

29/03



Μεταπτυχιακή εργασία ειδίκευσης

**Το πρόβλημα της διαμέρισης απλού πολυγώνου
σε περιοχές δοθέντων εμβαδών
και το αντίστοιχο πρόβλημα στις τρεις διαστάσεις**

Αικατερίνη- Σταματία Κυραλέου

Επιβλέπων Καθηγητής: Λεωνίδας Παληός

Ιούνιος 2003





Περίληψη

Αντικείμενο μελέτης της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η διαίρεση ή αλλιώς η διαμέριση πολυγώνων και πολυέδρων σε απλούστερα σχήματα. Κύριος σκοπός της διαμέρισης ενός αντικείμενου σε απλούστερα αντικείμενα είναι η υποδιαίρεση ενός προβλήματος που αφορά το πολύπλοκο αντικείμενο σε υποπροβλήματα που αφορούν πιο απλά αντικείμενα. Ο λόγος που τα σχήματα προς διαμέριση είναι πολύγωνα και πολυέδρα είναι ότι αυτά αποτελούν συνήθως μια καλή αναπαράσταση των απλών γεωμετρικών σχημάτων που μας περιβάλλουν, ενώ και τα πιο πολύπλοκα γεωμετρικά σχήματα μπορούν να διαιρεθούν σε πολύγωνα ή πολυέδρα. Τα πολύγωνα αναπαριστούν διδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα και είναι δυνατό να αποτελούν την προβολή τρισδιάστατων σχημάτων στο επίπεδο π.χ. κάτοψη ενός κτηρίου, ενώ τα πολυέδρα αναπαριστούν τρισδιάστατα αντικείμενα. Έχουν γίνει διάφορες εργασίες και έχουν παρουσιαστεί πολλοί αλγόριθμοι διαμέρισης πολυγώνων και πολυέδρων σε περιοχές κάποιοι από τους οποίους θα παρουσιαστούν σύντομα παρακάτω. Αυτοί οι αλγόριθμοι παρουσιάζουν διαφορές ως προς τις ιδιότητες που έχουν οι περιοχές που προκύπτουν μετά τη διαμέριση, ως προς την πολυπλοκότητα ή ως προς την τεχνική που χρησιμοποιούν για να επιτύχουν τη διαμέριση.

Επιπλέον θα παρουσιαστούν δύο αλγόριθμοι που σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Ο πρώτος αφορά τη διαμέριση πολυγώνου σε περιοχές συγκεκριμένων εμβαδών, τέτοιες ώστε κάθε περιοχή να έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με το σύνορο του πολυγώνου. Ο δεύτερος αλγόριθμος, που αποτελεί επέκταση του πρώτου αλγορίθμου στις τρεις διαστάσεις, αφορά τη διαμέριση πολυέδρου σε περιοχές συγκεκριμένων όγκων. Για κάθε αλγόριθμο αποδεικνύεται η ορθότητά του και αναλύεται η πολυπλοκότητά του.



Ευχαριστίες

Θα ήθελα να απευθύνω τις εγκάρδιες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Λ. Παλή για την πολύτιμη βοήθειά του κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Η βαθύτατη γνώση του για το αντικείμενο με το οποίο ασχολήθηκα, οι υποδείξεις και συμβουλές του καθώς και η υπομονή και αμέριστη κατανόηση που επέδειξε ήταν καθοριστικές για την διεκπεραίωση της μεταπτυχιακής μου εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την ηθική και υλική τους συμπαράσταση, τους φίλους μου και όλους όσους με βοήθησαν να ξεπεράσω τις δυσκολίες που αντιμετώπισα και σίγουρα έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην αποπεράτωση της παρούσας διατριβής.



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή.....	1
1.1 Γενικά	1
1.2 Οργάνωση εργασίας	3
2. Βασικές έννοιες	4
2.1 Ορισμοί.....	4
2.2 Υπολογισμός του εμβαδού πολυγώνου	9
2.3 Υπολογισμός του όγκου πολυέδρου.....	10
3. Αλγόριθμοι διαμέρισης γεωμετρικών αντικειμένων σε περιοχές	12
3.1 Διαμέριση πολυγώνων.....	13
3.1.1 Διαμέριση πολυγώνου σε τρίγωνα.....	14
3.1.2 Διαμέριση πολυγώνου σε κυρτές περιοχές.....	20
3.1.3 Διαμέριση πολυγώνου σε τραπέζια.....	24
3.1.4 Διαμέριση πολυγώνων με τρύπες	26
3.2 Διαμέριση πολυέδρων.....	27
3.3 Διαμερίσεις πολυγώνων σε περιοχές δοθέντων εμβαδών.....	28
4. Αλγόριθμος Διαμέρισης Πολυγώνου σε Περιοχές Συγκεκριμένων Εμβαδών	35
4.1 Περιγραφή αλγορίθμου.....	36
4.1.1 Διαμέριση του πολυγώνου σε τρίγωνα	41
4.1.2 Κατασκευή του γραφήματος-δέντρου G	43
4.1.3 Διαμέριση τριγώνου σε έξι μικρότερα τρίγωνα.....	45
4.1.4 Διάταξη των μικρών τριγώνων με τη σειρά που θα υποστούν επεξεργασία	46
4.1.5 Υπολογισμός των ζητούμενων περιοχών	47
4.2 Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου	51
4.3 Παραδείγματα εκτέλεσης του αλγορίθμου	53
5. Αλγόριθμος Διαμέρισης Πολυέδρου σε Περιοχές Συγκεκριμένων Όγκων.....	57
5.1 Περιγραφή αλγορίθμου.....	58
5.1.1 Διαμέριση πολυέδρου σε τετράεδρα.....	61
5.1.2 Εύρεση γειτονικών τετραέδρων.....	62
5.1.3 Εύρεση της πλευράς του πρώτου τετραέδρου που θα υποστεί επεξεργασία	62
5.1.4 Επεξεργασία τετραέδρου.....	62
5.1.4.1 Εύρεση κέντρου βάρους τετραέδρου.....	62
5.1.4.2 Διάταξη των πλευρών ενός τετραέδρου	63
5.1.4.3 Διαμέριση τετραέδρου σε μικρότερα τετράεδρα.....	63
5.1.4.4 Εύρεση της σειράς επεξεργασίας των μικρών τετραέδρων	65
5.1.4.5 Διάταξη των κορυφών των μικρών τετραέδρων	66
5.1.5 Υπολογισμός των ζητούμενων περιοχών	66
5.2 Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου	71
5.3 Παραδείγματα εκτέλεσης του αλγορίθμου	73
6. Συμπεράσματα - Επεκτάσεις.....	77



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της υπολογιστικής γεωμετρίας είναι το πρόβλημα του χωρισμού ενός δοθέντος πολυγώνου ή πολυέδρου σε απλούστερες περιοχές. Το γενικό πρόβλημα συχνά αναφέρεται ως το *πρόβλημα διαίρεσης* ή *διαμέρισης σε περιοχές* και βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στα γνωστικά πεδία των γραφικών και της ρομποτικής.

Ένα από τα προβλήματα διαμέρισης, που έχει εφαρμογές στη ρομποτική, είναι το πρόβλημα της διαμέρισης πολυγώνων και πολυέδρων σε περιοχές συγκεκριμένων εμβαδών ή όγκων αντίστοιχα. Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία θα ασχοληθούμε με ένα πρόβλημα διαμέρισης σε περιοχές, στο οποίο ένα πολύγωνο ή πολυέδρο διαμερίζεται σε ένα δοθέν πλήθος περιοχών με συγκεκριμένα εμβαδά ή όγκους αντίστοιχα και το οποίο διατυπώνεται παρακάτω.

Πρόβλημα διαμέρισης σε περιοχές συγκεκριμένων εμβαδών ή όγκων:

Δοθέντος ενός πολυγώνου P (πολυέδρου P) εμβαδού (όγκου) A θέλουμε να βρούμε μια διαμέρισή του σε k μη επικαλυπτόμενα κομμάτια R_1, R_2, \dots, R_k με εμβαδά (όγκους) ίσα με $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = A.$$

Το πρόβλημα αυτό προκύπτει από την πρακτική εφαρμογή της χρήσης μηχανικών εργατών (ρομπότ) για την εκτέλεση συγκεκριμένων εργασιών. Έτσι εάν έχουμε στη διάθεσή μας k ρομπότ, θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε το εξής πρόβλημα:

Δοθέντος ενός αριθμού από k ρομπότ διαφορετικής δυναμικότητας θέλουμε να χωρίσουμε έναν χώρο εργασίας σε k περιοχές και να αναθέσουμε κάθε περιοχή σε ένα ρομπότ ώστε να εργαστεί σ' αυτή. Εάν οι περιοχές που ανατίθενται στα ρομπότ



έχουν εμβαδά ανάλογα της δυναμικότητάς τους τότε αυτά αναμένεται να τελειώσουν στον ίδιο περίπου χρόνο.

Η εργασία που ανατίθεται στα ρομπότ είναι μια εργασία «κάλυψης εδάφους», όπως κούρεμα γκαζόν, καθάρισμα ή εξερεύνηση κάποιου χώρου. Στις εργασίες «κάλυψης εδάφους» πρέπει να διασφαλίζεται ότι κάθε σημείο της περιοχής του χώρου εργασίας το επισκεπτόμαστε τουλάχιστον μια φορά.

Μια ιδανική διαμέριση του χώρου εργασίας θα έδινε περιοχές για τις οποίες κάθε ρομπότ θα απαιτούσε τον ίδιο χρόνο για να καλύψει τη δική του περιοχή. Όμως μια τέτοια διαμέριση είναι γενικά δύσκολο να επιτευχθεί δεδομένου ότι ο χρόνος που απαιτείται για την κάλυψη μιας περιοχής εξαρτάται όχι μόνο από το σχήμα και το μέγεθος της περιοχής και του ρομπότ αλλά και από τον αλγόριθμο που εκτελεί το ρομπότ για να κινηθεί στο περιβάλλον του.

Ωστόσο το εμβαδόν ή ο όγκος μιας περιοχής αποτελεί συνήθως μια καλή εκτίμηση για τον φόρτο εργασίας που απαιτεί η περιοχή αυτή. Έτσι η ύπαρξη k ίδιων ρομπότ συνεπάγεται την διαμέριση του χώρου εργασίας σε k περιοχές ίσων εμβαδών ή όγκων. Όταν τα ρομπότ είναι διαφορετικών δυνατοτήτων (δηλαδή διαφορετικών μεγεθών ή ταχυτήτων), υπάρχει η ανάγκη για τη διαμέριση σε περιοχές διαφορετικών μεγεθών.

Ένα επιπλέον κριτήριο το οποίο θα μπορούσε να απαιτηθεί κατά τη διαμέριση σε περιοχές συγκεκριμένων εμβαδών/όγκων είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού μήκους των ευθυγράμμων τμημάτων που απαιτούνται για να γίνει η διαμέριση σε περιοχές. Αυτό είναι ένα κριτήριο που χρησιμοποιήθηκε σε πολλές σχετικές με το πρόβλημα της διαμέρισης εργασίες. Τελικά αποδείχθηκε ότι το κριτήριο αυτό καθιστά το πρόβλημα NP-hard σε πολλές περιπτώσεις.

Τέλος, είναι επιθυμητό ο αλγόριθμος για τη διαμέριση πολυγώνου/πολυέδρου σε περιοχές συγκεκριμένων εμβαδών/όγκων να εγγυάται ότι οι περιοχές που προκύπτουν έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με το σύνορο του πολυγώνου ή του πολυέδρου. Αυτός ο περιορισμός διασφαλίζει ότι κάθε ρομπότ που βρίσκεται στο εξωτερικό του πολυγώνου ή του πολυέδρου μπορεί να εισέλθει από ένα σημείο στην περιοχή που του ανατίθεται για να εργαστεί σ' αυτή. Βέβαια, προϋποθέτει ότι τα ρομπότ είναι σημειακά.

Πολλές άλλες εργασίες που ασχολούνται με το θέμα της διαμέρισης σε περιοχές ασχολούνται ειδικά με την περίπτωση της διχοτόμησης ενός πολυγώνου, δηλαδή τη διαμέρισή του σε δύο ίσες περιοχές. Ωστόσο υπάρχουν και κάποιες άλλες που παράγουν διαμερίσεις διαφορετικών αναλογιών. Οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν για κυρτά πολύγωνα και πολύεδρα δεν γενικεύονται για μη κυρτά και οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν για μη κυρτά πολύγωνα (πολύεδρα) ή για πολύγωνα (πολύεδρα) με τρύπες δεν εγγυώνται ότι οι περιοχές που θα προκύψουν θα είναι συνδεδεμένες. Αυτό έχει μεγάλη σημασία, γιατί η κάλυψη μη συνδεδεμένων περιοχών από ένα ρομπότ δεν είναι επιθυμητή, αφού απαιτεί το ρομπότ να ταξιδεύει μεταξύ των μη συνδεδεμένων περιοχών.

Γενικά υπάρχουν διάφορες παραλλαγές της διαμέρισης ενός πολυγώνου και πολυέδρου σε περιοχές ανάλογα με τα κριτήρια ως προς τα οποία γίνεται αυτή η



διαμέριση. Διάφορες εργασίες σχετικές με το πρόβλημα της διαίρεσης πολυγώνου και πολυέδρου αναφέρονται πιο αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3.

1.2 Οργάνωση εργασίας

Στο Κεφάλαιο 2 αναφέρονται βασικοί ορισμοί και ιδιότητες σχετικές με πολύγωνα και πολυέδρα που είναι απαραίτητες για την κατανόηση του υπόλοιπου μέρους της εργασίας. Επίσης δίνονται κάποιες μαθηματικές σχέσεις για τον υπολογισμό εμβαδού και όγκου πολυγώνου και πολυέδρου αντίστοιχα. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται κάποιοι γνωστοί αλγόριθμοι διαμέρισης πολυγώνων και πολυέδρων σε περιοχές, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στους αλγορίθμους που είναι πιο σχετικοί με το πρόβλημα που μελετήθηκε. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται ο προτεινόμενος αλγόριθμος διαμέρισης πολυγώνου σε περιοχές συγκεκριμένων εμβαδών καθεμιά από τις οποίες έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με το σύνορο του πολυγώνου. Στο Κεφάλαιο 5, σε αντιστοιχία με το Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται ο προτεινόμενος αλγόριθμος διαμέρισης πολυέδρου σε περιοχές συγκεκριμένων όγκων. Επιπλέον στα Κεφάλαια 4 και 5 αναλύεται η πολυπλοκότητα των αλγορίθμων και αποδεικνύεται η ορθότητά τους. Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται κάποιες ενδιαφέρουσες επεκτάσεις του προβλήματος που μελετήθηκε, οι οποίες θα μπορούσαν να μελετηθούν σε επόμενες εργασίες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βασικές έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρονται κάποιες έννοιες, ορισμοί και χρήσιμες σχέσεις της 2-διάστατης και 3-διάστατης γεωμετρίας που συναντώνται συχνά παρακάτω και είναι απαραίτητοι για την κατανόηση ορισμένων σημείων στο υπόλοιπο μέρος της εργασίας. Οι ορισμοί και οι σχέσεις αυτές έχουν διατυπωθεί με βάση το βιβλίο [35] και τις σημειώσεις [37].

2.1 Ορισμοί

Ένα *απλό πολύγωνο* (simple polygon) είναι μια περιοχή του επιπέδου που περικλείεται από μια απλή κλειστή πολυγωνική γραμμή. Η απλή κλειστή πολυγωνική γραμμή σχηματίζεται από ένα σύνολο ευθυγράμμων τμημάτων, έστω $e_1=v_1v_2$, $e_2=v_2v_3, \dots, e_n=v_nv_1$. Φυσικά τα v_1, v_2, \dots, v_n είναι n σημεία του επιπέδου που συνδέονται μεταξύ τους μέσω των παραπάνω n ευθυγράμμων τμημάτων. Ένα πολύγωνο είναι *απλό* αν και μόνο αν:

1. Η τομή κάθε ζεύγους διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων είναι το μοναδικό κοινό τους σημείο, δηλαδή:

$$e_i \cap e_{i+1} = v_{i+1}, \text{ για όλα τα } i=1, \dots, n-1 \text{ και } e_n \cap e_1 = v_1$$

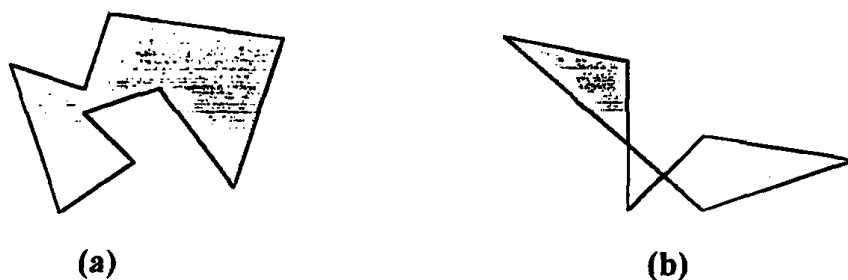
2. Μη διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα δεν τέμνονται, δηλαδή:

$$e_i \cap e_j = \emptyset, \text{ για κάθε } i, j : 1 < |i-j| < n-1$$

Ο λόγος που τα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζουν μια *πολυγωνική γραμμή* είναι γιατί είναι συνδεδεμένα έτσι ώστε εκεί που τελειώνει το ένα να αρχίζει το άλλο. Ο λόγος που η πολυγωνική γραμμή είναι *κλειστή* είναι γιατί κλείνει σε «κύκλο». Ο λόγος που η πολυγωνική γραμμή είναι *απλή* είναι γιατί μη γειτονικά ευθύγραμμα τμήματα δεν τέμνονται.



Στο Σχήμα 2.1(a) φαίνεται ένα απλό πολύγωνο ενώ το πολύγωνο που φαίνεται στο Σχήμα 2.1(b) δεν είναι απλό γιατί δύο μη διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται.



Σχήμα 2.1

Τα σημεία v_i $i=1, \dots, n$ ονομάζονται *κορυφές* (vertices) του πολυγώνου και τα ευθύγραμμα τμήματα e_i ονομάζονται *ακμές* (edges). Ένα απλό πολύγωνο με n κορυφές έχει n ακμές.

Κάθε απλή, κλειστή πολυγωνική γραμμή και γενικότερα κάθε κλειστή καμπύλη χωρίζει το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται σε δύο μέρη:

- Το *εσωτερικό* (interior) που περικλείεται από την κλειστή καμπύλη.
- Το *εξωτερικό* (exterior) που επεκτείνεται γύρω από την κλειστή καμπύλη και προκύπτει αν αφαιρέσω από το επίπεδο το εσωτερικό της κλειστής καμπύλης.

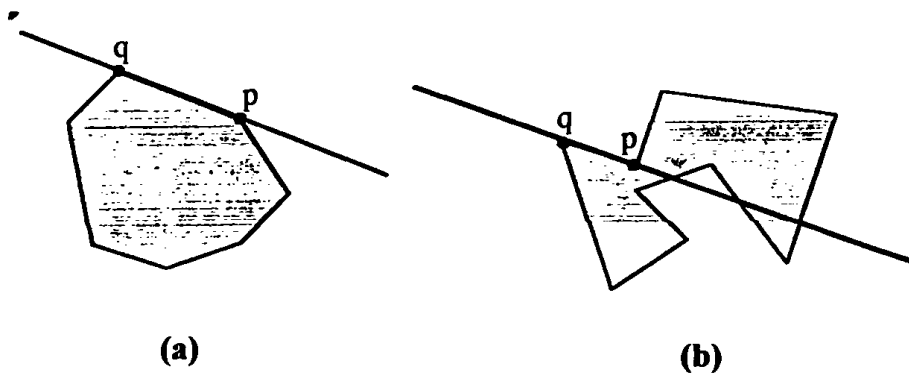
Σε αναλογία με τα παραπάνω σε κάθε απλό πολύγωνο θα διακρίνουμε το εσωτερικό του και το εξωτερικό του.

Ορίσαμε το πολύγωνο ως μια περιοχή του επιπέδου που περικλείεται από μια κλειστή πολυγωνική γραμμή. Συχνά ένα πολύγωνο ορίζεται ως το σύνολο των ευθυγράμμων τμημάτων από τα οποία αποτελείται η κλειστή πολυγωνική γραμμή. Το σύνολο αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων ονομάζεται *σύνορο* (boundary) του πολυγώνου P και συμβολίζεται στην Τοπολογία με ∂P . Δηλαδή, το σύνορο ενός πολυγώνου αποτελείται από τις κορυφές (σημεία, διάσταση 0) και από τις ακμές του πολυγώνου (ευθύγραμμα τμήματα, διάσταση 1). Εμείς πάντως θα θεωρούμε ένα πολύγωνο ως την ένωση του συνόρου του και του εσωτερικού του. Έτσι, για ένα απλό πολύγωνο P , $\partial P \subset P$.

Τα απλά πολύγωνα διακρίνονται σε κυρτά και μη κυρτά. Ένα πολύγωνο είναι *κυρτό* (convex) αν και μόνο αν για οποιαδήποτε δύο σημεία a, b το ευθύγραμμο τμήμα ab ανήκει εξολοκλήρου στο P . Ο ορισμός αυτός συνεπάγεται ότι για κάθε ακμή ενός κυρτού πολυγώνου η ευθεία που διέρχεται από την ακμή αυτή, αφήνει όλα τα σημεία του πολυγώνου στο ίδιο κλειστό ημιεπίπεδο. Αντίθετα, σε ένα μη κυρτό πολύγωνο υπάρχει μια ακμή τέτοια ώστε η ευθεία που διέρχεται από την ακμή αυτή έχει σημεία του πολυγώνου και δεξιά και αριστερά της.

Στο Σχήμα 2.2(a) φαίνεται ένα κυρτό πολύγωνο ενώ το πολύγωνο που φαίνεται στο Σχήμα 2.2(b) είναι μη κυρτό.



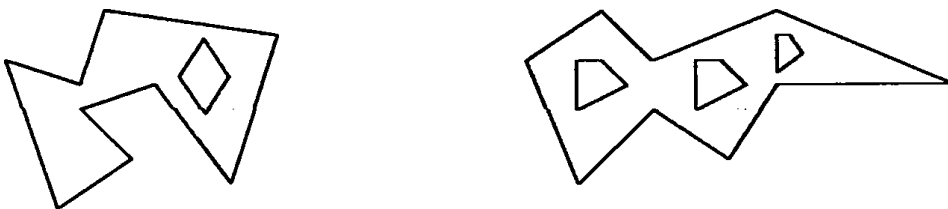


Σχήμα 2.2

Μια κορυφή του πολυγώνου ονομάζεται *μη κυρτή* αν η εσωτερική γωνία του πολυγώνου στη συγκεκριμένη κορυφή είναι μεγαλύτερη από 180° . Αντίθετα, μια κορυφή του πολυγώνου ονομάζεται *κυρτή* αν η εσωτερική γωνία του πολυγώνου στη συγκεκριμένη κορυφή είναι το πολύ ίση με 180° . Προφανώς, όλες οι κορυφές ενός κυρτού πολυγώνου είναι όλες κυρτές, ενώ ένα μη κυρτό πολύγωνο έχει τουλάχιστον μία μη κυρτή κορυφή.

Κανονικό (regular) πολύγωνο είναι ένα πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες μεταξύ τους και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους π.χ. το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο, το κανονικό πεντάγωνο, το κανονικό εξάγωνο κ.λ.π. Υπάρχει ένας άπειρος αριθμός από κανονικά πολύγωνα, ένα για κάθε $n \geq 3$.

Μια άλλη κατηγορία πολυγώνων είναι τα *πολύγωνα με τρύπες*. Αυτά περικλείουν τουλάχιστον μια κλειστή περιοχή που δεν «ανήκει» σε αυτά. Δύο πολύγωνα με τρύπες φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.3).



Σχήμα 2.3

Τα πολύγωνα είναι διδιάστατα σχήματα. Γενίκευση των πολυγώνων στις τρεις διαστάσεις αποτελούν τα πολυέδρα. Ένα *πολύεδρο* (polyhedron), σε αντιστοιχία με ένα πολύγωνο, είναι μια περιοχή του χώρου που περικλείεται από ένα πεπερασμένο πλήθος από επίπεδες πολυγωνικές έδρες, οι οποίες ανά δύο είτε δεν έχουν κοινά σημεία είτε συναντώνται σε κοινές κορυφές ή ακμές.

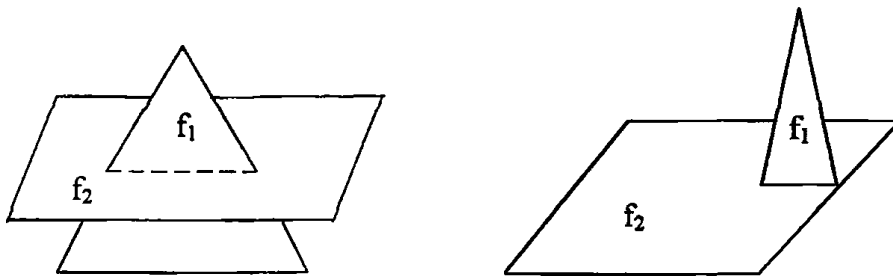
Σύνορο (boundary) του πολυέδρου ονομάζουμε το σύνολο των επίπεδων επιφανειών που συνθέτουν το κλειστό περίβλημα που σχηματίζει το πολυέδρο. Δηλαδή, το σύνορο ενός πολυέδρου αποτελείται από τις κορυφές (σημεία, διάσταση 0), από τις

ακμές (ευθύγραμμα τμήματα, διάσταση 1) και από τις έδρες (επίπεδα, διάσταση 2) του πολυέδρου.

Ο προηγούμενος ορισμός του πολυέδρου είναι αρκετά ασαφής. Γενικά είναι δύσκολο να ορίσουμε με αυστηρότητα την έννοια του πολυέδρου. Όμως, μπορούμε να απαιτούμε να ισχύουν οι εξής τρεις συνθήκες που αφορούν αντίστοιχα στον τρόπο τομής των εδρών του, στην τοπολογία της γειτονιάς κάθε σημείου της επιφάνειας του πολυέδρου και στην τοπολογία ολόκληρου του πολυέδρου:

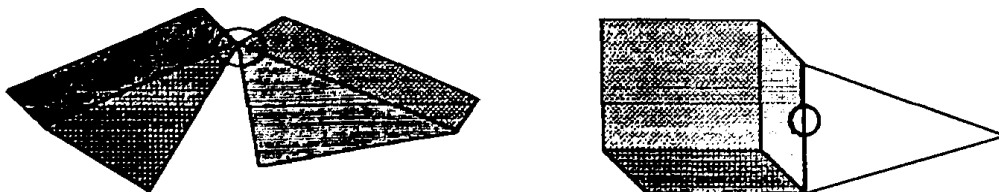
1. Για κάθε ζεύγος εδρών f_1 και f_2 πρέπει
 - a. είτε $f_1 \cap f_2 = \emptyset$
 - b. είτε $f_1 \cap f_2$ είναι μια μοναδική κορυφή
 - c. είτε $f_1 \cap f_2$ αποτελείται από δύο κοινές κορυφές και την ακμή που τις συνδέει.

Αυτή η συνθήκη έχει ως αποτέλεσμα να αποφεύγονται περιπτώσεις όπως αυτές που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.4).



Σχήμα 2.4

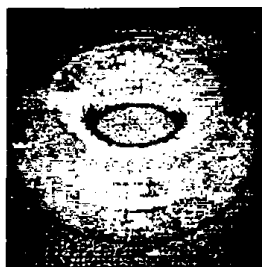
2. Η γειτονιά κάθε σημείου στην επιφάνεια του πολυέδρου πρέπει να είναι ομοιομορφική (homeomorphic) με έναν δίσκο. Δηλαδή να μπορούμε για κάθε σημείο του συνόρου του πολυέδρου έπειτα από «τέντωμα» και «στρέψη», αλλά όχι «σχίσσιμο» της γειτονιάς του σημείου, να καταλήξουμε σε έναν δίσκο. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι κάθε ακμή πρόσκειται σε δύο ακριβώς έδρες. Γενικά λέγοντας γειτονιά ενός σημείου εννοούμε μια πολύ μικρή σφαιρική περιοχή με κέντρο το σημείο. Αποτέλεσμα αυτής της συνθήκης είναι να αποφεύγονται περιπτώσεις όπως αυτές που φαίνονται στο Σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5

3. Το σύνορο του πολυέδρου να είναι κλειστό, συνεκτικό και να μην εκτείνεται στο άπειρο. Για να είναι το σύνορο συνεκτικό πρέπει για κάθε ζευγάρι

- σημείων του συνόρου του πολυέδρου να υπάρχει διαδρομή στην επιφάνεια του πολυέδρου που να τα συνδέει. Αυτό σημαίνει ότι το πολύεδρο μπορεί να περιέχει τρύπες αρκεί αυτές να μην αποσυνδέουν το σύνορό του. Το πολύεδρο του Σχήματος 2.6 για παράδειγμα είναι αποδεκτό. Το σύνολο των τρυπών ενός πολυέδρου ονομάζεται γένος (genus) του πολυέδρου.



Σχήμα 2.6

Τα κυρτά πολύεδρα αναφέρονται συχνά και ως polytopes και είναι τα πολύεδρα στα οποία το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο οποιαδήποτε σημεία τους ανήκει στο πολύεδρο. Οι έδρες ενός κυρτού πολυέδρου είναι οπωσδήποτε κυρτά πολύγωνα. Υπάρχουν δύο συνθήκες που εξασφαλίζουν την κυρτότητα των πολυέδρων:

1. Οι εσωτερικές διέδρες γωνίες είναι κυρτές. Δηλαδή για κάθε ακμή, η εσωτερική γωνία που σχηματίζεται από τις δύο προσκείμενες στην ακμή έδρες είναι το πολύ ίση με 180° .
2. Για κάθε κορυφή, το άθροισμα των γωνιών όλων των προσκείμενων εδρών στην κορυφή αυτή είναι το πολύ ίσο με 360° .

Τα πολύεδρα που δεν πληρούν τις δύο παραπάνω συνθήκες είναι μη κυρτά.

Ένα κανονικό πολύεδρο είναι ένα πολύεδρο όλες οι έδρες του οποίου είναι το ίδιο κανονικό πολύγωνα και το πλήθος των εδρών που πρόσκεινται σε μια κορυφή είναι ίδιο για κάθε κορυφή. Οι παραπάνω συνθήκες συνεπάγονται ίσες διέδρες γωνίες. Σύμφωνα με τους παραπάνω περιορισμούς μπορεί να αποδειχθεί [35] ότι υπάρχουν μόνο πέντε διαφορετικά κανονικά πολύεδρα που είναι γνωστά με το όνομα Πλατωνικά στερεά (Platonic solids). Έστω V , E και F είναι αντίστοιχα το πλήθος των κορυφών, των ακμών και των εδρών ενός κανονικού πολυέδρου. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει κάποιες πληροφορίες για καθένα από τα πέντε κανονικά πολύεδρα.

Όνομα	V	E	F
Τετράεδρο	4	6	4
Κύβος	8	12	6
Οκτάεδρο	6	12	8
Δωδεκάεδρο	20	30	12
Εικοσάεδρο	12	30	20

Αντίθετα με τα πολύγωνα όπου ίσχυε ότι ένα απλό πολύγωνο με n κορυφές έχει n ακμές, στα πολυέδρα δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Ωστόσο υπάρχει μια σχέση που συνδέει το πλήθος των κορυφών, ακμών και εδρών ενός πολυέδρου με γένος 0. Η σχέση αυτή παρατηρήθηκε το 1758 από τον Leonard Euler και εκφράζεται ως εξής:

Το άθροισμα του πλήθους των κορυφών και των εδρών ενός πολυέδρου (με genus 0) μείον το πλήθος των ακμών του είναι ίσο με δύο, ή

$$V - E + F = 2$$

όπου V είναι το πλήθος των κορυφών, E είναι το πλήθος των ακμών και F είναι το πλήθος των εδρών ενός πολυέδρου. Ο παραπάνω τύπος ονομάζεται *τύπος του Euler*.

Από τον τύπο του Euler μπορεί να αποδειχθεί ότι μεταξύ του πλήθους των κορυφών, του πλήθους των ακμών και του πλήθους των εδρών ενός πολυέδρου υφίσταται μια σχέση γραμμικότητας. Δηλαδή, εάν $V=n$, τότε $E=\Theta(n)$ και $F=\Theta(n)$.

Δύο πολύ σημαντικές έννοιες που θα χρησιμοποιούμε συνεχώς είναι οι έννοιες της διαίρεσης και της διαμέρισης ενός αντικειμένου. Παρόλο που μέχρι στιγμής αναφερόμασταν στις δύο αυτές έννοιες σαν να ταυτίζονταν, από εδώ και στο εξής θα τις διακρίνουμε.

Το σύνολο αντικειμένων $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ ορίζει μια *διαίρεση* (decomposition) του αντικειμένου P αν και μόνο αν η ένωση των επιμέρους αντικειμένων P_1, P_2, \dots, P_k δίνει το αντικείμενο P , δηλαδή,

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k.$$

Μια *διαμέριση* (partition) του αντικειμένου P στο σύνολο αντικειμένων $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ είναι μια διαίρεση του P , όπου επιπλέον δύο οποιαδήποτε επιμέρους αντικείμενα P_i και P_j τέμνονται μόνο στο σύνορό τους, δηλαδή,

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k \quad \text{και} \quad P_i \cap P_j \subseteq \partial P_i \cap \partial P_j, \quad (1 \leq i, j \leq k, i \neq j).$$

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε διαμερίσεις πολυγώνων και πολυέδρων. Τα πλεονεκτήματα της διαμέρισης έναντι της διαίρεσης ενός αντικειμένου (πολυγώνου ή πολυέδρου) P είναι ότι τα επιμέρους αντικείμενα (περιοχές) που προκύπτουν δεν επικαλύπτονται και ότι το εμβαδόν ή ο όγκος του P ισούται με το άθροισμα των εμβαδών ή των όγκων, αντίστοιχα, των επιμέρους αντικειμένων.

2.2 Υπολογισμός του εμβαδού πολυγώνου

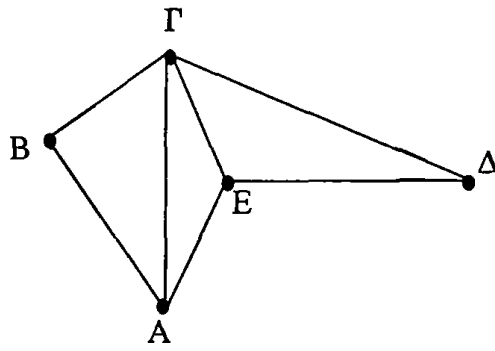
Ο υπολογισμός του εμβαδού ενός πολυγώνου μπορεί να γίνει με τη διαίρεση του πολυγώνου σε τρίγωνα και την άθροιση των εμβαδών αυτών των τριγώνων.

Για παράδειγμα το εμβαδόν του πολυγώνου του Σχήματος 2.7 δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$E_{ABΓE} = E_{ABΓ} + E_{AΓE} + E_{EΓA}$$



Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το μισό του γινομένου της βάσης του επί το ύψος του. Υπάρχει όμως και ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του εμβαδού. Έτσι, αν $a=(a_x, a_y)$, $b=(b_x, b_y)$, $c=(c_x, c_y)$ είναι οι τρεις κορυφές ενός τριγώνου το εμβαδόν του δίνεται από τον παρακάτω τύπο:



Σχήμα 2.7

$$\text{εμβαδόν τριγώνου } (a, b, c) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix}$$

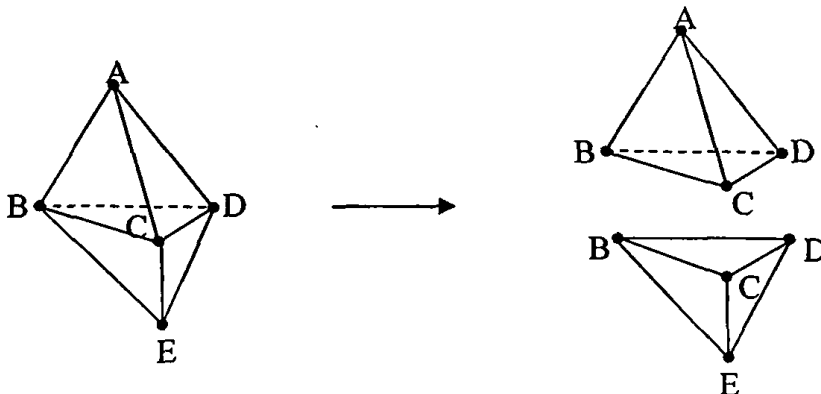
Ο τύπος αυτός είναι βολικός στην περίπτωση που ένα τρίγωνο περιγράφεται με βάση τις τρεις κορυφές του και δίνει το προσημασμένο εμβαδόν ενός τριγώνου. Αυτό σημαίνει ότι από τον παραπάνω τύπο υπάρχει περίπτωση να προκύψει θετικός ή αρνητικός αριθμός. Η απόλυτη τιμή αυτού του αριθμού ισούται με το ζητούμενο εμβαδόν ενώ το πρόσημο εξαρτάται από τη σχετική θέση των τριών κορυφών. Αν οι κορυφές του τριγώνου συναντώνται με τη σειρά a, b, c κατά την ανθωρολογιακή διάσχιση του συνόρου του τότε το πρόσημο είναι θετικό, αλλιώς είναι αρνητικό.

2.3 Υπολογισμός του όγκου πολυέδρου

Αντίστοιχα με τη διδιάστατη περίπτωση, ο υπολογισμός του όγκου ενός πολυέδρου μπορεί να γίνει με τη διαίρεση του πολυέδρου σε τετράεδρα και την άθροιση των όγκων αυτών των τετραέδρων.

