.

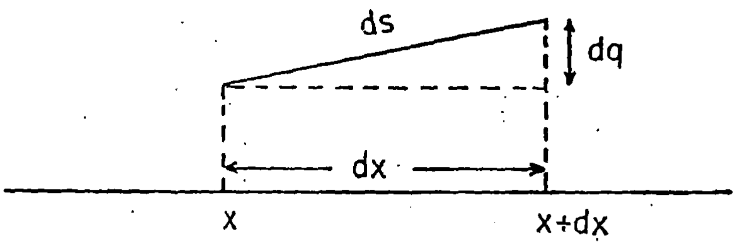


Σχ. 31 Τρία στάσιμα κύματα

3.10 Ενέργεια μηχανικού κύματος

Πρέπει να έχει γίνει κατανοητό από τα προηγούμενα ότι σε κάθε χρονική στιγμή τα σωμάτια ενός ελαστικού μέσου τα οποία μεταφέρουν ένα κύμα βρίσκονται σε διάφορες καταστάσεις κίνησης. Αυτό σημαίνει ότι το μέσο κατέχει ενέργεια, η οποία συνίσταται σε κινητική και δυναμική ενέργεια. Η κινητική ενέργεια οφείλεται στην κίνηση των σωματίων του μέσου και η δυναμική ενέργεια στην παραμόρφωση του μέσου. Θα υπολογίσουμε την ολική ενέργεια ενός εγκαρσίου κύματος σε ένα τεντωμένο νήμα.

Η ύπαρξη της δυναμικής ενέργειας στο νήμα που μεταφέρει το εγκάρσιο κύμα, έγκειται στο γεγονός ότι κάθε τμήμα του νήματος, που δεν είναι παράλληλο προς τη θέση ισορροπίας, πρέπει να είναι παραμορφωμένο και για την παραμόρφωση απαιτείται κάποιο έργο, το οποίο αποθηκεύεται στο τμήμα με τη μορφή δυναμικής ενέργειας. Θεωρούμε ένα απειροστό ευθύγραμμο τμήμα του νήματος μήκους dx στη θέση ισορροπίας και υποθέτουμε ότι το τμήμα αυτό παραμένει ευθύγραμμο σε μια μετατοπισμένη θέση (Σχ. 32).



Σχ. 32 Παραμόρφωση ενός απειροστού τμήματος του νήματος που μεταφέρει ένα εγκάρσιο κύμα

Υποθέτουμε επίσης ότι η τάση S του νήματος δεν μεταβάλλεται κατά την παραμόρφωση αυτού. Αν ρ είναι η γραμμική πυκνότητα του νήματος, τότε η μάζα του απειροστού τμήματος είναι ρdx. Όπως γνωρίζουμε, η εγκάρσια ταχύτητα της μάζας αυτής, σε κάθε στιγμή, είναι $\frac{\partial q}{\partial t}$. Άρα, η κινητική ενέργεια dT του τμήματος dx είναι

$$dT = \frac{1}{2}\rho dx\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 ,$$

και η κινητική του ενέργεια ανά μονάδα μήκους γράφεται

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 .$$

Η δυναμική ενέργεια dV του dx μπορεί να βρεθεί από το έργο παραμόρφωσης. Η μεταβολή του μήκους του dx είναι, όπως φαίνεται από το Σχ. 32, ds-dx. Το έργο που απαιτείται για την παραμόρφωση του τμήματος ισούται με το γινόμενο της σταθερής τάσης S του νήματος επί τη μεταβολή του μήκους του. Επειδή το έργο αυτό αποθηκεύεται στο τμήμα ως δυναμική ενέργεια, θα ισχύει

$$dV = S(ds-dx) \;,$$

όπου $ds^2 = dx^2+dq^2$ και $dq = \frac{\partial q}{\partial x}dx$.