Για παράδειγμα το παρακάτω πολύεδρο (Σχήμα 2.8) έχει διαιρεθεί σε δύο τετράεδρα: στο τετράεδρο ABCD και στο τετράεδρο BCDE. Ο όγκος λοιπόν του πολυέδρου ABCDE δίνεται από τη σχέση:

$$\text{ΌΓΚΟΣ}_{ABCDE} = \text{ΌΓΚΟΣ}_{ABCD} + \text{ΌΓΚΟΣ}_{BCDE}$$



Σχήμα 2.8

Ο προσημασμένος όγκος ενός τετραέδρου με κορυφές $a=(a_x, a_y, a_z)$, $b=(b_x, b_y, b_z)$, $c=(c_x, c_y, c_z)$ και $d=(d_x, d_y, d_z)$, δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\text{όγκος τετραέδρου } (a, b, c, d) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z & 1 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \\ c_x & c_y & c_z & 1 \\ d_x & d_y & d_z & 1 \end{vmatrix}$$

• Η ποσότητα που δίνει αυτός ο τύπος μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Η απόλυτη τιμή της παραπάνω ποσότητας ισούται με τον όγκο του τετραέδρου, ενώ το πρόσημο εξαρτάται από τη σχετική θέση των τεσσάρων κορυφών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αλγόριθμοι διαμέρισης γεωμετρικών αντικειμένων σε περιοχές

Η διαμέριση γεωμετρικών σχημάτων σε απλούστερα σχήματα πάντα αποτελούσε ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης στην υπολογιστική γεωμετρία. Ο λόγος είναι ότι οι πιο πολλοί αλγόριθμοι σχεδιάζονται και προγραμματίζονται πιο εύκολα και εκτελούνται πιο αποτελεσματικά όταν εφαρμόζονται σε απλούστερα σχήματα. Έτσι η διαμέριση πολυγώνων και πολυέδρων έχει εφαρμογές που παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον. Για παράδειγμα η διαμέριση πολυγώνων σε κυρτές περιοχές αποτελεί βήμα προεπεξεργασίας στην αναγνώριση προτύπων, στην αυτοματοποιημένη σχεδίαση και στη ρομποτική. Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της διαμέρισης πολυγώνου σε κυρτές περιοχές είναι η αναγνώριση χαρακτήρων (character recognition): οι χαρακτήρες που εισάγονται με σαρωτή στον υπολογιστή είναι δυνατό να αναπαρασταθούν με πολύγωνα (κάποιες φορές πολύγωνα με τρύπες) και τα πολύγωνα αυτά διαιρούνται σε κυρτές περιοχές. Οι περιοχές που προκύπτουν συγκρίνονται με τα σχήματα που υπάρχουν σε μια βάση δεδομένων ώστε να βρεθεί ποιος είναι ο ζητούμενος χαρακτήρας. Στον τομέα των γραφικών, πολύεδρα διαιρούνται σε απλούστερα σχήματα για να εκτελεστούν ευκολότερα αλγόριθμοι διαγραφής κρυμμένων επιφανειών και αλγόριθμοι φωτορεαλιστικής απόδοσης (ray tracing).

Αρκετά προβλήματα διαμέρισης γεωμετρικών σχημάτων επιδέχονται περισσότερες από μια λύσεις. Για παράδειγμα πολλές είναι οι πιθανές διαμερίσεις ενός πολυγώνου σε τρίγωνα. Χρησιμοποιούνται λοιπόν διάφορα κριτήρια για να βρεθεί η καλύτερη από τις πιθανές διαμερίσεις, ανάγοντας έτσι το πρόβλημα σε πρόβλημα βελτιστοποίησης. Τα κριτήρια αυτά είναι:

- η ελαχιστοποίηση του πλήθους των κομματιών που προκύπτει μετά τη διαμέριση.
- η ελαχιστοποίηση του συνολικού μήκους των ευθυγράμμων τμημάτων που εισάγονται στο εσωτερικό του πολυγώνου ή του εμβαδού των επιφανειών που

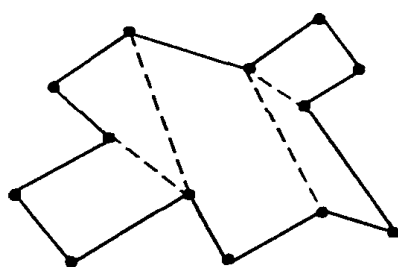
- εισάγονται στο εσωτερικό του πολυέδρου ώστε να αποκοπούν τα απαιτούμενα κομμάτια.
- η ελαχιστοποίηση της γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ δύο ακμών στις δύο διαστάσεις ή δύο πλευρών στις τρεις διαστάσεις.

3.1 Διαμέριση πολυγώνων

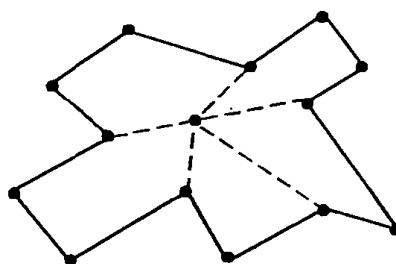
Θα εξετάσουμε διαμερίσεις απλών πολυγώνων σε διάφορα απλούστερα σχήματα: διαμερίσεις σε τρίγωνα, διαμερίσεις σε μονότονα πολύγωνα, διαμερίσεις σε τραπέζια, διαμερίσεις σε κυρτά πολύγωνα. Οι περιγραφές των αλγορίθμων διαμέρισης πολυγώνων και πολυέδρων που ακολουθούν στηρίζονται στις αναφορές [35], [13].

Για να διαιρέσουμε ένα πολύγωνο σε περιοχές είναι απαραίτητη η εισαγωγή μη τεμνόμενων διαγωνίων ανάμεσα σε ζευγάρια κορυφών του πολυγώνου. Μια *διαγώνιος* είναι ένα ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο κορυφές του πολυγώνου και βρίσκεται στο εσωτερικό του πολυγώνου. Αυτό σημαίνει ότι αν ab είναι μια διαγώνιος του πολυγώνου P , τότε τα σημεία a και b είναι κορυφές του P και η διαγώνιος ab δεν τέμνει το σύνορο του P . Θα θεωρήσουμε δύο διαγώνιους μη τεμνόμενες αν η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

Σε ορισμένες περιπτώσεις διαμέρισης πολυγώνων χρησιμοποιούνται εκτός από τις κορυφές του πολυγώνου επιπλέον σημεία στο σύνορο ή στο εσωτερικό του πολυγώνου. Τα σημεία αυτά ονομάζονται *σημεία Steiner* και χρησιμοποιούνται ως κορυφές των τμημάτων του πολυγώνου που προκύπτουν μετά τη διαμέριση. Ο σκοπός της χρήσης των σημείων Steiner είναι η ελαχιστοποίηση κάποιου κριτηρίου της διαμέρισης, από αυτά που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου.



Διαίρεση με χρήση διαγωνίων μόνον.



Διαίρεση με χρήση σημείων Steiner.

Σχήμα 3.1

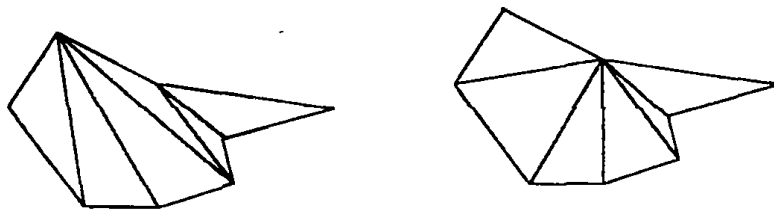
Υπάρχουν δύο κύριοι τρόποι διαμέρισης πολυγώνου σε περιοχές (Σχήμα 3.1): διαμέριση χρησιμοποιώντας μόνο διαγώνιους ή διαμέριση χρησιμοποιώντας και σημεία Steiner. Η διαφορά είναι ότι οι διαγώνιοι πρέπει να συνδέουν σημεία που είναι κορυφές του πολυγώνου, ενώ τα σημεία Steiner μπορούν να βρίσκονται σε οποιοδήποτε σημείο του πολυγώνου (συνήθως είναι στο εσωτερικό), οπότε τα

αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα που φέρονται συνδέουν δύο σημεία που είναι στο εσωτερικό ή στο σύνορο του πολυγώνου. Η διαμέριση με χρήση σημείων Steiner είναι γενικά πιο πολύπλοκη με την έννοια ότι η επιλογή ενός «βέλτιστου» συνόλου σημείων Steiner απαιτεί σημαντική υπολογιστική προσπάθεια, αλλά από την άλλη πλευρά υπάρχει ελευθερία να χρησιμοποιούνται σημεία πέραν των κορυφών του πολυγώνου πράγμα που συχνά έχει ως αποτέλεσμα πιο καλές διαμερίσεις.

3.1.1 Διαμέριση πολυγώνου σε τρίγωνα

Η διαμέριση πολυγώνου σε τρίγωνα είναι ίσως η σημαντικότερη διαμέριση πολυγώνου καθώς έχει εφαρμογές στη ρομποτική, στα γραφικά, στη σχεδίαση και κατασκευή προϊόντων μέσω υπολογιστή (CAD/CAM) και χρησιμοποιείται από ένα πλήθος αλγορίθμων που σχετίζονται με πολύγωνα. Γι' αυτό και ήταν για αρκετό καιρό πεδίο έρευνας με αποτέλεσμα να έχουν αναπτυχθεί πολλοί αλγόριθμοι για το θέμα αυτό.

Η διαμέριση ενός πολυγώνου σε τρίγωνα συνήθως δεν είναι μοναδική, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.2. Κατά τη διαμέριση ενός πολυγώνου P σε τρίγωνα χρησιμοποιούνται μη τεμνόμενες διαγώνιοι, έτσι ώστε οι πλευρές κάθε τριγώνου που προκύπτει να είναι πλευρές του P ή διαγώνιοι. Έχει αποδειχθεί ότι κάθε απλό πολύγωνο με n κορυφές μπορεί να διαιρεθεί σε τρίγωνα χρησιμοποιώντας $n-3$ διαγώνιους και το πλήθος των τριγώνων που προκύπτουν από την διαμέριση αυτή είναι ακριβώς $n-2$ [35].



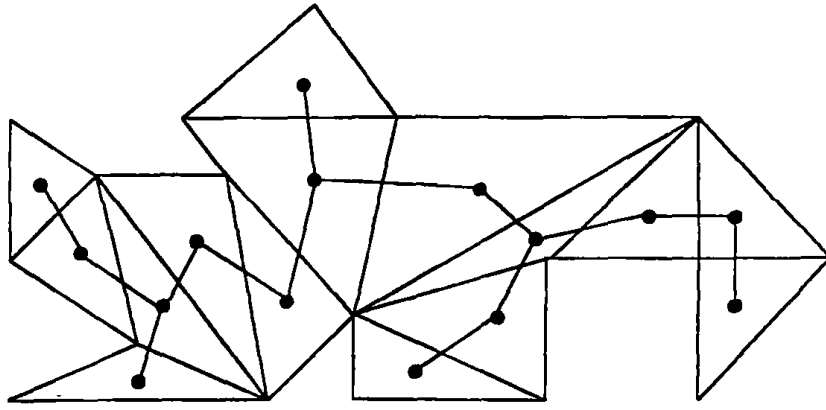
Σχήμα 3.2

Για κάθε διαμέριση T_p ενός πολυγώνου P σε τρίγωνα, ορίζουμε το *δυϊκό γράφημα* (dual graph) $G(T_p)$ της T_p ως εξής: το γράφημα $G(T_p)$ έχει έναν κόμβο για κάθε τρίγωνο της διαμέρισης T_p και ανάμεσα σε δύο κόμβους του γραφήματος $G(T_p)$ υπάρχει μια ακμή αν και μόνο αν τα τρίγωνα που αντιστοιχούν στους κόμβους αυτούς έχουν μια κοινή πλευρά, δηλαδή μια διαγώνιο του P (Σχήμα 3.3). Έτσι, κάθε ακμή του $G(T_p)$ αντιστοιχεί σε ακριβώς μια διαγώνιο της T_p . Αξίζει να σημειωθεί ότι:

Πρόταση 3.1

Το δυϊκό γράφημα $G(T_p)$ κάθε διαμέρισης T_p ενός πολυγώνου σε τρίγωνα με χρήση διαγωνίων είναι ένα δέντρο.

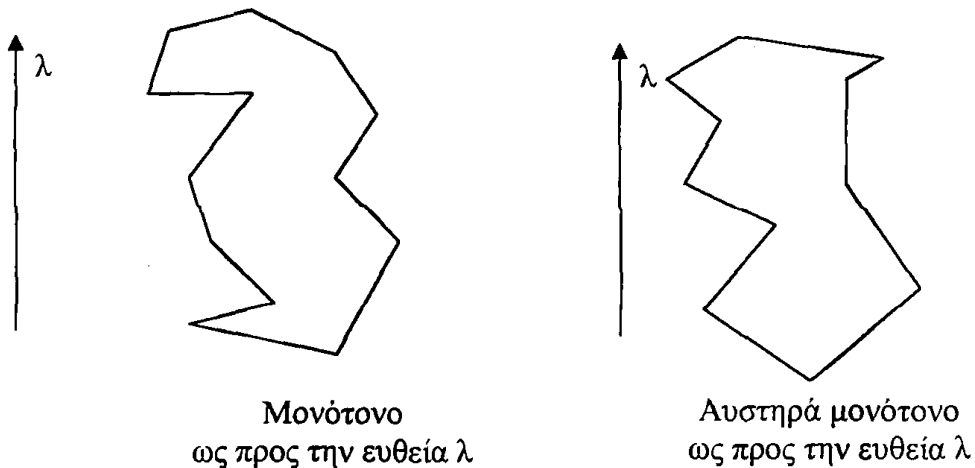
Απόδειξη: Κάθε διαγώνιος χωρίζει το P σε δύο κομμάτια και συνεπώς η αφαίρεση μιας οποιασδήποτε ακμής από το $G(T_p)$ χωρίζει το γράφημα στα δύο.



Σχήμα 3.3

Τα κυρτά πολύγωνα μπορούν πολύ εύκολα να διαιρεθούν σε τρίγωνα συνδέοντας απλά μια κορυφή του πολυγώνου με όλες τις υπόλοιπες μη γειτονικές κορυφές της. Αυτό γίνεται σε γραμμικό χρόνο. Ωστόσο στη γενικότερη περίπτωση αυτό δεν μπορεί να εφαρμοστεί, γιατί προκύπτουν ευθύγραμμοι τμήματα που ολόκληρα ή μερικά βρίσκονται εκτός του πολυγώνου. Μια πιθανή προσέγγιση είναι να χωρίσουμε πρώτα ένα πολύγωνο σε κυρτά τμήματα και μετά να διαιρέσουμε σε τρίγωνα τα κυρτά αυτά τμήματα. Κάτι τέτοιο όμως δεν μπορεί να γίνει εύκολα γιατί και η διαμέριση πολυγώνου σε κυρτές περιοχές είναι αρκετά δύσκολο πρόβλημα. Υπάρχει όμως μια κατηγορία πολυγώνων τα λεγόμενα μονότονα πολύγωνα που επιδέχονται πιο γρήγορη διαμέριση σε τρίγωνα.

Ένα πολύγωνο λέγεται *μονότονο* ως προς ευθεία γραμμή λ αν για κάθε ευθεία ϵ κάθετη στην λ η τομή του πολυγώνου με την ϵ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, ένα σημείο ή το κενό σύνολο. Αν η τομή του συνόρου του πολυγώνου με την ϵ είναι ένα σημείο, δύο σημεία ή το κενό σύνολο τότε το πολύγωνο λέγεται *αυστηρά μονότονο* ως προς την ευθεία λ (Σχήμα 3.4).

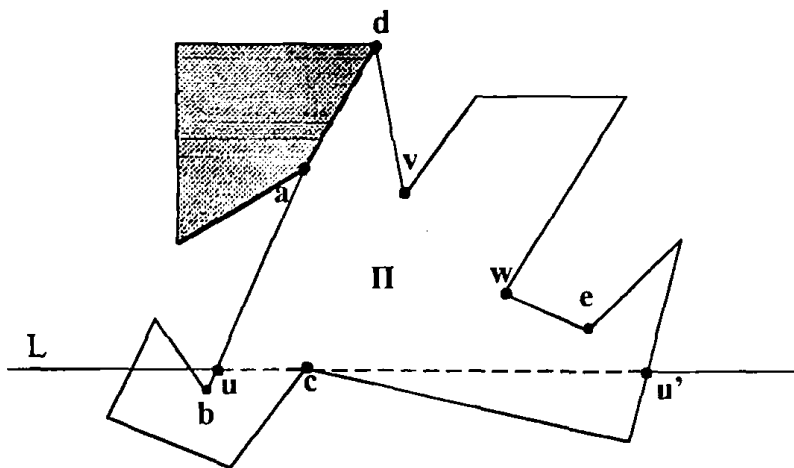


Σχήμα 3.4

Το σύνορο ενός μονότονου πολυγώνου χωρίζεται σε δύο πολυγωνικές αλυσίδες (την αριστερή και τη δεξιά) που είναι μονότονες ως προς την λ . Ο λόγος, για τον οποίο κάποιο πολύγωνο ενδεχομένως δεν είναι μονότονο ως προς μια ευθεία λ είναι η ύπαρξη κορυφών που οι προσκείμενες ακμές τους σχηματίζουν μια αλυσίδα που δεν είναι μονότονη ως προς την λ .

Οι αλγόριθμοι που αναπτύχθηκαν αρχικά για τη διαμέριση πολυγώνων σε τρίγωνα ήταν τετραγωνικού χρόνου και εμφανίστηκαν ήδη από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Ο πρώτος αλγόριθμος χρόνου $O(n \log n)$ για τη διαμέριση πολυγώνου με n κορυφές σε τρίγωνα δόθηκε το 1978 από τους Garey, Johnson, Preparata και Tarjan [21]. Ο αλγόριθμος αυτός εκτελείται σε δύο φάσεις. Κατά την πρώτη φάση το πολύγωνο διαιρείται σε μονότονα τμήματα ως προς κάποια ευθεία σε χρόνο $O(n \log n)$, ενώ κατά τη δεύτερη φάση κάθε μονότονο πολύγωνο διαιρείται σε τρίγωνα σε χρόνο $O(n)$. Παρακάτω δίνουμε μια γενική περιγραφή του αλγορίθμου, γιατί έχει ως ενδιάμεσο βήμα μια άλλη διαμέριση πολυγώνου (τη διαμέριση πολυγώνου σε μονότονα τμήματα), αλλά και γιατί χρησιμοποιεί κάποιες τεχνικές που χρησιμοποιούνται και σε άλλους αλγόριθμους στην υπολογιστική γεωμετρία. Μια τέτοια τεχνική είναι η μέθοδος της γραμμής σάρωσης που περιγράφεται παρακάτω.

Κατά την πρώτη φάση, πρέπει να «εξαλειφθούν» οι κορυφές που στερούν από το πολύγωνο την ιδιότητα να είναι μονότονο ως προς την κατακόρυφη κατεύθυνση. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιείται ένας αλγόριθμος από τους Lee και Preparata [33] και βασίζεται στη μέθοδο της γραμμής σάρωσης (plane sweep). Η ιδέα της μεθόδου αυτής είναι ότι μια ευθεία γραμμή «σαρώνει» το επίπεδο κινούμενη παράλληλα προς τον εαυτό της και η πληροφορία κατά μήκος της γραμμής αποθηκεύεται σε κατάλληλη δομή δεδομένων. Αυτή η δομή δεδομένων ενημερώνεται κάθε φορά που η γραμμή σάρωσης σταματάει σε ορισμένα σημεία, όπου χρειάζεται να γίνει κάποια επεξεργασία.



Σχήμα 3.5

Στην προκειμένη περίπτωση, η γραμμή σάρωσης είναι μια οριζόντια γραμμή L που «σαρώνει» το επίπεδο δυο φορές κινούμενη σε αντίθετες κάθε φορά κατευθύνσεις (από πάνω προς τα κάτω και από κάτω προς τα πάνω). Κατά την πρώτη σάρωση «εξαλείφονται» κορυφές όπως οι a και c , ενώ κατά τη δεύτερη σάρωση κορυφές όπως οι v , e και b (Σχήμα 3.5). Η κορυφή b έχει την ιδιότητα ότι είναι μη κυρτή κορυφή

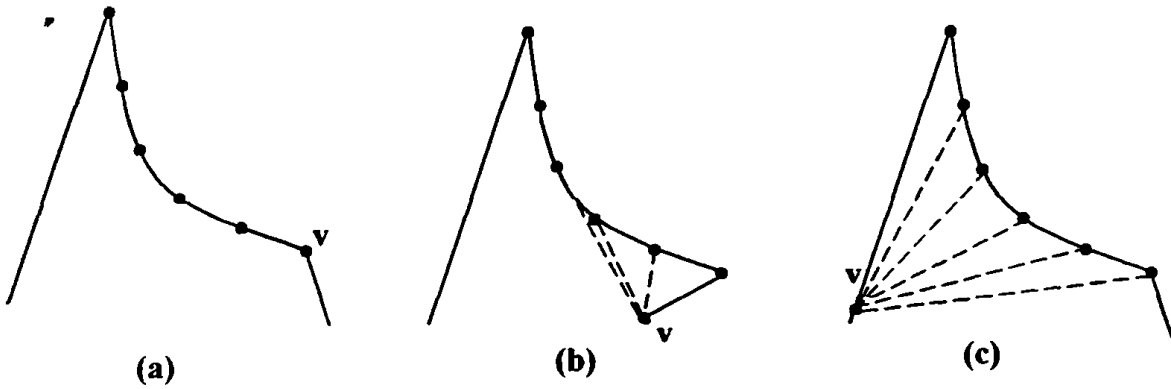
και αν L' είναι η ευθεία που είναι παράλληλη στην L και διέρχεται από την b τότε οι γειτονικές κορυφές της b βρίσκονται και οι δύο ψηλότερα από την ευθεία L' . Κάτι αντίστοιχο ισχύει και για τις κορυφές v και e , ενώ αντίθετα για τις κορυφές a και c οι γειτονικές τους κορυφές βρίσκονται χαμηλότερα της αντίστοιχης L' . Κορυφές όπως οι v , e και b ονομάζονται κορυφές συνένωσης, ενώ κορυφές όπως οι a και c ονομάζονται κορυφές διαχωρισμού. Όλες αυτές οι κορυφές εξαλείφονται με την προσθήκη κατάλληλων διαγωνίων στο εσωτερικό του πολυγώνου, οπότε τελικά το πολύγωνο χωρίζεται σε μονότονες περιοχές.

Μια διαγώνιος για τις κορυφές διαχωρισμού βρίσκεται ως εξής: Έστω c είναι η επόμενη κορυφή διαχωρισμού που θα υποστεί επεξεργασία ώστε να «εξαλειφθεί». Ήδη έχει «εξαλειφθεί» η κορυφή a και έχει βρεθεί η διαγώνιος ad που έχει χωρίσει το αρχικό πολύγωνο σε μικρότερα πολύγωνα. Έστω ότι η κορυφή c ανήκει σε ένα τέτοιο πολύγωνο Π . Η ευθεία που είναι παράλληλη στην L και διέρχεται από την c τέμνει το σύνορο του πολυγώνου σε δύο τουλάχιστον σημεία. Δύο από αυτά τα σημεία τομής, έστω u και u' ορίζουν το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα που περιέχει την κορυφή c , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.5. Αν σ είναι το κομμάτι του συνόρου του πολυγώνου Π που ορίζεται από τα σημεία u και u' και δεν περιέχει την κορυφή c τότε μια διαγώνιος που «εξαλείφει» την c είναι αυτή με άκρα την c και το σημείο του σ με την μικρότερη y συντεταγμένη, εκτός των u και u' (το e στο συγκεκριμένο παράδειγμα).

Η επεξεργασία μιας κορυφής συνένωσης είναι εντελώς συμμετρική, αφού το είδωλο μιας τέτοιας κορυφής ως προς μια οριζόντια γραμμή είναι μια κορυφή διαχωρισμού.

Κατά την πρώτη φάση του αλγορίθμου, απαιτείται πρώτα μια ταξινόμηση των n κορυφών του πολυγώνου ως προς κατεύθυνση κάθετη στην ευθεία L . Επιπλέον κάθε φορά που η γραμμή σάρωσης σταματάει σε κάποιο σημείο, ώστε να γίνει η επεξεργασία του σημείου αυτού, δαπανάται $O(\log n)$ χρόνος αφού εκτελείται το πολύ μια λειτουργία εισαγωγής, διαγραφής και αναζήτησης του σημείου σε ένα ισοζυγισμένο δυαδικό δέντρο με $O(n)$ κόμβους. Συνολικά θα εκτελεστούν $O(n)$ τέτοιες λειτουργίες, οπότε ο συνολικός χρόνος για την πρώτη φάση του αλγορίθμου είναι $O(n \log n)$.

Κατά τη δεύτερη φάση του αλγορίθμου, κάθε μονότονο τμήμα διαιρείται σε τρίγωνα. Κάθε μονότονο τμήμα σαρώνεται με μια ευθεία κάθετη στην ευθεία μονοτονίας και οι κορυφές του υφίστανται επεξεργασία κατά φθίνουσα y συντεταγμένη. Γενικά, ο αλγόριθμος αποκόπτει τρίγωνα εφόσον μπορεί με αποτέλεσμα μετά την επεξεργασία κάθε κορυφής το τμήμα του πολυγώνου που έχει σαρωθεί και δεν έχει χωριστεί σε τρίγωνα να περικλείεται από μια ακμή από τη μια πλευρά και από μια κοίλη αλυσίδα από την άλλη (Σχήμα 3.6). Η κοίλη αλυσίδα αποθηκεύεται σε μια στοίβα. Οι περιπτώσεις που εμφανίζονται είναι: αν η επόμενη κορυφή v , που υφίσταται επεξεργασία, επεκτείνει την κοίλη αλυσίδα, εισάγεται στη στοίβα (Σχήμα 3.6(a)). Διαφορετικά απωθούνται από τη στοίβα κορυφές (και αποκόπονται τα αντίστοιχα τρίγωνα), ώσπου η v να σχηματίζει κοίλη αλυσίδα με τις κορυφές που απέμειναν (Σχήμα 3.6(b)), ή η αλυσίδα αυτή να έχει μόνο δύο κορυφές.



Σχήμα 3.6

Και άλλοι αλγόριθμοι διαμέρισης ενός πολυγώνου με n κορυφές σε τρίγωνα πολυπλοκότητας χρόνου $O(n \log n)$ περιγράφηκαν, όπως για παράδειγμα από τον Chazelle [7], ενώ αλγόριθμοι γραμμικού χρόνου επινοήθηκαν για τη διαμέριση ειδικών περιπτώσεων πολυγώνων σε τρίγωνα. Συγκεκριμένα, οι Avis και Toussaint [3] περιέγραψαν έναν αλγόριθμο γραμμικού χρόνου για τη διαμέριση σε τρίγωνα μονότονων διαχωρίσιμων πολυγώνων και πολυγώνων «ορατής ακμής» (edge-visible polygons), πολυγώνων δηλαδή που έχουν μια ακμή e τέτοια ώστε για κάθε σημείο p του πολυγώνου υπάρχει σημείο q στην e τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα pq να ανήκει στο πολύγωνο.

Οι Fournier και Montuno [20] περιέγραψαν έναν αλγόριθμο χρόνου $O(n \log n)$ για τον υπολογισμό του οριζώντιου (ή κατακόρυφου) «χάρτη ορατότητας» (visibility map) του πολυγώνου, από τον οποίο μπορεί να προκύψει σε χρόνο γραμμικό η διαμέριση σε τρίγωνα. Ο χάρτης αυτός περιγράφει το τμήμα του πολυγώνου που είναι ορατό από μια οποιαδήποτε ακμή του πολυγώνου κατά την οριζόντια (ή κατακόρυφη) κατεύθυνση.

Επίσης, οι Hertel και Mehlhorn [27] περιέγραψαν έναν αλγόριθμο, για το πρόβλημα διαμέρισης ενός απλού πολυγώνου σε τρίγωνα, ο οποίος απαιτεί $O(n + r \log r)$ χρόνο, όπου r είναι το πλήθος των μη κυρτών κορυφών του πολυγώνου. Αυτός ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τη μέθοδο γραμμής σάρωσης και στηρίζεται στην εξής ιδέα: γίνεται ταξινόμηση όχι όλων των κορυφών του πολυγώνου, αλλά μόνο ενός υποσυνόλου αυτών, το οποίο έχει πληθώρα ανάλογο του r . Μετά, γίνεται η επεξεργασία αυτών των κορυφών με τη σειρά. Όλες οι υπόλοιπες κορυφές συναντώνται καθώς κινούμαστε στο σύνορο του πολυγώνου και απαιτούν για την επεξεργασία τους σταθερό χρόνο η καθεμία.

Ακόμη, οι Chazelle και Incerpi [12] επινόησαν έναν αλγόριθμο πολυπλοκότητας $O(n \log s)$, όπου s είναι η sinuosity, ένα μέτρο της μη κυρτότητας του πολυγώνου. Ο αλγόριθμος αυτός δεν κάνει ταξινόμηση των κορυφών ούτε χρησιμοποιεί τη μέθοδο γραμμής σάρωσης όπως οι παραπάνω αλγόριθμοι. Κατασκευάζει «χάρτη ορατότητας» του πολυγώνου επεκτείνοντας στο άπειρο τις χορδές που διέρχονται από κάθε κορυφή. Ο αλγόριθμος μιμείται τον αλγόριθμο ταξινόμησης με συγχώνευση (merge sort): το πολύγωνο με n κορυφές χωρίζεται σε δύο πολυγωνικές αλυσίδες των $n/2$ κορυφών, αυτές χωρίζονται σε αλυσίδες των $n/4$ κορυφών κ.ο.κ. Ο «χάρτης

ορατότητας» μιας αλυσίδας βρίσκεται συγχωνεύοντας τους «χάρτες ορατότητας» των μικρότερων αλυσίδων του συνόρου του πολυγώνου. Στη συνέχεια από τον συνολικό «χάρτη ορατότητας» προκύπτει η διαμέριση σε τρίγωνα σε γραμμικό χρόνο.

Εάν οι τιμές των ποσοτήτων r και s στους παραπάνω αλγορίθμους είναι μικρές σταθερές, τότε αυτοί οι αλγόριθμοι επιλύουν το πρόβλημα σε γραμμικό χρόνο. Ωστόσο το r και το s μπορεί να έχουν μέγεθος της τάξης $\Theta(n)$. Έτσι κανείς από τους παραπάνω αλγορίθμους δεν επιτυγχάνει πολυπλοκότητα μικρότερη του $\Theta(n \log n)$ στη χειρότερη περίπτωση. Βέβαια, αυτό το όριο μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι βέλτιστο στην περίπτωση που ένα πολύγωνο περιέχει τρύπες. Για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα ένα από τα κυριότερα αναπάντητα προβλήματα της υπολογιστικής γεωμετρίας ήταν εάν ένα απλό πολύγωνο μπορεί να διαιρεθεί σε τρίγωνα σε λιγότερο από $\Theta(n \log n)$ χρόνο.

Το 1988, οι Tarjan και VanWyk [40] έσπασαν το φράγμα της $O(n \log n)$ πολυπλοκότητας χρόνου περιγράφοντας έναν $O(n \log \log n)$ αλγόριθμο. Ο «χάρτης ορατότητας» υπολογίζεται χρησιμοποιώντας έναν συνδυασμό του γραμμικού αλγορίθμου ταξινόμησης κατά μήκος μιας απλής πολυγωνικής αλυσίδας (Jordan sorting) [28], της τεχνικής “διαίρει και βασίλευε” και μιας γρήγορης προσπέλασης σε μια κατάλληλη δομή δέντρου, τη δομή finger search trees. Παρόλο που ο αλγόριθμος αυτός έχει υλοποιηθεί, είναι αρκετά πολύπλοκος και παρουσιάζει ενδιαφέρον μόνο από θεωρητικής πλευράς.

Αργότερα, οι Kirkpatrick, Klawe και Tarjan [32], επινόησαν έναν άλλο, απλούστερο αλγόριθμο χρόνου $O(n \log \log n)$. Ο αλγόριθμος αυτός χρησιμοποιεί την τεχνική «διαίρει και βασίλευε» για την κατασκευή του «χάρτη ορατότητας», όπως και ο προηγούμενος, αλλά αποφεύγει τη χρήση της δομής finger search trees. Επίσης χρησιμοποιεί την ιδέα μιας διαμέρισης του πολυγώνου που προκύπτει αν τα άκρα των οριζόντιων τμημάτων (ακτίνες), που διέρχονται από τις κορυφές του πολυγώνου, προεκταθούν αριστερά και δεξιά μέχρι να συναντήσουν ξανά το πολύγωνο. Αυτό είναι δυνατόν, γιατί θεωρείται ότι το επίπεδο αναπαρίσταται ως ένας άπειρος κατακόρυφος κύλινδρος. Έτσι, οι ακτίνες που φεύγουν προς τα αριστερά «επιστρέφουν» ξανά από τα δεξιά.

Λίγο αργότερα, οι Clarkson, Tarjan και Van Wyk [17], και ο Devillers [18] παρουσίασαν αλγορίθμους $O(n \log^* n)$ για την επίλυση του προβλήματος με χρήση τυχαίων αριθμών. Οι αλγόριθμοι αυτοί βασίζονται σε τυχαία δειγματοληψία. Οι Clarkson και Cole [16] και ο Seidel [39] παρουσίασαν απλούστερους αλγορίθμους χρόνου $O(n \log^* n)$ που παρακάμπτουν την ταξινόμηση Jordan, που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος των Clarkson, Tarjan και Van Wyk. Οι τελευταίοι τέσσερις αλγόριθμοι εκτός του ότι είναι ελαφρώς γρηγορότεροι είναι και απλούστεροι σε σχέση με τους $O(n \log \log n)$ αλγορίθμους.

Τέλος, το 1991 ο Chazelle [8] επινόησε έναν γραμμικού χρόνου αλγόριθμο. Ο αλγόριθμος αυτός στηρίζεται στον αλγόριθμο των Chazelle και Incerti [12] που περιγράφηκε παραπάνω, αλλά έχει δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση υπολογίζονται αραιοί «χάρτες ορατότητας» (είναι αραιοί με την έννοια ότι τους λείπουν κάποιες χορδές), ώστε η διαδικασία της συγχώνευσης να γίνεται σε γραμμικό χρόνο. Στη δεύτερη φάση ο αραιός χάρτης μετατρέπεται σε γραμμικό χρόνο στον τελικό «χάρτη ορατότητας». Αυτός ο αλγόριθμος είναι αρκετά πολύπλοκος για να χρησιμοποιηθεί

στη πράξη. Πλέον μετά την επίλυση του θεωρητικού προβλήματος, η ερευνητική προσπάθεια εστιάζεται στην επινόηση απλών και πρακτικών αλγορίθμων επίλυσης του προβλήματος.

3.1.2 Διαμέριση πολυγώνου σε κυρτές περιοχές

Η διαμέριση πολυγώνου σε τρίγωνα μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική περίπτωση της διαμέρισης σε κυρτές περιοχές. Όμως, αντίθετα με τη διαμέριση σε τρίγωνα, όπου προκύπτουν πάντα $n-2$ τρίγωνα, η διαμέριση σε κυρτές περιοχές, δεν δίνει πάντα το ίδιο πλήθος κυρτών περιοχών.

Υπάρχουν δύο στόχοι της διαμέρισης πολυγώνου σε κυρτές περιοχές:

1. Διαμέριση του πολυγώνου σε όσο το δυνατόν λιγότερες κυρτές περιοχές
2. Διαμέριση του πολυγώνου σε κυρτές περιοχές σε όσο το δυνατόν λιγότερο χρόνο.

Αυτοί οι στόχοι έρχονται σε σύγκρουση μεταξύ τους, δηλαδή η ικανοποίηση του ενός δυσκολεύει την ικανοποίηση του άλλου. Όσον αφορά τους αλγορίθμους που έχουν αναπτυχθεί για το σκοπό αυτό υπάρχουν δύο προσεγγίσεις:

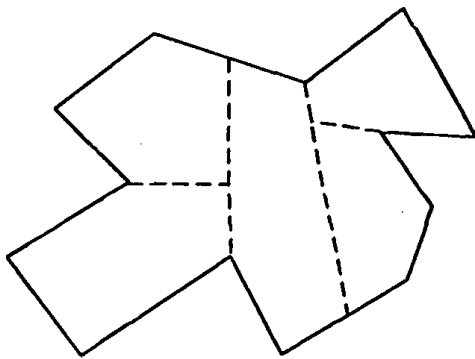
1. Εύρεση αλγορίθμων βέλτιστου χρόνου που δίνουν όσο το δυνατό μικρότερο πλήθος περιοχών.
2. Εύρεση αλγορίθμων που δίνουν μια βέλτιστη διαμέριση του πολυγώνου ως προς το πλήθος των κυρτών περιοχών και εκτελούνται σε όσο το δυνατό λιγότερο χρόνο.

Για να εκτιμηθεί πόσο καλή είναι μια διαμέριση πολυγώνου ως προς το πλήθος των κυρτών περιοχών που προκύπτουν είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε ένα άνω φράγμα γι' αυτό το πλήθος.

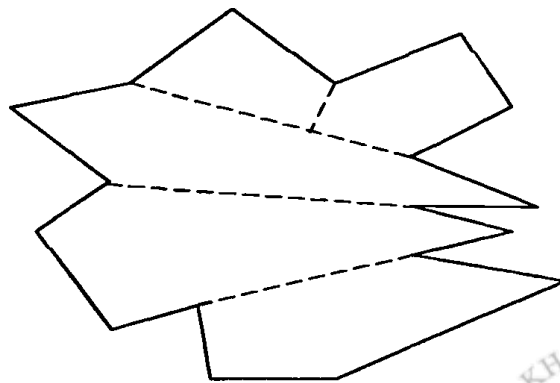
Θεώρημα 3.1 (Chazelle [35])

Για ένα πολύγωνο με r μη κυρτές κορυφές, το ελάχιστο πλήθος Φ κυρτών περιοχών στις οποίες αυτό μπορεί να διααιρεθεί πληροί την ακόλουθη σχέση:

$$\lceil r/2 \rceil + 1 \leq \Phi \leq r + 1, \quad (\text{Σχήμα 3.7})$$



$r=4, r+1=5$ κυρτές περιοχές



$r=7, \lceil r/2 \rceil + 1 = 5$ κυρτές περιοχές

Σχήμα 3.7

Οι Hertel και Mehlhorn (1983) [27] επινόησαν έναν αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που διαιρεί ένα πολύγωνο σε κυρτές περιοχές χρησιμοποιώντας διαγώνιους. Το πλήθος των κυρτών περιοχών που προκύπτει από τον αλγόριθμο αυτόν φράσσεται από μια σταθερά επί το βέλτιστο πλήθος.

Σε μια διαμέριση του πολυγώνου σε κυρτές περιοχές ονομάζουμε μια διαγώνιο d *βασική* για την κορυφή v αν η αφαίρεση της d έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας περιοχής που παρουσιάζει μη κυρτότητα στην κορυφή v . Προφανώς αν η d είναι βασική πρέπει το ένα άκρο της να είναι η μη κυρτή κορυφή v . Μια διαγώνιος που δεν είναι βασική για καμία από τις κορυφές της ονομάζεται *μη βασική*.

Ο αλγόριθμος των Hertel και Mehlhorn λειτουργεί ως εξής:

Βήμα 1: Αρχίζει με μια διαμέριση του πολυγώνου σε τρίγωνα.

Βήμα 2: Αφαιρεί μια μη βασική διαγώνιο και επαναλαμβάνει το βήμα αυτό.