'Εχουμε

$$ds = dx\left[1+\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2} .$$

Για μικρές εγκάρσιες μετατοπίσεις ισχύει ότι η κλίση $\frac{\partial q}{\partial x}$ είναι πολύ μικρότερη της μονάδας. Η ανάπτυξη του διωνύμου δίνει

$$ds = dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \dots\right] ,$$

όπου οι άλλοι όροι παραλείπονται, ως πολύ μικροί, σε σύγκριση με τους δυο πρώτους όρους.

'Αρα, η δυναμική ενέργεια του dx είναι, κατά προσέγγιση

$$dV = \frac{1}{2}S\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 dx$$

και η δυναμική του ενέργεια, ανά μονάδα μήκους, είναι

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}S\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 .$$

Στη θέση ισορροπίας ισχύει $\frac{\partial q}{\partial x} = 0$. Συνεπώς, η δυναμική ενέργεια του τμήματος μηδενίζεται σε αυτή τη θέση. Η ολική ενέργεια του dx, ανά μονάδα μήκους, είναι

$$\frac{dE_{o\lambda}}{dx} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}S\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 .$$

Η ολική ενέργεια ενός μεγάλου τμήματος του νήματος το οποίο βρίσκεται μεταξύ των θέσεων x_1 και x_2, σε δεδομένη στιγμή t_1, δίνεται από τη σχέση

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2}\rho\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2_{t=t_1}dx + \frac{1}{2}S\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2_{t=t_1}dx .$$

Για τον υπολογισμό της ολικής ενέργειας $E_{o\lambda}$ θα πρέπει να δοθεί η συνάρτηση $q = q(x,t)$ που περιγράφει το κύμα με το οποίο ασχολούμαστε.

Αποδεικνύεται ότι η κινητική ενέργεια του τμήματος dx ισούται με τη δυναμική ενέργεια αυτού. Πράγματι, επειδή κάθε κύμα είναι της μορφής

$$q(x,t) = f(x \pm ct), \quad c^2 = \frac{S}{\rho} ,$$

έχουμε

$$\frac{\partial q}{\partial x} = f'(x \pm ct) , \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \pm\, cf'(x \pm ct) ,$$

όπου ο τόνος σημαίνει παραγώγιση ως προς $x \pm ct$.
Η κινητική και δυναμική ενέργεια του τμήματος dx γράφονται

$$dT = \frac{1}{2}\rho c^2 [f'(x \pm ct)]^2 dx \ , \quad dV = \frac{1}{2} S[f'(x \pm ct)]^2 dx \ ,$$

και επειδή $S = \rho c^2$, ισχύει $dT = dV$.

Στην περίπτωση του αρμονικού κύματος

$$q = \alpha \sin 2\pi\nu\left(\frac{x}{c} - t\right)$$

μπορεί να δειχθεί ότι η κινητική ενέργεια του τμήματος μεταξύ των θέσεων $x=0$ και $x=\lambda$, στο χρόνο $t=0$, είναι

$$T = V = \pi^2 \alpha^2 \rho \nu^2 \lambda = \frac{1}{4}(\lambda \rho) u_0^2 \ ,$$

όπου $u_0 = 2\pi\nu\alpha$ η μέγιστη ταχύτητα της εγκάρσιας κίνησης. Μπορεί να δειχθεί ότι καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα για κάθε τμήμα του νήματος μήκους λ σε δοθείσα χρονική στιγμή, δηλαδή ισχύει $T=V=\pi^2\alpha^2\rho\nu^2\lambda$.

Ασκήσεις

1. Ένας παλμός που διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση σε ένα νήμα περιγράφεται κατά τη χρονική στιγμή $t=0$ με την εξίσωση

$$q = \frac{1}{1+x^2} \ ,$$

όπου τα x και q μετρούνται σε μέτρα. Αν η ταχύτητα του παλμού είναι 4m/sec , να γράψετε την εξίσωση που περιγράφει τον παλμό κατά τη χρονική στιγμή t=2sec.