Αυτός ο αλγόριθμος καταλήγει στη διαμέριση του αρχικού πολυγώνου σε κυρτές περιοχές χρησιμοποιώντας διαγώνιους. Μπορεί να εκτελεστεί σε γραμμικό χρόνο χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες δομές δεδομένων. Οπότε το μόνο που απομένει είναι να δούμε πόσο αποκλίνει το πλήθος των κυρτών περιοχών που προκύπτει από το βέλτιστο πλήθος.

Θεώρημα 3.2 [35]

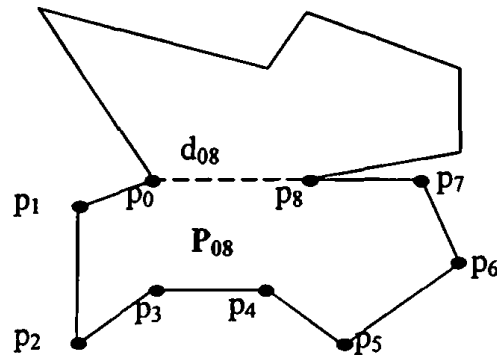
Ο αλγόριθμος των Hertel και Mehlhorn δεν δίνει ποτέ πλήθος κυρτών περιοχών μεγαλύτερο από τέσσερις φορές επί το βέλτιστο πλήθος των κυρτών περιοχών.

Όπως φαίνεται από τους αλγόριθμους που υπάρχουν για τη διαμέριση πολυγώνου σε κυρτά τμήματα, η εύρεση μιας βέλτιστης διαμέρισης πολυγώνου ως προς το πλήθος των κυρτών περιοχών είναι πολύ πιο χρονοβόρα από την εύρεση μιας σχεδόν βέλτιστης διαμέρισης. Ο πρώτος αλγόριθμος για τον υπολογισμό μιας βέλτιστης διαμέρισης (ως προς το πλήθος των κυρτών περιοχών που προκύπτουν) χρησιμοποιώντας διαγώνιους και χωρίς την προσθήκη σημείων Steiner περιγράφηκε από τον Greene (1983) [23]: ο αλγόριθμός του απαιτεί $O(r^2 n^2) = O(n^4)$ χρόνο, όπου r είναι το πλήθος των μη κυρτών κορυφών του πολυγώνου και n είναι το πλήθος όλων των κορυφών. Επίσης, ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί δυναμικό προγραμματισμό, μια ειδική τεχνική, σύμφωνα με την οποία βρίσκεται η βέλτιστη λύση για ένα πρόβλημα συνδυάζοντας τις βέλτιστες λύσεις υποπροβλημάτων στα οποία μπορεί να διαιρεθεί το αρχικό πρόβλημα. Στην προκειμένη περίπτωση, ορίζεται ένα υποπρόβλημα P_{ik} για κάθε διαγώνιο d_{ik} του πολυγώνου P που ενώνει δύο κορυφές p_i και p_k ώστε η κορυφή p_i ή η p_k είναι μια μη κυρτή κορυφή του P . Το P_{ik} είναι μια κλειστή πολυγωνική αλυσίδα που σχηματίζεται από τις κορυφές του πολυγώνου p_i, p_{i+1}, \dots, p_k όπως αυτές συναντώνται σε μια διάσχιση του συνόρου του πολυγώνου κατά την ανθρωπολογική φορά (Σχήμα 3.8). Το μέγεθος του υποπροβλήματος P_{ik} είναι το πλήθος των κορυφών στην αλυσίδα P_{ik} . Σε κάθε υποπρόβλημα P_{ik} , ο αλγόριθμος αναθέτει ένα βάρος w_{ik} , που είναι το ελάχιστο πλήθος διαγωνίων που απαιτείται για τη διαμέριση του P_{ik} σε κυρτές περιοχές. Το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του βάρους για την κλειστή πολυγωνική αλυσίδα $P_{0(n-1)} = P$, χρησιμοποιώντας τα βάρη μικρότερων υποπροβλημάτων που έχουν ήδη υπολογιστεί. Γενικά, για την εύρεση του βάρους του P_{ik} από τα βάρη μικρότερων υποπροβλημάτων ο αλγόριθμος του Greene βασίζεται στην εξής παρατήρηση:



Παρατήρηση:

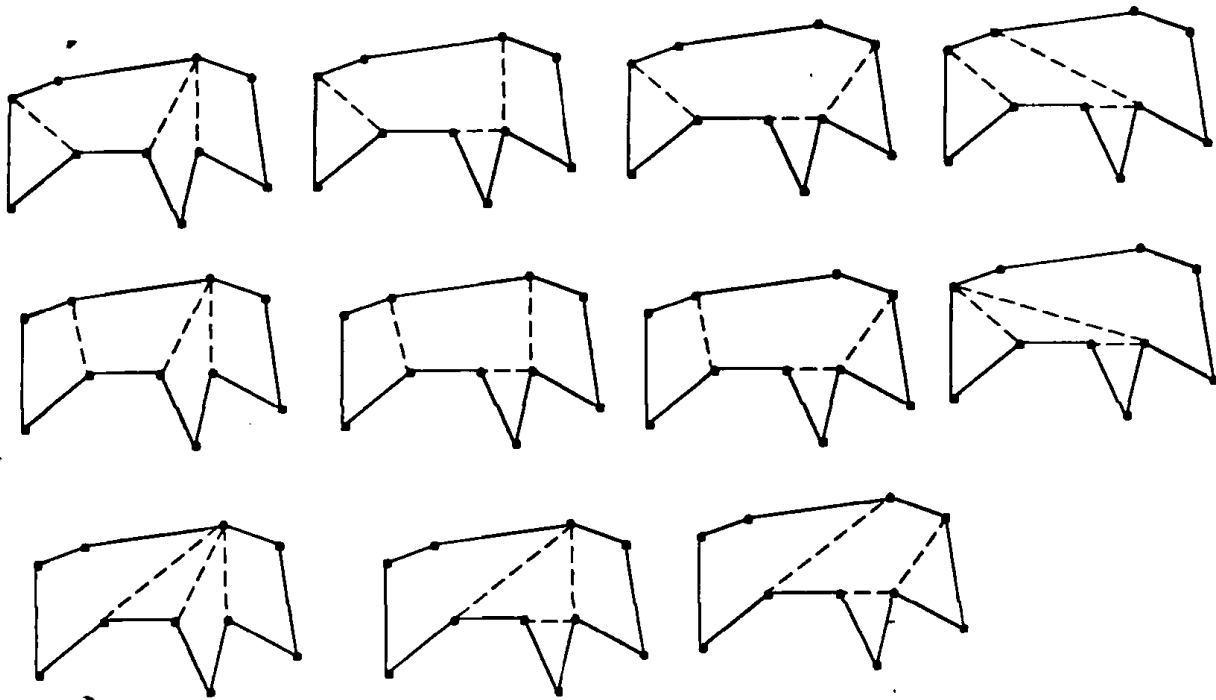
Ας θεωρήσουμε όλα τα κυρτά πολύγωνα που μπορούν να κατασκευαστούν στο εσωτερικό του P_{ik} και που μια ακμή τους είναι η d_{ik} . Η αφαίρεση ενός τέτοιου πολυγώνου C από το P_{ik} αφήνει ένα σύνολο υποπροβλημάτων. Το βάρος του P_{ik} που οφείλεται στην επιλογή του συγκεκριμένου C είναι το άθροισμα των βαρών των υποπροβλημάτων (που προκύπτουν με την αφαίρεση του C) και του πλήθους αυτών των υποπροβλημάτων. Θέλουμε το βάρος του P_{ik} να είναι το ελάχιστο μεταξύ των βαρών που προκύπτουν για όλα τα πιθανά κυρτά πολύγωνα C .



Σχήμα 3.8

Ο αλγόριθμος του Greene βελτιώθηκε από τον Keil (1985) [30], ο οποίος παρουσίασε έναν αλγόριθμο χρόνου $O(r^2 n \log n) = O(n^3 \log n)$. Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στην παρατήρηση ότι κάθε διαγώνιος που χρησιμοποιείται για τη διαμέριση του πολυγώνου έχει τουλάχιστον ένα από τα δύο άκρα της σε μια μη κυρτή κορυφή του πολυγώνου. Έτσι ο αλγόριθμος ξεκινάει βρίσκοντας όλες τις μη κυρτές κορυφές του πολυγώνου καθώς και όλες τις κορυφές του πολυγώνου που είναι ορατές από αυτές. Δύο κορυφές είναι ορατές εάν το ανοιχτό ευθύγραμμο τμήμα που τις συνδέει βρίσκεται στο εσωτερικό του πολυγώνου. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού υπολογίζονται οι βέλτιστες διαμερίσεις σε κυρτές περιοχές για τα «υποπολύγωνα» που ορίζονται από τα ζεύγη ορατών κορυφών που καθορίστηκαν πριν. Τα υποπολύγωνα εξετάζονται με σειρά αυξανόμενου μεγέθους. Δυστυχώς, το πλήθος των βέλτιστων διαμερίσεων ενός πολυγώνου μπορεί να είναι πολύ μεγάλο, με αποτέλεσμα να υπάρχουν πολλές πιθανές διαμερίσεις. Στο Σχήμα 3.9 φαίνονται έντεκα βέλτιστες διαμερίσεις ενός πολυγώνου, χρησιμοποιώντας τρεις διαγώνιους για την εξάλειψη των τριών μη κυρτών κορυφών του πολυγώνου.

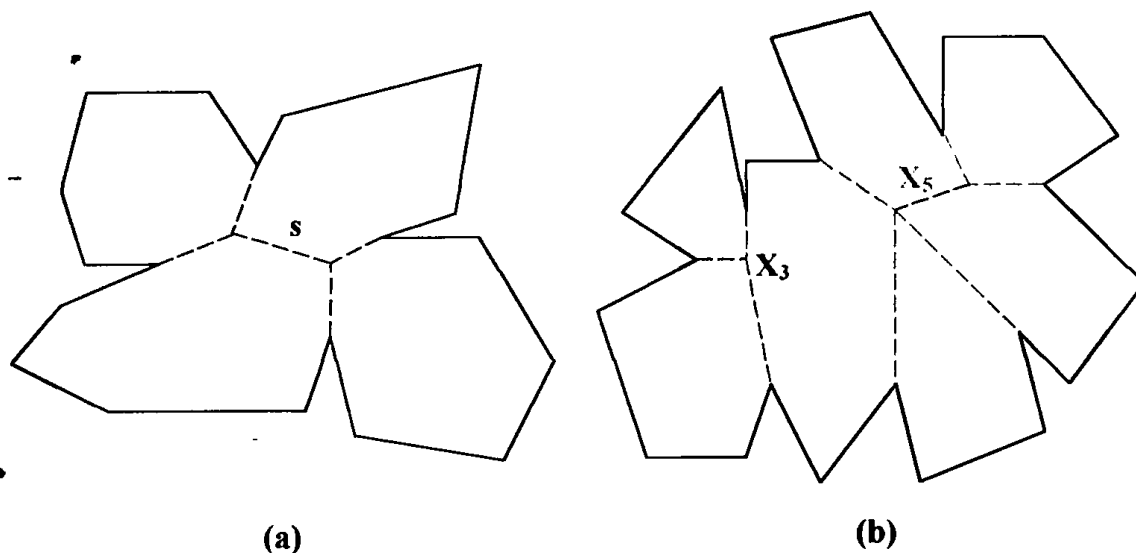
Η λύση είναι να χωριστούν οι πιθανές διαμερίσεις σε κλάσεις ισοδυναμίας και για κάθε κλάση να χρησιμοποιείται ένας αντιπρόσωπος. Αυτή η τεχνική έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου του Greene και μπορεί να επεκταθεί και για τη διαμέριση πολυγώνου στο ελάχιστο πλήθος μονότονων τμημάτων [30].



Σχήμα 3.9: Πιθανές διαγώνιοι

Αργότερα οι Keil και Snoeyink [31] παρουσίασαν έναν πιο γρήγορο αλγόριθμο διαμέρισης πολυγώνου στο ελάχιστο πλήθος κυρτών περιοχών χωρίς επιπλέον σημεία Steiner. Αυτός ο αλγόριθμος έχει πολυπλοκότητα $O(n+r^2 \min\{r^2, n\})$ και στηρίζεται στον αλγόριθμο του Keil που περιγράφηκε παραπάνω. Κατά τον δυναμικό προγραμματισμό χρησιμοποιείται δομή στοιβάς, πράγμα που επιτρέπει την ελάττωση της πολυπλοκότητας σε σχέση με τον αλγόριθμο του Keil [30] κατά τον παράγοντα $\log n$. Βασική παρατήρηση είναι ότι η είσοδος του αλγορίθμου μπορεί να μειωθεί σε ένα πολύγωνο P' που έχει την ίδια βέλτιστη διαμέριση σε κυρτές περιοχές με το αρχικό πολύγωνο και η τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού εφαρμόζεται στο P' . Στην περίπτωση που επιτρέπεται η εισαγωγή σημείων Steiner, γίνεται μείωση της εισόδου του αλγορίθμου και προκύπτει ένα πολύγωνο μεγέθους $O(r)$. Στην περίπτωση αυτή απαιτείται χρόνος $O(n+r \log n + T(r))$ για τη διαμέριση του πολυγώνου P σε κυρτές περιοχές. Όπως φαίνεται, το πρόβλημα της διαμέρισης του πολυγώνου P σε κυρτές περιοχές, χωρίς τη χρήση σημείων Steiner, είναι πιο δύσκολο από το αντίστοιχο πρόβλημα όπου επιτρέπεται η χρήση σημείων Steiner.

Αν η ζητούμενη διαμέριση μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας σημεία Steiner στο εσωτερικό του πολυγώνου τότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν ευθύγραμμα τμήματα για τη διαμέριση του πολυγώνου που δεν έχουν κοινά σημεία με το σύνορό του (Σχήμα 3.10-(a)). Οι Chazelle και Dobkin [11] έλυσαν αυτό το πρόβλημα με έναν αλγόριθμο χρόνου $O(n+r^3) = O(n^3)$, όπου r είναι το πλήθος των μη κυρτών κορυφών του πολυγώνου.



Σχήμα 3.10

Ο αλγόριθμος των Chazelle και Dobkin για τη διαμέριση πολυγώνου σε κυρτές περιοχές σε πολυωνυμικό χρόνο παρουσιάστηκε το 1979. Στον αλγόριθμο αυτό εισάγεται η έννοια των X -προτύπων που χρησιμοποιούνται για να «εξαλειφθούν» οι μη κυρτές κορυφές του πολυγώνου. Συγκεκριμένα ένα X_k -πρότυπο είναι ένα σύνολο συνδεδεμένων ευθυγράμμων τμημάτων που «εξαλείφουν» k μη κυρτές κορυφές του πολυγώνου, χωρίς να δημιουργούν νέες μη κυρτές κορυφές. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι αν r μη κυρτές κορυφές του πολυγώνου «εξαλείφονται» με τη χρήση m X -προτύπων και με κάποια επιπλέον ευθύγραμμα τμήματα, τότε το πλήθος των κυρτών περιοχών που προκύπτει είναι $r+1-m$. Έτσι, όσα περισσότερα είναι τα X -πρότυπα τόσο μικρότερο είναι το πλήθος των κυρτών περιοχών που προκύπτουν. Δυστυχώς τα X -πρότυπα έχουν πολλούς βαθμούς ελευθερίας πράγμα που κάνει αρκετά χρονοβόρα την εύρεση μιας βέλτιστης διαμέρισης. Γι' αυτό οι Chazelle και Dobkin εισάγουν την έννοια των Y -προτύπων, μιας παραλλαγής των X -προτύπων. Ένα Y_k -πρότυπο είναι ένα X_k -πρότυπο τέτοιο ώστε καμιά ακμή δεν συνδέει δύο σημεία Steiner. Για παράδειγμα στο Σχήμα 3.10-(b) το X_3 -πρότυπο είναι και Y_3 -πρότυπο, ενώ το X_5 -πρότυπο δεν είναι και Y_5 -πρότυπο. Μια σημαντική ιδιότητα των Y -προτύπων είναι ότι όλα τα X_k -πρότυπα μπορούν να μετατραπούν σε Y -πρότυπα, εκτός αυτών που αντιστοιχούν στην τιμή $k=4$. Το επιθυμητό σύνολο των Y -προτύπων και X_4 -προτύπων βρίσκεται εφαρμόζοντας δυναμικό προγραμματισμό.

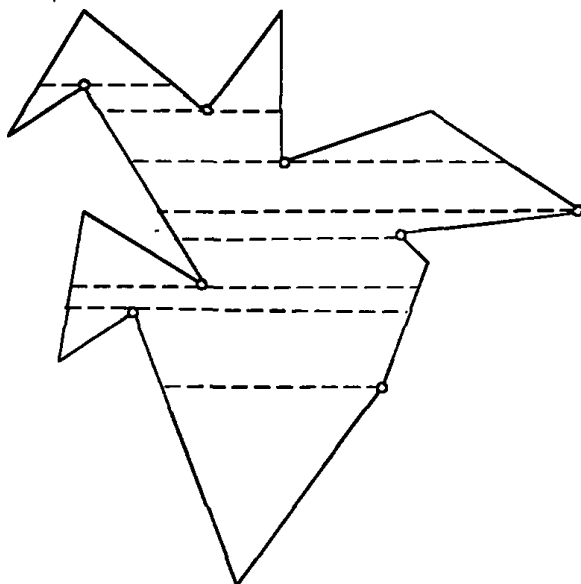
3.1.3 Διαμέριση πολυγώνου σε τραπέζια

Ένα τραπέζιο είναι ένα τετράπλευρο που έχει δύο παράλληλες ακμές. Κάποιος θα μπορούσε να θεωρήσει ότι ένα τρίγωνο είναι μια εκφυλισμένη περίπτωση τραπεζίου του οποίου μια από τις δύο παράλληλες ακμές έχει μηδενικό μήκος.

Η διαμέριση πολυγώνου P σε τραπέζια προτάθηκε το 1984 ανεξάρτητα από τους Chazelle & Incerti [12] και τους Fournier & Montuno [20] ως ενδιάμεσο βήμα της διαμέρισης του πολυγώνου P σε τρίγωνα.

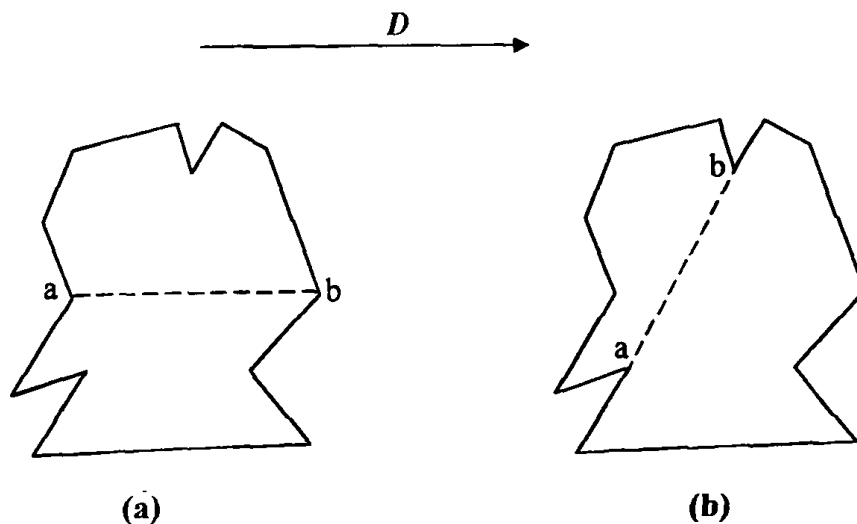
Μια διαμέριση του πολυγώνου σε τραπέζια με οριζόντιες παράλληλες πλευρές προκύπτει φέρνοντας για κάθε κορυφή του πολυγώνου μια οριζόντια ευθεία που να διέρχεται από αυτήν την κορυφή. Για την ακρίβεια, φέρνουμε από κάθε κορυφή v του πολυγώνου το μεγαλύτερο οριζόντιο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα s ώστε $s \subset P$ και $s \cap \partial P = v$. Έτσι το τμήμα s είναι δυνατόν :

- είτε να βρίσκεται στα αριστερά της κορυφής v
 - είτε να βρίσκεται στα δεξιά της κορυφής v
 - είτε να βρίσκεται αριστερά και δεξιά της κορυφής v
 - είτε να συμπίπτει με την κορυφή v , δηλαδή $s = v$.
- Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 3.11. Για απλοποίηση θεωρείται ότι κάθε κορυφή έχει μοναδική συντεταγμένη y . Αυτό σημαίνει ότι δύο κορυφές δεν μπορεί να ανήκουν στην ίδια οριζόντια ευθεία. Η απλοποίηση αυτή γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού για πολύγωνα που έχουν κορυφές με ίδια y -συντεταγμένη, μια απειροελάχιστη στροφή του πολυγώνου κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού εξασφαλίζει ότι κανένα ζεύγος κορυφών δεν έχει την ίδια y -συντεταγμένη.



Σχήμα 3.11

Οι Asano και Asano [1] έδωσαν έναν αλγόριθμο $O(n^3)$ για την διαμέριση πολυγώνου σε τραπέζια που οι δύο παράλληλες πλευρές τους είναι παράλληλες προς μια διεύθυνση D . Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί διαγώνιους που είτε συνδέουν δύο κορυφές του πολυγώνου και είναι παράλληλες της D (Σχήμα 3.12(a)) είτε συνδέουν δύο κορυφές που είναι προσκείμενες σε συνευθειακές ακμές του πολυγώνου (Σχήμα 3.12(b)).



Σχήμα 3.12

Συνεπώς, αρκεί να βρεθεί το μέγιστο υποσύνολο από μη τεμνόμενες τέτοιες διαγώνιους που εγγυάται μια διαμέριση βέλτιστη ως προς το πλήθος των τραπεζίων που προκύπτουν. Ο αλγόριθμος αρχικά αναγνωρίζει αυτές τις διαγώνιους και στη συνέχεια βρίσκει το μέγιστο υποσύνολο από μη τεμνόμενες τέτοιες διαγώνιους βρίσκοντας το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο ενός κυκλικού γράφου. Οι κόμβοι του γράφου αυτού αντιστοιχούν στις διαγώνιους, ενώ οι ακμές του ενώνουν δύο κόμβους όταν οι αντίστοιχες διαγώνιοι τέμνονται. Το πρόβλημα της εύρεσης του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου στο παραπάνω γράφημα λύνεται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Gavril [22] που απαιτεί $O(m^3)$ χρόνο για ένα γράφημα με m κόμβους. Αφού βρεθούν με τον τρόπο αυτό οι κατάλληλες διαγώνιοι, προστίθενται στο πολύγωνο και το χωρίζουν σε μικρότερα πολυγωνικά τμήματα. Στη συνέχεια κάθε τέτοιο τμήμα που προέκυψε μπορεί εύκολα να χωριστεί σε τραπέζια φέρνοντας παράλληλα προς την D ευθύγραμμα τμήματα που διέρχονται από τις κορυφές του πολυγωνικού τμήματος. Το πιο χρονοβόρο τμήμα του αλγορίθμου είναι η εύρεση του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου που είναι της τάξης $O(n^3)$ αφού στη χειρότερη περίπτωση υπάρχουν $O(n)$ διαγώνιοι.

Η πολυπλοκότητα χρόνου του προηγούμενου αλγορίθμου βελτιώθηκε σε $O(n^2)$ στην τελευταία εργασία των Asano, Asano και Imai [2], όπου χρησιμοποιείται άλλος τρόπος για τον υπολογισμό του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου.

3.1.4 Διαμέριση πολυγώνων με τρύπες

Στην περίπτωση που τα πολύγωνα περιέχουν τρύπες το πρόβλημα της διαμέρισής τους σε περιοχές είναι NP-δύσκολο.

Στην περίπτωση που επιτρέπεται η χρήση σημείων Steiner, το πρόβλημα της διαμέρισης πολυγώνου στο ελάχιστο πλήθος κυρτών περιοχών είναι NP-δύσκολο, όπως έδειξε ο Lingas [34]. Το πρόβλημα παραμένει NP-δύσκολο ακόμη και στην περίπτωση που ζητείται διαμέριση σε τρίγωνα. Ακόμη, οι O'Rourke και Supowit [36] έδειξαν ότι η κάλυψη ενός πολυγώνου με τρύπες από το ελάχιστο πλήθος κυρτών τμημάτων, που μπορεί να επικαλύπτονται, είναι επίσης ένα NP-δύσκολο πρόβλημα.

Στην περίπτωση που δεν επιτρέπεται η χρήση σημείων Steiner, η πολυπλοκότητα των αλγορίθμων διαμέρισης πολυγώνου με τρύπες σε περιοχές δεν βελτιώνεται. Έτσι ο Lingas [34] έδειξε ότι το πρόβλημα της διαμέρισης σε κυρτές περιοχές παραμένει NP-πλήρες. Επίσης, οι O'Rourke και Supowit [36] έδειξαν ότι το πρόβλημα της κάλυψης ενός πολυγώνου με τρύπες από το ελάχιστο πλήθος κυρτών τμημάτων, που μπορεί να επικαλύπτονται, είναι NP-πλήρες και στην περίπτωση που δεν χρησιμοποιούνται σημεία Steiner.

3.2 Διαμέριση πολυέδρων

Το πρόβλημα της διαμέρισης πολυγώνων σε περιοχές μεταφέρεται στις τρεις διαστάσεις στο πρόβλημα της διαμέρισης πολυέδρων σε περιοχές. Ωστόσο, στις τρεις διαστάσεις το πρόβλημα παρουσιάζει κάποιες διαφορές σε σχέση με τις δύο διαστάσεις και αυξάνει σημαντικά η πολυπλοκότητά του. Για παράδειγμα, ενώ όλα τα πολύγωνα μπορούν να διαμερισθούν σε τρίγωνα χωρίς τη χρήση σημείων Steiner δεν ισχύει το ίδιο για τη διαμέριση πολυέδρων σε τετράεδρα. Έχει βρεθεί λοιπόν ότι όλα τα κυρτά πολυέδρα μπορούν να διαμερισθούν σε τετράεδρα χωρίς σημεία Steiner, αντίθετα με τα μη κυρτά πολυέδρα. Όμως εάν προστεθούν σημεία Steiner τότε όλα τα πολυέδρα μπορούν να διαμερισθούν σε τετράεδρα. Μάλιστα, οι Ruppert και Seidel [38] απέδειξαν ότι το πρόβλημα του εάν ένα πολυέδρο μπορεί να διαμερισθεί σε τετράεδρα χωρίς τη χρήση σημείων Steiner είναι NP-πλήρες. Ακόμη και το πρόβλημα του πόσα τουλάχιστον σημεία Steiner πρέπει να προστεθούν σε ένα πολυέδρο ώστε να επιτευχθεί η διαίρεσή του σε τετράεδρα είναι NP-πλήρες.

Ο Chazelle [10] έδειξε ότι ένα απλό πολυέδρο με n κορυφές μπορεί να διαμερισθεί σε $O(n^2)$ κυρτές περιοχές αν επιτρέπεται η χρήση σημείων Steiner και αυτό είναι ένα κάτω φράγμα στη χειρίστη περίπτωση. Προφανώς αυτό είναι ένα κάτω φράγμα στη χειρίστη περίπτωση και για τη διαμέριση πολυέδρου σε τετράεδρα.

Οι Chazelle και Palios [14] ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο για τη διαμέριση ενός πολυέδρου με n κορυφές και r μη κυρτές ακμές (ακμές που η αντίστοιχη εσωτερική διεδρη γωνία είναι μεγαλύτερη από 180°) σε $O(n+r^2)$ τετράεδρα, χρησιμοποιώντας $O(n+r^2)$ σημεία Steiner. Ο αλγόριθμός τους έχει δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση, το μέγεθος του πολυέδρου μειώνεται σε $O(r)$. Αυτό γίνεται αφαιρώντας κάποιες κυρτές περιοχές του πολυέδρου. Οι περιοχές αυτές διαιρούνται σε $O(n)$ τετράεδρα συνολικά και η πρώτη φάση ολοκληρώνεται σε χρόνο $O((n+r^2)\log r)$. Κατά τη δεύτερη φάση του αλγορίθμου, το πολυέδρο που απέμεινε μετά την μείωση διαιρείται σε κυλινδρικά τμήματα καθένα από τα οποία διαμερίζεται σε τετράεδρα χρησιμοποιώντας τη διαμέριση σε τρίγωνα μιας βάσης του. Κατά τη δεύτερη φάση προκύπτουν $O(r^2)$ τετράεδρα σε $O(r^2 \log r)$ χρόνο.

Ο Dey [19] και οι Hershberger και Snoeyink [24] παρουσίασαν άλλους αλγορίθμους για την διαμέριση σε τετράεδρα με τη χρήση σημείων Steiner. Οι Chazelle και Shouraboura [15] μελέτησαν το πολυέδρο που ορίζεται μεταξύ δύο πολυέδρων. Για αυτόν τον ειδικό τύπο πολυέδρου, ο αλγόριθμός τους παράγει $O(n)$ τετράεδρα χρησιμοποιώντας σημεία Steiner.

Όσον αφορά τα πολυέδρα που είναι δυνατόν να διαμερισθούν σε τετράεδρα χωρίς τη χρήση σημείων Steiner, έχει γίνει προσπάθεια για τον υπολογισμό βέλτιστων τέτοιων



διαμερίσεων, αλλά σχετικά λίγα αποτελέσματα είναι γνωστά. Εφόσον διαφορετικές διαμερίσεις του ίδιου πολυέδρου μπορεί να δώσουν διαφορετικό πλήθος τετραέδρων, ένα πρόβλημα για βελτιστοποίηση είναι πώς να διαμερισθεί το πολύεδρο σε τετράεδρα ώστε να προκύψει το ελάχιστο πλήθος τετραέδρων. Ο Below [5] έδειξε ότι το πρόβλημα της εύρεσης μιας τέτοιας βέλτιστης διαμέρισης είναι NP-πλήρες. Οι Boting Yang και Cao An Wang [6] όρισαν μια κλάση πολυέδρων, τα BP-πολύεδρα, και έδειξαν ότι τα πολύεδρα που ανήκουν στην κλάση αυτή μπορούν να διαιρεθούν σε τετράεδρα χωρίς τη χρήση σημείων Steiner σε $O(n^2)$ χρόνο.

Οι περισσότεροι αλγόριθμοι που έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση του προβλήματος της διαμέρισης των πολυέδρων αφορούν τη διαμέριση πολυέδρου σε τετράεδρα που είναι και η πιο απλή διαμέριση.

3.3 Διαμερίσεις πολυγώνων σε περιοχές δοθέντων εμβαδών

Όλοι οι αλγόριθμοι διαμέρισης πολυγώνων και πολυέδρων που παρουσιάστηκαν παραπάνω διαμερίζουν το δοθέν αντικείμενο σε απλούστερες περιοχές, η καθεμιά από τις οποίες έχει ένα προκαθορισμένο σχήμα ή μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Έτσι στην περίπτωση της διαμέρισης πολυγώνων που είδαμε, κάθε περιοχή που προκύπτει πρέπει να έχει ένα καθορισμένο σχήμα, π.χ. να είναι τρίγωνο ή τραπέζιο ή να έχει κάποια άλλη ιδιότητα π.χ. να είναι μονότονη ή κυρτή, ενώ στην περίπτωση της διαμέρισης πολυέδρων κάθε περιοχή που προκύπτει είναι τετράεδρο. Παρακάτω περιγράφονται κάποιοι άλλοι αλγόριθμοι διαμέρισης, οι οποίοι διαμερίζουν πολύγωνα σε περιοχές καθεμιά από τις οποίες έχει ένα συγκεκριμένο εμβαδόν. Γενικά οι περιοχές που προκύπτουν από μια τέτοια διαμέριση είναι πιο σύνθετες, μη κυρτές περιοχές και το σχήμα τους δεν είναι προκαθορισμένο. Όσον αφορά την διαμέριση πολυέδρων σε περιοχές συγκεκριμένων όγκων δεν υπάρχει κάποιος σχετικός αλγόριθμος που να έχει παρουσιαστεί. Αυτοί οι πιο σύνθετοι αλγόριθμοι διαμέρισης που παρουσιάζονται παρακάτω είναι πιο σχετικοί με το αντικείμενο μελέτης καθώς και με τους αλγορίθμους που υλοποιήθηκαν κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Όσον αφορά τις δύο διαστάσεις, δηλαδή την διαμέριση πολυγώνου σε περιοχές είναι σκόπιμο να αναφέρουμε την εργασία [25] της Susan Hert η οποία δοθέντος ενός απλού πολυγώνου P και $k+1$ τιμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$ τέτοιων ώστε

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = \text{Εμβαδόν}(P) \text{ πετυχαίνει μια διαμέριση του } P \text{ σε } k+1 \text{ περιοχές } R_1, R_2, \dots, R_{k+1}$$

τέτοιες ώστε $\text{Εμβαδόν}(R_i) = \alpha_i$ ($i=1, 2, \dots, k+1$) και καθεμιά από τις περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k συνδέεται με την R_{k+1} .

Η εργασία αυτή στηρίζεται στην ακόλουθη παρατήρηση που έχει διαπιστωθεί σε εφαρμογές της παράλληλης επεξεργασίας: Συχνά έχει παρατηρηθεί ότι η στατική ανάθεση δουλειάς σε κάποιους επεξεργαστές πριν αρχίσουν οι υπολογισμοί προσφέρει μέτρια κατανομή του φόρτου εργασίας, αφού στηρίζεται σε εκτιμήσεις σχετικά με χρόνο που απαιτείται να διεκπεραιωθεί κάθε μέρος της δουλειάς που ανατίθεται. Το ίδιο ισχύει και στη ρομποτική, π.χ. κατά τη διαμέριση ενός πολυγώνου σε περιοχές και την ανάθεση κάθε περιοχής σε ένα ρομπότ. Για να επιτευχθεί καλύτερη κατανομή περιοχών στα ρομπότ, αρχικά ένα μέρος του πολυγώνου δεν

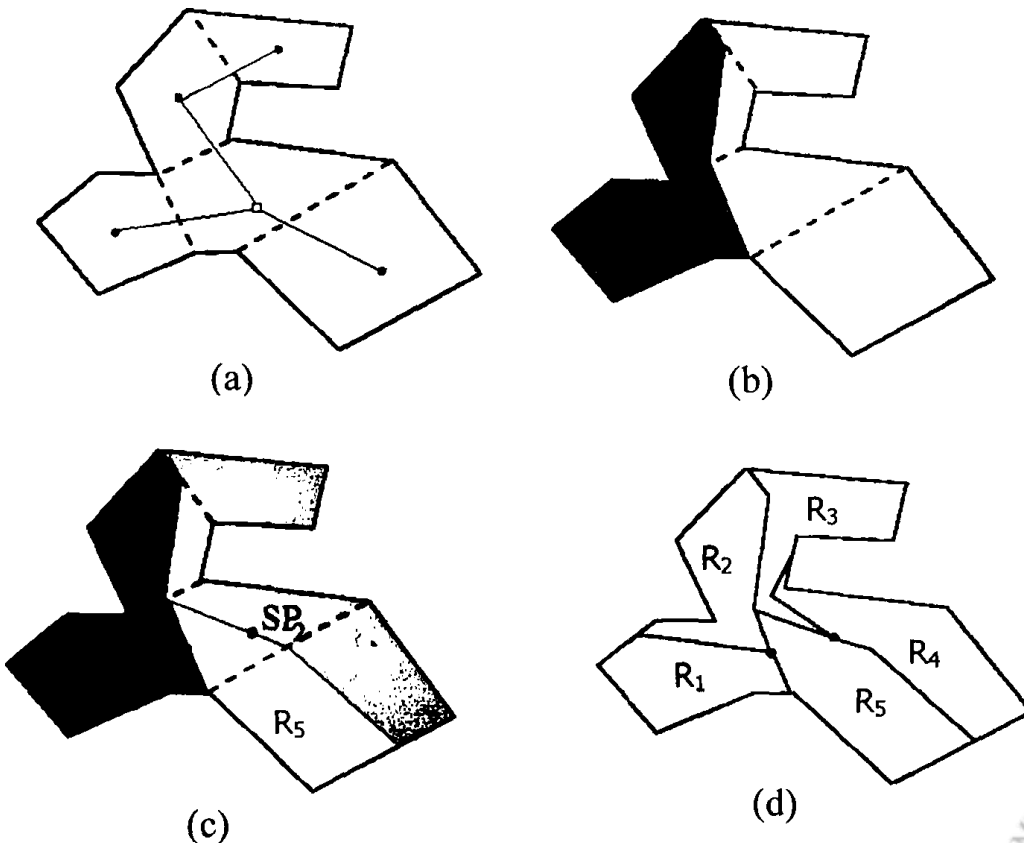


ανατίθεται σε κανένα ρομπότ. Το μέρος αυτό θα κατανεμηθεί στα ρομπότ όταν τελειώσουν με τις περιοχές που τους ανατέθηκαν αρχικά.

Δοθέντος ενός πολυγώνου με n κορυφές, μιας αρχικής διαμέρισής του σε q κυρτά κομμάτια και $k+1$ εμβαδών, ο αλγόριθμος [25] απαιτεί $O(n+q\log q+kq)$ χρόνο στη χειρότερη περίπτωση.

Ένα αποτέλεσμα του αλγορίθμου για $k=4$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα όπου:

- Αρχικά διαμερίζουμε το πολύγωνα σε $k+1=5$ κυρτές περιοχές (Σχήμα 3.13(a)).
- Κατασκευάζουμε το δυϊκό γράφημα κάθε κόμβος του οποίου αντιστοιχεί σε μια κυρτή περιοχή και υπάρχουν ακμές μεταξύ γειτονικών κυρτών περιοχών. Το γράφημα αυτό είναι ένα δέντρο T επειδή η διαμέριση του πολυγώνου σε κυρτές περιοχές έγινε χωρίς τη χρήση σημείων Steiner (δες Πρόταση 3.1) (Σχήμα 3.13(a)).
- Επιλέγουμε ως ρίζα N_r του δέντρου T τον κόμβο που αντιστοιχεί στην κυρτή περιοχή CP_r με τους περισσότερους γείτονες. Η ρίζα σημειώνεται ως λευκός κύκλος στο Σχήμα 3.13(a). Έστω c_1, c_2, \dots, c_m είναι τα παιδιά του N_r με σειρά σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού (CW). Επίσης με κάθε κόμβο N_j του δέντρου αναθέτουμε την τιμή $\text{Εμβαδόν}(N_j)$ που είναι το άθροισμα των εμβαδών των κυρτών περιοχών που αντιστοιχούν στους κόμβους του υποδέντρου με ρίζα το N_j .



Σχήμα 3.13: Παράδειγμα διαμέρισης πολυγώνου σε 5 περιοχές [25].

- Κατασκευάζουμε ένα υπερπολύγωνο SP_1 (Σχήμα 3.13(b)), δηλαδή ένα πολύγωνο που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των περιοχών R_1 και R_2 .
- Κατασκευάζουμε ένα δεύτερο υπερπολύγωνο SP_2 για τις περιοχές R_3 και R_4 (Σχήμα 3.13(c)).
- Τοποθετούμε «σημεία αναφοράς» (anchor-points) στις κοινές ακμές του πολυγώνου R_5 με τα υπερπολύγωνα SP_1 και SP_2 (Σχήμα 3.13(c)). Τα «σημεία αναφοράς» τοποθετούνται για να διασφαλιστεί ότι καθεμία από τις περιοχές R_1, R_2, R_3 και R_4 θα επικοινωνεί με την περιοχή R_5 . Γενικά για ένα υπερπολύγωνο SP_i που αποτελεί τη συγχώνευση p' πολυγώνων, $p'-1$ «σημεία αναφοράς» πρέπει να τοποθετηθούν στο σύνορο του SP_i .
- Γίνεται η τελική διαμέριση με τη διαμέριση των υπερπολυγώνων σε πολύγωνα του επιθυμητού μεγέθους (Σχήμα 3.13(d)). Γενικά η διαμέριση ενός υπερπολυγώνου SP_i στα τελικά πολύγωνα γίνεται χρησιμοποιώντας γραμμή σάρωσης που το ένα άκρο της είναι σταθερό σε ένα «σημείο αναφοράς» που βρίσκεται στο σύνορο του SP_i .

Το ιδανικό θα ήταν να κατασκευαστούν τα πολύγωνα R_1, R_2, \dots, R_k από υποδέντρα της ρίζας του δέντρου T που είναι ξένα μεταξύ τους. Αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα την καλύτερη κατανομή των ρομπότ στο χώρο, με την έννοια ότι αποφεύγεται το μπέρδεμα και οι συγκρούσεις μεταξύ τους.

Ο παραπάνω αλγόριθμος όπως περιγράφηκε απαιτεί την κατασκευή δύο υπερπολυγώνων. Γενικά, η κατασκευή του πρώτου υπερπολυγώνου SP_1 γίνεται ως εξής:

1. Τα παιδιά της ρίζας N_r υφίστανται επεξεργασία με σειρά σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού (CW). Έτσι, ξεκινώντας από το c_1 βρίσκεται η μικρότερη τιμή i_2 για την οποία

$$\alpha = \sum_{i=1}^{i_2} \alpha_i \geq \text{Εμβαδόν}(c_1)$$

Οι περιοχές R_1, R_2, \dots, R_{i_2} θα κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας ολόκληρο το c_1 και ίσως κάποια αδέρφια του c_1 από τα οποία θα αποκοπεί κάποιο κομμάτι χρησιμοποιώντας γραμμή σάρωσης.

2. Η γραμμή σάρωσης κινείται γύρω από το CP_r ώσπου να αποκτηθεί αρκετή περιοχή για να συμπληρωθεί το εμβαδόν α για το SP_1 . Αν κατά τη σάρωση συναντήσουμε μια ακμή που να συνδέει το CP_r με άλλο κυρτό κομμάτι (το c_2) συγκρίνεται το εμβαδόν του c_2 με το εμβαδόν που υπολείπεται από το SP_1 και αποφασίζεται πόση περιοχή από το c_2 θα χρειαστεί. Στη συνέχεια η γραμμή σάρωσης κινείται στο c_2 για να αποκόψει την απαιτούμενη περιοχή.
3. Όταν συγκεντρωθεί το SP_1 , αυτό αφαιρείται από το πολύγωνο P , αφαιρούνται από το T οι κόμβοι που χρησιμοποιήθηκαν εξ ολοκλήρου από το SP_1 και

ενημερώνεται το μέγεθος των κόμβων που χρησιμοποιήθηκαν μερικώς από το SP_1 .

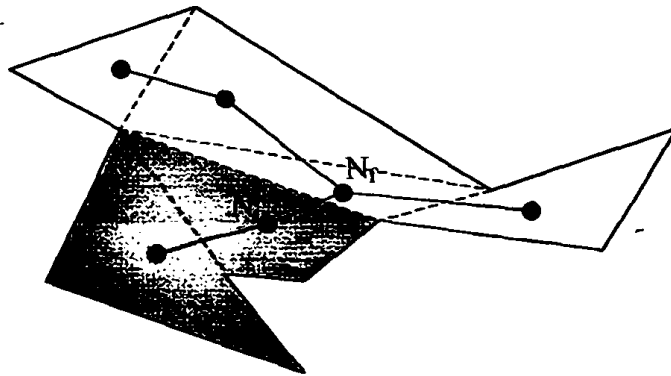
Για την κατασκευή των υπολοίπων υπερπολυγώνων η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται αρχίζοντας από το εμβαδόν a_{i+2} της περιοχής R_{i+2} και το νέο υποδέντρο του N_i που δεν χρησιμοποιήθηκε πλήρως από το SP_1 . Όταν όλες οι περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k , ανήκουν σε κάποιο υπερπολύγωνο η παραπάνω διαδικασία σταματάει.

Μια άλλη εργασία σχετικά με τη διαμέριση ενός απλού πολυγώνου σε περιοχές δοθέντων εμβαδών είναι η εργασία των Bast και Heft [4] η οποία παρουσιάζει έναν απλό αλγόριθμο που γενικεύεται και σε πολύγωνα με τρύπες αφού κάθε τρύπα μπορεί να «αφαιρεθεί» με την ένωσή της με το σύνορο του πολυγώνου. Ο αλγόριθμος απαιτεί $O(kn)$ χρόνο για τη διαμέριση ενός πολυγώνου με n κορυφές σε k περιοχές. Επίσης, στην εργασία αυτή αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα της διαμέρισης πολυγώνου σε περιοχές δοθέντων εμβαδών, με στόχο την ελαχιστοποίηση του συνολικού μήκους των ευθυγράμμων τμημάτων που εισάγονται στο εσωτερικό του πολυγώνου, ώστε να αποκοπούν τα απαιτούμενα κομμάτια, είναι NP-πλήρες.

Για να περιγράψουμε τον αλγόριθμο υποθέτουμε ότι ισχύουν οι συμβολισμοί που δόθηκαν στην εισαγωγή, στη γενική διατύπωση του προβλήματος διαμέρισης πολυγώνου σε περιοχές συγκεκριμένων εμβαδών. Αρχικά το πολύγωνο διαμερίζεται σε κυρτές περιοχές και στη συνέχεια κάθε επιθυμητή περιοχή R_i με εμβαδόν a_i κατασκευάζεται συνενώνοντας γειτονικά κυρτά κομμάτια (φάση συγχώνευσης) ή διαιρώντας κυρτά κομμάτια (φάση διαμέρισης) όποτε αυτό είναι απαραίτητο. Κατά τη διαμέριση ενός κυρτού κομματιού CP_j χρησιμοποιείται γραμμή σάρωσης, η οποία έχει ένα σταθερό σημείο σε μια κορυφή του CP_j και κινείται CCW γύρω από το CP_j . Πιο αναλυτικά τα βήματα του αλγορίθμου περιγράφονται παρακάτω:

- Αρχικά το μη κυρτό πολύγωνο P χωρίζεται σε q κυρτές περιοχές CP_1, \dots, CP_q με τέτοιο τρόπο που να μην εισάγονται σημεία Steiner.
- Δημιουργείται το δυϊκό γράφημα που αντιστοιχεί στη διαμέριση του πολυγώνου P σε κυρτές περιοχές. Το γράφημα αυτό είναι δέντρο (δες Πρόταση 3.1) (Σχήμα 3.13(a)).
- Σε κάθε κόμβο N_j του δέντρου T αντιστοιχίζεται ο αριθμός Εμβαδόν(N_j) που εκφράζει το συνολικό εμβαδόν όλων των κυρτών περιοχών που αντιστοιχούν στους κόμβους του υποδέντρου με ρίζα το N_j .
- Κατά τη φάση της συγχώνευσης για την κατασκευή μιας περιοχής R_i εμβαδού a_i , τα κυρτά κομμάτια που συνενώνονται βρίσκονται με αναζήτηση στους κόμβους του δέντρου T . Αναζητείται ο μεγαλύτερος κόμβος N του T για τον οποίο ισχύει $\text{Εμβαδόν}(N) \leq a_i$. Τα κυρτά κομμάτια που θα συνενωθούν αντιστοιχούν στους κόμβους του υποδέντρου με ρίζα το N .
- Κατά τη φάση της διαμέρισης κάποιας κυρτής περιοχής χρησιμοποιώντας γραμμή σάρωσης πρέπει να ικανοποιούνται δύο περιορισμοί:

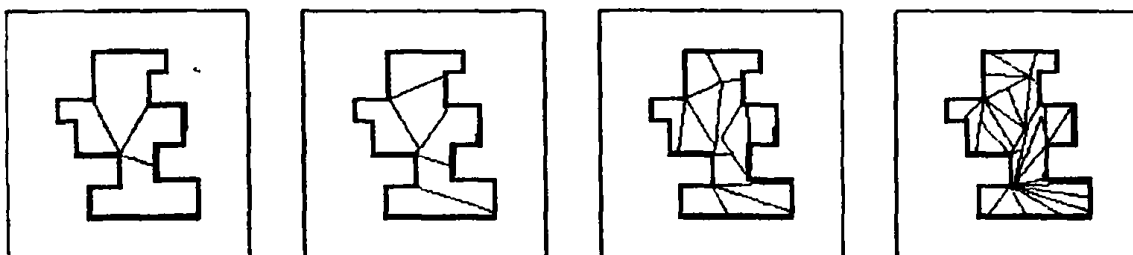
1. Όταν ένα μέρος κάποιου κυρτού κομματιού CP_j , $j=1, \dots, q$ αποκόπτεται ώστε να προκύψει το R_i το υπόλοιπο εναπομένον τμήμα του πολυγώνου P πρέπει να παραμένει συνδεδεμένο. Αν δεν ισχύει αυτό μετά θα είναι αδύνατο να αποκοπούν τα υπόλοιπα τμήματα R_{i+1}, \dots, R_k .
2. Όταν μια περιοχή M κάποιου κυρτού κομματιού CP_j , $j=1, \dots, q$ αποκόπτεται ώστε να ενωθεί με άλλα κυρτά κομμάτια και να προκύψει το R_i τότε η περιοχή αυτή M θα πρέπει να είναι συνδεδεμένη με τα υπόλοιπα κυρτά κομμάτια με τα οποία θα ενωθεί.



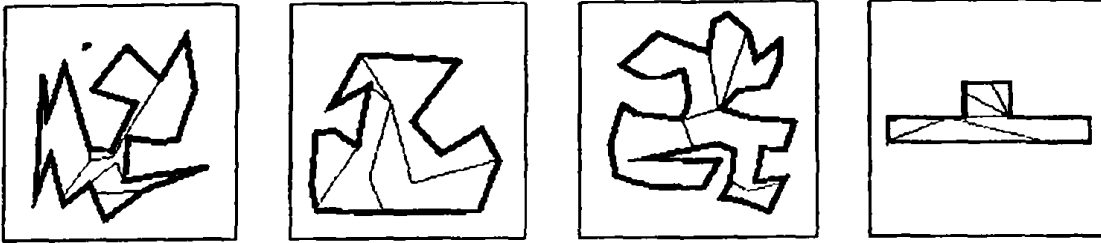
Σχήμα 3.14

Η φάση της διαμέρισης είναι απαραίτητη σε δύο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση είναι όταν το εμβαδόν a_i της περιοχής R_i είναι μικρότερο από το εμβαδόν που αντιστοιχεί στο μικρότερο φύλλο του T . Τότε η κυρτή περιοχή που αντιστοιχεί στο φύλλο αυτό πρέπει να διαιρεθεί. Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν ένα κομμάτι της περιοχής R_i έχει ήδη κατασκευαστεί με τη συνένωση κυρτών κομματιών που αντιστοιχούν στους κόμβους του υποδέντρου με ρίζα το N_j και υπολείπεται ακόμη ένα κομμάτι για να κατασκευαστεί ολόκληρη η περιοχή R_i . Τότε, αν N_f είναι ο πατέρας του N_j στο δέντρο, το υπόλοιπο τμήμα του R_i θα κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας ένα κομμάτι του N_f και ίσως και κάποιων γειτονικών του κυρτών τμημάτων (Σχήμα 3.14).

Παρακάτω, στο Σχήμα 3.15 και στο Σχήμα 3.16 φαίνονται κάποια αποτελέσματα του αλγορίθμου που μόλις περιγράψαμε.



Σχήμα 3.15: Πολύγωνο με $n=20$ κορυφές κομμένο σε $p=3, 6, 12$ και 24 ίσες περιοχές αντίστοιχα [4].



Σχήμα 3.16: Τέσσερα διαφορετικά πολύγωνα το καθένα χωρισμένο σε 5 κομμάτια διαφορετικών εμβαδών [4].

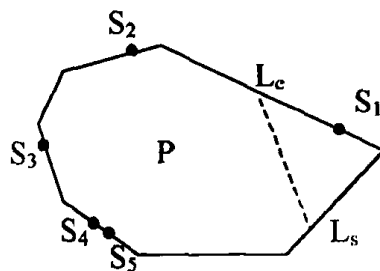
Μια άλλη παραλλαγή του αρχικού προβλήματος διαμέρισης πολυγώνου σε περιοχές συγκεκριμένων εμβαδών είναι η εξής:

Θεωρούμε n ρομπότ, καθένα από τα οποία τοποθετείται σε ένα σημείο S_i , στο σύνορο ή το εσωτερικό του πολυγώνου P . Τα ρομπότ έχουν ως στόχο να καλύψουν ολόκληρο το πολύγωνο P . Οι δυναμικότητες των ρομπότ καθορίζουν την αναλογία εμβαδών των περιοχών που μπορούν να καλύψουν τα ρομπότ στο ίδιο χρονικό διάστημα. Έστω λοιπόν ότι τα κλάσματα του εμβαδού του πολυγώνου P που θα ανατεθούν σε κάθε ρομπότ συμβολίζονται ως c_i , $i=1, \dots, n$, με $0 < c_i < 1$ και $\sum_{i=1}^n c_i = 1$. Επομένως

δοθέντος ενός πολυγώνου P και n ειδικών σημείων S_1, \dots, S_n (θα ονομάζονται κόμβοι (sites)) στο σύνορο ή στο εσωτερικό του πολυγώνου ζητείται μια διαμέριση του P σε n μη επικαλυπτόμενα πολύγωνα R_1, \dots, R_n , τέτοια ώστε $\text{Area}(R_i) = c_i \text{Area}(P)$ και το S_i βρίσκεται στο σύνορο ή στο εσωτερικό του R_i . Δηλαδή, με κάθε κόμβο S_i συσχετίζουμε και ένα κλάσμα c_i , $i=1, \dots, n$ του εμβαδού του P .

Αυτό ακριβώς το πρόβλημα μελετήθηκε από τους Lumelsky και Hert [26].

Στην εργασία αυτή πρώτα παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος για την περίπτωση που το πολύγωνο P είναι κυρτό. Τότε το πολύγωνο P μπορεί να διαμερισθεί σε n τμήματα χρησιμοποιώντας $n-1$ ευθύγραμμα τμήματα. Αρχικά το P διαμερίζεται σε δύο μικρότερα κυρτά πολύγωνα, ένα πολύγωνο με q_1 κόμβους και ένα πολύγωνο με q_2 κόμβους ($q_1 + q_2 = n$), καλώντας τη διαδικασία *ConvexDivide*. Στη συνέχεια καλείται αναδρομικά η διαδικασία *ConvexDivide* για καθένα από αυτά τα μικρότερα πολύγωνα ώσπου να προκύψουν n πολύγωνα με 1 κόμβο το καθένα. Η διαδικασία *ConvexDivide* χρησιμοποιεί μια γραμμή σάρωσης $L = L_s L_e$ και κινώντας τα σημεία L_s και L_e σύμφωνα ή αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού βρίσκει ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του συνόρου του P και διαμερίζει το P σε μικρότερα τμήματα καθένα από τα οποία περιέχει έναν ή περισσότερους κόμβους. (Σχήμα 3.17)



Σχήμα 3.17: Το πολύγωνο P κόβεται σε δύο κομμάτια από το ευθύγραμμο τμήμα $L_s L_e$.

Η διαμέριση ενός κυρτού πολυγώνου P με πλήθος κορυφών v_p σε n πολύγωνα καθένα από τα οποία περιέχει ακριβώς έναν κόμβο μπορεί να γίνει σε χρόνο $O((n-1)(n+v_p))$.

Στην περίπτωση που το πολύγωνο P είναι μη κυρτό ο παραπάνω αλγόριθμος γενικεύεται ως εξής:

- Αρχικά το πολύγωνο P διαμερίζεται σε κάποιο πλήθος κυρτών πολυγώνων CP_j , $j=1, \dots, p$ χρησιμοποιώντας κάποιον από τους γνωστούς αλγόριθμους διαμέρισης πολυγώνου σε κυρτές περιοχές. Στα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην εργασία [26] χρησιμοποιείται ο απλός αλγόριθμος του Chazelle [9] που εκτελείται σε χρόνο $O(v_p^2)$ χρόνο όπου v_p είναι το πλήθος κορυφών του P .
- Τα κυρτά πολύγωνα CP_j , $j=1, \dots, p$ που προκύπτουν με τον τρόπο αυτό πρώτα διατάσσονται σε μια σειρά και στη συνέχεια υφίστανται επεξεργασία με αυτή τη σειρά.
- Όταν το εμβαδόν του CP_j είναι πολύ μικρό για να καλύψει τις απαιτήσεις εμβαδών των κόμβων που περιέχει, το εμβαδόν που υπολείπεται πρέπει να αποκοπεί από τα γειτονικά κομμάτια του CP_j .
- Όταν το εμβαδόν του CP_j είναι μεγαλύτερο από αυτό που απαιτείται από τα sites που περιέχει τότε πρέπει να αποκοπεί κάποιο τμήμα του CP_j ώστε να προκύψει το απαιτούμενο εμβαδόν. Η αποκοπή αυτή πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο που να παραμένει συνδεδεμένο το υπόλοιπο τμήμα του πολυγώνου P που δεν έχει ακόμη χρησιμοποιηθεί.

Έστω $k_j = |V(CP_j)|$ είναι το πλήθος των κορυφών του κυρτού πολυγώνου CP_j και

$$\sum_{j=1}^p k_j = V. \text{ Η διαμέριση ενός μη κυρτού πολυγώνου } P \text{ με πλήθος κορυφών } v_p \text{ σε } n$$

πολύγωνα με έναν κόμβο το καθένα μπορεί να γίνει σε χρόνο $O(v_p \log \log v_p + v_p n^2 + nv)$.

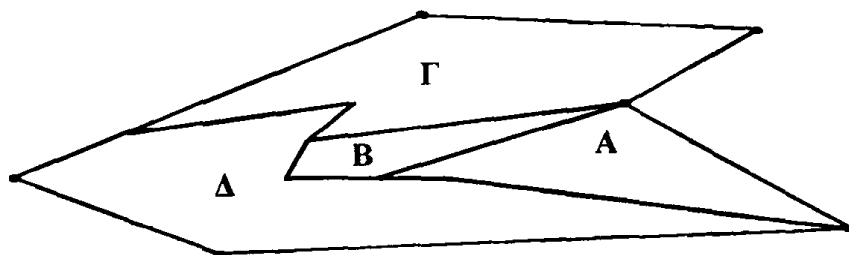
Στην περίπτωση που οι κόμβοι S_i , $i=1, \dots, n$ είναι εσωτερικά σημεία του μη κυρτού πολυγώνου P πρέπει μετά τη διαμέριση του P σε κυρτά πολύγωνα CP_j , $j=1, \dots, p$, οι κόμβοι αυτοί να βρίσκονται πάνω σε κάποια ακμή των CP_j . Αν η διαμέριση σε κυρτά πολύγωνα δεν πετυχαίνει κάτι τέτοιο τότε για κάθε κόμβο S_i που βρίσκεται στο εσωτερικό του CP_j φέρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από τον S_i και χωρίζει στα δύο το CP_j . Μετά από αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο αλγόριθμο που περιγράφηκε παραπάνω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αλγόριθμος Διαμέρισης Πολυγώνου σε Περιοχές Συγκεκριμένων Εμβαδών

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε έναν αλγόριθμο για το πρόβλημα της διαμέρισης πολυγώνου σε περιοχές δοθέντων εμβαδών. Για τη διαμέριση αυτή σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε ένας αλγόριθμος που δέχεται ως είσοδο ένα απλό πολύγωνο P και k τιμές $A_{\text{area}}(R_1), A_{\text{area}}(R_2), \dots, A_{\text{area}}(R_k)$ που αντιπροσωπεύουν τα εμβαδά k περιοχών. Η έξοδος του αλγορίθμου είναι μια διαμέριση του P σε k περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k , εμβαδών $A_{\text{area}}(R_1), A_{\text{area}}(R_2), \dots, A_{\text{area}}(R_k)$ αντίστοιχα. Ο μόνος περιορισμός που τίθεται είναι ότι κάθε μια από τις περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k πρέπει να επικοινωνεί με το εξωτερικό του αρχικού πολυγώνου P , δηλαδή η τομή του συνόρου της περιοχής αυτής με το σύνορο του P δεν πρέπει να είναι το κενό σύνολο. Συνεπώς, κάθε μια από τις περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k τέμνει το σύνορο του P σε ένα σημείο, ένα ευθύγραμμο τμήμα ή ένα σύνολο από ευθύγραμμο τμήματα. Η απαίτηση να επικοινωνεί κάθε περιοχή με το εξωτερικό του πολυγώνου προκύπτει από την πρακτική ανάγκη κάθε ρομπότ να έχει πρόσβαση στην περιοχή που του ανατίθεται για να εργαστεί σ' αυτή. Ωστόσο οι περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k , δεν είναι απαραίτητο να είναι κυρτές ή να έχουν κάποια άλλη ιδιότητα, αν και θα πρέπει να είναι οπωσδήποτε απλά πολύγωνα.

Μια πιθανή διαμέριση πολυγώνου σε περιοχές με βάση τις παραπάνω προϋποθέσεις φαίνεται στο Σχήμα 4.1, όπου ένα απλό πολύγωνο διαιρείται σε τέσσερις περιοχές, τις περιοχές A, B, Γ και Δ . Η περιοχή A επικοινωνεί με το εξωτερικό του πολυγώνου μέσω ενός ευθυγράμμου τμήματος, η περιοχή B επικοινωνεί μέσω ενός σημείου και καθεμία από τις περιοχές Γ και Δ επικοινωνεί με το εξωτερικό του πολυγώνου μέσω μιας αλυσίδας από ευθύγραμμο τμήματα.



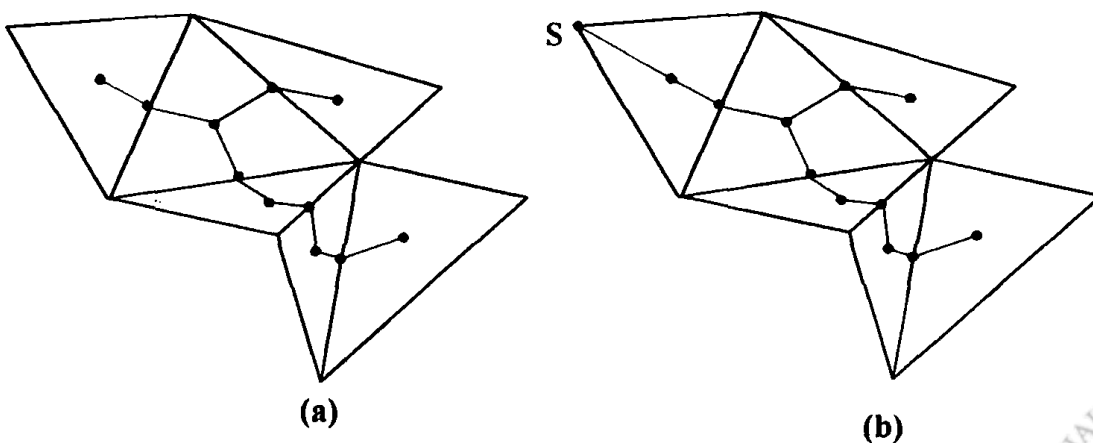
Σχήμα 4.1

4.1 Περιγραφή αλγορίθμου

Ο αλγόριθμος που υλοποιήθηκε περιγράφεται και αναλύεται στη συνέχεια. Η είσοδος του αλγορίθμου είναι η εξής:

- το πολύγωνο που ζητείται να διαμεριστεί και που περιγράφεται ως το σύνολο των κορυφών του, όπως αυτές συναντώνται αν κινηθούμε κατά μήκος του συνόρου του πολυγώνου σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού (CW) ή αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού (CCW).
- το πλήθος k των περιοχών στις οποίες πρέπει να διαμεριστεί το πολύγωνο
- για κάθε περιοχή δίνεται το εμβαδόν της. Συγκεκριμένα για κάθε περιοχή R_i , $i=1,2,\dots,k$ δίνεται ένας αριθμός που εκφράζει το ποσοστό του συνολικού εμβαδού του πολυγώνου στο οποίο αντιστοιχεί το εμβαδόν της περιοχής R_i . Τα ποσοστά που δίνονται για κάθε περιοχή πρέπει να αθροίζονται στο 100%.

Παρακάτω περιγράφουμε σύντομα τις βασικές αρχές στις οποίες στηρίζεται η σχεδίαση του αλγορίθμου και στη συνέχεια δίνουμε σύντομα τα βήματά του. Βασικός περιορισμός του αλγορίθμου είναι ότι οι περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k που θα προκύψουν, πρέπει να επικοινωνούν με το εξωτερικό του P . Για την ικανοποίηση του περιορισμού αυτού εφαρμόζεται η εξής ιδέα: το πολύγωνο P διαιρείται σε τρίγωνα, χωρίς τη χρήση σημείων Steiner, πετυχαίνοντας έτσι μια πρώτη διαμέριση του P . Στη συνέχεια δημιουργείται στο εσωτερικό του P ένα γράφημα με κόμβους τα κέντρα βάρους των τριγώνων (δηλαδή τα σημεία τομής των τριών διαμέσων των τριγώνων), και τα μέσα των ακμών που ανήκουν σε δύο τρίγωνα και ακμές τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το κέντρο βάρους κάθε τριγώνου T με το μέσο κάθε ακμής του τριγώνου T που ανήκει και σε άλλο τρίγωνο (Σχήμα 4.2(a)). Το γράφημα G που προκύπτει μπορεί να θεωρηθεί ως μια παραλλαγή του δυϊκού γραφήματος της διαμέρισης του P σε τρίγωνα όπως αυτό ορίστηκε στο Κεφάλαιο 3 με τη διαφορά ότι εδώ έχουμε επιπλέον κόμβους που αντιστοιχούν στα μέσα κοινών ακμών τριγώνων και οι ακμές του γραφήματος διέρχονται και από τους νέους αυτούς κόμβους. Στο γράφημα G προστίθεται επιπλέον και ένας κόμβος S που τοποθετείται σε μια κορυφή του πολυγώνου καθώς και η κατάλληλη ακμή που ενώνει τον S με το υπόλοιπο γράφημα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2(b).



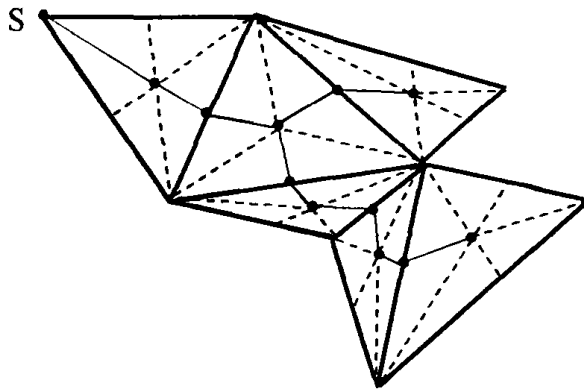
Σχήμα 4.2

Πρόταση 4.1

Το γράφημα G είναι δέντρο.

Απόδειξη: Το γράφημα G χωρίς την ακμή που πρόσκειται στον κόμβο S είναι ισόμορφο με το γράφημα που προκύπτει εάν εισάγουμε έναν νέο κόμβο σε κάθε ακμή του δυϊκού γραφήματος της διαμέρισης του πολυγώνου σε τρίγωνα. Καθώς η διαμέριση έχει γίνει φέροντας διαγώνιους, το δυϊκό γράφημα είναι δέντρο και άρα το γράφημα G είναι επίσης δέντρο.

Αφού δημιουργηθεί το δέντρο G , με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω, κάθε τρίγωνο T χωρίζεται σε έξι μικρότερα τρίγωνα φέροντας τις τρεις διάμεσους του τριγώνου (Σχήμα 4.3). Με τον τρόπο αυτό προκύπτει μια νέα διαμέριση του P σε μικρά τρίγωνα.

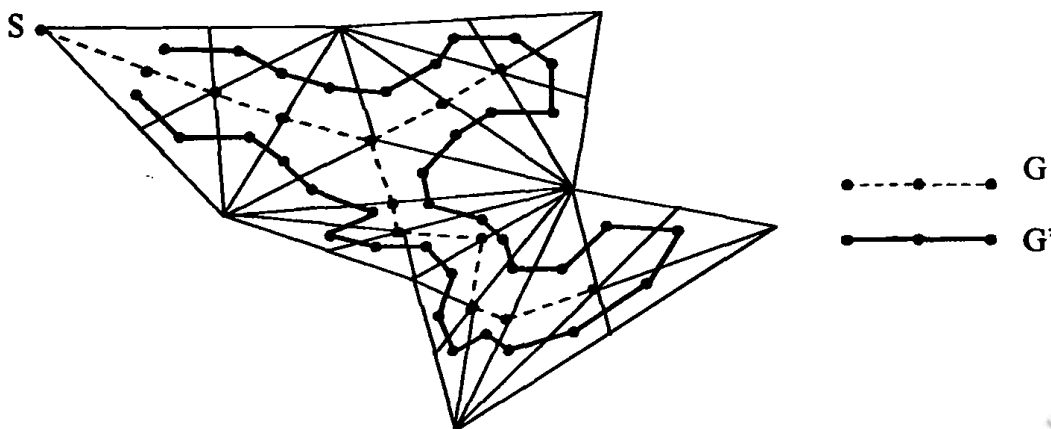


Σχήμα 4.3

Πρόταση 4.2

Αν αποσυνδέσουμε το πολύγωνο P κατά μήκος του γραφήματος G , το δυϊκό γράφημα G' της διαμέρισης του P σε μικρά τρίγωνα είναι ένα απλό μονοπάτι (Σχήμα 4.4).

Απόδειξη: Μετά την αποσύνδεση κατά μήκος του γραφήματος G , τα δύο μικρά τρίγωνα που έχουν το S ως κορυφή έχουν ακριβώς μια κοινή ακμή με κάποιο άλλο μικρό τρίγωνο, ενώ καθένα από τα υπόλοιπα μικρά τρίγωνα έχει μια κοινή ακμή με ακριβώς δύο άλλα μικρά τρίγωνα. Καθώς το δυϊκό γράφημα είναι συνδεδεμένο είναι ένα απλό μονοπάτι.



Σχήμα 4.4

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι με την αποσύνδεση του πολυγώνου P κατά μήκος του γραφήματος G το πολύγωνο P δεν αποσυνδέεται, αφού στο G ανήκει μόνο μια κορυφή του P , που είναι το σημείο S .

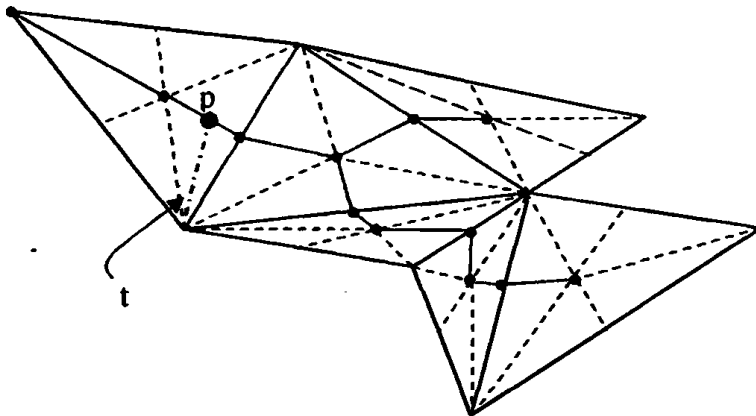
Μετά τη διαμέριση του P σε μικρά τρίγωνα και την αποσύνδεση του πολυγώνου P κατά μήκος του γραφήματος G , ο αλγόριθμος επεξεργάζεται τα μικρά τρίγωνα με τη σειρά που συναντώνται κατά μήκος του γραφήματος G και αποκόπτει τις απαιτούμενες περιοχές. Συγκεκριμένα, αρχικά υφίσταται επεξεργασία το ένα από τα δύο μικρά τρίγωνα, έστω t_1 , που μια κορυφή του είναι ο κόμβος S , στη συνέχεια το μικρό τρίγωνο t_2 που είναι γειτονικό του t_1 , έπειτα το μικρό τρίγωνο t_3 που είναι γειτονικό του t_2 κ.ο.κ. Γενικά, ο αλγόριθμος επεξεργάζεται ένα μικρό τρίγωνο t_i και κατόπιν συνεχίζει στο μικρό τρίγωνο t_j , που έχει μια κοινή ακμή με το t_i και που δεν έχει ακόμη υποστεί επεξεργασία. Η κοινή ακμή των μικρών τριγώνων t_i και t_j δεν είναι ακμή του γραφήματος G αφού το πολύγωνο P έχει αποσυνδεθεί κατά μήκος του G .

Με βάση τα παραπάνω, τα βήματα του αλγόριθμου διαμέρισης πολυγώνου σε περιοχές είναι τα εξής:

1. Διαμέριση του πολυγώνου σε τρίγωνα T_1, T_2, \dots, T_{n-2} .
2. Κατασκευή του γραφήματος-δέντρου G .
 - a. Εύρεση των κόμβων του δέντρου:
 - Εύρεση του κέντρου κάθε τριγώνου.
 - Εύρεση του μέσου κάθε ακμής που ανήκει σε δύο τρίγωνα.
 - $S \leftarrow$ μια κορυφή του πολυγώνου.
 - b. Εύρεση των ακμών του δέντρου.
3. Διαμέριση κάθε τριγώνου T_i σε έξι μικρότερα τρίγωνα $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,6}$.
4. Διάταξη των μικρών τριγώνων που προκύπτουν με τη σειρά που θα υποστούν επεξεργασία. Αυτό γίνεται ως εξής:
 - a. Θεωρείται ότι γίνεται αποσύνδεση του πολυγώνου P κατά μήκος του γραφήματος G .
 - b. Αρχίζοντας από ένα μικρό τρίγωνο που μια κορυφή του είναι το σημείο S , από κάθε μικρό τρίγωνο κινούμαστε στο μοναδικό γειτονικό του μικρό τρίγωνο που δεν έχει ακόμη υποστεί επεξεργασία.
5. Επεξεργασία των μικρών τριγώνων με τη σειρά και αποκοπή των απαιτούμενων εμβαδών. Έστω t το τρέχον μικρό τρίγωνο με εμβαδόν $Area(t)$, R είναι η τρέχουσα περιοχή προς αποκοπή και $Required_area$ το εμβαδόν της περιοχής R που υπολείπεται να αποκοπεί.
 - a. αν $Area(t) > Required_area$
 - αποκόπτεται ένα κομμάτι του t , με εμβαδόν ίσο με το $Required_area$, οπότε ολοκληρώνεται η περιοχή R . Η αποκοπή πραγματοποιείται βρίσκοντας ένα σημείο p πάνω σε μια ακμή του t (Σχήμα 4.5): αν το t έχει ακμή που ανήκει στο σύνορο του P τότε το p θα βρίσκεται πάνω στην ακμή αυτή, αλλιώς το σημείο p θα βρίσκεται πάνω στη ακμή του t που ανήκει στο δέντρο G .
 - επαναλαμβάνεται το βήμα 5 του αλγορίθμου θέτοντας:



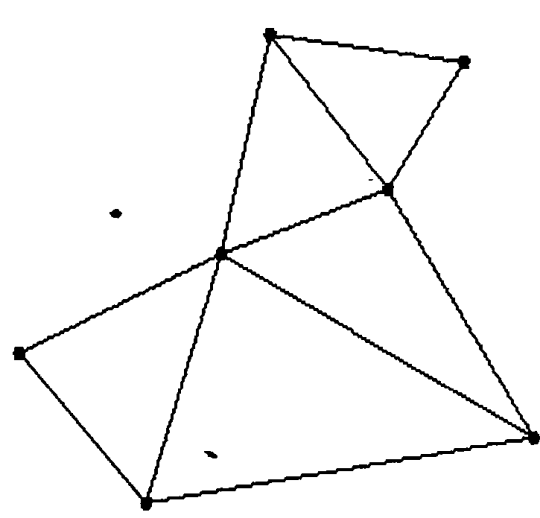
$R \leftarrow$ επόμενη περιοχή για αποκοπή.
 $Required_area \leftarrow$ Εμβαδόν(R).
 $t \leftarrow$ κομμάτι του t που απέμεινε.



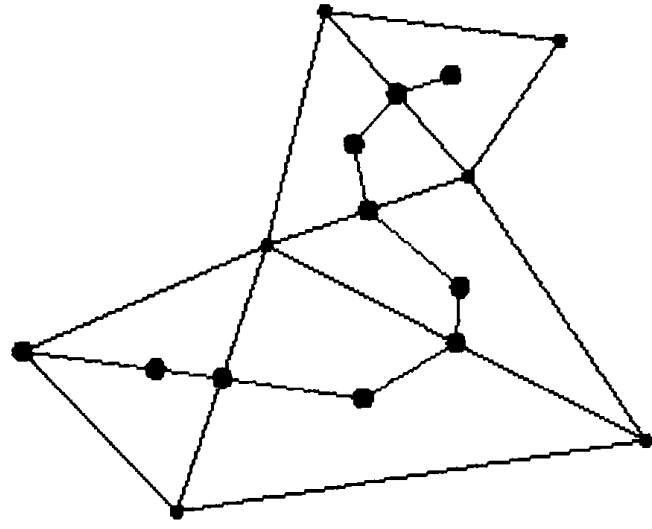
Σχήμα 4.5

- b. αν $Area(t) < Required_area$
- αποκόπτεται ολόκληρο το t .
 - επαναλαμβάνεται το βήμα 5 του αλγορίθμου θέτοντας:
 $Required_area \leftarrow Required_area - Area(t)$.
 $t \leftarrow$ επόμενο t .
- c. αν $Area(t) = Required_area$
- αποκόπτεται ολόκληρο το t , οπότε ολοκληρώνεται η περιοχή R .
 - επαναλαμβάνεται το βήμα 5 του αλγορίθμου θέτοντας:
 $R \leftarrow$ επόμενη περιοχή για αποκοπή.
 $Required_area \leftarrow$ Εμβαδόν(R).
 $t \leftarrow$ επόμενο t .