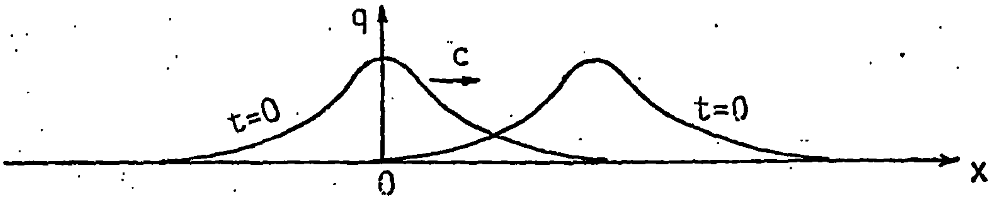
Λύση

Σε κάθε χρονική στιγμή t , η εξίσωση που περιγράφει τον παλμό δίνεται από τη σχέση

$$q = \frac{1}{1+(x-ct)^2} .$$

Για $t=2$, $x-ct = x-8$ και συνεπώς

$$q = \frac{1}{1+(x-8)^2} .$$



2. Κάποιος στέκεται πάνω σε ένα κανώ σε μια ήρεμη πισίνα. Το κανώ τίθεται σε ταλάντωση και εκτελεί 5 πλήρεις κύκλους (ταλαντώσεις) εντός 5sec. Το κύμα που δημιουργείται διανύει 5m εντός χρόνου 2sec. Ποιό είναι το μήκος κύματος;

Λύση

Η συχνότητα του εξωτερικού αιτίου που συμπίπτει με τη συχνότητα του κύματος είναι

$$\nu_{\varepsilon\xi} = \nu_{\kappa\acute{\upsilon}\mu} = 1\text{Hz} .$$

Η ταχύτητα του κύματος είναι: $c = \frac{5\text{m}}{2\text{sec}} = 2{,}5\text{m/sec}$. Ισχύει πάντα

$c = \lambda\nu$, άρα $\lambda = 2{,}5\ m$.

3. Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα παράγεται στο ένα άκρο ενός νήματος, του οποίου το άλλο άκρο είναι σταθερό, από μια ράβδο που κινεί κατακόρυφα το ελεύθερο άκρο πάνω - κάτω σε μια απόσταση ίση με $\frac{1}{2}$ft. Η κίνηση είναι συνεχής και επαναλαμβάνεται κανονικά 2 φορές κάθε 1sec. Αν η γραμμική πυκνότητα του νήματος είναι 0.005 slug/ft και η τάση στο νήμα είναι 2 ℓb, να βρεθεί η ταχύτητα, το πλάτος και η συχνότητα του κύματος καθώς επίσης και το μήκος κύματος.

Λύση

Επειδή η συνολική απομάκρυνση του άκρου του νήματος είναι $\frac{1}{2}$ ft, έπεται ότι το πλάτος της κίνησης αυτού είναι $\frac{1}{4}$ ft. Αυτό θα είναι και το πλάτος του κύματος. Η συχνότητα του εξωτερικού αιτίου, που ισούται με τη συχνότητα του κύματος, είναι

$$\nu_{\varepsilon\xi} = \nu_{\kappa\upsilon\mu} = 2\text{Hz} .$$

Η ταχύτητα του προκύπτοντος εγκαρσίου κύματος είναι

$$c = \sqrt{\frac{S}{\rho}} = 20\text{ft/sec} .$$

Το μήκος κύματος είναι

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 10\text{ft} .$$

4. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση

$$q(x,t) = x^2+4\alpha xt+4\alpha^2t^2 ,$$

όπου α=σταθ. μπορεί να περιγράψει ένα μονοδιάστατο κύμα. Ποιά σχέση υπάρχει μεταξύ της σταθεράς α και της ταχύτητας του κύματος;

Λύση

Η εξίσωση αυτή γράφεται

$$q(x,t) = (x+2\alpha t)^2$$

και συνεπώς μπορεί να περιγράψει ένα μονοδιάστατο κύμα που διαδίδεται κατά την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα $c=2\alpha$.