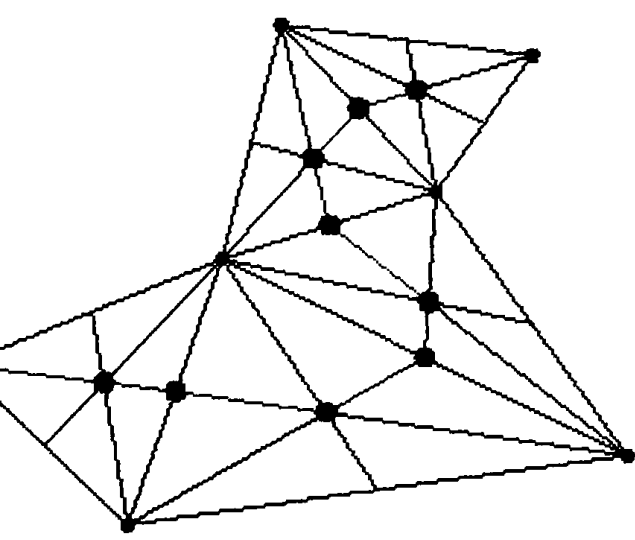
Πριν αναλύσουμε λεπτομερώς κάθε βήμα του αλγορίθμου, δίνουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής του (Σχήμα 4.6), όπου φαίνονται τα ενδιάμεσα βήματα της διαμέρισης ενός πολυγώνου σε τρεις περιοχές σύμφωνα με τον αλγόριθμο που περιγράφηκε προηγουμένως. Συγκεκριμένα δίνεται ένα πολύγωνο με επτά κορυφές, το οποίο αρχικά διαμερίζεται σε τρίγωνα (Σχήμα 4.6(a)), στη συνέχεια κατασκευάζεται το γράφημα-δέντρο G (Σχήμα 4.6(b)), μετά γίνεται η διαμέριση του πολυγώνου σε μικρά τρίγωνα (Σχήμα 4.6(c)) και τέλος, αποκόπτονται οι περιοχές που αναζητούνται (Σχήμα 4.6(d)). Στο Σχήμα 4.6(d) φαίνονται με διαφορετικά χρώματα οι περιοχές στις οποίες διαιρείται το πολύγωνο, με έντονη μαύρη γραμμή φαίνεται το δέντρο G , ενώ με έντονο πράσινο φαίνονται τα σημεία και τα ευθύγραμμα τμήματα που χρησιμοποιούνται για να αποκοπεί κάθε περιοχή από το αρχικό πολύγωνο.



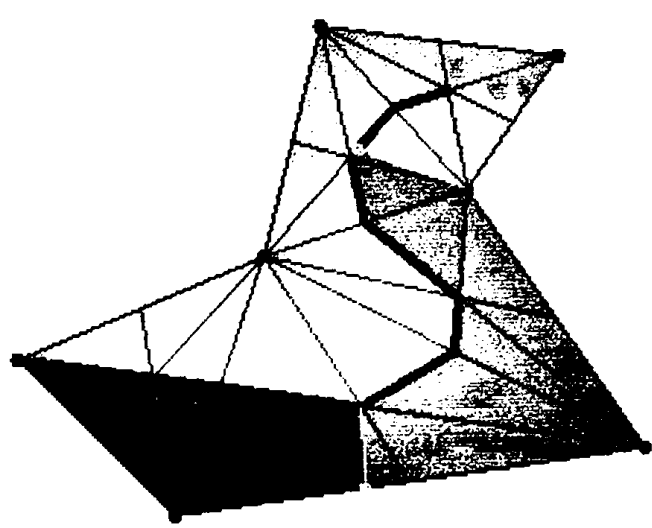
(a)



(b)



(c)



(d)

Διάρρηση σε 3 περιοχές με ποσοστά 20%, 30% και 50% αντίστοιχα.

Σχήμα 4.6

4.1.1 Διαμέριση του πολυγώνου σε τρίγωνα

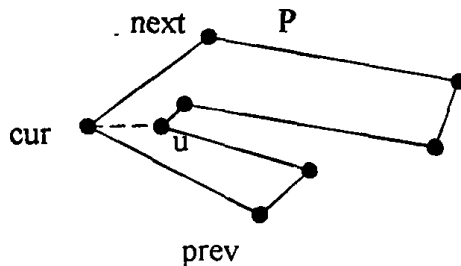
Αρχικά διαμερίζουμε το δοθέν πολύγωνο P σε τρίγωνα με χρήση διαγωνίων (Ενότητα 3.1).

Πρόταση 4.3

Κάθε απλό πολύγωνο με n κορυφές μπορεί να διαμερισθεί σε $n-2$ τρίγωνα με χρήση διαγωνίων.

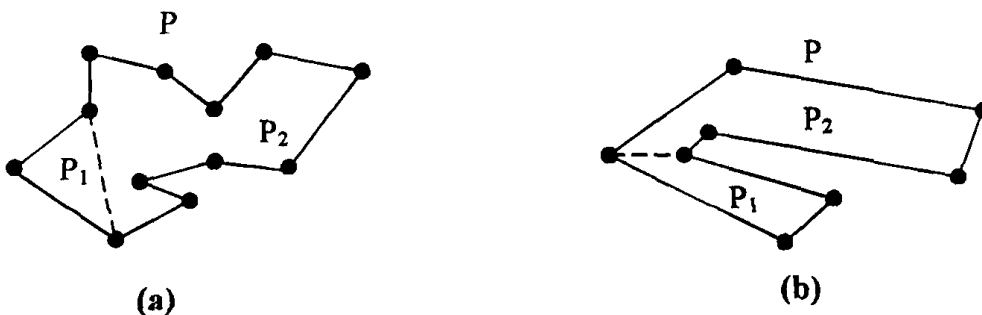
Απόδειξη: Έστω P ένα πολύγωνο και V ένας πίνακας που περιέχει τις n κορυφές του P σε σειρά, σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού (CW) ή αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού (CCW).

Αποδεικνύουμε πρώτα την ύπαρξη μιας διαγωνίου στο πολύγωνο P . Έστω cur η κορυφή του P με τη μικρότερη x -συντεταγμένη, $prev$ η προηγούμενή της και $next$ είναι η επόμενη της cur στον πίνακα V . Αν η cur είναι η πρώτη κορυφή του πίνακα V ως $prev$ παίρνουμε την τελευταία του V , ενώ αν η cur είναι η τελευταία κορυφή του πίνακα V ως $next$ παίρνουμε την πρώτη κορυφή του V . Αν το ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τις κορυφές $prev$ και $next$ βρίσκεται στο εσωτερικό του P αυτό είναι μια διαγώνιος. Διαφορετικά (Σχήμα 4.7), βρίσκουμε την κορυφή u , από αυτές που ανήκουν στο εσωτερικό του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $prev$, cur και $next$, η οποία απέχει τη μέγιστη απόσταση από το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τις κορυφές $prev$ και $next$. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τις κορυφές cur και u είναι μια διαγώνιος.



Σχήμα 4.7

Σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις, η διαγώνιος που βρέθηκε χωρίζει το πολύγωνο P σε δύο μικρότερα πολύγωνα P_1 και P_2 (Σχήμα 4.8), τα οποία διαμερίζονται επαγωγικά σε τρίγωνα με χρήση διαγωνίων.



Σχήμα 4.8

Μάλιστα, αν το P_1 έχει h κορυφές τότε το P_2 έχει $n-h+2$ κορυφές, οπότε οι διαμερίσεις των P_1 και P_2 σε τρίγωνα παράγει $h-2$ και $n-h$ τρίγωνα αντίστοιχα, ώστε το πολύγωνο P να διαμεριστεί σε $h-2+n-h = n-2$ τρίγωνα.

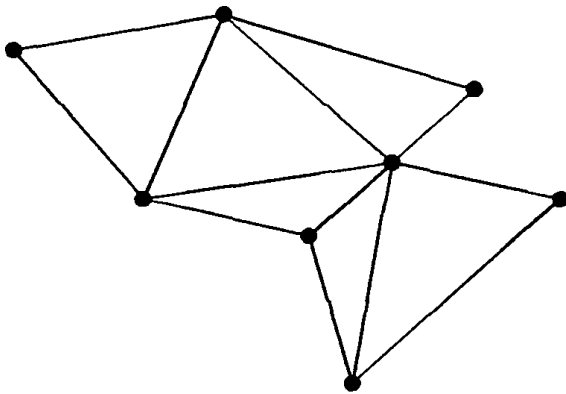
Για τη διαμέριση του δοθέντος πολυγώνου P σε τρίγωνα χρησιμοποιήθηκε ένας αλγόριθμος που στηρίζεται στην απόδειξη της Πρότασης 4.3. Ο σχετικός κώδικας έχει γραφτεί από τους Reid Judd και Scott R.Nelson και υπάρχει διαθέσιμος στο Internet [29]. Η είσοδος στον αλγόριθμο αυτόν είναι ένας πίνακας V με τις n κορυφές του πολυγώνου P που θα πρέπει να δίνονται στη σειρά σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού (CW) ή αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού (CCW). Η έξοδος του αλγορίθμου είναι οι κορυφές των τριγώνων στα οποία διαιρείται το P .

Η κύρια συνάρτηση είναι η `draw_poly(n,V)` η οποία είναι αυτή που καλούμε μια φορά και η οποία παράγει τη διαμέριση σε τρίγωνα. Η συνάρτηση αυτή βρίσκει τις διαγωνίους με τον τρόπο που περιγράφηκε, ενώ επιπλέον επιλέγει κάθε φορά τη διαγώνιο που έχει το μικρότερο μήκος. Αυτό γίνεται ως εξής:

Για κάθε κορυφή `cur'` του πίνακα V βρίσκεται η προηγούμενη `prev'` και η επόμενη της `next'` στον V . Η κορυφή η οποία επιλέγεται για να υποστεί επεξεργασία είναι αυτή για την οποία το τρίγωνο T' που σχηματίζεται από τις κορυφές `cur'`, `prev'` και `next'` ανήκει στο πολύγωνο P και δεν περιέχει άλλες κορυφές του P στο εσωτερικό του και για την οποία η απόσταση $dist(prev', next')$ των σημείων `prev'` και `next'` ελαχιστοποιείται.

Η διαμέριση του πολυγώνου P σε τρίγωνα παράγει $n-2$ τρίγωνα, όπου n είναι το πλήθος κορυφών του P .

Στο Σχήμα 4.9 φαίνεται μια πιθανή διαμέριση ενός πολυγώνου με 8 κορυφές σε 6 τρίγωνα, όπως προέκυψε από τον αλγόριθμο που μόλις περιγράφηκε.



Σχήμα 4.9

Η πολυπλοκότητα χρόνου του παραπάνω αλγορίθμου χωρισμού σε τρίγωνα είναι $O(n^3)$. Αυτό προκύπτει ως εξής:

- Κατά την εύρεση μιας διαγωνίου απαιτείται $O(n^2)$ χρόνος, αφού ο έλεγχος για το εάν ένα τρίγωνο T με κορυφές `cur`, `prev`, `next` περιέχει άλλες κορυφές του P

γίνεται σε γραμμικό χρόνο και αυτός ο έλεγχος επαναλαμβάνεται $O(n)$ φορές, ώσπου να βρεθεί μια διαγώνιος d .

- Για να βρεθεί αν η διαγώνιος d έχει και το μικρότερο μήκος απαιτείται $O(n^2)$ χρόνος, αφού για κάθε κορυφή $cur' \neq cur$ του πίνακα V ελέγχεται εάν ένα τρίγωνο με κορυφές cur' , $prev'$, $next'$ περιέχει άλλες κορυφές του πολυγώνου P .
- Συνολικά, για να βρεθούν οι $n-2$ διαγώνιοι απαιτείται χρόνος $O(n^3)$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο βέλτιστος αλγόριθμος χωρισμού πολυγώνου σε τρίγωνα έχει περιγραφεί από τον Chazelle και απαιτεί χρόνο $O(n)$.

4.1.2 Κατασκευή του γραφήματος-δέντρου G

Για την κατασκευή του γραφήματος G καλείται η συνάρτηση `find_tree` η λειτουργία της οποίας περιγράφεται παρακάτω.

Ο πρώτος κόμβος του δέντρου G είναι το σημείο S που τοποθετείται σε μια κορυφή του πολυγώνου (Σχήμα 4.2(b)). Το υπόλοιπο δέντρο G προκύπτει φέρνοντας από το μέσο κάθε ακμής που ανήκει σε δύο γειτονικά τρίγωνα ακμές προς τα κέντρα βάρους των δύο αυτών τριγώνων. Επίσης στο G ανήκει και η ακμή που ενώνει το σημείο S με το κέντρο βάρους του τριγώνου στο οποίο ανήκει το S .

Για να κατασκευαστεί το G λοιπόν πρέπει:

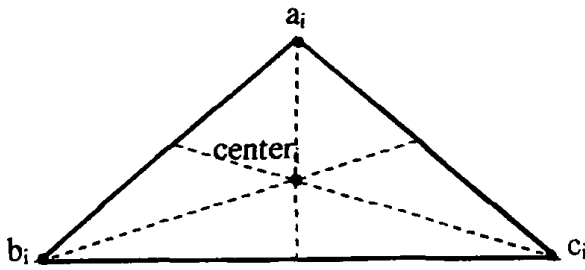
- Να οριστούν οι κόμβοι του G , δηλαδή:
 - να βρεθεί το σημείο S .
 - να βρεθούν τα κέντρα βάρους των τριγώνων.
 - να βρεθούν τα μέσα των ακμών που ανήκουν σε δύο γειτονικά τρίγωνα.
- Να οριστούν οι ακμές του G .

Εύρεση κέντρων βάρους τριγώνων

Για την εύρεση των κέντρων βάρους των τριγώνων καλείται η συνάρτηση `compute_centers()` η λειτουργία της οποίας περιγράφεται παρακάτω.

Για κάθε τρίγωνο T_i , $1 \leq i \leq n-2$, που προέκυψε κατά το βήμα της διαμέρισης του πολυγώνου σε τρίγωνα, υπολογίζεται το κέντρο βάρους του που είναι ένα σημείο στο εσωτερικό του T_i . Έστω $center_i$, $1 \leq i \leq n-2$ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου T_i με κορυφές $a_i=(a_i.x, a_i.y)$, $b_i=(b_i.x, b_i.y)$ και $c_i=(c_i.x, c_i.y)$. Το σημείο $center_i=(center_i.x, center_i.y)$ είναι το σημείο τομής των τριών διαμέσων του τριγώνου T_i (Σχήμα 4.10), και οι συντεταγμένες του δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$center_i.x = 1/3(a_i.x + b_i.x + c_i.x)$$
$$center_i.y = 1/3(a_i.y + b_i.y + c_i.y)$$



Σχήμα 4.10: Το κέντρο βάρους του τριγώνου (οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν τις τρεις διάμεσους του τριγώνου).

Εύρεση των ακμών που ανήκουν σε δύο γειτονικά τρίγωνα και των μέσων των ακμών αυτών.

Η εύρεση των ακμών που ανήκουν σε δύο γειτονικά τρίγωνα, απαιτεί για κάθε τρίγωνο T_i την εύρεση των γειτονικών του τριγώνων, καθώς και των κοινών ακμών του T_i με τους γείτονές του. Ο τρόπος που γίνεται αυτό βασίζεται στην παρατήρηση ότι εάν συγκεντρώσουμε όλες τις ακμές όλων των τριγώνων, τότε αυτές που ανήκουν σε δύο τρίγωνα θα εμφανιστούν δύο φορές, ενώ όλες οι υπόλοιπες θα εμφανιστούν ακριβώς μία φορά.

Συγκεκριμένα, εισάγουμε σε έναν πίνακα E καθεμία από τις τρεις ακμές κάθε τριγώνου T_i . Η ακμή παρίσταται ως το ζεύγος (V_1, V_2) των κορυφών V_1 και V_2 των κορυφών της. Καθώς όμως αυτό ενέχει τον κίνδυνο η ίδια ακμή είτε να παρασταθεί ως (V_1, V_2) είτε ως (V_2, V_1) , αντιστοιχίζεται σε κάθε κορυφή V ένας μοναδικός φυσικός αριθμός $label(V)$ και κατά την εισαγωγή μιας ακμής e στον πίνακα E ελέγχεται αν $label(e.V_1) < label(e.V_2)$. Αν αυτό ισχύει εισάγεται η ακμή στον πίνακα E ως (V_1, V_2) , διαφορετικά η e εισάγεται ως (V_2, V_1) .

Στη συνέχεια, οι ακμές του πίνακα E ταξινομούνται πρώτα ως προς την πρώτη κορυφή του ζεύγους και σε περίπτωση ισότητας ως προς την δεύτερη. Ουσιαστικά η ταξινόμηση γίνεται με βάση τα $label$ των κορυφών. Μετά την ταξινόμηση, οι ακμές μέσω των οποίων συνδέονται γειτονικά τρίγωνα θα βρίσκονται σε γειτονικές θέσεις του πίνακα E και θα αντιστοιχούν στο ίδιο ζεύγος κορυφών.

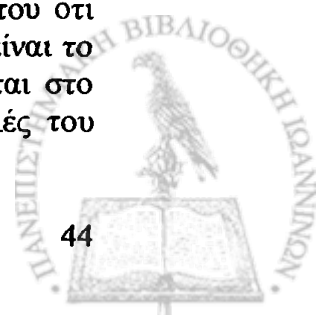
Αφού βρεθούν οι ακμές που ανήκουν σε δύο γειτονικά τρίγωνα πρέπει να υπολογιστεί το μέσο των ακμών αυτών. Ως γνωστόν, το μέσο $M=(M.x, M.y)$ μιας ακμής με κορυφές $V_1=(V_1.x, V_1.y)$ και $V_2=(V_2.x, V_2.y)$ είναι ένα σημείο που οι συντεταγμένες του δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$M.x = 1/2(V_1.x + V_2.x)$$

$$M.y = 1/2(V_1.y + V_2.y)$$

Ανάθεση του σημείου S

Το σημείο S είναι ο πρώτος κόμβος του δέντρου G . Το σημείο S , εκτός του ότι τοποθετείται σε μια κορυφή του πολυγώνου, έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι είναι το σημείο τομής δύο ακμών που ανήκουν σε ένα μόνο τρίγωνο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2(b). Οι ακμές που ανήκουν σε ένα μόνο τρίγωνο θα είναι ακμές του



συνόρου του πολυγώνου, αφού όλες οι εσωτερικές ακμές προέκυψαν με τη διαμέριση του πολυγώνου σε τρίγωνα και σίγουρα ανήκουν σε δύο τρίγωνα. Θεωρείται ότι το πρώτο τρίγωνο T_1 , από το οποίο θα ξεκινήσει η κατασκευή του G και του οποίου μια κορυφή είναι το σημείο S , είναι ένα τρίγωνο με τις δύο από τις τρεις ακμές του να ανήκουν στο σύνορο του πολυγώνου και επομένως θα γειτονεύει μόνο με ένα άλλο τρίγωνο. Η ακμή ενός τριγώνου που ανήκει στο σύνορο του πολυγώνου είναι εύκολο να βρεθεί αφού διαφέρει (ως προς τις κορυφές της) από την ακμή που προηγείται και έπεται της ακμής στον ταξινομημένο πίνακα E .

Ορισμός των ακμών του δέντρου G

Από τη στιγμή που έχουν οριστεί οι κόμβοι του δέντρου πρέπει να οριστούν και οι ακμές του. Για να γίνει αυτό αρκεί να βρεθεί ποια ζεύγη κόμβων του δέντρου συνδέονται μεταξύ τους. Ο τρόπος που γίνεται αυτό περιγράφεται παρακάτω και απαιτεί αναδρομή.

Ο πρώτος κόμβος του δέντρου έχει βρεθεί και είναι το σημείο S που ανήκει στο πρώτο τρίγωνο T_1 . Το σημείο S ενώνεται με μια ακμή με το κέντρο βάρους του τριγώνου T_1 . Για να βρεθούν οι υπόλοιπες ακμές του δέντρου, ξεκινώντας από το τρίγωνο T_1 καλείται μια αναδρομική συνάρτηση, η συνάρτηση $anaδρομη()$, η οποία λειτουργεί ως εξής:

- Βρίσκει τις ακμές του τρέχοντος τριγώνου που εμφανίζονται και σε άλλα τρίγωνα. Οι ακμές αυτές βρίσκονται εύκολα αφού είναι εκείνες που έχουν τις ίδιες κορυφές με τις γειτονικές τους ακμές στον ταξινομημένο πίνακα E .
- Καλείται για κάθε ακμή e του τρέχοντος τριγώνου που ανήκει και σε ένα άλλο τρίγωνο.
- Δοθείσας μιας τέτοιας ακμής e , βρίσκει άλλους δύο κόμβους του δέντρου: το μέσο M της ακμής αυτής και το κέντρο βάρους του νέου τριγώνου στο οποίο ανήκει η ακμή. Έχοντας μεταβεί στο νέο τρίγωνο καλείται γι' αυτό η αναδρομική συνάρτηση κ.ο.κ.
- Κάθε ακμή που έχει χρησιμοποιηθεί ως όρισμα στην αναδρομική συνάρτηση σημειώνεται ώστε να μην χρησιμοποιηθεί ξανά.
- Η αναδρομή σταματάει όταν όλες οι ακμές, που ανήκουν σε δύο τρίγωνα, έχουν σημειωθεί.

Με το τέλος της αναδρομής έχει ολοκληρωθεί και η κατασκευή του δέντρου.

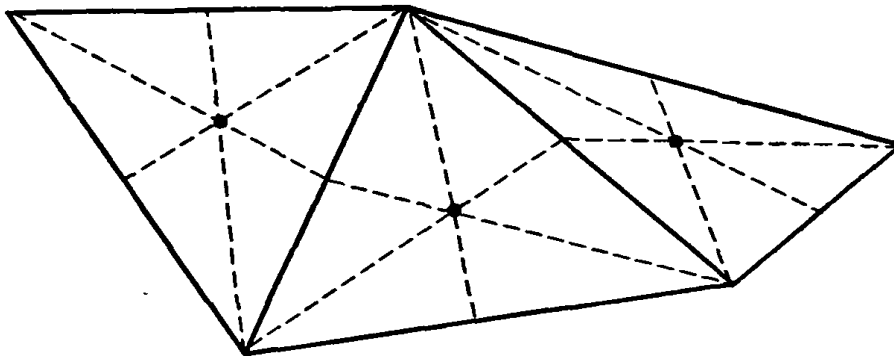
4.1.3 Διαμέριση τριγώνου σε έξι μικρότερα τρίγωνα

Για την διαμέριση κάθε τριγώνου σε έξι μικρότερα τρίγωνα καλείται η συνάρτηση $diamesoi()$ η λειτουργία της οποίας περιγράφεται παρακάτω.

Κάθε τρίγωνο T_i , $1 \leq i \leq n-2$ διαιρείται σε 6 μικρότερα τρίγωνα $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,6}$ φέρνοντας τις τρεις διάμεσους του T_i . Σε κάθε τρίγωνο T_i τα έξι μικρότερα τρίγωνα



$t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,6}$ έχουν ένα κοινό σημείο που είναι το κέντρο βάρους του T_i . Συνολικά δημιουργούνται $6n-12$ μικρά τρίγωνα μέσα στο πολύγωνο (Σχήμα 4.11).



Σχήμα 4.11: Οι διακεκομμένες γραμμές είναι οι διάμεσοι κάθε τριγώνου.

4.1.4 Διάταξη των μικρών τριγώνων με τη σειρά που θα υποστούν επεξεργασία

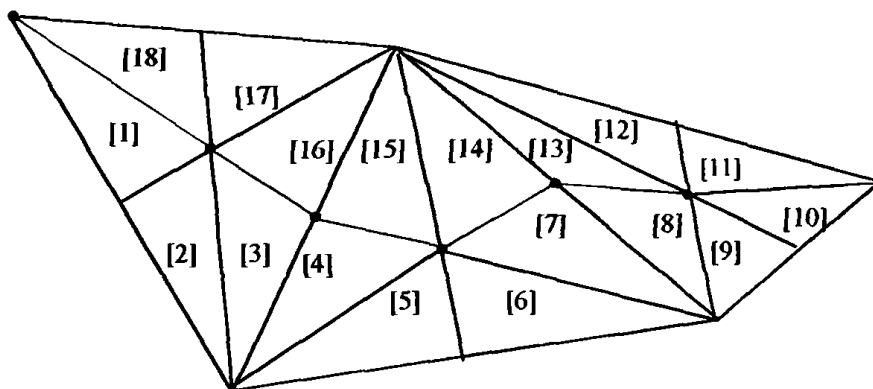
Για τη διάταξη των μικρών τριγώνων με τη σειρά που θα υποστούν επεξεργασία καλείται η συνάρτηση `order_triangles()` η λειτουργία της οποίας περιγράφεται παρακάτω.

Τα μικρά τρίγωνα $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,6}$, $1 \leq i \leq n-2$, θα υποστούν επεξεργασία με τέτοια σειρά ώστε αρχίζοντας από κάποιο να κινούμαστε σε ένα γειτονικό του και να σχηματίσουμε τις περιοχές συγκεκριμένων εμβαδών που αναζητούμε.

Παρατηρούμε ότι ορισμένα από τα μικρά τρίγωνα γειτονεύουν μέσω κάποιων ακμών που ανήκουν και στο δέντρο G . Αν φανταστούμε ότι αποσυνδέουμε το εσωτερικό του πολυγώνου κατά μήκος των ακμών του γραφήματος-δέντρου G τότε τα παραπάνω μικρά τρίγωνα, που ήταν γειτονικά μέσω των ακμών του G , δεν συνδέονται πια. Το πολύγωνο όμως εξακολουθεί να είναι συνδεδεμένο, δηλαδή δεν διαιρείται σε δύο ή περισσότερα πολύγωνα ξένα μεταξύ τους. Μετά την αποσύνδεση κατά μήκος του G κάθε μικρό τρίγωνο έχει το πολύ δύο γειτονικά μικρά τρίγωνα, σύμφωνα με την Πρόταση 4.2 και είναι δυνατόν τα μικρά τρίγωνα να τοποθετηθούν σε μια σειρά, ώστε να δημιουργηθεί η παρακάτω αλυσίδα από μικρά τρίγωνα.

$t_1, t_2, \dots, t_{6n-12}$.

Στην αλυσίδα αυτή το μικρό τρίγωνο t_j , $2 \leq j \leq 6n-13$, είναι γειτονικό (στο πολύγωνο που προέκυψε μετά την αποσύνδεση κατά μήκος του G) με το t_{j-1} και το t_{j+1} , ενώ το t_1 είναι γειτονικό του t_2 και το t_{6n-13} είναι γειτονικό του t_{6n-12} . Η σειρά που θα υποστούν επεξεργασία τα μικρά τρίγωνα είναι και η σειρά με την οποία εμφανίζονται στην παραπάνω αλυσίδα. Στο Σχήμα 4.12 φαίνεται το δέντρο στο εσωτερικό του πολυγώνου, όπου το μικρό τρίγωνο t_j αντιστοιχεί στο τρίγωνο με ένδειξη $[j]$, $1 \leq j \leq 6n-12$.



Σχήμα 4.12: Τα μικρά τρίγωνα στη σειρά.

Η σειρά των μικρών τριγώνων στην αλυσίδα υπολογίζεται με τον τρόπο που περιγράφεται στη συνέχεια. Αρχικά βρίσκεται το πρώτο μικρό τρίγωνο, το t_1 . Αυτό θα είναι ένα από τα δύο μικρά τρίγωνα που οι δύο κορυφές τους ταυτίζονται με τους δύο πρώτους κόμβους του δέντρου G . Το δεύτερο μικρό τρίγωνο είναι αυτό που έχει μια κοινή ακμή με το t_1 και η ακμή αυτή δεν είναι ακμή που ανήκει στο δέντρο G . Γενικά το μικρό τρίγωνο t_j , $2 \leq j \leq 6n-12$, θα είναι αυτό που δεν έχει ακόμη υποστεί επεξεργασία, έχει μια κοινή ακμή με το t_{j-1} και η ακμή αυτή δεν είναι ακμή που ανήκει στο δέντρο.

Είναι φανερό από την προηγούμενη παράγραφο ότι για κάθε μικρό τρίγωνο t_j προκύπτει το πρόβλημα της εύρεσης ενός τριγώνου t_k που είναι γειτονικό του t_j . Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό εισάγονται σε ένα πίνακα οι ακμές όλων των μικρών τριγώνων και ταξινομώντας τον πίνακα αυτόν βρίσκεται ποια μικρά τρίγωνα είναι γειτονικά, όπως ακριβώς έγινε και στην περίπτωση που αναζητούσαμε τα γειτονικά τρίγωνα ενός τριγώνου T_i , $1 \leq i \leq n-2$.

Πρόταση 4.4

Κάθε μικρό τρίγωνο t_j , $1 \leq j \leq 6n-12$, έχει είτε μια κορυφή, είτε μια ακμή που να ανήκει στο σύνορο του πολυγώνου και επομένως μπορούμε να πούμε ότι «επικοινωνεί» με το εξωτερικό του πολυγώνου (Σχήμα 4.12).

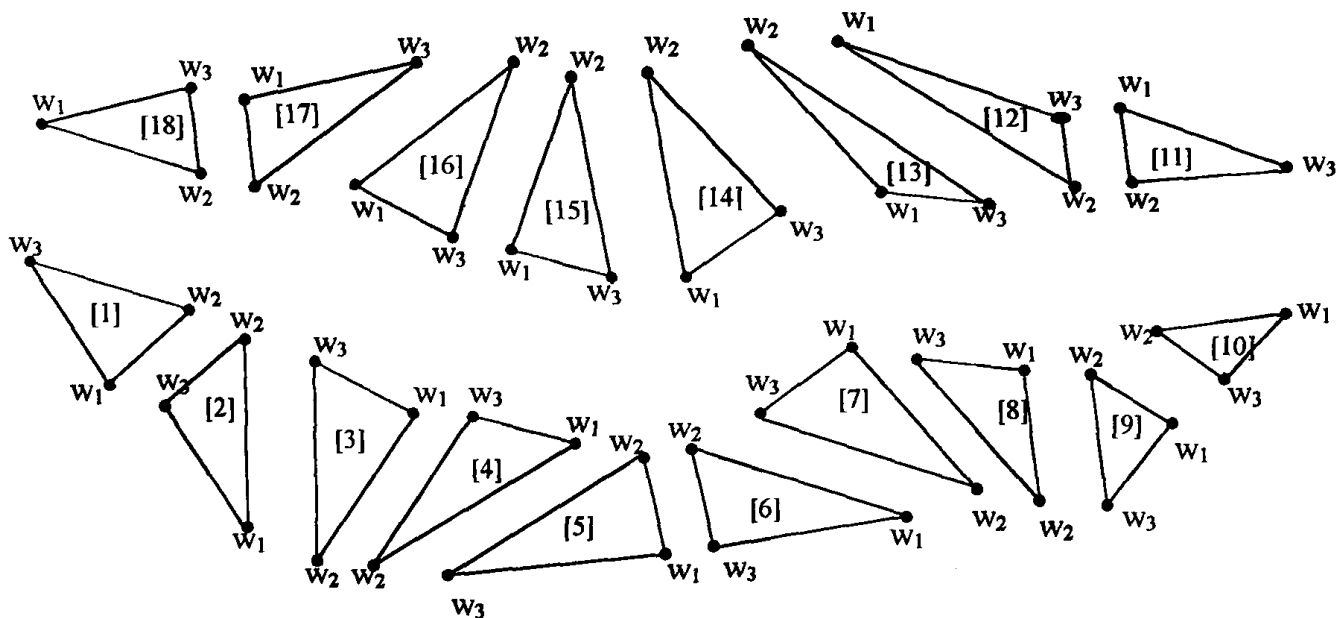
Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι καθένα από τα έξι μικρά τρίγωνα $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,6}$ που προκύπτουν από το τρίγωνο T_i , $1 \leq i \leq n-2$, έχει ακριβώς μια κορυφή του T_i (Σχήμα 4.12). Σημειώνεται επίσης ότι τα $2n$ από τα $6n-12$ μικρά τρίγωνα έχουν μια ακριβώς ακμή τους η οποία ανήκει στο σύνορο του πολυγώνου.

4.1.5 Υπολογισμός των ζητούμενων περιοχών

Πριν γίνει η επεξεργασία των μικρών τριγώνων για τον υπολογισμό των ζητούμενων περιοχών είναι απαραίτητο να γίνει μια διάταξη των κορυφών των μικρών τριγώνων ώστε ο αλγόριθμος να ακολουθεί μια ενιαία τακτική κατά την επεξεργασία τους. Η διάταξη αυτή γίνεται καλώντας τη συνάρτηση `number_vertices()` που περιγράφεται στη συνέχεια.

Διατρέχονται τα μικρά τρίγωνα με τη σειρά που έχουν διαταχθεί στο προηγούμενο βήμα και αναδιατάσσονται οι κορυφές w_1, w_2, w_3 κάθε μικρού τριγώνου έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

- Η ακμή w_1w_2 να είναι η κοινή ακμή με το επόμενο μικρό τρίγωνο, αν υπάρχει επόμενο. Αν δεν υπάρχει επόμενο, που συμβαίνει μόνο στην περίπτωση που επεξεργαζόμαστε το τελευταίο μικρό τρίγωνο (δηλαδή το t_{6n-12}), η w_1w_2 είναι η κοινή ακμή του t_{6n-12} με το δέντρο G .
- Αν το μικρό τρίγωνο έχει ακμή που να ανήκει στο σύνορο του πολυγώνου αυτή να είναι η ακμή w_1w_3 .
- Αν το τρίγωνο δεν έχει ακμή που να ανήκει στο σύνορο του πολυγώνου, αλλά έχει ακμή που να ανήκει στο δέντρο G αυτή είναι η ακμή w_1w_3 .
- Στο Σχήμα 4.13 φαίνεται η διάταξη των κορυφών των μικρών τριγώνων του πολυγώνου του Σχήματος 4.12.



Σχήμα 4.13: Αρίθμηση των κορυφών των μικρών τριγώνων του Σχήματος 4.12.

Αφού γίνει η διάταξη των κορυφών των μικρών τριγώνων με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω, ο αλγόριθμος συνεχίζει με την αποκοπή των περιοχών καλώντας τη συνάρτηση `cut_triangles()`. Συγκεκριμένα, διαβάζουμε ένα-ένα τα εμβαδά των περιοχών που δόθηκαν ως είσοδος. Επισκεπτόμαστε τα μικρά τρίγωνα με τη σειρά που τα έχουμε διατάξει, δηλαδή τη σειρά $t_1, t_2, \dots, t_{6n-12}$, με σκοπό να καθορίσουμε πού αρχίζει και πού τελειώνει κάθε περιοχή. Αναλυτικότερα ο τρόπος που γίνεται αυτό περιγράφεται παρακάτω.



BHMA 5.1:

Έστω R η τρέχουσα περιοχή για αποκοπή, t το τρέχον μικρό τρίγωνο και $Required_area$ το εμβαδόν της περιοχής R που υπολείπεται. Υπολογίζεται το εμβαδόν $Area(t)$ του μικρού τριγώνου t .

BHMA 5.2:

BHMA 5.2.1:

If ($Area(t) < Required_area$)

Αυτό σημαίνει ότι το μικρό τρίγωνο t δεν επαρκεί για να καλύψει το εμβαδόν που υπολείπεται από την περιοχή R και επομένως πρέπει ολόκληρο το t να συμπεριληφθεί στην R και μετά να μεταβούμε στο επόμενο μικρό τρίγωνο.

- Γίνονται λοιπόν οι εξής ενέργειες:
 - Προστίθεται το t στο κομμάτι της περιοχής R που έχει σχηματισθεί μέχρι στιγμής.
 - Μειώνεται το $Required_area$ κατά $Area(t)$, δηλαδή:
 $Required_area \leftarrow Required_area - Area(t)$
 - Μεταβαίνουμε στο επόμενο μικρό τρίγωνο, αν υπάρχει, και αυτό ανατίθεται στη μεταβλητή t , δηλαδή:
 $t \leftarrow$ επόμενο μικρό τρίγωνο
 - Επαναλαμβάνεται ο αλγόριθμος από το βήμα 5.1 για το νέο $Required_area$ και το νέο t .

BHMA 5.2.2:

else if ($Area(t) > Required_area$)

Αυτό σημαίνει ότι το μικρό τρίγωνο t όχι μόνο επαρκεί για να καλύψει το εμβαδόν που υπολείπεται από την περιοχή R , αλλά θα περισσέψει και ένα κομμάτι του. Επομένως υπάρχει σημείο p πάνω στην ακμή w_1w_3 ώστε να ισχύει:

$$Area(w_2w_3p) = Required_area$$

Το σημείο p το ονομάζουμε σημείο αποκοπής.

- Βρίσκουμε λοιπόν αυτό το σημείο αποκοπής p . Έτσι το τρίγωνο t χωρίζεται σε δύο μικρότερα τρίγωνα: το τρίγωνο w_2w_3p και το w_1w_2p .
- Το τρίγωνο w_2w_3p προστίθεται στο τμήμα της περιοχής R η οποία και έχει πλέον ολοκληρωθεί.
- Το τρίγωνο w_1w_2p θα είναι το επόμενο τρίγωνο που θα υποστεί επεξεργασία, δηλαδή,
 $t \leftarrow w_1w_2p$
- Ανατίθεται στη μεταβλητή R η επόμενη περιοχή για υπολογισμό, δηλαδή,
 $R \leftarrow$ επόμενη περιοχή

- Επαναλαμβάνεται ο αλγόριθμος από το βήμα 5.1.

ΒΗΜΑ 5.2.3:

else if (Area(t) = Required_area)

Αυτό σημαίνει ότι το μικρό τρίγωνο t ίσα-ίσα φτάνει για να καλύψει το εμβαδόν που υπολείπεται από την περιοχή R . Έτσι το σημείο αποκοπής p πάνω στην ακμή w_1w_3 είναι το σημείο w_1 .

- Το τρίγωνο $w_1w_2w_3$ προστίθεται στο τμήμα της περιοχής R η οποία και έχει πλέον ολοκληρωθεί.
- Μεταβαίνουμε στο επόμενο μικρό τρίγωνο, αν υπάρχει, και αυτό ανατίθεται στη μεταβλητή t , δηλαδή,
 $t \leftarrow$ επόμενο μικρό τρίγωνο
- Ανατίθεται στη μεταβλητή R η επόμενη περιοχή για υπολογισμό, δηλαδή,
 $R \leftarrow$ επόμενη περιοχή
- Επαναλαμβάνεται ο αλγόριθμος από το βήμα 5.1.

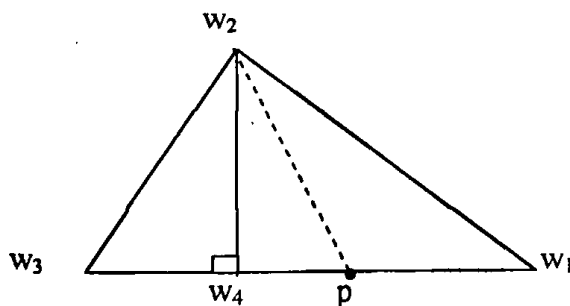
Στο βήμα 5.2.2 απαιτείται η εύρεση του σημείου p πάνω στην ακμή w_1w_3 του τριγώνου $w_1w_2w_3$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 4.14), ώστε να ισχύει $Area(w_2w_3p) = Required_area$. Το σημείο p υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{Area(w_2w_3p)}{Area(w_1w_2w_3)} = \frac{\frac{1}{2} |\vec{w_3p}| |\vec{w_2w_4}|}{\frac{1}{2} |\vec{w_3w_1}| |\vec{w_2w_4}|} = \frac{|\vec{w_3p}|}{|\vec{w_3w_1}|}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\vec{p} = \vec{w_3} + (\vec{w_1} - \vec{w_3}) \frac{Area(w_2w_3p)}{Area(w_1w_2w_3)}$$

$$\vec{p} = \vec{w_3} + (\vec{w_1} - \vec{w_3}) \frac{Required_Area}{Area(w_1w_2w_3)}$$



Σχήμα 4.14

Κατά το βήμα 5 του αλγορίθμου απαιτείται ο υπολογισμός του εμβαδού ενός τριγώνου. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του τύπου που έχει δοθεί στην Ενότητα 2.2. Ο τύπος αυτός δίνει το προσημασμένο εμβαδόν τριγώνου και γι' αυτό κάθε φορά υπολογίζεται η απόλυτη τιμή του αποτελέσματος που δίνει.

Πρόταση 4.5

Κάθε περιοχή R_i , $1 \leq i \leq k$, που υπολογίζεται από τον προτεινόμενο αλγόριθμο είναι ένα απλό πολύγωνο, έχει το επιθυμητό εμβαδόν και επικοινωνεί με το εξωτερικό του πολυγώνου.

Απόδειξη: Η ορθότητα του αλγορίθμου όσον αφορά το ότι οι περιοχές που υπολογίζονται είναι απλά πολύγωνα και έχουν τα επιθυμητά εμβαδά είναι άμεση συνέπεια του τρόπου λειτουργίας του αλγορίθμου.

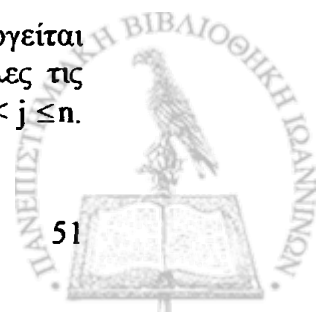
Για να δείξουμε ότι κάθε περιοχή R_i επικοινωνεί με το εξωτερικό του πολυγώνου αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

- Αν μεν η R_i περιέχει πλήρως κάποιο από τα $6n-12$ μικρά τρίγωνα t_j , τότε μια κορυφή της (και ίσως μια ακμή της) είναι κορυφή (τμήμα ακμής αντίστοιχα) του δοθέντος πολυγώνου P .
- Η χειρότερη περίπτωση είναι όταν αρκεί ένα κομμάτι ενός μικρού τριγώνου t_j για να αποκοπεί η περιοχή R_i . Τότε χρειάζεται προσοχή ώστε το κομμάτι του t_j που θα αποκοπεί να επικοινωνεί με το εξωτερικό του πολυγώνου. Όμως η διάταξη που έχει γίνει στις κορυφές του t_j σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το σημείο αποκοπής p βρίσκεται πάντα πάνω στην ακμή w_1w_3 του t_j εξασφαλίζουν ότι η κορυφή w_2 του πολυγώνου είναι κορυφή της R_i (Σχήμα 4.14) και συνεπώς εγγυώνται την επικοινωνία του κομματιού του t_j που θα αποκοπεί με το εξωτερικό του πολυγώνου.

4.2 Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου

Για να υπολογίσουμε την πολυπλοκότητα χρόνου του αλγορίθμου πρέπει να υπολογίσουμε τον χρόνο που απαιτεί κάθε βήμα του αλγορίθμου για να εκτελεστεί. Συγκεκριμένα, για ένα πολύγωνο P με n κορυφές έχουμε:

- Η διαμέριση του πολυγώνου σε τρίγωνα μπορεί να γίνει με τον αλγόριθμο του Chazelle σε $O(n)$ χρόνο, όπως έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 3.
- Όσον αφορά την κατασκευή του δέντρου G μπορεί να επιτευχθεί σε $O(n)$ χρόνο. Πιο αναλυτικά:
 - Το κέντρο κάθε τριγώνου T_i , $1 \leq i \leq n-2$ υπολογίζεται σε σταθερό χρόνο, επομένως απαιτείται συνολικά $O(n)$ χρόνος για τον υπολογισμό των κέντρων των τριγώνων.
 - Το μέσο μιας ακμής υπολογίζεται σε σταθερό χρόνο, άρα για $O(n)$ ακμές απαιτείται συνολικά $O(n)$ χρόνος.
 - Για να βρεθούν οι κοινές ακμές των γειτονικών τριγώνων δημιουργείται και ταξινομείται ο πίνακας E (με μέγεθος $O(n)$) που περιέχει όλες τις ακμές $e = V_iV_j$ των μικρών τριγώνων ως ζεύγη ακεραίων (i,j) , $1 \leq i < j \leq n$.



- Για την ταξινόμηση χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος ταξινόμησης radix sorting, οπότε απαιτείται χρόνος $O(n)$. Στη συνέχεια αποφασίζεται ότι δύο τρίγωνα είναι γειτονικά μέσω μιας ακμής e αν σε γειτονικές θέσεις του ταξινομημένου πίνακα E βρίσκονται δύο αντίγραφα του ζεύγους (i,j) που αντιστοιχούν στην ακμή e . Επομένως, αρκεί μια διάσχιση του πίνακα E και έλεγχος των διαδοχικών θέσεων του πίνακα για να προσδιοριστούν τα γειτονικά τρίγωνα και οι κοινές τους ακμές. Θεωρούμε ότι κάθε ακμή στον πίνακα E έχει ένα πεδίο στο οποίο καταχωρείται το τρίγωνο το οποίο συνεισέφερε την ακμή.
 - Ο πρώτος κόμβος S του δέντρου είναι το σημείο τομής δύο ακμών τριγώνου που ανήκουν στο σύνορο του πολυγώνου. Επομένως, αρκεί να βρεθούν αυτές οι δύο ακμές ενός τριγώνου. Αυτό μπορεί να γίνει αν για ένα τρίγωνο (δοθέντος του ταξινομημένου πίνακα E) βρεθούν δύο ακμές του, που οι γειτονικές τους ακμές στον πίνακα E δεν είναι ίδιες μ' αυτές. Αυτό απαιτεί χρόνο συνολικά $O(n)$ γιατί υπάρχουν συνολικά $O(n)$ τρίγωνα για έλεγχο των ακμών τους στον ταξινομημένο πίνακα E .
 - Για να βρεθούν οι ακμές του δέντρου καλείται μια αναδρομική συνάρτηση για κάθε ακμή ενός τριγώνου που ανήκει και σε ένα άλλο τρίγωνο. Αφού υπάρχουν $O(n)$ τέτοιες ακμές η αναδρομική συνάρτηση καλείται $O(n)$ φορές. Ο χρόνος που απαιτεί κάθε κλήση της αναδρομικής συνάρτησης είναι σταθερός, θεωρώντας ότι κάθε τρίγωνο έχει έναν δείκτη από κάθε ακμή του προς μια θέση του ταξινομημένου πίνακα E όπου βρίσκεται αυτή η ακμή και κάθε ακμή στον ταξινομημένο πίνακα E δείχνει στο τρίγωνο που ανήκει.
- Η διαμέριση κάθε τριγώνου T_i σε έξι μικρότερα τρίγωνα $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,6}$ γίνεται σε σταθερό χρόνο φέρνοντας τις τρεις διάμεσους του τριγώνου T_i . Επομένως το βήμα αυτό απαιτεί συνολικά $O(n)$ χρόνο, για όλα τα τρίγωνα.
- Για την τοποθέτηση των μικρών τριγώνων $t_j, 1 \leq j \leq 6n-12$ με τη σειρά με την οποία θα υποστούν επεξεργασία πρέπει να βρεθούν τα μικρά τρίγωνα που είναι γειτονικά μέσω των ακμών που δεν είναι ακμές του δέντρου. Αυτό συνολικά απαιτεί $O(n)$ χρόνο. Πιο αναλυτικά:
 - Για να βρεθούν τα μικρά τρίγωνα που είναι γειτονικά χρησιμοποιείται η ίδια τεχνική που χρησιμοποιήθηκε και στην περίπτωση της εύρεσης γειτονικών τριγώνων, δηλαδή τοποθετούνται οι ακμές των μικρών τριγώνων, πλήθους $O(n)$, σε έναν πίνακα και στη συνέχεια ταξινομείται αυτός ο πίνακας. Σύμφωνα με τα παραπάνω για τη διαδικασία αυτή απαιτείται $O(n)$ χρόνος.
 - Για να βρεθούν οι ακμές των μικρών τριγώνων που ανήκουν στο δέντρο απαιτείται χρόνος σταθερός για κάθε μικρό τρίγωνο. Αυτό γίνεται αν για κάθε τρίγωνο T_i είναι γνωστές οι τέσσερις το πολύ κορυφές του δέντρου G που βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου T_i . Έτσι, για τα μικρά τρίγωνα $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,6}$ του τριγώνου T_i , ελέγχουμε αν τα άκρα κάποιας ακμής του μικρού τριγώνου $t_{i,j}, 1 \leq j \leq 6$, συμπίπτουν με τις κορυφές του δέντρου που ανήκουν στο τρίγωνο T_i . Αυτός ο έλεγχος μπορεί να γίνει σε σταθερό χρόνο για κάθε τρίγωνο $t_{i,j}$. Οι ακμές των μικρών τριγώνων που ανήκουν στο δέντρο G σημειώνονται για να ξεχωρίζουν από τις υπόλοιπες.

- Η διάταξη των κορυφών w_1, w_2, w_3 κάθε μικρού τριγώνου απαιτεί την εύρεση της ακμής $w_1 w_2$ που είναι η κοινή ακμή με το επόμενο τρίγωνο, καθώς και την εύρεση της ακμής $w_1 w_3$ που είναι ακμή του δέντρου ή ακμή του συνόρου του πολυγώνου. Η εύρεση των ακμών αυτών γίνεται σε σταθερό χρόνο για κάθε μικρό τρίγωνο t_j . Πιο αναλυτικά:
 - Η $w_1 w_2$ βρίσκεται σε σταθερό χρόνο αφού έχουν ήδη βρεθεί τα μικρά τρίγωνα που είναι γειτονικά.
 - Αν η $w_1 w_3$ είναι ακμή του συνόρου του πολυγώνου, βρίσκεται σε σταθερό χρόνο, αφού στον ταξινομημένο πίνακα που περιέχει τις ακμές των μικρών τριγώνων, η ακμή αυτή δεν θα είναι ίδια με τις γειτονικές της ακμές.
 - Αν η $w_1 w_3$ είναι ακμή του δέντρου, βρίσκεται σε σταθερό χρόνο, αφού έχει σημειωθεί σε προηγούμενο βήμα.
-
- Ο υπολογισμός των ζητούμενων εμβαδών απαιτεί $O(n+k)$ χρόνο, όπου k είναι το πλήθος των περιοχών που ζητούνται. Η πολυπλοκότητα αυτή προκύπτει ως εξής:
 - Για κάθε περιοχή συγκεκριμένου εμβαδού ελέγχεται το εμβαδόν από κάποια μικρά τρίγωνα και σταματάμε όταν έχει σχηματισθεί το απαιτούμενο εμβαδόν. Για κάθε μικρό τρίγωνο ο έλεγχος του εμβαδού του γίνεται σε σταθερό χρόνο, το ίδιο και η εύρεση του σημείου αποκοπής p , αν αυτό είναι απαραίτητο.
 - Για τον υπολογισμό των k ζητούμενων περιοχών R_1, R_2, \dots, R_k , θα προκύψουν το πολύ k σημεία αποκοπής p και επομένως το πολύ k νέα μικρά τρίγωνα για έλεγχο, επιπλέον των $O(n)$ μικρών τριγώνων του πολυγώνου P .
 - Από τα παραπάνω προκύπτει ότι συνολικά για όλες τις περιοχές που αποκόπτονται ελέγχεται συνολικά το εμβαδόν $O(n+k)$ μικρών τριγώνων και ο χρόνος που απαιτείται είναι συνολικά $O(n+k)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η πολυπλοκότητα χρόνου του αλγορίθμου διαμέρισης πολυγώνου με n κορυφές σε k περιοχές δοθέντων εμβαδών είναι $O(n+k)$. Έτσι έχουμε:

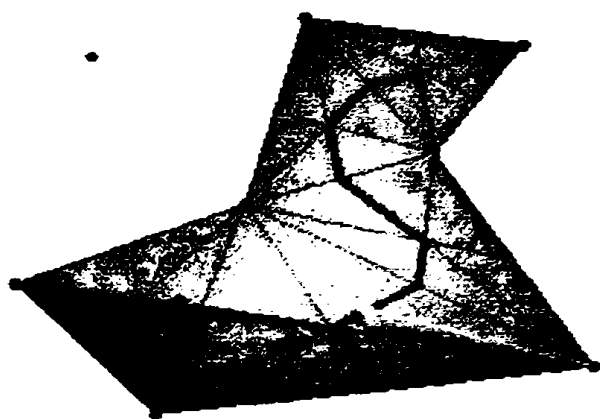
Πρόταση 4.6

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος υπολογίζει τη διαμέριση ενός πολυγώνου P σε k περιοχές δοθέντων εμβαδών οι οποίες επικοινωνούν με το σύνορο του P σε $O(n+k)$ χρόνο, όπου n είναι το πλήθος των κορυφών του πολυγώνου P .

4.3 Παραδείγματα εκτέλεσης του αλγορίθμου

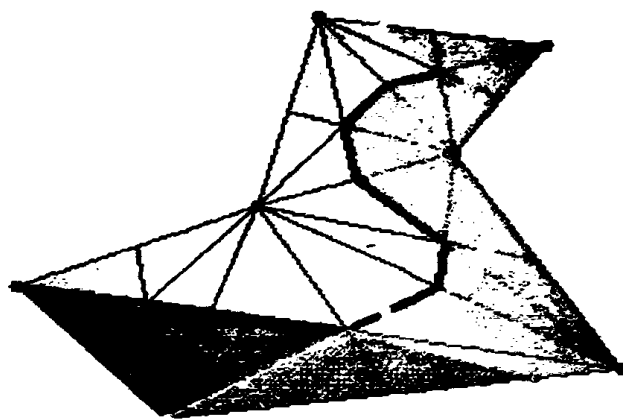
Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται αποτελέσματα της εκτέλεσης του αλγορίθμου διαμέρισης πολυγώνου σε περιοχές δοθέντων εμβαδών, που υλοποιήθηκε. Εκτός από την τελική διαμέριση των πολυγώνων σε περιοχές φαίνονται και κάποια ενδιάμεσα βήματα του αλγορίθμου. Συγκεκριμένα, για κάθε παράδειγμα, φαίνονται η διαμέριση του πολυγώνου σε τρίγωνα, το γράφημα-δέντρο G με τους κόμβους και τις ακμές του με κόκκινο χρώμα και η διαμέριση του πολυγώνου σε μικρά τρίγωνα. Η οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων έγινε με τη χρήση αρχείων postscript.

Στο Σχήμα 4.15 φαίνονται με διαφορετικά χρώματα οι περιοχές στις οποίες διαιρείται το πολύγωνο του Σχήματος 4.6 και που το εμβαδόν τους είναι κάποιο ποσοστό του συνολικού εμβαδού του πολυγώνου. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 4.15(a) φαίνεται η διαμέριση του πολυγώνου σε δύο περιοχές, στο Σχήμα 4.16(b) η διαμέριση του ίδιου πολυγώνου σε πέντε περιοχές και στο Σχήμα 4.15(c) η διαμέρισή του σε επτά περιοχές. Με έντονη μαύρη γραμμή φαίνεται το δέντρο ενώ με έντονο πράσινο χρώμα φαίνονται τα σημεία αποκοπής και τα ευθύγραμμα τμήματα που διαχωρίζουν τις διαδοχικές περιοχές όπως αυτές κατασκευάζονται κατά τη λειτουργία του αλγορίθμου.



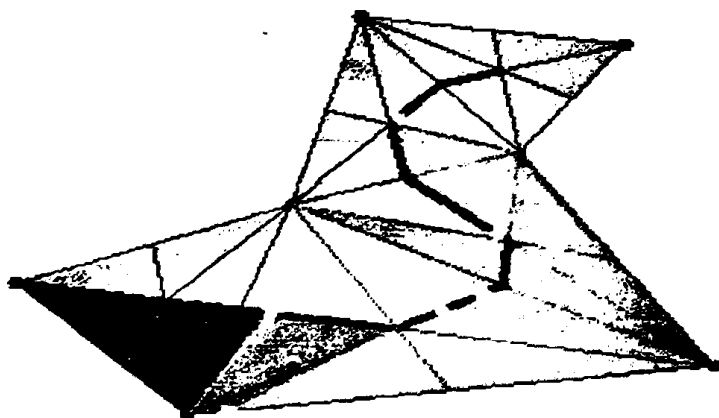
(a)

Διαμέριση σε 2 περιοχές με ποσοστά 30% και 70% αντίστοιχα.



(b)

Διαμέριση σε 5 περιοχές με ποσοστά 15%, 10%, 5%, 30%, 40% αντίστοιχα.

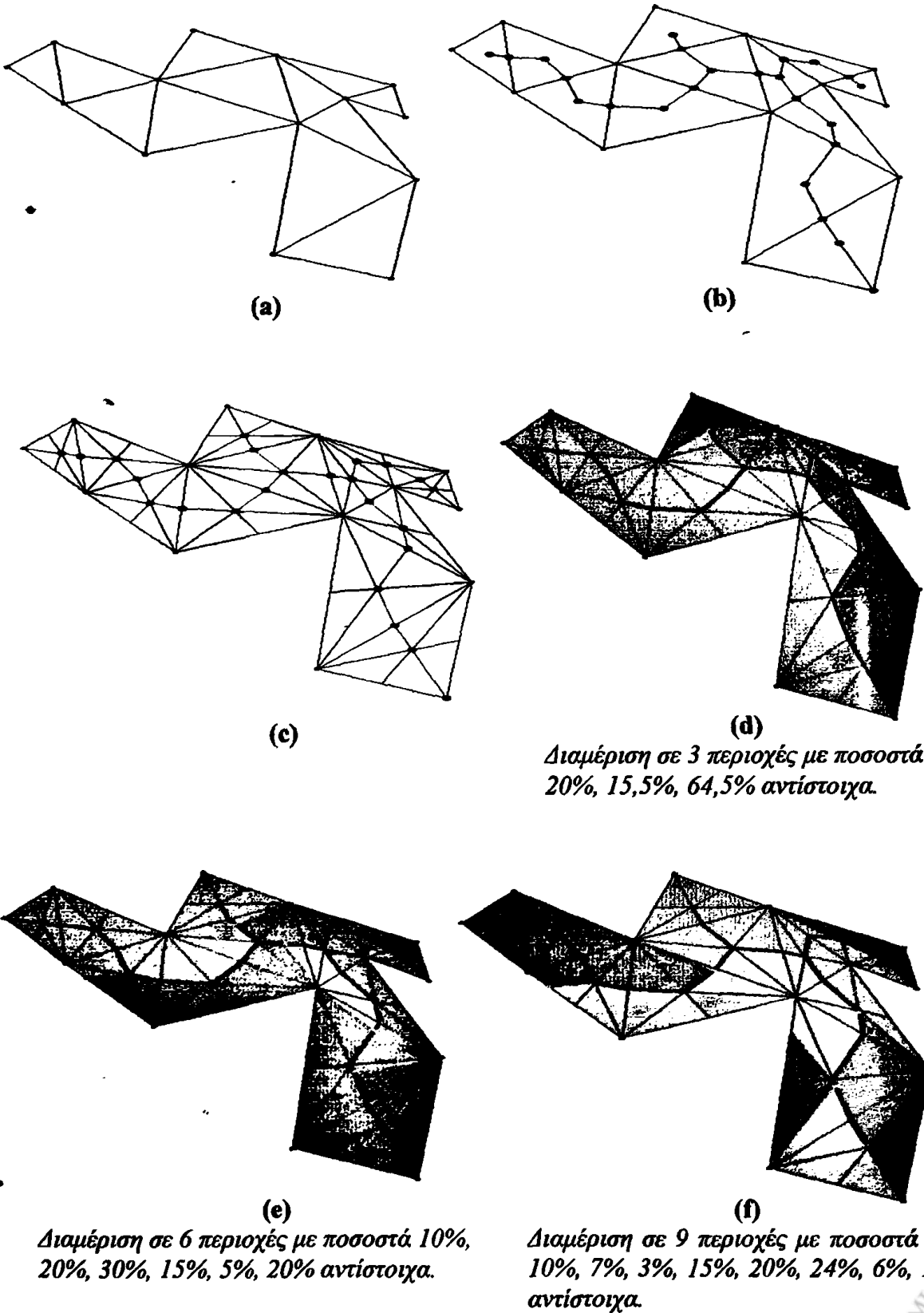


(c)

Διαμέριση σε 7 περιοχές με ποσοστά 10%, 6%, 14%, 20%, 25%, 5%, 20% αντίστοιχα.

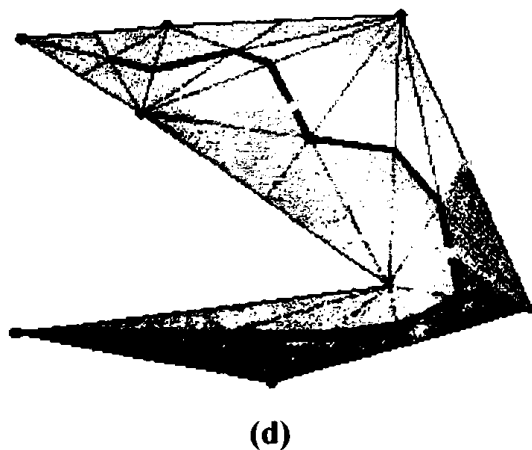
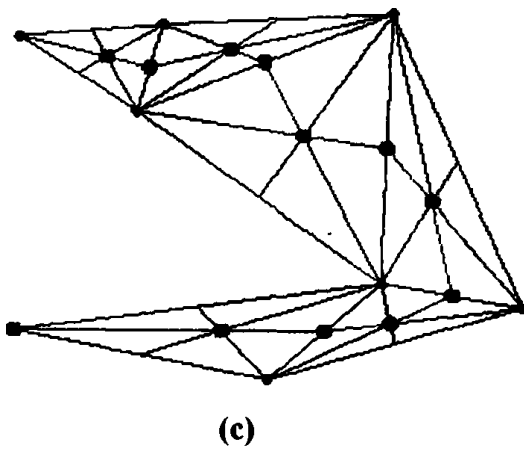
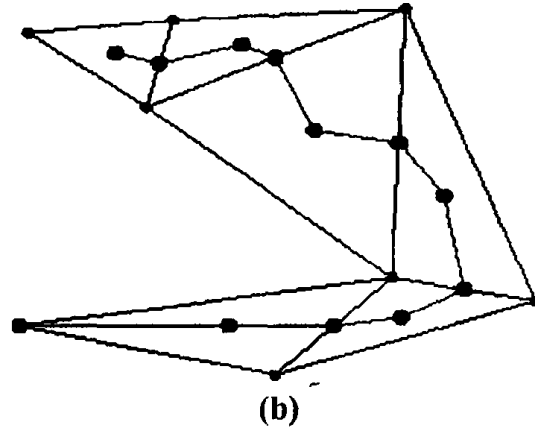
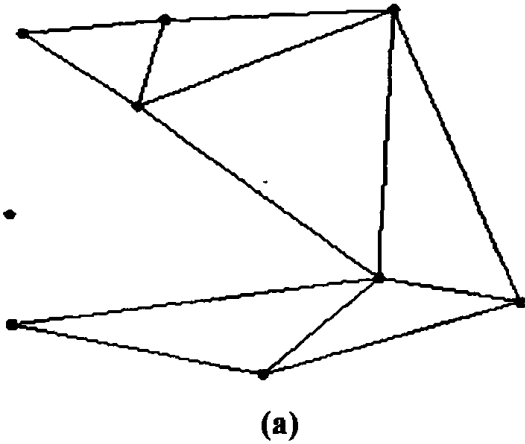
Σχήμα 4.15

Στο Σχήμα 4.16 φαίνεται η διαμέριση σε περιοχές ενός πολυγώνου με 14 κορυφές. Στο Σχήμα 4.16(a) φαίνεται η διαμέριση του πολυγώνου σε τρίγωνα, στο Σχήμα 4.16(b) φαίνεται το γράφημα-δέντρο G με κόκκινο χρώμα, στο Σχήμα 4.16(c) φαίνεται η διαμέριση του πολυγώνου σε μικρότερα τρίγωνα.

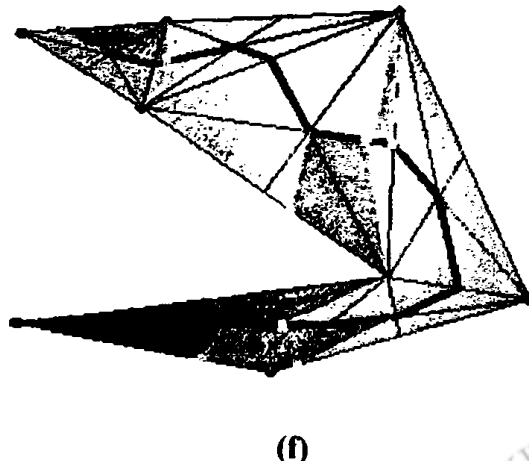
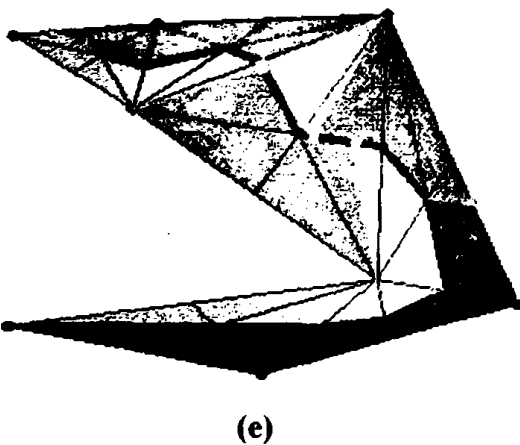


Σχήμα 4.16

Στο Σχήμα 4.17 φαίνεται η διαμέριση σε περιοχές ενός πολυγώνου με 8 κορυφές. Στο Σχήμα 4.17(a) φαίνεται η διαμέριση του πολυγώνου σε τρίγωνα, στο Σχήμα 4.17(b) φαίνεται το γράφημα-δέντρο G με κόκκινο χρώμα, στο Σχήμα 4.17(c) φαίνεται η διαμέριση του πολυγώνου σε μικρότερα τρίγωνα.



Διαμέριση σε 4 περιοχές με ποσοστά 15,8%, 5,2%, 40%, 39% αντίστοιχα.



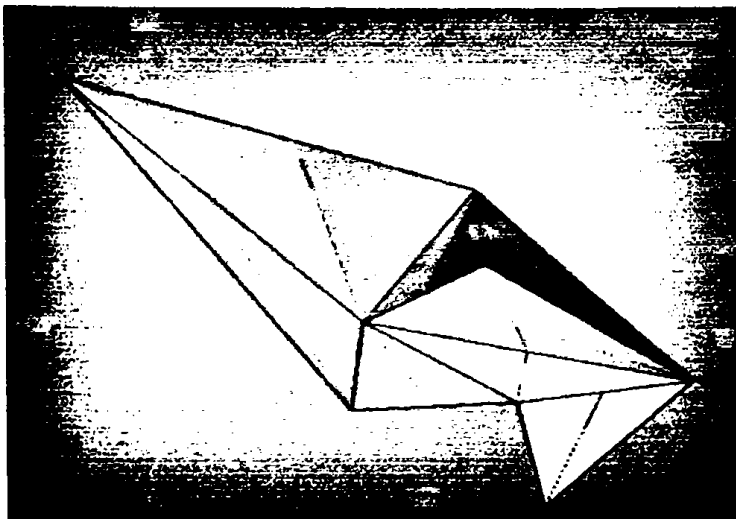
Διαμέριση σε 7 περιοχές με ποσοστά 20%, 13%, 7%, 10%, 8%, 22%, 20% αντίστοιχα. Διαμέριση σε 10 περιοχές με ποσοστά 4%, 2%, 17%, 3%, 21%, 9%, 13%, 7%, 18%, 2% αντίστοιχα.

Σχήμα 4.17

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αλγόριθμος Διαμέρισης Πολυέδρου σε Περιοχές Συγκεκριμένων Όγκων

Ο αλγόριθμος των δύο διαστάσεων που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4 γενικεύεται και στις τρεις διαστάσεις. Για την διαμέριση λοιπόν πολυέδρου σε περιοχές σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε ένας αλγόριθμος που σε αντιστοιχία με τον αλγόριθμο των δύο διαστάσεων δέχεται ως είσοδο ένα πολυέδρο P και k τιμές $\text{Volume}(R_1)$, $\text{Volume}(R_2)$, ..., $\text{Volume}(R_k)$ που αντιπροσωπεύουν τους όγκους k περιοχών με συνολικό άθροισμα ίσο προς τον όγκο του πολυέδρου P . Το ζητούμενο είναι μια διαμέριση του P σε k περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k , όγκων $\text{Volume}(R_1), \text{Volume}(R_2), \dots, \text{Volume}(R_k)$ αντίστοιχα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν απαιτούμε οι περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k να επικοινωνούν με το εξωτερικό του πολυέδρου P καθώς κάτι τέτοιο (αν και επιθυμητό) είναι δύσκολο να εξασφαλιστεί. Οι περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k είναι λοιπόν μικρότερα πολυέδρα που πρέπει να είναι απλά και να είναι τμήματα του P . Στο Σχήμα 5.1 φαίνεται ένα πολυέδρο και μια πιθανή διαμέρισή του σε τρεις περιοχές.

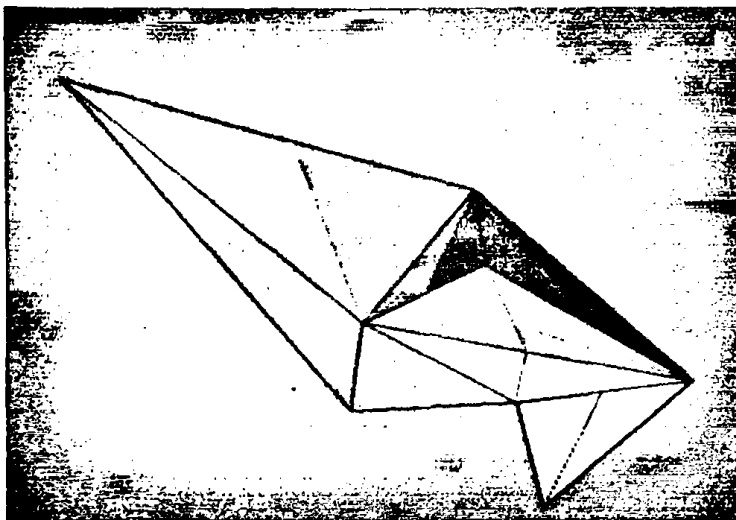


Σχήμα 5.1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αλγόριθμος Διαμέρισης Πολυέδρου σε Περιοχές Συγκεκριμένων Όγκων

Ο αλγόριθμος των δύο διαστάσεων που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4 γενικεύεται και στις τρεις διαστάσεις. Για την διαμέριση λοιπόν πολυέδρου σε περιοχές σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε ένας αλγόριθμος που σε αντιστοιχία με τον αλγόριθμο των δύο διαστάσεων δέχεται ως είσοδο ένα πολυέδρο P και k τιμές $\text{Volume}(R_1)$, $\text{Volume}(R_2)$, ..., $\text{Volume}(R_k)$ που αντιπροσωπεύουν τους όγκους k περιοχών με συνολικό άθροισμα ίσο προς τον όγκο του πολυέδρου P . Το ζητούμενο είναι μια διαμέριση του P σε k περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k , όγκων $\text{Volume}(R_1), \text{Volume}(R_2), \dots, \text{Volume}(R_k)$ αντίστοιχα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν απαιτούμε οι περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k να επικοινωνούν με το εξωτερικό του πολυέδρου P καθώς κάτι τέτοιο (αν και επιθυμητό) είναι δύσκολο να εξασφαλιστεί. Οι περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k είναι λοιπόν μικρότερα πολυέδρα που πρέπει να είναι απλά και να είναι τμήματα του P . Στο Σχήμα 5.1 φαίνεται ένα πολυέδρο και μια πιθανή διαμέρισή του σε τρεις περιοχές.



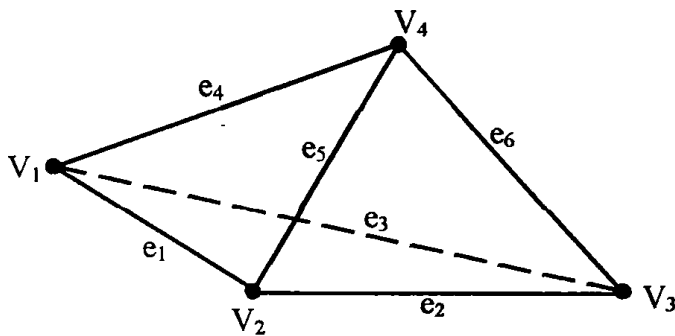
Σχήμα 5.1

5.1 Περιγραφή αλγορίθμου

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε τον αλγόριθμο που υλοποιήσαμε για την επίλυση του προβλήματος διαμέρισης πολυέδρου σε περιοχές δοθέντων όγκων. Η σχεδίαση του αλγορίθμου είναι βασισμένη στον αντίστοιχο αλγόριθμο των δύο διαστάσεων που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 4 και παρουσιάζει πολλές ομοιότητες μ' αυτόν. Η είσοδος του αλγορίθμου είναι:

- Ένα πολύεδρο P που ζητείται να διαμερισθεί.
- το πλήθος k των περιοχών στις οποίες πρέπει να διαμερισθεί το πολύεδρο.
- για κάθε περιοχή R_i , $i=1,2,\dots,k$, δίνεται ο όγκος της. Συγκεκριμένα για κάθε περιοχή R_i δίνεται ένας αριθμός που εκφράζει το ποσοστό του συνολικού όγκου του πολυέδρου στο οποίο αντιστοιχεί ο όγκος της R_i . Τα ποσοστά που δίνονται για κάθε περιοχή πρέπει να αθροίζονται στο 100%.

Ο αλγόριθμος ξεκινάει με μια διαμέριση του πολυέδρου P σε τετράεδρα (Σχήμα 5.2). Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 3 κατά τη διαμέριση ενός πολυέδρου σε τετράεδρα είναι πολλές φορές απαραίτητη η χρήση σημείων Steiner.



Σχήμα 5.2

Ο αλγόριθμος χωρίζει κάθε τετράεδρο σε μικρότερα τετράεδρα και κατόπιν γίνεται η επεξεργασία αυτών των μικρότερων τετραέδρων με μια προκαθορισμένη σειρά. Η σειρά επεξεργασίας των μικρών τετραέδρων στα οποία διαιρείται ένα τετράεδρο T είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει την παραγωγή περιοχών που θα επικοινωνούν με το σύνορο του P . Είναι λοιπόν φανερό ότι μια από τις σημαντικότερες λειτουργίες του αλγορίθμου είναι η εύρεση της σειράς προσπέλασης των μικρών τετραέδρων.

Παρακάτω περιγράφουμε σε συντομία τα βήματα του αλγορίθμου.

1. Διαμέριση του πολυέδρου P σε τετράεδρα T_1, T_2, \dots, T_s και χαρακτηρισμός ως T_1 ενός τετραέδρου που έχει τρεις το πολύ γείτονες και το οποίο θα είναι το πρώτο που θα υποστεί επεξεργασία σε επόμενο βήμα του αλγορίθμου.
2. Εύρεση, για κάθε τετράεδρο T_i , $i=1,2,\dots,s$, των τεσσάρων το πολύ γειτονικών του τετραέδρων.

3. Εύρεση μιας πλευράς του T_1 που δεν ανήκει και σε άλλο τετράεδρο και χαρακτηρισμός της πλευράς αυτής ως πλευρά f_1 .

4. Ξεκινώντας από το T_1 επεξεργασία των τετραέδρων T_1, T_2, \dots, T_s . Συγκεκριμένα, αν T είναι το τρέχον τετράεδρο η επεξεργασία του περιλαμβάνει τις παρακάτω ενέργειες:

4.1. Εύρεση του κέντρου βάρους του T ως το σημείο με τιμές συντεταγμένων ίσες προς το $\frac{1}{4}$ του αθροίσματος των αντίστοιχων συντεταγμένων των τεσσάρων κορυφών του T .

• 4.2. Διάταξη των πλευρών f_2, f_3, f_4 του τετραέδρου T ώστε να έχουν κοινή μια συγκεκριμένη ακμή με την πλευρά f_1 του T .

4.3. Διαμέριση του T σε 24 μικρότερα τετράεδρα t_1, t_2, \dots, t_{24} φέρνοντας έξι επίπεδες επιφάνειες E_1, \dots, E_6 στο εσωτερικό του (Σχήμα 5.5). Λόγω της γεωμετρίας των επιπέδων επιφανειών E_1, \dots, E_6 κάθε μικρό τετράεδρο που σχηματίζεται έχει ακριβώς μια έδρα που ανήκει σε ακριβώς μία από τις πλευρές f_1, f_2, f_3, f_4 του T . Επομένως μπορούμε να αναφερόμαστε στα 24 μικρά τετράεδρα ως $f_1.t_1, f_1.t_2, \dots, f_1.t_6, f_2.t_1, f_2.t_2, \dots, f_2.t_6, f_3.t_1, f_3.t_2, \dots, f_3.t_6, f_4.t_1, f_4.t_2, \dots, f_4.t_6$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.6.