5. Η εξίσωση ενός εγκαρσίου κύματος που διαδίδεται κατά μήκος ενός νήματος είναι

$$q = 0{,}3\sin\pi[0{,}5x - 50t] ,$$

όπου q και x μετρούνται σε cm και t σε sec.
Να βρεθεί το πλάτος, μήκος κύματος, περίοδος και ταχύτητα του κύματος. Επίσης να βρεθεί η μεγίστη εγκάρσια ταχύτητα του τυχόντος σωματίου του νήματος. Ποιά είναι η μεγίστη εγκάρσια επιτάχυνση του τυχόντος σωματίου;

Λύση

Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$q = 0{,}3 \sin 2\pi\left(\frac{0{,}5}{2}x - \frac{50}{2}t\right) ,$$

και η σύγκρισή της με τη γενική σχέση

$$q = A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{c}{\lambda}t\right),$$

δίνει

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{0,5}{2}, \quad \frac{c}{\lambda} = \frac{50}{2} = 25 \quad \text{και } A = \text{πλάτος} = 0,3\text{cm} .$$

'Αρα $\lambda = 4\text{cm}$ και $c = 100\text{cm/sec}$.

Η περίοδος είναι $\tau = \frac{1}{\nu}$, όπου $\nu = \frac{c}{\lambda} = 25\text{Hz}$ και συνεπώς $\tau = 0,04\text{sec}$.

Η εγκάρσια ταχύτητα του τυχόντος σωματίου του νήματος δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial t} &= -0,3\cdot 50\pi\cos\pi(0,5x - 50t)\\ &= -15\pi\cos\pi(0,5x - 50t) .\end{aligned}$$

'Αρα η μεγίστη εγκάρσια ταχύτητα είναι 15π . Η εγκάρσια επιτάχυνση του τυχόντος σωματίου είναι

$$a = \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -750\pi^2\sin\pi(0,5x - 50t)$$

και η μεγίστη επιτάχυνση είναι $750\pi^2$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$a = -(50\pi)^2 q ,$$

που επιβεβαιώνει το γνωστό αποτέλεσμα ότι το τυχόν σωμάτιο εκτελεί αρμονική ταλάντωση.

6. Για $t=0$, η μορφή ευθυγράμμου χορδής είναι

$$q(x) = \alpha(1-\cos x + 3\sin x) ,$$

όπου α είναι σταθερά. Για $t=0$, η ταχύτητα του τυχόντος σημείου της χορδής είναι $\frac{\partial q(x)}{\partial t} = c\alpha \sin x$. Να βρεθεί το q συναρτήσει του x και t.

<u>Λύση</u>

Γνωρίζουμε ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης του κύματος είναι

$$q(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \;,$$

όπου c είναι η ταχύτητα του κύματος.
Η ταχύτητα του τυχόντος σημείου της χορδής είναι

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct) \;.$$

Για $t=0$, οι εξισώσεις αυτές γράφονται αντίστοιχα

$$q(x) = f(x) + g(x) \;,$$

$$\frac{\partial q(x)}{\partial t} = -cf'(x) + cg'(x) \;.$$

Δίνεται όμως, ότι για $t=0$, $\frac{\partial q(x)}{\partial t} = c\alpha \sin x$, και $q(x) = \alpha(1-\cos x+3\sin x)$.
Έτσι θα ισχύει

$$-f'(x)+g'(x) = \alpha \sin x \;,$$

η ολοκλήρωση της οποίας δίνει

$$-f(x)+g(x) = -\alpha \cos x \;.$$

Από τις σχέσεις

$$f(x)+g(x) = \alpha(1-\cos x+3\sin x) \ ,$$

$$-f(x)+g(x) = -\alpha\cos x \ ,$$

παίρνουμε

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\alpha(1+3\sin x) \ , \\ g(x) = \frac{1}{2}\alpha(1-2\cos x+3\sin x) \ . \end{cases}$$

'Αρα, το q δίνεται από τη σχέση

$$q(x,t) = f(x-ct)+g(x+ct) \ ,$$

ή

$$q(x,t) = \frac{1}{2}\alpha[1+3\sin(x-ct)] + \frac{1}{2}\alpha[1-2\cos(x+ct)+3\sin(x+ct)] \ .$$

7. Μια χορδή ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$q = 5\sin\frac{\pi}{3}x\cos 40\pi t$$

όπου x και q είναι σε cm και το t σε sec.

α) Ποιό είναι το πλάτος και η ταχύτητα των συνιστώντων κυμάτων, των οποίων η σύνθεση μπορεί να δώσει την ταλάντωση αυτή;

β) Ποιά είναι η απόσταση μεταξύ των διαδοχικών δεσμών;

Λύση

Η εξίσωση που μας δίνεται είναι η εξίσωση του στασίμου κύματος. Η γενική μορφή του στασίμου κύματος είναι

$$q = 2a\sin kx\cos \omega t\ .$$

Από τη σύγκριση των δυο εξισώσεων έχουμε

$$2\alpha = 5\ ,\ \ k = \frac{\pi}{3}\ ,\ \ \omega = 40\pi$$

α) Το πλάτος των συνιστώντων κυμάτων είναι $\alpha = \frac{5}{2}$ cm .
Η ταχύτητα των συνιστώντων κυμάτων είναι

$$c = \frac{\omega}{k} = 120\ cm/sec$$

β) Το μήκος κύματος των συνιστώντων κυμάτων είναι

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 6cm\ .$$

Άρα, η απόσταση μεταξύ των διαδοχικών δεσμών είναι 3cm .

8. Ένα ημιτονικό διαμήκες κύμα μεταβιβάζεται σε ένα μακρύ σπειροειδές ελατήριο από μια πηγή δονήσεων που συνδέεται με αυτό. Η συχνότητα της πηγής είναι 25Hz και το μήκος κύματος είναι 24cm . Να βρεθεί η ταχύτητα του κύματος. Αν η μεγίστη διαμήκης απομάκρυνση ενός σωματίου του ελατηρίου είναι 3cm και το κύμα κινείται στην -x κατεύθυνση, να γράψετε την εξίσωση του κύματος. Υποτίθεται ότι η πηγή είναι στο x=0 και η απομάκρυνση στα x=0 και t=0 είναι μηδέν.

Λύση

Το διαμήκες ημιτονικό κύμα έχει εξίσωση

$$q(x,t) = \alpha \sin(kx+\omega t) \ ,$$

επειδή αυτό κινείται στην $-x$ κατεύθυνση και ισχύει

$$q(x=0,\ t=0) = 0 \ .$$

Η συχνότητα του κύματος ισούται με τη συχνότητα της πηγής

$$\nu = 25Hz \ .$$

Η μεγίστη διαμήκης απομάκρυνση ενός σωματίου του ελατηρίου συμπίπτει με το πλάτος του κύματος, όπως φαίνεται από την εξίσωση αυτού, δηλαδή

$$\alpha = 3cm \ .$$

Σύμφωνα με τους γνωστούς τύπους, έχουμε

$$\omega = 2\pi\nu = 50\pi$$

και

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{12} \ .$$

Η ταχύτητα του κύματος είναι

$$c = \frac{\omega}{k} = 600 \ cm/sec$$

και η εξίσωση του κύματος είναι

$$q(x,t) = 3\sin(\frac{\pi}{12}x+50\pi t) \ .$$

Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο
με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ Τυπογραφείο

Διανέμεται Δωρεάν στους φοιτητές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ
Τυπογραφείο
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