4.4. Διάταξη των μικρών τετραέδρων με τη σειρά με την οποία θα υποστούν επεξεργασία. Η σειρά επεξεργασίας των μικρών τετραέδρων, που ορίζονται μέσα σε ένα τετράεδρο T , καθορίζεται ως εξής (Σχήμα 5.6):

$$f_1.t_1 \rightarrow f_1.t_2 \rightarrow f_1.t_3 \rightarrow f_2.t_1 \rightarrow f_2.t_2 \rightarrow f_2.t_3 \rightarrow f_4.t_1 \rightarrow f_4.t_2 \rightarrow f_4.t_3 \rightarrow f_4.t_4 \rightarrow f_4.t_5 \rightarrow f_4.t_6 \rightarrow f_2.t_4 \rightarrow f_2.t_5 \rightarrow f_2.t_6 \rightarrow f_3.t_1 \rightarrow f_3.t_2 \rightarrow f_3.t_3 \rightarrow f_3.t_4 \rightarrow f_3.t_5 \rightarrow f_3.t_6 \rightarrow f_1.t_4 \rightarrow f_1.t_5 \rightarrow f_1.t_6$$

Η παραπάνω σειρά δείχνει ότι το πρώτο μικρό τετράεδρο που υφίσταται επεξεργασία είναι το $f_1.t_1$ και το σύμβολο \rightarrow δείχνει σε ποιο μικρό τρίγωνο μεταβαίνουμε για να το επεξεργαστούμε.

Ωστόσο, αν η πλευρά f_2 του τετραέδρου T ανήκει και σε ένα τετράεδρο T_i , το οποίο δεν έχει ακόμη υποστεί επεξεργασία, από το μικρό τετράεδρο $f_2.t_1$ ο αλγόριθμος εξέρχεται στο T_i και αφού το επεξεργαστεί επιστρέφει στο μικρό τετράεδρο $f_2.t_2$ του T από όπου συνεχίζει με την επεξεργασία του T . Επίσης, αν η πλευρά f_3 του τετραέδρου T ανήκει και σε ένα τετράεδρο T_j , που δεν έχει ακόμη υποστεί επεξεργασία, από το μικρό τετράεδρο $f_3.t_3$ εξερχόμαστε στο T_j και αφού το επεξεργαστούμε επιστρέφουμε στο μικρό τετράεδρο $f_3.t_4$ του T . Τέλος, αν η πλευρά f_4 του τετραέδρου T ανήκει και σε ένα τετράεδρο T_m , το οποίο δεν το έχουμε ακόμη επεξεργαστεί, από το μικρό τετράεδρο $f_4.t_2$ εξερχόμαστε στο T_m και αφού το επεξεργαστούμε επιστρέφουμε στο μικρό τετράεδρο $f_4.t_3$ του T .

4.5. Διάταξη των κορυφών a, b, c_1, c_2 κάθε μικρού τετραέδρου, ώστε η πλευρά ac_1c_2 να είναι η κοινή πλευρά με το προηγούμενο μικρό τετράεδρο και η πλευρά $b c_1c_2$ να είναι η κοινή πλευρά με το επόμενο μικρό τετράεδρο στη σειρά με την οποία αυτά θα υποστούν επεξεργασία.

5. Υπολογισμός των περιοχών R_1, R_2, \dots, R_k . Έστω R η τρέχουσα περιοχή την οποία σχηματίζει ο αλγόριθμος, $Required_Volume$ ο όγκος της περιοχής R που υπολείπεται, T το τρέχον τετράεδρο το οποίο υφίσταται επεξεργασία και t το τρέχον μικρό τετράεδρο του τετραέδρου T . Υπολογίζουμε τον όγκο $Volume(t)$ του μικρού τετραέδρου t .

5.1.1. αν $Volume(t) \leq Required_Volume$

- Προστίθεται το t στην περιοχή R που έχει υπολογισθεί μέχρι στιγμής.

- αν $Volume(t) = Required_Volume$

Η περιοχή R έχει ολοκληρωθεί.

$R \leftarrow$ επόμενη περιοχή

- αν $Volume(t) < Required_Volume$

$Required_Volume \leftarrow Required_Volume - Volume(t)$

- Εύρεση επόμενου μικρού τετραέδρου που θα υποστεί προσπέλαση ως εξής:

➤ Αν το t είναι το μικρό τετράεδρο $f_2.t_1$ του τετραέδρου T και το T γειτνιάζει με ένα τετράεδρο T' μέσω της πλευράς f_2 , τότε πλευρά f_1 του $T' \leftarrow$ πλευρά f_2 του T .

$t \leftarrow$ μικρό τετράεδρο του T' που είναι γειτονικό του μικρού τετραέδρου $f_2.t_1$ του T .

$T \leftarrow T'$

Επαναλαμβάνεται το βήμα 4 του αλγορίθμου.

➤ Αν το t είναι το μικρό τετράεδρο $f_3.t_3$ του τετραέδρου T και το T γειτνιάζει με ένα τετράεδρο T' μέσω της πλευράς f_3 , τότε πλευρά f_1 του $T' \leftarrow$ πλευρά f_3 του T .

$t \leftarrow$ μικρό τετράεδρο του T' που είναι γειτονικό του μικρού τετραέδρου $f_3.t_3$ του T .

$T \leftarrow T'$

Επαναλαμβάνεται το βήμα 4 του αλγορίθμου.

➤ Αν το t είναι το μικρό τετράεδρο $f_4.t_2$ του τετραέδρου T και το T γειτνιάζει με ένα τετράεδρο T' μέσω της πλευράς f_4 , τότε πλευρά f_1 του $T' \leftarrow$ πλευρά f_4 του T .

$t \leftarrow$ μικρό τετράεδρο του T' που είναι γειτονικό του μικρού τετραέδρου $f_4.t_2$ του T .

$T \leftarrow T'$

Επαναλαμβάνεται το βήμα 4 του αλγορίθμου.

➤ Αν το t είναι το μικρό τετράεδρο $f_1.t_6$ του τετραέδρου T και το T γειτνιάζει με ένα τετράεδρο T' μέσω της πλευράς f_1 , τότε το T' είναι ένα τετράεδρο που ένα τμήμα του έχει υποστεί επεξεργασία.

- $t \leftarrow$ μικρό τετράεδρο του T' που είναι γειτονικό του μικρού τετραέδρου $f_1.t_6$ του T .
 $T \leftarrow T'$
 Επαναλαμβάνεται το βήμα 5 του αλγορίθμου.
- Αν το t είναι το μικρό τετράεδρο $f_1.t_6$ του τετραέδρου T και το T δεν έχει γειτονικό τετράεδρο μέσω της πλευράς f_1 , τότε ο αλγόριθμος τερματίζει.

5.1.2. αν $\text{Volume}(t) > \text{Required_Volume}$

- Βρίσκεται σημείο p πάνω στην ακμή ab (Σχήμα 5.7), ώστε να ισχύει $\text{Volume}(ac_1c_2p) = \text{Required_Volume}$.
- Το τετράεδρο ac_1c_2p προστίθεται στο τμήμα της περιοχής R που έχει υπολογιστεί μέχρι στιγμής.
- Το τετράεδρο pc_1c_2b θα είναι το επόμενο τετράεδρο που θα υποστεί επεξεργασία, δηλαδή,
 $t \leftarrow pc_1c_2b$
- $R \leftarrow$ επόμενη περιοχή για υπολογισμό
- Επαναλαμβάνεται το βήμα 5 του αλγορίθμου για το νέο t .

Παρακάτω περιγράφουμε πιο αναλυτικά κάθε βήμα του αλγορίθμου.

5.1.1 Διαμέριση πολυέδρου σε τετράεδρα

Το πολύεδρο P διαφείται σε τετράεδρα. Η διαμέριση αυτή μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας κάποιον από τους αλγορίθμους διαμέρισης πολυέδρου σε τετράεδρα που περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 3. Για παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος των Chazelle και Palios[14]. Στην πραγματικότητα η διαμέριση του πολυέδρου σε τετράεδρα δεν υλοποιήθηκε αλλά θεωρήθηκε ότι η είσοδος του αλγορίθμου που υλοποιήθηκε είναι ένα σύνολο τετραέδρων τα οποία διαμερίζουν το πολύεδρο P .

Κάθε τετράεδρο T ορίζεται με βάση τις τέσσερις πλευρές του f_1, f_2, f_3, f_4 και το κέντρο βάρους του, δηλαδή:

```
struct T{
    face f1;
    face f2;
    face f3;
    face f4;
    point kentro;
}
```

Επίσης κάθε πλευρά του T είναι τρίγωνο και ορίζεται από τρία σημεία και κάθε σημείο ορίζεται από τις τρεις συντεταγμένες του x, y, z .



5.1.2 Εύρεση γειτονικών τετραέδρων

Για κάθε τετράεδρο T_i του πολυέδρου P , βρίσκονται τα γειτονικά του τετράεδρα, δηλαδή τα τετράεδρα που έχουν μια κοινή πλευρά με το T_i . Τα γειτονικά αυτά τετράεδρα μπορεί να είναι το πολύ τέσσερα, ένα για κάθε πλευρά του T_i . Έτσι για κάθε πλευρά του T_i κρατείται η πληροφορία αν η πλευρά αυτή ανήκει και σε άλλο τετράεδρο και αν ναι ποιο είναι αυτό. Η εύρεση των πλευρών που ανήκουν σε ένα ή δύο τετράεδρα γίνεται ως εξής:

- Για κάθε τετράεδρο με κορυφές έστω p_1, p_2, p_3, p_4 ταξινομημένες λεξικογραφικά, εισάγουμε σε έναν πίνακα F τις τριάδες (p_1, p_2, p_3) , (p_1, p_2, p_4) , (p_1, p_3, p_4) και (p_2, p_3, p_4) .
- Ο πίνακας F ταξινομείται ως προς την πρώτη κορυφή κάθε τριάδας, και σε περίπτωση ισότητας ως προς τη δεύτερη κορυφή και αν πάλι υπάρχει ισότητα ως προς την τρίτη κορυφή. Τότε για τις πλευρές που ανήκουν σε δύο τετράεδρα, ο ταξινομημένος πίνακας F περιέχει δύο διαδοχικές ίδιες καταχωρήσεις, από όπου μπορούν να βρεθούν τα αντίστοιχα τετράεδρα.

5.1.3 Εύρεση της πλευράς του πρώτου τετραέδρου που θα υποστεί επεξεργασία

Για να κινηθούμε στο εσωτερικό του πολυέδρου P με σκοπό να υπολογίσουμε τις ζητούμενες περιοχές πρέπει να ξεκινήσουμε από ένα τετράεδρο και να κινηθούμε στα γειτονικά του. Άρα πρώτη μας μέριμνα είναι να βρούμε το πρώτο τετράεδρο T_1 από όπου θα ξεκινήσουμε και το οποίο είναι ένα τετράεδρο που έχει τρία το πολύ γειτονικά τετράεδρα (ένα τέτοιο τετράεδρο πάντα υπάρχει). Το T_1 αυτό θεωρείται ότι έχει αναγνωριστεί κατά το βήμα της διαμέρισης του πολυέδρου P σε τετράεδρα και είναι το πρώτο τετράεδρο που δίνεται ως είσοδος στον αλγόριθμο. Αφού το T_1 έχει τρεις το πολύ γείτονες θα υπάρχει τουλάχιστον μια πλευρά του που δεν θα ανήκει σε άλλο τετράεδρο εκτός του T_1 . Αυτή η πλευρά ονομάζεται f_1 .

5.1.4 Επεξεργασία τετραέδρου

Αρχίζοντας από το πρώτο τετράεδρο T_1 γίνεται επεξεργασία όλων των τετραέδρων το ένα μετά το άλλο και υπολογίζονται οι απαιτούμενες περιοχές. Κατά το βήμα αυτό, χρησιμοποιούνται δύο σημαντικές συναρτήσεις η `put_edres_in_order(T)` και η `eripeda(T)` που δέχονται ως όρισμα ένα τετράεδρο T και που περιγράφονται στη συνέχεια.

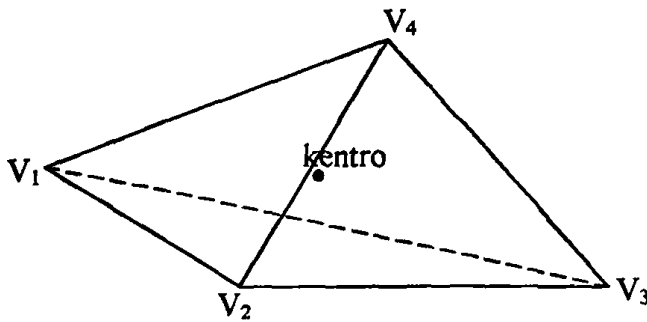
5.1.4.1 Εύρεση κέντρου βάρους τετραέδρου

Το κέντρο βάρους ενός τετραέδρου T είναι ένα σημείο $kentro=(kentro.x, kentro.y, kentro.z)$ στο εσωτερικό του T (Σχήμα 5.3). Αν V_1, V_2, V_3, V_4 είναι οι τέσσερις κορυφές του τετραέδρου T οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους του δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$kentro.x = 1/4(V_1.x+V_2.x+V_3.x+V_4.x)$$
$$kentro.y = 1/4(V_1.y+V_2.y+V_3.y+V_4.y)$$



$$\text{kentro.z} = 1/4(V_1.z+V_2.z+V_3.z+V_4.z)$$



Σχήμα 5.3

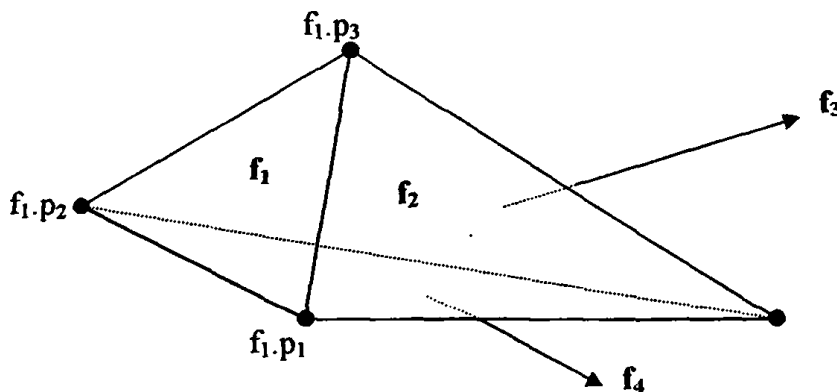
5.1.4.2 Διάταξη των πλευρών ενός τετραέδρου

Η συνάρτηση που διατάσσει τις πλευρές f_1, f_2, f_3, f_4 ενός τετραέδρου T , ώστε να καθοριστεί ο τρόπος που θα κινηθούμε μέσα σ' αυτό, είναι η `put_edges_in_order()` που δέχεται ως όρισμα το τετράεδρο T . Έτσι, αν f_1 είναι η πλευρά από όπου εισερχόμαστε στο T , οι υπόλοιπες πλευρές του βρίσκονται ως εξής (Σχήμα 5.4):

Η πλευρά f_2 είναι η πλευρά που η τομή της με την f_1 είναι η ακμή $(f_1.p_1, f_1.p_3)$.

Η πλευρά f_3 είναι η πλευρά που η τομή της με την f_1 είναι η ακμή $(f_1.p_2, f_1.p_3)$.

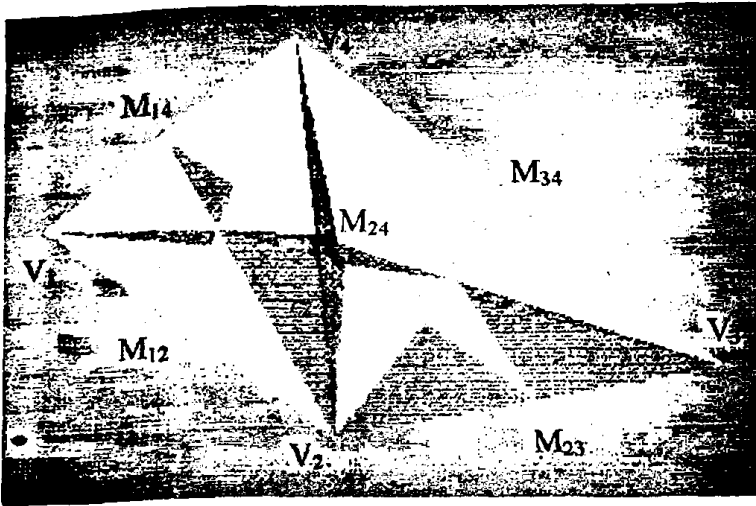
Η πλευρά f_4 είναι η πλευρά που η τομή της με την f_1 είναι η ακμή $(f_1.p_1, f_1.p_2)$.



Σχήμα 5.4

5.1.4.3 Διαμέριση τετραέδρου σε μικρότερα τετράεδρα

Μέσα σε κάθε τετράεδρο T ορίζονται έξι τριγωνικές επίπεδες επιφάνειες που χωρίζουν το τετράεδρο σε τετράεδρα μικρότερου όγκου. Η συνάρτηση που εκτελεί τη διαμέριση του πολυέδρου σε μικρότερα τετράεδρα είναι η συνάρτηση `eripeda()`.



Σχήμα 5.5

Τα επίπεδα που ορίζονται μέσα σε κάθε τετράεδρο T είναι τα εξής (Σχήμα 5.5):

- 1° επίπεδο E_1 : διέρχεται από τις κορυφές V_1, V_2, M_{34} (μέσο της ακμής V_3V_4)
- 2° επίπεδο E_2 : διέρχεται από τις κορυφές V_1, V_3, M_{24} (μέσο της ακμής V_2V_4)
- 3° επίπεδο E_3 : διέρχεται από τις κορυφές V_1, V_4, M_{23} (μέσο της ακμής V_2V_3)
- 4° επίπεδο E_4 : διέρχεται από τις κορυφές V_2, V_3, M_{14} (μέσο της ακμής V_1V_4)
- 5° επίπεδο E_5 : διέρχεται από τις κορυφές V_2, V_4, M_{13} (μέσο της ακμής V_1V_3)
- 6° επίπεδο E_6 : διέρχεται από τις κορυφές V_3, V_4, M_{12} (μέσο της ακμής V_1V_2)

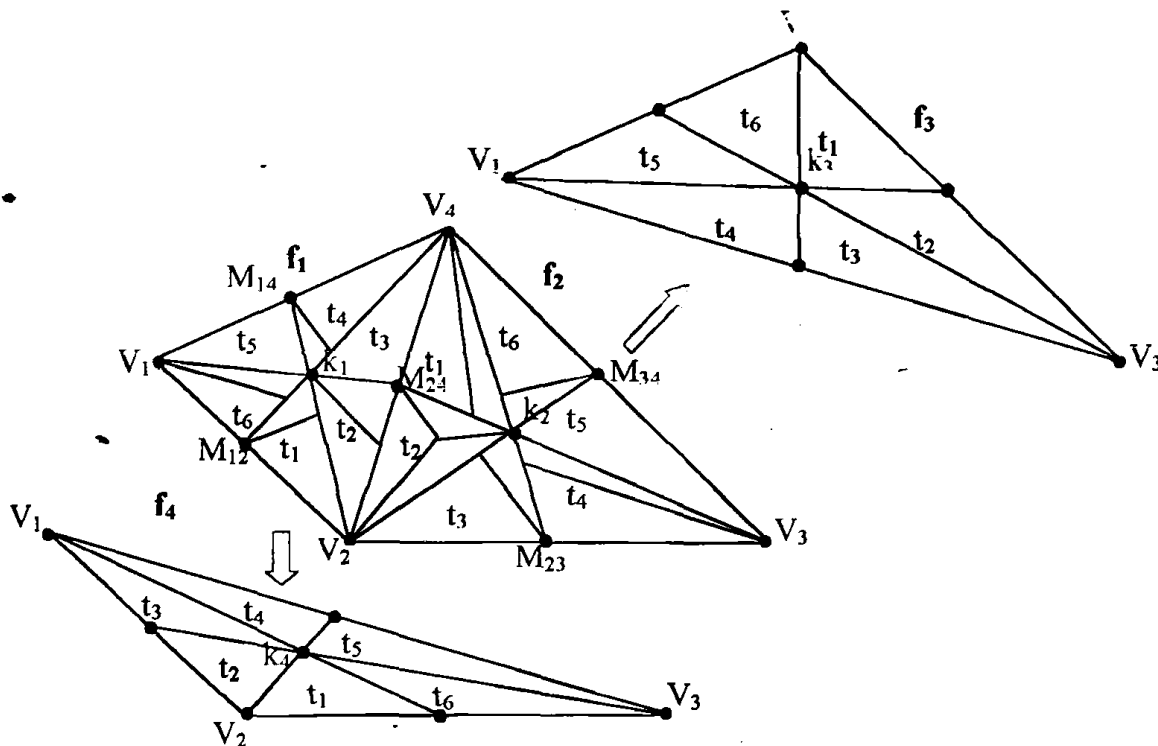
Τα έξι επίπεδα τέμνονται μεταξύ τους σε ένα σημείο που είναι το κέντρο βάρους του τετραέδρου. Επίσης τέμνουν κάθε πλευρά του τετραέδρου και τη χωρίζουν σε έξι τριγωνικά κομμάτια, δηλαδή,

- η πλευρά f_1 διαιρείται στα τρίγωνα $f_1.trig_1, f_1.trig_2, \dots, f_1.trig_6$
- η πλευρά f_2 διαιρείται στα τρίγωνα $f_2.trig_1, f_2.trig_2, \dots, f_2.trig_6$
- η πλευρά f_3 διαιρείται στα τρίγωνα $f_3.trig_1, f_3.trig_2, \dots, f_3.trig_6$
- η πλευρά f_4 διαιρείται στα τρίγωνα $f_4.trig_1, f_4.trig_2, \dots, f_4.trig_6$

Έστω f είναι μια από τις πλευρές f_1, f_2, f_3 ή f_4 του T . Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι κάθε περιοχή του τετραέδρου T που ορίζεται από το κέντρο βάρους του T και από ένα τριγωνικό κομμάτι $f.trig_1$ ή $f.trig_2$ ή...ή $f.trig_6$ (που προέκυψε στην f μετά τον ορισμό των έξι επιπέδων E_1, \dots, E_6) ορίζει ένα μικρότερο τετράεδρο. Έτσι, σε κάθε πλευρά f του T αντιστοιχούν έξι μικρότερα τετράεδρα, ενώ συνολικά στο T προκύπτουν 24 μικρά τετράεδρα. Τα 24 αυτά μικρά τετράεδρα έχουν ένα κοινό σημείο που είναι το κέντρο βάρους του T και γι' αυτό μπορούν να περιγραφούν με βάση τις υπόλοιπες τρεις κορυφές τους. Συγκεκριμένα, τα 24 μικρά τετράεδρα ενός τετραέδρου T περιγράφονται με τον παρακάτω τρόπο (Σχήμα 5.6):

$$\left. \begin{array}{l} f_1.t_1, f_1.t_2, \dots, f_1.t_6 \\ f_2.t_1, f_2.t_2, \dots, f_2.t_6 \\ f_3.t_1, f_3.t_2, \dots, f_3.t_6 \\ f_4.t_1, f_4.t_2, \dots, f_4.t_6 \end{array} \right\} 24 \text{ μικρά τετράεδρα}$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.6, τα 24 μικρά τετράεδρα ορίζονται έτσι ώστε, αν K είναι το κέντρο βάρους του τετραέδρου και k_1, k_2, k_3, k_4 είναι τα κέντρα βάρους των πλευρών f_1, f_2, f_3, f_4 του τετραέδρου αντίστοιχα, να έχουμε:
 $f_1.t_1 = V_2 M_{12} k_1 K$, $f_1.t_2 = V_2 M_{24} k_1 K$, $f_1.t_3 = V_4 M_{24} k_1 K$ κ.λ.π. όπως ακριβώς φαίνεται στο Σχήμα 5.6.



Σχήμα 5.6

5.1.4.4 Εύρεση της σειράς επεξεργασίας των μικρών τετραέδρων

Κατά την επεξεργασία ενός τετραέδρου T , τα μικρά τετράεδρα που αντιστοιχούν στο T θα υποστούν επεξεργασία με μια προκαθορισμένη σειρά. Συγκεκριμένα, η σειρά με την οποία υφίστανται επεξεργασία τα μικρά τετράεδρα μέσα σε ένα τετράεδρο με πλευρές f_1, f_2, f_3, f_4 βρίσκεται από τη συνάρτηση $epipeda()$ και είναι η εξής:

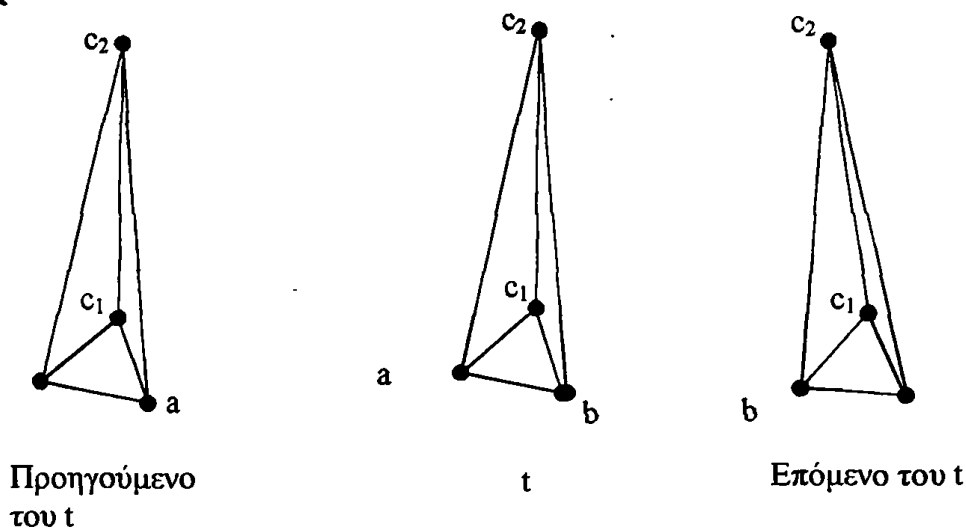
$$\begin{aligned}
 & f_1.t_1 \rightarrow f_1.t_2 \rightarrow f_1.t_3 \rightarrow f_2.t_1 \rightarrow f_2.t_2 \rightarrow f_2.t_3 \rightarrow f_4.t_1 \rightarrow f_4.t_2 \\
 & \rightarrow f_4.t_3 \rightarrow f_4.t_4 \rightarrow f_4.t_5 \rightarrow f_4.t_6 \rightarrow f_2.t_4 \rightarrow f_2.t_5 \rightarrow f_2.t_6 \rightarrow f_3.t_1 \\
 & \rightarrow f_3.t_2 \rightarrow f_3.t_3 \rightarrow f_3.t_4 \rightarrow f_3.t_5 \rightarrow f_3.t_6 \rightarrow f_1.t_4 \rightarrow f_1.t_5 \rightarrow f_1.t_6.
 \end{aligned}$$

Στην παραπάνω σειρά, δύο διαδοχικά μικρά τετράεδρα είναι γειτονικά, δηλαδή η τομή τους είναι μια πλευρά τους, ώστε να είναι δυνατόν να μετακινηθούμε από ένα μικρό τετράεδρο στο επόμενο. Το γεγονός ότι δύο διαδοχικά μικρά τετράεδρα είναι γειτονικά προκύπτει από τον τρόπο που αυτά ορίστηκαν και φαίνεται και στο Σχήμα 5.6.

5.1.4.5 Διάταξη των κορυφών των μικρών τετραέδρων

Η διάταξη των κορυφών των μικρών τετραέδρων, που προέκυψαν με τον ορισμό των επιπέδων E_1, E_2, \dots, E_6 καθορίζεται από την συνάρτηση $eripeda()$. Η διάταξη των κορυφών c_1, c_2, a, b ενός μικρού τετραέδρου t είναι τέτοια ώστε να ισχύουν τα εξής (Σχήμα 5.7):

- Οι κορυφές c_1 και c_2 του t είναι οι κοινές κορυφές του t με το προηγούμενο και το επόμενο του t μικρό τετράεδρο στη σειρά επεξεργασίας.
- Η κορυφή a είναι η κοινή κορυφή του t με το προηγούμενό του μικρό τετράεδρο, αλλά η a δεν ανήκει και στο επόμενο του t μικρό τετράεδρο.
- Η κορυφή b είναι η κοινή κορυφή του t με το επόμενο του μικρό τετράεδρο, αλλά η b δεν ανήκει και στο προηγούμενο του t μικρό τετράεδρο.



Σχήμα 5.7

5.1.5 Υπολογισμός των ζητούμενων περιοχών

Οι δύο συναρτήσεις $put_edres_in_order(T)$ και $eripeda(T)$ που περιγράφηκαν παραπάνω καλούνται από την συνάρτηση $αροκορη_ογκοη(T)$ που είναι και η βασική συνάρτηση του αλγορίθμου που περιγράφεται στη συνέχεια και η οποία χωρίζει το αρχικό πολύεδρο στις περιοχές επιθυμητών όγκων.

Η συνάρτηση $αροκορη_ογκοη(T)$ δέχεται ως όρισμα ένα τετράεδρο T και επισκέπτεται τα μικρά τετράεδρα που έχουν οριστεί στο εσωτερικό του με σκοπό την αποκοπή των k απαιτούμενων περιοχών R_1, R_2, \dots, R_k . Τα μικρά τετράεδρα στο εσωτερικό του T υφίστανται επεξεργασία με τη σειρά που έχει ήδη βρεθεί από τη συνάρτηση $eripeda(T)$. Ωστόσο, το τετράεδρο T δεν υφίσταται επεξεργασία εξ ολοκλήρου πριν μεταβούμε σε ένα γειτονικό του τετράεδρο, αλλά είναι πολλές φορές πιθανό να επεξεργαζόμαστε ένα κομμάτι του T , στη συνέχεια να μεταβούμε στο T'



και κάποια στιγμή να επιστρέψουμε στο T για να επεξεργαστούμε το υπόλοιπο τμήμα του. Αυτό συμβαίνει αν είμαστε σε κάποια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- αν η πλευρά f_2 του T ανήκει και σε ένα άλλο τετράεδρο T' , το οποίο δεν το έχουμε ακόμη επεξεργαστεί, αφού επεξεργαστούμε το μικρό τετράεδρο $f_2.t_1$ δεν συνεχίζουμε με το μικρό τετράεδρο $f_2.t_2$ αλλά εισερχόμαστε στο τετράεδρο T' . Ονομάζουμε f_1 την πλευρά του T' από την οποία εισήλθαμε σ' αυτό και καλούμε αναδρομικά τη συνάρτηση `αροκορη_ογκον()` με όρισμα το T' .
- αν η πλευρά f_3 του T ανήκει και σε ένα άλλο τετράεδρο T' , το οποίο δεν το έχουμε ακόμη επεξεργαστεί, αφού επεξεργαστούμε το μικρό τετράεδρο $f_3.t_3$ δεν συνεχίζουμε με το μικρό τετράεδρο $f_3.t_4$ αλλά εισερχόμαστε στο τετράεδρο T' . Ονομάζουμε f_1 την πλευρά του T' από την οποία εισήλθαμε σ' αυτό και καλούμε αναδρομικά τη συνάρτηση `αροκορη_ογκον()` για το T' .
- αν η πλευρά f_4 του T ανήκει και σε ένα άλλο τετράεδρο T' , το οποίο δεν το έχουμε ακόμη επεξεργαστεί, όταν φτάνουμε στη σειρά προσπέλασης στο μικρό τετράεδρο $f_4.t_2$ δεν συνεχίζουμε με το μικρό τετράεδρο $f_4.t_3$ αλλά εισερχόμαστε στο τετράεδρο T' . Ονομάζουμε f_1 την πλευρά του T' από την οποία εισήλθαμε σ' αυτό και καλούμε αναδρομικά τη συνάρτηση `αροκορη_ογκον()` για το T' .

Με την αναδρομική κλήση της συνάρτησης `αροκορη_ογκον()` για το τετράεδρο T' , αφού επισκεφτούμε το T' , τα γειτονικά του τετράεδρα και γενικά όλα τα τετράεδρα που συνδέονται με το T μέσω του T' , επιστρέφουμε από το μικρό τετράεδρο $f_1.t_6$ του T' στο T και συγκεκριμένα στο μικρό τετράεδρο $f_2.t_2$ του T . Στη συνέχεια, συνεχίζουμε την επεξεργασία των υπολοίπων μικρών τετραέδρων στο εσωτερικό του T με βάση την προκαθορισμένη σειρά επεξεργασίας.

Αρχικά η συνάρτηση `αροκορη_ογκον()` δέχεται ως όρισμα το πρώτο τετράεδρο T_1 το οποίο αναγνωρίζεται κατά το βήμα της διαίρεσης του πολυέδρου P σε τετράεδρα. Στη συνέχεια, επισκέπτεται όλα τα τετράεδρα με την αναδρομική κλήση της. Στο τέλος καταλήγει στο τελευταίο μικρό τετράεδρο, που είναι το $f_1.t_6$ του τετραέδρου T_1 . Γενικά, αν T είναι το τρέχον τετράεδρο στο οποίο βρισκόμαστε η συνάρτηση `αροκορη_ογκον(T)` ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1

Βρίσκεται το κέντρο βάρους του T με τον τρόπο που περιγράφηκε στο βήμα 1.

Βήμα 2

Διατάσσονται οι πλευρές f_1, f_2, f_3, f_4 του τετραέδρου T σύμφωνα με τη συνάρτηση `put_edges_in_order(T)` που περιγράφηκε παραπάνω.

Βήμα 3

Το T χωρίζεται σε 24 μικρότερα τετράεδρα φέρνοντας κάποια επίπεδα στο εσωτερικό του και διατάσσονται τα 24 μικρά τετράεδρα και οι κορυφές τους a, b, c_1, c_2 σύμφωνα με τη συνάρτηση `eripeda(T)` που περιγράφηκε επίσης παραπάνω.



Βήμα 4

Αποκόπτονται οι περιοχές R_1, R_2, \dots, R_k . Εστω R η τρέχουσα περιοχή που πρόκειται να αποκοπεί από το πολύεδρο, Required_Volume είναι ο όγκος της περιοχής R που απέμεινε να αποκοπεί, T είναι το τρέχον τετράεδρο το οποίο υφίσταται επεξεργασία και t είναι το τρέχον μικρό τετράεδρο του τετραέδρου T . Υπολογίζεται ο όγκος $\text{Volume}(t)$ του μικρού τετραέδρου t σύμφωνα με τον τύπο που έχει δοθεί στο Κεφάλαιο 2 και υπολογίζει τον προσημασμένο όγκο ενός τετραέδρου.

Βήμα 4.1

αν $\text{Volume}(t) \leq \text{Required_Volume}$

- Προστίθεται το μικρό τετράεδρο t στο κομμάτι της περιοχής R που έχει αποκοπεί μέχρι στιγμής.

• αν $\text{Volume}(t) = \text{Required_Volume}$

δηλαδή αν το t ίσα-ίσα επαρκεί για να καλύψει τον όγκο που υπολείπεται για την περιοχή R , τότε

$R \leftarrow$ επόμενη περιοχή προς αποκοπή

• αν $\text{Volume}(t) < \text{Required_Volume}$

δηλαδή αν το t δεν επαρκεί για να καλύψει τον όγκο που υπολείπεται για την περιοχή R , τότε

$\text{Required_Volume} \leftarrow \text{Required_Volume} - \text{Volume}(t)$

- Εύρεση επόμενου μικρού τετραέδρου που θα υποστεί επεξεργασία ως εξής:

1. Αν το t είναι το μικρό τετράεδρο $f_2.t_1$ του τετραέδρου T και το T γειτνιάζει με ένα τετράεδρο T' μέσω της πλευράς f_2 , τότε

➤ πλευρά f_1 του $T' \leftarrow$ πλευρά f_2 του T .

➤ $t \leftarrow$ μικρό τετράεδρο του T' που είναι γειτονικό του μικρού τετραέδρου $f_2.t_1$ του T .

➤ $T \leftarrow T'$

➤ Καλείται η συνάρτηση $\text{αποκορη_ογκον}()$ αναδρομικά για το τετράεδρο T' .

2. Αν το t είναι το μικρό τετράεδρο $f_3.t_3$ του τετραέδρου T και το T γειτνιάζει με ένα τετράεδρο T' μέσω της πλευράς f_3 , τότε

➤ πλευρά f_1 του $T' \leftarrow$ πλευρά f_3 του T .

➤ $t \leftarrow$ μικρό τετράεδρο του T' που είναι γειτονικό του μικρού τετραέδρου $f_3.t_3$ του T .

➤ $T \leftarrow T'$

➤ Καλείται η συνάρτηση $\text{αποκορη_ογκον}()$ αναδρομικά για το τετράεδρο T' .

3. Αν το t είναι το μικρό τετράεδρο $f_4.t_2$ του τετραέδρου T και το T γειτνιάζει με ένα τετράεδρο T' μέσω της πλευράς f_4 , τότε

➤ πλευρά f_1 του $T' \leftarrow$ πλευρά f_4 του T .

➤ $t \leftarrow$ μικρό τετράεδρο του T' που είναι γειτονικό του μικρού τετραέδρου $f_4.t_2$ του T .

➤ $T \leftarrow T'$

➤ Καλείται η συνάρτηση αποκορη_ogkon() αναδρομικά για το τετράεδρο T' .

4. Αν το t είναι το μικρό τετράεδρο $f_1.t_6$ του τετραέδρου T και το T γειτνιάζει με ένα τετράεδρο T' μέσω της πλευράς f_1 , τότε το T' είναι ένα τετράεδρο που ένα τμήμα του έχει υποστεί επεξεργασία. Στην περίπτωση αυτή

➤ $t \leftarrow$ μικρό τετράεδρο του T' που είναι γειτονικό του μικρού τετραέδρου $f_1.t_6$ του T .

➤ $T \leftarrow T'$

➤ Επιστρέφει η συνάρτηση αποκορη_ogkon() με όρισμα το T .

*5. Αν το t είναι το μικρό τετράεδρο $f_1.t_6$ του τετραέδρου T και το T δεν έχει γειτονικό τετράεδρο μέσω της πλευράς f_1 , τότε ο αλγόριθμος τερματίζει.

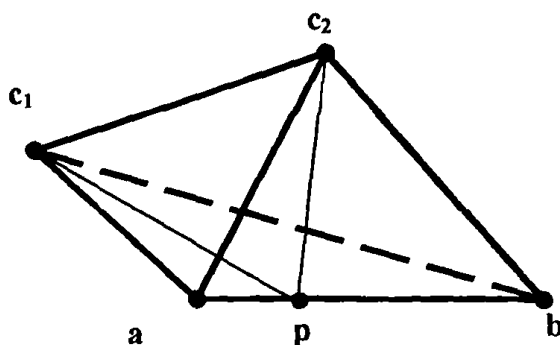
Βήμα 4.2

αν $\text{Volume}(t) > \text{Required_Volume}$

Αυτό σημαίνει ότι το μικρό τετράεδρο t όχι μόνο επαρκεί για να αποκοπεί ο όγκος που υπολείπεται από την περιοχή R , αλλά μετά την αποκοπή θα περισσέψει και ένα κομμάτι του. Για να κοπεί ένα κομμάτι του t που να έχει όγκο ίσο με τον απαιτούμενο όγκο, πρέπει να βρεθεί μια επίπεδη επιφάνεια στο εσωτερικό του που να χωρίζει το t σε δύο μικρότερα τετράεδρα. Η εύρεση αυτής της επίπεδης επιφάνειας βασίζεται στην εξής παρατήρηση:

Το t έχει μια κοινή πλευρά (a c_1 c_2) με το προηγούμενο μικρό τετράεδρο και μια κοινή πλευρά (b c_1 c_2) με το επόμενο μικρό τετράεδρο. Οι δύο αυτές πλευρές τέμνονται κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος c_1c_2 . Υπάρχει σημείο p πάνω στην ακμή ab ώστε το επίπεδο c_1c_2p να χωρίζει το t στα τετράεδρα ac_1c_2p και pc_1c_2b έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $\text{Volume}(ac_1c_2p) = \text{Required_Volume}$.

Το σημείο p το ονομάζουμε σημείο αποκοπής και την επίπεδη επιφάνεια c_1c_2p επίπεδο αποκοπής.



Σχήμα 5.8

Σύμφωνα με τα παραπάνω γίνονται οι εξής ενέργειες:

- Βρίσκεται σημείο p πάνω στην ακμή ab (Σχήμα 5.8), ώστε να ισχύει $\text{Volume}(ac_1c_2p) = \text{Required_Volume}$.
- Το τετράεδρο ac_1c_2p προστίθεται στο τμήμα της περιοχής R που έχει αποκοπεί μέχρι στιγμής.
- Το τετράεδρο pc_1c_2b θα είναι το επόμενο τετράεδρο που θα υποστεί επεξεργασία, δηλαδή,
 $t \leftarrow pc_1c_2b$
- $R \leftarrow$ επόμενη περιοχή προς αποκοπή
- Επαναλαμβάνεται ο αλγόριθμος από το βήμα 4 της συνάρτησης $\text{apokorh_ogkon}()$ για το νέο t .

Στο βήμα 4.2 της συνάρτησης $\text{apokorh_ogkon}()$ απαιτείται η εύρεση του επιπέδου αποκοπής c_1c_2p και επομένως η εύρεση του σημείου αποκοπής p πάνω στην ακμή ab του τετραέδρου c_1c_2ab , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.8, ώστε να ισχύει $\text{Volume}(ac_1c_2p) = \text{Required_Volume}$. Το σημείο p υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{\text{Volume}(ac_1c_2p)}{\text{Volume}(c_1c_2ab)} = \frac{|\vec{ap}|}{|\vec{ab}|}$$

$$\vec{p} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) \frac{\text{Volume}(ac_1c_2p)}{\text{Volume}(c_1c_2ab)}$$

$$\vec{p} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) \frac{\text{Required_Volume}}{\text{Volume}(c_1c_2ab)}$$

Από την τελευταία σχέση και αν θέσουμε

$$L = \text{Required_Volume} / \text{Volume}(c_1c_2ab)$$

προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του σημείου p υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} p.x &= a.x + (b.x - a.x) L \\ p.y &= a.y + (b.y - a.y) L \\ p.z &= a.z + (b.z - a.z) L \end{aligned}$$

Πρόταση 5.1

Κάθε περιοχή R_i , $1 \leq i \leq k$, που προκύπτει από τη διαμέριση ενός πολυέδρου P είναι ένα απλό πολύεδρο, το οποίο ανήκει στο P και έχει τον επιθυμητό όγκο.



Απόδειξη: Η ορθότητα του αλγορίθμου όσον αφορά το ότι οι περιοχές που παράγονται είναι απλά πολύεδρα που ανήκουν στο P και έχουν τους επιθυμητούς όγκους είναι άμεση συνέπεια της περιγραφής του αλγορίθμου.

5.2 Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου

Η πολυπλοκότητα χρόνου του αλγορίθμου διαμέρισης πολυέδρου σε περιοχές, που περιγράφηκε παραπάνω, υπολογίζεται με βάση τον χρόνο που απαιτείται για κάθε βήμα του αλγορίθμου. Θεωρούμε ότι έχουμε ένα πολύεδρο με n κορυφές και θέλουμε να το χωρίσουμε σε k περιοχές.

- Η διαμέριση του πολυέδρου σε τετράεδρα στο πρώτο βήμα του αλγορίθμου μπορεί να γίνει με κάποιον γνωστό αλγόριθμο διαμέρισης πολυέδρων σε τετράεδρα. Έστω N είναι το πλήθος των τετραέδρων που προκύπτουν από μια τέτοια διαμέριση.
- Στο δεύτερο βήμα του αλγορίθμου ο προσδιορισμός των πλευρών του τετραέδρου T_i που ανήκουν και σε άλλο τετράεδρο απαιτεί γραμμικό χρόνο ως προς το πλήθος των τετραέδρων, εφόσον για την ταξινόμηση του πίνακα F χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος *radix sorting*. Καθώς το T_i έχει τέσσερις πλευρές, ο χρόνος που απαιτείται συνολικά είναι $O(N)$.
- Στο τρίτο βήμα, η εύρεση της πλευράς f_i του πρώτου τετραέδρου που θα επεξεργαστούμε γίνεται σε σταθερό χρόνο αφού έχει ήδη βρεθεί στο προηγούμενο βήμα ποιες πλευρές ενός τετραέδρου δεν ανήκουν και σε άλλα τετράεδρα.
- Στο τέταρτο βήμα του αλγορίθμου, η κύρια συνάρτηση που χρησιμοποιείται είναι η `αποκορη_ογκον(T)`, η οποία καλεί τις συναρτήσεις `put_edges_in_order(T)` και `eripeda(T)` και γι' αυτό θα εξετάσουμε πρώτα την πολυπλοκότητα καθεμιάς από αυτές.

Η συνάρτηση `put_edges_in_order(T)` απαιτεί σταθερό χρόνο για την διάταξη των πλευρών του τετραέδρου T , αφού δοθείσας της πλευράς f_i ελέγχεται σε σταθερό χρόνο ποιες κορυφές της f_i ανήκουν στις υπόλοιπες τρεις πλευρές του τετραέδρου.

Η συνάρτηση `eripeda(T)` απαιτεί επίσης σταθερό χρόνο. Αυτό συμβαίνει γιατί καθένα από τα 24 μικρά τετράεδρα στο εσωτερικό του T ορίζεται σε σταθερό χρόνο και η διάταξη των κορυφών του γίνεται επίσης σε σταθερό χρόνο.

Η συνάρτηση `αποκορη_ογκον(T)` καλείται αναδρομικά. Κάθε αναδρομική κλήση της υπολογίζει το κέντρο βάρους του τετραέδρου T σε σταθερό χρόνο και καλεί τις συναρτήσεις `put_edges_in_order(T)` και `eripeda(T)` που εκτελούνται επίσης σε σταθερό χρόνο. Στη συνέχεια ελέγχει τον όγκο από κάποια μικρά τετράεδρα και αποκόπει περιοχές, βρίσκοντας το σημείο αποκοπής p αν αυτό είναι απαραίτητο. Για κάθε μικρό τετράεδρο ο υπολογισμός του όγκου του γίνεται σε σταθερό χρόνο, το ίδιο και η εύρεση

του σημείου p . Έτσι, κάθε αναδρομική κλήση απαιτεί τόσο χρόνο όσα είναι και τα μικρά τετράεδρα που θα επεξεργαστεί.

Αν υπάρχουν συνολικά k περιοχές για αποκοπή μπορούν να προκύψουν το πολύ k σημεία p και επομένως το πολύ k επιπλέον μικρά τετράεδρα για έλεγχο, ενώ υπάρχουν ήδη άλλα $O(24N) = O(N)$ μικρά τετράεδρα. Επομένως το πλήθος των μικρών τετραέδρων που θα προσπελαστούν συνολικά από όλες τις αναδρομικές κλήσεις της συνάρτησης $\text{αροκορη_ογκοη}(T)$ είναι $O(N+k)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για όλες τις περιοχές που παράγονται ελέγχεται συνολικά ο όγκος $O(N+k)$ μικρών τετραέδρων και ο χρόνος που απαιτείται είναι συνολικά $O(N+k)$.

Καθώς το πλήθος N των τετραέδρων που προκύπτουν κατά τη διαμέριση του δοθέντος πολυγώνου P μπορεί να είναι ίσο με $\Theta(n^2)$ [10], ο αλγόριθμος που περιγράφηκε είναι πολυπλοκότητας χρόνου $O(n^2+k)$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε:

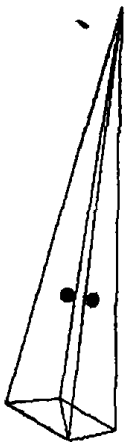
Πρόταση 5.2

Δοθείσης μιας διαμέρισης ενός πολυέδρου P σε N τετράεδρα, ο προτεινόμενος αλγόριθμος υπολογίζει μια διαμέριση του P σε k περιοχές δοθέντων όγκων σε χρόνο $O(N+k) = O(n^2+k)$, όπου n είναι το πλήθος των κορυφών του πολυέδρου P .

5.3 Παράδειγματα εκτέλεσης του αλγορίθμου

Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται ορισμένα αποτελέσματα του αλγορίθμου διαμέρισης πολυέδρου σε περιοχές δοθέντων όγκων. Σε κάθε σχήμα φαίνεται αρχικά η διαμέριση του πολυέδρου σε τετράεδρα και στη συνέχεια φαίνονται μία-μία οι περιοχές που αποκόπτονται. Το κέντρο βάρους κάθε τετραέδρου αναπαρίσταται γραφικά ως πράσινη σφαίρα, ενώ οι περιοχές που αποκόπτονται εμφανίζονται με διαφορετικά χρώματα. Η οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων έγινε με τη βοήθεια του προγράμματος geomview.

Στο Σχήμα 5.9 φαίνεται η διαμέριση ενός πολυέδρου με πέντε κορυφές. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 5.9(a) φαίνεται η διαμέριση του πολυέδρου σε δύο τετράεδρα, στο Σχήμα 5.9(b) φαίνεται η διαμέριση του πολυέδρου σε δύο περιοχές και στο Σχήμα 5.9(c) η διαμέριση του ίδιου πολυέδρου σε τέσσερις περιοχές.

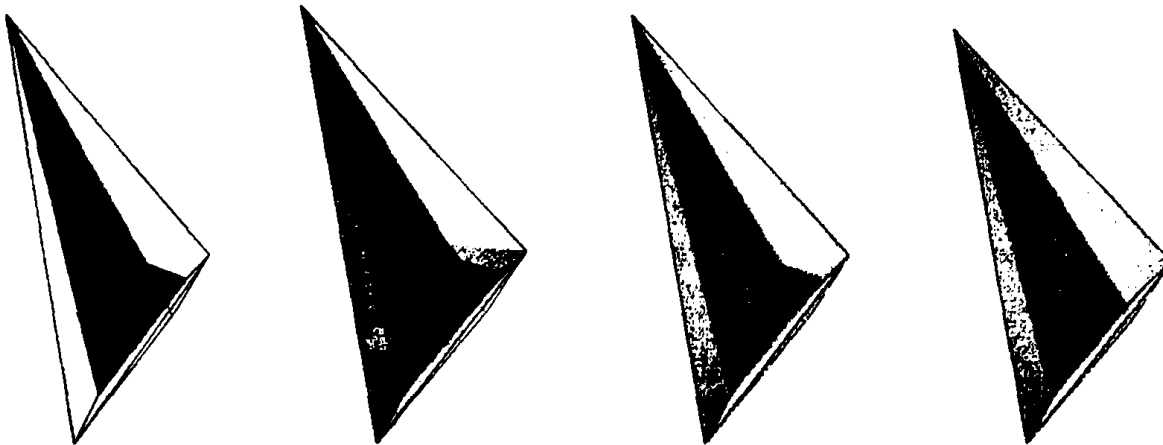


(a)



(b)

Διαμέριση πολυέδρου σε δύο περιοχές με ποσοστά 20% και 80% αντίστοιχα.

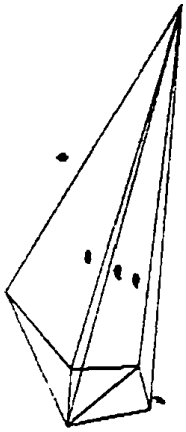


(c)

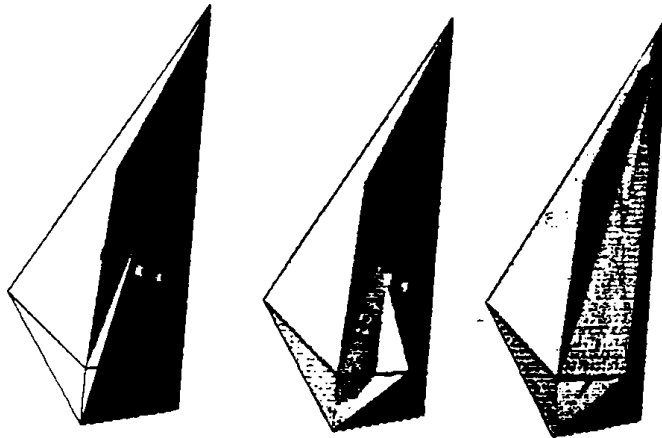
Διαμέριση πολυέδρου σε τέσσερις περιοχές με ποσοστά 15%, 30%, 35% και 20% αντίστοιχα.

Σχήμα 5.9

Στο Σχήμα 5.10 φαίνεται η διαμέριση ενός πολυέδρου με έξι κορυφές. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 5.10(a) φαίνεται η διαμέριση του πολυέδρου σε τρία τετράεδρα, στο Σχήμα 5.10(b) φαίνεται η διαμέριση του πολυέδρου σε τρεις περιοχές και στο Σχήμα 5.10(c) η διαμέριση του ίδιου πολυέδρου σε πέντε περιοχές.

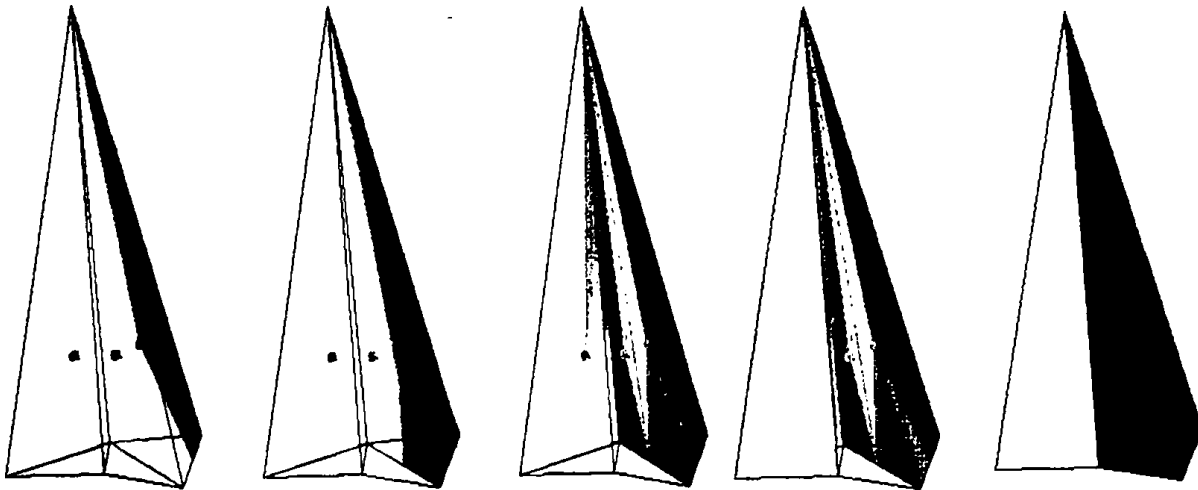


(a)



(b)

Διαμέριση πολυέδρου σε τρεις περιοχές με ποσοστά 40%, 35%, 25% αντίστοιχα.

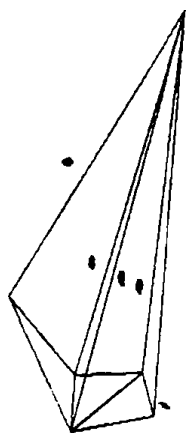


(c)

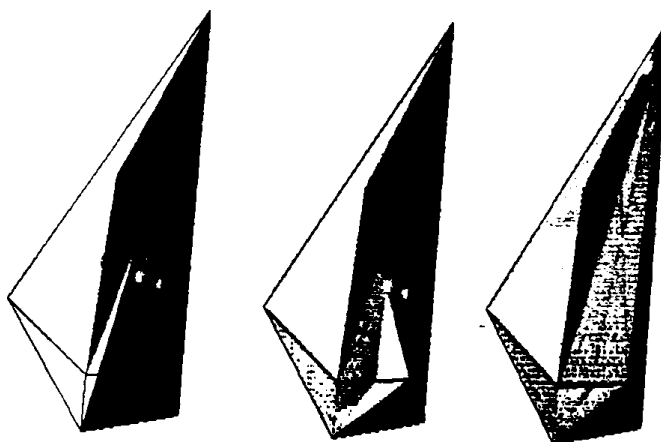
Διαμέριση πολυέδρου σε πέντε περιοχές με ποσοστά 5%, 10%, 20%, 25%, 40% αντίστοιχα.

Σχήμα 5.10

Στο Σχήμα 5.10 φαίνεται η διαμέριση ενός πολυέδρου με έξι κορυφές. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 5.10(a) φαίνεται η διαμέριση του πολυέδρου σε τρία τετράεδρα, στο Σχήμα 5.10(b) φαίνεται η διαμέριση του πολυέδρου σε τρεις περιοχές και στο Σχήμα 5.10(c) η διαμέριση του ίδιου πολυέδρου σε πέντε περιοχές.

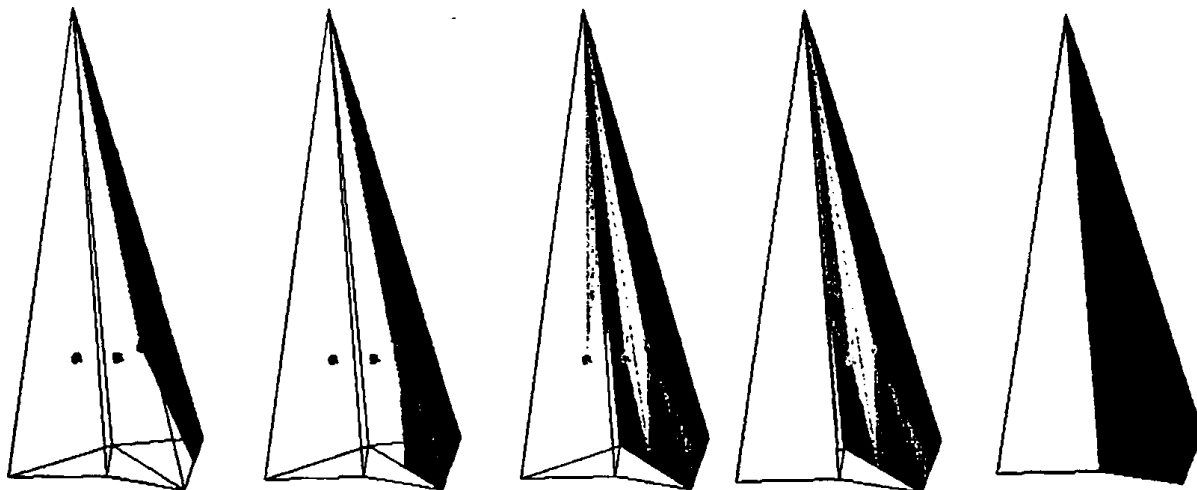


(a)



(b)

Διαμέριση πολυέδρου σε τρεις περιοχές με ποσοστά 40%, 35%, 25% αντίστοιχα.

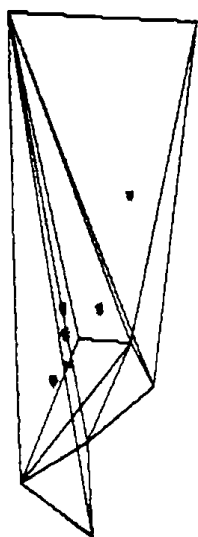


(c)

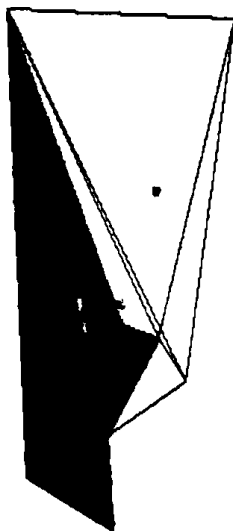
Διαμέριση πολυέδρου σε πέντε περιοχές με ποσοστά 5%, 10%, 20%, 25%, 40% αντίστοιχα.

Σχήμα 5.10

Στο Σχήμα 5.11 φαίνεται η διαμέριση ενός πολυέδρου με επτά κορυφές. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 5.11(a) φαίνεται η διαμέριση του πολυέδρου σε πέντε τετράεδρα, στο Σχήμα 5.11(b) φαίνεται η διαμέριση του πολυέδρου σε δύο περιοχές και στα Σχήματα 5.11(c) και 5.11(d) φαίνεται η διαμέριση του ίδιου πολυέδρου σε τρεις και έξι περιοχές αντίστοιχα.

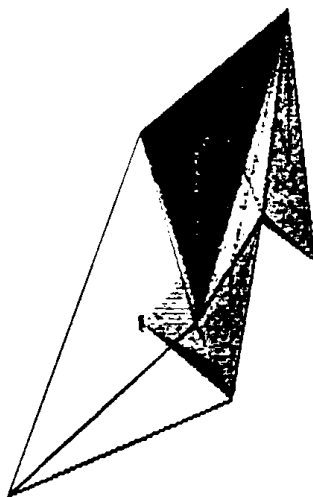
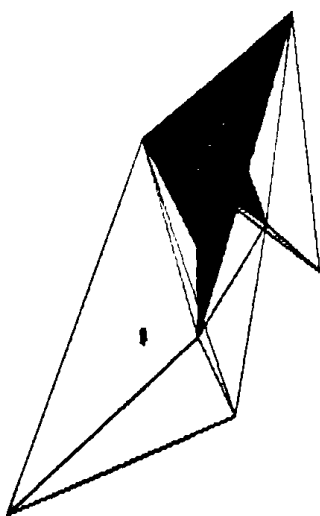


(a)



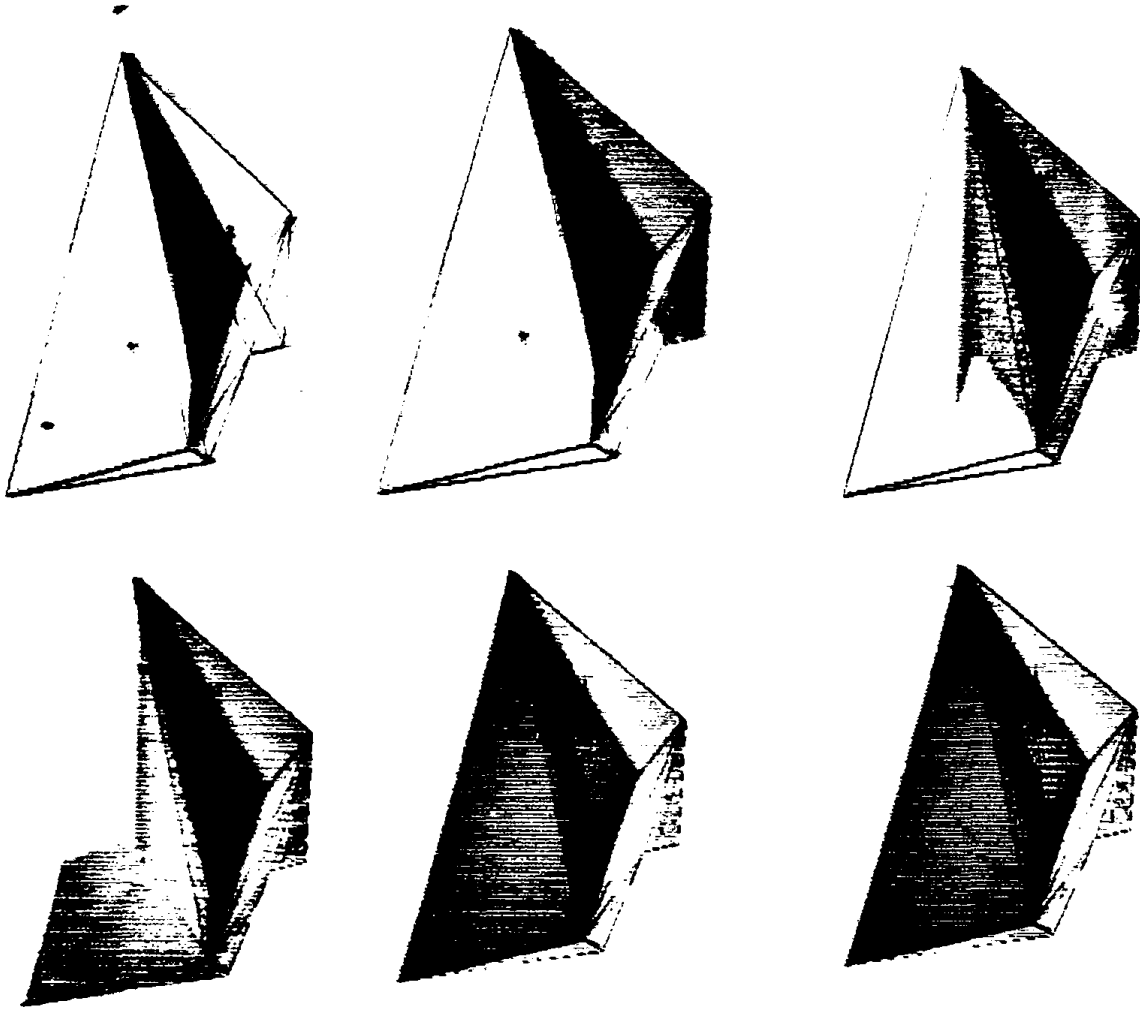
(b)

Διαμέριση πολυέδρου σε δύο περιοχές με ποσοστά 40% και 60% αντίστοιχα.



(c)

Διαμέριση πολυέδρου σε τρεις περιοχές με ποσοστά 20%, 35% και 45% αντίστοιχα.



(d)

Διαμέριση κολοέδρου σε έξι περιοχές με ποσοστά
7%, 21%, 33%, 12%, 14%, 3% αντίστοιχα.

Σχήμα 5.11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συμπεράσματα - Επεκτάσεις

Στο πλαίσιο αυτής της διατριβής, μελετήσαμε το πρόβλημα της διαμέρισης πολυγώνου και πολυέδρου σε περιοχές συγκεκριμένων εμβαδών και όγκων αντίστοιχα. Τα προβλήματα που μελετήσαμε επιδέχονται ενδιαφέρουσες επεκτάσεις. Για παράδειγμα, ο περιορισμός που θέσαμε κατά τη διαμέριση, δηλαδή η επικοινωνία κάθε περιοχής που προκύπτει με το εξωτερικό του πολυγώνου, είναι δυνατό να διαφοροποιηθεί. Έτσι, μπορούμε να απαιτήσουμε κάθε περιοχή που προκύπτει να επικοινωνεί με το εξωτερικό του πολυγώνου μέσω ενός ευθυγράμμου τμήματος στη χειρίστη περίπτωση και όχι μέσω ενός σημείου μόνον. Αντίστοιχα, κατά τη διαμέριση πολυέδρου θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε κάθε περιοχή να επικοινωνεί μέσω μιας επίπεδης επιφάνειας με το εξωτερικό του πολυέδρου. Αυτός ο περιορισμός είναι περισσότερο ρεαλιστικός καθώς ένα ρομπότ έχει κάποιες διαστάσεις, οπότε για να εισέλθει στο εσωτερικό ενός πολυγώνου ή πολυέδρου δεν αρκεί ένα σημείο του συνόρου του πολυγώνου ή πολυέδρου. Ωστόσο, η απαίτηση να ισχύει αυτός ο περιορισμός κάνει το πρόβλημα σημαντικά πιο δύσκολο.

Επίσης, οι αλγόριθμοι που υλοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία δεν λαμβάνουν υπ' όψιν το τελικό σχήμα των περιοχών που παράγονται, ώστε υπάρχει περίπτωση αυτές να παρουσιάζουν πολύ οξείες γωνίες ή στενώσεις σε κάποια σημεία με αποτέλεσμα να μην μπορεί να γίνει εύκολα η κίνηση ή η περιστροφή των ρομπότ στα σημεία αυτά. Έτσι, αντικείμενο μελέτης θα μπορούσε να είναι η αποφυγή τέτοιων «κακών» χαρακτηριστικών και αν είναι δυνατόν να προκύψουν περιοχές που είναι επαρκώς «στρογγυλές». Προς αυτήν την κατεύθυνση θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει τον λεγόμενο *μέσο άξονα* ενός πολυγώνου [35] που έχει την ιδιότητα να αναπαριστά με ικανοποιητικό τρόπο τον σκελετό του πολυγώνου.

Οι αλγόριθμοι που περιγράφηκαν στα Κεφάλαια 4 και 5 υλοποιήθηκαν στη γλώσσα προγραμματισμού C. Η οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων του αλγορίθμου διαμέρισης πολυγώνου που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4 έγινε σε *postscript*, ενώ η οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων του αλγορίθμου διαμέρισης πολυέδρου που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 5 έγινε με χρήση του *geomview*, που είναι ένα πρόγραμμα για τη γραφική απεικόνιση και τον χειρισμό (περιστροφή, μετατόπιση,



μεγέθυνση, σμίκρυνση κ.λ.π.) γεωμετρικών αντικειμένων στις τρεις και παραπάνω διαστάσεις. Στην τρισδιάστατη περίπτωση τα σχήματα που δείχνουν αποτελέσματα του αλγορίθμου αποδίδουν τις περιοχές που έχουν αποκοπεί από μία οπτική γωνία, με αποτέλεσμα κάποιος να μην έχει ολοκληρωμένη άποψη της τρισδιάστατης εικόνας. Αυτό δυστυχώς δεν μπορεί να αποφευχθεί λόγω της μεταφοράς ενός τρισδιάστατου σχήματος στις δύο διαστάσεις του χαρτιού. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης πάντως, μπορεί να εξερευνήσει τα σχήματα με τη βοήθεια του *geomview*.

Όσον αφορά τις πολυπλοκότητες των προτεινόμενων αλγορίθμων, ο αλγόριθμος διαμέρισης πολυγώνου σε k περιοχές επιθυμητών εμβαδών που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4 εκτελείται σε γραμμικό χρόνο ως προς το πλήθος των κορυφών του πολυγώνου και των επιθυμητών περιοχών, δηλαδή είναι βέλτιστος. Τέλος, ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 5 για τη διαμέριση πολυέδρου σε k περιοχές επιθυμητών όγκων εκτελείται σε χρόνο $O(n^2+k)$. Κι αυτός ο αλγόριθμος είναι βέλτιστος στη χειρότερη περίπτωση, αν λάβουμε υπ' όψιν ότι το πλήθος των τετραέδρων που προκύπτει από τη διαμέριση ενός δοθέντος πολυέδρου με n κορυφές μπορεί να είναι ίσο με $\Theta(n^2)$ στη χειρότερη περίπτωση [10].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] T. Asano and T. Asano, Partitioning Polygonal Regions into Trapezoids, *Proc. 24th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 233-241, 1983.
- [2] T. Asano, T. Asano, and H. Imai, Partitioning a Polygonal Region into Trapezoids, *Journal of the ACM* **33**, 290-312, 1986.
- [3] D. Avis and G.T. Toussaint, An efficient algorithm for decomposing a polygon into star-shaped polygons, *Pattern Recogn.* **13**, 395-398, 1981.
- [4] Hannah Bast and Susan Hert, The Area Partitioning Problem, *Proc. 10th Canadian Conference on Computational Geometry*, 2000.
- [5] A. Below, J.A. De Loera, and J. Richter-Gebert, Finding minimal triangulations of convex 3-polytopes is NP-hard, *Proc. 11th Annual ACM SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 2000.
- [6] Boting Yang and Cao An Wang, Minimal Tetrahedralizations of a Class of Polyhedra, *Proc. 12th Canadian Conference on Computational Geometry*, 2000.
- [7] B. Chazelle. A theorem on polygon cutting with applications, *Proc. 23rd Annu. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci.*, 339-349, 1982.
- [8] B. Chazelle, Triangulating a Simple Polygon in Linear Time, *Discrete and Computational Geometry* **6(5)**, 485-524, 1991.
- [9] B. Chazelle, Computational Geometry and Convexity, *PhD thesis*, Yale University, 1980.
- [10] B. Chazelle, Convex partitions of polyhedra: a lower bound and worst-case optimal algorithm, *SIAM J. Computing* **13**, 488-507, 1984.
- [11] B. Chazelle and D.P. Dobkin, Optimal Convex Decompositions, in *Computational Geometry*, G.T. Toussaint (ed.), North Holland, 63-133, 1985.
- [12] B. Chazelle and J. Incerpi, Triangulation and Shape Complexity, *ACM Transactions on Graphics* **3**, 135-152, 1984.
- [13] B. Chazelle and L. Palios, Decomposition Algorithms in Geometry, "*Algebraic Geometry and its applications*", C.L. Bajaj (ed.), 419-447, 1994.
- [14] B. Chazelle and L. Palios, Triangulating a Nonconvex Polytope, *Discrete and Computational Geometry* **5**, 505-526, 1990.



- [15] B. Chazelle, D.P. Dobkin, and N. Shouraboura, Strategies for Polyhedral Surface Decomposition: An Experimental Study, *Proc. 11th ACM Symposium on Computational Geometry*, 297-305, 1995.
- [16] K.L. Clarkson, R.E. Cole, and R.E. Tarjan, Randomized Parallel Algorithms for Trapezoidal Diagrams, *Proc. 7th ACM Symposium on Computational Geometry*, 152-161, 1991.
- [17] K.L. Clarkson, R.E. Tarjan, and C.J. VanWyk, A Fast Las Vegas Algorithm for Triangulating a Simple Polygon, *Discrete and Computational Geometry* 4, 423-432, 1989.
- [18] O. Devillers. Randomization yields simple $O(n \log^* n)$ algorithms for difficult $\Omega(n)$ problems, *International J. Comput. Geom. Appl.* 2, 97-111, 1992.
- [19] T. Dey, Triangulation and CSG representation of polyhedra with arbitrary genus, *Proc. 7th ACM Symp. Computational Geometry*, 364-372, 1991.
- [20] A. Fournier and D.Y. Montuno, Triangulating Simple Polygons and Equivalent Problems, *ACM Transactions on Graphics* 3, 153-174, 1984.
- [21] M.R. Garey, D.S. Johnson, F.P. Preparata, and R.E. Tarjan, Triangulating a Simple Polygon, *Information Processing Letter* 7, 175-179, 1978.
- [22] F. Gavril, Algorithms for a Maximum Clique and a Maximum Independent Set of a Circle Graph, *Networks* 3, 261-273, 1973.
- [23] D.H. Greene, The decomposition of polygons into convex parts. *F.P. Preparata, editor, Computational Geometry 1 of Adv. Comput. Res.*, 235-259. JAI Press, London, England, 1983.
- [24] J. Hershberger and J. Snoeyink, Convex polygons made from few lines and convex decompositions of polyhedra, *Proc. 3rd Scand. Workshop on Algorithm Theory*, Lecture Notes in Computer Science 621, 376-387, 1992.
- [25] Susan Hert, Connected Area Partitioning (Extended Abstract), *17th European Workshop on Computational Geometry*, 2001.
- [26] Susan Hert and Vladimir Lumelsky, Polygon Area Decomposition for Multiple-Robot Workspace Division, *International Journal of Computational Geometry and Applications* 8(4), 437-466, 1998.
- [27] S. Hertel and K. Mehlhorn, Fast Triangulation of a Simple Polygon, *Lecture Notes in Computer Science* 158, 207-218, 1985.
- [28] K. Hoffman, K. Mehlhorn, P. Rosenstiehl, and R.E. Tarjan, Sorting Jordan Sequences in Linear Time Using Level-Linked Search Trees, *Information and Control* 68, 170-184, 1986.

- [29] Reid Judd and Scott R. Nelson <http://www.whisqu.se/per/docs/math30.htm>, Evans & Sutherland Computer Corporation, 1988.
- [30] J.M. Keil, Decomposing a polygon into simpler components, *Siam J. Comput.* **14**, 799-817, 1985.
- [31] Mark Keil and Jack Snoeyink, On the time bound for Convex Decomposition of Simple Polygons, *Proc. 10th Canadian Conference on Computational Geometry*, 1998.
- [32] D.G. Kirkpatrick, M.M. Klawe, and R.E. Tarjan, Polygon Triangulation in $O(n \log \log n)$ Time with Simple Data Structures, *Proc. 6th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, 34-43, 1990.
- [33] D.T. Lee and Franco P. Preparata, Location of a Point in a Planar Subdivision and its Applications, *SIAM Journal on Computing* **6**, 594-606, 1977.
- [34] A. Lingas, The Power of Non-Rectilinear Holes, *Lecture Notes in Computer Science* **140**, 329-383, 1982.
- [35] Joseph O'Rourke, *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press, 1994.
- [36] J. O'Rourke and K.J. Supowit, Some NP-hard Polygon Decomposition Problems, *IEEE Transactions on Information Theory* **29**, 181-190, 1983.
- [37] Λεωνίδας Παληός, *Στοιχεία Υπολογιστικής Γεωμετρίας*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 2000.
- [38] J. Ruppert and R. Seidel, On the Difficulty of Tetrahedralizing 3-Dimensional Non-Convex Polyhedra, *Proc. 5th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, 380-392, 1989.
- [39] R. Seidel, A simple and fast incremental randomized algorithm for computing trapezoidal decompositions and for triangulating polygons, *Comp. Geometry Theory Applications* **1(1)**, 51-64, 1991.
- [40] R.E. Tarjan and C.J. VanWyk, An $O(n \log \log n)$ -time Algorithm for Triangulating a Simple Polygon, *SIAM Journal on Computing* **17**, 143-178, 1988.

